

大學教本

大學物理學

上 冊

德國 WILHELM H. WESTPHAL 著

杜若城譯述

上 海

勵志書局發行

PHYSIK

EIN LEHRBUCH FÜR STUDIERENDE AN DEN
UNIVERSITÄTEN UND TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

VON

WILHELM H. WESTPHAL

A. O. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT BERLIN UND
LEITER DER PHYSIKALISCHEN ÜBUNGEN AN DER
TECHNISCHEN HOCHSCHULE BERLIN

杜若城譯述



上 海
勵 志 書 局 出 版

1936

凡 例

1. 原著係德國柏林大學物理學教授兼同地工科大學物理實驗室導師 Wilhelm H. Westphal 所著，專供理工學院教本及參考書之用。本書係就最近增訂版譯述，略有增插。

2. 物理學近年進步頗速，而尤以電磁，放射性，原子構造，量子論及相對論等為最。本書就最新學說之已證實者詳為解釋。各方面教材適宜配列，使前後九篇三十七章互相銜接，俾讀者得物理學之整個的觀念。

3. 物理學理論非淺近算學所能講解盡善。故本書中凡須用微積分之處均盡量採用之，俾得充分發揮物理學之真理，良以此舉亦與大學程度相融合。

4. 本書之教學須與實驗表演相輔而行，故須另定時間令學生按相當之實驗教本在導師之指導下自作實驗，或由導師作相當實驗表演，俾由實驗資助理解。

5. 各章問題及演習題，因種種關係，以由教授自行編訂為宜。茲書故從略。

6. 本書所用物理學名詞與術語大致依照教育部公布之「物理學名詞」一書，然其中仍多由譯者自擬者。為免除誤解並資參考起見，各名詞與術語之後，均附註德英文。

7. 本書以力學，振動，波（包括聲學）及熱學合訂為上册，電磁單獨訂為中册，光學，放射性，量子說，物質說及相對論合訂為下册。但三册仍可合訂為全册。全書漢，德及英三索引，附在下册之後。教授時間，若每星期演講四小時（每學期授課時間假定十五星期），則上中下三册可於上下兩學期中授畢之。

目次

第一篇 概論	1
第一章 物理學之內容及方法	§1—5
自然科學系統內之物理學 1. — 因果性 2. — 實驗 3. — 物理定律 3. — 物理學之分類 5.	
第二章 量度及計量	§3—11
物理測計之本性及目的 6. — 長度之測計 6. — 角之測計 10. — 時間之測計 11. — 無向量及向量 11. — 向量之合成及分解 12.	
第三章 物質	§12—14
物質不滅律 14. — 集合狀態 14. — 關於物質構造之導言 15.	
第二篇 剛體之力學 重力	16
第四章 運動學	§15—20
質點之定義 16. — 運動 16. — 直線上之運動 17. — 在空間之運動 19. — 速度及加速度之向量圖 20. — 角速度及角加速度 22.	
第五章 在力之作用下之剛體	§21—52
力為運動變化之原因 24. — 慣性定律 (牛頓之第一定律) 24. — 慣性質量 (牛頓之第二定律) 25. — 科學量度制 (厘米克秒制度) 及工程量度制 28. — 動量 29. — 慣性力 · 達蘭貝爾原理 29. — 力之加法 · 平行四邊形定律 29. — 關於力之合成之數個實驗 32. — 作用及反作用 (牛頓之第三定律) · 應力 33. — 平衡 34. — 力偶 · 力矩 34. — 槓桿 35. — 動量不滅律 (衝量律) 36. — 質心或重心 38. — 重心運動不變律 40. — 轉	

動慣量41.——圓周運動43.——在轉動系內離心力之批評44.——關於轉動質量之慣性力之例46.——功49.——加速度之功50.——功或能量不減律51.——運動能或動能52.——位能或勢能52.——功率54.——轉動能量·轉動衝量·56.——方向矩57.——迴轉運動·迴轉器58.——地球之迴轉60.——大陸之自極的遙走62.——彈性碰撞(衝突)及非彈性碰撞63.——力學量的因次57.

第六章 重力 §53—69.....68.

重力及重力加速度68.——引力質量69.——重或重量70.——比重·密度·容度71.——在地球萬有引力場(重力場)內之運動73.——斜面上之運動75.——重心77.——擺77.——萬有引力 g 由擺之測定79.——穩定平衡,不穩平衡,隨遇平衡81.——牛頓萬有引力定律83.——地球內部之引力84.——月球之運動85.——行星之運動86.——潮汐89.——超距作用及連續作用92.——引力位能及場強度92.

第七章 力學定律之數種實用 §70—80.....93

70.機械93.——充機械之槓桿95.——滑輪及輪軸95.——齒輪98.——楔及螺旋99.——靈敏天秤99.——絕對稱法102.——往返直線間動變為圓周運動之變化103.——車輪104.——彎曲徑路上之慣性作用(離心力)104.——鐘錶107.

第三篇 彈性體力學.....108

第八章 剛體之彈性 §81—85.....108

彈性之意義及一般之事實108.——小形變·虎克定律·彎曲110.——切變111.——壓力112.——彈性能量133.

第九章 液體靜力學 §86—93.....114

靜止液體內略去重力時之壓力114。——重力之作用115。
——自由液體表面 118。——浮力·阿基米得原理 119。
浮體121。——流體之彈性123。——表面張力123。——毛
細管現象125。

第十章 氣體靜力學 §94—107.....128

氣體分子說(氣體運動說)128。——亞佛加德羅定律12
9。——分子量及原子量·克分子及克原子130。——氣體
之壓力132。——波義爾·馬略特定律135。——自由路程
及衝數135。——氣體之壓縮係數·等溫容變137。——理
想氣體及實有氣體 137。——在重力作用下之氣體 138。
——大氣之壓力138。——氣壓之作用104。——氣體壓力
之測定142。——空氣唧筒144。——氣體中之浮力145。

第十一章 液體及氣體之動力學 §108—116.....108

動液體及動氣體之通性142。——柏努利方程式149。——
柏努利方程式之數個應用 150。——分離面·渦154。——
裂板155。——黏滯流體·內部摩擦156。——管內之流動
157。——液體及氣體之噴射158。——斯托克司落體定律
159。

第四篇 振動及波.....161

第十二章 機械式振動及波 §117—137.....161

振動之特性161。——振動方程式·阻尼振動163。——絃
之振動 164。——空氣柱之振動 165。——強制振動 166。
——擾動之傳播167。——週期波167。——波長168。——
縱波及橫波·偏極化 169。——干涉 171。——定波172。
——拍173。——都卜勒效應174。——波中能量之傳遞·
距離定律175。——在兩介質境界上之過程:75。——反射

- 176.——折射177.——弗爾瑪脫原理178.——波之吸收
179.——惠更斯原理179.——繞射180.
- 第十三章 聲學 §138—153.....180.
- 聲音之傳播180.——噪音, 單音及複音182.——音強,
音調, 音品, 振數, 波長183.——聲波之反射184.——
聲波之干涉185.——定聲波185.——音拍或吟·合音
186.——共鳴·氣柱之共鳴187.——關於聲之都卜勒效
應189.——音階190.——諧和及不諧和192.——絃樂器
193.——風琴管·風琴193.——吹奏樂器及其他樂器
194.——耳·喉頭195.——語言及母音196.

第五篇 熱學.....198

第十四章 溫度及熱性 §154—159.....198

- 溫度198.——溫度標·絕對溫度198.——熱之力學說19
9.——馬克士威定律203.——擴散204.——布朗運動20
6.

第十五章 溫度，壓力及容積·狀態方程式 §160—167...200

- 固體及液體之熱膨脹209.——水之異常212.——理想氣
體之狀態方程式·波義爾·馬略特·呂薩克之定律214.
——理想氣體之膨脹係數及壓縮係數215.——凡得瓦爾
之狀態方程式216.——關於狀態變化之特種情形216.
——液體溫度計217.——氣體溫度計及其他測溫方法
218.

第十六章 比熱 §168—173.....219.

- 熱量·卡(路里)220.——熱容量及比熱220.——原子
量·度隆·畢底定律221.——氣體之比熱222.——氣體
之絕熱狀態變化224.——比熱之測定226.

- 第十七章 物態之變化 §174—185.....227
物態變化之種類227.——溶解熱230.——溶解時之容變
232.——汽化(蒸發)234.——汽化熱235.——飽和蒸
汽236.——沸騰238.——蒸汽密度238.——昇華240.
——氣體之液化241.——空氣, 輕氣及氦之液化·極低
溫度244.
- 第十八章 二元系 §186—191.....246
溶體246.——膠體溶液247.——勞歐脫定律247.——滲
透作用249.——易融合質·冷劑250.——吸收251.
- 第十九章 熱力學之三定律·熱量與功· §192—203...253
熱力學第一定律253.——熱功當量253.——由機械功化
熱·摩擦255.——熱力學第二定律·熵257.——可逆(
可迴溯)過程及不可逆(不可迴溯)過程261.——溫度
之平衡261.——熱之傳導262.——熱力學之第三定律(
涅恩斯特熱學定理)266.——噶爾諾循環266.——噶爾
諾定理·熱化爲功之變化269.——熱機272.——熱源·
熱化學277.
- 第二十章 大氣物理學204.—208.....273
大氣之一般特性204.——氣溫278.——濕度·凝結現象
281.——空氣之運動283.——天氣285.

A. 最重要物理常數 ·

萬有引力常數G	6.65×10^{-8} 達因 \times 厘米 ² \times 克 ⁻²
在45°緯度之重力加速度g	980.665 厘米 \times 秒 ⁻²
1 大氣壓	1.01325×10^6 達因 \times 厘米 ⁻²
在0°C時之水銀之比重	13.5955 克 \times 厘米 ⁻³
溫度之絕對零點	-273.2°C
理想氣體之克分子容積	22400 厘米 ³ 末 ⁻¹
普適氣體常數R	1.9858 卡 \times 度 ⁻¹ \times 末 ⁻¹ = 8.3131×10^7 爾格 \times 度 ⁻¹ 末 ⁻¹
熱功當量	4.1863×10^7 爾格 = 1 卡
銀之電化當量	1.11800×10^{-3} 克 \times 庫侖 ⁻¹
法拉第常數	0.96494×10^5 庫侖 \times 末 ⁻¹
氧之原子量	16.000
氫之原子量	1.0078
羅斯密特常數	6.08×10^{23} 末 ⁻¹
亞佛加德羅常數	2.706×10^{19} 厘米 ⁻³
波爾茲曼常數	1.372×10^{-16} 爾格 \times 度 ⁻¹
電量子 (原子電荷)	4.77×10^{-10} 靜電單位 = 1.59×10^{-19} 庫侖
電子之荷質比	1.76×10^8 庫侖 \times 克 ⁻¹
電子之質量	0.9009×10^{-27} 克
氫原子 (質子) 之質量	1.662×10^{-24} 克
原子量 d 之一原子之質量	$d \times 1.64 \times 10^{-24}$ 克
真空中之光速度	2.9979×10^{10} 厘米 \times 秒 ⁻¹
黎德堡常數	109737.1 厘米 ⁻¹
斯忒藩 · 波爾茲曼常數 σ	5.773×10^{-12} 瓦特 \times 厘米 ⁻² \times 度 ⁻⁴
蒲郎克之作用量子 h	6.54×10^{-27} 爾格 \times 秒

B. 能量換算表

在絕對溫度 T 時理想氣體之一分子之能量 $3kT/2$	$2.05_8 \times 10^{-17} T$ 爾格
被電壓 U 伏特加速之電子之能量	$1.59_1 \times 10^{-12} U$ 爾格
被電壓 U 伏特加速之一電子之速度	$5.93_5 \times 10^7 \sqrt{U}$ 厘米秒 ⁻¹
振數為 ν 之一光子之能量	$6.54_4 \times 10^{-27} \times \nu$ 爾格
波數為 N 之一光子之能量	$1.96_1 \times 10^{-13} N$ 爾格
波長為 λ 之一光子之能量	$1.96_1 \times 10^{-13} \times \lambda^{-1}$ 爾格
一氫原子(質子)之 $m_0 c^2$ 能量	$1.49_4 \times 10^{-3}$ 爾格
一電子之 $m_0 c^2$ 能量	$0.509_3 \times 10^{-6}$ 爾格
振數為 ν 之一光子之質量	$0.728 \times 10^{-47} \times \nu$ 克
波數為 N 之一光子之質量	$2.18_3 \times 10^{-37} \times N$ 克
波長為 λ 之一光子之質量	$2.18_3 \times 10^{-37} \times \lambda^{-1}$ 克

C. 地球及日月之常數

地球半徑之平均值	6370 仟米 = 6.370×10^5 厘米
地球之質量	5.97×10^{24} 克
地球之平均密度	5.52 克 \times 厘米 ⁻³
恆星日	23 時 56 分 4.1 秒 = 86164 秒
地球之徑速度	2.98×10^6 厘米 \times 秒 ⁻¹
地球在赤道之週轉速度	4.65×10^4 厘米 \times 秒 ⁻¹
月之質量	7.4×10^{22} 克 = $1/81$ 地球質量
地球與月球之距離	384400 仟米 = 60.27 地球半徑
日球之半徑	696000 仟米
日球之質量	1.97×10^{33} 克
地球與日球之距離	1.495×10^8 仟米

大學物理學

第一篇 概 論

第一章 物理學之內容及方法

1. 自然科學系統內之物理學。物理學係指討論 $\phi\upsilon\sigma\iota\varsigma$ 或自然之學科，故為十分廣汎的自然哲學(Naturwissenschaft; natural philosophy)。以事實言，物理學要求一切關於自然哲學的知識連生物界之現象統隸屬於其範圍內。物理學與自然哲學原無分別。自然哲學之所以須細分而以狹義物理學為其一分科者，係全據本身以外的理由。主要者為歷史的理由。蓋各科分別發展，先後至不一致。例如天文學及地理學在古代早經研究。物理學狹義的發展尚為近代之事。若不計及古代若干草創萌芽，其發軔當在伽利略(Galilei 1564—1642) 時代。至十八世紀末葉，化學已完成發展上若干重要階段，物理學尚極幼稚。惟因發展速度極不一致，自然哲學各部間不可分離的關聯長期隱匿，其全部輪廓顯現至漸。自然哲學在今日之所以仍分科者，殆據實際的理由。一則因全部自然哲學在今日決非一人所能實際治理。洪寶爾德(Alexander v. Humboldt 1769—1859) 恐為集當代自然哲學之最大部分於一身者之最後的一人。二則因其各分科之研究方法，各不相同。事實上，今日區別哲學各分科之特徵，重在研究之方法，至於研究對象僅屬次要，而此就物理學最近的發展不難明瞭者。舉例言之，在約二百年以前，分子及原子特性之研究，似乎完全屬於化學的範圍。今日則成為現代物理學之一重要問題，因已證實可用物理的



依研究方法，自然哲學可分爲二個典型。原始方法根據過程之觀察，任各過程在自然界中自動演進而加以人工的做作。自然哲學之一部分，如天文學及氣象學在今日仍以觀察之結果爲根據（所謂觀察自然哲學），其研究場所，卽天文臺。隨後，吾人開始依人工方法惹起供研究用之過程，以資考查其經過之合法。於是創作實驗並設實驗室、實驗自然哲學之真正代表，當推狹義物理學及化學。此言並非抹殺亦隨時日而益注重實驗之別種科學，例如生理學是。在其他方面，又並非抹殺物理學在其進展中利用觀察自然哲學之結果或其解釋。自牛頓（Newton）將物理學者之目光自地面移至星界後，天文觀察的結果遂成爲最重要之事實資料，而物理學卽以是種資料爲基礎。

因全部自然哲學與狹義物理學有此種密切的關係，復因物理學無疑的管轄自然哲學之各部分，物理學者對於自然哲學不能不有相當廣泛的認識了。其在一方面固須能隨時瞭解屬於鄰科之結果在物理學上之意義或一物理方法對於狹義物理學中尙初遇的問題之得用，而在他方面又須能適應現代物理學已成爲一專科之趨勢，對於是種趨勢，廣泛自然哲學教育成爲一極有效的平衡體。

然實驗之創設及其經過之記載不足言盡物理學之使命。實驗又應可用資瞭解自然現象相互的大關聯，負討論是種大關聯之使命者，爲幾乎全用算學方法之理論物理學。此學之使命然不僅以解釋實驗結果之意義及其相互關係爲限，而猶應根據現成的學說，豫測未知的事實。如是又可發見新的實驗疑問，故在理論物理學與純粹實驗物理學之間，存有不可或缺的相互交換作用。

物理探究之根由，爲純粹知識慾的推動，故出於完全理想的動機。物理知識又能造物質的福利於人類者，其表顯僅爲約百年前之事。伴物理探究之結果而起者，爲講求其應用之道之工程學。因工程學不絕的掀起新的問題，物理學遂有今日非常的活動及須要。

2. 因果性。一知識其對於各個情形之解釋，具有空間性及時間性者，方得謂有科學的意義及價值。申言之，不拘關於過去及將來，

遠的或近的，其容提取一個結論者，方合於科學的標準。為擔保一自然哲學樹立是在是種知識之上，必須吾人能切實斷定在因果之間，到處及隨時惟有獨義的關聯，故凡同一的原因，在各情形中必須有同一的結果。斷言是種事實之定律，謂之因果律(Kausalitätsgesetz; law of causality)。該律之無疑的絕對效力，不但為自然哲學全部之基礎，且成爲一種支配人生之前提。事實上，此律之各準確性在日常生活狀況下及在自然現象之大範圍內，已被證實。據此，則若已知在一定時間之諸種作用原因之細目，不難決定或定命一自然過程演進之細目。(此點與自然律由微分方程式表示之可能性頗有關係。)

吾人今日知此嚴格的定命論(Determinismus; determinism)仍有其極限，而在某種與物質基本構成材料有關之過程之範圍內，失其效力(§ 514)。雖然，是種過程不越出科學探究及知識的範圍，其較準確理論的討論非在本書範圍之內，因此以下應認定因果律恆有效並視各自然過程為嚴格定命的。

3. 實驗。純粹物理學僅於少數情形中由觀察不經人工操作而自動演進之過程獲得事實，前已述之。是種自然過程，大都過於複雜，且由多數不同而往往又難控制之原因同時決定，故其簡單的合法，不能充分明白表顯。在實驗(Experiment; experiment)中，設法創作某種狀況，俾在是種狀況之下，一個已詳知其細目者之原因之作用，以最便於明白觀察之形式呈於吾人之前。吾人往往稱實驗為一個向自然之詢問，而由其回答，自然許吾人洞察其合法。

4. 物理定律。一個實驗通常引起量之測定，例如在簡單情形中，長度，時間，溫度，重量等之測定，單獨一個實驗大都不夠發明一個定律。此外又作多數單獨觀察；其中依適當方法變更實驗狀況，例如說明自由落體落下距離與時間之關係之定律，其決定並非單憑一個實驗，但為此須依不同落下高度，作多數之觀察，其結果為一組各由二個或更多相關聯之數組成之數。在本例中，為落下高度及與之相當之落下時間之數，若能從互相關聯之數目間，得到一個適合全部結果

之算學關係，則可由求出一個物理定律(*physikalisches Gesetz*; *physical law*)，例如在上述情形中，顯出自由落體之落下高距 S 與落下時間之平方為比例，故該定律可依 $S=at^2$ 算學式表示，其中 a 表一常數，其意義須藉別法考慮或由實驗推知，而其數值可由實驗中求得之數算出。一物理定律故通常可由算學方程式表示之。在少數情形中，一定律單有一種簡單說明，例如說明某一定過程在某一定狀況下可以實現或不可以實現。照習慣，凡物理定律，其可由方程式表示者，總須表示之，蓋由方程式表示之意義，不但最短且大概又最明白。

凡定律其根據確實可見的物理現象而設者，決不致再被根本的推翻。然有時因觀察所用之儀器改良或觀察之範圍擴充，一已知的定律僅在往日觀察範圍內夠充分有效，故不完全。一完全的法律必須能歸納此已知的定律於其中，而以此為一特殊情形。如是，則該已知定律之有效範圍或經推廣或經縮小。（例如參考牛頓及愛因斯坦之萬有引力定律，§ 542.）

定律名詞係根據一種空想而來，以為定律乃一無過失之權威所制定，世界萬物均被迫而須完全服從之。自然律與人類之法律不同，具有絕對束縛性。吾人確信若在自然界中發見與一已知有效的定律相悖之事實，則此並非因自然界犯了一種過失，但因吾人尚非真正明瞭該定律之全部輪廓。

連續的經驗指出當初根據各個自然現象之實驗而成立之物理定律，因其多數經證明為少數極廣義物理定律之特殊情形，今日已大量減少。準此，則在宇宙中呈在吾人目前而可供吾人觀察之過程經比較少數廣義物理定律所支配。物理學定律向依廣義的方向發展殆無疑問。

假說 (*Hypothese*; *hypothesis*) 云者，乃一物理定律或一物理事實之說明而仍須最後證實者也。然其在有反對論證發現以前，似為最適於解釋若干觀察者。假說之科學的價值，在於探究工作以一種關於實驗作法之指示，俾尚未十分解釋明白而尚有問題之現象由實驗而得最後的理解。假說之結果，故不外被推翻或被確認為一種顛撲不破之

物理事實，宛如一定律。例如主張物質由分子及原子構成者在不久以前，本為一假說(§ 14)，在今日則成爲一種不致顛覆之物理事實矣。

由實驗在地球上發明之定律，其效力不限於地球上。又在宇宙間任一物理過程觀察之結果，在地球上未有不合法者。在地球上認爲真確之定律向來足資解釋在其他天體上察得之自然過程之大概。在今日或覺有不全然者，實因在天體(例如恆星)上之狀況與地球上不同之故。

5. 物理學之分類。物理學可純憑理論大別爲若干要門如下：

1. 動力學。動力學者，討論物體之運動及因受力之作用影響而改變其運動及其他物理特性及狀態之科學也。至於力之由來，在動力學中則不涉及。力學之一特別分部爲分子之力學。其最重要的應用見於熱學中。聲學因其僅與物體之一特種運動有關亦爲動力學之分部。

2. 力之科學。屬之者有：a) 萬有引力 b) 電力及與之有密切關係之磁力。在b項下，光學亦屬之。

3. 物理統計學。此爲或然率(近真率)微積學定律在有極多數個體參預之物理現象上之應用。蓋在是種現象中，所欲決定者，並非爲一個體之情形，但爲全體之平均情形。

4. 振動學。此科討論各種週期性變化之一般的合法。

5. 物質構造學。其中討論原子之構造，分子由原子之組成及物質由原子及分子之組成。

在本書中各章大致依上述之分類法而設。如第四，五，七至二十諸章係討論含上述意義之動力學。其間因據教授上的理由插入關於萬有引力之第六章。此章依據上述分類法與第二十一至三十二章(電學，磁學及光學)同屬於力之科學。第三十三至三十五章討論物質之構造。第三十六及三十七章討論相對論，係屬於動力學，然亦可視爲屬於力之科學。物理統計學之主要應用見於第十，十四及十九章中，至振動學則分配在第十二，二十八及三十章中。

第二章 量度及計量

6. 物理測計之本性及目的。如以上所述，多數物理知識係從實驗之數量的結果而求得，故由於測計一定之量。

大多數物理量，例如速度，電流等不能直接測計，但祇能間接由測出其他直接可測之量而決定。直接可測之量，首為長度，物理量之測計，幾乎均可歸根於長度之測計，例如凡一切由讀出標度尺上指針指出之數而決定之測計統屬之。在標度尺上，指針離開零點之距離係表使指針運動之作用之大小，例如在時計，指針氣壓計（輪氣壓計），電學計器中常見之，長度之測計，故可視為最重要之物理測計。一個重要計量法，為消盡法，(Nullmethode; zero method)，其中以一可測計且可變動之等大反作用準確消盡另一作用。其一例如天秤是。天秤中經一重量惹起之偏轉由加上一已知之等大重量使之恰相抵消。

各種計量法無一不根據與一其他同種量之比較，是種比較有直接與間接之分。直接者，例如在天秤中，間接者，為此所用之計器先藉同種已知量刻度，例如電學計器。欲將測出之結果以公認的數值表出，則須先決定各種物理量之量度單位 (Maßeinheit; unit of measure or measurement)。測出之數字，故示含有之量度單位之倍數。是種數字可為整數，分數或無理數，然實際大都依小數式表示之。至可求得之數字位數與可達到之準確度有關。物理計量法決無絕對準確者，而不準確之程度隨所用之計器及方法之準確程度而異。物理量中有可準確測至真值之一百萬分之幾者，例如長度及質量是。（參考 § 51 4.）

7. 長度之測計。公認的長度單位 (Längeneinheiten; length units) 各國多不同。英美所用者，名為英尺或呎。歐洲大陸各國所用者，名為厘米，其百倍為米（公尺）。英美之長度制非十進制，例如一英尺或一呎分為十二英寸或十二吋，每三呎為一碼¹⁾，1760碼，為一英里或哩，故應用時頗不便。至以厘米為單位之制度，則為十進制度，例如1米 = 10分米，1分米 = 10厘米，1厘米 = 10毫米等。此制度為科

¹⁾ 中國舊市所用之市尺等於一米之三分之一。 ²⁾ 1米 = 3937/3600標準碼。

學界所公認，中國亦採用之，常名爲國際制度。

1米之長，在1791年經國際會議決定，係等於地球一象限(循經線自赤道至一極之距離)之千萬分之一。根據當時關於該距離之認識，乃創製，標準米尺¹⁾。此尺係由白金(略含銀)製成，現今置在巴黎國際度量衡局內。一米之長等於在冰點時此標準米尺上兩刻度之距離。其他文明國悉存有此標準尺之精確複製，藉資校正供準確測量用之尺棒¹⁾。

標準米尺既爲一完全任意決定之單位，故若一經毀滅，絕無重製之可能，因此將其長以另一單位確定而此單位縱使在一別個天體上亦可隨時複製。此種單位即光之波長單位。吾人爲此選定譜之紅光譜線並確定其在乾燥空氣中760毫米之壓力下之波長等於 643.84696×10^{-9} 米(所謂波長標準；Wellenlängennormal；wave length standard)。

當測計與單位相較極大或極小之量時，所得之數常過大或過小，頗爲不便。因此之故，關於若干物理量又採用導出單位，俾可免除是種不便。於是決定如下：單位名之前綴字什(Deka-)，指該量度單位比較基本單位大十倍，例如1什克等於10克。單位之千倍，冠以仟(Kilo-)，其百萬倍概冠以，百萬¹⁾(Mega-或Meg-)二字，例如百萬歐姆。一單位量度之 $1/10$ ， $1/100$ ， $1/1000$ 及 $1/1000000$ 亦有相當前綴字，如分(Dezi-；deci-)，厘(Centi-)，毫(Milli-)及微(Mikro-；micro-)；至單位之 10^{-9} 及 10^{-12} ，則用前綴字毫微(mll)及微微(llll)表示之。

在各量度單位制中，其可能的導出單位，實際僅擇有實用者用之。茲將從米導出之常用單位列下：

$$1 \text{ 仟米} = 10^3 \text{ 米，}$$

¹⁾ 物理量度單位之定義有原始科學的定義與實用法定的定義之別。根據法定的定義，自可依立法時可能的準確標準製出與科學的定義相應之原型，例如製出長度正與米之原始定義相應之尺棒。一般量度技術之進步，發見法定單位與科學單位略有出入，因實用上的關係，國際法定單位自然不致變化。(參考頁314)。

Kilo meter = 10^3 m $\mu = 10^{-6}$ m
 deka = 10 m $\text{m}\mu = 10^{-9}$ m
 decimeter = 10^{-1} m $\mu\mu = 10^{-12}$ m
 centimeter = 10^{-2} m $\text{\AA} = 10^{-10}$ m
 millimeter = 10^{-3} m

8

大學物理學

1分米 = 10^{-1} 米，

1厘米 = 10^{-2} 米，

1毫米 = 10^{-3} 米，

1微米 = 1mm = 10^{-6} 米 = 10^{-3} 毫米，

1毫微米 = 1mm = 10^{-9} 米 = 10^{-6} 毫米，

1微微 = 1mm = 10^{-12} 米 = 10^{-9} 毫米。

在光學中，又用埃斯特稜單位 (\AA = \AA ngström-Einheit; \AA ngström unit) 及 X單位 (X-Einheit; X unit)，兩者均為表光波之長度單位。1埃斯特稜單位 = 10^{-10} 米 = 1/10毫微米，而1X單位 = 10^{-11} 厘米 = 10^{-13} 米。

為表示天文學中之極遠距離，以千米為單位尚感不便。為此在宇宙中用光年為長度之單位。所謂一光年云者，即表光一年間所進展之距離。光之每秒平均速度既極近300000千米（參考 § 399），故在1年間可進展之距離

1光年 = $60 \times 60 \times 24 \times 365 \times 300000$ 千米 = 9460,800,000,000 千米，或約 94 兆千米。現今又常用一種天文長度單位，所謂星距 (Stern-weite 或 parsec) 是。凡距地球1星距之一星，自該星以視地球軌道之半徑時，似適成1弧秒。

1星距 = 206265地球軌道半徑 = $3\frac{1}{4}$ 光年或近31兆千米。

若不用導出單位，則為免書較長之數字，又往往仍用基本單位，並將量度之數書作近於1之數再以10之乘冪乘積之。例如

1光年 = 0.94608×10^{13} 千米 = 0.94608×10^{15} 厘米，1毫微米 = 10^{-7} 厘米。

在物理學中，通常以厘米表示長度。厘米故為真正物理長度單位，尤其當說明含有長度單位之物理常數之數值時，此單位概用之。

從長度單位導出者，顯然為面積單位（方厘米，方米等）及容積單位（立方厘米，立方米等）。

欲測一物體之長度，最簡單之方法，與一大都分為毫米之尺棒相比較，視尺棒上之某兩線恰與物體之兩端相重，此兩線間之距離即物

體之長。然物體之兩端難得與尺棒上之兩刻線相重，大都一端與一刻線相重，他端則介在相鄰兩刻線之間。此時物體之長帶有零數。經練習之後，用一分為毫米之尺棒憑肉眼可準確測至 0.1 毫米。

欲得準確結果，常須用測徑器 (Schublehre; slide gauge, caliper) 螺旋測徑器 (Schraubenlehre; micrometer)，球徑器 (Sphärometer; spherometer)，蔡斯測厚器 (Zeisscher Dickenmesser; thickness gauge)，比長器 (Komparator; comparator) 等。

利用棒上之刻線以增進讀數之準確程度，往往用一游尺 (Nonius; vernier, 圖 1)，如圖所示，長者為主尺，短者為游尺。游尺上標度 O D ，其十格等於主尺上標度之九格。

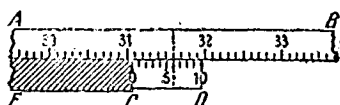


圖 1. 游尺。

使用游尺法，先使物體之一端與主尺之零線相重，他端與游尺相重。今讀出游尺上標度零線之位置，在圖中係在 31.0 及 31.1 毫米之間，即其整數為 31。次細查游尺上各刻線之中孰與主尺上之刻線相重。在第一圖中，例如第 6 線。此線與主尺標度之 31.6 線相重 (在圖中用虛線指出)，其與零線或與物體之右端相距 $54/10$ 刻線。所測之全長故為 31.6 厘米— $54/10$ 毫米或 31.00 厘米。由此可知游尺標度與主尺標度一刻線相重之刻線數——在此情形中即第 6 線——直接示毫米零數。然兩數大都並非準確相重。用帶精製標度之游尺時，視兩線偏差之程度尚可估計第二位小數。游尺中其一格與主尺上一格之差尚有較主尺上一格之 $1/10$ 為小者，如 $\frac{1}{20}$ 或 $\frac{1}{30}$ 。用是種游尺測得之結果自然較為準確，其理則一。總而言之，欲測主尺上一格之 $\frac{1}{n}$ 時，將主尺上之 $n-1$ 格等分為 n 格，刻於游尺上。如此游尺上之一格等於主尺上一格之 $\frac{n-1}{n}$ ，兩者之差適等於 $\frac{1}{n}$ 。故游尺每移動 $\frac{1}{n}$ ，其前之一格即與主尺上之一線相重。視其相重之處為游尺上第幾格，即知其零數為 n 分之幾。

又有一種游尺，其一格較在主尺上之一格反長 $\frac{1}{n}$ 者，其理仍與上

同。不過游尺每向右進 $\frac{1}{n}$ ，游尺之左邊即有一線與主尺上之某一線相重。因此，游尺上1, 2, 3等數字須自右至左刻成。

游尺之另一應用為角度之測定，此時之主尺為一刻度盤，係將圓周等分為若干細格而成。游尺亦為一同心圓弧，係將主尺上之 $n-1$ 格等分為 n 格而成。其應用之理全與上同。

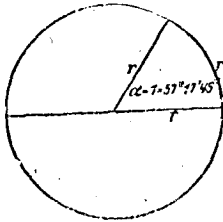


圖2. 角之弧單位。

種種器械上皆備有游尺以測零數，例如游標測徑器。

8. 角之測計。角之普通單位為1度(1°)，即為直角之九十分之一。1度之六十分之一作1分($1' = 1/60^\circ$)；1分之六十分之一作1秒($1'' = 1/60'$)。在算學及物理學上，常以弧度計算為便。1弧度為以等於半徑 r 之間弧對於

於圓心所張之角度(圖2)，係等於 $360/2\pi$ 普通度，即

$$1\text{弧度} = 57.2958^\circ = 57^\circ 17' 45''$$

$$1\text{普通度} = 0.017\text{弧度}。$$

在物理學上常用之測角法，將兩長度比較，所得之商成為擬測之角之正弦，餘弦或正切。故若已知該角之函數，則可在函數表上求出角之普通度數，或必要時換算而為弧度數。

角小時——通常在 6° 之下——其以弧量度表示之值極近角之正弦值或正切值，等之，不致有大的誤差。例如 6° 等於0.1047弧度，但 $\sin 6^\circ = 0.1045$ ， $\text{tg} 6^\circ = 0.1051$ ，故 6° 時之誤差尚小於1%。

若干物理儀器尤其光學儀器，必須裝有極準確之刻度圓弧。儀器一分部之旋轉可在弧上準確讀出(例如在經緯儀，分光計，砲上照準器等中)。刻度圓弧上之指位刻線沿一固定刻度圓盤旋轉(或圓弧固定，圓盤旋轉)。此刻線先後兩位置之角差，即為儀器移位前後之角差。在是種儀器中，角之測定亦應用游尺原理(參考§7)。往往在主尺上1度分作4格，而主尺標度之20格等於游尺標度之30格。游尺直

接指出：分之零數——因一格之差等於 $1/4$ 度之 $1/3$ ，或等於 $1/2$ 分，

由球心達一部分球面之邊之輻線，其全數包含一立體角。若命 f 表該球面部分之面積， r 表半徑， ω 表立體角，則

$$f = r^2 \omega \text{ 方厘米} \quad \text{或} \quad \omega = \frac{f}{r^2}.$$

球之面積 f 既等於 $4\pi r^2$ 方厘米，故在球心之立體角等於 4π 。依據上式，當 $f = 1$ 方厘米及 $r = 1$ 厘米時， $\omega = 1$ 立體弧度。換言之，立體角之單位等於半徑自乘之球面積對於球心所張之角度。至球面部分之形狀全無關係。

9. 時間之測計。科學上採用之時間單位，曰秒。其定義為 $60 \times 60 \times 24$ 秒 = 86400秒，等於一平均太陽日 (Sonntag; solar day; 就一年中子午線連續兩次經過太陽之時間而平均之。一子午線連續兩次經過一恆星之時間，名曰1恆星日 (Sterntag; sidereal day)。地球繞行恆星一周須自轉366.2422次，而繞行太陽一周祇須自轉365.2422次，故一恆星日之時間計23時56秒平均太陽時間。平均太陽日並非為絕對不變之時間量度。據天文觀察，其期間經極緩慢的週變而可有數秒之相差。地球自轉之速度，因潮波不絕的摩擦，略微減小。

測定時間所用之裝置，為通常之鐘錶，係應用振體之等時性製成。其中經精密裝置，其進行步調保持嚴格一定速率之一種，曰時計，可測出十分之一秒。如欲測定更短之時間，則可用時間記錄器。又利用音叉之振動亦可精密測定時間。

10. 無向量及向量。在物理學中，量分為無向量 (Skalare, scalar) 及向量 (即有向量; Vektor; vector) 二種。前者僅須說明數量及量度單位已足以完全確定其性質，例如長度，面積，容積等均為無向量。後者，不但須說明其數量及量度單位，且須指出其方向，例如速度為一向量。一列車之進動，若僅說明其速度之大小，尙未能完全確定其性質，但須指出其進動與南北向所成之角，即其進動方向。表向量之法，可作直線，以其長度表向量之大小（長度等於向量之大小或與之為比例），以加於直線上之矢首表向量之方向。

爲與無向量區別，向量係用哥德體活字表明（例如 $\alpha, \beta, u,$ 等）。各向量可視爲含一等大無向量而名此無向量爲該向量之絕對量。

表示兩相等向量之方程式，具有雙重意義。設命 $\alpha = \beta$ ，則此不僅說明向量 α 及 β 之絕對量 A 及 B 係相等，且指出其在空間有同一的方向。此事實向向量方程式中務須注意。A 等於 B 但未必 α 亦等於 β 。

當僅有一向量或有多數同向或反向之向量時，往往必須說明向量之絕對量並於向量之前，加正負符號，以示區別。在此情形中，向量之間，可用代數法處理之。

11. 向量之合成及分解。向量相加時，不僅須示其大小（其絕對量）且須注意其方向。普通代數加法僅對於無向量適用，至向量最好用圖示法處理之。用圖示法表示兩無向量 A 及 B 之加積，法作兩線，其長分別爲 A 厘米及 B 厘米，令之相接並量 $A+B=R$ 之長度，（圖 3a）。A, B 兩線毋須在一直線上，但可任意彎曲。其結果，即合成線之長恆相等。

求向量 α 及 β 之和，令表一向量之矢之矢首與表其他向量之矢之矢尾相啣接，然後自第一矢之尾作一直線以達第二矢之尾，成爲向量矢 α （圖 3b）。 α 遂成爲 α 及 β 兩向量之向量和或合向量（vektorielle Resultierende, Resultante; resultant of vectors）。此法可推演至用以求任何多數之向量之和（圖 4）。各向量可在空間取任何方向，而毋須如在第 4 圖中均在同一平面內。又其各矢啣接次序亦隨便。

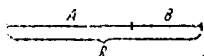


圖3a. 無向量之加法。

$$A+B=R.$$

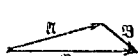


圖3b.

向量之加法。

$$\alpha + \beta = \alpha\beta$$

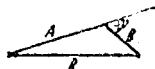


圖3c.

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\gamma}.$$

是種向量加法（Vektoraddition; vectoraddition），與代數加法相似，可由

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = \alpha \quad (1)$$

方程式表示之。

是種方程式之意義但與代數方程式之意義不同，故並非純為關於向量之大小（絕對量）之問題。設命 A, B 及 R 表 α, β 及 γ 之絕對量（圖 3b），則當 $\alpha + \beta = \gamma$ 時，決非又 $A + B = R$ ，但由應用餘弦定理，從第 3c 圖讀出

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\gamma}, \quad (2)$$

其中 γ 表由 α 及 β 兩向量之方向所成之角。

除如在第 3b 圖中所示之作法外，又往往用平行 $\alpha + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta = \alpha$ 。

四邊形作法 (Parallelogrammkonstruktion; parallelogram construction. 圖 5)。作一平行四邊形，法令兩向量矢之尾會合，次完成一平行四邊形，然後從尾角繪一對角線。此線依大小及方向等於 α 及 β 兩向量之合向量。

由向量加法組成合向量 γ 之 α, β 等量，曰合向量之分向量 (vektorielle Komponente; component of vectors)。

一向量往往須分解而為數分向量。其法與上述之方法適相反。設命 α 表欲分解之向量。從 α 之始點（即向量矢之矢尾）取兩分向量之方向繪成兩分向量矢。次從兩分向量矢之矢首作與兩分向量平行之線（圖 6a 及 b），於是成一平行四邊形，其對角線即原來之向量，而從其始點引出之兩邊分別表 α_1 及 α_2 二分向量。分向量依所取之方向，其大小全不同，而此可由比較第 6a 及 b 圖明之。

依上述作法原則，一向量亦可分解而為二個以上之分向量。通常將一向量分作依坐標系三正交方向之三分向量。

設命 α 表取任一方向之向量， α_x, α_y 及 α_z 表依三個正交方向

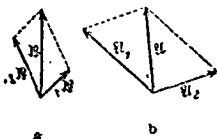


圖 6. 一向量之分解。

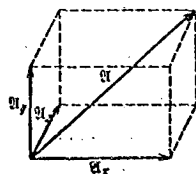


圖 7. 一向量分解而為三個正交分向量。

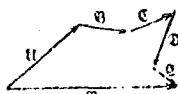


圖 3b.

之三分向量(圖 7)，則

$$\alpha = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z, \quad (3)$$

若向量 α 之絕對量為 Λ ，其三分向量之絕對量為 Λ_x 、 Λ_y 及 Λ_z ，則

$$\Lambda = \sqrt{\Lambda_x^2 + \Lambda_y^2 + \Lambda_z^2}.$$

第三章 物 質

12. 物質不滅律。在自然界中可觀察的自然現象，無一不與物質(Materie; matter)之存在有關，並均以物質為根由。凡物質若能變化，尤其受化學作用時，或似能全部消滅，如經溶解之石鹽，經蒸發之水等。在此種情形中，然可證明物質並不消滅，但僅變其狀態，以故吾人往往不能直接觀察。據經驗知物質不能消滅，但祇能在某一定範圍內變動其性質。此定律曰物質不滅律(Erhaltungsgesetz der Materie; law of conservation of energy)。物質又不能創生。(在今日常論物質可變為射線，此種可能性(§ 539)在是處不便說明之。)

上述之不滅律，不過為物理學中不滅律之一，其與其他不滅律共成為物理學之最重要的基礎。

13. 集合狀態。物質分為固體、液體及氣體。此三狀態謂之物質之三集合狀態(簡稱三態; Aggregatzustände; conditions or states of aggregation)。其所以然者，僅因物質間對於形狀及容積變動之抵抗大小不同之故。

a) 固體對於形狀及容積之變動，抵抗最力。是以欲改變其形狀或壓縮其容積頗不容易。

b) 液體對於形狀變動不予抵抗或至多祇有些微之抵抗，但對於容積變動仍予大的抵抗，其變形不難，概隨容器之形狀而變，但壓縮頗不易，且常較固體為難。

c) 氣體對於變形及膨脹均無抵抗，但對於壓縮略有抵抗。其在容器或現成之空間內自由膨脹並占有之。

嚴格言之，僅結晶質體可稱為固體。其他如火漆，在冷態之滯

青，玻璃等，不過爲視固體，因若任變形原因作用至久，率可表顯如液體之特性。施力使其變形，雖遭抵抗，但究屬可能（受範的）。其與真正固體之另一差別，爲因其無一定之熔點。結晶體及結晶質體亦有受範性（*Plastizität; plasticity*）。其受強力長期之作用亦呈受範狀態，惟受範程度不及火漆等非晶質體遠甚。結晶質體與非晶質體之真正重要差別在於分子構造之不同。

14. 關於物質構造之導言。設將一單純（均勻的）固體，液體或氣體分解而爲較小部分，則各部分與原來整個體之差別僅在大小及形狀之不同，而其物理的性質則一也。舉譬言之，人衆先分爲羣，而羣再分爲亞羣，就一般的性質而言，羣及亞羣與原來全部人衆並無差別。若如是再三細分，則最後乃達其極限，即當時各羣祇有單獨一人。同樣，物體若一再細分，亦達其極限，而此極限若非再進一步深究其物質的內容，決不能超越之。人衆中所謂個人，在物體中即所謂分子及原子，是皆物體之組成材料也。各種物質以所含之分子不同，其性質故異。凡能察見之物體，各含有無數之分子。吾人周圍之空氣，每立方厘米含有約 $37 \div 10^{18}$ （即 $27 \times$ 百萬之第三乘冪）個分子，在1克水中，含有 3.37×10^{21} 個分子。一氫分子之重，僅約 3.3×10^{-24} 克，故 1×10^{21} （兆乘兆）個氫分子，僅重約3.3克（896）。

在固體中，其分子因受其間頗大之引力作用，互相密接，並被維持在大致一定之位滯內。在液體中，分子亦頗接近，但其間作用之引力不及固體中之大，以是分子並無一定固定位置，但可自由滑動。此種情形在氣體中尤爲顯著，其分子間作用之力概極小，因而氣體分子間之距離遠較固體或液體中爲大。

就一般言之，分子及原子恆含有電荷，而在分子及原子間，物體賴以結合者之力，在大多數情形中，爲是種電荷間之電力（其詳見第三十三章）。

第二篇 剛體之力學 重力

在本篇中討論之範圍限於剛體(Starre Körper; rigid bodies)，申言之，限於理想的固體，其形狀及容積不因受外力之作用而顯然變動。

第四章 運動學

15. 質點之定義。為便於考慮下列諸問題，吾人尋常不注意實際物理體之性質，但設想一極小而可視為充分近似一點之物體之性質。是種理想化物體，名曰質點(Massenpunkt; partiole)。質點可想像為一極微細的球顆。物體如是理想化之優點，在於其在空間之位置可由說明其在坐標系中之位置無疑義的說明；若為一廣大體，則因其各部分占不同空間位置，此殆不可能。(吾人在日常生活中固常視一廣大體為一質點，例如當就經緯度以說明一輪船之位置。因物體——在是處為一輪船——所占之空間與問題中有关之空間相較極小，該物體可視為僅占空間之一點，而不至惹起重要的誤差。)為說明一點之隨時的位置，照例用一直角坐標系，其零點(軸之交點)及軸之方向依便於討論當前問題之情形而選定。間或亦以用極坐標系為較便。

16. 運動。一物體之各種位置變化，曰運動(Bewegung; motion)。評述一運動與觀察者之所在有關。坐在車內之人，就與車之相對的位置而言，自覺完全靜止，但車外之人見之，知其與車共在運動中。其在車內之運動，在車內所見者又與在地上所見者不同。故當說明一質點或一物體之運動時，務須說明觀察者當時之所在，申言之，係從何處觀察或以何點為靜止點。

在物理學上概以地面，實驗室內之檯桌為靜止體，並使各運動均與此二者相聯繫。因此，為確定一物體之隨時之位置，可應用一坐標系，而設想此系與地面相聯繫。

運動以其有速度 (Geschwindigkeit; velocity) 為特性，速度不但由其數值，且又由其方向相區別，故速度為一向量 (§ 10)。

17. 直線上之運動。先設想一簡單情形，命一物體(質點)在一直線上運動。在此情形中，既不拘運動依此方向或依相反之方向，速度之向量本性可略去不計，是處故僅須討論與絕對量之關係 (§ 10)。

設命坐標 s 表徑路上之一點，物體運動之結果，使 s 變位，此變位之大小視運動時間 t 之長短而定，申言之， s 為 t 之一函數，即 $s = s(t)$ 。一物體在徑路上之速度 v ，據定義係等於一微分商，

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1)$$

ds/dt 為正時，速度為正，坐標 s 隨時間增加，方向相反時，速度為負，故速度正負完全隨方向決定。在有正速度時，位置坐標之數值隨時間增加。(在公路上自 A 向 B 之行走者，若路程自 A 算起，其速度為正，若自 B 算起，其速度為負。)

就一般而言，一物體之速度並非不變，但為時間之一函數， $v = v(t)$ 。凡是種速度因時而變之運動，謂之加速運動。據物理學上演述之習慣，有加速運動之物體，其速度之絕對數值並非一定增加，但亦有減者。在單位時間內所起之變位，謂之加速度 (Beschleunigung; acceleration)，而係由下列微分商數表示之

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ 或據第1方程式 } a = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (2)$$

速度之數值隨時間增加時，加速度帶正號；反之，帶負號。(應注意者，一負加速度並非即為速度絕對量減小之表示，設有一物體依徑路坐標遞減之方向運動，其速度故為負，加速度亦為負，但速度 v 之絕對量却增加。) 但

但由第1方程式經積算得

$$\int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1 \quad (3)$$

其中 s_1 及 s_2 分別表物體在 t_1 及 t_2 時之位置坐標，故積分 $\int_{t_1}^{t_2} v dt$ 表在時間 $t_2 - t_1$ 之間所進行之路程等於 $s_2 - s_1$ 。為算此積分必須已知 v 為 t 之函數。

最簡單的運動為帶等速度之直線運動，名曰直線等速運動。在此情形中，由方程式(3)得，

$$s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1), \quad \text{或 } v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}. \quad (4)$$

故速度等於路程與時間之商，而此可由測定在時間 $t_2 - t_1$ 之間所進行之路程 $s_2 - s_1$ 而確定之。

如已知物體在時間 $t = 0$ 時在位置 s_0 ，以後在時間 t 時在位置 s ，則可由下列方程式代替方程式(4)

$$s = s_0 + vt, \quad \text{或 } v = \frac{s - s_0}{t}. \quad (5)$$

同樣，由積算方程式(2)得

$$\int_{t_1}^{t_2} a dt = \int_{v_1}^{v_2} dv = v_2 - v_1. \quad (6)$$

欲用此積分，須知加速度 a 為時間 t 之函數。若就簡單等加速運動而言，由方程式(6)得

$$v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) \quad \text{或 } a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (7)$$

等加速度故可由計算時間 $t_2 - t_1$ 內所增加之速度 $v_2 - v_1$ 決定。若在時間 $t = 0$ 時，速度等於 v_0 ，以後在時間 t 時，速度等於 v ，則據第7方程式

$$v = v_0 + at. \quad (8)$$

若將此 v 值代入第3方程式中，並再積算自 $t = 0$ 至 t 之值，則得在等加速運動中在時間 t 時所到達之位置 s

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (9)$$

在是處 s_0 復表物體在時間 $t = 0$ 時之位置， $s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ 表在時

間 t 內所進行之路程。

18. 在空間之運動。速度既為一向量，故任一運動在各瞬間均可依一直角坐標系 x, y, z 之軸向分解而為三分運動，速度之絕對量假定為 v ，三成分之絕對量假定為 v_x, v_y 及 v_z ，此時與方程式(1)相當，得如下之結果

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (10)$$

及

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2}} = \frac{ds}{dt} \quad (11)$$

(參考 § 17)。恰如在直線運動中，在此處

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

復表物體徑路之一無限小段。

同樣，求得加速度 a 之分加速度如下：

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (12)$$

又

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (13)$$

如已知 v 及 a 之分值均為 t 之函數，則可將 (10) 及 (13) 兩方程式恰如 (1) 及 (2) 方程式積算之，於是得分速度 v_x, v_y 及 v_z 及位置坐標 x, y 及 z 均為時間之函數，

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

若由此三式消去 t ，即得關於 x, y 及 z 之兩方程式，而此兩方程式即示物體之徑路曲線，（此兩方程式各代表空間之一平面，而此兩平面之切線即徑路曲線。）

凡運動，其中至少三個分加速度 a_x, a_y, a_z 之一異於零者，均為加速運動。因此，凡曲線運動不拘徑路速度變更與否均為加速運動。舉一簡單例言之，設想一旋體在 x, y 平面內以等周速度循一圓周旋轉。在此情形中， $a_z = 0$ ，但依 x 軸及 y 軸之方向，物體有加速度。

其大小及方向作週期性變化(§ 20)。

在空間任一運動中，與(1)方程式相當之關係 $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ 不適用。在是處

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

而此方程式絕不與 $\frac{d^2s}{dt^2}$ 相類似。一物體之循徑路之加速度 $\frac{d^2s}{dt^2}$ ，其絕對量照例比較加速度 a 為小。

其一例如圓運動是，其等徑路速度 ($\frac{d^2s}{dt^2} = a$) 有一一定加速度 a 。

19. 速度及加速度之向量。欲由向量表示物體之運動，必須亦視物體之徑路要素為向量，因此不但具有大小且又有方向之特性也。今命 \vec{O} 表速度向量，據定義，速度等於一微分之商

$$\vec{O} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad (14)$$

式中 $d\vec{s}$ 表物體在 dt 時間內進行之一段無限小的路程，且據以上所述，為一向量。

物體在一直角坐標系 $x y z$ 內運動，其向量 \vec{O} 可依三坐標方向分解而為三分值如下(§ 11)：

$$O_x = \frac{dx}{dt}, \quad O_y = \frac{dy}{dt}, \quad O_z = \frac{dz}{dt}, \quad (15)$$

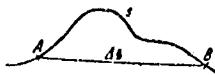
其中 dx , dy 及 dz 表向量 $d\vec{s}$ 之分向量或分值。據 § 11, 方程式(3), 其關係可由向量方程式說明

$$\vec{O} = O_x + O_y + O_z. \quad (16)$$

今欲照方程式(3), § 17, 成立速度 \vec{O} 之從 $t=0$ 以至 t 時間內之時間積分。由(14)方程式

$$\int_0^t \vec{O} dt = \int_{t=0}^t d\vec{s}. \quad (17)$$

為明瞭此方程式右邊之意義，必須牢記積分係一種總和，在本情形中，故為無限小向量 $d\vec{s}$ 之總和，而為物體在 t 時間內所進行者，且

此總和係根據向量加法之定律而成立 (§ 11)，故須將徑路之各分段 $d\bar{s}$ 先後啣接，恰如在第4圖中令 α, β, γ 等依次序啣接者然，§ 11. 是種依次序啣接之線系， 為在時間 t 內所進行之全路程 s 。然積分之總值，即 $d\bar{s}$ 之總和，須依第 § 11 中說明之方法求得，申言之，在線上各附向量矢，並連接此徑路之始點 A 及終點 B ，積分 $\int d\bar{s} = \Delta\bar{s}$ ，故與所進行之路程完全不同，係示在 t 時間內物體之依大小及方向之位移 (Verschiebung; displacement)。除非直線運動，其值恆較路程 s 為小。

恰如方程式 (2)，據定義向量加速度 \mathbf{g} 等於 $\dot{\mathbf{v}}$ 之依時間之微分商

$$\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (18)$$

\mathbf{g} 與隨時速度變化 $d\mathbf{v}$ 同向，因第18方程式確為一向量方程式。反之， \mathbf{g} 之方向通常與 \mathbf{v} 之方向不同。

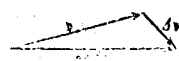
向量 \mathbf{g} 可依三坐標方向分解而為三分向量，恰如 (15) 及 (16) 方程式

$$g_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad g_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad g_z = \frac{dv_z}{dt}, \quad \mathbf{g} = g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k} \quad (19)$$

若由方程式 (18) 成積分

$$\int_0^t \mathbf{g} dt = \int_0^t d\mathbf{v} \quad (20)$$

則依據 (17) 方程式中所顯示之意義， $\int d\mathbf{v}$ 當表在積算時間 t 內諸向量

 速度變化 $d\mathbf{v}$ 之總和。茲命 $\int_0^t d\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}$ ，則時

間完終之後。

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v} \quad (21)$$

其中 \mathbf{v}_0 表時間 $t=0$ 之速度向量。 \mathbf{v}_0 及 $\Delta\mathbf{v}$ 依向量法相加 (圖9)。此二者通常異向。

O_0 及 $b_0 + \Delta b_0$ 之絕對量，有時可等大，但兩者之方向却不同。
其一例如帶等周速度之圓周運動 (§ 20)。

20. 角速度及角加速度。關於曲線運動，設想一質點在一定點 O 之周圍以等速度沿半徑 r 之圓周上運動，在此情形中，為說明一質

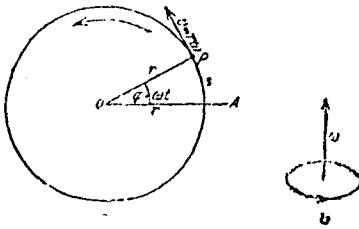


圖10. 圓周運動。

點 P 之隨時的位置，最使用一極坐標系，其中由圓周徑路之半徑 r 及一角 φ 決定該質點之位置。此角為連接質點 P 與圓周中心之線(向徑)與一通過中心之固定線 OA 所成(圖10a)。

r 既為一常數，則在圓周運動(或角運動)中，惟 φ 角變化，故位移可單獨由 φ 角說明之。 φ 變化愈速時，質點在圓周上之位移亦愈大。以弧度表 φ 角 (§ 8) 時，由該角所張之圓弧等於 $s = r\varphi$ 。若命經歷之時間為 t ，則其徑路速度

$$v = r \frac{d\varphi}{dt} = \varphi \omega. \quad (22)$$

$\omega = d\varphi/dt$ 名曰圓周運動之角速度 (Winkelgeschwindigkeit; angular velocity)，因 ω 表 φ 角變之速率，或即每秒間 φ 角之增加率。在一全轉之後， φ 角增至 2π 之值，二全轉之後，增至 4π 之值，而 n 全轉之後，增至 $n \times 2\pi$ 之值。

若角速度因時變化，則類似 § 17 中之說明，名此每秒間之變化，曰角加速度 (Winkelbeschleunigung; angular acceleration)，通常以 α 表之。即 $\alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$ 。

角速度及角加速度均為向量，因轉動軸線及轉動二者之方向均為轉動 (Rotation; rotation) 之標徵故也。表示角速度之矢線，其長與角速度之數值為比例，其方向與動體平面正交，而矢首所示之方向與右轉螺旋前進之方向一致(圖101)。是種向量之加法，其原理與其他向量之加法無異，而角加速度之加法亦然。

設想帶等角速度 ω 之等圓周運動並作一直角坐標系，而以圓徑路

之中心設在該系之零點(圖11a)•在此圓徑路上一點之坐標為

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (23)$$

式中 r 表圓之半徑, φ 表 r 之方向與正 x 軸線所成之角•設想一質點以等速度在圓周上運動,其越過正 x 軸歷 t 時間之後與其位置相當之 φ 角可由下列方程式表示之,

$$\varphi = \omega t. \quad (24)$$

又當時質點之坐標,

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t. \quad (25)$$

今據方程式(10),依 t 微算方程式(25),得速度之依 x 及 y 方向之 v_x 及 v_y 兩分速度

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t. \quad (26)$$

又依 t 再度微算方程式(26),得依此兩方向之加速度

$$a_x = -r\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x, \quad a_y = -r\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y, \quad (27)$$

是以與 x 及 y 之坐標為比例•

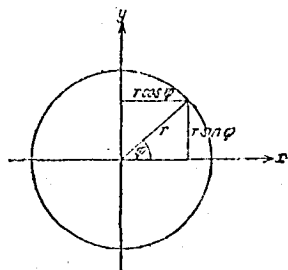


圖11a. 圓周運動•

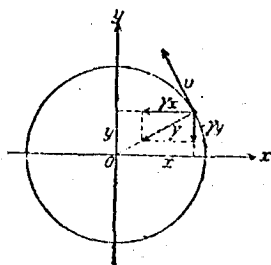


圖11b. 圓周運動中之加速度•

a_x 及 a_y 既為有限值,故上述之圓周運動,雖有等徑路速度,確為一加速運動(§ 19)•加速度之絕對量由下列方程式

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2 \quad (28)$$

決定之(圖11b)•加速度 a 之方向與速度 v 之方向正交•此種向中心之加速度,名曰法線加速度,以示與徑路或運動方向上之切線加速度有別•

今設想圓周運動之分運動僅有依 x 軸線之一種——如在圓外自 y 軸線上之一點直視一點作圓周運動——，則得一種有規則的往返運動，所謂週期運動或振動。其由方程式 (95) 表示之運動，曰諧運動 (harmonische Bewegung; harmonic motion)。(坐標與 \sin 抑與 \cos 爲比例，則全無關係，蓋當 ωt 之大小遞增時，此兩函數之變化全相等。至與 \sin 抑與 \cos 有關，祇視所選擇之 t 之零點而定。) x (或 y) 可有之最大值，以等於 r 爲度。 r 名曰振幅 (Amplitude; amplitude)。

第五章 在力之作用下之剛體

21. 力爲運動變化之原因。以上已說明速度之變化，但未曾涉及變化之原因。吾人嘗察見自然界中速度之變化，其中有關於其大小者，亦有關於其方向者，但速度因何而變化之原因却未之察見（例如自由落下，拋射）。在其他情形中，吾人嘗能直接認識其原因。例之顯著者，尤其該種原因係在人體內，而由隨意運用肌肉，影響一物體之運動，其結果或使靜者動，或使動者靜或改變運動之速率及方向。其中惟一有效之原因，爲人體肌肉之力 (Kraft; force)，故由人力可使物體得一加速度。然據科學知識之一基礎觀念，凡有同過程者，其直接原因必相同。準此，吾人在自然界中察見之諸加速運動爲一種與人體筋力相當之原因作用之結果，而此種原因亦名曰力。據同一理由，吾人可借筋力抵消一改變運動之原因（例如重力）之作用（例如以手支持一重，使之不落下）。然惟彼此性質相等者，其作用方能抵消。在是處有效之原因卽爲重，故重亦爲力之一種。

22. 慣性定律（牛頓之第一定律）。伽利略已說明凡物體非受外力之作用，其運動狀態無論關於速率或方向者必不變。在日常生活之實際情形中，爲維持地面上動體（例如車，舟等）之速度，必須有一力不絕的作用之，否則物體將靜止。其故因物體運動時受一種由摩擦而起之阻尼作用（在地上，軌道上，輪軸上，在水中，在空氣中）。物體作等速運動時，是種摩擦力推推力可克服之。若無摩擦力，則

例如一列車，一經開動之後，可無須機車即能在坦平軌道上以等速率進行不息。因冰摩擦阻力極小之故，在冰上一磨光鋼彈或一冰塊可移動甚遠之距離，方緩緩減低其速率。總之，一切物體，不論動的或靜的若不受外力之作用均有保持其現狀之性質，是曰慣性 (Trägheit; inertia)，凡物體皆有之。牛頓綜合各種結果，述此物性於成爲力學基礎之三運動定律或公理 (所謂牛頓之運動定律或公理；Newtonisches Axiom, Newton's law or axiom of motion) 之第一定律內如下：

“一切物體必維持其靜止或沿一直線作等速運動之狀態，非受外力之強迫，其狀態不變”。

物體靜止狀態其實亦容納在運動狀態內，因靜止可視爲速率 $v = 0$ 之運動。

牛頓之第一定律，因關係物體之慣性，故往往又名曰慣性定律 (Trägheitssatz; law of inertia)。又據另一說法：一切物體，若其速度依大小成方向變化者，必有一力作用之。或：一運動速度之依大小及方向之變化，其原因恆爲一力。

說明牛頓之三定律之拉丁原文(1687)如下：

1. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi ve movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

2. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur (§ 23).

3. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse nequales et in partes contrarias dirigi (§ 29).

照此明確原文牢記牛頓定律，誠有介紹之價值。

23. 慣性質量(牛頓之第二定律)·質量及力之單位·牛頓之第二定律(早在1632年由伽利略說明)如下：

，運動 (Mutatio motus) 之變化與作用之力為正比，其變化即發生於力所作用之方向上。‘

所謂，運動之變化‘云者，其意義自當先行說明之。設想一物體先後經不同大之力之作用，其運動之變化自然即為速度之變化，故與加速度相同而可謂加速度與作用之力為比例。然若施於不同物體，則不能再若是說明，蓋據吾人平日之經驗，不同之物體受同大之力之作用時，可發生極不同之加速度，因不同物體對於運動狀態同大的變化，起相差懸殊之抵抗，即因其具有不同大之慣性故也。物體之有是種不同的狀態係由於物體內之一特性，而此特性名曰慣性質量 (trägische Masse; inertial mass)，或簡稱物體之質量。物體之質量，故非為關於物質之名詞，但為關於物體一特性之名詞，因其表示一物體內含有之物質之量。

物體受同大力之作用，其加速度當慣性愈大或即物體含有質量愈多時，愈小。由是觀之，加速度 g 與作用之力 f 為正比，與該物體之質量 m 為反比，即 $g \approx f/m$ ，或 $f \approx mg$ 。以前既未曾涉及力及質量之單位 (Masseinheiten der Kraft und Masse, units of force and of mass)，故不妨變此比例式為一方程式而書之如下：

$$f = mg \quad \text{或力} = \text{質量乘加速度} \quad (1)$$

故，運動之變化‘云者，即指質量與加速度之乘積，一力既不僅以其大小且又以其方向為特徵，故為一向量，因此方程式(1)表示不僅兩邊之數值相等，且又指出 f 及 g 兩向量之方向亦同。

在祇論力之絕對量時，力由 k 表示，而(1)式可改書如下：

$$k = ma \quad (1a)$$

牛頓之第二定律實為關於力之一嚴格定義而為補充第一定律所必須者。此律說明力由加速度之大小測定而力之方向係與加速度之方向一致。次僅言某力所生之影響，而不計及物體是否尚受有他力之作用。數力同時作用於一物體上，則各力發生一相應之加速度。如作用之力之向量之總和為零，加速度無從發生，於是靜者恆靜，動者恆作

等速運動，與關於慣性之牛頓第一定律（慣性定律）相符。可知第一定律不過第二定律之一特殊情形而已。第一定律為 $f = 0$ ，與之相對待， f 不成爲零時，成爲第二定律，故第二定律與慣性定律相對待，亦名曰運動定律。最後，此定律爲關於慣性質量之定義。質量大者，慣性亦大，故利用慣性之大小亦可用作量質量之標準。

一立方厘米之水在 4°C （即密度最大之溫度）時所含之質量，曰質量之國際單位。（關於用此溫度之理由，參考 § 161。）此質量名爲1 克，從克導出之單位如下：

$$1 \text{ 厘克} = 1/100 \text{ 克}$$

$$1 \text{ 毫克} = 1/1000 \text{ 克}$$

$$1 \text{ 仟克 (公斤)} = 1000 \text{ 克}$$

$$1 \text{ 公噸} = 1000 \text{ 仟克}。$$

在英美各國多以磅爲質量之單位，一磅之質量等於 0.45359 仟克或一仟克等於 2.2046 磅。

質量僅有數量而無方向，故爲一無向量（§ 10），通常由其數量及所附之單位說明之。

測定質量之法，照例並不比較其慣性，但由比較其重或重量，申言之，係用稱秤定。質量單位之國際原型，爲在巴黎國際標準局一鉑銻合金柱體所成之，標準仟克¹⁾。其他文明國悉存有此標準之複型¹⁾。

一均勻物質之密度爲在一單位容積內所含有之質量，申言之，即該物質 1 立方厘米之質量（參考 § 56）。

據方程式(1)，若一力作用於有 m 質量之物體上發生如是大之加速度 g ，以致 mg 之乘積適有 1 之數值者，此力遂爲力之單位。例如當 m 及 g 兩者在厘米克秒制（§ 24）中各有 1 之數值時僅有一力單位。故又可說明之如下：

力之單位 (Einheit der Kraft; unit of force) 爲加於 1 克質量發

1) 另見 § 7 之註釋。據晚近之測定，標準克比較由其定義所規定者大 0.04 克。

生 1 厘米/秒^2 之加速度之力。據此定義而決定之力之單位，名曰達因 (dyn; dyne)，為力之絕對單位。

單位質量之物體所受之重力，亦可用作量力之標準，是為力之重力單位，對於重力，無特殊名稱，即於質量單位名稱之前綴一，重¹字表之，例如W克重¹。在與海面等高之地面上 (§ 53)，1克之質量受1克重之重力。1克重之 $1/981$ 等於1達因 (故1達因約等於1毫克重)，是為重力單位與質量單位之關係，英美用1磅重為力之單位，其 $1/32.2$ 為一磅達，即為加於1磅質量發生 1 厘米/秒^2 加速度之力。

24. 科學量度制 (厘米克秒制度) 及工程量度制。長度，質量及時間為科學量度制之基本量，而厘米，克及秒為其基本單位。此制故名曰厘米克秒制或簡稱C G S 制。其他屬於該制之特種量惟溫度一種。英美制以呎磅為單位，名曰呎磅秒制或 f. p. s 制。英制有用碼代呎者，特名曰碼磅秒制。

在工程上 C G S 制之單位一部分不適用。工程量度制 (technisches Maßsystem; technical system of measures) 中時間之單位仍為秒，長度之單位則改用米。然其與 C G S 制之根本的差別乃在不用質量，但用力為第三基本量。在工程量度制中，此第三基本量之單位為1仟克重或簡稱1仟克之力 (此時之，仟克¹已非質量之單位而為力之單位，須注意之)。此力等於 981000 達因 (§ 55)。在此制中， $力 = 質量 \times 加速度$ 之關係不變，但加速度自然以米/秒²計之。準此，一物體受1仟克之力之作用發生1每秒每秒米之加速度者，當有1單位之質量。由此易算出工程質量單位等於9810克。此種質量單位並無特殊名稱，通常以力/加速度，故係以仟克重 \times 秒²/米為單位而計算之。

英美各國常用之工程量度制以呎 (表長度) 磅 (表力量) 及秒 (表時間) 三者為基本單位，是為呎磅秒制。在此制中，質量之單位顯然為32.2磅，因加一磅重之力於質量32.2磅之物體，適生 1 呎/秒^2 之加速度，此質量單位有時名為斯萊。準此，則 f (以磅計) = m (以

¹ 中國之市斤等於500克重或半仟克 (公斤) 重。

斯萊計) $\times g$ (以呎/秒²計)。

25. 動量。由利用方程式(18), § 19, 可將方程式(1)(§ 23)改書如下:

$$f = m \frac{dQ}{dt} = \frac{d(mQ)}{dt}. \quad (2)$$

作用之力 f 故等於 mQ 與時間之微分商。此質量與速度之乘積 mQ 名曰動量(Bewegungsgrösse; momentum) 或質量 m 之衝量(impuls; impulse)。據此, 則牛頓之第二定律又可說明如下: 在單位時間內動量之改變等於作用之力。動量既為質量及速度之乘積, 故亦為向量。因之, 動量之合成及分解概遵向量之合成法及分解法。

由方程式(2)得

$$mQ = \int_0^t f dt. \quad (3)$$

動量為作用之力之時間積分。

在祇論動量之絕對量時, 以速度向量之絕對量 v 代速度向量 Q (§ 10) 並以 mv 表示動量之絕對量。在CGS制中, 動量之單位為1克每秒厘米。

26. 慣性力。 達蘭貝耳原理。方程式(In)又可書作

$$f + (-mg) = 0. \quad (4)$$

據達蘭貝耳(d'Alembert), $-mg$ 亦可視為一力, 而認此力由受加速度之質量 m 之慣性所發生並有反對加速度運動之作用。此力名曰慣性力(Trägheitskraft; force of inertia) 或慣性抵抗(Trägheitsresistance; resistance of inertia)。慣性力反對加速力, 兩者之絕對量且相等。方程式(4)說明在一加速體中, 加速力與慣性抵抗之和恆等於零(達蘭貝耳原理; d'Alembert'sches Prinzip, d'Alembert's principle, 1793)。

27. 力之加法。 平行四邊形定律。說明一力, 除示其大小外, 又須示其作用方向。故力為向量, 其加法概遵向量之加法 (§ 11)。

一物體在一點同時受數力(所謂同點力)之作用時，其加法，可先求兩力之合力，而後求此合力與另一力之合力，如是依次推求，得一最後合力，此合力加於該物體上，能發生如數力同時作用時之運動。故此數力可由其合力代之。

物體受力之作用，必於力之作用方向上，得一加速度。數力同時作用於一物體上，則各有一相應之加速度發生，彼此各不相涉，而縱使諸力相重疊時亦然。此事實牛頓早已知之，名曰力之重疊不妨害律或獨立作用原理 (Unabhängigkeitsprinzip; principle of independence of force)。

依圖法求力之合力，應用在 § 11 中說明之關於向量加法之一般之定則。先定各力在物體上之作用點，描出力之向量矢；次依次首所示之方向將各矢延長，若諸力作用於同一點上，則其合力恆可由圖法求得。然若作用於不同點上，則求合力圖之作法不若如是簡單。關於是種情形，茲設想諸力，故其向量矢，皆在一平面內。加於一物體之力，其作用點可沿作用線向前或向後轉移，而不致改變力之瞬間效果。(例如加於一車之牽引力其瞬間效果無論桿繫在車之前部或後部或在車軸上均不變。)此原則常稱為力之可傳性。如是，作用於不同點但同在一平面上之兩個力 f_1 及 f_2 若各沿作用線轉移時，悉會聚於一點

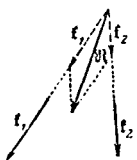


圖12. 作用點不同
之兩力之合力。

者，則可想像該點為其共同作用點，其合力可依一定之圖法求之。若在同面內尚有其他之力，則可依圖法先後加於第一合力上，如是求得全數力之總合力。

為免除誤會，應知力之瞬間效果不因作用點之沿作用線之位移而改變。至運動則除與外力之大小及方向有關外，又與慣性抵抗之作用有關，其前進全由作用點之位置決定。例如外力依在空間一固定方向作用於物體之表面，則在此力及其相反慣性抵抗之作用下，通常發生在空間之轉動，而此種轉動之性質全視外力作用於物體之前端抑在後端而決定。

一重要的特殊情形，例如兩等大而相反之力相遇於同一線上而互

和抵消(如兩等強隊拔河)·又若兩力同向且在一直線上者,其合力等於其代數的和·

若兩力平行,不拘同向或反向,則以上所述之平行四邊形作法顯然無效,因當時將各力沿作用方向無論如何移動總不能會聚於一點也·在此種情形中,須賴一種做作為助·法將兩力之作用點用一直線連接(圖13a)並於各點沿該線之方向添兩相反但相等之力 f_3 及 f_4 ,此兩力因互相抵消,故不發生效果·職是之故,此四力之效果,完全即為原來 f_1 及 f_2 兩力之效果,次作圖求出 f_1 與 f_3 之合力 R_1 及 f_2 與 f_4 之合力 R_2 ,此兩合力不再平行(除非如在後面討論之另一情形中, f_1 及 f_2 等大但相反者,§31),其合力 R 故可依圖法求之·此合力即為原來 f_1 及 f_2 兩力之合力·

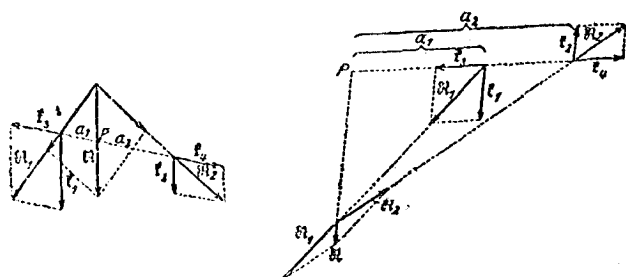


圖13. 兩平行力之合力·

由簡單算法,知合力 R ——顯然在同一平面內——之絕對量 R 當兩力平行而同向時等於兩力之代數和且與兩者平行而同向,其方向切連接兩力之作用點之直線於所謂平行力之中心(Mittelpunkt; center) P .此點與作用點之距離 a_1 及 a_2 之正比等於兩力絕對量 k_1 及 k_2 之反比·

$$a_1 : a_2 = k_2 : k_1 \quad \text{或} \quad a_1 k_1 = a_2 k_2, \quad (5)$$

若原來兩力平行而反向(圖13b),則其合力與兩力平行且與較大之一力同向,其絕對量 R 等於兩力之絕對量之代數差·其方向切兩作用點之連接線於較大力一邊之延長線上之一點 P .此點與作用之距離 a_1 及 a_2 之正比復等於兩力之反比(方程式5)·

若作用於物體上之兩力不在同一面內，則兩力或無共同作用點。其一般的結果為一合力及兩等大而反向之平行力（力偶，§ 31）。

28. 關於力之合成之數個實驗，為重驗上述之合法，特用物體之重力。其他如彈簧張力，電力或磁力雖然亦可用，但因重力最易使用，處理及測定，故常用之。

試於一架上裝兩固定滑輪（§ 72）並套一線於其上（圖14）。在此線上於滑輪之間再繫一第二線。在線之三自由端各繫一重錘（或砝碼），

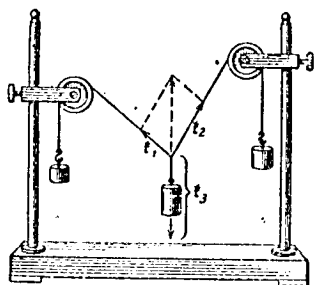


圖14. 力之平行四邊形。

其力分別為 F_1 、 F_2 及 F_3 。平衡時，線及重錘占完全一定之位置。三線相繫之節可視為一極小之質點，其重之作用，故可略去之。如此作用於物體上者有向左上方之力 F_1 ，向右上之力 F_2 及鉛直向下之力 F_3 。質點 m 在靜止狀態時，表示諸力之合力等於零，申言之，其時三力中每兩力之合力與第三力等大而反向，且與之同在一直線上。

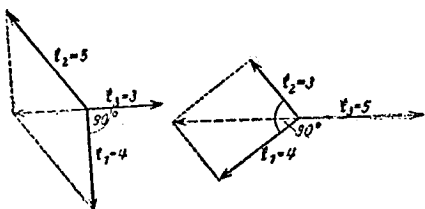


圖15. 力之平行四邊形。

第15a及b圖示成爲3:4:5之比例之力作兩個不同排列之情形，其中兩個較小之力恆成 90° 角。

取一輕而不易彎曲之尺棒，其長約50米，在其中點繫一線並將此線套在

一固定滑輪上。此棒之重量與置在他端盤內之重錘 f 及盤之重量適成平衡（圖16）。今在盤下及尺棒之兩邊各繫一重錘，其重成 $k_1:k_2:k_3$ 之比例。此裝置惟當

$$1. \quad k_3 = k_1 + k_2 \quad 2. \quad a_1 : a_2 = k_2 : k_1$$

時，方呈靜止狀態。由此證明§ 27中說明之作法完全真確，因靜止狀

態表示三力之合力等於零故也。此情形唯當 f_1 及 f_2 之合力與鉛直向上作用之力 f_3 反向並在同一作用線上而又有等大之量時可能。若檢驗第16圖，則確見發生是種情形。但 f_2 亦可視為抵消 f_1 及 f_3 之合力之力。該合力與 f_2 在同一線上，但鉛直向上而其絕對量等於 $k_2 (= k_3 - k_1)$ 。

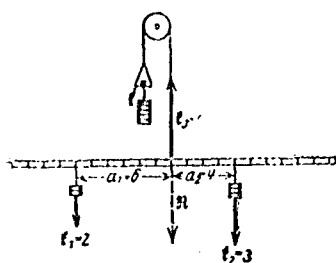


圖10. 平行力之合力。

平行力之合成又可依下列簡單方法表示之，試置一薄板於兩架竊信之天秤上，故其重均勻分配在兩天秤之間。次於板上加一砵碼，於是兩天秤各指出一偏轉，將砵碼移動後亦然，但就一般而論，離砵碼較近之天秤其偏轉較大，而每次兩天秤之偏轉之和恆等於砵碼之重除去板之重量。偏轉間之正比等於砵碼與兩天秤之距離之反比。

29. 作用及反作用(牛頓第三定律)。應力。牛頓之第三定律，其言曰：兩物體間之相互作用，大小恆相等，方向恆相反。或云：一切作用 (actio; Wirkung; action) 必有大小相等方向相反之反作用 (reactio; Gegenwirkung; reaction)。其作用方向係依兩物體之連接線，但此未能一概言之 (§ 305)。

茲舉一簡單之例，設想兩質量 m_1 及 m_2 受一彈簧之壓力而分開 (圖 17)。質量 m_1 向左所受之壓力其大小與質量 m_2 向右所受之壓力相等。因兩力之方向相反，其符號亦異。至兩物體因受大小相等方向相反之兩作用而發生之加速度自然遵牛頓第二定律與其質量有關。

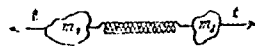


圖17. 經一彈簧彈簧連繫之兩質量之作用及反作用。

世間決無第一物體施力於第二物體而第二物體不再施大小相等方向相反之反力於第一物體之情事者——至少在理論力學中。如已知其中之一力，則可決定由此引起之反力。唯應注意者，物體受一力之作

用，其所引起之反作用乃加於他物體，而非加於其自身也。置物於桌，則桌受一向下之壓力作用，其而起一種彈性的變形致發生一種相當之反力，故同時物受桌抵，受一向上之壓力。同樣，用線懸球，則球將線拉下，引起相當彈性反力，一力既常伴一反力，兩者似不能分離，合而為一，名之曰應力， f_z （絕對量 k_z ；Zwangskraft；stress）。由是觀之，凡力均為應力之一方面，恰如買賣各為交易之一方面。

30. 平衡。一物體在靜止狀態或作直線等速運動時，吾人不能由慣性定律而謂該物體不受力之作用。吾人祇能認在物體上作用之力互相抵消，其合力故等於零。以事實言，凡地面上之物體縱使在靜止狀態時亦不能脫離力之作用，因各物體無一不受萬有引力之作用也。作用於一物體之力互相抵消時，其效應與物體未受諸力之作用時無異。如是者，曰平衡，(Gleichgewicht；equilibrium)，尤其物體在靜止時之狀態為一種平衡狀態。

凡在平衡狀況下作用之兩力，其大小必相等，方向必相反，且其方向在同一直線上。否則，物體不平衡，而為維持平衡狀態至少須加一第三力以資抵消前兩力之合力，此第三力因其有惹起平衡狀態之作用，特稱曰平衡力。（然事實上，此三力中之任一力，皆可視為其他各力之平衡力。）物體受任何多數力之作用時，若其全數力之總合力等於零，則此物體當在平衡狀態中。

31. 力偶·力矩。在 § 27 中，未曾述及兩等大而反向之力不在同一作用線上時之情形，是種力並無合力，但祇有一力偶 (Kraftpaar；couple)。事實上一力偶之作用與有他種配置之力之作用根本不同。物體不因此而發生依一定方向之加速度，但祇發生一種轉動，換言之，改變角速度，故僅有角加速度 (§ 20)。

力偶中一力 f 之大小與其間之垂直距離 a (名曰力偶臂，圖 18a) 之乘積為力 f 之力矩 (Drehmoment；turning moment) 或靜力矩 (statische Moment；static moment)，其絕對量為

$$N = ka \text{ 達因厘米，} \quad (6)$$

其中 k 表力 f 之絕對量。

將一物體固定於一剛軸上，以在與軸正交之平面內之一外力 f 用之，則在軸內極發生一應力

f_z ，其大小與力 f 相等，但方向相反（圖18b）。如是亦成爲一力偶，其力矩（或力偶矩）爲 fa ，其中 a 表力 f 與軸之垂直距離。

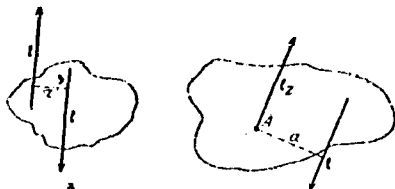


圖18. a) 力偶， b) 力矩，由一剛軸內之應力所引起。

表示力矩之方法，用向量矢，其長度等於力矩之大小或與之爲比例，其方向與含力偶之平面正交而矢首指示一右旋螺旋依力矩方向轉動時前進之方向（參見 § 20 中完全相似的確定）。力矩之加法遵向量矢之加法，§ 11。

多數力偶作用於一物體上，若其力矩之向量和爲零，則物體在平衡狀態。例如兩力矩作用於一物體上，若兩力矩有等大而相反之轉向，則發生平衡狀態。

32. 槓桿。具有一固定之點而全體可在此點周圍轉動之直棒，曰槓桿 (Hebel; lever)。在槓上作用多數——至多及至少三——力而其中一力爲作用於轉動點之應力。物體之轉動軸或點爲一固定軸或爲一固定點，其當物體變其位置時，其在體內之位置並不改變，然此並非必要，例如在鐵槓（亦爲一槓桿）中（圖19）。在鐵槓之 A 點上作用一外力，例如一人臂之力，在 B 及 C 點分別作用應由鐵槓克服之反力。

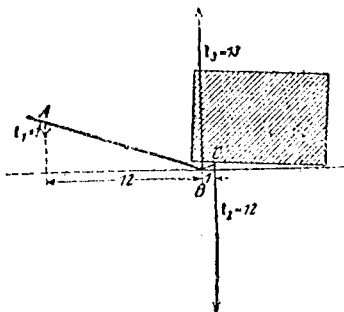


圖19. 鐵槓之用法。

理想上最簡單的槓桿例如繞固定軸轉動之物體（圖20a）。任

兩個經彈簧惹起之力 f_1 及 f_2 作用於此物體上。據 § 30，在軸處於是發

生一應力， f_z ，其大小與 f_1 及 f_2 之合力矢相等，但其作用方向則相反，且就一般言之，不在同一直線上，是以此力與矢組成一力偶而有轉動物體之作用。

是種物體唯無是種力偶或物體不會轉動時，始可平衡。當作用於軸上之應力與兩外力之合力同在一直線上時（圖20b），即發生此種情形。在此情形中，因 f_1 及 f_2 兩力之轉矩大小相等方向相反之故，積

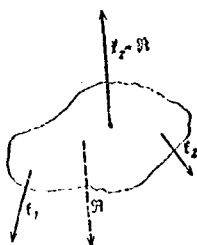


圖20a. 積桿上之力。

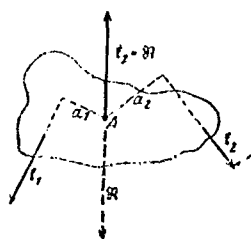


圖20b. 在平衡狀態中之積桿。

桿不會轉動。故

$$f_1 a_1 = -f_2 a_2 \quad \text{或} \quad f_1 a_1 + f_2 a_2 = 0, \quad (7)$$

其中 a_1 及 a_2 表轉軸與兩外力之垂直距離——即為此兩力之臂。若作用於一積桿上之轉矩之和為零，則此積桿在平衡狀態中。此為一般有效之積桿定律，縱使除轉動軸之應力外，又有兩個以上之在同面內之外力時，此律亦有效，故 $\sum f_i a_i = 0$ 。

關於積桿之說明另詳 § 71。

33. 動量不滅律（衝量律）。由牛頓第三定律可導出一基本定律。作用於有 m_1 及 m_2 質量之兩物體間之力假定為 f （圖17），據牛頓第三定律，此力

$$f = m_1 g_1 = -m_2 g_2 \quad (8)$$

（此方程式之右邊必帶有一負符號，因 $m_1 g_1$ 及 $m_2 g_2$ 兩向量之方向相反之故）。是以

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 = 0. \quad (9)$$

又據 § 19，此方程式又可書作

$$m_1 \frac{d\dot{O}_1}{dt} + m_2 \frac{d\dot{O}_2}{dt} = \frac{d}{dt} (m_1 \dot{O}_1 + m_2 \dot{O}_2) = 0. \quad (10)$$

方程式(9)說明 $m_1 \dot{O}_1 + m_2 \dot{O}_2$ 向量之隨時微分商等於零，故此向量不因時而變，然據 § 25，該向量表 m_1 及 m_2 兩質量之動量的總和，如有多於兩物之質量時，關於動量大小之總和仍適用下列兩方程式

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \dot{O}_i = 0 \quad \text{或} \quad \sum m_i \dot{O}_i = \text{常數} \quad (11)$$

其中 m_i 及 \dot{O}_i 分別表有關係之諸質量及速度向量，方程式 9, 10 及 11 假定唯質量系間僅有內力 (innere Kräfte; internal forces) 之作用時有效。內力云者，係指質量系全體內作用之力而言，故並非由質量系以外之外力所發生。

吾人可將動量依坐標方向分解而為三個分動量，就是稱分動量而言，上述之情形亦有效

$$\sum m_i \dot{O}_{ix} = \text{常數}, \quad \sum m_i \dot{O}_{iy} = \text{常數}, \quad \sum m_i \dot{O}_{iz} = \text{常數}, \quad (12)$$

此定律名曰動量不滅律 (Satz von der Erhaltung der Bewegungsgrosse; law of conservation of momentum) 或衝量律 (Impulssatz; law of impulse)。此律謂，兩個或兩個以上之物體之動量之和在內力之作用下不改變，或云：，在宇宙內動量之總和不變。此律為物理學中之一基本不滅律。

在日常生活中關於動量不滅或不變之例證不少，吾人在一易動之車或舟內向前行走時，車或舟則向後退 (圖 21)。將握在雙手之一重荷 (鐵棒，鐵啞鈴) 突向前挺出時，覺人體之別部分略向後運動。

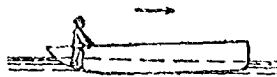


圖 21. 示衝量律。

其他一例為發砲時之反衝 (Rückstoss; recoil)。砲彈在砲管內時在彈與砲間作用之內力為火藥氣之壓力，發砲時，砲彈前進，砲身後退。砲彈前進之速率與砲身後退之速率之比等於兩者質量之反比，故砲彈所行甚遠，而砲身反衝甚小。又火箭受以極大速率排出之燃氣之反衝而前進。

備一在一端封閉，寬自 2 至 3 厘米及長約 20 厘米之金屬管，在其兩

端插入兩絕緣線，當後者在與一感應器連接時，可有火花突破線間空隙而過。次將金屬管恰如榫身架在輪軸上或以兩長線懸之。此後將管口套在一本生燈之口內並同時使空氣流入；俟管內充滿煤氣與空氣之混合氣後，先塞入一普通楔木栓，以後又塞入填鉛之另一楔木栓以充彈。今用電花使混合氣爆發，則楔木栓飛出，同時管向後移。彈之質量愈大時，此反衝亦愈強。反之，彈之質量愈小時，其速度愈大而進行之距離亦愈遠。

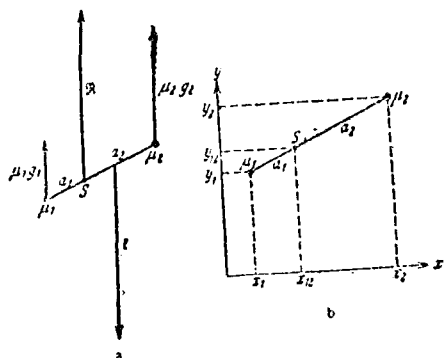


圖22. 示質心(重心)之作圖法。

f. 恰如其他各種力然，慣性力亦可相合而為一合力。設想祇含有兩個互相固接之質點 m_1 及 m_2 之物體（圖22a）。該兩質點體受速度之作用發生一加速度 $g = g_1 = g_2$ 。據 § 27，慣性力之合力為依力之反比將兩質量之連接線分為 a_1 及 a_2 兩部分，故 $a_1 : a_2 = m_2 g : m_1 g = m_2 : m_1$ 。合力既與加速力相等而相反，故兩者合成一力偶（圖22a），結果，物體並無依 g 之方向之純加速度，但祇有一角加速度，物體因而轉動。一種不帶轉動之純加速度唯作用之力與慣性力之合力在同一直線上時，即亦依 $a_1 : a_2 = m_2 : m_1$ 之比例分兩質點之連接線時可能，換言之，當時加速力 g 通過 S 點（圖22b），因唯有通過此點之力方可惹起不帶轉動之純加速度。（至此點在連接線上之位置，據 § 27，並無重要關係，而祇有對於運動之穩度之影響。）

S 點為依各種可能方向予物體以純加速度時作用於物體上之慣性

§ 34. 質心或重心。
一自由動體因力 f 之作用而有一加速度 g 時，則據 § 26，其各質點必發生有與 g 大小之慣性力。此種慣性力互相平行，方向與加速力相反而其和與惹起加速力者之力所謂加速力相等，即 $m_1 g + m_2 g + \dots =$

力之合力之切點。對於質量而言，此點曰物體之質心 (Massenmittelpunkt; center of mass)，又對於重力而言，此點亦即為物體之重心 (Schwerpunkt; center of gravity; 參考 § 59)，故質心與重心恆相一致。根據各慣性效應，可想像物體之質量皆集中在此一點，假如將物體支托於其重心，則物體即可靜止。

設想該物體係在一直角坐標系之 xy 平面內，命兩質點之坐標為 x_1y_1, x_2y_2 ，重心之坐標為 x_0 及 y_0 ，由圖 23b 容易讀出

$$(x_0 - x_1) : (x_2 - x_1) = m_1 : m_2, \quad (y_0 - y_1) : (y_2 - y_1) \\ = m_1 : m_2 = m_1 : m_2.$$

物體任意位置時，其在三因次坐標系中復有一個關於 z 方向之相當方程式： $(z_0 - z_1) : (z_2 - z_1) = m_2 : m_1$ ，經簡單計算

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad z_0 = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}.$$

今若與此兩質量再固接一第三質量 m_3 ，則與此點相當之坐標可由推擴此方法求之。此時三質量重心之位置

$$x_s = \frac{(m_1 + m_2)x_0 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ y_s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad z_s = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

依相當方法，任何數之連合質量 m_i 之重心之位置一般可由下列方程式決定之，

$$x_s = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_s = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_s = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \quad (13a)$$

其中 $m = \sum m_i$ 表諸連合質量之總質量。若坐標系之零點與重心一致 ($x_s = y_s = z_s = 0$)，則

$$\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = \sum m_i z_i = 0. \quad (14a)$$

物體大者其各分質量 m_i 可用 dm 表示，如是方程式 13a 及 14a 可改書為積分式

$$x_s = \frac{1}{m} \int x dm, \quad y_s = \frac{1}{m} \int y dm, \quad z_s = \frac{1}{m} \int z dm \quad (13b)$$

$$\text{及} \quad \int x dm = \int y dm = \int z dm = 0, \quad (14b)$$

縱使物體並不互相固接，在空間經方程式 13a 或 b 決定之點亦名之曰公重心（例如太陽系，地球及月之公重心等），呈簡單對稱形之均勻體，其重心位置容易計算。在一均勻實心球或空心球中，重心係在球心；在平行四邊形體中，重心係在空間對角線之交點。通過重心之鉛直線若在物體之底面內者，則物體不致傾覆。

用線懸物體於一點，則線之方向當通過物體之重心，否則，線之張力及作用於重心之重力形成一力偶，結果，將使物體轉動。實驗上求重心之法即根據此理。例如先懸物體於一點，依線之方向引一鉛直線，再懸物體於另一點，依法再引一鉛直線。此兩線之交點即重心之位置。

35. 重心運動不變律。若干互相固接之質量 m_i ，若其間祇有內力 (§ 33) 之作用者，申言之，祇有吸引或推斥之力者，在空間內應可自由運動。故諸質量之公重心之在空間之位置照例可以改變。如由坐標 x_i, y_i, z_i ，示各質量之所在，則公重心之位置隨時可由方程式 13a 或 b 算出。將方程式 13a 依時間微分之，則得重心位置依三坐標方向變更之速度，

$$v_x = \frac{dx_s}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{dx_i}{dt}}{m}, \quad v_y = \frac{dy_s}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{dy_i}{dt}}{m},$$

$$v_z = \frac{dz_s}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{dz_i}{dt}}{m}, \quad (15)$$

($m = \sum m_i$)。此三分數之分子表諸質量之依三坐標方向之動量之和，因祇有內力之作用，據 § 33，此和之值不變。由此視之，重心之分速度及其速度不拘各質量之速度因內力之作用變更與否概不變，若於各質量上又有一外加速度——例如重力——之作用，則重心發生一種恰如全部質量集中在重心時所有之運動。

依其導出之方法，可知此重心運動不變律(Satz von der Erhal-

tung der Bewegung des Schwerpunktes; law of conservation of motion of center of gravity) 僅爲動量不滅律之另一方式 (§ 35), 故即爲牛頓第三定律末段之另一方式。

第21圖已示關於重心律之一簡單例。其他一例如在空中炸碎之榴霰彈。在未炸碎以前，彈之重心係在其內部並描出一拋物線徑路（所謂彈道曲線，§ 57）。當炸碎之際，榴霰彈之碎片因內力而飛散，但各部分之公重心仍繼續運動，恰如彈不炸碎，仍爲整個體。（然無論如何終帶一種制限，即在碎片上空氣阻力——外力——之作用比較彈上空氣阻力之作用爲強，故由彈之重心在彈炸碎後所描出之彈道曲線比較假定仍爲整個彈之情形中向下彎曲較急）。

36. 轉動慣量。設有一質點 m 繞一固定軸轉動。其與軸之垂直距離假定爲 r ，在 m 上作用一種在與軸及 r 相正交之平面內之力，其大小爲 k ，因此 m 有 dv/dt 之加速度而在一圓上作加速運動。其隨時之角速度爲 ω ，故其徑路速度（依運動方向之速度）爲 $v = r\omega$ 。又 $k = mr\omega/dt$ 。與力 k 相當之轉矩其大小爲 $N = kr$ 。據是

$$N = mr^2 \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ 達因厘米或克厘米}^2 \text{ 秒}^{-2} \quad (16)$$

由上列方程式決定之大小

$$J = mr^2 \text{ 克厘米}^2 \quad (17)$$

曰質點 m 之對於相距 r 之軸線之轉動慣量 (Trägheitsmoment; moment of inertia) (歐拉 (Euler) 1758), r 特名曰迴轉半徑。

物體大者，其轉動慣量等於其各部分轉動慣量之和，故

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = \sum m_i r_i^2 \text{ 克厘米}^2 \cdot$$

或依積分式

$$J = \int r^2 dm \text{ 克厘米}^2 \cdot \quad (18)$$

爲計算此積分之值須知各分質量 dm 之在全體上之配置，即須知其視距離 r 之大小而定之密度。軸線不拘在體內及體外均可。

又對於大的物體，第16方程式亦可用。此式謂轉動慣量與角加速

度之乘積等於作用之轉矩，故頗與說明牛頓第二定律之方程式（力 = 質量 × 加速度）相類似。事實上此無非為關於該定律之在剛運動上之運用。

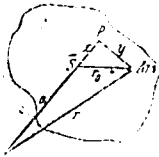


圖 23. 示斯泰納定律之導出法。

假定有一物體（圖 23）繞一與剛面正交並通過 O 點之軸轉動。與此軸平行並通過物體之重心之直線（重心軸線）穿過剛面於 S 點。令 $OS = a$ 。設想在剛面內之物體之任一極小質量 Δm ，命其與 O 之距離為 r ，與 S 之距離為 r_0 。今延長 OS 並從 Δm 引一與之正交之垂直線，於是物體對於通過 O 點之軸線之轉動慣量

$$J = \sum \Delta m r^2 = \sum \Delta m ((a+x)^2 + y^2) = a^2 \sum \Delta m + \sum \Delta m r_0^2 + 2a \sum \Delta m x.$$

今 $\sum \Delta m$ 表物體之總質量 m ， $\sum \Delta m r_0^2$ 表在重心軸線周圍之轉動慣量 J_0 。據重心之定義（方程式 14n, § 34）， $\sum \Delta m x = 0$ 。故

$$J = m a^2 + J_0. \quad (19)$$

但 $m a^2$ 表在重心軸線上之質量 m 之在通過 O 點之平行軸線周圍之轉動慣量。據此則第 19 方程式云：一物體之在任一新軸線周圍之轉動慣量等於兩種轉動慣量之和：一為物體之在通過物體重心之平行軸線周圍之轉動慣量，其他為物體全質量集中於重心時在新軸線周圍之轉動慣量（斯泰納律；Steiner'scher Satz, Steiner's law）。據方程式 (19)，可見當新軸通過物體之重心時（ $a=0$ ），物體之轉動慣量等於 J_0 ，故最小。

命 P 表在物體內或物體外之一點，以通過 P 之任何直線為轉動軸線時，物體在各軸線周圍有一定轉動慣量 J 。設從 P 依各該直線方向量出 $1/\sqrt{J}$ 之值，則其諸終點構成一個圓球之面，所謂慣量橢圓球（Trägheitsellipsoid; inertia ellipsoid）之面。當 P 為物體之重心時此面最大，軸線離重心愈遠時愈平坦。其長軸線依最小轉動慣量之方向，其短軸線依最大轉動慣量之方向。P 與物體之重心一致時，此兩方向及與此兩者正交之第三方向，名曰物體之主慣量軸線（Hauptträg-

heitsachsen; principal axes of inertia), 各主軸線周圍之轉動慣量曰主轉動慣量(Hauptträgheitsmomente; principal moments of inertia),

據(19)方程式, 欲求一物體之在任一軸線周圍之轉動慣量必須已知在通過重心之一平行軸周圍之轉動慣量。依據方程式(18)以算後者轉動慣量, 唯在帶簡單密度配置之簡形體中尤其唯在呈閉形之均勻體中可能。例如帶 R 半徑之一均勻實心圓筒狀體之在筒軸周圍之轉動慣量等於 $mR^2/2$ 。帶 R 半徑之一均勻實心球之在各球心軸線周圍之轉動慣量等於 $2/5mR^2$ 。

37. 圓周運動。一物體沿圓周作等速之運動時, 如命 m 表物體之質量, v 表物體之速, r 表圓周之半徑, 則據方程式(22), § 20, $v = r\omega$ 。其中 $\omega \left(= \frac{d\varphi}{dt} \right)$ 表角速度。

又據方程式(28), § 20, 當轉動之際, 既發生向心之加速度 $a = -r\omega^2$ (圖24a), 故當時必有一加速力作用於此方向, 其大小為

$$k = -ma = -m r \omega^2 = -\frac{mv^2}{r} \text{ 達因} \cdot (30.30) \quad (20)$$

此力束縛物體, 使其沿一圓周而運動, 否則物體必沿切線方向而作等速直線運動矣。因其向心之故, 此力名曰向心力(Zentripetalkraft; centripetal force), 然應注意者, 向心力並非為圓周運動(Kreisbewegung; circular motion) 所特具之一特種力, 但僅指將轉動體向圓心曳引之力。此力可為在棒, 彈簧或一張線內之彈性力, 或為重力, 電力或磁力。

據 § 26, 向心加速度必引起一慣性力, 此力與加速力大小相等, 方向相反, 為一種自心輻射之力, 名曰離心力(Zentrifugalkraft; centrifugal force)。作圓周運動之質量 m 故以 $mr\omega^2$ 大之力向外曳引圓心。例如以線縛石, 執其他端迴轉之, 覺石有引手之力, 換言之, 石有沿輻射方向向外拋去之勢, 此即為離心力存在之證。為維持平衡, 手施一種向內之力以抵抗之。此曳力為線中當時之張力, 即石所受之向心力也。離心力 $(+mr\omega^2)$ 故並非為作用於轉動體上之外力, 但

因慣性轉動體之慣性，由轉動體發出，作用於轉動中心（圖24a），其作用無非為抵消向轉動軸吸引物體之向心力，換言之，離心力實為向心力之反力。苟向心力之作用突然消滅，則物體因慣性必沿切線方向以 $v = r\omega$ 之不變的速率繼續運動（假定不受他力例如重力之作用）。

第24b圖為示圓周運動之實際過程之一草圖。在時間 t 時，轉動體係在 A 點。若無向心力之作用，此體當以 $v = r\omega$ 之速度在 dt 時間內依切線方向移至 B 點。然因有向心力之作用，乃受與 v 正交之加速

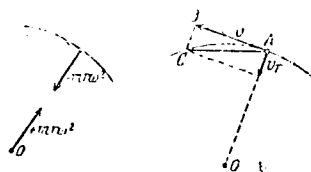


圖24. 離心離力之方法。

度之束縛，並因此而在 dt 時間內得一平均加速度 v_r 。因此兩速度之聯合作用，此動體在 dt 時間內移至圓周上之 c 點。此圖僅為關於其中過程之粗草圖，因就事實而言， v_r

之方向沿圆弧 AC 不絕變更，以是之故，此種移動必須假定為限於一無限小之圆弧。因此，又可視兩向量矢實際相等，即 $AB = AC = v$ ，申言之，速度之絕對量 v 不因加速度（與徑路方向正交）而改變：

準此，在圓周運動中發生之離心力

$$k = +m r \omega^2 = +\frac{mv^2}{r} \text{ 達因。} \quad (21)$$

吾人常謂在圓周運動中，離心力適與向心力相平衡。其所以然者，僅因此兩力大小相等，方向相反，且在一直線上之故。然應注意者，轉動體系本身並不在平衡狀態中，因其不絕的受加速度之影響故也。

以上所述，對於各種曲線運動均適用。在曲線徑路上任何一點之離心力之大小可據方程式(21)算出，其時以徑路上該點之曲率半徑代替 r 。

38. 在轉動系內離心力之批評。在 § 37 中，關於作用於一轉動體系上之諸力狀況根據在轉動系以外在靜止狀態中一觀察者管見所及

及而說明。今假定觀察者與該轉動體依同一角速度繞同軸轉動。吾人觀察地球轉動之效應即在此種地位。一簡單之例，設想繞一中心軸線轉動之圓板，伴圓板轉動之觀察者或系內觀察者係在圓板之中心。如觀察者不在板上，當令在轉動板上之過程與在板外之一靜止坐標系發生關係；如觀察者亦在板上，則當令其與轉動系相聯繫之一坐標系發生關係，故如以地球為例，則當令地球運動之過程與其經緯線發生關係。由此可知兩觀察者之考察方法根本不同。關於系外靜止觀察者之考察方法已於 § 37 中述之矣。據其觀察所及，以為凡屬於整個轉動系之物體，正因其轉動不絕之故，在向心力之作用下，不絕的發生加速度，故並不在平衡狀態中。然系內觀察者則察見凡對於轉動板而言不運動之物體皆在靜止狀態中，其在同伴轉動之坐標系中之位置並不改變。因其靜止，是以在該觀察者觀之，是種物體係在平衡狀態中。然不久即察見為使物體真正靜止在各物體上須有一種向心之力，即所謂向心力，否則，各物體向板之周邊作加速運動，且以此種運動為一種作用於各轉動體上使之依輻射方向自內向外移動之力之效應。其以此力為離心力焉，比較出諸轉動系外靜止觀察者之口者尤為適切，蓋據其所見，此力依輻射方向，將各轉動體從轉動軸線不絕的驅向周邊。（據其意見，轉動軸線不過為全部離心力之切線。）

今綜合兩觀察者之見地可再度說明之如下：

據靜止觀察者，以為一切屬轉動系之物體皆不在平衡狀態中。其轉動經作用於各部之向心力維持，而此力依輻射方向不絕的使物體發生加速度，離心力為轉動體質量對於向心力之加速作用之反作用，故為一種慣性力。

據系內同轉觀察者以為一切在轉動系內靜止之物體——即一切同轉體——皆在平衡狀態中，但覺系內隨處有一種依輻射方向將一切同轉體驅向周邊之力，且此力之大小必與物體之質量及物體與某一定直線（轉動軸線）之距離為比例（ $k = mr\omega^2$ ），故據其見地，離心力作用於系內各物體上。為與離心力維持平衡，是以須有一種向心力，後者

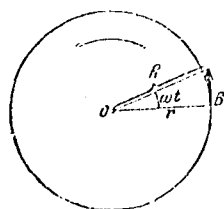


圖25. 示離心力。

阻止系內一切物體向外作加速輻射運動。

同轉觀察者認離心力具有真正力之特性，而此復可因下列之考慮而益顯，第25圖示一繞O點以 ω 角速度轉動之板，B表在圓周之一質量而係因受向心力之作用方得固定於是處，故當初其速度為 $v=r\omega$ ，其中 r 表圓之半徑，至 $t=0$ 時，向心力不復存在，故據在系外觀察者之見地，此後因慣性關係必依切線方向以 v 之速度離板繼續運動，如是在時間內進行之距離當為 vt ，其與轉動中心之距離自 r 增至，

$$R = \sqrt{r^2 + v^2 t^2}.$$

經兩次微分之後，乃得 R 增長之加速度，

$$\frac{dR}{dt} = \frac{v^2 t}{\sqrt{r^2 + v^2 t^2}}, \quad \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{v^2 r^2}{(r^2 + v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

當 $t=0$ 時，該質量開始離開圓板，其初加速度 a ，換言之，其與轉動中心相距 r 時之加速度可由此方程式求得，因 $t=0$ ，故

$$a = \left(\frac{d^2 R}{dt^2} \right)_{t=0} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2,$$

由此，則作用於質量 m 上之力 $k=ma$

$$k = mr\omega^2,$$

是為關於離心力之正當表示法。

恰如在§37中所表示者，關於離心力之說明，吾人大都傾向系外靜止觀察者之見地而假借之，但關於自然界中發生之過程若假借同轉觀察者之見地亦可得到完全相同之結果，此兩種見地實同一確實，吾人可就當時之情形而選用之，以下尚可遇到多數往往根據同轉觀察者之見地而成立之例。

39. 關於轉動質量之慣性力之例。以線縛石，執其他端而旋轉之，其時發生之離心力可在手中直接覺察。關於離心力之若干應用見§73。

試驗離心力時，應用一離心器械，其中有垂直軸，將物體繫於此軸之上，以後使軸迅速轉動。茲舉數個實驗為例如下：

1. 在一光滑水平桿上(圖26)，裝由一線連接並易於移動之兩質量 m_1 及 m_2 ，此兩質量同受依輻射方向之向心力之作用(線內之張力或拉力)。依據一同轉觀察者之地見，則由 m_1 及 m_2 兩質量所組成之轉動系唯與作用於 m_1 及 m_2 上之離心力等大時始可在轉動系內發生平衡，否則，質量向有較大離心力之一邊移動。命 r_1 及 r_2 分別表兩質量與轉動中心之距離，並假定 $m_1 r_1 \omega^2 < m_2 r_2 \omega^2$ ，則質量 m_2 曳引 m_1 於其一邊。此曳引愈劇時， $m_2 r_2 \omega^2$ 超出 $m_1 r_1 \omega^2$ 亦愈大，終至質量激烈衝擊在 m_1 一邊之桿端制限板。

2. 若令在第27圖所示之儀器迅速轉動至作用於較小質量 m_1 上並由線傳至較大質量 m_2 上之離心力大於作用於 m_2 上之重力時，則較小質量 m_1 可提起較大質量 m_2 。質量 m_2 一經提起之後，若再令儀器轉動，則當達相當速度時， m_2 仍復落下，唯當時之速度小於被提起時所有者。當 m_2 被提起之際，質量 m_1 與軸線之距離增加，而由其發出之離心力亦然。

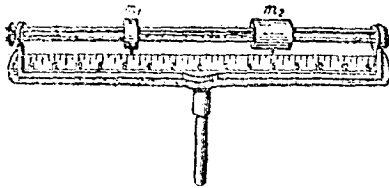


圖26. 示離心力。

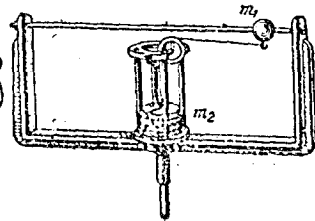


圖27. 示離心力。

3. 用彈性金屬條製出之儀器(圖28)當轉動之際，恰如地球然，改呈扁平形，故往往日為一種地球模型。是種比較祇可限於外表，因兩者中之向心力絕不同種故也。轉動之作用為彈條上從離軸線較遠部分發出之離心力曳引離軸線較近之部分，使其向心移動，終至此離心力與因彎曲而起之彈條彈力惹起平衡狀態。

4. 其他一種頗有教學價值之儀器，即離心調速器(Zentrifugale-

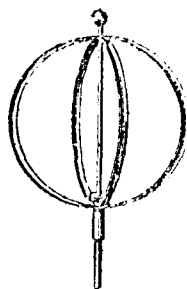


圖23. 所稱之地球模型。

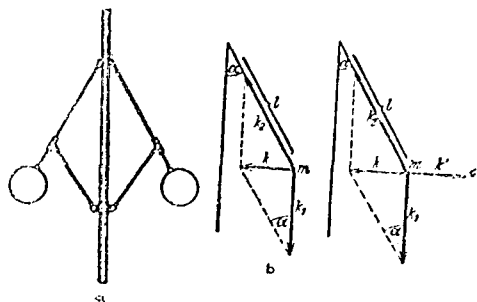


圖24. 離心調速器。

gulator; centrifugal governor) 是。此器含有固定於一鉛直軸上之兩等大質量，後者且可在鉛直軸周圍轉動（圖24）。儀器轉動愈速時，質量昇起愈高。

今先據轉動系以外之一靜止觀察者之見地而考慮其情狀（§37）。作用於質量 m （圖24b）上者，有重力 k_1 及在桿內之張力（應力 §30） k_2 。此兩力之合力 k ，其大小若適足等於在 $r = l \sin \alpha$ 之圓周上轉動所須之向心力 $ml\omega^2 \sin \alpha$ ，則當時之轉動為等速轉動。此情形唯當 $k = k_1 \tan \alpha$ 時發生，而此可在第29b圖上讀出之。因而 $k_1 \tan \alpha = ml\omega^2 \sin \alpha$

$$\text{或} \quad \cos \alpha = \frac{k_1}{ml\omega^2} \quad (22)$$

次又據一同轉觀察者之見地（慮38）而考慮其情狀，知作用於 m 質量上者除 k_1 及 k_2 兩力外又有大小與向心力相等但方向相反之離心力 k' （圖24c）。此兩種考慮方法之差別，在據第一種見地，作用於 m 質量上之 k_1 及 k_2 兩力並不互相平衡，但有一合力 k ，而據第二種見地，作用於 m 質量上者之 k_1 、 k_2 及 k 三力互相平衡。

第22方程式唯當 $l \leq m\omega^2$ 時可成立。（據 §55， $k_1 = mg$ ，故必 $\omega^2 \geq g/l$ ）否則，因角速度過小，質量 m 不會上昇。

在工程上離心調速器之應用為調節蒸汽機之轉動。可動的質量與一槓桿機關相聯絡，而後者依質量上昇之程度，調節蒸汽機之蒸汽供給。

40. 功。 尋常稱凡使用筋力之操作，例如將一物體自地面移至桌上，為工作。在物理學上則名之曰功(Arbeit; work)。若物體不受重力之向下曳引作用，則此種操作不產生功(除非為使物體反其慣性而運動時所作之功，但此功當令物體復停止運動時仍可獲得。吾人又可想像一種進行無限遲緩之運動，故不致作成一種有數量可言之加速度之功(§ 41))。欲舉一物體至達某一定之高處，第一須用力反重力之作用固持物體，使離開原位，第二須使物體沿路反重力而運動。所須之力愈大及沿力之方向上之路程愈長時，所作之功愈大。又反運動之力者不必一定為重力，但可為任一他力，例如彈簧之彈力。故各機械功可直接由力與路程之乘積測之。

$$\text{功} = \text{力} \times \text{路程}, \quad W = fs$$

此乘積中之力係指對於工作有效之分力，換言之，即為與路程同方向者之分力。至方向與路程正交者之分力，則因其對於工作無效，可不計及(參考§ 58)。故功等於路程方向上之分力 k_s 及路程 s 之乘積。

$$A = k_s s, \quad (33)$$

若力之方向與路程方向作一 ψ 角，則

$$A = ks \cos \psi. \quad (34)$$

設令 $s \cos \psi$ 相併，則又可謂功等於力及力之方向上之分路程之乘積。

若力 k 沿路程 s 變更，則所作之功依積分法總合各 ds 上之功計算，

$$A = \int k ds \cos \psi. \quad (35)$$

功為力之路程積分。

關於功之例隨處可見，一特別普通之情形為反重力而作之功，以上已述之矣。在日常生活中所作之功，其大部分常為克服摩擦作用，例如在交通其中，功之大部分實消耗於此方面。

人持一重體，久則疲倦，有作功之感，雖然，據上述之定義，在一靜止體上，功無由發生也。此種情形頗與人體內極複雜的生理過程

有關，且並非與功之定義相悖，其詳情不能在是處說明之。

功或能¹⁾之單位，在CGS制中，曰爾格(Erg; erg)，1爾格等於以1達因之力作用於一物體，使其在力之作用方向上進行1厘米所作之功。爾格之值過小，不適於用，故在實用單位制中，定爾格之 10^7 倍，為功之單位，曰焦耳(Joule; joule；在電學中等於1瓦秒)。在工程上以米仟克(Meterkilogram; meter-kilogram)為機械功或能之單位——與工程量度制(§ 24)相應，1米仟克即為將1仟克重之質量向上鉛直舉起1米高時所須之功。1米仟克 $= 9.81 \times 10^7$ 爾格(參考§ 55)，在英制中當以1呎磅($= 32.2$ 呎磅達)為功或能之單位。

功為無向量，故其加減法與尋常數學法相同。至於功之正負符號隨觀點而定。通常吾人所作之功，例如舉起物體時，常稱為正功；而物體所作之功，例如物體落下時，常稱為負功。

41. 加速度之功。一物體之速度大小改變時，亦有功作成，是謂加速度之功(Beschleunigungsarbeit)。其所以然者，因使物體改變其速度以達其最後之值須沿路程之方向用力作用之，或反轉言之，為產生某量加速度之功，須有沿一定路程作用之力。功者，即所以克服物體之慣性抵抗者也。據§ 26，慣性抵抗之大小等於 ma ，質量 m 及加速度 a 愈大時，該抵抗亦愈大。施於物體上之加速度之功，據§ 40，等於有效分力 k_s 及路程之乘積。設命 dA 表有效分力 k_s 使質量 m 進行 ds 路程所作之功，則

$$dA = k_s ds = mads = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = mv dv \text{ 爾格。} \quad (26)$$

(既然 $a = dv/dt$ 及 $v = \frac{ds}{dt}$ 。又 k_s 表沿路程 s 方向作用之分力及 a 表沿同向之加速度。)

若祇使方向而並非使速度改變，則據牛頓第一定律(§ 39)仍須有一力以作用之，但因速度不變之故，此力不產生功。其一例如等速圓周運動，其中改變方向之向心力恆與運動方向正交，即 $k_s = 0$ 。故向

¹⁾ 能之大小多寡係由物體所作之功測定(§ 42)，故能之單位完全與功之單位相同。

心力 (§ 37) 在等速圓周運動中不作功。

一切物體在一力之作用下減小其速度者係反力之方向而作功。例如使一物體向彈簧運動時，其速度減小（負加速度），同時彈簧被壓縮（火車之緩衝裝置）。運動體作壓縮彈簧之功，而一方面損失其速度。一鎚打釘於木內，一大斧擊破一什物——凡此種操作，皆消耗功——並因此自運動狀態改為靜止狀態，在諸如此類之情形中，功取諸於運動，而在正加速運動中，運動由消耗功而來。

42. 功或能量不滅律。設在一物體上作成一純粹機械功，例如使物體反重力或彈力之作用而運動時，則據經驗，該物體必因此而獲得以後作功之本領，且因係一種純粹機械功（故無摩擦作用），物體可作之功，其多寡與當初施於其上而消耗者相等。例如一被壓縮之彈簧可將一物體反重力之作用鉛直向上拋出，以後該體落下時，仍可將彈簧壓縮至原來之程度。作於一物體上之功是以可視為儲蓄在物體之內，物體於是獲得作等量之功之本領，是謂物體之能量 (Energy; energy; 達爾貝爾1785, 楊氏1807)。能量多寡等於物體能作之功之多寡，故能量如功然，在CGS制中以爾格，在工程量度制中，以米仟克為單位。在無摩擦作用之純粹機械過程中，物體內之能或功並不消滅，但亦不能無中生有。

反之，在有摩擦作用之過程中，功或能量之一部分或全部分消失而變為熱。在19世紀中葉，梅耶 (Robert Mayer), 焦耳 (Joule), 赫爾姆霍斯 (Helmholtz) 及其他擴充此原則並以為能量的觀念不必限於純粹機械的過程，但物理學中其他部分之某數種量亦可視為與機械能量相當之能量（熱能，電能等）。如是，則以上祇着目於純粹機械過程之定律遂有一般的效力。此種說明實為物理學間上一種基本的進步。各種功或能量消失之後，恆變為等量之另一種功或能量，是為能之變換。

根據上述的原則，乃成立一種一般適用之定律，曰能量(或功)不滅律 (Satz von der Erhaltung der Energie (oder Arbeit); law of

conservation of energy (or work)) 或能量原則 (Energieprinzip; energy principle). 此定律云：能量或功不能消滅，亦不能創生，但祇可變換而為別種等大之能量或功。

一切之機械必須由外界供給相當之能量始克作功。能之供給不絕，機械之工作亦不停止。昔人欲造不必供給以能量亦可作功之機器，換言之，欲造出一，，perpetuum mobile‘。此兩拉丁字義謂，恆動‘。此言決非如字義指一種不用外力即可永久運動之機器（若絕對的無摩擦作用，此完全可能，參考行星之完全不帶摩擦作用之運動），但指一種毋須由外界供給相當能量即可永久工作之機器，換言之，一種創能之機器。由能量不滅律，可知其為妄想，事實上絕不可能。

根據 § 4 中之說明，吾人有理承認物理學上的定律在全個宇宙內到處合法，故事實上在宇宙內決無可創能或可滅能之場所，宇宙間之總能量恆一定不變。可變換者，唯能量現出之狀態已耳（運動能，電能，磁能，重能，熱能等）。能量原則復為物理學上一個基本的不滅律。

43. 運動能或動能。物體作加速運動時，由外界供給之功變為能量儲於動體內。據能量原則，此能量並不消滅，但祇變為別種狀態而被儲於動體內，至以後運動停止時，復回至原狀態（或別一種狀態）。因此，吾人必須認能量在運動期間係含在動體內。一動體具有動能 (kinetische Energie; kinetic energy) 或運動能 (Energie der Bewegung; energy of motion). 動能之大小可由其質量及速度表示之。由積算第26方程式得

$$A = \int_0^v mv dv = \frac{1}{2}mv^2 \text{ 爾格,} \quad (26)$$

故凡有速度 v 之運動質量 m , 其動能等於 $\frac{1}{2}mv^2$ 爾格。

又依速度 v 而微分動能時，得

$$\frac{dA}{dv} = mv \text{ 克厘米秒}^{-1}. \quad (28)$$

此無他，卽以前說明之動量或衝量(§ 35)是也。故動量等於動能對於速度之微分商。

44. 位能或勢能，試將能量原則應用於不惹起加速度但惹起一物體反一力之作用而變位之工作上(例如反重力之作用舉起一物體)，則據該原則，當時所耗之功必變爲能量而儲於物體內，故儲於物體內之能係由變更位置而來。因物體由變更位置而儲能之故，物體遂有作功之本領，例如將物體自地上移至桌上，則當物體復自桌上降落於地上時，物體可作相當之功。又如壓縮彈簧，使簧內各部相互的位置改變，則當彈簧回復原來狀態時，亦可作相當之功。據方程式(23)，當時消耗之功爲 $A = k_s s$ ，其中 s 表物體依作用之力 k_s 之方向而移動之距離。儲於物體內之能量，其多寡自必與此功相等。此能量名曰位能或勢能 (Energie der Lage oder potentielle Energie; potential energy)。

據以上所述，一物體在某一定位置時之位能，其數值與其反力之方向而移動至達該點之距離有關。換言之，位能之大小多寡不但視其運動之終點且又視其始點而定。吾人通常故意認始點之位能爲零。位能零點之選擇原無定規，唯視最適於所遇之情形者則選之。在實際問題中，吾人僅注意位能之增減若何，而不考其絕對值，故與位能零點之所在無關。(例如物體自高度爲 h_2 處落於高度爲 h_1 處，其位能之減小爲 $mg(h_2 - h_1)$ 。) 在多數情形中，零點係設在地面上，或在海面上或在實驗台面上，而稱物體之高度較此種標準面高 h 時，其位能爲 mgh 。

設有一物體，其質量爲 m ，距地面之高爲 h_1 ，當令其以一定之初速度 v_1 向上鉛直拋起時，其速度每秒減少 g 厘米/秒，以後達 h_2 高處時，其速度爲 v_2 ，此時物體所失去之動能，卽等於克服地球之重力作用所作之功，而儲爲物體之位能，此兩者應相等，以方程式表之，則

$$\text{得} \quad \frac{mv_1^2 - mv_2^2}{2} = mg(h_2 - h_1).$$

此方程式又可書作

$$mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2} \quad (28b)$$

根據方程式(28b),可知物體僅受地球之重力作用時,其在任何位置之位能與動能之和恆一定不變。

以上所述可視為動能變為位能之一例。今若令物體自 h_2 高處下降於 h_1 高處,則地球重力作用施於物體上之功為 $mg(h_2-h_1)$ 。在此時間內,物體之速度自 v_2 增至 v_1 ,故動能之增加為 $\frac{mv_1^2-mv_2^2}{2}$ 。此兩者亦相等,是處可視為位能變為動能之一例。

45. 功率。在 t 時間內,所作之功 A 對於時間 t 之微分商數,名為功率(Leistung; power),通常 L 以表之。即

$$L = \frac{dA}{dt} \text{ 爾格/秒} \quad (29a)$$

在 t 時間內所作之功

$$A = \int_0^t L dt \text{ 爾格} \quad (29b)$$

若功率不因時而變,則 $A = Lt$ 爾格, $L = A/t$ 爾格/秒。在此情形中,功率可視為在單位時間內所作之功。功率之單位在CGS制中為1 爾格/秒,即為每秒1 爾格之功。如用焦耳為功之單位(§ 40),則功率之單位為1 焦耳/秒 = 1 瓦特 = 10^7 爾格/秒。在工程量度制中,功率之單位為1 米仟克/秒 = 9.81×10^7 爾格/秒 = 9.81 瓦特。一較舊但在今日尤其在英美工程上常用之單位,曰1 馬力(Pferdestärke; horse power)。每匹馬力 = 75 米仟克/秒 = 0.736 仟瓦特 (1 仟瓦特 = 1000 瓦特),或以呎磅計之,等於550 呎磅/秒。

一力 k 沿路程 ds 之方向對於一物體所作之功 dA , 依據 § 40, 恆等於 $k_s ds$, 故 方程式(29a)可改書為

$$L = k_s \frac{ds}{dt} = k_s v \text{ 爾格/秒} \quad (30)$$

設在物體上作用多數之力,則是種力之作用或可互相抵消,致運動力

向上之合力等於零。在此情形中，據牛頓第一定律，物體之速度 v 不變。然據第30方程式，凡作用於物體上之力必有功作成，唯所作成之功有正負之分。一力或其分力 k_g ，其作用方向若與物體之速度 v 同向者，其功為正。反之，若與 v 反向者，其功為負，物體反力之作用而作功。結果，物體在前者情形中儲能，在後者情形中耗能。例如一空
中落體在向下之重力及反速度方向之摩擦阻力兩者之作用下可得一等
落下速度 v (§ 116)。此體之動能故不變。雖然，重力仍不絕的作功於
該物體上，其動能却不增加，其故因由物體反抗摩擦阻力而作之功恆
消耗物體內一部分能量，而此消耗量與物體由重力作功而獲得者適相
等。在此情形中，重力之功率為正，摩擦阻力之功率為負，兩者之和
等於零。向上拋物，反重力之作用而作功，其動能減少。重力及速度
兩者之方向相反，重力之功率為負。反之，該物落下時，重力與速度
同向，其功率為正。

欲量某機器輸出之功率若干常為一重要技術問題。一機器輸出之
有用功率與為工作而輸入之功率之比，名曰機器之效率 (Wirkungs-
grad; efficiency)。在理想機器中，效率等於 1 或等於 100%。事實
上因受摩擦阻力等之不可免的能量損失，效率恆較小。為量電動機之
有用功率，例如可用普洛義輪架 (Pronysche Zaum; Prony's brake;
圖30)。在電動機之 A 軸周圍置兩切
貼木塊 B，並由使用螺旋 S，調節木塊
在軸周之壓力。木塊與長 l 之橫桿
相聯。桿之一端繫有一盤以容納砝

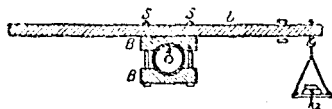


圖30. 普洛義輪架。

碼。電動機轉動時，反摩擦阻力作功於木塊上。橫桿經摩擦阻力帶動
但立即被阻於一阻動桿上。次在盤內加入砝碼 (k_2) 至由其所成之力矩
適抵消由軸上摩擦阻力所生之反力矩為止。設命 k_1 表在軸上之摩擦阻
力， ω 表由轉數計量出之電動機之角速度， r 表軸之半徑。於是軸面
上各點在 1 秒間所進行之距離等於 ωr ，而在 1 秒間電動機所作之功或
其功率 $I = k_1 \omega r$ ，或因 $\omega = 2\pi n$ (n 表每秒之轉數)， $I = k_1 r 2\pi n$ 。

然據槓桿定則，當成平衡時， $k_1 r = k_2 l$ ，其中 k_2 表砝碼所生之力，故

$$L = 2\pi n k_2 l.$$

是為電動機之機械功率。

40. 轉動能量·轉動衝量· 一質點 m 以角速度 ω 沿帶半徑 r 之圓周上運動時，其速度 $v = r\omega$ ，故其動能

$$A = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \text{ 爾格。} \quad (31a)$$

物體大者，命其所含之質量為 m_1, m_2, m_3 等，各質量與軸線之距離為 r_1, r_2, r_3 等。故其轉動能量 (Rotationsenergie; energy of rotation)

$$A = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots) \omega^2 \text{ 爾格，}$$

或依積分式

$$A = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm = \frac{1}{2} J \omega^2 \text{ 爾格，} \quad (31b)$$

因據 § 36, $\int r^2 dm$ 為物體之轉動慣量 J 。

故一轉動體之動能可由轉動慣量 J 及角速度 ω 表示，正如一直線運動體之動能可由質量及徑路速度表示。

今就一滾動體之能量言之。設令其質心自靜止狀態以 v 速度而運動，為此所須之功為 $\frac{1}{2}mv^2$ ，而使體中各點以角速度 ω 繞通過質心之一軸線轉動，其所須之功為 $\frac{1}{2}J\omega^2$ ，因此其總動能為 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$ ，但在平面上以速度 v 滾動之物體，其速度為 $v = r\omega$ ，故其總動能又可書作 $\frac{1}{2}(m + J/r^2)v^2$ 。滾動之影響是以似將體之慣性質量自 m 增至 $m + J/r^2$ 。例如一均勻實心球滾動時，其慣性質量，據 § 36，增至 1.4 倍。

設想外觀相似而大小及重量正相等之兩圓筒：其一為實心木製體，其他為空心體，後者內壁上敷有等厚之鉛皮一層。此兩體不但在外觀上即由其重量亦難區別。然設將二者並置在一斜面上並任二者同時滾下，則實心圓筒滾下較速，因作用於兩圓筒上之力相等，但空心圓筒之慣性似較大，因而其轉動慣量亦較大。其所以然者，殆因在空心圓筒中，質量與轉動軸線之距離比較在實心圓筒中為大之故。又

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$F = ma = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$W = \int F ds = \int m \frac{d^2s}{dt^2} ds$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$F = ma = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$F \cdot r = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I \omega = \frac{1}{2} \frac{I A}{dt}$$

若將兩筒筒依其軸向懸於線上，則線動時，實心圓筒振動亦較空心圓筒為速。

據方程式(28)，一動體之動量或衝量為其動能 $\frac{1}{2}mv^2$ 之依速度 v 之微分商。同樣，一轉動體之轉動衝量 (Drall, Drehimpuls; impulse of rotation) 為其轉動能量 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 之依角速度 ω 之微分商。故動轉衝量

$$F = J\omega \text{ 爾格秒。} \quad (32)$$

恰如角速度 ω 然，轉動衝量亦可由一向量矢表示之。該向量矢之大小及方向之規定亦與角速度向量矢之規定同 (參考 § 30)。轉動衝量之加法，故遵向量加法之定則 (§ 11)。

如關於動量有一不滅律，關於轉動衝量亦有一不滅律，謂之轉動衝量不滅律 (Erhaltungssatz des Drehimpuls; law of conservation of rotational impulse)。若在一物體系內祇有內力之作用 (§ 33)，則由物體間相互作用而起之轉動衝量之和恆不變。設想在整個宇宙內存在之物體成一獨立之體系，在宇宙內轉動衝量之和當有一定之值，且不能增加亦不能減少。

由比較關於直線運動及圓周運動之定律，可知兩者之公式頗多類似之處，其中唯須以角 φ 代替路程 s ，角速度 ω 及角加速度 $d\omega/dt$ 代替速度 v 及加速度 dv/dt ，轉動慣量 J 代替質量 m ，力矩 N 代替力 k 及轉動衝量 $J\omega$ 代替動量 mv 。茲集合示之如下：

直線運動	圓周運動
能量： $A = \frac{1}{2}mv^2$	能量： $A = \frac{1}{2}J\omega^2$ ($J = m r^2$)
$A = \int k ds$	$A = \int N d\varphi$
動量： $q = mv$	轉動衝量： $F = J\omega$
力： $k = m \frac{dv}{dt}$	力矩： $N = J \frac{d\omega}{dt}$

然為物理的同種量者，唯直線運動及圓周運動之能量是，而動量及轉動衝量或力及力矩則非也。

47. 方向矩。設想一體系，當其轉動一 φ 角時，發生與 φ 角為比例之反力矩 N ，為惹起此種轉動，則亦須有等大但轉向相反之力矩。

$$N = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -D \varphi$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D}{J} \varphi$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin 2\pi \nu t$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J}}$$

$$N = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -D \varphi$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D}{J} \varphi$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin 2\pi \nu t$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J}}$$

此情形可由

$$N = -D \varphi \quad (33)$$

之方程式表示之。其中比例常數 D ，謂之該系之方向矩 (Direktionsmoment)。此方程式之右邊帶負號，因當轉動時發生之力矩有減小 φ 角之勢。命 J 表該系之轉動慣量，則由方程式(16)(§ 36)，

$$N = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -D \varphi. \quad (34)$$

解之，得

$$\varphi = \varphi_0 \sin 2\pi \nu t.$$

此系故有一週期運動或振動，其中 φ_0 表示振幅。又其每秒間之振數或頻率 $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J}}$ 。該系週期 τ 與頻率 ν 之關係據 § 118 為 $\tau = 1/\nu$ 。由是則

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \text{ 秒}. \quad (35)$$

此重要關係其用處頗廣。

方向矩常誤稱為方向力。因 φ 既無因次，故由方程式(33)可知 D 有力矩之因次而係由達因厘米或克厘米²秒⁻²量之。

48. 迴轉運動。迴轉器。若一物體之轉動軸線之方向不受外界條件(如固定軸床)之限制而可自由變更者，則物體繞該自由軸線之轉動，謂之迴轉運動 (Rotation um eine freie Achse; rotation about a free axis)。其例如繞一軸線迴轉之天體及迴轉器(獨樂)。若轉動體不受外力之作用或其作用被他力所抵消，則在是種繞自由軸之迴轉中，物體之重心保持靜止狀態(例如在等速直線運動中)(§ 35)。然此非重心在轉動軸線上時，或物體繞一通過重心之軸線而迴轉時不能實現。穩定轉動軸惟有最大及最小轉動慣量者之兩種對之 (§ 36)，而尤以第一種較為穩定。

在迴轉運動中，轉動軸之方向經外力之作用而變更時，常惹起奇特及複雜慣性效應。例之普通者如迴轉器之動態是。此現象之理論欲在是處澈底解說之未免過於繁複。茲處故祇可作初步討論。第一，應

注意在迴轉中之迴轉器之轉動軸線之穩度，申言之，即迴轉器充分急速迴轉時不致傾覆之事實。第二，應注意凡有充分慣性之迴轉質量（大轉動慣量）遇有使其軸線在空間變更方向之轉動時，由發生與之正交之轉動，反對軸向變更。今以一車輪為實驗，為增加其轉動慣量可用鉛圈以代橡皮胎，軸在兩端延長，在一端繞繩多匝，以後拉繩可使急速迴轉恰如一迴轉器。（

鉛圈須牢錮在轉輪上；否則易沿切線方向拋出。）

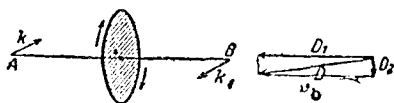


圖31. 示迴轉器設。

今欲就此簡單實驗至少

在質的方面解釋一迴轉器之動作。第31a圖示依矢指出之方向繞 A B 軸轉動之一盤，任組成一力偶之力 k 在軸上依與圖面而正交之方向作用歷瞬間之久（設想吾人固持該迴轉器於 A 及 B 兩點並依所示之方法予輪以短時的迴轉衝動）。此時迴轉器除得因繞 A B 軸線而生之轉動衝量 D_1 外，又得因繞圖面上與 A B 軸線而生之附加轉動衝量 D_2 。據 § 46 中之導言，其向量矢 D_1 及 D_2 有如第31b圖中所示之位置，而其合力，換言之，即力偶 kk 之作用停止後所有之力矩之大小及方向，則為 D 。D 之方向同時又示 AB 軸線現時之位置，故此時 A 已向下，B 已向上移動，申言之，軸已移動而其移動方向與由力偶 kk 所促成者相正交。

在以頂端堅在地上之獨樂中，力矩 kk 係由使獨樂傾覆之重力作用而來，恰如以上所述者然，獨樂之軸線不依與此力矩相當之方向但依一個與此方向正交之方向移動，為便於由重力作用惹起力矩 D_1 ，獨樂自必須有微弱傾覆運動，但其略許傾覆之後，力矩 D_2 立即發生，而後者作用之結果徒使其軸線在一個錐面上迴轉（圖32）。

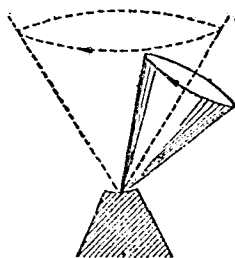


圖32. 迴轉器之運動。

當迴轉之際，軸描出圓錐之開角。若無摩擦阻力，迴轉器之迴轉可延長至久，但事實上固有摩擦阻力，其迴轉速度逐漸減小，角亦隨之增加，終至迴

轉器傾覆，迴轉器軸線在錐面上之運動，謂之迴轉器之進動 (Präzession; precession)。

迴轉器軸向穩度之一極重要的應用為迴轉羅盤 (Kreisalkompass; gyro compass)。在此儀中，用電使一物體作等迴轉運動，後者係懸在兩特別環上（與昔日用以懸非電氣的船燈者同），故可依各方向轉動。若置是種迴轉器於地球上，則因地球轉動，其自由轉動軸線之方向將不絕的變更，此器故作一進動。但在迴轉羅盤中，是種進動經一特別裝置（以空氣流吹之）全被制止。結果，迴轉器之軸向固定，不隨地球之轉動而變動，申言之，其軸線與地球軸線平行，指出準確地理南北向，與磁羅盤相較，其優點有二，即第一不受船上鐵體之擾亂，第二與地磁力之異常所謂偏向 (§ 301) 完全無關。

49. 地球之迴轉。地球為帶有一完全自由軸之迴轉體。因經日月之吸引及因黃道之傾斜，復因由日月引起之重力在地球各點不等大之故（在相背之一個比較相對之一個略弱），地球亦有進動，其軸線在一圓錐面上運動，逐漸變更其方向。其在一時間內指向北極星焉，故為一種暫時的狀況。其方向因時而變，並於 26000 年間完成在錐面上之一全轉。該圓錐之開角等於黃道傾斜度之兩倍（即地球赤道面與地球軌道面所成之角之兩倍），故為 47° 。天空之景象是以常經過千年即有顯著的變動，而其在古代的景象當非如今日所有者。例如在賀謨 (Homer) 時代，屬於大熊星座 (ursae majoris) 之 α 星（即瑤光）在希臘向未開在地平線之下者，今則已在地平線之下矣。

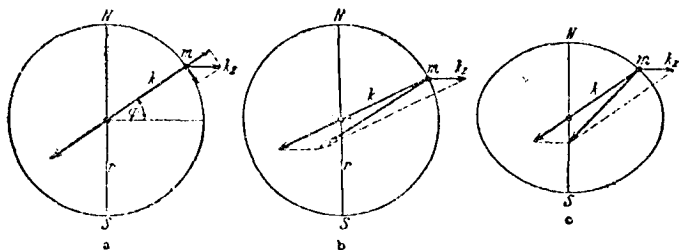


圖33. 地球上的離心力。

地球之迴轉在與之同轉之物體上惹起多數富有教育價值之慣性效應。先設想地球為一完全球狀體，假定在緯度 φ 處有一質量 m (圖33n)。作用於此上者，先有向地心之重力 k ，次有自地軸線向外之離心力 k_z (據同轉觀察者之觀點，§38)，其大小易依 $k_z = mr\omega^2 \cos^2 \varphi$ (r = 地球半徑)之方程式計算。由離心力乃引起必須的向心力。若將離心力分解而為一輻射成分及一正切成分，則知前者反對重力，而後者有使質量 m 向赤道運動之作用。第33b圖由另一方面解釋同一情形，其中重力及離心力相併而為一合力。此合力不與球面正交；故有一個向赤道之切線成分。此成分作用之結果，為使球面上自由運動之物體均向赤道運動。由此觀之，在一準確球形迴轉地球上決不致有平衡。為發生平衡，必須重力及離心力之合力與地面相正交。據計算之結果，除非地球呈一扁平迴轉橢圓形 (圖33o)，而此確與事實相符。為清楚起見，在圖中故意將離心力過分大表出 (就與重力相較而言)。其在赤道上最大，然亦祇及重力之 $1/300$ 。因此，地球之扁平率亦至小。地球在液體狀態時已呈扁平形狀，然縱使地球本身固為一真確球狀體，其上之洋面——假定含有充量之水，但事實上則不然——當仍呈扁平形狀。

設有一物體沿緯線自西向東運動，與地球之迴轉方向一致，其角速度 ω 自必較地球之角速度為大，因此，其所受之離心力自必較地而上一靜止體所受者為大，其重量似減少亦較多。——自東向西運動之物體則反是。此效應可在急駛中之船上由擺之準確實驗證實之。

在北半球自南向北運動之一物體，其依西東方向之分速度比較其所達到之地面處所有者為大。其所以然者，因地面上各點之速度自赤道愈近北極愈小之故，再令 r 表地球半徑， ω 地球之角速度，則在緯度 φ 隨地球轉動之一物體之速度為 $v = r\omega \cos \varphi$ 。若該物體沿經線方向自緯度 φ 運進至緯度 φ' ，則因該處有另一西東速度 $v' = r\omega \cos \varphi'$ ，物體對於地面有——依西東方向之速度 $u = v - v' = r\omega (\cos \varphi - \cos \varphi')$ 。例如在北半球向北運動時，物體超在地球迴轉之前，向南運動時，則

反是。就一般而言，凡自赤道向一極之運動均爲物體超在地球迴轉前而之運動，反之，自一極向赤道之運動爲滯後運動，因此之故，例如依南北(或北南)方向射出之砲彈不遵其徑路(彈丸偏向; Geschossabweichung); 又有南北向之鐵軌，在北半球，其依前進方向在右邊之一軌摩擦較甚，在南半球左軌摩擦較甚，此殆因軌道阻止偏向之故，相類似之現象亦見於依經線方向之河流中，其兩岸亦因此顯示絕不一致之侵蝕程度。物體由高塔落下時，其落下方向並不準確鉛直，但略許向地球迴轉方向一方面傾斜，其所以然者，因在塔頂以與地軸相距較遠之故，有比較在塔底爲大之西東速度。

關於地球迴轉之一重要證明係根據慣性力。其現象先於1661年經維維亞尼(Viviani)觀察之後，復由佛科(Foucault)作實驗證明之——佛科擺之實驗(Foucaultscher Pendelversuch; Foucault's pendulum experiment, 1850)。設繫一重體於一長線或一金屬絲之一端，任其如擺振動，則察見振動面漸漸反地球迴轉之方向在空間旋轉，率於一小時後旋轉一個等於 $15^\circ \sin \varphi$ 之角度(φ 表觀察者所在地之地理緯度)，故振動面在24小時內在赤道旋轉 0° ，在柏林 $285^\circ 36'$ 而在兩極 360° 。如用長擺，且可於數回往返振動之後，即顯出振動面之旋轉。爲此用一弧光燈將線之影像反射在一白布上並令擺當初依與白布垂直之方向振動。不久即察見其影像左右推擴，是即爲振動面旋轉之證據。地球迴轉現象之實驗故與學說一致。

凡如以上所述之諸現象又可就另一事實而解釋之。此事實何，即凡動體因慣性關係按描出有與當時情狀適合之最小曲率之徑路。

一特別慣性效應其發生屬於一迴轉系並與之作相對運動之質量上者，特名曰科賴奧來力(Coriolis-Kräfte; Corioli's forces)。

50. 大陸之自極的逸走。試觀一地球儀，則見大陸之大部分集中於赤道及中間緯度之周圍，而在近極之區域，陸地減少。惠坎納(Wegener)以此爲離心力之結果。大陸可視爲浮在岩漿上之土壤，然在岩漿上祇能緩緩運動。是種土壤之重心係在爲其所排除之岩漿之重

心之上。若無土塊，則因地球有扁橢形狀之故，可到處發生平衡而各處之岩漿祇有為使重力及離心力之合力與地面而直交所須之離心力。但因土塊之重心高於無土塊時在岩漿中所有者，其重心離地心較遠，故在土塊上面而作用之離心力大於其處所應有者。因此，重力及離心力之合力不能與地面垂直，但相傾斜。此合力具有地面上向赤道之正切分力，後者依此方向驅逐土塊（大陸之自極的遁走；Polflucht der Kontinente, 惠坎納）。若土塊之重心低於被排除之岩漿所有者，則大陸土塊自赤道向極遁走。



圖34. 大陸之自極遁走之解釋。據萊烈 (Lely)。

此情形山下例實驗表顯之，至為適當。第 34 圖表一盛水之容器（參考 § 88）。水上置一帶針之軟木塊。若針在上面，則當容器被轉動時，軟木塊向內移動，若在下面，則軟木塊向外移動。其理由不難據以上所述而解釋之。在第一情形中，作用於由軟木塊及針所組成之體系之重心上之離心力比較作用於被木塊排除之水之重心上者為小。在第二情形中則較大。關於重心之相對的位置，就是處而言，適與就大陸土塊而言者相反。其所以然者，正因水面之彎曲與地面之彎曲相反。若以水面上之空氣面與地面相比擬，則可想像地球上之狀況。

51. 彈性碰撞 (衝突) 及 非彈性碰撞。為直觀的說明能量原則及動量不滅律，乃舉下例一極簡單並富有教育價值之例以討論兩物體間之碰撞並設想兩球以不同的速度在同一直線上運動致發生正直碰撞 (圖 35)。

兩物體相碰時，兩者動能之一部分往往變換為他種能量 (熱量，碰體之永久變形，聲)，是以相碰之後，其動能比較以前為少。碰撞之兩極限情形為 完全彈性碰撞 (vollkommen elastischer Stoss; perfectly elastic impact) 及 完全非彈性碰撞 (vollkommen unelastischer Stoss; perfectly inelastic impact)。在前者中，祇少許動量變換，在後者中，能量變換最多，而兩體碰撞之後，不再分離，但共同繼續

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{u_1(m_1 - m_2) + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{2m_1 u_1 + u_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

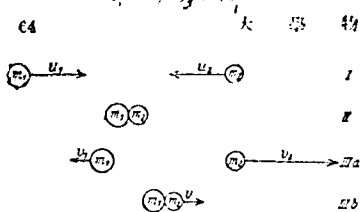


圖35. 兩質量之中途碰撞。I 碰撞之前，II 碰撞之際，III a 碰撞之後（彈性體），III b 碰撞之後（非彈性體）。假定 $m_2 = m_1/2, u_2 = -u_1$ ，故彈性體 $v_1 = -u_1/3, v_2 = +5u_1/3$ ，非彈性體 $v = +u_1/3$

運動。第一情形與滾珠軸承之兩鋼珠相類似，第二情形可以玻璃匠用之油灰為例。

I. 彈性碰撞。是處動量之總和（銜量定律 § 33）及動能之總和（能量原則 § 12）在碰撞前後相等。命 m_1 及 m_2 表兩碰撞質量， u_1 及 u_2 表在碰撞

前之速度， v_1 及 v_2 表在碰撞後之速度。於是據能量原則，

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (36)$$

又據銜量定律，

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (37)$$

由是：

$$v_1 = \frac{u_1(m_1 - m_2) + 2u_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{及} \quad v_2 = \frac{u_2(m_2 - m_1) + 2u_1 m_1}{m_1 + m_2}. \quad (38a)$$

今假定兩質量相等，而第二質量在碰撞之前原係靜止，故 $u_2 = 0$ 。相碰後，據上列方程式得 $v_1 = 0$ 及 $v_2 = u_1$ 。故在此特殊情形中，兩質量之速度互相交換。

牛頓由實驗結果發見：二物體碰撞之後，其分開速度 $(v_2 - v_1)$ 與其未碰撞前之移近速度 $(u_1 - u_2)$ 之比為一常數。此常數與物體之質量及速度無關，僅視其物質及顆粒方向（若非各向同性的）而定，名曰恢復係數或碰撞係數。茲以 e 代表之，得

$$(v_2 - v_1) = e(u_1 - u_2). \quad (38b)$$

二物體碰撞時，先相壓縮，次各恢復其原形。恢復力最大者，如完全彈性體，其分開之速度與碰撞前移近之速度相等，其恢復係數故為 1。若恢復力等於零者，如完全非彈性體，其碰撞之後，兩物體將不分開，但以後以同一速度運動，其恢復係數為零。尋常物質非完全彈性的，亦非完全非彈性的，故其恢復係數在 0 與 1 之間。欲求二物體之

恢復係數，先設想相碰之物體之一原係靜止，即 $u_2 = 0$ ，其中質量 m_2 但甚大，故碰撞後其速度 v_2 變為零，如是則

$$e = -\frac{v_1}{u_1}, \quad (38c)$$

此情形與一小球落於一大物體面上之情形同。命 H 表落下高度， h 表回跳高度。如以落下方向為正，則 $u_1 = \sqrt{2gh}$ 及 $v_1 = -\sqrt{2gh_1}$ ，故由方程式(38c)

$$e = \sqrt{\frac{h}{H}}. \quad (38d)$$

此為求恢復係數之簡單實驗法。

為以實例證明碰撞現象，可應用第30圖所示之儀器。器中用雙線懸鋼球若干。將一球或多數球掀起於一側並任其向餘球撞去，於是在球列末端跳開與在前端撞去同多之球數，且撞去之球既撞之後即靜止，而跳開之球，則以與撞去之球相同之速度離開其餘之球。命 a 表撞去之球數， u 其速度， b 表跳開之球數， v 其速度。於是據能量原則， $a \frac{1}{2} m u^2 = b \frac{1}{2} m v^2$ 及據衝量定律， $a \times m u = b \times m v$ 。由此兩方程式得 $u = v$ 及 $a = b$ ，恰如實驗所指出者（撞去球中一個或若干個球之不回跳焉，其故因在球列間傳遞碰撞須費一有限時間）。

2. 非彈性碰撞。 在是處，因在相碰體之間，祇有內力之作用，衝量定律亦有效。然能量原則以另一新的關係代之。據該關係，兩物體碰撞之後有同一速度 v 。故

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v. \quad (39)$$

由此得

$$v = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}. \quad (40)$$

例如 $m_1 = m_2 = m$ 及 $u_2 = 0$ ，則得 $v = u_1/2$ 。在此特殊情形中，兩物體之總動能，在碰撞之後等於 $\frac{1}{2}(2m)(\frac{1}{2}u_1)^2 = \frac{1}{4}m u_1^2$ ，在

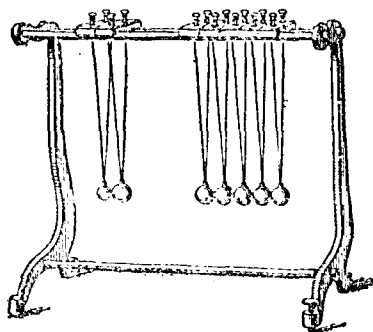


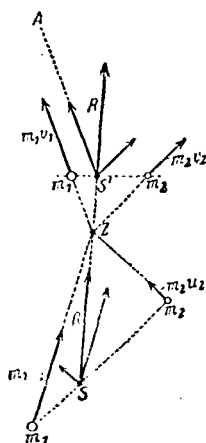
圖30. 球碰撞器。

碰撞之前，等於 $\frac{1}{2}m_1u_1^2$ ，故碰撞之後，一半動能已變換為別種能量（以熱量及變態之功為主）。

為以實驗表示非彈性碰撞，乃於第86圖所示之碰撞器之鋼球上塗玻璃工匠用之油灰少許，俾球在碰撞之後不再分離。

是種考驗表顯關於物理現象計算法之一般的意義至為澈透。在如上所述之情形中，祇須應用能量原則及衝量定律，並假定碰撞係在一直線上，即可計算其經過，除非關於碰撞接觸後之內碰撞之過程為唯一之例外，但此在是處非為吾人所注意者。

為說明是種考驗之原則的意義，今設想有任何碰撞方向之彈性碰撞（圖37）。假使有 m_1u_1 及 m_2u_2 兩動量之兩質量 m_1 及 m_2 於運動之際互相碰撞於 Z 點，其公重心 S （§34）故已移至 Z 。此兩物體之體系之總動量可依向量加法（§11）在重心求得之（矢線 R ）。今設想物體碰撞之後，公重心移至 S' 點瞬間之情形。總動量 R 之大小及方向當不至變更（§33）。假定其他關於碰撞過程之未知原因當時助成質量 m_1 依與 $S'A$ 平行之方向運動，今須求兩質量碰撞後之動量之大小及方向，申言之，分解總量為兩成分，其一有 $S'A$ 之方向。在無數多之兩



可能成分中，其就速度之大小適滿足能量原則之條件者當選（在非完全彈性體碰撞之時，又須顧及因碰撞而起之能量損失）。如是乃成第37圖中所示之作法，至求兩質量當時之位置，其法從 Z 作與兩新速度方向平行之兩線，次再依一定條件作一直線通過 S' ，此條件何，即在此直線上從 S' 以至與平行線之切點之兩距離須成與質量比例相反之比例，因 S' 為此兩質量之重心也。此兩切點即表 m_1 及 m_2 當時之位置。至是，碰撞以後之狀況及此後之進行遂完全決定。

在上述特殊情形中，假定兩碰撞體祇於實際接觸之際互相起力的作用，然因並無他力之故，

圖37. 彈性碰撞之舉說。

仍作直線進行。今設想另一特殊情形，假定參加之物體隨時互相起力的作用而其力之大小為其距離之一函數(重力，電之引力或斥力)。然如若相距甚遠或在碰撞前後相距甚遠，其間之力極小，當時之過程實與以上所述者相同(其差別惟在此情形中真正碰撞時間延長，即互相作用之時間延長)。為計算其在碰撞後之最後狀況亦祇須知碰撞以前之初始狀況及兩物體碰撞時之能量損失——所謂彈性程度——以及碰撞之後兩物體中一物體速度之大小或方向。在各情形中，撞體之動量之總和依方向及大小均不變，而撞體之最後能量加上碰撞時之損失等於初始能量(能量原則)。參加之物體其實毋須有體與體之接觸。尋常祇須進入於其相互吸引或推斥區域內並在力之作用下離開其原來的直線徑路，一俟通過此區域之後，復取直線徑路而進行。如是之碰撞例如氣體分子之碰撞是(§94)。

若參加碰撞之物體除動能之外，又有轉動能者，則決算能量時又須加添轉動能一項並又有轉動衝量不滅律之關係(§46)。

53. 力學量之因次。一切力學量皆由CGS制之三基本量即長度，時間及質量導出，故其單位可由厘米，克及秒之三單位表示且依此種單位之乘幕之方式。在CGS制中，凡力學量各有一定之因次(Dimension; dimension)。與三基本量相當，在CGS制中又有三基本因次，即長度，時間及質量之因次是，而係以 $|l|$ ， $|t|$ 及 $|m|$ 表示之。導出量之因次故為此三基本因次之乘幕，其方式為 $|m^a l^b t^c|$ ，其中 a ， b ， c 或為正數或為負數，且可等於0。一純數之因次 $|z| = |m^0 l^0 t^0|$ ，故純數與單位無關。茲將最重要的力學量作表列下：

表一表 力學量之因次及單位

質量	$ m $, 克	能, 功	$ ml^2t^{-2} $, 克厘米 ² 秒 ⁻²
長度	$ l $, 厘米	功率	$ ml^2t^{-3} $, 克厘米 ² 秒 ⁻³
時間	$ t $, 秒	角速度	$ t^{-1} $, 秒 ⁻¹
速度	$ lt^{-1} $, 厘米秒 ⁻¹	角加速度	$ t^{-2} $, 秒 ⁻²
加速度	$ lt^{-2} $, 厘米秒 ⁻²	振數	$ t^{-1} $, 秒 ⁻¹
力	$ mt^{-2} $, 克厘米秒 ⁻²	轉動衝量	$ ml^2 $, 克厘米 ²

壓力 $[ml^{-1}t^{-2}]$, 克厘米⁻¹秒⁻² 力矩 $[ml^2t^{-2}]$ 克厘米²秒⁻²
 動量 $[mlt^{-1}]$, 克厘米秒⁻¹ 轉動動量 $[ml^2t^{-1}]$ 克厘米²秒⁻¹

一導出量無特別名稱時，其因次公式已足為其名稱，例如速度之單位無特別名稱，10單位之加速度在CGS制中書作

$$10 \text{ 厘米/秒}^2 = 10 \text{ 厘米秒}^{-2}.$$

因次關係常供變換一量之量度從一絕對單位制以至其他單位制，茲舉例如下：

1. 已知重力加速度為981厘米/秒²；試求其以米/分²計之值？令所求之值為x，則

$$x \frac{\text{米}}{\text{分}^2} = 981 \frac{\text{厘米}}{\text{秒}^2} \therefore x = 981 \frac{\text{厘米}}{\text{米}} \left(\frac{\text{分}}{\text{秒}} \right)^2 = 35316.$$

2. 同上，求其以呎/分²計之值？假定為x，則

$$x \text{ 呎/分}^2 = 981 \text{ 厘米/秒}^2 \therefore x = \frac{981 \text{ 厘米}}{\text{呎}} \left(\frac{\text{分}}{\text{秒}} \right)^2 = 981 \times \frac{1}{12 \times 2.54} \times 60^2 = 116.$$

因次關係又可用以測驗繁複公式之準確與否，公式兩邊之因次必須等同，否則不能代表同一之物，例如

力 $k = ma$ ，其兩邊之因次

$$mlt^{-2} = ml^{-1}t^{-2}$$

又動能 $A = \frac{1}{2}mv^2$ ，其兩邊之因次

$$ml^2t^{-2} = \frac{1}{2}m(lt^{-1})^2 = \frac{1}{2}ml^2t^{-2}.$$

此僅示兩邊之因次無誤，至純數（例如第二式中之 $\frac{1}{2}$ ）是否無誤，則非此種分析所能決定。

第六章 重 力

53. 重力及重力加速度。地球上之物體苟無他物支持，即自行落下，是則地球上一切物體無不受一種向地心之力之作用，此力即地球之引力，名曰重力 (Schwerkraft; force of gravity) 或萬有引力 (Gravitation; gravitation)。凡物皆有輕重之別，輕者因所受之引力小，重者因所受之引力大，故物體之重或重量 (Schwere; weight)，即作用於其上之重力，為物質之一通性，恰如慣性然。物體靜止時，

其重量或爲在下面之物體所受之壓力或以線懸時爲線所受之張力。物體可自由運動時，重力爲其落下之原因，故爲一種加速運動之原因。

在地面上，重力非到處一致。距地心愈近，重力亦愈大。故重力在極處比較在赤道爲大（因地球扁平之故，參考 § 49），在海面上比較在山地爲大。然無論如何，在地面上此相差極微（參考方程式 1），尋常可略去之。

經準確實驗，證明重力作用於不同物體上而發生之加速度完全相等且與物體之種類無關。此即表明凡從等高之處自由落下之物體，其落下速度相等，唯須假定當時除受重力作用外，不受他種力之作用（伽利略，1590）。鉛餅落下比較羽毛落下爲速，其故則因物體在空氣中落下時除受重力之作用外又受空氣阻力之作用。凡物性不同之物體，其受空氣阻力作用之強弱亦不同。設在一塔頂或在任一高處，任令重量不等之一磚及一鉛餅同時落下，此時因作用於兩物體上之空氣摩擦阻力與重力相較極弱，兩物體可同時或幾乎同時達地面。又取一玻璃管，管內置鉛球及羽毛各一，用空氣唧筒抽去空氣，次將管內直立位置驟然顛倒，任令鉛球及羽毛從管頂落下（圖 38），則見兩者同時自由落下，並無遲速之別矣。

物體自由落下時，作用於物體上之重力加速度（Erd-schleunigung; acceleration of gravity）爲

$$g = 980.62(1 - 0.00264 \cos 2\varphi - 0.0000003h) \text{ 厘米/秒}^2, (1)$$

其中 φ 表緯度， h 表海面以上之高度而係以米數計之。故在 45 緯度，其近似值

$$g = 981 \text{ 厘米/秒}^2.$$

54. 引力質量。物體之有重量焉，歸根於物體之一內性，此內性在是處特名曰引力質量（schwere Masse; gravitational mass），恰如爲慣性之原因之慣性質量是（§ 23）。一物體之引力質量係與作用於其上之重力爲比例，故可用重量量之。（例如將物體自由懸在螺旋彈簧上，觀察其延長度。）



圖 38. 一切物體等速落下。

設命一物體之引力質量爲 m' ，其慣性質量爲 m ，該物體所受之重力，依據牛頓定律 (§ 23)，等於 mg 達因 ($g=981$ 厘米/秒²)，但據以上引力質量之定義又與 m' 爲比例，故

$$mg = m'a, \quad (2)$$

其中 a 爲一常數，在同處各物體之 g 既相同，故各物體之 $\frac{m'}{m} = \frac{g}{a}$ 之比亦相等，各物體之慣性質量及引力質量故互爲比例，此比例一致認作 1. 以是一物體之引力質量可視爲直接等於慣性質量。(經驗雖祇指出 m' 與 m 爲比例，但吾人既可自由規定引力質量之單位，是以不難由適當選擇使 $m' = m$ 。) 因此引力質量之單位在 CGS 制中亦爲克。

物體引力質量與慣性質量之相等，申言之，物體愈重時使之運動亦愈難之事實，據日常之經驗已爲一般所週知，難怪非物理學者大都不知在慣性質量及引力質量之間却有基本的差別在焉。職是之故，在日日常生活中，吾人常謂在水平面上難使其運動之物體是，，重的‘，雖然此種批評所根據之經驗事實與重力實毫無關係。慣性質量及引力質量之相等(嚴格言之，互爲比例的性質)，使吾人有此種批評，雖然，此種相等並非不言而自明者，但純爲一經驗事實。其最準確的證明見於用攝之實驗中 (§ 60)。

慣性質量與引力質量相等之事實成爲愛因斯坦 (Einstein) 廣義相對論之基礎 (§ 540)。

55. 重或重量。因萬有引力作用於引力質量上之力，謂之該質量之重或重量。既爲一力，其在 CGS 制中當以達因計之。有 1 克質量之物體其因萬有引力(重力)而受之力即爲該物體作用於底床上之力，其大小等於質量與重力加速度之乘積 mg ，故在海面上等於 981 達因。就一般而言，凡與有 m 克質量之物體之重相當之力爲 mg 達因。在日日常生活中常用 1 克 (或 1 千克) 質量之重爲力之單位。是種力單位名曰，，1 克重‘以與質量單位之 1 克相區別， m 克質量之重係一種力，故顯然與 m 克質量不同，尋常於單位名稱之後綴一重‘字表之。例如，， m 克‘表示質量之多寡，， m 克重‘表示作用於 m 克質量上之重力。在

CGS制中

1克重 = 981達因。

既隨物體與地心之距離而異，故一物體之重量視高度而有差別，但其質量則不因此而變。物體在高山比較在平地上略輕（但並非慣性或質量亦減！），但每升高 1000 米不過約減輕 $1/3000$ 而已。在 3000 米高處，1 仟克之質量其重與在平地 999 克之質量之重相等。重量如是之減去在天秤上不能察見，因砝碼之重在高處亦等大減去故也。此時須用一極精密的彈簧秤確定，因彈簧之功不因高度而變更。

在日常生活上，重量隨高度之減去並無影響。在商業上一則以其所差極微，不發生關係，二則因由秤秤定者，其實並非為某一定之重量，但為其質量。假定稱進與稱出皆用天秤（或桿秤），則例如 1 磅重之牛酪不論在高山或在平地稱者，其質量之多寡不變，但與買賣有關者唯此而已。

56. 比重、密度、容度。若以一均勻物質之容積（以立方厘米計）分除其重量（以克數計），則在同一狀態下（等壓力及等溫度），恆得一同值 ρ 。

$$\frac{k}{v} = \rho \text{ 克重/厘米}^3. \quad (3)$$

此比名曰該物質之比重 (spezifische Gewicht; specific gravity)。依據方程式(3)，其數值等於物質 1 立方厘米之重之數值。故容積單位之重即為比重。

據克之定義 (§ 23)，水在攝氏 4° 時之比重等於 1 克重/厘米³，故一物質之比重在數字上即等於其某一定量之重與同容積之攝氏 4° 之水之重之比。因此，比重又有一定義如下：物質之重與攝氏 4° 之水之重之比，稱為該物質之比重。依此視比重（比例）為一純數，故此定義不及前者之佳。

物體之重量既據 § 53 與海面上之高度有關，故嚴格言之，比重亦與高度（雖則極微）有關。

就同一之容積而言，質量有大有小，表明此種差別之量，稱曰密

度(Density; Dichte), 故密度者, 單位容積所有之質量也(§ 23). 以方程式表示之

$$\frac{m}{v} = \rho \text{ 克/厘米}^3. \quad (4)$$

準此(若不計重量隨高度之微差), 則由方程式(3)規定之比重有與密度相同之數值, 但此兩者之物理因次既不相同, 故須從嚴區別之. 一質量 m 之重 k 低等於 mg 達因, 故在CGS制中, 比重等於 mg/v 達因/厘米³, 或

$$\rho_{\text{CGS}} = \rho \text{ g達因/厘米}^3. \quad (5)$$

密度 ρ 如質量然, 與高度無關.

一物質密度之逆數, 謂之容度 v_s (spezifisches volumen; specifico volumm), 卽一質量單位或1克之容積也.†

故一物質之 v 厘米³容積所有之質量

$$m = \rho v \text{ 克}, \quad (6a)$$

一物質之 v 厘米³容積所有之重量

$$k = \rho v \text{ 克重或 } \rho g v \text{ 達因}, \quad (6b)$$

一物質之 m 克質量所有之容積

$$v = v_s m \text{ 厘米}^3, \quad (6c)$$

又容度

$$v_s = \frac{1}{\rho} \text{ 厘米}^3/\text{克}. \quad (7)$$

有簡單形狀之物體其比重可直接由稱出其重量及量出其容積而決定. 在有複雜形狀之物體其中, 比重須應用別種方法量出 (§ 89).

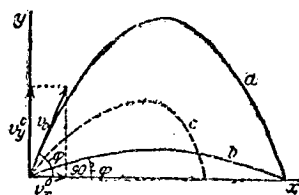
第二表 比重, 以克厘米⁻³計.

鉛.....	2.7	酒精.....	0.791
錫.....	11.3	水.....	0.9997
鐵.....	7.6-7.81	水銀.....	13.595
金.....	19.3	氫氣.....	0.00009000
鎂.....	8.0	淡氣.....	0.0012607
鎊.....	0.97	養氣.....	0.0014291
鎘.....	21.4	空氣.....	0.0012928
玻璃.....	2.4-2.6	二氧化碳.....	0.0019768
安息油.....	0.881	氮.....	0.001785
醚(酒精).....	0.717		

表中所示之各值，其關於固體及液體者，係指在攝氏 0° 時之比重，其關於氣體者，係指在攝氏 0° 及在1氣壓下時之比重。

57. 在地球萬有引力場（重力場）內之運動。落下及拋射。

如將在空間能自由運動之物體以一定速度依任一方面拋出，則其運動當受重力之影響，而其徑路大都成為曲線。在時間 $t=0$ 時，命其位置之與地面平行及垂直之坐標為 $x=0$ 及 $y=0$ ，又命當時其在 $x-y$ 平面內之速度



為 v_0 ，其徑路對於水平 x 方向之斜度

圖39. 地面上一物體在重力作用下之徑路（斜拋出）。

假定為 φ （圖39，曲線 a ）。次設想其速度之依 x 方向及 y 方向之兩分速度為

$$v_x^0 = v_0 \cos \varphi \quad \text{及} \quad v_y^0 = v_0 \sin \varphi. \quad (8)$$

水平方向之運動不受重力加速度之作用，但鉛直方向之運動受向下重力加速度之作用

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g. \quad (9)$$

由方程式(8)並由積算方程式(9)得

$$\frac{dx}{dt} = v_x^0 = v_0 \cos \varphi, \quad (10a)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y^0 - gt. \quad (10b)$$

經二次積算得

$$x = v_0 t \cos \varphi \quad \text{及} \quad y = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2. \quad (11)$$

由消去時間 t ，則得關於物體之徑路曲線之方程式

$$y = x \tan \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (12)$$

此為一拋物線之方程式。其頂點在徑路之最高點。在此點，物體之鉛直分速度等於零，不能再行上昇，即 $dy/dt=0$ 。於是山方程式(10b)得其高時間

$$t_h = \frac{v_0 \sin \varphi}{g} \quad (13)$$

將此值代入於(11)方程式內，則得最高度或昇高度 $y = h$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} \quad (14)$$

物體落下時，遵與上昇時對稱之曲線徑路，其復返於出發地面時， $y = 0$ 。由(12)方程式得依水平方向所達到之距離等於

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi \quad (15)$$

通稱之曰水平射程。由此方程式可知以一定初速依兩不同斜度射發時可有同一水平射程。此兩斜度之角一為 φ 而其他為 $\pi/2 - \varphi$ (圖39, 曲線b)。蓋 $\sin \varphi = \cos(\pi/2 - \varphi)$ 及 $\cos \varphi = \sin(\pi/2 - \varphi)$ 。根據此事實，乃軍兵家有所謂曲射及平射之別。

因有不可免之空氣阻力(尤其因砲彈有高速，此阻力可極大)，砲彈之徑路與a及b兩曲線相差甚大，徑路向下之一枝其斜度比較向上之一枝為急而昇高度及水平射程亦較小(所謂射體軌跡或彈道；ballistische Kurve; ballistic curve; 圖39c)。

據(15)方程式，最大水平射程係當 $\sin 2\varphi = 1$ 時 或 $\varphi = 45^\circ$ 時發生，此射程等於 $x_m = v_0^2/g$ 。其值為在此情形中所達到之昇高度之四倍，因據(14)方程式， $h = v^2/4g$ 。

以初速 v_0 將物體鉛直拋上時， $\varphi = 90^\circ$ ， $\cos \varphi = 0$ 及 $x = 0$ ，於是山前式得

$$y = vt - \frac{1}{2}gt^2, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 - gt, \quad h = \frac{v_0^2}{2g}, \quad t_h = \frac{v_0}{g} \quad (16)$$

物體達最高點之後，不能再向上昇，於是折而落下，達於地面， $y = 0$ 。為此所須之時間與由地面昇至最高點所須者相等。故由運動開始至再達地面為止之時間為 $2t_h = 2v_0/g$ ，上昇時間與初速 v_0 為比例而昇高度與初速之平方為比例。

在 $t = 0$ 時，任令物體以初速 $v_0 = 0$ 從 h 高處落下，則由積算方程式(9)得

$$\frac{dy}{dt} = -gt, \quad y = h - \frac{1}{2}gt^2 \text{ 或 } h - y = \frac{1}{2}gt^2. \quad (17)$$

落下距離 $h - y$ 故與落下時間 t 為比例。一秒鐘之後， $1g/2$ 約 490 厘米，二秒鐘之後， $4g/2 = 2g$ 約 1960 厘米，如是類推。落下速度與時間為比例的增加。經簡單變式，落下距離後之落下速度

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (18)$$

在 1 秒間落下之距離既已極大，為證明以上諸式之合法，須有大的落下距離。伽利略¹⁾ 在其實驗中利用一特別適宜的建築物，即在畢薩 (Pisa) 之著名斜塔，其於 1590 年發明落體定律，而於 1604 年創公式準確表示之。

由以上方程式容易導出一鉛直拋體在高度之動能

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgy \quad \text{或} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (19)$$

第二方程式之右邊表在地面上 ($y=0$) 拋體之動能，其左邊表在 y 高度之動能，加上 mgh 之值。今 mg 表作用於物體上之重力，故據 § 44， mgy 表舉該體至達 y 高度所耗費之功。但此功等於位能，為物體因上升而獲得者。據 (19) 方程式云：一拋體之動能及位能之總和 (略去空氣之摩擦阻力) 不變。上升時，位能增加，同時等量之動能減少，落下時則相反。關於自由拋射 (Wurf; project) 及落下 (Fall; fall) 之能量不減律至是遂驗 (惠更斯 (Huygens) 1673)。

58. 斜面上之運動。凡對於水平面作一 φ 角度之平面，謂之斜面 (sohiefe Ebene; inclined plane) (圖 40)。命 m 表在此斜面上滑動之物體之質量。此物體受鉛直向下之重力 mg 之作用。今將此重力分解為二，一與斜面平行，命之為 k_1 ，一與其垂直，命之為 k_2 。此兩分力中，唯與斜面平行之一力能惹起物體之加速度。此分力之值為 $k_1 = mg \sin \varphi$ 。與此分力垂直之分力 $k_2 = mg \cos \varphi$ 將物體壓在斜面上，但因其與斜面之抵抗力 k_2 (壓力，§ 30) 相償，不能依此方向惹起物體之加

¹⁾ 伽利略 (1564—1642) 推為現代物理學之創作者。凡作真正實驗並用方程式解釋物理學上之定律者，該氏實居其首。

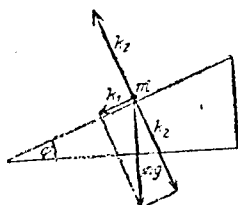


圖40. 斜面。

速度。(故力 k_1 實為重力 mg 及摩擦力 k_3 之合力而此可由第40圖明之。因事實上作用於質量上者唯此二力而已。)如是，則支配運動之有效力當為 k_1 ，運動既被限於斜面上，故加速度之方向亦不能不限於斜面之方向。即

$$k_1 = ma = mg \sin \varphi, \quad (20)$$

其中 a 表依斜面方向之加速度。

如圖40，命 h 表斜面之高度， s 斜面之長度。物體當初在斜面之最高點，其與斜面最低點之距離 $s = \frac{h}{\sin \varphi}$ 。沿斜面落下時，於時間 t 之間所滑下之距離(§ 20)

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}gt^2 \sin \varphi, \quad (21)$$

既達是處，其瞬間之速度

$$v = atg = t \sin \varphi \quad \text{或} \quad v = \sqrt{2gs \sin \varphi}. \quad (22)$$

到達斜面最低點時之瞬間速度

$$v = \sqrt{2gs \sin \varphi} = \sqrt{2gh}. \quad (23)$$

但據(18)方程式，此亦為一自由鉛直落體落下 h 距離後所有之速度，是以斜面滑下垂直距離 h 時之速度與拋下運動經過同一距離時之速度彼此相等。根據能量原則，此為必然的結果，蓋在兩情中，等量位能之減去必與等量位能之增加相應。

欲使質量 m 之物體沿斜面上滑 s 之距離，申言之，至達 $h = s \sin \varphi$ 之高度，須耗費功若干，以方程式表示之，此功

$$A = mgS \sin \varphi = mgh \text{ 爾格}, \quad (24)$$

蓋在此情形中，重力之有效分力之值為 $mg \sin \varphi$ ，因面經過之距離等於 s 。由此觀之，為此所耗費之功與舉同一物體至達 h 之高度時所須者恰相等，但所須之力則較小，而斜面之斜度愈小時，所須之力亦愈小，蓋在是處祇須用重力之有效分力。反之，依鉛直方向舉起物體時則須用與重力相等之全力，故前者當較後者小 $\sin \varphi$ 倍。至經過之距離則較長。

在斜面上作簡單滑下實驗，適用伽利略為證明落體定律所用之斜槽儀 (Fallirine)，在槽內一球可沿斜面滾下，由量出時間與落下距離之關係，可證明上面導出之定律。由實驗結果，不難證實如斜度不變，沿斜面滑下之距離與自運動開始後算起之時間之平方為比例。（伽利略應用此種儀器以減少過分大之加速度，證明球所行之距離與時間之平方為比例，因而認自由落體之加速度自始至終一致。）同樣，落下時間與傾斜角度關係可由變更斜度證明之。

滾下之球，除有動能外，又有轉動能，故經過某一距離之後，其位能之一部變為滾動能而續下運動之動能當如量減少。因有摩擦阻力，球之落下速度比較無此阻力時為小，設球與槽紙在一點相接觸（故球不靠槽之兩邊上），其慣性質量據 § 36 約增加 $\frac{2}{5}$ 倍，因此 (20) 方程式可書作 $\frac{7}{5} ma = mgsin\varphi$ 或 $a = \frac{5}{7} gsin\varphi$ 。右邊之引力質量自然不發生關係，故轉動之效應恰如其重力加速度 g 被減至其有效值之 $\frac{5}{7}$ ，若球靠在槽之邊上，此效應則更大。

59. 重心。凡組成物體之各小質量莫不一律受重力之作用，此等分重力皆作用於各小質量之質心上而同為向下之平行力，其大小與各小質量為比例，其合力當等於此等分重力之和，即與作用於物體全體之質心上之重力相等，分慣性力 (§ 34) 之合力作用於全體質心上，而分重力之合力亦作用於全體質心上，故質心又稱曰重心，不拘物體之位置方向如何，作用於物體全體之重力無不以重心為作用點。

60. 擺，以一受重力作用之物體懸於一點並令其可繞一點或一固定水平軸自由擺動，如是之裝置，曰擺 (Pendel; pendulum)，至轉動點或轉動軸是否在體內則不問焉。當擺自由靜止時，其重心點在支點之直下，設將擺略向橫移動，使其離開自然靜止位置，手放開，令其自由，如此，則擺在其靜止位置左右擺動，次將其離開靜止位置之偏轉角 φ 為時間之一週期性函數，茲假定其偏轉不大，故在計算中， $\sin\varphi$ 可由

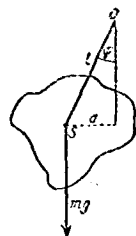


圖41. 示擺之定律之由來。

φ 代之 (§ 8).

設想一擺，其質量為 m ，對於轉動點 O 之轉動慣量為 J 。其重心 S 與轉動點 O 之距離為 l (同 41)。至其或自由懸在一點 O 或固定在通過 O 之水平軸上，則並無關係 (若軸線不水平，則以下之計算略許變更)。以下先討論擺在平面內之振動。

命 mg 表作用於擺之重心之重力。其向一方向偏轉 φ 角時受一種反力矩之作用

$$N = -mga = -mgl \sin \varphi = -mg \varphi.$$

(右邊必帶有負符號，因力矩有使 φ 角減小之勢。) 故據 § 47

$$N = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \varphi = -D \varphi, \quad (25)$$

其中 $mgl = D$ 。據 § 47, D 表擺之方向矩。故

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -D \varphi. \quad (26)$$

此微分方程式之解法已在 § 47 中導出之矣。且同時已求出有轉動慣量 J 及方向矩 D 之一體系之振動週期等於

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \text{ 秒}, \quad (27)$$

或在此情形中

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \text{ 秒}. \quad (28)$$

命 J_0 表擺體對於與其振動面垂直並通過其重心之軸之轉動慣量。於是據斯泰納律 (§ 36)，擺體之對於 O 點之轉動慣量等於 $J = J_0 + ml^2$ 。擺體與 l 相較極小者，則 J_0 可略去，而當時擺體可視作重心 S 在 O 點之一質心。此種理想擺，名曰算學擺，以示與實際物理擺有別。將 $J = ml^2$ 代入 (28) 方程式中，則得

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ 秒} \quad (29)$$

故一算學擺之週期與擺長 l 之方根為比例。此定律在 1596 年由伽利略用實驗方法發明。以 $g = 981$ 厘米/秒² 代入 (29) 方程式中，則當算

學擺之長等於 1 米時，其週期頗近 $\tau = 2$ 秒（所謂秒擺；Sekundenpendel; seconds pendulum）。

擺經算學擺而理想化，其理想化之物理學上的意義如下：一物理擺之運動，可設想分解而為兩擺動，一擺動係繞 0 點而當時擺體在空間之位置不因此改變，其他一擺動係繞其重心軸線。擺極小時，在第二擺動內所有之動量僅占擺體全部動能之一小部分，故可略去之。

命(28)方程式中

$$\frac{J}{ml} = \lambda \text{ 厘米,} \quad (30)$$

故物理擺之週期方程式可書作

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \text{ 秒.} \quad (31)$$

由比較(29)及(31)方程式，可知算學擺之長為 λ 時，其週期當與物理擺之週期同。此 λ 故名曰物理擺之對比擺長。

質量 m 及半徑 r 之均一實心球之對於通過其重心（球心）之軸線之轉動慣量為 $J_0 = \frac{2}{5}mr^2$ 。故若將該球懸於線之一端並使其球心與支點之距離為 l ，則其對於其支點而言之轉動慣量，據 § 36

$$J = \frac{2}{5}mr^2 + ml^2 = m\left(l^2 + \frac{2}{5}r^2\right).$$

此種擺之對比擺長故為

$$\lambda = l \left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} \right) \text{ 厘米.}$$

例如 $l = 100$ 厘米， $r = 1$ 厘米，則 $\lambda = 1.00004l$ ，故與 l 祇相差 $1/25$ 毫米，是以此種擺已極近似算學擺。

61. 萬有引力 g 由擺之測定。取一不過分小之鉛球，以一不過分短之線懸於一點並任其擺動。今用一準確擺鐘量出週期，則可依據(29)或(31)方程式確定重力加速度 g 。

用可倒擺（一名可逆擺；Reversion pendulum; reversible pendulum）確定重力加速度，則遠較準確。命 J_0 表一物體之對於通過重心

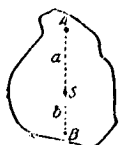


圖42. 示可倒擺之理論。

S 之水平軸 (圖42) 之轉動慣量。該物體係懸在以 A 為支點之水平軸而可自由轉動。命 a 表 A 與重心 S 間之距離。其週期故為 $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}$ 。今在通過 A 及 S 之

直線上與 S 相距 b 遠之 B 點通過一與他軸平行之軸，俾物體繞該軸轉動時可有與懸在 A 點時相同之週期。此時

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + mb^2}{mgb}} \quad \text{或} \quad \frac{J_0 + ma^2}{a} = \frac{J_0 + mb^2}{b}$$

由解此方程式得 $b = a$ 或 $b = \frac{J_0}{ma}$ 。AB 之距離故為 a 及 b 之和，即

$$AB = a + \frac{J_0}{ma} = \frac{J_0 + ma^2}{ma} = \frac{J}{ma}$$

其中 J 表對於通過 A 點之軸之轉動慣量。但據 (31) 方程式，此距離即等於在 A 點周圍振動之物體之對比擺長 λ ，且因週期相等之故，亦即為在 B 點周圍振動之物體之對比擺長。如是可求出物體之對比擺長並由此及由準確週期依 (31) 方程式計算 g 之大小。

第43圖示一簡單可倒擺。在一金屬桿上裝置呈透鏡形 (為減少空氣阻力) 並可移動之兩質量 m_1 及 m_2 。此外又有兩相對之擺口，其一在兩質量之間而其他則在質量之外。此裝置可支在任一擺口上，



圖43. 可倒擺。

作擺振動——用玻璃板或鋼板為底床。今由移動兩質量至擺支在一擺口或另一擺口時之振動速度恰相等為止。兩擺口距離，因擺口甚小之故，可極準確量出。此距離即等於對比擺長 λ 。次由量出擺及 λ 之值可依 (31) 方程式精密確定 g 。

為證明物體之慣性質量及引力質量之嚴格的相比或相等，用擺之實驗比較用自由落體之實驗遠為準確 (§ 54)。應注意者，在轉動慣量 J 中，有慣性質量之關係，而在方向力 D 中，有引力質量之關係。在確定週期之 (27) 方程式中，有 J/D 之比例，故具有慣性質量對於引力質量之比例關係。苟該比例隨物體而異，則兩個形狀完全相同並同樣支持之不同物

質之擺應有不同週期，因擺之週期可由觀察多數振動極準確量出，此問題不難準確證明之。爲此而設之非常準確之實驗均表顯慣性質量及引力質量之相等律嚴格有效。

62. 穩定平衡，不穩平衡，隨遇平衡。受重力作用之物體唯當其重力與另一等大而相反之力相償時始可平衡——平衡條件 (Gleichgewichtsbedingungen; conditions of equilibrium)。在吾人四周之物體泰半係靜止，是以在平衡狀態。便是種物體略向一方偏斜，然後將手放開，則物體通常皆向其原來位置運動——尤其無摩擦作用時爲最。例如偏轉於一側之擺，棹上向一方偏斜之盒。如是者，曰穩定平衡。又有其他物體當使其從靜止位置略微偏斜，然後將手放開時，既不傾覆，亦不恢復原位置，但止於現在之位置（假使絕無摩擦作用）。例如置在準確水平面上之均勻球，固定於一軸上面周圍構造完全一致之車輪等。如是者，曰隨遇平衡。第三種情形，使物體略向一側偏斜，然後將手放開，其偏斜度必愈形增大，以至於傾覆爲止。例如豎立在指尖上之桿，以尖端豎立在水平棹上之雞卵。如是者，曰不穩平衡，但實際上此種平衡不至於發生，因縱使一時成功將物體置於不穩平衡位置，亦立時經無限小的擾動而離去之也。是種擾動在地面上既無法消滅，故事實上不穩平衡狀態頗難實現。

某種穩定位置往往與不穩位置相近似。便一如是之物體略微離開其穩定位置，然後放任之，該物體不克恢復其原位置，但經過暫時不穩平衡狀態後另取一新的穩定位置以代替之。例如豎立在一底面上之細長柱體，其略經碰撞，卽立時傾覆，其在一稜左右轉動，經過暫時的不穩狀態後，立即位在一側面上，如是由近於不穩位置之穩定位置過渡而達新穩定位置。是種平衡，曰介穩平衡。

不拘平衡狀態如何，一物體之運動可能性終受限制，懸在一線上之擺體其運動範圍不能超出以擺長爲半徑所作之球狀空間之外，置在棹板上之盒其面上諸點決無有在棹板之下者。

上述之三種平衡，在重力作用下，有一通性，卽凡在平衡狀態之

物體其重心有極端的位置。

1. 在有穩定平衡時，物體之重心處在許有的最低位置。
2. 在有不穩平衡時，物體之重心處在許有的最高位置。
3. 隨遇平衡成爲穩定平衡及不穩平衡間之中間平衡。凡有此平衡狀態之物體，不拘物體如何運動，其重心既不上昇亦不降下。

在特種情形中，平衡往往可同時視作穩定平衡及隨遇平衡。如在一水平面上滾動之圓筒其重心不因滾動而上升，故就是而言，係在隨遇平衡位置，然就其他各種可能的運動而言，係在穩定平衡位置。

設令一物體離開其平衡位置，則隨其重心之高度變更而起者，有其位能的變更（§ 44）。據以上所述，在穩定平衡中，變更位置祇使物體之重心上昇，其位能自必因各種移動而增加，故如使是種物體離開其靜止位置，須耗費功若干。反之，在不穩平衡中，祇使物體之重心下降，其位能自必因各種移動而減少，因此反可獲得功，例如物體此後作加速運動。在隨遇平衡中，物體之位能不因移動而改變，故當時並不耗功，亦不生功。

關於各種平衡之定義故又可說明如下：一物體之位能在穩定平衡中最小，在不穩平衡中最大。隨遇平衡爲在穩定平衡與不穩平衡間之限界情形。

不論平衡在重力下發生者，抑在彈力，電力，磁力下發生者，如上說明之平衡條件對於各種平衡均有效。

一物體常有多數穩定位置及不穩位置。置在棹上之一方盒有 6 個穩定位置及 20 個不穩位置，即在任一側面上位置時，各有一個穩定位置，又在 12 稜中之任一稜上及 8 稜角中之任一角上位置時，各有一個不穩位置。至於線擺則祇有一個穩定位置。

一物體在支持之平面上是否在平衡位置須視該物體之基底與重心位置配置之狀況而定。通過物體重心之鉛直線與支持面相交之點若在基底以內，則物體在穩定平衡狀態。懸在一點之物體，在穩定狀態時，其重心在懸點直下。

在平衡位置之物體，若使漸次偏斜，仍可傾覆。比較上略許偏斜即傾覆者，其原來位置之平衡程度小，否則程度大。一物體之穩度概依方向而異。例如置在棹上之一磚往往向一個比較容易傾覆。

63. 牛頓萬有引力定律。自由落體，其加速度由地球之引力而來。行星繞日運動，其向心力由太陽之引力而來。牛頓(1643—1727)並認定此種引力不但為各星體間所互有，實為宇宙內任何兩質量所悉具。換言之，此萬有引力(allgemeine Gravitation; universal gravitation, 1683)乃自然中最普遍之一力。(牛頓且據此謂強制月球依圓形軌道繞地球而行之向心力(§ 37)不過為自地球發出之引力。其在月球上作用之方法與作用於地面上諸物體之方法同。又謂太陽與迴繞於其周圍之行星間亦必具有同樣引力之作用，且以引力既為一物質之通性，質量間亦必有引力。)根據此種觀念，牛頓乃創其萬有引力定律(Newton'sches Gravitationsgesetz; Newton's laws of universal gravitation)以說明 m 及 M 兩質量間之引力 k 。命 r 表兩質量之重心之距離，則

$$k = -G \frac{mM}{r^2} \text{ 達因。} \quad (32)$$

換言之，在兩質量間作用之引力與兩質量之乘積為正比，與其重心間距離之平方為反比。此關係已早由開卜勒(Kepler)發見，唯未曾以方程式表示之耳。方程式中 G 為比例常數，由選用之單位而定，曰萬有引力常數。在CGS制中，其值如下：

$$G = 6.6579 \times 10^{-8} \text{ 達因厘米}^2/\text{克}^2 \text{ 或厘米}^3/\text{克秒}^2。$$

換言之， G 之值與1克單位質量隔單位距離(1厘米)互相作用時之引力之值相等。第32方程式中之負符號表示作用於兩質量中一質量上之力，其方向與作用於其他一質量上之力相反，致在連質心之向徑上發生一種有使距離 r 縮短之傾向之力。

命 m 表在地面上一物體之質量。據§ 54，作用於其上之重力為 $-mg$ ， $g = 981$ 厘米/秒²。(因向地心，故為負。)此力必服從牛頓萬有引力律。故若命 M 表地球之質量， r 代以地球半徑 R ($R = 6370$ 仟米

，蓋此為物體與地心間之距離)，則

$$k = -mg = -G \frac{mM}{R^2} \text{ 達因} \quad \text{或} \quad g = G \frac{M}{R^2} \text{ 厘米/秒}^{-2} \quad (33)$$

該方程式中唯 G 及 M 為未知數，故若知 G 之值，即可計算地球之質量 M 。里却爾資(Richard) 及 克利凱·曼彩爾(Krigar-Menzel) 作極準確之實驗，量出大鉛球對於液體之引力，其後作此種實驗者衆多。據所得之結果，算出地球之質量約為 6×10^{27} 克 = 6×10^{24} 公噸 ($M = \frac{981 \times (6370 \times 10^3)^2}{6.66 \times 10^{-2}}$ = 6×10^{27} 克 = 6×10^{24} 公噸)，其密度 (ρ) 約

$$\text{為 } 5.5 \text{ 克/厘米}^3 \quad \left(d = \frac{M}{V} = \frac{6 \times 10^{27}}{\frac{4\pi}{3} \times (6370 \times 10^3)^3} = 5.5 \text{ 克/厘米}^3 \right) \cdot$$

球之大密度觀之，吾人常謂地球內部必含有比較重的物質，並謂地球之大部分係由鐵及鎳所成。

吾人可根據加文地希(Cavendish, 1798) 之實驗證明兩質量間之

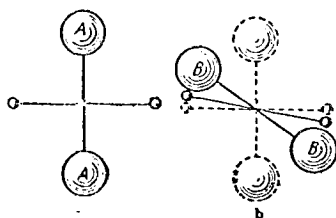


圖44. 加文地希示萬有引力之實驗。

引力。茲述其實驗之大概如下：於一長而輕之桿之兩端，置兩小鉛球（圖44）。又在另一桿之兩端各置大鉛球。兩桿之中心各結以細線懸之（圖中不顯出）。大球作 AA 位置時，大球與小球間之引力作用互相抵消（無論如何，此種平衡為一種

不穩平衡）。以後大球作 BB 位置時，兩端大球與小球間之兩引力組成一力偶，致小球向大球轉動。由其懸線之扭轉角及扭轉常數（見 § 83），即可計算引力之大小。如是，第32方程式中之 k, r, m, M 等均可量得，而 G 之值遂可計算。

61. 地球內部之引力。若一小質量 m 係舍在大質量 M 之內，例如在地球之內，則(32)方程式不復有效，命 R 表地球半徑， r 表質量 m 與地心之距離（圖45）。今假定地球由完全均一的球殼所組成，在 r 及 R 兩半徑間之球殼發生之引力依大小及方向適互相抵消，故唯有

帶 r 半徑之球發生作用。命 ρ 表地球到處一致之密度，此球之質量 M' 遂等於 $4\pi \rho r^3/3$ ，因而

$$k = -G \frac{mM'}{r^2} = -\frac{4\pi}{3} \rho Gmr$$

故在地球內引力係與地心之距離 r 為比例（是以形式上與彈力相當，§ 82）。吾人自外行近地球時，引力先如 $1/r^2$ 增加，終至在地面時達其最大値。進入地面後，則如 r 再行減小，至達地心時，完全消滅。在地球之外，重力之加速度為 $a_0 = gR^2/r^2$ ，在地球內部為 $a_1 = gr/R$ 。因地球密度並非到處一致，此結果自然不絕對嚴格。地殼之密度比較地球內部之密度為小。

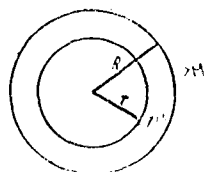


圖45. 示導出地球內部引力之方法。

65. 月球之運動。牛頓由計算月球繞地球一週所須之時間首次證實萬有引力說之正常。月球繞地球而行之軌道與圓形相差甚微。但地球本身亦不靜止（除在是處無關之繞日及繞整個太陽系之運動不計外）。靜止者，唯地球及月球之公重心 S_p 而已，蓋在是處僅為一個關於地月系之內力作用之問題。命 r 表月與地球之距離， M 地球質量， m 月之質量， r_1 地球重心與 S_p 之距離， r_2 月球重心與 S_p 之距離，則此公重心之位置依 § 34 可由 $Mr_1 = mr_2$ （圖46）之關係決定。故月繞公重心 S_p 作一大圓而行，地球作一小圓而行，兩者同時完成一轉，換言之，兩者有相等角速度 ω ，事實上 S_p 仍在地球之內，其與地心之距離約為地球半徑之 $3/4$ ——如易由計算求得 M/m 約等於 81 及 r （ $= r_1 + r_2$ ）等於地球半徑之 60 倍——，在第46圖中，僅為清楚起見，不照事實表明。

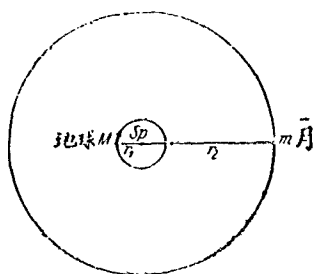


圖46. 示月之運動。

據 § 38，地月系內成平衡時，在兩天體間作用之引力（向心力）及作用於各個上之離心力必相等，故

據 § 38，地月系內成平衡時，在兩天體間作用之引力（向心力）及作用於各個上之離心力必相等，故

$$Mr_1\omega^2 = mr_2\omega^2 = G \frac{Mm}{r^2},$$

由此關係及(33)方程式，得

$$\omega^2 = \left(1 + \frac{m}{M}\right) g \frac{R^2}{r^3} \text{秒}^{-2}.$$

命 τ 表月繞轉一週所須之時間，故 $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ 。如略去 m/M 之極小量，則得

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{gR^2}} \text{秒}. \quad (34)$$

今於(34)方程式中代入 $R = 6370$ 仟米 $= 6.37 \times 10^8$ 厘米， $r = 60.3R$ 及 $g = 981$ 厘米/秒²，遂得 $\tau = 27.3$ 日，故與實際相符。

據(34)方程式， τ 與 r^3 為比例。設若地球——恰其如他行星——有多數作圓形軌道之月球，則各球之週期 τ 之平方與其與地心之距離之第3幕為比例（參考開卜勒第三定律，§ 66）。

66. 行星之運動。萬有引力說之最大的成功在於牛頓可據是依純粹算學法導出行星之運動定律 (Bewegungs-gesetze der Planeten; laws of planetary motion)。此定律由開卜勒 (1609及1618) 先據天文學上之觀察純憑經驗次第發見。開卜勒之三定律 (Keplersche Gesetze; Kepler's laws) 如下：

- (1) 各行星之軌道為大小不等之橢圓，以太陽在其一焦點。
- (2) 由太陽引至行星之動徑，在等時間內畫等面積。
- (3) 一切行星之公轉週期之平方對於其軌道長軸之第三幕之比均相等。

行星軌道之偏心率，即其與圓軌道之偏差，大都極小，在水星中最大，為0.20561，在金星中最小，為0.00682，在地球中為0.01675。

嚴格言之，開卜勒第一定律之說法必須修改，因照此說法，此律與重心運動不變律 (§ 35) 相矛盾。若在最簡單情形中假使太陽祇有一個行星，則據上述之說法，太陽似靜止而太陽及該行星之公重心（必在兩者重心之間）當行星繞行太陽一週之間，亦須繞太陽之中心運動

一週，換言之，不能靜止，雖然在兩體之間祇有自內發出之內力作用也。其實太陽亦運動而此當討論月球繞地球之運動時已述之矣。假使太陽祇有一個行星，太陽之重心亦循一橢圓軌道運動，後者與行星軌道有一公焦點而此焦點當在太陽及行星之公重心。但據實在情形，太陽之質量比較全數行星之質量之和尚遠大（比較地球質量大330000倍，比較木星質量大1047倍，而木星質量且比較其他諸行星質量之和已大750倍），故太陽系之公重心幾乎與太陽之中心相符合，太陽之運動是以可略去。

在實用天文學中，然仍有一種不容略去之作用，此即行星間之引力作用是。行星軌道爲之擾亂。因就一般言，據萬有引力定律以算三個或三個以上之互相吸引之物體之循環運動（所謂多體問題）係不可能，此種擾亂之計算頗不容易。吾人故祇能依賴極複雜之約計。月受太陽等之擾亂，其運動之計算亦唯如是而已。

開卜勒定律對於週期性彗星在基本上亦有效。凡彗星大都有偏心率極大之軌道，但幾乎皆經極大擾亂，蓋其循軌道而運動時往往接近一恆星也。彗星之軌道常經恆星擾亂，致變爲不分明，但彗星大都去後仍可復返，具有週期性，故永久屬於太陽系。凡非週期性彗星，必有拋物線或雙曲線軌道。又凡有極大週期之彗星其與太陽相近處之軌道極近一拋物線。

關於開卜勒定律之有效性，在太陽系之外亦有其例。例如在恆星中，有所謂由比較相接近之兩恆星聯成之聯星者，兩星在相互引力作用下繞其公重心循橢圓形軌道而運動。此情形可與假定太陽祇有一個行星而此行星之質量可與太陽質量相比較時之情形相比擬。在此情形中，必須應用開卜勒第一定律之嚴格的說法；換言之，須設想兩體皆運動者。

地球看作太陽時，一個在地面上拋去之物體之徑路（857）恰如一橢圓行星軌道之一小段。然在是處，橢圓可由一拋物線代之。此線之頂點即爲徑路之最高點。向地心之重力在徑路各點之方向並不一致之

事實是在處略去不計。

第47圖示開卜勒第二定律之意義。圖中由斜線表示之等面積而係在等時間內所畫成者。據能量原則，有此意義之定律，亦可視為必然

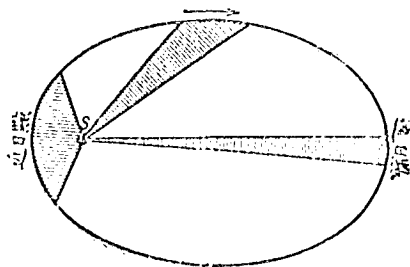


圖 47. 示開卜勒第二定律。

者。蓋行星離太陽愈近時，其位能愈小，其動能及其速度故必須增加。行星離太陽最近時（在近日點），速度最大，離太陽最遠時（在遠日點），速度最小。

開卜勒第二定律，亦稱曰面積定律（Flächensatz；

surface law）。凡運動之受自一固定點發出之力（向心力）之作用而發生者，概服從此定律。至其他二定律祇當作用之力與 $1/r^2$ 為比例時始適用。

開卜勒第三定律在以上討論月球之圓形軌道時（方程式 34，§ 65）已證明之矣。依同法，此定律亦可證明對於行星之圓形軌道有效，且據牛頓萬有引力定律對於橢圓軌道亦有效。

在宇宙內之質量間既互有引力作用，故千百年之後，恆星之運動必互受影響。此外在宇宙內多處更有非常稀薄而尚未集成恆星（所謂星雲）之細碎分子間之引力作用。是種星雲體經其分子間之引力作用終必向其公重心凝聚，致因此而發生高度之熱，久則成為一新的恆星。

如由算學上的討論所指出，開卜勒第一及第三兩定律根據萬有引力中 k 與 $1/r^2$ 為比例之原理而成立。第二定律，如已在上面說明，對於各向心力均有效。故此律不但對於由萬有引力作用而起之向心力即對於其他兩物體間之力，若其與距離之平方為反比例者，例如對於電荷，均有效。故在適當狀況下，此後者亦有服從開卜勒定律之相互運動（所謂開卜勒運動；Keplerbewegung；Kepler's motion）。在原子說內（§ 531），此事實有其重要的應用。

67. 潮汐· 潮 (Gezeiten; tides) 爲海面有規則的漲落 (所謂干潮及滿潮; Ebbe und Flut; low tide and high tide), 其發生於夜間者, 特名之曰汐。潮汐由日月對於海水所生之引力而起。日球引力所生之影響僅及月球引力所生者之一半。

茲就月球引力所生之影響說明於次。爲明瞭此種影響, 須先說明一重要事實, 是即當月球繞地球一週之際, 地球及月球亦須繞兩者之公重心 S 週轉一週。此公重心係在地球內而與地心之距離約等於地球半徑之 $3/4$ (§ 65)。職是之故, 與此運動相當之軌道半徑及由是而起之慣性作用(離心力, § 37)在地球向月之一側小於背月之一側。因此, 作用於海水上者, 除到處幾相等之地球引力外, 有月之引力及離心力兩種。向月球之一側, 月之引力反對地球之

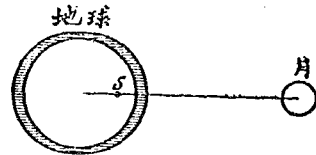


圖48. 潮汐之說明。

引力, 故相減, 同時在地月之公重心周圍轉動而起之離心力 ($mr\omega^2$) 亦反對地球之引力, 唯因軌道半徑小之故(約地球半徑之 $1/4$), 此力不大。背月球之一側, 月之引力與地球之引力同向, 但由轉動而起之離心力仍與地球之引力相反對, 且因軌道半徑大之故(約地球半徑之 $7/4$), 其影響遠較月球引力之影響爲大, 故在地球之此一方面, 地球之引力亦被減。至在地球上此兩方面之間, 此種減殺地球引力之影響先逐漸減退而後再增加。地球上之水圈, 故在離月最近及最遠兩點隆起最高 (圖48)。

以上之說明然未能解釋在背月及向月兩側之漲潮之波何以等高之事實。吾人當初以此爲一種偶然之事, 而謂由於地球及月球之距離及兩者大小之比所致。然以後知此種相等高度惟當在向月之一側離心力與月球引力之和等於在背月之一側離心力與月球引力之差時方可實現。在離心力與月球引力之間初以爲無基本的關係, 今則知其間確有關係在焉。茲舉一極富教育價值之計算說明之如次。命 r 表月球重心與地球重心間之距離, S 地球與月球之公重心, r_1 地球重心與 S 之距離

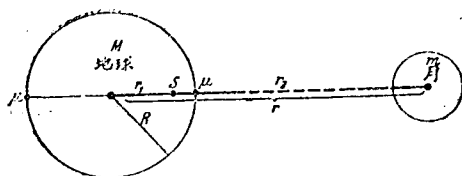


圖49. 示潮汐說。

， r_2 月球重心與 S 之距離，故 $r = r_1 + r_2$ (圖 49)。 S 之位置係由 $Mr_1 = mr_2$ ($M =$ 地球質量， $m =$ 月球質量) 之關係決

定。由此得 $r_1 = rm/(M+m)$ 及 $r_2 = rM/(M+m)$ 。命 R 表地球之半徑，則 $60R$ 約等於 r 。又 m 約等於 $M/81$ ，如是， $r_1 = 60R/82$ 或約等於 $3R/4$ 。

又如命 ω 表地球及月球繞其公重心而轉之角速度。在兩天體間，同一向心力反離心力而作用，此向心力即為其間之引力，其大小依 G 為 $G M m / r^2$ 故

$$Mr_1\omega^2 = mr_2\omega^2 = G \frac{Mm}{r^2} \quad \text{或} \quad \omega^2 = Gm/r^2 r_1 = G(M+m)/r^3$$

命 k_1 表在向月球一側由月球引力及離心力發生之反對地球引力之力， k_2 表在背月一側之同樣力。假定二者作用於地面上任一質量 μ ，則據以上之說明

$$k_1 = G \frac{\mu m}{(r-R)^2} + \mu (R-r_1)\omega^2, \quad k_2 = -G \frac{\mu m}{(r+R)^2} + \mu (R+r_1)\omega^2$$

若於此兩方程式中代入上面 ω^2 及 r_1 之值，則得

$$k_1 = G\mu \left[\frac{m}{(r-R)^2} - \frac{m}{r^2} + (m+M)\frac{R}{r^3} \right], \quad k_2 = G\mu \left[-\frac{m}{(r+R)^2} + \frac{m}{r^2} + (m+M)\frac{R}{r^3} \right]$$

今 R 與 r 相較極小，約為 $r/60$ 。故吾人可將分母 $(r-R)^2$ 及 $(r+R)$ 化為一級數並將第二級以後全略去，於是得

$$k_1 = G\mu \left[\frac{m}{r^2} \left(1 + \frac{2R}{r} \right) - \frac{m}{r^2} + (m+M)\frac{R}{r^3} \right] = G\mu (M + 3m) \frac{R}{r^3}$$

$$k_2 = G\mu \left[-\frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2R}{r} \right) + \frac{m}{r^2} + (m+M)\frac{R}{r^3} \right] = G\mu (M +$$

$$3m) \frac{R}{1^3} \cdot$$

故 $k_1 = k_2$ ，此結果凡在一天體之半徑與第二天體之距離相較極小之各情形中皆適用。

因 m 與 M 相較極小之故，上面表示力之方程式又可改書如下：

$$k = k_1 = k_2 = G \mu M \frac{R}{1^3} \cdot$$

但在地面上之重力 k' (§ 63) 為

$$k' = G \frac{\mu M}{R^2} \cdot$$

故 $k = k' R^2 / 1^3$ 或約 $k' / 200000$ 。由此觀之，在地面上月及背月處，重力似已減去正常值之 $1/200000$ 。又在地球表面其他處，重力似亦減，但未有如在該兩處之甚，此兩處故為滿潮之所在。與此相距 90° 之處為干潮之所在。滿潮與干潮之水位高低之差頗與海岸狀況有關，而在開海中可達數米。

在月球繞地球一全週(27.3日)之間，滿潮之位置亦轉動 360° ，故若地球不自轉，滿潮每27.3日轉一次，但地球於24小時內自轉一次，故在地面上各點，海水面之滿干在24小時內各有二次，較弱之日潮蓋在月潮之上，並視日月相互間之位置，兩潮相和時(月與太陽及地球在一直線上時)，海面之隆起最大(名曰大潮，在新月及滿月)，兩潮相殺時(日月對地球而言互成直角時)，海面之隆起不大(名曰小潮，在上弦及下弦)。

地球既在潮波之下迴轉，地球與海洋之水發生不絕的摩擦，地球迴轉之能量損失，其迴轉速度漸減，換言之，一日之時間必延長。但此影響極微，故自來未曾覺察之。據另一相當之理由又有月球恆以同一側面與地球相對之事實，故月球在繞地球一公轉間，又自轉一次，當月球尚在液體狀態之際，地球之重力作用必於月球之物質內惹起極強之潮汐影響。由是而發生之摩擦使月球對於地球而言之自轉全被阻止。

68. 超距作用及連續作用。在19世紀末葉，倡行引力為一種超距作用 (Fernwirkung; action at a distance) 之意見，換言之，以為引力可從一物體作用於其他物體，且在中途不致發生變動，因而認定此種作用在空間之傳遞毋須時間，是以其傳遞速度無限之大。對於電力作用之傳遞當初亦作同樣之認定。

此觀念早經放棄。相對論亦指出任一在空間之作用，其傳遞速度不能超出真空內之光速度（300000千米/秒）。現代超距作用之假定者，有連續作用說 (Nahwirkungstheorie; theory of continuous action) 或力場說 (Feldtheorie)。據此學說，凡在空間之質量，在其周圍空間內，故嚴格言之，在整個宇宙內，在一定狀況下移動，結果，在空間內有任一位置之物體均受力之作用，而此作用之大小服從萬有引力定律。空間實為力場（重力場）之負載者，以後尚須說明別種力場。在今日吾人尙未能測計重力作用之傳遞速度。然無可疑問者，重力作用之傳遞速度當與光之傳遞速度相等。

69. 引力位能及場強度。欲令一小質量 m 在大質量 M 之引力作用下反引力運動，須施以相當之功；反之，其向大質量 M 運動時，可獲得相當之功。質量 m 對於質量 M 之位能係與兩質量間之距離 r 有關。若以 $r = \infty$ 時之位能等於零（位能之零點依 § 44 可隨意選定），則據(3.)方程式，§ 63, 所作之功

$$A = \int_{\infty}^r G \frac{mM}{r^2} dr = -G \frac{mM}{r} \text{爾格} \cdot \quad (35)$$

在空間一點之萬有引力之位能 (Gravitationspotential; gravitational potential) P 係指一質量單位（1克）在該點之位能。故與質量 M 之重心相距 r 遠處之引力位能為

$$P = -G \frac{M}{r} \text{爾格} g^{-1} \text{或厘米}^2 \text{秒}^{-2} \cdot \quad (36)$$

或據另一說法云：在空間一點之引力位能係等於將1克質量從該點移至離第二質量無限遠處所作之功。此功依據(35)方程式為負，因其反

引力之方向而作成故也。

至所謂萬有引力之場強度 (Feldstärke der gravitation; field strength of gravitation)係萬有引力作用於在空間任一點之1克質量上之力。如惹起引力作用者唯質量M,則依據(32)方程式, § 63,此力

$$k = -G \frac{M}{r^2} \text{爾格 } g^{-1} \text{厘米}^{-1} \text{或厘米秒}^{-2}. \quad (37)$$

據此及據(33)方程式,在地面上之引力之場強度(M=地球質量, r=地球半徑)等於在地面之重力加速度g,因在關於萬有引力之情形中,場強度與重力加速度同。(力=(慣性)質量×加速度,又力=(重力)質量×場強度。)至他種場強度,例如電場強度,則不與重力加速度同。

第七章 力學定律之數種實用¹⁾

70. 機械。力學定律在日常生活上至廣的應用係在各種機械 (Machinen; machines)中。在工業上,機械大別為原動機 (Kraftmaschinen; power machines)及工作機 (Arbeitsmaschinen; working machines)二類。使天賦之能量變為適於目前使用目的之另一種能量之裝置曰原動機。例如蒸汽機關,他種發動機,發電機等均為原動機。工作機將原動機所供給之能量變為所需要之功。例如機力工具,運轉機,壓榨器等均為工作機。原動機之原動能其性質頗不一致。最簡單者為任何物體之位能,而尤以水從高處落下時供給之位能為主。或為動能,例如由流水或流動之空氣(風)所供給者是。或為熱能,而係經一種燃燒過程由化學能變成者(蒸汽機,爆發發動機)。許多機械係用人畜之力發動,故其能量係經過人畜體內之化學過程而來。(人在打字機打字,人之工作如一原動機,由其所供給之能量使打字機打出字來,故打字機為一工作機。)

凡本章中所討論者,限於其力學上特性之機械,其中輸入之力以

¹⁾ 在本章中僅舉若干最適於解釋力學定律之應用之數個例,故不能視為敘述周詳之一章。

及變成之力皆為機械力，換言之，大都為工作機，是種機械之一通有的性質，為其帶有可運動的部分，若干力學機械或促成質量位能之變動（上昇）或促成動能之變動（例如在水平運動中之加速度工作）或二者之同時變動，其他為克服各種可能的抵抗力，例如為克服決不能全免除之摩擦阻力，機械中且有完全以克服此種阻力為工作之目的者，例如鐵路上之機車及槍舟上之機械，祇於起動期內作加速度之功，而當在徑路上作水平等速進動時，祇作克服摩擦阻力之功。

試以反重力之功為例，設有一物體須鉛直舉起至達某一定之高度 h ，為作此功，如已在 § 40 中說明，先須以等大之反力償此重力，此後（假定不計摩擦阻力）祇須依預定之方向予以稍稍之衝動，即可將物體在反力之作用下依此方向等速舉起，若同時又須克服摩擦阻力者，則又須不絕的加上為此所須之功。

自然界中各種現成能源——人畜之體，落下之水等——之作工本領有一最高極限（§ 45），即在一秒間之功率有一極限，然不但功率有極限，即原來可用之力亦有限制，而在若干情形中尚不足以舉起一重體，人有能移一千斤之重至 10 米之高處者，但恐不能一瞬而既，而祇能逐步為之，其雖能完成所須之功，但無償此一千斤重之力，此時須利用機械，因其能變更力及路程之乘積（此乘積表加入之能量），換言之，能將一等大之乘積由另一力及另一路程表示，如是所須之力不至過分之大而為當時環境所許可者，在力學機械中，常在一端有一力 k_1 沿路程 s_1 上作用，致在他端有另一常不等大之力沿路程 s_2 上作用，若略去摩擦阻力，則依據能量原則

$$k_1 s_1 = k_2 s_2 \cdot$$

此方程式指明力經機械之獲得 ($k_2 > k_1$) 必有路程之相當損失 ($s_2 < s_1$) 為代價，若略去機械中之摩擦阻力，則路程當與力為反比（所謂力學之鐵律）

強半機械係以變更力之大小為目的，其變更路程之長短者究屬少數，屬於後者之一例，如時計是，其中發條末端之短路移動或一重錘

稍稍之落下經變更而為指針末端較大路程之移動。加入之能量祇為克服摩擦阻力。

一切繁複機械均由若干基本成分合成。此種基本成分，稱曰簡單機械 (einfache Maschinen; simple machines)，分為兩羣，分別以槓桿及斜面為其代表。屬於第一羣者，除槓桿外，又有輪軸及滑輪，屬於第二羣者，又有楔及螺旋。

71. 充機械之槓桿。關於槓桿之定律已於 § 32 中述之矣。據以上所述，槓桿之支點為一應力 k_z 之作用點。在實用上槓桿有帶固定支點者與帶可移動之支點者之分。屬於第一種者，桿棒固定在一軸上。屬於第二種者，例如鐵挺，視支點在力點與重點之間（所謂雙臂槓桿）或在此兩點之一邊（所謂單臂槓桿）（圖 50a 及 b），槓桿又可分為兩種。若三點（代表三種力之作用點）之位置不在一直線上者，則稱曰曲槓桿 (Winkelhebel; bent lever)（圖 50c 及 d）。

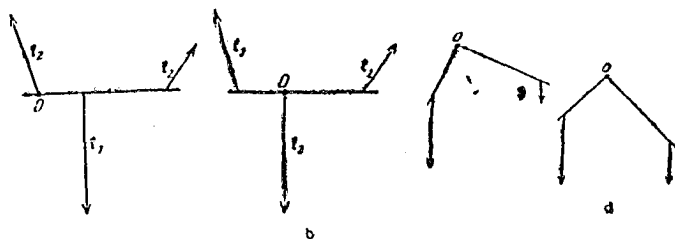


圖 50. a. 單臂槓桿, b. 雙臂槓桿, c 及 d. 位置不同之兩曲槓桿。

槓桿最直接的用途為起重或為克服抵抗力。例如唧筒上之搖桿（為雙臂槓桿或為單臂槓桿），蒸汽機之零件，自動車之輪掣，踏板等。多數最常用之機力工具一部分為單臂槓桿，一部分為雙臂槓桿，例如釘拔及剪刀。又在單輪小車中，亦利用槓桿作用。小車可視為一槓桿裝置，其可動支點係在輪軸上。

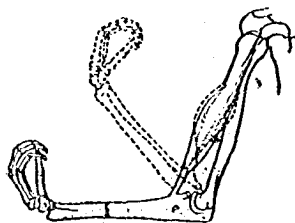


圖 51. 人臂如槓桿。

吾人可利用小車舉起或搬運臂力所不逮之重，而車柄愈長時，其工作亦愈良。

槓桿常呈輪形，例如司汽機（蒸汽機，熱水管等之汽機）啓閉之柄者屬之。又輪軸與其上之曲柄亦為一槓桿，例如在轆井上所用者。其他如多種機力工具，其中由延長槓桿之臂以擴大所施之力之力矩（§ 31）者，亦皆為槓桿裝置（拔栓器，鑽孔機等）。

又人體之臂，以肘為支點而舉物時，亦為一槓桿（單臂槓桿，圖 51）。

使用槓桿時，所欲得之力與所加之力之比，常稱曰槓桿之機械利益。所加之力（或力點）距支點愈遠時，機械利益亦愈大。

72. 滑輪及輪軸。各式滑輪 (Rolle; pulley) 均為槓桿之變形，輪緣設溝，內跨一繩（或一皮帶或一鏈），曳繩則輪轉，如圖 52 之滑輪，其心軸在一定之位置，不能自由移向他處者，曰定滑輪 (feste

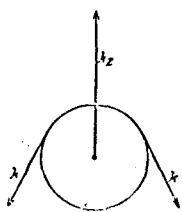


圖 52. 定滑輪德國。

Rolle; fixed pulley), 為等臂槓桿之變形。如作用於滑輪兩端之繩上之張力 k 彼此相等，則滑輪係在平衡狀態。同時在軸上發生一應力 k_z 兩力 k 所作成之角為 φ 時，此應力等於 $2k \cos \varphi / 2$ 。

定滑輪之用處祇在改變力之方向或傳遞間運動，不能改變力之大小，其利益故等於 1。

心軸隨所懸物體作上下之移動者，曰動滑輪 (bewegliche Rolle; movable pulley), 為單臂槓桿之變形。因其重點在中央，支點及力點各在一端，其利益故等於 2。聯合若干定滑輪及動滑輪使用時，曰複滑輪 (Flaschenzüge; compound pulley, 圖 53)。若各定滑輪皆裝於一固定框內，各動滑輪亦裝在別一框內者，特稱曰絞轆 (block and tackle)。

複滑輪僅用一繩貫穿全體時，線上各部分之張力均相等，而係等於在自由端之曳力 k 。故懸在兩線段上之動滑輪經力 $2k$ 向上曳起，若在動滑輪上向下作用之力亦為 $2k$ ，則該動滑輪係在平衡狀態。全組平衡

作用於懸點 (A) 之力等於 k ，作用於定滑輪之懸點 (B) 之力等於 $2k$ ，其方向向上。滑輪本身之重在各情形中均略去——由應用能量原則，亦得同一結果。若力 k 之作用點向下進行 s 距離，則動滑輪 (即作用於其上之力 k' 之作用點) 當昇

上 $s/2$ 距離。故

$$ks = k's/2 \quad \text{及} \quad k' = 2k.$$

在有多數定滑輪及動滑輪時，不論用單繩或複繩，力之比例均可照樣計算。

據計算之結果，力之比例或機械利益在單線複滑輪中，與支持全體動滑輪之繩數相等，在複線複滑輪中，則視輪之排列或與 2^n (圖 53b 左) 或與 $2^n - 1$ (同圖右) 相等，其中 n 表動滑輪之數目。

複滑輪之一變形，曰差動滑輪 (Differentialflaschenzug; differential pulley) (圖 54)，半徑 (r_1 及 r_2) 不同之兩輪合成而為一定滑輪，以繩 (循環鏈) 沿同一方向套於兩部之上，中介一動滑輪，其上有力 k_1 作用之。

此力與作用於繩上之力 k_2 維持平衡。在動滑輪上向下作用之力既為

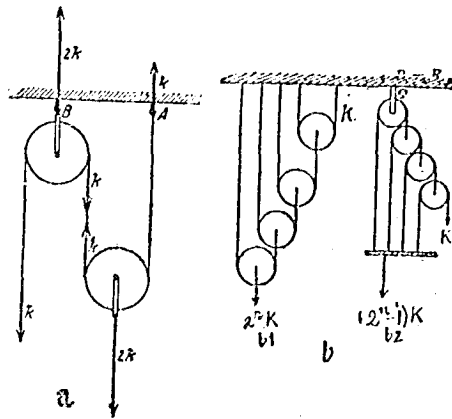


圖 53. 複滑輪。

a. 單線複滑輪。 b. 複線複滑輪。

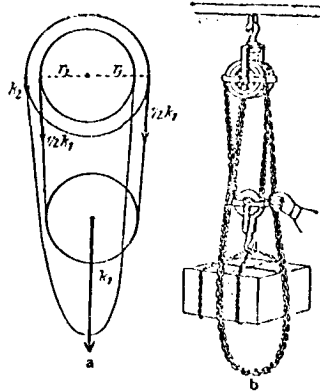


圖 54. 差動滑輪。

a. 線圖， b. 實物。

F_1 故在繩內之張力等於 $k_1/2$ 。在定滑輪上於是作用兩相反之力矩 k_1r_1 及 $-k_1r_2$ ，此兩力矩之和等於使定滑輪向右轉動之力矩，其大小等於 $k_1(r_1-r_2)$ 。爲維持平衡，必須有一向左轉動之等大力矩。此力矩由力 k_2 所惹起，其大小等於 k_2r_1 ，故 $k_2 = k_1 \frac{r_1-r_2}{r_1}$ 。若 r_1 與 r_2 相差不大，則 k_2 與 k_1 相較可極小，故祇須施一比較小的力 k_2 即可反一極大之力 k_1 而作功。工廠中舉重物時多用此器。據能量原則——或由簡單幾何學的考慮——，差動滑輪中，力 k_2 之作用點須進行比較極長的路程。在定滑輪一轉之間，力 k_2 之作用點向下移動 $2\pi r_1$ 距離，動滑輪上之繩一方面縮短與此相等之距離，而一方面增加 $2\pi r_2$ ，結果，該繩縮短 $2\pi(r_1-r_2)$ ，而動滑輪與力 k_1 之作用點昇上此值一半之距離。據能量原則

$$2\pi k_1(r_1-r_2) = 2\pi k_2 r_1 \quad \text{故} \quad k_2 = k_1 \frac{r_1-r_2}{2r_1}$$

半徑不等之兩共軸圓柱，連成一起，曰輪軸(Wellrad; wheel and axle)，徑大之一部分曰輪，徑小之一部分曰軸。輪軸爲一不等臂槓桿之變形，其支點在輪軸之中心，故其機械利益等於輪之半徑與軸之半徑之比。

73. 齒輪。齒輪(Zahnrud; toothed wheel)亦爲槓桿之一變形。在如圖所示之情形中，作用於一35厘米長之曲柄軸上之15斤克之

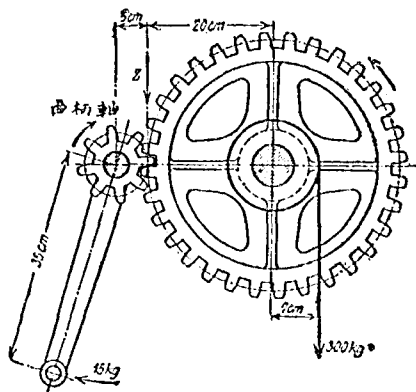


圖55. 齒輪之作用。

力惹起 $15 \times 35 = 525$ 斤克厘米大之力矩。因此，在兩齒輪互相嵌合之點，發生一力 k_1 。此力在半徑5厘米大小齒輪上惹起一等大但相反之力矩。故 $5k_1 = 525$ 斤克之力或 $k_1 = 105$ 斤克之力。同時在半徑20厘米之大齒輪上作用一個等於 $20 \times 105 = 2100$ 斤克厘米大之力矩，與此力矩維持平衡者，爲作用於

半徑7厘米之軸上之300仟克之力之力矩（因 $7 \times 300 = 2100$ ），故作用於曲柄軸上之15仟克之力可與作用於大齒輪上之300仟克之力維持平衡，換言之，由使用15仟克之力可克服20倍大之力，由簡單計算，知在齒輪系之運動中，力與路程之乘積在該系兩方面皆等大，如為能量原則所要求者。齒輪系之平衡亦可根據能量原則而計算（規律，見§70）。

74. 楔及螺旋。因斜面羣之簡單機械為楔 (Keil; wedge) 及螺旋 (Schraube; screw)。楔之作用如圖56所示，力 k_1 與兩力 k_2 維持平衡，故 $k_1 = 2k_2 \sin \varphi / 2$ 。由此可知頂角 φ 小時，兩側力比較推棧進內之力遠大，因而，楔之利用，例如破柴或墊底舉物，刀之切截作用亦根據同一原則。

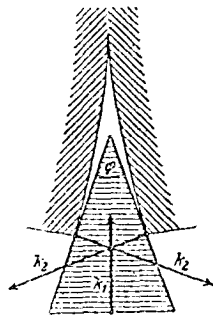


圖56. 示楔之作用。

螺旋可視為螺旋的捲在圓柱上之斜面。就一般而言，螺旋同時亦應用槓桿定律（如翼行螺旋）。今在半徑為 r 之螺旋頭上依 r 切線方向用一力 k_1 ，若螺旋在此力之作用下旋轉一全週，則所完成之功等於 $k_1 2\pi r$ 。此功由螺旋尾或由螺旋傳至挺克服之抵抗。在一轉間，螺旋之移動等於旋距（兩螺旋間之距離） s 。若命 k_2 表螺旋尾對於抵抗所施之壓力，則所作之功等於 $k_2 s$ 。據能量原則，此功必等於在螺旋頭上所作之功。故 $k_1 2\pi r = k_2 s$ ，或 $k_2 = k_1 \frac{2\pi r}{s}$ 。（機械利益為 $\frac{2\pi r}{s}$ 。）

螺旋所施之力，故當旋距 s 愈小及作用於螺旋頭上之轉動力之臂 r 愈大時愈大（各種螺旋壓榨器即應用此理）。

在許多螺旋中，尤其在木螺旋及木鑽孔器中，螺旋之直徑逐漸自尖端增加，故除帶螺旋之作用外又帶楔之作用。在木鑽孔器中，大概祇其最前端有如螺旋之作用，鑽孔器藉是乃侵入木內，其後面極尖銳之螺旋有如一刃之作用，能將尖端鑽成之孔削截而擴大之。

75. 靈敏天秤。大半天秤 (Wage; Balance) 亦為槓桿之變形。

用天秤衡物體時，直接示其質量，間接示其重量。

在各式天秤中，是處祇提出物理學上最重要的靈敏天秤(圖57a)討論之。此種天秤因特別適於衡化學藥品之用，故往往稱曰化學天秤。其重要部分為一等臂桿，稱曰秤梁，梁之中點有一鋼製刃口，下面有鋼製或瑪瑙平板受承之，刃口之作用如一轉動軸。梁之兩端亦各有同樣之刃口以承盛物及砝碼之盤。梁下有制動設備：可由螺旋使其上下移動，上則將梁舉起，免得不用時，刃口受傷；下則將桿放於瑪瑙平板之上，以備使用。梁之中央附有一長指針，能擺動於一標度之前。梁又附一種裝置，用此以移動其上之兩小質量，可使梁之重心依鉛直及水平方向移動。前者為變更其靈敏度，後者為校準指針於標度之中點。此外在天秤之右上角復有一桿，可用以移置遊碼(圖57a 右上方)於梁上。此遊碼重10毫克。梁前裝標度，自其中點向左右各刻為10分度，故置遊碼於中點左方一分度上，即等於右盤中加重1毫克，餘類推。故由移動遊碼可代替盤上1至10毫克之重。在較靈敏之天秤中，又可指出更細之重。

根據桿原理，物體之重與砝碼之重相等時，指針正向下面標度之中點而靜止於零點(即天秤兩盤均不載重時其指針所示之位置)。天秤之構造如極完全，應在10分度上，但事實上均略微偏轉於一方，故於使用之前，須先求零點之準確位置。法於盤空時，令指針左右偏轉，以偏轉於中點之左者為負，右為正。因有空氣及其他摩擦阻力之故，秤之偏轉將漸被阻尼，故所記之總次數須為奇數。例如右方記4次，則左方應記3次。得此諸值後，停止其擺動，將右方之平均數與左方之平均數相加，除以二，即得所求之零點。倘若兩盤所載之重相等，則指針靜止時，應停在零點上。惟停點與零點難望完全吻合，尋常多由此兩點相差之值及天秤之靈敏度(即右盤加重1毫克重之後，指針所偏轉之弧度)。例如秤之零點為 -0.5 ，稱某物時，右盤共加重51.23500克(連遊碼之重)，其停點為 $+1.5$ 。若其靈敏度為 4.5 ，則知右盤尚須再加重 $\frac{1.5 - (-0.5)}{4.5} = 0.44$ 毫克方能使停點與零點完全

折合·是以该物之质量为 $51.23500 + 0.00044 = 51.23544$ 克重。

设想天秤为一三臂槓桿，故作用于秤梁上者有三力矩·兩完全或幾乎相等之力矩係由兩邊載重之盤發生，第三力矩則由作用于梁之重心之梁之自重所發生（圖57b）。

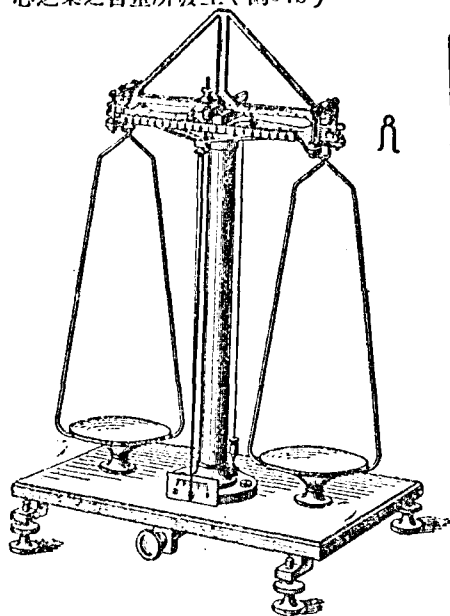


圖57a. 靈敏天秤。

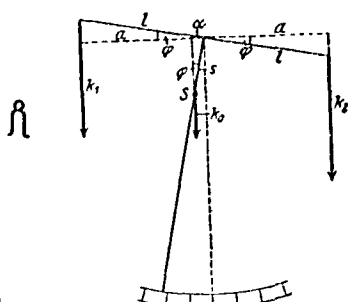


圖57b. 示入秤之靈敏度。

兩盤載重相差某一定之值後，指針之偏轉愈大時，秤之靈敏度亦愈大。靈敏度與秤梁之重心之位置有關·秤梁在穩定平衡狀態時，其重心在轉動軸（刀口）之下·第57b圖示

一秤梁之線圖·S表重心，s表重心與轉動軸之距離·因兩邊載重不等，秤梁（其長等於 $2l$ ）在所示之位置而靜止（ φ 表偏轉角）· k_0 表因秤梁之本身重量作用于S點之力·於是依槓桿定律

$$k_1 l + k_2 l = k_0 s \quad \text{或} \quad k_1 \cos \varphi + k_2 \sin \varphi = k_0 \cos \varphi.$$

故當 $\tan \varphi$ 或偏轉小時， $\varphi = \frac{k_2 - k_1}{k_0} \frac{l}{s} = \frac{\Delta k}{k_0} \frac{l}{s}$ ，其中 Δk 表兩盤載重之差，故秤梁愈長，力 k_0 愈小，秤梁重心愈近轉動軸時，秤之靈敏度亦愈大。

據以上所述，似乎天秤之靈敏度可隨意賦予者，而祇須使秤梁有

最大可能的長度，其重心之距離有最小可能的值。但經實際考慮，此種可能性不無限制，因靈敏度增進時，天秤之週期增加而穩度減小。週期之增加既使在天秤上工作更費時間並更難，為此週期不應超出某一定限度。秤梁（與其所懸之重）可視為一擺，在其穩定平衡位置周圍轉動，在是處故亦適用下列方程式

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

（方程式27, § 60）。茲命 J_0 表秤梁之轉動慣量（包括秤盤）， m 表置在兩邊之質量。於是擺動系之總轉動慣量 $J = J_0 + 2ml^2$ 。擺動系之方向力 D 經作用於秤梁重心之秤梁之重發生，其量為 $D = k_0 s$ 。若擴大秤臂之長，則不但 $2ml^2$ 之值即秤梁之轉動慣量 J_0 亦隨之增加。因而週期 T 增加。同樣，減小力矩 D ，使重心與 s 之距離縮短。

轉動慣量 J 既等於 J_0 及 $2ml^2$ 之和，故由以上關於 T 之方程式，可知一天秤之週期又隨 m 之大小，故即隨盤上之質量之重而增加。

以上之考慮惟當秤盤之懸點與在中央之刃口在一直線上時方有效。設若不然，則情形更為複雜，尤其此後靈敏度無不隨載重而異。雖然，在各天秤中，靈敏度無不隨載重而略異，其故因秤梁在盤上載重之作用下略許彎曲，上述之三點，在盤上無載重時雖正在一直線上，但盤上有重後，則不再如是，而當載重愈大時，其離直線亦愈甚。

76. 絕對稱法。一物體之重雖經細心衡定，但決難保證稱出之重固為物體所真有者，蓋兩秤臂之長絕不能準確等長也。如決難避免之溫度差，恆使臂長因不同膨脹稍稍不一致，其影響雖微，但在極準確之衡定中，却有重要關係。今命 l 表秤梁一臂之長， $l + \delta$ 表他臂之長。擬衡之物體之重設為 k ，衡定之後，其視重為 k_1 。於是據槓桿定律， $kl = k_1(l + \delta)$ 。以後交換砝碼及物體兩者之位置後再衡之，又得另一視重 k_2 ，而此時 $k(l + \delta) = k_2 l$ 。由此方程式，一方面得真重 $k = \sqrt{k_1 k_2}$ ，而一方面得秤臂之比例 $\frac{l + \delta}{l} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$ 。故真重為兩視重之幾何平均數。然因相差無幾，此又可由算學平均數 $(k_1 + k_2)/2$ 代之。據同一理

由，秤梁之比例亦可視作 $1 + \frac{k_2 - k_1}{2k_1}$ 。

若欲確定一物體之絕對重量，是種絕對稱法 (absolute Wägung; absolute weighing.) 或複稱法 (Doppelwägung; method of double weighing) 乃屬必要。然在大多數情形中，例如幾乎全數化學衡，衡之目的僅為確定各種物體之質量比例。此比例縱使用不準確等長之天秤亦可量出，祇須擬衡之物體均置在同一邊之盤上，其時衡得之各重量依秤梁長度之比例過大或過小，但因衡定之各質量——假定均置在同一邊之盤上——亦均依同比例太大或太小，故可免去差誤。

用複稱法時，可不必先知秤之零點，即可計出實重 k 之值。設命秤之靈敏度為 e ，其零點為 0 ，如是當右盤之砝碼共重為 k' ，停點為 u 時， $k_1 = k' + \frac{u-0}{e}$ 。同理將物與砝碼對調之後，如停點為 v ，左盤中之砝碼共重為 k'' ，則 $k_2 = k'' - \frac{v-0}{e}$ 。今實重 $k = (k_1 + k_2)/2$ ，故 $k = \frac{k' + k''}{2} + \frac{u-v}{2e}$ 。

至砝碼及物體因受空氣浮力而應有之校正，另見 § 107。

77. 往返直線運動變為圓周運動之變化，在工程上一極普通之問題為將往返直線運動變為圓周運動。此在蒸汽機中尤為重要 (§ 202)，其中須將活塞之往返運動變為輪之轉動 (曲柄發動；Kurbel rieb；working by crank)。第58圖示一是種裝置之線圖。經一動桿傳達之力 k 促成一轉矩 $k' r$ ，後者便可轉動之輪 (半徑 r) 轉動。當 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = 180^\circ$ 時 (所謂靜點)，轉矩之值為零。

為在是種可變動之轉矩下子機械以一種最可能的平均轉動，令轉動之部分與飛輪相連接。飛輪具有較大之質量，由其慣性可阻止圓周速度之較大變動並助機械衝過靜點。是種飛輪可視為一種儲能器，其於轉矩大時，儲蓄能量，轉矩小時，供給能量。

在帶重的往返部分之機械中，重點之位置變更不已，致機械之地脚受激烈之振動，因此須有牢固之房屋或車輛。故在大機械中往往為

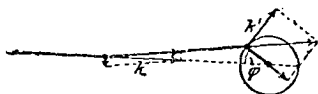


圖58. 往返直線運動變為同向運動之變化。

力使質量之分配極度均衡（質量均衡 Messenausgleich; balancing of reciprocating weights）者亦為此。換言之，凡大機械大都依一定方法構成

，務使各部分之往返運動全部或一部分相償，庶幾機械全體之重心可臻靜止之域。

78. 車輪。車輪 (Wagenrad; roadwheel) 為人類最重要發明之一。因自有車輪之後，重載長途之運輸尤其沿不良道路之運輸遂可能。其比較原始方法之優點，在其少摩擦阻力之故。如圖59所示，經由凹凸不平之路發生之阻力當車輪愈大時亦愈易克服。設車輪欲向左進行，必須滾過P點，為此，輓力 k_2 對於此點至少須有與重力 $k_1 = mg$ 之轉矩 $mg a_1$ 等大之轉矩 $k_2 a_2$ 。由第59圖得 $k_2 a_2 = k_2 \sqrt{r^2 - a_1^2} = mg a_1$

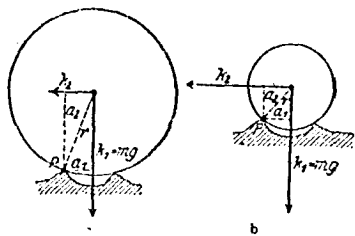


圖59. 車輪之作用。

a. 大輪， b. 小輪。

或 $k_2 = mg \frac{a_1}{\sqrt{r^2 - a_1^2}}$ 。故若 a_1 及在軸上之質量 m 不變，輪之半徑 r 愈大時，輓力 k_2 則愈小。

車輪上用橡皮胎之優點在於可將小阻礙物壓入於車胎內，故車輪可毋須登阻礙物而過。功之耗費是以比較用硬輪環時為小。

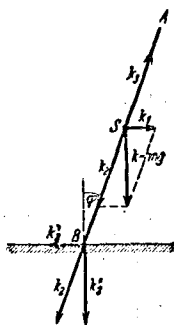
79. 彎曲徑路上之慣性作用（離心力）。實際上，慣性作用對於物體在彎曲徑路上之運動有重要作用。一慣見之例，為自行車沿曲線徑路之進行。除當時舵輪須傾側外，又須有一向心力，其大小當與徑路（半徑 r ）之曲率，角速度 $\omega = v/r$ 及在自行車與駕駛者體系之重心之質量 m 相當，而據方程式 20, § 37, 必等於 $m v^2 / r$ 。此力為體系之重心向徑路彎曲之方向內傾時，由重力所產生（精練自行車駕駛者在月球而上甚難循曲線而進行，因在月球上祇有少量之重力也！），在第60圖中，命直線 AB 表示駕駛者， S 表重心，因自行車質量不大，此重心幾乎與駕駛者之重心相符合，作用於其上者有重力 mg 。今分解此

重力為兩分力，一為水平力 k_1 ，一為依AB方向之力 k_2 。在S點，又有由分力 k_2 惹起並依BA方向之應力 k_3 ，此力與 k_2 相等而相反，故與分力 k_2 相償。剩下者，唯有一力 k_1 ，此力促成圓周運動，換言之，即為沿曲線進行所須之向心力。由第60圖可讀出自行車之傾角 φ 依下列條件而求出。

$$k_1 = mg \tan \varphi = \frac{mv^2}{r} \quad \text{或} \quad \tan \varphi = \frac{v^2}{rg}$$

據此，則速度 v 愈大，曲率半徑 r 愈小時，傾角 φ 亦愈大。在足點B依與地面傾斜之方向作用一個與 k_2 等大之力，今亦分解之而為與地面平行之分力 k'_2 及與之垂直之分力 $k''_2 = mg$ 。（依鉛直方向作用於地面上者，故祇有車與駕駛者之重，假定路係水平。）圖60. 示自行車駕駛者之沿曲線之進行。

後者與地面之反力相償，前者，當不過分小時（即僅有一小傾角 φ 時），與摩擦阻力相償，然當傾角大時，是以有大速度 v 時，由摩擦阻力（在濕柏油路上之滑去！）不足抵消其力，其時必須有與力 k_2 垂直之路面。例如自行車競賽路上轉彎之處，路面概向內傾側。（在此情形中，當有一定速度時，較 mg 為大之力 k_2 與路面垂直。）



得自行車之技術在於能利用舵輪調整傾角與徑路曲率之關係。徑路之曲率單由舵輪之位置而決定。在有一定徑路曲率及速度時，在路面之摩擦—— k'_2 之反作用（§ 29），圖60——對於車輪施一水平力。此力等於 mv^2/r ，故曲率半徑愈小時，其值亦愈大。因其方向向內且在重心之下，此力有使車向外傾覆之作用。駕駛者利用此事實以補償自行車之不能免的交變小傾側。設由是致方向上發生偏差，則應過度補償。例如突然須向左轉彎，則必須先向左適度傾側，為此車導路略向右方。今欲從彎曲之徑路再一直進行，則必須將導桿依反對方向略過度曳動，如是可消殺當時之傾角。此種說明之正常，當令自行車進行之方向突然改變時容易證實。向心力低隨 v 而增加，故當速度大時，祇須將導桿略許曳動，即可維持平衡，速度小時，須大量曳動，職是

之故，速度大時比較小時難控制。自行車之前端又有一定構造，故駕駛者祇須將身體稍稍移動，即可使導桿倒回。當速度不過分小時，導桿之此種小移動已足補償偶然之傾側，故此時手可離桿而車仍依直線進行。自行車有較大速度時，與轉動輪之軸的穩度（一種迴轉運動，§ 48）不無關係。

關於轉動體之慣性作用之另一例，如所謂邪神輪（Teufelrad；devil's wheel）是。此輪在遊戲中常見之，為一光滑盤，可使其作迅速轉動。設有人在盤上則人不能支持，但立經離心力（據同轉觀察者之見地 § 38）向外拋開。盤初動時，現成之些微的摩擦已足予其上之質量有某一定大之速度。因慣性關係，質量竭力維護其速度（方向及大小）。盤有排除其上面之質量之勢，但因有摩擦阻力，使質量之直線徑路變為彎曲螺旋，後者最後越出盤之緣邊。

其他關係慣性之作用者，例如上下環駛之戲（Looping the loop），其中一駕自行車者或一乘小型車者從高處循環套駛而下。如圖 61a

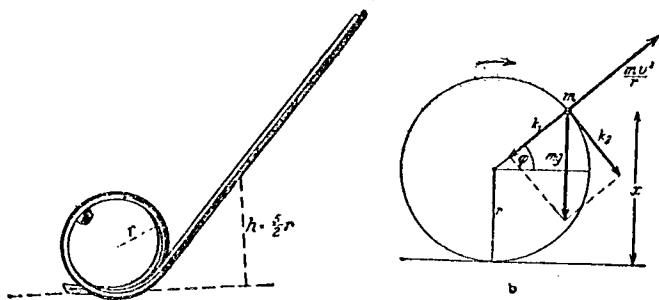


圖 61. 上下環駛。 a 模型， b 解釋。

所示，此容易以一小球模仿之。其成功自然因作用於在環上運動之物體之離心力足以抵消重力之作用之故。

假定環行之質量 m 在如 61b 圖所示之位置。茲分解作用於其上之重力 $k = mg$ 為依輻射方向及正切方向之 k_1 及 k_2 兩分力。向心力 mv^2/r 至少與重力同大，俾可有一個與徑路垂直之分力。命 x 表 m 徑路上一點之高度（自最低點算起）。由圖 61b 讀出 $k_1 = k \sin \varphi = mg(x-r)/r$

其落下高度假定爲 h ，在 x 高度之动能於是等於 $mv^2/2 = mg(h-x)$ ，故 $mv^2/r = 2mg(h-x)/r$ 。循圓環安全轉動之條件故爲

$$2mg \frac{h-x}{r} \geq mg \frac{x-r}{r} \quad \text{或} \quad h \geq \frac{3}{2}x - \frac{r}{2}.$$

設此條件亦適用於徑路之最高點 ($x=2r$)，則落下高度 h 至少須等於 $5r/2$ (其中當然略去摩擦損失)，否則物體從 $x=(2h+r)/3$ 之高處落下。

80. 鐘錶。擺鐘係物理學家惠更斯(1658)之發明。其轉動應用一落下重錘或一螺旋彈簧。此二者各以其所儲蓄之位能或彈性能補償鐘錶因摩擦而起之能量損失。擺鐘之快慢經擺之振動調整。後者由擒縱機(或放力輪圖62)——一個經由齒輪與指針及重錘相聯絡之齒輪——限制在擺完全擺動一週之時間內祇推進一步齒並同時由不絕的小敲擊補償由摩擦而起之能量損失。擺在下端附一透鏡形質量(因空氣摩擦阻力)，當調整擺之振動時間時，可將其沿擺桿上下移動。

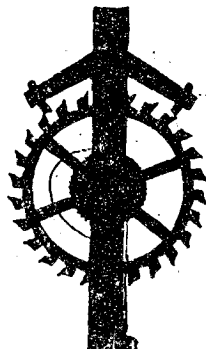


圖62. 擒縱機。

在錶中係用擺輪以代擺，因作用於其軸上之一細螺旋彈簧之彈力，擺輪可在其靜點左右擺動。其週期可由變更方向力(由移動錶內之指針以改變彈簧之實長)而調整。錶之快慢亦經一擒縱機或在原則上與此相類似之圓筒器調整。

因擺之振動時間與重力加速度 g 有關，換言之，與高度有關，故擺鐘之快慢略與高度有關，但錶之快慢，則與此無關。

爲除去因溫度變動而起之鐘擺之長度變動，在上等擺鐘中常用柵形補償擺，後者之長度與溫度無關。擺輪亦帶有相同的裝置(§ 160)。

第三篇 彈性體力學

第八章 剛體之彈性

81. 彈性之意義及一般的事實。在以上各章中，一切恆據一理想的物體之意義而敘述，所謂理想的物體云者，其性質應十分剛強，換言之，其形狀及容積不因外力之作用而起變化。在大多數情形中，固體雖有近似理想的剛體者，但事實上無論如何剛強，其依各方向受外力之作用時，無不改變其原來之形狀及容積，是以一切物體均為彈性體 (elastischer Körper; elastic body) 或程度不一的柔體 (deformirbarer Körper; deformable body)。

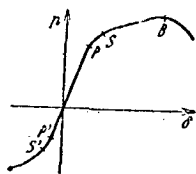


圖63. 鑄鐵中變形 δ 與張力 P 之關係。

一固體之形狀及容積係由其分子間作用之力而定。物體在固有的狀態時，此種力互成平衡，然當受外力作用時，物體內之平衡為之破壞並在物體內惹起應力 (§ 30) 或張力。若作用之力不變，則在外力與應力之間互成平衡。

不同固態物質在起形變時呈不同的性質，其中特別重要者，為金屬之彈性，但各金屬之彈性亦不一致，尤其在各金屬間，形變之範圍極不同。在第 63 圖中，示鑄鐵中張力與形變 δ 之關係。據定義，內張力為作用於物體橫斷面積之 1 方厘米上之彈性應力，形變係表物體依與該橫斷面積垂直之方向之單位長之變化。

若形變不超出某一定限度，所謂比例限度 (Proportionalitätsgrenze; limit of proportionality)，則內部張力與形變為比例，且為惹起某一定形變須有一種與形變為比例的外力。在第 63 圖中，此比例範圍

其關於引伸者，由曲線上之 OP 段表示，而其關於壓縮者，由曲線上之 OP' 段表示。若形變超出其限度，則呈與比例之差異。內部張力於是比較形變增長較緩；換言之，物質對於形變之抵抗力開始讓步（屈服）。約自 S 或 S' 點，所謂流動限度（Fließgrenze, Streckgrenze; limit of flow）開始，內張力祇略隨增長之形變而增加，而物質遂變為受範的（plastisch; plastic）。在多數情形中，自 B 點以降，內部張力甚至反因伸長而減。物體之橫斷面積開始減小，終至漸折。反之，物體受壓縮用時，其內部張力終因形變較大復行增加。根據此種性質，故金剛可用錐，滾筒等打成薄片或加力於兩端拉長而為細線。

如形變不大，則外力撤去之後，因內部張力之作用，物體原來之形狀可立即完全恢復或歷相當之時間之後方能恢復（彈性後效）。然如物體所受之外力超過相當限度（彈性限度; Elastizitätsgrenze; elastic limit），則撤去外力後，雖經歷久長之時間，物體終不能恢復其原來之形狀，但呈永久形變（彈性疲勞; elastische Nachwirkung; elastic fatigue）。物體之彈性限度大都與比例限度相近，但並非根本的與之同義。

依作用力之方向之縱彈性變動恆伴與此方向垂直之橫彈性變動。一物體之橫斷面積當引伸時變小，壓縮時變大。縱處變動與橫處變動之比，謂之柏松比（Poissonsche Zahl; Poisson's ratio），其最大理論值為 $\frac{1}{2}$ 。在此情形中，容積不因形變而改變。就一般而言，容積在引伸時增加，而壓縮時減少。

一種特別有趣味的現象如由單晶線（Einkristalldräht）所示，後者由一單獨結晶所成，故非如金剛平時由極多數微晶所集成者。是種單晶線具有非常大之延性，故用手常可將其引伸至遠原來長度之二倍或以上（伸長; Längsdilatation; elongation），同時其表面呈一種鱗波狀外觀，此現象之發生由於當結晶被引伸時，結晶之數部分沿結晶柵面互相移動或相重疊。

固體之一重要性質，曰硬性（Härte; hardness），此性與彈性有某

種關係。吾人稱一物體比較另一物體為硬，即因前者能極傷後者之故。吾人對於硬性尚未能予以一準確的定義，但硬性在工程上及礦物學中都極重要。其量法亦分種種，例如在工程上嘗由緊壓一鋼球於擬試之物質上，其中以所施之力與凹痕面積之比為硬性之指數。他如打擊法，摩擦法亦用之。許多物質例如鋼之類可用特殊方法使其硬化。物質中之最硬者為金剛石。

82. 小形變·虎克定律·彎曲。設想均勻物質一方，其長為 l ，橫斷面積為 q ，今因受力 k 之作用，其長增至 $l + \Delta l$ ，故形變 $\delta = \Delta l/l$ 。作用於每單位面積上之力為 k/q ，而係與物質內之張力（應力） p 相等。形變未超出比例限度以前， δ 與 p 成正比。由此得

$$\delta = \frac{p}{E} \quad \text{或} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{qE}, \quad (1)$$

是為關於小形變之虎克定律 (Hookesches Gesetz; Hooke's law, 1660)，即應力對於形變之比等於一常數，此常數曰此物質之彈性係數 (Elastizitätsmodul; modulus of elasticity)。其倒值 $1/E$ 曰彈性常數 (Elastizitätszahl)，假定其他狀況不變，彈性係數 E 愈大時，形變愈小

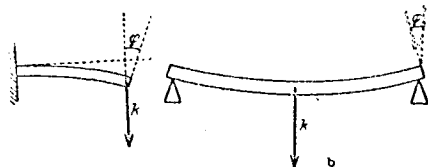


圖64. 一棒之彎曲。

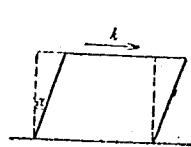


圖65. 切變。

·故如鋼有一極大彈性係數，橡皮有一極小彈性係數。第三表表示若干物質之彈性係數。據(1)方程式，易知在CGS制中， E 之單位為達因/厘米²，但在表中慣用仟克之力/毫米²為 E 之單位。在異方性體中，尤其在多數結晶中，彈性係數與物體內之方向有關。

第三表 彈性係數(以仟克之力/毫米²計算)。

鋁	6300—7200	鐵	5300
鉛	1500—1700	銅	10000—13000
炭鐵及鋼	20000—22000	黃銅	8000—10000
錫鐵	7500—13000	木板樅	800—1200

彈性形變之一特種，曰彎曲。設想一棒如圖 64a，其一端固定不動，他端作用一力，則桿向下彎曲，其平行終端令成一角度 φ 。此角度在兩端置在兩刃口上，中央置力彎下之棒（簡單梁）中亦有之（圖 64b）。假定棒之橫斷面積為矩形， a 表其厚， b 表其寬， l 表其長， k 表作用之力（各量均依 CGS 制計算），則關於一端固定之棒者為

$$\operatorname{tg} \varphi = C \frac{l^3 k}{a^3 b E}, \quad (2)$$

關於中央置力彎下之棒者為

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 l^3 h}{4 a^3 b E}. \quad (3)$$

故彈性係數亦可由彎曲實驗確定。

一彎曲物體除受壓力作用外，又受張力作用，因而其上層伸長，下層收縮，故在其間必有能保持其固有之大小之一層，是曰中立層。

83. 切變。一彈性體之伸長或彎曲由其彈性係數 E 決定。其他一種彈性形變，所謂切變 (Shearung, Schub; shear, shearing)，則由他種彈性常數決定，此種常數，曰切變彈性係數 (Shearungsmodul oder Schubmodul; shear modulus)，亦名扭轉彈性係數 (Torsionsmodul; torsion modulus)。切變之性質如圖 65 所示，設有一平行六面體，其底面固定而其上面依橫方向受與面平行之均勻力 k 之作用。其本為垂直線者之側邊斜成角度 d 。此角與 k 為正比，而與 k 之作用面之面積 F 為倒比。故其中常數 G 即為上述之切變彈性係數。

$$d = \frac{k}{FG}. \quad (4)$$

設想一物體例如一圓棒，其一端固定不動，加扭轉力矩 N 於其他端，則棒被扭轉，其彈性形變，故純為一種切變。自棒之扭轉角度 φ ，桿長 l ，棒之半徑 r 及 N ，即可算出棒之切變彈性係數 G ，因

$$G = \frac{2l}{\pi r^3 \varphi} N. \quad (5)$$

據 § 47，此物體之方向力 $D = \frac{\pi r^4 G}{2l}$ 。設取一線，其上端固定，下端懸一具有轉動慣量 J 之物體（例如一盤）。今使物體轉動於其靜止位置

之左右，則據 § 47，此物體作帶有週期 $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$ 之扭轉振動。由此可算出方向力 D ，再由後者算出切變彈性係數 G ，因其對於扭轉之影響， G 又名曰扭轉彈性係數。利用扭擺可以比較不規則物體之轉動慣量，因 J 與 τ 之平方作正比故也。例如在上述之物體上裝置欲比較之物體，命其轉動慣量為 J_x ，此時扭擺之週期為

$$\tau_x = 2\pi \sqrt{\frac{J + J_x}{D}},$$

故 $\frac{J + J_x}{J} = \left(\frac{\tau_x}{\tau}\right)^2$ 或 $\frac{J_x}{J} = \left(\frac{\tau_x}{\tau}\right)^2 - 1 = \frac{\tau_x^2 - \tau^2}{\tau^2}$ 。

由此方程式乃得兩者之轉動慣量之比。

因扭轉之角度與所加之力為比例，故由扭轉角度可推求所測之力。此原理之一應用，例如扭秤。對於極小之力作精密之測定時，概用此器。

如虎克定律然（方程式 1），方程式 (4) 及 (5) 唯於形變 d 小時有效，故有一有效限度。若超出此限度，則發生與超出比例限度 (§ 81) 時相當之情形，如發生比例差異，彈性疲勞，終則斷折。

切變彈性係數 G ，如彈性係數 E 然，有，力/面²之因次，其在表中亦以仟克之力/毫米²表示之。

由繞一線於一圓筒體上而成之螺簧，其經引伸或壓縮時發生與圓筒體引伸或壓縮時相同之情形，並在一廣大範圍內服從虎克定律。至線本身之實際的彈性變動，則與被扭轉時相同。

因對於是種螺簧，虎克定律有一廣大有效限度，故由引伸或壓縮螺簧可量出悉此種變動者之力，根據此原理而製出者之器械，例如彈簧秤，其中用欲秤之物體以曳螺簧或壓螺簧，螺簧所生之形變之大小表示物體重量為若干，而此可在標度上讀出之。他如供測力用之彈簧測力計亦同此原理。彈簧秤所示者為重量，故即用同一之器械，秤同一之物體，在重力不同之處行之，其結果亦不相同 (§ 55)，換言之，彈簧秤為秤力之器械而與天秤，稱等 (§ 75) 秤質量之器械不同。

由鋼帶捲成之條帶彈簧，例如供鐘錶彈簧或錶中擺輪等之用者，

當捲緊之後，就其全體而言，有如扭轉體之性質，但捲時之實際過程，却同金屬條帶之一種彎曲。

84. 壓力。今須切實確定壓力(Druck; pressure)在物理學上的定義。吾人平時往往不嚴格注意壓力與力之差別，在物理學上則必須準確區別之。吾人謂在一面上作用一壓力，即以爲在該面上作用如數多之單獨力，致設想施於面上之整個力連續的分配於面上。在每方厘米面積上，作用某一定力，名曰面上之壓力 p ，故如將整個力 k 平均分配在面積爲 F 方厘米之面上，即得面上之壓力

$$p = \frac{k}{F} \text{ 達因厘米}^{-2} \quad (5)$$

在實際上壓力大都不用CGS制單位(達因/厘米)，但用另一種單位，而此種單位當在§103中說明之。

85. 彈性能量。一物體經彈性之長度變動時，在物體上反彈性之力完成某一定之功。設命 $\Delta l = x$ 表長度之變動，則據(1)方程式在 x 與促成變動之力 k 之間發生下列關係

$$k = \frac{qE}{l} x \cdot$$

如欲將伸長 x 增至 $x + dx$ ，則須再增加

$$dA = k dx = \frac{qE}{l} x dx$$

之功(=力×路程)。(假定伸長 x 與 l 相較甚小。)故使伸長 Δl 所須之全部功依積分法爲

$$A = \int_0^{\Delta l} \frac{qE}{l} x dx = \frac{1}{2} \frac{qE}{l} (\Delta l)^2.$$

此功今作位能儲於經形變之物體內，但以後若將形變力撤去，仍可獲得。他種彈性形變亦同此情形。根據此種事實，緊張之彈簧可供給作功所須之能量，彈簧內儲有彈性能量(elastische Energie; elastic energy)。

設想一平行六面體，其稜長爲 a, b 及 c (吾人可設想不拘何種形狀之物體皆可由是種極小平行六面體集成)。今由各方面與其面垂直施壓力 p ，則其容積 $V = abc$ 發生一小變動 ΔV 。此時作用於三面上之力爲

$pab, paoc$ 及 pbc . 同時命三稜之長度變動為 $\Delta a, \Delta b$, 及 Δc . 在此形變中所成之功故為 $\Delta W = p(ab\Delta a + a^2\Delta b + bc\Delta c) = p\Delta(abc) = p\Delta V$. (6)

若據原子的立場而設想，則在一固體（又在一液體但就一般而言不在氣體）內由形變而完成之功其值係與物體之原子成分之相互位能之變化相等。物體中原子間之自然距離當在平衡狀態而不經擾動時係有一定，但一經擾動之後，其位置改變，而原子間之位能增加（穩定平衡 = 最小位能，§ 62），此位能即等於加入於物體內之功。若形變力之作用停止，則原子恢復其自然相互的位置，然有時形變過大，不復可能。

第九章 液體靜力學

86. 靜止流體內略去重力時之壓力。第66圖示一盛有液體之容器。先設想此液體不受重力之作用。命 S_1 及 S_2 表兩活塞，其橫斷面積

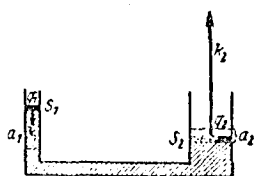


圖66. 在略去重力時之靜止液體內之力。

為 q_1 及 q_2 . 在 S_1 上作用一力 k_1 , 此力經活塞傳至液體，於是在液面上作用一壓力 $p = k_1/q_1$ (§ 84). 若活塞 S_1 經力 k_1 移動 a_1 距離，則因此活塞 S_2 必向外移動 a_2 距離，在活塞 S_2 上故作用一力 k_2 . 在移動活塞 S_1 時所完成之功為 $k_1 a_1 = \rho q_1 a_1$. 此功必等於在活塞 S_2 上所作者

，故 $k_2 a_2 = \rho q_1 a_1$ （假定液體在 S_1 及 S_2 間之流動不惹起摩擦作用，故無能量損失。）但在 S_2 一方面所增加之液體之容積 $q_2 a_2$ 必等於在 S_2 上面被排去者之液體之容積 $q_1 a_1$, 故

$$k_2 = \rho q_2 \quad \text{或} \quad \frac{k_2}{q_2} = \rho, \quad \text{及} \quad k_1 : k_2 = q_1 : q_2. \quad (1)$$

今 k_2/q_2 表液體對於 S_2 所施之壓力。但 ρ 又為液體對於 S_1 所施之壓力（牛頓第三定律），故對於 S_1 及 S_2 所施之壓力係相等。今凡對於容器壁之兩可動部分所可證實者自然對於其他各部分亦有效，申言之，液體對於容器壁各部分所施之壓力——若略去重力作用——到處相等。

液體內之壓力，稱曰液體壓力 (Flüssigkeitsdruck; pressure of liquid). 上述之說明可推擴而為一定律如下：在略去重力之靜止液體

內，液體壓力到處一致。換言之，增加液體內一部分之壓力，勢必令凡有液體連絡之各處，均增同大之壓力（巴斯噶 Pascal 原則）。唯此原則不適用於可壓縮之液體。在一靜止液體內之壓力，曰液體靜壓力 (hydrostatischer Druck; hydrostatic pressure)。研究靜止液體之力學上諸現象之學科，曰液體靜力學 (Hydrostatik; hydrostatics)。

上述定理之一應用如將較小之力變為較大之力之水壓機 (Hydraulische Presse; hydraulic press)。如選定一夠大之比例 $q_2:q_1$ (方程式 1)，則可由較小之力 k_1 惹起較大之力 k_2 ，當時活塞 S_2 移動之距離與活塞 S_1 移動之距離相較甚小，因而在實際構造中 (圖 67)， S_1 充抽水唧筒之活塞，後者將水自外壓入於機內，故惹起較大壓力之過程可任意多次反覆。

87. 重力之作用。液體受重力作用時，作用於其內部者不但有在表面上所施之壓力，例如大氣壓力 (§ 108)，且又有上層液體因重而起之壓力。命 AB (圖 68) 表在液體內一水平橫斷面，其面積為 q ，深度為 x 。若該液體之比重為 ρ 或其密度為 g ，則在 AB 橫斷面上之液體

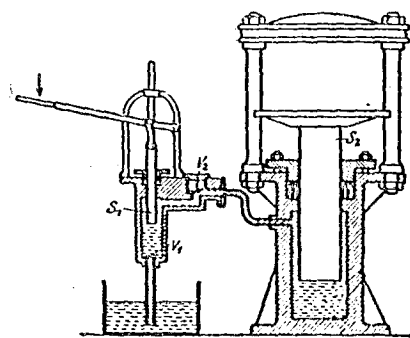


圖 67. 水壓機。V₁ 及 V₂ 表液體。

之重 $k = \rho \cdot q \cdot x$ 克重，或 $g \cdot \rho \cdot q \cdot x$ 達因 (§ 56)。但此重量既平均分配在 q 之面積上，故作用於一單位橫斷面積 (1 方

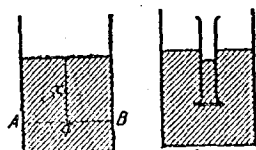


圖 68. 壓力隨深度之增加。圖 69. 壓力隨深度增加之證明。

厘米) 上之力或壓力為

$$p = \frac{k}{q} = \rho \cdot x \text{ 克重/厘米}^2 \text{ 或 } g \cdot \rho \cdot x \text{ 達因/厘米}^2. \quad (2)$$

若又有在表面上之外壓力 p_0 ，則 $p = p_0 + \rho \cdot x$ 。在受重力作用之液體內

之液體靜壓力，故與深度成比例而增加，其時假定液體之密度不隨深度而變更，換言之，假定不能顯然壓縮。除非在極深之處，液體之密度自然不改變。

爲示壓力隨深度之變動，例如可用下列之實驗（圖69），試取一無底之圓筒，以一玻璃板密承其底，全體浸入液體中。通常玻璃板入液體必沉，然此時之玻璃板經液體緊壓在筒底，則不沉下。如筒內注入同一液體至筒內之液體面將與筒外液體面等高時，玻璃板尚不致沉下，但若筒內之液體面達如是之高度，筒內液體之壓力加上玻璃板之重量等於液體內玻璃板所在處之壓力時，板即離開圓筒，自由沉下。

據(2)方程式，壓力與容器之形狀無關，故盛液體至達 h 高之容器內之底面壓力 (Bodendruck; bottom pressure) 亦與容器之形狀無關，而恆爲 ρh 克重/厘米²。如圖70a 及 b 所示之二容器，器內液體之表面如若高低相等，則無論其側壁作何形狀，其底面所受之壓力均必相等（若底面面積亦相等，則全壓亦必相等）。就有如圖70a 所示之形狀之容器而言，在虛線兩旁之液體之壓力係經側壁支持，故與底面壓力無關。至在如圖70b 所示之容器中，則可說明如下：命 df_1 表在液面下 x 深處之側壁上之一極小環形面積， df_2 表其在底面上之投影（爲清楚起見， df_1 祇在左側表明）。在 x 深處，有壓力 p_x ；於是在 df_1 上作用

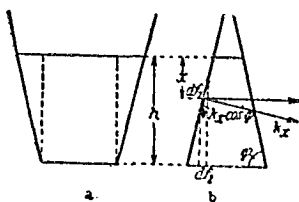


圖70. 示底面壓力。

之力 $k = p_x df_1$ ，但因成平衡由 df_1 亦有一等大之力作用於液體。今將此力分解爲一水平分力及一鉛直分力。因對稱理由，作用於全環形面 df_1 上之諸力之水平分力互相抵消。故祇留下向之分力，其大小等於 $df_1 p_x \cos \varphi$ ，其中 φ 表側

壁與底面所成之角度。此力由液體傳至底面上相屬之極小面積 df_2 上並在是處產生一壓力 $p' = p_x \cos \varphi df_1/df_2$ ，或因 $df_1/df_2 = 1/\cos \varphi$ ， $p' = p_x$ 。除此壓力之外，又有在 df_2 以上之液體之壓力 $p'' = (h-x)\rho$ ，故全

壓力 $p = p_x + \rho(h-x)$ ，在底面上各點之壓力必相等，否則液體依水
平方向流動； p 故必與 x 無關，但此唯 $p_x = \rho x$ 時可能，故 $p = \rho h$ 。換
言之，在 x 或 h 深處之壓力祇與深度有關，而與容器之形狀（與 φ 角
度）無關。爲示此說明之合法，

應用一儀器，其中種種異形之容
器均配有等大之底面，在底面上
向上緊壓某一定大之力（圖71）

。如此力不變，則不同器之形狀
如何，爲使器內之液體之壓力可
與該力相抵，在器內恆須注入同
一液體至達等大高度。如先於容
器內注入液體至滿，然後於底面

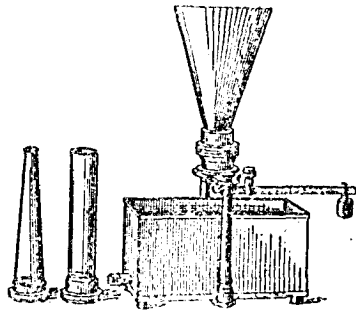


圖71. 底面壓力器。

上由外施一定大之壓力，則各容器內之液體必先漏下，至有相等高度
時爲止。要之，各器內液體之重量雖不相同，但底面所受之壓力仍能
相等。此種現象曰靜液體之怪事（hydrostatisches paradoxon，巴斯
噶 1660）。設於兩容器內分別注入同一液體，然後以管連通（連通器
），則液體自液體表面較高之容器流至液體表面較低之容器（假定兩
器均不甚狹窄，§ 93），至兩器內液體面等高時爲止，兩器內相等深
處之壓力自必相等。至容器之形狀，則並無關係（圖72）。其理與
以上所述者相同。兩器內液體之壓力成平衡之後，在同一水平面上之
壓力必相等，否則液體在器內流動。然爲同一水平面上可有等大之壓
力，上面液體之高度必到處相等，換言之，連通器內之液體表面必到
處等高。

設於一連通管（Kommuniz-
ierende Röhren；communica-
tion tubes；圖73）之兩管內先分
別注入比重不同又不相混合之兩
種液體，例如水銀及水。在較重

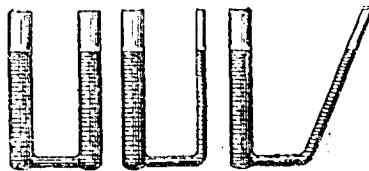


圖72. 液體連通器（連通管）。

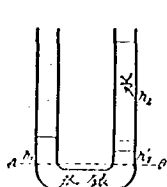
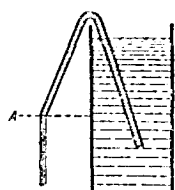


圖73. 帶兩不同液體之連通管。



74. 虹吸管。

液體內之各水平面上(如AB)之壓力在兩邊必相等, 設命 σ_1 表較重液體之比重, σ_2 表較輕液體之比重, 則在水平面上左方之壓力為 $p = \sigma_1 h_1$, 右方之壓力 $p =$

$$\sigma_1 h_1 + \sigma_2 h_2 \text{ 克重/厘米}^2, \text{ 故}$$

$$\sigma_1 (h_1 - h_1') = \sigma_2 h_2 \text{ 或 } \frac{h_1 - h_1'}{h_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

即兩管內液面之高度與密度成反比例。如已知 σ_2 , 則可由量出 $h_1 - h_1'$ 及 h_2 之高度, 確定比重 σ_1 (或已知 σ_1 , 確定 σ_2)。

如在連通管內在同一水平面上之兩點, 壓力不等, 則發生求壓力平衡之流動。其一如虹吸管 (Flüssigkeitshheber; siphon) 是(圖74)。一彎曲管滿盛液體, 其一端浸在盛同一液體之器內, 使器外之管口比較液面為低。在此管口及在液體面上同受等大之大氣壓力, 是以在 A B 面上之壓力不成平衡, 換言之, 液體內之壓力比較在外面管口之壓力為大, 故液體由管口陸續流出至器內液體之表面降至與管口等高為止。

本節中所述之各端對於水管之敷設及地下水(潛水, 其他含水層, 泉源)頗有關係。

88. 自由液體表面。設想在液體自由表面上(即不與器壁相接觸之表面部分)一液體之一極小部分。液體之各部分既極易移動, 故當液體成平衡狀態時, 作用於是種極小部分上之力必互相抵消, 在表面上之液體極小部分一則受重力之作用, 二則受自下向上垂直於表面之液體之壓力, 後者由液體本身重量之與液體表面垂直之分力所惹起(壓力)。此兩力通常成平衡, 其大小相等, 方向相反, 故在重力之單獨作用下自由液體表面 (freie Flüssigkeitsoberfläche; free surface of liquid) 必與重力之方向垂直(尤其當不計液體邊際之毛細管作用時, § 93), 換言之, 必為水平。否則重力可有一個與液體表面平行並使此極小部分向一邊移動之力。

如在液體上除重力外又有別種力之作用，則自由表面必與諸作用力之合力垂直。

設想在一圓筒容器內轉動之液體，據與液體同轉之觀察者之見地 (§ 38)，在液體表面上之各液體極小部分 m 上先有依鉛直方向之重力 mg 之作用，次有水平離心作用 $mr\omega^2$ (r 表此極

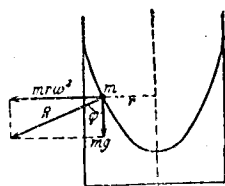


圖75. 一轉動液體之表面。

小部分與轉動軸線之距離， ω 表角速度)。此二力之合力必與液體之表面垂直，換言之，液體之表面必因轉動而改變其方向，致與合力相正交。由圖75可讀出平衡條件，即 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g}$ (φ = 液體表面之傾角)。依此算出之液體之橫斷面積呈一拋物線形。

89. 浮力·阿基米得原理· 試於受重力作用之靜止液體內置一物體，其面上各部分所受之壓力必視深度如何而定。設命 k 表浸入於液體內之物體，其比重為 σ ，長度為 l 而橫斷面積為 q (圖76)。其頂面在液體表面下 x 深處，其底面放在 $l+x$ 深處。在側面上作用之水平壓力互相抵消，但在頂面及底面之壓力則因大小不同，有一合力。據 (2) 方程式在頂面作用之力為 $k_1 = \sigma qx$ 克之力，其方向向下，在底面上作用之力為 $k_2 = \sigma q(l+x)$ 克之力，其方向向上。此二平行但相反對之力之合力等於

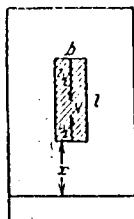


圖76. 浮力。

$$k = k_2 - k_1 = \sigma ql = \sigma V \text{ 克之力或 } V \sigma g \text{ 達因。} \quad (3)$$

(V = 物體之容積)。此力向上，名曰浮力 (Auftrieb; buoyancy)。浮力之作用點為與此物體同一形狀之液體之重心，是曰浮心，由第3方程式所示之關係依發明者(紀元前350年)命名，曰阿基米得原理 (Archimedisches Prinzip; Archimedes principle)。

浮力反被浸體之重而作用，此物體遂在液體內受視重量損失，而此損失等於 σV 克重，但因 V 表其容積， σ 表液體之比重，物體在液體中之視重量損失等於同大容積之液體之重量。故阿基米得原理又可說明如下：在液體中之固體，其視重量損失與其排去之液體之重相

等。此定律與被浸體之形狀無關。

浮力可視為重力之一效應，其在無重力之處當不致發生。

如物體係浸在 4°C 之水內，則因水之比重 $\sigma = 1$ 克重/厘米³，(§ 23) 被排去之液體之克重數等於其容積之立厘米數，故又等於所浸入之物體之容積之立厘米數。職是之故，由確定水內一物體之重量損失可直接確定該物體之容積。

根據此原理，阿基米得乃創出一種可靠方法以量呈不規則形狀之物體之比重。命 k 表物體之真重， k' 表其浸在水內時之視重，故其浮力等於 $k - k'$ 。今 $k - k'$ 之數值等於被浸體之容積之數值或等於同容積之

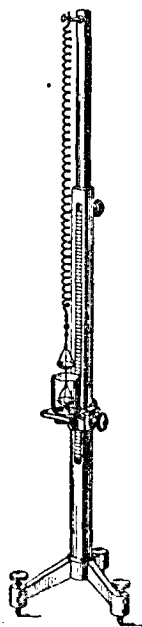


圖77. 量比重之彈簧秤。

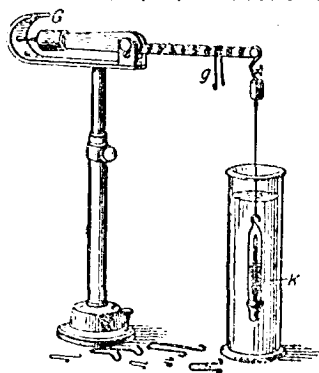


圖78. 莫兒秤。

水之重。 $k/(k - k')$ 之比表示物體對於同容積之 4°C 之水之重之倍數；換言之，直接等於比重之數值。此方法之所以特別有用者，因吾人平時不用 k 及 k' 之絕對值但祇用其數值之比，故為量出其數值，祇須量出與 k 及 k' 為比例之一任一種量，例如一螺簧在 k 及 k' 作用下之伸長，為此用一長螺簧，其上懸欲秤之物體，並先於空氣中，次於水中，(圖77)，彈簧之伸長在第一情形中與 k ，在第二情形中與 k' 為比例，其值可在標度上讀出之，終由此兩伸長之比直接求得 k'/k 之比

• 此比表比重之數值 $|\sigma|$

$$|\sigma| = \frac{k}{k-k'} = \frac{\Delta l}{\Delta l - \Delta l'}, \quad (4)$$

其中 Δl 及 $\Delta l'$ 表彈簧在各該情形中之長度變動。

在液體內一物體之浮力既與液體之比重有關，故可利用浮力以確定該液體之比重。為此應用一莫兒秤 (Morsehe Wage; Mohr's balance) (圖78)，此秤為在一刃口上轉動之槓桿，其一端懸一玻璃體 K，後者同時有如溫度計之構造。桿之地端附一重 G，當玻璃體在空氣中時，此重使附於其上之指針停在一定標上。玻璃體 K 浸在液體內之後，此體受浮力作用。為補償此浮力乃於分作 10 等分之桿臂上加遊碼 g。最重之游碼係懸在桿臂之一端，其重適補償玻璃體在 4°C 之水內所受之浮力，其他等於此單位之 $\frac{1}{10}$ 及 $\frac{1}{100}$ 。故最大之遊碼為 1，其次為 0.1，最小者為 0.01。如液體比水輕，則浮力較遊碼 1 之重力小，故將其由桿端移向左方，如移至 7 而得平衡，比重即為 0.7。如在 7 尚輕，在 8 又重，則再用 0.1 之遊碼，同樣漸次由桿端移向左方試之。用 0.01 之遊碼亦仿此，故可求出三位數。如液體比水重，則先懸遊碼 1 於桿端，其餘同前。

為迅速確定液體之比重，常用一比重計 (Aerometer; hydrometer) (圖79)。此器為一玻璃體 (a)，其下端 (b) 盛較重之物體如水銀或鉛球之類，以便管可在液中穩定浮立，其上端 (c) 附有標度。液體比重愈大時，其上端突出液面亦愈甚 (§ 90)。在標度上可直接讀出其比重。

90. 浮體。若浸入於一液體內之物體，其比重小於液體所有者，則其所受之浮力較其重量為大，故物體受一向上力之作用，後者遂物體於液體之外至其尚沉在液面下之部分之浮力適等於物體之重量為止。物體於是浮在液面。此時被排去之液量之重適等於浮體之重。設命 σ_1 表液體之比重， σ_2 表物體之比重 ($\sigma_1 > \sigma_2$)，則物體容積之沉在液面下之部



圖79. 比重計。

分 V 可由下列方程式決定

$$\sigma_2 V = \sigma_1 V' \quad (5)$$

據此，物體比重愈小者，其沉下之部分亦愈大。故船在淡水中比較在比重較大之海水中入水較深。又人在海水中游泳亦較易。

(人體之比重通常較水之比重略大，故人在水中沉下。游泳者由其四肢向下之鼓擊惹起向上之加速度，由此，人體之落下運動遂抵消。同時，此種鼓擊之水平分力促成人體向前運動，臂之運動，除促成向前運動外，又維持人體之平衡(§77).)

一複體之比重係等於其容積分除其全重，換言之，即為其平均比重或視比重。故為計算一複體之入水深度，將此平均比重代入(5)方程式中。然如計算一船之入水深度，則普通應用重量 k 等於浮力 $V'\sigma$ 之關係，其中 V' 表入水之容積， σ 表水之比重。

物體浮時，在其多數可能的位置中，通常祇有一個穩定位置。重力作用於全體之重心 S_1 (圖80)，而浮力則作用於被排去之液體之浮心 S_2 。此二力常成一力偶而有使物體向原位置轉動之傾向，浮體在液面上成平衡時，不但浮力應與重量相等，且須浮心適在通過重心之鉛直線 $S_1 S_2$ 線上。當時之平衡為穩定平衡或不穩平衡。浮體運動時，物體之重心不變，但被排去之液體之浮心之位置，則視其形狀如何而定。如圖80，浮體由平衡位置傾斜至另一位置，其浮心亦移動，浮力方向與浮體之重成為力偶，其效應在使物體恢復原狀。此時浮力線與 $S_1 S_2$ 線之交點 M ，曰定傾中心 (Metacentrum; metacenter)。定傾中心在物體之重心之上時，浮體成穩定平衡 (圖80a)，反之，在重心之下時

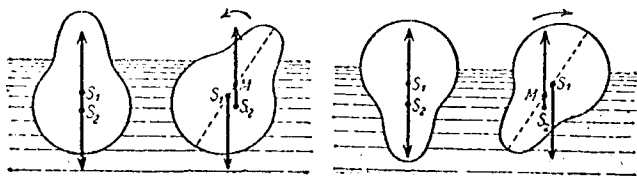


圖80. 示浮體之穩度。

(圖80b), 成不穩平衡。在前者情形中, 物體有自動恢復原來平衡位置之傾向。在後者情形中, 浮力與物重二者所組成之力偶將使物體之傾斜增加, 而物體將由傾覆而達穩定位置。由此觀之, 浮體之穩度視定傾中心與物體重心之位置而定。依據 § 82 中所示之條件, 浮體在穩定位置時, 二者組成之體系 (液體 + 浮體) 之位能最小。

91. 液體之彈性。液體對於變形之力 (切力, § 83) 不呈永久抵抗, 但對於變容積之力, 則有抵抗。設想一個筒狀容器, 其長為 l , 橫斷面積為 q 。今先於器內盛入液體, 然後以一活塞密閉之。試加力 k 於活塞上, 使其向下移動 Δl 之距離, 則液體容積之變化當為 $\Delta V = q \Delta l$ 。由作用於液體上之壓力 $p = k/q$ 所惹起之相對的容積變化 $-dV/V$ 係與壓力為比例。故

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{a} = \frac{k}{qc} \quad (6)$$

將此方程式與 § 82 中方程式(1)相比較, 可知此式在原則上與關於固體之虎克定律相等, 其中 c 表一常數, 曰壓縮係數 (Kompressibilität; compressibility)。此係數係與虎克定律中關於固體之彈性係數 E 相當。(在第 6 方程式中之負符號表示壓縮係數係由壓縮而來, 而彈性係數係由引伸而定。)

量一液體之壓縮係數時, 須防作用於液體上之壓力同時施力於容器之壁而改變其形狀, 換言之, 須防容器之容積發生變化。為此應用一壓縮計 (Piezometer; piezometer) (圖81, 奧斯特)。量時在外作用於容器 A 上之力與在內作用於液體上之力相等, 故除容器物質之壓縮不計外, 在容器上之壓力作用互相抵消。欲試之液體係盛在容器 A 內, 其下端由水銀封閉。全體可置在極大之壓力下。在 A 內之液體之壓縮可視管內水銀之位置而讀出。

大凡氣體容易壓縮, 液體已極難, 而固體則最難。壓縮一固體大都尚較液體難十倍。

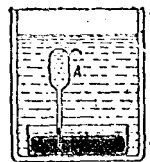


圖81. 用於量之壓縮係數。

92. 表面張力。一自由液體表面, 就其性質言之, 恰如一彈性膜。所謂表面張力 (Oberflächenspan-

nmung; surface tension), 乃液體分子間之吸引力所致。在液體內周圍為其他分子所包圍之一分子上, 是種依各方向之引力互相抵消, 但在表面之一分子上則不然, 其上之合力 R (圖82) 係鉛直向液體之內

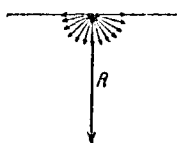


圖82. 解釋表面張力。

部, 其對於液體內部有某一定大之位能, 但據關於平衡之條件, 液體在呈穩定平衡時, 其位能須有最小之值 (§ 62), 換言之, 在表面之分子數須可能的最少, 即表面面積應該可能的最小。故若除內力外並無其他力之作用, 則一自由液體表面恆為最小之

面。故凡自由液滴均呈球形。

將一金屬絲曲作環狀, 其上罩以胰皂之薄膜, 此薄膜對於其表面之擴大, 抵抗甚力, 蓋使新分子達表面, 須予以位能, 因此須耗費功, 換言之, 須反分子間之吸引力而作功, 液體表面之性質, 故如一彈性橡皮膜, 雖則兩者張力之由來完全不同, 圖83示一張在一矩形金屬

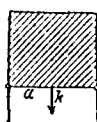


圖83. 示表面張力。

絲框上之液體薄膜。該框之一邊, 其長為 a , 可以移動, 因而其面積可以變動。設令此邊移動 dx 距離, 則液體表面 (膜之兩面) 之面積當增加 $dF = 2adx$ 。若在方厘米之表面內有 n 分子, 而在表面上每分子之位能應有 ϵ 之值。於是因表面增加之故, 位能亦須增加, 換言之, 功須耗費, 其值

等於 $dA = n \epsilon dF = n \epsilon dF = n \epsilon \times 2ndx$ 爾格。

假定為此用力 k , 但功 = 力乘路程, 故 $dA = kdx$

$$\text{或} \quad k = n \omega \times 2a = 2n\phi \text{ 達因。} \quad (7)$$

其中隨液體而異之常數 $\phi = n \epsilon$, ϵ 曰表面張力常數, 其因次為達因/厘米, 等於境界線每一厘米長所受之引力。

試就胰皂水泡之液膜言之, 其中封入之氣體反對液體成可能的最小表面之傾向。為計算平衡, 設想球形胰皂水泡上任一最大圓並計算水泡之兩半因表面張力而起之相互吸引力。接觸處之長等於 $2\pi r$ (r = 水泡之半徑)。水泡之表面既有表裏二面, 故依方程式 (7), $k = 4\pi r \phi$ 。一方面, 內外氣壓之差 r 有分離此水泡為兩半之勢。由此壓差依此方

惹起之分力，其值為 $k = \pi r^2 p$ 。此兩力必相平衡，故

$$4\pi r \sigma = \pi r^2 p \quad \text{或} \quad p = \frac{4\sigma}{r}$$

由此方程式，可知肥皂水泡之半徑愈小時，泡內之壓力愈大。此奇特之結果似與經驗相反，蓋吾人由壓入空氣於水泡內可使其增大故也。然事實上其時祇內部空氣容積增加，內壓力則降下。此事實不難由下列一實驗證明之。試將二肥皂水泡以一管相連絡（圖84），則見較大者增大而較小者被犧牲，終至較小者祇成為管端之頂部，其曲率等於大泡之曲率。此時在泡之內部發生壓力平衡，但當初因在較小之泡中壓力較大，空氣由小泡流入大泡之內。

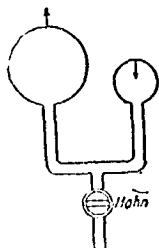


圖84. 二肥皂水泡。大者增長，小者犧牲。

表面張力隨液體而異，又視相接觸之物質而定，例如水銀對於空氣之表面張力比較酒精對於空氣之表面張力大26倍，又水對於空氣之表面張力遠較油對於空氣之表面張力為大，液體對於空氣之表面張力因溫度之增加而減小。

93. 毛細管現象。此現象係由一液體與容器之壁相接觸時之力之作用所致。在此情形中，在液體表面之分子不僅受液體內部之分子之作用(k_1)，且又受器壁之分子之作用(k_2)（圖85）。此外更有在液體上面之液體之作用及重力作用(k_3)。液體表面係與諸力之合力 R 垂直（§ 88）。今視諸力間之關係，液體沿器壁上昇（圖85a）或下降（圖85b），此現象在狹管（毛細管，故其現象曰毛細管現象；Kapillarität; capillarity）內尤為顯著。以毛細管插入水內，水沿管上昇（圖86a）。且管愈細時，其上昇愈高。如插入水銀

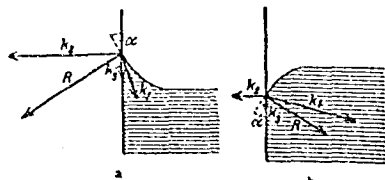


圖85. 示毛細管現象之理論。

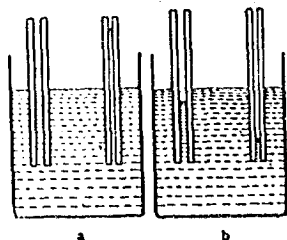


圖86. 示毛細管現象。

內，水銀沿管而下降(8-b)。在前者情形中，曲面向下，表面張力有曳引在面層之液體離開下層液體之勢，故在表層下，壓力減小，在後者情形中，曲面向上，表面張力有壓迫下層之勢，故下層壓力增加。二玻璃板中間經一水膜濕潤之後，液面向內彎曲，在內部之壓力是以比較板外大氣壓力為小，兩板不易曳開者即為此。

如液體分子與相接觸之固體分子間作用之力大於液體分子間自身作用之力，則液體展在固體之面上而成一薄膜，濕潤固體之表面，並附着於其上(例如水附着於一潔淨玻璃板上)。在相反情形中，不發生濕潤(Benetzung; moistening)，但液體在固體面上分成細滴(例如水銀在玻璃板上，水在着油之玻璃板上)。通常在平衡狀態時，位能最小。在此情形中，所謂位能，即指固體及液體之表面分子間之相互的位能。

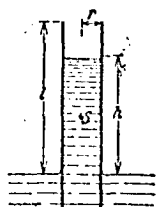


圖87. 毛細管內液面之上昇。

設想插一毛細管(半徑 r) 於一可完全被濕潤之液體中(密度 ρ) (圖87)。今根據平衡時位能必最小之條件之理由計算穩定平衡狀態。位能係由兩部分合成，即上昇之液體柱之位能及液體表面分子之位能。二者均隨上昇高度(Steighöhe; vertical height) h 而異。液柱之重心 S 高出外液面 $h/2$ 厘米。於是液柱對於外液面之位能等於 $\pi r^2 \rho g \times h/2 = \pi r^2 h^2 \rho g/2$ 。毛細管內之液面係由 πr^2 及 $2\pi r(1-h)$ 兩部分合成，其中 1 表毛細管突出液面之高度。據 § 92，在表面 1 方厘米上之分子能既為 $n \epsilon = \sigma$ ，故表面位能等於 $\sigma (2\pi r(1-h) + \pi r^2)$ 而總位能

$$\Lambda = \frac{1}{2} \pi r^2 h^2 \rho g + \sigma (2\pi r(1-h) + \pi r^2) \text{ 爾格。}$$

為得最小位能，將上式依上昇高度 h 微分並以微分商等於零，即

$$\frac{d\Lambda}{dh} = \pi r^2 h \rho g - 2\sigma \pi r = 0$$

或

$$h = \frac{2\sigma}{\rho r g} \quad (8)$$

故如已知其他數據，則可由上昇高度算出常數 σ 。至液體完全不濕潤

器壁時，其在毛細管中之下降（毛細下降）亦可由同式表明，惟帶負符號。

在兩限界情形中，液體面與器壁之接觸角 ϕ （所謂毛細角，接觸角）等於 0° 及 180° ，在其餘情形中，接觸角係在此二限界角之間（圖85）。角之大小隨液面與器壁分子間之力而異。

在接觸圓上每單位長所受之表面張力等於 ϕ ，而其與管平行之分力等於 $\phi \cos \phi$ ，故沿接觸圓全周之是種分力之總和等於 $2\pi r \phi \cos \phi$ 。因管對於液體之反作用，此亦即為液體所受之向上力（假定液體在管內上昇）。此力向上曳引液體至上昇之液體之重等於支持力為止。如其平均高度為 h 厘米，則被支持之液柱之容積等於 $\pi r^2 h$ 立厘米，而其重等於 $\pi r^2 h \rho g$ 達因。故

$$\pi r^2 h \rho g = 2\pi r \phi \cos \phi$$

$$\text{及} \quad h = \frac{2\phi}{\rho g} \cos \phi. \quad (9)$$

據以上所述，液體上昇至 h 高度時，在上昇部分之壓力小於外邊液面上之大氣壓力，其相差等於 $\rho g h$ 。此種兩邊壓力之相差全由張力及表面曲率所致。碎小物體在水面上之推拒即據是而發生。

吾人常見木屑稻草之類，在水面常相吸引而聚集一起。若液體能濕潤二物，液體在其間上昇，而在上昇部分內之壓力小於在物體外邊之大氣壓力，物體遂被擠於一處。若液體不能濕潤任何一物，液體在兩物體之間降下，其上之壓力為大氣壓力，而在物體兩外邊之壓力大於大氣壓力，故物體亦被擠在一處。如液體濕潤一物體，但不能濕潤其他一物體，兩物體各有內邊壓力大於外邊壓力之處，故物體互相推拒。

表面張力之常數 ϕ 既與毛細管現象有重要關係，故亦名之曰該液體之毛細管常數。

與惹起毛細管現象相同之分子力又可在固體與固體或固體與氣體間發生作用。據是而發生之現象例如附着（Adhesion; adhesion）現象（例如白粉附着在板上）及吸附作用（Adsorption; adsorption, §

191),

設置一油滴於水面上，則因水與油間作用之毛細管力，油滴展開而成一薄膜(油膜; *Ölfaute*)。爾來耶(Rayleigh)及貝林(Perrin)等曾利用此種現象以計算分子之大小。設在一大水面上置微量之油，則水不完全為油所蓋蔽，蓋油之展開能力有一限度。當油層之厚度與分子之直徑等大時，此限度大約已達到。依此方法乃決定分子之直徑尚小於 10^{-8} 厘米。又由肥皂水泡之黑斑之厚度亦可有相同之結論(§ 430)。

毛細管力又促成植物液體之上升及多孔質體之容易濕潤。

第十章 氣體靜力學

94. 氣體分子說(氣體運動說)。氣體之特性易由其分子之動態簡單解釋並量的說明之。其學說曰氣體運動說 (*kinetische Gastheorie*; *kinetic theory of gases*), 係由柏努利 (D. Bernoulli, 1738) 所創。據此學說，氣體之分子作漫無紀律的運動，未嘗停止，其運動之速度祇與溫度有關(§ 156)。(固體分子相距較近，故其運動不甚顯著。) 氣體分子依直線運動至與容器或與其他分子相衝突(或曰碰撞)為止，是種衝突係完全彈性的(§ 51)，故無能量損失。然二分子衝突時，其間能量或衝量互相交換。故衝突之後，各分子運動之方向及速度均改變。若就各個分子設想，氣體之狀態實細微的變動不絕。今分子之數縱在一極小容積內及當壓力極小時已非常多。若粗想此整個容積，則不覺察氣體狀態之不絕的變動。蓋各個分子速度方向及大小之變動與其餘無數分子之速度之平均變動相償，致起動力平衡 (*dynamisches Gleichgewicht*; *dynamic equilibrium*)。

上述之情形可與一大城市民衆在不變狀況下生活時之狀況相比擬。若細微的考察一居民之命運，常得一個恆在變動中之狀況之印像。一居民死亡了，小的產生出來，一居民遷出了，另有別的遷入。但若粗大的或綜合的考察整個城內之居民，而不設想其各個及各個之命運，則恆得同一的印像；居民之數，平均年齡及其平均之特性皆不變

動——假定狀況不變，此種粗大的考察法即為人口統計學中之考察法，據此可以確定關於整個居民之平均狀況，且毋須知各個居民之命運。

統計學 (Statistik; statistics) 上之考察法亦可用以考察有非常多數之同種分子之氣體之狀況而得完善的結果。由此種考察方法所示者與吾人直接就各個觀察所得者相同，不過此法所示者為極多數分子之在一個不過分小之空間內之整個狀況，而由觀察各分子所得者，往往純為偶然的狀況，故當考察大量氣體時，其關係至為微細，恰如居民之命運在人口統計家觀之不足注意者然。

在統計學中應用之算法係以或然率定律為基礎，其終結不啻為各個體——在是處為分子個體——之平均性狀或為表示其性狀之各量之平均值之報告。就理想氣體而言 (§ 101)，此種報告特別簡單，因在理想氣體中可不計及分子間作用之力，以下示關於是種氣體之在靜止狀態（就全體而言）及常溫時之某一定氣體量之若干事實（2及3二則對於非理想氣體亦適用）。

1. 一氣體分子之動量 $\frac{1}{2}mv^2$ 之歷一長時間之平均值（時平均值），各分子均相等，而與全體分子在一定瞬間之動量之平均值同大。由此則一分子之平均速度 v 或瞬間平均值即為全體同種氣體分子（等大質量 m ）所有之平均值，在多數情形中，可想像全體分子在各瞬間有此平均速度。

2. 成動力平衡時，分子之運動方向恆依各空間方向平均分配。

3. 一氣體恆占其容器之全部，如不計重力作用，則分子在容器內平均分配，故在等大空間內恆有等數之分子。

4. 溫度相等時，不同氣體之分子之動能亦相等。故質量 (m) 較小者之氣體分子，其運動速度比較質量較大者為大， $m_1 v_1^2 / 2 = m_2 v_2^2 / 2$ ，故 $v_1^2 : v_2^2 = m_2 : m_1$ 。

5. 如溫度不變，分子之速度不因氣壓變化而改變。

5. 亞佛加德羅定律。一個由亞佛加德羅 (Avogadro) 所創而

以後在 § 156 中證明之定律，其說法如下：一理想氣體每一立厘米所含
有之分子數祇與溫度及壓力有關；各氣體在等大壓力下及有相等溫度
時故有等多之分子（亞佛加德羅定律；Avogadro'sches Gesetz；Avogadro's law, 1811）。

設想在 0°C 及 760 毫米壓力下（所謂正常狀態）之 1 立厘米之氣體
• 命該氣體之密度為 ρ ，1 立厘米內含有之分子數為 n ，各分子之質量為 μ 。於是該氣體 1 立厘米之質量，或其密度

$$\rho = n\mu \quad (1)$$

據亞佛加德羅定律，在 0°C 及 76 毫米壓力下，1 立厘米之理想氣體之
分子數不隨氣體而變，故為一常數，曰亞佛加德羅常數。其值為

$$n = 27.06 \times 10^{18}. \quad (2)$$

等容積之不同氣體之質量隨其密度而異，但在同壓及同溫時之理想氣體，其分子數相等，故據 (1) 方程式，在等溫時之不同氣體，其密度隨該氣體之各個分子之質量而異。由比較兩理想氣體之密度可求出其各分子間之質量之比。

96. 分子量及原子量、克分子及克原子。常用一氧原子之重量之 $1/16$ 為重量之單位以代克之單位時，吾人常用分子量 (Molekulargewicht; molecular weight) 以表一物質之一分子之重量。例如氧 (O_2) 之分子量為 32.00，氫 (H_2) 之分子量為 2.0156，氦 (He) 之分子量為 4.00 等。分子量一名詞往往不用以表示重量，但用以表示質量。

分子量可依種種不同的物理法或化學法測定。最簡單的物理法，其原則包括使欲試之物質有理想的氣體狀態並測定其密度。據 (1) 方程式，當有同壓及同溫時，在理想氣體狀態之各物質之分子量與密度為比例。故物質之分子量可由比較此物質及養氣二者在同壓及同溫時之密度而求得（參考 § 182）。

一物質之與分子量相等之克數之質量，稱曰該物質之 1 克分子 (Grammolekül; gram molecule) 或 1 末 (Mol; mol)。例如 1 末之氧等於 32.00 克。1 末之氫等於 2.0156 克，1 末之 HCl 等於 36.46 克。據是，

則任一物質之在 1 末內含有之質量與該物質之一分子之質量之比等於其 1 克之質量與氧原子之質量之 1/16 之比。換言之，一末之質量 M 與同物質一分子之質量 m 之比， $M/m = N$ ，為一常數，曰羅斯密特常數 (Loschmidt'sche Zahl; Loschmidt's constant)，因

$$Nm = M, \quad (3)$$

此常數顯然表 1 末內之分子數。其數值為

$$N = 6.06 \times 10^{23}. \quad (4)$$

一末之氫 (H_2) 之質量為 2.0156 克。據 (3) 方程式，一氫分子之質量為 $m = 2.0156/N = 3.32 \times 10^{-24}$ 克，而一氫原子之質量為 1.66×10^{-24} 克。

各物質每 1 末之分子數既相等，故據亞佛加德羅定律，在理想狀態之各氣體之每末之容積在同壓及同溫時係相等。此容積——在 $0^\circ C$ 及 760 毫米時之容積——例如可據養氣之數據而計算。在該正常狀態下養氣之密度等於 0.001429；故 1 克養氣之容積 (其容度 V_g) 等於 $1/0.001429$ 。養氣之分子量為 32，故 1 末之容積或 32 克養氣在正常狀態下之容積等於 $32/0.001429$ 或約 22400 立厘米。此數亦為其他氣體如氮 ($4/0.0001787$)，淡氣 ($38/0.0012607$) 等所有者，曰1 末容積 (Molvolum; molar volume)。

一元素之原子量 (Atomgewicht; atomic weight)，其定義與分子量相類似，為常用一氧原子之重之 1/16 為單位時，一元素之一原子之重或量質量。(原子量表另見 § 501.)

一元素之與原子量相等之克數之質量，曰克原子 (Grammatom; gram atom)，其定義與克分子或末相類似。在 1 克原子內之原子數與在 1 末內之分子數相等，故等於 N 。

(自發見氧元素並非為單純元素但由三同位元素合成 [§ 517] 之後，分子量及原子量將來應否仍與氧元素發生關係，遂成爲一個問題。就物理的立場而言，氧元素之質量顯然為最自然的單位。)

應注意者，羅斯密特常數與壓力及溫度無關。反之，亞佛加德羅

常數僅在正常狀態(0°C溫度, 760毫米壓力)時不變, 若溫度及壓力變動, 其值亦改變。

97. **氣體之壓力**。吾人根據 § 94 中說明之觀念今可明瞭一氣體如何在其容器之壁上發生壓力(氣體之壓力; Gasdruck; gas pressure)。氣體分子與器壁不絕的衝突, 每次再經器壁返擊, 但均服從彈性衝突之定律 (§ 51), 換言之, 其動能不受損失, 器壁既為固體, 不能傳達能量, 故氣體分子從器壁折回之速度與當初衝擊器壁時所有者相同。一分子以 v 之速度與一光滑壁相碰並於是而成一入射角 α_1 , 復成 α_2 角由壁反射 (圖 88)。假定往返速度及在入射點之法線在同一平面內, 在衝擊前之速度之分速度於是為 $v_{\perp} = v \cos \alpha_1$ (與壁垂直) 及 $v_{\parallel} = v \sin \alpha_1$ (與壁平行), 在衝擊後之分速度為 $v'_{\perp} = -v \cos \alpha_1$ 及 $v'_{\parallel} = v \sin \alpha_1$, 其中以與壁垂直之一分速度關係較大。此分速度因衝擊時由壁作用於分子上之力, 發生方向倒轉及如次之變動: $v \cos \alpha_1 \rightarrow (-v \cos \alpha_2) = v(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$ 。

為導出氣體壓力之定律, 吾人利用一個在經驗及理論兩方面均經證實之事實, 即氣體之壓力與容器之形狀無關而當氣體之量及溫度不變時祇與其容積有關。為便於計算起見, 設想氣體係容在帶半徑 r 之球狀容器內 (圖 89), 除非在壓力極低時, 其內一分子與壁之衝突往往因與其他分子衝突而被阻。雖然, 在計算壓力時概略去分子間之衝突, 因在無數之分子中, 一分子雖因與其他分子相衝突不能達到器壁, 但亦有在前之分子若不與其他一分子相衝突不能達到器壁者, 當時與壁相衝突; 故可設想在前者之分子代替在後者與器壁衝突。故吾人假定祇有分子與器壁間之衝突而並無分子與分子間之衝突, 且略去之, 亦不致對於結果發生影響。

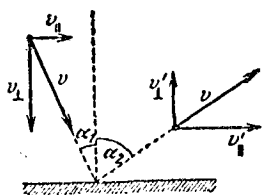


圖 88. 示氣體壓力之由來。

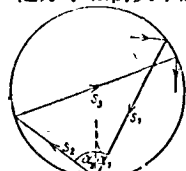


圖 89. 示氣體壓力之由來。

就一般而言, 分子在器壁上並非依規則反射,

故其入射角與反射角照例大小不等。今命 θ_1 及 θ_2 (圖 80) 表此兩角度。先設想動量之垂直成分 μv_{\perp} 。其值在衝突前為 $\mu v \cos \theta_1$ ，在衝突之後為 $-\mu v \cos \theta_2$ ，故衝突後此成分之總變動為

$$\Delta \mu v_{\perp} = \mu v (\cos \theta_1 + \cos \theta_2).$$

設命 s_1 及 s_2 表屬於 θ_1 及 θ_2 角度之弦，故即表前一衝突與在設想中之衝突間之分子之路程及該設想中之衝突與次一衝突間之分子之路程，又命 r 表球之半徑，則

$$\cos \theta_1 = \frac{s_1}{2r} \quad \text{及} \quad \cos \theta_2 = \frac{s_2}{2r}.$$

由此得

$$\Delta \mu v_{\perp} = \mu v \frac{s_1 + s_2}{2r}.$$

今以前次衝突及其次衝突二者之自由路程之各半 $s_1/2$ 及 $s_2/2$ 為設想中衝突之路程。分子為進行此路程 $(s_1 + s_2)/2$ 所須之時間

$$\Delta t = \frac{s_1 + s_2}{2v},$$

故

$$\frac{\Delta \mu v_{\perp}}{\Delta t} = \frac{\mu v^2}{r}.$$

其中 $\Delta \mu v_{\perp} / \Delta t$ 表一分子在時間單位內平均給出之動量。由上列方程式，此種動量與入射角及反射角無關。命 n 表氣體1立厘米之分子數，在球內之分子數等於 $n \times 4\pi r^3/3$ ，故在一時間單位內傳達於器壁上之總動量

$$\frac{4\pi r^3 n}{3} \times \frac{\Delta \mu v_{\perp}}{\Delta t} = \frac{4\pi r^2}{3} n \mu v^2.$$

但據牛頓第二定律，在一時間單位內變動之動量等於作用之力 k ，故因分子衝突作用於器壁上之力

$$k = \frac{4\pi r^2}{3} n \mu v^2 \quad \text{達因} \cdot \quad (5)$$

今以球之面積 $4\pi r^2$ 分除 k ，即得作用於器壁上之壓力：

$$p = \frac{1}{3} n \mu v^2 \quad \text{達因厘米}^{-2}. \quad (6)$$

以上未嘗注意動量之切線成分 μv_{\parallel} ，因其與器壁平行，此成分

顯然與器壁上之壓力無關。在各衝突中，此成分之變動僅予球以一小的轉動衝量，但因其數極多，且方向交換變動此種衝量互相抵消。

因(6)方程式關係重大，今擬再據另一方法導出之。設想各氣體分子之速度依三個互相正交之方向分為 v_x, v_y 及 v_z 三成分。故 $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ 。若命 $\overline{v_x^2}, \overline{v_y^2}, \overline{v_z^2}$ 表各分子之速度成分之平方之平均值則是種平均值自然亦可有一與前式相當之一方程式， $\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = v^2$ ，氣體分子之速度既依空間各方向平均分配，是以 $\overline{v_x^2}, \overline{v_y^2}, \overline{v_z^2}$ 之平均值必相等，即 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = v^2/3$ 。今設想在滿盛氣體之器壁上與x方向垂直之一F方厘米大之面，並假定1立厘米內有與此平面垂直之速度 $(+v_x)$ 之分子之數為 n_v^x 為簡單起見——不影響結果——假定在F面上各分子復依等大角度反射，反射之後，其依x方向之速度為 $(-v_x)$ 。故在F面上各分子之動量變動等於 $2\mu v_x$ 。在1秒間到達於F面上之分子（有 v_x 分速度之分子）數與在以F面為底面 v_x 為高度之圓內含有之分子數相等，即有 $n_v^x F v_x/2$ 分子。其作用於F面上之力等於 $2\mu v_x \times n_v^x F v_x/2$ 或 $n_v^x \mu v_x^2 F$ 。在F面上之全力係等於可達到該面之全數分子之作用力之總和， $k = \sum n_v^x \mu v_x^2 F$ 。以 n 表1立厘米內之分子數時， $\sum n_v^x v_x^2/n$ 等於速度平方 v^2 之平均值 $\overline{v^2}$ ，故等於 $\overline{v^2} = v^2/3$ 。再以F分除k時，則得器壁上之壓力

$$p = \frac{1}{3} n \mu v^2 \text{ 達因厘米}^{-2},$$

此式與(6)方程式完全符合。

數種不相化合之氣體，在同一容器內即成一律均勻之混合氣體。此時所呈之壓力，曰全壓力 (Gesamtdruck; total pressure)。全壓力係等於各成分氣體當單獨占有此容器時所呈之壓力，所謂分壓力 (Partialdruck; partial pressure) 之和。故全壓力

$$p = \frac{1}{3} n_1 \mu_1 v_1^2 + \frac{1}{3} n_2 \mu_2 v_2^2 + \dots = p_1 + p_2 + \dots \quad (7)$$

(道爾頓定律; Dalton'sches Gesetz; Dalton's law 1803)。

n 既表1立厘米內含有之分子數，則 $n\mu$ 當表在1厘米內含有之質量。但此為氣體之密度 ρ 。故

$$p = \frac{1}{3} \rho v^2 \text{達因/厘米}^{-2}. \quad (8)$$

氣體分子之速度 v 是以可從氣體之壓力及比重計算。

輕氣在 0°C 及760毫米壓力下之比重為0.00008985。760毫米之壓力等於 1013300 達因/厘米² (§103)。將此諸值代入(8)方程式中，則得輕氣分子之速度 $v = 1.837 \times 10^5$ 厘米/秒 = 1837米/秒或約每秒2 仟米。空氣分子之速度 $v = 484$ 米/秒，約每秒0.5仟米/秒。

98. 波義爾·馬略特定律。如於(8)方程式中以容度 $V_s = 1/\rho$ (§56)代替 ρ ，則得

$$pV_s = \frac{1}{3}v^2.$$

就氣體而言，當溫度不變時，此值為一常數。設想質量為 m 容積為 V 之一定量之氣體，其容度 $V_s = 1/\rho = V/m$ 。故就有質量 m 之任一氣體容積而言

$$pV = \frac{1}{3}mv^2 \text{達因厘米或爾格}. \quad (9)$$

就一定量之氣體而言，當溫度不變時，此方程式之右邊及左邊各為一常數，故

$$pV = \text{常數}, \quad (10)$$

是曰波義爾·馬略特定律 (Gesetz von Boyle-Mariotte; Boyle Mariotte's law, 1600及1676, 湯來 (Townley) 已先知有此事實)。據此定律，一定量之氣體，當溫度不變時，其壓力與容積為反比例或與其密度為正比律。當溫度不變時，使一定量之氣體之壓力自 p_1 變至 p_2 ，則其容積自 V_1 變至 V_2 ，以方程式表示之

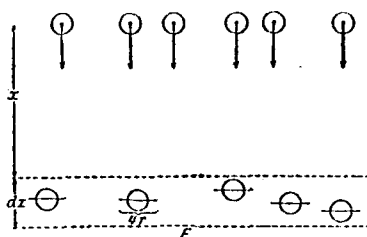
$$p_1V_1 = p_2V_2 \text{或 } V_2:V_1 = p_1:p_2. \quad (11)$$

此種溫度不變時之狀態變化，曰等溫過程 (isothermo Prozess; isothermal process)。

m 既表容積 V 內分子質量之總和，故在 V 容積內含有之全部分子之動能等於 $mv^2/2$ ，由(9)方程式得 pV 之乘積等於此分子動能之 $2/3$ 。

99. 自由路程及衝數。氣體內各分子自一衝突至達次一衝突間所進行之路程之平均值，曰平均自由路程 (略稱曰自由路程; freie

Weglänge: free path). 設想一羣氣體分子, 各依同方向運動並假定此羣含有 z_0 分子, 各分子均呈帶 r 半徑之球形。在其所經過之各層內,



必有若干分子因與其他分子相衝突改變方向而離羣。假定達厚為 dx 而其與分子羣起源之距離為 x (圖90)之層時, 尚有全數分子 z_0 之 z 分子仍在依直線進行之羣中, 換言之, 尚未因衝突而離羣。命此層之橫斷面積為 F , 其容積

圖90. 示自由路程之導出。

故為 $dV = Fdx$ 。若每1立厘米含 n 分子, 則在此容積內當含有 $nFdx$ 分子。是種分子可設想在靜止狀態中。今欲求此層中衝突之數。假定 dx 層極薄, 不任兩個分子相重疊。命半徑為 $2r$ 之圓盤(其面與進行之方向垂直)表層內之各靜分子。在達此層之動分子中, 其 dz/z 在層內發生衝突, 此比例等於在層內想像之圓盤之面積, 即 $4\pi r^2 n F dx$ 與面積 F 之比, 故

$$\frac{dz}{z} = -n4\pi r^2 dx.$$

dz 表 z 數在 dx 路程上之變動, 是以右邊帶負符號。解此微分方程式

$$\text{得} \quad z = z_0 e^{-4\pi n r^2 x} = z_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (12)$$

據此, $x=0$ 時, $z=z_0$ 。

式中 $\lambda = 1/4\pi n r^2$, 表自由路程之平均值。每立厘米內之分子數 n 既與密度為比例, 而後者據(6)方程式與壓力為比例, 故自由路程與壓力為反比例, 其與分子之橫斷面積 πr^2 亦為反比例。

決定自由路程之方法有種種(§ 113), 據所得之結果(在大氣壓力下及 0°C): 在空氣中約 10^{-5} 厘米, 在輕氣中約 1.8×10^{-5} 厘米, 在碳酸中氣約 0.7×10^{-5} 厘米。既然已知每立厘米內之分子數(§ 96), 則可算出分子之橫斷面積 πr^2 。由是求得分子之半徑約 10^{-8} 厘米。在正常狀態下, 1立厘米輕氣分子之總橫斷面積約8500方厘米, 空氣約17000方

厘米，碳酸氣約26000方厘米，故約自1—3方米。

在 § 99 中已算出分子之速度，由平均自由路程及速度可計算兩衝突間經過之時間，或其反值，即1時間單位間之衝數 (Stosszahl; number of impact). 在1秒間在空氣中約 4700×10^6 次，在輕氣中約 9500×10^6 次，在碳酸氣中約 5500×10^6 次。

100. 氣體之壓縮係數·等溫容變· 設想一圓筒狀容器，其橫斷面積為 q (圖91)，器內裝一理想氣體。今以一可動之活塞密封此器，其外施力 k ，致氣體內有壓力 $p = k/q$ 。次由增加力 dk ，使活塞向內移動 dx 距離，此時氣體容積之變動為 dV 。若氣體之溫度經維持不起變化 (等溫容變)，則壓力當增加 dp ，並據(10)方程式

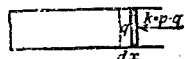


圖91. 一氣體之等溫壓縮。

$$d(pV) = p dV + V dp = 0 \text{ 或 } -\frac{dV}{V} = \frac{dp}{p} = \frac{dk}{qp} \quad (13)$$

此方程式與表示液體之壓縮係數之(6)方程式 (§ 91) 完全類似。在此情形中，增添之力 dk 與(6)方程式中之全力 k 相類似。(在是處 p 之意義與在 § 90 中不同，蓋在 § 91 中 p 表為惹起 Δ 容變必須由外施於液體上之壓力。) 由比較此兩方程式，知在氣體中壓力之作用與在液體中壓縮係數 χ 之作用同。故理想氣體之壓縮係數等於其壓力。然此唯在等溫容變中有效 (參考 § 172)。

推活塞使進器內一小距離 dx 時，反氣體在活塞上之力 pq 而作之功等於 dA ，其值等於力與路程之乘積，換言之

$$dA = pq dx = p dV. \quad (14)$$

若容積擴大，則由氣體壓力所作之功亦等於此值，此時得一外功 [參考方程式(6), § 85]。

101. 理想氣體及實有氣體· 實有氣體 (wirkliches Gas; real gas) 之性質已極近服從上列各節中之規定。一種氣體其絕對服從此種規定者，曰理想氣體 (ideales Gas; ideal gas)，此前已言之矣。空氣，養氣，液體，輕氣及稀有氣體在常壓常溫下已極近似一理想氣體。在較高溫度及較大壓力下，則發生變異 (§ 164)，其故因在分子間有交換

作用，例如引力作用，而當導出以上諸定律及方程式時，未嘗顧及之。壓力不夠大時，氣體分子間之平均距離極大，以致分子間之交換作用幾乎不致實現。然在高壓下，因分子間平均距離不大，概發生此情形。又當分子之固有容積與氣體占有之容積相較不能再略去時（即密度大時），亦發生反理想狀態之變異。在以下各節中復假定就理想氣體而立言。

102. 在重力作用下之氣體。液體受壓力作用時，極難壓縮，因此，其密度幾乎不隨與深度俱增之壓力而變動。然氣體受壓力作用時，則不然。設想兩個與重力垂直之平面，其間之極小距離為 dx (圖92)。 x 之正號方向係向上，故當 x 增加時，壓力 p 減小，而在 $x+dx$ 之高

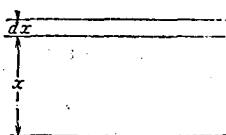


圖92. 示氣體之壓力公式之導出。

處，壓力為 $p+dp$ 。於是

$$dp = -\sigma dx \text{ 克重/厘米}^2 = -\rho g dx \text{ 達因/厘米}^2,$$
 其中 σ 表比重， ρ 表氣體在各點之密度及 g 表重力加速度（參考 § 87）。今據 (8) 方程式 § 97，當溫度不變時，一氣體之密度與其壓力為比例。若命 p_0 表壓力， ρ_0 表 $x=0$ 處之密度，則 $\rho = \rho_0 \times p/p_0$ ，故

$$dp = -\rho_0 g p/p_0 dx.$$
 解此式得

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} x} = p_0 e^{-\frac{\beta x}{\text{厘米}^2}}, \quad (15)$$

其中 $\beta = \rho_0 g/p_0$ 。此式曰氣壓高度公式 (barometrische Höhenformel; formula for barometric height)。

方程式 15 祇對於在平衡狀態之單體或到處成分一致之氣體有效。氣體為混合氣體時，此方程式每次祇對於在平衡狀態之一種氣體有效，換言之，由依次換 β 算出分壓力。全壓力則由諸分壓力相加而得。

103. 大氣之壓力。地球周圍之空氣全體，曰大氣 (Erdatmosphäre; atmosphere)，由其重量而生之壓力，曰大氣之壓力，或簡稱氣壓 (Luftdruck; air pressure)。吾人常遇之氣體壓力，即此種大氣壓力，其對於地面上進行中之過程之關係至為重要。托里拆利 (Torricelli) 首先量出大氣之壓力 (1643)，其實驗如下：用長約一米之一端

封閉之玻璃管，滿盛操而潔淨之水銀，不令少許之空氣留於管中，用指接住管口，將管口倒立水銀槽中，然後去指，使管直立；管內外水銀隨之降下，無論管是否直立，管內外水銀面約距760毫米，如圖93。（如將管由直立位置傾斜，令水銀管之閉端，則管內發音，證明管之上部確為真空。

此實驗證明大氣壓力之存在。因據 §93，在一靜止液體之一水平面上之壓力到處相等，管外水銀面上之壓力勢必與管內同面上之壓力相等。管外水銀面上所受之壓力為大氣壓力 p_0 ，而在管內同面上所受之壓力為在其上之水銀柱之壓力。故知大氣壓力等於760 毫米之水銀柱之重量。橫斷面積為1方厘米，高為76厘米之一水銀柱之質量（水銀之密度為13.6）等於 $76 \times 13.6 = 1033$ 克 = 1.033仟克。其在重力作用下之力（§55）等於 1033×981 達因 = 1013300達因。故1大氣壓約等於1百萬達因/厘米²或略大於每方厘米1仟克重之壓力。據此可知地面1方厘米上之空氣之重量約為1仟克（約每平方吋受15磅

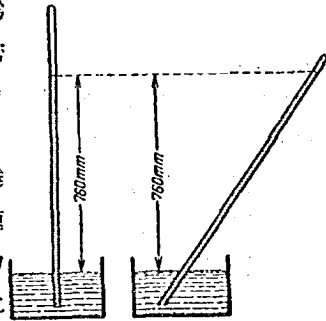


圖93. 托里拆利之實驗。

重之壓力)，此重量與橫斷面積1方厘米，高10米之水柱之重量相等（在空氣內之物體每方厘米之面積受1仟克重之氣壓，此力不為不大，然其所以不感覺此壓力者，因各方皆受與此同大之力之作用之故。）

就大氣而言，（15）方程式中之 β 常數當溫度為 0°C 時等於 $1/7800$ （高度 x 以米數計算）。 p_0 表在海面上之空氣壓力。

高度相差小時，氣壓相差極微，而當 $x=4$ 米時壓力僅減少 $1/2000$

第四表 在 0°C 時各高度之氣壓。

高度（以米數計）	壓力（以毫米水銀高計）
0（海面）	760
500	714
1000	671
2000	592
4000	461

。此種微細壓差然仍可用靈敏儀器（壓差計；Luftdruck variometer；air pressure variometer）測定之，但高

低相差懸殊時，氣壓相差可極大。例如在 8 仟米之高處，氣壓僅及海面上氣壓之 $1/4$ 。吾人由利用氣壓與高度之關係以測山岳之高度（氣壓高度測量；barometrische Höhenmessung；barometrical levelling）。由方程式(15)以 $\beta = 1/7800$ 並應用勃利克氏對數得

$$x = 18400 \log \frac{10^6 P_0}{P} \text{ 米。}$$

因溫度變化，此方程式略須修正，但在是處可略去不計。第四表示在各高度之氣壓。

氣壓最準確之測定既用根據托里拆利之實驗而製出之氣壓計(Barometer; barometer)，故為表空氣及其他氣體之壓力，通常用，毫米水銀⁴⁴。760毫米水銀之壓力謂之一氣壓。在工程上 1 大氣壓算作每方厘米 1 仟克重之壓力而 1 氣壓 = 1.033 仟克重/厘米²。在 CGS 制中，常稱 1 達因/厘米²之壓力為 1 巴 (bar)，其千倍曰 1 仟巴 = 10³ 達因/厘米²，其百萬倍曰 1 百萬巴 = 10⁶ 達因/厘米² = 1.019 仟克重/厘米² = 750.06 毫米水銀，故約等於 1 大氣壓。（然在氣象學中 1 巴 = 10⁵ 達因/厘米²，1 毫巴 = 10³ 達因/厘米²，參考 §204。）

大氣之底層含有 78%（容積百分率）淡氣，21% 養氣，餘則以氫氣為主。關於地面大氣尤其關於其化學成分之較詳的說明另見 §204。

104. 氣壓之作用。一個已知的事實，即煤氣管中高層處之壓力似較低層處為大（其實惟煤氣對於空氣之過壓較大，與水管中適相反），亦根據煤氣壓力隨高度而減之原則。命 A 及 B（圖 94）分別表一鉛直煤氣管上之兩口。因高低相差有限，密度隨高度之變化略去不計。又命 σ_1 表空氣之比重， σ_2 煤氣之比重，x 表 AB 間高低之差。若在 A 之



氣壓為 p_1 ，則在 B 之氣壓等於 $p_1 - \sigma_1 x$ ，命與此相當之煤氣壓力在 A 等於 p_2 ，在 B 等於 $p_2 - \sigma_2 x$ 。故煤氣之過壓在 A 等於 $p_2 - p_1$ ，在 B 等於 $(p_2 - \sigma_2 x) - (p_1 - \sigma_1 x) = p_2 - p_1 + (\sigma_1 - \sigma_2)x$ 。因 $\sigma_1 > \sigma_2$ ，在 B 之過壓大於在 A 之過壓。
 圖 94. 示煤氣管內過壓之理
 此事實易用本斯管(Beim'sches Rohr; Beim's tube)

(圖95)表明。此管帶有二細口，管內導入煤氣，在管口點火，管在水平位置時，兩火焰高低相等。次令管略許傾斜，在較高一端之火焰顯然增高，而在他端之火焰顯然降下。為惹起顯著的作用，管內之煤氣壓力由應用帶小孔之活門經維持僅略大於大氣壓力。

在火爐之煙囪內，亦存有與煤氣管中相同之狀況。在煙囪內充滿暖空氣，其密度必較冷空氣為小。如煙囪寬大，當下面火爐幾乎完全關閉時，在煙囪上口之壓力必為大氣壓力。因在煙囪之暖空氣內，向下壓力增加較外面為緩，爐內壓力較爐前為低，空氣遂由爐外流入爐中。故燃燒片刻之後，爐內充滿暖空氣，其時外面空氣之流入自然較良。煙囪愈高時，內外壓力相差亦力大，而空氣吸入亦愈激烈，以是凡工廠煙囪大都均極高。



圖95. 本斯管。

應注意者，若無重力作用，是種現象不能成立。故一個在地面上作用良好之煙囪，在月球上，縱使其他狀況完全相同，僅因重力不大之故，其工作不良或竟完全不發生作用。

又移液管(Pipette; pipette; 圖96)亦根據大氣壓力之作用。將管之下端，即較細之一端浸入液中，自其上端吸之，然後以手指緊按上端之孔，將全管取出，液體自下端管孔流出少許，同時在液面上之空氣所占之體積愈大，壓力愈小。(因上端管孔由指按住，管內液體面上之空氣與外面之大氣不能相通。)壓力減至一定程度時，與管中所餘之液體柱相當之壓力相加，即與大氣之壓力相等。此時管外之大氣壓力恰足支持兩者壓力之和，故液體不致落下。最後將上端之手放開，則液體面上亦有大氣壓力作用，液體即由其本身之壓力落下。

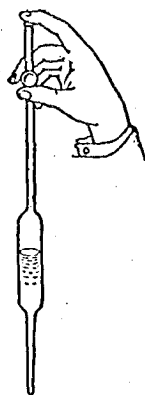


圖96. 移液管。

移液管唯在能被潤濕之液體中適用，換言之，液體須能附着於管壁上(§ 93)。否則，空氣在液體與管壁之間侵入管中，液體乃流出。

若水銀能濕潤管壁，則作托里拆利實驗時 (§ 103)，管下無再置水銀槽之必要。

吸取唧筒不能吸水至達10米高以上。因其中水之上昇係由外面大氣壓力而致，其作用不足與10米以上之水柱維持平衡 (參見§103)。

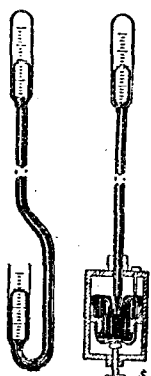


圖107. 各種水銀氣壓計。

105. 氣體壓力之測定。應用水銀氣壓計 (Queck silberbarometer; mercurial barometer) 以測定空氣壓力 (壓力之測定; Druckmessung; pressure measurement) 係根據托里拆利之實驗 (§ 103)，即由量出與氣壓成平衡之水銀柱之高度，以決定空氣之壓力。第97圖示水銀氣壓計之兩種構造式。

在作極準確之測驗時，在水銀氣壓計上讀出之數須加以相當之更正，一則因水銀之比重故即水銀柱之長隨溫度而變更，二則用以示水銀柱長短之標尺，因概由黃銅製成，亦隨溫度而變更。此外對於因表面張力而生之毛細管作用亦須計及。

水銀因其有大比重及小蒸汽壓力 (§ 180) 特適於充氣壓計之液體。然其他液體亦可用，唯其柱較高。在17世紀時，居禮開 (Otto von Guericke) 已製出一水氣壓計，計內之水柱在10米以上。

尋常不甚準確之測驗，大都應用無液氣壓計 (Aneroid barometer; aneroid barometer; 圖98)，其主要部分為一扁平圓形之密閉金屬盒D。盒內之空氣幾完全抽去，盒蓋為金屬製薄膜，富有彈性。大氣壓力之

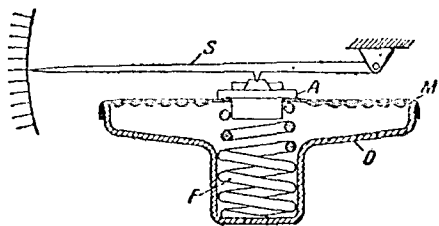


圖98. 無液氣壓計。D金屬盒，F彈簧，M金屬膜，A底蓋，S指針。

增減可使盒蓋之曲率變更；曲率變更之多寡使彈簧B運動。此運動經槓桿放大之後，傳達於一指針S，而由指針在一間標度上之位置可直接讀出氣壓等於若干毫米水銀。另一測氣

壓之方法見 § 181.

為測定小氣壓 (約5—50毫米水銀) 常用 U 字管壓力計 (圖99), 以便置在一部分成真空之容器內或與之相聯絡。令 v 表液面之高差, k 表所欲測之壓力, ρ 表水銀密度, k_1 表左端水銀面上之壓力, 則

$$k = k_1 + \frac{\rho g v}{1.013 \times 10^5},$$

管兩端皆開時 $k = \rho g h + \text{大氣壓力}.$

壓力極小時, 水銀凸面之高差之讀數不甚準確, 而當壓力在1毫米以下時且不可能。為測定是種小壓力, 應用麥克來歐特壓力計 (MacLeod'sche Manometer; MacLeod's manometer; 圖100). 此計先將欲測

其壓力之氣體之一部分隔離並壓縮之, 使占其容積之某一定分部, 其壓力遂昇至易於測計之高度

。例如氣體之壓力原來為1/1000毫米, 如將其壓縮至原來容積之1/10000, 則據方程式10, § 98, 其壓力當增至10毫米, 此壓力由兩水銀柱之高差準確量出。

麥克來歐特氣壓計一端經由管與欲測其壓力之氣體之貯器相聯絡, 而他端由一厚橡皮管與一滿盛水銀之容器B相聯絡。在其昇高管A (圖中折斷表出, 長約80厘米) 內, 水銀之高度當初與

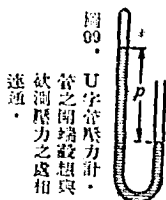


圖99. U字管壓力計。

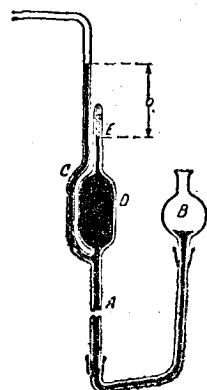


圖100. 麥克來歐特壓力計。

外面大氣壓力與氣壓計內壓力二者之壓差 (約760毫米) 相當。舉起 B 器, 則同時水銀在氣壓計內上升, 終至截斷 D 器與其餘貯氣部分之聯絡。此時 D 內氣體之壓力即為欲測定之壓力。今繼續舉起 B 器, 將 D 內氣體壓縮, 使其進達一狹管 a 之 E 點。由管上之標度指出使此部分氣體壓縮至原來容積之1/100, 1/1000或1/10000, 須令水銀達某一定高度。氣體現時所有之壓力等於在 a 及 C 管內水銀面之差 b (至 C 管內水銀面上極低之壓力可以不計) 在壓縮以前, 氣之壓力故為此壓力之1/100, 1/1000或1/10000。用是種氣壓計且可準確量出約1/10000 毫米

水銀之壓力，此方法然祇對於理想氣體及其近似者適用。

106. 空氣唧筒。空氣唧筒(Luftpumpe; air pump)為變更器內空氣或其他氣體之密度之裝置，在物理學上以發生小壓力者之一種尤為重要，凡不含一切物質之處，稱曰真空(Vakuum; vacuum)，但往往空氣或其他氣體大部分抽去，僅餘稀薄之氣體時，亦稱為真空。如其稀薄之程度甚低，即尚有大部分之空氣存在時，謂之低度真空；如其稀薄之程度頗高，即所餘之空氣已無多時，則謂之高度真空。至使發生真空用之唧筒，曰真空唧筒。

最簡單之唧筒，所謂筒狀唧筒，其第一具係由居禮開所創製（其原型尚存在德國München之博物院中），此種構造式在新式實驗室中今日已不用之。

一安全及常用之空氣唧筒為本生氏(Bunsen)之噴水唧筒(Wasserstrahlpumpe; water jet air pump; 圖101)。水在壓力下從水管之錐形狹口噴出，經過短距離噴射之後，復入於一寬大之管中，因在錐形口端部分，橫斷面積縮小，復因出管口之後，再經收縮之故，水在噴口周圍有極低壓力（為明瞭此中理由，參考 § 110），因此周圍空氣隨同噴水而去。此唧筒由一側管與欲成真空之處相連通，且因唧筒內空氣稀薄

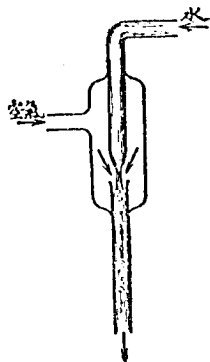


圖101. 噴水唧筒。

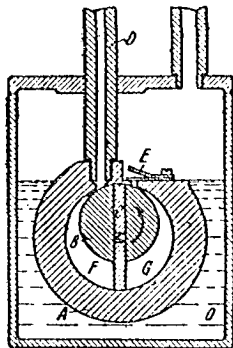


圖102. 給得氏之轉動式

(空氣)唧筒。(線圖)。米水銀之氣體壓力，今日通用由給得(Gaede)發明之轉動式空氣唧筒，其構造如圖102所示。

之故，空氣遂由是處吸入唧筒內。唧筒之內部既充滿飽和水蒸汽(§ 180)，故吸取作用為水蒸汽之壓力（在室內溫度時10—20毫米水銀）所限制，噴水唧筒大都先高度真空唧筒而用者。

為發生至約0.2 毫

米水銀之氣體壓力，今日通用由給得(Gaede)發明之轉動式空氣唧筒，其構造如圖102所示。

A 爲輕油 0 密閉不致漏氣之金屬固定圓筒，B 爲偏心圓筒，可在其軸上轉動。C 爲瓣，其數有二，皆裝在 B 上，隨 B 轉動，中央有彈簧 D，將其兩端抵向外方，俾得與 A 之內壁緊接，不致漏氣，E 爲向外啓閉之瓣，使 B 沿箭頭所示之方向轉動，空氣由 D 吸入（D 管與欲使成真空之處相通），經過擴大部分 F 及收縮部分 G，終經 E 向外排出。此種過程半轉重演一次，而與 D 相通之處之空氣漸變稀薄。

較前更進一步，則有水銀蒸汽噴射唧筒（其原理與噴水唧筒同）及水銀蒸汽擴散唧筒。關於此兩種唧筒之動作，是處不再說明。爲得最低之壓力（即極高度真空），在用上述之唧筒後，將剩餘之氣體用經液體空氣或液體輕氣冷卻之炭吸取之。

居禮曾用空氣唧筒作多數之實驗。其中特別著名者爲用馬德堡半球（Magdeburger Halbkugeln; Magdeburg hemisphere）於 1654 年在蘭斯堡（Regensburg）國會公開表演之實驗。居氏用銅製得直徑約 40 厘米之半球兩個，合之則成球，以後用空氣唧筒抽出其內部之空氣。此兩半球因受大氣之壓力，故互相緊合。居氏用馬 16 匹（每半球 8 匹）並指出其力尙不足將兩半球分開。此實驗可用製作精良之兩較小半球模仿之，不過此時緊壓於球上之力較小，因此力與球之橫斷面積爲比例故也。球之半徑爲 5 厘米或面積爲 80 方厘米時，作用於球上之力約爲 80 仟克（因在每方厘米上作用 1 仟克之力）。

用空氣唧筒排氣之印象，其由觀察氣體中放電（§ 290）而惹起者尤爲深刻。

107. 氣體之浮力。恰如在液體中然，物體在氣體內亦受浮力作用，其重量損失等於排去之氣體量之重（§ 89）。此重既極小，故浮力不大，而在大多數情形中且可略去之（每仟立厘米之容積約受 1.2 克重之浮力作用）。然在準確絕對稱法中（§ 76）則有顧及之必要。就一般而言，砝碼係由黃銅製出，而欲稱之物體則由別種物質所成，故物體之容積與砝碼之容積不同，因而所受之浮力亦不等。若已知物體之比重，則所須之修正可由一簡單算法決定。命 V_1 表實重， V_2 表欲稱之

物體之容積， ρ_1 表其比重， k_2 表為維持天秤之平衡置於盤上之砝碼之實重， V_2 其容積， ρ_2 其比重， ρ 空氣之比重。於是 $V_1 = k_1 / \rho_1$ ， $V_2 = k_2 / \rho_2$ ，而 k_1 因浮力關係不等於 k_2 ，但

$$k_1 - V_1 \rho = k_2 - V_2 \rho \quad \text{或} \quad k_1 = k_2 \cdot \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_2}}{1 - \frac{\rho}{\rho_1}} .$$

砝碼幾全由黃銅($\rho_2 = 8.4$)製出。空氣之比重約有0.0012之值。因此值微小，上列方程式可改書如下：

$$k_1 = k_2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_2} + \frac{\rho}{\rho_1} \right) = k_2 \left(1 - 0.000143 + \frac{0.0012}{\rho_1} \right) .$$

此算法示物體重量依在真空中之修正。

居禮開會由一實驗明白指出空氣之浮力。在一小等臂秤（氣體靜力秤）上，置兩種視重相等但容積不同（一為黃銅球，一為空心玻璃球）之物體。事實上因玻璃球在空氣中受較黃銅球所受者為大之浮力，必較黃銅球為重。將天秤移置在一處內並使其處成為真空，則當壓力逐漸減小之際，玻璃球沉降，因浮力今減小之故。

氣球飛船之浮游於空中，亦由於空氣之浮力。因其容積之最大部分充滿輕氣，石炭氣或氫等極輕之氣體，其比重猶較地上空氣為小。其上昇至達一定高度後不能再繼續上昇，因是處空氣之密度已極小，而空氣之比重已等於氣球等之比重。

較輕之氣體在較重之氣體內亦受浮力作用。因各個體系均向最小位能狀態努力，在空氣中輕氣及石炭氣上昇，碳酸氣及一氧化炭氣下沉。據同一理由，暖空氣在較冷空氣內上昇，因在同壓下，前者比較後者為輕。一大部分之氣象上現象（§ 204）均根據此種事實而致。浮力為一種重力之作用，故在無重力之處即不能有浮力。在無浮力之處，例如燭不能燃，因其處燃後之氣體不能受浮力離去，而由附近流入之空氣（養氣）代替之。其火焰因而窒息於其自身之燃後氣體內。

明瞭液體及氣體中浮力作用之真相，頗有教育價值。設想一浮力

之實驗如下：在一滿盛鋼珠之器內，於是種小珠之間，置一較大木球及一鉛球。次搖動容器少許，則木球上昇，浮在表面，恰如槓木浮在水面上然，鉛球則沉底。今欲解釋此實驗。如球間完全無摩擦阻力，則球可自由滑動，不消耗力，故爲使木球上昇，鉛球沉下，毋須搖動容器。恰如最小位能狀態，此狀態（全個球系之穩定平衡狀態）可自動實現。輕微之搖動祇爲子球圍繞於其他球間所必須之運動自由度。鉛球在球間自然亦受浮力作用，是以因上面之鋼珠之重量，在鉛球下之鋼珠壓迫鉛球比較在其上者爲強。此情形至爲明顯。茲設想關於氣體浮力之同樣明顯情形。是處以氣體代鋼珠，而以分子運動代搖動，故似與以前情形完全相同。但其中有大不相同者。在氣體內作用於物體上之壓力不由於氣體分子與物體長期之接觸（在鋼珠間則然），但由於氣體分子在物體表面上之衝突或碰撞（§ 97）。假定溫度不變，此種衝突之強度在氣體內到處相同。氣體之密度故又分子數及衝數均隨深度而增加，因此，在氣體內之物體，其底面所受之氣體分子之衝數比較在蓋面必多。爲簡單起見，再設想帶橫斷面積 q 之圓筒體，其蓋面及底面分別由指數 1 及 2 指出。於是作用於其上之浮力，據方程式 6, § 97 爲

$$k = q(p_2 - p_1) = q \frac{1}{3} \rho v^2 (n_2 - n_1).$$

(n_1 及 $n_2 = 1$ 立厘米之分子數)。設想在一閉器內之氣體，則似乎氣體內之浮力僅與氣體之分子速度 v 有關，而後者復隨溫度而異 (§ 156)。蓋器內分子之數不因溫度增加而改變，但不等高兩層間之分子之差數 $n_2 - n_1$ 則變。此至少就數量而可明瞭者。溫度愈高，則分子運動亦愈激烈， $n_2 - n_1$ 而其速度亦愈大，分子之不規則之運動有使其平均分配在其占有之空間內之勢，同時重力有使其全部沉在底層之傾向，使分子密度隨處而異。分子運動愈激烈時，其反抗重力之作用亦愈強，因而分子在器內之分配亦愈均勻；換言之， $n_2 - n_1$ 與 v^2 成反比例，此時 k 之表示法與浮力方程式 3, § 89, 完全相似。（與此種分子分配相似之情形，如液體內之沉澱經攪拌後之分配。）

在液體內之浮力作用，其細目至為複雜。如在氣體中然，此浮力亦由液體分子衝突之作用而致，因液體之壓縮性極小，其在被浸體底面之分子密度祇略大於面上所有者，但物體之壓力使液體分子在被浸體底面上之衝數增加，而此產生液體內之浮力。

以上所述者，不過為一個例，吾人務須警戒以外表相同的情狀即謂為與前述之真相相等，在是種大多數情形中，僅有一種類似，而類似並非為促成實際瞭解之解釋。

第十一章 液體及氣體之動力學

108. 動液體及動氣體之通性。關於動液體及動氣體之定律在壓統一的觀點下討論，唯其時容積之變動須極小而可略去者。液體因可縮性極弱，恆呈此情形。至氣體如其容積變動許達1%而可不計者，則適用關於液體之一切定律，唯當時流動速度須不超出每秒50米，高差須不超出100米。此固為一般正常情形中所有者。故有時液體與氣體相併而統稱曰流體。

凡討論流動液體之學科，曰流體動力學(Hydrodynamik; hydrodynamics)，其專論氣體者，曰氣體動力學(Aerodynamik; aerodynamics)。在單因次問題中，例如沿管之流動，亦稱曰應用液體力學(Hydraulik; hydraulics)。流體流動時，其各質點所經過之徑路曰流線(Stromlinie; stream line)，流體質點在各點之方向及速度不與時共變者，曰定流(stationäre Strömung; stationary stream)（以下均就定流而言）。在定流之液體內，設想周圍由流線圍成之一管形，是曰流管(Stromrohr; tube of flow)。在流管內之流體，曰流絲(Stromfaden; filament of flow)。從流管中途既無流體流出，又其內流體既絕不在一處停滯，故在1時間單位內通過各橫斷面積之流體量均相等（所謂連續條件; Kontinuitätsbedingung; condition of continuity）。

由此觀之，流管在流體內無始無終。流管或在一限界開始，而在其他一限界終止或自行閉合，而成為一渦流。故流線場有無渦流線場

(wirbelfreie Stromungsfeld; non-vortical stream field) 及渦流線場 (Wirbelfeld; vortical field) 之分 (參考 § 328 及 349)。

在 1 時間單位內通過各橫斷面積 q 之流體量與此橫斷面積及在此面內之速度 v 為比例。故據連續條件，在一流管內

$$qv = \text{常數}。$$

此方程式曰連續方程式 (Kontinuitätsgleichung; equation of continuity)。此式表示在粗細不同之管內，速度亦不一致。當流體在較寬之部分通過時，速度較小；在較細之部分通過時，速度較大。

凡流體均呈內部摩擦或內擦 (innere Reibung; internal friction § 113)，後者多少影響流體之流動狀況。在多數情形中，此影響微弱而可忽略之。理想的無摩擦者之流體，特稱曰理想流體 (ideale Flüssigkeit; ideal fluid)。至與之對待之實有流體，曰粘滯流體 (zähe Flüssigkeit; viscous fluid)。今先論理想流體。

109. 柏努利方程式。設想一細短之流管，其長為 Δs ，命 q 表其入口之垂直橫斷面積， q' 表其出口之垂直橫斷面積，二者相差不大 (圖 103)。流線之坐標為 s ，其與鉛直線所成之角，曰 ϕ 角。在 q 處所有之壓力為 p ，在 q' 處所有之壓力為 p' ，二者相差無幾。液體之密度為 ρ ，故在此細短部分內含有之質量 $\Delta m = \rho q \Delta s$ 。因有在兩端作用之壓力，依 s 方向作用於質量 Δm 上之力為 $pq - p'q'$ ，此外又有一 $\Delta mg \cos \phi$ 重力或以 h 表此微小部分與任一固定水平面之距離時，因 $\cos \phi = \Delta h / \Delta s = dh/ds$ ，有一 $\Delta mg dh/ds$ 之力。 $p'q'$ 既與 pq 相差極微，故據泰羅定則 (Taylorscher Satz; Taylor's law) 可書作 $p'q' = pq + \Delta s d(pq)/ds$ 。作用於 Δm 質量上之全部之力等於 $\Delta m dv/dt$

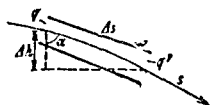


圖 103. 示柏努利方程式之導出。

(v = 流動速度)，故

$$\Delta m \frac{dv}{dt} = -\Delta s \frac{d(pq)}{ds} - \Delta mg \frac{dh}{ds}。$$

命 $dv/dt = dv/ds \times ds/dt = v dv/ds$ ，並以 ds 乘之，得

$$\Delta m v dv + \Delta s d(pq) + \Delta mg dh = 0。$$

此方程式之積分示

$$\frac{1}{2} \Delta m v^2 + \Delta s p q + \Delta m g h = \text{常數},$$

或由 $\Delta s \times q = \Delta m / \rho$ 分之，得

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g h = \text{常數}. \quad (2)$$

(ρ = 液體之密度。) 此方程式曰柏努利方程式(1738), 此式表示一液體之速度與壓力及高度之關係。此關係曰柏努利定理 (Theorem von Bernoulli; Bernoulli's theorem)。

若再以 ρg 分(2)方程式，得

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = \text{常數}. \quad (3)$$

此方程式之三項各有一長(高)之四次。 $v^2/2g$ 曰速頭或速度落差 (Geschwindigkeitshöhe; velocity head), 係等於液體為得速度 v 必須有的自由落下高度 (§ 57, 方程式 18)。 $p/\rho g$ 曰壓頭或壓力落差 (Druckhöhe pressure head), 因其等於為生靜壓力 p 之一靜止液體柱之高度 (§ 57, 方程式 2)。 h 曰位置之高 (Ortshöhe; local height)。由此觀之，在一流動液體內之三高度之總和等於一常數。當 $v=0$ 時，方程式 2 及 3 與液體靜壓力 (hydrostatische Druck; hydrostatic pressure) 之定律相當。在流動液體內，壓力 p 對於液體靜壓力之差，曰液體動壓力 (hydrodynamische Druck; hydrodynamic pressure)，其值可大於零或小於零。當液體或氣體流動之際，如中途遇固定阻礙物致流動受其影響者，則在此種情形中，物體靜壓力定律之關係頗大。當時所注意者，唯液體或氣體及阻礙物相對的運動。至阻礙物或靜止而液體或氣體流動，或在一靜止介質內運動，對於所發生之力並無關係。風箏在流動空氣中升起之理論及飛機在空氣中飛行之理論在原則上並無差別。飛機之模型實驗，在多數情形中，係用靜止模型在流動空氣中而作。

110. 柏努利方程式之數個應用。今舉數個例，以示柏努利方程式之應用。如圖 104n，設想一滿盛液體之容器於液面 b 厘米之低處有一小孔，液體由此孔流出。命 ρ 表液體之密度。在液面上及在孔口有外氣壓 $p = p_0$ 。孔口之位置高度為 $x = 0$ ，故液面之高度 $x = h$ 。因容器

寬大，液體流出時，其液面降低極緩，故在液面上 $v=0$ 。於是據 (2) 方程式

$$\frac{b}{\rho g} + h = \frac{b}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$$

或 $v = \sqrt{2gh}$. (4)

此式所表示之關係，曰托里拆利定理 (Theorem von Torricelli: Torricelli's theorem, 1646 (但在公歷100年之後，Hero von Alexandria 已知此種關係))。液體流出時，速度極大，恰如液體在真空中已自由落下全部高度 h 時所有者。流出時之速頭等於液面之位置高度。如側管向上開孔，則液體亦必噴至 h 高度 (圖104b)。但實際噴出之高度，恆較 h 略小，因其一方面須受落下水滴之衝突，一方面又須受空氣之抵抗，故不能盡量達於理論上之高度。液面降低時，流出速度亦減。為得不變的流出速度，應用馬略特瓶 (Mariottesche Flasche; Mariotte's flask; 圖

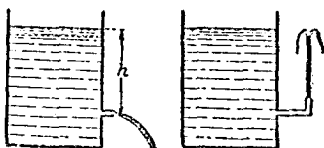


圖104. 示托里拆利定理。

105)。在一閉器內，從上口通入一管，其下口浸入液內而達與流出口相距 h 厘米之深處。因此在此深處恆有大氣壓力。 (在液面上之大氣壓力小在 h 上之液層之壓頭，當液體流出時，空氣成滴隨同流出。) 由應用方程式 (2)，復示在管下端及出口處適用之方程式 (4)，唯此時因 h 不變， v 為一常數。

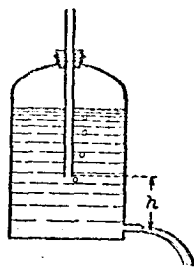


圖105. 馬略特瓶。

設想在帶有一細孔之容器內，貯有在 p_1 壓力下之一氣體。器外有較小壓力 p_2 ，因而器內靜止之氣體在出口處以 v 之速度噴出 (圖106)。用壓力及其相差極大，故可置兩者位置高度之差 h 於不計 (非水平噴出時)。於是

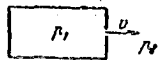


圖106. 示本生噴射定律。

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \text{及} \quad v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}. \quad (5)$$

故有同一壓差 $p_1 - p_2$ 時，不同氣體之噴出速度與其密度之方根成反比例（本生噴射定律；Ausströmungsgesetz von Bunsen）。確定氣體密度之一方法即據此定律而設。此定律對於液體亦適用。

上列兩方程式係在理想的情形下之結果，實際當從一小孔噴出時因摩擦阻力及黏滯性（§ 113），其速度常不能達上列兩方程式之值。又出孔之後，橫斷面積必縮小，再下又復稍寬，其最狹窄之部分曰縮脈（vena contracta），故由(4)(5)兩方程式不能直接計算噴出之容積。

液體水平流動時，如中途遇一阻礙物，則液體被阻於阻礙物之先

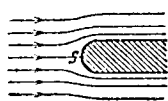


圖107. 示動壓力（依普郎脫爾）

端，其處之速度 $v = 0$ （圖107），以後液體分為兩部繞阻礙物繼續流動。茲命 v_0 及 p_0 分別表流動液體內與阻礙點 S 等高（位置高度 h ）但相距頗遠之處之速度及壓力，在阻礙點之壓力假定為 p 。於是由方程式 2 得

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p \quad \text{或} \quad p - p_0 = \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (6)$$

$p - p_0$ 之量，曰動壓力（Staudruck；dynamic pressure）。第6方程式為測一流動體內（例如河流內）任何一點之速度之最重要之方法。動壓力可用一匹托管（Pitotrohr；Pitot's tube）量出。如圖 108 所示，此

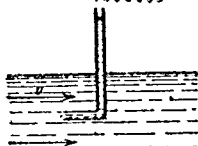


圖108. 匹托管。

管彎曲，管口對流動之方向，如一阻礙物然。由水流之壓力，使管內水面升高，其值與動壓力相當。普郎脫爾（Prandtl）曾作一聯合曲管，俾同時可量出 p_0 及 p 。

設想一種依水平方向之流動（ $h =$ 不變），則(3)方程式可書作如下：

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{常數}. \quad (7)$$

由此方程式可知在水平流動液體內，壓力愈小時，速度愈大。故在一水平管中壓力在窄處較小，在寬處較大。噴霧器即利用此理而製出。由一細管吹出空氣，口下置一鉛直管，管之下端浸在欲吹散之液體內，其上端亦成一細孔。因管口空氣吹散速度極大，是處空氣壓力小於液

面上之大氣壓力，液體遂被壓入管內。液體既由管昇上，立被噴出之氣吹散。方程式(7)之另一利用，如噴水唧筒是(圖101, § 106)。據與噴霧器吸取作用相同之理由，煙囪在有定風時比較無風時通氣為良。

在B板(圖109)上裝一直角細管C,並於B近處置一平行並可移動之板A。若由C管吹入空氣，則此不但不推拒A板且又吸引之(氣體靜力學之怪事)。其故因在外面及在板之外緣有大氣壓力。在兩板之間，氣流之橫斷面積比較在板緣狹窄，壓力較小，A板遂被吸上。在兩板接觸之際，氣流停止，A板落下，如是一再反覆，板A遂作週期性的上下運動。在上述之實驗中，兩板之距離不應超出一定之值，否則內外之壓差過小，致失效力。

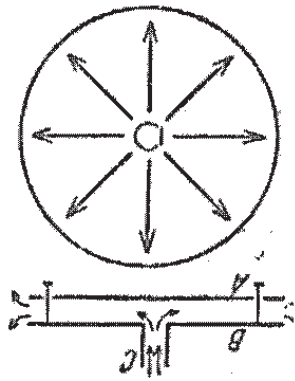


圖100. 示在噴氣內之流體動壓力。

試製一呈漏斗形並尖端閉合之紙套並將其寬置在漏斗內。在漏斗之管內吹出空氣，於是紙套反氣流之方向緊壓在漏斗壁上。其解釋與第109圖所示者同。



圖110. 繞轉動圓筒流動之水流(依普耶脫爾)。

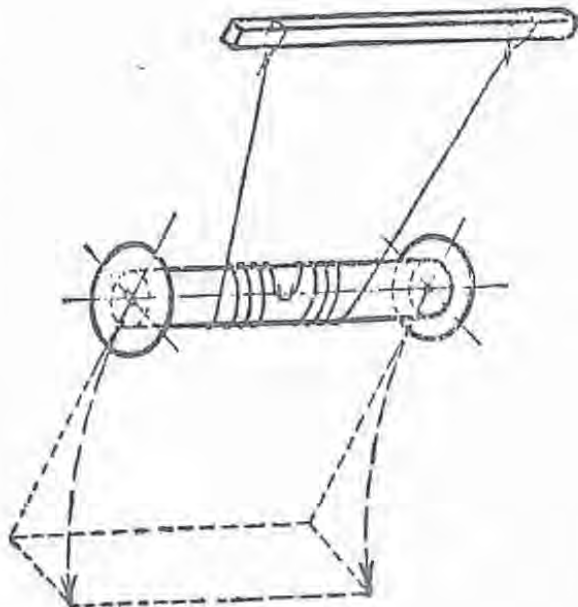


圖111. 示馬克納斯效應。

又馬克納斯效應(Magnus-Effekt; Magnuseffect, 1850)亦根據柏努利之方程式。嚴格言之，此學說須顧及摩擦，但此不便在是處說明

·茲處僅述其原理·試在一流動液體內，置一圓筒，其軸與流動方向正交，圓筒繞軸轉動時，受一種與流動方向正交之力之作用·在圓筒轉動之作用下，流體之流線在右方緊擠，故流動速度在右方較左方為大，因而液體之壓力在右方較小，左方較大（方程式7），圓筒遂被迫向右移動·在帆船用之弗拉脫納轉動子（Flettner-Rotor; Flettner's rotor）中，即應用馬克納斯效應·其法置一轉動圓筒於風中，使受此效應，其效用與揚帆同·

第111 圖示一個關於馬克納斯效應之實驗·此效應在射擊學中有相當關係，毆彈當通過空氣時，因向右轉，發生向右方之偏轉·又如激急轉動之網球在空氣中描出彎曲的徑路亦由此種效應而致·

111 分離面·渦· 速度不同之二流互相接觸並繼續平行流動時，在分離面（Trennungsfäche; separating surface）之兩邊，壓力相等，但速度不一定·此狀態與(9) 方程式所示者不相符合，故亦不固定·沿分離面往往有渦（Wirbel; eddy）生成·渦隨流轉動，兩邊之液體流恰如在渦上滾動前進，渦之轉動方向在速度較大之流之一邊與流順向，在其他一邊與流反向·（此現象可與滾珠軸承之動態相比擬·）



渦大都 在流之不常定處或在其限界生成（渦之生成；Wirbelbildung）·第112圖示一是種渦系在一銳稜旁之逐漸生成之情形·在稜後澗中之水成爲死水，此部分之水由渦層與水流分隔·



圖112. 在一銳稜上渦系之生成·（依登那脫爾）

若液體或氣體急速由一帶銳稜之孔流出，則在孔口發生渦環（圖113）·此現象可用帶一彈性壁之匣滿指出之·該壁前方有一孔，匣內空氣中混合煙少許·輕擊彈性壁，渦遂生成，其以可觀的速度流至數米之遠處，終則因摩擦而消滅·因有煙混合，故顯明可見·渦內空氣流動頗急，以燭焰近之，立即吹滅·是種渦環性頗耐久而唯摩擦能毀壞之·

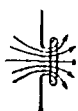


圖113. 在一噴口之生成·（依登那脫爾）

其若成於理想氣體中者，則幾乎不會毀壞，但在理想氣體中却無產渦之方法。

例如在流體之中，若置圓筒或板，則後面有渦環生成，但在無摩擦之理想流體中，在圓筒及板之後與流體之運動全無關係，此部分全靜止（就流水而言，此部分曰死水）。

112. 翼板。關於機翼 (Tragfläche, wing) 之重要學說，在是處祇能示其原理。飛機之翼板通過空氣時，或如在模型實驗中，空氣在靜止翼板面上擦過時，則在翼板之周圍發生一種空氣流動(圖114 c)，此流動可視為由一種純粹位能流動(圖114a)及一種循環流動(圖114b)重疊而成。結果，在翼板上而，流線密集，在翼板下面較疏，因而據(9)方程式，在翼板上而之氣壓比較在翼板下者為小。翼板遂被吸上升，利於飛機之飛行。此力曰舉揚力。風箏利用此力，得以昇起。他如推進器之推進作用及風車之轉動作用亦可同樣解釋。又船上之帆，空中及水上交通具之舵之作用及鳥翼在滑翔中之浮揚作用皆由相同原因而致。

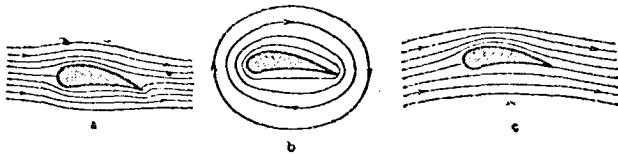


圖114. 翼板之理論(依普那脫爾)，a位能流動，b循環流動，c混合流動。

落體在空氣中應受空氣之抵抗。落體為一平板時，命 ρ 表空氣密度， S 表板之面積， v 表氣流之速度，則空氣之抵抗

$$F = C \frac{\rho v^2}{2} S, \quad \left[\text{where } C \text{ is the coefficient of resistance} \right]$$

其中 C 表一個依板形而異之常數，曰板之比抵抗。

如板面與氣流作一 α 角，則 F 可分為一鉛直力，曰舉揚力 F_a 及一水平力，曰後推力 F_w

$$F_a = C_a \frac{\rho v^2}{2} S, \quad F_w = C_w \frac{\rho v^2}{2} S,$$

其中 C_a 及 C_w 分別表舉揚力係數及後推力係數，亦均由板形而定。

113. 黏滯流體·內部摩擦· 流體改變形狀之快慢，視其一性質而異·此性質曰黏滯性(Zähigkeit, viscosität; viscosity)。流體固有黏滯性，故其流動時，內部生摩擦，曰內部摩擦或內擦(innere Reibung; internal friction) (在理想氣體內假定無此種摩擦。)例如黏滯性甚大之液體如甘油，其自管中或斜面流下之情形實與各層互相滑過無異·其速度依各層位置而不同，在各層流絲間存有一種摩擦力·其作用力為使流動較速之流絲遲緩，流動較慢之流絲加速，故有均衡速度之勢·此力與流層之接觸面積及兩層間之相對速率梯度(速率降度)為比例·若命 x 表兩層間之距離，則相對速率梯度等於 dy/dx ·在與流絲並行之 F 面上所受之摩擦力

$$k = \eta F \frac{dy}{dx} \text{ 達因} \cdot \quad (8)$$

其中 η 表一依液體或氣體而定之特性常數，曰內擦係數(Koeffizient der inneren Reibung; coefficient of internal friction)，或黏滯係數，其單位為達因厘米⁻¹秒。

內擦之性質，其關於液體者，今日仍未十分明瞭，但其關於氣體者，其各點均可據氣體動力論而說明之·在氣體中，內擦與固體間之摩擦截然不同·在靜止而溫度到處一致之氣體內，各分子平均有等大速度，且速度依各方向平均分配·但氣體以速度 v 噴出時，除不規則的分子運動外，同時又有單方向的流動速度·於是依流動方向，分子得一補助速度·因漫無紀律的運動，分子在流動氣體之各流管間往返交換，由速度較大之流管至速度較小之流管及反是·如是動量(份量)從一流管傳達至別一流管·運動較速之流管因給出運動分子及納入緩動分子損失份量；反之，運動較慢之流管增加份量·故如無外力維持原來狀況，流動氣體內之速度差必逐漸消滅·當與別一流管之分子相碰時，分子將其份量過給於該流管·其自原處以遠流管之距離等於平均自由路程，此路程愈大時，速度之相差亦愈大·命該分子原處之速度等於 v ，相距自由路程 λ 之處之速度等於 v' ，依據泰羅定則

$v^2 = \lambda dv/dx$ 。此量與從一處傳達於他處之衝量為比例。但衝量變數係與力相當 (§35)，故一流動氣體之各流管均受一加速力或減速力之作用，其強弱亦與 $\lambda dv/dx$ 為比例。與方程式8相比較，可知一氣體之內擦係數 η 必與自由路程 λ 為比例。命 n 表 1 立厘米內之分子數， μ 一分子之質量，故 $n\mu = \epsilon$ 表氣體之密度。又命 u 表氣體分子之平均速度，則

$$\eta = \frac{1}{2} n \mu u \lambda = \frac{1}{2} \epsilon u \lambda \text{ 達因厘米}^{-2} \text{ 秒。} \quad (9)$$

此方程式示確定氣體內自由路程之最良的方法。

114. 管內之流動。細管內流體流動時，黏性之關係頗大。設想一圓筒管其半徑為 r ，其中與圓筒軸平行之一流絲之半徑為 x (圖 115)。命 p_1, p_2 表在管始端及末端之兩壓力，其中 $p_1 > p_2$ 。因而與流動方向平行作用於流絲上之力等於 $(p_1 - p_2) \pi x^2$ 。此外據 (8) 方程式又有作用於流管面 $F = 2\pi x l$ 上之力 $\eta 2\pi x l dv/dx$ 。在定流中當管之橫斷面積不變時，液體既不生加速度，故此種力之總和必等於零，即

$$(p_1 - p_2) \pi x^2 + \eta 2\pi x l \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} x.$$

當積算此方程式時，應注意近管壁之液層，因黏滯性係附着於管壁上，其速度 $v = 0$ 。於是

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (r^2 - x^2) \text{ 厘米秒}^{-1}. \quad (9b)$$

再經一次積算，易算出在 1 秒間通過各橫斷面積之液體容積

$$V = \frac{\pi r^4}{8\eta l} (p_1 - p_2) \text{ 立厘米。} \quad (10)$$

若 $(p_1 - p_2)$ 極微，此公式對於氣體亦適用，但若此差數不小，則因氣體壓縮性關係，此式須經修改。式中除 η 而外，均可實測，故利用之可以算出各種液體之黏性係數。由此公式表示之定律係在 1839 年由哈根 (Hagen) 發明，但係依第二發明者之名命名，曰泊稷葉定律 (Poise-

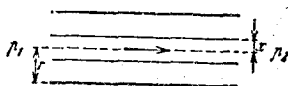


圖 115. 示泊稷葉定律之導出法。

nillesche Gesetz; Poiseuille's law).

第 116 圖示細管內速度分配之情形。在管壁速度為零，漸次增加，至中央最大，上列諸方程式唯對於細管適用，對於粗管則不適用，第 10 方程式表示在 1 秒間流出之液量與沿管之壓差為比例，由第 117 圖所示之容易解釋之實驗表示管內之壓力降度。

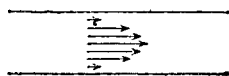


圖 116. 細管內液體之速度分配，矢長表流動速度。

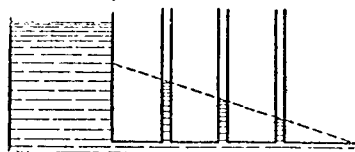
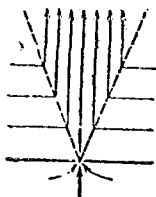


圖 117. 管內壓力降度（因內擦而致）。

但帕稷葉定律僅於假定管內之流動為一種並進流動，所謂成層流動（laminare Strömung）時有效。此為速度不過分大時之情形。但若速度過分之大，管內有渦流生成，此時成層流動激變為擾亂流動或亂流（turbulent Strömung; turbulent flow）。上面之考慮並未顧及亂流，故凡以上所述者，對於亂流均不適用。當時管內對於流動之抵抗顯然激增，而在 1 秒間由管流出之液量祇與 $p_1 - p_2$ 之方根為比例。

在人畜有機體內，帕稷葉定律有一重要關係，因其對於動脈內血液之流動適用，此外對於多孔體內液體之流動，例如地面水向地內之流動，此定律亦有效。

115. 液體及氣體之噴射。液體或氣體以一定速度由一細孔噴出而入於充滿同一物質之較寬空間時，亦發生亂流。此時在細孔發出液注及氣注（Flüssigkeitsstrahl oder Gasstrahl; jet of liquid or of



gas)。周圍之液層及氣層隨同液注或氣注而被吸入（圖 118）。其出口之後立即展開，離口愈速，其橫斷面積亦愈大。由是載在注內之物質之質量 m 增加，但據銜量定則（§33），注內動量 mv 不因此而變更，故注射速度 v 同時必減，離口愈遠，速度愈小，終則等於零。周圍之介質被吸入於液注及氣注內。據此事實，輕氣（例如賽璐珞球）在空氣注內浮揚。將球置在注內，則

由其壓力而被支持，並經四周流入之空氣阻止向外逸去。此實驗不但可行於鉛直向上之氣流中，且可行於不甚傾斜之氣流中。在後者情形中，球起一種轉動運動，因其有重力關係，球略在氣注軸之下，而其上半部比較下半部在較速氣流內。（在水注上，球之舞蹈，其解釋完全與上述現象不同。）

本生燈 (Bunsenbrenner; Bunsen burner) 之現象亦依上述氣注生成之方法解釋之（圖 119）。煤氣由噴出口 A 噴出。出口之後，速度極大，壓力較大大氣壓力為小。因此，B 管外之空氣被吸而由 L 孔進入管內以助煤氣燃燒。



圖 119. 本生燈

116. 斯托克司落體定律。一切物體，其通過液體或氣體時，無不遇阻力。此阻力並非因與周圍之介質直接摩擦而起，蓋如以前說明，凡與物體相接觸之流體層直接黏附在物體上，而所生之抵抗係由於周圍介質內之內擦。其強弱視介質之性質，動體之速度及形狀而定。設動體為一有 r 半徑之球，速度為 v ，不甚大，液體或氣體之黏滯係數為 η ，則此抵抗力

$$k = 6\pi\eta vr \text{ 達因。} \quad (11a)$$

此定律曰斯托克司落體定律 (Stokessches Fallgesetz; Stokes's law on falling bodies)。此時之抵抗大都為黏滯抵抗。若球之半徑極小而可與氣體之自由路程相比擬者，則此方程式尚須就氣體而更正。又速度極大時，

$$k = \frac{\pi}{4} \rho v^2 r^2, \quad (11b)$$

式中 ρ 表流體之密度。此定律曰牛頓定律。此時之抵抗大都為慣性抵抗。

就一般而言，速度不過分大時，抵抗力

$$k = \alpha v \text{ 達因，} \quad (12)$$

故與速度 v 為比例，其中 α 表一視流體或氣體之性質及落體之形狀而定之量。物體在有摩擦之介質內落下時，當運動之初，重力 mg （除去浮力 A ）促成一加速度，使落下速度增加，故即同時使摩擦抵抗增

加，但不久減去浮力後，重力與摩擦抵抗力成平衡， $mg - A = k'$ ，而物體此後遂以一定不變之速度繼續落下。其時

$$k = k' = \alpha v \text{ 或 } v = \frac{k'}{\alpha}. \quad (13)$$

此時之速度曰末速，通常以 v_0 表之。假定球之密度為 ρ ，流體之密度為 ρ_0 ，故球每立厘米所受之浮力等於 $\rho_0 g$ 。依斯托克司定律計算時

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_0) g = 6\pi \eta r v_0,$$

$$\text{故 } v_0 = \frac{2}{9} \frac{r^2 (\rho - \rho_0)}{\eta} g. \quad (14)$$

照樣依牛頓定律計算時，

$$v_0 = \sqrt{\frac{16}{3} \times \frac{r(\rho - \rho_0)}{\rho} g}. \quad (15)$$

又依一般法則計算時，

$$k' = \frac{4\pi r^3}{3} (\rho - \rho_0) g,$$

$$\text{故 } v_0 = \frac{k'}{\alpha} = \frac{4\pi r^3}{3\alpha} (\rho - \rho_0) g. \quad (16)$$

由是觀之，就同形體而言，重量及浮力 $A (= \frac{4\pi r^3}{3} \rho_0 g)$ ，故又力 k' 隨物體線因次之第3 幂而增加，摩擦抵抗力祇隨一個較低之幂（見方程式 11a, 11b）而增加。職是之故，較小物體比較同形同質之較大物體落下為緩。塵埃細雨滴等細小體之飄揚為在上述諸力下之一種極緩慢的落下。

第四篇 振動及波

第十二章 機械式振動及波

117. 振動之特性。如有一物體或其一部分經力之作用離開固有靜止位置而在一定之徑路上向一方向運動，達於某點之後，立即折向反對之方向進行，經過原來靜止位置而達於對方之另一點，既達該點，又立即取最初之方向向對方之一點進行。如是在徑路上往返不止之週期運動，曰機械式振動 (mechanische Schwingung; mechanical oscillation)。當運動之際，若其振動能量常住不變，則振動可永久不停息。此種振動曰無阻尼振動 (ungedämpfte Schwingung; undamped oscillation)。反之，若能量不絕的損失，以致振動逐漸減衰，終至消滅者，則稱曰阻尼振動或減衰振動 (gedämpfte Schwingung; damped oscillation)。

物體受外力之作用自靜止位置向一方運動時，得相當位能。釋放之後，其折而向反對之方向進行時，其位能變為動能，而當物體達其原來靜止位置時，此變動已完成。今因慣性關係，物體繼續運動，當時物體反重力而作功，動能復變為位能。若能量不因阻尼作用逐漸消滅，則此種運動可往返不已。其概要已於 §60 中當討論擺時說明之矣。

振動之最簡單者，即所謂簡諧振動 (harmonische Schwingung; simple harmonic oscillation) 或正弦振動 (Sinusschwingung; sinusoidal oscillation) 是。命 s 表一物體或其一部分與其靜止位置之距離或振動之變位，於是一無阻尼簡諧振動可由下列方程式表示之，

$$s = s_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

(因 $\sin \alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$), 故經簡單變式之後, 亦可以 \cos 代 \sin . 此時唯 α 之量改變.) 與靜止位置之距離純為時間 t 之一週期的函數. s_0 表一振動間 s 之最大值, 稱曰振幅(Schwingungsweite; amplitude). α 表振動之相常數(Phasenkonstante; phase constant), 其大小視如何選定時間 t 之起點而定, 故可由選定適當時間起點而消去之. 若由是而得 $\alpha = \pi/2$, 則 $s = s_0 \cos \omega t$. 故簡諧振動用 \sin 抑用 \cos 表示, 在單次振動中並無關係. 反之, 若同時有二數或多數振動, 則其相常數間之差頗有關係. ω 表振動之角速度(Kreisfrequenz; angular velocity), 其大小視當時特殊狀況而定. 第120a圖表 $\alpha = 0$ 時, s 與時間 t 之關係 (依方程式1)

若 $\omega = 2\pi \nu$ 或 $\omega = 2\pi/\tau$, 則當 $\alpha = 0$ 時,

$$s = s_0 \sin 2\pi \nu t = s_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \quad (2)$$

故 $\tau = 1/\nu = 2\pi/\omega$. (3)

欲示 τ 之意義, 注意每向一方運動一次後, s 亦經歷各可能值一次, 當時 $\sin 2\pi \frac{t}{\tau}$ 自此值增至 $\sin(2\pi \frac{t+\tau}{\tau}) = \sin(2\pi \frac{t}{\tau} + 2\pi)$, 而時間自 t 增至 $t + \tau$ (圖120a). 故此過程所須之時間為 τ , 即 τ 等於一往返振動所須之時間, 曰振動時間(Schwingungszeit; time of oscillation). 其倒數 $\nu = 1/\tau$ 為在1秒間之振動數, 稱曰振數(Schwingungszahl; number of oscillations) 或頻率(Frequenz; frequency). 通常以 ν 表之. 振數之單位, 曰赫芝(Hertz, 依電波發明者 Heinrich Hertz 之名而命名). 故每秒有 ν 振數時, 即謂有 ν 赫芝之振數.

大多數振動非為簡諧振動, 但為依廣義週期性函數 $s = f(t)$ 之振動. 然據傅立葉(Fourier) 定

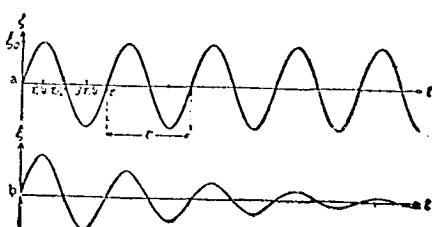


圖120. 簡諧振動. a. 無阻尼振動. b. 阻尼振動.

則，是種函數可擴充而為一種級數：

$$s = f(t) = A_1 \sin(\omega t + a_1) + A_2 \sin(2\omega t + a_2) + A_3 \sin(3\omega t + a_3) + \dots \quad (4)$$

故任一振動可視為帶有 $\omega, 2\omega, 3\omega$ 等之角速度之簡諧振動之總和。其中帶有 ω 角速度之振動，曰基本振動 (Grundschiwingung; fundamental oscillation)。其餘曰，第一，第二，第三等諧振動 (Oberschiwingung; harmonics)

118. 振動方程式 · 阻尼振動 · 在機械式振動中，其最重要者厥為由彈力而致的一種。設命 m 表在彈力作用下在平衡位置之質量，若使其離開此位置，則其以此位置為中心左右振動。離開中心不遠時，使其仍復回至中心之力遵虎克定律 (§ 82)之規定，換言之，此力與靜止位置之距離 s 為比例。故

$$k = m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\alpha s, \quad (5a)$$

今假定當時間 $t=0$ 時，此質量已與靜止位置相距 s 之距離。於是由此振動方程式 (Schwingungsgleichung; equation of oscillation) 得

$$s = s_0 \cos \omega t, \text{ 其時 } \omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}. \quad (6a)$$

此帶角速度 ω 及振幅 s_0 之簡諧運動為一無阻尼振動，其振幅不隨時間而異。其角速度 ω 曰固有角速度 (Eigenfrequenz)，其振數 $\nu = \omega/2\pi$ 曰固有振數 (Eigenschwingungszahl)。

振動表示振動系之動能與位能之不絕的交換。在無阻尼振動中，此兩種能量之和不變；但事實上尤其因摩擦，能量逐漸消耗。就一般而言，由摩擦而起之運動阻力係與振動質量之速度 ds/dt 為比例，故等於 $-\epsilon ds/dt$ (§ 116, 方程式12)，其中 ϵ 表一由當時之特殊狀況而定之常數。關於是種阻尼振動，方程式5a可代以次列一式

$$k = m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\alpha s - \epsilon \frac{ds}{dt}. \quad (5b)$$

假定阻尼作用極小，在與以上相同之初始條件下解此微分方程式得

$$s = s_0 e^{-\beta t} \left(\cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right), \quad (6b)$$

$$\beta = \frac{\epsilon}{2m} \text{ 及 } \omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m} - \left(\frac{\epsilon}{2m}\right)^2}$$

一體系之阻尼振動之角速度故比較無阻尼振動中為小，其振動之變位 s 等於 $s_0 e^{-\beta t}$ ，係隨時間而減，終至於零（圖 120b）。命 τ 表全振動之期間並以 $\beta \tau = \Lambda$ ，則自 $t=0$ 起之各最大變位之值依次為 $s_0 = s_0$ ， $s_1 = s_0 e^{-\Lambda}$ ， $s_2 = s_0 e^{-2\Lambda}$ 等，或就一般言， n 全振動後之變位 $s_n = s_0 e^{-n\Lambda}$ 準此，故每連續兩變位之自然對數之差

$$\log s_n - \log s_{n+1} = \Lambda$$

為一不變值，曰阻尼振動之對數的減衰率 (logarithmische Dekrement; logarithmic decrement)。

以 m 分除方程式 5b，並以無阻尼振動之角速度等於 $\sqrt{\frac{d}{m}} = \omega_0$ ，復以 $\frac{g}{2m} = \beta$ ，則得一方程式如下：

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0. \quad (7)$$

此式為關於阻尼簡諧運動之一般的方程式，而在摩擦與速度為比例之情形下均適用。

119. 絃之振動。彈性振動之一普通情形係由長度遠大於寬度之固體發生，其兩端張緊而其餘部分經撥或經敲發生彈性振動。今以長約米許之橡皮管為絃之模型，其一端固定而他端用手緊曳。此時若使管在手與固定端之間離開靜止位置，則管在靜止位置上下作阻尼振動，若手與固有振動合拍而略作上下運動，則此振動可維持至久。第 121a 圖示此種振動狀況。其中央之一點 B ，曰振腹 (Schwingungsbauch; loop)，其兩端固定點 K ，曰振節 (Schwingungsknoten; node)。用

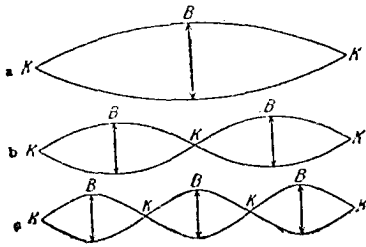


圖 121. 絃之振動。

手支持之一端可設想為一固定端，手之輕微運動僅為補償因空氣摩擦而起之振動之能量損失。如令長度不變，僅變張力 k ，則張力增加時，手之運動亦須較速；固有角速度，換言之，管之振數 ν 在一定限度內與張力為比例

若張力不變，僅變長度，則振數與長度 l 為反比例。故

$$V = \frac{k}{l} \times \text{常數} \quad (8)$$

又如手運動較前快二倍，三倍，四倍，亦可使緊張之橡皮管振動之形狀如同 121b, c 所示。此振動曰橡皮管之諧振動。在第一諧振動中，除在兩端之外，又在中央有一節 K 而在 $1/4$ 及 $3/4$ 長之處各有一腹。此時橡皮管分作兩部分振動（圖 121b）。在第二諧振動中，節點 K 在兩端及 $1/3$ 及 $2/3$ 長之處而腹 B 在 $1/2$ 及 $3/2$ 長之處。餘類推。

如用一端或兩端緊張之彈性棒亦可促成相當之現象。在第一情形中，自由端恆為一振腹，在第二情形中，在中央恆為一振腹或一振節。

120. 空氣柱之振動。第

122 圖表示在兩端封閉而內容空氣或其他氣體之管。是種空氣柱

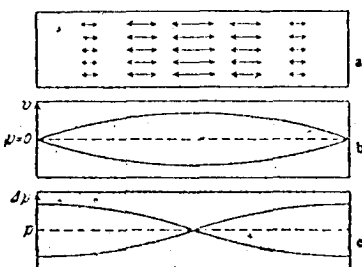


圖 122. 空氣柱之振動。a 空氣各小部分之運動，b 運動之幅之圖示，c 壓力之變動。

(所謂振動空氣柱；schwingende Luftsäule；vibrating air column) 因空氣之彈性亦能振動，且振動時，其各部分依管軸之方向作週期性往返振動。在基本振動中，在管之中央最強，兩端恆靜止不動（圖 122a 及 b），故在中央為腹，在兩端為節。又空氣柱亦有諧振動，其振數為基本振動之振數之 2 倍，3 倍，4 倍等。如管長為 l ，音在空氣內傳播之速度為 c (§ 138)，基本振動之振數為 ν ，則此三者之間實有下列關係

$$\nu = \frac{c}{2l} \quad (9)$$

伴空氣各小部分之運動而起者有週期性壓力變動 Δp 。在基本振動中，此壓力在閉端最強，而在諧振動中在振節最強，在振腹則等於零。故振腹與一壓節相符合而振節與一壓腹相符合（圖 122c）。

兩端均開之空氣柱亦可同樣振動，其中間端恆為振腹（壓節）之所在。在基本振動中，中央為振節之所在（壓腹）。就大體而言，是處之振動狀況與兩端閉塞之空氣柱之振動狀況適相反，而在諧振動中

亦然。關於振數，方程式(9)亦適用。

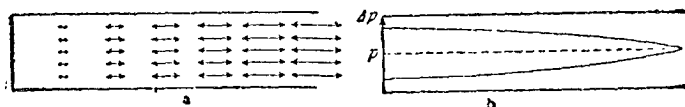


圖123. 一端閉之空氣柱之基本振動。a 空氣柱小部分之運動。b 壓力之幅。

若空氣柱在一端閉塞而在他端開者(圖123a及b)，則在閉端恆有一振節(壓腹)，在開端恆有一振腹(壓節)。基本振動之振數為

$$\nu = \frac{v}{4l} \quad (10)$$

故如長不變，振數祇及兩端皆開或閉時之一半。在此情形中，唯有基本振動之振數之3, 5, 7等倍數之諧振動可實現。

上述事實之由實驗證明時以用風琴管(§ 145及150)為最佳。

121. 強制振動·共振。一振動體之固有振動(自由振動)之振數為 ν_0 。若在物體上作用一週期性力 $k = F_0 \sin 2\pi \nu t$ (所謂激發振動)，則

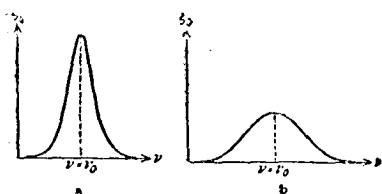


圖124. 強制振動之振動振幅為激發振數 ν 之函數。a 阻尼小，b 阻尼大。

其依作用於其上之力之週期 ν 而振動(強制振動; erzwungene Schwingung; forced oscillation)。其時假定振動稍受阻尼作用，否則，除共振(Resonanz; resonance)之情形外，概不致有均勻振動。

強制振動之振幅 s_0 。在阻尼作用不甚大時最大，其時 $\nu = \nu_0$ ，此情形曰共振。當 ν 與 ν_0 相差愈大時， s_0 愈小(圖124)。

阻尼作用愈小時，物體共振之領域亦愈小，但其振幅愈大。在激發振動及強制振動之間，恆有一相差(Phasendifferenz; phase difference)，其大小隨振數及阻尼作用之強弱而異。

一物體之振動在共振時可極激烈。故在廠內安置機器須注意廠內可振動之部分(樑，基底)無與機器轉數相符合之固有振數，否則對於廠房可發生危險。步伐整齊之隊伍所以禁示通過橋上者亦為此，蓋

恐隊伍一致步伐之拍子偶然與橋之固有振動之拍子相符合，以致惹起橋樑激烈振動之危險。關於共振之其他情形見 § 145。

122. 擾動之傳播。若一物體之一小部分，因任一原因，離開其自然靜止位置，換言之，物體之內平衡在是處被擾動時，此擾動成波 (Welle; wave) 而傳播於四周 (擾動之傳播; Fortpflanzung von Störungen; propagation of disturbance)。物體之性質依各方向相等時，擾動傳播之速度 c 依各方向亦相等。命 $r=0$ 表出發時 ($t=0$) 之原點，在時間 t 之後，即達有半徑 $r=ct$ 之球面上，即成一球面波 (Kugelwelle; spherical wave, 圖125)。

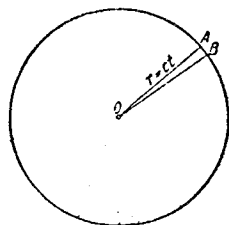


圖125. 球波面。

設想一球面波之一極小部分 (例如 OAB , 圖125) 與出發點 O 相距甚遠，此球面上之極小部分 AB 可視為近似一平面。如是之想像波，曰平面波 (ebene Welle; plane wave)。

從一球面波截下之一極小錐形體，其橫斷面積假定非常小者，曰一線或一線束，通常由一線表示之。(大都就光波中之光線而言。參考 §397。) 準此，吾人又可設想球面波含有是種無限多數之線。

123. 週期波。一特別有興趣之情形即在介質之一點發生週期性擾動，換言之，在介質內有週期波 (periodische Welle; periodic wave) 的中心。在此中心，一振動體使介質內鄰近部分作週期性運動。此鄰近部分於是作強制週期運動，其振數 ν 與振動體之振數相同。命振動體運動之速度為 ω ，其振動故遵次列方程式： $s = s_0 \sin \omega t$ 。於是介質之各質點起一種經下列方程式規定之振動

$$\eta = \eta_0 \sin(\omega t + \delta), \quad (11)$$

其中 η 表與靜止位置之距離， η_0 表振幅。設命 c 表擾動之傳播速度，則為自擾動中心以達 r 遠處須經過 r/c 之時間。在離擾動中心 r 遠之處，在 t 時之狀況與中心在 $t - r/c$ 時之狀況相當。故在(11)方程式中之相常數 δ 等於 $-\omega r/c$ ，若在擾動中心 ($r=0$) δ 之值為零，則在 r 遠處

$$\eta = \eta_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (12)$$

在球面波中，振幅 η_0 隨與波之振心之距離而異。在平面波中，則可視為一常數。設在一平面波中兩點依波之傳播方向相距 x ，則其相差等於 $\omega \frac{x}{c}$ 。

波在介質內進行時，屬於同一波源並在同時刻到達之同相之各點相連而成之面，謂之波面或波前(Wellenfläche; wave front or wave surface)。故波面在球面波中為一球面，在平面波中為一平面。

波之傳播大都以兩物體(液體或氣體)之境界而為界。例如水波(Wasserwelle; water wave)以水與空氣層為界，又如在流動方向不同之兩空氣層間其境界亦顯明，其處常見有波狀雲體生成。應注意者，液面經擾動而發生週期性波動時，受兩種完全不同之力之作用。離開平衡位置之液體表面之各質點，第一受重力之作用，使其表面恢復水平位置，第二受表面張力(§92)之作用，使表面有可能的最小面積，即使自由液面占水平位置。海面上之巨浪幾乎全由重力之作用(重力波; Schwerkewelle; gravity wave);反之，細小之波，如漣(Kräuselwelle; ripple)之類，頗受表面張力之作用較大(表面張力波; Kapillarwelle; capillary wave)。

波在一介質內傳播之速度(Wellengeschwindigkeit; velocity of wave)為關於該介質之一特性量(參考§125)。其定義亦與普通物體之速度之定義同(§17)。若命 x 表由A至B之距離， t 表所須之時間，則速度 $v = x/t$ 。關於週期性波之速度，此外尚有他種量法(§127)。

試以一緊張橡皮管中之擾動(§119)之傳播速度為例。其量法如下：輕擊該管之一端。此後擾動即沿管傳播而至他端，再折回至原處，如是往返不已。今量得擾動往返 n 次數所須之時間為 t ，命 l 表橡皮管之長，則在 t 時間內進行之路程 x 等於 $2nl$ ；傳播速度 $v = 2nl/t$ 。當時察見管緊張愈甚， v 亦愈大。

124. 波長。設想一平面週期波。在此波一點 $x=0$ 之振動可由下列方程式表示之。

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t. \quad (13)$$

今據(12)方程式，在x遠處(圖126)

$$\eta' = \eta_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (14)$$

就一般而言， η' 及 η 在同一時間t不相等。惟有

$$\sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = \sin \omega t, \text{ 或 } \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = \omega t \pm 2n\pi$$

時(其中n表示一整數)，或

$$x = \pm n \frac{2\pi c}{\omega} = \pm n \frac{c}{\nu} = \pm n \lambda. \quad (15)$$

時，兩者始隨時相等。最近之相等點，以 $n=1$ 決定，其時 $x = c/\nu = \lambda$ 。λ表示一常數，曰波長 (Wellenlänge; wave length)。沿傳播方向

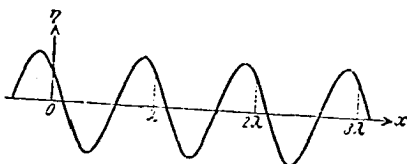


圖126. 示波長之定義。

呈同一狀態之各點(同相之點)，互以波長之倍數相距。故

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \text{ 或 } \lambda \nu = c. \quad (16)$$

即：傳播速度 = 振動頻率 × 波長。

故振動頻率ν不變時，波長λ隨介質之種類而異，換言之，隨介質內之傳播速度c而異。

125. 縱波及橫波。 偏極化。 在一波內之各質點，其運動或為依波傳播方向之往返運動或為與此方向正交之上下運動。前者，曰縱振動，而由此所生之波，曰縱波 (longitudinale Welle; longitudinal wave); 後者，曰橫振動，而由此所生之波，曰橫波 (transversale Welle; transverse wave)。縱波中質點之排列有處比較未起波動以前為密，有處比較為疎，故縱波可視作介質排列起變化時而生之波動，故又有疎密波之稱。

縱波可在各種物體內發生，但橫波祇能在固體內發生。其同處發生時，橫波傳播之速度較縱波為大。從地球之震心發出縱波，橫波及沿地表進行之表面波 (Oberflächenwelle; surface wave)。因速度

不同，此種波達地面上各點之時間亦有先後，震心與觀察處之距離愈大時，時間之先後相差亦愈大。據此可約計與地震中心之距離。

在機械式波中，常不分別其為縱波抑或橫波，但在光學上恆有此必要，且往往須舉示其特點。縱振動除由其振數外，祇能就其振幅而決定。但橫振動除由振數及振幅外，又可由與傳播方向相垂直之種種不同之方向決定。若其振動方向限於一平面內，則是種振動稱為線偏極化振動（波之偏極化；Polarisation von Wellen; polarization of waves）（圖127a）。然是種振動可依兩個互相正交之方向同時進行，換言之，可由兩個線偏極化振動合成，其角速度 ω 相等，但振幅可異，命 η 及 ϑ 表振幅， $\pi/2$ 二者之相差，則此兩種振動可由下列方程式決定之，

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t \quad \text{及} \quad \vartheta = \vartheta_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \vartheta_0 \cos \omega t.$$

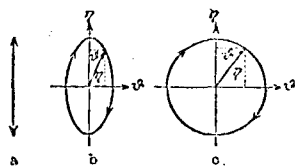


圖127. 偏極化振動。a 線偏極化，
b 圓偏極化，c 橢圓偏極化。

是種振動如圖127b所示，稱為圓偏極化振動。若兩振幅 η_0 及 ϑ_0 相等，則得一圓偏極化振動（圖127c）。

上述緊張橡皮管之簡單往返振動為一線偏極化振動。試將管穿過一罅裂，則察見管之振動唯當罅裂依某一定方向位置時，不受擾動，在其餘位置時，振動大都一部分或全被阻止。故此種振動可由轉動罅裂而抑制之。橫振動之一特性，即其可依一定方向偏極化，且可製型以示繞線偏極化振動之一傳播方向為軸而轉動時，視型之位置可任振動全部通過或止任一部分或絕對不任其通過。偏極化性之依是種方法之證明為關於波之橫振動特性之無疑義的證據。

關於縱波之在固體或液體中之傳播速度，其方程式如下：

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{或} \quad \sqrt{\frac{\mathcal{Z}}{\rho}} \quad \text{厘米/秒}, \quad (17)$$

其中 E 表彈性係數（§ 82）， \mathcal{Z} 表壓縮係數（§ 100）， ρ 表介質之密度（均依CGS制計算）。此牛頓方程式（Newton'sche Gleichung; Newton's

equation) 係根據彈性說而成立。關於在氣體中之傳播速度，其方程式如下：

$$c = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}} \quad (18)$$

(p = 氣體之壓力) κ 之值其屬於單原子氣體者等於 1.67, 屬於兩原子氣體者例如空氣等於 1.40, 又其屬於其他氣體者等於 (1.33 參考 § 172, 其中指出用 κ 因數之理由。蓋據 § 100, 理想氣體之壓縮係數係等於 ν , 故氣體之傳播速度似應等於 $c = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$)。

126. 干涉。假定振幅，振數均同，但相則異之兩平面波應在同點會合。命由第一波及第二波激起之擾動分別由下列二方程式表示：

$\eta_1 = \eta_0 \sin \omega t$ 及 $\eta_2 = \eta_0 \sin(\omega t - \delta)$ 。兩者之合成擾動故為

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \eta_0 (\sin \omega t + \sin(\omega t - \delta)) = 2\eta_0 \cos \frac{\delta}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\delta}{2} \right) \quad (19)$$

相差 δ 既為一常數，換言之，為一不隨 t 而異之量，故 $2\eta_0 \cos \frac{\delta}{2}$ 可視為合成振動之振幅。若 $\cos \frac{\delta}{2} = \pm 1$, 故 $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ 等，或 $= 2n\pi$ (n = 整數)，則振幅有其最大值 $2\eta_0$ 。此時之振動係同相。然若 $\cos \frac{\delta}{2} = 0$, 或 $\delta = (2n+1)\pi$, 則振幅等於零。其餘振幅之值在 0 及 $2\eta_0$ 之間。兩振動同時合作之結果故隨相差 δ 而異，如相亦同，則合

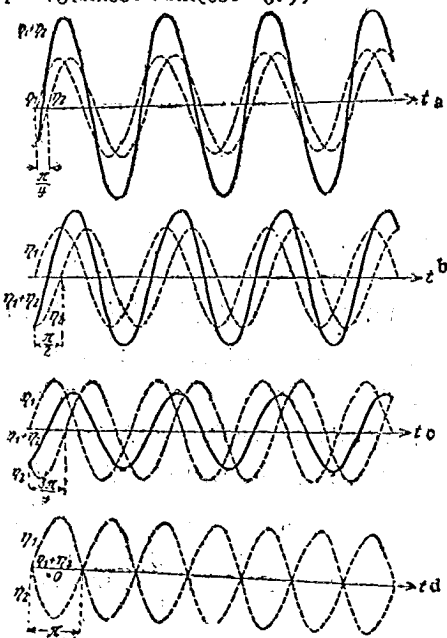
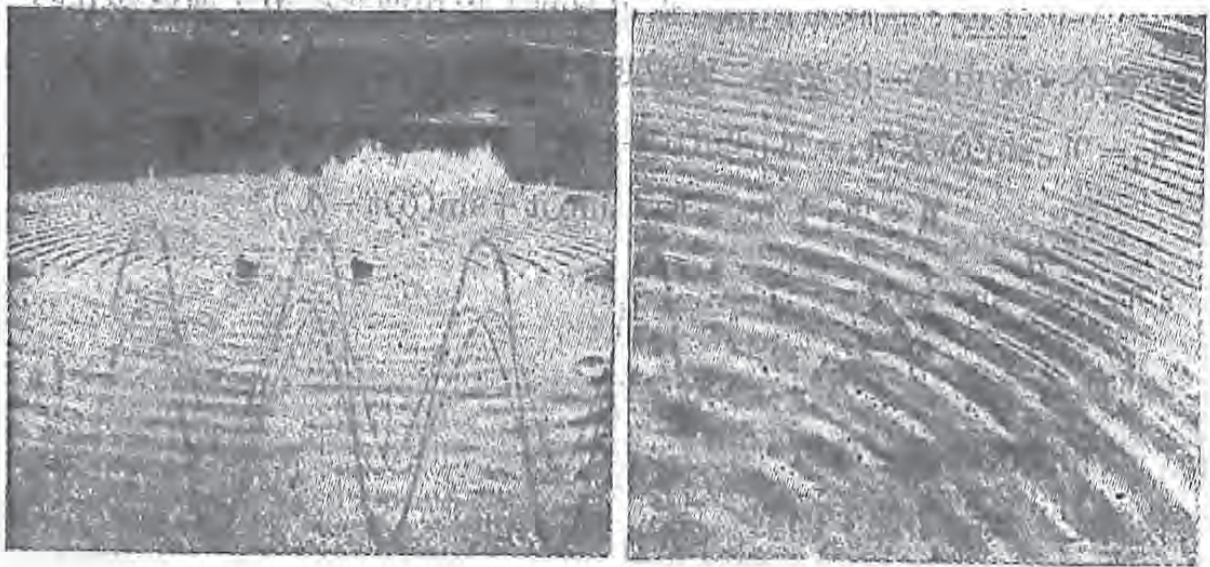


圖 123. 波之干涉 (相差 a) $\pi/4$, b) $\pi/2$, c) $3\pi/4$, d) π 。

成結果，當使振動加強一倍。反之，如相相反，則振動減衰或竟為零（圖 128）。在中間情形中，其結果在此兩極限結果之間。波雖前進不已，兩波合成結果等於零之各點，恆靜止不動，曰節（或節點）；反之，合成結果加強一倍之各點，曰腹。凡如此類由兩波合成之現象，曰干涉（Interferenz; interference）。兩波干涉在一現象中之證明，恆為關於週期性振動之一無疑義的證據。

第 129 圖示兩組水波之干涉，係由兩週期性動體上下運動而生。在波場內可分明察見最大及最小運動。



a

b

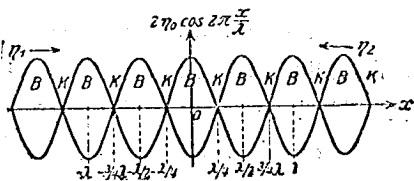
圖 129. 水波之干涉。（依 Grimsehl, 右圖由擴大左圖一部分而成。）

127. 定波。假定等振數等振幅之兩平面波沿反對方向互相會合。在 $x=t=0$ 之處，即當 $t=0$ 時，相差應等於零，故兩者之方程式為 $\eta_1 = \eta_2 = \eta_0 \sin \omega t$ 。今設想 x 遠處之一點（圖 130）。據 § 123，在此點向右進行之波之方程式為 $\eta_1 = \eta_0 \sin \omega(t - x/c)$ ，而向左進行之波之方程式為 $\eta_2 = \eta_0 \sin \omega(t + x/c)$ 。在此點之合成擾動故為

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \eta_2 = \eta_0 \left(\sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \sin \omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right) \\ &= 2 \eta_0 \cos \omega \frac{x}{c} \sin \omega t = 2 \eta_0 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t. \end{aligned}$$

與時間無關之 $2 \eta_0 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 一項，故可視為在 x 點之振幅。由此可知

振幅與振動之變位 x 有週期性關係。其值當 $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$ 或 $x = \pm \frac{\lambda}{4}$ ，
 $\pm \frac{3\lambda}{4}$ 等或 $= \pm \frac{2n+1}{4}\lambda$ 時為零，當 $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1$ ，或 $x = \pm \frac{n}{2}\lambda$ 時（
 其中 n 表示一整數）最大。振動零處為節之所在，最大處為腹之所在。
 依兩波進行之方向，節與腹互相交隔。在節點之間雖仍作同樣振動，
 但波形並不見其移動。此現象謂之定波(stehende Welle; stationary
 wave)，兩節或兩腹之距離等於一半之波長。故由量出其間之距離，可
 確定波長 λ ； λ 又如已知振數 ν ，則又可依(5)方程式計算傳播速度 c 。
 例如在兩種介質之境界面（如牆壁）反射之波與入射波相干涉，即成爲定波。



凡在各介質內之振動（例如樂器之絃之振動）其山向境界面進行之波與在境界面上回折之波互相干涉而起者，皆可視爲定波（參見133）。

圖130. 定波。在此圖中，兩正弦曲線並不表示 η_1 及 η_2 ，但表示一種值，在此值之間， $\eta_1 + \eta_2 = \eta$ 在 x 線上之各點往返振動。

128. 拍。其他一干涉現象，曰拍 (Schwebung; beat)。拍當振幅及振數(ν_1 及 ν_2)相差無多時，即 $\nu_1 - \nu_2$

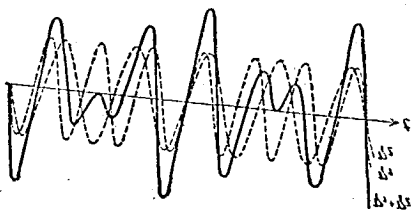


圖131. 拍。 $\nu_1 : \nu_2 = 6 : 5$ 。

ν_2 與 ν_1 及 ν_2 相較頗小之兩波在一點會合時發生。經兩振動激發之合成振動，當兩振動之振幅 η_0 相等時有如次之方程式：

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \eta_0 \left(\sin 2\pi \nu_1 t + \sin 2\pi \nu_2 t \right) = 2 \eta_0 \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \sin 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t \quad (21)$$

因假定 $\nu_1 - \nu_2$ 極小，故 $\cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t$ 因數變動極緩。爲解釋此過程，可認定此振動有振數 $\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ (ν_1 及 ν_2 二者幾乎全相等) 及一依

週期性緩慢變動之振幅 $\eta \cos 2\pi \frac{V_1 - V_2}{2} t$, 第131圖示一是種拍之變動, 但其中為清楚起見, 關於 $V_1; V_2$ 之比例故意特別大表出。

都卜勒效應。假定一振動體在一介質內以速度 v 運動。由此體發出一波 $\eta = \eta_0 \sin 2\pi \nu t$ 。今問其由一固定點開始運動時, 在該點發生之振動。

當 $t=0$ 時, 以速度 v 運動之振動體係在 A。靜止觀測者在 B 點 (圖132a)

• 物體振動之期間 $\tau = 1/\nu$ 。在 $t=0$ 時由物體發出一最大振動 ($\eta = \eta_0$)。

若由此發出之波以速度 c 傳播, 此最大振動於時間 $t_1 = a/c$ 之後到達觀測者

• 第二最大波於時間 τ 之後發出, 當時動體已移至 C 點。其與觀測者之距離已自 $v\tau$ 增至 $b = a + v\tau$ 。故振動達觀察者所須之時間等於 b/c , 即當時之時間 $t_2 = \tau + b/c$ 。依觀測者言之, 此兩最大振動相隔之時間不能為 τ , 但為 $\tau' = t_2 - t_1$ 。藉上列各方程式不難求得 $\tau' = \tau(1 + v/c)$ 。準此, 由動體發出之波對於靜止觀測者有一較大之振動期間, 因而一較小之振數 $\nu' = 1/\tau'$, 即

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}} \quad (22a)$$

若振動體不離觀測者而去, 但向之而進, 則須倒轉其速度之符號, 此時 $\nu' = \nu/(1 - v/c)$, 此現象在聲學 (§ 146) 及光學 (§ 451) 中至為重要, 係依發明者之名命名, 曰都卜勒效應 (Doppler-Effekt; Doppler's effect)。

以上係就觀測者靜止, 僅振動體運動時之關係而言; 反之, 若振動體靜止, 而觀測者以一定之速度 v 背此而退去, 則亦易推知其結果 (圖132b)。假定振動體靜止在 A 點。在時間 $t=0$ 時, 由此發出最大振動而達觀測者於與 A 相隔 a 遠之 B 點。當時之時間 $t_1 = a/c$ 。第二最大振動與第一波相隔 τ 時間之後發出, 而達觀測者於 C 點, 觀測者故已背振

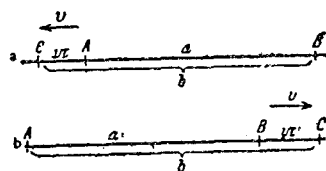


圖132. 示都卜勒效應之導出。a 振動源運動, 觀察者靜止。b 振動源靜止, 觀察者運動。

動體退去BC之距離。此距離等於 $v\tau'$ ，其中 τ' 表兩最大振動相隔之時間。其與振動體相隔之距離全為 $b = a + v\tau'$ 。第二最大振動到達觀測者之時間 t_2 可依二種方法計算之。此時間或等於時間 t_1 ，加上觀測者自B進至C點所須之時間，故 $t_2 = t_1 + \tau'$ ，或等於第一波及二波兩者相隔之時間 τ ，加上振波自A到達C點所須之時間，故 $t_2 = \tau + b/c$ 。依據上述之關係不難由簡單計算得 $\tau' = \tau / (1 - v/c)$ 及下列關於振數之公式：

$$V' = V \left(1 - \frac{v}{c} \right). \quad (22b)$$

若觀測者向振動體前進，則得 $V' = V(1 + v/c)$ 。

在上述兩情形中，視振動體運動，觀測者靜止或反是，測得不同之振數。但在一切重要機械式情形中， v 與 c 相較極小，即波之傳播速度大而振動體之運動速度小，在事實上兩者之振數幾乎不租上下。因 v/c 之值不大，故在第一情形中亦可書作 $\tau' = \tau(1 + v/c)$ ， $V' = V(1 - v/c)$ ，而此與關於第二情形之方程式相等。（參考§532。）

130. 波中能量之傳遞·距離定律。在一介質內之振源，當使介質之質點運動時，故即在介質內發生振波時，犧牲其固有振動能量而作功。但其傳遞於一介質之一質點之能量——除其一部分由摩擦而變熱量——復由該質點傳遞於次一質點。故能量隨波在介質內移動·波傳遞能量自近及遠。

今假定由球面波傳遞能量且以在介質內並無能量損失。試以擾動源為中心作分別以 r_1 及 r_2 為半徑之兩個圓（圖133），命 E 表在一秒間由擾動源發出之能量，則通過第一球面每方厘米之能量 $J_1 = E/4\pi r_1^2$ ，通過第二球面每平方厘米之能量 $J_2 = E/4\pi r_2^2$ 。是謂能量流在 r_1 及 r_2 遠處之密度，故此關係

$$J_1 : J_2 = 1/r_1^2 : 1/r_2^2 = r_2^2 : r_1^2 \quad (23)$$

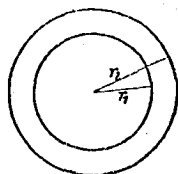


圖133. 示波內之能量傳遞。

曰距離定律 (Entfernungsgesetz)。能量流密度 J 依與擾動中心之距離之平方而減少。然此定律惟對於在介質內能自由傳播之波有效。

131. 在兩介質境界面上之過程。當波達兩不同介質之境界面時

，可發生種種現象。其一部分不進入第二介質中，但在面上折回（反射），其餘部分進入第二介質中，但往往同時變更其前進方向，而在境界面上屈折（折射）。故在兩介質之境界面上，其能量分成兩部分，但兩者間之比例殊不一定，有時反射部分遠較折射部分為大，有時則反是。

132. 反射。關於波線之反射適用下列定律：反射線係在入射線與入射法線所成之平面內並與入射法線成一反射角 α ，其大小與入射線與入射法線所成之入射角相等（圖134）。入射法線為在波線之反射點與反射面垂直之線。

為便於以下討論折射時之用，今舉示夫累涅爾之作圖法（Konstruktion von Fresnel; Fresnel's construction）以表示振波反射之情形。命AB及CD表一平面波之兩平行線，其投在HJ平面上時成一入射角 $\alpha = \angle ABF$ （圖135）。當AB線內之波面（§123）達此平面於B點時，在CD線內之波面僅達E點，故尚須在CD線內進行ED之距離始可達HJ之平面。在此之際，已達B點之第一線取新方向進行，而當第二線達D點之際，已進至r遠之一點，r之長係與ED相等，故此點係在以B為中心r為半徑之圓上。今據夫累涅爾，第一線反射之後，取BG之新方向而G必為由D達於圓上之切線之接觸點。DG遂成為反射平面波之波面。今 $BD = BD$, $BG = ED$, $\angle BGD = \angle BED = 90^\circ$, 因而 $\angle BGD = \angle BED$, 故 $\angle GBD = \angle EDB$ 。據是，則 $\angle FBG = \angle EDK = \angle ABF = \alpha$

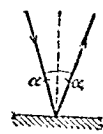


圖134. 示反射定律。

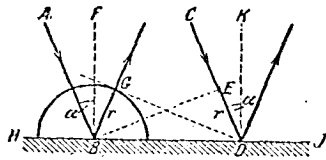


圖135. 夫累涅爾之反射線作圖法。

換言之，反射角等於入射角，兩者均在同一面內，是為波之反射定律（Reflexionsgesetz;

law of reflection）。此定律對於同一平面內之各線均有效。

因介質疎密不同，故由境界面反射之波，其相亦異。就橫波而言，由密入疎之波，其反射波之相與入射波之相連續，故前者為後者之

倒像。此兩波會合時成爲定波 (§ 127), 其境界點成腹。由疎入密之波, 其反射波之相以 π 入滯在入射波之相之後, 故前者爲後者之正像, 其境界點成節。用繩在一端發送橫波, 若繩之他端固定者, 在繩之固定端之反射波之相爲入射波之相之倒像, 反之, 若自由者, 在自由端之反射波之相爲入射波之相之正像。以故繩中波式可視爲正。

反之兩波合成。

又就縱波言之, 波由密入疎時, 或在固定點, 稀疎反射爲稀疎, 稠密反射爲稠密; 由疎入密時, 或在自由端, 稀疎反射爲稠密, 稠密反射爲稀疎。

133. 折射。波線自一介質(I)進入第二介質(II)後所取之新方向, 據夫累涅爾可依與以上所示者完全相類似之作圖法求得之(圖136)。命AB及CD表屬一平面波之兩波線, 其達I及II兩介質之HJ境界面時, 各成一入射角 α 。當AB線到達B之際, CD線僅到達E點, 恰如 § 132中同。今命 c_1 表波在介質I中之傳播速度, c_2 表在介質II中之速度。於是當波線CD在介質I中自E到達D點之際, 波線AB已在介質II中前進r之距離。依兩者之速度, 其進行之距離有下列之關係: $r:ED = c_2:c_1$ 。如已知兩者之速度或其比例, 則可求得r之距離。此後正如 § 132中以B爲中心, r爲半徑, 在介質II中作一半圓並由D引一切線於此圓上, 命其接觸點爲G, 於是BG表波線在介質II中之方向。至是得 $BD = ED/\sin \varphi_1$ 及 $BD = BG/\sin \varphi_2$ 。又 $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$ 。

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{ED}{BG} = \frac{c_1}{c_2} = n_{12} \quad (24)$$

式中之 n_{12} 爲一常數, 其值由 c_1 及 c_2 , 即兩種介質之性質而定, 與入射角之大小無關。此常數曰折射率 (Brechungsindex, Brechungscoefficient; index of refraction)。換言之, 入射線與折射線恆在同一平面, 入射角之正弦與折射角之正弦之比等於一常數, 其值由介質而定, 與入射角之大小無關。此關係曰波之折射定律 (Brechungsgesetz; law of refraction)。

如 $c_1 > c_2$, 則第一介質較第二介質爲疎, 折射線折向入射法線之一

邊 ($\alpha > \beta$, 圖136a); 反之, 如 $c_1 < c_2$, 則第一介質較第二介質為密, 折射線滑入射法線而離開 ($\alpha < \beta$, 圖136b). 此項疎密之分, 純就光學性質而言, 與密度不同, 須注意之。(關於全反射見§111.)

同一波前之各部分因介質疎密不同, 其傳播速度亦不一致, 因而

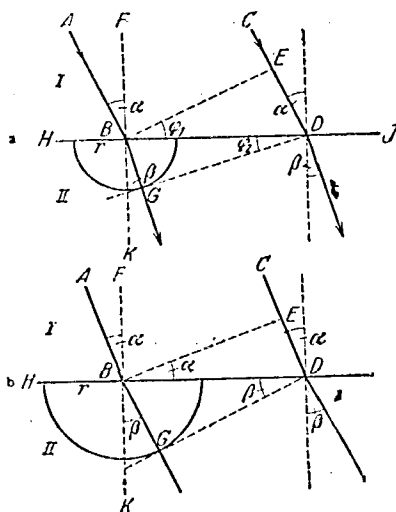


圖136. 夫涅涅之折射線作圖法。
a. $c_1 < c_2$, b. $c_1 > c_2$.

波之進行方向立即改變, 此即波線折射之原因也。波線之折射實因傳播速度中途改變之故。水波之速與水之深度成比例, 故當水波行近岸旁時, 其波前常逐漸屈折, 終至與岸線平行。

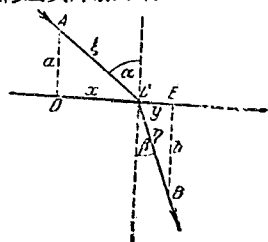


圖137. 由弗爾瑪脫原理導出折射定律。

134. 弗爾瑪脫原理。據弗爾瑪脫之原理(Fermatsches Prinzip; Fermat's principle), 一波進行兩點間之路程恆須歷極長或極短之時間。在大多數情形中, 歷最短時間, 間或須歷最長時間。當波進入另一介質時, 此就時間最短路程通常並非為幾何學的最短路程, 故並非為在兩點間之直線。試以折射之情形為例。設想一波線自一介質折入第二介質中。波在第一介質中之速度假定為 c_1 在第二介質中之速度為 c_2 。今在線上任意選出兩介質中各一點, 例如 A 及 B 兩點 (圖137), 並求波線自 A 點進至 B 點所須之時間。ACB 路程在境界面上之距離為 DE, 其由 C 點分為 x 及 y 兩段。

波由 A 點以達 B 點所須之時間 t 可由下列方程式求出之 (見圖

137) ,

$$t = \frac{s}{c_1} + \frac{\eta}{c_2} = \frac{1}{c_1} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{c_2} \sqrt{y^2 + b^2} .$$

此時間既應有最小值 (或最大值), 故必 $\delta t = \frac{\delta t}{\delta x} \delta x + \frac{\delta t}{\delta y} \delta y = 0$,

故

$$\delta t = \frac{1}{c_1} \frac{x \delta x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{1}{c_2} \frac{y \delta y}{\sqrt{y^2 + b^2}} = 0 .$$

今因 $x + y = DE = \text{常數}$, $\delta x + \delta y = 0$, 故 $\delta y = -\delta x$,

$$\frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{c_2} \frac{y}{\sqrt{y^2 + b^2}} \text{ 或 } \frac{1}{c_1} \frac{x}{s} = \frac{1}{c_2} \frac{y}{\eta}$$

或易由圖137讀出

$$\frac{1}{c_1} \sin \alpha = \frac{1}{c_2} \sin \beta .$$

此結果與方程式24相符合。

135. 波之吸收 . 波前進之際, 其含有之能量 E 之一部分變為別種能量例如熱量而損失, 此現象謂之波之吸收 (Absorption der Welle; absorption of waves). 關於一平面簡諧波因吸收而在一微短路程 dx 上之能量損失 dE 適用下列方程式

$$dE = -E \alpha dx .$$

E 表在 x 點尚含有之能量, α 即所謂吸收係數. 此係數概視波之振數而定. 解上列方程式得

$$E = E_0 e^{-\alpha x} , \quad (25)$$

式中 E_0 表在 $x=0$ 點含有之能量。

136. 惠更斯原理 . 命 AB (圖138) 表一球面波之一部分波面之橫斷面. 惠更斯 (Huygens 1690) 創一種原理, 以為凡在空間與波相接觸之各點均可看作一新波源, 各自發出一同種之素元波 (或曰小波). 是種素元波依各方向傳播, 除通至波源之一方向外, 其



圖138. 示惠更斯原理。

餘均因互相干涉而消滅。如欲求波面經過 t 時間後之位置，則須以第一波面之各點為中心，以 $r=ct$ 為半徑（ c =波之速度），作小圓若干。次與此等小圓相正切，作一曲面如 CD 。此面即在 t 時間之後新得之波面，與逕由 AB 發出而至 CD 者相同。換言之，波自由傳播時，此種新波面仍為一球面，而不經阻礙物擾動時，波依直線進行。

137. 繞射。據以上所述，從波面各點發出之素元波除依通至波源之一方向外，其餘各方向均因干涉而消滅，此為波依直線傳播之條件。但若經由一分界面——如擋在波前遮斷波之一部分之阻礙物——阻止此種素元波一部分之進入，則由干涉而致之消滅不能完全。此時波之直進為之擾動。此現象曰繞射 (Beugung; diffraction)。

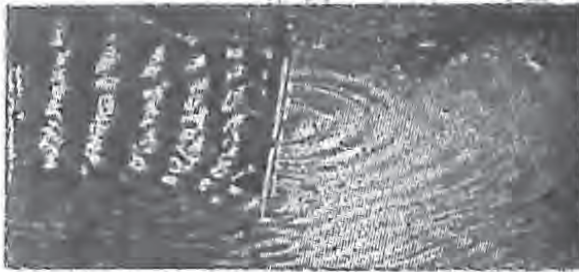


圖139. 一水波在細隙之繞射。

繞射以在水波上察見者為佳。如圖139所示，在水中置一帶細隙之板，一平面水波向此板進行時，波遇板反射，但在有細隙之處，波穿過此隙，並在他側以細隙為中心發生圓形之波，恰如此細隙為原來之擾動中心。第139圖又示波反射時定波 (§127) 之生成 (左側)。關於繞射之其他情形，另詳光學篇。

第十三章 聲 學

138. 聲音之傳播。所謂聲音，通常分為兩義，一屬於主觀的，指由聽官所得之感覺而言，是為生理的聲音。一屬於客觀的，指引起聽感覺之原因而言，是為物理的聲音。物理的聲音發源於物體之振動，使周圍介質（例如空氣）之密度變化而成一種疎密波，後者傳播至耳膜，始感其聲音。作此項振動之物體，曰發音體。研究聲音之學科，曰聲學 (Akustik; acoustics)。

聲波之傳播既可在氣體中進行，而氣體僅能傳遞稀密相間之擾動，換言之，僅能傳遞壓力，不能傳遞切力，故聲波必為縱波。傳播聲

音之介質，除氣體外，固體與液體亦能傳播聲音 (§125)。

聲音之傳播速度 c 可依方程式 17 及 18, § 125 計算。命 p_0 及 ρ_0 各表溫度為零時之氣壓及密度。在空氣中溫度為 0°C 時，

$$c_0 = \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{1.013 \times 10^5}{0.00129}} = 331.5 \text{ 米/秒。}$$

欲求傳播速度與溫度之關係，命 p 及 ρ 表溫度為 t 時之氣壓及溫度，如是，則依方程式 11, § 162，

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} (1 + \alpha t),$$

式中 α 表氣體之壓力係數。以此式代入上式中，得

$$c_t = \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\rho_0} (1 + \alpha t)} = c_0 \sqrt{(1 + \alpha t)}$$

空氣溫度為 20°C 時，傳播速度故為

$$c_x = c_0 \sqrt{(1 + \alpha t)} = 331.5 \sqrt{(1 + 0.00366 \times 20)} = 340 \text{ 米/秒。}$$

由此觀之，聲音在空氣中傳播之速度純視氣體之溫度而定，溫度愈高，聲音傳播愈速。又如空氣中含有水分時，其效力亦使音速略許增加，溫度在攝氏 30 度，濕度為 100 之空氣，其速度因水蒸氣之關係，約增加千分之八，即約增加 3 每秒米。

在液體及固體中之音速，係依方程式 17, § 125 計算，即

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

在 4°C 時，水之恆溫彈性係數 E 與絕熱彈性係數相等，約為 2.03×10^{10} ，故當時在水中之音速約為

$$c = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{2.03 \times 10^{10}}{1}} = 1430 \text{ 米/秒，}$$

即約為空氣中之四倍。

用同式以計算聲波在棒或張緊絃中之速度時，須用楊氏彈性係數 M 以代體積彈性係數 E 。即

$$c = \sqrt{\frac{M}{\rho}}$$

又在無限延長之固體中，

$$c = \sqrt{\frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}} \sqrt{\frac{M}{\rho}}$$

式中 σ 表帕松比 (§ 81)。

就一般而言，聲音在金屬中之傳播速度約在 5000 米/秒左右，故猶較水中為大。

以上關於聲波在流體及固體中之速度之論述，唯聲波中壓力變動不大時方有效，換言之，須聲之強度不超出一定限度。若壓力變動極大，如在轟烈之炸爆聲中，則傳播速度常較以上規定者遠大。聲波自由傳播時，聲依直線進行；但若中途遇阻礙物，則因聲波繞射關係 (§ 137)，其一部分可達阻礙物之後。（在轉角上能聽側邊之聲者，即由於此理。）

測驗空氣中之音速，可在距離已知之兩點行之。例如在甲點鳴炮，在乙點觀測炮火出現時與聞到炮聲時之時間。命 x 表兩點之距離， t 表所須之時間，則速度 $c = x/t$ 。又由利用一爆炸聲與壁前回音聲所須之時間亦可測出聲之速度。比較準確之方法係由量出一聲波之振數及波長，由此可依 $c = \lambda \nu$ (§ 124) 之方程式計算聲之速度。此方法唯對於有切實波長之聲波可用，換言之，祇對於週期性聲波適用。

139. 噪音，單音及複音。音分兩種，曰噪音(Geräusch; noise)與樂音(musikalischer Klang; musical sound)。樂音有單音或純音(Ton; simple tone or pure tone)及複音(Klang; compound tone)之別。樂音有一定之高低，而為發音體作週期性振動之結果，其音波故整齊，如琴瑟簫笛之音屬之。噪音如車行之音，風吹樹林之音，毫無一定之高低，由於發音體之振動並無一定之規律，故其音波亦不整齊。噪音之振動，既極複雜，且不重要，故聲學所研究者，概限於樂音。

各種樂器所生之音，其波式種種不同，即其曲線多非完全之正弦曲線，惟此種有週期性之曲線可分析為多數正弦曲線，換言之，即任何樂器所生之音均可分析為若干呈正弦曲線之單音。故單音有純週期特性而可用簡諧運動之方程式 $\eta = \eta_0 \sin 2\pi \nu t$ 表出，其音亦特別清朗。複音由振數不等之數種單音混合而成，其中頻率最低振幅最大者

，曰基音 (Grundton; fundamental tone, 見基本振動, §127), 頻率適爲基音頻率之整倍數者, 曰諧音 (Oberton; harmonics; 參見諧振動)。振數等於基音之二倍者, 曰第一諧音, 振數等於基音之三倍者, 曰第二諧音, 餘類推。

一樂器之音 (例如一大鐘之鐘聲), 細察之, 實含有高低不同之多數音, 其中最低之音即基音, 餘爲該樂器之陪音 (Oberton; overtone)。一樂器之陪音或爲其基音之諧音 (即其頻率爲基音頻率之整數倍) 或不然, 故基音音低, 陪音音高 (§140)。諧音係就一音而言, 而不問其如何發生, 陪音則就某一定樂器之音而言, 故兩者不同。

若干音強約等之單音或複音同時之鳴奏, 謂之一和音 (Akkord; accord), 尤其由若干諧音發生者, 其引起之感覺, 特別愉快。

140. 音強, 音調, 音品, 振數, 波長。音之強弱曰音強 (Tonstärke; sound intensity), 由振幅之大小而定。就發音體而言, 振幅小者, 其音弱, 振幅大者, 其音強。音之高低, 曰音調 (Tonhöhe; pitch), 由振數 (或曰頻率; Schwingungszahl; number of vibrations) 之多寡而定。振數多者音高, 少者音低。兩音之強弱高低雖相同, 但感之於耳或似完全不同, 例如 C 音發自鋼琴者與發自風琴者頗易區別。此差異係屬音品 (Qualität; quality) 上之差異。音品係與波式有關, 波式不同之波, 其音品必異。

欲測定音之振數, 可用圖 140 之驗音器 (Siren; siren)。此器之要部爲一金屬圓盤, 沿圓周有等距離之小孔, 全盤可在一軸之周圍高速轉動。用時孔內噴入氣流, 則可聞一樂音, 而盤上孔數及盤之轉數愈多時, 音亦愈高。在精製之驗音器中, 空氣經孔道噴出後衝動

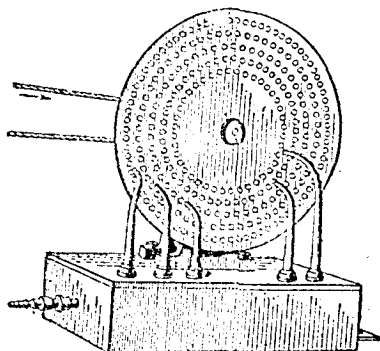


圖140. 驗音器。

一轉動計，後者指出盤之轉數。孔通氣流時，其上之空氣收縮，塞則膨脹，一縮一脹，成爲一次振動。如孔數爲 n ，盤在單位時間內之轉數爲 N ，則發出之音之振數等於 nN 。調節送氣量，可使此音與欲測驗之音同高，則由指針可讀出其振數。最低之人聲，其振數爲每秒40左右，最高者在1000附近。又年青人之耳能聽見之音，最低者振數爲每秒16，此音在大風琴中有之，最高者在20000附近，但隨人之年齡而銳減。音樂中所用之音，其振數在16至4000之間。

一單音之波長 (Wellenlänge; wave length) 係由(16)方程式，§ 124決定，等於 c/v ，其中 v 表其在空氣中之振數，例如人耳能聞之音之波長在30米及2米厘之間。

141. 聲波之反射。聲波服從反射定律 (§ 132)，立於高大建築物之平面牆壁之前，除直接聞及自己所發之音外，更聞得由反射而回之聲 (回聲 Echo; echo)。若反射面極不規則，則反射處不止一點，發生若干之聲波，前後反射以入於耳，故縱使聞及，亦不清楚。深山中所謂“空谷回聲”，卽此種連續之反射聲也。空氣有疎密層之分，音波傳至此等分界處，亦起相當之反射。晝間因各層受熱不同，反射次數頗多，反難覺察；夜間氣溫大致一樣，反射次數較少，故易聞及。夜間可聞遠處傳來之音，卽因此理。又音之傳播，霧天較晴天略遠，其理亦同。室內之聞聽 (Hörsamkeit) 視其內之反射狀況而異。毛氈及織物反射聲音不良，故挫抑各種噪音及樂音。在高大建築物 (教堂，講堂) 內，牆壁，天花板，地板等反射聲音常強。在內聽者所收及之聲音，不僅爲音源所發出之聲，其中亦雜有反射之回音。此等往返反射之交混回聲互相干涉，固可使聲較爲強大，然因此之故，室內之聲，亦較爲混雜。如何免除交混回聲或利用之以資調和聲浪爲建築聲學中最重要但亦最難之一問題，其實際的解決，今日大致仍憑一般所得之經驗。欲切實預算一實際情形中之聲的狀況，今日尙不可能。

依據橢圓之幾何學特性，凡自橢圓 (例如橢圓形壁) 之焦點發出之聲經反射後均集中於其他一焦點，此事實當建秘密談話室時利用之。

利用聲音在海底之反射，由計算聲到達海底後復折回至海面所須之時間，可確定海之深度（回聲測深法）。海深儀即爲此原理之應用。據同一原理，爆炸聲在地內異性面上之反射，亦可用以測驗層之深度。

142. 聲波之干涉。爲證明聲波之干涉 (§ 126)，特利用由同一聲源發出之兩同種波。試於一平面壁 DE 之前，在 A 點置一音叉 (圖 141)，則在 C 點可聞出直接從聲源發出之聲及自壁折回之聲。此兩波進行路程之相差等於 $AB + BC - AC$ ，此相差若爲波長之整倍數 ($n\lambda$)，則波相恰一致，發生加強 (§ 126)。如兩途之差適爲半波長之一整倍奇數 ($(2n+1)\lambda/2$)，復合時，波相正相反對，發生干涉，在 C 無音可聞或雖有亦弱。故聲音發生加強或減衰全視 C 及聲源 A 之位置而定。若聲源固定在近壁之一點，觀測者移動，或聲源移動而人則靜止，聲音之強度皆變動，此實驗以用一具帶有較大音調之厚音叉爲宜，因波長較小時，聲音強弱之變動亦較顯著。

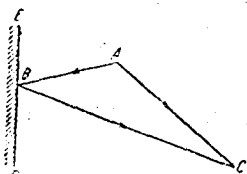


圖 141. 聲波之干涉。

爲觀察聲音之干涉又常用干涉管 Quinckesches Rohr; Quincke's tube; 圖 142)。其一曲管如 D 經一管套與左邊之曲管 C 相連，且能在套內自由

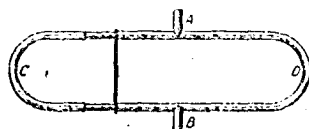


圖 142. 干涉管。

進退，使 A C B 之長得任意變更，於 A 之前放一聲源（例如一音叉）聲波由 A 傳入管內，分爲兩途，一沿 A C B，一沿 A D B 進行，至 B 復合爲一，如兩途之長適等於一半波長，復合時，波相正相反對，發生干涉，在 B 音最弱。如兩途之長適等於一波長，則波相恰一致，發生加強，在 B 可聞加強之音。故依此法可測驗一單音在空氣中之波長。

143. 定聲波。定聲波 (stehende Schallwellen; stationary sound waves; 見 § 127) 以在平面壁上反射而起者爲最佳，在聲源與壁之間發出之聲波與折回之反向波互相重疊，在是處可聞最強及最弱之音。

較良之一法，應用靈焰或曰感音焰(empfindliche Flamme; sensitive flame)。使高壓煤氣自玻璃管尖端噴出，用火燃之，且調節此管內之氣流，使火焰適達幾乎不穩定之狀態。當高聲波傳至管口時，焰即陷於不穩定狀態，隨聲波壓力之變更而伸縮。依此伸縮情形即可知聲波品質之大概。最強之聲係在壓力變動最強之處，即在空氣質點運動最弱之處，換言之，在壓腹(振節)。

兩最強聲音之距離，據 § 127，等於振動之半波長。如已知振數 n ，則可由此距離依方程式 16, § 124，測音速 c 。昆忒(Kundt)曾用此法以定氣體中之音速。圖 143 之 AB 表一桿，上附一栓，恰嵌入玻璃管內。由桿可使栓自由移進移出。以敷有松香之粗擦桿(桿在 AB 兩點固定，其與桿端之距離各等於桿長之 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{4}$ 等)，使之振動，發出縱波，則由調節管內之距離，在管內可有波生成。管內預佈輕木粉末或最好石英粉末，則於振動時，粉末均集在振節(壓腹)，如圖所示，成為昆忒圖形(Kundtsche Staubfiguren; Kundt's figures)。此管曰昆忒管。據兩節間之距離等於半波長之事實，可求出所發聲波之波長。假定 H 固定在 A 及 B 兩點，各與桿端相距桿長之 $\frac{1}{2}$ ，波在桿中之波長故等於桿長 L (參考 § 145)。命 λ 表管內氣體振動之波長， C 表波在桿中之速度， c' 表波在氣體內之速度， l 表管中兩波腹之距離，則因兩者之振數為

$$n, C = nl \quad \text{及} \quad c' = n\lambda$$

$$\frac{c'}{C} = \frac{\lambda}{L} = \frac{2l}{L}$$

圖 143. 昆忒管及昆忒圖形。

若假定已知空氣中之音速，則據此關係，可求出在桿中之音速及管內其他氣體中之音速。

144. 音拍或唸·合音。振數相差甚少之兩音，同時傳到時，則因干涉結果，成為時強時弱之音，曰音拍或唸(§ 128)。試取兩相同音叉，使一音叉之末端由加輕少許加重，則可使兩音叉之振動立即失調。在一秒間所聽之強弱變化之次數，稱曰一秒間內之唸數。如兩音每秒之振數相差過大，則其所生之唸數亦多。就一般言之，1秒間之唸數，等於兩者之振數差。人類之耳既不能在1秒間內辨別約16次之多

之變動，故當振數之差 $\nu_1 - \nu_2$ 大於每秒16時，在1秒間不能聞及此多數之唸，但當時至少在較低之音中，可直接辨別音調，而當差數極小時，注意若干時間內之唸數實為確定振數差之最切實的方法。當調合鋼琴及曼度林之同種絃時，故須注意不使有唸發生。

若振數 ν_1 及 ν_2 相差每秒在16唸以上之兩音同時到人之耳時，則耳不再能感唸，結果如無唸同。雖然，如兩音均相當強大，除可聞此兩原音外，尚可聞及振數等於兩原音振數之和 $(\nu_1 + \nu_2)$ 或其差 $(\nu_1 - \nu_2)$ 之其他單音。在適當狀況下，且可聞及振數由 $\nu = m\nu_1 \pm n\nu_2$ 之一般公式表出之其他音，其中 m 及 n 均表整數。此種音曰和音(Summationton; summation tone)或曰差音(Differenzton; difference tone) (沙居; Sorge, 1744)。和音及差音合稱曰合音(Kombinationton; combination tone)。振數等於 $\nu_1 - \nu_2$ 之差音，曰第一次差音。第一次差音對於兩原音又各有其差音，是為第二次差音，餘倣此。照前例推言之，振數為 $\nu_1 + \nu_2$ 者為第一次和音，餘倣此。

第一次之差音最易聽出。此音不在到達人耳之複音中，係在耳內發生，而為耳膜對於內外屈曲呈不等大彈性抵抗之結果。此種非對稱振動之膜，經振數不同之兩音激發時，發生強制振動。據算學分析，指出在此種強制振動中必含有上述之差振動及和振動。

合音，尤其第一次差音，例如當兩風琴管由同一風箱吹入氣流時，即發生。在此情形中，此差振動已在風箱內激成，以後伴兩原音同在發出之複音中。

145. 共鳴。氣柱之共鳴。灌音於一踏板提上之開鋼琴內，則復聞音從琴中發出，其故因頻率等大之絃發生共振 (§ 131)，致有音發出。此現象謂之共鳴(akustische Resonanz; acoustic resonance)。試於玻璃器內灌入此器之固有音，若音強大，則器激烈共振，時常破裂。若在一狹窄閉管內灌入與其中氣柱之基本振動相當之單音，則往往聞及更強大之同種音。將音叉從空箱取下，音即減低，再立於空箱上，又復轉強。不特空箱如此，即通常棹而亦有同樣性質，可使音加強。

• 因音叉振動時，其下面之支柱（傳音介質）作上下向之振動，由此引起箱面及箱內氣柱或掉而與之共振。因箱內之氣柱給出聲之能量於周圍之空氣比較音叉為速，故音加強。音叉一方面不絕的供給振動能量於共振箱，而自身則因受空氣較大振動之影響，其振動亦較速。其他各種絃樂器亦與此同樣，如僅於空中張一絃，其音甚低，但若張於空箱或板之上，而以一柱支持之，絃之振動即由此傳至箱面（或板面）及箱內之空氣，引起共振，且亦因其振器給出聲之能量較速，音亦加強。據經驗知彈絃樂器上之共振箱為對於樂器之全音階起聲的均勻效應之最佳者。此形式何故最佳，又塗漆何故有非常影響迄今仍未能滿意說明。古代琴匠僅憑經驗而發明此形式，其成功無使人驚嘆。

欲知聲波在氣管中進行之情形，設在一閉管之開端處（所謂自由端，§ 133），裝置一振動音叉，將音叉向下移動，將一稠密向管內輸送，則其行抵閉端之處（所謂固定端，§ 132），立被反射為一稠密而向管口進行，當其達管口之際，此稠密反射為一稀疎，若當時叉端適向上振動，則二者互相輔助而將一稀疎送入管內，其抵閉端時復反射為一稀疎，再向管口進行，唯抵管口則被反射為一稠密，此時若叉端適向下振動，則二者復相輔助將一稠密向管內輸送。由是觀之，若閉管之長短正與音叉之波長相適合，而能惹起共鳴，則當音叉完成半個振動時，一稠密及一稀疎須行兩倍於閉管長之路程。換言之，當此氣柱之長適為音叉波長之 $\frac{1}{4}$ 時，即引起共鳴。其時音叉之頻率等於氣柱基音之頻率。至於音叉與氣柱之各陪音共鳴之條件亦類是。以方程式表之，命音叉之週期為 T ，頻率為 ω ，閉管之長為 l ，音速為 c ，氣柱基音頻率為 ω' 。依上述關係，

$$\frac{T}{2} = \frac{2l}{c}$$

但 $\omega = \frac{1}{T}$ ，故發生共鳴時， $\omega = \frac{c}{4l} = \omega'$ 。

閉管與音叉共鳴之情形亦可仿此說明，唯應注意者，在開端疎則反射為密，密則反射為疎，故為引起音叉與閉管氣柱之基音之共鳴，音叉完成一週期時，一稠密或一稀疎須行兩倍於閉管長之路程。換

言之，當此氣柱之長適為音叉波長之半時，即引起共鳴。

欲表示閉管之共鳴現象，用一長度可變之氣柱，如圖144，由調節管內水而之高度，可任意變更水面上氣柱之長短。當聞及之音最強時，氣柱之長短必恰等於音叉波長之半。仿照此法，亦可使音叉與氣柱之陪音共鳴，唯所聞及之音不甚強大，且不易準確。如已知音叉之頻率，則由其振氣柱之長度，可求出聲波在管中之速度。為求聲波傳播之速度，此原理在實驗中常用之。

赫爾姆霍斯(Helmholtz)應用一組共鳴器(Resonator; resonator; 圖145)以分析複音中所含有之各種單音。此器通常為黃銅球殼，有大小兩孔，其大孔備接收傳來之音波，小孔備插入耳內，察其由共振而生之音。在器內空氣之固有音中，實際僅最低之音特別顯著，極易察知。故傳來音波如含有此器之最低音者，即起共鳴，否則不鳴。若依次用各共鳴器檢驗，即可析出各複音中之單音。赫氏山用此器，發見西文字母之每母音均伴高頻率陪音，子音則否，因其為噪音故也。

146. 關於聲之都卜勒效應。發音體所發之音雖有一定之振數，然與聽者之間若有相對運動，則因耳所受之振數比較發音體真正之振數或增或減，音調發生變化，是曰聲之都卜勒效應 (akustischer Doppler-Effekt; acoustic Doppler's effect; § 129)。火車汽笛之音，高低隨情形而異，車向聽者來時，其音比較車背聽者而去時為高。車輪之音及汽車之喇叭音亦然，且聲源運動愈速時，音調高低之差亦愈顯，即此種效應亦愈強。聲源靜止，聽者運動時，亦察見都卜勒效應，例如在進行中之火車上聞車站之鐘聲亦有相同之感。

汽車向一牆壁或一門進行並同時放喇叭時，都卜勒效應尤為顯著。音以因都卜勒效應而增多之振數向牆壁射去而復帶同多之振數由牆

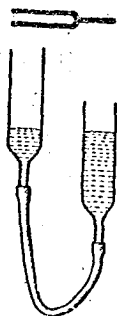


圖144. 氣柱之共鳴。

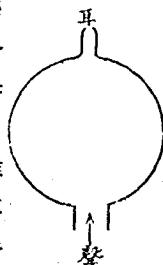


圖145. 赫爾姆霍斯共鳴器。

壁反射。坐在車內之人既與此反射之聲作對面運動，故復因都卜勒效應聞及振數又經增加之音，換言之，即音波愈高之音(§ 140)。

147. 音階。音樂中選出有一定振數之音，定為基音，以此音為基礎再選定音若干，其能與之諧和者，按其音調高低排成一列，是為音階(*musikalisches Tonleiter*; musical scale)。音階分兩種，一曰長音階(*Dur-Tonleiter*; major scale)，適於演奏豪壯快樂之曲，通常使用者即屬之。其他曰短音階(*Moll-Tonleiter*; minor scale)，適於演奏悲哀抑鬱之曲，不常使用。今先就長音階言之。其基音曰 c ，並為簡便起見，假定其振數為 1，其他同階中之音之振數均對於此音之振數而比。茲將長音階中所列之各音示之如次：

	基音	第二音	長第三音	第四音	第五音	長第六音	長第七音	第八音
律音	c	d	e	f	g	a	b	c'
讀法	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
對基音之音程	1	$9/8$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$5/3$	$15/8$	2
相鄰兩音之音程		$9/8$	$10/9$	$16/15$	$9/8$	$10/9$	$9/8$	$16/15$

表中之音，以 c 為始，以其第八音 c' 為終，共舍八音， c' 之振數為 c 之振數之兩倍，故稱 c 比 c' 高一均(讀韻; Oktave; octave)。若以有其他振數之任一音為基音，則又可得一均，由是而得之各均中之各音名稱不變，僅記號略異，音間振動比數亦仍舊。通常以 c 開始之均，曰小均，小均之下一均，曰大均，以英文之大寫字母表示，大均再下，曰低均，以大均記號右下角加一附號 I 為記，如 C_1, D_1 等。小均之上均，曰一均；再上一均，曰二均，又上曰三均，各用小寫字母在右肩上加附號 '，''，''' 或加 1, 2, 3 以表之，如 c', c'', c''' 或 c^1, c^2, c^3 等。

在 c 長音階中，任何兩音之振數之比皆在 1 與 2 之比之間。兩音振數之比數 $\nu_1 : \nu_2$ ，名曰音程(Interval; interval)。

在 c 短音階中，以短第三音 $e^b = 6/5$ 代 c 長音階中之長第三音。以短第六音 $a^b = 8/5$ 代長第六音，又以短第七音 $bb = 9/5$ 以代第七音。

c 短音階之第三音為其 $6/5$ 倍，在長音階中並無與此相當之音，僅

有c之音程與之相近而已。此兩者之間有下列之關係：

$$\frac{5}{4} = \frac{25}{24} \times \frac{6}{5}$$

其相差爲 $\frac{25}{24}$ ，名曰短半音程。即短音階中之第三音程較長音階中之第三音程低一低半音。任何音之音程降低一低半音時，曰其音之下音（附號b，加於記號之右肩上，如ab）。反之，音程昇高一低半音時，曰其音之高音（於記號右肩上加一#附號表出）。

一樂器，其音階與c長音階相當者，其音純而諧和，因而名c長音階曰自然諧音階或純音階。自c長音階表觀之，其中各音程之值，雖非相等，然祇有三個不同之值，即長全音程 $\frac{9}{8}=1.125$ ，短全音程 $\frac{10}{9}=1.111$ 及長半音程 $\frac{16}{15}=1.077$ 。兩長半音程之連續爲一個 $\frac{16}{15} \times \frac{16}{15} = \frac{256}{225} = 1.138$ 之音程，其值與長全音程及短全音程均不同。細察各音振數之比數可得下列之關係。

$$c:e:g = 1:\frac{5}{4}:\frac{3}{2} = 4:5:6$$

$$g;b:d' = \frac{3}{2}:\frac{15}{8}:\frac{18}{8} = 4:5:6$$

$$f:a:o' = \frac{4}{3}:\frac{5}{3}:2 = 4:5:6$$

三個或三個以上之樂音，同時鳴奏且能互相諧和者，曰三和音。據實驗，振數等於4:5:6之三音，最爲諧和悅耳，如是之三音，曰長三和音。又振數比等於10:12:15之三音亦能諧和，曰短三和音。在短音階中有c:e^b:g:g^b:d':f:a^b:o'三組短三和音。

爲適應各種樂器起見，有時將基音改變，但各音與基音振數之比仍須保持，例如以g爲基音時，do, re, mi, fa...各音程仍須不變，唯不復完全與g, a, b, c等相當。故每變一基音必須增加有新振數之音若干。

上述之事實，顯爲多數祇能有固定音之樂器，如鋼琴，風琴等所不取。在此等樂器中，須有12個音程，即以12音程爲一均。各單音不但在c長音階即在以別種音爲基音之音階中亦適用，例如在c長音階中之長第六音a同時爲g長音階之第二音，長音階之長第三音，c長音階

之第四音及d長音階之第五音，令 $g=3/2$ ，其第二音 $a=3/2 \times 9/8=27/16$ ， $f=4/3$ ，其長第三音 $a=4/3 \times 5/4=5/3$ ， $e=5/4$ ，其第四音 $a=5/4 \times 4/3=5/3$ ， $d=9/8$ ，其第五音 $a=9/8 \times 3/2=27/16$ 。由此可知e長音階中之a在f長音階及e長音階中合調，但在g長音階中及d長音階中不合調。其差為 $81/80$ （所謂畢泰哥拉斯小音程；Pythagoreisches Komma；pythagoras comma）。關於其他單音亦可同樣證明。

因有此種不便，今乃取折衷方法，即分一均為12音程（長半音程），換言之，自基音起有12等程之音（斯的法耳，Stüffel 1544；韋爾克瑪斯脫，Werkmeister 1700）。在此等程音階（temperierte Stimmung；equitempered scale）中所須增加之新音僅有5個，而全音階則由12個單音組成。如命 x 表公比率，則為迎合上述之條件， x^{12} 必等於2或 $x=2^{1/12}=1.059$ 。在此音階中，全數音程略許不純粹，唯因極微，在所奏之音樂中不能覺察。（全音程等於 $1.059^2=1.121$ 。）此音階比較純音階之優點在於以另一音為基音時，毋須有多數之新音，換言之，此音階便於變調，故近代之音樂，常以此音階為基礎或國際基音。

今日西洋音樂之音階係以 a^1 即所謂一均音（Kammerton；one-stringed tone）開始。此音有435之振數，稱曰絕對基音。

近年有人作實驗以決定可否樂音由採用 $\frac{1}{3}$ 音程（ $\sqrt[3]{2}$ ）及 $\frac{1}{4}$ 音程（ $\sqrt[4]{2}$ ）而擴充之。但至今日是種努力尚無重要成就。

為發生振數已知之單音，常用音叉（Stimmungabel；tuning fork）。

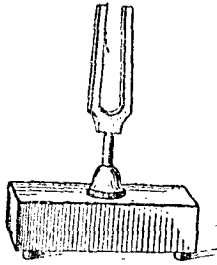


圖146. 音 叉。

此器發純粹而不伴陪音之音。其裝在共鳴箱上時，其內氣柱與音叉引起共鳴現象。

148. 諧和及不諧和。兩音相繼而發或同時並奏時，對於吾人聽感有愉快與不愉快之分。其能引起快感之兩音，曰諧和（Konsonanz；consonance）。引起不快之感者，曰不諧和（Dissonanz；dissonance）。由實驗知兩音之諧和與

否，完全由其音程而定，與振數不生關係。音程愈簡單，音愈諧和。振數比等於1:1時，最爲諧和，如是之音程，曰同音(Unisono; unisor)，其次爲八度音程(2/1)，更次爲五度音程(3/2)，四度音程(4/3)，三度音程5/4及六度音程($\frac{5}{3}$)，二度音程(9/8)及七度音程(15/8)不甚諧和，但仍爲樂音中重要之音程。同時並奏之兩音，其諧和之程度不但與振數間之比例且又與其間之相差有關。如相差過小，則發生唸 (§144) 耳感之不愉快。職是之故，對於在鋼琴樂譜下位置之三度音程，不成諧和。上述各種音程之名稱，由其在音階中之位置而來。

149. 絃樂器。在絃樂器(Saiteninstrumente; string instruments)中，利用緊張之腸絃或線之固有振動。絃或擦(如小提琴，胡琴等)或擊(鋼琴)或彈(如琵琶，曼度林等)。音色(兩音之差異，由介質密度變化不同而生。各種發音體發出之音雖音強及音調相等，仍各不相同，此差異歸之於音色)與絃之激發方法及位置頗有關係。由變更絃之緊張程度可使絃有規定之振數。在大多數絃樂器中，不但利用在兩固定絃柱間之絃(虛絃)之振動，且視指手在絃上之位置引起其他新音——由增減單音之振數。在彈絃樂器中，又用手指寬按在絃長 $1/2, 1/3, 1/4$ 等位置時所引起之音，稱曰箏箏音，其時絃全部振動，但帶1, 2, 3等振節。故虛絃之諧振動亦經利用(參考 § 119, 圖121)。

一般絃樂器之缺點在其振動絃有兩重使命，一方面須有適於發生可能的純音之振數，而一方面又須供給發聲所須之能。此二者同時滿意的實現實爲不可能的事。爲此在新近製出之涅恩斯特、培克斯坦大鋼琴(Nernst-Bechstein-Flügel; Nernst-Bechstein's grand piano)中，其絃祇須擔任第一種工作，換言之，其振動祇爲發生與其振動合調之感應電流 (§ 317)，而所須之發聲能量經由一電氣加強裝置 (§ 304) 及一揚聲器供給之。依此方法，除得其他益處外，又有樂音顯然改良之優點。

150. 風琴管、風琴。笛，簫或其他管狀之發音體，振動者爲管內之空氣。其物理學上之代表物即通常所稱之風琴(Orgel; organ)。

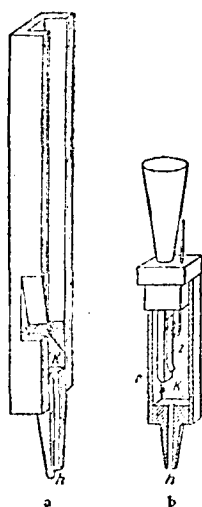


圖147. a 唇管, b 簧管。

風琴帶有兩種管(Pfeife; pipe):一曰唇管,一曰簧管。在唇管(圖147a)中,空氣由口吹入,經過細隙ss後與唇之銳稜衝擊。氣流衝過時,先發生一種噪音,故當時已引起各種可能的振動。管內之空氣,受此振動之影響,亦以固有振數作之共振,且對於氣流復起反作用,空氣之氣柱依固有振動之步調開始振動,其共鳴因而益強,引起較強之音。唇管有開閉兩種。據§120中之說明,可知管愈長則音愈低,即振數與管長為反比例。長度相等時,閉管之音比較開管之音低一均。換言之,閉管所發之音與管長二倍之開管之音相同,因兩者陪音之品種不同,其音色亦異。在簧管(圖147b)中,氣流通過一孔口,口上幾乎

經一金屬舌形彈簧片所蓋住,此片與欲發生之音合調。簧受氣流之影響而振動並隨其振動交換開閉孔口。氣流於是斷一通,引起氣柱之振動,發而為音。至口琴(Harmonika; harmonica)祇根據簧及由其引起之週期性空氣衝動之作用,其中並無氣柱之振動。

至所謂風琴之調音柱可使別種音與所選定之基音合奏。如是不但可大變音色且可在相當範圍內仿模其他樂器之音色。

我國通稱之風琴所謂簧風琴(Hermonium; harmonium)祇含有多數簧管,用手指按鍵,則空氣送入簧管之內,簧即振動,鍵閉則空氣停止入內。下部所裝者為風箱,足動則空氣即入於風箱之內,風箱中裝有彈簧,恆將箱內空氣壓出外面,按鍵時,此空氣由鍵下之口進入簧處,使振動發音。

151. 吹奏樂器及其他樂器。在吹奏樂器(Blasinstrumente; wind instruments)中,其氣柱經吹奏者口中之氣流激動。木質吹奏樂器之最重要者,如簫,笛,竽,洋管,法葛管等。金屬吹奏樂器之最

要者，如號角，小銅角，喇叭，薩克斯笛等。凡吹奏樂器除簫及笛爲唇管外，其餘均爲簧管。

木質吹奏樂器沿管有孔若干，由指開閉管孔，可變更氣柱實際之長度，故音調亦隨之而變，氣柱短時音高，長時音低。如激動氣柱使之振動之氣流之強度超過一定之限度，則當時無基音，但視吹入之氣流強度，發出陪音。振數較少之陪音相隔較遠，振數較多之陪音互相接近，終則可發出音階中全數之音。吹奏者之技藝在於吹入適當強度之氣流及因口之特殊位置引起正所欲有之陪音。

金屬吹奏樂器除可抽長之喇叭外，其餘均有瓣，而由後者將側道插入氣路內，可變更氣路之長度，因而可變更音調。在可抽長之喇叭中，氣路由直接抽管而延長。金屬吹奏樂器由吹入適當強度之氣流亦可引起種種之陪音。大都由金屬但間或亦用木質製出之薩克斯笛，因其吹奏方法與木質吹奏樂器尤其與霧栗相接近，占一特殊之地位。

其他樂器之發音或由於板（或平或曲）或棒之固有振動（如鐘，鉢，銅三角，木琴，銅鑼）或由於張緊之膜（特之膜）之振動（如鼓，鈴鼓等）。是種樂器有特殊之音色，由夾雜若干不諧和之陪音而起。

152. 耳。喉頭。耳之各部分（圖148）如下：

1. 外耳（耳道 G），經耳膜 T 封閉。耳之肌肉使進入之聲集中於岩骨 F 中之耳道內。

2. 中耳，經由歐氏管 E（爲平均氣壓）與鼻相通。在此部分內，有槌骨 H，砧骨 A 及鐮骨 St，其作

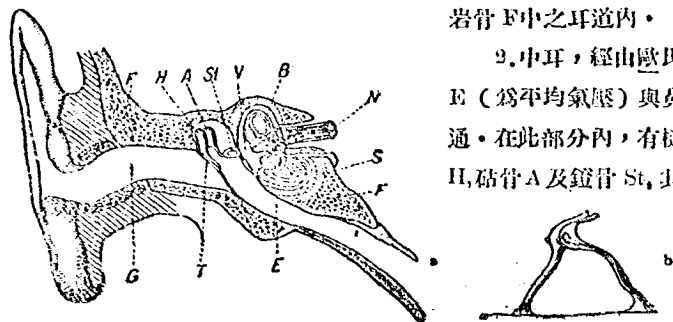


圖148. 人耳圖。a橫剖面，b好的聽器官之橫剖面。

用爲將耳膜由外激起之振動傳至隔開中耳及內耳之卵形小孔上。是種小骨有如一組槓桿之作用，將耳膜之振幅較大但較弱之振動變爲卵形小孔之振幅較小但較強之振動。

3. 內耳，此部分構造頗複雜，其在岩骨內成一孔道。其主要部分如內耳腔V，曲道B，內耳蝸及蝸牛殼形管S。其中曲道恐與聽聞無關，但爲一種平衡器官。（在多數動物中，此曲道亦與聽聞器官相連接。）內耳蝸恐爲成噪音之器官而蝸牛殼形管爲成單音之器官。此器官含有2曲轉，經一骨質螺旋片分爲兩半，其終端爲一圓形孔，後者經由一膜與中耳相隔絕。內耳全部滿含一液，所謂耳中迷路液，其作用爲將卵形孔之振動傳至內器官。沿蝸牛耳之曲轉伸出耳底膜 (Basilar membran; vasilar membrane)，此膜帶哥爾斯器管 (Cortisches Organ Cortis' organ)，後者由無數纖維所成 (圖148b)。此種纖維與人之聽階合調，而當耳遇有固有單音時，卽行振動 (赫爾姆霍斯之耳之共振理論; Resonanztheorie des Hörens, Helmholtz; Helmholtz, resonance theory of hearing, 1867)。此振動刺激神經N之末端，後者將刺激傳至腦內之聽中心，而在是處引起音感。

人聲之音調受喉頭 (Kehlkopf; larynx) 內聲帶之支配。聲帶爲張度 (固有頻率) 能變動之薄膜，由肺經氣管上來之氣流，激動聲帶，使之振動，此時聲帶中之作用恰如簧管中之簧，使氣流一密一疎而爲週期性變動，此變動使口內及周圍空處之空氣隨之共振，發而爲音。聲帶張緊，則音調高，弛緩，則音調低。

153. 語言及母音。子音 (Konsonant; consonant) 祇能於發音之初有其特殊之音，若延長，則發生變動。其由來頗爲複雜，在是處不便討論。至於母音 (Vokal; vowel)，其無論如何延長，均爲同一之音，其振動極有規律，彼此相差僅爲音色。各母音之所以有特性的音色者，因其複音內含有絕對振數完全一定之單音若干 (所謂成素; Formanten; 赫爾姆霍斯 1857, 董斗斯; Donders 1858)。是種單音並非由聲帶引起，但爲鼻孔及喉頭內振動之結果。若對踏板提起之鋼琴灌入

一母音，則因共振關係，由鋼琴內清晰同出同一母音，此即所以證明母音之音色爲振數完全一定之單音共振之問題。如於一單音內混入一母音之成素少許，則可予此單音以該母音之特性。一留聲片以不準確速度轉動時，因成素之音調不準確，母音之特性亦異。

第五篇 熱 學

第十四章 溫度及熱性

154. 溫度。吾人對於冷熱之觀念，係由皮膚及人體內若干部分之感覺而來，此感覺謂之熱感。起熱感之原因歸根於物體之一特性，此特性曰溫度 (Temperatur; temperature)。溫度較高之物體，其所引起之感覺較熱，而溫度較低之物體，其所引起之感覺較冷。熱與冷係相對的觀念。蓋此種感覺不但各人不同，即同一之人，亦因其境遇而感覺不同。例如嚴寒之日，自外歸家，一入溫度在 5°C 之室內，即感覺空氣溫暖，但歷時既久，則覺冰冷。就一般而言，凡物體其能暖和吾人之皮膚者，曰熱；反之，其冷却吾人之皮膚者，曰冷。冷熱既與目前及過去之境遇有關，故熱感不能用作測熱之標準，況且人體之皮膚不適區別極高度之冷熱，因皮膚感高度之冷熱，就會起泡。

由經驗知溫度不同之兩物體，若互相接觸，終則溫度相等。熱由高溫體移至相接觸之低溫體，久則兩者之溫度互相平衡 (§ 197)，故若已知一物體之溫度，則可推知其他一物體之溫度。測溫度之方法，尋常使溫度可直接讀出或經校準後可決定之儀器（溫度計）與欲測定其溫度之物體相密接。

155. 溫度標·絕對溫度。依物理方法探討一現象，其先決條件，為在施各種觀察及測定時，務須極度限制利用肉體之感覺。皮膚之熱感不適於溫度之較量。

冰融解時之溫度為 0° （零度），而純水在 760 毫米水銀之壓力下沸騰時之溫度為 100° 。此二者為百分標或攝氏標 (Celsiusskala; celsius

scale)之基點 (Fundamentalkunkte; fundamental points). 攝氏標爲今日最通用之溫度標 (Temperaturskala; thermometric scale). 爲免除誤會, 往日通用之他種溫度標今日已幾乎完全廢去. (列氏標 1730 : 其兩基點與攝氏標同, 但分爲80度. 華氏標 1714 : 以冰之融點等於 32° , 以沸水之沸點等於 212° , 今日唯英美兩國仍用之.) 0° 及 100° 間之間隔等分爲100 度之分法原係根據物體 (尤其氣體) 受熱膨脹之性質 (§ 160 及以下). 溫度昇降一度時, 一理想氣體容積增減之量等於其自 0° 昇至 100° 時之容積增加之量之 $1/100$. 準此以觀, 溫度標之百分度可推廣至 100° 以上或 0° 以下. 凡在 0° 以下之溫度係於數字之前加負符號表示之.

據以後說明之理由, 科學上往往不以冰之融解點爲溫度之零點, 但以攝氏標零點下 273° 之一點, 換言之, 即溫度等於 -273° (準數爲 -273.2°) 之點爲溫度之零點. 故冰之融解點在 $+273^{\circ}$, 水之沸點在 $+373^{\circ}$. 此溫度標曰絕對溫度標或愷氏溫度標 (Kelvinskala; Kelvin's scale). 依是而測定之溫度, 曰絕對溫度 (absolute Temperatur; absolute temperature, 愷氏 Kelvin 1854). 設命 t 表攝氏標溫度, T 表絕對標溫度, 則 $T = t + 273^{\circ}$. 爲區別起見, 常以 θ 表攝氏標之溫度, K 表愷氏標之溫度, 例如 $0^{\circ}\text{C} = 273^{\circ}\text{K}$, 其一般公式爲 $t^{\circ}\text{C} = (t + 273^{\circ})\text{K}$.

156. 熱之力學說. 物體之分子能量係與溫度有關, 此以前已述之矣. 就事實而言, 溫度不等之兩物體, 其物理的差別僅在溫度較高之物體之分子能量大於溫度較低之物體之分子能量. 熱之本性即根據此事實. 加熱於一物體不過使其分子之能量增加 [此觀念先經培根 (Bacon 1620) 之暗示, 次經台維 (Davy) 及倫福得 (Rumford 1812) 之證實, 最後經克羅尼塞 (Kronig 1856), 克勞修司 (Clausius 1857), 馬克士威 (Maxwell 1860) 及波爾茲曼 (Boltzmann 1866—1877) 之修正].

一分子可具有四種能量: 第一爲由其進動故即由其速度而起之動能, 第二爲由分子一轉動而起之轉動能, 第三爲分子成分之振動能,

第四爲位能。 *potential energy* 即 $heat = W$

在下面之討論中，自由度 (*Freiheitsgrad; degree of freedom*) 之觀念至關重要。若一物體之運動經任何條件而被限制在一線上，則謂僅有一度之運動自由度或曰僅有一自由度。若其運動被限在一面上，則謂有二自由度。若物體能自由依空間各方向運動，則謂其有三自由度。此三種情形之實例，如火車，因其祇能循軌道（線）運動，船舶，因其祇能在一面內移動，飛機，因其能依空間各方向進行。

物體之轉動亦可照樣說明。若其自由被阻止，而物體祇可繞某一定之軸轉動，此物體僅有一度轉動自由度。若同時可繞兩垂直軸但不能繞第三軸轉動，如是其轉動軸之位置係限在一平面內，則物體有二度轉動自由度。終則，若物體之轉動完全不受拘束，則有三度轉動自由度。分子之轉動，據 § 48，既屬自由轉動，其轉動軸勢必通過其重心。

若物體並非剛體，但其各部分仍能互相振動，則又有其他自由度。

據熱之力學說（亦名機械說或動力說；*mechanische Wärmetheorie; mechanical theory of heat*），凡時間的或空間的平均分配在一物質之各分子之各自由度上之動能，就在熱學的平衡狀態之物體之全體分子之各自由度言之，其多寡相等，並與絕對溫度爲比例。此重要定則，曰能之均分則 (*Äquipartitionsgesetz oder der Satz von der (durchschnittlichen) Gleichverteilung der Energie; law of equipartition of energy*)。其方程式爲

$$E = \frac{1}{2} kT \text{ 爾格。} \quad (1)$$

k 表一普遍常數，換言之，不依物體而變之常數，其數值爲

$$k = 1.371 \times 10^{-16} \text{ 爾格/度。}$$

此常數曰波爾茲曼常數 (*Boltzmannsche Konstante; Boltzmann's constant*)。在熱之輻射說中，此重要物理常數亦有關係，其測定方法不一

• 若一物體之分子有三自由度，但僅有動能，則物體在絕對溫度 T 時

，分配在各分子上之動能 $E = \frac{3}{2}kT$ 。

斯推尼 (Stern) 曾創一直接測分子速度之方法如下 (圖 149) 。A 表一細銀絲 (與圓面垂直張緊) ，可用電熾熱之。以此絲為軸，置兩圓筒，在內者含一與 A 平行之細縫 B。將全體置在一容器內並抽出器內之空氣使其中僅有極低之壓力。以後將此兩個圓筒緊緊，並令其以高速轉動。

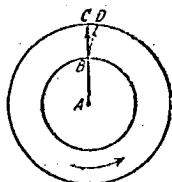


圖 149. 依斯推尼方法測定分子之速度。

銀絲熾熱時，發出單原子銀分子，即銀原子。其在空間既可完全自由運動，故就其動能而言，有三自由度。又據 (1) 方程式，其動能等於 $\frac{1}{2}mv^2 = 3 \times \frac{1}{2}kT$ ，式中 T 表銀絲之溫度 (m = 分子之質量)。圓筒靜止時，原子射線穿過細縫 B 向 C 移動，並在是處成細銀絲沉澱。以後若令圓筒轉動，使外面圓筒有 u 之速度，則當銀原子由 B 向 C 移動時，此圓筒進行 C D 之距離。(虛線表原子對於轉動圓筒之徑路。其實原子恆依直線進行。) 故對於靜止圓筒而言，沉澱物已移動 C D 距離。準此，則 $v:u = BC:CD$ 。由此關係可計算速度 v 。如是所得之速度頗與學說相符合。

絕對溫度之物理之有效性係以分子在絕對溫度標之零點時，其能量 (分子能量；Molekularenergie；molecular energy) 等於零解釋之。至是從物體不能再取熱能，是以不便設想有更低之溫度。

在 § 515 中，將見溫度極低時，能之均分則發生例外。今暫認為嚴格有效。

若認一理想氣體之分子為剛體，則此種分子必有 6 自由度，即對於進動及轉動各有 3 自由度。就事實而言，氣體分子並非為剛體，但為構造極複雜之物 (§ 502)。其成分間可起相對的振動，因此可再增加自由度之數。但依據以後解釋之理由，在下面提示之諸問題中，此種自由度及在某種情形下之轉動自由度或其一部分並不計及。轉動自由度在以下提示之情形中全無關係或僅一部分有關係，故可視為似有若無，而當分子對於一個或二個主慣量軸線 (§ 36) 之轉動慣量極小

時尤然。

在單原子分子中，三主慣量軸線均通過該原子之重心，原子質點與重心之距離非常之小（大體至多 10^{-12} 厘米，§ 493），因而原子中對於通過重心之各軸之轉動慣量亦極小，職是之故，吾人認單原子分子無轉動自由度但僅有三進動自由度。

在二原子分子中，三主慣量軸線之一通過二原子之重心，故據同一理由，是種分子之對於此種軸線之轉動慣量亦極小。其餘二主慣量軸線則與第一軸線垂直並通過二原子之公重心（§ 34），二原子之質量與該兩軸線之距離遠較與第一軸線之距離為大（大體 10^{-8} 厘米，§ 493），以是對於該兩軸線之轉動慣量亦遠大。故一個二原子分子可視為有二轉動自由度，即共有 5 自由度。在三個或以上之原子組成之分子中，對於主慣量軸線之轉動慣量均不甚小，以是此種分子有 6 自由度，即 3 進動自由度及 3 轉動自由度。

在多原子分子中之原子可互相振動，然據以後解釋之理由，此種振動在下列諸問題中均無關係。

按定義（§ 101），理想氣體以在分子間並無顯著位能為特性。其分子祇有動能及轉動能。總言之，在此種假定下，

一單原子氣體之分子有 $3+0=3$ 自由度，

一二原子氣體之分子有 $3+2=5$ 自由度，

其他氣體之分子有 $3+3=6$ 自由度。

據以上所述，今可證明亞佛加德羅定律（§ 95）之正常。一理想氣體之分子有三進動自由度。其動能故為 $mv^2/2=3kT/2$ 。若將其代入於表氣體壓力 p 之(6)方程式（§ 97）中，則得

$$p=nkT \text{ 或 } n=\frac{p}{kT}, \quad (2)$$

其中 n 表每立厘米之分子數。由此，可知分子數僅與壓力及溫度有關，故就兩理想氣體而言，當壓力及溫度相等時，其在 1 立厘米內之分子數亦相等。若依下面方式說明亞佛加德羅定律，則可將因果關係更正確的表出：凡理想氣體，其在單位容積內含有等多之分子者，在等

溫度時有等大之壓力。

157. 馬克士威定律。據以上所述，一理想氣體分子之平均動能

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{3}{2} kT \quad (3)$$

然此僅為一平均值。事實上，因分子衝突，分子間能量交換不已，分子可有各可能的速度 v ，但頻數不等，而以極小及極大之速度最稀。有一定總能量之氣體，其各分子間速度之分配純屬偶然且遵統計學諸定律 (§ 94)，馬克士威 (1860) 以此為基礎，導出一種定律，曰馬克士威定律 (Maxwell'sches Gesetz; Maxwell's law)。此定律係由下列方程式表明。令 n 表氣體分子之總數， dn_v 表速度在 v 及 $v+dv$ 間之分子數，則

$$dn_v = \frac{4nv^2 dv}{\sqrt{\pi} v_0^3} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}} \quad (4)$$

第150圖表示與 dn_v 為比例之函數 $\frac{v^2}{v_0^2} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}}$ 與 v 之關係。縱坐

標之高度表速度 v 之頻數；據此，最大之頻數係 $v=v_0$ 時所有。此速

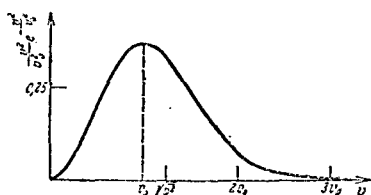


圖150. 馬克士威之分配定律。

度恐為最普通之速度。其大小視氣體之分子之質量而定，且與溫度有關。由曲線之非對稱性觀之，速度較大之分子，其數比較速度較小者為多。平均速度 \bar{v} 及最普通之速度 v_0 二者

並不相等，其間之關係為 $\bar{v} = v_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ 。比較平均值尤為重要者，為速度之平方之平均值 \bar{v}^2 ，因後者與平均分子能量，故即與溫度有密切關係。其與最普通之速度之關係為 $\bar{v}^2 = \frac{3}{2} v_0^2$ （應注意者，平均速度平方 \bar{v}^2 之值比較平均速度之平方 v_0^2 為大）。準此

$$\bar{v}^2 = \frac{3\pi}{8} \bar{v}^2 = \frac{3}{2} v_0^2 \quad (5)$$

在多數計算中（例如計算氣體壓力，§ 97），氣體分子之平均速度係指其平均速度之方根 $\sqrt{\bar{v}^2}$ ，蓋當時之現象原視分子之能量或其平均值 $\frac{1}{2}k\bar{v}^2$ 而定。在§ 97中算出之氣體分子之速度故不與 \bar{v} 但與 $\sqrt{\bar{v}^2}$ 相當。

由參考方程式3（此式中今須以 \bar{v}^2 代 v^2 ）及5，今可將方程式4改書如下：

$$dn_v = \frac{4\pi v^2 dv}{\sqrt{\pi} \left(\frac{2kT}{\mu} \right)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\mu v^2 / kT} \quad (6)$$

關於分子之轉動亦有一相當之定律。

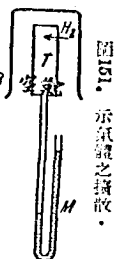
158. 擴散。熱分子運動之一直接的結果，曰擴散（Diffusion; diffusion），即因物質之分子作漫無紀律之運動，密度不等之物質之分子彼此接觸，不久即互相混合，終至全體密度到處相等。又兩物質之分子不必直接接觸（所謂自由擴散），即隔一多孔壁或薄膜亦能擴散。此二種擴散在原則上並無差別。

為表顯擴散之意義，先設想一粗糙但頗適當之比喻。假定一大人羣先集中在房間中之一角，以後各人應作個別運動，是種漫無紀律之獨立運動之結果，即不久全房間各部有等多之人數，此狀態雖在細目上變動不已，但就大體而言，因假定各個之運動不與別個之運動相關聯，可維持至久。若在該人羣之內有男，有女，又有小孩，則復因各個之運動不相關聯，此三小羣之各羣中之人衆亦平均分散在全房間內。此人羣之狀態，恰如平均充滿全房間之一氣體，而男女等三小羣可與三異種分子相比擬。此三異種分子羣因其各個分子作漫無紀律的或純屬偶然的運動，不久因擴散而平均分配在全房間之各部，致最後到處密度完全一致，此情形即示自由擴散。再舉一例，假定有二室，互以多數之門相連通，先時唯一室內有人，因各人作漫無紀律的運動，不少通過各門而入於他室內，致不久兩室充滿等多之人數。若先時在

一室內僅有男人，在他室內僅有女人，不久亦因擴散每室有等多之男人數及女人數（異種分子數），此後此種狀態維持不變。此情形與透過多孔壁之擴散相類似。

若略去重力作用，凡以上所述者顯然亦可與氣體分子相比擬，而分子平均速度愈大時，擴散過程進行亦愈速。故依據(3)方程式，氣體之溫度 T 愈高及其分子之質量 m 愈小或氣體之分子量(§93)愈小時，氣體分子之擴散亦愈速。此事實例如可由下列之實驗證明之。

先取生瓷器一個，如 T (圖151)，使與一水壓力計 M 相連接。生瓷器內當然為空氣充滿。另取一大玻璃杯，籠罩於生瓷器之上。次於杯下導入輕氣或煤氣，即見生瓷器內之壓力(由壓力計指出)，當初增加頗大，但不久仍回下。其故因輕氣(分子量2)自外透過生瓷器之壁而入於生瓷器之內比較空氣(分子量 N_2 28, O_2 32)自內透過同壁而出瓷器之外為速。但此後空氣透過生瓷器之壁之速度逐漸增加，終則發生輕氣與空氣之比例在生瓷器內外相等之狀態，換言之，成一種內外一樣之混合氣體。此時壓力計指出壓力已回下。再將外罩之器提開，壓力計指出壓力降下頗大(水即由長管昇上)。即生瓷器內之輕氣透過生瓷器之壁而達器外，同時器外之空氣亦透過器壁而入器內，然其速度遠不及向外擴散之輕氣為速，故壓力降低。然不久壓力仍回至平衡狀態。綜合以上關於氣體之兩次實驗，可知在同一狀況之下，分子量小(即較輕)者比較分子量大(即較重)者擴散為速。



又分子，其自由路程(§99)較大者，其擴散亦較速。故凡由二種氣體相混合之氣體，其擴散比較器內僅有一種氣體時遲緩。密度不等之各種液體亦如氣體可自由擴散，或隔一多孔壁進行擴散。試將能互相混合之兩種液體，例如水及酒精，盛入一器內，並令比重較重之水置於器底，其初雖尚存有界限，然不久因自由擴散，上下漸次混合為一，終則成為全部一致之液體。一種最感興趣之擴散，為被溶質微粒

之在溶劑內之擴散。通常被溶質微粒之數遠較被溶質之分子之數爲少，其在液體內可視爲裹在液體內之氣體(§ 189)。其在溶劑內擴散恰如一氣體之分子。然其擴散速度遠較氣體分子之擴散速度爲小，蓋溶劑之分子相聚極密，微粒之自由路程實非常之小。例如用長管一個，其下端通達盛水之玻璃器底，次將硫酸銅溶液緩緩由管口灌入，則溶液達玻璃器之下層，當初無色之水在器之上層，青色之硫酸銅溶液沉於器底，兩者之間有判然之境界，如是經過若干小時後，此境界逐漸不分明，青色漸次上侵，經過一月之後，器內全含青色液體。

159. 布朗運動。在證實熱之力學說之諸現象中，恐以布朗運動(*Brownsche Bewegung*; *Brownian motion*)所引起之印象爲最深刻。試取一淡墨液或一膠質金溶液(§ 187)置於超顯微鏡(§ 449)下放大觀察之，則見墨液內有碳微粒，在金溶液內有金微粒，且均作激烈之不規則鋸齒形運動(圖152)。若將捲煙之煙霧置在顯微鏡下觀察之，亦見有固體微粒作相當之運動(愛朗哈夫脫; *Ehrenhaft*)。此現象已於1827年由英國植物學者布朗(*Robert Brown*)發見，但其經一般適當的注意時已遠在熱之機械本性確定之後矣。其解釋如下：

設想一非常大但容易運動之物體，在其周圍有多數之人作漫無紀律的運動，與物體衝突不已。因衝突多而不規則，此種衝突大部分互相抵消，而該物體僅往返移動少許。今設想另有一比較遠小之物體，與之衝突之人數仍不變，但因物體之面積較小，衝突之次數遠較前次情形中爲小，以是衝突未能如前次平均抵消，物體忽向此一方向運動，忽向彼一方向運動，不但次數較前次爲多，且較激烈，換言之，物體作不規則鋸齒形運動，而當物體愈小愈輕時，運動亦愈激烈。(此種情形可與一足球在較長時間內之運動相比擬，次又設想質量比尋常大十倍之足球之動態。)

在布朗運動中，在超顯微鏡下察見之微粒係與此種物體相當，而介質之分子(物體在介質內運動)則與物體起衝突之人衆相當。微粒既極小，與介質分子衝突之次數常起顯著的變動，因而衝突不規則，

結果促成微粒之鋸齒形運動，而運動之激烈程度當微粒愈小時愈大。其所以然者，復因微粒縱使形狀不變，其質量隨線因次(例如就球體而言隨其半徑)之三次幂但其表面故即衝突之次數僅隨其二次幂而遞減。

第 152 圖示在超顯微鏡下觀察一微粒之布朗運動之一例。(線之折點表示微粒各時間之位置，實際微粒之運動比較圖中所示者尤為不規則。)是種運動自然純屬偶然，且各各不同，但如 § 在 94 中說明，由觀察多數之偶然復可察見一種規律，此種規律之有效性當參加之個體或經察見之數愈多時亦愈大。



圖 152. 布朗運動。

發生布朗運動之微粒，其動態恰如質量非常大之分子。微粒每一自由度(進動及轉動)亦有與 kT 相當之能量。故其進動之平均動能為 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$ 。溫度 T 愈大時，運動亦愈活潑。

布朗運動有使微粒平均分配在全部空間內(擴散，§ 158)之作用，而重力有使其沉在底部之作用，故在兩作用之下，浮游微粒在一液體或一氣體內之分配或其在各部分之密度遵一種與氣壓高度公式(方程式 15, § 102

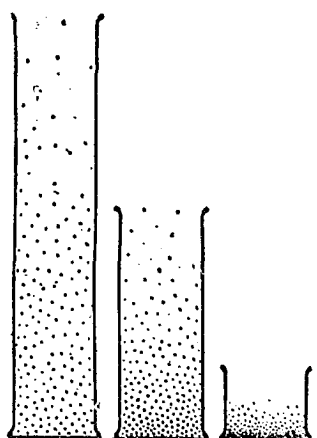


圖 16. 液體內浮游微粒之分配。

) 完全類似之公式，換言之，微粒之數在下層比較上層為多，即下層

比較上層爲密(圖 153)·微粒愈小時布朗運動既愈活潑,故極小之微粒在流體內分配較廣,反之,較大之微粒大都聚集在器底,分配不同之原因與大氣內各氣體混合比例隨高度而變之原因同,就全體言之,浮游微粒係與有極大分子量之氣體相當,其在重力場內,示一極大密度梯度。

在布朗運動中,一微粒之不規則的鋸齒形運動不能概指微粒全體之運動,因據統計學定律,以較少數微粒之狀況不能概言其全體,而唯關於多數微粒之平均值始對於全體有效,一微粒當作活潑布朗運動時占有之容積既極小,故在此容積內,分子之數,運動方向及平均速度可設想時時與全體之平均值不同,此種現象,曰漲落 (Schwankung; fluctuation),在個體不多之處有之,試與下例相比擬,設每隔一分鐘檢點某城某街道一公里長內之人數一次,則可知每次之結果與平均值(約以百分率計算)相差無幾,若依同法行之於鄉間一公里長之街上或城內祇10米長之街道上,則所得之結果與平均值頗有出入,因在以後兩次情形中人數遠較前次情形中爲少也。

雖然,是種漲落依統計學亦得解釋,但祇就其平均值,而並非就其單個值解釋,據近真算法,平均相對的漲落(較爲真確者,多次漲落之二次羣之平均值之方根,所謂平均漲落之平方)與參加之個數之方根爲反比例,故由漲落之平均值可確定個體之數目。

愛因斯坦首創關於布朗運動之學說,藉此學說可由觀察布朗運動計算介質(其內起布朗運動)之分子之密度的漲落,並由此算1立厘米內之分子數,各分子或原子之漲落現象(例如由放射性物質之放射所示之漲落)依理亦可同樣用之,關於布朗運動之愛因斯坦之方程式如下:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{k t}{3 \pi \eta r N}},$$

Δx 表在時間 t 內一微粒依 x 方向移動之平均距離, R 氣體之克分子常數, T 絕對溫度, η 液體粘滯係數, r 微粒之半徑 [從關於粘滯流體中落下之小球之速度之斯托克方程式 $v_0 = \frac{2}{9} \frac{r^2(\sigma - \rho)g}{\eta}$ (ρ 表

， ρ 表液體之密度， σ 微粒之物質之密度)測定]， N 亞佛加德羅之數。據此式，微粒依x方向之平均變位 Δx 與絕對溫度及時間之方根為比例，與液體之粘滯係數及微粒之半徑之方根為反比例。然與微粒之質量全無關係。實測之結果亦表示此種關係之正常。又由此式可求得亞佛加德羅之數 N 。

在懸在一點而可轉動之構造中，布朗運動為一種不規則不定轉動。為顯示此種極微小的轉動常用一定之裝置(例如反射測法裝置)。其一應用為測定微弱電流。當時觀察在電流之作用下而轉動之一磁針，後者在周圍氣體之作用下，發生一極微弱旋轉布朗運動。磁針因布朗運動之偏轉有與在電流之作用下等大之數量級時，藉此種裝置可觀察在最低極限的電流。若將磁針置在一完全真空內，仍以此極限為度，因導電體之布朗運動電流漲落不定。

第十五章 溫度，壓力及容積 狀態方程式

100. 固體及液體之熱膨脹。物體受熱或放熱時，不特溫度即其大小同時亦生變化。通常溫度昇時膨脹，溫度降時收縮。若命 Δl 表物體之溫度變化， l 溫度未變化前之長度，則其受熱後之長度為

$$l + \Delta l = l(1 + \alpha \Delta t) \text{ 或 } \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t, \quad (1)$$

換言之，相對的長度變化 $\Delta l/l$ 與溫度變化 Δt 至少在某一定限度內成比例。 α 表一常數，其值由物質之性質而定，曰物質之線脹係數(linear Ausdehnungskoeffizient; coefficient of linear expansion; 見第五表)。由方程式1， α 表溫度每變化1度($\Delta t = 1^\circ$)物質每單位線長($l = 1$ 厘米)所變化之長度。

第五表 若干固體及液體之膨脹係數。

鉛..... 0.0000292	金剛石..... 0.000013	酒精..... 0.0110
鐵..... 120	石墨..... 0.89	醚..... 163
銅..... 165	玻璃..... 0.81	橄欖油..... 0.72
鎢..... 0.60	水晶，與軸垂直..... 144	水銀..... 0.18
因瓦(Fe ₆₄ +Ni ₁₆) 0.16	水晶，與軸平行..... 0.80	水..... 0.18
(不變值)	石英玻璃..... 0.06	

膨脹係數故相差頗大。石英玻璃之膨脹係數極小。若將一熾熱石英管浸入冷水內，此管不致碎裂，反之，普通玻璃因其組織不耐因冷而起之瞬時不平均的收縮，立即碎裂。因鋼膨脹係數極小，為各金屬冠。

固體之容積自然亦隨溫度而變。一平行六面體若其在溫度 t 時之容積 $V = a \times b \times c$ ，則其在溫度 $t + \Delta t$ 時之容積當為

$$(V + \Delta V) = a \times b \times c (1 + \alpha \Delta t)^3.$$

此關係自然僅對於等方性體（即性質不依方向而異之物體）適用，否則 α 之值隨方向而變（參考第五表之水晶）。

$\alpha \Delta t$ 之值既恆小於 1，故可改書如下：

$$(V + \Delta V)/V = (1 + 3\alpha \Delta t) \text{ 或 } \frac{\Delta V}{V} = 3\alpha \Delta t. \quad (2)$$

此 3α 亦為一常數，曰體脹係數（kubische Ausdehnungskoeffizient; coefficient of cubic expansion），其值為同物體之線脹係數之三倍。

一物體之容積既因受熱而增加，但其質量不因此而變，故其密度或比重必因熱而減小。

下列各實驗當能表明固體因熱之膨脹。一端固定之金屬棒受熱後膨脹伸長，牽動指針之一端，使其他端沿一標尺運動，指出棒伸長之多寡（圖 154）。一金屬球，當冷時，恰可通過一金屬環

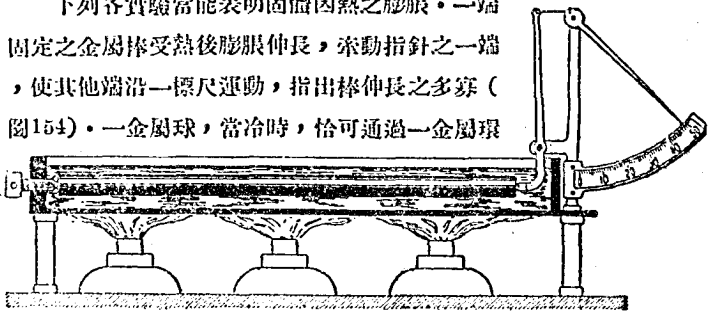


圖 154. 一棒之線膨脹之測定。

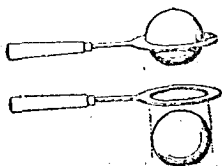


圖 155 一球之容積之變

，受熱後則膨脹增大，不復再能通過。迨冷後復能通過（圖 155）。

論液體之膨脹量時，通常係指其容積膨脹量而言，但液體必盛於容器，故同時不得不考量容器之膨脹量。所測定之膨脹，曰視膨脹量

係由物體之真膨脹量減去容器之膨脹量。用全體一樣物質造成之容器，因溫度變化，其容量亦起膨脹收縮。其孔穴部分亦與實質同一比例，隨溫度升降而起膨脹收縮。此關係只須取日常所見之升斗等觀之，即知其容量完全由其各邊之伸縮而定。例如在 0°C 時可容1立升之玻璃瓶，在 30° 時其容量當增加 $1 \times 0.0000081 \times 3 \times (30-0) = 0.00073$ 立升或0.81立厘米。為表明液體及容器之膨脹，茲舉一實驗如下：

試取一液體盛入玻璃瓶令滿，上加瓶塞，塞上穿一孔，由孔插入一玻璃細管，將全體浸入熱水內，初見細管內液面降下少許，但不久即見細管內液面漸次升高。液體之所以當初先降下者，其故因容器比較液體先膨脹，若將水銀溫度計浸入熱水內，亦見有相同之情事。

因物體受熱膨脹，去熱收縮，故在鐵軌接合處，必留相當空隙，以防夏季因膨脹而彎曲。又如車輪及木桶之鐵箍，均於燒熱後加上，遇冷收縮後，即鋼住不脫。

擺鐘之棚形補償擺 (Rostpendel; gridiron pendulum; 圖156)係由兩種不同之金屬棒聯合而成，其中之Fe為鐵棒，Zn為鋅棒。各棒之長短配合適宜，故下端擺球因鋅棒之膨脹而起之昇上恰與因鐵棒之膨脹而起之降下相抵償。故用此種擺之時鐘，冬夏無過速或過遲之虞。

若將兩種不同之金屬棒首尾銲合，則當遇溫度變化時，棒即彎曲（撥拉克脫螺絲；Breguetsche Spirale；Breguet's Spiral）。利用此效應例如可使錶之擺輪不與溫度發生關係。如圖157所示，此輪有兩缺口a及b，輪之外側之金屬（例如黃銅）其膨脹收縮較內側之金屬（例如鋼）為大，故在夏日，輪之外側較內側伸長更多，有將內側之金屬更壓向內方之作用，其結果使輪之半徑減小，缺口處a及b移近中心之軸；輪轉動過速；反之，如在冬日，輪之外側較內側收縮更甚，有向內側

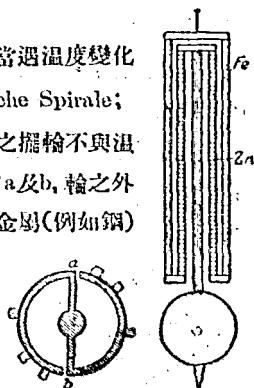


圖157. 補償螺絲。圖156. 棚形補償擺。

之金屬曳向外方之作用，其結果使輪之半徑增大，即缺口處離開中心轉動軸，輪進行過遲。又夏日，油絲之彈性減衰，使振動過遲；反之，在冬日，彈性增強，使振動過速。故若能將輪周之錘裝在適宜之位置，則由油絲彈性變動及由輪周夏冬伸縮而生之影響均可除去。

161. 水之異常。物質中有在溫度之一小界限內因溫度增加而反收縮者，如水即其一也。在 0°C 及 4°C 之間，水之容積反因溫度增加而縮小，在 4°C 以上，則因溫度增加而脹大。故若壓力不變，其密度在 4°C 時最大。由此可知水在冰點附近猶起分子的變動。第六表就水之密度以示水之異常(Anomalie des Wassers; anomaly of water)。

第六表 水之密度

0°	0.99987 克厘米 ⁻³
2°	0.9997
4°	1.00000
6°	0.99997
8°	0.99983
10	0.99973

因水之異常，故1克之重係就水在 4°C 時之重為標準 (§ 23)。在最大密度附近，故即在 4°C 附近，密度之變化遠較鄰近溫度為小(比較自 2°C 至 4°C 及自 6°C 至 8°C 之間隔)。故在是處溫度上些微的誤差對於密度之關係遠不及在別處之大，因而有與 4°C 時相當之密度之水比較有其他密度之水容易確定。

水之異常在自然界中有重要之意義。若水在 0°C 最密(故最重)，則最上層之水因冷却極向底層下降，然實際此情形唯當水之溫度未降達 4°C 時為然。其時上層較冷之水與以下面溫度不等之水互相混合，以致至少在下面不過深之處發生極平均的溫度。如表面溫度降至 4°C ，密度成為最大，故由表面下降，而下面較暖之水則昇至表面以代之，如是交替，繼續至全部之水均成為 4°C 。以後空氣如再冷却，表面之水因密度已較下面之水為低，不能再下降，留在表面，終則結冰(圖158)。在其下者，因密度較大，無法上昇，仍保持 4°C 。在 4°C 以上

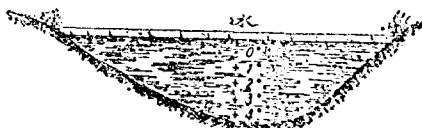


圖158. 示水之異常。

水中熱之平衡係藉強烈之對流；在 4°C 以下，則藉作用極遲緩之熱傳導，熱由下層移至上層(參考

§ 197), 但水及冰之傳導性異常薄弱, 故欲使下層之水降至 4°C 以下, 須時極長。因此, 表面以下之水層依然在 4°C 附近, 且愈下愈暖, 如油底甚深, 則油底之水大抵均為 4°C , 是以連底結冰仍屬不易, 水中生物得以生存全賴乎此。

水中如含鹽水, 例如海水, 則其最大密度即不在 4°C , 但更在其下。大洋中之水溫, 能低至 2.5°C 者即由於此。

反之, 如溫度漸次升高, 至冰全溶之後, 氣溫由 0°C 升至 1°C 之期間內, 水由上面受熱, 密度增加, 起對流作用, 使全體之水一律成爲 4°C 。由是以後, 氣溫如再升高, 則水轉減輕, 即熱水留於上面, 不復下降, 無對流作用, 上層之高溫, 祇能由傳導作用傳至下層, 結果池面之水, 雖已大熱, 而池底之水則仍不過 4°C 而已。

162. 理想氣體之狀態方程式。波義爾·馬略特·給呂薩克之定律。一理想氣體之狀態由壓力 p , 容積 V 及溫度 T 依簡單方法決定。

據方程式 6, § 97, 及方程式 3, § 157, $p = \frac{1}{3}n\mu\bar{v}^2$ 及 $\frac{1}{2}\mu\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT$, 故

$$p = nkT, \quad (3)$$

其中 n 表 1 立厘米內之分子數, μ 分子之質量, \bar{v}^2 一分子之平均速度平方。1 立厘米之質量, 換言之, 氣體之密度, 故爲 $\rho = n\mu = 1/V_s$, V_s 表容度 (§ 56), 由方程式 3

$$pV_s = \frac{kT}{\mu}. \quad (4)$$

今以 1 末之分子數 N (§ 96) 乘此式右邊之分子及分母並以 $Nk = R$, R 曰氣體之普通常數 (allgemeine Gaskonstante; general constant of gas) 或簡稱之曰氣體常數。此常數如 N 及 k 亦爲一普通常數。其數值故不因氣體之性質而異, 即

$$R = 0.83131 \times 10^9 \text{ 爾格/自由度} \times \text{末} = 1.986 \text{ 卡/自由度} \times \text{末} \quad (5)$$

(參見 § 168), $N\mu$ 表 1 末內分子之總質量, 即等於氣體之分子量 M , 故

$$pV_s = \frac{NkT}{N\mu} = \frac{RT}{M} \text{ 或 } pMV_s = RT. \quad (6)$$

但 $MV_g = V_m$, 為 M_g 之容積, 故即 1 末之容積, 曰克分子容積, 就有等溫度及等壓力之一般理想氣體而言, 此值均相等, 故方程式 6 又可改書為:

$$pV_m = RT. \quad (7)$$

在此式中, 不含隨理想氣體而異之常數, 在 $p = 760$ 毫米及 $T = 273$ 絕對溫度 (即等於 0°C) 時,

$$V_m = 22400 \text{ 立厘米} \quad (8)$$

(參考 §96) 方程式 4, 6 及 7 不過表同一定律之數種說法, 此定律由擴夫波義爾·馬略特定律 (§ 98) 而來, 名曰波義爾·馬略特·給呂薩克定律 (Gesetz von Boyle-Mariotte-Gay Lussac; law of Boyle-Mariotte-Gay Lussac; 1802), 或曰理想氣體之狀態方程式 (Zustandsgleichung der idealen Gase; state equation of ideal gas).

方程式 4 表 1 克之理想氣體之狀態, 因其中所含之容度 V_g 為 1 克之容積, m 克之容積 $V = mV_g$ 故由方程式 6, 就任一氣體量 m 而言,

$$pV = m \frac{kT}{\mu} = m \frac{RT}{M} \text{ 或 } \frac{pV}{T} \text{ 常數 (比氣常數)}, \quad (9)$$

或依普通溫度標 ($T = 273^\circ\text{C} + t$, § 155)

$$pV = m \frac{R}{M} (273^\circ + t). \quad (10)$$

如命 p_0 及 V_0 表在 $t = 0^\circ$ 時之壓力及容積, 則因 $p_0 V_0 = m \frac{R}{M} 273^\circ\text{C}$.

$$pV = p_0 V_0 \left(1 + \frac{t}{273^\circ} \right) = p_0 V_0 (1 + \delta t), \quad (11)$$

或就有兩任何溫度 t_1 及 t_2 時一般言之,

$$p_1 V_1 / (1 + \delta t_1) = p_2 V_2 / (1 + \delta t_2) = p_0 V_0, \quad (12)$$

式中 $\delta = 1/273^\circ$ (確數為 $1/273.2 = 0.003660$, § 155).

第 159 圖示一理想氣體在不同溫度時之 p 與 V 之關係, 其中曲線各與一定之溫度相當, 故是種曲線, 曰等溫曲線 (Isothermen; isothermal lines).

163. 理想氣體之膨脹係數及壓縮係數。

由方程式(11)及(12)可導出理想氣體之膨脹係數 (Ausdehnungskoeffizient; coefficient of expansion)。設想在定壓下，容積變動，故於方程式(12)內代入： $t_2 = t_1 + \Delta t, p_2 = p_1$ 於是所增加之容積

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_2 - V_1 = \frac{V_1}{1 + \alpha t} \alpha \Delta t \\ &= V_0 \alpha \Delta t. \end{aligned} \quad (13)$$

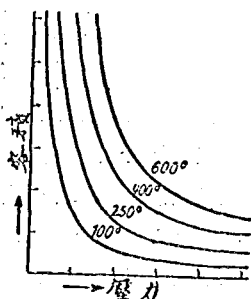


圖169. 一理想氣體之等溫線。

其中 V_0 表在溫度 0°C 及壓力 $p_0 = p_1 = p_2$ 時之容積。故在定壓下理想氣體容積之隨溫度之增加平均每昇 1°C 等於其在 0°C 及同壓力下時之容積 V_0 之 $1/273$ 。（應注意者，是處 α 不表溫度增加 1°C 時之相對膨脹 $\Delta V/V$ ，但表 $\Delta V/V_0$ ，是以 α 之定義與就固體及液體而言之膨脹係數之定義略有出入。一理想氣體溫度增加 1°C 之相對膨脹 $\Delta V/V$ ，在溫度為 t 時，等於 $1/(273+t)$ ，故例如在 15° 時等於 $1/288$ ，換言之，為溫度之一函數。若一氣體量之容積維持不變，僅令溫度變動 Δt ，則依完全相同之方法得

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_0 \beta \Delta t. \quad (14)$$

按此方程式之意義，此常數 β 曰理想氣體之壓力係數 (Druck oder Spannungskoeffizient; pressure coefficient)。

第七表表示若干氣體之實測壓力係數 β 之值。 β 之實測值及上述之理想值二者相符之程度表示一實際氣體與理想氣體接近之程度。如表所示，大多數普通氣體之壓力係數與理想氣體之壓力係數頗接近。

第七表 若干氣體之壓力係數。

輕氣.....	0.093663度 ⁻¹
氫.....	3630
淡氣.....	3675
養氣.....	3674
一氧化氮.....	3607
二氧化碳.....	3726

氮氣..... 3332

理想氣體依理1/273,2 3360

164. 凡得瓦爾之狀態方程式。一物質之完全狀態方程式應示 p , V 及 T 間之函數關係，且不拘溫度及壓力之大小，同時須適於固態，液態及氣態。此種狀態方程式迄今仍未成功。惟依據凡得瓦爾(1873) 成就之常態方程式，所謂凡得瓦爾方程式(Van der Waalsche Gleichung; Van der Waals equation)，至少對於多數物質，不拘在液態或氣態適用。此式係由推擴(7)方程式而成，示之如下：

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT, \quad (15)$$

式中 a 及 b 均為常數，係視氣體之性質而定，至 a/V_m^2 及 $-b$ 則為表與理想氣體歧離之增添項。在導出理想氣體之定律時，假定在分子之間並無引力作用。但事實上，其間確有引力作用，而氣體愈密時，此引力亦愈大。結果，氣體分子與周圍器壁相衝突之速度減小，因而作用於器壁上之壓力 p (§ 97) 須減少分子向內被吸引之力。(參考示表面張力之原因之第82圖，§ 92。)故據凡得瓦爾，在表器壁單位面積上之氣壓 p 之一項中，須增添 a/V_m^2 一項其值當克分子容積 V_m 小時大，換言之，因分子擠在一狹窄空間內，相接愈近，故其間引力亦較大。當 V_m 大時，即氣體密度小時，該項之值與 p 相較極小，故可略去。在導出理想氣體之狀態方程式時，又假定氣體分子實際所占有之空間與其可占有之空間相較極小，故實際占有之容積不為 V_m ，但為 $V_m - b$ ，其中 b 即為容積之改正項。若 V_m 極大，即密度小時，則 b 可略去。至是，方程式 (15) 過渡而為理想氣體之狀態方程式 7. b 之大小與餘容積(Kovolumen; covolume) 為比例，所謂餘容積者，即 1 末之物質當其分子極度密集在一狹窄空間內時所占有之容積。 a 及 b 二常數之值均視實質而定。

關於凡得瓦爾方程式之進一步的討論，另見 § 184。在該節中且用曲線表示。

§ 165. 關於狀態變化之特種情形。一氣體之狀態與 p , V 及 T 三可變量有關。在狀態變化之最普通的情形中，此三種量同時變化。然

三者之一亦可經維持不令變化。

在等溫狀態變化(isotherme Zustandsänderung; isothermal change of state)中, T 不變, 在等壓(isobare; isobar)狀態變化中, p 不變, 而在等容(isopykne; isopyknis)狀態變化中 V 故又密度不變。

理想氣體之等溫狀態變化遵循波義爾·馬略特定律 (§98), 等壓狀態變化遵循方程式13, 而等容狀態變化遵循方程式14。

不增不減之狀態變化, 曰絕熱狀態變化(adiabatische Zustandsänderung; adiabatic change of state; §174)。在此情形中, 若不計其間之化學過程, 物體之狀態僅能經機械功變動。

166. 液體溫度計。利用物體熱脹冷縮之性質, 造成測定溫度之裝置, 是曰溫度計(Thermometer; thermometer)。令溫度計直接與欲測之物體相接觸, 則溫度計示與物體之溫度相等之溫度。

普通使用之溫度計為水銀溫度計, 其中利用水銀(所謂測溫質)之膨縮以測定溫度。其上部為內徑極細之玻管, 下部為玻質球形或圓筒形, 通稱為球部。球部及細管之部分, 盛有水銀。水銀面以上之空氣, 在當初製造溫度計時已完全排出, 故液面上部變成真空。當水銀膨脹上昇時, 液面不致受壓力作用, 管徑既小, 縱令當溫度變化時, 液體所生之膨脹收縮量不多, 液面之昇降却極顯著。

分度時, 將溫度計之球部浸入融化殆半之純粹冰水中, 管內水銀而降至一定點, 以後不復再降, 此定點曰冰點(Eispunkt; freezing point), 又將溫度計之球部放在沸騰純粹水中, 管內水銀昇至一定點, 此定點曰沸點(Siedepunkt; boiling point)。故此兩主要定點(Fixpunkte; fixed points)其一與在760毫米水銀之壓力下之 0°C 相當, 而其他與在同壓力下之 100°C 相當。(為定溫度計之度數, 亦可利用若干其他純粹物質之溶解點, 例如Hg -38.87°C , Sn $+231.84^{\circ}\text{C}$, Zn $+419.4^{\circ}\text{C}$, Ag $+960.8^{\circ}\text{C}$, Au $+1063^{\circ}\text{C}$, Pt $+1764^{\circ}\text{C}$, 但後者數種對於水銀溫度計不適用。)用此兩定點為基礎, 將其間之間隔分為100等分, 即為攝氏度(如分為180等分, 即為華氏度), 有時將分度向兩定點以外擴充。

在此分法中，假定水銀及玻璃在全部標度內平均膨脹。事實上則不然。一則因水銀之膨脹係數縱在 0° 及 100° 之間並非嚴格的不變，二則因玻璃在此限度之內並非完全平均膨脹，且又視玻璃之性質而異。在 0° C及 100° C之間之若干點之誤差可略許超出 0.1° C以上。溫度計之玻璃示一種熱疲乏 (thermische Nachwirkung; thermal fatigue)，換言之，其加熱後冷卻時，不立即收縮，回至原來之容積，但須經若干時間之後。因此，若將預先加熱至約 100° C之溫度計浸在熔解中之冰內，則溫度計當初不立即指出 0° C，但指出一略低之溫度（所謂零點之低降）。此種疲乏現象在新製成之溫度計中特別顯著，然若以後令其交換脹縮（所謂人工陳老法），此現象可減輕。熱疲乏係與彈性疲乏相類似。

普通水銀溫度計其標度向下為水銀凝固之溫度（ -38.87° C）所限，向上當在 150° C附近，蓋在此溫度之上，水銀在細管之真空部分已汽化。然若水銀面之上並非真空，但含有淡氣，則水銀汽化不易，充滿淡氣至起高壓（3—50大氣壓）時，且可阻止水銀在較高之溫度下之沸騰（§181）。此種溫度計係由特種玻璃製成，其由石英製出之一種可供達 750° C高溫之使用（淡氣溫度計）。

至供測低溫用之溫度計，不用水銀，但用凝固點極低之液體，如酒精（酒精溫度計），石油醚之類——液體溫度計 (Flüssigkeitsthermometer; liquid thermometer)。普通水銀溫度計及酒精溫度計，其專供測定空氣溫度之用者，稱曰寒暑表。

由特種製成，溫度計中有可供讀出在一時期內最高及最低溫度之使用者，即最高及最低溫度計是也。又檢査病體用之體溫計亦最高溫度計之一種，昇高後之水銀，受表面張力作用，常留原處，非用力向下搖之，不克降下。

167. 氣體溫度計及其他測溫方法。若以氣體代水銀作測溫質，則因氣體之膨脹率較水銀為大，在 §166 中所述之不規則脹縮之影響在是處微小，可略去不計。故作精密之測定尤其定其他溫度計之標度

時，常利用光氣體之溫度計，曰氣體溫度計 (Gasthermometer; gas thermometer)，其中選用與理想氣體最接近之氣體，如輕氣，淡氣 (最高溫度，溫度高至 1550°C) 或氮氣及五碳烷 C_5H_{12} (低至 -196°C 之低溫度)，裝於鉛錐容器內。為確定溫度，或利用定壓下之溫度變化 ($V = V^{\circ}(1 + \alpha t)$) 或利用定容時之壓力變化 ($p = p^{\circ}(1 + \alpha t)$) (§ 163)，尋常則多利用壓力變化。

第 160 圖示簡單構造之定容氣體溫度計。玻璃球 G，經曲管 K 與玻璃管 R 相連，下接橡皮管，然後再連於玻璃管 R'。G 及 K 內盛供測溫度用之氣體，R，R' 及橡皮管內，則盛水銀。使用時先將 G 放入冰水中，提高 R'，使 R 內水銀面恰與 S 尖端相接觸，讀出此時兩管內水銀面之高差 h。由此高差可將 G 內之壓力 p_0 算出。其次將 G 放入欲測其溫度之處，照樣，使水銀面與 S 尖端相接觸，讀出此時之高差，算出 G 內氣體之壓力 p。

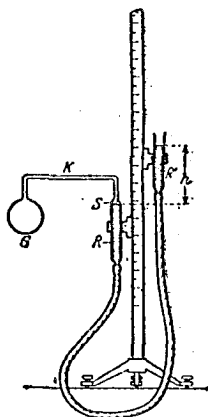


圖 160. 氣體溫度計。

(近今科學界公認之標準定容輕氣溫度計，即以輕氣為測溫質之定容溫度計。由此計可直接指出標準溫度。因據標準溫度之定義，使輕氣之容積增加其 0°C 時之容積之 $\frac{1}{273.2}$ 之溫度，謂之 1 度。又容積不變時，溫度每昇降 1°C ，輕氣之壓力當增減其 0°C 時之 $\frac{1}{273.2}$ ，故當溫度減至 -273.2°C 時，其壓力當減至零。依據氣體動力說 (§ 94)，在此狀態時，輕氣之分子不互相衝突，故無壓力。此低溫度然不能由輕氣溫度計測定，因輕氣在未達此低溫以前即變為液體故也。)

除上述根據熱容變之方法外，又有其他根據溫度對於物體之電阻及輻射之影響之溫度測定法 (§ 255 及 485)。為測極高之溫度惟後法適用。

168. 熱量·卡(路里) 據 § 56, 一物體之溫度係由物體之分子能量之多寡而定, 爲使物體之溫度上昇, 必須加能量於該物體。通常此種加入之能量原早成爲熱能而含在別種物體(火焰, 電煖體)中。一物體之加熱無非爲分子能量從一較熱之物體傳遞至該物體。物體內熱能之多寡通稱爲熱量(Wärmemenge; quantity of heat), 溫度較高之物體, 其含熱量亦較多。熱量既爲一能量, 故其單位自然與其他能量之單位同, 卽爾格是也。然此單位尋常不用, 熱量之實用單位曰(小)卡路易(Kalorie; calorie;) 簡稱曰卡或名之曰克卡(grammkalorie; gramecalorie, 維爾克, Wilke 1772)。1卡爲令1克之水自 14.6°C 升高至 15.6°C 所須之熱量。(言明所用之溫度係屬必要, 因使水升高 1°C 所須之熱量略與溫度有關)·卡之千倍, 曰大卡或名之曰仟克卡(參考§193)。

在英制中, 單位熱量乃等於令一磅之水自 32°F 升高至 212°F 時所需之熱量之 $\frac{1}{180}$ 。此單位曰平均英國熱單位。因1磅約等於454克, 故

$$1 \text{ 英國熱單位} = 454 \times \frac{100}{18} = 252 \text{ 卡}。$$

169. 熱容量及比熱·質量不等但物質種類相同之兩物體, 其昇高等大溫度時所需之熱量多寡不等, 而有較大質量之物體其所需之熱量較多。爲使質量相等但物質種類不同之兩物體昇高等大之溫度, 加入之熱量大都不等。凡加入於物體內使其溫度升高 1°C 之熱量, 名曰物體之熱容量(Wärmekapazität; thermal capacity), 通常以K表之。故爲使一物體之溫度自 t_1 升高至 t_2 , 當時應加入之熱量

$$Q = K(t_2 - t_1) \text{ 卡}。 \quad (1)$$

物質相同之兩物體之熱容量K各與其質量m爲比例, 故

$$K = C_m \text{ 卡/度}。 \quad (2)$$

C爲一常數, 其值由物質之性質而定, 名曰該物質之比熱(spezifische Wärme; specific heat; 以比熱容量名之, 較爲正當)·若 $m=1$ 克, 則 $K=C$ 。換言之, 一物質之比熱等於1克物質之熱容量, 或曰一物質之比熱爲令1克之物質升高 1°C 時必須加入之熱量。物體之比熱, 視其溫

度而異；惟在多數問題中，如所用之溫度範圍不甚大，例如自 0°C 至 100°C ，則可不必計及之。水之比熱雖非一定為 1，然在普通溫度範圍內與 1 相差甚微，故除非特別聲明，水之比熱概視為 1。第八表表示若干固體及液體之比熱。

應注意者，水

第八表 若干物質之比熱。

有一特別大之比熱

。此事實對於自然

界之熱之分配有重

要關係。以是之故

，在夏季初期，海

水比較氣溫為涼，

在冬季初期較暖。

故在沿海區域，氣

候之年溫差遠不及

在大陸內地之甚。

	比熱 c , 以 卡度 $^{-1}$ 克計	原子量 α	原子熱 $C\alpha$
銅.....	0.214	27.1	5.8
鐵.....	0.111	55.84	6.20
鎂.....	0.166	58.68	6.22
鎢.....	0.091	63.57	5.78
銀.....	0.065	167.89	5.33
錫.....	0.050	121.2	6.00
鎳.....	0.032	195.2	6.25
鎢.....	0.031	197.2	6.12
鎢.....	0.031	207.2	6.42
玻璃.....	0.10	—	—
石英玻璃.....	0.174	—	—
金剛石.....	0.12	—	—
水.....	1.00	—	—
酒精.....	0.50	—	—
酒精.....	0.58	—	—
亞硫酸炭.....	0.24	—	—

氣體在 §171 中另行討論。

170. 原子熱。 度隆·畢底定律。 在第八表中，除示金屬之比熱 C 外，又載入其原子量及乘積 $C\alpha$ 。後者為 α g 之熱容量，即原子量克數之熱容量也。故 $C\alpha$ 為 1 克原子之熱容量，亦即等多數原子之熱容量 (§96)。自上表觀之，金屬之原子量雖各各不同，但其與比熱之乘積常為約等於 6 之定值，此值曰原子熱 (Atomwärme; atomic heat)。此定律為度隆及畢底所發見，名曰度隆·畢底定律 (Gesetz von Dulong-Petit; law of Dulong and Petit 1819)。

此事實之解釋如下：凡金屬悉為結晶質體，其中原子作空格子狀排列 (§528)。原子之熱運動為在某一定靜止位置左右之振動，且因受周圍原子之作用，其位置幾乎固定不變，對於此種振動，原子有三自由度，故其動能平均等於 $3kT/2$ (§156)。但原子又具有位能，而如若振動為一種諧振動，其平均值與振動能相等。故一原子之總能量平

均等於 $3kT$ 。在金屬之一克原子內，有 N 原子 (§96)，即一克原子之熱量等於 $3NkT$ 或等於 $3RT$ ($Nk=R$, §162)，故加入於一克原子內使其溫度升高 1°C 之熱量，即所為原子熱係等於 $R(T+1)-3RT=3R$ 。今 R 極近 2 ，故原子熱之理想值等於 6 。實際情形恐未如在是處假定者之簡單，故變異誠屬難免，而尤以溫度極低時為最。其詳細情形見§511及516。

171. 氣體之比熱。在固體及液體中，狀態變化尤其容積變化係由溫度變化而決定。氣體中則不然，其容積又視其壓力變否而定。

最簡單之情形為一氣體量之溫度變化，容積不變化。此情形至少可理想的設想之。若閉氣於一溫度變化時容積不顯然變化之完全剛強之容器內，則氣體之容積可視為完全固定。（事實上，由調節壓力以達到此目的。）設想裝1克之理想氣體於一某種容器內。據§96，1克等於 $1/M$ 末 (M =分子量)，而氣體之分子數等於 N/M (N =羅斯密特常數)。命 m 表分子自由度數，則據方程式 I, §156，當溫度為 T 時，各分子平均之能量 $\bar{E}=nkT/2$ ，故全部氣體量之能量 $A=nNkT/2M$ ，或據§162， $A=nRT/2M$ (R =氣體之普通常數)。

今令氣體之溫度自 T 增至 $T+1$ ，氣體之能量當增加 $nR/2M$ 。但1克物質溫度增加 1°C 時之能量變化，據定義為該物質之比熱，而在上述之情形中為定容比熱 C_v 。故就一般而言，凡分子有 n 自由度之氣體，其定容比熱

$$C_v = \frac{n R}{2 M}, \quad (4)$$

故據§156，假定在理想氣體時，

$$\text{一原子氣體}(n=3)\text{之}C_v = \frac{3 R}{2 M},$$

$$\text{二原子氣體}(n=5)\text{之}C_v = \frac{5 R}{2 M},$$

$$\text{其他一切氣體}(n=6)\text{之}C_v = 3\frac{R}{M}.$$

在定容時之克分子熱 (Molwärme; molar heat) 或定容克分子熱

c_v 等於 1 克分子之熱容量，故為比熱之 M 倍，即 $c_v = \frac{3}{2}R$ ， $\frac{5}{2}R$ 或 $3R$ 。由此觀之，凡理想氣體，其分子之原子數相等者，其克分子熱亦相等。

試裝 1 克之理想氣體於一圓筒中，並以一活塞封閉之。在活塞上自外作用某一定之壓力，圓筒內氣體之溫度增加 1°C 時，氣體膨脹，且因外力不變，推出活塞少許。命當時氣體容積變化為 ΔV ，則據 §100，氣體反抗活塞而作之功為 $p\Delta V$ 。據方程式 3, §162，溫度變化 ΔT 時，1 克 ($V = V_s$) 氣體所作之功等於 $p\Delta V = R\Delta T/M$ ，溫度變化 $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ 時， $p\Delta V = R/M$ 。今若承認熱量為一種能量，則當氣體受熱而膨脹時，所加於氣體之熱量，必有一部分因作功而消耗者。在上述情形中，此部分之功即 R/M 是也。

由此觀之，在定壓下為使 1 克之氣體增加如定容時等大之溫度必須再加 R/M 之熱量。反之，若氣體之容積不變，其所作之外功為零，而加入於氣體內之熱量，悉用以增加氣體之溫度。準此，則氣體之比熱，視其容積變否而有不同之值，在定壓時應加於 1 克之分子中，使其溫度升高 1°C 之熱量，曰定壓比熱 C_p 。就一般而言

$$C_p = C_v + \frac{R}{M} \quad (5)$$

故假定在理想氣體時，

$$\text{一原子氣體之 } C_p = \frac{5}{2} \frac{R}{M},$$

$$\text{二原子氣體之 } C_p = \frac{7}{2} \frac{R}{M},$$

$$\text{其他一切氣體之 } C_p = 4 \frac{R}{M}.$$

照樣，定壓克分子熱 $c_p = \frac{5}{2}R$ ， $\frac{7}{2}R$ 或 $4R$ 。其他重要關係，其關於

$$\text{一原子氣體者，為 } C_p/C_v = \frac{5}{3} = 1.67,$$

$$\text{二原子氣體者，為 } C_p/C_v = \frac{7}{5} = 1.40,$$

其他一切氣體者，為 $C_p/C_v = \frac{4}{3} = 1.33$ 。

又關於一切理想氣體， $c_p - c_v = R$ 。

是處導出之關係，嚴格言之，僅對於理想氣體適用。第9表舉示其若干數值。氣體之普遍常數

$$R = 1.986 \text{ 卡/度} \times \text{克分子}。$$

由未行指出 $c_p -$

第九表 若干氣體之比熱。

$c_v = R$ 之關係依氣體僅微有出入。依學理，視分子內之原子數， c_p 約有5, 7 或 8 之值 ($R = 2$ 卡/度 \times 末)。表中所舉各值，亦與此種值相		C_v	C_p	C_p/C_v	C_p	$C_p - C_v$
	H ₂	2.41	3.40	1.41	6.80	1.98
	He	0.76	1.26	1.66	5.04	2.00
	N ₂	0.178	0.240	1.40	6.98	1.99
	O ₂	0.150	0.218	1.40	6.98	1.98
	A	0.677	0.127	1.65	5.02	1.99
	CO ₂	0.165	0.202	1.30	8.88	2.67
	CH ₄	0.405	0.531	1.31	7.43	2.62

接近，惟CO₂及CH₄兩氣體示顯明變異。

測定 $C_p/C_v = \gamma$ 之值，為確定氣體分子內原子數（一原子，二原子或多原子）之一重要方法。此值既亦含在表示氣體內聲速度之方程式中 (§125, 方程式18)，故又可從聲速度求得之。見武岡 (§143) 之方法，原為此目的而想出。

172. 氣體之絕熱狀態變化。如於理想氣體內自外加入熱量Q，則此種能量在氣體內可起種種不同之作用。命氣體之重量為mg，其含有之分子能為U。因加入熱量Q，分子能變動dU，同時容積變動dV。此容積變化耗費加入之熱量Q之一部分，其值等於pdV。據能量原則（第一定則，§192），

$$Q = dU + pdV. \quad (6)$$

一種無熱出入之變化，曰絕熱狀態變化，故在此種變化中

$$dU + pdV = 0. \quad (7)$$

今含在一理想氣體量mg內之分子能量，據定容比熱 C_v 之定義，等於 $U = mC_v T$ ，故 $dU = mC_v dT$ ；又據方程式9，§162， $p = mRT/MV$ 。方程式(7)是以可改書如下：

$$mC_v dT + m \frac{RT}{M} \frac{dV}{V} = 0, \text{ 或 } C_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \frac{dV}{V} = 0 \quad (8)$$

將此方程式積分之，得

$$C_v \log T + \frac{R}{M} \log V = \text{常數} \text{ 或 } \log T + (\gamma - 1) \log V = \text{常數}, \text{ 式中}$$

$R/M = C_p - C_v$ 及 $C_p/C_v = \gamma$. 此式又可由下式代之

$$TV^{\gamma-1} = \text{常數}. \quad (9)$$

若再以 $T = pVM/mR$ 並以 mR/M 爲一常數，則得

$$pV^{\gamma} = \text{常數 } p_0 V_0^{\gamma}. \quad (10)$$

此式在絕熱狀態變化中代替波義爾·馬略特定律之方程式，後者在等溫變化中有效 (§98).

由方程式 9 表示一密閉氣體容積絕熱的減小或壓力絕熱的增加時，氣體之溫度增加，反之，減小。故氣體可由絕熱的壓縮而加熱，又可由絕熱的膨脹而冷卻。空氣之絕熱的加熱，例如當車胎灌氣時可以覺察，因當時唧筒先發熱。

關於理想氣體在絕熱容變中溫度變化之原因可作一完全直觀的設想。在是種容變中，容器之壁之一部分必起運動。今若氣體之分子與此運動中之壁相衝突，則其折回之速度與衝突前之速度不同，故當時之情形與由靜止壁折回之情形不同。以投在一動壁上之球爲例，當時若壁之運動方向與球投去之方向相反，則球以較大之速度彈回（如以網拍擊球）。反之，若壁向後退去，則球輕彈回失去一部分之速度。在前者情形中，運動之壁使球加速，在後者情形中，球耗去一部分之動能，使壁加速。同樣，當氣體之容積減小時，器壁向內運動，氣體分子反射後之速度增加，結果，氣體之平均分子能量增加，其溫度升高。在相反情形中，氣體分子反射後之速度遲緩，氣體之溫度降下。

若容變不由器壁之運動而起，但由開啓活潑，使氣體進入於另一空器內，則就理想氣體而言，當時並不作功，分子單以不變的速度流入（或擴散）於以前空虛之器內，故內能或溫度應不變。

然就適用凡得瓦爾之狀態方程式 (§ 164) 之實際氣體而言，則不

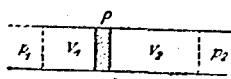


圖101. 示焦耳·湯姆遜效應。

盡然，而此由焦耳及湯姆遜下列之實驗證實之（焦耳·湯姆遜效應；Joule-Thomson Effekt; Joule and Thomson's effect）。兩人用一不易透氣之栓 P 將空氣移動於一不漏熱之管內（圖101），管內在栓之一側維持一壓力 P_1 而在他側維持一較低之壓力 P_2 。經栓移動之空氣當時冷卻。若空氣為理想氣體，則此冷卻當不致發生，而 P_1V_1 當等於 P_2V_2 ，但今因在空氣之分子間有凡得瓦爾引力作用，空氣較理想氣體尤易壓縮。容積減小時，分子相距愈近，而引力作用亦愈強，後者支持使容積減小之外力之作用。因此壓力較理想氣體所有者為大，而 $P_2V_2 > P_1V_1$ 。又當壓力減小時，空氣亦較理想氣體容易膨脹，因此，容積 V_2 較理想氣體所有者為大，故又 $P_2V_2 > P_1V_1$ 。今按 §150, P_1V_1 表栓壓縮氣體所耗費之外功， P_2V_2 表同時新得之外功。故在此過程中可得外功若干，氣體因作此外功，損失其內能，即損失其分子之速度，並因而冷卻。當膨脹時，同時氣體亦作內功冷卻，因氣體分子離開較遠，其相互位能增加，而此亦祇能取償於動能。

輕氣在室內溫度時，較理想氣體難壓縮，因而有相反之效應。其解釋根據氫分子有一特別之容積之事實（換言之，因凡得瓦爾定律中之常數 b 在輕氣中特別大之故）。溫度降至 -80°C （所謂轉變點；Inversionpunkt; inversion point）時，因內部反對內力之功極大，氣體開始冷卻。

在關於氣體內之聲速度之公式中（方程式18, §125），含有 $\gamma = C_p/C_v$ 之量，其故因壓變及隨之而起之溫度變化在有聲波通過之氣體內經過如斯之速，致在鄰近氣體分子間溫度不及平衡，故此種變化為一種絕熱變化，對於此變化，波義爾·馬略特定律不適用，而惟方程式10有效。

173. 比熱之測定。測定熱量之器械，曰量熱器或曰卡計（Kalorimeter; calorimeter）。最簡單之卡計，即為水卡計。此器為一瓷水之金屬容器。器帶複壁（中隔空氣，棉），以免漏熱。

命 m 表欲測其比熱 C 之物質之質量， C_m 故為其熱容量。次命 m' 表水之質量， $C' = 1$ 表其在卡計內之比熱， m'' 表卡計容器之質量及 C'' 其比熱，其熱容量(所謂水當量；Wasserwert；water equivalent) 故為 $C''m''$ 。假定水及容器之初溫度為 t_1 ，先將欲測之物體加熱至達 t_2 之溫度，例如先將其放在經 100°C 水蒸汽(加熱之容器內，故 $t_2 = 100^\circ\text{C}$)。次令該物體落於水內，攪水使勻，測其混合溫度(終溫度) t 。故水及容器之溫度增加 $(t - t_1)^\circ\text{C}$ ，而物體之溫度減低 $(t_2 - t)^\circ\text{C}$ 。前者所得之熱量為 $(C'm' + C''m'')(t - t_1)$ ，而後者所失之熱量為 $C_m(t_2 - t)$ 。依據能量原則(第一定律，§193)，此兩者必相等

$$C_m(t_2 - t) = (C'm' + C''m'')(t - t_1)$$

或

$$C = \frac{C'm' + C''m''}{m} \frac{t - t_1}{t_2 - t}$$

實際上，溫度計及攪拌器之溫度亦莫不隨之升高。同時更有一小部分之熱，由輻射逸散於空中。故欲求精確結果，非加以修正不可。此方法曰混合法(Mischungsmethode；method of mixture)。

液體之比熱亦可用相同之卡計測定，其時惟須以液體代水並用一種比熱已知者之物體(所謂輻射體)。在此情形中， C' 為欲測定之未知量

其他一種卡計，名曰冷卡計，見§175。

涅恩斯特曾說明多種特別對於測極低溫度時之比熱適用之卡計，其中依電法加一定之熱量於欲測定其比熱之物體內，然後測定其溫度變化。溫度亦依電法測定。

第十七章 物態之變化

174. 物態變化之種類。自然界之物體，就其狀態而言，可分為固體，液體及氣體，前已述之。加熱於一(結晶質)固體，則若固體不預先經過化學或其他變化(燃燒及其類似)，當其溫度增加至達某一定高度之後，固態過渡而為液態，換言之，固體溶解，俟全部溶完，加熱使達高溫之後，徐徐任其冷卻，在同一溫度復得固體。此溫度曰

溫度在 t_s freezing point 以下則在 t_s freezing point 以上則在 t_s boiling point 以下則在 t_s boiling point 以上則在 t_s boiling point 以上則在 t_s boiling point

該物質之溶解溫度或溶點 (Schmelzpunkt; Schmelzpunkt), 物質冷卻時, 既在同一溫度凝固, 故此溫度亦曰凝固溫度。就在平時為液體之物質如水及水溶液而言, 此凝固溫度通稱曰凝點 (Gefrierpunkt; freezing point)。事實上, 溶點與凝點之數值相等, 故兩者可視為在同一壓力下物體之固態與液態成平衡時之溫度。

液體不拘溫度之高低通常逐漸變化而為氣態; 換言之, 液體汽化而溫度愈高時, 汽化亦愈速, 令液體溫度上升至達一定溫度後, 其內部激急汽化, 集成泡狀, 向上升起, 是曰沸騰。此時之溫度, 曰沸騰溫度, 或沸點 (Siedepunkt; boiling point), 與汽化 (Verdampfung; vaporisation) 相反之過程, 曰凝結 (Kondensation; condensation)。與汽化相當, 自固態化為液態之過程並不存在, 但與汽化相當由固態化為氣態之過程確有之, 此過程曰昇華 (Sublimation; sublimation)。

第162 圖示由均勻加入熱量 Q 使物體溶解或沸騰時溫度變化之情形。在達溶點或沸點 t_s 以前, 物體之溫度依規則上升。俟達此溫度之後 (A), 溫度不再上升, 其時縱使熱量不絕的加入, 在溶解或沸騰未完終以前 (B), 溫度不致變化。此後溫度復上升。此溫度故可分明測定, 物體凝固及凝結之過程恰與上述之過程相反。

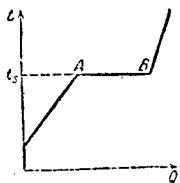


圖162. 溶解及沸騰前後之溫度變化, t = 溫度, Q = 加入之熱量, t_s = 溶解溫度或沸騰溫度。

一種分明的溶點惟真正固體所謂結晶質體有之。非晶質體之溶點概不分明 (§13及537)。當溫度增加時, 非晶質體先變為粘滯體, 終則變為稀薄液體 (玻璃, 白蠟, 地氈青)。以是在非晶質體之固態及液態之間並無顯明的境界。

與物體之狀態相當之三形態, 謂之物質之相 (Phase; phase) 故有固相, 液相及氣相之別。在一定之壓力下, 一物質祇能在完全一定之溫度 (即溶解溫度) 時可同時呈固相及液相, 在溶點 (隨壓力而異, § 177) 以上, 物質恆呈液相, 以下恆呈固相。在沸點 (亦隨壓力而異, § 181)

在 freezing point 以下恆呈固相, 在 boiling point 以上恆呈

以上，一物質祇能呈氣相，但在沸點及沸點之下可同時呈液相及氣相，此兩相當時互成平衡 (§ 180)。又在熔點之下，一物質之固相及氣相可平行存在，一物質之三相祇能在完全一定之壓力下及在完全一定之溫度時，即在三態之平衡點（所謂三相點；Tripelpunkt；triple point），同時存在。就水而言，此點與 $p = 4.6$ 毫米水銀之壓力及 $t = +0.0076^\circ\text{C}$ 之溫度相當。故摘要言之，

在熔點之下：固相及氣相；

在三相點：固相，液相及氣相；

在熔點及沸點之間：液相及氣相；

在沸點之上：氣相。

令液體徐徐冷卻，有時雖達熔點亦不凝固，如水可降低至 -4°C 而猶未凝固者（如水有油屑則更低），此現象，稱曰過冷（Unterkühlung；undercooling, supercooling）。今如搖盪之，或投入一固體細粒，則液體驟然凝固，同時溫度昇至凝點。

將不含空氣之液體自底層徐徐加熱，雖其溫度達於沸點亦不發生沸騰現象，溫度仍繼續上升，此後驟然激急沸騰，同時溫度降低至沸點，如是之現象，曰過熱（Siedeverzug；retardation of ebullition, superheating）。

在過冷或過熱狀態之液體，其內平衡之穩度極低，而祇須略許擾動，即可使之失去此種平衡而過渡至穩定平衡，換言之，此種液體係在介穩狀態中。

第十表舉示若干物質之熔點及沸點。

合金 (§ 190) 之熔點大概較其中所含之純金屬之熔點為低。例如洛茲合金（Rosesche Legierung；Rose metal； $2\text{Bi} + 1\text{Pb} + 1\text{Sn}$ ），在 95°C 熔解，伍德合金（Woodsche Legierung；Wood's metal； $1\text{Cd} + 1\text{Sn} + 2\text{Pb} + 4\text{Bi}$ ），約在 66°C 熔解。又如鉀鎊二者組成之合金在常溫時已為液體。

固體（結晶質）內之熱運動為其原子成分之在固定靜止位置左右

之振動。溫度愈高時，此種振動亦愈激烈。在溶解溫度時，此種振動已達如是之強度，致物體內之連絡解散。固體之有規則的狀態遂過渡至液體之不規則狀態。爲使原子組織解散及促成物質之原子成分之變化，須耗費功，換言之，須加熱能於物質之分子中，此種熱能，曰溶解熱(Schmelzwärme; heat of fusion).

在汽化及沸騰過程中，亦發生相當之情事。使液體汽化爲氣體尚須加入相當熱能於在溶解時已解散之原子中，此熱能，曰汽化熱(Verdampfungswärme; heat of vaporisation). 固有此熱能加入，分子分離愈遠，此已於以上討論氣態時述之矣。

175. 溶解熱。當固態結晶質體溶解時，其溫度停滯在熔點(在圖162中，AB線)，待熔完之後，溫度始繼續增加，此已於前節中述之。由此觀之，加入之熱量並非完全爲增加物體之溫度，但一部分用以作解散分子間連繫之功，換言之，供反對固體內連繫分子之力而作功之用。所謂一物質之溶解熱——亦曰潛溶解熱，因其不由溫度變化而表現——係指須加於1克物質使其在溶解溫度時由固態過渡至液態之熱量。反之，一液體凝固時，放出同量之熱能。此熱能散在物質周圍，是以當物質凝固時，物體雖散熱不已，其溫度不變。欲測定一物質之溶解熱，可仿前章 § 173 所述之混合法，將固體投入卡計內行之。

設欲測定一物質例如冰之溶解熱，將溫度爲 0°C 之冰投入盛水之卡計 (§ 173) 內。命水及卡計容器之溫度當初爲 t_1 ，冰溶解之後，變爲 t_2 ，冰之質量爲 m ，水之質量爲 m' ，入表以卡/克數計算之冰的溶解熱。又命 $C' = 1$ ，表水之比熱， C'' 卡計之比熱， m'' 表卡計之質量，故其

第十表 若干物質之熔點及沸點，以攝氏度計。當時之壓力爲760毫米水銀。

	熔 點	沸 點
鎂	+653	---
鋁	-189.6	-186
鎂	+327.4	+1625
鎂	+2300	---
鎂	-162	-33.6
鎂	+1064	+2610
鎂	---	-263.82
鎂	+2340	---
鎂	約+4600	---
鎂	+1033	+2310
鎂	+ 97.6	+877.5
鎂	+1767	約+3860
鎂	- 38.87	+ 357
鎂	-218.4	- 183
鎂	-210.92	- 103.67
鎂	-237.14	- 232.8
鎂	+2900	---

設欲測定一物質例如冰之溶解熱，將溫度爲 0°C 之冰投入盛水之卡計 (§ 173) 內。命水及卡計容器之溫度當初爲 t_1 ，冰溶解之後，變爲 t_2 ，冰之質量爲 m ，水之質量爲 m' ，入表以卡/克數計算之冰的溶解熱。又命 $C' = 1$ ，表水之比熱， C'' 卡計之比熱， m'' 表卡計之質量，故其

熱容量 $K = C''m''$ 。爲使冰之溫度升高至 t_2 ，必先令其溶解，爲此須有溶解熱量 λm 卡。次爲使 0°C 之水有 $t_2^\circ\text{C}$ 之溫度，又須有 $C'm_1 t_2$ 卡之熱量。故冰共吸收 $m(\lambda + C't_2)$ 卡熱量。此熱量取給於卡計及卡計中之水。由水輸出之熱量等於 $C'm'(t_1 - t_2)$ ，而由卡計供給之熱量等於 $C''m''(t_1 - t_2)$ 。據能量原則——假定無熱量損失——，由水及卡計輸出之熱量應等於由冰輸入之熱量，

故

$$m(\lambda + C't_2) = (C'm' + C''m'')(t_1 - t_2)$$

或

$$\lambda = \frac{C'm' + C''m''}{m}(t_1 - t_2) - C't_2$$

冰之溶解熱約 80 卡/克。第十一表表示若干物質之溶解熱。

第十一表 若干質物之溶解熱。

鉛.....	94 卡/克	銀.....	26.0 卡/克
鉛.....	5.5	石鹽.....	134
金.....	15.9	水.....	80
錫.....	41	鎂.....	6.1

利用冰之溶解熱以測定熱量之器具，曰冰卡計 (Eiskalorimeter; ice calorimeter)。在拉華西埃 (Lavoisier) 冰卡計中，由測定溶化之冰 (或溶化後之水量) 之多寡以定熱量。在本生冰卡計中 (圖 163)，測定冰溶化後留下之水量，而係由推測溶化後減少之容積 (§ 176) 而得。此器爲一帶複壁之玻璃容器，在兩壁之間盛水至滿，其下部連接盛有水銀 (q) 之毛細管 e。在內容器之周圍先附着一冰套 b，其溫度由應用一寒劑 (§ 190) 維持至 0°C 以下，次將欲測其比熱之質量爲 m 之物體加熱至某一定溫度 t ，放入於現今已冷至 0°C 之內容器內，則此體輸熱於冰，而自身溫度降低至 0°C ，結果遂有一部分之冰溶化。今命此溶化之冰量爲 m' ，則據能量原則

$$C_{int} = m'\lambda = 80m' \text{ 卡。}$$

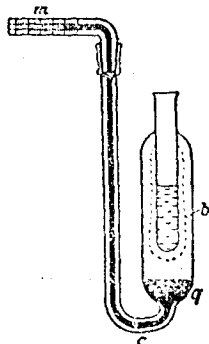


圖 163. 冰卡計。

因 m' 量之冰溶化，容積減少，毛細管內之水銀移向右方，移動之多寡可由標度 m' 測定。先測出毛細管內徑，則減少之容積，立可推知。按 0°C 之冰每 1 克溶成 0°C 之水，容積約由 1.09 立厘米收縮成爲 1.00 立厘米，故每 1 克所減少者爲 0.09 立厘米。由此可知溶化之冰之克數。又 0°C 之冰每 1 克溶化成爲 0°C 之水，約吸收 80 卡之熱，由此即可算出比熱。在此種測定中，除放入於容器內之物體之溫度外，其他物體之溫度均不變動，是以容器之熱容量在是處不發生關係（參見 § 177）。

176. 溶解時之容變。物質溶解時，其容積幾乎均改變，且以溶解時膨脹，凝固時收縮者居多數。少數物質例如水及鈹當溶解時收縮，凝結時膨脹。寒冬水管往往炸裂，即爲水凝固時容積增大所致。水之容變 (Volumänderung; change of volume) 約爲 9%。故水之密度顯較冰爲大，而冰則較水爲輕，以是之故，冰浮在水面，其容積之 1/10 露出水面，其 9/10 沉在水面之下。

水由凝固而膨脹之事實自然界中有重要關係。水循岩石罅裂滲入岩石中，以後凝固時驟然膨脹，致岩石炸裂，當春季冰溶解時岩石成塊裂下（春季山地岩崩之危險即緣此理）。岩石之冰結故爲一重要之擾亂因素。屋宇牆壁應塗灰以防有水侵入，俾牆壁可不受相同之擾動。水因凝固之膨脹可依下法表明。取一大小如拳厚約 1 厘米之空心鐵球，其內盛水至滿，封閉之後，置於寒劑內，水凝結爲冰時，球即炸裂（此種爆炸並不危險）。

任石蠟在試管中凝固，則石蠟顯出凝固時收縮之情形。因其先沿容器之壁凝固，其凝固之後，中間留孔。

鑄模之金屬須有因凝固而膨脹之特性，否則模型之組織不能畢現。如鑄活字用之活字金係由凝固時膨脹之錫 18%，與收縮之鉛 70% 及錫 12% 合成，結果成爲凝固時膨脹之合金。

177. 熔點與壓力之關係。結晶質固體之熔點隨外壓力之大小而略有差異。概括言之，凡溶解時膨脹者之物質，其熔點必因外壓力增

加而上升；反之，收縮者之物質，其熔點因外壓力增加而下降。準此，冰之熔點，每因壓力增加1氣壓升高 0.0075°C 。故若令溫度為 0°C 之冰塊受重壓力，則冰先熔解。爲此所須之潛熔解熱取給於冰自身，冰之溫度降下至與壓力相當之較低溫度，此後由冰自身不能再供給熱量，故若無外熱量加入，冰之熔解作用將立即停止，已熔解者，重復冰凍，此現象，曰復冰 (Regelation; regelation)。雪（由冰晶組成）經壓縮而爲雪球時，因壓力增加，雪在數處熔解，以後壓力減小，重復凝固，雪晶相併而成堅塊。冰河 (Gletscher; glacier) 冰質之受範性一部分恐亦因復冰而起。當冰河流入狹窄地帶時，因受較大壓力或擠力，致起局部熔解作用，結果，不但冰塊間可相對運動，即冰河寬度亦得調整而適於局處之狀況，如是冰河之冰如一粘滯液體可沿山谷流下。

在冰卡計中，可察見一種似奇異之事實，即在放入之熱體附近之冰反較最外面之冰容易熔解，其故因當初在內容器附近熔化而成之水有比較原來之冰之容積爲次之容積，故在是處壓力減小，使水之凝點降下，溫度略在 0°C 以上之水，重行凝固。此溫度傳遞至鄰近部分，而在是處復起相同之過程，如是將熱傳至冰套之最外限界，在是處之冰開始切實熔解。

關於熔點與壓力之關係適用克勞修司·克拉貝隆之方程式 (Gleichung von Clausius-Clapeyron; Clausius and Clapeyron's equation)

$$\Delta T = 0.0242 \frac{(V_1 - V_2)}{\lambda} \Delta p \quad (1)$$

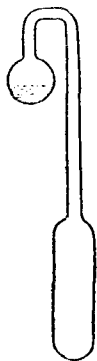
式中 T 表（絕對）熔解溫度， ΔT 表壓力變化 Δp 時熔解溫度之變化， V_1 及 V_2 分別表液相及固相之容度（比容）， λ 表潛熔解熱。由此方程式可導出本節之首段。 ΔT 爲正或爲負全視 V_1 大於或小於 V_2 而定。就水而言， $V_1 < V_2$ (§ 176)，故 $\Delta T / \Delta p$ 之值爲負。

在尋常壓力下，冰之熔點每因增加一氣壓，約下降 0.0075°C 。如用甚大之壓力，其熔點可達約 -20°C 之最低值。此後如增加壓力，則其熔點反上升。故方程式之效用顯有其限度，勃利克曼 (Bridgman) 曾用約20,000之氣壓而使冰之熔點上升至 70°C 左右。在各高壓

下所成之冰晶，其性質亦各各不同。

178. 汽化(或曰蒸發)。一物質汽化之原因為液體內分子之運動。在液體分子間作用之引力反抗分子昇騰至液體面之上(參考表面張力, §92), 故為移開分子於液體引力領域之外, 使其汽化(Verdampfen, vaporization; evaporation), 須耗費功若干。若一分子因其熱運動有所須之動能, 則可以動能償功。今據馬克士威定律(§157), 分子有各可能之速度, 換言之, 恆有多數分子自內部衝擊液面, 其中不少衝出而昇騰於液面之外。當溫度增加時, 換言之, 當液體分子之平均能量增加時, 衝出液面而以其動能償功之分子之數亦愈多, 故汽化與溫度有關, 而溫度愈高時, 汽化亦愈激烈。

經汽化作用, 液體恆失却速度最大之分子, 以是在液體內平均分子能量低落, 換言之, 液體冷卻。若欲維持液體之溫度, 使有一定不變之值, 則須加熱以償因汽化而失却之熱。



液體由汽化而致之冷卻, 不難從水察見之。自由靜止之水, 往往較四周略冷, 人體濕時, 因水在人體上迅速汽化, 人受寒較易(汗後受寒可感), 又若令風加速汽化(吹入空氣, 其液面增加, 而所成之蒸汽失散亦較速), 則能容易冷卻至遠在 0°C 之下。

吹空氣於熱食物上, 可令其冷卻加速, 因當時所成之水蒸汽失散較速, 水之汽化加速, 即食物之溫度降下亦較速。肉汁冷卻較難, 因在表面之油層有阻止汽化之作用。

引起極深刻的印象者, 為液體在凝冰器(Kryphor; cryophorus; 圖164)內經汽化之冷卻。此器為兩真空容器, 中間由一管連接, 真空容器內含水少許, 且因器真空, 其餘部瀰滿飽和水蒸汽(§180)。將水集中在上面球狀容器內, 並以一冷劑包圍下面之空容器, 飽和水蒸汽於是在下面容器內凝結, 然在上面球狀容器內仍有近房內之溫度, 故在是處水繼續汽化, 器內之水因而冷卻不已, 終至凝固。

Uppenrøstning af vand i et vakuumkøleskab.

179. 汽化熱。使1克之液體化為同溫度之蒸汽之熱量，係由物質種類而定，是曰潛汽化熱 (Verdampfungswärme; heat of vaporisation)。汽化熱量乃潛儲在蒸汽中，故當1克之蒸汽凝結為液體時，亦必放出同量之熱。冬季用汽爐暖室，即基於此理。汽化反抗分子力，使分子距離增加，同時反抗外力，使容積膨脹。兩者所須之功均取給於蒸汽熱，舊時視熱為物質，蘊藏於物質內，由汽化而得者，故有潛熱之稱，今雖常沿用此名，但意義已不同矣。

液體之汽化熱亦可用混合法 (§173) 測定之。例如欲測水之汽化熱 η ，令由汽錫用管導出之水蒸汽量 m 與在卡計筒內之水量 m' 相混合，使之凝結，次量水量溫度之變化。如卡計之水當量仍為 $C'm'$ ，混合後之溫度為 t ，水之初溫度為 t_1 ，蒸汽之溫度為 t ，蒸汽冷卻為熱後之比熱為 C' ，則照 §175 中關於熔解熱之方程式，得

$$m(\eta + C'(t_1 - t)) = (C'm' + C''m'')(t - t_1),$$

或

$$\eta = \frac{C'm' + C''m''}{m}(t - t_1) - C'(t_1 - t).$$

水之汽化熱 η 在 100°C 時為 539.1 卡/克，在 0°C 時為 595 卡/克，故如一般液體之汽化熱然，係隨溫度而異。又由下列之簡單實驗至少亦可約計水之汽化熱。試取一試管，盛水約至管之 $1/4$ ，置一本生燈於其下，並注意火焰確均勻燃燒（謹防為風所吹）。用一節拍器 (Metronom; metronome) 比較水自初溫度 t 加熱至 100°C 即至開始沸騰時所須之時間及自水開始沸騰後至水完全汽化時所須之時間。在實驗之第一階段內每克水須加之熱量為 $(100 - t)$ 卡，在第二階段內須加之熱量為 539.1 卡。如加熱均勻，則在兩階段內加入之熱量，其比例應與兩相當時間之比例相等，換言之，與在兩階段內節拍器之拍數比相等。若水之初溫度為 20°C 。則此兩時間成如 80:539 之比。

第十二表示若干物質在正常沸點時之汽化熱。水之汽化熱特高，此點應特別注意。

第十二表 若干物質之汽化熱。

酒精	202 卡/克	氫	51 卡/克
氣	321 卡/克	氧	48 卡/克
煤	80 卡/克	硫化氫	85 卡/克
氮	62 卡/克	水	539.1 卡/克
水銀	68 卡/克	氣	110 卡/克

180. 飽和蒸汽·蒸汽壓· 據往日之習慣，凡與其液體相接觸之氣體，統稱曰蒸汽。(吾人往日區別氣體及蒸汽，以為後者能凝結為液體，前者則不能，吾人今日已知一切氣體在適當狀況下均可變為液體 (§184.) 其實蒸汽即為氣體，今日蒸汽之意義常表與理想氣體顯然差異之氣體，因其較在理想氣體之氣體容易液化也。若以由浮游固體或液體微粒組成之雲為蒸汽，則實為物理的不準確，是種雲應稱為雲霧，水蒸汽則非目所能見者也。

試取一容器，盛一液體約至半滿，然後密閉之。液體遂汽化而彌漫於容器之餘部，但俟蒸汽達一定之密度後，液體不再汽化。此時在液體及蒸汽之間，發生所謂動力的平衡，換言之，當時有同多數之分子離開液體(汽化)及由蒸汽回入於液體內(凝結)。蒸汽之壓力既隨其密度而異，故最後在液面上發生完全一定之蒸汽壓力，所謂液體之蒸汽壓力(略稱汽壓; Dampfdruck; vapor pressure) 或飽和蒸汽壓力(Sättigungsdruck; saturated vapor pressure)。汽壓與溫度有關並隨溫度而增加。第十三表甲示汽壓與水之關係(或與冰之關係，參考 §203 之腳註)，乙示與水銀之關係，丙示與氮之關係。

第十三表甲 水(冰)之汽壓(蒸汽壓力)。

(溫度以攝氏度計。)

-60°	0.007 毫米	+40°	55.3 毫米
-40°	0.03 毫米	+60°	149.4 毫米
-20°	0.77 毫米	+80°	335.1 毫米
+0°	4.6 毫米	+100°	760.0 毫米
+20°	17.5 毫米	+200°	11655.0 毫米

第十三表乙 水銀之汽壓。

(溫度以攝氏度計。)

0°	0.0001849 毫米	60°	0.0277 毫米
15°	0.03681 毫米	100°	0.3506 毫米
50°	0.0022 毫米	356.7°	760.0 毫米

第十三表 水之汽壓 (絕對溫度)。

1.475°	4.15 毫米	4.0°	1320 毫米
3.516°	350.5 毫米	5.16°	16689 毫米
4.205°	757.5 毫米	5.2.°	17180 毫米

凡與其液體成平衡之蒸汽曰飽和蒸汽 (gesättigter Dampf; saturated vapor)。溫度增加時，飽和蒸汽之密度及壓力均增加，惟在一定溫度下，飽和蒸汽之密度及壓力有一定之值，且不因在液面上另有其他氣體（例如空氣）與否而稍異（參考分壓力，§ 97）。

為確定一液體在房內溫度下之蒸汽壓力可應用如托里拆利實驗中所用之裝置（圖 165）。先依 § 103 中所示之方法在管內水銀柱之上設一真空，次令欲測定其汽壓之液體從管之下端進達管內水銀之面上，因此時水銀面上之壓力不再為零，但又有液體之蒸汽壓力，水銀柱立即下降。在兩時間水銀柱之高差即表汽壓之大小，且為確保飽和，在管內恆須有該液體少許，又在托里拆利實驗中所用之管，其上端實際並非完全真空，但有水銀蒸汽之壓力，其值在房內溫度下約為 1/1000 毫米水銀。如管內導入之液體為水，則在 16°C 之溫度下，水銀柱約降下 12.8 毫米，而與 12.8 毫米水銀之蒸汽壓力相當，如導入酒精或醚，則水銀柱降下頗著，若將管昇沉或傾側，使管內蒸汽之容積或擴大或縮小，則當水銀面上仍有液體時，蒸汽壓力不致發生變化，蒸汽隨容積為相當的增減。



反抗汽化之分子力，如在 § 178 中所述，與表面張力發生密切之關係，換言之，即與將液面上之分子與向內部之單向力有密切關係。故除正常分子力外，又有其他之引力，故凝結作用容易發生。例如在空氣中恆存在之荷電灰塵，由其發出之電力（有吸引作用）有使水蒸汽容易凝結之作用而灰塵本身成為凝結核。然空氣中水蒸汽之凝結作用在廣大固體冷卻面上比較在水滴面上容易發生。空氣中之水在廣大冷卻面上凝結而為露 (Tau, dew) 時之溫度，謂之露點，其大小與水蒸汽之分壓力，換言之，與空氣之飽和度有關，且可用以確定空氣中水蒸

汽之量 (詳§206)。

181. 沸騰・沸點與壓力之關係・蒸餾・液體之沸騰實為一種汽化現象，唯當時液體之汽化不限於表面，但在液體內部亦發生，而尤以在容器之壁上為最。從液面下於是有汽泡不絕的上升，汽泡內飽和蒸汽之壓力與當時液體之溫度相當，且其大小至少與周圍液體之壓力相等，否則，在周圍較大壓力之下汽泡隨生隨滅，重復凝結而為液體。故液體沸騰時，其飽和蒸汽之壓力等於外面之壓力，在空氣中自由沸騰時，即等於大氣之壓力。然應注意者，汽泡在液體內部時尚須抵抗靜壓力 (§ 87)，故其溫度自必較大氣壓力下之蒸汽之溫度略高。欲準確測定沸點，故惟有測定直接在沸騰液體上之蒸汽之溫度。

沸點既為飽和蒸汽壓力與液面所受壓力相等時之溫度，而飽和蒸汽壓力係隨溫度而增加，故液體之沸點亦隨液面所受之壓力而異。第十四表表示水之沸點與氣壓之關係。關於較大壓力範圍內之變化另詳第

第十四表
水之沸點與壓力之關係。

壓 力	沸 點
720 毫米	98.40°C
730 毫米	98.89°
740 毫米	99.10°
750 毫米	99.63°
760 毫米	100.00°
770 毫米	100.37°
780 毫米	100.73°
790 毫米	101.09°
800 毫米	101.44°

十三表甲 (參 180)。設置溫度在 90°—95°C 之水於一可使成為真空之容器內，則當壓力下降至相當程度時，水即沸騰。在夠低壓力下，水且可在房內溫度時不加熱而沸騰。如有亞硫酸吸收液面上之水蒸氣，則試驗之結果更佳，蓋如此可令壓力降在飽和蒸汽壓力之下。在此情形中，汽化熱既不能隨須要立時由外面加入，故必取給於水自身之熱。水之溫度由是可降至 0°C，並在沸騰之際，同時凝固。汽泡穿過生成中之冰。

在高山之氣壓較低，沸點亦較低。例如在歐洲之長白山 (Mont blanc; 高 4800 米，空氣壓力約 420 毫米) 上，水之沸點約在 84°C 左右。高山探險者常利用此種關係以確定山之高度 (所謂沸騰氣壓計; Siedebarometer)。在高山上食物不易煮熟即因沸點降下之故，欲食物之易熟，常用一頂帶緊蓋之鍋。此鍋有一活瓣，當水蒸汽之壓力超過某一定壓力時，此瓣始開，水在其本身之較大蒸汽壓力下沸騰，故當時

之溫度當大於 100°C 。

令一液體汽化，再由冷卻使蒸汽重複凝結為液體之作用，曰蒸餾 (Distillation; distillation)。欲得純淨之液體(例如水，酒精，等)常應用基於此理之方法，若兩混合液或溶液中之溶劑及被溶質均可汽化，則蒸餾數次，方能得純淨之蒸餾物。每次兩液均有蒸出，但沸點較低者蒸出之量亦較多。例如溶液中含水及酒精各半，則因酒精之沸點較低，在凝結器內所得者將為含酒精成分較多之蒸餾液。若將器內之液再行蒸餾，則所得者，將為含酒精更多之液，如是累次蒸餾，即可得純淨之酒精。此種分離可混合液體之方法，曰分溜法 (fraktionierte Destillation; fractional distillation)。若被溶質不能汽化，例如在水溶液中之鹽類，則沸騰時惟水汽化。若令水汽蒸通過冷卻管，則可得純淨之水(所謂蒸餾水)。

182. 蒸汽密度。據亞佛加德羅定律，在同一狀況下，各種理想氣體每 1 立厘米內所含之分子數均相等，故是種氣體之密度與其分子量為比例，即與分子量為比例 (§96)。在有等大壓力及溫度時，理想氣體之密度與其分子量為比例，故由密度可計算分子量。

此方法對於能汽化之固態物質及液態物質亦適用。在是種情形中，名在 0°C 溫度及 760 毫米壓力下成理想氣體之物質之密度為其蒸汽密度(簡稱汽密度; Dampfdichte; vapor density)。多數物質在上述狀況下，不成與理想氣體夠接近之狀態。然若能確定物質在視為成理想氣體時之密度，則不拘當時之溫度及壓力如何，依據理想氣體之定律亦可算出其在正常狀況下(即 0°C 溫度，760毫米水銀)之密度。確定蒸汽密度，其方法種種不同，今舉維克多梅耶(Victor Meyer)之方法述之如下：取一開口小玻璃管R，管內盛入欲測定其蒸汽密度之物質若干，然後將管放在玻璃筒A之內，如圖 166 所示。玻璃筒熱至高溫度，故管放入後，管內物質不但立即汽化，且成與理想氣體夠接近之狀態，同時排去在筒底之空氣，後者由筒上之連通管進入倒置在水盆中之一量筒B之內。故進入B中之空氣，其容積與在A中排去空氣之汽化

物質之蒸汽容積相等。在A中經汽化之物質既如一理想氣體，而空氣又近似一理想氣體，故在各壓力及溫度變動中，兩物質之變化完全相

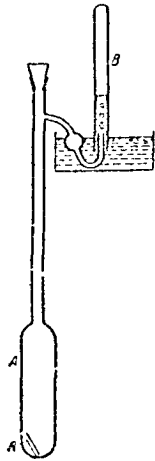


圖106. 依此法以
測定蒸汽密度。

同——假定汽化物質始終保持理想特性。準此，若經汽化之物質在A中被排去而進入於B中，則在上述之假定下，其容積必與實際進入B中之空氣相等，換言之，在B筒上讀出之容積即表汽化物質在與被排去之空氣相同之壓力及溫度狀況下成理想氣體而存在之容積。當時之溫度為房內所有之溫度，而壓力大都為大氣壓力，然仍須經兩種修正，一則因量筒中之水面比較外面為高，二則因筒內一部分之壓力係由飽和水蒸汽所發生。今可據氣體定律(§162)不難算出汽化物質在 0°C 及760毫米壓力下應占有之容積。若以此容積分該物質之重量，則得其蒸汽之密度。若密度不與水之密度為比例，但與輕氣之密度為比例(輕氣 $\text{H}_2=2$)，則所得之密度直接等於分子量(§96)。

183. 昇華。在能成昇華(§174)之固體物質上亦有隨溫度而異之蒸汽壓力。關於冰上之蒸汽壓力見第十三表甲，第十五表示在碘上之蒸汽壓力。

第十五表	碘上之蒸汽壓力
-48.3°C	0.000059 毫米
-32.3°	0.00052 毫米
-20.0°	0.0025 毫米
0°	0.029 毫米
15°	0.131 毫米
30°	0.469 毫米
81°	15.9 毫米
114.5°	99.0 毫米(沸點)
185.3°	769.0 毫米(沸點)

與溶解熱及汽化熱相當，是種物體又有昇華熱 (Sublimations-wärme; heat of sublimation)，後者，即為使1克之物質化成昇華所須之熱量。

冰雪等在零度之下，亦能漸次消失，因其表面隨時成蒸汽發散。

他如樟腦，麝香等，均有此種性質，與昇華生成作用相反之作用為霜直接由空氣中水蒸汽之生成作用及雪晶在上面冷氣層之生成作用，至嚴則為由水滴凝結而成之冰(§206)。

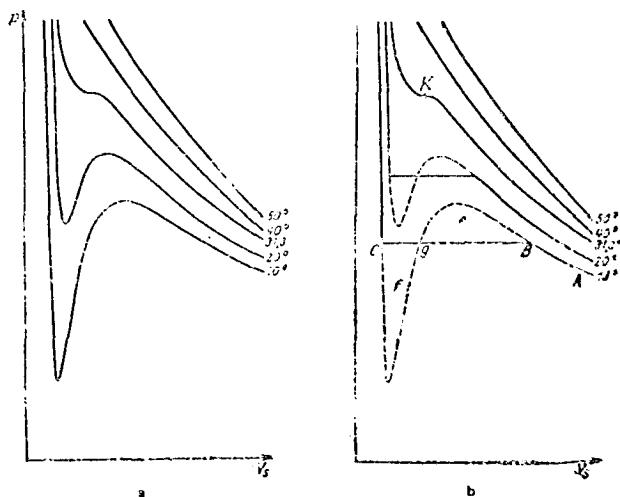
設於一真空玻璃容器內放入碘晶若干並令器壁之一點冷卻，則在是處由碘之蒸氣沉積固態碘，露出在空氣中之碘晶及某種水銀鹽類（例如昇汞 HgO_2 之類）概成昇華而消失。

185. 氣體之液化。在氣體之液化(Verflüssigung der Gasen; liquefaction of gases)過程中，由分子之立場觀之，係將分子置在某一定狀態，俾分子在其間之引力作用下得密切團結，恰如在液體中然(§ 527)。在有高溫度時，分子間之引力之所以不足使氣體變呈液態者，實因當時分子之熱運動反對分子密切團結過分激烈之故。

就多數氣體而言，縱使在尋常溫度下，此熱運動之作用可由减小氣體之容積，換言之，即由增加壓力以補償之。如是分子間之距離既極小，則分子間之引力足以使分子反對運動而為如成液態時之密切團結。是種氣體，例如綠氣，碳酸氣，酒精氣，二氧化硫等，在尋常溫度下可由應用夠高之壓力使其液化。其他氣體液化不易，而為使其液化，常須減低熱分子能量，換言之，須先令其冷卻，例如養氣，輕氣，淡氣，氫，一氧化碳等數種氣體，無論如何壓縮，均不能變成液體。此種舊時以為不能液化之氣體，認為與蒸氣不同，特名之曰永久氣體（或曰理想氣體）。其後因研究碳酸氣之液化，發見欲藉增加壓力以液化氣體，其溫度須在一定值之下，在此值以上，無論如何增加壓力，氣體終不能液化，但在此一定值之下，則氣體可液化。此最高溫度視氣體各有一定，名曰氣體之臨界溫度(kritische Temperatur; critical temperature)通常以 p_k 表之。在臨界溫度時，液化氣體所須之壓力，曰臨界壓力(kritische Druck; critical pressure)，通常以 p_k 表之。在此壓力及溫度下(所謂臨界狀態)，單位質量之氣體佔有之容積，所謂氣體之容積或比容，曰其臨界容積(kritisches Volumen; critical volume)，通常以 V_k 表之。其反值 $\rho_k = 1/V_k$ ，曰其臨界密度(kritische Dichte; critical density)。故在尋常溫度下由增加壓力即能液化之氣體（蒸汽）有較尋常溫度為高之臨界溫度。所謂永久氣體或理想氣體並無與其他氣體不同之處，僅其臨界溫度甚低決非普通寒劑所能

達到而已。分子引力之效力既與氣體之液化有重要關係，氣體在有臨界溫度以下之溫度時，顯然已遠離理想氣態，故當時適用凡得瓦爾之狀態方程式（方程式15，§164）。凡氣體，其服從理想氣體之定律愈甚者，其離臨界常態亦愈遠。

一氣體之臨界狀態及其液化可由凡得瓦爾之狀態方程式指出之。第167圖a示碳酸氣（可為其他氣體之標式）依凡得瓦爾方程式之等溫線，換言之，由此方程式表出之在定溫下之壓容（ p, V_s ）曲線（ $V_s =$ 容度或曰比容）今自A點起（圖167b）——其時 $t = 10^\circ$ ——，循等溫曲線以達B點，其間容積逐漸減小，換言之，壓力逐漸增加。達B點之後，若欲在等溫下繼續增加壓力，則不可能，又容積繼續減小時，壓力並不增加，但停住不變。此後氣體之過程不再循與凡得瓦爾方程式相當之曲線，但循水平直線BC。此直線切凡得瓦爾曲線於C點並在C點又與該曲線相併。此後狀態變化復循凡得瓦爾等溫線——實際氣體之等溫線（*Isothermen der wirklichen Gase; isothermals of actual gas*）· 圖167示狀態變化之實際情形。



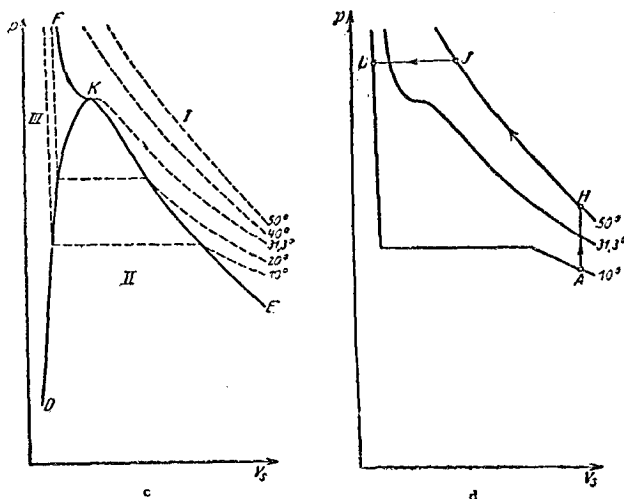


圖167. 與凡得瓦爾狀態方程式相當之曲線，示氣體之液化。

水平線BC表等溫狀態變化中氣體液化時之階段。液化作用始於B點而終於C點。在B點之右代表氣體，在B及C之間代表氣體（飽和蒸氣）及液體同時存在之狀態，在C點之左代表液態。與氣體及液體之壓縮性（彈性）之差相當，壓力在B之右方隨遞減中之容積增加遲緩，在C之左方增加極速。

曲線中水平部分BC之位置係經一條件決定，此條件為何，即理想凡得瓦爾曲線與該水平線所包圍之兩面積（ τ ）係等大是也。故如曲線所示，當溫度愈高時，此水平部分亦愈短。就關於碳酸氣之曲線而言，在31.3°C之等溫線中，此線縮短而成一點K（圖167b）。若溫度再增加，此種水平線不再存在，而氣體不能再液化。故溫度為31.3°C之等溫線當碳酸氣能液化時之最高溫度，換言之，碳酸氣之臨界溫度為31.3°C。K為臨界點（kritische Punkt; critical point），其坐標為臨界壓力及臨界容積。

若由一曲線（DKE, 圖167c）連接等溫線中各水平曲線之末端，則此線與臨界等溫線中之KF段共分狀態區域為三領域。在第I領域內

，物質祇能成液態，在第Ⅱ領域內，氣態及液態均存在，而在第Ⅲ領域內，物質完全成液態。

氣體不經過間斷液化過程亦能液化，例如自 10° 等溫線上之A點始，將碳酸氣在定容下加熱至 50°C (閱 167d, H點)，次在定溫下經壓縮而達J點，此後在定壓下復令其冷卻至 10°C (I點)，如矢首所示，物質今在第Ⅲ領域內，故無疑的已變成液體，在此情形中，氣態向液態之過度連續不斷，故與以上所述者不同，在 JL 徑路上，物質當越過臨界等溫線時，急速通過一特性的狀態，在此狀態時，並非如凝結時驟然由氣態變為液態，但連續不斷的由氣體之特性變化而為液體之特性，為便於觀察此現象及其相反之現象，將液體碳酸固閉在一玻管(所謂那脫萊管；Natterersche Röhre；Natterer's tube)內，若將管浸入熱水中(亦在 31.3°C 之臨界溫度以上)，則液體碳酸之表面消滅，發生條線，而碳酸不經過汽化或沸騰之手續，直接變為氣體，(注意！管之意外爆炸常甚危險。)

第十六表 若干臨界數據。

	t_k	T_k	ρ_k
氧氣	-241°C	15.0(磅)	0.433
液氧	-147.6°	314(磅)	0.39
氮氣	-118.8°	50(磅)	0.42
氫	-253°	2.3(磅)	0.065
液氫(氣)	$+130^\circ$	115.0(磅)	—
水蒸汽	$+365^\circ$	200.5(磅)	0.320
水銀蒸汽	約 $+120^\circ$	450(磅)	約 4

在第十六表中示若干

氣體之臨界數據(其中示臨界密度 $\rho_k = 1/V_k$ 以代臨界容積 V_k)，由表可知何故多數氣體在尋常溫度下不能液化之理由，氫之液化始於若干年之前，由卡謀林歐納斯(Kamerlingh Onnes) 告成

。如任液態碳酸由儲器突然流注在一絨物囊內，則碳酸經激烈汽化而強度冷卻，致有一部分凝固(碳酸雪)。

185. 空氣，氧氣及氫之液化，極低溫度。觀前節所述，可見液化多數氣體之技術的問題為如何使氣體冷卻至遠極低臨界溫度之下，在今日液態空氣已可大量製出以供種種之用，製造液態空氣之方法，在德國所用者，為林得法(Linde'sches Verfahren；Linde's methods)，其中為冷卻空氣所用之原理係根據焦耳、湯姆孫效應(§172)，先

將空氣壓縮，並將發生之熱量經冷却手續復行消滅之。次令空氣驟然膨脹，致發生低溫。此空氣圍繞在其餘空氣於器內之管外，使管內之空氣預先冷却。此預冷之空氣亦先經壓縮，次再膨脹，恰如初次冷却之空氣。如是，同一空氣在器內循環不已，逐漸冷却，終則降達 -140°C 之臨界溫度，此後經壓縮液化。

圖168 示林得空氣液化機之線圖。由O 進入之空氣進過一洗濯器W (內盛生石灰之類) 以除去空氣中之炭酸氣。在L 內裝一壓氣機，將空氣壓縮至200 氣壓，經T 處苛性鉀吸去水分，由管導至發冷機，

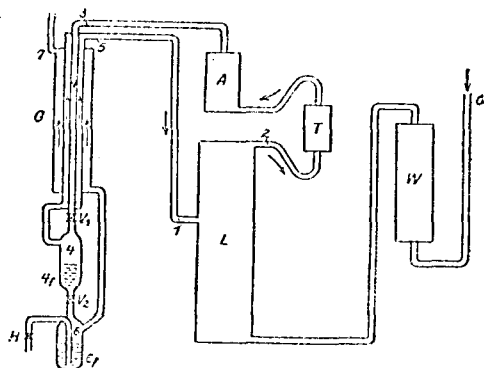


圖168. 林得氏空氣液化裝置。

空氣在是處先經冷却。V₁ 為一活門，其內空氣膨脹，強行冷却，當時液化之一部分聚在A 內，而冷空氣一面使新入之空氣預先冷却，一面上昇，經D 而回至壓氣機，再受同樣壓縮。由開啓活門V₂ 可將液態空氣放入於貯藏器G 內，並用活栓H 啓閉。經過活門V₃ 時，汽化之空氣在G 內利用其低溫之後，由管7 回至大氣中。

照此法液化輕氣，先須使輕氣之溫度在 -86°C 之下 (§ 172)。為此，用液態空氣使輕氣之溫度降至 -210°C 左右，當液態空氣迅速汽化時，以放出大量汽化熱之故，空氣冷却降至原來溫度之下。如是冷却後之空氣始依照液化空氣之手續使其液化，經過此手續之後，輕氣在 -241°C 之臨界溫度及15 氣壓之臨界壓力下液化。氮用液態輕氣預冷後，亦可照樣液化。液態氮有 -268.9°C ($=4.3^{\circ}$ 絕對溫度) 之溫度，其迅速汽化時可降至 0.6° 絕對溫度。在此低溫時，常察見液態氮內已結出固態氮之結晶。其他一切氣體在較高溫度時已成為固體 (參

考第十表，§174)。0.6°絕對溫度為現今所能及之最低溫度，距離絕對零度僅差0.6°C而已。

使物質達如是低之溫度頗饒實驗的興趣，因多數物質當時呈種種頗畢注意之性質(例如比熱，§511，超導性，§255)。

淡氣之沸點較養氣之沸點為低，故在液態空氣中，淡氣較養氣失散較速，是以液態空氣曝露不久，即極富養氣，將灼熱之木片浸入於其中，雖則當時溫度極低，木片呈着火欲燃之勢。在液態空氣之溫度下，水銀變為固體，且可打展，橡皮變硬而脆，鉛絲富有彈性。關於應用液態空氣以製高度真空參見§191。

第十八章 二元系

凡以二不同物質為代表之系，曰二元系(binäres System; binary system)

186. 溶體。兩種或多種不同物質(成分)混合後而成之液體或混合結晶，曰溶體(Lösung; solution)。其成液態者，特名之曰溶液。在溶體中，各物質混合之分量所謂量比多寡不一定，且在多數溶液中，例如水與酒精之溶液，此種量比並無一定極限。在其他溶液中，例如鹽類在水之溶液中，一物質在其他一物質中之溶解量有一定極限。此極限值係隨溫度而增加，曰溶解度(Löslichkeit; solubility)。凡已達此極限值之溶液，曰飽和溶液(gesättigte Lösung; saturated solution)。在此種溶液中，溶解量有一定極限之物質例如前例中之鹽類，曰被溶質。用以溶解被溶質之液體，例如水，曰溶劑。被溶質之量與溶劑之量相較，縱使在飽和狀態時亦極小，但仍有例外。單位容積內含有被溶質之質量，曰溶液之濃度。如因狀態變化，液內被溶質已超過其溶解度或最大濃度，其過剩之量，立即析出，然間或亦有保持於其內而一時不析出者，是曰過飽和(Übersättigung; supersaturation)。在溶劑內，被溶質分裂為分子或作更進一步之分裂(§267)。

固態溶體之一例如黃銅(銅與鋅之溶體)。各種溶液中，以固態

，液態及氣態物質之溶於水中者（所謂水溶液）為最重要，以下所論述者，亦以水溶液為限。水能溶解大多數物質，雖然，對於若干種物質僅能溶解其微量。職是之故，化學的純水不易獲得。

溶劑內之被溶質在多方面有如氣體之性質 (§189)。若溶一固體於一液體內或溶一液體於另一液體內，此作用在數點可與昇華作用或汽化作用相比擬。故至少在多數情形中，物質溶解時，耗費熱量，而液體冷卻。然有時因溶解之際又起化學反應，熱量反增加。所謂溶解熱 (Lösungswärme; heat of solution) 者，故可為正或為負。例如食鹽 1 克溶解於水，須吸收 18.92 卡之熱，故食鹽在水中之溶解熱為負，因當溶解之際，溶液冷卻。

187. 膠體溶液。在膠體溶液 (kolloidale Lösung; colloidal solution) 中，被溶質不裂成分子或原子存於溶劑內，但成較大之微粒，其大小然仍在一般視界之外。尋常所謂膠體溶液，其所含之微粒大都約有自 10^{-6} 以至 10^{-7} 厘米之直徑。至含有較大微粒者之溶液，曰懸體溶液 (Suspension)。膠體溶液例如膠體金溶液，視之似澄清，但用超顯微鏡 (§449) 視之，往往可識別其中所含之微粒。膠體溶液與懸體溶液之區別，在固前者之微粒用濾紙或較佳之濾器不能濾去，換言之，不能使與溶劑分離。又在用金着色之玻璃（紫赤色玻璃）中，金亦呈膠體狀態而存在。膠體溶液在生理學上有重要之作用。

膠體溶液有水乳的 (lyophile, hydrophile; lyophilic) 與水懸的 (lyophobic, hydrophobe; lyophobic) 之分。在水乳膠體溶液中，微粒係由分子團聚而成（例如在膠體蛋白溶液及其他有機物之膠體溶液中），而在水懸膠體溶液中，則由微晶團聚而成。此二者在多方面呈種種不同之理化作用。

188. 勞歐脫定律。溶液之沸點及凝固點。若溶解一物質於一液體內，則液體之蒸汽壓力低降，即在溶液上之蒸汽壓力比較在純溶劑上之壓力為小。茲命 p 表純溶劑上蒸汽壓力， p' 表溶液上之蒸汽壓力。設在 n 末之溶劑內含有 n' 末之被溶質。此二者之比例 $n'/n = k$ ，曰

溶液之末分數 (Molenbruch). 據勞致脫定律 (Raoult'sches Gesetz; Raoult's law),

$$\frac{p-p'}{p} = \frac{n'}{n} = \mu. \quad (1)$$

蒸汽壓力之降低量, 故與被溶質之末數為比例。在溶液上之蒸汽壓力既較在純溶劑上之蒸汽壓力為小, 故前者沸騰時其溫度比較後者沸騰時為高 (§ 181). 由是觀之, 溶劑溶解物質之後, 其沸點上昇, 今以 Δt_s 表之。其大小與蒸汽壓力之降低量為比例。

$$\Delta t_s = \text{常數} \times \frac{n'}{n} = \text{常數} \times \mu. \quad (2)$$

如溶劑及被溶質之質量分別為 m 及 m' 克, 又命溶劑之分子量為 M , 被溶質之分子量為 M' , 則 $n = m/M$ 及 $n' = m'/M'$, 因此, 末分數 $\mu = m'M/mM'$. 準此, 方程式可改書如下

$$\Delta t_s = \Lambda_s \frac{m'}{m} \times \frac{1}{M'}. \quad (3)$$

在此式中溶劑之分子量含在常數 Λ_s 內。此常數祇視溶劑之性質而定, 而與被溶質無關。據方程式 3, 1 末之被溶質溶解於 100 克之溶劑內時, 溶液沸點之上昇量等於 $\Lambda_s/100$, 此量謂之分子沸點之上昇量

據同一原理, 溶液之凝固點比較純溶劑之凝固點為低。表示凝固點下降量之方程式與方程式 3 完全類似, 但帶有負符負, 即

$$\Delta t_g = -\Lambda_g \frac{m'}{m} \times \frac{1}{M'}. \quad (4)$$

又在是處, Λ_g 常數祇與溶劑有關, 而與被溶質無關。照樣 1 末之被溶質溶解於 100 克之溶劑內時, 溶液凝固點之下降量, 據方程式 4, 等於 $\Lambda_g/100$, 此量謂之分子凝固點之下降量。

由沸點之上昇量或凝固點之下降量均可確定被溶質之分子量。如已知關於一溶劑之分子沸點之上昇量或凝固點之下降量, 則可依據方程式 3, 或 4, 計算被溶質之分子量, 當時僅須確定 m' 克被溶質溶解於 m 克溶劑後, 沸點或凝固點之昇降量。

若干物質在溶液中分離或分裂，故不完全遵循(3)及(4)方程式，其故因各分裂體有如一分子之作用， n' 之數（方程式1）增加，而蒸汽壓力更減小。

189. 滲透作用。 溶液中之溶劑及被溶質可隔一半透膜進行擴散；例如水可透過此種半透膜而被溶質則否。如圖169，命H表是種半透膜。在其右側，例如有硫酸銅溶液L，在其左側有純水R。當初兩管盛液至相等之高度，但不久純水面降低，硫酸銅溶液面升高，而溶液之濃度愈大時，其高差 h 亦愈大。此後雖歷久長時間亦不再增。在一6%之糖溶液中，一側之過量壓力可達4氣壓。此種現象恰如從半透膜自純溶劑一側向溶液之其他一側作用某一定大之壓力。此種作用，曰滲透作用 (Osmosis; osmose) 而在一側之過量壓力，曰滲透壓力 (osmotischer Druck; osmotic pressure)，凡特荷夫 (Van't Hoff) 曾指出此壓力與被溶質成理想氣體在溶液中佔有等大空間時所有者相等。

有時兩側之物質均可透過隔膜，但其中一物質透過隔膜較速，例如水及酒精經豬之膀胱膜隔開時然。

為證明滲透作用，再取一無底之瓶，以膀胱蒙於底上，然後以飽和硫酸銅溶液注入於其內，另用一較大之器，內盛加酸類少許之水，取上述之瓶浸入水中，瓶外之水透過膀胱滲入瓶內，瓶內之硫酸銅溶液則否，故瓶上所插之細管中之液面，漸次升高。凡在動植物細胞內之物質透過細胞進出，皆屬此種滲透作用。

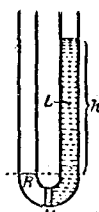


圖169. 示滲透作用。

根據凡特荷夫及阿海尼斯 (Arrhenius) 之意見，方程式1啓示滲透壓力依量的解釋之可能性。在一閉器（圖170）之底有一純溶劑R，其上蒙一半透膜。在膜上之一物質之溶液L亦在同一溶劑內，且與膜下之溶劑成平衡。在溶液上之空間假定充滿溶劑之飽和蒸汽，命其密度為 ρ_1 ，溶液及純溶劑之密度假定均近於 ρ_2 。又蒸汽在純溶劑上壓力為 p ，

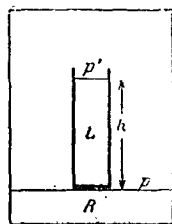


圖170. 示滲透壓力之計算法。

在溶液上之壓力為 p' ，溶液內之滲透壓力為 P 。如以上所述，此壓力從半透膜向溶液施一力之作用。關於在半透膜水平面之靜平衡，可就關於氣體者及關於液體者分為兩項。前項為 $p = p' + \epsilon_1 gh$ (§104)，後項為 $p + P = p' + \epsilon_2 gh$ (§87)。由此方程式得 $P = (p - p')(\epsilon_2 - \epsilon_1) / \epsilon_1$ ，但既然 ϵ_1 與 ϵ_2 相較極小，故

$$P = \frac{p - p'}{p} \cdot \frac{p}{\epsilon_1} \cdot \epsilon_2 = \frac{n' p}{n \epsilon_1} \epsilon_2$$

(參見方程式1)。今據 §162, $p / \epsilon_1 = pV_s = pV_m / M$ ，其中 V_m 表一末之溶劑在氣態時之容積， M 表其分子量。於是得

$$P = \frac{n' p V_m}{n M} \epsilon_2$$

但 nM 表溶劑質量之克數，故 nM / ϵ_2 表溶劑之容積 V ，又表溶液之約略容積，以是 $nM / \epsilon_2 n' = V / n' = V_m$ ，表1末被溶質在溶液中所佔之容積。據此，則

$$PV_m = pV_m = RT. \quad (5)$$

故滲透壓力服從理想氣體之定律 (§162)。

190. 易融合質·冷劑· 試取一溶液，徐徐使冷至達凝固點以下，最初僅有溶劑，成固體析出，例如在水溶液中有純粹之冰析出。終則因溶劑析出不已，溶液達其飽和狀態。若繼續使冷，溫度不再下降，當時被溶質與溶液以一定之量比成固體析出，是為易融合質(Kryohydrat; cryohydrate)。當時由析出物放出之熱，原為溶劑之溶解熱及溶解熱為負時被溶質之溶解熱 (§180)，換言之，原為溶液內之潛熱。此後溶液之成分不變，雖繼續失熱，溫度不再降下。

以 0°C 之冰與食鹽混合，食鹽溶解，成為食鹽濃溶液。當時一方面須有熱使冰熔解，而一方面又須有熱使食鹽溶解（因食鹽有負溶解熱）。此熱量係取給於冰鹽混合物，故全體冷卻，降至 -22°C 以後，溫度即不再降，此後冰及食鹽以 3:1 之比開始成冰鹽合質從溶液中析出。凡如此類，利用兩種或兩種以上之物質，互相混合，可得相當之低溫，如是之混合體，曰冷劑 (Kälttemischung; freezing mix-

ture).

又兩種或兩種以上之金屬相混合而呈液態時，可視作一溶液，其凝固情形亦與此同。當溫度降至一定點之後，各金屬以一定之比例共同析出，如是所成之合金，曰易融合金 (Eutektikum; eutectic)。例如使鉛錫各半之合金液徐徐冷卻，當溫度達 220°C 時，鉛開始凝固（因與錫混合之故，其凝固點較純鉛之凝固點 327°C 為低，見 § 174）。此後如冷卻不已，凝固之鉛益多，終至溫度為 189.5°C 時，鉛與錫以 37:63 之比成易融合金析出。若含錫較多，則過多之部分在 200°C 時開始先析出，終則在 189.5°C 時，鉛與錫亦以 37:63 之比成合金析出，如鉛與錫原成 37:63 之比，則溫度下降時，二者將不單獨析出，而待溫度降至 189.5°C 時，全部開始凝固。此 189.5°C 溫度為鉛錫合金之最低熔點。

191. 吸收。氣體溶解於固體或液體中時，曰吸收 (Absorption; absorption)。其溶解於固體中時，亦曰吸留 (或曰吸覆; Okklusion; occlusion)。

物質吸收氣體之本領依性質而異，固體中以多孔質之木炭最著。試取已曝露在空氣中約一月之久之木炭一方，沉在盛水之容器之底，以後將容器置在空氣彈筒之罩內，當減低罩內之壓力時，見有多數之汽泡自木炭發出以達水面。為除去罩內全部之空氣，罩上附管，其內裝椰子胡桃炭，後者以液態氧氣或液態空氣從外使其冷卻。炭之溫度可降至 -200°C 。在此低溫之炭能吸盡罩內全部之空氣，但不能吸盡稀有氣體（第十七表）。

第十七表 氣體之吸收。

	1升之水在760毫米壓力下		質物木炭在 -183°C 時吸收其本身容積之倍數
	0°C	-20°C	
H ₂	21.1 立厘米	18.1 立厘米	135
O ₂	48.0 "	31.0 "	230
N ₂	23.5 "	15.4 "	153
H ₂	9.7 "	10.0 "	15
CO ₂	1800 "	991 "	193
NH ₃	1.2×10^{61}	0.7×10^{61}	

又液體亦能吸收氣體。在原則上此種吸收與氣體溶解於液體中無異。水吸收大量磷精氣及碳酸氣，稀量其

他氣體，如淡氣及養氣。水吸收養氣之本領比較吸收淡氣之本領為大。水產物呼吸水中之養氣，故此點對於水產物頗為重要。

關於液體所能吸收之氣體之分量，則有亨利定律 (Henry'sches Gesetz; Henry's law, 1803) 如下：一定量之液體在一定溫度時所能吸收之最大分量與此氣體在液體表面上所呈之壓力為正比例。汽水，及酒等，皆用極大之壓力使多量之碳酸氣吸收於水內而成。故壓力一去，此氣立即逸出。如在空中曝露較久，氣體終則全部逸出，而皮酒遂變無味。若在液體中含有多種氣體，則亨利定律僅對於各氣體之分壓力而並非對於全壓力有效。

又溫度愈高時，液體所能吸收之氣體分量愈減。例如用玻璃杯盛天然水熱之，當其尚未沸騰之前，先有若干之氣泡附着於器壁，此種氣泡皆為以前被水吸收之空氣，今則因加熱而逸出者。

上面第十七表示若干氣體在水中及木炭中之吸收量。

圖 171 示用胰皂泡吸收氫氣之實驗。在一帶蓋之玻璃杯內，置鹽

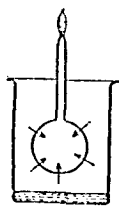


圖171. 氫之蒸氣通過胰皂泡之擴散。

，並將胰皂泡置在杯內，則片刻之後即在管之他端可點火以燒氫之蒸氣，蓋氫之蒸氣在泡外溶解於泡中，但在泡內一部分復放出（氫氣壓力內外相等時方成平衡）。此作用頗似擴散，但其實完全不同。

固體之表面上通常集有多量氣體，是曰吸附 (Adsorption: adsorption)，因其為一種限於表面之現象，故與吸收不同。其發生因被吸附之氣體之分子對於吸附體之分子起大引力作用，致有密層分子被吸附於後者之表面。例如多孔質之木炭可吸附本身容積之90倍，二氧化硫可吸附65倍。又如鉑，鋁等金屬表面能吸附輕氣，皆最顯著之例。

嚴格言之，氣體在多孔質木炭內之吸收亦可視作吸附。因木炭內外有無數之小孔，故其表面頗大，氣體即密集於此種小孔之表面上。

第十九章 熱力學之三定律·熱量與功·

192. 熱力學第一定律· 就本性言之，熱既為分子能之一態，故熱量必服從關於能量之能量原則或能量不滅律 (§42)。換言之，凡成熱態存在之能量不得被消滅於烏有，而至多變為呈其他態（機械能，電能等）之能量。此事實於熱之機械說中已一再言之矣。能量原則應用於熱能時，常名曰熱力學第一定律 (erster Hauptsatz der Wärmetheorie; first law of thermodynamics)。此原則當初由一德醫名梅耶 (Julius Robert Mayer) 在1840年所宣布，以後經赫爾姆霍爾斯 (H. Helmholtz) 及其他推廣至成為自然律之一。

設命 U 表一物體之內能或分子能。當物體發生熱狀態變化時，往往不但其內能變異，且因其容積增減之故，物體常須作相當之功，容積增加時，所作之功為正，減小時為負。據第一定律，加入於物體內之熱量 Q 必等於所作之外功 A 及物體內能之增加 ΔU 二者之和，即

$$Q = \Delta U + A. \quad (1)$$

此事實例如在 §171 中已利用之矣。其中氣體一部分之比熱 C_v 供變異氣體內能之用，而其餘部分 $C_p - C_v$ 供作外功 $A = p \Delta V$ 之用（又參考 §172）。

ΔU 包括一物體內能量之各種變化，故不僅分子動能之變化，即與潛熱（溶解熱，汽化熱等）相當之能量亦屬之。

193. 熱功當量· 熱量既為分子能量，故熱量亦可以力學中表示能之單位之爾格代卡單位表示之 (§46)。與1卡相當之爾格數，曰熱功當量 (mechanisches Wärmeäquivalent; mechanic equivalent of heat)，其反數即為能卡當量。熱功當量當初經焦耳由實驗確定，以後經梅耶依理算出。

焦耳用一如圖172所示之裝置。其下部為一卡計，內有攪拌器 a 及固定隔壁 b ，以阻碍水之流動，於其軸上纏線經兩滑輪，下懸重錘，以使攪拌器轉動。當此器轉動之際，水通過隔壁及攪拌器裂板之狹處

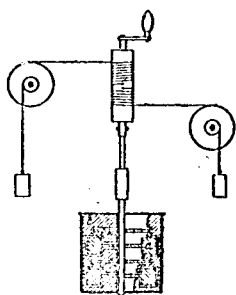


圖172. 示焦耳測熱功當量之方法。

，致在水內發生大量摩擦，因此之故，重錘落下極緩，不致因此而得顯著之動能，但其位能則經摩擦（§194）完全變為容器內水中之熱量。命兩錘之質量為 m 克，錘降下 h 厘米時，重力對錘所作之功等於 mgh 爾格。又命水及容器所增加之溫度為 t ，其熱容量（以卡/度）為 K ，故所加之熱能等於 Kt 卡。據能量原則，知

$$mgh \text{ 爾格} = Kt \text{ 卡}, \text{ 或 } 1 \text{ 卡} = \frac{mgh}{Kt} \text{ 爾格}.$$

梅耶依下列方法計算熱功當量。在一圓筒內裝入 1 立厘米之理想氣體，其溫度為 0°C 。次以一活塞固閉，並於活塞上由外施一定之壓力。將氣體在定壓 p 下加熱，使其溫度昇高 1°C 。其時增加之容積當為 $\Delta V = 1/273$ (§163)，故氣體反抗作用於活塞上之外力而作之功為 $p\Delta V = p \times 1/273$ 爾格。此功係由加入於氣體內使溫度增加 1°C 之熱量而來。據 §171，在定壓 p 下，1 克分子由膨脹所作之功等於加入之熱量之一部分，即等於 $C_p - C_v = R/M$ (R 普遍氣體常數， M 分子量)。如用 1 立厘米（密度 ρ ）或 ρ 克氣體，則所作之功當大 ρ 倍，故 $p\Delta V = \rho \times R/M$ 。據能量原則，

$$p/273 \text{ 爾格} = \rho \frac{R}{M} \text{ 卡}.$$

假定氣體受 760 毫米之壓力。於是據 §103, $p = 1.0133 \times 10^6$ 達因/方厘米。 ρ/M 之比在等壓下不因氣體而異，即等於 $1/V_m$ (V_m 克分子容積 §96)，如以輕氣為例， $\rho = 0.00008985$, $M = 2$ ，故 $\rho/M = 0.4493 \times 10^{-4}$, $R = 1.98$ 卡/度末時

$$1.0133 \times 10^6 / 273 \text{ 爾格} = 1.98 \times 0.4493 \times 10^{-4} \text{ 卡},$$

或 1 卡 = 4.17×10^7 爾格。依精密實測之結果

$$1 \text{ 卡} = 4.186 \times 10^7 \text{ 爾格} = 4.186 \text{ 焦耳} = 0.437 \text{ 米仟克}$$

或 $1 \text{ 焦耳} = 778 \text{ 呎磅}$

(§40). 故使1克之水之溫度增加 1°C 時所須之能量等於149克之質量自由落下0.427米之距離後所有之動能。

194. 由機械功化熱·摩擦·功化爲熱之可能性，自古知之（冷手摩擦發熱，摩擦或打擊發火，軸轉動經久發熱等）。一動體經摩擦作用而起之動能損失，其大部分即化爲熱，然熱亦可從別種能例如電能 (§260) 及化學能 (§203) 變成。

剛體面間之摩擦 (Reibung zwischen festen Flächen; friction between faces of rigid bodies) 常引起顯著之影響而在大多數情形中，虛耗機械功。除不計直接的破壞作用(摩擦面之摩擦)外，當面間發生摩擦時，摩擦體之動能一部分變爲其分子之不規則的動能，換言之，變化爲熱。

由剛體面間摩擦而起之阻尼力或摩擦力隨面間相互之壓力而增加。爲克服此種阻尼力以使物體運動，常須用一定大之力。物體在斜面上時，若斜面之斜度不超出隨狀況而定之一定值（所謂摩擦角或靜止角），則物體在重力作用下尚不能運動。但若將斜度逐漸增加，當其值超過此一定值之際，物體開始運動。如在兩平面間作用之力不變，面間之摩擦不因面之大小而增減，或僅略有關係，其故因面上難免凹凸不平，面與面之間，往往僅在數點實際接觸，而摩擦力即在此數點上。

爲使在一平面上之靜止體沿平面開始運動，常須依運動之方向施某一定大之力，今命 k 表此種與摩擦力相抗之力， Q 表直壓力，則當直壓力非過大時，

$$k = \mu Q,$$

式中之 μ 爲一常數，其值由接觸面之性質而定，與接觸面之大小無關，通稱曰靜摩擦係數。物體將動以前所現出之摩擦，曰靜摩擦 (statische Reibung; static friction)。

反之，物體運動時之摩擦，曰動摩擦 (kinetische Reibung; kin-

etic friction), 兩接觸面間之相對運動及直壓力不甚大時, 動摩擦亦與直壓力為正比例。試命 k 表動摩擦, Q 表直壓力, 則得

$$k = \mu Q$$

之關係。式中之 μ 曰動摩擦係數, 其值較靜摩擦係數 μ_s 為小。動摩擦及靜摩擦常合稱曰滑動摩擦 (gleitende Reibung; sliding friction), 其係數曰滑動摩擦係數。

又作轉動之物體, 如沿他物體之接觸面滾動, 亦起摩擦作用, 是曰滾動摩擦 (rollende Reibung; rolling friction)。例如車輪在軌道上滾進時, 輪下之軌凹下, 輪前之軌拱上, 以妨礙輪之前進, 是即滾動摩擦之主因。命 k 表滾動摩擦, Q 表直壓力, r 表輪半徑, 則得

$$k = \varphi \cdot \frac{Q}{r}$$

之關係。 φ 為一常數, 曰滾動摩擦係數, 其值較滑動摩擦係數為小。

又飛機或鳥類在空中飛行, 受空氣之抵抗作用; 船舶在水中進行, 受水之抵抗作用; 自來水, 煤氣等在管中流動, 受其管壁之抵抗作用; 如是者, 概稱曰流體摩擦 (Reibung von Flüssigkeiten; friction of fluids)。

摩擦係數等於零之接觸面, 曰完全滑面; 反之, 摩擦係數無窮大之接觸面, 曰完全粗面。物體之在完全粗面上者, 無論施以任何大之力亦不能滑動, 故僅可有滾動發生。然實際上所經驗之面, 均在此兩種理想面之間, 既非完全滑面, 亦非完全粗面。

摩擦阻碍物體之運動, 虛耗動能, 極不經濟。欲減少摩擦, 務使接觸面成為滑面, 並於面之間, 塗機械油, 石墨等滑劑, 滑劑阻止面間直接的接觸, 摩擦作用於是在滑劑間進行, 其力大減 (內摩擦)。

又滾動摩擦一般遠較滑動摩擦為小, 故利用滾動以代滑動, 亦為減少摩擦效應之一法。輪之應用一方面即基於此理。在輪軸上概有滑動摩擦, 如圖 173 所示, 將一輪之軸 A , 跨在兩輪之上 (所謂摩擦輪);

(Friktionsräder; friction wheel), 則因當時祇有滾動摩擦, 反抗軸之摩擦力矩之力矩較大, 軸之轉動較易。依同一原理, 在車軸及其軸承之間, 夾入若干鋼珠, 後者係配置在塗有滑劑之槽內 (所謂球軸承; Kugellager; ball bearing; 圖174)。

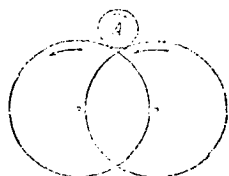


圖173. 摩擦輪傳動。

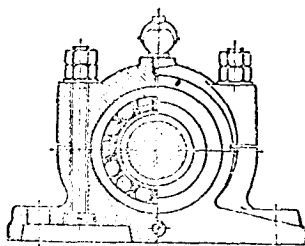


圖174. 球軸承。

當一物體反抗摩擦力 k 而移進距離 s 時, 其所作之功應為 ks 。命 W 表物體所受之重力, μ 表摩擦係數, 則物體所作之功, 等於 $W\mu/s$ 。若命 v 表此時物體沿地面進行之速度, 則其功率等於 $W\mu/v$ 。

再就用輪移動物體之例言之。命 R 表輪之半徑, r 表軸之半徑, 物體沿地面進行 s 路程時, 軸之表面當移動 $s \times \frac{r}{R}$ 。命 μ' 表軸及軸承間之摩擦係數, 則其功率當為 $W\mu'v \times \frac{r}{R}$ 。與直接沿地面移進之結果相比較, 得 $\frac{W\mu'vr}{R} : W\mu = \frac{\mu' r}{\mu R}$ 之比。軸及軸承間塗有滑劑, 或用球軸承, 故 μ' 之值遠小於 μ , 同時輪徑 R 亦遠較軸徑為大, 故輪因摩擦所耗之功, 遠在直接沿地面進行時所耗者之下。通常搬運重物, 概用車輪, 即基於此理。

195. 熱力學第三定律。簡。熱力學第一定律或能量原則說明世上決無不消耗能量而能永久作功者之機關。如是之機關, 曰第一種永久機關 (Perpetuum mobile erster Art; perpetuum mobile of the first kind, §42)。換言之, 熱力學第一定律否認可造出第一種永久機關。然此定律亦不謂可造出能從熱源取出熱能, 使之變為機械功之週期性機關。苟有此種機關, 則例如可利用海洋中巨量之熱, 使之變

爲機械功，同時使海洋逐漸冷卻，如是之理想機關，曰第二種永久機關 (Perpetuum mobile zweiter Art; perpetuum mobile of the second kind). 熱力學第二定律否認可造出第二種永久機關。據波郎克 (Planck) 此定律之說法如下：吾人不能造出一種有週期性作用之機關，其作用僅爲使熱源冷卻而同時起重。苟有是種機關，則其不但爲一工作機且又爲一發冷機。據克勞修司 (Clausius) 之說法云：一自動機關決不能將熱量自溫度較低之物體輸至溫度較高之物體。又據禮氏 (Kelvin) 之說法云：世間決無一永久無生機關，其可使物質之一部分冷卻至其周圍溫度以下而由此取出機械功者。

爲完成此思想，克勞修司舉出一量，而名之曰熵 (Entropy; entropy)。一物體或一組物體之熵 S 可由下列微分方程式規定之

$$dS = \frac{dU + p dV}{T}, \quad (2)$$

式中 dS 表起極小狀態變化時發生之熵變， dU 表物體內能之變化， $p \times dV$ 表外功， T 表絕對溫度。第二定律今可有如下之說法：在各物理的過程中，凡參加該過程之諸體之熵變之和 dS 恆等於或大於零，

$$dS \geq 0. \quad (3)$$

或依其他字句：一體系之熵量祇能增加，決不能減少 (克勞修司 1850，禮氏 1851)。

故如已知初始狀態，則可依據第二定律計算一過程此後進行之方向及末後可達到的狀態。試令若干在任何初始狀態之物體互起熱的交換作用，其末後之狀態或終狀態可由二條件算出：第一，凡參加該過程之各物體之總能量不變(第一定律)，第二，一物體系之熵量有最大可能之值(第二定律)。

方程式2及3僅爲完全起見而舉出，其實爲計算終狀態可以不顧。

關於熵之本性曾由波爾茲曼 (Boltzmann) 明白解釋。今設想一特別簡單之情形而以理想氣體爲例。其全般分子應有一定之能量 U ，但此能量在各分子上之分配，各分子之運動方向及其在空間之分配，當初仍極任意。例如能量 U 可完全分配在少數分子上，或平均分配在

各分子上，或全般分子依同一方向運動，或密集在容器內之一隅，縱使已知能量 U ，容積 V 及分子數，然能量在分子上如何分配，容器內分子速度依各方向如何分配及分子在容積 V 內如何分配，仍可有種種不同之情形。

今設想第1分子有能量 E_1 ，第二分子有能量 E_2 ，如是類推，其和必等於總能量 U 。又設想各分子運動之方向及在容積 V 內之位置均經說明，如是則氣體之瞬間狀態始得完全確定。此種各分子依一定能量，運動方向及位置之組合，曰複合(Komplexion; complexion)。但若二個或多數分子依能量，運動方向及位置等互相交換，則全體之狀態仍然不變，故某一定之狀態可由交換而成之種種複合促成之。

今因分子間之相互作用，尤其因分子之衝突，一氣體之狀態發生變化。若設想各個分子變動不已，則可視氣體之狀態變化不絕；在各瞬間，各分子上之能量，各分子之運動方向及位置均莫不變更。換言之，各瞬間各有一種複合。假定此種各依當時之情形而定之複合反覆重演，而在一久長時間內，各種複合演出之次數平均皆相等。又據以上所述，同一的狀態能由分子間交換能量等而起之多數複合而產出，故凡能由最多數複合產出之狀態，亦即為在長期內現出次數最多者。又據或然的算法，在有多數個體之情形中(是處為氣體之多數分子)，大多數之複合係為促成少數狀態，且往往實際祇為促成一種狀態，故此種狀態實際即為惟一可能的狀態。一種與此狀態相差極微之狀態祇間或發生，而視為暫時的變異。此種變異係由分子間相互作用在一最短時間內發生。由是種考慮亦可導出關於分子之速度之馬克士威定律(§187)。

發生某一定狀態之複合之數，曰該狀態之熱力或然率(thermodynamische Wahrscheinlichkeit; thermodynamic probability)，通常以 W 表之。當個體數多時，其數可極大。波爾茲曼(1866)指出—物體或一物體系之熵量與此熱力的或然率發生

$$S = k \times \log W$$

(4)

之關係，式中 $k=1.37_7 \times 10^{-16}$ 。據波爾茲曼常數相類似。（ \log 指自然對數。）故一物體或一物體系之熵最當其狀態之熱力或然率愈大時亦愈大。又據熱力學第二定律，在自然界之各過程中，熵量或參加該過程之全般物體之狀態之熱力或然率有增無減，而在極限情形中至多不變更，各過程均自動進行，其間不或然的狀態自動變為或然的狀態，但決不反是。

狀態中其有某一定之秩序者，依此義言之，係極不或然的。自然界中進行之過程均有破壞現存之秩序之傾向，例如使存在於容器一隅之氣體發生擾亂，使分子依同方向之運動變為雜亂之運動等，自然界傾向之狀態為理想無秩序（ideale Unordnung: ideal disorder）的狀態，在自然界中絕無在一處發生自無秩序狀態變為有秩序狀態之過程而不在他處發生相反之過程者。示熱力學第二定律之有效性之特別重要之數個例，如摩擦過程，擴散過程及不等溫體間之溫度平衡過程皆是。在諸如此類之情形中，終狀態有較大熱力或然率而以此與初始狀態相區別，又由馬克士威定律（§157）規定之速度分配亦以發生較大熱力或然率為目的。

再舉一簡單例解之。一容器分為兩部，其間由開啓一活栓互相聯絡，當初活栓閉閉，假定一部完全空虛，他部含有1000分子。今啓活栓，則分子因熱運動遂分配在兩部內，此後各分子可任意往返於兩部間，一時在此部內，他時在彼部內，各分子既完全獨立運動，故全體分子可偶然復同時在一部內，然此為完全不或然的情事，即分子不以平均密度分配在兩部內已屬極不或然的事，尤其如在實際情形中，恆有無數分子存在時為然，兩部間分子最或然的分配為最後在兩部內有等大之密度，而當分子數愈多時，分子系背此而取另一分配狀態之或然率亦愈低。此例就一簡單情形示一個有較小或然率之狀態如何過渡而為有較大或然率之狀態。（此事實在日常生活中不少對照。環顧吾人周圍之什物經數度使用之後，無一不呈從有秩序的狀態過渡而為無秩序的狀態之傾向，如以書桌上之什物為例，其經較長時間之使用後

未有不呈此傾向者，則其所經過之變化，不但與上述分子所經過之變化相類似，且照樣同受或然率律之支配。）

196. 可逆(可迴溯)過程及不可逆(不可迴溯)過程。一物體或一體系由狀態A變至狀態B，復由狀態B變至狀態A，如是經往返變化後，若完全恢復未作此項變化以前之狀態而不因是在自然界他部分惹起變化者，則A變為B之物理的過程，謂之可逆或可迴溯過程(reversible oder umkehrbare Prozesse; reversible process)。其餘一切過程，均曰不可逆或不可迴溯過程(irreversible oder nichtumkehrbare Prozesse; irreversible process)。如無摩擦作用，單擺在真空中之過程為一種可逆過程。至摩擦生熱之過程，熱自高溫體傳導至低溫體之過程等，均為不可逆過程。實際上，一切過程或變化其能完全免却摩擦，傳導等者，尙未見過，故一切過程莫不屬諸不可逆過程。所謂可逆過程，僅理論上之一種假想已耳。

在可逆過程中，一物體或一體系之熵量不變 (§201)。此實為一種假想極限情形，蓋在自然界中進行之各變化其熵量未有不變者，換言之，實際自然變化均為不可逆變化。其故，因凡實際自然變化皆由不或然或有秩序之狀態變至或然或欠有秩序之狀態，但絕無反是之情事。此殆因宇宙之發展概遵一定之方向而決不能迴溯至完全原來的狀態。宇宙之熵量增加不已，而宇宙中一切進行之現象或變化似均為增加此熵量。依理論推考，可斷言宇宙係向一終狀態而演進，迨達此狀態之後，宇宙已有最大的熵量，此後宇宙中不復發生變化，此即指宇宙中萬事之末日（所謂熱之末日；Wärmetod）。

197. 溫度之平衡。在經熱力學第二定律規定之一變化中，兩不等溫體起熱的交互作用，而熱由溫度較高之物體移至溫度較低之物體，至二者溫度相等時為止。是種溫度之平衡(Temperaturausgleich; equalization of temperature)可依三種方法為之，分述如下：

1. 熱之輻射。熱可不憑藉物質之助力，運行傳至遠處，是為熱之輻射(Wärmestrahlung; radiation of heat)。例如太陽之熱可以直

接傳至地上，煖爐之熱可以傳至四周。此項由輻射而來之熱，性質與光相同，有反射，折射等現象。在光有透明與不透明之分，在熱亦有透熱體與不透熱體之別。

熱由物體表面輻射而出時，如物體溫度與其周圍溫度之差 $T_1 - T_2$ 不十分大，則其輻射速度 v 與 $T_1 - T_2$ 成正比，以式表之，

$$v = k(T_1 - T_2),$$

k 為一常數，由輻射體之表面狀態而定。此關係曰牛頓冷卻定律。如 $T_1 < T_2$ ，則此公式所表熱量之數值即為物體自其周圍所吸收之熱量。如溫度差 $T_1 - T_2$ 過大，此律即不適用。（關於熱之輻射另詳 §480 及以後各節。）

2. 熱之對流。此現象僅在流體（液體及氣體）中見之。流體中一部分受熱，則起膨脹，密度減小，向上昇騰，其餘未受熱或密度較大者，移來補充，再受熱上升。如此交相代替，熱亦隨之傳至全部，此現象曰熱之對流（Wärme konvektion; convection of heat）。水之煮沸，煙囪之通風，均對流之實例。又大氣之運動，如氣象上之貿易風，亦自然界之一大對流，在太陽及其他恆星之外層恆有範圍極大之對流。

熱之對流之重要的應用為用熱水之煖屋。高溫之水自汽鍋經管系向冷處流動。管系包括善保溫之導水管及發出熱能之發熱體。冷後之水復自發熱體回至汽鍋。

屋內溫度之得全屋一律焉殆全由於對流作用。屋內通氣亦全賴對流，而係由屋內外溫度不同所致。

衣服及獸毛之保溫效應由其阻止物體周圍之空氣發生對流而起。織物及獸毛之不良傳導性其影響尚屬次要。

3. 關於熱之傳導擬於下節中說明之。

198. 熱之傳導。 熱之傳導（Wärmeleitung; conduction of heat）為一種純粹分子作用。若物體一部分之溫度高於鄰近一部分之溫度，則熱能經分子之衝突由高溫部分移至低溫部分。高溫部分之熱能減少，低溫部分之熱能增加，直至全部溫度相等時，始行停止，換言之，

直至分子之熱能平均分配在各部分為止。同樣，兩種溫度不同之物體互相接觸存在時，亦復如此。

此種變化實服從熱力學第二定律 (§195)，蓋將分子能量平均分配在一物體或一體系之各部分，使各部分呈等高度之狀態，實較使其呈任一其他狀態更為或然。

設於一物體內由人工方法維持一溫度差，例如使一處與一高溫體或火焰相接觸，他處與一低溫體如冷水相接觸，則在物體內，熱移動不絕。此種在溫度差之作用下而起之移動在形式上與液體或氣體之在壓差之作用下之流動相類似。事實上，此無非為分子能量之由衝突而致之在物體不等溫部分間之平均分配作用。由傳導而移動者，並非為一種物質，但為一種能。故吾人在此種及相類似之情形中常用“能流”之名詞，其強度由在1秒間通過導熱體之橫斷面之卡數決定之。

在1秒間通過與最大溫度梯度之方向 x 垂直之橫斷面積 q 之熱量 Q 依方程式表示時為

$$Q = -\lambda q \frac{dT}{dx} \text{ 卡/秒}, \quad (5)$$

$-dT/dx$ 表溫度梯度，即依 x 方向每厘米之溫度遞減率。 λ 表一常數，其值由物質之種類而定，名曰導熱係數 (Wärmeleitfähigkeit; thermal conductivity)。在定態時，物體中既無熱能集中之處——若然，則在該處之溫度當起變化——，故若無熱在側面流出（譬如流水通過不稠密之管），熱流 Q (卡/秒) 在各橫斷面均相等。由傳導移動之熱量與橫斷面積，溫度梯度及經歷時間等為正比例，而導熱係數為此項比例常數，等於在單位時間內隔單位溫度梯度通過1單位橫斷面積之熱量。

一固體內之熱傳導例如可用一金屬棒作實驗示之。今假定棒中有滿盛水銀之孔若干，孔中插入溫度計。棒之一端浸在沸水內，他端插在冰內。若棒之橫斷面積 q 到處一致，則據方程式1, dT/dx 到處相等，換言之，由兩相距等

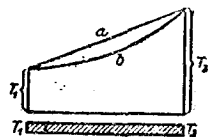


圖175 在一金屬棒中之熱傳導。

遠之溫度計指出之溫度差到處均應等大（圖175直線a）。然事實上，因棒不但供給熱量於冷端且又沿長度散熱於空氣中，溫度之變動當由一曲線（b）表示之。此種變動亦可計算。因導熱係數不等又比熱亦不相同之故，在等溫（例如室內溫度）之異種物體恆呈不等熱之感覺，例如金屬品與棉絮，二者之溫度雖相同，然以手撫之，則覺在冬日金屬品較冷，在夏日則反是。金屬品之導熱係數及比熱均較棉絮為強，其導熱較速，在冬日，其溫度較人手為低，自人手取熱較絮為速，故覺較冷，在夏日，其溫度較人手為高，導熱至人手亦較速，故覺較熱。人手能熱溫度在 100°C 之棉絮而不能執在同溫之一金屬棒者，即因此故。由此觀之，吾人對於物體冷熱之感覺，實視物體導熱之迅速而異，原非完全由物體之溫度而定，故純憑感覺以判別溫度之高低，殊不可靠。

傳導之良否，因物質種類不同而有區別。金屬物質較其他物質導熱較良，而尤以銀與銅為最良。金屬中又以金屬網傳熱最速，如將銅絲網插入燈火之火焰中，焰中之熱為網奪去，故非至紅熾熱時，網上不復能成火焰。礦夫之安全燈即應用此理而製出者。燈內火焰之部分不能通過金屬網製成之罩而與外氣交通。此燈係用於發生可燃性氣體之炭坑中。因在燈罩以外之可燃性氣體不能直接與火焰相接觸，其溫度不高，不致燃火爆炸，僅有透入罩內之一部分過火燃燒，使火焰改呈青色，故用安全燈不特可減少坑內可燃性氣體爆炸之虞，并可查知坑內有無可燃性氣體發生，以便取適宜之處置。

在異方性體中，換言之，在構造依方向而異之固體（如多數結晶）中，導熱係數依方向而異。即以木材而言，其依纖維之方向導熱比較依與此垂直之方向為良。

液體之導熱係數較固體為小。例如沉冰塊於盛水之試管之底，然後加熱於管之上部，使水沸騰，雖歷久長時間，冰仍不溶解，是即水為不良導熱體之證。

氣體之導熱係數尤較液體為小。當壓力不過分低時，其導熱係數

不隨壓力而異，其所以然者，因當壓力減小時，分子之自由路程增加而此有益於分子能之輸送，但一方面在 1 立厘米內之分子數，或能量負載者之數與壓力為比例，此二者對於能量交換之效應互相抵消。然若壓力下降，終至氣體分子之自由路程有與容器等大之尺寸時，氣體密度極低，導熱係數強行遞減。氣體之熱傳導根據不等溫部分之氣體之分子間能量之交換，故係由分子運動決定。較冷部分之分子侵入較熱部分內及反是，如是促成分子能量之交換。故分子之熱傳導與擴散 (§158) 及內摩擦 (§113) 二現象有至密切之關係，氣體之熱傳導，即基於擴散現象。

第十八表表示各種常見物質之導熱係數。輕氣及氦之導熱係數遠較別種氣體為大，此自然可據氣體動力論解釋之，因其分子量

第十八表 導熱係數。

均小，在同溫下，其分子速度最大，故分子間交換能量亦最速。

含有大量空氣之物體，例如軟木，棉絮，絨物等，其導熱特別不良，由於所含之空氣不易傳熱之故。以是此等物質常供包裹蒸汽管等之用。以毛毯裹身，則身體之熱，不易

外逸。又用質地疎鬆之料製衣裹體所以比較用別種料為暖者，亦同此理。

根據氣體為不良導熱體而起之一現象，謂之賴登弗羅斯特現象 (Leidenfrost'sches Phänomen; Leidenfrost's phenomenon)。滴水於已達赤熱之金屬板上 ($t > 100^{\circ}\text{C}$)，水滴不立即沸騰汽化，但呈扁球形而在板上滾動。因當初與板接觸之水，立即化為一層蒸汽，此層蒸汽導熱不良，故板之溫度雖高，其熱仍不易傳達水滴，以使其汽化。然

	卡/度·厘米·秒
鎢	0.48
鎢	0.03
鐵	0.14-0.17
銅	0.90
銀	1.01
塊殼	0.004
木	0.003-0.009
棉	0.0004
玻璃	0.0014-0.0018
石英	0.030
石英	0.16
水	0.0014
空氣	0.00757
氦	0.00534
輕氣	0.0032

因以後逐漸經過蒸汽層而被加熱至 100°C ，水滴突然汽化(炸裂)。以吾迅紙熾熱鐵桿可免危險者，亦同此理。

熱之傳導，須藉物質為助，故此現象在真空中不致發生。帶複壁之熱水瓶 (Weinholdsche 或 Dewar 瓶)，其複壁間之空氣經抽去後，瓶內之熱不能外洩，瓶內裝液體，可至久不冷，其所以然者，即據真空不傳熱之事實。

199. 熱力學之第三定律(涅恩斯特熱學定理)。熵之定義方程式(方程式2. §195)，以其為一微分方程式，並不確定熵之絕對量。積分此式時，恆有一未能確定之積分常數。此種未定數今可由涅恩斯特熱學定理(Nernstsches Wärmetheorem; Nernst's heat theorem)除去之，此定理常稱曰熱力學第三定律(dritter Hauptsatz der Wärmetheorie; third law of thermodynamics)，謂一切物質之熵在絕對零度時均等於零。據此，則方程式4 (§195) 當示物體之狀態之熱力或然率在絕對零度時等於1，即 $W=1$ 。此即解釋當時之狀態僅有單獨一種複合可以促成。又由此定理指出在絕對零度時，物體之比熱漸近零值，而絕對零度為一極限溫度，後者祇能接近，但根本的不能依物理方法嚴格達到。

涅恩斯特熱學定理不但在物理學領域內效用頗大，即於化學領域內在計算化學平衡時，亦至有功用，此定理與量子論 (§511) 有密切關係。

200. 噶爾諾循環。今討論熱化為機械功之變化。對於此問題，由噶爾諾(Carnot)所創作之一種設想，所謂噶爾諾循環(Carnotscher Kreisprozess; Carnot's cycle 1824) 頗為重要。設想裝1克理想氣體於一容積可變之容器內，氣體當初有溫度 T_1 及容積 V_1 。設想令此氣體經歷如下之過程：

1. 氣體經絕熱的壓縮 (§172)，即沿絕熱曲線變化，至有較高溫度 T_2 ，其容積今為 V_2 (圖176)。

2. 氣體此後與溫度亦為 T_2 之一極大熱源相接觸，並改沿等溫曲線

膨脹至有容積 V_2' 。氣體膨脹時，既須冷卻，故為保持其溫度，勢必由溫度為 T_2 之熱源輸入一相當熱量 Q_2 。

3. 氣體再與熱源分離，而後沿絕熱曲線膨脹，終至因冷卻而達當初之溫度 T_1 ，假定當時之容積為 V_1' ($V_1' > V_1$)。

4. 令氣體與溫度為 T_1 之另一極大熱源相接觸，並沿等溫曲線壓縮回至原來之容積 V_1 ，當時由氣體輸出熱量 Q_1 於溫度為 T_1 之熱源。

經此四種過程後，氣體依然回至初始狀態。反之，一熱源輸出熱量 Q_2 而其他一熱源輸入熱量 Q_1 ，又在此四過程中，皆有功作成。

在各過程中，氣體所作之功均為 $\int p dV$ ，此功在2, 3兩情形中為正，在1, 4兩情形中為負。

設命 A 表氣體所作之全部功，則

$$A = \int_{V_1 T_1}^{V_2 T_2} p dV + \int_{V_2 T_2}^{V_2' T_2} p dV + \int_{V_2' T_2}^{V_1' T_1} p dV + \int_{V_1' T_1}^{V_1 T_1} p dV. \quad (5)$$

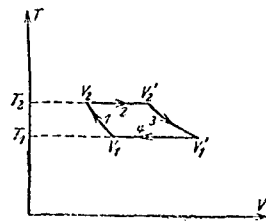


圖176. 亞爾諾循環·曲線 $V_1 V_2 V_2' V_1'$ 下之面積表氣體膨脹時所作之功，曲線 $V_1' V_1 V_2 V_2'$ 下之面積表氣體收縮時作於其上之功，氣體所作之淨功等於面積 $V_2 V_2' V_1' V_1$ 。

此四種過程中，1, 3 兩過程為絕熱過程，

而2, 4 兩過程為等溫過程。對於前兩過程

適用方程式 8, §172, 即 $C_v dT = -p dV$ ，對於後兩過程，則可依據§162,

以 $p = \frac{RT}{MV}$ (氣體之質量既為1克，故 $V = V_s$)。如是得

$$A = -C_v \int_{T_1}^{T_2} dT + \frac{R}{M} \int_{V_2}^{V_2'} T_2 \frac{dV}{V} - C_v \int_{T_2}^{T_1} dT + \frac{R}{M} \int_{V_1'}^{V_1} T_1 \frac{dV}{V}.$$

式中第一及第三兩項積分僅因積分極限互相交換，致起差別，此二者故相等而又相反，互相抵消。由其餘兩積分得

$$A = \frac{R}{M} \left[T_2 \log \frac{V_2'}{V_2} + T_1 \log \frac{V_1}{V_1'} \right]. \quad (7)$$

今由狀態 (V_1, T_1) 變為狀態 (V_2, T_2) ，又狀態 (V_2', T_2) 變為狀態 (V_1', T_1) 之

變化既均係絕熱變化，故據方程式9, §173,

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \text{ 及 } T_2 V_2'^{\gamma-1} = T_1 V_1'^{\gamma-1},$$

$$\left(\gamma = \frac{C_p}{C_v} \right), \text{ 由此得 } V_2'/V_2 = V_1'/V_1 \text{ 故}$$

$$A = \frac{R}{M} \log \frac{V_1'}{V_1} (T_2 - T_1). \quad (8)$$

既然 $T_2 > T_1$ 及 $V_1' > V_1$, 故 A 之值為正, 換言之, 氣體在一循環間作外功, 且為此取價於由熱源給於氣體之熱量 Q_2 . 此熱量然祇有 $Q_2 - Q_1$ 一部分變為功, 蓋在第四過程中, 須給出熱量 Q_1 於一熱源。

此 Q_1 及 Q_2 兩值不難分別計算。在第二過程中, 氣體之溫度既不增加, 加入之熱量係完全用作外功 $\int p dV$, 而如以上證明, 其值等於

$$\frac{R}{M} T_2 \log \frac{V_2'}{V_2}, \text{ 故 } Q_2 = \frac{R}{M} T_2 \log \frac{V_2'}{V_2} = \frac{R}{M} T_2 \log \frac{V_1'}{V_1}. \text{ 照樣, 給於第二熱}$$

源之熱量 $Q_1 = \frac{R}{M} T_1 \log \frac{V_2'}{V_2}$, 由此種關係, 容易求出方程式 $A = Q_2 - Q_1$ 之值, 因據能量原則, 氣體所作之機械功 A 必等於輸入之熱量與輸出之熱量二者之相差。

由此觀之, 由此種循環以得機械功 A , 必須由溫度為 T_2 之熱源輸出熱能 Q_2 ($Q_2 > A$), 並同時有等於 Q_1 之部分輸入於溫度為 T_1 ($T_1 < T_2$) 之另一熱源內, 是以所作之功最多祇能等於 $Q_2 - Q_1$. 此種循環之最大效率 η 自必小於 1, 即

$$\eta = \frac{A}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}. \quad (9)$$

故效率 η 僅由兩熱源之溫度而定, 而與各部分變化之總則無關, 且不能再改良, 往往因設備不周——如發生摩擦, 熱向四周之損失等——, 反須減小。此結果對於理想氣體一般有效。

以上之設想, 除依據理想氣體之定律外, 全以熱力學第一定律為根據。但由招致第二定律又可證明經方程式9表示之關係當動作體(例

如蒸汽機之動作體為蒸汽，石油及煤氣機關之動作體為炸裂性混合氣體）不為理想氣體，但為任一實際體時，亦有效。此方程式指出將熱能依循環過程變為機械功，其效率有一定限制。如由一熱源供給熱能以作機械功，則必有此熱能之一部分從有較高溫度之熱源進入於較低溫之熱源。當此兩熱源之溫度之相差 $T_2 - T_1$ 愈大而溫度 T_1 愈低時，是種循環之效率愈大，而當 T_1 等於不能達到之最低極限時（即 $T_1 =$ 絕對 0° 時），效率等於1或等於100%。

以上所述者，為關於精循環過程以得功之問題，其中所用之裝置——容器及閉塞之氣——，在完成各循環後，復回至原狀，而其間唯一之變化為高溫熱源損失熱量 Q_2 ，低溫熱源獲得熱量 Q_1 。循環之效率係據此二者之值而算出，為是種循環之一種特性。然若吾人放棄此全系統須回至原狀之要求，則由應用一理想氣體至少依理論亦可將全部之熱量化為功。其一例如噶爾諾循環之第二步過程是，當時氣體之溫度保持不變，而所加入之熱量 Q_2 全用以作 $\int pdV$ 之功，故可令其作用於一活塞上，使活塞反抗與氣壓成平衡之外壓力移動。此功可與舉起一重量 $k = pq$ 之功相比擬，其中 p 表氣壓， q 表活塞之橫斷面積。

上述之噶爾諾循環共由四部分合成，各部分非等溫過程即絕熱過程，均屬於可逆過程，故此種循環為可逆循環，而實現此循環之裝置，則為可逆機。為便利計，由 V_1 經 V_2, V_2' 及 V_1' 復返於 V_1 之順序，曰順轉，反之，由 V_1 經 V_1', V_2' 及 V_2 而返於 V_1 之順序，曰逆轉。

201. 噶爾諾定理· 熱化為功之變化· 設想兩可逆理想機E及E'動作於 T_1 及 T_2 兩溫度之間，並命E順轉，E'逆轉。命 Q_1 及 Q_2 表順轉機輸入及輸出之熱量， Q_1' 及 Q_2' 表逆轉機輸入及輸出之熱量。假定二機互相機械的聯絡，且有適當之大小或速率，則由順轉機所作之功，適足轉動逆轉機。最後暫時假定順轉機之效率 η 比較逆轉機之效率 η' 為大。於是

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} > \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'} = \eta'. \quad (10)$$

又因兩機對外所作之功相等之故，

$$A = Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2' = A' \quad (11)$$

故由方程式1及2得

$$\frac{1}{Q_1} > \frac{1}{Q_1'}$$

或

$$Q_1 < Q_1'$$

又由方程式2 $Q_2 < Q_2'$ ，

準此，則毋須作功即有等於

$$Q_2' - Q_2 = Q_1' - Q_1$$

之熱量從有低溫 T_2 之物體輸入於有高溫 T_1 之物體。如是之結果與第二定律之克勞修司說法相背，故 η 不能大於 η' 。若令 E' 順轉及 E 逆轉，則依據完全相似之理論，可證明 η' 不能大於 η 。故 η 必等於 η' ，即

$$\eta = \eta'.$$

設 E 為一不可逆機，則依與上述完全相似之方法，可證明其效率 η_i 不能大於 η' ，但因 E 不能逆轉，吾人不能證明 η' 不能大於 η_i 。故所能說者，僅 η_i 或等於或小於 η' 而已。

$$\eta_i \leq \eta'.$$

此兩關係，名曰卡爾諾定理 (Carnot'sches Wärmetheorem; Carnot's theorem 1824)，以字句說明云：在同一溫度間作用之各種可逆機其效率相等，而在同溫度間作用之一切熱機中，以可逆機之效率為最大。

故實際上使用之熱機均為可逆機。其效率由方程式9表示，但此為理想的最高效率，而實際可達到之效率恆在此極限效率之下。除向低熱源放出一部分之熱量外，又有一大部分之熱經機械之各部分間之摩擦而消耗，復有一部分之熱失散於熱機之四周，是以熱機之效率恆較由方程式9表示者為小。

為增進熱機之效率， T_2 須可能的最大， T_1 須可能的最小。事實上， T_1 與周圍之溫度相近，但常因不絕的輸入熱量 Q_1 ，其溫度逐漸增加。故為增加效率，其法惟有使 T_2 達最大可能的高溫。

至動作氣體概為蒸汽(蒸汽機)或為炸裂性可燃氣體(爆發機)。

據方程式①, $\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$ 僅與 T_2 及 T_1 有關, 故 $\frac{Q_1}{Q_2}$ 亦祇與此兩溫度有關, 但氏據此事實, 乃創熱力學絕對溫度標。據此標, 知兩溫度之比等於一可逆機在此二溫度之間作噶爾諾循環時輸入及輸出之熱量之比。命此種以熱力學絕對溫度表示之兩溫度為 Θ_2 及 Θ_1 , 故 $\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$ 。至於在此標中一度之大小, 照分水銀溫度計之方法將冰點與沸點間之基本間隔分為若干度, 例如 100 度。於是熱力學絕對百分標上任一溫度 Θ 可依下列方程式確定之

$$\frac{\Theta}{\Theta_{100}} = \frac{Q}{Q_{100}}$$

及
$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{Q}{Q_0} \text{ 或 } \frac{\Theta}{\Theta_{100} - \Theta_0} = \frac{Q}{Q_{100} - Q_0}$$

又假定 $\Theta_{100} - \Theta_0 = 100$, 消去 Θ_{100} 及 Θ_0 得

$$\Theta = \frac{Q}{\frac{Q_{100} - Q_0}{100}} \quad (12)$$

此方程式為熱力學絕對溫度之定義。據實驗之結果, 熱力學絕對零度亦約在冰點之下 273.04 度, 而在熱機上應用之溫度限界內, Θ 實際與 T 相等, 故絕對溫度 T , 熱力學絕對溫度 Θ 與攝氏溫度 t 之關係為

$$(273.04t) = T = \Theta \quad (13)$$

據此則方程式①可改書如下

$$\eta = -\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_2} \quad (14)$$

由此

$$1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \text{ 或 } \frac{Q_2}{\Theta_2} - \frac{Q_1}{\Theta_1} = 0$$

若以輸出之熱量 Q_1 為負, 則

$$\Sigma(Q/\Theta) = 0 \text{ 或 } \int \frac{dQ}{\Theta} = 0. \quad (15)$$

同樣, 就在同一溫度 (Θ_2 及 Θ_1) 間作用之不可逆循環而言

$$\frac{Q_2' - Q_1'}{Q_2'} \cong \frac{\theta_2' - \theta_1}{\theta_2}$$

$$\frac{Q_1'}{\theta_1} \cong \frac{Q_2'}{\theta_2} \quad \text{或} \quad \int \frac{dQ}{\theta} \cong 0 \quad (16)$$

用字句說明之，當有熱量 Q 由一在高溫 θ_2 之熱體流至在低溫 θ_1 之熱體時，高熱體之熵量減少 $\frac{Q}{\theta_2}$ ，而低熱體之熵量增加 $\frac{Q}{\theta_1}$ 。不拘循環為可逆循環或不可逆循環， $dS = Q \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \cong 0$ ，為一正數或兩體之熵量增加或保維不變(參見方程式3, §195)。

202. 熱機。熱機(Wärmekraftmaschine; heat engine)大別為蒸汽機，蒸汽輪機及爆發機(常稱內燃機)。

在蒸汽機(Dampfmaschine; steam engine)中，高溫(T_2)熱源為汽鍋，其中水化為蒸汽，故如不施壓力提高沸點 (§181)，其溫度恆在 100°C ，但往往為增加效率，常使其沸點在百度之上。低溫熱源為經冷水冷却之冷凝器，作功後之蒸汽進入此器內，放出潛汽化熱而凝結。

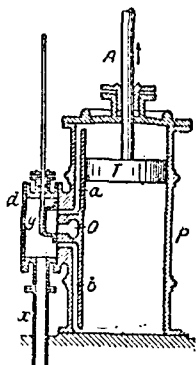


圖177. 往復蒸汽機之筒。

經瓦特(James Watt 1736'—1819)改良之往復蒸汽機，其主要部分為機筒 P(圖177)，其內一帶連桿 A 之密封活塞 T 能往復運動。此運動係由自汽鍋發出之蒸汽交換依反對方向進入筒內，推動活塞所致。圖中所示之位置，假定活塞繼續向上運動，蒸汽由汽鍋經管 x 入蒸汽房 d 並由管 b 進入筒之下方，推活塞向上，而在筒之上方之蒸汽，則由 a 經管 o (圖中示其橫斷面) 進入冷凝器，並在此器內立即凝結。因此，在筒之上方壓力極小，活塞經在筒下方之壓力向上推動。活塞之連桿係與一滑動活門之連桿相連絡，故活塞之運動使活門時上時下。當活塞達筒之上端時，活門向下移動，筒之下方遂經 b 及 o 與冷凝器相通，而筒之下方經 a 及 x 與汽鍋相通，結果，活塞之運動倒轉，如是上下

往復不已。

連桿傳蒸汽所作之功，但預先須用一短桿所謂曲柄將連桿之往復運動變為圓運動。為維持等速運動，機軸上常裝一大飛輪。輪之轉動慣量既大，故機軸之速度不易變更。此外尚有所謂調速器（參見§30，圖29）係用以調整輸入筒內之蒸汽之多寡使機之速度及其所輸出之功率適與其負荷相應。

若如以上所述，任每次進入筒內之高壓蒸汽以後成為廢汽直接過入冷凝器內，則損失頗大。故在實際熱機中，先任在定壓下之蒸汽進入筒內（等溫過程），但不久即於適當之處，使筒與汽鍋斷絕交通，既斷之後，即無新蒸汽加入，祇任其自行膨脹（絕熱過程），以自身之壓力推動活塞，使其繼續進行。以後活塞運動之方向倒轉，此部分蒸汽在冷凝器內在定壓下自行凝結（等溫過程），而凝結後之蒸汽再在等容下加熱，輸入於汽鍋內，如是完成一循環。惟須注意者，最後第四過程係在汽鍋內完成，故與噶爾諾循環之第四過程不同。

在蒸汽機之循環過程中，因筒及活塞係良導體，蒸汽之膨脹並非嚴格的絕熱，因而筒內一部分蒸汽凝結，為減少筒內蒸汽之凝結以增加效率，今日常用200氣壓之高壓蒸汽。在此高壓下水之沸點在265°C。若仍用單個機筒，則因溫度變動過大，凝結增加，一方面為盡量利用蒸汽內之熱量，復有不使蒸汽立即進入冷凝器之必要，為此常應用二個或更多之筒。由汽鍋發出之蒸汽先進入第一筒（高壓筒），任其膨脹後，再令其進入第二第三筒（低壓筒），繼續膨脹，其壓力如是逐步降下，各筒內溫度之變動既小，凝結故有限。此種複式機之效率顯較單式機為大。

在蒸汽機循環中，示壓力與容積變化之壓容圖可用相當之儀器所謂蒸汽機示功器連接於機而自動描出之。此種壓容圖與示理想循環之壓容圖略有差別。

若不用壓容圖以計算蒸汽機所供給之功——據理論在循環過程中由曲線包圍之面積與該過程中所作之淨功成正比——，則常可依公式計算如下。

命 a 表活塞之橫斷面積， a_r 表連桿之橫斷面積， p 及 p' 表筒內活塞兩面上之平均壓力，則活塞所受之平均壓力為 $p - a_r/a$ 。若活塞每次移動之距離為 l ，每分鐘往復移動之次數為 n (即機之轉數)，則在每分鐘內， p 力所作之功為 $p a n l$ 。若 p 以每方厘米若干仟克數計， l 以米計， a 及 a_r 以方厘米計， n 以每分鐘之轉數計，則在活塞一面上所作之功率為

$$\frac{p a n l}{75 \times 60} \text{ (匹馬力) ,}$$

在其他面上所作之功率為

$$\frac{p' l (a - a_r) n}{75 \times 60} \text{ (匹馬力) .}$$

如是，雙作蒸汽機之指示馬力等於

$$\frac{p a n l + p' l (a - a_r) n}{75 \times 60} \text{ (匹馬力) .} \quad (17)$$

在英制中， p 及 p' 以每方吋若干磅計， l 以呎計， a 及 a_r 以方吋計， n 以每分鐘之轉數計。在此制中，雙作蒸汽機之指示馬力等於

$$\frac{p a n l + p' l (a - a_r) n}{550 \times 60} \text{ (匹馬力) .} \quad (18)$$

每單位質量蒸汽所作之功 A (由壓容圖面積指出) 對於汽鍋所供給於每單位質量水之熱量 Q 之比，曰蒸汽機之熱效率 (Wärmewirkungsgrad; thermal efficiency)，以方程式表之

$$\eta_w = \frac{A}{Q J} \text{ (} \% \text{)} . \quad (19)$$

式中 J 表熱功當量。據方程式 9，§ 200，一理想機之熱效率為 $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$ 。假定汽鍋壓力為 200 氣壓，於是蒸汽溫度當為 $265^\circ\text{C} = 538^\circ$ 絕對溫度。又假定冷凝器之溫度為 40°C 或 313° 絕對溫度。故該蒸汽機之理想熱效率等於 $235/538 = 0.44 = 44\%$ 。熱效率示熱過程之完全程度。因一大部分之熱量仍含在廢汽內，蒸汽機之熱效率大都不高，其值平均在 30% 左右。在大範圍工廠中，是種排出之熱蒸汽今日常供發房或其他之用。

蒸汽機作功時，其能量之一部分在其運動部分間因摩擦而損失，故實際可作之功 A' 恆小於 A 。此二者之比

$$\eta_m = \frac{\Lambda'}{\Lambda} (\text{= \%}) \quad (20)$$

曰蒸汽機之機械效率(mechanischer Wirkungsgrad, mechanical efficiency)·機械效率示汽機之機械的完全程度。

實際機器之全部效率除等於熱效率及機械效率之乘積外，尚須再乘以汽鍋之效率(即汽鍋中水所得之熱量與燃料所能供給之量之比，其值平均約60%)，故實得之效率當更低，尋常在15%左右。

與蒸汽機相較，蒸汽輪機(Dampfturbine; steam turbine)有開首即轉動之優點，其間不須種種傳動裝置，因之亦無此項消耗，故蒸汽輪機之效率，一般均較蒸汽機之效率為高。又因無往復運動，不伴動搖，故毋須有堅固之地脚，此又為蒸汽輪機之一優點。

蒸汽輪機利用蒸汽之膨脹，使其直接轉動一個或數個固定於軸上之輪，其原理與風輪及水車相類似。汽鍋中所生之蒸汽，經過輸送管，而由數個固定之噴氣管噴出，以高速度撞擊輪周之輪葉，使輪轉動(圖178)。為便於儘量利用蒸汽之膨脹力，實際輪機含有多組之輪葉，此等輪葉由固定者與可動者間隔裝置而成，前者用以調整蒸汽噴發之方向，使各可動輪葉得依同一方向轉動，蒸汽離輪之處亦與一冷凝器相連通，故是處之壓力極低。

蒸汽輪機之速度極大，故其用於輪船上時，在船軸與輪機之間須插減速傳動裝置，以使船軸之轉動不至過速，蓋船之螺旋槳之轉動速度在水中不應起某一定之限度也。然以輪機轉動發電機，則其高速度為一特別優點。巨型輪機輸出之功率，間有達

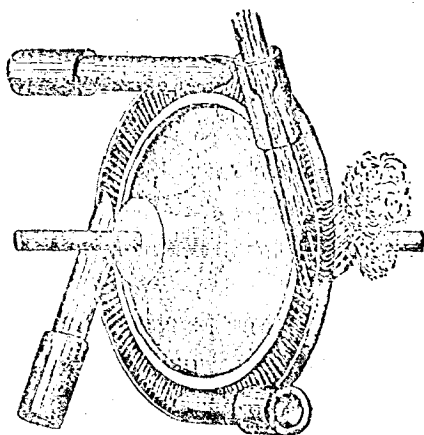


圖178. 蒸汽輪機

數十萬仟瓦者。

蒸汽機占地位較小且有較高速度，效率等種種優點，今日較大之動力設備多採用之。

效率比較蒸汽機及輪機皆佳者之熱機，稱曰爆發機 (Explosion-motor; explosion motor)，因其燃料亦在筒內，毋須自外供給以能，故亦稱曰內燃機。其動作之原理，先令已經汽化之燃料（汽油，煤油等）與相當容量之空氣混合，成為爆發混合氣，然後引入機筒中而燃之。其爆發後，壓力激增，推一活塞，使在筒內往復運動，再由與之相連之桿之曲柄，傳遞其功於機軸，恰如在蒸汽機中然。

內燃機之動作循環概由吸入，壓縮，爆發及排出四段動作組成，每一動作稱曰一衝程，此種內燃機故常稱曰四衝程內燃機，為內燃機中之最著者。在一循環中，僅在第三衝程即爆發衝程內，氣體對外作功，其餘之三衝程均非自外供給以能不可，飛輪之效用，即在於此。飛輪上因不能使用飛輪，故恆聯合數機，使其順次爆發，以供其餘各機運轉之用。至他式內燃機，較著者為二衝程內燃機及狄賽爾機，前者僅有二衝程完成一循環，後者，其中惟空氣單獨被壓縮而燃料則係注入於其內，其燃燒和緩，不成爆發。

內燃機作用於爆發氣燃燒溫度及外面空氣溫度（或在大型機中冷水溫度）之間，其間相差遠較蒸汽機中為大，故其理想熱效率及實有熱效率均較蒸汽機為大。其全效率常可達30%以上，較諸最佳之實際蒸汽機約大兩倍強。用此式熱機時，既無須汽鍋等設備，其所占之地位及其重量均較小，故不但在交通一方面占有重要地位，即在原動力廠中亦常用之。大型內燃機可有數千匹馬力。

如倒轉熱機之原理，則可構成發冷機 (Kältemaschine; refrigerator)，其工作目的並非為得功，但為使一物體冷卻，此冷體然後作功。例如壓縮氨 (NH_3)，使成液體，次再令膨脹汽化，任其吸取周圍流動之鹽水，如是鹽水之溫度可降至 -10°C 左右。此冷鹽水可用以製冰或在夏季涼室。又林得氏之空氣液化機 (§ 185) 亦為此種機之一。

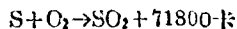
例。

203. 熱源·熱化學·地球上所能得到之能，均不外為直接或間接由太陽傳來之輻射熱，故太陽實為地球上最重要之熱源 (Wärmequelle; source of heat)。太陽每秒間約輻射 10^{23} 卡之熱，而此約與 0.4×10^{24} 仟瓦之功率相當。若在地球周圍並無大氣，則當太陽線鉛直射達地面時，在每方厘米地面上，每分鐘間約落下 1.94 卡之熱量 (所謂太陽常數; Solarkonstante; solar constant, 另見 § 204)，但因一部分太陽線在中途經空氣吸收，故實際達地面之熱量恆小於此值。

在工業上今日仍以由煤發生之熱為最重要。近年來由儘量利用水力依電法發熱亦漸重要，惟皆因代價高昂，其發展難免遲緩。水車之能轉動，由於在高處之水之位能，固不待言。水何以能升高，取得此項位能，則由於低處湖海中之水，受太陽之熱蒸發上昇，變為雨雪，降至高處所致。煤為古代植物之殘骸，植物之所以儲有此種化學能者，亦由於太陽之輻射熱而來。其他如人類及各種動物之所以能作功，則由於攝取食物而得之化學能，故亦直接或間接受自太陽。要之，一切熱能均歸根於太陽能。

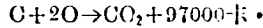
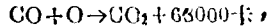
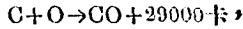
燃煤發熱，僅為發熱之多數化學作用之一例。化學作用有收熱作用 (endothermer Prozess; endothermal process) 與放熱作用 (exotherme Prozess; exothermal process) 之別，前者惟當有熱量自外加入於參加該作用之物質時發生；反之，後者，則有熱量放出。空氣中一般燃燒作用均為放熱化學作用。一化學作用之為收熱或放熱為全視新化成物質之分子中之內能比較在原來物質之分子中之內能為大 (收熱作用) 或為小 (放熱作用) 而定。

一化學作用 (或曰過程) 之熱效應當可依方程式表示之。例如



之方程式表示當 1 克原子之硫磺與 2 克原子 (1 末) 之氧化合而為二氧化硫時有 71800 卡之熱生成。此種熱量在收熱作用中生成者為正，在放熱作用中生成者為負，且不問方法如何，若化成之化合物全同者，

其量必相等。例如



觀此，可知第三方程式係由第一二兩方程式相加而成。無論先由碳及氧化成一氧化碳，再由一氧化碳與氧化成碳酸，或直接用碳及氧化成碳酸，在兩情形中生成之熱量相等，如為能量原則（熱力學第一定律）所要求者。

凡一切自動進行之化學變化，恆依一方向進行，為不可逆的變化，故參加該種變化之物質之熵量增加。熱力學之三定律成為理論化學之最重要的基礎。

第二十章 大氣物理學¹⁾

204. 大氣之一般特性。在氣象學 (Meteorologie; meteorology) 中，當計算大氣壓力時，近來惟用一絕對壓力值以代毫米之水銀。為此採用一新壓力單位，名曰1巴（參考§103），1巴即等於 10^6 達因/方厘米，其千分之一，曰1毫巴。1巴既約與756毫米長之水銀柱之壓力（在 0°C 及在緯度 45° 之正常重力作用下）相當，故兩者之簡單換算公式為1毫巴 = 0.75毫米水銀或1毫米水銀 = 1.333毫巴。關於大氣壓力之意義及測定法已於§103及105中明白述之矣。又關於大氣壓力隨高度而遞減之定律亦已於§102中(方程式15)導出。至大氣層之厚，係借黃昏現象，北極光，流星及隕石等之推算，因其發生須有相當稠密之空氣。由推算是種現象之高度知大氣層之厚當在300--500千米。

在近地面之處，空氣(atmosphärische Luft; atmospheric air)依容積之組成為淡氣78%，養氣21%，其餘氣體約合1%。由分析得關於各氣體之容比之確數如下：

淡氣	78.03%	輕氣	0.01%
----	--------	----	-------

(1) 康尼希 W. König 著。

氧氣	20.99%	氫	0.0015%
氮	0.94%	氦	0.00015%
碳酸氣	0.03%		

此外尚有水蒸汽，其含量多寡不一定(§206)。

各氣體在各高度之分壓力，據理論既依方程式 15 (§102) 計算，故向認大氣壓力隨高度之遞減為大氣成分隨高度而變所致。準此，則由考慮大氣中各成分之分子量，認定在80仟米以上，重氣體成分實際已極缺少，而在更高之處，惟最輕之氣體尚存在，雖然，在近地面之處，是種輕氣體固不多也。如斯之設想，惟須假定大氣完全靜止方可有效。然據新近北極光光譜之研究，證明在北極光之高度仍有淡氣及氧氣，故一般混合作用直至此高度仍有效。在大氣之上層中，且必含有較多量之臭氧(O₃)，因太陽線中之紫外線促成普通氧氣(O₂)變成臭氧。紫外線之最大部分係被吸收在大氣上層中 (§469)。

大氣對於太陽線之作用亦非常重要。到達大氣頂層之太陽線僅有較小部分(約20%)被大氣直接吸收，且其中除紫外線外，大都為波長較長而為大氣中水蒸汽及碳酸氣所吸收之數種線，反之，另約40%遇雲反射或由漫散逸 (§448) 而回至宇宙中，至剩下並大都由短波線所成之40%直接或經漫散逸而達地面，且不因此而影響空氣之溫度。此比較被大氣吸收者約大兩倍之太陽線實際對於大氣之熱量有最重要之關係，其達地面後，使地面之溫度增加，或藉空氣變為長波線而被空氣吸收，或依下列方法而經利用。

205. 氣溫。關於溫度之分配，其據太陽線輻射之天文原則而計算者，與地面上實際之情形頗不相同。溫度自赤道向極之一般的遞減，僅就大體而言然，地面之間接作用使近地面1仟米內之氣溫 (Lufttemperatur; air temperature) 隨地面之溫度而昇降。在陸上，陸面溫度晝夜不同，冬夏相差尤巨，氣溫亦隨之而變，但不及陸面溫度變動之甚。在海洋上，因海水比熱較大，海面晝夜及四季溫度相差不如陸

1) 參考 §203，根據近研究之結果，太陽常數並非嚴格的不變，但略有升降。

面之甚，故氣溫變動之範圍較狹。〔一日內的氣溫，朝晨日出時最低，午後二時最高。最高與最低之差為差較，隨地勢與緯度之高低而異。一年內的氣溫，在赤道地方，春秋分最大，冬至至最小。熱帶地方夏至氣溫最高，冬至氣溫最低。溫帶地方，最高在夏至以後，最低在冬至以後。寒帶地方，略與溫帶相似，惟每年之差較，比溫帶為大。〕準此，則水陸之分佈對於氣溫水平的分配有至大之影響。第二重要因子為大量空氣之不絕的運動，是種空氣流之效用為緩和地面上僅憑太陽線輻射狀況不同而起者之溫度差。

用寒暑表(§166)測定氣溫，須避日光之照射，雨雪之侵襲及火爐之影響等，且須與多量之空氣相接觸，故寒暑表多置於百葉箱內。寒暑雖與氣溫之高低相關，但在感覺上，風與濕度亦關重要。同一低溫度，有風時比無風時為寒。同一高溫度，濕度大時，更覺難受。至同一地方，高處氣溫概比低處為小。

氣溫隨高度而遞減之事實，早為一般所共知。然據氣球上觀察之結果，氣溫之遞減率並非到處一致，但隨時可起變化，是以非如吾人往日所假定者。實際在自由大氣中厚約9—16(在歐洲約10)千米之底層(此層曰對流層；Troposphere; troposphere)內，氣溫固隨高度而遞減，然在此層之上，氣溫之遞減為零，其處之氣溫幾無顯著的變化(此層現時稱曰成層；Stratosphere; stratosphere)。其故因在成層中，氣溫之分配全由吸收與放出之輻射熱能所引起之平衡而決定；在對流層中，則不然，此層之輻射熱能之平衡，以受地球重力作用之影響，不能完全支配溫度。實際在近地面之3千米內平均每100米遞減 0.6°C ，向上至成層則略大。關於氣溫隨高度之遞減率，此外尚有其他因子。大氣之鉛直運動，因起絕熱的溫度變化(§172，此變化與壓力變化相應，大氣膨脹冷卻)，使氣溫向上遞減。此事實非常重要，尤其因空氣依水平方向之運動——此種運動幾無時或息——，皆伴空氣質點之鉛直運動。地面對於氣溫之影響不僅在輻射一方面，在地面上一薄層之空氣，其溫度恆經傳導而變。空氣經地面冷卻時，因溫度

下降而變爲較密及較重之空氣留在底層，經地面加熱時，則反是，較熱之空氣上昇而上層較冷之空氣下降。雖空氣中途由絕熱膨脹而冷卻，此種對流 (§197) 常能將地面之熱迅速移至空氣之上層，夏日在溫帶約可昇至1仟米之高處，在熱帶約可達4仟之高處。又在大氣之下層，溫度之遞減受溫度之影響，故每100米溫度降下 0.5°C 之遞減率，僅爲一種平均數。遞減率之不絕的變更，對於空氣運動現象，故即對於氣候有重要之關係。

206. 濕度·凝結現象。空氣中水蒸汽之含有量可由其分壓力 (或曰分張力) 表示之。水蒸汽飽和壓力與溫度之關係已載在第十四甲表中 (§180)。然在底層空氣中，飽和狀態僅間或發生。現時空氣內含有之水蒸氣量與其時之溫度內所能含之最多水蒸汽之重量 (所謂飽和值) 之相差，對於空氣之乾濕有至大之關係，爲此常用特殊名稱表示之。所謂相對濕度 (relative Feuchtigkeit; relative humidity) 爲現時之水蒸汽壓力與其時溫度內可有之最大壓力 (即飽和壓力) 之比而係以百分率計。二者之差，曰飽和差 (Sättigungsdefizit; saturation deficit)。舉例示之，水蒸汽壓力13.2毫米，空氣溫度 20°C ，相對濕度75%，飽和差1.3毫米 (在 20°C 時，飽和壓力等於17.5毫米)。

如謂濕空氣之溫度降下，則飽和差減小，此時若水蒸汽壓力不變，相對濕度增加。至水蒸汽壓力與飽和壓力相等時，飽和差爲零，當時之溫度，曰露點 (Taupunkt; dew point)。空氣的溫度，降至露點時，空氣內水蒸汽開始凝結爲水滴。

測定空氣濕度，其法不一。某一定空氣容積內之水蒸汽可用乾燥物質吸取，其量依稱法衡定。此法繁瑣，僅爲校準由間接法所得之結果用之。又由人工法令光滑金屬面冷卻時，空氣中之水蒸汽因冷卻而達於水蒸汽之飽和狀態，開始凝結於金屬面上。今由測定金屬面之溫度可知周圍空氣與現成水蒸汽壓力相當之露點。至直接檢查濕度之器械，曰濕度計 (Hygrometer; hygrometer)，其通用之一種，係由利用毛髮之性質而成，因毛髮當濕度大時伸張，溫度小時收縮，伸縮之結

果使一指針旋轉，直接指出相對濕度。然此種毛髮濕度計常須用時校準。反之，另一種濕度計，即所謂乾濕球計 (Psychrometer; dry and wet bulb hygrometer) 者，隨時即可用。此計係由二溫度計並置在一處而成，一計的球狀部，外圍棉紗或棉布條，其下端浸入清水內，使水滲上至球狀部外面，而常潤濕，名曰濕球。一計的球狀部乾燥，名曰乾球。在空氣內水蒸汽的含量未達飽和時，濕球上因水分汽化失去熱量(汽化熱，§179)。其計之示度概較乾球溫度計為低。汽化速度(故即熱量損耗)與飽和差有關，故由二計示度之差度表示空氣濕度之大小。在實際情形中，祇須檢得乾濕球溫度計之差度，即可用現成之表，查得其時之相對濕度及現時之水蒸汽壓力。在阿斯曼吹氣乾濕球計中，應用一通風器吹空氣均勻通過乾濕球之前以除去汽化作用中風速屢變之擾亂影響。

空中水蒸汽壓力隨高度而進行遞減，在8000米之高處約已降至地面上之1%，故在此高度之上，實際可謂已無水蒸汽。空氣中水蒸汽含量隨時隨地不一，故相對濕度之分配頗不平均，因之隨是而發生之凝結物，亦多寡不一致。就大體而言，在高緯度地方，露量較少，在熱帶地方，露量頗多，谷地比山地為多，森林比曠野為多，沿湖海地方比陸地為多，海口比遠洋為多，以季節而論，則春秋雨季之露較多，因晝夜之氣溫，相差較大之故。在降雨稀少之地，植物之生育與露之關係殊深。

氣溫降至露點時，空氣中水蒸汽開始凝結為露或霜 (Reif; hoarfrost)。若在寒地，水蒸汽凝為細微之冰晶，名曰冰霧。在近地面或海面之空氣層冷至露點以下時，水蒸汽凝結成霧 (Nebel; fog)。在海面上之霧，大都因冷空氣吹過溫暖之海水面而起。至在陸上之霧，則概由失熱之氣層與其上溫暖之氣層對流混合而起，故霧之發生須有輕微之氣流。

雲 (Wolken; clouds) 與霧無甚區別，例如山上之霧，在山麓之人，則稱為雲，而居山中雲內之人，則稱為霧，故雲為自下方或遠處所

見之霧，與霧僅有高低之差。至二者生成原因亦頗類似，而空氣上昇後，體積膨脹，溫度低降，實為成雲之主要原因。雲中細微水滴，因重量極小，故得浮游空際，且因空氣摩擦作用，其落下極遲緩 (§116)。若溫度遠降在冷點之下，則水滴常在過冷卻狀態 (§174)。大氣中雲霧之凝結以細塵為凝結中心，在海面上，則以石鹽細粒為中心，而尤其收濕性強之含氮氣體(以 NO_2 為主)，在水蒸汽尚未達飽和狀態以前，已吸取水蒸汽分子而成為一水溶液。在呈纖維外觀之極高雲中，常含有由昇華作用 (§183) 而成之冰晶。雲在天空中能遮蔽日光，減少盛夏時之炎熱，又嚴寒時能妨碍熱的散失，使寒氣不致酷烈。

在冰上之飽和壓力既較在等溫過冷水面上者略小¹⁾，故在自由大氣中飽和或過飽和有種種之別。若有對於冰而言之低度過飽和，則生由全晶組成之雲，而若有高度過飽和，則生成結晶核，後者之角突出，為星形雪晶之始。若對於冰而言之過飽和繼續增長，則成球狀結晶，為霰(Graupeln; sleet) 之原形。今若又有對於水而言之過飽和，則於霰之上復有水滴凝結，若以霰為核，外面包圍數層玻璃狀冰者，則名曰雹(Hagel; hail)。此種冰層係常霰粒通過溫暖空氣層時，因在周圍空氣層中惹起過飽和致在霰粒面上起激烈凝結作用而成。外面之水層當霰粒落下而復通過冷空氣層時亦凝固為冰。空氣中微細水滴相併，其重量增加，於空氣浮力不能支持時，降下地面，成為雨滴。

雨及雪雹等一切沉澱均須有強凝結作用及空氣大範圍之冷卻作用。在多數情形中，冷卻作用係屬絕熱的一種，即因空氣上昇時，壓力低降，體積膨脹所致。

207. 空氣之運動。空氣之水平的運動，即普通的風 (Wind; wind)，有平衡等高處之氣壓差之勢。故在定態並略去摩擦時，其強度

(1) 在過冷水面上及冰上，水蒸汽在溫度 0°C 以下時之飽和壓力：

	水	冰
0°C	4.58	4.28 毫米
-10°	2.16	1.05 毫米
-20°	0.90	0.77 毫米

與氣壓梯度為比例。恰如地面上之各種運動，空氣之運動亦受地球迴轉之科賴奧來力 (§49) 之影響，故其在地面上之徑路不依最大壓力梯度之方向，但在北半球偏於右，在南半球偏於左。在幾乎無摩擦作用

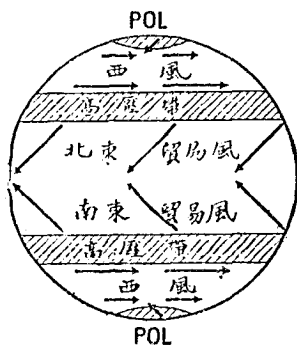


圖179 示一般空氣之循環。

之較高空氣層中，此影響極大，致起 90° 之偏向角，即空氣依與最大梯度垂直之方向運動，故即依等壓線 (Isobaren; isobars) 之方向進行。如是，空氣之壓差可以持久。

在大氣下層之氣壓差大都因大氣中氣溫不同而起。在地球上一處之空氣受熱膨脹而上升時，增加某一定高度以上之壓力，故空氣達某一定高度後分向四周流動。在地面受熱之處，則因空氣向

上升騰，壓力降低，四周之空氣遂向此處移動，以補因昇騰而生之空虛。如無擾亂，侵入之空氣受熱後復昇騰，如是循環不已。例如晝夜風向各異之陸海風成一循環流。在近地表之處，晝間空氣向受熱之陸地流動，夜間自較冷之陸地向海流動。反之，在上層則起反向之氣流。又如季風 (Monsoon; monsoon) 為冬夏交換之陸海風。夏季陸上為低壓部，海上為高壓部，冬季因陸之冷卻急速，海之冷卻徐緩，其配置恰相反，故夏季起向陸之風，冬季起向海之風。在相當程度內，地面上空氣一般的循環亦遵此種循環法。在貿易風 (Passante; trade winds) 帶中 (圖179)，下層空氣向最熱之赤道帶流動，且因地球自轉之故，在北半球偏向而為北東風，在南半球偏向而為南東風。空氣達赤道之後，復受熱上升，而在上層起向極之反貿易風，其方向在北半球為南西風，在南半球為北西風。然此種循環不直達極處，但在緯度 30° 之處(回歸線)即停止。因地球自轉之偏向作用，反貿易風在是處幾乎盡變為西風，其對於自赤道向極之風起阻尼作用，致在是處發生

高壓帶，此帶爲貿易風及在緯度 45° 之下層西風之起點。在兩極地方，復成一高壓部，由是冷空氣向四周分流，如上所述之壓力之分佈及大氣流之一般的循環，然均受地上海陸不規則分佈及其他隨時變動之擾亂之影響，致可有種種之變動，以上惟示其大體已耳。

對於氣象有重要關係者，爲大氣之鉛直運動，蓋空氣上昇冷卻，促成凝結作用；反之，空氣下降發熱，促成乾燥作用。由上面風之一側多雨量，而背風之一側缺少雨量者，卽屬此理。又空氣沿山下降，壓縮生熱，變爲極乾燥之氣流，其溫度上昇，有達 40°C 者，能使積雪陡然融化，如瑞士自阿爾卑斯山吹下之熱風（所謂芬風 Föhn; foehn），能使冬季溫暖，夏季枯死植物。

在自由大氣中最重要之鉛直運動如下：範圍較狹之一部分空氣，因其溫度遠較鄰近爲大，膨脹上昇，發生渦卷，而成堆之積雲，卽爲其產物，俟溫度與鄰近部分相等時，空氣始停止昇騰。其昇騰速度視氣溫之鉛直梯度而定。若密度不同之二氣體突然相遇，則沿二者之境界面，發生空氣大範圍之鉛直運動，此種境界面既以傾斜者居多，密度較小之空氣體位在密度較大之空氣體上，恰如傾斜之地層然。

一切空氣運動幾乎皆呈不穩流動現象。此種不規則的運動一部分由地面不平而起，而氣溫依鉛直方向之不一致常使空氣的水平運動伴向上或向下之鉛直運動。當向上之氣溫梯度愈大時，依鉛直方向之運動亦愈激烈，故其對於水平運動之擾亂亦愈甚。

208. 天氣 在若干區域，如在貿易風帶，天氣 (Wetter; weather) 幾乎完全不變，在其他區域，例如在季風帶，亦僅依季節而變；反之，在溫帶內，變化殊繁，且頗不規則。爲便於理會或豫察天氣，將同時一大區域內天氣之要素記在地圖（天氣圖；Wetterkarte; weather maps）上，觀圖得知氣象一時之配置。在天氣圖上（其一例如圖180）除示若干觀察地域之天氣要素外，概有等壓線以示氣壓之配置。如是，若考察逐日之天氣圖，則不難豫知天氣隨氣壓高低而起之變遷。

在溫帶內，天氣之變遷恆與一般氣流相當，換言之，自西方遷至

東方，氣壓變化恆呈波形，而高壓與低壓區域交換間隔。

然氣壓並非為決定天氣之要素，氣壓計上之記載往往與事實不符，因氣壓變化概隨其他氣象存在，故重要者，為其同伴氣象之變化而非氣壓之變化也。若檢察空氣之流動，則收效較宏，蓋大氣流携其發源地之空氣，溫度，濕度等種種特性而流動，並將此種特性加入於其所到之地之天氣要素內。性質及來源不同之氣流會合時，惹起特殊之氣象。此種異性氣流並非簡單混合，但沿境界面移動，前已述及。當熱氣流達冷氣流時，則因前者較疎，其沿冷氣流之傾斜境界面向上移動，同時發生凝結現象，成層雲及持久的沉澱，後者穿過下層冷氣落下而達地面。反之，當冷氣流達熱氣流時，則因其密度較大，概呈楔形侵入於熱空氣之下，掀起熱空氣，但此時因冷空氣激烈的侵入，發生高聳之雲及較強但不持久之沉澱，此外又伴較強之風。兩空氣體境界面與地面之切線，當進動之空氣為冷空氣時，稱曰冷波前，而當進動之空氣為熱氣時，曰熱波前。

在低壓區域，來源不同之空氣體常相連續，在圖上由不同之波前表明。進達此低壓區域內之熱空氣終則為在下面侵入之冷空氣所掀起，致在上層起凝結作用，而此區域遂成為不良天氣區域。在溫帶內，天氣之變遷常因冷熱空氣體區域不絕的在是種低壓區域內反覆會合而起，是種低壓概隨大西風向東進行。

在多數情形中，由精細的分析及憑經驗常可準確估計各氣象之發展並據是而豫知天氣之變遷。但因新現象隨時之加入，就一般而言，此種豫測祇能限於一短時間內，而鮮能超出一日者。

較持久之天氣，如乾燥之夏，寒冷之冬，恆隨一般空氣循環之變異而呈異常之特性，尤其因氣壓配置起變化時，天氣之異常反映最著。一般空氣循環經種種之擾亂而起變化，如達地面之太陽熱量之變化，海波溫度及範圍之異常，大陸上土壤溫度之變更，兩極之冰之狀況及其他與氣溫及相對濕度有關係之各種因子均能擾亂一般空氣的循環，但在各情形中，往往未能知真實原因之所在，故全年天氣之依科學

方法之分析及豫告，今日尚完全不可能。

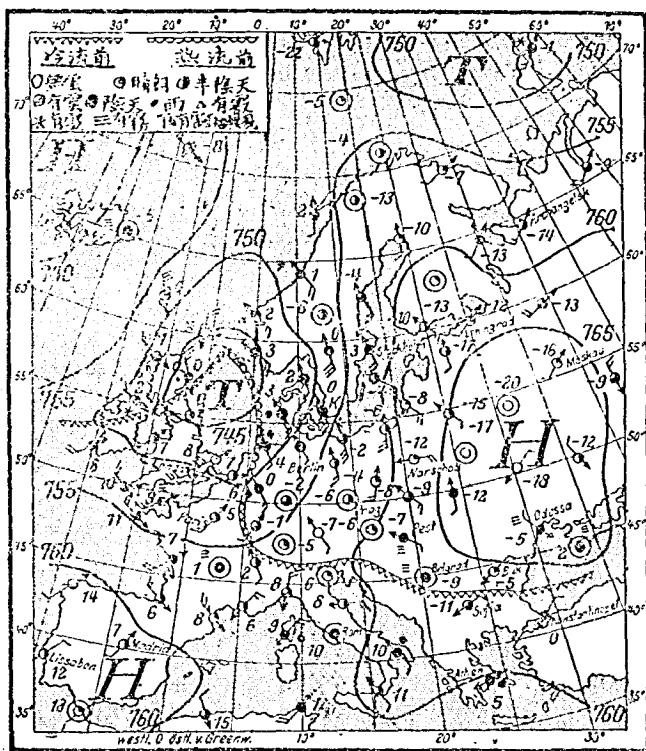
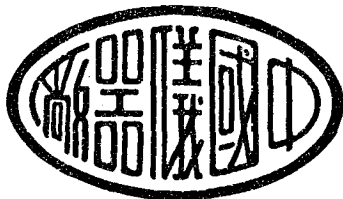


圖180. 冬季天氣圖之一例。

在天氣圖中通常由就海平面而言之等壓線示在一時之氣壓之分配，是處顯出在西歐之一發育良好之低壓區域（亦曰槽風）及在東歐之一顯明高壓區域。在以虛線相聯絡之各觀察地點之風係以矢首指出，其強度以羽毛表明。氣溫由在各站（以商標為記）旁之數字記出。一穿過槽風T之核心之錐線顯示來源及溫度不同之兩空氣團之境界，在低壓區域，熱空氣侵入冷空氣團內而以銳角界線表出。由溫度之此種配置及氣流狀況可推測低壓區域內大氣之鉛直方向之構成，在空氣團境界面之天氣之細目及整個性風之作用。

各種天氣要素之不絕的變動，各個原因之在氣象上之影響及各氣象向遠處之遷移，使天氣變遷成為極複雜之物理過程。此種過程不能實驗，而據理計算，亦惟在特別簡單之假定下為之。職是之故，天氣

之探究實為應用物理學上非常難的部分。



標商

冊註

上海中國儀器廠

廠址上海北華路九十一號

最新出品
物理學實驗器械

分光鏡

準直管及望遠鏡之物鏡，口徑約一五米耗，焦點約一二五全景，尺鏡之分度尺為二十耗縮成十分之一負動，以接收光譜之部裝於架之圓盤上，附有護罩以防塵埃，供觀察日光光譜，減色全光譜等明線光譜之用。

哈特爾氏光學盤

分度盤及採光屏得自由旋轉，便於接受光源，可實驗光學上各定律，如平面鏡，凸鏡，凹鏡，凹鏡之反折射角，折射角之關係，均得從盤上分度，直接讀出。

朱爾氏熱之工作當量試驗器

手搖式，發熱之部為兩個圓錐狀之杯，杯之上下及周圍，均有佳良之絕熱裝置，以免熱之耗失，座有記轉器，能自記週轉次數，壓板二五瓩，壓環重五〇〇克，溫度計分度至五分一度，實驗時可求得較精之熱功比重。

交流電試驗器

比器之饋電裝置為一螺線環，能令電池之直流電，變為交流。將此交流送入同器中之二相及三相感應電動機，即能使鼠籠式之轉子旋轉不絕。構造簡而易明，講授尤富興趣。

馬哈氏波機

金屬製擺球一列，得由機之振轉機關及附件，作前進行波，橫縱之定波與進行波，顯示各種波式。如縱波與橫波，今則以一機兼之，尤稱利便。

韋氏感電機

轉片用硬木製，錫箔黏貼合法，放電桿之端作球狀，火花長五〇耗至七〇耗，雖在潮濕季節，亦能發電，可供各種靜電學上之實驗。

中華民國二十五年五月初版

大學物理學

上册

實價壹圓貳角

(外埠酌加郵運費)

版權所有

不許
翻印

原著者

德國柏林大學教授
Wilhelm H. Westphal 著

譯者
迷行

杜若城
上海交通路通裕里

印刷者

勵志書局
上海交通路通裕里

發行所

勵志書局
上海交通路通裕里

經售處

各省市大書局

商標



註冊

上海中國儀器廠

廠址：上海北華路九十一號

最新出品

物理學實驗器械

曲管氣壓計

坡管之開端彎曲，上下均附分度游尺，以定水銀柱之頂點與起點。觀察時無須計及管壁毛細作用之誤差，得直接從游尺上讀出水銀柱之變化。行有關氣壓之實驗時，可藉此地氣壓之觀測，預祝天氣之變化。懸掛壁間，可供每日當作更精密之計算。

感應圈

市上所售感應圈，概係船品。本廠特設計自製以塞漏厄。器，斷繞器，容電器，每節各以數百道之絕緣細線織成，附有振動一〇耗至四〇耗之火花，供各種真空放電管之實驗。

迴旋式真空抽氣機

最近新式之真空抽氣機，係利用一偏心輪之迴旋以排去空氣，與普通用之活塞心中，下於唧筒中之排氣法，大異其趣。全部機件，裝於堅固之貯油箱中，外附轉輪或電動機。真空程度可達水銀柱萬分之四，耗體積輕小靈便，置諸實驗室頭，尤為相宜。

發電機及電動機

主要部分，得分離觀察，直流交流，並可兼為順捲分捲兩式。電壓自8弗至35弗，電流自4安至8安，供諸授用及實驗用。

簡明電動機

此型路式更進一步，示電樞在永久磁場與電磁場中之旋轉可分八種連接方式，用以說明佛來銘氏之左手定則及電動機之原理極易了解。

內燃機模型

四衝程式，迴轉後方之輪，則活塞上下往復，活門亦，兼以不同之漆，俾講授其動作過程時，生徒均能一窺而知。