微積分學講義

中華民國八年七月初版
中華民國二十二年七月國難後第一版
中華民國二十四年五月國難後第三版

(52283)

微積分學講義一冊

每冊定價大洋貳元肆角
外埠酌加運費匯費

編譯者　匡文濤
校訂者　壽孝天
發行兼印刷者　商務印書館　上海河南路
發行所　商務印書館　上海及各埠

C二四六六

微分學講義原緒言

著者當起本書之稿時。本期作一通俗易解之微分講義。此非今日最要求者乎。而此事之難。實有出乎意料以外者。故作稿愈多。而自歎力微亦愈甚。順是爲之。遂成此書。

理論缺嚴密。在本書趣旨固爲當然。而又不能敝蹝之者。則著者之病也。例如「無限制之大」。不能安於「無限大」。故作「比甚大數更大」。又深慮甚大云云之觀念。人各不同。且恐「比任何大數更大」一語。更不透徹。故終作「比任何數更大之數曰無限大」。以爲界說。諸如此類。均與通俗易解之旨。互相僢馳。

雖然。反覆思之。是非高等數學之一端乎。世之習高等數學者。如此之點。稍注意焉。則著者之所切望也。

微分學之本體。唯在研究微分法及由微分法所得之微係數。級數及極大極小等。不過屬之應用。倘僅欲知微分及微係數之所謂 $\dfrac{dy}{dx}$ 者。則讀本書最初四編足矣。

際今日文運駸進之盛。國文自有之微積分書亦屬不少。先輩所著。固無俟推讚。然即予拙著之一小册。亦自有其特色在。此可自信者也。

本書級數一編。如普通德人之書。就不與代數重複之範圍內。自收斂之檢定說起。又平面曲線上微分之應用。常例置諸微分學之後。而本書則更列舉著名之平面曲線一編。以爲曲線追跡之例。並記其應用最廣之性質。之一端者。殆亦本書之特色歟。

編幅之限制。與著者之習慣。往往不知不覺。混入於省筆略算之處不少。法學專家。語及「債權者」「債務者」時。常告吾人。謂以「權」爲甲以「務」爲乙而直譯之。則大意瞭然。由是觀之。數學本稱專門。今強稱爲通俗。或實爲不可能之事歟。

讀者諸君。倘因拙著而微有所獲。則著者至以爲榮也。

明治四十四年夏　　　　根津千治識

積分學講義原緒言

本書係繼本叢書之微分學。而以簡明方法。講述積分學及其應用者也。

因之本書往往避嚴密之理論。而致力於幾何學力學等之應用方面。且於彼特種之定積分等。多從省略。而於微分方程式。記述特詳。此即其第一事實也。

曲面及空間曲線之應用。其於微分學中所遺略者。均論及之。微分方程式問題中。多舉力學問題。其中如解追跡曲線惑星運動等。則亦本書所自負之一端也。又最後設變分法一章。論述極小回轉面及最速落著線者。亦信其於斯學研究上稍有裨益故也。

本書於先輩著書。多所採擇。固不待言。

讀者諸君。因拙著而獲得積分學之要領。則本書至以為榮也。

明治四十四年　　根津千治識

微積分學講義勘誤表

頁數	行數	原文	訂正
39		圖中曲線上右之P字	應改爲 P_1
46	12	$y = arc\ tg\ x$ 之右補數語以便閱者 (譯注) *arc* 德法用以記反三角函數與英美所用之 -1 號同本書兩種符號均用之又 *tg* 之符號與 *tan* 同	
71	5	試將此而……	試將此式而……
83	13	$\cdots - W_1$	$\cdots - W_l$
	14	$-S''_1$	$-S''_l$
	15	$-Lim\ S''_1$	$-Lim\ S''$
		上三行原文之 l 與 1 最易混淆	
183	1	亦使用	使用
199	12	$= cot^{-2}x$	$= cot^{-1}x$
213	1	若 $m \leqq n$	若 $m \geqq n$
	5	則假定 $m < n$	則假定 $m > n$
225	2	$f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}, dx\right.$	$f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right)dx$
	8	$-\int \frac{dx}{z^2+z+1}$	$-\int \frac{dz}{z^2+z+1}$
235	5	$6\int z^9(\quad)^{-\frac{1}{3}}dz$	$6\int z^{14}(\quad)^{-\frac{1}{3}}dz$
249	9	$\int z^4(1-z^2)\,dx$	$\int z^4(1-z^2)\,dz$
260	11	$= \phi_2\{\quad\}\int^\beta \phi_1(x)\,dx$	$= \phi_2\{\quad\}\int_a^\beta \phi_1(x)\,dx$
261	5	$< \int^a$	$< \int_o^a$
270	5	$\int^a x^n dx$	$\int_o^a x^n dx$
271	10	〔例〕 $7\int^x$	〔例〕 $7\int_o^x$
272	16	於 $\gamma, \delta)$	於 (γ, δ)
329	4	$= n\ log n + c$	$= n\ log\ x + C$
347	18	$1+p^2$	$1+p^3$

微積分學講義

上卷微分學

前篇本論

第一章 緒論

1. 數之分類。

數數時稱為幾個幾個之數。曰正整數。施四則之運算於正整數時為包括例外起見。再設負整數及分數(以0約之數尚省略)

正整數與負整數及分數。總稱之曰有理數(*Rational number*)。

由次於四則運算之開方法。又不得不設不盡根數及虛數(*Imaginary number*)。

其他如圓周率π亦為不盡數。因該數以小數表之。只能表其近似值。故云不盡。

實則不盡數(含不盡根數)者。可作得一分數。(小數係其特別者)與此數之差。能比任何數更小之數之謂也。

不盡數一稱無理數(*Irrational number*)。有理數與無理數。總稱之曰實數(*Real number*)。與此對待之數為虛數。而在高等數學。於實數虛數以外。殆無導入新種類數之必要。然則實數虛數。於現今為最廣義之數也。

於一直線上取一點O。規定線分AO之他端A。爲與一實數a相對應之點。則

凡實數皆得令與直線之點相對應。又直線上之一切點。皆得令與實數相對應。

此解析學與幾何學相關連之第一步也。直線上之點有連續性(*Continuity*)。同時實數亦有連續性。

以直線上之點表實數時。其定點O稱原點(*Origin*)。又$a=1$。則OA爲一單位之長。因之OA規定適宜之單位。則就與實數x相對應之點P言之。OP之長必爲單位之x倍。

此等規約。以下略而不言。

[注意] 數之分類。爲最有興味之基礎數學之一分科。其精密之研究。應取 *Stolz, Hankel, Dedekind* 等所著之書觀之。

2. 變數及常數。

於一事件。某量(*Quantity*)得以數表之。其所表之數名爲其量之數值(*Numerical value*)。數值之研究。乃以該事件爲數學之一問題者也。然攷其事件之進行。則其數值於進行中。可分爲變與不變二種。

其變者曰變數(*Variable*)。不變者曰常數(*Constant*)。

通常表此等之記號

在變數用$x, y, z, \ldots\ldots;\ \xi, \eta, \epsilon, \ldots\ldots$

在常數用$a, b, c, \ldots\ldots;\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$

變數亦得爲虛數。但玆限定以論實數值爲主。

實數值之變數。一名實變數(*Real variable*)。但依前限以免紛歧。略稱變數。

[例] 從一直線上之定點A。以一定之速度a(每秒)。在此直

線上之同方向行等速運動。得其點P。關於A而與P反對之方向有b距離之定點O。

則x秒之後OP之距離y。可以次式表之。

O A P

$$y=ax+b.$$

就此例考之。a, b爲常數。x爲變數。而y亦爲變數。

3. 連續變數及其區域。

變數在α, β $(\alpha<\beta)$ 二數之間。得順次占得實數。則自α至β之區域 (*Interval*) 內。稱爲連續變數 (*Continuous variable*)。

表示「自α至β」之區域。以 (α, β) 及 $\alpha\leqq x\leqq\beta$。其區域亦得以直線上之線分表之。

於某區域內。若非連續變數。則稱其區域內爲不連續 (*Discontinuous*)。

4. 函數。

於一區域(α, β)內。由一變數x之各值。常得確定他變數y之值。則於區域(α, β)內稱y爲x之函數 (*Function*)。

此種關係。以 $y=f(x)$, $y=\psi(x)$ 等表之。

此處之x。稱自變數 (*Independent variable*)。其y稱被變數 (*Dependent variable*)。

要之函數與被變數。同一物也。換言之。函數之變數。即爲被變數。

〔例〕就$y=ax+b$。其a, b爲常數。x在某區域內變化。則x爲自變數。而y爲被變數。換言之。y爲x之函數。

於(α, β)一區域內。對於自變數x之各值。y常得惟一之確定值。則於(α, β)區域內。y稱爲x之一價函數 (*One-valued function*)。若y常得二確定值。則稱二價 (*Two-valued*)。二價以上。準此命名。又二價及二價以上。一般稱爲多價 (*Many-valued*)。

〔例〕1. $y=4x^2$ 於任何區域內 y 爲 x 之一價函數。∵ $x=0$ 則 $y=0$, $x=1$ 則 $y=4$, $x=2$, 則 $y=16,\ldots$

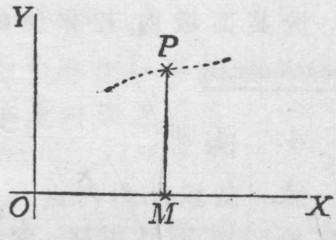
〔例〕2. $y^2=3x+1$。試求其函數 y。於 $x\geqq-\frac{1}{3}$ 區域內。常爲二價函數。例如 $x=\frac{1}{3}$ 則 $y=\pm\sqrt{2}$, $x=1$ 則 $y=\pm 2,\ldots$ 而 $x=-\frac{1}{3}$ 則 $y=0$。∴如題言。

〔例〕3. 於 $y=f(x)$。其 $f(x)$ 爲 $3x^2+2x+1$ 之記號。則 $f(0)$, $f(1)$ 是何意義。

(解) $f(0)=3\times 0^2+2\times 0+1=1$,

$f(1)=3\times 1^2+2\times 1+1=6$.

有 OX, OY 二直線。互相直交。令 OX 上之點 M。表 x 之值。($OM=x$)。從此點引 OY 之平行線。表 y 之值。($PM=y$)。則點 P 之坐標。爲變數 x 與函數 y 之對應值。今與 x 以諸值 則 y 亦得確定之值。P 之坐標變易。可得點羣。



5. 函數之形式。

x 之函數 y 多爲 $y=f(x)$ 之形式。然 x, y 往往有相混淆於一方程式之內者今以 $F(x, y)=0$ 表示之。解此方程式。得視作 $y=f(x)$ 之形式。因之方程式 $F(x, y)=0$ 之 y。一般爲多價函數。而於此形式之 y。曰 x 之陰函數 (*Implicit function*)。

與此對照。$y=f(x)$ 形式之 y。曰 x 之陽函數 (*Explicit function*)。

〔例〕 $x^2+y^2=a^2$。其 y 爲 x 之陰函數。試解原式爲 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$。則 y 爲 x 之陽函數。即普通之形式。

6. 函數之分類。

令 $F(x, y)=0$ 爲有理整方程式。則稱滿足此式之 y 爲 x 之

代數函數 (*Algebraic function*)。特此方程式爲 y 之一次式。則得

$$uy+v=0. \quad (u, v \text{ 僅爲 } x \text{ 之有理整式})。$$

若 u 不含 x。則 u 視爲常數可也。由是當有下式之形。

$$y=-\frac{v}{u}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

此爲 x 之有理整函數 (*Rational integral function*)。

若 u 爲 x 之 m 次有理整式。則

$$y=-\frac{v}{u}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}.$$

此稱 x 之有理分數 (*Rational fraction*)。

有理整函數及有理分數。總稱之曰有理函數。

與此相反之代數函數。曰無理函數 (*Irrational function*)。

代數函數以外其他之函數。曰超越函數 (*Transcendental function*)。超越函數。其種類不能限制。然次之四種。乃應用最廣者。是名初等超越函數。

(1) 指數函數 (*Exponential function*)

$y=a^x$ 但 $a>0$

(2) 對數函數 (*Logarithmic function*)

$y=\log x$

(3) 三角函數 (*Trigonometric function*)

$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x,$ 等

(4) 圓函數 (*Cyclometric functions*)

$y=\text{arc}\sin x$ 又 $=\sin^{-1}x.$

$y=\text{arc}\cos x$ 又 $=\cos^{-1}x.$

$y=\text{arc}\tan x$ 又 $=\tan^{-1}x$ 等。

7. 逆函數。

於 (α, β) 區域內。$y=f(x)$ 之函數 y。其各確定值亦爲連續變數

在 (A,B) 區域內。可占得各實數值。則 y 可作自變數觀。是 x 為 y 之陰函數。從此得 $x=\psi(y)$。則 x 在於 (A,B) 區域內為 y 之函數。此為 $y=f(x)$ 之逆函數 (*Inverse function*)。

〔例〕 從 $y=a^x$ $(a>0)$ 得 $x=log_a y$ $(y>0)$。此於任何區域內。其指數函數與對數函數。互為他之逆函數。又從 $y=\sin x$ 得 $x=\sin^{-1}y$。令 $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ 及 $-1\leqq y\leqq 1$。則無論何者。均為一價函數。且互為他之逆函數。

8. 極限值。

變數 x 順次變易其值漸近於一確定值 a 時。x 與 a 之差之絕對值(此以 $|x-a|$ 表之) 能令比任何之數更小。則 a 稱為 x 之極限值 (*Limiting value*)。又稱 x 收歛 (*to converge*) 於極限值 a。或稱 x 歸着於極限值 a。以 $Lim\ x=a$ 表之。

然 x 若經過比 a 較小之數歸着於此。則須 $Lim\ x=a-0$ 表之。

變數 x 收歛於極限值 a 時。同時 x 之函數 y。亦收歛於他之確定值 b。

此以下式表之。

$$\underset{\text{Lim } x=a}{Lim}\, y=b \quad 又 \quad \underset{\text{Lim } x=a\pm 0}{Lim}\, y=b\pm 0.$$

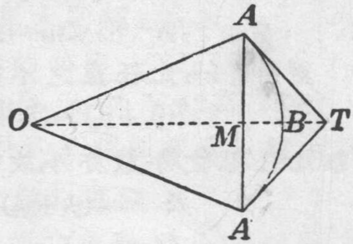
欲避其繁。特簡略書之如次。

$$\underset{x=a}{Lim}\, y=b \quad 又 \quad Lim\, y=b.$$

〔例〕1. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$。此 x 突然為 1。則原式為 $\dfrac{0}{0}$。是無意義。若 x 不為 1。則約分之為 $y=x+1$.

此 x 雖不為 1。若與 1 極近。則極限值必收歛為 1。因之 y 之極限值為 2。即 $\underset{x=1}{Lim}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

〔例〕2. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sin x}{x}$。此$\dfrac{\sin x}{x}$之$x$突然爲0。則$\dfrac{\sin x}{x}$爲$\dfrac{0}{0}$。然於



單位之半徑之圓。令$\widehat{AA}$比半圓周小。

則 $\overline{AA'}<\widehat{ABA'}<\overline{AT}+\overline{A'T}$,

即 $2\overline{AM}<2\widehat{AB}<2\overline{AT}$.

令$\widehat{AB}=x$, 則$AM=\sin x$, $AT=\tan x$。

$$\sin x<x<\tan x.$$

以$\sin x$約之則

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

然 $$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

令此與1相減則

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

即 $$0<1-\frac{\sin x}{x}<2\sin^2\frac{x}{2}.$$

然 $$\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2},$$

而 $$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2}.$$

此x收斂爲0。則$\dfrac{x^2}{2}$亦收斂爲0。

然$1-\dfrac{\sin x}{x}$亦當收斂爲0。即$\dfrac{\sin x}{x}$收斂爲1。

$\therefore$ $$\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

9. 關於極限值之定理。

x之二函數設爲$y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$。令$x=a$。其極限值收斂爲b_1, b_2。則有次之定理。

(I) 二個變數之極限值之和。等於變數之和之極限值。

(證明) ϵ_1, ϵ_2 爲任何小數。從極限值之定義。得

$$|y_1-b_1|<\epsilon_1, \quad |y_2-b_2|<\epsilon_2$$

更令 $\epsilon_1+\epsilon_2$ 比任意之小數 ϵ 亦小。則

$$|(y_1+y_2)-(b_1+b_2)|<\epsilon$$

即比任意之小數亦小。故得

$$Lim\,(y_1+y_2)=b_1+b_2.$$

$$\therefore \quad Lim\,y_1+Lim\,y_2=Lim\,(y_1+y_2).$$

(II) 二個變數之極限值之積。等於變數之積之極限值。

(證明) 試用前之記號。則

$$|y_1y_2-b_1b_2|=|y_1y_2-b_1y_2+b_1y_2-b_1b_2|$$
$$<|y_1-b_1||y_2|+|y_2-b_2||b_1|$$
$$<\epsilon_1|y_2|+\epsilon_2|b_1|$$

然 ϵ_1, ϵ_2 如 $\epsilon_1|y_2|+\epsilon_2|b_2|<\epsilon$ (任意之小數) 則從此得 $|y_1y_2-b_1b_2|<$

即 $$Lim\,y_1y_2=b_1b_2$$

$$\therefore \quad Lim\,y_1\,Lim\,y_2=Lim\,y_1y_2.$$

(III) 二個變數之極限值之商。等於變數之商之極限值。

(證明) $$\left|\frac{y_1}{y_2}-\frac{b_1}{b_2}\right|=\frac{|y_1b_2-y_2b_1|}{|y_2b_2|}=\frac{|y_1b_2-b_1b_2+b_1b_2-y_2b_1|}{|y_2b_2|}$$
$$<\frac{|y_1-b_1||b_2|+|y_2-b_2||b_1|}{|y_2b_2|}$$
$$<\frac{\epsilon_1|b_2|+\epsilon_2|b_1|}{|b_2|(|b_2|-\epsilon_2)}.$$

然如 $\dfrac{\epsilon_1}{|b_2|-\epsilon_2}<\dfrac{\epsilon}{2}$, $\dfrac{\epsilon_2|b_1|}{|b_2|(|b_2|-\epsilon_2)}<\dfrac{\epsilon}{2}$ 以定 $\epsilon_1\,\epsilon_2$.

得 $$\left|\frac{y_1}{y_2}-\frac{b_1}{b_2}\right|<\epsilon.$$

$$\therefore \quad Lim\frac{y_1}{y_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{Lim\,y_1}{Lim\,y_2}=Lim\frac{y_1}{y_2}$$ (但除去 $Lim\,y_2=0$).

10. 無限大無限小。

變數 x 之絕對值能比任何正數更大。則稱 x 爲無限 (*Without limit*) 增大。或無限減小。又稱極限值的無限大 (*Infinity or Infinitely great*)。或稱「x 成無限大」。以 ∞ 表之。即 $\quad Lim\, x=\infty$。

∞ 爲一般無限增大之正數量與無限減小之負數量併用之記號。然有時必加 $+\infty$, $-\infty$ 及 $\pm\infty$ 之號以區別之。

∞ 爲示比任何之正數更大。又比任何之負數更小之記號。並非一定之值。

變數 x 以 0 爲極限值而收斂時。則稱 x 爲無限小 (*Infinitesimal or Infinitely small*)。此以下式表之。 $\quad Lim\, x=0.$

無限小與 $-\infty$。不可誤解。又無限小不可與絕對的零 $(a-a)$ 混同。

蓋無限小乃表收斂於極限值 0 之記號。而非數值。

無限小亦有 $+0$, -0, ± 0 之區別。

本節 x 之變數。無論自變數, 因變數均同。

〔例〕1. $\displaystyle \mathop{Lim}_{x=1}\frac{1}{1-x}$. $\quad x$ 收斂爲 1。則能令 $\displaystyle\frac{1}{|1-x|}$ 比任何之正數更大。

例如令比任意正數 K 更大。則從

$$\frac{1}{1-x}>K \quad 得 \quad x>\frac{K-1}{K}$$

即 x 如上式取之足矣。

$$\therefore \quad \mathop{Lim}_{x=1}\frac{1}{1-x}=\infty.$$

詳言之。x 經過僅比 1 更小之數。而近於 1。則爲 $+\infty$。經過僅比 1 更大之數而近於 1。則爲 $-\infty$。

〔例〕2 $\quad 1-0.\dot{9}$ 爲無限小。何則。欲令比 $\epsilon=0.00001$ 更小。則取 $1-0.999999$ 足矣。欲令比 $\epsilon=0.0000001$ 更小。則取 $1-0.99999999$ 足矣。故得令其差比任何之數更小。而 $0.\dot{9}$ 決不爲 1 故也

11. 無限小及無限大之位置。

令二個變爲無限小之變數爲y_1, y_2則

$$Lim\, y_1=0, \qquad Lim\, y_2=0.$$

然y_1, y_2收斂於極限值時。亦有遲速緩急之差。

例如小數y_1^2比較y_1收斂爲0甚急速。此可由檢$y_1^2 : y_1$之比值爲y_1之小數知之。故有二個變數。欲計其變爲無限小之遲速。則取商之極限值$Lim\frac{y_1}{y_2}$可也。其法分敘如次。

(I) $\underline{Lim\frac{y_1}{y_2}\text{爲0以外之有限值。}}$

此y_1, y_2稱<u>同位</u>(*Same order*)之無限小。

(II) $\underline{Lim\frac{y_1}{y_2}=0}$。

此y_2比y_1稱<u>高位</u>(*Higher order*)之無限小。

(III) $\underline{Lim\frac{y_1}{y_2}=\infty}$。

此y_2比y_1稱<u>低位</u>(*Lower order*)之無限小。

位亦可以適宜之數字表之。如y_1爲第一位(*First order*)。若$Lim\frac{y_1}{y_2}$爲0以外之有限值。則y_2當爲第一位之無限小。

若$Lim\frac{y_1}{y_2}$爲0又爲∞。且定$Lim\frac{y_1^n}{y_2}$爲0以外之有限值n。則y_2稱爲<u>第n位</u>(n^{th} *order*)之無限小。

普通稱$Lim\, x=0$爲第一位無限小。其他與此對照。宜呼爲第幾位無限小。可以知之。

無限大若爲第n位無限小之逆數。故由上之規定。稱「第n位無限大」。

〔例〕1. $\displaystyle\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1$〔第8節例2〕。

故$\sin x$與x爲同位無限小。故$\displaystyle\lim_{x=0}\sin x$爲第一位無限小

〔例〕2. $\displaystyle\lim_{x=0}(1-\cos x)=0, \qquad Lim\, x=0$。

然 $$\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x=0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x=0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x=0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x=0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x=0}(1-\cos x)$ 爲第二位無限小。

〔例〕3. $\lim\limits_{x=0}\cot x=\infty$, $\lim\limits_{x=0}\frac{1}{x}=\infty$。

因就其各逆數爲

$$\lim_{x=0}\frac{\frac{1}{\cot x}}{x}=\lim_{x=0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x=0}\frac{1}{\cos x}=1\times1=1$$

故 $\cot x$ 與 $\frac{1}{x}$ 爲同位無限大。卽第一位之無限大。

12. 函數之連續。

於 (α,β) 區域內。x 爲連續變數。y 亦爲連續變數。則於 (α,β) 區域內。稱 y 爲 x 之連續函數 (*Continuous function*)。

一函數欲檢查其爲連續函數與否。可就其區域內各點檢查之。今設 x 在某區域內有 a 之一值。x 經過 a 時。若其函數 $y=f(x)$ 亦經過 $f(a)$ 而爲連續變數。則與 $a-|h|, a, a+|h|$ (任何區域內之值) 三值相對應之 $f(a-|h|), f(a), f(a+|h|)$。在 $\lim h=0$ 時。非均收斂爲 $f(a)$ 不可。由是得連續查定之法則如次。

$$y=f(x)$$

若經過$x=a$時爲連續。則令

$$|f(a+h)-f(a)|<\epsilon.$$

任意之正數ϵ設能存立。而與此相應。非有$|h|\leqq\delta$之正數δ不可。否則不能爲 $\lim\limits_{h=0} f(a+h)=f(a)$ 故也。

反之。與以任何之正數ϵ爲

$$|f(a+h)-f(a)|<\epsilon,\quad |h|\leqq\delta.$$

如能決定如此之正數δ。則$f(x)$經過$x=a$時爲連續。

何則。因 $\lim|f(a+h)-f(a)|=0$。 即 $\lim f(a+h)=f(a)$ 故也。

故x經過a時。其函數y爲連續。簡稱之曰y於$x=a$時連續。

如上之檢定。於某區域內各點施行之。若施行此法則。有不適用之點。則謂函數在該點爲不連續。其點稱不連續點 (*Discontinuous point*)。

初等函數(卽代數函數,初等超越函數,及其他函數之總稱)中不連續點。常孤立存在。其種類之重要者有三。列舉如次。

(I) 無限大之不連續點。

於$x=a$之點。若$y=f(x)=\infty$。則與連續變數之定義相背戾。又與前記之查定法則不合。

〔例〕1. $y=\dfrac{1}{x-a}.$

於$x>a$及$x<a$之區域內。y雖爲連續函數。而若於$x=a$之點。則爲 $\lim\limits_{x=a} y=\infty$。

但 $\lim\limits_{x=a-0} y=-\infty$, $\lim\limits_{x=a+0} y=+\infty$。

〔例〕2. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}.$

於$x=1$之點爲$\lim\limits_{x=1} y=\infty$。詳表之爲$\lim\limits_{x=1\pm0} y=+\infty$。

(II) 飛變之不連續點。

x經過比a小之值。而漸近於a時。y雖收斂爲b。x若經過比a大之值而漸近於a。有時y收斂爲b_1。

換言之。於$x=a$之點。y自b飛變至b_1,而為不連續變數。

〔例〕 $y=\dfrac{a^{\frac{1}{x-a}}-1}{a^{\frac{1}{x-a}}+1}\ (a>1).$

$$\lim_{x=a-0} a^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x=a-0}\frac{1}{a^{\frac{1}{x-a}}}=0,$$

$$\therefore\ \lim_{x=a-0} y=\frac{\lim\left(a^{\frac{1}{x-a}}-1\right)}{\lim\left(a^{\frac{1}{x-a}}+1\right)}=\frac{-1}{1}=-1.$$

又以 $\lim\limits_{x=a+0} a^{\frac{1}{a-x}}=0.$

$$\therefore\ \lim_{x=a+0} y=\lim\frac{1-a^{\frac{1}{a-x}}}{1+a^{\frac{1}{a-x}}}=\frac{1}{1}=1.$$

卽於$x=a$之點。y從-1飛變至1。

(III) 不定之不連續點。

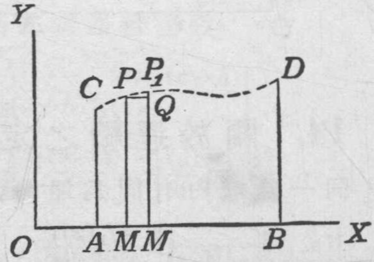
x近a時。函數雖為有限。有時究不能收斂為一定之值。

〔例〕 $y=\sin\dfrac{1}{x-a}.$

x近於a時。y不出$+1$與-1之間明矣。然究無一定之極限值。

13. 連續函數與曲線。

於(α,β)區域內。有連續函數$y=f(x)$。



坐標軸為OX, OY。於OX上取$OA=\alpha$, $OB=\beta$, $OM=a$, $MM_1=h$。引OY之平行線PM, P_1M_1。則$f(a)=PM$, $f(a+h)=P_1M_1$。又從P引OX之平行直線PQ。與P_1M_1會於Q。則$P_1Q=f(a+h)-f(a)$.

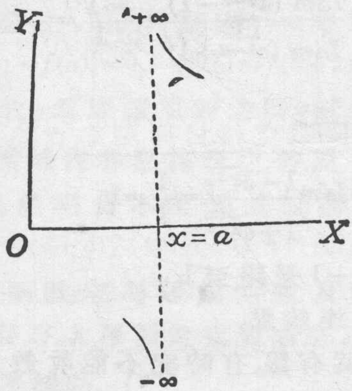
$\therefore\ \overline{PP_1}=\sqrt{\{f(a+h)-f(a)\}^2+h^2}$. 然則從連續查定之法。得使$PP_1$比任何之正數(卽$\gamma$)更小。

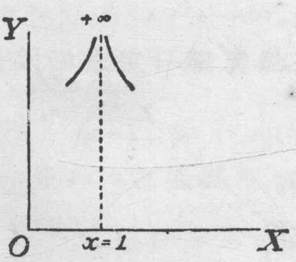
即於$|f(a+h)-f(a)|<\frac{y}{2}$之範圍內取$|h|<\frac{y}{2}$之$h$

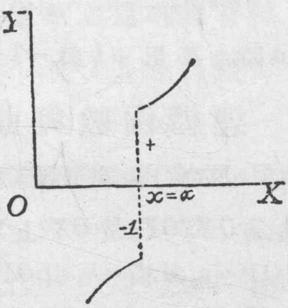
則$|f(a+h)-f(a)|+|h|<y$。從而$\sqrt{\{f(a+h)-f(a)\}^2+h^2}<y$

故對於x表線分AB。而得$y=f(x)$表CD之<u>曲線</u>(*Curve*)。

函數於某區域內而爲不連續時。則曲線亦馳於無窮遠。或爲飛變。前節(I)例1,2及(II)例表示如下。







14. 關於連續之定理。

同一區域內。有同爲連續之函數。設爲

$$y_1=f_1(x),\qquad y_2=f_2(x).$$

今將示其和及積與商。於同一區域內。亦爲連續。

(I)　<u>二個連續函數之和。於同點亦爲連續函數。</u>

(證明)　為任意之正數。依連續查定之法。則於 $x=a$ 點。令

$$|f_1(a+h_1)-f_1(a)|<\frac{\epsilon}{2},\quad |f_2(a+h_2)-f_2(a)|<\frac{\epsilon}{2}$$

之 h_1, h_2 設為

$$|h_1|\leqq\delta_1,\qquad |h_2|\leqq\delta_2$$

今令 δ_1, δ_2 中之小者為 δ。則欲

$$[\{f_1(a+h)+f_2(a+h)\}-\{f_1(a)+f_2(a)\}]<\epsilon$$

其 h 與 δ 二數量之間有 $|h|\leqq\delta$ 足矣。故 $f_1(x)+f_2(x)$ 於 $x=a$ 之點亦為連續。

(II)　<u>二個連續函數之積。於同點亦為連續函數。</u>

(證明)　$|f_1(a+h)f_2(a+h)-f_1(a)f_2(a)|$

$$=|\{f_1(a+h)-f_1(a)\}f_2(a+h)+\{f_2(a+h)-f_2(a)\}f_1(a)|$$

$$<|f_1(a+h)-f_1(a)|\,|f_2(a+h)|+|f_2(a+h)-f_2(a)|\,|f_1(a)|$$

故

$$|f_1(a+h)-f_1(a)|<\frac{\epsilon}{2|f_2(a+h)|},$$

$$|f_2(a+h)-f_2(a)|<\frac{\epsilon}{2|f_1(a)|}.$$

求 h 之制限為 $|h|\leqq\delta$。則

$$|f_1(a+h)f_2(a+h)-f_1(a)f_2(a)|<\epsilon,\quad |h|\leqq\delta$$

即 $f_1(x)f_2(x)$ 於 $x=a$ 為連續。

(III)　二個連續函數之商。於同點亦為連續函數。

(證明)　$$\left|\frac{f_1(a+h)}{f_2(a+h)}-\frac{f_1(a)}{f_2(a)}\right|=\left|\frac{f_1(a+h)f_2(a)-f_1(a)f_2(a+h)}{f_2(a+h)f_2(a)}\right|$$

$$=\left|\frac{\{f_1(a+h)-f_1(a)\}f_2(a)-\{f_2(a+h)-f_2(a)\}f_1(a)}{f_2(a+h)f_2(a)}\right|$$

$$<|f_1(a+h)-f_1(a)|\frac{1}{|f_2(a+h)|}+|f_2(a+h)-f_2(a)|\frac{|f_1(a)|}{|f_2(a+h)f_2(a)|}$$

然則　$$|f_1(a+h)-f_1(a)|<\frac{\epsilon}{2}|f_2(a+h)|$$

$$|f_2(a+h)-f_2(a)|<\frac{\epsilon}{2}\frac{|f_2(a+h)f_2(a)|}{|f_1(a)|}$$

加以 $|h|\leqq\delta$。則

$$\left|\frac{f_1(a+h)}{f_2(a+h)}-\frac{f_1(a)}{f_2(a)}\right|<\epsilon,\quad |h|\leqq\delta.$$

故 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ 於 $x=a$ 爲連續。與連續查定之法則合。

次於 (α,β) 區域內。設 x 之連續函數 $y=f(x)$。能在 (A,B) 區域內占得各值。而於 (A,B) 區域內 y 之連續函數 $z=g(y)$ 亦爲連續函數。則可證明如次之定理。

(IV) 一變數之連續函數之連續函數。於其變數之同點。亦爲其變數之連續函數。

(證明) 取 $f(a)=b$, 任意之正數爲 ϵ。則

$$|g(b+k)-g(b)|<\epsilon,\quad |k|\leqq\eta$$

之 η。從此可求得而以 η 更可從

$$|f(a+h)-f(a)|<\eta,\quad |h|\leqq\delta$$

定得 δ 之值。由是令 $f(a+h)=b+k$。則

$$|g\{f(a+h)\}-g\{f(a)\}|<\epsilon,\quad |h|\leqq\delta$$

故 $g\{f(x)\}$ 於 $x=a$ 爲連續函數。

15. $\displaystyle\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

先假定 n 爲 x 之正整數。則依二項定理。得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

然 $n\geqq2$ 時。則

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$<1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$<3\dots\dots\dots\dots(1)$$

然 $$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\dots$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

合上各項。與前展開式之各項比較。第一第二之兩項皆相等。其他各項。皆以後者較大。

$\therefore$ $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\dots\dots\dots\dots(2)$$

故 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 雖因 n 之大而漸漸增大。究比 3 較小。且明明較 $1+\frac{1}{1}=2$ 更大。

$\therefore$ $$2<\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3\dots\dots\dots\dots(3)$$

次令 x 為正分數。則設有如次式之整數。

$$n<x<n+1$$

故 $$1+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$$

從而得 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\dots\dots\dots\dots(4)$$

然 $$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

而(4)之兩端之項之差。能比任何正數更小。從而與$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$之差亦同。

$$\therefore \qquad \lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

最後令x爲負數。則$x=-x'$。而

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{x'}\right)^{-x'}=\left(\frac{x'}{x'-1}\right)^{x'}$$

$$=\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)^{x'}$$

$$\therefore \qquad \lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x'=\infty}\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)^{x'-1}\lim\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)$$

$$=\lim_{x'=\infty}\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

如是x爲正或負之任何實數值。雖爲無限大。而$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$常達於一定之值。此一定之值。以$e$表之。玆舉實際之值如次。

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=2.71828\ldots$$

此卽自然對數之底數也。

〔例〕1. 求$\lim_{x=0}\frac{a^x-1}{x}$。

(解) 令$x=\log_a(1+x')$。則

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{x'}{\log_a(1+x')}=\frac{1}{\log_a(1+x')^{\frac{1}{x'}}}$$

而令x'收歛爲0。則x亦收歛爲0。

$$\therefore \qquad \lim_{x=0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\log_a \lim_{x'=0}(1+x')^{\frac{1}{x'}}}=\frac{1}{\log_a e}$$

〔例〕2. 求$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$。

〔解〕 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x$

$\therefore\quad \lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\lim\limits_{\frac{n}{x}=\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x=e^x.$

第二章　微分法

1. 微分及微分係數。

於 (α,β) 區域內。函數 $y=f(x)$ 爲一價而且連續。

多價連續變數各系統。俟後續論。今專考究一價。例如前置(±)爲二價函數。則(+)之系統爲一價函數。而(−)之系統亦爲一價函數。

今令 α 與 β 間之二值爲 $x, x+h$。就此二點用下之記號。

$(x+h)-x=h=\Delta x$　　自變數之差

$f(x+h)-f(x)=\Delta y$　　函數之差

然 x 若令一定。h 漸次減小。令 $\lim h=0$。則假設 Δx 固爲連續。Δy 亦連續。故任何亦爲無限小。此無限小以 dx, dy [又 $df(x)$] 表。則 dx, dy 稱爲 x, y 之微分 (*Differential*)。

又，前二式之差之商 (*Difference quotient*) 爲

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

令　　$\lim h=0,$

則　　$\lim\limits_{h=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

此以 $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 表之。

然$\left(\frac{dy}{dx}\right)$等於$dx$約$dy$之商。

今將$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(dy)}{(dx)}$，即

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\lim\limits_{h=0}(x+h)-f(x)}{\lim\limits_{h=0}h}$$

證明如次。

令
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\left(\frac{dy}{dx}\right)+\epsilon,$$

則h收斂爲0。ϵ亦收斂爲0。即$\lim\limits_{h=0}\epsilon=0$。而

$$f(x+h)-f(x)=h\left(\frac{dy}{dx}\right)+\epsilon h.$$

暫令$\left(\frac{dy}{dx}\right)\neq 0$。則$h$爲第一次之無限小。$\epsilon h$確爲高次之無限小。因之棄去比第一次高之無限小。取其近似值爲

$$\lim_{h=0}\{f(x+h)-f(x)\}=\lim_{h=0}h\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

即
$$dy=dx\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

∴
$$\frac{(dy)}{(dx)}=\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

若$\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$，則$dy=0$。此關係能適用爲眞。

如是差之商之極限值$\left(\frac{dy}{dx}\right)$等於差之極限值$dy, dx$之商。但實際上不用括弧。僅書爲$\frac{dy}{dx}$。又爲$\frac{df(x)}{dx}$，$\frac{d}{dx}f(x)$等。特其極限值爲<u>有限確定</u>。是名<u>微分商</u>(*Differential quotient*)又稱<u>微分係數</u>(*Differential coefficient*)。

而 $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 爲過 x 之微分商

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 不及 x 之微分商

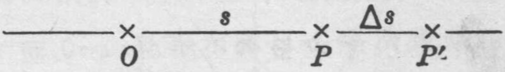
此二值有時不同。必有以區別之，

故 $h=\pm0$ 時。極限值有相等者。是名完全微分商(*Completed. q.*)

求函數之微分係數。稱微分法(*Differentiation*)。適用微分法。乃微分學(*Differential calculus*)之基本問題。

〔例〕運動一直線上之點。從直線上之一定點 O 至距離 s。設爲經過時間 t 之函數。

即 $s=f(t)$.



用本節之記號

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$......$PP'$ 間之平均速度

$\dfrac{ds}{dt}=v$......於 P 點之速度

又令 $v=\psi(t)$ 考之。則

$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$......$PP'$ 間之平均加速度

$\dfrac{dv}{dt}=a$......於 P 點之加速度

奈端(*Newton*)發明微積學。實從此方面想到。

2. 微分係數與曲線。

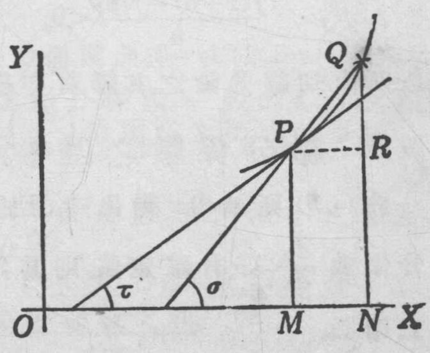
$y=f(x)$ 表曲線上 P, Q 二點。

$OM=x,\qquad ON=x+h,$

$PM=f(x),\quad QN=f(x+h).$

則 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\dfrac{QR}{PR}=\tan\sigma$



今令 $\lim h=0$ 而 Q 無限近於 P。

則直線PQ爲P點之切線。σ亦可變化而達於一定之值τ。

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\tan\tau.$$

τ爲P點之切線之方向角(*Direction angle*)。或簡稱爲P點之切線角(*Tangent-angle*)。因之微分係數$\frac{dy}{dx}$。有時稱爲曲線之切線之方向率(*Direction coefficient*)。

切線角常爲與X軸所成正方向之角。故不可不比二直角小。

柰端(*Newton*)與來本之(*Leibniz*)。殆同時立定微積分學之基礎。蓋由斯幾何學上以進入者也。

然有某正數δ。在$|h|\leqq\delta$之間。則

$$f(x-|h|)<f(x)<f(x+|h|)$$

是爲函數$f(x)$於點x爲增大。而此h之值。可正可負。

$$\therefore \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0,$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}>0$$

又同法

$$f(x-|h|)>f(x)>f(x+|h|)$$

是爲函數$f(x)$於點x爲減小。其h與正負無關。

$$\therefore \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}<0. \qquad \therefore \qquad \frac{dy}{dx}<0.$$

是則由切線角論之。其歸着亦得同一之結果。

3. 微分係數之函數。

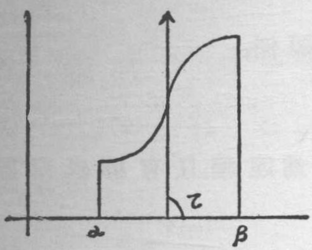
於(α,β)區域內x變化時。對於其全部分或一部分之各值。而微分係數$\frac{dy}{dx}$亦有確定值。則其確定值存在之區域內。$\frac{dy}{dx}$亦爲x之函數。

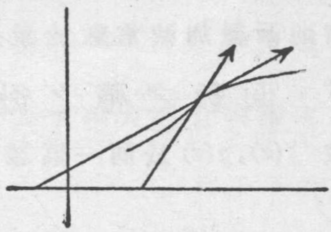
由此着眼點。$\frac{dy}{dx}$ 以 y' 或 $f'(x)$ 表之。是謂 x 之導來函數 (*Derived function*)

然則　$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

導來函數與微分係數本同一物。不過視法不同耳。

$f'(x)$ 在 $f(x)$ 連續之區域 (α,β) 內連續云者。不限定於區域內之





某點。$f'(x)$ 有不連續。有爲無限大。有爲飛變。有爲不定者。

4. 函數之和之微分法。

設二種函數 $f(x), g(x)$ 於同一區域內。任何亦爲連續。且有導來函數如　$$y=f(x)+g(x)$$

則　$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h=0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h=0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$$

然 $y=f_1(x)+f_2(x)+\cdots\cdots+f_n(x)$ 之微分係數。一般爲 $f_1(x)$ 之微分係數與 $f_2(x)+\cdots\cdots+f_n(x)$ 之微分係數之和。後者又分爲 $f_2(x)$ 與 $f_3(x)+\cdots\cdots+f_n(x)$ 等。如是則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df_1(x)}{dx}+\frac{df_2(x)}{dx}+\cdots\cdots+\frac{df_n(x)}{dx}$$

故函數和之微分係數。等於各微分係數之和。

〔例〕 $y=f(x)+c$ (但 c 爲常數)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dc}{dx}$$

然 $$\frac{dc}{dx}=\lim_{h=0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h=0}\frac{0}{h}=0$$

是常數之微係數爲0。

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$$

然則函數加減常數。於微分係數無關係。

5. 函數之積之微分法。

設 $f(x), g(x)$ 於同一區域內任何亦爲連續。且有導來函數。則令

$$y=f(x)g(x),$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+\{g(x+h)-g(x)\}f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+\lim_{h-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)$$

$$=\frac{df(x)}{dx}g(x)+\frac{dg(x)}{dx}f(x).$$

然一般分 $y=f_1(x)f_2(x)f_3(x)\cdots\cdots f_n(x)$ 爲 $f_1(x)$, 與 $f_2(x)\,f_3(x)\cdots\cdots f_n(x$ 之二部分。適用上之微分法。更分 $f_2(x)\,f_3(x)\cdots\cdots f_n(x)$ 爲二部分。達於最後之結果爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df_1(x)}{dx}f_2(x)f_3(x)\cdots f_n(x)+\frac{df_2(x)}{dx}f_1(x)\,f_3(x)\cdots f_n(x)+\cdots$$

$$+\frac{df_n(x)}{dx}f_1(x)\,f_2(x)\cdots f_{n-1}(x)$$

故函數之積之微分係數。等於各微係數乘其殘餘之函數之和。

〔例〕 $y=cf(x)$ (但 c 爲常數)

$$\frac{dy}{dx}=c\frac{df(x)}{dx}+f(x)\frac{dc}{dx}$$

$$=c\frac{df(x)}{dx}.$$

卽函數與常數相乘之積之微分係數。等於常數乘函數之微分係數。

6. 函數之商之微分法。

設 $f(x)$, $g(x)$ 於同一區域內任何亦爲連續。且有有限確定之微分係數如

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

$$\therefore\qquad \frac{dy}{dx}=\underset{h=0}{Lim}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\underset{h=0}{Lim}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$=\underset{h=0}{Lim}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x)-\{g(x+h)-g(x)\}f(x)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$=\frac{\underset{h=0}{Lim}\left\{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)\right\}}{\underset{h=0}{Lim}\,g(x+h)g(x)}$$

$$=\frac{\dfrac{df(x)}{dx}g(x)-\dfrac{dg(x)}{dx}f(x)}{\{g(x)\}^2}.$$

故函數 $\dfrac{u}{v}$ 之微分係數。等於 $\dfrac{\dfrac{du}{dx}v-\dfrac{dv}{dx}u}{v^2}$.

〔例〕 $y=\dfrac{c}{f(x)}$. (但 c 爲常數)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dc}{dx}f(x)-\frac{df(x)}{dx}c}{\{f(x)\}^2}$$

$$=-c\frac{\frac{df(x)}{dx}}{\{f(x)\}^2}.$$

7. 函數之函數之微分法。

設 $y=f(x)$。於 (a,β) 之區域內爲連續。且有導來函數。又 $z=\psi(y)$ 與此對應之區域內亦爲連續。且有有限確定值 $\frac{d\psi(y)}{dx}$。則

$$z=\psi\{f(x)\}$$

$$\therefore\qquad \frac{dz}{dx}=\lim_{h=0}\frac{\psi\{f(x+h)\}-\psi\{f(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{\psi\{f(x+h)\}-\psi\{f(x)\}}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

今令 $f(x+h)-f(x)=k$。則

$$=\lim_{k=0}\frac{\psi(y+k)-\psi(y)}{k}\cdot\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\frac{d\psi(y)}{dy}\cdot\frac{df(x)}{dx}$$

<u>故函數之函數之微分係數。等於各自變數之微分係數之積。</u>

以下乃依自第4節至第6節之基本法則。以求初等函數之微分係數。

8. x^n 之微分係數。

先令 n 爲正整數。則適用第5節得 n 個相等之 $\frac{dx}{dx}x^{n-1}$。

$$\therefore\qquad \frac{d(x^n)}{dx}=n\frac{dx}{dx}x^{n-1}.$$

然以 $$\frac{dx}{dx}=1.$$

$$\therefore \qquad \frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$$

次令n爲負整數。則$n=-m$。從第6節得

$$\frac{d(x^n)}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x^m}\right)}{dx}=-\frac{\frac{d(x^m)}{dx}}{(x^m)^2}$$

$$=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}$$

$$=nx^{n-1}.$$

又令n爲分數。則$n=\frac{p}{q}$。但p, q爲整數。則

$$x^n=x^{\frac{p}{q}}=(x^p)^{\frac{1}{q}}.$$

從$y=x^p$, $z=x^n=y^{\frac{1}{q}}$則由第7節得

$$\frac{d(x^n)}{dx}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d(x^p)}{dy}.$$

然從 $z=y^{\frac{1}{q}}$得$z^q=y$.

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dz}=qz^{q-1}$$

$$\therefore \qquad \frac{dz}{dy}=\frac{1}{qz^{q-1}}=\frac{1}{qx^{n(q-1)}}$$

又 $$\frac{d(x^p)}{dy}=px^{p-1}$$

故 $$\frac{d(x^n)}{dx}=\frac{px^{p-1}}{qx^{n(q-1)}}=\frac{p}{q}x^{p-1-\frac{p}{q}(q-1)}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$=nx^{n-1}$$

故n爲<u>任何有理數</u>。

$$\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$$

〔例〕 1. $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$

從第5節

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(a_0x^n)}{dx}+\frac{d(a_1x^{n-1})}{dx}+\cdots+\frac{d(a_{n-1}x)}{dx}+\frac{da_n}{dx}$$

$$=a_0\frac{d(x^n)}{dx}+a_1\frac{d(x^{n-1})}{dx}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dx}$$

$$=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

〔例〕 2. $y=(ax+b)^2.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\{(ax+b)^2\}}{d(ax+b)}\cdot\frac{d(ax+b)}{dx}$$

$$=2(ax+b)\left\{\frac{d(ax)}{dx}+\frac{db}{dx}\right\}$$

$$=2(ax+b).a$$

$$=2a(ax+b)$$

〔例〕 3. $y=\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha(ax^2+bx+c)-(\alpha x+\beta)(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{-a\alpha x^2-2a\beta x+c\alpha-b\beta}{(ax^2+bx+c)^2}.$$

〔例〕 4. $y=3x^2+2x+1,\qquad \dfrac{dy}{dx}=6x+2.$

〔例〕 5. $y=(a^2-x^2)^3,\qquad \dfrac{dy}{dx}=-6x(a^2-x^2)^2.$

〔例〕 6. $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x^2-1},\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2-10x+2}{(x^2-1)^2}$

9. $log\,x$ 之微分係數。

$$\frac{d(\log x)}{dx}=\lim_{h=0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h=0}\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h=0}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

然 $\lim_{h=0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\lim_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e$

而 $$=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x}$$

∴ $$\frac{d(\log x)}{dx}=\frac{1}{x}$$

〔例〕 1. $y=\log_a x$

∵ $$y=\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}$$

$x=a^y \quad \log_a x=y\log_a a=y$

∴ $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log_e a}\cdot\frac{d(\log x)}{dx}=\frac{2}{x\log_e a}$$

〔例〕 2. $y=x\log x$

從第5節得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dx}\log x+\frac{d(\log x)}{dx}x$$

$$=\log x+\frac{1}{x}x$$

$$=\log x-1$$

〔例〕 3. $y=\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

先以$log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$看作$u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$之函數

又以$u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$看作$v=\frac{1-x}{1+x}$之函數。而$\frac{1-x}{1+x}$之商之微分法。由第7節得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{1}{x^2-1}$$

〔例〕 4. $y=(1-x)log(1-x)$, $\frac{dy}{dx}=-1-log(1-x)$

〔例〕 5. $y=log\,f(x)$ $\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{(x)}$

10. e^x之微分係數。

$$\frac{d(e^x)}{dx}=\underset{h=0}{Lim}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\underset{h=0}{Lim}\frac{e^h-1}{h}$$

從第一章第15節例1。得

$$\underset{h=0}{Lim}\frac{e^h-1}{h}=\frac{1}{log_e e}$$

$$\therefore\qquad\frac{d(e^x)}{dx}=e^x$$

〔例〕 1. $y=a^x$ (但$a>0$)

$$\frac{d(a^x)}{dx}=\underset{h=0}{Lim}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\underset{h=0}{Lim}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=\frac{a^x}{log_a e}=a^x\log a$$

〔例〕 2. $y=a^{\frac{1}{x}}$

先令 $u=\frac{1}{x}$。其次方可求x之微分係數。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(a^u)}{du}\,\frac{du}{dx}$$

$$=a^u\log a.\frac{-1}{x^2}$$

$$=-\frac{a^{\frac{1}{x}}\log a}{x^2}$$

〔例〕 3. $y=a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$, $\frac{dy}{dx}=e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}$

〔例〕 4. $y=a^{mx}$, $\frac{dy}{dx}=m\log a.a^{mx}$

〔例〕 5. $y=\frac{a^x}{x^a}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{a^x}{x^{a+1}}(x\log a-a)$

11. 三角函數之微分係數。

(I) $\sin x$之微分係數。

$$\frac{d(\sin)}{dx}=\lim_{h=0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\lim_{h=0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$=1\times\cos x$$

$$\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$$

(II) $\cos x$ 之微分係數。

$$\frac{d(\cos x)}{dx}=\lim_{h=0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-\sin x$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$$

(III) $\tan x$ 之微分係數。

$\tan x$ 於 $x=(2x+1)\frac{\pi}{2}$ 之點。爲無限大而不連續。

故今令 $x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$。則

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{d(\tan x)}{dx}=\frac{\frac{d(\sin x)}{dx}\cos x-\frac{d(\cos x)}{dx}\sin x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{d(\tan x)}{dx}=(\sec x)^2$$

(IV) $\cot x$ 之微分係數。

於不含 $x=n\pi$ 之區域內。則

$$\frac{d(\cot x)}{dx}=\frac{\frac{d(\cos x)}{dx}\sin x-\frac{d(\sin x)}{dx}\cos x}{(\sin x)^2}=\frac{-1}{(\sin x)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{d(\cot x)}{dx}=-(\operatorname{cosec} x)^2$$

(V)　$\sec x$ 之微分係數。

於 $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ 之區域內。

$$\frac{d(\sec x)}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx}=\frac{\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d(\sec x)}{dx}=\sec x \cdot \tan x.$$

(VI)　$\operatorname{cosec} x$ 之微分係數。

於 $x \neq n\pi$ 之區域內。

$$\frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx}=\frac{-\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx}=-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x.$$

〔例〕 1.　$y=\log \cos mx.$

$y=\log u,\ u=\cos v,\ v=mx$。則爲函數之函數之函數。故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}(-\sin v)\cdot m$$

$$=-\frac{m \sin mx}{\cos mx}=-m \tan mx.$$

〔例〕 2.　$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 2\cos 2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$=(\cos x)^2$$

〔例〕 3.　$y=e^{\sin x},$　　　$\frac{dy}{dx}=\cos x \cdot e^{\sin x}.$

〔例〕 4.　$y=\frac{a \sin x}{1+\cos x},$　　　$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{1+\cos x}.$

〔例〕 5.　$y=(x\tan x)^2$,　　$\dfrac{dy}{dx}=2x\tan x\,\{\tan x+x(\sec x)^2\}$.

注意.　$(\sin x)^2$等。有表以$\sin^2 x$等之記號。以後亦採用之。

12. 圓函數之微分係數。

(I)　$\sin^{-1}x$之微分係數。 $=\arcsin x$

$$y=\sin^{-1}x \qquad \text{但} \quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},$$

則

$$\sin y=x.$$

以$\sin y$爲y之函數。而y爲x之函數。故$\sin y$爲x之函數之函數

$$\therefore \quad \frac{d(\sin y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dx}$$

即

$$\cos y\frac{dy}{dx}=1$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

則

$$\frac{d(\sin^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(II)　$\cos^{-1}x$之微分係數。

於$0<\cos^{-1}x<\pi$之一價函數。

令

$$y=\cos^{-1}x$$

則從$\cos y=x$得

$$-\sin y\frac{dy}{dx}=1$$

$\dfrac{d\cos y}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=1$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sin y}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即

$$\frac{d(\cos^{-1}x)}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(III)　$tan^{-1}x$ 之微分係數。

於　　$-\frac{\pi}{2}<tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$ 之一價函數。

令　　　$y=tan^{-1}x,$

則從 $tan\,y=x$ 得

$$sec^2y\frac{dy}{dx}=1,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{sec^2y}.$$

$$\therefore\qquad \frac{d(tan^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2}.$$

(IV)　$cot^{-1}x$ 之微分係數。

令 $0<cot^{-1}x<\pi,\quad y=cot^{-1}x,$　則從 $cot\,y=x$ 得

$$-cosec^2y\frac{dy}{dx}=1,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{cosec^2y}.$$

$$\therefore\qquad \frac{d(cot^{-1}x)}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

(V)　$sec^{-1}x$ 之微分係數。

令 $0<sec^{-1}x<\pi,\quad y=sec^{-1}x,$　則從 $sec\,y=x$ 得

$$sec\,y\,tan\,y\frac{dy}{dx}=1$$

$$\therefore\qquad \frac{d(sec^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

(VI)　$cosec^{-1}x$ 之微分係數。

令 $-\frac{\pi}{2}<cosec^{-1}x<\frac{\pi}{2}$. 同樣得

$$\frac{d(cosec^{-1}x)}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

注意.　由以上之結果。知 $sin^{-1}x,\ cos^{-1}x,\ tan^{-1}x,\ cot^{-1}x,\ sec^{-1}x,\ cosec^{-1}$ 等。不過符號之差異耳。而函數之區域變,則任何之符號亦變.

〔例〕 1. $y=sec^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

令 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=u,$ 則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(sec^{-1}u)}{du}\,\frac{du}{dx}=\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{-\dfrac{d(\sqrt{a^2-x^2})}{dx}}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}\cdot\frac{ax(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{a^2-x^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

〔例〕 2. $y=x\,sin^{-1}x,$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+sin^{-1}x.$

〔例〕 3. $y=cos^{-1}\dfrac{a}{x},$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$

〔例〕 4. $y=\dfrac{1}{a}tan^{-1}\dfrac{x}{a},$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{a^2-x^2}.$

13. 對數之微分法。

當求複雜函數之微分係數。則先作其對數。然後適用微分法較為簡便。是謂對數微分法 (*Logarithmic differentiation*)。

(I) $y=\{f(x)\}^{\psi(x)}$ 之微分係數。

作其對數。則為

$$\log y=\psi(x)\log f(x).$$

從此得

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d\psi(x)}{dx}\log f(x)+\frac{\psi(x)}{f(x)}\,\frac{df(x)}{dx}$$

$$=\psi'(x)\log f(x)+\frac{\psi(x)}{f(x)}f'(x),$$

$$\frac{dy}{dx}=\{f(x)\}^{\psi(x)}\left\{\psi'(x)\log f(x)+\frac{\psi(x)}{f(x)}f'(x)\right\}.$$

(II) $y=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 之微分係數。

作其對數為

$$\log y=\log f_1(x)+\log f_2(x)+\cdots+\log f_n(x),$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{f'_1(x)}{f_1(x)}+\frac{f'_2(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}.$$

從此求 $\frac{dy}{dx}$ 更覺簡明。

〔例〕 1. $y=x^x$.

作其對數為 $\log y=x\log x$.

從此得 $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\log x+\frac{x}{x}$,

$$\therefore\qquad \frac{dy}{dx}=x^x(\log x+1).$$

〔例〕 2. $y=\sqrt[x]{x}$, $\qquad \boxed{\frac{dy}{dx}=\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\log x}{x^2}}$. $\qquad \log y=\frac{1}{x}\log x$

〔例〕 3. $y=(x^{x-1})^{x-2}$, $\quad \frac{dy}{dx}=(x^{x-1})^{x-2}\left\{(2x-3)\log x+\frac{x^2-3x+2}{x}\right\}$.

〔例〕 4. $y=x(x-1)\sqrt{x-2}$.

$$\log y=\log x+\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(x-2),$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2(x-2)},$$

$$\frac{dy}{dx}=x(x-1)\sqrt{x-2}\,\frac{5x^2-3x-8x+4}{2x(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{5x^2-11x+4}{2\sqrt{x-2}}.$$

〔例〕 5. $y=x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{2}}$, $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{9x^2+x-2}{6x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{1}{2}}}$.

14. 平均値之定理。

玆設於此 (α, β) 區域內有一價且連續之函數 $\varphi(x)$。其導來函數 $\varphi'(x)$。亦於此全區域內連續。倘有 $\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=0$。

有如此條件之函數 $\varphi'(x)$。則於此區域內至少必有一回爲0。

何則。$\varphi(x)$ 若不爲常數。則 x 由 α 增加。因之 $\varphi(x)$ 亦不能不由 $\varphi(x)=0$ 增加而又減少。

今 $\varphi(x)$ 增不能增至無限。而其終局不可不爲 $\varphi(\beta)=0$。故非由增轉至減不可。今令此點爲 $x=x_0$。則

$$\varphi(x_0-|h|)<\varphi(x_0)>\varphi(x_0+|h|),$$

$$\therefore \quad \frac{\varphi(x_0-|h|)-\varphi(x_0)}{-|h|}>0, \quad \frac{\varphi(x_0+|h|)-\varphi(x_0)}{|h|}<0.$$

試考 $Lim\, h=0$ 之極限。則不及 x_0 之微分係數。與過 x_0 之微分係數。若不收斂於同一之極限値。則與 $\varphi'(x)$ 爲連續之旨相背戾。

$$\therefore \quad \varphi'(x_0)=0.$$

$\varphi(x)$ 由 $x=\alpha$ 起減小時亦同。

又 $\varphi(x)$ 決不增減。即爲常數。則 $\varphi'(x)$ 於全域內常爲0。

此從 $\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=0$, 得 $\varphi'(x)=0$, 是謂洛兒氏之定理 (*Rolle's theorem*)。

今攷究次之函數。

$$\varphi(x)=f(x).-f(\alpha)-\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\{f(\beta)-f(\alpha)\}.$$

但 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 於 (α, β) 區域內。任何亦爲一價連續。

然則 $\varphi(x)$ 與 $\varphi'(x)$ 皆於 (α, β) 區域內爲一價連續。且 $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ 皆爲0明矣。

故必有令

$$\varphi'(x_0)=0$$

之x_0點

即 $$f'(x_0)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0.$$

今改書之而從h之正負。令

$$\alpha=a,\quad \beta=a+h,\qquad 又\qquad \alpha=a+h,\quad \beta=a.$$

且x_0爲區域內之一值。故以

$$x_0=a+\theta h,\quad 0<\theta<1.$$

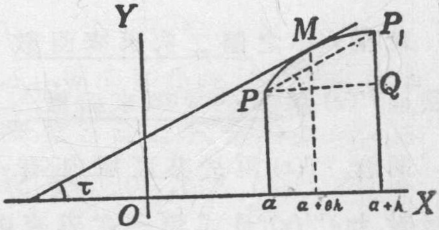
表之。則

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h).$$

由是得次之定理。

<u>平均值之定理</u> (*Mean-value theorem*) $f(x)$ 與$f'(x)$ 共爲一價連續之區域內從適宜之θ得

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h),\quad 0<\theta<1.$$



$x=a,\quad x=a+h.$

間之曲線$f(x)$

爲PP_1

令 $P_1Q=f(a+h)-f(a)$

則

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{P_1Q}{PQ}=\tan P_1\hat{P}Q$$

$\therefore$ $f'(a+\theta h)=\tan\tau$ (本章第2節)

則平均值之定理。要爲表示

$$P_1\hat{P}Q=\tau$$

而因其函數之$(a, a+h)$之平均增減率。等於其間之微分係數。故有此命名。

第三章 累次微分法

1. 累次導來函數。

設$f(x)$於(α, β)區域內。爲一價而且連續之函數。其導來函數。爲有限而且確定。則

$$\underset{h=0}{Lim}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x).$$

前章已論之矣。

若$f'(x)$更於(α, β)區域之全部。或其一部分之區域。(α', β')爲一價而且連續之函數。其導來之函數爲有限確定。則表示如次。

$$\underset{h=0}{Lim}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\frac{df'(x)}{dx}=f''(x).$$

此稱$f(x)$之第二次導來函數(*Second derived function*)。與此對照而$f'(x)$稱第一次導來函數。

同樣。$f''(x)$更於某區域內。有一價且連續而有限確定之導來函數。如$f'''(x)$。是謂第三次導來函數。

依此條件。順次得

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\quad \ldots\ldots,\quad f^{(n)}(x).$$

此等導來函數。總稱之曰$f(x)$之累次導來函數(*Successive derived functions*)。

求$f^{(n)}(x)$之方法。曰累次微分法(*Successive differentiation*)。

2. 累次微分及累次微分係數。

微分係數。一名微分商。又名導來函數。同一物也。不過着眼點異耳。前既論之矣。卽

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x).$$

$$\frac{df'(x)}{dx}=f''(x)=\frac{d\frac{df(x)}{dx}}{dx}.$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

又就微分觀之。由第二章第一節。得

$$df(x)=\left(\frac{df(x)}{dx}\right)dx$$

卽 $$df(x)=f'(x)\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然 $df(x)$ 等於 x 之函數乘 dx。

今以 dx 當做常數看。

更求其微分。則

$$d\{df(x)\}=\frac{d\{f'(x)\,dx\}}{dx}dx=\frac{df'(x)}{dx}dx\,dx$$

$$=f''(x)\,dx\,dx.$$

$d\{df(x)\}$ 謂之第二次微分 (*Second differential*)。

以記號 $d^2f(x)$ 表之。又 $dx\,dx$ 以 dx^2 表之。

卽 $$d^2f(x)=f''(x)\,dx^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

同樣。第三次及第三次以上之微分。表以下式。

$$\left.\begin{aligned} d^3f(x)&=f'''(x)\,dx^3\\ \cdots\cdots\quad&\cdots\cdots\\ d^nf(x)&=f^{(n)}(x)\,dx^n \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此等導來函數。總稱之曰<u>累次微分</u> (*Successive differentials*)。

dx 爲第一位無限小。從 (1) $f'(x)$ 不爲 0 而爲有限值。則 $df(x)$ 亦爲第一位無限小。又從 (2) 以 dx^2 爲第二位無限小。而 $f''(x)$ 不爲 0 而爲有限值。則 $d^2f(x)$ 亦爲第二位之無限小。一般從 (3) 概稱 $d^nf(x)$ 爲第 n 位之無限小。

次以 $dx, dx^2, dx^3, \ldots, dx^n$ 約 (1), (2), (3) 之兩邊。則

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x),$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}=f''(x)=\frac{d\dfrac{df(x)}{dx}}{dx},$$

$$\frac{d^3f(x)}{dx^3}=f'''(x),$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\frac{d^nf(x)}{dx^n}=f^{(n)}(x).$$

如是由微分之商之點觀察之。此等稱第一次,第二次,第三次,…,第 n 次之微分商。又稱微分係數。總稱<u>累次微分係數</u> (*Successive differential coefficients*)。又稱<u>累次微分商</u> (*Successive differential quotients*)。

求累次微分商。頗爲困難。今舉應用最多者。示其簡明之方法如次。

3. $\sin x$ 及 $\cos x$ 之累次微分係數。

(I) $y=\sin x.$

$$\frac{dy}{dx}=-\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right).$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

試從數學的歸納法。則

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(II) $y=\cos x.$

$$\frac{dy}{dx}=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right).$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

〔例〕 1. 求 $y=\tan x$ 之第三次微分係數。

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2 x\cdot\tan x,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=4\sec^2 x\cdot\tan^2 x+2\sec^4 x$$

$$=4\sec^2 x(\sec^2 x-1)+2\sec^4 x$$

$$=6\sec^4 x-4\sec^2 x.$$

〔例〕 2. 求 $y=(\sin x)^p$ 之第二次導來函數。

$$y'=p(\sin x)^{p-1}\cos x,$$

$$y''=p(p-1)(\sin x)^{p-2}\cos^2 x-p(\sin x)^{p-1}\sin x$$

$$=p(p-1)(\sin x)^{p-2}\{1-(\sin x)^2\}-p(\sin x)^p$$

$$=p(p-1)(\sin x)^{p-2}-p^2(\sin x)^p.$$

〔例〕 3. 試求 $y=\tan x+\sec x$ 之 y''。

$$y''=\frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

〔例〕 4. 求 $y=\sin^3 x$ 第 n 次微分係數。

$$y=\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x),$$

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

〔例〕 5. 求 $y=\sin^2 x$ 第 n 次微分係數。

$$\frac{d^n y}{dx^n}=2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{\overline{n-1}\,\pi}{2}\right).$$

4. e^x $\log x$ 及 x^m 之累次微分係數。

(I) $y=e^x$.

$$\frac{dy}{dx}=e^x,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^x,\quad \ldots\ldots$$

一般爲

$$\frac{d^n y}{dx^n}=e^x.$$

(II) $y=\log x$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}=x^{-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-x^{-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2x^{-3},$$

$$\cdots\cdots$$

一般爲

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

(III) $y=x^m$.

m爲正整數。此以n代之。則

$$\frac{dy}{dx}=n\,x^{n-1},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2},\quad \cdots\cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=n(n-1)\ldots 2.1=n!$$

而 $$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=0,\ \text{以上皆爲}0.$$

若m不爲正整數。則

$$\frac{d^ny}{dx^n}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

〔例〕 1. $y=e^{-x}\cos x$, 則 $\frac{d^4y}{dx^4}+4y=0$, 試證之。

(證) $$\frac{dy}{dx}=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x+e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$$

$$=2e^{-x}\sin x,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-2e^{-x}\sin x+2e^{-x}\cos x,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=2e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x-2e^{-x}\cos x-2e^{-x}\sin x$$

$$=-4e^{-x}\cos x=-4y.$$

$$\therefore\qquad \frac{d^4y}{dx^4}+4y=0.$$

〔例〕 2. 求 $y=x\log x$ 之第二導來函數。

$$y''=\frac{1}{x}.$$

〔例〕 3. $y=x^{n-1}\log x,$ $\qquad y^{(n)}=\frac{(n-1)!}{x}.$

〔例〕 4. $y=x\,e^x,$ $\qquad y^{(n)}=x\,e^x+n\,e^x.$

〔例〕 5. $y=\frac{1}{a^2-b^2x^2}.$

分解原式。爲 $\qquad y=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{a-bx}\right\}$

則 $\qquad \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{(-1)^nb^n}{2a}\left\{\frac{1}{(a+bx)^n}-\frac{1}{(a-bx)^n}\right\}.$

如是分解。以求累次微分商。更覺簡便。

如 $\qquad y=arctg\,x,$ 　令

$y'=\frac{1}{1+x^2}=-\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{i+x}+\frac{1}{i-x}\right\}$ 則所得 $y^{(n)}$ 之公式簡而明。

〔例〕 6. $y=\frac{a+x}{a-x},$ $\qquad \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{2a\cdot n!}{(a-x)^{n+1}}.$

5. 函數之積之累次微分係數。

令 u, v 任何亦爲 x 之函數。且任何亦爲有有限確定。至第 n：之導來函數。

則 $y=uv,$

$$y'=u'v+uv',$$

$$y''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

一般為

$$y^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\dots+uv^{(n)}.$$

是亦從數學的歸納法。得證明其為眞矣。

此稱來本之之公式 (*Leibnitz's formula*)。

〔例〕 $y=arc\sin x.$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

適用來本之之公式即得。

第四章 偏微分法

1. 含二自變數之函數。

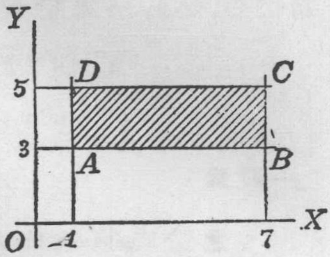
於某限制之下。設二變數不相關係。各得任意變化。

由此 x 之任意一值。與 y 之任意一值組合。而第三變化常為確定之值。則名此限制為變數 x, y 之區域 (*Domain*)。z 為此區域內 x, y 之函數。

此以 $z=f(x, y)$, $z=\psi(x, y)$ 等表之。其 x, y 為自變數。z 為被變數。

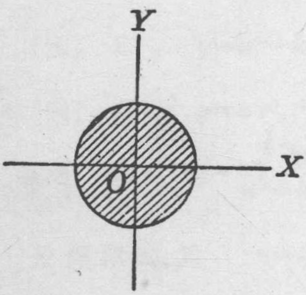
〔例〕 1. $z=\sqrt{(x-1)(7-x)}+\sqrt{(3-y)(y-5)}$.

於$7\geqq x\geqq 1, 5\geqq y\geqq 3$限制之下。$z$爲$x, y$之函數。今表此限制於直交軸之區域內。則可得矩形$ABCD$。



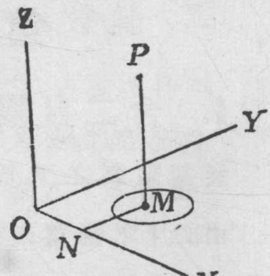
此區域內所有x, y之值之組合。卽在矩形或在其周上之各點。

〔例〕 2. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.



於$x^2+y^2\leqq a^2$限制之下。x, y爲其變數。z爲其函數。而此限制以直交軸表之。則爲以原點爲中心。半徑爲a之圓內或圓周上之點之坐標x, y。而z爲其函數。

於同點取直角相交之三直線OX, OY, OZ。於OX上表區域內之x之一值$ON=x$。從N引OY平行線。$NM=y$表區域內之y之一值。則此x, y爲區域內一點之坐標。



與此坐標x, y相對應之$z=f(x, y)$之確定值。表以OZ平行之PM。則對於區域內之x, y之值而表z之值。以P點有x, y, z三坐標表空間之點羣。

z之確定值於區域內。常有惟一個時。稱爲一價函數。常爲二個及二個以上時。稱爲多價函數。若自變數惟一個者同。但於多價

函數。就其正系統。亦得視作一價函數。例如 $z^2=a^2-x^2-y^2$。此 z 雖爲二價。然區分爲正系統與負系統。則爲二個一價函數。

又 $z=arctg\dfrac{x}{y}$ 限於 $-\dfrac{\pi}{2}<z<\dfrac{\pi}{2}$ 以內。則亦爲一價函數。

是則本章及本章以下。於 $z=f(x, y)$。除有特別規定外。均視爲一價。

x, y 之區域。以種種方法考之。雖爲吾人之自由。然本章及本章以下。均如前例 1, 2。僅研究關於直交軸而表平面之一部分而已。

是於初等函數。大概足用故也。

因之空間之點羣。亦概有簡明之關係。

於二個自變數有二種。卽

陽函數 $z=f(x, y)$。

陰函數 $F(x, y, z)=0$。

茲先以陽函數爲主而詳論之。

2. 函數 $z=f(x, y)$ 之連續。

如前所述 x, y 之區域內之坐標。限於表平面之一部分。

今將於此區域內。規定一點如 $x=a, y=b$ 爲連續之意。

x 從近於 a 之值。而收斂爲 a。與 y 從近於 b 之值。而收斂爲 b 無關係。且不拘兩者收斂之方法若何。z 常收斂於確定值 $f(a, b)$。如此謂函數於 $x=a, y=b$ 之點爲連續。

由此定義。則得一點連續查定之法則如次。

$z=f(x, y)$。於 $x=a, y=b$ 之點爲連續。則與任何之正數 ϵ。常爲

$$|f(a+h, b+k)-f(a, b)|<\epsilon.$$

其 h k 爲

$$|h|\leqq\delta,\quad |k|\leqq\delta.$$

從此求得正數 δ。必能存在。

反之。與任意正數 ϵ 相應而爲

$$|f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)|<\epsilon,$$

$$|h|\leqq\delta,\quad |k|\leqq\delta.$$

如得正數 δ 存在。則 $z=f(x,\ y)$。

於 $x=a,\ y=b$ 之點爲連續。

何則。前者之 δ 若不存在。則

$\lim\limits_{h=0,\ k=0} f(a+h,\ b+k)$ 其收斂之值。當不等於 $f(a,\ b)$。是與假設相反。

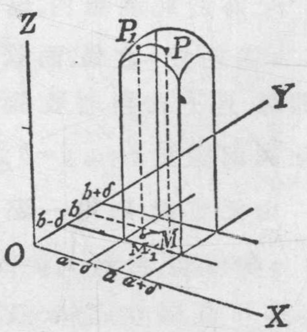
又後者得

$$\lim_{\epsilon=0}|f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)|=0.\ 即$$

$$\lim_{\epsilon=0} f(a+h,\ b+k)=f(a,\ b).\ 故云。$$

如上之查定。於此區域內。各點之 $x,\ y$ 能滿足時。則稱 $z=f(x,y)$ 爲在此區域全部內而連續。

今關於坐標軸。表 $z=f(x,\ y)$ 之連續如次。



於區域內 $|h|\leqq\delta,\quad |k|\leqq\delta,$

則 $$a-\delta\leqq a+h\leqq a+\delta,$$

$$b-\delta\leqq b+k\leqq b+\delta.$$

是關於直交軸而表正方形 $x=a,$ $=b$ 之點。M 爲其中心

於此正方形之區域內。自 $x=a+h,\ y=b+k$ 之點 M_1 至 M。其 h 與 k 各自獨立收斂。則與此對應之函數 z 之一端之點 P_1 亦當收斂於 P。此種事實。於區域內 M_1P_1 之位置。及其收斂之方法。均無關係。

然從 P 任意之方向爲 P_1。欲令 PP_1 比任意之正數 (η) 尙小。則

$$PP_1=\sqrt{\{f(a+h,\,b+k)-f(a,\,b)\}^2+h^2+k^2}$$

$$<|f(a+h,\,b+k)-f(a,\,b)|+|h|+|k|.$$

而 $$|f(a+h,\,b+k)-f(a,\,b)|<\epsilon\leqq\frac{\eta}{3},$$

$$|h|\leqq\delta\leqq\frac{\eta}{3},\quad |k|\leqq\delta\leqq\frac{\eta}{3}.$$

如是決定 $\epsilon,\ \delta$ 可也。換言之。P 對於所有各 h,k。必有任何相近之點 P_1。故於某點連續之函數 $z=f(x,y)$。於其點之近處而表曲面之一部。或於區域內而連續。得表一曲面 (*Surface*)。

〔例〕 $z=f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}.$

其點 $x=0,\ y=0$ 之近所收斂之方法。亦不連續之一奇例也。

先令 x,y 之一方暫爲常數。他之一方僅收斂爲0。然後他亦收斂爲0。

則 $$\lim_{x=0} f(x,y)=\frac{0}{y^2}=0,\quad \lim_{y=0}\{\lim_{x=0} f(x,y)\}=0,$$

$$\lim_{y=0} f(x,y)=\frac{0}{x^2}=0,\quad \lim_{x=0}\{\lim_{y=0} f(x,y)\}=0.$$

又 x,y 沿 $x:y=a:b$ 之直線。而令收斂於 $x=0,\ y=0$。則

$x=a\epsilon,\ y=b\epsilon$。

而 $$\lim_{\epsilon=0} f(a\epsilon,\,b\epsilon)=\lim_{\epsilon=0}\frac{2ab\epsilon^2}{(a^2+b^2)\epsilon^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

卽可見因 x,y 之收斂之方法。而歸着於全不相同之極限値。

3. 偏微分係數及偏微分。

於某區域內之連續函數 $z=f(x, y)$。令 y 在此區域內爲一定值。則與此相應之 x。於 (α, β) 區域內。而 $z=f(x, y)$ 爲 x 之連續函數。固勿具論。

而
$$\operatorname*{Lim}_{h=0}\{f(x+h, y)-f(x, y)\}=0.$$

令
$$\Delta_x z=f(x+h, y)-f(x, y),$$
$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}.$$

其 h 收斂令爲 $+0$。亦爲 -0。

若其極限值至有限確定之處。則表以

$$\frac{\delta z}{\delta x}\operatorname*{Lim}_{h=0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}.$$

此名關於 x 之偏微分係數 (*Partial differential quotient*)。又名偏微分商。

偏微分係數。一般爲 x, y 之函數。而因視法不同。有下式種種表示之方。

$$\frac{\delta z}{\delta x}=f'_x(x, y)=f'_x=z'_x=z_x$$

而此謂關於 x 之偏導來函數 (*Partial derived function*)。

此與第二章第1節所論者同。

$$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\operatorname*{Lim}_{h=0}\Delta_x z}{\operatorname*{Lim}_{h=0}\Delta x}.$$

而 $\quad Lim\,\Delta_x z=d_x z.$ 則

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)=\frac{(d_x z)}{(dx)}.$$

$$\therefore\quad d_x z=\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)dx=f'_x(x, y)\,dx.$$

此名<u>關於x之偏微分</u>(*Partial differential*)。

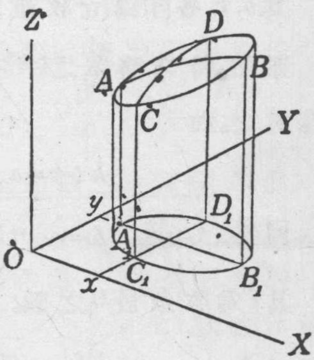
x於區域內固定於某常數。僅令y於其區域(γ, δ)內變化。則得同樣考之。爲

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\lim_{k=0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}$$

$$=f'_y(x, y)=f'_y=z'_y=z_y,$$

$$d_y z=\frac{\delta z}{\delta y}dy=f'_y(x, y)\,dy.$$

偏微分係數。依幾何學的考察如次。



令y爲固定常數。沿垂於OY之平面所截取之直線A_1B_1。而於單一自變數之處。行同一之方法。則$\frac{\delta z}{\delta x}$表曲線$AB$之切線角之正切。同樣。$\frac{\delta z}{\delta y}$表垂於$OX$之平面與曲面相交之曲線$CD$之切線角之正切。

〔例〕 1. 從$z=\tan^{-1}\frac{y}{x}$以求$\frac{\delta z}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta y}$,

$$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\ \frac{-y}{x^2}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\ \frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

〔例〕 2. 從$z=x\cos y$求$\frac{\delta z}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta y}$.

$$\frac{\delta z}{\delta y_x}=\cos y,\quad \frac{\delta z}{\delta x_y}=-x\sin y.$$

〔例〕 3. $z=ye^x+xe^y$ 之偏導來函數如何。

$$ye^x+e^y,\quad e^x+xe^y.$$

4. 全微分。

今於 $z=f(x,y)$。論其一般 x, y 之變化。

令 $\Delta z=f(x+h,y+k)-f(x,y)$。

則以 x 之變化與 y 之變化無關係

其 h, k。各自獨立收斂爲0。

雖然。特與簡單之一次的關係。保其一定比而共收斂爲0之處考之。如

$$h:k=a:b \quad (a, b \text{ 爲常數}).$$

則令 $h=a\epsilon,\quad k=b\epsilon.$

其 ϵ 爲收斂於0之數。

更令 $\Delta s=\sqrt{h^2+k^2}=\epsilon\sqrt{a^2+b^2}.$

則 Δs 亦與 ϵ 同時收斂爲0之數。

$$\therefore \quad \frac{\Delta z}{\Delta s}=\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\frac{f(x+a\epsilon,y+b\epsilon)-f(x,y)}{\epsilon\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{f(x+a\epsilon,y+b\epsilon)-f(x,y+b\epsilon)}{a\epsilon}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$+\frac{f(x,y+b\epsilon)-f(x,y)}{b\epsilon}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

今令 $\underset{}{Lim}\ \epsilon=0.$

則 $$\underset{\epsilon=0}{Lim}\frac{\Delta z}{\Delta s}=f'_x(x,y)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+f'_y(x,y)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

試以下式表之。

$$\underset{\epsilon=0}{Lim}\frac{\Delta z}{\Delta s}=\frac{dz}{ds}=f'_s(x,y).$$

則 $$f'_s(x,y)=f'_x(x,y)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+f'_y(x,y)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

此稱於$s(a:b)$之方向之全導來函數。從微分係數之視法。則

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a\epsilon}{\epsilon\sqrt{a^2+b^2}}$$ 等之極限等於 $\frac{dx}{ds}$.

$$\therefore\quad \frac{dz}{ds}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{dy}{ds}.$$

此稱於$s(a:b)$之方向之全微分係數 {*Total differential coefficient in the direction* $s(a:b)$}。

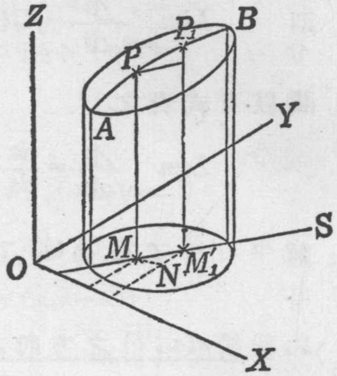
又 $$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+h,y+k)-f(x,y)\\&=f(x+a\epsilon,y+b\epsilon)-f(x,y)\\&=\frac{f(x+a\epsilon,y+b\epsilon)-f(x,y+b\epsilon)}{a\epsilon}\cdot a\epsilon\\&\quad+\frac{f(x,y+b\epsilon)-f(x,y)}{b\epsilon}\cdot b\epsilon.\end{aligned}$$

令 $\underset{\epsilon=0}{Lim}\Delta z=dz.$ 則

$$dz=f'_x(x,y)\,dx+f'_y(x\ y)\,dy$$

即 $$dz=\frac{\delta z}{\delta x}dx+\frac{\delta z}{\delta y}dy.$$

此稱 $z=f(x,y)$ 之全微分 (*Total differential*)。



於區域內之點。令 M 爲 x, y。M_1 爲 $x+h, y+k$。則

$$MM_1=\sqrt{h^2+k^2}=\Delta s.$$

故 $\frac{dz}{ds}$ 表含 s 通過 M, M_1 之直線,平行於 OZ 之平面,而截曲面 $z=f(x,y)$ 所得曲線 AB 之上之微分係數。

5. 累次偏微分法。

於 $z=f(x,y)$ 連續區域。而在有限確定之條件之下。如第三節得偏導來函數。爲

$$\frac{\delta z}{\delta x}=f'_x(x,y)=\underset{h=0}{Lim}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=f'_y(x,y)=\underset{k=0}{Lim}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}.$$

此稱第一次之偏導來函數。

更於此等之 x 及 y。爲有有限確定之偏導來函數。則

$$\frac{\delta\frac{\delta z}{\delta x}}{\delta x}=\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\delta\frac{\delta z}{\delta x}}{\delta y}=\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\delta\frac{\delta z}{\delta y}}{\delta x}=\frac{\delta^2 z}{\delta y\delta x}=f''_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\delta\frac{\delta z}{\delta y}}{\delta y}=\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=f''_{yy}(x,y)$$

此稱<u>第二次</u>之偏導來函數。

此當考究其f''_{xy}與f''_{yx}之異同。

令 $$V=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y).$$

觀察此式有二樣。

先令

$$V=\{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)\}-\{f(x+h,y)-f(x,y)\}.$$

從平均值之定理(第二章第14節)。

令 $$f(x+h,y)-f(x,y)=hf'_x(x+\theta_1h,y),\quad 0<\theta_1<1.$$

以$y+k$代其y。則

$$f(x+h,y+k)-f(x,y+k)=hf'_x(x+\theta_1h,y+k).$$

$$\therefore\quad V=h\{f'_x(x+\theta_1h,y+k)-f'_x(x+\theta_1h,y)\}.$$

更從平均值之理。得

$$V=hkf''_{xy}(x+\theta_1h,y+\theta_2k),\quad \begin{array}{l}0<\theta_1<1,\\0<\theta_2<1.\end{array}$$

次令

$$V=\{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)\}-\{f(x,y+k)-f(x,y)\},$$

與上同樣。得

$$V=k\{f'_y(x+h,y+\theta_3k)-f'_y(x,y+\theta_3k)\},\quad 0<\theta_3<1.$$

$$V=khf''_{yx}(x+\theta_4h,y+\theta_3k),\quad \begin{array}{l}0<\theta_3<1,\\0<\theta_4<1.\end{array}$$

從此二結果。知

$$f''_{xy}(x+\theta_1h,y+\theta_2k)=f''_{yx}(x+\theta_4h,y+\theta_3k).$$

然則f''_{xy},f''_{yx}任何x,y於區域內爲連續。而於$Lim\, h=0$, $Lim\, k=0$之極限。則

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$$

即 $$\frac{\delta^2z}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2z}{\delta y\delta x}.$$

(實際上此交換之法則。得以成立。故 f, f'_y, f''_{xy} 爲連續。又 f, f'_y f''_{yx} 合於連續之條件。亦頗充分)。

從第二次考之。更得第三次之偏導來函數。即

$$f'''_{xxx}, f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{xyy}, f'''_{yxx}, f'''_{yxy}, f'''_{yyx}, f'''_{yyy}.$$

以上準此而假定交換之法則爲

$$f'''_{xxy}=f'''_{xyx}=f'''_{yxx},$$

$$f'''_{xyy}=f'''_{yxy}=f'''_{yyx}.$$

全微分亦與偏導來函數同樣。如

$$dz=\frac{\delta z}{\delta x}dx+\frac{\delta z}{\delta y}dy.$$

爲第一次全微分。

$$d(dz)=\frac{\delta dz}{\delta x}dx+\frac{\delta dz}{\delta y}dy$$

$$=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x}dx+\frac{\delta z}{\delta y}dy\right)dx$$

$$+\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta x}dx+\frac{\delta z}{\delta y}dy\right)dy.$$

假定交換之法則。且令 $d(dz)=d^2z$。則

$$d^2z=\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}dx^2+2\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}dxdy+\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}dy^2.$$

是稱第二次之全微分 (*Second total differential*)。

有時用次之記號。

$$d^2z=\left(\frac{\delta}{\delta x}dx+\frac{\delta}{\delta y}dy\right)^2 z.$$

是從二項定理展開之後。各項添附z。恰如第二次全微分。此法甚便宜。

一般由數學的歸納法。可得

$$d^n z=\left(\frac{\delta}{\delta x}dx+\frac{\delta}{\delta y}dy\right)^n z.$$

〔例〕 1. $z=x^5-6x^3y^2-y^4x.$

$$\frac{\delta z}{\delta x}=5x^4-18x^2y^2-y^4,\quad \frac{\delta z}{\delta y}=-12x^3y-4y^3x,$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=20x^3-36xy^2,\qquad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=-12x^3-12y^2x,$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 z}{\delta y\delta x}=-36x^2y-4y^3.$$

〔例〕 2. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$求其第二次之偏導來函數。

$$\frac{y^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}},\quad \frac{xy}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}},\quad \frac{x^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}}.$$

〔例〕 3. 令從$z=e^{ax+by}$之方程式。得$\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2}=A\dfrac{\delta z}{\delta y}+B\dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ 則a, b, A, B之間有如何之關係。但a, b, A, B爲常數。

(解)
$$\frac{\delta z}{\delta x}=a\,e^{ax+by},\quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=a^2e^{ax+by},$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=b\,e^{ax+by},\quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=b^2e^{ax+by}.$$

以此代入方程式。則

$$a^2=Ab+Bb^2.$$

〔例〕 4. 令$z=\phi(y+ax)+\psi(y-ax)$。則$\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2}=a^2\dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2}$試證明之。

6. 函數之函數之偏微分法。

(I) 單一自變數之二種函數之函數。

單一自變數爲x。二種函數爲$u=f(x)$, $v=g(x)$。更論$z=\phi(u,v)$之微分法。

以z爲單一自變數x之函數。實非偏微分係數。唯有應用偏微分法之必要而已。

於某區域內。u, v爲有有限確定之導來函數。假定z爲有u或v之偏導來函數。

先令x的$h=\Delta x$。變爲$x+\Delta x$。

則u, v爲

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta u,$$
$$g(x+\Delta x)-g(x)=\Delta v.$$

u, v變而爲$u+\Delta u, v+\Delta v$.

則z亦當變爲

$$\Delta z=\phi(u+\Delta u, v+\Delta v)-\phi(u, v).$$

即
$$\Delta z=\frac{\phi(u+\Delta u, v+\Delta v)-\phi(u, v+\Delta v)}{\Delta u}\Delta u$$
$$+\frac{\phi(u, v+\Delta v)-\phi(u, v)}{\Delta v}\Delta v.$$

又
$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\phi(u+\Delta u, v+\Delta v)-\phi(u, v+\Delta v)}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$+\frac{\phi(u, v+\Delta v)-\phi(u, v)}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

令$Lim\ \Delta x=dx$, $Lim\ \Delta u=du$, $Lim\ \Delta v=dv$.

則
$$dz=\frac{\delta z}{\delta u}du+\frac{\delta z}{\delta v}dv,$$
$$\frac{dz}{dx}=\frac{\delta z}{\delta u}\frac{du}{dx}+\frac{\delta z}{\delta v}\frac{dv}{dx}.$$

更令 $\frac{\delta z}{\delta u}, \frac{\delta z}{\delta v}, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$。任何亦有導來函數。幷許假定交換法則。

則
$$d(dz)=d^2z=\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta z}{\delta u}du+\frac{\delta z}{\delta v}dv\right)du$$
$$+\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta z}{\delta u}du+\frac{\delta z}{\delta v}dv\right)dv$$
$$=\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}du^2+2\frac{\delta^2 z}{\delta u\delta v}dudv+\frac{\delta^2 z}{\delta v^2}dv^2.$$

$$\therefore \qquad \frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+2\frac{\delta^2 z}{\delta u\delta v}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\delta^2 z}{\delta v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2.$$

以上至第n次。亦與前節同。而得表以簡潔之記號法。

（注意） dz, d^2z 等之形。與前節全微分之形無異。惟前節之dx, dy假定爲交互無關係之變化。而本節之du, dv爲同一自變數之函數之變化。且保存其$du=\frac{du}{dx}dx,\ dv=\frac{dv}{dx}dx$之關係。

(II) <u>二個自變數之函數之函數</u>。

$u=f(x, y),\ v=g(x, y)$。更 $z=\phi(u, v)$ 之 x, y。於某區域內。勿論何者。亦爲一價連續。各有偏導來函數。

先僅以x變爲Δx。y爲一定。

u, v變爲，

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x, y)-f(x, y),$$
$$\Delta_x v=g(x+\Delta x, y)-f(x, y).$$

從而令z的變化。爲

$$\Delta_x z=\phi(u+\Delta_x u, v+\Delta_x v)-\phi(u, v).$$

則 $$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\phi(u+\Delta_x u,\, v+\Delta_x v)-\phi(u,\, v+\Delta_x v)}{\Delta_x u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$$
$$+\frac{\phi(u,\, v+\Delta_x v)-\phi(u,\, v)}{\Delta_x v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

於Δx的無限小之極限。爲

$$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}$$

同樣。Δy亦爲

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta v}{\delta y}.$$

更令假定高次之偏導來函數。則

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}\right)\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$$
$$+\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}\right)\frac{\delta v}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$$
$$=\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2+2\frac{\delta^2 z}{\delta u\delta v}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}+\frac{\delta^2 z}{\delta v^2}\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)^2$$
$$+\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}.$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2+2\frac{\delta^2 z}{\delta u\delta v}\cdot\frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta^2 z}{\delta v^2}\left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)^2$$
$$+\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta y^2}.$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta^2 z}{\delta u\delta v}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}\right)$$
$$+\frac{\delta^2 z}{\delta v^2}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}\cdot\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta x\delta y}.$$

等等。

〔例〕 1. $z=f(x,y)$，而 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$ 求其 $\frac{\delta z}{\delta r}$, $\frac{\delta z}{\delta\phi}$.

又證明 $\left(\frac{\delta z}{\delta r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta z}{\delta\phi}\right)^2=\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2$.

（解）
$$\frac{\delta z}{\delta r}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta y}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta r}$$
$$=f'_x(x,y)\cos\phi+f'_y(x,y)\sin\phi,$$
$$\frac{\delta z}{\delta\phi}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta\phi}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta\phi}$$
$$=-f'_x(x,y)\,r\sin\phi+f'_y(x,y)\,r\cos\phi.$$

上之平方。與下以 r 約之平方相加。則
$$\left(\frac{\delta z}{\delta r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta z}{\delta\phi}\right)^2=\{f'_x(x,y)\}^2+\{f'_y(x,y)\}^2$$
$$=\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2.$$

〔例〕 2. $z=\sin^{-1}\frac{y}{x}$，而 x, y 為 t 之函數。求其 $\frac{dz}{dt}$.
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$=\frac{-\frac{y}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$=-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

7. 同次函數。

二個自變數 x, y 之函數。為 $z=F(x,y)$。x, y 代以 xt, yt。且有次之關係。
$$F(xt,yt)=t^n F(x,y).$$

有如此關係之函數$F(x, y)$。謂爲關於x, y之n次之同次函數(*Homogeneous function of the* n^{th} *order*)。

定理. n次之同次函數$z=F(x, y)$。

爲 $$x\frac{\delta F}{\delta x}+y\frac{\delta F}{\delta y}=nF.$$

(證明) 令 $xt=u,\ yt=v.$ 則

$$F(u, v)=t^n F(x, y).$$

以 $$u=xt,\quad v=yt.$$

而 $$\frac{\delta F}{\delta u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\delta F}{\delta v}\cdot\frac{dv}{dt}=nt^{n-1}F(x, y).$$

即 $$x\frac{\delta F}{\delta u}+y\frac{\delta F}{\delta v}=nt^{n-1}F(x, y).$$

茲令 $t=1.$ 則 $u=x,\ v=y.$

而 $$x\frac{\delta F}{\delta u}+y\frac{\delta F}{\delta y}=nF.$$

(注意) 此定理。稱爲來本之之公式。

本定理。於$F(x, y)$爲代數有理整式時。亦能適用。

例如 $$z=ax^2+2bxy+cy^2.$$

則 $$x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y}=2z.$$

而 $$z=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3.$$

則 $$x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y}=3z.$$

$F(x, y)$ 亦有不爲代數式者。

例如 $$z=\tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

則 $$x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y}=0.$$

又 $$z=y\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

則 $$x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y}=z.$$

8. 陰函數之導來函數。

(i) x 之函數 y 爲

$$f(x, y)=0 \quad \text{之形狀。}$$

今欲從此求 $\frac{dy}{dx}$。則將此陰函數先用代數解法。得 $y=\phi(x)$。而後可適用微分法。然代數解法。大概困難，且甚煩瑣。因如次考之。

令 $$z=f(x, y).$$

則 z 爲 x, y 之函數。

於此處。其值爲 0 而爲一定。

是 y 之 x 之函數之變化。常從 $z=0$ 而變化故也。

如是視法。依前節求微分。則 $\frac{dz}{dx}=0$。而

$$0=\frac{\delta f}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

從此得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}. \quad \left(\text{但 } \frac{\delta f}{\delta y}\neq 0\right).$$

$\left(\frac{\delta f}{\delta y}=0\right.$。則 $\frac{\delta f}{\delta x}=0$。此種形狀、詳論於第六章不定形$\Big)$。

欲得 $\frac{d^2y}{dx^2}$、則

從 $\quad f=0.\quad$ 得 $\quad \frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$

又從 $\quad \frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\;\frac{dy}{dx}=0.$

得 $$\frac{\delta}{\delta x}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}\right\}+\frac{\delta}{\delta y}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}\right\}\frac{dy}{dx}=0.$$

即 $$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\delta f}{\delta y}\;\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\delta f}{\delta x\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

代入 $\frac{dy}{dx}$ 之值。得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2-2\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\cdot\frac{\delta f}{\delta x}\cdot\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2}{\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^3}$$

第三次以上之導來函數。亦可以同法推定。

(II) 二自變數 x, y 之陰函數 z 為

$$f(x, y, z)=0 \quad \text{之形。}$$

此可與(I)同樣。考得 x, y, z 之函數(實常為0)。

令 z 為 x, y 之函數。則

$$\frac{\delta f}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\;\frac{\delta z}{\delta x}=0,$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\;\frac{\delta y}{\delta y}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta y}=0.$$

然 $\frac{\delta x}{\delta x}=1, \frac{\delta y}{\delta y}=1$。而 x, y 互爲無關係之變化。

$$\frac{\delta x}{\delta y}=0, \quad \frac{\delta y}{\delta x}=0.$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}=0,$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta f}{\delta z}\,\frac{\delta z}{\delta y}=0.$$

故令 $\frac{\delta f}{\delta z}\neq 0$. 則

$$\frac{\delta z}{\delta x}=-\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta z}}, \quad \frac{\delta z}{\delta y}=-\frac{\frac{\delta f}{\delta y}}{\frac{\delta f}{\delta z}}.$$

從此可求得第二次導來函數。爲

$$\frac{\delta}{\delta x}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}\right\}+\frac{\delta}{\delta z}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}\right\}\frac{\delta z}{\delta x}=0,$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta x}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}\right\}+\frac{\delta}{\delta z}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}\right\}\frac{\delta z}{\delta y}=0,$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\left\{\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta y}\right\}+\frac{\delta}{\delta z}\left\{\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta y}\right\}\frac{\delta z}{\delta y}=0.$$

(II) 單一自變數 x 之二個函數 u, v。其聯立方程式爲

$$\phi(u, v, x)=0, \qquad \psi(u, v, x)=0.$$

ϕ, ψ 可作三個變數之函數看。試求其微分。則

$$\frac{\delta\phi}{\delta u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\delta\phi}{\delta v}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\delta\phi}{\delta x}=0,$$

$$\frac{\delta\psi}{\delta u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\delta\psi}{\delta v}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\delta\psi}{\delta x}=0.$$

解之。則

$$\frac{du}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\delta\varphi}{\delta x}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta v}\\ \frac{\delta\psi}{\delta x}\ \frac{\delta\psi}{\delta v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v}\\ \frac{\delta\psi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v}\end{vmatrix}},\qquad \frac{dv}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\delta\varphi}{\delta u}\ \frac{\delta\varphi}{\delta x}\\ \frac{\delta\psi}{\delta u}\ \frac{\delta\psi}{\delta x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\delta\varphi}{\delta u}\ \frac{\delta\varphi}{\delta v}\\ \frac{\delta\psi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v}\end{vmatrix}}.$$

但 $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ 之成立。必須

$$\begin{vmatrix}\frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta v}\\ \frac{\delta\psi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

試置換兩方程式。以代上記聯立方程式之 φ, ψ。則可得第二次導來函數。與前相同。

〔例〕 1. 從 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0$. 以求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

(解) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$. $\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

試再求微分。則

$$-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^{-\frac{1}{3}}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

$$\therefore\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x^{-\frac{4}{3}}+y^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{3y^{-\frac{1}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}.$$

(注意) 從 (I) 所得之公式。以求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 亦可。

〔例〕 2. 從 $ax^2+by^2=c$. 以求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax}{by}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{ac}{b^2y^3}.$$

〔例〕 3. 從 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 求 $\frac{\delta z}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta y}$.

(解) $$\frac{2x}{a^2}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}=0. \qquad \therefore \quad \frac{\delta z}{\delta x}=-\frac{c^2x}{a^2z}.$$

$$\frac{2y}{b^2}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{\delta z}{\delta y}=0. \qquad \therefore \quad \frac{\delta z}{\delta y}=-\frac{c^2y}{b^2z}.$$

〔例〕 4. 從 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=2ax$.

求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}$.

(解) $$2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0.$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=2a.$$

相減。得

$$2z\frac{dz}{dx}=-2a. \qquad \therefore \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{a}{z}.$$

又 $$2y\frac{dy}{dx}=2a-2x. \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{a-x}{y}.$$

更各求其微分。則

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+z\frac{d^2z}{dx^2}=0. \qquad \therefore \quad \frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{a^2}{z^3}.$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}=-1. \qquad \therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a^2}{y^3}.$$

9. 自變數之變換。

先於有單一自變數 x 之函數 $y=f(x)$。從 $x=\phi(t)$ 之 x。與自變數 t 變換。則以 y 爲 t 之函數。而

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\phi'(t)\frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{1}{\phi'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2x}{dt^2}=\{\phi'(t)\}^2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\phi''(t)}{\phi'(t)}\,\frac{dy}{dt}.$$

$$\therefore\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{dx}{dt}\,\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{\phi'(t)\dfrac{d^2y}{dt^2}-\phi''(t)\dfrac{dy}{dx}}{\{\phi'(t)\}^3}.$$

等等。

知 $y=f\{\phi(t)\}$ 之情形。則 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ 亦爲已知之函數。

〔例〕 1. 於 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 而令 $x=a\sin\theta$. 則與此置換。而得

$$y=b\cos\theta.$$

$$\therefore\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{-b\sin\theta}{a\cos\theta}=-\frac{b}{a}\tan\theta.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a\cos\theta(-b\cos\theta)-(-a\sin\theta)\left(-\dfrac{b}{a}\tan\theta\right)}{(a\cos\theta)^3}$$

$$=-\frac{b(a\cos^3\theta+\sin^2\theta)}{a^3\cos^4\theta}.$$

〔例〕 2. 於 $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{y}{1-x^2}=0$. 而令

$x=\cos t$. 則

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin t\frac{d^2y}{dt^2}-\cos t\frac{dy}{dt}}{\sin^3 t}.$$

試將此而置換之。則可得簡單之形。爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0.$$

〔例〕 3. 於 $y=f(x)$. 而令 $x=\phi(y)$. 則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dy}}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

等等。

次於二個自變數 x, y 之函數 $z=f(x, y)$

而 $x=\phi(\xi, \eta)$, $y=\psi(\xi, \eta)$.

從 x, y 變換新自變數 ξ, η。則

$$\frac{\delta z}{\delta\xi}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta\xi}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta\xi}=\phi'_\xi\frac{\delta z}{\delta x}+\psi'_\xi\frac{\delta z}{\delta y},$$

$$\frac{\delta z}{\delta\eta}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta\eta}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta\eta}=\phi'_\eta\frac{\delta z}{\delta x}+\psi'_\eta\frac{\delta z}{\delta y}.$$

解之。

$$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\delta z}{\delta\xi}\psi'_\xi\\ \frac{\delta z}{\delta\eta}\psi'_\eta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\phi'_\xi\cdot\psi'_\xi\\ \phi'_\eta\cdot\psi'_\eta\end{vmatrix}},\qquad \frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\begin{vmatrix}\phi'_\xi\frac{\delta z}{\delta\xi}\\ \phi'_\eta\frac{\delta z}{\delta\eta}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\phi'_\xi\cdot\psi'_\xi\\ \phi'_\eta\cdot\psi'_\eta\end{vmatrix}}。$$

更欲得$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}, \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$。則不可不解上之聯立方程式之微分

〔例〕 1. 於$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$ 而x, y爲自變數。令

$$x=a\,co\;\phi\,sin\,\theta,$$

$$y=b\,cos\,\phi\,cos\,\theta.$$

則與此置換。而得

$$z=c\,sin\,\phi.$$

故 $$\frac{\delta z}{\delta\phi}=c\,cos\,\phi,\qquad \frac{\delta z}{\delta\theta}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\begin{vmatrix}c\,cos\,\phi & -b\,sin\,\phi\,cos\,\theta\\ 0 & -b\,cos\,\phi\,sin\,\theta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-a\,sin\,\phi\,sin\,\theta & -b\,sin\,\phi\,cos\,\theta\\ a\,cos\,\phi\,cos\,\theta & -b\,cos\,\phi\,sin\,\theta\end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{c}{a}cos\,\phi.$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{\begin{vmatrix}-a\,sin\,\phi\,sin\,\theta & c\,cos\,\phi\\ a\,cos\,\phi\,cos\,\theta & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-a\,sin\,\phi\,sin\,\theta & -b\,sin\,\phi\,cos\,\theta\\ a\,cos\,\phi\,cos\,\theta & -b\,cos\,\phi\,sin\,\theta\end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{c}{b}cos\,\phi\,cot\,\theta.$$

〔例〕 2. 於 $R=1+\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2$。而自變數 x, y 爲

$$x=r\cos\phi,\qquad y=r\sin\phi.$$

從此變換 r, ϕ。則

$$\frac{\delta z}{\delta r}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta r}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta r}$$

$$=\frac{\delta z}{\delta x}\cos\phi+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta r},$$

$$\frac{\delta z}{\delta\phi}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta\phi}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta\phi}$$

$$=-\frac{\delta z}{\delta x}r\sin\phi+\frac{\delta z}{\delta y}r\cos\phi.$$

此二聯立方程式。後者以 r 約之。各乘平方相加。則

$$\left(\frac{\delta z}{\delta r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta z}{\delta\phi}\right)^2=\left(\frac{\delta z}{\delta\phi}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2.$$

$$\therefore\qquad R=1+\left(\frac{\delta z}{\delta r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta z}{\delta\phi}\right)^2.$$

10. 自變數及函數之變換。

先於 $y=f(x)$ 之 x, y 爲

$$x=\phi(u, v),\qquad y=\psi(u, v).$$

其自變數 u 與函數 v 變換。而 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots,$ 以表 $u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2},$ ......, 之項。

以y爲x之函數。而x爲u之函數。則

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du},$$

$$\frac{d^2y}{du^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{du^2}.$$

....

然 $$\frac{dx}{du}=\frac{\delta\phi}{\delta u}+\frac{\delta\phi}{\delta u}\cdot\frac{dv}{du}=\phi'_u+\phi'_v\frac{dv}{du}.$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{\delta\psi}{\delta u}+\frac{\delta\psi}{\delta v}\cdot\frac{dv}{du}=\psi'_u+\psi'_v\frac{dv}{du},$$

$$\frac{d^2x}{du^2}=\phi''_{uu}+2\phi''_{uv}\frac{dv}{du}+\phi''_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\phi'_v\frac{d^2v}{du^2},$$

$$\frac{d^2y}{du^2}=\psi''_{uu}+2\psi''_{vv}\frac{dv}{du}+\psi''_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\psi'_v\frac{d^2v}{du^2}.$$

....

以此置換於前者。而

$$\frac{dy}{du}=\frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}=\frac{\psi'_u+\psi'_v\frac{dv}{du}}{\phi'_u+\phi'_v\frac{dv}{du}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\phi'_u+\phi'_v\frac{dv}{du}\right)\left(\psi''_{uu}+\dots\right)-\left(\psi'_u+\psi'_v\frac{dv}{du}\right)\left(\phi''_{uu}+\dots\right)}{\left(\phi'_u+\phi'_v\frac{dv}{du}\right)^3}.$$

....

〔例〕 於 $\rho=\dfrac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$. 而令

$$x=r\cos\phi,\qquad y=r\sin\phi.$$

令 r 爲 ϕ 之函數。則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\phi}}{\dfrac{dx}{d\phi}}=\frac{r\cos\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\sin\phi}{-r\sin\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(-r\sin\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi\right)\left(-r\sin\phi+2\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi+\dfrac{d^2r}{d\phi^2}\sin\phi\right)}{\left(-r\sin\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi\right)^3}$$

$$-\frac{\left(-r\cos\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\sin\phi\right)\left(-r\cos\phi-2\dfrac{dr}{d\phi}\sin\phi+\dfrac{d^2r}{d\phi^2}\cos\phi\right)}{\left(-r\sin\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi\right)^3}$$

$$=\frac{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\phi}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\phi^2}}{\left(-r\sin\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi\right)}.$$

$$\therefore\quad \rho=\frac{\left\{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\phi}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\phi}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\phi^2}}.$$

(注意) 變數之變換其主要者。爲軸式坐標與極式坐標之變換。又適用於軸式坐標軸之移動等。至其適用之例。於曲線論最多。

第五章 級數

1. 常數項之數級。

某規則之下。作無限之實數。如

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3,$$

成級數。如

$$u_1+u_2+u_3+\ldots \tag{1}$$

是謂無限級數 (*Infinite series*)。

表此級數。自最初之數至 n 項之和。爲

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n.$$

而

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S.$$

其有限確定值 S 能存在。則級數 (1) 稱收斂 (*Convergent*)。S 謂此級數之值。

又 $Lim\, S_n$ 無有限確定之值。則稱發散 (*Divergent*)。

〔例〕 1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}},$$

$$Lim\, S_n=2.$$

故上之級數爲收斂。

〔例〕 2. $+1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$

令 $u_1=1,\quad u_2=\frac{1}{2},\quad u_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\quad \dots$

$$u_n=\frac{1}{2^{m-2}+1}+\frac{1}{2^{m-2}+2}+\dots+\frac{1}{2^{m-1}}.$$

則
$$S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{m-2}+1}+\frac{1}{2^{m-2}+2}+\dots+\frac{1}{2^{m-1}}\right).$$
$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2},$$
$$>1+\frac{n-1}{2}.$$

$\therefore\qquad Lim\, S_n=+\infty$。

故上之級數爲發散。

〔例〕 3. $1-1+1-1+1-\dots$

此級數。在S_n爲1又爲0之內。n雖增。仍爲不定數。是亦發散也。

2. 正項之級數。

關於各項爲正之級數。其爲收斂或發散。可直從其定義推定之。玆列舉其簡單之性質如次。

(1) 收斂級數之項之值。僅於某項以下無限減小。

何則。

$$u_n=S_n-S_{n-1}.$$

$$\therefore \qquad Lim\, u_n=Lim\, S_n-Lim\, S_{n-1}=0.$$

又$Lim\, u_n$不歸着於0。則其級數非收斂。

(2) 於收斂級數之初項之前。新附加有限個項。或削減收斂級數最初有限個之項。依然爲收斂級數。

何則。令

$$u_1+u_2+u_3+\ldots=S.$$

爲有限確定值。則

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_m+u_1+u_2+u_3+\ldots=v_1+v_2+\ldots+v_m+S,$$

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\ldots=S-(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_m).$$

其任何亦爲有限確定。

(3) 各項爲正之級數。必爲收斂。否則限於$+\infty$之發散。

何則。

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n.$$

此僅從n之增而增大。不能以不定或$-\infty$相加故也。

(4) 從一個收斂級數。取去其項。作成級數。亦爲收斂。

何則。後所作之級數。從最初之數而至n項之和。令爲S'_n。則

$$S'_n<S.$$

$$\therefore \qquad Lim\, S'_n\leqq S.$$

〔例〕 令$1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}+\ldots$ 爲收斂。則

$$1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots$$

亦爲收斂。

(5) 有級數。比收歛級數相應對之各項小。則此級數亦爲收歛。

何則。

$$u_1+u_2+u_3+\dots=S.$$

爲收歛。

而 $v_1+v_2+v_3+\dots$ 之級數。

令 $v_1<u_1,\quad v_2<u_2,\quad v_3<_3,\quad \dots$

則 $S_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n,$

$$S'_n=v_1+v_2+v_3+\dots+v_n.$$

常爲 $S'_n<S_n.$

$\therefore\quad Lim\, S'_n<Lim\, S_n=S.$

〔例〕 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\dots$

其極限值收歛爲2。則與此相應對之各項比較更小之級數。

如 $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$

亦爲收歛。

3. 正項級數收歛之查定。

I. <u>級數 $u_1+u_2+u_3+\dots$</u> 則因

$$Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}<1,\quad 或\quad >1.$$

<u>從而爲收歛或發散。</u>

(證明)

令 $Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=h<1$. 則

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<h'<1,\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<h',\quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}<h',\quad \dots$$

$$u_{n+1}<u_nh',$$

$$u_{n+2}<u_{n+1}h'<u_nh'^2,$$

$$u_{n+3}<u_{n+2}h'<u_nh'^3.$$

$$\dots\dots \qquad \dots\dots$$

而 $u_1+u_2+u_3+\dots<u_1+u_2+u_3+\dots+u_{n-1}+u_n(1+h'+h'^2+\dots)$.

故 $u_1+u_2+u_3+\dots$ 爲收斂。

又 $Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$。則某項以下。從項數之增。項之值亦增大。其爲發散明甚。

(注意) $Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$。則以上之查定不適用。當依據〔III〕以查定之。

II. 級數 $u_1+u_2+u_3+\dots$ 則因

$$Lim\sqrt[n]{u_n}<1,\quad 或\quad \geqq 1.$$

從而爲收斂或發散。

(證明)

令 $Lim\sqrt[n]{u_n}=h<1$.

則某項以下。爲

$$\sqrt[n]{u_n}<h'<1,\quad \sqrt[n+1]{u_{n+1}}<h',\quad \sqrt[n+2]{u_{n+1}}<h',\quad \dots$$

$\therefore \qquad u_n < h'^n, \quad u_{n+1} < h'^{n+1}, \quad u_{n+2} < h'^{n+2}, \quad \ldots$

$\therefore \qquad u_1+u_2+u_3+\ldots < u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+h'^n(1+h'+h'^2+\ldots).$

故 $\qquad u_1+u_2+u_3+\ldots$ 爲收斂。

又 $Lim\sqrt[n]{u_n} \geqq 1$。則 $Lim\, u_n$ 不能歸着於0。故不能爲收斂。

III. 級數 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 則因

$$Lim\, u\left(1-\frac{u_{u+1}}{u_n}\right)>0, \text{ 或 } \leqq 1.$$

從而爲收斂或發散。

(證明) 以 $\quad u_1+u_2+u_3+\ldots$ 與

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots \text{ 比較。}$$

求適於下式之 k 之値。

$$Lim\, n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=Lim\, n\left(1-\frac{n^k}{(n+1)^k}\right).$$

於此右邊。令 $n=\frac{1}{h}$。則

$$\underset{h=\infty}{Lim}\, n\left\{1-\frac{1}{(1+h)^k}\right\}=\underset{h=\infty}{Lim}\,\frac{1}{(1+h)^k}\left\{\frac{(1+h)^k-1}{h}\right\}$$

$$=\underset{h=\infty}{Lim}\,\frac{1}{(1+h)^k}\left\{k+\frac{k(k-1)}{2!}h+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}h^2+\ldots\right\}$$

$$=k.$$

然 $$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots=\frac{1}{1^k}+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}\right)+\ldots$$

$$<\frac{1}{1^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{4^{k-1}}+\frac{1}{8^{k-1}}+\ldots$$

故　$\dfrac{1}{2^{k-1}}<1$, 即　$2^{k-1}>1$, 即　$k>1$.

則　$\dfrac{1}{1^k}+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{3^k}+\ldots$ 爲收斂。

又　$k\leqq 1$. 則

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots\geqq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$$

故爲發散。

故　$$Lim\, n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>1, \text{ 或 } \leqq 1.$$

從而$u_1+u_2+u_3+\ldots$爲收斂或發散。

〔例〕 1. $1+\dfrac{p}{1}x+\dfrac{p(p+1)}{1\cdot 2}x^2+\dfrac{p(p+1)(p+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots\quad(x>0)$

於此級數爲

$$u_n=\frac{p(p+1)\ldots(p+n-2)}{(n-1)!}x^{n-1},$$

$$u_{n+1}=\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}x^n.$$

$$\therefore\quad Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=Lim\frac{p+n-1}{n}x=x.$$

故$x<1$爲收斂。$x>1$爲發散。

又$x=1$。則級數爲

$$1+\frac{p}{1}+\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}+\frac{p(p+1)(p+2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$

$$Lim\, n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=Lim\, n\left(1-\frac{p+n-1}{n}\right)=1-p.$$

故　$1-p>1$. 即　$p<0$ 爲收斂。

　　$1-p<1$. 即　$p>0$ 爲發散。

4. 正負項混淆之級數。

令正項及負項混淆之級數爲

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

則此級數。視 $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$ 之收斂而收斂。

何則。試僅取出 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 之中之正項。爲

$$v_1+v_2+v_3+\ldots$$

再僅集其負項。爲

$$-w_1-w_2-w_3-\ldots$$

則以此兩者。爲 $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$ 之一部分[第2節(4)]任何亦爲收斂。

今代其值爲 S', $-S''$.

令
$$\begin{aligned} S_n &= u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n \\ &= v_1+v_2+v_3+\ldots+v_m-w_1-w_2-w_3-\ldots-w_l \\ &= S'_m-S''_l. \end{aligned}$$

則
$$Lim\,S_n=Lim\,S'_m-Lim\,S''_l=S'-S''.$$

各項絕對值之級數 $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$ 爲收斂。則級數 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 爲絕對的收斂 (*Absolutely convergent*)。又名無條件之收斂 (*Unconditional convergent*)。

絕對的收斂之級數。其項之順次。任何換轉。而其值常一定爲 $S'-S''$。

然各項絕對值之級數 $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$ 雖爲發散。而有時 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 爲收斂。

如此級數。謂之附條件之收斂 (*Conditional convergence*)。

附條件收斂之級數。由其項之排法。可使占得任何之值。

何則。附條件收斂之級數。必

$$v_1+v_2+v_3+\ldots=+\infty,$$

$$-w_1-w_2-w_3-\ldots=-\infty.$$

蓋 $v_1+v_2+v_3+\ldots$ 與 $-w_1-w_2-w_3-\ldots$ 皆爲有限。故亦爲確定值。從而 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 亦當收斂。若僅其一方面爲無限大。則 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 亦當爲無限大故也。

然轉換 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 之順序。而得任意之正值。令等於 A。則先僅取正項。而

$$v_1+v_2+\ldots+v_{p-1}\leqq A<v_1+v_2+\ldots+v_{p-1}+v_p.$$

次附加負項。

$$v_1+v_2+\ldots+v_p-w_1-w_2-\ldots-w_{q-1}\geqq A,$$

$$A>v_1+v_2+\ldots+v_p-w_1-w_2-\ldots-w_{q-1}-w_q.$$

又次附加正項。而

$$v_1+v_2+\ldots+v_p-w_1-\ldots-w_q+v_{p+1}+\ldots+v_{r-1}\leqq A,$$

$$A<v_1+\ldots+v_p-w_1-\ldots-w_q+v_{p+1}+\ldots+v_r.$$

如此行無限手續。卽得。

又若欲令任意之負值等於 B。則先取負項可也。

〔例〕 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\ldots$ 爲附條件之收斂級數。而儘此順序。可得等於 $\log 2$ 之證明。（見後章）

然欲令此級數等於1·5。則令

$$1\cdot5=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{4}$$
$$+\frac{1}{17}+\dots+\frac{1}{25}-\frac{1}{6}+\frac{1}{27}+\dots$$

足矣。

5. 冪級數。

x之冪指數。爲正整數排列之順序。添以常數係數$a_0, a_1, a_2, \dots$。如此作成無限級數。如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$$

是謂x之冪級數(*Power series*)。

此級數爲

$$Lim\left|\frac{a_nx^n}{a_{n-1}x^{n+1}}\right|=Lim\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}x\right|<1.$$

是謂絕對的收斂。然今令

$$Lim\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|=g.$$

則關於x爲

$$|x|<g.\quad 卽\quad -g<x<+g.$$

此級數爲絕對的收斂。

此 $-g<x<+g$ 之 x 之區域。稱冪級數之收斂域(*Convergency-interval*)。

(注意) 於$x=+g$與$x=-g$之點。而冪級數爲收斂與否。尚未一定。要從各級數特別研究之。

一個之冪級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots.$$

與其各項導來函數作成之冪級數

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots.$$

其收斂域相等。

何則。就後者言之。

$$Lim\left|\frac{(n+1)a_{n+1}x^n}{n\,a_n\,x^{n-1}}\right|=Lim\left|\frac{n+1}{n}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right|$$

$$=Lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right|.$$

故 $$|x|<Lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=g.$$

此比1小。故云。

6. 函數之展開。

函數$f(x)$。從其第一次至第n次導來函數$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$。均無論如何。於$(\alpha, \beta)$區域內爲一價。且連續。今將作得次之函數。

$$F(x)=f(x)+\frac{\beta-x}{1!}f'(x)+\frac{(\beta-x)^2}{2!}f''(x)+\ldots$$

$$+\frac{(\beta-x)^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x).$$

然$F(x)$。亦於(α, β)區域內爲一價連續。特於$x=\alpha$, $x=\beta$。則

$$F(\alpha)=f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\ldots$$

$$+\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)$$

$$F(\beta)=f(\beta).$$

而 $$F'(x)=\frac{(\beta-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x).$$

又從平均值之定理(第二章第14節)。則

$$F(\beta)-F(a)=(\beta-a)F'\{a+\theta(\beta-a)\}. \qquad 0<\theta<1.$$

令此與前值置換。則

$$f(\beta)=f(a)+\frac{\beta-a}{1!}f'(a)+\frac{(\beta-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots$$
$$+\frac{(\beta-a)^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n.$$

而 $$R_n=(\beta-a)^n\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}\{a+\theta(\beta-a)\}.$$

此關係之右邊。為關於 $(\beta-a)$ 之冪級數。自其最初項至第 n 項加以 R_n 者也。如是表函數之值為冪級數。稱函數之展開 (*Expansion*)。其 R_n。稱級數 n 項之剩餘 (*Remainder or Residue*)。

上記之剩餘式。由可西氏發明。故稱可西氏之剩餘式 (*Cauchy's Remainder-form*)。

又 $$f(\beta)=f(a)+\frac{\beta-a}{1!}f'(a)+\frac{(\beta-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots$$
$$+\frac{(\beta-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(\beta-a)^n}{(n-1)!}C.$$

考 $$\phi(x)=f(\beta)-f(x)-\frac{\beta-x}{1!}f'(x)-\frac{(\beta-x)^2}{2!}f''(x)-\ldots$$
$$-\frac{(\beta-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)-\frac{(\beta-x)^n}{(n-1)!}C.$$

則 $$\phi(a)=0,$$
$$\phi(\beta)=0.$$

且 $$\phi'(x)=-\frac{(\beta-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)+n\frac{(\beta-x)^{n-1}}{(n-1)!}C.$$

故從第二章第14節。則可爲$\phi(x_0)=0$之x_0必可存在。今令

$$x_0=a+\theta'(\beta-a). \qquad 0<\theta'<1.$$

則 $$0=-\frac{(\beta-a)^{n-1}(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}\{a+\theta'(\beta-a)\}$$

$$+n\frac{(\beta-a)^{n-1}(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}C$$

∴ $$C=\frac{1}{n}f^{(n)}\{a+\theta'(\beta-a)\}.$$

從此C換置$f(\beta)$之展開式。則冪級數n項之剩餘。爲

$$R'_n=\frac{(\beta-a)^n}{n!}f^{(n)}\{a+\theta'(\beta-a)\}. \qquad 0<\theta'<1.$$

此稱拉果蘭諸氏之剩餘式(*Lagrange's Remainder-form*)。

(注意) 二剩餘式之θ,θ'。均爲在0與1之間之數。固勿具論。然一般不能求得者也。

7. 戴勞之定理。

於前節所得之展開式。而令

$$a=x, \qquad \beta=x+h.$$

則得次之定理。

定理. 函數$f(x)$設自其第一次至第n次之導來函數。均無論如何。於$(x, x+h)$區域內爲一價連續。則

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\dots$$

$$+\frac{h^n}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n.$$

令 $$R_n=h^n\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\theta h). \qquad 0<\theta<1.$$

又 $$R'_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta' h). \qquad 0<\theta'<1.$$

此稱戴勞氏之定理 (*Taylor's Theorem*)。

戴勞之展開式中、而令 $\lim\limits_{n=\infty} R_n=0$。則極限值得 $f(x+h)$ 之無限級數。

定理. 函數 $f(x)$ 及其所至之導來函數。於 $(x, x+h)$ 區域內。任何亦爲一價連續。且 $\lim R_n=0$。則得收斂級數如次。

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots$$

$f(x)$ 之導來函數。自第 $(n+1)$ 次以上悉爲0。則爲有限級數。如

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

8. 馬格老臨之定理。

於第6節所得之展開式。

令 $$\alpha=0, \qquad \beta=x.$$

則得次之定理。

定理. 函數 $f(x)$ 自其第一次至第 n 次之導來函數。均無論何如。其於 $(0, x)$ 區域內爲一價連續。則

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n.$$

令 $$R_n=x^n\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta x). \qquad 0<\theta<1.$$

又 $$R'_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta' x). \qquad 0<\theta'<1.$$

此稱馬格老臨之定理(*Maclaurin's Theorem*)。

定理. 函數 $f(x)$ 及其所至之導來函數。於 $(0, x)$ 區域內。任何亦爲一價連續。且 $Lim\, R_n=0$。則得收斂級數如次。

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots$$

9. 指數函數之展開。

$f(x)=e^x$. 則

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots=f^{(n+1)}(x)=e^x.$$

故 $$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\ldots=f^{(n+1)}(0)=1.$$

故依馬氏定理。則

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R'_n.$$

此 $$R'_n=\frac{x^n}{n!}e^{\theta' x}.$$

然 $m\leqq|x|<m+1, m+1<n$ 之數。m n 而

令 $$R'_n=\frac{x^m}{m!}e^{\theta' x}\cdot\frac{x}{m+1}\cdot\frac{x}{m+2}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{n}.$$

則 $$1>\frac{|x|}{m+1}>\frac{|x|}{m+2}>\ldots>\frac{|x|}{n}.$$

而 $$\left|\frac{x}{m+1}\cdot\frac{x}{m+2}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{n}\right|<\left|\frac{x}{m+1}\right|^{n-m}$$

$\therefore$ $$Lim\left|R'_n\right|<\left|\frac{x^m}{m!}e^{\theta' x}\right|Lim\left|\frac{x}{m+1}\right|^{n-m}=0.$$

是x爲任何有限值。亦適於用。故

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots,\qquad -\infty<x<+\infty.$$

〔例〕 a^x爲關於x之冪級數。試展開之。

答 $$a^x=1+\frac{x\log a}{1!}+\frac{x^2(\log a)^2}{2!}+\frac{x^3(\log a)^3}{3!}+\dots,$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

10. 對數函數之展開。

$f(x)=\log x$。以此不可應用馬氏定理。

而令$f(x)=\log(1+x)$. 則

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=+\frac{1!}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=-\frac{2!}{(1+x)^3},$$

$$\dots,\quad f^{(n-1)}(x)=(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}.$$

而$x>-1$爲一價連續。

故 $$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=-1!,$$

$$f'''(0)=+2!,\quad \dots,\quad f^{(n-1)}(0)=(-1)^{n-2}(n-2)!.$$

而拉果闌諸之剩餘式。爲

$$R'_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^n}{(1+\theta'x)^n}.$$

而$0<x<1$.

故 $$\frac{x}{1+\theta'x}<1.\qquad \therefore\qquad Lim\left(\frac{x}{1+\theta'x}\right)^n=0.$$

$$Lim\ R'_n=0.$$

又可西氏之剩餘式。爲

$$R_n=\frac{x}{1+\theta x}\left(\frac{-x+\theta x}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

而 $-1<x<0.$

故 $$\frac{-x+\theta x}{1+\theta x}<1.$$

$$\therefore \quad Lim\left(\frac{-x+\theta x}{1+\theta x}\right)^{n-1}=0. \qquad \therefore \quad Lim\, R_n=0.$$

然 $x>1$。則得冪級數爲發散。

簡之。則

$$log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots, \qquad -1<x<+1.$$

特 $x=1$. 則得

$$log\,2=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

爲附條件之收斂級數。

〔例〕 1. 試展開 $log\,\frac{1+x}{1-x}$.

(解) $$log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots, \qquad -1<x<+1.$$

以 $-x$ 代其 x。則得

$$log(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots, \qquad -1<x<+1.$$

相減。

則 $$log\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right), \qquad -1<x<+1.$$

〔例〕 2. 已知 $log\,n\,(n>0)$。試作 $log(n+1)$ 之公式。

(解) 於對數級數。而令 $x=\frac{1}{n}$。則

$$\log\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3}-\ldots$$

$$\therefore\qquad \log(n+1)=\log n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3}-\ldots\right),$$

$$1<n<+\infty.$$

又於例1之級數。而令 $x=\frac{1}{2n+1}$。則

$$\log\frac{n+1}{n}=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3}+\ldots\right\},$$

$$\log(n+1)=\log n+2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3}+\ldots\right\},$$

$$0<n<+\infty.$$

(注意) 從此等公式。可作得逐次為整數順序之自然對數。

11. 三角函數之展開。

令 $f(x)=\sin x$. 則

$$f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x)=\sin x,\quad \ldots$$

此與 $f(x)$ 無論如何。其至 x 之有限值為一價連續。而

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(0)=0,\quad \ldots$$

是以生一個為0之項。

今令級數 $2n$ 項之剩餘式。為

$$R'_{2n}=\frac{x^{2n}}{(2n)!}f^{(n)}(\theta' x).$$

$\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 爲x任何之有限值。於極限爲0。已於第9節證明。

故 $\qquad Lim\, R_n=0.$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots, \qquad -\infty<x<+\infty.$$

同樣。得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots, \qquad -\infty<x<+\infty.$$

〔例〕 1. 試展開 $\sin x\cos x$.

(解) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2x}{1!}-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+\dots\right\}$$

$$=\frac{x}{1!}-\frac{2^2x^3}{3!}+\frac{2^4x^5}{5!}-\dots, \qquad -\infty<x<+\infty.$$

〔例〕 2. 試展開 $(\sin x)^2$.

答 $\qquad \frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\dots, \qquad -\infty<x<+\infty.$

12. 二項式之展開。

令$f(x)=(1+x)^m$ (m 爲正或負之有理數)。

則 $\qquad f'(x)=m(1+x)^{m-1},\ \ f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},\ \ \dots,$

$$f^{(n-1)}(x)=m(m-1)\dots(m-n+2)(1+x)^{m-n+1}.$$

而 $\qquad f(0)=1,\ \ f'(0)=m,\ \ f''(0)=m(m-1),\ \ \dots,$

$$f^{(n-1)}(0)=m(m-1)\dots(m-n+2).$$

令其剩餘式。爲

$$R_n=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n}\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}x^n$$

$$=mx\frac{(1+\theta x)^m}{1-\theta}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{m-n+1}{n-1},$$

則 $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ 與 $\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{m-n+1}{n-1}$. 爲

$-1\leqq x\leqq 0$. 於極限爲0.

∴ $Lim\, R_n=0.$

又 $$R'_n=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+\theta' x)^{m-n}\frac{x^n}{n!}$$

$$=(1+\theta' x)^m\left(\frac{x}{1+\theta' x}\right)^n\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{m-n+1}{n}.$$

則 $0\leqq x\leqq 1$. 此與前同樣。而得

$Lim\, R'_n=0.$

故 $$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$-1\leqq x\leqq +1.$$

13. 用未定係數之展開法。

$f'(x)$ 爲展開函數 $f(x)$ 之所得。於某區域內之羃級數。爲

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}+R(x)$$

試假定展開所得之級數。爲

$$f'(x)=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+(n-1)A_{n-1}x^{n-2}+R'(x).$$

用别法展開所得者。爲

$$f'(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_{n-1}x^{n-2}+R_{n-1}.$$

比較其係數。可得決定 $A_0, A_1, A_2, \ldots$

此稱未定係數之法 (*Method of undetermined coefficients*)。

今令 $f(x)=tan^{-1}x$

$$=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{2n-1}x^{2n-1}+R(x).$$

則 $$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

此羃級數由除法得來。

然以 $$=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+(2n-1)A_{2n-1}x^{2n-2}+R(x).$$

而 $A_0=tan^{-1}0-R(0)=-R(0).$

$A_1=1.$

$2A_2=0.\qquad\therefore\quad A_2=0$

$3A_3=-1.\qquad\therefore\quad A_3=-\frac{1}{3}.$

$\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots$

$(2n-2)A_{2n-2}=0.\qquad\therefore\quad A_{2n-2}=0.$

$(2n-1)A_{2n-1}=(-1)^{n-1}.\qquad\therefore\quad A_{2n-1}=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$

故 $$tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+R(x)-R(0$$

然從第二章第14節。則

$$R(x)-R(0)=x\,R'(\theta x)\qquad 0<\theta<1.$$

$$=(-1)^n\frac{\theta^{2n}\,x^{2n+1}}{1+(\theta x)^2}.$$

故令 $-1 \leqq x \leqq +1$. 則

$$Lim\{R(x)-R(0)\}=0.$$

即 $$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots,\qquad -1\leqq x\leqq +1.$$

〔例〕 由未定係數之法。證明次之級數。

$$\sin^{-1}x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots,$$

$$-1<x<+1.$$

(注意) 於 $\tan^{-1}x$ 之展開式。令 $x=1$。則得次之附條件收斂之級數。

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

是實据來本之計算 π 之公式。

然現今計算 π 之簡便級數如次。

令 $\tan\alpha=\frac{1}{5}$. 則從 $\tan 4\alpha=\frac{120}{119}$.

得 $$\tan\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan 4\alpha-1}{1+\tan 4\alpha}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}.$$

∴ $$4\alpha-\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

∴ $$\frac{\pi}{4}=4\alpha-\tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

又 $$\tan\alpha'=\frac{1}{10}.$$

則 $$\tan 2\alpha'=\frac{2\times\frac{1}{10}}{1-\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{20}{99}.$$

從 $\tan(2\alpha'-\alpha)=\dfrac{\dfrac{20}{99}-\dfrac{1}{5}}{1+\dfrac{20}{99}\times\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{515}.$

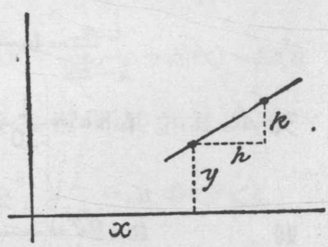
得 $2\alpha'-\alpha=\tan^{-1}\dfrac{1}{515}.$

令 $\alpha=2\alpha'-\tan^{-1}\dfrac{1}{515}=2\tan^{-1}\dfrac{1}{10}-\tan^{-1}\dfrac{1}{515}.$

則
$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&=8\tan^{-1}\frac{1}{10}-\tan^{-1}\frac{1}{239}-4\tan^{-1}\frac{1}{515}\\&=8\left\{\frac{1}{10}-\frac{1}{3\cdot10^3}+\frac{1}{3\cdot10^5}-\dots\right\}\\&\quad-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot239^3}+\dots\right\}\\&\quad-4\left\{\frac{1}{515}-\frac{1}{3\cdot515^3}+\dots\right\}\\&=0\cdot7853981\dots\end{aligned}$$

14. 二個自變數之函數之展開。

二個自變數 x, y 之函數爲 $f(x, y)$。而 $f(x+h, y+k)$ 爲關於 h, k 展開之冪級數。



今特強制其關係。如

$$h : k=a : b.$$

令 $\dfrac{h}{a}=\dfrac{k}{b}=\epsilon.$

則 $f(x+h, y+k)=f(x+a\epsilon, y+b\epsilon)=F(\epsilon).$

是爲單一自變數ϵ之函數。

適用馬氏定理。則

$$F(\epsilon)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}\epsilon+\frac{F''(0)}{2!}\epsilon^2+\ldots+\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\epsilon^{n-1}+R_n.$$

而 $F(0)=f(x,y)$.

$$F'(0)=\frac{\delta f}{\delta x}a+\frac{\delta f}{\delta y}b. \qquad \therefore \qquad \epsilon F'(0)=\frac{\delta f}{\delta x}h+\frac{\delta f}{\delta y}k.$$

$$F''(0)=\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}a^2+2\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}ab+\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}b^2$$

$$=\left(\frac{\delta}{\delta x}a+\frac{\delta}{\delta y}b\right)^2 f. \text{〔記號法〕}$$

$$\therefore \qquad \epsilon^2 F''(0)=\left(\frac{\delta}{\delta x}h+\frac{\delta}{\delta y}k\right)^2 f.$$

....

故
$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\delta}{\delta x}h+\frac{\delta}{\delta y}k\right)f(x,y)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{\delta x}h+\frac{\delta}{\delta y}k\right)^2 f(x,y)$$
$$+\ldots$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\delta}{\delta x}h+\frac{\delta}{\delta y}k\right)^{n-1} f(x,y)$$
$$+R_n.$$

令R_n爲拉果闌諸之剩餘式。則

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\delta}{\delta x}h+\frac{\delta}{\delta y}k\right)^n f(x+\theta h, y+\theta k).$$

此謂可西氏定理之擴張

令前式之x, y各爲0。而h, k代以x, y。則

$$
\begin{aligned}
f(x, y) = f(0,0) &+ \frac{1}{1!}\left(\frac{\delta}{\delta x}x + \frac{\delta}{\delta y}y\right) f(0,0) \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{\delta x}x + \frac{\delta}{\delta y}y\right)^2 f(0,0) \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\delta}{\delta x}x + \frac{\delta}{\delta y}y\right)^{n-1} f(0,0) \\
&+ R_n.
\end{aligned}
$$

令 $$R_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\delta}{\delta x}x + \frac{\delta}{\delta y}y\right)^n f(\theta x, \theta y).$$

是謂馬氏定理之擴張。

(注意1) 三個自變數之函數。全與此同樣。

例如
$$
\begin{aligned}
f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) &+ h\frac{\delta f}{\delta x} + k\frac{\delta f}{\delta y} + l\frac{\delta f}{\delta z} \\
&+ \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + k^2\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} + l^2\frac{\delta^2 f}{\delta z^2}\right) \\
&+ \left(2kl\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta z} + 2lh\frac{\delta^2 f}{\delta z\delta x} + 2hk\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right) \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

(注意2) 從本節之記號法。

例如等於 $\left(\frac{\delta}{\delta x}x + \frac{\delta}{\delta y}y\right)^2 f(0,0)$ 者。

爲 $\frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta x\delta y}, \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta y^2}$ 等。

示以$x=0, y=0$之值。各各乘$x^2, 2xy, y^2$等之和。

第六章 不定形

1. 不定形之狀態。

於函數$f(x)$。其x突然令爲某有限值a。或無限大∞。則有

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

等之形式。然於$x=a$或$x=\infty$之$\operatorname{Lim} f(x)$。有時爲有限值。

如$\frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{0}, \infty\times\infty$等。不必檢查其極限值。其無有限值明矣。

反之。取上記一列之形式。其爲有限值與否。應視其極限值。不依極限值。不能定之。由此稱不定形(*Indeterminate forms*)。

依級數之助。此等之極限值。任何亦可決定。

今將逐次說明之。

2. $\frac{0}{0}$之不定形。

先令 $x=a.$

使 $$f(x)=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}.$$

爲$\frac{0}{0}$之形。

然 $$\operatorname*{Lim}_{x=a} f(x)=\operatorname*{Lim}_{x=a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\operatorname*{Lim}_{h=0}\frac{\phi(a+h)}{\psi(a+h)}$$

$$=\operatorname*{Lim}_{h=0}\frac{\phi(a)+\phi'(a)h+\phi''(a)\frac{h^2}{2!}+\ldots+\phi^{(n)}(a+\theta h)\frac{h^n}{n!}}{\psi(a)+\psi'(a)h+\psi''(a)\frac{h^2}{2!}+\ldots+\psi^{(n)}(a+\theta' h)\frac{h^n}{n!}}.$$

以$\phi(a)=0, \psi(a)=0$. 而

$$=\operatorname*{Lim}_{h=0}\frac{\phi'(a)+\phi''(a)\frac{h}{2!}+\ldots+\phi^{(n)}(a+\theta h)\frac{h^{n-1}}{n!}}{\psi'(a)+\psi''(a)\frac{h}{2!}+\ldots+\psi^{(n)}(a+\theta' h)\frac{h^{n-1}}{n!}}.$$

令此處之$\phi'(a), \psi'(a)$。任何亦不爲0。則

$$\operatorname*{Lim}_{x=a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\phi'(a)}{\psi'(a)}.$$

而$\phi'(a), \psi'(a)$均不爲0。則此極限值爲有限。若一方爲0。則爲0或∞。

若$\phi'(a), \psi'(a)$。任何亦爲0。則

$$\operatorname*{Lim}_{x=a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\phi''(a)}{\psi''(a)}.$$

又$\phi''(a), \psi''(a)$皆爲0。則

$$=\frac{\phi'''(a)}{\psi'''(a)}.$$

等等。要之連續。

$$\operatorname*{Lim}_{x=a}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\operatorname*{Lim}_{x=a}\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\operatorname*{Lim}_{x=a}\frac{\phi''(x)}{\psi''(x)}=\ldots$$

使其分母子之變方脫却爲0之形。則可得極限值。

次令 $x=\infty$. 則從

$$f(x)=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}.$$

取其不定形$\frac{0}{0}$.

則 $$\lim_{x=\infty} f(x)=\lim_{x=\infty}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x=0}\frac{\phi\left(\frac{1}{x}\right)}{\psi\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x=0}\frac{-\frac{1}{x^2}\phi'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}\psi'\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x=0}\frac{\phi'\left(\frac{1}{x}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x=\infty}\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}.$$

以後同於x的有限值之例。

〔例〕 1. 求$\lim\limits_{x=0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

(解) $$\lim_{x=0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x=0}\frac{\sin x}{6x}$$

$$=\lim_{x=0}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

〔例〕 2. $x=1$時。$\dfrac{\log x}{x-1}$之極限值如何。 答 1.

〔例〕 3. 試求$\lim\limits_{x=0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$. 答 $\log\dfrac{a}{b}$.

3. $\frac{\infty}{\infty}$之不定形。

令x為某有限值或無限大。則

$$f(x)=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}.$$

爲$\frac{\infty}{\infty}$之形。故

$$Lim\ f(x)=Lim\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=Lim\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\phi(x)}}.$$

取此最後式。爲$\frac{0}{0}$之不定形。故

$$=Lim\frac{-\frac{\psi'(x)}{\{\psi(x)\}^2}}{-\frac{\phi'(x)}{\{\phi(x)\}^2}}=Lim\left\{\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right\}^2 Lim\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}$$

$$=\{Lim\ f(x)\}^2\ Lim\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}.$$

$$\therefore \qquad Lim\ f(x)=Lim\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=Lim\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}.$$

即與前節同樣。可從分母子之微分求得。

〔例〕 求$\underset{x=\infty}{Lim}\frac{e^x}{x^n}$. (但$n>0$).

(解) $$\underset{x=\infty}{Lim}\frac{e^x}{x^n}=Lim\frac{e^x}{nx^{n-1}}=Lim\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\cdots$$

此m爲正整數。令$m-1<n\leqq m$。則

$$=\underset{x=\infty}{Lim}\frac{e^x}{n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{n-m}}=\infty.$$

(注意) 取$0\times\infty$之不定形。則直從

$$\frac{0}{\frac{1}{\infty}} \quad 或 \quad \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$$

之形。依前節或本節。可求得其極限值。

例如 $$\underset{x=\infty}{Lim}\ 2^x \sin\frac{a}{2^x}=\underset{x=\infty}{Lim}\frac{\sin\frac{a}{2^x}}{\frac{1}{2^x}}=a.$$

4. $\infty-\infty$之不定形。

令x爲有限值或無限大。取

$$f(x)=\phi(x)-\psi(x),$$

爲$\infty-\infty$之形。則

$$\phi(x)=\frac{\phi_1(x)}{\phi_0(x)},\quad \psi(x)=\frac{\psi_1(x)}{\psi_0(x)}.$$

令$\phi_0(x),\psi_0(x)$之極限爲0。則

$$f(x)=\frac{\phi_1(x)\,\psi_0(x)-\phi_0(x)\,\psi_1(x)}{\phi_0(x)\,\psi_0(x)}.$$

於極限爲$\frac{0}{0}$。故直從此形之上。適用第2節之微分法。則得極限值。

〔例〕 1. 於$f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}$之$x=0$。求其極限值。

(解) $$\lim_{x=0} f(x)=\lim\frac{e^x-1-\sin x}{\sin x\,(e^x-1)}$$

$$=\lim\frac{e^x-\cos x}{\cos x\,(e^x-1)+\sin x\cdot e^x}$$

$$=\lim\frac{e^x+\sin x}{\sin x+2\cos x\cdot e^x}=\frac{1}{2}.$$

〔例〕 2. 求$\lim_{x=0}\left(3\cot x-\frac{x^2+3}{x-x^2}\right)$. 答 -3.

〔例〕 3. 求$\lim_{x=\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2}\sec x\right)$. 答 -1.

5. $0^0, \infty^0, 1^\infty$ 之不定形。

令x爲有限值或無限大。取

$$f(x)=\phi(x)^{\psi(x)}.$$

爲$0^0, \infty^0, 1^\infty$之任何形。

變原形爲

$$\log f(x)=\psi(x)\cdot\log\phi(x).$$

此皆爲$0\times\infty$之不定形。故求得此$\log f(x)$之極限值A。則從

$$Lim \log f(x)=A.$$

可得

$$Lim\, f(x)=e^A.$$

〔例〕 1. 求 $\underset{x=0}{Lim}\,(\sin x)^x$.

(解) 令 $f(x)=(\sin x)^x$. 爲

$$\log f(x)=x\log\sin x=\frac{\log\sin x}{x^{-1}}.$$

則 $$Lim \log f(x)=Lim\frac{\log\sin x}{x^{-1}}$$

$$=Lim\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}=Lim\frac{x^2\cos x}{-\sin x}$$

$$=Lim\frac{2x\cos x-x^2\sin x}{-\cos x}=0.$$

∴ $$Lim\, f(x)=Lim\,(\sin x)^x=e^0=1.$$

〔例〕 2. 求 $\underset{x=0}{Lim}\,(1-\cos x)^{\sin x}$. 答 1.

〔例〕 3. 求 $\lim\limits_{x=\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$

(解) 令 $f(x)=\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ 爲

$$\log f(x)=x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)=\frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{x^{-1}}.$$

則 $$\lim \log f(x)=\lim\frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{x^{-1}}$$

$$=\lim\frac{\dfrac{-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{a}{x}}}{-x^{-2}}=\lim\frac{a}{1+\frac{a}{x}}=a.$$

∴ $\lim f(x)=e^a$.

〔例〕 4. 求 $\lim\limits_{x=1} x^{\frac{1}{1-x}}$. 答 $\frac{1}{e}$.

〔例〕 5. 求 $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$. 答 1.

第七章 函數之極大極小

1. 函數之極大極小。

函數 $f(x)$ 於 (α, β) 區域內。設爲一價連續。(α, β) 區域內之一點 a 之近傍。即定 y 以適當之正數。如 $(a-y, a+y)$ 區域內。$f(a)$ 取最大值或最小值時。則稱 $f(x)$ 於 $x=a$ 爲極大 (*Maximum*) 或極小 (*Minimum*)。

此以解析法表之。則令h爲$0<h<y$。

而 $$f(a-h)<f(a)>f(a+h) \quad 爲極大。$$

$$f(a-h)>f(a)<f(a+h) \quad 爲極小。$$

今於$f'(x)$之$x=a$之近傍。假定亦爲連續。

如是則極大爲

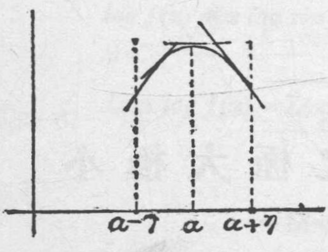
$$\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}>0,\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0.$$

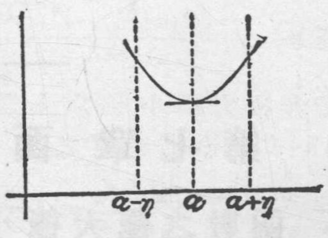
極小者爲

$$\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}<0,\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0.$$

於$Lim\ h=0$之極限。有不及a之微分係數。與過於a之微分係數(參照第二章第1節)。有反對之符號。而就$f'(x)$於$x=a$爲連續觀之。則無論極大極小。均爲

$$f'(a)=0.$$





然則$f(x)$於(a,β)區域之全部。有綿亘連續之導來函數$f'(x)$。則方程式

$$f'(x)=0$$

之根。悉含有全區域內極大極小之x之值。

然$f'(x)=0$。雖爲極大極小必要之條件。究非充分之條件也。欲判定$f'(x)=0$之一根$x=a$。果爲極大極小與否。可從定義容易導出之。(參照第二章第2節)。就適宜小之正數δ。如

$$\left.\begin{array}{l}f'(a-\delta)>0\\f'(a+\delta)<0\end{array}\right\}\text{則爲極大。}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(a-\delta)<0\\f'(a+\delta)>0\end{array}\right\}\text{則爲極小。}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(a-\delta)>0\\f'(a+\delta)>0\end{array}\right\}\text{則非極大極小。}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(a-\delta)<0\\f'(a+\delta)<0\end{array}\right\}\text{亦非極大極小。}$$

如是檢察之可也。

是法於一般之檢察。究甚繁雜。

多數如$f''(x)$亦於$x=a$之近傍爲有限確定。依以上之查定。則

極大 $$\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}<0,\quad \frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}<0.$$

極小 $$\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}>0,\quad \frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}>0.$$

若非極大極小。則以上之差之商。於一方>0。他一方<0。今於$Lim\ h-0$之極限視察之。則

極大 $f''(a)\leqq 0$, 極小 $f''(a)\geqq 0$.

若非極大極小。則$f''(a)=0$。

是$f''(a)$爲有限確定時。則

$\boldsymbol{f'(a)=0,\quad f''(a)<0}$ 極大。

$\boldsymbol{f'(a)=0,\quad f''(a)>0}$ 極小。

$\boldsymbol{f'(a)=0,\quad f''(a)=0}$ 未定。

若更$f'''(x)$爲有限確定。則令

$$f'(a)=0,\quad f''(a)=0,\quad f'''(a)\neq 0.$$

則從$f'''(a)$之符號。而以定$f'(a)$爲極大或極小。且其値爲0。而$f'(a-\delta)$與$f'(a+\delta)$同符號。從而$f(a)$非極大極小。

又 $$f'(a)=0,\quad f''(a)=0,\quad f'''(a)=0,\quad f^{\text{IV}}(a)\neq 0.$$

且$f^{\text{IV}}(x)$爲有限確定。則以$f''(a)$爲0之極大或極小。而有$f''(a-\delta)$與$f''(a+\delta)$同符號。從而$f'(x)$於$(a-y,a+y)$區域內。僅專爲增或僅專爲減。且$f'(a)=0$。故$f'(a-\delta)$與$f'(a+\delta)$異符號。卽$f(a)$爲極大或極小。

一般適用此推理。累次導來函數至第$(n-1)$次爲0。而$f^{(n)}(a)\neq 0$。若n爲奇數。則$f(a)$非極大極小。n爲偶數。則$f(a)$爲極大或極小。

〔例〕 1. 於$f(x)=x^4-a^2x^2+a^4$。求其極大極小之x之値。

(解) 變原式爲

$$f'(x)=4x^3-2a^2x=0.$$

解之。得

$$x=0,\quad x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

而 $$f''(x)=12x^2-2a^2.$$

則 $f''(0)=-2a^2.$ 故 $x=0$ 爲極大。

$f''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=4a^2.$ 故 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 爲極小。

$f''\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=4a^2.$ 故 $x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$ 爲極小。

〔例〕 2. 求$f(x)=2x^3-9x^2+12x$之極大極小之x之値。

答 於$x=1$爲極大。$x=2$爲極小。

〔例〕 3. 求$f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$之極大極小之$x$之值。

答 $x=0$爲極大。$x=3$爲極小。

〔例〕 4. 於$f(x)=a^2\cos x+b^2\cos 2x$之極大極小。求其$x$之值。

(解) 從$f'(x)=-a^2\sin x-2b^2\sin 2x=0$.

即 $\sin x(a^2+4b^2\cos x)=0$.

得 $\sin x=0,\quad \cos x=-\dfrac{a^2}{4b^2}$.

∴ $x=n\pi,\quad x=\cos^{-1}\left(-\dfrac{a^2}{4b^2}\right)$.

然 $f''(x)=-a^2\cos x-4b^2\cos 2x$,

$f''(n\pi)=\mp a^2-4b^2$.

∴ $f''\left\{\cos^{-1}\left(-\dfrac{a^2}{4b^2}\right)\right\}=\dfrac{16b^4-a^4}{4b^2}$.

故於$x=2m\pi$爲極大。於$x=(2m+1)\pi$。則$a^2\gtreqless 4b^2$。從而極小或極大。

於$x=\cos^{-1}\left(-\dfrac{a^2}{4b^2}\right)$。則$a^2\gtreqless 4b^2$。從而極大或極小。

又 $a^2=4b^2$.

則 $\cos^{-1}\left(-\dfrac{a^2}{4b^2}\right)=\cos^{-1}(-1)=(2m+1)\pi$.

而 $f'''(x)=a^2\sin x+8b^2\sin 2x$,

$f'''\{(2m+1)\pi\}=0$,

$f^{\mathrm{IV}}(x)=a^2\cos x+16b^2\cos 2x$,

$f^{\mathrm{IV}}\{(2m+1)\pi\}=-a^2+16b^2=12b^2$.

即 $x=(2m+1)\pi$ 爲極小。

〔例〕 5. 於$f(x)=b+(x-a)^{\frac{2}{3}}$之極大極小。求其$x$之值。

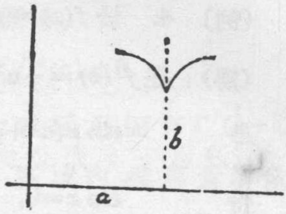
(解) $f'(x)=\frac{2}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}}$。除$x=a$之點外。雖爲連續。而不爲0。

然 $x>a$之間$f'(a)>0$,

$x<a$之間$f'(a)<0$.

於 $x=a$. 則$f(a)=b$.

故 $x=a$爲極小。



2. 陰函數$F(x,y)=0$之極大極小。

前節所論極大極小之查定。勿論陽函數與陰函數。均可適用。今特述陰函數查定之便宜方法。

陰函數

$$F(x,y)=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

假定y爲x之連續函數。而$\frac{dy}{dx}$亦爲連續。則

$$\frac{\delta F}{\delta x}+\frac{\delta F}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

此爲極大極小必要之條件。從$\frac{dy}{dx}=0$。則

$$\frac{\delta F}{\delta x}=0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

此方程式(2)。一般含有x, y。

(1)與(2)爲聯立方程式。得x, y之根組。故$x=a$爲極大或極小。則與此對應之$y=b$。爲函數之極大值或極小值。

聯立方程式之根。判別其極大極小與否。則求$\frac{d^2y}{dx^2}$之符號。於

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}+2\frac{\delta^2 F}{\delta x\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\delta^2 F}{\delta y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\delta F}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

而以 $\frac{dy}{dx}=0$. 則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\delta^2F}{\delta x^2}}{\frac{\delta F}{\delta y}}.$$

試以 x, y 之對應值。置換之可也。

(注意) 本節必要假定爲 $\frac{\delta F}{\delta y}\neq 0$.

若 $\frac{\delta F}{\delta y}=0$。則不可不待特種之研究.

〔例〕 1. 求 $F(x, y)=x^3+y^3-3axy=0$ 之 y 之極大極小。

(解) $F(x, y)=x^3+y^3-3axy=0$,

$F'_x(x, y)=3x^2-3ay=0$.

解之。則

$$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=a^3\sqrt{2}\\y=a^3\sqrt{2}\end{cases}$$

由前之根組。則以 $F'_y(x, y)=3y^2-3ax$ 亦爲 0。而 $\frac{dy}{dx}$ 爲不定形。必難斷定 $\frac{dy}{dx}=0$。從而極大極小不能論。

由後之 $x=a^3\sqrt{2}, y=a^3\sqrt{2}$。則 $F'_y(x, y)\neq 0$。$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2x}{y^2-ax}<0$。於 $x=a^3\sqrt{2}$。而見函數 y 之極大值爲 $a^3\sqrt{2}$.

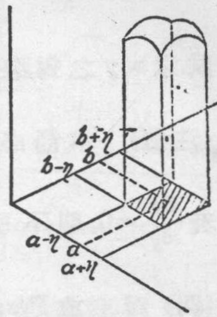
〔例〕 2. $F(x, y)=(x^2+y^2)^2-2axy^2=0$ 之 y 之極大極小。求其 x 之值。

答 $x=\frac{3}{8}a$ 爲極大或極小。

3. 二個自變數之函數之極大極小。

函數$f(x, y)$於某區域內(參照第四章第1節)爲一價連續。

又$\frac{\delta f}{\delta x}$, $\frac{\delta f}{dx}$假定爲有限確定且連續。



則定η爲適當之正數。於$a-\eta \leqq x \leqq a+\eta$, $b-\eta \leqq y \leqq b+\eta$之區域。略稱$x=a, y=b$之點之近傍。

$f(a, b)$對於其近傍之價爲最大或最小。

則$f(x, y)$於$x=a, y=b$爲極大或極小。

卽h, k。任何亦令於$(-\eta, +\eta)$區域內同時不爲0之變數。則

$$f(a+h, b+k) < f(a, b) \quad 極大。$$

$$f(a+h, b+k) > f(a, b) \quad 極小。$$

令h, k不爲獨立之變數。

令 $h : k = p : q.$

但p, q爲某常數。則得

$$h = p\epsilon, \quad k = q\epsilon.$$

更令 $\Delta s = \sqrt{h^2+k^2} = \sqrt{p^2+q^2}\,\epsilon.$

則 $$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b)}{\Delta s}.$$

若爲極大。則$\epsilon<0$之間爲正。$\epsilon>0$之間爲負。若爲極小。則$\epsilon<0$之間爲負。$\epsilon>0$之間爲正。而部分導來函數以任何亦爲連續。於$Lim\,\epsilon=0$之極限。爲

$$\frac{df}{ds} = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{q}{\sqrt{p^2+p^2}} = 0.$$

而於極大極小之點。此關係的常數 p, q。不拘如何。不可不成立。故此爲極大極小必要之條件。而

$$\frac{\delta f}{\delta x}=0,\quad \frac{\delta f}{\delta y}=0.$$

故求 $f(x, y)$ 之極大極小。必先解聯立方程式 $\frac{\delta f}{\delta x}=0, \frac{\delta f}{\delta y}=0$。將其所得各根組 $x=a, y=b$ 之 $f(a, b)$ 與 $f(a+h, b+k)$ 比較可也。

又 $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$ 爲連續。則與第1節同。p, q 不拘如何。祇視察 $\frac{\delta^2 f}{\delta s^2}$ 爲正或負。即可得決定其極小或極大。

然以 $$\frac{d^2 f}{ds^2}=\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{p^2}{p^2+q^2}+2\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}\cdot\frac{pq}{p^2+q^2}+\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\cdot\frac{q^2}{p^2+q^2}=$$

$$\frac{\left\{\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}+\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}\cdot\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right\}^2+\left\{\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}\right)^2\right\}\frac{q^2}{p^2+q^2}}{\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}}.$$

而

(1) $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}\right)^2>0$。且 $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}<0$。則 $\frac{d^2 f}{ds^2}<0$。故極大。

(2) $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}\right)^2>0$。且 $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}>0$。則 $\frac{d^2 f}{ds^2}>0$。故極小。

(3) $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}\right)^2<0$。依上記分數式之分子 p, q。雖以任何之正負值。而 $\frac{d^2 f}{ds^2}$ 不能有一定之符號。

即此非極大極小。

(4) $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)^2=0$。則以$p,q$。令$\frac{d^2 f}{ds^2}=0$。於此方向。更有研究之點。以極大極小與否。僅有此。尙不得斷定故也。

(注意) 以上不可不假定$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\neq 0$。若$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=0$。而$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\neq 0$。則從此可得同樣之查定。而

$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)^2<0$。是必非極大極小。

又$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=0,\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}=0$。則

$$\frac{d^2 f}{ds^2}=2\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\cdot\frac{pq}{p^2+q^2}.$$

其無一定之符號明矣。

故亦非極大極小。

〔例〕 1. 將長a有限直線分爲三分。試求其積之極大極小。

(解) 令第一,第二分爲x, y。則第三分爲$a-x-y$。而三分之積爲

$$f(x,y)=xy(a-x-y),$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}=ay-2xy-y^2=0,$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}=ax-x^2-2xy=0.$$

解此聯立方程式。則得一組根爲

$$x=\frac{a}{3},\qquad y=\frac{a}{3}.$$

以此值置換下式。則

$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)^2=(-2y)(-2x)-(a-2x-2y)^2$ 爲正。

而 $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=-2y$ 爲負。

故 x, y 各爲 $\frac{a}{3}$。即三分相等之積爲極大。

$a=\frac{a}{3}, y=\frac{a}{3}$ 之外之根組。非極大極小。故略。

〔例〕 2. $f(x, y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ 爲極大極小。試求其 x, y 之值。

(解) $$\frac{\delta f}{\delta x}=2ax+2hy+2g=0,$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}=2hy+2by+2f=0.$$

令 $ab-h^2 \neq 0$。則解之。得

$$x_0=\frac{fh-bg}{ab-h^2}, \quad y_0=\frac{gh-af}{ab-h^2}.$$

而 $$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=2a, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}=2b, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}=2h.$$

$$\therefore \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}\right)^2=4(ab-h^2).$$

故 $a<0, b<0, ab-h^2>0$。其 $f(x_0, y_0)$ 爲極大。而 $a>0, b>0, ab-h^2>0$。其 $f(x_0, y_0)$ 爲極小。

又 $ab-h^2<0$。則無 x, y 以推其極大或極小。

最後 $ab-h^2=0$。則聯立方程式 $\frac{\delta f}{\delta x}=0, \frac{\delta f}{\delta y}=0$。至無一式可決定其 x, y。

〔例〕 3. $\phi(x,y)=0$。求$z=f(x,y)$之極大極小。其方法如何。

(解) 今從$\phi(x,y)=0$。考究y爲x之函數。則極大極小必要之條件。爲

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad (1)$$

然

$$\frac{\delta\phi}{\delta x}+\frac{\delta\phi}{\delta y}\,\frac{dy}{dx}=0 \qquad (2)$$

今以未定係數λ乘 (2) 加於 (1)。則

$$\frac{\delta(f+\lambda\phi)}{\delta x}+\frac{\delta(f+\lambda\phi)}{\delta y}\,\frac{dy}{dx}=0.$$

然欲求λ適當之度。可令定爲

$$\frac{\delta(f+\lambda\phi)}{\delta x}=0,\quad \frac{\delta(f+\lambda\phi)}{\delta y}=0.$$

則極大極小之x, y。可從此與$\phi=0$求得。

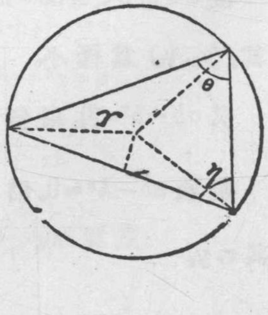
結局. 聯立方程式

$$\frac{\delta(f+\lambda\phi)}{\delta x}=0,\quad \frac{\delta(f+\lambda\phi)}{\delta y}=0,\quad \phi=0.$$

此得由極大極小之x, y與λ定之。

〔例〕 4. 有一定半徑之圓。求內接最大面積之三角形。

(解) 令內接三角形之二角爲θ, η。則第三角爲$\pi-\theta-\eta$。其各對邊爲$2r\sin\theta$, $2r\sin\eta$, $2r\sin(\theta+\eta)$。從圓之中心引垂線。代以$r\cos\theta$, $r\cos\eta$, $-r\cos(\theta+\eta)$。令三角形之面積爲S。則



$$S=r^2 sin\,\theta\,cos\,\theta+r^2 sin\,\eta\,cos\,\eta-r^2 sin\,(\theta+\eta)\,cos\,(\theta+\eta)$$

$$=\frac{r^2}{2}\{sin\,2\theta+sin\,2\eta-sin\,2(\theta+\eta)\}$$

$$=\frac{\delta S}{\delta\theta}=r^2\{cos\,2\theta-cos\,2(\theta+\eta)\}$$

$$=2r^2 sin\,(2\theta+\eta)\,sin\,\eta=0.$$

$$\therefore\qquad \frac{\delta S}{\delta\eta}=2r^2 sin\,(2\eta+\theta)\,sin\,\theta=0.$$

於 $sin\,\theta$, $sin\,\eta$ 之爲0者棄之。則

$$2\theta+\eta=\pi,$$

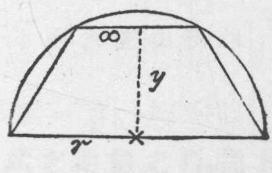
$$2\eta+\theta=\pi$$

從此 $\theta=\eta=\pi-\theta-\eta=\frac{\pi}{3}$.

即最大面積之三角形爲正三角形。

〔例〕 5. 有直六面體。設其體積爲一定。試求其表面積之最小者。

〔例〕 6. 以半圓直徑爲底邊。而作內接梯形。試求其面積之最大者。



(解) 令梯形平行之二邊爲 $2r$, $2x$。高爲 y。面積爲 z。則

$$z=y(x+r).$$

$$\phi=x^2+y^2-r^2=0,$$

$$\frac{\delta(z+\lambda\phi)}{\delta x}=y+2\lambda x=0,$$

$$\frac{\delta(z+\gamma\phi)}{\delta y}=x+2\lambda y+r=0$$

從此二方程式與$\lambda=0$。則得

$$x=\frac{r}{2},\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}r,\quad \lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(試作$\frac{d^2z}{dx^2}$。則可見其爲負)。

故平行二邊其小邊等於半徑r。則其面積最大。

〔例〕 7. 有$ax+by=c$。而$z=x^2y$。試求其極大極小。

答 $x=\dfrac{2c}{3a}$ 爲極大。

後篇 平面曲線之應用

微分學之應用雖甚廣。而其整齊者。究以曲線及曲面論爲最。是稱微分幾何學 (*Differential Geometry*)。實研究此等之一分科。本章及次章所講述者。不過其最緊要之一部耳。

第八章 平面曲線總論

1. 平面曲線之方程式。

今關於直角坐標式及極坐標式。假定其二個坐標間之關係式爲已知 則得研究平面曲線。從二個坐標之關係式。於其中之主要者。列舉如次。

(甲) 直角坐標式。

(i) 陽函數式 $y=f(x)$.

(ii) 陰函數式 $F(x, y)=0$.

(iii) 變率式 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$.

(乙) 極坐標式。

(i) 陽函數式 $r=f(\phi)$.

(ii) 陰函數式 $F(r, \phi)=0$.

平面曲線。大別爲二種。

(I) 代數曲線 (*Algebraic curve*)。

於直角坐標式。關於 x, y 而爲有理整方程式之曲線之謂。從其方程式之次數。以區別其曲線之次數 (*Order*)。

〔例〕 $y=ax^2+bx+c$ 二次代數曲線。

$y^2=ax^2+bx+c$ 二次代數曲線。

$x^4+y^4+3axy=0$ 四次代數曲線。

(II) 超越曲線 (*Transcendental curve*)。

凡不屬於代數曲線之總稱。

〔例〕 $y=2\sqrt{x}$ 拋物線之上半部。

$r=ae^{m\phi}$ 對數螺線。

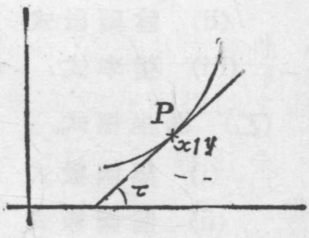
$y=\sin x$ 正弦曲線。

(注意) 以下恐嫌繁碎。故單稱曲線。從其方程式之函數及其導來函數。可視作為一價連續。

2. 切線及法線。

曲線之切線 (*Tangent*)。即割線之二交點相接近於無限之極限之直線。

關於直角坐標式。如第二章第2節所述。令曲線上一點P(其坐標為$x|y$)之切線角為τ。則



$$\frac{dy}{dx}=\tan\tau.$$

然令切線上任意一點為$\xi|\eta$。則

$$\frac{\eta-y}{\xi-x}=\tan\tau.$$

而 $$\eta-y=\frac{dy}{dx}(\xi-x) \quad\text{.......................................}(1)$$

是切於曲線上一點$x|y$之切線方程式。

(i) 曲線$y=f(x)$。則從 (1) 得

$$\eta-y=f'(x)(\xi-x) \quad\text{.......................................}(1')$$

(ii) 曲線爲 $F(x,y)=0$。則以

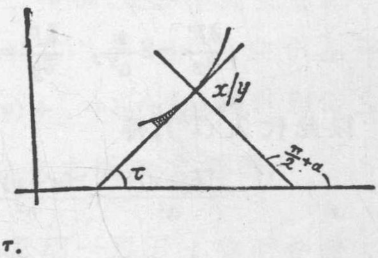
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{\frac{\delta F}{\delta y}}.$$

從 (1) 得 $(\xi-x)\frac{\delta F}{\delta x}+(\eta-y)\frac{\delta F}{\delta y}=0$ .... (1″)

(iii) 曲線爲 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$。則以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

從 (1) 得 $\frac{\eta-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{\xi-x}{\frac{dx}{dt}}$ .... (1‴)



曲線之法線 (*Normal*)。即從切線之切點所作垂直線之謂。

令法線上任意一點爲 $\xi|\eta$。則從

$$\frac{\eta-y}{\xi-x}=tan\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-cot\,\tau.$$

於曲線上之點 $x|y$ 之法線方程式。爲

$$\eta-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(\xi-x) \quad \text{.............................(2)}$$

(i) 曲線爲 $y=f(x)$。從此得

$$\eta-y=-\frac{1}{f'(x)}(\xi-x) \quad \text{.............................(2′)}$$

(ii) 曲線爲 $F(x, y)$。則

$$\frac{\xi-x}{\frac{\delta F}{\delta x}}=\frac{\eta-y}{\frac{\delta F}{\delta y}}\text{.................................}(2'')$$

(iii) 曲線爲 $x=\phi(t),\ y=\psi(t)$。則

$$(\xi-x)\frac{dx}{dt}+(\eta+y)\frac{dy}{dt}=0\text{.................}(2''')$$

(注意) 於以上之公式 $\frac{\delta F}{\delta x}, \frac{\delta F}{\delta y}$ 或 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 爲 0。則須直接作方程式。

〔例〕 於橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之周上一點 $x|y$。試作其切線及法線之方程式。

(解) 令 $F(x, y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. 則

$$\frac{\delta F}{\delta x}=2\frac{x}{a^2},\quad \frac{\delta F}{\delta y}=2\frac{y}{b^2}.$$

以此代入 (1'')。得

$$\frac{(\xi-x)x}{a^2}+\frac{(\eta-y)y}{b^2}=0.$$

然 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

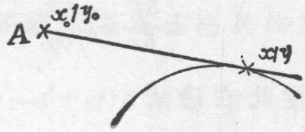
∴ 切線 $$\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}=1.$$

又代入 (2 。得

線 $$a^2\frac{\xi-x}{x}=b^2\frac{\eta-y}{y}.$$

(注意) 關於極坐標式之切線及法線。述於後節。

3. 從曲線外一點之切線。



曲線為 $F(x, y)=0$。(他可類推)。從其外一點 $A(x_0|y_0)$ 引切線。則其切點 $x|y$ 為聯立方程式。如

$$\left\{\begin{aligned} & F(x, y)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha) \\ & (x_0-x)\frac{\delta F}{\delta x}+(y_0-y)\frac{\delta F}{\delta y}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta) \end{aligned}\right.$$

解之。卽得所求。

令此一根組為 $x_1|y_1$。則從 $x_0|y_0$ 之切線方程式。為

$$(\xi-x_1)\frac{\delta F}{\delta x}+(\eta-y_1)\frac{\delta F}{\delta y}=0.$$

今特限 $F(x, y)$ 為 n 次代數曲線。研究其從曲線外之點 $x_0|y_0$。得引幾個切線。

分 $F(x, y)$ 為同次式之羣。如

$$F(x, y)=\phi_n(x, y)+\phi_{n-1}(x, y)+\ldots+\phi_0(x, y)=0.$$

卽 ϕ_n 為 n 次之同次式。ϕ_{n-1} 為 $(n-1)$ 次之同次式。等等。

從此得

$$\frac{\delta F}{\delta x}=\frac{\delta\phi_n}{\delta x}+\frac{\delta\phi_{n-1}}{\delta x}+\ldots+\frac{\delta\phi_1}{\delta x},$$

$$\frac{\delta F}{\delta y}=\frac{\delta\phi_n}{\delta y}+\frac{\delta\phi_{n-1}}{\delta y}+\ldots+\frac{\delta\phi_1}{\delta y}.$$

變為

$$x\frac{\delta F}{\delta x}+y\frac{\delta F}{\delta y}=\left(x\frac{\delta\phi_n}{\delta x}+y\frac{\delta\phi_n}{\delta y}\right)+\left(x\frac{\delta\phi_{n-1}}{\delta x}+y\frac{\delta\phi_{n-1}}{\delta y}\right)$$
$$+\ldots+\left(x\frac{\delta\phi_1}{\delta x}+y\frac{\delta\phi_1}{\delta y}\right).$$

右邊之各項。適用來本之之公式(第四章第7節例5)。則

$$x\frac{\delta F}{\delta x}+y\frac{\delta F}{\delta y}=n\varphi_n+(n-1)\varphi_{n-1}+\ldots+\varphi_1.$$

從此右邊減 $n(\varphi_n+\varphi_{n-1}+\ldots+\varphi_1+\varphi_0)=0$。則

$$=-\varphi_{n-1}-2\varphi_{n-2}-\ldots-(n-1)\varphi_1-n\varphi.$$

即 $(n-1)$ 次之代數式。

既明乎此。則從 $(n-1)$ 次之 $x_0\frac{\delta F}{\delta x}+y_0\frac{\delta F}{\delta y}$。減方程式$(\beta)$。即爲$(n-1)$次。

故方程式(α)爲n次方程式。則從(α), (β)所得之根$x|y$。虛實合計有$n(n-1)$組。即

從n次代數曲線之外之點。得引$n(n-1)$個切線。

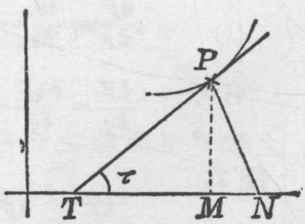
(注意) 於幾何學從曲線外之點。所引得切線之個數。以爲曲線之種別。是謂之級(*Class*)。

由上之結果。則

n次代數曲線。爲$n(n-1)$級曲線。

4. 切線法線之長及其正射影。

切於曲線上P點之切線與x軸相交於T。P點之法線交x軸於N。P點在x軸之正射影爲M。則命名如次。



PT＝切線之長＝T.

PN＝法線之長＝N.

TM＝切線影(*Subtangent*)＝t.

NM＝法線影(*Subnormal*)＝n.

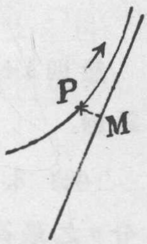
切線之長與法線之長。各就其絕對值而言。切線影與法線影。如上圖之TM, NM之方向各爲正。卽切線影之正方向與法線影之正方向。互爲反對。

從$y'=\tan\tau$容易知

$$\left.\begin{aligned}&\text{切線影}\quad t=\frac{y}{y'}\\&\text{法線影}\quad n=yy'\\&\text{切線之長}\quad T=\sqrt{y^2+\frac{y^2}{y'^2}}=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}\\&\text{法線之長}\quad N=\sqrt{y^2+y^2y'^2}=|y|\sqrt{1+y'^2}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

5. 漸近線。

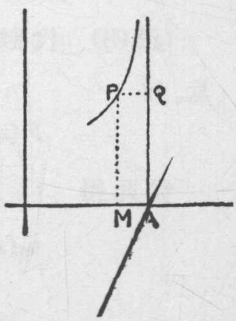
於直角坐標式。曲線之坐標x, y之一方或雙方。其絕對值比任何之正數更大。是爲此曲線有<u>無限枝</u> (*Infinity branch*)。



曲線之無限枝上之一點P。沿此枝不遠離原點之方向而走。從此之距離。於極限而收斂爲0。若一直線。此爲無限枝之<u>漸近線</u> (*Asymptote*)。

下卽述求曲線之漸近線之方法。

(I) <u>平行於y軸之漸近線。</u>



有$x=a$之漸近線AQ。如圖從無限枝上之點P至此線之距離爲PQ。則

$$Lim\, PQ=Lim\, MA=0.$$

卽 $$Lim\,(a-x)=0.$$

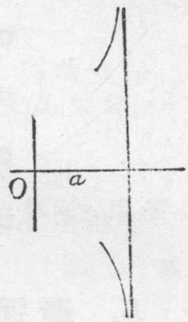
∴ $$Lim\, x=a.$$

而 $$Lim\, y=\infty.$$

由是平行於y軸之漸近線。當令 $Lim\, y=\infty$。以求x之值a。即知其在$x=a$之中。

〔例〕 1. 於 $y^2=\dfrac{\sqrt{a+x}}{a-x}\ (a>0)$。而令 $Iim\, y=\infty$。則

$$Lim\ (a-x)=0.$$



然令 $Lim\, x=a-0$。則

$$Lim\, y=\pm\infty.$$

又令 $Lim\, x=a+0$。則取 y 爲虛數值。而漸近線之位置。如圖所示。

〔例〕 2. 於 $y=\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+x}}$。而令 $1+x=0$。則 y 爲無限大。

而 $Lim\, x=-1-0$ 之側。y 爲虛數值。

$Lim\, x=-1+0$ 之側。$Lim\, y=+\infty$。

然則 $1+x=0$。則 y 軸之正方向。在原點之同側。爲無限枝之漸近線。

〔例〕 3. 於代數曲線。平行於y軸之漸近線。可於曲線方程式令y之最高次項之係數等於0。從其方程式之根之中求得。試證明之。

(證明) 代數曲線之方程式關於y爲m次。則排列爲y之降冪。如

$$F(x,y)=u_0(x)y^m+u_1(x)y^{m-1}+\ldots+u_m(x)=0.$$

從此得

$$u_0(x)+u_1(x)\frac{1}{y}+\ldots+u_m(x)\frac{1}{y^m}=0.$$

今令 $\lim y=\infty$。則

$$u_0(x)=0.$$

然則不爲 $u_0(x)=0$。則不能爲 $\lim y=\infty$。

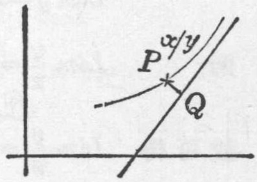
故解 $u_0(x)=0$。則 $\lim y=\infty$ 悉在其中。

(II) 不平行於 y 軸之漸近線。

假定曲線之無限枝有漸近線

$$\eta=\alpha\xi+\beta.$$

試求其 α,β。



從曲線上之點 $P(x|y)$ 至此漸近線之距離 PQ。爲

$$PQ=\frac{y-\alpha x-\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

然從漸近線之定義。則當以 $\lim PQ=0$。

而 $$\lim_{x=\infty}(y-\alpha x-\beta)=0.$$

從此 $$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}-\alpha-\frac{\beta}{x}\right)=0$$

然以 $$\lim\frac{\beta}{x}=0.$$

從此求得 α,β 之值。爲

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right)=\alpha.$$

$$\lim_{x=\infty}(y-\alpha x)=\beta.$$

若 $$\lim x=\infty,\quad \lim y=\infty.$$

則從不定形 $\frac{\infty}{\infty}$。可得

$$\lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x=\infty}\frac{dy}{dx}.$$

又 $\quad Lim\, x=\infty,\quad Lim\, y=b$ (有限值)。

則 $\quad \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{y}{x}=0.\quad$ 然 $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{dy}{dx}=0.$

$\therefore\quad Lim \dfrac{y}{x}=Lim \dfrac{dy}{dx}.$

又如.(I) $Lim\, x=a$ (有限值)。

$Lim\, y=\infty.$

則 $\quad Lim \dfrac{y}{x}=\infty.\quad$ 然 $Lim \dfrac{dy}{dx}=\infty.$

故可得 $\quad Lim \dfrac{y}{x}=Lim \dfrac{dy}{dx}.$

故有漸近線之無限枝。常爲

$$Lim \frac{y}{x}=Lim \frac{dy}{dx}=a.$$

卽無限枝之切線角正切之極限值 $\dfrac{dy}{dx}$。等於漸近線與 x 軸成角之正切 a。換言之。則<u>漸近線爲無限枝之切線之極限位</u>

(注意) $a=0$。則得平行於 x 軸之漸近線。

〔例〕 求雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 之漸近線。

(解) 兩邊以 x^2 約之。則 $b^2-a^2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=\dfrac{a^2b^2}{x^2}.$

$\therefore\quad Lim\left(\dfrac{y}{x}\right)=\pm\dfrac{b}{a}.$

而 $\quad Lim\left\{y-x\left(\pm\dfrac{b}{a}\right)\right\}=Lim\dfrac{ay\mp bx}{a}$

$$=Lim\frac{a^2y^2-b^2x^2}{a(ay\pm bx)}=0.$$

故從$y=\pm\frac{b}{a}x$求得漸近線。爲

$$bx-ay=0,\quad bx+ay=0.$$

($y=\infty$。x爲有限值。故爲平行於y軸之漸近線)。

6. 代數曲線之漸近線及漸近曲線。

特於代數曲線。得定一層容易之漸近線。

(I) 代數曲線$F(x,y)=0$。僅關於y而爲一次。

書此爲

$$y=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}.$$

令$\phi(x),\psi(x)$爲任何有理整函數。則可直得次之事實。

(i) 解$\psi(x)=0$。則從其實根得作平行於y軸之漸近線

(ii) $\phi(x)$之次數。比$\psi(x)$更低。則

$$\lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=0,\quad \lim_{x=\infty}y=0.$$

由是有$y=0$之漸近線。

(iii) $\phi(x),\psi(x)$爲同次。則令

$$y=\beta+\frac{\phi_1(x)}{\psi(x)}.$$

β爲常數。而$\phi_1(x)$亦比$\psi(x)$爲低次。則

$$\lim\frac{y}{x}=0,\quad \lim y=\beta.$$

故有$y=\beta$之漸近線。

(iv) $\phi(x)$ 比 $\psi(x)$ 之次數高 1。則如前令

$$y=ax+\beta+\frac{\phi_1(x)}{\psi(x)}.$$

則 $$Lim\frac{y}{x}=a,\quad Lim\,(y-ax)=\beta.$$

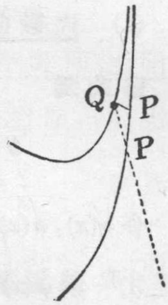
故有 $y=ax+\beta$ 之漸近線。

(v) $\phi(x)$ 比 $\psi(x)$ 次數高 2。則同樣令

$$y=ax^2+bx+c+\frac{\phi_1(x)}{\psi(x)}.$$

更就抛物線 $y_1=ax^2+bx+c$ 考之。

$$\lim_{x=\infty}(y-y_1)=Lim\,PQ=0.$$



今從抛物線 Q 點之法線。與曲線交於 P'。則 $P'Q$ 亦於極限為 0。

然此抛物線。曰曲線無限枝之<u>漸近抛物線</u> (*Asymptotic parabola*)。

(vi) 一般 $\phi(x)$ 比 $\psi(x)$ 次數高 m。則得

$$y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m+\frac{\phi_1(x)}{\psi(x)}.$$

而此 m 次抛物線

$$y_1=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m.$$

總稱<u>漸近曲線</u> (*Asymptotic curve*)。

(II) <u>n 次代數曲線</u>。

方程式以同次式之項表之為

$$F(x,y)=\phi_n(x,y)+\phi_{n-1}(x,y)+\ldots+\phi_1(x,y)+\phi_0=0.$$

更書此為

$$x^n\phi_n\left(1,\frac{y}{x}\right)+x^{n-1}\phi_{n-1}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\ldots+x\phi_1\left(1,\frac{y}{x}\right)+\phi_0=0.$$

以x^n約其各項。則

$$\phi_n\left(1,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\phi_{n-1}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\ldots+\frac{1}{x^{n-1}}\phi_1\left(1,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^n}\phi_0=0.$$

令$\lim\limits_{x=\infty}\frac{y}{x}=a$.（有限値）。則於上之方程式$\lim x=\infty$。

$$\phi_n\left(1,\lim\frac{y}{x}\right)=0.$$

然則n次代數曲線。令n次之同次羣爲$\phi_n(x,y)$。則得此羣之x爲1。y爲a之方程式。

$$\phi_n(1,a)=0.$$

解之。則其根可定漸近線$\eta=a\xi+\beta$之方向。

決定β。則從$y=ax+\beta$。

置換 $\frac{y}{x}=a+\frac{\beta}{x}$.

而 $$\phi_n\left(1,a+\frac{\beta}{x}\right)+\frac{1}{x}\phi_{n-2}\left(1,a+\frac{\beta}{x}\right)+\ldots+\frac{1}{x^n}\phi_0=0.$$

依可西氏之定理。試展開各項。則

$$\begin{aligned}\phi_n(1,a)+\phi'_n(1,a)\frac{\beta}{x}+\phi''_n(1,a)\frac{\beta^2}{2x^2}+\ldots\\+\phi_{n-1}(1,a)\frac{1}{x}+\phi'_{n-1}(1,a)\frac{\beta}{x^2}+\ldots\\+\phi_{n-2}(1,a)\frac{1}{x^2}+\ldots\\+\ldots\\+\phi_0\frac{1}{x^n}=0.\end{aligned}$$

而以$\phi_n(1,a)=0$。去其最初之項。各項以x乘之。則

$$\{\phi'_n(1,a)\cdot\beta+\phi_{n-1}(1,a)\}+\{\phi''_n\cdot\beta+2\phi'_{n-1}\cdot\beta+2\phi_{n-2}\}\frac{1}{2x}+\ldots=0.$$

茲令 $Lim\ x=\infty$。則

$$\phi'_n(1,\alpha)\cdot\beta+\phi_{n-1}(1,\alpha)=0.$$

$$\therefore \qquad \beta=-\frac{\phi_{n-1}(1,\alpha)}{\phi'_n(1,\alpha)}. \quad (\text{但}\ \phi'_n(1,\alpha)\neq 0).$$

若 $\phi_n(1,\alpha)=0$。而 $\phi_{n-1}(1,\alpha)\neq 0$。則 $\beta=\infty$。從此不能得漸近線。

又 $\phi'_n(1,\alpha)=0$。且 $\phi_{n-1}(1,\alpha)=0$。各項更以 x 乘之。而令 $Lim\ x=\infty$

則 $$\phi''_n(1,\alpha)\cdot\beta^2+2\phi'_{n-1}(1,\alpha)\cdot\beta+2\phi_{n-2}(1,\alpha)=0.$$

解此可得 β。

〔例〕 1. 求 $x^3=ay(x-b)$ 之漸近線。

(解) 令 $y=\dfrac{x^3}{a(x-b)}$。則 $Lim\ x=b,\ Lim\ y=\infty$。

故得 $x=b$ 之一個漸近線。

又令 $$y=\frac{1}{a}(x^2+bx+b^2)+\frac{b^3}{a(x-b)}.$$

則 $y=\dfrac{1}{a}(x^2+bx+b^2)$ 即 $ay=x^2+bx+b^2$ 爲漸近拋物線。

〔例〕 2. 求 $x^2+4xy-6x+4y=0$ 之漸近線。

答 $$x+1=0,\ x+4y-7=0.$$

〔例〕 3. 求 $xy(x+y-1)+p=0$ 之漸近線。

(解) 令 y^2 之係數 x 爲 0。則得平行於 y 軸之漸近線 $x=0$。(第 5 節 I, 例 3)。

又於最高次之同次羣 $xy(x+y)$。令 x 爲 1, y 爲 α。則

$$\alpha(1+\alpha)=0.$$

$$\therefore \qquad \alpha_1=0,\quad \alpha_2=-1.$$

而 $$\beta=-\frac{-\alpha}{(1+\alpha)+\alpha}=\frac{\alpha}{1+2\alpha}.$$

$$\therefore \qquad \beta_1=0,\quad \beta_2=1.$$

故不平行於y軸之漸近線。爲$y=\alpha_1x+\beta_1$之$y=0$。及$y=\alpha_2x+\beta_2$之$=-x+1$。

答 $x=0,\ y=0,\ x+y-1=0.$

〔例〕 4. 求$(x+a)y^2=(y+b)x^2$之漸近線。

答 $x+a=0,\ y+b=0,\ y=x-a+b.$

〔例〕 5. 求$x^3-xy^2-y^2+y=0$之漸近線。

答 $x+1=0,\ x-y-\frac{1}{2}=0,\ x+y-\frac{1}{2}=0.$

7. 曲線之凹凸及彎曲點。

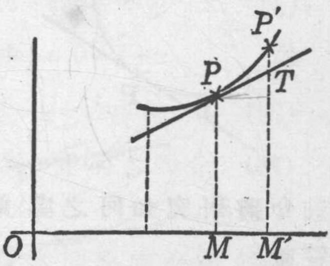
曲線之方程式爲$y=f(x)$。

先研究曲線上之點$P(x|y)$之近旁。

令曲線上他一點爲$P'(x+h,\ y_1)$。則

$$y_1=f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h).$$

如圖$P'M'=y_1$與P點之切線交於T。於P點之切線爲



$$\eta-y=f'(x)(\xi-x).$$

而令 $\xi=OM'=x+h.$

則 $\eta=TM'=y+hf'(x).$

$\therefore$ $P'T=P'M'-TM'=\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h).$

然$f''(x)\neq 0$。則於$f''(x+\theta h)$不爲0之範圍$-\eta\leqq h\leqq+\eta$之中。而連續函數$f''(x+\theta h)$。當有相同之符號。$P'P$於x之近旁。常爲正或常爲負。

茲將其名稱分述如次。

(i) $f''(x)>0$。則於適宜之區域 $(x-\eta, x+\eta)$ 內 $P'T>0$。即曲線在切線之上。(甲圖)

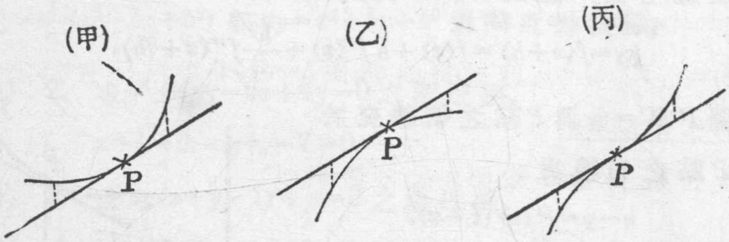
稱此為曲線於 P 點下凸 (*Convex downwards*)。又名上凹 (*Concave upwards*)。

(ii) $f''(x)<0$。則於點 P 之前後。而 $P'T<0$ 即曲線在切線之下。(乙圖)

稱此為曲線於 P 點上凸 (*Convex upwards*)。又名下凹 (*Concave downwards*)。

(iii) $f''(x)=0$。且 $f''(x)$ 於 $(x-\eta, x)$ 與 $(x, x+\eta)$ 有反對之符號。則曲線於一側在切線上。他側在切線下。(丙圖)

此點 P 曰彎曲點 (*Point of inflexion*)。



今將研究如何之處。則如 $f''(x)$ 方可於點 P 之前後。取反對之符號。

若 $f''(x)=0$。則於 $y_1=f(x+h)$ 之展開式。求至第三次導來函數。如

$$y_1=f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x+\theta'h).$$

則 $$P'T=\frac{h^3}{6}f'''(x+\theta'h).$$

故令$f'''(x)$不爲0。而爲連續。則於適宜之區域$(x-\eta', x+\eta')$。不可不常爲正或常爲負。而h^3的點P之前後。取反對之符號。此$P'T$於點P之前後。變其符號。

換言之。則

$f''(x)=0, f'''(x)\neq 0$之點x爲曲線之彎曲點。

若$f'''(x)=0, f^{\mathrm{IV}}(x)\neq 0$。則

$$P'T=\frac{h^4}{4!}f^{\mathrm{IV}}(x+\theta''h).$$

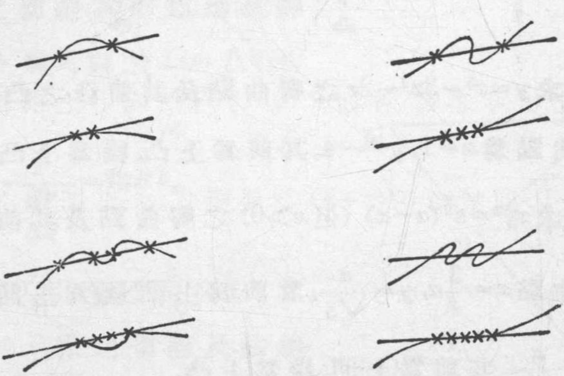
此處之點P。不爲彎曲點。

逐次如斯。故$f''(x)=0, f'''(x)=0, \ldots$。令其最初不爲0之導來函數。爲$f^n(x)$。則可知$n$爲奇數。則有彎曲點。$n$爲偶數。則無彎曲點。

最後$f''(x)\neq 0$。則從$P'T=\dfrac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$。令$Lim\ h$爲第一次無限小。故$Lim\ P'T$爲第二次無限小。此稱曲線與切線爲第一次之切觸(*Contact of the first order*)。

$f''(x)=0, f'''(x)\neq 0$,卽於彎曲點。而$Lim\ P'T$爲第三次無限小。此稱第二次之切觸。

逐次如斯。得考一般第n次之切觸。



〔例〕 1. 求 $f(x)=\sin x$ 之彎曲點及其前後之凹凸。

(解)　$f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x.$

則從　$f''(x)=-\sin x=0.$

得　$x=m\pi.$ (m 爲任意之整數)。

而　$f'''(m\pi)\neq 0.$

此任何亦爲彎曲點。

m 爲奇數。令 $\pi>k>0$。則

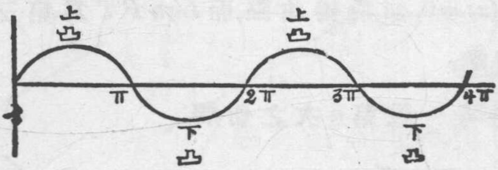
$$f''(m\pi-k)<0,\quad f''(m\pi+k)>0.$$

故 $x=m\pi,\ y=0$, 其前爲上凸。後爲下凸。

m 爲偶數。則

$$f''(m\pi-k)>0,\quad f''(m\pi+k)<0.$$

卽 $x=m\pi,\ y=0$, 其前爲下凸。後爲上凸。



〔例〕 2. 求 $y=x^3-3x^2-2x$ 之彎曲點及其前後之凸凹。

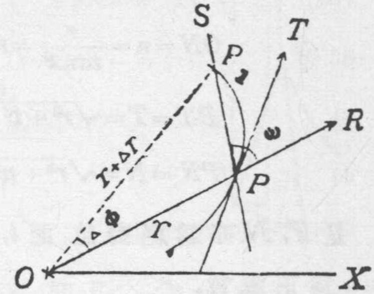
答　彎曲點爲 $x=1,\ y=-4$。其前爲上凸。後爲下凸。

〔例〕 3. 求 $xy^2=a^2(a-x)$ (但 $a>0$) 之彎曲點及其前後之形。

答　彎曲點 $x=\dfrac{3}{4}a,\ y=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$。其前爲上凸。後爲上凹。及彎曲點 $x=\dfrac{3}{4}a,\ y=-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$。其前爲上凹。後爲上凸。

8. 極方程式之曲線。

(I) 切線及法線。



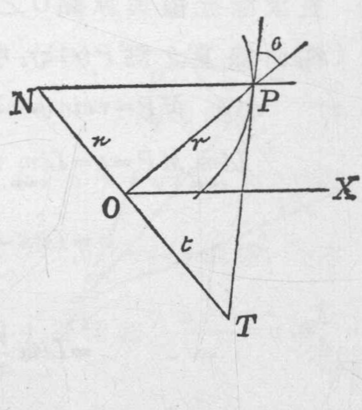
曲線之極方程式爲 $r=f(\phi)$。取其上之點 $P(r|\phi)$ 與他點 $P_1(r+\Delta r|\phi+\Delta\phi)$。延長動徑。於 P 與 PP_1 成 ω 角。則於 ΔOPP_1 而

$$\frac{OP}{OP_1}=\frac{\sin O\hat{P}_1P}{\sin O\hat{P}P_1},\quad 即\quad \frac{r}{r+\Delta r}=\frac{\sin(\omega-\Delta\phi)}{\sin\omega}.$$

$$\therefore\quad \frac{r}{\Delta r}=\frac{\sin(\omega-\Delta\phi)}{\sin\omega-\sin(\omega-\Delta\phi)}=\frac{\sin(\omega-\Delta\phi)}{2\sin\frac{\Delta\phi}{2}\cos\left(\omega-\frac{\Delta\phi}{2}\right)}.$$

$$\therefore\quad \frac{r}{\frac{\Delta r}{\Delta\phi}}=\frac{\frac{\Delta\phi}{2}}{\sin\frac{\Delta\phi}{2}}\cdot\frac{\sin(\omega-\Delta\phi)}{\cos\left(\omega-\frac{\Delta\phi}{2}\right)}.$$

於 P 點之切線與動徑延長線所成之角令爲 θ。則於 $Lim\ \Delta\phi=0$ 之極限爲



$$\frac{r}{\frac{dr}{d\phi}}=\tan\theta,$$

次過極點 O。引垂於動徑 OP 之直線。令交於 P 點之切線及法線爲 T, N。則得命名如次。

$$OT=t=r\tan\theta=\frac{r^2}{r'}\text{..................極切線影}$$

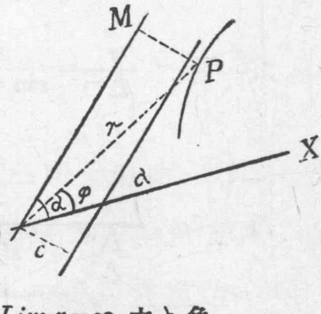
$$ON=n=\frac{r}{\tan\theta}=r'\text{..................極法線影}$$

$$PT=T=\sqrt{r^2+t^2}\text{..................切線之長}$$

$$PN=N=\sqrt{r^2+n^2}\text{..................法線之長}$$

是 T, N 亦爲絕對值。而 t, n 之符號有正負之分。卽從 $r'\gtreqless 0$。而 t, n 爲正或負。

(II)　<u>漸近線。</u>



由極方程式。已知曲線比動徑 r 之絕對值的如何之正數亦大之部分。有無限枝。

今假定曲線無限枝的一個有漸近線。則其與原線成 α 角。以對應於 $Lim\, r=\infty$。而

<u>曲線之漸近線與原線所成之角。在含 $Lim\, r=\infty$ 之 ϕ 角。</u>

更求漸近線與原點 O 之距離 c。

從曲線上之點 $P(r|\phi)$。引平行於漸近線之動徑之垂線 MP。則

$$MP=r\sin(\alpha-\phi).$$

$$\lim_{r=\infty} MP=c=\lim_{r=\infty} r\sin(\alpha-\phi)$$

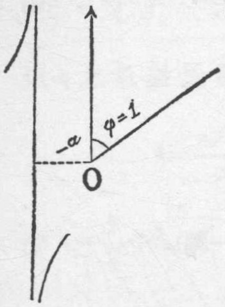
$$=Lim\frac{\sin(\alpha-\phi)}{\frac{1}{r}}=Lim\frac{-\cos(\alpha-\phi)}{-\frac{r'}{r^2}}$$

$$=Lim\frac{r^2}{r'}=Lim\, t.$$

即從原點至漸近線之距離。等於極切線影之 $Lim\, r=\infty$ 之極限值。

〔例〕 求 $r=\dfrac{a\phi}{\phi-1}$ $(a>0)$ 之漸近線。

$\phi=1\pm0,\ Lim\, r=\infty$。



而

$$\frac{r^2}{r'}=\frac{\dfrac{a^2\phi^2}{(\phi-1)^2}}{\dfrac{-a}{(\phi-1)^2}}=-a\phi^2.$$

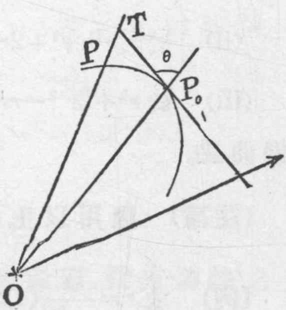
$$\therefore\qquad Lim\frac{r^2}{r'}=Lim\, t=-a.$$

故所求之漸近線。如圖所示。

(III) 曲線之凹凸。

與直角坐標式相類似。其定義有凹於極方 (*Concave towards the pole*)。凸於極方 (*Convex towards the pole*)。彎曲點。

即極方程式從曲線上之點 $P_0(r_0|\phi_0)$ 之近傍一點 $P(r|\phi)$。令於 P_0 之曲線之切線之上。成角 ϕ 之點爲 $T(R|\phi)$。則



$$\delta=\frac{1}{r}-\frac{1}{R}.$$

δ 於 P_0 爲極小。則謂此於 P_0 爲凹於極方。極大。則云凸於極方。若非極大極小。則云 P_0 爲彎曲點。

然 $$\frac{R}{\sin\theta}=\frac{r_0}{\sin(\theta-\phi+\phi_0)}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{R}=\frac{\sin(\theta-\phi+\phi_0)}{r_0\sin\theta}=\frac{1}{r_0}\{\cos(\phi-\phi_0)-\cot\theta\sin(\phi-\phi_0)\}.$$

然於P_0之r'書爲r_0'。則$\tan\theta=\dfrac{r_0}{r_0'}$。而

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r_0}\cos(\phi-\phi_0)-\frac{r_0'}{r_0^2}\sin(\phi-\phi_0).$$

$$\therefore\quad \delta=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\cos(\phi-\phi_0)+\frac{r_0'}{r_0^2}\sin(\phi-\phi_0).$$

$$\delta'=\frac{r'}{r^2}+\frac{1}{r_0}\sin(\phi-\phi_0)+\frac{r_0'}{r_0^2}\cos(\phi-\phi_0).$$

$$\delta''=\frac{r''r-2r'^2}{r^3}+\frac{1}{r_0}\cos(\phi-\phi_0)\frac{r_0'}{r_0^2}\sin(\phi-\phi_0).$$

故於P_0之δ', δ''等。書以δ_0', δ_0''等。則

$$\delta_0'=0.$$

$$\delta_0''=-\frac{r_0''r_0-2r_0'^2}{r_0^3}+\frac{1}{r_0}=\frac{r_0^2+2r_0'^2-r_0r_0''}{r_0^3}.$$

故得如次之查定。

(i) 於$r>0$, $r^2+2r'^2-rr''>0$之點。則δ爲極小。即凹於極方。

(ii) 於$r>0$, $r^2+2r'^2-rr''<0$之點。則δ爲極大。即凸於極方。

(iii) 於$r^2+2r'^2-rr''=0$之點。則過此點之際變δ之符號。故彎曲點。

(注意) 應用以上之查定。於$r<0$之處。則(i)與(ii)當變換。

〔例〕 求$r=\dfrac{a}{\sqrt{\phi}}$ $(a>0)$之彎曲點。

(解)　$r'=-\dfrac{a}{2\vartheta^{\frac{3}{2}}},\quad r''=\dfrac{3a}{4\vartheta^{\frac{5}{2}}}.$

$$\therefore\qquad r^2+2r'^2-rr''=\frac{a^2}{\vartheta}+\frac{a^2}{2\vartheta^3}-\frac{3a^2}{4\vartheta^3}.$$

$$=a^2\frac{4\vartheta^3-1}{4\vartheta^3}=0.$$

而　$\vartheta=\pm\dfrac{1}{2}.$

以ϑ之負數量無用。故以$\vartheta=\dfrac{1}{2}$試之。則

$$\delta=\frac{\sqrt{\vartheta}}{a}-\frac{1}{\sqrt{2}a}\cos\left(\vartheta-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}a}\sin\left(\vartheta-\frac{1}{2}\right).$$

令$\vartheta=\dfrac{1}{2}+h$。則

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{2}a}\{\sqrt{1+2h}-\cos h-\sin h\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}a}\left\{1+h-\frac{1}{2!}h^2+\frac{1.3}{3!}h^3-\frac{1.3.5}{4!}h^4+\dots\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\dots\right)-\left(\frac{h}{1!}-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\dots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}a}\left\{\frac{4}{3}h^3-\frac{2}{3}h^4+\dots\right\}.$$

故δ依h之正負而變符號。

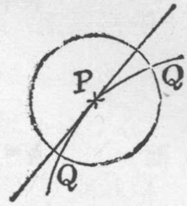
故$\vartheta=\dfrac{1}{2}$(其動徑$r=\sqrt{2}a$)爲彎曲點。

9. 曲線之奇點。

本章自本節以前。作連續曲線之一價函數看。確定切線之第一次導來函數。亦假定爲連續而論。

如是於曲線上一點 P 之近傍。其曲線亦為一價連續。而切線亦確定連續。則此點稱為普通點 (*Ordinary point*)。

今將曲線上之一點 P 為普通點。其必要且充分之條件。列舉如次。



P 為中心而畫一圓。則

(i) 曲線與適宜小之半徑之圓。有二點(Q 及 Q') 相交。(是曲線的一價連續之條件也)。

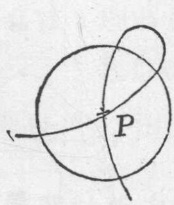
(ii) PQ, PQ' 之角 QPQ' 於圓之半徑的小之極限。而等於 π。(是切線連續變化之條件也)。

此為普通點之查定。

曲線上之點。此查定若不適用。則此點稱曲線上之奇點 (*Singular point*)。於晚近曲線屢屢得實見者。有次之五種。

(1) 重複點 (*Multiple point*)。

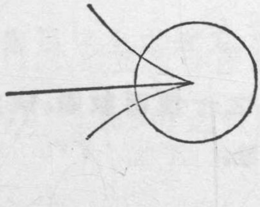
曲線與圓相交有三或三以上之點。則當其圓之中心之點 P。曰重複點。即過 P 有二或二以上之曲線枝。特於此點各曲線枝之切線異其方向。則此點曰結節點 (*Node*)。



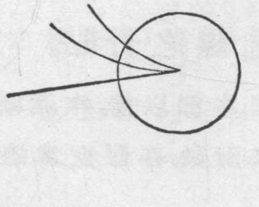
(2) 尖點 (*Cusp*)。

於曲線二枝之點 P 有共通切線。且其二枝雖於此點一方之側切於切線。然在於此點終止。則此點曰尖點。

甲



乙



尖點有二種。於切線反對之側。各有一枝相切。如(甲圖)。是爲第一種尖點。又稱角狀尖點(*Keratoid cusp*)。二枝切於切線之同側。如(乙圖)。是爲第二種尖點。又稱嘴狀尖點(*Rhamphoid cusp*)。

任何尖點。以P爲中心之圓。與曲線雖有Q, Q'二點相交。然$Q\hat{P}Q'$的極限收斂爲0。

(3) 孤立點(*Isolated point*)。

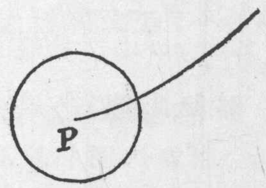
點P雖存在。然其近傍爲曲線。是謂孤立點。

此以P爲中心之圓。與曲線不相交。

解析上。孤立點得作爲二個虛曲線唯一實點相交看。

此或稱共軛點(*Conjugate point*)。

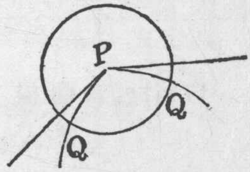
(4) 終止點(*Point d'arrêt*)。



至曲線的P點有一枝。且於此點終止。則此點曰終止點。

此以P爲中心之圓與曲線。唯有一點相交。

(5) 角折點(*Point saillant*)。



曲線有二枝於點P相合。且終止。特切線之方向各異耳。則此點曰角折點。

換言之。曲線之切線。過此點不爲連續之變化。而起飛躍之不連續。

此$Q\hat{P}Q'$的極限不等於π。

(注意) 終止點。角折點。並無適切之英語。故均示以法語。然亦非譯自法語。因法語*Point Saillant*寧可譯爲凸起點。彼德語之*Endpunkt, Eckpunkt*。最適應於吾之命名也。

10. 曲線奇點之查定。

關於直交軸之曲線方程式爲

$$F(x, y)=0.$$

$x_0\ y_0$ 爲曲線上之一點。於此點之近旁。假定在展開 $F(x, y)$ 爲特勞氏級數之下。則此點 $x_0|y_0$ 爲普通點耶。抑爲奇點耶。求其驗知之法。則

先變換坐標軸。而令

$$x=x_0+\xi,\quad y=y_0+\eta.$$

然 $$F(x_0+\xi, y_0+\eta)=F(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\delta}{\delta x_0}\xi+\frac{\delta}{\delta y_0}\eta\right)F(x_0, y_0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{\delta x_0}\xi+\frac{\delta}{\delta y_0}\eta\right)^2F(x_0, y_0)$$
$$+\ldots$$

略記此爲

$$=F(x_0, y_0)+F'_{x_0}\xi+F'_{y_0}\eta$$
$$+\frac{1}{2}(F''_{x_0x_0}\xi^2+2F''_{x_0y_0}\xi\eta+F''_{y_0y_0}\eta^2)$$
$$+\ldots$$
$$=0$$

以 $x_0|y_0$ 爲曲線上之點。而

$$F(x_0, y_0)=0.$$

故 $$F'_{x_0}\xi+F'_{y_0}\eta+\frac{1}{2}(F''_{x_0x_0}\xi^2+2F''_{x_0y_0}\xi\eta+F''_{y_0y_0}\eta^2)+\ldots=0\ldots\ldots(1)$$

今過新原點(舊 $x_0|y_0$ 點)之直線爲

$$\eta=t\xi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ξ 爲其截曲線之點之橫坐標。則

$$(F'_{x_0}+F'_{y_0}t)\xi+\frac{1}{2}(F''_{x_0x_0}+2F''_{x_0x_0}t+F''_{y_0y_0}t^2)\xi^2+\ldots=0\ldots\ldots(3)$$

(I) F'_{x_0}與F'_{y_0}於x_0 y_0同時不爲零。然則從上之方程式得

單根$\xi=0$.

以曲線過新原點。當然得單根$\xi=0$。雖然。特於直線(2)之方向t爲

$$F'_{x}+F'_{y_0}t=0 \qquad \text{但}\ F'_{y_0}\neq 0).$$

試選定之。則$\xi=0$爲(3)之二重根。

即於(2)。而令

$$t=-\frac{F'_{x_0}}{F'_{y_0}}.$$

則 $$F'_{x_0}\xi+F'_{y_0}\eta=0.$$

截曲線之二點。相接近於無限之極限。即爲切線。(結果與第二節之公式(1″)爲一致)。

若$F'_{y_0}=0$。則不可假定$F'_{x_0}\neq 0$。而直線(2)之方程式爲$\xi=\tau\eta$。可到着同一之結果。

然則F'_{x_0}, F'_{y_0}皆於$x_0|y_0$之近旁爲連續。則$x_0|y_0$爲普通點。

故曰

$F'(x,y)$試展開爲特勞氏之級數。且F'_x, F'_y在$F'(x,y)=0$上之點$x_0|y_0$於其近旁爲連續。又於$x_0|y_0$同時不爲0。則$x_0|y_0$爲曲線$F(x,y)=0$之普通點。

(II) $F'_{x_0}=0$, $F'_{y_0}=0$。而$F''_{x_0x_0}$, $F''_{x_0y_0}$, $F''_{y_0y_0}$同時不爲零。

則從(3)以

$$\frac{1}{2}(F''_{x_0x_0}+2F''_{x_0y_0}t+F''_{y_0y_0}t^2)\xi^2+\ldots=0.$$

而直線(2)之方向t不拘如何。$\xi=0$爲二重根。

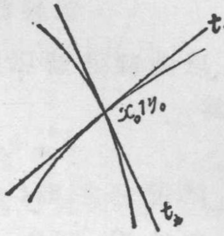
故知曲線之二枝過新原點。

更特滿足t爲二次方程式。如

$$F''_{x_0x_0}+2F''_{x_0y_0}t+F''_{y_0y_0}t^2=0.$$

試選定之。則於其方面僅一ξ收歛爲0。而$\xi=0$爲三重根。

判別上之二次方程式之根。分論如次。



(i) $F''_{x_0x_0}, F''_{y_0y_0}-(F''_{x_0y_0})^2<0$

此可得二個不相等之實根t_1, t_2。於此二方向爲曲線一枝之切線。故$x_0|y_0$爲二重點(即結節點)。

(ii) $F''_{x_0x_0}, F''_{y_0y_0}-(F''_{x_0y_0})^2>0.$

此爲虛根。而t任爲如何。亦不能得切於曲線之直線。故新原點不可不爲孤立點。

(iii) $F''_{x_0x_0}, F''_{y_0y_0}-(F''_{x_0y_0})^2=0.$

以得實而等之根t。故此曲線於此點不爲孤立點。而有共同切線耶。抑或爲尖點耶。實難限制。

(III) $F'_{x_0}=0$, $F'_{y_0}=0$, $F''_{x_0x_0}=0$, $F''_{x_0y_0}=0$, $F''_{y_0y_0}=0$。而 $F'''_{x_0x_0x_0}$, $F'''_{x_0x_0y_0}$, $F'''_{x_0y_0y_0}$, $F'''_{y_0y_0y_0}$悉同時不爲零。

於此$x_0|y_0$而$\xi=0$爲三重根。

而特定t適於三次方程式。如

$$F'''_{x_0x_0x_0}+3F'''_{x_0x_0y_0}t+3F'''_{x_0y_0y_0}t^2+F'''_{y_0y_0y_0}t^3=0.$$

則$\xi=0$爲四重根。即$x_0|y_0$爲三重點。

$F'''_{x_0x_0x_0}$等皆爲零。以此推之。得四重點,五重點等。要之

試展開$F(x, y)$爲特勞氏之級數。且F'_x, F'_y於連續區域內爲奇點。則

$$\frac{\delta F}{\delta x}=0, \quad \frac{\delta F}{\delta y}=0.$$

而於其點爲 $\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 F}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 F}{\delta x\delta y}\right)^2 \gtreqless 0.$

從而爲結節點或孤立點。

爲 $$\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 F}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 F}{\delta x\delta y}\right)^2=0.$$

則爲二重點。

又 $$\frac{\delta^2 F}{\delta x^2},\ \frac{\delta^2 F}{\delta y^2},\ \frac{\delta^2 F}{\delta x\delta y}\ \text{皆爲零。}$$

則爲三重點或更多於三之重複點。

(注意) 代數曲線。必得展爲特勞氏級數。而終止點,角折點。則於此不發生。

〔例〕 1. 求 $x^3-3axy+y^3=0$ $(a>0)$ 之奇點。

(解) 令 $F(x, y)=x^3-3axy+y^3$。則

$$\frac{\delta F}{\delta x}=3x^2-3ay, \quad \frac{\delta F}{\delta y}=-3ax+3y^2.$$

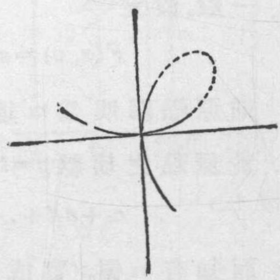
故從 $x^2-ay=0, ax-y^2=0$ 得原點 $0|0$ 爲奇點。(點 $a|a$ 不在曲線上)。

於此奇點 $0|0$ 之切線之方向爲 t。則

$$\left(\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}+2\left(\frac{\delta^2 F}{\delta x\delta y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}t+\left(\frac{\delta^2 F}{\delta y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}t^2=0.$$

從此得 $t=0$ 與 $t=\infty$。

在實際上於此曲線原點之近旁之形。如圖所示。



於代數曲線。惟於原點爲奇點時。則於奇點之切線方程式。準前述之查定。求得簡單之法則如次。

定理. 代數曲線最低次之項爲第m次。($m\geqq2$)於原點有m之重複點。且於此點之切線方程式，令最低次之同次羣等於零以求之。卽得。

(證明) 代數曲線爲$F(x,y)=0$。原點爲奇點。可以

$$\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=0,\quad \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=0.$$

而$F(x,y)$不可有一次項。

卽最少亦不可不爲

$$F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+(\text{高次項})=0.$$

於此以

$$\left(\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=a,\quad \left(\frac{\delta^2 F}{\delta x\delta y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=b,\quad \left(\frac{\delta^2 F}{\delta y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=c.$$

則原點爲二重點。而於原點之切線$y=tx$。其方向t爲下式之根。

$$a+bt+ct^2=0.$$

故解最低次之羣。

$$ax^2+bxy+cy^2=0.$$

卽得。

是直得原點之切線方程式。

一般。假定

$$F(x,y)=a_0x^m+a_1x^{m-1}y+\ldots+a_my^m+(\text{高次項})=0.$$

則原點明明爲m重複點。

於原點之切線$y=tx$。其方向t可從

$$a_0+a_1t+\ldots+a_mt^m=0.$$

而知有m個。(實或虛)

是直同於從

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}y+\ldots\mp a_my^m=0.$$

得切線之方程式。

〔例〕 2. 於 $(y-x^2)^2-x^5=0$。求其原點近旁之形。

(解) 此曲線之最低次項僅有 y^2。而原點爲重複點。於此點之切線爲

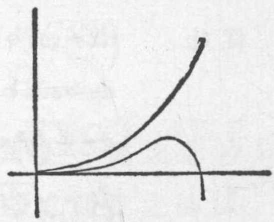
$$y^2=0.$$

故原點爲尖點。又於此點有共通切線之二枝之切點。

然 $x<0$。則 y 爲虛。而曲線於原點爲終止。從而原點爲尖點。

今從原方程式求 y。則

$$y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}=x^2(1\pm\sqrt{x}).$$



而 $0\leqq\sqrt{x}<1$ 之間。y 之二值任何亦爲正。若 $1<\sqrt{x}$。則 y 之值一正一負。

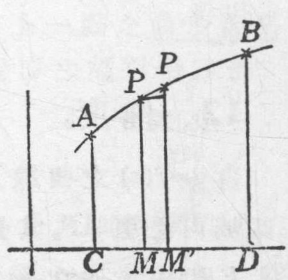
故原點之近旁如圖所示。卽原點爲第二種尖點。

11. 弧之微分。

於方程式 $y=f(x)$ 之連續區域內。

從此曲線之一部分。曰其弧 (*Arc*)。

今暫承認弧 AB 之長。以 s 表之。



其上二點 $P(x|y)$, $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 之間之弧 PP' 命爲 Δs。則

$$\overline{PP'}=\sqrt{\overline{\Delta x^2}+\overline{\Delta y^2}}$$

$$=\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

實際上。規定 P' 與 P 接近於無限之極限。則弧 PP' 等於 $\overline{PP'}$。即

$$Lim\, \Delta s = Lim\, \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

表以微分之關係。則

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$= dx\sqrt{1+f'(x)^2}.$$

而此 ds 稱弧之微分 (*Differential of Arc*)。

於極坐標式之曲線。則

$$x = r\cos\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta.$$

從此　$dx = \cos\vartheta\, dr - r\sin\vartheta\, d\vartheta.$

$$dy = \sin\vartheta\, dr + r\cos\vartheta\, d\vartheta.$$

$\therefore$　$dx^2+dy^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2.$

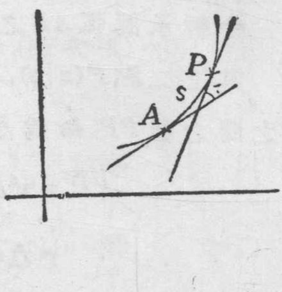
$\therefore$　$ds = \sqrt{r^2 d\vartheta^2 + dr^2}$

$$= d\vartheta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}.$$

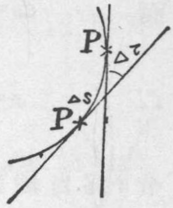
(注意)　弧之長。本於 ds 之規約。此乃積分極限值最普通之說也。

12. 曲度。

自 $y=f(x)$ 之曲線上。而於 $y''\neq 0$ 之區域內之弧 AP。其長度以 s 表之。於 A, P 切線方向之變角令爲 τ。則 τ 爲曲線之弧之全曲度 (*Total curvature*)。



$\frac{\tau}{s}$ 爲其平均曲度 (*Mean curvature*)。



令 P, P' 爲弧上之二點。$\Delta\tau$ 爲弧 $PP'=\Delta s$ 之全曲度。

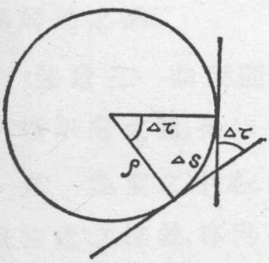
令 P' 無限接近於 P 之極限爲

$$Lim\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{d\tau}{ds}.$$

則此極限值。稱爲於點 P 之曲度。

特於半徑 ρ 之圓爲

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{1}{\rho}.$$



如是於圓任何之部分。而 Δs 有一定之關係。故

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{\rho}.$$

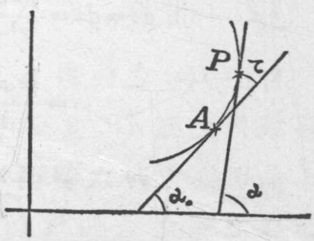
然則某曲線於其上一點之曲度考之。必常有與此相等之曲度之圓爲

$$\rho=\frac{1}{\frac{d\tau}{ds}}=\frac{ds}{d\tau}.$$

從此得以定某曲線。此圓之半徑 ρ。曰曲線上一點之曲度半徑 (*Radius of curvature*)。

又令 A, P 之切線角爲 α_0, α。則

$$\tau=\alpha-\alpha_0.$$



$\therefore$ $$d\tau=dx.$$

以 $$\tan x=\frac{dy}{dx}.$$

$\therefore$ $$d\tau=d\left(\tan^{-1}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^2+dy^2}.$$

而 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

∴ $$\rho=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}.$$

令x爲自變數。則

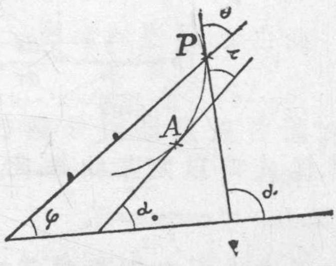
$$d\tau=d\left(tan^{-1}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx.$$

從此 $$\rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

次於極坐標式。則

$$\alpha=\theta+\phi.$$



而以 $tan\,\theta=\frac{r}{r'}$.

∴ $$\alpha=tan^{-1}\frac{r}{r'}+\phi.$$

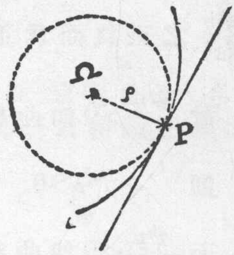
∴ $$d\tau=d\alpha=\frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2}d\phi+d\phi$$

$$=\frac{r^2-rr''+2r'^2}{r^2+r'^2}d\phi.$$

而 $ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\phi$.

∴ $$\rho=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}\quad\left(但\ r'=\frac{dr}{d\phi},\ r''=\frac{d^2r}{d\phi^2}\right)$$

（注意一） 於曲線上之一點P。求其曲度半徑。



作與此相等之半徑之圓於曲線同側。且切於曲線之切線之切點P。則此圓稱P點之曲度圓（*Circle of curvature*）。其中心曰曲度之中心（*Centre of curvature*）。

（注意二） $y''=0,\ r^2+2r'^2-rr''=0$

亦規約爲曲度。此即彎曲點。其$\rho=\infty$而曲度之中心得看做走於無窮遠之處。

（注意三） 曲度圓爲過曲線上三點之圓。於三點無限相接近之極限處之圓。得以見之。

又 曲度之中心。爲曲線上二點之法線之交點。取其二點無限相近之位置。亦得見之。

此二者。詳述於後節。

〔例〕 1. 曲線$y=x^4-4x^3-18x^2$。求其原點之曲度半徑。

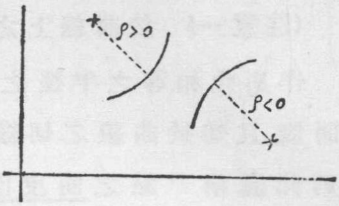
（解） $$\frac{dy}{dx}=4x^3-12x^2-36x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2-24x-36.$$

$$\therefore \qquad \rho=\frac{\{1+(4x^3-12x^2-36x)^2\}^{\frac{3}{2}}}{12x^2-24x-36}.$$

$x=0$ 令分子之平方根爲正。則得$-\dfrac{1}{36}$.

答 $\dfrac{1}{36}$.



（注意）分子之平方根為正。則其絕對值為弧之微分 ds。於是 ρ 從 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 之正負而為正負。

故 $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ 即曲線下凸。

則 $\rho>0$.

而 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ 即曲線上凸。

則 $\rho<0$.

〔例〕 2. 求 $r=a(1-\cos\theta)$ 之曲度半徑。

（解） $r'=a\sin\theta$.

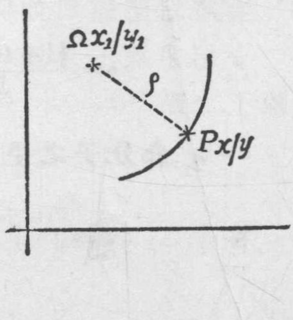
$r''=a\cos\theta$.

$$\therefore \quad \rho=\frac{a^3\{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\}^{\frac{3}{2}}}{a^2\{(1-\cos\theta)^2+2\sin^2\theta-(1-\cos\theta)\cos\theta\}}$$

$$=\frac{a(2-2\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{3-3\cos\theta}=\frac{\sqrt{4}a}{3}(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}=\frac{4a}{1}\sin\frac{\theta}{2}.$$

13 縮閉線及伸開線。

一曲線。其曲度中心之軌跡。曰此曲線之縮閉線(*Evolute*)。對於縮閉線而稱原曲線為伸開線(*Involute*)。



於曲線上之點 $P(x|y)$。令其曲度中心為 $\Omega(x_1|y_1)$。則

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2=\rho^2.$$

然 $x_1|y_1$。又為在 P 點法線上之點。而

$$(x_1-x)dx+(y_1-y)dy=0.$$

從此二方程式。

$$\text{得}\left\{\begin{aligned} x_1-x&=-\frac{(dx^2+dy^2)\,dy}{dx\,dy^2-dy\,d^2x},\\ y_1-y&=-\frac{(dx^2+dy^2)\,dx}{dx\,dy^2-dy\,d^2x}.\end{aligned}\right.$$

然 x, y 爲單一自變數 t 之函數。則從此消去 t。而求得縮閉線之方程式爲

$$F(x_1, y_1)=0.$$

〔例〕 求橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之縮閉線。

(解) 令 $x=a\cos\varphi$. 則從方程式得 $y=b\sin\varphi$.

$$\therefore \qquad dx=-a\sin\varphi\,d\varphi, \quad dy=b\cos\varphi\,d\varphi.$$

$$d^2x=-a\cos\varphi\,d\varphi^2, \quad d^2y=-b\sin\varphi\,d\varphi^2.$$

$$\therefore \qquad x_1-a\cos\varphi=-\frac{b\,(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi^3}{ab\,d\varphi^3}.$$

$$y_1-b\sin\varphi=-\frac{a\,(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi^3}{ab\,d\varphi^3}.$$

$$\therefore \qquad x_1=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\varphi, \quad y_1=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\varphi.$$

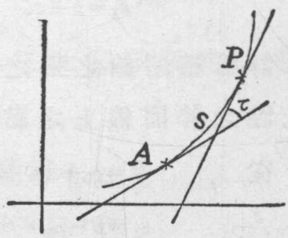
試從此消去 φ。則

$$a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{2}{3}}=(a^3-b^3)^{\frac{2}{3}}$$

是橢圓之縮閉線之方程式。

次將縮閉線與伸開線之關係，述其二三。

令縮閉線上之點 $\Omega(x_1|y_1)$ 與伸開線上之點 $P(x|y)$ 相對應則



$$x_1=x+\rho\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=x-\rho\sin\alpha,$$

$$y_1=y+\rho\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=y+\rho\cos\alpha.$$

故 $$dx_1 = dx - \rho\cos\alpha\, d\alpha - \sin\alpha\, d\rho.$$
$$dy_1 = dy - \rho\sin\alpha\, d\alpha + \cos\alpha\, d\rho.$$

然由 $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha$。得

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dy}{ds} = \cos\alpha.$$

$$\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dy}{ds} = \sin\alpha.$$

∴ $$dx = \cos\alpha\, ds = \cos\alpha \cdot \rho\, d\alpha.$$
$$dy = \sin\alpha\, ds = \sin\alpha \cdot \rho\, d\alpha.$$

故 $$dx_1 = -\sin\alpha\, d\rho.$$
$$dy_1 = \cos\alpha\, d\rho.$$

從此

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\cot\alpha \quad \text{..............................}(1)$$

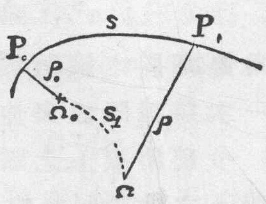
$$dx_1^2 + dy_1^2 = d\rho^2 \quad \text{..............................}(2)$$

從(1)。則縮閉線之切線爲伸開線之法線。

從(2)。縮閉線之弧之微分 ds_1 等於 $d\rho$ 之絕對值。

故今命

$$ds_1 = d\rho.$$



則從此

$$s_1 = \rho + c.$$

計算縮閉線之弧之始點爲 Ω_0。對應於此點之伸開線上之點爲 P_0。命 P_0 至 Ω_0 之曲度爲 ρ_0。則 $s_1 = 0$。

從 $0 = \rho_0 + c$. ∴ $c = -\rho_0$.

∴ $$s_1 = \rho - \rho_0.$$

卽縮閉線之弧$\Omega_0\Omega$之長s_1。等於其兩端之點爲曲度中心之曲度半徑之差。

從 $ds_1=-d\rho$. 得 $s_1=\rho_0-\rho$.

（注意一） 取ρ長之絲一端。固定於曲線$\Omega\Omega_0$之柵上之一點Ω。令絲在於Ω之切線之方向之直線上儘絲伸長。他一端P移動於柵$\Omega\Omega_0$之側。絲常採切於$\Omega\Omega_0$之切線之方向。且密着於柵之部分之長。等於餘絲之長與ρ之差。故P之軌跡爲伸開線。而柵爲其縮閉線也。從此事實得伸開，縮閉之命名。

（注意二） 從絲長ρ之增減。而對於同一之縮閉線可得無限多數之伸開線。換言之。一曲線之縮閉線雖確定唯一個。而伸開線有無限多數之一羣。

（注意三） 於曲線之彎曲點。其曲度之中心走至無窮遠。從而曲度半徑爲無窮遠之切線之極限。卽於彎曲點之法線爲縮閉線之漸近線。

14 包絡線。

拋物線$y^2=4dx$。令d爲種種之值。則可得共軸共頂點之種種拋物線。

又$x^2+y^2=r^2$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$等。變$r$及僅變$a$或$b$。亦同樣也。

由是知一般曲線之方程式有若干常數。從此常數確定曲線之形狀位置等。

今以α表曲線之一個常數。則其方程式書爲

$$f(x, y, \alpha)=0.$$

其a可作變數看。是稱曲線之<u>變率</u> (*Parameter*)。

從變率之變化而生一羣曲線。是謂<u>同類曲線</u> (*Curves of a family*)。

今令變率a之二值爲$a, a+\Delta a$。則同類曲線爲

$$f(x, y, a)=0.$$

$$f(x, y, a+\Delta a)=0.$$

從此可得一切交點。又

$$\frac{f(x, y, a+\Delta a)-f(x, y, a)}{\Delta a}=0.$$

亦能滿足。

$f(x, y, a)=0$ 的a之函數。令有有限確定之第一導來函數。則於極限而

$$f(x, y, a)=0, \quad f(x, y, a+da)=0.$$

其相鄰接之同類曲線之交點。在

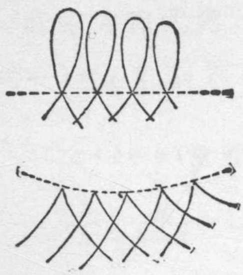
$$\frac{\delta}{\delta a}f(x, y, a)=0.$$

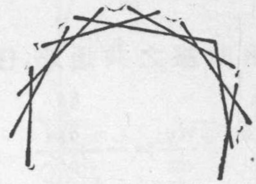
亦能滿足。故從

$$\begin{cases} f(x, y, a)=0, \\ \dfrac{\delta}{\delta a}f(x, y, a)=0. \end{cases}$$

消去a。則相鄰接之同類曲線。可得其交點之極限之位置之軌跡。

此交點之極限之位置。若不在曲線之奇點。則此軌跡稱 $f(x, y, a)=0$ 之<u>包絡線</u> (*Envelope*)。





(注意) 曲線之奇點之軌跡。從奇點之種類。而呼結節點之軌跡、尖點之軌跡等。此等均缺少如次所述包絡線之性質。

同類曲線之包絡線。其各曲線與此共通點有共通切線。

(證明) 令同類曲線爲

$$f(x, y, \alpha)=0. \quad (\alpha\text{ 爲變率})$$

則包絡線爲

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha)=0, \\ \dfrac{\delta}{\delta\alpha}f(x, y, \alpha)=0. \end{cases}$$

同類曲線之一個(對於α之某定值)切線方向率$\dfrac{dy}{dx}$。可從下式求之。

$$\frac{\delta f}{\delta x}dx+\frac{\delta f}{\delta y}dy=0.$$

包絡線切線之方向率$\dfrac{dy}{dx}$。從$\dfrac{\delta}{\delta\alpha}(x, y, \alpha)=0$。得$\alpha=\phi(x, y)$。此可置換於$f(x, y, \alpha)=0$。

從 $$\frac{\delta f}{\delta x}dx+\frac{\delta f}{\delta y}dy+\frac{df}{\delta\alpha}d\alpha=0.$$

可得所求。

然於後者。以 $\frac{\delta f}{\delta a}=0$.

而於兩曲線之共通點。任何亦爲

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}.$$

此相爲一致。

（注意） 奇點之軌跡。於奇點以 $\frac{\delta f}{\delta x}=0, \frac{\delta f}{\delta y}=0$。則如上所記之方向率爲不定。

〔例〕 1. 有一定面積。試求其共軸楕圓之包絡線。

（解） 令楕圓之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

其面積爲 πab。令 πk^2 代之。前共軸楕圓之同類曲線。可得變其變率 $a\left(b \text{ 則 } \frac{k^2}{a}\right)$。

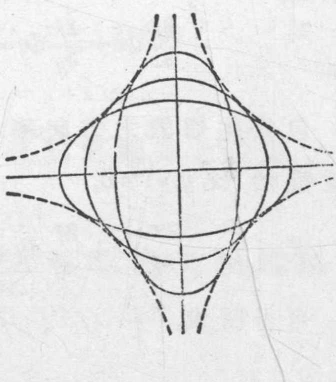
故包絡線之方程式爲

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2y^2}{k^4}=1, \\ -\frac{2x^2}{a^3}+\frac{2ay^2}{k^4}=0. \end{cases}$$

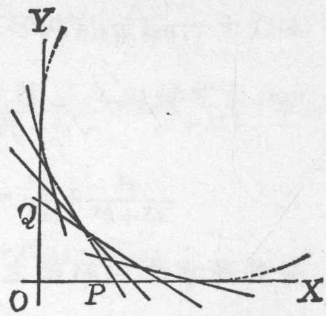
從此消去 a。即

$$4x^2y^2=k^4.$$

即爲共軛等邊雙曲線。



〔例〕 2. 一直線交於直角坐標軸之點爲 P, Q。而 $OP+OQ$ 爲一定。問此直線之包絡線如何。



（解） 直線方程式爲

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

則 $a+b=k$（常數）。

$$\therefore\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{k-a}=1.$$

即 $(k-a)x+ay=a(k-a)$

及 $-x+y-k-a-a=0.$

從此消去a。則得包絡線爲拋物線。如

$$(x+y-k)^2-4xy=0.$$

〔例〕 3. 從二定點之距離之積。如爲一定。試求其直線之包絡線。

（解） 令二定點爲 $(-k|0)$, $(k|0)$。此關於定軸之直線方程式爲

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha+p=0.$$

從二定點之距離爲

$$-k\cos\alpha+p,\quad k\cos\alpha+p.$$

而 $p^2-k^2\cos^2\alpha=c^2$. （c 爲常數）

則 $x\cos\alpha+y\sin\alpha\pm\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}=0.$

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha\mp\frac{k^2\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}}=0.$$

試先求x, y。則

$$x=\mp\cos\alpha\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}\mp\frac{k^2\cos\alpha\sin^2\alpha}{\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}}$$

$$=\mp\frac{c^2+k^2}{\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}}\cos\alpha.$$

$$y=\mp \sin a\sqrt{c^2+k^2\cos^2 a}\mp\frac{k^2\cos^2 a\sin a}{\sqrt{c^2+k^2\cos^2 a}}$$

$$=\mp\frac{c^2}{\sqrt{c^2+k^2\cos^2 a}}\sin a.$$

$$\therefore\qquad \frac{x^2}{c^2+k^2}+\frac{y^2}{c^2}=1.$$

是即所求之包絡線之方程式。

〔例〕 4. 於曲線$\left(\frac{x-a}{h}\right)^2+\left(\frac{y-b}{k}\right)^2=1$。而$h, k$爲常數。而$a, b$爲變數。但常爲$\left(\frac{a}{h}\right)^2+\left(\frac{b}{k}\right)^2=1$。求此曲線之包絡線。

答 $\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}=4.$

〔例〕 5. 垂於拋物線之軸之弦。爲直徑之圓。求其包絡線。

答 有同軸之拋物線。

15. 二個曲線之切觸。

二個曲線之方程式爲

$$y=f(x),\quad y_1=f_1(x).$$

於某x之值。而

$$y=y_1,\quad y'=y_1',\quad y''=y_1'',\quad \ldots,$$

$$y^{(\mu)}=y_1^{(\mu)},\quad y^{(\mu+1)}\neq y_1^{(\mu+1)}.$$

此稱兩曲線。於點$P(x|y)$爲μ次之切觸(*Contact of the μ^{th} order*)。

今於x之近旁。假定y, y_1任何亦得展開爲特勞氏之級數。

令$Y=f(x+\Delta x), Y_1=f_1(x+\Delta x)$. 則

$$Y=y+y'\frac{\Delta x}{1!}+y''\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots+y^{(\mu)}\frac{\Delta x^\mu}{\mu!}+y^{(\mu+1)}\frac{\Delta x^{\mu+1}}{(\mu+1)!}+R_{\mu+2}.$$

$$Y_1=y_1+y_1'\frac{\Delta x}{1!}+y_1''\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots+y_1^{(\mu)}\frac{\Delta x^\mu}{\mu!}+y_1^{(\mu+1)}\frac{\Delta x^{\mu+1}}{(\mu+1)!}+R'_{\mu+2}.$$

以最初 $(\mu+1)$ 項皆相等。而

$$Y-Y_1=\frac{y^{(\mu+1)}-y_1^{(\mu+1)}}{(\mu+1)!}\Delta x^{\mu+1}+R_{\mu+2}-R'_{\mu+2}.$$

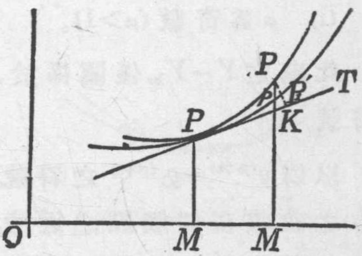
然 $\underset{\Delta x=0}{Lim}(Y-Y_1)$ 爲第 $(\mu+1)$ 次之無限小。

而 $y=y_1$ 則示 $x|y$ 與 $x|y_1$ 爲共通點。

$y'=y_1$ 則示於共通點有共通切線。

$y''=y_1''$ 則示共通切線之同側爲凸凹。或於共通點爲雙方之彎曲點。

故一般表 μ 次之切觸。如下圖。



$OM=x,\quad PM=y=y_1,$

$P'M'=Y,\quad pM'=Y_1.$

從此 $Y-Y_1=P'p.$

於此極限爲第 $(\mu+1)$ 次之無限小。則

$$\underset{MM'=0}{Lim}\frac{P'p}{(MM')^{\mu+1}}.$$

表不爲零之有限值。

今變換此切線 PT 與 P 點之法線爲坐標軸。

令 $PT, P'M'$ 之交點爲 K。故以 $Lim\frac{PK}{MM'}$ 爲常數。而 $Lim\,PK$ 與 $Lim\,MM'$ 爲同次無限小。又令 $P'N\perp PT$。故以

$$KN=P'K\sin\alpha=(Y-y-y'\Delta x)\sin\alpha.$$

而 $Lim\ KN$ 爲第二次無限小。

故 $Lim\ PN$ 與 $Lim\ MM'$ 爲同次無限小。

次令 PN 與曲線 y_1 之交點爲 P_1'。則

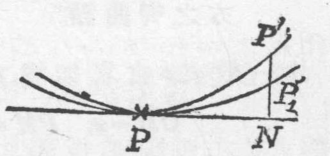
$$\frac{P'P_1'}{P'p}=\frac{\sin\hat{p}}{\sin\hat{P}_1'}.$$

故 $Lim\dfrac{P'P_1'}{P'p}$ 當爲不爲零之有限值。從而 $Lim\ P'P_1'$ 與 $Lim\ P'p$ 爲同次無限小。

故於 μ 次切觸點之近旁。得

$$\lim_{PN=0}\frac{P'P_1'}{(PN)^{\mu+1}}=k\ (\text{不爲零之有限值})。$$

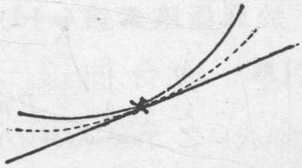
然則兩曲線在共通切線之同側明矣又



(i) μ 爲奇數 $(\mu>1)$。

此處之 $Y-Y_1$。僅關係於 Δx 之符號。

以依 $y^{(\mu+1)}-y_1^{(\mu+1)}$ 之符號。而一方之曲線在切觸點之近旁。他方夾於曲線與切線之間。

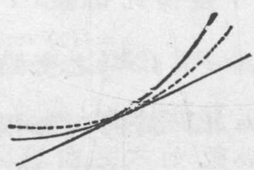


(ii) μ 爲偶數。

與前相反。變 Δx 之符號。而兩曲線於切觸點相截合。

(注意) 二個曲線爲

$$y=f(x),\quad y_1=f_1(x).$$



令其 $(\mu+1)$ 個點。如 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ (順其大小之次序)。

則 $$y-y_1=f(x)-f_1(x)=F(x).$$

此等函數有 $(\mu+1)$ 個之 x 爲零。

然則依洛兒氏之定理(第二章第14節)。

$$x_0<x_0'<x_1<x_1'<x_2<\ldots,<x_{\mu-1}<x'_{\mu-1}<x_\mu.$$

於點 $x_0', x_1', x_2, \ldots, x'_{\mu-1}$. 從而

$$F'(x)=y'-y_1'=0.$$

又 $$x_0'<x_0''<x_1'<\ldots,<x''_{\mu-2}<x'_{\mu-1}.$$

於點 $x_0'', x_1'', x_2'', \ldots, x''_{\mu-2}$. 從而

$$F''(x)=y''-y_1''=0$$

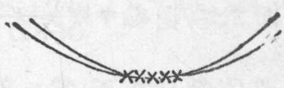
試考其次第高次之導來函數。惟最後一點 $x_0^{(\mu)}$ 爲

$$F^{(\mu)}(x)=y^{(\mu)}-y_1^{(\mu)}=0.$$

此處之 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ 悉收斂爲 x_0。則於點 x_0 而得

$$y=y_1,\ y'=y_1',\ y''=y_1'',\ \ldots,\ y^{(\mu)}=y_1^{(\mu)}.$$

等 μ 次之切觸。通俗述此爲



<u>μ 次之切觸。有 $(\mu+1)$ 個相鄰接之點爲共通。</u>

16. 吻合曲線。

曲線 C 之方程式爲

$$y=f(x).$$

$f(x)$ 於曲線上之點 $x_0|y_0$ 之近旁。假定得展開爲可西氏級數。如

$$y=f(x)=y_0+y_0'(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\ldots.$$

今考有 $(n+1)$ 個之常數 $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$。且關於 $x-x_0$。得展開爲冪級數。如次之曲線 C'。

$$y_1=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n$$
$$+A_1(x-x_0)^{n+1}+A_2(x-x_0)^{n+2}+\ldots.$$

「但A_1, A_2爲$c_0, c_1, \ldots, c_n$之函數」。

然μ爲比n更小之整數。兩曲線C, C'有μ次之切觸。則

$$c_0=y_0,\ c_1=y_0',\ c_2=\frac{y_0''}{2!},\ \ldots,\ c_\mu\frac{y_0^{(\mu)}}{\mu!}.$$

且如 $$c_{\mu+1}\neq\frac{y_0^{(\mu+1)}}{(\mu+1)!}.$$

使其常數爲確定可也。而所餘$(n-\mu-1)$個之常數。無不可任意置之。

又$c_{\mu+1}$以能充上式不等之條件爲限。亦可任意。從而曲線C之形狀及位置全不確定。

雖然。特令$\mu=n$。

則以$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$之常數悉確定。從而曲線$C'$亦全確定。

而於 $$A_1\neq\frac{y_0^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

則C'與C爲正。爲n次之切觸。

是謂此確定曲線C'於C之點$x_0|y_0$爲吻合 (*To osculate*)。又確定曲線C'曰吻合曲線 (*Osculating curve*)。一名切觸曲線。

若定$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$的$n$次切觸爲

$$A_1=\frac{y_0^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

又，更至$A_2, \ldots$之最初若干的同樣之值。則期n次之切觸。而得n次以上之切觸。是曰吻合過 (*Superosculation*)。

次示淺近之切觸曲線。

(I) 吻合直線 (*Osculating straight line*)。

曲線C'之方程式爲

$$y_1=c_0+c_1(x-x_0).$$

令此與曲線C吻合。則

$$c_0=y_0=f(x_0),\quad c_1=y_0'=f'(x_0)$$

決定c_0, c_1即得。即

$$y_1=y_0+f'(x_0)(x-x_0).$$

即 $$y_1-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

是第一次之切觸爲吻合直線。

而是不外切線之方程式。故曰

吻合直線在第一次之切觸爲切線。

(II) 吻合圓 (*Osculating circle*)。

令圓之方程式爲

$$(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2=r^2.$$

從α, β, r^2組成前所述之c_0, c_1, c_2。暫且看做α, β, r爲變率。

欲令此圓與曲線$y=f(x)$吻合。則必使

$$y_1=y,\quad y_1'=y',\quad y_1''=y''.$$

然欲得y_1, y_1', y_1''。則從

$$\begin{cases}(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2=r^2,\\ x_1-\alpha+(y-\beta)y_1'=0,\\ 1+y_1'^2+(y_1-\beta)y_1''=0.\end{cases}$$

解之卽得。而代入吻合之條件。則

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,\\ x-\alpha+(y-\beta)y'=0,\\ 1+y'^2+(y-\beta)y''=0.\end{cases}$$

由此於曲線上之點$x|y$之吻合圓。決定其常數α, β, r如次。

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{(1+y'^2)\,y'}{y''}, \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''}, \\ r = \dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \end{cases}$$

因此r等於曲度半徑。$\alpha|\beta$即吻合圓之中心。爲曲度圓之中心。故曰

<u>吻合圓與曲度圓同一。</u>

(III) <u>吻合圓錐曲線</u> (*Osculating conic*)。

令最普通圓錐曲線之方程式爲

$$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0.$$

是與五個變率c_0, c_1, c_2, c_3, c_4相當。

吻合當有四次切觸。

但拋物線減少一常數項。而爲三次切觸。前條吻合圓。更減少一個常數項。而爲二次切觸。

第九章 平面曲線各論

1. 曲線之追跡及其方法。

表平面曲線之方程式。而畫於平面上。是謂<u>曲線之追跡</u>(*Tracing of curve*)。

追跡普通之方法。爲對應一個坐標種種之值。以求他坐標之值。在關於坐標軸。而標記曲線上之數個點。

例如 $y^2=x^2(x-1)$。

與 x 以 $0, 1, 2, 3, \ldots$。則可得其相對應之 y 之值。

從此此曲線不難察知其大體。

雖然。此特察知其大體而止耳。至如點 1|0 之近傍。須有一段之精細事。不僅此也。

曲線方程式。關於任何兩坐標。在三次或三次以上之高次方程式。解法繁煩。反覆不便。茲據至簡至便之方法。確立追跡之順序如次。

2. 於直角坐標式之曲線追跡。

(1) 先當變方程式之形。以便於追跡。

(2) 於此形而研究曲線。當依次之順序。

(i) 坐標軸 原點,或何等之直線。關於點。檢查其有無對稱(*Symmetry*)。

(ii) 求坐標軸或他特殊直線上之截點。

(iii) 決定曲線存在之區域。

(iv) 求漸近線。且決定此與曲線之關係。

(v) 求奇點。且決定於其近旁之曲線之形。

(3) 次求 $\dfrac{dy}{dx}$ 之後。當爲次之研究。

(vi) 求極大極小之點。

(vii) 定曲線之增減。

(4) 最後求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。當爲次之研究。

(viii) 求彎曲點。

(ix) 定曲線之凸凹。

(x) 求曲度。

其他於某區域計算方程式之一二點。是爲必要。

又 以上綱目中。不見特段之必要。

〔例〕 1. 求 $y^2=\dfrac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}$ 之追跡。但 $a>0$。

(解) 儘其形便於追跡。

(i) 此曲線關於 x 軸對稱。

何則。對於 x 之一值。可得 y 之二值。其絕對值相等。而符號相反。

(ii) x 爲 $0, a, 2a$。則 y 爲 0。

(iii) 以 $x<-3a$ 之間。則 $y^2>0$。而曲線得以存在。

以 $-3a<x<0$ 之間。則 $y^2<0$。而曲線不能存在。

$0<x<a$ 之間。則 $y^2>0$。而曲線存在。

$a<x<3a$ 之間 則 $y^2<0$。而曲線再不存在。

$2a<x$ 之間。則曲線存在。

(iv) $x+3a=0$。則 $y=\infty$ 爲平行於 y 軸之漸近線。

而 (iii) 與 (i) 之曲線在其左側。

又由原方程式(參照第八章第6節)。

得 $$y^2(x+3a)-x(x-a)(x-2a)=0.$$

其最高次項爲 y^2x-x^3。故

從 $$\alpha^2-1=0.\quad 得\quad \alpha=\pm1.$$

又二次項爲 $3ay^2+3ax^2$。故

從 $$\beta=-\frac{3a(1+\alpha^2)}{2\alpha}=-\frac{6a}{\pm2}=\mp3a$$

得次之二個漸近線。

$$y=x-3a,\quad y=-x+3a.$$

而求此二漸近線與曲線之交點。

則從 $(x-3a)^2=\dfrac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}$. 僅得 $x=\dfrac{27}{11}a$.

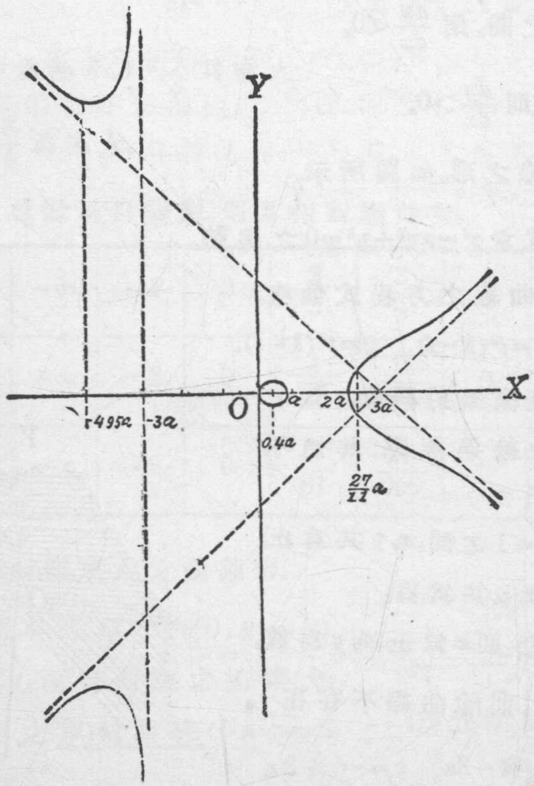
(v) 此曲線爲奇點。何則。

令 $F=y^2-\dfrac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}$.

則 $\dfrac{\delta F}{\delta y}=2y=0$。而 $\dfrac{\delta F}{\delta x}$ 不爲零故也。

(vi) $2\log y=\log x+\log(x-a)+\log(x-2a)-\log(x+3a)$.

$$\frac{2}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-2a}-\frac{1}{x+3a}.$$



然則關於x軸之枝線。爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+3ax^2-9a^2x+3a^3}{\sqrt{x(x-a)(x-2a)(x+3a)}(x+3a)}.$$

從$\dfrac{dy}{dx}=0$。則$x=-4.95a$, $x=0.4a$爲極大或極小之點。

(vii) $x<-4.95a$之間。則$\dfrac{dy}{dx}<0$。從而y因x之增。而反減小。

$-4.95a<x<-3a$之間。則$\dfrac{dy}{dx}>0$。從而y增大。

$0<x<0.4a$之間。則$\dfrac{dy}{dx}>0$。

$0.4a<x<a$之間。則$\dfrac{dy}{dx}<0$。

$2a<x$之間。則$\dfrac{dy}{dx}>0$。

依此得曲線之形。如圖所示。

〔例〕 2. 試求$x^4-xy^2+y^3=0$之追跡。

令$y=xt$。則曲線之方程式如次。

$$x=t^2(1-t),\quad y=t^3(1-t).$$

(i) 此曲線無對稱軸。

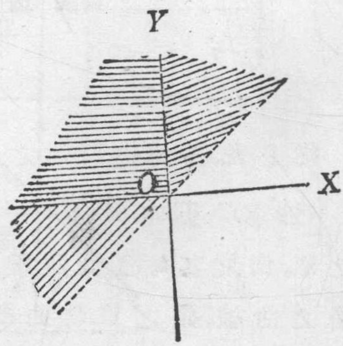
(ii) 此曲線過原點。其他不交於軸。

(iii) $0<t<1$之間。x, y共爲正。

令$t<1$。則x, y共爲負。

又$t<0$之間。則x爲正。而y爲負。

然以$t=\dfrac{y}{x}$。則除曲線不存在之區域外如次。



(iv) 此曲線無漸近線。

(v) $\frac{\delta}{\delta x}(x^4-xy^2+y^3)=4x^3-y^2=0.$

$$\frac{\delta}{\delta y}(x^4-xy^2+y^3)=3y^2-2xy=0.$$

是僅原點爲奇點。而於原點之切線方程式爲$y^3-xy^2=0$。

即 $y=0$ 及 $x=y.$

(vi) $\frac{dx}{dt}=2t-3t^2,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=2-6t.$

$$\frac{dy}{dt}=3t^2-4t^3,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=6t-12t^2.$$

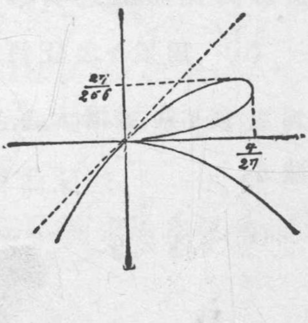
故x於$t=0$爲極小。$t=\frac{2}{3}$爲極大。

而y於$t=\frac{3}{4}$爲極大。

(vii) t如看做爲自變數。則其相對應如次。

t	$-\infty$	-1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
x	$+\infty$	2	0	$\frac{4}{27}$	$\frac{9}{64}$	0	$-\infty$
y	$-\infty$	-2	0	$\frac{8}{81}$	$\frac{27}{256}$	0	$-\infty$

從上表。得如圖所示之曲線形。



(注意) 觀本例。取$x=\phi(t),\ y=\psi(t)$之形。則變其t。而得曲線之追跡。如是之曲線。謂之單軌曲線(*Unicursal curve*)。

3. 關於極坐標式之曲線之追跡。

(1) 先當變方程式為便於追跡之形。

(2) 於此形當如次之研究。

(i) 原線之極或何等直線。關於點而檢查其有無對稱。

(ii) 定曲線存在之區域。

(3) 次求 $\dfrac{dr}{d\phi}$ 之後。當為次之研究。

(iii) 求漸近線(或漸近圓)。且定與曲線位置之關係。

(iv) 求切線與動徑所成之θ角。

(4) 最後求 $\dfrac{d^2r}{d\phi^2}$ 當為次之研究。

(v) 求彎曲點。

(vi) 求曲度。

其他所必要者。為求對應於r或ϕ之特殊值之ϕ或r之值。而摘記曲線上之若干點。

〔例〕 1. 試求$r=a\sec\dfrac{\phi}{3}$ $(a>0)$之追跡。

(解) (i) ϕ之絕對值相等。而符號相反。則r之值亦相等。故原線為此曲線之對稱軸。

(ii) 對於ϕ之任何值亦有r。但$|r|\geqq a$。而$0\leqq\dfrac{\phi}{3}\leqq\dfrac{\pi}{2}$之間。則$r$為正。與$\phi$共為增大。$\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\phi}{3}\leqq\pi$之間。則$r$為負。而其絕對值與$\phi$共減小。

(iii) $\dfrac{\phi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$. 則$r=\infty$。

而以 $$r'=\frac{a}{3}\sin\frac{\phi}{3}\sec^2\frac{\phi}{3}.$$

則 $$極切線影=\frac{r^2}{r'}=3a\csc\frac{\phi}{3}.$$

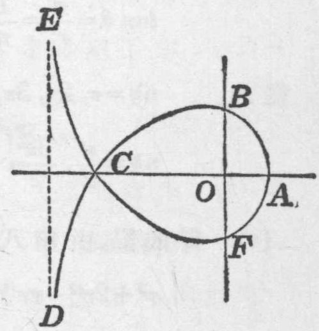
故從 $\frac{\phi}{3}=\frac{\pi}{2}$。則極切線影$=3a$。由是得漸近線。

(iv) 令切線與動徑所成之角爲θ。

則 $$\tan\theta=\frac{r}{r'}=3\cot\frac{\phi}{3}.$$

故

ϕ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\tan\theta$	∞	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$



更摘記次之特殊之點。則曲線之追跡。如圖所示。

ϕ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
r	a	$\frac{2a}{\sqrt{3}}$	$2a$	∞	$-2a$	$-\frac{2a}{\sqrt{3}}$	$-a$
點	A	B	C	D, E	C	F	A

〔例〕 2. 試求$r=a\sin n\phi$ $(a>0)$之追跡。

(解) (i) r與ϕ同時有反對之符號。亦可滿足此方程式。而過原點垂於原線之直線。爲此曲線之對稱軸。

(ii)　對於ϕ之任何值。而常有r。但$|r|\leqq a$。

(iii)　$r'=an\cos n\phi,\quad r''=-an^2\sin n\phi.$

而　　　$n\phi=\dfrac{\pi}{2}$.　即　$\phi=\dfrac{\pi}{2n}$.

$\therefore$　　　$r'=0,\ \ r''<0,\ \ r$ 為極大。

又$\phi=\dfrac{3\pi}{2n}$則極小。$\phi=\dfrac{5\pi}{2n}$則極大。以下準此。

(iv)　切線與動徑所成之角為θ。則

$$\tan\theta=\frac{r}{r'}=\frac{1}{n}\tan n\phi.$$

從此　　$n\phi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$ 為0.

$$n\phi=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots \text{ 為 } \frac{\pi}{2}.$$

(v)　彎曲點。由第八章第8節。

$$r^2+2r'^2-rr''=a^2(\sin n\phi)^2+(1+a^2n^2)(\cos n\phi)^2<0.$$

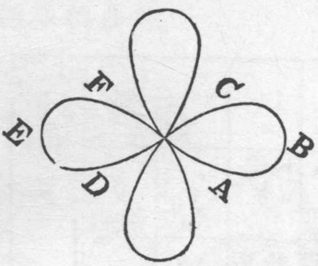
由是彎曲點絕對不存在。

今綜合此等。列表如次。

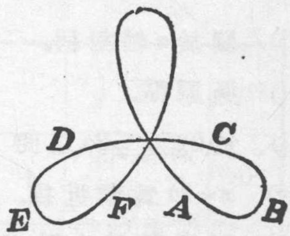
ϕ	0	$\frac{\pi}{4n}$	$\frac{\pi}{2n}$	$\frac{3\pi}{4n}$	$\frac{\pi}{n}$	$\frac{5\pi}{4n}$	$\frac{3\pi}{2n}$	$\frac{7\pi}{4n}$	$\frac{2\pi}{n}$	…
r	0	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$-a$	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	0	…
θ	0	$\frac{1}{n}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{n}$	0	$\frac{1}{n}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{n}$	0	…
點		A	B (極大)	C		D	E (極小)	F		

次圖乃表示n爲2, 3, 4及$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$最淺近之追跡。

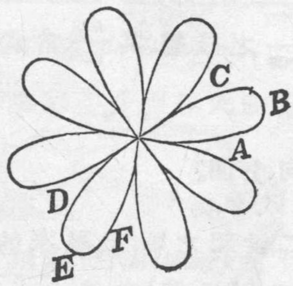
$n=2$



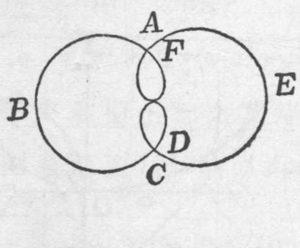
$n=3$



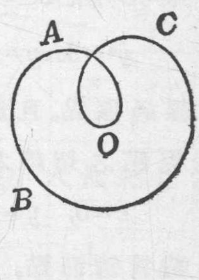
$n=4$



$n=\frac{1}{2}$



$n=\frac{1}{3}$



4. 蔓葉形線 (*Cissoid of Diocles*)。

$$y^2(2a-x)=x^3. \quad (a>0).$$

從此方程式。令變爲

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}.$$

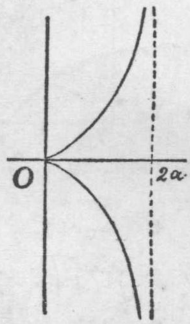
則

(i) 關於x軸對稱。

(ii) 過原點。

(iii) 於$0\leqq x\leqq 2a$之間曲線存在。

(iv) $x=2a$爲漸近線。



(v) 以原點爲尖點。而$y=0$。則爲此點之切線。

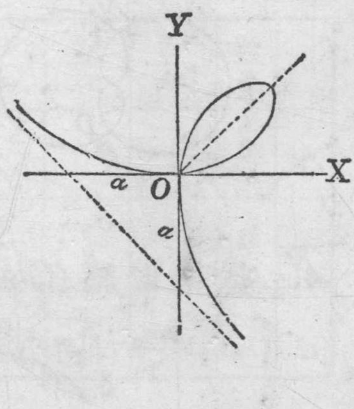
(vi) 於$y=x\sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}$之枝線。其$\dfrac{dy}{dx}$常爲正。故此枝線增大。

又$\dfrac{d^2y}{dx^2}$亦爲正。正向上凹。

此曲線在紀元前二世紀之頃。數學家的奧苛盧氏(*Diocles*)所發明。故冠以氏名。當時因欲解「二倍立方體之問題」而發見之。

5. 葉形線(*Folium of Descartes*)。

$$y^3-3axy+x^3=0.$$



此曲線過原點。且於原點爲奇點。而於原點之切線爲$xy=0$。

從此 $x=0,\quad y=0.$

故原點爲結節點。

依第八章第6節。得漸近線。爲

$$y+x+a=0.$$

令$y=xt$。則此曲線爲

$$x=\frac{3at}{t^3+1},\quad y=\frac{3at^2}{t^3+1}.$$

是謂單軌曲線。

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	$\frac{3a}{2}$	$+$	0
y	0	$-$	∞	$+$	0	$+$	$\frac{3a}{2}$	$+$	0

此曲線。稱提羅伯法曲線(*de Roberval*)。

十七世紀之曲線研究家。多少誤作此曲線。至代加德(*Des Cartes*)始獨立作成之。

其他有名之三次曲線。如

馬格老臨之<u>三等分用線</u>(*Trisectrix*),

$$x(x^2+y^2)=\frac{a}{2}(y^2-3x^2).$$

<u>結繩形線</u>(*S‹rophoid*)。

$$x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2).$$

此任何亦酷似上記之葉形線。

又如阿格尼西(*Witch of Agnesi*)之曲線。(十八世紀之伊大利人)。

$$y^2x+a^2(x-2a)=0.$$

此曲線有一漸近線。又有一彎曲點。

(注意) 三等分用線。可適用分角爲三等分之問題。故名。

6 蚌殼形線 (*Conchoid of Nicomedes*)。

$$(x^2+y^2)(a-x)^2=b^2x^2.$$

試變此爲極坐標式。則

$$r=\frac{a}{\cos\theta}\pm b.$$

由是得次之性質。

(i) 關於原線對稱。

(ii) 以 $r=\cos\theta=a\pm b\cos\theta$。而 $r\cos\theta$ 在 $a-b$ 與 $a+b$ 之間。

(iii) $\theta=\frac{\pi}{2}$, $r=\infty$。而以

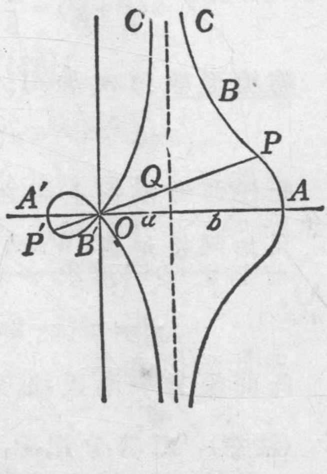
$$r'=\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

$$\text{極切線影}=\frac{r^2}{r'}=\left(\frac{a}{\cos\theta}\pm b\right)^2\frac{\cos^2\theta}{a\sin\theta}=\frac{(a\pm b\cos\theta)^2}{a\sin\theta}.$$

故 $\theta=\frac{\pi}{2}$。則極切線影 $=a$。

由是得漸近線。

(iv) 依直角坐標式。則原點爲奇點。而 $(b^2-a^2)x^2-a^2y^2=0$ 爲原點之切線。



故 $b>a$ 則如圖上之結節點。$b<a$ 則原點爲尖點。$b=a$ 則原點爲孤立點。

今與 θ 以特殊之值。則

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	$a\pm b$	$\sqrt{2}a\pm b$	∞
點	A, A'	B, B'	$C. C'$

(注意) 此曲線。係尼哥墨德 (*Nicomedes*) 亦使用以解二倍立方體之問題。(尼哥墨德係的奧苛盧以前之人)。

依其形狀而冠以氏名。故如斯命名。尼哥墨德所作曲線之性質。為過原點之任意直線。交此曲線於 P, P'。交此漸近線於 Q。則

$$QP=QP'=b.$$

此證明甚容易。

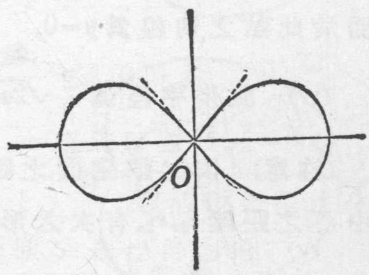
7. 雙紐形線 (*Lemniscate*)。

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

試變此為極坐標式。則

$$r^2=2a^2\cos 2\phi.$$

從此求其追跡。即得如圖所示。



此曲線之曲度半徑為 $\dfrac{2a^2}{3r}$.

(注意) 從相距 $2a$ 之二個定點之距離 r_1, r_2。求其積為一定之點之軌跡。則

$$r_1r_2=b^2.$$

從直角坐標式得

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=b^4-a^4.$$

此曲線名可西利氏之卵形線 (*Cassini's Oval*)。二個定點。曰其焦點。特於 $a=b$ 則得上記之雙紐線。

前記之雙紐形線。一稱白奴利之雙紐形線 (*Lemniscate of Bernoulli*)。

與此酷似者。為

$$y^4=y^2-x^2.$$

即哥魯氏之雙紐形線 (*Gerono's Lemniscate*)。

8. 心臟形線 (*Cardioid*)。

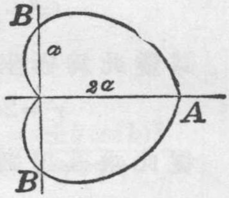
$$(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2).$$

試變此爲極坐標式。則

$$r=a(1+\cos\theta).$$

(i) 關於原線對稱。

(ii) 從 θ 之一周。而 r 由 $2a$ 經過 a。而至減少爲 0。又由 0 經過 a。而歸於 $2a$。



(iii) 視直角坐標式。則原點爲尖點。而於此點之切線爲 $y=0$。

(iv) 曲度半徑爲 $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$.

(注意) 依二個定圓之距離之比。其一定之點之軌跡。爲二個中心之距離 r_1, r_2。有次之形狀。

$$\frac{r_1}{p}+\frac{r_2}{q}=1.$$

此以直角坐標式表之。則得四次曲線。如

$$(x^2+y^2-a^2)^2+b(x-d)=0.$$

又變此爲一個圓之中心爲極之極坐標式。如

$$r^2-(a+b\cos\theta)r+e^2=0.$$

此曲線。稱卡的遜之卵形。(*Cartesius' Oval* 十七世紀之人)。

此卵形之格外。令 $e=0$。則

$$r=a+b\cos\theta.$$

試變此爲直角坐標式。則

$$(x^2+y^2-bx)^2=a^2(x^2+y^2).$$

此曲線。名巴斯恰爾(*Pascal*)之蚌殼形線。又名蝸牛形線(*Limaçon*, 法語卽蝸牛之意。故譯蝸牛形線)。心臟形線。實其例外。唯變更爲 $a=b$ 得之耳。

9. 蝸牛形線 (*Limaçon*)。

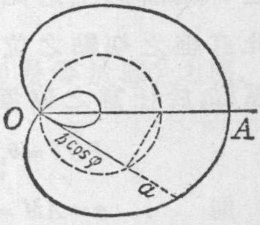
其方程式爲

$$(x^2+y^2-bx)^2=a^2(x^2+y^2).$$

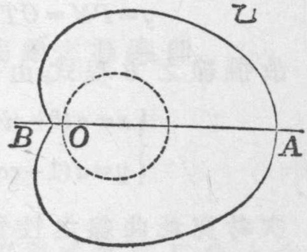
又 $$r=a+b\cos\phi.$$

$a=b$。則其追跡已見前節。茲不贅。而 $a>b$。則其追跡如甲圖。$a<b$。則其追跡如乙圖。

甲



乙



(注意) 圓錐曲線。以其一焦點爲原點。則表其極坐標式之形。爲

$$\frac{1}{\rho}=a+b\cos\phi.$$

而 $\frac{a}{b}$ 爲其偏心率。

曲線對於 ϕ。其動徑的關係爲

$$r\rho=c\ (\text{常數}).$$

是 $r=f(\phi)$，與 $\rho=F(\phi)$。交互爲逆 (*Inverse*)。

然則甲圖之曲線。爲偏心率比 1 大之圓錐曲線。卽雙曲線之逆也。

乙圖之曲線。爲偏心率比 1 小之圓錐曲線。卽橢圓之逆也。

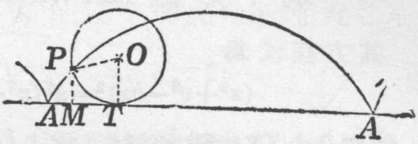
而心臟形線。實爲抛物線之逆。

(注意) 前述數種之四次曲線。除尼哥墨德，蚌殼形線外。任何亦爲首尾連續之曲線。如二次曲線之圓及橢圓。此等雙紐形線，心臟形線等。均爲連續一個曲線而成。總稱之曰閉合曲線(*Closed Curve*)。

10. 擺線 (*Cycloid*)。

一圓切於一直線上不滑而回轉時。其周上一定點之軌跡稱擺線。

今令此直線爲直角坐標式之 x 軸。圓周上之定點恰恰在此直線之切點之位置 A。令爲原點。於任意之位置取一點 $P(x|y)$。由圖之記號得



$$\widehat{POT}=\theta,\quad \text{圓之半徑}=a.$$

則 $$x=AM=AT-MT=\widehat{PT}-MT=a\theta-a\sin\theta.$$

$$y=PM=OT-OP\cos\theta=a-a\cos\theta.$$

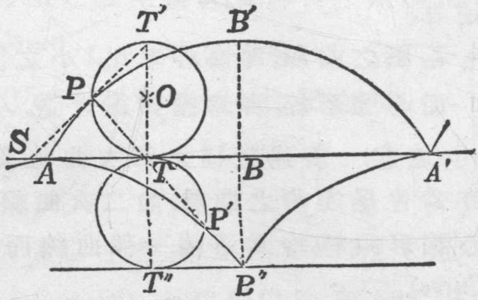
故擺線之方程式。由單一自變數 θ 之助。則如次。

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta). \end{cases}$$

次考究此曲線之性質。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\cot\frac{\theta}{2}.$$

令過切點 T 之直徑爲 TT'。則 $T\hat{T'}P=\dfrac{\theta}{2}$。而於 P 之擺線之切線過 T'。從而 TP 爲擺線之法線。



次求擺線之曲率半徑 ρ。則

$$\rho=\frac{\{dx^2+dy^2\}^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}=\frac{a^3\{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\}^{\frac{3}{2}}(d\theta)^3}{a^2\{(1-\cos\theta)\cos\theta-\sin^2\theta\}(d\theta)^3}$$

$$=-4a\sin\frac{\theta}{2}.$$

ρ之負止示曲線的下凹。今暫勿論。則

$$|\rho|=2\times 2a\sin\frac{\theta}{2}=2PT=PP'.$$

今作圓。令以TP'爲弦。切於AA'之點爲T。則得等於圓0之圓。

而 $\widehat{TP'}=\widehat{TP}=AT.$

半圓周$=AB=AT+TB=AT+T''B''.$

故 $\widehat{T''P'}=T''B''.$

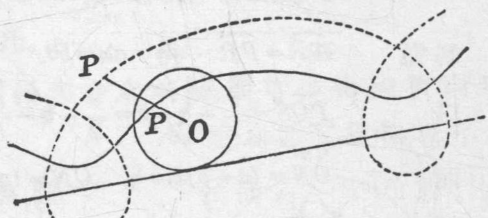
然則曲度之中心P'之軌跡。亦等於原曲線之擺線。卽

擺線之縮閉線。等於此之擺線。

11. 餘擺線 (*Trochoid*)。

有圓切於直線。不滑而回轉。則其一個半徑或其延長線上之點(不在圓周上)之軌跡。

稱餘擺線。



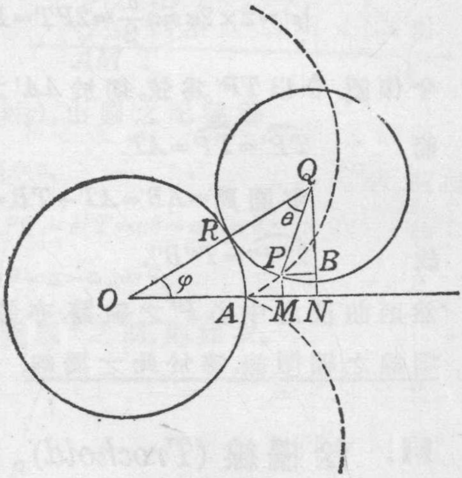
餘擺線之方程式。自擺線之方程式容易導出。卽如次。

$$\begin{cases} x=a\theta-k\sin\theta, \\ y=a-k\cos\theta. \end{cases} \qquad (k\text{爲}OP\text{或}OP'\text{之長}).$$

圓內之點P追跡之曲線。名匾餘擺線(*Prolate Trochoid*)。圓外之點P'之軌跡。名長餘擺線(*Oblate Trochoid*)。

12. 圓外擺線(*Epicycloid*)及圓內擺線(*Hypocycloid*)。

一圓外切於他之定圓。不滑而回轉。則回轉圓周上一定點之軌跡。曰圓外擺線。又內切而回轉之軌跡。曰圓內擺線。



今定圓為O。外切於此之圓。於其周上之定點。與此相切之點之位置為A。從此回轉θ度之圓。其中心之位置為θ。定點之位置為P。切點為R。則於圖。

$$x=OM$$
$$=ON-MN.$$
$$y=PM$$
$$=QN-QB.$$

令 $OA=a,\quad QP=b.$

$P\hat{Q}R=\theta,\quad A\hat{O}R=\phi.$

則從 $\widehat{AR}=\widehat{PR}.$ 得 $a\phi=b\theta.$

以 $P\hat{Q}S=\dfrac{\pi}{2}-\phi-\theta=\dfrac{\pi}{2}-\phi-\dfrac{a}{b}\phi=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{a+b}{b}\phi.$

而 $ON=(a+b)\cos\phi,\quad QN=(a+b)\sin\phi.$

$MN=b\cos\dfrac{a+b}{b}\phi,\quad QR=b\sin\dfrac{a+b}{b}\phi.$

故

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos\phi-b\cos\dfrac{a+b}{b}\phi. \\ y=(a+b)\sin\phi-b\sin\dfrac{a+b}{b}\phi. \end{cases}$$

是卽所求圓外擺線之方程式。

圓內擺線之方程式。與前同樣求之。所得如次。

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos\varphi+b\cos\dfrac{a-b}{b}\varphi, \\ y=(a-b)\sin\varphi-b\sin\dfrac{a-b}{b}\varphi. \end{cases}$$

依 a, b 之關係。此兩曲線之形。發生次之區別。

(i) $a=nb$ (n 爲正整數)。

回轉之圓繞定圓一周。定點再合於 A。二周,三周,… 其曲線之軌跡。均與前同。(次頁之圖。乃表 $n=6$ 之軌跡也)。

特 $a=2b$。則圓內擺線通過直徑。

又 $a=4b$。則圓內擺線之方程式爲

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

此名星形線 (*Asteroid*)。

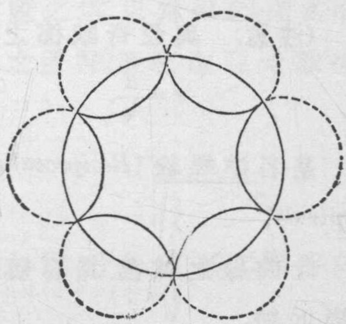
實則爲橢圓之縮閉線也。

(ii) $a:b=m:n$ (m, n 爲正整數)。

m 回轉之後。同於曲線之追跡。

(iii) a, b 有不可通約之比。

此雖得幾次回轉。決不能得相合之軌跡。卽可多得相異同形之弧。



(注意一) 擺線,圓外擺線,圓內擺線。其定點相切之點常爲尖點。從而圖所示 $a=6b$。有六個尖點。故或呼此爲

六尖點圓外擺線,六尖點圓內擺線等。

(注意二)　擺線,餘擺線,圓外擺線,圓內擺線等。一般曲線 $y=f(x)$。切於他之曲線 $y=\theta(x)$。而且回轉最爲簡易。

此一般稱爲轉距軌跡 (*Roulette*)。

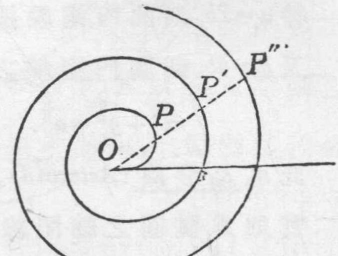
13. 亞奇默德氏之螺線(*Spiral of Archimedes*)。

其極方程式爲

$$r=a\theta.$$

所表之曲線。乃超越曲線之一種。

是名亞奇默德 (*Archimedes*) 或可魯 (*Conon*) 之螺殼形線。又略稱螺線。



此曲線之性質如次。

(i)　依 θ 之正負。而關於原線之垂直線。有對稱二部分成立。各有無限枝。迴轉原點如螺殼形。且無限回轉。

(ii)　極法線影常爲一定。而等於 a。

(iii)　與過原點之直線之交點。順次令爲 $P, P', P'', \ldots$。則

$$PP'=P'P''=\ldots=2\pi a.$$

(注意)　與亞奇默德之螺線相對照。如

$$r=\frac{a}{\theta}.$$

是名逆螺線 (*Reciprocal spiral*)。又稱雙曲線的螺線 (*Hyperbolic spiral*)。

此曲線之特色。爲極切線影等於常數 $-a$。且有平行於原線之漸近線。

14. 對數螺線 (*Logarithmic spiral*)。

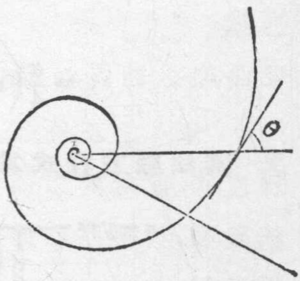
$$r=e^{a\phi}$$

此極方程式所表之曲線爲對數曲線。

(i) 動徑與其一端之點之切線所成之角令爲θ。則

$$\tan\theta=\frac{r}{\dfrac{dr}{d\phi}} \quad \text{(第八章第8節)}$$

$$=\frac{e^{a\phi}}{ae^{a\phi}}=\frac{1}{a}.$$



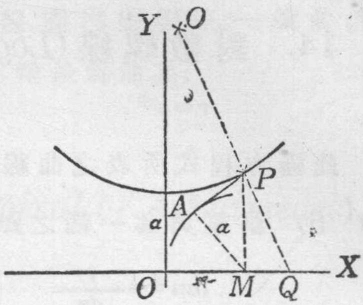
故對數螺線之切線。與於其切點之動徑成一定之角。而等於$\frac{1}{a}$。因此名對數螺線。又稱等角螺線(*Equiangular spiral*)。

(ii) 以$\lim\limits_{\phi=-\infty} r=0$。而原點爲此曲線之漸近點(漸近圓之圓的點)。

(注意) 研究對數螺線之主要人物。爲亞可白奴利(*Jacob Bernoulli*)。氏遺言刻此曲線中有興味諸性質。於己之墓碑。古昔亞奇默德被虐殺後。羅馬人爲之建莊麗之塔。以爲紀念。刻其所研究圓柱內切圓球之圖於塔。亞可氏之遺言。蓋私淑亞奇默德也。

15. 垂絲線 (*Catenary*)。

由各部一樣之物質製成有重之絲如鏈，針金。支其二點作曲線。是名垂絲線。



依其方程。求積分法如次。

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

即 $x=0,\quad y=OA=a.$

此x軸稱為垂絲線之軸。而垂絲線凸於x軸之方。

試求垂絲線之曲度半徑OP。則

$$OP=\rho=\frac{\left\{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)}$$

$$=\frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2.$$

又 其法線方程式為

$$\eta-y=-\frac{1}{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)}(\xi-x).$$

令$\eta=0$。則

$$\xi=OQ=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)y+x.$$

從此引$OM=x$。則

$$MQ=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)y.$$

從此求PQ之絕對值。則

$$PQ=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{MQ}^2}$$

$$=\sqrt{y^2+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2y^2}$$

$$=\frac{y}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$=\frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2.$$

故垂絲線。其曲度半徑 OP。常等於法線的曲線與 x 軸截取之部分 PQ。

次求於 P 之切線方程式。爲

$$\eta-y=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)(\xi-x).$$

試求此切線與點 $M(x, 0)$ 之距離 MR。則

$$MR=\frac{y}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)}$$

$$=a.$$

故於曲線上之 P 之切線。與於 P 之縱軸之足 M 爲中心 a 爲半徑之圓相切。

(注意) 拋物線於直線上。不滑而回轉。則其焦點之轉距軌跡爲垂絲線。

16. 等切曲線 (*Tractrix*)。

一定直線之上。從其一點之切線之長。常爲一定。而等於 a。如此之曲線爲

$$x=a\log\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}.$$

此名等切曲線。

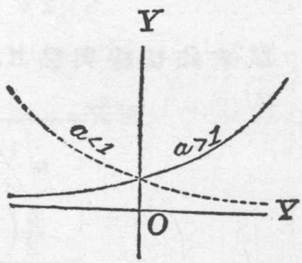
實則爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

（注意） 拋物線在一直線上。不滑而回轉則其軸之包絡線。可作得此曲線。

14. 對數曲線 (*Logarithmic Curve*)。

$$y=a^x\ (a>0).$$



此曲線對於x之一切值y。常在$(0, +\infty)$區域內變化。

$$\frac{dy}{dx}=\log a.a^x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(\log a)^2.a^x.$$

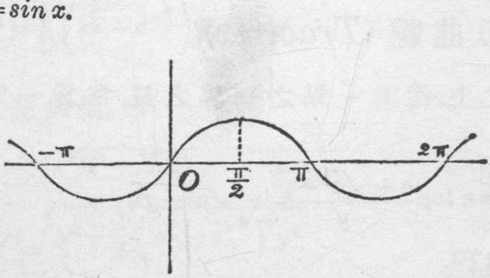
$a>1$。則曲線常增大。且下凸。

又$a<1$。則曲線常減小。且下凸。

要之任何。x軸爲y收斂爲0之側之漸近線。

18. 正弦曲線 (*Sine Curve*)。

$$y=\sin x.$$



原點爲起點。於$x=n\pi$ (n爲正或負之整數) 之點。截取x軸。

又 $$\frac{dy}{dx}=\cos x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x.$$

於$x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$之點爲極大或極小。而$x=n\pi$之點爲彎曲點。

於$2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$之間。此曲線下凹

於$(2n-1)\pi\leqq x\leqq 2n\pi$之間。此曲線上凹

微積分學講義

下卷　積分學

前篇　本論

第一章　積分學之基礎

1. 不定積分。

積分學中所欲研究之基本問題。在已知函數$\varphi(x)$。求此函數究爲如何函數之導來函數。此問題爲微分法之逆。

卽微分法者。由函數$f(x)$求得其導來函數$f'(x)$之方法。

而上列問題。乃由$\varphi(x)=f'(x)$。而欲求其$f(x)$者也。

今試以$f(x)$表所求之函數。則

$$\frac{d}{dx}f(x)=\varphi(x).$$

$$\therefore \qquad df(x)=\varphi(x)\,dx\text{..............................}(1)$$

由$\varphi(x)\,dx$卽$df(x)$求得$f(x)$之方法。謂之<u>積分法</u>(*Integration*)。而所求之$f(x)$謂爲微分$\varphi(x)\,dx$之<u>積分</u>(*Integral*)。

表積分之符號如次。

$$f(x)=\int\varphi(x)\,dx\text{..............................}(2)$$

（注意）上列問題。決非積分之全般。而建設此問題以外之積分。俟後章述之。

$\int$ 之記號。乃 S 之變形。用 *Sum*（和）之第一字母。至用和字之理由。視次節定積分自明。

$\int$「積分」又可讀爲（*Integral*）。

2. 積分常數。

已知函數 $\phi(x)$。假使 $\phi(x)\,dx$ 之積分存在。則除其常數項之差異。唯限於一種。

〔證〕 $\phi(x)\,dx$ 之積分假定有兩種。如 $f(x)$ 及 $f_1(x)$。則

$$f(x)=\int\phi(x)\,dx.$$

$$f_1(x)=\int\phi(x)\,dx.$$

今令　$F(x)=f_1(x)-f(x).$

則　$dF(x)=df_1(x)-df(x)$

$=\phi(x)-\phi(x)$　　〔見前節 (1)〕

$=0.$

$\therefore$　$F(x)=C.$　　〔C 爲常數〕

$\therefore$　$f_1(x)-f(x)=C.$

即　$f_1(x)=f(x)+C.$

此常數項 C。謂爲<u>積分常數</u>（*Integration-constant*）。

以函數 $\phi(x)$ 爲導來函數之原函數。即 $\phi(x)\,dx$ 之積分。均宜視爲此有不定之常數項 C。

爲之第一節之積分。謂爲<u>不定積分</u>（*Indefinite integral*）。

3 基本之積分公式。

積分乃微分之逆。故由微分得基本之積分公式如次。但各公式均應加積分常數C。

(I) $\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$. (但 $m \neq -1$)

(II) $\int \frac{dx}{x} = \log x.$

(III) $\int e^x dx = e^x.$

(IV) $\int \cos x\, dx = \sin x.$

$\int \sin x\, dx = -\cos x.$

(V) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x.$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x.$

(VI) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x = -\cos^{-1} x.$

(VII) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x = -\cot^{-2} x.$

(注意) 上所記之七種公式。爲積分學研究之順序。最爲緊要。宜記憶之。

4. 基本法則。

(I) a 爲常數。則

$$\int a\varphi(x)\,dx = a\int \varphi(x)\,dx.$$

〔證〕 令 $f(x) = \int \varphi(x)\,dx$. 則

$df(x) = \varphi(x)\,dx.$

故 $d\{af(x)\}=adf(x)=a\phi(x)\,dx.$

∴ $af(x)=\int a\phi(x)\,dx=a\int\phi(x)\,dx.$

(II) 令 $\phi(x)$, $\psi(x)$ 爲二個函數。則

$$\int\{\phi(x)\pm\psi(x)\}dx=\int\phi(x)\,dx\pm\int\psi(x)\,dx.$$

〔證〕 令 $f(x)=\int\phi(x)\,dx,\quad g(x)=\int\psi(x)\,dx.$

則 $df(x)=\phi(x)\,dx,\quad dg(x)=\psi(x)\,dx.$

故
$$\begin{aligned}d\{f(x)\pm g(x)\}&=df(x)\pm dg(x)\\&=\phi(x)\,dx\pm\psi(x)\,dx\\&=\{\phi(x)\pm\psi(x)\}dx.\end{aligned}$$

∴ $f(x)\pm g(x)=\int\{\phi(x)\pm\psi(x)\}dx.$

然 $f(x)\pm g(x)=\int\phi(x)\,dx\pm\int\psi(x)\,dx.$

故二個函數之和或差之積分。等於各積分之和或差。

〔例〕 1. $\int\frac{2}{x}dx=2\int\frac{dx}{x}=2\log x.$

〔例〕 2. $\int\frac{\sin x}{3}dx=\frac{1}{3}\int\sin x\,dx=-\frac{\cos x}{3}.$

〔例〕 3.
$$\begin{aligned}\int(ax^2+bx+c)\,dx&=\int ax^2dx+\int(bx+c)\,dx\\&=a\int x^2dx+\int bx\,dx+\int cdx\\&=a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\\&=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx.\end{aligned}$$

（注意） $\int dx=x$ 因積分爲微分之逆故也。以上三例及以下二例。省略積分常數。

〔例〕 4. $\int\left(4e^x-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$=4\int e^x dx-3\int x^{-\frac{1}{2}}dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=4e^x-3\times\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+2\sin^{-1}x$$

$$=4e^x-6\sqrt{x}+2\sin^{-1}x.$$

〔例〕 5. $\int\left(\frac{x^3}{3}+x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx.$

（答） $\frac{x^4}{12}+\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+2\tan^{-1}x$

5. 變換積分法。

積分 $\int\varphi(x)\,dx$ 儘其原形。不適合上所述之基本公式及法則。則變換變數 x 爲新變數 t 以適合之。是謂變換積分法 (*Integration by substitution*)。

即令 $x=\psi(t)$.

則 $dx=\psi'(t)\,dt.$

從而得

$$\int\varphi(x)\,dx=\int\varphi\{\psi(t)\}\psi'(t)\,dt$$

$$=\Phi(t).$$

再變換 t 爲 x。則得

$$\int\varphi(x)\,dx=f(x).$$

〔例〕 1. $\int (a+bx)^n dx.$

(解) 令 $a+bx=t$. 則

$$bdx=dt. \quad \therefore \quad dx=\frac{1}{b}dt.$$

$$\therefore \quad \int (a+bx)^n dx=\frac{1}{b}\int t^n dt=\frac{t^{n+1}}{b(n+1)}=\frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}$$

〔例〕 2. $\int \frac{dx}{a+bx}.$

(答) $\frac{1}{b}\log(a+bx).$

〔例〕 3. $\int e^{ax}dx.$

(解) 令 $ax=t$. 則

$$adx=dt. \quad \therefore \quad dx=\frac{1}{a}dt.$$

$$\therefore \quad \int e^{ax}dx=\frac{1}{a}\int e^t dt=\frac{1}{a}e^t=\frac{1}{a}e^{ax}.$$

〔例〕 4. $\int a^x dx.$

(解) 令 $a^x=t$. 則 $x\log a=\log t.$

$$\log a\, dx=\frac{dt}{t}.$$

$$\therefore \quad dx=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{dt}{t}.$$

$$\therefore \quad \int a^x dx=\frac{1}{\log a}\int dt=\frac{t}{\log a}=\frac{1}{\log a}a^x.$$

〔例〕 5. $\int \cos(ax+b)\,dx.$

(答) $\frac{1}{a}\sin(ax+b).$

〔例〕 6. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

(解) 令 $x=at$. 則 $dx=adt$.

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\int \frac{adt}{a^2+a^2t^2}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}t$$

$$=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}.$$

〔例〕 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(答) $\sin^{-1}\frac{x}{a}$.

〔例〕 8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(解) 令 $a^2-x^2=t$. 則 $-2xdx=dt$.

$$\therefore \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\times 2t^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

〔例〕 9. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2+bx^2}}$.

(答) $\frac{1}{2b}\log(a^2+bx^2)$

〔例〕 10. $\int \tan x\,dx$.

(解) $\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}=\int \frac{-d(\cos x)}{\cos x}=-\log(\cos x)$.

〔例〕 11. $\int \cot x\,dx$.

(答) $\log(\sin x)$.

(例) 12. $\int \csc x\,dx.$

(解) $$\int \csc x\,dx=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}$$

$$=\log\left(\tan\frac{x}{2}\right).$$

6. 部分積分法。

令u, v爲x之函數。則

$$d(u, v)=udv+vdu.$$

$\therefore$ $$udv=d(u, v)-vdu.$$

$\therefore$ $$\int udv=uv-\int vdu.$$

又令$u=\varphi(x)$, $dv=\psi(x)\,dx$。則

$$du=\psi'(x)\,dx,\quad v=\int\psi(x)\,dx.$$

故前記之公式爲

$$\int\varphi(x)\psi(x)\,dx=\varphi(x)\int\psi(x)\,dx-\int\left\{\psi'(x)\int\psi(x)\,dx\right\}dx.$$

卽積分之函數。若爲二個函數之積分，則適用一部分的積分公式以求之。其例甚衆。

依此公式求積分之法。謂<u>部分積分法</u> (*Partial integration*)。

〔例〕 1. $\int x\sin x\,dx.$

(解) 令 $x=u$, $\sin x\,dx=dv$. 則

$$dx=du,\quad -\cos x=v.$$

$$\therefore\quad \int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$

$$=-x\cos x+\sin x.$$

〔例〕 2. $\int\log x\,dx$.

(解) 令 $\log x=u$, $dx=dv$. 則

$$\frac{dx}{x}=du,\quad x=v.$$

uxv-∫vdu

$$\therefore\quad \int\log x\,dx=x\log x-\int dx$$

∫udv=uv-∫vdu

$$=x\log x-x.$$

〔例〕 3. $\int x\log x\,dx$.

(解) $$\int x\log x\,dx=\int\log x\,(xdx)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x^2d(\log x)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int xdx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2.$$

〔例〕 4. $\int xe^{ax}dx$.

(答) $\frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax}$.

〔例〕 5. $\int\sin^{-1}x\,dx$.

(解) $$\int sin^{-1}x\,dx = x\,sin^{-1}x - \int x\,d\,(sin^{-1}x)$$

$$= x\,sin^{-1}x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\,sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}.$$

[參照前節例8]

〔例〕 6. $\int tan^{-1}x\,dx.$ $= x\,tan^{-1}x - \int x\,d(tan^{-1}x)$

(答) $x\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}log\,(1+x^2).$

〔例〕 7. $\int e^{ax}cos\;bx\,dx,\quad \int e^{ax}sin\;bx\,dx.$

(解) $$\int e^{ax}cos\;bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}cos\;bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}sin\;bx\,dx.$$

$$\int e^{ax}sin\;bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}sin\;bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}cos\;bx\,dx.$$

由是 $$a\int e^{ax}cos\;bx\,dx - b\int e^{ax}sin\;bx\,dx = e^{ax}cos\;bx.$$

$$b\int e^{ax}cos\;bx\,dx + a\int e^{ax}sin\;bx\,dx = e^{ax}sin\;bx.$$

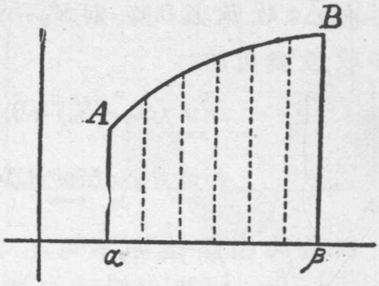
∴ $$\int e^{ax}cos\;bx\,dx = \frac{a\,cos\;bx + b\,sin\;bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

$$\int e^{ax}sin\;bx\,dx = \frac{a\,sin\;bx - b\,cos\;bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

7. 定積分之意義。

令α, β爲有限之數。於(α, β)區域內。有一價且連續之一初等函數$y=\varphi(x)$。爲簡單說明起見。先僅就$\varphi(x)$於此區域內常爲正且增大者考之。

然此函數所表之曲線。約如下圖。但曲線之凹凸及彎曲點之有無。均在論外。



此曲線C與x軸及$x=\alpha$, $x=\beta$兩縱坐標線間所包圍之面積。以S表之。而此S之計算如次。

分$\beta-\alpha$爲n個等分。令每一等分爲Δx。則

$$\frac{\beta-\alpha}{n}=\Delta x.$$

x軸上分點之縱坐標線。其兩端順次命爲

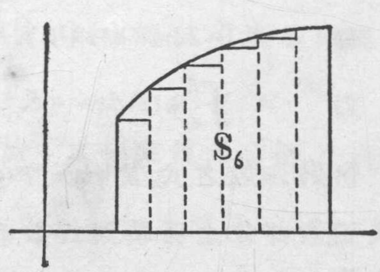
$$\phi(\alpha),\quad \phi(\alpha+\Delta x),\quad \phi(\alpha+2\,\Delta x),\quad \ldots,$$
$$\phi(\alpha+\overline{n-1}\,\Delta x),\quad \phi(\beta).$$

於此處令

$$S_n=\phi(\alpha)\,\Delta x+\phi(\alpha+\Delta x)\,\Delta x+\ldots+\phi(\alpha+\overline{n-1}\,\Delta x)\,\Delta x$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\phi(\alpha+k\,\Delta x)\,\Delta x.$$
$$S'_n=\phi(\alpha+\Delta x)\,\Delta x+\ldots+\phi(\alpha+\overline{n-1}\,\Delta x)\,\Delta x+\phi(\beta)\,\Delta x$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\phi(\alpha+k\,\Delta x)\,\Delta x.$$

其S_n, S'_n乃表下圖所集合矩形之面積。且

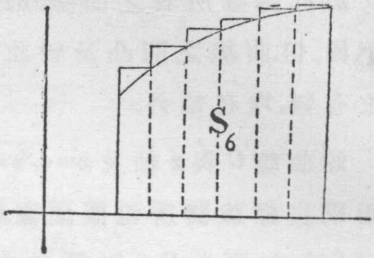
$$S_n<S<S'_n.$$



因

$$S'_n-S_n=\{\psi(\beta)-\phi(\alpha)\}\,\Delta x.$$

此n爲無限大。



而 Δx 收歛爲 0 時。則 S'_n-S_n 亦收歛爲 0。卽

$$\lim_{n=\infty}(S'_n-S_n)=0.$$

$$\therefore\qquad \lim_{n=\infty}S'_n=\lim_{n=\infty}S_n.$$

由是此極限值亦不可不等於 S。卽

$$\lim_{\Delta x=0}\Sigma\varphi(x+k\,\Delta x)\,\Delta x=S.$$

此表之如次。

$$S=\int_\alpha^\beta\varphi(x)\,dx.$$

以上期於簡單。故假定 $\varphi(x)$ 常常增大。今假令 $\varphi(x)$ 爲正。且連續減小。則

$$S_n>S>S'_n.$$

然不過此異耳。其他則全然相同。故可達到同一之結論。從而 $\varphi(x)$ 常爲正。則不論其全域內。增減如何。上所記之結果。均能適合也。

最後 $\varphi(x)$ 於全區域內爲負。如何。則於其 $\{-\varphi(x)\}$ 之函數。亦可適用上記之手續。而

$$\lim\Sigma\{-\varphi(x+k\,\Delta x)\}\,\Delta x=S.$$

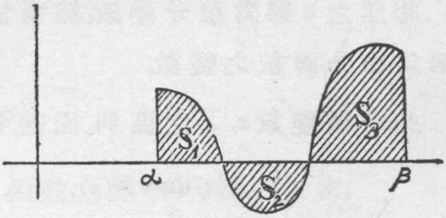
卽　$$-\lim\Sigma\varphi(x+k\,\Delta x)\,\Delta x=S.$$

卽　$$\int_\alpha^\beta\varphi(x)\,dx=-S.$$

然則一般之式。其 $\varphi(x)$ 於 (α,β) 區域內爲正或負。則 $\int_\alpha^\beta\varphi(x)\,dx$ 表正數部分之面積與負數部分之面積之代數和。例如右圖之曲線。

$$\int_a^\beta \varphi(x)\,dx$$

$$=S_1-S_2+S_3.$$



由是得次之定理。

定理. a 與 β 任何亦爲有限值。而 $\varphi(x)$ 於 (a, β) 區域內。爲一價且連續之函數。則

$$\underset{n=\infty}{Lim}\sum_{n=1}^{n}\varphi(x+k\,\Delta x)\,\Delta x=\int_a^\beta \varphi(x)\,dx=S.$$

$$\left(\text{但 } \Delta x=\frac{\beta-a}{n}\right).$$

S 爲 $\varphi(x)$ 之代表。卽表曲線與 x 軸。$x=a$, $x=\beta$ 兩直線間之面積之代數和。

此 $Lim\,\Sigma$ 之略號之 $\int_a^\beta \varphi(x)\,dx$。稱爲定積分 (*Definite integral*)。a 謂其下限 (*Lower limit*)。β 謂其上限 (*Upper limit*)。又區域 (a, β) 謂其積分之區域。

8. 定積分與不定積分之關係。

先研究定積分 $\int_a^\beta \varphi(x)\,dx$.

此定積分之上限 β。由前述之條件。($\varphi(x)$ 於 (a, β) 區域內爲一價且連續)。作在其範圍內變化看。

試以 X 代其 β。則 $\int_a^X \varphi(x)\,dx$ 對應於 X 之確定值爲有限。且表確定之面積 S。是亦 X 之函數也。由是令

$$\int_a^X \varphi(x)\,dx=F(X).$$

此處之x雖爲積分變數。然對於積分上爲不用之變數，而X則爲積分函數之變數。

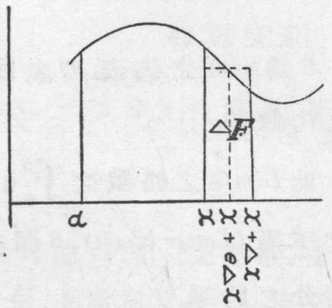
此二種變數x, X之區別。固甚判然。然普通令爲

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = F(x).$$

從此可知所表示之x有二種。不可混同。須切記之。

此紛易之表法。稍有便宜。觀以下所論。當爲首肯。

求函數$F(x)$之微分係數。



定x爲某值之後。Δx爲$\varphi(x)$。於$(x, x+\Delta x)$區域內。僅增大或僅減小。如令

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta F.$$

則ΔF可表一種面積。而ΔF爲$\Delta x \cdot \varphi(x)$與$\Delta x \cdot \varphi(x+\Delta x)$之間之值。由前述$\Delta x$之限制明甚。從而

$$\Delta F = \Delta x \cdot \varphi(x+\theta\,\Delta x).$$

適合於上式之θ之值。必可存在。

而欲令

$$|F(x+\Delta x) - F(x)|.$$

比任意之正數ϵ更小，則令Δx比$\epsilon \div \varphi(x+\theta\,\Delta x)$更小卽可達得之。故$F(x)$於$\varphi(x)$之一價且連續之區域內。爲一價且連續之函數。

又 $$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \varphi(x+\theta\,\Delta x).$$

於極限爲

$$F'(x)=\varphi(x).$$

即 $$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(x)\,dx=\varphi(x).$$

(注意) 積分變數x與積分函數之變數X。區別如次。

$$\frac{d}{dX}\int_a^X \varphi(x)\,dx=\varphi(X).$$

次考不定積分。

從 $$\int \varphi(x)\,dx=f(x).$$

依定義。則

$$\varphi(x)=f'(x).$$

是則定積分$F(x)$與不定積分$f(x)$之間。有次之關係。

$$F'(x)=f'(x).$$

$\therefore$ $$F'(x)-f'(x)=0.$$

$\therefore$ $$F(x)-f(x)=C. \qquad (C\text{爲常數})$$

$\therefore$ $$F(x)=f(x)+C.$$

即 $$\int_a^x \varphi(x)\,dx=f(x)+C.$$

欲求常數C。則令 $x=a$。

$$\int_a^a \varphi(x)\,dx=0=f(a)+C.$$

$\therefore$ $$C=-f(a).$$

由是 $$\int_a^x \varphi(x)\,dx=f(x)-f(a).$$

或 $$\int_a^\beta \varphi(x)\,dx=f(\beta)-f(a).$$

即 $$\int_a^\beta \varphi(x)\,dx=\left|\int \varphi(x)\,dx\right|_{x=\beta}-\left|\int \varphi(x)\,dx\right|_{x=a}.$$

(注意) 於應用諸方面。悉用定積分。而不定積分乃抽象的。實微分法之逆問題。殊不必要。應用上絕少用之。然由前述之關係視之。不定積分之函數出見時。得置換變數。以求定積分。是不定積分亦宜研究。不可忽之。

如前所述。不定積分決非積分學之全般。又定積分亦不必以表面積爲限。學者宜審之。不可誤解。

第二章 不定積分

1. 有理整函數之積分。

令 $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n.$$

依第一章第4節 I, II 得

$$\int f(x)\,dx=a_0\int x^n dx+a_1\int x^{n-1}dx+a_2\int x^{n-2}dx+\dots$$
$$+a_{n-1}\int x\,dx+a_n\int dx$$
$$=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\frac{a_2}{n-1}x^{n-1}+\dots$$
$$+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx.$$

2. 有理分數之積分。

有理分數爲

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\dots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n}.$$

此爲已約分數。

若$m\leqq n$。則可得

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=F(x)+\frac{\varphi_1(x)}{f(x)}.$$

此處之$F(x)$爲有理整函數。$\varphi_1(x)$爲比$f(x)$低次整函數。

$F(x)$之積分。由前節求得。

若由本節求之。則假定$m<n$。一般決無妨礙。

由代數學基本之定理。$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$任何亦爲實數。則

$$f(x)=a_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n).$$

然此分解只有一種。

而$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$表實或虛之常數。

又$a_1, a_2, \ldots, a_n$之中。有虛數$p+qi$。則必再有一虛數$p-qi$存在。與之相伴。

由是得作下式。

$$\{x-(p+qi)\}\{x-(p-qi)\}=x^2-2px+(p^2+q^2).$$

是則有理整函數$f(x)$。常可分解爲一次因數$x-\alpha$。與二次因數$x^2+\beta x+\gamma$之二種形狀。幾個連乘之積。但α, β, γ任何亦爲實數。且

$$\beta^2\div 4-\gamma<0.$$

由是發生次列之四種形式。

(I) <u>$x-\alpha$爲$f(x)$之單一因子。</u>

即$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$其分子比分母低。爲低位分數。且令

$$f(x)=(x-\alpha)f_1(x).$$

則$x-\alpha$與$f_1(x)$爲互素。

然
$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)f_1(x)}=\frac{\varphi(x)-Af_1(x)+Af_1(x)}{(x-\alpha)f_1(x)}$$

$$=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{\varphi(x)-Af_1(x)}{(x-\alpha)f_1(x)}.$$

此處之未定係數A。爲

$$\phi(a)-Af_1(a)=0.\quad 即\quad A=\frac{\phi(a)}{f_1(a)}\text{.......................}(1)$$

以適於A之値代之。則

$\phi(x)-Af_1(x)$ 必可爲 $x-a$ 所約。

故令 $\phi(x)-Af_1(x)=(x-a)\phi_1(x)$.

則 $$\frac{\phi(x)}{(x-a)f_1(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{\phi_1(x)}{f_1(x)}\text{............................}(2)$$

而 $$\int\frac{A}{x-a}dx=A\log(x-a)=\log(x-a)^A\text{...................}(3)$$

(II) <u>$x-a$ 爲 $f(x)$ m 重之複因數。</u>

令 $f(x)=(x-a)^mf_1(x)$.

則與前同樣。得

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{\phi(x)}{(x-a)^mf_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{\phi_1(x)}{(x-a)^{m-1}f_1(x)}$$

$$=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\frac{\phi_2(x)}{(x-a)^{m-2}f_1(x)}$$

$$=\dots$$

$$=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\dots+\frac{A_m}{x-a}+\frac{\phi_m(x)}{f_1(x)}\text{.....}(4)$$

而
$$\begin{cases}\displaystyle\int\frac{A_1}{(x-a)^m}=-\frac{A_1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}\\ \displaystyle\int\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}=-\frac{A_2}{(m-2)(x-a)^{m-2}}\\ \quad\dots\dots\qquad\qquad\dots\dots \\ \displaystyle\int\frac{A_{m-1}}{(x-a)^2}=-\frac{A_{m-1}}{x-a}\\ \displaystyle\int\frac{A_m}{x-a}=A_m\log(x-a)\end{cases}\text{..............}(5)$$

（注意） 欲決定未定係數 $A_1, A_2, \ldots, A_m$。其法如次。

$$\frac{\phi(x)}{(x-a)^m f_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\cdots$$
$$+\frac{A_m}{x-a}+\frac{\phi_m(x)}{f_1(x)}.$$

各項以 $(x-a)^m$ 乘之。則

$$\frac{\phi(x)}{f_1(x)}=A_1+A_2(x-a)+A_3(x-a)^2+\cdots$$
$$+A_m(x-a)^{m-1}+\frac{\phi_m(x)}{f_1(x)}(x-a)^m.$$

$$\therefore\quad \begin{cases} A_1=\dfrac{\phi(a)}{f_1(a)} \\ A_2=\left|\dfrac{d}{dx}\cdot\dfrac{\phi(x)}{f_1(x)}\right|_{x=a} \\ A_3=\dfrac{1}{2!}\left|\dfrac{d^2}{dx^2}\cdot\dfrac{\phi(x)}{f_1(x)}\right|_{x=a} \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots, \\ A_m=\dfrac{1}{(m-1)!}\left|\dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\cdot\dfrac{\phi(x)}{f_1(x)}\right|_{x=a} \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(III) $x^2+\beta x+\gamma\left(\dfrac{\beta^2}{4}-\gamma<0\right)$ 爲 $f(x)$ 之單一因數。

$$f(x)=(x^2+\beta x+\gamma)f_1(x).$$

則
$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{\phi(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)f_1(x)}$$
$$=\frac{\phi(x)-(Lx+M)f_1(x)+(Lx+M)f_1(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)f_1(x)}$$
$$=\frac{Lx+M}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{\phi(x)-(Lx+M)f_1(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)f_1(x)}.$$

此 $\phi(x)-(Lx+M)f_1(x)$ 適爲 $x^2+\beta x+\gamma$ 所約。決定其未定係數 L, M。其商以 $\phi_1(x)$ 表之。則

$$\frac{\phi(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)f_1(x)}=\frac{Lx+M}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{\phi_1(x)}{f_1(x)}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

而 $L=0$。則

$$\int\frac{M}{x^2+\beta x+\gamma}dx=M\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)}$$

$$=\frac{M}{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{4}}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{4}}}\cdots\cdots\cdots(8)$$

$L\neq 0$。則

$$\int\frac{Lx+M}{x^2+\beta x+\gamma}dx=\frac{L}{2}\int\frac{(2x+\beta)}{x^2+\beta x+\gamma}dx$$

$$+\left(M-\frac{L\beta}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+\beta x+\gamma}$$

$$=\frac{L}{2}\log(x^2+\beta x+\gamma)$$

$$+\frac{M-\frac{L\beta}{2}}{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{2}}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{2}}}\cdots(9)$$

(IV) $x^2+\beta x+\gamma\left(\frac{\beta^2}{4}-\gamma<0\right)$ 爲 $f(x)$ 之 m 重複因數。

令 $f(x)=(x^2+\beta x+\gamma)^m f_1(x)$.

與前同樣。得

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{\phi(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^m f_1(x)}$$

$$=\frac{L_1x+M_1}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}+\frac{L_2x+M_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^{m-1}}+\cdots$$

$$+\frac{L_mx+M_m}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{\phi_m(x)}{f_1(x)}\cdots\cdots(10)$$

令γ爲自2至m間之整數。則

$$\int\frac{Lx+M}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}dx=\frac{L}{2}\int\frac{(2x+\beta)}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}dx$$
$$+\left(M-\frac{L\beta}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}$$
$$=-\frac{L}{2(r-1)(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}$$
$$+\left(M-\frac{L\beta}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}\quad\ldots\ldots(11)$$

然
$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x+\frac{\beta}{2}}{(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}\right\}$$
$$=\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}-\frac{2(r-1)\left(x^2+\beta x+\frac{\beta^2}{4}\right)}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}$$
$$=-\frac{2r-3}{(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}+\frac{2(r-1)\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}.$$

而
$$\int\frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}=\frac{2r-3}{2(r-1)\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)}\int\frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}$$
$$+\frac{x+\frac{\beta}{2}}{2(r-1)\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}\quad\ldots(12)$$

由此公式(12)。反覆適用。最後可得(9)之積分。

(注意) 如公式(12)。逐次推移。最終得比較的簡易之積分式以求積分 此法謂之累次積分法(*Successive integration*)。

以上所述之四種。於有理分數之分解盡之矣。故知自(1)至(12)之公式。有理分數。常可求得其積分。而其基本之形(*Normal form*)。如次之四種。

$$\int\frac{dx}{x-a},\quad \int\frac{dx}{(x-a)^r},\quad \int\frac{dx}{x^2+\beta x+\gamma},\quad \int\frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}.$$

又積分之結果。以代數函數,對數函數,逆三角函數,三種之中爲限。且不出此以外。此亦有注目之價値者也。

〔例〕 1. $\int\frac{x^4-2x^3-2x}{x^3-x^2-4x+4}dx.$

(解) $$\frac{x^4-2x^3-2x}{x^3-x^2-4x+4}=x-1+\frac{3x^2-10x+4}{x^3-x^2-4x+4}.$$

$$\frac{3x^2-10x+4}{x^3-x^2-4x+4}=\frac{3x^2-10x+4}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

從 (1) 得

$$A=\frac{3-10+4}{(1-2)(1+2)}=1.$$

$$B=\frac{3\times 2^2-10\times 2+4}{(2-1)(2+2)}=-1.$$

$$C=\frac{3(-2)^2-10(-2)+4}{(-2-1)(-2-2)}=3.$$

$\therefore$ $$\frac{x^4-2x^3-2x}{x^3-x^2-4x+4}=x-1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+2}.$$

$\therefore$ $$\int\frac{x^4-2x^3-2x}{x^3-x^2-4x+4}dx$$

$$=\int(x-1)\,dx+\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+\log(x-1)-\log(x-2)+3\log(x+2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+\log\frac{(x-1)(x+2)^3}{x-2}.$$

(注意) 求 A, B, C。則

$$3x^2-10x+4=A(x-2)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x-2).$$

順次令 x 爲 $1, 2, -2$ 卽得。

〔例〕 2. $\int\frac{2x+34}{x^3-2x^2-11x+12}dx.$

(答) $\log\frac{(x-4)^2(x+3)}{(x-1)^3}$。

〔例〕 3. $\int\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{5}{12}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{5}{1}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{1}{3}\log\frac{x+1}{x-1}+\frac{5}{12}\log\frac{x-2}{x+2}.$$

〔例〕 4. $\int\frac{x^2+2}{(x-2)^3}dx.$

(解) 令 $\frac{x^2+2}{(x-2)^3}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}.$

則 $x^2+2=A+B(x-2)+C(x-2)^2.$

令 $x=2.$ 則 $A=6.$

一度微分之後。令 $x=2$。則 $B=4$。

二度微分之後。令 $x=2$。則 $C=1$。

$$\therefore\quad \frac{x^2+2}{(x-2)^3}=\frac{6}{(x-2)^3}+\frac{4}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}.$$

$$\therefore\quad \int\frac{x^2+2}{(x-2)^3}dx=6\int\frac{dx}{(x-2)^3}+4\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\int\frac{dx}{x-2}$$

$$=-\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}+\log(x-2)$$

$$=\log(x-2)-\frac{4x-5}{(x-2)^2}.$$

〔例〕 5. $\int\frac{4x^2-3x}{(x-1)^2(x+2)}dx.$

(答) $\frac{14}{9}\log(x-1)+\frac{22}{9}\log(x+2)-\frac{1}{3(x-1)}.$

〔例〕 6. $\int\frac{(x^2-2)}{x^3(x+2)^2}dx.$

(答) $\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{4(x+2)}+\frac{1}{8}\log\frac{x+2}{x}.$

〔例〕 7. $\int\frac{x^2+1}{x^3-1}dx.$

(解) 令 $\frac{x^2+1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Lx+M}{x^2+x+1}.$

則 $x^2+1=A(x^2+x+1)+(x-1)(Lx+M).$

令 $x=1.$ 則 $A=\frac{2}{3}.$

令 $x=0.$ 則 $M=-\frac{1}{3}.$

令 $x=2.$ 則 $L=\frac{1}{3}.$

∴ $\frac{x^2+1}{x^3-1}=\frac{2}{3(x-1)}+\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$

∴
$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{x^3-1}dx&=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx\\&=\frac{2}{3}\log(x-1)+\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx\\&\qquad-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}\\&=\frac{2}{3}\log(x-1)+\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)\\&\qquad-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

〔例〕 8. $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

(答) $-\frac{1}{2(x-1)}+\log\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2+1}}$.

〔例〕 9. $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

(答) $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$.

〔例〕 10. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

(解) 令 $\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Lx+M}{(x^2+1)^2}+\frac{Px+Q}{x^2+1}$.

則 $1=A(x^2+1)^2+(Lx+M)x+(Px+Q)(x^2+1)x$.

令 $x=0$. 則 $A=1$.

比較 x^4 之係數。得 $0=A+P$.

$\therefore$ $P=-1$.

比較 x^3 之係數。即得 $Q=0$.

代入 A, P, Q 之值。得

$$1=(x^2+1)^2-(x^2+1)x^2+(Lx+M)x.$$

$\therefore$ $Lx+M=(x^2+1)x-x^3-2x$.

令 $x=0$. 則 $M=0$.

又令 $x=1$. 則 $L=-1$.

$\therefore$ $\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}$.

$$\therefore \qquad \int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{xdx}{x^2+1}$$

$$=\log x+\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(別解) 令 $x^2+1=\dfrac{1}{z}$. 則 $2xdx=-\dfrac{dz}{z^2}$.

$$\therefore \qquad \int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-\dfrac{dz}{z^2}}{\left(\dfrac{1}{z}-1\right)\dfrac{1}{z^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{z}{z-1}dz$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int dz-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z-1}$$

$$=\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\log(z-1)$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

〔例〕 11. $\displaystyle\int\frac{x^3}{(1+x^2)^4}dx.$

(解) 令 $x^2=t$. 則 $2xdx=dt$.

$$\therefore \qquad \int\frac{x^3}{(1+x^2)^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{t}{(1+t)^4}dt.$$

而令 $$\frac{t}{(1+t)^4}=\frac{A}{(1+t)^4}+\frac{B}{(1+t)^3}+\frac{C}{(1+t)^2}+\frac{D}{1+t}.$$

如例4.得

$$A=-1,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=0.$$

$$\therefore\qquad \int\frac{x^3}{(1+x^2)^4}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1+t)^4}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1+t)^3}$$

$$=\frac{1}{6(1+t)^3}-\frac{1}{4(1+t)^2}$$

$$=\frac{1}{6(1+x^2)^3}-\frac{1}{4(1+x^2)^2}.$$

〔例〕12. $\int\frac{x^4}{(1+x^2)^6}dx.$

(解) $x^4=(1+x^2-1)^2=(1+x^2)^2-2(1+x^2)+1.$

$$\therefore\qquad \frac{x^4}{(1+x^2)^6}=\frac{1}{(1+x^2)^4}-\frac{2}{(1+x^2)^5}+\frac{1}{(1+x^2)^6}.$$

然
$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^6}=\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^6}dx$$

$$=\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}-\int\frac{x^2}{(1+x^2)^6}dx.$$

而由部分積分法。得

$$\int\frac{x^2}{(1+x^2)^6}dx=\int\frac{1}{2}x\frac{2xdx}{(1+x^2)^6}$$

$$=-\frac{x}{10(1+x^2)^5}+\frac{1}{10}\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}.$$

$$\therefore\qquad \int\frac{dx}{(1+x^2)^6}=\frac{x}{10(1+x^2)^5}+\frac{9}{10}\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同樣
$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}=\frac{x}{8(1+x^2)^4}+\frac{7}{8}\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}=\frac{x}{6(1+x^2)^3}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{x}{4(1+x^2)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}\text{............}(4)$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{x}{2(1+x^2)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}\text{............}(5)$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=tan^{-1}x\text{..}(6)$$

以自(1)至(6)之式代之。則

$$\int\frac{x^4}{(1+x^2)^6}dx=\int\frac{dx}{1+x^2)^6}-2\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}+\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{x}{10(1+x^2)^5}-\frac{11x}{80(1+x^2)^4}+\frac{x}{160(1+x^2)^3}$$

$$+\frac{x}{128(1+x^2)^2}+\frac{3x}{256(1+x^2)}+\frac{3}{256}tan^{-1}x.$$

(注意) 如例11, 12。可求得

$$\int\frac{x^m}{(1+x^2)^n}dx.\quad(\text{但 } m, n \text{ 為正整數})$$

又此種積分。可用置換法。令 $x=tan\,\theta$ 為三角函數之積分。詳後節。

3. 無理式 $f(x,\sqrt[n]{ax+b})$ 之積分。

$f(x,\sqrt[n]{ax+b})$ 之 x 與 $\sqrt[n]{ax+b}$ 為有理函數。

則令 $\sqrt[n]{ax+b}=z.$

由是 $x=\frac{1}{a}(z^n-b),\quad dx=\frac{n}{a}z^{n-1}dz.$

$\therefore\quad \int f(x,\sqrt[n]{ax+b})\,dx=\frac{n}{a}\int f\left(\frac{z^n-b}{a},z\right)z^{n-1}dz.$

是 z 為有理函數之積分。

與此同樣。求得

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right)dx = n(ab'-a'b)\int f\left(\frac{b'z^n-b}{a-a'z^n}, z\right)\frac{z^{n-1}}{(a-a'z^n)^2}dz.$$

$$\left(\text{但} \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}} = z\right)$$

〔例〕 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$.

(解) 令 $\sqrt{x-1}=z$ 則

$x=z^2+1,\quad dx=2zdz.$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} = \int\frac{2zdz}{z^2+z+1}$$

$$= \int\frac{(2z+1)\,dz}{z^2+z+1} - \int\frac{dz}{z^2+z+1}$$

$$= \log(z^2+z+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$$

$$= \log(x+\sqrt{x-1})$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}.$$

〔例〕 2. $\displaystyle\int\frac{xdx}{(ax+b)^{\frac{3}{2}}}$.

(答) $\displaystyle\frac{2(ax+2b)}{a^2\sqrt{ax+b}}$.

〔例〕 3. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx$.

(解) 令 $\sqrt[6]{x}=z$. 則

$x=z^6,\quad dx=6z^5dz.$

$$\therefore \quad \int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx=6\int \frac{z^2-1}{z^3+1}z^5 dz=6\int \frac{z^6-z^5}{z^2-z+1}dz.$$

$$=6\int\left(z^4-z^2-z+\frac{1}{z^2-z+1}\right)dz$$

$$=6\left(\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{6x^{\frac{5}{6}}}{5}-2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}-4\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x^{\frac{1}{6}}-1}{\sqrt{3}}.$$

〔例〕 4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$.

(答) $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+\log(\sqrt[6]{x}+1)^6$.

〔例〕 5. $\int \sqrt{ax+b}\,dx=\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}$.

〔例〕 6. $\int (a+x)\sqrt{b-x}\,dx=\frac{2}{5}(b-x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(a+b)(b-x)^{\frac{3}{2}}$.

〔例〕 7. $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx=\sqrt{a^2-x^2}-\cos^{-1}\frac{x}{a}$.

4. 無理式 $f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})$ 之積分。

$f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})$ 爲 x 與 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ 之有理函數。則得二種如次。

(I) 於 $a+bx+cx^2$。而 $b^2-4ac>0$。

則分解 $a+bx+cx^2$ 爲一次因數。得

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

而 $\quad c>0$

令 $$z=\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}}.$$

則 $$x=\frac{\alpha-\beta z^2}{1-z^2},\quad dx=\frac{2(\alpha-\beta)z}{(1-z^2)^2}dz.$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{\sqrt{c}(\alpha-\beta)z}{1-z^2}.$$

∴ $$\int f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$$

$$=2(\alpha-\beta)\int f\left(\frac{\alpha-\beta z^2}{1-z^2},\frac{\sqrt{c}(\alpha-\beta)z}{1-z^2}\right)\frac{z}{(1-z^2)^2}dz.$$

若 $c<0$

則令 $$z=\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}.$$

$$x=\frac{\alpha+\beta z^2}{1+z^2},\quad dx=\frac{2(\beta-\alpha)z}{(1+z^2)^2}dz.$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{\sqrt{-c}(\beta-\alpha)z}{1-z^2}.$$

∴ $$\int f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$$

$$=2(\beta-\alpha)\int f\left(\frac{\alpha+\beta z^2}{1+z^2},\frac{\sqrt{-c}(\beta-\alpha)z}{1+z^2}\right)\frac{z}{1-z^2}dx.$$

(II) 於 $a+bx+cx^2$。而 $b^2-4ac<0$。

因 $$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{\frac{1}{4c}\{(2cx+b)^2-(b^2-4ac)\}}.$$

則不可不令 $c>0$。

否則 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ 爲虛數。

由是令 $\sqrt{a+bx+cx^2}=z-\sqrt{c}x.$

則 $$x=\frac{z^2-a}{b+2\sqrt{c}z},\quad dx=\frac{2(\sqrt{c}a+bz+\sqrt{c}z^2)}{(b+2\sqrt{c}z)^2}dz.$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{\sqrt{c}a+bz+\sqrt{c}z^2}{b+2\sqrt{c}z}.$$

$\therefore$ $$\int f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$$

$$=2\int f\left\{\frac{z^2-a}{b+2\sqrt{c}z},\frac{\sqrt{c}a+bz+\sqrt{c}z^2}{b+2\sqrt{c}z}\right\}$$

$$\times\frac{\sqrt{c}a+bz+\sqrt{c}z^2}{(b+2\sqrt{c}z)^2}dz.$$

(注意一) 以上二種之置換。所有方法盡之矣。然若$a>0$。則用次之置換法。爲更簡便。

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=xz+\sqrt{a}.$$

$$x=\frac{-b+2\sqrt{a}z}{c-z^2},\quad dx=\frac{2(\sqrt{a}c-bz+\sqrt{a}z^2)}{(c-z^2)^2}dz.$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{\sqrt{a}c-bz+\sqrt{a}z^2}{c-z^2}.$$

$\therefore$ $$\int f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$$

$$=2\int f\left\{\frac{-b+2\sqrt{a}z}{c-z^2},\frac{\sqrt{a}c-bz+\sqrt{a}z^2}{c-z^2}\right\}$$

$$\times\frac{\sqrt{a}c-bz+\sqrt{a}z^2}{(c-z^2)^2}dz.$$

(注意二) 凡將$f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})$之有理函數。分爲有理式與無理式。則其形爲

$$\frac{\phi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{a+bx+cx^2}}{\phi_2(x)+\psi_2(x)\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

更化此分母爲有理式。則

$$\phi(x)+\psi(x)\sqrt{a+bx+cx^2}.$$

而令 $\psi(x)\sqrt{a+bx+cx^2}=\dfrac{\psi(x)(a+bx+cx^2)}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=F(x)\dfrac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$

則 $F(x)$ 之有理函數。由本節之積分。足以解決下式矣。

$$\int F(x)\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

又此積分。分解 $F(x)$ 爲部分分數。只研究下列之一個基本形而已。

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

〔例〕 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}.$

(解) 令 $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}=z.$ 則

$$x=a\frac{z^2-1}{z^2+1},\quad dx=4a\frac{zdz}{(z^2+1)^2}.$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=2a\frac{z}{z^2+1}.$$

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{2}{a}\int\frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{a}\int\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)dz$$

$$=\frac{1}{a}\log\frac{z-1}{z+1}$$

$$=\frac{1}{a}\log\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$$

$$=\frac{1}{a}\log\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

(別解) 令 $\sqrt{a^2-x^2}=-xz+a$. 則

$$x=\frac{2az}{1+z^2},\quad dx=2a\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}dz.$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

$$\therefore\qquad \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{a}\log z$$

$$=\frac{1}{a}\log\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

〔例〕 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+c^2x^2}}$.

(解) 令 $\sqrt{a^2+c^2x^2}=z-cx$. 則

$$a^2+c^2x^2=(z-cx)^2=z^2-2cxz+c^2x^2.$$

$$a^2=z^2-2czx.$$

$$0=2(z-cx)dz-2czdx.$$

$$\therefore\qquad \frac{dx}{z-cx}=\frac{dz}{cz}.$$

$$\therefore\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2+c^2x^2}}=\frac{1}{c}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{c}\log z$$

$$=\frac{1}{c}\log(cx+\sqrt{a^2+c^2x^2}).$$

(注意) 本題亦得令 $\sqrt{a^2+c^2x^2}=xz+a$.

〔例〕 3. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$.

〔例〕 4. $\int\sqrt{2ax+x^2}dx=\frac{x+a}{2}\sqrt{2ax+x^2}$

$$-\frac{a^2}{2}\log(x+c+\sqrt{2ax+x^2}).$$

〔例〕 5. $\int \frac{dx}{a+2bx-cx^2}$. $(c>0)$

(答) $\frac{1}{\sqrt{c}} \sin^{-1} \frac{cx-b}{\sqrt{b^2+ac}}$.

〔例〕 6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-3x^2}} = -\sqrt{\frac{2-3x}{x}}$.

〔例〕 7. $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-2x+3}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}} \log \frac{2x+\sqrt{6}\sqrt{x^2-2x+3}}{x-3}.$$

(注意) $f(x, \sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4})$ 之函數爲 x 與 $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$ 之有理函數。則 e 不拘爲零與否。其積分必表三種基本形如次。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{\sqrt{1+k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-a)\sqrt{(1-x^2)(1+k^2x^2)}}.$$

此三種。順次稱第一種,第二種,第三種之橢圓積分 (*Elliptic integrals*)。

於橢圓積分。命 $x=\sin\theta$。則 $dx=\cos\theta\, d\theta$.

由是第一種,第二種,第三種之形如次。

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta,$$

$$\int \frac{d\theta}{(\sin^2\theta-a)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

5. 二項式$x^m(a+bx^n)^p$之積分。

於二項式$x^m(a+bx^n)^p$。其a, b爲常數。m, n, p爲有理數。

若m, n之雙方面或一方面爲分數。其最小公分母爲α。令

$$x=z^{\alpha}.$$

則

$$x^m(a+bx^n)^p dx=\alpha z^{m\alpha+\alpha-1}(a+bz^{n\alpha})^p dz.$$

其z之指數。爲二個整數。

又n爲負數。則

$$x^m(a+bx^n)^p dx=x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p dx.$$

其$-n$爲正。

更p爲整數。則爲有理分數之積分。

由是研究m爲正或負之整數。n爲正整數。p爲分數之式者足矣。

先研究$p=\frac{q}{r}$。令$a+bx^n=z^r$。則

$$x=\left(\frac{z^r-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

$$dx=\frac{r}{nb}\left(\frac{z^r-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}z^{r-1}dz.$$

$$\therefore\qquad \int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{r}{nb}\int z^{q+r-1}\left(\frac{z^r-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}dz.$$

此積分之$\frac{m+1}{n}$爲整數。則爲有理函數之積分。

次同樣置換。而

$$\int x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p dx=-\frac{r}{na}\int z^{p+r-1}\left(\frac{z^r-b}{a}\right)^{-\frac{m+np-1}{n}-1}dz$$

此積分之 $\dfrac{m+np+1}{n}$ 即 $\dfrac{m+1}{n}+p$ 爲整數。則亦爲有理函數之積分。

由是下列三式之中。任一式爲整數。則二項式之積分。爲有理函數之積分。

(i) p.

(ii) $\dfrac{m+1}{n}$.

(iii) $\dfrac{m+1}{n}+p$.

不適合以上所列之式。則不外依下列之累次積分之公式。

由部分積分法。

令 $u=(a+bx^n)^p,\quad dv=x^m dx.$

則
$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}$$
$$-\frac{nbp}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx\ldots\ldots(1)$$

(1) 以 $m+1\neq 0$ 爲限。令 $m+n$ 與 $p-1$ 爲 m 與 p 簡單之。即可適用。

又令 $u=x^{m-n+1}\quad dv=(a+bx^n)^p x^{n-1}dx.$

則
$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m-n+1}}{(p+1)bn}$$
$$-\frac{m-n+1}{(p+1)bn}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx\ldots\ldots(2)$$

(2) 以 $p+1\neq 0$ 爲限。令 $m-n, p+1$ 爲 m, p 簡單之。即可適用。

又於 (2) 以
$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx=a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx$$
$$+b\int x^m(a+bx^n)^p dx.$$

而 $$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m-n+1}}{b(np+m+1)}$$

$$-\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx\text{......}(3)$$

此 (3) 之 m 以 $m+n$ 代之。則

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m+1}}{a(m+1)}$$

$$-\frac{b(np+m+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx\text{......}(4)$$

(3) 與 (4) 以 $np+m+1\neq 0$, $m+1\neq 0$ 爲限。將 x^m 之項簡單之。卽可使用。

最後令 (1) 與 (4) 之右邊相等。而 $m+n$ 代以 m。則

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{(a+bx^n)^p x^{m+1}}{m+np+1}$$

$$+\frac{nap}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx\text{......}(5)$$

同樣 (2) 與 (3) 之 $m-n$ 代以 m。則

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=-\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{na(p+1)}$$

$$+\frac{m+np+n+1}{na(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}dx\text{......}(6)$$

(5) 與 (6) 僅將 $(a+bx^n)^p$ 之項簡單之。卽可使用。

以上六種公式。均得減小二項式之指數之絕對值。餘外 $m+1=0$, $p+1=0$, $m+np+1=0$ 各宜直接研究。毋庸具論。

但 $m+np+1=0$ 爲 $\dfrac{m+1}{n}+p$ 之整數之一種。

〔例〕 1. $\int x^{\frac{3}{2}}\left(1+2x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{3}}dx.$

(解) x之指數$\dfrac{3}{2}$及$\dfrac{1}{3}$。其分母之最小公倍數爲6。故令

$$x=z^6.$$

則 $$dx=6z^5dz.$$

$\therefore$ $$\int x^{\frac{3}{2}}\left(1+2x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{3}}dx=6\int z^9\left(1+2z^2\right)^{-\frac{1}{3}}dz.$$

〔例〕 2. $\int x^9\left(1+2x^2\right)^{-\frac{1}{3}}dx.$

(解) $m=9,\ n=2.$ 而

$$\frac{m+1}{n}=\frac{9+1}{2}=5.$$

故令 $$1+2x^2=z^3.$$

則 $$x^2=\frac{z^3-1}{2}.$$

$$xdx=\frac{3}{4}z^2dz.$$

$\therefore$ $$\int x^9\left(1+2x^2\right)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{64}\int(z^3-1)^4zdz$$

$$=\frac{3}{64}\int(z^{13}-4z^{10}+6z^7-4z^4+z)\,dz$$

$$=\frac{3}{64}\left(\frac{z^{14}}{14}-\frac{4z^{11}}{11}+\frac{3z^8}{4}-\frac{4z^5}{5}+\frac{z^2}{2}\right).$$

〔例〕 3. $\int\dfrac{x^3dx}{\sqrt{1+x^8}}.$

(解) 因 $m=3,\ n=8,\ p=-\dfrac{1}{2}.$

故 $$\frac{m+1}{n}+p=\frac{3+1}{8}-\frac{1}{2}=0.$$

由是 $$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^8}}=\int\frac{x^3dx}{x^4\sqrt{x^{-8}+1}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^{-8}}}.$$

令 $$1+x^{-8}=z^2.$$

則 $$-8x^{-9}dx=2zdz.$$

卽 $$-8(z^2-1)x^{-1}dx=2zdz.$$

$\therefore$ $$\frac{dx}{x}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z^2-1}dz.$$

$\therefore$ $$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^8}}=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^2-1}$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$=\frac{1}{8}\log\frac{z+1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{8}\log\frac{(z+1)^2}{z^2-1}=\frac{1}{8}\log\frac{(z+1)^2}{x^{-8}}$$

$$=\frac{1}{4}\log x^4(z+1)$$

$$=\frac{1}{4}\log(x^4+\sqrt{1+x^8}).$$

〔例〕 4. $$\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}.$$

(答) $$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

〔例〕 5 $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (但 m 爲正整數).

(解) 由累次積分之公式(3)。得

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x^{m-1}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

此 x^m 之指數遞次減小2。最後得

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}.\quad (m\text{ 爲奇數}).$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=sin^{-1}x.\quad (m\text{ 爲偶數}).$$

任何均可着落。

6. 含對數函數,逆三角函數之函數之積分。

對數函數,逆三角函數之微分係數。任何亦爲代數函數。今令 $\phi(x)$ 爲代數函數。則

$$\frac{d}{dx}\{log\,\phi(x)\}=\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}.$$

$$\frac{d}{dx}\{tan^{-1}\phi(x)\}=\frac{\phi'(x)}{1+\{\phi(x)\}^2}.$$

$$\frac{d}{dx}\{sin^{-1}\phi(x)\}=\frac{\phi'(x)}{\sqrt{1-\{\phi(x)\}^2}}.$$

等。任何亦爲代數函數。

由是 $log\{\phi(x)\}$, $tan^{-1}\{\phi(x)\}$, $sin^{-1}\{\phi(x)\}$ 等。以 $P\{\phi(x)\}$ 表之。則 $f(x)\cdot P\{\phi(x)\}$ 之積分如次。

但 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 任何亦爲代數函數。

令 $\quad u=P\{\phi(x)\},\quad dv=f(x)\,dx.$

則 $$du=P'\{\varphi(x)\}\varphi'(x)\,dx,\quad v=\int f(x)\,dx=F(x).$$

其du必爲代數函數。

今$F(x)$爲代數函數。則

$$\int f(x)\cdot P\{\varphi(x)\}\,dx=F(x)\cdot P\{\varphi(x)\}-\int F(x)\cdot P'\{\varphi(x)\}\varphi'(x)\,dx.$$

此最後之積分。爲代數函數之積分。得依前節所述之積分處分之。

(注意) $F(x)$不爲代數函數。亦爲對數函數。又爲逆三角函數時。得反覆適用部分積分法。

$f(x)[P\{\varphi(x)\}]^n$ (n爲整數) 之積分。得依前述之部分積分法以求之。

〔例〕 1. $\int x^n log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$ (n爲整數).

(解) $$\int x^n log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}log(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

此最後之積分 $\frac{n+2}{2}$ 與 $\frac{n+2}{2}+\frac{1}{2}$。任何必有一爲整數。依前節之方法解之。即得。

〔例〕 2. $\int\frac{log(1+x^2)}{x^2}dx.$

(答) $2\,tan^{-1}x-\frac{log(1+x^2)}{x}$。

〔例〕 3. $\int x\,sin^{-1}x\,dx.$

(解) $$\int x\sin^{-1}x\,dx=\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

然合 $$\sqrt{1-x^2}=1-xz.$$

則 $$x=\frac{2z}{1+z^2},\quad dx=\frac{2(1-z^2)}{(1+z^2)^2}dz.$$

$\therefore$ $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=8\int\frac{z^2}{(1+z^2)^3}dz$$

$$=-\frac{2z}{(1+z^2)^2}+2\int\frac{dz}{(1+z^2)^2}$$

$$=-\frac{2z}{(1+z^2)^2}+2\int\frac{dz}{1+z^2}-2\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^2}$$

$$=-\frac{2z}{(1+z^2)^2}+2\tan^{-1}z+\frac{z}{1+z^2}-\int\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=\frac{z}{1+z^2}-\frac{2z}{(1+z^2)^2}+\tan^{-1}z$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2(1-\sqrt{1-x^2})}+\tan^{-1}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

而 $$\int x\sin^{-1}x\,dx=\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x-\frac{x}{4}-\frac{x^3}{4(1-\sqrt{1-x^2})}$$
$$+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

〔例〕 4. $\int x\tan^{-1}x\,dx.$

(答) $$\frac{x^2\tan x}{2}+\frac{\tan^{-1}x}{2}-\frac{x}{2}.$$

〔例〕 5. $\int x^m(\log x)^n dx.$ (n 爲整數).

(解) 先令 $m=-1$. 則

$$\int\frac{(\log x)^n}{x}dx=\int(\log x)^n d(\log x)=\frac{(\log x)^{n+2}}{x+1}.$$

由是令 $n>0, m\neq-1$. 則

$$\int x^m(\log x)^n dx=\frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int x^m(\log x)^{n-1}dx.$$

反覆適用此公式。卽可得積分之值。

若 $n<0, m\neq-1$。則前公式之 $n-1$、以 n 代之。而

$$\int x^m(\log x)^n dx=\frac{x^{m+1}(\log x)^{n+1}}{n+1}-\frac{m+1}{n+1}\int x^m(\log x)^{n+1}dx$$

之公式。得反覆適用之。

最後爲 $\displaystyle\int\frac{x^m}{\log x}dx.$

令 $x^{m+1}=z$. 則

$$\int\frac{dz}{\log z}\quad 卽\quad \int\frac{dz}{\displaystyle\int\frac{dz}{\int dz}}.$$

此名積分對數(*Integral-logarithms*)之新超越函數。

(注意) $f(\log x)$ 之積分。由置換 $\log x=z$。卽變爲次節之積分。

7. 含指數函數之函數之積分。

含指數函數之函數中。有二種積分。一爲 e^{kx} 之代數函數 $f(e^{kx})$。二爲有理函數 $f(x)$ 與 e^{kx} 之積 $f(x)\cdot e^{kx}$。今分述如次。

先述 $f(e^{kx})$ 之積分。

令 $e^{kx}=z.$

則 $dx=\frac{dz}{kz}.$

∴ $$\int f(e^{kx})\,dx=\frac{1}{k}\int\frac{f(z)}{z}\,dz.$$

由是得依據前數節所述之代數函數之積分以求之。

次述 $f(x)e^{kx}$ 之積分。

分 $f(x)$ 爲有理整函數 $G(x)$，與有理分數 $\frac{F(x)}{\phi(x)}$。則

$$f(x)=G(x)+\frac{F(x)}{\phi(x)}.$$

$$\int f(x)e^{kx}dx=\int G(x)e^{kx}dx+\int\frac{F(x)}{\phi(x)}e^{kx}dx.$$

而 $$\int G(x)e^{kx}dx=\frac{1}{k}G(x)e^{kx}-\frac{1}{k}\int G'(x)e^{kx}dx.$$

$$\int G'(x)e^{kx}dx=\frac{1}{k}G'(x)e^{kx}-\frac{1}{k}\int G''(x)e^{kx}dx.$$

等等。今令 $G(x)$ 爲 n 次。則 $G^{(n)}(x)$ 爲常數。

$$\int G(x)e^{kx}dx=\frac{e^{kx}}{k}\left\{G(x)-\frac{G'(x)}{k}+\frac{G''(x)}{k^2}-\dots+(-1)^n\frac{G^{(n)}(x)}{k^n}\right\}.$$

又令分數 $\frac{F(x)}{\phi(x)}$ 爲散分。則由其代表之項推究之。

由 $\frac{A}{x-a},\quad\frac{B}{(x-a)^m}.$

得 $A\int\frac{e^{kx}}{x-a}dx,\quad B\int\frac{e^{kx}}{(x-a)^m}dx.$

此二個積分。命

$$x-a=\frac{\log z}{k}.$$

則 $dx=\frac{dz}{kz},\quad e^{kx}=z\cdot e^{ka}.$

$$\therefore\quad A\int\frac{e^{kx}}{x-a}dx=Ae^{ka}\int\frac{dz}{\log z}.$$

$$B\int\frac{e^{kx}}{(x-a)^m}dx=Bk^{m-1}e^{ka}\int\frac{dz}{(\log z)^m}.$$

是終必爲積分對數。

〔例〕 1. $\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx.$

(答) $2\log(e^x-1)-x.$

〔例〕 2. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

(答) $\tan^{-1}e^x.$

〔例〕 3. $\int\frac{a^x}{ma^x+n}dx.\qquad(a>0).$

(解) 命 $a^x=t$. 則

$$dx=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{dt}{t}.$$

$$\therefore\quad\int\frac{a^x}{ma^x+n}dx=\frac{1}{\log a}\int\frac{dt}{mt+n}=\frac{1}{m\log a}\log(mt+n)$$

$$=\frac{1}{m\log a}\log(ma^x+n).$$

〔例〕 4. $\int x^3e^xdx.$

(解) $\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx.$

$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx.$

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$

$\therefore$ $\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x.$

〔例〕 5. $\int (\log x)^2 dx.$

(解) 令 $\log x = t.$ 則

$$\int (\log x)^2 dx = \int t^2e^t dt = t^2e^t - 2te^t + 2e^t$$

$$= x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\}.$$

〔例〕 6. $\int (\log x + 1)\,dx.$

(答) $x\log x.$

8. 含三角函數之函數之積分。

(I) 有理函數 $f(\sin x, \cos x, \tan x)$ 之積分。

令 $\tan\dfrac{x}{2} = t.$

則 $$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\therefore \quad \int f(\sin x, \cos x, \tan x)\,dx = 2\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

即爲有理函數之積分。

〔例〕 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$.

(解) $$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = 2\int \frac{dt}{\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2} + b\frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)}$$

$$= 2\int \frac{dt}{a+2bt-at^2}$$

$$= \int \frac{2a\,dt}{a^2+b^2-(at-b)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{a\tan\frac{x}{2} - b + \sqrt{a^2+b^2}}{a\tan\frac{x}{2} - b - \sqrt{a^2+b^2}}.$$

〔例〕 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$.

〔例〕 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$.

(答) $\log\left\{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$.

〔例〕 4. $\int\frac{dx}{a+b\tan x}=\frac{b}{a^2+b^2}\log(a\cos x+b\sin x)+\frac{ax}{a^2+b^2}.$

(注意) 如例4.僅 $\tan x$ 爲有理函數。則令 $\tan x=t$. 較爲簡便。

〔例〕 5. $\int\frac{\sin x\,dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}.$

(解) 令 $\cos x=z$. 則

$$\int\frac{\sin x\,dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}=-\int\frac{dz}{az^2+b(1-z^2)}$$

$$=-\frac{1}{b}\int\frac{dt}{1+\frac{a-b}{b}t^2}.$$

由是 $\frac{a-b}{b}>0$. 則

$$=\frac{1}{\sqrt{(a-b)b}}\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{b}}\cos x\right\}.$$

$\frac{a-b}{b}<0$. 則

$$=\frac{1}{2\sqrt{(b-a)b}}\log\frac{1-\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x}{1+\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x}.$$

(注意) 如例5之積分。其函數之形爲 $f(\sin^2 x,\cos x)\cdot\sin x$ 或 $f(\cos^2 x,\sin x)\cdot\cos x$. 則直令 $\cos x$ 或 $\sin x$ 爲 z. 較爲簡便。

(II) <u>$\sin^m x$, $\cos^n x$ 之積分(但 m, n 爲整數)。</u>

此雖得據(I)以求之。然如次之換置法。稍爲簡單。

$$\sin x=z,\quad \cos x\,dx=dz.$$

$$\therefore\qquad \int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int z^m(1-z)^{\frac{n-1}{2}}dz.$$

此積分。見第五節之二項式之積分。

(i) $\dfrac{n-1}{2}$.

(ii) $\dfrac{m+1}{2}$.

(iii) $\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{m+n}{2}$.

任何亦爲整數。則得求積分之值。

而 n 爲奇數。則 (i) 爲整數。m 爲奇數。則 (ii) 爲整數。雙方爲偶數。則 (iii) 爲整數。

故 m, n 以整數爲限時。則此三式任何均可適合。

此積分不置換變數。亦得直接由部分積分法行還元法如次。

先考 $u=\cos^{n-1}x,\ dv=\sin^m x\cos x\,dx=\sin^m x\,d(\sin x)$.

令 $m\neq -1$. 則

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}}{m+1}$$

$$+\frac{n-1}{m+1}\int(\sin x)^{m+2}(\cos x)^{n-2}dx\ \ldots\ldots(1)$$

次考 $u=\sin^{m-1}x,\ dv=\cos^n x\sin x\,dx=-\cos^n x\,d(\cos x)$.

令 $n\neq -1$. 則

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=-\frac{(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1}}{n+1}$$

$$+\frac{m-1}{n+1}\int(\sin x)^{m-2}(\cos x)^{n+2}dx\ \ldots\ldots(2)$$

m 與 n 有反對之符號。則適用公式 (1), (2)。其雙方之絕對值各可盡其所有遞減小2。

於 (1)。

$$\int (\sin x)^{m+2}(\cos x)^{n-2}dx=\int (\sin x)^{m}(\cos x)^{n-2}(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$=\int (\sin x)^{m}(\cos x)^{n-2}dx$$

$$-\int (\sin x)^{m}(\cos x)^{n}dx.$$

而 $m+n\neq 0.$

$\therefore$ $$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}}{m+n}$$

$$+\frac{n-1}{m+n}\int (\sin x)^{m}(\cos x)^{n-2}dx\ldots\ldots(3)$$

同樣。(2) 亦

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=-\frac{(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1}}{m+n}$$

$$+\frac{m-1}{m+n}\int (\sin x)^{m-2}(\cos x)^{n}dx\ldots\ldots(4)$$

於 (3) 之 $n-2$ 以 n 代之。交換其兩邊。則 $n\neq -1$。而

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=-\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}}{n+1}$$

$$+\frac{m+n+2}{n+1}\int (\sin x)^{m}(\cos x)^{n+2}dx\ldots\ldots(5)$$

同樣。(4) 亦 $m\neq -1$。而

$$\int \sin^n x\cos^n x\,dx=\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}}{m+1}$$

$$+\frac{m+n+2}{m+1}\int (\sin x)^{m+2}(\cos x)^{n+2}dx\ldots(6)$$

於 (1) 與 (6)。假定 $m \neq -1$。

若 $m=-1$。則可直接適用 (3) 或 (5)。

同樣。於 (2) 或 (5)。$n=-1$。則可適用 (4) 或 (6)。

又於 (3), (4)。$m+n=0$。

則先從 (1), (2)。卽得避之。

由是依自 (1) 至 (6) 之公式。則 $\sin^m x\cos^n x$ 之積分。可歸結次之任何之積分。

m	n	最後之積分
偶	偶	$\int dx=x$
偶	正奇	$\int \cos x\,dx=\sin x$
正奇	偶	$\int \sin x\,dx=-\cos x$
正奇	正奇	$\int \sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin^2 x$
負奇	正奇	$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\log(\sin x)$
正奇	負奇	$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\log(\cos x)$
負奇	負奇	$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}=\log(\tan x)$
負奇	偶	$\int \frac{dx}{\sin x}=\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$
偶	負奇	$\int \frac{dx}{\cos x}=\log\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right\}$

又特別之式。則可得次之公式。以證明之。

$$\int sin^m x\,dx = -\frac{(sin\,x)^{m-1}cos\,x}{m} + \frac{m-1}{m}\int (sin\,x)^{m-2}dx \ldots\ldots (7)$$

$$\int cos^n x\,dx = \frac{sin\,x(cos\,x)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int (cos\,x)^{n-2}dx \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\int \frac{dx}{sin^m x} = -\frac{cos\,x}{(m-1)(sin\,x)^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{(sin\,x)^{m-2}} \ldots\ldots (9)$$

$$\int \frac{dx}{cos^n x} = \frac{sin\,x}{(n-1)(cos\,x)^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{(cos\,x)^{n-2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

〔例〕 1. $\int sin^4 x\,cos^3 x\,dx.$

(解) 令 $sin\,x = z.$ 則

$cos\,x\,dx = dz.\quad cos^2 x = 1 - z^2.$

而 $$\int sin^4 x\,cos^3 x\,dx = \int z^4(1-z^2)\,dx$$

$$= \int z^4 dz - \int z^6 dz = \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7}$$

$$= \frac{1}{5}sin^5 x - \frac{1}{7}sin^7 x.$$

(別解) 依公式(3)。得

$$\int sin^4 x\,cos^3 x\,dx = \frac{sin^5 x\,cos^2 x}{4+3} + \frac{3-1}{4+3}\int sin^4 x\,cos\,x\,dx$$

$$= \frac{sin^5 x\,cos^2 x}{7} + \frac{2}{7}\times\frac{sin^5 x}{5}$$

〔例〕 2 $\int \frac{sin^8 x}{cos^4 x}dx.$

(解) 令 $\cos x=z$. 則

$$\sin x\,dx=-dz,\quad \sin^2x=1-z^2.$$

而 $$\int\frac{\sin^3x}{\cos^4x}dx=-\int\frac{1-z^2}{z^4}dz=-\int\frac{dz}{z^4}+\int\frac{dz}{z^2}$$

$$=\frac{1}{3z^3}-\frac{1}{z}$$

$$=\frac{1}{3\cos^3x}-\frac{1}{\cos x}=\frac{1-3\cos^2x}{3\cos^3x}.$$

(別解) 由公式(2)。

$$\int\frac{\sin^3x}{\cos^4x}dx=-\frac{\sin^2x(\cos x)^{-3}}{-4+1}+\frac{3-1}{-4+1}\int\frac{\sin x}{\cos^2x}dx.$$

$$=\frac{\sin^2x}{3\cos^3x}+\frac{2}{3}\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2x}$$

$$=\frac{\sin^2x}{3\cos^3x}-\frac{2}{3\cos x}.$$

〔例〕 3. $\int\sin^4x\cos^2x\,dx.$

(答) $\left(\frac{\sin^5x}{6}-\frac{\sin^3x}{24}-\frac{\sin x}{16}\right)\cos x+\frac{x}{16}.$

〔例〕 4. $\int\frac{\sin^3x}{\cos^2x}dx.$

(答) $\frac{1+\cos^2x}{\cos x}.$

〔例〕 5. $\int\frac{dx}{\sin^3x}.$

(解) 令 $\cos x=z.$

則 $$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^4 x}=-\int\frac{dz}{(1-z^2)^2}$$

$$=-\int\frac{1-z^2+z^2}{(1-z^2)^2}dz$$

$$=-\int\frac{dz}{1-z^2}-\int\frac{z^2dz}{(1-z^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1-z}{1+z}-\frac{1}{2}z\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1-z^2}$$

$$=\frac{1}{4}\log\frac{1-z}{1+z}-\frac{z}{2(1-z^2)}$$

$$=\frac{1}{4}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$$

(別解) 依公式(9)。

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}$$

$$=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right).$$

〔例〕 6. $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^2 x}$.

(答) $$\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{3}{2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right).$$

〔例〕 7. $\int\cos^2 x\sin^2 x\,dx$.

(解) $$\cos^2 x\sin^2 x=\frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{8}(1-\cos 4x).$$

$$\therefore \qquad \int \cos^2 x \sin^2 x\,dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 4x}{4} = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}.$$

〔例〕 8. $\int \sin^4 x\,dx.$

(解) $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3).$

$$\therefore \qquad \int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{3}{8}\int dx$$

$$= \frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8}.$$

(III) <u>$f(x)\sin x$ 及 $f(x)\cos x$ 之積分。</u>(但 $f(x)$ 爲有理函數)。

先分解 $f(x)$ 爲整式部分 $G(x)$，與分數式部分。

於 $G(x)\sin x$ 及 $G(x)\cos x$. 由部分積分法。得

$$\int G(x)\sin x\,dx = -G(x)\cos x + \int G'(x)\cos x\,dx$$

$$= -G(x)\cos x + G'(x)\sin x - \int G''(x)\sin x\,dx.$$

$$\int G(x)\cos x\,dx = G(x)\sin x - \int G'(x)\sin x\,dx$$

$$= G(x)\sin x + G'(x)\cos x - \int G''(x)\cos x\,dx.$$

依此公式。任何至最後亦可歸着於

$$\int \sin x\,dx = -\cos x.$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x.$$

其分數式部分。分解爲部分分數。可得一般之形。爲

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{B}{(x-a)^m}.$$

從而 $$A\int\frac{\sin x}{x-a}dx = A\int\frac{\sin(z+a)}{z}dz$$

$$= A\cos a\int\frac{\sin z}{z}dz + A\sin a\int\frac{\cos z}{z}dz.$$

$$A\int\frac{\cos x}{x-a}dx = A\cos a\int\frac{\cos z}{z}dz - A\sin a\int\frac{\sin z}{z}dz.$$

$$B\int\frac{\sin x}{(x-a)^m}dx = -\frac{B\sin x}{(m-1)(x-a)^{m-1}}$$

$$+\frac{B}{m-1}\int\frac{\cos x}{(x-a)^{m-1}}dx.$$

$$B\int\frac{\cos x}{(x-a)^m}dx = -\frac{B\cos x}{(m-1)(x-a)^{m-1}}$$

$$-\frac{B}{m-1}\int\frac{\sin x}{(x-a)^{m-1}}dx.$$

依此等求法。終得表以 $\int\frac{\sin z}{z}dz$ 及 $\int\frac{\cos z}{z}dz.$

(注意) $\int\frac{\sin z}{z}dz$ 及 $\int\frac{\cos z}{z}dz.$ 名爲積分正弦及積分餘弦之新超越函數。

〔例〕 1. $\int\frac{x^4+1}{x^2-1}\sin x\,dx.$

(解) $$\frac{x^4+1}{x^2-1} = x^2+1+\frac{2}{x^2-1} = x^2+1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

$\therefore$ $$\int\frac{x^4+1}{x^2-1}\sin x\,dx = \int x^2\sin x\,dx + \int\sin x\,dx.$$

$$+\int\frac{\sin x}{x-1}dx - \int\frac{\sin x}{x+1}dx.$$

然 $$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\, dx.$$

∴ $$\int x^2\sin x\, dx + \int \sin x\, dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + \cos x.$$

又 $$\int \frac{\sin x}{x-1}dx = \int \frac{\sin(z+1)}{z}dz = \cos 1\int \frac{\sin z}{z}dz + \sin 1\int \frac{\cos z}{z}dz.$$

$$\int \frac{\sin x}{x+1}dx = \int \frac{\sin(z'-1)}{z'}dz' = \cos 1\int \frac{\sin z'}{z'}dz' - \sin 1\int \frac{\cos z'}{z'}dz'.$$

由是所求積分之結果。爲

$$-x^2\cos x + 2x\sin x + \cos x + \cos 1\left(\int \frac{\sin z}{z}dz + \int \frac{\sin z'}{z'}dz'\right) + \sin 1\left(\int \frac{\cos z}{z}dz - \int \frac{\cos z'}{z'}dz'\right)$$

〔例〕 2. $\int x^3\cos^2 x\, dx.$

(答) $$\frac{x^4}{8} + \frac{x(2x^2-3)}{8}\sin 2x + \frac{3(2x^2-1)}{16}\cos 2x.$$

(IV) <u>$G(x)e^{ax}\sin bx$ 及 $G(x)e^{ax}\cos bx$ 之積分。</u>(但 $G(x)$ 爲整函數)。

令 $u = G(x)e^{ax}$, dv 爲 $\sin bx\, dx$ 或 $\cos bx\, dx$ 適用部分積分法。得

$$\int G(x)e^{ax}\sin bx\, dx$$

$$= -\frac{1}{b}G(x)e^{ax}\cos bx + \frac{1}{b}\int \frac{d}{dx}\{G(x)e^{ax}\}\cos bx\, dx$$

$$=-\frac{1}{b}G(x)e^{ax}\cos bx+\frac{1}{b}\int G'(x)e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$+\frac{a}{b}\int G(x)e^{ax}\cos bx\,dx.$$

$$\int G(x)e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{1}{b}G(x)e^{ax}\sin bx-\frac{1}{b}\int\frac{d}{dx}\{G(x)e^{ax}\}\sin bx\,dx$$

$$=\frac{1}{b}G(x)e^{ax}\sin bx-\frac{1}{b}\int G'(x)e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$-\frac{a}{b}\int G(x)e^{ax}\sin bx\,dx.$$

由此二式。得

$$\int G(x)e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}G(x)e^{ax}$$

$$+\frac{b}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\cos bx\,dx-\frac{a}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\sin bx\,dx.$$

$$\int G(x)e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}G(x)e^{ax}$$

$$-\frac{a}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\cos bx\,dx-\frac{b}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\sin bx\,dx.$$

陸續適用此二種公式。最後 $G(x)$ 之導來函數爲常數。即可得次之積分。

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

(參照第一章第6節例7)。

〔例〕 1. $\int xe^x \sin x\,dx$.

(解) 依公式。

$$\int xe^x \sin x\,dx$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{2}xe^x+\frac{1}{2}\int e^x\cos x\,dx-\frac{1}{2}\int e^x\sin x\,dx$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{2}xe^x+\frac{\cos x-\sin x}{4}e^x-\frac{\cos x+\sin x}{4}e^x$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{2}xe^x-\frac{\sin x}{2}e^x.$$

〔例〕 2. $\int e^{2x}\cos^2 x\,dx$.

(答) $\frac{e^{2x}\cos x(\sin x+\cos x)}{4}+\frac{e^{2x}}{8}$.

第三章 關於定積分之定理

1. 定積分之值之求法。

如第一章末之注意已說明。求得不定積分時。卽可容易從此求得定積分之值。而第二章專論不定積分一般之求法。今反覆詳論此中之關係。

函數 $\phi(x)$ 於 (a, b) 有限區域內。爲一價且連續。則於此區域內此導來函數之函數 $f(x)$ 如次。

$$\int \phi(x)\,dx=f(x).$$

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\phi(x+k\,\Delta x)\,\Delta x=\int_a^\beta \phi(x)\,dx \quad \left(但\ \Delta x=\frac{\beta-a}{n}\right).$$

$$=\phi(\beta)-f(a).$$

函數$f(x)$之能求得者。僅爲極特別之一部分。而其不能求得者。反無限制。於定積分之應用。在如此之式。爲特別定積分。故其值有能求得者。又不盡根數夾於二個分數之間。依同樣之方法。有時可求其近似值。或以級數表之。

本章於積分之意義較擴張。故對於不能依不定積分之式之彌縫策。並(a,b)區域內爲無限之式。及函數$\phi(x)$不連續之式。均詳論之。

〔例〕 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\,dx.$

(n表不爲1之正整數)。

(解) 先令

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\,dx=\left|\int cos^n x\,dx\right|_{x=\frac{\pi}{2}}-\left|\int cos^n x\,dx\right|_{x=0}.$$

令 $x=\frac{\pi}{2}-z.$ 則

$$=\left|-\int sin^n z\,dz\right|_{\frac{\pi}{2}-z=\frac{\pi}{2}}-\left|-\int sin^n z\,dz\right|_{\frac{\pi}{2}-z=0}$$

$$=\left|\int sin^n z\,dz\right|_{z=\frac{\pi}{2}}-\left|\int sin^n z\,dz\right|_{z=0}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n z\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,dx.$$

由是此二個定積分之值相等。

然$F(b)-F(a)$之記號。以$\left|F(x)\right|_a^b$表之。

依部分積分法。則

$$\int sin^n x\,dx=-\frac{(sin\,x)^{n-1}cos\,x}{n}+\frac{n-1}{n}\int(sin\,x)^{n-2}dx.$$

[見第二章第8節公式(7)]。

$$\therefore\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n x\,dx=-\left|\frac{(sin\,x)^{n-1}cos\,x}{n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,x)^{n-2}dx$$

$$=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,x)^{n-2}dx.$$

試反覆適用此公式。則由n之偶數與奇數。得次之二式。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,x)^{2p}dx=\frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{2p-3}{2p-2}\cdot\frac{2p-5}{2p-4}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,x)^{2p+1}dx=\frac{2p}{2p+1}\cdot\frac{2p-2}{2p-1}\cdot\frac{2p-4}{2p-3}\cdots\cdots\frac{2}{3}.$$

(注意) 由上記之定積分。則計算π之值。可歸着至哇里氏(*Wallis*)之公式。卽於$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$區域內、爲

$$(sin\,x)^{2p-1}\geqq(sin\,x)^{2p}\geqq(sin\,x)^{2p+1}.$$

$$\therefore\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,x)^{2p-1}dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,x)^{2p}dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,x)^{2p+1}dx.$$

故

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{2p-2}{2p-1}>\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$>\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{2p-2}{2p-1}\cdot\frac{2p}{2p+1}.$$

$$1>\frac{1}{2^2}\,\frac{3^2}{4^2}\cdots\cdots\frac{(2p-3)^2}{(2p-2)^2}\cdot\frac{(2p-1)^2}{2p}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$>\frac{2p}{2p+1}=1-\frac{1}{2p+1}.$$

$$\therefore\qquad \frac{\pi}{2}=\lim_{p=\infty}\frac{2.2.4.4.6\ldots\ldots 2p-2.2p}{1.3.3.5.5\ldots\ldots 2p-1.2p-1}.$$

〔例〕 2. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}$. (但 $n>2$)。

(解) 於 $(0,1)$ 區域。則

$$1\geqq\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\geqq\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

故
$$\int_0^1 dx>\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}>\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\Big|x\Big|_0^1>\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}>\Big|\log(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1.$$

[見第二章第4節例 (2)]。

即
$$1>\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}>\log(1+\sqrt{2})=0.881\ldots.$$

2. 平均值之定理。

(I) 積分函數 $\int\phi(x)\,dx=f(x)$。試適用平均值之定理(微分學第38頁)。則

$$\int_\alpha^\beta\phi(x)\,dx=f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'\{\alpha+\theta(\beta-\alpha)\}.\quad 0<\theta<1.$$

即
$$\int_\alpha^\beta\phi(x)\,dx=(\beta-\alpha)\phi\{\alpha+\theta(\beta-\alpha)\}.\quad 0<\theta<1.$$

適用此公式。求得定積分之值之界限。

(II) 積分之函數$\phi(x)$。由二個因數$\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$而成。此積分於(α, β)區域內$\phi_1(x)$常爲正。則於此區域內之$\phi_2(x)$。其最大及最小之值。令爲g及k。

則　　$g \geqq \phi_2(x) \geqq k.$

以$\phi_1(x)>0.$ 而

$$g\phi_1(x) \geqq \phi_1(x)\phi_2(x) \geqq k\phi_1(x).$$

$$\therefore \qquad g\int_\alpha^\beta \phi_1(x)\,dx > \int_\alpha^\beta \phi_1(x)\phi_2(x)\,dx > k\int_\alpha^\beta \phi_1(x)\,dx.$$

此定積分有確定值。則

$$g > \phi_2\{\alpha+\theta(\beta-\alpha)\} > k. \quad 0<\theta<1.$$

其適於上式之θ必可存在。從而

$$\int_\alpha^\beta \phi_1(x)\phi_2(x)\,dx = \phi_2\{\alpha+\theta(\beta-\alpha)\}\int^\beta \phi_1(x)\,dx. \quad 0<\theta<$$

由是可求得定積分之值之大略。

〔例〕 1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$. (但$k<1$).

(解) 於$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$區域內之$\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$。其最大値爲$x=0$之最小值爲$x=\frac{\pi}{2}$之$\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$。由是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} > \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\int$$

即　　$$\frac{\pi}{2} > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} > \frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}}.$$

〔例〕 2. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$. (但 $k^2<1, 0<a<1$).

(解) $\phi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\phi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$.

試適用第二公式。則以 $\phi_2(x)$ 之最小值為 1。最大值為 $\frac{1}{\sqrt{1-k^2a^2}}$.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}<\int^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{1-k^2a^2}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

卽 $$sin^{-1}a>\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}>\frac{sin^{-1}a}{\sqrt{1-k^2a^2}}.$$

$\therefore$ $$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\left\{1+\theta\left(\frac{1}{\sqrt{1-k^2a^2}}-1\right)\right\}sin^{-1}a.$$

$$0<\theta<1.$$

3. 於界限內不連續之函數之積分。

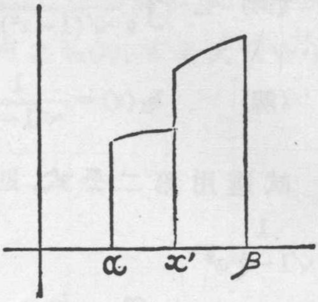
依最初之定義。則積分之函數 $\phi(x)$。其積分於 (a, β) 區域內。為一價且連續。今將此定義擴張。$\phi(x)$ 於其區域內。為有限回飛變而不連續及無限大之式。

(I) (a, β) 內之點 x' 為飛變而不連續。

則 $$\int_a^{x'} \phi(x)\,dx, \quad \int_{x'}^{\beta} \phi(x)\,dx.$$

各由定義以確定。而

$$\int_a^{\beta} \phi(x)\,dx=\int_a^{x'} \phi(x)\,dx+\int_{x'}^{\beta} \phi(x)\,dx.$$



則 $\phi(x)$ 宜爲有限回飛變之不連續。

(II) <u>(α, β) 的界限內爲無限大。</u>

於上限 β 爲 $\phi(x)$ 的無限大。ϵ 爲任意小之正數。則

$$\int_{a}^{\beta-\epsilon} \phi(x)\,dx = f(\beta-\epsilon) - f(a).$$

是爲有限確定。

若 $\lim\limits_{\epsilon=0} f(\beta-\epsilon)$ 有有限確定值。則

$$\int_{a}^{\beta} \phi(x)\,dx = \lim_{\epsilon=0} \int_{a}^{\beta-\epsilon} \phi(x)\,dx = \lim_{\epsilon=0} f(\beta-\epsilon) - f(a).$$

若 $\lim\limits_{\beta=0} f(\beta-\epsilon)$ 爲無限大或爲不定。則此積分之值。亦爲無限大或爲不定。

下限 a 及雙方之界限 $\phi(x)$ 爲無限大時。亦可同樣定之。卽

$$\int_{a}^{\beta} \phi(x)\,dx = \lim_{\eta=0} \int_{a+\eta}^{\beta} \phi(x)\,dx = f(\beta) - \lim_{\eta=0} f(a+\eta).$$

$$\int_{a}^{\beta} \phi(x)\,dx = \lim_{\epsilon=0} f(\beta-\epsilon) - \lim_{\eta=0} f(a+\eta).$$

(III) <u>(α, β) 內之點 x' 爲無限大。</u>

則 $$\int_{a}^{\beta} \phi(x)\,dx = \lim_{\epsilon=0} \int_{a}^{x'-\epsilon} \phi(x)\,dx + \lim_{\eta=0} \int_{x'+\eta}^{\beta} \phi(x)\,dx$$

$$= f(\beta) - f(a) + \lim_{\epsilon=0} f(x'-\epsilon) - \lim_{\eta=0} f(x'+\eta).$$

從而 $\lim\limits_{\epsilon=0} f(x'-\epsilon)$ 與 $\lim\limits_{\eta=0} f(x'+\eta)$。任何爲有限確定。則積分之值。亦爲有限確定。

(注意) $\phi(x)$ 於積分區域內忘其爲無限大。而求其積分之值。往往錯誤。

例如

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \underset{\epsilon=0}{Lim}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{(x-1)^2} + \underset{\eta=0}{Lim}\int_{1+\eta}^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \underset{\epsilon=0}{Lim}\frac{-1}{(1-\epsilon)-1} - \frac{-1}{0-1}$$

$$+\frac{-1}{2-1} - \underset{\eta=0}{Lim}\frac{-1}{(1+\eta)-1}$$

$$= -2 + \underset{\epsilon=0}{Lim}\frac{1}{\epsilon} + \underset{\eta=0}{Lim}\frac{1}{\eta}$$

故此積分之值。宜爲無限大。若忘却不連續點。則如

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left|\frac{-1}{x-1}\right|_0^2 = -2.$$

又 $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \underset{\epsilon=0}{Lim}\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{dx}{x} + \underset{\eta=0}{Lim}\int_\eta^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \underset{\epsilon=0}{Lim}\ log(-\epsilon) - log(-1) + log(1) - \underset{\eta=0}{Lim}\ log(\eta)$$

$$= \underset{\epsilon=0}{Lim}\ log\frac{-\epsilon}{-1} - \underset{\eta=0}{Lim}\ log(\eta) = \underset{\epsilon=0,\ \eta=0}{Lim}\ \frac{\epsilon}{\eta}.$$

故此積分之值爲不定。

〔例〕 1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

(解) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underset{\epsilon=0}{Lim}\left|sin^{-1}x\right|_0^{1-\epsilon} = \underset{\epsilon=0}{Lim}\ sin^{-1}(1-\epsilon) sin^{-1}0$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

〔例〕 2. $\int_0^a \frac{dx}{a^2-x^2}$. $(a>0)$.

(解) $$\int_0^a \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\int_0^a\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^a\frac{dx}{a-x}+\frac{1}{2a}\int_0^a\frac{dx}{a+x}$$

$$=\frac{1}{2a}\operatorname*{Lim}_{\epsilon=0}\Big|-\log(a-x)\Big|_0^{a-\epsilon}+\frac{1}{2a}\Big|\log(a+x)\Big|_0^a$$

$$=\frac{1}{2a}\operatorname*{Lim}_{\epsilon=0}\log\epsilon+\frac{1}{2a}\log(2a).$$

故此積分之值爲無限大。

〔例〕 3. $\int_a^\beta \frac{dx}{(x-a)^n}$.

(解) $$\int_a^\beta \frac{dx}{(x-a)^n}=\frac{1}{n+1}\operatorname*{Lim}_{\eta=0}\left|\frac{-1}{(x-a)^{n-1}}\right|_{a+\eta}^\beta \qquad (n\neq 1).$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{\operatorname*{Lim}_{\eta=0}\frac{1}{\eta^{n-1}}-\frac{1}{(\beta-a)^{n-1}}\right\}.$$

$$\int_a^\beta\frac{dx}{x-a}=\operatorname*{Lim}_{\eta=0}\Big|\log(x-a)\Big|_{a+\eta}^\beta$$

$$=\log(\beta-a)-\operatorname*{Lim}_{\eta=0}\log\eta.$$

由是此積分之值。若$n<1$。則爲有限。

而 $$\int_a^\beta\frac{dx}{(x-a)^n}=-\frac{(\beta-a)^{1-n}}{n+1}. \qquad (n<1).$$

若$n\geqq 1$。則爲無限大。

〔例〕 4. $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}dx$.

(答) $\frac{3}{8}\pi a^2$.

〔例〕 5. $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$.

(答) π.

〔例〕 6. $\int_{0}^{2}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}dx$.

(解) $\int\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}dx=\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}}$.

$$\therefore\quad \int_{0}^{2}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}dx=\underset{\epsilon=0}{Lim}\int_{0}^{1-\epsilon}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}dx+\underset{\eta=0}{Lim}\int_{1+\eta}^{2}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}$$

$$=\underset{\epsilon=0}{Lim}\left(\frac{3}{2}\epsilon^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{5}\epsilon^{\frac{5}{3}}\right)-\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{5}\right)$$

$$+\frac{3}{2}(-1)^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{5}(-1)^{\frac{5}{3}}$$

$$-\underset{\eta=0}{Lim}\left\{\frac{3}{2}(-\eta)^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{5}(-\eta)^{\frac{5}{3}}\right\}$$

$$=-\frac{6}{5}.$$

4. 界限的無限大之積分。

依前所擴張積分之第二定義。考積分界限之一方及雙方爲無限大之式。

先令 $x'>a$。其 $\phi(x)$ 之積分。不拘 x' 爲如何。於 (a, x') 區域內有有限確定值。由是令

$$\int_{a}^{x'}\phi(x)\,dx=f(x')-f(a).$$

若 $\underset{x'=\infty}{Lim}f(x')$ 爲有限確定。則決定其積。可如次表之。

$$\int_{a}^{\infty}\phi(x)\,dx=\underset{x'=\infty}{Lim}\int_{a}^{x'}\phi(x)\,dx=\underset{x'=\infty}{Lim}f(x')-f(a).$$

下限a為無限大。亦可同樣定之。如

$$\int_{-\infty}^{\beta}\phi(x)\,dx=\underset{x''=\infty}{Lim}\int_{x''}^{\beta}\phi(x)\,dx=f(\beta)-\underset{x''=\infty}{Lim}f(x'')\,.$$

又上下限均為無限大。則

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\,dx=\underset{x'=\infty,\,x''=-\infty}{Lim}\int_{x''}^{x'}\phi(x)\,dx$$

$$=\underset{x'=\infty}{Lim}f(x')-\underset{x''=-\infty}{Lim}f(x'').$$

若$\underset{x'=\infty}{Lim}f(x')$, $\underset{x''=-\infty}{Lim}f(x'')$非為有限確定。而為無限大或為不定。則其時積分之值。亦為無限大或為不定。

〔例〕 1. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}$. $(a>0)$.

(解) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}tan^{-1}\frac{x}{a}$.

$$\therefore\quad\int_0^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\underset{x=\infty}{Lim}\left(tan^{-1}\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{a}tan^{-1}0$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2a}.$$

〔例〕 2. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

(解) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\underset{x'=\infty}{Lim}(tan^{-1}x')-\underset{x''=-\infty}{Lim}(tan^{-1}x'')$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

〔例〕 3. $\int_a^{\infty}e^{-x}dx$.

(解) $\int_a^{\infty}e^{-x}dx=-\underset{x=\infty}{Lim}e^{-x}+e^{-a}=e^{-a}$.

〔例〕 4. $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx,\quad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx.\qquad (a>0)$。

(解) 如第一章第6節例7。得

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx=-\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}.$$

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx=-\frac{a\cos bx-b\sin bx}{a^2+b^2}e^{-ax}.$$

入此等界限。試求其極限值。則

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

〔例〕 5. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$

(解) 此積分之不定積分。以已知函數之有限項表之。難矣。由是分爲二部分。如

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^\infty e^{-x^2}dx.$$

通過積分 (0, 1) 之區域。以 $e^{-x^2}\lesseqgtr 1$。而 $\int_0^1 e^{-x^2}dx<1.$

次於積分域 $(1,\infty)$。則 $e^{-x^2}\lesseqgtr e^{-x^2}\times x.$

$$\therefore\qquad \int_1^\infty e^{-x^2}dx<\int_1^\infty e^{-x^2}x\,dx=\left|-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right|_1^\infty=\frac{1}{2e}.$$

故 $\qquad 0<\int_0^\infty e^{-x^2}dx<1+\frac{1}{2e}.$

由是知此定積分有有限確定值。(實則此定積分之值。由變率之使用。得以證明 $\sqrt{\pi}/2$)。

5. 無限級數之積分。

函數$\phi(x)$。於(α,β)區域內。為一價連續之函數。試展開為級數，則

$$\phi(x)=\phi_0(x)+\phi_1(x)+\phi_2(x)+\ldots+\phi_{n-1}(x)+R_n(x).$$

此$\phi_0(x),\phi_1(x),\phi_2(x),\ldots,\phi_{n-1}(x),R_n(x)$.假定任何亦為一價連續。

則由第一章第4節(II)。

$$\int_\alpha^\beta \phi(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \phi_0(x)\,dx+\int_\alpha^\beta \phi_1(x)\,dx+\int_\alpha^\beta \phi_2(x)\,dx$$

$$+\ldots+\int_\alpha^\beta \phi_{n-1}(x)\,dx+\int_\alpha^\beta R_n(x)\,dx.$$

是$\underset{n-\infty}{Lim}\, R_n(x)=0$. 且$\underset{n-\infty}{Lim}\int_\alpha^\beta R_n(x)\,dx=0$.

則無限級數積分之值。亦得為無限級數如次。

$$\phi(x)=\phi_0(x)+\phi_1(x)+\phi_2(x)+\ldots.$$

$$\int_\alpha^\beta \phi(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \phi_0(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \phi_1(x)\,dx+\int_\alpha^\beta \phi_2(x)\,dx+\ldots.$$

(注意)　$\underset{n-\infty}{Lim}\, R_n(x)\neq 0$. 而$\underset{n-\infty}{Lim}\int R_n(x)\,dx=0$.

則此積分之級數收斂於一點。

〔例〕 1. 試表$\int_0^a \frac{dx}{1+x}$.　$(0<a<1)$為無限級數。

(解)　$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n\frac{x^n}{1+x}.$$

而由　$0\leqq x<a<1$.　得　$0<\frac{1}{1+x}\leqq 1$.

$\therefore \qquad 0<\int_0^a \frac{x^n}{1+x}dx<\int_0^a x^n dx=\frac{a^{n+1}}{n+1}.$

$\therefore \qquad \lim_{n=\infty} \frac{x^n}{1+x}=0,\ \lim_{n=\infty}\int_0^a \frac{x^n}{1+x}dx=0.$

$\therefore \qquad \int_0^a \frac{dx}{1+x}=\int_0^a dx-\int_0^a x\,dx+\int_0^a x^2dx-\int_0^a x^3dx+\ldots.$

然 $\qquad \int_0^a \frac{dx}{1+x}=\log(1+a).$ 而

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x}=\log(1+a)=\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\ldots.$$

$$(0<a<1).$$

特 $a=1$, 則得附條件收斂之無限級數。

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.$$

〔例〕 2. 試展開 $\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}$. $(0<a\leqq 1)$ 爲無限級數。

(解) $\quad \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{1+x^2}.$

由是與前例同樣。得

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}=\Big|\tan^{-1}x\Big|_0^a.$$

$$\tan^{-1}a=a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}-\frac{a^7}{7}+\ldots.$$

特 $\qquad \frac{\pi}{2}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$

〔例〕 3. 試展開 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. $(0<a<1)$ 爲無限級數。

(解) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots$$

$$+\frac{1.3.5\ldots.(2n-3)}{2.4.6\ldots.(2n-2)}x^{2n-2}+R_n(x).$$

$$R_n(x)=\frac{1.3\,5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.\;\;2n}\cdot\frac{1}{(1-\theta x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

[參照微分學第94頁]。

$\therefore$ $$\int_0^a R_n(x)\,dx<\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.\;\;2n}\cdot\frac{1}{(1-\theta)^{n+\frac{1}{2}}}\int^a x^n dx$$

$$<\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.\;\;2n}\cdot\frac{a^{n+1}}{(1-\theta)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)}.$$

$\therefore$ $$\lim_{n=0}\int_0^a R_n(x)\,dx=0.$$

$\therefore$ $$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^a dx+\frac{1}{2}\int_0^a x^2dx+\frac{1.3}{2.4}\int_0^a x^4dx+\ldots.$$

$$\sin^{-1}a=\frac{a}{1}+\frac{1}{2.3}a^3+\frac{1.3}{2.4.5}a^5+\ldots.$$

特 $a=1$ 則得收歛級數如次。

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}+\ldots.$$

〔例〕 4. $\int_a^x\frac{e^x}{x}dx.\quad(0<a<x).$

(解) $$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots.$$

$\therefore$ $$\frac{e^x}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots.$$

$$\therefore\quad \int_a^x \frac{e^x}{x}dx=\int_a^x \frac{dx}{x}+\frac{1}{1!}\int_a^x dx+\frac{1}{2!}\int_a^x x\,dx+\frac{1}{3!}\int_a^x x^2dx+\dots$$

$$=\log\frac{x}{a}+\frac{x-a}{1!\,1}+\frac{x^2-a^2}{2!\,2}+\frac{x^3-a^3}{3!\,3}+\dots.$$

〔例〕 5. $\displaystyle\int_0^x \frac{\log(1+x)}{x}dx.\quad (0<x<1).$

(解) $\displaystyle\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots.$

$$\therefore\quad \int_0^x \frac{\log(1+x)}{x}dx=\frac{x}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\dots.$$

特 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}dx=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\dots.$

同様。 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}dx=-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\dots.$

〔例〕 6. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx.$

(答) $\displaystyle\frac{x}{1!\,1}-\frac{x^3}{3!\,3}+\frac{x^5}{5!\,5}-\dots.$

〔例〕 7. $\displaystyle\int^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.\quad (0<x\leqq 1,\ k^2<1).$

(解) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{1+\frac{1}{2}k^2x^2+\frac{1.3}{2.4}k^4x^4+\dots\right\}.$$

$$\therefore\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$+\frac{1}{2}k^2\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1.3}{2.4}k^4\int_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}+\dots.$$

而 $\int^{a} \frac{x^{2p}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 如第二章第5節例5所示。由累次積分法可求得其值。特上限爲1。則

$$\int_0^1 \frac{x^{2p}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

而 $$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

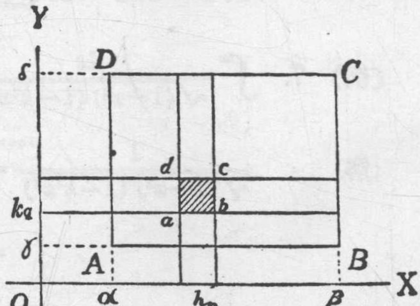
$$= \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}.$$

(注意) 例4以下剩餘式之意味。略而不贅。

第四章 重積分

1. 界限爲常數之二重積分。

函數 $\phi(x, y)$。其 x 於 (α, β) 區域內。y 於 (γ, δ) 區域內。爲一價且連續。



直角坐標軸。於 (α, β), (γ, δ) 區域。可表 $ABCD$ 矩形。

今於 (α, β) 區域。分爲 m 個。順次令爲

$$h_1, h_2, \ldots, h_p, \ldots, h_m.$$

於 (γ, δ) 區域分爲 n 個。順次令爲

$$k_1, k_2, \ldots, k_q, \ldots k_n.$$

如圖 h_p 與 k_q 得表小區域之矩形 $abcd$。此以 $[h_p, k_q]$ 表之。

於$[h_p, k_q]$區域之變數。表以x_p, y_q。考次列二重之和。

$$S=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}k_q h_p \phi(x_p, y_q).$$

於$[h_p, k_q]$之$\phi(x_p, y_q)$。其最大值與最小值。命爲$g_{h,q}, l_{h,q}$。於$[(a,\beta)(\gamma,\delta)]$全域之$\phi(x, y)$。其最大值與最小值。命爲$G, L$。則

$$S_g=\sum_q\sum_p k_q h_p g_{p,q}>S.$$

$$S_l=\sum_q\sum_p k_q h_p l_{p,q}<S.$$

$$\Sigma\Sigma k_q h_p G=(\beta-a)(\delta-\gamma)G>S_g.$$

$$\Sigma\Sigma k_q h_p L=(\beta-a)(\delta-\gamma)L<S_l.$$

$\therefore$ $$(\beta-a)(\delta-\gamma)G>S_g>S>S_l>(\beta-a)(\delta-\gamma)L.$$

是則S不拘m, n爲如何。可知常止於有限之值。

又S_g, S_l。因m, n之增大。從而迫近於S。且

$$S_g-S_l=\Sigma\Sigma k_q h_p(g_{p,q}-l_{p,q}).$$

而$\phi(x, y)$爲連續函數。對於任意之值ϵ。爲

$$|(\phi(x, y)-\phi(x_p, y_q)|<\epsilon. \qquad |x-x_p|<\eta.$$

$$|y-y_q|<\eta.$$

以此定η。而

$$|g_{p,q}-\phi(x_p, y_q)|<\epsilon.$$

$$|l_{p,q}-\phi(x_p, y_q)|<\epsilon.$$

$\therefore$ $$g_{p,q}-l_{p,q}<2\epsilon.$$

$\therefore$ $$S_g-S_l<\Sigma\Sigma k_q h_p.2\epsilon=(\beta-a)(\delta-\gamma).2\epsilon.$$

即S_g-S_l爲各h, 各k之次第取法。得比如何之正數小

故$Lim\, h=0$, $Lim\, k=0$. 於其極限之S。可知能收斂爲不過有限之確定值。

此有限確定之 $Lim\,S$ 之值。稱 $\phi(x,y)$ 之二重積分(*Double Integral*)。表之如次。

$$\int_{(\alpha,\beta)}\int_{(\gamma,\delta)}\phi(x,y)\,dx\,dy=Lim\,S=Lim\,\Sigma\,\Sigma k_q h_p\phi(x_p,y_q).$$

次述此二重積分為積分之積分。

考 S 二重之和之取法。得次二樣之順序。

$$\sum_q\sum_p k_q h_p f(x_p,y_q)=\sum_q k_q\sum_p h_p f(x_p,y_q)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$=\sum_p h_p\sum_p k_q\phi(x_p,y_q)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

於(1)。以

$$\lim_{h=0}\sum_q h_p\phi(x_p,y_q)=\int_\alpha^\beta\phi(x,y_q)\,dx.$$

而令 $\quad\sum_p h_p\phi(x_p,y_q)=\int_\alpha^\beta\phi(x,y_q)\,dx+\rho_q.$

則 ρ_q 之值。於 $Lim\,h=0$ 之極限為0。從而

$$\sum_q k_q\sum_p h_p\phi(x_p,y_q)=\sum_q k_q\int_\alpha^\beta\phi(x,y_q)\,dx+\sum_q k_q\rho_q.$$

今 $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$ 之最大絕對值為 ρ。而 k 任何亦為正。

$$\left|\sum_q k_q\rho_q\right|\leqq\sum_q k_q|\rho_q|\leqq|\rho|\,\Sigma k_q=|\rho|(\delta-\gamma).$$

$\therefore\quad \lim_{h=0,\,k=0}\sum_q k_q\rho_q=0.$

$$\therefore\quad\int_{(\alpha,\beta)}\int_{(\gamma,\delta)}\phi(x,y)\,dx\,dy=\lim_{h=0,\,k=0}\sum_q k_q\sum_p h_p\phi(x_p,y_q)$$

$$-\lim_{k=0}\sum_q h_b\int_\alpha^\beta\phi(x,y_q)\,dx$$

$$=\int_\gamma^\delta\left\{\int_\alpha^\beta\phi(x,y)\,dx\right\}dy.$$

於(2)。依同樣之手續。亦得

$$\int_{(\alpha,\beta)}\int_{(\gamma,\delta)}\phi(x,y)\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta\left\{\int_\gamma^\delta\phi(x,y)\,dy\right\}dx.$$

又
$$\int_\gamma^\delta\left\{\int_\alpha^\beta\phi(x,y)\,dx\right\}dy=\int_\alpha^\beta\left\{\int_\gamma^\delta\phi(x,y)\,dy\right\}dx.$$

故此二重積分。得如次表之。

$$\int_{(\alpha,\beta)}\int_{(\gamma,\delta)}\phi(x,y)\,dx\,dy=\int_\gamma^\delta\int_\alpha^\beta\phi(x,y)\,dx\,dy.$$

(注意) 如上所述 (α,β), (γ,δ) 之區域。雖任何亦爲有限。例如

$$\underset{\beta=\infty}{Lim}\int_\alpha^\beta\phi(x,y)\,dx.$$

有有限確定値。且

$$\int_\gamma^\delta\left\{\underset{\beta=\infty}{Lim}\int_\alpha^\beta (x,y)\,dx\right\}dy.$$

亦有限確定。此以下式表之。

$$\int_\gamma^\delta\int_\alpha^\infty\phi(x,y)\,dx\,dy.$$

同樣
$$\int_\gamma^\infty\int_\alpha^\beta\phi(x,y)\,dx\,dy,\qquad\int_\gamma^\infty\int_\alpha^\infty\phi(x,y)\,dx\,dy.$$

$$\int_\gamma^\delta\int_{-\infty}^\infty\phi(x,y)\,dx\,dy,\qquad\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\phi(x,y)\,dx\,dy.$$

等。表任何之極限値。

〔例〕 1. $\int_0^a\int_0^b xy\,dx\,dy.$

(解)
$$\int_0^b xy\,dx=\left|\frac{x^2}{2}y\right|_{x=0}^{x=b}=\frac{b^2}{2}y.$$

$\therefore$
$$\int_0^a\int_0^b xy\,dx\,dy=\frac{b^2}{2}\int_0^a y\,dy=\frac{b^2}{2}\left|\frac{y^2}{2}\right|_0^a=\frac{a^2b^2}{4}.$$

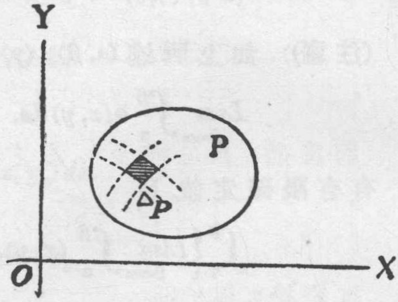
〔例〕 2. $\int_a^\beta\int_0^\infty e^{-yx}dx\,dy.$

〔解〕 $\int_0^\infty e^{-yx}dx=\left|-\frac{1}{y}e^{-yx}\right|_0^\infty=\frac{1}{y}.$

$\therefore$ $\int_a^\beta\int_0^\infty e^{-yx}dx\,dy=\int_a^\beta\frac{dy}{y}=\log\frac{\beta}{a}.$

2. 界限爲變數之二重積分。

函數$\varphi(x,y)$。於某域P爲一價且連續。此域內由某法則所分之小域$\triangle P_{p,q}$。其一組變數之值爲x_p, y_q。則作



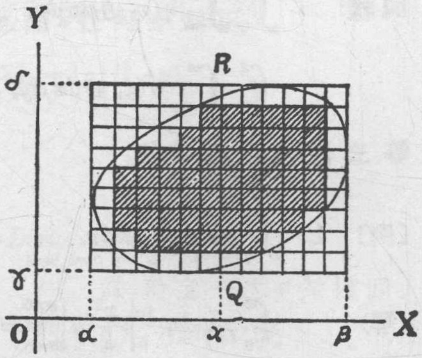
$$\sum_p\sum_q\triangle P_{p,q}\varphi(x_p,y_q).$$

若$Lim\ \triangle P=0$。於此二重和之極限值爲有限確定。則表之如下。

$$\iint_P\varphi(x,y)\,dP.$$

此稱於P域之$\varphi(x,y)$之二重積分。

今特作外接於域P。且有兩軸平行之邊之矩形。其邊爲$x=a$, $x=\beta$及$y=\gamma$, $y=\delta$。分此矩形與前節同樣之小矩形(h_p,k_q)。則可得



$$Lim\sum_p\sum_q h_pk_q\varphi(x_p,y_q)=\iint_P\varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

次導此二重積分。為二個積分。

先以h_q為一定。

$$\sum_q k_q \phi(x_p, y_q)$$

之極限值。與前節同樣。而

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \phi(x, y)\,dy.$$

但$\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ 為包圍P域曲線之h_p之值。表示如次

$$xQ = y_1 = \psi_1(x).$$

$$xR = y_2 = \psi_2(x).$$

而後將h自h_1變至h_m考之。則二重和之極限值。為

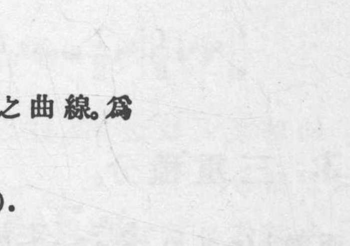
$$\int_\alpha^\beta \left\{ \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \phi(x, y)\,dy \right\} dx.$$

試交換x與y。則

$$\int_\gamma^\delta \left\{ \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} \phi(x, y)\,dx \right\} dy.$$

〔例〕 1. 於$\iint_P \phi(x, y)\,dx\,dy$包圍$P$之曲線。為

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad (x>0, y>0). \\ x = c, \\ y = 0. \end{cases}$$



則對於x之一定值。為

$$\psi_1(x) = 0.$$

$$\psi_2(x) = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

又對於y之一定值。為

$$\chi_1(y)=c.$$

$$\chi_2(y)=x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

$$\therefore \qquad \iint_P \phi(x,y)\,dx\,dy=\int_c^a\left\{\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\phi(x,y)\,dy\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}}\left\{\int_c^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}\phi(x,y)\,dx\right\}dy.$$

〔例〕 2. $\int_a^b\left\{\int_{-y}^{y}\sqrt{x+y}\,dx\right\}dy.$

(解) $$\int_{-y}^{y}\sqrt{x+y}\,dx=\left|\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}}\right|_{-y}^{y}=\frac{2}{3}(2y)^{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}}.$$

$$\therefore \qquad \int_a^b\int_{-y}^{y}\sqrt{x+y}\,dx\,dy=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_a^b y^{\frac{3}{2}}dy=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left|\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right|_a^b$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{15}\left(\sqrt{b^5}-\sqrt{a^5}\right).$$

3. 三重積分。

函數$\phi(x,y,z)$。於$\alpha\leqq x\leqq\beta$, $\gamma\leqq y\leqq\delta$, $\epsilon\leqq z\leqq\eta$區域內。為一價且連續。

分(α,β)為$h_1, h_2, \ldots, h_p, \ldots, h_m$。$(\gamma,\delta)$為$k_1, k_2, \ldots, k_q, \ldots, k_n$。$(\epsilon,\eta)$為$l_1, l_2, \ldots, l_r, \ldots, l_u$。於$h_p, k_q, l_r$內之變數之一個一個。以$x_p, y_q, z_r$表之則三重和為

$$\sum_p\sum_q\sum_r h_p k_q l_r \phi(x_p, y_q, z_r).$$

其各小域收歛爲0之極限值爲有限確定。則以下式表之。

$$\int_{(\alpha,\beta)}\int_{(\gamma,\delta)}\int_{(\epsilon,\eta)} \phi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

是名三重積分(*Triple Integral*)。

此三重積分。依第1節同樣之手續。可得書爲

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{\epsilon}^{\eta} \phi(x,y,z)\,dz.$$

又積分域非直六面體。爲一般面所圍之域R。則得表之如次。

$$\iiint_R \phi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\chi_1(x)}^{\chi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \phi(x,y,z)\,dz.$$

〔例〕 1. $\displaystyle\int_0^a\int_0^b\int_0^c x^3y^2z\,dz\,dy\,dx.$

(解) $$\int_0^c x^3y^2z\,dz = \left|\frac{1}{2}x^3y^2z^2\right|_0^c = \frac{1}{2}c^2x^3y^2.$$

$$\therefore\quad \int_0^b\int_0^c x^3y^2z\,dz\,dy = \frac{1}{2}c^2\int_0^b x^3y^2dy = \frac{1}{2}c^2\left|\frac{1}{3}x^3y^3\right|_0^b$$

$$= \frac{1}{6}b^3c^2x^3.$$

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c x^3y^2z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{6}b^3c^2\int_0^a x^3dx$$

$$= \frac{1}{6}b^3c^2\left|\frac{1}{4}x^4\right|_0^a = \frac{1}{24}a^4b^3c^2.$$

〔例〕 2. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{x+y} e^{x+y+z}dz\,dy\,dx.$

(解) $$\int_0^{x+y} e^{x+y+z}dz = \left|e^{x+y+z}\right|_0^{x+y} = e^{2(x+y)} - e^{x+y}.$$

$$\therefore\quad \int_0^x dy\int_0^{x+y} e^{x+y+z}dz=\int_0^x e^{2(x+y)}\,dy-\int_0^x e^{x+y}dy$$

$$=\left|\frac{1}{2}e^{2(x+y)}\right|_0^x-\left|e^{x+y}\right|_0^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{4x}-\frac{1}{2}e^{2x}-e^{2x}+e^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{4x}-\frac{3}{2}e^{2x}+e^x.$$

$$\therefore\quad \int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{x+y} e^{x+y+z}dz=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{4x}dx-\frac{3}{2}\int_0^1 e^{2x}dx+\int_0^1 e^x dx$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{4}e^{4x}\right|_0^1-\frac{3}{2}\left|\frac{1}{2}e^{2x}\right|_0^1+\left|e^x\right|_0^1$$

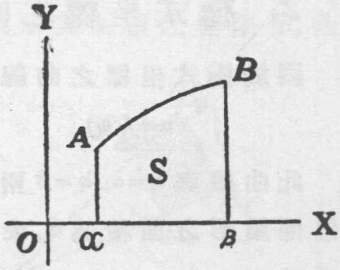
$$=\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{8}-\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{4}+e-1$$

$$=\frac{1}{8}e^4-\frac{3}{4}e^2+e-\frac{3}{8}.$$

後篇　曲線曲面等之應用

第五章　平面圖形

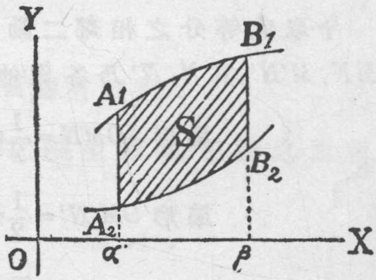
1. 平面曲線包圍之面積。



曲線 $y=f(x)$ 於 (α,β) 域內。爲一價連續。且決不爲負。或決不爲正。則此曲線。與 x 軸 $x=\alpha$, $y=\beta$ 包圍之面積爲 S。依第一章第7節所述如次。

$$S=\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\right| \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

曲線於 (α,β) 域內。爲飛變之不連續。但爲有限回數。及平行於 y 軸。有漸近線。則依第三章第3節。得求其面積之極限值。若曲線平行於 x 軸有漸近線。而域爲無限。則依第三章第4節以求之。



二種曲線 $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$。於 (α,β) 域內 $y_1\geqq y_2$。

此兩曲線與 $x=\alpha$ 及 $x=\beta$ 包圍之面積 S 如次。

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{f_1(x)-f_2(x)\}\,dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(注意)　曲線之方程式 $x=\psi(t)$, $y=\chi(t)$。從公式 (1)。得面積如次。

$$dx=\psi'(t)\,dt.$$

從 $\alpha=\psi(t)$. 得 $t=t_0$.

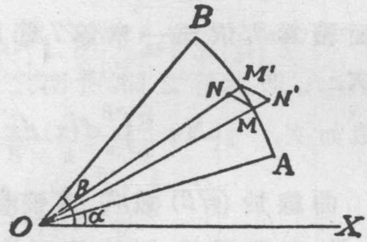
從 $\beta=\psi(t)$. 得 $t=t_1$.

$$\therefore \quad S=\int_{t_0}^{t_1}\chi(t)\psi'(t)\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

2. 極式坐標之面積。

關於極式坐標之曲線方程式。爲

$$r=f(\phi).$$



此曲線與 $\phi=\alpha$, $\phi=\beta$ 兩動徑所包圍扇形之面積爲 S。求之如次。

分 $\beta-\alpha$ 爲 n 個等分。每一等分。令爲 $\Delta\phi$。則

$$\frac{\beta-\alpha}{n}=\Delta\phi.$$

今取此等分之相鄰二動徑。OM, OM' 爲半徑。O 爲中心。作圓弧 MN, $M'N'$。其 N, N' 乃各與他動徑之交點。則

$$\text{扇形}\ OMN=\frac{1}{2}r^2{}_p\Delta\phi.$$

$$\text{扇形}\ OM'N'=\frac{1}{2}r^2{}_{p+1}\Delta\phi.$$

但 $r_p=f(\alpha+p\,\Delta\phi)$. $0\leqq p\leqq n$.

由是 $S_n=\sum\limits_{p=0}^{n-1}\frac{1}{2}r^2{}_p\Delta\phi.$ $S'_n=\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{1}{2}r^2{}_{p+1}\Delta\phi.$

$r=f(\phi)$。僅增大或僅減小於 (α,β) 之域。則 S 在 S_n 與 S'_n 之間。而 $S_n\sim S'_n$。因 n 之增。從而達至任何小之程。

$$\therefore \quad S=\underset{\Delta\phi=0}{Lim}\sum\frac{1}{2}r^2\Delta\phi.$$

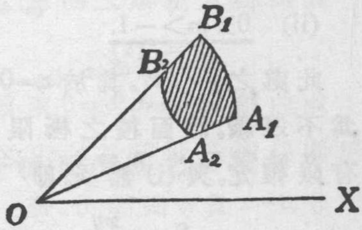
依第一章第7節表之如次。

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta \dots\dots(4)$$

(注意一) 上之公式(4)。在r爲θ之一價連續之函數時。必爲有限確定值。亦不必須r僅增大或僅減小。

又此曲線過原點有漸近線等之式。則求其面積之極限值。全與前節同樣。

(注意二) 兩曲線$r_1=f_1(\theta)$, $r_2=f_2(\theta)$於$\theta=\alpha, \theta=\beta$之間。而$r_1\geqq r_2$。則此等之間。所圍之面積如次。

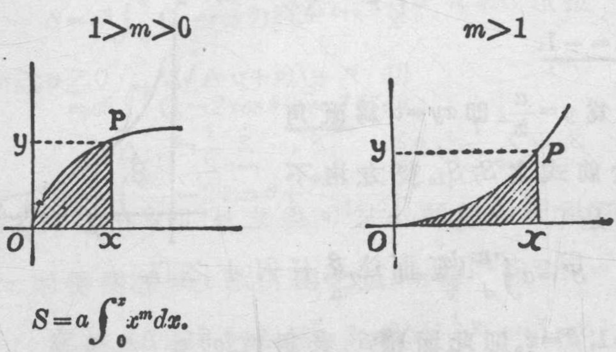


$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left\{r_1^2-r_2^2\right\}d\theta \dots\dots(5)$$

3. 面積之例。

[I] 一般之拋物線$y=ax^m$. ($a>0$, m爲有理數).

此曲線與x軸及$x=0$。與任意之x之縱坐標軸。包圍之面積爲S。則



$$S=a\int_0^x x^m dx.$$

(i) $\underline{m>0.}$

$$S=\frac{ax^{m+1}}{m+1}=\frac{xy}{m+1}.$$

卽如圖。

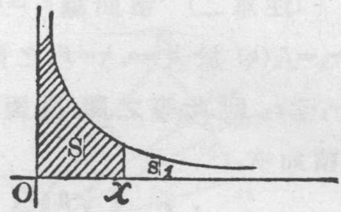
$$\text{面積}\ OPx : \text{面積}\ OPy = 1 : m.$$

特普通二次拋物線 $y=px^2$.

其比爲 $1:2$.

(ii) $\underline{0>m>-1.}$

此處之 $y=ax^m$。其於 $x=0$ 之點。雖爲不連續。然面積之極限值。仍爲有限確定。與 (i) 無異。卽



$$S=\frac{xy}{1+m}.$$

雖然，値次之事實。則當注意。

$$S_1=a\int_x^{\infty} x^m dx=\infty.$$

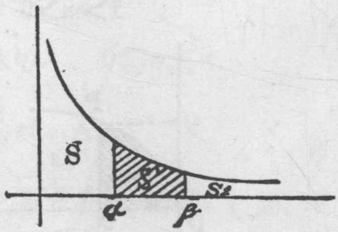
(iii) $\underline{m<-1.}$

此處將 (ii) 之 S 與 S_1 之形。轉換之如次。

$$S=\infty,\quad S_1=a\int_x^{\infty} x^m dx=\frac{xy}{-m-1}.$$

(iv) $\underline{m=-1.}$

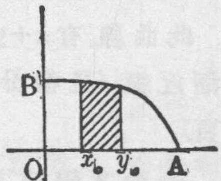
此曲線爲 $y=\frac{a}{x}$。卽 $xy=a$ 爲<u>直角雙曲線</u>。於前式之 S, S_1。雙方均不爲有限。由是



$$S'=a\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{x}=a\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

特令 $\alpha=1, \beta=x$。則此面積 S'。表對數 $\log x$。

[II] 橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$



$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$S=\frac{b}{a}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{b}{a}\left|\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}sin^{-1}\frac{x}{a}\right|_{x_0}^{x_1}$$

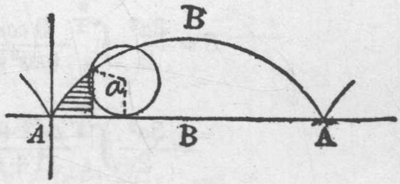
$$=\frac{x_1y_1-x_0y_0}{2}+\frac{ab}{2}\left(sin^{-1}\frac{x_1}{a}-sin^{-1}\frac{x_0}{a}\right).$$

特$x_0=0, x_1=a$。則爲橢圓一象限之面積。而橢圓之面積如次。

$$橢圓之面積=4\frac{b}{a}\int^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi ab.$$

[III] 擺線 (*Cycloid*) $x=a(\theta-sin\,\theta), y=a(1-cos\,\theta).$

依第1節之公式(3)。則從等於0之θ,至任意比2π小之θ之間如次。



$$S=a^2\int_0^\theta(1-cos\,\theta)^2\,d\theta$$

$$=a^2\int^\theta(1-2\,cos\,\theta+cos^2\,\theta)\,d\theta$$

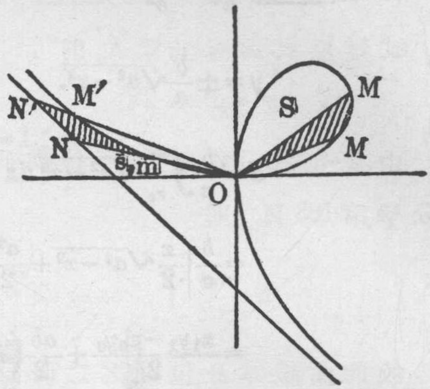
$$=a^2\left(\frac{3\theta}{2}-2\,sin\,\theta+\frac{sin\,2\theta}{4}\right).$$

特$\theta=2\pi$.則得擺線與x軸所圍之面積。爲

$$擺線\ AB'A'B\ 之面積=3\pi a^2.$$

[IV] 葉形線 (*Folium of Descartes*) $x^3-3axy+y^3=0.\quad(a>0).$

此曲線。有 $x+y+a=0$ 之漸近線。(見微分學第180頁)。



今如次變換其變數。

$$x=r\cos\phi.$$

$$y=r\sin\phi.$$

其曲線之動徑為 r_1。漸近線之動徑為 r_2。則

$$r_1=\frac{3a\cos\phi\sin\phi}{\cos^3\phi+\sin^3\phi}.$$

$$r_2=-\frac{a}{\cos\phi+\sin\phi}.$$

令此曲線本身包圍之面積為 S。其他之部分與漸近線之間之面積為 S_1。則

$$S=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2\phi\sin^2\phi}{(\cos^3\phi+\sin^3\phi)^2}d\phi=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\tan^2\phi\sec^2\phi}{(1+\tan^3\phi)^2}d\phi$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+\tan^3\phi)}{(1+\tan^3\phi)^2}=\frac{3}{2}a^2.$$

$$S_1=\frac{a^2}{2}+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(r_2{}^2-r_1{}^2)\,d\phi$$

$$=\frac{a^2}{2}+a^2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\left\{\frac{d(1+\tan\phi)}{(1+\tan\phi)^2}-3\frac{d(1+\tan^3\phi)}{(1+\tan^3\phi)^2}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}a^2.$$

即 $\quad S=S.$

[V] 雙紐形線 (*Lemniscate*) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

試變原式爲極坐標式。則

$$r^2=a^2\cos 2\theta$$

由是令第一象限內。原線與此曲線包圍之面積爲 S。(參照微分學第183頁)。則

$$S=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\, d\theta=\frac{a^2}{4}.$$

故此曲線本身包圍之二個面積之和。爲

$$4S=a^2.$$

4. 面積之近似值。

求定積分 $S=\int_a^\beta f(x)\,dx$ 之值。

先分積分域 (a,β) 爲 n 個等分。令其一等分爲 h。則

$$h=\frac{\beta-a}{n}.$$

令 $f(x)$ 於此等分點之值。表之如次。

$$y_0=f(a),\quad y_1=f(a+h),\quad y_2=f(a+2h),\quad \ldots,$$

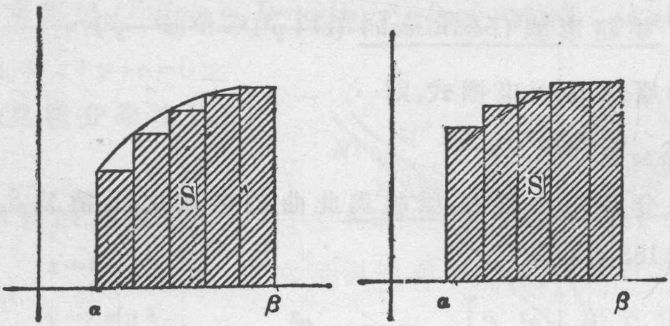
$$y_{n-1}=f(\beta-h),\quad y_n=f(\beta).$$

而令

$$S'=h\{y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\}.$$

$$S''=h\{y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+y_n\}.$$

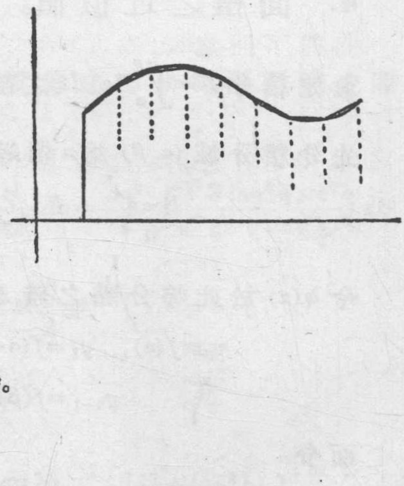
其 S', S''。表如圖階段狀之圖形之面積。於域 (a,β) 而 $f(x)$ 的絕對值增。即 $\frac{dy}{dx}>0$。則 $S'<S<S''$。



令S', S''之等差中項爲S_1。則

$$S_1 = h\left\{\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\dots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right\}$$

$$= h\left\{\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}\right\}.$$



此式可看做S之近似值。稱之曰梯形之公式。

S_1爲曲線下凹。即$\frac{d^2y}{dx^2}>0$之間比S小。而$\frac{d^2y}{dx^2}<0$則比S大。

〔例〕 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$

此定積分之值爲$\log 2$。容易求得。

今試適用前述之梯形公式。

令$n=10$. 則

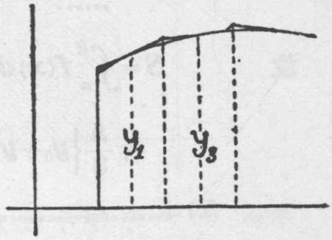
$$y_0=\frac{10}{10},\quad y_1=\frac{10}{11},\quad y_2=\frac{10}{12},\quad \dots,\quad y_{10}=\frac{10}{20}.$$

從而

$$S_1=\frac{1}{10}\left(\frac{30}{40}+\frac{10}{11}+\frac{10}{12}+\dots+\frac{10}{19}\right)=0.693771\dots.$$

然$\log 2=0.693147\ldots$。是小數點以下三位均符合矣。

次分域(α,β)爲$2n$個等分。其一分爲$h=\dfrac{\beta-\alpha}{2n}$。各分點之$y$之值。順次爲$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.



於奇數縱坐標之端。作曲線之切線。與其鄰之縱坐標所包圍梯形之面積。令爲M。則

$$M=2h\{y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1}\}.$$

又以$2n$代其n。則

$$S_1=h\left\{\frac{y_0+y_{2n}}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{2n-1}\right\}.$$

曲線下凹之間。爲$M>S>S_1$。而曲線上凹之間。則爲$M<S<S_1$。

然則$M-S:S-S_1$。h收斂爲0。宜取如何之值乎。則依平均值之定理。得$2:1$之答。(茲因其手續太煩。故略)。

由是

$$\frac{M-S}{S-S_1}\doteqdot 2. \quad (\doteqdot\text{大約等之記號})。$$

$$\therefore\quad S\doteqdot\frac{M+2S_1}{3}.$$

自y_0至y_2之S, M, S_1之小區分。各令爲$\Delta S, \Delta M, \Delta S_1$。則

$$\Delta S=\int_a^{a+2h}f(x)\,dx\doteqdot\frac{\Delta M+2\Delta S_1}{3}$$

$$=\frac{2hy_1+2h\left(\dfrac{y_0+y_2}{2}+y_1\right)}{3}\doteqdot\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

次之各小區分亦同樣也。

$$\int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx \risingdotseq \frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4).$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

故
$$S=\int_a^\beta f(x)\,dx$$

$$\risingdotseq \frac{h}{3}\Big\{y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})$$

$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\Big\}.$$

此稱西披梭氏 (*Simpson*) 之公式。

〔例〕 $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

令 $n=5$. 即 $h=\frac{1}{10}$. 則

$$S\risingdotseq \frac{1}{30}\Big\{\frac{10}{10}+\frac{10}{20}+4\Big(\frac{10}{11}+\frac{10}{13}+\frac{10}{15}+\frac{10}{17}+\frac{10}{19}\Big)$$

$$+2\Big(\frac{10}{12}+\frac{10}{14}+\frac{10}{16}+\frac{10}{18}\Big)\Big\}.$$

$$\risingdotseq 0.69315035\ldots.$$

5. 平面曲線之長。

如微分學第八章第 11 節所述。已規定曲線之弧之長。等於其弧上諸點順次連結爲屈折直線之長之極限値。故

$$ds=\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

令 $y=f(x)$。於域 (a,β) 爲一價連續。則自 $x=a$ 至 $x=\beta$ 之間。其曲線之弧之長爲 s 如次。

$$s=\int_a^\beta \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(注意一) 曲線之方程式爲 $x=\psi(t)$, $y=\chi(t)$。則公式 (1) 之長如次。

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\chi'(t)}{\psi'(t)}.$$

$$dx=\frac{dx}{dt}dt=\psi'(t)\,dt.$$

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt \text{ ....(2)}$$

(注意二) 曲線之方程式爲極坐標式。如 $r=f(\phi)$。則,

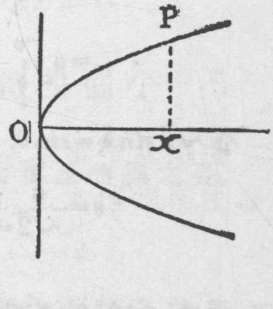
$$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}\,d\phi. \qquad \text{(微分學第152頁)。}$$

而 $\phi=\phi_0$ 與 $\phi=\phi_1$ 之間之弧之長如次。

$$s=\int_{\phi_0}^{\phi_1}\sqrt{r^2+f'(\phi)^2}\,d\phi \text{ ....(3)}$$

6 曲線之長之例。

[I] 抛物線 $y^2=4ax$.



$$y=2\sqrt{a}\sqrt{x}.$$

$$y'=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}.$$

自頂點 O 至對應於 x 之點 P 之弧之長 OP。以 s 表之。則

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\frac{a}{x}}\,dx=\int_0^x\sqrt{\frac{x+a}{x}}\,dx$$

$$=\sqrt{x(x+a)}+a\log\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{a}}.$$

[II] 擺線。(參照第3節之圖)。

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta). \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=a(1-\cos\theta), \\ y'=a\sin\theta. \end{cases}$$

$$s=2a\int_0^\theta\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta=2a\int_0^\theta\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=8a\sin^2\frac{\theta}{4}.$$

令 $\theta=2\pi$. 則

擺線 $AB'A$ 之長 $=\mathbf{8a}$.

[III] 雙紐形線 $r^2=a^2\cos 2\phi$.

$$r=a\sqrt{\cos 2\phi}.$$

$$r'=-\frac{a\sin 2\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}.$$

自 $\phi=0$ 至 $\phi\leqq\frac{\pi}{4}$ 之弧之長。以 s 表之。則

$$s=a\int_0^\phi\sqrt{\cos 2\phi+\frac{\sin^2 2\phi}{\cos 2\phi}}\,d\phi=a\int_0^\phi\frac{d\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$$

$$=a\int_0^\phi\frac{d\phi}{\sqrt{1-2\sin^2\phi}}.$$

令 $\sqrt{2}\sin\phi=\sin\theta$. 則

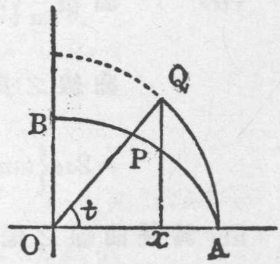
$$s=\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}.$$

即第一種之橢圓積分。(參照第二章第4節)。展開 $\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$ 爲級數。依級數之積分求之。卽得其近似值。(參照第三章第5節例5)。

令雙紐形線之周。以L表之。則

$$\frac{L}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}sin^2\theta}}.$$

[IV] 橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.\quad(a>b)$.



令$x=a\,sin\,t$. 則

$y=b\,cos\,t.$

$$x'=a\,cos\,t,\quad y'=-b\,sin\,t.$$

$$\therefore\quad s=a\int_0^t\sqrt{a^2cos^2t+b^2sin^2t}\,dt$$

$$=a\int_0^t\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}sin^2t}\,dt$$

$$=a\int_0^t\sqrt{1-e^2sin^2t}\,dt.$$ (e為橢圓之偏心率)。

是橢圓積分之第二種也。

今以E表橢圓之周。則

$$\frac{E}{4}=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2sin^2t}\,dt$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{e^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\dots\right\}.$$

〔例〕 1. 星形線$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. 求其所圍之面積及曲線之長。

(答) 面積$\frac{3}{8}\pi a^2$, 周$6a$.

〔例〕 2. 心臟形線$r=a(1+cos\,\theta)$. 求其所圍之面積及其周之長。

(答) 面積$\frac{3}{2}\pi a^2$, 周$8a$.

〔例〕 3. 求雙曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,與直線$x=a$, $x=x'$ $(x'>a)$之間之面積及其曲線之長。

(答) 面積$\dfrac{b}{a}\left\{x'\sqrt{x'^2-a^2}-a^2\log\dfrac{x'+\sqrt{x'^2-a^2}}{a}\right\}$.

曲線之長 $2ae\displaystyle\int_0^\theta\sqrt{1-\frac{\cos^2\theta}{e^2}}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$=2ae\left\{\tan\theta-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2}\theta-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{e^4}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)+\dots\right\}.$$

但e為雙曲線之偏心率。

而$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{x'^2-a^2}}{a}$。

第六章 曲面

1. 曲面之方程式。

本章研究次之各種曲面(*Surface*)。(但關於直角坐標x, y, z)。

(i) 陽函數式$z=f(x, y)$.

(ii) 陰函數式$F(x, y, z)=0$.

(iii) 變率式$x=\phi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$, $z=\chi(u, v)$.

曲面之最簡單者為平面(*Plane*)。其方程式如次,

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

但A, B, C, D為不含x, y, z之常數。

直角坐標所表xy之平面。有便於用極式坐標者。其面之方程式如次。

$$z=f(r, \phi),\quad \text{或}\quad F(z, r, \phi)=0,\quad \text{等。}$$

此坐標式。稱爲<u>柱坐標式</u>(*Cylindrical Co-ordinates*)。或<u>立體極坐標式</u>(*Polar Co-ordinates in Space*)。

r, θ, ϕ 與 x, y, z 之關係如次。

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\quad y = r\sin\theta\cos\phi,\quad z = r\cos\theta.$$

由是曲面之方程式如次。

$$r = f(\theta, \phi),\ \text{或}\ F(r, \theta, \phi) = 0,\ \text{等}.$$

2. 曲面之切平面及法線。

曲面之方程式。爲

$$f(x, y, z) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

取其上之一點 $x|y|z$。於此點之近處。從此所表之函數及其導來函數。假定任何亦爲一價且連續。

則近於點 $x|y|z$ 之曲面外。取一點 $\xi|\eta|\zeta$。

令 $\xi = x + h,\quad \eta = y + k,\quad \zeta = z + l.$

則 $f(x, y, z) = 0,\quad f(\xi, \eta, \zeta) \neq 0.$

而

$$f(\xi, \eta, \zeta) = f(x + h, y + k, z + l)$$

$$= f(x, y, z) + h\frac{\delta f}{\delta x} + k\frac{\delta f}{\delta y} + l\frac{\delta f}{\delta z} + \ldots.$$

(參照微分學第100頁)。

而

$$(\xi - x)\frac{\delta f}{\delta x} + (\eta - y)\frac{\delta f}{\delta y} + (\zeta - z)\frac{\delta f}{\delta z} + \ldots = f(\xi, \eta, \zeta).$$

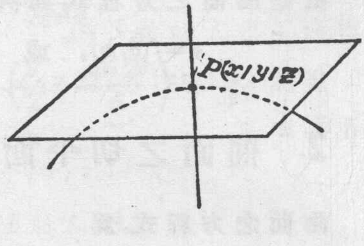
今 $\xi|\eta|\zeta$ 迫近於 $x|y|z$。棄 h, k, l 二次以上之項。則

$$(\xi - x)\frac{\delta f}{\delta x} + (\eta - y)\frac{\delta f}{\delta y} + (\zeta - z)\frac{\delta f}{\delta z} = f(\xi, \eta, \zeta).$$

$\xi|\eta|\zeta$ 歸着於曲面上。則

$$(\xi-x)\frac{\delta f}{\delta x}+(\eta-y)\frac{\delta f}{\delta y}+(\zeta-z)\frac{\delta f}{\delta z}=0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

考此關係式。$x|y|z$ 為一定點。ξ, η, ζ 表變數之坐標。則關於此式之一次式。表一個平面。然而 $x|y|z$ 為曲面上之一點。而以此為限所接近曲面上任意之點 $\xi|\eta|\zeta$ 亦在此平面上。



由是此平面 (2)。稱為曲面 (1) 之切平面 (*Tangential Plane*)。點 $x|y|z$。謂此切平面與曲面之切點 (*Tangential Point*)。

於切點而引切平面之垂線。則謂為此點曲線之法線 (*Normal Line*)。

法線之方向餘弦。與切平面同。而法線之方程式則如次。

$$\frac{\xi-x}{\frac{\delta f}{\delta x}}=\frac{\eta-y}{\frac{\delta f}{\delta y}}=\frac{\zeta-z}{\frac{\delta f}{\delta z}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

〔例〕 楕圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

切平面之方程式。從 (2) 得

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1. \qquad \left(\begin{array}{l}x|y|z \text{ 為面上之一點} \\ \xi, \eta, \zeta \text{ 為坐標變數}\end{array}\right).$$

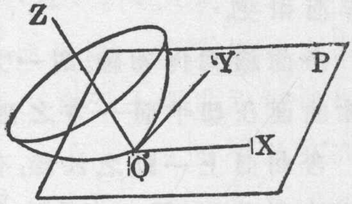
法線之方程式。從 (3) 得

$$\frac{\xi-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\eta-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{\zeta-z}{\frac{z}{c^2}}.$$

3. 曲面之指曲線及曲度。

曲面之方程式爲陽函數。如

$$z=f(x,y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$



試移曲面上之一點 $x|y|z$ 於坐標之原點。其點之法線爲 z 軸。切平面上取 X 軸與 Y 軸。

展開 (1) 之右邊。關於 x, y 列爲昇冪如次。

$$z=a'+b'x+c'y+ax^2+bxy+cy^2+\cdots\cdots$$

則此曲面過坐標之原點 $0|0|0$.

而 $\quad a'=0.$

又因切平面 $z=0$. 故 $\dfrac{\delta f}{\delta x}=0, \dfrac{\delta f}{\delta y}=0.$

而 $\quad b'=0, \quad c'=0.$

由是關於此坐標軸之曲面 (1) 之方程式如次。

$$z=ax^2+bxy+cy^2+\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

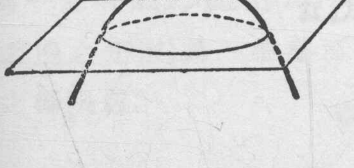
今 x, y 特別限於甚小之值。從而 z 亦甚小而近於 h。其三次以上之項棄之。則

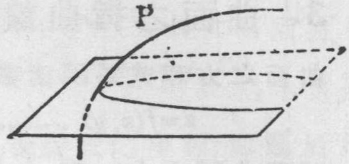
$$ax^2+bxy+cy^2=h \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

此二次式。表圓錐曲線。

此曲線。謂曲面 (1) 之點 $x|y|z$ 之<u>指曲線</u> (*Indicatrix*)。

次圖所示。乃指曲線之橢圓,雙曲線,拋物線也。



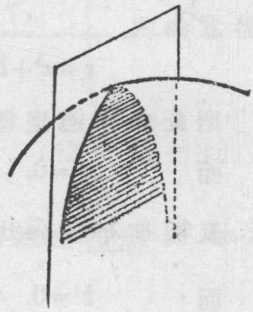


指曲線爲橢圓。則於點 $(x|y|z)$。而曲面僅在切平面之一方。

指曲線爲雙曲線。則曲面與切平面相交。

指曲線爲拋物線。則一方面曲面與切平面有共有之直線，其他曲面在切平面一方之側。

含曲面上一點之法線。有平面與之相截。則其截斷面。謂此點之法線截面 (*Normal Section*)。



法線截面之曲線之曲度。一般依截斷面之方向而斷。不一定也。

於其點之指曲線之橢圓，雙曲線及拋物線。爲其軸之方向之法線截面之曲度極大或極小也。此極大或極小之曲度。謂其點之主曲度 (*Principal Curvature*)。

〔例〕 橢圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。求其頂點之主曲度半徑。

(解) 坐標軸各平行移於頂點 $(0|0|c)$。則

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-c)^2}{c^2}=1.$$

$$\therefore \qquad z=c-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

$$=\frac{c}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{c}{8}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\cdots.$$

由是此頂點之指曲線之方程式。爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}.$$

從而含其軸之 $x=0$, $y=0$ 之法線截面。爲 $\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$, $\frac{x^2}{a^2}=\frac{2z}{c}$。其曲度半徑。爲

$$\rho_x=\left|\frac{\left\{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dy^2}}\right|_{y=0}=\frac{b^2}{c}.$$

$$\rho_y=\left|\frac{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dx^2}}\right|_{x=0}=\frac{a^2}{c}.$$

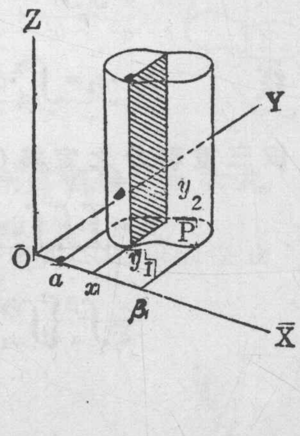
同樣。於頂點 $(a|0|0)$ 之主曲度半徑爲 $\frac{c^2}{a}$, $\frac{b^2}{a}$。而頂點 $(0|b|0)$ 之主曲度半徑。爲 $\frac{a^2}{b}$, $\frac{c^2}{b}$。

4. 求立體體積一般之公式。

曲面之方程式。爲

$$z=f(x, y).$$

今 $z\geqq 0$。而一價連續之 x, y 於域 P 內。有 P 與曲面。爲底面及平行於 z 軸之母線。求其柱體積。



依第四章第2節所述。則

$$V=\iint_P f(x, y)\,dx\,dy \ldots\ldots(1)$$

V 爲一定有限之值。於 P 內作平行於軸之邊之矩形。爲一個底面之角柱之和之極限值。

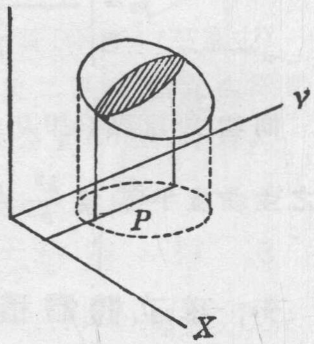
此V爲前述之柱體之<u>體積</u> (*Volume*)。

於本節之圖。化此二重積分。爲積分之積分如次。

$$V=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{y_1=\psi_1(x)}^{y_2=\psi_2(x)} f(x,y)\,dy\right\}dx \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

同樣變其順序。則

$$V=\int_{\gamma}^{\delta}\left\{\int_{x_1=\chi_1(y)}^{x_2=\chi_2(y)} f(x,y)\,dx\right\}dy \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$



次述曲面自身所包閉者。其於域P內爲二個一價函數。

$$z_1=f_1(x,y),\quad z_2=f_2(x,y).$$

$$z_2\geqq z_1.$$

分作

$$V_1=\iint_P z_1\,dx\,dy.$$

$$V_2=\iint_P z_2\,dx\,dy.$$

此包閉體之體積V如次。

$$V=\iint_P (z_2-z_1)\,dx\,dy.$$

然 $$z_2-z_1=\int_{z_1}^{z_2} dz.$$

依三重積分之定義 (第四章第3節) 及公式 (2), (3)。得

$$V=\iiint_R dx\,dy\,dz \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} dz\right)dy\right\}dx.$$

(注意一) 直角坐標式所代之x, y變換爲r, ϕ。以使用柱坐標式。則ΔP內之$\Delta x\,\Delta y$亦可代以$r\,\Delta r\,\Delta\phi$。由是依公式(1)得次式。

$$V=\iint_B F(r,\phi)\,r\,dr\,d\phi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

(注意二) 使用極坐標式。則$\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$可用$r^2 sin\,\theta.\Delta r.\Delta\theta.\Delta\phi$以代之。由公式(4)得

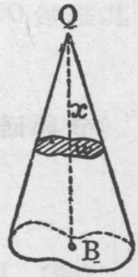
$$V=\iiint_P r^2 sin\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

(注意三) 自(1)至(6)之公式。乃求立體體積一般之公式。然特種之立體。無用二重積分之必要。

又自(1)至(6)之公式。應用各殊。次之示例。乃應用之最重要者。

5. 單一積分之體積。

[I] 錐體(*Cone*)。



令底之面積爲B。高爲h。頂點爲原點所取之高爲x軸。於高x之點所截之面積爲u。則

$$\frac{u}{B}=\frac{x^2}{h^2}. \qquad \therefore \qquad u=\frac{B}{h^2}x^2.$$

由是令此體積爲V。則

$$V=\int_0^h u\,dx=\frac{B}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{1}{3}Bh.$$

又截頭圓錐之兩底面爲B, B'。高爲h'。則其體積V'如次式。

$$V'=\int_{h_1}^h u\,dx=\frac{B}{h_2}\int_{h_1}^h x^2\,dx=\frac{B(h^3-h_1{}^3)}{3h^2}$$

$$=\frac{1}{3}B(h-h_1)\left\{1+\frac{h_1}{h}+\frac{h_1{}^2}{h^2}\right\}.$$

然 $h-h_1=h'$.

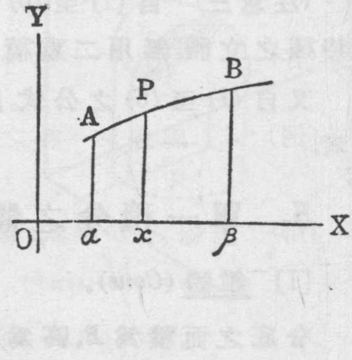
$$\frac{h_1^2}{h_2}=\frac{B'}{B}.$$

∴ $$V'=\frac{1}{3}Bh'\left(1+\sqrt{\frac{B'}{B}}+\frac{B'}{B}\right)=\frac{1}{3}h'(B+\sqrt{BB'}+B').$$

(注意) 初等幾何學所得之圓錐,截頭圓錐,角錐,截頭角錐。任用以上二種公式。均可達同一之結果。

[II] 回轉體 (*Solid of Revolution*)。

軸 OX 之周及 AB 曲線與二個縱坐標線 $x=\alpha$, $x=\beta$ 所圍之圖形回轉一周。求其所生之體積。



於域 (α,β) 內之點 x 之縱坐標線 $\overline{xP}=y$。以之回轉一周而生圓。其垂於 OX 直線所截之面積為 u。則

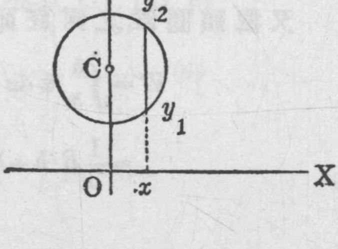
$$u=\pi y^2.$$

令此回轉體之體積為 V。則

$$V=\int_\alpha^\beta u\,dx=\pi\int_\alpha^\beta y^2\,dx.$$

〔例〕 1. 有圓在同一平面上以不出會之直線為軸而回轉。則生圓環 (*Circular ring*)。試求其體積。

(解) 圓之半徑為 a。自圓之中心 C 至回轉軸之距離 CO 為 c。則



$$x^2+(y-c)^2=a^2.$$

∴ $$y=c\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

即 $y_2=c+\sqrt{a^2-x^2}$.

$y_1=c-\sqrt{a^2-x^2}$.

故令此圓環之體積爲V。則

$$V=2\int_0^a u\,dx=2\pi\int_0^a (y_2{}^2-y_1{}^2)\,dx$$

$$=8\pi c\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=2\pi^2a^2c.$$

〔例〕 2. 有雙紐形線 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 於 x 軸之周回轉一周。試求其所生之體積。

(答) $\dfrac{\pi a^3}{48}\{3\sqrt{2}\log(3+2\sqrt{2})-4\}$

〔例〕 3. 擺線的 x 軸之周回轉一周。試求其所生之體積之 V。

(解) 擺線之方程式。爲

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta).$$

$$\therefore\quad y^2\,dx=a^3(1-\cos\theta)^3\,d\theta.$$

$$\therefore\quad V=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta$$

$$=8\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=16\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^6\phi\,d\phi \qquad (\text{但 }\theta=2\phi).$$

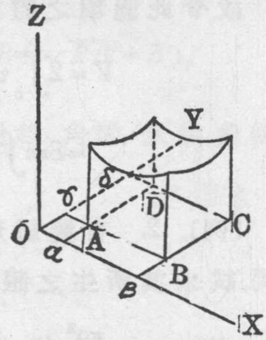
$$=32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\phi\,d\phi$$

$$=32\pi a^3\,\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad (\text{第三章第1節例1}).$$

$$=5\pi^2a^3.$$

6. 二重積分之體積之例。

〔例〕 1. 有 $z=0,\ x=\alpha,\ x=\beta,\ y=\gamma,\ y=\delta$ 及 $xyz=c^3$。試求其曲面所包圍之體積。



(解) 依公式(1)。

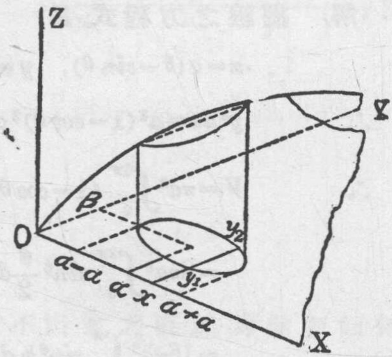
則 $z=\dfrac{c^3}{xy}$ 由是

$$V=c^3\iint\limits_{\square ABCD}\frac{1}{xy}dx\,dy$$

$$=c^3\int_\alpha^\beta dx\int_\gamma^\delta dy$$

$$=c^3\log\frac{\beta}{\alpha}\log\frac{\delta}{\gamma}.$$

〔例〕 2. 橢圓柱 $\left(\dfrac{x-\alpha}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y-\beta}{b}\right)^2=1$。以平面 $z=0$ 及曲面 $xy=cz$ 截之。試求其所截部分之體積。



(解) $y_1=\beta-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}$.

$y_2=\beta+\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}$.

令其體積為 V。依公式(2)求之。得

$$V=\int_{\alpha-a}^{\alpha+a}\left\{\int_{y_1}^{y_2}\frac{xy}{c}dy\right\}dx$$

$$=\frac{1}{c}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a}x\left\{\int_{y_1}^{y_2}y\,dy\right\}dx=\frac{1}{2c}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a}(y_2{}^2-y_1{}^2)\,dx$$

$$=\frac{2b\beta}{ac}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a}\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}\,x\,dx$$

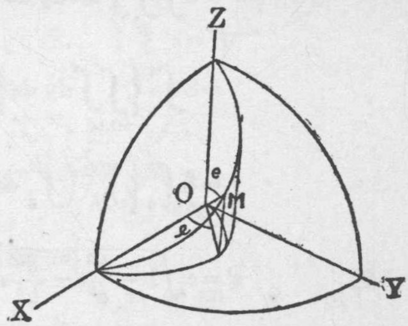
$$=\frac{2b\beta}{ac}\int_{-a}^{a}(\xi+\alpha)\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi. \qquad (\text{但 } \xi=x-\alpha).$$

然 $$\int_{-a}^{a}\xi\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi=0.$$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi=\frac{\pi a^2}{2}.$$

∴ $$V=\frac{\pi ab\,\alpha\beta}{c}.$$

〔例〕 3. 試求球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 與圓柱 $x^2+y^2=ax$。共有之部分之體積。



(解) $$x=r\cos\phi.$$

$$y=r\sin\phi.$$

則球之方程式。爲

$$r^2+z^2=a^2.$$

∴ $$z=\sqrt{a^2-r^2}.$$

依公式 (5)。求得體積 V 如次。

$$V=4\iint\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\phi.$$

然由圓柱方程式。得

$$r=a\cos\phi.$$

∴ $$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{r=0}^{r=a\cos\phi}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\right\}d\phi$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{a\cos\phi}d\phi$$

$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\phi)\,d\phi=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

〔例〕 4. 有球 $x^2+y^2+z^2=a^2$。被二平行平面 $x=b$, $x=c$ (但 $-a<c<b<a$) 割截。求其所截部分之體積。

(答) $$\frac{\pi}{3}(b-c)(3a^2-b^2-bc-c^2).$$

7 三重積分之體積之例。

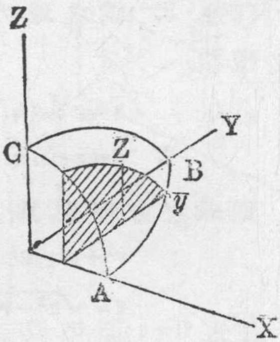
〔例〕 1. 橢圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。求其包圍之體積 V。

（解） x, y, z 爲正。此體之域爲 R。則

$$V=8\iiint_R dx\,dy\,dz$$

$$=8\int^a\left\{\iint_{OAB} dy\,dz\right\}dx$$

$$=8\int_0^a\left\{\int_0^{y_1}\left(\int_0^{z'} dz\right)dy\right\}dx.$$



然 $$z'=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

$$y_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

∴ $$V=8\int_0^a\left\{\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\right)dy\right\}dx.$$

今令 $\frac{x}{a}=\xi,\ \frac{y}{b}=\eta,\ \frac{z}{c}=\zeta$. 則

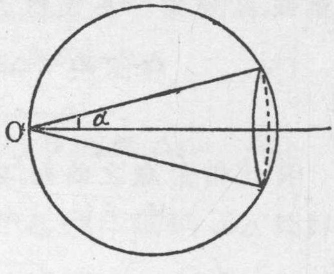
$$V=8abc\int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\int_0^{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} d\zeta\right)d\eta\right\}d\xi$$

$$=8abc\int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}}\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\,d\eta\right\}d\xi$$

$$=8abc\int_0^1\left|\frac{\eta\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}{2}+\frac{1-\xi^2}{2}\sin^{-1}\frac{\eta}{\sqrt{1-\xi^2}}\right|_0^{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi$$

$$=8abc\int_0^1\frac{\pi}{4}(1-\xi^2)\,d\xi=\frac{4}{3}\pi abc.$$

〔例〕 2. 半徑 a 之球內有頂角 2α 之直圓錐。其頂點適在球面上而軸亦適合於球之直徑。求此兩體共有之部分之體積 V



(解) 令直圓錐之頂點爲原點。軸爲原線。則球之極坐標式。爲

$$r=2a\cos\theta$$

$$V=\iiint r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\alpha}\left(\int^{2a\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right\}d\phi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\alpha}\frac{8}{3}a^3\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta\right\}d\phi$$

$$=\frac{8}{3}a^3\int_0^{2\pi}\left|-\frac{\cos^4\theta}{4}\right|_0^{\alpha}d\phi=\frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^4\alpha)\,d\phi$$

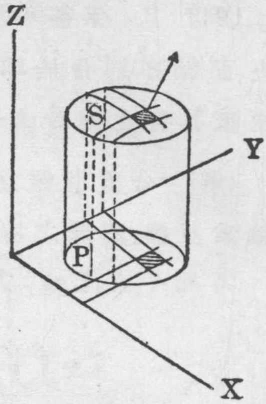
$$=\frac{4}{3}\pi a^3(1-\cos^4\alpha).$$

〔例〕 3. 有二平面 $lx+my+nz=0$ 及 $l'x+m'y+n'z=0$ 截圓柱 $x^2+y^2=ax$。求其所截部分之體積。但第二平面截圓柱在 z 軸之正方向與第一平面之間。

(答) $$\int_0^a\left\{\int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}\left(\int_{-\frac{1}{n}(lx+my)}^{-\frac{1}{n'}(l'x+m'y)}dz\right)dy\right\}dx=\frac{ln'-l'n}{8nn'}\pi a^3.$$

8 曲面求面積之一般公式。

曲面之方程式爲 $z=f(x,y)$。求此與其導來函數。對應於一價連續之域 P 之曲面積 S。



於域P。引平行於x軸與y軸之直線幾條。區分爲一小矩形之面積。爲

$$\Delta P=\Delta x_h\,\Delta y_l$$
$$=(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1}).$$

與此相對應之曲面。其小區分之面積爲ΔS。

於ΔS內之一點$(x'_k|y'_l|z')$之法線。與z軸成γ角。考ΔS的平面。爲

$$\Delta P=\Delta S\cos\gamma.$$

$$\therefore\qquad \Delta S=\frac{\Delta P}{\cos\gamma}.$$

依第1節公式(3)。得此法線之方程式。爲

$$\frac{\xi-x'_k}{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_{x'_k,y'_l}}=\frac{\eta-y'_l}{\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_{x'_k,y'_l}}=\frac{\zeta-z'}{1}$$

又此法線之方向餘弦。爲$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$。則

$$\frac{\xi-x'_k}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y'_l}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z'}{\cos\gamma}$$

$$\therefore\qquad \frac{\cos\alpha}{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_{x'_k,y'_l}}=\frac{\cos\beta}{\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_{x'_k,y'_l}}=\frac{\cos\gamma}{1}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}{\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2_{x'_k,y'_l}+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2_{x'_k,y'_l}+1}}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2_{x'_k,y'_l}+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2_{x'_k,y'_l}+1}},$$

特令$\cos\gamma$爲正。則

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2_{x'_k,y'_l}+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2_{x'_k,y'_l}+1}}.$$

從而 $$\Delta S=\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2_{x'_k,y'_l}+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2_{x'_k,y'_l}+1}\,\Delta x_k\,\Delta y_l.$$

考此平面之ΔS爲S內之小區分。集合之。得二重和。

$$\sum_x\sum_y\Delta S=\sum_x\sum_y\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2+1}\,\Delta x\,\Delta y.$$

此Δx, Δy收斂爲0。採其極限值。以定此曲面之面積S。由是

$$S=\iint_P\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2+1}\,dx\,dy\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(注意一) 圓柱坐標式。

$$x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi,\quad z=f(x,y)=F(r,\phi).$$

ΔP所代之$\Delta x\,\Delta y$。以$r\,\Delta r\,\Delta\phi$代之。則

$$S=\iint_P\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2+1}\,r\,dr\,d\phi.$$

然依微分學第73頁例2。

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2+1=1+\left(\frac{\delta F}{\delta r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta F}{\delta r}\right)^2$$

故 $$S=\iint_P\sqrt{r^2+\left(r\frac{\delta F}{\delta r}\right)^2+\left(\frac{\delta F}{\delta\phi}\right)^2}\,dr\,d\phi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(注意二) 極坐標式。爲

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\theta.$$

$$z=f(x,y),\quad r=F(\theta,\phi).$$

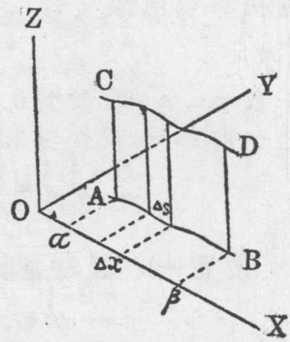
依公式(1)變換變數。卽可得次之公式。

$$S=\iint\sqrt{\left\{\left(\frac{\delta r}{\delta\theta}\right)^2+r^2\right\}\sin^2\theta+\left(\frac{\delta r}{\delta\varphi}\right)^2}\;r\,d\theta\,d\varphi\ldots\ldots(3)$$

9 單積分之曲面積。

[I] 柱面 (*Cylindrical Surface*)。

有母線平行於 z 軸之柱面。卽 $\varphi(x, y)=0$。被四種面 $z=0$, $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=f(x, y)$ 截斷。其所截取之部分之面積爲 S。則分柱面與 $z=0$ 相交之曲線 AB 爲幾分。對於其一分之弦爲 ΔS。於此小部分內一點之 $z=f(x, y)$ 之值。而作矩形和



$$\sum_{AB} z\,\Delta s.$$

則極限可表此曲面之面積。由是

$$S=\int_{x=\alpha}^{x=\beta} z\,ds$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

從 $\varphi(x, y)=0$. 可得 y 及 $\frac{dy}{dx}$.

〔例〕 有圓柱 $x^2+y^2=ax$ 之面。求其截取球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之部分之面積。

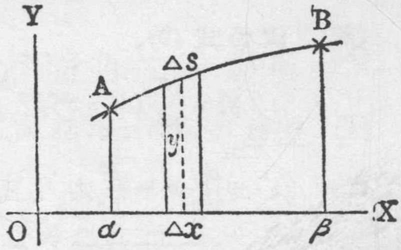
(解) 觀第6節例3之圖。則

$$S=4\int_0^a\sqrt{a^2-ax}\sqrt{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{(a-2x)^2}{ax-x^2}}\,dx$$

$$=2\sqrt{a}\int_0^a\frac{a}{\sqrt{x}}\,dx=2a\sqrt{a}\Big|2\sqrt{x}\Big|_0^a=4a^2.$$

[II] 回轉面 (*Surface of Revolution*)。

於域 (a,β) 內曲線 $y=f(x)$。以 x 軸爲軸回轉一周。所生回轉面之面積爲 S。



域 (a,β) 之一小部分 Δx。其對應之曲線爲 Δs。以此爲直線考之。則其回轉面之面積。由初等幾何學定理。

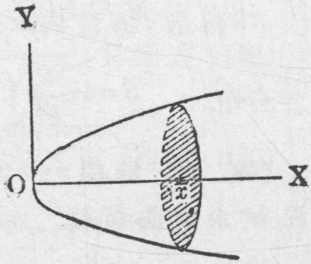
$2\pi y\dfrac{\Delta s}{\Delta x}\cdot\Delta x.$ 但 y 爲 Δx 中點之縱坐標。此爲域 (a,β) 之一切部分。試作其和。則其極限可表回轉面之面積。

$$S=2\pi\int_a^\beta y\frac{ds}{dx}dx$$

$$=2\pi\int_a^\beta y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(注意) 從一般之公式 (2)。換置 r 爲 x, $z=F(r,\phi)$ 爲 $y=f(x)$。即可求得此公式 (5)。

〔例〕 1. 拋物線 $y^2=2px$。其 x 軸之周回轉一周所生之曲面。被橫坐標 x 之平面截取。試求其頂點側之部分之面積。



(解) 依公式 (5)。得

$$S=2\pi\int_0^x y\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}dx$$

$$=2\pi\int_0^x\sqrt{2px+p^2}\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{3p}\left\{(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right\}.$$

〔例〕 2. 橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。其 x 軸之周回轉一周。試求其所生曲面之面積 S。

(解) 依公式 (5)。

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2).$$

$a^2-x^2+\frac{b}{a^2}x^2$

$$\therefore \qquad y\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}x.$$

$a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2$

$$\therefore \qquad y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{y^2+\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)+\frac{b^4}{a^4}x^2}$$

此 $a>b$。即細長橢圓回轉體 (*Prolate Spheroid*)。

令 $\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$. 則

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}.$$

$$\therefore \qquad S=4\pi\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx=2\pi b^2+2\pi ab\frac{\sin^{-1}e}{e}.$$

若 $a<b$。即扁平橢圓回轉體 (*Oblate Spheroid*)。

令 $\frac{b^2-a^2}{b^2}=e^2$. 則

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}=\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4+b^2e^2x^2}.$$

$$\therefore \qquad S=4\pi\frac{b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4+b^2e^2x^2}\,dx=2\pi b^2+\frac{\pi a^2}{e}\log\frac{1+e}{1-e}.$$

〔例〕 3. 擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ 之一節回轉 x 軸之周。試求其曲面積。

(解)
$$\begin{cases} dx=a(1-\cos\theta)\,d\theta, \\ dy=a\sin\theta\,d\theta. \end{cases}$$

∴ $$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\sqrt{dx^2+dy^2}=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta.$$

以 $$y=2a\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

而 $$S=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

10. 二重積分之曲面積之例。

〔例〕 1. 球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之面。試求其自圓柱 $x^2+y^2=ax$ 所截取部分之面積。

(解) 依公式(1)

$$\frac{\delta f}{\delta x}=\frac{\delta z}{\delta x}=-\frac{x}{z}.$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}=\frac{\delta z}{\delta y}=-\frac{y}{z}.$$

∴ $$\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2+1}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{a}{z}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

∴ $$S=4a\iint_P\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy$$ (參照第6節例3)。

$$=4a\int_0^a\left\{\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy\right\}dx$$

$$=4a\int_0^a\left|\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right|_0^{\sqrt{ax-x^2}}dx$$

$$=4a\int_0^a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx$$

換置 $x=a\tan^2\theta$. 則

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d(\tan^2\theta)$$

$$=4a^2\left\{\left|\theta\tan^2\theta\right|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)d\theta\right\}$$

$$=4a^2\left\{\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=2\pi a^2-4a^2.$$

〔例〕 2. 曲面 $z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-c)^2=a^2$. (但 $c>a$)。試求其全面積。

(解) 令 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$. 則

$$z^2+(r-c)^2=a^2.$$

依公式(2)。得

$$\frac{\delta z}{\delta r}=-\frac{r-c}{z},\quad \frac{\delta z}{\delta\phi}=0.$$

$$\therefore\qquad S=2\iint\sqrt{r^2+\left\{-\frac{r(r-c)}{z}\right\}^2}\,dr\,d\phi\qquad (z\geqq 0).$$

$$=2\iint\sqrt{\frac{z^2+(r-c)^2}{z^2}}\,rdr\,d\phi$$

$$=2\iint\frac{a}{z}rdr\,d\phi$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\left\{\int_{c-a}^{c+a}\frac{rdr}{z}\right\}d\phi\qquad [r\text{之極限爲}(r-c)^2=a^2].$$

$$=2a\int_0^{2\pi}d\phi\int_{c-a}^{c+a}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-(r-c)^2}}$$

$$=4\pi a\int_{c-a}^{c+a}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-(r-c)^2}}.$$

令 $r-c=a\sin\theta$. 則

$$=4\pi a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(c+a\sin\theta)}{a\cos\theta}a\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\pi a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(c+a\sin\theta)\,d\theta$$

$$=4\pi a\left|c\theta-a\cos\theta\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4\pi^2ac.$$

〔例〕 3. 求圓錐 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 之面。自圓柱 $x^2+y^2=ax$ 截取之部分之面積。

(答) $\frac{\pi}{2}a\sqrt{a^2+c^2}$.

〔例〕 4. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 之全面積。

(答) $\frac{1}{2}\pi^2a^2$.

第七章 空間曲線

1. 空間曲線之方程式。

空間曲線 (*Curve in Space*)。假定其爲二個曲面相交之線。而研究之如次。

空間曲線之方程式。其主要者。爲次列之三者。

(i) 陽函數式 $\begin{cases} y=f(x), \\ z=g(x). \end{cases}$

(ii) 陰函數式 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x\ \ ,z)=0. \end{cases}$

(iii) 變率式 $x=\phi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t).$

此外尚有由上三種導來之柱坐標式，立體極坐標式之曲線。

空間曲線之最簡單者。即直線方程式如次。

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0. \end{cases}$$

及 $$\frac{x-\alpha}{L}=\frac{y-\beta}{M}=\frac{z-\gamma}{N}.$$

2. 空間曲線之切線及法平面。

空間曲線之方程式。為

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0 \text{ ....(1)}$$

於其上之一點 $x|y|z$。依兩方程式所表之函數及其導來函數。任何亦為一價且連續。

其外一點 $\xi|\eta|\zeta$。落於曲面 $F=0$ 之上。則得切平面。為

$$(\xi-x)\frac{\delta F}{\delta x}+(\eta-y)\frac{\delta F}{\delta y}+(\zeta-z)\frac{\delta F}{\delta z}=0.$$

又 $\xi|\eta|\zeta$。落在曲面 $G=0$ 之上。則得切平面。為

$$(\xi-x)\frac{\delta G}{\delta x}+(\eta-y)\frac{\delta G}{\delta y}+(\zeta-z)\frac{\delta G}{\delta z}=0.$$

而此兩關係式的兩曲面之各切平面。以 $\xi|\eta|\zeta$ 為空間曲線 (1) 上之點。

而兩切平面相交之直線。為

$$\frac{\xi-x}{\frac{\delta F}{\delta y}\frac{\delta G}{\delta z}-\frac{\delta F}{\delta z}\cdot\frac{\delta G}{\delta y}}=\frac{\eta-y}{\frac{\delta F}{\delta z}\cdot\frac{\delta G}{\delta x}-\frac{\delta F}{\delta x}\cdot\frac{\delta G}{\delta z}}$$

$$=\frac{\zeta-z}{\frac{\delta F}{\delta x}\cdot\frac{\delta G}{\delta y}-\frac{\delta F}{\delta y}\cdot\frac{\delta G}{\delta x}}\text{. ......(2)}$$

空間曲線(1)上之點 $x|y|z$。於其上通過迫近於此之點 $\xi|\eta|\zeta$。由是此直線。爲於點 $x|y|z$ 之空間曲線(1)之切線 (*Tangent* 或 *Tangential line*)。

(注意一) 空間曲線爲 $y=f(x)$, $z=g(x)$。則(2)。以

$$\frac{\delta F}{\delta x}=-f'(x),\ \frac{\delta F}{\delta y}=1,\ \frac{\delta F}{\delta z}=0,\ \frac{\delta G}{\delta x}=-g'(x),\ \frac{\delta G}{\delta y}=0,\ \frac{\delta G}{\delta z}=1.$$

而切線之方程式如次。

$$\frac{\xi-x}{1}=\frac{\eta-y}{f'(x)}=\frac{\zeta-z}{g'(x)}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(注意二) 空間曲線之式爲 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$。則由(3)之關係。得

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dz}{dt}}.$$

$$g'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dz}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

而切線之方程式如次。

$$\frac{\xi-x}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\eta-y}{\dfrac{dy}{dt}}=\frac{\zeta-z}{\dfrac{dz}{dt}}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

過空間曲線(1)之上之點 $x|y|z$。作垂於此點之切線之平面。是謂於此點之(1)之法平面 (*Normal plane*)。

法平面之方程式。其方向餘弦的切線。各各相同如次。

$$(\xi-x)\left(\frac{\delta F}{\delta y}\cdot\frac{\delta G}{\delta z}-\frac{\delta F}{\delta z}\cdot\frac{\delta G}{\delta y}\right)+(\eta-y)\left(\frac{\delta F}{\delta z}\cdot\frac{\delta G}{\delta x}-\frac{\delta F}{\delta x}\cdot\frac{\delta G}{\delta z}\right)$$

$$+(\zeta-z)\left(\frac{\delta F}{\delta x}\cdot\frac{\delta G}{\delta y}-\frac{\delta F}{\delta y}\cdot\frac{\delta G}{\delta x}\right)=0\cdots\cdots(5)$$

及 $$(\xi-x)+(\eta-y)f'(x)+(\zeta-z)g'(x)=0\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$(\xi-x)\frac{dx}{dt}+(\eta-y)\frac{dy}{dt}+(\zeta-z)\frac{dz}{dt}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

〔例〕 1. 球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之面與圓柱 $x^2+y^2=ax$ 之面。於空間交成曲線(參照第六章第6節例3之圖)。於其上一點 $x|y|z$ 之切線。作法平面。試求其方程式。

(解) $$F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0.$$

$$G(x, y, z)=x^2+y^2-ax=0.$$

$$\frac{\delta F}{\delta x}=2x,\quad \frac{\delta F}{\delta y}=2y,\quad \frac{\delta F}{\delta z}=2z.$$

$$\frac{\delta G}{\delta x}=2x-a,\quad \frac{\delta G}{\delta y}=2y,\quad \frac{\delta G}{\delta z}=0.$$

故所求切線之方程式。爲

$$\frac{\xi-x}{2yz}=\frac{\eta-y}{z(a-2x)}=\frac{\zeta-z}{-ay}.$$

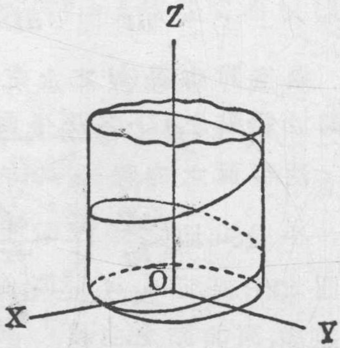
從此求得法平面之方程式。爲

$$2yz(\xi-x)+z(a-2x)(\eta-y)-ay(\zeta-z)=0.$$

即 $$2yz\xi+z(a-2x)\eta-axz\zeta=0.$$

〔例〕 2. 捩子線 (*Helix*)。

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt. \end{cases}$$



試以圖解之。且求其上一點 $x|y|z$ 之切線及法平面之方程式。

(解) 由第一與第二之方程式消去 t。則

$$x^2+y^2=a^2.$$

由是知此曲線在以z軸爲軸a爲半徑之圓柱面上。

今就t自0增大之式考之。則此曲線上一點於xy平面上之正射影與圓$x^2+y^2=a^2$之周上成角。同方向同角速度而回轉。

又$z=bt$。則此曲線上之點於z軸之方向。亦爲等速度而進行。

由是知此曲線之形狀。全與捩子同。[捩子卽螺旋。恐其與螺線(*Spiral*, 微分學第190頁)相混。故特名捩子]。

於捩子線一點$x|y|z$之切線。由公式(4)。得其方程式如次。

$$\frac{\xi-x}{-a\sin t}=\frac{\eta-y}{a\cos t}=\frac{\zeta-z}{b}.$$

卽 $$\frac{\xi-x}{-y}=\frac{\eta-y}{x}=\frac{\zeta-z}{b}.$$

由是求此點法平面之方程式。由公式(7)如次。

$$y(\xi-x)-x(\eta-y)-b(\zeta-z)=0.$$

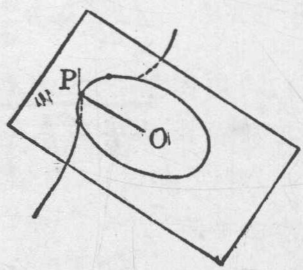
卽 $$y\xi-x\eta-b\zeta+bz=0.$$

3. 空間曲線之吻合平面及主法線。

通過空間曲線上之三點作圓。於三點爲限相近之極限之圓。謂其一點之曲度圓(*Circle of curvature*)。

此與平面曲線注意所述曲度圓之定義同(參照微分學第155頁注意)。

由是此圓之中心謂曲度中心。此圓之半徑。謂曲度半徑。曲度半徑之逆數。謂其點之曲度。



含曲度圓之平面。謂其點之空間曲線之吻合平面 (*Osculating plane*)。

空間曲線上一點 P 之法平面。與吻合平面相交之直線。(即過 P 與曲度中心 O 之直線)。謂 P 點之主法線 (*Pincipal normal*)。

過法平面上 P。而垂於主法線之直線。謂點 P 之副法線 (*Binormal*)。

空間曲線之方程式。為

$$x=\phi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t).$$

過其上三點 $x|y|z,\ x+\Delta x|y+\Delta y|z+\Delta z,\ x+\Delta' x|y+\Delta' y|z+\Delta' z$ 之平面方程式。假定

$$A(\xi-x)+B(\eta-y)+C(\zeta-z)=0 \text{........................} (1)$$

則
$$A\,\Delta x+B\,\Delta y+C\,\Delta z=0.$$
$$A\,\Delta' x+B\,\Delta' y+C\,\Delta' z=0.$$

由是
$$A\frac{\Delta x}{\Delta t}+B\frac{\Delta y}{\Delta t}+C\frac{\Delta z}{\Delta t}=0.$$
$$A\frac{\Delta x-\Delta' x}{(\Delta t)^2}+B\frac{\Delta y-\Delta' y}{(\Delta t)^2}+C\frac{\Delta z-\Delta' z}{(\Delta t)^2}=0.$$

由方程式 (1) 吻合平面之 A, B, C。適合於次之聯立方程式。

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0.$$
$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{A}{\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}}=\frac{B}{\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}}$$
$$=\frac{C}{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

由是點 $x|y|z$ 之吻合平面之方程式如次。

$$\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)(\xi-x)+\left(\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)(\eta-y)$$
$$+\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right)(\zeta-z)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

而點 $x|y|z$ 之主法線之方程式。由法平面。即前節之公式 (4) 與前紀 (2) 之聯立方程式以求之。即

$$\frac{\xi-x}{\frac{dy}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\frac{dz}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)}$$
$$=\frac{\eta-y}{\frac{dz}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\frac{dx}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right)}$$
$$=\frac{\zeta-z}{\frac{dx}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)-\frac{dy}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)}$$

〔例〕 求捩子線之吻合平面，主法線。

(解) $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt.$

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t=-y,\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t=x,\quad \frac{dz}{dt}=b.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t=-x,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-a\sin t=-y,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

從 (2) 得吻合平面之方程式如次。

$$by(\xi-x)-bx(\eta-y)+(y^2+x^2)(\zeta-z)=0.$$

即 $by\xi-bx\eta+a^2\zeta-a^2z=0.$

而主法線之方程式。爲

$$\frac{\xi-x}{b^2x+a^2x}=\frac{\eta-y}{a^2y+b^2y}=\frac{\zeta-z}{-bxy+bxy}.$$

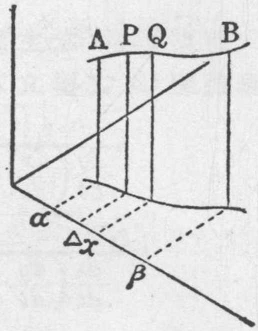
從此 $\xi/x=\eta/y,\quad \zeta=z.$

即交於 z 軸。且平行於 xy 之平面之直線。

4. 空間曲線之弧之長。

空間曲線之方程式爲

$$y=f(x),\quad z=g(x)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$



分其弧 AB 爲幾分。取其一小部分 PQ。

令 P 之坐標爲 $x|y|z$。Q 之坐標爲 $x+\Delta x|y+\Delta y|z+\Delta z$。直線 PQ 之長爲 Δs。則

$$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x.$$

統各部分均如此。求其相加直線之長。得

$$\Sigma\Delta s=\Sigma\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x.$$

各小部分的限甚小。採其極限值之和。以定弧 AB 之長 (*Length of arc*)。以 s 表之。則

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

空間曲線之方程式。爲 $x=\phi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)$。則其弧之長如次。

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

又用立體極坐標式如次。

$$S=\int_{\phi_0}^{\phi_1}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2+(r\sin\theta)^2}\,d\phi\ldots\ldots\ldots(4)$$

〔例〕 1. 求空間曲線 $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=ax$ 之長。(參照第六章第6節例3之圖)。

(解) 從 $x^2+y^2=ax$. 得

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=a. \qquad \therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{a-2x}{2y}.$$

從 $z^2=a^2-(x^2+y^2)=a^2-ax$. 得

$$2z\frac{dz}{dx}=-a. \qquad \therefore \qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{a}{2z}.$$

$$\therefore \qquad s=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{(a-2x)^2}{4y^2}+\frac{a^2}{4z^2}}\,dx$$

$$=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}+\frac{a^2}{4(a^2-ax)}}\,dx$$

$$=2\sqrt{a}\int_0^a\sqrt{\frac{a+x}{x(a-x)}}\,dx.$$

令 $x=a\cos^2\theta$. 則

$$s=-4a\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{2-\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=2\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}\,d\theta.$$

是爲橢圓積分。試展開之。依第三章第1節例1之公式。得積分如次。

$$s=\sqrt{2}\pi a\left\{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\cdot\frac{1.3}{2.4}-\frac{1}{128}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}-\dots\right\}.$$

〔例〕 2. 求捩子線從交於 x 軸之點。至線上任意一點之弧之長。

(解) 自 $t=0$ 至 t 之積分. 依公式 (3) 得

$$s=\int_0^t\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,dt$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^t dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}z.$$

(注意) 捩子線點 P 之切線。與 xy 平面相交。求其交點 M 之坐標。(P 點之切線方程式。見第1節例2)。

$$\because \qquad \xi=x-\frac{yz}{b},\quad \eta=y+\frac{zx}{b},\quad \zeta=0.$$

由是 $$\overline{MP}=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{yz}{b}\right)^2+\left(\frac{zx}{b}\right)^2+z^2}=\frac{1}{b}\sqrt{x^2+y^2+b^2}\,z$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}z.$$

是則捩子線 $\overparen{AP}$ 之長。與 $\overline{MP}$ 相等。

由是知直角三角形。其直角一邊平行之線爲軸之圓柱。卷而附之。卽得捩子線。

〔例〕 3. 空間曲線 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=at\tan\alpha$。求 $t=0$ 至 t 之弧長。

(答) $at\sec\alpha$.

〔例〕 4. 空間曲線 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 及 $\sqrt{x^2+y^2}\left(e^{n\tan^{-1}\frac{y}{x}}+e^{-n\tan^{-1}\frac{y}{x}}\right)=2a$。求其弧之長。

(解) 令 $x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta$。則空間曲線之方程式。爲

$$r=a,\quad r\sin\theta\,(e^{n\phi}+e^{-n\phi})=2a.$$

$$\therefore \qquad \frac{dr}{d\phi}=0,\quad \frac{d\theta}{d\phi}=-\frac{n\sin\theta\,(e^{n\phi}-e^{-n\phi})}{\cos\theta\,(e^{n\phi}+e^{-n\phi})}.$$

$$\therefore \qquad s=\int_{\phi_0}^{\phi_1}\sqrt{\left\{-\frac{n\sin\theta\,(e^{n\phi}-e^{-n\phi})}{\cos\theta\,(e^{n\phi}+e^{-n\phi})}r\right\}^2+(r\sin\theta)^2}\,d\phi.$$

代入 $r=a,\ sin\,\theta=\dfrac{2}{e^{n\phi}+e^{-n\phi}}$ 則

$$s=a\int_{\phi_0}^{\phi_1}\sqrt{n^2\left\{\frac{2}{e^{n\phi}+e^{-n\phi}}\cdot\frac{e^{n\phi}+e^{-n\phi}}{e^{n\phi}-e^{-n\phi}}\cdot\frac{e^{n\phi}-e^{-n\phi}}{e^{n\phi}+e^{-n\phi}}\right\}^2+\frac{4}{(e^{n\phi}+e^{-n\phi})^2}}\,d\phi$$

$$=2a\sqrt{n^2+1}\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{d\phi}{e^{n\phi}+e^{-n\phi}}$$

$$=2a\sqrt{n^2+1}\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{e^{n\phi}d\phi}{e^{2n\phi}+1}$$

$$=2a\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}\Big|\tan^{-1}e^{n\phi}\Big|_{\phi_0}^{\phi_1}$$

$$=2a\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}(\tan^{-1}e^{n\phi_1}-\tan^{-1}e^{n\phi_0}).$$

然 $\qquad \tan^{-1}e^{n\phi}=\theta.$

$\therefore \qquad s=2a\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}(\theta_1-\theta_0).$

續篇　微分方程式

第八章　第一階微分方程式

1. 定義。

含函數與其導來函數及其自變數之方程式。謂之微分方程式(*Differential equation*)。

微分方程式。其自變數只一個者。謂之普通微分方程式(*Ordinary D. E.*)。若有二個及二個以上。謂之部分微分方程式(*Partial D. E.*)。

例如

$$(a)\qquad \frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)=0.$$

$$(b)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a^2y^2=b^2.$$

$$(c)\qquad \frac{d^4y}{dx^4}-12\frac{d^2y}{dx^2}+12y=16x^4e^{x^2}.$$

等等。任何亦爲普通微分方程式。

$$(d)\qquad x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y}-z=0.$$

是即部分微分方程式之例也。

微分方程式。其中最高次之導來函數。爲一次，二次，三次，等。從而稱爲第一階，第二階，第三階，…。

例如前紀之(*a*)，(*b*)，(*d*)爲第一階之微分方程式。(*c*)爲第四階之微分方程式。

又一般之形。如

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0.$$

爲第一階之微分方程式。

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0.$$

爲第二階之微分方程式。

微分方程式。其中最高次之導來函數之羃指數。爲其次數。

例如前記之 (*a*), (*c*), (*d*) 爲一次。而 (*b*) 爲二次。如次之方程式亦爲二次。

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=a.$$

注意） 英語於階與次極易混同。卽階爲 *Order*, 次爲 *Degree*。本如此定明。然其他對於 *Order* 與 *Degree*。往往有視爲同一之習慣。故宜特別注意。

2. 第一階一次微分方程式之解。

第一階微分方程式之一般形狀。爲

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$\frac{dy}{dx}$ 爲一次方程式。換書如次。

$$\frac{dy}{dx}=\psi(x, y) \quad\cdots\cdots(2)$$

其兩邊以 $N(x, y)\,dx$ 乘之。

令爲 $$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \quad\cdots\cdots(2')$$

則 (1) 爲 (2′) 之解或積分方程式。求適合此微分方程式之函數。爲

$$F(x, y, C)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

方程式 (3) 爲 (1) 之解 (*Solution*) 或積分方程式 (*Integral equation*)。

第一階一次微分方程式之解。常應含一個常數 C。

〔證〕 (3) 爲微分。而

$$\frac{\delta F}{\delta x}+\frac{\delta F}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

由 (4) 與 (3) 消去 C。而導來 (2)。得以考之。

含常數 C 之解 (3)。爲方程式 (1) 之一般解 (*General solution*)。與 C 以特別之值。則稱其特別解 (*Particular solution*)。

3. 微分方程式 $M(x)dx+N(y)dy=0$。

dx 與 dy 被乘之函數。各僅爲 x 與 y。則直可求得其積分方程式。如

$$\int M(x)\,dx+\int N(y)\,dy=C.$$

〔例〕 1. 解 $\dfrac{dx}{1+x}+\dfrac{dy}{1+y}=0.$

(解) $$\int\frac{dx}{1+x}+\int\frac{dy}{1+y}=C.$$

$$\log(1+x)+\log(1+y)=C.$$

$$\log(1+x)(1+y)=C.$$

$$(1+x)(1+y)=e^{C}.$$

令 $e^{C}=c.$ 則

$$(1+x)(1+y)=c.$$

是卽所求之一般解答也。

〔例〕 2. 解 $\frac{dy}{dx}=n\frac{y}{x}$.

解 $$\frac{dy}{y}=n\frac{dx}{x}.$$

求積分。得

$$\log y=n\log x+c.$$

令 $C=\log c$. 則

$$\log y=n\log x+\log c=\log cx^n.$$

∴ $$y=cx^n.$$

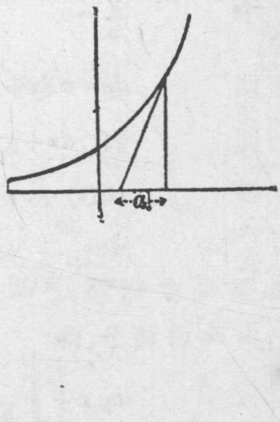
〔例〕 3. $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$.

(答) $$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C.$$

〔例〕 4. 切線影有一定之長 a。試求其平面曲線。(參照微分學第126頁)。

(解) 切線影之長為 $\frac{y}{y'}$.

而 $$\frac{y}{\frac{dy}{dx}}=a.$$



即 $$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{a}.$$

$$\log y=\frac{x}{a}+C.$$

令 $C=\log c$. 則

$$\log y-\log c=\frac{x}{a}.$$

$$\frac{y}{c}=e^{\frac{x}{a}}. \qquad \therefore \quad y=ce^{\frac{x}{a}}$$

即切線影為一定。則為對數曲線。(見微分學第194頁)。

〔例〕 5. 求法線影為一定之平面曲線。

(答) 拋物線 $y^2=2ax+C$.

4. 同次微分方程式。

微分方程式

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \text{..........................} (1)$$

其 $M(x, y)$ 與 $N(x, y)$。任何亦爲 x, y 同次之同次函數。此謂同次微分方程式 (*Homogeneous D. E.*)。

令 M, N 爲 n 次之同次函數 (微分學第63頁)。則

$$M(x, y) = x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$N(x, y) = x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

故 (1)。得書之如次。

$$\phi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0 \text{.........................} (2)$$

令 $\quad \frac{y}{x} = v. \quad$ 即 $\quad y = xv.$

則 $\quad dy = v\,dx + x\,dv.$

而 $\quad \phi(v)\,dx + \psi(v)\{v\,dx + x\,dv\} = 0.$

即 $\quad \{\phi(v) + v\,\psi(v)\}\,dx + x\,\psi(v)\,dv = 0.$

$$\therefore \quad \frac{dx}{x} + \frac{\psi(v)\,dv}{\phi(v) + v\,\psi(v)} = 0 \text{..........................} (3)$$

由此求積分。得

$$\log x + \int \frac{\phi(v)}{\phi(v) + v\,\psi(v)}\,dv = C.$$

換置 $\quad v = \frac{y}{x}.$

即可得所求之解答。

〔例〕 1. 解 $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx-x\,dy=0.$

(解) 以 x 約原式。則

$$\left\{\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right\}dx-dy=0.$$

令 $\frac{y}{x}=v$. 則

$$(v+\sqrt{1+v^2})\,dx-v\,dv-x\,dv=0.$$

$$\therefore\quad \sqrt{1+v^2}\,dx-x\,dv=0.$$

$$\frac{dx}{x}-\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=0.$$

$$\log x-\log(v+\sqrt{1+v^2})=C.$$

$$\frac{x}{v+\sqrt{1+v^2}}=e^C=c.$$

$$\frac{x}{\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=c.$$

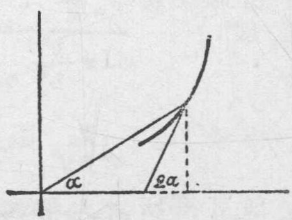
$$\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}}=c.$$

$$\sqrt{x^2+y^2}-y=c.$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=y+c.$$

$$x^2=2cy+c^2.$$

〔例〕 2. 切線與原線正方向所成之角。為引切點之動徑與原線正方向所成之角之二倍。試求其平面曲線。



(解) 曲線上之點 $x|y$。引動徑與原線正方向成 α 角。則

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

$$\tan 2a=\frac{dy}{dx} \qquad \text{(微分學第22頁)。}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=\frac{2\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}.$$

令 $\frac{y}{x}=v$. 則

$$y=vx.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v.$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx}+v=\frac{2v}{1-v^2}.$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{v(1+v^2)}{1-v^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{1-v^2}{v(1+v^2)}dv=\frac{dx}{x}.$$

然 $$\frac{1-v^2}{v(1+v^2)}=\frac{1}{v}-\frac{2v}{1+v^2}.$$

而 $$\frac{dv}{v}-\frac{2vdv}{1+v^2}=\frac{dx}{x}.$$

$$\log v-\log(1+v^2)=\log x+C.$$

$$\frac{x}{1+v^2}=cx.$$

即 $$\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=cx.$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x^2+y^2}=c.$$

$$\therefore \quad c(x^2+y^2)=y.$$

令 $c=\dfrac{1}{2k}$. 則

$$x^2+y^2=2ky.$$

$$\therefore \qquad x^2+(y-k)^2=k^2.$$

即過原點在 y 軸上有中心之圓。

〔例〕 3. 曲線上之點 $x|y$。其切線影等於 $y-x$。試求其平面曲線。

(答) $\qquad y^2-2xy-C=0.$

5. $F(x)\dfrac{dy}{dx}+G(x)\cdot y+H(x)=0$。

以 $F(x)$ 約各項。得次形。

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y+Q(x)=0 \text{..............................} (1)$$

以此求積分。

令 $\qquad y=uv.$

則 $$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+P(x)\cdot uv+Q(x)=0.$$

即 $$u\frac{dv}{dx}+v\left\{\frac{du}{dx}+P(x)\cdot u\right\}+Q(x)=0 \text{................} (2)$$

此可決定 u 如次。

$$\frac{du}{dx}+P(x)u=0.$$

即 $$\frac{du}{u}+P(x)\,dx=0.$$

$$\log u+\int P(x)\,dx=0.$$

即 $$u=e^{-\int P(x)dx} \text{..} (3)$$

然由(2)以求v。則

$$u\frac{dv}{dx}+Q(x)=0.$$

即 $$dv+e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)\,dx=0.$$

∴ $$v=C-\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)\,dx \quad\cdots\cdots(4)$$

由是從(3),(4)得

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left\{C-\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)\,dx\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

〔例〕 1. 解$\frac{dy}{dx}-y+x=0.$

(解) 此方程式爲

$$P(x)=-1,\quad Q(x)=x.$$

故由(5)得

$$y=e^{\int dx}\left\{C-\int e^{-\int dx}\cdot x\,dx\right\}$$

$$=e^{x}\left\{C-\int xe^{-x}\,dx\right\}$$ (第二章第7節)。

$$=Ce^{x}+x+1.$$

〔例〕 2. 試求$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x}$之平面曲線。

(答) $$y=x\log\frac{c}{x}.$$

〔例〕 3. $\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y+Q(x)\cdot y^{n}=0.$ [白努利(*Bernoulli*)之方程式]之解法如何。

(解) 以y^{n}約各項。則

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}P(x)+Q(x)=0.$$

令 $y^{1-n}=z$. 則

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}.$$

故得白奴利之方程式如次。

$$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}+P(x)\cdot z+Q(x)=0.$$

是卽本節所求之解答也。

6. 全微分方程式。

微分方程式

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其左邊 $M\,dx+N\,dy$ 爲全微分。

是謂全微分方程式 (*Exact D. E.*)。

今作函數 $f(x, y)$ 之全微分。則

$$df=\frac{\delta f}{\delta x}dx+\frac{\delta f}{dy}dy.$$

設 $$M=\frac{\delta f}{\delta x},\quad N=\frac{\delta f}{\delta y} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此關係存在。則由 (1)

$$df=0$$

$$\therefore\quad f(x, y)=C \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

是卽所求之解答。

然由 (2) 之關係

$$\frac{\delta M}{\delta y}=\frac{\delta N}{\delta x} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

反之。(4) 之關係成立。則 (2) 之關係亦可成立。而 (4) 爲方程式 (1) 之全微分方程式所必要且充分之條件也.

由 (4) 之關係成立。得知全微分方程式以求 f。則由

$$\frac{\delta f}{dx}=M(x,y).$$

得　　$$f=\int M(x,y)\,\delta x+\phi(y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

而 $\phi(y)$ 可由下式定之。

$$\frac{\delta f}{\delta y}=\frac{\delta}{\delta y}\left\{\int M(x,y)\,\delta x\right\}+\phi'(y)=N(x,y).$$

(注意)　考 $\int M(x,y)\,\delta x$。如 y 爲常數。則僅表示 x 之積分之記號。

〔例〕 1.　解 $(x^2+y)\,dx-(y^2-x)\,dy=0.$

(解)　令 $M=x^2+y,\ N=-y^2+x.$ 則

$$\frac{\delta M}{\delta y}=1,\quad \frac{\delta N}{\delta x}=1.\qquad \therefore\quad \frac{\delta M}{\delta y}=\frac{\delta N}{\delta x}.$$

故原方程式之左邊爲全微分。

由是　　$$\frac{\delta f}{\delta x}=x^2+y.$$

$$f=\int (x^2+y)\,\delta x+\phi(y)=\frac{x^2}{3}+xy+\phi(y).$$

然　　$$\frac{\delta f}{\delta y}=x+\phi'(y)=-y^2+x.$$

$\therefore$　　$\phi'(y)=-y^2.$

$\therefore$　　$\phi(y)=-\dfrac{y^3}{3}.$

$\therefore$　　$f=\dfrac{x^3}{3}+xy-\dfrac{y^3}{3}=C.$

令 $3C=c$. 則求得其解爲

$$x^3+3xy-y^3=c.$$

〔例〕 2.　解 $(3x^2-ay-y^2)\,dx-(ax-2by+2xy)\,dy=0.$

(答)　　$x^3+axy-xy^2+by^2=C.$

7 積分因數。

微分方程式

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \qquad \text{(1)}$$

此不爲全微分方程式。即 $\dfrac{\delta M}{\delta y} \neq \dfrac{\delta N}{\delta x}$.

(1) 以 $\mu(x, y)$ 乘之。得

$$\mu(x, y)\,M(x, y)\,dx+\mu(x, y)\,N(x, y)\,dy=0 \qquad \text{(2)}$$

是爲全微分方程式。而

$$\frac{\delta(\mu M)}{\delta y}=\frac{\delta(\mu N)}{\delta x} \qquad \text{(3)}$$

其 $\mu(x, y)$。謂之積分因數 (*Integrating factor*)。

例如 $(1+y^2)\,dx+xy\,dy=0.$

此非全微分方程式。

以 $2x$ 乘之。則

$$(2x+2xy^2)\,dx+2x^2y\,dy=0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta y}(2x+2xy^2)=4xy, \\[2ex] \dfrac{\delta}{\delta x}(2x^2y)=4xy. \end{cases}$$

此由前節求得其解。

而 $2x$ 即積分因數。

定理. 微分方程式 (1)。必常有積分因數。

〔證明〕 (1) 必應有積分方程式 $g(x, y, C)=0$。試解之。令

$$h(x, y)=C.$$

則

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\delta h}{\delta x}}{\dfrac{\delta h}{\delta y}}.$$

然直由(1)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}.$$

$$\therefore\quad \frac{\dfrac{\delta h}{\delta x}}{\dfrac{\delta h}{\delta y}}=\frac{M}{N}.$$

$$\therefore\quad \frac{\dfrac{\delta h}{\delta x}}{M}=\frac{\dfrac{\delta h}{\delta y}}{N}.$$

令此式等於μ。則

$$\frac{\delta h}{\delta x}=\mu M,\quad \frac{\delta h}{\delta y}=\mu N.$$

故
$$\begin{cases}\dfrac{\delta h}{\delta x}dx+\dfrac{\delta h}{\delta y}dy=0,\\ \mu M\,dx+\mu N\,dy=0.\end{cases}$$

即得全微分方程式。

積分因數。在前證明中。μ不以一個爲限。而$\mu(x,y)F\{h(x,y)\}$之形之函數。其一切積分因數。容易證明。

即方程式(1)有無數積分因數。

例如 (a) $\frac{y}{x^2}=C.$ (b) $\frac{x^2}{y}=C.$ (c) $tan^{-1}\frac{y}{x^2}=C.$

將上三種微分作微分方程式。則

$$(a)\quad \frac{1}{x^3}(x\,dy-2y\,dx)=0.$$

$$(b)\quad -\frac{x}{y^2}(x\,dy-2y\,dx)=0.$$

$$(c)\quad \frac{x}{x^4+y^2}(x\,dy-2y\,dx)=0.$$

由是可見微分方程式

$$x\,dy-2y\,dx=0.$$

其積分因數。有 $\dfrac{1}{x^3}$, $-\dfrac{x}{y^2}$, $\dfrac{x}{x^4+y^2}$, 等等。

然求一個積分因數 $h(x, y)$。則從 (3)

$$\mu\frac{\delta M}{\delta y}+M\frac{\delta\mu}{\delta y}=\mu\frac{\delta N}{\delta x}+N\frac{\delta\mu}{\delta y}.$$

即 $$\mu\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=N\frac{\delta\mu}{\delta x}+M\frac{\delta\mu}{\delta y}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此爲第一階之部分微分方程式。而槪由原方程式 (1) 解之。則甚困難。

次就 (4) 之普通微分方程式之特別者。述其一二。

[I] <u>就 μ 僅爲 x (或 y) 之函數考之。</u>

就 μ 僅爲 x 之函數考之。則以

$$\frac{\delta\mu}{\delta y}=0,\qquad \frac{\delta\mu}{\delta x}=\frac{d\mu}{dx}.$$

由 (4) $$\mu\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=N\frac{d\mu}{dy}.$$

$$\therefore\quad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{N}\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)dx$$

由是 $$\frac{1}{N}\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=X\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

不可不僅含 x。

設 X 僅爲 x 之函數。則

$$\frac{d\mu}{\mu}=X.$$

$$\therefore\quad \log\mu=\int X\,dx.$$

$$\therefore\quad \mu=e^{\int X\,dx}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

同樣 $$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\delta N}{\delta x}-\frac{\delta M}{\delta y}\right)=Y \qquad (5')$$

此僅爲 y 之函數。則 μ 亦僅爲 y 之函數。

∴ $$\mu=e^{\int Y\,dx} \qquad (6')$$

〔例〕 解 $(3x^2+6xy+3y^2)\,dx+(2x^2+3xy)\,dy=0.$

(解) 此方程式

$$M=3x^2+6xy+3y^2, \quad \frac{\delta M}{\delta y}=6x+6y.$$

$$N=2x^2+3xy, \quad \frac{\delta N}{\delta x}=4x+3y.$$

∴ $$\frac{1}{N}\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=\frac{2x+3y}{2x^2+3xy}=\frac{1}{x}.$$

由是依 (6) 得

$$\mu=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\log x}=x.$$

試以此乘原方程式之各項。則

$$(3x^3+6x^2y+3xy^2)\,dx+(2x^3+3x^2y)\,dy=0.$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}=3x^3+6x^2y+3xy^2.$$

$$f=\int(3x^3+6x^2y+3xy^2)\,\delta x+\phi(y).$$

$$=\frac{3}{4}x^4+2x^3y+\frac{3}{2}x^2y^2+\phi(y).$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}=2x^3+3x^2y+\phi'(y)=2x^3+3x^2y.$$

∴ $\phi'(y)=0.$ ∴ $\phi(y)=C.$

故所求之積分爲

$$\frac{3}{4}x^4+2x^3y+\frac{3}{2}x^2y^2+C=0.$$

卽 $$3x^4+8x^3y+6x^2y^2=c.$$

[II] 就μ爲(xy)之函數考之。

設此假定爲眞。而令$xy=v$。則

$$\mu=\mu(v).$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta\mu}{\delta x}=\frac{d\mu}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=y\frac{d\mu}{dv}.$$

$$\frac{\delta\mu}{\delta y}=\frac{d\mu}{dv}\cdot\frac{\delta v}{\delta y}=x\frac{d\mu}{dv}.$$

由是從(4)得

$$\mu\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=(yN-xM)\frac{d\mu}{dv}.$$

$$\therefore \qquad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\delta M}{\delta y}-\dfrac{\delta N}{\delta x}}{yN-xM}dv.$$

故前假定爲眞。則

$$\frac{\dfrac{\delta M}{\delta y}-\dfrac{\delta N}{\delta x}}{yN-xM}=V \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

爲$xy=v$之函數所必要且充分之條件也。然

$$\frac{d\mu}{\mu}=V\,dv.$$

$$\therefore \qquad \log\mu=\int V\,dv.$$

$$\therefore \qquad \mu=e^{\int V\,dv} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

〔例〕 求$(x^3y-2y^4)\,dx+(y^3x-2x^4)\,dy=0$之積分因數。

(解) $\qquad M=x^3y-2y^4, \quad \dfrac{\delta M}{\delta y}=x^3-8y^3.$

$\qquad N=y^3x-2x^4, \quad \dfrac{\delta N}{\delta x}=y^3-8x^3.$

$$\therefore \qquad \frac{\dfrac{\delta M}{\delta y}-\dfrac{\delta N}{\delta x}}{yN-xM}=\frac{(x^3-8y^3)-(y^3-8x^3)}{(y^4x-2x^4y)-(x^4y-2xy^4)}$$

$$=\frac{9(x^3-y^3)}{-3xy(x^3-y^3)}=-\frac{3}{xy}=-\frac{3}{v}.$$

$$\therefore \qquad \mu=e^{-3\int\frac{dv}{v}}=e^{-3\log v}=e^{\log(v^{-3})}$$

$$=v^{-3}=\frac{1}{v^3}=\frac{1}{x^3y^3}.$$

[III] 就 μ 爲 $\dfrac{y}{x}$ 之函數考之。

令 $\dfrac{y}{x}=u$. 則

$$\mu=\mu(u).$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta\mu}{\delta x}=\frac{d\mu}{du}\cdot\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{d\mu}{du}.$$

$$\frac{\delta\mu}{\delta y}=\frac{d\mu}{du}\cdot\frac{\delta u}{dy}=\frac{1}{x}\cdot\frac{d\mu}{du}.$$

由是依 (4)

$$\mu\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=-\left(\frac{y}{x^2}N-\frac{1}{x}M\right)\frac{d\mu}{du}.$$

$$\therefore \qquad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{x^2\left(\dfrac{\delta N}{\delta x}-\dfrac{\delta M}{\delta y}\right)}{xM+yN}du.$$

故 μ 得假定爲 $\dfrac{y}{x}$ 之函數。則

$$\frac{x^2\left(\dfrac{\delta N}{\delta x}\quad\dfrac{\delta M}{\delta y}\right)}{xM+yN}=U\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

爲$\frac{y}{x}=u$之函數所必要且爲充分之條件。而此假定之下。爲

$$\frac{d\mu}{\mu}=U\,du.$$

$$\therefore \qquad \log\mu=\int U\,du.$$

$$\therefore \qquad \mu=e^{\int U\,du} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

8. 奇異解。

有微分方程式$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$。令其一般解爲$F(x, y, C)=0$。試與$C$以$1, 2, 3, \ldots, -2, \frac{1}{3}, 0.25, \ldots$等值。則稱特別解。前已述之矣。

然於第一階普通微分方程式此等之特別解。全然各異。即不含一般解之解所發生者。是謂奇異解(*Singular solution*)。

今就幾何學的考其一般解與特別解及奇異解。

特別解$F(x, y, C_0)=0$。可作爲一種曲線看。有變率C。一般解$F(x, y, C)=0$。則表一羣之同類曲線 參照微分學第160頁)

而由其微分方程式$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$所得之$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$。必滿足特別解之曲線上一切點。

然此處一般解之同羣曲線。假定有包絡線。則此包絡線上之點。統同類曲線中之一種$F(x, y, C_0)=0$之切點。而於此點。$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$爲包絡線。特別解之曲線。亦同一也。由是包絡線上之點。均適合於微分方程式。

由是可知奇異解。乃表同類曲線$F(x, y, C)=0$之包絡線。

(注意) 奇異解之例。見後可盧里(*Clairaut*)之方程式。

9. 第一階二次微分方程式。

$$L(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+M(x,y)\frac{dy}{dx}+N(x,y)=0\ldots\ldots\ldots(1)$$

試令 $\frac{dy}{dx}=p$. 則 (i) 略記如

$$Lp^2+Mp+N=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1')$$

p 爲二次方程式。而

$$p=\frac{-M\pm\sqrt{M^2-4LN}}{2L}.$$

$M^2-4LN<0$。則 $\frac{dy}{dx}$ 即切線爲虛線。茲省略不論。專論其餘。

上記之兩根。以 $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ 表之。則 (1) 爲

$$\{p-f_1(x,y)\}\{p-f_2(x,y)\}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1'')$$

則 $$p=f_1(x,y),\quad p=f_2(x,y)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

由第6節以前各方法。得

$$\left.\begin{array}{l}F_1(x,y,C_1)=0\\F_2(x,y,C_2)=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

從此 (1) 之一般解。爲

$$F_1(x,y,C)F_2(x,y,C)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

是即可求得之積分方程式。蓋第一階微分方程式變率。只限一個故也。

(注意) 第一階 n 次微分方程式

$$L_0p^n+L_1p^{n-1}+L_2p^{n-2}+\ldots+L_{n-1}p+L_n=0.$$

試分解此式爲 n 個一次因數。得

$$(p-f_1)(p-f_2)\ldots(p-f_n)=0.$$

從此可得

$$F_1(x, y, C)F_2(x, y, C)\ldots F_n(x, y, C)=0.$$

是卽所求之積分方程式也。

〔例〕 1. 切線影爲切點坐標之比例中項。試求其平面曲線。

(解) $x:\dfrac{y}{p}=\dfrac{y}{p}:y.\qquad\therefore\quad p^2=\dfrac{y}{x}.$

$\therefore\qquad p=\pm\sqrt{\dfrac{y}{x}}.$

$\therefore\qquad \dfrac{dy}{\sqrt{y}}\mp\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=0.$

$\therefore\qquad \sqrt{y}-\sqrt{x}=C_1,\quad \sqrt{y}+\sqrt{x}=C_2.$

故所求之曲線爲

$$(\sqrt{y}-\sqrt{x}-C)(\sqrt{y}+\sqrt{x}-C)=0.$$

卽 $\qquad y-x-2C\sqrt{y}+C^2=0.$

令 $C^2=c$. 則

$$(x-y)^2-2c(x+y)+c^2=0.$$

是卽圓也。

〔例〕 2. 解 $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{dy}{dx}-1=0.$

(解) $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\pm\sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1}.$

此變方爲同次微分方程式。故令

$$\frac{y}{x}=v.\qquad 則\qquad y=vx.$$

$\therefore\qquad \dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}=v\pm\sqrt{v^2+1}.$

$\therefore \quad \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}=\pm\frac{dx}{x}.$

$\therefore \quad \log(v+\sqrt{v^2+1})=\pm\log x+C.$

即　$\log\frac{v+\sqrt{v^2+1}}{x}=C_1,\quad \log(v+\sqrt{v^2+1})x=C_2.$

$\therefore \quad \frac{v+\sqrt{v^2+1}}{x}=e^{C_1}=c_1,\quad (v+\sqrt{v^2+1})x=e^{C_2}=c_2.$

$\therefore \quad \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}=c_1,\quad y+\sqrt{x^2+y^2}=c_2.$

由是所求之一般解爲

$$\left(\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}-c\right)(y+\sqrt{x^2+y^2}-c)=0.$$

從此得

$$(y+\sqrt{x^2+y^2})^2-c(x^2+1)(y+\sqrt{x^2+y^2})+c^2x^2=0.$$

10　缺變數之高次微分方程式。

[I]　缺 x 與 y。

$$\phi\left(\frac{dy}{dx}\right)=0 \text{..} (1)$$

此 $\frac{dy}{dx}$。依代數的之解法。令其一個一次因數爲 $\frac{dy}{dx}-a$。從此

$\frac{dy}{dx}=a.$

$\therefore \quad y=ax+C.$

由是求得一般解之一個一次因數爲 $\left(\frac{y-C}{x}-a\right)$.

故所求之一般解爲 $\phi\left(\frac{y-C}{x}\right)=0.$

〔例〕 $2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-7\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0.$

(解) $2\left(\frac{y-C}{x}\right)^3-7\left(\frac{y-C}{x}\right)+1=0.$

即 $2(y-C)^3-7x^2(y-C)+x^3=0.$

[II] <u>缺 y。</u>

$$\phi\left(x, \frac{dy}{dx}\right)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

解 $\frac{dy}{dx}$。固得適用普通之方法矣。

今由別法解之。

解 (3) 之 x。而令 $\frac{dy}{dx}=p$。則

$$x=f(p) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3')$$

(3') 之微分式爲

$$dx=f'(p)\,dp.$$

然 $dx=\frac{dy}{p}.$

而 $dx=p'f'(p)\,dp.$

$\therefore$ $$y+C=\int pf'(p)\,dp \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由 (3') 與 (4) 消去 p。則可求得 (3) 之一般解爲

$$F(x, y, C)=0.$$

〔例〕 1. 解 $x=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$

(解) $x=1+p^2.$

$$dx=3p^2\,dp.$$

$\therefore\qquad dy=p\times 3p^2\,dp=3p^3\,dp.$

$\therefore\qquad y+C=\frac{3}{4}p^4.$

然 $\qquad p=(x-1)^{\frac{1}{3}}.$

$\therefore\qquad y+C=\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}.$

〔例〕 2. 解 $x=1+\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$

(解) $\qquad x=1+p+p^2.$

$$dx=(1+2p)\,dp.$$

$\therefore\qquad dy=(p+2p^2)\,dp.$

$\therefore\qquad y=\frac{p^2}{2}+\frac{2}{3}p^3+c.$

由是求得一般解之變率式如次。

$$\begin{cases} x=1+p+p^2, \\ y=\frac{1}{2}p^2+\frac{2}{3}p^3+c. \end{cases}$$

[III] 缺 x。

$$\phi\left(y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad\qquad (5)$$

此與[II]同樣。得適用解 $\frac{dy}{dx}$ 及解 y 之二種方法.

今令 $\frac{dy}{dx}=p$。而述第二方法。

$$y=f(p) \qquad\qquad (5')$$

$$dy=f'(p)\,dp.$$

然 $\qquad dy=p\,dx.$

而 $$dx=\frac{f'(p)}{p}dp.$$

$$\therefore \qquad x+C=\int\frac{f'(p)}{p}dp \text{..............................} (6)$$

由 (5′), (6) 消去 p。即可求得一般解。

〔例〕 解 $y=a\dfrac{dy}{dx}+b\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

(解) $$y=ap+bp^2.$$

$$dy=(a+2bp)dp.$$

$$\therefore \qquad dx=\frac{a+2bp}{p}dp=a\frac{dp}{p}+2b\,dp.$$

$$\therefore \qquad x=a\log p+2bp+c.$$

由是求得一般解。如

$$\begin{cases} x=a\log p+2bp+c, \\ y=ap+bp^2. \end{cases}$$

11. 可盧里氏 (*Clairaut*) 之微分方程式。

微分方程式

$$y=xp+f(p). \quad \left(p=\frac{dy}{dx}\right) \text{..............................} (1)$$

是謂可盧里氏 (*Clairaut*) 之方程式。

欲解此式。則先令爲微分。則

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx}.$$

從此 $$\{x+f'(p)\}\frac{dp}{dx}=0.$$

由是得次二式。

$$\frac{dp}{dx}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$x+f'(p)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2')$$

(i) 採用(2)。

$$p=C.$$

以此代入(1)。得

$$y=Cx+f(C) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

是含變率C而爲一般解。

(ii) 採用(2′)。

此$x=-f'(p)$代入(1)。得

$$\begin{cases} x=-f'(p), \\ y=-f'(p)\cdot p+f(p). \end{cases}$$

是亦爲一解也。然此不含變率C，故不爲一般解。而亦不爲一般解之C代入某特別值之特別解。實則爲直線(3)之包絡線。即方程式(1)之奇異解也。

〔例〕 1. $y=xp+\dfrac{m}{p}$.　　(m爲常數)。

(解) 令原式爲微分。而

$$p=p+x\frac{dp}{dx}-\frac{m}{p^2}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

即　$$\left(x-\frac{m}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}=0.$$

從$\dfrac{dp}{dx}=0$得$p=C$。代入原方程式。

$$=Cx+\frac{m}{C}.$$

是即爲一般解。而表同類直線。

又從 $x-\frac{m}{p^2}=0$。得

$$x=\frac{m}{p^2}. \qquad \therefore \quad p=\pm\sqrt{\frac{m}{x}}.$$

以此代入原方程式。則

$$y=\pm\sqrt{mx}\pm\sqrt{mx}=\pm 2\sqrt{mx}.$$

$$\therefore \qquad y^2=4mx.$$

是即爲奇異解。而表前記同類曲線之包絡線之拋物線。

(注意) 由可盧里之方程式。則消一般之方程式。

$$x\phi(p)+y\psi(p)+\chi(p)=0. \quad \left(p=\frac{dy}{dx}\right) \cdots\cdots\cdots (1)$$

亦得與本節之方法同樣解之。

即以 $\psi(p)$ 約 (1) 之各項。爲

$$y=xg(p)+f(p) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

試令此爲 x 之微分。則

$$p=g(p)+xg'(p)\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx}.$$

由是 $$\{p-g(p)\}\frac{dx}{dp}-g'(p)\cdot x-f'(p)=0.$$

是即第5節所解之形。

從此求 $x=F(p)$。則

$$\begin{cases} x=F(p)+C, \\ y=\{F(p)+C\}g(p)+f(p). \end{cases}$$

是爲所求一般解之變率式。

〔例〕 2. $x+y\cdot p=ap^2$.

〔解〕 兩邊以 p 約之。則

$$y=-x\frac{1}{p}+ap.$$

以此為微分。而得

$$p=-\frac{1}{p}+\frac{x}{p^2}\cdot\frac{dp}{dx}+a\frac{dp}{dx}.$$

即 $$p+\frac{1}{p}=\left(\frac{x}{p^2}+a\right)\frac{dp}{dx}.$$

即 $$\left(p+\frac{1}{p}\right)\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p^2}-a=0.$$

$$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p(1+p^2)}-\frac{ap}{1+p^2}=0.$$

由是第5節之 P, Q。各為 $-\frac{1}{p(1+p^2)}$, $-\frac{ap}{1+p^2}$。則可得次之結果。

$$x=\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\{c+a\log(p+\sqrt{1+p^2})\}.$$

是求得一般解如次。

$$\begin{cases} x=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\{c+a\log(p+\sqrt{1+p^2})\}, \\ y=-\dfrac{x}{p}+ap. \end{cases}$$

〔例〕 3. 有直線交於直交軸。其截分(原點與交點間之長)之和,差,積,商,各有一定。問此直線之包絡線各如何。

(解) 令切於此直線之包絡線之點為 $x|y$。其方程式為

$$\eta-y=\frac{dy}{dx}(\xi-x). \qquad \text{(微分學第122頁)。}$$

則 x 軸之截分。由 $\eta=0$ 得

$$\xi=\frac{\frac{dy}{dx}x-y}{\frac{dy}{dx}}=\frac{px-y}{p}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\alpha)$$

又 y 軸之截分。由 $\xi=0$ 得

$$\eta=y-\frac{dy}{dx}x=y-px\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\beta)$$

由是 (α), (β) 之和,差,積,商。各等於一定之 a。則各得次列左側微分方程式。從而可得右側之一般解。即此同類直線之方程式與奇異解。即其包絡線。

和 $y=xp-\dfrac{ap}{1-p}$, (一般解) $y=Cx-\dfrac{aC}{1-C}$.

(奇異解) $(x-y)^2-2a(x+y)+a^2=0$.

差 $y=xp-\dfrac{ap}{1+p}$, (一般解) $y=Cx-\dfrac{aC}{1+C}$.

(奇異解) $(x+y)^2-2a(x-y)+a^2=0$.

積 $y=xp+a\sqrt{-p}$, (一般解) $y=Cx+a\sqrt{-C}$.

(奇異解) $4xy=a^2$.

商 $ap=-1$, (一般解) $ay+x=C$.

(奇異解) 無.

和式之包絡線。表切於第一象限之拋物線。以直角之二等分線爲軸。x 軸 y 軸各爲 $a|0$, $0|a$。

差式之包絡線亦同。但爲切於第四象限之包絡線。

積式則爲等邊雙曲線。

第九章 第二階微分方程式

1. 第二階微分方程式之解。

一般之形爲

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \qquad (1)$$

解之爲$\frac{d^2y}{dx^2}$。則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (2)$$

令$x=a$并與y及$\frac{dy}{dx}$以適當之任意常數。如

$$y=c_1, \quad \frac{dy}{dx}=c_2.$$

則$\frac{d^2y}{dx^2}=\psi(a, c_1, c_2,)$是爲一定。

若$x_1=a+dx$。試求其與此相應對之$y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_2$。則

$$y_1=c_1+dy=c_1+c_2\,dx.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=c_2+d\left(\frac{dy}{dx}\right)=c_2+\psi(a, c_1, c_2)\,dx.$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1=\psi\{a+dx, c_1+c_2\,dx, [c_2+\psi(a, c_1, c_2)\,dx]\}.$$

若$x_2=a+2dx$, $x_3=a+3dx$, ...。其對於x之變化。亦同樣也。

然設定二種常數c_1, c_2。則對於x之變化。而適合(2)之y之變化。得以承認。

由是(2)之一般解爲

$$F(x, y, C_1, C_2)=0 \qquad (3)$$

反之。 $$\begin{cases} F=0, \\ \dfrac{\delta F}{\delta x}+\dfrac{\delta F}{\delta x}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0, \\ \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta F}{\delta x}+\dfrac{\delta F}{\delta x}\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)+\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta F}{\delta x}+\dfrac{\delta F}{\delta y}\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dy}{dx}=0. \end{cases}$$

從此消去 C_1, C_2。則求得 (1)。

(注意) 第 n 階微分方程式

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$$

其一般解。亦同樣為

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0.$$

2. 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\psi(x)$。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\psi(x).$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\int\psi(x)\,dx+C_1.$$

$\therefore$ $$y=\int\left\{\int\psi(x)\,dx\right\}dx+C_1x+C_2.$$

(注意) 此解法。可適用於一般之

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\psi(x).$$

〔例〕 1. 加速度等於一定之 a。試作其直線運動之公式。

(解) 令運動之距離為 s。則

$$\frac{d^2s}{dt^2}=a. \qquad \text{(微分學第21頁)}$$

$\therefore \qquad \dfrac{ds}{dt}=at+C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$

$$s=\frac{1}{2}at^2+C_1t+C_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

若令 $t=0$。速度亦爲零。則

$$C_1=0.$$

又令 $t=0$, $\dfrac{ds}{dt}=0$, $s=0$。則

$$C_1=0,\ C_2=0.\ \text{而}$$

$$s=\frac{1}{2}at^2.$$

在地球上之落體。則 $a=g=9.81$。

〔例〕 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=x+\sin x$.

(解) $\dfrac{dy}{dx}=\int x\,dx-\int \sin x\,dx+C_1=\dfrac{1}{2}x^2-\cos x+C_1.$

$$y=\frac{1}{2}\int x^2dx-\int \cos x\,dx+C_1\int dx+C_2$$

$$=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2.$$

3 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\psi\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$。

令 $\dfrac{dy}{dx}=p$. 則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}.$$

$\therefore \qquad \dfrac{dp}{dx}=\psi(p)$.

$\therefore \qquad \dfrac{dp}{\psi(p)}=dx.$

$\therefore \qquad \displaystyle\int\frac{dp}{\psi(p)}=x+C_1 \text{..} (\alpha)$

由 (α) 解得之 p。令為

$$p=\chi(x, C_1) \text{..} (\alpha')$$

則 $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\chi(x, C_1).$

$$y=\int\chi(x, C_1)\,dx+C_2 \text{..................................} (\beta)$$

此卽原方程式之一般解也。

〔例〕 1. 曲度半徑如等於一定之 a。試求其平面曲線。

(解) $\qquad \dfrac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=a. \qquad$ (微分學第154頁)。

令 $\dfrac{dy}{dx}=p$. 則

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$\therefore \qquad \dfrac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{a}dx.$

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{x}{a}+C_1=\frac{x+aC_1}{a}=\frac{x+c_1}{a}.$$

從此 $\qquad p=\pm\dfrac{x+c_1}{\sqrt{(a+c_1+x)(a-c_1-x)}}.$

故 $\qquad y+c_2=\pm\displaystyle\int\frac{x+c_1}{\sqrt{(a+c_1+x)(a-c_1-x)}}dx$

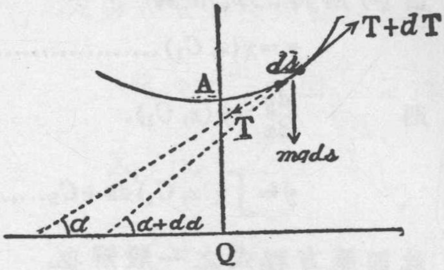
$$=\pm\sqrt{a^2-(x+c_1)^2}.$$

$$\therefore \qquad (y+c_2)^2=a^2-(x+c_1)^2.$$

$$\therefore \qquad (x+c_1)^2+(y+c_2)^2=a^2.$$

即圓的曲度一定之唯一種之平面曲線也。

〔例〕 2. 求垂絲線(微分學第191頁)之方程式。



(解) 令絲之張力爲 T。張力之方向與 x 軸所成之角爲 α。則

鉛直線之方向分力

$$(T+dT)\sin(\alpha+d\alpha)-T\sin\alpha=mg\,ds.$$

即 $$d(T\sin\alpha)=mg\,ds \quad\text{..........}\quad \text{(i)}$$

水平線之方向分力

$$(T+dT)\cos(\alpha+d\alpha)-T\cos\alpha=0.$$

即 $$d(T\cos\alpha)=0 \quad\text{..........}\quad \text{(ii)}$$

令 (i), (ii) 爲積分。則

$$\begin{cases} T\sin\alpha=mgs+C, \\ T\cos\alpha=C'. \end{cases} \quad\text{..........}\quad \text{(iii)}$$

令 $\alpha=0$, $s=0$。即自頂點 A 計算垂線之長。以 s 表之。則可令 $C=0$

$\alpha=0$。即於 A 之張力。以 mgc 表之。則可令 $C'=mgc$。即

$$\begin{cases} T\sin\alpha=mgs, \\ T\cos\alpha=mgc. \end{cases} \quad\text{..........}\quad \text{(iv)}$$

邊邊相割。而

$$\tan\alpha=\frac{s}{c}.$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\frac{s}{c}.$$

而求微分 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{c}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{v})$$

是爲垂絲線之微分方程式。

試解之。而令 $\frac{dy}{dx}=p$。則

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{c}\sqrt{1+p^2}.$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{c}dx.$$

$$log\,(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{1}{c}x+C_1.$$

然 $x=0$, $\frac{dy}{dx}=p=0$。則 $C_1=0$。

$$\therefore\qquad log\,(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{c}.$$

$$p+\sqrt{1+p^2}=e^{\frac{x}{c}}.$$

故又 $$\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}=e^{-\frac{x}{c}}.$$

即 $$-p+\sqrt{1+p^2}=e^{-\frac{x}{c}}.$$

$$\therefore\qquad 2p=e^{\frac{x}{c}}=e^{-\frac{x}{c}}.$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

$$\therefore\qquad y+C_2=\frac{1}{2}\int e^{\frac{x}{c}}dx-\frac{1}{2}\int e^{-\frac{x}{c}}dx=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

令頂點 A 之坐標爲 $0|c$。則 $C_2=0$。

由是求得垂絲線之方程式。爲

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)\text{..................................}(\text{vi})$$

(注意) 一般第 n 階徵分方程式 $f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0$。均得適用本節之解法以解之。

4. 徵分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}=\phi(y)$。

此方程式之兩邊以 $2dy$ 乘之。則

$$2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}dx=2\phi(y)\,dy.$$

$$\therefore\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2\int\phi(y)\,dy+C_1.$$

$$\therefore\qquad \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2\int\phi(y)\,dy+C_1}.$$

$$\therefore\qquad \pm\frac{dy}{\sqrt{2\int\phi(y)\,dy+C_1}}=dx.$$

$$\therefore\qquad \pm\int\frac{dy}{\sqrt{2\int\phi(y)\,dy+C_1}}=x+C_2.$$

〔例〕 1. 由單一弦運動 (*Simple harmonic motion*)

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2x.$$

試求其 x 爲 t 之函數。

(解) $$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}dt=-2k^2x\,dx.$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=k^2(x^2-C_1^2).$$

$$\therefore \qquad \frac{dx}{dt}=\pm k\sqrt{C_1{}^2-x^2}.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1{}^2-x^2}}=\pm kdt.$$

$$\therefore \qquad sin^{-1}\frac{x}{C_1}=\pm kt+C_2.$$

$$\frac{x}{C_1}=sin(\pm kt+C_2).$$

$$\therefore \qquad x=C_1\, sin(\pm kt+C_2).$$

或表之如次。

$$x=A\sin kt+B\cos kt.$$

〔例〕 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-n^2y=0.$

(答) $y=Ae^{nx}+Be^{-nx}.$

(注意) 第 n 階微分方程式 $f\left(\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},\ \dfrac{d^ny}{dx^n}\right)=0$。亦得與本節同樣解之。

5 微分方程式 $f\left(x, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}\right)=0$ 及 $g\left(y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}\right)=0$。

前之方程式。令 $\dfrac{dy}{dx}=p$。則

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)=0.$$

是爲第一階。得由前節之法解之

後之方程式。令

$$\frac{dy}{dx}=p.$$

則 $$dx=\frac{dy}{p}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

故變原方程式為

$$g\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

是亦為第一階之方程式。

〔例〕 1. $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$

(解) 命 $\frac{dy}{dx}=p$. 則

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx}+1+p^2=0.$$

$\therefore$ $$\frac{dp}{1+p^2}+\frac{dx}{1+x^2}=0.$$

$$tan^{-1}p+tan^{-1}x=C_1.$$

即 $$tan^{-1}\frac{p+x}{1-px}=C_1.$$

$$\frac{p+x}{1-px}=tan\,C_1=c_1.$$

$\therefore$ $$p=\frac{dy}{dx}=\frac{c_1-x}{1+c_1x}.$$

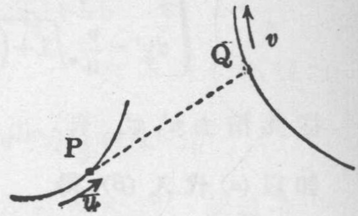
$\therefore$ $$y=\int\frac{c_1-x}{1+c_1x}dx+c_2=\left(1+\frac{1}{c_1}\right)log(1+c_1x)-\frac{1}{c_1}x+c_2.$$

即 $$y+\frac{1}{c_1}x-c_2=\left(1+\frac{1}{c_1}\right)log(1+c_1x).$$

即 $$c'_1y+x-c'=(1+c_1)log(1+c_1x).$$

〔例〕 2. 追跡曲線 (*Curve of Pursuit*) 即一點 $Q(x', y')$ 以等速度 v 走於一曲線 $f(x', y')=0$ 之上。有第二點 $P(x, y)$ 以等速度 u 常向 Q 點之方向追之。求第二點軌跡之方法如何。

又 $f(x', y')=0$ 爲直線。則此追跡曲線如何。



(解) 直線方向 PQ。常可爲所求曲線之切線。則

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又令兩曲線弧之微分爲 ds, ds'。則

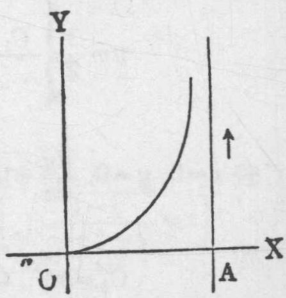
$$ds : ds' = u : v.$$

$$\therefore \quad v\sqrt{dx^2+dy^2}=u\sqrt{dx'^2+dy'^2}.$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{u}{v}\sqrt{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2} \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1), (2) 與 $f(x', y')=0$ 消去 x', y'。則可得追跡曲線之微分方程式如次。

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0.$$



次被追者(兔)。於 $x'=a$ 上。自 x 軸上之點 A。走 y 軸之正方向。追者(犬)。自原點 0 常向兔走。則 (2)

$$dx'=0.$$

故 $$\begin{cases} x'=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\alpha) \\ y'-y=\dfrac{dy}{dx}(x'-x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\beta) \\ dy'=\dfrac{v}{u}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\gamma) \end{cases}$$

從此消去 y', x'。

即以 (α) 代入 (β)。得

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(a-x).$$

以此求微分。則

$$dy'-\frac{dy}{dx}dx=\frac{d^2y}{dx^2}(a-x)\,dx-\frac{dy}{dx}dx.$$

從此與 (γ)。得

$$\frac{d^2y}{dx^2}(a-x)=\frac{v}{u}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\delta)$$

是為特別追跡曲線之微分方程式。

此依本節之方法以求積分。則

$v \neq a$

$$y=\frac{1}{2}\left\{\frac{C_1(a-x)^{1-\frac{v}{u}}}{\frac{v}{u}-1}+\frac{1}{C_1}\cdot\frac{(a-x)^{1+\frac{v}{u}}}{1+\frac{v}{u}}\right\}+C_2.$$

若 $x=0$, $y=0$, $\dfrac{dy}{dx}=0$. 從而

$$C_1=a^{\frac{v}{u}} \quad C_2=\frac{a\dfrac{v}{u}}{1-\dfrac{v^2}{u^2}}.$$

則可得追跡曲線之方程式爲

$$y=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^{\frac{v}{u}}(a-x)^{1-\frac{v}{u}}}{\frac{v}{u}-1}+\frac{a^{-\frac{v}{u}}(a-x)^{1+\frac{v}{u}}}{\frac{v}{u}+1}\right\}+\frac{a\frac{v}{u}}{1-\frac{v^2}{u^2}}.$$

又 $u=v$。則從 (δ)

$$y=\frac{1}{2}\left\{-C_1 \log(a-x)+\frac{1}{2C_1}(a-x)^2\right\}+C_2.$$

$$C_1=a,\quad C_2=\frac{a}{2}\left(\log a-\frac{1}{2}\right).$$

$$\therefore\qquad y=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2a}(a-x)^2-a\log(a-x)\right\}+\frac{a}{2}\left(\log a-\frac{1}{2}\right).$$

〔例〕 3. $2(1-y)\frac{d^2y}{dx^2}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$

(解) $\frac{dy}{dx}=p,\ \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}.$

$$2(1-y)p\frac{dp}{dy}=1+p^2.$$

$$\therefore\qquad \frac{2p\,dp}{1+p^2}=\frac{dy}{1-y}.$$

$$\log(1+p^2)=-\log(1-y)+C_1.$$

$$1+p^2=\frac{c_1}{1-y}.$$

$$p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{c_1-1+y}{1-y}}.$$

$$\therefore\qquad x=\int\sqrt{\frac{1-y}{c_1-1+y}}\,dy+c_2$$

$$=-2c_1\int\frac{z^2}{(1+z^2)^2}dz+c_2\qquad\left[\sqrt{\frac{1-y}{c_1-1+y}}=z\right]$$

$$=\sqrt{(1-y)(c_1-1+y)}-c_1\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-y}{c_1-1+y}}+c_2.$$

6. 一般第二階微分方程式之種種之例。

一般之第二階微分方程式有一般的解法。然遇特別形狀。得適用特別手段如次。

[I] $y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ 爲同次之例。

〔例〕 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=e^x\dfrac{dy}{dx}$.

(解) 是各項均爲一次。

試假定

$$y=e^{\int udx} \text{……………………………………………}(\mathrm{I})$$

則 $$\frac{dy}{dx}=u\cdot e^{\int udx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{du}{dx}\cdot e^{\int udx}+u^2\cdot e^{\int udx}$$

故原方程式爲

$$e^{\int udx}\left(u^2+\frac{du}{dx}\right)+u^2\cdot e^{\int udx}=e^x\cdot e^{\int udx}\cdot u.$$

$$\therefore\quad \frac{du}{dx}-e^x\cdot u+2u^2=0.$$

是爲白奴利之方程式(見第八章第4節例3)。依此解之。則

$$u=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-e^x}}{x+C_1}.$$

$$\therefore\quad y=e^{\frac{1}{2}\int\frac{e^{-e^x}}{x+C_1}dx+C_2}.$$

[II] x 爲一次, y 爲 n 次, $\dfrac{dy}{dx}$ 爲 $(n-1)$ 次, $\dfrac{d^2y}{d^2x}$ 爲 $(n-2)$ 次時同次方程式之例。

〔例〕 2. $x^4\dfrac{d^2y}{dx^2}=(x^3+2xy)\dfrac{dy}{dx}-4y^2.$

(解) y 爲二次，$\dfrac{dy}{dx}$ 爲一次，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 爲 0 次。則爲四次之同次方程式。

令 $x=e^{\theta},\quad y=e^{2\theta}\cdot z$ ……………………………………(II)

即
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{2e^{2\theta}\cdot z+e^{2\theta}\dfrac{dz}{d\theta}}{e^{\theta}}=e^{\theta}\left(2z+\frac{dz}{d\theta}\right).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left\{e^{\theta}\left(2z+\frac{dz}{d\theta}\right)\right\}\frac{d\theta}{dx}$$
$$=e^{\theta}\left(2z+3\frac{dz}{d\theta}+\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)\frac{1}{x}=2z+3\frac{dz}{d\theta}+\frac{d^2z}{d\theta^2}.$$

依前方程式如次。

$$e^{4\theta}\left(2z+3\frac{dz}{d\theta}+\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)=(e^{2\theta}+2e^{3\theta}z)\,e^{\theta}\left(2z+\frac{dz}{d\theta}\right)-4e^{4\theta}z^2.$$

$\therefore\quad 2z+3\dfrac{dz}{d\theta}+\dfrac{d^2z}{d\theta^2}=(1+2z)\left(2z+\dfrac{dz}{d\theta}\right)-4z^2.$

$\therefore\quad \dfrac{d^2z}{d\theta^2}+2(1-z)\dfrac{dz}{d\theta}=0.$

令 $\dfrac{dz}{d\theta}=p.$

則 $\dfrac{d^2z}{d\theta^2}=\dfrac{dp}{d\theta}=\dfrac{dp}{dz}\cdot\dfrac{dz}{d\theta}=p\dfrac{dp}{d\theta}.$

故 $p\dfrac{dp}{dz}+2(1-z)p=0.$

$\therefore\quad \dfrac{dp}{dz}+2(1-z)=0.$ 或 $p=0.$

解之。

$$C_1>0,\quad \text{則}\quad \theta=\frac{1}{\sqrt{C_1}}tan^{-1}\frac{z-1}{\sqrt{C_1}}+C_2.$$

$$C_1<0,\quad \text{則}\quad \theta=\frac{1}{1\sqrt{-C_1}}log\frac{z-1-\sqrt{-C_1}}{z-1+\sqrt{-C_1}}+C_2.$$

但 $\theta=log\, x,\ z=\frac{y}{x^2}.$

又從 $p=0$。得 $y=cx^2$。是爲前記一般解之特別解。而不爲奇異解。

〔例〕 3. $x^3\frac{d^2y}{dx^2}=\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2.$

(略解) x 爲一次, y 爲一次, $\frac{dy}{dx}$ 爲 0 次, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 爲 (-1) 次。可令 $=e^{\theta},\ y=e^{\theta}z.$ 而考之。

(答) $$y+C''x=x\,log\frac{x}{x+C_1}.$$

[III] 置換變數之特異之例。

〔例〕 4. $\frac{d^2y}{dx^2}=ax+by.$

(解) 令 $ax+by=z.$

則 $$a+b\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx},\quad b\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{dx^2}.$$

故原方程式爲

$$\frac{d^2z}{dx^2}=bt.$$

是第4節之例1及例2。而爲所求之積分。

〔例〕 5. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ay=0.$

(解) 令 $x=\sin t$. 則

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}. \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2x}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt}.$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}=\frac{1}{\cos^2 t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{dy}{dt}\right).$$

以此等式代入原方程式。是亦爲

$$\frac{d^2y}{dt^2}+ay=0.$$

[IV] 由微分而解之之例。

〔例〕 6. $xy\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-y^2-k^2)\dfrac{dy}{dx}-xy=0.$

(解) $$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-y^2-k^2)\frac{dy}{dx}-xy=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

令此爲微分。則

$$\left(2xy\frac{dy}{dx}+x^2-y^2-k^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+x\frac{dy}{dx}-y=0.$$

即 $$2xy\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2-y^2-k^2)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right\}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0 \ldots\ldots (\beta)$$

試以 $\dfrac{dy}{dx}$ 乘 (β)。以 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 乘 (α)。相減。則

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}+xy\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right\}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0.$$

去 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1$. 則

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\frac{dy}{dx}=0.$$

即 $$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0.$$

即 $$\frac{d}{dx}\left\{xy\frac{dy}{dx}\right\}-\frac{d}{dx}(y^2)=0.$$

∴ $$xy\frac{dy}{dx}-y^2=C\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma)$$

以 (γ) 之 $\frac{dy}{dx}$ 之值代入 (α)。得

$$\frac{(y^2+C)^2}{xy}+(x^2-y^2-k^2)\frac{y^2+C}{xy}-xy=0.$$

從此 $$Cx^2-(k^2-C)y^2=C(k^2-C).$$

∴ $$\frac{x^2}{k^2-C}-\frac{y^2}{C}=1.$$

[V] 變率視同函數而解之之例。

〔例〕 7. $\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$

(解) $$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

先解 $$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

則 $$\frac{dy}{dx}=Ce^{-\int f(x)dx}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

此 (3) 之值。雖不能適合於 (1)。然假定 C 爲 y 之某函數。則能爲(1) 之解。即

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{\frac{dC}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=Cf(x)\right\}e^{-\int f(x)dx}$$

$$=\left\{\frac{dC}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}-Cf(x)\right\}\frac{1}{C}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

以此代入(1)。得

$$\frac{1}{C}\cdot\frac{dC}{dy}+F(y)=0\text{..}(4)$$

$$\therefore\qquad C=C'e^{-\int F(y)dy}\text{..}(5)$$

由是從(3)得

$$\frac{dy}{dx}=C'e^{-\int F(y)dy}e^{-\int f(x)dx}$$

從此求得一般解。爲

$$\int e^{\int F(y)dy}dy=C'\int e^{-\int f(x)dx}dx+C''.$$

〔例〕 8. 解 $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=e^x$.

(略解) 解 $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0$. 則

$$y=C_1e^x+C_2x.$$

此處之 C_1, C_2 僅爲 x 之函數,考之則

$$\begin{cases} C_1=c_1-\dfrac{x}{1-x}-log\,|\,1-x\,|, \\ C_2=c_2+\dfrac{e^x}{1-x}+\displaystyle\int\frac{e^x}{1-x}dx. \end{cases}$$

$$\therefore\qquad y=c_1e^x+c_2x-e^x\,log\,|\,1-x\,|+x\int\frac{e^x}{1-x}dx.$$

7. 聯立第一階微分方程式。

聯立第一階微分方程式之中爲一次。或可分解爲一次之一組。爲

$$\left.\begin{aligned} Q(x, y, z)\frac{dy}{dx}+R(x, y, z)\frac{dz}{dx}+P(x, y, z)=0 \\ Q'(x, y, z)\frac{dy}{dx}+R'(x, y, z)\frac{dz}{dx}+P'(x, y, z)=0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(1)$$

又爲代數的解法。得

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx}=\phi(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx}=\psi(x, y, z) \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

解此 (2)。先以前者爲微分。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\delta\phi}{\delta x}+\frac{\delta\phi}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\delta\phi}{\delta z}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

此與後者換置。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\delta\phi}{\delta x}+\frac{\delta\phi}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}+\psi\frac{\delta\phi}{\delta z}.$$

由是

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx}=\phi \\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\delta\phi}{\delta x}+\frac{\delta\phi}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}+\psi\frac{\delta\phi}{\delta z} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

從此消去 z。則可得第二階微分方程式。

$$f_0\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

解之。得

$$F(x, y, C_1, C_2)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

表(5)為陽函數.

$$y=G(x, C_1, C_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

然後以此代入(2)之前者。

$$\frac{d}{dx}G(x, C_1, C_2)=G'(x, C_1, C_2)=\phi\{x, G(x, C_1, C_2), z\}.$$

從此可求得 z 如次。

$$z=H(x, C_1, C_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

〔例〕 1. $$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}-3x+y=0\\&\frac{dy}{dt}-x-y=0\end{aligned}\right\}.$$

(解) 前方程式求微分。

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=0.$$

由後方程式換置 $\frac{dy}{dt}$。

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+x+y=0.$$

由前方程式換置 y。

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+x+3x-\frac{dx}{dt}=0.$$

即 $$\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+4x=0.$$

由前節[I]之法考之

假定 $$x=e^{\int u dt}.$$

則 $$\frac{dx}{dt}=ue^{\int u dt},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{du}{dt}+u^2\right)e^{\int u dt}.$$

由原方程式。消去$e^{\int u dt}$。

$$\frac{du}{dt}+u^2-4u+4=0.$$

$$\frac{du}{(u-2)^2}+dt=0.$$

$$-\frac{1}{u-2}+t=C_1. \qquad \therefore \quad u=2+\frac{1}{t-C_1}.$$

$$\therefore \qquad x=e^{\int\left(2+\frac{1}{t-C_1}\right)dt+C_2}=e^{2t+\log(t-C_1)+C_2}$$

$$=C'e^{2t}\cdot(t-C_1). \qquad\qquad [e^{C_2}=C'].$$

或直令

$$x=e^{2t}(At+B).$$

以此代入原方程式之前者。

$$2e^{2t}(At+B)+Ae^{2t}-3e^{2t}(At+B)+y=0.$$

$$\therefore \qquad y=e^{2t}(At-A+B).$$

〔例〕 2. 解 $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{z}=\dfrac{dz}{y}$.

(解) 從 $\dfrac{dy}{z}=\dfrac{dz}{y}$ 得 $ydy=zdz$.

$$\therefore \qquad y^2-z^2=C_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

從此 $\quad y=\pm\sqrt{C_1+z^2}$.

$$\therefore \qquad \frac{dx}{x}=\pm\frac{dz}{\sqrt{C_1+z^2}}.$$

$$\therefore \qquad \log x=\pm\log(z+\sqrt{C_1+z^2})+C_2.$$

$$C'x=z+\sqrt{C_1+z^2}. \qquad\qquad [C'=-\log C_2].$$

又 $$C''x=\frac{1}{z+\sqrt{C_1+z^2}}=\sqrt{C_1+z^2}-z. \qquad [C''=-C_1\log C_2].$$

即 $$Cx=y\pm z \quad\text{...}(\beta)$$

以 (β) 約 (α)。則

$$\frac{C_1}{Cx}=y\mp z\text{..}(\gamma)$$

從 (β) 與 (γ)。得

$$y=\frac{C}{2}x+\frac{C_1}{2Cx},\quad z=\pm\left(\frac{C}{2}x-\frac{C_1}{2Cx}\right).$$

或更換置變率。

$$y=Ax+\frac{B}{x},\quad z=\pm\left(Ax-\frac{B}{x}\right).$$

8 聯立第二階微分方程式。

今避其一般。專就力學,星學應用之例。舉其二三。

〔例〕 1. $$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=ax+by\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=a'x+b'y\end{aligned}\right\}$$ 其解法如何。

(解) 以未定係數 λ 乘第二方程式兩邊。各與第一方程式相加。則

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{d^2y}{dt^2}=(a+\lambda a')x+(b+\lambda b')y.$$

即 $$\frac{d^2}{dt^2}(x+\lambda y)=(a+\lambda a')\left\{x+\frac{b+\lambda b'}{a+\lambda a'}y\right\}.$$

決定 λ 如次。

$$\frac{b+\lambda b'}{a+\lambda a'}=\lambda.$$

則 $$\frac{d^2}{dt^2}(x+\lambda y)=(a+\lambda a')(x+\lambda y).$$

$x+\lambda y=z$. 則

$$\frac{d^2z}{dt^2}=(a+\lambda a')z.$$

此積分已於第4節示明矣。

今由此得

$$z=F(t, C_1, C_2).$$

則 $\qquad x+\lambda y=F.$

$\therefore \qquad x=F-\lambda y.$

以此代入原方程式第一。

$$F''-\lambda\frac{d^2y}{dt^2}=aF+(b-a\lambda)y.$$

即 $\qquad \lambda\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a\lambda)y+aF-F''=0.$

由是可求得 y。從而求得 x。

〔例〕 2. $\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}-2r\frac{dy}{dt}+ax=0\\&\frac{d^2y}{dt^2}+2r\frac{dx}{dt}+ay=0\end{aligned}\right\}$ 試解之。

(解) 第一方程式求微分。

$$\frac{d^3x}{dt^3}-2r\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}=0.$$

以第二方程式 $\frac{d^2y}{dt^2}$ 之值代入之。

$$\frac{d^3x}{dt^3}+(4r^2+a)\frac{dx}{dt}+2ray=0.$$

再求微分。

$$\frac{d^4x}{dt^4}+(4r^2+a)\frac{d^2x}{dt^2}+2ra\frac{dy}{dt}=0.$$

以第一方程式 $\frac{dy}{dt}$ 之值代入之。

$$\frac{d^4x}{dt^4}+2(2r^2+a)\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=0.$$

解之。得次式。

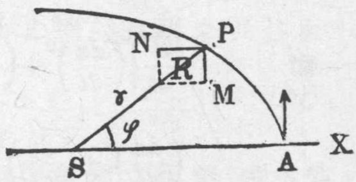
$$x=C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t+C_3\cos\beta t+C_4\sin\beta t.$$

但 $$\begin{cases}\alpha=\sqrt{2r^2+a+2r\sqrt{r^2+a^2}},\\ \beta=\sqrt{2r^2+a-2r\sqrt{r^2+a^2}}.\end{cases}$$

從而得 y 如次。

$$y=-\frac{1}{2ra}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{4r^2+a}{2ra}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

〔例〕 3. 質量 m 之點 P（惑星）。繞質量 M 之點 S（太陽）之周。依柰端引力之法則。運動一平面上。試以苛蒲里魯氏之法則證明之。



（解） 運動開始之點。在 x 軸之點 A。

則 $t=0,\quad SA=r_0,\quad \frac{dx}{dt}=0,\quad \frac{dy}{dt}=v_0.$

依柰端氏之法則。則於點 P, $SP=\sqrt{x^2+y^2}=r$。以 R 表其引力。則

$$R=k\frac{Mm}{r^2}.\qquad (k\text{ 爲常數})。$$

平行此引力兩軸之分力爲

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\overline{PM}=-R\cos\varphi=-k\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{x}{r}.$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-\overline{PN}=-R\sin\varphi=-k\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{y}{r}.$$

由是表點 P 之運動微分方程式如次。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}=-kM\frac{x}{r^3}\\&\frac{d^2y}{dt^2}=-kM\frac{y}{r^3}\\&x^2+y^2=r^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然此方程式(1)。各以 $2\frac{dx}{dt}, 2\frac{dy}{dt}$ 乘之。相加。則

$$2\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=-kM\frac{1}{r^3}\left(2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}\right)$$

卽 $$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=-kM\frac{1}{r^3}\,\frac{d}{dt}(x^2+y^2).$$

以 $$x^2+y^2=r^2.$$

而 $$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=-2kM\frac{1}{r^2}\,\frac{dv}{dt}.$$

∴ $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2k\frac{M}{r}+C\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然點 A 由前記之條件。

$$v_0{}^2=2k\frac{M}{r_0}+C.$$

由是於點 P 之速度以 v 表之。則

$$v^2-v_0{}^2=2k\frac{M}{r}-2k\frac{M}{r_0}\cdots\cdots\cdots\cdots(2')$$

卽 $$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2=k\frac{Mm}{r}-k\frac{Mm}{r_0}=Rr-R_0r_0.$$

卽示運動能力之變化。等於位置能力之變化。

次以 y, x 各乘 (1)。相減。則

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

$$\frac{d}{dt}\left\{x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right\}=0.$$

$$\therefore \qquad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C' \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

然由最初之條件。

$$r_0v_0=C'.$$

而令 $x=r\cos\phi, y=r\sin\phi$. 則

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r\cos\phi\left(\frac{dr}{dt}\sin\phi+r\cos\phi\frac{d\phi}{dt}\right)$$

$$-r\sin\phi\left(\frac{dr}{dt}\cos\phi-r\sin\phi\frac{d\phi}{dt}\right)$$

$$=r^2\frac{d\phi}{dt}.$$

故於點 P, dt 時間內 由動徑之回轉。而生扇形之面積（第五章第 2 節）爲 $dS=\frac{1}{2}r^2d\phi$。於點 A 爲 $S_0=\frac{1}{2}r_0v_0$。則

$$\frac{dS}{dt}=S_0 \quad \cdots\cdots\cdots(3')$$

$$\therefore \qquad S=S_0t+C''.$$

然 $\qquad t=0, \quad S=0.$

$$S=S_0t \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

此公式表苛蒲里魯之第二法則。「動徑夾同一面積於同一時間內」。

又 (1) 之雙方以 $2S_0=x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}$ 乘之。則

$$2S_0\frac{d^2x}{dt^2}=-kM\frac{x}{r^3}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=-kM\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right).$$

$$2S_0\frac{d^2y}{dt^2}=-kM\frac{y}{r^3}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=+kM\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right).$$

以此求積分。則

$$\left.\begin{aligned}2S_0\frac{dx}{dt}&=-kM\frac{y}{r}+A\\2S_0\frac{dy}{dt}&=+kM\frac{x}{r}+B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

然由最初之條件。

$$0=A,\quad 2S_0v_0=+kM+B.$$

$$\therefore\qquad A=0,\quad B=r_0v_0^2-kM.$$

由是 (5)。各以 y, x 乘之。相減。則

$$2S_0\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=kMr+(r_0v_0^2-kM)x.$$

從 (3)。

$$4S_0^2=kMr+(r_0v_0^2-kM)r\cos\phi.$$

$$\therefore\qquad r=\frac{4S_0^2}{kM+(r_0v_0^2-kM)\cos\phi}=\frac{\dfrac{4S_0^2}{kM}}{1-\left(1-\dfrac{r_0v_0^2}{kM}\right)\cos\phi}.$$

即

$$\left.\begin{aligned}r&=\frac{c}{1-e\cos\phi}\\e&=1-\frac{r_0v_0^2}{kM}\\c&=\frac{r_0^2v_0^2}{kM}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

此公式 (6) 之 e 爲 $0, 1, <1, >1$。從而點 P 之軌跡爲圓，拋物線，橢圓，雙曲線。

以惑星之式爲橢圓。而苛蒲里魯之第一法則。爲「惑星在太陽焦點之一之橢圓周上行動」。

最後由公式 (4) $S=S_0t$。今惑星一周之時間以 T 表之。則橢圓之面積爲 πab。而 $\pi ab=S_0T$。

$$\therefore \qquad T^2=\frac{\pi^2a^2b^2}{S_0{}^2}=\frac{4\pi^2a^2b^2}{4S_0{}^2}.$$

然

$$b^2=a^2(1-e^2)=a\left\{\frac{1}{2}(r_0+r\pi)\right\}(1-e^2)$$

$$=a\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{1-e}+\frac{c}{1+e}\right)\right\}(1-e^2)=ac$$

$$=a\frac{r_0{}^2v_0{}^2}{kM}=a\frac{4S_0{}^2}{kM}.$$

$$\therefore \qquad T^2=4\pi^2\frac{a^3}{kM}.$$

他惑星軌道之長軸爲 a_1。其一周所需要之時間爲 T_1。則

$$T_1{}^2=4\pi^2\frac{a_1{}^3}{kM}.$$

$$\therefore \qquad T_1{}^2 : T^2=a_1{}^3 : a^3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

即知苛蒲里魯之第三法則，爲「惑星一周時間之平方與其軌跡長軸之立方有比例」。

9. 級數積分法。

以前所述之特別形式及特別考法。不適合時。欲求其解。則由微分方程式。試展開爲級數。即可得其函數之近似値。

先就微分方程式爲

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\phi\left(x,\,y,\,\frac{dy}{dx},\,\frac{d^2y}{dx^2},\,\ldots,\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

試解之。假定爲戴勞級數。如

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{1!}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0+\ldots$$

$$+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0+\frac{(x-x_0)^n}{n!}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0+\ldots\quad\ldots(2)$$

或爲馬格老臨之級數。如

$$y=y_0+\frac{x}{1!}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0+\ldots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0+\frac{x^n}{n!}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0+\ldots\quad\cdots\cdots(2')$$

然 $x=x_0$ 或 $x=0$。對於任意常數。

$$y_0=C_1,\quad\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=C_2,\quad\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=C_3,\quad\ldots,\quad\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0=C_n.$$

從 (1)。

$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0=\phi(x_0,\,C_1,\,C_2,\,\ldots,\,C_n)=\phi^{(0)}.$$

$$\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0=\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x_0,\,C_1,\,C_2,\,\ldots,\,C_n,\,\phi^{(0)}}=\phi_1{}^{(0)}.$$

$$\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)_0=\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_{x_0,\,C_1,\,C_2,\,\ldots,\,C_n,\,\phi^{(0)},\,\phi_1{}^{(0)}}=\phi_2{}^{(0)}.$$

$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$

由是求得解答。爲

$$y=C_1+\frac{x-x_0}{1!}C_2+\frac{(x-x_0)^2}{2!}C_3+\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}C_n$$

$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}\phi^{(0)}+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\phi_1{}^{(0)}+\ldots\quad\cdots\cdots(3)$$

及 $$y=C_1+\frac{C_2}{1!}x+\frac{C_3}{2!}x^2+\ldots+\frac{C_n}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$+\frac{\phi^{(0)}}{n!}x^n+\frac{\phi_1{}^{(0)}}{(n+1)!}x^{n+1}+\ldots \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3')$$

第n階微分方程式。其一般解含n個任意常數。而此級數之收歛。卽所求之式。

〔例〕 1. $\frac{d^2y}{dx^2}+ax^ny=0.$ (n 爲正整數)。

(解) 假定所求之解爲

$$y=A_0x^m+A_1x^{m+p_1}+A_2x^{m+p_2}+\ldots.$$

則 $$\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)A_0x^{m-2}+(m+p_1)(m+p_1-1)A_1x^{m+p_1-2}+\ldots.$$

以 ax^n 乘其前式。與後式相加。則

$$0=m(m-1)A_0x^{m-2}+(m+p_1)(m+p_1-1)A_1x^{m+p_1-2}+\ldots$$
$$+aA_0x^{m+n}+aA_1x^{m+p_1-n}+\ldots.$$

其最低次之項僅爲 x^{m-2}。故

$$m(m-1)=0. \quad \therefore \quad m=0 \text{ 及 } m=1.$$

次 $$m+p_1-2=m+n, \qquad p_1=n+2.$$
$$m+p_2-2=m+p_1+n, \qquad p_2=p_1+n+2=2(n+2).$$
$$m+p_3-2=m+p_2+n, \qquad p_3=p_2+n+2=3(n+2).$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

而 $$(m+p_1)(m+p_1-1)A_1+aA_0=0.$$
$$(m+p_2)(m+p_2-1)A_2+aA_1=0.$$
$$(m+p_3)(m+p_3-1)A_3+aA_2=0.$$

由是 $m=0$. 則

$$A_1=-\frac{aA_0}{(p_1-1)p_1}=-\frac{aA_0}{(n+1)(n+2)}.$$

$$A_2=-\frac{aA_1}{(p_2-1)p_2}=-\frac{aA_1}{2(2n+3)(n+2)}$$

$$=\frac{a^2A_0}{2(n+2)^2(n+1)(2n+3)}.$$

$$A_3=-\frac{aA_2}{(p_3-1)p_3}=-\frac{aA_2}{3(n+2)(3n+5)}$$

$$=-\frac{a^3A_0}{2.3(n+2)^3(n+1)(2n+3)(3n+5)}.$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$m=1$. 則

$$A_1=-\frac{aA_0}{p_1(p_1+1)}=-\frac{aA_0}{(n+2)(n+3)}.$$

$$A_2=-\frac{aA_1}{p_2(p_2+1)}=-\frac{aA_1}{2(n+2)(2n+5)}$$

$$=\frac{a^2A_0}{2(n+2)^2(n+3)(2n+5)}.$$

$$A_3=-\frac{aA_2}{p_3(p_3+1)}=-\frac{aA_2}{3(n+2)(3n+7)}$$

$$=-\frac{a^3A_0}{2.3(n+2)^3(n+3)(2n+5)(3n+7)}.$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

故由 $m=0$ 與 $m=1$。得二種級數如次。

$$y_1=A_0'\left\{1-\frac{a}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}+\frac{a^2}{2!(n+2)^2(n+1)(2n+3)}x^{2(n+2)}\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{3!(n+2)^3(n+1)(2n+3)(3n+5)}x^{3(n+2)}+\dots\right\}.$$

$$y_2=A_0''\left\{x+\frac{a}{(n+1)(n+3)}x^{n+3}+\frac{a^2}{2!(n+2)^2(n+3)(2n+5)}x^{2n+5}\right.$$

$$\left.+\frac{a^3}{3!(n+2)^3(n+3)(2n+5)(3n+7)}x^{3n+7}+\dots\right\}.$$

此二種級數。任何其變率亦各只有一個。故不為一般解。然雙方適合原方程式。求其一般解之形如次。

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

$$=C_1\left\{1-\frac{a}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}+\ldots\right\}$$

$$+C_2x\left\{1-\frac{a}{(n+1)(n+3)}x^{n+2}+\ldots\right\}.$$

〔例〕 2. 祿軒得氏 (*Legendre*) 之方程式。

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n-1)y=0.$$

即 $$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\}+n(n+1)y=0.$$

(略解) 試展開 y 為 x 之降冪級數。如

$$y=A_0x^m+A_1x^{m-p_1}+A_2x^{m-p_2}+\ldots.$$

代入原方程式。則最高次項之係數。

$$m=n \quad 及 \quad m=-n-1.$$

又 $$p_1=2,\quad p_2=4,\quad p_3=6,\quad \ldots.$$

由是 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 二樣定之。則

$$y_1=x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots.$$

$$y_2=x^{-(n+1)}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-(n+3)}$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)}x^{-(n+5)}+\ldots.$$

由是所求一般解為

$$y=C_1y_1+C_2y_2.$$

(注意) $\dfrac{(2n)!}{2^n n!n!}y_1=P_n(x)$.

$$\frac{2^n n!n!}{(2n+1)!}y_2=Q_n(x).$$

各爲第一種,第二種祿軒得氏之函數(*Legendre's function of the first and second kind* 或 *Surface zonal harmonic of the first and second kind*)。

〔例〕 3. 勃司氏(*Bessel*)之方程式。

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0.$$

即 $$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+(x^2-n^2)y=0.$$

(略解) 試假定

$$y=A_0x^m+A_1x^{m+p_1}+A_2x^{m+p_2}+\dots.$$

則 $$m=n \quad 及 \quad m=-n.$$

$$p_1=2,\quad p_2=4,\quad p_3=6,\quad \dots.$$

由是

$$y_1=x^n\left\{1-\frac{x^2}{1!2^2(n+1)}+\frac{x^4}{2!2^4(n+1)(n+2)}-\frac{x^6}{3!2^6(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\right\}.$$

$$y_2=x^{-n}\left\{1+\frac{x^2}{1!2^2(n-1)}+\frac{x^4}{2!2^4(n-1)(n-2)}+\frac{x^6}{3!2^6(n-1)(n-2)(n-3)}+\dots\right\}.$$

$$y=C_1y_1+C_2y_2.$$

(注意) $\dfrac{1}{2^n\pi(n)}y_1=J_n(x)$. $\left(但\ \pi(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx\right)$.

爲勃司氏之函數(*Bessel's function* 或 *Cylindrical harmonic*)。

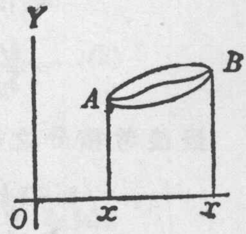
第十章 變分法

1. 變分法之問題。

定積分

$$v=\int_{x_2}^{x_1} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx.$$

y 爲 x 如何之函數。而研究 v 之極大或極小。是爲變分法 (*Calculus of Variation*) 之一問題也。



例如 二定點 A, B 之間之曲線。x 軸之周回轉一周。其所生回轉面之面積爲

$$S=\int_{x_0}^{x_1} 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

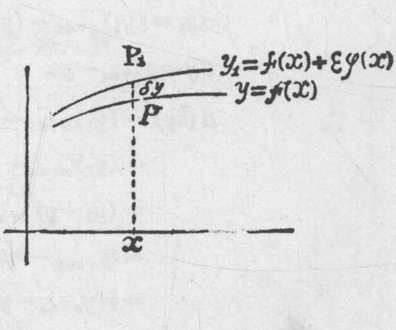
此 $y=f(x)$ 爲如何之曲線。而求其最小者

2. 變分。

設有一種曲線

$$y=f(x).$$

ϵ 表其無限小。而考第二曲線



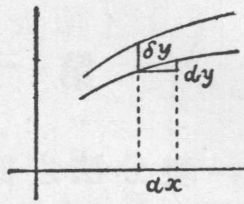
$$y_1=f(x)+\epsilon\phi(x).$$

則此兩曲線無限接近。而

$$y_1-y=\overline{P_1P}=\epsilon\phi(x).$$

亦爲無限小 此謂 y 之變分。以 δy 表之。

(注意) 變分 δy 與微分 dy 不可混同。微分 dy。乃曲線對於其 dx 之變化。而變分 δy。乃曲線移於他曲線在同一橫坐標之變化也。



次考 $f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right)$ 之變分。

$$\delta f = f\left(x, y+\delta y, \frac{dy}{dx}+\delta\frac{dy}{dx}\right) - f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

$$= f(x, y+\delta y, p+\delta p) - f(x, y, p) \qquad \left[p=\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= \frac{\delta f}{\delta y}\delta y + \frac{\delta f}{\delta p}\delta p.$$

最後考積分之變分。

$$\delta v = \delta\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, p)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta f\, dx.$$

定理 函數 y 之變分之微分。等於其微分之變化。

(證明) 如前圖 $\delta y = y_1 - y$.

$$\therefore \quad d(\delta y) = d(y_1 - y) = dy_1 - dy.$$

今於 x 之 y, y_1 各以 y_x, $(y_1)_x$ 表之。

$x+dx$ 之 y, y_1 各以 y_{x+dx}, $(y_1)_{x+dx}$ 表之。則

$$dy_1 = (y_1)_{x+dx} - (y_1)_x.$$

$$dy = y_{x+dx} - y_x.$$

$$\therefore \quad d(\delta y) = (y_1)_{x+dx} - (y_1)_x - \{y_{x+dx} - y_x\}$$

$$= (y_1)_{x+dx} - y_{x+dx} - \{(y_1)_x - y_x\}$$

$$= (y_1 - y)_{x+dx} - (y_1 - y)_x$$

$$= \delta y_{x+dx} - \delta y_x.$$

$$= \delta(y_{x+dx} - y_x).$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{d(\delta y) = \delta(dy)}.$$

3. 積分之極大極小。

定積分

$$v=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, p)\,dx. \quad \left(p=\frac{dy}{dx}\right)\text{..................}(1)$$

於 $y=\phi(x)$ 爲極大或極小。則 y 從 p 之小變化。可變至自增大而減小。或自減小而增大。

即 $\qquad v_{y+\delta y}-v_y<0, \quad v_{y-\delta y}-v_y>0.$

又 $\qquad v_{y+\delta y}-v>0, \quad v_{y-\delta y}-v<0.$

即 $\qquad \delta v=0\text{..}(2)$

是 v 極大或極小所必要之條件也。

即由前節

$$\delta v=\delta\int_{x_0}^{x_1} f\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\delta f\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\delta y+\frac{\delta f}{\delta p}\delta p\right)dx.$$

而 $\qquad \delta p=\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\delta y).$

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\delta f}{\delta p}\delta p\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\delta f}{\delta p}d(\delta y)$$

$$=\left|\frac{\delta f}{\delta p}\delta y\right|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta p}\right)\delta y\,dx.$$

然點 x_0 及 x_1。則 $\delta y=0$ (參照第一節之圖)。故

$$\left|\frac{\delta f}{\delta p}\delta y\right|_{x_0}^{x_1}=0.$$

由是 $\qquad \delta v=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\delta f}{\delta y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta p}\right)\right\}\delta y\,dx.$

由是極大極小之必要條件如次。

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\delta f}{\delta y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta p}\right)\right\}\delta y\,dx=0.$$

然以任意變分 δy。而此積分亦必爲零。則必需

$$\frac{\delta f}{\delta y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta p}\right)=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

此方程式。一般含 $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$。故爲第二階微分方程式。解之即可求得極大,極小之函數 y。

4. 極小回轉面 (*Minimum Surface of Revolution*)。

引用第1節之例。其回轉面

$$S=2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+p^2}\,dx.$$

求其極小函數 y。

從前節(3)。其必要之條件爲

$$\frac{\delta}{\delta y}\left\{y\sqrt{1+p^2}\right\}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\delta}{\delta p}\left\{y\sqrt{1+p^2}\right\}\right]=0.$$

即 $$\sqrt{1+p^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0.$$

即 $$\sqrt{1+p^2}-\frac{y\frac{dp}{dx}+(1+p^2)p^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

即 $$(1+p^2)^2-(1+p^2)p^2-y\frac{dp}{dx}=0.$$

即 $$1+p^2-y\frac{dp}{dx}=0.$$

從此 $dx=\frac{dp}{p}$. 故

$$1+p^2-yp\frac{dp}{dy}=0.$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{p\,dp}{1+p^2}.$$

$$\log y=\frac{1}{2}\log(1+p^2)+C_1.$$

$$y=c_1\sqrt{1+p^2}.\qquad [c_1=e^{C_1}].$$

$$y^2=c_1^2(1+p^2).$$

$\therefore$ $$p=\pm\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}.$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}.$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}}=dx.$$

$\therefore$ $$c_1\log\left(\frac{y}{c_1}+\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}\right)=\pm(x+c_2).$$

$\therefore$ $$\frac{y}{c_1}+\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}=e^{\frac{\pm(x+c_2)}{c_1}}$$

從而 $$\frac{y}{c_1}-\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}=e^{\frac{\mp(x+c_2)}{c_1}}$$

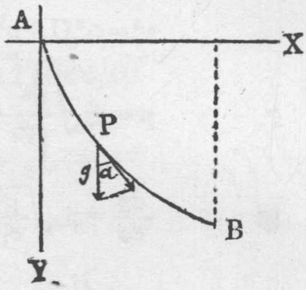
$\therefore$ $$2\frac{y}{c_1}=e^{\frac{\pm(x+c_2)}{c_1}}+e^{\frac{\mp(x+c_2)}{c_1}}$$

$\therefore$ $$y=\frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x}{c_1}}+e^{-\frac{x}{c_1}}\right)e^{\pm\frac{c_1}{c_2}}.$$

即垂綫線回轉面之最小面積。

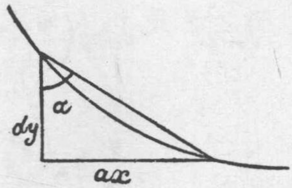
5. 最速落着線 (*Curve of Quickest Descent*)。

有一質點的重力。從高處一點A。落行至低處一點B。其間所需要最小時間之曲線路。謂之最速落着線。(又名 *Brachystochrone*)。



西曆1696年。約尼白奴尼 (*John Bernoulli*) 發明此問題。而來本之奈端等。卽時解之。實可謂變分法之起源。此乃此問題之重要歷史也。

然以自高處之點。其引力之方向爲y軸。含此軸與B之平面上。通過A而垂於y軸之直線。爲x軸。假定最速落着線爲此平面上之曲線。



令曲線上P點之加速度爲$\frac{d^2s}{dt^2}$。是爲重力g的切線之方向之分力，而

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g\cos\alpha=g\frac{dy}{ds}.$$

以$2ds$乘之。則

$$2\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}dt=2g\,dy.$$

卽 $$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2g\,dy.$$

$\therefore$ $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2g\,y+C.$$

今令A點之速度爲0。則$y=0$。從此$\frac{ds}{dt}=0$。故$C=0$。故

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2g\,y.$$

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2g\,y}.$$

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2g\,y}}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{2g\,y}}$$

$$\therefore \qquad t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\,dx. \qquad \left(p=\frac{dy}{dx}\right).$$

此卽所求t之極小者也。

然由第3節之公式(3)。

$$\frac{\delta}{\delta y}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\frac{d}{dx}\left\{\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\right\}=0 \text{ ....} (a)$$

解之之先。作式如次。

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}=\frac{\delta}{\delta y}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

依而 $$\frac{\delta}{\delta y}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}=\frac{1}{p}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\frac{1}{p}\cdot\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

代入(a)。

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\left[\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{d}{dx}\left\{\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\right\}p\right]=0.$$

卽 $$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\frac{d}{dx}\left\{\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\cdot p\right\}=0.$$

$$\therefore \qquad \sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\;p=c.$$

卽 $$\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\frac{p^2}{\sqrt{y(1+p^2)}}=c.$$

去分母。則

$$1=c\sqrt{y(1+p^2)}.$$

$$\therefore \qquad p=\sqrt{\frac{1}{c^2y}-1}.$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1-c^2y}{y}}.$$

$$dx=c\sqrt{\frac{y}{1-c^2y}}dy.$$

$$\therefore \qquad x+c'=c\int\sqrt{\frac{y}{1-c^2y}}dy.$$

求此右邊之積分。

令 $$y=\frac{1}{c^2}sin^2\frac{\theta}{2}.$$

則 $$x+c'=\frac{1}{c^2}\int sin^2\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{1}{c^2}\int\frac{1-cos\,\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2c^2}(\theta-sin\,\theta)$$

然 $y=0$, $x=0$, $c'=0$。故

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2c^2}(1-cos\,\theta), \\ x=\dfrac{1}{2c^2}(\theta-sin\,\theta). \end{cases}$$

故所求最速落着線爲擺線。

(終)