受驗用

省畧計算

金澤卯一編

發行所
東　京
靑野文魁堂

受驗用

省畧計算

金澤卯一編

發行所

東京

青野文魁堂

目次

緒論

第一章 省略算

第二章 近似數ノ計算

省略計算

緒論

(本論ヲ略キ直チニ第一章ヨリ見ルモ差支ナシ)

1. 本編ノ目的　或ル計算ノ結果トシテ分數,不盡數ヲ合ムモノヲ得タルトキ，其大サヲ明瞭ナラシムルタメニ，此ノ分數，不盡數ノ近似數ヲ取リ，運算ヲ施シ，結果ニ近キ數ヲ作ルコトアリ．例トヘバ半徑一尺ノ圓ニ內接スル正十邊形ノ一邊ヲ米單位ニテ計算シ $\frac{\sqrt{5}-1}{6.6}$ ヲ得．此ノ結果ハ不盡根數 $\sqrt{5}$ ヲ合ムノミナラズ，分數ニテ表ハサレタルヲ以テ，長サ何米ナリヤ明カナラズ．由テ $\sqrt{5}=2.236\ldots$ ニ近キ數即チ近似數 2.23 ヲ取リ，之ヨリ 1 ヲ引キ，1.23 ヲ 6.6 ニテ割リ，半徑ハ大凡ソ 0.18 米ナルヲ知リ，結果ノ大サ明瞭トナレリ．然レドモ玆ニ得タル 0.18 米ハ元ヨリ精確ナル邊ノ長サニアラズ之ニ近キモノナレバ眞ノ長サニ對シ幾何ノ差アルヤヲ知ルヲ要ス．

物理，化學，測量等ニ關係スル計算ニ用フル數ハ，大抵器械ニヨリ量ヲ測定セル結果ニシテ，或ル度マデハ精確ナレドモ眞實ナルモノニアラズ．例トヘバ山ノ高サヲ晴雨計ニテ測ラントシ,頂上ニ於ケル氣壓ヲ測定シ685.5粍ヲ得タリトス．此ノ測定ノ結果ハ器械ノ不精密，方法ノ精確ナラザル等種々ノ原因ヨリ眞實ナルモノニアラズシテ例トヘバ0.1粍ヨリ大ナラザル誤リヲ有ス．由テ之ヲ用テ計算シ得タルモノモ亦精確ナル高サヲ表ハスモノニアラザレバ幾何ノ差アルヤヲ知ル法ヲ發見セザルベカラズ．

或ル計算ノ結果ニ豫定ノ近似度ヲ有スルモノヲ求ムルコトアリ．例トヘバ前例ノ正十邊形ノ一邊ヲ糎マデ計算セントスルガ如シ．此時，不盡根數$\sqrt{5}$ヲ小數第何位マデ用フレバ，ヨク目的ヲ達スルカヲ知リ得レバ運算ノ勞ヲ省ク少カラザルベシ．

或ル計算ノ結果ガ數多ノ數字ヲ有スル數ナルトキ，例ヘバ圓周率ノ値3.14159265358……ヲ計算シタリトス．之ヲ實地ニ應用スル際，其終リノ部分ニ在ル數字ハ餘リ必要ナク，又斯ル多位ナル數ハ大

サヲ確知スルニ困難ナレバ唯重要ナル一部ノ數字例ヘバ3.14159ヲ知レバ充分ナリ．又，氣壓ニヨリ山ノ高サヲ測定スルガ如キ場合ニ，計算ノ結果ニ於ケル數ノ右方ニ在ル數字ハ，一部信用スベカラザルモノナルヲ以テ唯其精確ナル部分ヲサヘ知レバ事足レリ．以上二ツノ如キ場合ニ普通ノ計算法ニ依レバ運算ノ進ムニ從ヒ，數字ノ數益多クナリテ次第ニ勞力ヲ增シ，而シテ最後ニ得タル數字ノ大部分ハ不必要トナリ結局勞力ノ大部ハ無益ニ歸スルコトヽナル．サレバ此種ノ計算ニ於テ若干ノ手數ヲ省ク方法ヲ發見シ得レバ至極便利ナリト云フベシ．

以上述ブル所ヲ總括シテ次ニ示ス三問題ヲ生ズ．

第一．近似數ヲ得ルタメニ運算ノ勞力ヲ輕減スル方法如何．

第二．近似數ニ施セル計算ノ結果ハ如何ナル點マデ精確ナルカ．

第三．豫定ノ近似度ヲ有スル數ヲ得ルタメニ計算ニ用フル近似數ノ近似度如何．

此ノ三問題ヲ解決スルヲ以テ本編ノ目的トス．

2. 誤差. 或ル數aハ精確ナル數Aノ不足ナル近似數ナルトキ誤差ハ$A-a$, 過剩ナル近似數ナルトキ誤差ハ$a-A$ナリ.

實地ニハ精確ナル數ノミナラズ, 近似數ノ誤差ヲモ求ムル能ハズ, 唯其近似數ト誤差ノ限界トヲ知リ得ベキモノナリ. 例ヘバ一粍マデ測リ得ベキ尺度ヲ以テ或ル長サヲ測定シ760粍ヲ得タリトス. 此ノ事實ヨリ直ニ眞ノ長サハ760粍ナリト斷定スル能ハズ. 唯此ノ長サハ759.5粍ヨリモ長ク, 760.5粍ヨリモ短シト云フコトヲ知リ得ベキノミニシテ, 其誤差幾何ナリヤ元ヨリ知ルコト難ク唯0.5粍ヨリモ小ナリト云ヒ得ベキガ如シ.

誤差ノ向キトハ近似數ノ過剩ナルカ不足ナルカヲ示スコトナリ.

3. 眞實ナル數ノ限界 (2)ニ用ヰタル長サノ例ヨリ見ル如ク, Aノ近似數aノ誤差ガαヨリ小ナルトキAハ$a+\alpha$ト$a-\alpha$トノ間ニ在リ. 特ニ, aガ不足ナル近似數ナルヲ知ラバAハaト$a+\alpha$トノ間ニ在ルベクaガ過剩ナル近似數ナルトキハAハaト$a-\alpha$トノ間ニ在リ.

4. 眞實ナル數ノ限界タル二數ノ左ノ部分ニ共通ナル一列ノ數字アルトキ之等ノ數字ハAノ之ニ相當スル桁ノ數字ヲ表ハスモノナリ.

例ヘバ或ル數ノ0.0001ヨリ近キ數ガ5.5877ナルトキ, 精確ナル數ハ5.5876ト5.5878トノ間ニ在リ. 此限界タル二數ハ5.587ナル共通部ヲ有スルガ故ニ眞實ナル數ハ5.587………ナリ.

一般ニ$\frac{1}{10^n}$ヨリ近キ數ノ小數第n位ガ零或ハ9ナラザルトキ, 此ノ近似數ノ小數第$n-1$位マデノ數字ハ眞實ナル數ノ小數第$n-1$位マデノ數字ト相一致スル者ニシテ, 近似數ノ第n位ノ數字或ハ之ニ1ヲ加減シタル數字ハ眞實ナル數ノ小數第n位ノ數字ヲ表ハス. 若シ之ガ不足ナル近似數ナルトキハ,小數第n位ガ9ナルトキノ外,小數第$n-1$位マデノ數字ハ眞實ナル數ノ小數第$n-1$位マデノ數字ト一致シ,之ガ過剩ナル近似數ナルトキハ, 小數第n位ガ零ナラザレバ, 小數第$n-1$位マデノ數字ハ眞實ナル數ノ小數第$n-1$位マデノ數字ト一致ス.

5. 本編ニハ,誤差ノ限界ヲ言ヒ表ハスニ二樣ノ言葉ヲ用ヰタリ. 例ヘバ次キノ如シ

或ル數ヲ小數第三位マデ求ム,

或ル數ニ0.001, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10^3}$, 千分ノ一ヨリ近キ數ヲ求ム.

コレハ何レモ求ムル近似數ノ誤差ガ千分ノ一ヨリモ小ナルコトヲ示スモノナリ. 但シ前者ニ相當スル近似數ハ,必ラズ小數第三位ニ終ルト雖モ,後者ニ相當スル近似數ハ,時トシテ小數第三位ニ止マラズ猶ホ其以下ニモ數字ヲ有スルコトアリト知ルベシ.

或ル近似數ガ若干個ノ精確ナル數字ヲ有ストハ誤差ガ最モ左ノ端ノ有功數字ヨリ始メテ此ノ個數ダケ數字ヲ數フルトキ,其終リノ桁ニ於ケル一ニ及バザルコトナリ.

例トヘバ近似數3.1416ハ五箇ノ精確ナル數字ヲ有ストハ誤差ガ0.0001ヨリ小ナルコトニシテ,0.0098325ハ三個ノ精確ナル數字ヲ有ストハ誤差ガ0.00001ヨリモ小ナルコトナリ.

第一章 省略計算

6. (1)ニ述ベタル第一ノ問題ヲ解クヲ以テ本章ノ目的トス. 計算ノ種類ニヨリ六ツノ場合ニ區別シテ論ゼントス.

第一 寄セ算

7. 規則第一. 十箇ヨリ少ナキ數ノ和ヲ小數第n位マデ求ムルニハ,各數ニ於ケル小數第$n+1$位マデノ數字ヲ取リ,以下ヲ捨テヽ,普通ノ方法ニヨリ,寄セ算ヲ施シ,其和ノ最モ右ノ端ノ數字ヲ消シ,直グ左ノ數字ニ一ヲ加フベシ.

例トヘバ3.152487, 0.054328, 15.075437, 2.375253ノ和ヲ小數第三位マデ求メンニハ,總ベテノ數ニ就テ小數第四位マデノ數字ヲ取リ,以下ヲ捨テタル數ヲ加ヘテ,20.6573ヲ得,最後ノ數字3ヲ消シテ其左ニ在ル7ニ1ヲ加ヘ20.658ヲ以テ答トス.

$$\begin{array}{r} 3.1524 \\ 0.0543 \\ 15.0754 \\ 2.3752 \\ \hline 20.6573 \end{array}$$

證明. 與ヘラレタル數ノ一部分ノ數字ヲ捨テタルタメニ,各數ニ生ズル誤差ハ,小數第四位ノ一即チ

0.0001ヨリモ小ナリ. 此ク一部ノ数字ヲ省キテ得タル近似數ノ和20.6573ハ, 眞實ノ和ヨリモ小ニシテ, 其誤差ハ各近似數ノ誤差ノ限界ノ和 0.0001×4 ヨリモ小ナリ. コヽニ表ハレタル4ハ加ヘ合ハスベキ數ノ箇數ニ等シク,今ノ場合ニハ10ヨリモ小ナルガ故ニ,誤差ハ一般ニ 0.0001×10 即チ0.001ヨリ小ニシテ, 眞實ノ和ハ20.6573ト20.6583トノ間ニ在リ(3). 今20.658ヲ此ノ兩極限ニ較ブルニ,其差ハ數ノ作リ方ニヨリ何レモ0.001ヨリ小,隨テ,此ノ二數ノ間ニ在ル眞實ノ和ト答トシテ取リタル數トノ差ハ0.001ヨリモ小ナリ.

8. 注意. 20.6573ノ最後ノ數字3ニ,誤差ノ限界ナル其桁ノ4ヲ加フルモ,其左ノ桁ニ變化ヲ及ボサズ由テ眞實ノ和ハ20.657………ナリ(3,4).

之ニ由テ見レバ20.6573, 20.657, 20.658共ニ0.001ヨリモ近キ數ニシテ,猶ホ此ノ外ニモ,斯クノ如ク,0.001ヨリモ近キ數,無數ニ在ルベシ. サレバ誤差ノ範圍ヲ與フルノミニテハ,一定ノ近似數ヲ得ル能ハザルモノナリ. 然ラバ,上ニ示ス規則ハ,近似數ヲ與フル一ツノ仕方ニシテ,此ノ外ニ種々ノ仕方アルベク,其

種々ノ方法ニヨリ種々ノ結果アリト知ルベシ.

他ノ計算ノ結果トシテ來レル數ニ,上ノ規則ヲ其儘應用センニハ,計算ニ用キラルヽ數ハ其最後ノ數字マデ精確ナルモノナルベキヲ忘ルベカラズ.

9. 規則第二. 加ヘ合ハス數ガ十箇以上百箇以下ナル場合ニハ,各數ニ於テ所要ノ桁ノ二桁右マデ取リ,普通ノ仕方ニヨリ,寄セ算ヲ施シ,其右ノ端ノ二桁ノ數字ヲ捨テヽ左ニ在ル數字ニ1ヲ加フベシ.

證明全ク(7)ニ於ケルト同一ナレバ略ス.

第二 引キ算

10. 規則. 二ツノ數ノ差ヲ或ル桁マデ求ムルニハ,各數ニ於ケル所要ノ桁ヨリ右ニ在ル數字ヲ省キ,普通ノ仕方ニヨリ引キ算ヲ施スベシ.

例ヘバ15.0754ト3.152487トノ差ヲ小數第三位マデ求ムルニハ,與ヘラレタル二ツノ數ヲ小數第三位ニ止メ,以下ヲ切リ棄テ;

$$\begin{array}{r} 15.075 \\ 3.152 \\ \hline 11.923 \end{array}$$

15.075, 3.152ノ差11.923ハ所要ノモノナリ.

證明. $15.0754-3.152487$

$$=(15.075+0.004)-(3.152+0.000487)$$

$$=(15.075-3.152)-(0.000487-0.0004)$$

然ルニ $0.000487-0.0004<0.001$

故ニ $0.001>(15.0754-3.152487)\sim(15.075-3.152)$

注意. 上ニハ或ル部分ヲ切リ捨テ不足ナル近似數ノ差ヲ求メシト雖モ,同ジ部分ヲ繰リ上ゲ過剰ナル近似數ヲ用フルモ差支ナキヲ證明スルヿヲ得.

第三 掛ケ算

11. 規則. 二ツノ數ノ積ヲ小數第n位マデ求ムルニハ,被乘數ノ小數第$n+2$位ノ數字ノ下ニ,乘數ノ整數第一位ノ數字ヲ置キ,乘數ノ其他ノ數字ハ常ノ順序ト反對ニ書キ,乘數ノ各有功數字ヲ被乘數ニ乘ズルニ,其數字ノ上ニ位スル被乘數ノ數字ヨリ始メ,其レヨリ右ニ在ル數字ヲ省キ,斯クシテ得タル部分積ノ右ノ端ノ數字ガ同ジ縦線ノ上ニ在ル樣ニ重ネテ書キ,之ヲ加ヘ合ハセ,其右ノ端ノ二桁ノ數字ヲ省キ,直グ其前ノ數字ニ1ヲ加ヘテ後,此ノ數字ガ小數第n位ニ在ル如ク小數點ヲ打ツベシ.


```
 315.0748
  78 4251.3
 945 2244 0
  31 5074 8
  15 7537 0
     6301 4
     1260 0
      252 0
       21 7
 993.26909

 993.270
```

例トヘバ,315.0748ニ3.152487ヲ乘ヲタル積ヲ小數第三位マデ求ムルニハ,被乘數ニ於ケル小數第五位ノ數字ノ下ニ,乘數ノ整數第一位ノ數字3ガ在ル樣ニ,乘數ヲ被乘數ノ下ニ逆書ス. 次ニ

3ヲ31507480ニ掛ケ,

其左ノ1ニ3150748ヲ掛ケ,

其次ギノ5ノスグ上ニ在ル被乘數ノ數字4ヨリ右ニ在ル數字ニ關スルコトナク,315074ニ5ヲ乘ズ,

以下次第ニ此クノ如クニシテ7ニ至ル數字ヲ段々ニ乘ズベシ.

斯クノ如クシテ得タル多クノ部分積ノ右ノ端ノ數字ガ一直線上ニ在ル如ク縦ニ並ベテ書キ,其和ヲ作リテ99326909ヲ得. 最後ノ二桁ノ數字09ヲ消シ其左ニ在ル數字ニ1ヲ加ヘ,此ノ數字ガ小數第三位ニ在ル樣ニ小數點ノ位置ヲ定メテ得タル993.270ハ所要ノ數ナリ.

證明. 先ヅ各部分積ノ右ノ端ノ數字ハ,皆小數第五位ニ在リ. 何シトナレバ第一部分積ニ於ケル右

ノ端ノ數字ハ整數第一位ニ在ル數ヲ被乘數ノ小數第五位ノ數字ニ乘シテ得タル數ニシテ小數第五位ヲ表ハス. 一桁左ニ進ミ,1ヲ乘シテ得タル第二部分積ニ於テハ,一桁左ニ進ミタルタメニ,第一部分積ノモノト比較スレバ,乘數ハ十分一,被乘數ハ十倍セノガ相對スル故ニ, 其右ノ端ノ數字ハ同シク小數第五位ニ在リ. 其他ノ部分積ニ就テモ之ニ準ズ.

上ノ部分積ノ或ルモノハ,被乘數ノ一部ノ數字ヲ省キタル數ヲ用ヰテ得ル數ナルガ故ニ,其和ハ與ヘラレタル二數ノ眞實ナル積ヨリモ小ナリ.

乘數ノ右ノ端ノ二ツノ數字ヲ掛クルニアタリテハ何等ノ省略ヲモ行ハズ,此ノ部分積ハ精確ナルモノナリ. 其次ギノ5ヲ乘ズルニ方リテハ,此ノ數字ノ上ニ在ル數字4ヨリ右ニ在ル數字ヲ省キタリ. 而シテ此ノ省カレタル部分ノ數ハ,殘セル部分ノ右ノ端ノ桁ノ1ヨリモ小ナリ. 由テ此ノ省略ノタメニ起ル部分積ノ誤差ハ 0.00001 ノ 5 倍ヨリモ小ナリ. 次ギノ2ニ就テハ,其上ニ在ル7ヨリ右ニ在ル數字ヲ省キタルタメニ,部分積ニ起ル誤差ハ 0.00001 ノ 2 倍ヨリモ小ナリ. 以下次第ニ此クノ如シ. 由テ部

分積ノ和 993.26909 ノ誤差ハ各部分積ノ誤差ノ限界ノ和

$$0.00001\times(5+2+4+8+7)$$

ヨリモ小ナリ. 此ノ括弧內ノ和ハ乘數ヲ組ミ立ツル一部ノ數字ノ和ニシテ,普通 100 ヨリモ小,隨テ此ノ誤差ハ普通 0.00001×10 即チ 0.001 ヨリモ小ナリ.

由テ精確ナル積ハ 993.26909 ト之ニ 0.001 ヲ加ヘタル 993.27009 トノ間ニ在リテ(3),上ノ規則ニヨリ求メタル 993.270 ハ眞實ナル積ニ 0.001 ヨリモ近キ數ナリ.

12. 第二ノ例トシテ 52.38574 ト 1.6254837 トノ積ニ 0.01 ヨリ近キ數ヲ求ムル演算ヲ示セバ圖ノ如シ.

```
 52.385 74
 7384 526.1
 ----------
 52 385 7
 31 431 0
  1 047 6
    261 5
     20 8
      4 0
 ----------
 85.150 6
 85.16
```

此例ノ如ク,乘數ノ一部ノ數字ヲ省略シ用ヰザルトキ之ガタメニ新タニ生スル誤差ハ;省カレタル部分ノ初メノ數字3ニ1ヲ加ヘタル4ヲ其上ニ來ルベキ被乘數ノ位ノ1ニ掛ケタル積 0.0001×4 ヨリモ小ナリ(此ノ誤差ハ被乘數ノ首位數字ニ1ヲ加ヘタル6ニ直グ其下ニ位スベキ乘數ノ位ノ1ヲ乘ジタル積 60×0.00001=6×0.0001 ヨリモ小ナリ. 若シ誤

差ヲ計算スル必要アルトキハ,此ノ誤差ノ兩限界ノ中小ナル方ヲ取ルベシ)之ニ前例ト同樣ニシテ得ベキ部分積ノ誤差ノ限リヲ加ヘ,總體ノ誤差ハ

$$0.0001\times(1+6+2+5+4+8+\overline{3+1})$$

ヨリモ小ナルヲ知ル. 由テ括弧内ノ和ガ100ヲ超ヘザル限リ85.16ハ所要ノモノナリ.

運算ニ必要ナラザル數字ヲ省キ圖ノ如ク書クヲ通例トス

```
  52.385 7
  84 526.1
  --------
  52 385 7
  31 431 0
   1 047 6
     261 5
      20 8
       4 0
  --------
  85.16
```

13. 注意第一. 被乘數ノ一部ノ數字ヲ省キタル數ニ掛ケタル乘數ノ各數字並ニ乘數ノ數字ノ中之ニ組ミ合ハスベキ被乘數ノ數字ナキトキハ其部分ノ一番右ノ端ノ數字(逆ニ書キタルモノニツキ)ニ1ヲ加ヘタル數(或ハ被乘數ノ首位數字ニ1ヲ加ヘタルモノ)ノ和ヲ部分積ノ和ノ右ノ端ニ加ヘテ,第三桁ニ變化ヲ及ボサザルトキ,其レヨリ左ノ方ニ在ル數字ハ精確ナル積ヲ表ハス初メノ部分ノ數字ト一致スルモノナリ(3).

上ニ云ヘル誤差ノ限界ガ100ヲ超ユルトキハ,此ノ規則ニ依ル能ハズ. 然ルトキハ被乘數ノ小數第

$n+3$位ノ數字ノ下ニ,乘數ノ整數第一位ヲ置ク樣ニシ,部分積ノ和ノ右方三位ヲ消シ,其前ノ桁ニ1ヲ増スベシ.

若シ之ニ反シ,乘數ニ於テ,計算ニ用キラルヽ數字ノ和少ナクシテ,誤差ノ限界ガ10ヲ超ヘザルトキハ被乘數ノ小數第$n+1$位ノ下ニ,乘數ノ整數一位ヲ置キ,部分積ノ和ノ右ノ端ノ一ツノ數字ヲ省キ,其左ノ數字ニ1ヲ加フベシ.

14. 注意第二. 因數ノ順序ヲ換ヘテ運算ヲ行フモ同一ノ結果ヲ得.

```
  1.625 48
  7 583.25
  --------
  8 127 40
    325 08
     48 75
     12 96
        80
         7
  --------
  85.16
```

(12) ニ用キタル二數ノ順序ヲ反對ニシテ計算スレバ圖ニ示スガ如シ.

前ノ仕方ニ於テ,被乘數ノ8ニ逐次乘ジタル數ハ 1.00, 0.6, 0.02; 後ノ仕方ニ於テ此ノ8ヲ乘ジタル數ハ1.62ニシテ前ノモノヽ和ニ等シク其他ノ數字ニ就テモ之レト同樣ナレバナリ.

此ノ仕方ニ於ケル誤差ノ限リヲ求ムレバ

$$0.0001\times(5+2+3+8+5+7+\overline{1+1})$$

ニシテ, 一般ニ前ニ得タルモノト等シカラズ. 何

レヲ取ルモ理論上誤リナケレバ，誤差ヲ計算スルトキハ，二數中ノ小ナル方ヲ擇ムベシ．

15. 計算ニ用キラル丶數字ノ數　省略掛ケ算ニ用キラル丶數字ノ數ヲ豫知スルノ必要屢之レアリ．今，第一，第二因數ノ整數位ニ p, p' 個ノ數字ヲ有スルトキ，積ヲ小數第 n 位マデ求メンニハ，第一數ノ小數第 $n+2$ 位ノ下ニ，第二數ノ一位ガ行ク樣ニスルガ故ニ，第二數ノ最高位ノ數字ハ，第一數ノ小數第 $n+2+p'-1$ ノ位ニ在ル數字ノ下ニ行クベシ．由テ第一數ニ用キラルル數字ノ數ハ整數位ヲ合ハセテ $n+2+p'-1+p=p+p'+n+1$ ナリ．第二數ニ於テモ亦同樣ニシテ同數ノ數字ヲ用フベキヲ知ル．

第三ノ因數アリテ整數位ニ p'' 箇ノ數字ヲ有スルトキ，此ノ三因數ノ積ヲ小數第 n 位マデ求メントス．第三數ヲ他ノ兩數ノ積ニ乘ズル際計算ニ用キラル被乘數ノ小數位ニ於ケル數字ハ $p''+n+1$ 箇ニシテ此ノ小數位ヲ得ルタメニ第一,第二數共ニ $p+p'+p'' +n+2$ 箇ノ數字ヲ要ス．

之ヲ敷衍シテ，一般ニ，k 箇ノ因數ノ連乘積ヲ小數第 n 位マデ求ムルトキ，掛ケ算ノ初メニ用キ

ラル丶數ハ $p+p'+p''+\dots\dots+p^{(k)}+k+n-1$ 箇ノ數字ヲ要スルヲ知ル．

上ニハ各因數トモ,帶小數ナリトシテ論ゼシガ,若シ小數第一位ヨリ始マル數アルトキハ,之ニ相當スル p ヲ零トスベク．若シ小數第 $p+1$ 位ヨリ始マル數アルトキハ之ニ應ズル p ヲ $-p$ トセバ,前ニ得タル規則ハ,一般ノ場合ニ適當スルモノナルコトヲ證明スルコトヲ得．

例ヘバ　13.4470545………, 1.65319723………………,

13.44705 4	22.2307
27 91356.1	58 8113
13 44705 4	66 6921
8 06823 0	2 2230
67235 0	2223
4034 1	1776
134 4	176
120 6	10
9 1	0.6934
2	
22.2307	

0.03118851………ノ積ヲ小數第四位マデ求メン．コ丶ニ $p=2$, $p'=1$, $p''=-1$, $k=3$, $n=4$ ニシテ最初ニ用キラル二數ノ數字ノ數ハ $2+1-1+3+3=8$ ナリ．先ヅ 13.447054 ニ 1.6531972 ヲ乘ジ 22.2307 ヲ得．之ニ 0.0311885 ヲ乘ジ,0.6934 ヲ得．之レ所要ノモノナリ．

初メノ二數ノ積トシテ 22.2307 ヲ取ルトキ,其誤差ハ 0.0001 ヨリモ小ナリ．故ニ第二ノ掛ケ算ニ於ケル最初ノ部分積ヲ作ルニアタリ起ル誤差ハ,過剩或ハ

不足ニ於テ 0.000001×3 ヨリ小ニシテ結果0.6934 ニ於ケル誤差ハ $(1+1+8+8+5\pm3)\times0.000001$ 即チ 26×0.000001 ヨリ小ニシテ0.0001ヨリモ小ナリ.

第四　割リ算

16. 規則. 與ヘラレタル二ツノ數ノ商ヲ或ル小數位マデ求ムルニハ,先ヅ商ノ中ニ在ルベキ數字ノ數 n ヲ求メ, 二ツノ數ノ小數點ヲ無キモノト見做シ, 除數ノ左端ニ於テ $9n$ ヨリ小ナラザル數ヲ表ハス數字ト,其次ニ $n-1$ 箇ノ數字ヲ取リ, 以下ノ數字ヲ捨テヽAトス. 次ギニ, Aヨリ大ニシテ, 10A ヨリモ小ナル數ヲ被除數ノ左ノ端ヨリ取リ, 以下ノ數字ヲ省キBトス. BヲAニテ割リ, 商ノ首位ヲ得. Aノ右端ノ數字ヲ一ツ消シタル數 A_1 ニテ剩餘ヲ割リ商ノ第二位ヲ得. A_1 ノ右端ノ數字ヲ一ツ消シタル數 A_2 ニテ新タラシキ剩餘ヲ割リ商ノ第三位ヲ得. 以下次第ニ此ノ如クシテ商ノスベテノ數字ヲ得ルニ至リテ止メ,其終リノ數字ガ適當ナル位ニ在ル如ク小數點ヲ打ツベシ.

例トヘバ 52511.89325 ヲ 3543.25675 ニテ割リタル商ヲ小數第三位マデ求メンニ,

```
3543.25675)52511.89325(14.82
           35432 5
           17079 3
           14172 8
            2906 5
            2834 4
              72 1
              70 8
             1.39325
```

商ハ十位ヲ以テ始マリ小數第二位マデニハ四箇ノ數字アリ. 由テ,除數ノ左端ニ於テ36ヨリ小ナラザル數ヲ表ハスダケノ數字354ト,其次ギニ3個ノ數字325ヲ取リ,6以下ノ數字ヲ消シ,354325ヲAトス. Aヨリ大ニシテ10Aヨリモ小ナル數ヲ被除數ノ左端ニ於テ取リ,以下ヲ捨テ525118ヲ354325ニテ割リ1ヲ得,商ノ首位トナス. Aノ右端ノ數字5ヲ消シ35432ハ A_1 ナリ. A_1 ニテ上ニ得タル剩餘170793ヲ割リ,商ノ第二位ノ數字4ヲ得. 以下次第ニ此ノ如クシテ四箇ノ數字1482ヲ得. 14.82ヲ以テ求ムルモノトス.

證明. 結果ノ眞ナルタメニ次式ヲ證明スレバ充分ナリ

$$52511.89325 \sim 3543.25675\times14.82 < 3543.25675\times0.01$$
$$< 35.4325675 \qquad (1)$$

13ハ354ヲ以テ721ヲ割リタルトキノ剩餘ナレバ,

$13<354$ 隨テ $13\times0.01<354\times0.01$ 或ハ $1.3<35.4$. 由テ, 1.3 ニ少ナクモ0.1 ヲ加ヘザレバ 35.4 ニ達セズ, 故ニ $1.39325<35.4$ マシテ $1.39325<35.4325675$. (2)

Bヨリ逐次ニ引キタル多クノ數ノ和ヲ s トスレバ

$$52511.89325=s+1.39325. \qquad (3)$$

今除數ニ14.82ヲ乘ズルニ次ノ如ク排列シテ省略算ヲ行ヘバ, 各部分積ハ逐次Bヨリ引ケル數ニ等シ. 由テ, 除數ニ14.82ヲ乘ジタル積ハ s ヨリモ大ニシテ, 其誤差 e ハ $(1+4+8+2)\times0.1$ リモ小ナリ (11).

```
3543.25675
  28.41
----------
3543 25
1417 28
 283 44
   7 08
----------
52510.5=s
```

$$3543.25675\times14.82=s+e. \qquad (4)$$

最後ノ除數354ハAノ作リ方ニヨリ 9×4 ヨリモ小ナラズ. 商ニ表ハルヽ四箇ノ數字ハ9ヨリモ大ナルコトナキヲ以テ

$$(1+4+8+2)\leqq 9\times4 \leqq 354.$$

由テ $e<(1+4+8+2)\times0.1\leqq35.4<35.4325675$. (5)

偖, (3), (4) ノ左邊ニ在ル數ノ差即チ (1) ノ左邊ニ在ル數ハ 1.39325 ト e トノ差ニ等シク, 此ノ二數トモ (2), (5) ニ依リ除數ヨリモ小ナルヲ以テ (1) ハ成立ス.

17. 注意第一. 計算ニ不必要ナル數字ヲ書クコトナク, 左ニ示ス如ク運算スルヲ便トス

```
354325)525118(14.82
       354325
       ------
       170793
       141728
       ------
        29065
        28344
        -----
          721
          708
          ---
```

18. 注意第二. 上ニ求メ得タル結果ガ不足ナル近似數ナルタメニ

$$1.39325>e$$

ナルヲ要ス, 若シ $13.9325>(1+4+8+2)\times0.1$ ト云フガ如キ關係ガ成立スルトセバ $(1+4+8+2)\times0.1>e$ ナルヲ以テ結果ハ不足ナル近似數ナリ. 故ニ商ノ列數字ノ和ガ最後ノ剩餘(小數點ニ關セズ)ヨリモ小ナルコトアラバ, 不足ナル近似數ナリ.

19. 注意第三. 上ノ理論ニ見ル如ク, 除數ノ左ノ端ニ取ル數字ハ, 其表ハス數ガ商ノ中ニ在ルベキ數字ノ和ヨリ小ナラザレバ足レリ. 故ニ商ノ首位數字ヲ知ル場合ニハ之ヲ一層縮メ, 例ヘバ上ノ例ニ於テハ35トスルヲ得. 何ントナレバ, 商ノ首位ガ1ナルヲ以テ他ノ三ツノ

```
35432)52511(1482
      35432
      -----
      17079
      14172
      -----
       2907
       2832
       ----
         75
         70
         --
```

數字ガ悉ク9ナルモ,和ハ28ニシテ35>28ナレバナリ. 此ノ仕方ニ依ル運算,圖ニ示スガ如シ.

20. 注意第四. Aヲ決定スル要領ハ, 最後ニ除數トナルベキ數ガ, 商ノ中ニ在ル數字ノ和ヨリ小ナラザルニアルコトハ前ニ云ヘルガ如シ. 而シテ之等ノ數字ヲ悉ク9トシテ最モ安全ニ考ヘタリ. 去リナガラ, 9ヨリ0マデノ平均値ハ4.5ニシテ5ニ滿タズ. 故ニ平均ヲ5トシ, $5n$ヲ前ニ云ヘル$9n$ノ代ニリニ取ルモ十中ニ五以上,間違ヒヲ生ゼザルベシ. 此ノ如クセル場合ニハ, 求メ得タル商ノ數字ノ和ガ$5n$ヨリモ大ナラザルヤニ就テ檢スルヲ要ス. 若シ不幸ニシテ,之ヨリ大ナルコトアラバ,規則ノ示ス如ク再演セザルベカラズ.

(16)ニ於ケル割リ算ヲ此ノ方法ニヨリ行フトキ,其運算ハ(19)ニ於ケルモノト同一ナリ.

21. 注意第五. 運算ノ途中,商トシテ(10)ヲ得ルコトアリ. 例トヘバ8468.43253ヲ3.5285325ニテ割リ,1ヨリ近キ數ヲ求メンニ, 商ニ四個ノ數字アルヲ以テ圖ノ如ク運算ス. 第三ノ除數3528ニテ35282ヲ除スレバ商(10)ヲ得. 此ノ如キ場合ニハ既ニ得タル

```
3.52853)8468.42(23(10)0
        7057 06 24 0 0
        1411 37
        1058 55
         352 82
         352 80
              2
```


商ノ終リノ數字3ニ1ヲ加ヘ, 以下ノ數字ヲ悉ク零トシ, 2400ヲ以テ答トス.

商ニ(10)ヲ立ツルトキ剩餘ハ必ラズ數字一ツナリ. 何ントナレバ,直グ前ノ割リ算ノ性質ニヨリ

$$35282 < 35285$$

$$35282 - 35280 < 5 \quad \text{即チ} \quad 35282 - 3528 \times (10) < 5$$

由テ,商ニ(10)ヲ立テタリトスレバ此ノ後商ニ來ルベキ數字ハ零ナリ,何ントナレバ除數ハ一般ニ二箇以上ノ數字ヲ有スレバナリ.

偖,コヽニ,(10)ヲ立テタルタメニ前ノ理論ニ不都合ヲ來タスヤト云フニ,既ニ得タルスベテノ數字ガ9ニシテ,上ノ如ク(10)ヲ立テヽ割リ算ヲ終ルガ如キ特別ナル場合ニアラザレバ, 商ノ中ニ在ル數字ノ和ガ4×9ヲ超ユルコトナシ. 由テ 23(10)0 即チ 2400ハ正當ナル答ナリ.

此ノ特別ナル場合ニハ一目シテ答ヲ求ムルヲ得. 例トヘバ35.285325ニテ352.85163ヲ割リタル商ヲ小數第三位マデ求ムル運算次ギニ示ス如シ. 玆ニ除數ノ10倍ト被除數トノ差ハ0.01……ニシテ除數ノ1000

```
35.2853)352.8716(9.99(10)
        317 5677
        ────────
         35 2839
         31 7565
        ────────
          3 5274
          3 1752
        ────────
            3522
            3520
        ────────
               2
```

分ノ一ヨリモ小ナリ,故ニ10.000ヲ以テ答トス.

一般ノ場合トシテ$9n$ハ一桁以上ノ數ナルヲ以テ商ニ(10)ヨリ大ナル數ヲ立ツルコトナシト知ルベシ

22. 注意第六. 除數ノ數字ノ數少ナクシテ初メヨリ省略算ヲ施シ得ザル場合アリ. 此時ニハ,除數ノ右ニ適當ナル零ヲ附加シ,規則ヲ適用スルモ差支ナシト雖モ,商ノ始メノ部分ノ數字ハ尋常ノ方法ニ依リテ計算シ, 終リノ部分ニ至リ省略法ヲ行フヲヨシトス. 例トヘバ782.5673689ヲ4.56597ニテ除シ

```
4.56597)782.5673689(171.3912
        456 597
        ───────
        325 9703
        319 6179
        ────────
          6 35246
          4 56597
        ─────────
          1 78649
          1 36977
        ─────────
            41672
            41085
        ─────────
              587
              456
        ─────────
              131
               90
        ─────────
```

$\frac{1}{10^4}$ヨリ近キ數ヲ求メンニ,此ノ近似數ハ整數三位ト小數四位ヲ合ハセ,七箇ノ數字ヲ有スベキヲ以テ,初ノ二ツノ數字ヲ求ムルニハ省略法ニヨラズ第三番目ノ數字ヨリ省略算ヲ

始ムベシ.

23. 注意第七. 省略割リ算ニ用フル數字ノ數ハ豫定スルコト難シ. 去リナガラ,商ノ數字アマリ多數ナラザルトキ, 其最大限ヲ定メンニハ次ノ如クスベシ.

多クノ場合ニ, 商ノ數字ノ數nハ10ヨリ多カラザルヲ以テ,除數ニハ左端ニ三箇ト其右ニ$n-1$箇合計$n+2$箇ノ數字アレバヨシ. 何ントナレバ,此ノ場合ニ$9n<100$ニシテ三箇ノ數字ヨリナル數ハ100ヨリ小ナルコトナケレバナリ.

被除數ニ於テハ最大限$n+2+1=n+3$箇ナリ.

然シナガラ視察ニヨリ法,實ノ首位ヲ知リ得ベキガ故ニ,最大限ダケ取ルニ及バザルベシ. 例トヘバ$\frac{\sqrt{2}+1}{\pi}$ヲ小數第三位マデ求メンニ, 商ハ小數第一位ヨリ始マルヲ以テ所要ノ數字ノ數ハ3ナリ. 由テ上ニ示ス所ニ由リ, 除數ニ5,被除數ニ6箇ノ數字ヲ求ムレバ3.1415, 2.41421ヲ得. 而シテ, 割リ算ニハ3.141, 2.4142ニテ足ルガ故ニ一箇宛餘計ナ數字ヲ求メタルコトニ歸ス.

24. 注意第八. 若シ省略割リ算ニ用フルニツノ

數ガ其末位ニ於ケル一ヨリ小ナル誤差ヲ有スル近似數ナルモ，最後ニ用キラルヽ被除數ハ，商ノ首位數字ト一トノ和ヨリ多ク其末位ニ加減セラルヽコトナキニ注意スベシ．

第五　開平

25. 例ヘバ A = 6545.389583253875 ノ平方根ヲ小數第五位マデ求ムルタメニ，小數點ヲ十桁右ニ移シ，其整數部 a = 65453895832538 ノ平方根ヲ整數第一位マデ求メ，α ヲ得タリトス．若シ α ガ $\sqrt{a}$ ニ等シキカ或ハ不足ナル近似數ナルトキ，α ハ a = 0.75 ヲ加ヘタル數ノ平方根ニ一ヨリ近キ不足ナル近似數ニシテ，α ノ小數點ヲ五桁左ニ移シタル數ハ $\sqrt{A}$ ノ $\frac{1}{10^5}$ ヨリモ近キ不足ナル數ナリ．若シ α ガ $\sqrt{a}$ ノ過剩ナル近似數ナルトキ，$\alpha-1$ ハ $\sqrt{A}$ ノ $\frac{1}{10^5}$ ヨリ近キ不足ナル近似數ニシテ，α ハ $\sqrt{A}$ ノ $\frac{1}{10^5}$ ヨリ近キ過剩ナル數ナリ．故ニ此ノ問題ヲ解クタメニ a ヲ整數第一位マデ求ムル法ヲ知レバ足レリ．由テ次ノ規則ヲ以テ總テノ場合ニ應用スルコトヲ得．

26. 規則．與ヘラレタル整數ノ平方根ヲ整數第一位マデ求ムルニハ，先ヅ普通ノ方法ニヨリ，所要ノ數字ノ半分以上ヲ求メ，之ヲ二倍シ其右ニ未ダ得ザル數字ノ數ダケノ零ヲ書キ添ヘ此時ノ開平剩餘ヲ除シ，完全商ヲ既ニ得タル數字ノ次ギニ書キ加フベシ．

(25) ニ於ケル數ニ就テハ，所要ノ根ノ中ニ在ルベキ數字七個ニシテ普通ノ方法ニヨリ四個ノ數字

```
            65|45|38|95|83|25|38(8090
            64
1609         1 45 38
             1 44 81
16180000 0       57 95 83 2|5 38(358
                 48 54 0 00|0
                  9 41 83 2|5 3
                  8 09 00 0|0 0
                  1 32 83 2|5 38
                  1 29 44 0|0 00
                     3 39 2|5 38

          80.90358
```

8090 ヲ得レバ殘レル三個ノ數字ハ割リ算ニヨリ求ムルコトヲ得．之レニハ 8090 ノ二倍 16180 ノ右ニ未ダ得ザル數字ノ數三箇ダケノ零ヲ附加シテ 16180000 トナシ，開平剩餘 5795832538 ヲ割リテ完全商 358 ヲ得．之ヲ既ニ得タル 8090 ノ右ニ書キ，適當ニ小數點ヲ打チ 80.90358 ハ所要ノモノナリ．

證明．65453895832538 = a, 8090000 = s, $2s$ ヲ以テ開平剩餘 R ヲ割リ，完全商 q, 剩餘 r ヲ得タリトスレバ

$R=2sq+r$, $a=s^2+R$ ナルニヨリ

或ハ
$$a=s^2+2sq+r$$

今,x ヲ或ル整數トスルトキ;

第一 $s+x<\sqrt{a}$ ナルタメニ兩邊ヲ平方シテ

$$s^2+2sx+x^2<a$$
$$<s^2+2sq+r$$

或ハ
$$2sx+x^2<2sq+r$$

由テ
$$x+\frac{x^2}{2s}<q+\frac{r}{2s} \qquad (1)$$

第二 $s+x=\sqrt{a}$ ナルタメニ第一ト同樣ナル手續ニヨリ

$$x+\frac{x^2}{2s}=q+\frac{r}{2s} \qquad (2)$$

第三 $s+x>\sqrt{a}$ ナルタメニ

$$x+\frac{x^2}{2s}>q+\frac{r}{2s} \qquad (3)$$

r ハ R ヲ $2s$ ニテ割リタルトキノ剰餘ニシテ $\frac{r}{2s}<1$ ナルガ故ニ x ニ q ヨリ大ナル値ヲ與ヘサヘスレバ常ニ (3) ハ滿足セラル.

本問題ニ歸リ $r \gtreqless q^2$ ナルニヨリ三ツノ場合ニ區別ス;

第一. $r>q^2$ ナルトキハ $x=q$ トシテ (1) ヲ滿足ス

ルコトヲ得. 由テ $s+q<\sqrt{a}$. 然レドモ第三ニヨリ, $s+q+1$ ハステニ $\sqrt{a}$ ヨリ大ナルヲ以テ, $s+q$ ハ $\sqrt{a}$ ニ1ヨリモ近キ不足ナル數ナリ.

第二. $r=q^2$ ナルトキハ $x=q$ トシテ (2) ヲ滿足スルコトヲ得. 由テ $s+q=\sqrt{a}$.

第三. $r<q^2$ ナルトキハ $x=q$ トシテ (3) ヲ滿足セシムルコトヲ得. 由テ $s+q>\sqrt{a}$

今, $\sqrt{a}$ ヨリ大ニシテ之ニ最モ近キ整數ガ $s+x'$ ナル如ク x' ヲ取リタリトス. 問題ニ於テ $s\geqq 10^6$ 隨テ $2s>10^6$ ニシテ, x' ハ其性質ニヨリ $x'\leqq 10^3$, 隨テ $x'^2\leqq 10^6$, 由テ $\frac{x'^2}{2s}<1$. 而シ又 (3) ガ滿足セラルベキヲ以テ

$$x'+\frac{x'^2}{2s}>q+\frac{r}{2s},$$

故ニ
$$\frac{x'^2}{2s}-\frac{r}{2s}>q-x'. \qquad (q\geqq x)$$

偖. 不等號ノ左邊ニ在ル二ツノ數ハ,何レモ一ヨリ小ナルヲ以テ,其差モ亦一ヨリ小ナリ. q, x' 共ニ整數ナルヲ以テ上ノ不等式アルタメニ $q=x'$ ナラザルベカラズ.

故ニ常ニ $s+q$ ハ $\sqrt{a}$ ニ一ヨリモ近キ數ニシテ 80.90358

ハ與ヘラレタル數ニ0.00001ヨリモ近キ數ナリ.

注意. 割リ算ノ完全商ガ豫定スルダケノ數字ヲ有セザルトキハ,左ノ端ニ零ヲ補フベシ.

27. 注意第一. 上ノ割リ算ノ商ハ整數第一位マデ精確ニ計算セザルベカラズ. 故ニ省畧割リ算ヲ用フルトキハ小數第一位マデ求ムルヲ要ス(4). 前ノ例ニ省略割リ算ヲ用フレバ358.2ヲ得. 之レニ0.1ヲ增減スルモ整數位ニ變化ヲ及ボサズ. 故ニ358ハ精確ナルモノナリ.

```
1618~~00~~)579583(358.2
           485400
            94183
            80900
            13283
            12944
              339
              322
```

28. 注意第二. (26)ニ於ケル2sヲ得ルタメニ,附加シタル零ヲ省キテ,Rノ右ノ端ニ於ケル同數ノ數字ヲ省キタル數ヲ割リ,完全商ヲ求ムルモ差支ナシ. 何ントナレバ,除數,被除數ノ兩方ヲ同ジ數ニテ割ルモ完全商ニ變化ナケレバナリ. 此ノ如クスルトキハ(26)ノ割リ算ニ於テ縦線ヨリ右ノ數字ハ省略スルコトヲ得.

計算ニ用キラルヽ數字ノ數. 求ムル平方根ノ中ニ在ル數字ノ數2nナルトキハ,最初ノn+1箇ノ數字;

2n+1ナルトキモ同ジク最初ノn+1箇ノ數字ヲ普通ノ開平法ニヨリ求ルヲ要シ, 之ガタメニ用フベキ數字ノ數ハ2(n+1)或ハ2(n+1)−1=2n+1ナリ. 之等ノ數字ノ右ニ猶ホn−1或ハn箇ノ數字ヲ附ケ加ヘ殘レル數字ヲ求ムルコトヲ得. 由テ總計3n,3n+1或ハ3n+2,3n+1箇ノ數字ヲ要ス. (コノ何レニ依ルベキヤハ問題每ニ定ムルヲ得). 但シ後ニ至リ此ノ數字ノ數ハ著シク減少シ得ルコトヲ見ルベシ.

Rノ大サヲ豫知スルコト難キガ故ニ,省略割リ算ヲ用ユルコトニヨリ,數字ノ數ヲ少ナクスルコト難シト知ルベシ.

29. 注意第三 上ノ證明中ニ見ル如ク,r, qヲ比較シテ,求メ得タル近似數ノ誤差ノ向キヲ知ルコトヲ得. 但シ,玆ニ,rハ$2s$ヲ以テRヲ除シタル精確ナル剩餘ナルコトヲ忘ルベカラズ. 上ノ例ニ於テ$r>10^6$ニシテ,$q^2<10^6$ナルヲ以テ,求メ得タル數ハ平方根ニ$\frac{1}{10^5}$ヨリ近キ不足ナル數ナリ.

30. 注意第四. 此ノ方法ノ主ナル點ハ,x'^2ガ$2s$ヨリ大ナラザルニ在リ. 由テ,根ノ首位6ヨリ小ナラザルトキハ,根ノ丁度半分ダケ割リ算ニヨリ求ムルコ

トヲ得. 例トヘバ$\sqrt{4999}$ヲ小位第二位マデ求ムルニ,平方根ノ首位7ナルヲ以テ,所要ノ根ノ中ニ在ルベキ數字四箇ノ半分二箇ハ割リ算ニヨリ求ムル得其運算左ノ如シ

```
      49|99(70.00
      49
140    990 0(70
       980
       10 0
```

第六　開立

31. (25) ニ於ケル同様ノ理由ニヨリ,整數ノ立方根ニ一ヨリ近キ數ヲ求ムル規則ヲ,スベテノ場合ニ應用スルヲ得

規則. 與ヘラレタル整數ノ立方根ヲ整數第一位マデ求ムルニハ,先ヅ通例ノ方法ニヨリ立方根ノ中ニ在ル數字ノ半分以上ヲ求メ,之ヲ平方シテ三倍セルモノヽ右ニ未ダ得ザル數字ノ數ノ二倍ダケノ零ヲ書キ添ヘタル數ニテ,此時ノ開立剩餘ヲ除シ,完全商ヲ,既ニ得タル數字ノ次ギニ書キ加フベシ.

例トヘバ97135540969725504ノ立方根ニ一ヨリ近キ數ヲ求メンニハ,立方根ノ六箇ノ數字ノ中,四箇ダケ尋常ノ方法ニヨリ求メテ 4596 ヲ得タルトキ,剩餘53240233725504ヲ4596ノ平方ノ三倍63369648ニ零ヲ四

ツ附加シタル數633696480000ニテ割リ,84ヲ得,459684ヲ以テ答トス.

```
                               97|135|540|969|725|504(4956
          48                   64
125        625)                33 135
          5425}                27 125
            25)                 6 010 540
          6075
1359     12231)
        619731}                 5 577 579
            81)                   432 961 969
        632043
13776       82656)
         63286956}                379 721 7·36
               36)                  53 240 233 725 504(84
         633696480000               50 695 718 400 00
                                     2 544 515 325 504
                                     2 534 785 920 000
                               495684
```

注意. 省略割リ算ヲ用フルトキハ(27)ト同一ナル注意ヲ要ス.

證明. 與ヘラレタル數ヲN, 459600ニ相當スルモノヲa, $N-a^3$ 即チ開立剩餘ヲ$3a^2$ニテ割リテ得タル完全商ヲq,剩餘ヲrトス. 今,$\sqrt[3]{N}$ヲ得ルタメニaニ加フベキ數ヲxトスレバ$\sqrt[3]{N}=a+x$, 之ヲ立方シテ

$$N=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$

之ヨリ $$\frac{N-a^3}{3a^2}=x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}$$

又 $$\frac{N-a^3}{3a^2}=q+\frac{r}{3a^2}$$

依リテ $$x=q+\frac{r}{3a^2}-\left(\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}\right)$$

qガxニ1ヨリ近キ數ナルヲ證明スルニハ $\frac{r}{3a^2}$ ト,括弧內ノ和トノ差ガ1ヨリ小ナルヲ證スレバ足レリ. 然ルニrハ$3a^2$ヲ除數トスル割リ算ノ剩餘ナルヲ以テ常ニ$\frac{r}{3a^2}<1$ナレバ, 括弧內ノ和

$$\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}=\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)<1$$

ナルヲ證スレバ充分ナリ. 割リ算ニ依リ求メタル數字ノ數ヲnトスレバ, 所要ノ立方根ノ數字ハ少ナクモ$2n+1$箇アルガ故ニ

1° aノ首位數字ガ1ヨリ大ナルトキハ

$a \geqq 2.10^{2n}$ニシテ$x<10^n$ナルヲ以テ.

$$\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)<\frac{10^{2n}}{2.10^{2n}}\left(1+\frac{10^n}{3.2.10^{2n}}\right)$$

卽チ $$<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3.2.10^n}\right)<\frac{1}{2}(1+1)$$

由テ $$\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)<1.$$

2° aノ首位數字ガ1ナルトキハ$a \geqq 10,^{2n}$割リ算ニ依リ求ムルn箇ノ數字ノ中,一ツニテモ9ナラザルモノアルトキハ$x<10^n-1$. 由テ

$$\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)<\frac{(10^n-1)^2}{10^{2n}}\left(1+\frac{10^n-1}{3.10^{2n}}\right)=1-\frac{5.10^{3n}-3.10^n+1}{3.10^{4n}}$$

然ルニ $$\frac{5.10^{3n}-3.10^n+1}{3.10^{4n}}<\frac{5.10^{3n}+1}{3.10^{4n}}<\frac{5.10^{3n}+10^{3n}}{3.10^{4n}}=\frac{6.10^{3n}}{3.10^{4n}}<1$$

由テ $$\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)<1$$

故ニ,aノ首位1ニシテ割リ算ニヨリ求ムベキ數字ガ悉ク9ナルトキノ外,上ノ規則ハ眞ナリ

若シ此ノ特別ナル場合ニ遇フトキハ,$\frac{r}{3a^2}$ ト $\frac{x^2}{u}\left(1+\frac{x}{3a}\right)$ トノ差ノ限界ヲ問題毎ニ計算シテ, $a+q$ガ近似數トシテ取リ得ベキモノナルヤ否ヲ決定スルカ,或ハ割リ算ニヨリ求ムル數字ヲ一ツ減ズベシ. 例トヘバ 1002999995 ノ立方根ヲ小數第三位マデ求ムルニ數字七箇アリ. 規則ニ從ヒ初メノ四ツノ數字ヲ求メ1000ヲ得,割リ算ニヨリ999ヲ得. 由テ, 此ノ問題ハ上述ノ特別ナル場合ニ相當スルヲ見ル.

故ニ仕方ヲ改メテ 10009 マデハ開立ニヨリ,殘ルニツノ數字ヲ割リ算ニヨリ求メテ 99 ヲ得. 1000.999 ヲ以テ答トス

32. 注意. 開立ノ場合ニモ (27),(28) ト同様ナル事項アルコト明カナリ.

第七　雜問

33. 若干ノ應用問題ヲ解カントス

1. 14.60825, 3.17924, 0.518479, 154.017235 ノ和ヲ小數第三位マデ出スコト.

```
 14.6082
  3.1792
  0.5184
154.0172
172.324
```

各數ニ於ケル小數第四位以下ノ數字ヲ捨テヽ加ヘ合ハスルトキハ 172.3230 ヲ得. 最後ノ數字 0 ヲ消シ,其次ギノ數字ニ1ヲ加ヘ 172.324 ヲ以テ答トス. 眞實ノ和ハ 172.3230 ト 172.3234 トノ間ニ在ルヲ以テ,上ニ得タル數ハ過剰ナル近似數ナリ.

2. 14.61825, 3.17924 ノ差ヲ小數第三位マデ出スコト.

```
14.618
 3.179
11.439
```

小數第三位以下ヲ捨テ,差ヲ取リテ得タル 11.439 ハ所要ノモノナリ.

3. 51.6243 ト 112.416 トノ積ヲ小數第三位マデ出セ.

```
51.6243 000
    614.211
51 6243 000
 5 1624 300
 1 0324 860
   2064 972
     51 624
     30 972
5803.398
```

4. 516.24175÷123.456 ヲ小數第六位マデ出スコト.

```
123.456)516.24175(4.181585
         493 824
          22 4177
          12 3456
          10 07215
           9 87648
            195670
            123456
             72214
             61725
             10489
              9872
               617
               615
```

所要ノ商ノ中ニ在ル數字ノ數ハ七箇ニシテ,除數ニ於ケル數字ノ數,之レニ比シテ少ナキガ故ニ,最初ヨリ省略法ニ依ル能ハズ. サレバ,先ヅ普通ノ方法ニヨリ三箇ノ數字ヲ求メタル後省略算ヲ行ヘリ.

5. $\dfrac{27.3125\times0.613458\dot{3}}{17.321\times5.785}$ ヲ小數第三位マデ求ム.

分子ハ 16.………,分母ハ百位ニテ始マリ,其初メノニ桁ノ數字ハ 10 ナルガ故ニ,商ハ小數第一位ヲ以テ

始マリ,小數第三位マデニ三箇ノ數字ヲ求メザルベ

```
   27.3125        17.321       100.21)16.775(0.167
   85 4316          587.5             10 021
  163 8750       86 605 0              6.754
    2 7312       12 124 7              6 012
      8193        1 385 6                742
      1092           86 5                700
       135       100.21                   42
        16
  16.755
```

カラズ. 之レガタメニ,分母ハ小數第二位マデ,分子ハ小數第三位マデ計算スルヲ要ス. 其運算,圖ニ示ス如シ. 割リ算ノ除數,被除數トモ其終リノ桁ノ1マデ近キ數ナレバ商ノ首位數字ト一トノ和ダケ最後ノ剩餘ニ加ヘ或ハ引キ, 商ノ變化如何ヲ見ルニ(24),之ガタメニ變リナケレバ0.167ハ正シキ答ナリ.

6. $\dfrac{135.648\sqrt{11.304}}{\sqrt{\pi}}$ ヲ小數第二位マデ求ム.

分母ハ整數第一位ニ1ヲ有シ,分子ハ3以上ノ數字ヲ百位ニ有スルヲ以テ,商ハ百位ヨリ始マリ小數第二位マデニハ五箇ノ數字アリ. 由テ,分母ハ小數第六位,分子ハ小數第四位マデ計算スルヲ要ス. 分子ヲ小數第四位マデ計算スルニハ,平方根ノ數字ヲ

3+1+4+1=9箇知ルヲ要ス(15). 而シテ此ノ平方根ヲ知ルニハ,初メノ五箇ハ普通ノ方法ニ依リ,他ハ割リ算ニテ求ムルヲ得. 分子ノ計算次ニ示ス如シ

```
        11.30|4(3.3621
         9
         2 30
63       1 89
          4140
666       3996
          14400
6722      13444                      3.362142 17
           95600                       846.531
67241      67241                     3 362142 17
67242      283590 (42174             1 008642 63
          268968                       168107 10
           146320                       20172 84
           134484                        1344 84
            11736                         268 96
             6724                  分子=456.0679
             5012
             4704
              308
              268
```

$\sqrt{11.304}=3.36214217$

分母ヲ小數第六位マデ求ムルトキ, 數字ハ七箇アルベキヲ以テ, 四箇ハ開平ニヨリ求ムルヲ要ス. 而シテ此ダケノ數字ヲ得ルタメニ計算ニ用ヰラルヽπノ數字ハ十箇ナリ.

```
              3.14|15|92|65|3 (1.772
              1
              ----
              2.14
27            1 89
              -------
                25 15
347             24 29
                ------
                  86 92
3542              70 84
                  ---------
3544              16 08 653(453
                  14 17 6
                  -----------
                   1 91 05
                   1 77 20
                   --------
                     13 853
                     10 632
                     ------
```

$\sqrt{\pi}=1.772453$

```
1.772453)456.0679(257.30
          354 4906
         ----------
          101 5773
           88 6225
          ---------
           12 9548
           12 4068
          ---------
              5480
              5316
             ------
               164
   答       257.30
```

終ニ左リノ割リ算ニヨリ結果トシテ257.30ヲ得.但シ此ノ割リ算ニ際シ5ト同様ニ(24)ニ注意スルヲ要ス.

7. 元金二千五百圓,三ヶ年間ノ複利312.16利圓ナリト云フ. 年利率ヲ分マデ求ム.

元利合計2812.16圓ヲ元金ニテ割レバ商ハ1ト年利率トノ和ノ立方ニ等シ. 由テ$\sqrt[3]{\dfrac{2812.16}{2500}}$ヲ小數第

二位マデ求ムレバ可ナリ. 根號內ノ分數ノ値ハ整數第一位ニ始マリ小數第二位マデニ三箇ノ數字アリ. 由テ最初ノ二箇ダケ開立スレバ足レリ. 之ガタメニ分數ノ値ヲ數字五箇即チ小數第四位マデ求ムレバヨシ. 此ノ割リ算ヲ行ヒ1.1248ヲ得. 之ニ前記ノ手續ヲ施シ1.04ヲ得. 由テ年四分ナルコトヲ知ル.

例　　題

1. 0.23435, 6.31742, 245.78935, 0.4238503 ノ和ヲ小數第二位マデ求ム

2. 58.9256, 0.956723, 567.893, 0.0000123 ノ和ニ 0.0001 ヨリ近キ不足ナル近似數ヲ求ム

3. $\frac{5}{63}+\sqrt{3,5}$ヲ小數第五位マデ計算セヨ

4. 30.5674215ヨリ17.563728ヲ減シタル結果ニ$\frac{1}{10^5}$ヨリ近キ數ヲ求ム

5. $\pi-\sqrt{2}$ ニ 0.0001 ヨリ近キ不足ナル近似數ヲ求ム

6. $\sqrt{179}+\sqrt{30}-\sqrt{8}$ ニ千分ノ一ヨリ近キ數ヲ求ム

次ギノ四題ニ於ケル積ヲ小數第四位マデ求ム

7. 15.816×19.714

8. $138.714 \times 89.4\dot{7}5\dot{2}$

9. $81.4623 \times 12.\dot{3}4\dot{5}$

10. $\pi\sqrt{2}$

11. $\begin{array}{l} 0.434294481903251\ldots\ldots \\ 0.693147180559945\ldots\ldots \end{array}$

ノ積ヲ $\dfrac{1}{10^{10}}$ ヨリ近キ數ヲ求ム

12. $9342.865 \div 832.36525 = \dfrac{1}{10^5}$ ヨリ近キ數ヲ求ム

13. $14.625 \div 3.\dot{1}85\dot{7}$ ヲ小數第二位マデ正シク計算セヨ

14. $51.62\dot{4}\dot{3} \div 112.41675$ ヲ毛位マデ正シク計算セヨ

15. $15.8193 \times 6.7\dot{1}4\dot{9} \div 1.3\dot{4}2\dot{5}$ ニ 0.001 ヨリ近キ數ヲ求ム

16. $15.8\dot{1}9\dot{3} \times 6.7\dot{1}4\dot{9} \times 2.5675324$ ヲ小數第三位マデ計算セヨ

17. $3.141592653 \div 567.932 \div 0.0015\dot{3}\dot{2}$ ヲ小數第五位マデ求ム

18. $\sqrt{321.73025}$ ヲ小數第十二位マデ求メヨ

19. $x^2+5x+3=0$ ノ根ヲ小數第四位マデ正シク計算セヨ

次ギノ三ツヲ小數第五位マデ出セ

20. $\sqrt[3]{3}$

21. $\sqrt[3]{15 \div 0.0\dot{7}5\dot{3}}$

22. $\sqrt[4]{35.72 \times \pi}$

23. $\sqrt{\pi} + \sqrt[3]{2} - \dfrac{20}{713}$ ニ 0.0001 ヨリ近キ數ヲ求メヨ

24. 27.439瓩アル物體ノ立積15.629立方粴ナルトキ,密度ヲ計算セヨ

25. 一竔ノ容積ヲ有スル立方體ノ一邊ノ長サヲ寸ノ小數第二位マデ求メヨ

26. 地球ノ表面積ハ509 950 000粁平方ニシテ,陸地ノ面積136500000粁平方アリト云フ. 陸地ハ全面積ノ幾何ヲ占ムルカ

27. 次ノ式ノ値ヲ小數第三位マデ正シク計算セヨ

$$\frac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} + \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.$$

28. $\dfrac{0.85 \times 23 \times 126 \times 35 \times 15^3 \times 0.7854}{33000 \times 12}$ ヲ小數第二位マデ計算セヨ

29. 方程式 $55^{x+1} = 3^{x^2-1}$ ノ根ヲ小數第二位マデ計算セヨ但シ $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$.

第二章　近似數ノ計算

34. (1) ニ述ベタル第二ノ問題,即チ近以數ニ施セル精確ナル計算ノ結果ガ有スル誤差ノ範圍ヲ求ムルコト,幷ニ之ヲ第三ノ問題ニ應用スルヲ以テ本章ノ目的トス.

計算ノ結果ノ種類ニヨリ六ヶ條ニ區分ス.

第一　和

35. 若干ノ近似數ノ和ノ誤差ハ各數ノ誤差ノ限界ノ和ヨリ小ナリ.

例トヘバ A, B, C, D ノ近似數ヲ a, b, c, d トシ,各數ノ誤差ノ限界ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスルトキハ, A, B, C, D ハ $a-\alpha$, $b-\beta$, $c-\gamma$, $d-\delta$ ヨリモ大ニシテ $a+\alpha$, $b+\beta$, $c+\gamma$, $d+\delta$ ヨリモ小ナルヲ以テ A+B+C+D ハ

$$(a+\alpha)+(b+\beta)+(c+\gamma)+(d+\delta)=a+b+c+d+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

$$(a-\alpha)+(b-\beta)+(c-\gamma)+(d-\delta)=a+b+c+d-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

ナル二數ノ間ニ在リ. 由テ, A+B+C+D ノ代リニ $a+b+c+d$ ヲ取ルトキ,其誤差ハ $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ 即チ各數

ノ誤差ノ限界ノ和ヨリモ小ナリ.

若シ,誤差ノ向キヲ知ルトキハ,誤差ノ範圍ヲ小ナラシムルコトヲ得. 例トヘバ a, b ハ不足; c, d ハ過剩ナル近似數ナルトキ A+B+C+D ハ $a+b+(c-\gamma)+(d-\delta)=a+b+c+d-(\gamma+\delta)$ ト $(a+\alpha)+(b+\beta)+c+d=a+b+c+d+(\alpha+\beta)$ トノ間ニ在リ. 由テ $a+b+c+d$ ノ誤差ハ, 同ジ向キヲ有スル誤差ノ限界ノ和ノ大ナルモノヨリモ小ナリ.

n 個ノ近似數ノ中ノ,誤差ノ限界ノ最大ナルモノヲ α トスレバ,和ノ誤差ハ $n\alpha$ ヨリモ小ナリ.

例トヘバ 1.23, 134.567, 8.9101 ハ各其末位ノ一ヨリモ近キ數ナルトキ,此ノ和 144.7071 ノ誤差ハ $0.01+0.001+0.0001=0.0111$ ヨリモ小ナリ. 由テ, 精確ナル和ハ $144.7071+0.0111$ ト $144.7071-0.0111$ 即チ 144.7182 ト 144.6960 トノ間ニ在リ (3). 由テ 144.70 ハ和ニ 0.02 ヨリモ近キ數ナリ.

第二　差

36. 二ツノ近似數ノ差ノ誤差ハ各誤差ノ限界ノ和ヨリモ小ナリ.

A,B ノ近似數 a,b ノ誤差ガ α,β ヨリ小ナルトキ,

A−B ハ

$$(a+\alpha)-(b-\beta)=a-b+(\alpha+\beta)$$

$$(a-\alpha)-(b+\beta)=a-b-(\alpha+\beta)$$

ナル二數ノ間ニ在リ. 由テ A−B ノ代リニ, $a-b$ ヲ取ルトキ,誤差ハ $\alpha+\beta$ ヨリモ小ナリ.

若シモ誤差ガ同一ノ向キヲ有スルトキハ,各誤差ノ限界ノ大ナルモノヨリモ小ナルヲ證明スルコトヲ得.

例トヘバ,二ツノ近似數 11.23, 4.507 ノ誤差ハ共ニ其末位ノ一ヨリモ小ナリトスレバ,差 6.723 ノ誤差ハ 0.011 ヨリモ小ナリ. 由テ眞實ナル差ハ 6.634 ト 6.612 トノ間ニ在リテ (3), 6.62 ハ之ニ 0.02 ヨリモ近キ數ナリ.

第三 積

37. 二ツノ近似數ノ積ノ誤差ハ,各因數ノ誤差ノ限界ニ,過剩ニ取レル他ノ因數ヲ乘ジタル二ツノ積ノ和ヨリモ小ナリ.

A,B ノ近似數ヲ a,b; 誤差ノ限界ヲ α,β トスレバ

AB ハ次ギノ二ツノ數ノ間ニ在リ

$$(a-\alpha)(b-\beta)=ab-a\beta-b\alpha+\alpha\beta,$$

$$(a+\alpha)(b+\beta)=ab+a\beta+b\alpha+\alpha\beta$$

而シテ AB ト ab トノ差ハ,上ノ二數ノ各ト ab トノ差ノ大ナルモノ

$$a\beta+b\alpha+\alpha\beta=(a+\alpha)\beta+b\alpha$$

ヨリモ小ナリ

今, A,B ノ過剩ナル近似數ヲ A_1,B_1 トスレバ

$$(a+\alpha)\beta+b\alpha<A_1\beta+B_1\alpha$$

實際ニ當リ A_1,B_1 ニ與フル數ハ,誤差ノ計算ニ容易ナル數例トヘバ a,b ノ首位ニ 1 ヲ加ヘ他ノ數字ヲ皆零トセルガ如キモノヲ用フ.

誤差ノ向キ同一ナルトキハ上ノ理論ヲ其儘適用スベシト雖モ,誤差ノ向キ反對ナルトキハ次ギノ如クスルヲヨシトス.

例トヘバ a ハ不足, b ハ過剩ナル近似數ナルトキ AB ハ $a(b-\beta)$ ト $(a+\alpha)b$ 即チ $ab-a\beta$ ト $ab+\alpha b$ トノ間ニ在リ. 由テ ab ノ誤差ハ $a\beta, \alpha b$ ノ中ノ大ナルモノヨリモ小ナリ.

一ツノ因數ガ精確ナルトキ,積ノ誤差ハ他ノ因數

ノ誤差ノ限界ニ此ノ因數ヲ乘ジタル積ヨリモ小ナリ

例 1. 0.001 ヨリモ近キ數 5.3567 ト精確ナル數 3.15 トノ積 16.873605 ノ誤差ハ $0.001 \times 3.15 = 0.00315$ ヨリモ小ニシテ眞實ナル積ハ 16.876755 ト 16.870455 トノ間ニ在リ. 由テ 16.87 ハ 0.01 ヨリモ近キ不足ナル數ナリ (4).

例 2. 過剩ナル近似數 375.1400 ノ誤差ハ $\frac{1}{2\times10^4}$ ヨリモ小ニシテ,不足ナル近似數 5.615 ノ誤差ハ $\frac{1}{10^3}$ ヨリモ小ナルトキ,此ノ二數ノ積 2106.4111 ノ誤差ハ

$$\frac{1}{2\times10^4}\times5.615,\quad \frac{1}{10^3}\times375.1400$$

ノ中ノ大ナル方 0.37514 ヨリモ小ナリ. 由テ眞實ナル積ハ 2106.78624 ト 2106.03596 トノ間ニ在リテ 2106.4 ハ 0.4 ヨリモ近キ不足ナル數ナリ.

例 3. 例 2 ニ於テ誤差ノ向キヲ知ラズトスレバ積ノ誤差ハ $A_1=400$, $B_1=6$ トシテ

$$\frac{1}{2\times10^4}\times6+\frac{1}{10^3}\times400=0.4003$$

ヨリモ小ナリ. 由テ此ノ場合ニ精確ナル積ハ 2106.9 ト 2106.0 トノ間ニ在リテ 2106.4 ハ 0.5 ヨリ近キ數ナリ.

38. 數多ノ因數ノ場合. 例トヘバ A, B, C, D ノ近似數ヲ a, b, c, d; 誤差ノ限界ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; 過剩ナル近似數ヲ A_1, B_1, C_1, D_1 トス.

AB ノ代リニ ab ヲ取ルトキ生ズル誤差ハ $A_1\beta+B_1\alpha$ ヨリモ小ナリ.

(AB)C ノ代リニ $(ab)c$ 即チ abc ヲ取ルトキ生ズル誤差ハ $C_1(A_1\beta+B_1\alpha)+\gamma(A_1B_1)$ 即チ $\alpha B_1C_1+\beta C_1A_1+\gamma A_1B_1$ ヨリモ小ナリ.

同様ニシテ ABCD ノ代リニ $abcd$ ヲ取ルトキ生ズル誤差ハ $\alpha B_1C_1D_1+\beta C_1D_1A_1+\gamma A_1B_1D_1+\delta A_1B_1C_1$ ヨリモ小ナリ.

由テ,一般ニ,若干ノ因數ノ積ノ誤差ハ,各因數ノ誤差ノ限界ト其他ノ因數ノ過剩ナル近似數トノ積ノ和ヨリモ小ナリ.

39. 或ル近似數 a ノ第 n 冪ノ誤差ハ,過剩ニ取レル近似數 A_1 ノ第 $n-1$ 冪ト, 誤差ノ限界 α トノ積ノ n 倍 $nA_1^{n-1}\alpha$ ヨリモ小ナリ.

冪ハ積ノ特別ナルモノナルガ故ニ,之ニ關スル理論ハ積ニ關スルモノヨリ導クコトヲ得.

特ニ,平方ノ誤差ハ $2A_1\alpha$ 立方ノ誤差ハ $3A_1^2\alpha$ ヨリモ小ナリ.

例ヘバ圓周率ノ近似數トシテ 3.1416 ヲ取ルトキ其平方ノ誤差ヲ求メンニ;此ノ近似數ノ誤差ヲ 0.00005 ヨリモ小ナリトスレバ,平方 9.86965056 ノ誤差ハ $2\times0.00005\times3.2=0.00032$ ヨリモ小ナリ. 然ルニ此ノ近似數ハ過剰ナルヲ以テ π^2 ハ 9.86965056 ト,之レヨリ誤差ノ限界ヲ引キタル 9.86933056 トノ間ニ在リ(3),故ニ 9.869 ハ π^2 ニ 0.001 ヨリモ近キ不足ナル數ナリ.

```
3.1416 0
 6141.3
-------
9 4248 0
 3141 6
 1256 4
   31 4
   18 6
-------
9.8696 0
```

平方數 9.86965056 ノ小數第四位以下ハ信用スル能ハザルガ故ニ,小數第三位マデ計算シ得ル如ク排列シテ,省略算ヲ行ヒ 9.86960 ヲ得. 省略算ヨリ起ル誤差ハ 11×0.00001 ヨリモ小ナルガ故ニ近似數ノ平方ハ 9.86960, 9.86971 ノ間ニ在リ. π^2 ハ此ノ二數中ノ小ナル方ヨリ 0.00032 ヲ引キタル 9.86928 ト 9.86971 トノ間ニ在リテ 9.869 ハ π^2 ニ 0.001 ヨリモ近キ不足ナル數ナリ.

第　四　商

40. 二ツノ近似數ノ商ノ誤差ハ,各數ノ誤差ノ限

界ニ,他ノ數ヲ乘ジタル積ノ和ヲ不足ニ取リタル除數ノ近似數ノ平方ニテ除シタル商ヨリモ小ナリ.

a,b ハ A,B ノ近似數ニシテ,其誤差ハ α,β ヨリモ小ナリトス. $\frac{A}{B}$ ハ $\frac{a}{b}$ ト共ニ

$$\frac{a-\alpha}{b+\beta},\ \frac{a+\alpha}{b-\beta}$$

ノ間ニ在リ. 由テ, $\frac{a}{b}$, $\frac{A}{B}$ ノ差ハ次ノ二ツノ差ノ大ナルモノヨリモ小ナリ.

$$\frac{a}{b}-\frac{a-\alpha}{b+\beta}=\frac{a(b+\beta)-b(a-\alpha)}{b(b+\beta)}=\frac{a\beta+b\alpha}{b(b+\beta)},$$

$$\frac{a+\alpha}{b-\beta}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+\alpha)-a(b-\beta)}{b(b-\beta)}=\frac{a\beta+b\alpha}{b(b-\beta)}$$

上ノ二ツノ差ハ共ニ $\frac{a\beta+b\alpha}{(b-\beta)^2}$ ヨリモ小ナリ. 由テ. $\frac{A}{B}$ ノ代リニ $\frac{a}{b}$ ヲ取ルタメニ生ズル誤差ハ $\frac{a\beta+b\alpha}{(b-\beta)^2}$ ヨリモ小ナリ.

誤差ヲ計算スルニ方ッテハ,分子ノ a,b ニハ(積ノトキニ云ヘルガ如キ)計算ニ都合ヨキ之ヨリ大ナル數ヲ取リ分母ノ $b-\beta$ ニハ之ト反對ニ都合ヨキ之ヨリ小ナルモノ例ヘバ分母ノ首位數ノ外ノ數字ヲ悉

ク零トセシガ如キ數ヲ用フ.

若シ誤差ノ向キヲ知リ; 分母子ガ異ナル向キヲ有スルトキハ上ノ如クスル外ナシト雖モ,同ジ向キヲ有スルトキハ次ギノ如クスルヲヨシトス.

例トヘバ a,b ヲ A,B ノ過剩ナル近似數トスレバ $\dfrac{A}{B}$, $\dfrac{a}{b}$ ハ $\dfrac{a}{b-\beta}$, $\dfrac{a-\alpha}{b}$ ノ間ニ在リ. 而シテ

$$\frac{a}{b}-\frac{a-\alpha}{b}=\frac{\alpha}{b}$$

$$\frac{a}{b-\beta}-\frac{a}{b}=\frac{a\beta}{b(b-\beta)}<\frac{a\beta}{(b-\beta)^2}$$

由テ $\dfrac{A}{B}$ ヲ $\dfrac{a}{b}$ ニテ換ユルトキ,生ズル誤差ノ限界トシテ $\dfrac{\alpha}{b}$, $\dfrac{a\beta}{(b-\beta)^2}$ ノ中ノ大ナルモノヲ取ルコトヲ得.

兩數共ニ不足ナルトキモ,同樣ノ論法ニヨリ,同樣ナル結果ニ歸セシムルコトヲ得.

特ニ被除數ガ近似數ニシテ,除數ガ精確ナル數ナルトキ,商ノ誤差ハ,被除數ノ誤差ノ限界ヲ除數ニテ除シタル商ヨリモ小ナリ.

反對ニ,被除數ハ精確ナル數ニシテ除數ガ近似數ナルトキ商ノ誤差ハ除數ノ誤差ト被除數トノ積ヲ

不足ニ取リタル除數ノ近似數ノ平方ニテ除シタル商ヨリモ小ナリ.

以上二ツノ事項ハ,一般ノ場合ニ於ケル α,β ノ何レカ一ツヲ零トシテ證明スルコトヲ得.

例. $a=3.1415927$, $b=0.0178964$ ハ A,B ノ過剩ナル近似數ニシテ其誤差ハ $\dfrac{1}{2\times10^7}$ ヨリモ小ナリ. A/B ノ値ヲ如何ナル程度マデ精密ニ求メ得ベキカ.

$\dfrac{A}{B}$ ノ値トシテ $\dfrac{a}{b}$ ヲ取ルトキ,誤差ハ次ノ二數ノ

$$\frac{\frac{1}{2\times10^7}}{0.01}=\frac{1}{2\times10^5},\quad \frac{4\times\frac{1}{2\times10^7}}{(0.01)^2}=\frac{2}{10^3}$$

中ノ大ナルモノ 0.002 ヨリモ小ナリ

$\dfrac{a}{b}$ ヲ小數ニ化スルトキ 175.5432.........ヲ得. 此ノ小數ハ 0.002 ヨリモ,信用スルヲ得ザルモノナレバ斯クノ如ク多クノ數字ヲ取ルモ餘リ利益ナキナリ. 由テ小數第四位以下ヲ切リ捨テン,然ルトキハ,之ガタメニ新タニ誤差ヲ生ジ,前ヨリノ誤差ニ加ハル,切リ捨テヨリ生ズル誤差ハ 0.001 ヨリモ小ナルヲ以テ, $\dfrac{A}{B}$ ノ値トシテ 175.543 ヲ取ルトキノ誤差ハ, 0.002

$+0.001=0.003$ ヨリモ小ナリ. 而シテ $\frac{A}{B}$ ハ 17.546 ト 175.541 トノ間ニ在リテ 175.54 ハ商ニ 0.01 ヨリモ近キ不足ナル數ナリ.

注意. 例トヘバ,或ル近似數 1234.56789 ノ誤差ハ, 0.1 ヨリモ小ナリト云フ場合ニ,小數第二位以下ノ數字ハ信用スルヲ得ザルガ故ニ,此ノ如ク長キ數ヲ取ルノ要ナケレバ,之ヲ省クトキ,之ヨリ生ズル誤差ハ,前ヨリノ誤差ヲ加減スルコトヽナル.

若シ此ノ近似數ガ不足ノモノナルトキ,眞實ナル數ハ 1234.56789 ト 1234.66789 トノ間ニ在ルガ故ニ,近似數ノ小數第二位以下ヲ繰リ上ゲ 1234.6 トス.

若シ此ノ近似數ガ過剩ノモノナルトキ,眞實ナル數ハ 1234.56789 ト 1234.46789 トノ間ニ在ルガ故ニ,近似數ノ小數第二位以下ヲ切リ捨テ 1234.5 トスベシ.

若シ誤差ノ向キヲ與ヘザルトキ,眞實ナル數ハ 1234.66789 ト 1234.46789 トノ間ニ在ルコトヨリ知ル能ハザルヲ以テ 1234.6, 1234.5, 1234.4 ノ何レヲ取ルモ皆誤差ガ 0.1 ヨリモ小ナリトハ保シ難ク,唯 0.2 ヨリモ小ナリト云フ外無シ.

第五　平方根

41. 或ル近似數ノ平方根ノ誤差ハ,近似數ノ誤差ノ限界ヲ不足ニ取リタル近似數ノ平方根ノ二倍ニテ除シタル商ヨリモ小ナリ.

a ハ A ノ不足ナル近似數ニシテ,誤差ハ α ヨリ小ナリトス. 然ルトキハ $\sqrt{A}-\sqrt{a}$ ハ $\sqrt{a+\alpha}-\sqrt{a}$ ヨリモ小ナリ. 今 $\sqrt{a+\alpha}-\sqrt{a}$ ニ $\sqrt{a+\alpha}+\sqrt{a}$ ヲ乘ジ又除スレバ

$$\sqrt{a+\alpha}-\sqrt{a}=\frac{\alpha}{\sqrt{a+\alpha}+\sqrt{a}}<\frac{\alpha}{2\sqrt{a}}$$

a ガ過剩ナル近似數ナルトキモ同樣ニシテ證明スルヲ得.

例トヘバ 3.1416 ハ π ニ 0.00001 ヨリモ近キ過剩ナル近似數ナリ. 今此ノ數ノ平方根ヲ求メ 1.772453……ヲ得. 然ルニ此ノ平方根ノ誤差ハ

$$\frac{0.00001}{2\times1.7}<0.000004$$

ヨリモ小ナリ. 由テ $\sqrt{\pi}$ ハ 1.772453……ト 1.772449……トノ間ニ在リテ 1.77245 ハ之ニ 0.00001 ヨリモ近キ數ナリ.

與ヘラレタル近似數ノ平方根ハ,小數第五位マデ

ヨリ信用シ得ザルヲ以テ省略法ニヨリ小數第五位マデ求メ,不足ナル近似數トシテ 1.77245 ヲ得. 而シテ $\sqrt{3.1416}$ ハ $\sqrt{\pi}$ ノ過剩ナル近似數ニシテ誤差ハ 0.00001 ヨリモ小ナリ. 由テ 1.77245 ハ $\sqrt{\pi}$ ニ 0.00001 ヨリモ近キ數ナリ (40注意).

第六　立方根

42. 或ル近似數ノ立方根ノ誤差ハ,近似數ノ誤差ノ限界ヲ不足ニ取リタル近似數ノ平方ノ立方根ノ三倍ニテ割リタル商ヨリモ小ナリ.

平方根ニ於ケルト同樣 a ヲ A ノ不足ナル近似數トシ,誤差ヲ α ヨリ小ナリトスレバ $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{a}$ ハ $\sqrt[3]{a+\alpha}-\sqrt[3]{a}$ ヨリモ小ナリ. 而シテ

$$\sqrt[3]{a+\alpha}-\sqrt[3]{a}=\frac{(\sqrt[3]{a+\alpha}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{(a+\alpha)^2}+\sqrt[3]{a+\alpha}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})}{\sqrt[3]{(a+\alpha)^2}+\sqrt[3]{a+\alpha}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}$$

$$=\frac{\alpha}{\sqrt[3]{(a+\alpha)^2}+\sqrt[3]{a+\alpha}\sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{a^2}}<\frac{\alpha}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

過剩ナル近似數ニ就テモ,同樣ニシテ證明スルコトヲ得.

例ヘバ π ノ近似數 3.1416 ノ誤差ハ 0.00001 ヨリ

モ小ナリトスルトキ其立方根ヲ求メ 1.464593…ヲ得. 結果ノ平方ハ 2 ヨリモ大ナルガ故ニ立方根ノ誤差ハ $\frac{0.00001}{3\times2}<0.000002$ ヨリモ小ナリ. 由テ $\sqrt[3]{\pi}$ ハ 1.464591……… ト 1.464593…… トノ間ニ在リテ, 1.46459 ハ 0.00001 ヨリモ近キ不足ナル近似數ナリ.

第七　雜問

43. 若干ノ應用問題ヲ解カントス.

1. 次ギノ三ツノ分數ノ和ニ $\frac{1}{10^4}$ ヨリモ近キ數ヲ求ム

$$\frac{18257}{32549},\quad \frac{423678}{59474},\quad \frac{27}{9953}.$$

各分數ヲ小數第五位マデ計算シ其和ヲ作ルトキ

$$\begin{array}{r} 0.56090 \\ 7.12375 \\ \underline{0.00271} \\ 7.68736 \end{array}$$

誤差ハ各近似數ノ誤差ノ限界ノ和 $\frac{3}{10^5}$ ヨリモ小ナリ. 今,和ノ近似數トシテ 7.6873 ヲ取ルトキ,其誤差ハ $\frac{3}{10^5}+\frac{7}{10^5}=\frac{1}{10}$ ヨリモ小ニシテ 7.6873 ハ所要ノモノナリ.

2. 某數ノ値トシテ次キノ分數ノ和ヲ取ルトキ誤差ハ $\frac{1}{3\times10^6}$ ヨリモ小ナリ:

$$\frac{5}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{120},\ \frac{1}{720},\ \frac{1}{5040},\ \frac{1}{40320},\ \frac{1}{362880}$$

某數ニ $\frac{1}{10^6}$ ヨリ近キ數ヲ求ム.

第一ノ分數ハ正確ニ小數ニ化スルヲ得,他ノ七ツノ分數ハ小數第 n 位ニ止メ,以下四捨五入スルコトニヨリ $\frac{1}{2\times10^n}$ ヨリ小ナル誤差ヲ有スル小數ニ化スルコトヲ得. 斯クシテ得タル小數ノ和ヲシテ問題ノ答數ナラシメンニハ,各分數ノ値トシテ近似數ヲ取リタルヨリ生ズル誤差ト,分數ノ和ヲ某數ノ値トシテ取ルヨリ起ル誤差トノ和ガ $\frac{1}{10^6}$ ヨリ小ナル樣即チ次キノ不等式ガ成立スル如ク, n ヲ充分大ナラシムレバ足レリ

$$\frac{7}{2\times10^n}+\frac{1}{3\times10^6}<\frac{1}{10^6}$$

或ハ
$$\frac{7}{2\times10^n}<\frac{2}{3\times10^6}$$

之ガタメニ $n=7$ トスレバヨシ.由テ各分數ヲ小數第七位マデ計算シ以下四捨五入シテ其和ヲ作リ, 2.7182816 ハ所要ノモノナリ. 次キノ理論ニヨリ小數第六位ニ止メテ問題ニ適スル數ヲ作ルコトヲ得圏點ヲ附シタル四ツノ數ハ過剩,他ノ

$$\begin{array}{r}
2.5000000\phantom{^{\circ}} \\
0.1666667^{\circ} \\
0.0416667^{\circ} \\
0.0083333\phantom{^{\circ}} \\
0.0013889^{\circ} \\
0.0001984\phantom{^{\circ}} \\
0.0000248\phantom{^{\circ}} \\
0.0000028^{\circ} \\
\hline
2.7182816\phantom{^{\circ}}
\end{array}$$

三ツノ數ハ不足ニシテ,誤差ノ向キヲ異ニスルモノアルガ故ニ,上ノ誤差ヲ一層縮ムルコヲ得(35)分數ノ和トシテ之等ノ數ノ和ヲ取ルヨリ生ズル誤差ハ $\frac{1}{3\times10^6}$ ヨリ小ナルガ故ニ總體ノ誤差ハ

$$\frac{4}{2\times10^7}+\frac{1}{3\times10^6}<\frac{5.4}{10^7}$$

ヨリモ小ナリ.由テ某數ハ 2.71828214 ト 2.71828106 トノ間ニ在リテ 2.718282 ハ過剩或ハ不足ニ於テ $\frac{1}{10^6}$ ヨリモ近キ數ナリ.

<u>注意</u> 級數 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots\cdots$ ノ近似値トシテ,最初ノ $n+1$ 項ノ和ヲ取レバ,誤差 α ハ殘レル諸項ノ和ニ等シ:

$$\alpha=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots\right]$$

括弧內ニ在ル第二項以下ノ分母ノ因子ハ,皆 $n+1$ ヨリモ大ナルヲ以テ,其總和ハ 1 ヨリ小ナル公比ヲ有スル等比級數

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\cdots\cdots$$

ノ總和 $\frac{1}{n+1}\Big/\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}$ ヨリモ小ナリ，由テ

$$a<\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n!}.$$

故ニ，第 $n+1$ 項マデノ和ヲ級數ノ總和ノ代リニ取ルトキ誤差ハ和ノ最終項ノ $\frac{1}{n}$ ヨリモ小ナリ．例トヘバ $n=9$ トシテ第 10 項マデヲ取ルトキ誤差ハ $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9!}$ ヨリモ小ナリ．然ルニ $\frac{1}{9!}<\frac{1}{350000}$ ニシテ $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9!}<\frac{1}{3\times10^6}$ ナルヲ以テ誤差ハ $\frac{1}{3\times10^6}$ ヨリモ小ナリ．今，級數ノ各項ヲ計算シテ第 10 項マデニ至ルトキハ，丁度上ノ問題ヲ生ズルヲ見ル．

逆ニ，級數ノ和ヲ $\frac{1}{10^6}$ ヨリ近キ數ヲ求メントスルトキ(スミス算術書等ニ見ル如ク)級數ヲ第 $n+1$ 項マデニ止メテ之ガ和ヲ作ルトキ，之ガタメニ生ズル誤差ハ $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n!}$ ヨリモ小ナルベク，又此ノ和ヲ求ムルタメニ各項ノ値ヲ小數第 k 位マデ取リ，以下四捨五入スルトセバ，之ガタメニ生ズル誤差ハ $\frac{1}{2\times10^k}$ ヨリモ小ニシテ第四項以下ニ在ル $n-2$ 項ハ皆此ノ誤差ヲ犯スヲ以テ總計ノ誤差ハ $\frac{n-2}{2\times10^k}$ ヨリモ小ナリ．由テ問題ヲ解クタメニ次ギノ不等式ニ適スル如ク

n, k ヲ定メザルベカラズ

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n!}+\frac{n-2}{2.10^k}<\frac{1}{10^6}$$

之ガタメニ，次ギノ二ツノ不等式ノ成立スルヲ以テ足レリトス

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n!}<\frac{1}{2.10^6} \qquad (1)$$

$$\frac{n-2}{2.10^k}\geqq\frac{1}{2.10^6} \qquad (2)$$

(1)ノタメニ $n.n!>2.10^6$ ナルヲ要ス．左邊ニ在ル n ニ順次 2, 3,........等ノ値ヲ與ヘテ 9 ニ至ルトキ此ノ不等式ハ成立スルヲ見ル．由テ第10項マデ取ル．

(2)ノタメニ $n=9$ トシテ次ギノ關係ヲ要ス

$$\frac{7}{2\times10^k}<\frac{1}{2.10^6}$$

或ハ $10^k>7\times10^6$

之ガタメニ $k=7$ トスレバ足レリ

故ニ，初メヨリ十項マデヲ小數第七位マデ求メ，以下四捨五入スレバ，ヨク目的ヲ達スルヲ得ベシ．

級數ヲ第十項マデニ止メテ得ベキ和ハ不足ナル近似數ニシテ誤差ハ $\frac{4}{10^7}$ ヨリモ小ナリ．各項ヲ小數ニテ表ハシタルトキ不足ナルモノ三ツ，過剰ナルモ

ノ四ツアリ. 由テ級數ノ總和ハ上ニ得タル和ニ $\frac{6}{10^7}$ ヲ加ヘタルモノト之ヨリ $\frac{2}{10^7}$ ヲ減ジタルモノ即チ 2.7182822 ト 2.7182814 トノ間ニ在リ. 由テ 2.718282 ハ級數ニ $\frac{1}{10^6}$ ヨリモ近キ數ナリ.

3. 二ツノ近似數 3.14159265, 2.71828182 ノ誤差ハ共ニ $\frac{1}{10^8}$ ヨリモ小ナリ. 眞實ナル數ノ積ニ $\frac{1}{10^3}$ ヨリ近キ數ヲ求ム.

此ノ近似數ノ積ヲ作ルトキ誤差ハ $\frac{4+3}{10^8}<\frac{1}{10^7}$ ヨリ小ナルガ故ニ,此ノ積ヨリ, $\frac{1}{10^3}$ ヨリ近キ數ヲ求ムルハ容易ナリ. 然レドモ此ノ積ヲ作ルタメニ少ナカラザル手數ヲ要スルガ故ニ,與ヘラレタル近似數ノ又近似數ヲ用キテ運算ヲ簡約セントス.

計算ニ用フル二ツノ近似數ハ誤差ノ限界ヲ α,β トシ,次ギノ不等式ニ適スル如ク定ムルヲ要ス. 但シ a_1, b_1 ハ過剩ニ取リタル近似數ノ近似數ナリ.

$$\beta a_1+\alpha b<\frac{1}{10^3}$$

之ガタメニ　$a_1\beta<\frac{1}{2\times10^3},\quad \alpha b_1<\frac{1}{2\times10^3}$

隨テ a_1, b_1 ヲ 4,3 トシ

$$4\beta<\frac{1}{2\times10^3},\quad 3\alpha<\frac{1}{2\times10^3}$$

或ハ　$\beta<\frac{1}{8\times10^3},\quad \alpha<\frac{1}{6\times10^3}$

ナル如ク,隨テ α,β ハ $\frac{1}{10^4}$ ヨリ小ナレバ足レリ. 依テ二數ノ値トシテ,小數第四位以下四捨五入セル 3.1416, 2.7183 ヲ取ルトキ,各誤差ハ $\frac{1}{2\times10^4}$ ヨリ小ニシテ,此ノ二數ノ積ハ 8.53981128 ナリ. 今,此ノ積ノ代リニ 8.540 ヲ取ルトキ誤差ハ $\frac{2}{10^4}$ ヨリ小ニシテ,積ノ誤差ハ $\frac{4+3}{2\times10^4}$ 即チ $\frac{7}{2\times10^4}$ ヨリ小ナルガ故ニ,總體ノ誤差ハ

$\frac{1}{10^7}+\frac{2}{10^4}+\frac{7}{2\times10^4}<\frac{6}{10^4}<\frac{1}{10^3}$ ヨリ小ナリ. 由テ 8.540 ハ所要ノモノナリ.

注意. 上ニハ,都合ヨク小數第三位マデニテ終ル數ニテ, $\frac{1}{10^3}$ ヨリ小ナル誤差ヲ有スル數ヲ見出シ得タリト雖モ,一般ニ此ノ如キ方法ニヨリカヽル數ヲ得ベキモノニアラズ. 斯ル場合ニハ最初積ヲ $\frac{1}{2\times10^3}$ ヨリ小ナル誤差ニテ計算シ,其結果ヲ小數第三位ニ止メ以下四捨五入スベシ. 然ルトキ之ガタメニ起ル誤差ハ $\frac{1}{2\times10^3}$ ヨリ小ナルヲ以テ,總體ノ

誤差ハ $\frac{1}{2\times10^3}+\frac{1}{2\times10^3}$ 即チ $\frac{1}{10^3}$ ヨリモ小ナレバナリ.

與ヘラレタル二數ノ積ヲ小數第三位マデ求ムル如ク排列シテ省略掛ケ算ヲ行フトキ 8.53962 ヲ得. 此省略算ヨリ生ズル誤差ハ $\frac{24}{10^5}$ ヨリ小ニシテ,近似數ヲ取リタルヨリ生スル誤差ハ $\frac{1}{10^7}$ ヨリ小ナルヲ以テ,茲ニ得タル數ヲ眞實ナル積ノ代リニ用ユルトキ誤差ハ $\frac{24}{10^5}+\frac{1}{10^7}$ ヨリモ小ナリ. 由テ 8.539 ハ小數第三位マデ正シキ數ニシテ,前ノ方法ニヨリ得タル 8.540 ハ過剩ナル近似數ナリ.

4. 次ギノ三數ノ積ヲ $\frac{1}{100}$ ヨリ近キ數ヲ,小數第二位マデノ數ニテ求ム

17.8730216, 0.0284513, 2.6035712.

前題ノ注意ニヨリ,先ヅ $\frac{1}{2\times100}$ ヨリ近キ數ヲ求ムルヲ要ス. 之ガタメニ初メノ二數ノ積ヲ求メ之レニ第三ノ數ヲ掛ケン. 計算ニ必用ナル初メノ二數ノ積ノ近似數ノ誤差ヲ δ,第三數ノ近似數ノ誤差ヲ γ トスレバ

$$d_1\gamma+c_1\delta<\frac{1}{2\times100}$$

或ハ $d_1\gamma<\frac{1}{400},\quad c_1\delta<\frac{1}{400}$

ナレバ足レリ. 但シ d_1 ハ初メノ二數ノ積, c_1 ハ第三數ノ過剩ナル或ル近似數ヲ表ハス. 而シテ初メノ二數ノ積ハ $20\times0.03=0.6$ ヨリ小ナリ,由テ $d_1=0.6$, $c_1=3$ トスレバ

$$\gamma<\frac{1}{400\times0.6},\qquad \delta<\frac{1}{400\times3}$$

ナレバ充分ナルガ故ニ $c=2.603$ 或ハ 2.604 ヲ取レバ其誤差 $\frac{1}{1000}$ ヨリ小ナルヲ以テ計算ニ用フルコトヲ得. 然レドモ,茲ニハ 2.60 ニテ差支ナシ,何ントナレバ,誤差ハ $\frac{4}{1000}$ 即チ $\frac{1}{250}$ ヨリ小ナレバナリ.

計算ニ用フル初メノ二數ノ近似數ノ誤差ヲ α, β 過剩ナル或ル近似數ヲ a_1, b_1 トスレバ

$$\beta a_1+\alpha b_1<\frac{1}{1200}$$

ナルガ如クスレバ足レリ. 然レドモ此ノ不等式ニ適スル如ク近似數ヲ定メ,其積ヲ其儘第二ノ掛ケ算ニ用フルトキハ,長キ手數ヲ要スルガ故ニ,之ヲ輕減

スルタメニ,先ヅ,最初ノ二數ノ積ニ $\frac{1}{10^4}$ ヨリ近キ數ヲ求メ之ヲ小數第三位ニ止メ以下四捨五入スルトセバ總體ノ誤差ハ

$$\frac{1}{2\times1000}+\frac{1}{10000}<\frac{1}{1200}$$

ニテ差支ナシ. 由テ

$$\beta a_1+\alpha b_1<\frac{1}{10^4}$$

ナラシム,之ガタメニ $a_1=20$, $b_1=0.03$ トシ

$$\beta<\frac{1}{2\times10^4\times20},\qquad \alpha<\frac{1}{2\times0.03\times10^4}$$

或ハ
$$\beta<\frac{1}{4\times10^5},\qquad \alpha<\frac{1}{10^3}$$

ナル如クスレバ上ノ不等式ニ適ス.

由テ, 17.873, 0.2845 ノ積 0.50848685 ニ於ケル小數第三位以下四捨五入シテ 0.508 トナシ,之ニ 2.60 ヲ乘ジテ 1.3208 ヲ得. 眞實ナル積ニ 0.01 ヨリ近キ所要ノ數ハ 1.32 ナリ.

5. **40** ノ例ニ取リタル近似數ヲ用キテ, $\frac{A}{B}$ ニ一ヨリ近キ數ヲ求ム.

40 ニ述ベタル所ニヨリ直チニ答數ヲ得ベシト雖モ,茲ニハ運算ヲ簡單ニスルタメニ,割リ算ニ用フル b ノ數字ヲ少ナクセントス. 尤モ, a ハ變ズル

ノ必用ナシ,何ントナレバ割リ算ノ面倒ナルハ除數ノ長キニ在レバナリ. 計算ニ用フル b ノ近似數ヲ b' トシ,其誤差ヲ β トスレバ $\frac{a}{b'}$ ヲ $\frac{a}{b}$ ノ代リニ用フル誤差ハ (40)

$$\frac{4\beta}{(0.01)^2}=40000\beta$$

ヨリ小ナリ. 今 $b'=0.0179$ トスレバ, $\beta<\frac{1}{10^5}$ ニシテ上ニ書ケル誤差ハ 0.4 ヨリ小ニシテ, $\frac{a}{b'}$ ヲ $\frac{A}{B}$ ノ代リニ用フルタメニ生ズル誤差ハ 0.4+0.002 即チ 0.5 ヨリ小ナリ. 由テ $\frac{a}{b'}$ ヲ整數第一位マデ計算シ小數位ニ於テ四捨五入スルトキハ所要ノモノヲ得ベシ. 由テ 3.1415927 ヲ 0.0179 ニテ割リ 175.50……ヲ得, 176 ヲ以テ答トス. 若シ 175 ヲ取ルトセバ其誤差ハ 0.51+0.4002 即チ 1 ヨリモ小ナリ;サレバ 175 176 共ニ $\frac{A}{B}$ ニ 1 ヨリ近キ數ニシテ, 175 ハ眞實ナル數ノ最初ノ三位ト合スルモノナリ.

注意. 與ヘラレタル二ツノ數ノ商ヲ小數第一位マデ計算スル如ク排列シテ省略算ヲ行フトキハ 175.5 ヲ得. 之レヲ $\frac{A}{B}$ ノ代リニ取ルトキ誤差ハ 0.1+0.002 ヨリモ小ナリ. 由テ 175 ハ所要ノモノナリ.

6. 半徑一米ノ圓ニ內接スル正五角形ノ一邊ヲ0.1粍マデ計算セヨ.

幾何學ノ示ス所ニヨリ,一邊ハ $\sqrt{2.5-\sqrt{1.25}}$ 米ナルガ故ニ,之ヲ 0.0001 米マデ計算セントス. 之ガタメニ,此ノ數ノ平方根ニ $\frac{1}{2\times10^4}$ ヨリ近キ數ヲ求メ,此ノ小數第四位ニ止メ,以下四捨五入スルトセン. 之ガタメニ,計算ニ用キラルヽ根號內ノ數ノ近似數ノ誤差ヲ α トセバ,次式アル樣ニ誤差ヲ定ムレバヨシ.

$$\frac{\alpha}{2\times1}<\frac{1}{2\times10^4}\quad 即チ\quad \alpha<\frac{1}{10^4}$$

由テ,根號內ヲ小數第四位マデ計算スルヲ要ス. 之ガタメニ, $\sqrt{1.25}$ ヲ小數第四位マデ取リテ, 1.1180 トシ,2.5 ヨリ引キ, 1.3820 ヲ得. 之ヲ開平シテ 1.17558… ヲ得. 由テ 1.1756 米ヲ以テ答トス.

注意. $\sqrt{1.25}=1.11\ldots\ldots$, $2.5-\sqrt{1.25}=1.3\ldots\ldots$, $\sqrt{2.5-\sqrt{1.25}}=1\ldots\ldots$ 最後ニ書キタル平方根ヲ小數第四位マデ求ムベク,之ガタメニ根號內ノ數字ヲ,初メヨリ七箇ダケ計算スルヲ要ス. 之ガタメニ, $\sqrt{1.25}$ ヲ初メヨリ七箇計算シ $\frac{1}{10^6}$ ヨリ近キ不足ナル近似數トシテ 1.118033 ヲ得. 之ヲ 2.5 ヨリ引キテ $\frac{1}{10^6}$ ヨリ近キ過剩ナル近似數 1.381967 ヲ得. 之ヲ開平シテ $\frac{1}{10^4}$ ヨリ近キ不足ナル近似數 1.1755 ヲ得. 而シテ根號內ノ數ニ $\frac{1}{10^6}$ ヨリ近キ過剩ナル近似數ノ 1.381967 ノ最後ノ數字ヨリ 1 ヲ引クモ平方根ニ變化ヲ生ズルコトナシ. 由テ 1.1755 ハ所要ノモノナリ.

前ノ仕方ニ於テ,用キタル 1.1180 ハ不足ナル近似數ナルガ故ニ,之ヲ 2.5 ヨリ引キタル差ハ根號內ノ數ニ 0.0001 ヨリ近キ過剩ナル近似數ナリ. 由テ,此ノ差ヲ開平シテ得タル 1.17558……… ハ,眞實ナル平方根ニ 0.00005 ヨリ近キ過剩ナル近似數ナレバ,眞實ナル數ハ, 1.17558……… ト 1.17553……… トノ間ニ在ルガ故ニ, 1.1755 ハ $\frac{1}{10^4}$ ヨリ近キ不足ナル近似數, 1.1756 ハ $\frac{1}{10^4}$ ヨリ近キ過剩ナル近似數ニシテ,二ツノ仕方ニ於テ結果ハ何レモ正シキモノナルヲ知ル.

7. 直圓錐ノ半徑 R=28.453 米, 高サ h=47.542 米ハ,一粍マデノ近似値ナルトキ,之ト等立積ナル球ノ半徑ヲ求ム.

幾何學ニヨリ,半徑ニ $\sqrt[3]{\dfrac{R^2h}{4}}$ 米ナリ. 先ヅ立方根ノ誤差ヲ求ムルタメニ $R^2h=RRh$ ト書キ, R^2h ノ誤差ハ $0.001\times(1400+1400+900)=3.7$ ヨリ小ナリ. 之ヲ4ニテ除シタル根號內ノ數ノ誤差ハ1ヨリ小ナリ. 半徑ハ 20 米ヨリ大ナルヲ以テ立方根ノ誤差ハ $\dfrac{1}{3\times400}<\dfrac{1}{1000}$ ヨリモ小ナリ. 由テ與ヘラレタル數ヨリ計算セル半徑ハ,1粍マデ正シ. サレバ如何ニ此等ノ數ニ就テ,精密ナル計算ヲ施スモ,一粍ヨリ信用スル結果ヲ得ル能ハズ. 計算ヲ粍マデニ止ムルトキハ,再ビ誤差ヲ生ズルヲ以テ,合セテ二粍マデノ誤差ヲ以テ之ヲ計算セントス. 今與ヘラレタル數ヲ正確ナルモノトシテ計算セル結果ニ0.001ヨリ近キ數ヲ求ムルタメニ,小數第三位以下四捨五入ノ方法ヲ取ルトシ,之ガ計算ニ用フル根號內ノ數ノ誤差ヲ α トスレバ,立方根ニ於テ之ガタメニ生ズル誤差ハ $\dfrac{\alpha}{3\times400}$ ヨリ小ナリ. 由テ $\dfrac{\alpha}{3\times400}<\dfrac{1}{2\times1000}$ 或ハ $\alpha<\dfrac{1}{2}$ ナル如ク, R^2h ニ2ヨリ近キ數ヲ求ムレバ足レリ. 計算ニ用フル h,R^2 ノ近似數ノ誤差ヲ α,β トスレバ $900\alpha+48\beta<2$ 或ハ

$$\alpha<\frac{1}{1000},\quad \beta<\frac{1}{50}$$

ナレバ足レリ.

R^2 ヲ計算スルニ,次ノ如ク排列シテ,省略算ヲ行フトキ結果ノ誤差ハ 12×0.001 ヨリ小サク. R^2 ハ 809.568 ト 809.580 トノ間ニ在リ. 近似數トシテ 809.57 ヲ取ルトキ,誤差ハ $\dfrac{2}{100}=\dfrac{1}{50}$ ヨリモ小ナリ.

```
 28.45 30
  354.82
---------
 5690 60
 2276 24
  113 80
   14 20
      84
---------
 809.568
```

$\alpha<\dfrac{1}{1000}$ ナルコトハ h ハ其儘用フルコトヽナルヲ以テ, R^2h ヲ次ギノ如ク排列シテ計算ス.

省略算ヨリ起ル誤差ハ1ヨリ小ニシテ, 被乘數ヨリ起ル積ノ誤差ハ $50\times0.02<1$ ヨリ小ナルヲ以テ (37), R^2h ノ値トシテ 38489 ヲ取ルトキノ誤差ハ, 2 ヨリ小ナリ. 由テ,之ヲ4除シテ, 9622.25 ヲ得. 之ヲ開立シテ, 21.2690………ヲ得,之ヲ小數第三位ニ止メ,以下四捨五入シテ, 21.269 ヲ得. 之レ與ヘタル立方根ニ 0.001 ヨリ近キ數ニシテ此ノ立方根ノ誤差ハ 0.001 ヨリ小ナルヲ以テ半徑ハ二粍マデノ誤差ニ於テ 21.269 米ナリ.

```
  809.5 70
   24 5.74
----------
 3238 2 80
  566 6 99
   40 4 75
    3 2 36
      1 60
----------
 3848 9
```

例題

1. 一年ハ365.242217日ナリ．今近似數トシテ次ギノモノヲ取ルトキノ誤差ヲ計算セヨ．

$$365+\frac{1}{4}-\frac{3}{400},\quad 365+\frac{8}{33},\quad 365+\frac{1}{4}-\frac{1}{128}$$

$$365+\frac{1}{5}+\frac{1}{24}.$$

2. $3+\frac{1}{7}-\frac{1}{790}+\frac{1}{749896}$ ハ某數 a ノ近似數ニシテ其誤差ハ最後ノ分數ノ平方ヨリ小ナリトシ．出來得ルダケ精密ナル a ノ値ヲ求ム．

3. 1.4142135ハ某數ニ $\frac{1}{10^7}$ ヨリ近キ數ナリ．此ノ數ノ平方ノ近似ノ度如何

4. 3.1415927ハ某數ノ $\frac{1}{2\times10^7}$ ヨリ近キ數ナリ．某數ノ逆數ヲ出來得ルダケ精密ニ小數ニテ表ハセ，

5. 二數 a,b ノ $\frac{1}{10^6}$ ヨリ近キ値ハ．3.141592, 2.718281ナリ；a^2/b, a^2b, a/b^2 ノ値ヲ小數第二位マデ計算セヨ．

6. 周圍37.452米ノ圓ノ直徑ヲ計算セヨ．
但シ圓周ハ一粍マデノ誤差ナシ．

7. 鐵一立方粉ノ目方7.8瓩ナルトキハ，200.7瓩

ノ鐵ノ立方體ノ一邊ノ長サヲ粍マデ計算セヨ．

8. 年利若干ノ複利ニテ，3700圓ノ金ガ二ケ年間ニ4356.50圓ニナレリト云フ．年利ノ率ヲ厘マデ計算セヨ．

9. 0.030103ハ $log2=\frac{1}{2\times10^5}$ ヨリ近キ數ナルトキ，之ヲ用ヰテ $log\left(2^{100}\right)$ ヲ計算スルトキ誤差ヲ求メヨ．

10. $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ヲ小數第七位マデ正シク計算セヨ．

11. $\cos 18^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ ヲ小數第七位マデ計算セヨ．

12. 一ラヂアンヲ六十進法ニテ表ハシ秒ノ百分ノ一マデ出セ．

13. $\sin 66^\circ=\frac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right)$ ヲ小數第五位マデ求ム．

14. 704米，302米，670米ヲ三邊トスル三角形ノ面積ヲ平方粉マデ出セ．

15. 前題ニ於ケル各邊ノ誤差ガ一米ヨリ小ナルトキ，面積ヲ出來得ルダケ精密ニ出セ．

16. $x^2+8x+13=0$ ノ根ヲ小數第三位マデ出セ

17. $3x^2+17x-9=0$ ノ根ヲ小數第三位マデ求ム

18. $x^4+8x^2+13=0$ ノ根ヲ小數第二位マデ求ム

19. 立方體アリ,其體積 250 立方寸アリト云フ一邊ノ長サヲ粍マデ出セ.

20. 三ツノ球アリ,其直徑,甲ハ 1.55 尺,乙ハ 2.83 尺,丙ハ 3.42 尺ナリ. 此ノ三ツノ球ト立積ヲ等シクスル球ノ直徑ヲ求ム. 但シ與ヘラレタル球ノ直徑ハ分マデノ誤差ナシ.

21. $\dfrac{1-\sqrt{0.133}}{\sqrt{0.0256}+1}$ ヲ小數第四位マデ計算セヨ.

第三章　近似數ノ計算ノ續キ

44. 前章ニ論ジタル事項ハ,關係誤差ト稱スルモノヽ助ケニヨリ,別種ニ解釋ヲ下スコトヲ得. 以下,先ヅ,關係誤差ノ何ナルカヲ示シ,前ニ用キタル誤差トノ關係ニ說キ及ボシ,遂ニ之レガ應用ニ至ラントス.

45. 關係誤差,絕對誤差. 或ル精確ナル數ニテ,其或ル近似數ノ誤差ヲ除シタル商ヲ,此ノ近似數ノ關係誤差ト稱ス.

關係誤差ニ對シテ,前ノ多クノ場合ニ用キタルガ如キ誤差ヲ,特ニ絕對誤差ト云フ.

絕對誤差ハ,單ニ誤差ト稱スルコトアリト雖モ,關係誤差ハ省略セザルモノトス.

或ル量ヲ測定シタルトキ,其精粗ハ關係誤差ニヨリ判斷スルヲ至當トス. 例ヘバ道路ノ長サヲ測ルニ方リテ生セシ一糎ノ誤差ハ許スヲ得ベシト雖モ氣壓ノ測定ニ斯クノ如キ大ナル誤差ヲ許サズ. 而シテ此ノ場合ニ絕對誤差ハ共ニ一糎ナレドモ,關係

誤差ハ前者小ニシテ,後者大ナルガ如シ.

定義ニヨリ,或ル數 A ノ近似數ノ誤差ヲ a, 關係誤差ヲ r トスレバ, $r=\frac{a}{A}$ ニシテ; 逆ニ $a=rA$ ナリ.

46. 誤差ノ最大限ヲ知リテ,關係誤差ノ最大限ヲ求ムルコト. 或ル近似數ニ於ケル最モ左ニ在ル有功數字ハ正シクシテ,其誤差ハ之ニ次グ m 桁目ノ一ニ及バザルトキ,關係誤差ハ左ノ端ノ有功數字ノ次ギニ, m 箇ノ零ヲ附加シタル數ニテ, 1 ヲ除シタル商ヨリモ小ナリ.

例ヘバ 5678.91011 ナル精確ナル數ニ對シ, 5670 ヲ近似數トシテ取ルトキ,其關係誤差ハ $\frac{1}{500}$ ヨリ小ナリ. 何ントナレバ絶對誤差ハ 10 ヨリ小ナルガ故ニ

$$r<\frac{10}{5678.91011}<\frac{10}{5000} \text{ 即チ } \frac{1}{500}$$

ナレバナリ

又同ジ數ニ於テ, 5678.9 ヲ近似數トシテ取レバ關係誤差ハ $\frac{1}{50000}$ ヨリ小ナリ. 何ントナレバ,此ノ場合ニ $a<0.1$ ナルガ故ニ

$$r<\frac{0.1}{5678.91011}<\frac{0.1}{5000} \text{ 即チ } \frac{1}{5000}$$

ナレバナリ,

又別ニ, 0.005678 ナル數ノ近似數 0.0056 ノ關係誤差ハ $\frac{1}{50}$ ヨリモ小ナリ. 何ントナレバ

$$r<\frac{0.0001}{0.005678}<\frac{0.0001}{0.005} \text{ 即チ } \frac{1}{50}$$ ナレバナリ.

簡單ニ言ヒ表ハスタメニ,最モ左ノ端ニ在ル,有功數字ヲ 1 ト考フルコトアリ. 例トヘバ,第一例ニ於テノ關係誤差ハ $\frac{1}{500}$ ヨリ小ニシテ況シテ $\frac{1}{100}$ ヨリ小ナリ.

上ニ云ヘル事項ハ,小數點ニ關スルコトナク,近似數ハ,不足ナルモ,過剩ナルモ差支ナキコトニ注意スベシ.

47. 關係誤差ノ最大限ヲ知リテ,絶對誤差ノ最大限ヲ求ムルコト. 或ル近似數ノ關係誤差ガ,或ル數字ノ右ニ m 箇ノ零ヲ附シテ得タル數ニテ, 1 ヲ割リタル商ヨモリモ小ナルトキ,此ノ近似數ノ誤差ハ,有功數字ノ最モ左ノ端ノモノヨリ算ヘテ m 桁目ノ 1 ニ及バズ. 時トシテ, $m+1$ 桁目ノ 1 ニモ及バザルコトアリ.

例トヘバ關係誤差ハ $\frac{1}{40000}$ ヨリ小ナリトス

第一. 近似數ノ左ノ端ノ有功數字ハ4ヨリ小ニシテ3456.789ナリトス. 絕對誤差ハ眞數ノ四萬分一ヨリ小ニシテ,眞數ハ四千ヨリ小ナルヲ以テ,絕對誤差ハ $\frac{1}{40000}\times4000=0.1$ ヨリモ小ニシテ,初メノ有功數字ヨリ五桁目ノ1ニ及バズ.

第二. 近似數ノ左ノ端ノ數字ハ4ヨリ小ナラズシテ0.0567891ナリトスレバ,眞實ナル數ハ0.4ヨリモ小ナルガ故ニ,絕對誤差ハ $\frac{1}{40000}\times0.4=0.00001$ ヨリ小ニシテ,初メノ有功數字5ヨリ四桁目ノ1ニ及バズ.

48. 注意. 前二條ニ論ズルトコロニヨリ,次ノ命題ハ眞ナリ.

或ル精確ナル數ノ,左ノ端ノ有功數字ヨリ,第 m 桁目ノ1ヨリ近キ數ヲ求メンニハ,關係誤差ガ $\frac{1}{10^m}$ ヨリ小ナル近似數ヲ求ムレバ足レリ.

或ル近似數ノ關係誤差ヲ $\frac{1}{10^m}$ ヨリ小ナラシムルニハ,左ノ端ノ有功數字ヨリ, $m+1$ 箇ノ數字ヲ正シク計算スレバ足レリ.

以下各種ノ計算ノ結果ニ於ケル關係誤差ヲ求メ,且ツ之ヲ應用セントス.

第一　和及ビ差

49. 近似數ノ和或ハ差ノ關係誤差ト各數ノ關係誤差トノ間ニ重要ナル關係ナシ. 若シ特ニ之ヲ求ムル必要アルトキハ,絕對誤差ヲ求メ,之ヲ和或ハ差ニテ割ルベシ.

第二　積

50 一ツハ正確,一ツハ近似ナル二數ノ積ノ關係誤差ハ,近似ナル因數ノ關係誤差ニ等シ.

a ハ A ノ不足ナル近似數ニシテ,其誤差ハ α; B ハ正確ナル數ナルトキ, AB ノ代リニ aB ヲ取レバ,其誤差ハ $AB-aB=(a+\alpha)B-aB=\alpha B$, 關係誤差ハ $\frac{\alpha B}{AB}=\frac{\alpha}{A}$ ニシテ, a ノ關係誤差ニ等シ. a ガ過剩ナル近似數ナルトキモ,之ニ同ジ.

51. 二ツノ不足ナル近似數ノ積ノ關係誤差ハ,各因數ノ關係誤差ノ和ヨリ,其積ヲ減ジタル差ニ等シ.

a, b ハ A,B ノ不足ナル近似數ニシテ,其誤差ハ α,β

ニ等シトス. 今ABノ代リニabヲ取ルトキ,其誤差ハ次ノ如シ

$$AB-ab=AB-(A-\alpha)(B-\beta)=\alpha B+\beta A-\alpha\beta$$

由テ關係誤差ハ

$$\frac{\alpha B+\beta A-\alpha\beta}{AB}=\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}-\frac{\alpha}{A}\cdot\frac{\beta}{B}$$

故ニ上ノ命題ハ證明セラレタリ.

之ト同樣ニシテ,次ギノ二ツノ命題ヲ證明スルコトヲ得.

52. 二ツノ過剩ナル近似數ノ積ノ關係誤差ハ,各因數ノ關係誤差ノ和ト,其積ヲ加ヘタルモノニ等シ.

53. 一ツハ不足,一ツハ過剩ナル近似數ノ關係誤差ハ,各因數ノ關係誤差ノ差ヨリ,其積ヲ引キタルモノ,或ハ加ヘタルモノニ等シ.

54. 普通計算ニ用キラルル近似數ノ關係誤差ハ,近似數ニ比シテ小,又二ツノ關係誤差ノ積ハ,各關係誤差ニ比シテ小ナリ. 由テ此ノ積ヲ省略スルコトヲ得. 然ルトキハ次ギノ命題ヲ得.

二ツノ近似數ノ積ノ關係誤差ハ,各因數ノ關係誤差ノ和或ハ差ニ等シ.

此ノ命題ハ,多少嚴格ヲ缺クト雖モ,之ヲ應用スル上ニハ,何等不都合ヲ來タサザルナリ. 若シ疑ヒヲ生ゼシ場合ニハ,各問題毎ニ省カレタル部分ガ結果ニ變化ヲ及ボサザルヲ證明スレバ足レリ.

55. 數多ノ因數ノ場合 數多ノ近似數ノ積ノ關係誤差ハ,過剩ナル因數ノ關係誤差ノ和ト,不足ナル近似數ノ關係誤差ノ和トノ差ニ等シ.

例トヘバ A,B,C,D ヲ過剩ナル近似數; M,N ヲ不足ナル近似數トスレバ; ABCDMN ハ二ツノ因數 ABC, MN ノ積ト見ルヲ得ベキガ故ニ,積ノ誤差ハ,各因數ノ關係誤差ノ差ニ等シ.

偖, ABC ノ關係誤差ハ, AB ノ關係誤差即チ A, B ノ關係誤差ノ和ト, C ノ關係誤差トノ和ニ等シ. MN ノ誤差ハ, M,N ノ關係誤差ノ和ニ等シ. 由テ上ノ命題ハ,證明セラレタリ.

特ニ,或ル近似數ノ第n冪ノ關係誤差ハ,近似數ノ關係誤差ノn倍ニ等シク;平方,立方ノ關係誤差ハ,近似數ノ關係誤差ノ二倍,三倍ニ等シ.

56. スベテノ場合ニ於テ,多クノ因數ノ積ノ關係誤差ハ,各因數ノ關係誤差ノ和ヨリモ大ナルコトナ

シト云フヲ得. 此レ實際ニ於テ,最モ重要ナル關係ナリ.

第三 商

57. 二ツノ近似數ノ商ノ關係誤差ハ,各近似數ノ關係誤差ノ和,或ハ差ニ等シ.

被除數ハ,商ト除數トノ積ニ等シキガ故ニ其關係誤差ハ,除數ト商トノ關係誤差ノ和或ハ差ニ等シ 由テ,逆ニ,商ノ關係誤差ハ,被除數,除數ノ關係誤差ノ和,或ハ差ニ等シ.

スベノ場合ニ於テ,商ノ關係誤差ハ,被除數,除數ノ關係誤差ノ和ヨリ大ナラズト云フヲ得. 之レ實際ニ用キラルヽ關係誤差ノ限界ニシテ,重要ナル關係ナリトス.

若シ被除數或ハ除數ノミ精確ナル數ナルトキ商ノ關係誤差ハ被除數或ハ除數ノ關係誤差ニ等シ.

第四 應用

58. 關係誤差ノ助ケニヨリ,商,積ニ關シテ(1)ノ第二,第三,ノ問題ヲ解カントス. 大抵ノ場合ニ於テ,第

二章ニ依ルヨリモ簡單ナリトス.

第二ノ問題ヲ解クニハ,計算ニ用フル,各數ノ關係誤差ノ限界ヲ求メ(46); (50) ヨリ (57) ニ至ル關係ヲ用キ積,或ハ商ノ關係誤差ノ限界ヲ求メ,此ノ限界ニ依リ,結果ニ於ケル近似ノ度ヲ知ルベシ (47).

59. 二ツノ近似數ノ積或ハ商ニ於ケル, m 箇ノ精確ナル數字ヲ得ンニハ,二數ニ於テ, $m+2$ 箇ノ精確ナル數字ヲ知ルヲ以テ足レリ.

求ムル數ガ, m 箇ノ精確ナル數字ヲ有スルタメニ,其關係誤差ハ $\frac{1}{10^m}$ ヨリ小(48); 隨テ二ツノ數ノ關係誤差ハ $\frac{1}{2\times10^m}$ ヨリ小ナレバ足レリ (56) (57). 而シテ,二ツノ數ニ於テ, $m+2$ 箇ノ精確ナル數字ヲ有スルトキ,其關係誤差ハ $\frac{1}{10^{m+1}}$ ヨリ小; マシテ $\frac{1}{2\times10^m}$ ヨリ小ナレバナリ.

然レドモ實際ニ於テハ,屢 $m+1$ 箇ノ精確ナル數字ニシテ足ルコトアリ. 何ントナレバ,若シ近似數ノ左ノ端ノ有功數字ガ 1 ヨリ大ナルトキ,其關係誤差ハ $\frac{1}{2\times10^m}$ ヨリ小ナレバナリ,

若シ二數ノ中,一ツガ精確ナル數ナルトキハ,他ノ

數ノ關係誤差ガ $\frac{1}{10^m}$ ヨリ小ナレバ足ルガ故ニ $m+1$ 箇ノ精確ナル數字ヲ知レバ充分ナリ.

60. 二ツノ近似數ガ少ナクモ, m 箇ノ精確ナル數字ヲ有スルトキ,其積或ハ商ニ於ケル $m-2$ 個ノ數字ハ精確ナリ.

何ントナレバ,此ノ二數ノ關係誤差ハ $\frac{1}{10^{m-1}}$ ヨリ小ニシテ,積或ハ商ノ關係誤差ハ $\frac{2}{10^{m-1}}$ ヨリ小; マシテ $\frac{1}{10^{m-2}}$ ヨリ小ナレバナリ.

上ニ示スモノハ精確ナル數字ノ最小限ニシテ,猶ホ一箇多ク精確ナル數字ヲ有スルコトアリ. 例ヘバ,二數トモ1ヲ以テ始マラザルトキ,其關係誤差ハ $\frac{1}{2\times10^{m-1}}$ ヨリ小ナルヲ以テ,積或ハ商ノ關係誤差ハ $\frac{1}{10^{m-1}}$ ヨリ小ナレバナリ.

又,一數ガ精確ニシテ,他ノ數ガ m 箇ノ精確ナル數字ヲ有スルトキ,積或ハ商ハ $m-1$ 箇ノ精確ナル數字ヲ有ス.

Aハ m 個ノ正確ナル數字ヲ有スル數ニシテ,Bハ

如何ホド精密ニモ求メ得ラルヽ數ナリトス. Bニ全ク精確ナル數ヲ用ユルトスルモ前ニ云ヘルコトニ由リテ見レバ, $m-1$ 個ヨリ多ク精確ナル數字ヲ有スル結果ヲ得ルコト保シ難シ. 由テ,Bノ或ル近似數ヲ用ヰルトキ, $m-1$ 個ヨリ多キ精確ナル數字ヲ得ルコト難シ.

Aガ2以上ノ數字ヲ以テ始マリ,Bガ1ヲ以テ始マレバ,Bノ $m+1$ 個ノ精確ナル數字ヲ取リテ計算スレバ,結果ノ關係誤差ハ

$$\frac{1}{2\times10^{m-1}}+\frac{1}{10^m}<\frac{2}{2\times10^{m-1}}=\frac{1}{10^{m-1}}$$

ヨリ小; 又Bガ1以上ノ數字ニテ始マルトキハ,其 m 箇ノ精確ナル數字ヲ取リテ計算スレバ,結果ノ關係誤差ハ $\frac{2}{2\times10^{m-1}}=\frac{1}{10^{m-1}}$ ヨリ小ナルガ故ニ,共ニ $m-1$ 個ノ精確ナル數字ヲ得ベシ. 若シAガ1ヲ以テ始マルトキハ, $m-2$ 個ヨリ多クノ數字ヲ計算シ得ルコト保シ難シ. Bガ如何ニ精密ナルモ,Aノ關係誤差ハ $\frac{1}{10^{m-1}}$ ヨリ小ナルコトノミヲ知ルヲ以テ, 結果ノ關係誤差モ亦 $\frac{1}{10^{m-1}}$ ヨリ小ナル外知ル能ハザレバナリ. 今BモAト同樣ニ, m 箇ノ精確ナル數字ヲ取リテ計算スレバ,結

果ノ關係誤差ハ $\frac{2}{10^{m-1}}$, 隨テ $\frac{1}{10^{m-2}}$ ヨリ小サク; 結果ニ於テ, $m-2$ 個ノ精確ナル數字ヲ得ベシ.

61. 二個以上ノ場合. 例トヘバ三個ノ數ニ施セル,計算ノ結果ニ於テ, m 個ノ精確ナル數字ヲ得ンニハ,結果ノ關係誤差ヲ $\frac{1}{10^m}$ ヨリ小; 隨テ,各數ノ關係誤差ヲ $\frac{1}{3\times10^m}$ ヨリ小ナラシムレバ充分ナリ. 故ニ1或ハ2ヲ以テ始マル數ニ在テハ $m+2$ 個,其他ノ場合ニ在テハ $m+1$ 個; 一般ニ $m+2$ 個ノ精確ナル數字ヲ知レバ足レリ. 三個ヨリ多キ數ニ於テモ之ニ準ズ.

例 1. (12) ニ示セル掛ケ算ヲ行フコト. 所要ノ積ハ,十位ヲ以テ始マリ,小數第二位マデニ,四箇ノ數字アルガ故ニ: 精確ナル四個ノ數字ヲ計算スルヲ要ス. 之ガタメニ,一ツノ數ハ五個,他ノ數ハ,六個ノ精確ナル數字ヲ要ス (59). 由テ,二數ノ過剩近似數 52.386, 1.62549 ノ積ヲ省略算ニヨリ求ムルコト圖ノ如シ.

```
 52.3860
 94526.1
 --------
 523860
 314316
  10476
   2615
    208
     45
 --------
 85.1520
```

省略算ヨリ起ル誤差ハ 18×0.0001 ヨ

リ小ナルガ故ニ, 近似數ノ積ハ 85.1520 ト 85.1538 トノ間ニ在リ而シテ此ノ積ハ, 與ヘラレタル二數ノ積ノ過剩ナル近似數ニシテ, 其誤差ハ 0.01 ヨリモ小ナルガ故ニ, 眞實ナル積ハ 85.1538 ト 85.1420 トノ間ニ在リ. 由テ85.15 ハ積ニ 0.01 ヨリモ近キ數ナリ此ノ結果ハ, (12) ニ於ケルモノト矛盾スルモノニアラズ (13).

例 2. (16) ニ用キルタル二數ノ割リ算ヲ行フコト. 商ニ於ケル,精確ナル四個ノ數字ヲ得ルタメニ; 兩數ハ, 1以上ノ數字ヲ以テ始マルガ故ニ; 五個ノ數字ヲ要ス. 此ノ五個ノ數字ヨリナル近似數ノ,商ノ誤差ノ向キヲ知ルタメニ,被除數ハ過剩,除數ハ不足ニ取リ,割リ算ヲ行ヒ, 14820 ヲ得而シテ第二番目ノ數字ヲ得ルトキヨリ省略算ヲ始メ,斯クシテ得タル數字ノ和14ハ,剩餘20ヨリ小ナルヲ以テ,得タル商ハ不足ナリ (18). 故ニ 14.82 ハ二ツノ近似數ノ商ニ, 0.01 ヨリ近キ不足ナル近似數ナリ. 然ルニ此ノ二數ノ商ハ,與ヘラレタル二數ノ商ノ 0.01 ヨリ

```
35432)52512(14820
      35432
      -----
      170800
      141728
      ------
       29072
       28344
       -----
         728
         708
         ---
          20
```

近キ過剩ナル近似數ナルヲ以テ, 14.82 ヲ商トシテ取ルトキハ,過,不足消却シテ 0.01 ヨリ近キ數トナル.

例 3. 省略割リ算ノ特別ナルモノヽ例トシテ取レル, (21) ノ割リ算ヲ行フコト.

例2ニ於ケルト同樣,五箇ノ精確ナル數字ヲ取リ; 8468.4 ヲ 3.5285 ニテ割ルトキハ,丁度 2400 ヲ得,之レ所要ノモノナリ.

例 4. $\dfrac{27.3125\times0.61345839}{17.321\times5.785}$ ヲ小數第三位マデ求ムルコト.

結果ハ,小數第一位ヨリ始マルヲ以テ,三個ノ精確ナル數ヲ計算スルヲ要ス. 之ガタメニ,分母子共ニ1ヲ以テ始マルガ故ニ,五個ノ精確ナル數字ヲ求メザルベカラズ.

```
  17.321        0·6134 58
    587.5         5213 72
 ---------     ----------
 86 605 0      1 2269 16
 12 124 7        4294 15
  1 385 6         184 02
     86 5           6 13
 ---------          1 22
100·201 8             30
               ----------
               16·754 98
```

圖ノ如ク,排列シテ,分母ヲ計算スルトキ,得タル 100.2018 ノ誤差ハ, $\dfrac{13}{10^4}$ ヨリ小ナルガ故ニ; 100.21 ハ分母ニ 0.01 ヨリ近キ過剩ナル 數ナリ.

又,圖ノ如ク排列シテ,分子ヲ計算スルトキ得タル數ハ, 0.001 ヨリ近キ不足ナル近數數ナリ (11) 此クノ如クシテ得タル,二數ノ割算ヲ行フトキ 0.1671……… ヲ得ルガ故ニ,商ハ 0.1671 ト 0.1672 トノ間ニ在リ; 而シテ,此ノ商ハ與ヘラレタル分數ノ値ニ, 0.001 ヨリ近キ不足ナル近似數ナルヲ以テ,所要ノ數ハ 0.1671 ト 0.1682 トノ間ニ在リ. 故ニ 0.168 ヲ以テ答トス.

例 5. A,B ノ近似數 4.723, 3.1416 ハ何レモ,其終リノ桁ニ於ケル 1 ヨリ近クシテ,第一ハ不足,第二ハ過剩ナルトキ, $\dfrac{A}{B}$ ニ最モ近キ數ヲ求ム.

二數共ニ 1 ヨリ大ナル數字ヲ以テ始マリ少ナクモ,四箇ノ精確ナル數字ヲ有スルガ故ニ,商ハ三個ノ精確ナル數字ヲ有ス (60). 而シテ商ハ整數第一位ニ始マルガ故ニ, 0.01 ヨリ近キ數ヲ求ムルヲ得. 圖ノ如ク省略算ヲ行ヒ 1.50 ヲ得. コレハ近似數ノ商ニ 0.01 ヨリ近キ不足ナル近似數ナリ.

```
3141)4723(150
     3141
     ----
     1582
     1570
    -----
       12
```

然ルニ近似數ノ商ハ, $\dfrac{A}{B}$ =0.01 ヨリ近キ過剩ナル近似數ナルヲ以テ,1.50 ハ眞實ナル商ニ 0.01 ヨリモ近シ.

第五　平方根

62. 或ル近似數ノ平方根ノ關係誤差ハ,近似數ノ關係誤差ノ半ニ等シ.

與ヘラレタル近似數ハ,其平方根ノ平方ニ等シキガ故ニ;與ヘラレタル近似數ノ關係誤差ハ,平方根ノ關係誤差ノ二倍ニ等シ(55). 由テ平方根ノ關係誤差ハ近似數ノ關係誤差ノ半分ニ等シ.

63. 或ル數ノ平方根ニ於ケル,m 個ノ精確ナル數字ヲ計算センニハ,此ノ數ノ首位ガ5ヨリ小ナラザルトキハ m 個;5ヨリ小ナルトキハ,$m+1$ 個ノ精確ナル數字ヲ有スル近似數ヲ用フレバ足レリ.

平方根ガ,m 個ノ精確ナル數字ヲ有スルタメニ,其關係誤差ハ $\frac{1}{10^m}$ ヨリ小;随テ計算ニ用フル近似數ノ關係誤差ガ $\frac{2}{10^m}=\frac{1}{5.10^{m-1}}$ ヨリ小ナレバ充分ナリ. 之ガタメニ,$m+1$ 個ノ精確ナル數字ヲ有スル近似數ヲ取レバヨシ. 何ントナレバ,一般ニ關係誤差ハ $\frac{1}{10^m}$ ヨリ小ニシテ;猶更 $\frac{1}{5.10^{m-1}}$ ヨリ小ナ

レバナリ. 特ニ首位ガ5ヨリ小ナラザルトキハ,m 個ノ數字ヲ以テ足レリトス. 何ントナレバ,其關係誤差ハ $\frac{1}{5.10^{m-1}}$ ヨリ小ナレバナリ.

例トヘバ (25) ニ於ケル數ヲ開平スルニハ,七個ノ精確ナル數字ヲ求ムベク,與數ノ首位數字ハ5ヨリ大ナルヲ以テ,七個ノ精確ナル數字ヲ取レバ足レリ (63). 省略法ニヨリ,初メノ四位ト,終リノ三位トニ分ケテ,求ムルコト圖ニ示スガ如シ. 割リ算ノ商357ノ平方ハ剰餘ヨリ小ナルヲ以テ, 80.90357 ハ不足ナル近似數ニシテ; 80.90358 ハ 6545.389 ノ平方根ニ $\frac{1}{10^5}$ ヨリ近キ過剰ナル近似數ナリ.

```
         65|45.38|9      (80.90
         64
          1 45 38
1609      1 44 81
16180          57 90000  (357
               48 540
                9 3600
                8 0900
                1 27000
                1 13260
                 1374000
```

然ルニ $\sqrt{6545.389}$ ハ,與ヘラレタル數ノ平方根ニ $\frac{1}{10^5}$ ヨリ近キ不足ナル近似數ナリ. 由テ 80.90358 ハ過剰或ハ不足ニ於テ $\frac{1}{10^5}$ ヨリ近キ數ナリ.

64. m 個ノ精確ナル數字ヲ有スル近似數ノ平方根

ハ近似數ノ最初ノ有功數字ガ5ヨリ小ナラザルカ,或ハ小ナルカニ從テ, m 或ハ $m-1$ 個ノ精確ナル數字ヲ有ス.

m 個ノ精確ナル數字ヲ有スル近似數ノ首位數字ヲ a トスレバ,其關係誤差ハ $\frac{1}{a.10^{m-1}}$ ヨリ小ニシテ;其平方根ノ關係誤差ハ $\frac{1}{2a.10^{m-1}}$ ヨリ小;マシテ $\frac{1}{10^{m-1}}$ ヨリ小ナルガ故ニ,根ハ $m-1$ 個ノ精確ナル數字ヲ有ス. 然シ若シ a ガ5ヨリ小ナラザルトキハ $\frac{1}{2a.10^{m-1}}$ ハ $\frac{1}{10^{m}}$ ヨリ小ニシテ,根ハ m 個ノ精確ナル數字ヲ有ス.

第六 立方根

65. 或ル近似數ノ立方根ノ關係誤差ハ,近似數ノ關係誤差ノ三分ノ一ニ等シ.

或ル數ノ立方根ニ於ケル, m 個ノ精確ナル數字ヲ得ルタメニ用フル近似數ハ,首位數字ガ4ヨリ小ナラザルトキハ m 個;4ヨリ小ナルトキハ, $m+1$ 個ノ精確ナル數字ヲ有スレバ足レリ.

逆ニ, m 個ノ精確ナル數字ヲ有スル近似數ノ立方

根ハ,其首位ガ4ヨリ小ナラザルトキハ m 個, 4ヨリ小ナルトキハ $m-1$ 個ノ精確ナル數字ヲ有ス.

證明ハ略ボ平方根ニ於ケルモノト同一ナレバ略ス.

例 $\sqrt[3]{851+\sqrt{2}}$ ヲ小數第一位マデ計算セヨ. 結果ハ,整數第一位ヨリ始マル數ナルヲ以テ,二個ノ精確ナル數字ヲ求ムベク,根號內ノ首位數字ハ 4 ヨリ大ナルヲ以テ,二個ノ精確ナル數字ヲ知レバ足レリ. 偖 850 ノ立方根ヲ小數第一位マデ求メ,過剩ナル近似數トシテ 9.5 ヲ得;而シテ 850 ノ立方根ハ,與ヘラレタル立方根ニ 0.1 ヨリ近キ不足ナル近似數ナルヲ以テ,其近似數トシテ 9.5 ヲ取ルトキハ 0.1 ヨリ小ナル誤差ヲ有ス.

第七 雜問

66. 最後ニ若干ノ應用問題ヲ解カントス.

1. $\sqrt{64+\frac{7}{\pi}}$ ニ 0.001 リ近キ數ヲ求ム.

求ムル數ハ,整數第一位ヨリ始マルヲ以テ四個ノ精確ナル數字ヲ求ムルヲ要ス. 之ガタメニ, $64+\frac{7}{\pi}$

ノ初メノ數字ハ,5ヨリ大ナルヲ以テ,四個ノ精確ナル數字ヲ知ルヲ以テ足ルト雖モ,誤差ノ向キヲ知ルタメニ,五個ヲ計算セン. 斯クスルタメニ, $\frac{7}{\pi}$ ハ四個ノ精確ナル數字ヲ知ルベク. 之ガタメニπハ五個ノ數字ヲ要ス.

πニ不足ナル近似數ヲ取リテ,$7/\pi$ノ代リニ$7/3.1415$ヲ取ルトキハ,之レ過剩ナル近似數ヲ表ハス. 此ノ割リ算ノ商ヲ省略法ニヨリ求メテ2.228ヲ得,之レ不足ナル近似數ナリ. 由テ$7/\pi$ハ小數第三位マデニ於テ2.228ナリ. 由テ根號內ノ數ハ小數第三位マデニ於テ,66.228ニシテ,66.22ハ之ニ0.01ヨ近リキ不足ナル數ナリ. 由テ$\sqrt{66.22}$ニ0.001マデ近キ過剩ナル近似數ヲ求メテ,8.138ヲ得. 之レ所要ノモノナリ.

2. $4.14\sqrt[4]{\frac{5}{70}}$ヲ小數第二位マデ計算スルコト.

$\frac{5}{70}=0.0714\ldots\ldots$, $\sqrt{0.0714\ldots\ldots}=0.26\ldots\ldots$之ヲ開平シテ0.5…… 由テ,結果ハ,整數第一位ニ始マルガ故ニ,三個ノ精確ナル數字ヲ計算スルヲ要ス.

第一ノ因數ハ精確ナルヲ以テ,之レニ乘ジテ,三個ノ精確ナル數字ヲ得ルタメニ,四冪根ニ四個ノ精確ナル數字ヲ知ルヲ要ス. 而シテ,誤差ノ向キヲ知ル必

要アルガ故ニ,五個ダケ計算セン. $\sqrt[4]{\frac{5}{70}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{70}}\right)}$ト書キ,之レガ五個ノ精確ナル數字ヲ有スルタメニ, $\sqrt{\frac{5}{70}}$ハ有功數字2ヲ以テ始マルガ故ニ,六個ノ精確ナル數字ヲ要ス. 其誤差ノ向キヲ知ルタメニ,七個ヲ計算セン. $\sqrt{\frac{5}{70}}$ヲ七個ノ精確ナル數字ニテ表ハスニハ $\frac{5}{70}$ ハ,7ヲ以テ始マルガ故ニ七個ノ精確ナル數字ヲ要ス.

由テ $\frac{5}{70}=0.07142858$ ノ平方根ヲ省略算ニ依リ求メテ,0.2672612ヲ得. 而シテ割リ算ニ依リテ,得タル612ノ平方ハ,割リ算ノ剩餘ヨリ小ナルヲ以テ;此ノ平方根ハ,近似數ノ平方根ノ不足ナル近似數ニシテ;近似數ノ平方根ハ分數ノ平方根ノ過剩ナル近似數ナリ. 由テ0.2672612ハ $\sqrt{\frac{5}{70}}$ ニ $\frac{1}{10^7}$ ヨリ近キ數ニシテ, $\frac{1}{10^6}$ マデニ於テ過剩ナル近似數ハ0.267262ナリ. 0.267262ヲ開平シテ, $\frac{1}{10^5}$ ヨリ近キ不足ナル近似數0.51697ヲ得. $\sqrt[4]{\frac{5}{70}}$ ニ小數第四位マデノ過剩ナル近似數ハ0.5170ナリ.

0.5170 ニ 4.14 ヲ乘ジテ 2.14038 ヲ得. 之レ所要ノ數ニ $\frac{1}{10^2}$ ヨリ近キ過剩ナル近似數ナルヲ以テ小數第二位ニ止メ,以下切リ棄テタル 2.14 ハ所要ノモノナリ.

3. $\sqrt{\frac{227}{23}}$ ト $\sqrt{\frac{355}{113}}$ トノ差ヲ小數第七位マデ計算セヨ.

$\frac{227}{23}=9$ ………, $\frac{355}{113}=3$ ………ナルヲ以テ此ノ二數ノ平方根ノ差ハ,整數位ニ一個ノ數字ヲ有スル數ナリ故ニ小數第七位マデニ八個ノ數字ヲ要ス. 之ガタメニ,各數ノ平方根ハ八個ノ精確ナル數字ヲ計算セザルベカラズ. 而シテ其誤差ノ向キ同一ナルヲ要スルガ故ニ,九個ノ數字ヲ計算セン. 之レガタメニ 227/23 ハ九個ノ數字ヲ要シ; 355/113 ハ 5 ヨリ小ナル數字ヲ以テ,初マルガ故ニ,十個ノ精確ナル數字ヲ要ス. 何レモ不足ナル近似數ニ於テ

$$\frac{227}{23}=9.86956521,$$

$$\frac{355}{113}=3.141592920$$

第一數ヲ省略法ニヨリ開平シテ, $\frac{1}{10^8}$ ヨリ近キ不足

ナル近似數 3.14158641 ヲ得. 由テ $\sqrt{227/23}$ ハ 3.14158643 ト 3.14158641 トノ間ニ在リテ 3.1415864 ハ $\frac{1}{10^7}$ ヨリ近キ不足ナル近似數ナリ.

第二數ヲ開平シテ $\sqrt{355/113}$ ハ 1.77245392 ト 1.77245394 トノ間ニ在ルヲ知ル,由テ 1.7724539 ハ, $\frac{1}{10^7}$ ヨリ近キ不足ナル近似數ナリ.

上ニ得タル二ツノ數ノ差 1.3691325 ハ,所要ノモノナリ.

例 題

1. π^2, π^3 ヲ小數第五位マデ求ム.

2. $g=9.80896$………ナルトキ $\frac{g}{\pi^2}$ ヲ出來得ルダケ精密ニ求メヨ.

3. 前題ニ於ケル, g ノ平方及ビ立方ハ如何ナル近似度ヲ有スルカ.

4. 次ギノ分數ノ値ヲ 0.00001 マデ計算セヨ:

$$\frac{4\pi^3-24\pi}{\pi^4-12\pi^2+24}$$

5. $\sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}}$ ヲ 0.001 ヨリ近ク求メヨ.

6. 次ギノ二式ノ値＝0.000001ヨリ近キ數ヲ求ム:

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{+\sqrt{5}}\pm\sqrt{5-\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\pm\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

7. 周ノ長サ 45.3256 間アル圓ノ半徑ヲ間ノ千分ノ一マデ出セ.

8. 半徑 15.628 米アル圓ノ面積ヲ平方粉マデ求ム

9. 直徑 3 尺アル圓＝內接スル正三角形ノ邊ヲ分マデ求ム.

10. 底ノ半徑 5.56 尺,高サ 1.85 尺ナル圓錐ノ體積ヲ計算セヨ.

11. 一舛桝ハ方四寸九分, 深サ二寸七分ナリ;五合桝ノ大サヲ厘マデ計算セヨ.

12. $x^2-5.67=0$ ノ根ヲ小數第五位マデ求ム.

13. $2x^2-5x+6.789=0$ ノ根ヲ小數第二位マデ計算セヨ.

14. 自由落下體ガ, 51.7 米ヲ通過スル＝ハ,何秒ヲ要スルカ;秒ノ百分ノ一マデ出セ.

但シ $g=9.80896\ldots\ldots\ldots$ トス.

15. 913 粍ノ壓力＝テ, 2530 立方糎ノ空氣アリ

溫度ヲ變ズルコトナク.壓力ヲ 750 粍＝スレバ,立積幾何ヲ增スカ. 立方糎マデ計算セヨ.

16. 標準壓力＝テ, 1050 立方糎ノ酸素ヲ, 750 立方糎＝ナスニハ,更ラ＝幾何ノ壓力ヲ加フベキカ. 粍マデ計算セヨ.

17. 溫度 91°,壓力 9000 粍＝テ, 4320 立方糎ノ瓦斯アリ. 標準溫度,標準壓力＝於ケル容積ヲ,立方粍マデ計算セヨ. 但シ氣體ノ膨脹率ヲ 1/273 トス.

18. 氣溫 16°, 氣壓 761.5 粍ノ時, 2305 立方ノ糎空氣アリ. 翌日＝至リ,氣溫ガ 15°.7 トナリテ,容積232.8 立方糎＝增加セリト云フ,氣壓如何. 測定ノ結果ハ各末位ノ一＝及バズ.

19. 半徑一米ナル圓＝,內接スル正十五邊形ノ一邊ハ $\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$ 米ナリト云フ,之ヲ粍マデ計算セヨ.

20. 次ギノ式ノ値ヲ小數第四位マデ計算セヨ

(第十九回文部省敎員檢定試驗問題)

$$\sqrt{13+\frac{1}{3}-2\sqrt{3}}.$$

21. 分子ガ1ナル分數ノ中ニテ 0.0000132714 ニ最モ近キモノヲ求メヨ

(第十八回文部省教員檢定試驗問題)

22. 次ノ式ノ値ヲ小數第七位マデ算出セヨ

$$\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times22}+\frac{1}{3\times22\times118}}$$

(第十七回文部省教員檢定試驗問題)

23. $\frac{227}{23}$ ノ平方根ト $\frac{355}{113}$ トノ差ヲ小數第七位マデ索メヨ (第十六回文部省教員檢定試驗問題)

發行所　青野文魁堂　東京市日本橋區通り四丁目七番地　振替口座(一五九二九番)

印刷所　三協印刷株式會社　東京市京橋區弓町二十四番地

印刷者　高塚慶次　東京市京橋區弓町二十四番地

發行者　青野友三郎　東京市日本橋區通り四丁目七番地

著作者　金澤卯　東京市四谷區坂町七十七番地

明治四十二年四月廿七日發行

明治四十二年四月廿四日印刷

定價金貳拾五錢

省略計算