Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 22

Garbenkohomologie

Eine strukturell befriedigendere Kohomologietheorie erfordert stärkere Hilfsmittel aus der homologischen Algebra. Über injektive Auflösungen kann man zu einer Garbe $\mathcal{F}$ von kommutativen Gruppen kohomologische Funktoren $H^i(X, \mathcal{F})$, $i \in \mathbb{N}$, definieren. Dies werden wir nicht im Einzelnen ausführen. Wichtig ist für uns, dass diese „wahre Kohomologie“ häufig über ?ech-Kohomologie berechnet werden kann. Der folgende Satz fasst die wichtigsten Eigenschaften dieser Kohomologietheorie zusammen.

Satz 22.1. *Es sei X ein topologischer Raum. Dann erfüllt die Garbenkohomologie folgende Eigenschaften.*

(1) *Die $H^n(X, -)$ sind (für jedes $n \in \mathbb{N}$) additive Funktoren von der Kategorie der Garben von kommutativen Gruppen auf X in die Kategorie der abelschen Gruppen.*
(2) *Es liegt ein natürlicher Isomorphismus $H^0(X, \mathcal{G}) \cong \Gamma(X, \mathcal{G})$ vor.*
(3) *Zu einer kurzen exakten Garbensequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$
$$\longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \ldots .$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Satz 24.7 (Bündel, Garben und Kohomologie (Osnabrück 2019-2020)). □

Satz 22.2. *Eine welke Garbe $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X ist azyklisch, d.h. es ist $H^n(X, \mathcal{G}) = 0$ für $n \geq 1$.*

Beweis. Nach Lemma 23.13 (Bündel, Garben und Kohomologie (Osnabrück 2019-2020)) gibt es eine Einbettung von $\mathcal{G}$ in eine injektive Garbe $\mathcal{I}$, wir betrachten die zugehörige kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{G} \longrightarrow 0 .$$

Nach Lemma 23.16 (Bündel, Garben und Kohomologie (Osnabrück 2019-2020)) ist $\mathcal{I}$ eine welke Garbe. Dann ist nach Lemma 23.15 (Bündel, Garben und Kohomologie (Osnabrück 2019-2020)) (2) auch die Quotientengarbe $\mathcal{I}/\mathcal{G}$ welk. Die lange exakte Kohomologiesequenz ergibt unter Verwendung von Satz 24.8 (Bündel, Garben und Kohomologie (Osnabrück 2019-2020)) einerseits

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{I}/\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

und andererseits

$$0 \longrightarrow H^n(X,\mathcal{I}/\mathcal{G}) \stackrel{\delta^n}{\longrightarrow} H^{n+1}(X,\mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

für $n \geq 1$. Aus dem ersten Ausschnitt folgt wegen der Surjektivität (siehe Lemma 23.15 (Bündel, Garben und Kohomologie (Osnabrück 2019-2020)) (1)) von

$$\Gamma(X,\mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{I}/\mathcal{G}),$$

dass $H^1(X,\mathcal{G}) = 0$ ist. Dies gilt für alle welke Garben. Daher gilt aufgrund des zweiten Ausschnittes, angewendet für $n = 2$, auch $H^2(X,\mathcal{G}) = 0$, u.s.w. $\square$

Satz 22.3. *Es sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind die Garbenkohomologien $H^i(X,\mathcal{M})$ in natürlicher Weise $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$-Moduln.*

Satz 22.4. *Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X und es sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung mit $H^1(U_i,\mathcal{F}) = 0$ und $H^1(U_i \cap U_j,\mathcal{F}) = 0$ für alle i,j. Dann ist*

$$\check{H}^1(U_i,\mathcal{F}) = H^1(X,\mathcal{F}).$$

Beweis. Es sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ eine Einbettung in eine injektive Garbe und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

die zugehörige kurze exakte Garbensequenz. Aufgrund der langen exakten Kohomologiesequenz (siehe Satz 22.1 (3)) und wegen Satz 24.8 (Bündel, Garben und Kohomologie (Osnabrück 2019-2020)) ist

$$H^1(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{H})/\operatorname{bild}(\Gamma(X,\mathcal{I}) \to \Gamma(X,\mathcal{H})).$$

Wir definieren zuerst einen Homomorphismus

$$\Gamma(X,\mathcal{H}) \longrightarrow \check{H}^1(U_i,\mathcal{F}).$$

Ein Schnitt $t \in \Gamma(X,\mathcal{H})$ legt Restriktionen $t_i = t|_{U_i}$ fest. Da $\mathcal{F}$ auf den U_i keine Kohomologie besitzt, gibt es

$$s_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{I}),$$

die auf die t_i abbilden. Die Elemente (zu $i < j$)

$$r_{ij} := s_i - s_j$$

werden auf 0 in $\Gamma(U_i \cap U_j,\mathcal{H})$ abgebildet, daher ist

$$r_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j,\mathcal{F}).$$

Für Indizes $i < j < k$ ist

$$r_{ij} - r_{ik} + r_{jk} = s_i - s_j - (s_i - s_k) + s_j - s_k = 0,$$

deshalb ist die Kozykelbedingung erfüllt. Somit ist die Familie $(r_{ij})_{i<j}$ ein ?ech-Kozykel und definiert ein Element in $\check{H}^1(U_i, \mathcal{F})$. Diese Zuordnung ist unabhängig von den gewählten s_i und ein Gruppenhomomorphismus, siehe Aufgabe 22.1. Sei nun $t \in \Gamma(X, \mathcal{H})$ das Bild eines globalen Elementes $s \in \Gamma(X, \mathcal{I})$. Dann kann man die s_i als $s|_{U_i}$ ansetzen und daher sind die zu t konstruierten r_{ij} alle gleich 0. Ein solches Element t wird also unter der angegebenen Abbildung auf 0 abgebildet. Dies ergibt nach Satz 47.1 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) eine Faktorisierung

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{H}) / \operatorname{bild}(\Gamma(X, \mathcal{I}) \to \Gamma(X, \mathcal{I})) \longrightarrow \check{H}^1(U_i, \mathcal{F}).$$

Sei nun umgekehrt ein erster ?ech-Kozykel von $\mathcal{F}$ gegeben, der durch

$$(r_{ij})_{i<j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})$$

mit $r_{ij} - r_{ik} + r_{jk} = 0$ repräsentiert sei. Wir fassen die r_{ij} in $\mathcal{I}$ auf, und zwar als globale Elemente, was aufgrund der Welkheit von injektiven Garben möglich ist. Wir definieren

$$s_i := r_{i1}$$

(mit $s_1 = 0$) und fassen diese als Elemente in $\Gamma(U_i, \mathcal{I})$ auf. Diese Schnitte erfüllen $s_i - s_j = r_{i1} - r_{j1} = r_{ij}$. Diese Elemente s_i definieren Elemente

$$t_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{H}).$$

Da ihre Differenzen von $\mathcal{F}$ herrühren, sind sie verträglich und definieren ein globales Element

$$t \in \Gamma(X, \mathcal{H}).$$

Dies definiert über den verbindenden Homomorphismus δ die Kohomologieklasse

$$\delta(t) \in H^1(X, \mathcal{F}).$$

Wenn der ?ech-Kozykel r_{ij} durch andere Elemente $s'_i \in \Gamma(X, \mathcal{I})$ repräsentiert werden, so sind die Elemente $s_i - s'_i$, $i \in I$, wegen

$$(s_i - s'_i) - (s_j - s'_j) = s_i - s_j - (s'_i - s'_j) = r_{ij} - r_{ij} = 0$$

verträglich und definieren ein globales Element in $\Gamma(X, \mathcal{I})$. Daher geht die Differenz der beiden Repräsentierungen in $H^1(X, \mathcal{F})$ auf 0. Insgesamt liegt daher eine wohldefinierte Abbildung

$$\check{Z}^1(U_i, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{H}) / \operatorname{bild}(\Gamma(X, \mathcal{I}) \to \Gamma(X, \mathcal{H}))$$

vor. Es sei nun der ?ech-Kozykel so, dass er die Nullklasse in der ersten ?ech-Kohomologie definiert. Dann gibt es nach Definition Elemente $r_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ mit

$$r_i - r_j = r_{ij}.$$

Wir fassen diese Elemente wieder als globale Elemente in $\mathcal{I}$ auf und die r_i können direkt die Rolle der s_i von oben übernehmen. Dann sind die t_i alle gleich 0 und damit ist das Bild in $H^1(X, \mathcal{F})$ ebenfalls gleich 0. Somit hat man eine Abbildung

$$\check{H}^1(U_i, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}).$$

Diese ist ein Gruppenhomomorphismus und invers zu der zuvor konstruierten Abbildung. □

Lemma 22.5. *Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X und sei*

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine Überdeckung $\mathfrak{U}$. Dann ist die Abbildung

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

injektiv.

Beweis. Wir schließen an den Beweis zu Satz 22.4 an und rekapitulieren die Konstruktion der Abbildung. Es sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ eine Einbettung in eine injektive Garbe und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

die zugehörige kurze exakte Garbensequenz. Es sei ein erster ?ech-Kozykel von $\mathcal{F}$ durch

$$(r_{ij})_{i<j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})$$

mit $r_{ij} - r_{ik} + r_{jk} = 0$ gegeben. Die r_{ij} fassen wir in $\mathcal{I}$ als globale Elemente auf und definieren

$$s_i := r_{i1},$$

die wir auf U_i auffassen. Diese Elemente s_i definieren Elemente

$$t_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{H})$$

die einem globalen Element

$$t \in \Gamma(X, \mathcal{H})$$

entsprechen. Dieses legt

$$\delta(t) \in H^1(X, \mathcal{F})$$

fest und das ist das Bild der ?ech-Klasse. Es sei nun

$$\delta(t) = 0$$

vorausgesetzt. Dann gibt es ein globales Element $s \in \Gamma(X, \mathcal{I})$, das auf I abbildet. Es werden dann die $s - s_i$ auf 0 abgebildet und daher ist $s - s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$. Daher ist

$$s - s_j - (s - s_i) = s_i - s_j = r_{i1} - r_{j1} = r_{ij}$$

und die ?ech-Klasse ist trivial. □

Satz 22.6. *Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\check{H}^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(X, \mathcal{F}).$$

Beweis. Die Injektivität wurde in Lemma 22.5 gezeigt. Zum Nachweis der Surjektivität sei $c \in H^1(X, \mathcal{F})$. Es sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Garbensequenz mit $\mathcal{I}$ injektiv. Die Kohomologieklasse c wird repräsentiert durch einen globalen Schnitt $t \in \Gamma(X, \mathcal{I}/\mathcal{F})$. Für diesen gibt es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

und Schnitte $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{I})$ derart, dass s_i unter der Quotientenabbildung auf $s|_{U_i}$ abbildet. Dann ist die Familie $s_i - s_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})$, (i, j), ein erster ?ech-Kozykel von $\mathcal{F}$. Die zugehörige ?ech-Kohomologieklasse bildet auf c ab. $\square$

Beispiel 22.7. Wir betrachten ein Gitter $\Gamma = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{C}$ und die Restklassengruppe

$$T = \mathbb{C}/\Gamma \cong S^1 \times S^1.$$

Wir arbeiten mit der offenen Überdeckung zu den offenen Mengen

$$U_1, U_2, U_3, U_4 \subseteq T,$$

die aus den homöomorphen Bildern von

$$\tilde{U}_1 = \left\{ rv_1 + sv_2 \mid -\frac{1}{8} < r < \frac{5}{8}, -\frac{1}{8} < s < \frac{5}{8} \right\},$$

$$\tilde{U}_2 = \left\{ rv_1 + sv_2 \mid -\frac{1}{8} < r < \frac{5}{8}, \frac{3}{8} < s < \frac{9}{8} \right\},$$

$$\tilde{U}_3 = \left\{ rv_1 + sv_2 \mid \frac{3}{8} < r < \frac{9}{8}, -\frac{1}{8} < s < \frac{5}{8} \right\}$$

und

$$\tilde{U}_4 = \left\{ rv_1 + sv_2 \mid \frac{3}{8} < r < \frac{9}{8}, \frac{3}{8} < s < \frac{9}{8} \right\}$$

besteht. Wenn man diese Mengen in das Fundamentalparallelogramm malt, bestehen sie jeweils aus vier Teilen. Die Durchschnitte $U_i \cap U_j$ bestehen aus zwei oder aus vier disjunkten Rechtecken, es liegt eine offene Überdeckung mit der Eigenschaft aus Satz 22.4 für die Garbe der lokal konstanten Funktionen vor. Wenn man einen Kreis durch zwei offene Kreissegmente C_1 und C_2 überdeckt, deren Durchschnitt aus zwei Intervallen besteht, und für einen weiteren Kreis die Segmente D_1 und D_2 nennt, so geht es einfach um die Produktmengen $C_i \times D_j$ auf dem Torus. Es sei

$$C_1 \cap C_2 = F_1 \uplus F_2$$

und

$$D_1 \cap D_2 = G_1 \uplus G_2.$$

Dann ist beispielsweise

$$\begin{aligned} C_1 \times D_1 \cap C_1 \times D_2 &= C_1 \times (D_1 \cap D_2) \\ &= C_1 \times (G_1 \uplus G_2) \\ &= C_1 \times G_1 \uplus C_1 \times G_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} C_1 \times D_1 \cap C_2 \times D_2 &= (C_1 \cap C_2) \times (D_1 \cap D_2) \\ &= (F_1 \uplus F_2) \times (G_1 \uplus G_2) \\ &= F_1 \times G_1 \uplus F_1 \times G_2 \uplus F_2 \times G_1 \uplus F_2 \times G_2. \end{aligned}$$

Jede Kohomologieklasse für der Garbe der lokal konstanten Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ wird repräsentiert als eine Summe von zwei Kohomologieklassen, die sich jeweils im Wesentlichen von einem Kreis herrührt: Auf der Überdeckung $C_1 \times S^1, C_2 \times S^1$ mit dem Wert $a \in \mathbb{C}$ auf $F_1 \times S^1$ und dem Wert 0 auf $F_2 \times S^1$ und auf der Überdeckung $S^1 \times D_1, S^1 \times D_2$ mit dem Wert $b \in \mathbb{C}$ auf $S^1 \times G_1$ und dem Wert 0 auf $S^1 \times G_2$. Die Kohomologie rührt also von den Projektionen her. Es ist also

$$H^1(T, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2.$$

Wie kann man darin das Bild von $H^0(T, \Omega_T)$ charakterisieren? Auf der oben angebenen offenen Überdeckung erhält man überall dz. Die holomorphe Funktion z auf $\mathbb{C}$ liefert für jedes U_i eine holomorphe Funktion z_i, die allerdings nicht zu einer globalen holomorphen Funktion zusammenkleben. Dies sieht man, wenn man das Fundamentalparallelogramm betrachtet. Wir bestimmen also z_i auf dem Fundamentalparallelogramm, wobei wir mit z darauf vergleichen. Die Funktion z_1 auf U_1 liefert links unten in der Tat z, aber auf den Umklappungen links oben die Funktion $z - v_2$, rechts unten $z - v_1$ und rechts oben $z - v_1 - v_2$. Die Funktion z_2 ist links unten $z + v_2$, links oben z, rechts oben $z - v_2$ und rechts unten $z - v_1 + v_2$. Die Funktion z_3 ist links unten $z - v_1$, links oben $z - v_1 + v_2$, rechts oben $z + v_2$ und rechts unten z. Die Funktion z_4 ist links unten $z + v_1 + v_2$, links oben $z + v_1$, rechts oben z und rechts unten $z + v_2$. Die Differenzen sind.

Auf $U_1 \cap U_2$ die Werte 0 bzw. $-v_2$, auf $U_1 \cap U_3$ die Werte 0 bzw. v_1. Der Durchschnitt $U_1 \cap U_4$ besteht aus vier Teilen, die im Parallelogramm neun Teile zerfallen. Die vier Eckteile gehören zusammen, die beiden mittleren Randteile links und rechts, die beiden mittleren Randteile oben und unten und der mittlere Teil. Die Werte von $z_1 - z_4$ darauf sind in dieser Reihenfolge gleich $-v_1 - v_2, -v_2, -v_1, 0$.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7