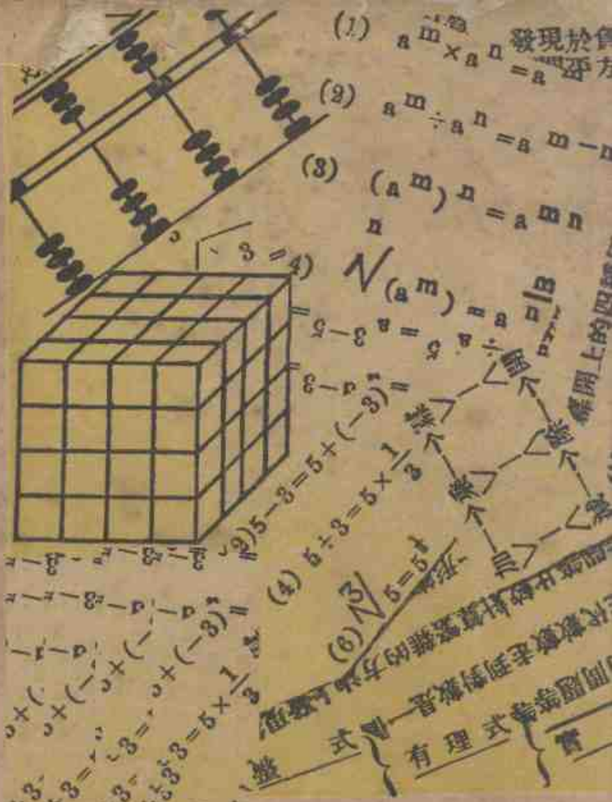


數學講話

廖庶謙 作

數學講話

廖庶謙 著

總經售

讀書生活出版社

中華民國二十六年四月初版

數學講話

每冊實價四角

著作者　廖庶謙

發行者　廖庶謙

總經售　上海靜安寺路斜橋弄七一號　讀書生活出版社

中華民國二十六年四月初版

序

這裏總共有十九篇文章。前面的十二篇是曾經在生活知識上發表過的，後面的七篇，有三篇是在讀書生活上發表過的；有三篇是用張健那個筆名在青年界上發表過的；最後一篇是艾思奇先生所寫，也是在讀書生活上發表過的。

前面的十二篇，本來是繼續寫成的，所以稍微有一點次序，現在合起來叫做上篇。後面的六篇，本來不是繼續寫成的，所以不是有系統的東西；——不僅內容上還間常有一些重複，甚至連所用的方法也有一些舊的東西。現在就合起來叫做下篇。至於艾先生所寫的那一篇，那是因爲讀者們在看數學底對象和極限的思維那一篇以前就必須先看一下，所以也附錄在後面。

就這些文章底內容說，也並不是全部都出自我個人

底私見，而是把前人底意見摘取了許多過來，作爲自己底口氣，把它稍稍地寫得通俗一些，使初學的讀者們稍微容易懂得一些罷了。

至於出自我個人的私見，也不是完全沒有。比方，在第九，第十，第十一，第十七等篇裏面，大部份都是我個人底私見。在其他的篇數裏面，加進了個人私見的地方也有一些。

近幾年來，有許多的讀者們很高興研究新興的哲學；但他們一碰到和數學有關係的地方，常常是解釋不來；這本書對於那樣的讀者們或許有一點點幫助。

我所以要把這幾篇文章出版，也還有另外一個希望：那就是希望我們這些研究自然科學的朋友們，大家對于新興的自然科學注意起來，集體地來研究新興的自然科學。

自然，在這本不曾成熟的小書裏面，理論上的錯誤一定是免不了的。因此我很希望：朋友們對於這部書，尤其是對於第九，第十，第十一，第十七等篇，加以嚴格的指正。

庶謙 民國二十六年四月一日在上海

目　錄

上　篇

下 篇

一 從生活上底數量談起

文學書，一向是大家最高興讀的；若是社會科學的書，那就有些人不大高興讀了。然而爲了要認識或推動目前這一個社會的緣故，對於新興的社會科學，近年來也有很多人注意到了。

至於自然科學，那倒是很倒霉，幾乎沒有幾個人睬它了。雖然在最近的過去，有人在大聲疾呼地提倡過「科工」；然而，並不因爲有人那樣提倡，自然科學便被大家重視起來。

中國目前的大衆，對於自然科學像這樣比較地看不起，這正也不是偶然；這正是表示目前的中國主要的需要是社會科學而不是自然科學。

這固然是不錯；然而，我認爲「科工」意義以外的自然科學，卻還是大家目前所需要的。

比方：近年來，有許多人在着重寫作自然科學的小品；但這種科學小品，它是要在有了文學的素養以外，再加上新的自然科學的知識，才能够產生出好的成績的。因此，對於新的自然科學的研究，在科學小品的寫作上，就成了一種當前的需要。

又，近年來，大衆對於新的哲學是在很熱烈地研究；然而，我們若是對於新的自然科學還研究得不够，那是對於新哲學的瞭解，有許多困難的。因此，我們爲了研究新哲學上的幫助，是應該對於新的自然科學加以注意的。

數學這一科，在目前，還是列在自然科學以內的。它比起物理，化學，生物學等等的科學來，是特別地不大受到大家的歡迎的。比方，有許多學生們，他們在功課表上看到那一小時要上數學，他們就頭痛起來了。

可是，在這裏，我卻偏偏想和大家來談一談數學；但這並不是要故意使得大家頭痛，而是爲了數學這一科，它是各種科學上一種基礎的原故。

過去大家所學過的數學，大都是把數學和人們的生活分開，專門只在一二三四等等不名數的加減乘除上，以及A B C D等等文字的公式或方程式上講來講去；講的人

費盡無窮之力，聽的人却是越聽越糊塗。所以，看見了數學這兩個字便要頭痛起來，這並不是偶然的事。

我們現在是想把過去那種研究的態度反轉來，從數學和我們生活的關係上談起。

在我們的周圍，包圍着許多東西：有的是自然界的東西，有的是人類社會上的東西。這許多東西，隨時隨地都在那裏變動着，隨時隨地都在一種互相激盪的過程中開展着。我們爲了要認識它們，要克服它們，不被它們所蒙蔽，不被它們所制服，便追尋到它們發展的過程當中去。

我們走進它們過程的當中，主要的是要找出它們本身上互相激盪的根本所在，並且還要看出它們所以變動和發展的原因，看出它們相互間各種各樣的聯繫。

我們要做這許多事情，這並不是一下就能够成功的。我們首先要對於這許多複雜的事物，一個一個地看出它們性質上相互的差異，以及數量上形狀上相互的差異。

要看出事物間數量上形狀上相互間的差異，或是還再進一步要看出這些數量和形狀的變動過程以及它們本身上的許多法則，這就是我們數學上要做的事情。

在我們的日常生活上，也就隨時隨地都有數學的問題發現；我們在不知不覺中經常地解答過這些問題，這也就是我們研究數學問題，認識當前事物問題的開始。比方，我們說：「張三比李四高」，「今天比昨天冷」，「普通人每晚要睡八小時」，「一斤半總共是二十四兩」，「兩個人分六塊錢每人得三塊」，………這樣的一些問題，是我們隨時都可以碰到的，這也就是我們研究數學的開始。

我現在要請問平日見了數學兩個字就要頭痛的朋友們，你們見了這樣一些日常生活上的數學問題頭痛不頭痛呢？

如果也還是頭痛，那末，總比平日的痛，痛得輕一點罷？如果頭不痛的話；那末，這是什麼原因呢？

從這裏，我們應該知道：我們研究數學，應該從我們日常生活上的問題開始；因為這些問題都是極容易使我們瞭解的。不過我平日問過幾位朋友，「你家裏幾口人吃飯呢？」他們的答案，却有的是「五六人」，有的是「七八人」。像這樣，對於自己家裏的幾個人還不能答出一個確定的數目來，這未免對於事物的數量太不注意了。

我們對於當前的周圍的事物，應該隨時隨地地去注

意它們的數量:「我每天做幾點鐘事情?」「休息幾點鐘?」「我每月賺多少錢?」「用多少錢?」「由我家裏到辦事的地方有多少路?」「走起來要多少時間?坐車要多少時間?」「每個月車錢要多少?」………由這樣一些經常的注意,推廣到非個人的數量問題的注意。比方「中國目前欠了多少外債?」「每年的入超多少?」「每年財政上的預算如何?」甚至「國際間債權債務的關係如何?」等等。這樣的注意,它是對於我們認識事物的任務上有種極大的幫助的。

我們對於當前數量問題的注意,它不僅只能夠幫助我們去瞭解當前的事物。對於推測過去的事物,它也能夠有許多的幫助。

比方,(一)我們在一個樹枝的橫斷面上,看見它有七個圈子(這在植物學上叫做年輪),我們便可以推知,這個樹已經生長過八年了。(二)我們在一位旅客的行李上,看見了許多旅館的紙條,我們便知道這一位旅客所走過的旅程已經不少了。

對於當前事物的認識,以及對於過去事物的推知,這其間還有一個極大的作用;這就是幫助我們對於未來的

預見。比方：（一）我們先定下一個讀書計劃，便預先知道某本書到某天會要看完了。（二）我們若是定了旅行的計劃，便知道帶多少錢可以到某處，某天某時可以到某處了。（三）我們有了預算，便會知道我們多少錢可以用到什麼時候。（四）天文家用了他們的計算，預先知道何年何月何時有月蝕。（五）在海王星還不曾被發現的時候，科學家（拉維禮）預先就算出它在某時候要在某地方出現了。這樣的一些預見，它並不像戲劇上的孔明先生一樣，有一種神祕的「未卜先知」的本領，而是出於一種十分靠得住的科學根據。

朋友們！我們開始從自己的日常生活上注意數量問題罷！

二 數學是怎樣發生的

上一次,我們已經談過:我們要在日常生活中去注意數量上的問題;我們要研究數學,就應該從日常生活上的數量問題開始。不過,我們爲什麽要從日常生活上的數量問題開始呢?這就因爲:數學這一件東西,牠原來就是從我們人類實際需要上發生出來的。在我們那些老老前輩的時候,他們爲了應付環境上的需要,開始了數學的研究;在我們這些後生小子初學數學的時候,也應該從我們這種日常生活的環境需要上研究起;不過我們比起那些老前輩來,進步得格外快一點罷了。

數學這東西,眞的是從應付環境的需要上發生的嗎?這有什麽證據呢?

第一,在歷史上,我們知道:在埃及有一條尼羅河,那河在每年一定的時候,一定要漲大水的。漲水的結果,那

兩岸的田地都被污泥壅塞了。那地方的人民，當每次水退以後，必須要把兩岸的田地重新劃分一下；因爲從前所有的界線，通統被大水掃蕩了。在那種經常的情形之下，他們就開始「測量土地」的研究了。我們現在所學的幾何學，就是從他們那種每年「測量土地」的情形中發生的哩。

當我們的老前輩還在靠大家共同打獵來生活的時候，他們要把所打到的飛鳥和野獸大家記起數目來，或是要大家分起來，這也是要開始研究數學的。比方，我們現在所寫的「一」「二」「三」這幾個字，古時候是寫做「弌」「弍」「弎」的。這個「弋」字，就是指明用繩子上了箭頭去射飛鳥或野獸；這個「弋」字下面的「一」「二」「三」就是記明所射到的件數。這也就是表示我們的老前輩，他們在日常生活中發生了數學了。

第二，在古老的數學書上我們也看得出來。當紀元前大約一千五百年的時候，有一位埃及的教士，他名字叫做愛默斯(Ahmes)，他曾經手抄過一部數學書，這部書我們現在到倫敦博物院里還可以看得到。在那部書裏面，把當時埃及所有算術和幾何的題目都抄上了；不過，每個算題

都只有答案，沒有演算，更談不到數學的理論了。

在我國一般的古數學書上也是一樣，那上面每個問題也只載上一個答案，或是一些極簡單的算法，至於計算的理由就一點也不提起了。

我們那些老前輩為什麼不把算法和理由通統寫出來呢？那就因為：他們那時候自己所知道的也還有限得很。他們所知道的，在算術上還僅只是一些計算上的技術，在幾何上還僅只是一些測量上的技巧。

在算術上他們還只僅僅知道某一件被計算的東西有一種怎樣的特性，還談不到對於那一類東西的計算上有一種一般的解答。比方，「五塊獸皮，用去三塊，還剩幾塊呢？」像這樣的題目，我們的老老前輩，他們是計算得出的。若是把這個題目里頭底數目字反轉來，「有獸皮三塊，要用去五塊，還差幾塊呢？」像這樣的題目，恐怕就已經算不出了。卽令他們連這樣的題目也算得出，但是，如果要他們把這兩個題目總成一個公式，像我們現在在代數上學過的一樣，（A－B＝C，或被減數－減數＝差數）那末，恐怕他們無論怎樣也是想不到的。

同樣，在幾何上，他們也還只僅僅知道某一個特別圖

形有一個怎樣的特性，還談不到某一類圖形上一般的定律。比方，在中國的一部古數學書上（周髀算經），他們知道了一個特別的直角三角形的特性，這個直角三角形，一個直邊的長是三，另一個直邊的長是四，一個斜邊的長是五。他們又知道：這兩個直邊的長的平方的和恰巧和那斜邊的長的平方相等。但是，假如有另一個直角三角形，一個直邊的長是八，另一個直邊的長是十五，他們就不知道它的斜邊的長是十七了。若是那兩個直邊的長是小數，那他們更是無論怎樣也不知道那斜邊的長了。

這就因為：我們的前輩，在他們的日常生活上，還只能夠發生一種對於一個數目，或是一個圖形的特殊的解答來；至於要從許多的數目或圖形得出一種一般的原理來，那他們是辦不到的。並且，在他們的主觀需要上，也還只是一些應用上的計算，而不是一般數理的探討。

第三，我們從小孩子的認識數目上，以及那些不大開化的人民計算數目上，也可以看得出數學是怎樣發生的。比方，一個三四歲的小孩子，他的數數，首先是從他的玩具或是指頭開始的；他所知道的形狀是日常容易見到的圓或方。再，在有些還不曾十分開化的民族里，他們從

一到十的幾個數目的名稱，是和他們十個指頭的名稱相同的。在這些地方，我們也看得出：數學的起源或發生，是起源於我們人類日常生活中的實際需要了。

不過，在我們目前的社會中，卻居然有一些糊塗虫，他們偏偏不承認數學是由我們的日常生活中得來，卻偏偏要說這數學是我們從娘肚子里出世就知道的。他們說：數學根本發源的地方，並不是在現實的世界上，而是在我們人類的頭腦中。這就是說：數學這件東西，它並不是由於現實的需要引導出來的，而是由於我們的頭腦思想出來的。他們不承認：數學的內容，它和現實的對象有着密切的關聯；卻要說，數學的內容，它不過是一些思維上的觀念；整個的數學，它不過是由於一種論理的法則排演出來的罷了。

他們這些話，我們能相信嗎?

不過，在數學上，也有一些概念，的確是起於數學本身結構上和發展上的要求；比方，負數的起源，就是在一次方程必須要用負根才能解答的時候。在這裏，我們要注意：像負數這樣的概念，它雖然是起於數學本身底結構上或發展上的要求，但結局，它還是要反映着現實上一定

的事實。如果這種負數，它僅僅是從人們的頭腦中產生出來，或是從數學上的推理得來，而在現實上尋不到證驗，那它還是不能成立的。因此，在這種時候，我們說在數學上發生了負數，同時也就是在現實上發現了負數。

三　數學上研究一些什麼

只要是在初中讀過書的,他就會知道,數學上是分了算術,代數幾何等科的。

在算術和代數上,它起頭就講到「分量」;在幾何上,它起頭就講到「形狀」。

因此,我們說,算術和代數是研究「分量」的;幾何是研究「形狀」的。

所以,我們也可以說,數學上所要研究的是兩件東西:第一件是「分量」,第二件是「形狀」。

關於分量本身上的規律,以及量與量間的關係,這是算術和代數等等科學上要研究的東西;關於形狀本身上的規律,以及形與形間的關係,這是幾何等等科學上要研究的東西。

分量和形狀這兩種東西,它們都不是憑空存在的,也

不是獨立存在的。它們倆都是從物體或現象上抽象得來的。

比方,眼前擺着二個石子,三隻鳥,五枝樹等等,我們便可以從這些石子,鳥,樹等等上面抽出二,三,五等等的數量來,做算術或代數上研究的對象。

再比方,眼前如果擺着幾張紙,幾幅布,幾塊地皮等等,我們也可以從這些紙,布,地皮等等上抽出它的形狀,(比方「面」)來,做幾何上研究的對象。

我們在日常生活上所講的「大小」,「長短」,「高低」,「多少」等等,都是從物體或現象上抽象得來的分量;我們在日常生活上所講的「方」,「圓」,「直」,「曲」等等,以及幾何上的點,線,面,體等等,都是我們從物體或現象上抽象得來的形狀。

因為「分量」和「形狀」都不過是整個物體上的一個方面,或是現象上的一個方面,所以它們倆都不是獨立存在的。又因為,它們倆都要在宇宙間有了物體和現象的條件之下才會有,所以,它們倆又不是憑空存在的。

在數學上,它所研究的是這樣一種抽象的東西,所以數學這一門科學,就顯現得十分抽象了。

當我們把三個石子的「三」抽象出來的時候，那三個石子的「石」就被我們捨象去了。當我們把一塊方地的「方」抽象出來的時候，那一塊方地的「地」就被我們捨象去了。這裏所抽象出來的是事物的「分量」和「形狀」，而所捨象的「石子」和「地」便是事物的內容。

數學上就因爲有意地要把事物的內容捨棄在一旁，所以就每每很容易走到很形式很空洞的路上去了。

再，當我們研究數學的時候，對於三個人的「三」和三隻狗的「三」是一樣看待的；對於一張紙的「面」和一塊布的「面」也是一樣看待的。像這樣，不顧到人和狗內容上的分別，不顧到紙和布內容上的分別，單只在「三和三」上，「面和面」上去求得形式上的相同(或者相異)；因此，形式邏輯在這些地方也表現出極大的作用了。

從上面所述的這些事實看來，我們可以知道：在整個的現實的事物上面，分量和形狀是和那事物底內容統一在一道的。不過雖然統一在一道，我們若是要把分量和形狀抽象出來，作爲我們思維上數學上研究的對象，並不是不可能的。

並且我們還可以知道：數學這一門科學，它不是從事

物內容的研究上直接成立的；而是從整個的事物上，用抽象的方法，把分量和形狀抽象出來，然後才有了它底對象的。

假如有人問：人們爲什麼要這樣去研究呢？爲什麼不去研究整個的事物呢？爲什麼偏偏只抽象一部份分量或形狀出來研究呢？把分量和形狀和着他底內容一道去研究，不是把事物的全體都研究出來了嗎？爲什麼要這樣支離破碎地研究呢？

人們是爲了要把分量或形狀作爲一件整個的東西去研究，才把分量和形狀從整個的事物上抽象出來的。因爲要研究分量或形狀本身上底各種法則，所以不能不把它們作爲一件整個的東西去研究，同時，也就不能不把那種事物的內容有意地暫時拋棄了。

再，分量和形狀，是在一切的事物上，普遍地存在的。人們爲了要普遍地研究一切事物上的分量和形狀，所以就不得不把一切事物上的分量和形狀作爲自己研究的對象。同時，還爲了要想使自己研究的結果，能够廣泛地應用到一切事物的分量和形狀上，所以也必須把單純的分量和形狀作爲自己研究的對象。

因此,在算術上,我們時常碰到許多 1+2=3 一類的「不名數」問題;在代數上,我們常時碰到 3a+2a=5a 一類的文字題;在幾何上,我們常時碰到「對頂角相等」這樣一類的抽象證明題。這些都是在研究單純的分量或形狀;對於事物的具體內容是完全不曾注意的。

不過,在數學上,就眞的一點也不談到事物的內容嗎?再,那種事物上具體的內容,它就眞的被人們捨象出去,它就眞的一去不復還嗎?

不,事物的內容和分量是分得開的,但同時又是分不開的。因爲是分得開的,所以在思維上我們可以拿來做研究的對象。但同時因爲是分不開的,所以在我們研究的過程中,那種事物的內容(或叫它做性質),便時常自己走到我們研究的範圍裏面來了。

比方,我們對於算術上「不名數」的計算,不論計算得怎樣熟練,但一下子碰到「名數」題的時候,便有許多困難發生了。這就因爲:每一個「名數」題都包含着某一件事物的具體性;我們如果不懂得那一件事物的具體性,單是知道那種分量上的計算,那是沒有用處的。像我們所知道的一樣,那種會算「不名數」題而不會算「名數」題的人不是

很多嗎?

因此，我們應該知道:數學這東西，它是用着極端抽象的形式表現的;然而，在同時，它又是用着極其實在的內容做它底基礎的。

數學主要的任務雖然是要去處理事物的分量和形狀，然而，事物的內容(或性質)，在數學上也是隨時要關聯地處理到的。

只有那些觀念論者，他們才會說:「數學完全是抽象的」,「數學的對象是離開現實獨立地存在的」。

四 數學底抽象性和現實性

在前面的第二次裏,我們曾經說到:數學這件東西,它是起源於我們人類日常生活上的實際需要。在第一次裏,我們又說過:我們研究數學,要從我們底日常生活上開始。在第三次裏,我們又說過:數學這件東西,它所研究的,第一是事物上的分量,第二是事物上的形狀(或叫做形象)。這種分量和形狀,都是從事物上抽象得來,

當我們從事物上把那些分量或形狀抽象出來的時候,同時就把那事物上的種種特性通統拋棄去了。因此,在數學上我們幾乎只能够看見一些抽象的東西,看不見一點現實的東西了。

不過,在數學上,眞的只有一些完全抽象的東西嗎?在數學上,眞的找不到它和現實的關聯嗎?

不!數學上抽象的東西,它旣然是從現實的世界中抽

象得來;因此,數學上的全部構造,都有它物質上的根據。並且,在每次計算抽象的分量或形狀的時候,常時會引起人們去從具體的東西開始設想。

比方,小孩子學習計算數目的時候,他每每從他的指頭,或其他的玩具上着手。我們研究幾何的時候,對於那個「只有位置沒有大小」的點,大家都是從紙頭上或是黑板上一個有大小的點上着手。

我們在計算分數題目的時候,常常會用圖去解釋;這就因爲:紙頭上的圖解,若是比較起頭腦中的數量來,它是比較具體的東西。再,當我們研究立體幾何的時候,我們必須要用許多紙做的或是木做的模型去解釋;這就因爲:那些紙的或木的模型它是具體的現實的東西。

再,我們數學上所研究的「分量」,它是從正數,負數,整數,分數,有理數,無理數,實數,虛數等等的研究,然後才達到的;並不是在開始研究算術的時候,就在我們的頭腦中先有了「分量」的概念。我們在研究幾何的時候,也不是在開始研究的時候,在我們的頭腦中,就有了一個「形狀」的概念;而是相反,這種「形狀」的概念,它是從三角形,正方形,正方體,等等的研究上得來的。

有的教師們，在開始教授算術或幾何的候時，首先就拿出「分量」或「形狀」這兩件寶貝來，死命地向學生們的頭腦中去灌。結果是每次都失敗了，學生大家都不能够正確地瞭解，這正不是偶然，而是顚倒了「由具體走向抽象」這一個次序的原故。

並且，不僅是數學的對象，它是從現實的世界抽象得來，從這裏可以看得出數學和現實的聯繫；並且，在數學本身發展的過程上，以及人類發展的過程上，我們也可以看得出數學上這種抽象的東西，它和現實的世界有一種不可分離的聯繫。

比方：在三角術上，平面三角是比較球面三角來得簡單，似乎平面三角是要首先發展了；然而，在三角術發展的歷史上，却是球面三角比平面三角首先發展；並且，這一種情形，中國的情形和西洋的情形一樣。這自然不是偶然，而是爲了我們的祖宗正和古代的希臘人一樣，他們都是爲了天文上的應用，同樣地把球面三角首先發展了。

再，幾何學的發明，我們從前說過，那是起於埃及尼羅河每年定期的汎濫；住在那地方耕種的人們，大家有測量土地的需要。因此，幾何學的發明，那正是一種農業經

濟上的反映。

再，當十二三世紀的時候，因爲互相貿易的原故，阿剌伯人常時和印度人往來；於是，當時印度人所注重的算術和代數，就流傳到阿剌伯來。當時印度人所研究的算術和代數，多半都是偏於實際的應用方面；他們的著作，大概都是解釋日常經濟生活上所發生的問題；無疑的，這是一種商業經濟上的反映。

現在，我們再從一般科學的研究上去看。

我們知道：具一種極其豐富的內容，而所用的表現法，却是很抽象的，這也並不是數學上所獨有。比方，力學上的「力」，熱學上的「熱」，等等，哪一種不是抽象的東西呢？

我們又知道：在自然科學和社會科學上，凡是用得着思考的地方，都是從現實的世界，用抽象的手段，得出一種普遍的法則來。這一種法則，常常是形成了一種獨立的東西，形式上離開了現實的世界，和現實的世界取着對立的地位；並且，在特種的場合，還表現得那現實的世界也要受它的支配。

在數學上，也同樣地有這樣一種過程；所以，數學上

的法則，一樣地由現實的世界得來，反轉來它又能夠適用於世界。——幾乎好像是支配着世界。

並且，還因為這一種法則，它是由現實的世界得來；所以，它又必然地可以在人們實踐的過程中去檢證。再，既然可以在實踐中去檢證；因此，它在人們對於自然和社會的認識上，能夠有很大的幫助。

比方，虛數這種東西，它在開始被人們發現的時候，許多數學家都還認為不合理，不肯承認它。

一直到了高斯(Gauss)，在他研究電學的過程中，發現它是一件眞實而且簡單的東西，它不過是代表着平面上的一點；並且，還可以在電學的研究上去檢證它。

從此以後，人們對於電的認識上，就得到許多幫助了。

在以上，我們已經把數學和現實的關聯研究過了。然而在歷史上以及在目前，也還有一部份人，他們只承認數學上一切的東西都是從他們頭腦中產生出來，這又是什麼原因呢?

這第一，除了社會的原因以外，就起源於數學的抽象性。因為他們看不見數學在現實世界裏的根源；同時，在

數學的本身上，又常常有許多抽象的東西把眞實的來源遮掩住了；於是，他們便認定：數學是不從任何經驗上產生出來的東西，而是從他們自己頭腦中產生出來的東西。這就可見，在數學最初步開始抽象的時候，就給了他們這些人一種誤解的可能性了。

第二，引起他們這些人誤解的原因，還有「分量」和「形狀」本身上那種合理的有秩序的關聯。因爲他們常時發現：在數學上有許多東西的發現，常常是起於數學本身結構上或者發展上的要求；於是，他們就認爲數學上的東西，都和現實上沒有聯繫了。

比方，爲了要滿足一次方程的解答，就發現了負數；要滿足二次方程的解答，就發現了無理數和虛數；就因爲這些數都不是從現實中直接得來，而是從數學本身的結構上和發展上得來，於是他們便硬說這許多數都是人們理性所創造出來的了，

所以，他們這一部份人，以爲只要依據形式的論理的法則，藉着符號的幫助，不要依據任何的現實，就可以用任何的樣式，創造出一種整齊而有秩序的數學來。

但是，我們能相嗎？

五 數學上底公理

現在一般的數學書，它們都是把那種理論的基礎，建築在所謂公理上的。在算術和代數上，我們看見它把理論的基礎建築在所謂普通公理上面；在幾何上，我們看見它把理論的基礎建築在所謂幾何公理上面。

在算術和代數上，若是沒有「全量比它底部份大」，「等於同量的量相等」那些公理；那末，不單只計算加法和減法沒有可能；就連「命數」也沒有可能了。再，在幾何上，若是沒有「凡形狀除了位置以外，可使完全相合的，就叫做相等」那一類的公理；那末，推證定理的事，就沒有出發的地方了。

過去有許多的數學家，他們說：「這許多的公理都是人們生來就知道的，並不是從人們任何的經驗中得來。」

也有些數學家這樣說：「數學上底公理，是人們爲了

論證上的便利，由人們自己創設出來的。只要所創設的公理：(一)這一條不和另一條互相衝突，(二)這一條不是由另一條發生，(三)所創設的各條是完全的一套；那末，由這一套公理，就可以推證一部完全的數學出來。」

他們還這樣講：「公理的本身是自己表顯得很明白的，用不着去證明，更沒有從經驗上指出它底基礎的必要。」再，「公理既然是由人們所創造出來的一種形式；因此，要從經驗上去證明，也是不可能的。」

然而，由我們看來，公理這東西，眞的是一種至高無上的道理嗎？它眞是人們生來就知道的嗎？或是由人們爲了自己推證上的便利才創設的嗎？再，它眞是沒有證明的必要嗎？或是沒有證明的可能嗎？

我們現在就從事實上來看看：

我們在計算寒暑表上度數的時候，若是在一百度上面再加上一度，那自然是一百零一度。但是，當我們把水燒到了攝氏一百度的時候，若是再加上一度的熱，那水的溫度却並不增加，它還是一百度。並且，你就是再加上許多度數的熱，它的溫度也還是不增加。在這裏，我們可以看出，加法是已經失了作用了。

同時，那條「全量等於各部份之和」的普通公理，在這裏也行不通了。因爲在這裏所得的結果是一百度，它應該是所加熱度的「全量」；然而，它並不和所有加上的熱量「相等」了。

再，當我們製新衣的時候，那是應該按照身體的高矮肥瘦去決定衣服的大小的。因爲按照幾何學上的公理，「凡形狀除了位置以外，可使完全相合的，那便是相等」。但是，假如我們那一次做衣的材料，是一種有縮性的東西；那末，我們所定的尺碼一定要寬放一些才行。在這裏，我們又可以看出：上述的那條幾何公理，在這裏又有些不合了。

爲什麼會發生這種現象呢？這就是數學這種東西，它和物質分離了的緣故。

因爲數學這種東西，它在開始研究的時候，就只把事物上的分量和形狀抽象出來，拿來做自己研究的對象；至於那些事物上的性質，它早已被人們主觀地捨棄到數學以外去了；因此，拿數學的公理，應用到和事物性質有關的地方去，不一定常常是適合的。

再詳細一點說，公理這東西，它不過是數學上對於分

量和形狀的一種規定。這一種規定，也就是分量和形狀本身上的一種屬性。這一種規定，它是離開了事物的性質，直接從分量或形狀上規定得來；同時，它也是純粹的分量上和純粹的形狀上的一種屬性。

不過，這些公理的正確性，是應該用事實來證明的；同時，這樣的一種證明，也是可能的。如果我們不去證明它；那末，人這個東西，它就成了怪物了。因為它能夠隨心所欲地創設一套公理出來，同時還能夠應用到現實中間去。再，如果這些公理是不能夠證明的，那末，公理這件東西，它又成了至高無上的神靈了。

不過，這一種公理，在數學的範圍裏面是不能證明的，因爲公理的正確性，它也是物質的一種反映。在數學的範圍裏面它是把物質不看在眼下的；因此，要證明公理的正確，就只有走到數學的範圍以外去了。

究竟公理是怎樣證明的呢？它不僅只是你一個人證明的，也不是我一個人證明的。它又不僅只是昨天證明的，也不僅只是今天證明的。它是經過了人們數千年的實踐，億萬次的反復，才決定了的。

在我們這個時候，公理的正確性雖然還繼續地在證

明着;然而,它已經是被證明過了。因此,我們在這個時候,就直接地繼承這種已經證明過的遺產,不再去特別地證明它,也是可以的。

不過,我們在數學的範圍以內,雖然不能證明它;然而,我們不能够像那些糊塗虫一樣,硬只在數學的範圍裏面兜圈子,甚至說這些公理是由自己隨意創設出來的,或是生來就知道的。

我們要到數學以外去,找出數學公理的根源。

不然,我們除了承認公理是生來就知道的或是由我們自己創設出來的以外,也沒有旁的路好走了。

我們對於公理的正確性,自然是應該承認的;同時,這種正確的相對性也不能不注意。因爲,這許多公理,它只有應用在純粹形式的場合才是完全正確的。若是把它應用到和物質的性質有些關係的時候它就不一定一樣一樣地適合了。

再,像現在一般的數學書一樣,從幾條公理出發,推證出全部的數學來;這樣的研究方法,我們也是可以承認的。然而,在同時,我們應該隨時提醒,這種公理的內容是很貧弱的;因爲它已經和那些物質的性質離開了不少的

路程了。

因此，我們在研究的過程中，要隨時把物質運動上的種種事象，和公理聯繫起來。

六　數學是純粹研究形式的嗎

羅素先生，是一位有名的數學家。他在他所著的數理哲學上說道：

『在數學這門學問裏，不研究特殊的東西，也不研究特殊的性質。我們只從形式上去研究一切的東西，一切性質的東西。

我們只可以說：一加一是等於二；卻不可以說：蘇格拉底加柏拉圖是等於二。因爲在純粹數學家的耳朵裏，從來就不曾聽過蘇格拉底和柏拉圖這兩個名字的。

『沒有這兩個個體的世界，照舊還是一個「一加一等於二」的世界。

『做純粹數學家的人，無論什麼個體也不應該提；因爲如果提了，我們就加入了不關緊要的東西，不關形式的東西。』(見商務版中譯本羅素算理哲學第三二七頁)

數學就眞的是一種純粹研究形式的東西嗎？换一句話說：它就眞的只是純粹研究它的對象嗎？

在前幾回裏，我們已經研究過：數學的對象是分量和形狀。現在我們就來研究：一個研究數學的人，他是不是眞的可以「純粹」地去研究數學？他的研究，眞的不超出分量和形狀的範圍嗎？

先就研究分量這一方面來說罷。

我們在從前已經說過，數學的發生，是發生在現實的需要上，尤其是生產的需要上。比方，數學的開始，它是和天文學同時開始的；並且，在開始的時候，還是爲的要研究便於耕種的季候，而不是爲了有人要研究數學上的「形式」。不過，數學這東西，它就從這些具體事象的研究上發展起來。

固然不錯，在數學的本身上，它主要地是研究現實的一面，它是側重對於分量和形狀的研究；但是，到了研究的最後，它仍舊是不能不研究到現實的整個上去，它不能不去研究事物的性質。

比方，我們問：有二十尺長的路，用五尺長的標準去量，量得幾下呢？這是很便當的，只要用五去除二十就得

出四來了。但是，我們若是掉一句話來問：有二十尺長的路，每隔五尺遠栽樹一株，可以栽幾株呢？

若是這樣地問，那末我們也是用五去除二十；不過，得過四以後還不够了。一定要在得數四上面再加上一，得五，才是正確的答數。我們現在要問：為什麼在得了四以後還要加上一呢？這是在數學裏面的加減乘除上說不出理由的。我們必須要跳出數學上形式的範圍，注視到具體的「路」上去：從兩端和間隔相接的關係上，才能够找出「還要加上一」的理由來。

再，我們就全部的數學看，我們從「純粹」研究的結果，也會要衝破數學的界限。我們會衝到力學的範圍裏面去。甚至還要衝到電學等等的範圍裏面去。

這樣的事實，卻並不是偶然；而是分量和性質，它們是互相地統一地存在着。我們要把數學封鎖在狹小的分量底範圍以內，那是辦不到的事，它一定會要衝破這個範圍，走到整個的現實世界裏面去。

有許多教員先生們，他們教學生注重研究數學上的形式，教他們多記公式，死命地背誦公理和定理；這樣的結果，在應用上，每每是把公式套錯了，或是把公理定理

用在錯誤的地方了。他們不知道，這樣的結果，正是教學生們離開了現實的結果。因為學生們看不清現實上具體的關聯，數學上的公理和公式也沒有絲毫用處了。

再，分量和性質的關係，從那個「由量變質，由質變量」的法則上，也能够明白地看出來。不過，那樣的例子，在新的邏輯的書上說得很多，在這裏就不多說了。

不過，在所謂「純粹數學」的範圍裏面，這一個法則，它也一樣地存在着。比方，從一百裏面減去X；若是那個X是一個小於一百的正數，那末，這個相減的結果，便是一個正數。但是，若是那個X的數值慢慢地增加，一直加到滿了一百的時候，那結果便是一個零了。若是再加到超過一百的時候，那結果便不是正數，而是負數了。它的性質已經變了，變成和從前相反的了。

現在我們再來研究形狀和事物性質的關係：

啄木鳥的四個趾頭，兩個向前，兩個向後；並且都生着又長又彎又像鈎子的爪子。這樣的形狀，正是合於它那種攀住樹皮的性質，也就是合於它的生存。

尺蠖那種東西，它的全部身體就像了一根二三寸長的小樹枝。它在休息的時候，是把身體底一端，緊緊地釘

着樹枝；身體底另一端，卻是像一根小樹枝一樣地支撑着。這樣的形狀，正是合於它的生存；因爲如果不是這樣，那它就早已被鳥雀一類的東西吃盡了。

鶴和白鷺那一類的東西，它們的嘴和脚，都是又細又長。它們常常要到淺水裏面去捕食小魚，這種又長又細的嘴和脚，正是適合了它們的生活。

鵝和鴨一類的東西，它們脚趾中間都生長着一張薄皮。這就適合了它的游水的生活。再，樹木的葉子，爲了要吸受陽光的作用，也都是平面的展開。

蜜蜂房構造的形式，據數學家的計算，發見它們那種構造，把面積減少到最小的限度，節省了構造的材料。（可以參看余介石算學通論第七頁）。

像這樣一類的例子，在自然界裏，實在是普遍地存在。無論它的形狀是線是面是體，它都有它相互依存的性質。我們若是不從它們的性質上去瞭解，我們就不能說眞的認識了它們的形狀。

這樣看來，我們若是單只去研究所謂「純粹的數學」，這是可能的嗎？再，數學若是眞的只去研究「特殊的性質，」它還有什麼科學上的價值呢？

七 自然科學社會科學和數學

在目前，一般地還是把數學列在自然科學的範圍以內，這是不對的。為什麼不對呢?這有兩層理由:

第一，自然科學所要處理的是自然現象;但是，數學對於自然現象，却不是整個地去處理它，也不是分門別類地(像動物學，植物學一樣)去處理它。

數學對於自然現象，只去研究一個側面。它對於自然現象，只去研究它底分量;至於自然現象底內容，或性質，數學是不去管它的。

第二，數學對於社會現象，它也並不是完全不管。它對於社會現象，雖然不去處理它底內容，或者本身上底法則;然而，它對於社會現象上底分量，仍然是負責去處理的。

比方，銀錢的換算，商品的買賣，人口的統計，國家的

預算,等等,這些不都是社會現象上底分量問題嗎? 然而這些問題,却是數學上常常要處理到的。

由以上的兩點理由看來,我們應該把數學從自然科學的範圍裏頭拿出來;同時,我們還要看出:它對於自然科學和社會科學同時站在對立的地位。或者說:數學對於自然科學和社會科學,一樣地站在幫助的地位。

過去的人們,他們為什麼要把數學放在自然科學範圍以內呢?這裏也可以舉出二點理由:第一是因為過去數學的發達,和自然科學的發達有密切的聯繫。有時是因為天文學物理學上的進步,引起數學的進步了;有時候,也因為數學的進步,引起天文上或物理學上的進步了。因此,把數學和自然科學混同起來。

第二,因為社會科學的成立,比較地在後一些。社會科學上應用數學的公式,還是近幾世紀的事;並且,因為社會科學的發達,反轉去影響數學的事,那更是最近才有的事。比方,拿新的邏輯的觀點去考察數學的事,開始於反杜林一類的書上;然而,至今也還不曾整個的完成。因此,一般人不把數學和社會科學聯繫起來,也不是偶然的了。

根據以上的理由，在我們日常所遇到的事象中，有兩點應該矯正它。第一是圖書的分類，大家把數學列在自然科學裏面了，以後應該把它從自然科學裏頭提出來

第二，有人這樣說，『研究社會科學是不需要數學的；因此，凡是研究理科的學生，就應該多研究一點數學；至於研究法政的就不要研究數學了。』

這是一種錯誤的說法，並且也有許多人這樣錯誤地去做了，這也是應該矯正的。因爲一種够得上叫做科學的東西，對於它的對象的分量，一定要分析得很仔細，甚至還要有一種公式來表示它所研究的結果。比方，我們若是不研究數學對於新興經濟學上的許多公式，便怎樣去瞭解呢？

不過，我們的話又要說囘來，數學對於自然科學和社會科學雖然都是站在對立的地位；但它對於自然科學和社會科學却不是截然分開的。

這理由，我們在前幾囘已經研究過。那就因爲：事物上的分量和性質，它們倆是結合得分不開的。

當我們研究數學的時候，常常是不得不去研究事物的性質。比方，從五元減去三元，剩下的是二元，這是容易

認識的。然而，假如我們要從三元減去五元，所得的是負二元。這負二元的結果，和前題所得二元的結果，我們若是不從事物的性質上去分別，分出某二元是所有，某二元是負債，那我們是不能夠得到明白的解釋的。

再，當我們研究自然科學或社會科學的時候，也常常不得不去研究數學。比方，我們研究一件物體向空中拋出的時候，我們便要問：這件物體在空中進行的速度怎樣呢？它底速度和進行所經過的時間有怎樣的關係呢？再，這物體在空中所經過的道路成一個怎樣的形狀呢？這樣的一些問題，就不能不要數學來幫忙了。

因此，我們可以得到一個結論。數學這件東西，它所研究的對象，主要的是分量：不僅是自然上的分量，同時它也還一樣地要研究社會上的分量。

單就形式上看去，比起自然科學或社會科學來，它是頂抽象的東西；它所用的方法，也好像是頂抽象的方法。然而，它對於自然科學或社會科學，都只是從屬的東西。

我們是為了要研究自然和社會，才去研究數學的；數學不過是一種瞭解自然或社會的工具。

不過，在目前的世界裏，也還有那樣的糊塗人，他們

有的說:『物理學是數學的一個分科。』

有的更進一步地說:『當我們研究物理的時候，研究到最後，常時只剩下幾個公式了。因此,我們應該更進一步地努力,把物理學從粗糙的物質裏面解放出來,把一切物理的現象,都歸總到純理論的境地。我們主張物理學數學化。』

和這一種相類似的態度,也有人想用『量』的關係,去說明一切社會的現象。他們想：不管各種社會的內容怎樣,只要用一個數學的公式去說明就是了。

像這樣的一種人,他們無論研究一種什麽東西,總是這樣地反問自己:『我們可以找到一個怎樣的公式去總括這一種現象呢?』在這種場合，他們都是忘記了事物本身的性質,以及性質和分量的具體的聯繫。

反轉來，也有那樣的人，他們想把自然科學上的方法,普遍地應用到數學上來。然而,這也是辦不到的。因爲數學上的方法,它在分量一方面,是比自然科學和社會科學上面都要普遍一些,抽象一些,若是拿自然和社會的研究方法,來替代數學上的研究方法,那在數學上是要損失它底普遍性的。然而這一種普遍性,它有時却正是幫助自

然科學乃至社會科學進步的一個因素。

八　幾何和代數底關係

在數學這一科裏，目前是包括兩個主要的部份，第一部份是幾何，第二部份是代數。

在幾何裏包括着普通幾何(就是歐氏幾何)，非歐幾何，和投影幾何等；在代數裏，包括算術，初等代數和高等代數等。

這二個部份，在數學裏面，它們底界限是很顯明的。從它們底對象上看，幾何學的對象是形狀，代數學的對象是分量。

不過，它們倆在數學的範圍裏面，相互間的關係怎樣呢？它們倆是不是兩件並立的東西呢？

如果不是並立的，它們底關係究竟怎樣呢？

我以爲，對於這個問題的答案，應該是這樣：幾何的對象，是比較具體的東西；至於代數，它底對象，是比較抽

象的東西。

幾何上的點線面體,雖然也是很抽象的東西;然而,針底尖端,筆的尖端,桌子的角,牆壁的角,都可以拿來代表一個點。緊張的線,垂直的繩,雨點落下的路,桌子的稜邊,都可以拿來代表一條線。極薄的紙,桌子的面,都可以拿來代表一個面。至于體的代表那更是多極了。

因此,我們可以說,幾何上的材料,是隨時隨地都可以找到的。至于代數上的材料又怎樣呢?

我們要在現實中指出負數的存在,這是要費一點解釋的。要在現實中指明無理數的存在,就要靠證明、不能單憑肉眼了。至于虛數在現實中的存在,那就連證明都比較地很難了。假如我們講到對數,要從現實中去找出它來,那就簡直辦不到了。

再,在幾何上,是有「三度」的限制的。若是超過了三度,就有線面體的循環現象了。(關于這一點,以後還要專講一次。),

但是。在代數上,一二三四等等的遞次加一,是沒有限制的,更沒有循環的現象。

因此,當我們想到「形和數一一對應」的時候,是應

該留心着：它們倆底兩相對應，是有限制的。

一般的教科書上這樣說：所謂一一對應的關係：那就是一個形只代表一個數，不是一個形代表這個數又代表那個數。再，又要反轉來，一個數又只代表一個形，不是代表這個形又代表那個形。要這樣，研究數的結果，就可以推論到形；研究形的結果，也可以推論到數。

然而，在事實上，這種一一對應的關係，眞是一點限制也沒有嗎？

我們知道：一個實數，我們可以用一根直線上的點去表示它。兩個相關的實數，可以用一個平面上的點去表示它。三個相關的實數，可以用一個空間上的點去表示它。在這一個範圍裏，一一對應的關係是用得着的。

不過，假如我們有四個（或四個以上）相關的數要用圖來表示，那我們就發生困難了，因爲超過了幾何的三度，對應的關係就發生問題了。

在這種對應的關係上，我們更可以看出：幾何是比較具體的一部份，代數是比較抽象的一部份了。

我們知道：幾何學這個東西，在二千年以前，就構成了一個系統。然而，代數這件東西，它至今還是一些散漫

的東西。我們對於數學,一想到紀律的森嚴,就想到幾何了; 但是,並不會想到代數。假如我們不從幾何上學到一點論證的方法;在代數上,我們幾乎不知道論證方法的重要了。

從這些地方,我們也可以看出:幾何是比較具體一點的東西。因爲具體一些,材料也就容易找到,容易發見;所以,幾何比較首先構成系統,這並不是偶然的事了。

這以上,已經說明了:幾何是比較的具體; 代數是比較的抽象。這以下,我們要說到: 它們倆因爲有具體和抽象的不同,相互間起了一些怎樣的作用。

第一,因爲幾何是比較具體的東西,所以, 有一些在代數上發見過的東西, 可以到幾何上去證明它存在。比方,從長方形的對角綫證明了無理數的存在;從平面上的一點,證明了虛數的存在:這都是很著名的例子。

第二,因爲代數學,在推證上,它是很精密的東西。因此,在幾何的圖形上,凡是不能被我們的肉眼看得很精密的時候,我們就可以用代數來幫助我們的觀察,使我們對於圖形的瞭解,更精密一些。

比方,我們如果要研究一根拋物綫,我們想把這根綫

上的每一點都研究得十分明白，這就不是單憑肉眼辨得到的。並且，單用幾何學本身的方法去研究也難得十分明瞭。但是，我們若是用解析幾何去研究；那末，在這一根曲綫上所有的精密關係就可以研究出來了。

再，代數對於幾何，還有一個推廣的作用。（一）可以推廣幾何上的負元素，如直綫的負方向，角的負度數等。(二)可以推廣幾何上的無窮元素，如直綫的無限長，平行線相交於無窮遠點等。（三）可以推廣幾何上的虛元素，如虛切線，虛交點等等。

這以上，就是幾何和代數相互間的作用。

從上面研究的結果，我們可以得到兩個結論：

第一，我們在學習上，應該利用幾何的具體性，來確證代數上抽象東西的存在。比方，研究負數時，用一根直線來代表全盤的實數，便容易得到負數的觀念。同時，我們也可以利用代數的一般性（或抽象性），去推廣幾何上的觀念，如虛元素無窮元素等。

第二，我們在科學的分類上，可以把幾何學看做從代數學到力學的過渡。代數是很抽象的東西，幾何是比較具體一些了。一到了力學，那是再具體一些的東西。

九　矛盾的「零」和矛盾的「點」

在一切事物底本身上，都有一個基本的矛盾；由於這一個基本矛盾底鬥爭，配合着其他矛盾的鬥爭，這事物就向前發展了。我們這裏所談的是數學，究竟在它底本身上，它底基本矛盾是什麼呢？

在數學這一門科學裏面，它是分着兩個部門的：第一是代數（包括算術），第二是幾何。因此，數學本身上底基本矛盾也有兩個。

在代數上，它底基本矛盾是「零」；在幾何上，它底基本矛盾是「點」。

我們現在就來分別地研究這兩個矛盾吧。

首先，就來研究「零」這件東西。

第一，「零」是現實的：　我們大家知道，「零」是和一，二，三，四等等一樣，它是一個數目。比方：從寒暑表底四

度起，降下去四度，結果是零度。這個零度，它是和一度二度三度等等一樣，它是現實的。當寒暑表降到零度的時候，我們只能說：「現在的溫度是降到零度了」。但是，我們不能說，現在一點溫度都沒有了。連一點溫度也沒有的現象，那是不能想像的。

第二，零是正的，同時也是負的：「零」這個東西，我們若是把它孤獨地靜止地去考察，那是看不出什麼正負的。我們若是把它和正負數聯繫地去考察，運動地去考察，那就不同了。

我們若是把正數底絕對值減少到極小的時候，或是把負數底絕對值減少到極小的時候，結果都走到了「零」。因此，「零」是絕對值極小的正數，同時也是絕對值極小的負數。

第三，「零」是正數和負數底起點：一切的正數或負數，都是有了「零」以後才有的；若是首先不把「零」確定一下，那就連一切的正數和負數都沒有了。

比方，造寒暑表的人，若是首先不把「零度」底所在決定一下；那末，就不能確定哪些是零上的度數（普通叫正數），哪些是零下的度數（普通叫負數）了。

二

第四,「零」是正數和負數底界限: 我們若是把「零」和正負數排在一起去考察的時候,就發見「零」是正數和負數底界限。由一個正數漸次減少正數的時候,一定會經過「零」,再走到負數;反轉來,由一個負數漸次加上正數的時候,也一定要經過「零」,才走到正數。

這就可見:「零」是正數和負數底界限。它是由正數走到負數底一個飛躍點,也是由負數走到正數底一個飛躍點。在這個飛躍點底兩端,一端是正數,一端是負數;這兩種數,性質是相反的。「零」這個東西,它就站在這個極其矛盾的界限上。

第五,「零」底本身也是變動的: 據一般的想法,「零」就是「沒有」,「沒有」就永遠「沒有」,它是固定的。其實,這是考察錯了。

像中國的老子那樣,他就是把「零」(他不叫做「零」,只叫做「無」。)看做固定的東西。因此,他想把世界上的事物,一切都反到「零」(無)那裏去。他說:「玉是不雕刻的好,人是不聰明的好。」

其實。這是根本上看錯了的。宇宙間眞的有一個固定不變的「零」嗎?

我們拿寒暑表來看：在攝氏寒暑表上底零度，拿到華氏寒暑表上，卻是三十二度了。在華氏寒暑表上底零度，拿到攝氏寒暑表上，卻是零下十七度又九分之七。從這裏，我們可以看出：「零」並不是一個固定的東西；隨着事實的不同，雖然在這裏叫做「零」，在別處又成了正數或負數了。

如果像老子那樣說，「人是不聰明的好」；那末，最好還是反轉去做猴子。如果再推下去，那最好還是去做下等的動物，做木石。然而，做成了木石，那也還不見得就推到了極頂；因爲「零」（無）這個東西，它是不會有一個固定的限度的。然而，要把人去再變成猴子，那已經是辦不到的事了。

現在，我們再研究幾何上底「點」罷。

第一，「點」是現實的：　在普通的幾何書上，都說「點是沒有大小」的。既然沒有大小，那不是空虛的嗎？不！在普通的幾何書上，同時又說「點是有位置」的。既然有位置，它便是現實的了。

並且，我們說「點沒有大小」，這也有點毛病的。我們應該說，「點是最小的形狀」。因爲它是一種形狀；所以它

是現實的。因為它的形狀最小；所以它幾乎「沒有大小」了。

第二,點是正的,同時又是負的： 在一根直線上,我們可以隨便取一「點」。在這「點」底一端是正，在另一端便是負。我們若是把那正的一端慢慢地縮短，縮到最短的時候,就縮到了上面所取的那一「點」。反過頭來，我們若是把那負的一端慢慢地縮短,縮到最短的時候,也縮到了上面所取的那一「點」。

這就可見:點是極短的正線，同時也是極短的負線。

第三,「點」是正線和負線底起點： 一切的正線或負線，都是要有了「點」以後才有的。當我們要作一根線的時候,無論是作正線也好,作負線也好，都是要先有了一點才可以畫得成的,都是從點開始畫起的。

第四,「點」是正線和負線底界限： 我們在一根直線上隨便畫記一「點」，這點底一端是正線，另一端便是負線。可見「點」又是正線和負線底界限;它又是由正線縮短到負線,或是由負線縮短到正線的飛躍點。

第五,「點」底本身也是變動的： 在一根直線上，每一處都可以說是一「點」。因此,當我們要在那直線上取定

一「點」的時候，那是隨便可以取定的。

這以上，我們已經把「零」和「點」底各種性質通通研究過了。現在，我們還應該進一步去看，看出「零」和「點」互相對應的關係來。

這種對應的關係，我們只要把上面研究「零」的五條和研究「點」的五條一一對應地去看就會明白的了。

最後，我們還要指出：矛盾的「零」是全部代數底出發點；矛盾的「點」是全部幾何的出發點。至於它們倆怎樣地去開展全部的代數和幾何，這是我們下兩次要研究到的。

十　代數上矛盾底發展

上一次我們研究過：代數（包括算術）上基本的矛盾是「零」。「零」這件東西，它底性質是正的，同是又是負的。並且，一切的正數和負數都是由它出發。正數和負數，它們倆是互相對立的；但它們同時都是由「零」出發。

在一般的代數書上，都是不承認負數底實在性的。它們說：『人們為了要解決「從三減去五」一類問題的困難，才創設負數的；負數不過是拿來補助正數底不足。』

這樣的說法，現在還在許多理論的爭辯中出現。比方，在陳範予和白亦民兩位先生對於自然辯證法的論爭中陳先生就還是這樣主張的。（見新社會科會季刊一卷四期）

其實，這個問題很簡單。我們只要問：「在宇宙間一切事物底數量中，哪一種沒有負的數量存在呢？」

再,我們也還可以問:「如果人們眞的只憑了自己主觀上底創設,就產生了代數上底負數;那末,它爲什麼會和事實處處相合呢?」

如果對於第一問舉不出例子,對於第二問說不出理由;那末,負數是客觀地普遍地存在,便沒有絲毫可以反駁的地方了。

不過,在我們還應該更進一步地知道:有正數存在的場合,同時就有負數底存在。正數和負數是同時存在的;它們不是各別地存在。

就因爲宇宙間一切的分量上,都存在着這一個正和負的基本矛盾;因此,代數底全部就從此展開了。

我們知道:有相同性質的數量要合併,便發生加法;有相異性質的數量要合併,便發生減法。宇宙間自然地只存在兩種互相矛盾的正負數;因此,在計算法上也只能够發生兩種互相矛盾的加減法。

加法和減法,它們倆是計算法裏頭兩個基本法則;同時,也正是計算法裏頭一個基本矛盾。因此,計算法底全部又從此展開了。

我們知道:同數連加,就發生乘法;同數連減,便

發生除法。這就是說：由矛盾的加減，發生了矛盾的乘除。再，同數連乘，又發生冪法（指乘方）；同數連除，又發生開法（指開方）。這就是說，由矛盾的乘除，又發生了矛盾的冪開。

總括起來說，由加減走到乘除，由乘除走到冪開。牠們是一貫的矛盾，一貫的發展。不過，在這裏，我們應該看出：普通把加減乘除合起來叫做「四則」；我們現在，應該把加減乘除冪開合起來叫做「六則」了。

從六則發生發展的過程裏，我們已經發見過三種的對立：第一是加減底對立；第二是乘除底對立；第三是冪開底對立。但是，這每一種的對立，它們也並不是很機械地對立，而是有互相滲透或轉變的地方。比方：——

(1) $5+3=5-(-3)$　　(2) $5-3=5+(-3)$

(3) $5\times3=5\div\frac{1}{3}$　　(4) $5\div3=5\times\frac{1}{3}$

(5) $5^3=\sqrt[\frac{1}{3}]{5}$　　(6) $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$

從上面第一二兩個式子裏，我們可以看出：加法和減法是有互換底可能的。同樣，從第三第四式裏，從第五第六式裏，我們也可以看出：乘除是有互換底可能的，冪開

也是有互換底可能的。

不過,我們與其用減,就不如用加;與其用除用開,就不如用乘用冪。因為加,乘,冪是比較地容易計算的;所以這三種算法就成了我們主要的算法;到了不得已要用減除開的時候,就感覺得有些不大耐煩了,

從加減經過乘除,一直到冪開,計算是一步繁雜一步的。並且,甚至還發展到不能計算了。比方:冪法上如果有一個數要連乘一百次,那就發生了極大的麻煩;假如在開法上,有一個數要開五次以上的方,那我們在開法底本身上就簡直沒有辦法了。

再,在六則發展的過程中,計算上遭遇過不少的困難。在每一次發生新困難的時候,就發現出一種新的數目。

當減法上遇到「從三要減去五」這類問題不能減下去的時候,我們就發現了負數;有了負數以後,減不得的困難便解除了。當除法上遇到「一被三除」這類問題除不盡的時候,我們就發現了分數;有了分數以後,除不盡的困難便解除了。當我們遇到「二要開平方」這類問題開不盡的時候,我們就發現了無理數;有了無理數以後,開不盡的問題便解決了。

再，當一個負數要開平方的時候，我們就發現了虛數；有了虛數以後，負數也可以開方了。

再，當發現負數的時候，前此的數目就有了正數的名稱。當發現分數的時候，前此的數目就有了整數的名稱。當發現無理數的時候，前此的數目就有了有理數的名稱。當發現虛數的時候，前此的數目就有了實數的名稱。

因此，代數上一切數目的系統，就在這六則發展底過程中完成了。這種系統，可以列成下表：——

正數 負數	整數 分數	有理數 無理數	實數 虛數	代數數
↓	↓	↓	↓	
發現於減法的計算	發現於除法的計算	發現於開法的計算	發現於負數開平方	

最後，我們還應該研究到冪法上發現的指數。在指數的計算上，我們通常看見四個基本的式子：——

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

$$(3)\quad (a^{m})^{n} = a^{mn}$$

$$(4)\quad \sqrt[n]{(a^{m})} = a^{\frac{m}{n}}$$

從這第一式里，我們可以看出：乘法有用加法代替的可能：從第二式,可以看出:除法有用減法代替的可能；從第三式,冪法有用乘法代替的可能;從第四式，開法有用除法代替的可能。

由這樣的一種可能，轉變到一種對數的新形式。於是,乘除法眞的由加減法來代替了;冪開法眞的由乘除法來代替了。

並且,在從前一切解決不了的困難,如乘多次方或開多次方的問題等等,都很輕便地解決了,

從代數數走到對數是一個飛躍;並且,代數數都是從減除開等比較計算繁雜的方法上發現得來;然而對數,它却是指數底另一形態,它是從冪法上得來。

因此,對數這件東西,它也是從初等代數走到了高等代數底標記之一。

十一　從「三度空間」到「N度空間」

從前我們已經研究過：(1)幾何學研究的對象是形狀；(2)形狀是從物體或現象上抽象得來的。

現在我們要問：從物體或現象上，我們可以抽象出幾種不同的形狀呢？

自然，物體或現象上底形狀是各種各樣的；然而，我們若是把所有一切的形狀都歸納起來，却只有三種不同的形狀。

這三種形狀，第一就是「線」，第二就是「面」，第三就是「體」。比方，一條繩就是一根「線」的代表；一張紙、就是一個「面」的代表；一個火柴匣就是一個「體」的代表。

不過，在人類底思維上，它有一種向着兩個極限推想的能力。比方，就「線」來說罷，一根繩，固然被認做一根「線」；就是一根長木柱，也是可以被認做一根「線」的。再擴

大一點，一條很長的路，也可以被認做一根「線」；一個彗星所經過的空間，也可以被認做一根「線」，再推到極限，就把宇宙全體底本身，也可以看做一根最長的「線」了。

這是向繼續增長的這一個極限推想。

現在反轉來，向漸次縮小的這一個極限推想。

比方，一根繩固然可以被認做一根「線」，就是一根縫衣線，那自然也可以被認做一根「線」；再縮小一些，一根頭髮，也可以被認做一根「線」；一根蠶絲，也可以被認做一根「線」。再推到極限，那就是我們普通幾何學上所說的「線」，——那種只有長短，沒有寬窄和厚薄的「線」了。

幾何學上底「線」，它是有長短的；大家對於這句話都沒有疑問。不過，說「線」是沒有寬窄和厚薄的，大家就懷疑起來了。這就因為宇宙間找不出一件「只有長短，沒有寬窄和厚薄」的東西。其實，我們只要把話說得不同一點，這問題就解決了。假如我們說：「幾何學上底線是有長短的；但它底寬窄和厚薄都小到了極限。」這就沒有問題了。

相類似的例子，我們對於幾何學上底「面」，可以這樣說：「幾何學上的面，它是有長短和寬窄的；但它底厚薄却小到了極限。」

現在再來說到「體」。「體」是有長短，寬窄和厚薄的。一粒骰子固然是一個「體」;大一點的，像一口衣箱，一間房子，也都是一個「體」。再推到極限，宇宙底全體，那也是一個長寬厚三者都大得無限的「體」。

我們若是把一個「體」慢慢地縮小又怎樣呢?

那就可以得到這樣的一個極限：——那就是長寬厚都小到無限的「點」。

因此，我們應該這樣說：幾何學上的「點」，它是最小的「體」。它是小到了極限的「體」。

總括以上的說，宇宙間一切的物體，都是有形狀的;它們底形狀，有長短，寬窄，和厚薄這「三度」。幾何上的「體」，是指長，寬，厚，三度都很顯現的形狀。「面」是把「厚薄」縮小到極限了;「線」是把「厚薄」和「寬窄」都縮小到極限了。至於「點」，那是把長，寬，厚，三度都縮小到極限的形狀。

然而就廣義的說，宇宙間一切的物體，都是有三度的;因此，一切從物體上抽象得來的形狀，也都是有三度的。面底厚薄，雖然小到了極限，但我們不能說它絕對沒有厚薄。同樣，我們不能說：線是絕對沒有厚薄和寬窄的，

「點」是絕對沒有長寬厚的。

這以上是研究點,線,面,體存在底形式和它們發生底由來。這以下,我們準備研究到點,線,面,體這四件東西一貫的聯繫。

上前兩次,我們研究過:「點」是幾何學上基本的矛盾。它是「有」(指位置),同時又是「沒有」(指長寬厚);它存在,同時又不存在。

宇宙間一切的物質都是運動的;我們要研究它,便應該從那種運動底過程上去研究。幾何上底形狀,它是從物體上抽象得來的;因此,我們要研究形狀,也應該從形狀底運動過程上去研究。

自然,單從形狀上去看,它似乎是不會運動的。

然而,形狀是不能離開物質而存在的;物質既然是運動的,那末,形狀便跟隨着物質一樣地運動了。

有少數的幾河書上這樣說:「點運動便成了線;線運動便成了面;面運動便成了體」。這種說法是對的。

不過,普通只講到「體」就不曾講下去了;難道「體」就不運動了嗎?並且,難道我們底空間,就眞的只限於「三度」嗎?不!「體」還是要繼續運動的;並且空間也不限於「

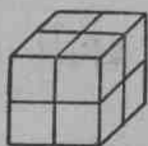
三度」，它是有「無限度」的。

這句話怎樣說呢？我現在舉個例子來看看：——

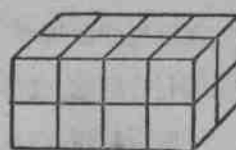
(圖一)

(圖二)

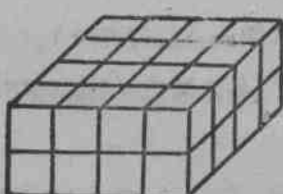
(圖三)



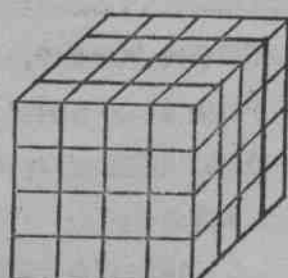
(圖四)



(圖五)



(圖六)



(圖七)

比方，「零」這個數目，我們可以拿「圖一」來表示，它是一個「點」。「二」這個數目，我們可以拿「圖二」來表示，它是一根「線」。再、「二底二次方」這個數目，我們可以

拿「圖三」來表示，它是一個「面」。再，「二底三次方」這個數目，我們可以拿「圖四」來表示，它是一個「體」。

假如我們再繼續下去，「二底四次方」，「二底五次方，」「二底六次方」等等怎樣表示呢？它們底圖應該是上面底「圖五」，「圖六」，「圖七」，等等。

從這幾個圖看來，「圖五」底形狀是「線」；「圖六」底形狀是「面」；「圖七」底形狀又是「體」了。

這就可見：我們底空間，它不是限於「三度」的，它是有「無限」的度數。不過，它雖然不限於「三度」，然而，在它底運動過程中，它是依着點綫面底次序、依着螺旋式的路程循環着的。這就是說，第一個點線面（如圖一，圖二，圖三）過去，第二個點線面（如圖四，圖五，圖六）又來了。不過，第二個點線面底數量，它是比較第一個點線面底數量增大許多了。

再，這種空間底度數既然是無限的，那麼，在這裏，我們可以看出：這種「無限度」的空間，是由許多有限的「三度空間」完成起來的。

十二 目前應該怎樣研究數學

我原來的計劃，是在這裏繼續談一十二次；現在，正是第十二次了。

過去所談的，在理論上說不定還有不很正確，或是不很充分的地方；在文字上，也說不定還有不很通俗的地方。不過，在我目前的能力上，卻是只能做到這樣了。

在初等數學這一個範圍裏面，我已經儘我底能力，搜集了過去許多進步的結論，再加上少許的個人意見，把它儘量地通俗化了。

目前是最後一次，這次要談的是：數學和方法論底關係，也就是我們目前應該用怎樣的方法去研究數學。

過去研究數學的，普通是用的演繹法或者是歸納法。關於前者，最顯著的例子是歐幾里得底幾何。在那種書上，它是從一般性的公理定理，推論到每個特殊問題底證

明。

關於後者，在我們國內底中文本子裏，最顯著的例子是：最近出版的許多幾何學教科書。（如商務的復興初中幾何，南京書店的初中幾何，開明的初中幾何等。）在這些書裏，首先都講了一些所謂『實驗幾何學』，然後再講到所謂『理論幾何學』。無疑的，在這些書裏，它們都想從許多具體的圖形出發，再推論到一般的抽象的理論。

然而，這兩種方法單獨地應用，在事實底面前，它們都已經破產了。比方，在應用演繹法的幾何書上，它不能不首先研究『點』和『線』，再研究到『面』，然後才研究到『體』。這就是說，它在事實上，不能不先從簡單圖形底的瞭解，再進到一般的複雜圖形的瞭解。

再比方，在上面所舉那些應用歸納法的幾何書上，它在所謂『實驗幾何學』底起頭上，仍然不能不首先把『點線面體』概括地說明一下，然後再分析地研究。這就是說，它在事實上，仍然不能不首先提到一般的東西，再進到個別的東西。

說一句攏統的話，在目前一般的數學書上，僅只是堆積着一大批很可寶貴的材料。然而，它僅只是一些材料，

還不曾好好地把它安置到它自己底天然的位置。

我們目前在數學上的任務，就是要把這許多很可寶貴的材料，好好地安放起來，使它們都放到它們自己底天然的位置。

說一句比較學理的話：我們對於數學，並不是要從數學底外部把什麼演繹法歸納法乃至新的邏輯搬進去，而是要在數學底本身上去發現方法。並且，使這種方法在數學裏面更廣大的展開。

從以前十一次的研究，我們已經在數學底本身上發現了一些新方法的基礎。

究竟發現了一些什麼呢？

第一，數學是和現實對應的。過去有許多數學家，他們只承認數學上的理論是由一種所謂數學的天才從腦子裏創造出來的。但是，從我們前此第一次的研究裏，我們已經知道：數學是滲透在我們底生活裏。從第二次的研究，我們又知道數學是從現實裏發生。從第三次的研究，我們又知道：數學在各種不同的時代裏，它反映出各種不同的意識。從第四次底研究裏，我們又知道，數學上底抽象性，它是怎樣的和現實互相聯繫。從第六次的研究裏，

我們又知道:在數學底內部雖然是研究一些抽象的東西,然而,那些東西,它始終不能和事物底內容絕對地脫離關係。從五次的研究裏,我們又指破了許多人對於所謂「自明公理」的迷信。所有這一切,我們都是把發生在現實裏的數學,成長在現實裏的數學,從觀念論者底迷魂陣裏,挽救了出來。

第二,數學底本身,它也是從一個基本的矛盾向前發展的。在前此第九次的研究裏,我們已經知道:代數上底基本矛盾是零,幾何上底基本矛盾是點。在第十次的研究裏,我們已經知道:代數學底全部,都是從矛盾的零發展起來的。在第十一次的研究裏,我們已經知道:幾何底全部,都是從矛盾的點發展起來的。

第三。數學底內部,一切都是運動的,是對立統一的。這在第十次的研究裏,我們已經知道:在代數上是從矛盾的零出發,發展到矛盾的正負數,再發展到矛盾的加減法。以後,再由加減發展到乘除,由乘除發展到冪開。所有這一些,都是運動的,並且是對立統一的。再,在第十一次的研究裏,我們已經知道:在幾何上是從矛盾的點出發。由點運動而成線,由線運動而成面,由面運動而成體。並

且，再運動下去，仍然是永遠地繼續着線面體底螺旋式的循環。

第四，數學上也存在着由數量到性質的轉變法則。比方。在第十次的研究裏，我們看到：由加減走到乘除，由乘除走到冪開。但到了冪開的時候，發生許多問題（如乘多次方，開多次方之類）不能由自已去解決了。這時候，恰巧又發生了指數；由指數轉變一個形式，變成對數；便把代數由初等的轉變到高等的了。

這以上，是我們在初等數學研究上所發現的唯物辯證法。

此外，我們在前幾次的研究裏，還指出幾何和代數兩科各有不同的特性。在第三次的研究裏，我們已經指出：這兩科研究底對象不同。在第八次裏，我們已經指出：這兩科相互間底關係。在第七次裏，我們已經指出：這兩科在自然科學和社會科學上底地位。

這以上，我已經把研究數學應該採用的方法說過了。現在要指出的，就是：這一件研究的工作，並不是任何個人所能夠完成。因為數學上過去所積存的材料，已經不是任何個人所能接受完全的了。現在要在除了接受全部的

材料以外，還要加以辯證的處理，這自然是要用集體研究的方法才能够完成的。

因此，我很誠懇地希望：一切有時間而且願意從事這一件研究工作的朋友，大家合作起來。

十三　店員學徒們怎樣自修數學

——答馮中興君——

數學對於店員學徒有很密切的關係。每天的賬簿，不都和數學有關嗎？馮君現在提出這問題來，是很值得討論的。

有的人對於數學，常說：『數學是大家認爲要學的；但數學是一件很枯燥的東西，我對於牠實在是不感興趣』。這種觀念，是錯誤的；因爲數學這件東西，牠也和一切的學問一樣，牠是爲了人們生活上的需要才發生的，也是要在我們生活上有了需要才會去學的。我們若是不在生活上去發現數學的需要，卻專在數學的本身上去找興趣，那是必然地要失敗的。

再，我也曾經看見過一位店員先生，他是很留心別人不大留心的算法的；但他的出發點，卻是爲了他有一些年

紀了,他要多研究一點奇僻的東西,才好在新進的店員學徒們的面前擺架子。但是,這樣的研究數學,這樣的出發點,卻也不是正確的。

不過,也有人說:『數學範圍是寬得很的,我們要去精通數學,那是辦不到的。』這樣的說法,也是錯誤的;因爲每一個店員學徒,並不是都要去當數學家,而是在他的環境上,常時逼住了他的那些數學問題,他是應該去求解答的。

並且,就算是在書本上學會了許多的數學,也不見得就能够好好地去解決環境上的數學問題的;比方,許多從初小高小初中甚至高中畢業出來的學生,對於商人們習慣上常用的幾盤算盤,卻不能瞭解牠的意義,也是很常見的。並且,學校裏所教的數學,常常是不免偏於形式,不着實際的。在那裏,先生對學生們說:『你們現在是求學的時期,將來才是應用的時期;現在多學一點,將來是一定能够應用的。』但是畢業以後,先生不負責了;先生從前所講的,驗了沒有呢?從前所學的是不是够應用呢?據我所知道的,許多的學生們都是受過這樣一些騙的。

總起來說:我們研究數學,不是專爲了興趣,也不是

爲了擺架子,也不是爲了要當數學家;一句話,我們是爲了應用才研究數學的,爲了要解決生活上的問題才研究數學的。

假如有一位店員說:『我們是不需要數學的;在我們的環境上,我們也沒有什麼問題要解決。』眞的嗎?我現在舉出一些例子來看看!

在申新兩報上,在那些商業新聞裏,那種銀洋錢的兌換,你能夠計算了嗎?那種國外的匯兌,你能夠計算了嗎?那種金銀的買賣,你能夠計算了嗎?那種證券的交易,你能夠計算了嗎?

再,你所在的那一家公司,或是銀行等等,他有多少股本?他是怎樣賺錢的?每年能賺多少?

在上海這個市上,那一些生意是很賺錢的?那一些工廠是很賺錢的?他們又是怎樣才能夠賺錢的?具體一些說,電氣公司是怎樣賺錢的?賺多少?人壽或水火保險公司是怎樣才能夠賺錢的?他們是怎樣計算的?

再,那些銀行辦儲蓄的是怎樣賺錢的?那些大減價時所發的贈品以至香烟盒裏面附帶的贈品是不是白送給人家的?有獎儲蓄是怎樣賺錢的?輪盤賭博中是怎樣賺錢

的?跑狗場回力球場是怎樣賺錢的?

再,海關招生,銀行招生,郵政局招生,他們出了一些怎樣的數學題目?你能夠算嗎?

現在的度量衡,已由政府決定改用市用制了。由我們從前所用的那種度量衡 合成市用制的度量衡,你能夠算嗎?

現在的白銀問題,鬧得很兇;究竟中國還存有白銀多少?如果不把入超的問題根本解決,中國的白銀還可以支持多久?

我們的政府,每年的預算和決算怎樣?國際間債權債務的關係怎樣?

呵呀!越說越遠了! 但是,這不是一些生活上要解決的問題嗎?再,你總不會說這些問題都不是你所必需解決的問題吧?

要解決問題,最好還是去請教別人,或是去和別人共同地研究。換句話說、先去看別人是怎樣解決這些問題的。

你問別人的時候, 首先就得把自己看很得低; 如果一方面要問別人,一方面又覺得自己很行,那別人就不高

興和你研究了。因此，你應該把你不懂的地方澈底地講出來，誠懇地去問他；不要因爲別人比你年紀輕，或是地位低等等，你就不去問他。中國有一句不好的話，叫做『獻醜不如藏拙。』我們現在要反轉來，『藏拙不如獻醜。』因爲要從獻醜才能够走到不醜，

去問的時候，你常常只能得到一些習慣上的算法，知其然而不知其所以然，因爲中國有一種不好的習慣，叫做『不求甚解』；所以大家就只要知道經驗上的算法就不前進了。不過，你應該知道，先知道『當然』也是好的：有了『當然』你就有了去求『所以然』的基礎了。

你自己已經知道的算法，也應該告訴別人，和同業的共同研究，甚至和不同業的也共同研究。中國舊社會裏有一種壞習慣，就是保守祕密。有的人覺得自己知道一點點東西就了不起，不願意告訴別人，以爲那是便宜了人家；其實，那一點點東西，在多懂得一點的看來，究竟算不得什麼。再，也有的人，他們認定他自己同行的某一種東西，不應該告訴外行；因爲告訴了外行，怕外行又來搶自己的生意；其實，如果大家都把自己的祕密互相地告訴起來，那便大家都有了好處，大家都有了進步，大家的生意

都越做越好了。只有死死地保守祕密，那才成了沒有進步的一個大原因。

也要和那些懂得數學理論的人們合作。因為你有了許多的經驗材料，擺在你的腦海裏，還是七零八亂的，不容易找出一個系統來；同時，現在有許多懂得數學論理的人，他們却和數學的實際材料隔離了。你若是去和他們合作；在你，可以得到你那些材料上更進一層的意義，在他，却也得到了充實的內容。這也是大家有益的。

和別人研究還不够的時候，自然便該去找書看。

有一些人對於數學這樣想：『古人對於數學問題的解決，是想出來的；古人是人，我也是人，我也該努力地想。』其實，也是錯誤的。因為現在一般數學書上已經想出來了的答案，那是億萬人想出來的，不是一個人想出來的；那又是經過幾千年才想出來的，而不是幾年幾十年能够想出來的。我們要拿一個人幾十年的功夫，去想出那些億萬人幾千年想出來的問題，那哪里辦得到呢？因此，我們應該多學，不應該多想；但又不是要完全不想。我們要想的是那些古人還不曾想得出的東西。

不過，自己去看數學書，也有一點困難。因為現在書

店子裏最多的是『教本』,他們是爲了『教』才編的,却不是爲了『學』才編的。那些書,在學校裏用,今天有教員講了,叫學生今晚去預習明天要講的還辦不到;因爲學生根本就看不懂。現在要拿來自修那自然是更困難了。

不過,也不是完全絕望,我現在且舉出幾册來。北新書局出版的小朋友珠算,這是有了初小三四年級的國語程度就好去看的。生活書店出版的珠算速計法,這是學過了珠算上普通的四則就可以去看的。此外中華的珠算全書,大東的商業實用珠算,施伯珩的珠筆算合璧,商務的高小珠算教本,都可以拿來合看的。

不過,對於書,不要隨便地去看,也不要死板地去看。有的書要精讀,有的書却只要流覽。最好,對於每一本書,你只揀那最精的一部分,或是能够解决問題的一部分,讀讀就行了。

和別人也研究過了,從書上也研究過了,這便要再講到『想』的問題。『和別人研究』『從書上研究』自然也都離不了『想』;但是,現在所講的『想』,便更進一步了。

我們從環境上的數目,要去想出環境上的性質來。比方,抽彩的事情,我們從劵價的總數,以及中彩的總數等

等、便應該看出那種抽彩的性質來。抽彩的事情不是常有的嗎?弄堂口小孩子買糖的抽彩,商店裏大減價的抽彩 ,有獎儲蓄的抽彩等等,不是很多的事實嗎?牠的性質怎樣呢?

我們又要把自己和大衆聯繫起來。自己從『別人學來』,或是從『書上學來』,都是受了大衆的許多益處的。自己也得存心把自己想得的結果貢獻於大衆。在這裏却是不要把自己看得毫無出息,以爲自己是太沒有力量了,够不上有什麼貢獻。其實,我們若是常時和大衆在一塊兒去研究,那一定是多少和大衆有些益處的。

最要注意的,是不要把數學看做了單是計算銀錢的工具;還有更壞的,便是把數學做了欺騙大衆的東西,剝削大衆的東西。

這一個用場上的不同,就只好由你自己去選擇了。

(見讀書生活第一卷第三期)

十四　珠算和筆算

一　珠算和筆算的長處

現在一般的學校，只除開幾個極少的民衆學校以外，從小學一直到大學，一般地都只注重筆算，而不注重珠算，這是一個事實。並且，就我所知道的說，甚至高中的商科，也還有把珠算當做不在乎的哩！

自然，筆算的精深巧妙，那是我們所不能否認的，筆算在科學上位置的重要，以及牠對于人類生活上的影響，那也是我們所不能否認的。但是，珠算在人們日常生活的實踐上，牠不是比筆算還來得重要而且切實一些嗎？

也有人說：筆算在說理上是十分明白的，比起珠算來，那是高明多了。當珠算上說理不很快暢的時候，如果借用筆算上說過的道理，不是也能够幫助很多嗎？這又是不錯的。不過，珠算在人們日常生活的實踐上，是一件不

可少的工具:用着牠,我們便時常和自然,和社會一切具體的東西相接觸;用着牠,我們把日常接觸的事物,一件一件地計算起來。經過了這樣一些生活的實踐,牠可以幫助我們去瞭解筆算;甚至,牠還可以幫助我們去瞭解環境上更重要的東西。

但是也有人說:珠算還是比不上計算機的迅速;並且,珠算在計算多位數目的時候,是很容易錯誤的。不過,我們也知道,計算機的價錢是很貴的,攜帶也很不便利。我們是不是能够辦到每個人都具備一架計算機呢?這不單只是個人的能力辦不到,就是很大的洋行公司他們也不能辦到每一個店員都為他備一具計算機呀!——並且也沒有這樣的必要。

因此,珠算和筆算是各有各的長處的:——就是計算機也有計算機的長處。

二　首先應該注重珠算

珠算是一般人需要的東西,牠又是每天需要的東西。筆算呢,粗淺的固然也是一般人所需要,而且是日常所需要;但是,學起來很費時間,用起來很不便當;所以,還比不上珠算。至於那很高深的一部份,一般人能够知道固然

是好,但是也沒有必要;並且,因爲受了種種的限制也沒有可能呀!

因此,珠算和筆算比較時,應該首先注重珠算。

這以上是就一般的說;至於商人們,銀行錢莊公司商號等等的店員學徒們,他們的需要珠算,那更是不要再說的了。因爲現在的交易,在一個極短的時間就要把一個雙方對找的數目計算出來;現在的金融,又是在每一秒的時間,起着極繁極大的變化:在這樣的場合,這樣的任務,是不是用筆算擔負得來的呢?

也有人說:從筆算走到珠算,珠算上的道理便容易瞭解。於是,我們應該回答他:遲學一天的珠算,便把日常生活上計算的問題多積壓一天;並且,不先從珠算入手,筆算也容易變成抽象的形式,因爲牠缺少了生活上實際的基礎。

也有人說:珠算是一種極粗淺的東西,用不着拿許多的時間去研究。於是,我也該答覆他:在日常生活一般的計算上主要的是要求計算上的敏速來節省寶貴的時間,就算有了高深的筆算,在日常的生活上也用得極少。

因此,我們應該認定:珠算是柴米油鹽一類的東西;

至於筆算呢,那却是時鐘寒暑表一類的東西。時鐘寒暑表雖然重要,但是人們的需要柴米油鹽,卻是比需要時鐘和寒暑表要緊急得多多呀!

三 珠筆算和大衆

日常生活上的計算問題，正是大衆急於要解决天天要解决的問題。能夠很靈敏地解决這種問題的正是珠算而不是筆算。就時間上金錢上打算,大衆目前也只有學習珠算的可能;對于筆算,那也只好餓着肚皮眼巴巴地望着人家吃肉。

不過,大衆也不要馬上希望吃肉;因爲從餓肚皮到吃肉，不是一天兩天就能够辦到的。

這就是說:大衆目前所要求的是珠算而不是筆算。筆算雖好,慢一點罷!

四 把過去的終點做眼前的起點

因此,我們如果要提倡算學,就得首先提倡珠算。在這裏,我們並不是要來看輕筆算,也更不是爲了珠算是我們的國粹。一句話:我們是爲了大衆,爲了:

『要把過去的終點,做現在的起點。』

這就因爲:我們要改造,就只能就對象的本身上改造

起;改造的起點與條件,就在要改造的本身上。從本身以外去改造起,那固然是不可;從本身以外去找改造的條件,又哪里有改造本身的可能呢?

算盤這件東西,在中國是普遍地散布着了:這是中國過去一般的算學成績。就是在銀行,在商店等等的地方,至今也還是大家都用着珠算。中國雖然在學校裏提倡了數十年的筆算,但至今也還不曾把珠算拋棄去改用筆算。也不曾有人提議過,說:我們買賣上日常生活上都要改用筆算,這並不是出于中國人的所謂『保守性』,而是珠算這件東西,在日常生活的實踐上,有牠一定的位置。

因此,我們就大衆着眼,過去算學成績的終點,就是這種粗淺的珠算,而不是那種高深的,少數人專有的筆算。我們現在要提倡算學,也就應該十分廣泛地從珠算提倡起:——到將來珠算程度普遍了的時候,我們便再來推進一步,使大衆也來研究筆算,

五　珠筆算和教育

過去的教育只是為了小衆,這在珠筆算的教授上也看得出來。

大衆日常所需要的明明是珠算,學校中卻偏偏要注

重筆算。大衆時間上金錢上能够學到的明明是珠算，學校中所教的卻偏偏是要費很多時間很多金錢才能够學會的筆算。這是爲大衆而設施的教育嗎？

最顯明的例子是：我們看見農村中有很多的人們，他們只能够把子弟讀上一年或兩年的書；但是，子弟出了學校，所學的筆算一點也沒有用處；一兩年筆算的成績還比不上家庭中一兩個月學來的珠算。農民的看不起學校，這也是一個原因；——自然，他們並不明顯地知道：教育也有大衆和小衆之別。

現在就單就目前已有的教育，來談一談珠筆算的教授罷。

中國興學數十年，對于珠算的教授上，絲毫也沒有進步。這個，我們可以到農村的學校中去看；在那些有珠算的學校中，大多數還在教『還退』『六百六』和『小九歸』。自然，這還是看輕珠算的表現，對于珠算不曾加以注意的表現。

那筆算是不是教得好呢？據會考成績的報告，成績最差的便是算學。我們知道：現在一般的筆算，在系統上，那還只算是一些支離破碎的經驗材料；就應用講，一般地還

和生活的實踐隔離得很寬。前者的證明在這裏不能講到;後者的證明,我們只要看很多中小學生甚至大學生不能用珠算迅速地計算他日常生活上的問題,便可以看到。

有的小學校雖然有了珠算,但是,只列在副次的地位。升學又只用筆算,珠算便更是看不起。教師對于珠算的教學法研究的極少,學生所得的益處又哪里會多呢?

我再舉我最近見過的一些事實:(一),一個會計學校的學生,臨時在校外補習珠算(二),三個高中商科的畢業生不曉得打算盤;(三),一位師範專科學校的教務長,他是師大的畢業生,又在教育界多年服務,但他不能够用珠算去計算學生成績的分數;(四),將近三百人的師範專科學校的學生,沒有十個人能够替教師幫忙,去計算那農村經濟調查上的統計。

這就是所謂『教育卽生活』的教育。

因此,我們現在的初小,最好是一律改教珠算?筆算要在高小或在初小第四年才教起。若是珠筆算同教,珠算也應該列在主要的地位,筆算卻列在副次的地位。初中考試新生的時候,一律要考試珠算。

自然,在教育還不曾爲大衆而設施的時候,這是一種

幻想。

六 珠筆算和教本

珠算教本的需要，注意到的人是不很多的。雖然商業上許多的店員學徒們都需要着一種易懂易熟的自習珠算書，編輯的先生們卻也還不曾努力地去供給這一個需要。自然，供給這一個需要的，在坊間也不是絕對沒有；不過，那些所謂『寫算大全』『珠算祕訣』式的東西，是不能滿足這一個需要的。

我們也知道：在商大，商高，鄉師，職業一類的學校，他們是需要珠算教本的；至少，也是需要珠算的自習書的；但是，供給了這一種需要的在哪里呢？

因此，我們可以斷定：在國內並沒有幾個人在用科學的方法來改進珠算的教授的。

有人說：施伯珩先生所編的『珠筆算合璧』不是一部很好的珠算書嗎？但是，那也只比別的珠算書多了一些實際的材材罷了；至於教授的方法，卻還是一些因襲的板滯的東西。比方：『百子法』『八十一歸算例』這不是一種很陳舊很板滯的方法嗎？

所以，現在編輯算學書籍的先生們，不應該把眼睛專

門注視在筆算上，更不應該專門注視在外國的算學教本上；而是相反地，要看一看自己的需要。要在已有的珠算上多來考量一下。在着手編輯的時候，一方面固然要設法把筆算上的道理放一點進去；不過，同時還應該多多採集海關郵局銀行公司等等方面的實際材料。

自然，這些話。在目前，大部份還只是爲小衆設法的。

七　目前改進珠筆算的任務

筆算的應該改進，範圍太大，說來話長，在別的地方再說罷。關于珠算的改進，在這裏，可以略爲談到一些。

第一，　我們要認清珠算比筆算特殊的地方，在于牠有：（一）運珠的指法，（二）運珠的口訣，（三）單位的定法。

第二，　我們要設法減少學習珠算的時間。

第三，　我們要使得識了字的人們都能够由自己看書便學會珠算。

第四，　我們要設法改良算盤。

第五，　我們要改進珠算的教法：比方，把整盤地教改成分散地教，把口訣解釋清楚等等。

第六，　我們要把無用的東西抛棄。比方：『飛歸』和

不切實際的名數題等。

第七， 要審定名稱；比方『斤兩歌』應該改稱『一歸六除歌』等。

第八， 要把筆算上的原理和社會的實際材料加進去。

第九， 要設法使打算盤的技能更容易敏速。

(見讀書生活創刊號)

十五 怎樣研究珠算

一 研究珠算的必要

我們要研究珠算，並不是爲了珠算這東西是中國的什麼『國粹』。

珠算這東西，在計算上是迅速得很；在日常生活的計算問題上少不得牠；從計算的熟練上去求算理上的瞭解，牠也有不少的幫助。我們要研究珠算，就只是爲了這一些。

但我們平日所遇到的多少青年，他們竟不能利用這一件計算迅速的東西，去解決他們日常生活上實際的需要。當他們跑到一家商店裏去買一些東西的時候，搜索他們從小學以來學過多年的算學，竟不能用一個很短的時間去解決當前必需很快地解決的一個小小的計算問題。

他們腦子裏是充滿着『求大公約要怎樣的輾轉相除，

』『代數上的因子分解法是有怎樣怎樣的一些巧妙』，但這一些東西，和實際的生活一點聯繫也沒有；他們是從來就不曾把他們學過的一些形式上的算學理論建築在一種實際計算上的。

今日的青年們，為了他們要和現實生活上的計算問題相接觸，便少不得珠算；為了要解决日常生活上計算問題的迅速，也少不了珠算；為了要從計算上去求算理上的透澈，也不能不去找珠算來幫忙。

二　目前研究珠算要靠自己努力才有可能

我們若是去請商人們來指導珠算，他們大多數是知其然而不知其所以然。我們若是找小學教師中教授珠算的來指導珠算，他們大多數也和商人們差不多；他們在教法上也還是中國傳統的老法子，離不了是「六百六」「還退」「小九歸」「大九歸」等等。我們若是到初中裏面去學，但現在的課程標準裏面，早把那暫行課程標準裏面所有的「珠算大意」删去了。我們現在就索性去找珠算書來自己研究罷；但現行的珠算書，最大多數的還是一種傳統式的編法；我們若是想從這些書裏面去把珠算研究好，那所費去的時間是要很多很多；甚至費了許多的工夫還是一無

所得。

這樣看來，我們現在要研究珠算，不是絕望了嗎？不！我們現在可以多備幾部書來研究。因為備的部數多，所以那些書裏面，即使有許多不能看懂的也不要緊；因為我們可以在這一部書上去看懂這一些，到那一部書上又去看懂那一些。這樣，所費去的時間雖然還是多一點；但所得的一定是很透澈的了。

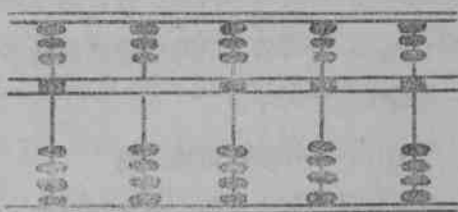
三、 新式算盤和舊式算盤

這裏所講的舊式算盤，就是指現在一般人大家日常所用的算盤。這種算盤的每一檔有七個算珠：上珠是兩個，下珠是五個。

這種算盤用起來有一些毛病：第一是沒有表示單位的東西；第二是兩個上珠還不够用；有時候把頂珠當十，又很容易算錯；第三是下珠的第五個不常用；並且，有了這一個算珠，在教授時還要多費去一些講解的時間。因此，我曾經集合過去許多人研究珠算的結果，又把自己的意見加上去，擬定了一種比較進步的新式算盤。

新式算盤的每一檔，還是用七個算珠：不過上珠是三個、下珠是四個。這樣便解除了上述第二第三兩種的毛

病。再,在算盤的横梁上,横包着四五條可以左右推動的銅皮,作爲定單位的記號。這樣,便解除了上述的第一種毛病。爲什麼那銅皮只用一條不够,要用四五條呢?那是因爲計算複名數時候有多數個單位的原故。新式算盤的圖如下:——



四、 研究珠算要合用心手口

珠算上的打盤,是要用一種口訣的。這種口訣,初學時要解釋得清楚;打盤時,同時要想到所用口訣的意義。因此 ,研究珠算,要多多用心。

再,珠算的打盤,是一種技能;這一種技能,和別的技能一樣,需要多多地練習。因此,研究珠算,要多多用手。

又,口訣是要唸才會熟的;並且,在初打盤的時候,還一定要出聲地唸。因此,研究珠算,還要多多地用口。

我們在打盤的時候,是腦子裏想着,手指上動着,口頭上唸着。我們是同時用着心手口。

五 整小數的六則

『六則』這個名詞，是我所試擬的，牠是指着加，減，乘，除，乘方，開方。我想把『四則』那個名詞不用，來改用『六則』;這理由已經在怎樣研究代數（見青年界六卷一號）那篇文章裏說過了。

六則是分做三個階段的，第一是加減，第二是乘除，第三是羃開（即乘方開方）。我們對於珠算，也該分三個階段去研究。

整數和小數都是十進數。這兩種數，在我們的初次學習上，雖然可以有先後之分，但在珠算的打盤上却沒有什麼基本上的分別;因此，整小數的打盤，可以同時研究。

研究加減時，我們要記住單位是始終不變動的。研究乘除時，我們要記清單位的向左或向右移，或是不移。研究羃開時，我們要偏重研究開法。

珠算上的開平方和開立方，現在苦的是沒有『無師自通』的書可看。現在書店子裏面所出的書裏面，講到了開方的又很少。施伯珩先生所編的商業應用珠筆算合璧，殷師竹先生所編的珠算應用法，那上面雖然講到了開平方開立方，但很不容易看懂。我曾經請幾位初中畢業的同學們當面試驗過：他們有的是根本不能把那些書上所講的

開方法看懂;有的雖然把方法看懂了,但不能瞭解牠的根本意義。關於這一點,凡是自己努力去研究珠算的人們,是多少有一些困難的。

六 複名數

關於複名數的計算,在珠算上只要注意到加減乘除,不必研究羃開。

關於通法和命法的定義,一般的珠算書和筆算書上,差不多都弄錯誤了。只除了吳在淵先生最近在中國圖書儀器公司出版的算術書以外,每一部都弄錯誤了。就連吳在淵先生昔年在中華書局出版的那一部術算上也錯誤了,究竟是怎樣錯誤的呢?說來話長,也不在本文範圍以內,只好到旁的地方去說了。

珠算上通法命法的打盤,最容易記錯單位;想要免除這種困難,最好是採用新式算盤。因爲新式算盤上,有了四五片「定位條」(卽橫梁上的銅皮),便減少了記憶上的困難了。

『斤兩歌』在中國是很用得多的;所以必須記熟。但是,斤兩歌這個名詞,把這個歌的用場限制得太狹隘了;該應改叫『一歸六除歌』。因爲:一來,那些『一·〇六二

五;二·一二五等等』本來是由一歸六除而來。二來,牠底用場並不限於斤兩;凡是要用一歸六除的地方都用得着。

七 與實際接觸

從前用老法子學習珠算的人們,他們是死板板地去學習打盤。『六百六』呀,『小九歸』呀,等等,都打得爛熟;但是,到了實際上要用計算法的時候,他們卻不能够去把當前的問題好好地解決。

我們現在研究珠算,要注意兩件事:——

第一,平日要留心實際上的問題。凡是社會上關於股票,利息,匯兌,貼現,保險等等的問題,以及國家財政,地方金融等等都要留心。

第二是要多計算名數題。過去的珠算書上,名數題並不是沒有。不過在那些書上,有的是列着一些千篇一律的問題,有的或又是一些不甚重要的問題。我們現在要多多計算的名數題,第一要是『基礎題』;這些題每一個都不很複雜,但牠們是計算一切複雜問題的基礎。第二要是『代表題』;這些題每一個都是代表一類的題,牠們相互間並不是完全相同,而是各有各的特性。

八 簡捷法和近似算

珠算最大的用處，就在解決日常生活上的計數問題。珠算的長處也就在能夠迅速地把這些日常生活上的計數問題解決。不過，我們還要有意地去講求迅速。凡是簡要實用的簡捷法，我們要多多地講求；手指的練習要有計劃地使牠靈敏

再，我們對於那些在日常生活上不必要的精確，不要白費工夫地去苦求。比方，小數的加減，對於銀元上分厘以下的數目可以不算；再比方，對於多位小數的乘除，要去研究近似的算法，去免除一些不必要的計算。

九　改變過去的研究態度

過去許多人研究珠算，有許多毛病；現在把那些毛病里頭比較重要的提出來說一說：——

甲，在打盤上有兩種毛病：第一是在學習的時候，一盤一盤地整個地學。比方，學習用二除，就在盤上擺着一二三四五六七八九，然後用二除下去。我們現在要反轉來，要零碎地學習，要就口訣一句一句地去研究。並且要把全盤的口訣列出一個次序來，有計劃地去研究。第二是過去有許多人提倡『飛歸』。他們認定那飛歸用起來是格外比普通的『撞歸』來得迅速；其實那種飛歸打起盤來非

常容易錯。因爲所需用的口訣太多,不容易記牢;那些口訣又互相類似,很容易弄錯。

乙,在計算名數題上,過去也有許多的毛病:第一是高興出超越現實的題。比方,『鷄兎同籠』的問題,這是不是我們日常生活上的事實呢?再,我們就鷄兎同籠計算的形式說,並不是不能用別的題目來代替。比方,『兄每日賺工銀五角,弟每日賺工銀三角,兄弟共作工二十日,共得工銀三元四角,求各作工幾天。』這個題目,就要用雞兎同籠那種題目的算法。

第二是故意出難題。以爲出了難題的那本書,才算有價值。有時甚至那個題目的本身並沒有什麼難處,卻偏要在那個題目里面限制算題時所用的算法。

第三是好出一種『現小聰明』的題目。比方,『樹上有五個小鳥,用槍打死一隻,還剩幾隻?』之類。

第四是好出要人們背誦的題。比方,『今攜一壺酒,遊春郊外走。逢友加一倍,入店飲斗九。相逢三處店,飲盡壺中酒。試問能算士,如何知原有?』像這一類的題,因爲被句子底長短和韻脚限制,弄得連意義都不明白了。

一〇 介紹一部珠算書

讀者諸君要開始研究珠算，我願十分負責地介紹一部入門的珠算書。這本書叫做小朋友珠算，編那部書的人就是我自己，書由北新出版，共分上下兩册。內容是整小數的加減乘除，和複名數的加減乘除等等。還有整小數和複名數的應用等等。這部書雖然是寫給小朋友看的，但是青年們也可以看看。至於那部書的好不好，那還是請讀者們自己去判斷吧！（見青年界第七卷第三號）

十六 怎樣研究算術

I 爲什麼要研究算術

現在有許多同學們，他們對於'爲什麼要研究算術'這一個問題似乎還不曾得到一個正確的解答。我現在準備要說到'怎樣研究算術'，首先就該解答'爲什麼要研究算術'這一個問題、並且，還得首先分析現在許多同學們乃至一般人對於這一個問題的解答。這種解答，我現在搜集了九種，一一分析於下：——

第一類 一部份商人們的解答

(1) 他們說："人們日常生活上的計算，最便捷的只有珠算。但是，珠算上的算理說得太不明白；所以，爲了要補助珠算上的不足，就該研究算術。算術在日常生活上是沒有用的；因爲算起來沒有珠算那麼便當。牠底好處就只在說理上比較珠算明白一些罷了！"

這樣說來，算術便成了珠算的補助物了。那些自己認定珠算業巳够用的商人們便無需再研究算術了。但是，算術眞的只在說理上比較珠算明白一些嗎？我們大家都知道：算術底範圍是比珠算寬；算術底用場是比珠算廣；學了算術固然可以幫助珠算；但是，在算術底本身上還有牠自己底價值。因此，商人們上述的這種解答是不正確的。

第二類　一部份同學們的解答

(2)有的同學說："算術是學校裏主要的學科。試驗算術的時候，試驗的分數一定要及格才可以升級或畢業的。所以，我們爲了要升級或者畢業，就得研究算術。"

這樣一來，同學們的研究算術，便只是爲了試驗的分數和畢業的證書了。那末，在試驗以後或是在畢業以後便無需繼續研究了。算術這東西，在這些同學們看來，不是成了一種升級或畢業的手段嗎？這豈不是把算術本身的價值根本否認了嗎？不用說，同學們這種解答，也是完全錯誤的。

(3 有的同學說："我們要準備投考，就要把算學準備好；因爲算學是考試上一門主要的科目。並且，算術是算學的基礎；要算學好，還得把算術研究好。"

這樣一來，算術這東西，便成了投考的同學們一種敲門磚。那些不準備投考升學的，或是已經考取了學校的同學們便也無需繼續研究了。這樣的意見，不是一樣地把算術本身的價值根本否認了嗎？因此，同學們的這種解答，也是不正確的。

(4) 有的同學說："算學的用處就是在工業上，尤其是機械的工業上。我們如果是準備進工科的，那末，就該研究算學。並且，算術是算學的基礎；所以，我們首先還得要研究算術。"

這樣說來，那末，算學或算術便是工科學生的專用品了。並且，凡是不準備進工科的同學們便無需研究算學或算術了。在心理上承認了這種意見的，在行動上表現得最明白的是一部份研究文學的同學們。我現在便專就這些同學們說罷！他們認定自己所研究的是文學不是算學；研究文學是不需研究算學的。但是，現在要問：文學家作品上的材料是不是自然和社會以內的東西呢？自然和社會的材料上是不是沒有數量呢？如果說，文學家作品上的材料是自然和社會以外的東西，那末，我也沒有什麼話可說。如果說，文學家所取自然上和社會上的材料，是沒有

數量的;那末,我也沒有什麼話可說。但是,我們所見一切作品上的材料都只是在自然和社會以內的東西;那所有的材料上,又都各有牠自己的數量。這樣看來,現在正在研究或者準備研究文學的同學們,如果要把自然和社會清晰地觀察出來,是不是可以拋棄自然和社會上的數量不顧呢?如果要把自然和社會上的精彩深刻地顯示出來,是不是可以不研究算學或算術呢?因此,同學們認定只有進工科便該研究算術的這種意見也是錯誤的。

(5) 有的同學說:"我們如果是準備將來去教授算學的,那末,便該把算學研究好。並且,算術是算學的基礎,所以還要把算術首先研究好。如果不準備教授算學的,那末,算學便無需研究,算術也無需研究了。"

這樣說來,那末,如果是準備將來教授算學以外的科目,便都可以不研究算學或算術了。那些準備教授別的科目的同學們,我暫且不去提及他;現在我專就那些準備當國文教員的說罷!如果一位國文教員,他不懂得算術,或者說,他沒有受過算術上基本的訓練,他對於一篇文字的內容是不是能夠深刻地觀察入細呢?他對於一篇文字的形式,是不是能夠縷析條分呢?或者,他如果遇到一篇和

統計上或百分法上等等有關係的文字，又如何解釋下去呢?再或者，他如果遇到那些'乘除''億萬,等等一類的詞頭又如何解釋下去呢?因此,同學們認定只有準備教授算學的才應該研解算術,這也是不正確的。

第三類 一部份教育者們的解答

(6) 一部份注重實用的教育者說:"人們的日常生活上要應用算術的。我們爲求實用,便該研究算術。算術是給我們計算布疋銀錢穀米的呵! 牠是解決折扣匯兌利息等等具體問題的工具呵!"

不錯!算術是給我們實用的;但是，牠僅只是給我們計算布疋銀錢米穀的嗎? 牠僅只是解決日常生活上具體數量問題的工具嗎?

我現在要問:那些人類社會各種統計上的計算問題,不是也需要算術嗎?自然科學上的計算問題,不是也需要算術嗎?這是不是只限於日常生活上銀錢穀米的計算呢?我現在再要問:我們大家都知道的'全量大於其部份'，這是不是算術所給與我們的抽象結果呢? 牠不是從計算銀錢穀米解決折扣匯兌等等問題所得來的抽象結果嗎? 因此,我說，那些認定'算術僅只爲了日常生活上實用'的意

見，也是不正確的。(在他們這種意見底下，在我們的國內還發生了一種特殊的現象。有這樣的一些人，他們也一樣地認定算術僅只是計算穀米銀錢的一種工具。同時，他們又認定那些凡是計算穀米銀錢的人們，都是他們所謂錙銖計較的人們；凡是錙銖計較的人們，又都是格外的卑鄙。他們是自認淸高，他們是不硏究算術。)

(7) 一部份注重科學的教育者說："算學是一切高深科學的基礎。要硏究高深科學，就該硏究算學；並且，要首先硏究算術。算學或算術的用場就只在高深的科學上。我們要盡力地硏究算學或算術，也就是爲了要硏究高深的科學。"

這樣說來，算學或算術這些東西，便是硏究高深科學的專用品了。那些沒有機會去硏究高深科學的同學們便可以不硏究算學或算術了。比方：有許多貧苦的同學們，他們想到："升學是沒有希望的，硏究高深科學自然也是沒有機會了；那末，算學和算術都不要白費時間去硏究了。還是學一點兒珠算回家去應用應用罷！"這樣的想法不是錯誤的嗎？這樣的想法不是出於一部份教育者指導上的錯誤嗎？

(8) 又一部份的教育者說："算學或算術的目的在養成合乎邏輯的思想，有條理的習慣，和好研究的精神。同學們爲了要鍛鍊思考等等，便該去研究算學或算術。"

這一種意見在最近還是很普遍的；甚至在教育上很有聲望的先生們也是這樣地承認着。自然，算學或算術在思考的鍛鍊上，有一種很大的作用，這是無論何人都不能否認的。但是，我現在要問：是不是爲了鍛鍊思考，學校裏才設算學或算術這一科呢？如果算學或算術是爲了鍛鍊思考而設的；那末，論理學那一科又爲了什麼而設呢？如果說，因爲算學或算術有一種鍛鍊思考的作用，便說研究算學或算術是爲了鍛鍊思考；那末，國文那一科也是有鍛鍊思考的作用的，我們是不是可以說，學國文是爲了鍛鍊思考呢？因此，說研究算術是爲的鍛鍊思考，也是錯誤的。

第四類　一部份數學家的意見

(9) 最近，有一位數學家說："算學所給與人們的恩惠，並不在小處，如果算學的用處眞的僅只在生活上和科學上；那末，算學也就値不得一學了。算學最偉大的恩惠是把人們的精神從現住的世界擴延到六合以外去"。

對於這一種意見，我是很懷疑的。我現在試問：算學

或算術在我們日用上科學上那許許多多的用處都不能算是給了我們的恩惠嗎?都值不得我們一學嗎?如果他這種說法是對的;那末,現在許多的同學們,他們費了許多腦力時間所學到的一些算術上乃至代數幾何上的知識,都不過是值不得一學的東西了。因爲,那些值得一學的東西還在極遠極遠的將來。但是,我想,這許多還不曾學過高等算學的同學們,他們對於這種遙遠的目的,不是要望洋興嘆嗎?因此,我認定,這一位數學家的意見也是有問題的。

那末,研究算術,到底爲了什麼呢?據我想:

"………是爲了要克服自然上和社會上的數量。"

因爲,自然和社會是十分嚴酷地高壓着我們,我們必須要想法子去克服牠。在未克服牠以前,還要想法子去認識牠。但是,在自然和社會的全體和部份上,都有她底數量。因此,我們如果不認識她底數量;那末,我們對於牠底全體或部份便沒有法子去克服牠,因此,算學或算術是我們底一種工具。這一種工具,是認識自然和社會的一種工具,是克服自然和社會的一種工具。換一句話說,我們對於自然上和社會上的數量,算學或算術是拿來去認識的工具;是拿來去克服的工具。

這一種工具，我們如果能够越是弄得精巧；那末，便越是能够克服自然上和社會上的數量。如果弄得不十分精巧；那末，也能够克服自然上和社會上數量的一部分。比方：我們如果只學會了珠算；那末，對於生活上的數量問題便也能够克服許多了。如果再加學了一點算術；那末，所能克服的便更多了。因此，算學或算術這種東西，牠所給與人們的恩惠，並不是完全一律的；研究得多一些的，所得的恩惠便更多了。只有那些輕忽或鄙棄算學或算術的人們，便一點也得不到牠的恩惠。並且，他們遇着數量問題亟待解決的時候，還得受自然或社會的壓迫和欺侮。

這就是我對於"爲什麼要研究算術"的解答。

II 算術教學的現狀

有許多同學，他們當初對於算術很想用一番工夫；但是，過了許久，他們因爲對於算術沒有得到一些興味；並且，在他們所得到的似乎還是一些苦悶和煩惱。所以，他們便決心地拋棄了算術。

又，有的同學，他們一講到算術就感着厭倦。他們向旁的科學上去找興味，因此，他們離開了算術。

又,有的同學,他們看見旁人在算術上的失敗,又聽到旁的人說,算術是要如何特別的用腦。甚至,還聽到旁的人說,學算學,在各人的天性上有相近不相近的分別。若是天性不相近的,聽你如何用功,總不能得到圓滿的結果。他們嚇倒了!他們到旁的方面學容易的去了。他們找天性相近的去了。

又,有的同學,他們因爲家庭的督促,考試的逼迫,不能不習算術。但是,在自己的本意上,並不有心要學。他們在莫可如何的情境中,便只有敷衍了事。

這以上是我們最多數的同學們在算術學習上一般的現狀。

算術教師在教室裏講書的時候,懂得解和算得出的同學很少。甚至,連用心聽講的都不多。他在改正同學們演草本的時侯,這一個也算錯了,那一個算的又不完全。有幾個算得不錯又算得完全的,那中間又好像有幾個是抄自別人的。一學期快要完畢了,書還沒有教完。快點教罷,同學們不懂又怎樣辦呢?慢點教罷,下學期的書不是更教不完嗎?過幾天要試驗了,同學們要求指定範圍,說不懂的地方太多,一時預備不了。這天試驗完畢了,同

學們不及格的差不多佔了半數。校長教務長和教師大家拿了這些卷子出來品評。有的說某生本不用功，有的說某生最好下學期留級。有的更說，某生卽留十年二十年級，他的算學總歸是學不好的。

這以上是我們一部份教育者在算術教授上一般的現象。

中華書局前年招考練習生，一般的算術成績很不好。經理陸費逵先生曾經在中華教養界上發表一段文字。他說："吾國人最大缺點，在缺乏算術的頭腦，一切事業上，國際上的吃虧，這缺點實在是一個大原因。現在的教育，他種科目沒有成績，還不是致命傷；算術成績不好，一竟壞到如此地步，和舊教育有什麼分別？恐怕還不如舊教育。望主持中小學校者注意！"

這是社會上缺乏算術人才的一種表示。

總合以上的看起來，我們的同學在算術上是學不好；我們的教師，在算術上是教不好；我們的社會，在算術上是缺乏人才。

III 算術成績不好的病源在那裏？

前面所述算術教學上的現狀，實在說，那都是目前算

術教學上的病狀。但是,這種病狀的病源在那裏呢?據我看,除了把研究算術的目的弄錯了以外,這病狀是從下列的四種病源湊合起來的。但是,和同學們天性的相近不相近,並沒有關係。

(1) 算術書籍的編輯方法不好。

(2) 學校和社會的算術設備不好。

(3) 教授算術的方法不好。

(4) 學習算術的方法不好。

怎見得算術書籍的編輯方法不好呢?我們只要問:現在各校採用的許多算術書,那一部不是用演繹法編輯的,便知道現行各種算術書的所以不好了。現行的各種算術書,大都是拿着算術上整個的知識,向同學們儘力地灌注。他們是先講理論,後講應用:比方,首先講了許多一下子找不着頭緒的理論,後面再跟着許多所謂應用的問題。他們是先講抽象的公式,再說到具體的事實;比方,先講'本金×利率×期數=利息'的公式,再舉幾個例子。他們是先講比較抽象的數目,後講比較具體的數目;比方,在新講一個方法的時侯,都用不名數做例子;講完了的時候,再叫大家算算名數題。他們是注重假設或疑難的問

題，却輕忽常態生活的問題；比方，雞兎龜鶴一類的問題差不多每部書上都有，至於衣食住行等等實際的問題反不佔書中的重要部分。他們問題的難易，並不精細地分出層次；第一題深到第一層的，第二題便可深到四層五層。（像最近商務出版的基本教科書算術，把名數題分爲一級思考題二級思考題等等去教授，這已是破天荒了。）——諸如此類，不勝枚舉。像這樣的不顧學生興味，不顧學習心理，算術的成績如何會好呢？

怎見得社會和學校的算術設備不好呢？我們只要問：同學下了課堂，學校裏可有算術書籍供作同學們的參考麼？同學們出了校門，圖書館可有較好的算術書給同學們參考麼？問了這兩句，以外的便不用說了。連參考的書籍還沒有，便不用講到旁的設備了。像這樣的情形，同學們離了固定的死板的算術教本，便再也沒有地方增進算術上的知識，算術的成績如何會好呢？

怎見得算術的教授方法不好呢？現在學校的算術教員，大多數不是專任的教員。他們這一點鐘教算術，那一點鐘又要教國文；甚至這一點鐘在這一個學校教，下一點鐘又要跑到旁的學校去。心思一點也不專：一方面沒有時

間去研究教授的方法，一方面因爲和同學們相見的日子很少，又無從找到算術教授上具體的材料。加以現在各書店所出的算術教本，一樣的都有缺點，使教授上十分感着困難。要不用教本罷，同學們下了教室便更無把握了。要活用教本罷，刪繁益簡，前後提亂地教授，既費時間，又費唇舌。要自編教本罷，每日授課五六小時以後，還有何心力編書？卽編好，又如何印發？在這樣的情形底下，教授的方法如何會好呢？在這樣的教授方法底下，算術的成績又如何會好呢？

怎見得算術的學習方法不好呢？據我一時數得出來的便有十來個很大的毛病。第一是，同學們把教本太看做神聖了。他們以爲教本上所有的便一點也不會錯。他們不知道無論那一本教科書都是不會完全，甚至還有極大的錯誤。固然，現在的同學們除了教本以外，便得不到參考書，他們也只有迷信所用教本之一法。第二是，同學們在課外不求學。他們下了課堂，也不想想到圖書館去看看書，也不問問同學中那一位還備有別的參考書可以借來看一看。第三是，同學們太和教員隔絕了。他們只在教室裏和教員見見面；出了教室便沒有和教員個別談話的機會。

第四是，同學們多好推想抽象或奇僻的難題，却不高興計算那種衣食住行等等生活上的實際問題。第五是，同學們有的是抄襲別人所演的題目，竟成了習慣。第六是，同學們不高興把一類的問題反復地演算。第七是，同學們把所學的只是零星破碎地在腦子裏儲蓄起來，並不去把牠構成系統。第八是，同學們只是偏重記憶和模仿，教本上寫出了一個公式，他們便呆板地記憶起來。教本上說了一個法則，他們便背誦起來。教本上演了一個例題，他們便模仿起來，一毫也不變動地模仿起來。他們是不重理解。第九是，同學們在自己的生活上不用數。他們是天天習算術；但是到了自己準備做衣服的那一天，對於衣服的長短，材料的多少，價值的貴賤等等卻是馬馬虎虎。甚至說，學算術是一件事，人的生活又是另一件事；人的生活是該浪漫一些的，若是處處要較短量長，人生不是太枯寂了嗎？諸如此類，不勝枚舉。像這樣的學習算術，那裏會有好的成績呢？

IV 怎樣研究算術？

以上我已經把算術成績不好的病源指出了許多。在這許多病源中，有的是一時不能去掉的；比方，教本不好，

這便不是一朝一夕就可以改變過來的；學校沒有
考，甚至校外的圖書館裏面關於算術的參考書也不多，這也不是一時能夠改變過來的。那末，在這些病源去掉以前，同學們就暫時停了不學嗎？不！在這種情形底下，還是有法子好研究算術的。那末，怎樣研究算術呢？這又可以分做兩層講：——

第一是，怎樣去對付現在的算術環境？現在所有的算術書，雖然大多數都是用演繹法編輯的；但是，同學們卻儘可用歸納的方法去研究。比方，書上是先講理論後講實例；我卻是先看他的實例再反上去看他的理論。書上是先列公式，再講應用；我卻要先算算她的應用題，再去瞭解她的公式。現在學校既然沒有多的參考書，我卻和同學們大家聯合起來去合備參考書。——因為現在書局出的參考書雖然不多；但是把各書店已經出版的各種教本每種都備一部，合起來卻也可供參考了。對於算術教師，要設法常時和他個別談話或通訊。並且還要請求他指導課外看書，和評閱課外的演草。

第二是，怎樣去研究？這又要分做三層講：第一是要"計數"。計數最後的標準是純熟而且正確。所計算的問

題，要是衣食住行等等生活上實際的問題，和科學上的問題；而不是疑難假設奇僻古怪的問題。佔大部份的要是幾尺，幾天，幾元，幾人等等的名數題，而不是個十百千等等的不名數題。佔大份的要是幾加幾，幾減幾等等一加一減--乘一除的基本問題，而不是那種要三四層括號才能表示的複雜題。佔大部份的要是個十百千等等小數目的問題，而不是那種十萬百萬等等大數目的問題。並且要從生活上的問題，慢慢地才習到科學上的問題；要從名數的問題，慢慢地才習到不名數的問題；要從基本的問題才習到複雜的問題。還要憑自己的力量去計算，並且要反復地去計算。第二是要"論數"。論數最後的標準，是明白而且連貫。同學們學了第一節書，便該把那一節完全弄清楚。學了第二節的時候，便該把這兩節書比較比較，聯絡起來；照樣一章和一章，一篇和一篇都要去比較比較，聯絡起來，組織起來。學完全部算術的時候，便要把全書總合起來，構成一個完整的系統。再，每次遇着一類的問題，或是一類的方法，都要從具體的問題，推想到抽象的概括的結果。也不要專憑一個人的腦子去想，還該多和朋友們去討論，多向教師們去請問。如果有機會的時候，比方，學校

裏同學們發行了刊物，還該用文字發表出來，和同學們討論。第三是要"用數"。用數的最後標準是簡便而且靈敏。同學們在自己的生活上，要隨時都用數目去駕馭她。每天讀書幾小時，睡眠幾小時，運動幾小時，從學校到家裏費了多少時，每天車費多少，每學期書籍費多少，每日家用多少等等，隨時都用數目計算起來。在他種科學上，也要慢慢地拿算術去應用。比方，中國的面積多少？人口多少？各省的面積多少？人口多少？各省人口的稀密如何？又中國人口總數有多少？已識字的多少？佔全人口百分之幾？中國政府每年預算總共支出若干？收入若干？軍費佔支出費百分之幾，政費佔百分之幾？教育費佔百分之幾？等等，隨處都用數計算起來。又：同學們在思考上，也該借助於算術。比方，從連續數的連續，聯想到宇宙萬物的連續；從連續數的無限，聯想到宇宙萬象的無限。從數的大到無窮和小到無窮，便聯想到宇宙萬物有的是大到無窮，有的是小到無窮。諸如此類，全靠同學們把自己的腦子從具體的事實向抽象的前途發展。

V 餘言

這一篇短文，題目雖然是怎樣研究算術，但是，有一

大部份可通用於一般的算學。不過，如果要把牠作爲"怎樣研究代數,,"怎樣研究幾何,,等等去看，卻又嫌牠不够。因此,我準備在過一些時的時候,再繼續地寫一二篇，與中等學校的同學們討論。

在開始寫這篇文字之前，我本想竭力具體地把牠寫出來;但是,在一篇短短的文字中要寫出一個範圍廣大的內容,又只好比較地抽象一些。

本篇所講的，雖然是從我自己底教授經驗上和眼見的事實上得來;但究竟多是一些老生常談,並沒有什麼特別的了不得的見解。不過，同學們如果認爲說得也還不錯，就不妨拿到事實上去試一下。據我想,那是一定有許多效益的。(見青年界第二卷第四期)

十七 怎樣研究代數

一 緒言

對於「怎樣研究算術」，我已經發表過意見，在這篇裏，我準備只講到在那篇裏面不曾說過的東西；至於在那篇裏面已經說過的，在這裏便不重述了。比方：「為什麼要研究算學呢？」這一個問題，在那篇裏面已經解答過了；在這篇裏面便不再去研究牠。

在這篇裏面，我只準備說到代數上淺近的一部份，卽是初等代數這一部份。至於高等代數那一部份，在這一篇裏面也不去提及牠。

在這篇裏面，我只準備說到一些比較新穎而且特殊的東西；至於那些普通代數書上隨時都見得到的，在這裏也不提及了。

在這篇裏面，我只準備在研究的方法上多提及一些；

至於代數上的實際材料,卻不去多多的介紹。

以下就是我對於「怎樣研究代數」的意見:——

二 從算術到代數

普通這樣說:算術上用數字表示數目,代數上用文字表示數目。據我看:像這樣的去分別算術和代數,在事實上是不十分確切的。比方,算術比例上的未知數,現在一般的都用X去表示;這不是在算術上也用文字表示數目嗎?再,當代數上要講到『負式」「分式」「根式」的時候,普通都從「負數」「分數」「根數」講起;這不是代數上也用數字表示數目嗎?再,代數上要講到文字係數或文字指數的時候,普通也都從數字係數或數字指數講起;這些數字的係數或指數,不都是用數字表示數目嗎?再,負數和根數,有人又叫牠做「代數數」;那末,爲什麼叫做「代數數」呢?因爲負數和根數寫在代數書上就叫做「代數數」嗎?假如我們的編輯者一旦把負數和根數編到算術書裏面去;那末,負數和根數不是又變成了「算術數」嗎?把負數和根數編到算術裏面去,這是一件完全不可能的事嗎?

因此,我認定:用數字和文字去分別算術和代數,這在事實上是不十分確切的。

那末，算術和代數究竟有怎樣的分別呢？牠們倆有一種怎樣的關係呢？我認定：——

代數是抽象的算術，算術是具體的代數。牠們倆是一貫的兩個階段：算術是比較具體的階段，代數是比較抽象的階段。

在算術上，我們看到「從名數到不名數的發展」。比方：由3尺加2尺等於5尺，3升加2升等於5升，3人加2人等於5人，3天加2天等於5天等等，結果便產生了3加2等於5。在從算術到代數的橋樑上，我們看到「從數字數到文字數的發展」。比方：兄年5歲，弟年3歲，兄比弟大（5－3）歲。又，兄年7歲，弟年5歲，兄比弟大（7－5）歲。又，兄年10歲，弟年8歲，兄比弟大（10－8）歲。由這些式子的發展，結果便產生了兄年a歲，弟年b歲，兄比弟大（a－b）歲。

普通說：這（a－b）歲是代數上的數目，那種(5－3)歲等等是算術上的數目。其實，從算術到代數，牠們是從具體向抽象的發展。

從上面看來，我們在算術上要研究具體向抽象的發展；在代數上也要研究從具體向抽象的發展；在算術過渡到代數的時候，也要研究從具體向抽象的發展。在這些發

展的過程上，我們要看出算術和代數的一貫。再，從算術發展到了代數，自然有許多東西和算術上不同；但是，我們不單只要在「算術和代數的不同」上着眼，同時還應該在「從算術到代數的發展」上着眼。換一句話說，我們不單只要在靜的分析上去研究算術和代數，同時還應該要在動的過程上去研究算術和代數。

這樣說來，那末，算術比例上的文字數又怎樣解釋呢？代數上的負數和根數的數字數又怎樣解釋呢？爲什麼在算術上已有了抽象的文字數，而在代數上還有具體的數字數呢？

這個問題的答案如下：——

算術比例上的X，是一個比較單純的文字數，到了代數上（$a+b$）和（$a-b$）都是表示一個數。ab和$\frac{b}{a}$也都是表示一個數。乃至a^2和$\sqrt{a}$也都是表示一個數。這些文字數便比算術比例上的X複雜得多了。這樣看來，從算術比例上的X，一直到代數上的a^2，$\sqrt{a}$等等，都是一種從單純向複雜的發展，這一種文字數的發展，大部份雖然都在代數上；但是，牠們卻在算術上早已開始了。這算術比例上的X，便是表示後一個階段的事體，在前一個階段裏面

早已開始了。

再，代數上的根數，是一種比較抽象的數字數。拿算術上的整小數和分數來和牠比較，那自然是具體得多了。這樣看來，從算術上的整小數，走到分數，再走到代數上的根數，這也是一種從具體向抽象的發展。這一種數字數的發展，大部份雖然都在算術上，但是，牠們卻到代數上方才結束。這代數上的根數，便是表示前一個階段的事體，要到後一個階段裏面方才結束。

至於負數這種東西，牠和正數是同時存在着，也沒有程度上的深淺，本應該和整小數同時列在算術上。現在一般的把負數列在代數上，也並不曾提出客觀上的理由。若是我們相反的看去，那末，牠們把負數從算術裏面驅逐出來，到代數上不得已的時候，才把牠編進去，這在客觀上牠們不過是要把數量上一個基本的矛盾隱瞞起來罷了。

三 從分量到數目從數目到分量

我們要研究算學，是爲的要研究事物的分量。研究事物是我們研究分量的目的；研究分量是我們研究事物的手段。

我們研究分量，卻不從整個的分量研究起。我們首先

是在分量上取出一個一定的部份來做單位。再拿這個單位做標準，去求出那分量的數目。然後再拿這些數目來研究。

這就是說：我們的目的是研究分量，卻是把研究數目做了研究分量的手段。

再，在研究數目的時候，我們是從數字數研究到文字數。再從代表數目的文字，研究到代表分量的文字。

這就是說：我們的研究，原來是從分量出發，結果又回到了分量。不過，在不曾研究分量的時候，我們對於分量的認識是攏統的；當我們的研究回到了分量的時候，我們對於分量的認識是有組織而且有系統的了。

從上面所述的研究過程里面看來，我們還可以看出：當我們研究數目的時候，同時就是在研究分量。

四 正負量客觀地存在

現在一般的代數書上，都是這樣的說着：「負數是人們創設的。因爲要解決(3－5)一類的問題才創設負數。」

我們若就客觀上考察，哪裏是這一回事呢？我們大家都知道：若是原有銀三元，用去了五元，便要負債二元。事實上既有了負債，這便是事實上有了負數。如果人們眞的

憑了自己的主觀便能够創設一種負數來;那末,牠哪裏會和事實上處處相合呢?

我們知道:(1)自然界正負量的客觀存在,有指南指北的磁力,陰陽相反的電力等等;(2)時間上正負量的客觀存在,有時間上的過去和未來;(3)空間上正負量的客觀存在,有上下,前後,左右;(4)其他一切正負量的客觀存在,有財產上的資產和負債,營業上的賺賠,簿記上的收付,交易上的買賣等等。

這樣說來,在客觀上不是有許多的正負量同時存在嗎?並且,我們現在還可以進一步的問:宇宙間在哪一個地方哪一個時間沒有正負量同時存在呢?

正負量既然是客觀地存在了。正負數當然是隨正負量而來。

人們在早一些的時候,還不會發現正負量,因此也不會發現正負數;如果像這樣的說法,我們是可以承認的。不過,如果要說負數純粹是憑着主觀來創設的,那我們便不能承認了。再,如果要說,負數是人們創設的,是爲着客觀上發現了負數的事實才創設的,這個我們也可以承認。不過,如果要說,創設是主觀上的創設,只是爲了我們計

算上的便利,這個我們便不能承認了。

五 有了矛盾的正負量便發生了矛盾的加減法

宇宙間分量上最基本的一個矛盾，就是正量和負量的同時存在。有了矛盾的正負量,便隨着又發生矛盾的正負數。有了矛盾的正負數,便發生算術代數上矛盾的加減法。

我們知道：有性質相同的數量，便發生絕對値的加法：有性質相反的數量,便發生絕對値的減法。因爲宇宙間自然地存在着相同性質的分量,同時,又自然的存在着相反性質的分量；所以算學上便發生了加法，同時又發生了減法。

如果宇宙間只有一種相同性質的分量；那末,算學上便只有加法,沒有減法了。並且,連加法也沒有了。

在正負的數量上，我們可以這樣看：正數就表示要加,負數就表示要減。比方,我們在銀錢收付的簿子上,把收入的都加上一個正符號,把付出的都加上一個負符號。然後,再把那些有正符號的數目都加起來,把那些有負符號的數目都減出去。像這樣算出來的結果,便是剩下來的銀錢數目。在這一個事實上,我們正可以看出：矛盾的加

減法,是從矛盾的正負數發生的。

再,在代數上,正負的符號和加減的符號是用着同樣的東西。這並不是人們偷懶,不想另外造一種符號來表示正負的性質,去和加減的演算符號分別。這實在是因爲沒有另造一種正負符號的必要。在計算的中途,我們有時候,把正負號直接變成了加減號,有時候又把加減號直接變成了正負號。這在計算上,一點也沒有妨礙;並且,還有許多的便利。這又間接地證明:矛盾的正負量,發生了矛盾的計算法。

六 在矛盾發展過程中的計算法

宇宙間分量的性質,只有正和負;由正負量發生的計算法,也只有加和減。加減法是計算法的基礎;一切的計算,都由加減出發。

在發生了加減以後:——

同數連加,便發生了乘法;同數連減,便發生了除法。這就是說:由加減便發生了乘除。並且是,由矛盾的加減,發生了矛盾的乘除。

再,同數連乘,便又發生了冪法(指乘方);同數連除,便又發生了開法(指開方);這就是說:由乘除發生

了冪開。並且是，由矛盾的乘除，發生了矛盾的冪開。

總括起來說：由加減走到乘除，由乘除走到冪開；牠們是一貫的矛盾，一貫的發展。牠們的矛盾是起於正負，牠們的發展是一步一步的複雜。

七　「四則」應該改稱「六則」

由上面所說的看來，由加減而乘除，由乘除而冪開；牠們是一貫的相承，自然的發展。他們是「六則」，並不是「四則」。我們普通只把加減乘除叫做四則，這是把自然的次序主觀的割斷了。

我們以後，應該把冪法獨立起來，不應該把牠附屬在乘法裏面。應該把冪開和加減乘除連續起來，不要再把牠們和加減乘除隔離得太遠。

現在我用一個圖形，把六則的地位和牠們相互間的關係表示出來：——

$$
\begin{tikzcd}
\text{加} \arrow[r] \arrow[d, <->] & \text{乘} \arrow[r] \arrow[d, <->] & \text{冪} \arrow[d, <->] \\
\text{減} \arrow[r] & \text{除} \arrow[r] & \text{開}
\end{tikzcd}
$$

圖裏面的每一根＞—＜線，都是表示牠兩端的計算法相反。每一根—→線，都是表示一種計算法向另一種計

算法的發展，向有箭頭的方向發展。

八　在六則發展的過程中完成了數目的系統

在六則發展的過程中，我們遭遇過不少的困難。在每一次發生新困難的時候，我們都發現過一種新數目。

在減法上遇到（3－5）一類問題不能減下去的時候，我們便發現了一種負數。有了負數以後，減不得的困難便解除了；因爲有（－2）做上一個題目的結果。在除法上遇到（1÷3）一類問題除不盡的時候，我們便發現了一種分數。有了分數以後，除不盡的問題便消滅了；因爲有了（$\frac{1}{3}$）做上一個問題的結果。在開法上遇到（2要開平方）一類問題開不盡的時候，我們便發現了一種無理數。有了這種無理數以後，開不盡的問題便解決了；因爲有了（$\sqrt{2}$）做上一個問題的結果。

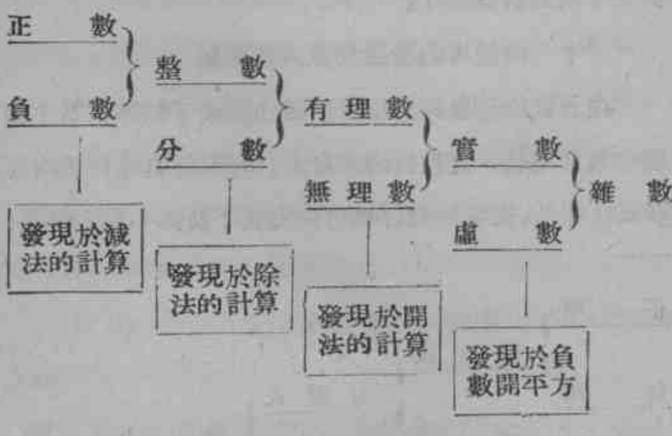
當發現負數的時候，前此的數目便有了正數的名稱。當發現分數的時候，前此的數目便有了整數的名稱。當發現無理數的時候，前此的數目便有了有理數的名稱。

再，在開法上除了遇着開不盡的問題以外，還遇到『負數要開平方』一類的問題，這樣一個問題，根本就開不得；當這種時候，我們便發現一種虛數。有了虛數以後，負

數不能開平方一類的問題便解決了;因爲有了$\sqrt{-1}$做負數開平方的結果。

再，當虛數發現的時候，前此的數目便有了實數的名稱。合着實數和虛數,又有了雜數的名稱。這樣一來,初等代數裏面的數目系統便整個的完成了。

現在把這個系統上的各種數目表列於下:——



九　新數目的發生和計算法的發展

在上面我們看出了：在六則發展的過程中完成了數目的系統。

現在我們要問:在新數目發生以後,在計算法上又發

生了什麼新的現象呢?

我們知道:有了負數以後,便發生了負數和正數上的六則;有了分數以後,便發生了分數和整數上的六則;有了無理數以後,便發生了無理數和有理數的六則;有了虛數以後,便發生了虛數和實數上的六則。

這樣看來,前此由計算法發生了新數,現在由新數又發生了新的計算法了。

十　由數目的發展到數式的發展

在計算法發展的過程上,既已完成了初等代數上整個的數目系統,在數目的本身上,牠又從具體向着抽象發展。因此,文字的數目也可以寫成下面的一個系統了:——

正項
整式
負項
有理式
分式
實式
無理式
雜式
虛式

前此的數目,是用着數字來表示;到了現在這一步,數目卻是用文字來表示了。

用文字來表示數目，那些文字式的形式，並不限於一個單字；由許多文字的結合，也可以表示一種數目。因此，文字式的形式又可以寫成下面的系統：——

在加法上發生的有一種「和式」；如——$(a+b)$

在減法上發生的有一種「差式」；如——$(a-b)$

在乘法上發生的有一種「積式」；如——ab

在除法上發生的有一種「分式」；如——$\frac{b}{a}$

在冪法上發生的有一種「冪式」；如——a^2

在開法上發生的有一種「根式」；如——$\sqrt{a}$

並且，再由這些式子的互相結合，變成更複雜的式子。比方，a^2b^3便是積式和冪式的結合；$x^2-2xy+y^2$ 便是和差積冪四種式子的結合了。

以上所述的這些，便是由數目到文字，由文字到數式的發展。

十一　由數式的發展到方程式的發展

算學的目的是在解決事實上的分量問題。代數上解決分量問題的主要方法是求解方程式。因此，我們說，方程式是初等代數學的中心。

一個方程式有兩端，牠的每一端是一羣數字或數式

的結合。因爲數目經過文字發展到種種的數式了;所以在方程式的形式上也有種種不同的分別:

在數式上有了正項和負項,在方程式上便有了整式方程式了。在數式上有了整式和分式,在方程式上便有了分式方程式了。在數式上有了有理式和無理式,在方程式上便有了無理方程式了。

再,當整式的未知數是冪式的時候,在方程式上,便有了一次方程二次方程了。

總括起來說:在數式上有了不同的形式,在方程式上便有了不同的解法了。

十二　由具體的分量,走到抽象的公式;由抽象的公式,再回到具體的分量

現在我們回轉頭去總起來看一看:究竟在算術和代數上我們對於分量的問題是怎樣解決的呢?我們解決分量問題的總過程怎樣呢?

現在讓我分做五個步驟來說明牠:

第一步:當我們遇到一個問題的時候,我們就注意到牠底分量。由分量就選擇單位。有了單位就得了名數。得到了名數以後,再計算牠的不名數。關於

這一步的手續，我們習慣上是在算術上去解決的。

第二步，對於一個題目的分量，用數字數去表示牠，對於同一類題目的分量，便用文字數去表示牠；再複雜一些的分量，便不僅用一個單字去表示牠，並且還用着一個單項式或是多項式去表示牠。關於這一步的手續，我們習慣上便說是代數了。

第三步：這一步便到了方程式了。由第二步的手續，便可以開出方程式來；因此，到了這一步便要求解方程式。

再由數字係數的方程，走到文字係數的方程。由文字係數的方程，便得到一類問題的恆等式。

第四步：第三步所得到的恆等式，便是我們對於一類事物上想要得到的公式。有了一個公式，我們又可以把牠轉換起來，使一個公式，得到幾種不同樣的用處。

第五步：到了這一步，便是拿第四步得到的公式來應用了。有了現成的公式，我們可以把同類分量的數目代進去。由這樣的手續，去解決一類事物的分

量問題。到了這一步，我們少不了又要用算術上的計算技能了。

這以上就是我們解決分量問題的五個步驟。在第一個步驟的時候，我們固然也可以解決分量問題；但是，所解決的問題，是一個一個的問題。到了第五步，我們所解決的問題，便是一類事物的分量問題了。

十三　舊六則的將死和新六則的胚胎

從上面說過的看來，數目的發展已經完成一個系統了；分量問題的解決，也得到公式的解決了。那末，難道算術代數上的發展，竟達到了這樣一種十分圓滿的境地嗎？一點也沒有缺憾嗎？

不！六則的發展，牠已經自己走到了將死的境地。這話怎麼說呢？我們現在且把六則的反求法拿來看看：——

第一　加法的公式是：——

被加數＋加數＝和數

牠底反求公式是：——

和數－被加數＝加數

和數－加數＝被加數

第二　減法的公式是：——

被減數－減數＝差數

牠底反求公式是:——

被減數－差數＝減數

差數＋減數＝被減數

在這裏我們要注意:加減法和牠的反求法,都只要用加法或減法便解決了,以外不需要別的法子。

第三　乘法的公式是:——

被乘數×乘數＝積數

牠的反求公式是:——

積數÷被乘數＝乘數

積數÷乘數＝被乘數

第四　除法的公式是:——

被除數÷除數＝商數

他底反求公式是:——

被除數÷商數＝除數

除數×商數＝被除數

在這裏我們又要注意:乘除法和他的反求法,也只要用乘法或除法便解決了;以外也不需要別的法子。

第五　冪法的公式是:——

$$底數^{方指數}=冪數$$

牠的反求公式是:——

$$\sqrt[方指數]{冪數}=底數$$

在這個公式裏,如果方指數的數目太大,或者不是正整數;那末,便不能開方了。

再,如果我們只知道冪數及底數要去求方指數;那末,在冪開上便沒有方法解決了。

第六　開法的公式是:——

$$\sqrt[根指數]{被開數}=根數$$

牠的反求公式是:——

$$根數^{根指數}=被開數$$

在這個公式裏,如果根指數不是正整數;那末,在這裏,便不能乘方了。

再,如果我們只知道被開數和根數要去求根指數;那末,在冪開上也沒有方法解決了。

因此,在冪開上,我們要特別的注意到:冪開法和牠的反求法,在冪開法本身上已經解決不來了。牠必需走到冪法開法以外,另外去找別的方法了。在這裏,舊的六則宣

告破產了;因爲牠已經不能解決牠本身上發生的問題了。

那末,舊六則發展到這種破產的時候,又拿什麼來代替牠解決當前的問題呢?

有!這一種解決問題的材料,在舊六則發展的過程中早已準備得好了。這材料就是方指數。

在上面敍述數目系統的時候,我們並不曾把方指數提示出來;那是因爲方指數是由羃法上得來的緣故。因爲在減法除法和開法上都發生過困難,負數分數根數和虛數都是從那些困難中得來;只有方指數是從羃法上得來,是在沒有困難的時候得來,所以方指數便不和那些負數分數等等同在一個系統了。

但是,能够解決那些舊六則上不能解決的問題的,却在這種方指數上。

方指數,牠在同底羃數相乘的時候,牠表示乘法可以用加法來替代,比方:——

$$a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$$

牠在同底羃數相除的時候,牠表示除法可以減法來替代,比方:——

$$a^{m}\div a^{n}=a^{m-n}$$

牠在冪數再冪的時候，牠表示冪法可以用乘法來替代，比方：——

$$(a^{m})^{n}=a^{mn}$$

牠在冪數要開方的時候，牠表示開法可以用除法來替代，比方：——

$$\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$$

由方指數在舊六則裏面的這些表示，我們已經看出：牠已經具有充分的力量，能够解決舊的六則所不能解決的問題了。

這以上，就是說：舊六則已經破產了，繼續牠而起的快要來了。並且，這繼續而起的就在舊六則的本身上早已胚胎了。

十四 由舊的六則轉變到新的六則

上面說，方指數在舊六則裏面早已胚胎了。並且，牠已經表示着牠的能力：牠能够用加減去代替乘除，用乘除去代替冪開。

現在我們還要看到：凡是在舊六則裏面所有一切的便利，牠都能够充分的繼承。比方：——

在舊六則裏面實行減法的時候，曾經發現過零數和

負數;在方指數實行減法的時候,牠也發現着零指數和負指數。牠的式子是:——

$$a^{3}\div a^{3}=a^{3-3}=a^{\circ}$$

$$a^{3}\div a^{5}=a^{3-5}=a^{-2}$$

在舊六則裏面實行除法的時候,曾經發現過分數;在方指數實行除法的時候,牠也發現着分指數。牠的式子是:——

$$\sqrt[5]{a^{3}}=a^{3\div5}=a^{\frac{3}{5}}$$

在舊六則裏面實行開法的時候,曾經發現過無理數和虛數;在方指數實行開法的時候,也一樣的發現着無理數和虛數。牠的式子是:——

$$a^{\sqrt{2}},a^{\sqrt{-1}}$$

這樣看來,在舊的六則裏面已經包孕着整個的新六則了。

到了舊六則破產的時候,這新的六則,索性來一個新的形式。這新的形式便是對數的六則了。

從前的方指數,現在叫做對數了。

在對數上,牠建立着新的六則,牠一樣地有數量的系

統表。

牠要做的第一件事體，便是把舊六則解決不來的問題解決。

牠對於冪法反求的式子是：——

$\log_{\text{底數}}\text{冪數}=\text{方指數}$

牠對於開法反求的式子是：——

$\log_{\text{根數}}\text{被開數}=\text{根指數}$

再，當方指數或根指數不是正整數的時候，如果要實行冪法和開法，牠一樣的用對數來解決。

這樣看來，在冪開上的四種反求法，在舊的六則裏面是解決不來的；到了新的六則上，却是很輕便的解決了。

十五　結論

我現在想要說到的，就只說到這裏為止。

我這篇文字的總意見，就只在這樣一點：——

我們現在應該用新的方法去研究代數；所謂新的方法，就是一種新的邏輯。

就代數的本身上，總括的說，我們要看出牠內在的矛盾。分開來說，我們要看出牠從具體向抽象的發展；同時，又要看出牠從一個階段，轉變到另一個階段。

再概括一些說，我們要看出：牠的本身上是一種對立的統一，矛盾的發展。

一九三三，五五，完稿　（見青年界第六卷第一期）

十八　數學底對象和極限的思維

——答文成宣周友彤陸樹德君——

讀書指導先生：

看了讀書生活一卷六期關於數學公理來源的答覆說：

「公理是由于人類的日常生活事實中抽引出來的。」

這在我們不迷信公理是在人類的智慧裏生來就有着的人，自然不能不相當的承認；不過有許多數學公理就使得我不能不懷疑牠的違犯邏輯了。如幾何學上的點線面體，這究竟是由於什麼為生活鬼事實中會抽引出來？除非要世界上的物質一律變了能力，地球靜止不動，人們再瞎了眼的時候我眞不敢承認根據現實的日常生活能歸納出一個無大小無重量無色彩……等等的那種神祕的點線面體。

明明事實上我們所遇到的點，小而至灰塵之微，大而如宇宙間的星體，雖然其大小輕重和色彩等與我們人類所發生的關係小到可以不必去計較了。但其物自體却具有相當的色彩重量和大小。這種共同點，是不應抹殺的吧？要是我們肯定公理是由于人類的日常事實生活中抽引出來的，就應承認：「點」是具有位置和長寬厚薄輕重大小……的，爲什麼一般的幾何書竟說點是僅有位置，連長寬厚都沒有呢！——更談不到色彩重量大小等等了。

還有線面體及其他一部份的數學公理，在我這笨小孩看來，都是一些不可解的謎。

文成宣二月十一日于常州

第六期讀書問答欄，數學公理的來源一篇，我覺得在『1＋2＝3』裏，找不出它不完全的地方來，文君是對于一件物體的「質」和「量」沒辨淸楚。彩雲的「朵」和水的「坑」，是在它外表的感覺而已。如果人們對「朵」和「坑」加上了量的規定，那『1＋2＝3』也無不可。反過來說，若文君舉的例是「一堆花生加兩堆花生」；那是否等于三堆花生？文君爲什麼不用「堆」而用「斤」呢？

周友彤

可敬的讀書指導諸先生們：

在我户修的幾何學裏有幾個基本定義和方法要問，也許那是很陳舊的已有答的疑問了。

（一）有些書中（很多）點是絕對的零，不是無窮小；那麼，便不能說牠能運動而成線了。沒有物質的運動竟會存在麼？物質竟不要空間了麼？從這個玄妙的，絕不可見的東西——點——出發而成幾何學，不是有點奇怪嗎？一個不是物質的虛無的東西拿來作基本。

（二）………………………………

陸樹德

在一般的數學書上，首先是指明了它所要研究的對象的。它底第一個對象是分量（如算術代數的主要對象）第二個對象是形狀（如幾何的主要對象）。但是，這些對象從哪裏來的呢？卻是一般的不曾提起了。

其實，分量和形狀都是從物體或現象抽象得來；除了物體或現象的存在，分量和形狀是不能單獨存在的。不過，抽象的東西雖然不能像物體或現象那樣單獨地存在，然而在我們的思維上卻是可以拿來做我們研究的對象的。

數學就是這樣地用着抽象的東西做了牠的起點而出發了;但若是追根究底地去推源,它仍舊是從物體或現象出發的,並不是「一個不是物質的虛無的東西拿來作基本」。

不過,在我們研究數學的過程中,還應該經常地記住一件事體:一切事物上的「分量」和「性質」,它們倆是可以分開的,同時又是不可以分開的。就因爲它們倆可以分開,所以在思維上就把分量拿起來做了我們研究數學的對象;又因爲他們倆不能够截然地分開,所以在我們研究的過程中便時常生出似乎很難解決的紛糾了。文君上次對于(1+2=3)這個式子的疑懷,和這次對于點線面體上的懷疑,可以說,都是屬于這一個糾紛之內的。

一二三四等等的數目,在普通的算術或代數上都說得明白:它們都是從「分量」出發;經過了一種「單位」的規定,然後再用單位去做標準,才發生的。這就可見:數目這種東西,在我們的思維上,第一就和事物的性質分離了,第二是它要有了單位以後才能够成立的。上次文君所提出的問題:「一朵雲和二朵雲加在一塊,是否三朵雲呢?一坑水和二坑水混在一塊,是否三坑水呢?」那正是周君所

說:「對于一件物體的質和量沒有辨清楚」的原故,同時也是不曾首先定好單位的原故;也就是周君所說:不曾加上量的規定的原故。周君說:「若文君舉的例是:一堆花生加兩堆花生,那是否等于三堆花生呢?文君爲什麼不用堆而用斤呢?」這正是說,文君因爲用了斤做單位,所以一斤花生加兩斤花生便承認等于三斤花生了。若是改用堆來做單位,那就會和計算雲彩或坑水一樣,要發生問題了。

但是,(1+2=3)這個式子,是不是眞的「找不出它不完全的地方來」呢?不!它的完全性是很有限制的:它是要在「質和量辨別清楚」的條件之下,再「加上了量的規定」,才算是完全的。若是不受限制的話,那便發生問題了。比方。用攝氏表去計算水的溫度時,當水沸騰時,我們若是再把熱加上去,若是再加上的是一度,那末,在計算的式子上應該是(100°+1°=101°)。這個式子,在形式上是很完全的;然而在事實上,我們知道,在水的溫度已經到了沸騰時,不僅加上一度還只有一百度,就是再加上更多的度數也還只有一百度的。在這裏,我們就看出一個僅僅注重數量的式子,它是和事實不相合了。再,一斤花生加上二斤花生是不是眞的等于三斤花生呢?這在形式

上，也是沒有疑問的。然而，在事實上，聽你用着怎樣準確的秤，再聽你用着怎樣精密的手法去量，可是那種一斤花生和另一斤花生絕對相等的事實就幾乎是沒有的。因此，一斤加二斤並不是絕對的等于三斤了。在這裏，我們又看出，所謂單位的規定，它僅只是形式的，大概的罷了。

現在再說到幾何來罷。

上面說過，形狀（點線面體等）這東西，它是從物體上抽象得來；除了宇宙間有物體的存在，它是不能單獨存在的。文君說：「我們所遇到的點，小而至灰塵之微，大而如宇宙間的星體，雖然其大小輕重和色彩等與我們人類發生的關係小到可以不必計較了，但其物自體却具有相當的色彩重量和大小。這種共同點，是不應該抹殺的吧？」

這些話是說得很對的。但文君所不曾瞭解的是在於一般幾何學的對象。因為在一般幾何學上的對象，（點線面體等），它是從一切具象的物體上抽象得來，同時，它又已經把一切物體上的色彩重量等等捨象出去了；這在文君似乎是還不曾注意到的。

文君說：「幾何學上的點線面體，這究竟由於什麽為生活鬼事實會抽引出來？除非要世界上的物質一律變了

能力。………我眞不敢承認根據現實的日常生活能够歸納出一個無大小無重量無色彩等等的那種神秘的點線面體。」其實，抽象的事物固然不能够離開具體的事物而獨立的存在；然而，在思維上，它却是可以抽象出來作爲我們研究的對象的。比方，離開了物質，能力是不能單獨存在的；然而，在我們的思維上却是可以單獨地拿來去研究。就像文君所說的「世界上的物質一律變了能力……」那些話，這就已經在思維上把能力和物質截然的分開了；然而，這並不是「神秘」的。

再，幾何學的起源，是起於「量地」，這是一般所公認的；在量地的時候，會遇着各種不同的地形；再由種種不同的地形，便會抽象出幾種具有共同點的形狀來，這總該不是不可想像的吧？

再就我們日常的生活上講，一切的物體，它們都是具有一種形狀的。由種種不同的形狀，經過一種抽象的作用，會得到三種一般的形狀（線面體），這似乎也不是神秘的。比方，一條繩，不就是一根線嗎？一張紙，不就是一個面嗎？一個木頭，不就是一個體嗎？

不過，人類的思維上，還有一種向着兩個極限推想的

能力,這也是不可不注意的。比方,就線來說罷,一根蠶絲固然是一根線,大一點的像一根繩一個木柱都是被認爲一根線的,再推而至於一個彗星所經過的空間又何嘗不是一根線呢?並且,人類的思維,它還是要再進一步去推想到兩個極限去的;第一個極限是一根最粗大的線,這就是把宇宙的全體都看成了這根線的本身;再一個極限是一根最細小的線,這就是把線的本身推想到只有長短却沒有寬窄和厚薄的了。幾何學上的線,就是經過了這種推想然後得來的東西。

現在再就體來說罷。一粒骰子固然是一個體,大一點的像一個火柴盒一口衣服箱一間房子都是被認做一個體的。但是人們也是一樣地要向着兩個極限去推想的:一方面要推想到宇宙是一個無限大的體;另一方面又要推想到一個無限小的「點」。所以幾何學上的「點」,就是最小的「體」:也可以說,「體」若是小到了極限,便是「點」了。

文君就因爲不曾注意到這些——人們有向着兩個極限推想的思維,所以就懷疑那幾何學上「沒有長寬厚」的「點」是神秘的了。關於這一些,文周陸三君最好還找一部李善蘭先生所著的則古昔齋算學去看一下;只要把那書

開首的幾頁看一下,那就會懂得更多了。

最後,我們還希望三君都找些進步的方法論書看一看。因爲過去的數學,都只是有意地去應用演繹法和歸納法:然而,這兩種方法,它已經不能把數學上的問題好好的解答了。比方,「點」是絕對的零呢?還是無窮小呢?這就只有進步的方法才能够回答的:一個數小到了無窮小的時候,它就變成了絕對的零了。因此,點既是絕對的零,同時它又是無窮小。再,就因爲它一方面是無窮小,所以它能够運動而成線。

再會吧!(見讀書生活第一卷第十一期)

附錄　數學公理底來源

—答文成宣君—

讀書指導先生：

我這個笨小孩，打着算盤算一下，和數學交好已有了半打數的年紀；但是數學這東西，牠爲什麼一個人加二個人便是三個人了，我到現在還沒有弄個明白。

有人說：「數學是演繹的科學，一人加二人等於三人，就是根據了（1+2=3）的公式演繹推求出來的。同時也可以知道：一頭牛加二頭牛是三頭牛；一隻狗加二隻狗是三隻狗；一本書加二本書是三本書；一張紙加二張紙是三張紙；一斤花生加二斤花生是三斤花生；一尺洋布加二尺洋布也是三尺洋布；一個××加上二個××就是三個××」。

不過要追問的是：1+2=3這公式若不是天上掉下來

的，他是怎樣會降生的呢？

要說他是最先用歸納法歸成了的這公式吧，一定要羅列許多事實，然後考察其一般的通性，才能由這一堆的事實中間歸納出一個抽象的觀念來。——也就是說：一頭加二頭等于三頭；一隻加二隻等于三隻；一本加二本等于三本；一張加二張等于三張；一斤加二斤等于三斤；一尺加二尺等于三尺；一時加二時等于三時；一天加二天等于三天：……一×加二×等于三×，…所以根據以上的許多事實，拋去其名數或單位，提出一般的共同點來，就可以得出一個抽象的觀念（1+2=3）這件事。因之一羣學數學的人就拜了（1+2=3）作公式，進而去武斷一切，認爲一切都應遵循這公式。

但是天上的雲彩，一朵和二朵加在一塊是否是三朵雲呢？地上的坑水，一坑水和二坑水混在一塊兒又是否是三坑水呢？假使你要不抹煞鐵的事實，或者瞎了眼睛，叫你拋去他們的名數或單位，提出一般的共同點來，得出一個抽象的觀念，難到說還是（1+2=3）嗎？若要你碰到的事實盡都是和我所舉的雲彩和坑水一樣的現象，那麼，一加二豈不是等干一（或X）了嗎？這麼想來，可說一加

二不準定是三了，那麼一加二等于什麼這問題究竟應該怎麼解答呢？

同學王君說：「科學方法，貴乎實驗；一事一理必經實驗證實後，方可謂真。譬之如演代數學，凡有二根以上者必經代入驗算，其適合題意者留之，不合題意者棄之。一加二等于三這問題，亦應代入驗算，視其是否適合題意以定棄留。若一合題意則一，三合題意則三可也。」不過一加二是否會在直線方程式中產生二元或多元呢？就算他有二個以上的元子吧！但是驗算起來也太麻煩死人了！算學要果真就是這樣麻煩的一種學科，恐怕也不成其爲算學了。再退一步說：代數學尙有判別式可以確定根的性質，省得愚笨的讀者跑到牛角尖裏去。這種日常時見的一×加二×等于三×的算題，爲減低他的麻煩程度計，起碼也要有個判別式；惟判別式目下尙沒有見到，請問高明的

讀書指導先生可告訴我一個判別方法嗎？若要代我解明一加二究竟應等什麼這問題，那更是我不勝歡欣的了。

安好！　　文成宣上

數學這門科學從來都認爲是演繹的學問。因爲它是

用許多初步的公理做基礎，而又由這些公理來推斷一切的。關於這些公理，一般研究數學的人多半都把它當做「自明之理」。所謂自明之理，就是人人都明白，用不着證明的道理。而（1+2=3）的公式也可以算是一種「自明之理。」

現在文君要問的就是這些自明之理是從何而來。關於這問題，數學上通常是不管的。數學家只知道有這麼一些公理，並且認爲這些公理是用不着證明就可以作爲數學的基礎；至於它何從而來，數學家却管不着。因爲最初步的公理，差不多都是與常識沒有分別的東西。一加二等於三，「兩點間直線最短」的幾何公理等，都是與日常每一個人所熟知的事實一致的。這些公理並不像物理化學中的許多定律一樣，要經過專門的研究和特別的方法才能求到；旣然不必用特別的方法就可以得到，所以在科學上也就不成爲問題，而數學家也不管它是從何而來了。

然而就沒有問題了麼？當然有的，不能因爲數學家不管，我們也就不加以解答。不過單單的科學是解釋不了的，應該將哲學的理論應用進去，我們才能够解答。

公理，這一種「自明之理」是從何而來呢？哲學家的解

答也有種種,也有可靠與不可靠的分別。譬如有許多觀念論的哲學家就說:「公理是人類的智慧裏生來就有着的;因爲生來就有的,所以用不着證明,而人人都能明白。」這種見解,未免把人類的智慧說得太神祕,好像人類一生下地來頭腦裏就裝好了許多公理的樣子,並且也太隨便了。如果有人追問:「既然只是人類頭腦裏的東西,爲什麼應用到外界的事物也能適合呢?」便不能作合理的答覆。因此,這種見解是陳腐而不可靠的。

可靠的正當的解答,應該是說:「公理是由人類的生活事實中抽引出來的。」既然是由事實中抽引出來的,那當然如文君所說的一樣,是經過歸納法的方式,由許許多多的事實中,抽出它們一般的共通點,才歸結成一種可以普遍應用的公式。不過,數學上的公理,如(1+2=3,)「兩點間直線最短」等等,它們所根據的事實,都是日常生活中很普遍而且很顯而易見的事實。例如一隻狗加二隻狗等,都是每時每刻很容易碰到的現象,要由這些顯而易見的事實中抽出公式,是不必經過特別專門的研究,每個人在日常生活中無意間已經做到了。這些公理雖然是經過歸納法的方式得來,但並不是誰有意地研究得來的。但

觀念論者不明白這一點，所以錯認爲公理是天生在人的頭腦裏。

但在歸納法中，還包含着一種最主要的方法，就是分析。歸納法中若沒有分析，是一點效果也沒有的。例如這裏羅列着許多事實：一頭加二頭，一隻加二隻等等，……那麼，應用歸納法的時候，必須從這「頭，」「隻」……等等事實中分別抽出共通的不名數「一」「二」……等來，然後才能歸納成共通的公式「一加二等於三」。人的分析能力，不但要從各種個別的事實中分出共通的東西來，並且要將各種事實分成許多類別。例如一頭加二頭，一隻加二隻，……等與雲彩的一塊加二塊在類別上是不同的。因爲頭和隻等加起來不會混而爲一，而雲彩則不論十塊八塊相加，都會混成一塊。（但這只是指雲彩在運動的狀態中而言，若把每一塊雲彩都當做固定不動的看，那還是一塊加二塊等於三塊，和一頭加二頭等是同類。）人的分析能力就能將一頭和二頭等固定狀態中的事實和運動狀態中的雲彩分別開來。因此能够歸納成一加二等於三的公式，這並沒有什麼不可解的地方。

也就因爲這樣，我們可以指出科學上的每一種公理，

法則等，雖然比較一頭二頭等個別的事物更能代表一種普遍的眞理，但這眞理都是在比較靜止的狀態上來反映世界上的事物的。因此也就只能是一部分的眞理；要想找到一種完全無缺，任何場合都可以應用的公理是不可能的。世界上的事物是千變萬化，事物根本就不是固定的東西，而公理和法則等則是比較固定的，靜止的。用固定的法則來反映千變萬化的事物，當然只能表現出一部分和一段落。所以，單單用一加二等於三的公式，就要想連雲彩的運動也包含進去，是不可能，而且也不是合理的要求。如果我們不了解公理的這一種有限性和不完全性，而希望它能夠應用無窮，我們也許終於會對（1+2=3）失望，以爲它完全不是眞理，那就不對了。因爲這公式同時是眞理，而同時也是不完全的東西。

（見讀書生活第一卷第六期，

（完）