学算笔谈

學算筆談卷七

金匱華蘅芳學

論方程之術已寓四元之意

九章之題以立天元之術馭之雖無不可通然亦有難易之别其最易者莫如盈朒而最難者則爲方程然方程之本術並無人覺其難及以天元馭之反覺不如其本術之易者何也葢方程之術已暗寓四元之理在其中故立數元以求之則一一與本術脗合若獨立一元雖與本術之理未嘗背謬然已不勝其繁矣

一色方程之題以天元馭之猶不覺其難惟不如立天地兩元者其齊同相消之法易與方程之本術相證

一題　今有硯七方筆四枝共錢七十六文又有硯三方筆九枝共

錢六十九文求筆硯之價

此題若以天元求之可立〇𝍠爲硯每方之價以七乘之得〇𝍦爲七硯之價以減共錢七十六得𝍯𝍥𝍦爲筆四枝之價以九乘之得𝍥𝍰𝍣𝍮𝍢爲筆三十六枝之價寄左　乃以三乘〇𝍠得〇𝍢爲三硯之價以減共錢六十九得𝍮𝍨𝍢爲筆九枝之價以四乘之得𝍡𝍯𝍥𝍩𝍡亦爲筆三十六枝之價與左相消得𝍣〇𝍧𝍭𝍠上實下法得八爲一硯之價從此亦可求得筆價

如欲先得筆價者則可立〇𝍠爲筆每枝之價以四乘之得〇𝍣爲四筆之價以減共錢七十六得𝍯𝍥𝍣爲七硯之價以三乘之得𝍡𝍪𝍧𝍩𝍡爲二十一硯之價寄左　乃以九乘〇𝍠得〇𝍨爲九筆之價以減共錢六十九得𝍮𝍨𝍨爲三硯之價以七乘之得𝍣𝍰𝍢𝍮𝍢亦爲

二十一硯之價與左相消得𝍧卄上實下法得五爲筆一枝之價

從此亦可求得硯價

若立天元〇丨爲硯價地元丨〇爲筆價則七硯四筆之價爲〇𝍦𝍣

與共錢七十六相消得㊀𝍤爲㊀式　又三硯九筆之價爲〇𝍢𝍨

與共錢六十九相消得㊁𝍨爲㊁式　九倍其㊀式得㊂爲㊂

式　四倍其㊁式得㊃爲㊃式　以㊃式減㊂式得𝍢𝍧上實

下法得八爲硯價

若欲先得筆價者則立天元〇丨爲筆價地元丨〇爲硯價則得

㊀爲㊀式　㊁爲㊁式　三倍其㊀式得㊂爲㊂式　七

倍其㊁式得[illegible]為㊃式　以㊂式減㊃式得[illegible]上實下法得

五為筆價

此猶方程之本術列題數為左右兩行

硯	筆	錢	
𝍦	𝍣	𝍠𝍩𝍠	右行
𝍢	𝍤	𝍮𝍣	左行

以左行筆數遍乘右行以右行筆數遍乘左行又得左右兩行

硯	筆	錢	
𝍫𝍤	𝍪〇	𝍤𝍭𝍤	右行
𝍩𝍡	𝍪〇	𝍡𝍭𝍥	左行

以左行之各數減其右行之各數得

硯	筆	錢
𝍪𝍢	〇	𝍡𝍱𝍨

以硯數爲法錢數爲實得八爲硯價也

亦猶列題數爲左右兩行

	硯	筆	錢
右行	𝍦	𝍣	𝍯𝍥
左行	𝍢	𝍤	𝍫𝍨

以左行硯數遍乘右行以右行硯數遍乘左行又得左右兩行

	硯	筆	錢
右行	𝍪𝍠	𝍩𝍡	𝍡𝍪𝍧
左行	𝍪𝍠	𝍬𝍤	𝍢𝍬𝍢

以右行之各數減其左行之各數得

硯	筆	錢
○	𝍪𝍢	𝍠𝍩𝍤

以筆數爲法錢數爲實得五爲筆價也

三色方程之題其設數若遞空一色者用天元之術尙能馭之

二題　設有硯七方筆一枝共值六十一文筆八枝墨一錠共值四十六文硯一方墨九錠共值六十二文求硯價若干

此題若以天元求之可立〇丨爲一硯之價以七乘之得〇丅爲七硯之價以減共錢六十一得丄𝍦爲一筆之價以八乘之得𝍤𝍢爲八筆之價以減共錢四十六得𝍤𝍫爲一墨之價以九乘之得𝍤𝍢爲九墨之價以減共錢六十二得𝍣𝍫亦爲一硯之價與〇丨相消得𝍣𝍫上實下法得八爲硯價

若立天元〇丨爲硯價地元丨〇爲筆價人元〇丨爲墨價則以丨〇丅與六十一相消得丨㊅丅爲㊀式　以𝍢〇丨與四十六相消得𝍢㊅爲㊁式　以〇丨𝍢與六十二相消得㊅𝍢丨爲㊂式

八倍其(一)式得 𝍧 𝍫𝍥 以(二)式減之得 𝍩 𝍫𝍥 為(四)式 九倍其(四)式

得 𝍨 𝍫𝍦 〇 𝍣 以(三)式加之得 𝍫〇𝍫 𝍣〇𝍣 上實下法得八為硯

此猶方程之本術列題數為左中右三行

左行	中行	右行	
𝍠	〇	𝍦	硯
〇	𝍧	𝍠	筆
𝍨	𝍠	〇	墨
𝍮𝍡	𝍫𝍥	𝍮𝍠	錢

以中行筆數遍乘右行又為右行其中行仍為中行

中行	右行	
〇	𝍫𝍥	硯
𝍧	𝍧	筆
𝍠	〇	墨
𝍫𝍥	𝍣𝍮𝍧	錢

以中行減右行再爲右行與原列之左行成左右二行

	硯	筆	墨	錢
右行	𝍫𝍥	〇	十	𝍢𝍭𝍠
左行	丨	〇	𝍣	𝍮𝍡

以左行墨數遍乘右行以右行墨數遍乘左行又爲左右兩行

	硯	筆	墨	錢
右行	𝍣〇𝍢	〇	𝍨	𝍫𝍥𝍣
左行	丨	〇	𝍨	𝍮𝍡

以左行之各數減其右行之各數則得

硯	筆	墨	錢
𝍣〇𝍢	〇	〇	𝍫〇𝍫〇

以硯數爲法錢數爲實得八爲硯價也

三色方程之題若非遞空一色者幾爲天元之術所不能馭故求至下半必仍藉方程之本術爲用否則無從得其如積之數

三題　設有硯二方筆四枝墨二錠共値四十八文硯三方筆兩枝墨三錠共値五十二文硯一方筆三枝墨四錠共値四十七文求硯價若干

則川天元之術以馭之立〇丨爲一硯之價以二乘之得〇‖以減共錢四十八文得三‖卌爲㊀式即爲四筆二墨之價　以三乘〇丨得〇川以減共錢五十二文得三丨卌爲㊁式即爲二筆三墨之價　以〇丨減共錢四十七文得三Ⅲ卜爲㊂式即爲三筆四墨之價　以二乘其㊀式得ⅲ川卜爲㊃式即爲四筆六墨之價　以㊀式減㊃式得三丨卌〇㊄式即爲四墨之價寄左　又以三乘其

㊁式得〇丅卌為㊅式即為六筆九墨之價　二乘其㊂式得〇〣卄為㊆式即為六筆八墨之價　以㊆式減㊅式得川為㊇式即為一墨之價　四乘㊇式得〇〣〢卌為㊈式亦為四墨之價　故以㊄㊈兩式相消得〇〢卌上實下法得八為硯價

此猶列㊀㊁㊂式及其幾筆幾墨之數為右中左三行

硯	筆	墨	錢	
〇	〣	〢	㊀	右行
〇	〢	〣	㊁	中行
〇	〣	〤	㊂	左行

先取其右中兩行倍其中行之數為甲乙兩行

硯	筆	墨	錢	
〇	〣	〢	㊀	甲行
〇	〣	〦	㊃	乙行

以中行之各數減其乙行之各數得

硯　筆　墨　錢

○　○　𝍣　⑤　寄左

乃取中左兩行

硯　筆　墨　錢

○　𝍡　𝍣　②　中行

○　𝍢　𝍣　③　左行

以左行筆數遍乘中行以中行筆數遍乘左行得丙丁兩行

硯　筆　墨　錢

○　丅　𝍣　⑥　丙行

○　丅　𝍢　⑦　丁行

以丁行之各數減丙行之各數得戊行

硯　筆　墨　錢

○　○　𝍠　⑧　戊行

乃取寄左之式與戊行並列之爲左右兩行

硯　筆　墨　錢

○　○　〣　㊄　右行

○　○　〡　㊈　左行

以右行墨數遍乘左行得

硯　筆　墨　錢

○　○　〣　㊄　右行

○　○　〣　㊇　左行

則其左右兩行皆爲四墨之數所以其㊄㊈兩式爲如程之式可見從㊃式以至㊈式全憑方程之本術而得非天元式中所能自明也則天元之不馭此題也明矣

若立天元〇丨爲硯價地元丨〇爲筆價人元〇〸爲墨價則以〇〣與四十八相消得㊉爲㊀式　以〇〢與五十二相消得㊉

爲二式　以〇丨與四十七相消得〦丨爲三式　二除其一式

得〤丨爲四式　三倍其四式得〩以二式減之得〥爲五式

四倍其四式得〦以三式減之得〣爲六式　以五式四

除而五乘之得〤以減六式得卌川上實下法得八爲硯價則此

但立一元者直捷數倍矣

惟此題可不必立三元即用兩元亦可求之如立天元〇丨爲硯

價地元〇爲筆價則以〇〢減共錢四十八得〨爲二筆之價

以〇〇〣減共錢五十二得〇〸為三墨之價　以〣〇丨減共錢

四丨丨七得〇〸為四墨之價　二倍其〇〸為〇〇以與〇〸

相消得〇〸為〇式　二除其〇〸而三乘之得〇〸以與〇〸

〸相消得〇為〇式　四除〇式而五乘之得〇以減〇式得

〸上實下法得八為硯價

由此可見三色方程之題至少必用兩元方可馭之則充四元之力

量僅能馭五色方程耳若論方程之本術無論幾何色皆可求也

蓋古人創立方程之術其意亦猶之乎四元也特其列位之法不以

各元環繞太極而以各元與太極成一直行且不以太極與各元之

數相消而以太極與各元之數相等其最下之一層即太極也其上之各層即各元之數也

惟因太極與各元之位如此列之則每行之中但能有其各元之本位而不能有其自乘相乘之各方故其術僅能求得法實兩數而不能得諸乘方之式

四元之術猶之乎將直行之方程式改之使太極居中而天地人物每元獨當一面則其外皆有空處能容其自乘再乘以至多乘之各方而其間又能容各元各方之彼此相乘之數則各數皆自有位次而此方程之式更能詳備矣所以方程但能馭本術之題而四元則能兼馭各術之題

或有問者曰如此言之則四元者乃方程之詳備者也方程者乃四

元之簡畧者也由方程而推之四元則爲踵事增華由四元而追溯方程則爲太羹元酒以方程釋四元不過稍得端倪不足以窮其底蘊也以四元推方程亦爲畧施薄技而不必用其全力也如此徒費筆墨予亦自覺無謂乎

答之曰世之言算者往往視方程太易而視四元太難余故以方程釋四元以四元演方程使人知方程即四元也四元即方程也則人必以易視方程之心以嘗試四元而四元易通矣則以此爲四元入手之處可也

又有問者曰太極之位不作太字記之而以括弧記之此何意也

答之曰太極之空位作太字以記之一經傳寫每易與上文之直行相連而誤以天元爲太極此一弊也其太極之有數者若作太字于

其數之上亦易與上文相連且必使其數低下半格不能與地人兩元相齊此二獘也若作太字于其數之右則又易誤認其太字爲空位而以太極之數爲地元此三獘也今改作括弧則太極之空位者可作空括弧太極之有數者可書其數于括弧之中則無上下左右游移之病而三獘皆可免矣

論四元

立天地人物四元在太極之四旁此猶東西南北各立一天元也天元之理明則四元之理亦無不明所以論四元者不必再論其理但須論其法而已

四元之行列方位以及其加減乘除相消之法甘泉易氏有四元釋例海寗李氏有四元解南豐吳氏有四元草四元各式釋例四元淺

釋學者觀此各書當無有不明四元者然世之能此術者卒鮮何也掩卷卽忘而不能得其要領也

四元之術古書之僅存者惟有朱氏四元玉鑑而已此外更無他書也然朱氏惟卷首四題畧具今云等式並有剔分相消互隱通分各名目而不詳演細草讀之卒難入手甘泉羅氏集各家之大成竭平生之精力演成玉鑑全草洵可爲朱氏功臣矣故今之言四元者皆以羅氏爲宗

四元之古術究竟未知如何因朱氏不詳細草也惟羅氏補朱氏之細草而能一一脗合則以羅氏之術卽爲朱氏之術亦無不可今欲爲學者論四元之術亦惟有卽羅氏所補之草以明其各法而已

余生平未嘗致力于四元故四元之術非余之所長僅能畧知其大

意耳兹特舉余之所知者言之以爲學四元者一助焉

天元術中其相消之法只有一種即所謂如積相消者是也四元術中其相消之法則有兩種一爲如積相消一爲齊同相消

天元術中因所立者祇有一元故祇須一次如積相消便可得其開方之式四元之術其元不止一箇故立兩元者必須兩箇如積相消立三元者必須三箇如積相消若四元並列則須四箇如積相消

以天元馭題凡題中之委曲繁重處均須以天元一綫貫之故其工夫全在求其如積之前及至求得如積之式而將兩式相消則天元之事畢矣以四元馭題因可將題中之句語分爲數節而每節各求其如積相消之式故其求如積也易於天元惟至一一求得如積相消之式其事不能便了因所消得者不止一式其每式中不獨一元

則其數亦不止一行故須用齊同相消之法將數式消成一式數元消剩一元數行消爲一行方成可以開方之式故其工夫大半在如積相消之後

四元術中如積相消之法與天元術中如積相消之法其意相同故旣明天元之術者不必再與言四元之如積相消惟齊同相消則爲天元術中所無而四元術中又以此爲最要之事故不得不詳細論之

凡齊同相消與如積相消其所異之事有三

如積相消其彼此兩式之太極不可不同在一位齊同相消則彼此兩式之太極有時可以不必同在一位其所異者一也

如積相消其彼此兩式之數但能相減而不能相加亦不能以此

式之若干倍或若干分與彼式相加減齊同相消則可以相加亦可以相減又可以將彼此兩式或用他數乘之或用他數除之然後相加減其所異者二也

如積相消祇須相減一次便爲消訖齊同相消則可以加減數十次尚未消訖其所異者三也

凡齊同相消之時其彼此兩式之太極雖可不齊其位然其對面若有他元則不可犯其疆界也所以其例有四

彼此兩式均爲四元所成者則齊同相消之時其彼此兩式之極不可不同在一位一例也

彼式爲四元所成此式爲天地人三元所成者則齊同相消之時不可使此式之極高於彼式之極以侵物元之地步亦不可使此

式之極偏於彼式之極以侵地人兩元之地步二例也

彼此兩式均爲天地人三元所成者則齊同相消之時不可使此式之極偏於彼式之極三例也

彼式爲天地人三元所成此式爲天地兩元或天人兩元所成者則齊同相消之時不可使此式之極背其自有之元而侵對面別元之地步四例也

除此四例以外其極任至何處均無不可所以兩元之式其齊同相消之時可以不必留心其太極之位

凡齊同相消之時其所用加減乘除之事共有五法

以此式與彼式相加以此式與彼式相減一法也

用此式之若干倍若干分加減彼式二法也

以此式在邊之一行徧乘彼式以彼式同邊之一行徧乘此式而將乘得之兩式相加減三法也

將此式剔分爲二各自乘以乘得之兩式相減然後以減得之式加減彼式四法也

消至彼此兩式各爲兩行則可將兩式左右並列之內二行外二行各相乘又將乘得之兩式相減五法也

以上五法或全用之或祗用數法是在乎算者自擇其合宜者用之用之而能得其當則能使多元之式化爲一元多行之數化成一行且能使所得之開方式爲最簡之乘數惟用之若不得其當非但能使所得之開方式乘數增多且有轉輾求之竟不能得其開方之式者神而明之存乎其人不能有一定不移之法也

甘泉羅氏旣補四元玉鑑細草後慮其頭緒雜沓讀者卒難下手爰括進退升降消長之例著演元九式一卷自謂四元之精蘊已盡在是書然初學之見此書者仍束手不敢嘗試蓋以題中之曲折太多故也設題繁則演算亦繁學者於題與算式兩者不能兼顧則心目因之迷眩矣四元之難通良以此故

人之所以畏作四元者由於視之太難其心中以爲必待一元所不能馭始立兩元兩元所不能馭始立三元至四元並立其題必極難矣殊不知一元所能馭者多立一元以求之其事更易多立兩元以求之其理又必更明也試思方程之題不用天元尙且能求其淺易可知然至五色以上之方程且爲四元之所不能馭則亦何必震驚夫四元也哉

玆設最簡易之十題如法演之非敢謂從此即可通四元然學者若能彷此爲之則四元之術易易矣

一題　有長平方形但知其長平相乘之積爲六長平之較爲一求長平各幾何

立天元〇丨爲長地元|〇爲平則長平之較爲卄〇丨與一相消得卄十丨爲甲式長與平相乘得◦〇|◦與六相消得◦丅|◦爲乙式

將甲乙兩式相加以消去地元得丅十丨開平方得三爲長

將乙式減甲式而消去其天元得卄丅易位爲丅卜卜開平方得二爲平

二題　有長平方形但知其長平相乘之積爲六其長之四倍以平之五倍減之則餘二求長平各幾何

立天元〇丨爲長地元丨〇爲平天地兩元相乘得〇〇丨爲長平相乘之積與六相消得〇丨〇爲甲式以四乘〇丨得〇𝍣爲四倍其長以五乘丨〇得𝍤〇爲五倍其平相減得𝍣〇𝍣與二一相消得𝍣𝍣爲乙式

五倍其甲式得〇𝍢〇以加乙式得𝍢𝍥𝍣以二約之得𝍧𝍩𝍡

平方得三爲長

四倍其甲式得〇𝍢〇以減乙式得𝍦𝍥𝍣易位爲𝍣𝍥𝍧開平方得二爲平

三題　有大小兩數其大數之三倍以小數之四倍減之則餘一其小數之七倍以大數之四倍減之則餘二求大小兩數各幾何

立天元〇〡為大數地元〡〇為小數則〢〇〢為三倍大數內減去
四倍小數與一相消得〤⊕〢為甲式　又其七倍小數內減去四
倍大數為〦〇〤與二相消得〢⊕〤為乙式

⊕〢

列甲式於右乙式於左如〤〦⊕〤　內二行相乘得〦〧外二行相乘
得〨〧相減得〡〣〤上實下法得三為大數若將甲乙二式易位
得〣⊕〤為右式〤⊕〦為左式

四題　有大小兩數其較為一其平方之較為五求兩數各幾何

立天元〇〡為大數地元〡〇為小數則以小數減大數得〡〇〡與
一相消得⊕〡為甲式以〇〡自乘得〇〇〡以〡〇自乘得〡〇〇為

大小兩平方則其較爲()〇丨與五相消得卌〇丨爲乙式

以甲式減乙式得卌〇丨卜爲一式　以一式左行之數丨卜乘甲

式得卜〢卜以加一式得下〢上實下法得三爲大數

將甲乙兩式易位得丨卅卜爲丙式卌〇卜爲丁式　以丙式減丁

式得卌〇卜以丙式兩次減之得卌〢上實下法得二爲小數

若將甲式剔分爲卜()與丁丨各自乘得卜()與丁卄丨相得卜卅〢卜

以加乙式亦得下〢

若將丙式剔分爲丨()與卅卜各自乘得卜()與丁〢丨相消得卜丁〢

丨以加丁式亦得卌〢可見兩元之式未嘗不可用剔分也

五題　有大中小三數其大小兩數之和以中數減之則餘二其中

數小數之和以大數減之則適盡其大數中數之和以小數之二

倍減之則餘三求三數各幾何

立天元〇丨爲大數地元丨〇爲中數人元〇丨爲小數則以中數減大小兩數之和其式爲卄〇丨與二相消得卄卅丨爲甲式　以大數減中數小數之和其式爲丨〇丨十與〇相消得丨〇丨十爲乙式　以小數之二倍減大數中數之和其式爲丨〇卅丨與三相消得丨卅卅丨爲丙式

甲乙兩式相加得卅〢爲右式　以乙式減丙式得卅卅〢爲左式

左右並列如卄〢　卅卄〢　內二行相乘得丅外二行相乘得丅〣相減得丨卄〣上實下法得三爲大數

以乙式減甲式得卄卅〢爲一式　二倍乙式爲丨〇〣　卄以加丙式得

‖(卌)十為㊁式　二除㊀式得十(十)丨以加㊁式得‖卌易位為卌‖上
實下法得二為中數
以(甲)式加(丙)式得(卌)十‖為㊀式　以(乙)式減(丙)式得(卌)卌‖為㊂式
㊀㊂兩式相減得(廿)‖易位為廿‖上實下法得一為小數
六題　有大小中三數其遞較之數均為一其三數平方之和為十
四求各數幾何
立天元〇丨為大數地元丨〇為中數人元〇丨為小數則其大數中
數之較為十〇丨與一相消得十(十)丨為(甲)式
其中數小數之較為丨〇十與一相消得丨(十)十為(乙)式　三數平方之和
為〇〇丨與十四相消得(卌)〇丨為(丙)式

甲乙兩式相加得卄丨為丁式　剔分甲式為卄〇與十丨各自乘
得〡〇〇與〇卄丨相消得〇卄丨為㊀式剔分丁式為〇十與卄丨各
自乘得〇〇與〇卌丨相消得〇卌丨為㊁式　㊀㊂兩式相加得
〇卌丅〢以加丙式得卌丅〣以三約之得卌卄丨開平方得三為
大數
若剔分甲式為十〇與〇丨各自乘得〣〇與〇〇丨相消得〣〇十
為㊀式　剔分乙式為〇十與十各自乘得〇〇與〇卄〇相消得〇〇為㊁
式　㊀㊁兩式相加得〇〇〇十以加丙式得〇卄易位為卄〇〣以
三約之得卌〇丨開平方得二為中數

若剔分㉄式爲丨〇與㊉⊥各自乘得丨〇〇與①‖丨相消得⊥①‖爲㈠式剔

分㉃式爲㊉⊥與〇丨各自乘得㊂‖丨與〇〇丨相消得㊂‖丨〇十爲㈡

式

㈠㈡兩式相加得㊂⊤‖〇十以加㈢式得㊁⊤‖易位爲卌⊤‖以

三約之得卌‖丨開平方得一爲小數

觀此可知三元之式未嘗不可兩次剔分也

七題　有句股和七弦和較二求句股

立天元〇丨爲句地元丨〇爲股人元〇‖爲弦則其句股和爲〇丨

與七相消得丨㊁丨爲㊀式　其弦和較丨〇⊥丨與二相消得㊀⊥丨爲

㉄式　句平方〇〇丨與股平方丨〇〇相加得丨〇〇〇丨與弦平方〇〇丨

相消得〇〇丨爲丙式以甲式減乙式得〇⊥爲一式　剔分甲式

爲〇與〇丨各自乘得〇〇丨與〇丨丨相消得〇丨丨爲二式　剔

分甲式爲丨〇與〇丨各自乘得〇與〇〇丨相消得〇〇丨爲三

式　剔分一式爲〇與〇十各自乘得〇與〇丨相消得〇〇丨爲四式

三四兩式相加得〇丨以加丙式得〇〇以二約之得〇

丨開平方得三爲句

㊂㊃兩式相加得㊂〇十以加㊄式得㊂易位為三以二約

之得開平方得四為股

八題　有句三股四求句弦和

立天元〇|為句地元|〇為股人元〇|為弦物元|〇為句弦和

以句〇|與三相消得㊃|為㊀式　以股|〇與四相消得㊄|

為㊁式　以句平方〇〇|與股平方|〇〇相加得|〇〇〇|與弦平

方〇〇|相消得|〇〇〇|為㊂式　以句弦和〇||與物元|〇相消

得十〇||為㊃式

剔分甲式爲〇與〇丨各自乘得〇與〇〇丨相消得〇〇十爲一式　剔分乙式爲〇與〇〇各自乘得〇與〇〇相消得〇爲二式

一二兩式相加得〇〇十以加丙式得〇〇十爲三式　以甲式減丁式得十〇易其位爲〇十爲四式　剔分四式爲〇丨與〇十各自乘得〇〇與〇十丨相消得〇〇丅十以加三式得丅丅十開平方得八爲句弦和

九題　有句弦和八句股較一求句股和

立天元〇丨爲句地元〇〇爲股人元〇〇爲弦物元丨〇爲句股和

則其句弦和爲〇‖一與八相消得⊕‖一爲甲式　其句股較爲
|〇十與一相消得|⊕十爲乙式　其句股兩平方之和與弦平方
相消得|〇〇〇十爲丙式　其句股和爲|〇一與物元一〇相消得
十|〇一爲丁式　剔分甲式爲|〇與⊕一各自乘得〇|〇與⊕丅一相
消得|⊕丅十爲一式　剔分乙式爲|〇與⊕十各自乘得|〇〇與〇
‖一相消得〇〇〇‖一爲二式　一二兩式相加得⊕|Ⅲ以加丙式
得⊕Ⅲ一爲三式以乙式減丁式得十〇‖爲四式　九倍四式
爲Ⅲ⊕Ⅲ以減三式得Ⅲ⊕〇一爲五式　剔分四式爲十⊕與

〇‖各自乘得丨卄〇與〇○Ⅲ相消得丨卄〇○卌爲六式

四倍五式爲三丅〇○Ⅲ以加六式得丨三Ⅲ〇以此式易位爲Ⅲ丅三Ⅲ

丨開平方得七爲句股和

十題　有弦較和六弦和較二求弦和和

立天元〇丨爲句地元丨〇爲股人元〇丨爲弦物元丨〇爲弦和和

則其弦較和爲丨〇丨十與六相消得〇十爲甲式　其弦和較爲丨〇丨

丨與二相消得〇丨爲乙式　句平方加股平方與弦平方相消

得丨〇丨○丨爲丙式　其弦和和爲丨〇丨與物元丨〇相消得十丨〇丨

丨爲丁式　甲乙兩式相加得〇半之得〇爲二式　甲乙兩式

相減得〇半之得〇十爲三式　一三兩式相加得〇十以減

(丁)式得ㄒ(丁)‖爲(三)式　剔分一式爲|〇與(卌)各自乘得〇ㄒ與(廿)

相消得(廿)〇ㄒ爲(四)式　剔分(二)式爲丨〇與(卄)ㄒ各自乘得〇丨〇與(卌)Ⅲ

丨相消得〇丨(卌)卌ㄒ爲(五)式　(四)(五)兩式相加得〇丨〇(卄)卌ㄒ以加兩式

得(卄)卌爲(六)式　二倍(三)式爲卄(卄)Ⅲ以加(六)式得卄(卌)易其位

爲Ⅲ卄上實下法得十二爲弦和和

論天元四元不便之處

用演元之式以馭各種算題固比尋常數學之法明白簡易然其中

倘有不便之處時或過之

未知之數旣能代以各元則其各方之正負雜糅可明未知之數之

條段此固甚便之事惜其已知之各數則混和於太極之中而條段

不得分明其不便者一也

演元式中其已知之數但能用整數而不能用分數故遇分數必另寄其分母以不除此而乘彼之法入之若所設之題其中分數多或此例多者屢次寄母頗覺費事其不便者二也

已知之數必用本數入算而無他法以代之則遇多位之數或奇零不盡之數如方斜周徑八綫對數相比互求之事俱覺繁重難勝其不便者三也

此三種不便之處爲天元四元所同而四元中更有一不便之事爲演元者所深畏

因天地人物四元環抱太極其地人兩元天物兩元均在對面故其各元各方互乘之數無可位置而寄之於夾縫之中其不便者四也

海甯李氏著四元解其各元各方之位置均與羅氏異則可免夾縫中寄數之弊然用之亦覺不便

總而言之天元之法便於加減乘而不便於除四元之法但便於加減而不便於乘除其不便於除者因除不眞除而必乘彼以代其除也其不便於乘者因乘必眞乘而不能用他法以明其乘也此天元四元所以不如代數之便也

近人有取玉鑑中三元四元諸題但立天元地元以求之者雖布算較省然須多一識別且非朱氏著書之意也

學算筆談卷八

金匱華蘅芳學

代數釋號

西法之代數猶中法之天元四元也惟天元四元之所重者在行列位次而代數則不論行列位次一切皆以記號明之凡學代數者必先熟計其各種記號及名目

天元四元其未知之數以一代之已知之數即用其本數入算代數之法恆以天地人物等字代未知之數甲乙丙丁等字代已知之數又可用周字代周率訥字代訥氏對數之底所以無論何數皆可以其本字代之其所代之字亦謂之某元

丄者正也加也

如甲丄乙言以乙與甲相加也其甲字之左不作丄號亦與有丄號者無異

丅者負也減也

如甲丅乙言于甲數內減去乙數也

丅者相減也凡言相減者必以小數減其大數

如二丅三則當以二減三得一如二丅三亦當以二減三得一

乂者左右兩數相乘也

如二乂三則為六

若以兩元相乘者可將兩元並書之而中間不必作乂如甲乙相乘則作甲乙其意與甲乂乙無異

÷者以右約左也

如$\frac{甲}{乙}$言以甲為法而約其乙也

一者以上約下也猶言分之也

如$\frac{甲}{乙}$言甲為分母乙為分子也即甲分之乙也

○者括弧也所以包括其內之各數使之自成一數而與其外之他數相加減乘除也

如（甲丅乙）丄丙言以甲乙之較與丙相加也　如（甲丄乙）丅丙言其甲乙之和以丙減之也　如（甲丅乙）丙言以甲乙之較與丙相乘也　如（甲丄乙）（甲丅乙）言以甲乙之和與甲乙之較相乘也　如$\frac{（甲丅乙）丙}{（甲丄乙）丙}$言以甲乙之和與丙相乘為法甲

乙之較與丙相加爲實實如法而一也

又有重重包括者則異其括弧之式以別之如作[]或作{}其意並同

如 [甲丅(乙丄丙)丄丁]天 言于甲內減去乙丙之和而以丁加之乃與天相乘也

元之左邊有數目之字者謂之倍數亦謂之係數所以省同元相加之繁也

如 甲丄甲 可作 二甲　甲丄甲丄甲 可作 三甲

元之右角上有小字者謂之方指數所以省並書多字之繁也

如$甲甲$可作$甲^{二}$即甲之平方也

如$甲甲甲$可作$甲^{三}$即甲之立方也　如$甲^{乙}$為甲之乙方也　如$(甲丄乙)^{二}$言以甲乙之和自乘也

$\sqrt{}$者開方也言其內之數當開方也亦謂之根號于根號之左角作小字謂之根指數

如$\sqrt[三]{甲}$為甲之立方根　如$\sqrt[二]{甲}$為甲之平方根每有不作$\sqrt[二]{}$而但作$\sqrt{}$者其意與$\sqrt[二]{}$無異

方指數及根指數亦有為分數者

如$甲^{\frac{丙}{乙}}$為甲之乙分之丙方也　如$\sqrt[\frac{乙}{丙}]{甲}$為甲之丙分之乙根也

如$甲^{\frac{三}{二}}$為甲之二分之三方即以甲之立方開其平方也

＝者等于也謂其左右兩數相等也

如 甲＝乙 言甲等于乙也 如 甲丄乙＝丙丄丁 言甲乙之和等于丙丁之和也

＜者小于也謂左數小于右數也

如 甲丅乙＜丙丄丁 言甲乙之較小于丙丁之和也

＞者大于也謂左數大于右數也

如 甲丄乙＞丙丄丁 言甲乙之和大于丙丁之和也

∽者變于也言左數因右數而變也

如 甲∽乙 言甲變于乙也 如 乙∽丙 言乙變于丙也

· 者乘也與用×號同意

如 一×二×三 可作 一·二·三 是也

∶ 者與也言其左數之與右數也

∷ 者若也如也所以明比例之理也

如 甲∶乙∷丙∶丁 言甲與乙之比若丙與丁之比也

∵ 者因也承上文而言之也

∴ 者故也發明其所以然也

如 ∵甲＝二 乙＝一 ∴甲丄乙＝三 言惟因甲等于二乙等于一所以甲乙之和等于三也

者不盡也等等也如直行中則作∴

如一丄二丄三丄……言自一以至無窮也　如一丄二丄三丄……丄九言自一至九各數相加也

○者無也零也空位也適盡也

如甲丄丙丅乙＝○言甲丙之和以乙減之則等於無也

∞者其大無窮也

如$\frac{一}{○}$＝∞言以○除一則其所得之數等于無窮也

亅者至此而止也所以省連書各數之繁也

如一·二·三·四可作四

項者式中之自成一數者也

如甲　甲　（甲丄乙）（甲乙）皆為獨項之式　如甲丄乙　甲丅乙　甲丄乙　（甲丄乙）（甲丅乙）甲丅丁　甲丄丁　皆為兩項之式

如甲丄乙丄丙丄丁則甲為第一項乙為第二項丙為第三項丁為第四項

函數者式中之各項均函此元者也

如式之各項以天之各方明之則謂之（天）函

某次式者猶言某乘方也惟次數與方數卻有不同

如一次式即法實之式也　二次式即平方之式也　三次式即

立方之式也　四次式卽三乘方式也　五次式卽四乘方式也

其餘依此類推

解者開也凡言解其某次之式者猶言開某乘方也

以上各種記號及名目爲代數式中所常有者學者旣熟記之則可習代數中之各種算法

代數加減乘除之法

代數之算法亦當從加減乘除學起惟因式中之各項或爲整數或爲分數或有方指數或有根指數故其加減乘除之法各有不同此猶數學中之加減乘除有整數分數小數之別也

代數之加法須識別其式號之異同而分爲三種

一將同式同號之代數相加則併其各元之倍數爲加得之倍數

而式與號不變

如
甲
二甲
三甲
四甲
———
一〇甲

如
丅甲天
丅二甲天
丅三甲天
丅四甲天
———
丅一〇甲天

二將同式異號之代數相加則將其各元之倍數正與正併負與負併又以併得之正負兩數以小減大而將減得之數爲加得之倍數其定號之法恆以大數爲主而其元不變

如
甲天
丅二甲天
丅三甲天
丅四甲天

如
甲天
丅二甲天
三甲天
———
二甲天

三將式號俱異之代數相加則將諸式任意連書之其式與號俱不變

如

二甲
丅三乙
四丙
丅五丁

二甲丅三乙丄四丙丅五丁

如

甲天丄二甲地
乙天丅三乙人

甲天丄二甲地丄乙天丅三乙人

然此三種之式恆兼有于欲相加之式中故必須一一識別而各以本法加之

如

二甲
甲天
丅三甲
四甲

三甲丄甲天

如

丅甲天
丅天
二天

天丅甲天

代數之減法祇須反其減式之號而加之即爲減得之式

如五甲丅六乙以二甲丅三乙減之則作

五甲丅六乙
丅二甲丄三乙

三甲丅三乙

如

六天丅八地丄三

以

二天丄九地丅二

減之則作

六天丅八地丄三

丅二天丅九地丄二

四天丅十七地丄五

欲明代數之乘法須先熟記丄丅二號相乘之式即同名相乘為正異名相乘為負是也

如

丄×丄=丄

丅×丅=丄

丄×丅=丅

丅×丄=丅

代數之乘法須觀其項數之多少而分為二種一為獨項與獨項相乘一為獨項與多項相乘或多項與多項相乘

獨項之兩式相乘先以兩式之號相乘乃以兩式中之倍數相乘又以兩式中之元並書之即為乘得之式

如將二甲與二丙相乘者則因其號俱爲正故乘得之號亦爲

二甲
二丙
―――
四甲丙

正又因倍數二與二相乘故乘得之倍數爲四又將甲丙並書之爲乘得之元

如
五甲
丅四乙
―――
丅二〇甲乙

如
丅五甲
四乙
―――
丅二〇甲乙

如
丅五甲
丅四乙
―――
二〇甲乙

將多項之代數式相乘以法之每項各與實之每項如獨項相乘之法一一偏乘之乘訖併之卽得

如四甲丅二乙丄丙以三甲乘之則先以三甲四甲之號相乘得正乃以三四相乘得一二

又以甲甲相乘得甲甲爲乘訖第一項又以丄與丅相乘得丅二與三相乘得六甲與乙相乘得乙甲爲乘訖第二項又以丄與丄乘得丄三與一乘得三甲與丙乘得丙甲爲乘訖第三項故其橫綫下所書者即乘得

四甲丅二乙丄丙

三甲

二甲甲丅六乙甲丄三甲丙

之式也

如

二天丄地

天丅二地

二天天丄天地

丅四天地丅二地地

二天天丅三天地丅二地地

如

甲丅乙丄丙

甲丄乙丅丙

甲甲丅甲乙丄甲丙

丄甲乙丅乙乙丄乙丙

丅甲丙丄乙丙丅丙丙

甲甲丅乙乙丄二乙丙丅丙丙

欲明代數之除法須先熟記丄丅二號相除之式即同名相除得正異名相除得負是也

如丄÷丄=丄
丅÷丅=丄
丄÷丅=丅
丅÷丄=丅

代數之除法須分爲三種

一其法爲獨項之式而實之諸項均爲法所可約者則每項皆先以法之號約其實之號次以法之倍數約其實之倍數又于實中去其與法相同之元卽得

如丄四甲丄二甲天以丅二甲約之則因法之號爲丅實之第一項同于丄四甲以丅約丄當得丅以二約四當得二以甲約甲當去其甲故其約得之第一項爲丅二又實之第二項之號爲丄以丅約之得丅以二約二得一以甲約甲天當去其甲故其約得之第二項爲丅天卽共約得丅二丅天

二其法爲獨項式而實之諸項均非法所可約者則書其法于實之上而中作橫綫以界之此卽命分之意也

如甲丄乙丄丙以天約之則作$\frac{\text{天}}{\text{甲丄乙丄丙}}$

三其法爲多項之式者則將法之第一項約其實之第一項爲約得之第一項以此與全法相乘以減原實爲餘實又以法之第一項約餘實之第一項爲約得之第二項以此與全法相乘以減餘實爲第二餘實順是以下俱如是求若遇減之適盡則併其累次約得之項卽爲約得之多項

如甲^{三}丄乙^{三}以甲丄乙約之得甲^{二}丅甲乙丄乙^{二}其算草如左

甲丄乙) 甲三丄三 (丅甲丅甲乙丄乙三
甲三丄甲二乙
丅甲二乙丄乙三
丅甲二乙丅甲乙二
丄甲乙二丄乙三
丄甲乙二丄乙三
○

若除至多項終不能盡則有二法以記之一可于其右作丄丄丄之號以明其不能除盡之意一可將餘實為分子而以法為分母

如以一丅天約一既得一丄天丄天三而餘實為三天則其約得之式可作一丄天丄天三…亦可作

一丅天 三天
一丄天

是也

惟因不能約之式及不能約盡之式皆可命之爲分數所以代數中又有分數加減乘除之法

分數之加減乘除其理與尋常之數學同可作公式明之

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}\text{丄}\frac{\text{丙}}{\text{丁}}=\frac{\text{甲丙}}{\text{乙丙丄甲丁}}$$

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}\text{丅}\frac{\text{丙}}{\text{丁}}=\frac{\text{甲丙}}{\text{乙丙丅甲丁}}$$

$$\frac{\quad}{\text{乙乂丁}}=\frac{\text{甲丙}}{\text{乙丁}}$$

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}\div\frac{\text{丙}}{\text{丁}}=\frac{\text{甲丁}}{\text{乙丙}}$$

自乘再乘以至多乘之式旣可作方指數以省其繁則凡遇有方指數之代數式其加減乘除之法又與尋常之式有別

方指數之代數式惟同元同方者可相加減

其公式爲

$$甲天^{卯}\perp乙天^{卯}=(甲\perp乙)天^{卯}$$

$$甲天^{卯}\top乙天^{卯}=(甲\top乙)天^{卯}$$

若其同元異方之式祇能作加減之號以明之

如$甲天^{寅}$以$乙天^{卯}$加減之則作$甲天^{寅}\perp乙天^{卯}$ $甲天^{寅}\top乙天^{卯}$不能合爲一項也

同元之諸方式其相乘之法并其兩式之方指數爲所得之方指數

其公式爲

$$甲天^{寅}\times乙天^{卯}=甲乙天^{寅\perp卯}$$

其相約之法以法之方指數減其實之方指數爲所得之方指數

其公式爲 $\frac{甲天^{寅}}{乙天^{卯}}=\frac{甲}{乙}天^{寅丅卯}$

所以用除法之時若遇法實之方指數相等則能令所得之方指數爲〇若其法之方指數大于實之方指數又能令所得之方指數爲負

如 $天^{〇}=天^{二丅二}=\frac{天^{二}}{天^{二}}$

$天^{丅一}=天^{三丅四}=\frac{天^{三}}{天^{四}}$

凡元之方指數爲〇者其意謂等于一也

如 $\text{天}^{\text{〇}}=\text{天}^{\text{三丅三}}=\frac{\text{天}^{\text{三}}}{\text{天}^{\text{三}}}$ 其 $\text{天}^{\text{〇}}=\text{一}$ 因 $\text{一}=\frac{\text{天}^{\text{三}}}{\text{天}^{\text{三}}}$ 也

凡元之方指數爲負者其意謂變其負爲正而以其式約一也

如 $\text{天}^{\text{丅三}}=\text{天}^{\text{三丅六}}=\frac{\text{天}^{\text{六}}}{\text{天}^{\text{三}}}$ 其 $\text{天}^{\text{丅三}}=\frac{\text{天}^{\text{三}}}{\text{一}}$ 因 $\frac{\text{天}^{\text{三}}}{\text{一}}=\frac{\text{天}^{\text{三}}\text{天}^{\text{三}}}{\text{天}^{\text{三}}}=\frac{\text{天}^{\text{六}}}{\text{天}^{\text{三}}}$ 也

學者勿忘元之不作方指數者其方指數當爲一而不可爲〇

如 $\text{天}\text{乂}\text{天}^{\text{二}}=\text{天}^{\text{三}}$ 此因 $\text{天}^{\text{一}}\text{乂}\text{天}^{\text{二}}=\text{天}^{\text{一丄二}}=\text{天}^{\text{三}}$ 之故也若作 $\text{天}=\text{天}^{\text{〇}}$ 則 $\text{天}^{\text{〇}}\text{乂}\text{天}^{\text{二}}=\text{天}^{\text{〇丄二}}=\text{天}^{\text{二}}$ 矣安得不誤耶

方指數亦能爲分數其加減之法與數學之理同

其公式爲

$$天^{\frac{甲}{乙}} \times 天^{\frac{丙}{丁}} = 天^{\frac{甲}{乙}⊥\frac{丙}{丁}} = 天^{\frac{甲丙}{乙丙⊥甲丁}}$$

$$\frac{天^{\frac{丙}{丁}}}{天^{\frac{甲}{乙}}} = 天^{\frac{甲}{乙}丅\frac{丙}{丁}} = 天^{\frac{甲丙}{乙丙丅甲丁}}$$

方指數之分子所以記其乘方也方指數之分母所以記其開方也

如$天^{\frac{三}{二}}$言以天之平方開其立方之根也　如$天^{\frac{二}{三}}$言以天之立方開其平方之根也　如$天^{\frac{甲}{乙}}$言以天之乙方開其甲方之根也

所以方指數之分母即爲根指數之分子根指數之分母即爲方指

數之分子

如$\sqrt{甲}$可作$甲^{\frac{一}{二}}$　如$\sqrt[三]{乙^{二}}$可作$乙^{\frac{二}{三}}$　如$\sqrt[三]{甲}=甲^{\frac{一}{三}}$

欲求方數之方數以二方數之指數相乘即得

如

$$\left(天^{四}\right)^{三}=天^{四\times三}=天^{一二}$$

如

$$\left(天^{甲\perp乙}\right)^{甲\top乙}=天^{甲^{二}\top乙^{二}}$$

如

$$\left(天^{寅}\right)^{卯}=\left(天^{卯}\right)^{寅}=天^{寅卯}$$

總數之方數爲同方之諸元相乘所得

如$甲^{二}乙^{二}丙^{二}$可作$\left(甲乙丙\right)^{二}$

求根數之根數以二根指數相乘即得

如 $\sqrt[4]{\sqrt[3]{天}}=地$ 則 $\sqrt[3]{天}=地^{4}$ 而 $天=(地^{4})^{3}=地^{12}$ 所以 $地=\sqrt[12]{天}$ 即 $\sqrt[4]{\sqrt[3]{天}}=\sqrt[12]{天}=地$

總數之根數爲同根之諸元相乘所得

如 $\sqrt[3]{甲}\sqrt[3]{乙}\sqrt[3]{丙}$ 可作 $\sqrt[3]{甲乙丙}$ 如 $\frac{\sqrt[3]{乙}}{\sqrt[3]{甲}}$ 可作 $\sqrt[3]{\frac{乙}{甲}}$

用以上各種加減乘除之法無論何種算學之題必可求得相等之式

論相等之式

代數之有相等式猶天元四元之有如積也惟其如積之式不以之

相消而但作相等之號以明其如積之意故謂之相等之式

凡題中只有一箇未知之元者只須求一箇相等式若有兩箇未知之元者須求兩箇相等式其未知之元每多一箇則其相等之式亦必多求一箇所以又謂之方程式

變化相等之式

相等式之左右兩邊其各項中或有分母或有根號或有括弧必須一一化去之此猶四元術中齊同相消之意也

惟因＝號之左右其所代之數必相等則左右同加某數亦相等同減某數亦相等同以某數乘之亦相等同以某數除之亦相等所以有移項之法可以移減作加移加作減移乘作除移除作乘

如 $\text{甲}-\text{乙}=\text{丙}$ 可移作 $\text{甲}=\text{丙}+\text{乙}$ 此猶兩邊以乙加之也

如 $\text{甲}+\text{乙}=\text{丙}$ 可移作 $\text{甲}=\text{丙}-\text{乙}$ 此猶兩邊以乙減之也

如 $\frac{\text{乙}}{\text{甲}}=\text{丙}$ 可移作 $\text{乙}=\text{甲}\text{丙}$ 此猶兩邊以甲乘之也

如 $\text{甲}\text{乙}=\text{丙}$ 可移作 $\text{乙}=\frac{\text{丙}}{\text{甲}}$ 此猶兩邊以甲除之也

惟因左右兩邊其所代之數必相等則左右各自乘亦相等各再乘亦相等各以某方開之亦相等所以有兩邊乘方法兩邊開方法

如 $甲丄乙=丙$ 可各自乘作 $(甲丄乙)^{二}=丙^{二}$ 各再乘作 $(甲丄乙)^{三}=丙^{三}$ 其公式爲 $(甲丄乙)^{卯}=丙^{卯}$

如 $甲^{二}丄二甲乙丄乙^{二}=丙^{二}$ 可以兩邊各開平方得 $甲丄乙=丙$

從以上之理可化去相等式中之根號及分母

欲化去相等式中之根號可先用移項之法使其有根號者獨居一邊又用兩邊乘方之法依其根指數乘至若干次則根號可去

如 $\sqrt{甲}丄乙=丙$ 先移作 $\sqrt{甲}=丙丅乙$ 兩邊各自乘得 $甲=(丙丅乙)^{二}$ 則根號去矣

其根號若有多項者可用此法次第去之

如 $\sqrt{甲}+\sqrt{乙}=丙$ 先移作 $\sqrt{甲}=丙-\sqrt{乙}$ 兩邊各自乘得 $甲=丙^{2}-2丙\sqrt{乙}+乙$ 又移作 $2丙\sqrt{乙}=丙^{2}+乙-甲$ 兩邊各自乘得 $4丙^{2}乙=(丙^{2}+乙-甲)^{2}$ 則根號去矣

如 $\sqrt{甲}+\sqrt{乙}=\sqrt{丙}$ 兩邊各自乘得 $甲+2\sqrt{甲}\sqrt{乙}+乙=丙$ 移之作 $2\sqrt{甲}\sqrt{乙}=丙-甲-乙$ 兩邊各自乘得 $4甲乙=(丙-甲-乙)^{2}$ 則根號去矣

欲化去相等式中之各分母可將各母之最小公倍數徧乘各項而每項各以母約子則變為整數

如

$$\frac{甲}{乙} 丅 \frac{丙}{丁} = \frac{戊}{己}$$

以分母之公倍數徧乘各項得

$$\frac{甲}{甲丙戊乙} 丅 \frac{丙}{甲丙戊丁} = \frac{戊}{甲丙戊己}$$

每項各以母約之得

$$乙丙戊 丅 甲丁戊 = 甲丙己$$

則分母去矣

去括弧之法先須辨其作此括弧之意或因相乘或因自乘或因加

減而各以其法去之

括弧若專爲加減而作者則其外無指數而其左有加減之號

括弧外若爲加號者可竟去其括弧而其中之各項不變也

如 甲⊥(乙⊤丙)=丁 可竟去其括弧而作 甲⊥乙⊤丙=丁

括弧外若爲減號則去其括弧必將其中之各項反其正負

如 甲⊤(乙⊤丙)=丁 則去其括弧必作 甲⊤乙⊥丙=丁

其括弧若有數重者自外而內每次皆以此法去之

如

甲丅(乙丅(丙丄天))丄(乙丅(天丅二乙))＝丁

則先去其外層得

甲丅乙丄(丙丄天)丄乙丅(天丅二乙)＝丁

又去其丙層得

甲丅乙丄丙丄天丄乙丅天丄二乙＝丁

即

甲丄丙丄二乙＝丁

括弧之外有方指數者可將其中之諸項依方指數自乘若干次先去其方數乃依前法去其括弧

如

$(甲丅乙)^{二}$＝丙

則將

甲丅乙

自乘得

$甲^{二}丅二甲乙丄乙^{二}$

故去其括弧得

$甲^{二}丅二甲乙丄乙^{二}$＝丙

如 $丁(甲丅乙)^{二}=丙$ 則先化去其指數得 $丁(甲^{二}丅二甲乙丄乙^{二})=丙$ 乃去其括弧作 $丁甲^{二}丄二甲乙丅乙^{二}=丙$

若其括弧為相乘而作者可將弧外之數徧乘弧內之各項而去其括弧若有兩箇或多箇括弧相乘連乘者則將各弧內之項相乘連而去其括弧

如 $二(甲丅乙)=丙$ 則去其括弧作 $二甲丅二乙=丙$

如 $(甲丄乙)(甲丅乙)=丙$ 則去其括弧作 $甲^{二}丅乙^{二}=丙$

所以其作括弧之時若兼有各意者須兼用以上之各法以去之

如 $丅(甲丄乙)(甲丅乙)^{二}=丙$ 則先詳其 $(甲丄乙)$ 而式變為 $丅(甲丄乙)(甲^{二}丅二甲乙丄乙^{二})=丙$ 又將兩括弧內之項相乘而式變為 $丅(甲^{三}丅甲^{二}乙丅甲乙^{二}丄乙^{三})=丙$ 然後變為 $丅甲^{三}丄甲^{二}乙丄甲乙^{二}丅乙^{三}=丙$

凡有一箇未知之元之相等式用以上各種變化之法必可化之爲某次之式

若所得之式多于一次者則其未知之同數必用開方之法始能得之

代數之開方其法不止一種均見于新譯之代數術中茲因限于卷帙不能一一詳述惟述用表開方之法以足此卷而已

求平方式所能有之各根

凡平方式可分爲四種其各種之式及解法如下

第一種平方式爲

天二丄甲天丅乙＝〇

令

$\frac{己}{二甲}$＝正切人

則其二根爲

天＝己×正切八×餘切三人

天＝丅己×正切八×正切三人

第二種平方式爲

$$天^{二}丄巳天丅甲=〇$$

令

$$\frac{巳}{二\sqrt{甲}}=正切人$$

則其二根爲

$$天=丅\frac{二}{巳}\times正切人\times餘切\frac{一}{二}人$$

$$天=\frac{二}{巳}\times正切人\times正切\frac{一}{二}人$$

第三種平方式爲

$$天^{二}丅巳天丄甲=〇$$

令

$$\frac{巳}{二\sqrt{甲}}=正弦人$$

則其二根爲

$$天=\frac{二}{巳}\times正弦人\times餘切\frac{一}{二}人$$

$$天=\frac{二}{巳}\times正弦人\times正切\frac{一}{二}人$$

第四種平方式爲 $天^{2}+巳天+午=〇$ 令 $\frac{巳}{2\sqrt{午}}=正弦人$ 則其二根爲

$$天=-\sqrt{午}\times正弦人\times餘切\tfrac{1}{2}人$$

$$天=-\sqrt{午}\times正弦人\times正切\tfrac{1}{2}人$$

以上四種平方式其一二兩種之式其根恆能有之其三四兩種之式推 $\frac{巳}{2\sqrt{午}}$ 不大于一者則其二根能有否則不能有也

又有用對數求方平式之根其法如下

第一種平方式 $天^{2}-巳天-午=〇$ 可令 $對二+\tfrac{1}{2}對午-對巳=對正切人$ 則其正號之根天之對數等于

對言丄對正切人丄對餘切½人丅二○

其負號之根天之對數等于

對言丄對正切人丄對正切½人丅二○

第二種平方式

天²丄巳天丅午二○

可令

對二丄½對午丄一○丅對巳二對正切人

則其負號之根天之對數等于

對言丄對正切人丄對餘切½人丅二○

其正

號之根天之對數等于

對己丄對正切人丄對正切三人丅二○

第三種平方式

三天丅己天丄午＝○

可令

對一丄三對午丄一○丅對己＝對正弦人

則其第一正號之根天之對數等于

對己丄對正弦人丄對餘切三人丅二○

其第二正號之根天之對數等于

對巳丄對正弦人丄對正切二人丅二〇

第四種平方式

天丄巳天丄午＝〇

可令

對二丄對午丄一〇丅對巳＝對正弦人

則其第一負號之根天之對數等于

對巳丄對正弦人丄對餘切二人丅二〇

其第二負號之根天之對數等于

對言丄對正弦人丄對正切三人丅二○

以上第三第四兩種平方式若其

對二丄三對朩丄一○對巳

大于一。則其根爲不能有之根

求立方式所能有之各根

此法合于第二項爲空之立方式如遇式之第二項本非空位者必用代數之常法化之使其第二項爲空而後能解　其化之之法見于代數術第十一卷內學者自取閱之玆不備述

立方式之第二項爲空者共有四種依西人迦但之法可求其各根如下

第一種之立方式爲 $\text{天}^{3}+\text{乙天}-\text{甲}=0$ 則其根爲

$$\text{天}=\sqrt[3]{\frac{\text{甲}}{2}+\sqrt{\frac{\text{甲}^{2}}{4}+\frac{\text{乙}^{3}}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{\text{甲}}{2}-\sqrt{\frac{\text{甲}^{2}}{4}+\frac{\text{乙}^{3}}{27}}}$$

第二種立方式為$天^{三}丄巳天丄午=〇$則其根為

$$天=\sqrt[三]{丅\frac{午}{二}丄\sqrt{\frac{午^{二}}{四}丄\frac{巳^{三}}{二七}}}\;丅\;\sqrt[三]{\frac{午}{二}丄\sqrt{\frac{午^{二}}{四}丄\frac{巳^{三}}{二七}}}$$

第三種立方式為$天^{三}丅巳天丅午=〇$則其根為

$$天=\sqrt[三]{\frac{午}{二}丄\sqrt{\frac{午^{二}}{四}丅\frac{巳^{三}}{二七}}}\;丄\;\sqrt[三]{\frac{午}{二}丅\sqrt{\frac{午^{二}}{四}丅\frac{巳^{三}}{二七}}}$$

第四種立方式為 $天^{三}\top巳天\bot午=〇$ 則其根為

$$天=\sqrt[三]{\top\frac{午}{二}\top\sqrt{\frac{午^{二}}{四}\top\frac{巳^{三}}{二七}}}\ \bot\ \sqrt[三]{\top\frac{午}{二}\bot\sqrt{\frac{午^{二}}{四}\top\frac{巳^{三}}{二七}}}$$

以上四種立方式其一二兩式之根彼此反號三四兩式之根亦彼此反號其一二兩式各只有一根三四兩式若其 $\frac{午^{二}}{四}\top\frac{巳^{三}}{二七}$ 為能有之數則各只有一根若其 $\frac{午^{二}}{四}\top\frac{巳^{三}}{二七}$ 為不能有之數則各有三根　玆

述其推算之法如下

第一二兩種式先令

$$\frac{二}{午}\left(\frac{巳}{三}\right)^{\frac{一}{三}}=正切人$$

又令

$$\sqrt[三]{正切\left(四五^{\circ}丅\frac{人}{二}\right)}=正切戊$$

則

$$天=\frac{丄}{丅}\sqrt{\frac{三}{四巳}}\times餘切二戊$$

丄屬一式

丅屬二式

第三四兩種式若 $\frac{午}{三}\left(\frac{三}{巳}\right)^{\frac{一}{三}}$ 小于一則令

$$\frac{午}{二}\left(\frac{三}{巳}\right)^{\frac{一}{三}}=餘弦人$$

若 $\frac{午}{三}\left(\frac{三}{巳}\right)^{\frac{一}{三}}$ 大于一則令

$\frac{三}{午}\left(\frac{巳}{三}\right)^{\frac{三}{二}} = 餘弦人$

故又分為二類

第一類 $\frac{午}{三}\left(\frac{三}{巳}\right)^{\frac{三}{二}} < 一$

令

$\sqrt[三]{正切(四五^{\circ}丅三人)} = 正切戊$

則其

$天 = \frac{丄}{丅}\sqrt{\frac{三}{四巳}} \times 餘割二戊$

上號屬第三式

下號屬第四式

第二類 $\frac{午}{三}\left(\frac{三}{巳}\right)^{\frac{三}{二}} > 一$ 則在三四兩式內其天各有三箇同數即

$天 = \frac{丄}{丅}\sqrt{\frac{三}{四巳}} \times 餘弦\frac{三}{人}$

上號屬第

三式丁號屬第四式

$$天=\mp二\sqrt{\frac{四巳}{三}}\times餘弦\left(六〇-\frac{人}{三}\right)$$

丁號屬第三式
丄號屬第四式

$$天=\mp二\sqrt{\frac{四巳}{三}}\times餘弦\left(六〇+\frac{人}{三}\right)$$

丁號屬第三式
丄號屬第四式

又有用對數求立方根之法如下

其

$$天^{三}+巳天-午=〇 \quad (一)$$

$$天^{三}+巳天+午=〇 \quad (二)$$

可令

$$對\frac{午}{二}+一〇-\frac{三}{二}\times對\frac{巳}{三}=對正切人$$

又

$$\frac{對正切\left(四五-\frac{人}{三}\right)+一〇}{三}=對正切戊$$

則

$$對天=\frac{對\frac{四巳}{三}}{二}+對餘切二戊-一〇$$

其天之同數在(一)式丙爲

正㊂式內爲負

其

天丅巳天丅午＝〇

㊂

天丅巳天丄午＝〇

㊃

因

$\frac{三}{三}$對$\frac{三}{巳}$丄一〇丅對$\frac{三}{午}$〈一〇

一類第一節

或

對$\frac{三}{午}$丄一〇丅$\frac{三}{三}$╳對$\frac{三}{巳}$〈一〇

二類第二節

故皆可令等于對餘弦人

其第

一類令

$\frac{三}{對正切(四五丅三人)丄〇}$＝對正切

則

對天＝三對$\frac{三}{巳}$丄一〇丅對正弦二戊

其天在㊂式內爲正㊃式內爲負

其第

二類令

$\frac{三}{對正切(四五丅三八丄二〇)}$ 二對正切戊

則其天有三箇同數即

對$\frac{丅}{丄}$天＝三對$\frac{三}{四}$己丄對餘弦$\frac{三}{八}$丅一〇

丁號屬㈢式

一號屬㈣式

對$\frac{丅}{丄}$天＝三對$\frac{三}{四}$己丄對餘弦($\frac{八}{六}$〇)丅一〇

丁號屬㈢式

丄號屬㈣式

對$\frac{丅}{丄}$天＝三對$\frac{三}{四}$己丄對餘弦(六〇丄$\frac{三}{八}$)丅一〇

丁號屬㈢式

丄號屬㈣式

即天在㈢式中第一同數爲正

第二第三同數爲負天在四式中第一同數爲負第二第三同
數爲正
西法以半徑爲一故正弦餘弦及四十五度以內正切之數俱小於
一數理精蘊之八綫表則以爲半徑一千萬故以上所得也一未言(巳三)三午
言(三巳)午三等數必以半徑乘之而後檢表方合而既得天之同數必以半
徑或半徑冪除之而後定位不誤
惟因正弦餘弦及四十五度以內正切之數小於一故其對數恆爲
負造表者因欲免負數之繁故於各數皆加以十而列爲表郎數理精蘊之
八綫對數表所以以十進對數郎數理精蘊之對數表與八綫對數作相等之式必

先加減若干十始可通算式中⊥一〇丅一〇丅二〇盡準此