**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2015/2016**

# Analysis III

## Vorlesung 68

Wir beginnen jetzt mit der allgemeinen Integrationstheorie, die auf der Maßtheorie aufbaut. Wie schon im Fall von stetigen Funktionen

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

geht es um den (Flächen-)Inhalt unterhalb des Graphen der Funktion. Jetzt wird allerdings der Definitionsbereich nicht mehr unbedingt ein Intervall sein, sondern ein beliebiger (zumeist $\sigma$-endlicher) Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$. Eine Funktion

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert nach wie vor einen Graphen in $M \times \mathbb{R}$ und damit eine Teilmenge aus $M \times \mathbb{R}$, die unterhalb des Graphen (und innerhalb von $M \times \mathbb{R}_{\geq 0}$) liegt. Auf $M \times \mathbb{R}$ existiert unter gewissen schwachen Voraussetzungen das Produktmaß $\mu \otimes \lambda^1$, und mit diesem Maß wird das Integral erklärt. Die Funktionen, die man sinnvoll integrieren kann, gehen weit über die stetigen Funktionen hinaus. Sie müssen allerdings mit den gegebenen Maßräumen verträglich sein, was zum Begriff der messbaren Funktion bzw. der numerischen Funktion führt.

### Messbare numerische Funktionen

Wir erinnern daran, dass wir

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

gesetzt haben. Diese Menge versehen wir mit einer $\sigma$-Algebra $\overline{\mathcal{B}}$, zu der eine Teilmenge $T \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ genau dann gehört, wenn $T \cap \mathbb{R}$ eine Borel-Menge in $\mathbb{R}$ ist. Man kann auf $\overline{\mathbb{R}}$ auch eine Topologie definieren derart, dass das zugehörige System der Borel-Mengen gleich $\overline{\mathcal{B}}$ ist. Die (halb)offenen Intervalle bilden wieder ein Erzeugendensysem für $\overline{\mathcal{B}}$. Auch das Borel-Lebesgue-Maß lässt sich durch $\lambda^1(T) = \lambda^1(T \cap \mathbb{R})$ darauf ausdehnen, d.h. die beiden unendlichen Punkte kann man, wie jeden einzelnen Punkt, für das Borel-Lebesgue-Maß ignorieren.

Auch den Supremumsbegriff für Teilmengen und den Konvergenzbegriff für Folgen kann man auf $\overline{\mathbb{R}}$ in naheliegender Weise ausdehnen. Eine nach oben unbeschränkte Menge besitzt $+\infty$ als Supremum, und eine Folge reeller Zahlen konvergiert gegen $\pm\infty$, wenn sie bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert. Eine Funktion $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ nennt man auch eine *numerische Funktion*.

Definition 68.1. Sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum. Dann nennt man eine numerische Funktion

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*messbar*, wenn sie $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}$-messbar ist.

Lemma 68.2. *Sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und sei*

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*eine numerische Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *$f$ ist messbar.*
(2) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in M \mid f(x) \geq a\}$ messbar.*
(3) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in M \mid f(x) > a\}$ messbar.*
(4) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in M \mid f(x) \leq a\}$ messbar.*
(5) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in M \mid f(x) < a\}$ messbar.*

*Beweis.* Die Bedingungen (2), (3), (4), (5) sind jeweils notwendig, da halbseitig unbeschränkte Intervalle Borel-Mengen von $\overline{\mathbb{R}}$ sind. Ist umgekehrt eine der Bedingungen (2), (3), (4) oder (5) erfüllt, so betrachtet man für $a < b$ die Menge $[a, b[ = [a, \infty] \setminus [b, \infty]$ (unter Bedingung (2) bzw. entsprechende Mengen unter den anderen Bedingungen). Nach Voraussetzung sind dann auch die Urbilder von diesen halboffenen Intervallen messbare Teilmengen in $M$. Da die halboffenen Intervalle nach Lemma 62.10 ein Erzeugendensystem der Borel-Mengen von $\mathbb{R}$ bilden, folgt die Aussage aus Lemma 61.15. □

Lemma 68.3. *Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und seien*

$$f, g\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

*messbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Funktion $-f$ ist ebenfalls messbar.*
(2) *Sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Dann ist auch die Funktion $1/g$ messbar.*
(3) *Die Funktionen $f + g$ und $f - g$ sind messbar.*
(4) *Die Funktion $f \cdot g$ ist messbar. Wenn $g$ keine Nullstelle besitzt, so ist auch $f/g$ messbar.*

*Beweis.* Die Rechenoperationen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto -t$, $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t \mapsto t^{-1}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(s, t) \mapsto s + t$, und $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(s, t) \mapsto s \cdot t$, sind nach Lemma 34.6 und Lemma 34.7 stetig und daher nach Lemma 62.11 messbar. Ferner ist eine Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen wieder messbar, und mit $f$ und $g$ ist nach Lemma 64.11 auch die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R},\, x \longmapsto (f(x), g(x)),$$

messbar. Daher ergeben sich die Behauptungen durch Betrachten der Hintereinanderschaltungen

$$M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{-} \mathbb{R},\ M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } M \xrightarrow{f,g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+,\cdot} \mathbb{R},$$

$\square$

Die vorstehende Aussage könnte man auch für $\overline{\mathbb{R}}$ formulieren, wobei man dann allerdings noch einige Rechenregeln festlegen müsste.

Mit den zusätzlichen Symbolen $+\infty$ und $-\infty$ lassen sich insbesondere Grenzfunktionen von Funktionenfolgen einfach erfassen. Das *Supremum einer Funktionenfamilie* ist punktweise durch

$$(\sup(f_i, i \in I))(x) := \sup(f_i(x), i \in I)$$

definiert. Es kann den Wert $\infty$ annehmen, und zwar auch dann, wenn alle $f_i$ reellwertig sind.

Lemma 68.4. *Es sei $I$ eine abzählbare Indexmenge und $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum. Es sei*

$$f_i \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*($i \in I$) eine Familie von messbaren numerischen Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $\sup(f_i, i \in I)$ und $\inf(f_i, i \in I)$ messbar.*

*Beweis*. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\{x \in M \mid \sup(f_i, i \in I)(x) \geq a\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_+} \left( \bigcup_{i \in I} \left\{ x \in M \mid f_i(x) \geq a - \frac{1}{k} \right\} \right).$$

Zum Beweis dieser Gleichung sei $x$ links enthalten und $k \in \mathbb{N}_+$ vorgegeben. Wegen $\sup(f_i(x), i \in I) \geq a$ kann nicht

$$f_i(x) < a - \frac{1}{k}$$

für alle $i$ gelten, da sonst das Supremum echt kleiner als $a$ wäre. Es gibt also ein $i \in I$ mit $f_i(x) \geq a - \frac{1}{k}$, und $x$ gehört auch rechts dazu. Wenn umgekehrt $x$ zur rechten Menge dazugehört, so gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $i \in I$ mit $f_i(x) \geq a - \frac{1}{k}$. Daher ist $\sup(f_i(x), i \in I) \geq a - \frac{1}{k}$ für alle $k$ und somit $\sup(f_i(x), i \in I) \geq a$.

Die Menge rechts ist als abzählbarer Durchschnitt von abzählbaren Vereinigungen von nach Voraussetzung messbaren Mengen wieder messbar. Nach Lemma 68.2 folgt daraus die Messbarkeit der Supremumsabbildung. Die Messbarkeit der Infimumsabbildung beweist man ähnlich oder führt sie durch Betrachten der negativen Funktionen auf die Messbarkeit der Supremumsabbildung zurück. $\square$

Beispiel 68.5. Wir betrachten die konstante Funktionenfolge $f_n := -\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}_+$) auf einer beliebigen Menge $M$. Deren Supremum ist die 0-Funktion. Dabei ist

$$\{x \in M \mid \sup(f_n, n \in \mathbb{N}_+)(x) \geq 0\} = M,$$

aber

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} \{x \in M \mid f_n(x) \geq 0\} = \emptyset,$$

d.h. ohne den Durchschnitt über $k \in \mathbb{N}_+$ mit dem Abweichungsterm $-\frac{1}{k}$ ist die Gleichung im Beweis zu Lemma 68.4 nicht richtig.

KOROLLAR 68.6. *Es sei* $(M, \mathcal{A})$ *ein Messraum und sei*

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*eine messbare numerische Funktion. Dann ist auch die Betragsfunktion* $|f|$ *messbar.*

*Beweis.* Dies folgt wegen $|f| = \sup(f, -f)$ aus Lemma 68.3 (1) und aus Lemma 68.4. □

DEFINITION 68.7. Zu einer Funktion

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

nennt man

$$f_+ = \sup(f, 0)$$

den *positiven Teil* und

$$f_- = -\inf(f,\, 0) = \sup(-f, 0)$$

den *negativen Teil* von $f$.

Dieses Konzept ist hilfreich, um Aussagen für beliebige Funktionen auf nichtnegative Funktionen zurückführen zu können. Man beachte, dass beide Teile nichtnegativ sind. Nach Lemma 68.4 ist der positive als auch der negative Teil einer messbaren Funktionen wieder messbar. Es ist $f = f_+ - f_-$.

KOROLLAR 68.8. *Es sei* $(M, \mathcal{A})$ *ein Messraum und sei*

$$f_n\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

*eine Folge von messbaren numerischen Funktionen, die punktweise gegen eine Grenzfunktion* $f$ *konvergiere. Dann ist auch* $f$ *messbar.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass die Urbilder von Mengen der Form $]a, \infty]$ unter der Grenzfunktion $f$ messbare Mengen sind. Daraus folgt nach Lemma 68.2 die Messbarkeit von $f$. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichheit

$$\{x \in M |\, f(x) > a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} \left( \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \left( \bigcap_{n \geq n_0} \left\{ x \in M |\, f_n(x) > a + \frac{1}{k} \right\} \right) \right).$$

Zum Beweis dieser Gleichheit sei zuerst $f(x) > a$. Dann gilt auch $f(x) > a+\frac{1}{k}$ für ein hinreichend großes $k$. D.h. dass $]a + \frac{1}{k}, \infty]$ eine offene Umgebung von $f(x)$ ist. Dann gehört $x$ auch zur inneren Vereinigung der rechten Seite, da diese die mengentheoretische Formulierung für den Sachverhalt ist, dass es ein $n_0$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Folgenglieder $f_n(x)$ ebenfalls zu $]a + \frac{1}{k}, \infty]$ gehören. Wenn hingegen $x$ zur rechten Seite gehört, so bedeutet dies, dass es $k, n_0 \in \mathbb{N}_+$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung $f_n(x) > a + \frac{1}{k}$ besteht. Dann gilt für den Limes $f(x) \geq a + \frac{1}{k}$ und damit

$f(x) > a$. Die rechte Seite der Gleichung zeigt, dass es sich um eine messbare Menge handelt, da abzählbare Durchschnitte und abzählbare Vereinigungen von messbaren Mengen wieder messbar sind. □

## Einfache Funktionen

Ein äußerst wichtiges Konzept für die Integrationstheorie ist es, dass sich beliebige messbare Funktionen durch besonders einfache Funktionen approximieren lassen, für die das Integral eine Summe ist. Auf diesem Konzept beruhte schon das Riemann-Integral, das wir im ersten Semesters entwickelt haben. Im Rahmen des Lebesgue-Integrals gibt es eine andere Art von Treppenfunktionen. Dabei wird nicht der Definitionsbereich in endlich viele einfache Stücke (Intervalle) unterteilt, sondern die Bildmenge soll besonders einfach sein.

Definition 68.9. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum. Eine messbare numerische Funktion

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

heißt *einfach*, wenn sie nur endlich viele Werte besitzt.

Definition 68.10. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum. Eine messbare numerische Funktion

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

heißt $\sigma$-einfach, wenn sie nur abzählbar viele Werte besitzt.

Die Terminologie ist hierbei extrem uneinheitlich. Man findet für diese beiden Begriffe auch die Wörter Elementarfunktion und Treppenfunktion, wobei manchmal die Messbarkeit vorausgesetzt wird, manchmal nicht. Manchmal wird auch noch die Nichtnegativität vorausgesetzt.

Lemma 68.11. *Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und sei*

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

*eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann gibt es eine wachsende Folge von nichtnegativen einfachen Funktionen*

$$f_n\colon M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

*die punktweise gegen $f$ konvergieren.*

*Beweis.* Die Idee ist, die Funktion $f$ im $n$-ten Schritt durch eine einfache Funktion $f_n$ zu approximieren, deren Werte rationale Zahlen der Form $\frac{k}{2^n}$ mit $0 \leq k \leq n2^n$ sind. Dies sind nur endlich viele Zahlen. Für jede nichtnegative reelle Zahl $a$ ist entweder $a \geq n$, oder es gibt ein eindeutig bestimmtes $k$

zwischen 0 und $n2^n - 1$ mit $\frac{k}{2^n} \le a < \frac{k+1}{2^n}$. Daher ist die folgende einfache Funktion wohldefiniert.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{falls } \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n} \text{ mit } k \le n2^n - 1 \\ n \text{ sonst}. \end{cases}$$

Sie ist messbar, da aufgrund der Messbarkeit von $f$ die Mengen

$$\left\{ x \in M | \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}$$

messbar sind. Die Folge dieser Funktionen wächst offenbar gegen $f$. $\square$

Für jedes $x \in M$ gibt ab $n \ge f(x)$ die Folge $f_n(x)$ den Wert der Dualbruchentwicklung für $f(x)$ bis zur $n$-ten Ziffer nach dem Komma an.

# Abbildungsverzeichnis