Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 46

Übungsaufgaben

Aufgabe 46.1. Bestimme die Nebenklassen zu den folgenden Untergruppen von kommutativen Gruppen.

(1) $(\mathbb{Z}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.
(2) $(\mathbb{Q}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.
(3) $(\mathbb{R}, 0, +) \subseteq (\mathbb{C}, 0, +)$.
(4) $(\mathbb{Z}n, 0, +) \subseteq (\mathbb{Z}, 0, +)$ $(n \in \mathbb{N})$.
(5) $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$.
(6) $(\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, 1, \cdot)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Wann bestehen die Nebenklassen aus endlich vielen Elementen, wann ist der Index endlich?

Aufgabe 46.2. Wir betrachten die Permutationsgruppe S_4 mit der Untergruppe H, die vom Dreierzyklus $a \mapsto b$, $b \mapsto c$, $c \mapsto a$ erzeugt wird. Bestimme die Links- und die Rechtsnebenklassen zu dieser Untergruppe.

Aufgabe 46.3. Wir betrachten die Gruppe G der invertierbaren 2×2-Matrizen über dem Körper $\mathbb{Z}/(3)$ mit 3 Elementen und die Untergruppe H, die aus allen invertierbaren Matrizen mit Determinante 1 besteht. Welche der folgenden Matrizen sind untereinander äquivalent (bezüglich H), welche nicht?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 46.4. Es sei G eine Gruppe und $H_1, H_2 \subseteq H$ Untergruppen mit den zugehörigen Äquivalenzrelationen $\sim_1$ bzw. $\sim_2$. Zeige, dass die Äquivalenzrelation zu $H = H_1 \cap H_2$ der Durchschnitt der beiden Äquivalenzrelationen ist.

Aufgabe 46.5. Sei p eine Primzahl und sei G eine Gruppe der Ordnung p. Zeige, dass G eine zyklische Gruppe ist.

Aufgabe 46.6. Sei G eine endliche Gruppe. Zeige, dass jedes Element $g \in G$ eine endliche Ordnung besitzt, und dass die Potenzen

$$g^0 = e_G,\ g^1 = g,\ g^2, \ldots, g^{\operatorname{ord}(g)-1}$$

alle verschieden sind.

Aufgabe 46.7.*

Es sei R ein kommutativer Ring mit p Elementen, wobei p eine Primzahl sei. Zeige, dass R ein Körper ist.

Aufgabe 46.8. Bestimme die Untergruppen von $\mathbb{Z}/(15)$.

Aufgabe 46.9. Es sei $G = S_3$ die Permutationsgruppe zu einer dreielementigen Menge. Welche Zahlen treten als Ordnungen von Untergruppen und welche als Ordnungen von Elementen auf?

Aufgabe 46.10. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_+$, $\operatorname{GL}_n(K)$ die allgemeine lineare Gruppe der invertierbaren Matrizen und

$$\operatorname{SL}_n(K) \subseteq \operatorname{GL}_n(K)$$

die Untergruppe der Matrizen mit Determinante 1. Zeige, dass die Linksnebenklasse (und auch die Rechtsnebenklasse) zu $M \in \operatorname{GL}_n(K)$ gleich der Menge aller Matrizen ist, deren Determinante mit $\det M$ übereinstimmt.

Zeige auf möglichst viele Weisen, dass $\operatorname{SL}_n(K)$ ein Normalteiler in $\operatorname{GL}_n(K)$ ist.

Aufgabe 46.11.*

Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq H$ ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 46.12. Zeige, dass der Durchschnitt von Normalteilern N_i, $i \in I$, in einer Gruppe G ein Normalteiler ist.

Aufgabe 46.13. Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Ist das Bild von φ ein Normalteiler in H?

Aufgabe 46.14. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ und die Gruppe $\mathbb{Z}/(n)$ isomorph sind.

Die nächste Aufgabe verwendet das Konzept einer exakten Sequenz.

Seien $G_0, \ldots, G_n$ Gruppen und $f_i : G_{i-1} \to G_i$ Gruppenhomomorphismen derart, dass $\operatorname{kern} f_{i+1} = \operatorname{bild} f_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Dann heißt

$$G_0 \to G_1 \to \ldots \to G_{n-1} \to G_n$$

eine *exakte Sequenz von Gruppen.*

Aufgabe 46.15. Sei

$$G_0 \to G_1 \to \ldots \to G_{n-1} \to G_n$$

eine exakte Sequenz von Gruppen, wobei alle beteiligten Gruppen endlich seien und $G_0 = G_n$ die triviale Gruppe sei. Zeige, dass dann

$$\prod_{i=0}^{n} \#(G_i)^{(-1)^i} \,=\, 1$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 46.16. (2 Punkte)

Bestimme die Untergruppen von $\mathbb{Z}/(20)$.

Aufgabe 46.17. (3 Punkte)

Sei M eine endliche Menge und sei σ eine Permutation auf M und $x \in M$. Zeige, dass $\{n \in \mathbb{Z} |\, \sigma^n(x) = x\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist. Den eindeutig bestimmten nichtnegativen Erzeuger dieser Untergruppe bezeichnen wir mit $\operatorname{ord}_x \sigma$. Zeige die Beziehung

$$\operatorname{ord}(\sigma) \,=\, \operatorname{kgV}\{\operatorname{ord}_x \sigma |\, x \in M\}\,.$$

Aufgabe 46.18. (2 Punkte)

Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild $\varphi(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq G$ ein Normalteiler in H ist.

Aufgabe 46.19. (2 Punkte)

Zeige, dass jede Untergruppe vom Index zwei in einer Gruppe G ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 46.20. (2 Punkte)

Sei G eine Gruppe und sei M eine Menge mit einer Verknüpfung. Es sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ für alle $g, h \in G$. Zeige, dass M eine Gruppe und φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 46.21. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von drei Untergruppen $F \subseteq G \subseteq H$ an derart, dass F ein Normalteiler in G und G ein Normalteiler in H, aber F kein Normalteiler in H ist.