修正課程標準適用

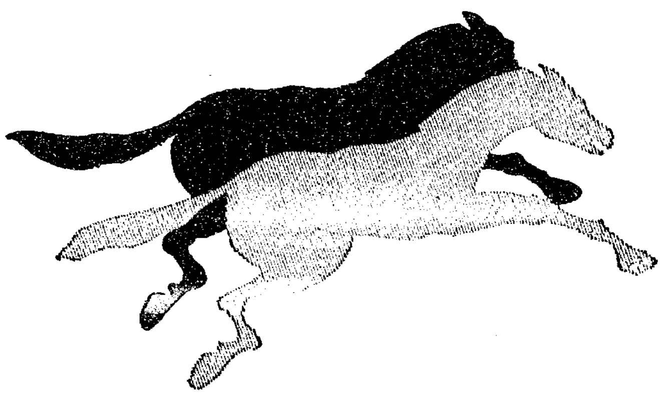
新編

初中幾何

第四冊

編者 陳修仁

校者 朱彥頫
陶鴻翔



中華書局印行

修正新課程標準適用

新編初中幾何第四册

(本册供第三學年第二學期用)

目　次

附數値三角

修正課程標準適用

新編

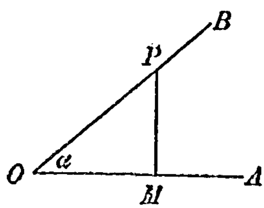
初中幾何第四册

數值三角

三角函數

第一章　銳角的三角函數

§1. 正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割　在任一銳角 AOB 的一邊 OB 上,任取一點 P,從 P 到他邊引垂線 PM,其垂足爲 M。在直角三角形 POM 內,假定用 α 代表 $\angle AOB$,那末斜邊 OP、$\angle\alpha$ 的對邊 MP 和底邊 OM,三邊中每次取二邊的比,可成六個比,每一比有一特別的名稱。



1. $\sin\alpha$ （$\angle\alpha$ 的正弦）$=\dfrac{MP(\text{對邊})}{OP(\text{斜邊})}$

2. $\cos\alpha$ （$\angle\alpha$ 的餘弦）$=\dfrac{OM(\text{底邊})}{OP(\text{斜邊})}$

3. $tan\alpha$ （$\angle\alpha$ 的正切）$=\dfrac{MP(\text{對邊})}{OM(\text{底邊})}$

4. $cot\alpha$ （$\angle\alpha$ 的餘切）$=\dfrac{OM(\text{底邊})}{MP(\text{對邊})}$

5. $sec\alpha$ （$\angle\alpha$ 的正割）$=\dfrac{OP(\text{斜邊})}{OM(\text{底邊})}$

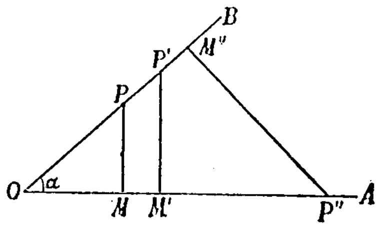
6. $cosec\alpha$（$\angle\alpha$ 的餘割）$=\dfrac{OP(\text{斜邊})}{MP(\text{對邊})}$

一角的正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割，總稱爲這角的三角函數。

§2. 定理一　角的大小一定，三角函數的值也一定。

假設　α 是定角。

求證　$sin\alpha$、$cos\alpha$、$tan\alpha$、$cot\alpha$、$sec\alpha$、$cosec\alpha$ 的值一定。



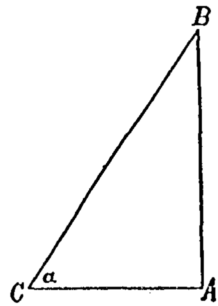
證明　在 $\angle\alpha$ 的一邊 OB 上，取 P 和 P' 點；在他邊 OA 上取 P'' 點。從 P、P' 到 OA 引垂線 PM、$P'M'$，其垂足爲 M、M'。從 P'' 到 OB 引垂線 $P''M''$，其垂足爲 M''。所成直角三角形 POM、$P'OM'$ 和 $P''OM''$ 互相似，故得

$$\frac{MP}{OP}=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{P''M''}{OP''}.$$

即不拘 P 點怎樣取法，$sin\alpha$ 的值常一定。

依同法可以證明 $\cos\alpha$、$\tan\alpha$、$\cot\alpha$、$\sec\alpha$、$\mathrm{cosec}\,\alpha$ 的值，不拘 P 點怎樣取法，都一定不變。

§3. 定理二 銳角的正弦和餘弦都小於一，正切和餘切可有任何數值，正割和餘割都大於一。



假設 α 爲銳角。

求證 (i) $\sin\alpha<1$, $\cos\alpha<1$。

(ii) $\tan\alpha$ 和 $\cot\alpha$ 有任何數值。

(iii) $\sec\alpha>1$, $\mathrm{cosec}\,\alpha>1$。

證明 在直角三角形 CAB 內，二邊 CA 和 AB 都比斜邊 CB 小，所以

$$(i)\quad \sin\alpha=\frac{AB}{CB}<1,\qquad \cos\alpha=\frac{CA}{CB}<1,$$

$$(ii)\quad \sec\alpha=\frac{CB}{CA}>1,\qquad \mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{CB}{AB}>1。$$

又二邊 CA 和 AB 可取任何值，所以它們的比，也有任何值，卽 $\tan\alpha$ 和 $\cot\alpha$ 有任何數值。

習題

1. 直角三角形三邊的長爲 3 厘米、4 厘米、5 厘米，求最小角的正弦、餘弦、正切的數值。

2. 直角三角形三邊的比爲 25:24:7，求最小角的餘

切、正割和餘割。

3. 直角三角形三邊的比爲33:56:65,求最小角的三角函數。

4. 直角三角形ABC內,$\angle C=90°$,邊AC、BC的長爲8尺、15尺,求$sinA$、$cotA$、$secA$。

5. 已知直角三角形二腰的長爲28厘米、45厘米,求45厘米的邊所對角的正切和餘割。

6. 在直角三角形ABC內,$\angle C=90°$,$AB=8$厘米,$AC=4$厘米,求$\angle B$的三角函數。

7. 直角三角形的斜邊及一腰的長爲13厘米、6厘米,求6厘米的邊所對角的餘弦、餘切和餘割。

8. 直角三角形ABC內,$\angle C=90°$,$BC=\sqrt{m^2+n^2}$,$AC=\sqrt{2mn}$,求$sinA$和$cosA$。

9. 上題中如$BC=\sqrt{m^2-2mn}$,$AC=n$,求$secA$、$cosecA$。

10. 上題中如$BC=2mn$,$AC=m^2-n^2$,求$sinA$和$cosA$。

11. 上題中如$BC=\sqrt{m^2+mn}$,$AB=m+n$,求$tanA$和$cotA$。

12. 上題中如$AC=lm\div n$,$AB=ln\div m$,求$sinA$和$cosA$。

13. 已知$sin\alpha=\frac{3}{5}$,求作$\angle\alpha$。

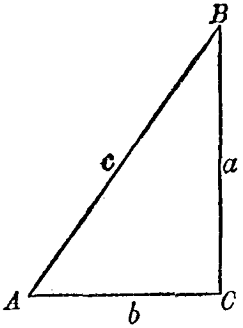
14. 已知$tan\alpha=\frac{7}{4}$,求作$\angle\alpha$,並求$sin\alpha$和$cos\alpha$。

第二章　三角函數的關係

§4.<u>定理三</u>　一角的餘割,正割,餘切,順次爲正弦,餘弦,正切的逆數。

假設　$\angle A$ 爲已知角。

求證　$\angle A$ 的餘割,正割,餘切,順次爲正弦,餘弦,正切的逆數.



證明　以已知角 $\angle A$ 做一角,以 $\angle C$ 爲直角,作一直角三角形 ABC。設以 a、b、c 表 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所對的邊(以下準此)。因

$$cosec A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}$$

及

$$\sin A=\frac{a}{c}$$

故

$$cosec A=\frac{1}{\sin A}$$

依同法得證

$$\left.\begin{aligned}\sec A&=\frac{1}{\cos A}\\ \cot A&=\frac{1}{\tan A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(一)$$

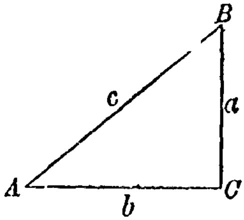
<u>推論</u>

$$\left.\begin{aligned}\sin A&=\frac{1}{cosec A}\\ \cos A&=\frac{1}{\sec A}\\ \tan A&=\frac{1}{\cot A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(二)$$

§5. 定理四　一角的正切等於這角的正弦和餘弦的比。

假設　$\angle A$ 爲已知角.

求證　$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$



證明　如圖, $\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$;

但　$\sin A=\dfrac{a}{c}$,　$\cos A=\dfrac{b}{c}$,

$$\therefore\quad \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}\cdots\cdots\cdots\cdots(三)$$

推論　$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}\cdots\cdots\cdots\cdots(四)$$

§6. 定理五　一角的正弦和餘弦的平方和等於 1。

假設　$\angle A$ 爲已知角.

求證　$\sin^2A+\cos^2A=1$.

證明　$\sin^2A+\cos^2A=\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$.

但由畢氏定理　$a^2+b^2=c^2$,

$$\therefore\quad \frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1,$$

即　$$\sin^2A+\cos^2A=1\cdots\cdots\cdots\cdots(五)$$

推論一　$\sec^2A=1+\tan^2A$

證明　用 $\cos^2A$ 除公式(五)的兩邊,得

$$\frac{sin^2A}{cos^2A}+\frac{cos^2A}{cos^2A}=\frac{1}{cos^2A},$$

即 $$\left(\frac{sinA}{cosA}\right)^2+1=\left(\frac{1}{cosA}\right)^2。$$

但由公式(三)和(一)式，$\frac{sinA}{cosA}=tanA$， $\frac{1}{cosA}=secA$，

$$\therefore\quad tan^2A+1=sec^2A \quad\text{……（六）}$$

推論二 $cosec^2A=1+cot^2A$

證明 用sin^2A除公式(五)的兩邊，得

$$\frac{sin^2A}{sin^2A}+\frac{cos^2A}{sin^2A}=\frac{1}{sin^2A},$$

或 $$1+\left(\frac{cosA}{sinA}\right)^2=\left(\frac{1}{sinA}\right)^2。$$

但由公式(四)和(一)式，$\frac{cosA}{sinA}=cotA$， $\frac{1}{sinA}=cosecA$，

$$\therefore\quad 1+cot^2A=cosec^2A \quad\text{……（七）}$$

〔注意〕 $(sinA)^n$ 通常寫成 sin^nA，切不可寫成 $sinA^n$。因爲 sin^nA 是表正弦的 n 次方，$sinA^n$ 是表 A 角的 n 次方的正弦。例如 $sin^2 30°$ 和 $sin(30°)^2=sin900°$ 截然不同。其他三角函數的方次記法均同此。

§7. 已知一三角函數，求其餘三角函數的方法。

(a) 已知 $sinA$，求其餘三角函數。

從公式(五)得 $$cos^2A=1-sin^2A,$$

$$\therefore cosA=\sqrt{1-sin^2A}。$$

從公式(三)得 $$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}},$$

從公式(四)得 $$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A},$$

從公式(一)得 $$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}},$$

從公式(一)得 $$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}。$$

(b)已知 $\tan A$,求其餘三角函數。

從公式(一)得 $$\cot A=\frac{1}{\tan A},$$

從公式(六)得 $$\sec A=\sqrt{1+\tan^2 A},$$

從公式(二)得 $$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}},$$

從公式(三)得 $$\sin A=\tan A\cos A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}},$$

從公式(一)得 $$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}.$$

(c)已知 $\sec A$,求其餘三角函數。

從公式(二)得 $$\cos A=\frac{1}{\sec A},$$

從公式(五)得 $$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{\sec^2 A}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sec^2 A-1}{\sec^2 A}}$$

$$=\frac{1}{\sec A}\sqrt{\sec^2 A-1},$$

從公式(一)得 $$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}},$$

從公式(六)得　$\tan A=\sqrt{\sec^2 A-1}$,

從公式(一)得　$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$.

(*d*)已知 $\cos A$,求其餘三角函數。

從公式(一)得　$\sec A=\frac{1}{\cos A}$,

從公式(五)得　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$,

從公式(一)得　$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$,

從公式(三)得　$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$,

從公式(四)得　$\cot=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$.

(*e*)已知 $\cot A$,求其餘三角函數。

從公式(二)得　$\tan A=\frac{1}{\cot A}$,

從公式(七)得　$\operatorname{cosec} A=\sqrt{1+\cot^2 A}$,

從公式(二)得　$\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec} A}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$,

從公式(四)得　$\cos A=\cot A\sin A=\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$,

從公式(一)得　$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$.

(*f*)已知 $\operatorname{cosec} A$,求其餘三角函數。

從公式(二)得　$\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec} A}$,

從公式(五)得 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}}$

$=\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}{\operatorname{cosec} A}$,

從公式(一)得 $\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{\operatorname{cosec} A}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}$,

從公式(七)得 $\cot A=\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}$,

從公式(二)得 $\tan A=\frac{1}{\cot A}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}$。

習　題　一

1. 已知 $\sin A=\frac{3}{7}$,求其餘三角函數。

2. 已知 $\sin A=0.12$,求 $\tan A$ 和 $\sec A$。

3. 已知 $\tan A=\frac{3}{4}$,求 $\cos A$ 和 $\operatorname{cosec} A$。

4. 已知 $\tan A=4$,求其餘三角函數。

5. 已知 $\cos A=\frac{20}{101}$,求 $\sin A$ 和 $\tan A$。

6. 已知 $\cos A=\frac{4}{5}$,求其餘三角函數。

7. 已知 $\sec A=4$,求其餘三角函數。

8. 已知 $\sec A=1.03$,求 $\sin A$ 和 $\tan A$。

9. 已知 $\cot A=\frac{2}{\sqrt{5}}$,求其餘三角函數。

10. 已知 $\cot A=\sqrt{3}$,求 $\sin A$ 和 $\tan A$。

11. 已知 $\operatorname{cosec} A=5$,求 $\sec A$ 和 $\tan A$。

12. 已知 $cosecA=1.008$,求其餘三角函數.

13. 已知 $tanA=\frac{2x(x+1)}{2x+1}$,求其餘三角函數.

14. 已知 $cosA=m$,求其餘三角函數。

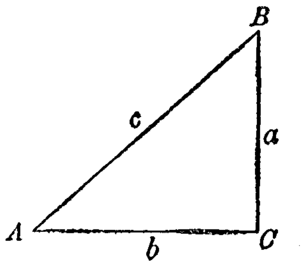
15. 已知 $sinA=\frac{n}{m}$,求其餘三角函數.

16. 已知 $secA=\frac{m^2+1}{2m}$,求其餘三角函數.

17. 已知 $cotA=\frac{q}{p}$,求其餘三角函數。

18. 已知 $cosecA=\frac{m^2+n^2}{2mn}$,求其餘三角函數.

§8.餘角的三角函數　在三角形 ABC 內,假定 $\angle C$ 是直角,則 $\angle B$ 是 $\angle A$ 的餘角,即 $\angle B=90°-\angle A$。但從三角函數的定義,得



$$sinA=\frac{a}{c}=cosB,$$

$$cosA=\frac{b}{c}=sinB,$$

$$tanA=\frac{a}{b}=cotB,$$

$$cotA=\frac{b}{a}=tanB,$$

$$secA=\frac{c}{b}=cosecB,$$

$$cosecA=\frac{c}{a}=secB.$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \sin A &= \cos(90^\circ - A), \\ \cos A &= \sin(90^\circ - A), \\ \tan A &= \cot(90^\circ - A), \\ \cot A &= \tan(90^\circ - A), \\ \sec A &= \operatorname{cosec}(90^\circ - A), \\ \operatorname{cosec} A &= \sec(90^\circ - A)。 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(八)$$

由此得到如下的定理。

定理六　一角的函數等於其餘角的餘函數。

〔注意〕 餘弦、餘切、餘割叫做餘函數。

§9.三角恆等式　含有三角函數的等式,對於任何銳角都可以成立時,這等式叫做三角恆等式。例如公式(一)到(七)都是三角恆等式。以下就用這幾個恆等式作基礎,去證明其他恆等式。

〔注意〕 如果把三角函數擴充到任何角,這定義就不限於銳角了,理詳高中三角中。

§10. 三角恆等式的證法

(a)　用已知的關係〔如式公(一)至(七)的恆等式,或其他已知的恆等式〕代入原三角恆等式的左邊,逐漸推演,化到和右邊一樣為止。

(b)　用已知的關係代入原三角恆等式的右邊,逐漸推演,化到和左邊一樣爲止。

(c)　用已知的關係,把原三角方程式的左邊化到等於某式,又用已知關係把右邊也化到等於某式爲止.

§11. 三角恆等式的例題

例 1.　證$\tan A+\cot A=\sec A\operatorname{cosec} A$.

證明　$\tan A+\cot A=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}$　(公式三,四)

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}=\frac{1}{\cos A\sin A}$$

(公式五)

$$=\frac{1}{\cos A}\times\frac{1}{\sin A}=\sec A\operatorname{cosec} A$$

(公式一)

例 2.　證$(1-\cos^2 A)(1+\tan^2 A)=\tan^2 A$.

證明　因　$1-\cos^2 A=\sin^2 A$　(公式五)

$1+\tan^2 A=\sec^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$　(六,一)

$$\therefore (1-\cos^2 A)(1+\tan^2 A)=\sin^2 A.\frac{1}{\cos^2 A}$$

$$=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=\tan^2 A\text{(三)}$$

例 3.　證 $2\cos^2 A-1=\cos^4 A-\sin^4 A$。

證明　$\cos^4 A-\sin^4 A=(\cos^2 A+\sin^2 A)(\cos^2 A-\sin^2 A)$

$$=\cos^2 A-\sin^2 A$$

$$=\cos^2 A-(1-\cos^2 A) \qquad (五)$$

$$=2\cos^2 A-1。$$

例 4.　證 $1-2\sin^2 A\cos^2 A=\sin^4 A+\cos^4 A$。

證明　$\sin^4 A+\cos^4 A=\sin^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A-2\sin^2 A\cos^2 A$

$$=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A$$

$$=1-2\sin^2 A\cos^2 A \qquad (五)$$

例 5.　證 $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}A-\cot A}-\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}A+\cot A}$

證明　左邊 $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}A-\cot A}-\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{\cos A}{\sin A}}-\dfrac{1}{\sin A} \qquad (一)$

$$=\frac{1}{\dfrac{1-\cos A}{\sin A}}-\frac{1}{\sin A}=\frac{\sin A}{1-\cos A}-\frac{1}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin A(1+\cos A)}{(1-\cos A)(1+\cos A)}-\frac{1}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin A(1+\cos A)}{1-\cos^2 A}-\frac{1}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin A(1+\cos A)}{\sin^2 A}-\frac{1}{\sin A} \qquad (五)$$

$$=\frac{1+\cos A}{\sin A}-\frac{1}{\sin A}=\frac{1+\cos A-1}{\sin A}$$

$$=\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A \qquad (四)$$

又　右邊 $\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}A+\cot A}=\dfrac{1}{\sin A}$

$$-\frac{1}{\dfrac{1}{sinA}+\dfrac{cosA}{sinA}} \qquad (一)$$

$$=\frac{1}{sinA}-\frac{1}{\dfrac{1+cosA}{sinA}}=\frac{1}{sinA}-\frac{sinA}{1+cosA}$$

$$=\frac{1}{sinA}-\frac{sinA(1-cosA)}{(1+cosA)(1-cosA)}$$

$$=\frac{1}{sinA}-\frac{sinA(1-cosA)}{1-cos^2A}$$

$$=\frac{1}{sinA}-\frac{sinA(1-cosA)}{sin^2A} \qquad (五)$$

$$=\frac{1}{sinA}-\frac{1-cosA}{sinA}=\frac{1-1+cosA}{sinA}$$

$$=\frac{cosA}{sinA}=cotA \qquad (四)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{cosecA-cotA}-\frac{1}{sinA}=\frac{1}{sinA}-\frac{1}{cosocA+cotA}$$

例 6.　證 $\dfrac{cosA-sinA}{cosA+sinA}+\dfrac{cosA+sinA}{cosA-sinA}$

$$=\frac{secAcosecA}{2}\cdot\left(\frac{cosecA+secA}{cosecA-secA}-\frac{cosecA-secA}{cosecA+secA}\right)$$

證明　左邊 $\dfrac{cosA-sinA}{cosA+sinA}+\dfrac{cosA+sinA}{cosA-sinA}$

$$=\frac{(cosA-sinA)^2+(cosA+sinA)^2}{(cosA+sinA)(cosA-sinA)}$$

$$=\frac{2cos^2A+2sin^2A}{cos^2A-sin^2A}=\frac{2(cos^2A+sin^2A)}{cos^2A-sin^2A}$$

$$=\frac{2}{cos^2A-sin^2A} \qquad (五)$$

又 右邊 $\dfrac{secAcosecA}{2}\left(\dfrac{cosecA+secA}{cosecA-secA}-\dfrac{cosecA-secA}{cosecA+secA}\right)$

$$=\frac{secAcesecA}{2}\cdot\left\{\frac{(cosecA+secA)^2-(cosecA-secA)^2}{cosec^2A-sec^2A}\right\}$$

$$=\frac{secAcosecA}{2}\cdot\frac{4cosecAsecA}{cosec^2A-sec^2A}$$

$$=\frac{2sec^2Acosec^2A}{cosec^2A-sec^2A}=\frac{2\cdot\frac{1}{cos^2A}\cdot\frac{1}{sin^2A}}{\frac{1}{sin^2A}-\frac{1}{cos^2A}}(一)$$

$$=\frac{2\cdot\frac{1}{cos^2Asin^2A}}{\frac{cos^2A-sin^2A}{sin^2Acos^2A}}=\frac{2}{cos^2A-sin^2A}.$$

$$\therefore\quad \frac{cosA-sinA}{cosA+sinA}+\frac{cosA+sinA}{cosA-sinA}=\frac{secAcosecA}{2}\cdot\left(\frac{cosecA+secA}{cosecA-secA}-\frac{cosecA-secA}{cosecA+secA}\right)$$

§12. 公式八的應用

例 1. 已知 $cosA=sin35°$, 求 A 角。

解 因 $cosA=sin(90°-A)$,

$\therefore\quad sin(90°-A)=sin35°$,

$\therefore\quad 90°-A=35°,\qquad \therefore\quad A=90°-35°=55°$.

例 2. 已知 $tanA=cot51°$,求 A 角。

解 因 $tanA=cot(90°-A)$,

$\therefore \quad cot(90°-A)=cot51°,$

$\therefore \quad 90°-A=51°, \qquad \therefore \quad A=90°-51°=39°$。

例 3. 證$\{sec(90°-A)-secA\}\{cosec(90°-A)-cosecA\}$

$+(1-tanA)^2+(cotA-1)^2=0$。

證明 因 $sec(90°-A)=cosecA,\ cosec(90°-A)=secA,$

$\therefore \quad \{sec(90°-A)-secA\}\{cosec(90°-A)-cosecA\}+$

$(1-tanA)^2+(cotA-1)^2$

$=(cosecA-secA)(secA-cosecA)+1-2tanA$

$+tan^2A+cot^2A-2cotA+1$

$=-(cosecA-secA)^2+(1+tan^2A)+(1+cot^2A)-$

$2(tanA+cotA)$

$=-cosec^2A-sec^2A+2cosecAsecA+sec^2A+$

$cosec^2A-2\left(\frac{sinA}{cosA}+\frac{cosA}{sinA}\right)$ (六)

$=2cosecAsecA-2\cdot\frac{sin^2A+cos^2A}{cosAsinA}$ (五)

$=2cosecAsecA-2\cdot\frac{1}{cosAsinA}$

$=2cosecAsecA-2\cdot\frac{1}{cosA}\cdot\frac{1}{sinA}$

$=2cosecAsecA-2cosecAsecA$ (一)

$=0$

習 題 二

試證下面的恆等式:

1. $secAcotA = cosecA$

2. $cosAtanA = sinA$

3. $cotAsinA = cosA$

4. $sin^4A - cos^4A = sin^2A - cos^2A$

5. $(1-cos^2A)(1+cot^2A)=1$

6. $sin^2A+(1-cosA)^2=2(1-cosA)$

7. $(sinA+cosA)^2=1+2sinAcosA$

8. $(sinA-cosA)^2=1-2sinAcosA$

9. $cos^2A-sin^2A=1-2sin^2A=2cos^2A-1$

10. $sinA(tanA+cotA)=secA$

11. $sin^3A+cos^3A=(sinA+cosA)(1-sinAcosA)$

12. $(tanA-1)^2+(1-cotA)^2=(secA-cosecA)^2$

13. $sin^6A+cos^6A=1-3sin^2Acos^2A$

14. $sin^6A-cos^6A=(2sin^2A-1)(1-sin^2A+sin^4A)$

15. $\frac{sinA}{1+cosA}=\frac{1-cosA}{sinA}$

16. $\frac{tanA+tanB}{cotA+cotB}=tanAtanB$

17. $(secA-tanA)^2=\frac{1-sinA}{1+sinA}$

18. $\frac{(1+sinA)(1+secA)}{(1+cosA)(1+cosecA)}=tanA$

19. $\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A\sin^2 A$

20. $\cot^2 A-\cos^2 A=\cot^2 A\cos^2 A$

21. $\tan^2 A+\cot^2 A+2=\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A$

22. $\sec^4 A+\tan^4 A=1+2\sec^2 A\tan^2 A$

23. $\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A$

24. $\dfrac{\tan^3 A}{1+\tan^2 A}+\dfrac{\cot^3 A}{1+\cot^2 Z}=\dfrac{1-2\sin^2 A\cos^2 A}{\sin A\cos A}$

25. $\sin A=\cos 32°15'$，求 A 角。

26. $\tan A=\cot 64°18'$，求 A 角。

第三章　三角函數的數值

§13. <u>定理七</u>　角逐漸增大時,正弦和正切也逐漸增大,但餘弦反逐漸減小。

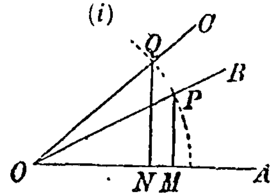
假設　$\angle\beta > \angle\alpha$

求證　$\sin\beta > \sin\alpha$, $\cos\beta < \cos\alpha$, $\tan\beta > \tan\alpha$.

證明　在(i)圖內,設

$$\angle AOB = \alpha, \angle AOC = \beta。$$

(i)



用 O 做中心,任意長做半徑畫一圓弧,和 OB、OC 交於 P、Q。從這兩點到 OA 引垂線 MP、NQ,則

$$\sin\alpha = \frac{MP}{OP}, \quad \sin\beta = \frac{NQ}{OQ}, \quad \cos\alpha = \frac{OM}{OP}, \quad \cos\beta = \frac{ON}{OQ}.$$

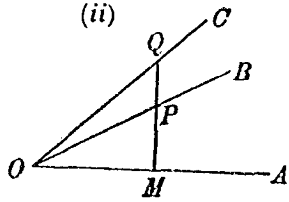
因　$OP = OQ, NQ > MP, ON < OM$,

$\therefore$　$\dfrac{NQ}{OQ} > \dfrac{MP}{OP}$,　　$\dfrac{ON}{OQ} < \dfrac{OM}{OP}$,

即　$\sin\beta > \sin\alpha$,　　$\cos\beta < \cos\alpha$。

如(ii)圖。從 OB 上一點 P 到 OA 引垂線 MP, 其延長線交 OC 於 Q, 則

(ii)



$$\tan\alpha = \frac{MP}{OM}, \tan\beta = \frac{MQ}{OM}。$$

但　$MQ > MP$,

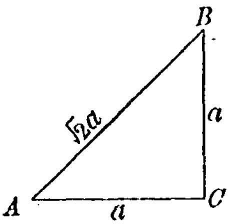
$\therefore$　$\dfrac{MQ}{OM} > \dfrac{MP}{OM}$,

即 $\tan\beta > \tan\alpha$

推論 角逐漸增大時,正割也逐漸增大,但餘切和餘割反逐漸減小。

§14. 特別角三角函數的數值

(i) 45°的三角函數的數值



在直角三角形ABC內,如果

$$\angle C=90°;\ AC=BC=a,$$

則 $$\angle A=\angle B=45°。$$

從畢氏定理得$AB^2=a^2+a^2=2a^2$

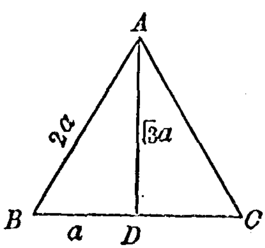
$$\therefore\ AB=\sqrt{2}a$$

$$\therefore \sin 45°=\cos 45°=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 45°=\cot 45°=\frac{a}{a}=1$$

$$\sec 45°=\operatorname{cosec} 45°=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}.$$

(ii) 30°和60°的三角函數的數值.



從正三角形ABC的頂點A到底邊BC引垂線AD,這AD線就是$\angle A$的平分線,所以在$\triangle ABD$內,

$$\angle ABD=60°,\ \angle BAD=30°。$$

如果用$2a$表這正三角形每邊的長,則

$$BD=a,\quad AD=\sqrt{3}a$$

$$\therefore \sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ=\sin 30^\circ=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

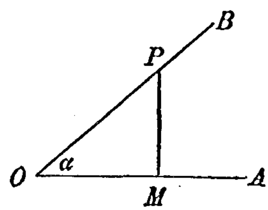
$$\tan 60^\circ=\cot 30^\circ=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ=\tan 30^\circ=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ=\operatorname{cosec} 30^\circ=\frac{2a}{a}=2$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ=\sec 30^\circ=\frac{2a}{\sqrt{3}a}=\frac{2}{\sqrt{3}}。$$

(iii) 0°和90°的三角函數的數值



在 $\angle AOB=\alpha$ 內,定 P 點是 OB 邊上的定點而且 OA 的位置固定,OB 在 O 點的周圍迴轉。當 $\angle\alpha$ 非常小時,垂線 MP 的長也是非常小,而 OM 的長非常接近於 OP。但

$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP},\quad \cos\alpha=\frac{OM}{OP},$$

所以 $\sin\alpha$ 也是非常小,而 $\cos\alpha$ 非常接近於 1. 若是 OB 和 OA 相重,垂線 MP 的長變做 0,而 OM 等於 OP, 所以

$$sin0^\circ=0, \qquad cos0^\circ=1。$$

又$\angle\alpha$非常接近於0的時候，$tan\alpha$也非常接近於0。α等於0，則$tan0^\circ=0$。

故從逆數的關係，得　$cot0^\circ=\dfrac{1}{tan0^\circ}=\dfrac{1}{0}=\infty$，

依同法，得　$sec0^\circ=\dfrac{1}{cos0^\circ}=\dfrac{1}{1}=1$，

$$cosec0^\circ=\frac{1}{sin0^\circ}=\frac{1}{0}=\infty.$$

將OB迴轉，使銳角α逐漸增大，到了非常接近90°時，垂線MP非常接近於OP，而OM變爲非常小，所以$sin\alpha$非常接近於1，$cos\alpha$非常接近於0。到了$\angle\alpha=90^\circ$時，垂線MP等於OP，而OM的長等於0，所以

$$sin90^\circ=1, \qquad cos90^\circ=0。$$

又$\angle\alpha$非常接近於90°時，$tan\alpha$變做非常大，卽

$$tan90^\circ=\infty。$$

故從逆數的關係，得 $cot90^\circ=\dfrac{1}{tan90^\circ}=\dfrac{1}{\infty}=0$，

$$sec90^\circ=\frac{1}{cos90^\circ}=\frac{1}{0}=\infty,$$

$$cose90^\circ=\frac{1}{sin90^\circ}=\frac{1}{1}=1。$$

〔注意〕因0°和90°互爲餘角，故從餘角三角函數的

公式,可用 0° 的三角函數的數值,求出 90° 的三角函數的數值.

下表是特別角各三角函數的數值。

角	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

§15. 三角方程式　含三角函數的等式,對於某特別角纔能成立的,叫做**三角方程式**。

§16. 三角方程式的解法　用已知的函數關係式,把式中各函數化做一函數,視這函數爲未知數,求得其值後,再決定角的大小.

例 1.　解　$2\sin x=\operatorname{cosec} x$

解　由公式(一)　$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$,

代入原式得　$2\sin x=\frac{1}{\sin x}$,

即　　$2\sin^2 x=1$

或　　$\sin^2 x=\frac{1}{2}$

$$\therefore\quad \sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

從表上查得　　$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \therefore\quad x=45^\circ$。

〔附註〕$\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$對於正銳角無意義可言,故捨去不用。以後本書所取的函數值僅限於正數,故開平方時所得的負值一概捨去。

<u>例 2.</u>　解　　$\cot x=2\cos x$

解　由公式(四)　　$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$.

代入原式得　　$\frac{\cos x}{\sin x}=2\cos x,$

故　　$\cos x=2\cos x\cdot\sin x,$

即　　$\cos x(2\sin x-1)=0,$

$$\therefore\quad \cos x=0,\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或　　$2\sin x-1=0$。$\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

從前表查得　　$\cos 90^\circ=0,$

$$\therefore\quad x=90^\circ。$$

又由(2)　　$\sin x=\frac{1}{2},$

從前表查得　　$\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$

$$\therefore\quad x=30^\circ.$$

例 3.　解　$\sin x=\cos 2x$

解　由公式(八)　$\sin x=\cos(90^\circ-x)$。

代入原式,得　$\cos(90^\circ-x)=\cos 2x,$

$\therefore\quad 90^\circ-x=2x,$

$3x=90^\circ,\quad \therefore\quad x=30^\circ$。

例 4.　解　$2\sin^2 x=3\cos x$

解　由公式(五)　$\sin^2 x=1-\cos^2 x$。

代入原式,得　$2(1-\cos^2 x)=3\cos x,$

或　$2\cos^2 x+3\cos x-2=0,$

卽　$(2\cos x-1)(\cos x+2)=0,$

$\therefore\quad \cos x=\frac{1}{2}$。

$\therefore\quad x=60^\circ$。

習　題　一

解下列各三角方程式:

1. $\tan x+\cot x=2$
2. $\sin x+\cos x=1$
3. $2\cos x=\sec x$
4. $4\sin x=\operatorname{cosec} x$
5. $4\sin x=3\operatorname{cosec} x$
6. $4\cos x=3\sec x$

7. $\cos x+\tan x=\sec x$

8. $\sec^3 x-2\tan^2 x=2$

9. $2\cos^2 x+3\sin x=3$

10. $\tan x+3\cot x=4$

11. $2\sin^2 x+\sqrt{2}\cos x=2$

12. $\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x+\frac{3}{4}=0$

13. $2\sin^2 x+3\cos x=3$

14. $\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x=\frac{7}{4}$

15. $4\sin^2 x-2(\sqrt{3}+1)\sin x+\sqrt{3}=0$

16. $\tan^2 x-(\sqrt{3}+1)\tan x+\sqrt{3}=0$

17. 試從方程式 $\tan(30^\circ-x)=\tan 4x$ 求 x 角。

18. 試從方程式 $\sin 2x=\cos 4x$ 求 x 角。

19. 試從方程式 $\sin(A-B)=\frac{1}{2}$ 求 A 角和 B 角,但 A、B 兩角互爲餘角。

20. 試從 $\cos(A+B)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $\sin(A-B)=\frac{1}{2}$,求 A 角和 B 角。

21. 試從 $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 及 $\tan(A+B)=\sqrt{3}$,求 A 角和 B 角。

22. 試從 $\tan(A-B)=1$ 及 $\tan(A+B)=\sqrt{3}$,求 A 角和 B 角。

§17. 三角函數的眞數表　特別角三角函數的數值,在 §14 中已經求出。但是任一銳角的三角函數並不是這樣容易求得的,爲便利學者計算起見,把已經計算出來的結果,列成一表,叫做**三角函數眞數表**,附在書末。如須求某角的函數值或已知函數值而要求某角的大小時,祇要在表上一查,便可知道。

這表從 $0°$ 起到 $90°$ 止,每隔 $10'$ 諸角的函數值都正確計算到小數第四位止。表的左端角度直行所載的角度祇到 $45°$ 止,$45°$ 以上到 $90°$ 的角度須從表的右端角度直行內由下向上檢出。茲舉數例說明查表的方法。

例 1.　求 $\sin 21°40'$。

解　先從表的左端角度直行內,由上而下,檢出 $21°$ $40'$,同時在表上端記有 $\sin$ 的直行內檢出和 $21°40'$ 同列的數,就是所求的眞數,所以

$$\sin 21°40' = 0.3692,$$

例 2.　求 $\cos 61°20'$。

解　因角度大於 $45°$, 故從表的右端角度直行內,由下向上檢出 $61°20'$,再從表下端記有 $\cos$ 的直行內檢

出和61°20′同列的數值,就是所求的真數。所以

$$\cos 61°20' = 0.4797.$$

例 3.　求 $\tan 39°50'$。

解　先從表的左端角度直行內由上而下檢出39°50′,再從 $\tan$ 行內檢出和39°50′同列的數,就是所求的眞數。所以

$$\tan 39°50' = 0.8342.$$

例 4.　求 $\cot 72°30'$。

解　因角度大於 45°,故從表的右端角度直行,由下而上,檢出 72°30′,再從表下端記有 $\cot$ 的直行內檢出和 72°30′同列的數,就是所求的眞數。所以

$$\cot 72°30' = 0.3153.$$

例 5.　已知 $\sin x = 0.2812$,求 x 角。

解　從 $\sin$ 行內由上而下檢出 0.2812,再從左端角度直行內檢出和 0.2812 同列的角度,就是所求的角。所以

$$x = 16°20'.$$

例 6.　已知 $\tan x = 1.9347$,求 x 角。

解　從 $\tan$ 行內從上而下不能檢出 1.9347,可知所求的角度當在 45°以上,於是從表的下端記有 $\tan$ 的

直行內由下而上檢出 1.9347，再從右端的角度直行內，檢出和 1.9347 同列的角度，就是所求的角。所以

$$x=62°40'。$$

§18. 補插法　在三角函數眞數表內，角度的間隔爲 10′，如果碰到幾度幾分幾秒的角度，就不能在表內直接檢出這角度的函數了。或已知某角的函數值，如果在表內查不出這數值，也不能直接求出這角的度數。補插法就是用來解決這個問題的。其原理是假定角度的變化極小時，和函數值的變化成正比，其逆亦能成立。茲舉數例說明於下：

例 1.　求 $\sin 35°47'$

解　在表內並沒有 35°47′ 的三角函數，祇有

$$\sin 35°40'=0.5831,\qquad \sin 35°50'=0.5854。$$

這兩函數的差是 0.0023，角度的差是 10′。但是 35°47′ 和 35°40′ 的角度差是 7′，所以應用補插法的原理，得

$$10':7'=0.0023:x$$

$$\therefore\quad x=\frac{7\times 0.0023}{10}=0.0016.$$

已知正弦隨角的增加而增加，故

$$\sin 35°47'=\sin 35°40'+x=0.5831+0.0016=0.5847。$$

〔注意〕 兩函數的差叫做表差。

<u>例 2.</u> 求 $\cos 57°24.5'$

解　從表內查得

$$\cos 57°20' = 0.5398,$$

$$\cos 57°30' = 0.5373,$$

$$\text{表差} = 0.5398 - 0.5373 = 0.0025。$$

但是 $57°24.5'$ 和 $57°20'$ 的差為 $4.5'$，故應用補插法的原理，

$$10' : 4.5' = 0.0025 : x$$

$$x = \frac{4.5 \times 0.0025}{10} = 0.0011.$$

已知餘弦隨角度的增加而減少，所以

$$\cos 57°24.5' = \cos 57°20' - x = 0.5398 - 0.0011 = 0.5387。$$

〔注意〕 其他三角函數的數值，都可用上法求出。但須記清正弦、正切隨角度的增加而增加，餘弦、餘切則隨角度的增加而減少。

<u>例 3.</u> 已知 $\sin x = 0.6875$，求 x 角。

解　在表的 $\sin$ 行內，沒有等於 0.6875 的真數，檢出比這數稍大和稍小的兩數 0.6862 和 0.6884，就是

$$\sin 43°20' = 0.6862, \qquad \sin 43°30 = 0.6884,$$

所以表差是 0.0022。但是

$$0.6875 - 0.6862 = 0.0013,$$

故應用補插法的原理得 $0.0022:0.0013=10:y$

$$\therefore y=\frac{0.0013\times 10}{0.0022}=\frac{13\times 10}{22}=5.9$$

已知角度隨正弦的增加而增加,

$$\therefore\ 所求的x角=43^\circ 20'+5.9'=43^\circ 25.9'.$$

例 4. 已知 $tan x=0.4320$,求 x 角.

解 在表的 tan 行內,沒有等於 0.4320 的真數,檢出比這數稍大和稍小的兩數 0.4348 和 0.4314, 就是

$$tan 23^\circ 30'=0.4348,\quad tan 23^\circ 20'=0.4314,$$

所以表差是 0.0034。但是

$$0.4320-0.4314=0.0006,$$

故應用補插法的原理,得

$$0.0034:0.0006=10:y,$$

$$\therefore\quad y=\frac{0.0006\times 10}{0.0034}=\frac{6\times 10}{34}=1.76.$$

已知角度隨正切的增加而增加,

$$\therefore\ 所求的x角=23^\circ 20'+y=23^\circ 20'+1.76'=23^\circ 21.76'.$$

〔注意〕 已知三角函數的數值而求角度時,適用例 3 或例 4 的方法。不過要記清角度隨正弦、正切的增加而增加,但餘弦、餘切增加時角度反而減小.

習題二

1. 求 $sin 30^\circ 26'$.

2. 求 $\cos 27°43'$。

3. 求 $\tan 73°56'$。

4. 求 $\sin 54°19.6'$。

5. 求 $\cos 56°17.4'$。

6. 求 $\tan 18°58.7'$。

7. 求 $\cot 83°28.3'$。

8. 已知 $\sin x=0.6352$, 求 x 角。

9. 已知 $\cos x=0.4859$, 求 x 角。

10. 已知 $\tan x=0.8956$, 求 x 角。

11. 已知 $\cot x=1.0248$, 求 x 角。

12. 已知 $\cot x=1.3460$, 求 x 角。

13. 已知 $\sin x=0.9479$, 求 x 角。

14. 已知 $\cos x=0.9650$, 求 x 角。

15. 已知 $\tan x=0.1732$, 求 x 角。

第四章 直角三角形的解法

§19. 直角三角形的決定 在三角形內祇有六元素,就是三角和三邊。從幾何定理,知道六元素中如已知三種,即可決定這三角形。在直角三角形內,因有一角是直角,故若知二元素即可決定這直角三角形。但僅知其餘二銳角,不能求三邊的長;換句話說,在已知三元素中,除一角是直角外,至少要知道一邊的長。即決定直角三角形的條件應有如下的四組:

(一)已知斜邊和一銳角,

(二)已知一腰和一銳角.

(三)已知斜邊和一腰.

(四)已知二腰.

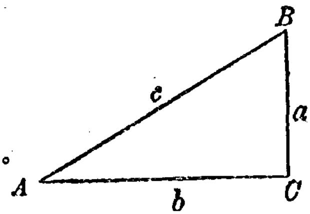
§20. 直角三角形的解法 從上節所述任一組已知元素以求出其他元素,叫做解直角三角形。解法如下:

在三角函數定義(祇須用正弦、餘弦、正切即可)和畢氏定理各式中,都含有三元素。選取含有二已知元素和所求元素的等式,即可將所求的

元素求出。

三角形 ABC 內,普通用 A、B、C 表三個角,a、b、c 表這三個角的對邊。本書用 C 表直角三角形的直角,所以 c 爲斜邊,a、b 爲銳角 A、B 的對邊,即二腰。

§21. 已知斜邊 c 和一銳角 A,解這直角三角形。



解　因 $\sin A=\dfrac{a}{c}$,

$\cos A=\dfrac{b}{c}$,

$\therefore a=c\sin A,\ b=c\cos A$。

又　$B=90°-A$

例 1.　$c=80$ 厘米,$A=20°$,解這直角三角形。

解　$\sin 20°=0.3420$,　$\cos 20°=0.9397$,

$\therefore$　$a=80$ 厘米 $\times 0.3420=27.36$ 厘米,

$b=80$ 厘米 $\times 0.9397=75.18$ 厘米,

又　$B=90°-A=90°-20°=70°$。

例 2.　$c=20°$ 厘米,$A=35°8'$,解這直角三角形。

解　應用補插法求得

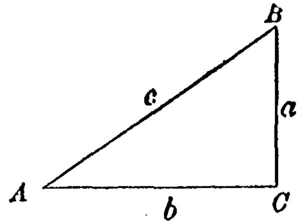
$\sin A=0.5755$,　$\cos A=0.8178$。

$\therefore$　$a=20$ 厘米 $\times 0.5755=11.51$ 厘米,

$$b=20\text{厘米}\times 0.8178=16.36\text{厘米}。$$

又 $B=90°-A=54°52'$。

§22. 已知一腰 b 和一銳角 A，解這直角三角形.



解 因 $\cos A=\dfrac{b}{c}$,

$\tan A=\dfrac{a}{b}$,

$\therefore\quad c=\dfrac{b}{\cos A}$,

$a=b\tan A$,

又 $B=90°-A$,

例 1. $b=235$ 厘米，$A=60°$，解這直角三角形.

解 $\cos A=\dfrac{1}{2}$, $\tan A=1.7321$,

$\therefore\quad c=235\times 2=470$ 厘米,

$a=235\times 1.7321=407.04$ 厘米.

又 $B=90°-A=90°-60°=30°$

例 2. $b=100$, $A=27°36'$，解這直角三角形.

解 應用補插法求得

$\cos 27°36'=0.8862$, $\tan 27°36'=0.5228$,

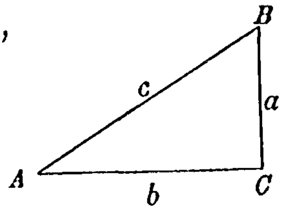
$\therefore\quad c=100\times\dfrac{1}{0.8862}=112.84$,

$a=100\times 0.5228=52.28$,

又　$B=90°-27°36'=62°24'$。

〔注意〕 已知一腰 a 和對這邊的對角 A,其解法和本節同,因 $B=90°-A$。

§23. 已知斜邊 c 和一腰 a,解這直角三角形。



解　$\sin A=\dfrac{a}{c}$, $B=90°-A$,

及　$\sin B=\dfrac{b}{c}$, $b=c\sin B$,

或　$\cos A=\dfrac{b}{c}$, $b=c\cos A$。

又　$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$。

例　$c=67.24$ 公尺, $a=49.15$ 公尺,解這直角三角形。

解　$\sin A=\dfrac{49.15}{67.24}=0.7310$。

應用補插法得　$A=46°58'$。

$\therefore\ B=90°-A=90°-46°58'=43°2'$。

又　$\sin B=0.6824$,

$\therefore\ b=67.24\times0.6824=45.88$ 公尺。

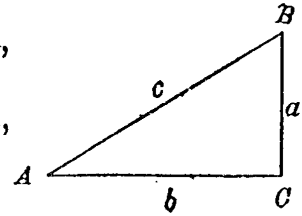
〔注意〕 用畢氏定理求 b 時,因須開方,計算麻煩,故常避免不用。

§24. 已知二腰 a、b,解這直角三角形。

解　$\tan A=\dfrac{a}{b}$, $B=90°-A$,

$$sinA=\frac{b}{c},\ c=\frac{a}{sinA},$$

$$cosA=\frac{b}{c},\ c=\frac{b}{cosA},$$



或 $$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

例 $a=125.8$ 厘米, $b=280.4$ 厘米,解這直角三角形.

解 因 $tanA=\frac{125.8}{280.4}=0.4486.$

應用補插法得 $A=24°9.7'$, $B=90°-24°9.7'=65°50.3'.$

又 $$sinA=0.4093,$$

$$\therefore\quad c=\frac{125.8}{0.4093}=307.4\text{ 厘米.}$$

習題一

試用下列已知條件解直角三角形,但 $C=90°$.

1. $c=125$ 厘米, $A=37°30'$.

2. $c=280.5$ 厘米, $A=28°43'$.

3. $b=100$ 厘米, $A=27°30'25''$.

4. $b=26.82$ 厘米, $A=70°26.4'$,

5. $b=800$ 厘米, $B=50°35.4'$.

6. $c=4$ 厘米, $B=25°$.

7. $a=100$ 厘米, $B=37°$.

8. $a=75$ 厘米, $A=39°15'$.

9. $c=660$ 厘米, $a=408$ 厘米.

10. $c=100$ 厘米，$a=37$ 厘米。

11. $c=1000$ 厘米，$b=678.3$ 厘米。

12. $c=923$ 厘米，$b=355$ 厘米。

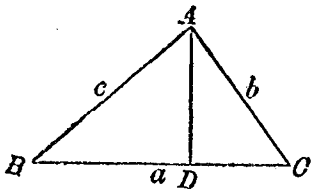
13. $a=78.46$ 厘米，$b=45.05$ 厘米。

14. $a=5$ 厘米，$b=6$ 厘米。

15. $a=50$ 厘米，$b=37$ 厘米。

§25. 任意三角形的面積　在三角形 ABC 內，從頂點 A 到對邊 BC 引垂線 AD，如果用 S 代表 $\triangle ABC$ 的面積，得

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AD.$$



假定 C 是銳角，則 $AD=b\sin C$,

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

如果 C 是鈍角，則

$$S=\frac{1}{2}ab\sin(180^\circ-C).$$

例　三角形的二邊爲 5 厘米和 7 厘米，所夾的角爲 60°，求三角形的面積。

解　$$S=\frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{35}{4}\sqrt{3}\text{ 平方厘米.}$$

習題二

1 三角形的二邊爲 300 厘米和 1200 厘米，所夾的角爲 150°，求三角形的面積.

2. 三角形的二邊爲 18.25 厘米和 40.82 厘米,所夾的角爲 $130°$,求三角形的面積.

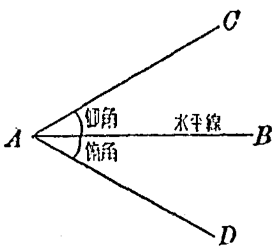
第五章 簡易測量問題

§26. <u>測量用的術語和儀器</u> 繫鉛錘於絲線的一端而掛絲線的另一端於釘上,使錘下垂,這時絲線所取的方向(就是重力的方向),叫做**鉛直方向**,和這絲線同方向的直線叫做**鉛垂線**。

和鉛垂線垂直的平面叫做**水平面**,在水平面上的直線叫做**水平線**。

含鉛垂線的平面叫做**鉛直面**。

觀測點和測點的聯結線叫做**視線**,過觀測點的水平線和視線所成的角叫做這測點的**高度**。如果測點在通過觀測點的水平面上方,叫這高度為**仰角**;若測點在通過觀測點的水平面下方,叫這高度為**俯角**。如圖 $\angle BAC$ 是仰角,$\angle BAD$ 是俯角。

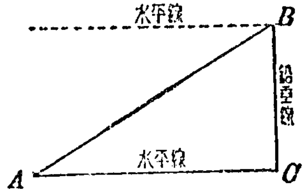


在水平面內的角叫做**水平角**。

在鉛直面內的角叫做**鉛直角**。

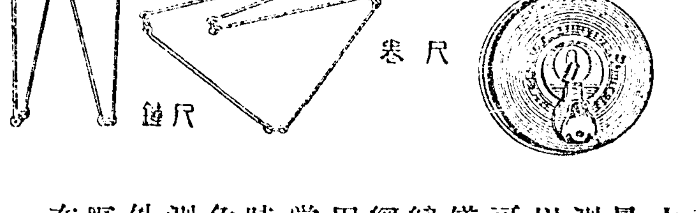
從一點到通過他點的鉛直面引垂線,這垂

線的長,叫做這兩點間的水平距離.從一點到通過他點的水平面引垂線,這垂線的長叫做這兩點間的鉛直距離.如圖,AC是A、B兩點間的水平距離,BC是A、B兩點間的鉛直距離.



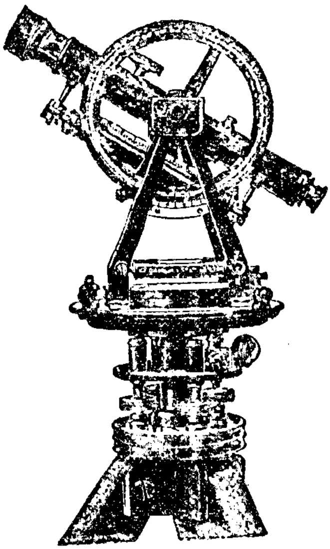
在測量距離或高的時候,須先定一適當直線(這直線的長是可以直接測得的).用這直線做一邊,造成一三角形,應用三角形的解法就可以計算所求的距離或高.這樣聯得的直線,叫做基線.

測距離或高的時候,通常用練尺或卷尺,如下圖.



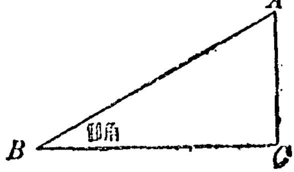
在野外測角時,常用經緯儀,可以測量水平

角和鉛直角。用時,將這儀器裝在一個三脚架上,調準下盤上的氣泡水準,使盤在水平面上。然後平旋上部以測水平角,直轉望遠鏡以測鉛直角。

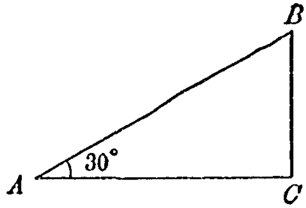


經緯儀

§27. <u>高度的測量</u> 假定一豎立物體的頂爲 A, 其底爲 C, 引水平線 CB。取 CB 作基線,在 B 點測得仰角 $\angle CBA$, 就可求得高度 CA, 即



$$CA = CB \tan CBA.$$



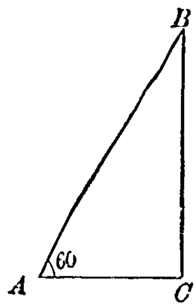
例 1. 在距塔底30公尺的一點,測得塔頂的仰角爲30°,求塔高。

解　設CB爲塔高,A爲觀測點,因

$$AC=30\text{ 公尺},\qquad \angle CAB=30^\circ,$$

$$\therefore\quad CB=AC\tan CAB=30\tan 30^\circ=30\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{30\sqrt{3}}{3}=10\sqrt{3}=17.321\text{ 公尺},$$

例 2. 從距煙突的底43.3尺的一點,測得其頂的仰角爲60°,求煙突的高。



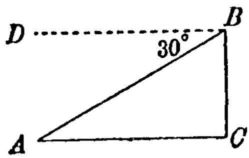
解　設CB表煙突的高,A爲觀測點,因

$$AC=43.3\text{ 尺},\qquad \angle CAB=60^\circ,$$

$$\therefore\quad CB=AC\tan 60^\circ$$
$$=43.3\times\sqrt{3}=75\text{ 尺}。$$

§28. 距離的測量　假定觀測者的位置是A,測點是B。要測AB間的距離,可過A引一水平線或鉛垂線,過B引一鉛垂線或一水平線,造成直角三角形。測得一銳角和一腰的長,就可求得AB。

例 1. 在距水面16公尺的高岸上測一小艇的俯角爲30°,求小艇距岸的距離。



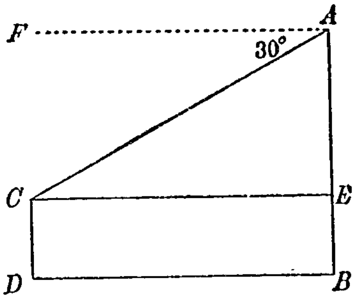
解 設B表岸上的觀測點,CA表水面,A表小艇的位置,BD爲過B的水平線,則

$$\angle DBA=30°,\qquad CB=16\text{ 公尺},$$

而CA爲所求的距離。故

$$CA=CB\tan ABC=CB\tan(90°-DBA)=16\tan 60°$$
$$=16\times 1.732=27.71\text{ 公尺}.$$

例 2. 在高 117 尺的塔頂上,測得高37尺的屋頂的俯角爲30°,求塔和屋的水平距離。



解 設BA表塔的高,DC表屋的高,AF表過A的水平線。從屋頂C引AF的平行線,和BA交於E,因$\angle FAC=30°$,所以

$$\angle ACE=30°.$$

又 $$EA=BA-BE=BA-DC=117-37=80\text{ 尺}.$$

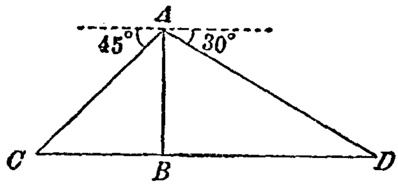
故在$\triangle ACE$內,得

$$CE = EA \times \cot ACE = 80\cot 30^\circ$$

$$= 80\sqrt{3} = 138.56 \text{ 尺},$$

即塔和屋的水平距離為138.56尺。

例 3. 在離水面200尺的燈塔頂上,測得兩船的俯角為45°和30°,而其方向一在正西,一在正東,求兩船間的距離。



解 A為燈塔的頂,BA為燈塔離水面的高。C表在正西的船的位置,D表在正東的船的位置,則C、B、D成一直線,且

$$\angle ACB = 45^\circ, \qquad \angle ADB = 30^\circ.$$

從三角形ABC得

$$BC = BA\cot ACB = 200\cot 45^\circ$$

$$= 200.$$

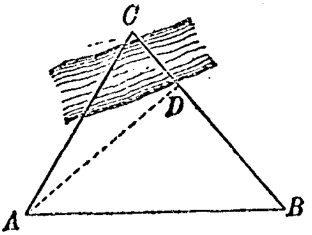
又從三角形ABD得

$$BD = BA\cot ADB = 200\cot 30^\circ$$

$$= 200\sqrt{3}.$$

$$\therefore \quad CD = BC + BD = 200(1+\sqrt{3}) = 546.42 \text{ 尺}。$$

§29. 觀測點和某點間有障礙物不能直接測量時,兩點間的距離求法,



解 設A爲觀測點，C表另一點，AC間有障礙物，其距離不能直接測量，先取適宜的基線AB，測定其長度；次在A點測$\angle BAC$的度數，在B點測$\angle ABC$的度數，那末，在$\triangle ABC$內，

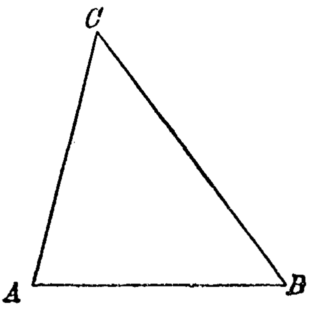
$\angle ACB = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC)$。

又從A點到BC引垂線AD，得

$$AB\sin ABC = AD = AC\sin ACB,$$

$$\therefore \quad AC = \frac{AB\sin ABC}{\sin ACB}。$$

例 在某堤上取基線AB，從兩端A、B，看見對岸的一點C。已知$\angle BAC$、$\angle ABC$各爲$75^\circ 26.2'$，$53^\circ 48.6'$，而基線AB的長爲250.5公尺，求AC的距離。



解 在$\triangle ABC$內，

$$\angle A = 75^\circ 26.2'$$

$$\angle B = 53^\circ 48.6', \qquad AB = 250.5\text{公尺}.$$

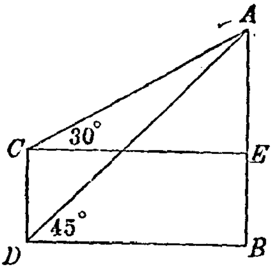
$$\therefore \quad \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 50^\circ 45.2'$$

$$\therefore \quad AC = \frac{250.5\text{公尺} \times \sin 53^\circ 48.6'}{\sin 50^\circ 45.2'} = 261\text{公尺}.$$

§30. 高和距離測量的雜例

例 1. 在地上測量同水平面上的塔頂,得仰角為45°;但上升到距地面30尺的樓上,測得塔頂的仰角為30°。求塔高及塔距樓的距離。

解 設 BA 表塔的高, DC 表樓的高,過樓頂 C 引水平線 CE,和 BA 交於 E,則



$$\angle ECA = 30°。$$

但 $$\angle BDA = 45°,$$

$$\therefore \quad BA = DB。$$

假定 $BA = DB = x$。

從 $\triangle ACE$ 得 $CE = EA\cot ECA$。

但 $$CE = DB = x,$$

$$EA = BA - BE = BA - DC = x - 30,$$

$$\therefore \quad x = (x-30)\cot 30° = (x-30)\sqrt{3},$$

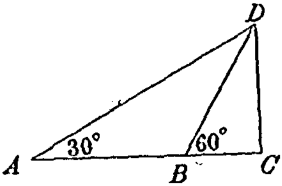
$$x = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{30\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= 15(\sqrt{3}+3) = 70.98 \text{ 尺}。$$

這就是所求的塔高和塔距樓的距離。

例 2. 有人在河岸測得對河一樹的仰角為60°。如果這人退後四十公尺,再測這樹的仰角為30°。求樹高和河寬。

解　設 CD 表樹的高，B 爲河岸，A 爲距河岸40公尺的一點，BC 爲河寬。則



$$\angle CBD=60^\circ,\quad \angle CAD=30^\circ,$$

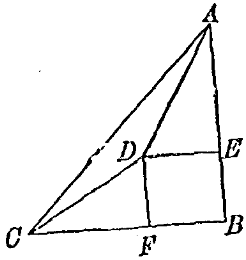
$$\therefore\quad \angle ADB=30^\circ,$$

$$\therefore\quad BD=AB=40^\circ\text{ 公尺。}$$

在 $\triangle DBC$ 內，$CD=BD\sin 60^\circ=40\times\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}$ 公尺（樹高），

而　$BC=BD\cos 60^\circ=40\times\frac{1}{2}=20$ 公尺（河寬）。

例 3.　從山麓望山頂，得仰角45°；再上山坡一公里，又望山頂，得仰角60°。如果這山坡和地平面成30°的角，求山高。



解　設 BA 表山高，C 爲最初的觀測點，D 爲以後的觀測點，DE 爲過 D 點的水平線，FD 爲平行於 BA 的直線，因

$$\angle BCA=45^\circ,\quad \angle FCD=30^\circ,\quad \angle EDA=60^\circ,$$

故　$\angle DCA=\angle DAC=15^\circ,$

$$\therefore\quad DA=DC=1\text{ 公里。}$$

故　$BA=EA+FD=DA\sin EDA+DC\sin FCD$

$$=1\times\sin 60^\circ+1\times\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2.732}{2}=1.366\text{ 公里。}$$

例 4. 雲的仰角爲 α,其映在湖水中的像的俯角爲 β,如果雲距湖水面的高,等於觀測儀器距湖水面的高的 m 倍,試證

$$\tan\beta=\frac{m+1}{m-1}\tan\alpha$$

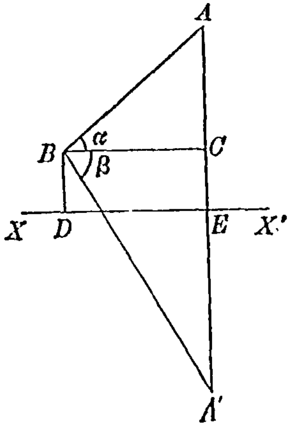
解　設 XX' 表湖水面,A 表雲的位置,A' 表湖水中雲的像。由光的反射定律,聯結雲和雲的像的直線必垂直於湖水面,即

$$EA\perp XX'。$$

雲距湖水面的距離 EA 等於像距湖水面的距離 EA',即

$$EA=EA'。$$

又設 B 爲觀測儀器的位置,DB 爲其距湖水面的高,



令　　$DB=h,$

則　　$EA=mh。$

若 BC 爲過 B 的水平線,和 EA 交於 C,則

$$CA=EA-DB=(m-1)h。$$

而　　$CA'=(m+1)h.$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'BC$ 內,

$$BC=CA\cot\alpha,$$

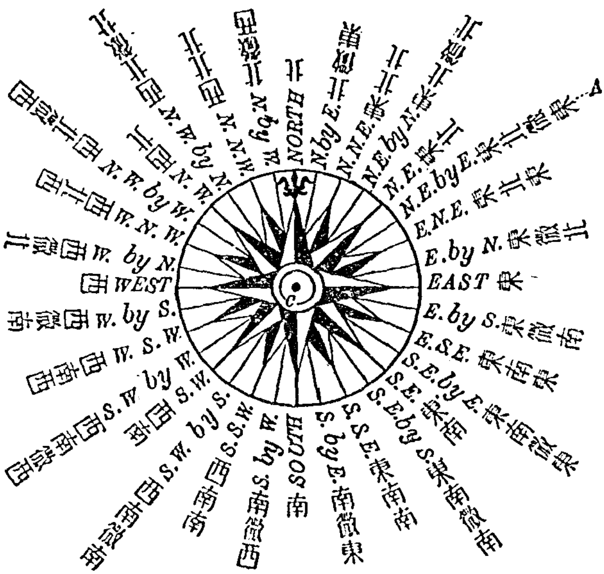
及　　$BC=CA'\cot\beta,$

故 $$CA\cot\alpha=CA'\cot\beta_{\circ}$$

$$\therefore\quad (m-1)h\cot\alpha=(m+1)h\cot\beta,$$

$$\therefore\quad \tan\beta=\frac{m+1}{m-1}\tan\alpha_{\circ}$$

§31. 航海用的羅盤針如下圖所示,把圓周分成三十二等分,叫做三十二方位。每相隣二分



點間所對的中心角是 360°÷32, 等於 11°15′.至於方位的名稱,是用東南西北做方向的基點,更把東南西北間的角各分爲八等分,都附特別名稱,例如從東(*E.*)到南(*S.*)的名稱是東微南(*E.byS.*),東

南東$(E.S.E.)$、東南微東$(S.E.byS.)$、東南$(S.E.)$、東南微南$(S.E.byS.)$、東南南$(S.S.E.)$、南微東$(S.byE.)$。其他準此。

習題

1. 塔頂上插一長 l 公尺的旗竿;某人在平地上望塔頂和旗竿頂的仰角為 B 和 A,求塔高。

2. 有高10公尺的紀念碑,在同水平面上測牠的仰角為$3°30'$,求測點和碑的距離。

3. 從某處測高66尺的塔頂得仰角為 $41°18'$,求塔頂和觀測者的距離,但 $\sin 41°18'=0.66$。

4. 塔頂上插一長 2 公尺的避雷針,從地上某點測這避雷針的上端和下端,得仰角 $44°20'$ 和 $42°10'$,求塔高。

5. 有高10公尺和 7 公尺的兩電燈柱,把兩頂點連成直線,和水平面成$33°41'$的角,求兩柱間的距離但 $\cot 33°41'=1.5$。

6. 樹高和樹影的長相等時,問太陽的光線和地平線成幾度的角?

7. 在某塔的正東有兩點,相距 200 公尺。從這兩點測得塔的仰角為$45°$和$30°$,求塔高。

8. 從河岸相隔 100 公尺的兩點 A 和 B, 測對岸一點 P, 得 $\angle PAB=60°$, $\angle PBA=45°$。求河寬。

9. 有 A、B 二船, A 在燈台 C 的東南, B 在 C 的南偏東 15°。如果 AB 是西南的方向, AC 的距離為 4 公里, 求二船的距離。

10. 輕氣球上升空中, 在牠的正西和正東相距 2500 公尺的兩地, 測牠的仰角為 45° 和 60°, 求輕氣球的高。

總 雜 題

1. 線段AB,CD在O點互相平分時,則AC平行於BD。

2. 過任意角的平分線上一點引二直線,和這平分線成等角,則此二直線夾於二邊間的部分等長。

3. 三角形的二角不等,其大角的平分線比小角的平分線小。

4. 在四邊形$ABCD$裏,$\angle ABD$及$\angle ACD$的平分線交於F,試證$\angle BFC$等於$\angle BAC$和$\angle BDC$的和之半。

5. 四邊形諸外角的平分線所成四邊形的兩對角互爲補角。

6. 在直角三角形ABC裏,直角A的平分線和過斜邊的中點H引斜邊的垂線交於D。則HA等於HD。

7. 從正三角形兩底角平分線的交點引二邊的平行線,把牠的底邊分成三等分。

8. 在正三角形的兩邊上各取一點,這兩點所聯成的線段,必小於正三角形的一邊。

9. 三角形ABC的最大角爲A,在AB、AC上任取D、E兩點,則$DE<BC$。

10. 兩個三角形的二邊和中線彼此相等,則此兩形

全等。

11. 平行四邊形的一對角線等於本形的一邊,則另一對角線大於任何邊。

12. 矩形的對角線大於夾兩邊間的任何線段。

13. 在任意四邊形裏,兩組對邊的中點所聯成的直線和兩對角線中點的聯結線會於一點。

14. 三角形兩底角的平分線相等,則此三角形為等腰三角形。

15. 在三角形 ABC 的兩邊 AB 及 AC 上,各向形外作正方形 $ABFG$、$ACHK$,則此二正方形的對角線交點、BC 及 GK 的中點,為一正方形的四頂點。

16. 外切於一圓的兩個全等正三角形相交時,其所成的六角形,等邊而未必等角。

17. 把三角形 ABC 的一邊 BA 延長到 D 點,使 AD 等於 AC,則 $\angle BAC$ 的平分線,必切於通過 C、A、D 三點的圓周。

18. 從一定點到許多同心圓各引切線,這等切點必在一定圓周上。

19. 過三角形的頂點引外角的平分線,和牠的外接圓周相交,則此交點必與底邊的兩端等距離。

20. 延長圓內接四邊形 $ABCD$ 的各邊，令 AB、CD 交於 P；BC、AD 交於 Q。如果 $\triangle PBC$ 及 $\triangle QCD$ 的外接圓再交於 R，則 P、Q、R 三點在一直線上。

21. 兩圓內切於 A 點，大圓的弦 BC 切小圓於 D，則 AD 為 $\angle BAC$ 的平分線。

22. 三角形的兩個旁切圓相等，則此三角形必為等腰三角形。

23. 等腰三角形的兩個相等旁切圓的半徑，等於從這三角形的頂點到底邊所引的垂線。

24. 圓內接四邊形一角的平分線和其對角的外角的平分線，必在圓周上相交。

25. 過等腰三角形的各頂點，引其外接圓的切線，此三直線必構成一等腰三角形。如果這兩個三角形都不是正三角形，牠的頂角總不相等。

26. $ABCDE$ 為圓的內接任意五角形，試證

$$\angle ABE+\angle BCA+\angle CDB+\angle DEC+\angle EAD=2R\angle.$$

27. 三角形 ABC 的內切圓和 BC 邊切於 D 點，試證三角形 ABD、ACD 的內切圓互為相切。

28. AB 是圓的直徑，PQ 是垂直於 AB 的任意弦，R 是圓周上任意點，試證 $\angle PRQ$ 及其外角的平分線，

必通過A點或B點。

29. 從圓的直徑兩端到任意弦或其延長線引垂線，則此二垂足和圓心的距離相等。

30. 從三角形ABC的三頂點到對邊各引垂線，其垂足爲D、E、F。如果這三角形的外心爲O，則OA、OB、OC各各垂直於EF、FD、DE。

31. AB是半圓的直徑，P、Q是半圓周上任意兩點，如果AP、BQ交於X，AQ、BP交於Y。則

(i)　XY垂直於AB。

(ii)　在P、Q兩點的切線交於XY的中點。

32. 過三角形ABC的垂心H及B、C兩點畫一圓，從A到BC引中線，牠的延長線和圓周交於X，則AX等於中線的兩倍。

33. 三圓在P、Q、R三點互相外切，延長PQ、PR和通過Q、R兩點的圓交於X、Y，則X、Y爲這圓的直徑，而與其他兩圓的中心線平行。

34. 兩個三角形PQR、XYZ同時內接於一圓，且PX、QY、RZ交於一點O。如果O點爲一三角形的內心，同時必爲其他三角形的垂心。又如O點爲一三角形的垂心，同時必爲其他三角形的內心。

35. 從定圓的中心 O 到任意直線引垂線 OA,從 A 任引一割線和圓周交於 B、C,在 B、C 兩點的切線和這任意直線交於 X、Y,則 A 點為線段 XY 的中點。

36. 三角形內切圓的切點所聯成的三角形,必為銳角三角形。

37. O 是三角形 ABC 的外心,H 是牠的垂心。在 AB 上取 AD 等於 AH,在 AC 上取 AE 等於 AO,則 DE 等於外接圓的半徑。

38. ABC 是圓的內接三角形,從弧 BC 的中點 D 到 AB 引垂線 DE, 則

$$AE=\frac{1}{2}(AB+AC),\quad BE=\frac{1}{2}(AB\backsim AC)。$$

如果從弧 BAC 的中點 D' 到 AB 引垂線 $D'E'$, 則

$$AE'=\frac{1}{2}(AB\backsim AC),\quad BE'=\frac{1}{2}(AB+AC)。$$

又聯 AD、AD'、DD', 則 $\angle ADD'$ 等於 $\angle ACB$ 和 $\angle ABC$ 的差之半。

39. 從三角形 ABC 的頂點 A 及 C 到對邊各引垂線,其交點為 S。設這三角形外接圓的直徑為 BD, 則 AC、SD 互相平分。

40. AB 是 O 圓的直徑,PQ 是平行於 AB 的任意弦,試

證弦QA及QB爲角PQO及其外角的平分線。

41. 從圓周上一點引一切線和一弦,過這弦所成弧的中點,到切線及弦各引垂線,其長相等。

42. 二圓交於A、B兩點,過A各引二圓的切線AC、AD,和二圓周交於C、D,則BC、BD和BA成等角。

43. 從定直線上二定點至切於此直線的任意圓各引切線,則此二切線的和或差一定不變。

44. 從O圓周上任一點P到這圓的定直徑引垂線PN,則$\angle OPN$的平分線必過二定點中之一。

45. 二相等圓交於A、B兩點,以A做中心,小於AB的線段做半徑畫圓,和二圓周在AB的同側相交,其交點爲C、D,試證B、C、D三點在一直線上。

46. A、B是二圓的交點,過一圓周上一點C引直線CAD、CEB和他圓周交於D、E,則弧DE的長一定不變。

47. 相交二圓的中心爲A及B,牠的一交點爲C,過C各引二圓的切線,則此兩切線所夾的角等於$\angle ACB$的補角。

48. 一圓切於一已知圓,且切於一已知直線,如果已知圓的一直徑和這已知直線相垂直,則此直徑

的一端和兩切點必同在一直線上。

49. 在三角形 ABC 裏，引 AB、AC 邊的垂線 BD、CD，又引 CE 垂直於 AD，交 AB 於 E。試證 $\triangle ABC \backsim \triangle ACE$。

50. 在直角三角形 ABC 裏，若直角 B 的平分線和 AC 交於 F，和外接圓周交於 D，則矩形 $BD \cdot BF$ 等於 $\triangle ABC$ 的兩倍。

51. 順次延長三角形的各邊，使延長的部分等於邊的兩倍，則聯結其三端所成的三角形，等於原三角形的十九倍。

52. 以銳角三角形 ABC 的邊 BC 做直徑畫圓，在 AB 上取 AD，使牠的長等於從 A 點到這圓的切線；引 DE 垂直於 AB，和 AC 的延長線交於 E；則三角形 ABC、ADE 相等。

53. 以 $\triangle ABC$ 的一角 A 做頂角，以 AB、AC 的比例中項做等邊的等腰三角形，和原三角形等積。

54. 在 $\triangle ABC$ 裏，$\angle A$ 的平分線和底邊交於 D，BC 的中點為 O，試證 $OB:OD = AB + AC : AB \sim AC$。

55. 直線 DEF 和 $\triangle ABC$ 的邊 AB、AC、BC 交於 D、E、F，如果 $AE:EC = BF:CF$，則 AD 等於 BD。

56. 直線 DEF 和 $\triangle ABC$ 的邊 AB、AC、BC 交於 D、E、F，

如果 $CF=2\cdot BC$, $AE=3\cdot CE$, 則 $AD=2BD$。

57. 正三角形 ABC 的邊 BC、CA、AB 上取 X、Y、Z 各點，如果 $\frac{BX}{XC}=\frac{CY}{YA}=\frac{AZ}{ZB}=\frac{2}{1}$, 求 $\triangle XYZ$ 和 $\triangle ABC$ 的比。

58. 任意四邊形被牠的兩對角線所分成的四部分成比例。

59. 從一圓周上任意點引直徑 AA',又引二弦 AB、AC, A 點的切線和 AB、AC 的延長線交於 D、E, 則 $\triangle AED \backsim \triangle ABC$。

60. C 爲圓心,CA、CB 爲互相垂直的半徑,DE 爲任意弦,如果 BD、BE 和 CA 交於 F 及 G,則

$$\triangle BFG \backsim \triangle BDE.$$

61. 過相切二圓的切點 A,在二圓中各引一弦爲 AB 及 AC; 如果 AB 垂直於 AC, 則通過 B、C 的直線必過一定點。

62. AC 是半圓的直徑。在半圓周上取 B 點,使 BC 的長等於半徑,則 AB 爲 BC 及 $BC+CA$ 的比例中項。

63. 二圓的交點爲 A 及 B, 在 A 點引各圓的切線,和兩圓交於 C 及 D, 聯 CB、BD, 則 BD 爲 CB、BA 的第三比例項。

64. AB、CD爲圓的兩弦,延長AB、CD交於E,過E引AD的平行線EF,和BC的延長線交於F,則

$$FB:EF=EF:FC.$$

65. 過圓周上一點A,引直徑AB和一弦AD,又引一直徑垂直於AB.如果這直徑和AD交於C,則矩形$AC.AD$等於半徑上正方形的兩倍。

66. 過相交二圓的公弦上一點C引一直線$ABCDE$,和一圓交於A、D,和他圓交於B、E,則$AB:BC=ED:DC$。

67. 圓的弦AB、CD在E點以直角相交,O爲圓心,試證$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=8\overline{AO}^2-4\overline{EO}^2$。

68. 交於直角的任意二割線PAB、PCD,圓心O和割線與圓周的交點A、C、B、D聯成直線,則三角形AOC和三角形BOD等積。

69. 直角三角形的銳角頂和對邊的中點聯成線段則此線段上的正方形,等於斜邊上的正方形減去這對邊的一半上正方形的三倍。

70. 三角形的三中線把本形分做相等的六部分。

71. 四邊形內一點和四頂點聯成直線,其所得四個三角形皆等積時,則此四邊形爲平行四邊形,而

該點為平行四邊形對角線的交點。

72. 梯形兩對角線上正方形的和,等於不平行二邊上正方形的和加平行二邊所包矩形的兩倍。

73. 直角三角形 ABC 的內切圓和斜邊 AC 切於 O 點,則矩形 $AO\cdot OC$ 等於三角形 ABC 的面積。

74. 在直角三角形 ABC 裏,A 為直角。在各邊上各向形外作正方形 $ABFG$、$BCED$、$ACKH$,從 A 點到 BC 引垂線,其延長線和 DE 交於 L,如果 BK、CF 和 AC、AB 交於 Q、R,則

(i) AE、BK 互相垂直。

(ii) 三角形 KCE、DBF 等積。

(iii) $\overline{EK}^2+\overline{FD}^2=5.\overline{BC}^2$。

(iv) AQ、AR 相等。

(v) CF、BK、AL 會於一點。

75. 從圓外一點 P 引切線 PC 及一割線 PAB,又從 P 點任引一直線 PD 和 PC 等長。聯 DA、DB 和圓周交於 E、F,則 FE 平行於 PD。

76. AB 是半圓的直徑,引弦 AD、BE,其交點為 C,則 $AC\cdot AD+BC\cdot BE=\overline{AB}^2$。

77. 從圓周上兩定點 A、B 引二平行弦 AP、BQ,則 PQ

的中點恆在一同心圓周上。

78. 直角三角形的A角為直角,引BC的垂線,和BC、AB、AC或其延長線交於E、D、F,求BF、CD交點的軌跡。

79. 在三角形ABC的AB邊上取一點P,使P和AC的距離等於線段BP。

80. 在三角形ABC的一邊AC上求一點P,過P引AB、BC的平行線,和BC、AB交於X、Y,使$PX=PY$。

81. 在已知角的一邊上有一已知點A,試在他邊上求二點B、C,使BC等於已知長,且$\angle BAC$等於直角。

82. 求過已知點引一直線和已知平行四邊形的各邊相交,使夾於兩組對邊間的部分等長。

83. 求作一正三角形,使牠的角頂和一定點各有一定的距離。

84. 過圓周上二定點作二平行弦,使牠的和或差等於定長。

85. 在兩已知平行線上有兩定點A及B,在兩平行線中間有一定點O,求過O引一直線和兩平行線交於X及Y,使AX、BY的和等於定長。

86. A 爲定直線上一定點，P 爲定直線外一定點，試在這直線上求一點 X，使 AX、XP 的和等於定長，

87. 兩圓互相內切，求過牠的切點引一直線，使夾於兩圓周間的線段等於定長。

88. 過定點 P 引一直線，和定角 AOB 的二邊交於 M 及 N，使矩形 $PM \cdot PN$ 等於已知正方形。

89. 知三角形的一垂線和兩中線，求作這三角形。

90. 知三角形三垂足的位置，求作這三角形。

91. 求作一三角形和一已知三角形等角而外接於另一已知三角形。

92. 求作一三角形內接於一已知三角形而和另一已知三角形相似。

93. 已知四邊形三邊中點的位置，求第四邊中點的位置。

94. 已知五角形各邊中點的位置，求作這五角形。

95. 已知兩同心圓，求作一大圓的弦被小圓分成三等分。

96. 求作已知三角形的內接正方形。

97. 求作一平行四邊形，內接於一已知三角形，其兩

隣邊的比等於定比,而此兩隣邊的夾角等於定角。

98. 求作已知四邊形的外接正方形。

99. 三角形底邊的大小及位置一定,從底邊的一端到牠的對邊所引中線的長也一定,求其頂點的軌跡。

100. 矩形一角的頂點是一定點,其相隣二角的頂點在定圓周上移動,求其餘一角頂的軌跡。

〔終〕

附錄 三角函數眞數表

0°–13°

角度 ° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	角度 ′ °
0 0	0.0000	0.0000	∞	1.0000	0 90
10	0.0029	0.0029	343.7737	1.0000	50
20	0.0058	0.0058	171.8854	1.0000	40
30	0.0087	0.0087	114.5887	1.0000	30
40	0.0116	0.0116	85.9398	0.9999	20
50	0.0145	0.0145	68.7501	0.9999	10
1 0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0 89
角度 ° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	角度 ′ °

角度 ° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	角度 ′ °
1 0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0 89
10	0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50
20	0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40
30	0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30
40	0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20
50	0.0320	0.0320	31.2416	0.9995	10
2 0	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	0 88
10	0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50
20	0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40
30	0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30
40	0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20
50	0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10
3 0	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	0 87
10	0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50
20	0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40
30	0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30
40	0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20
50	0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10
4 0	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	0 86
10	0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50
20	0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40
30	0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30
40	0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20
50	0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10
5 0	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	0 85
10	0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50
20	0.0929	0.0934	10.7119	0.9957	40
30	0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30
40	0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20
50	0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10
6 0	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	0 84
10	0.1074	0.1080	9.2553	0.9942	50
20	0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40
30	0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30
40	0.1161	0.1169	8.5555	0.9932	20
50	0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10
7 0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0 83
角度 ° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	角度 ′ °

角度 ° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	角度 ′ °
7 0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0 83
10	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50
20	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40
30	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30
40	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20
50	0.1363	0.1376	7.2687	0.9907	10
8 0	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	0 82
10	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899	50
20	0.1449	0.1465	6.8269	0.9894	40
30	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890	30
40	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886	20
50	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881	10
9 0	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	0 81
10	0.1593	0.1614	6.1970	0.9872	50
20	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868	40
30	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863	30
40	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858	20
50	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853	10
10 0	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	0 80
10	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843	50
20	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838	40
30	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833	30
40	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827	20
50	0.1880	0.1914	5.2257	0.9822	10
11 0	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	0 79
10	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811	50
20	0.1965	0.2004	4.9894	0.9805	40
30	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799	30
40	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793	20
50	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787	10
12 0	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	0 78
10	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775	50
20	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769	40
30	0.2164	0.2217	4.5107	0.9763	30
40	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757	20
50	0.2221	0.2278	4.3897	0.9750	10
13 0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0 77
角度 ° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	角度 ′ °

77°–90°

13°—29°

角度 ° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	角度 ′ °	角度 ° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	角度 ′ °
13 0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0 77	21 0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0 69
10	0.2278	0.2339	4.2747	0.9737	50	10	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50
20	0.2306	0.2370	4.2193	0.9730	40	20	0.3638	0.3906	2.5605	0.9315	40
30	0.2334	0.2401	4.1653	0.9724	30	30	0.3665	0.3939	2.5386	0.9304	30
40	0.2363	0.2432	4.1126	0.9717	20	40	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20
50	0.2391	0.2462	4.0611	0.9710	10	50	0.3719	0.4006	2.4960	0.9283	10
14 0	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	0 76	22 0	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	0 68
10	0.2447	0.2524	3.9617	0.9696	50	10	0.3773	0.4074	2.4545	0.9261	50
20	0.2476	0.2555	3.9136	0.9689	40	20	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40
30	0.2504	0.2586	3.8667	0.9681	30	30	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30
40	0.2532	0.2617	3.8208	0.9674	20	40	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20
50	0.2560	0.2648	3.7760	0.9667	10	50	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10
15 0	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	0 75	23 0	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	0 67
10	0.2616	0.2711	3.6891	0.9652	50	10	0.3934	0.4279	2.3369	0.9194	50
20	0.2644	0.2742	3.6470	0.9644	40	20	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40
30	0.2672	0.2773	3.6059	0.9636	30	30	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30
40	0.2700	0.2805	3.5656	0.9628	20	40	0.4014	0.4383	2.2817	0.9159	20
50	0.2728	0.2836	3.5261	0.9621	10	50	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10
16 0	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	0 74	24 0	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	0 66
10	0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50	10	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50
20	0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40	20	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40
30	0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30	30	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30
40	0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20	40	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20
50	0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10	50	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10
17 0	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	0 73	25 0	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	0 65
10	0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50	10	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50
20	0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40	20	0.4279	0.4734	2.1123	0.9038	40
30	0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30	30	0.4305	0.4770	2.0965	0.9026	30
40	0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20	40	0.4331	0.4806	2.0809	0.9013	20
50	0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10	50	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10
18 0	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	0 72	26 0	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	0 64
10	0.3118	0.3281	3.0475	0.9502	50	10	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50
20	0.3145	0.3314	3.0178	0.9492	40	20	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40
30	0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30	30	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30
40	0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20	40	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20
50	0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10	50	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10
19 0	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	0 71	27 0	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	0 63
10	0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50	10	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50
20	0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40	20	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40
30	0.3338	0.3541	2.8239	0.9426	30	30	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30
40	0.3365	0.3574	2.7980	0.9417	20	40	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20
50	0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10	50	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10
20 0	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	0 70	28 0	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	0 62
10	0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50	10	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50
20	0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40	20	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40
30	0.3502	0.3739	2.6746	0.9367	30	30	0.4772	0.5430	1.8418	0.8788	30
40	0.3529	0.3772	2.6511	0.9356	20	40	0.4797	0.5467	1.8291	0.8774	20
50	0.3557	0.3805	2.6279	0.9346	10	50	0.4823	0.5505	1.8165	0.8760	10
21 0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0 69	29 0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0 61
° ′ 角度	cos.	cot.	tan.	sin	′ ° 角度	° ′ 角度	cos	cot.	tan.	sin.	′ ° 角度

61°—77°

29°–45°

角度 ° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	角度 ′ °	角度 ° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	角度 ′ °
29 0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0 61	37 0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0 53
10	0.4874	0.5581	1.7917	0.8732	50	10	0.6041	0.7581	1.3190	0.7969	50
20	0.4899	0.5619	1.7796	0.8718	40	20	0.6065	0.7627	1.3111	0.7951	40
30	0.4924	0.5658	1.7675	0.8704	30	30	0.6088	0.7673	1.3032	0.7934	30
40	0.4950	0.5696	1.7556	0.8689	20	40	0.6111	0.7720	1.2954	0.7916	20
50	0.4975	0.5735	1.7437	0.8675	10	50	0.6134	0.7766	1.2876	0.7898	10
30 0	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	0 60	38 0	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	0 52
10	0.5025	0.5812	1.7205	0.8646	50	10	0.6180	0.7860	1.2723	0.7862	50
20	0.5050	0.5851	1.7090	0.8631	40	20	0.6202	0.7907	1.2647	0.7844	40
30	0.5075	0.5890	1.6977	0.8616	30	30	0.6225	0.7954	1.2572	0.7826	30
40	0.5100	0.5930	1.6864	0.8601	20	40	0.6248	0.8002	1.2497	0.7808	20
50	0.5125	0.5969	1.6753	0.8587	10	50	0.6271	0.8050	1.2423	0.7790	10
31 0	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	0 59	39 0	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	0 51
10	0.5175	0.6048	1.6534	0.8557	50	10	0.6316	0.8146	1.2276	0.7753	50
20	0.5200	0.6088	1.6426	0.8542	40	20	0.6338	0.8195	1.2203	0.7735	40
30	0.5225	0.6128	1.6319	0.8526	30	30	0.6361	0.8243	1.2131	0.7716	30
40	0.5250	0.6168	1.6212	0.8511	20	40	0.6383	0.8292	1.2059	0.7698	20
50	0.5275	0.6208	1.6107	0.8496	10	50	0.6406	0.8342	1.1988	0.7679	10
32 0	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	0 58	40 0	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	0 50
10	0.5324	0.6289	1.5900	0.8465	50	10	0.6450	0.8441	1.1847	0.7642	50
20	0.5348	0.6330	1.5798	0.8450	40	20	0.6472	0.8491	1.1778	0.7623	40
30	0.5373	0.6371	1.5697	0.8434	30	30	0.6494	0.8541	1.1708	0.7604	30
40	0.5398	0.6412	1.5597	0.8418	20	40	0.6517	0.8591	1.1640	0.7585	20
50	0.5422	0.6453	1.5497	0.8403	10	50	0.6539	0.8642	1.1571	0.7566	10
33 0	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	0 57	41 0	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	0 49
10	0.5471	0.6536	1.5301	0.8371	50	10	0.6583	0.8744	1.1436	0.7528	50
20	0.5495	0.6577	1.5204	0.8355	40	20	0.6604	0.8796	1.1369	0.7509	40
30	0.5519	0.6619	1.5108	0.8339	30	30	0.6626	0.8847	1.1303	0.7490	30
40	0.5544	0.6661	1.5013	0.8323	20	40	0.6648	0.8899	1.1237	0.7470	20
50	0.5568	0.6703	1.4919	0.8307	10	50	0.6670	0.8952	1.1171	0.7451	10
34 0	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	0 56	42 0	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	0 48
10	0.5616	0.6787	1.4733	0.8274	50	10	0.6713	0.9057	1.1041	0.7412	50
20	0.5640	0.6830	1.4641	0.8258	40	20	0.6734	0.9110	1.0977	0.7392	40
30	0.5664	0.6873	1.4550	0.8241	30	30	0.6756	0.9163	1.0913	0.7373	30
40	0.5639	0.6916	1.4460	0.8225	20	40	0.6777	0.9217	1.0850	0.7353	20
50	0.5712	0.6959	1.4370	0.8208	10	50	0.6799	0.9271	1.0786	0.7333	10
35 0	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	0 55	43 0	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	0 47
10	0.5760	0.7046	1.4193	0.8175	50	10	0.6841	0.9380	1.0661	0.7294	50
20	0.5783	0.7089	1.4106	0.8158	40	20	0.6862	0.9435	1.0599	0.7274	40
30	0.5807	0.7133	1.4019	0.8141	30	30	0.6884	0.9490	1.0538	0.7254	30
40	0.5831	0.7177	1.3934	0.8124	20	40	0.6905	0.9545	1.0477	0.7234	20
50	0.5854	0.7221	1.3848	0.8107	10	50	0.6926	0.9601	1.0416	0.7214	10
36 0	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	0 54	44 0	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193	0 46
10	0.5901	0.7310	1.3680	0.8073	50	10	0.6967	0.9713	1.0295	0.7173	50
20	0.5925	0.7355	1.3597	0.8056	40	20	0.6988	0.9770	1.0235	0.7153	40
30	0.5948	0.7400	1.3514	0.8039	30	30	0.7009	0.9827	1.0176	0.7133	30
40	0.5972	0.7445	1.3432	0.8021	20	40	0.7030	0.9884	1.0117	0.7112	20
50	0.5995	0.7490	1.3351	0.8004	10	50	0.7050	0.9942	1.0058	0.7092	10
37 0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0 53	45 0	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	0 45
° ′ 角度	cos.	cot.	tan.	sin.	′ ° 角度	° ′ 角度	cos.	cot.	tan.	sin.	′ ° 角度

45°–61°

中西名詞對照表

(一) 中西對照

(二) 西中對照

民國三十五年八月十二版

修正課程標準適用
新編初中幾何（全四冊）
◎第四冊
（郵運匯費另加）

編者 陳修仁
校者 朱彥頫 陶鴻翔
發行人 中華書局有限公司代表 顧樹森
印刷者 上海澳門路四六九號 中華書局永寧印刷廠
發行者 各埠中華書局

（一一三一七）港

(12317)