Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 3

Holomorphe Funktionen auf einer riemannschen Fläche

Definition 3.1. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ auf einer riemannschen Fläche X heißt *holomorph*, wenn es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

mit Karten

$$\alpha_i\colon U_i \longrightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}$$

derart gibt, dass

$$f \circ \alpha_i^{-1}\colon V_i \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorph sind.

Lemma 3.2. *Es sei X eine riemannschen Fläche und $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(1) *f ist holomorph.*
(2) *Für jede mit der komplexen Struktur kompatible Karte*

$$\alpha\colon U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{C}$$

ist $f \circ \alpha^{-1}$ holomorph.
(3) *f ist in jedem Punkt durch eine komplexe Potenzreihe beschreibbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 3.1. □

Dabei ist die Potenzreihe auf dem Kartenbild definiert und hängt von der gewählten Karte ab. Die Eigenschaft (2) zeigt, dass man den Atlas durch kompatible Karten auffüllen kann, ohne dabei die holomorphen Funktionen zu verändern. Deshalb nimmt man häufig kompatible Karten hinzu, etwa solche, die zusammenhängend sind oder die homöomorph zu einer Kreisscheibe sind oder hinreichend klein, um gewissen Punkten auszuweichen und Ähnliches.

Korollar 3.3. *Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ und eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ bedeutet die Holomorphie von f als Funktion der riemannschen Fläche U einfach die Holomorphie von f.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 3.2. □

Lemma 3.4. *Es sei X eine riemannsche Fläche. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Konstante Funktionen sind holomorph.*
(2) *Die Summe von holomorphen Funktionen ist holomorph.*
(3) *Das Produkt von holomorphen Funktionen ist holomorph.*
(4) *Zu einer nullstellenfreien holomorphen Funktion f ist auch f^{-1} holomorph.*

Beweis. Siehe Aufgabe 3.4. □

Die letzte Teilaussage wird zumeist auf holomorphe Funktionen angewendet, die Nullstellen haben, und wo man dann f auf die nullstellenfreie offene Teilmenge einschränkt und dort holomorph invertiert.

Viele substantielle Ergebnisse der komplexen Funktionentheorie übertragen sich direkt auf riemannsche Flächen. Gelegentlich braucht man die Bedingung, dass die riemannsche Fläche zusammenhängend ist. Häufig wird eine riemannsche Fläche als zusammenhängend definiert.

Satz 3.5. *Es sei X eine zusammenhängende riemannsche Fläche und sei*

$$f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine von der Nullfunktion verschiedene holomorphe Funktion auf X. Dann ist die Nullstellenmenge von f eine diskrete Teilmenge von X.

Beweis. Nehmen wir an, dass die Nullstellenmenge nicht diskret ist. Dann gibt es einen Punkt $x \in X$ der Nullstelle derart, dass es in jeder offenen Umgebung von x unendliche viele Punkte der Nullstellenmenge gibt. Es sei $x \in U$ eine Kartenumgebung und

$$\alpha\colon U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{C}$$

die Kartenabbildung. Nach Satz 1.3 ist dann $f|_U \circ \alpha^{-1}$ die Nullfunktion. Wir zeigen, dass dann f überhaupt die Nullfunktion ist im Widerspruch zur Voraussetzung. Sei $y \in X$ ein weiterer Punkt und sei

$$\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$$

ein stetiger Weg, der x mit y verbindet. Es seien $U_1 = U, U_2, \ldots, U_n$ offene zusammenhängende Kartenumgebungen, die das (kompakte) Bild dieses Weges überdecken und die $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ erfüllen. Dann ist, wie eben bemerkt, $f|_{U_1} = 0$. Da die holomorphe Funktion $f|_{U_2} \circ \alpha_2^{-1}$ auf V_2 holomorph ist, und auf $\alpha_2(U_1 \cap U_2)$ die Nullfunktion ist, folgt, wieder mit Satz 1.3, dass $f|_{U_2} \circ \alpha_2^{-1}$ und damit auch $f|_{U_2}$ die Nullfunktion ist. Induktiv fortfahrend ergibt sich, dass $f|_{U_i}$ für alle i die Nullfunktion ist und dass insbesondere $f(y) = 0$ ist. □

Satz 3.6. *Es sei X eine zusammenhängende riemannsche Fläche und seien*

$$f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorphe Funktionen auf X. Es gebe eine Folge $x_n \in X$ mit einem Häufungspunkt (der kein Folgenglied sei) derart, dass

$$f(x_n) = g(x_n)$$

für $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann ist $f = g$.

Beweis. Wir betrachten die Differenz $h = f - g$, die nach Lemma 3.4 wieder holomorph ist. Es ist dann

$$h(x_n) = 0$$

und da die Folgenglieder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt besitzen, handelt es sich um eine nichtdiskrete Menge. Nach Satz 3.5 ist $h = 0$ und damit $f = g$. □

Satz 3.7. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann gibt es auf X nur die konstanten holomorphen Funktionen.*

Beweis. Nach Satz Anhang 2.9 ist das Bild von X unter der stetigen Abbildung $|f|$ wieder kompakt. Nach dem Satz von Heine-Borel ist somit das Bild von $|f|$ abgeschlossen und beschränkt. Das bedeutet insbesondere, dass das Maximum von $|f|$ unter der Funktion angenommen wird. Es gibt also ein $P \in X$ mit $|f(P)| \geq |f(Q)|$ für alle Punkte $Q \in X$. Es sei $P \in U \subseteq X$ ein zusammenhängendes Kartengebiet. Aus dem Maximumsprinzip, angewendet auf $f \circ \alpha^{-1}$ folgt, dass $f|_U$ konstant ist. Also ist f nach Satz 3.5 überhaupt konstant. □

Definition 3.8. Zu einer riemannschen Fläche X bezeichnet man den Ring der holomorphen Funktionen auf X mit

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

und spricht von der (globalen Auswertung der) *Strukturgarbe* auf X.

Es ist also

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}.$$

Zu jeder offenen Telmenge $U \subseteq X$ ist U wieder eine riemannsche Fläche und somit ist auch

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

definiert. Man spricht von der Auswertung der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ auf U. Wir werden später das abstrakte Garbenkonzept kennenlernen. Die wichtigsten Eigenschaften werden in der folgenden Aussage zusammengefasst.

Lemma 3.9. *Es sei X eine riemannsche Fläche. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu offenen Mengen $V \subseteq U$ von X und einer holomorphen Funktion*

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist die Einschränkung $f|_V$ eine holomorphe Funktion auf V.

(2) *Zu offenen Mengen $V \subseteq U$ ist die Einschränkungsabbildung*

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_X),\ f \longmapsto f|_V,$$

ein $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus.

(3) *Zu offenen Mengen $V \subseteq U$ mit U zusammenhängend und $V \neq \emptyset$ ist die Einschränkungsabbildung*

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_X),\ f \longmapsto f|_V$$

injektiv.

(4) *Es sei U eine offene Menge und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung und seien holomorphe Funktionen $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit*

$$f|_{U_i} = g|_{U_i}$$

für alle i gegeben. Dann ist $f = g$.

(5) *Es sei U eine offene Menge und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung und seien holomorphe Funktionen $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ mit*

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$$

für alle i, j gegeben. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit

$$f|_{U_i} = f_i$$

alle i.

Beweis. (1) ist klar aufgrund der lokalen Definition von holomorph.
(2) ist klar, da die algebraischen Operationen punktweise definiert sind.
(3) folgt aus Satz 3.5.
(4) ist klar, da die Gleichheit von Funktionen punktweise definiert ist.
(5) Zunächst ergibt sich durch punktweise Festlegung direkt eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$, die auf die vorgegebenen Funktionen einschränkt. Diese ist holomorph, da die Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist.

□

Holomorphe Abbildungen

Definition 3.10. Es seien X und Y riemannsche Flächen und sei

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Man nennt φ *holomorph*, wenn für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ und jede holomorphe Funktion $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ die zusammengesetzte Funktion $f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)}$ holomorph ist.

Gemäß der Definition muss man also für jede offene Menge $V \subseteq Y$ und jede holomorphe Funktion $f\colon V \to \mathbb{C}$ die Hintereinanderschaltung

$$\varphi^{-1}(V) \stackrel{\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}}{\longrightarrow} V \stackrel{f}{\longrightarrow} \mathbb{C}$$

betrachten und als holomorph auf $\varphi^{-1}(V) \subseteq X$ nachweisen.

Lemma 3.11. *Es seien X und Y riemannsche Flächen und sei*

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.

(1) *φ ist holomorph.*
(2) *Für jedes Kartengebiet $V \subseteq Y$ und für jede holomorphe Funktion $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ ist $f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)}$ holomorph.*
(3) *Es gibt eine offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ mit Kartengebieten $V_i \subseteq Y$ derart, dass für jede holomorphe Funktion $f_i \in \Gamma(V_i, \mathcal{O}_Y)$ auch $f_i \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V_i)}$ holomorph ist.*
(4) *Für beliebige Kartengebiete $V \subseteq Y$ und*

$$U \subseteq \varphi^{-1}(V) \subseteq X$$

mit Kartenabbildungen $\beta\colon V \to \beta(V) \subseteq \mathbb{C}$ und $\alpha\colon U \to \alpha(U) \subseteq \mathbb{C}$ ist

$$\beta \circ \varphi|_U \circ \alpha^{-1}\colon \alpha(U) \longrightarrow \beta(V)$$

holomorph.
(5) *Es gibt eine offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ mit Kartengebieten V_i und offene Überdeckungen $\varphi^{-1}(V_i) = \bigcup_{j \in J_i} U_j$ mit Kartengebieten U_j von X derart, dass die Hintereinanderschaltungen*

$$\beta_i \circ \varphi|_{U_j} \circ \alpha_j^{-1}\colon \alpha(U_j) \longrightarrow \beta(V_i)$$

holomorph sind.

Beweis. Von (1) nach (2) und von (2) nach (3) sind Einschränkungen. Sei (3) erfüllt. Es sei $V \subseteq Y$ eine offene Teilmenge und $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ eine holomorphe Funktion. Die Durchschnitte $V \cap V_i$, $i \in I$, bilden dann eine offene Überdeckung von V. Nach (3) sind dann die

$$f|_{V \cap V_i} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V \cap V_i)} = \left(f \circ \left(\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}\right)\right)|_{\varphi^{-1}(V \cap V_i)}$$

holomorph. Da die Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, ist $f \circ \left(\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}\right)$ selbst holomorph.

Von (2) nach (4) und von (4) nach (5) ist klar. Sei also (5) erfüllt, wir werden (3) zeigen. Ohne Einschränkung können wir $I = \{i\}$,

$$V_i = Y \subseteq \mathbb{C}$$

offen und

$$X = \bigcup_{j \in J} U_j$$

mit Kartengebieten U_j annehmen. Es sei f eine holomorphe Funktion auf Y. Es ist die Holomorphie von

$$f \circ \varphi|_{U_j}\colon U_j \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{C}$$

für jedes U_j nachzuweisen. Somit ist zu zeigen, dass

$$f \circ \varphi|_{U_j} \circ \alpha_j^{-1} \colon \alpha_j(U_j) \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{C}$$

holomorph ist. Nach Voraussetzung (5) ist $\varphi|_{U_j} \circ \alpha_j^{-1}$ holomorph und somit ist auch diese Hintereinanderschaltung mit f holomorph. □

Die Situation in Lemma 3.11 (4) kann man sich durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \stackrel{\varphi|_U}{\longrightarrow} & V \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \alpha(V) & \stackrel{\beta \circ \varphi|_U \circ \alpha^{-1}}{\longrightarrow} & \beta(V) \end{array}$$

veranschaulichen, wobei sich die untere Zeile allein in $\mathbb{C}$ abspielt.

Lemma 3.12. *Es sei X eine riemannsche Fläche. Dann ist eine holomorphe Funktion auf X und eine holomorphe Abbildung von X nach $\mathbb{C}$ dasselbe.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 3.2 und Lemma 3.11. □

Lemma 3.13.

(1) *Die Identität $X \to X$ auf einer riemannschen Fläche ist eine holomorphe Abbildung.*
(2) *Zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ einer riemannschen Fläche X ist die Inklusion*

$$U \longrightarrow X$$

eine holomorphe Abbildung.
(3) *Es seien $\varphi \colon X \to Y$ und $\psi \colon Y \to Z$ holomorphe Abbildungen zwischen riemannschen Flächen X, Y, Z. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung*

$$\psi \circ \varphi \colon X \longrightarrow Z$$

holomorph.

Beweis. Siehe Aufgabe 3.10. □

Eine direkte Verallgemeinerung von Lemma 3.9 ist die folgende Aussage.

Lemma 3.14. *Es seien X und Y riemannsche Flächen und sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Holomorphe Abbildungen*

$$\varphi, \psi \colon X \longrightarrow Y$$

stimmen genau dann überein, wenn die Einschränkungen $\varphi|_{U_i}$ und $\psi|_{U_i}$ für alle i übereinstimmen.

(2) *Es seien holomorphe Abbildungen* $\varphi_i\colon U_i \to Y$ *gegeben, die*

$$\varphi_i|_{U_i \cap U_j} \;=\; \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$$

für alle i, j *erfüllen. Dann gibt es eine holomorphe Abbildung* $\varphi : X \longrightarrow Y$ *mit*

$$\varphi|_{U_i} = \varphi_i$$

für alle i.

Beweis. Siehe Aufgabe 3.12. □

Satz 3.15. *Es sei* $\varphi\colon X \to Y$ *eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen zusammenhängenden riemannschen Flächen. Dann ist* φ *offen.*

Beweis. Dies folgt aus dem Offenheitssatz für holomorphe Funktionen. □

Satz 3.16. *Es seien* X *und* Y *riemannsche Flächen und sei* $\varphi\colon X \to Y$ *eine bijektive holomorphe Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung* $\varphi^{-1}\colon Y \to X$ *holomorph.*

Beweis. Wegen Satz 3.15 ist auch die Umkehrabbildung φ^{-1} stetig. Die Holomorphe der Umkehrabbildung folgt mit Lemma 3.11 (5) aus der lokalen Version Satz 2.3. □

Definition 3.17. Zwei riemannsche Flächen X und Y heißen *biholomorph*, wenn es holomorphe Abbildungen $\varphi\colon X \to Y$ und $\psi\colon Y \to X$ gibt mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y$.

Statt biholomorph sagt man häufig auch einfach isomorph. Satz 3.16 besagt, dass eine bijektive holomorphe Abbildung automatisch biholomorph ist. Biholomorphe riemannsche Flächen sind insbesondere homöomorph und als reelle Mannigfaltigkeiten diffeomorph. Die Umkehrung gilt dabei nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.18. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und die offene Kreisscheibe $U(0,1)$ sind nicht biholomorph, da jede holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to U(0,1)$ nach dem Maximumsprinzip konstant ist.

Lemma 3.19. *Es sei* $f \in \mathbb{C}[Z]$ *ein nichtkonstantes Polynom vom Grad* k. *Dann definiert* f *eine holomorphe Abbildung* $\tilde{f}\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, *die auf*

$$\mathbb{C} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = S^2 \setminus \{N\}$$

mit f *übereinstimmt, die* ∞ *auf* ∞ *abbildet und die lokal in einer offenen Umgebung von* ∞ *eine* k*-te Potenzierung ist.*

Beweis. Wir setzen $w = z^{-1}$, $Z = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$ für die endliche Nullstellenmenge von f und $Z' = \{z^{-1} \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0,\, z \neq 0\}$ für das Bild davon unter der Invertierungsabbildung. Auf $\mathbb{C}^\times \setminus Z$ kommutiert das Diagramm ($\tilde{f}$ gibt es noch nicht)

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{C}^\times \setminus Z \subseteq \mathbb{C}^\times \subseteq \mathbb{C} & & & \xrightarrow{f} & & & \mathbb{C} \supseteq \mathbb{C}^\times \\
& \searrow & & & & \swarrow & \\
z \mapsto z^{-1} \downarrow & & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & & \downarrow u \mapsto u^{-1} \\
& \nearrow & & & & \nwarrow & \\
\mathbb{C}^\times \setminus Z' \subseteq \mathbb{C}^\times \subseteq \mathbb{C} & & & \xrightarrow{\frac{1}{f(w^{-1})}} & & & \mathbb{C} \supseteq \mathbb{C}^\times
\end{array}$$

auf $\mathbb{C}^\times \setminus Z$. Auf $\mathbb{C}^\times \setminus Z'$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(w^{-1})} &= \frac{w^k}{w^k f(w^{-1})} \\
&= \frac{w^k}{w^k \left(\sum_{n=0}^k c_n w^{-n} \right)} \\
&= \frac{w^k}{\sum_{n=0}^k c_n w^{k-n}} \\
&= \frac{w^k}{\sum_{j=0}^k c_{k-j} w^j}.
\end{aligned}$$

Wegen $c_k \neq 0$ ist das Nennerpolynom im Nullpunkt (für w) invertierbar, es sei $g(w)$ die inverse holomorphe Funktion dazu, also

$$\frac{1}{f(w^{-1})} = w^k g(w).$$

Diese Funktion kann man in den Nullpunkt (von $\mathbb{C}$ unten links, also ∞ von $\mathbb{C}$ oben links) fortsetzen mit dem Wert 0, sie ist also auf einer offenen Umgebung von 0 definiert und stimmt auf dem Übergang mit f überein. Daher wird nach Lemma 3.14 eine Funktion $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ festgelegt. Wegen

$$g(w) \neq 0$$

ist die lokale Gestalt w^k. $\square$

Die vorstehende Aussage werden wir in Satz 18.6 wesentlich verallgemeinern.

Abbildungsverzeichnis