

Lineare Algebra und analytische Geometrie II**Arbeitsblatt 42****Übungsaufgaben**

AUFGABE 42.1. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass die Menge der selbstadjungierten Endomorphismen von V einen Untervektorraum in $\text{End}(V)$ bilden.

AUFGABE 42.2. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus und

$$U \subseteq V$$

ein φ -invarianter Untervektorraum. Zeige, dass auch die Einschränkung

$$\varphi|_U: U \longrightarrow U$$

normal ist.

AUFGABE 42.3. Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Zeige, dass φ genau dann normal ist, wenn der adjungierte Endomorphismus $\hat{\varphi}$ normal ist.

AUFGABE 42.4.*

Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus. Zeige

$$\text{kern } \varphi = \text{kern } \hat{\varphi}.$$

AUFGABE 42.5. Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei

$$V = V_1 \oplus V_2$$

die direkte Summe der Untervektorräume V_1 und V_2 , die zueinander orthogonal seien. Es seien

$$\varphi_1: V_1 \longrightarrow V_1$$

und

$$\varphi_2: V_2 \longrightarrow V_2$$

normale Endomorphismen und

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$

die Summe davon. Zeige, dass auch φ normal ist.

AUFGABE 42.6. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass die Menge der normalen Endomorphismen von V keinen Untervektorraum in $\text{End}(V)$ bilden.

AUFGABE 42.7.*

Entscheide, ob es für die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 - 3i & 4 + 5i \\ 11 - 3i & 6 + 9i \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{C}^2 aus Eigenvektoren gibt.

AUFGABE 42.8. Entscheide, ob es für die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 - 5i & 3 - 4i & 1 + 5i \\ 0 & 1 - i & 2 + 9i \\ 6 + 3i & i - 7 & -4i \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{C}^3 aus Eigenvektoren gibt.

AUFGABE 42.9. Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und es sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V . Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus und Ψ_φ die zugehörige Sesquilinearform im Sinne von Lemma 41.12. Wie verhält sich die beschreibende Matrix von φ zur Gramschen Matrix zu Ψ_φ ? Welche Beziehung besteht zur Gramschen Matrix der Form Θ_φ , die durch

$$\Theta_\varphi(v, w) = \langle v, \varphi(w) \rangle$$

definiert wird.

AUFGABE 42.10. Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform auf V . Zeige, dass V eine Orthogonalbasis besitzt.

AUFGABE 42.11. Beweise den Trägheitssatz von Sylvester für eine komplexhermitesche Form.

AUFGABE 42.12. Der \mathbb{R}^4 sei (neben dem Standardskalarprodukt) mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Man gebe eine Basis des \mathbb{R}^4 an, die bezüglich des Skalarproduktes eine Orthonormalbasis und bezüglich der Minkowski-Form eine Orthogonalbasis ist.

AUFGABE 42.13. Der \mathbb{R}^2 sei (neben dem Standardskalarprodukt) mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Bestimme sämtliche Basen des \mathbb{R}^2 , die bezüglich des Skalarproduktes eine Orthonormalbasis und bezüglich der Minkowski-Form eine Orthogonalbasis sind.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 42.14. (2 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus. Zeige, dass auch $\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V$ normal ist.

AUFGABE 42.15. (3 Punkte)

Entscheide, ob es für die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 + i & 6 - 7i & 6 + 3i \\ 4 - i & 2 - i & 2 - i \\ 5 + 3i & 2i - 11 & 4 + 3i \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{C}^3 aus Eigenvektoren gibt.

AUFGABE 42.16. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum V . Zeige, dass φ genau dann selbstadjungiert ist, wenn alle Eigenwerte von φ reell sind.

4

AUFGABE 42.17. (3 Punkte)

Bestimme den Typ der Matrix

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 - i & -4 + i \\ 3 + i & 2 & 7i \\ -4 - i & -7i & 4 \end{pmatrix}.$$