萬有文庫

第二集七百種

王雲五主編

數理精蘊

（五）

清聖祖敕編

商務印書館發行

數理精蘊

（五）

清聖祖敕編

國學基本叢書

數理精蘊下編卷十一

面部一

平方

平方者。等邊四直角之面積也。以形而言，則爲兩矩所合。以積而言。則爲自乘之數。因其有廣無厚。故曰平方。因其縱橫相等。故曰正方。蓋方積面也。而其邊則線也。有線求面。則相乘而得積。有面求線。則開方而得邊。開之之法。略與歸除同。但歸除有法有實。而開方則有實而無法。故古人立爲商除廉隅之制以相求。每積二位得邊之一位。所謂一百一十定無疑。一千三十有零餘。九千九百不離十。一萬方爲一百推是也。其法先從一角而剖其羃。以自一至九自乘之數爲方根。與所有之積相審。量其足減者而定之是爲初商。初商減盡無餘。則方邊止一位。若有餘實。卽初商方積外別成一磬折形。其附初商之兩旁者謂之廉。兩廉之角所合一小方謂之隅。廉有二。故倍初商爲兩廉之共長。是爲廉法。視餘積足廉法幾倍。卽定次商。隅卽次商之自乘。故次商爲隅法。合廉隅而以次商乘之。則得兩廉一隅之共積。所謂初商方積外別成一磬折形者是也。故次商爲初商所得方邊之零。如次商數與初商餘積相減。尚有不盡之實。則又成一磬折形。而仍爲兩廉一隅。但較前廉愈長而隅愈小耳。凡有幾層廉隅。俱照初商之例。逐層遞析之。實盡而止。實不盡者。必非自乘之正數。遞析之至於纖塵。終有奇零。若餘實不足廉隅法之數者。則

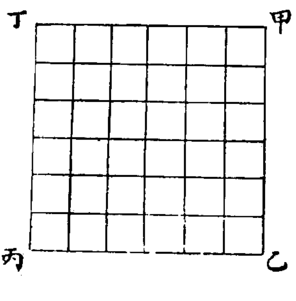
方邊爲空位。此開方之定法也。面形不一。而容積皆以方積爲準。故平方爲算諸面之本。諸面必通之方積而後可施其法也。

設如正方面積三十六尺開方。問每一邊數幾何。

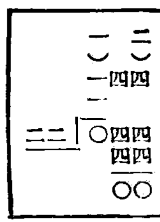
法列方積三十六尺。自末位起算。每方積二位定方邊一位。今積止有二位。則於六尺上作記。定單位。以自一至九自乘之方根數與之相審。知與六尺自乘之數恰合。乃以六尺書於方積六尺之上。而以六尺自乘之三十六尺書於方積原數之下。相減恰盡。卽得開方之數爲六尺也。如圖甲乙丙丁正方形。每邊皆六尺。其中函一尺小正方三十六。自邊計之。爲六尺自乘之積。以積開之。則與六尺自乘方根之數相準。故商除之恰盡也。蓋方積爲二位。是以方邊止一位。方積卽六尺自乘之數。故無廉隅之可用次商。如有餘積則自成廉隅而用次商矣。

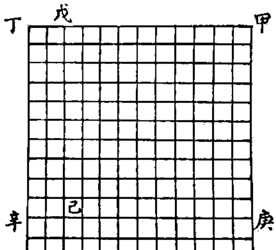
設如正方面積一丈四十四尺開方。問每一邊數幾何。

法列方積一丈四十四尺。自末位起算。每方積二位定方邊一位。故隔一位作記。卽於四尺上定尺位。一丈上定丈位。其一丈爲初商積。與一丈自乘之數相合。卽定初商爲一丈。書於方積一丈之上。而以一丈自乘之正方一丈書於初商積之下。相減恰盡。爰以方邊末位積四十四尺續書於



下。大凡以餘積續書於下者。每取方積之二位以當方邊之一位也。爲次商廉隅之共積。乃以初商之一丈作一十尺。倍之得二十尺爲廉法。以除四十四尺。足二尺。即定次商爲二尺。書於方積四尺之上。而以次商二尺爲隅法。與廉法二十尺相加。共得二十二尺爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商二尺乘之得四十四尺。與次商廉隅共積相減恰盡。是開得一丈二尺。爲方面每一邊之數也。如圖甲乙丙丁正方形。每邊皆一丈二尺。其中函積一丈四十四尺。是爲共積。其從一角所分用庚己戊正方形每邊一丈。即初商數。其中函正方積一丈。即初商自乘數。所餘庚己壬乙、戊己辛丁、兩長方爲兩廉。其各長十尺。即初商數。其各闊二尺。即次商數。廉有二。故倍初商爲廉法。其己壬丙辛一小正方爲隅。其邊二尺。亦即次商數。故以次商爲隅法。合兩廉一隅成一磬折形。附於初商自乘方之兩邊。而成一總正方形。此廉隅之法所由生也。





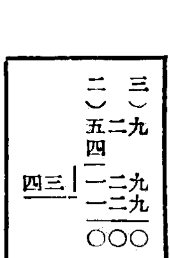
設如正方面積五百二十九尺。開方。問每一邊數幾何。此題正方面積之三位皆以尺命位。似與前題分丈尺者不同。然其取方積二位續書於下。其末位即命爲單位立算。則與丈尺同也

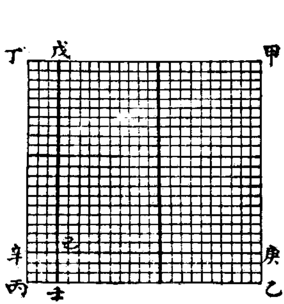
法列方積五百二十九尺。自末位起算。每方積二位定方邊一位。故隔一位作記。乃於九尺上定單位。五百尺上定十位。其五百尺爲初商積。以初商本位計之。則五百尺爲初商積之單位。止與二自乘之數相

準。即定初商爲二。書於方積五百尺之上。而以二自乘之四。書於初商積之下。相減餘一百尺。爰以方邊第二位積二十九尺續書於下。共一百二十九尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商之二作二十尺。倍之得四十尺。爲廉法。以除一百二十九尺。足三尺。即定次商爲三尺。書於方積九尺之上。而以次商三尺爲隅法。與廉法四十尺相加共得四十三尺。爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商三尺乘之。得一百二十九尺。與次問廉隅共積相減恰盡。是開得二十三尺。爲方面每一邊之數也。如圖甲乙丙丁正方形每邊皆二十三尺。其中函積五百二十九尺。是爲共積。其從一角所分甲庚己戊正方形每邊二十尺。即初商數。其中函積四百尺。即初商自乘數。所餘庚己壬乙、戊己辛丁、兩長方爲兩廉。其各長二十尺。即初商數。其各闊三尺。即次商數。其己壬丙辛一小正方爲隅。其邊三尺。亦即次商數。右兩廉一隅成一磬折形。附於初商自乘方之兩邊。而成一總正方形也。

設如正方面積五丈四十七尺五十六寸。開方。問每一邊數幾何。

法列方積五丈四十七尺五十六寸。自末位起算。每方積二位定方邊一位。故隔一位作記。即於六寸上定寸位。七尺上定尺位。五丈上定丈位。其五丈爲初商積。與二丈自乘之數相準。即定初商爲二丈。書於方積五丈之上。而以二丈自乘之四丈。書於初商積之下。相減餘一丈。即一百尺。爰以方邊第二位積四





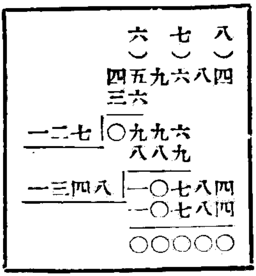
十七尺續書於下．共一百四十七尺．爲次商廉隅之共積．乃以初商之二丈作二十尺．倍之得四十尺爲廉法．以除一百四十七尺．足三尺．卽定次商爲三尺．書於方積七尺之上．而以次商三尺爲隅法．與廉法四十尺相加共得四十三尺爲廉隅共法．書於餘積之左．以次商三尺乘之．得一百二十九尺．與次商廉隅共積相減．餘一十八尺．卽一千八百寸．復以方邊末位積五十六寸續書於下．共一千八百五十六寸．爲三商廉隅之共積．乃以初商次商之二丈三尺作二百三十寸．倍之得四百六十寸爲廉法．以除一千八百五十六寸．足四寸．卽定三商爲四寸．書於方積六寸之上．而以三商四寸爲隅法．與廉法四百六十寸相加．共得四百六十四寸．爲廉隅共法．書於餘積之左．以三商四寸乘之．得一千八百五十六寸．與三商廉隅共積相減恰盡．是開得二丈三尺四寸．爲方面每一邊之數也．

四）三）二）
五四七五六
四
四三｜一四七
　　　一二九
四六四｜○一八五六
　　　　一八五六
　　　　○○○○

設如正方面積四十五萬九千六百八十四尺．開方．問每一邊數幾何．此題正方面積之六位皆以尺命位．似與前題分丈尺寸三色者不同．然其每取方積二位續書於下．其末位卽命爲單位立算．仍與丈尺寸同也．

法列方積四十五萬九千六百八十四尺．自末位起算．每方積二位定方邊一位．故隔一位作記．乃於四尺上定單位．六百尺上定十位．五萬尺上定百位．其四十五萬尺爲初商積．以初商本位計之．則五萬尺爲初商積之單位．而四十五萬尺爲四十五．與六自乘之數相準．卽定初商爲六．書於方積五萬尺之上．而以六自乘之三十六書於初商積之下．相減餘九萬尺．爰以方邊第二位積九千六百尺續書於下．共

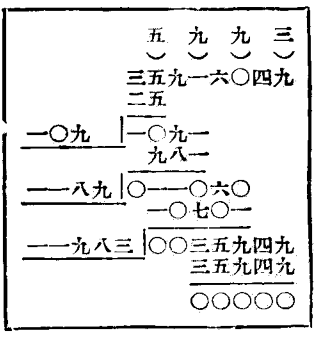
九萬九千六百尺爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則六百尺爲次商積之單位。而九萬九千六百尺爲九百九十六。而初商之六卽爲六十。故以初商之六作六十。倍之得一百二十爲廉法。以除九百九十六。足七倍。卽定次商爲七。書於方積六百尺之上。而以次商七爲隅法。與廉法一百二十相加。共得一百二十七爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商七乘之。得八百八十九。與次商廉隅共積相減。餘一萬零七百尺。復以方邊末位積八十四尺續書於下。共一萬零七百八十四尺。爲三商廉隅之共積以三商本位計之。則積與邊皆仍爲本位。乃以初商次商之六百七十倍之。得一千三百四十爲廉法。以除一萬零七百八十四。足八倍。卽定三商爲八。書於方積四尺之上。而以三商八爲隅法。與廉法一千三百四十相加。共得一千三百四十八爲廉隅共法。書於餘積之左。以三商八乘之。得一萬零七百八十四。與三商廉隅共積相減。恰盡。是開得六百七十八尺。爲方面每一邊之數也。



設如正大面積三十五丈九十一尺六十寸四十九分。開方。問每一邊數幾何。

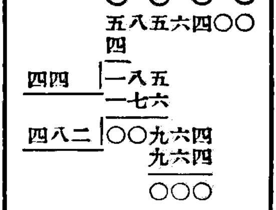
法列方積三十五丈九十一尺六十寸四十九分。自末位起算。每隔一位作記。卽於九分上定分位。空寸上定寸位。一尺上定尺位。五丈上定丈位。其三十五丈爲初商積。與五丈自乘之數相準。卽定初商爲五丈。書於方積五丈之上。而以五丈自乘之二十五丈。書於初商積之下。相減餘一十丈。卽一千尺。爰以方邊第二位積九十一尺續書於下。共一千零九十一尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商五丈作五十尺。倍

之得一百尺爲廉法．以除一千零九十一尺．足九尺．卽定次商爲九尺．書於方積一尺之上．而以次商九尺爲隅法．與廉法一百尺相加．共得一百零九尺爲廉隅共法．書於餘積之左．以次商九尺乘之得九百八十一尺．與次商廉隅共積相減．餘一百一十尺．卽一萬一千寸．復以方邊第三位積六十寸續書於下．共一萬一千零六十寸．爲三商廉隅之共積．乃以初商次商之五丈九尺作五百九十寸．倍之得一千一百八十寸爲廉法．以除一萬一千零六十寸．足九寸．卽定三商爲九寸．書於方積空寸之上．而以三商九寸爲隅法．與廉法一千一百八十寸相加．共得一千一百八十九寸．爲廉隅共法．書於餘積之左．以三商九寸乘之．得一萬零七百零一寸．與三商廉隅共積相減．餘三百五十九寸．卽三萬五千九百分．復以方邊末位積四十九分續書於下．共三萬五千九百四十九分．爲四商廉隅之共積．乃以初商次商三商之五丈九尺九寸作五千九百九十分．倍之得一萬一千九百八十分．爲廉法．以除三萬五千九百四十九分．足三分．卽定四商爲三分．書於方積九分之上．而以四商三分爲隅法．與廉法一萬一千九百八十分相加．共得一萬一千九百八十三分爲廉隅共法．書於餘積之左．以四商三分乘之．得三萬五千九百四十九分．與四商廉隅共積相減．恰盡．是開得五丈九尺九寸三分．爲方面每一邊之數也．



設如正方面積五百八十五萬六千四百尺．開方．問每一邊數幾何．

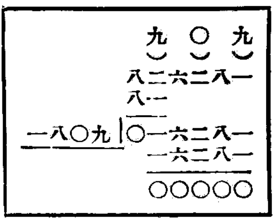
法列方積五百八十五萬六千四百尺。補二空位以足其分。自末空位起算。每隔一位作記。於空尺上定單位。四百尺上定十位。五萬尺上定百位。五百萬尺上定千位。其五百萬尺爲初商積。以初商本位計之。則五百萬尺爲初商積之單位。止與二自乘之四相準。卽定初商爲二。書於方積五百八尺之上。而以二自乘之四。書於初商積之下。相減餘一百萬尺。爰以方邊第二位積八十五萬尺續書於下。共一百八十五萬尺。爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則五萬尺爲次商積之單位。而一百八十五萬尺爲一百八十五。而初商之二卽爲二十。故以初商之二作二十。倍之得四十爲廉法。以除一百八十五。足四倍。卽定次商爲四。書於方積五萬尺之上。而以次商四爲隅法。與廉法四十相加。共得四十四爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商四乘之。得一百七十六。與次商廉隅共積相減。餘九萬尺。復以方邊第三位積六千四百尺續書於下。共九萬六千四百尺。爲三商廉隅之共積。以三商本位計之。則四百尺爲三商積之單位。而九萬六千四百尺爲九百六十四。而初商之二卽爲二百。次商之四卽爲四十。故以初商次商之二四作二百四十。倍之得四百八十爲廉法。以除九百六十四。足二倍。卽定三商爲二。書於方積四百尺之上。而以三商二爲隅法。與廉法四百八十相加。共得四百八十二爲廉隅共法。書於餘積之左。以三商二乘之。得九百六十四。與三商廉隅共積相減恰盡。是開得二千四百二十尺。爲方面每一邊之數也。此法方積之末有二空位。故所得方邊之末亦補一空位。凡設數未至



單位者皆依此例補足位分然然開之。

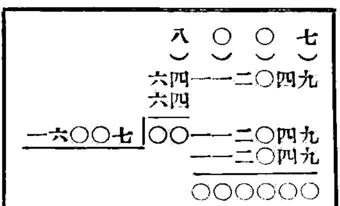
設如正方面積八十二丈六十二尺八十一寸開方。問每一邊數幾何。

法列方積八十二丈六十二尺八十一寸。自末位起算每隔一位作記。於一寸上定寸位。於二尺上定尺位。於二丈上定丈位。其八十二丈爲初商積與九丈自乘之數相準。即定初商爲九丈。書於方積二丈之上。而以九丈自乘之八十一丈。書於方積八十二丈之下。相減餘一丈。即一百尺。爰以方邊第二位積六十二尺續書於下。共一百六十二尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商九丈作九十尺。倍之得一百八十尺。爲廉法。以除一百六十二尺。其數不足。是次商爲空位也。乃書一空於方積二尺之上以存次商之位。復以方邊末位積八十一寸續書於下。共一百六十二尺八十一寸。即一萬六千二百八十一寸。爲三商廉隅之共積。仍以一百八十尺作一千八百寸爲廉法。以除一萬六千二百八十一寸。足九寸。即定三商爲九寸。書於方積一寸之上。而以三商九寸爲隅法。與廉法一千八百寸加相共得一千八百零九寸爲廉隅共法。書於餘積之左。而以三商九寸乘之。得一萬六千二百八十一寸。與三商廉隅共積相減恰盡。是開得九丈零九寸。爲方面每一邊之數也。此法方積無空位而商出之方邊有空位。凡廉法除餘積而數不足者。皆依此例推之。



設如正方面積六千四百一十一萬二千零四十九尺開方。問每一邊數幾何。

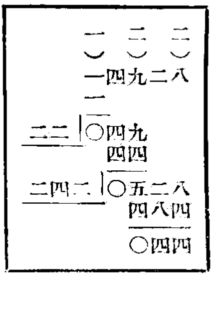
法列方積六千四百一十一萬二千零四十九尺。自末位起算。每隔一位作記。於九尺上定單位。空百尺上定十位。一萬尺上定百位。四百萬尺上定千位。其六千四百萬尺爲初商積。以初商本位計之則四百萬爲初商積之單位。而六千四百萬爲六十四。與八自乘之數相合。卽定初商爲八。書於方積四百萬尺之上。而以八自乘之六十四。書於初商積之下。相減無餘。爰以方邊第二位積一十一萬尺續書於下。爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則一萬尺爲次商積之單位。而一十一萬尺爲一十一。而初商之八卽爲八十。故以初商之八作八十。倍之得一百六十爲廉法。以除一十一。其數不足。是次商爲空位。乃書一空於方積一萬尺之上。以存次商之位。復以方邊第三位積二千尺續書於下。共一十一萬二千尺爲三商廉隅之共積。以三商本位計之。則空百尺爲三商積之單位。而一十一萬二千尺爲一千一百二十尺。而初商之八卽爲八百。次商之空卽爲空十。故以初商次商之八空作八百。倍之得一千六百爲廉法。以除一千一百二十。其數仍不足。是三商亦爲空位。乃再書一空於方積空百尺之上。以存三商之位。復以方邊末位積四十九尺續書於下。共一十一萬二千零四十九尺。爲四商廉隅之共積。以四商本位計之。則積與邊皆仍爲本位。乃以初商次商三商之八千倍之。得一萬六千爲廉法。以除一十一萬二千零四十九。足七倍。卽定四商爲七。書於方積九尺之上。而以四商七爲隅法。與廉法一萬六千相加。共得一萬六千零七爲廉隅共法。書於餘積之左。而以四商七乘之。得一十一萬二千



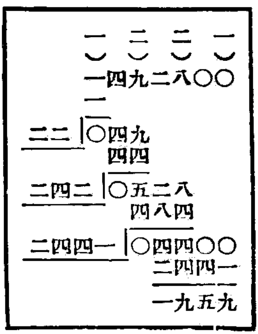
零四十九。與餘積相減恰盡。是開得八千零七尺。爲方面每一邊之數也。此法方積中雖有一空位而商出之方邊却有二空位。凡開方遇此類者。皆依此例推之。

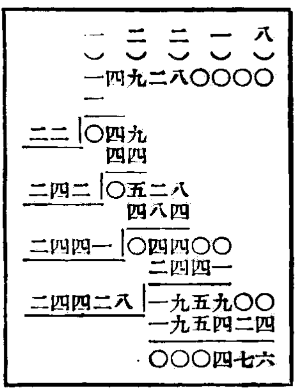
設如有積一萬四千九百二十八尺開方。問每一邊數幾何。

法列積一萬四千九百二十八尺。自末位起算。每隔一位作記。於八尺上定單位。九百尺上定十位。一萬尺上定百位。其一萬尺爲初商積。以初商本位計之。則一萬尺爲初商積之單位。止與一自乘之數相合。卽定初商爲一。書於方積一萬尺之上。而以一自乘之一。書於初商積之下。相減無餘。爰以方邊第二位積四千九百尺續書於下。爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則九百尺爲次商積之單位。而四千九百尺爲四十九。而初商之一卽爲一十。故以初商之一作一十。倍之得二十爲廉法。以除四十九。足二倍。卽定次商爲二。書於方積九百尺之上。而以次商二爲隅法。與廉法二十相加。共得二十二爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商二乘之。得四十四。與次商廉隅共積相減。餘五百尺。復以方邊末位積二十八尺續書於下。共五百二十八尺。爲三商廉隅之共積。以三商本位計之。則積與邊皆仍爲本位。乃以初商次商之一百二十俱倍之。得二百四十爲廉法。以除五百二十八。足二倍。卽定三商爲二。書於方積八尺之上。而以三商二爲隅法。與廉法二百四十相加。共得二百四十二爲廉隅共法。書於餘積之左。以三商二乘之。得四百八十四。與三商廉隅共積相減。餘四十四尺不盡。是開得一百二十二尺爲方面每一邊之數。仍餘四十四尺不



盡也。如欲以餘數再開。則得方邊之寸數。乃增書兩空於總積之後。復續書兩空於四十四尺之後爲幾十幾寸之位。是則四十四尺作四千四百寸。爲四商廉隅之共積。爰以初商次商三商之一百二十二尺作一千二百二十寸。倍之得二千四百四十寸爲廉法。以除四千四百寸。足一倍。卽定四商爲一寸。書於餘積空寸之上。而以四商一爲隅法與廉法二千四百四十寸相加。共得二千四百四十一寸爲廉隅共法。書於餘積之左。以四商一寸乘之。仍得二千四百四十一寸。與餘積相減。餘一千九百五十九寸不盡。如再以餘數開之。則得方邊之分數。乃又續書兩空於後增空寸之後。復續書兩空於五十九寸之後爲幾十幾分之位。是則一千九百五十九寸作一十九萬五千九百分。爲五商廉隅之共積。爰以初商次商三商四商之一百二十二尺一寸作一萬二千二百一十分。倍之得二萬四千四百二十分爲廉法。以除一十九萬五千九百分。足八倍。卽定五商爲八分。書於餘積空分之上。而以五商八爲隅法。與廉法二萬四千四百二十分相加。共得二萬四千四百二十八分爲廉隅共法。書於餘積之左。以五商八分乘

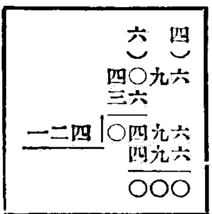




之得一十九萬五千四百二十四分。與餘積相減。仍餘四百七十六分不盡。是開得一百二十二尺一寸八分。爲方面每一邊之數也。此法原積本非自乘所得之數。雖遞析之終不能盡。凡開方遇此類者皆依此例推之。

設如有一方臺。上面共鋪方甎四千零九十六塊。問每一邊得甎幾何。

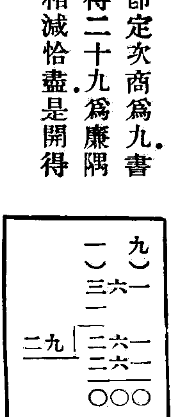
法列方甎四千零九十六塊爲方積。於六塊上定單位。空百塊上定十位。其四千塊爲初商積。以初商本位計之。則空百塊爲初商積之單位。而四千塊爲四十。與六自乘之數相準。即定初商爲六。書於方積空百塊之上。而以六自乘之三十六。書於初商積之下。相減餘四百塊。爰以餘積九十六塊。續書於下。共四百九十六塊。爲次商廉隅之共積。而以初商六作六十。倍之得一百二十爲廉法。以除四百九十六。足四倍。即定次商爲四。書於方積六塊之上。而以次商四爲隅法。與廉法一百二十相加。共得一百二十四爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商四乘之。得四百九十六。與餘積相減恰盡。是開得六十四塊。爲方臺上面每一邊之甎數也。



設如有三百六十一人。用船分載。其每船所載人數與共船數相等。問共船幾何。

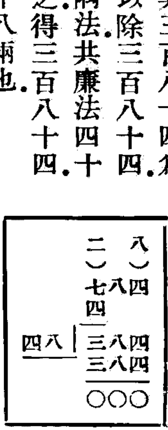
法列三百六十一人爲方積。於一人上定單位。三百人上定十位。其三百人爲初商積。以初商本位計之。則三百爲初商積之單位。止與一自乘之數相準。即定初商爲一。書於方積三百之上。而以一自乘之一。書於初商積之下。相減餘二百。爰以餘積六十一續書於下。共二百六十一。爲次商廉隅之共積。而以初

商一作一十。倍之得二十爲廉法。以除二百六十一。足九倍。即定次商爲九。書於方積一人之上。而以次商九爲隅法。與廉法二十相加。共得二十九爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商九乘之。得二百六十一。與餘積相減恰盡。是開得十九爲共船數。而每船載十九人也。



設如有銀七百八十四兩。散給夫匠。其每人所得銀數與共人數相等。問共人數幾何。

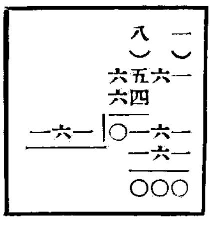
法列七百八十四兩爲方積。於四兩上定單位。七百兩上定十位。其七百兩爲初商積。以初商本位計之。則七百爲初商積之單位。止與二自乘之數相準。即定初商爲二。書於方積七百之上。而以二自乘之四書於初商積之下。相減餘三百。爰以餘積八十四續書於下。共三百八十四。爲次商廉隅之共積。而以初商二作二十。倍之得四十爲廉法。以除三百八十四。足八倍。即定次商爲八。書於方積四兩之上。而以次商八爲隅法。共廉法四十相加。共得四十八爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商八乘之。得三百八十四。與餘積相減恰盡。是開得二十八爲共人數。而每人得銀二十八兩也。



設如用船運糧六千五百六十一石。欲取一船別相將此船米分載各船。每船領去一石。其本船尚餘一石。問共船幾何。

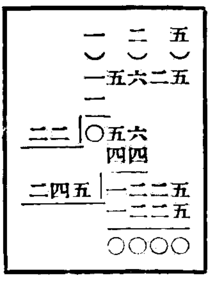
法列米六千五百六十一石爲方積。於一石上定單位。五百石上定十位。其六千五百石爲初商積。以初商本位計之。則五百石爲初商積之單位。而六千五百爲六十五。與八自乘之數相準。即定初商爲八。書

於方積五百之上。而以八自乘之六十四。書於初商積之下。相減餘一百。爰以餘積六十一續書於下。共一百六十一。為次商廉隅之共積。而以初商八作八十。倍之得一百六十為廉法。以除一百六十一。足一倍。即定次商為一。書於方積一百之上。而以次商一為隅法。與廉法一百六十相加。共得一百六十一。為廉隅共法。書於餘積之左。以次商一乘之。仍得一百六十一。與餘積相減恰盡。是開得八十一為共船數。而每船載米八十一石也。此法蓋因一船所載之米分與各船。每船各領一石。即共去八十一石。故本船尚餘一石也。



設如有錢一萬五千六百二十五文。買瓜。每瓜一個與脚錢一文。因無現錢。將一瓜準作脚錢。問瓜數幾何。

法列錢一萬五千六百二十五為方積。於五文上定單位。六百上定十位。一萬上定百位。其一萬為初商積。以初商本位計之。則一萬為初商積之單位。止與一自乘之數相合。即定初商為一。書於方積一萬之上。而以一自乘之一。書於初商積之下。相減無餘。爰以第二位積五千六百續書於下。為次商廉隅之共積。以次商本位計之。則六百為次商積之單位。而五千六百為五十六。而初商之一即為一十。故以初商之一作一十。倍之得二十為廉法。以除五十六。足二倍。即定次商為二。書於方積六百之上。而以次商二為隅法。與廉法二十



相加。共得二十二爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商二乘之得四十四。與次商廉隅共積相減。餘一千二百。復以末位積二十五續書於下。共一千二百二十五。爲三商廉隅之共積。以三商本法計之。則積與邊皆仍爲本位。乃以初商次商之一百二十俱倍之。得二百四十爲廉法。以除一千二百二十五。足五倍。卽定三商爲五。書於方積五文之上。而以三商五爲隅法。與廉法二百四十相加。共得二百四十五爲廉隅共法。書於餘積之左。以三商五乘之。得一千二百二十五。與餘積相減恰盡。是開得一百二十五爲共瓜之數。亦卽每瓜之價也。此法因每瓜應給脚餞一文。今以一瓜準之。卽知一瓜之價與瓜之共數相等。故以開方法算之而得也。

帶縱平方

帶縱平方者.兩等邊直角長方面積也.有積數因長比闊之較、或長與闊之和而得邊.故曰帶縱.蓋正方之縱横皆同.故止有積卽可得其邊.若長方則縱横不等.知其積又必知其縱横相差之較.或縱横相併之和.始能得其邊.故以長闊之較爲問者.則用較爲帶縱加所開之數.商除之而得闊.或四因積數.加較自乘.平方開之卽長闊之和.和加較半之而得長.和減較半之而得闊.或半較自乘加原積而開平方.卽得半和.加半較而得長.減半較而得闊.如以長闊之和爲問者.則用和爲帶縱.減去所開之數.商除之而得闊.或四因積數.減和自乘.平方開之.卽長闊之較.較減和半之而得闊.較加和半之而得長.或半和自乘.減原積而開平方.卽得半較.加半和而得長.減半和而得闊.夫用半較半和之法.與四因積數之法同出一理.蓋四因積數加全較自乘.故開方而得全和.半較自乘加原積.故開方而得半和.四因積數減全和自乘.故開方而得全較.半和自乘減原積.故開方而得半較.此卽面與線之比例.面加四倍.則邊加一倍.邊得其半而積爲四分之一也.法雖不一.要之皆使歸於正方以求其和較.是則雖曰帶縱.仍不外乎平方之理也.

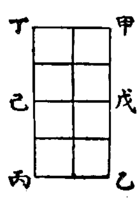
設如有長方面積八尺.縱多二尺.問長闊各幾何.

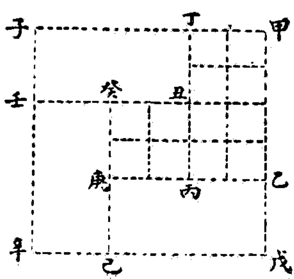
法列積.如開平方法商之.積八尺止可商二尺.乃以二尺書於原積八尺之上.而以所商二尺加縱多二尺得四尺.以所商二尺乘之得八尺.書於原積之下.相減恰盡.卽知長方之闊得二尺.加入縱多二尺得

四尺。即爲長方之長也。如圖甲乙丙丁長方形。容積八尺。其甲乙邊長四尺。甲丁邊闊二尺。其甲乙長比甲丁闊所多戊乙、即縱多之數。初商所得二尺、即甲戊己丁正方之每一邊。蓋因此法長闊兩邊俱止一位。而積亦止一位。故初商所得即爲一邊。而加入縱多即又一邊。是以兩邊相乘而與原積相等也。

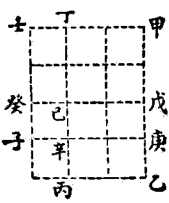
又法以積八尺用四因之。得三十二尺。而以縱多二尺自乘得四尺。加入四因之數。得三十六尺。開方得六尺。即爲長闊相和之數。乃以縱多二尺與長闊之和六尺相加。得八尺。折半得四尺。即長方之長。減縱多二尺。得二尺。即長方之闊也。如圖甲乙丙丁長方形容積八尺。四因之得甲乙丙丁、戊己庚乙、辛壬癸己、子丁丑壬四長方形。迴環相湊成一空心正方式。再加入縱多二尺自乘之丑丙庚癸之一小正方形。即成甲戊辛子之一大正方形。其甲戊類每一邊。即長闊之和。故開方得長闊之和。既得和加縱多。是爲倍長。故折半而得長。減縱多則爲倍闊。故折半而得闊。或得長而減縱多亦得闊也。

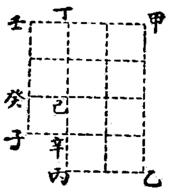
又法先將縱多二尺折半。得一尺爲半較。自乘仍得一尺。與原積八尺相加得九尺。平方開之。得三尺爲半和。於半和減半較得二尺爲闊。於半和

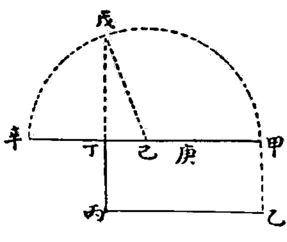



加半較得四尺為長．如圖甲乙丙丁長方形．甲乙為長．甲丁為闊．戊乙為縱多之較．將較折半於庚．而移庚乙丙辛置於丁己癸壬．再加己辛子癸半較自乘之方．則成甲庚子壬一正方形．故開方而得甲庚、甲壬之邊．皆為半和也．於甲壬之半和減丁壬之半較．得甲丁之闊．於甲庚之半和加庚乙之半較．得甲乙之長也．又圖甲乙丙丁長方形．容積八尺．將甲丁邊引長作丁辛．與丁丙等．則甲辛為長闊之和．又如甲乙邊截甲丁於庚．則庚丁為長闊之較．甲辛和折半於己．而庚丁較亦折半於己．故以己為心．甲為界．作一半圓．而引丙丁邊至戊界．作一戊丁直線．戊己輻線．則甲己、戊己、己辛皆為半和．而庚己、己丁、皆為半較己甲丁戊丁、丁辛又為連比例之三線矣．其戊丁中率自乘之方．與甲丁首率丁辛末率相乘之長方等．見幾何原本九卷第三節．則是戊丁自乘之方、與原設甲乙丙丁長方之積等也．又戊丁己為勾股形．其戊丁邊自乘之方與己丁邊自乘之方相併．而與戊己自乘之方等．見幾何原本九卷第四節．故與原設甲乙丙丁長方積等之戊丁自乘之方、加以己丁半較自乘之數開方而得戊己為半和．於戊己相等之己辛半和、減己丁半較．而得丁辛與丁丙等





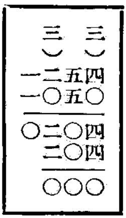


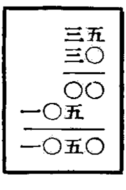
三〇九九一〇

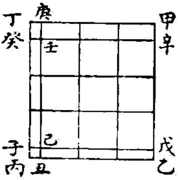
之闊。又於戊己相等之甲己半和、加己丁半較。而得甲丁之長也。

設如有長方面積一千二百五十四尺。縱多五尺。問長闊各幾何。

法列積如開平方法商之。其一千二百爲初商積。可商三十尺。乃以三十尺書於原積二百尺之上。而以初商三十尺加縱多五尺得三十五尺。以初商三十尺乘之。得一千零五十尺。書於原積之下相減餘二百零四尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商三十尺倍之得六十尺。加縱多五尺得六十五尺爲廉法以除二百零四尺。足三尺。則以三尺書於原積四尺之上。而以廉法六十五尺加隅法三尺得六十八尺爲廉隅共法。以次商三尺乘之。得二百零四尺。書於餘積之下。與餘積相減恰盡。即知長方之闊得三十三尺。加縱多五尺。得三十八尺。即爲長方之長也。如圖甲乙丙丁長方形。容積一千二百五十四尺。其甲乙邊長三十八尺。甲丁邊闊三十三尺。其甲乙長比甲丁闊所多之甲辛。即縱多之數。其甲戊己庚長方形容積一千零五十尺。即初商所減之積。其辛壬與辛戊俱三十尺。即初商數。其甲戊三十五尺。即初商加縱多之數。其戊乙丑己、壬己子癸兩長方爲兩方廉。庚壬癸丁小長方爲縱廉。方廉有二。縱廉止一。故倍初商加縱多數爲廉法。其己丑丙子爲隅。其長闊皆與次商等。故以次商爲隅法。合兩方廉、一縱廉、一小隅、成一磬折形。環附初商長方之兩傍。成一大長方。與平方之理無異。若次商仍減







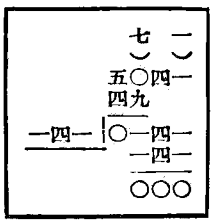
積不盡。則又爲兩方廉、一縱廉、一小隅、復成一磬折形。得三商四商以至多商。皆依此法遞析開之。

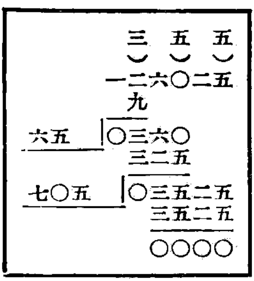
又法以積一千二百五十四尺用四因之得五千零一十六尺。而以縱多五尺自乘。得二十五尺。加入四因之數。得五千零四十一尺。開方得七十一尺。卽爲長闊相和之數。乃以縱多五尺與長闊之和七十一尺相加。得七十六尺。折半得三十八尺。卽長方之長。減縱多五尺。卽長方之闊也。

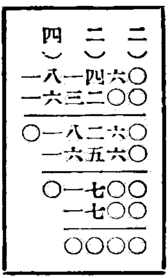
又法先將縱多五尺折半。得二尺五寸爲半較。自乘得六尺二十五寸。與原積一千二百五十四尺相加。得一千二百六十尺二十五寸。開方得三十五尺五寸爲半和。於半和減半較。得三十三尺爲闊。於半和加半較。得三十八尺爲長也。

設如有長方面積一十八萬一千四百六十丈。縱多八丈。問長闊各幾何。

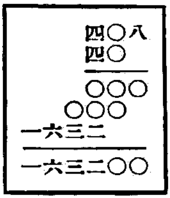
法列積如開平方法商之。其一十八萬丈爲初商積。可商四百丈。乃以四百丈書於原積八萬丈之上。而以初商四百丈加縱多八丈。得四百零八丈。以初商四百丈乘之。得一十六萬三千二百丈。書於原積之下。相減餘一萬八千二百六十丈。爲次商廉隅之共積。乃以初商四百丈倍之得八百丈。加縱多八丈。得八百零八丈爲廉法。以除一萬八千二百六十丈。足

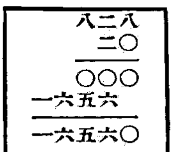


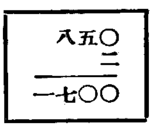




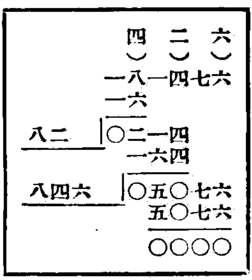
二十丈。則以二十丈書於原積四百丈之上。而以廉法八百零八丈加隅法二十丈。得八百二十八丈爲廉隅共法。以次商二十丈乘之。得一萬六千五百六十丈。書於餘積之下。與餘積相減。餘一千七百丈。爲三商廉隅之共積。乃以初商次商之四百二十丈俱倍之。得八百四十丈。加縱多八丈。得八百四十八丈爲廉法。以除一千七百丈。足二丈。則以二丈書於原積空丈之上。而以廉法八百四十八丈加隅法二丈。得八百五十丈爲廉隅共法。以三商二丈乘之。得一千七百丈。書於餘積之下。與餘積相減恰盡。卽知長方之闊得四百二十二丈。加縱多八丈。得四百三十丈。卽爲長方之長也。







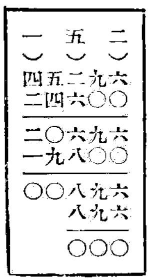
又法以縱多八丈折半。得四丈爲半較自乘得十六丈。與原積一十八萬一千四百六十丈相加。得一十八萬一千四百七十六丈。開方得四百二十六丈爲半和。於半和減半較。得四百二十二丈爲闊。於半和加半較得四百三十丈爲長也。

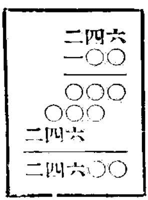


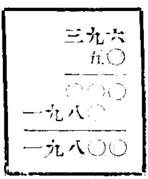
設如有長方面積四萬五千二百九十六尺。縱多一百四十六尺。問長闊各幾何。

法列積如開平方法商之。其四萬尺爲初商積。可商二百尺。加縱多一百

四十六尺。得三百四十六尺。以所商二百尺乘之。得六萬九千二百尺。大於原積。是初商不可商二百尺也。乃改商一百尺。書於原積四萬尺之上。而以所商一百尺加縱多一百四十六尺。得二百四十六尺。以初商一百尺乘之。得二萬四千六百尺。書於原積之下。相減餘二萬零六百九十六尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商一百尺倍之。得二百尺。加縱多一百四十六尺。得三百四十六尺。爲廉法。以除二萬零六百九十六尺。足五十尺。則以五十尺書於原積二百尺之上。而以廉法三百四十六尺加隅法五十尺。得三百九十六尺。爲廉隅共法。以次商五十尺乘之。得一萬九千八百尺。書於餘積之下。與餘積相減。餘八百九十六尺。爲三商廉隅之共積。乃以初商次商之一百五十尺倍之。得三百尺。加縱多一百四十六尺。得四百四十六尺。爲廉法。以除八百九十六尺。足二尺。則以二尺書於原積六尺之上。而以廉法四百四十六尺加隅法二尺。得四百四十八尺。爲廉隅共法。以三商二尺乘之。得八百九十六尺。書於餘積之下。與餘積相減恰盡。卽知長方之闊得一百五十二尺。加縱多一百四十六尺。得二百九十八尺。卽爲長方之長也。此法原積初商應得二百尺。因加縱多相乘。得數大於原積。故改商一百尺始合。凡開帶縱方遇此類者。皆依此例推之。



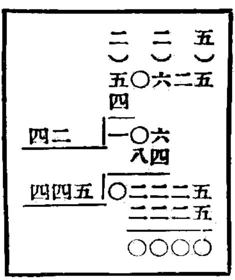


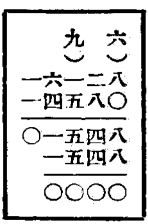


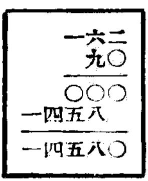
又法將縱多一百四十六尺折半得七十三尺。爲半較自乘得五千三百二十九尺。與原積四萬五千二百九十六尺相加。得五萬零六百二十五尺。開方得二百二十五尺爲半和。於半和減半較得一百五十二尺爲闊。於半和加半較。得二百九十八尺爲長也。

設如有長方面積一萬六千一百二十八尺。縱多七十二尺。問長闊各幾何。

法列積如開平方法商之。其一萬爲初商積。可商一百尺。加縱多七十二尺得一百七十二尺。以初商一百尺乘之。得一萬七千二百尺。大於原積。是初商不可商一百尺也。乃改商九十尺。書於原積一百尺之上。而以所商九十尺加縱多七十二尺。得一百六十二尺。以所商九十尺乘之。得一萬四千五百八十尺。書於原積之下。相減餘一千五百四十八尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商九十尺倍之。得一百八十尺。加縱多七十二尺。得二百五十二尺爲廉法。以除一千五百四十八尺。足六尺。則以六尺書於原積八尺之上。而以廉法二百五十二尺加隅法六尺。得二百五十八尺爲廉隅共法。以次商六尺乘之。得一千五百四十八尺。書於餘積之下。與餘積相減恰盡。卽知長方之闊爲九十六尺。加縱多七十二尺。得一百六







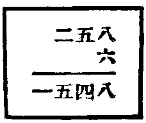
十八尺。卽長方之長也。此法原積初商應得一百尺。因加縱多相乘得數大於原積。故改商九十尺。而原積一萬尺之上應開百位者。空其位而不計也。或縱多太大過於初商所得之數。則用四因積數之法。或用縱多折半之法。設例在後。

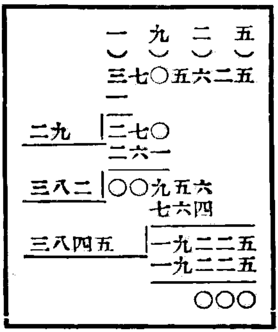
設如有長方面積三萬四千五百六十九尺。縱多三千八百三十二尺。問長闊各幾何。

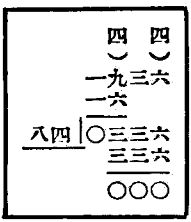
法列積如開平方法商之。其三萬尺爲初商積。應商一百尺。而縱多數爲三千。轉大於初商數。凡遇此類。則用四因積數加較自乘開方之法。或用半較自乘加於原積開方之法。爲明白簡易也。故以縱多三千八百三十二尺折半。得一千九百一十六尺爲半較。自乘得三百六十七萬一千零五十六尺。與原積三萬四千五百六十九尺相加。得三百七十萬五千六百二十五尺。開方得一千九百二十五尺爲半和。於半和減半較。得九尺爲闊。於半和加半較。得三千八百四十一尺爲長也。

設如有月臺一座。共用方甎一千九百二十塊。其長比闊多八塊。問長闊兩面各用甎幾何。

法以長比闊多八塊折半。得四塊爲半較。自乘得十六塊。與積數一千九百二十塊相加。得一千九百三十六塊。開方得四十四塊爲半和。於







半和四十四塊減半較得四十塊。為闊面甎數。於半和加半較。得四十八塊為長面甎數也。

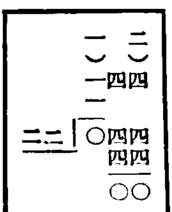
設如有銀三百六十兩賞人。其人數比每人所得銀數為五分之二。問人數及每人所得銀數各幾何。

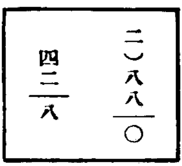
法先用比例分其總銀數。以五分為一率。二分為二率。三百六十兩為三率。得四率一百四十四兩。開方得十二為人數。以人數除共銀數三百六十兩。得三十兩。為每人所得之銀數也。此法以人數為闊。其每人所得銀數為長。成一長方形。人數既居銀數之五分之二。是闊為二分。長為五分也。今將其共銀分作五分而取其二分。即人數與所得銀數相等而成正方形矣。故開方而得人數也。

設如有長方面積八尺。長闊相和六尺。問長闊各幾何。

法列積如開平方法商之。積八尺止可商二尺。乃以二尺書於原積八尺之上。而以所商二尺與和數六尺相減。餘四尺。以所商二尺乘之。得八尺。書於原積之下。相減恰盡。即知長方之闊得二尺。與和六尺相減得四尺。即為長方之長也。如圖甲乙丙丁長方形容積八尺。其甲乙邊長四尺。甲丁邊闊二尺。其甲丁與甲乙相併得六尺。即長闊之積。初商所得二尺。即甲戊己丁正方之每一邊。

一率	五分
二率	二分
三率	三百六十
四率	一百四十四

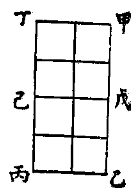


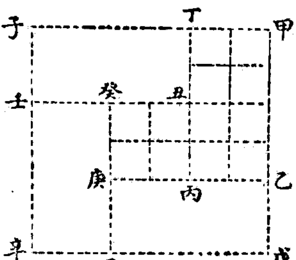


蓋兩邊俱止一位。故以初商所得爲一邊。於長闊和內減去初商。所餘卽又一邊。是以兩邊相乘而與原積相等也。此法比較數爲問者在加減之異。其以較數爲問者。以所商之數與較數相加。此以和數爲問者則以所商之數與和數相減也。

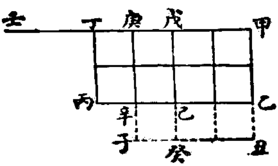
又法以積八尺用四因之。得三十二尺。而以和數六尺自乘。得三十六尺。減去四因之數餘四尺。開方得二尺。卽爲長闊相較之數。乃以較數二尺與和數六尺相加得八尺。折半得四尺。卽長方之長。減較二尺。得二尺。卽長方之闊也。如圖甲乙丙丁長方形。容積八尺。四因之得甲乙丙丁、戊己庚乙、辛壬癸己、子丁丑壬、四長方形。迴環相湊成一空心正方式。較之和數六尺自乘之甲戊辛子正方形。所少者止正中之一小正方形。故相減卽餘丑丙庚癸之一小正方形。其丑丙類每一邊。卽長闊之較。故開方得長闊之較。既得較加於和數是爲倍長。故折半而得長。長減較而得闊也。此法比較數爲問者亦在加減之異。其以較爲問者。用較自乘與四因數相加。開方而得和。此以和爲問者。用和自乘與四因數相減。開方而得較也。

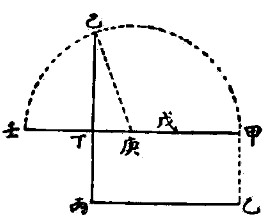
又法先將和數六尺折半。得三尺爲半和。自乘得九尺。與原積八尺相減。





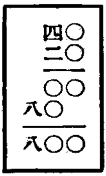
得一尺。平方開之仍得一尺爲半較。於半和減半較。得二尺爲闊。於半和加半較。得四尺爲長。如圖甲乙丙丁長方形。甲乙爲闊。甲丁爲長。甲壬爲長闊和。丁壬與丁丙闊等。折半爲甲庚半和。將甲乙丙丁長方內之庚辛丙丁移於乙丑癸己。則成甲丑癸己辛庚一磬折形。與甲庚半和自乘之甲丑子庚正方形相減。餘己癸子辛一小正方形。卽半較自乘之方。故開方而得半較也。於甲丑之半和減乙丑之半較。得甲乙之闊。於甲庚之半和加庚丁之半較。得甲丁之長也。又圖甲乙丙丁長方形容積八尺。甲壬爲長闊之和。甲庚、己庚、庚壬、皆半和。甲丁長減等甲乙闊之甲戊。餘戊丁爲長闊之較。其庚丁則爲半較。而甲丁、己丁、丁壬、又爲連比例之三線。故己丁中率自乘之方、與甲丁首率丁壬末率相乘之長方等。見幾何原本九卷第三節。則是己丁自乘之方、與原設甲乙丙丁長方之積等也。又己庚丁爲勾股形。其己丁邊自乘之方與庚丁邊自乘之方相併、而與己庚自乘之方等。見幾何原本九卷第四節。故於己庚半和自乘方內減去與原設甲乙丙丁長方積相等之己丁自乘之數。開方而得庚丁爲半較。於己庚相等之庚壬半和內減庚丁半較。而得丁壬與丁丙等之闊。又於己庚相等之甲庚半和加庚丁半較。而得甲丁之長也。

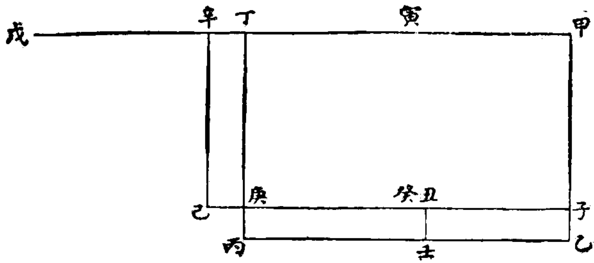




設如有長方面積八百六十四尺。長闊相和六十尺。問長闊各幾何。

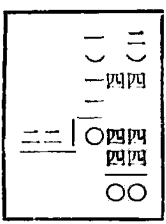
法列積如開平方法商之。其八百尺爲初商積。可商二十尺。乃以二十尺書於原積八百尺之上。而以初商二十尺與和數六十尺相減得四十尺。以初商二十尺乘之。得八百尺。書於原積之下。相減餘六十四尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商二十尺倍之得四十尺。與和數六十尺相減。餘二十尺爲廉法。以除六十四尺足三尺。因廉法內尙要減去商數爲法。故取大數爲四尺。則以四尺書於原積四尺之上。而以廉法二十尺與次商四尺相減。得十六尺。以次商四尺乘之。得六十四尺。書於餘積之下。與餘積相減恰盡。卽知長方之闊得二十四尺。與和六十尺相減。餘三十六尺。卽爲長方之長也。如圖甲乙丙丁長方形。容積八百六十四尺。其甲乙邊闊二十四尺。甲丁邊長三十六尺。甲戊爲長闊和六十尺。其丁戊與甲乙等。甲子二十尺爲初商數。與辛戊等。甲辛四十尺則和內減去初商之數。兩數相乘。成甲子己辛長方形。卽





初商所減之積也。丁戊既與甲乙等。辛戊又與甲子等。則丁辛與子乙等。丁庚己辛小長方積、與庚丑壬丙長方積等。是則次商廉隅之共積、即子乙壬丑之積也。次於甲戊和內減倍初商數四十尺如寅戊。餘甲寅二十尺。與子癸等。爲廉法。子乙者爲次商數也。子乙與丑癸等。則於子癸廉法內減丑癸。餘子丑。與次商子乙相乘得子乙壬丑小長方。即次商所減之積。故減原積恰盡也。以初商甲子二十尺。合次商子乙四尺。得甲乙二十四尺爲闊。於甲戊長闊和六十尺內、減與甲乙相等之丁戊闊二十四尺。得甲丁三十六尺爲長也。三商以後。皆倣此遞析開之。

又法以積八百六十四尺用四因之。得三千四百五十六尺。而以和六十尺自乘。得三千六百尺。減去四因之數。餘一百四十四尺。開方得一十二尺。即爲長闊之較。乃以較十二尺與和六十尺相加。得七十二尺。折半得三十六尺。即長方之長。減較十二尺。得二十四尺。即長方之闊也。

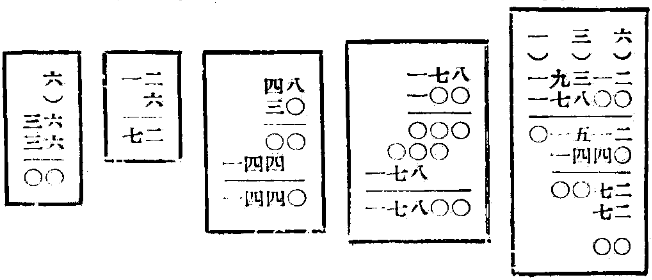


又法先將和數六十尺折半。得三十尺爲半和。自乘得九百尺。與原積八百六十四尺相減。得三十六尺。開方得六尺爲半較。於半和減半較。得二十四尺爲闊。於半和加半較。得三十六尺爲長也。

設如有長方面積一萬九千三百一十二尺。長闊相和二百七十八尺。問長闊各幾何。

法列積如開平方法商之。其一萬尺爲初商積。可商一百尺。乃以一百尺書於原積一萬尺之上。而以初商一百尺與和數二百七十八尺相減。得一百七十

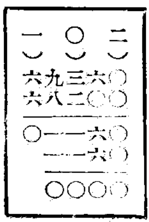
八尺。以初商一百尺乘之。得一萬七千八百尺。書於原積之下相減。餘一千五百一十二尺爲次商廉隅之共積。乃以初商一百尺倍之得二百尺。與和數相減。得七十八尺爲廉法。以除一千五百一十二尺。止足一十尺。因廉法內尙要減去商數爲法。故取大數爲三十尺。則以三十尺書於原積三百尺之上。而以廉法七十八尺與次商三十尺相減。得四十八尺。以次而三十尺乘之。得一千四百四十尺。書於餘積之下。與餘積相減。餘七十二尺爲三商廉隅之共積。乃以初商次商之一百三十尺倍之。得二百六十尺。與和數二百七十八尺相減。餘十八尺爲廉法。以除七十二尺。止足四尺。亦因取大於足除之數。故定爲六尺。則以六尺書於原積二尺之上。而以廉法十八尺與三商六尺相減。得十二尺。以三商六尺乘之得七十二尺。書於餘積之下。與餘積相減恰盡。卽知長方之闊得一百三十六尺。與和二百七十八尺相減。餘一百四十二尺。卽爲長方之長也。此法次商三商皆取大於足除之數。反覆商除始能相符。不若四因積數減和自乘開方之法。或半和自乘減原積開方之法爲整齊也。法以一萬九千三百一十二尺用四因之，得七萬七千二百四十八尺。而以和二百七十八尺自乘。得七萬七千二百八十四尺。減去四因之數。餘三十六尺。開方得六尺。卽爲長闊之較。乃以較六尺與和二百七十八尺相加得二百八十四尺。折半

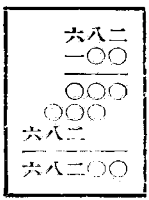


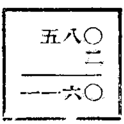
得一百四十二尺。卽長方之長。減較六尺。得一百三十六尺。卽長方之闊也。

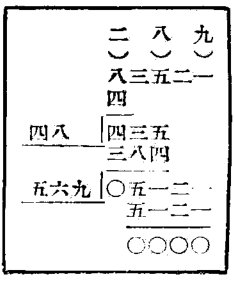
設如有長方面積六萬九千三百六十尺。長闊相和七百八十二尺。問長闊各幾何。

法列積如開平方法商之。其六萬爲初商積。可商二百尺。而以二百尺與和數七百八十二尺相減得五百八十二尺。以初商二百尺乘之。得十一萬六千四百尺。大於積數。乃改商一百尺。書於原積六萬尺之上。而以所商一百尺與和數七百八十二尺相減。得六百八十二尺。以初商一百尺乘之。得六萬八千二百尺。書於原積之下。相減餘一千一百六十尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商一百尺倍之得二百尺。與和數七百八十二尺相減得五百八十二尺爲廉法。以除一千一百六十尺止足二尺。爰書空位於原積三百尺之上。而以二尺書於原積空尺之上。而以廉法五百八十二尺與三商二尺相減。得五百八十尺。以三商二尺乘之得一千一百六十尺。書於餘積之下。與餘積相減恰盡。卽知長方之闊得一百零二尺。與和七百八十二尺相減。餘六百八十尺。卽爲長方之長也。此法初商應商二百尺。因減縱相乘得數轉大於原積。故改商一百尺。凡遇此類。不若用四因積數之法與半和自乘之法算之。法以和數七百八十二尺折半得三百九十一尺。自乘得一十五





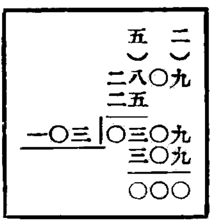




萬二千八百八十一尺。與原積六萬九千三百六十尺相減。餘八萬三千五百二十一尺。開方得二百八十九尺爲半較。於半和減半較。得一百零二尺爲闊。於半和加半較。得六百八十尺爲長也。

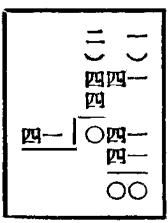
設如有錢四千七百六十文。買果樹不知數。但知樹之共數與每株之價相加得一百七十四。問樹數及價各幾何。

法以共數一百七十四折半。得八十七爲半和。自乘得七千五百六十九。與共錢四千七百六十文相減。餘二千八百零九。開方得五十三爲半較。於半和減半較。餘三十四爲樹數。於半和加半較。得一百四十爲樹價也。此法以樹數爲闊。樹價爲長。成一長方形。其樹數與樹價相加。即如長闊之和。故以半和自乘減積開方得半較。既得半較。以減半和爲樹數。加半和爲樹價也。



設如有法書一卷。共一千一百五十九字。其行數與每行字數相加共八十。問行數及字數各幾何。

法以和數八十折半。得四十爲半和。自乘得一千六百。與共字一千一百五十九相減。餘四百四十一。開方得二十一爲半較。於半和加半較。得六十一爲行數。於半和減半較。餘十九爲每行字數也。



設如有五百八十八人。用船均載。其船數與每船所載人數相加。比船數多四分之三。問船數與每船所載人數各幾何。

法先用比例分其積。以三分爲一率。一分爲二率。五百八十八人爲三率。得四率一百九十六人。用開平方法開之。得十四爲船數。以三因之得四十二。爲每船所載之人數也。此以船數爲闊。每船所載人數爲長。成一長方形。船數與人數相加。卽如長闊之和。和數旣比船數多四分之三。則是和數爲四分。每船所載人數爲三分。船數爲一分。卽闊爲一分。長爲三分也。故將共人數三分之而取其一。則人數與船數同爲一分而成正方形矣。故平方開之卽得船數。每船所載人數旣爲船數之三倍。故三因之爲所載人數也。

一率	三分
二率	一分
三率	五百八十八
四率	一百九十六

四）六
一）一九六
一
二四｜〇九六
九六
〇〇

數理精蘊下編卷十二

面部二

勾股

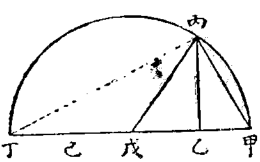
周髀曰。折矩以爲勾廣三。股修四。徑隅五。旣方其外。半其一矩。環其共盤。得成三四五。兩矩共長二十有五。是爲積矩。此言勾股正數之所以立法也。蓋勾股得長方之半形。故其一角必成矩。所謂直角也。而後可謂勾股。如其一角不能成矩。則爲三角形而非勾股矣。因勾股一角必直。故立於圜界之正一半。而自直角所作垂線。遂成連比例三率。是以直角相對界所作方形之積。必與兩傍二界所作兩方形之積等。見幾何原本九卷第四節。而勾股弦彼此相求之法於此生焉。其法所該有四。一勾股弦三者。知其二而得其一、或知其二而得其積。一勾股形自其直角對弦界求垂線。一勾股形內容方圓等形。一勾股弦三者。知其一、復知其餘二者之較、或二者之和、而得其二。或知其兩較、或兩和、或一較一和、而得其三。勾股弦和較之法。雖雜出多端。然皆不出勾股弦方積相求之理。較有勾股較、勾弦較、股弦較。和有勾股和、勾弦和、股弦和。和較相疊。則又有弦與勾股和相和。或名之曰弦和和。有弦與勾股和相較。或名之曰弦和較。有弦與勾股較相和。或名之曰弦較和。有弦與勾股較相較。或名之曰弦較較。又有勾與股弦和相和者。或名之曰勾和和。股與勾弦和相和者。或名之曰股和和。卽弦和和也。勾與股弦和相較者。或名之曰勾和較。股與勾弦較相和者。或名之曰股較和。卽弦較和也。

股與勾弦和相較者。或名之曰股和較。勾與股弦較相和者。或名之曰勾較和。卽弦較較也。勾與股弦較相較者。或名之曰勾較較。股與勾弦較相較者。或名之曰股較較。卽弦和較也。此四者皆勾股之正法。理一定而數隨之者也。至若勾三股四弦五之類。倍之至於億兆而總不越此一定之分者。名曰正勾股。概以比例推之。則三者止有其一卽可得其二。或有積而卽得其三界。此爲數一定而法隨之者也。一一按類列題。發明如左。

定勾股弦無零數法

設如用二四八連比例三率。定勾股弦無零數。問各得幾何。

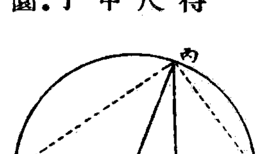
法以中率四命爲四尺爲股。首率二尺與末率八尺相減餘六尺。折半得三尺爲勾。首率二尺與末率八尺相加得十尺。折半得五尺爲弦也。如圖甲乙爲首率二尺。丙丁爲中率四尺。乙丁爲末率八尺。今以甲乙與乙丁相和共爲甲丁十尺。而以丙乙立於甲丁線相和之乙處。乃以甲丁折半於戊。以戊爲心。甲丙丁爲界作半圓。復自丙至甲、至丁、作丙甲、丙丁、二線。遂成甲丙丁勾股形。其丙角立於圜界之半。必爲直角。見幾何原本四卷第十四節。而丙乙爲垂線。卽將甲丙丁勾股形分爲甲乙丙、丙乙丁兩勾股形。而與原形爲同式三勾股形矣。見幾何原本九卷第一節。其甲乙與丙乙之比。同於丙乙與乙丁之比。爲連比例三率。故以中率丙乙爲股。而首率甲乙與己丁等。與末率乙丁相減。餘乙己。折半得乙戊爲勾。又首率甲乙與末率乙丁相加之甲丁。折半得甲戊、戊丁二半徑。與丙戊等爲弦也。此法原爲定勾股弦三者俱無零數之法。所設之數。必彼此可以度盡。始可



立爲準則否則勾股弦三者必有一不盡之數矣。

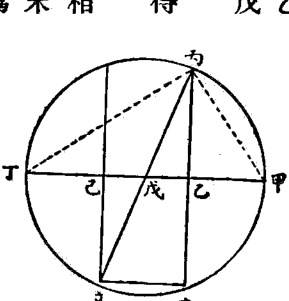
設如有四六可以度盡之兩數。欲定勾股弦無零數。問各得幾何。

法以四尺爲首率。六尺爲中率。將中率六尺自乘得三十六尺。用首率四尺除之。得九尺爲末率。乃以中率六尺爲股。首率四尺與末率九尺相減餘五尺。折半得二尺五寸爲勾。首率四尺與末率九尺相加得十三尺。折半得六尺五寸爲弦也。如圖甲乙爲首率四尺。丙乙爲中率六尺。今以中率六尺自乘。用首率四尺除之。乃得乙丁末率九尺。爰以甲乙首率乙丁末率相和。折半於戊。以戊爲心甲丙丁爲界作半圜。復自丙至甲至丁、作二線。則成甲丙丁直角三角形。其丙乙中率。即爲丙直角之垂線。故以中率丙乙爲股。而首率甲乙與末率乙丁相減。餘乙己。折半得乙戊爲勾。而首率甲乙與末率乙丁相加。得甲丁。折半得甲戊、戊丁。與丙戊等爲弦也。

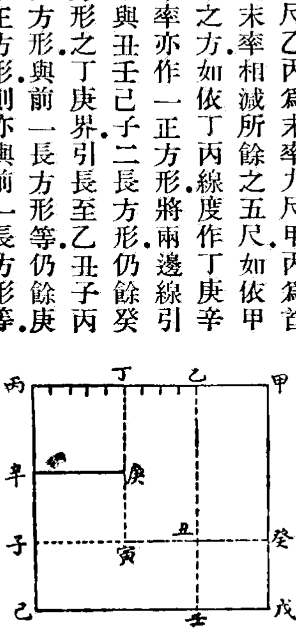


設如有四六九連比例三率。以中率六倍之爲股。定勾弦無零數。問各得幾何。

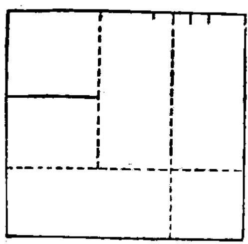
法以首率四尺與末率九尺相減。餘五尺爲勾。首率四尺與末率九尺相加。得十三尺爲弦也。如圖甲乙爲首率四尺。丙乙爲中率六尺。乙丁爲末率九尺。爰以甲乙首率與乙丁末率相和。折半於戊。以戊爲心甲丙丁爲



界。作一全圜。復自丙至甲、至丁、作二線。則成甲丙丁直角三角形。其丙乙中率卽爲丙直角之垂線。今將中率丙乙倍之。卽得丙庚爲股。故以首率甲乙（與己丁等）與末率乙丁相減。餘乙己與庚辛等爲勾。又首率甲乙與末率乙丁相加。得甲丁全徑與丙辛等爲弦也。蓋前二法用中率爲股。故以首率末率相減折半爲勾。首率末率相加折半爲弦。此法則倍中率爲股。故以首率末率相減卽爲勾。首率末率相加卽爲弦。而皆不用折半也。又圖甲乙爲首率四尺。乙丙爲末率九尺。甲丙爲首率與末率相加之十三尺。丁丙爲首率與末率相減所餘之五尺。如依甲丙線度作甲戊己丙正方形。卽爲弦自乘之方。如依丁丙線度作丁庚辛丙正方形。卽爲勾自乘之方。今以乙丙末率亦作一正方形。將兩邊線引長至甲戊己丙正方形界。則成甲癸丑乙與丑壬己子二長方形。仍餘癸戊壬丑一小正方形。又以丁庚辛丙正方形之丁庚界。引長至乙丑子丙正方形之丑子界。則又成乙丑寅丁一長方形。與前一長方形等。仍餘庚寅子辛一小長方形。合前癸戊壬丑一小正方形。則亦與前一長方形等。是此四長方形。皆爲首率與末率相乘之長方而與中率自乘之正方形相等矣。（見算法原本二卷第三節。）如以此四長方形共計之。則爲甲戊己辛庚丁一罄折形。今甲戊己丙既爲弦自乘之一正方而丁庚辛丙又爲勾自乘之一正方。則兩方相減。所餘之甲戊己辛庚丁罄折形之積。與股自乘之一正方等。（見幾何原本九卷第四節。）甲戊己辛庚丁罄折形。既爲四長方之共積。則四長方之共積亦必與股自乘之一正



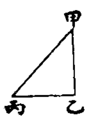
方等。首率末率相乘之四長方。既與股自乘之一正方等。則中率自乘之四正方亦必與股自乘之一正方等。是故中率自乘之四正方合之而爲股自乘之一正方。則其每邊必比中率各大一倍。見幾何原本七卷第五節。故倍中率而爲股者。必取首率末率之和而爲弦。首率末率之較而爲勾。蓋首率末率相和自乘之一正方。內減去首率末率相較自乘之一正方。甫能得中率加倍自乘之一正方積也。

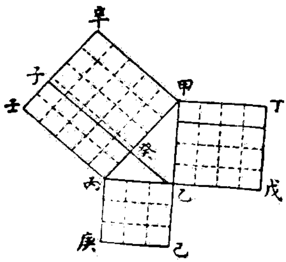


勾股弦相求法 勾股求積附

設如有股四尺。勾三尺。求弦幾何。

法以股四尺自乘得十六尺。勾三尺自乘得九尺。相加得二十五尺。開方得五尺。即爲弦也。如圖甲乙丙勾股形。其甲乙股所作丁戊乙甲正方形積。乙丙勾所作乙己庚丙正方形積相併。必與甲丙弦所作甲丙壬辛正方形積等。試自乙直角過甲丙弦作一乙癸子線。則將甲丙壬辛正方形分爲甲癸子辛、癸丙壬子二長方形。而甲乙丙勾股形分爲甲乙癸、乙丙癸、同式兩勾股形矣。其甲癸與甲乙之比同於甲乙與甲丙之比。爲連比例三率。故甲乙中率所作丁戊乙甲正方形與甲癸首率甲丙末率相等之甲辛所作甲癸子辛長方形之積相等也。又癸丙與乙丙之比同於乙丙與甲丙之比。爲連





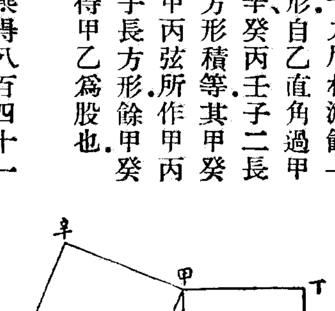
比例三率。故乙丙中率所作乙己庚丙正方形。與癸丙首率甲丙末率相等之丙壬所作癸丙壬子長方形之積相等也。一正方所分之二長方。既與二正方之積相等。則此二正方之積相合。與彼一正方之積相等可知矣。

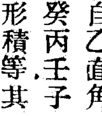
設如有勾五尺。弦十三尺。求股幾何。

法以勾五尺自乘得二十五尺。弦十三尺自乘得一百六十九尺。相減餘一百四十四尺。開方得十二尺。即爲股也。如圖甲乙丙勾股形。自乙直角過甲丙弦作一乙癸子線。則將甲丙壬辛正方形。分爲甲癸子辛、癸丙壬子二長方形。其癸丙壬子長方形積。與乙丙勾所作乙己庚丙正方形積等。其甲癸子辛長方形積。與甲乙股所作丁戊乙甲正方形積等。故甲丙弦所作甲丙壬辛正方形內減去與乙己庚丙正方形相等之癸丙壬子長方形。餘甲癸子辛長方形。即與丁戊乙甲正方形之積相等。故開方而得甲乙爲股也。

設如有股二十一尺。弦二十九尺。求勾幾何。

法以股二十一尺自乘得四百四十一尺。弦二十九尺自乘得八百四十一尺。相減餘四百尺。開方得二十尺。即爲勾也。如圖甲乙丙勾股形。自乙直角過甲丙弦作一乙癸子線。則將甲丙壬辛正方形。分爲甲癸子辛、癸丙壬子二長方形。其甲癸子辛長方形積。與甲乙股所作丁戊乙甲正方形積等。其





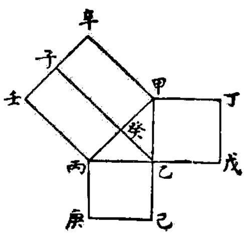
癸丙壬子長方形積與乙丙勾所作乙己庚丙正方形積等。故甲丙弦所作甲丙壬辛正方形內減去與丁戊乙甲正方形相等之甲癸子辛長方形。餘癸丙壬子長方形卽與乙己庚丙正方形之積相等。故開方而得乙丙爲勾也。

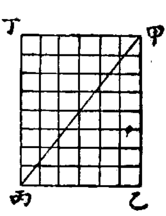
設如有勾六尺。股八尺。求面積幾何。

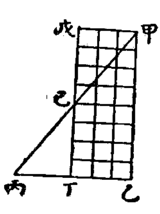
法以勾六尺與股八尺相乘得四十八尺。折半得二十四尺爲面積也。如圖甲乙丙勾股形。其乙丙勾與甲乙股相乘。則成甲乙丙丁長方形。其積比甲乙丙勾股形正大一倍。故折半得勾股積也。若有勾弦求面積。則用勾弦求股之法。得股與勾相乘。折半得面積。或有股弦求面積。則用股弦求勾之法。得勾與股相乘。折半得面積也。

又法將勾六尺折半得三尺。與股八尺相乘。亦得二十四尺爲面積也。如圖甲乙丙勾股形。將乙丙勾折半爲乙丁。與甲乙股相乘。成甲乙丁戊長方形。其甲戊己小勾股形與己丁丙小勾股形之積等。如以甲戊己小勾股形移於己丁丙。適合甲乙丙勾股形積。故甲乙丁戊長方形積與甲乙丙勾股形積相等也。

勾股形內求中垂線及容方圓等形

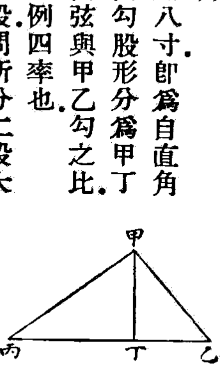






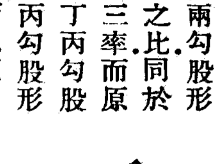
設如有勾六尺。股八尺。弦十尺。欲自直角對弦界作垂線。問得幾何。

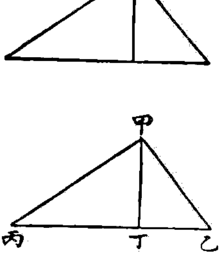
法以弦十尺爲一率。勾六尺爲二率。股八尺爲三率。推得四率四尺八寸。卽爲自直角對弦界所作垂線也。如圖甲乙丙勾股形。作甲丁垂線。則將甲乙丙勾股形分爲甲丁乙、甲丁丙兩勾股形。皆與原形爲同式。故原甲乙丙勾股形之乙丙弦與甲乙勾之比。同於今所分甲丁丙勾股形之甲丙弦、與甲丁勾之比而爲相當比例四率也。



設如有勾六尺。股八尺。弦十尺。欲自直角對弦界作垂線。分弦爲二段。問所分二段大小各幾何。

法以勾六尺自乘得三十六尺。以弦十尺除之得三尺六寸。爲垂線所分之小界。以股八尺自乘得六十四尺。以弦十尺除之得六尺四寸。爲垂線所分之大界也。如圖甲乙丙勾股形。作甲丁垂線。則分甲乙丙勾股形爲甲丁乙、甲丁丙兩勾股形。皆與原形爲同式。故原甲乙丙勾股形之乙丙弦、與甲乙勾之比。同於今所分甲丁乙勾股形之甲乙弦、與乙丁勾之比。爲連比例三率。而原甲乙丙勾股形之乙丙弦。與甲丙股之比。又同於今所分甲丁丙勾股形之甲丙弦、與丙丁股之比。亦爲連比例三率。是以原甲乙丙勾股形之甲乙勾、又爲今所分甲丁乙勾股形之弦者爲中率自乘。而以原甲乙丙勾股形之乙丙弦爲首率除之。得末率乙丁。爲甲丁垂線所分之小界。原甲乙丙勾股形之甲丙股、





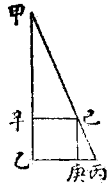
又爲今所分甲丁丙勾股形之弦者爲中率。自乘。而以原甲乙丙勾股形之乙丙弦爲首率除之。得末率丁丙。爲甲丁垂線所分之大界也。

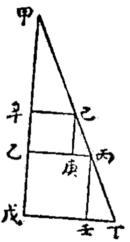
設如有勾五尺。股十二尺。問內容方邊幾何。

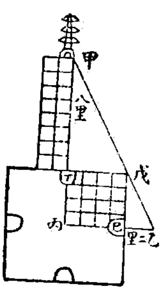
法以勾五尺與股十二尺相加。得十七尺。爲一率。勾五尺爲二率。股十二尺爲三率。推得四率三尺五寸二分九釐有餘。爲內容方邊也。如圖甲乙丙勾股形。甲乙爲股十二尺。乙丙爲勾五尺。試依乙丙勾數。將甲乙股引長作甲戊線。爲勾股和十七尺。自戊與乙丙勾平行作戊丁線。又將甲丙弦引長作甲丁線。則成甲戊丁同式勾股形。復自丙角與甲戊線平行作丙壬線。則成丙壬戊乙正方。即爲甲戊丁勾股形所容之方。故甲戊丁勾股形之甲戊股、與乙丙方邊之比。同於甲乙丙勾股形之甲乙股、與己辛方邊之比也。

設如有方城一座。四正有門。自南門直行八里有一塔。自西門直行至二里。切城角亦望見塔。問城每面幾何。

法以西門外二里與南門外八里相乘。得十六里。開方得四里。倍之得八里。即爲城每一面之數也。如圖甲乙丙勾股形。乙己爲西門外二里。甲丁爲南門外八里。戊己與戊丁、皆爲城之每邊之一半。而甲丁戊勾股形、與戊己乙勾股形爲同式。故乙己與己戊之比。同於戊丁與丁甲



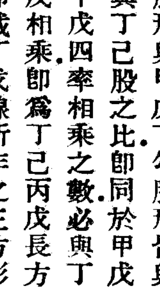




之比。爲相當比例四率。且己戊與戊丁皆爲一體。故又爲相連比例三率。是以乙己首率與甲丁末率相乘。開方而得戊丁、或戊己。皆爲中率。爲城之每邊之一半也。

設如有甲乙丙勾股形內容丁己丙戊長方形。但知丁戊寬爲戊丙長四分之一。從甲至戊爲四尺。從乙至己爲九尺。問長方及勾股各幾何。

法以甲戊四尺與乙己九尺相乘。得三十六尺。爲內容長方之積。用四歸之得九尺。開方得三尺。爲己丙。卽長方之闊。以四因之。得十二尺。爲戊丙。卽長方之長。以戊丙十二尺加甲戊四尺。得十六尺。爲股。以己丙三尺加乙己九尺。得十二尺。爲勾也。蓋丁己乙勾股形。甲戊丁勾股形。皆與甲乙丙勾股形爲同式。故丁己乙勾股形之乙己勾、與丁己股之比。卽同於甲戊丁勾股形之丁戊勾、與甲戊股之比。而乙己首率與甲戊四率相乘之數。必與丁己二率與丁戊三率相乘之數相等。是以乙己與甲戊相乘。卽爲丁己丙戊長方形之積也。丁戊既爲戊丙之四分之一。則以四歸之。卽成丁戊線所作之正方形積。故開方得丁戊之闊。又四因之而得戊丙之長也。既得丁戊。而丁戊與己丙等。故己丙與乙己相加得乙丙之勾。而戊丙與甲戊相加得甲丙之股也。

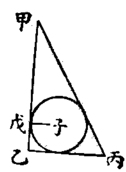


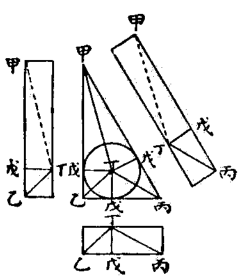
設如有勾八尺。股十五尺。弦十七尺。問內容圓徑幾何。

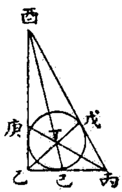
法以勾八尺與股十五尺相乘。得一百二十尺。乃以勾八尺股十五尺弦十七尺三數相加。共四十尺。除之得三尺。爲容圓半徑。倍之得六尺。爲容圓全徑也。如圖甲乙丙勾股形內容丁圜形。試自圜中心至甲

乙丙三角作丁甲丁乙丁丙三線。則分甲乙丙勾股形爲甲丁乙甲丁丙、乙丁丙三三角形勾股弦三線皆爲三角形之底邊。而丁戊半徑、皆爲其垂線矣今勾股相乘所得之長方積原比甲乙丙勾股形積大一倍。卽如將所分三三角形、各用垂線乘底邊所得之三長方積、合爲一長方也。三長方之長雖不同而闊則一。故各以長除積而得闊者卽如合勾股弦三邊除勾股相乘之積而得半徑也。

又法以勾八尺與股十五尺相加得二十三尺。內減弦十七尺。餘六尺。卽爲內容圓之全徑也。如圖甲乙丙勾股形。自圓中心作丁甲、丁乙、丁丙三線。又作丁戊、丁己、丁庚三垂線。則丙戊與丙己等。甲戊與甲庚等。乙己與乙庚原等甲乙股與乙丙勾相併。比甲丙弦所多者。惟乙己、乙庚二段。今於甲乙股乙丙勾相併度內減去甲丙弦。卽如甲乙股內減去與甲戊等之甲庚。乙丙勾內減去與丙戊等之丙己。所餘者止乙庚與乙己皆爲圓之半徑。二半徑相合非全徑耶。







勾股弦和較相求法上

勾股弦和較相求之法。錯綜變換共有六十。舊算書所有者八。按舊法可以變通者三十有四。舊法所無今創立者一十有八。依題比類列目於前。按法循序設問於後。以備人之觀覽焉。

有勾．有股弦較．求股弦．第一舊有

有勾．有股弦和．求股弦．第二舊有

有股．有勾弦較．求勾弦．第三舊有

有股．有勾弦和．求勾弦．第四舊有

有弦．有勾股較．求勾股．第五舊有

有弦．有勾股和．求勾股．第六舊有

有勾弦和．有股弦和．求勾股弦．第七舊有

有勾股和．有股弦和．求勾股弦．第八新立

有勾股和．有勾股和．求勾股弦．第九新立

有勾弦較．有股弦較．求勾股弦．第十舊有

有勾股較．有勾弦較．求勾股弦．第十一按舊法變通

有勾股較．有股弦較．求勾股弦．第十二按舊法變通

有勾股和．有勾弦較．求勾股弦．第十四新立

有勾股和．有股弦較．求勾股弦．第十五新立

有勾弦和．有股弦較．求勾股弦．并見第十五新立

有勾弦和．有勾股較．求勾股弦．第十三按舊法變通

有股弦和。有勾弦較。求勾股弦。并見第十四新立

有股弦和。有勾股較。求勾股弦。并見第十三按舊法變通

有勾。有勾股弦總和。求股弦。第十八按舊法變通

有勾。有弦與勾股和之較。求股弦。第十六按舊法變通

有勾。有弦與勾股較之和。求股弦。第十九按舊法變通

有勾。有弦與勾股較之較。求股弦。第十七按舊法變通

有股。有勾股弦總和。求勾弦。第二十二按舊法變通

有股。有弦與勾股和之較。求勾弦。第二十按舊法變通

有股。有弦與勾股較之和。求勾弦。第二十三按舊法變通

有股。有弦與勾股較之較。求勾弦。第二十一按舊法變通

有弦。有勾股弦總和。求勾股。第二十六按舊法變通

有弦。有弦與勾股和之較。求勾股。第二十四按舊法變通

有弦。有弦與勾股較之和。求勾股。第二十七按舊法變通

有弦。有弦與勾股較之較。求勾股。第二十五按舊法變通

有勾股和。有勾股弦總和。求勾股弦。并見第二十六按舊法變通

有勾股和。有弦與勾股和之較。求勾股弦。并見第二十四按舊法變通

有勾股和。有弦與勾股較之和。求勾股弦。第三十八新立

有勾股和。有弦與勾股較之較。求勾股弦。第三十七新立

有勾弦和。有勾股弦總和。求勾股弦。并見第二十二按舊法變通

有勾弦和。有弦與勾股和之較。求勾股弦。第三十九新立

有勾弦和。有弦與勾股較之和。求勾股弦。第四十新立

有勾弦和。有弦與勾股較之較。求勾股弦。并見第二十一按舊法變通

有股弦和。有勾股弦總和。求勾股弦。并見第十八按舊法變通

有股弦和。有弦與勾股和之較。求勾股弦。第四十一新立

有股弦和。有弦與勾股較之和。求勾股弦。并見第十九按舊法變通

有股弦和。有弦與勾股較之較。求勾股弦。第四十二新立

有勾股較。有勾股弦總和。求勾股弦。第三十四新立

有勾股較。有弦與勾股和之較。求勾股弦。第四十三新立

有勾股較。有弦與勾股較之和。求勾股弦。并見第二十七按舊法變通

有勾股較。有弦與勾股較之較。求勾股弦。并見第二十五按舊法變通

有勾弦較。有勾股弦總和。求勾股弦。第三十五新立

有勾弦較。有弦與勾股和之較。求勾股弦。并見第二十按舊法變通

有勾弦較.有弦與勾股較之和.求勾股弦.并見第二十三按舊法變通

有勾弦較.有弦與勾股較之較.求勾股弦.第四十四新立

有股弦較.有勾股弦總和.求勾股弦.第三十六新立

有股弦較.有弦與勾股和之較.求勾股弦.并見第十六按舊法變通

有股弦較.有弦與勾股較之和.求勾股弦.第四十五新立

有股弦較.有弦與勾股較之較.求勾股弦.并見第十七按舊法變通

有勾股弦總和.有弦與勾股和之較.求勾股弦.第三十三按舊法變通

有勾股弦總和.有弦與勾股較之和.求勾股弦.第三十按舊法變通

有勾股弦總和.有弦與勾股較之較.求勾股弦.第三十一按舊法變通

有弦與勾股和之較.有弦與勾股較之和.求勾股弦.第二十九按舊法變通

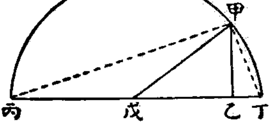
有弦與勾股和之較.有弦與勾股較之較.求勾股弦.第二十八按舊法變通

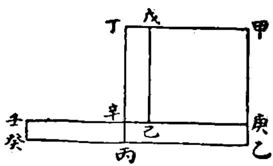
有弦與勾股較之和.有弦與勾股較之較.求勾股弦.第三十二按舊法變通

設如有勾十五尺.股弦較五尺.求股弦各幾何.第一

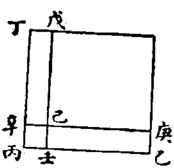
法以勾十五尺自乘.得二百二十五尺.以股弦較五尺除之.得四十五尺爲股弦和.與股弦較五尺相加.得五十尺.折半得二十五尺爲弦.於弦二十五尺內減股弦較五尺.餘二十尺爲股也.如圖甲乙爲勾十五尺.丁乙爲股弦較五尺.試自甲至丁作甲丁線.則成甲乙丁勾股形.復以丁乙線引長而以甲爲直角

作甲丙線。則又成丙甲丁勾股形。爰以丁丙線折半於戊。而以戊爲心、甲爲界、作丙甲丁半圜。則丁乙、甲乙、乙丙、卽爲連比例三率。故以中率甲乙勾自乘。以首率丁乙股弦較除之。得末率乙丙爲股弦和也。乙丙與丁乙相加得丁丙全徑。折半得丁戊、戊丙半徑。俱與甲戊等。故甲戊爲弦。於丁戊半徑內減丁乙股弦較。餘乙戊卽爲股也。又圖甲乙丙丁爲弦自乘之正方積。甲庚己戊爲股自乘之正方積。故乙丙丁戊己庚罄折形。與勾自乘之正方積相等。今將戊己辛丁移爲辛壬癸丙。則成庚乙癸壬一長方形。其庚壬長卽股弦和。其庚乙闊卽股弦較。故將勾自乘之數、以股弦較除之而得股弦和也。





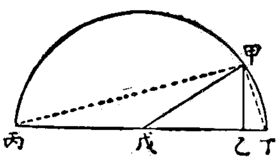
又法以勾十五尺自乘。得二百二十五尺。又以股弦較五尺自乘。得二十五尺。相減餘二百尺。折半得一百尺。以股弦較五尺除之。得二十尺爲股。加股弦較五尺得二十五尺、爲弦也。如圖甲乙丙丁爲弦自乘之正方積。甲庚己戊爲股自乘之正方積。故乙丙丁戊己庚罄折形與勾自乘之正方積相等。而己壬丙辛卽股弦較自乘之正方積也。於乙丙丁戊己庚罄折形積內減己壬丙辛股弦較自乘之正方積。餘庚乙壬己與戊己辛丁二長方形。折半卽餘戊己辛丁一長方形。其戊己長卽股。其己辛闊卽股弦較。故以股弦較除折半之積而得股也。

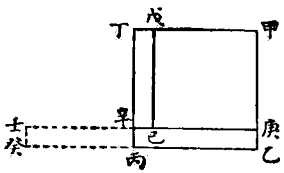


設如有勾二十八尺。股弦和九十八尺。求股弦各幾何。第二

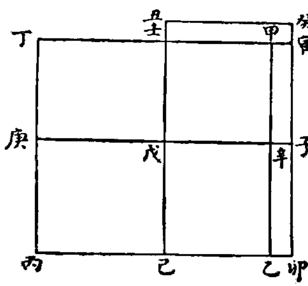
法以勾二十八尺自乘得七百八十四尺。以股弦和九十八尺除之。得八尺爲股弦較。與股弦和九十八尺相加。得一百零六尺。折半得五十三尺爲弦。於股弦和九十八尺內減弦五十三尺。餘四十五尺爲股也。如圖甲乙爲勾二十八尺。乙丙爲股弦和九十八尺。試自甲至丙作甲丙線。則成甲乙丙勾股形。復以乙丙線引長而以甲爲直角作甲丁線。則又成丙甲丁勾股形。爰以丁丙線折半於戊。而以戊爲心、作丙甲丁半圜。則乙丙、甲乙、丁乙、卽爲連比例三率。故以中率甲乙勾自乘。以首率乙丙股弦和除之。得末率丁乙爲股弦較也。丁乙與乙丙相加得丁丙全徑。折半得丁戊、戊丙半徑。俱與甲戊等。故甲戊爲弦。於乙丙股弦和內減戊丙半徑。或於丁戊半徑內減丁乙股弦較。餘乙戊卽爲股也。又圖甲乙丙丁爲弦自乘之正方積。甲庚己戊爲股自乘之正方積。故乙丙丁戊己庚磬折形、與勾自乘之正方積相等。今將戊己辛丁移爲辛壬癸丙。則成庚乙癸壬一長方形。其庚壬長卽股弦和。其庚乙闊卽股弦較。故勾自乘之數。以股弦和除之。而得股弦較也。

又法以勾二十八尺自乘。得七百八十四尺。又以股弦和九十八尺自乘。得九千六百零四尺。兩數相加。得一萬零三百八十八尺。折半得五千一百九十四尺。以股弦和九十八尺除之。得五十三尺爲弦。於股弦和九十八尺內減弦五十三尺。餘四十



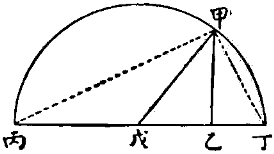


五尺爲股也。如圖甲乙丙丁爲股弦和自乘之正方積。內戊己丙庚爲弦自乘之正方積。甲辛戊壬爲股自乘之正方積。辛乙己戊與壬戊庚丁爲股弦相乘之二長方積。勾自乘之正方積則與癸子辛甲壬丑磬折形相等。如加甲辛戊壬股自乘之正方積則成癸子戊丑正方形。爲一勾方一股方相和之積。而與戊己丙庚一弦方之積相等。今以勾自乘之磬折形之積。加於股弦和自乘之正方積內。卽如將癸寅壬丑長方形移補於子卯乙辛。遂成寅卯丙丁一大長方形。折半則餘壬己丙丁一長方形。其闊卽弦。其長卽股弦和。故以股弦和除折半之積而得弦也。



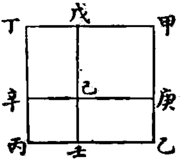
設如有股三十二尺。勾弦較十六尺。求勾弦各幾何 第三

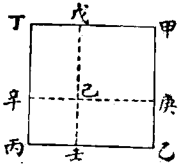
法以股三十二尺自乘得一千零二十四尺。以勾弦較十六尺除之。得六十四尺爲勾弦和與勾弦較十六尺相加。得八十尺。折半得四十尺爲弦。於弦四十尺內減勾弦較十六尺。餘二十四尺爲勾也。如圖甲乙爲股三十二尺。丁乙爲勾弦較十六尺。試自甲至丁作甲丁線。則成甲乙丁勾股形。復以丁乙線引長。而以甲爲直角作甲丙線。則又成丙甲丁勾股形。爰以丁丙線折半於戊。而以戊爲心甲爲界作丙甲丁半圓。則丁乙甲乙乙丙卽爲連比例三率。故以中率甲乙股自乘。以首率丁乙勾弦較除之。得末率乙丙爲勾弦和也。丁乙與乙丙相加爲丁丙全徑。折半得丁戊戊丙

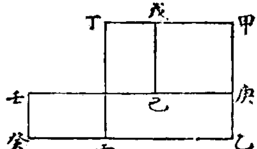


半徑。俱與甲戊等。故甲戊爲弦。於丁戊半徑內減丁乙勾弦較。餘乙戊卽爲勾也。又圖甲乙丙丁爲弦自乘之正方積。甲庚己戊爲勾自乘之正方積。故乙丙丁戊己庚磬折形、與股自乘之正方積相等。今將戊己辛丁移爲辛壬癸丙。則成庚丁癸壬一長方形。其庚壬卽長勾弦和。其庚乙闊卽勾弦較。故將股自乘之數。以勾弦較除之而得勾弦和也。

又法以股三十二尺自乘。得一千零二十四尺。又以勾弦較十六尺自乘。得二百五十六尺。相減餘七百六十八尺。折半得三百八十四尺。以勾弦較十六尺除之。得二十四尺爲勾。加勾弦較十六尺。得四十尺爲弦也。如圖甲乙丙丁爲弦自乘之正方積。甲庚己戊爲勾自乘之正方積。故乙丙丁戊己庚磬折形與股自乘之正方積相等。而己壬丙辛卽勾弦較自乘之正方積也。於乙丙丁戊己庚磬折形積內、減己壬丙辛勾弦較自乘之正方積。餘庚乙壬己與戊己辛丁二長方形。折半卽餘戊己辛丁一長方形。其戊己長卽勾。其己辛闊卽勾弦較。故以勾弦較除折半之積而得勾也。





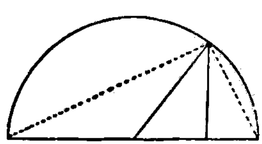


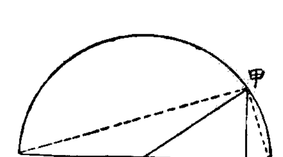
設如有股八尺。勾弦和十六尺。求勾弦各幾何。第四

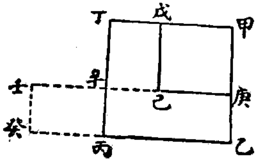
法以股八尺自乘。得六十四尺。以勾弦和十六尺除之。得四尺爲勾弦較。與勾弦和十六尺相加。得二十

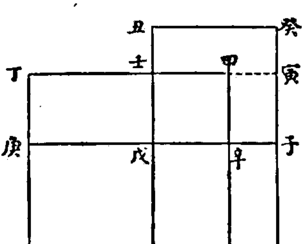
尺。折半得十尺爲弦。於勾弦和十六尺內減弦十尺。餘六尺爲勾也。如圖甲乙爲股八尺。乙丙爲勾弦和十六尺試自甲至丙作甲丙線。則成甲乙丙勾股形。復以乙丙線引長。而以甲爲直角作甲丁線。則又成丙甲丁勾股形。爰以丁丙線折半於戊。而以戊爲心甲爲界作丙甲丁半圜。則乙丙、甲乙、丁乙、卽爲連比例三率。故將中率甲乙股自乘。以首率乙丙勾弦和除之。得末率丁乙爲勾弦較也。丁乙與乙丙相加爲丁丙全徑。折半得丁戊、戊丙半徑。俱與甲戊等。故甲戊爲弦。於乙丙勾弦和內減戊丙半徑。或丁戊半徑內減丁乙勾弦較。餘乙戊卽爲勾也。又圖甲乙丙丁爲弦自乘之正方積。甲庚己戊爲勾自乘之正方積。故乙丙丁戊己庚磬折形與股自乘之正方積相等。今將戊己辛丁移爲辛壬癸丙。則成庚乙癸壬一長方形。其庚壬長卽勾弦和。其庚乙闊卽勾弦較。故股自乘之數。以勾弦和除之而得勾弦較也。

又法以股八尺自乘。得六十四尺。又以勾弦和十六尺自乘。得二百五十六尺。相加得三百二十尺。折半







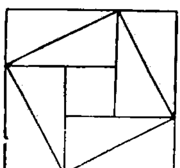


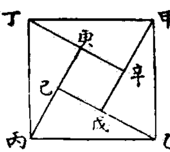
得一百六十尺。以勾弦和十六尺除之。得十尺爲弦。於勾弦和十六尺內減弦十尺餘六尺爲勾也。如圖甲乙丙丁爲勾弦和自乘之正方積。內戊己丙庚爲弦自乘之正方積。甲辛戊壬爲勾自乘之正方積。辛乙己戊與壬戊庚丁爲勾弦相乘之二長方積。股自乘之正方積則與癸子辛甲壬丑之磬折形相等。如加甲辛戊壬勾自乘之正方積。則成癸子戊丑正方形。爲一勾方一股方相和之積。而與戊己丙庚一弦方之積相等。今以股自乘之磬折形之積、加於勾弦和自乘之正方積內。卽如將癸寅壬丑長方形、移補於子卯乙辛。遂成寅卯丙丁一大長方形。折半則餘壬己丙丁一長方形。其闊卽弦。其長卽勾弦和。故以勾弦和除折半之積而得弦也。

設如有弦三十四尺。勾股較十四尺。求勾股各幾何。第五

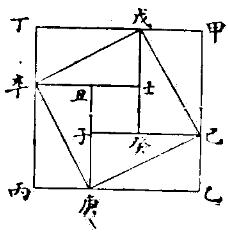
法以弦三十四尺自乘。得一千一百五十六尺。又以勾股較自乘。得一百九十六尺。相減餘九百六十尺。折半得四百八十尺。爲勾股相乘之一長方形積。乃以勾股較十四尺爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得闊十六尺爲勾。得長三十尺爲股也。如圖甲乙丙丁爲弦自乘之正方積。戊己庚辛爲勾股較自乘之正方積。相減餘甲戊乙類四勾股形。爲二長方形積。折半餘一長方形積。其闊卽勾。其長卽股。其長闊較卽勾股較。故以帶縱較數開方法算之而得闊爲勾。得長爲股也。

又法以弦三十四尺自乘。得一千一百五十六尺。倍之得二千三百一十二尺。又以勾股較十四尺自乘。得一百九十六尺。相減餘二千一百一十六尺。開方得四十六



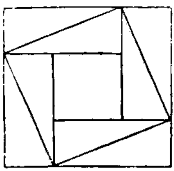


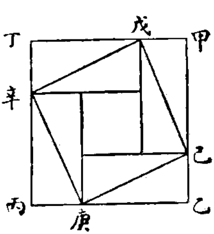
尺爲勾股和。於勾股和四十六尺內減勾股較十四尺。餘三十二尺。折半得十六尺爲勾。於勾十六尺加勾股較十四尺得三十六尺爲股也。如圖甲乙丙丁爲勾股和自乘之正方。內容甲戊己類八勾股積。與壬癸子丑一勾股較積。戊己庚辛爲弦自乘之正方。內容戊癸己類四勾股積。與壬癸子丑一勾股較積。倍之則爲八勾股積、二勾股較積。卽如甲乙丙丁一大正方形、仍餘壬癸子丑一小正方形。今減所餘壬癸子丑一小正方形。（卽一勾股較積。）仍餘八勾股積、一勾股較積爲甲乙丙丁正方形。卽勾股和自乘之方。故開方而得勾股和也。



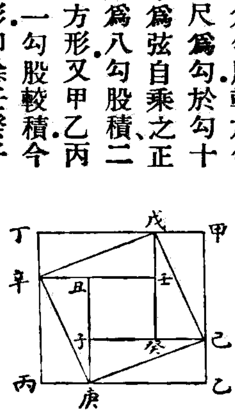
設如有弦三十九尺。勾股和五十一尺。求勾股各幾何。（第六）

法以勾股和五十一尺自乘。得二千六百零一尺。又以弦三十九尺自乘。得一千五百二十一尺。相減餘一千零八十尺。折半得五百四十尺。爲勾股相乘之一長方形積。乃以勾股和五十一尺爲長闊和。用帶縱和數開方法算之。得闊十五尺爲勾。得長三十六尺爲股也。如圖甲乙丙丁爲勾股和自乘之正方積。戊己庚辛爲弦自乘之正方積。相減餘甲戊己類四勾股形。爲二長方形積。折半餘一長方形積。其闊卽勾。其長卽股。其長闊和卽勾股和。故以帶縱和數開方法算之。而得闊爲勾。得長爲股也。



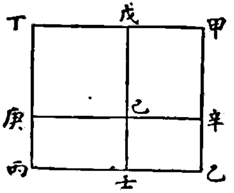


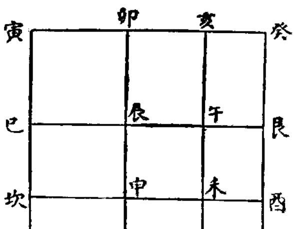
又法以弦三十九尺自乘。得一千五百二十一尺。倍之得三千零四十二尺。又以勾股和五十一尺自乘。得二千六百零一尺。相減餘四百四十一尺。開方得二十一尺爲勾股較。於勾股和五十一尺內減勾股較二十一尺。餘三十尺折半得十五尺爲勾。於勾十五尺加勾股較二十一尺。得三十六尺爲股也。如圖戊己庚辛爲弦自乘之正方。內容戊癸己類四勾股積。與壬癸子丑一勾股較積。倍之則爲八勾股積、二勾股較積。卽如甲乙丙丁一大正方形。仍餘壬癸子丑一小正方形。又甲乙丙丁爲勾股和自乘之正方。內容甲戊己類八勾股積。壬癸子丑一勾股較積。今以所倍之一大正方形。又餘一小正方形內、減甲乙丙丁正方形。卽餘壬癸子丑一小正方形。爲勾股較積。故開方而得勾股較也。



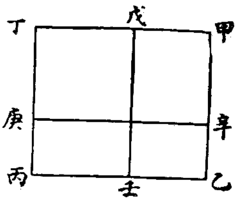
設如有勾弦和二十四尺。股弦和二十七尺。求勾股弦各幾何。第七

法以勾弦和二十四尺與股弦和二十七尺相乘。得六百四十八尺。倍之得一千二百九十六尺。開方得三十六尺。爲勾股弦總和。於總和三十六尺內減勾弦和二十四尺。餘十二尺爲股。於總和三十六尺內減股弦和二十七尺。餘九尺爲勾。於股弦和二十七尺內減股十二尺。或勾弦和二十四尺內減勾九尺。



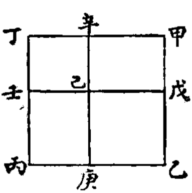


餘十五尺爲弦也。如圖甲乙線爲勾弦和。甲丁線爲股弦和。相乘得甲乙丙丁長方形。內戊己庚丁爲弦自乘之正方。辛乙壬己爲勾股相乘之長方。甲辛己戊爲股弦相乘之長方。己壬丙庚爲勾弦相乘之長方。倍之卽爲癸子丑寅一大正方。其每一邊卽勾股弦之總和。其卯辰巳寅爲弦自乘之正方。卽如前圖之戊己庚丁。然其午未申辰爲股自乘之正方。其酉子戌未爲勾自乘之正方。兩方相合。又與前圖戊己庚丁弦自乘之正方相等。其艮酉未午與未戌乾申爲勾股相乘之二長方。每一形卽如前圖之辛乙壬己。然其亥午辰卯與辰申坎巳爲股弦相乘之二長方。每一形卽如前圖之甲辛己戊。然其癸艮午亥與申乾丑坎爲勾弦相乘之二長方。每一形卽如前圖之己壬丙庚。然因癸子丑寅正方比甲乙丙丁長方每一形俱多一倍。故甲乙勾弦和、甲丁股弦和、相乘所成之甲乙丙丁長方。倍之而與癸子丑寅正方等。開方得癸子類之每一邊皆爲勾股弦之總和也。

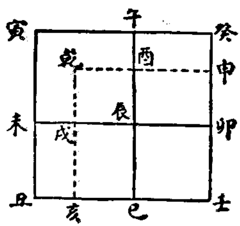


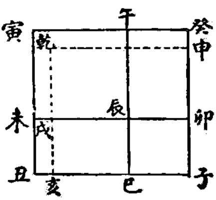
設如有勾股和二十一尺。股弦和二十七尺。求勾股弦各幾何。第八

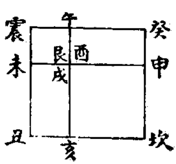
法以勾股和二十一尺自乘得四百四十一尺。又以股弦和二十七尺自乘。得七百二十九尺。兩數相減餘二百八十八尺。乃以勾股和二十一尺與股弦和二十七尺相減。餘六尺爲勾弦較。蓋股與勾和。股與弦和。皆爲一股所和。故相減卽勾弦較也。自乘得三十六尺與兩和自乘相減之餘二百八十八尺相加。得三百二十



四尺。開方得十八尺。爲股與勾弦較之和。內減勾弦較六尺。餘十二尺爲股於勾股和二十一尺內減股十二尺。餘九尺爲勾加勾弦較六尺得十五尺爲弦也。如圖甲乙丙丁爲勾股和自乘之一大正方。內戊乙庚己爲股自乘之一正方。辛己壬丁爲勾自乘之一正方。甲戊己辛與己庚丙壬爲勾股相乘之二長方。又癸子丑寅爲股弦和自乘之一大正方。內卯子巳辰爲股自乘之一正方。午辰未寅爲弦自乘之一正方。癸卯辰午與辰巳丑未爲股弦相乘之二長方。今甲乙丙丁勾股和自乘之方與癸子丑寅股弦和自乘之方相減。則於癸子丑寅股弦和自乘之方內。去卯子巳辰股自乘之一正方。酉辰戌乾勾自乘之一正方。又去申卯辰酉與辰巳亥戌勾股相乘之二長方。所餘癸申酉午與戌亥丑未二長方。爲勾弦較與股相乘之二長方。又午酉乾戌未寅一磬折形。爲弦自乘之一正方內、減勾自乘之一正方、所餘之股自乘之一正方。如以此磬折形積作一尺自乘之一正方。再加癸申酉午與戌亥丑未之勾弦較與股相乘之二長方。則惟缺午艮未震爲勾弦較自乘之一小正方。今以勾弦較自乘之數、加於兩和自乘相減之餘。甫成癸坎丑震一正方。故開方而得癸坎類之每一邊。爲股與勾弦較相和之數也。

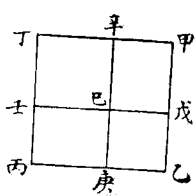


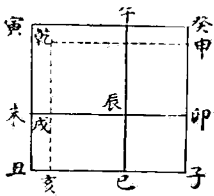


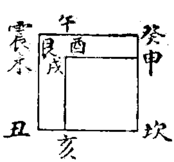


設如有勾股和二十一尺.勾弦和二十四尺.求勾股弦各幾何.第九

法以勾股和二十一尺自乘.得四百四十一尺.又以勾弦和二十四尺自乘.得五百七十六尺.兩數相減.餘一百三十五尺.乃以勾股和二十一尺與勾弦和二十四尺相減.餘三尺爲股弦較.蓋勾與股和.勾與弦和.皆爲一勾所和.故相減卽股弦較也.自乘得九尺.與兩和自乘相減之餘一百三十五尺相加.得一百四十四尺.開方得十二尺.爲勾與股弦較之和.內減股弦較三尺.餘九尺爲勾.於勾股和二十一尺內減勾九尺.餘十二尺爲股.加股弦較三尺.得十五尺爲弦也.如圖甲乙丙丁爲勾股和自乘之一大正方.內戊乙庚己爲勾自乘之一正方.辛己壬丁爲股自乘之一正方.甲戊己辛與己庚丙壬爲勾股相乘之二長方.又癸子丑寅爲勾弦和自乘之一大正方.內卯子巳辰爲勾自乘之一正方.午辰未寅爲弦自乘之一正方.癸卯辰午與辰巳丑未爲勾弦相乘之二長方.今甲乙丙丁勾股和自乘之方與癸子丑寅勾弦和自乘之方相減.則於癸子丑寅勾弦和自乘之方內.去卯子巳辰勾自乘之一正方酉辰戌乾股自乘之一正方.又去申卯辰酉與辰巳亥戌勾股相乘之二長方.所餘癸申酉午與戌亥丑未二長方.爲股弦較與勾相乘之二長方.又午酉乾戌未寅一磬折形.爲弦自乘之一正方內、減股自乘之一正方、所餘之勾



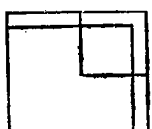


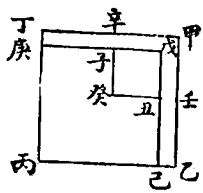


自乘之一正方。如以此磬折形積作一勾自乘之一正方。再加癸申酉午與戊亥丑未之股弦較與勾相乘之二長方。則惟缺午艮未震爲股弦較自乘之一小正方。今以股弦較自乘之數、加於兩和自乘相減之餘。甫成癸坎丑震一正方。故開方而得癸坎類之每一邊。爲勾與股弦較相和之數也。

設如有勾弦較九尺。股弦較二尺。求勾股弦各幾何。第十

法以勾弦較九尺與股弦較二尺相乘。得十八尺。倍之得三十六尺。開方得六尺。爲弦比勾股和相差之較。加股弦較二尺得八尺爲勾。加勾弦較九尺。得十五尺爲股。於勾數加勾弦較九尺。得十七尺。爲弦。或於股數加股弦較二尺。亦得十七尺爲弦也。如圖甲乙丙丁爲弦自乘之一正方。戊己丙庚爲股自乘之一正方。二方相減。所餘甲乙己戊庚丁磬折形。卽與勾自乘之一正方等。而乙己與丁庚皆爲股弦較。試作甲壬癸辛一正方爲勾自乘之方。則壬乙與辛丁皆爲勾弦較。其壬丑與乙己等。辛子與丁庚等。亦皆爲股弦較。以壬乙之勾弦較與壬丑之股弦較相乘。則成壬乙己丑之一長方形。以辛丁之勾弦較與辛子之股弦較相乘。則成辛子庚丁之一長方形。此兩長方形必與戊丑癸子一正方形相等。何也。蓋甲乙己戊庚丁與勾自乘之一正方相等之磬折形內。減甲壬丑戊子辛一小磬折形。則餘壬乙己丑與辛子庚丁二長方形。若於甲壬癸辛勾自乘之一正方內。減甲壬丑戊子辛磬折形。則餘戊丑癸子一小正方形。夫甲乙己戊庚丁磬折形。旣與甲壬癸辛之勾自乘之





一正方相等。今同減去甲壬丑戊子辛磬折形。則彼所餘之二長方、必與此所餘之一正方相等可知矣。故勾弦較與股弦較相乘倍之開方。而得弦比勾股和相差之較。加股弦較得勾。加勾弦較而得股也。蓋圖以乙丙爲弦。己丙爲股。故乙己爲股弦較。若以壬癸勾與己丙股相和。則壬癸勾之壬丑一段。卽爲股弦較。而勾股和比弦所多者惟丑癸一段。故丑癸爲弦比勾股和相差之較也。

設如有勾股較三十四尺。勾弦較三十六尺。求勾股弦各幾何。第十一

法以勾股較三十四尺與勾弦較三十六尺相減。餘二尺爲股弦較。卽如前法以股弦較二尺與勾弦較三十六尺相乘。得七十二尺。倍之得一百四十四尺。開方得十二尺。爲弦比勾股和相差之較。加股弦較二尺。得十四尺爲勾。加勾弦較三十六尺。得四十八尺爲股。於勾數加勾弦較三十六尺。得五十尺爲弦。或於股數加股弦較二尺。亦得五十尺爲弦也。如圖甲乙爲勾。甲丙爲股。甲丁爲弦。乙丙爲勾股較。乙丁爲勾弦較。而丙丁爲股弦較。今以乙丁勾弦較減乙丙勾股較。所餘丙丁卽爲股弦較。既得股弦較。則如勾弦較、股弦較、求勾股弦之法算之。卽得各數矣。

設如有勾股較十四尺。股弦較二尺。求勾股弦各幾何。第十二

法以勾股較十四尺與股弦較二尺相加。得十六尺爲勾弦較。卽如前法以勾弦較十六尺與股弦較二尺相乘。得三十二尺。倍之得六十四尺。開方得八尺。爲弦比勾股和相差之較。加股弦較二尺。得十尺爲勾。加勾弦較十六尺。得二十四尺爲股。於勾數加勾弦較十六尺。得二十六尺爲弦。或於股數加股弦較

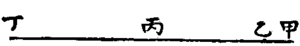
二尺。亦得二十六尺爲弦也。如圖甲乙爲勾。甲丙爲股。甲丁爲弦。乙丙爲勾股較。丙丁爲股弦較。而乙丁爲勾弦較。今以乙丙勾股較與丙丁股弦較相加。則得乙丁之勾弦較。既得勾弦較。則如勾弦較、股弦較、求勾股弦之法算之。卽得各數矣。

設如有勾弦和二十四尺。勾股較三尺。求勾股弦各幾何。第十三

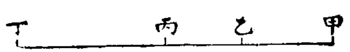
法以勾弦和二十四尺加勾股較三尺。得二十七尺。爲股弦和。用勾弦和、股弦和、求勾股弦之法算之。以勾弦和二十四尺與股弦和二十七尺相乘。得六百四十八尺。倍之得一千二百九十六尺。開方得三十六尺。爲勾股弦總和。內減勾弦和二十四尺。餘十二尺爲股。減勾股較三尺。餘九尺爲勾。於勾弦和二十四尺內減勾九尺。餘十五尺爲弦也。如圖甲丙爲股。乙丙爲勾。丙丁爲弦。乙丁爲勾弦和。甲乙爲勾股較。而甲丁爲股弦和。故甲乙勾股較與乙丁勾弦和相加得甲丁爲股弦和也。若夫股弦和勾股較求勾股弦者。則於股弦和內減勾股較、卽勾弦和。亦用勾弦和、股弦和、求勾股弦之法算之。如甲丙爲股。乙丙爲勾。丙丁爲弦。則甲丁爲股弦和。甲乙爲勾股較。而乙丁爲勾弦和。故於甲丁股弦和內減甲乙勾股較。餘乙丁爲勾弦和也。

設如有勾股和二十三尺。勾弦較九尺。求勾股弦各幾何。第十四

法以勾股和二十三尺加勾弦較九尺。得三十二尺爲股弦和。用勾股和、股弦和、求勾股弦之法算之。以勾股和二十三尺自乘。得五百二十九尺。又以股弦和三十二尺自乘得一千零二十四尺。兩數相減。餘四百九十五尺。乃以勾弦較九尺自乘。得八十一尺。與兩和自乘相減之



餘四百九十五尺相加得五百七十六尺開方得二十四尺為股與勾弦較之和內減勾弦較九尺餘十五尺為股於勾股和二十三尺內減股十五尺餘八尺為勾加勾弦較九尺得十七尺為弦也如圖甲丙為弦乙丙為勾丙丁為股乙丁為勾股和甲乙為勾弦較而甲丁為股弦和故甲乙勾弦較與乙丁勾股和相加得甲丁為股弦和也若夫股弦和勾弦較求勾股弦者則於股弦和內減勾弦較即勾股和亦用勾股和股弦和求勾股弦之法算之如甲丙為弦乙丙為勾丙丁為股則甲丁為股弦和甲乙為勾弦較而乙丁為勾股和故於甲丁股弦和內減甲乙勾弦較餘乙丁為勾股和也



設如有勾股和十七尺股弦較一尺求勾股弦各幾何　第十五

法以勾股和十七尺加股弦較一尺得十八尺為勾弦和用勾股和勾弦和求勾股弦之法算之以勾股和十七尺自乘得二百八十九尺又以勾弦和十八尺自乘得三百二十四尺兩數相減餘三十五尺乃以股弦較一尺自乘仍得一尺與兩和自乘相減之餘三十五尺相加得三十六尺開方得六尺為勾與股弦較之和內減股弦較一尺餘五尺為勾於勾股和十七尺內減勾五尺餘十二尺為股加股弦較一尺得十三尺為弦也如圖甲乙為勾乙丙為股乙丁為弦甲丙為勾股和丙丁為股弦較而甲丁為勾弦和故甲丙勾股和與丙丁股弦較相加得甲丁為勾弦和也若夫勾弦和股弦較求勾股弦者則於勾弦和內減股弦較即勾股和亦用勾股和勾弦和求勾股弦之法算之如甲乙為勾乙丙為股

乙丁爲弦。則甲丁爲勾弦和。丙丁爲股弦較。而甲丙爲勾股和。故於甲丁勾弦和內減丙丁股弦較。餘甲丙爲勾股和也。

設如有勾八尺。弦與勾股和之較六尺。求股弦各幾何。第十六

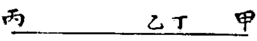
法以勾八尺內減弦與勾股和之較六尺。餘二尺爲股弦較。用有勾有股弦較求股弦法算之。如甲乙爲勾。乙丙爲股。甲丙爲勾股和。丁丙爲弦。甲丁爲弦與勾股和之較。丁乙爲股弦較。故甲乙勾內減甲丁弦與勾股和之較。餘丁乙爲股弦較也。若有股弦較與弦與勾股和之較求勾股弦者。則以股弦較與弦與勾股和之較相加。卽勾。亦用有勾有股弦較求股弦法算之。

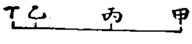
設如有勾八尺。弦與勾股較之較十尺。求股弦各幾何。第十七

法以勾八尺與弦與勾股較之較十尺相減。餘二尺爲股弦較。用有勾有股弦較求股弦法算之。如甲乙爲股。丙乙爲勾。甲乙爲弦。甲丙爲勾股較。乙丁爲股弦較。丙丁爲弦與勾股較之較。故丙丁弦與勾股較之較內減丙乙勾。餘乙丁爲股弦較也。若有股弦較、與弦與勾股較之較、求勾股弦者。則以股弦較與弦與勾股較之較相減。餘卽勾。亦用有勾有股弦較求股弦法算之。

設如有勾八尺。勾股弦總和四十尺。求股弦各幾何。第十八

法以勾八尺與勾股弦總和四十尺相減。餘三十二尺爲股弦和。用有勾有股弦和求股弦法算之。如甲乙爲勾。乙丙爲股。丙丁爲弦。甲丁爲勾股弦總和。故甲丁勾股弦總和內減甲乙勾。

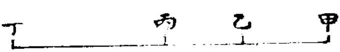




餘乙丁爲股弦和也。若有股弦和、與勾股弦總和、求勾股弦者。則以股弦和與勾股弦總和相減。餘卽勾。亦用有勾有股弦和求股弦法算之。

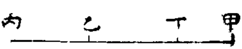
設如有勾八尺。弦與勾股較之和二十四尺。求股弦各幾何。第十九

法以勾八尺與弦與勾股較之和二十四尺相加。得三十二尺爲股弦和。用有勾有股弦和求股弦法算之。如甲乙爲勾。甲丙爲股。乙丙爲勾股較。丙丁爲弦。甲丁爲股弦和。乙丁爲弦與勾股較之和。故以甲乙勾與乙丁弦與勾股較之和相加。得甲丁爲股弦和也。若有股弦和、與弦與勾股較之和、求勾股弦者。則於股弦和內減弦與勾股較之和。餘卽勾。亦用有勾有股弦和求股弦法算之。



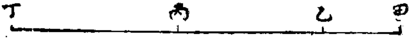
設如有股十五尺。弦與勾股和之較六尺。求勾弦各幾何。第二十

法以股十五尺內減弦與勾股和之較六尺。餘九尺爲勾弦較。用有股有勾弦較求勾弦法算之。如甲乙爲股。乙丙爲勾。甲丙爲勾股和。丁丙爲弦。甲丁爲弦與勾股和之較。丁乙爲勾弦較。故甲乙股內減甲丁弦與勾股和之較。餘丁乙。卽勾弦較也。若有勾弦較、與弦與勾股和之較、求勾股弦者。則以勾弦較與弦與勾股和之較相加。卽股。亦用有股有勾弦較求勾弦法算之。



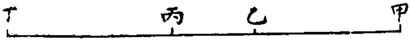
設如有股十五尺。弦與勾股較之較十尺。求勾弦各幾何。第二十一

法以股十五尺與弦與勾股較之較十尺相加。得二十五尺爲勾弦和。用有股有勾弦和求勾



弦法算之。如甲乙爲股。甲丙爲勾。丙丁爲弦。甲丁爲勾弦和。丙乙爲勾股較。乙丁爲弦與勾股較之較。故以甲乙股與乙丁弦與勾股較之較相加。得甲丁爲勾弦和也。若有勾弦和、與弦與勾股較之較、求勾股弦者。則於勾弦和內減弦與勾股較之較。餘卽股。亦用有股有勾弦和求勾弦法算之。

設如有股十五尺。勾股弦總和四十尺。求勾弦各幾何。第二十二

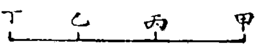


法以股十五尺與勾股弦總和四十尺相減。餘二十五尺爲勾弦和。用有股有勾弦和求勾弦法算之。如甲乙爲股。乙丙爲勾。丙丁爲弦。甲丁爲勾股弦總和。故甲丁勾股弦總和內減甲乙股。餘乙丁爲勾弦和也。若有勾弦和、與勾股弦總和、求勾股弦者。則以勾股和與勾股弦總和相減。餘卽股。亦用有股有勾弦和求勾弦法算之。

設如有股十五尺。弦與勾股較之和二十四尺。求勾弦各幾何。第二十三

法以股十五尺與弦與勾股較之和二十四尺相減。餘九尺爲勾弦較。用有股有勾弦較求勾弦法算之。如甲乙爲股。丙乙爲勾。丙丁爲弦。甲丙爲勾股較。乙丁爲勾弦較。甲丁爲弦與勾股較之和。故甲丁弦與勾股較之和內減甲乙股。餘乙丁爲勾弦較也。若有勾弦較、爲弦與勾股較之和、求勾股弦者。則以勾弦較與弦與勾股較之和相減。餘卽股。亦用有股有勾弦較求勾弦法算之。

設如有弦十七尺。弦與勾股和之較六尺。求勾股各幾何。第二十四



法以弦十七尺與弦與勾股和之較六尺相加。得二十三尺爲勾股和。用有弦有勾股和求勾股法算之。如甲乙爲弦。甲丙爲勾。丙丁爲股。甲丁爲勾股和。乙丁爲弦與勾股和之較。故甲乙弦與乙丁弦與勾股和之較相加。得甲丁爲勾股和也。若有勾股和、與弦與勾股和之較、求勾股弦者。則於勾股和內減弦與勾股和之較。餘卽弦。亦用有弦有勾股和求勾股法算之。

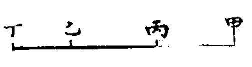
設如有弦十七尺。弦與勾股較之較十尺。求勾股各幾何。第二十五

法以弦十七尺內減弦與勾股較之較十尺。餘七尺爲勾股較。用有弦有勾股較求勾股法算之。如甲乙爲弦。丙丁爲股。乙丁爲勾。丙乙爲勾股較。甲丙爲弦與勾股較之較。故甲乙弦內減甲丙弦與勾股較之較。餘丙乙爲勾股較也。若有勾股較、與弦與勾股較之較、求勾股弦者。則以勾股較與弦與勾股較之較相加卽弦。亦用有弦有勾股較求勾股法算之。

設如有弦十七尺。勾股弦總和四十尺。求勾股各幾何。第二十六

法以弦十七尺與勾股弦總和四十尺相減。餘二十三尺爲勾股和。用有弦有勾股和求勾股法算之。如甲乙爲弦。乙丙爲勾。丙丁爲股。甲丁爲勾股弦總和。故甲丁勾股弦總和內減甲乙弦。餘乙丁爲勾股和也。若有勾股和、爲勾股弦總和、求勾股弦者。則以勾股和與勾股弦總和相減。餘卽弦。亦用有弦有勾股和求勾股法算之。

設如有弦十七尺。弦與勾股較之和二十四尺。求勾股各幾何。第二十七



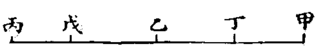
法以弦十七尺與弦與勾股較之和二十四尺相減。餘七尺爲勾股較。用有弦有勾股較求勾股法算之。如甲乙爲弦。乙丙爲股。丁丙爲勾。乙丁爲勾股較。甲丁爲弦與勾股較之和。故甲丁弦與勾股較之和內減甲乙弦。餘乙丁爲勾股較也。若有勾股較、與弦與勾股較之和。求勾股弦者。則於弦與勾股較之和內減勾股較。餘卽弦。亦用有弦有勾股較求勾股法算之。

設如有弦與勾股和之較六尺。弦與勾股較之較十尺。求勾股弦各幾何。第二十八

法以弦與勾股和之較六尺、與弦與勾股較之較十尺相加。得十六尺。折半得八尺爲勾。於勾八尺內減弦與勾股和之較六尺。餘二尺爲股弦較。用有勾有股弦較求股弦法算之。如甲乙爲股。戊乙、乙丙皆爲勾。甲丙爲勾股和。甲戊爲勾股較。甲丁爲弦。丁丙卽弦與勾股和之較。戊丁卽弦與勾股較之較。故丁丙弦與勾股和之較、與戊丁弦與勾股較之較相加。得戊丙爲二勾之共數。是以折半得勾也。既得勾。則於勾內減弦與勾股和之較卽股弦較矣。

設如有弦與勾股和之較六尺。弦與勾股較之和二十四尺。求勾股弦各幾何。第二十九

法以弦與勾股和之較六尺、與弦與勾股較之和二十四尺相加。得三十尺。折半得十五尺爲股。於股十五尺內減弦與勾股和之較六尺。餘九尺爲勾弦較。用有股有勾弦較求勾弦法算之。如甲乙、乙丙皆爲股。丁乙爲勾。丁丙爲勾股和。甲丁爲勾股較。丁戊爲弦。戊丙卽弦與勾股



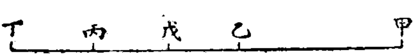
和之較。甲戊即弦與勾股較之和。故戊丙弦與勾股和之較、與甲戊弦與勾股較之和相加。得甲丙爲二股之共數。是以折半得股也。既得股。則於股內減弦與勾股和之較。即勾弦較矣。

設如有勾股弦總和四十尺。弦與勾股較之和二十四尺。求勾股弦各幾何。第三十

法以勾股弦總和四十尺內減弦與勾股較之和二十四尺。餘十六尺。折半得八尺爲勾。於勾股弦總和四十尺內減勾八尺。餘三十二尺爲股弦和。用有勾有股弦和求股弦法算之。如甲乙爲弦。乙丙爲股。丙丁爲勾。乙戊爲勾股較。甲丁爲勾股弦總和。甲戊爲弦與勾股較之和。故甲丁勾股弦總和內減甲戊弦與勾股較之和。餘戊丁即二勾之共數。是以折半得勾也。既得勾。則於勾股弦總和內減勾。即股弦和矣。

設如有勾股弦總和四十尺。弦與勾股較之較十尺。求勾股弦各幾何。第三十一

法以勾股弦總和四十尺內減弦與勾股較之較十尺。餘三十尺。折半得十五尺爲股。於勾股弦總和四十尺內減股十五尺。餘二十五尺爲勾弦和。用有股有勾弦和求勾弦法算之。如甲乙爲弦。乙丙爲勾。丙丁爲股。戊乙爲勾股較。甲丁爲勾股弦總和。甲戊爲弦與勾股較之較。故甲丁勾股弦總和內減甲戊弦與勾股較之較。餘戊丁即二股之共數。是以折半得股也。既得股。則於勾股弦總和內減股。即勾弦和矣。



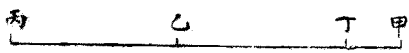
設如有弦與勾股較之和二十四尺。弦與勾股較之較十尺。求勾股弦各幾何。第三十二

法以弦與勾股較之和二十四尺與弦與勾股較之較十尺相加。得三十四尺。折半得十七尺

爲弦。於弦與勾股較之和二十四尺內減弦十七尺、餘七尺爲勾股較、用有弦有勾股較求勾股法算之。如甲乙乙丙皆爲弦。乙丁爲勾股較。甲丁爲弦與勾股較之和、丁丙爲弦與勾股較之較。故甲丁弦與勾股較之和、與丁丙弦與勾股較之較相加。得甲丙爲二弦之共數。是以折半得弦也。既得弦。則於弦與勾股較之和內減弦。卽勾股較矣。

設如有勾股弦總和四十尺。弦與勾股和之較六尺。求勾股弦各幾何。第三十三

法以勾股弦總和四十尺內減弦與勾股和之較六尺。餘三十四尺。折半得十七尺爲弦。於勾股弦總和四十尺內減弦十七尺。餘二十三尺爲勾股和。用有弦有勾股和求勾股法算之。如甲乙爲勾股和。乙丙爲弦。甲丙爲勾股弦總和。甲丁爲弦與勾股和之較。故甲丙勾股弦總和內減甲丁弦與勾股和之較。餘丁丙卽二弦之共數。是以折半得弦也。既得弦。則於勾股弦總和內減弦。卽勾股和矣。



數理精蘊下編卷十三

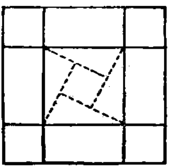
面部三

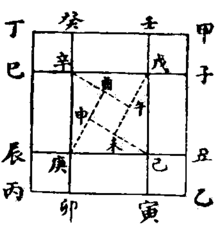
勾股

勾股弦和較相求法下

設如有勾股較七尺。勾股弦總和四十尺。求勾股弦各幾何。第三十四

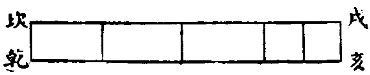
法以勾股弦總和四十尺內減勾股較七尺。餘三十三尺爲兩勾一弦之共數。蓋勾股弦總和。爲一勾一股一弦之共數。內減勾股較。是於股內減勾股較。卽又得一勾矣。故爲兩勾一弦也。自乘得一千零八十九尺。又以勾股較七尺自乘。得四十九尺。兩自乘數相減。餘一千零四十尺。折半得五百二十尺爲長方積。乃以勾股弦總和四十尺與兩勾一弦之共數三十三尺相加。得七十三尺爲長闊和。用帶縱和數開方法算之。得闊八尺爲勾。加勾股較七尺。得十五尺爲股。於勾股弦總和四十尺內減勾八尺。又減股十五尺。餘十七尺爲弦也。如圖甲乙丙丁爲兩勾一弦自乘之一大正方。內戊己庚辛爲弦自乘之一正方。甲子戊壬、丑乙寅己、庚卯丙辰、癸

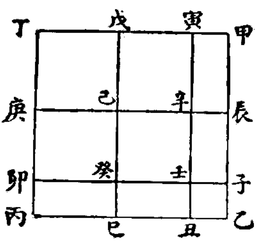




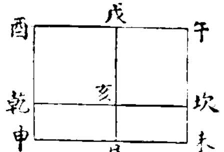
辛巳丁、爲勾自乘之四正方。壬戊辛癸、子丑己戊、己寅卯庚、辛庚辰巳、爲勾弦相乘之四長方。弦自乘之一正方內容四勾股積。爲勾股相乘之二長方又勾股較自乘之一小正方。今於甲乙丙丁兩勾一弦自乘之一大正方內減去午未申酉勾股較自乘之一小正方。尙餘勾股相乘之二長方。勾弦相乘之四長方。勾自乘之四正方。折半得勾股相乘之一長方勾弦相乘之二長方。勾自乘之二正方。與戌亥乾坎長方形等。其闊卽勾。其長爲兩勾兩弦一股。其長闊和爲三勾兩弦一股。故以勾股弦總和與兩勾一弦之共數相併爲長闊和。用帶縱和數開方法算之。得闊爲勾也。

又法以勾股弦總和四十尺自乘。得一千六百尺。折半得八百尺爲長方積。乃以勾股較七尺爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得闊二十五尺爲勾弦和。得長三十二尺爲股弦和。於勾股弦總和四十尺內減勾弦和二十五尺。餘十五尺爲股。減勾股較七尺。餘八尺爲勾。又於勾弦和二十五尺內減勾八尺。餘十七尺爲弦也。如圖甲乙丙丁爲勾股弦總和自乘之一大正方。內戊己庚丁爲弦自乘之一正方。辛壬癸己爲股自乘之一正方。子乙丑壬爲勾自乘之一正方。甲辰辛寅與癸巳丙卯爲勾弦相乘之二長方。寅辛己戊與己癸卯庚爲股弦相乘之二長方。辰子壬辛與壬丑巳癸爲勾股相乘之二長方。如以勾自乘之一正方與股自乘之一正方相併。則又與弦自乘之一正方相等。是爲弦自乘之



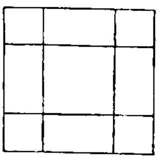


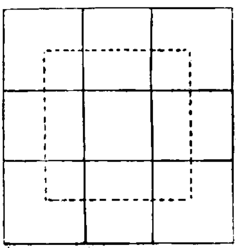
正方二。股弦相乘之長方二。勾弦相乘之長方二。勾股相乘之長方二。折半即得弦自乘之正方一。股弦相乘之長方一。勾弦相乘之長方一。勾股相乘之長方一。而與午未申酉勾弦和與股弦和相乘之長方等。葢午未申酉之長方內。戌亥乾酉爲弦自乘之一正方。午坎亥戌爲股弦相乘之一長方。亥艮申乾爲勾弦相乘之一長方。坎未艮亥爲勾股相乘之一長方。其闊即勾弦和。其長即股弦和。其長闊較即勾股較。故以勾股較爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得闊爲勾弦和也。



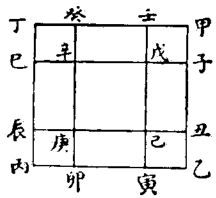
設如有勾弦較九尺。勾股弦總和四十尺。求勾股弦各幾何。第三十五

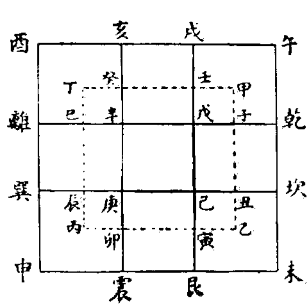
法以勾股弦總和四十尺內減勾弦較九尺。餘三十一尺。爲兩勾一股之共數。葢勾股弦總和。爲一勾一股一弦之共數。內減勾弦較。是於弦內減勾弦較。即又得一勾矣。故爲兩勾一股也。自乘得九百六十一尺。又以勾股弦總和四十尺與勾弦較九尺相加。得四十九尺。爲兩弦一股之共數。葢勾股弦總和。爲一勾一股一弦之共數。今加勾弦較。是於勾數加勾弦較。即又得一弦矣。故爲兩弦一股也。自乘得二千四百零一尺。兩數相減。餘一千四百四十尺。四歸之。得三百六十尺。爲長方積。乃以勾弦較九尺爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得闊十五尺。爲股。於勾股弦總和四十尺內減股十五尺。餘二十五尺。爲勾弦和。減勾弦較

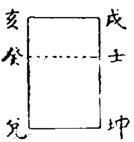




九尺。餘十六尺。折半得八尺爲勾。加勾弦較九尺。得十七尺爲弦也。如圖甲乙丙丁爲兩勾一股自乘之一大正方。內戊己庚辛爲股自乘之一正方。甲子戊壬、丑乙寅己、庚卯丙辰、癸辛巳丁、爲勾自乘之四正方。壬戊辛癸、子丑己戊、己寅卯庚、辛庚辰巳、爲勾股相乘之四長方。又午未申酉爲兩弦一股自乘之一大正方。內戊己庚辛爲股自乘之一正方。午乾戊戊、坎未艮己、庚震申巽、亥辛離酉、爲弦自乘之四正方。戊戊辛亥、乾坎己戊、己艮震庚、辛庚巽離、爲股弦相乘之四長方。今於午未申酉之正方內減去甲乙丙丁之正方。所餘四隅之午乾子甲壬戊等類四磬折形。皆爲弦自乘之方內減去勾自乘之方與股自乘之四正方積相等。四面之戊壬癸亥等類四長方形。乃勾弦較與股相乘之四長方。戊戊爲弦。壬戊爲勾。故戊壬爲勾弦較。以四歸之則餘股自乘之一正方。勾弦較與股相乘之一長方。共爲戊坤兌亥一長方。其闊即股。其長即股與勾弦較之和。故以勾弦較爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得闊爲股也。



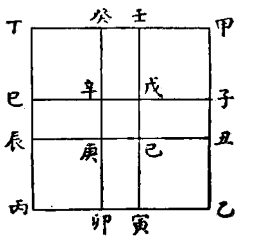


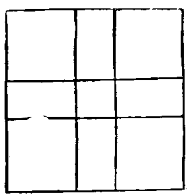


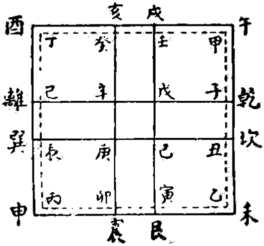
設如有股弦較二尺。勾股弦總和四十尺。求勾股弦各幾何。第三十六

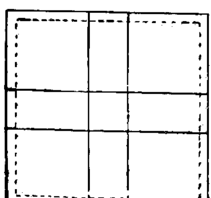
法以勾股弦總和四十尺內減股弦較二尺。餘三十八尺爲兩股一勾之共數。蓋勾股弦總和。爲一勾一股一

弦之共數。內減股弦較。是於弦內減股弦較。卽又得一股矣。故爲兩股一勾也。自乘得一千四百四十四尺。又以勾股弦總和四十尺與股弦較二尺相加得四十二尺。爲兩弦一勾之共數。蓋勾股弦總和。爲一勾一股一弦之共數。今加股弦較。是於股數加股弦較。卽又得一弦矣。故爲兩弦一勾也。自乘得一千七百六十四尺。兩數相減餘三百二十尺。四歸之。得八十尺。爲長方積。乃以股弦較二尺爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得闊八尺爲勾。於勾股弦總和四十尺內減勾八尺。餘三十二尺爲股弦和。減股弦較二尺。餘三十尺。折半得十五尺爲股。加股弦較二尺。得十七尺。爲弦也。如圖甲乙丙丁爲兩股一勾自乘之一大正方。內戊己庚辛爲勾自乘之一正方。甲子戊壬、丑乙寅己、庚卯丙辰、癸辛巳丁、爲股自乘之四正方。壬戊辛癸、子丑己戊、己寅卯庚、辛庚辰巳、爲勾股相乘之四長方。又午未申酉爲兩弦一勾自乘之一大正方。內戊己庚辛爲勾自乘之一正方。午乾戊戌、坎未艮己、庚震申巽、亥辛離酉、爲弦自乘之四正方。戊戌辛亥、乾坎己戊、己艮震庚、辛庚巽離、爲勾弦相乘之四長方。

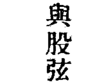






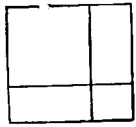


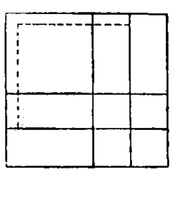
今於午未申酉之正方內減去甲乙丙丁之正方。所餘四隅之午乾子甲壬戌等類四磬折形。皆爲弦自乘之方內減去股自乘之方。與勾自乘之四正方積相等。四面之戊壬癸亥等類四長方形乃股弦較與勾相乘之四長方戊戊爲弦。壬戊爲股。故戊壬爲股弦較。以四歸之。則餘勾自乘之一正方。股弦較與勾相乘之一長方。共爲戊坤兌亥一長方。其闊卽勾。其長卽勾與股弦較之和。故以股弦較爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得闊爲勾也。

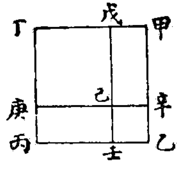


設如有勾股和二十三尺。弦與勾股較之較十尺。求勾股弦各幾何。第三十七

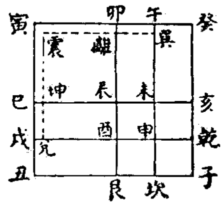
法以勾股和二十三尺自乘得五百二十九尺。又以勾股和二十三尺、與弦與勾股較之較十尺相加。得三十三尺。爲兩勾一弦之共數。蓋弦與勾股較之較。爲一勾一股弦較之共數。與勾股和相加。則得兩勾一股一股弦較。而股加股弦較卽弦。故爲兩勾一弦之共數也。自乘得一千零八十九尺。兩自乘數相減。餘五百六十尺。折半得二百八十尺爲長方積。乃以弦與勾股較之較十尺。與兩勾一弦之共數三十三尺相加。得四十三尺爲長闊和。用帶縱和數開方法算之。得闊八尺爲勾。於勾股和二十三尺內減勾八尺。餘十五尺爲股。又於股十五尺內減勾八尺。餘七尺爲勾股較。與弦與勾股較之較十尺相加。得十七尺爲弦也。如圖甲乙丙丁爲勾股和自乘之一大正方。內戊己庚丁爲股自乘之一正方。辛乙壬己爲勾自乘之一正方。甲辛己戊與己壬丙庚爲勾

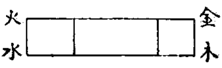






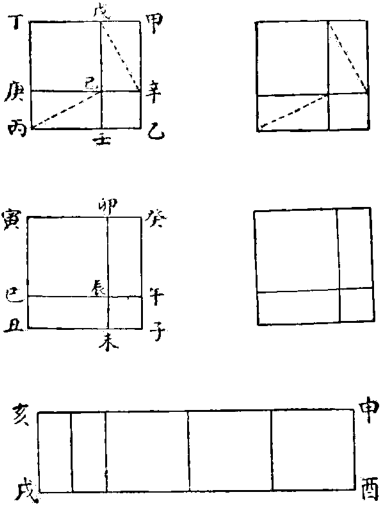
股相乘之二長方又癸子丑寅爲兩勾一弦自乘之一大正方內卯辰巳寅爲弦自乘之一正方未申酉辰、亥乾申未、乾子坎申、申坎艮酉、爲勾自乘之四正方癸亥未午、午未辰卯、辰酉戌巳、酉艮丑戌、爲勾弦相乘之四長方今以兩正方相減則是癸子丑寅方內減去離辰坤震股自乘之一正方即如前圖之戊己庚丁然又未申酉辰勾自乘之一正方即如前圖之辛乙壬己然又巽未辰離、辰酉兌坤、勾股相乘之二長方即如前圖之甲辛己戊、己壬丙庚然所餘之卯離震坤巳寅一磬折形與勾自乘之一正方等弦自乘之正方內減股自乘之方則與勾自乘之方等再午巽離卯與坤兌戌巳二小長方爲股弦較與勾相乘之二長方若各補於勾自乘之二正方內即成勾與弦與勾股較之較相乘二長方葢弦與勾股較之較乃弦內減去勾股較之餘然弦內有一勾一勾股較一股弦較若減去勾股較則所餘爲一勾一股弦較矣今以股弦較與勾相乘之正方補於勾自乘之正方內則其長爲一勾一股弦較即弦與勾股較之較其闊即勾故爲勾與弦與勾股較之較相乘之長方也合計之則爲勾自乘二正方勾弦相乘二長方勾與弦與勾股較之較相乘二長方折半則餘勾自乘一正方勾弦相乘一長方勾與弦與勾股較之較相乘一長方之共積與金木水火長方形等其闊即勾其長爲一勾一弦、一弦與勾股較之較其長闊和爲兩勾一弦、與勾股較之較故以弦與勾股較之較與兩勾一弦之共數相加用帶縱和數開方法算之得闊爲勾也





設如有勾股和二十三尺。弦與勾股較之和二十四尺。求勾股弦各幾何。第三十八

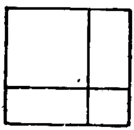
法以勾股和二十三尺自乘。得五百二十九尺。又以弦與勾股較之和二十四尺自乘。得五百七十六尺。兩數相加。得一千一百零五尺爲長方積。乃以弦與勾股較之和二十四尺倍之、得四十八尺爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得十七尺爲弦。於弦與勾股較之和二十四尺內減弦十七尺。餘七尺爲勾股較。於勾股和二十三尺內減勾股較七尺。餘十六尺。折半得八尺爲勾。加勾股較七尺。得十五尺爲股也。如圖甲乙丙丁爲勾股和自乘之一大正方。內戊己庚丁爲股自乘之一正方。辛乙壬己爲勾自乘之一正方。甲辛己戊與己壬丙庚爲勾股相乘之二長方。又癸子丑寅爲弦與勾股較之和自乘之一大正方。內卯辰巳寅爲弦自乘之一正方。午子未辰爲勾股較自乘之一正方。癸午辰卯與辰未丑巳爲勾股較與弦相乘之二長方。兩大正方相併。則得弦自乘三正方。勾股較與弦相乘二長方共爲申酉戌亥一長方形。何也。卯辰巳寅爲一弦方。戊己庚丁一股方與辛乙壬己一勾方相併爲一弦方。甲辛己戊、己壬丙庚勾股相乘之二長方。

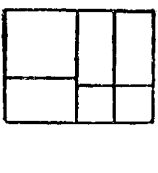


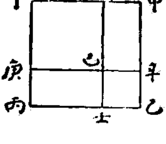
卽四勾股積與午子未辰勾股較自乘之一正方相併又爲一弦方癸午辰卯、辰未丑巳卽勾股較與弦相乘之二長方今二自乘方相加則成申酉戌亥之一大長方其闊卽弦其長爲三弦二勾股較其長闊較爲二弦二勾股較故將弦與勾股較之和倍之爲二弦二勾股較之共數用帶縱較數開方法算之得闊爲弦也

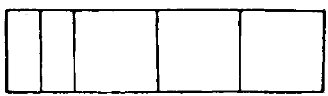
設如有勾弦和二十五尺弦與勾股和之較六尺求勾股弦各幾何 第三十九

法以勾弦和二十五尺自乘得六百二十五尺又以勾弦和二十五尺與弦與勾股和之較六尺相加得三十一尺爲兩勾一股之共數 蓋勾弦和爲一勾一弦之共數今於弦數內加弦與勾股和之較卽爲勾股和是爲兩勾一股之共數矣 與勾弦和二十五尺相乘得七百七十五尺兩數相減餘一百五十尺爲長方積乃以勾弦和二十五尺爲長闊和用帶縱和數開方法算之得長十五尺爲股於股十五尺內減弦與勾股和之較六尺餘九尺爲勾弦較與勾弦和二十五尺相加得三十四尺折半得十七尺爲弦內減勾弦較九尺餘八尺爲勾也如圖甲乙丙丁爲勾弦和自乘之一大正方內戊己庚丁爲弦自乘之一正方辛乙壬己爲勾自乘之一正方甲辛己戊與己壬丙庚爲勾弦相乘之二長方又癸子丑寅爲兩勾一股與勾弦和相乘之一大長方內卯辰巳寅爲股自乘之一正方

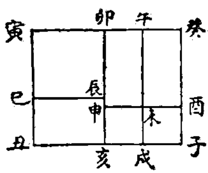






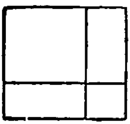


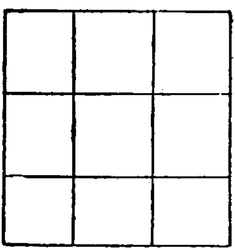
午未申卯與癸酉未午爲勾與弦相乘之二長方．與甲乙丙丁大正方內之甲辛己戊、己壬丙庚二長方等．未戌亥申爲勾自乘之一正方．與甲乙丙丁大正方內之辛乙壬己一正方等．而酉子戌未亦爲勾自乘之一正方．與卯辰巳寅股自乘之一正方相併．乃與甲乙丙丁大正方內之戊己庚丁弦自乘之一正方等．兩數相減．所餘爲辰亥丑巳一長方．其辰巳長卽股．其辰巳巳丑長闊和卽勾弦和．故以帶縱和數開方法算之．得長爲股也．

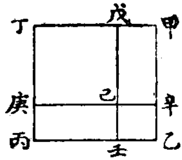


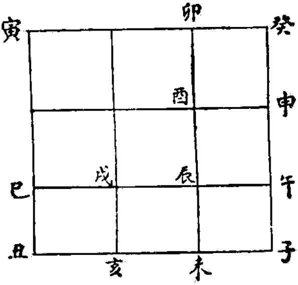
設如有勾弦和二十五尺．弦與勾股較之和二十四尺．求勾股弦各幾何．第四十

法以勾弦和二十五尺自乘．得六百二十五尺．又以勾弦和二十五尺與弦與勾股較之和二十四尺相加．得四十九尺．爲兩弦一股之共數．蓋勾弦和加弦與勾股較之和．則得兩弦一勾一勾股較．而勾加勾股較卽股．故爲兩弦一股也．自乘得二千四百零一尺．兩自乘數相加．得三千零二十六尺．爲長方積．乃以兩弦一股之共數倍之．得九十八尺．爲四弦二股之共數．與勾弦和相加．得一百二十三尺．爲長闊和．用帶縱和數開方法算之．得闊三十四尺．折半得十七尺．爲弦．於勾弦和二十五尺內減弦十七尺．餘八尺爲勾．又於弦與勾股較之和二十

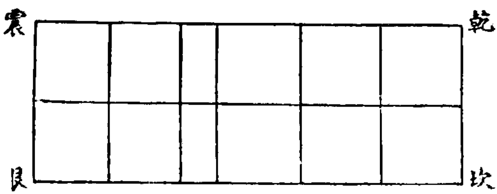






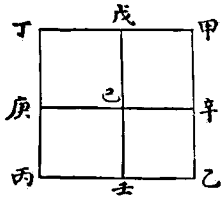


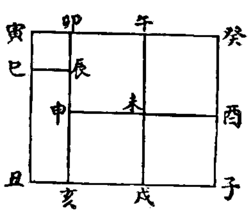
四尺內減弦十七尺。餘七尺為勾股較。與勾八尺相加得十五尺為股也。如圖甲乙丙丁為勾弦和自乘之一大正方。內戊己庚丁為弦自乘之一正方。辛乙壬己為勾自乘之一正方。甲辛己戊與己壬丙庚為勾弦相乘之二長方。又癸子丑寅為兩弦一股自乘之一大正方。內卯辰巳寅為弦自乘之四正方。午子未辰為股自乘之一正方。癸申酉卯、申午辰酉、辰未亥戌、戌亥丑巳、為股弦相乘之四長方。今以兩自乘之方相併。則得弦自乘五正方。又勾自乘之一正方與股自乘之一正方相併。為弦自乘之一正方。共為弦自乘六正方。勾弦相乘二長方。股弦相乘四長方相合。共成乾坎艮震一大長方。其闊即二弦數。其長為三弦一勾二股數。其長闊和為五弦一勾二股數。故將兩弦一股之共數倍之。與勾弦和相加為長闊和。用帶縱和數開方法算之。得闊為二弦。而折半為弦也。

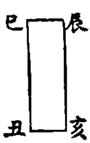


設如有股弦和三十二尺。弦與勾股和之較六尺。求勾股弦各幾何。第四十一

法以股弦和三十二尺自乘。得一千零二十四尺。又以股弦和三十二尺與弦與勾股和之較六尺相加。得三十八尺為兩股一勾之共數。蓋股弦和為一股一弦之共數。今於弦數內加弦與勾股和之較。即為勾股和。是為兩股一勾之共數矣。與股弦和三十二尺相乘。得一千二百一十六尺。兩數相減。餘一百九十二尺為長方積。乃以股弦和三十二尺為長闊和。用帶縱和數開方法算之。得闊八尺為勾。於勾八尺內減弦與勾股和之較六尺。餘二尺為股弦較。與股弦和三十二尺相加。得三十四尺。折半得十七尺為弦。內減股弦較二尺。餘十五尺為股也。如圖甲乙丙丁為股弦和自乘之一大正方。內戊己庚丁為弦自乘之一正方。辛乙壬己為股自乘之一正方。甲辛己戊與己壬丙庚為股弦相乘之二長方。又癸子丑寅為兩股一勾與股弦和相乘之一大長方。內卯辰巳寅為勾自乘之一正方。午未申卯與癸酉未午為股弦相乘之二長方。與甲乙丙丁大正方內之甲辛己戊、己壬丙庚二長方等。未戌亥申為股自乘之一正方。與甲乙丙丁大正方內之辛乙壬己一正方等。而酉子戌未亦為股自乘之一正方。與卯辰巳寅勾自乘之一正方相併。乃與甲乙丙丁大正方內之戊己庚丁



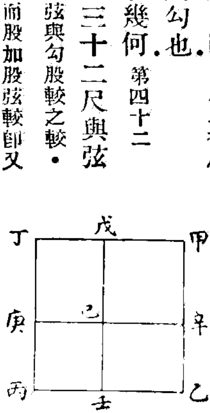


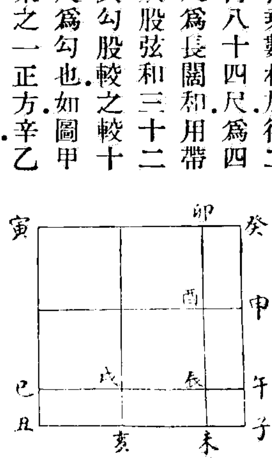


弦自乘之一正方等。兩數相減。所餘爲辰亥丑巳一長方。其辰巳闊卽勾。其辰巳巳丑長闊和卽股弦和。故以帶縱和數開方法算之。得闊爲勾也。

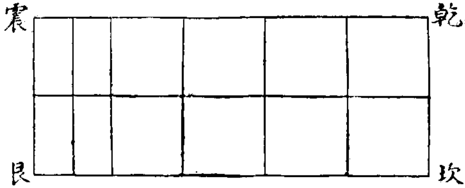
設如有股弦和三十二尺。弦與勾股較之較十尺。求勾股弦各幾何。第四十二

法以股弦和三十二尺自乘。得一千零二十四尺。又以股弦和三十二尺與弦與勾股較之較十尺相加。得四十二尺。爲兩弦一勾之共數。蓋弦與勾股較之較。爲一勾一股弦較之共數。與股弦和相加。則得一勾一股一弦一股弦較。而股加股弦較卽又得一弦。故爲兩弦一勾也。自乘得一千七百六十四尺。兩自乘數相加。得二千七百八十八尺。爲長方積。乃以兩弦一勾之共數倍之。得八十四尺。爲四弦二勾之共數。與股弦和三十二尺相加。得一百一十六尺。爲長闊和。用帶縱和數開方法算之。得闊三十四尺。折半得十七尺。爲弦。於股弦和三十二尺內減弦十七尺。餘十五尺爲股。又於弦十七尺內減弦與勾股較之較十尺。餘七尺爲勾股較。於股十五尺內減勾股較七尺。餘八尺爲勾也。如圖甲乙丙丁爲股弦和自乘之一大正方。內戊己庚丁爲弦自乘之一正方。辛乙壬己爲股自乘之一正方。甲辛己戊與己壬丙庚爲股弦相乘之二長方。又癸子丑寅爲兩弦一勾自乘之一大正方。內卯辰巳寅爲弦自乘之四正方。午子未辰爲勾自乘之一正方。癸申酉卯、申午辰酉、辰未亥戌、戌亥丑巳爲勾弦相乘之四長方。今以兩自乘之方相併。則得弦自乘



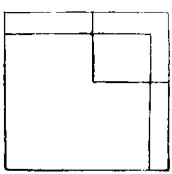


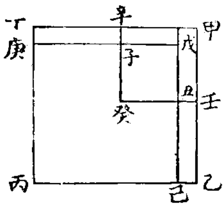
五正方。又勾自乘之一正方與股自乘之一正方相併。爲弦自乘之一正方。共爲弦自乘六正方。股弦相乘二長方。勾弦相乘四長方相合共成乾坎艮震一大長方。其闊卽二弦數。其長爲三弦一股二勾數。其長闊和爲五弦一股二勾數。故將兩弦一勾之共數倍之。與股弦和相加爲長闊和。用帶縱和數開方法算之。得闊爲二弦。而折半爲弦也。



設如有勾股較七尺。弦與勾股和之較六尺。求勾股弦各幾何。第四十三

法以弦與勾股和之較六尺自乘。得三十六尺。折半得十八尺爲長方積。以勾股較七尺爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得二尺爲股弦較。與弦與勾股和之較六尺相加。得八尺爲勾。加勾股較七尺。得十五尺爲股。再加股弦較二尺。得十七尺爲弦也。如圖甲乙丙丁爲弦自乘之一正方。戊己丙庚爲股自乘之一正方。甲壬癸辛爲勾自乘之一正方。戊丑癸子爲弦與勾股和之較自乘之一正方。其積與壬乙己丑、辛子庚丁之勾弦較與股弦較相乘之二長方等。見前有勾弦較股弦較求勾股弦法。今以弦與勾股和之較自乘折半。必與壬乙己丑一長方積相等。其

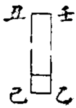


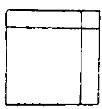


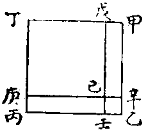
乙己闊卽股弦較。其壬乙長卽勾弦較。而勾弦較之中有一股弦較一勾股較。故以勾股較爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得闊爲股弦較也。

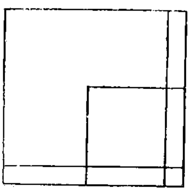
設如有勾弦較九尺。弦與勾股較之較十尺。求勾股弦各幾何。第四十四

法以弦與勾股較之較十尺爲勾與股弦較之共數。蓋弦與勾股較之較。乃弦內減去勾股較之餘。然弦內有一勾一勾股較一股弦較。今減去勾股較。故餘爲勾與股弦較之共數也。自乘得一百尺。又以勾弦較九尺、與弦與勾股較之較十尺相加。得十九尺爲弦與股弦較之共數。蓋勾加勾弦較卽弦。今弦與勾股較之較。既爲勾與股弦較之共數。若加勾弦較則爲弦與股弦較之共數矣。自乘得三百六十一尺。兩自乘數相減。餘二百六十一尺。又以勾弦較九尺自乘得八十一尺。於兩自乘數相減之餘二百六十一尺內減之。餘一百八十尺。折半得九十尺爲長方積。以勾弦較九尺爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得長十五尺爲股。以股十五尺、與弦與股弦較之共數十九尺相加。得三十四尺。折半得十七尺爲弦。內減勾弦較九尺。餘八尺爲勾也。如圖甲乙丙丁爲勾與股弦較相和自乘之一大正方。內戊己庚丁爲勾自乘之一正方。辛乙壬己爲股弦較自乘之一正方。甲辛己戊與己壬丙庚爲股弦較與勾相乘之二長方。又癸子丑寅爲弦與股弦較相和自乘之一大正方。內卯辰巳寅爲弦自乘之一正方。午子未辰爲股弦較



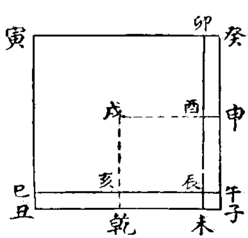


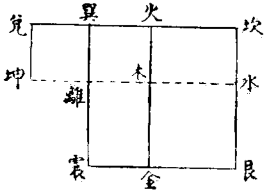




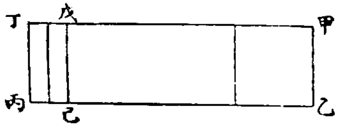
自乘之一正方。卽如前圖之辛乙壬巳然。癸午辰卯與辰未丑巳爲股弦較與弦相乘之二長方。兩自乘方相減。則於癸子丑寅正方形內。減去與甲乙丙丁正方形相等之申子乾戌正方形。餘卯酉戌亥巳寅磬折形。爲弦自乘方內減去勾自乘方所餘之股自乘之方積。其癸申酉卯與亥乾丑巳爲勾弦較與股弦較相乘之二長方共積。與弦與勾股和之較自乘之正方等。今以卯酉戌亥巳寅磬折形變爲股自乘之方。作一坎艮震巽正方形。又以癸申酉卯、亥乾丑巳二長方共積。變爲弦與勾股和之較自乘之方。作一巽離坤兌正方形。則此二正方邊之較卽勾弦較。並見勾弦較股弦較求勾股弦法中。是以坎艮震巽股自乘之正方形內減去水艮金木勾弦較自乘之正方。則餘坎水木金震巽一磬折形。而此磬折形內火木離巽之一正方形與巽離坤兌之正方形等。是則坎水木金震巽磬折形與巽離坤兌正方形相合。共爲坎水離巽類之二長方矣。折半則爲一長方。其闊卽弦與勾股和之較。其長卽股。其長闊較卽勾弦較。故以勾弦較爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得長爲股也。

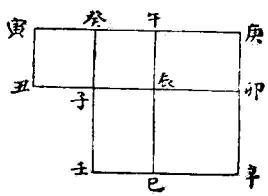
又法以弦與勾股較之較十尺爲勾與股弦較之共數。與勾弦較九尺相加。得十九尺爲弦與股弦較之共數。兩數相併。得二十九尺。爲一勾一弦





二股弦較之共數。與勾弦較九尺相乘。得二百六十一尺。又以勾弦較九尺自乘得八十一尺。兩積相減餘一百八十尺。折半得九十尺爲長方積。以勾弦較九尺爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得長十五尺爲股與弦與股弦較之共數十九尺相加。得三十四尺。折半得十七尺爲弦。內減勾弦較九尺餘八尺爲勾也。如圖甲乙丙丁爲勾弦較與一勾一弦二股弦較相乘之長方。內甲乙己戊爲勾弦較與勾弦和相乘之一長方。與庚辛壬癸股自乘之一正方積等。見股與勾弦較求勾弦法中。戊己丙丁爲勾弦較與股弦較相乘之二長方。與癸子丑寅弦與勾股和之較自乘之一正方積等。此二正方邊之較即勾弦較。並見勾弦較股弦較求勾股弦法中。是以庚辛壬癸股自乘之正方形內減去卯辛巳辰勾弦較自乘之正方。則餘庚卯辰巳壬癸一磬折形。而此磬折形內午辰子癸之一正方與癸子丑寅之正方形等。庚卯辰午之一長方與辰巳壬子之長方形等。折半即餘庚卯子癸一長方形。其闊即弦與勾股和之較。其長即股。其長闊較即勾弦較。故以勾弦較爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得長爲股也。

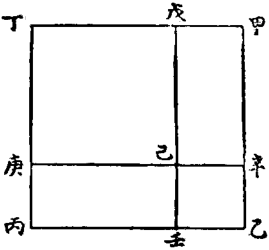


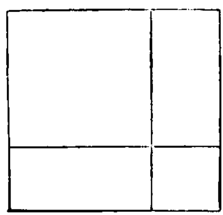


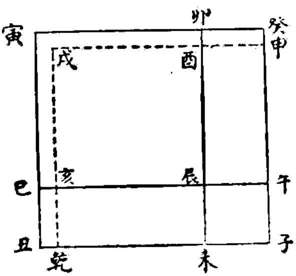
設如有股弦較二尺。弦與勾股較之和二十四尺。求勾股弦各幾何。第四十五

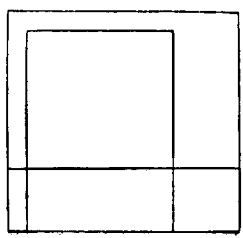
法以弦與勾股較之和二十四尺減股弦較二尺。餘二十二尺爲股與勾股較之共數。蓋弦內減股弦較餘即

股．故於弦與勾股較之和內減股弦較．餘即爲股與勾股較之共數也．自乘得四百八十四尺．又以弦與勾股較之和二十四尺自乘．得五百七十六尺．兩自乘數相減．餘九十二尺．又於股與勾股較之共數自乘之四百八十四尺．內減兩自乘數相減所餘之九十二尺．餘三百九十二尺爲長方積．乃以股與勾股較之共數二十二尺倍之．得四十四尺．內減股弦較二尺．餘四十二尺爲長闊和．用帶縱和數開方法算之．得闊十四尺．折半得七尺爲勾股較．於弦與勾股較之和二十四尺內減勾股較七尺．餘十七尺爲弦．於弦內減股弦較二尺．餘十五尺爲股．於股內減勾股較七尺．餘八尺爲勾也．如圖甲乙丙丁爲股與勾股較相和自乘之一大正方．內戊己庚丁爲股自乘之一正方．辛乙壬己爲勾股較自乘之一正方．甲辛己戊與己壬丙庚爲勾股較與股相乘之二

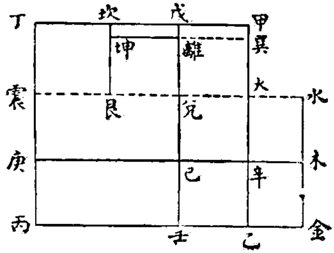






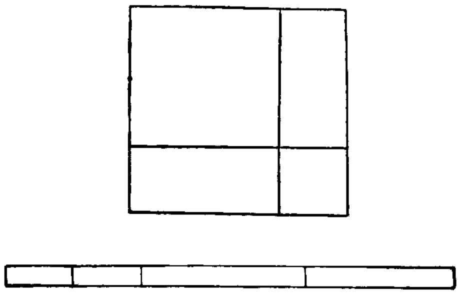


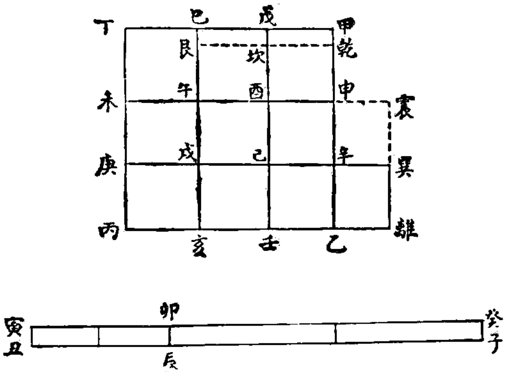
長方。又癸子丑寅爲弦與勾股較相和自乘之一大正方。內卯辰巳寅爲弦自乘之一正方。午子未辰爲勾股較自乘之一正方。卽如前圖之辛乙壬己然。癸午辰卯與辰未丑巳爲勾股較與弦相乘之二長方。兩自乘方相減。則於癸子丑寅正方形內、減去與甲乙丙丁正方形相等之申子乾戌正方形。所餘卯酉戌亥巳寅磬折形。爲弦自乘方內減去股自乘方所餘之勾自乘之方積。其癸申酉卯與亥乾丑巳爲勾股較與股弦較相乘之二長方。今以此餘積再於甲乙丙丁正方形內減之。則減去坎艮震丁勾自乘之一正方。其積與卯酉戌亥巳寅磬折形等。又甲巽離戊與戊離坤坎二長方。卽如癸申酉卯、亥乾丑巳二長方然。所餘兌己庚震與己壬丙庚爲股與勾股較相乘之二長方。火辛己兌與辛乙壬己爲勾股較自乘之二正方。巽火兌離與離兌艮坤、爲勾與股弦較之較與勾股較相乘之二長方。試將巽火兌離、離兌艮坤二長方、移爲水木辛火、木金乙辛、則成水金丙震一大長方形。其闊卽二勾股較。其長卽二股內少一股弦較。其長闊和爲二勾股較二股少一股弦較。故以股與勾股較之共數倍之。得二股二勾股較。內減去一股弦較爲長闊和。用帶縱和數開方法算之。得闊爲二勾股較。折半得勾股較也。



又法以弦與勾股較之和二十四尺減股弦較二尺。餘二十二尺爲股與勾股較之共數。自乘得四百八

十四尺。又以弦與勾股較之和二十四尺、與股與勾股較之共數二十二尺相加得四十六尺。爲一股一弦二勾股較之共數。以股弦較二尺乘之得九十二尺。兩數相減。餘三百九十二尺爲長方積。乃以股與勾股較之共數二十二尺倍之得四十四尺。內減股弦較二尺。餘四十二尺爲長闊和。用帶縱和數開方法算之。得闊十四尺。折半得七尺爲勾股較。於弦與勾股較之和二十四尺內減勾股較七尺。餘十七尺爲弦。於弦內減股弦較二尺。餘十五尺爲股。於股內減勾股較七尺。餘八尺爲勾也。如圖甲乙丙丁爲股與勾股較相和自乘之一大正方。亦卽一勾二勾股



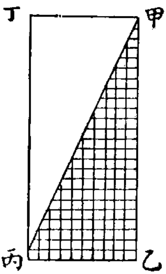


較之共數自乘之正方也。蓋圖以甲辛爲股。辛乙爲勾股較。若以甲申爲勾。則申辛亦勾股較。故爲一勾兩勾股較也。丙巳午未丁爲勾自乘之一正方。申辛己酉、酉己戌午、辛乙壬己、己壬亥戌、爲勾股較自乘之四正方。甲申酉戌、戌酉午巳、巳午戌庚未、戌亥丙庚、爲勾股較與勾相乘之四長方。又癸子丑寅爲股弦較與一股一弦二勾股較相乘之一長方。內癸子辰卯、爲股弦較與股弦和相乘之一長方。與勾自乘之一正方等。見勾與股弦較求股弦法中。卯辰丑寅爲股弦較與二勾股較相乘之二長方。今以兩積相減。則於甲乙丙丁正方形內減去與癸子辰卯相等之巳午未丁之勾自乘之一正方。又減去與卯辰丑寅相等之甲乾坎戌、戌坎艮巳之股弦較與二勾股較相乘之二長方。所餘酉己庚未與己壬丙庚、爲股與勾股較相乘之二長方。申辛己酉與辛乙壬己、爲勾股較自乘之二正方。乾申酉坎、坎酉午艮爲勾與股弦較之較與勾股較相乘之二長方。試將乾申酉坎、坎酉午艮二長方移爲震巽辛申、巽離乙辛。則成震離丙未一大長方形。其闊卽二勾股較。其長卽二股內少一股弦較。其長闊和爲二勾股較二股內少一股弦較。故以股與勾股較之共數倍之。得二股二勾股較。內減去一股弦較爲長闊和。用帶縱和數開方法算之。得闊爲二勾股較。折半得勾股較也。

勾股積與勾股弦和較相求法

設如有勾股積一百二十尺。勾十尺。求股弦各幾何。

法以勾股積一百二十尺倍之。得二百四十尺。以勾十尺除之。得二十四尺爲股。勾股求弦。得弦二十六尺。如圖甲乙丙勾股形積倍之



成甲乙丙丁長方形積。其闊卽勾。其長卽股。故以勾除倍積而得股也。

設如有勾股積六十尺。股十五尺。求勾弦各幾何。

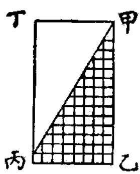
法以勾股積六十尺倍之。得一百二十尺。以股十五尺除之。得八尺爲勾。勾股求弦。得弦十七尺。如圖甲乙丙勾股形積。倍之成甲乙丙丁長方形積。其長卽股。其闊卽勾。故以股除倍積而得勾也。

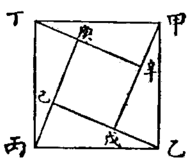
設如有勾股積三十尺。弦十三尺。求勾股各幾何。

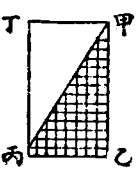
法以勾股積三十尺。四因之。得一百二十尺。又以弦十三尺自乘。得一百六十九尺。相減餘四十九尺。開方得七尺。爲勾股較。乃以勾股積倍之。爲長方積。以勾股較爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得闊五尺爲勾。得長十二尺爲股。如圖甲乙丙丁爲弦自乘之方。內容甲戊乙、乙己丙、丙庚丁、丁辛甲、四勾股積。戊己庚辛一勾股較自乘方積。故於弦自乘方內減四勾股積。卽餘勾股較自乘之方。而開方得勾股較也。

設如有勾股積六十尺。勾股較七尺。求勾股弦各幾何。

法以勾股積六十尺倍之。得一百二十尺。以勾股較七尺爲長闊較。用帶縱較數開方法算之。得闊八尺爲勾。加勾股較七尺。得十五尺爲股。勾股求弦。得弦十七尺。如圖甲乙丙勾股形積。倍之成甲乙丙丁長方形積。其闊卽勾。其長卽股。其長







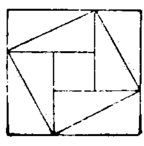
闊較卽勾股較。故用帶縱較數開方法算之。得闊爲勾也。又如有勾股積幾何。知勾弦較。或股弦較。求勾股弦。法中用帶縱立方算之始得。玆故不設。設在帶縱立方之後。

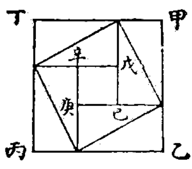
設如有勾股積六十尺。勾股和二十三尺。求勾股弦各幾何。

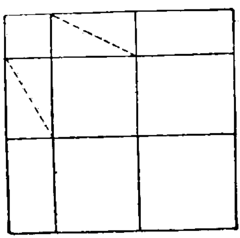
法以勾股積六十尺。八因之。得四百八十尺。又以勾股和二十三尺自乘。得五百二十九尺。兩數相減。餘四十九尺。開方得七尺爲勾股較。於勾股和二十三尺內減勾股較七尺。餘十六尺。折半得八尺爲勾。加勾股較七尺得十五尺爲股。勾股求弦。得弦十七尺。如圖甲乙丙丁爲勾股和自乘之方。內容八勾股積。一勾股較自乘方積。今於勾股和自乘之方內減八勾股積。所餘戊己庚辛正方、卽勾股較自乘之方。故開方而得勾股較也。又如有勾股積幾何。知勾弦和或股弦和、求勾股弦。法中用帶縱立方算之始得。玆故不設。設在帶縱立方之後。

設如有勾股積六十尺。勾股弦總和四十尺。求勾股弦各幾何。

法以勾股積六十尺。四因之。得二百四十尺。又以勾股弦總和四十尺自乘。得一千六百尺。兩數相減。餘一千三百六十尺。折半得六百八十尺。以勾股弦總和四十尺除之。得十七尺爲弦。於勾股弦總和四十尺內減弦十七尺。餘二十





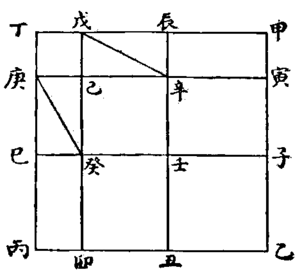


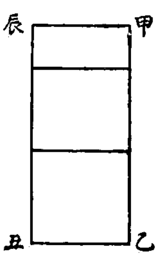
三尺爲勾股和。用有弦有勾股和求勾股法算之。得勾八尺。股十五尺。

如圖甲乙丙丁爲勾股弦總和自乘之一大正方。內戊己庚丁爲勾自乘之一正方。辛壬癸己爲股自乘之一正方。子乙丑壬爲弦自乘之一正方。寅子壬辛與壬丑卯癸爲股弦相乘之二長方。甲寅辛辰與癸卯丙巳爲勾弦相乘之二長方。辰辛己戊與己癸巳庚爲勾股相乘之二長方。夫勾股相乘之二長方與四勾股積等。今於勾股弦總和自乘之一大正方內減去四勾股積。卽減去勾股相乘之二長方。而勾自乘之一正方與股自乘之一正方相併。又與弦自乘之一正方等。故所餘者爲弦自乘之二正方。股弦相乘之二長方。勾弦相乘之二長方。折半卽得弦自乘之一正方。股弦相乘之一長方。勾弦相乘之一長方。與甲乙丑辰長方形等。其闊卽弦。其長卽勾股弦總和。故以勾股弦總和除之而得弦也。

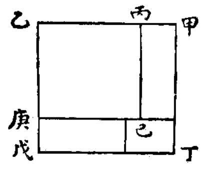
設如有勾股積六十尺。弦與勾股和之較六尺。求勾股弦各幾何。

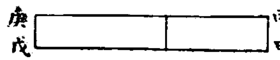
法以勾股積六十尺。四因之。得二百四十尺。以弦與勾股和之較六尺除之。得四十尺。爲勾股弦總數。內減弦與勾股和之較六尺。餘三十四尺。折半得十七尺爲弦。加弦與勾股和之較六尺。得二十三尺爲勾股





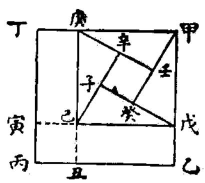
和。用有弦有勾股和求勾股法算之。得股十五尺。勾八尺。如圖甲乙爲勾股和。丙乙爲弦。甲丙爲弦與勾股和之較。試依甲乙線作甲丁戊乙勾股和自乘之一正方。又以丙乙線作丙己庚乙弦自乘之一正方。二方相較。其甲丁戊庚己丙磬折形乃與四勾股積相等。蓋勾股和自乘方內容八勾股積。一勾股較自乘方積。弦自乘方內容四勾股積。一勾股較自乘方積。二方相減。所餘磬折形積與四勾股積相等。引而長之。即如丙甲戊庚一長方形。其闊即弦與勾股和之較。其長即弦與勾股和之和。故以弦與勾股和之較除之。得勾股弦總數也。





設如有勾股積六十尺。弦與勾股較之和二十四尺。求勾股弦各幾何。

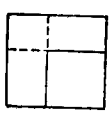
法以勾股積六十尺。四因之。得二百四十尺。又以弦與勾股較之和二十四尺自乘。得五百七十六尺。兩數相減。餘三百三十六尺。折半得一百六十八尺。用弦與勾股較之和二十四尺除之。得七尺爲勾股較。於弦與勾股較之和二十四尺內減勾股較七尺。餘十七尺爲弦。用有弦有勾股較求勾股法算之。得勾八尺。股十五尺。如圖甲乙丙丁爲弦與勾股較之和自乘之一正方。甲戊己庚爲弦自乘之一正方。而弦自乘之方內容四勾股積。一勾股較自乘方積。今減去四勾股積。餘辛壬癸子爲勾股較自乘之一正方。而己丑丙寅亦爲勾股較自乘之一正方。再戊乙丑己與庚己寅丁又爲勾股較與

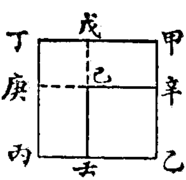


弦相乘之二長方。折半則餘戊乙丑己一長方。己丑丙寅一正方。其戊寅長卽弦與勾股較之和。其戊乙闊卽勾股較。故以弦與勾股較之和除之。而得勾股較也。

設如有勾股積六十尺。弦與勾股較之較十尺。求勾股弦各幾何。

法以勾股積六十尺四因之。得二百四十尺。又以弦與勾股較之較十尺自乘。得一百尺。兩數相減。餘一百四十尺。折半得七十尺。以弦與勾股較之較十尺除之。得七尺爲勾股較。與弦與勾股較之較十尺相加。得十七尺爲弦。用有弦有勾股較求勾股法算之。得勾八尺。股十五尺。如圖甲乙丙丁爲弦自乘之一大正方。內丁戊己庚爲勾股較自乘之一正方。辛乙壬己爲弦與勾股較之較自乘之一正方。甲辛己戊與己壬丙庚爲勾股較與弦與勾股較之較相乘之二長方。盍弦自乘方內容四勾股積一勾股較自乘方積。今丁戊己庚既爲勾股較自乘之方。若於甲乙丙丁弦自乘方內減之。則所餘甲乙丙庚己戊磬折形。卽與四勾股積相等。又於四勾股積相等之甲乙丙庚己戊磬折形內、減辛乙壬己弦與勾股較之較自乘之方。則尚餘甲辛己戊、己壬丙庚二長方。折半則得己壬丙庚一長方。其己壬長卽弦與勾股較之較。其己庚闊卽勾股較。故以弦與勾股較之較除之。而得勾股較也。



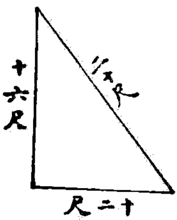


正勾股比例

設如有正勾股。知勾十二尺。求股與弦各幾何。

法以正勾股定分之勾三分爲一率。股四分爲二率。今所設之勾一十二尺爲三率。推得四率十六尺爲股。仍以勾三分爲一率。弦五分爲二率。今所設之勾十二尺爲三率。推得四率二十尺爲弦也。蓋大小兩同式形。其相當各界互相比之比例。俱爲相當比例四率。見幾何原本八卷第三節。故正勾股定分之勾三與股四之比。卽同於今所設之勾十二與股十六之比。又正勾股定分之勾三與弦五之比。亦同於今所設之勾十二與弦二十之比也。

又捷法以勾十二尺用正勾股定分之勾三分除之。得四尺。卽知今所設之勾股形爲加四倍之比例。乃以正勾股定分之股四分弦五分各加四倍。卽得所求之股弦之各數矣。

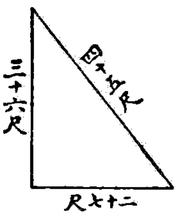


一率	三分
二率	四分
三率	十二尺
四率	十六尺

一率	三分
二率	五分
三率	十二尺
四率	二十尺

設如有正勾股。知勾股和六十三尺。求勾股弦各幾何。

法以正勾股定分之勾三分股四分相併。得七分爲一率。勾三分爲二率。今所設之勾股和六十三尺爲三率。推得四率二十七尺爲勾。若以股四分爲二率。卽得四



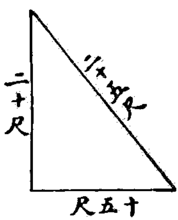
一率	七分
二率	三分
三率	六十三尺
四率	二十七尺

率三十六尺爲股。若以弦五分爲二率。即得四率四十五尺爲弦也。蓋正勾股定分之勾股和七尺、與勾三股四弦五各相爲比。即同於今所設之勾股和六十三尺、與勾二十七尺股三十六尺弦四十五尺各相比之比例也。

又捷法以勾股和六十三尺、用正勾股定分之勾三股四相和之七分除之。得九尺。即知今所設之勾股形爲加九倍之比例。乃以正勾股定分之勾三股四弦五各加九倍。即得所求之各數也。

設如有正勾股。知勾股弦總和六十尺。求勾股弦各幾何。

法以正勾股定分之勾三分股四分弦五分相併。共得十二分爲一率。勾三分爲二率。今所設之勾股弦總和六十尺爲三率。推得四率十五尺爲勾。若以股四分爲二率。即得四率二十尺爲股。若以弦五分爲二率。即得四率二十五尺爲弦也。



一率	十二分
二率	三分
三率	六十尺
四率	十五尺

又捷法以勾股弦總和六十尺、用正勾股定分之勾三股四弦五相併之十二分除之。得五尺。即知今所設之勾股形爲加五倍之比例。乃以正勾股定分之勾三股四弦五各加五倍。即得所求之各數也。

設如有正勾股。勾九尺。股十二尺。求內容方邊幾何。

法以股十二尺七歸三因。得五尺一寸四分二釐八毫有餘。或以勾九尺七歸四因。亦得五尺一寸四分

二釐八毫有餘。爲內容方邊也。蓋勾三分股四分者。則以勾股和七分爲一率。勾三分爲二率。股四分爲三率。推得四率爲內容方邊。是內容方邊得股七分之三。得勾七分之四也。今九尺與十二尺之比。仍同於三分與四分之比。故以其分數相求得內容方邊。仍爲比例四率也。

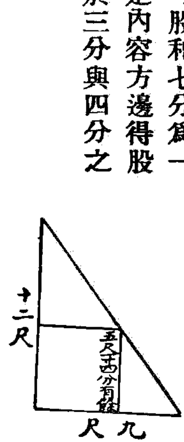
設如有正勾股。勾九尺。股十二尺。求內容圜徑幾何。

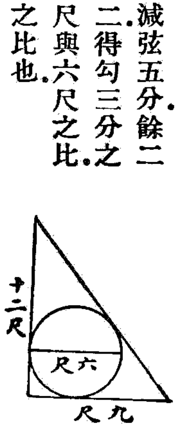
法以股十二尺折半得六尺。或以勾九尺取其三分之二。亦得六尺。即爲內容圜徑也。蓋勾三分股四分弦五分者。則於勾股和七分內減弦五分。餘二分爲內容圜徑。見勾股容圜第二法。是內容圜徑得股四分之二。得勾三分之二也。今九尺與十二尺之比。同於三分與四分之比。故十二尺與六尺之比。仍同於四與二之比。而九尺與六尺之比。亦仍同於三與二之比也。

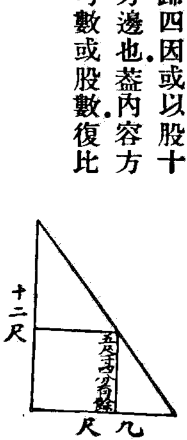
設如有正勾股。知勾股和二十一尺。求內容方邊幾何。

法以正勾股定分比例得勾九尺。股十二尺。以勾九尺七歸四因。或以股十二尺七歸三因。得五尺一寸四分二釐八毫有餘。即內容方邊也。蓋內容方邊得勾七分之四。得股七分之三。見前法。故必先比例得勾數或股數。復比例得內容方邊也。

設如有正勾股。知勾股和二十一尺。求內容圜徑幾何。





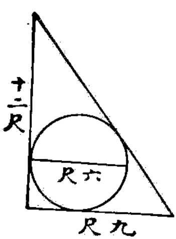


法以正勾股定分之勾三分股四分相加之七分爲一率。內容圓徑二分爲二率。今所設之勾股和二十一尺爲三率、推得四率六尺。即內容圓徑也。蓋勾三分股四分弦五分者其內容圓徑爲二分。見前法。故勾股和之七分、與內容圓徑二分之比。即同於今所設之勾股和之二十一尺、與內容圓徑六尺之比也。總之正勾股形知一數即得所求之各數。要先以勾三股四弦五求得所知之定分及所求之定分。如勾股較。則以勾三分與股四分相減餘一分。又如弦與勾股較之和。則以勾股較一分與弦五分相加得六分之類。乃以所知之定分、與所求之定分之比。即同於今所知之數、與今所求之數之比也。

一率	七分
二率	二分
三率	二十一尺
四率	六尺

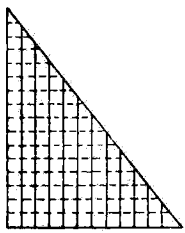
設如有正勾股面積九十六尺。求勾股弦各幾何。

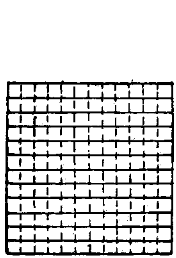
法以正勾股定分之面積六分爲一率。勾三分自乘得九分爲二率。今所設之勾股積九十六尺爲三率。推得四率一百四十四尺爲勾自乘之方。開方得十二尺爲勾。如以正勾股定分之股四分自乘爲二率。則得今所設之股自乘之方。如以正勾股定分之弦五分自乘爲二率。則得今所設之弦自乘之方。各開方而即得各數矣。或得勾而以正勾股定分之勾股弦各比例之亦可。蓋同式兩勾股形其面積互相爲比。即同於勾股形各相當界所作正



一率	六分
二率	九分
三率	九十六尺
四率	一百四十四尺

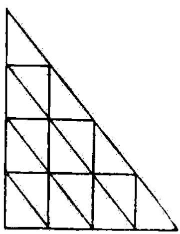
方形互相爲比。見幾何原本八卷第四節。故以正勾股定分之面積六尺、與勾股弦各方之比。卽同於今所設之面積九十六尺、與勾股弦各方之比也。





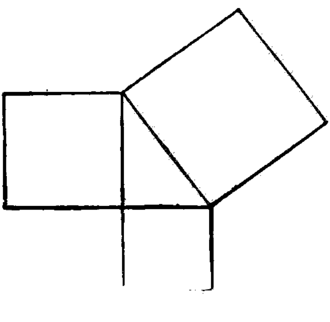
又捷法以面積九十六尺用正勾股定分之面積六尺除之。得十六尺。開方得四尺。卽知今所設之勾股弦爲各加四倍之比例。乃以正勾股定分之各數各加四倍。卽得各數。蓋兩直角方面形。其兩方面之比例比之兩界之比例。爲連比例隔一位相加之比例。見幾何原本七卷第五節。今勾股爲長方之半。正方與正方爲比。長方與長方爲比。其比例相同。並見第六節。故積大十六倍者。界必大四倍。旣知其大四倍。則以正勾股之定分各加四倍。卽得矣。

設如有正勾股。知勾自乘股自乘弦自乘共積四百五十尺。求



勾股弦各幾何。

法以共積四百五十尺折半。得二百二十五尺。爲弦自乘方積。開方得一十五尺爲弦。既得弦則以勾股弦之定分比例之。得九尺爲勾。得十二尺爲股也。如用面積爲比例。則以弦五分自乘之二十五分爲一率。勾三分自乘之九分爲二率。今所得之弦自乘方二百二十五尺爲三率。求得四率八十一尺爲勾自乘方積。開方得九尺爲勾。若以股四分自乘之十六分爲二率。則得四率一百四十四尺爲股自乘方積。開方得十二尺爲股也。蓋弦自乘之一方。既與勾自乘股自乘之二方等。則勾自乘股自乘弦自乘之三方。必與弦自乘之二方等。故折半卽得弦自乘之一方。而開方得弦也。



數理精蘊下編卷十四

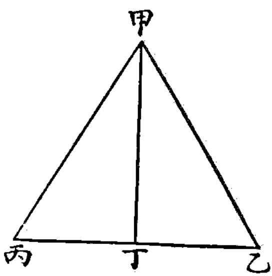
面部四

三角形

凡三角形立於圓界之一半者爲直角。卽勾股。過圓界之一半者爲銳角。不及圓界之一半者爲鈍角。然不拘銳角鈍角。自一角至底邊作垂線。卽分爲兩直角。是仍不離乎勾股也。兩腰等者。垂線卽當底之一半而兩腰不等者。所分底界。則有大小不同。故和較相比之法。因之而生。蓋和求較。較求和。要必歸於勾股相求之理。由勾股而得垂線。則凡面積及內容方圓等形。皆無不可得。至於三角形角度相求之法。乃割圓八線。實所以極三角之用。卽如周髀所謂仰矩知高、俯矩知深是也。故另爲一卷。茲但取三角形之面線相求諸法。悉具圖解。以次勾股。使與勾股相表裏焉。

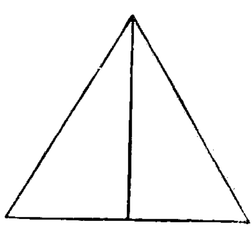
設如有等邊三角形。每邊十尺。求中垂線幾何。

法以底邊十尺折半得五尺爲勾。任以兩腰之一邊十尺爲弦。勾弦求股。得八尺六寸六分零二豪有餘。卽爲中垂線也。如圖甲乙丙三角形。其甲乙、甲丙兩腰相等。則其底邊之乙丙兩角度亦必相等。見幾何原本二卷第九節。今所求之垂線爲甲丁。卽將甲乙丙三角形平分爲兩直角三角形。而甲丁乙、甲丁丙皆爲直角。其



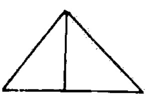
度又等.故所分之兩直角三角形.爲同式形.而甲丁垂線.又爲兩三角形所共用之邊線.則所分之底邊之乙丁、丁丙.焉得不等.故將乙丙底邊折半爲勾.任以甲乙、甲丙兩邊之一邊爲弦.求得股.爲中垂線也.

又法以底邊十尺.折半得五尺.自乘得二十五尺.三因之得七十五尺.開方得八尺六寸六分零二豪有餘.即爲中垂線也.蓋弦比勾大一倍.則弦之自乘之方必比勾之自乘之方大四倍.爲連比例隔一位相加之比例.幾何原本七卷第見五節.依勾弦求股之法.於弦自乘方積之四倍內.減勾自乘方積之一倍.餘三倍.即爲股自乘之方積.是中垂線之自乘方積.爲勾自乘方積之三倍.故將底邊折半自乘.三因之.即與中垂線自乘之方積等.而開方得中垂線也.

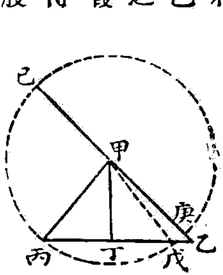


設如有銳角三角形.大腰一百二十二尺.小腰一百一十二尺.底一百五十尺.求中垂線幾何.

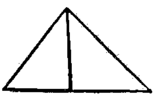
法以底一百五十尺爲一率.大腰一百二十二尺.與小腰一百一十二尺相加.得二百三十四尺.爲二率.以大腰一百二十二尺與小腰一百一十二尺相減.餘十尺.爲三率.求得四率十五尺六寸.爲底邊之較.與底一百五十尺相減.餘一百三十四尺四寸.折半得六十七尺二寸.爲勾.以小腰一百一十二尺爲弦.求得股八十九尺六寸.爲中垂線也.如圖甲乙丙三角形.甲乙爲大腰.甲丙爲小腰.乙丙爲底.甲丁爲所求中垂線.試以甲爲心.丙爲界.作一

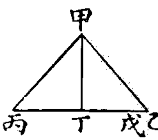


圜截甲乙大腰於庚截乙丙底於戊又將甲乙大腰引長至己作甲己線與甲丙小腰相等則己乙爲兩腰之和庚乙爲兩腰之較蓋甲庚與甲丙等故庚乙爲兩腰之較乙丙爲底邊之和乙戊爲底邊之較蓋丁丙與丁戊等故乙戊爲底邊之較今以乙丙底邊之和與乙己兩腰之和爲比卽同於乙庚兩腰之較與乙戊底邊之較爲比爲轉比例之四率幾何原本九卷第八節自圜外一點至圜內所作之兩線此兩全線之比例同於圜外兩段轉相比之比例故乙丙爲一率乙己爲二率乙庚爲三率求得四率爲乙戊既得乙戊則於乙丙底邊內減去乙戊餘戊丙折半得丁丙爲勾甲丙爲弦求得股爲甲丁中垂線也

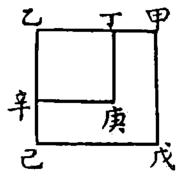


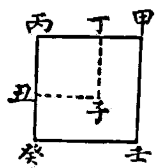
又法以大腰一百二十二尺自乘得一萬四千八百八十四尺又以小腰一百一十二尺自乘得一萬二千五百四十四尺兩自乘數相減餘二千三百四十尺以底邊一百五十尺除之得十五尺六寸爲底邊之較與底邊一百五十尺相減餘一百三十四尺四寸折半得六十七尺二寸爲勾以小腰一百一十二尺爲弦求得股八十九尺六寸爲中垂線也如圖甲乙丙三角形試自甲角作甲丁垂線則分爲甲丁乙、甲丁丙兩勾股形甲乙、甲丙皆爲弦乙丁、丁丙皆爲勾共以甲丁爲股乙丙爲兩勾之和乙戊爲兩勾之較今以甲乙弦自乘則成甲戊己乙一正方形內丁庚辛乙爲乙丁勾自乘之一正方形於甲戊己乙正方形內減去丁庚辛乙正方形所餘甲戊己辛庚丁磬折形積卽與甲丁股自乘之一正方形等又以甲丙弦自乘則成甲壬癸丙一正方形

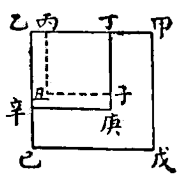


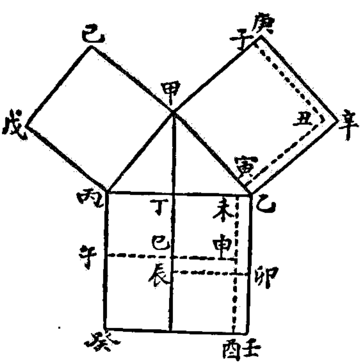


內丁子丑丙爲丁丙勾自乘之一正方形於甲壬癸丙正方形內減去丁子丑丙正方形所餘甲壬癸丑子丁磬折形積亦與甲丁股自乘之一正方形等是則前圖之甲戊己辛庚丁磬折形與後圖之甲壬癸丑子丁磬折形相等矣若兩自乘之數相減則如甲戊己乙正方形內減去與甲壬癸丑子丁磬折形相等之甲戊己辛庚丁磬折形又減去丁子丑丙一小正方形所餘爲子庚辛乙丙丑一小磬折形引而長之成一長方形其長卽乙丁與丁丙之和其闊卽乙丁與丁丙之較故以乙丁與丁丙之和除子庚辛乙丙丑磬折形之積而得乙丁與丁丙之較也又圖甲乙丙三角形作甲丁垂線分爲兩勾股形共以甲丁垂線爲股故甲乙弦自乘方內有甲丁股自乘一方乙丁勾自乘一方而甲丙弦自乘方內有甲丁股自乘一方丁丙勾自乘一方今兩勾股形之股既同則兩弦方相減所餘之數卽兩勾方相減所餘之數故甲丁乙勾股形之甲乙弦自乘方內減甲丁丙勾股形之甲丙弦自乘方所餘庚辛乙寅丑子磬折形卽與甲丁乙勾







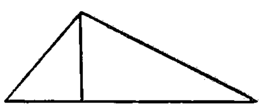


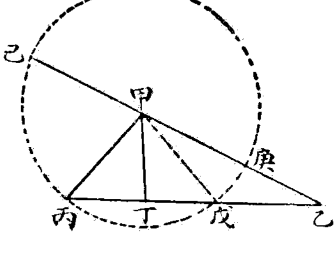
股形之丁乙勾自乘方。內減甲丁丙勾股形之丁丙勾自乘方。所餘乙卯辰巳申未磬折形相等。若將乙卯辰巳申未磬折形引而長之。遂成乙壬酉未長方形。其長卽乙丁、丁丙兩勾之和。其闊卽乙丁、丁丙兩勾之較。其積卽乙丁、丁丙兩勾方相減之餘。亦卽甲乙、甲丙兩弦方相減之餘。是以兩弦自乘相減之餘積。以兩勾之和除之。而得兩勾之較也。

設如有鈍角三角形。大腰十七尺。小腰十尺。底二十一尺。求中垂線幾何。

法以底二十一尺爲一率。以大腰十七尺與小腰十尺相加。得二十七尺爲二率。以大腰十七尺與小腰十尺相減。餘七尺爲三率。求得四率九尺。爲底邊之較。與底二十一尺相減。餘十二尺。折半得六尺爲勾。以小腰十尺爲弦。求得股八尺。爲中垂線也。如圖甲乙丙三角形。甲乙爲大腰。甲丙爲小腰。乙丙爲底。甲丁爲所求中垂線。試以甲爲心。丙爲界。作一圜。截甲乙大腰於庚。截乙丙底邊於戊。又將甲乙大腰引長至己。作甲己線與甲丙小腰等。則己乙爲兩腰之和。庚乙爲兩腰之較。乙丙爲底邊之和。乙戊爲底邊之較。其乙丙與乙己之比。卽同於庚乙與乙戊之比。爲轉比例四率也。

又法以大腰十七尺自乘。得二百八十九尺。又以小腰十尺自乘。得一百尺。兩自乘數相減。餘一百八十九尺。以底二十一尺除之。得九尺爲底邊之較。與底二十一尺

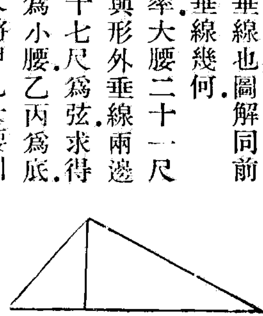


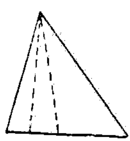


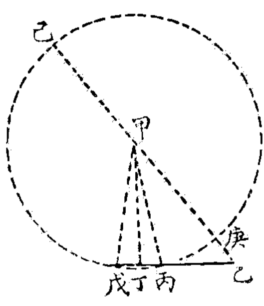
相減。餘十二尺。折半得六尺爲勾。以小腰十尺爲弦。求得股八尺爲中垂線也。圖解同前。

設如有斜立鈍角三角形大腰二十一尺。小腰十七尺。底十尺。求形外垂線幾何。

法以底十尺爲一率。大腰二十一尺與小腰十七尺相減。餘四尺爲二率。大腰二十一尺與小腰十七尺相加。得三十八尺爲三率。求得四率十五尺二寸。爲底與形外垂線兩邊連底之總。內減去底十尺。餘五尺二寸。折半得二尺六寸爲勾。以小腰十七尺爲弦。求得股十六尺八寸。爲形外垂線也。如圖甲乙丙三角形。甲乙爲大腰。甲丙爲小腰。乙丙爲底。甲丁爲所求形外垂線。試以甲爲心。丙爲界。作一圜。截甲乙大腰於庚。又將甲乙大腰引長至己。作甲己線。與甲丙小腰相等。復將乙丙底引長至戊。作乙戊線。則成甲乙戊三角形。其乙丙爲底邊之較。乙戊爲底邊之和。乙庚爲兩腰之較。乙己爲兩腰之和。自圜外至圜內所作兩線之比例。既同於圜外兩段轉相比之比例。則圜外兩段之比例。亦必同於兩全線轉相比之比例。故乙丙與乙庚之比。卽同於乙己與乙戊之比。爲比例四率。既得乙戊。則減乙丙。餘丙戊。折半得丙丁爲勾。甲丙爲弦。求得股。卽甲丁垂線也。

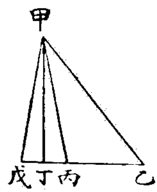


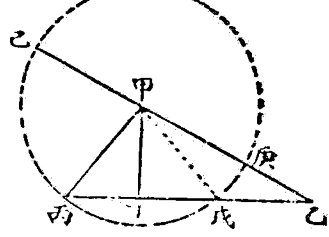




又法以大腰二十一尺自乘。得四百四十一尺。又以小腰十七尺自乘。得二百八十九尺。兩自乘數相減。

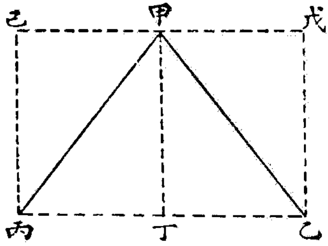
餘一百五十二尺。以底十尺除之。得十五尺二寸。爲底與形外垂線兩邊連底之總。內減底十尺。餘五尺二寸。折半得二尺六寸。爲勾。以小腰十七尺爲弦。求得股十六尺八寸。爲形外垂線也。如圖甲乙丙三角形。將乙丙底引長至戊。自甲作垂線至丁。則丁戊與丁丙等。又自甲至戊作甲戊線。與甲丙小腰等。則成甲丁乙、甲丁戊兩勾股形。甲乙、甲戊皆爲弦。乙丁、丁戊皆爲勾。共以甲丁爲股。而乙丙爲兩勾之較。乙戊爲兩勾之和。前法以和求較。此法以較求和。其理一也。圖解並同前。





設如有銳角三角形。兩腰俱五尺。底六尺。求面積幾何。

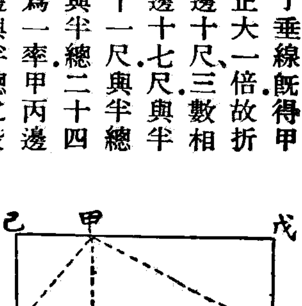
法先以底六尺折半得三尺。爲勾。任以兩腰之一邊五尺爲弦。求得股四尺爲中垂線。與底六尺相乘。得二十四尺。折半得一十二尺。爲三角面積也。如圖甲乙丙三角形。以乙丙底邊與甲丁中垂線相乘。成戊乙丙己長方形積。比三角形積正大一倍。故折半得三角積也。

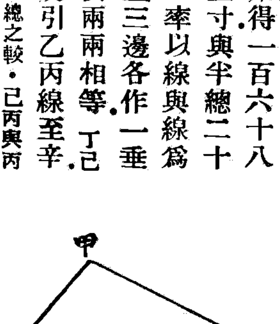


設如有鈍角三角形。大腰十七尺。小腰十尺。底二十一尺。求面積幾何。

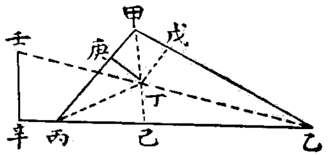
法先用求中垂線法。求得中垂線八尺。與底二十一尺相乘。得一百六十八尺。

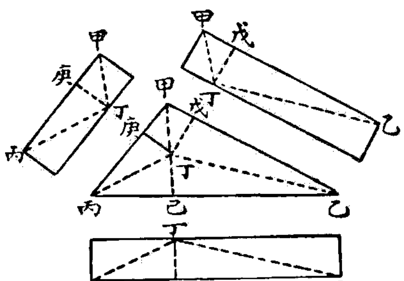
折半得八十四尺。爲三角面積也。如圖甲乙丙三角形。先求甲丁垂線。旣得甲丁垂線。乃與乙丙底邊相乘成戊乙丙己長方形。比三角形積正大一倍故折半得三角積也。又法以甲乙邊十七尺、乙丙邊二十一尺、甲丙邊十尺、三數相加得四十八尺。爲三邊之總。折半得二十四尺。爲半總。以甲乙邊十七尺與半總二十四尺相減餘七尺。爲甲乙邊與半總之較。以乙丙邊二十一尺與半總二十四尺相減。餘三尺。爲乙丙邊與半總之較。以甲丙邊十尺。與半總二十四尺相減餘十四尺。爲甲丙邊與半總之較。乃以半總二十四尺爲一率。甲丙邊與半總之較十四尺爲二率。乙丙邊與半總之較三尺。與甲乙邊與半總之較七尺相乘。得二十一尺。爲三率。求得四率十二尺二十五寸。開方得三尺五寸。爲三角形自中心至三邊之垂線。與三邊之總四十八尺相乘。得一百六十八尺。折半得八十四尺。卽三角形之面積。或以所得垂線三尺五寸。與半總二十四尺相乘。亦得八十四尺。爲三角形之面積也。此法蓋一率二率以線與線爲比。三率四率以面與面爲比也。如甲乙丙三角形自中心丁至三邊各作一垂線。又自中心丁至三角各作一分角線。卽成六直角三角形。俱兩兩相等。丁己丙與丁庚丙等・丁己乙與丁戊乙等・丁戊甲與丁庚甲等・又按甲戊度引乙丙線至辛。則乙辛爲三邊之半總。卽三較之和乙己與乙戊等・卽甲丙邊與半總之較・己丙與丙





庚等．卽甲乙邊與半總之較．丙辛與甲戊甲庚等．卽乙丙邊與半總之較．試自辛作直角將乙丁線引長作一乙辛壬直角形則壬辛與丁己平行乙辛壬形與乙己丁形遂爲同式形其乙辛與乙己之比卽同於壬辛與丁己之比然乙辛一率乙己二率之數雖有而壬辛之數却無又但知己丙與丙辛相乘之數卽丁己與壬辛相乘之數故以己丙與丙辛相乘之數爲三率．何以知己丙與丙辛相乘之數．卽丁己與壬辛相乘之數．試作壬丙線壬癸線．使丙癸與丙辛等．癸角辛角皆爲直角．癸丙辛角與辛壬癸角相合共成一百八十度．然庚丙己角．爲癸丙辛角之外角．相合亦共成一百八十度．是庚丙己角與辛壬癸角等． 庚丁己角與癸丙辛角等． 是以壬癸丙辛形與丙庚丁己形．爲同式形．而丙辛壬勾股形與丁己丙勾股形．亦爲同式形．可互相比例矣．以丁己作一率．己丙作二率．丙辛作三率．卽得四率壬辛．是以己丙二率與丙辛三率相乘之數．卽與丁己一率與壬辛四率相乘之數等． 故直以己丙丙辛相乘之數作三率也．其所得四率．卽丁己自乘之數．是故乙辛與乙己之比同於丁己與壬辛相乘之面．卽己丙與丙辛相乘之面．與丁己自乘之面之比也．既得丁己自乘之面．故開方而得丁己爲三角形自中心至三邊之垂線與丁戊丁庚俱相

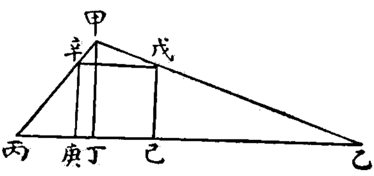


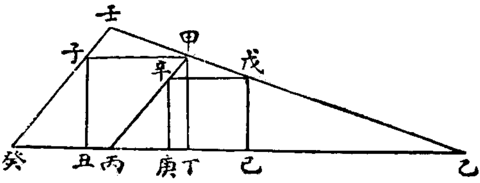


等。又卽三角形容圓之半徑也。既得自中心至三邊之垂線。則用垂線與三邊之總相乘。所得一長方積。卽如用垂線與三邊各相乘。所得三長方積。合爲一正方。比三角形積大一倍。故折半而得三角形之面積。如以垂線與半總相乘。卽與三角形積等。而不用折半矣。

設如有鈍角三角形。大腰三十七尺。小腰十五尺。底四十四尺。求內容正方邊幾何。

法先用求中垂線法。求得中垂線十二尺。與底邊四十四尺相加。得五十六尺爲一率。中垂線十二尺爲二率。底邊四十四尺爲三率。推得四率九尺四寸二分八釐五豪有餘。卽三角形內所容正方之一邊也。如圖甲乙丙三角形。甲乙爲大腰。甲丙爲小腰。乙丙爲底。甲丁爲所得中垂線。戊己庚辛爲今所求內容正方形。試依甲丁中垂線度將乙丙線引長。作乙癸線。爲五十六尺。又與甲丙線平行作壬癸線。又將甲乙線引長。作壬乙線。則成與甲乙丙同式之壬乙癸三角形。復與底線平行作甲子線。與丙癸等。卽與甲丁垂線等。又與甲丁平行作子丑線。與甲丁等。則甲丁垂線所作甲丁丑子正方形。卽爲壬乙癸三角形內所容之正方形矣。故壬乙癸三角形之乙癸底。與





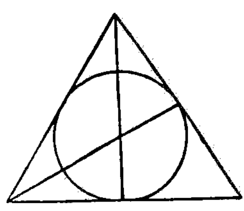
甲丁方邊之比。卽同於甲乙丙三角形之乙丙底。與戊己方邊之比。故中垂線與底邊相加爲一率。中垂線爲二率。底邊爲三率。推得四率。爲內容正方之一邊也。

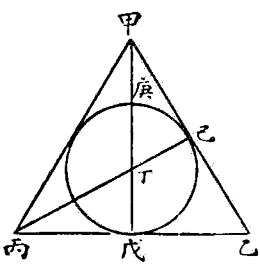
設如等邊三角形。每邊一尺二寸。求內容圓徑幾何。

法先用求中垂線法。求得中垂線一尺零三分九釐二豪有餘。以三歸之。得三寸四分六釐四豪有餘。卽內容圓形半徑。倍之得六寸九分二釐八豪有餘。卽內容圓形全徑也。如圖甲乙丙三角形內容丁圓形。先求得甲戊中垂線。又自丙角至甲乙線界。作丙己垂線。與甲戊中垂線相交於丁。卽三角形之中心。亦卽內容圓形之中心。故丁戊與丁己。卽內容圓形之半徑。又甲戊乙、甲己丁兩勾股形。爲同式形。甲乙爲乙戊之二倍。則甲丁亦必爲丁己或丁戊之二倍。丁戊旣爲內容圓形之半徑。則甲丁卽爲內容圓形之全徑。而甲戊中垂線必爲丁戊半徑之三倍矣。故求得甲戊中垂線。以三歸之。得丁戊。卽內容圓形之半徑。倍之得庚戊。卽內容圓形之全徑也。

設如等邊三角形。每邊一尺二寸。求外切圓徑幾何。

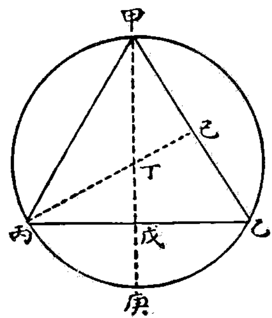
法先用求中垂線法。求得中垂線一尺零三分九釐二豪有餘。三歸四因得一尺三寸八分五釐六豪有餘。卽外切圓形全徑也。如圖甲乙丙三角形外切丁圓形。先求得甲戊中垂線。又自丙角至甲乙線界。作丙己垂線。與甲戊

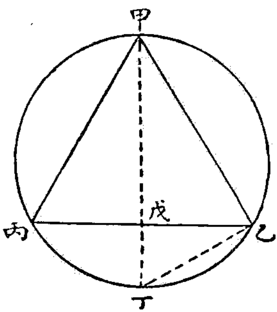


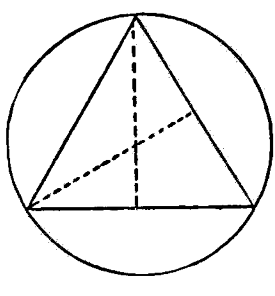


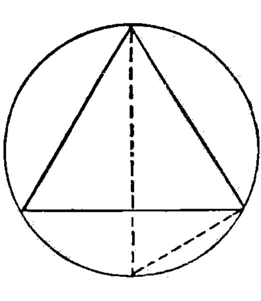
中垂線相交於丁。即三角形之中心。亦即外切圜形之中心。故甲丁與丙丁。即外切圜形之半徑。又甲戊乙、甲己丁兩勾股形爲同式形。甲乙爲乙戊之二倍。則甲丁亦必爲丁己或丁戊之二倍。甲丁既爲外切圜形之半徑。則爲甲戊中垂線之三分之二。而甲戊中垂線。却爲甲庚全徑之四分之三矣。故求得甲戊中垂線。三歸四因。得甲庚。即外切圜形之全徑也。

又法以每邊一尺二寸自乘。三歸四因。開方得一尺三寸八分五釐六豪有餘。即外切圜形全徑也。如圖甲乙丙三角形外切甲乙丁丙圜形。試自甲角作甲戊中垂線。又引長作甲丁全徑線。復自丁至乙作丁乙線。遂成甲乙丁、甲戊乙兩勾股形。爲同式形。甲乙既爲乙戊之二倍。則甲丁亦必爲乙丁之二倍。故甲丁自乘方積。比乙丁自乘方積大四倍。若





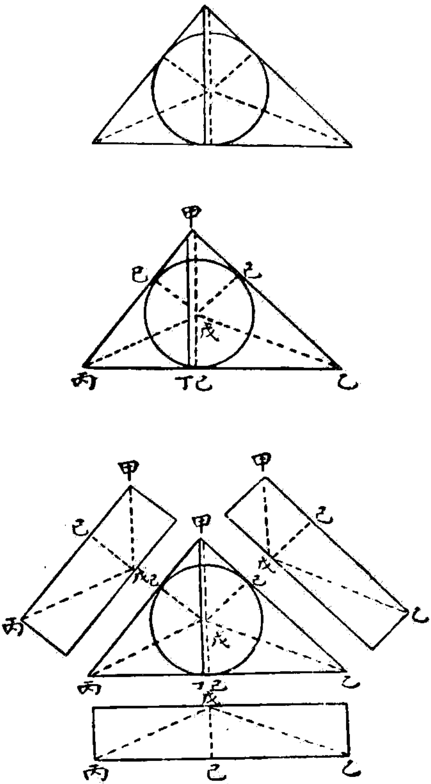




依勾弦求股之法言之。則甲丁弦自乘方積內減乙丁勾自乘方積。所餘爲甲乙股自乘之方積。今甲丁弦自乘方積。既爲乙丁勾自乘方積之四倍。則是甲乙每邊自乘方積爲甲丁全徑自乘方積之四分之三矣。故以一邊自乘。三歸四因。即與全徑自乘之方積等。而開方得外切圓形之全徑也

設如有銳角三角形大腰三百三十八尺。小腰三百尺。底四百一十八尺。求內容圓徑幾何。

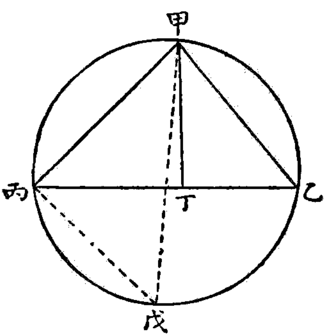
法先用求中垂線法。求得中垂線二百四十尺。與底四百一十八尺相乘。得一十萬零三百二十尺。以大腰三百三十八尺、小腰三百尺、底四百一十八尺三數相加。得一千零五十六尺。除之。得九十五尺。即內容圓半徑。倍之。得一百九十尺。即內容圓全徑也。如圖甲乙丙三角形內容戊圓形。試自圓之中心至甲乙丙三角。各作戊甲戊乙戊丙三線。遂成分甲乙丙三角形。爲甲戊乙、甲戊丙、



乙戊丙三三角形。其三邊皆爲三角形之底。而戊己半徑。皆爲三角形之垂線。今乙丙底邊與甲丁中垂線相乘所得之長方積。原比甲乙丙三角形積大一倍。卽如將所分三三角形、各用垂線乘底邊所得之三長方積。合爲一長方也。三長方之長雖不同而闊則一。故各以長除積而得闊者。卽如合三角形之三邊。除三角形之倍積。而得半徑也。

設如有銳角三角形。大腰一百八十三尺。小腰一百六十八尺。底二百二十五尺。求外切圜徑幾何。

法用求中垂線法。求得中垂線一百三十四尺四寸爲一率。小腰一百六十八尺爲二率。大腰一百八十三尺爲三率。推得四率二百二十八尺七寸五分。卽外切圜徑也。如圖甲乙丙三角形。甲乙爲小腰。甲丙爲大腰。乙丙爲底。甲丁爲中垂線。試作切三角一圜。自甲角至圜對界作甲戊全徑線。又自丙角至戊作丙戊線。則甲丙戊三角形之丙角。立於圜界之一半。必爲直角。與甲丁垂線所分甲丁乙三角形之丁角等。而戊角與乙角。皆對甲丙弧。其度又等。故甲丙戊與甲丁乙兩三角形。爲同式形。是以甲丁與甲乙之比。同於甲丙與甲戊之比。而爲相當比例四率也。



設如有鈍角三角形。大腰十七尺。小腰十尺。底二十一尺。求外切圜徑幾何。

法用求中垂線法。求得中垂線八尺爲一率。小腹十尺爲二率。大腰十七尺爲三率。推得四率二十一尺

二寸五分。即外切圜徑也。如圖甲乙丙三角形。甲乙爲小腰。甲丙爲大腰。乙丙爲底。甲丁爲中垂線。試作切三角一圜。自甲角至圜對界、作甲戊全徑線。又自丙角至戊作丙戊線。則甲丙戊三角形之丙角。立於圜界之一半。必爲直角。與甲丁垂線所分甲丁乙三角形之丁角等。而戊角與乙角皆對甲丙弧。其度又等。故甲丙戊與甲丁乙兩三角形、爲同式形。是以甲丁與甲乙之比。同於甲丙與甲戊之比。而爲相當比例四率也。