Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 12

Aufgaben

Aufgabe 12.1. Es sei R ein Zahlbereich und sei $f \in R$, $f \neq 0$. Es sei $(f) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k$ die Zerlegung in Primideale und es sei vorausgesetzt, dass f eine Primfaktorzerlegung besitzt. Zeige, dass die Primideale $\mathfrak{p}_i$ Hauptideale sind.

Aufgabe 12.2. Es sei $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal in einem Dedekindbereich. Zeige, dass es ein Ideal $\mathfrak{b} \neq 0$ derart gibt, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 12.3. Es sei K ein Körper. Wir betrachten in $K[X,Y]$ die beiden Primideale

$$\mathfrak{p} = (X) \subset (X,Y) = \mathfrak{m}.$$

Zeige, dass es kein Ideal $\mathfrak{a}$ mit

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}$$

gibt.

Aufgabe 12.4.*

Es sei $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ ein Produkt aus kommutativen Ringen. Zeige, dass für die Einheitengruppe von R die Beziehung

$$R^\times = R_1^\times \times \cdots \times R_n^\times$$

gilt.

Aufgabe 12.5. Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$. Es sei f sowohl nilpotent als auch idempotent. Zeige, dass $f = 0$ ist.

Aufgabe 12.6. Seien R und S kommutative Ringe und sei $R \times S$ der Produktring $R \times S$. Zeige, dass die Teilmenge $R \times 0$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 12.7. Seien R ein kommutativer Ring und I, J Ideale in R. Sei weiter

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow R/I \times R/J,\ r \longmapsto (r+I, r+J).$$

Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn $I + J = R$ gilt. Wie sieht $\ker\varphi$ aus? Benutze jetzt den Homomorphiesatz um einzusehen, was das im Falle $R = \mathbb{Z}$ mit dem chinesischen Restsatz zu tun hat.

Aufgabe 12.8. Sei R ein kommutativer Ring und seien $I, J \subseteq R$ Ideale. Wir betrachten die Gruppenhomomorphismen

$$\varphi\colon\ R/I \cap J \longrightarrow R/I \times R/J,\ r \longmapsto (r, r),$$

und

$$\psi\colon\ R/I \times R/J \longrightarrow R/I + J,\ (s, t) \longmapsto s - t.$$

Zeige, dass φ injektiv ist, dass ψ surjektiv ist und dass

$$\operatorname{bild}\varphi \,=\, \operatorname{kern}\psi$$

ist. Sind φ und ψ Ringhomomorphismen?

Aufgabe 12.9. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $e \in R$ ein idempotentes Element. Zeige, dass es eine natürliche Ringisomorphie

$$R_e \,\cong\, R/(1-e)$$

gibt.

Aufgabe 12.10. Es sei X ein topologischer Raum mit einer disjunkten Zerlegung

$$X \,=\, U \uplus V$$

aus offenen Teilmengen $U, V \subseteq X$. Zeige, dass die natürliche Abbildung

$$C(X, \mathbb{R}) \longrightarrow C(U, \mathbb{R}) \times C(V, \mathbb{R}),\ f \longmapsto (f|_U, f|_V),$$

bijektiv ist.

Aufgabe 12.11. Es seien R_1 und R_2 kommutative Ringe mit dem Produktring $R \,=\, R_1 \times R_2$. Zeige, dass es eine natürliche Homöomorphie

$$\operatorname{Spek}(R_1) \uplus \operatorname{Spek}(R_2) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R_1 \times R_2).$$

gibt.

Aufgabe 12.12.*

Es seien $R_1, R_2, \ldots, R_n$ kommutative Ringe und sei

$$R \,=\, R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$$

der Produktring.

(1) Es seien
$$I_1 \subseteq R_1, I_2 \subseteq R_2, \ldots, I_n \subseteq R_n$$
Ideale. Zeige, dass die Produktmenge
$$I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$$
ein Ideal in R ist.

(2) Zeige, dass jedes Ideal $I \subseteq R$ die Form
$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$$
mit Idealen $I_j \subseteq R_j$ besitzt.

(3) Sei
$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$$
ein Ideal in R. Zeige, dass I genau dann ein Hauptideal ist, wenn sämtliche I_j Hauptideale sind.

(4) Zeige, dass R genau dann ein Hauptidealring ist, wenn alle R_j Hauptidealringe sind.

Aufgabe 12.13. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $e \in R$ ein idempotentes Element. Zeige, dass auch $1 - e$ idempotent ist und dass die „zusammengesetzte" Restklassenabbildung
$$R \longrightarrow R/(e) \times R/(1-e)$$
eine Bijektion ist.

Ein kommutativer Ring R heißt *zusammenhängend*, wenn er genau zwei idempotente Elemente (nämlich $0 \neq 1$) enthält.

Aufgabe 12.14. Sei R ein kommutativer lokaler Ring. Zeige, dass R zusammenhängend ist.

Aufgabe 12.15.*

Zeige, dass ein Integritätsbereich ein zusammenhängender Ring ist.

Aufgabe 12.16.*

(a) Bestimme für die Zahlen 3, 5 und 7 modulare Basislösungen, finde also die kleinsten positiven Zahlen, die in
$$\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(5) \times \mathbb{Z}/(7)$$
die Restetupel $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ repräsentieren.

(b) Finde mit den Basislösungen die kleinste positive Lösung x der simultanen Kongruenzen
$$x = 2 \mod 3, \quad x = 4 \mod 5 \text{ und } x = 3 \mod 7\,.$$

Aufgabe 12.17. (a) Bestimme für die Zahlen 2, 3 und 7 modulare Basislösungen, finde also die kleinsten positiven Zahlen, die in

$$\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(7)$$

die Restetupel $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ repräsentieren.

(b) Finde mit den Basislösungen die kleinste positive Lösung x der simultanen Kongruenzen

$$x = 1 \mod 2, \quad x = 2 \mod 3 \text{ und } x = 2 \mod 7\,.$$

Aufgabe 12.18.*

a) Finde die Zahlen $z \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ mit der Eigenschaft, dass die letzte Ziffer ihres Quadrates (in der Dezimaldarstellung) gleich z ist.

b) Finde die Zahlen $z \in \{0, 1, \ldots, 99\}$ mit der Eigenschaft, dass die beiden letzten Ziffern ihres Quadrates (in der Dezimaldarstellung) gleich z ist.

Aufgabe 12.19. Finde in $\mathbb{Q}[X]/(X^2-1)$ nichttriviale idempotente Elemente.

Aufgabe 12.20. Sei R ein faktorieller Bereich und $p \in R$ ein Primelement. Zeige, dass der Restklassenring $R/(p^n)$ nur die beiden trivialen idempotenten Elemente 0 und 1 besitzt.

Aufgabe 12.21. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ verschiedene Elemente und

$$F = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

das Produkt der zugehörigen linearen Polynome. Zeige, dass der Restklassenring $K[X]/(F)$ isomorph zum Produktring K^n ist.

Aufgabe 12.22.*

Das Polynom $X^3 - 7X^2 + 3X - 21$ besitzt in $\mathbb{R}[X]$ die Zerlegung

$$X^3 - 7X^2 + 3X - 21 = (X-7)(X^2+3)$$

in irreduzible Faktoren und daher gilt die Isomorphie

$$\mathbb{R}[X]/(X^3 - 7X^2 + 3X - 21) \cong \mathbb{R}[X]/(X-7) \times \mathbb{R}[X]/(X^2+3).$$

a) Bestimme das Polynom kleinsten Grades, das rechts dem Element $(1,0)$ entspricht.

a) Bestimme das Polynom kleinsten Grades, das rechts dem Element $(0,1)$ entspricht.

Aufgabe 12.23.*

Schreibe den Restklassenring $\mathbb{Q}[X]/(X^4-1)$ als ein Produkt von Körpern, wobei lediglich die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ vorkommen. Schreibe die Restklasse von X^3+X als ein Tupel in dieser Produktzerlegung.

Aufgabe 12.24. Zeige, dass jeder echte Restklassenring von $\mathbb{C}[X]$ isomorph zu einem Produktring der Form

$$\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}[X]/(X^2)\times\cdots\times\mathbb{C}[X]/(X^2)\times\mathbb{C}[X]/(X^3)\times\cdots \\ \times\mathbb{C}[X]/(X^3)\times\cdots\times\mathbb{C}[X]/(X^m)\times\cdots\times\mathbb{C}[X]/(X^m$$

ist.

Aufgabe 12.25. Realisiere den Produktring

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$$

als einen Restklassenring von $\mathbb{R}[X]$.

Aufgabe 12.26. Zeige, dass die folgenden K-Algebren zueinander isomorph sind.

(1) Der Produktring $K\times K\times K$.
(2) Der Restklassenring $K[X]/(X^3-X)$.
(3) Der Restklassenring $K[X,Y]/(X,Y)\cdot(X-1,Y-1)\cdot(X,Y-7)$.

Aufgabe 12.27.*

Bestimme in $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ die Primideale, die $5-3\sqrt{7}$ enthalten, sowie den Hauptdivisor zu $5-3\sqrt{7}$.

Aufgabe 12.28.*

Es sei R ein Dedekindbereich und $\mathfrak{a}\neq 0$ ein Ideal. Zeige, dass $R/\mathfrak{a}$ ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 12.29. Zeige, dass jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in einem Dedekindbereich R von maximal zwei Elementen erzeugt wird.

Aufgabe 12.30. Es sei R ein Zahlbereich. Zeige, dass die Norm einen Monoidhomomorphismus

$$N\colon\ (\operatorname{Eff}\operatorname{Div}(R),+)\longrightarrow(\mathbb{N}_+,\cdot)$$

festlegt.

Aufgabe 12.31. Es sei R ein Zahlbereich und sei $T \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Normen zu Idealen $\neq 0$ in R. Zeige, dass T ein multiplikatives System ist, das von gewissen Primzahlpotenzen p^i erzeugt wird.

Aufgabe 12.32. Zeige, dass es in einer endlichen integren Erweiterung $\mathbb{Z} \subseteq R$ Primideale $\mathfrak{p}$ derart geben kann, dass die Anzahl des Restklassenringes $R/\mathfrak{p}^r$ zu einer Primidealpotenz $\mathfrak{p}^r$ keine Potenz ist.

Abbildungsverzeichnis