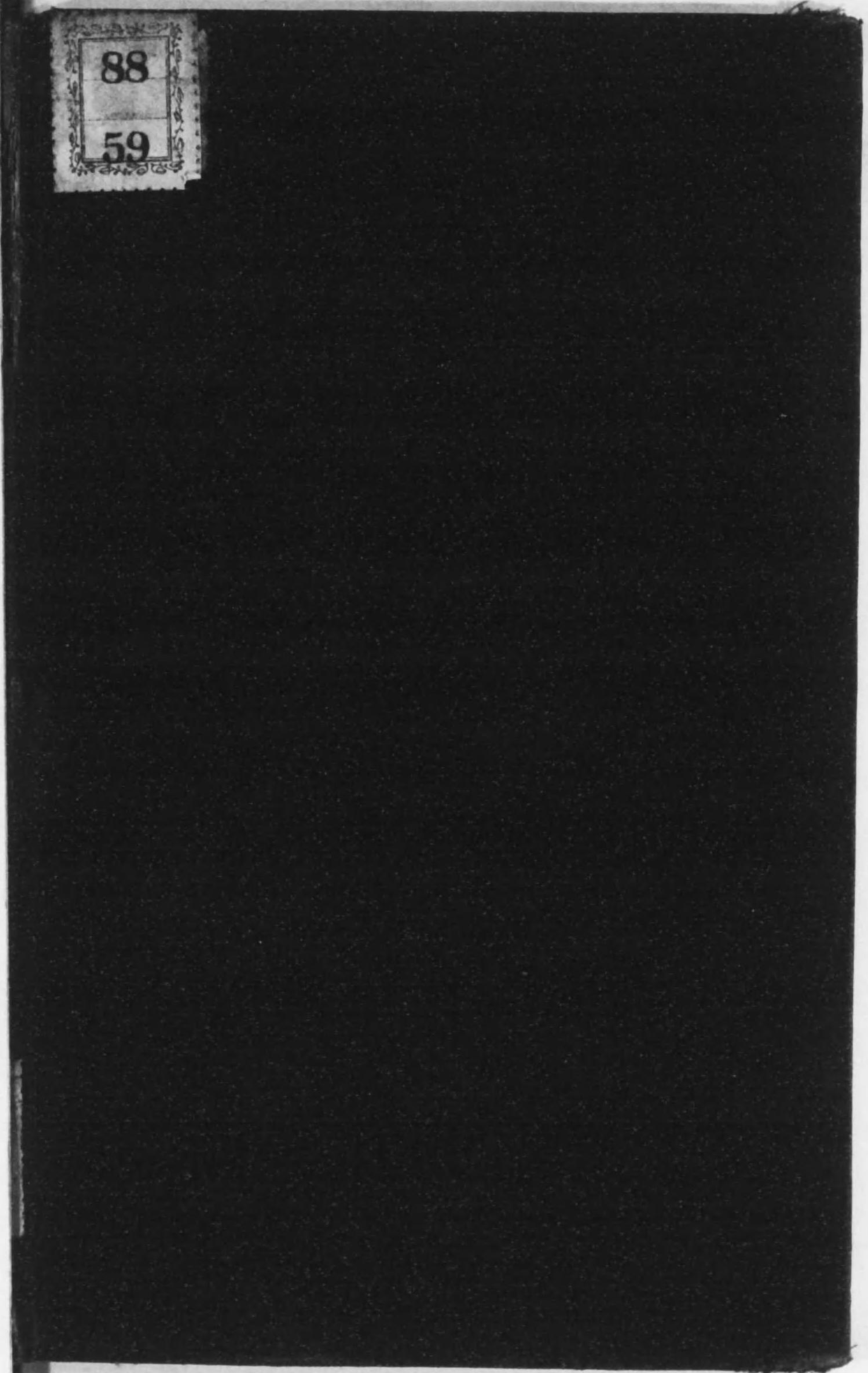
始



明治三十四年三月十三日

文部省檢定濟中學校數學科教科書

平面三角法教科書

理學士

遠藤又藏著

東京

光風館書店藏版

第八版

緒　言

本書ハ予ガ數年來ノ實驗講究ニ基キ中學校及ビ之ト同程度ノ諸學校教科用書ト爲スノ目的ヲ以テ編纂シタルモノニシテ其綱目及ビ順序ハ次ノ二個條ヲ除クノ外概ネ中學校教授要目ニ據リタリ.

對數ハ一般三角形ノ解キ方ニ先ダチテ之ヲ論ズルヲ至當ト考フルヲ以テ此ノ如ク順序ヲ變更シタリ.

三角函數方程式ハ諸學校ノ入學試驗ニ於テ未ダ全ク之ヲ廢スルニ至ラズ,故ニ之ヲ末章ニ加ヘタリ.

對數表用法ハ五桁ノ表ニ就キ之ヲ練習スルヲ要ス. 普通教科書ノ卷尾ニ附シタル類ノ不完全ノ表ニ依リ其用法ニ熟達セントスルハ殆ンド徒勞ニ近カルベシ.

教科書ノ要ハ教フルニ便ニシテ學ブニ易キニ在リ徒ニ新奇ヲ衒フベキニアラズ,然レドモ千編一律樣ニ依リテ胡蘆ヲ畵クモ亦決シテ其本旨ヲ得タル者ニアラザルベシ. 本書固ヨリ完全ノ域ヲ距ルコト遠シト雖モ多少進歩改良ト自信スル所無シトセ

ズ,諸賢若シ變更ヲ要スト思考セラルヽ點アラバ忌憚無ク忠告ノ勞ヲ採ラレンコト希望ノ至リナリ.

明治三十三年八月　東京ニ於テ

遠藤又藏　識ス

第二版　緒言

本書幸ニ世ノ容ルヽ所トナリ學年開始ノ間際ニ於テ檢定濟トナレルニモ拘ハラズ府下ノ重ナル中學校ノ教科書ニ採用セラレ玆ニ第二版ヲ發行スルノ機運ニ達シタルハ著者ノ榮トスル所ナリ.

本版ニ於テハ前版ニ於ケル誤植ヲ訂正シタル外別ニ變更ヲ加ヘタル所無シ.

著者ハ本書ニ就キテ授業セル自已ノ經驗ト大方ノ忠告トニ基キ後版ニ於テ充分ノ改良ヲ加ヘンコトヲ期ス.

明治三十四年八月　著者識ス.

訂正六版緒言.

本書版ヲ重ヌルコト既ニ五回其間ニ於テ諸賢ノ忠告ト著者ノ實驗トニ據リ改メテ然ルベキ多クノ事項ヲ發見シタルヲ以テ全編ニ通ジテ大ニ訂正ヲ加ヘ玆ニ第六版ヲ發行スルニ至レリ.

本版ニ於ケル變更ノ重ナル點ハ次ノ如シ. (1) 問題ノ困難ナル者若干ヲ除キ更ニ簡易ナル者ヲ增シタルコト. (2) 卷末ニ三角函數表ヲ附シタルコト. (3) 三角法ノ骨髓タル加法定理ノ證明ヲ一層完全ナラシメタルコト. (4) 一般三角形ノ性質ニ關スル種々ノ公式ヲ成ルベク同時ニ求メタルコト. (5) 必要ノ公式ヲ增シタルコト. (6) 方程式ノ章ニ於テ逆三角函數ヲ說キ之ニ關スル重要ノ問題ヲ附シタルコト. (7) 消去法ニ關スル問題ヲ挿入シタルコト.

上ニ擧ゲタル者ノ外改良ヲ加ヘタル點亦尠ナカラズ.

三角法ハ初等數學ト高等數學トノ連鎖タル重用ノ學科ナレバ理論ノ嚴正ヲ要スルト同時ニ計算ノ確實ヲ期セザルベカラズ是レ著者ガ最モ注意セル

點ニシテ加法定理ノ證明,對數計算ノ説明等ニ多クノ紙數ヲ費シタル所以ナリ.

敎科書ハ講義録ト異ナリ文ノ冗長ニ失スルハ最モ忌ム所ナリ又理學數學等ノ敎科書ニ文法上ノ誤謬多ク往々意義不通ノ者アルハ識者ノ歎ズル所ナリ著者ハ出來得ル限リ此等ノ闕點無カラシメンコトヲ勉メタリ.

卷末ニ附シタル三角函數表ハ學友今村理學士ノ承諾ヲ經テ其著普通對數表ヨリ轉載シタル者ナリ;茲ニ其好意ヲ謝ス.

明治三十五年十一月　　著者識ス.

目次.

平面三角法教科書.

第一章.

角ノ計リ方.

1. 三角法ノ定義.

三角法ハ三角函數ト名クルモノ、性質及ビ應用ヲ講ズル學科ニシテ其應用ノ區域ニ依リ之ヲ平面,球面ノ二部ニ分ツ.

2. 六十分法.

實地ノ計算ニ於テ一般ニ用フル所ノ角ノ計リ方ハ次ノ如シ,

一直角ノ九十分ノ一(即正三角形ノ一角ノ六十分ノ一)ヲ一度ト云ヒ,一度ノ六十分ノ一ヲ一分ト云ヒ,一分ノ六十分ノ

一ヲ一秒ト云ヒ,度,分,秒ヲ單位トシテ角ヲ計ル方法ヲ六十分法ト云フ;而シテ d 度 m 分 s 秒ナル角ハ之ヲ $d^\circ m' s''$ ト記ス.

注意. 秒ナル單位ハ小ニ過グルヲ以テ實際上之ヲ用フルコト極メテ稀ナリ;分ヨリモ小ナル角ハ分ノ小數ニテ之ヲ表スヲ適當且便宜ナリトス(通常ノ場合ニ於テハ小數一位ニテ充分ナリ). 教科書ニ於テ秒ヲ用ヒタルモノ有ルハ唯習慣ニ從ヘルノミ.

3. 角ノ單位ノ轉換.

任意ノ一角ニ於テ直角ヲ單位トセルトキノ値及ビ六十分法ニテ計リタル値ノ中何レカ一個ヲ知ルトキハ容易ニ他ノ一個ヲ求ムルコトヲ得. 次ニ例ヲ擧ゲテ計算ノ方法ヲ示スベシ.

例一. 1·07875 直角ヲ六十分法ニテ表セヨ.

運算.

$$\begin{array}{r} 1{\cdot}07875\text{直角} \\ 90 \\ \hline 97{\cdot}0875\text{度} \\ 60 \\ \hline 5{\cdot}25\text{分} \\ 60 \\ \hline 15\text{秒} \end{array}$$

1.07875
90

答. 97° 5′ 15″.

例二. 直角ヲ單位トスルトキ 8° 15′ 27″ ノ値幾何.

運算.

$$8^\circ 15' 27'' = \frac{8\times60\times60+15\times60+27}{90\times60\times60}\text{直角} = {\cdot}09175\text{直角}$$

或ハ次ノ如ク運算ス

$$\begin{array}{r|l} 60 & 27\text{秒} \\ \hline 60 & 15{\cdot}45\text{分} \\ \hline 90 & 8{\cdot}2575\text{度} \\ \hline & {\cdot}09175\text{直角} \end{array}$$

答. 09175 直角.

例三. $\frac{45}{64}$ 直角ヲ六十分法ニテ表セ.

運算.

$$\frac{45}{64}\text{直角} = \left(\frac{45}{64}\times 90\right)\text{度} = 63\frac{9}{32}\text{度},$$

$$\frac{9}{32}\text{度} = \left(\frac{9}{32}\times 60\right)\text{分} = 16\frac{7}{8}\text{分},$$

$$\frac{7}{8}\text{分} = \left(\frac{7}{8}\times 60\right)\text{秒} = 52{\cdot}5\text{秒}.$$

答. 63° 16′ 52″·5.

設　題　一.

(1) 直角ヲ單位トスルトキ次ノ値ヲ有スル諸角ヲ六十分法ニテ表セ.

$\cdot678$; $\cdot02\dot{4}\dot{1}$; $\frac{11}{16}$.

8° 15′ 27″

$\frac{(8\times60+15)\times60+27}{90\times60\times60}$

答. 61° 1′ 12″; 2° 10′ 12″; 61° 52′ 30″.

(2) 直角ヲ單位トスルトキ次ノ諸角ノ値幾何.

49°; 37′·8; 32″·4; 11°15′; 8°0′36″; 45′5″·4; 61°52′30″.

答. ·54; ·007; ·0001; ·125; ·089; ·00835; ·6875.

(3) 二時三十四分五十六秒ノ時刻ニ於ケル時計ノ長針,短針ノ夾角ヲ六十分法ニテ表セ.

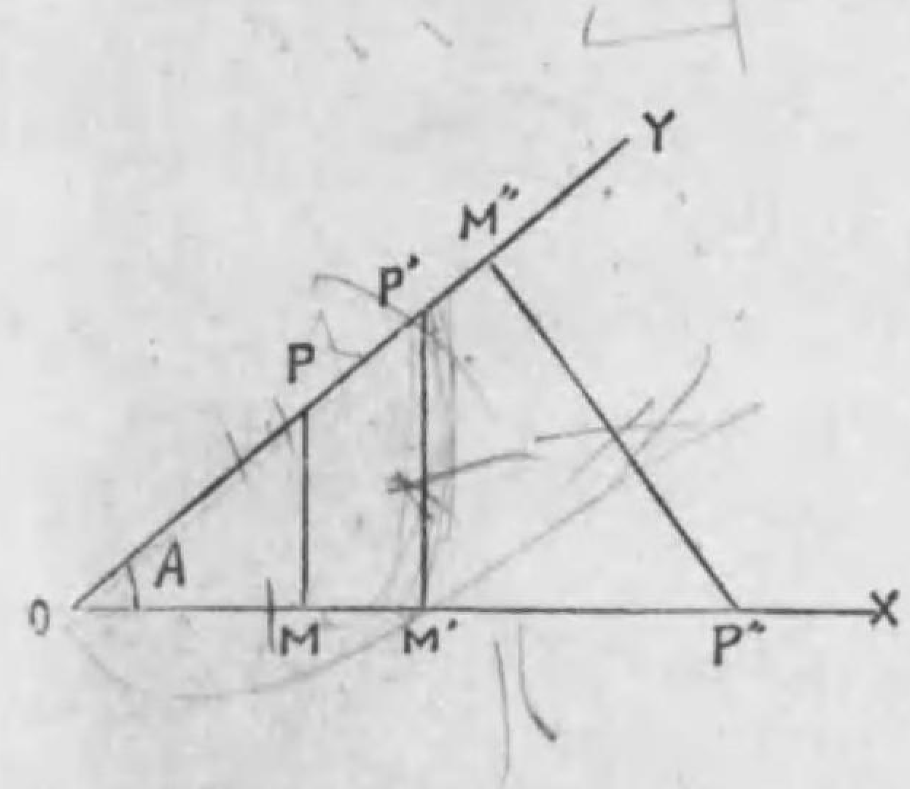
答. 132° 8′

第二章.

銳角ノ三角函數.

4. 定義.

任意ノ銳角Aノ任意ノ邊OY上ニ角頂外ノ任意ノ點Pヲ取リ此點ヨリ他ノ邊OXニ垂線ヲ作リ其足ヲMトスルトキ, Aニ關シテOPヲ斜邊, MPヲ垂線, OMヲ底邊ト云ヒ,



次ニ揭グル六個ノ比ヲ總稱シテAノ三角函數或ハ圓函數ト云フ.

第一. $\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$ 即 $\frac{MP}{OP}$ ヲAノ正弦ト云ヒ之ヲ $\sin A$ ト記ス.

第二. $\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$ 即 $\frac{OM}{OP}$ ヲAノ餘弦ト云ヒ之ヲ $\cos A$ ト記ス.

第三. $\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$ 即 $\frac{MP}{OM}$ ヲAノ正切ト云ヒ之ヲ $\tan A$ ト記ス.

第四. $\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$ 即 $\frac{OM}{MP}$ ヲAノ餘切ト云ヒ之ヲ $\cot A$ ト記ス.

第五. $\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$ 即 $\frac{OP}{OM}$ ヲAノ正割ト云ヒ之ヲ $\sec A$ ト記ス.

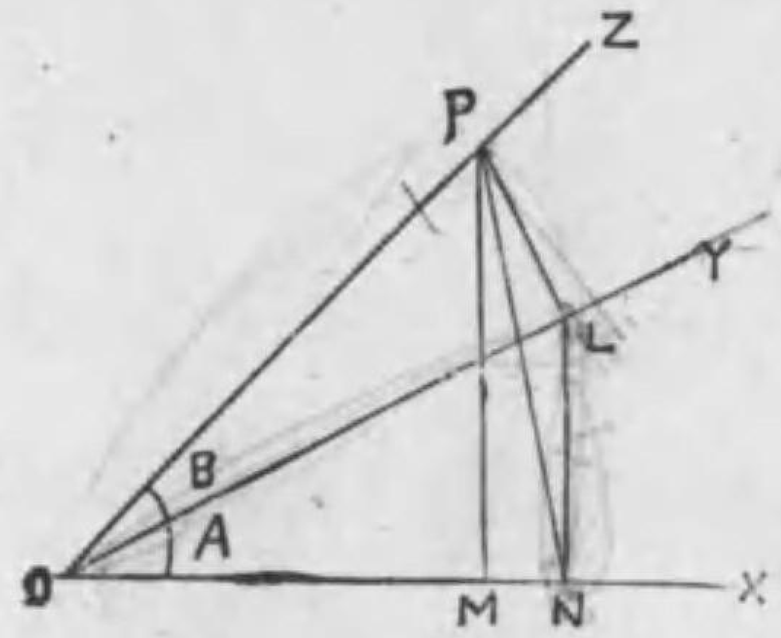
第六. $\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$ 即 $\frac{OP}{MP}$ ヲAノ餘割ト云ヒ之ヲ $\operatorname{cosec} A$ ト記ス.

注意一. OY上ノ他ノ任意ノ點P′及ヒOX上ノ一點P″ヨリOX及ヒOYニ垂線ヲ作リ其足ヲM′, M″トセバ $O\hat{P}'M' \backsim O\hat{P}M \backsim O\hat{P}''M''$ ナルヲ以テAノ一定ナル以上ハ其各三角函數ノ値ハ一定ナリ

注意二. Aノ增大スルニ從ヒ其正弦,正切,正割ハ增大シ餘弦,餘切,餘割ハ減少ス.

5. 記法ニ關スル注意.

第一. $\sin A$ 等ハAニ屬スル比ノ記號ナルヲ以テ sin 等トAトヲ分割スベカラズ,例ヘバ $\sin A+\sin B$ ハAノ正弦トBノ正弦トノ和ヲ表スモノニシテAトBトノ和ノ正弦 $\sin(A+B)$ ニ等シカラズ. 今 $X\hat{O}Y$, $Y\hat{O}Z$ ヲA, BトシOZ上ノ一點PヨリOY, OXニ垂



線ヲ作リ其足ヲL, MトシLヨリOXニ垂線ヲ作リ其足ヲNトシP, Nヲ連ヌルトキハ

$$\sin A=\frac{NL}{OL}>\frac{NL}{OP},$$

$$\sin B=\frac{LP}{OP}.$$

$$\therefore \quad \sin A+\sin B>\frac{NL+LP}{OP}>\frac{PN}{OP}>\frac{MP}{OP}$$

即 $\quad \sin A+\sin B>\sin(A+B).$

第二. n ガ負數ナラザルトキ三角函數ノ n 乘冪ヲ示スニハ便宜上函數記號ノ右肩ニ指數 n ヲ附スルヲ常トス,例ヘバ $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ 等ノ如シ

設題二.

(1) 直角三角形ノ三邊ガ三寸,四寸,五寸ナルトキ其最小角ノ正弦,餘弦,正切ヲ求ム. 答. $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$.

(2) 直角三角形ノ直角ノ二邊ノ數値ガ 28, 45 ナルトキ其大鋭角ノ正弦ヲ求ム. 答. $\frac{45}{53}$.

(3) 33, 56, 65 ニ比例セル三邊ヲ有スル三角形ノ最小角ノ餘切,正割,餘割ヲ求ム. 答. $\frac{56}{33}, \frac{65}{56}, \frac{65}{33}$.

$\sqrt{81+(\frac{27}{4})^2}=\cdots$

(4) C ニ於テ直角ヲ有スル $A\hat{B}C$ ニ於テ $\tan A=\frac{11}{3}$,

BC=9

$AC=\frac{27}{11}$ ナルトキ AB ヲ求ム. 答. $\frac{9\sqrt{130}}{11}$.

6. 三角函數相互ノ關係.

次ニ掲グルモノハ同角ノ三角函數ノ基礎ノ關係ナリ.

第一. 二重關係.

$$\sin A\,.\,\operatorname{cosec} A=\frac{垂}{斜}\cdot\frac{斜}{垂}=1\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$\cos A\,.\,\sec A=\frac{底}{斜}\cdot\frac{斜}{底}=1\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

$$\tan A\,.\,\cot A=\frac{垂}{底}\cdot\frac{底}{垂}=1\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

第二. 三重關係.

$$\tan A=\frac{垂}{底}=\frac{垂}{斜}\div\frac{底}{斜}=\frac{\sin A}{\cos A}\cdots\cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

$$\cot A=\frac{底}{垂}=\frac{底}{斜}\div\frac{垂}{斜}=\frac{\cos A}{\sin A}\cdots\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

第三. 平方關係.

$$\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{垂}{斜}\right)^2+\left(\frac{底}{斜}\right)^2=\frac{斜^2}{斜^2}=1\cdots(\mathrm{VI})$$

$$1+\tan^2 A=1+\left(\frac{垂}{底}\right)^2=\left(\frac{斜}{底}\right)^2=\sec^2 A-1\cdots(\mathrm{VII})$$

$$1+\cot^2 A=1+\left(\frac{底}{垂}\right)^2=\left(\frac{斜}{垂}\right)^2=\operatorname{cosec}^2 A\cdots(\mathrm{VIII})$$

cot cosec

$\left(\frac{\sin^4}{\cos^2}-\frac{\sin^4 A\cos^2 A}{\cos^2 A}=\frac{\sin^2 A(1-\cos^2 A)}{\cos^2 A}\right)$ cot²A − cos²A

cot²(1−sin²A) = cot²A, sin²A

sec²−1 sin²A

系一. $\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A(1-\cos^2 A)=\tan^2 A.\sin^2 A.$

$$\cot^2 A-\cos^2 A=\cot^2 A(1-\sin^2 A)=\cot^2 A.\cos^2 A.$$

$$\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\sin^2 A}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos^2 A\,.\,\sin^2 A}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 A}\cdot\frac{1}{\sin^2 A}=\sec^2 A\,.\,\operatorname{cosec}^2 A.$$

此三個モ亦平方關係ナリ.

系二. $\operatorname{cosec} A-\sin A=\frac{1}{\sin A}-\sin A=\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}=\frac{\cos^2 A}{\sin A}$

$$=\cot A\,.\,\cos A.$$

$$\sec A-\cos A=\frac{1}{\cos A}-\cos A=\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}=\frac{\sin^2 A}{\cos A}$$

$$=\tan A\,.\,\sin A.$$

$$\cot A+\tan A=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A\,.\,\cos A}$$

$$=\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\sin A}=\sec A\,.\,\operatorname{cosec} A.$$

此三個ヲ四重關係ト云フ.

7. 恒等式ノ證明法.

前條ノ關係ニ依リ三角函數ヲ含メル種々ノ恒等式ヲ證明スルコトヲ得;其方法ニ三種有リ.

第一. 證明セントスル恒等式ヲ已知ノ關係ヨリ誘導スル法.

例.

$=1-2\sin^2A+\cos^2A$

$\sin^4A+\cos^4A=1-2\sin^2A.\cos^2A$ ヲ證セヨ.

證. $\sin^2A+\cos^2A=1,$

∴ $(\sin^2A+\cos^2A)^2=1,$

即 $(\sin^4A+\cos^4A)+2\sin^2A.\cos^2A=1,$

∴ $\sin^4A+\cos^4A=1-2\sin^2A.\cos^2A.$

第二. 恒等式ノ一邊(複雜ナル)ヲ他ノ一邊ニ變形スル法.

例.

$\sin^2A.\tan A+\cos^2A.\cot A+2\sin A.\cos A=\tan A+\cot A$ ヲ證セヨ.

證. 左邊 $=(1-\cos^2A)\tan A+(1-\sin^2A)\cot A+2\sin A.\cos A$

$=\tan A-\cos^2A.\dfrac{\sin A}{\cos A}+\cot A-\sin^2A.\dfrac{\cos A}{\sin A}+2\sin A.\cos A$

$=\tan A-\sin A.\cos A+\cot A-\sin A.\cos A+2\sin A.\cos A$

$=\tan A+\cot A.$

第三. 恒等式ノ兩邊ヲ同シ形ニ變スル法.

例.

$\mathrm{cosec}A(\sec A-1)+\sin A=\cot A(1-\cos A)+\tan A$ ヲ證セヨ.

證 左邊 $=\dfrac{1}{\sin A.\cos A}-\dfrac{1}{\sin A}+\sin A.$

右邊 $=\dfrac{\cos A}{\sin A}-\dfrac{1-\sin^2A}{\sin A}+\dfrac{\sin A}{\cos A}$

$=\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\sin A}{\cos A}-\dfrac{1}{\sin A}+\sin A$

$=\dfrac{1}{\sin A.\cos A}-\dfrac{1}{\sin A}+\sin A$

∴ 左邊=右邊

上ノ方法ハ何レモ嚴正ヲ闕ク所無シ然レドモ練習ノ爲メニハ左邊ヨリ右邊ヲ誘導スルヲ最良ノ方法トス.

設題三.

次ノ諸恒等式ヲ證セヨ

(1) $\sec A-\tan A.\sin A=\cos A.$

(2) $\cot A-\sec A.\mathrm{cosec}A(1-2\sin^2A)=\tan A.$

(3) $\tan^2A+\cot^2A=\dfrac{1-2\sin^2A.\cos^2A}{\sin^2A.\cos^2A}.$

(4) $\dfrac{(\sec A+\mathrm{cosec}A)^2}{\sec^2A+\mathrm{cosec}^2A}=1+2\sin A.\cos A.$

(5) $(1-\tan^4A)\cos^2A+\tan^2A=1.$

(6) $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}.$

(7) $\dfrac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}+\dfrac{1+\sin A+\cos A}{1+\sin A-\cos A}=2\mathrm{cosec}A.$

(8) $\tan A+\cot A=2\sin A.\cos A+\sin^3 A.\sec A+\cos^3 A.\operatorname{cosec} A.$

(9) $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\operatorname{cosec} A+\sec A.$

(10) $(\sec A.\cot A+1)(\sec A.\cot A-1)=\cos^2 A.\operatorname{cosec}^2 A.$

(11) $\sec^6 A=1+\tan^6 A+3\tan^2 A.\sec^2 A.$

(12) $(\cos^2 A+\cot^2 A)\tan^2 A=\sec^2 A+(\cos^2 A-1)\tan^2 A.$

(13) $\tan A+\sin A=m,\ \tan A-\sin A=n$ ナルトキハ $(m^2-n^2)^2$ ハ $16mn$ ニ等シキコトヲ證セヨ.

(14) $x=a\tan^2 A,\ y=2a\cot A$ ナルトキハ $xy^2=4a^3$ ナルコトヲ證セヨ.

(15) $\cos A+\sin A=a,\ \cos A-\sin A=b$ ナルトキハ $a^2+b^2=2$ ナルコトヲ證セヨ.

8. 三角函數ノ一ヲ知リテ他ノモノヲ求ムル法.

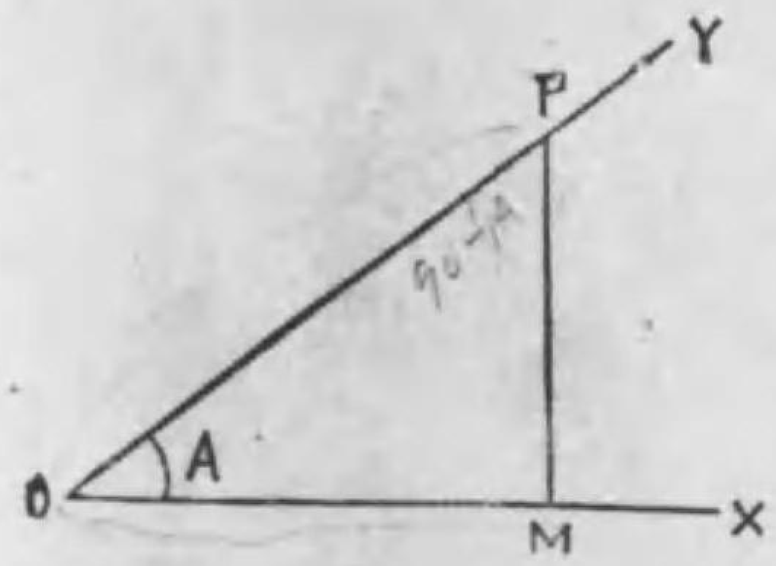
或角ノ三角函數ノ一ヲ知ルトキ此角ニ關スル垂線,底邊,斜邊ノ中此函數ヲ作ル爲メニ分母トセルモノヲ1トセバ分子ニ當ル邊ノ長サハ此函數ノ値ニ等シク殘リノ邊ハ直角三角形ノ性質ニ依リ之ヲ知ルコトヲ得,從ツテ總ベテノ他ノ三角函數ヲ求ムルコトヲ得ベシ

其結果ヲ表ニテ示セバ次ノ如シ

	$\sin A=K$	$\cos A=K$	$\tan A=K$	$\cot A=K$	$\sec A=K$	$\operatorname{cosec} A=K$
$\sin A=$	K	$\sqrt{1-K^2}$	$\frac{K}{\sqrt{1+K^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+K^2}}$	$\frac{\sqrt{K^2-1}}{K}$	$\frac{1}{K}$
$\cos A=$	$\sqrt{1-K^2}$	K	$\frac{1}{\sqrt{1+K^2}}$	$\frac{K}{\sqrt{1+K^2}}$	$\frac{1}{K}$	$\frac{\sqrt{K^2-1}}{K}$
$\tan A=$	$\frac{K}{\sqrt{1-K^2}}$	$\frac{\sqrt{1-K^2}}{K}$	K	$\frac{1}{K}$	$\sqrt{K^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{K^2-1}}$
$\cot A=$	$\frac{\sqrt{1-K^2}}{K}$	$\frac{K}{\sqrt{1-K^2}}$	$\frac{1}{K}$	K	$\frac{1}{\sqrt{K^2-1}}$	$\sqrt{K^2-1}$
$\sec A=$	$\frac{1}{\sqrt{1-K^2}}$	$\frac{1}{K}$	$\sqrt{1+K^2}$	$\frac{\sqrt{1+K^2}}{K}$	K	$\frac{K}{\sqrt{K^2-1}}$
$\operatorname{cosec} A=$	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{\sqrt{1-K^2}}$	$\frac{\sqrt{1+K^2}}{K}$	$\sqrt{1+K^2}$	$\frac{K}{\sqrt{K^2-1}}$	K

上ノ關係ハ亦之ヲ第六條ノ公式ヨリ誘導スルコトヲ得.

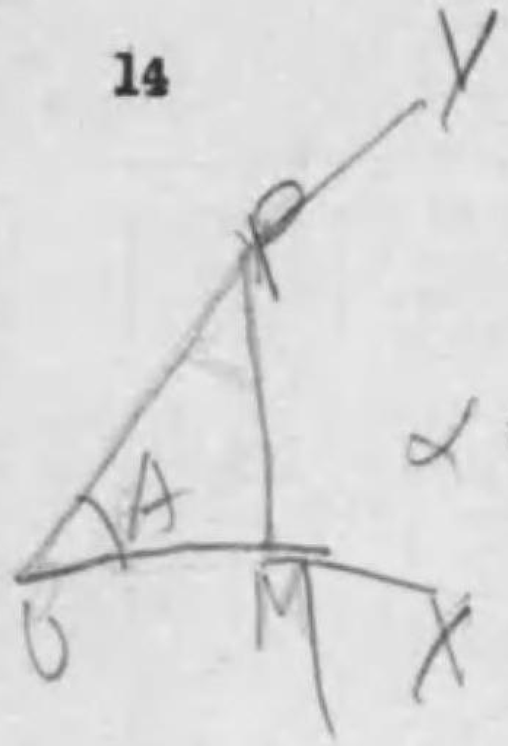
9. 餘角ノ三角函數.



任意ノ鋭角 A ノ一邊 OY 上ノ一點 P ヨリ他ノ邊 OX ニ垂線ヲ作リ其足ヲ M トセバ三角函數ノ定義ニ依リ次ノ關係ヲ得.

但 $90°-A$ ハ $(\overline{90-A}$ ノ度數)度ヲ表ス;以下之ニ準ズ.

$$\sin(90°-A)=\frac{OM}{OP}=\cos A.$$



$$\cos(90^\circ-A)=\frac{MP}{OP}=\sin A.$$

$$\tan(90^\circ-A)=\frac{OM}{MP}=\cot A.$$

$$\cot(90^\circ-A)=\frac{MP}{OM}=\tan A.$$

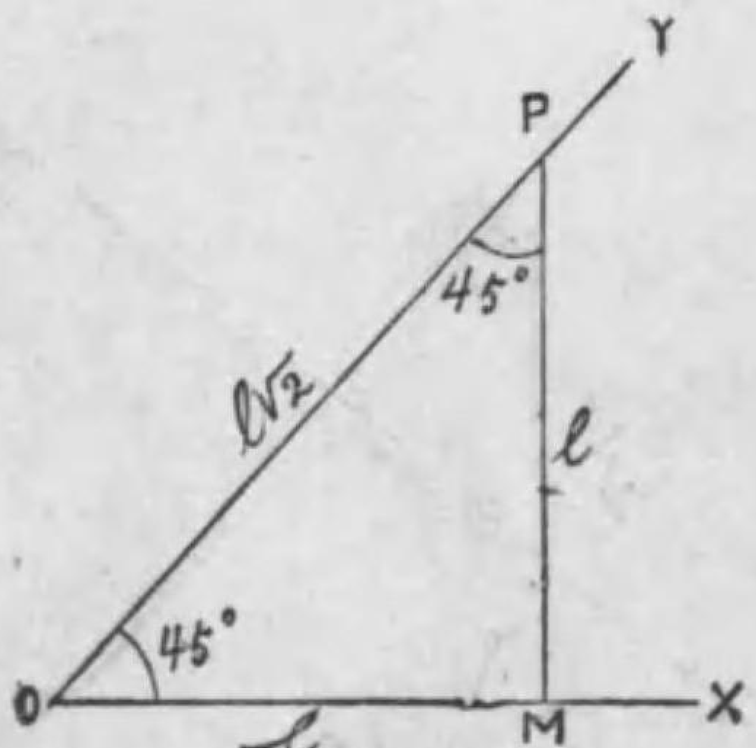
$$\sec(90^\circ-A)=\frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec} A.$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\frac{OP}{OM}=\sec A.$$

此六個ノ關係ノ中後ノ四個ハ前ノ二個ヨリ之ヲ誘導スルモ可ナリ;以下之ニ準ズ.

10. 特別ナル角ノ三角函數.

第一. 45° ノ三角函數.



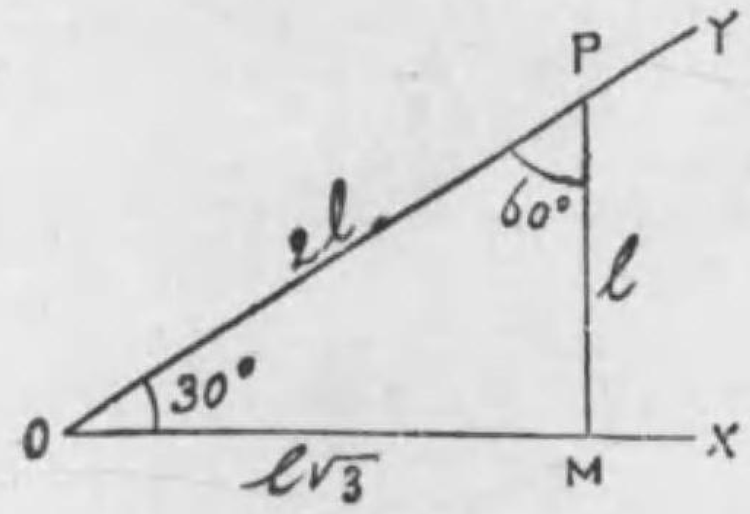
45° ナル角ニ於テハ 底邊$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times$(斜邊)=垂線ナルヲ以テ

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45^\circ.$$

$$\tan 45^\circ= 1 =\cot 45^\circ.$$

$$\sec 45^\circ=\sqrt{2}=\operatorname{cosec} 45^\circ.$$

第二. 30° 及ビ 60° ノ三角函數.



30° ナル角ニ於テハ $\frac{1}{2}\times$(斜邊)=垂線$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times$(底邊)ニシテ 60° ハ 30° ノ餘角ナルヲ以テ

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ.$$

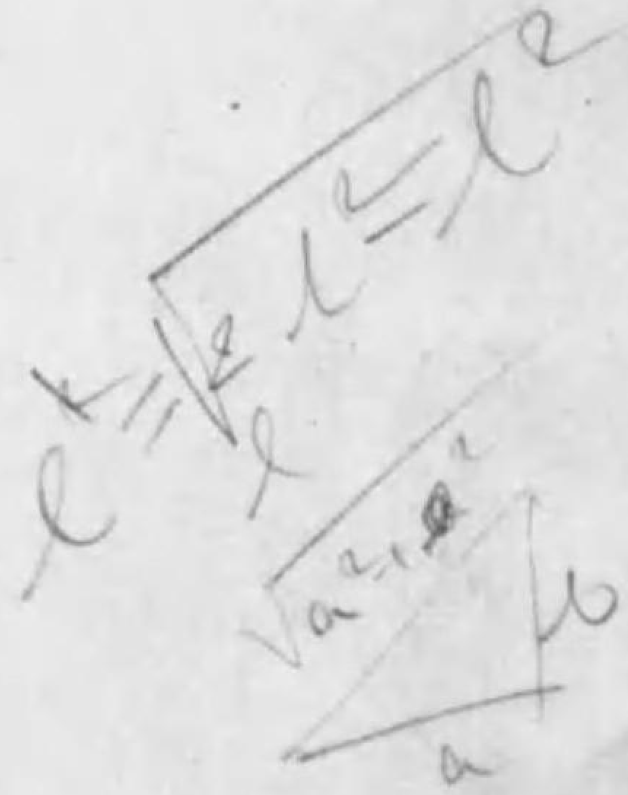
$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^\circ.$$

$$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\cot 60^\circ.$$

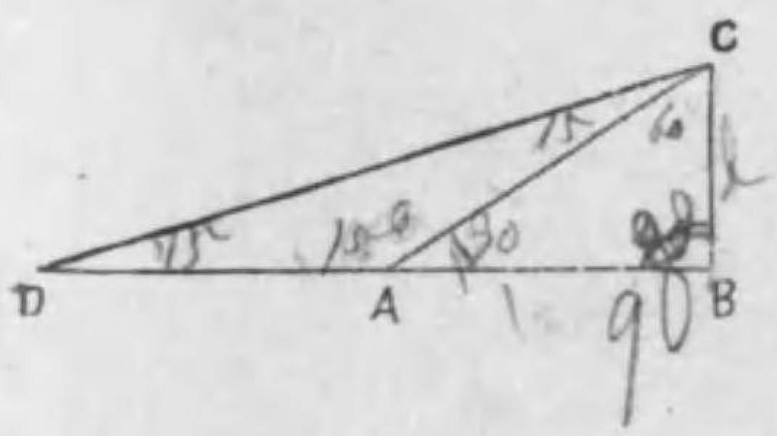
$$\cot 30^\circ=\sqrt{3}=\tan 60^\circ.$$

$$\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\operatorname{cosec} 60^\circ.$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ= 2 =\sec 60^\circ.$$



第三. 15° 及ビ 75° ノ三角函數.



$A\hat{B}C$ ニ於テ $\hat{B}=90^\circ$, $\hat{A}=30^\circ$, BC$=l$ トシ BA ヲ D マデ延長シテ AD=AC ナラシメ C, D ヲ連ヌルトキハ $\hat{BDC}$ ハ $15°$ ニシテ

$$DB=AC+AB=(2+\sqrt{3})l.$$

$$DC=\sqrt{\overline{DB}^2+\overline{EC}^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2l^2+l^2}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})l.$$

故ニ

$$\sin 15°=\frac{BC}{DC}=\frac{l}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})l}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos 75°.$$

$$\cos 15°=\frac{DB}{DC}=\frac{(2+\sqrt{3})l}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})l}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sin 75°.$$

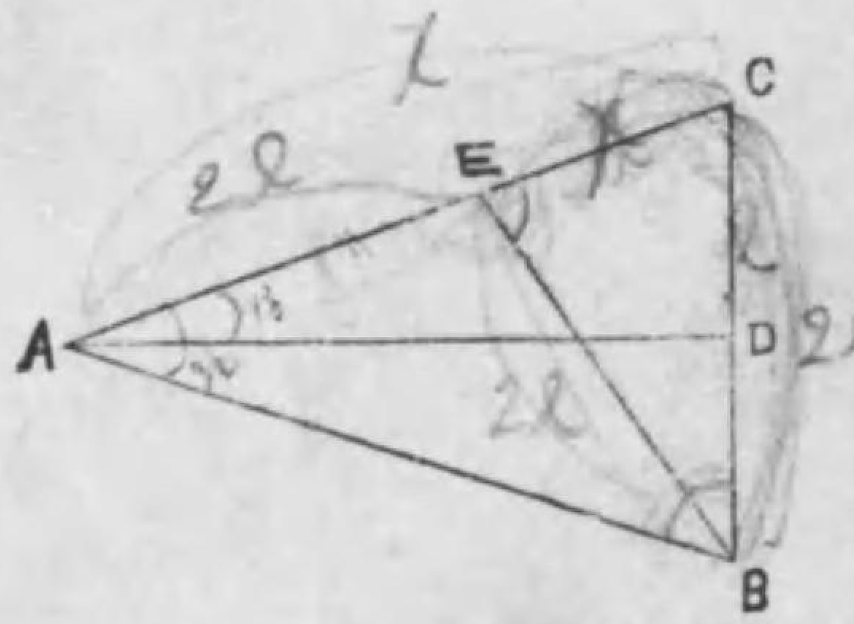
$$\tan 15°=\frac{BC}{DB}=\frac{l}{(2+\sqrt{3})l}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}=\cot 75°.$$

$$\cot 15°=\frac{DB}{BC}=\frac{(2+\sqrt{3})l}{l}=2+\sqrt{3}=\tan 75°$$

$$\sec 15°=\frac{DC}{DB}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})l}{(2+\sqrt{5})l}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}=\operatorname{cosec} 75°.$$

$$\operatorname{cosec} 15°=\frac{DC}{BC}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})l}{l}=\sqrt{6}+\sqrt{2}=\sec 75°.$$

第四. 18° 及ビ 72° ノ三角函數.



頂角BACガ $36°$ ナル二等邊三角形ABCニ於テ $\hat{ABC}$ ノ二等分線ヲBEトセバ AE=BE=BC, $B\hat{E}C \backsim A\hat{E}C$ ニシテ $D\hat{A}C$ ハ $18°$ ナリ.

今DCヲ l, ACヲ x トセバ

$$\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{EC}$$ ナルヲ以テ

$$\frac{x}{2l}=\frac{2l}{x-2l},$$

$$x^2-2lx-4l^2=0,$$

$$x=\frac{2l\pm\sqrt{20l^2}}{2}=l(1\pm\sqrt{5})$$

而シテ $l(1-\sqrt{5})$ ハ題意ニ適セザルヲ以テ之ヲ捨ツ

$$\therefore\quad \sin 18°=\frac{DC}{AC}=\frac{l}{l(\sqrt{5}+1)}=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos 72°.$$

$$\cos^2 18°=1-\sin^2 18°=1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16},$$

$$\therefore\quad \cos 18°=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=\sin 72°.$$

$$\tan^2 18°=\frac{\sin^2 18°}{\cos^2 18°}=\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\times\frac{16}{10+2\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$$

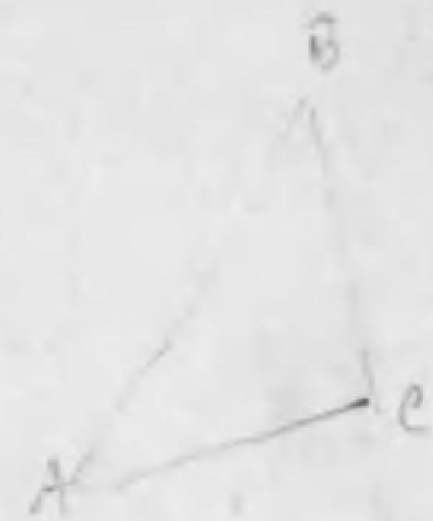
$$=\frac{(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{25-5}=\frac{5-2\sqrt{5}}{5}=\frac{25-10\sqrt{5}}{25},$$

$$\therefore\quad \tan 18°=\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}=\cot 72°.$$

$$\cot^2 18°=\frac{5+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{9-5}=5+2\sqrt{5},$$

$$\therefore\quad \cot 18°=\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\tan 72°.$$

$$\sec^2 18°=\frac{1}{\cos^2 18°}=\frac{8}{5+\sqrt{5}}=\frac{8(5-\sqrt{5})}{25-5}=\frac{50-10\sqrt{5}}{25},$$



$$\therefore\quad \sec 18^\circ = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5} = \operatorname{cosec} 72^\circ.$$

$$\operatorname{cosec} 18^\circ = \frac{1}{\sin 18^\circ} = \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}+1 = \sec 72^\circ.$$

11. 三角函數表.

任意ノ角ノ三角函數ヲ求ムル法ハ理論高尚運算繁雜ニシテ本書ニ於テ之ヲ論ズルコトヲ得ズ,然レドモ其値ハ先輩精密ニ之ヲ計算シテ表ヲ調製セリ;本書ノ附錄ニ載スルモノハ 0° ヨリ 90° マデノ 10′ 置キノ諸角ノ三角函數ノ小數四位マデ取リタル値ナリ.

表中ニ在ラザル角ノ三角函數ヲ求ムル法及ビ三角函數ニ對スル角ヲ求ムル法ハ次ノ定理ニ依ル.

角ノ小變化ト其各三角函數ノ之ニ應ズル變化トハ殆ンド相比例ス.

此定理ノ成立及ビ限界ヲ論ズルコトハ本書ノ程度ニ適セザルヲ以テ之ヲ略シ二三ノ例ニ依リテ其應用法ヲ示スベシ,

例一 $\sin 32^\circ 16'.4$ ヲ求ム.

解.

$\sin 32^\circ 20' = .53484$

$\sin 32^\circ 10' = {\cdot}53238$

$\overline{246}\,|\times{\cdot}64 = 157$

答. ·53395

例二. $\tan A = 1{\cdot}5678$ ナルトキ A ヲ求ム.

解.

$\tan 57^\circ 30' = 1{\cdot}5697$ 　　 $\tan A = 1{\cdot}5678$

$\tan 57^\circ 20' = 1{\cdot}5597$ 　　 $\tan 57^\circ 20' = 1{\cdot}5597$

$\overline{100}$ 　　 $\overline{81}\,|\div 100 = {\cdot}81$

答. $57^\circ 28'{\cdot}1$

例三. $\cot 29^\circ 43'{\cdot}6$ ヲ求ム.

解.

$\cot 29^\circ 40' = 1{\cdot}7556$

$\cot 29^\circ 50' = 1{\cdot}7437$

$\overline{119}\,|\times{\cdot}36 = 43$

答. 1·7513

例四. $\cos A = {\cdot}44521$ ナルトキ A ヲ求ム

解.

$cos63°30' = \cdot 44620$ $\quad$ $cos63°30' = \cdot 44620$

$cos63°40' = \cdot 44359$ $\quad$ $cosA = \cdot 44521$

261 $\quad$ $99 \div 261 = \cdot 38$

答. $63°33'\cdot 8$

設 題 四.

(1) $secA = \frac{13}{5}$ ナルトキ $\frac{2sinA - 3cosA}{4sinA - 9cosA}$ ノ値ヲ求ム.

答. 3.

(2) $pcotA = \sqrt{q^2 - p^2}$ ナルトキ $sinA$ ヲ求ム.

答 $\frac{p}{q}$.

(3) $secA = \frac{m^2+1}{2m}$ ナルトキ $sinA$ 及ビ $tanA$ ヲ求ム.

答 $\frac{m^2-1}{m^2+1}$, $\frac{m^2-1}{2m}$.

(4) $tanA = \frac{2pq}{p^2 - q^2}$ ナルトキ $cosA$ 及ビ $cosecA$ ヲ求ム.

答 $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$, $\frac{p^2+q^2}{2pq}$.

(5) $cotA = \frac{p}{q}$ ナルトキ $\frac{pcosA - qsinA}{pcosA + qsinA}$ ノ値ヲ求ム.

答. $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$.

(6) $sinA = \frac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$ ナルトキ $tanA$ ヲ求ム.

答. $\frac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}$.

次ノ諸恒等式ヲ證セヨ.

(7) $sec(90°-A) - cotA.\,cos(90°-A).\,tan(90°-A) = sinA$.

(8) $\frac{cot(90°-A)}{cosec^2A} \cdot \frac{cosec(90°-A).\,cot^2A}{sin^2(90°-A)} = secA$.

(9) $\frac{cot^2A.\,sin^2(90°-A)}{cotA + cosA} = tan(90°-A) - cosA$.

次ノ諸式ノ値ヲ求ム.

(10) $sin^260°.\,cot30° - 2sec^245° + 3cos60°.\,tan45° - tan^260°$.

答. $-\frac{35}{8}$.

(11) $3tan^230° + \frac{1}{4}sec60° + 5cot^245° - \frac{2}{3}sin^260°$. 答. 6.

(12) $\frac{1}{3}sin^260° - \frac{1}{2}sec60°.\,tan^230° + \frac{4}{3}sin^245°.\,tan^260°$.

答. $\frac{13}{12}$.

(13) $\frac{2}{\sqrt{cot^215° - cot^245°}} = 3^{\frac{1}{4}} - 3^{-\frac{1}{4}}$ ヲ證セヨ.

(14) $tan22°30'$ ハ $\sqrt{2} - 1$ ナルコトヲ證セヨ.

(15) $cos36°$ ハ $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ナルコトヲ證セヨ.

(16) $sec38°27'\cdot 7$ ヲ求ム. 答. $1\cdot 2771$.

(17) $cosecA = 1\cdot 1958$ ナルトキ A ヲ求ム.

答 $56°44'\cdot 8$.

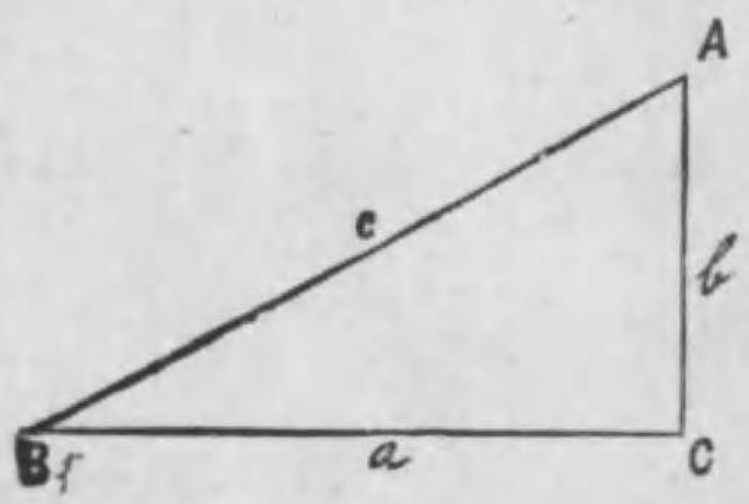
第三章.

直角三角形.

12. 定義.

三角形ノ邊及ビ角ヲ其元素ト云ヒ,三個ノ獨立セル元素(或ハ其他ノ量)ヲ知リテ殘リノ元素ヲ求ムルコトヲ三角形ヲ解クト云フ.

13. 直角三角形ノ性質.



三角形ノ三個ノ角ヲA, B, Cトシ各對邊ヲa, b, cトシ(以下之ニ準ズ)Cヲ直角トセバ次ノ關係有リ.

$$A+B=90^\circ.$$

$$\sin A=\frac{a}{c}=\cos B.$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\sin B.$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\cot B.$$

$$\cot A=\frac{b}{a}=\tan B.$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\operatorname{cosec} B.$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}=\sec B.$$

$$a=c\sin A=c\cos B=b\tan A=b\cot B.$$

$$b=c\cos A=c\sin B=a\cot A=a\tan B.$$

$$c=b\sec A=b\operatorname{cosec} B=a\operatorname{cosec} A=a\sec B.$$

14. 直角三角形ノ解キ方.

直角三角形ニ於テ直角ノ外ニ獨立ナル二元素ヲ知ルトキハ他ノ三元素ヲ求ムルコトヲ得ベシ;其解キ方ニ四種ノ場合有リ.

第一. 斜邊c及ビ一鋭角(例ヘバA)ヲ知ルトキハ$B=90^\circ-A$ニ依リテBヲ求メ,

$$\left.\begin{aligned}a&=c\sin A.\\ b&=c\cos A.\end{aligned}\right\}\text{或ハ}\left.\begin{aligned}a&=c\cos B.\\ b&=c\sin B\end{aligned}\right\}$$ ニ依リテa, bヲ求ムベシ.

第二. 直角ノ一邊及ビ一鋭角(例ヘバa, A)ヲ知ルトキハ

$B=90^\circ-A$ ニ依リテ B ヲ求メ.

$$\left.\begin{array}{l} b=a\cot A. \\ c=a\operatorname{cosec} A. \end{array}\right\} \text{或ハ} \left.\begin{array}{l} b=a\tan B. \\ c=a\sec B. \end{array}\right\}$$ ニ依リテ b, c ヲ求ムベシ.

第三. 斜邊 c 及ビ他ノ一邊(例ヘバ a)ヲ知ルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} \sin A=\frac{a}{c}. \\ b=c\cos A. \\ B=90^\circ-A. \end{array}\right\} \text{或ハ} \left.\begin{array}{l} \cos B=\frac{a}{c}. \\ b=c\sin B \\ A=90^\circ-B. \end{array}\right\}$$ ニ依リテ A, B, b ヲ求ムベシ.

第四 直角ノ二邊ヲ知ルトキハ

$\tan A=\frac{a}{b}$ ニ依リテ A ヲ求メ,

$$\left.\begin{array}{l} c=b\sec A. \\ B=90^\circ-A. \end{array}\right\}$$ ニ依リテ c, B ヲ求ムベシ,

15. 實用問題ニ於ケル重ナル術語.

第一. 一點ヲ過グル鉛垂線或ハ鉛垂面トハ此點及ビ地球ノ中心ヲ過グベキ直線或ハ平面ヲ云フ.

第二. 一點ヲ過グル水平線或ハ水平面トハ此點ヲ過ギ同點ヲ過グル鉛垂線ト直交スル直線或ハ平面ヲ云フ.

第三. 一點ヲ觀測スルトキ此點ト觀測器ノ中心(廻轉ノ軸ノ中點)トヲ連ヌル直線ガ觀測器ノ中心ヲ過グル水平面ト成ス角ヲ,其點ガ水平面ヨリモ上ニ在ルカ下ニ在ルカニ從ヒ其仰角(高度ト稱スルコトモ有リ)或ハ俯角ト云フ.

第四. 物ノ距離又ハ高サヲ測ル爲メ便宜ノ場處ニ設ケタル定直線ヲ基線ト云フ.

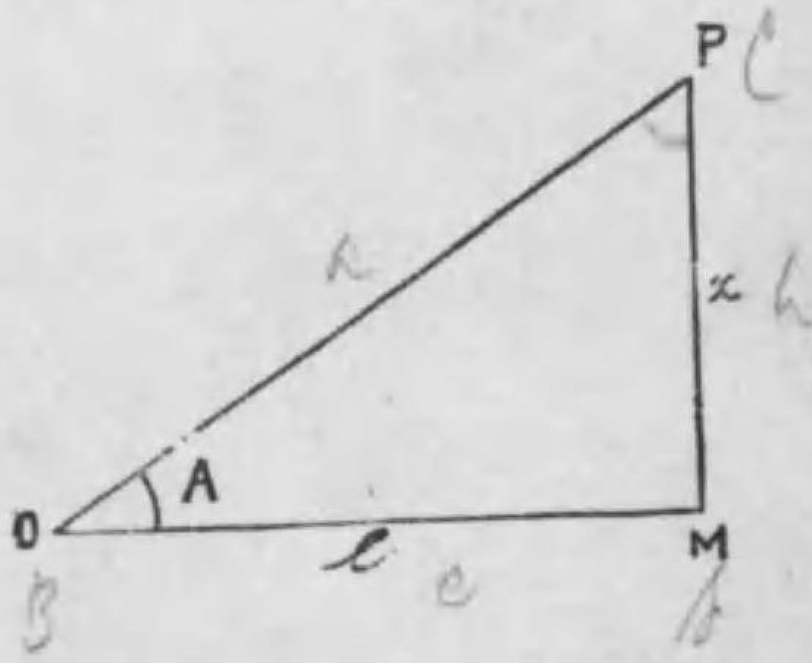
第五. 航海用ノ羅針盤ニ於テハ北東南西ノ間ヲ各八等分シテ三十二ノ方向ヲ記シ次ノ如ク之ニ命名ス.

陸地測量ニ用フル羅針盤ニ於テハ其周圍ニ度ヲ盛リテ北或ハ南ヨリ角ヲ計リ,北幾度東(或ハ西)又ハ南幾度東(或ハ西)等ト記シテ方向ヲ示ス.

16. 實用問題.

直接ニ測ルコトヲ得ザル距離及ビ高サハ三角形ノ解法ヲ應用シテ之ヲ計算スルヲ常トス. 次ニ其數例ヲ擧グ.

例一. 直立セル物體ノ基礎ニ達シ得ベキトキ其高サヲ求ムル法.



直立セル物體MPノ高サヲxトシ其基礎Mヨリ適宜ノ距離lナル處ニ在ル一點Oニ於ケル其頂點ノ仰角ヲAトセバ

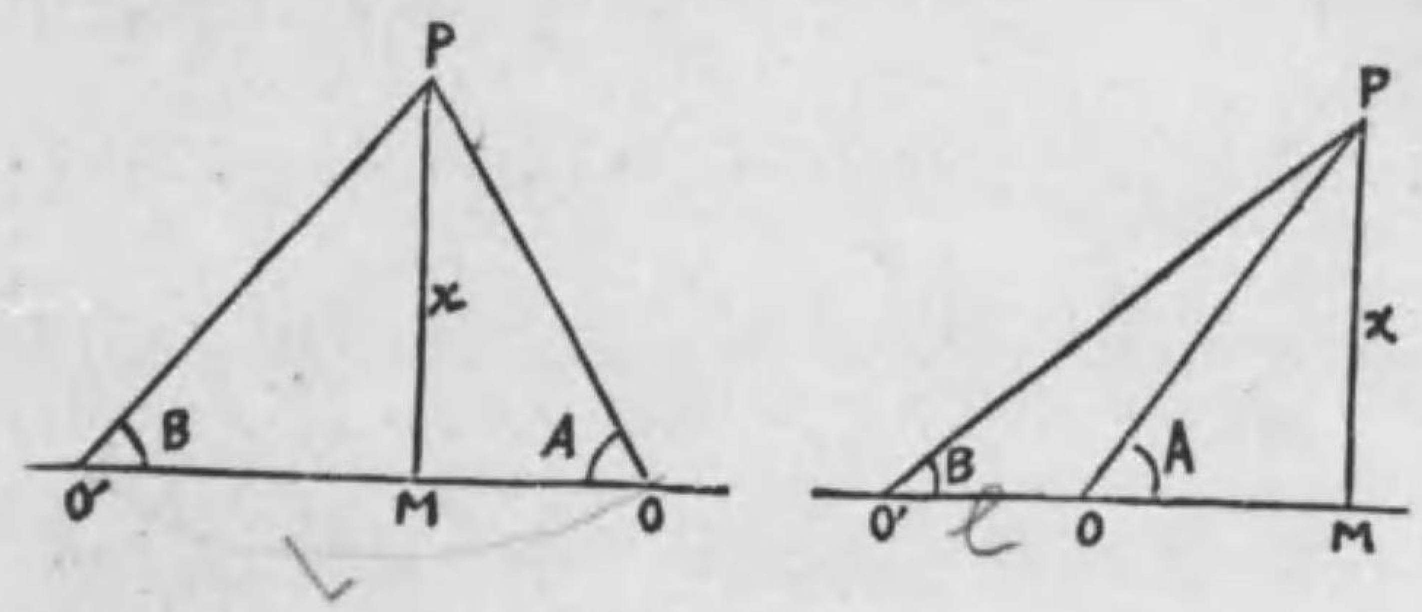
$$\mathrm{MP}=\mathrm{OM}\tan \mathrm{M\hat{O}P}.$$

即　$x=l\tan\mathrm{A}$

注意　精密ヲ要スルトキハ上式ニ於テlニ物體ノ厚サ(基礎ニ於ケル)ノ半ヲ加ヘテ計算シ其結果ニ

觀測器ノ中心ノ高サヲ加フベシ;以下之ニ準ズ.

例二. 達シ得ベカラザル一點ヨリ達シ得ベキ一直線ニ到ル距離ヲ求ムル法.



直線上ニ二點O, O′ヲ取リ其距離ヲlトシ達シ得ベカラザル點Pヨリ此線ニ作レル(假想)垂線PMノ數値ヲxトシ$\mathrm{M\hat{O}P}$, $\mathrm{M\hat{O}'P}$ヲA, Bトセバ

$$\mathrm{MO'}\pm\mathrm{MO}=\mathrm{OO'},$$

$$\mathrm{MP}\cot\mathrm{M\hat{O}'P}\pm\mathrm{MP}\cot\mathrm{M\hat{O}P}=\mathrm{OO'},$$

即　$x\cot\mathrm{B}\pm x\cot\mathrm{A}=l,$

$$\therefore\quad x=\frac{l}{\cot\mathrm{B}\pm\cot\mathrm{A}}.$$

系. 右圖ノ場合ヲ應用シテ直立セル物體ノ基礎ニ達シ得ザルトキ此物體(直線ト見做セル)ト同平面上ニ在ル地上ノ二點ニ於テ其頂點ノ仰角ヲ測リ此

物體ノ高サヲ求メ從ツテ之ヨリ觀測點ニ到ル距離ヲ求ムルコトヲ得.

設題五.

次ノ諸問題ニ於テハ $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$ トシテ結果ヲ計算セヨ.

(1) 煙筒ヨリ300尺ノ距離ノ地ニ於テ其頂ノ仰角ヲ測リ 30° ヲ得タリ,煙筒ノ高サ幾何.

答. 173.2尺.

(2) 160尺ノ高サナル船檣ノ頂上ニ於テ一小艇ノ俯角ヲ測リ 30° ヲ得タリ;船ト艇トノ距離幾何.

答. 277.12尺.

(3) 高サ6尺ノ竿ノ影ガ $2\sqrt{3}$ 尺ナルトキ太陽ノ高度ヲ求ム. 答. 60°.

(4) 塔脚ヨリ86.6尺ノ距離ノ地ニ於テ塔頂ノ仰角ヲ測リ 30° ヲ得タリ;塔頂ト觀測者トノ距離幾何.

答. 100尺.

(5) 長サ45尺ノ梯ノ一端ヲ壁ノ頂ニ緣ラシメ他ノ一端ヲ地上ニ置キタルニ壁ト梯トハ 60° ノ角

ヲ成セリ;壁ノ高サ及ビ之ヨリ梯脚ニ到ル距離幾何.

答. 22.5尺; 38.97尺

(6) 60尺及ビ40尺ノ高サヲ有スル二檣ノ頂ヲ連ヌル直線ガ水平面ト $33^\circ 41'$ ノ角ヲ成ストキ二檣ノ距離幾何. 但 $\cot 33^\circ 41'=1.5$ トス. 答. 30尺.

(7) 或場處ヨリ高サ66間ノ絶壁ノ頂ヲ望ミ仰角 $41^\circ 18'$ ヲ得タリ;絶壁ノ頂ト觀測者トノ距離幾何. 但 $\sin 41^\circ 18=.66$ トス. 答. 100間

(8) 二個ノ煙筒有リテ其一個ハ他ノ一個ヨリモ15間高ク頂ヲ連ヌル直線ハ水平面ト $27^\circ 2'$ ノ角ヲ成シ小筒ヨリ50間ノ處ニ於テ地面ニ會ス;二筒ノ高サ幾何. 但 $\tan 27^\circ 2'=.51$ トス. 答. 25.5間; 40.5間.

(9) 塔ノ東ニ在リテ相互ノ間隔200尺ナル二地ニ於テ其頂ヲ望ミ 45° 及ビ 30° ヲ得タリ;塔ノ高サ幾何.

答. 273.2尺

(10) 地上ヨリ塔上ニ立テル長サ2米ノ避雷針ヲ望ミ其上端及ビ下端ノ仰角 $44^\circ 20'$ 及ビ $42^\circ 10'$ ヲ得タリ塔ノ高サ幾何. 答. 25.4米

(11) 水平面上ノ一點Aヨリ高サ3300呎ノ小山

頂ヲ望ミ仰角60°ヲ得タリ. 今Aヨリ放チタル輕氣球ガ眞直ニ上昇シ5分時ヲ經タルトキ之ヨリ山頂ノ仰角ヲ測リ30°ヲ得タリ. 輕氣球ガ等速運動ヲナセルモノトセバ其速度每時幾哩ナルカ.

答. 5哩.

(12) 水平面上高サ30間ノ燈臺ヨリ其西ニ在ル二艇ヲ望ミ俯角75°及ビ15°ヲ得タリ;二艇ノ距離幾何.

答. 103·92間.

(13) 直線狀ヲナセル海岸ニ於テ165·2米ヲ距ツル二點A, Bヨリ海上ノ一船Cヲ望ミ$C\hat{A}B=62°30'$, $C\hat{B}A=76°15'$ナルコトヲ知リタリ;船ト海岸トノ距離幾何.

答. 215·9米.

(14) 塔有リ其南ノ一地ニ於テ其頂ノ仰角ヲ測リ45°ヲ得次ニ此地ヨリ西ノ方向aナル距離ノ地ニ於テ再ビ其仰角ヲ測リ15°ヲ得タリ;塔ノ高サハ$\frac{a}{2}\left(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}\right)$ナルコトヲ證セヨ.

(15) 燈臺Lヨリ南西及ビ南15°東ノ方向ニ二船A, B有リ, ABノ方向ハ南東ニシテALノ長サハ4哩ナリ;二船ノ距離幾何.

答. 6·928哩.

(16) 二燈臺A, Bノ距離ハ12哩ニシテABノ方向ハ北75°東ナリ. 每時10哩ノ速度ヲ以テ南15°東ノ方向ニ走ル所ノ一船ガ夜半ニ於テA, Bヲ南西, 南東ノ方向ニ望ミタリトセバ其AB線ヲ通過スベキ時刻如何.

答 0時31分.

第四章.

任意ノ角ノ三角函數.

17. 角ノ定義.

角ニ就キテ講究セル所ノ事項ヲ一般ニ通ズルモノナラシメンガ爲メニハ角ノ代數量ナルコトヲ要スルヲ以テ其定義ヲ設クルコト次ノ如シ.

同點ヨリ引キタル甲乙二直線有ルトキ其一個例ヘバ乙ヲ甲ノ位置ヨリ現位置マデ迴轉セルモノト思考シ此迴轉ノ量ヲ乙ノ甲ト成ス角ト云ヒ乙ヲ其迴線,甲ヲ其首線ト云フ而シテ迴線ノ運動ガ時針ノ運動ト反對ナルカ同樣ナルカニ從ヒ其作レル角ヲ正或ハ負トス.

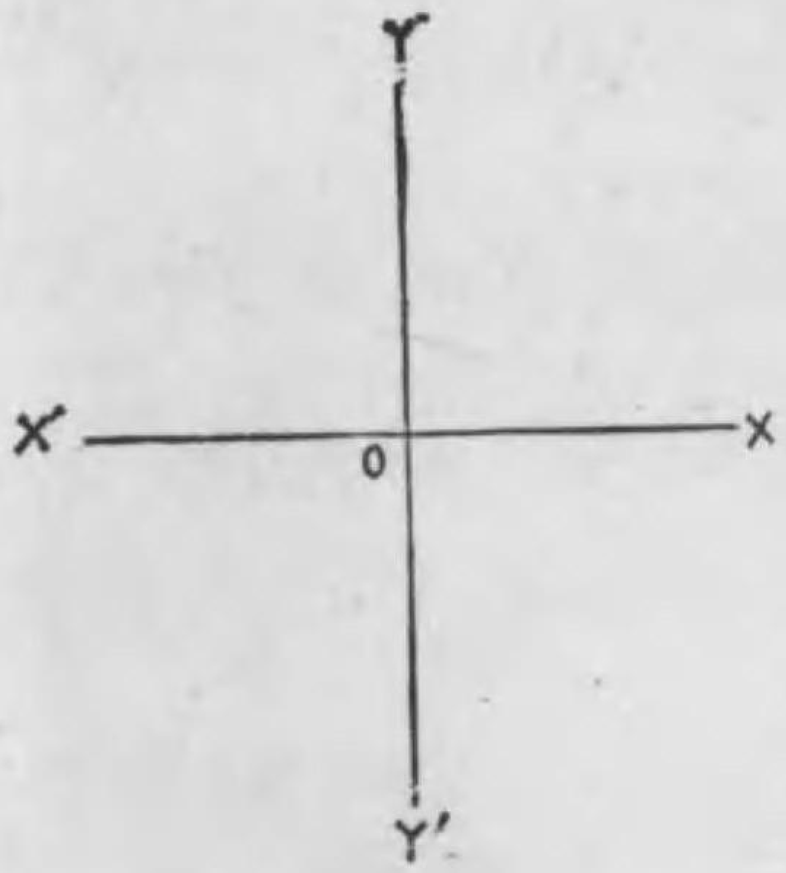
角ノ首線及ビ廻線ヲ其邊ト云ヒ,二線ノ公點ヲ角頂ト云フ.

角ヲ示スニハ首線及ビ廻線ノ上ニ一點ヅヽヲ取リ其名稱ノ間ニ角頂ノ名稱ヲ夾ムベシ.

注意一. 角ノ値ニハ制限無シ.

注意二. 同ジ首線ニ對シAナル角ヲ成ス廻線ト$n\times360°+A$ナル角ヲ成ス廻線トハ相合ス. 但nハ零或ハ任意ノ整數ニシテ$n\times360°$ハ$(n\times360)$度ヲ表ス.

18. 象限ノ定義.



首線OX及ビ之ト正直角ヲ成ス直線OYノ延長ヲ各OX', OY'トセバ二個ノ無限直線XX', YY'ハ平面ヲ四分ス,此各分ヲ象限ト云ヒXOY, YOX', X'OY', Y'OXヲ各第一,第二,第三,第四象限ト云フ.

角ハ其迴線ノ存在スル象限ニ從ヒ某象限ノ角ト稱セラル.

19. 三角函數ノ定義.

第四條ニ述ベタル所ノモノニ次ノ規約ヲ加ヘテ之ヲ任意ノ角ノ三角函數ノ定義トス.

第一. 斜邊ハ常ニ之ヲ迴線上ニ取リ其符號ヲ正トス.

第二. 底邊ハ首線上ニ在ルトキ之ヲ正トシ首線ノ延長上ニ在ルトキ之ヲ負トス.

第三. 垂線ハ首線ト正直角ヲ成ス迴線ト同傍(首線及ビ其延長ニ對シ)ニ在ルトキ之ヲ正トシ然ラザルトキ之ヲ負トス.

20. $n\times 360^\circ+A$ ノ三角函數.

n ガ零或ハ任意ノ整數ナルトキ $n\times 360^\circ+A$ ナル角ノ二邊ハ A 角ノ二邊ト相合スルヲ以テ次ノ關係有リ.

$$\sin(n\times 360^\circ+A)=\sin A. \qquad \cos(n\times 360^\circ+A)=\cos A.$$

$$\tan(n\times 360^\circ+A)=\tan A. \qquad \cot(n\times 360^\circ+A)=\cot A$$

$$\sec(n\times 360^\circ+A)=\sec A. \qquad \operatorname{cosec}(n\times 360^\circ+A)=\operatorname{cosec} A.$$

21. 三角函數相互ノ關係.

第六條ニ於テ得タル(1)(2)(3)(4)(5)ノ關係ハ定義ヨリ誘導セラレタルモノナルヲ以テ任意ノ角ニ就キ合理ナリ.

直角三角形ノ斜邊ノ平方ガ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シキコトハ常ニ合理ナルヲ以テ之ヨリ誘導セラレタル(VI) (VII) (VIII) ノ關係モ亦一般ニ合理ナリ

故ニ A ガ任意ノ角ナルトキ

$$\sin A.\operatorname{cosec} A=1. \quad \cos A.\sec A=1. \quad \tan A.\cot A=1.$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}. \quad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1. \quad 1+\tan^2 A=\sec^2 A. \quad 1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A.$$

從ツテ此等ノ式ヨリ誘導セラレタル諸關係モ亦一般ニ合理ナリ.

22. 無窮大.

a ガ零ナラザル常數ノトキ $\frac{a}{x}$ ナル分數ニ於テ x ノ數值漸次ニ減少スルトキハ此分數ノ數值ハ次第ニ增大スルヲ以テ x ヲ充分小ナラシメテ分數ノ數

値ヲ如何ナル數ヨリモ大ナラシムルコトヲ得ベシ，之ヲxガ零トナルトキ $\frac{a}{x}$ ノ値ハ無窮大ナリト云ヒ，∞ヲ以テ其記號トス．

0ニハ正負ノ差別無キヲ以テ $\frac{a}{0}$ 即∞ニモ亦正負ノ差別無シ．∞ニ符號ヲ附スルハ∞ガ眞ノ無窮大ニアラズシテ極メテ之ニ近キ數値ノ數ヲ表ストキカ或ハ之ニ依リテ理論ノ便益ヲ計ル場合ニ外ナラズ，其意義ハ場合ニ應ジテ適當ニ之ヲ解釋スベシ．

吾人ハ∞ヲ代數學ノ三大法則(交換,聚散,配合ノ法則)ニ順フ所ノ一種ノ數ト思考ス;其取扱ヒニ關スル重ナル規則ハ次ノ如シ．

第一．無窮大ト無窮大ナラザル數トノ和及ビ差ハ何レモ無窮大ナリ．

第二．同號無窮大ノ和ハ無窮大ニシテ其差ハ一般ニ不定數ナリ．

第三 無窮大ト零ナラザル數トノ乘積ハ無窮大ナリ．

第四．無窮大ト零トノ乘積ハ一般ニ不定數ナリ．

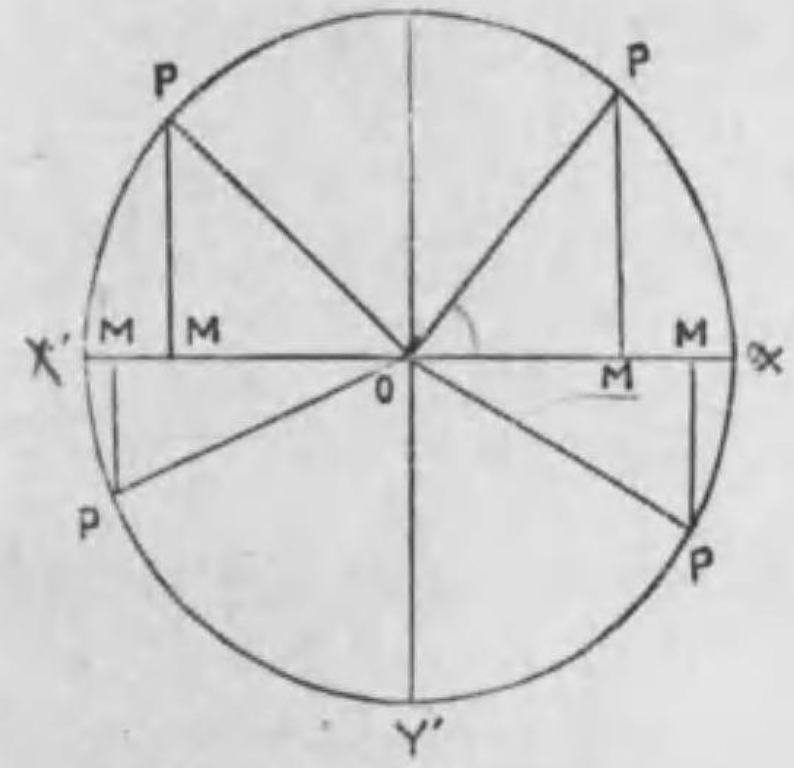
第五．無窮大ヲ無窮大ナラザル數ニテ除シタル

商ハ無窮大ナリ．

第六．無窮大ヲ以テ無窮大ナラザル數ヲ除シタル商ハ零ナリ．

第七．無窮大ヲ無窮大ニテ除シタル商ハ一般ニ不定數ナリ．

23. 三角函數ノ變化．



O ニ於テ互ニ直交スル二直線 XX′, YY′ 有リ; r ナル數値ノ廻線 OP ガ OX ヲ首線トシテ 0° ヨリ 360° マデノ角ヲ作ルトキ其各位置ニ於テ P ヨリ X′X ニ垂線ヲ作リ其足ヲ M トシ XÔP (A ト名ク) ノ變化ニ伴フ其三角函數ノ變化ヲ講究セントス．

第一．*sin*A 及ビ *cosec*A ノ變化．

第一象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ其數値ハ 0 ヨリ r マデ增大スルヲ以テ $\sin A=\frac{MP}{OP}$ ハ正ニシテ其

數値ハ0ヨリ1マデ增大シ, $cosec A=\frac{OP}{MP}$ ハ正ニシテ其數値ハ∞ヨリ1マデ減少ス. ($sin 0°=0$, $cosec 0°=\infty$; $sin 90°=1$, $cosec 90°=1$).

第二象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ其數値ハrヨリ0マデ減少スルヲ以テ $sin A=\frac{MP}{OP}$ ハ正ニシテ其數値ハ1ヨリ0マデ減少シ, $cosec A=\frac{OP}{MP}$ ハ正ニシテ其數値ハ1ヨリ∞マデ增大ス. ($sin 180°=0$, $cosec 180°=\infty$).

第三象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ其數値ハ0ヨリrマデ增大スルヲ以テ $sin A=\frac{MP}{OP}$ ハ負ニシテ其數値ハ0ヨリ1マデ增大シ, $cosec A=\frac{OP}{MP}$ ハ負ニシテ其數値ハ∞ヨリ1マデ減少ス. ($sin 270°=-1$, $cosec 270°=-1$)

第四象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ其數値ハrヨリ0マデ減少スルヲ以テ $sin A=\frac{MP}{OP}$ ハ負ニシテ其數値ハ1ヨリ0マデ減少シ, $cosec A=\frac{OP}{MP}$ ハ負ニシテ其數値ハ1ヨリ∞マデ增大ス. ($sin 360°=0$, $cosec 360°=\infty$).

第二. $cos A$ 及ビ $sec A$ ノ變化.

第一象限ニ於テハ OM ハ正ニシテ其數値ハrヨリ0マデ減少スルヲ以テ $cos A=\frac{OM}{OP}$ ハ正ニシテ其數

値ハ1ヨリ0マデ減少シ, $sec A=\frac{OP}{OM}$ ハ正ニシテ其數値ハ1ヨリ∞マデ增大ス. ($cos 0°=1$, $sec 0°=1$; $cos 90°=0$, $sec 90°=\infty$).

第二象限ニ於テハ OM ハ負ニシテ其數値ハ0ヨリrマデ增大スルヲ以テ $cos A=\frac{OM}{OP}$ ハ負ニシテ其數値ハ0ヨリ1マデ增大シ, $sec A=\frac{OP}{OM}$ ハ負ニシテ其數値ハ∞ヨリ1マデ減少ス. ($cos 180°=-1$, $sec 180°=-1$).

第三象限ニ於テハ OM ハ負ニシテ其數値ハrヨリ0マデ減少スルヲ以テ $cos A=\frac{OM}{OP}$ ハ負ニシテ其數値ハ1ヨリ0マデ減少シ, $sec A=\frac{OP}{OM}$ ハ負ニシテ其數値ハ1ヨリ∞マデ增大ス. ($cos 270°=0$, $sec 270°=\infty$).

第四象限ニ於テハ OM ハ正ニシテ其數値ハ0ヨリrマデ增大スルヲ以テ $cos A=\frac{OM}{OP}$ ハ正ニシテ其數値ハ0ヨリ1マデ增大シ, $sec A=\frac{OP}{OM}$ ハ正ニシテ其數値ハ∞ヨリ1マデ減少ス. ($cos 360°=1$, $sec 360°=1$).

第三. $tan A$ 及ビ $cot A$ ノ變化.

第一象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ其數値ハ0ヨリrマデ增大シ OM ハ正ニシテ其數値ハrヨリ0

マデ減少スルヲ以テ $\tan A=\dfrac{MP}{OM}$ ハ正ニシテ其數値ハ0ヨリ∞マデ増大シ, $\cot A=\dfrac{OM}{MP}$ ハ正ニシテ其數値ハ∞ヨリ0マデ減少ス, ($\tan 0^\circ=0, \cot 0^\circ=\infty; \tan 90^\circ=\infty, \cot 90^\circ=0$).

第二象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ其數値ハ r ヨリ0マデ減少シ OM ハ負ニシテ其數値ハ0ヨリ r マデ増大スルヲ以テ $\tan A=\dfrac{MP}{OM}$ ハ負ニシテ其數値ハ∞ヨリ0マデ減少シ, $\cot A=\dfrac{OM}{MP}$ ハ負ニシテ其數値ハ0ヨリ∞マデ増大ス. ($\tan 180^\circ=0, \cot 180^\circ=\infty$).

第三象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ其數値ハ0ヨリ r マデ増大シ OM ハ負ニシテ其數値ハ r ヨリ0マデ減少スルヲ以テ $\tan A=\dfrac{MP}{OM}$ ハ正ニシテ其數値ハ0ヨリ∞マデ増大シ, $\cot A=\dfrac{OM}{MP}$ ハ正ニシテ其數値ハ∞ヨリ0マデ減少ス. ($\tan 270^\circ=\infty, \cot 270^\circ=0$).

第四象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ其數値ハ r ヨリ0マデ減少シ OM ハ正ニシテ其數値ハ0ヨリ r マデ増大スルヲ以テ $\tan A=\dfrac{MP}{OM}$ ハ負ニシテ其數値ハ∞ヨリ0マデ減少シ, $\cot A=\dfrac{OM}{MP}$ ハ負ニシテ其數値ハ0ヨリ∞マデ増大ス. ($\tan 360^\circ=0, \cot 360^\circ=\infty$).

以上ノ結果ヲ表ニテ示サバ次ノ如シ.

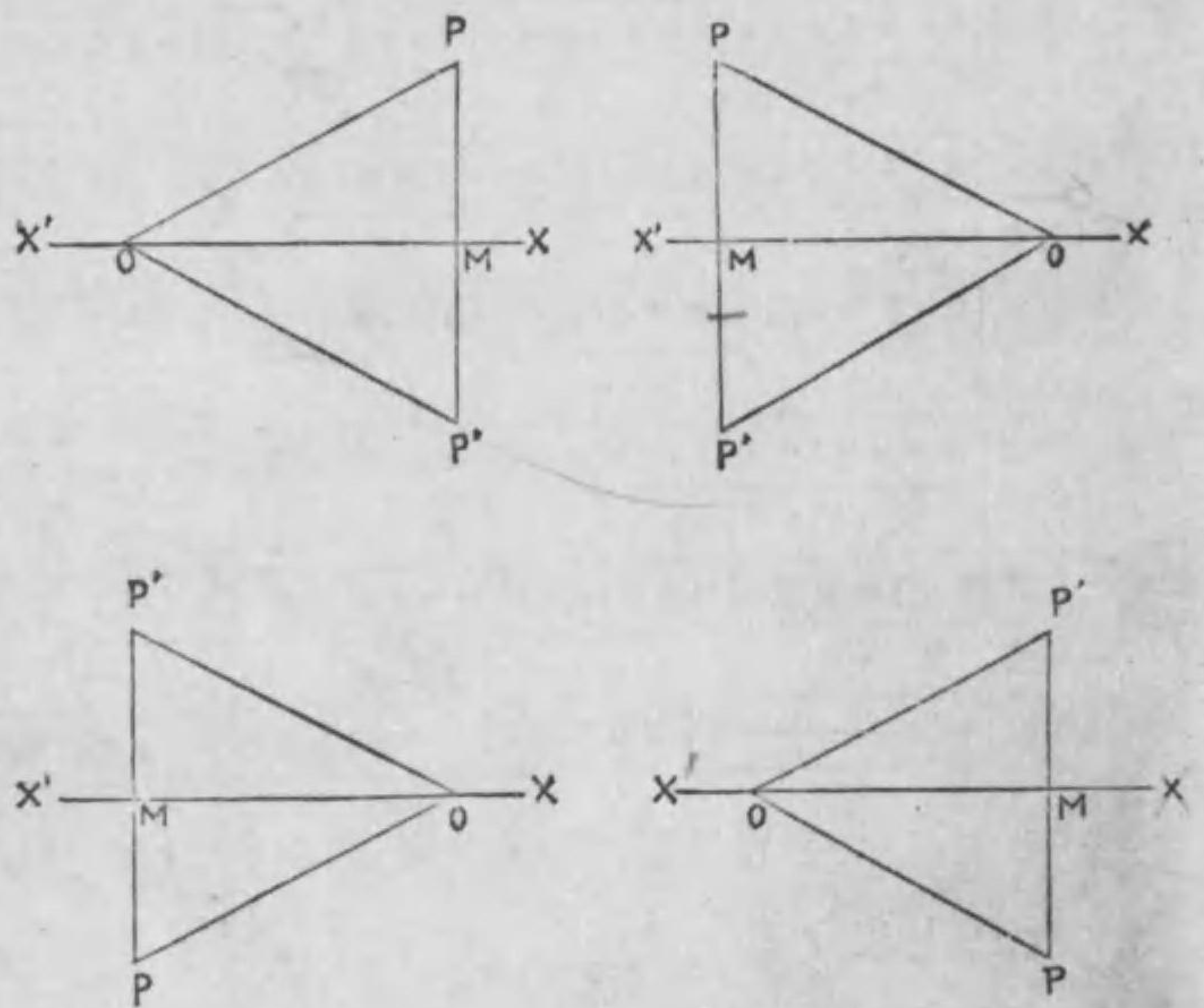
函數 \ 象限		第一	第二	第三	第四
正弦	符號	+	+	−	−
	數値	0ヨリ1ニ至ル	1ヨリ0ニ至ル	0ヨリ1ニ至ル	1ヨリ0ニ至ル
餘弦	符號	+	−	−	+
	數値	1ヨリ0ニ至ル	0ヨリ1ニ至ル	1ヨリ0ニ至ル	0ヨリ1ニ至ル
正切	符號	+	−	+	−
	數値	0ヨリ∞ニ至ル	∞ヨリ0ニ至ル	0ヨリ∞ニ至ル	∞ヨリ0ニ至ル
餘切	符號	+	−	+	−
	數値	∞ヨリ0ニ至ル	0ヨリ∞ニ至ル	∞ヨリ0ニ至ル	0ヨリ∞ニ至ル
正割	符號	+	−	−	+
	數値	1ヨリ∞ニ至ル	∞ヨリ1ニ至ル	1ヨリ∞ニ至ル	∞ヨリ1ニ至ル
餘割	符號	+	+	−	−
	數値	∞ヨリ1ニ至ル	1ヨリ∞ニ至ル	∞ヨリ1ニ至ル	1ヨリ∞ニ至ル

注意一. 角ガ 360° ヨリ漸次ニ増大スルトキハ其三角函數ハ上表ノ如キ變化ヲ操リ返スベク,廻線ガ首線ヨリ發シテ負角ヲ作ルトキ其三角函數ハ上表ノ變化ヲ逆ノ順序ニ操リ返スベシ.

注意二. 正弦及ビ餘弦ノ數値ハ1ヨリモ大ナルコト無ク,正割及ビ餘割ノ數値ハ1ヨリモ小ナルコト無ク,正切及ビ餘切ハ正負如何ナル値ヲモ取リ得ベシ.

24. $-A$, $90^\circ \pm A$, $180^\circ \pm A$ ノ三角函數.

第一. $-A$ ト A トノ三角函數ノ關係.



XÔP, XÔP′ヲ A,−A トシ二角ノ廻線上ニ等長OP, OP′ヲ取ルトキハ P, P′ヲ連ヌル直線ハ OX 又ハ其延長ト直交スベシ其交點ヲ M トセバ

底邊 OM ハ二角ニ共通ニシテ斜邊OP, OP′ハ全ク相等シク,垂線 MP, MP′ハ等長ニシテ符號ヲ異ニス

$$\therefore \quad \sin(-A)=\frac{MP'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-\sin A.$$

$$\cos(-A)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A.$$

$$\tan(-A)=\frac{MP'}{OM}=\frac{-MP}{OM}=-\tan A.$$

$$\cot(-A)=\frac{OM}{MP'}=\frac{OM}{-MP}=-\cot A.$$

$$\sec(-A)=\frac{OP'}{OM}=\frac{OP}{OM}=\sec A.$$

$$\operatorname{cosec}(-A)=\frac{OP'}{MP'}=\frac{OP}{-MP}=-\operatorname{cosec} A.$$

第二. $90^\circ - A$ ト A トノ三角函數ノ關係.

XÔP, XÔP′ヲ A, 90°−A トシ二角ノ廻線上ニ等長OP, OP′ヲ取リ P, P′ヨリ OX 又ハ其延長ニ垂線ヲ作リ其足ヲ M, M′トセバ OP=OP′, M′P′=OM, OM′=MP ナルヲ以テ

$$\sin(90^\circ - A)=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A.$$

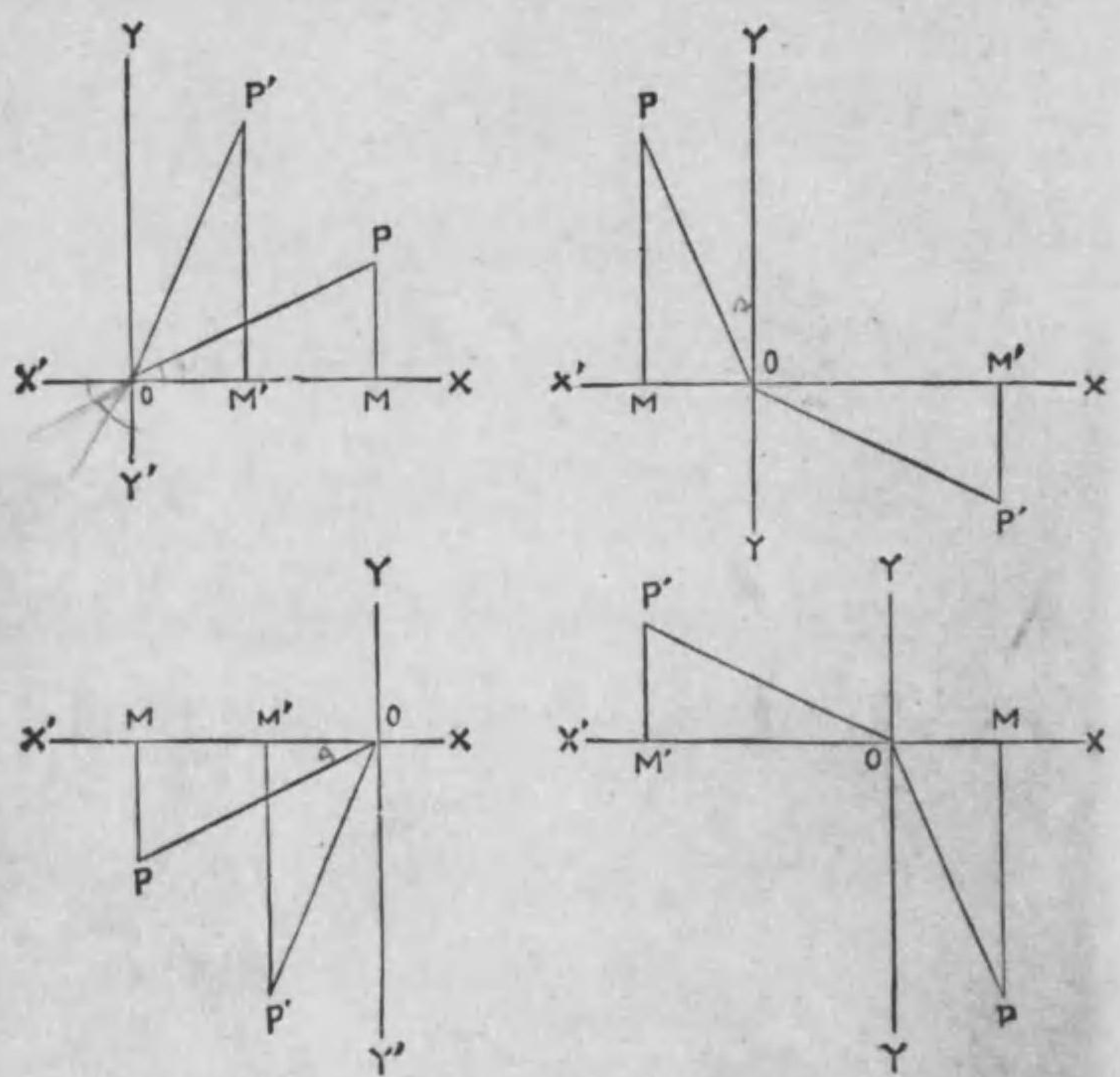
$$\cos(90^\circ - A)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{MP}{OP}=\sin A.$$

$$\tan(90^\circ - A)=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{OM}{MP}=\cot A.$$

$$\cot(90^\circ - A)=\frac{OM'}{M'P'}=\frac{MP}{OM}=\tan A.$$

$$\sec(90^\circ - A)=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec} A.$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - A)=\frac{OP'}{M'P'}=\frac{OP}{OM}=\sec A.$$



第三. 90°+A ト A トノ三角函數ノ關係.

$$\sin(90°+A) = \sin\{90°-(-A)\} = \cos(-A) = \cos A.$$

$$\cos(90°+A) = \cos\{90°-(-A)\} = \sin(-A) = -\sin A.$$

$$\tan(90°+A) = \tan\{90°-(-A)\} = \cot(-A) = -\cot A.$$

$$\cot(90°+A) = \cot\{90°-(-A)\} = \tan(-A) = -\tan A.$$

$$\sec(90°+A) = \sec\{90°-(-A)\} = \mathrm{cosec}(-A) = -\mathrm{cosec} A.$$

$$\mathrm{cosec}(90°+A) = \mathrm{cosec}\{90°-(-A)\} = \sec(-A) = \sec A.$$

第四. 180°−A ト A トノ三角函數ノ關係.

$$\sin(180°-A) = \sin\{90°+(90°-A)\} = \cos(90°-A)$$
$$= \sin A.$$

$$\cos(180°-A) = \cos\{90°+(90°-A)\} = -\sin(90°-A)$$
$$= -\cos A.$$

$$\tan(180°-A) = \tan\{90°+(90°-A)\} = -\cot(90°-A)$$
$$= -\tan A.$$

$$\cot(180°-A) = \cot\{90°+(90°-A)\} = -\tan(90°-A)$$
$$= -\cot A.$$

$$\sec(180°-A) = \sec\{90°+(90°-A)\} = -\mathrm{cosec}(90°-A)$$
$$= -\sec A.$$

$$\mathrm{cosec}(180°-A) = \mathrm{cosec}\{90°+(90°-A)\} = \sec(90°-A)$$
$$= \mathrm{cosec} A.$$

第五. 180°+A ト A トノ三角函數ノ關係.

$\sin(180^\circ + A) = \sin\{180^\circ - (-A)\} = \sin(-A)$
$= -\sin A.$

$\cos(180^\circ + A) = \cos\{180^\circ - (-A)\} = -\cos(-A)$
$= -\cos A.$

$\tan(180^\circ + A) = \tan\{180^\circ - (-A)\} = -\tan(-A)$
$= \tan A.$

$\cot(180^\circ + A) = \cot\{180^\circ - (-A)\} = -\cot(-A)$
$= \cot A.$

$\sec(180^\circ + A) = \sec\{180^\circ - (-A)\} = -\sec(-A)$
$= -\sec A.$

$\mathrm{cosec}(180^\circ + A) = \mathrm{cosec}\{180^\circ - (-A)\} = \mathrm{cosec}(-A)$
$= -\mathrm{cosec} A.$

以上ノ結果ヲ表ニテ示サバ次ノ如シ

角 / 函數	$-A$	$90^\circ - A$	$90^\circ + A$	$180^\circ - A$	$180^\circ + A$
sin	$-\sin A$	$\cos A$	$\cos A$	$\sin A$	$-\sin A$
cos	$\cos A$	$\sin A$	$-\sin A$	$-\cos A$	$-\cos A$
tan	$-\tan A$	$\cot A$	$-\cot A$	$-\tan A$	$\tan A$
cot	$-\cot A$	$\tan A$	$-\tan A$	$-\cot A$	$\cot A$
sec	$\sec A$	$\mathrm{cosec} A$	$-\mathrm{cosec} A$	$-\sec A$	$-\sec A$
cosec	$-\mathrm{cosec} A$	$\sec A$	$\sec A$	$\mathrm{cosec} A$	$-\mathrm{cosec} A$

定義. $90^\circ - A$ 及ビ $180^\circ - A$ ヲ A ノ餘角及ビ補角ト云フ.

25. 大角ノ函數ヲ小角ノモノニ化スル法

前條及ビ第二十條ノ關係ニ依リ90°ヲ超ヘザル正角ノ同名三角函數ヲ以テ90°ヨリモ大ナル數値ヲ有スル任意ノ角ノ三角函數ヲ表スコトヲ得其順序次ノ如シ.

第一. 與角若シ負ナラバ前條第一ニ依リ其三角函數ヲ正角ノ三角函數ニ化スベシ.

第二. 與角若シ360°ヨリモ大ナラバ第二十條ニ依リ其三角函數ヲ360°ヨリモ小ナル正角ノ三角函數ニ化スベシ.

第三. 與角若シ360°ト180°トノ間ニ在ラバ前條第五ニ依リ其三角函數ヲ180°ヨリモ小ナル正角ノ三角函數ニ化スベシ.

第四. 與角若シ180°ト90°トノ間ニ在ラバ前條第四ニ依リ其三角函數ヲ90°ヨリモ小ナル正角ノ三角函數ニ化スベシ.

注意一 異名函數ヲ用フルモ差支無キ場合ニ於

テハ猶一歩ヲ進メ前條第二ノ關係ニ依リ $45°$ ヲ超ヘザル正角ノ三角函數ヲ以テ任意ノ角ノ三角函數ヲ表スコトヲ得.

注意二. 圖ニ依リテ與ヘラレタル角ノ廻線ノ位置ヲ定メ以テ其三角函數ヲ小角ノモノニ化スルコトヲ得.

設題六.

(1) $2000°$, $-4000°$ ノ象限ヲ求ム.

答. 第三,第四.

(2) 次ノ二式ノ値ヲ求ム.

(i) $\cos 0°.\ \sin 270°+2\cos 180°.\ \tan 45°$. 答. -3.

(ii) $3\sin 0°.\ \sec 180°+2\operatorname{cosec} 90°-\cos 360°$. 答. 1.

(3) A ガ $0°$ ヨリ $90°$ マデ變ズルトキ $\sin A+\cos A$ ハ如何ニ變ズルカ.

(4) A ノ三角函數ヲ以テ $270°+A$ 及ビ $270°-A$ ノ三角函數ヲ表セ.

(5) $120°, 135°, 150°, 162°, 165°$ ノ三角函數ヲ求ム.

(6) $\cos 675°$, $\operatorname{cosec}(-660°)$ ノ値ヲ求ム.

答. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

第五章.

二角ニ關スル公式.

26. 二角ノ和ノ正弦及ビ餘弦.

任意ノ二角 A, B ノ正弦及ビ餘弦ヲ用ヒテ此二角ノ和 A+B ノ正弦及ビ餘弦ヲ表ス式ハ次ノ如シ.

$$\sin(A+B)=\sin A.\ \cos B+\cos A.\ \sin B \quad \text{.......(IX)}$$

$$\cos(A+B)=\cos A.\ \cos B-\sin A.\ \sin B \quad \text{.......(X)}$$

證.

第一. A, B 共ニ零ナル場合.

$\sin(A+B)=\sin(0+0)=\sin 0=0$,

$\sin A.\ \cos B+\cos A.\ \sin B=\sin 0.\ \cos 0+\cos 0.\ \sin 0$

$=0\times1+1\times0=0$.

$\therefore\ \sin(A+B)=\sin A.\ \cos B+\cos A.\ \sin B$.

$\cos(A+B)=\cos(0+0)=\cos 0=1$,

$\cos A.\ \cos B-\sin A.\ \sin B=\cos 0.\ \cos 0-\sin 0.\ \sin 0$

$=1\times1-0\times0=1$.

$\therefore\ \cos(A+B)=\cos A.\ \cos B-\sin A.\ \sin B$.

第二. A, B ノ中一個(例ヘバ A)ハ零ニ

シテ他ノ一個ハ零ナラザル場合

$$\sin(A+B)=\sin(0+B)=\sin B,$$

$$\sin A.\cos B+\cos A.\sin B=\sin 0.\cos B+\cos 0.\sin B$$
$$=0\times\cos B+1\times\sin B=\sin B.$$

$$\therefore\quad \sin(A+B)=\sin A.\cos B+\cos A.\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos(0+B)=\cos B,$$

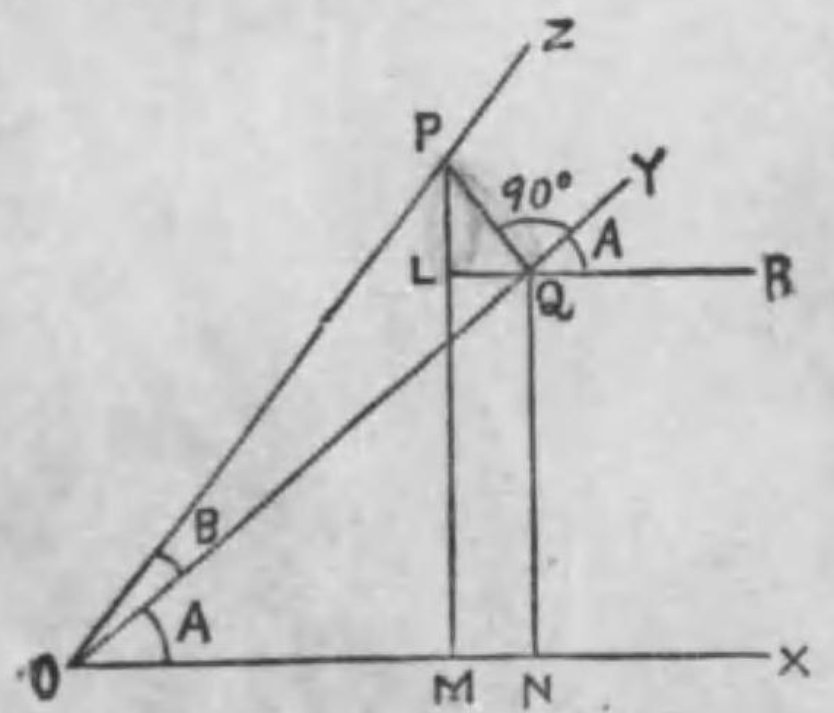
$$\cos A.\cos B-\sin A.\sin B=\cos 0.\cos B-\sin 0.\sin B$$
$$=1\times\cos B-0\times\sin B=\cos B.$$

$$\therefore\quad \cos(A+B)=\cos A.\cos B-\sin A.\sin B.$$

同様ニ $A\neq 0,\ B=0$ ノ場合ニ於テモ上ノ關係ノ成立スルコト明カナリ.

第三. A, B, A+B 共ニ正鋭角ノ場合.

$X\hat{O}Y,\ Y\hat{O}Z,\ X\hat{O}Z$ ヲ各 $A,\ B,\ A+B$ トシ OZ 上ノ一點 P ヨリ $OY,\ OX$ ニ垂線ヲ作リ其足ヲ $Q,\ M$ トシ Q ヨリ $MP,\ OX$ ニ垂線ヲ作リ其足ヲ $L,\ N$ トシ LQ ノ延長ヲ QR トセ



バ $R\hat{Q}P$ ハ $90°+A$ ニシテ次ノ關係有リ

$$\sin(A+B)=\frac{MP}{OP}=\frac{NQ+LP}{OP}=\frac{NQ}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{LP}{QP}\cdot\frac{QP}{OP}$$
$$=\sin A.\cos B+\sin(90°+A).\sin B$$
$$=\sin A.\cos B+\cos A.\sin B$$

$$\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{ON\mp QL}{OP}=\frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}\mp\frac{QL}{QP}\cdot\frac{QP}{OP}$$
$$=\cos A.\cos B+\cos(90°+A).\sin B$$
$$=\cos A.\cos B-\sin A.\sin B.$$

第四. A, B 共ニ正鋭角ニシテ互ニ餘角ヲ成ス場合.

$$\sin(A+B)=\sin 90°=1,$$

$$\sin A.\cos B+\cos A.\sin B=\sin A.\cos(90°-A)+\cos A\sin(90°-A)$$
$$=\sin A.\sin A+\cos A.\cos A=1.$$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

$$\therefore\quad \sin(A+B)=\sin A.\cos B+\cos A.\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\cos 90°=0,$$

$$\cos A.\cos B-\sin A.\sin B=\cos A.\cos(90°-A)-\sin A.\sin(90°-A)$$
$$=\cos A.\sin A-\sin A.\cos A=0.$$

$$\therefore\quad \cos(A+B)=\cos A.\cos B-\sin A.\sin B.$$

第五. A, B 共ニ正鋭角ニシテ A+B

ハ鈍角ナル場合.

$90^\circ-A$, $90^\circ-B$, $(90^\circ-A)+(90^\circ-B)$ ハ共ニ正鋭角トナルヲ以テ

$$\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin\{180^\circ-(A+B)\}=\sin\{(90^\circ-A)+(90^\circ-B)\}\\&=\sin(90^\circ-A)\cos(90^\circ-B)+\cos(90^\circ-A)\sin(90^\circ-B)\\&=\cos A.\sin B+\sin A.\cos B\\&=\sin A.\cos B+\cos A.\sin B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A+B)&=-\cos\{180^\circ-(A+B)\}=-\cos\{(90^\circ-A)+(90^\circ-B)\}\\&=-\{\cos(90^\circ-A)\cos(90^\circ-B)-\sin(90^\circ-A)\sin(90^\circ-B)\}\\&=-\{\sin A.\sin B-\cos A.\cos B\}\\&=\cos A.\cos B-\sin A.\sin B.\end{aligned}$$

第六. A, B ガ任意ノ正角ナル場合.

(IX)(X) ノ公式ガ A, B ノ或値ノトキ合理ナラバ A, B ノ中一個(例ヘバ A)ヲ 90° 増シタル場合ニモ合理ナルコト次ノ如シ.

$$\begin{aligned}\sin\{(90^\circ+A)+B\}&=\sin\{90^\circ+(A+B)\}=\cos(A+B)\\&=\cos A.\cos B-\sin A.\sin B\\&=\sin(90^\circ+A)\cos B+\cos(90^\circ+A)\sin B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\{(90^\circ+A)+B\}&=\cos\{90^\circ+(A+B)\}=-\sin(A+B)\\&=-\sin A.\cos B-\cos A.\sin B\\&=\cos(90^\circ+A)\cos B-\sin(90^\circ+A)\sin B.\end{aligned}$$

然ルニ (IX)(X) ノ公式ハ A, B ガ 90° ヨリモ小ナル任意ノ正角ノ場合ニ於テ合理ナルコト已ニ證シタルガ如シ故ニ A, B ノ一個或ハ双方ニ 90° ノ整數倍ヲ加ヘテ如何ナル正角トナセル場合ニモ其合理ナルコトヲ推知シ得ベシ.

第七. A, B ノ一個又ハ双方ガ負角ナル場合.

A, B ノ中一個例ヘバ A ガ負角ナルトキ之ニ 360° ノ適當ナル倍數ヲ加ヘテ其和 $n\times360^\circ+A$ ヲ正角ナラシメバ.

$$\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin(n\times360^\circ+A+B)\\&=\sin(n\times360^\circ+A)\cos B+\cos(n\times360^\circ+A)\sin B\\&=\sin A.\cos B+\cos A.\sin B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A+B)&=\cos(n\times360^\circ+A+B)\\&=\cos(n\times360^\circ+A)\cos B-\sin(n\times360^\circ+A)\sin B\\&=\cos A.\cos B-\sin A.\sin B.\end{aligned}$$

同様ニ B ガ負角ナルトキ及ビ A, B 共ニ負角ナ

ルトキ公式ノ合理ナルコトヲ知リ得ベシ.

故ニ(IX)(X)ノ公式ハ一般ニ合理ナリ.

27. 二角ノ差ノ正弦及ビ餘弦.

任意ノ二角A,Bノ正弦及ビ餘弦ヲ用ヒテ此二角ノ差A−Bノ正弦及ビ餘弦ヲ表ス式ハ次ノ如シ.

$$\begin{aligned} sin(A-B) &= sin\{A+(-B)\} \\ &= sinA.\ cos(-B)+cosA.\ sin(-B) \\ &= sinA.\ cosB-cosA\ sinB \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(XI)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cos(A-B) &= cos\{A+(-B)\} \\ &= cosA.\ cos(-B)-sinA.\ sin(-B) \\ &= cosA.\ cosB+sinA.\ sinB \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(XII)} \end{aligned}$$

此二式ハ(IX)(X)中ニ含マルヽモノナリ.特ニ之ヲ掲ゲタルハ唯參照ニ便ナラシメンガ爲メノミ.

28. 二角ノ和ト差トノ正切及ビ餘切.

任意ノ二角A,Bノ正切ヲ用ヒテ此二角ノ和A+B及ビ差A−Bノ正切ヲ表ス式ハ次ノ如シ.

$$\begin{aligned} tan(A+B) &= \frac{sin(A+B)}{cos(A+B)} \\ &= \frac{(sinA.\ cosB+cosA.\ sinB)\div cosA.\ cosB}{(cosA.\ cosB-sinA.\ sinB)\div cosA.\ cosB} \\ &= \frac{tanA+tanB}{1-tanA.\ tanB} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(XIII)} \end{aligned}$$

同様ニ

$$tan(A-B)=\frac{tanA-tanB}{1+tanA\ tanB} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(XIV)}$$

又A,Bノ餘切ヲ用ヒテA+B及ビA−Bヲ表ス式ハ次ノ如シ.

$$\begin{aligned} cot(A+B) &= \frac{cos(A+B)}{sin(A+B)} \\ &= \frac{(cosA.\ cosB-sinA.\ sinB)\div sinA.\ sinB}{(sinA.\ cosB+cosA.\ sinB)\div sinA\ sinB} \\ &= \frac{cotA.\ cotB-1}{cotB+cotA} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(XV)} \end{aligned}$$

同様ニ

$$cot(A-B)=\frac{cotA.\ cotB+1}{cotB-cotA} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(XVI)}$$

29. 二角ノ和ト差トノ正弦或ハ餘弦ノ乘積.

Sin Cos

$$\begin{aligned} & sin(A+B)sin(A-B) \\ &= (sinA.\ cosB+cosA.\ sinB)(sinA.\ cosB-sinA.\ sinB) \\ &= sin^2A.\ cos^2B-cos^2A.\ sin^2B \\ &= sin^2A(1-sin^2B)-(1-sin^2A)sin^2B \\ & \quad sin^2A-sin^2A\,sin^2B-sin^2B+sin^2A\,sin^2B \\ &= sin^2A-sin^2B=cos^2B-cos^2A \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(XVII)} \end{aligned}$$

cost

$$\begin{aligned} & cos(A+B)cos(A-B) \\ &= (cosA.\ cosB-sinA.\ sinB)(cosA.\ cosB+sinA.\ sinB) \end{aligned}$$

$$=\cos^2A.\cos^2B-\sin^2A.\sin^2B$$

$$=\cos^2A(1-\sin^2B)-(1-\cos^2A)\sin^2B$$

$$=\cos^2A-\sin^2B=\cos^2B-\sin^2A \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{XVIII})$$

設 題 七.

次ノ諸恒等式ヲ證セヨ. 此諸式ハ何レモ要用ナルモノナリ.

(1) $\sqrt{2}\sin(45^\circ+A)=\cos A+\sin A.$

(2) $\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)=\cos A-\sin A.$

(3) $\tan(45^\circ\pm A)=\dfrac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$

(4) $\cot(45^\circ\pm A)=\dfrac{\cot A\mp 1}{\mathrm{cat}A\pm 1}.$

(5) $\tan A\pm\tan B=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\cos A.\cos B}.$

(6) $\cot B\pm\cot A=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\sin A.\sin B}.$

(7) $\cot A\pm\tan B=\dfrac{\cos(A\mp B)}{\sin A.\cos B}.$

(8) $\sin(A+B+C)=\sin A.\cos B.\cos C+\cos A.\sin B.\cos C$
$+\cos A.\cos B.\sin C-\sin A.\sin B.\sin C.$

(9) $\cos(A+B+C)=\cos A.\cos B.\cos C-\cos A.\sin B.\sin C$
$-\sin A.\cos B.\sin C-\sin A.\sin B.\cos C$

(10) $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A.\tan B.\tan C}{1-\tan A.\tan B-\tan B.\tan C-\tan C.\tan A}.$

(11) $\cot(A+B+C)=\dfrac{\cot A.\cot B.\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A-1}.$

~~29.~~ 30 二倍角ノ三角函數.

$$\sin 2A=\sin(A+A)=\sin A.\cos A+\cos A.\sin A$$

$$=2\sin A.\cos A \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{XIX})$$

$$\cos 2A=\cos(A+A)=\cos A.\cos A-\sin A.\sin A$$

$$=\cos^2A-\sin^2A=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A \cdots\cdots (\text{XX})$$

$$\tan 2A=\tan(A+A)=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A.\tan A}$$

$$=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{XXI})$$

$$\cot 2A=\cot(A+A)=\frac{\cot A.\cot A-1}{\cot A+\cot A}$$

$$=\frac{\cot^2A-1}{2\cot A} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{XXII})$$

系一. $\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{A}{2}.$

$$\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1=1-2\sin^2\frac{A}{2}.$$

$$\tan A=\frac{2\tan\dfrac{A}{2}}{1-\tan^2\dfrac{A}{2}}$$

$$\cot A = \frac{\cot^2\frac{A}{2} - 1}{2\cot\frac{A}{2}}$$

系二. $\cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}$.

$$\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$$

此式ニ依リ任意ノ角ノ正弦或ハ餘弦ノ平方ヲ一次ノ式ニ化スルコトヲ得.

30. 三倍角ノ三角函數.

$$\sin 3A = \sin(2A+A) = \sin 2A.\cos A + \cos 2A.\sin A$$
$$= 2\sin A.\cos^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A$$
$$= 2\sin A(1-\sin^2 A) + (1-2\sin^2 A)\sin A$$
$$= 3\sin A - 4\sin^3 A \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{XXIII})$$

$$\cos 3A = \cos(2A+A) = \cos 2A.\cos A - \sin 2A.\sin A.$$
$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin^2 A.\cos A$$
$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2(1-\cos^2 A)\cos A$$
$$= 4\cos^3 A - 3\cos A \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{XXIV})$$

$$\tan 3A = \tan(2A+A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1-\tan 2A.\tan A}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \times \tan A}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{XXV})$$

$$\cot 3A = \cot(2A+A) = \frac{\cot 2A.\cot A - 1}{\cot A + \cot 2A}$$

$$= \frac{\dfrac{\cot^2 A - 1}{2\cot A} \times \cot A - 1}{\cot A + \dfrac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}}$$

$$= \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1} = \frac{3\cot A - \cot^3 A}{1-3\cot^2 A} \cdots\cdots\cdots (\text{XXVI})$$

系. $\cos^3 A = \dfrac{3\cos A + \cos 3A}{4}$.

$$\sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin 3A}{4}.$$

此式ニ依リ任意ノ角ノ正弦或ハ餘弦ノ立方ヲ一次ノ式ニ化スルコトヲ得.

31. 半角ノ三角函數.

$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}.$$

$$\therefore \quad \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{XXVII})$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{XXVIII})$$

從ッテ

$$\tan^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{1+\cos A} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{XXIX})$$

$$\cot^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{1-\cos A}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(XXX)}$$

又 $$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin A}{1+\cos A}.$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

∴ $$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

從ッテ $$\cot\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{1-\cos A}\quad\cdots\cdots\cdots\text{(XXXI)}$$

設 題 八.

次ノ諸恒等式ヲ證セヨ. 此諸式ハ何レモ要用ナルモノナリ.

(1) $\operatorname{cosec}2A=\dfrac{\cot^2A+1}{2\cot A}$.

(2) $\sin 2A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2A}$.

(3) $\cos 2A=\dfrac{1-\tan^2A}{1+\tan^2A}$.

(4) $\cot A+\tan A=2\operatorname{cosec}2A$.

(5) $\cot A-\tan A=2\cot 2A$.

(6) $\operatorname{cosec}A+\cot A=\cot\dfrac{A}{2}$.

(7) $\operatorname{cosec}A-\cot A=\tan\dfrac{A}{2}$.

(8) $\dfrac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}=\tan\dfrac{A}{2}$.

(9) $\dfrac{1\pm\sin A}{1\mp\sin A}=\tan^2\left(45^\circ\pm\dfrac{A}{2}\right)$.

(10) $\sec A\pm\tan A=\tan\left(45^\circ\pm\dfrac{A}{2}\right)$.

32. 正弦餘弦ノ乘積ト和或ハ差トノ轉換.

$$2\sin A.\cos B=(\sin A.\cos B+\cos A.\sin B)+(\sin A.\cos B-\cos A.\sin B)$$
$$=\sin(A+B)+\sin(A-B)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(XXXII)}$$

$$2\cos A.\sin B=(\sin A.\cos B+\cos A.\sin B)-(\sin A.\cos B-\cos A.\sin B)$$
$$=\sin(A+B)-\sin(A-B)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(XXXIII)}$$

$$2\cos A.\cos B=(\cos A.\cos B-\sin A.\sin B)+(\cos A.\cos B+\sin A.\sin B)$$
$$=\cos(A+B)+\cos(A-B)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(XXXIV)}$$

$$2\sin A.\sin B=-\{(\cos A.\cos B-\sin A.\sin B)-(\cos A.\cos B+\sin A.\sin B)\}$$
$$=-\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}\quad\cdots\cdots\cdots\text{(XXXV)}$$

$$=\cos(A-B)-\cos(A+B)\quad\cdots\cdots\text{(XXXV)}'$$

此四式ハ二角ノ正弦餘弦ノ乘積ヲ和或ハ差ニ變形スルニ用フ.

$$\sin A+\sin B=\sin\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)+\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{XXXVI})$$

$$\sin A-\sin B=\sin\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)-\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{XXYVII})$$

$$\cos A+\cos B=\cos\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{XXXVIII})$$

$$\cos A-\cos B=\cos\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=-2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{XXXIX})$$

系 $$\cos A+\sin B=\sin(90^\circ+A)+\sin B$$

$$=2\sin\left(45^\circ+\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A-\sin B=\sin(90^\circ+A)-\sin B$$

$$=2\cos\left(45^\circ+\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{A-B}{2}\right)$$

此六式ハ正弦餘弦ノ和或ハ差ヲ乘積ニ變形スルニ用フ.

$\cos A+\cos(120^\circ+A)+\cos(A+240^\circ)=0.$ H.57
$\sin A+\sin(A+120^\circ)+\sin(A+240^\circ)=0.$

設 題 九.

次ノ諸式ヲ證セヨ.

(1) $\cos A+\cos(120^\circ+A)+\cos(120^\circ-A)=0.$ 8

$\sin A+\sin(120^\circ+A)-\sin(120^\circ-A)=0.$ 8

(2) $\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}.$$

$\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$$

(3) $\tan A+\tan B+\tan C-\tan A.\tan B.\tan C$

$$=\frac{\sin(A+B+C)}{\cos A.\cos B.\cos C}$$

(4) $\sin(A+B)\cos(A-B)=\sin A.\cos A+\sin B.\cos B.$

$\cos(A+B)\sin(A-B)=\sin A.\cos A-\sin B.\cos B.$

(5) $\cos^2A+\cos^2(120+A)+\cos^2(120^\circ-A)=\frac{3}{2}.$

(6) $\cos 47^\circ-\cos 61^\circ-\cos 11^\circ+\cos 25^\circ=\sin 7^\circ.$

(7) $\sin 2A+\sin 4A+\sin 6A=\dfrac{\cos A-\cos 7A}{2\sin A}$

(8) $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ=0$

H (9) $4\sin A.\sin B\ \sin C=\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)$

$$+\sin(A+B-C)-\sin(A+B+C)$$

(10) $\cos^2(B-C)+\cos^2(C-A)+\cos^2(A-B)-1$

$$=2\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)$$

(11) $\sin 5A=16\sin^5 A-20\sin^3 A+5\sin A.$

$\cos 5A=16\cos^5 A-20\cos^3 A+5\cos A.$

(12) $\dfrac{\sin 3A+\cos 3A}{\sin 3A-\cos 3A}=\tan(A-45^\circ)\left(\dfrac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}\right).$

(13) $\tan A+2\tan 2A+4\tan 4A=\cot A-8\cot 8A.$

20° 20° $=\frac{9}{4}$ pw

~~(14)~~ $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ.\cos 40^\circ=\frac{3}{4}.$

(15) $\cos 108^\circ.\cos 132^\circ+\cos 132^\circ.\cos 12^\circ+\cos 12^\circ.\cos 108^\circ=-\frac{3}{4}.$

(16) $\tan 5A-\tan 3A-\tan 2A=\tan 5A.\tan 3A.\tan 2A$

H ~~(17)~~ $\sec A+\sec(A+120^\circ)+\sec(A+240^\circ)=-3\sec 3A$

$\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}(A+120^\circ)+\operatorname{cosec}(A+240^\circ)=3\operatorname{cosec} 3A,$

H ~~(18)~~ $\cos^3 A+\cos^3(120^\circ+A)+\cos^3(120^\circ-A)=\frac{3}{4}\cos 3A.$

$\sin^3 A+\sin^3(120^\circ+A)-\sin^3(120^\circ-A)=-\frac{3}{4}\sin 3A$

(19) $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B+C}{2}$

$+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\times\sin\frac{A+B+C}{2}$

$=\sin(B+C)+\sin(C+A)+\sin(A+B).$

$B+\dfrac{C+A}{2}$, $\dfrac{C+A}{2}$, $B-\dfrac{C-A}{2}$ ノ餘弦ガ G. P. ヲナスキハ $\frac{1}{2}(A+C)-B$, $\frac{1}{2}(C-A)$, $\frac{1}{2}(A+C)+B$ ノ正弦モ G.P. ヲナスコトヲ證セヨ.

第六章.

對數.

33. 對數ノ定義及ビ記法.

任意ノ一數 a ノ x(任意ノ數)乘冪ヲ y トスルトキ x ハ a ヲ底トセル y ノ對數ナリト云ヒ, 此關係ヲ $x=\log_a y$ ト記ス.

系一. $$a^{\log_a y}=y.$$

系二. $$\log_a 1=0.$$

系三. $$\log_a a=1.$$

34. 對數ノ重ナル性質.

第一. 乘積ノ對數ハ其因數ノ對數ノ和ニ等シ.

第二. 商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減ジタルモノニ等シ.

第三. 一數ノ乘冪ノ對數ハ原數ノ對數ニ其指數(任意ノ數)ヲ乘ジタルモノニ等シ.

第四. b ヲ底トセル一數ノ對數ハ a ヲ底トセル同數ノ對數ニ $\log_b a$ 或ハ $\frac{1}{\log_a b}$ ヲ乘ジタルモノニ等シ.

證.

$\log_a m=x$, $\log_a n=y$, $\log_b m=z$ トセバ $m=a^x$, $n=a^y$, $m=b^z$ ナルヲ以テ

第一. $$mn=a^x a^y=a^{x+y},$$

$$\therefore \log_a mn=x+y=\log_a m+\log_a n,$$

第二. $$\frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$\therefore \log\frac{m}{n}=x-y=\log_a m-\log_a n.$$

第三. $$m^r=(a^x)^r=a^{xr}.$$

$$\therefore \log_a m^r=xr=r\log_a m$$

第四. $$a^x=m=b^z,$$

$$a^{\frac{x}{z}}=b,\qquad b^{\frac{z}{x}}=a,$$

$$\therefore \log_a b=\frac{x}{z},\qquad \log_b a=\frac{z}{x},$$

$$\therefore z=x\log_b a=\frac{x}{\log_a b}.$$

即 $$\log_b m=\log_a m\times\log_b a=\frac{\log_a m}{\log_a b}.$$

系　　$log_a b \times log_b a = 1.$

35. 對數ノ種類.

最有用ナル對數ハ自然對數及ビ常用對數ノ二種ナリ.

第一. 自然對數ハ $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{r!} + \cdots\cdots = 2{\cdot}71828\cdots\cdots$ ナル數ヲ底トセルモノニシテ理論數學ニ之ヲ用フ.

第二. 常用對數ハ10ヲ底トセルモノニシテ實地ノ計算ニ之ヲ用フ.

注意. 前條第四ニ依リ

$$log_e m = log_{10} m \times \frac{1}{log_{10} e}.$$

故ニ　$log_{10} e = {\cdot}43429\cdots\cdots$ ヲ μ トセバ

$$\frac{1}{\mu} = 2{\cdot}3025\cdots\cdots$$

$$log_{10} m = \mu log_e m.$$

$$log_e m = \frac{1}{\mu} log_{10} m.$$

上式ニ依リ一種ノ對數ヨリ他ノ種類ノ數對ヲ求

ムルコトヲ得.

36. 常用對數.

規約一. 常川對數ノ記法ニ於テハ底ヲ記スルコトヲ要セズ.

規約二. 常用對數ニ於テハ其小數分ヲ常ニ正ナラシメ,整數分若シ負ナルトキハ負號ヲ其上ニ記ス.

定義. 常用對數ノ小數分ヲ假數ト云ヒ其整數分ヲ指標ト云フ.

定理一. 數字ヲ同ジ順序ニ竝ベテ得タル二數ノ常用對數ノ假數ハ同一ナリ

定理二. 整數 n 位ヲ有スル數ノ對數ノ指標ハ $n-1$ ニシテ小數點以下有意數字ニ到ルマデニ n 個ノ零ヲ有スル小數ノ指標ハ $-(n+1)$ ナリ.

證.

n ヲ零或ハ任意ノ正整數トセバ

第一. $log(a\times10^n)=loga+log10^n=loga+n.$

$$log\frac{a}{10^n}=loga-log10^n=loga-n.$$

第二. $log10^{n-1}=n-1, log10^n=n$ナルヲ以テ$10^{n-1}$ト$10^n$トノ間ニ在ル數ノ對數ノ指標ハ$n-1$ナリ. 又$log\frac{1}{10^n}=-n, log\frac{1}{10^{n+1}}=-(n+1)$ナルヲ以テ$\frac{1}{10^n}$ト$\frac{1}{10^{n+1}}$トノ間ニ在ル數ノ對數ノ指標ハ$-(n+1)$ナリ.

37. 常用對數表.

普通ノ常用對數表ハ數ノ對數表及ビ三角函數ノ對數表ヨリ成リ,數ノ對數表ニハ1ヨリ或便宜ノ數ニ至ルマデノ諸數ノ對數ノ假數ヲ載セ,三角函數ノ對數表ニハ0°ヨリ90°ニ至ルマデノ諸角ノ三角函數ノ對數又ハ之ニ10ヲ加ヘタルモノ(之ヲ表對數ト云ヒLヲ以テ其記號トス)ヲ載ス.

注意. 表對數ヲ用ヒタルハ植字ノ便ヲ計レルニ外ナラズ.

38. 比例部分ノ定理及ビ其應用.

表中ニ在ラザル數或ハ鋭角ノ三角函數ノ對數ヲ求ムル法及ビ對數ニ應ズル數或ハ角ヲ求ムル法ハ次ニ揭グル比例部分ノ定理ニ依ルナリ.

第一. 數ノ小變化ト其對數ノ之ニ應ズル變化トハ殆ンド相比例ス.

第二. 0°又ハ90°ニ近カラザル角ノ小變化ト其三角函數ノ對數ノ之ニ應ズル變化トハ殆ンド相比例ス.

上ノ定理ノ成立及ビ限界ヲ論ズルコトハ本書ノ程度ニ適セザルヲ以テ之ヲ略シ數例ヲ擧ゲテ其應用法ヲ示スベシ.

解.

例一. $log437{\cdot}56$ヲ求メヨ.

$$log437{\cdot}6=2{\cdot}64108$$
$$log437{\cdot}5=2{\cdot}64098$$
$$\overline{10}\times{\cdot}6=6$$
$$\therefore\ log437{\cdot}56=2{\cdot}64104.$$

例二. $logx=\bar{3}{\cdot}75324$ナルトキxヲ有意數字五個ヲ

ヲ求メヨ.

解.

$$\log\cdot005666=\bar{3}\cdot75328 \qquad \log x=\bar{3}\cdot75324$$
$$\log\cdot005665=\bar{3}\cdot75320 \qquad \log\cdot005665=\bar{3}\cdot75320$$
$$8 \qquad\qquad 4\div8=\cdot5$$

$$\therefore\quad x=\cdot0056655.$$

例三. $\log\sin31^\circ16'\cdot6$ ヲ求メヨ.

解

$$\log\sin31^\circ17'=\bar{1}\cdot71539$$
$$\log\sin31^\circ16'=\bar{1}\cdot71519$$
$$20\times\cdot6=12$$

$$\therefore\quad \log\sin31^\circ16'\cdot6=\bar{1}\cdot71531.$$

例四. $\log\tan x=\cdot49365$ ナルトキxヲ求メヨ.

解.

$$\log\tan72^\circ13'=\cdot49384 \qquad \log\tan x=\cdot49365$$
$$\log\tan72^\circ12'=\cdot49341 \qquad \log\tan72^\circ12'=\cdot49341$$
$$43 \qquad\qquad 24\div43=\cdot6$$

$$\therefore\quad x=72^\circ12'\cdot6$$

例五. $\log\cos68^\circ25'\cdot7$ ヲ求メヨ.

解.

$$\log\cos68^\circ26'=\bar{1}\cdot56536$$
$$\log\cos68^\circ25'=\bar{1}\cdot56568$$
$$-32\times\cdot7=-22$$

$$\therefore\quad \log\cos68^\circ25'\cdot7=\bar{1}\cdot56546.$$

例六. $\log\cot x=\cdot34582$ ナルトキxヲ求メヨ.

解.

$$\log\cot24^\circ17'=\cdot34566 \qquad \log\cot x=\cdot34582$$
$$\log\cot24^\circ16'=\cdot34600 \qquad \log\cot24^\circ16'=\cdot34600$$
$$-34 \qquad\qquad -18\div(-34)=\cdot5$$

$$\therefore\quad x=24^\circ16'\cdot5.$$

39. 對數ノ諸施術.

對數ヲ用ヒテ諸種ノ計算ヲナスニハ對數ニ關スル諸施術ニ熟スルコト必要ナルヲ以テ次ニ之ヲ述ブベシ.

第一. 對數ノ加法.

對數ノ假數ハ常ニ正ナルヲ以テ直ニ其和ヲ作リ指標ハ其符號ニ注意シテ其代數和ヲ作ルベシ.

例一.

$$\begin{array}{r} 3{\cdot}64281 \\ 2{\cdot}53647 \\ \hline 6{\cdot}17928 \end{array}$$

例二.

$$\begin{array}{r} 3{\cdot}56372 \\ \bar{5}{\cdot}74563 \\ \hline \bar{1}{\cdot}30935 \end{array}$$

第二. 對數ノ減法.

一個ノ對數或ハ數個ノ對數ノ和ヨリ一個或ハ數個ノ對數ヲ減ズルニハ減ズベキ對數ノ假數ヲ1ヨリ減ジテ假數トシ指標ノ符號ヲ變ジテ-1ニ加ヘタルモノヲ指標トセル新對數ヲ加フレバ可ナリ

例一. $-(2{\cdot}75194)=-2-{\cdot}75194=-2-1+1-{\cdot}75194$
$=-3+{\cdot}24806=\bar{3}{\cdot}24806.$

例二. $-(\bar{3}{\cdot}54328)=-\bar{3}-{\cdot}54328=3-1+1-{\cdot}54328$
$=2+{\cdot}45672=2{\cdot}45672.$

注意. 一數ノ對數ノ假數ヲ1ヨリ減ジテ假數トシ指標ノ符號ヲ變ジテ-1ニ加ヘタルモノハ原數ノ倒數ノ對數ナリ而シテ此對數ハ原數ノ對數ヨリ視

察ニ依リテ直ニ之ヲ求メ得ベシ.

第三. 對數ニ整數ヲ乘ズル法.

對數ガ正ナルトキハ普通ノ數ノ如ク乘法ヲ行ヒ負ナルトキハ指標ト假數トニ就キテ別々ニ乘法ヲ行ヒ其結果ヲ加フベシ.

例一. $2{\cdot}35764\times 3=7{\cdot}07292.$

例二. $\bar{3}{\cdot}67829\times 2=\bar{6}+1{\cdot}35658=\bar{5}{\cdot}35658.$

第四. 對數ヲ整數ニテ除スル法.

對數ガ正ナルトキハ普通ノ數ノ如ク除法ヲ行ヒ負ナルトキハ便宜ノ數ヲ指標ヨリ減ジ同數ヲ假數ニ加ヘテ指標ヲ整除シ得ベキモノトシ然ル後除法ヲ行フベシ.

例一. $2{\cdot}75395\div 4={\cdot}68849.$

例二. $\bar{5}{\cdot}92873\div 3=(\bar{6}+1{\cdot}92873)\div 3=\bar{2}{\cdot}64291.$

40. 諸計算ニ於ケル對數ノ應用.

例一. $x=2{\cdot}5819\times345{\cdot}73$ ニ於テxヲ小數二位マデ計算セヨ

解.

$$\log2{\cdot}5819=0{\cdot}41194$$
$$\log345{\cdot}73=2{\cdot}53874$$
$$\overline{\phantom{\log345{\cdot}73=2{\cdot}53874}}$$
$$\log x=2{\cdot}95068$$
$$x=892{\cdot}64.$$

例二. $x=\dfrac{{\cdot}07438}{129{\cdot}48}$ ニ於テxヲ小數七位マデ計算セヨ

解.

$$\log{\cdot}07438=\bar{2}{\cdot}87146$$
$$-\log129{\cdot}48=\bar{3}{\cdot}88780$$
$$\log x=\bar{4}{\cdot}75926$$
$$x={\cdot}0005745.$$

例三. $x=(3{\cdot}0715)^3$ ニ於テxヲ小數三位マデ計算セヨ.

解.

$$\log3{\cdot}0715={\cdot}48735$$
$$3$$
$$\log x=1{\cdot}46205$$

$$x=28{\cdot}977.$$

例四. $x=\sqrt[4]{{\cdot}0076542}$ ニ於テxヲ小數四位マデ計算セヨ.

解.

$$\log{\cdot}0076542=\bar{3}{\cdot}88390\,)\underline{\,4\,}$$
$$\log x=\bar{1}{\cdot}47098$$
$$x={\cdot}2958.$$

例五. $(1{\cdot}2)^x=1{\cdot}1$ ナル方程式ニ適スルxノ値ヲ小數五位マデ計算セヨ.

解

$$x\log1{\cdot}2=\log1{\cdot}1$$
$$x=\frac{\log1{\cdot}1}{\log1{\cdot}2}=\frac{{\cdot}04139}{{\cdot}07918}$$
$$\log{\cdot}04139=\bar{2}{\cdot}61690$$
$$-\log{\cdot}07918=1{\cdot}10138$$
$$\log x=\bar{1}{\cdot}71828$$
$$x={\cdot}52273$$

設　題　十.

(1) $\log_a b\times\log_c d=\log_a d\times\log_c b$ ヲ證セヨ.

(2) $\log_a b\times\log_b c\times\log_c d\times\log_d e=\log_a e$ ヲ證セヨ.

(3) $\log_a x=\log_b y=\log_c z$ ナルトキハ各數ハ $a^p b^q c^r$ ヲ底トセル $x^p y^q z^r$ ノ對數ニ等シキコトヲ證セヨ.

(4) 次ノ對數ノ値ヲ求メヨ.

$\log_2 1024,\ \log_3\sqrt{27},\ \log_4 \cdot 125,\ \log_5\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}},\ \log_{\sqrt{3}}81,$

$\log_{\cdot 01}10,\ \log_{49}343\sqrt{7},\ \log_4\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}},\ \log_2\sin 45^\circ,\ \log_2\cos 60^\circ.$

答. $10,\ \dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{7}{6},\ 8,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{4},\ -\dfrac{1}{10},\ -\dfrac{1}{2},\ -1,$

(5) 次ノ數及ビ三角函數ノ對數ヲ求メヨ.

$6325\cdot03$; $\cdot000537258$; $\sin 17^\circ 13'\cdot 4$; $\cos 32^\circ 31'\cdot 6$; $\tan 26^\circ 45'\cdot 7$; $\cot 43^\circ 26'\cdot 8$; $\sec 28^\circ 54'\cdot 4$; $\operatorname{cosec} 35^\circ 27'\cdot 8$; $\sin 54^\circ 16'\cdot 2$; $\cos 78^\circ 24'\cdot 9$; $\tan 69^\circ 32'\cdot 6$; $\cot 81^\circ 43'\cdot 4$; $\sec 49^\circ 51'\cdot 7$; $\operatorname{cosec} 63^\circ 42'\cdot 8$.

答. $3\cdot 80106$; $\bar{4}\cdot 73019$; $\bar{1}\cdot 47143$; $\bar{1}\cdot 92590$; $\bar{1}\cdot 70269$; $\cdot 02356$; $\cdot 05779$; $\cdot 23653$; $\bar{1}\cdot 90944$; $\bar{1}\cdot 30281$; $\cdot 42829$; $\bar{1}\cdot 16277$; $\cdot 19069$; $\cdot 04740$.

(6) 次ノ各式ヨリ x ヲ求メヨ.

$\log x=2\cdot 39712$; $\log x=\bar{3}\cdot 24562$; $\log\sin x=\bar{1}\cdot 89745$; $\log\cos x=\bar{1}\cdot 94367$; $\log\tan x=\bar{1}\cdot 53624$; $\log\cot x=\cdot 21034$;

$\log\sec x=\cdot 12345$; $\log\operatorname{cosec} x=\cdot 03462$.

答. $249\cdot 53$; $\cdot 0017604$; $52^\circ 9'\cdot 3$; $28^\circ 33'\cdot 3$; $18^\circ 58'\cdot 2$; $31^\circ 38'\cdot 3$; $41^\circ 11'\cdot 2$; $67^\circ 25'\cdot 5$.

(7) $8^{5-3x}=12^{4-2x}$ ヲ解ケ.

答. $x=3\cdot 0073$.

(8) $2^x\times 5^y=1,\ 5^{x+1}\times 2^y=2$ ヲ解ケ.

答. $x=-\cdot 69897,\ y=\cdot 30103$.

(9) $\dfrac{\sqrt[4]{(\cdot 0012)^3}\times(\cdot 059)^{\frac{3}{2}}}{(\cdot 9123)^4}$ ノ値ヲ小數六位マデ計算セヨ.

答 $\cdot 020738$.

(10) $\dfrac{(34\cdot 733)^{\frac{3}{2}}\times\sqrt[6]{2\cdot 5389}}{\sqrt[5]{4\cdot 3968}}$ ノ値ヲ小數四位マデ計算セヨ.

答. $7\cdot 2988$.

第 七 章.

一般三角形.

41. 三角形ノ性質.

第一. 角ノ關係.

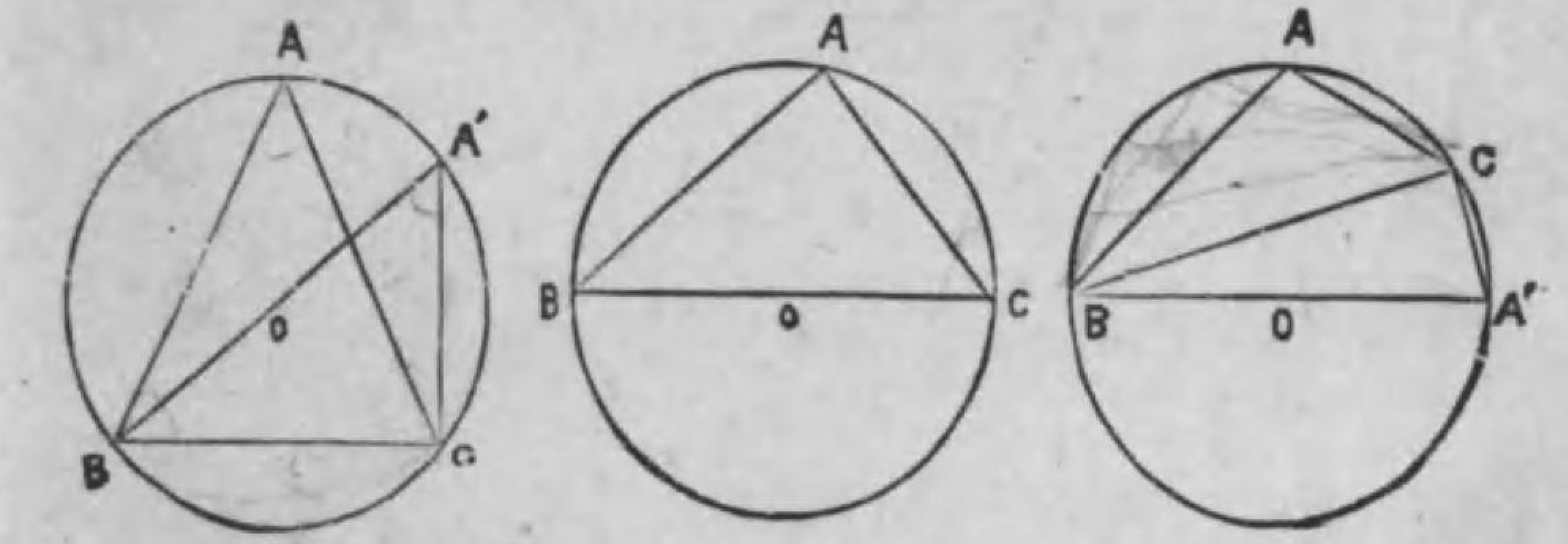
幾何學ノ定理ニ依リ $A+B+C=180^\circ$ 從ッテ $\dfrac{A+B+C}{2}=90^\circ$ ナルコトヲ知ル. 故ニ

$$\left.\begin{aligned} &\sin(A+B+C)=0,\\ &\cos(A+B+C)=-1,\\ &\tan(A+B+C)=0. \end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} &\sin\frac{A+B+C}{2}=1,\\ &\cos\frac{A+B+C}{2}=0,\\ &\tan\frac{A+B+C}{2}=\infty. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin(A+B)=\sin C,\\ &\cos(A+B)=-\cos C,\\ &\tan(A+B)=-\tan C. \end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} &\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2},\\ &\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2},\\ &\tan\frac{A+B}{2}=\cot\frac{C}{2}, \end{aligned}\right\}$$

第二. 外接圓ノ半徑及ビ正弦比例ノ式.

$A\hat{B}B$ C ノ各角 A, B, C ノ對邊ヲ a, b, c トシ外接圓ノ中心ヲ O, 半徑ヲ R トシ, BO ヲ延長シテ其圓周ト交ル點ヲ A′ トシ之ヲ C ニ連ヌルトキハ, $B\hat{C}A'$ ハ直角ナルヲ以テ.



$$\sin A=\sin A'=\frac{CB}{A'B}=\frac{a}{2R}.$$

同樣ニ $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$.

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}(=2R)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (XL)$$

第三. 二角ノ差半ノ三角函數

正弦比例ノ式ニ依リ

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{A+B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\ \ldots\ldots (XLI)$$

又 $$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

∴ $$c=(a+b)\sin\frac{C}{2}.\sec\frac{A-B}{2}$$

$$=(a-b)\cos\frac{C}{2}\operatorname{cosec}\frac{A-B}{2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{XLII})$$

第四, 一角ノ餘弦或ハ正弦ト邊トノ關係及ビ面積.

正弦比例ノ式ニ依リ

$$\frac{a^2}{\sin^2 A}=\frac{b^2}{\sin^2 B}=\frac{c^2}{\sin^2 C}=\frac{2bc}{2\sin B.\sin C}\quad(=4R^2)$$

∴ $$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin^2(C+A)+\sin(C+A).\sin(C-A)}{2\sin(C+A).\sin C}$$

$$=\frac{\sin(C+A)+\sin(C-A)}{2\sin C}$$

$$=\frac{2\sin C.\cos A}{2\sin C}=\cos A$$

∴ $$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

同様ニ $$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

上ノ關係ハ次ノ如ク書スルコトヲ得.

$$\left.\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A,\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B,\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{XLIII})$$

從ッテ

$$\sin A=\sqrt{(1-\cos^2 A)}=\sqrt{\left\{1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2bc}\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\}}$$

今 $\frac{a+b+c}{2}=s$ トセバ $b+c-a=2(s-a)$, $c+a-b=2(s-b)$, $a+b-c=2(s-c)$

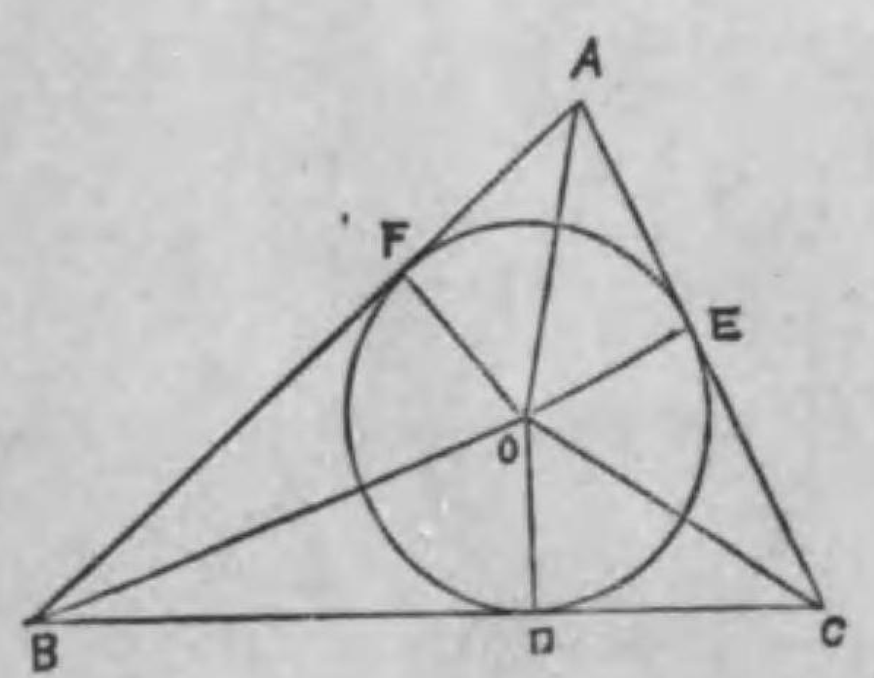
$$
\left.
\begin{array}{ll}
\therefore & \sin A=\dfrac{2}{bc}\sqrt{\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}} \\
同様ニ & \sin B=\dfrac{2}{ca}\sqrt{\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}} \\
 & \sin C=\dfrac{2}{ab}\sqrt{\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}}
\end{array}
\right\}\cdots\text{(XLIV)}
$$

次ニ $A\hat{B}C$ ニ於テ B ヨリ CA ニ垂線 BE ヲ作リ K ヲ以テ面積ヲ表サバ

$$K=\tfrac{1}{2}CA.\ BE=\tfrac{1}{2}CA.\ AB\sin CAB$$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\therefore & K=\tfrac{1}{2}bc\sin A \\
從ツテ & K=\sqrt{\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}}
\end{array}
\right\}\cdots\cdots\cdots\text{(XLV)}
$$

第五. 内接圓ノ半徑及ヒ半角ノ正切ト邊トノ關係.



$A\hat{B}C$ ノ内接圓ノ中心ヲ O, 半徑ヲ r, 各邊トノ切點ヲ D, E, F トセバ

$$O\hat{B}C+O\hat{C}A+O\hat{A}B=A\hat{B}C,$$

即　$\dfrac{1}{2}OD.\ BC+\dfrac{1}{2}OE.\ CA+\dfrac{1}{2}OF.\ AB=A\hat{B}C$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{2}(a+b+c)\,r=K$$

$$\therefore\quad r=\frac{K}{s}=\sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\right\}}\cdots\cdots\cdots\text{(XLVI)}$$

次ニ　$\tan FAO=\dfrac{FO}{AF}$,

$$
\left.
\begin{array}{ll}
即 & \tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{s-a}=\dfrac{1}{s-a}\sqrt{\left\{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\right\}} \\
同様ニ & \tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{s-b}=\dfrac{1}{s-b}\sqrt{\left\{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\right\}} \\
 & \tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{s-c}=\dfrac{1}{s-c}\sqrt{\left\{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\right\}}
\end{array}
\right\}\text{(XLVII)}
$$

系.　$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ 内ニ在ル傍接圓ノ半徑ヲ r', r'', r''' トセバ　$r'=\dfrac{K}{s-a}$,　$r''=\dfrac{K}{s-b}$,　$r'''=\dfrac{K}{s-c}$.

設題十一.

A, B, C ハ三角形ノ角ニシテ a, b, c ハ其各對邊ナルトキ次ノ諸式ヲ證セヨ.

(1)　$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}.\ \cos\dfrac{B}{2}.\ \cos\dfrac{C}{2}.$

　　$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}.\ \sin\dfrac{B}{2}.\ \cos\dfrac{C}{2}.$

(2)　$\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\dfrac{A}{2}.\ \sin\dfrac{B}{2}.\ \sin\dfrac{C}{2}$

　　$\cos A+\cos B-\cos C+1=4\cos\dfrac{A}{2}.\ \cos\dfrac{B}{2}.\ \sin\dfrac{C}{2}.$

(3)　$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\ \sin B.\ \sin C.$

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1=-4\cos A.\ \cos B.\ \cos C.$$

遠藤 本 (4) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{C}{2}\right).$

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}=4\sin\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{B}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{C}{2}\right)$$

C (5) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2=2\cos A.\ \cos B.\ \cos C.$

C $$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-1=-2\cos A.\ \cos B.\ \cos C$$

遠藤 (6) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\ \tan B.\ \tan C.$

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}.\ \cot\frac{B}{2}.\ \cot\frac{C}{2}.$$

$$\tan\frac{A}{2}.\ \tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\ \tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\ \tan\frac{A}{2}=1.$$

$$\cot A.\ \cot B+\cot B.\ \cot C+\cot C.\ \cot A=1.$$

(7) $a=b\cos C+c\cos B.$

(8) 三邊ヲ用ヒテ半角ノ正弦及ビ餘弦ヲ表ス式ヲ作レ. 遠藤 P104

(9) $C=2B$ ナルトキハ $c^2=ab+b^2$ H 81

(10) $C=60^\circ$ ナルトキハ $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{3}{a+b+c}.$

(11) $b+c:c+a:a+b=4:5:6$ ナルトキ各角ノ餘弦ヲ求ム. H 84 答. $-\frac{1}{2},\ \frac{11}{14},\ \frac{13}{14}.$

(12) $\tan A, \tan B, \tan C$ ガ H. P. ヲナストキハ a^2, b^2, c^2 ハ A. P. ヲ成ス. H 89

(13) a 邊ニ對スル中線ノ長サハ $\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2+2bc\cos A)}$ ナリ.

(14) A ノ二等分線ノ長サハ $\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ ナリ.

(15) 圓ニ內接セル四邊形ノ各邊ヲ a, b, c, d トシ $a+b+c+d=2s$ トセバ其面積ハ

$$\sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\}}$$ ナリ.

42. 三角形ノ解キ方.

一般三角形ノ解キ方ニ四種ノ場合有リ.

第一. 一邊及ビ二角(例ヘバ a, B, C)ヲ知ルトキハ

$A=180^\circ-(B+C)$ ニ依リテ A ヲ求メ.

$$\left.\begin{array}{l} b=\dfrac{a\sin B}{\sin A} \\ c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}\end{array}\right\}$$ ニ依リテ b, c ヲ求ムベシ.

第二. 二邊及ビ其夾角(例ヘバ b, c, A)ヲ知ルトキハ

$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ ヨリ $\frac{B-C}{2}$ ヲ求メ

$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$ ニ加減シテ B, C ヲ得次ニ

$a=(b+c)\sin\frac{A}{2}\sec\frac{B-C}{2}$ 或ハ $a=(b-c)\cos\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}$ ニ依リ

テ a ヲ求ムベシ.

或ハ B,C ヲ求メタル後第一ノ場合ヲ應用スルモ可ナリ.

第三. 二邊及ビ其一ニ對スル角(例ヘバ a, b, A)ヲ知ルトキハ

先ヅ $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ ニ依リ B ヲ求ムベシ,而シテ $\dfrac{b\sin A}{a}=1$ ナルトキハ $B=90°$ トナルヲ以テ其解キ方ハ第十四條ノ場合ニ據ルベク, $\dfrac{b\sin A}{a}<1$. ナルトキハ B ニ二個ノ値(互ニ補角ナル)有リ. 後ノ場合ニ於テ $a \nless b$ ナラバ $A \nless B$ ナルヲ以テ B ハ鋭角ナラザルベカラズ; $a<b$ ナラバ $A<B$ ナルヲ以テ B ハ鋭角又ハ鈍角ナルコトヲ得ベク從ツテ B ノ二値ハ何レモ合理ナリ. B ノ値ヲ求メタル後ノ解キ方ハ第一ノ場合ノ如シ.

$\dfrac{b\sin A}{a}<1$, $a<b$ ナルトキハ上ニ述ベタル如ク所設ノ條件ニ適スル二種ノ三角形有ルヲ以テ之ヲ兩意ノ場合ト云フ.

第四. 三邊 a, b, c ヲ知ルキトハ

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{A}{2}&=\frac{1}{s-a}\sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\right\}} \\ \tan\frac{B}{2}&=\frac{1}{s-b}\sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\right\}} \end{aligned}\right\}$$ ニ依リテ A, B ヲ求メ,

$C=180°-(A+B)$ ニ依リテ C ヲ求ムベシ.

計算例題.

例一. $\hat{\triangle}ABC$ ニ於テ $A=50°58'{\cdot}7$, $B=32°50'{\cdot}8$, $c=169{\cdot}37$ ナルトキ a, b ヲ求ム.

解.

$$\begin{aligned} A&=\ 50°\,58'.7 \\ B&=\ 32°\,50'.8 \\ \hline A+B&=\ 83°\,49'.5 \\ 180°&=179°\,60' \\ \hline C&=\ 96°\,10'.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log c&=2{\cdot}22884 \\ \log\sin A&=\bar{1}{\cdot}89037 \\ -\log\sin C&=0{\cdot}00252 \\ \hline \log a&=2{\cdot}12173 \\ a&=132{\cdot}35 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log c&=2{\cdot}22884 \\ \log\sin B&=\bar{1}{\cdot}73431 \\ -\log\sin C&=0{\cdot}00252 \\ \hline \log b&=1{\cdot}96567 \\ b&=92{\cdot}40 \end{aligned}$$

例二. $\overset{\triangle}{ABC}$ ニ於テ $b=4{\cdot}567,\ c=3{\cdot}456,\ A=56^\circ 7'{\cdot}8$ ナルトキ B, C, a ヲ求ム.

解.

$$b=4{\cdot}567$$
$$c=3{\cdot}456$$
$$b-c=1{\cdot}111$$
$$b+c=8{\cdot}023$$

$$\log(b-c)=0{\cdot}04571$$
$$-\log(b+c)=\bar{1}{\cdot}09566$$
$$\log\cot\frac{A}{2}=0{\cdot}27314$$
$$\log\tan\frac{B-C}{2}=\bar{1}{\cdot}41451$$
$$\frac{B-C}{2}=14^\circ 33'{\cdot}6$$
$$\frac{B+C}{2}=61^\circ 56'{\cdot}1$$
$$B=76^\circ 29'{\cdot}7$$
$$C=47^\circ 22'{\cdot}5$$

$$A=56^\circ 7'{\cdot}9$$
$$\frac{A}{2}=28^\circ 3'{\cdot}9$$
$$90^\circ=89^\circ 60'$$
$$\frac{B+C}{2}=61^\circ 56'{\cdot}1$$

$$\log(b-c)=0{\cdot}04571$$
$$\log\cos\frac{A}{2}=1{\cdot}94568$$
$$\log\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}=0{\cdot}59965$$
$$\log a=0{\cdot}59104$$
$$a=3{\cdot}8998$$

例三. $\overset{\triangle}{ABC}$ ニ方テ $a=152{\cdot}08,\ b=236{\cdot}74,\ A=32^\circ 29'{\cdot}6$ ナルトキ B, C, c ヲ求ム.

解.

$$\log b=2{\cdot}37427$$
$$\log\sin A=\bar{1}{\cdot}73014$$
$$-\log a=\bar{3}{\cdot}81793$$
$$\log\sin B=\bar{1}{\cdot}92234$$

$a<b,\ \log\sin B<0$ ナルヲ以テ兩意ノ場合ナリ

$B=56^\circ 44'{\cdot}9$	或ハ	$123^\circ 15'{\cdot}1$
$A=32^\circ 29'{\cdot}6$		$32^\circ 29'{\cdot}6$
$A+B=89^\circ 14'{\cdot}5$	或ハ	$155^\circ 44'{\cdot}7$
$180^\circ=179^\circ 60'$		$179^\circ 60'$
$C=90^\circ 45'{\cdot}5$	或ハ	$24^\circ 15'{\cdot}3$
$\log\sin C=\bar{1}{\cdot}99996$	或ハ	$\bar{1}{\cdot}61362$
$\log b=2{\cdot}37427$		$2{\cdot}37427$
$-\log\sin B=0{\cdot}07766$		$0{\cdot}07766$
$\log c=2{\cdot}45189$	或ハ	$2{\cdot}06555$
$c=283{\cdot}07$	或ハ	$116{\cdot}29$

例四. $\overset{\triangle}{ABC}$ ニ於テ $a=273{\cdot}960,\ b=198{\cdot}632,\ c=236{\cdot}914$ ナルトキ A, B, C ヲ求ム.

解.

$$a=273\cdot960$$
$$b=198\cdot632$$
$$c=236\cdot914$$
$$2s=709\cdot506$$
$$s=354\cdot753$$
$$s-a=80\cdot793$$
$$s-b=156\cdot121$$
$$s-c=117\cdot839$$

$$-\log s=\bar{3}\cdot45008$$
$$\log(s-a)=1\cdot90738$$
$$\log(s-b)=2\cdot19346$$
$$\log(s-c)=2\cdot07129$$
$$\log r^2=3\cdot62221$$
$$\log r=1\cdot81111$$
$$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}\cdot90373$$
$$\frac{A}{2}=38^\circ42'\cdot08$$
$$A=77^\circ24'\cdot2$$
$$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}\cdot61765$$
$$\frac{B}{2}=22^\circ31'\cdot2$$
$$B=45^\circ2'\cdot4$$
$$A=77^\circ24'\cdot2$$
$$A+B=122^\circ26'\cdot6$$
$$180^\circ=179^\circ60'$$
$$C=57^\circ33'\cdot4$$

設題十二.

(1) $A=78^\circ23'\cdot2$, $B=52^\circ16'\cdot3$, $a=796\cdot25$ ナルトキ b, c ヲ求ム.　答. $642\cdot93$, 616.67

(2) $a=34$, $b=35\cdot79$, $A=17^\circ59'$ ナルトキ c, B ヲ求ム.　答. $66\cdot196$, $1\cdot8867$; $18^\circ57'\cdot9$, $161^\circ2'\cdot1$

(3) $b=2956\cdot2$, $c=9990\cdot8$, $A=98^\circ29'\cdot6$ ナルトキ C, a ヲ求ム.　答. $65^\circ50'\cdot6$, 108295

(4) $a=37593$, $b=29867$, $c=40005$ ナルトキ A, B ヲ求ム.　答. $63^\circ9'\cdot2$, $45^\circ8'\cdot5$

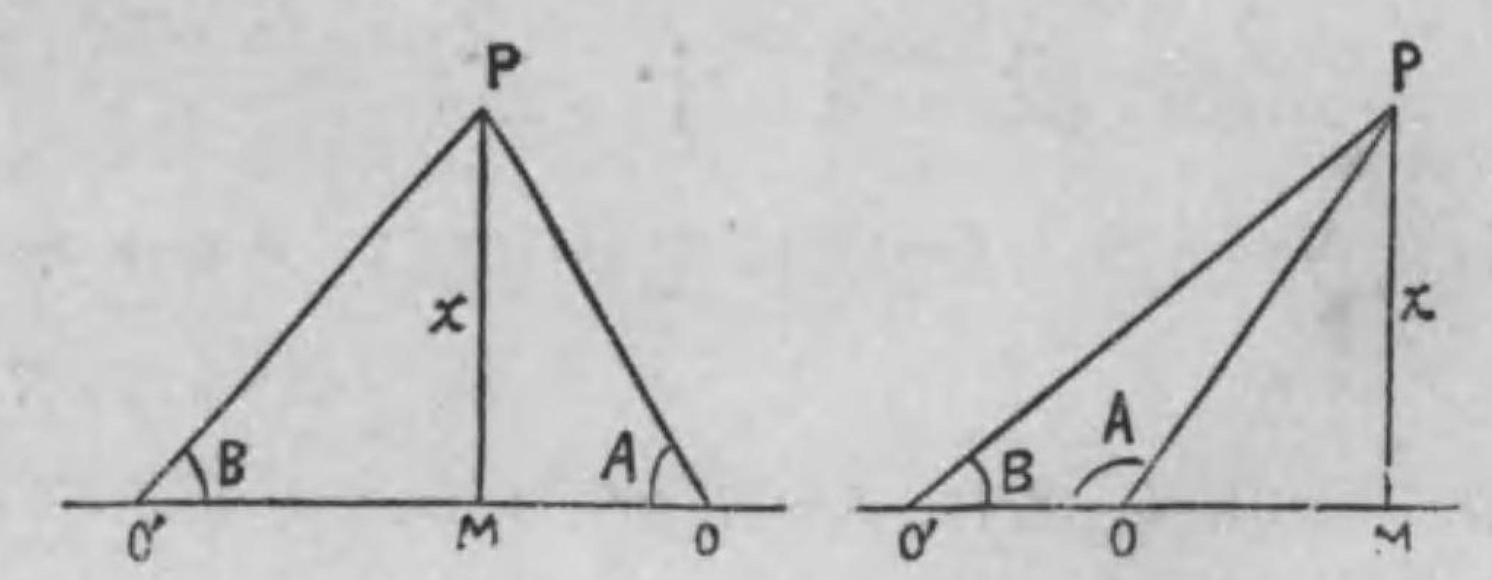
(5) a, b, A−B ヲ知リテ $\overset{\triangle}{ABC}$ ヲ解ク方法ヲ問フ.

(6) A, B, $a+b+c$ ヲ知リテ $\overset{\triangle}{ABC}$ ヲ解ク方法ヲ問フ

43. 距離及ビ高サノ測法.

直角三角形ノ解キ方ヲ應用シテ距離及ビ高サヲ測ル法ノ數例ハ既ニ之ヲ揭ゲタリ. 次ニ述ブル所ハ前ノモノヨリハ一般ニシテ實地ノ計算ニ便ナル方法ナリ.

例一. 達シ得ベカラザル一點ヨリ達シ得ベキ一直線ニ到ル距離ヲ求ムル法.



直線上ニ便宜ノ二點 O, O′ ヲ取リ其距離ヲ l トシ O, O′ ニ於テ P 點ヲ望ミ $O'\hat{O}P$, $O\hat{O'}P$ ヲ A, B トシ P ヨリ OO′ ニ作レル垂線 PM ノ數値ヲ x トセバ

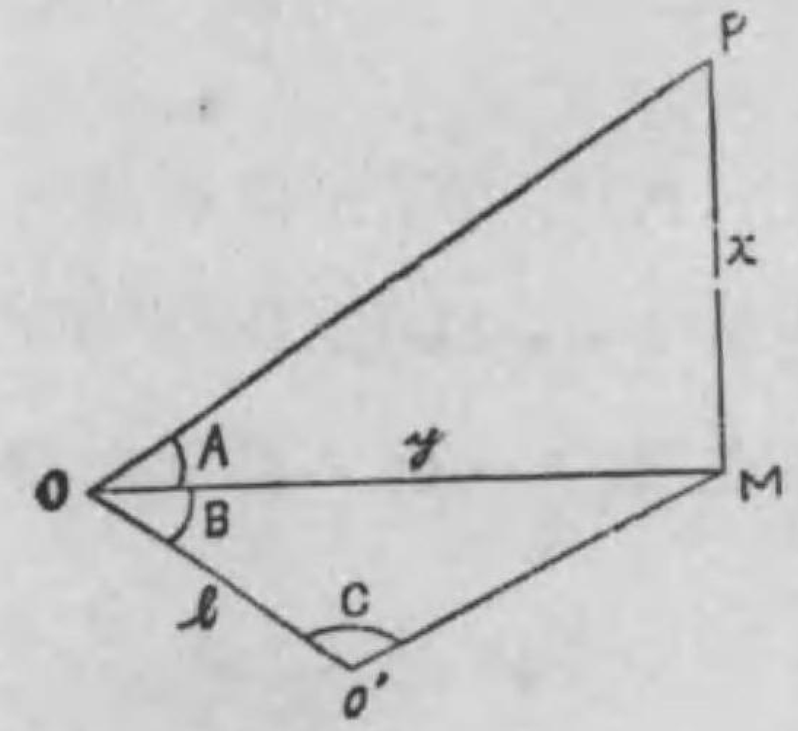
$$O\hat{O'}P \text{ ニ於テ } OP=\frac{OO'\sin O\hat{O'}P}{\sin O'\hat{P}O}=\frac{l\sin B}{\sin(A+B)}$$

又 $O\hat{M}P$ ニ於テ $MP=OP\sin M\hat{O}P=OP\sin A$

$$\therefore \quad x=\frac{l\sin A.\sin B}{\sin(A+B)}$$

系. 右圖ノ場合ヲ應用シテ直立セル物體ノ基礎ニ達シ得ザルトキ此物體(直線ト見做セル)ト同平面上ニ在ル地上ノ二點ニ於テ其頂點ノ仰角ヲ測リ此物體ノ高サヲ求メ從ツテ之ヨリ觀測點ニ到ル距離ヲ求ムルコトヲ得.

例二. 直立セル物體ノ基礎ニ達シ得ザルトキ地上ノ二點ニ於テ此物體ヲ觀測シ其高サ及ビ觀測點ニ到ル距離ヲ求ムル法.



便宜ノ一點Oニ於テ物體 MP ノ頂點ノ仰角 A ヲ測リ次ニ OM ト適宜ノ角 B ヲ成ス l ナル數値ノ水平線 OO′ ヲ設ケ $M\hat{O'}O$ ヲ測リ之ヲ C トシ OM, MP ヲ y, x トセバ

$$O\hat{M}O' \text{ ニ於テ } OM=\frac{OO'\sin M\hat{O'}O}{\sin O'\hat{M}O};$$

$$\text{即} \quad y=\frac{l\sin C}{\sin(B+C)}.$$

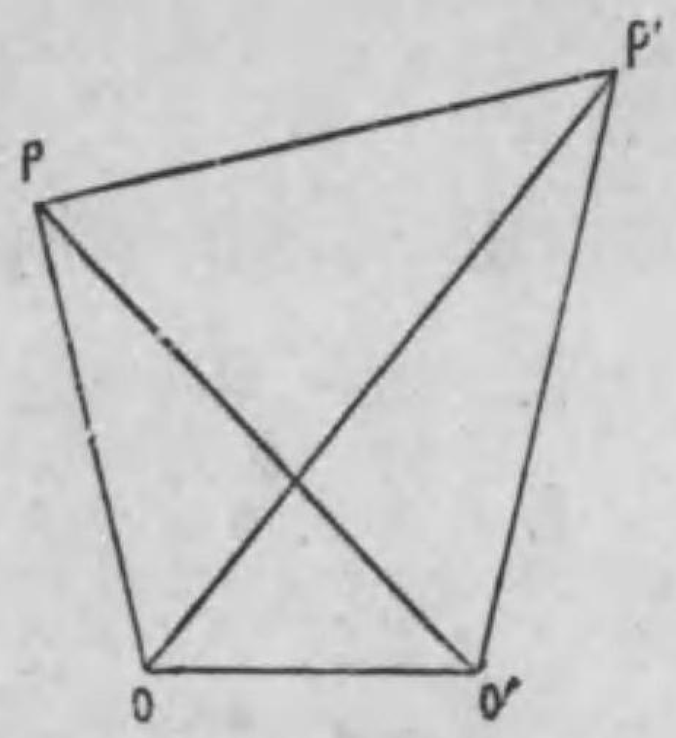
又 $O\hat{M}P$ ニ於テ $MP=OM\tan M\hat{O}P$;

$$\text{即} \quad x=\frac{l\sin C.\tan A}{\sin(B+C)}$$

例三. 達シ得ベカラザル二點ノ距離ヲ求ムル法.

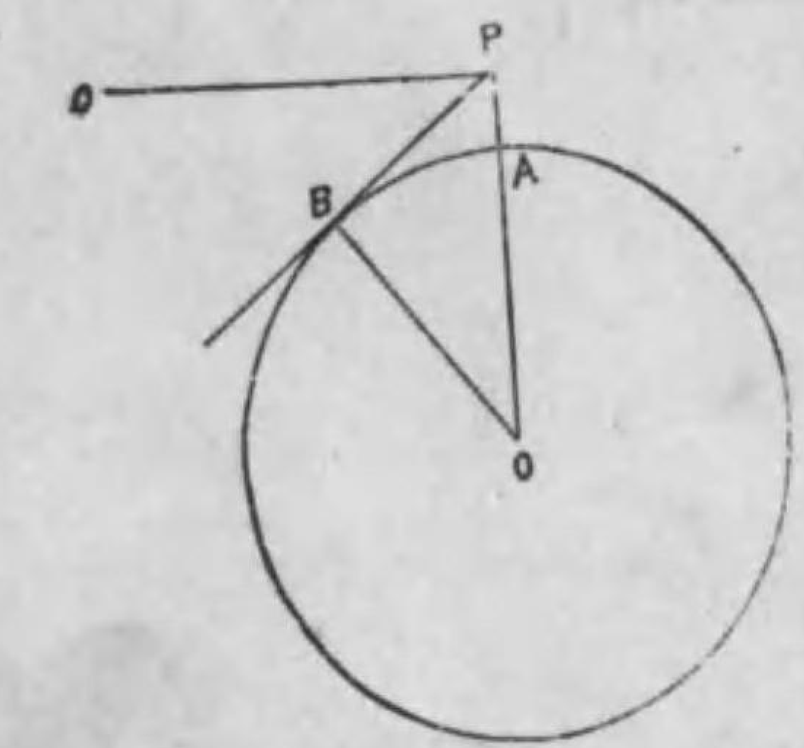
達シ得ベカラザル二點ヲ P, P′ トシ便宜ノ二點ヲ

O, O′ トシ OO′, $P\hat{O}O'$, $P'\hat{O}O'$, $P\hat{O}P'$, $O\hat{O'}P$, $O\hat{O'}P'$ ヲ測リ $O\hat{O'}P$ ニ於テ OP ヲ求メ次ニ $O\hat{O'}P'$ ニ於テ OP′ ヲ求メ最後ニ $P\hat{O}P'$ ニ於テ PP′ ヲ求ムベシ



注意. P, P′, O, O′ ガ同平面上ニ在ルトキハ $P\hat{O}P'$, $P\hat{O}O'$, $P'\hat{O}O'$ ノ中任意ノ一個ノ測量ヲ要セズ.

例四. 視水平ノ距離及ビ俯向.



左圖ニ於テ O ヲ地球ノ中心, P ヲ或高サノ觀測點, PB ヲ切線トスルトキ切點 B ノ軌跡ナル圓周ヲ視水平ト云ヒ角 BPO ヲ視水平ノ俯向ト云フ. 次ノ諸式ハ要用ナルモノナリ.

半徑ヲ r, 視水平ノ俯向ヲ D, 觀測點ノ高サヲ h, PB ヲ l トセバ

$$\cos D = \frac{r}{r+h}.$$

$$h = \frac{r(1-\cos D)}{\cos D}.$$

$$l = h\cot\frac{D}{2}.$$

設題十三.

(1) 人有リ其前方ニ立テル塔頂ノ仰角ヲ測リ 30° ヲ得夫レヨリ塔ニ向ヒテ 100 尺ヲ進ミタル後再ビ其頂ノ仰角ヲ測リ 75° ヲ得タリ, 塔ノ高サ幾何.

答. 68·3 尺.

(2) 高サ h 尺ナル塔ノ頂上ヨリ其一方ニ於テ塔脚ヲ過グル一水平線上ノ二物體ヲ望ミ俯角 45°−A 及ビ 45°+A ヲ得タリ; 二物體ノ距離幾何.

答. $2h.\tan 2A$ 尺.

(3) 人有リ北及ビ北 30° 西ノ方向ニ A, B 二物體ヲ望ミ夫レヨリ北西ノ方向ニ十町ヲ進ミタルニ A, B ノ方向ハ北東及ビ東トナレリ; A, B ノ距離幾何.

答. 8·16 町.

(4) 人有リ塔頂及ビ塔上ニ立テル高サ c 尺ノ旗

竿ノ上端ヲ望ミ仰角B及ビAヲ得タリ塔ノ高サ幾何. 答. $\frac{c\cos A.\sin B}{\sin(A-B)}$尺.

(5) 人有リ丘上ニ立テル塔ノ頂及ビ基礎ノ仰角ヲ測リA及ビBヲ得次ニ後方ニlナル距離ヲ退キテ再ビ塔頂ノ仰角ヲ測リCヲ得タリ;丘上ニ於ケル塔ノ高サ及ビ丘ノ高サ幾何.

答. $\frac{l\sin C.\sin(A-B)}{\cos B.\sin(A-C)}$, $\frac{l\cos A.\tan B.\sin C}{\sin(A-C)}$.

(6) BCDナル塔ノ上ニ立テル旗竿DE有リ,Bヲ過グル水平線上ノ一點Aニ於テ之ヲ觀測シ$B\hat{A}C=D\hat{A}E$ナルコトヲ知リタリ,今BC=9; CD=72, DE=36トセバBAハ幾何ナルカ. 答. 56·2.

(7) 山麓ニ於テ其頂上ニ立テル巖ノ上端ノ仰角ヲ測リ47°ヲ得夫レヨリ之ニ向ヒテ32°ノ傾斜角ヲ成ス直線狀ノ坂路ヲ登ルコト1000尺ニシテ再ビ巖ノ仰角ヲ測リ77°ヲ得タリ;初メノ測點ヨリ巖ノ高キコト幾何ナルカ. 但$\sin 47°=\cdot731$. 答. 1034尺.

(8) 南59°5′東ノ方向ヲ成セル高サ20尺ノ土壁有リ,太陽ガ南30°ノ高度ニ在ルトキ此壁ノ影ノ幅ハ幾何ナルカ. 但$\log 3=\cdot 47712$, $\log 29719=4\cdot 47303$, $\log\sin 59°5'=\bar{1}\cdot 93344$. 答. 29·7尺.

(9) 北ニ走ル船ヨリ二個ノ燈臺ヲ北東及ビ北北東ノ方向ニ望ミ夫レヨリ20哩ヲ走リタル後再ビ二燈臺ヲ望ミタルニ何レモ東ノ方向ニ在リタリ;二燈臺ノ距離幾何. 但$\log 8\cdot 2842=91825$, $\log\tan 22°30'=\bar{1}\cdot 61722$, $\log 2=\cdot 30103$. 答. 11·7哩.

(10) 塔ノ南ノ一地ニ於テ其頂ノ仰角ヲ測リ30°ヲ得次ニ此地ヨリ西ノ方向ニaナル距離ヲ歩ミテ再ビ塔ノ仰角ヲ測リ18°ヲ得タリ;塔ノ高サ幾何.

答. $\frac{a}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$.

(11) ALBナル塔ヨリ48尺ノ距離ニ在ル高サ14尺ノ臺上Cヨリ此塔ヲ望ミ$A\hat{C}L=L\hat{C}B$ナルコトヲ知リタリ,AL=30尺ナルトキ塔ノ高サ幾何.

答. 78尺.

(12) 南西ノ方向ニ走ル船ヨリ碇泊セル二船ヲ北北西及ビ西北西ニ望ミ夫レヨリ5哩ヲ走リテ再ビ二船ヲ望ミタルニ其方向ハ北及ビ北西ト成レリ.二船ノ距離幾何. 答. 9·239哩.

(13) 二點P, Q有リ,Pノ南ノ一地Mニ於テ之ヲ

望ミ$\widehat{PMQ}=A$ナルコトヲ知リ次ニMヨリ西ニaヲ歩ミテNニ到リ$\widehat{PNQ}=A$ナルコトヲ知リ猶同方向ニbヲ進ミテQノ南ニ達セリ; P, Qノ距離幾何.

答. $\sqrt{(a+b)^2+b^2\tan^2 A}$.

(14) EDナル塔ノ上ニ立テル旗竿DC有リ,塔脚Eヲ過グル水平線上ノ一點Pニ於テ之ヲ望ミ$\widehat{EPD}=B$, $\widehat{DPC}=A$ナルコトヲ知リ次ニPヨリEニ向ヒテcヲ進ミテQニ到リ再ビ之ヲ望ミ$\widehat{DQC}=A$ナルコトヲ知リタリ,然ルトキハ塔ノ高サハ$\dfrac{c\tan B}{1-\tan B.\tan(A+B)}$ナルコトヲ證セヨ.

(15) BCナル塔ノ上ニ立テル旗竿CDガBヨリcナル距離ノ一地ニ於テ最大角AヲナストキハBC$=c\tan\left(45^\circ-\dfrac{A}{2}\right)$, CD$=2c\tan A$ナルコトヲ證セヨ.

第八章.

弧度法.

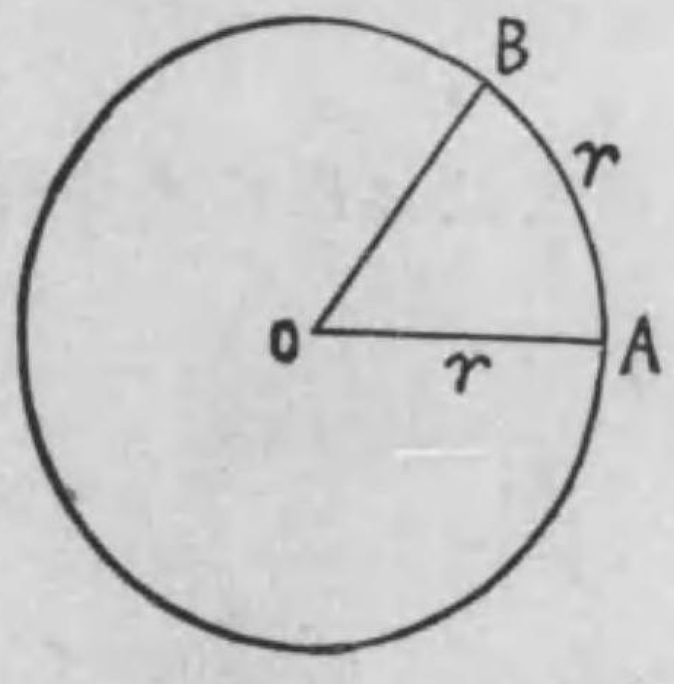
44. 定義.

任意ノ圓ニ於テ半徑ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ一定ノ大サヲ有ス此角ヲらぢあんト云フ.

中心O,半徑rナル圓ニ於テ$\widehat{AB}=r$トセバ

$$\frac{A\hat{O}B}{2\text{直角}}=\frac{\widehat{AB}}{\text{半圓周}}=\frac{r}{\pi r}=\frac{1}{\pi},$$

$$\therefore\ A\hat{O}B=\frac{1}{\pi}\times(2\text{直角}).$$



らぢあんヲ單位トシテ角ヲ計リθナル値ヲ得タルトキハ此角ハθらぢあんナリ或ハ其弧度ハθナリト云ヒ此計リ方ヲ弧度法ト云フ.

弧度法ハ理論上ノ講究ニ於テ一般ニ之ヲ用フ.

注意一. 半徑 r ナル圓ニ於テ l ナル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ弧度ハ $\frac{l}{r}$ ナリ.

注意二. 二直角ノ弧度ハ π ナリ從テ $\frac{\pi}{2}$, 2π ハ直角及ビ四直角ノ弧度ナリ.

注意三. 一らぢあんハ凡ソ $57°17'44''·8$ ナリ.

45 弧度法ト六十分法トノ關係.

或角ノ弧度及ビ度數ヲ θ 及ビ D トセバ前條ニ依リ次ノ關係有ルコトヲ知リ得ベシ.

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{D}{180}.$$

上ノ關係ニ依リ任意ノ角ノ弧度及ビ度數ヲ相轉化スルコトヲ得.

設題十四.

(1) $35'30''$ ノ弧度ヲ求メヨ. 答. 01033.

(2) $\frac{\pi}{13}$ ノ度數ヲ求メヨ. 答. $13°·846153$.

(3) 圓ノ直徑ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ中心角ヲ單位トセバ直角ノ三分ノ一ノ値如何. 答. $\frac{\pi}{12}$.

(4) n 邊ヲ有スル正多角形ノ一內角ノ弧度ハ如何. 答. $\frac{(n-2)\pi}{n}$.

(5) 半徑4尺ノ圓ニ於テ十尺ノ弧ノ上ニ立ツ中心角ヲ六十分法ニテ表セ. 答. $143°14'20''·8$.

(6) 地球ノ直徑ヲ7900哩トシ此直徑ガ太陽ニ於テ張ル角ヲ $17''8$ トシ太陽ノ光リガ $8^m13^s·3$ ニシテ地球ニ達スルトセバ光リノ速度凡ソ幾何ナルカ.

答. 每秒185575哩.

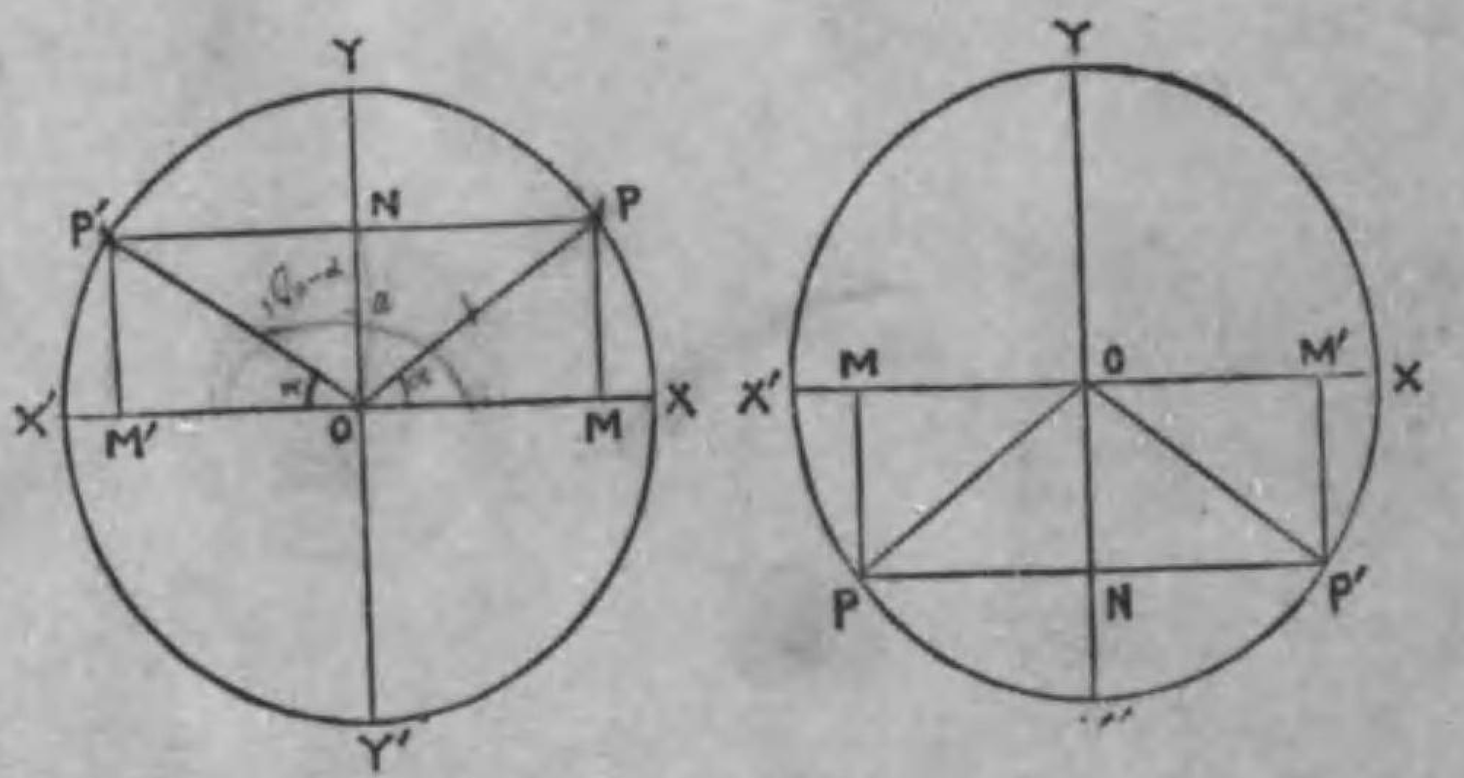
第　九　章.

三角函數方程式.

46. 定義.

未知角ノ三角函數ト已知數トノ關係ヲ表ス方程式ヲ三角函數方程式ト云ヒ此ノ如キ方程式ニ適スル角ヲ求ムルコトヲ之ヲ解クト云ヒ所得ノ角ヲ其解ト云フ.

47. $\sin\theta=a$ ノ解.



O ヲ中心トシ單位長ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ互ニ

垂直ナル二直經XX′, YY′ヲ作リ YY′上ニ於テ a ニ等シク ON ヲ取リ N ヲ過ギX′X ニ平行スル弦ノ兩端ヲ P′, P トシ之ヲ O ニ連ネ X′X ニ垂線PM, P′M′ヲ作ルトキハ $\dfrac{MP}{OP}=\dfrac{a}{1}=\dfrac{M'P'}{OP'}$ ナナル以テ OX ヲ首線トシ OP 或ハ OP′ヲ廻線トセル角ハ何レモ a ナル正弦ヲ有シ其他ノ角ハ然ラズ.

今 OP ヲ廻線トセル一個ノ角ヲ α トセバ OP′ヲ廻線トセル一個ノ角ハ $\pi-\alpha$ ニシテ $2m\pi+\alpha$ 及ビ $2m\pi+\pi-\alpha$ 即 $(2m+1)\pi-\alpha$ ハ OP, OP′ヲ廻線トセル總ベテノ角ヲ表ス; 但 m ハ零若シクハ任意ノ整數ナリ (以下之ニ準ズ).

然ルニ $2m\pi+\alpha$ 及ビ $(2m+1)\pi-\alpha$ ハ $n\pi+(-1)^n\alpha$ ナル式ニテ表サル; 但 n ハ零若シクハ任意ノ整數ナリ (以下之ニ準ズ).

故ニ $\sin\theta=a$ ノ解ハ $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$ ナリ.

注意. α ニハ方程式ニ適スル最小數値ノ角ヲ用フルヲ便宜トス (以下之ニ準ズ).

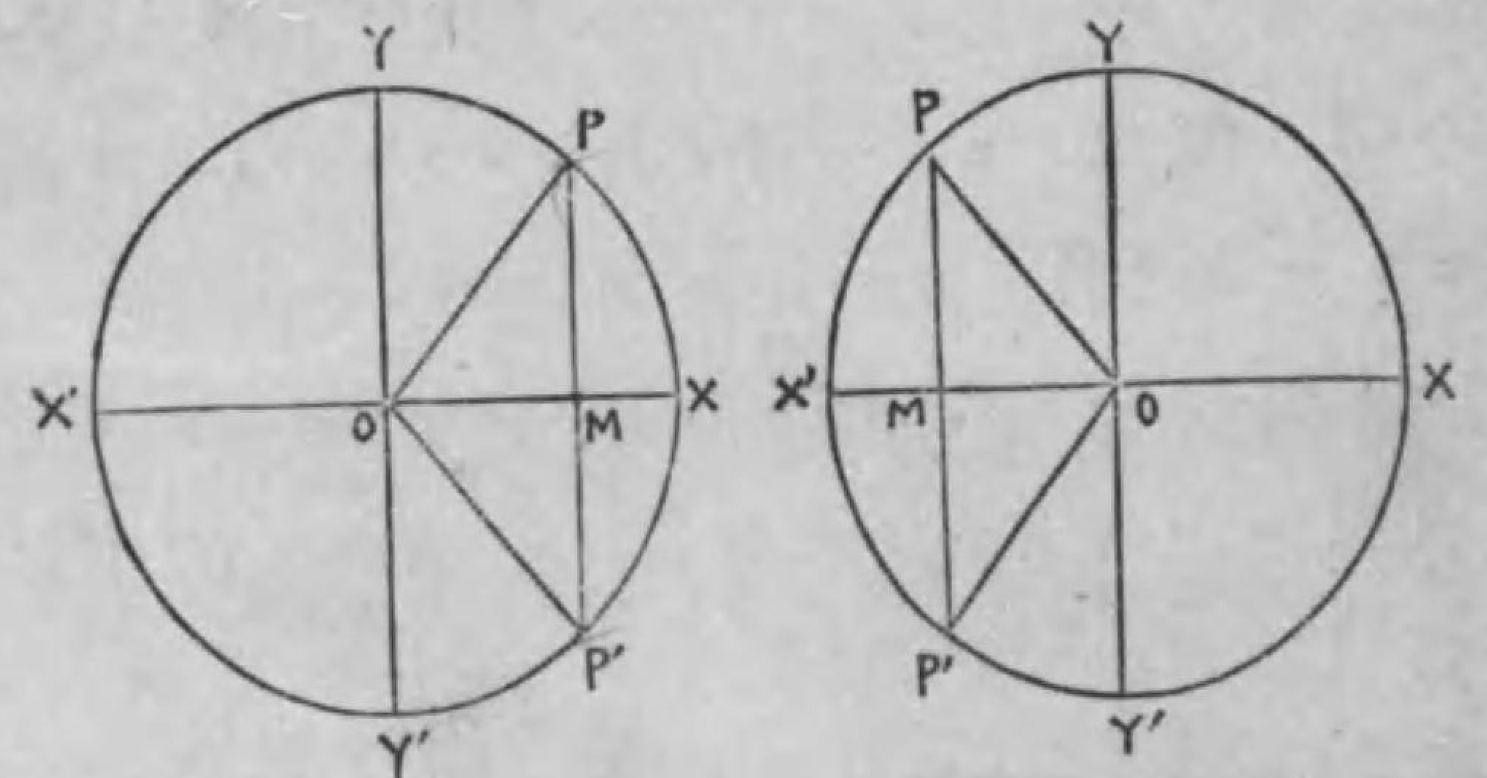
系一. $a=0$ ナルトキハ　　$\theta=n\pi$,

$a=1$ ナルトキハ　　$\theta=(4n+1)\dfrac{\pi}{2}$,

$a=-1$ ナルトキハ $\theta=(4n-1)\frac{\pi}{2}$.

系二. aナル餘割ヲ有スル一角ヲαトセバ $\mathrm{cosec}\,\theta=a$ ノ解ハ $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$ ナリ.

48. $\cos\theta=a$ ノ解.



Oヲ中心トシ單位長ノ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ互ニ垂直ナル二直徑XX', YY'ヲ作リXX'上ニ於テaニ等シクOMヲ取リMヲ過ギXX'ニ垂直ナル弦ノ兩端ヲP, P'トシ之ヲOニ連ヌルトキハ $\frac{OM}{OP}=\frac{a}{1}=\frac{OM}{OP'}$ ナルヲ以テOXヲ首線トシOP或ハOP'ヲ廻線トセル角ハ何レモaナル餘弦ヲ有シ其他ノ角ハ然ラズ.

今OPヲ廻線トセル一個ノ角ヲαトセバOP'ヲ廻線トセル一個ノ角ハ$-\alpha$ニシテ $2n\pi+\alpha$ 及ビ $2n\pi-\alpha$ ハ

OP, OP'ヲ廻線トセル總ベテノ角ヲ表ス.

故ニ $\cos\theta=a$ ノ解ハ $\theta=2n\pi\pm\alpha$ ナリ.

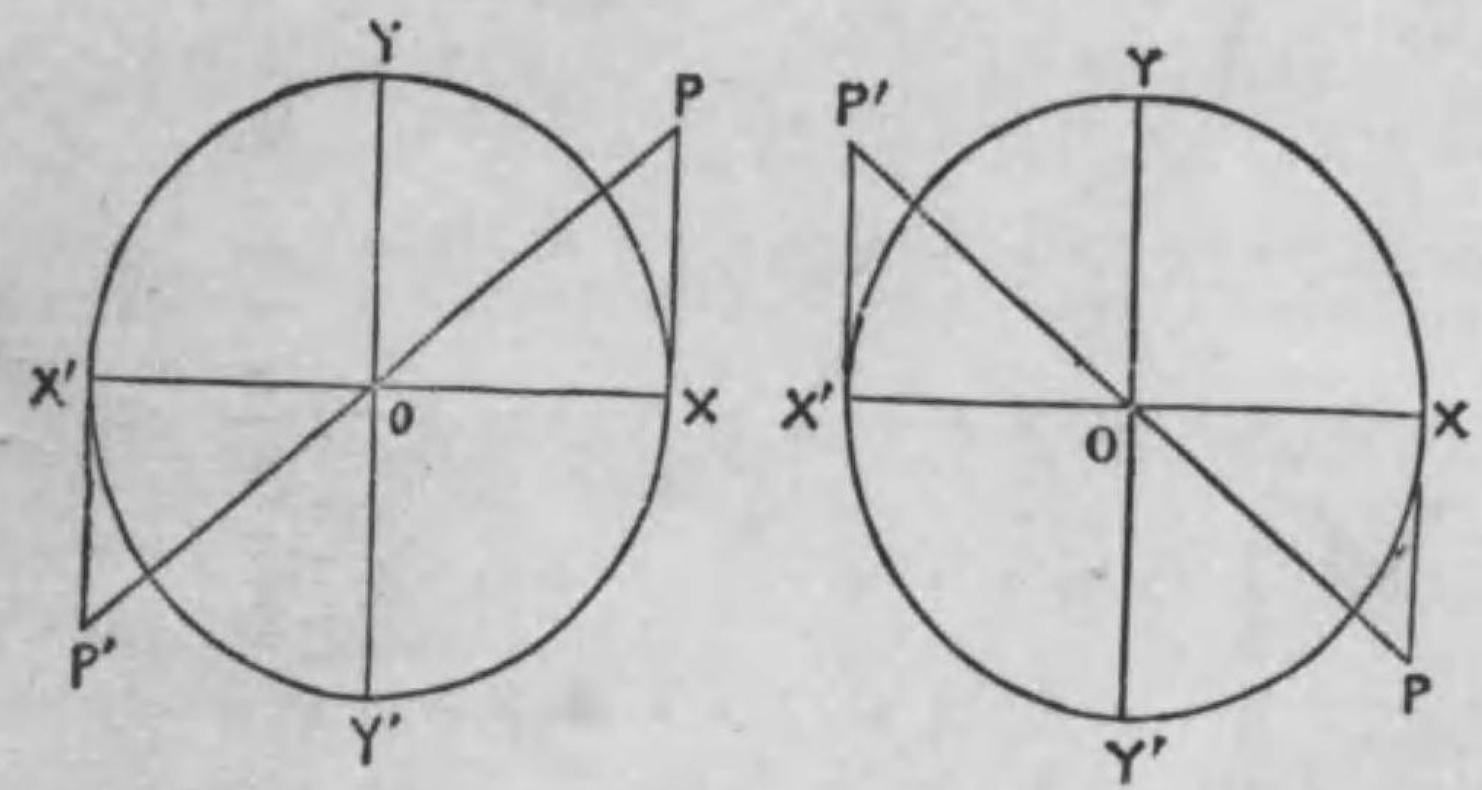
系一. $a=0$ ナルトキハ $\alpha=(2n+1)\frac{\pi}{2}$,

$a=1$ ナルトキハ $\theta=2n\pi$.

$a=-1$ ナルトキハ $\theta=(2n+1)\pi$.

系二. aナル正割ヲ有スル一角ヲαトセバ $\sec\theta=a$ ノ解ハ $2n\pi\pm\alpha$ ナリ.

49. $\tan$ = ノ解.



Oヲ中心トシ單位長ノ半徑ヲ以テ圓ヲ書キX'OXナル直經ヲ作リX, X'ニ於テ此直徑ニ垂線XP, X'P'ヲ作リXP=a, X'P'=$-a$ナラシメP, P'ヲOニ連ヌルトキハ $\frac{XP}{OX}=\frac{a}{1}=\frac{X'P'}{OX'}$ ナルヲ以テOXヲ首線トシOP或ハOP'

ヲ廻線トセル角ハ何レモaナル正切ヲ有シ其他ノ角ハ然ラズ,

今OPヲ廻線トセル一個ノ角ヲαトセバOP′ヲ廻線トセル一個ノ角ハ$\pi+\alpha$ニシテ$2m\pi+\alpha$及ビ$2m\pi+\pi+\alpha$即$(2m+1)\pi+\alpha$ハOP, OP′ヲ廻線トセル總ベテル角ヲ表ス.

然ルニ$2m\pi+\alpha$及ビ$(2m+1)\pi+\alpha$ハ$n\pi+\alpha$ナル式ニテ表サル.

故ニ $\tan\theta=a$ ノ解ハ $\theta=n\pi+\alpha$ ナリ.

系一. $a=0$ナルトキハ　　$\theta=n\pi$,

$a=1$ナルトキハ　　$\theta=(4n+1)\dfrac{\pi}{4}$

$a=-1$ナルトキハ　　$\theta=(4n-1)\dfrac{\pi}{4}$

$a=\infty$ナルトキハ　　$\theta=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

系二. aナル餘切ヲ有スル一角ヲαトセバ$\cot\theta=a$ノ解ハ$\theta=n\pi+\alpha$ナリ.

51. 逆三角函數.

aナル正弦ヲ有スル角ヲaノ逆正弦ト云ヒ$\sin^{-1}a$或ハ$\arcsin a$ヲ以テ之ヲ表ス. 逆餘弦, 逆正切, 逆餘切, 逆正割, 逆餘割等之ニ準ス. 此六種ノモノヲ總稱シ

テaノ逆三角函數或ハ逆圓函數ト云フ.

$\sin^{-1}a$. $\cos^{-1}a$, $\tan^{-1}a$, $\cot^{-1}a$, $\sec^{-1}a$, $\mathrm{cosec}^{-1}a$ハ何レモ無數ノ値ヲ有ス, 而シテ$\sin^{-1}a$, $\tan^{-1}a$, $\cot^{-1}a$, $\mathrm{cosec}^{-1}a$ニ於テハaト同符號ナル最小數値ノモノ又$\cos^{-1}a$, $\sec^{-1}a$ニ於テハ其最小正數値ノモノヲ主値ト云ヒ一般ノ値ト區別スルタメニ首文字ヲ大書ス例ヘバ$\mathrm{Sin}^{-1}a$ノ如シ.

51. 三角函數方程式ノ一般ノ解法.

三角函數方程式ヲ解ク一般ノ方法ハ先ヅ既知ノ公式ニ依リ與ヘラレタル方程式ヲ變形シテ之ヨリ未知角ノ三角函數ノ値ヲ求メ次ニ前三條ニ述ベタル結果ニ依リテ未知角ヲ求ムルニ在リ. 方程式ヲ便宜ノ形ニ化スルニハ一般ノ法則無シ;唯練習ニ依リテ之ヲ自得スベキノミ.

三角函數ヲ含メル式ヲ三角函數方程式ノ兩邊ニ乘ズルコト(兩邊ヲ方乘スルコトヲモ含ム)ハ一般ニ餘分ノ解ヲ誘導スルヲ以テ成ルベク之ヲ避クベシ; 若シ已ムヲ得ズシテ之ヲ行フ場合ニ於テハ先ヅ其差支無キヤ否ヤヲ吟味スルカ或ハ此ノ如クシテ得

タル解ノ與ヘラレタル方程式ニ適スルヤ否ヤヲ吟味スベシ.

次ニ二三ノ例ヲ擧ゲテ解法ノ一斑ヲ示スベシ.

例一. $cosec\theta-4sin\theta=2$ ヲ解ケ.

解.

此場合ニ於テハ $sin\theta\neq0$ ナルヲ以テ $sin\theta$ ヲ兩邊ニ乘ジ $1-4sin^2\theta=2sin\theta$ ヲ得.

$$\therefore \quad 4sin^2\theta+2sin\theta-1=0,$$

$$sin\theta=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\therefore \quad \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{10} \text{ 或ハ } n\pi-(-1)^n\frac{3\pi}{10}.$$

例二. $2sin\theta.sin3\theta=1$ ヲ解ケ.

解.

$$2sin\theta.sin3\theta=cos2\theta-cos4\theta,$$

$$\therefore \quad cos2\theta-cos4\theta=1,$$

$$\therefore \quad cos2\theta=1+cos4\theta=2cos^2 2\theta,$$

$$\therefore \quad cos2\theta(2cos2\theta-1)=0$$

$$\therefore \quad cos2\theta=0 \text{ 或ハ } cos2\theta=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \quad 2\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}, 2n\pi\pm\frac{\pi}{3};$$

$$\therefore \quad \theta=(2n+1)\frac{\pi}{4}, \ n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

例三. α ガ已知角ナルトキ $cot\theta-tan\theta=cot\alpha-tan\alpha$ ヲ解ケ.

解.

$$cot\theta-tan\theta=2cot2\theta, \ cot\alpha-tan\alpha=2cot2\alpha$$

$$\therefore \quad 2cot2\theta=2cot2\alpha,$$

$$\therefore \quad cot2\theta=cot2\alpha,$$

$$\therefore \quad 2\theta=n\pi+2\alpha,$$

$$\therefore \quad \theta=\frac{n\pi}{2}+\alpha,$$

例四. $acos\theta+bsin\theta=1$ ノ解法如何.

解.

$$a(cos\theta+\frac{b}{a}sin\theta)=1,$$

$\frac{b}{a}$ ナル正切ヲ有スル一個ノ角ヲ α トセバ

$$a(cos\theta+tan\alpha.sin\theta)=1,$$

$$\text{即} \quad a.\frac{cos\theta.cos\alpha+sin\theta.sin\alpha}{cos\alpha}=1,$$

$$\therefore \quad cos(\theta-\alpha)=\frac{cos\alpha}{a};$$

$\frac{cos\alpha}{a}$ ナル餘弦ヲ有スル一個ノ角ヲ β トセバ

$$\theta-\alpha=2n\pi\pm\beta,$$

$$\therefore \quad \theta=2n\pi+\alpha\pm\beta.$$

設題十五.

次ノ方程式ヲ解ケ.

(1) $\sec^2\theta-2\tan^2\theta=2.$ 答. $(2n\pm1)\frac{\pi}{3}.$

(2) $\cos2\theta+2\sin^2 2\theta=1.$ 答. $\frac{n\pi}{3}.$

(3) $\sec^2\theta+3\,\mathrm{cosec}^2\theta=8.$ 答. $(2n+1)\frac{\pi}{4},\ (3n\pm1)\frac{\pi}{3}.$

(4) $\tan\theta+\tan3\theta=2\tan2\theta.$ 答. $n\pi.$

(5) $2\cot2\theta-\tan2\theta=3\cot3\theta.$ 答. $n\pi.$

(6) $8\cot\theta=\sec^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{cosec}^2\frac{\theta}{2}.$ 答. $(4n+1)\frac{\pi}{4}.$

(7) $\tan\theta+\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=2.$ 答. $(3n\pm1)\frac{\pi}{3}.$

(8) $6\cot^2\theta=1+4\cos^2\theta.$ 答. $(3n\pm1)\frac{\pi}{3}.$

(9) $3(\sin^4\theta-\cos^4\theta)+4\cos^6\theta=\cos^3 2\theta.$ 答. $n\pi.$

(10) $\mathrm{cosec}3\theta+\mathrm{cosec}2\theta=\sin2\theta.\mathrm{cosec}\theta.\mathrm{cosec}3\theta.$

答. $(6n\pm1)\frac{\pi}{3}.$

(11) $\sin\theta-\cos\theta=4\cos^2\theta.\sin\theta.$ 答. $(4n-1)\frac{\pi}{4},\ (4n-1)\frac{\pi}{8}$

(12) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}.$ 答. $(24n+4\pm3)\frac{\pi}{12}.$

(13) $\tan2\theta=8\cos^2\theta-\cot\theta.$ 答 $(2n+1)\frac{\pi}{2},\ \{6n+(-1)^n\}\frac{\pi}{24}.$

(14) $\tan(\frac{\pi}{4}+\theta)=1+\sin2\theta.$ 答. $(4n-1)\frac{\pi}{4},\ n\pi.$

(15) $\cot\frac{\pi}{12}.\cos\theta+\sin\theta=1.$ 答. $(4n+1)\frac{\pi}{2},\ (6n-1)\frac{\pi}{3}.$

(16) $\sec4\theta-\sec\theta=2$ 但 $\cos2\theta.\cos4\theta\neq0.$ 答. $(2n+1)\frac{\pi}{10}.$

(17) $\tan\theta+\sec2\theta=1.$ 答. $n\pi,\ (4n-1)\frac{\pi}{8}.$

(18) $(1-\tan\theta)(1+\sin2\theta)=1+\tan\theta.$ 答. $n\pi,\ (4n-1)\frac{\pi}{4}.$

(19) $2\sin2\theta-4\sin(\theta+\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}=0.$

答. $(6n-1)\frac{\pi}{6},\ (12n+1)\frac{\pi}{6}.$

(20) $\sin5\theta+\sin3\theta+\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta=0.$

答. $(2n+1)\frac{\pi}{2},\ (8n-1)\frac{\pi}{20},\ (8n+5)\frac{\pi}{12}.$

(21) 逆三角函數ノ各一種ヲ他ノモノニ化スル方法如何.

(22) $\sin^{-1}a\pm\sin^{-1}b,\ \cos^{-1}a\pm\cos^{-1}b,\ \tan^{-1}a\pm\tan^{-1}b,$ $\cot^{-1}a\pm\cot^{-1}b$ ヲ各一個ノ逆三角函數ニ化セヨ.

(23) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3},\quad 2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7},$

$4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239},\quad \tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8},$

$4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}$ ハ何レモ $\frac{\pi}{2}$ ニ等シキコトヲ
證セヨ.

畢.

附録

十分置キノ角

ノ

三角函數

ノ

五桁ノ眞數

(0°–90°)

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
0° 0'	·00000	·00000	1·0000	∞	∞	1·00000	0' 90°
10'	·00291	·00291	1·0000	343·78	343·77	1·00000	50'
20'	00582	·00582	1·0000	171·89	171·89	·99998	40'
30'	·00873	·00873	1·0000	114·59	114·59	·99996	30'
40'	·01164	·01164	1·0001	85·946	85·940	·99993	20'
50'	·01454	·01455	1·0001	68·757	68·750	·99989	10'
1° 0'	·01745	·01746	1·0002	57·299	57·290	·99985	0' 89°
10'	·02036	·02036	1·0002	49·114	49·104	·99979	50'
20'	·02327	·02328	1·0003	42·976	42·964	·99973	40'
30'	·02618	·02619	1·0003	38·202	38·188	·99966	30'
40'	·02908	·02910	1·0004	34·382	34·368	·99958	20'
50'	·03199	·03201	1·0005	31·258	31·242	·99949	10'
2° 0'	·03490	·03492	1·0006	28·654	28·636	·99939	0' 88°
10'	·03781	·03783	1·0007	26·451	26·432	·99929	50'
20'	·04071	·04075	1·0008	24·562	24·542	·99917	40'
30'	·04362	·04366	1·0010	22·926	22·904	·99905	30'
40'	·04653	·04658	1·0011	21·494	21·470	·99892	20'
50'	·04943	·04949	1·0012	20·230	20·206	·99878	10'
3° 0'	·05234	·05241	1·0014	19·107	19·081	·99863	0' 87°
10'	·05524	·05533	1·0015	18·103	18·075	·99847	50'
20'	05814	·05824	1·0017	17·198	17·169	·99831	40'
30'	·06105	·06116	1·0019	16·380	16·350	·99813	30'
40'	·06395	·06408	1·0021	15·637	15·605	·99795	20'
50'	·06685	·06700	1·0022	14·958	14·924	·99776	10'
4° 0'	·06976	06993	1·0024	14·336	14·301	·99756	0' 86°
10'	·07266	·07285	1·0027	13·763	13·727	·99736	50'
20'	·07556	·07578	1·0029	13·235	13·197	·99714	40'
30'	·07846	·07870	1·0031	12·745	12·706	·99692	30'
40'	·08136	·08163	1·0033	12·291	12·251	·99668	20'
50'	·08426	·08456	1·0036	11·868	11·826	·99644	10'
5° 0'	·08716	·08749	1·0038	11·474	11·430	·99619	0' 85°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
5° 0'	·08716	·08749	1·0038	11·474	11·430	·99619	0' 85°
10'	·09005	·09042	1·0041	11·105	11·059	·99594	50'
20	·09295	·09335	1·0043	10·758	10·712	·99567	40'
30'	·09585	·09629	1·0046	10·433	10·385	·99540	30'
40'	·09874	·09923	1·0049	10·128	10·078	·99511	20'
50'	·10164	·10216	1·0052	9·8391	9·7882	·99482	10'
6° 0'	·10453	·10510	1·0055	9·5668	9·5144	·99452	0' 84°
10'	·10742	·10805	1·0058	9·3092	9·2553	·99421	50'
20'	·11031	·11099	1·0061	9·0652	9·0098	·99390	40'
30'	·11320	·11394	1·0065	8·8337	8·7769	·99357	30'
40'	·11609	·11688	1·0068	8·6138	8·5555	·99324	20'
50'	·11898	·11983	1·0072	8·4047	8·3450	·99290	10'
7° 0'	·12187	·12278	1·0075	8·2055	8·1443	·99255	0' 83°
10'	·12476	·12574	1·0079	8·0156	7·9530	·99219	50'
20'	·12764	·12869	1·0082	7·8344	7·7704	·99182	40'
30'	·13053	·13165	1·0086	7·6613	7·5958	·99144	30'
40'	·13341	·13461	1·0090	7·4957	7·4287	99106	20'
50'	·13629	·13758	1·0094	7·3372	7·2687	·99067	10'
8° 0'	·13917	·14054	1·0098	7·1853	7·1154	·99027	0' 82°
10'	·14205	·14351	1·0102	7·0396	6·9682	·98986	50'
20'	·14493	·14648	1·0107	6·8998	6·8269	·98944	40'
30'	·14781	·14945	1·0111	6·7655	6·6912	·98902	30'
40'	·15069	·15243	1·0116	6·6363	6·5606	·98858	20'
50'	·15356	·15540	1·0120	6·5121	6·4348	·98814	10'
9° 0'	·15643	·15838	1·0125	6·3925	6·3138	·98769	0' 81°
10'	·15931	·16137	1·0129	6·2772	6·1970	·98723	50'
20'	·16218	·16435	1·0134	6·1661	6·0844	·98676	40'
30'	·16505	·16734	1·0139	6·0589	5·9758	·98629	30'
40'	·16792	·17033	1·0144	5·9554	5·8708	·98580	20'
50'	·17078	·17333	1·0149	5·8554	5·7694	·98531	10'
10° 0'	·17365	·17633	1·0154	5·7588	5·6713	98481	0' 80°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos		
10° 0′	·17365	·17633	1·0154	5·7588	5·6713	·98481	0′	**80°**
10′	·17651	·17933	1·0160	5·6653	5·5764	·98430	50′	
20′	·17937	·18233	1·0165	5·5749	5·4845	·98378	40′	
30′	·18224	·18534	1·0170	5·4874	5·3955	·98325	30′	
40′	·18509	·18835	1·0176	5·4026	5·3093	·98272	20′	
50′	·18795	·19136	1·0181	5·3205	5·2257	·98218	10′	
11° 0′	·19081	·19438	1·0187	5·2408	5·1446	·98163	0′	**79°**
10′	·19366	·19740	1·0193	5·1636	5·0658	·98107	50′	
20′	·19652	·20042	1·0199	5·0886	4·9894	·98050	40′	
30′	·19937	·20345	1·0205	5·0159	4·9152	·97992	30′	
40′	·20222	·20648	1·0211	4·9452	4·8430	·97934	20′	
50′	·20507	·20952	1·0217	4·8765	4·7729	·97875	10′	
12° 0′	·20791	·21256	1·0223	4·8097	4·7046	·97815	0′	**78°**
10′	·21076	·21560	1·0230	4·7448	4·6382	·97754	50′	
20′	·21360	·21864	1.0236	4·6817	4·5736	·97692	40′	
30′	·21644	·22169	1·0243	4·6202	4·5107	·97630	30′	
40′	·21928	·22475	1·0249	4·5604	4·4494	·97566	20′	
50′	·22212	·22781	1·0256	4·5022	4·3897	·97502	10′	
13° 0′	·22495	·23087	1·0263	4·4454	4·3315	·97437	0′	**77°**
10′	·22778	·23393	1·0270	4·3901	4·2747	·97371	50′	
20′	·23062	·23700	1·0277	4·3362	4·2193	·97304	40′	
30′	·23345	·24008	1·0284	4·2837	4·1653	·97237	30′	
40′	·23627	·24316	1·0291	4·2324	4·1126	·97169	20′	
50′	·23910	·24624	1·0299	4·1824	4·0611	·97100	10′	
14° 0′	·24192	·24933	1·0306	4·1336	4·0108	·97030	0′	**76°**
10′	·24474	·25242	1·0314	4·0859	3·9617	·96959	50′	
20′	·24756	·25552	1·0321	4·0394	3·9136	·96887	40′	
30′	·25038	·25862	1·0329	3·9939	3·8667	·96815	30′	
40′	·25320	·26172	1·0337	3·9495	3·8208	·96742	20′	
50′	·25601	·26483	1·0345	3·9061	3·7760	·96667	10′	
15° 0′	·25882	·26795	1·0353	3·8637	3·7321	·96593	0′	**75°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角	

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos		
15° 0′	·25882	·26795	1·0353	3·8637	3·7321	·96593	0′	**75°**
10′	·26163	·27107	1·0361	3·8222	3·6891	·96517	50′	
20′	·26443	·27419	1·0369	3·7817	3·6470	·96440	40′	
30′	·26724	·27732	1·0377	3·7420	3·6059	·96363	30′	
40′	·27004	·28046	1·0386	3·7032	3·5656	·96285	20′	
50′	·27284	·28360	1·0394	3·6652	3·5261	·96206	10′	
16° 0′	·27564	·28675	1·0403	3·6280	3·4874	·96126	0′	**74°**
10′	·27843	·28990	1·0412	3·5915	3·4495	·96046	50′	
20′	·28123	·29305	1·0421	3·5559	3·4124	·95964	40′	
30′	·28402	·29621	1·0429	3·5209	3·3759	·95882	30′	
40′	·28680	·29938	1·0439	3·4867	3·3402	·95799	20′	
50′	·28959	·30255	1·0448	3·4532	3·3052	·95715	10′	
17° 0′	·29237	·30573	1·0457	3·4203	3·2709	·95630	0′	**73°**
10′	·29515	·30891	1·0466	3·3881	3·2371	·95545	50′	
20′	·29793	·31210	1·0476	3·3565	3·2041	·95459	40′	
30′	·30071	·31530	1·0485	3·3255	3·1716	·95372	30′	
40′	·30348	·31850	1·0495	3·2951	3·1397	·95284	20′	
50′	·30625	·32171	1·0505	3·2653	3·1084	·95195	10′	
18° 0′	·30902	·32492	1·0515	3·2361	3·0777	·95106	0′	**72°**
10′	·31178	·32814	1·0525	3·2074	3·0475	·95015	50′	
20′	·31454	·33136	1·0535	3·1792	3·0178	·94924	40′	
30′	·31730	·33460	1·0545	3·1515	2·9887	·94832	30′	
40′	·32006	·33783	1·0555	3·1244	2·9600	·94740	20′	
50′	·32282	·34108	1·0566	3·0977	2·9319	·94646	10′	
19° 0′	·32557	·34433	1·0576	3·0716	2·9042	·94552	0′	**71°**
10′	·32832	·34758	1·0587	3·0458	2·8770	·94457	50′	
20′	·33106	·35085	1·0598	3·0206	2·8502	·94361	40′	
30′	·33381	·35412	1·0608	2·9957	2·8239	·94264	30′	
40′	·33655	·35740	1·0619	2·9713	2·7980	·94167	20′	
50′	·33929	·36068	1·0631	2·9474	2·7725	·94068	10′	
20° 0′	·34202	·36397	1·0642	2·9238	2·7475	·93969	0′	**70°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角	

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
20° 0′	·34202	·36397	1·0642	2·9238	2·7475	·93969	0′ **70°**
10′	·34475	·36727	1·0653	2·9006	2·7228	·93869	50′
20′	·34748	·37057	1·0665	2·8779	2·6985	·93769	40′
30′	·35021	·37388	1·0676	2·8555	2·6746	·93667	30′
40′	·35293	·37720	1·0688	2·8334	2·6511	·93565	20′
50′	·35565	·38053	1·0700	2·8117	2·6279	·93462	10′
21° 0′	·35837	·38386	1·0711	2·7904	2·6051	·93358	0′ **69°**
10′	·36108	·38721	1·0723	2·7695	2·5826	·93253	50′
20′	·36379	·39055	1·0736	2·7488	2·5605	·93148	40′
30′	·36650	·39391	1·0748	2·7285	2·5386	·93042	30′
40′	·36921	·39727	1·0760	2·7085	2·5172	·92935	20′
50′	·37191	·40065	1·0773	2·6888	2·4960	·92827	10′
22° 0′	·37461	·40403	1·0785	2·6695	2·4751	·92718	0′ **68°**
10′	·37730	·40741	1·0798	2·6504	2·4545	·92609	50′
20′	·37999	·41081	1·0811	2·6316	2·4342	·92499	40′
30′	·38268	·41421	1·0824	2·6131	2·4142	·92388	30′
40′	·38537	·41763	1·0837	2·5949	2·3945	·92276	20′
50′	·38805	·42105	1·0850	2·5770	2·3750	·92164	10′
23° 0′	·39073	·42447	1·0864	2·5593	2·3559	·92050	0′ **67°**
10′	·39341	·42791	1·0877	2·5419	2·3369	·91936	50′
20′	·39608	·43136	1·0891	2·5247	2·3183	·91822	40′
30′	·39875	·43481	1·0904	2·5078	2·2998	·91706	30′
40′	·40141	·43828	1·0916	2·4912	2·2817	·91590	20′
50′	·40408	·44175	1·0932	2·4748	2·2637	·91472	10′
24° 0′	·40674	·44523	1·0946	2·4586	2·2460	·91355	0′ **66°**
10′	·40939	·44872	1·0961	2·4426	2·2286	·91236	50′
20′	·41204	·45222	1·0975	2·4269	2·2113	·91116	40′
30′	·41469	·45573	1·0989	2·4114	2·1943	·90996	30′
40′	·41734	·45924	1·1004	2·3961	2·1775	·90875	20′
50′	·41998	·46277	1·1019	2·3811	2·1609	·90753	10′
25° 0′	·42262	·46631	1·1034	2·3662	2·1445	·90631	0′ **65°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
25° 0′	·42262	·46631	1·1034	2·3662	2·1445	·90631	0′ **65°**
10′	·42525	·46985	1·1049	2·3515	2·1283	·90507	50′
20′	·42788	·47341	1·1064	2·3371	2·1123	·90383	40′
30′	·43051	·47698	1·1079	2·3228	2·0965	·90259	30′
40′	·43313	·48055	1·1095	2·3088	2·0809	·90133	20′
50′	·43575	·48414	1·1110	2·2949	2·0655	·90007	10′
26° 0′	·43837	·48773	1·1126	2·2812	2·0503	·89879	0′ **64°**
10′	·44098	·49134	1·1142	2·2677	2·0353	·89752	50′
20′	·44359	·49495	1·1158	2·2543	2·0204	·89623	40′
30′	·44620	·49858	1·1174	2·2412	2·0057	·89493	30′
40′	·44880	·50222	1·1190	2·2282	1·9912	·89363	20′
50′	·45140	·50587	1·1207	2·2153	1·9768	·89232	10′
27° 0′	·45399	·50953	1·1223	2·2027	1·9626	·89101	0′ **63°**
10′	·45658	·51320	1·1240	2·1902	1·9486	·88968	50′
20′	·45917	·51688	1·1257	2·1779	1·9347	·88835	40′
30′	·46175	·52057	1·1274	2·1657	1·9210	·88701	30′
40′	·46433	·52427	1·1291	2·1537	1·9074	·88566	20′
50′	·46690	·52798	1·1308	2·1418	1·8940	·88431	10′
28° 0′	·46947	·53171	1·1326	2·1301	1·8807	·88295	0′ **62°**
10′	·47204	·53545	1·1343	2·1185	1·8676	·88158	50′
20′	·47460	·53920	1·1361	2·1070	1·8546	·88020	40′
30′	·47716	·54296	1·1379	2·0957	1·8418	·87882	30′
40′	·47971	·54673	1·1397	2·0846	1·8291	·87743	20′
50′	·48226	·55051	1·1415	2·0736	1·8165	·87603	10′
29° 0′	·48481	·55431	1·1434	2·0627	1·8040	·87462	0′ **61°**
10′	·48735	·55812	1·1452	2·0519	1·7917	·87321	50′
20′	·48989	·56194	1·1471	2·0413	1·7796	·87178	40′
30′	·49242	·56577	1·1490	2·0308	1·7675	·87036	30′
40′	·49495	·56962	1·1509	2·0204	1·7556	·86892	20′
50′	·49748	·57348	1·1528	2·0101	1·7437	·86748	10′
30° 0′	·50000	·57735	1·1547	2·0000	1·7321	·86603	0′ **60°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos		
30° 0′	·50000	·57735	1·1547	2·0000	1·7321	·86603	0′	60°
10′	·50252	·58124	1·1566	1·9900	1·7205	·86457	50′	
20′	·50503	·58513	1·1586	1·9801	1·7090	·86310	40′	
30′	·50754	·58904	1·1606	1·9703	1·6977	·86163	30′	
40′	·51004	·59297	1·1626	1·9606	1·6864	·86015	20′	
50′	·51254	·59691	1·1646	1·9511	1·6753	·85866	10′	
31° 0′	·51504	·60086	1·1666	1·9416	1·6643	·85717	0′	59°
10′	·51753	·60483	1·1687	1·9323	1·6534	·85567	50′	
20′	·52002	·60881	1·1707	1·9230	1·6426	·85416	40′	
30′	·52250	·61280	1.1728	1 9139	1·6319	·85264	30′	
40′	·52498	·61681	1·1749	1·9048	1·6212	·85112	20′	
50′	·52745	·62083	1·1770	1·8959	1·6107	·84959	10′	
32° 0′	·52992	·62487	1·1792	1·8871	1·6003	·84805	0′	58°
10′	·53238	·62892	1·1813	1·8783	1·5900	·84650	50′	
20′	·53484	·63299	1·1835	1·8697	1·5798	·84495	40′	
30′	·53730	·63707	1·1857	1·8612	1·5697	·84339	30′	
40′	·53975	·64117	1·1879	1·8527	1·5597	·84 82	20′	
50′	·54220	·64528	1·1901	1·8443	1·5497	·84025	10′	
33° 0′	·54464	·64941	1·1924	1·8361	1·5399	·83867	0′	57°
10′	·54708	·65355	1·1946	1·8279	1·5301	·83708	50′	
20′	·54951	·65771	1·1969	1·8198	1·5204	·83549	40′	
30′	·55194	·66189	1·1992	1 8118	1·5108	·83389	30′	
40′	·55436	·66608	1·2015	1·8039	1·5013	·83228	20′	
50′	·55678	·67028	1·2039	1·7960	1·4919	·83066	10′	
34° 0′	·55919	·67451	1·2062	1·7883	1·4826	·82904	0′	56°
10′	·56160	·67875	1 2086	1·7806	1·4733	·82741	50′	
20′	·56401	·68301	1·2110	1·7730	1·4641	·82577	40′	
30′	·56641	·68728	1·2134	1·7655	1·4550	·82413	30′	
40′	·56880	·69157	1·2158	1·7581	1·4460	·82248	20′	
50′	·57119	·69588	1·2183	1·7507	1·4370	·82082	10′	
35° 0′	·57358	·70021	1·2208	1·7434	1·4281	·81915	0′	55°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角	

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos		
35° 0′	·57358	·70021	1·2208	1·7434	1·4281	·81915	0′	55°
10′	·57596	·70455	1·2233	1·7362	1·4193	·81748	50′	
20′	·57833	·70891	1·2258	1·7291	1·4106	·81580	40′	
30′	·58070	·71329	1·2283	1·7221	1·4019	·81412	30′	
40′	·58307	·71769	1·2309	1·7151	1·3934	·81242	20′	
50′	·58543	·72211	1·2335	1·7081	1·3848	·81072	10′	
36° 0′	·58779	·72654	1·2361	1·7013	1·3764	·80902	0′	54°
10′	·59014	·73100	1·2387	1·6945	1·3680	·80730	50′	
20′	·59248	·73547	1·2413	1 6878	1·3597	·80558	40′	
30′	·59482	·73996	1·2440	1 6812	1·3514	·80386	30′	
40′	·59716	·74447	1·2467	1·6746	1·3432	·80212	20′	
50′	·59949	·74900	1·2494	1·6681	1·3351	·80038	10′	
37° 0′	·60182	·75355	1·2521	1·6616	1·3270	·79864	0′	53°
10′	·60414	·75812	1·2549	1·6553	1·3190	·79688	50′	
20′	·60645	·76272	1·2577	1·6489	1·3111	·79512	40′	
30′	·60876	·76733	1·2605	1·6427	1·3032	·79335	30′	
40′	61107	·77196	1·2633	1·6365	1·2954	·79158	20′	
50′	·61337	·77661	1·2661	1·6303	1·2876	·78980	10′	
38° 0′	·61566	·78129	1·2690	1·6243	1·2799	·78801	0′	52°
10′	·61795	·78598	1·2719	1·6183	1·2723	·78622	50′	
20′	·62024	·79070	1·2748	1·6123	1·2647	·78442	40′	
30′	·62251	·79544	1·2778	1·6064	1·2572	·78261	30′	
40′	·62479	·80020	1·2807	1 6005	1·2497	·78079	20′	
50′	·62706	·80498	1·2837	1·5948	1·2423	·77897	10′	
39° 0′	·62932	·80975	1·2868	1·5890	1·2349	·77715	0′	51°
10′	·63158	·81461	1·2898	1·5833	1·2276	·77531	50′	
20′	·63383	·81946	1·2929	1·5777	1·2203	·77347	40′	
30′	·63608	·82434	1·2960	1·5721	1·2131	·77162	30′	
40′	·63832	·82923	1·2991	1·5666	1·2059	·76977	20′	
50′	·64056	·83415	1·3022	1·5611	1·1988	·76791	10′	
40° 0′	·64279	·83910	1·3054	1·5557	1·1918	·76604	0′	50°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角	

17/5/37 8/36.

角		sin	tan	sec	cosec	cot	cos		
40°	0′	·64279	·83910	1·3054	1·5557	1·1918	·76604	0′	50°
	10′	·64501	·84407	1·3086	1·5504	1·1847	·76417	50′	
	20′	·64723	·84906	1·3118	1·5450	1·1778	·76229	40′	
	30′	·64945	·85408	1·3151	1·5398	1·1708	·76041	30′	
	40′	·65166	·85912	1·3184	1·5345	1·1640	·75851	20′	
	50′	·65386	·86419	1·3217	1·5294	1·1571	·75661	10′	
41°	0′	·65606	·86929	1·3250	1·5243	1·1504	·75471	0′	49°
	10′	·65825	·87441	1·3284	1·5192	1·1436	·75280	50′	
	20′	·66044	·87955	1·3318	1·5141	1·1369	·75088	40′	
	30′	·66262	·88473	1·3352	1·5092	1·1303	·74896	30′	
	40′	·66480	·88992	1·3386	1·5042	1·1237	·74703	20′	
	50′	·66697	·89515	1·3421	1·4993	1·1171	·74509	10′	
42°	0′	·66913	·90040	1·3456	1·4945	1·1106	·74314	0′	48°
	10′	·67129	·90569	1·3492	1·4897	1·1041	·74120	50′	
	20′	·67344	·91099	1·3527	1·4849	1·0977	·73924	40′	
	30′	·67559	·91633	1·3563	1·4802	1·0913	·73728	30′	
	40′	·67773	·92170	1·3600	1·4755	1·0850	·73531	20′	
	50′	·67987	·92709	1·3636	1·4709	1·0786	·73333	10′	
43°	0′	·68200	·93252	1·3673	1·4663	1·0724	·73135	0′	47°
	10′	·68412	·93797	1·3711	1·4617	1·0661	·72937	50′	
	20′	·68624	·94345	1·3748	1·4572	1·0599	·72737	40′	
	30′	·68835	·94896	1·3786	1·4527	1·0538	·72537	30′	
	40′	·69046	·95451	1·3824	1·4483	1 0477	·72337	20′	
	50′	·69256	·96008	1·3863	1·4439	1·0416	·72136	10′	
44°	0′	·69466	·96569	1·3902	1·4396	1·0355	·71934	0′	46°
	10′	·69675	·97133	1·3941	1·4352	1·0295	·71732	50′	
	20′	·69883	·97700	1·3980	1·4310	1·0235	·71529	40′	
	30′	·70091	.98270	1·4020	1·4267	1·0176	·71325	30′	
	40′	·70298	·98843	1·4061	1·4225	1·0117	·71121	20′	
	50′	·70505	·99420	1·4101	1·4183	1·0058	·70916	10′	
45°	0′	·70711	1·0000	1·4142	1·4142	1·0000	·70711	0′	45°
		cos	cot	cosec	sec	tan	sin		角

大賣捌所

熊本市新町二丁目 長崎次郎
京都市東洞院三條東へ入 村上勘兵衛
大阪市東區備後町四丁目 吉岡平助
仝 京橋區南傳馬町二丁目 目黒支店
東京市日本橋區通三丁目 林平次郎

上諏訪桑原町 日新堂書店
松本本町二丁目 高美書店
長野市大門町 西澤喜太郎
仙臺市大町五丁目 藤崎祐之助
名古屋市本町三丁目 川瀬代助

印刷者 東京市京橋區弓町二十四番地 大西鍊三郎

發行所 東京市神田區裏神保町六番地 光風館書店

發行者 東京市神田區裏神保町六番地 上原才一

著作者 東京市牛込區矢來町四番地 遠藤又藏

明治三十五年十一月八日 五版發行
明治三十五年十一月五日 五版印刷
明治三十五年四月六日 四版發行
明治三十五年四月三日 四版印刷
明治三十五年二月八日 三版發行
明治三十五年二月五日 三版印刷
明治三十四年九月十八日 再版發行
明治三十四年九月十四日 再版印刷
明治三十三年十二月十八日 發行
明治三十三年十二月十五日 印刷

明治三十六年五月十八日 訂正八版發行
明治三十六年五月十五日 訂正八版印刷
明治三十六年三月廿八日 訂正七版發行
明治三十六年三月廿五日 訂正七版印刷
明治三十六年一月十四日 訂正六版發行
明治三十六年一月十日 訂正六版印刷

定價金六十錢

平面三角法教科書

光風館書店發行圖書賣捌所

東京　中西屋書店
同　大倉書店
同　松邑三松堂
同　岡崎屋書店
大阪　石井釣三郎
同　前川善兵衛
京都　大黒屋書店
名古屋　永東書店
横濱　田沼太右衛門
同　弘集堂書店
神戸　吉岡支店
新潟　北光社
長岡　目黒十郎
水原　西村六平
高田　高橋書店
秋田　東海林書店
同　大澤鮮進堂
弘前　今泉道次郎
長野　增屋書店
同　萩原朝陽館

上田　西澤支店
野澤　西澤支店
飯田　西澤支店
松本　教益株式會社
同　水琴堂書店
同　松榮堂書店
同　鶴林堂書店
上諏訪　盛文堂書店
甲府　內藤傳右衛門
同　柳正堂書店
靜岡　吉見義次
濱松　谷島屋源治
津　豐住謙次郎
岐阜　郁文堂書店
福井　品川太右衛門
宇都宮　內田濱吉
前橋　煥乎堂
千葉　多田屋書店
仙臺　松榮堂支店
山形　五十嵐太右衛門

金澤　宇都宮源平
同　近田書店
富山　中田書店
高岡　學海堂書店
松江　川岡淸助
岡山　武內彌三郎
廣島　積善館支店
山口　小原松千代
和歌山　宮井書店
德島　黒崎精二
高知　澤本駒吉
博多　積善館支店
同　森岡書店
久留米　菊竹金文堂
佐賀　河內壯助
大分　甲斐治平
同　菁莪堂書店
鹿兒島　吉田幸兵衛
札幌　萱間左右太
同　富貴堂

終