Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2023/24**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 6

Aufgabe 6.1. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+\mathrm{i})X^2 - 3X + 9\mathrm{i}) \cdot ((-3+7\mathrm{i})X^2 + (2+2\mathrm{i})X - 1 + 6\mathrm{i}) .$$

Aufgabe 6.2.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

(1)
$$\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\},$$
(2)
$$\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q).$$

Aufgabe 6.3. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich 0 sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

Aufgabe 6.4.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi \colon K[X] \longrightarrow K,\, P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 6.5. Setze in das Polynom $2X^4 + X^3 - 3X^2 + X + 5$ die Zahl $\sqrt{2}$ ein.

Aufgabe 6.6.*

Zeige, dass

$$z = \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{2}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 3X + 2$$

ist.

AUFGABE 6.7. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5\mathrm{i}$ ersetzt.

AUFGABE 6.8. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

AUFGABE 6.9.*

Es sei

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ein reelles Polynom mit $a_n > 0$. Man gebe in Abhängigkeit von den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ eine Schranke b derart an, dass

$$P(x) > 0$$

für alle $x \geq b$ gilt.

AUFGABE 6.10. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

AUFGABE 6.11. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

AUFGABE 6.12. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Die Exponenten μ_i heißen dabei die *Nullstellenordnung* der Nullstelle λ_i im Polynom.

AUFGABE 6.13.*

Es seien P und Q verschiedene normierte Polynome vom Grad d über einem Körper K. Wie viele Schnittpunkte besitzen die beiden Graphen maximal?

AUFGABE 6.14. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass F in Linearfaktoren zerfällt.

AUFGABE 6.15. Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten $n = 3$ gilt.

AUFGABE 6.16. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P. Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von P ist.

Aufgabe 6.17.*
Man finde ein Polynom
$$f = a + bX + cX^2$$
mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.
$$f(-1) = 2,\ f(1) = 0,\ f(3) = 5\,.$$

Aufgabe 6.18. Man finde ein Polynom
$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$
mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.
$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 0,\ f(-1) = 1\,.$$

Aufgabe 6.19. Es sei K ein angeordneter Körper und $R = K[X]$ der Polynomring über K. Sei
$$P = \{F \in K[X] \mid \text{Der Leitkoeffizient von } F \text{ ist positiv}\}.$$
Zeige, dass P die drei folgenden Eigenschaften besitzt.

(1) Entweder ist $F \in P$ oder $-F \in P$ oder $F = 0$.
(2) Aus $F, G \in P$ folgt $F + G \in P$.
(3) Aus $F, G \in P$ folgt $F \cdot G \in P$.

Aufgabe 6.20. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K. Zeige, dass die Menge
$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X],\, Q \neq 0 \right\},$$
wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Aufgabe 6.21. Berechne in $\mathbb{Q}(X)$ die folgenden Ausdrücke.

(1) Das Produkt
$$\frac{2X^3 - 5X^2 + X - 1}{X^2 - 2X + 6} \cdot \frac{X^2 + 3}{5X^3 - 4X^2 - 7}\,.$$
(2) Die Summe
$$\frac{4X^3 - X^2 + 6X - 2}{X^2 - 4X - 3} + \frac{X^2 - 3}{3X^2 + 5}\,.$$
(3) Das Inverse von
$$\frac{6X^3 - 9X^2 + 5X - 1}{X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 8X - 3}\,.$$

Aufgabe 6.22. Skizziere die Graphen der folgenden rationalen Funktionen

$$f = g/h \colon U \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei U jeweils das Komplement der Nullstellenmenge des Nennerpolynoms h sei.

(1) $1/x$,
(2) $1/x^2$,
(3) $1/(x^2+1)$,
(4) $x/(x^2+1)$,
(5) $x^2/(x^2+1)$,
(6) $x^3/(x^2+1)$,
(7) $(x-2)(x+2)(x+4)/(x-1)x(x+1)$.

Aufgabe 6.23. Es sei K ein angeordneter Körper, $K[X]$ der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über K. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 6.19, dass man Q zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.

Aufgabe 6.24.*

Es sei x eine reelle Zahl, $x \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Aufgabe 6.25. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2-4x+3}{x-2} \text{ und } g(x) = \frac{x+1}{x^2-4}\,.$$

Aufgabe 6.26. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.27. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$\left((4+\mathrm{i})X^3 - \mathrm{i}X^2 + 2X + 3 + 2\mathrm{i}\right) \cdot \left((2-\mathrm{i})X^3 + (3-5\mathrm{i})X^2 + (2+\mathrm{i})X + 1 + 5\mathrm{i}\right).$$

Aufgabe 6.28. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 5X^4 - 6X^3 + \frac{3}{5}X^2 - \frac{1}{2}X + 5$ und $T = \frac{1}{7}X^2 + \frac{3}{7}X - 1$ durch.

Aufgabe 6.29. (4 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = (5+\mathrm{i})X^4 + \mathrm{i}X^2 + (3-2\mathrm{i})X - 1$ und $T = X^2 + \mathrm{i}X + 3 - \mathrm{i}$ durch.

Aufgabe 6.30. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 \,=\, (X+1)\big(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \cdots + X^2 - X + 1\big)$$

für u ungerade.

Aufgabe 6.31. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

Aufgabe 6.32. (4 Punkte)

Man finde ein Polynom f vom Grad ≤ 3, für welches

$$f(0) = -1,\ f(-1) = -3,\ f(1) = 7,\ f(2) = 21$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis