Iteraciones aplicadas a las suma de los primeros n números naturales elevados a la potencia p

Mat. Enrique Torres Miguel
kike_torres@ciencias.unam.mx
20 de enero de 2022

Resumen

Se mostrarán identidades finitas obtenidas al iterar el operador Σ sobre la función aritmética $f(n) = n^p$, aplicando conceptos como el teorema de linealidad iterativa, la extensión compleja del operador Σ_z, la $\pm 1/2$-Transformación, el operador $\Sigma_{\pm 1/2}$ y los números de Stirling se presenta una forma alternativa entender y exponer identidades.

1. Deducción iterativa y breve introducción

Primero, observamos que para cualquier función aritmética f al aplicarle el operador Suma $\sum_{k=1}^{n}[\ ]$, haciendo correr el límite superior n en todo el conjunto de números naturales, esto define una nueva función aritmética g de modo tal que,

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

y aplicando este razonamiento m veces, se define una nueva función aritmética g_m tal que,

$$g_m(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m).$$

Y con notación compacta esto se escribe como,

$$g_m(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k).$$

Por lo tanto, recordando que $\sum_{k=1}^{n} 1 = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces aplicando el operador Suma $\sum_{k=1}^{n}[\ ]$ a la igualdad anterior, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} 1. \tag{1}$$

Por otra parte, recordemos que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$.

Entonces aplicando $\sum_{k=1}^{n}[\ ]$ a la igualdad anterior se tiene que,

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2}. \tag{2}$$

Por otro lado, aplicando el operado Suma a (1) tenemos que,

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} k = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1. \tag{3}$$

Así, despejando la suma de los cuadrados en (2) y sustituyendo (1) y (3) se tiene que,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 1.$$

Por lo tanto resulta que,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 1.$$

De manera análoga y utilizando lo anterior podemos ver lo siguiente,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = 6\sum_{t=1}^{n}\sum_{r=1}^{t}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - 6\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

y de forma similar,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^4 = 24\sum_{v=1}^{n}\sum_{t=1}^{v}\sum_{r=1}^{t}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - 36\sum_{t=1}^{n}\sum_{r=1}^{t}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 + 14\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} 1.$$

Por lo tanto, se puede hallar una expresión de $\sum_{k=1}^{n} k^p$ en términos de

$$\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1}\cdots\sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}}\sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} 1. \tag{4}$$

Entonces usando notación compacta se deduce que;

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{r=1}^{p} g(p,r) \sum_{k=1}^{n}{}_{r+1} 1 = \sum_{r=1}^{p} g(p,r) \binom{r+n}{n-1} \quad \forall n, p \in \mathbb{N}$$

donde, $g(p,r)$ son constantes que solamente depende del parámetro p.

Es más, con un poco más de cálculos es claro que esto se reduce a la siguiente identidad,

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{p-r} r! S(p,r)\theta_{r+2}(n) \tag{5}$$

teniendo en cuenta que,

$$S(p,r) = S(p-1, r-1) + rS(p-1, r)$$

representan los números de Stirling de segunda clase y usando el hecho que,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}{}_{m-1} 1 &= \theta_m(n) \\ &= \binom{m+n-2}{n-1} \quad \forall n, p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por tanto, una vez obtenida la identidad (5) es sencillo es revisar como se caracterizan las iteraciones del operador $\sum_{k=1}^{n}[\ ]$ sobre la función $f(n) = n^p$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}{}_m k^p &= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1}\cdots\sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}}\sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} k_m^p \\ &= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1}\cdots\sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}}\sum_{r=1}^{p} g(p,r) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}}{}_{r+1} 1 \\ &= \sum_{r=1}^{p} g(p,r) \sum_{k=1}^{n}{}_{m+r} 1 \\ &= \sum_{r=1}^{p} g(p,r)\theta_{r+m+1}(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto se sigue que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, k^p = \sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r} r! S(p,r)\theta_{r+m+1}(n). \tag{6}$$

Y por el teorema de linealidad en la iteración para funciones aritméticas tenemos que,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, k^p &= \sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)(n+1-k)^p \\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-2}{k-1}(n+1-k)^p.\end{aligned}$$

Así podemos ver de forma explicita que,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-2}{k-1}(n+1-k)^p = \sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r} r! S(p,r)\theta_{r+m+1}(n). \tag{7}$$

Por otra parte, usando la definición de iterada compleja por medio del operador $\sum_{k=1}^{n}{}_{z-1}$ [ ] en la ecuación (5) obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}{}_{z-1}\sum_{s=1}^{k} s^p &= \sum_{k=1}^{n}{}_{z-1}\sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r} r! S(p,r)\theta_{r+2}(k) \\ &= \sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r} r! S(p,r)\sum_{k=1}^{n}{}_{z-1}\,\theta_{r+2}(k) \\ &= \sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r} r! S(p,r)\theta_{r+z+1}(n).\end{aligned}$$

Y como,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}{}_{z-1}\sum_{s=1}^{k} s^p &= \sum_{k=1}^{n}{}_{z-1+1}\, k^p \\ &= \sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, k^p.\end{aligned}$$

Así, comparando igualdades se obtiene la iterada de orden complejo de $f(n) = n^p$.

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, k^p = \sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r} r! S(p,r)\theta_{r+z+1}(n) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

A su vez, usando la definición de iterada compleja para cualquier función aritmética f,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, f(k) &= \sum_{k=1}^{n} \theta_z(k) f(n+1-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{\overline{n-1}}}{(n-1)!} f(n+1-k) \end{aligned}$$

donde,

$$z^{\overline{n-1}} = \begin{cases} z(z+1)\cdots(z+n-2) & \forall z \neq 0, \forall n > 1, \\ \left[\dfrac{1}{n}\right] & \forall z = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \\ 1 & \forall z \neq 0, n = 1. \end{cases}$$

Entonces se tiene la siguiente expresión explicita de (8)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^{\overline{n-1}}}{(n-1)!}(n+1-k)^p = \sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r} r! S(p,r)\theta_{r+z+1}(n). \tag{9}$$

De forma particular para $z = 0$ se tiene que,

$$n^p = \sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r} r! S(p,r)\theta_{r+1}(n). \tag{10}$$

Ahora, tomando $z = \dfrac{1}{2}$ en la ecuación (8) se tiene la siguiente identidad,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{\frac{1}{2}}\, k^p = \sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r} r! S(p,r)\theta_{r+\frac{3}{2}}(n). \tag{11}$$

Por lo tanto, usando las definiciones usuales de los factoriales extendidos y la definición de 1/2-Transformación tenemos que,

$$\begin{aligned}
\theta_{r+\frac{3}{2}}(n) &= \frac{(r+\frac{3}{2})^{\overline{n-1}}}{(n-1)!} \\
&= \frac{\Gamma(n+r+\frac{3}{2}-1)}{\Gamma(r+\frac{3}{2})\Gamma(n)} \\
&= \frac{\Gamma(n+r+\frac{1}{2})}{\Gamma(r+\frac{3}{2})\Gamma(n)} \\
&= \frac{\Gamma(n+r+\frac{1}{2})}{(r+\frac{1}{2})\Gamma(r+\frac{1}{2})\Gamma(n)} \\
&= \frac{2}{2r+1}\frac{(2n+2r)!}{4^{n+r}(n+r)!}\frac{4^r r!}{(2r)!}\frac{1}{(n-1)!} \\
&= \frac{2}{2r+1}\frac{(2n+2r)!}{4^{n+r}(n+r)!}\frac{(n+r)!}{(n+r)!}\frac{r!}{r!}\frac{4^r r!}{(2r)!}\frac{n}{n!} \\
&= \frac{2n}{4^n(2r+1)}\frac{\binom{2n+2r}{n+r}\binom{n+r}{r}}{\binom{2r}{r}}.
\end{aligned}$$

Entonces usando el hecho de que $\theta_{r+\frac{3}{2}}(n) = \frac{2n}{4^n(2r+1)}\frac{\binom{2n+2r}{n+r}\binom{n+r}{r}}{\binom{2r}{r}}$ en la ecuación (11) se obtiene la siguiente identidad,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{\frac{1}{2}}\, k^p = \sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r}r!S(p,r)\frac{2n}{4^n(2r+1)}\frac{\binom{2n+2r}{n+r}\binom{n+r}{r}}{\binom{2r}{r}}. \tag{12}$$

Y nuevamente, por la definición de la 1/2-Transformación se obtiene la siguiente expresión de la ecuación (12),

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{4^k(2k-1)}\binom{2k}{k}(n+1-k)^p = \sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r}S(p,r)\frac{2nr!}{4^n(2r+1)}\frac{\binom{2n+2r}{n+r}\binom{n+r}{r}}{\binom{2r}{r}}. \tag{13}$$

Análogamente, para $z = -\dfrac{1}{2}$ en la ecuación (8) se tiene que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-\frac{1}{2}}\, k^p = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{p-r} r! S(p,r) \theta_{r+\frac{1}{2}}(n) \tag{14}$$

y como

$$\theta_{r+\frac{1}{2}}(n) = \frac{2n}{4^n(2n+2r-1)} \frac{\binom{2n+2r}{n+r}\binom{n+r}{r}}{\binom{2r}{r}},$$

entonces sustituyendo en (14) se deduce que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-\frac{1}{2}}\, k^p = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{p-r} r! S(p,r) \frac{2n}{4^n(2n+2r-1)} \frac{\binom{2n+2r}{n+r}\binom{n+r}{r}}{\binom{2r}{r}}. \tag{15}$$

Por otra parte, usando el concepto de (-1/2)-Transformación, la definición de iterada compleja de una función aritmética y las propiedades de la función Gamma de Euler, se tiene que

$$\begin{aligned} \theta_{-1/2}(n) &= \frac{(-1/2)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!} \\ &= \frac{2n}{2^{2n}(2n-1)(3-2n)} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Y sustituyendo lo anterior en (15) se tiene la siguiente igualdad,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2^{2k}(2k-1)(3-2k)} \binom{2n}{n} (n+1-k)^p = \sum_{r=1}^{p} \frac{2n(-1)^{p-r} r! S(p,r)}{4^n(2n+2r-1)} \frac{\binom{2n+2r}{n+r}\binom{n+r}{r}}{\binom{2r}{r}}. \tag{16}$$

Ahora recordando las leyes de invertibilidad de los números de Stirling de primera y segunda clase sabemos que,

$$g(p) = \sum_{r=1}^{p} S(p,r)f(r) \quad \Leftrightarrow \quad f(p) = \sum_{r=1}^{p}(-1)^{p-r}s(p,r)g(r)$$

donde,

$$s(p,r) = s(p-1,r-1) + (p-1)s(p-1,r)$$

son los números de primera clase. Por lo tanto, usando está propiedad en la ecuación (8) se obtiene la siguiente identidad,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z} \sum_{r=1}^{p} s(p,r)k^r = p!\theta_{p+z+1}(n) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{17}$$

Y revisando casos particulares se tiene lo siguiente.

(a_1) Para $z = 0$,

$$\sum_{r=1}^{p} s(p,r)n^r = p!\theta_{p+1}(n). \tag{18}$$

(a_2) Para $z = \frac{1}{2}$,

$$\sum_{r=1}^{p} s(p,r) \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} (n+1-k)^r = \frac{2np!}{4^n(2p+1)} \frac{\binom{2n+2p}{n+p}\binom{n+p}{p}}{\binom{2p}{p}}. \tag{19}$$

(a_2) Para $z = -\frac{1}{2}$,

$$\sum_{r=1}^{p} s(p,r) \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2^{2k}(2k-1)(3-2k)} \binom{2n}{n} (n+1-k)^r = \frac{2np!}{4^n(2n+2p-1)} \frac{\binom{2n+2p}{n+p}\binom{n+p}{p}}{\binom{2r}{r}}. \tag{20}$$

Para finalizar vale la pena comentarse que el hecho de centrase en la idea iterativa ayuda en facilitar la explosión de varias de las identidades presentadas ya que es común, presentarlas por separado en diversos contextos minimizando así la relación inmediata que existe entre dichas identidades.

Referencias

[1] Aigner, Martin. *A course in enumeration.* Springer Science & Business Media, 2007.

[2] Apostol, Tom M. *Introducción a la teoría analítica de números.* Reverté, 1984.

[3] Balanzario, Eugenio P. *Breviario de teoría analítica de los números.* Sociedad Matemática Mexicana, 2008.

[4] Bogart, Kenneth P. *Introductory combinatorics.* Saunders College Publishing, 1989.

[5] Comtet, Louis. *Analyse combinatoire: Vol. 1.* Presses Universitaires de France, 1970.

[6] Friedlander, John B. and Heath-Brown, DR and Iwaniec, H. and Kaczorowski, J. *Analytic number theory.* Springer, 1891.

[7] Gupta, Hansraj. *Selected topics in number theory.* Abacus Press, 1980.

[8] Ivic, Aleksandar. *The Riemann zeta-function: theory and applications.* Courier Corporation, 2012.

[9] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio.* Mir, 1988.

[10] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio: problemas y ejercicios.* Mir, 1989.

[11] Rosen, Kenneth H. *Handbook of discrete and combinatorial mathematics.* CRC Press, 2000.

[12] Rota, Gian-Carlo and Doubilet, P. *Finite operator calculus.* Academic Press, 1975.