初中新代数

下

修正課程標準適用

初中新代數

下冊

編著者 蔡研深

世界書局印行

中華民國二十六年六月印刷
中華民國三十五年七月新八版

初中新代數（全二冊）

下冊實價國幣
（外埠酌加運費匯費）

編著者　蔡研深

發行者　世界書局有限公司代表人　李煜瀛

出版印刷者　上海大連灣路　世界書局

發行所　上海及各省　世界書局

本書負責校對者王樹培

初中新代數

下册目錄

第八編　乘方及開方根數與虛數

第九編　指數對數及對數表檢法

第十編

一元二次方程解法及應用問題

第十一編
可化爲二次方程的簡易高次方程

第十二編 函數變數法

第十三編 比例

第十四編 級數

附錄

第八編　乘方及開方,根數與虛數

第一節　代數式的乘方

90. **設題172**　求$3xy^2z^3$的平方(卽二次方).

【解】　$(3xy^2z^3)^2=9x^2y^4z^6$.

設題173　求$-7ab^2c$的平方.

【解】　$(-7ab^2c)^2=49a^2b^4c^2$.

由設題172和173的解法,可得求單項式平方的通則如下:

(1)不論原式爲正爲負,其平方的符號都是正.

(2)原式中數字係數的平方數,就是平方中的數字係數.

(3)將原式中各文字的指數,用2乘之,卽得平方中各該文字的指數.

91. **設題174**　求$5x+4y$的平方.

【解】　$(5x+4y)^2=(5x)^2+2(5x)(4y)+(4y)^2$

$=25x^2+40xy+16y^2$.

設題175 求$3x-2y+z$的平方.

【解】 $(3x-2y+z)^2=\{3x-(2y-z)\}^2$

$=(3x)^2-2(3x)(2y-z)+(2y-z)^2$

$=9x^2-6(2y-z)x+(2y-z)^2.$

由設題174和175的解法,可得求多項式平方的通則如下:

(1)多項式的平方,可應用特殊積公式一和公式二求得.

(2)二項式的平方,必是三項式.其三項排列的標準,必與原式排列的標準相同(設題174中,原式依x的降冪排列,其平方亦依x的降冪排列).

(3)三項以上的多項式,如用括號分成二項,然後平方時,則其平方亦是一三項式.其三項排列的標準,亦與原式排列的標準相同(細看設題175).

問答題26

(1) 不論正項,負項,其平方常爲正,是何緣故?

(2) 說明一式平方的指數,是原指數2倍之理.

(3) 設題175如改爲$z-2y+3x$,依z的降冪排列,問其平方式若何?

演算題54

(1)　求$5abc^2$的平方.　(2)　求$-5x^3y$的平方.

(3)　求$4a-5b$的平方.　(4)　求$x+y-3z$的平方.

(5)　求$7x^2-8y^2+4$的平方.

(6)　求$3x-5y^2+6$的平方.

92.　設題176　求$\frac{5x^2y}{7}$的平方.

【解】　$\left(\frac{5x^2y}{7}\right)^2=\frac{(5x^2y)^2}{7^2}=\frac{25x^4y^2}{49}$.

設題177　求$-\frac{7xy^2}{3}$的平方.

【解】　$\left(-\frac{7xy^2}{3}\right)^2=\frac{(-7xy^2)^2}{3^2}=\frac{49x^2y^4}{9}$.

設題178　求$\frac{x^2-xy}{x+y}$的平方.

【解】　$\left(\frac{x^2-xy}{x+y}\right)^2=\frac{(x^2-xy)^2}{(x+y)^2}=\frac{x^4-2x^3y+x^2y^2}{x^2+2xy+y^2}$

由設題176——178的解法,可得求含有分母的代數式或分式平方的通則如下:

分別求分子分母的平方;即以分母的平方爲平方的分母,分子的平方爲平方的分子.

演算題 55

求下列各式的平方:

(1) $\dfrac{5x+3y}{8}$. (2) $\dfrac{x+y-z}{7}$.

(3) $\dfrac{a+2b-3c}{12}$. (4) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x-y}$.

(5) $\dfrac{3a-4b+c}{a+b-c}$. (6) $\dfrac{7x+6y}{3x-4y}$.

(7) $\dfrac{(x+y)-(a-b)}{(a+b)-(x-y)}$. (8) $\dfrac{x+y-a+b}{a+b-x+y}$.

(9) $1+\dfrac{x^2-xy+y^2}{3xy}$.

93. **設題 179** 求 $5x^3yz^2$ 的立方(即三次方).

【解】 $(5x^3yz^2)^3=(5)^3(x^3)^3(y)^3(z^2)^3=125x^9y^3z^6$.

設題 180 求 $-3xy^2z^3$ 的立方.

【解】 $(-3xy^2z^3)=(-3)^3(x)^3(y^2)^3(z^3)^3$

$$=-27x^3y^6z^9.$$

由設題 179 和 180 的解法,可得求單項式立方的通則如下:

(1) 原式爲正,則其立方亦爲正;原式爲負,則其立方亦爲負.就是立方的正負,和原式相同.

(2)原式數字係數立方的絕對值,就是立方中數字係數的絕對值.

(3)原式中各文字指數的3倍,就是立方中各該文字的指數.

94.　設題181　求$5a-b$的立方.

【解】$$(5a-b)^3=(5a)^3-3(5a)^2(b)+3(5a)(b)^2-(b)^3$$
$$=125a^3-75a^2b+15ab^2-b^3.$$

設題182　求$3x-4y+5z$的立方.

【解】$$(3x-4y+5z)^3=\{(3x-4y)+5z\}^3$$
$$=(3x-4y)^3+3(3x-4y)^2(5z)+3(3x-4y)\times(5z)^2+(5z)^3$$
$$=(3x)^3-3(3x)^2(4y)+3(3x)(4y)^2-(4y)^3+15z(9x^2-24xy+16y^2)+75z^2(3x-4y)+125z^3$$
$$=27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3+135x^2z-360xyz+240y^2z+225xz^2-300yz^2+125z^3.$$

由設題181和182的解法,可得求多項式立方的通則如下:

(1)多項式的立方,可應用特殊積公式八及公式九求之.

(2)求得立方中各項排列的標準,必和原式排列的標準相同(設題181中,依 a 的降冪排列.設題182中,依 z 的昇冪排列).

問答題27

(1) 一式立方的正負,為什麼和原式的正負相同?

(2) 設題182若改做依 x 的降冪排列,應怎樣用小括號分項.

(3) 設題181若依 b 做標準,是什麼排列?

演算題56

求下列各式的立方:

(1) $7a^2b^3c^4$.　　(2) $-5x^3yz^2$.

(3) $3x+5y$.　　(4) $a+b-c$.

(5) $x-2y-3z$.　　(6) $7x^2-y^3$.

(7) $6x^2-xy+y$.　　(8) $5a^2-10b+15c$.

(9) $a+b-c-d$.

95. 設題183 求 $\dfrac{3x+y}{8}$ 的立方.

【解】 $$\left(\frac{3x+y}{8}\right)^3=\frac{(3x+y)^3}{8^3}$$

$$=\frac{27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3}{512}.$$

設題184 求$\dfrac{5x+6y}{3x-y}$的立方.

【解】 $$\left(\frac{5x+6y}{3x-y}\right)^3=\frac{(5x+6y)^3}{(3x-y)^3}$$

$$=\frac{125x^3+450x^2y+540xy^2+216y^3}{27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3}.$$

由設題183和184的解法,可得求含有分母的代數式或分式立方的通則如下:

分子,分母分別求立方;卽以分子的立方做立方的分子,分母的立方做立方的分母.

演算題57

求下列各式的立方:

(1) $\frac{2}{3}x^2yz.$ (2) $\frac{6}{5}xy^2z^3.$

(3) $\frac{7}{12}x^3yz^2.$ (4) $\dfrac{x-y}{x+y}.$

(5) $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}.$ (6) $\dfrac{4(x^2+1)}{3(x+2y)}.$

(7) $-\dfrac{1}{7xy^2}.$ (8) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}.$

(9) $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}.$

第二節 代數式的開方

96. **設題185** 求$9x^2y^4z^6$的平方根(即二次方根).

【解】 開方是乘方的逆運算.開平方是求平方的逆運算.表示開平方常用$\sqrt{\ }$符號,叫做平方根號,簡稱根號.故本題的算式如下:

$$\sqrt{9x^2y^4z^6}=\pm 3xy^2z^3.$$

設題186 求$49a^2b^4c^2$的平方根.

【解】 $\sqrt{49a^2b^4c^2}=\pm 7ab^2c.$

試將設題185的算式,和設題172的算式相比較;將設題186的算式,和設題173的算式相比較.則知設題185算式中根號內之式,與設題172算式中等號右邊之式相同;設題185等號右邊之式,比設題172括號內之式多一(−)號;設題186算式中根號內之式,與設題173等號右邊之式相同;設題186等號右邊之式,比設題173括號內之式多一(+)號.因由求

單項式平方通則第(1)條,知$(3xy^2z^3)^2$等於$9x^2y^4z^6$;而$(-3xy^2z^3)^2$亦等於$9x^2y^4z^6$.故設題185中之$9x^2y^4z^6$或從$3xy^2z^3$平方而來,或從$-3xy^2z^3$平方而來,實難斷定.因而不得不並用正負兩個符號.由是可得單項式開平方的通則如下:

(1)一式的平方根前,必須並附正負兩個符號;正號在上,負號在下,照士寫法.

(2)平方根的數字係數,是原式數字係數的平方根.

(3)平方根中各文字的指數,是原式中各該文字指數的$\frac{1}{2}$.

問答題28

口述下列各式的平方根:

(1) $4x^2y^4$.　(2) $64x^4y^2z^6$.　(3) $49a^8b^6c^4$.

(4) $144x^2y^{10}z^{12}$.　(5) $121x^6y^6z^4$.　(6) $16a^8x^2y^6$.

(7) $25x^2y^2z^8$.　(8) $36x^4y^{16}z^8$.　(9) $81x^2y^2z^{10}$.

97. 設題187　求$25x^2+40xy+16y^2$的平方根.

【解】 將設題174的算式,從右邊寫到左邊,則得

$$25x^2+40xy+16y^2=(5x)^2+2(5x)(4y)+(4y)^2$$
$$=(5x+4y)^2.$$

$$\therefore \quad \sqrt{25x^2+40xy+16y^2}=\pm(5x+4y).$$

設題188 求 $9x^2-6(2y-z)x+(2y-z)^2$ 的平方根.

【解】 將設題175的算式,從右邊寫到左邊,則得

$$9x^2-6(2y-z)x+(2y-z)^2$$
$$=(3x)^2-2(3x)(2y-z)+2y-z)^2$$
$$=\{3x-(2y-z)\}^2$$
$$=(3x-2y+z)^2.$$

$$\therefore \quad \sqrt{9x^2-6(2y-z)x+(2y-z)^2}=\pm(3x-2).$$

從設題187和188的解法,可知一代數式若依某文字的降羃(或昇羃)排列好後,其平方根的第一項,就是原式中第一項的平方根.例如設題187中所得平方根的第一項$5x$,是原式中第一項$25x^2$的平

方根;設題 188 中所得平方根的第一項 $3x$, 是原式中第一項 $9x^2$ 的平方根.平方根的第二項,是用平方根第一項的 2 倍除原式中第二項所得之商.例如設題 187 中平方根的第二項 $4y=\dfrac{40xy}{2(5x)}$; 設題 188 中平方根的第二項 $2y-z=\dfrac{6(2y-z)x}{2(3x)}$.

設題 189　求 $24xy+16x^2+9y^2$ 的平方根.

【解】 (1) 先將原式依 x 的降冪排列,得

$$16x^2+24xy+9y^2.$$

(2) $\sqrt{16x^2}=4x$…………根的第一項.

(3) $\dfrac{24xy}{2\times 4x}=3y$…………根的第二項.

(4) $\sqrt{16x^2+24xy+9y^2}=\pm(4a+3y)$.

一般布算方式如下:

$$\begin{array}{l|l}
 & \quad 4x+3y \cdots\cdots\text{根} \\
\cline{2-2}
 & 16x^2+24xy+9y^2 \cdots \text{排列好後的原式.} \\
(4x)^2=16x^2 & \\
\quad - & \\
\hline
2\times 4x=8x & 24xy+9y^2 \cdots\cdots \text{第一餘式.} \\
+\qquad\quad 3y & \underline{24xy+9y^2} \cdots\cdots 3y(8x+3y). \\
\hline
8x+3y & \qquad 0
\end{array}$$

設題190　求 $9x^2-6xy+12xz+y^2-4yz+4z^2$的平方根.

【解】 本題已依 x 的降冪排列,故不必再行整理.其算式如下:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x-y+2z\cdots\cdots\text{平方根} \\
\hline
 & 9x^2-6xy+12xz+y^2-4yz+4z^2 \\
(3x)^2=9x^2 & \\
- & \\
\hline
2\times3x=6x & -6xy+12xz+y^2-4yz+4z^2\cdots\cdots\text{第一餘式} \\
+\quad -y & -6xy\qquad\quad +y^2\cdots\cdots\cdots\cdots -y(6x-y) \\
\hline
6x-y & \qquad 12xz\qquad -4yz+4z^2\cdots\cdots\text{第二餘式} \\
2(3x-y)=6x-2y & \qquad 12xz\qquad -4yz+4z^2\cdots\cdots 2z(6x-2y+2z) \\
+\quad 2z & \\
\hline
6x-2y+2z & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$\therefore\ \sqrt{9x^2-6xy+12xz+y^2-4yz+4z^2}$$

$$=\pm(3x-y+2z).$$

由設題187——190的解法,可得求多項式平方根的通則如下:

(1)整理原式,使依一文字的降冪或昇冪排列.

(2)求出第一項的平方根,卽得所求平方根的第一項.

(3)從原式中減去求得根的第一項的平方,得第一餘式.

(4)用根的第一項的2倍,除第一餘式的第一項,得根的第二項.

(5)從第一餘式,減去根的第二項乘第一項的2倍與第二項的和所得的積,得第二餘式.

(6)用已得兩項根的2倍,除第二餘式,得根的第三項.

(7)從第二餘式,減去根的第三項乘根的一二兩項和的2倍與根的第三項的和所得之積,得第三餘式.

(8)依此進行,至開盡爲止.(如開不盡的,可開到相當的項爲止.)

演算題58

求下列各式的平方根:

(1) $25x^2-30xy+9y^2$.　　(2) $4x^4-12x^2y^2+9y^2$.

(3) $x^8-6x^4y^4+9y^8$.　　(4) $4x^{10}-12x^5y^3+9y^6$.

(5) $\frac{x^6}{4}-\frac{x^3y^3}{3}+\frac{y^6}{9}$.

(6) $25x^4y^2-40a^2b^3x^2y+16a^4b^6$.

(7) $\frac{x^4}{a^2}+8x^2y^3+16a^2y^6$.

(8) $\frac{9b^2x^4}{a^2}-24x^2y^2+\frac{16a^2y^4}{b^2}$.

(9) $x^2+4y^2+9z^2+12xy+6zx+4xy.$

(10) $4x^2+y^2+9z^2+6xz-12xz-4xy.$

(11) $4x^4+y^4+z^4-2y^2z^2-4z^2x^2+4x^2y^2.$

(12) $25x^4+9y^4+4z^4-12y^2z^2+20z^2x^2-30x^2y^2.$

98. 設題 191 求 $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{144}$ 的平方根.

【解】 $$\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{144}}=\frac{\sqrt{x^2-2xy+y^2}}{\sqrt{144}}$$

$$=\pm\frac{x-y}{12}.$$

設題 192 求 $\dfrac{4x^2+12x+9}{x^2-2x+1}$ 的平方根.

【解】 $$\sqrt{\frac{4x^2+12x+9}{x^2-2x+1}}=\frac{\sqrt{4x^2+12x+9}}{\sqrt{x^2-2x+1}}$$

$$=\pm\frac{2x+3}{x-1}.$$

由設題 191, 192 的解法,可得求含分母的代數式或分式的平方根的通則如下:

(1)把原式中的分子分母開平方.

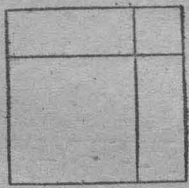
(2)由分子開得的方根,就是所求方根的分子;由分母開得的方根,就是所求方根的分母.

(3)開得分子分母後,於分數之前,加上正負兩符號.

問答題 29

(1) 求根的第二項時,必須用已得第一項的2倍做試除式,是什麼緣故?

(2) 試用下圖,說明上題之理.



(3) $\frac{a^2}{b^2}$開方時應得$\frac{\pm a}{\pm b}$,試把$\frac{\pm a}{\pm b}$和$\pm\frac{a}{b}$比較,說明$\pm\frac{a}{b}$可包括$\frac{\pm a}{\pm b}$之理.

演算題 59

求下列各式的平方很:

(1) $\frac{x^2+4x+4}{576}$.　　(2) $\frac{144x^2-72xy+9y^2}{1221}$.

(3) $\frac{a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca}{7-2k^2+k^4}$.

(4) $\frac{a^2-10ab+25b^2}{x^2+4-4x}$.

(5) $\frac{9x^2-36xy+36y^2}{81x^2+36xy+4y^2}$.

99. 設題 193　求 $125x^9y^3z^6$ 的立方根.

［解］立方根的符號是 $\sqrt[3]{\ }$,左角上的 3 字叫做根指數,用來表示開方的次數的.照理平方根應作 $\sqrt[2]{\ }$,不過開方至少開二次方,故這根指數 2 可以省去不用.

本題就是設題 179 中所得的結果,故本題的結果,可由設題 179 解法中逆推得之.

$$\sqrt[3]{125x^9y^3z^6}=5x^3yz^2.$$

設題 194　求 $-27x^3y^6z^9$ 的立方根.

［解］$\sqrt[3]{-27x^3y^6z^9}=-3xy^2z^3.$

由設題 193 和 194 的解法,可得單項式開立方的通則如下:

(1)原式為正,則立方根亦為正;原式為負,則立方根亦為負.就是立方根的正負,和原式相同.

(2)原式數字係數絕對值的立方根,就是立方根中數字係數的絕對值.

(3)原式各文字的指數,用 3 除之,所得的商,就是立方根中各該文字的指數.

問答題 30

(1) 爲什麼立方根的正負,和原式相同?

(2) 爲什麼立方根中各文字的指數,是原式中各該文字指數的 $\frac{1}{3}$?

100. 設題195 求 $125a^3-75a^2b+15ab^2-b^3$ 的立方根.

【解】 由設題 181 解法中的逆運算,可得本題的結果如下:

$$\sqrt[3]{125a^3-75a^2b+15ab^2-b^3}$$
$$=\sqrt[3]{(5a)^3-3(5a)^2(b)+3(5a)(b)^2-(b)^3}$$
$$=5a-b.$$

設題196 求 $27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3+135x^2z-360xyz+240y^2z+225xz^2-300yz^2+125z^3$ 的立方根.

【解】 由設題 182 解法的逆運算,可得本題的結果如下:

$$\sqrt[3]{27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3+135x^2z-360xyz+240y^2z+225xz^2-300yz^2+125z^3}$$
$$=\sqrt[3]{(3x)^3-3(3x)^2(4y)+3(3x)(4y)^2-(4y)^3+15z(9x^2-24xy+16y^2)+75z^2(3x-4y)+125z^3}$$
$$=\sqrt[3]{(3x-4y)^3+3(3x-4y)^2(5z)+3(3x-4y)(5z)^2+(5z)^3}=\sqrt[3]{\{(3x-4y)+5z\}^3}=3x-4y+5z.$$

由設題195和196的解法,可知一代數式若依某文字的降冪(或昇冪)排列

好後,其立方根的第一項,就是原式中第一項的立方根.例如設題 195, 原式是依 a 的降冪排列的,其第一項為 $125a^3$,其立方根的第一項 $5a$,就是 $125a^3$ 的立方根;設題 196 是依 z 的昇冪排列的,原式中第一項是 $(3x-4y)^3$,立方根的第一項 $(3x-4y)$ 就是 $(3x-4y)^3$ 的立方根.

立方根的第二項,是用已得立方根的第一項平方的 3 倍,除原式中第二項所得的商;例如設題 195 中立方根的第二項 $-b=\dfrac{-75a^2b}{3(5a)^2}$, 設題 196 中立方根的第二項 $5z=\dfrac{3(3x-4y)^2(5z)}{3(3x-4y)^2}$.

其一般布算的方式如下:

設題 195 的布算方式:

$$
\begin{array}{l|l|l}
\text{根的第一項}\cdots\cdots 5a\ -b & & \\
 & 125a^3-75a^2b+15ab^2-b^3 & \cdots\cdots\text{已依 } a \text{ 降冪排列的原式.} \\
(5a)^3= & & \\
- & 125a^3 & \\
\hline
3(5a)^2=75a^2 & -75a^2b+15ab^2-b^3 & \cdots\cdots\text{第一餘式} \\
3(5a)(-b)=-15ab & & \\
+\quad (-b)^2=b^2 & -75a^2b+15ab^2-b^3 & \cdots\cdots(-b)\times \\
\hline
75a^2-15ab+b^2 & 0 & (75a^2-15ab+b^2).
\end{array}
$$

設題 196 的布算方式:

根的第一項……$(3x-4y)+5z$

$$(3x-4y)^3+3(3x-4y)^2(5z)+3(3x-4y)(5z)^2+(5z)^3\text{……已依 } z \text{ 的昇冪排列的原式}$$

$$-\underline{(3x-4y)^3}$$

$$\begin{array}{l|l}
3(3x-4y)^2 & 3(3x-4y)^2(5z)+3(3x-4y)(5z)^2+(5z)^3\text{……第一餘式.} \\
3(3x-4y)(5z) & \\
+\ (5z)^2 & 3(3x-4y)^2(5z)+3(3x-4y)(5z)^2+(5z)^3\text{……}(5z)\{3(3x-4y)^2+3(3x-4y)(5z)+(5z)^2\}. \\
\hline
3(3x-4y)^2+3(3x-4y)(5z)+(5z)^2 & 0
\end{array}$$

設題 196 若依 x 的降冪排列而後開立方,則算式如下:

$$3x-(4y-5z)=3x-4y+5z$$

$$27x^3-(108y-135z)x^2+(144y^2-360yz+225z^2)x-64y^3+240y^2z-300yz^2+125z^3$$

$$(3x)^3=27x^3$$

$$\begin{array}{l|l}
3(3x)^2=27x^2 & -(108y-135z)x^2+(144y^2-360yz+225z^2)x-64y^3+240y^2z-300yz^2+125z^3 \\
-3(3x)(4y-5z) & \\
+\ (4y-5z)^2 & -(108y-135z)x^2+\ 9(4y-5z)^2x\qquad -(4y-5z)^3 \\
\hline
27x^2-9x(4y-5z)+(4y-5z)^2 & 0
\end{array}$$

［註］　$9(4y-5z)^2=9(16y^2-40yz+25z^2)$

$$=(144y^2-360yz+225z^2).$$

$$-(4y-5z)^3=-64y^3+240y^2z-300yz^2+125z^3.$$

設題 196 若仍依 z 的昇冪排列,而不把 x 和 y 括成一項,則其開立方的算式如下:

$$3x-4y+5z\left(5z=\frac{135x^2z}{27x^2}\right)$$

$$27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3+135x^2z-360xyz+240y^2z+225xz^2-300yz^2+125z^3$$

$$27x^3$$

$$\begin{array}{l|l}
3(3x)^2=27x^2 & -108x^2y+144xy^2-64y^3 \\
3(3x)(-4y)=-36xy & \\
+\ (-4y)^2=16y^2 & -108x^2y+144xy^2-64y^3 \\
\hline
27x^2-36xy+16y^2 & 135x^2z-360xyz+240y^2z+225xz^2-300yz^2+125z^3 \\
3(3x-4y)^2=27x^2-72xy+48y^2 & \\
3(3x-4y)(5z)=45xz-60yz & \\
(5z)^2=25z^2 & 135x^2z-360xyz+240y^2z+225xz^2-300yz^2+125z^3 \\
\hline
27x^2-72xy+48y^2+45xz-60yz+25z^2 & 0
\end{array}$$

由設題195和196各種解法,可得多項式開立方的通則如下:

(1)把原式依某文字的降冪或昇冪排列.

(2)依單項式開立方法,求出第一項的立方根,即得所求立方根的第一項.

(3)從原式中減去所得根的第一項的立方,得第一餘式.

(4)用已得根的第一項平方的3倍做試除式,除第一餘式的第一項,所得的商,就是根的第二項.

(5)把下列各式相加,得全除式.

(i)已得根的第一項平方的3倍.

(ii)已得根第一二兩項之積的3倍.

(iii)已得根第二項的平方.

(6)用根的第二項乘全除式,從第一餘式中減去其積,得第二餘式.

(7)將已得根的第一第二兩項括爲一項,仍依前法行之.依此進行,直到開盡爲止.(如開不盡的,可開到相當的項爲止.)

問答題 31

(1) 得了立方根的第一項,求第二項時必定要用第一項平方的 3 倍來做試除式,是什麼緣故?

(2) 說明全除式的意義.

(3) 試用開立方的模型,來說明開立方的道理.

演算題 60

求下列各多項式的立方根:

(1) $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$.

(2) $1728x^4y^2+64y^9+576x^2y^6+1728x^6$.

(3) $3x(a+b)^2-(a+b)^3-3x^2(a+b)+x^3$

(4) $6x^2+6x^4+7x^3+3x+3x^5+1+x^6$.

(5) $102x^2(x^2+2)-36x(x^4-4)+8(x^6+8)-171x^3$.

(6) $5a^3x^3-3ax(x^4+a^4)+(x^6-a^6)$.

(7) $8x^6+48x^5+60x^4-80x^3-90x^2+108x-27$.

(8) $1-9x+39x^2-99x^3+156x^4-144x^5+64x^6$.

(9) 求 $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ 的四次方根(開兩次平方).

(10) 求 $64x^6+192x^5+240x^4+160x^3+60x^2+12x+1$ 的六次方根(先開平方再開立方).

101. 設題 197 求 $\dfrac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{1331}$ 的立方根.

【解】 $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{1331}}$

$$=\frac{\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}}{\sqrt[3]{1331}}=\frac{a+b}{11}.$$

設題198 求 $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{8x^3+12x^2+6x+1}$ 的立方根.

【解】 $\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{8x^3+12x^2+6x+1}}$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}}{\sqrt[3]{8x^3+12x^2+6x+1}}=\frac{x-1}{2x+1}.$$

由設題197和198的解法,可得求含分母的代數式或分式的立方根的通則如下:

(1)把原式中的分子和分母,分別開立方.

(2)由分子開得的立方根,就是所求立方根的分子;由分母開得的立方根,就是所求立方根的分母.

演算題 61

求下列各式的立方根:

(1) $\dfrac{1}{x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3}$.

(2) $\dfrac{x^3+12x^2+48x+64}{2192}$.

(3) $\dfrac{64}{27a+a^3-9a^2-27}$.

(4) $\dfrac{125}{x^6-36x(x^4+a^4)+5a^3x^3-a^6}$.

(5) $\dfrac{x^6+6x^4+7x^3+3x^5+3x+6x^2+1}{216}$.

第三節　根式

102. 設題 199　求 a^2+b^2 的平方根.

【解】 由特殊積的公式一,知 $a^2+2ab+b^2$ 是完全平方. a^2+b^2 和 $a^2+2ab+b^2$ 比較,少了一項 $2ab$, 所以 a^2+b^2 不是完全平方,開平方是開不盡的.若照97節開方,其式如下:

$$\because \quad a^2+b^2=a^2+2ab+b^2-2ab,$$

$$\therefore \quad \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+2ab+b^2-2ab}.$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad a+b \\
\hline
 & a^2+2ab+b^2-2ab \\
 & a^2 \\
\cline{2-2}
2a+b & \qquad 2ab+b^2-2ab \\
 & \qquad 2ab+b^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad -2ab \text{ 餘式}
\end{array}
$$

從這式可知把a^2+b^2開平方,可得平方根$a+b$,而不足$2ab$（因餘式爲負,故云不足）.同理,若把原式改作$a^2-2ab+b^2+2ab$而開方,則可得平方根$a-b$,而餘$2ab$.由此可知若a,b,都是正數,則$\sqrt{a^2+b^2}$小於$a+b$而大於$a-b$.要用一不含根號的代數式表$\sqrt{a^2+b^2}$,實不可能.故代數上爲簡便起見,就用$\sqrt{a^2+b^2}$表a^2+b^2的平方根.這種式子,叫做根式,亦叫做無理式.

設題200 求a^3-b^3的立方根.

【解】 從特殊積公式九,知$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$是完全立方,他的立方根是$a-b$. a^3-b^3和$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$比較,少了$-3a^2b+3ab^2$兩項.所以a^3-b^3不是完全立方,不能用不含根號的代數式表其立方根.代

數上為便利起見,常用無理式$\sqrt[3]{a^3-b^3}$表a^3-b^3的立方根.

設題201　求2的平方根.

〔解〕　從算術裏求平方根的方法,得

$$\sqrt{2}=1.4142136\cdots\cdots$$

開得的小數,既非有限小數,亦非循環小數,故不能化成分數而得一與$\sqrt{2}$絕對相等的小數或分數.實用上或用1.414作2的平方根,或用1.4142作2的平方根,皆不過取其近似值而已,非確實相等也.若要精確表示2的平方根,亦是只有依照無理式的方法,用$\sqrt{2}$表之.這種含根號而開方開不盡的數,叫做無理數,亦叫做根數(亦可叫做無理式).因而與此不同的數如整數,分數,小數等,都叫做有理數.

設題202　求4的立方根.

〔解〕　4是完全平方數,不是完全立方數.故要精確表示4的立方根,亦只有用$\sqrt[3]{4}$表之.

由設題 199——202，可知凡開方不盡的代數式，求其方根時，代數中爲簡便起見，常用無理式表之。這種無理式號內所含的數或式，有時須化繁爲簡，和繁分數必須化爲簡分數相似。

103. 設題203 化 $\sqrt{4x^3+4x^2}$ 爲簡式。

【解】 $\sqrt{4x^3+4x^2}=\sqrt{4x^2(x+1)}=2x\sqrt{x+1}$.

設題204 化 $\sqrt[3]{a^5+3a^3}$ 爲簡式。

【解】 $\sqrt[3]{a^5+3a^3}=\sqrt[3]{a^3(a^2+3)}=a\sqrt[3]{a^2+3}$.

設題205 化 $\sqrt{32}$ 爲簡式。

【解】 $\sqrt[3]{32}=\sqrt{16\times 2}=4\sqrt{2}$.

設題206 化 $\sqrt[3]{108}$ 爲簡式。

【解】 $\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{27\times 4}=\sqrt[3]{3^3\times 4}=3\sqrt[3]{4}$.

由設題 203——206 的解法，可知凡根號內的式或數中如含有可依根指數開方開盡的因式或因數時，卽可把這因式或因數依根指數開方，將其方根寫在根號之外。其不能依根指數開方的因數，仍寫在根號之內，這樣，便把原來的根式化簡了。

凡根式可化簡的,一定要化簡.寫在根號外邊的數或式,叫做這根數的係數.在設題 203 中,$2x$ 是 $\sqrt{x+1}$ 的係數;在設題 204 中,a 是 $\sqrt[3]{a^2+3}$ 的係數;在設題 205 中,4 是 $\sqrt{2}$ 的係數;在設題206中,3 是 $\sqrt[3]{4}$ 的係數.

演算題62

化簡下列各式:

(1) $\sqrt{9x^3-18x^2}$.　　(2) $\sqrt{2x^3-4x^2+2x}$.

(3) $\sqrt{7y^3+28y^2+28}$.　　(4) $\sqrt{75}$.

(5) $\sqrt{432}$.　　(6) $\sqrt{448}$.

(7) $\sqrt[3]{a^4+a^3b}$.　　(8) $\sqrt[3]{3x^4y}$.

(9) $\sqrt[3]{168}$.　　(10) $\sqrt[3]{5324}$.

(11) $\sqrt[3]{1715}$.　　(12) $\sqrt[3]{448}$.

104. 設題207　求 $\sqrt{75}$ 與 $\sqrt{20}$ 的和及差.

[解]　(1) $\sqrt{75}+\sqrt{20}=5\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

$$=(5+2)\sqrt{5}=7\sqrt{5}.$$

(2) $\sqrt{75}-\sqrt{20}=5\sqrt{5}-2\sqrt{5}$

$$=(5-2)\sqrt{5}=3\sqrt{5}.$$

設題208 求 $\sqrt{a^3}$ 與 $\sqrt{ab^2}$ 的和及差.

【解】 (1) $\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}=a\sqrt{a}+b\sqrt{a}$

$$=(a+b)\sqrt{a}.$$

(2) $\sqrt{a^3}-\sqrt{ab^2}=a\sqrt{a}-b\sqrt{a}$

$$=(a-b)\sqrt{a}.$$

設題209 求 $\sqrt[3]{a^4}$ 與 $\sqrt[3]{8a}$ 的和及差.

【解】 (1) $\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{8a}=a\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{a}$

$$=(a+2)\sqrt[3]{a}.$$

(2) $\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{8a}=a\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{a}$

$$=(a-2)\sqrt[3]{a}.$$

凡根指數相同,根號內所含之式亦完全相同的根式,叫做同類根式.由設題207——209的解法,可得可化做同類根式的根式的加減通則如下:

將各根式化做同類根式,然後照同類項加減法加減之.

若不能化做同類根式的根式相加減,或有理式與根式相加減,則都可照不同類項加減法加減之.

演算題 63

求下列各題的結果:

(1) $\sqrt{27}+2\sqrt{3}$.　(2) $5\sqrt{7}-\sqrt{63}$.

(3) $4\sqrt{a}+\sqrt{a^5}$.　(4) $\sqrt{24}+\sqrt{150}-\sqrt{54}$.

(5) $\sqrt{a^2b}+\sqrt{c^4b}-\sqrt{4b}$.　(6) $2\sqrt{a}+3\sqrt{a^3}$.

(7) $\sqrt[3]{125c}-\sqrt[3]{64c}$.　(8) $3\sqrt[3]{16a}+5\sqrt[3]{2a}$.

105. 設題 210 求 $\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}$ 的積.

【解】 設 $\sqrt{2}=x$, 則 $2=x^2$ ……………………(1)

設 $\sqrt{3}=y$, 則 $3=y^2$ ……………………(2)

(1),(2) 兩式相乘,得 $2\times3=x^2y^2$ …………(3)

(3) 式兩邊開方,得 $\sqrt{2\times3}=xy$ …………(4)

將 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 代 (4) 式中的 x, y, 即得

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}.$$

設題 211 求 $\sqrt[3]{4}$ 與 $\sqrt[3]{5}$ 的積.

【解】 設 $\sqrt[3]{4}=x$, 則 $4=x^3$ ……………………(1)

設 $\sqrt[3]{5}=y$, 則 $5=y^3$ ……………………(2)

(1),(2) 兩式相乘,得 $x^3y^3=4\times5$ …………(3)

(3) 式兩邊開立方,得 $xy=\sqrt[3]{4\times5}$ ……(4)

將 x, y 的等值代入 (4) 式,得

$$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{4\times5}=\sqrt[3]{20}.$$

設題212 求$\sqrt{3}$與$\sqrt[3]{4}$的積.

【解】 設$\sqrt{3}=x$, 則$3=x^2$;

$$3^3=(x^2)^3=x^2\times x^2\times x^2=x^6 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設$\sqrt[3]{4}=y$, 則$4=y^3$;

$$4^2=(y^3)^2=y^3\times y^3=y^6 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1),(2)兩式相乘,得 $x^6y^6=3^3\times 4^2 \cdots\cdots\cdots(3)$

(3)式兩邊開6次方,得 $xy=\sqrt[6]{3^3\times 4^2}\cdots(4)$

將x,y的等值代入(4)式,得

$$\sqrt{3}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{3^3\times 4^2}=\sqrt[6]{27\times 16}=\sqrt[6]{432}.$$

凡根號相同(卽根指數相同)的根式,叫做同次根式.由設題 210——212 的結果,可得根式相乘的通則如下:

(1)同次根式相乘的積,其根號和原有根號相同;其根號內之式,等於乘式被乘式各根號內之式的連乘積.

(2)非同次根式相乘的積,其根指數是乘式被乘式兩根指數的最小公倍數(或最低公倍式);其根號內之式,等於乘式根號內之式的相當乘方,和被乘式根號內之式的相當乘方的連乘積.

問答題 32

(1) 同類根式是否必是同次根式?

(2) 同次根式是否必是同類根式?

(3) $3\sqrt{3}$和$5\sqrt{3}$是同次根式麼? 同類根式麼?

(4) $\sqrt[3]{a}$和$\sqrt[3]{b}$是同次根式麼? 同類根式麼?

(5) 上列通則(2)中所謂相當乘方,其標準怎樣?

演算題 64

求下列各題的結果:

(1) $\sqrt{7}\times\sqrt{13}$.　(2) $\sqrt{31}\times\sqrt{5}\times\sqrt{4}$.

(3) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$.　(4) $\sqrt{5}\times\sqrt{a}$.

(5) $\sqrt{6}\times\sqrt{5}\times\sqrt{b}$.　(6) $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{b}$.

(7) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt{7}$.　(8) $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt{5}$.

(9) $\sqrt[5]{7}\times\sqrt[3]{5}$.

106. 設題213 求$a+\sqrt{b}$和$a-\sqrt{b}$的積.

【解】 應用特殊積公式三,得

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-(\sqrt{b})^2=a^2-b.$$

設題214 求$\sqrt{x}+\sqrt{y}$和$\sqrt{x}-\sqrt{y}$的積.

【解】 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

$$=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=x-y.$$

設題213和設題214的結果,都是有理式.凡兩個含根式的二項式相乘,其積爲有理式時,這兩個二項式互相叫做共軛根數,或有理化根數.譬如$a+\sqrt{b}$叫做$a-\sqrt{b}$的共軛根數,$a-\sqrt{b}$叫做$a+\sqrt{b}$的共軛根數.

問答題33

口述下列各式的共軛根數:

(1) $a-2\sqrt{b}$.　　(2) $3a+\sqrt{c}$.

(3) $5\sqrt{x}+y$.　　(4) $x+y-\sqrt{z}$.

(5) $7-\sqrt{6}$.　　(6) $\sqrt{13}+3\sqrt{3}$.

107. 設題215 求$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$的平方.

【解】 應用特殊積公式一和公式二,得

$$(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2$$
$$=(\sqrt{a})^2\pm2(\sqrt{a})(\sqrt{b})+(\sqrt{b})^2$$
$$=a\pm2\sqrt{a}\sqrt{b}+b=a+b\pm2\sqrt{ab}.$$

設題216 求$\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$的平方.

【解】 $(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})^2$

$$=(\sqrt{3})^2\pm2(\sqrt{3})(\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2$$
$$=3\pm2\sqrt{3}\sqrt{2}+2=5\pm2\sqrt{6}.$$

演算題 65

求下列各題的結果:

(1) $(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})$.

(2) $(a+2b+3\sqrt{c})(a+2b-3\sqrt{c})$.

(3) $(\sqrt{11}+\sqrt{5})(\sqrt{11}-\sqrt{5})$.

(4) $(2\sqrt{15}-3\sqrt{3})(2\sqrt{15}+3\sqrt{3})$.

(5) $(\sqrt{11}-\sqrt{5})^2$.

(6) $(2\sqrt{15}+3\sqrt{3})^2$.

108. 設題 217 求 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}$ 的商.

【解】 $$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}$$

$$=\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

設題 218 求 $1\div\sqrt{3}$ 的商.

【解】 $$1\div\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

設題 219 求 $1\div\sqrt{12}$ 的商.

【解】 $$1\div\sqrt{12}=\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\times 3}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

設題220 求$3\div\sqrt{27}$的商.

[解] $3\div\sqrt{27}=\frac{3}{\sqrt{27}}=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由設題217——220的解法,可知兩單項根式相除,其商可用分數式表之.但分母必須化成有理式,其有理化分母的通則如下:

(1)先把分母中的根式,依 103 節的方法,化至最簡.

(2)約去分子分母間的最高公因式或最大公約數.

(3)用分母中的根式(係數除去),分乘分子分母,使分母有理化.

凡分母中含有根式的式,所以必須使分母有理化的原因,實爲便於計算之故.例如$\frac{1}{\sqrt{2}}$若用$\sqrt{2}$的近似值 1.414 去除 1,其法甚繁;若化成$\frac{\sqrt{2}}{2}$後計算,則用 2 除 1.414,一望而知等於.707,便利多矣.

演算題 66

化簡下列各式:

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$.　　(2) $\dfrac{4}{\sqrt{4x}}$.

(3) $\dfrac{6}{\sqrt{8}}$.　　(4) $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

(5) $\dfrac{3}{\sqrt{12}}$.　　(6) $\dfrac{16}{\sqrt{28}}$.

109. 設題221 化簡 $\dfrac{c}{a+\sqrt{b}}$.

【解】 $$\frac{c}{a+\sqrt{b}}=\frac{c(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}$$

$$=\frac{c(a-\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

設題222 化簡 $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

【解】 $$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}.$$

設題223 化簡 $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$.

【解】 $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

$$=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$$

$$=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{5-7}=-\frac{3}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7}).$$

設題224 化簡 $\dfrac{9}{3+\sqrt{6}}$.

【解】 $\dfrac{9}{3+\sqrt{6}}=\dfrac{9(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}$

$$=\frac{9(3-\sqrt{6})}{9-6}=\frac{9}{3}(3-\sqrt{6})$$

$$=3(3-\sqrt{6}).$$

由設題221——224的解法,可知凡分母是二項式的分式中,若分母中含有一項或兩項根式時,其分母必須化成有理式或有理數.其通則如下:

(1)用分母的共軛根數,分乘分子分母,使分母有理化.

(2)分母已有理化的式中,若分子分母中有公因式或公約數時,則約去之.

演算題 67

化簡下列各式:

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$. (2) $\dfrac{10-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

(3) $\dfrac{4-\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$. (4) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

(5) $\dfrac{3\sqrt{a}+4\sqrt{b}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$. (6) $\dfrac{a-b^2}{\sqrt{a}-b}$.

110. 設題 225 求 $\sqrt[3]{5}$ 的平方根.

【解】設 $\sqrt{\sqrt[3]{5}}=x$,

則 $$\sqrt[3]{5}=x^2 \cdots\cdots(1)$$

(1)式兩邊各自乘三次,得

$$5=(x^2)^3=x^6 \cdots\cdots(2)$$

(2)式兩邊各開六次方,得

$$x=\sqrt[6]{5} \cdots\cdots(3)$$

比較(3)式中 x 和原設 x 所代的值,得

$$\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}.$$

設題 226 求 $\sqrt[n]{a}$ 的 m 次方根.

【解】設 $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=x \cdots\cdots(1)$$

則 $$\sqrt[n]{a}=x^m \cdots\cdots(2)$$

(2)式兩邊各自乘 n 次,得

$$a=(x^m)^n=x^{mn} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式兩邊各開 mn 次方,得

$$x=\sqrt[mn]{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

比較(1),(4)兩式中 x 的值,得

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

由設題225設題226的結果,可知一數或一式有兩重或數重根號時,可化簡爲一重根號.不過化簡後根號的根指數,應爲原有各重根號根指數的連乘積.

問答題34

化簡下列各式:(化爲一重根號)

(1) $\sqrt[3]{\sqrt{36}}$. (2) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$.

(3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{48}}$. (4) $\sqrt{\sqrt{7}}$.

(5) $\sqrt{\sqrt[n]{x}}$. (6) $\sqrt[m]{\sqrt[3]{y}}$.

111. 設題227 求 $16-2\sqrt{55}$ 的平方根.

【解】 設所求的平方根是 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$,則

$$16-2\sqrt{55}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$$
$$=x+y-2\sqrt{xy} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

比較(1)式兩邊的有理部分和無理部分(參看附錄中補充教材);得

$$x+y=16 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$xy=55 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

要使(2)(3)兩式同時成立,其整數答數是x,y中一數是11,一數是5.(按(2)(3)兩式聯立,實爲二次聯立方程式.其正式解法見後,這裏不妨用心算求出整數答數.)故所求的平方根是$\sqrt{11}-\sqrt{5}$.

演算題 63

求下列各式的平方根:

(1) $16+2\sqrt{55}$. (2) $5+2\sqrt{6}$.

(3) $a+b-2\sqrt{ab}$. (4) $13-4\sqrt{10}$.

(5) $13-2\sqrt{42}$. (6) $25+2\sqrt{156}$.

第四節 虛數

112. 設題 228 求 -1 的平方根.

【解】 因正數自乘得正數;負數自乘亦得正數.故平方數中,實無負數.換句話說,要求一平方爲負數的數,在已講過的正數,負數,有理數,無理數,分數,小數中,實不可得.故數的範圍,若以上述諸數爲限,則本題是一個不可解的問題.

然使所有運算方法都能通行無礙,實是代數主要目的之一.代數中爲要達到這目的,往往把數的範圍,加以擴充.例如從正數擴充到負數,從有理數擴充到無理數等都是.

爲使本題易於解決起見,不妨把數的範圍,再行擴充,認負數的平方根爲一種新數,這種新數,叫做虛數.虛數的單位是$\sqrt{-1}$,常用 i 表之.故

$$\sqrt{-1}=i.$$

因這種新數叫做虛數,所以舊有諸數,統統叫做實數.合這新舊兩種數,纔組成代數數的完全系統.列表如下:

- 數
  - 實數
    - 有理數
      - 整數
        - 正整數
        - 負整數
      - 分數(小數)
        - 正分數
        - 負分數
    - 無理數
      - 正無理數
      - 負無理數
  - 虛數
    - 正虛數
    - 負虛數

實數的單位是 1, 這 1 的任何次方都是 1. 虛數的單位是 i, 這 i 的各次方成周期的變化. 這是虛數和實數最不同的地方, 亦可叫做虛數的特性. 其變化如下:

$$i=\sqrt{-1},$$
$$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1,$$
$$i^3=i^2\cdot i=(-1)i=-i,$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1,$$
$$i^5=i^4\cdot i=1\times i=i,$$
$$i^6=i^5\cdot i=i\times i=-1,$$
$$i^7=i^6\cdot i=(-1)i=-i,$$
$$i^8=i^4\cdot i^4=1\times 1=1.$$

從上面各式, 可知 $i^5=i$, $i^6=i^2=-1$, $i^7=i^3=-i$, $i^8=i^4=1$. 故 i 各次方的變化, 祇有 i, -1, $-i$, $+1$ 四種. 因得公式如下:

$$i^{4n+1}=i=\sqrt{-1}, \qquad i^{4n+2}=i^2=-1,$$
$$i^{4n+3}=i^3=-i=\sqrt{-1}, \quad i^{4n+4}=i^4=+1.$$

113. 設題 229 求 $-a$ 的平方根.

【解】 $\sqrt{-a}=\sqrt{(-1)\times a}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$

$$=\sqrt{a}\,i.$$

設題230 求 $-a^2$ 的平方根.

【解】 $\sqrt{-a^2}=\sqrt{(-1)a^2}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{-1}=ai.$

設題231 求 -3 的平方根.

【解】 $\sqrt{-3}=\sqrt{(-1)\times 3}=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}$

$=\sqrt{3}\,i.$

設題232 求 -16 的平方根.

【解】 $\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\times 16}=\sqrt{16}\times\sqrt{-1}$

$=4i.$

設題233 求 $-36a$ 的平方根.

【解】 $\sqrt{-36a}=\sqrt{(-1)\times 36a}$

$=\sqrt{36a}\times\sqrt{-1}=6\sqrt{a}\,i.$

由設題229——233的解法,可得單項負式開平方的通則如下:

先取出虛數的單位 $\sqrt{-1}$,把其餘各因式照單項式開平方法開出方根,附於 i 之前,作爲 i 的係數.

問答題35

口述下列各式的平方根:

(1) $-a^2b$. (2) $-36x^2$.

(3) $-4ax^2$. (4) $-8y$.

(5) $-25y^2$. (6) $-9xy^2$.

(7)　$-125.$　　(8)　$-250x.$

(9)　$-72y^2.$

114. **設題234**　求 $\sqrt{-100}\pm\sqrt{-36}$ 的結果.

〔解〕 $\sqrt{-100}\pm\sqrt{-36}=10\sqrt{-1}\pm6\sqrt{-1}$

$=10i\pm6i$

$=16i$ 或 $4i$.

設題235　求 $\sqrt{-25n^2}\pm3\sqrt{-9n^2}$ 的結果.

〔解〕 $\sqrt{-25n^2}\pm3\sqrt{-9n^2}=5ni\pm9ni$

$=14ni$ 或 $-4ni$.

設題236　求 $3\sqrt{-2a^2}\pm5\sqrt{-b}$ 的結果.

〔解〕 $3\sqrt{-2a^2}\pm5\sqrt{-b}=3a\sqrt{2}\,i\pm5\sqrt{b}\,i$

$=(3a\sqrt{2}\pm5\sqrt{b})i.$

由設題234——236的解法,可得虛數的加減法通則如下:

先把各虛數依前款化成以 i 做單位的最簡式,然後加減 i 的係數.

演算題69

求下列各式的結果:

(1)　$\sqrt{-49}+\sqrt{-36}-\sqrt{-4}.$

(2)　$\sqrt{-50}-\sqrt{-18}+\sqrt{-8}.$

(3) $5a\sqrt{-3}+7a\sqrt{-27}$.

(4) $\sqrt{-ab^3}-9\sqrt{-a^2b}-\sqrt{-c^2}$.

(5) $-3\sqrt{-10}+\sqrt{-90}$.

(6) $\sqrt{-121x}+\sqrt{-144}-\sqrt{-7y^2}$.

115. 設題237 求$3\pm\sqrt{-7}$的結果.

【解】 3是實數,$\sqrt{-7}$是虛數,故二項不能合併爲一,祇能把$\sqrt{-7}$化簡,寫成$3\pm\sqrt{7}i$,就是本題的結果.

設題238 求$a\pm\sqrt{-b^2}$的結果.

【解】 a是實數,$\sqrt{-b^2}$是虛數,故二項不能合併爲一,祇能把$\sqrt{-b^2}$化簡,寫成$a\pm bi$,這就是本題的結果.

凡實數和虛數的和或差,成$a\pm bi$形式的,叫做複數.在$a\pm bi$中,若$b=0$,則虛數部分消滅,原式成爲可代表一切實數的a.若$a\pm bi$中,$a=0$,則實數部分消滅,原式成爲可代表一切虛數的bi.若$a\pm bi$中,a, b都不爲0,則原式可代表一切複數.若a, b都爲0,則原式亦爲0.故$a\pm bi$實可作一般數的公式.

116. **設題239**　求 $\sqrt{-5}\times\sqrt{-3}$ 的積.

〔解〕 $\sqrt{-5}\times\sqrt{-3}=\sqrt{5}i\times\sqrt{3}i$

$$=\sqrt{5}\times\sqrt{3}\times(i)^2$$

$$=\sqrt{15}\times(-1)$$

$$=-\sqrt{15}.$$

設題240　求 $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}\times\sqrt{-c}$ 的積.

〔解〕 $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}\times\sqrt{-c}$

$$=\sqrt{a}i\times\sqrt{b}i\times\sqrt{c}i=\sqrt{abc}\times(i)^3$$

$$=\sqrt{abc}\times(-i)=-\sqrt{abc}\,i.$$

由設題239——240的解法,可得虛數乘法的通則如下:

(1)先從各虛數中分出虛數單位 i.

(2)將各 i 的係數連乘,附 i 的相當次乘方於其後.

(3)依112款求出 i 的相當次乘方的值.

上述通則的次序,不能任意變更.在設題239中,若不先分出 i 而卽行連乘如 $\sqrt{(-5)(-3)}$,則所得的結果爲 $\sqrt{15}$,不爲 $-\sqrt{15}$ 矣.

117. 設題241 求$(3-4i)(5+2i)$的積.

【解】 $(3-4i)(5+2i)$

$=3\times5+3\times2i-5\times4i-4i\times2i$

$=15+6i-20i-8(i)^2$

$=15-14i-8\times(-1)$

$=15+8-14i=23-14i.$

設題242 求$\dfrac{3-2i}{7+5i}$的商.

【解】 $\dfrac{3-2i}{7+5i}=\dfrac{(3-2i)(7-5i)}{(7+5i)(7-5i)}$

$=\dfrac{21-29i+10i^2}{49-25i^2}=\dfrac{11-29i}{49+25}=\dfrac{11}{74}-\dfrac{29}{74}i.$

由設題241和242的解法,可知複數的乘除法和根數的乘除法相同,但須注意$i^2=-1$.

問答題36

(1) 在$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}\times\sqrt{-c}\times\sqrt{-d}$積中,$i$應有幾次方? 其值怎樣?

(2) 在虛數乘法通則第(2)條中所謂i的相當次乘方,實際上應怎樣決定其次數?

(3) 下列算式有何錯誤?

$\sqrt{-33}\times\sqrt{-5}=\sqrt{(-33)\times(-5)}=\sqrt{165}.$

演算題 70

求下列各題的結果:

(1) $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}\times\sqrt{-5}$.

(2) $\sqrt{-36}\times\sqrt{-9}\times\sqrt{-25}\times\sqrt{-49}$.

(3) $\sqrt{-5}\times\sqrt{-7}+\sqrt{-3}\times\sqrt{-6}$.

(4) $\sqrt{-7}\times\sqrt{-8}-\sqrt{-4}\times\sqrt{-6}$.

(5) $5+3i+7-6i$.

(6) $8-5\sqrt{-3}-4+3\sqrt{-5}$.

(7) $(3+2i)(2-3i)$.

(8) $(4+\sqrt{-4})(3-\sqrt{-3})$.

(9) $(a+ci)^2$.　　(10) $(b-ci)^3$.

(11) $(a-bi)^2-(a+bi)^2$.

(12) $(2+2\sqrt{-3})^2-(2-2\sqrt{-3})^2$.

(13) $\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i\sqrt{2}\right)^2$.

(14) $\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i\sqrt{2}\right)^2$.

(15) $\frac{\sqrt{-15}}{\sqrt{-5}}$.　　(16) $\frac{5-6\sqrt{-1}}{7-14\sqrt{-1}}$.

(17) $\frac{1+i}{1-i}\pm\frac{1-i}{1+i}$.

(18) $(2+2\sqrt{-3})^2-4(2+2\sqrt{-3})+16$.

本編摘要

(1)代數式的乘方

(1)單項式無論爲正爲負,其平方必爲正.

(2)單項式立方的正負,和原式相同.

(3)單項式平方中各文字的指數,等於原式中各該文字指數的二倍.單項式立方中各文字的指數,等於原式中各該文字指數的三倍.

(4)二項式的平方,必爲三項式.二項式的立方,必爲四項式.其排列的標準,都和原式排列的標準相同.故平方中的首項,必是原式中首項的平方,立方中的首項,必爲原式中首項的立方.

(2)代數式的開方

(1)單項式開平方時,若原式爲正,則所得的根是實根,根前須附正負兩符號.若原式爲負,則所得的根是虛根.

(2)單項式立方根的正負,和原式相同.

(3)單項式平方根中各文字的指數,等於原式中各該文字指數的$\frac{1}{2}$.單項式立方根中各文字的指數,等於原式中各該文字指數的$\frac{1}{3}$.

(4)多項式開方時,首須注意其各項的排列;或依某文字的降冪排列,或依某文字的昇冪排列,不可凌亂.排列無誤,則其首項的平方根,就是平方根的首項.其首項的立方根,就是立方根的首項.

(3)根式
(1)凡不能開方而含有根號的式,叫做根式.根式是無理式的一種,故亦可叫做無理式.
(2)根式有同類根式,同次根式的區別.
(3)含根式的兩個二項式相乘,其積成有理式時,這兩個二項式互相叫做共軛根數或有理化根數.
(4)同類根式的加減法,和同類項的加減法相同.非同類根式的加減法,和非同類項的加減法相同.
(5)根式可化簡時,必須化簡.
(6)分母中含有根式時,必須用原根式或原分母的共軛根數,分乘分子分母,使分母有理化.

(4)虛數
(1)負數的方根,叫做虛數.虛數用 $\sqrt{-1}$ 做單位,常用 i 表之.
(2) i 的各次乘方,其值祇有 $i, -1, -i, +1$ 四種變換.
(3)虛數的計算,首須取出其單位 i.算得結果中若含有 i^2,則用 -1 代入;若含有 i^3,則用 $-i$ 代入;若含有 i^4,則用 $+1$ 代入.

第九編　指數對數及對數表檢法

第一節　指數

118. **設題243**　設 n 爲正整數,試說明 a^n 的意義.

【解】　n 爲正整數時,a^n 表 n 個 a 的連乘積,就是

$$a^n = aaaa\cdots\cdots\cdots\cdots\text{到 } n \text{ 個 } a \text{ 爲止.}$$

若 $n=3$, 則　　$a^3 = aaa.$

若 $n=2$, 則　　$a^2 = aa.$

$$\therefore\quad a^3 \times a^2 = aaa \times aa = a^5 = a^{3+2}.$$

推至一般,得

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又　$\dfrac{a^3}{a^2} = \dfrac{aaa}{aa} = a = a^{3-2}.$

推至一般,得

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 $(a^3)^2=a^3a^3=aaaaaa=a^6=a^{3\times 2}$.

推至一般,得

$$(a^m)^n=a^ma^ma^m\cdots\text{到}\,n\,\text{個}\,a^m$$
$$=a^{m\times n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

問答題 37

口述下列各式的結果:

(1) $x^3\times x^5\times x^2$.　　(2) $y^a\times y^b\times y^5$.

(3) $a^6\div a^2$.　　(4) $5^2\times 5^3\times 5$.

(5) $7^8\div 7^3$.　　(6) $8^2=2^n$ 求 n.

119. 設題 244 設 m,n 都是正整數,試說明 $a^{\frac{m}{n}}$ 的意義.

【解】 由前款公式(3),得

$$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m\ \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

但乘方和開方互為逆運算,故

$$(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m\ \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

比較(A),(B)兩式,可知

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m.$$

故 $a^{\frac{m}{n}}$ 表 a^m 的 n 次方根,或 $\sqrt[n]{a}$ 的 m 次方.

若 $a=5$, $m=4$, $n=3$, 則

$5^{\frac{4}{3}}$ 表 5^4 的立方根;就是

$$5^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{625}=8.55.$$

然 $5^{\frac{4}{3}}$ 亦表 $\sqrt[3]{5}$ 的四次方;就是

$$5^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{5})^4=(1.71)^4=8.55.$$

演算題 71

求下列各題的結果:

(1) $3^{\frac{3}{2}}$.　　(2) $7^{\frac{2}{3}}$.

(3) $10^{\frac{5}{2}}$.　　(4) $(16)^{\frac{7}{2}}$.

(5) $8^{\frac{8}{3}}$.　　(6) $(11)^{\frac{4}{3}}$.

(7) $9^{\frac{7}{2}}$.　　(8) $(15)^{\frac{2}{3}}$.

(9) $(16)^{\frac{4}{3}}$.　　(10) $(21)^{\frac{5}{2}}$.

120. 設題245 設 n 是正整數,試說明 a^{-n} 的意義.

[解] 由118款公式(2),得

$$\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n}=a^{m-(m+n)}=a^{-n}.$$

故 a^{-n} 表 a^n 的倒數.

若 $a=3,\ n=2$, 則

$$3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}.$$

又 $$\frac{a^n}{a^n}=1=a^{n-n}=a^0,$$

故不論 a 是何數, a^0 常等於 1.

問答題 38

口述下列各題的結果:

(1) 4^{-3}.	(2) 6^{-2}.
(3) 7^{-1}.	(4) 9^{-2}.
(5) $(11)^{-2}$.	(6) $(12)^{-2}$.
(7) 8^{-3}.	(8) 5^{-5}.
(9) 2^{-6}.	(10) 3^{-5}.

121. 設題 246 設已知

$$3784=10^{3.5780},^{*}$$
$$1483=10^{3.1712},$$
$$5611672=10^{6.7492},$$
$$2.551=10^{.4068},$$
$$15.58=10^{1.1927},$$
$$2199289=10^{6.3424}.$$

試應用指數的性質,求下列各題的結果:

(1) 3784×1483 的積.

(2) 3784÷1483 的商.

(3) 1483 的二次方.

(4) 3784 的立方根.

---

* 指數旣可爲分數,亦必可爲小數.又因 $10000=10^4$, $1000=10^3$, 故比 10000 小比 1000 大的 3784, 化成 10^n 形式時, n 必小於 4, 大於 3, 故爲 3.5780, 其小數部分有表可查.

【解】 (1) 因 $3784=10^{3\cdot5780}$,

$1483=10^{3\cdot1712}$,

$\therefore\quad 3784\times1483=10^{3\cdot5780}\times10^{3\cdot1712}$

$=10^{3\cdot5780+3\cdot1712}=10^{6\cdot7492}$;

但已知 $10^{6\cdot7492}=5611672$,

$\therefore\quad 3784\times1483=5611672.$

(2) 因 $3784=10^{3\cdot5780}$, $1483=10^{3\cdot1712}$,

$\therefore\quad 3784\div1483=10^{3\cdot5780}\div10^{3\cdot1712}$

$=10^{3\cdot5780-3\cdot1712}=10^{\cdot4068}$;

但已知 $10^{\cdot4068}=2.551$,

$\therefore\quad 3784\div1483=2.551.$

(3) 因 $1483=10^{3\cdot1712}$,

$\therefore\quad (1483)^2=(10^{3\cdot1712})^2=10^{3\cdot1712\times2}$

$=10^{6\cdot3424}=2199289.$

(4) 因 $3784=10^{3\cdot5780}$,

$\therefore\quad \sqrt[3]{3784}=\sqrt[3]{10^{3\cdot5780}}=10^{\frac{3\cdot5780}{3}}=10^{1\cdot1927}$

$=15.58.$

由上列各題的解法,可知若把尋常的數,一一改作10^n(不必一定用10,用任何數都可以,不過以10爲最普通)的形式,

而列成一表,則可由檢表和指數的四則,求積,求商,求乘冪,求方根,在演算方面,可簡便不少.因加法比乘法容易,而指數的加法,可替代尋常數的乘法(設題246的(1)),減法比除法容易,而指數的減法,可替代尋常數的除法(設題246的(2));乘法比乘方容易,而指數的乘法,可替代尋常數的乘方(設題246的(3));除法比開方容易,而指數的除法,可替代尋常數的開方(設題246的(4)).現在把這種表的一部分,列在下面:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2230	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4018	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757

表中最左縱行內所列的,是尋常的數;在這表內僅以二位爲限.若把表中最上橫行內任一數字附在這二位數後,可得三位數.例如在13後附一5字,就成135.

表中除最左縱行內和最上橫行內的數外,其餘各數,都是10的指數的小數部分.因都是小數,故小數點略去不記.例如0212就是.0212;4683就是.4683.這種數目如何算得,本書限於程度,略而不講;將來學到高等代數時,自易明白.指數的整數部分,因可由視察法決定,故表中不必列入,且亦不能列入.其視察的標準如下:

因$10000=10^4$, $1000=10^3$,故凡小於10000大於1000的四位整數,改成10^n形式時,其n必小於4大於3,就是其指數的整數部分必是3.

因$1000=10^3$, $100=10^2$,故凡小於1000大於100的三位整數,改成10^n形式時,其n必小於3大於2.就是其指數的整數部分必是2.

因 $100=10^2$, $10=10^1$, 故凡小於100大於10的二位整數,改成10^n形式時,其n必小於2大於1.就是其指數的整數部分必是1.

因 $10=10^1$, $1=10^0$, 故凡小於10大於1的單位整數,改成10^n形式時,其n必小於1大於0.就是其指數只有小數部分,沒有整數部分.故整數部分爲0.

因 $1=10^0$, $.1=\frac{1}{10}=10^{-1}$, 故凡小於1大於.1的一位小數,改成10^n形式時,其指數的整數部分必爲-1.

因 $.1=10^{-1}$, $.01=\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}=10^{-2}$, 故凡小於.1大於.01的二位小數,改成$10^n$形式時,其指數的整數部分必爲$-2$.

把上面各條歸納起來,可以得到下面兩條簡單標準:

(1)凡整數改成10^n形式時,其指數的整數部分必爲正,且等於這整數的位數減一.

(2)凡小數改成10^n形式時,其指數的整數部分必爲負,這負數的絕對值,等於小數點後面零的個數加一.

這裏應注意的,尙有下列兩點:

(1)凡指數的小數部分都是正.

(2)指數的整數部分爲負時,其負號不可記在這數之前,須記在這數之上.例如$.021=10^{\bar{2}.3222}$. 因這樣記法,則負號僅及於2,和.3222無涉(.3222仍爲正);若記作-2.3222,則.3222亦包括在負號之內了.

122. 設題247　設$19=10^n$,試求n的值.

【解】因19是兩位數,故n的整數部分是$2-1=1$.

又檢表得和19同在一橫行中第一個數是2788,所以n的小數部分是.2788;故得

$$19=10^{1.2788}.$$

設題248　設$190=10^n$,試求n的值.

【解】

$$\begin{aligned}190=19\times10=10^{1.2788}\times10^1\\=10^{2.2788}.\end{aligned}$$

設題 249 設 $1.9=10^n$,試求 n 的值.

〔解〕 $1.9=19\times\frac{1}{10}=19\times10^{-1}=10^{1\cdot2788}\times10^{-1}$

$$=10^{1\cdot2788-1}=10^{\cdot2788}.$$

設題 250 設 $.19=10^n$,試求 n 的值.

〔解〕 $.19=19\times\frac{1}{100}=19\times\frac{1}{10^2}=19\times10^{-2}$

$$=10^{1\cdot2788}\times10^{-2}=10^{1\cdot2788-2}$$

$$=10^{1-2+\cdot2788}=10^{-1+\cdot2788}=10^{\bar{1}\cdot2788}.$$

由設題247——250的解法,可知凡數字和數字排列的次序都相同(例如19和1.9)而大小不同的數,改成 10^n 形式時,其指數的小數部分完全相同;所不同的,只有指數的整數部分.

問答題 39

說出下列各題中 n 的整數部分和小數部分:

(1) $11=10^n$. (2) $1.2=10^n$.

(3) $140=10^n$. (4) $.16=10^n$.

(5) $.023=10^n$. (6) $.0021=10^n$.

(7) $2000=10^n$. (8) $24000=10^n$.

(9) $250000=10^n$.

123. **設題 251** 設 $234=10^n$,試求 n 的值.

〔解〕 234 是三位的整數,故 n 的整數部分是 $3-1=2$.

又檢表知 234 是由最左縱行內的 23 和最上橫行內的 4 所拼成,而含 23 的橫行和含 4 的縱行交叉處的數是 3692;故 n 的小數部分是 .3692;

$$\therefore\quad 234=10^{2.3692}.$$

設題 252 設 $2056=10^n$, 試求 n 的值.

〔解〕 2056 是四位的整數,故 n 的整數部分是 $4-1=3$.

又檢表知 2060 改成 10^n 時, n 的小數部分應為 .3139, 而 2050 改成 10^n 時, n 的小數部分應為 .3118, 可知兩尋常數相差 $2060-2050=10$ 時,其指數的小數部分相差 $.3139-.3118=.0021$; 現在 2056 和 2050 相差 6, 則其指數的小數部分應差多少?其近似值可用比例算得之.即

$$10:6=.0021:x,$$

$$\therefore\quad x=\frac{.0021\times 6}{10}=.00126;$$

故所求 n 的小數部分等於

$$.3118+.00126=.31306,$$

$$\therefore\quad 2056=10^{3\cdot 31306}.$$

演算題 72

求下列各題中 n 的值:

(1) $103=10^n$. (2) $219=10^n$.

(3) $1.15=10^n$. (4) $.0247=10^n$.

(5) $.00178=10^n$. (6) $217000=10^n$.

(7) $2264=10^n$. (8) $20.58=10^n$.

(9) $250.7=10^n$.

124. 設題 253 試檢表並應用指數公式,求 215×11.2 的積.

【解】 由視察法和檢表得 $215=10^{2\cdot 3324}$, $11.2=10^{1\cdot 0492}$,

$$\therefore\quad 215\times 11.2=10^{2\cdot 3324}\times 10^{1\cdot 0492}=10^{2\cdot 3324+1\cdot 0492}$$
$$=10^{3\cdot 3816}.$$

又檢表知2400改成 10^n 時,其 n 的值應爲 3.3802, 又2410改成 10^n 時,其 n 的值應爲 3.3820. 2410 和2400相差 10, 3.3820 和 3.3802 相差.0018, 現在 3.3816 和3.3802 相差.0014, 故得比例式如下:

$$18:14=10:x,$$

$$x=\frac{14}{18}\times10=8;$$

$$\therefore\quad 10^{3\cdot3816}=2400+8=2408,$$

即 $215\times11.2=2408.$

設題254　試檢表並應用指數公式,求 $253\div23$ 的商,到小數二位.

【解】　$253=10^{2\cdot4031}$, $23=10^{1\cdot3617}$,

$$\therefore\quad 253\div23=\frac{10^{2\cdot4031}}{10^{1\cdot3617}}=10^{2\cdot4031-1\cdot3617}=10^{1\cdot0414};$$

又用和前題相同的方法,求得

$$10^{1\cdot0414}=11;$$

$$\therefore\quad 253\div23=11.$$

設題255　試檢表並應用指數公式,求 $(0.173)^5$ 的值,到小數七位.

【解】　$(0.173)^5=(10^{\bar{1}\cdot2380})^5=10^{\bar{4}\cdot1900*}=.0001549.$

設題256　試檢表並應用指數公式,求 $\sqrt[5]{216}$ 的近似值.

【解】　$\sqrt[5]{216}=\sqrt[5]{10^{2\cdot3315}}=10^{\frac{2\cdot3345}{5}}=10^{\cdot4669}$

$$=2.93.$$

---

* $\bar{1}.2380\times5=(-1)\times5+0.2380\times5=-5+1.1900=-4+0.1900=\bar{4}.1900$

演算題 73

試檢表並應用指數公式,求下列各題的結果:

(1) $107\times1.34\times12$.　　(2) $225\div1.65\div12.3$.

(3) $(.0277)^3$.　　(4) $(2.66)^5$.

(5) $(2.341)^3$.　　(6) $\sqrt[7]{1465}$.

(7) $\dfrac{14.3\times1.93}{207}$.　　(8) $\dfrac{\sqrt{2960}}{(126)^2}$.

(9) $\dfrac{\sqrt[3]{2544}}{(1.96)^3}$.

第二節　對數

125. 設題 257　什麼叫做對數?

【解】 要知道什麼叫做對數,請先答下列三個問題:

(1) 在 $3^2=9$ 的等式裏,2 是 3 的指數,9 是 3 的冪數(二次冪),2 是 9 的什麼呢?

(2) 在 $10^3=1000$ 的等式裏,3 是 10 的指數,1000 是 10 的冪數(三次冪),3 是 1000 的什麼呢?

(3) 在 $a^n=b$ 的等式中,n 是 a 的指數,b 是 a 的冪數,n 是 b 的什麼呢?

這三個問題惟一的答案,就是:「對數」

二字.詳細地說,則如下:

(1) 2 是 9 的 3 底對數.

(2) 3 是 1000 的 10 底對數.

(3) n 是 b 的 a 底對數.

所以對數和指數是同一個數,因對象不同,有兩種叫法就是了.因得對數的定義如下:

一數的指數,叫做他冪數的對數.

對數和指數,因是同一個數,所以上節裏講過的指數的性質,都可應用到對數裏來.但是對數和指數亦有不同的地方,列舉如下:

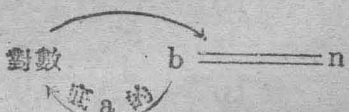
(1)記法不同:

對數的英文名稱,叫做 Logarithm, 簡寫做 log.表 b 數的 a 底對數等於 n,常用下式記之:

$$\log_a b = n^{*}.$$

---

*這記法,可依下圖箭頭的方向,來記憶牠的意義.



式中的 a 叫做對數的底數,和對數有密切關係,故必須記出.例如

$$3^2=9,\qquad 故\ \log_3 9=2;$$

$$10^{.9542}=9,\qquad 故\ \log_{10} 9=.9542.$$

兩個都是 9 的對數,而數目大不相同,故記一數的對數,必須記出其底數.不過我們常用的對數,都是以10爲底的,故底數可以省略不記.反過來說:凡記作 $\log b$;不記出底數的對數,必是以10作底的常用對數.現在把指數記法和常用對數的記法,分列於下,以資比較.

指數記法:	對數記法:
$10^0=1,$	$\log 1=0;$
$10^1=10,$	$\log 10=1;$
$10^2=100,$	$\log 100=2;$
$10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1,$	$\log 0.1=-1;$
$10^{-2}=\frac{1}{10^2}=0.01,$	$\log 0.01=-2;$
$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=0.001,$	$\log 0.001=-3.$

問答題 40

口述和下列各式相當的對數記法:

(1) $10^{1.2788}=19.$　　(2) $10^{2.3692}=234.$

(3) $10^{3.48554}=3056.$

口述和下列各式相當的指數記法:

(4) $\log 557=2.7459.$　　(5) $\log .016=\bar{2}.2041.$

(6) $\log 4.687=.6709.$

(2)名稱不同:

在指數記法和對數記法中,有許多名稱,絕不相同.舉例如下:

在 $10^{2.3802}=240$ 裏,	在 $\log 240=2.3802$ 裏,
240 叫做冪數;(或尋常數)	240 叫做眞數;
2 叫做指數的整數部分;	2 叫做對數的指標部分;
.3802叫做指數的小數部分.	.3802叫做對數的假數部分.

問答題 41

(1) 什麼叫做指標?

(2) 什麼叫做假數?

(3) 什麼叫做眞數?

(4) 從定指數整數部分的標準,試推出定對數指標部分的標準來.

(5) 對數的假數部分,是不是常爲正數?

126. 設題258 $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$,試證之.

【證】 設 $\log_a x=n$, $\log_a y=m$, 則

$$a^n=x;\quad a^m=y.$$

$\therefore$ $$xy=a^n\times a^m=a^{n+m};$$

$\therefore$ $$\log_a xy=n+m=\log_a x+\log_a y.$$

這公式,用文字來表,則如下:

積的對數,等於各因數對數的和.

設題259 $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$, 試證之.

【證】 設 $\log_a x=n$, $\log_a y=m$, 則

$$a^n=x,\quad a^m=y;$$

$\therefore$ $$\frac{x}{y}=\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m};$$

$$\log_a\frac{x}{y}=n-m=\log_a x-\log_a y.$$

這公式,用文字來表,則如下:

商的對數,等於被除數對數和除數對數的差.

設題260 $\log_a x^n=n\log_a x$,試證之.

【證】 設 $\log_a x=m$, 則

$$a^m = x;$$

$$\therefore \quad x^n = (a^m)^n = a^{nm};$$

$$\log_a x^n = nm = n \log_a x.$$

這公式,用文字來表,則如下:

一數乘冪的對數,等於這數對數的冪指數倍.

設題261 $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$, 試證之.

〔證〕 設 $\log_a x = m$, 則

$$a^m = x;$$

$$\therefore \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{m}{n} = \frac{1}{n} \times m = \frac{1}{n}\log_a x.$$

這公式,用文字來表,則如下:

一數方根的對數,等於這數對數的根指數分之一.

以上四個設題所證明的四個公式,可叫做對數的四大公式.對數的應用,完全以這四個公式做基礎.學者應和設題246相對照,仔細揣摩,牢牢記住.

演算題 74

已知 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$, $\log 5=0.6990$, $\log 7=0.8451$.

試應用上列公式,求下列各對數:

(1) $\log 6$.　　(2) $\log 14$.

(3) $\log 8$.　　(4) $\log 30$.

(5) $\log 12$.　　(6) $\log 7.5$.

(7) $\log 0.0035$.　　(8) $\log 12.5$.

(9) $\log 2.1$.　　(10) $\log 0.63$.

(11) $\log 5^2$.　　(12) $\log 7^3$.

(13) $\log 5^{\frac{1}{2}}$.　　(14) $\log 7^{\frac{1}{11}}$.

(15) $\log 3^{\frac{3}{7}}$.　　(16) $\log 5^{\frac{5}{3}}$.

(17) $\log 3^{\frac{4}{5}}$.　　(18) $\log 5^{\frac{2}{7}}$.

(19) $\log 2^{\frac{11}{7}}$.　　(20) $\log 21^{\frac{7}{8}}$.

(21) $\log \frac{3}{5}$.　　(22) $\log \frac{7}{5}$.

(23) $\log \frac{7}{3}$.　　(24) $\log \frac{7}{0.5}$.

(25) $\log \frac{0.07}{5}$.　　(26) $\log \frac{0.003}{7}$.

(27) $\log \frac{0.02}{0.007}$.　　(28) $\log \frac{0.03}{7}$.

(29) $\log \frac{3^2}{0.02^2}$.　　(30) $\log \frac{7^3}{0.005^2}$.

第三節　對數表檢法

127. **設題262** 試求下列各數的對數,並說明其求法.

(1) 3.2. (2) 325. (3) 32.57. (4) .0516.

【解】 求一數對數的方法,可分(1)求指標,(2)求假數兩部分來說:

(1)求指標的方法:

求指標的方法,和求指數的整數部分相同.就是原數中含有整數部分的,其指標必為正;其數等於整數部分的位數減一.原數中只有小數部分,沒有整數部分的,其指標必為負;這負數的絕對值,等於小數點後面零的個數加一.

(2)求假數的方法:

求一數對數的假數的方法,和求指數的小數部分相同,必須檢表.這種表叫做對數表.前 121 款中所列的表,就是對數表的一部分.完全的對數表,附本書後面附錄中.

表中含N的縱橫兩行內的數字,是表眞數的.其餘許多數,都是對數的假數,故都是小數.凡由表中最左縱行內甲數和最上橫行內乙數拼成的眞數的假數,就在含甲數的橫行和含乙數的縱行交叉的地方.譬如由32和5拼成的325的假數,在含32的橫行和含5的縱行交叉的地方,就是.5119.

現在把本題中各數的對數的求法,寫在下面:

(1) 求3.2的對數法:

因3.2中有一位整數,故其對數的指標爲$1-1=0$.

又從表中含32的橫行和含0的縱行交叉的地方,檢得假數.5051.

$$\therefore \quad \log 3.2=0.5051.$$

(2) 求325的對數法:

因325三位都是整數,故其對數的指標爲$3-1=2$.

又檢表,得其假數爲.5119.

$\therefore\quad \log 325 = 2.5119.$

(3) 求 32.57 的對數法:

因 32.57 中有兩位整數,故其對數的指標為 $2-1=1$.

又 32.57 有四位數字,而表中現成的眞數,只有三位數字(縱行中兩位橫行中一位);故和四位數字相當的假數,必須用比例算得.因在小範圍內,兩眞數的差,和相當兩假數的差,可視作成正比也.其算式如下:

檢表知 3260 的假數是 .5132,

3250 的假數是 .5119.

$\therefore$ 眞數相差 10,則假數相差 .0013.

現在 3257 和 3250 相差 7,假數應差多少?設應差 x,則

$$10 : 7 = .0013 : x,$$

$$\therefore\quad x = \frac{7 \times .0013}{10} = .00091.$$

$\therefore$ 3257 的假數 $= .5119 + .0009 = .5128.$

$$\log 32.57 = 1.5128.$$

為免除計算的麻煩,在對數表後面,附有比例部分表.表中最上橫行中所列是假數的差數,惟不用小數記法,僅記後面幾位數字.所以.0013記作13.表中最左縱行中所列是眞數的差數,在本題內眞數的差數是7,假數的差數是13,在這兩行交叉處的數是9.1,就是本題所求的差數.

(4) 求.0516的對數法:

因.0516沒有整數部分,只有小數部分,所以其對數的指標為負.因小數點後面有一個0,故指標是 −2. 但指標的負號,不應記在前面,應記在上面,故應作$\bar{2}$.檢表得516的假數.7126,

$$\therefore\quad \log .0516=\bar{2}.7126.$$

演算題 75

求下列各數的對數:

(1) 60.	(2) 101.
(3) 999.	(4) 9901.
(5) 5406.	(6) 3780.
(7) 54327.	(8) 90801.
(9) 70633.	(10) 12028.

(11) 0.00987.　　(12) 0.87701.

(13) 877.08.　　(14) 73.896.

(15) 7.0699.　　(16) 0.0897.

(17) 99.778.　　(18) 3.015.

128. [設題263 試求下列各對數的眞數.

(1) 2.3139. (2) 0.3168. (3) $\bar{1}.1523$.

【解】有了對數求眞數,就是有了眞數求對數的反求,其方法可分(1)求眞數的數字,(2)定眞數小數點的位置兩部分來說:

(1)求眞數數字的方法:

在對數表內檢出所給對數的假數,看這假數所對的眞數是什麼數字,這數字就是所求眞數的數字.若所給對數的假數,徧檢表內沒有一數和牠相同時,則可檢出和牠最相近的兩個假數,一個比牠大,一個比牠小.然後用比例算法,或由比例部分表求出眞數的差數,有了這差數,就可得所求眞數的數字.

(2)定眞數小數點的方法:

若所給對數的指標是正,則眞數必含整數部分,其整數的位數,等於指標數加一.若所給對數的指標是負,則眞數必是純粹小數,小數點後面 0 的個數,等於指標的絕對值減一.

現在把本題所給各對數的眞數的求法,寫在下面:

(1)求2.3139的眞數法:

檢表,知 .3139 所對眞數的數字是 206;而指標爲 2,故知眞數有2+1=3位整數,所以所求的眞數是206.

(2)求0.3168的眞數法:

檢表,知 0.3168 在0.3181和 0.3160 之間,而 0.3181−0.3160=.0021, 0.3168−0.3160=.0008,在比例部分表內21縱行內和 8 最相近的數是8.4,而 8.4 所對的眞數差是4,又 0.3160 所對的眞數數字是 2070,故0.3168 所對的眞數數字應爲 2074. 又因指標爲 0,故眞數中應有0+1=1位整數,

卽所求的眞數是2.074.

(3) 求$\bar{1}.1523$的眞數法:

檢表知0.1523所對眞數的數字是142,而指標爲$\bar{1}$,故知眞數爲純小數.其小數點後面應有1−1=0個0(卽沒有0);所以所求的眞數是0.142.

演算題76

求下列各對數的眞數:

(1) 4.2488.　(2) 3.6330.

(3) 2.5310.　(4) 1.9484.

(5) 4.7317.　(6) 1.9730.

(7) $\bar{1}.8800$.　(8) 0.2787.

(9) $\bar{1}.0410$.　(10) $\bar{1}.8420$.

(11) $\bar{3}.0216$.　(12) $\bar{2}.6580$.

(13) $\bar{4}.5886$.　(14) $\bar{1}.8686$.

(15) $\bar{3}.4678$.

第四節　對數的應用

129. 設題264 應用對數,求下式的結果:

$$\frac{8.3709\times 834.637}{7308.946}.$$

〔解〕本題中各數的數字都在五位以上,求對數時必須用比例計算,現在把求 log 7308.946的方法,詳述於下.其餘兩數對數的求法,與此相同.

檢表得7300000的假數8633,

7310000的假數8639,

眞數相差10000,假數差6;

現在眞數差8946,假數差x,

$$\therefore \quad x=\frac{8946\times 6}{10000}=5.$$

因得 $\log 7308.946=.8633+.0005=.8638.$

同樣得 $\log 8.3709=0.9227;$

$\log 834.637=2.9215.$

故若 $\dfrac{8.3709\times 834.637}{7308.946}=y,$

則 $$\log y=\log\frac{8.3709\times 834.637}{7308.946}$$

$$=\log 8.3709+\log 834.637-\log 7308.946$$

$$=0.9227+2.9215-3.8638$$

$$=3.8442-3.8638=-.0196.$$

結果得出一個負的假數來,但負的假數,對數表上沒有的;所以必須把牠改做正數,好在指標是可以負的,故這負號可以放到指標上去.其式如下:

$$-.0196=-.0196+1-1=(1-.0196)-1$$
$$=-1+(1-.0196)=-1+.9804$$
$$=\bar{1}.9804.$$

既得 $\log y=\bar{1}.9804,$

由對數求眞數的方法,就得

$$y=0.9558;$$

$$\therefore\quad \frac{8.3709\times 834.637}{7308.946}=0.9558.$$

演算題 77

應用對數,求下列各題的結果:

(1) $948.76\times 0.043875.$

(2) $3.4097\times 0.0087634.$

(3) $830.75\times 0.0003769.$

(4) $7065\div 5401.$

(5) $8.321\div 0.0789.$

(6) $0.07654\div 83.947\div 0.8395.$

130. 設題 265 應用對數求 0.0497 的立方,至小數七位.

【解】 $\log 0.0497 = \bar{2}.6964,$*

$$\begin{array}{r} \bar{2}.6964 \\ \times\quad 3 \\ \hline \bar{4}.0892 \end{array} = \log 0.0001228.$$

$\therefore\quad (0.0497)^3 = 0.0001228.$

設題266 應用對數,求 0.00862 的五次根,至小數四位.

【解】 $\log 0.00862 = \bar{3}.9355 = \bar{5} + 2.9355,$

$$\frac{\bar{5} + 2.9355}{5} = \bar{1}.5871 = \log 0.3865.$$

$$\therefore\quad \sqrt[5]{0.00862} = 0.3865.$$

演算題 78

應用對數求下列各題的結果:

(1) $(6.05)^3$. (2) $(1.051)^7$.

(3) $(1.3178)^{10}$. (4) $(0.691)^9$.

(5) $\left(10\frac{2}{3}\right)^4$. (6) $\left(1\frac{7}{9}\right)^3$.

(7) $\left(7\frac{6}{11}\right)^{0.33}$. (8) $\left(8\frac{3}{4}\right)^{2.3}$.

(9) $\sqrt{7}$ (10) $\sqrt[10]{8379}$.

(11) $(0.17643)^{\frac{5}{9}}$. (12) $(2.5637)^{\frac{3}{11}}$.

---

*算法見設題255註

131. **設題267**　在複利公式$A=P(1+r)^n$中,設已知A, P和r,試求n.

〔解〕公式兩邊各取對數,得

$$\log A=\log P+n\log(1+r).$$

$$\therefore\qquad n=\frac{\log A-\log P}{\log(1+r)}.$$

設題268　本金900元,依年利率5%,每年一期的複利計算,問幾年後,可得本利和1093.95元?

〔解〕用1093.95代前題中的A,用900代前題中的P,用5%代前題中的r,則得:

$$n=\frac{\log 1093.95-\log 900}{\log 1.05}=\frac{3.0390-2.9542}{0.0212}$$

$$=\frac{0.0848}{0.0212}=4.$$

卽四年後,可得本利和1093.95元.

設題269　在複利公式　$A=P(1+r)^n$中,設已知A, P和n,試求r.

〔解〕公式兩邊各取對數,得

$$\log A=\log P+n\log(1+r).$$

$$\therefore\quad \log(1+r)=\frac{1}{n}(\log A-\log P).$$

由此式可求得 r.

設題270 本金 100 元,每年一期計算複利,二十五年後得本利和 265.05 元,求年利率.

【解】 用100代前題中的P,用 265.05 代前題中的A,用25代 n,則得:

$$\log(1+r)=\frac{1}{25}(\log 265.05-\log 100)$$

$$=\frac{1}{25}(2.4233-2)=.017;$$

$$\therefore\quad 1+r=1.04,\quad r=4\%.$$

演算題 79

(1) 年利率 6%,依複利計算,每半年一期,本金100元;問幾年後,可得本利和180.3元?

(2) 年利率5%,依複利計算,每年一期,本金9000元;問幾年後,可得本利和15000元?

(3) 每年一期,依複利計算,在十二年後本利和是本金的二倍,求利率.

(4) 本金7000元,用8%的年利率計算複利,每半年一期;求三年九個月的利息.

本編摘要

指數公式

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) $(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$.

(5) $a^0 = 1$.

對數公式

(1) 若$a^n = b$,則對數的記法是$\log_a b = n$.
(a=10 時,稱爲常用對數,其底可省略不記)

(2) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(3) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

(4) $\log_a x^n = n \log_a x$.

(5) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$.

(6) $$\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x$$
$$= 0 - \log_a x$$
$$= -\log_a x.$$

第十編

一元二次方程解法及應用問題

第一節　配方法

132. 設題271　在 $x^2 \pm ax$ 的後面,應加上一項什麼,纔可配成一個完全平方的三項式?

【解】試把 x^2+ax 開方,則結果如下:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \pm \frac{1}{2}a \\ \hline
 & x^2 \pm ax \\
 & x^2 \\ \hline
2x \pm \frac{1}{2}a & \pm ax \\
 & \quad ax + \frac{1}{4}a^2 \\ \hline
 & \quad -\frac{1}{4}a^2 \cdots\cdots \text{餘式}
\end{array}
$$

餘式是負,就是不足的意思.上式告訴我們的是:

(1) $x^2 \pm ax$ 不是完全平方.

(2) $x^2 \pm ax$ 後面若加上一項 $\frac{1}{4}a^2$,則開方時可得方根 $x \pm \frac{1}{2}a$;換句話說,就是 $x^2 \pm ax + \frac{1}{4}a^2 = (x \pm \frac{1}{2}a)^2$.

由此,可知若要 $x^2 \pm ax$ 配成完全平方的三項式,必須加一項 $\frac{1}{4}a^2$.

但這 $\frac{1}{4}a^2$ 如何得來的呢?從上式可知 $\frac{1}{4}a^2$ 是等於 $\frac{1}{2}a$ 的平方,而 $\frac{1}{2}a$ 是用試除式 $2x$ 去除 ax 得來的;ax 和 $2x$ 都是一定的,所以 $\frac{1}{2}a$ 亦是一定的,並非偶然的.因得定理如下:

凡首項是係數爲 1 的完全平方,第二項是含首項平方根的項,則在這二項式的後面加上第二項係數的 $\frac{1}{2}$ 的平方時,

必能配成一個完全平方的三項式.

這定理和一元二次方程式的解法有密切關係,學者務須熟記.如不明瞭,再看下面幾個式子:

1. $x^2 \pm 4x$中x^2的係數是 1, x^2 是完全平方,$4x$ 中含有 x^2 的平方根 x,故在這兩項之後加上$4x$中 x 的係數 4 的$\frac{1}{2}$的平方 2^2,則必配成完全平方.其式如下:

$$x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2.$$

用特殊積公式一和二來覆驗,則得 $(x \pm 2)^2 = x^2 \pm 4x + 4$. 故知無誤.

2. $y^2 \pm 3y$中y^2的係數爲 1, y^2 是完全平方,$3y$ 中含有 y^2 的平方根 y,故若加上一項$\left(\frac{3}{2}\right)^2$即$\frac{9}{4}$,則可配成完全平方.(學者試自行覆驗.)

3. $x^4 \pm 6x^2$ 中 x^4 的係數爲1, x^4 是完全平方,$6x^2$中含有 x^4 的平方根x^2,故

若加上一項$\left(\dfrac{6}{2}\right)^2$即$3^2$,則可配成完全平方.(學者試自行覆驗.)

4. $2x^2\pm5x$中x^2的係數不是1,故不能應用上述定理.

5. $y^4\pm4y^3$中y^4的係數爲1,y^4是完全平方,但$4y^3$中不含y^4的平方根y^2,而含y^3,故不能應用上述定理.

6. $x^5\pm2x^3$中x^5不是完全平方,故不能應用上述定理.

問答題42

下列各二項式,那個可以應用上述定理,配成完全平方? 那個不能配成完全平方? 其可以配成完全平方的應加上什麽? 配成平方後的方根應是什麽? 試一一說明牠?

(1) $z^2\pm7z$.　　(2) $x^8\pm2x^2$.

(3) $y^4\pm9y^2$.　　(4) $x^2y^2\pm4xy$.

(5) $7x^2\pm8x$.　　(6) $x^2y^4z^6\pm7xy^2z^3$.

(7) $5y^4\pm y^2$.

第二節　一元二次方程解法

133. 設題272 解一元二次方程式:

$$ax^2+bx+c=0.$$

【解】從方程式 $ax^2+bx+c=0$ ……………(1)

移項,得 $ax^2+bx=-c$ ………(2)

各項用 a 除之,使 x^2 的係數爲 1,得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式的左邊是可以配成完全平方的,配方時應加的項是$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

爲使等號兩邊仍舊相等起見,等號左邊加了$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$,同時右邊一定亦要加$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$,不然兩邊便不相等了.因得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-c \quad \cdots\cdots(4)$$

(4)式的左邊是等於$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$,其右邊則等於$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$;

$$\therefore \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(5)式兩邊開平方,得

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\therefore\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots\cdots(7)$$

在上册第三編裏,曾經講過:凡已經整理好後的一元二次方程,必成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式.故這式可作爲一元二次方程式的標準形式,可以代表一切已經整理好後的一元二次方程.所以設題 272 的解法,亦可代表一切一元二次方程式的解法.這解法叫做配方解法,因其應用配方的方法也.設題 272 的根,亦可作一切一元二次方程式根的公式.若令 α, β 代表 $ax^2+bx+c=0$ 方程式的兩根,則由(7)式,知

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

這兩個公式用處甚大,學者須牢牢記住.並且還要注意下列的幾點:

(1)這兩個公式是代表有 $ax^2+bx+c=0$ 形式方程式的兩個根的.不合這形式的

方程式的根,不能直接用這兩個公式來計算。

(2)公式中的 a 是原方程式中未知數二次項的係數,b 是未知數一次項的係數,c 是已知項。

(3) a, b, c 三數除 $a \neq 0$* 外,可代表任何數.

設題273 試應用一元二次方程式根的公式,求方程式 $3x^2+2x-5=0$ 的根.

【解】 把方程式 $3x^2+2x-5=0$

和方程式 $ax^2+bx+c=0$ 比較,得

$$a=3,\ b=2,\ c=-5.\ (\text{注意})$$

把這 a, b, c 的值代入兩公式,得

$$\alpha=\frac{-2+\sqrt{2^2-4\times3\times(-5)}}{2\times3}$$

$$=\frac{-2+\sqrt{64}}{6}=\frac{-2+8}{6}=1;$$

$$\beta=\frac{-2-\sqrt{2^2-4\times3\times(-5)}}{2\times3}$$

$$=\frac{-2-\sqrt{64}}{6}=\frac{-2-8}{6}=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}.$$

---

*若 $a=0$,則無二次項,要變成一次方程式了.

設題274 試應用一元二次方程式根的公式,求 $(x-3)^2=x(5-3x)$ 的根.

〔解〕 把方程式 $(x-3)^2=x(5-3x)$ 和方程式 $ax^2+bx+c=0$ 比較,形式絕不相同;故必須先將 $(x-3)^2=x(5-3x)$ 整理,使合於標準形式,然後始可應用根的公式來計算.其整理的方法如下:

原方程式去括號,得

$$x^2-6x+9=5x-3x^2 \cdots\cdots(1)$$

(1)式移項,合併同類項,得

$$4x^2-11x+9=0 \cdots\cdots(2)$$

(2)式已合於標準形式,比較結果,

知 $a=4$, $b=-11$(注意),$c=9$.

代入根的公式,得

$$\alpha=\frac{-(-11)+\sqrt{(-11)^2-4\times4\times9}}{2\times4}$$

$$=\frac{11+\sqrt{121-144}}{8}=\frac{11+\sqrt{-23}}{8}$$

$$=\frac{11+\sqrt{23}\,i}{8};$$

$$\beta=\frac{-(-11)-\sqrt{(-11)^2-4\times4\times9}}{2\times4}$$

$$=\frac{11-\sqrt{121-144}}{8}=\frac{11-\sqrt{-23}}{8}$$

$$=\frac{11-\sqrt{23}\,i}{8}.$$

這方程式的根爲虛根.

凡二次方程式一根爲虛根時,他根亦爲虛根.

設題275 解方程式$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{5}{6}$.

[解] 本題是分式方程,故不能逕用二方程根的公式來求得其根;必須先用簡法或去分法(參看第七編第八節)成整方程式而後解之.其化法如下:

把原式左邊通分,得$\frac{4x}{(x-1)(x+1)}=\frac{5}{6}$;

用$6(x-1)(x+1)$乘兩邊,得

$$24x=5(x-1)(x+1);$$

去括號,移項,得　$5x^2-24x-5=0.$

這式和標準形式相合,故可應用根的公式求出 x 如下:

$$x=\frac{24\pm\sqrt{24^2+100}}{10}=\frac{24\pm 26}{10}=5 \text{ 或 } -\frac{1}{5}.$$

【覆驗】 若 $x=5$,

則 $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{5+1}{5-1}-\frac{5-1}{5+1}=\frac{6}{4}-\frac{4}{6}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6};$$

若 $x=-\frac{1}{5}$,

則 $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{-\frac{1}{5}+1}{-\frac{1}{5}-1}-\frac{-\frac{1}{5}-1}{-\frac{1}{5}+1}$

$$=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{6}{5}}-\frac{-\frac{6}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}.$$

故知兩根都是眞根.

設題276 解方程式:

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

【解】 去分母而整理之,得

$$(a+b)x^2-\{(a+b)^2+2ab\}x+2ab(a+b).$$

代入根的公式,得

$$x=\frac{(a+b)^2+2ab\pm\sqrt{\{(a+b)^2+2ab\}^2-8ab(a+b)^2}}{2(a+b)}$$

$$=\frac{(a+b)^2+2ab\pm(a^2+b^2)}{2(a+b)}=a+b \text{ 或 } \frac{2ab}{a+b}.$$

【復驗】 若 $x=a+b$,

則 $$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a};$$

若 $x=\dfrac{2ab}{a+b}$,

則 $$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{\frac{a(b-a)}{a+b}}+\frac{1}{\frac{b(a-b)}{a+b}}$$

$$=\frac{a+b}{b(a-b)}-\frac{a+b}{a(a-b)}$$

$$=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}.$$

故知兩根都是眞根.

設題277 試應用一元二次方程式根的公式,求方程式 $-2y^2+y-7=0$ 的根.

【解】 本方程式中用 y 表未知數,故 y 和標準形式中的 x 相當.比較結果,知 $a=-2$(注意),$b=1$(注意),$c=-7$.(注意)代入根的公式,得

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{1^2-4\times(-2)\times(-7)}}{2\times(-2)}$$

$$=\frac{-1+\sqrt{1-56}}{-4}=\frac{1-\sqrt{-55}}{4}=\frac{1-\sqrt{55}\,i}{4};$$

$$\beta=\frac{-1-\sqrt{1^2-4\times(-2)\times(-7)}}{2\times(-2)}$$

$$=\frac{-1-\sqrt{1-56}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-55}}{4}=\frac{1+\sqrt{55}\,i}{4}.$$

設題278 試用一元二次方程式根的公式,求方程式 $(x-2)^2+3(x-2)-5=0$ 的根.

【解】 本方程式可看作用 $x-2$ 表未知數的,故知

$a=1$,(注意) $b=3$, $c=-5$.

代入根的公式,得

$$x-2=\frac{-3+\sqrt{3^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-3+\sqrt{9+20}}{2}=\frac{-3+\sqrt{29}}{2};$$

$$\therefore\quad x=2+\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$$

$$=\frac{4-3+\sqrt{29}}{2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{29}}{2}.$$

又 $$x-2=\frac{-3-\sqrt{3^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-3-\sqrt{9+20}}{2}=\frac{-3-\sqrt{29}}{2};$$

$$\therefore\quad x=2+\frac{-3-\sqrt{29}}{2}=\frac{4-3-\sqrt{29}}{2}$$

$$=\frac{1-\sqrt{29}}{2}.$$

本方程式的兩根,都含無理數,故叫做無理根.

凡二次方程式一根爲無理根時,他根亦必爲無理根.

演算題 80

先把下列各方程式整理成標準形式,然後用配方解法解之:

(1) $3(x-1)^2=5.$

(2) $(x-4)(x-3)-(x+5)(5x-7)=0.$

(3) $\frac{(2x-5)^2}{3}+\frac{(x+4)^2}{7}=1.$

(4) $\frac{5(x-1)^2}{9}-\frac{(x+15)^2}{21}=2.$

(5) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}.$

(6) $x-\frac{14x-9}{8x-3}=\frac{x^2-3}{x+1}.$

(7) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}.$

(8) $\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$

問答題 43

把下列各方程式和 $ax^2+bx+c=0$ 相比較,指出牠 a, b, c 的對應值:

(1) $7x^2+4x+2=0.$ (2) $-x^2+5x+6=0.$

(3) $3x^2-x+7=0.$ (4) $5x^2+7x-8=0.$

下列各方程式,那幾個可直接用根的公式來求牠的根? 一一指出來:

(5) $x-5=x^2+6x.$ (6) $8x^2-5x+3=0.$

(7) $3x^2+4x-11=0.$ (8) $1-5x+4x^2=0.$

(9) $(3x-5)(x+1)=4.$ (10) $7x-3=10x^2.$

演算題 81

應用根的公式,求問答題43中各方程式的根。

134. 設題279　解方程式$4x^2-8=0$.

【解】(1)把方程式$4x^2-8=0$和方程式$ax^2+bx+c=0$比較,得

$$a=4,\quad b=0,\quad c=-8.$$

代入根的公式,得

$$x=\frac{0\pm\sqrt{0-4\times4\times(-8)}}{2\times4}=\frac{\pm\sqrt{128}}{8}$$

$$=\pm\frac{8\sqrt{2}}{8}=\pm\sqrt{2}.$$

(2)由原方程式移項,得　$4x^2=8$…………(1)

(1)式兩邊各用4除之,得　$x^2=2$…(2)

(2)式兩邊開方,得$x=\pm\sqrt{2}$.

凡不含x項(卽$b=0$)的一元二次方程式,叫做純二次方程式;因其只含未知數的二次項,不含未知數的一次項也。這類方程式的解法,固可以應用根的公式(設題279第一種解法),但尤以用設題279的第二種解法爲便。

設題280　解方程式$10x^2+7x=0$.

【解】(1)把方程式$10x^2+7x=0$和方程式$ax^2+bx+c=0$比較,得

$$a=10,\quad b=7,\quad c=0.\text{(注意)}$$

代入根的公式,得

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times10\times0}}{2\times10}=\frac{-7\pm7}{20}$$

$$=0\text{或}-\frac{7}{10}.$$

(2)把原方程式分析因式,得

$$x(10x+7)=0;\quad\therefore\quad x=0;$$

$$\text{或}\qquad 10x+7=0,\quad\therefore\quad x=-\frac{7}{10}.$$

凡具$ax^2+bx=0$形式的方程式,應用根的公式固可求得其根,然尤以用分析因式的解法爲便.

演算題 83

解下列各方程式:

(1) $ax^2+c=0$. (2) $ax^2+bx=0$.

(3) $4x^2=5x$. (4) $3-6x^2=0$.

(5) $3(x+1)x=3x$. (6) $7x(x-5)=1$.

(7) $\frac{x}{5}+\frac{5}{x}=0$. (8) $\frac{x-1}{4}-\frac{4}{x-1}=1$.

(9) $\frac{1}{7}-\frac{1}{3}x(x+3)=0$.

135. **設題231**　解方程式

$$x^2+Px+Q=0.$$

【解】把方程式$x^2+Px+Q=0$和方程式$ax^2+bx+c=0$比較,得

$$a=1,\quad b=P,\quad c=Q;$$

$$\therefore\quad x=\frac{-P\pm\sqrt{P^2-4Q}}{2}.$$

設題232　解方程式$x^2+2bx+c=0.$

【解】把方程式$x^2+2bx+c=0$和方程式$ax^2+bx+c=0$比較,得

$$a=1,\quad b=2b,\quad c=c.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-2b\pm\sqrt{(2b)^2-4c}}{2}$$

$$=\frac{-2b\pm2\sqrt{b^2-c}}{2}$$

$$=-b\pm\sqrt{b^2-c}.$$

凡未知數二次項的係數爲1的一元二次方程,可用$x^2+Px+Q=0$標準形式表之.其根的公式,可用$x=\dfrac{-P\pm\sqrt{P^2-4Q}}{2}$表之

凡未知數二次項的係數爲 1,一次項的係數爲偶數的一元二次方程,可用 $x^2+2bx+c=0$ 標準形式表之.其根的公式,可用 $x=-b\pm\sqrt{b^2-c}$ 表之.

設題283 解方程式 $x^2-3x+4=0$.

【解】 這方程式 x^2 的係數爲 1,故可應用公式 $x=\dfrac{-P\pm\sqrt{P^2-4Q}}{2}$ 解之.即

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}.$$

設題284 解方程式 $x^2-4x+3=0$.

【解】 這方程式 x^2 的係數爲 1, x 的係數是偶數,故可應用公式 $x=-b\pm\sqrt{b^2-c}$ 解之.這裏所應注意的是: b 的値等於 x 係數的一半,本題中 $b=\dfrac{4}{2}=2$.即

$$x=-2\pm\sqrt{4-3}=-2\pm1=-1 \text{ 或 } -3.$$

演算題 83

解下列各方程式:

(1) $x^2+7x-8=0$.　　(2) $x^2=4+5x$.

(4) $x^2-10x+9=0$.　　(4) $x^2+6=24x$.

第三節　根和係數的關係

136. 設題285　詳細說明一元二次方程根的性質和係數的關係.

【解】一元二次方程的根,或爲實數,或爲虛數,或爲有理數,或爲無理數,或兩根相等,或兩根不同,或兩根都爲正,或兩根都爲負,或一正而一負:凡此種種性質,都和係數有關.茲詳述於下:

(A)根爲實數的條件:

在根的公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 中,若 $b^2-4ac>0$ (卽爲正數),則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 是實數,故 x 亦是實數.

若 $b^2-4ac=0$, 則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 亦是 0, 故 x 亦是實數.

故根爲實數之條件是:

$$b^2-4ac>0,$$

或 $$b^2-4ac=0.$$

把這兩個條件併成一個,則爲

$$b^2-4ac\nless 0.$$

因根的性質可用 b^2-4ac 的大小來判定,故 b^2-4ac 叫做判別式.

根爲實數的條件,既知爲 $b^2-4ac \nless 0$, 但實數中又有有理數和無理數之別,其條件如下:

(a) 根爲有理數的條件:

$b^2-4ac \nless 0$, 且爲完全平方數.

(b) 根爲無理數的條件:

$b^2-4ac \nless 0$, 不是完全平方數.

(B) 根爲虛數的條件:

$b^2-4ac<0$.

(C) 兩根爲同號之實數的條件:

(i) $\sqrt{b^2-4ac}<b$ 的絕對值,

(ii) $b^2-4ac \nless 0$.

(D) 兩根相等的條件:

$b^2=4ac$.

設題 286 判別方程式 $x^2-5x+6=0$ 根的性質.

【解】 因 $b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6$

$=25-24=1>0$,

故知根爲實數.

又因 1 是完全平方數,故知根爲有理數.

設題237 判別方程式 $3x^2+4x+2=0$ 根的性質.

【解】 因 $b^2-4ac=4^2-4\times3\times2=16-24$

$$=-8<0,$$

故知根爲虛數.

設題288 要使方程式 $2x^2-6x+c=0$ 的兩根相等,問 c 應是何數?

【解】 兩根相等的條件是: $b^2=4ac$, 今 $a=2$, $b=-6$,

$$36=4\times2c,$$

$$c=\frac{36}{8}=4\frac{1}{2}.$$

設題289 已知方程式 $5x^2+4x+2k-3=0$ 的兩根爲同號的實根,問 k 應是何數?

【解】 兩根爲同號實數的條件是:

$$\sqrt{b^2-4ac}<b \text{ 的絕對值},$$

$$b^2-4ac\nless 0;$$

故本題的兩根若爲同號的實數,則必有下列兩種關係:

$$\sqrt{16-4\times5(2k-3)}<4 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$16-4\times5(2k-3)\not<0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)式兩邊平方,得

$$16-20(2k-3)<16 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式去括號,移項, $60<40k$;

$$\therefore \quad k>\frac{3}{2}.$$

又由(2)式去括號,移項, $76\not<40k$;

$$\therefore \quad k\not>\frac{19}{10},$$

即 k 的值介於 $\frac{15}{10}\left(\text{即 }\frac{3}{2}\right)$ 和 $\frac{19}{10}$ 之間.

因在 $x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-4\times5(2k-3)}}{2\times5}$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{76-40k}}{10}\text{式中,}$$

若 $k=\frac{15}{10}$,則 $\sqrt{76-40k}=\sqrt{16}=4$,

即一根爲 0 了,故 k 必須較 $\frac{15}{10}$ 稍大.

又若 $k=\frac{19}{10}$, 則 $\sqrt{76-40k}=0$, 即二根相等了,故 k 必須較 $\frac{19}{10}$ 稍小.

惟當 $k=\frac{16}{10}$ 時,

$$\text{則}\quad x=\frac{-4\pm\sqrt{76-64}}{10}=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{10}$$

$$=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{10}=\frac{1}{5}(-2\pm\sqrt{3})$$

$$=\frac{1}{5}(-2+1.732)=-0.0536;$$

$$\text{或}\quad =\frac{1}{5}(-2-1.732)=-0.746.$$

兩根爲同具負號的實數.

$k=\frac{17}{10}$ 或 $\frac{18}{10}$ 時,亦可得同具負號的兩實根.學者試仿此求之.

演算題 84

判別下列各方程式根的性質:

(1) $4x^2+13x+3=0$.　(2) $8x^2-21x+7=0$.

(3) $3x^2-4x-7=0$.　(4) $9x^2-30x+25=0$.

(5) $5x^2-3x+2=0$.　(6) $a^2x^2-2abx+b^2=0$.

(7) $x^2-(a-b)x+ab=0.$

(8) $4x^2+4(a+c)x-(b^2-4ac)=0.$

(9) 已知$3mx^2-4x+5=0$的兩根相等,求m.

(10) 已知$(1-2k)x^2-3x+3=0$的根是虛數,求k.

137. 設題290 詳細說明一元二次方程兩根的和,兩根的積,各與係數的關係.

【解】用a除方程式$ax^2+bx+c=0$的各項,使x^2的係數爲1(注意)則得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

又方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根α, β是:

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)+(2),

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1) × (2),

$$\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又方程式 $x^2+Px+Q=0\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$

的兩根是:

$$\alpha=\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\beta=\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(5) + (6),

$$\alpha+\beta=\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2}+\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}$$

$$=\frac{-2P}{2}=-P\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

(5) × (6),

$$\alpha\beta=\left(\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2}\right)\left(\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}\right)$$

$$=\frac{P^2-(P^2-4Q)}{4}=\frac{4Q}{4}=Q\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

又方程式$x^2+2bx+c=0$ ······(C)

的兩根是:

$$\alpha=-b+\sqrt{b^2-c} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\beta=-b-\sqrt{b^2-c} \quad \cdots\cdots(10)$$

(9)+(10), $\alpha+\beta=-2b$ ······(11)

(9)×(10), $\alpha\beta=b^2-(b^2-c)=c$ ······(12)

現在試把(3)式的結果,和(A)式的係數比較,知道:

二根的和的絕對值,和(A)式中x項的係數的絕對值相同,而符號相反.

(一個是$-\frac{b}{a}$,一個是$\frac{b}{a}$.)

試把(7)式的結果,和(B)式的係數比較,知道:

二根的和的絕對值,和(B)式中x項的係數的絕對值相同,而符號相反.

(一個是$-P$,一個是P.)

試把(11)式的結果,和(C)式的係數比較,知道:

二根的和的絕對值,和(C)式中x項的係數的絕對值相同,而符號相反.(一個是$-2b$,一個是$2b$.)

歸納上面三種比較結果,可得一元二次方程二根的和與係數的關係如下:

當一元二次方程式未知數二次項的係數爲$+1$時(注意),其二根和的絕對值,必和方程式中未知數一次項的係數的絕對值相同,而符號相反.

又把(4)式的結果,和(A)式的係數比較,知道:

二根的積,與(A)式中不含x的項完全相同.(絕對值和符號都相同.都是$\frac{c}{a}$.)

又把(8)式的結果,和(B)式的係數比較,知道:

二根的積,與(B)式中不含x的項完全相同.(都是Q.)

又把(12)式的結果,和(C)式的係數比較,知道:

二根的積,與(C)式中不含 x 的項完全相同.（都是 c.）

歸納上面三種比較的結果,可得一元二次方程二根的積與係數的關係如下:

當一元二次方程式未知數的二次項的係數爲 +1 時（注意）,其二根的積,必和方程式中不含未知數的項,完全相同.

設題 291 求方程式 $x^2-3x-10=0$ 二根的和及二根的積.

【解】 本方程式中 x^2 的係數已爲 1,故若二根爲 α,β. 則必

$$\alpha+\beta=-(-3)=3,$$

$$\alpha\beta=-10.$$

【覆驗】 用分析因式法解本題,得

$$(x-5)(x+2)=0;\quad\therefore\quad \alpha=5,\quad \beta=-2.$$

因得 $\quad \alpha+\beta=5-2=3,$

$$\alpha\beta=5\times(-2)=-10.$$

與上面所得的,完全相同.

設題292 求方程式 $2x^2+5x=112$ 兩根的和及兩根的積.

【解】 先把 112 移項,使成合於標準形式的方程式

$$3x^2+5x-112=0.$$

次用 3 除各項,使成 x^2 的係數爲 1 的方程式

$$x^2+\frac{5}{3}x-\frac{112}{3}=0.$$

故若原方程式的兩根爲 α, β, 則

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{3}, \qquad \alpha\beta=-\frac{112}{3}.$$

【覆驗】 用分析因式法,得

$$(3x-16)(x+7)=0;$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{16}{3}, \qquad \beta=-7.$$

$$\alpha+\beta=\frac{16}{3}-7=\frac{+16-21}{3}=-\frac{5}{3};$$

$$\alpha\beta=\frac{16}{3}\times(-7)=-\frac{112}{3}.$$

問答題 44

口述下列各方程式兩根的和及兩根的積.

(1)　$x^2-4x+5=0$.　　(2)　$7=x-x^2$.

(3)　$3x^2-x=10$.　　(4)　$-5x^2-2x+7=0$.

演算題 85

設 α,β 表下列各方程式的兩根,試求各方程式中 $\alpha-\beta$ 的值.並用歸納法推得一元二次方程式兩根的差與係數的關係.

(1)　$x^2+2x+1=0$.　　(2)　$x^2-x-20=0$.

(3)　$2x^2+7x+3=0$.　　(4)　$8=3(x-1)x$.

(5)　$ax^2+bx+c=0$.　　(6)　$x^2+Px+Q=0$.

138. 設題 293　已知一元二次方程的二根爲 α,β, 試求這方程式.

【解】 這方程式未知數的二次項的係數設爲1,則一次項的係數必是 $-(\alpha+\beta)$, 不含 x 的項必是 $\alpha\beta$.故若用 x 表未知數,則所求的方程式是:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

若 $\alpha+\beta$ 或 $\alpha\beta$ 的值爲分數時,則可用分母徧乘式中各項來化簡牠.

設題 294　已知一元二次方程式的兩根是 3 和 -4, 求這方程式.

【解】 $3+(-4)=-1$, 故這方程式中未知數一次項的係數是 $-(-1)=+1$. 不含未知數的項是 $3\times(-4)=-12$. 若用 y 表未知數,則所求的方程式是:

$$y^2+y-12=0.$$

設題 295 已知一元二次方程式的兩根是 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{4}{5}$,求這方程式.

【解】 所求的方程式是

$$x^2-\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)x+\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=0.$$

就是: $$x^2-\frac{22}{15}x+\frac{8}{15}=0.$$

用分母15徧乘各項,得

$$15x^2-22x+8=0.$$

演算題 86

求作以下列各組數爲根的一元二次方程式:

(1) $7, 4.$　　(2) $3, 5\frac{1}{2}.$

(3) $-6, -\frac{1}{3}.$　　(4) $5, -\frac{3}{7}.$

(5) $\frac{4}{7}, -\frac{2}{11}.$

139. 設題296 設 α,β 是 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根,求作以 α^2,β^2 爲根的方程式.

【解】 (1) 因 α,β 是 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根,

$$\therefore\quad \alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\cdots\cdots(2)$$

$$(1)^2,\quad \alpha^2=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$$

$$=\frac{b^2+(b^2-4ac)-2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}$$

$$=\frac{2b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{2a^2}\quad\cdots\cdots(3)$$

$$(2)^2,\quad \beta^2=\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a^2}\right)^2$$

$$=\frac{b^2+(b^2-4ac)+2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}$$

$$=\frac{2b^2-4ac+2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-2ac+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a^2}\quad\cdots\cdots(4)$$

$$\therefore\quad \alpha^2+\beta^2=\frac{2b^2-4ac}{2a^2}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\ \cdots\cdots(5)$$

$$\alpha^2\beta^2=\frac{(b^2-2ac)^2-b^2(b^2-4ac)}{4a^4}$$

$$=\frac{4a^2c^2}{4a^4}=\frac{c^2}{a^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

而所求的方程式應爲

$$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0,$$

把(5)(6)兩式的值代入,得

$$x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0;$$

用a^2偏乘各項,得

$$a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0.$$

這就是所求的方程式.

(2) 因α,β爲$ax^2+bx+c=0$的兩根,

$$\therefore\quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$$

$$=\frac{b^2-2ac}{a^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\alpha^2\beta^2=\frac{c^2}{a^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(7)(8)兩式結果和(5)(6)兩式結果完全相同,故代入方程式時所得最後的結果亦相同.

上面兩種解法所得結果相同,而繁簡則相差甚遠,學者應深切注意.

設題297 求作以方程式$7x^2-4x-3=0$的兩根和及兩根差爲根的方程式.

【解】 設方程式 $7x^2-4x-3=0$ 的兩根爲 α,β, 則

$$\alpha+\beta=\frac{4}{7} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha\beta=-\frac{3}{7} \quad \cdots\cdots(2)$$

而 $$\alpha-\beta=\pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2+\frac{4\times3}{7}}=\pm\sqrt{\frac{100}{49}}$$

$$=\pm\frac{10}{7},$$

$\because$ $$-\{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\}=-\left(\frac{4}{7}\pm\frac{10}{7}\right)$$

$$=-2 \text{ 或 } \frac{6}{7};$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\frac{4}{7}\times\left(\pm\frac{10}{7}\right)=\pm\frac{40}{49}.$$

故所求的方程式是

$$49x^2-98x+40=0;$$

或 $$49x^2+42x-40=0.$$

演算題 87

設 α,β 是方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根,試作以下列各組數爲根的方程式:

(1) $\alpha\beta,\ \frac{1}{\alpha\beta}.$　　(2) $\alpha+\beta,\ \frac{1}{\alpha+\beta}.$

(3) $\alpha+\frac{1}{\beta},\ \beta+\frac{1}{\alpha}.$　　(4) $\frac{1}{\alpha+2\beta},\ \frac{1}{\beta+2\alpha}.$

(5) 若方程式 $x^2+px+q=0$ 的一根是又一根的二倍,求 p 與 q 間的關係.

140. 設題 298 試應用根和係數的關係,分析 ax^2+bx+c 的因式.

【解】 $$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

若 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根爲 $\alpha,\ \beta$, 則

$$\frac{b}{a}=-(\alpha+\beta),$$

$$\frac{c}{a}=\alpha\beta.$$

代入上式,得

$$ax^2+bx+c=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

若用根的公式代入,則得

$$ax^2+bx+c$$

$$=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

這式可作爲一元二次式分析因式的公式.應用這公式就是含有根式的因式,亦可分出.

設題299 應用前題公式,分析下列各式的因式:

(1) $x^2+6x+7.$

(2) $x^2+x-(a^2+a).$

(3) $7x^2-44x-35.$

[解] (1) $x^2+6x+7=\left(x-\frac{-6+\sqrt{36-28}}{2}\right)$

$$\times\left(x-\frac{-6-\sqrt{36-28}}{2}\right)$$

$$=\left(x-\frac{-6+2\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{-6-2\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=(x+3-\sqrt{2})(x+3+\sqrt{2}).$$

(2) $x^2+x-(a^2+a)$

$$=\left(x-\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4(a^2+a)}}{2}\right)$$

$$\times\left(x-\frac{-1-\sqrt{1^2+4(a^2+a)}}{2}\right)$$

$$=\left(x-\frac{-1+2a+1}{2}\right)\left(x-\frac{-1-2a-1}{2}\right)$$

$$=(x-a)(x+a+1).$$

(3) $7x^2-44x-35$

$$=7\left(x-\frac{44+54}{14}\right)\left(x-\frac{44-54}{14}\right)$$

$$=7(x-7)\left(x+\frac{5}{7}\right)=(x-7)(7x+5).$$

演算題 88

應用設題 298 所得公式,分析下列各式的因式:

(1) $x^2-5x-40.$　(2) $3x^2+x-4.$

(3) $7x^2-4x+6.$　(4) $5x^2-6x+7.$

(5) $8x^2+3x-7.$　(6) $4x(x-8)+9.$

(7) $5(x^2-3)+x.$　(8) $x^2-7(x+1),$

(9) $x^2+ax+a^2.$

第四節　一元二次方程應用問題

141. 設題300 某家所有兒童人數的

7倍,比其人數平方的 2 倍多12.求人數.

【解】 設某家有兒童 x 人,依題意,得方程式如下:

$$11x=2x^2+12.$$

移項整理, $2x^2-11x+12=0.$

應用公式,

$$\alpha=\frac{11+\sqrt{11^2-4\times2\times12}}{4}=\frac{11+5}{4}=4;$$

$$\beta=\frac{11-\sqrt{11^2-4\times2\times12}}{4}=\frac{11-5}{4}=\frac{3}{2}.$$

即兒童人數爲 4 人或 $\frac{3}{2}$ 人.但人數不應有分數,故 $\frac{3}{2}$ 不合題意,適合本題的祇有一個答數 4.

設題301 一竿長尺數的11倍,比其尺數平方的 2 倍多12.求尺數.

【解】 本題中所述未知數與已知數間的關係,完全和上題相同.故所得答數亦爲 4 和 $\frac{3}{2}$.不過本題所求的是尺數,尺數是整數,分數都合理的.故本題有兩個合

題的答數:一個是4尺,一個是$\frac{3}{2}$即$1\frac{1}{2}$尺.

設題302 某數與其平方根的和,等於90.求某數.

【解】 設某數為x,則其平方根為$\sqrt{x}$,依題得方程式如下:

$$x+\sqrt{x}=90.$$

移項,令$\sqrt{x}$獨居等號的一邊,得

$$\sqrt{x}=90-x.$$

兩邊平方,　　$x=(90-x)^2.$

整理,　　$x^2-181x+8100=0.$

分析因式,　$(x-100)(x-81)=0.$

$\therefore$　　$x=100$或$81.$

若$x=81$,則$\sqrt{81}=9$, $81+9=90$;故81適合題意.

若$x=100$,則$\sqrt{100}=10$, $100+10\neq 90$;故100似不合題意.

然若仔細一想,則$\sqrt{100}$應有二根:一個是10,一個是-10;假使取牠負根,則$100-10=90$.故100亦合題意.

設題303 父子年齡的和爲 100, 父子年齡的積之$\frac{1}{10}$,比父年多 180. 求父子的年齡.

[解] 設父年爲 x 歲,則子年爲 $100-x$ 歲,依題得方程式如下:

$$\frac{1}{10}x(100-x)=x+180.$$

整理, $x^2-90x+1800=0.$

分析因式, $(x-60)(x-30)=0.$

$\therefore$ $x=60$ 歲或 30 歲.

若父年爲60歲,則子年爲 $100-60=40$ 歲,父大子小,適合題意.

若父年爲40歲,則子年爲 $100-40=60$ 歲.父小子大,不合題意.

故本題適合的答數,只有父年60歲,子年40歲一組.若把題中父子二字,改做甲乙二字,則可得甲年60歲,乙年40歲,或甲年40歲,乙年60歲的兩組答數了.

設題304 販貨一宗,賣得 144 元;其賺率等於買價和 100 的比.求買價.

【解】 設買價爲 x 元,則賺率爲 $\frac{x}{100}$;賣價等於 $x\left(1+\frac{x}{100}\right)$.故得方程式如下:

$$x\left(1+\frac{x}{100}\right)=144.$$

整理, $x^2+100x-14400=0.$

分析因式, $(x-80)(x+180)=0.$

$\therefore$ $x=80$ 或 $-180.$

負數不合題意,故買價爲80元.

設題305 某人現年38歲,問再隔幾年後,其年齡的平方,比兩年後年齡的20倍多100?

【解】 設再隔 x 年後的年齡,合於這條件,則得方程式如下:

$$(x+38)^2=20\times(38+2)+100;$$

即 $(x+38)^2=900.$

$\therefore$ $x+38=\pm30,$

$$x=-38\pm30=-8;\text{ 或 }-68.$$

所得兩根都是負數,就是再隔 -8 年,或再隔 -68 年後,這人的年齡可以合此條件.因負和正處於反對的地位,故 -8 年後,可作 8 年前講;-68 年後可作68年前講.但某人現年祇38歲,距今68年前某人尚未生,年齡是不能有負數的,故68年前一答數不合題意.本題適合的答數為 8 年前,因在 8 年前某人為 $38-8=30$ 歲,$30^2=900=20\times(38+2)+100$ 也.

設題306 有兵一隊,變換陣形.當排成實心方陣時,最外層每邊人數,比排成厚 4 層的中空方陣時少16人.求兵士人數.

【解】 令實心方陣最外層每邊人數為 x,則中空方陣最外層每邊人數為 $x+16$. 然排方陣時,每層每邊必相差 2 人,故這中空方陣若於中空處補實人數,則補入的小方陣最外一層每邊人數必為 $x+16-2\times4=x+8$. 因得方程式如下:

$$x^2=(x+16)^2-(x+8)^2.$$

$$x^2=16x+192;$$

$$\therefore \qquad x^2-16x-192=0.$$

分析因式， $(x-24)(x+8)=0.$

$$\therefore \qquad x=24 \text{ 或 } -8.$$

負數不合理,故所求人數是 $24^2=576$ 人.

設題 307 分 a 成兩份,使兩份相乘的積等於兩份平方的和.

【解】 令一份爲 x,則他一份必爲 $a-x$. 故得方程式如下:

$$x(a-x)=x^2+(a-x)^2.$$

整理， $3x^2-3ax+a^2=0.$

應用公式，

$$x=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2-12a^2}}{6}=\frac{a(3\pm\sqrt{3}i)}{6}.$$

所得的根是虛數,故知任何數不能依本題的條件分做二份.

設題 308 張王二生解同一一元二次方程式.張生把原式中 x 的係數抄錯,因而求得的根是 6 和 1.王生因把原題中不含 x 的項抄錯,因而求得的根是 4 和 1.求原題和根.

【解】 由題意可知:

張生抄錯後的方程式是:

$$x^2-(6+1)x+6\times1=0.$$

王生抄錯後的方程式是:

$$x^2-(4+1)x+4\times1=0.$$

故知原題是 $x^2-5x+6=0.$

$$\therefore \quad x=2 \text{ 或 } 3.$$

由設題300——308的解法,可得解一元二次方程應用問題的步驟如下:

(1)認淸題目的意思,決定用 x 表未知數的全部或一部,使可得極簡單方程式.(在設題306中試用 x 表全體人數,把所得方程式和解法中所得方程式比較,看繁簡如何.)

(2)依題中未知數和已知數的關係,列出方程式.

(3)解方程式.(隨便用那種方法,最好選用頂便當的一種.)

(4)把所得的根和題中實際條件相參合,以定取舍.

演算題 89

(1) 某數的平方,與其$\frac{1}{2}$的平方,$\frac{1}{3}$的平方的和,等於 549. 求這數.

(2) 相隣二個正偶數平方的和,等於 884. 求這二數.

(3) 二數的和是$2c$,其平方的和是$2a^2$.求這二數.

(4) 把 $5a+\frac{b}{5}$ 分做二份,使各份平方的和等於 $13\left(a^2+\frac{b^2}{25}\right)$.

(5) 甲乙二數的比是$\frac{5}{4}$,若各加15而平方起來,則兩方數的差是 999. 求甲乙二數.

(6) 二數的和是20,其立方的和是2540. 求這二數.

(7) 一長方田的兩邊相差 5 丈,其面積是 176 方丈.求長闊.

(8) 一長方田的周圍長42丈,面積是 108 方丈.求長闊.

(9) 直角三角形二股的和長23尺,斜邊長17尺.問二股各長多少?

(10) 從長方形紙板的四角,各剪去每邊長 2.5 寸的小正方塊後,造成一長方形的紙匣,其容積爲80立方寸.求原有紙板的長闊.

(11)　本金2000元,一年後再加900元於本利和,作爲第二次本金,再過一年,共得本利和3100元.若第一年的利率和第二年的利率相等,求利率.

(12)　物理學中關於落體速度(v),時間(t),和距離(s)的公式如下:

$$s=vt-16t^2.$$

設有一彈用每秒200尺的速度向空中放射,問經幾秒鐘後,彈距地600尺?　經幾秒鐘後,彈始着地?　當$t=0$時,其意義如何?

(13)　長方形長闊間的比,美術家以爲在$\frac{w}{l}=\frac{l}{l+w}$時爲最悅目.式中$l$表長,$w$表闊,試根據此式,求得用$w$表$l$的公式.由此公式再求出闊6尺的長方形,應以長幾尺時爲最合式?又若已知長方形的周圍長p尺,試求合於上式的l,w,各長多少（用p表出）?

(14)　學生排隊,排成一大實心方陣,或兩小實心方陣.排成兩方陣時,其最外層每邊人數,一比大方陣最外層每邊人數少1,一比大方陣最外層每邊人數少8,求學生人數.

(15)　兄弟年齡的和是35,年齡的積是兄10年後年齡的10倍.求二人的年齡.

本編摘要

一元二次方程式標準形式
(1) $ax^2+bx+c=0.$
($a\neq 0$, b, c 可爲任何數.)
(2) $x^2+Px+Q=0.$
(3) $x^2+2bx+c=0.$

根的公式
(1) $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$
(標準形式(1)的根.)
(2) $x=\dfrac{-P\pm\sqrt{P^2-4Q}}{2}.$
(標準形式(2)的根.)
(3) $x=-b\pm\sqrt{b^2-c}.$
(標準形式(3)的根.)

根和係數的關係
(1) 根的性質,依判別式 $\sqrt{b^2-4ac}$, $\sqrt{P^2-4Q}$ 或 $\sqrt{b^2-c}$) 的值而決定.
(2) 兩根的和,等於 x^2 的係數爲 1 時 x 的係數的異號數(即絕對值相等,符號相反).兩根的積,等於不含 x 的項.

一元二次式分析因式的公式

$$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\times\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

解應用題的步驟
(1)認清題意,用 x 表適當數.
(2)依題意立方程式.
(3)解方程式.
(4)依題目特性,決定所得根的取舍.

第十一編

可化為二次方程的簡易高次方程

第一節　一元高次方程

142. 設題309　求 1 的立方根.

【解】 設 1 的立方根為 x, 則 x^3 必等於 1. 故得方程式如下:

$$x^3 = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) 式是 x 的三次方程式. 這種高於二次的方程式, 總稱高次方程. 高次方程的一般解法, 不在本書範圍之內. 現在僅就易於分析因式的幾個簡易高次方程, 示其解法.

(1) 式移項, 得

$$x^3 - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) 式的左邊, 可看做兩個立方之差. 故得依特殊積公式六, 分析因式如下:

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0.$$

若 $x-1=0$, 則 $x=1$.

若 $x^2+x+1=0$, 則

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{}.$$

故1的立方根有1, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 及

$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 三個;一個是實數,兩個是虛數.

這兩虛根之間,又有奇特的關係;試看下列二式:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1^2+2(-1)\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2}{4}$$

$$=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1^2-2(-1)\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2}{4}$$

$$=\frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

故若用 ω 代 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,則 $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\omega^2$.

若用ω代$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,則$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega^2$.

故x的立方根,亦可用$1, \omega, \omega^2$三式表之.

設題310　解方程式

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=24.$$

【解】這方程式的左邊,是四個x一次式的連乘積,故為四次式.若整理成一四次方程,再行分析因式則甚難.若用下面解法,則比較容易:

因　$$x(x+3)=x^2+3x,$$

$$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2,$$

兩式中所含未知項完全相同,故把原方程式先變成下式:

$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)-24=0.$$

若用y代x^2+3x,則成$y(y+2)-24=0$.

即　$y^2+2y-24=0$.

$\therefore$　$y=-6$或4.

就是　$x^2+3x+6=0$,　或$x^2+3x-4=0$.

由這兩個二次方程式,可得x的根如下:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-24}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{15}\,i}{2};$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm5}{2}=1\text{ 或 }-4.$$

故原方程式有四根,兩個是實數(1, -4);兩個是虛數$\left(\frac{-3\pm\sqrt{15}\,i}{2}\right)$.

設題311 解方程式$2x^6+x^3-15=0$.

【解】因式中只含有x^6和x^3兩未知項,而$x^6=(x^3)^2$,故若令$x^3=y$,則$x^6=y^2$.

代入原式,得 $2y^2+y-15=0$.

解之,得 $y=-3$,或$\frac{5}{2}$.

就是 $x^3=-3$,或$x^3=\frac{5}{2}$.

若 $x^3=-3$, 則 $x^3+3=0$,

$$(x+\sqrt[3]{3})\{x^2-\sqrt[3]{3}\,x+(\sqrt[3]{3})^2\}=0.$$

$$\therefore\quad x=-\sqrt[3]{3},$$

$$\text{或 }\sqrt[3]{3}\left(\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right)=\sqrt[3]{3}\,\omega.$$

$$\text{或 }\sqrt[3]{3}\,\omega^2.$$

若　$x^3=\frac{5}{2}$, 則

$$x=\sqrt[3]{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt[3]{20}}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{20\times 1})$$

$$=\frac{\sqrt[3]{20}}{2}\times\sqrt[3]{1}=\frac{\sqrt[3]{20}}{2}(1,\omega\text{ 或 }\omega^2)$$

$$=\frac{\sqrt[3]{20}}{2}\text{ 或 }\frac{\sqrt[3]{20}}{2}\omega\text{ 或 }\frac{\sqrt[3]{20}}{2}\omega^2.$$

由設題310——311的解法,可知簡易的一元高次方程,若易於分析成二次以下的因式,或其高次項可用他文字替代而化成二次式時,則可應用二次方程解法解之。

演算題 90

解下列方程式:

(1)　$x^4=1.$

(2)　$2x^4-5x^2+2=0.$

(3)　$(x^2+x+1)^2=3x^2+3x+1.$

(4)　$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+7\left(x+\frac{1}{x}\right)=4.$

(5)　$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=40.$

(6)　$x^4+x^3+x^2+x+1=0.$（這題可先用x^2偏除各項,並用y代$x+\frac{1}{x}$而後解之。）

第二節 無理方程式

143. 設題312 解方程式:

$$3\sqrt{2x+3}-2x=3.$$

【解】 這方程式中的未知數 x,有含在根號內的.這種方程式,叫做無理方程式.無理方程式的通常解法,先須除去根號.然亦有因題中情形,可用特別解法的.本題的兩種解法如下:

(1) 通常解法:

由原式移項,得 $3\sqrt{2x+3}=2x+3.$

兩邊平方 $9(2x+3)=(2x+3)^2.$

整理, $2x^2-3x-9=0.$

$$\therefore\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{4}=\frac{3\pm 9}{4}=3\text{ 或 }-\frac{3}{2}.$$

【覆驗】 若 $x=3$, 則

$$3\sqrt{2x+3}-2x=3\sqrt{6+3}-2\times 3=9-6=3;$$

若 $x=-\frac{3}{2}$, 則

$$3\sqrt{2x+3}-2x$$
$$=3\sqrt{2\left(-\frac{3}{2}\right)+3}-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$=0+3=3.$$

故兩根都合題.

(2)特別解法:

因本題中根號內的代數式是$2x+3$,移項後不含在根號內的代數式亦是$2x+3$.有這特別情形,故可用特別解法.

令 $\sqrt{2x+3}=y$, 則 $2x+3=y^2$.

代入原式而整理之, $y^2-3y=0$.

$\therefore \quad y=0$, 或 3.

若 $y=0$, 則 $\sqrt{2x+3}=0$;

$\therefore \quad 2x+3=0, \quad x=-\frac{3}{2}$.

若 $y=3$, 則 $\sqrt{2x+3}=3$.

$\therefore \quad 2x+3=9, \quad x=3$.

設題313 解方程式:

$$\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{2x+8}.$$

【解】 $(\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19})^2=(\sqrt{2x+8})^2$,

$3x-3+2\sqrt{(3x-3)(5x-19)}+5x-19$

$=2x+8$,

$\sqrt{(3x-3)(5x-19)}=15-3x$,

$(3x-3)(5x-19)=(15-3x)^2$,

$$x^2+3x-28=0,$$

$$(x+7)(x-4)=0, \quad \therefore \quad x=-7\text{或}4.$$

【覆驗】 若 $x=4$, 則

$$\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{12-3}+\sqrt{20-19}$$
$$=3+1=4;$$

$$\sqrt{2x+8}=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4.$$

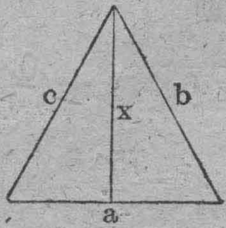
若 $x=-7$, 則

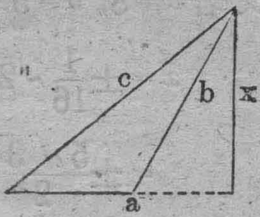
$$\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}$$
$$=\sqrt{-21-3}+\sqrt{-35-19}$$
$$=2\sqrt{6}i+3\sqrt{6}i=5\sqrt{6}i,$$
$$\sqrt{2x+8}=\sqrt{-14+8}=\sqrt{6}i.$$

故 4 合題, -7 不合題. 若 $\sqrt{5x-19}$ 和 $\sqrt{2x+8}$ 之前都取負號,則 -7 亦能適合.(因根號之前,原可有正負二號也.)

設題 314 設三角形三邊的長,各爲 a, b, c. 求對於 a 邊的高.

【解】 設對於 a 邊的高爲 x, 因 a 邊和 b 邊的交角或爲銳角,或爲鈍角,可得兩圖如下:





由幾何學中直角三角形三邊的關係,從(1)(2)圖可得方程式(1);(2)如下:

$$\sqrt{c^2-x^2}+\sqrt{b^2-x^2}=a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\sqrt{c^2-x^2}-\sqrt{b^2-x^2}=a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

用設題 313 的解法,解(1),(2)兩方程式,得同樣的結果:

$$x=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+c-a)}.$$

若　$a=4,\quad b=5,\quad c=7,$ 則

$$x=\pm\frac{1}{8}\sqrt{16\times6\times2\times8}=\pm2\sqrt{6};$$

$$x^2=24.$$

代入(1)式, $\sqrt{49-24}+\sqrt{25-24}=5+1\neq4;$

故不合題,然若代入(2)式,則

$$\sqrt{49-24}-\sqrt{25-24}=5-1=4;$$

即合題了.

又若$a=8,\ b=5,\ c=7,$則

$$x=\pm\frac{1}{16}\sqrt{20\times10\times6\times4}=\pm\frac{40\sqrt{3}}{16}$$

$$=\pm\frac{5\sqrt{3}}{2};\qquad x^2=\frac{75}{4}.$$

代入(2)式

$$\sqrt{49-\frac{75}{4}}-\sqrt{25-\frac{75}{4}}=\frac{11}{2}-\frac{5}{2}=\frac{6}{2}$$

$$=3\neq8;$$

故不合題.然若代入(1)式,則

$$\sqrt{49-\frac{75}{4}}+\sqrt{25-\frac{75}{4}}=\frac{11}{2}+\frac{5}{2}=\frac{16}{2}=8;$$

卽合題了.

若用圖來解釋,極易明白.因當$a=4,$ $b=5,\ c=7$時,$a,\ b$兩邊相交成鈍角,故當用方程式(2).當$a=8,\ b=5,\ c=7$時,$a,\ b$兩邊相交成銳角,故當用方程式(1).若當立方程式時,既不仔細考慮,解得根後,又不加以覆驗,或雖加覆驗,而不推求其不合題的根,如何可以合題之理,則容易發生錯誤了.

由設題312——314的解法,可得解無理方程式的通則如下:

(1)用最簡捷的方法,消去根號.若用一次乘方不能消去時,可用多次乘方消去之.

(2)消去根號後,照二次方程解法,解出未知數.

(3)解得的根,必須代入原式加以覆驗,看是否合題.

(4)不合本題的根,何自而來,對於那種方程式,則可適合,亦應注意.

演算題 91

(1) 設題 313 中的方程式,試先改成下式而後解之:

$$(\sqrt{3x-3}-\sqrt{2x+8})^2=(-\sqrt{5x-19})^2.$$

(2) 寫出解設題314中(1),(2)兩方程式的算草.

解下列各無理方程式:

(3) $\sqrt{x+13}-\sqrt{x-13}=6.$

(4) $\sqrt{x^2+5x+2}=5-\frac{x}{2}.$

(5) $\sqrt{x+3}-6=\sqrt{2x-3}.$

(6) $5\sqrt{1-x^2}=7-5x.$

(7) $\sqrt{x+20}+\sqrt{x+4}=2\sqrt{x+11}$.

(8) $\sqrt{x+7-\sqrt{5(x-2)}}=3$.

(9) $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=a-b$.

(10) $\sqrt{a(x-b)}+\sqrt{b(x-a)}=x$.

(11) 三角形的三邊,各長 9 寸,7 寸,8 寸;試求對 9 寸一邊的高.

(12) 長方形的闊 5 尺,對角線比長邊長 1 尺;求長邊.

第三節 二次聯立方程式

144. 設題 315 解下列聯立方程式:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=4 \quad \cdots\cdots(1)\\ x^2+y^2&=40 \quad \cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}$$

【解】 (1) 通常解法:

由(1)式解出 x(卽視 y 爲已知數),得

$$x=y+4 \quad \cdots\cdots(3)$$

把(3)式中 x 的值代入(2),

$$(y+4)^2+y^2=40 \quad \cdots\cdots(4)$$

整理(4)式而解之,得 $y=2$, 或 -6.

$$\left.\begin{aligned}&\text{若}\quad y=2\\ &\text{則}\quad x=2+4=6\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}&\text{若}\quad y=-6\\ &\text{則}\quad x=-6+4=-2\end{aligned}\right\}$$

(2) 特別解法:

(2)式減去(1)式的平方,得

$$2xy=24 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)式加(3)式

$$x^2+2xy+y^2=64 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4)式兩邊開方,

$$x+y=\pm 8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

從(1),(5)兩式可得下列兩組一次聯立方程式:

$$\left.\begin{aligned}x-y&=4\\x+y&=8\end{aligned}\right\}(1) \qquad \left.\begin{aligned}x-y&=4\\x+y&=-8\end{aligned}\right\}(2)$$

解之,得

$$\left.\begin{aligned}x&=6\\y&=2\end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned}x&=-2\\y&=-6\end{aligned}\right\}.$$

設題316 解下列聯立方程式:

$$\left.\begin{aligned}2x^2+4y^2-z^2+6yz-8zx+15xy+51x+18y+8&=0 \cdots(1)\\2x-4y-16z+26&=0 \cdots(2)\\5x+3y-z&=0 \cdots(3)\end{aligned}\right\}$$

【解】 由(2),(3)兩式消去 z, 解出 y; 得

$$y=(1-3x)\div 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(2),(3)兩式消去 y,解出 z;得

$$z=(x+3)\div 2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

用(4),(5)兩式中 y; z 的值代入(1),得

$$2x^2+(1-3x)^2-\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{3(x+3)(1-3x)}{2}$$

$$-4(x+3)x+\frac{15(1-3x)x}{2}+51x$$

$$+9(1-3x)+8=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

整理(6)式,得 $x^2=1.\quad\therefore\quad x=\pm1$

$$\left.\begin{array}{l}\text{若}\quad x=1\\ \text{則}\quad y=\dfrac{1-3}{2}=-1\\ \qquad z=\dfrac{1+3}{2}=2\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\text{若}\quad x=-1\\ \text{則}\quad y=\dfrac{1+3}{2}=2\\ \qquad z=\dfrac{-1+3}{2}=1\end{array}\right\}$$

由設題 315 和 316 的解法,可知二次聯立方程式中僅含一個二次方程時,其通常解法如下:

(1)在幾個未知數中,先假定一個作已知數.(如設題 315 中的 y,設題 316 中的 x.)

(2)從題中一個或幾個一次方程,解出

其餘未知數和這假定已知數的關係.(設題 315 中的(3)式,設題 316 中的(4),(5)兩式.)

(3)用各未知數的等值,代入原方程式,得僅含假定已知數的一元方程式,解之,即得假定已知數之值.

(4)把假定已知數的值,代入各關係式,即得各未知數的值.

特別解法須隨各題的特別情形而定.設題 315 中因有 $x-y=4$ 一式,故若能設法求出 $x+y$ 之值,則 x, y 之值不難求出.故這法可叫做和差法.凡二次聯立方程式中已有了 $x+y=a$,或 $x-y=a$ 兩式中的一式,且二次方程中 x^2 和 y^2 的係數相等時,大都可用這和差法來求解.

演算題 92

(1) 試假定 x 為已知數,來解設題315.

(2) 試假定 y 為已知數,來解設題316.

用通常解法解下列各方程式:

(3) $\left.\begin{aligned}x-y=2\\3x^2-2xy=5\end{aligned}\right\}.$　(4) $\left.\begin{aligned}2x-5y=3\\x^2+xy=20\end{aligned}\right\}.$

(5) $\left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ x^2-9y^2=0 \end{array}\right\}.$

用和差法解下列各方程式:

(6) $\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ x^2-xy+y^2=21 \end{array}\right\}.$ (7) $\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ xy=30 \end{array}\right\}.$

(8) $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=4 \\ 4x^2+9y^2=40 \end{array}\right\}.$

145. 設題 317 解下列聯立方程式:

$$\left.\begin{array}{r} 6x^2+5xy-6y^2=0 \\ 4x^2+y^2=25 \end{array}\right\}\begin{array}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}$$

【解】 在(1)式中假定y做已知數,解出x.

$$x=\frac{-5y\pm\sqrt{(5y)^2-4\times6\times(-6y^2)}}{2\times6}$$

$$=\frac{-5y\pm\sqrt{169y^2}}{12}=\frac{-5y\pm13y}{12}$$

$$=\frac{2}{3}y \text{ 或 } -\frac{3}{2}y.$$

用$x=\frac{2}{3}y$代入(2)式,得 $4\times\frac{4}{9}y^2+y^2=25.$

解之,得 $\left.\begin{array}{r} y=\pm3 \\ x=\frac{2}{3}\times(\pm3)=\pm2 \end{array}\right\}$

用 $x=-\frac{3}{2}y$

代入(2)式,得 $4\times\frac{9}{4}y^2+y^2=25.$

$$\left.\begin{aligned}&\text{解之,得}\quad y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2};\\&\therefore\quad x=-\frac{3}{2}\times\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=\mp\frac{3\sqrt{10}}{4}\end{aligned}\right\}$$

設題318 解下列聯立方程式:

$$\left.\begin{aligned}x^2+3xy+2y^2&=6\\4x^2-y^2&=3\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

【解】 (1)÷(2), $\frac{x^2+3xy+2y^2}{4x^2-y^2}=2,$

去分母而整理之,

$$7x^2-3xy-4y^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式中假定 y 爲已知數,解出 x;得

$$x=y\ \text{或}\ -\frac{4}{7}y.$$

代入(1)式或(2)式,得

$$\left.\begin{aligned}x&=\pm1\\y&=\pm1\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}x&=\mp\frac{4\sqrt{5}}{5}\\y&=\pm\frac{7\sqrt{5}}{5}\end{aligned}\right\}$$

設題319 解下列聯立方程式:

$$\left.\begin{aligned} x^2-7y^2+3x-3y=0 \\ xy+x^2-y^2-5x+5y=0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{aligned}$$

【解】 (1)式可寫成

$$x^2-7y^2+3(x-y)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)式可寫成

$$x^2+xy-y^2-5(x-y)=0\cdots\cdots\cdots(4)$$

5 × (3) +3 × (4) 得

$$8x^2+3xy-38y^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\therefore\quad x=\frac{-3y\pm\sqrt{9y^2+1216y^2}}{16}=\frac{-3y\pm35y}{16}$$

$$=2y \text{ 或 } -\frac{19}{8}y.$$

用 $x=2y$ 代入(1)式,得

$$4y^2-7y^2+6y-3y=0.$$

解之, $\left.\begin{aligned} y=0 \\ \therefore\quad x=2\times0=0 \end{aligned}\right\}$ 或 $\left.\begin{aligned} 1 \\ 2 \end{aligned}\right\}$

用 $x=-\frac{19}{8}y$ 代入(1)式,得

$$\frac{361}{64}y^2-7y^2-\frac{57}{8}y-3y=0.$$

解之，　$y=-\frac{216}{29}$ 或 0.

$$\therefore\quad x=-\frac{9}{8}\times\left(-\frac{216}{29}\right)=\frac{513}{29}\text{ 或 } 0.$$

設題320　解下列聯立方程式:

$$\left.\begin{array}{l} x+y^2=11 \\ x^2+y=7 \end{array}\right\}\begin{array}{r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}$$

【解】本題內兩式中的一次項 x, y 無從消去,故不能仿前三題求解.若用代入法解之,則由(1)得 $x=11-y^2$;代入(2),得

$$(11-y^2)^2+y=7\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式是含有一次項的四次方程式,亦不能用解二次方程法來解.故本題在二次方程解法範圍內,不能求解.

由設題317——320的解法,可知二次聯立方程式中含有兩個二次方程時,在二次方程解法範圍以內,有可解的,有不可解的.其可解的標準如下:(合這標準的必可解,不合這標準的非必不可解,這一點應注意)

(1)原方程式中有合$ax^2+bxy+cy^2=0$形式的(式中x^2y^2都是二次,xy合x,y計算亦是二次;故這式叫做二元二次齊次式.式中a,b,c表任何數.)如設題317.

(2)由兩二次方程式消去已知項,或x,y的一次項後,其結果能合$ax^2+bxy+cy^2=0$形式的.如設題318和319.

又由設題317——319的解法,可得合於上述標準的二元二次方程的通常解法如下:

(1)從$ax^2+bxy+cy^2=0$假定一個未知數作已知數,解出其餘一個未知數,得簡單的關係式.

(2)把這等值代入原方程式,得僅含假定已知數的一元二次方程式.解之,得假定已知數的值.

(3)把假定已知數的值,代入由(1)所得關係式中,得其餘一個未知數的值.

這類問題的特別解法甚多,可參看後面補充教材.

演算題 93

解下列各聯立方程:

(1) $\left.\begin{array}{l}x^2-2xy=0\\4x^2+9y^2=225\end{array}\right\}.$　(2) $\left.\begin{array}{l}x^2+xy=28\\xy-y^2=3\end{array}\right\}.$

(3) $\left.\begin{array}{l}2x^2-xy=56\\2xy-y^2=48\end{array}\right\}.$　(4) $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=97\\xy=36\end{array}\right\}.$

(5) $\left.\begin{array}{l}x(x+y)=40\\y(y-x)=6\end{array}\right\}.$　(6) $\left.\begin{array}{l}x^2-2xy+5=0\\(x-y)^2=4\end{array}\right\}.$

(7) $\left.\begin{array}{l}x^2-7xy-9y^2=9\\x^2+5xy+11y^2=5\end{array}\right\}.$　(8) $\left.\begin{array}{l}2y^2-4xy+3x^2=17\\-x^2+y^2=16\end{array}\right\}.$

(9) $\left.\begin{array}{l}x(x+y)+y(x-y)=158\\7x(x+y)=72y(x-y)\end{array}\right\}.$

本編摘要

(1) 一元高次方程若能分析成二次以下的因式,或其高次項能用他文字代替而化成二次式時,則可用二次方程解法解之.

(2) 無理方程式的解法,先須用乘方法消去其根號.解得根後,必須加以覆驗.

(3) 二次聯立方程式之可用二次方程解法求解的,其通常解法必先求出兩未知數間的簡單關係,而後代入原方程式解之.

第十二編　函數變數法

第一節　兩數(或量)間的關係

146. 設題321　米的消耗量,和人數的多少有關係,試用算式來表明這關係.又若已知每人每日平均吃米7合,試用算式來表明這關係.

【解】代數中常用 $\propto$ 來表因變的意思.故若用 y 表米的消耗量,x 表人數,則米的消耗量和人數的關係,可用下式表之:

$$y\propto x.$$

意卽 y 因 x 而變也.

又若已知每日每人吃米7合,則 x 人每日必吃米 $7x$ 合,故每日米的消耗量 y,必和 $7x$ 相等.故得

$$y=7x.$$

$y\propto x$ 只能表示 y 因 x 而變化,不能表出 y 和 x 間精密的關係.譬如說: x 等於

2時 y 應等於多少?在這式中不能算得.$y=7x$,則不但能表示 y 因 x 而變化,且能表出 y 和 x 間精密的關係.譬如說:x 等於2時,則 $y=7\times2=14$,即可算得.

$y=7x$ 中的7,是一個常常不變的數,所以叫做常數.y 和 x 是常常變動的數,所以叫做變數.把 $y\propto x$ 和 $y=7x$ 相比較,可知 $y=7x$ 中多了一個常數7.凡要從有 $\propto$ 號的算式改成有 $=$ 號的算式時,必須加一個常數.因不知每人每日的食米量,則不能得到 $y=7x$ 的等式也.

當 $y=7x$ 中 $x=0$ 時,y 亦爲0.$x=1$ 時,$y=7$.$x=2$ 時,$y=14$.x 若逐次變大,則 y 亦隨着變大;x 若逐次變小,則 y 亦隨着變小;所以 x 是自由變動的數,叫做自變數.y 是應了 x 的變動而變動的數,叫做應變數.應變數亦叫做函數.在 $y=7x$ 中,y 叫做 x 的函數.

問答題45

(1) 貨物的總價和件數有關係.若 s 表總價,n 表件數.牠們的關係式怎樣?

(2)　上題若已知每件的單價是 a,說出牠們的關係式.

(3)　在上題的關係式中,s 是什麼數的函數?

(4)　長方形地的面積 A,和長 x 有關係.若已知長方形的闊是 5 丈,說出牠們的關係式.

(5)　上題中使 x 的係數爲 1,則關係式變成怎樣?　這時那個是自變數?　那個是應變數?　x 是什麼數的函數?

第二節　函數

147. 設題 322　舉例說明函數的種類和記法.

【解】函數就是應變數.然一數應了他數的變動而變動的種類很多,故函數的種類亦很多.例如下列各式中的 y,都是 x 的函數,而各式中變動的情形,各各不同.

(1)　$y=ax$.

(2)　$y=ax+c$.

(3)　$y=ax^2+bx+c$.

(4)　$y=\log x$.

(5)　$y=\sin x$.

(1),(2),(3)三式等號的右邊,都是代數式.在這種式中有了 x 的值,就可用代數計算,算出函數(y)的值來.故這類函數,叫做代數函數.

(4)式等號的右邊,有對數符號.在這式中若定了 x 的值,則必須查對數表始得 y 的值.譬如 $x=3$,則 $y=0.4771$; $x=100$,則 $y=2$.故這類函數,叫做對數函數.

(5)式等號的右邊,有符號sin,這是三角裏面的一種符號.將來學到三角時,自易明白.這式中若定了 x 的值,則查三角裏的sin表,就可得出 y 的值來.故這類函數,叫做三角函數.

函數的普通分類,大概這樣.若再求詳細的分類,則三角函數的分類,詳三角學中,現在可置勿論.代數函數的分類,以代數式的次數做標準.一次式叫做一次函數;二次式叫做二次函數;三次式叫做三次函數;以下可以類推.上面(1),(2)兩式的右邊都是一次式,故這兩式中的 y 都叫

做 x 的一次函數.(3)式的右邊是 x 的二次式,故(3)式中的 y 叫做 x 的二次函數.

函數在英文裏叫做 Function. 其第一個字母是 F, 故常用 F 來表函數.譬如 x 的函數,常用 $F(x)$ 來記牠; y 的函數,用 $F(y)$ 來記牠; x, y 兩數的函數,用 $F(x, y)$ 來記牠,餘類推.但 x 的函數有種種的形式,爲免混雜起見,在同一問題裏假使要表兩種形式不同的 x 的函數,往往用字體不同的 F 來分別.有時一個用大寫,一個用小寫;有時一個用英文字母,一個用希臘字母.亦有不用字體來分別,用 ′ 來分別的.譬如一個用 F, 第二個用 F', 第三個用 F'' 等等.上面五個不同的 x 函數,可分別記之如下:

(1)　$F(x)=ax.$

(2)　$F'(x)=ax+c.$

(3)　$F''(x)=ax^2+bx+c.$

(4)　$\phi(x)=\log x.$

(5)　$f(x)=\sin x.$

所用五個 F 都有分別,故可分別五種不同的 x 函數.不過這五個不同符號,是隨便用的;並不是表 ax 定要用 $F(x)$;表 $\log x$ 定要用 $\phi(x)$;就是掉過來亦可以的.若在同一問題裏,則第一次用那個符號表那個函數,這個符號是始終表這個函數,不能再用來表別個函數了.

問答題 46

(1) 設用 $f(x)$ 表 $3a^2+x-1$,問同時可用 $f(x)$ 表 $5x^2-4x$ 麼?

(2) 在 $F(x)=7x-3$ 中,設 $x=1$,則 $F(x)=4$.問 $x=-2$ 時,$F(x)=$?

(3) 設 $F(y)=3y+1$, $F'(y)=5-2y$, $F''(y)=\dfrac{1+y}{2}$,

試口述下表中各空格內的數值:

$y=$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F(y)=$																
$F'(y)=$																
$F''(y)=$																

演算題 94

設 $f(x)=5x^2+4x-2$, $\phi(x)=3x^2-1$, $F(x)=\log x^2$.試計算下表中各函數的值:

$x=$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)=$															
$\phi(x)=$															
$F(x)=$															

第三節　變數法

148. 設題323　設 $y\propto x$, 試證 $\frac{y}{x}$ 必是一個定值.

【證】(1)先用事實來證:

(一)設 y 所代表的是每日米的消耗量, x 所代表的是消耗米的人數,則

$$\frac{y}{x}=\frac{\text{每日米的消耗量}}{\text{消耗米的人數}}$$

$$=\text{平均每人每日食米的量}.$$

這平均每人每日食米的量,必是一個定值.假使不是一個定值,則 $y\propto x$ 的關係,要根本推翻了.

(二)設 y 所代表的是長方形面積的平方尺數, x 所代表的是長邊的尺數,則

$$\frac{y}{x}=\frac{\text{長方形面積方尺數}}{\text{長邊的尺數}}=\text{闊邊的尺數}.$$

這闊邊的尺數,必是一個定值.假使不是一個定值,則長方形的面積,當因長闊相乘的積而變, $y\propto x$ 要不適用了.

(2) 次用理論來證:

設當 x 爲 x_1 時, y 的對應值爲 y_1;

x 爲 x_2 時, y 的對應值爲 y_2;

x 爲 x_3 時, y 的對應值爲 y_3;

....

則 y 從 y_1 變到 y_2 時放大或縮小的倍數,必和 x 從 x_1 變到 x_2 時放大或縮小的倍數相等.

$$\therefore\quad \frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1}{x_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同理 $$\frac{y_1}{y_3}=\frac{x_1}{x_3}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) 式的兩邊用 $\frac{y_2}{x_1}$ 乘,(2) 式的兩邊用 $\frac{y_3}{x_1}$ 乘,則得

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2},\qquad \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_3}{x_3};$$

$$\therefore\quad \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}=\cdots\cdots$$

故 $\dfrac{y\text{的對應值}}{x\text{的任意值}}=$一定值.

即 $\dfrac{y}{x}=$一定值.

從上面事實和理論兩方面的證明,可知若 $y\propto x$,則 $\dfrac{y}{x}$ 必為一定值.這定值常用 k, c, m 等字表之,即 $\dfrac{y}{x}=k$. 若兩邊用 x 乘之,得 $y=kx$, 就得可用等號聯接的關係式了.本編第一節中曾言凡從有 $\propto$ 號之式改成有 $=$ 號之式時,須加一常數,即此理也.又從上面理論的證明中,可知若 y 和 x 的對應值有一對為已知,則 k 的值即可求得.(例如 y_2 和 x_2 為已知,則 $k=\dfrac{y_2}{x_2}$ 即可求出.)

設題 324 設 $y\propto x$, 且已知 $x=5$ 時,$y=20$ 求常數 k 的值.

〔解〕 因 $y\propto x$, 故得 $y=kx$; 用 $x=5$, $y=20$ 的值代入,則得 $20=k\times 5$; $\therefore\ k=\dfrac{20}{5}=4.$

故此時 y 和 x 的等式是 $y=4x$.

設題 325 有甲乙二數,甲數因乙數而變.已知乙數爲 $\frac{4}{3}$ 時,甲數爲 $\frac{3}{4}$.問甲數爲 9 時,乙數是多少?

【解】 令 x 表甲數,y 表乙數.依題得

$$x=my.$$

用 $x=\frac{3}{4}$, $y=\frac{4}{3}$ 代入,得 $\frac{3}{4}=m\times\frac{4}{3}$.

$$\therefore \quad m=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}.$$

故當 $x=9$ 時, $y=\frac{x}{m}=\frac{9}{\frac{9}{16}}=16.$

設題 326 舉例說明因變的種類.

【解】(例一)長方形的闊邊固定爲 m 時,長方形的面積 y,因長邊 x 而變.其式如下:

$$y=mx.$$

在這式中,x 變大,y 隨着變大.x 變小,y 隨着變小.這種變動,叫做正變.亦叫做 y 因 x 而正變.

（例二）長方形的面積固定為 m 時,長邊 y 因闊邊 x 而變.其式如下:

$$m=xy;\qquad\therefore\qquad y=\frac{m}{x}.$$

在這式中,x 變大,則 y 變小.x 愈大,y 愈小.x 變小,y 變大.x 愈小,y 愈大.這種變動,叫做反變,亦叫做 y 因 x 而反變.

（例三）若長方形的長,闊,面積,都不固定,則面積 A 因長 x 和闊 y 兩個的積而變.其式如下:

$$A=xy.$$

在這式中,若 x, y 同時變大,則 A 亦變大.若 x, y 同時變小,則 A 亦變小.若 x, y 中一個變大,一個變小,則 A 依兩個乘積而變.這種變動,叫做複變,亦叫做 A 因 x, y 的乘積而複變.

又由 $A=xy$,可得 $y=\dfrac{A}{x}$.

這式表 y 因 A 而正變,因 x 而反變,亦是複變的一種.

從事實和理論的推求,知因變的種類,不外這三種.就是(1)正變,(2)反變,(3)複變.

問答題 47

(1) 作工時間一定時,工資因能力而變.問這時是正變還是反變?

(2) 工程一定時,做工人數因日數而變.問這時是正變還是反變?

(3) 問工程因那兩種數量複變?

(4) 問一塊牛肉的價值,因那兩種數量而複變?

(5) 問 $F(x,y)$ 因那兩個數而複變?

演算題 95

(1) 圓的面積,因半徑的平方而變.已知半徑10尺的圓面積是314.159平方尺,求半徑7尺的圓面積.

(2) 自由落下的物體,由靜止落下時的距離,因經過時間的平方而變.已知經過2秒時,落下的距離爲64尺.問經過6秒時落下的距離,應是幾尺.

(3) 設 z 因 x, y 的積而變.已知 $x=1$, $y=1$ 時,$z=1$.問當 $x=2$, $y=2$ 時,$z=$?

(4) $x^2 \propto y^2$, 已知 $x=2$ 時,$y=3$. 求 k 之值.

(5) 氣體之體積因絕對溫度而正變;因壓力而反變.已知壓力爲15氣壓,溫度爲260度時的體積爲200立方寸.問當18氣壓,390度時的體積多少?

本編摘要

- (1)函數
  - (1)函數就是應變數.
  - (2)函數的種類,有代數函數,對數函數,三角函數等.
  - (3)記 x 的函數,常用 $F(x)$, $f(x)$ 等;記 y 的函數,常用 $F(y)$, $f(y)$ 等.
- (2)變數法
  - (1)由 $y \propto x$ 可得 $y=kx$,式中 k 是一個常數.
  - (2)因變的種類,有正變,反變,複變三種.

第十三編　比例

第一節　比

149. 設題327　什麼叫做比?　比的記法怎樣?　用什麼方法來求比的結果?

【解】比較兩個數或量的大小,叫做比.比的符號是 : .兩個數或量相比的時候,必定有一個是用來做標準的,還有一個是和這標準相比的.比的記法,是把做標準的數或量放在比號的後面,叫做後項;把還有一個數或量放在比號的前面,叫做前項.譬如 a, b 二數相比,若用 b 做標準,則記做 $a:b$; 叫做 a 對於 b 的比.若用 a 做標準,則記做 $b:a$;叫做 b 對於 a 的比.用後項除前項所得的商,就是比的結果;叫做比值.$a:b$ 的比值是 $\frac{a}{b}$; $b:a$ 的比值是 $\frac{b}{a}$.

問答題 48

(1) 在 $x:y$ 中,是用那一個做標準的? 應當怎樣叫法?

(2) 口述下列各比的比值:

(1) $3:4$. (2) $6:2$.

(3) $3x:5x$. (4) $7y:10x$.

(5) $\frac{5}{6}:\frac{7}{5}$. (6) $5(x+y):7(x+y)$.

(7) $(x^2+2xy+y^2):(x+y)$.

(8) $(x^2-y^2):(x-y)$.

(9) $(x^3+y^3):(x^2-xy+y^2)$.

(10) $(x^2+5x+6):(x+3)$.

150. 設題 328 比的性質怎樣? 種類怎樣?

【解】 比的重要性質有三種.說明於下:

(1)用尺來量黑板的長,就是求黑板的長對於尺長的比,這是可以的.用尺來量物體的重,就是求物體的重對於尺長的比,這是不可以的.又 $1^{里}:1^{尺}=\frac{1}{1}=1$,這個比值誰都知道是錯的.所以比的第一種重要性質是:

非同種類的,同單位的數量,不能直接

相比.

(2) 因 $a:b=\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\times c}{b\times c}=ac:bc;$

$$a:b=\frac{a}{b}=\frac{a\div c}{b\div c}=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}.$$

所以比的第二種重要性質是:

比的兩項,用同數乘之或除之,其比值不變.

(3) 因比的前後兩項,必是同種類,同單位的數量.故用後項除前項所得的比值,就是前項對於後項的倍數.凡倍數都是不名數,故比的第三種重要性質是:

凡比值都是不名數.

比的種類,就正反來分:有正比反比.就簡單複雜來分:有單比複比.說明於下:

(1) 正比反比: a, b 二數相比,若以 a 做標準時為正比,則 b 做標準時為反比.就是 $a:b$ 是 $b:a$ 的反比; $b:a$ 是 $a:b$ 的反比.

又因 $a:b=\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{b}\times\dfrac{a}{1}=\dfrac{1}{b}\div\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{a};$

$$b:a=\frac{b}{a}=\frac{1}{a}\times\frac{b}{1}=\frac{1}{a}\div\frac{1}{b}=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}.$$

故亦可說前後項倒數的比,是原比的反比.

(2)單比複比: 設 a_1, a_2 是兩長方形的長; b_1 b_2 是兩長方形的闊,則兩長方形面積的比是 $a_1b_1:a_2b_2$. 這比的前後兩項都是兩數相乘的積,可看做由 $a_1:a_2$ 和 $b_1:b_2$ 兩個比的前項乘前項,後項乘後項得來的.所以叫做複比.而 $a_1:a_2$ 和 $b_1:b_2$ 各叫做單比.

設題329 化 3:4 和 7:5; $a:b$ 和 $c:d$; 各成前項相同或後項相同的比.

【解】 3:4的前項是 3, 7:5 的前項是 7; 3 和 7 的最小公倍數是21.這兩比的前項,若都化成21,則兩前項便相同了.由 3 變成21,必須用 7 來乘.前項用 7 來乘,後項亦必要用 7 來乘,然後可以使比值不變.故得:

$$3:4=3\times7:4\times7=21:28.$$

同理, $7:5=7\times3:5\times3=21:15.$

又化成後項相同的理亦相同.其式如下:

$$3:4=3\times5:4\times5=15:20.$$

$$7:5=7\times4:5\times4=28:20.$$

同樣，$a:b=ac:bc;$

$c:d=ac:ad.$

$a:b=ad:bd;$

$c:d=bc:bd.$

設題330　求下列兩複比的比值:

(1) $\left.\begin{matrix}3:7\\8:5\\7:6\end{matrix}\right\}$　　(2) $\left.\begin{matrix}a:b\\b:c\\c:d\end{matrix}\right\}$

【解】(1) $\left.\begin{matrix}3:7\\8:5\\7:6\end{matrix}\right\}=3\times8\times7:7\times5\times6$

$$=\frac{3\times8\times7}{7\times5\times6}=\frac{8}{5\times2}=\frac{4}{5}.$$

(2) $\left.\begin{matrix}a:b\\b:c\\c:d\end{matrix}\right\}=a\times b\times c:b\times c\times d=\frac{abc}{bcd}=\frac{a}{d}.$

問答題49

(1)　3畝和7寸可不可以相比?

(2)　1里和1尺要怎樣纔可相比?　比值多少?

(3) 8尺對於2尺的比,比值是多少? 比值後面應否寫出單位名稱?

(4) 2尺對於8尺的比,比值是多少?

(5) 用尺量得黑板的長是9尺.牠的意義怎樣?和比的第三種重要性質相符嗎?

(6) 反比的比值,和原比的比值有什麼關係?

(7) 已知甲數對於乙數的比的比值是32.問乙數對於甲數的比的比值是多少?

演算題96

(1) 求下列各比的反比的比值:

(1) $34:51$. (2) $ab:bc$.

(3) $(x-y)^2:\frac{1}{x-y}$.

(4) $(3x^2-4x-15):(3x+5)$.

(2) 化下列各組的比,使成前項相同或後項相同的比:

(1) $6:13$, $18:25$.

(2) $(ax+1):a$, $b:(bx+1)$.

(3) $\frac{1}{x^2}:y^3$, $y^2:\frac{1}{x^3}$.

(4) $xyz:a$, $z:abc$.

(3) 求下列各複比的比值:

(1) $\left.\begin{matrix}13:5\\15:39\\9:7\end{matrix}\right\}$. (2) $\left.\begin{matrix}5x:4y\\8y:7x\\3z:9x\end{matrix}\right\}$.

(3) $\left.\begin{array}{l}(x+y):(xy-y^2)\\(x-y)^2:(xy+x^2)\\(x^2-y^2):(x^3+y^3)\end{array}\right\}.$

(4) $\dfrac{2a^2-5a+3}{a^2-9}:\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-5a+6}.$

第二節　比例

151. 設題331 什麼叫做比例? 比例的記法怎樣?

【解】 兩個比的比值相等時,這兩個比裏所含的四個數量,叫做成比例.比例記法是:把這兩個相等的比用等號聯結起來,叫做比例式.設 $a:b$ 和 $c:d$ 相等,則可記成 $a:b=c:d$ 的比例式.式中 a, b, c, d 各叫做這比例式的第一項,第二項,第三項,第四項.第一第四兩項又各叫做外項;第二第三兩項又各叫做內項.

152. 設題332 設 $a:b=c:d$, 證明 $ad=bc$.

【證】 $\because\quad a:b=c:d,\quad\therefore\quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}.$

兩邊用 bd 來乘,則得

$$bd\times\frac{a}{b}=bd\times\frac{c}{d};\quad\therefore\quad ad=bc.$$

故得定理如下:

(1)四數成比例時,兩外項相乘的積,必等於兩內項相乘的積.

設題333 設 $ad=bc$, 證明

$$a:b=c:d \text{ 或 } b:a=d:c.$$

【證】(1) $\because$ $ad=bc$, 兩邊各用 bd 除之,則得

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}; \quad \text{即} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \therefore \quad a:b=c:d.$$

(2) $\because$ $ad=bc$, 用這式的兩邊各除 bd, 則得

$$\frac{bd}{ad}=\frac{bd}{bc}; \quad \text{即} \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}. \quad \therefore \quad b:a=d:c.$$

故得定理如下:

(2)四數中若這兩數的積,等於他兩數的積;則四數成比例.這兩數必同為外項;或同為內項.

這兩個定理,可稱比例的兩個基本定理.有了定理(1),則成比例的四數中,曉得了任何三個,就可求出其餘一個來.有了

定理(2),則可判定四個數是否成比例.若成比例時,那兩個是內項,那兩個是外項.

設題334　求下列兩比例式中 x 的值.

(1)　$a^2:2b=3b^2:x$.

(2)　$1:x=(a^2-ab+b^2):(a^3+b^3)$.

[解] (1)　$\because\quad a^2:2b=3b^2:x,$

$$\therefore\quad a^2x=2b\times 3b^2;$$

$$\therefore\quad x=\frac{6b^3}{a^2}.$$

(2)　$\because\quad 1:x=(a^2-ab+b^2):(a^3+b^3),$

$$\therefore\quad 1\times(a^3+b^3)=(a^2-ab+b^2)x;$$

$$\therefore\quad x=\frac{a^3+b^2}{a^3-ab+b^2}=a+b.$$

這種求比例式中未知項的方法,叫做解比例式.比例式中的未知項,不外在外項或在內項的兩種位置.未知項在外項時的解法,可以本題中解法(1)做例,卽用其餘一外項去除兩內項的積可也.未知項在內項時的解法,可以本題中解法(2)做例,卽用其餘一內項去除兩外項的積可也.

設題335 試判定下列各組數:那一組裏的四個數是成比例的? 那一組裏的四個數是不成比例的? 成比例的各組,那兩個是外項? 那兩個是內項? 詳細地說出來.

(1) 4, 5, 8 10.

(2) 3, 5, 4, 7.

(3) $2ab,\ bc,\ 3ac,\ 6a^2$.

(4) $2xy,\ 3x,\ 5y,\ 2y$.

【解】 在(1)組中,因 $4\times10=5\times8$,故這四數成比例.列成比例式時,4 和 10 或同為內項,或同為外項.其式如下:

$$4:8=5:10;\quad 或\ 5:4=10:8.$$

在(2)組中,因任何兩數相乘的積,不能和其餘兩數相乘的積相等,故這四數不成比例.

在(3)組中,因 $2ab\times3ac=6a^2bc=bc\times6a^2$,故這四數成比例.列成比例式時,如下:

$$2ab:bc=6a^2:3ac,$$

或 $$6a^2:2ab=3ac:bc.$$

在(4)組中,因任何兩數的積,不能和其餘兩數的積相等,故這四數不成比例.

問答題50

(1)　口述下列各式中 x 的值:

(1)　$8:3=x:7$.

(2)　$x:a=c:b$。

(3)　$ab:cd=bc:x$。

(2)　判定下列各組數:那一組裏的數是成比例的? 牠的比例式怎樣?

(1)　5, 7, 3, 4.

(2)　$3xy,\ 5xy^2z,\ y^2,\ 15xyz$.

(3)　$9,\ 6,\ 5,\ \frac{15}{2}$.

演算題97

解下列各比例式:

(1)　$8:20=32:x$.

(2)　$p^3:pq=x:5pq^2$.

(3)　$325:x=1000:47$.

(4)　$(x^2-4x+3):(x^2-1)=(x^2-5x+6):?$

(5)　$(4x-1):?=(20x^2+3x-2):(15x+6)$.

153。設題336　解比例式 $a:x=x:b$.

【解】 $\because\quad a:x=x:b,\quad \therefore\quad x^2=ab;$

$$x=\pm\sqrt{ab}.$$

在一個比例式中,兩內項相等時,這內項叫做兩外項的比例中項,b 叫做 a 和 x 的第三比例項.由本題的解法,可得關於比例的第三個定理如下:

(3) 二數的比例中項,等於二數乘積的平方根.

演算題 98

求下列各組數的比例中項和第三比例項.

(1) $9,\ 25.$　　(2) $4a^2,\ 9b^2.$

(3) $(a+b)^2,\ (a-b)^2.$

(4) $4x^2-4x+1,\ y^2+2y+1.$

(5) $27(x^2-1),\ 3(x+1).$

(6) $4(3x+1),\ 2(9x^2-1).$

(7) 在 $a:b=c:d$ 比例式中,若 $c=\sqrt{ab}$,證明 $b=\sqrt{cd}$.

154. 設題 337 設 $a:b=c:d$,證明下列各式:

(1) $a:c=b:d$ 和 $d:b=c:a$.

(2) $b:a=d:c$.

(3) $a+b:b=c+d:d$.

(4) $a-b:b=c-d:d$.

(5) $a+b:a-b=c+d:c-d$.

【解】證明各種比例式,有兩種方法:一種是無論證明那種比例式都可應用的,所以叫做通常證法.一種是隨各題的情形而酌量用證明方法的,所以叫做特別證法.通常證法,是呆板的,故最易使初學者模仿應用.特別證法,是活動的,故最易啓人心智.現在把證明上面各式的兩種方法,並列於下,以資比較:

(1)式的證明

通常證法:	特別證法:
設 $a:b=c:d=r$,(比值)	$\because\ a:b=c:d,\ \therefore\ ad=bc;$
則 $a=br,\quad c=dr;$	$\dfrac{ad}{cd}=\dfrac{bc}{cd},\ \therefore\ a:c=b:d;$
$\therefore\quad a:c=br:dr=b:d;$	
又 $d:b=dr:br=c:a.$	又 $\dfrac{ad}{ab}=\dfrac{bc}{ab},\ \therefore\ d:b=c:a.$

由本式的證明,可得關於比例的第四個定理如下:

這定理叫做更比定理.

(4)凡比例式中的兩內項,可以互相更換其位置.兩外項亦可互相更換其位置.

(2)式的證明

通常證法:

$\because\ a=br,\ c=dr,$

$\therefore\ b:a=b:br=1:r;$

$d:c=d:dr=1:r;$

$\therefore\ b:a=d:c.$

特别證法:

$\because\ bc=ad,$

$\therefore\ \dfrac{bc}{ac}=\dfrac{ad}{ac};$

$\therefore\ b:a=d:c.$

由本式的證明,可得關於比例的第五個定理如下:

這定理叫做反比定理.

(5)凡比例式中兩個比的反比亦相等.故可聯成比例式.

(3)式的證明

通常證法:

$\because\ a=br,\ c=dr,$

$$\begin{aligned}\therefore\ a+b:b&=br+b:b\\&=b(r+1):b\\&=(r+1):1;\\c+d:d&=dr+d:d\\&=d(r+1):d\\&=(r+1):1;\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b:b=c+d:d.$

特别證法:

$\because\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d},$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}+1=\dfrac{c}{d}+1;$

通分 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d},$

$\therefore\ a+b:b=c+d:d.$

由本式的證明,可得關於比例的第六個定理如下:

這定理叫做合比定理.

(6) 凡比例式中第一第二兩項的和,對於第二項之比,必等於第三第四兩項的和,對於第四項之比.

(4)式的證明

通常證法:

$\because\ a=br,\quad c=dr,$

$\therefore\ a-b:b=br-b:b$
$=b(r-1):b$
$=(r-1):1;$

$c-d:d=dr-d:d$
$=d(r-1):d$
$=(r-1):1;$

$\therefore\ a-b:b=c-d:d.$

特別證法:

$$\because\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1;$$

通分 $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

$$\therefore\ a-b:b=c-d:d.$$

由本式的證明,可得關於比例的第七個定理如下:

這定理叫做分比定理

(7) 凡比例式中第一項與第二項的差,對於第二項之比,必等於第三項與第四項的差,對於第四項之比.

(5)式的證明

通常證法:	特別證法:
$\because\ a=br,\ c=dr,$	
$\therefore\ a+b:a-b$	$\because\ a+b:b=c+d:d,$
$=br+b:br-b$	
$=b(r+1):b(r-1)$	$\therefore\ a+b:c+d=b:d;$(更比)
$=(r+1):(r-1);$	
$c+d:c-d$	$\because\ a-b:b=c-d:d,$
$=dr+d:dr-d$	$\therefore\ a-b:c-d=b:d;$
$=d(r+1):d(r-1)$	
$=(r+1):(r-1);$	$\therefore\ a+b:c+d=a-b:c-d;$
$\therefore\ a+b:a-b$	$\therefore\ a+b:a-b=c+d:c-d.$
$=c+d:c-d.$	

由本式的證明,可得關於比例的第八個定理如下:

這定理叫做合分比定理.

(8)凡比例式中第一第二兩項和差的比,等於第三第四兩項和差的比.

設題338 應用比例定理,解下列方程:

(1) $$\frac{x^2+x-2}{2-x}=\frac{4x^2+5x-6}{6-5x}.$$

(2) $$\frac{2x-1}{x^2+2x-1}=\frac{x+4}{x^2+x+4}.$$

【解】(1) $\because \quad \dfrac{x^2+x-2}{2-x}=\dfrac{4x^2+5x-6}{6-5x},$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{2-x}=\frac{4x^2}{6-5x};\text{（合比定理）}$$

$$x^2\{(6-5x)-4(2-x)\}=0,$$

$$-x^2(x+2)=0.$$

$$\therefore \quad x=0 \text{ 或 } -2.$$

(2) $\because \quad \dfrac{2x-1}{x^2+2x-1}=\dfrac{x+4}{x^2+x+4},$

$$\therefore \quad \frac{x^2+2x-1}{2x-1}=\frac{x^2+x+4}{x+4};\text{（反比定理）}$$

$$\frac{x^2}{2x-1}=\frac{x^2}{x+4}; \quad \text{（分比定理）}$$

$$x^2\{(x+4)-(2x-1)\}=0,$$

$$x^2(5-x)=0.$$

$$\therefore \quad x=0 \text{ 或 } 5.$$

演算題 99

設 $a:b=c:d$,證明下列各比例式:

(1) $2a:b=2c:d.$ (2) $b:3a=d:3c.$

(3) $ma:nb=mc:nd.$

(4) $ma\pm nb:mb=mc\pm nd:md.$

(5) $a\pm b:c\pm d=a:c.$

應用比例的定理,解下列方程式:

(6) $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{3x-1}$, (7) $\frac{x-9}{x-12}=\frac{x-21}{x-33}$.

(8) $\frac{6x-7}{3x-1}=\frac{9x+10}{7x-10}$.

155. 設題339 設$a:b=c:d$, $m:n=p:q$,證明下式:

$$am:bn=cp:dq.$$

【證】 $\because \quad a:b=c:d, \quad \therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ········(1)

$\because \quad m:n=p:q, \quad \therefore \quad \frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ ········(2)

(1)(2)兩式各邊相乘,得

$$\frac{a}{b}\times\frac{m}{n}=\frac{c}{d}\times\frac{p}{q};$$

$$\therefore \quad am:bn=cp:dq.$$

由本式的證明,可得關於比例的第九個定理如下:

(9) 二個比例式中對應項的積,亦成比例.

若把這定理加以擴充,則得關於比例的第十個定理如下:

(10)許多個比例式中對應項的連乘積,亦成比例.

在這定理中,若諸比例式相同,則又得關於比例的第十一個定理如下:

(11)比例式中各項的同次冪,亦成比例.

156. 設題 340 設 $a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots$,證明 $(pa+qc+re+\cdots):(pb+qd+rf+\cdots)=a:b$.

【證】 設 $a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots=k$,

則 $a=bk,\quad c=dk,\quad e=fk;$

$$\therefore\quad pa+qc+re+\cdots=pbk+qdk+rfk+\cdots$$

$$=(pb+qd+rf+\cdots)k;$$

$$\therefore\quad (pa+qc+rc+\cdots):(pb+qd+rf+\cdots)$$

$$=k:1=\frac{a}{b}:1=a:b.$$

由本式的證明,可得關於比例的第十二個定理如下:

(12)諸比相等時,以任意各數(如式中的 p, q 等)同乘各比的前後項,而取其各前項的和,與各後項的和相比,則其比值必等於原比的比值.

演算題 100

設 $a:b=c:d$,證明下列各比例式:

(1) $3a:8b=9a:24b$.

(2) $a^3:b^3=c^3:d^3$.

(3) $7a+2b:7a-2b=7c+2d:7c-2d$.

(4) $a^2+b^2:b^2=c^2+d^2:d^2$.

(5) $3a^2+4b^2:4b^2=3c^2+4d^2:4d^2$.

(6) $(2a-b)^2:4ab=(2c-d)^2:4cd$.

(7) $ma^n:b^n=mc^n:d^n$.

(8) $la^n:mb^n=lc^n:md^n$.

(9) $\sqrt[n]{a^n+b^n}:\sqrt[n]{c^n+d^n}=b:d$.

(10) $(a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}})^n:(c^{\frac{1}{n}}-d^{\frac{1}{n}})^n=b:d$.

(11) 設 $a:a'=b:b'=c:c'=\cdots\cdots$,證明下式:

$$\frac{\sqrt[n]{pa^n+qb^n+rc^n}}{\sqrt[n]{qa'^n+qb'^n+rc'^n}}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

(12) 設 $x:y=y:z=z:w$,證明下式:

$$x+y:y+z=y+z:z+w.$$

設 $a:b=c:d$; $m:n=p:q$,證明下列二式:

(13) $(a+b)(m+n):am=(c+d)(p+q):cp$.

(14) $(a-b)(m+p):bp=(c-d)(n+q):dq$.

(15) 設 $p:a-b=q:b-c=r:c-a$,證明

$$cp+aq+br=0.$$

(16) 已知二數的比是9:5,求這二數和差的比.

(17) 已知二數和差的比是9:5,求這二數的比.

本編摘要

(1)　比的重要性質……非同種類,同單位的數量,不能直接相比.

(2)　比例的基本定理……四數成比例,則兩外項相乘的積等於兩內項相乘的積.

(3)　證比例式的通常方法……用 $a=bk, c=dk$ (k是所給比例式中的比值)等,代入求證式的兩邊,而比較其比值.

第十四編　級數

第一節　級數的種類

157. 設題341　什麼叫做級數? 牠的種類怎樣? 組織怎樣?

【解】凡相鄰二數間有一定關係的一組數,叫做級數.級數的種類很多,最簡單的是等差級數和等比級數兩種.等差級數是相鄰二數的差爲一定的級數.等比級數是相鄰二數的比爲一定的級數.

凡組成一個級數的各個數,都叫做這級數的項.第一個數叫首項,第末個數叫末項.在首項和末項中間的數,都叫做內項或中項.把一個級數裏各項相加所得的結果,叫做這級數的總和.在等差級數裏,相鄰兩項的差,叫做這級數的公差.在等比級數裏,相鄰二項的比,叫做這級數的公比.

設題342 判定下列各組數:那一組是組成等差級數的? 那一組是組成等比級數的? 若是等差級數,牠的公差是什麼? 若是等比級數,牠的公比是什麼?

(1) $8,\ 7,\ 10,\ 4,\ 37.$

(2) $5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20.$

(3) $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64.$

(4) $a,\ a+b,\ ab,\ a-b,\ a^2.$

(5) $a^3x,\ a^2x^3,\ ax^5,\ x^7,\ \dfrac{x^9}{a}.$

(6) $4b+c,\ 4b+5c,\ 4b+9c,\ 4b+13c.$

【解】(1)組裏面,$7-8\neq 10-7\neq 4-10\neq 37-4$,就是相鄰二數的差不一定.又$\dfrac{7}{8}\neq\dfrac{10}{7}\neq\dfrac{4}{10}\neq\dfrac{37}{4}$,就是相鄰二數的比不一定.故知這一組數,非等差級數,亦非等比級數.

在(2)組裏面,$8-5=11-8=14-11=17-14=20-17=3$,就是相鄰二數的差是一定的.故知這一組數是組成等差級數的.牠的公差是 3.

在(3)組裏,

$$4-2\neq 8-4\neq 16-8\neq 32-16\neq 64-32,$$

$$\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{32}{16}=\frac{64}{32}=2.$$

故知這一組數是組成等比級數的.公比是 2.

在(4)組裏,

$$(a+b)-a\neq ab-(a+b)\neq(a-b)-ab$$
$$\neq a^2-(a-b),$$

$$\frac{a+b}{a}\neq\frac{ab}{a+b}\neq\frac{a-b}{ab}\neq\frac{a^2}{a-b}.$$

故知這一組數,既非等差級數,亦非等比級數.

在(5)組裏,

$$\frac{a^2x^3}{a^3x}=\frac{ax^5}{a^2x^3}=\frac{x^7}{ax^5}=\frac{a^{-1}x^9}{x^7}$$
$$=a^{-1}x^2=\frac{x^2}{a};$$

故知這一組數組成等比級數.公比是 $\frac{x^2}{a}$.

在(6)組裏,

$$(4b+5c)-(4b+c)=(4b+9c)-(4b+5c)$$
$$=(4b+13c)-(4b+9c)$$
$$=4c;$$

故知這一組數成等差級數.公差是$4c$.

問答題 51

判定下列各組數,是否成等差級數或等比級數!並說出牠們的公差,或公比來:

(1)　$3a+d,\ 3a+2d,\ 3a+3d,\ 3a+4d,\ 3a+5d.$

(2)　$x,\ x-3,\ x-6,\ x-9,\ x-12,\ x-15,\ x-18.$

(3)　$a,\ 2a,\ 4a,\ 8a,\ 16a,\ 32a,\ 64a.$

(4)　$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ ar^5,\ ar^6.$

第二節　等差級數

153. 設題343　已知等差級數的首項,公差,試求第 n 項.

【解】 設級數首項是 a,公差是 d,* 則

第二項 $=a+d$;

第三項 $=$ 第二項 $+d=(a+d)+d=a+2d$;

第四項 $=$ 第三項 $+d=(a+2d)+d=a+3d$;

---

*用 a 表首項,l 表末項,用 d 表公差,用 n 表項數,已成算學上通用的符號.

試比較上面各式中項字前面的數字,和 d 的係數,可知 d 的係數,必比項字前面的數字少一.

故　第十項 $=a+(10-1)d=a+9d$;

$\therefore$　第 n 項 $=a+(n-1)d$.

若這級數共有 n 項,則第 n 項就是末項.設用 l 來代末項,則得

$$l=a+(n-1)d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

這公式叫做等差級數的末項公式,亦就是第 n 項公式.

設題344　求下列兩等差級數的第二十項:

(1)　5, 12, 19, 26,……

(2)　100, 90, 80, 70,……

【解】 等差級數(1)的首項是 5.

公差 $=12-5=19-12=7$;

$\therefore$ 第二十項 $=5+(20-1)\times 7$

$=5+19\times 7=138$.

等差級數(2)的首項是 100,

公差 $=70-80=80-90=-10$;

$$\therefore \text{第二十項} = 100 + (20-1) \times (-10)$$
$$= 100 + 19 \times (-10)$$
$$= 100 - 190 = -90.$$

159. 設題345 試在 a, b 兩項之間,插入 n 個中項,使成等差級數.

【解】 在 a, b 兩項之間,插入 n 個中項,則連 a, b 共有 $n+2$ 項. a 是首項, b 是末項,就是第 $n+2$ 項.故依前款公式,得

$$b = a + \{(n+2)-1\} \times d = a + (n+1)d.$$

這式中 a, b, n 都是已知數,解出 d, 得

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{d = \frac{b-a}{n+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故應插入的第一個中項為

$$a + d = a + \frac{b-a}{n+1} = \frac{an+b}{n+1}.$$

公差已求得,則其餘各中項卽可依此逐次推得.

若在 a, b 二項之間插入一項,使成等差級數,則上式中之 $n=1$, 故得

$$\text{等差中項}\ \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{A = \frac{a+b}{1+1} = \frac{a+b}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由(3)式知兩數間插入一個等差中項時,這等差中項等於這兩數的平均數.

設題346　在3和23之間,插入三個中項,使成等差級數.求這三數.　又試求插入一項時的數.

【解】　應用公式(2),這時$a=3$, $b=23$, $n=3$,

$$\therefore \text{第一個中項}=\frac{9+23}{3+1}=\frac{32}{4}=8;$$

$$\text{第二個中項}=8+d=8+\frac{23-3}{3+1}=8+5$$

$$=13.$$

$$\text{第三個中項}=13+5=18.$$

$$\text{又插入一項時的中項}=\frac{3+23}{2}=13.$$

演算題101

(1)　求等差級數7, 17, 27的第50項.

(2)　求等差級數A, $A-3c$, $A-6c$的第101項.

(3)　求等差級數$15a$, $17a$, $19a$的第n項.

(4)　求11和35間的等差中項.

(5)　求$13a$和$156a$間的三個等差中項.

(6)　求$(3x+2)(5x-7)$和$-(3x+5)(x-14)$間的五個等差中項.

160. 設題347 已知等差級數的首項,項數,末項或公差,求總和.

[解] 設首項爲 a,公差爲 d,項數爲 n,末項爲 l,總和爲 S;

則 $S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l$

又 $S=l+(l-d)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(a+d)+a$

相加 $2S=(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$

$=n(a+l)$。

$\therefore\quad S=\dfrac{n}{2}(a+l)$ ……………………………………(4)

若用 $l=a+(n-1)d$ 代入(式,則得

$S=\dfrac{n}{2}\{a+a+(n-1)d\}=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$……(5)

(4),(5)兩式都是等差級數總和的公式.已知首項,項數,末項時用(4)式.已知首項,項數,公差時用(5)式.

設題348 有擺10個,其長成等差級數.最短的一個長2寸,若已知最長的一個長6寸5分,問應怎樣求10個擺長的和?若已知次短一個比最短一個長5分,問應怎樣求10個擺長的和?

【解】因已知10個擺長成等差級數,故可應用(4),(5)兩個公式來求和.題言 $a=2$, $n=10$,若已知最長一個長6寸5分,則就是 $l=6.5$; 故這時應當用(4)式.其結果如下:

$$擺長總和=\frac{10(2+6.5)}{2}=5\times8.5=42.5寸。$$

若已知次短一個比最短一個長5分,則就是 $d=.5$ 寸;故這時應當用(5)式.其結果如下:

$$擺長總和=\frac{10\{2\times2+(10-1)\times0.5\}}{2}$$
$$=5\times8.5=42.5寸.$$

演算題 102

求下列各等差級數的和:

(1) $1+5+9+$……………………到1000項.

(2) $102+98+94+$……………到 30 項.

(3) $-6-3-$ ………………………到 100 項.

(4) $a-\frac{a}{2}-$ ……………………到 10 項.

(5) $7+0+$ ………………………到 15 項.

(6) $\frac{7}{3}-1-$………… …………到 12 項.

(7) $2.3-1.1-\cdots\cdots$到 10 項.

(8) $4b+(-b)+\cdots\cdots$到 7 項.

已知15項的等差級數的首末兩項如下,求各級數的和:

(9) 首項 3,末項97. (10) 首項 −1,末項16.

(11) 首項 3.6,末項6.4.

(12) 首項$x+y$,末項$x-y$.

(13) 一晝夜之間,自鳴鐘共鳴幾下?

(14) 設已知等差級數的首項,項數及總和;求公差和末項?

(15) 王君在二十歲時積有銀 150 元,以後每年都逐年比上一年多積銀10元.問積到幾歲,可共有銀 6750 元?

(16) 分 100 爲成等差級數的 5 份,後二份的和,是前三份的和的$\frac{3}{17}$.問 5 份各是多少?

第三節 等比級數

161. 設題349 已知等比級數的首項,公比,求第 n 項.

〔解〕 設首項爲 a,公比爲 r,* 則

第二項 $=ar$;

---

*用 r 表公比,已成算學上通用符號.

$$第三項=第二項\times r=ar\times r=ar^2;$$

$$第四項=第三項\times r=ar^2\times r=ar^3;$$

試把上列各式中項字前面的數字,和 r 的指數相比較,則知 r 的指數,必比項字前面的數字少一.故推至第十項,必等於 ar^{10-1}.

$$\therefore\quad 第\ n\ 項=ar^{n-1}.$$

若這級數共有 n 項,則第 n 項就是末項.故設用 l 表末項,則得

$$l=ar^{n-1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

這(1)式是等比級數末項的公式,亦是任意一項的公式.

設題350 已知等比級數的首項 a,末項 l,公比 r,求項數 n.

【解】取上題公式(1)兩邊的對數,則得

$$\log l=\log ar^{n-1}=\log a+\log r^{n-1}$$

$$=\log a+(n-1)\log r.$$

$$\therefore\quad (n-1)\log r=\log l-\log a.$$

$$n-1=\frac{\log l-\log a}{\log r}.$$

$$\therefore\quad n=\frac{\log l-\log a}{\log r}+1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

設題351 求下表中各缺項(表中a,r,n,l所代表的,和上題同)

	a	r	n	l
(1)	5	3	7	
(2)	5	−2	10	
(3)	7	3		567
(4)	2	−5		−6250

【解】(1)用a,r,n各值代入公式(1),得

$$l=5\times3^{7-1}=5\times3^6=5\times729=3645.$$

(2)用a,r,n各值代入公式(1),得

$$l=5\times(-2)^{10-1}=5\times(-2)^9=5\times(-512)$$
$$=-2560.$$

由本題可知若公比是負值,則這級數的偶數項必爲負.

(3)用a,r,l各值代入公式(2),得

$$n=\frac{\log567-\log7}{\log3}+1=\frac{2.7536-.8451}{.4771}+1$$

$$=\frac{1.9085}{.4771}+1=4+1=5.$$

(4) 用 a, r, l 各值代入公式(2),得

$$n=\frac{\log(-6250)-\log 2}{\log(-5)}+1$$

$$=\frac{\log(-2\times 5^5)-\log 2}{\log(-5)}+1$$

$$=\frac{\log(-5)^5\times 2-\log 2}{\log(-5)}+1$$

$$=\frac{5\log(-5)+\log 2-\log 2}{\log(-5)}+1$$

$$=\frac{5\log(-5)}{\log(-5)}+1=5+1=6。$$

演算題 103

(1) 試從公式 $l=ar^{n-1}$,推得已知 l, r, n 求 a 的公式.

(2) 試從公式 $l=ar^{n-1}$,推得已知 l, a, n,求 r 的公式.

(3) 求下表中各缺項:

	a	r	n	l		a	r	n	l
(1)		2	8	640	(5)	13	7	4	
(2)	10		7	7290	(6)	6	6		46656
(3)	5	−2		5120	(7)	100		9	0.78125
(4)	7	−3	9		(8)		$\frac{1}{3}$	5	$\frac{1}{3}$

162. 設題352 在 a, b 兩數之間,試插入 n 個中項,使成一等比級數.

【解】 設所成等比級數的公比為 r,則依題意

$$b=ar^{n+1}.$$

$$\therefore\ r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

因得插入第一項為

$$ar=a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}=\sqrt[n+1]{a^{n+1}\times\frac{b}{a}}=\sqrt[n+1]{a^nb}.$$

公比既得,其餘各項卽可依此逐次推得.若上式中的 $n=1$,則得

等比中項 $G=\sqrt{ab}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)式中的 G 卽 a, b 兩數間插入一個等比中項時的值,和比例中項的公式相同.故知任意二數間的等比中項,等於這兩數乘積的平方根.

設題353 求 3 和 768 間的 3 個等比中項,和一個等比中項.

【解】 用 $a=3, b=768, n=3$ 代入公式(3),得

$$r=\sqrt[4]{\frac{768}{3}}=\sqrt[4]{256}=\sqrt{\sqrt{256}}=\sqrt{16}=4.$$

所求第一項 $=ar=3\times4=12;$

第二項 $=12\times4=48;$

第三項 $=48\times4=192.$

又插入一項時的比例中項如下:

比例中項 $=\sqrt{3\times768}=\sqrt{3^2\times16^2}$

$=3\times16=48.$

演算題 104

(1) 證明下列各公式:

a, b 間的等比中項共有 n 項時,則

第二項 $=\sqrt[n+1]{a^{n-1}b^2};$

第三項 $=\sqrt[n+1]{a^{n-2}b^3};$

....

第 p 項 $=\sqrt[n+1]{a^{n-p+1}b^n}.$

第 n 項 $=\sqrt[n+1]{ab};$

(2) 求下表中的等比中項:

	首項 (a)	末項 (b)	中項數 (n)	等比中項
(1)	15	120	2	
(2)	625	1	3	
(3)	7	-1701	4	

163. 設題354 等比級數的首項爲 a, 公比爲 r, 項數爲 n; 求總和.

【解】 設總和爲 S, 則依題意得

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}\cdots\cdots(A)$$

用 r 乘(A)式兩邊,得

$$rS=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n\cdots\cdots(B)$$

$(B)-(A)$,

$$\begin{aligned}rS-S&=(ar^n+ar^{n-1}+\cdots\cdots+ar^3+ar^2+ar)\\&\quad-(ar^{n-1}+ar^{n-2}+\cdots\cdots+ar^2+ar+a)\\&=ar^n-a.\end{aligned}$$

$$S(r-1)=a(r^n-1),$$

$$\therefore\quad \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

若 $r<1$, 則 $r-1$ 和 r^n-1 都是負值;故(5)式可改寫爲

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

設題355 求下列各等比級數的總和:

(1) $5+15+\cdots\cdots$ 至第五項.

(2) $8+0.8+\cdots\cdots$ 至第七項.

【解】 (1) $a=5$, $r=15\div5=3>1$, 故用公式(5).

$$S=\frac{5\times(3^5-1)}{3-1}=\frac{5}{2}(243-1)=\frac{5\times242}{2}$$

$$=605.$$

(2)　$a=8,\ r=\frac{0.8}{8}=\frac{1}{10}<1$, 故用公式(6).

$$S=\frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{80}{9}\left(1-\frac{1}{10000000}\right)$$

$$=\frac{80}{9}\times\frac{9999999}{10000000}=\frac{8888888}{1000000}$$

$$=8.888888.$$

演算題 105

求下列各等比級數的和:

(1)　$1+2+\cdots\cdots$至第六項.

(2)　$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdots\cdots$至第五項.

(3)　$3+3\sqrt{2}+\cdots\cdots$至第十項.

(4)　$5-5\sqrt{3}+\cdots\cdots$至第七項.

(5)　公式(5)和公式(6)中,試用分母除其分子,(用普通除法)以求其商.

(6)　一等比級數的首項爲3,前三項的和爲$\frac{19}{3}$,試求公比.

(7) 試從公式(5),推得已知a,r,s求n的公式.

(8) 已知等比級數的首項爲2,公比爲3,總和爲242;求項數.

(9) 三數成等比級數,其和等於35;其平方的和等於525;求這三數.

問答題52

(1) 等比級數總和公式中,若$r=1$,其結果怎樣?與事實相符嗎? 若不相符,試說明其原因.

(2) 當$r<1$時,r^n的值是因n而正變,還是因n而反變? 若n變到無窮大的時候,r^n變到怎樣情形?

164. 設題356 取線一條,剪去一半;從剩餘的一半中,再剪去這一段的一半.這樣逐次下去,其剩餘部分,必愈剪愈短.若原線的長爲1,問剪第一次後,尚餘多少? 剪第二次後,尚餘多少? 剪第十次後,尚餘多少? 剪至無限次後,尚餘多少? 又剪下各線段的和,與所剪次數有何關係? 剪至無限次後,其和等於多少?

【解】 原線的長爲1,則

$$剪第一次後,當餘 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

剪第二次後,當餘$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2^2}$.

依此類推,可知

剪第十次後,當餘$\frac{1}{2^{10}}$.

剪第 n 次後,當餘$\frac{1}{10^n}$.

因$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^{10}}$, $\frac{1}{2^n}$都是分子相同的分數,故分母愈大,則分數的值愈小. $2^{10}>2^2>2$, 故$\frac{1}{2^{10}}<\frac{1}{2^2}<\frac{1}{2}$. 若 $n>10$, 則$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^{10}}$. n 愈大則$\frac{1}{2^n}$愈小.故剪至無限次後,其剩餘部小至不可思議.然無論如何小,總不能為 0, 不過與 0 無限接近耳.

剪下各線段的和,則

剪一次時為$\frac{1}{2}$.

剪二次時為$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$.

剪三次時為$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$.

....

剪十次時爲$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{10}}$。

…………………………………………

剪 n 次時爲$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{10}}$

$+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$。

故知剪下各線段的和,等於首項爲$\frac{1}{2}$,公比爲$\frac{1}{2}$的等比級數的和.剪一次時爲首項的長,可記作S_1.剪十次時爲十項的和,可記作S_{10}.剪 n 次時爲 n 項的和,可記作S_n。若 n 爲無限,則這級數叫做無限級數.這無限級數無限項的和,即剪無限次後剪下各線段的和.剪無限次後的剩餘部分,既無限接近於0,則剪下各線段的和,必無限接近於原線的長 1.故無限級數無限項的和S_∞的公式如下:

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{S_\infty=\frac{a}{1-r}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

(7)式即由(6)式$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$中略去r^n不

計所推得,因r^n無限接近於0也.若把$a=\frac{1}{2}$,
$r=\frac{1}{2}$代入(7)式,則得

$$S_\infty=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}=1.$$

即爲原線的長.

設題357　應用無限級數總和公式,化$0.4\dot{2}\dot{8}$爲分數.

【解】　$$0.4\dot{2}\dot{8}=0.4+.028+.028\times\frac{1}{100}+.028\times\frac{1}{100^2}+\cdots\cdots$$

$$=0.4+.028\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right)$$

$$=0.4+.028\times\frac{1}{1-\frac{1}{100}}$$

$$=0.4+.028\times\frac{100}{99}=\frac{4}{10}+\frac{28}{990}$$

$$=\frac{424}{990}=\frac{212}{495}.$$

演算題 106

(1) 求$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots$的和.

(2) 求$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots\cdots$的和.

(3) 化$0.\dot{1}\dot{5}$爲分數.

(4) 化$0.1\dot{2}\dot{3}$爲分數.

本編摘要

(1)等差級數 $\begin{cases} (1)\quad l=a+(n-1)d. \\ (2)\quad d=\dfrac{b-a}{n+1}. \\ (3)\quad A=\dfrac{a+b}{2}. \\ (4)\quad S=\dfrac{n(a+l)}{2}. \\ (5)\quad S=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}. \end{cases}$

(2)等比級數 $\begin{cases} (1)\quad l=ar^{n-1}. \\ (2)\quad n=\dfrac{\log l-\log a}{\log r}+1. \\ (3)\quad r=\sqrt[n+1]{\dfrac{b}{a}}. \\ (4)\quad G=\sqrt{ab}. \\ (5)\quad S=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}\ (r>1) \\ (6)\quad S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}\ (r<1) \\ (7)\quad S\infty=\dfrac{a}{1-r}. \end{cases}$

附　錄

I　補充教材

1.　定理

(1)　**關於無理數的定理:**

設 a, b, c, d 都是有理數，$\sqrt{b}$, $\sqrt{d}$ 是無理數;且已知 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$，則必 $a=c$, $b=d$.

[證]　由 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ 移項，且取兩邊的平方，

得
$$(a-c+\sqrt{b})^2=d.$$

去括號，$(a-c)^2+2(a-c)\sqrt{b}+b=d$;

$$\therefore\quad 2(a-c)\sqrt{b}=d-b-(a-c)^2.$$

這式中若 $a-c\neq 0$，則成爲無理數可與有理數相等的不合理情形.故必 $a-c=0$，即 $a=c$.

代入上式,卽得 $d=b$.

[應用]　無理數開方時,必須應用這定理.見設題227.

(2)　**關於複數的定理:**

(i)　設 $a+bi=0$，則必 $a=0, b=0$（a, b 都是實數）.

[證]　$\because\ a+bi=0$,　$\therefore\ bi=-a$;

兩邊平方得 $-b^2=a^2$;

$\therefore a^2+b^2=0$. 因 a, b 都是實數,故 a^2, b^2 都是正數.兩個正數相加而和爲 0,自非每個都是 0 不可.故必

$$a=0, \quad b=0.$$

(ii) 設 $a+bi=c+di$, 則必 $a=c$, $b=d$.

［證］ 原式移項得 $(a-c)+(b-d)i=0$. 於是由上述定理,得

$$a-c=0, \quad b-d=0. \quad \therefore a=c, \quad b=d.$$

［應用］ 應用這定理,可求複數的平方根.舉例於下:

求 $5+12i$ 的平方根.

［解］ 設 $5+12i$ 的平方根是 $x+yi$, 則

$$(x+yi)^2=5+12i.$$

$$x^2+2xyi-y^2=5+12i.$$

應用本定理,得 $x^2-y^2=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$xy=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

解之,得 $x=\pm 3$, $y=\pm 2$. 故所求的方根爲 $3+2i$; 或 $-3-2i$.

(3) **關於一元二次方程式根的定理:**

凡一元二次方程式必有二根,不能多,不能少.

［證］ 由設題 272,知凡具 $ax^2+bx+c=0$ 標準形式的一元二次方程式,必有二根.一根用 α 代表,一根用 β 代表,用係數來表,則爲

$$\alpha=\frac{-b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}; \quad \beta=\frac{-b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}.$$

由設題279,知凡具 $ax^2+c=0$ 形式的一元二次方程,亦必有二根,一根是 $\sqrt{-\frac{c}{a}}$;一根是 $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

由設題280,知凡具 $ax^2+bx=0$ 形式的一元二次方程式,亦必有二根,一根爲 $-\frac{b}{a}$;一根爲 0.

由此可知,無論具何種形式的一元二次方程式,必不致少於二根.

今設 $ax^2+bx+c=0$ 除 α, β 兩根之外,尚有一根 r,則此 r 必合三種條件.第一,不與 α 相等.第二,不與 β 相等.第三,代入 ax^2+bx+c 時,其值必爲0.然由設題298,知

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

今用 r 代這式右邊因式內的 x,則得 $a(r-\alpha)(r-\beta)$.要使此式的值爲0,非 $r-\alpha=0$ 或 $r-\beta=0$ 不可.因 a 是原式中 x^2 的係數,必不能爲 0 也.然若 $r-\alpha=0$,則 $r=\alpha$,與第一條件不合.若 $r-\beta=0$,則 $r=\beta$,與第二條件不合.故要同時適合三個條件的 r,實不可得.卽這方程式除 α, β 外必不能再有一根也.

由是可知一元二次方程式,不能多於二根.

[應用] 這定理的應用很廣.凡解一元二次方程式必須應用這定理.因有了這定理,若解一元二次方程式而只得一根,且非重根(卽二根相等如

$(x-3)^2=0$的兩根都是 3),則必有錯誤.若得不同的三根,則更易判定其錯誤了.至於應用問題的解法,則更非注意根的性質不可.

⑷關於變數法的定理:

設有A, B, C三數(或量),當C爲定值時,$A\propto B$,當B爲定值時,$A\propto C$.則C, B同爲變數時,必$A\propto BC$.

[證]　因C爲定值時,$A\propto B$.故若B變至b,同時A變至a'.則

$$\frac{A}{a'}=\frac{B}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又設當C變至c時,A自a'變至a.則

$$\frac{a'}{a}=\frac{C}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

⑴,⑵兩式相乘,得

$$\frac{A}{a}=\frac{BC}{bc}.\qquad\therefore\quad\frac{A}{BC}=\frac{a}{bc}=k.$$

即　$A\propto BC$.

[應用]　凡一數因他二數而複變時,常常應用這定理.見設題326例三.

(本定理的證法,初學者如不易明瞭時,可以設題326例三做例,一一實驗,則自然領悟.)

2. 方法

⑴二次函數圖寫法:

(i)　一元二次函數圖寫法:

一元二次函數的標準形式是$F(x)=ax^2+bx+c$.用任意數代式中x,則同時必得一$F(x)$的對應值.故若以x的值做橫坐標,$F(x)$的值做縱坐標,則可依照第三編第七節所述方法描點.把描得各點,用線聯之,卽得所求的圖.舉例於下:

圖寫$F(x)=4x^2+4x-63$.

[解]　(1)先求$F(x)$和x的對應值表如下:

x	F(x)
4	17
3	−15
2	−39
1	−55
0	−63
−1	−63
−2	−55
−3	−39
−4	−15
−5	17

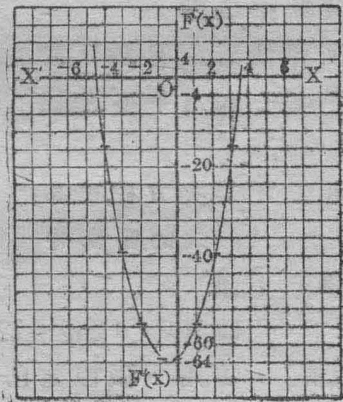


圖　1

(2)依表描點.

(3)聯接諸點.

所得的圖,是一曲線.這種曲線,叫做拋物線(圖1).

(ii)　二元二次方程圖寫法:

二元二次方程之圖寫,可先假定一元做假定已知數,解出其餘一元.然後依上法圖寫之.舉例於下:

(一) 圖寫 $x^2+y^2=36$.

[解] (1)用 x 做假定已知數,解出 y.得

$$y=\pm\sqrt{36-x^2}.$$

(2)根據此式,立對應值表如下:

x	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6
y	±6	$\pm\sqrt{35}$	$\pm\sqrt{32}$	$\pm\sqrt{27}$	$\pm\sqrt{20}$	$\pm\sqrt{11}$	0

(3)依表描點.

(4)聯接各點.

所得的圖,如圖 2,係以0點爲心,6爲半徑之圓周.

凡二元二次方程式具 $x^2+y^2=r^2$ 形式的,圖寫時必得一平圓.

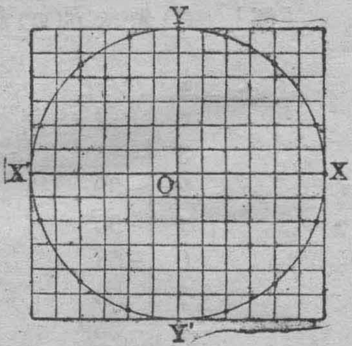


圖 2

(二) 圖寫 $9x^2+25y^2=225$.

[解] (1)用 x 做假定已知數,解出 y.得

$$y=\pm\frac{1}{5}\sqrt{225-9x^2}.$$

(2)依式立表如下:

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y	±3	±2.93	±2.74	±2.4	±1.8	0

(3)依表描點.

(4)聯接各點.

所得的圖,如圖 3,亦是一曲線.這曲線叫做橢圓.行星軌道,都成此形.凡二元二次方程式具有 $a^2x^2+b^2y^2=c$ 形式的,圖寫時必得一橢圓.

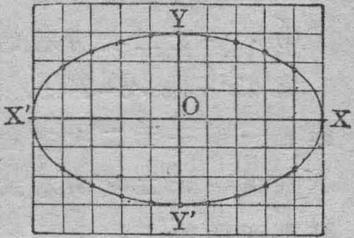


圖　3

（三）　圖寫 $x^2-4y^2=4$.

［解］　(1)解出 x,得　$x=\pm2\sqrt{y^2+1}$.

(2)依式立表如下:

y	0	±1	±2	±3	±4
x	±2	$\pm2\sqrt{2}$	$\pm2\sqrt{5}$	$\pm2\sqrt{10}$	$\pm2\sqrt{17}$

(3)依表描點.

(4)聯接各點.

所得的圖,如圖 4,亦是一曲線.這曲線叫做雙曲線.二元二次方程式凡具 $a^2x^2-b^2y^2=c$ 形式的,圖寫時必得一雙曲線.

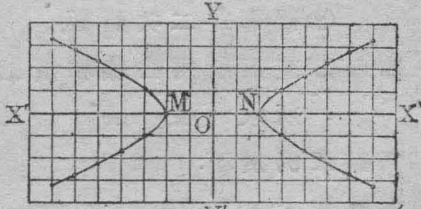


圖　4

又凡二元二次方程式具 $xy=k$ 形式的,其圖亦是一雙曲線.凡具 $y^2=ax$,或 $x^2=ay$ 形式的,其圖必是一拋物線.學者可仿此圖寫以驗之.

由上各例,可知二次函數的圖形,都是平面上的曲線.其曲線種類,不外拋物線,圓,橢圓,雙曲線四種.這四種總稱二次曲線.

(2)　**二次方程圖解法:**

(i)　一元二次方程的圖解法:

當 $ax^2+bx+c=F(x)$ 中的 $F(x)$ 爲 0 時,則此式就變成一個一元二次方程式.故當 $F(x)=0$ 時,x 的值就是這一元二次方程式的根.但圖上凡 $F(x)=0$ 的點,都在橫軸上.故由 $F(x)=ax^2+bx+c$ 圖寫而得的曲線,和橫軸相交的兩交點的橫坐標,即是所求的根.因這 x 的值,適與 $F(x)=0$ 之值相應也.由是得一元二次方程式圖解的通則如下:

(1) 先化方程式爲標準形式,且用 $F(x)$ 代右邊的 0.

(2) 圖寫這二次函數.

(3) 查出所得曲線和橫軸相交點的橫坐標,即得所求的根.

茲舉例於下:

圖解 $x^2+11=7x$.

〔解〕　(1) 化成標準形式,且用 $F(x)$ 代 0.得

$$x^2-7x+11=F(x).$$

立表得

x	0	1	2	3	3.5	4	5	6	7
$F(x)$	11	5	1	-1	$-1\frac{1}{4}$	-1	1	5	11

依表描點,且用曲線聯接各點,得圖如圖 5.圖中曲線和橫軸 XX' 的交點爲 M, N 兩點.OM 的長約爲

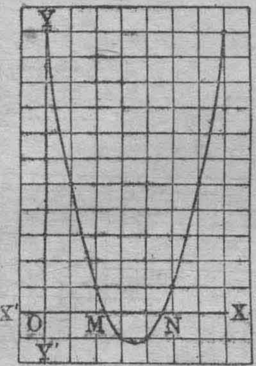


圖 5

2.4, ON 之長約爲4.6. 此卽所求的兩根.參看圖和表,知當 $x=2$ 時, $F(x)=+1$. $x=3$ 時,忽然 $F(x)=-1$. 則曲線之由橫軸之上越過橫軸而至橫軸之下,必在 $x>2$ 和 $x<3$ 之時無疑,亦卽曲線和橫軸的交點,必在 $x=2$ 與 $x=3$ 之間.故在 2, 3 之間,必有一根.同理在 $x=5$, $x=4$ 之間,亦必有一根.故由 $F(x)$ 之値的變號界限,可推出根的約略範圍.若所得曲線與橫軸在一點相切,則二根相等.若曲線不與橫軸相交,則根是虛數.學者試自驗之.

(ii)　二元二次聯立方程式的圖解法:

在第三編第七節裏曾經講過:聯立一次方程的圖解法,祇要求出兩圖交點的坐標就是了.現在二元二次聯立方程式的圖解法,亦是如此.只要求出兩圖交點的坐標來好了.不過二元二次方程式的圖,都是曲線.曲線和曲線相交,交點不止一個.有時且不止兩個.故根亦有好幾組.若聯立方程式中一個是一次式,一個是二次式,則交點至多兩個.故根至多兩組.現在把圖解二元二次聯立方程式的通則,寫在下面:

(1) 在同一坐標系裏,圖寫各方程式.

(2) 查出兩圖交點的坐標,卽得所求的根.

舉例於下:

圖解下列二聯立方程:

(1) $\begin{cases} x-y=2 \cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=35 \quad \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+y^2=74 \cdots\cdots(1) \\ xy=35 \quad \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

[解] (1)在同一坐標系裏圖寫(1)式,得一直線.圖寫(2)式,得一雙曲線,如圖6.雙曲線和直線的交點有二,一點的坐標是(7, 5);一點的坐標是(−5, −7).故根亦有二組,即 $x=7$, $y=5$; 和 $x=-5$, $y=-7$.

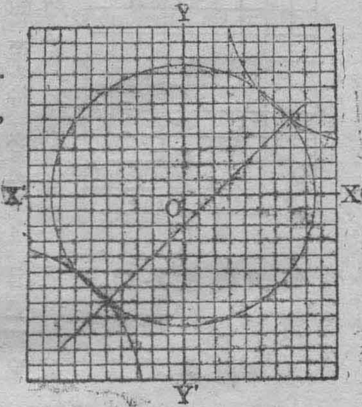


圖 6

(2)在同一坐標系裏圖寫(1)式,得一圓.圖寫(2)式,得一雙曲線,如圖6.圓和雙曲線在下列四點相交.

(5, 7), (7, 5), (−5, −7), (−7, −5),

故所求的根,亦有同樣四組:

(3) 二元二次聯立方程式的各種解法:

二元二次聯立方程式的一般解法,不在解二次方程式範圍以內.其可用解二次方程方法來解的,除在第十一編第三節裏已講過幾種解法外,玆再舉幾種解法於下:

(i) 先求兩未知數的比值法:(亦可簡稱比值法.)

兩未知數任爲何數,其比值總有一定.故可令$\dfrac{y}{x}=m$,則$y=mx$.用mx代式中的y,則y消去而成含x, m兩未知數的方程式.若原有兩方程式都是二次齊次式(注意),則此時兩式中所含x都是二次項,沒有一次項,故可消去x,而得只含m的方程式.解出m,再用代入法解出x, y.然若兩原式不都是二次齊次式,則x不能消去,此法不能用.舉例如下:

解　$2y^2-4xy+3x^2=17$…………………………(1)

$y^2-x^2=16$ ……………………………………(2)

[解]　這兩方程式各未知項都是二次,故可用比值法解之.

先設$y=mx$,

用mx代(1)式中的y,則得

$$2m^2x^2-4mx^2+3x^2=17;$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{17}{2m^2-4m+3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

用mx代(2)式中的y,則得

$$m^2x^2-x^2=16;$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{16}{m^2-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

兩x^2必相等,故得　$\dfrac{17}{2m^2-4m+3}=\dfrac{16}{m^2-1}$.

去分母,　$32m^2-64m+48=17m^2-17$;

$$15m^2-64m+65=0.$$

解之,得　$m=\frac{5}{3}$ 或 $\frac{13}{5}$.

代入(4)式, $x^2=\frac{16}{\left(\frac{5}{3}\right)^2-1}=\frac{16\times 9}{16}=9;$

或　$x^2=\frac{16}{\left(\frac{13}{5}\right)^2-1}=\frac{16\times 25}{144}=\frac{25}{9}.$

$\therefore$　$x=\pm 3$ 或 $\pm\frac{5}{3}.$

$$y=\frac{5}{3}\times(\pm 3)=\pm 5,\text{ 或 } y=\frac{13}{5}\times\left(\pm\frac{5}{3}\right)=\pm\frac{13}{3}.$$

(ii)　先求二未知數的半和半差法:（亦可簡稱半和半差法）

兩未知數任爲何數,其和差總有一定.故若令

$$\frac{x+y}{2}=u,\qquad \frac{x-y}{2}=v,$$

則　$$x=u+v,\qquad y=u-v.$$

用 $u+v$ 代原式中的 x,用 $u-v$ 代原式中的 y,則 x,y 都消去而得含 u,v 兩未知數的方程式.若兩原式都是 x,y 的對稱式（凡一式中 x,y 的位置互相對掉,其式的形式仍不變的,叫做 x,y 的對稱式),則 u,v 兩數中必能消去一數,得僅含一未知數的方程式.解出這未知數,卽可用代入法再求 x,y 的值.然若兩原方程式,不是 x,y 的對稱式,則此法卽不適用.舉例如下:

解　$4(x+y)=3xy$ ……………………………(1)

$x+y+x^2+y^2=26$ ……………………………(2)

〔解〕 這兩方程式中 x,y 的位置互相對掉時,其式的形式都不變,故兩式都是 x,y 的對稱式;可用半和半差法解之.

先令 $x=u+v,\ \ y=u-v,$

代入(1)(2)兩式,得 $8u=3(u^2-v^2)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$2u+2(u^2+v^2)=26\cdots\cdots\cdots(4)$

消去(3),(4)兩式中的 v^2,得 $6u^2-5u-39=0.$

解之,得 $u=3$,或 $-\frac{13}{6}$.

代入(3),得 $u=\pm1$; 或 $\pm\frac{1}{6}\sqrt{377}$.

$\therefore\quad x=3\pm1=4$ 或 $2.$

$$x=-\frac{13}{6}\pm\frac{1}{6}\sqrt{377}=-\frac{13}{6}+\frac{\sqrt{377}}{6}$$

$$\text{或 } -\frac{13}{6}-\frac{\sqrt{377}}{6}.$$

$y=3\mp1=2$ 或 $4.$

$$y=-\frac{13}{6}\mp\frac{1}{6}\sqrt{377}=-\frac{13}{6}-\frac{\sqrt{377}}{6}$$

$$\text{或 } -\frac{13}{6}+\frac{\sqrt{377}}{6}.$$

(iii) 先消去二式中的公因式法:(亦可簡稱化簡法.)

兩方程式中如有公因式時,可用除法消去其公因式得出兩未知數間的簡單關係,再用代入法解之.舉例如下:

解　$x^2-4y^2=9$ ……………………………(1)

$xy+2y^2=3$ ……………………………(2)

［解］　這兩方程式的左邊都有 $x+2y$ 的因式,故可用化簡法解之.

$$(1)\div(2),\quad \frac{x-2y}{y}=3,\quad \therefore\quad x=5y.$$ 代入(1),得

$$25y^2-4y^2=9;\qquad 21y^2=9.$$

$$\therefore\quad y=\pm\frac{\sqrt{21}}{7};\qquad x=\pm\frac{5}{7}\sqrt{21}.$$

(iv)　先求二未知數的和差法:（簡稱和差法.）

這方法的簡單應用,已在第十一編第三節裏講過.現在再舉一個較爲複雜的例於下:

解　$x^2+y^2=34$ ……………………………(1)

$xy=15$ ……………………………(2)

［解］　$\sqrt{(1)+2(2)}$,　$x+y=\pm 8$ ………(3)

$\sqrt{(1)-2(2)}$,　$x-y=\pm 2$ ………(4)

$\dfrac{(3)+(4)}{2}$,　$x=\pm 5$;

$\dfrac{(3)-(4)}{2}$,　$y=\pm 3$.

附　　錄

II　補充問題

把下列各式開平方:

(1)　$4x^2-12xy+9y^2$.

(2)　$x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.

(3)　$1-10x+27x^2-10x^3+x^4$.

(4)　$67x^2+49+9x^4-70x-30x^3$.

把下列各式開立方:

(5)　x^3+3x^2+3x+1.

(6)　$x^3y^3-3x^2y^2z^2+3xyz^4-z^6$.

(7)　$27x^6-27x^5-18x^4+17x^3+6x^2-3x-1$.

(8)　$x^3+6x^2y-3x^2z+12xy^2-12xyz+3xz^2+8y^3$
$$-12y^2z+6yz^2-z^3.$$

(9)　把下列各式化簡:

$$\sqrt{147},\quad \sqrt[3]{256},\quad 3\sqrt{150},\quad \sqrt{36a^3}.$$

求下列各式的值:

(10)　$3\sqrt{45}+5\sqrt{24}-2\sqrt{54}$.

(11)　$4\sqrt{63}+5\sqrt{7}-8\sqrt{28}$.

(12)　$3\sqrt{147}-\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{27}}$.

(13) $8\sqrt{a}+5\sqrt{x}-7\sqrt{a}+\sqrt{a}-6\sqrt{x}-3\sqrt{a}$.

(14) $(5\sqrt{3}+\sqrt{6})\sqrt{2}$.

(15) $(5\sqrt{3}+\sqrt{2})(5\sqrt{2}-2)$.

(16) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

(17) $\dfrac{3\sqrt{48}}{5\sqrt{112}}\div\dfrac{6\sqrt{84}}{\sqrt{392}}$.

(18) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}-3\sqrt{6})$.

(19) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$. (20) $\dfrac{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}}{2\sqrt{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}}$.

(21) $\dfrac{5\sqrt{12}}{6+4\sqrt{3}-2\sqrt{21}}$. (22) $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

(23) $$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$$
$$\div\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).$$

(24) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{2\sqrt{12}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

(25) $\dfrac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{3})}$.

解下列方程式:

(26) $2x+2\sqrt{2}=\sqrt{2}(-2)$.

(27) $x\sqrt{5}+y=y\sqrt{5}-x=6$.

(28) $8x(11+48x)-35$.

(29) $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}=\frac{3}{x+3}-\frac{4}{x+4}$.

(30) $\frac{12-\frac{1}{x+1}}{x+1+\frac{1}{x+1}}=\frac{12-\frac{1}{x-1}}{x-1+\frac{1}{x-1}}$.

(31) $\frac{x}{x^2-1}=\frac{9-5x}{8(1-x)}$.

(32) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$.

(33) $\frac{2x+1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{5x-14}{x+6}$.

(34) $x^2-(b-a)c=(a-b+c)x$.

(35) $\frac{x+2a}{2b-x}+\frac{x-2a}{2b+x}=\frac{4ab}{4b^2-x^2}$.

(36) $\frac{a-p}{x+2b}+\frac{b-p}{x+2a}=\frac{a+b-2p}{x+a+b}$.

(37) $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2+\frac{1}{a^2}$.

(38) $x-3=\frac{x^3-27}{9x+1}$.

(39) $(2a+x)^3+(2b+x)^3=8(a+b+x)^3$.

(40) $\frac{25x^2-16}{10x-8}=\frac{3x(x^2-4)}{2x-4}$.

(41) $4\left(\frac{7-x}{x+2}\right)^2+9\left(\frac{x+2}{7-x}\right)^2=37$.

(42) $(x^2+b)(x+a)=ab$.

(43) $\frac{x-a}{b}-\frac{b}{x-a}=\frac{a}{x-b}-\frac{x-b}{a}$.

(44) $\dfrac{ax+1}{a+x}+\dfrac{bx+1}{b+x}=\dfrac{ax-1}{a-x}+\dfrac{bx-1}{b-x}$.

(45) $\dfrac{(1+x^2)^2}{16}-\dfrac{(1-x^2)^2}{9}=\dfrac{4x^2}{25}$.

(46) $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+14=0$.

(47) $3x^4-8x^3-6x^2+8x+3=0$.

(48) $(x^2+7x+5)^2=3x^2+21x+15$.

(49) $x^4-2x^3+x^2=36$.

(50) $x^4-2x^3+3x^2-2x-8=0$.

(51) $x^2-(a+1)x+a=0$.

(52) $5x^2-2y^2=13,\quad 9x^2-5y^2=1$.

(53) $ax+bxy=c,\quad a'x+b'xy=c'$.

(54) $\dfrac{x+y}{7}=\dfrac{8}{x+y+1},\quad xy=12$.

(55) $x^2+y^2=(x+y+1)^2=(x-y+2)^2$.

(56) $\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}=1,\quad 3x=\dfrac{2}{1-y}$.

(57) $3(x^2+y^2)-2xy=27,\quad 4(x^2+y^2)-6xy=16$.

(58) $x^2+4y^2=4xy+1,\quad xy(2xy+1)=3$.

(59) $x(y-6)=y(x-a)=2ab$.

(60) $x+y=a+b,\quad \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=2$.

(61) $x^2+y^2+2(x+y)=3(xy+1)$,

$2(x^2+y^2)-xy=6(x+y)-4$.

(62) $x+y+xy=5,\quad x^2+xy+y^2=7$.

(63) $\dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{a-1}{b-1},$

$\dfrac{x^3-1}{y^3-1}=\dfrac{a^3-1}{b^3-1}.$

(64) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1.$

(65) $\sqrt{x+14}+\sqrt{x-14}=14.$

(66) $x+\sqrt{5x+10}=8.$

(67) $\sqrt{x^2-6x+16}+(x-3)^2=13.$

(68) $1-x=\sqrt{1-x\sqrt{4-7x^2}}.$

(69) $\sqrt{x^2+x-6}-\sqrt{x^2-7x+10}=x-2.$

(70) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=x\sqrt{2}.$

(71) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{c}.$

(72) $\sqrt{x(a+x)}-\sqrt{x(a-x)}=\sqrt{a(2x-a)}.$

(73) $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}.$

(74) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{10}{3}.$

(75) $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{2}{\sqrt{y-2}}=\dfrac{1}{6},$

$\sqrt{y-2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{x-3}.$

(76) $y+\sqrt{x^2-1}=2,$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{y}.$

(77) $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{c}.$

$b(x-a)=a(y-b).$

(78) $\sqrt{x(1-y)}+\sqrt{y(1-x)}=1.$

$\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{y(1-y)}=\frac{3}{5}.$

(79) 二個正數的積,等於他的平方和的五分之二,試簡單表明這些正數間的關係.

(80) 有甲乙二數,甲與他例數的和等於乙與他例數的和,二數的關係怎樣?

應用上面的結果,解下列聯立方程:

$$\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{y}{b}+\frac{b}{y}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

(81) 計算二次方程$2(x^2+x-3)=\sqrt{3}x(x+2)$的二根的差,到小數五位.

(82) $x(x+8)=11$時,簡單$\frac{2x-1}{x-2}$的值.

(83) α,β是二次方程$x^2+px+q=0$的根時,試簡單下式:

$$\frac{p\alpha+2q}{2\beta+p}.$$

(84) α,β是二次方程$x^2+x-1=0$的二個根時,試作把下記二數作根的二次方程:

$$\frac{1}{\alpha^2-1},\ \frac{1}{\beta^2-1}.$$

(85) 二次方程$m^2x^2+(m^2+m)x+1=0$的兩個根相等時,定m的值,再求根.

(86) a, b, c 是實數時,方程

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

的解是二實數,試證明之。

(87) 某汽船往返5公里的河流,要一時二十分;河流的速度,每時3公里.求船的速度.

(88) 買雞蛋3角,中間有二個已壞去,因此每個合價須貴5釐.求雞蛋每個的原價多少?

(89) A 從甲地出發,經二小時後,B 從乙地出發,兩人相向而走,再經二時五分,兩人在途中相遇.後來 A 到乙地時,B 也到甲地.求兩人行兩地所要的時間各多少?

(90) 從甲站到乙站的火車,行四十里後,機關忽發生障礙,因此每時的速度減四里,到乙站時遲到一時.若從開始就照後來的速度,還要遲到三十分,求甲乙兩站間的距離.

(91) 二物同時從相距 d 的二點相向運動,經 t 時後相遇.設通過單位距離的時間,甲比乙多費 n 分,求這二物的距離.又設二物同方向運動時怎樣?

(92) 用 s 圓買某物品,除自用 n 個外,其餘都賣出,每個賣價比原價貴 a 圓,得利益 d 圓.問買入時共幾個?

(93) 前題"d圓的利益"改做"相當於這物品 m 個的價的利益"結果怎樣?

(94) 直角三角形的斜邊51公釐,他二邊的差21公釐.求二邊.

(95) 求邊長 a,面積 s 的菱形的對角線.

(96) $a-x:b-x$ 是 $a:b$ 的平方比時,定 x。

(97) 解 $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2+6x+10}=\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2$.（應用比例定理）

(98) 從 $mx+ny:px+qy=a:b$ 中,求 $x:y$.

(99) 解 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$, $lx+my+nz=s$.

(100) 解 $x^2-x+1:x^2+x+1=3b^2+a^2:3a^2+b^2$.

(101) a,b 是定數,a,x,y,b 成連比例時,定 x,y.

設 $a:b=c:d$,證下列諸式:〔102－107〕

(102) $a^2:b^2=c^2:d^2$.

(103) $a+b:c+d=a:c$.

(104) $ma:mb=nc:nd$.

(105) $ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2$.

(106) $a+b:\dfrac{a^2}{a+b}=c+d:\dfrac{c^2}{c+d}$.

(107) $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

$$=(a-b+c-d)(a+b-c-d).$$

(108) 求 a^2+c^2 與 b^2+d^2 的比例中項.

(109) 求 $a^2+b^2+c^2$ 與 $b^3+c^2+d^2$ 的比例中項.

(110) a, b, c, d 成比例時,試簡單下式:

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}:\sqrt[n]{c^n+d^n}.$$

(111) $\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}$時;$x, y, z$間的關係怎樣?

(112) 長與闊的比相等的二矩形是相似.相似矩形的面積的比,等於相應比的平方比.試證明之.

(113) 把水與酒精的混合液充滿甲乙二瓶,瓶的容量甲是V,乙是U.酒精與水的比,在甲瓶是$A:B$,在乙瓶是$a:b$.現在把二瓶的混合液相混時,酒精與水的量的比怎樣?

(114) 某中學校的學生總數,今年比去年增$2\frac{1}{2}\%$,中間通學生增4%,寄宿生減11%.現在通學生與寄宿生的比怎樣?

(115) 把上下二種物品混合,用某價值出賣時,得利益$R\%$.兩種分別照這價出賣時,所得利益是$r\%$, $r'\%$.求混合的比.

(116) 甲乙二量成正變,甲量是12時,乙量是5.問甲量是6時,乙量是多少?

(117) 甲量與乙丙二量成正變,甲量是9時,乙量是5,丙量是7.問甲量是54,丙量是10時,乙量是多少?

(118) 甲量與乙量成正變,與丙量成反變,甲量是10時,乙量是15,丙量是6.問乙量是8,丙量是2時,甲量是多少?

(119) 設$3x+7y$與$3x+13y$成正變,倘$x=5, y=3$,求x, y間的比例式.

(120) 設 $5a-b$ 與 $10a-116$ 成正變,倘 $a=7$, $b=5$, 求 a, b 間的比例式.

(121) 倘 x 的平方隨 y 的立方而正變, $y=8$ 時,則 $x=4$. 求 a, b 間的比例式.

(122) 倘 b 隨 a 的平方而反變, $a=3$ 時,則 $b=8$; 問 $b=2$ 時, a 等於多少?

(123) 倘 x 隨 $\frac{1}{y}$ 正變, y 隨 $\frac{1}{z}$ 正變,試證 x 隨 z 正變.

(124) 已知圓的面積依半徑的平方正變,半徑是 7 公寸時,面積是 154 平方公寸;問半徑是 1 公尺 2 公寸時,面積是多少?

(125) 風在平面上的壓力,隨平面的面積與風力的速度複變.面積一平方呎,風力的速度是每時 15 英里時,風的壓力是一磅.問面積一平方碼,壓力是 15 磅時,風力的速度是多少?

(126) 在首項 5, 公差 -3 的等差級數裏; -90 是第幾項?

(127) 首項 1, 第三項是 2, 求 20 項的和.

(128) 首項 1, 次項 k 的等差級數.求 n 項的和.

(129) 成等差級數的三數之和是 39, 積是 2184, 求三數.

(130) 成等差級數的四數之和是 6, 平方和是 54, 求四數.

(131) 成等差級數的五數之和是 40, 平方和是 410,

求五數.

(132) 等差級數共21項,中間三項的和是129,最後三項的和是237.求這級數.

求下列的等比級數:

(133) 第10項是320,第6項是20.

(134) 第5項是$\frac{27}{16}$,第9項是$\frac{1}{3}$.

(135) 第7項是625,第4項是-5.

(136) 第3項是$\frac{9}{16}$,第6項是$-4\frac{1}{2}$.

(137) 成等比級數的三數之和是105,兩端的差是45,求這三數.

(138) 求$1+(1+r)+(1+r+r^2)+\cdots\cdots$的級數的公項及$n$項的和. 又求$9+99+999$的九項的和.

(139) 求$x^2+2y+x^4+4y+x^6+6y+\cdots\cdots$的$n$項的和.

(140) a, b, c的倒數是等差級數時,試證明:

$$a:c=a-b:b-c.$$

(141) 首項a,公比r的等比級數n項的積是:

$$a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

試證明之. 又等比級數n項的積,是首項與末項的積的n方的平方根,試證明之.

(142) 於公式$x^3-(x-1)^3=3x^2-3x+1$中,順次設x等於$1, 2, 3, \cdots\cdots n$;把這些式相加,證明下式:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

同樣用

$$\{(x+1)x\}^2-\{x(x-1)\}^2=4x^3$$

證明下式:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

(143) 在每年末,用年利率 r 存銀 a 元,每年複利,則 n 年後的本利和 A 的公式如下.試證之.(這公式叫做零存整付公式)

$$A=\frac{a}{r}\left\{(1+r)^n-1\right\}.$$

(144) 用年利率 r 存銀 P 元,分年支付,每年支 a 元,到 n 年付清.則

$$a=\frac{Pr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

試證之.(這叫做整存零付公式.)

(145) 上題中若以 a 作已知數,P 作未知數.試證

$$P=\frac{a}{r}\left\{1-(1+r)^{-n}\right\}.$$

(這叫做年金現價公式.)

(146) 求下列各數的對數:

2345,	8609,	71258,
4.325,	40.613,	0.0418,
3.1416,	0.0034,	0.05609,
$\sqrt{280}$,	$\sqrt[3]{1875}$,	$\sqrt{4.253}$.

求下列各式的值:(應用對數)

(147) 3.743×2.816.

(148) $45.08\times0.0286.$

(149) $1928\div2.625.$

(150) $3.421\div0.0436.$

(151) $\dfrac{2.56\times3.408\times2.4}{1.037\times2.91}.$

(152) $\dfrac{8.496\times3.581\times6.32}{2.405\times6.128}.$

(153) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{34.82\times5.462}{18.6\times2.04}\right)^2}.$

(154) 求 $\sqrt[3]{2.458}$ 與 $\sqrt[5]{3.824}$ 的比例中項.

證明下列各恆等式:

(155) $\log_a b\cdot\log_b a=1.$

(156) $\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}.$

(157) $x=a^{\log_a x}=a^{\frac{\log x}{\log a}}.$

(158) 有一兩位數,其兩數字平方的和是25,兩數字的積是12,求這數.

(159) 兩數的和,兩數的積,兩數平方的差,都相等.求這二數.

(160) 有甲乙兩分數,甲分數的分子分母都比乙分數的分子分母大1.兩分數的和是 $1\frac{5}{12}$. 若把兩分數的分子對掉,則兩分數的和是 $1\frac{1}{2}$. 求這兩分數.

III 對 數 表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	41
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	38
12	792	828	864	899	934	969	004*	038*	072*	106*	35
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	32
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	30
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*	28
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	26
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	25
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	24
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989	22
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	21
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	20
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	19
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	18
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	18
25	979	997	014*	031*	048*	065*	082*	099*	116*	133*	17
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	16
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	16
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	15
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	15
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	14
31	914	928	942	955	969	983	997	011*	024*	038*	14
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	13
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	13
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	13
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	12
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	12
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	12
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	11
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*	11
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	11
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222	10
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	10
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	10
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	10
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	10
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	9
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	9
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	9
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	9
50	990	998	007*	016*	024*	033*	042*	050*	059*	067*	9
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	8
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	8
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	8
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	8

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474	8
56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551	8
57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627	8
58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701	7
59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774	7
60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846	7
61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917	7
62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987	7
63	993	000*	007*	014*	021*	028*	035*	041*	048*	055*	7
64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122	7
65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189	7
66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254	7
67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319	6
68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382	6
69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445	6
70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506	6
71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567	6
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627	6
73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686	6
74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745	6
75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802	6
76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859	6
77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915	6
78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971	6
79	976	982	987	993	998	004*	009*	015*	020*	025*	5
80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079	5
81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133	5
82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186	5
83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238	5
84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289	5
85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340	5
86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	5
87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	5
88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489	5
89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538	5
90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586	5
91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633	5
92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680	5
93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727	5
94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773	5
95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818	5
96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863	5
97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908	4
98	912	917	921	926	930	934	939	643	948	952	4
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996	4
100	0000	004	009	013	017	022	026	030	035	039	4

比例部分表

N	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7
4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6
5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4
7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.8	11.9	12.6	13.3
8	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2
9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1
	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
2	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8
3	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7
4	8.4	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6
5	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5
6	12.6	13.2	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4
7	14.7	15.4	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3
8	16.8	17.6	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2
9	18.9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1
	31	32	33	34	35	36	37	38	39
1	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
2	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8
3	9.3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7
4	12.4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6
5	15.5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5
6	18.6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4
7	21.7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3
8	24.8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2
9	27.9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1
	41	42	43						
1	4.1	4.2	4.3						
2	8.2	8.4	8.6						
3	12.3	12.6	12.9						
4	16.4	16.8	17.2						
5	20.5	21.0	21.5						
6	24.6	25.2	25.8						
7	28.7	29.4	30.1						
8	32.8	33.6	34.4						
9	36.9	37.8	38.7						