Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 17

Übungsaufgaben

AUFGABE 17.1. Sei R ein Integritätsbereich und K ein Körper mit $R \subseteq K$. Zeige, dass dann auch $Q(R) \subseteq K$ gilt.

AUFGABE 17.2. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ genau dann ein Primideal ist, wenn $\mathfrak{a}$ der Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi \colon R \to K$ in einen Körper K ist.

AUFGABE 17.3. Berechne in $\mathbb{Q}(X)$ die folgenden Ausdrücke.

(1) Das Produkt
$$\frac{2X^3 - 5X^2 + X - 1}{X^2 - 2X + 6} \cdot \frac{X^2 + 3}{5X^3 - 4X^2 - 7},$$
(2) Die Summe
$$\frac{4X^3 - X^2 + 6X - 2}{X^2 - 4X - 3} + \frac{X^2 - 3}{3X^2 + 5},$$
(3) Das Inverse von
$$\frac{6X^3 - 9X^2 + 5X - 1}{X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 8X - 3}.$$

AUFGABE 17.4. Zeige die Gleichheit
$$\frac{3X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 1}{X^3 + X + 1} = X^2 + 3X + 1$$
als Funktion von $\mathbb{Z}/(5)$ nach $\mathbb{Z}/(5)$.

AUFGABE 17.5. Skizziere die Graphen der folgenden rationalen Funktionen
$$\frac{1}{x}\,\frac{1}{x-1},\ \frac{1}{x^2},\ \frac{1}{x(x-1)},\ \frac{x-1}{x^2}.$$

Aufgabe 17.6. Erstelle eine Wertetabelle für die rationale Funktion
$$\frac{X^2+4X+3}{X^3+X+2} \in \mathbb{Z}/(7)(X)\,.$$

Aufgabe 17.7. Es sei
$$G = \langle \frac{2}{3}, \frac{4}{5} \rangle \subseteq (\mathbb{Q},0,+)$$
die von $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ erzeugte Untergruppe. Zeige, dass G auch von einem Element erzeugt wird. Von welchem?

Aufgabe 17.8. Es seien $a,b \in \mathbb{N}_+$ und sei
$$G = \langle \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \rangle \subseteq (\mathbb{Q},0,+)$$
die von $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ erzeugte Untergruppe. Zeige, dass G von $\frac{1}{\operatorname{KgV}(a,b)}$ erzeugt wird.

Aufgabe 17.9. Betrachte die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q},+,0)$ als kommutative Gruppe. Zeige, dass sie nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 17.10. Betrachte die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q},+,0)$ als kommutative Gruppe. Es sei $G \subseteq \mathbb{Q}$ eine endlich erzeugte Untergruppe. Zeige, dass G zyklisch ist.

Aufgabe 17.11. Es sei $T \subseteq \mathbb{P}$ eine Teilmenge der Primzahlen. Zeige, dass die Menge
$$\begin{aligned} R_T = \{q \in Q \mid\ & q \text{ lässt sich mit einem Nenner schreiben,} \\ & \text{in dem nur Primzahlen aus } T \text{ vorkommen } \} \end{aligned}$$
ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist. Was ergibt sich bei $T=\emptyset$, $T=\mathbb{P}$, $T=\{3\}$, $T=\{2,5\}$?

Aufgabe 17.12. Es sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen und
$$\alpha\colon \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
eine Abbildung. Zeige, dass die Menge
$$G_\alpha = \left\{ q \in \mathbb{Q}^\times \mid \exp_p(q) \geq \alpha(p) \text{ für alle } p \right\} \cup \{0\}$$
eine Untergruppe von $(\mathbb{Q},0,+)$ ist.

Aufgabe 17.13.*

Sei p eine Primzahl. Man gebe einen Körper der Charakteristik p an, der unendlich viele Elemente besitzt.

Die folgende Definition wird in den nächsten Aufgaben verwendet.

Ein kommutativer Ring heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „$\geq$" auf R gibt, die die beiden Eigenschaften

(1) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ für beliebige $a, b, c \in R$,
(2) Aus $a \geq b$ folgt $ac \geq bc$ für beliebige $a, b, c \in R$ mit $c \geq 0$,

erfüllt.

Die ganzen Zahlen bilden einen angeordneten Ring. Die Anordnung überträgt sich auf den Quotientenkörper, die rationalen Zahlen bilden also einen angeordneten Körper.

Aufgabe 17.14. Zeige, dass $\mathbb{Q}$ mit der durch $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ (bei $b, d \in \mathbb{N}_+$), falls $ad \geq cb$ in $\mathbb{Z}$ gilt, definierten Beziehung ein angeordneter Körper ist (dabei dürfen nur Eigenschaften der Ordnung auf $\mathbb{Z}$ verwendet werden).

Aufgabe 17.15. Man gebe fünf rationale Zahlen an, die (echt) zwischen $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{8}$ liegen.

Aufgabe 17.16. Person A wird 80 Jahre alt und Person B wird 70 Jahre alt. Vergleiche die Gesamtlebenswachzeit und die Gesamtlebensschlafzeit der beiden Personen bei folgendem Schlafverhalten.

(1) A schläft jede Nacht 7 Stunden und B schläft jede Nacht 8 Stunden.
(2) A schläft jede Nacht 8 Stunden und B schläft jede Nacht 7 Stunden.

Aufgabe 17.17.*

Eine Bahncard 25, mit der man ein Jahr lang 25 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 62 Euro und eine Bahncard 50, mit der man ein Jahr lang 50 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 255 Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard 25 oder die Bahncard 50 die günstigste Option?

Aufgabe 17.18.*

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39

Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Aufgabe 17.19. Man gebe die Antworten als Bruch (bezogen auf das angegebene Vergleichsmaß): Um wie viel ist eine drei Viertel Stunde länger als eine halbe Stunde, und um wie viel ist eine halbe Stunde kürzer als eine drei Viertel Stunde?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.20. (3 Punkte)

Bestimme einen Erzeuger für die Untergruppe $H \subseteq (\mathbb{Q}, +, 0)$, die durch die rationalen Zahlen

$$\frac{8}{7}, \frac{5}{11}, \frac{7}{10}$$

erzeugt wird.

Aufgabe 17.21. (4 Punkte)

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}_+$ und sei

$$G = \langle \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \rangle \subseteq (\mathbb{Q}, 0, +)$$

die von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ erzeugte Untergruppe. Zeige, dass G von $\frac{\operatorname{GgT}(a,c)}{\operatorname{KgV}(b,d)}$ erzeugt wird.

Aufgabe 17.22. (3 Punkte)

Sei R ein faktorieller Bereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$. Zeige, dass jedes Element $f \in K$, $f \neq 0$, eine im Wesentlichen eindeutige Produktzerlegung

$$f = up_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$$

mit einer Einheit $u \in R$ und ganzzahligen Exponenten r_i besitzt.

Aufgabe 17.23. (3 Punkte)

Sei R ein faktorieller Bereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$. Es sei $a \in K$ ein Element mit $a^n \in R$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$. Zeige, dass dann schon a zu R gehört.

Was bedeutet dies für $R = \mathbb{Z}$?

AUFGABE 17.24. (3 Punkte)

Zeige, dass die beiden kommutativen Gruppen $(\mathbb{Q}, 0, +)$ und $(\mathbb{Q}_+, 1, \cdot)$ nicht isomorph sind.