漢譯

# 葛氏球面三角學

李熙如譯

北平文化學社印行

# 漢譯 葛氏球面三角學

李熙如譯

北平文化學社印行

民國二十三年十一月　日初版發行

實價大洋四角（實價不折不扣 外埠酌加寄費）

漢譯

# 葛氏球面三角法

**Spherical Trigonometry**

**Granville**



原著者　W. A. Granville

譯述者　李熙如

發行者　邵松如　北平和平門前文化學社

印刷者　文化學社　北平和平門前 電南三五八〇

總發行所　北平和平門前電話南局三五八〇　有線電報掛號二四二九　文化學社

分發行所　上海公共租界老靶子路三六九號　文化學社上海分社　開封特約分社　鄭州特約分社

本書已照出版法呈請內政部註冊

## 漢譯葛司龍三氏微積分

王喬南

是書為美國數學博士葛藍威爾氏原著，復經司密斯及龍類二氏之改訂，理論精嚴，取材豐富。如關於導數之應用；不連續函數積分之研究；積分表之臚列；重心及壓力之應用；梯形法，拋物線法積分之介紹；一切曲線，曲面線，長面積體積之計算，尤為精采。所有問題均逐類舉例，解釋詳明。誠科學界之有力工具也。此書全文由王喬南先生譯出，復自吉博森及奧斯博恩諸氏微積分中採入饒有趣味之習題若干，教材益為豐富。致於譯筆切實流暢，圖形排印美觀，實為譯文書籍所僅見。凡研究解析數學，高等理化，工程，機械，電機，兵器諸科者不可不手執一編。

定價每冊三元

## 葛司龍三氏微積分綱要

王喬南

本編乃前書之節本。去華留實，於原書內微分方程式，縮閉線及漸伸線等等，刪去其過於高深之理論，因其性質偏於深研，初學難以領悟。但於原書論理之系統。多數例題之詮釋，凡足以引起學者研究之興趣及切於實用者，均應有盡有。實為原書之精華。此書極合於高等專門學校或高中理組選科之用，全書約三百餘頁。

定價每冊二元

---

## ◇初中數學教本◇

| | | | |
|---|---|---|---|
| 漢譯舒塞斯 | 平面幾何學 | 王俊奎 | 紙面一元二角 布面一元五角 |
| | 初中新算術 | 王鶴清 | 一冊一元 |
| 漢譯舒塞斯 | 立體幾何 | 李熙如 | 一冊七角 |

## ◇高中大學數學教本◇

| | | | |
|---|---|---|---|
| 漢譯溫德斯二氏 | 平面三角 | 高佩玉 王俊奎 | 紙面一元二角 布面一元五角 |
| 高級中學 | 解析幾何 | 張敬熙 | 一冊一元 |
| 漢譯郝克氏 | 大代數 | 高佩玉 | 一冊一元二角 |
| 漢譯郝克氏 | 高等代數 | 馬純德譯 | 一冊一元二角 |

Hawkes' Advanced Algebra

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 葛氏平面三角 | 褚保熙譯 | 一冊一元 |

Granville: Plane Trigonometry With Tables

## ◇代數參考書◇

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 算術新解法 | 高佩玉 | 一冊六角 |
| 算術 | 難題分類詳解 | 王錦章 | 一冊六角 |
| | 算術模範問題及其詳解 | 王錦章 | 一冊七角 |
| 溫斯二氏 | 平面三角題解 | 劉幹民 | 印刷中 |
| | 數學遊戲 | 魏元雄 | 一冊六角 |

# 目 次

## 第 一 章

節 頁

### 直角球面三角形



## 第 二 章

### 斜角球面三角形

## 第三章

### 球面三角法應用於天球及地球



## 第四章

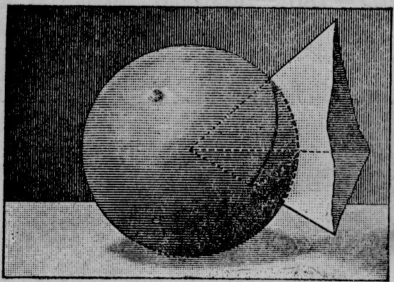
### 公式述要

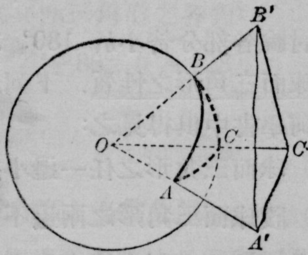
# 球面三角法

## 第一章

### 直角球面三角形

**1. 三面角之面角及二面角與球面三角形之邊及角間之對應性,** 取任意三面角 $O\text{-}A'B'C'$, 並設以頂點 $O$ 為球心, 以任意半徑, 如 $OA$, 圍繞 $O$ 作一球. 則此球與三面角之交線即為球之大圓之三弧,






而作成一球面三角形, 如 $ABC$. 此三角形之邊(弧) $AB, BC, CA$ 度三面角之面角 $A'OB'$, $B'OC'$, $C'OA'$. 其角 $ABC$, $BCA$, $CAB$, 則用平面角度之, 亦用之以度三面角之二面角; 因, 由幾何學, 二面角以二直線間之角度之, 每線在一面上, 在同點垂直於其稜也.

球面三角法者討論一球面三角形之六部分 (三邊與三角) 間之三角的關係者也; 或, 易詞言之, 討論藏成球面三角形之三面角之面角及二面角間之關係者也, 如圖所示. 故得

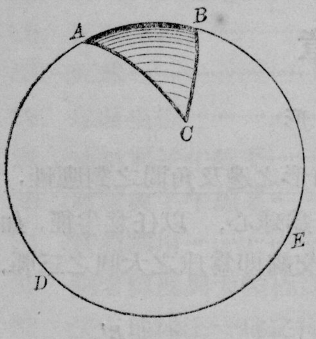
定理. 自三面角之任何性質能推知球面三角形之一類似的性質, 反言之亦然.

變化球之半徑顯然其三面角之面角與二面角之大小不變；故球面三角形之邊與角間之關係與其球半徑之長無關.

因球面三角形之邊爲弧，故常以度 * 表之.一 邊（弧）之長可由下列比例用任意單位長表示之，

大圓周介：弧長∷360°：弧之度數.

球面三角形之一邊或一角可有自 0° 至 360° 之任何值，但任何球



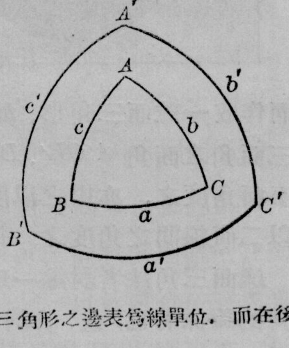

面三角形常可使其依屬於各部分皆小於 180° 之一球面三角形.

如，三角形 $ADEBC$（圖中半球體之無陰影部分）有一邊大於 180° 則不必研究，因其各部分可立即由三角形 $ABC$ 之各部分求得，而其各邊則皆小於 180° 也. 因弧 $ADEB=360°-$弧 $AB$，角 $CAD=180°-$角 $CAB$，等等，在此書內僅討論各部分皆小於 180° 之三角形.

**2. 球面三角形之性質.** 下列球面三角形諸性質之證明，在任何球面幾何學書中俱得見之：

(*a*) 球面三角形之任一邊小於其他兩邊之和.

(*b*) 設球面三角形之兩邊不等則其所對之角不等，而對大邊之角大，反言之亦然.




(*c*) 球面三角形三邊之和小於 360°†

(*d*) 球面三角形各角之和大於 180° 而小於 540°. ‡

* 平面三角法與球面三角法間之一最大之差別卽前者三角形之邊表爲線單位，而在後者則各部分常表爲弧之單位，卽度，等等.

† 在平面三角形內三邊之和可有任意大小之值.

‡ 在平面三角形內各角之和常等於 180°.

(e) 設 $A'B'C'$ 爲 $ABC$ 之極三角形,* 反言之, 則 $ABC$ 爲 $A'B'C'$ 之極三角形.

(f) 在兩個極三角形以內一三角形之各角與他三角形內位對該角之邊相補. 應用於上圖, 則得

$$A=180°-a',\qquad B=180°-b',\qquad C=180°-c',$$
$$A'=180°-a,\qquad B'=180°-b,\qquad C'=180°-c.$$

一球面三角形之有一個或多個直角者則稱爲直角球面三角形.

## 例題

1. 球面三角形之諸角列之如下, 求其極三角形之各邊. 於每題內繪出其圖.

(a) $A=70°$, $B=80°$, $C=100°$. 答. $a'=110°$, $b'=100°$, $c'=80°$.

(b) $A=56°$, $B=97°$, $C=112°$.

(c) $A=68°14'$, $B=52°10'$, $C=98°44'$.

(d) $A=115.6°$, $B=89.9°$, $C=74.2°$.

2. 球面三角形之諸邊列之如下, 求其極三角形之各角:

(a) $a=94°$, $b=52°$, $c=100°$. 答. $A'=86°$, $B'=128°$, $C'=80°$.

(b) $a=74°42'$, $b=95°6'$, $c=66°25'$.

(c) $a=106.4°$, $b=64.3°$, $c=51.7°$.

3. 設球面三角形有三直角, 證其三角形之邊爲象限.

4. 設一球面三角形有兩直角, 證其對邊爲象限, 且其第三角以其對邊度之.

5. 求例題 2 内之三角形之邊長設其球之半徑爲 4 呎.

3. 關於直角球面三角形之公式. 由上之例題 3 與例題 4, 顯然知僅有一種直角球面三角形需要進一步的研究, 即直角球面三角形之僅含有一直角者也.

於次頁所示之圖設 $ABC$ 爲僅含一直角之球面三角形, 球心爲 $O$. 設 $C$ 爲直角, 先假想其他部分各小於 $90°$, 球半徑爲一.

* 任意球面三角形之極三角形乃以原來三角形之諸頂爲極所作諸大圓弧作成者

過 $B$ 作一輔助平面垂直於 $OA$，截 $OA$ 於 $E$ 及 $OC$ 於 $D$. 作 $BE$, $BD$, 及 $DE$. $BE$ 與 $DE$ 各垂直於 $OA$;

〔設一直線⊥於一平面，則⊥於平面內各線〕

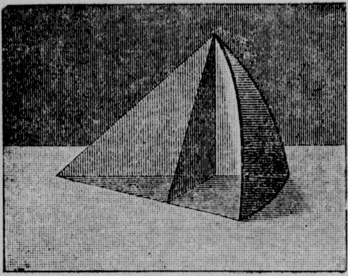
所以角 $BED$ = 角 $A$. 平面 $BDE$ 垂直於平面 $AOC$;

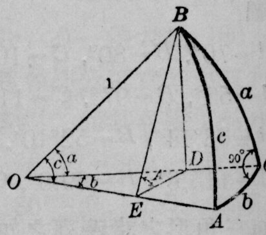
〔設一直線⊥於一平面，則過此線之任意平面⊥於第一平面.〕

所以平面 $BDE$ 與平面 $BOC$ 之交線 $BD$，垂直於平面 $AOC$,

〔設兩相交平面各⊥於第三平面，則其交線亦⊥於該平面.〕

故垂直於 $OC$ 及 $DE$.






在三角形 $EOD$ 內，注意角 $EOD=b$，故得

$$\frac{OE}{OD}=\cos b,$$

或，化去分式，

(A) $$OE=OD\cdot\cos b.$$

但 $$OE=\cos c(=\cos EOB),$$

而 $$OD=\cos a(=\cos DOB).$$

代入 $(A)$，得

(1) $$\cos c=\cos a\cos b.$$

在三角形 $BED$ 內，注意角 $BED$ = 角 $A$，則得

$$\frac{BD}{BE}=\sin A.$$

或，化去分式，

(B) $$BD=BE\sin A.$$

但 $$BD=\sin a(=\sin DOB),$$

而 $$BE=\sin c(=\sin EOB).$$

代入 $(B)$，得

(2) $$\sin a = \sin c \sin A.$$

同理，設過 $A$ 作輔助平面垂直於 $OB$，則得

(3) $$\sin b = \sin c \sin B.$$

又，在三角形 $BED$ 內，

$(C)$ $$\cos A = \frac{DE}{BE}.$$

但 $$DE = OD \sin b, \qquad 因 \sin b = \frac{DE}{OD}.$$

$$OD = \cos a(=\cos DOB),$$

而 $$BE = \sin c(=\sin EOB).$$

代入 $(C)$，

$(D)$ $$\cos A = \frac{OD \sin b}{\sin c} = \cos a \cdot \frac{\sin b}{\sin c}.$$

但由 (3)，$\dfrac{\sin b}{\sin c} = \sin B$. 所以

(4) $$\cos A = \cos a \sin B.$$

同理，設過 $A$ 作輔助平面垂直於 $OB$，則得

(5) $$\cos B = \cos b \sin A.$$

以上爲五個基本公式；即是，由此可以導出直角球面三角形內用二部分表示其任一部分所有之其他關係也．例如，求 $A, b, c$, 間之一種關係，求法如下：

由 (4) $$\cos A = \cos a \sin B$$

$$= \frac{\cos c}{\cos b} \cdot \frac{\sin b}{\sin c}$$

[因由 (1)，$\cos a = \dfrac{\cos c}{\cos b}$，而由 (3) $\sin B = \dfrac{\sin b}{\sin c}$.]

$$= \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\cos c}{\sin c}.$$

(6) $$\therefore \quad \cos A = \tan b \cot c.$$

同理，得

(7) $$\cos B = \tan a \cot c.$$

(8) $$\sin b = \tan a \cot A.$$

(9) $$\sin a = \tan b \cot B.$$

(10) $$\cos c = \cot A \cot B.$$

此十公式即足用以解直角球面三角形，導此諸公式時曾假定除直角外其各部分皆小於 90°. 但若不作此假定，此諸公式亦能成立. 例如，設 $a$ 大於 90°. 在此款內則輔助平面 $BDE$ 將截 $CO$ 及 $AO$ 過球心 $O$ 之引長線，而在三角形 $EOD$ 內，因得，

$$(E) \qquad \cos DOE\,(=\cos b)=\frac{OE}{OD}.$$

但 $$OE=\cos EOB=-\cos AOB=-\cos c,$$

而 $$OD=\cos DOB=-\cos COB=-\cos a,$$

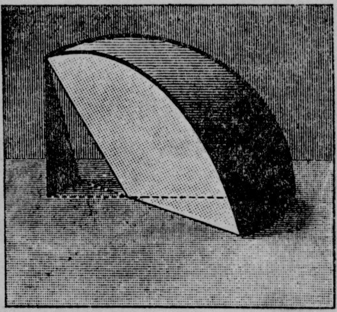
代入 $(E)$，則得

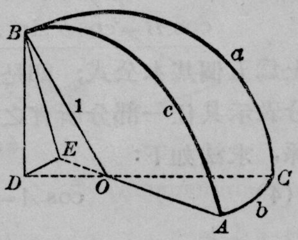
$$\cos b=\frac{\cos c}{\cos a}, \text{ 或 } \cos c=\cos a\cos b,$$

此與 (1) 相同.

在此款內其他諸公式同樣亦能成立. 同理，可證其在各款內皆能成立.

設夾直角之兩邊皆小於或皆大於 90°（即，$\cos a$ 與 $\cos b$ 皆為正






或皆為負)，則其乘積

$$(F) \qquad \cos a\cos b$$

常為正，故由 (1)，$\cos c$ 常為正，即 $c$ 常小於 90°. 雖然，設夾直角之一邊小於 90° 而他邊大於 90°，則其乘積 $(F)$ 將為負，所以 $\cos c$ 亦為負，而 $c$ 將大於 90°.

故得

定理 I. 設直角球面三角形內夾直角之兩邊皆小於 90° 或皆大於 90°，則其弦小於 90°；設有一邊小於 90° 而他邊大於 90°，則其弦大於 90°.

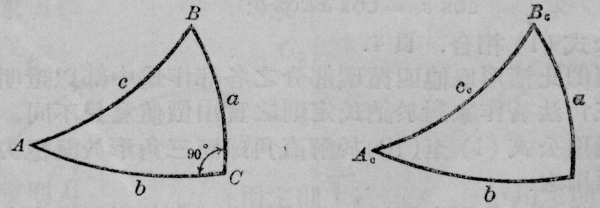
由 (4) 及 (5)，$\sin B=\dfrac{\cos A}{\cos a}$，　而 $\sin A=\dfrac{\cos B}{\cos b}$.

因 $A$ 與 $B$ 皆小於 $180°$，$\sin A$ 與 $\sin B$ 必常爲正．於是 $\cos A$ 與 $\cos a$ 必有同號，即，$A$ 與 $a$ 皆小於 $90°$．或皆大於 $90°$．同理，於 $B$ 及 $b$ 亦然．所以得

定理 II．在直角球面三角形內一斜角與其對邊皆小於 $90°$ 或皆大於 $90°$.

4 訥皮爾氏循環部分定則 (Napier's rules of circular parts)．上節導出之十個公式，表示一直角球面三角形之三邊與兩斜角間之關係，此諸關係可證明其依屬於兩個極有用之規則，乃對數創始人卑良訥皮爾所發見者也．

因此之故直角（未入公式）不計入內，而其弦及二斜角則各以其




餘度 (Complements) 代之；使用於訥皮爾氏定則內之五部分，稱爲循環部分者爲 $a, b, A_c, C_c, B_c$．其書於下面之小 c 表示餘度．其第一字母指示表球面三角形之尋常方法．爲加重訥皮爾氏定則所用之循環部分起見，其三角形可以表示爲第二圖．雖然，於用訥氏定則時，則非必需作出此三角形；實際上，僅寫出其五部分於其適當次序如在一圓周上者最爲便利，如右圖所示（故號爲循環部分）.

$C_c$

$A_c$　　$B_c$

$b$　　$a$

任意一部可稱爲中部 (middle part)；則與其緊鄰之兩部分稱爲鄰部 (adjacent parts)，而其他兩部分則稱爲對部 (opposite parts)．如，設取 $a$ 爲中部，則 $B_c$ 與 $b$ 爲鄰部，而 $C_c$ 與 $A_c$ 爲對部.

訥皮爾氏循環部分定則.

定則 I. 任意中部之正弦等於其兩鄰部正切之乘積.

定則 II. 任意中部之正弦等於其兩對部餘弦之乘積.

設簡記第一定則爲"正切鄰"(tan-adj.)第二定則爲"餘弦對"*(cos-opp.)則此二定則易於記憶.

依次取五個循環部分之各部作爲中部而應用於訥氏定則並比較其結果於公式(1)至(10),則此定則易於證明.

例如,設取 $C_c$ 爲中部;則 $A_c$ 與 $B_c$ 爲鄰部,而 $a$ 與 $b$ 爲對部.

$$\begin{array}{ccc} & C_c & \\ A_c & & B_c \\ & b \quad a & \end{array}$$

於是,由定則 I,

$$\sin C_c = \tan A_c \tan B_c,$$

或

$$\cos c = \cot A \cot B;$$

此與公式(10)相合,頁 5.

由定則 II,

$$\sin C_c = \cos a \cos b,$$

或,

$$\cos c = \cos a \cos b;$$

此與公式(1)相合,頁 4.

學者須似此情形取他四循環部分之各部作爲中部以證明訥氏定則.

許多三角法著作家對於訥氏定則之實用價値意見不同,但通常皆承認其應用公式(1)至(10)於解直角球面三角形於記憶力有大幫助,故吾人應用之.

5. 直角球面三角形之解法. 若解一球面三角形則除直角外必須另有二部分爲已知. 爲一致起見今將以字母 $C$ 繼續表示球面三角形 $ABC$ 之直角.

解球面三角形之普通指導.

$$\begin{array}{ccc} & C_c & \\ A_c & & B_c \\ & b \quad a & \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & C_c & \\ \underline{A_c} & & B \\ & \underline{b} \quad \underline{a} & \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & C_c & \\ \underline{A_c} & & B_c \\ & \underline{b} \quad \underline{c} & \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & \underline{C_c} & \\ A_c & & \underline{B_c} \\ & \underline{b} \quad a & \end{array}$$

第一步. 寫出五個循環部分如第一圖.

第二步. 在已知部分與所求部分之下畫以橫線. 如,設已知 $A_c$ 與 $a$ 而求 $b$,則在此三字母之下皆作橫線如第二圖所示.

* 或注意 $a$ 爲"tangent"與"adjacent"二字之第一主音,而 $O$ 爲"cosine"與"opposite"二字之第一主音.

第三步．擇出中部（在此款爲 $b$）並作一線橫交其字母下之橫線如第三圖所示．

第四步．設他二部與中部相隣（如在此款）則用定則 I，設相對則用定則 II，並解之以求其未知部分．

核驗：以含三所求部分之公式驗之．*

當解球面三角形時必須注意其函數之代數的符號；大於 $90^\circ$ 之角或弧之餘弦，正切，及餘切爲負．於應用對數計算時若函數爲負則寫 $(n)$ 於其對數之後．設負因式之個數爲偶數，則得數爲正；設爲奇數，則得數爲負，而所得對數之後必寫以 $(n)$．因欲能表示計算爲簡單形式，今將寫出三角函數之各種對數恰如表中所示；即，當對數有負指標時，在其後不寫 $-10$．†

例 1．解直角球面三角形，已知其 $B=33^\circ 50'$，$a=108^\circ$．

解．依上述指導

求 $A$

$$\begin{array}{ccc} & C_c & \\ \cancel{A_c} & & \underline{B_c} \\ b & & \underline{a} \end{array}$$

用定則 II

$$\sin A_c=\cos B_c \cos a$$
$$\cos A=\sin B \cos a$$

$\log \sin B=9.7457$
$\log \cos a=\underline{9.4900}\,(n)$
$\log \cos A=9.2357\,(n)$
$\therefore 180^\circ-A$‡ $=80^\circ 6'$
而 $A=99^\circ 54'$

求 $b$

$$\begin{array}{ccc} & C_c & \\ A_c & & \underline{B_c} \\ \underline{b} & & \cancel{a} \end{array}$$

用定則 I

$$\sin a=\tan B_c \tan b$$
$$\tan b=\sin a \tan B$$

$\log \sin a=9.9782$
$\log \tan B=\underline{9.8263}$
$\log \tan b=9.8045$
$\therefore b=32^\circ 31'$.

求 $c$

$$\begin{array}{ccc} & \underline{C} & \\ A_c & & \cancel{B_c} \\ b & & \underline{a} \end{array}$$

用定則 I

$$\sin B_c=\tan C_c \tan a$$
$$\cot c=\cos B \cot a$$

$\log \cos B=9.9194$
$\log \cot a=\underline{9.5118}\ (n)$
$\log \cot c=9.4312\ (n)$
$\therefore 180^\circ-c=74^\circ 54'$
而 $c=105^\circ 6'$.

$\log \cos A_c$ 所求得之值與第一次計算者相同．學者當熟

---

* 如於上例，$A_c$ 與 $a$ 爲已知；故於所求部分之下作橫線而於 $b$ 下作十字以爲中部應用定則 II，因 $C_c$ 與 $B_c$ 爲對部，則得 $\sin b=\cos C_c \cos B_c$，或 $\sin b=\sin c \sin B$．

† 例如，如表所示，寫 $\log \sin 24^\circ=9.6093$．爲正確起見，此必寫爲 $\log \sin 24^\circ=9.6093-10$，或，$\log \sin 24^\circ=\bar{1}.6093$．

‡ 因 $\cos A$ 爲負，則由表得 $A$ 之補角．

查在此題內核驗演算時，不必另尋新對數．故此題內之核驗僅證其對數之正確性.*

核驗：用定則 I.

$C_c$

$A_c$ $B_c$

$b$ $a$

$$\sin A_c = \tan b \tan C_c$$
$$\cos A = \tan b \cot c$$
$$\log\tan b = 9.8045$$
$$\log\cot c = 9.4312\,(n)$$
$$\log\cos A = 9.2357\,(n)$$

在對數的計算中於用對數表之先學者必須常寫出一計算綱領，在前題內其計算綱領如下：

| | | |
|---|---|---|
| $\log\sin B=$ | $\log\sin a=$ | $\log\cos B=$ |
| $\log\cos a=$ $(n)$ | $\log\tan B=$ | $\log\cot a=$ $(n)$ |
| $\log\cos A=$ $(n)$ | $\log\tan b=$ | $\log\cot c=$ $(n)$ |
| $\therefore 180°-A=$ | $\therefore\ b=$ | $\therefore 180°-c=$ |
| 而 $A=$ | | 而 $c=$ |

一次尋出所用之一切對數則省時間，除此以外又化去運算內理論部分與純機械部分間之可能的錯誤，學者於試解問題之前當熟練能寫出如上之形式.

例 2. 解直角球面三角形；已知其 $c=70°30'$, $A=100°$.

解. 依普通指導

求$a$

$C_c$

$A_c$ $B_c$

$b$ $a$

用定則 II

$$\sin a = \cos C_c \cos A_c$$
$$\sin a = \sin c \sin A$$
$$\log\sin c = 9.9743$$
$$\log\sin A = 9.9934$$
$$\log\sin a = 9.9677$$
$$\therefore 180°-a† = 68°10'$$
而 $a = 111°50'$.

求$b$

$C_c$

$A_c$ $B_c$

$b$ $a$

用定則 I

$$\sin A_c = \tan b \tan C_c$$
$$\tan b = \cos A \tan c$$
$$\log\cos A = 9.2397\,(n)$$
$$\log\tan c = 0.4509$$
$$\log\tan b = 9.6906\,(n)$$
$$\therefore 180°\ b = 26°8'$$
而 $b = 153°52'$.

求$B$

$C_c$

$A_c$ $B_c$

$b$ $a$

用定則 I

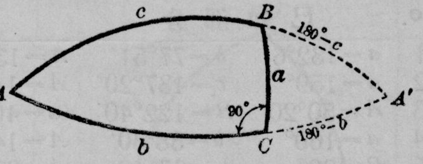
$$\sin C_c = \tan A_c \tan B_c$$
$$\cot B = \cos c \tan A$$
$$\log\cos c = 9.5235$$
$$\log\tan A = 0.7537\,(n)$$
$$\log\cot B = 0.2772\,(n)$$
$$\therefore 180°-B = 27°51'$$
而 $B = 152°9'$

核驗得數之工作留與學者自驗之.

* 因邊及角定然已自表內正確求得，在似此之題內，則必須用此等數值及某已知件之聯合關係之未曾用過者.

† 因 $a$ 及由其正弦之值決定，顯然可由表內求得其爲$68°10'$，或其補角 $111°50'$. 因 $A>90°$，則由頁 8 定理 II，知$a<90°$；故$a=111°50'$爲惟一之解法.

**6.** 疑款 (The ambiguous case). 兩解 (Two solutions). 當直角球面三角形之已知部分爲一斜角與其對邊時，則有二三角形滿足此已知條件. 因，於三角形 $ABC$ 內，設 $C=90°$，又設 $A$ 與 $CB\ (=a)$ 爲已知部分. 設引伸 $AB$ 與 $AC$ 至 $A'$，則顯然三角形 $A'BC$ 亦滿足已知條件，因 $BCA'=90°$，$A'=A$，及 $BC=a$ 也. $A'BC$ 之其餘部分亦分別與 ABC 之各部分相補. 如




$$A'B=180°-c,\quad A'C=180°-b,\quad A'BC=180°-ABC.$$

此疑款亦出現於解三角形內，如於下例所示:

例 3. 解直角球面三角形，已知 $A=105°59'$，$a=128°33'$.

解. 如前例作之.

求 $b$

$C_c$

$\underline{A_c}$ $B_c$

$\cancel{b}$ $\underline{a}$

$\sin b=\tan a\tan A_c$

$\sin b=\tan a\cot A$

$\log\tan a=0.0986\ (n)$

$\log\cot A=\underline{9.4570\ (n)}$

$\log\sin b=9.5556$

$\therefore b=21°4'$, or,

$180°-b=158°56'=b'$.*

求 $B$

$C_c$

$\cancel{A_c}$ $\underline{B_c}$

$b$ $\underline{a}$

$\sin A_c=\cos a\cos B_c$

$\sin B=\dfrac{\cos A}{\cos a}$

$\log\cos A=9.4399(n)$

$\log\cos a=\underline{9.7946(n)}$

$\log\sin B=9.6453$

$\therefore B=26°14'$，或，

$180°-B=153°46'=B'$.†

求 $c$

$\underline{C_c}$

$\underline{A_c}$ $B_c$

$b$ $\cancel{a}$

$\sin a=\cos A_c\cos C_c$

$\sin c=\dfrac{\sin a}{\sin A}$

$\log\sin a=9.8932$

$\log\sin A=\underline{9.9828}$

$\log\sin c=9.9104$

$\therefore c'=54°27'$，或，

$180°-c'=125°33'=c$.‡

所以兩解法爲:

1. $b=21°4'$，$c=125°33'$，$B=26°14'$ (三角形 $ABC$);
2. $b'=158°56'$，$c'=54°27'$，$B'=153°46'$ (三角形 $A'BC$)

兩種解法不必全行核驗. 今留與學者驗之.

* 因 $\sin B$ 爲正而 $B$ 未知，則不能決此疑款，故由表查得之銳角及其補角必須保留.

† $B$ 之二値必須保留. 因 $b$ 有二値相補也.

‡ 因 $a>90°$ 而 $b$ 有二値，其一 $<90°$ 而其他 $>90°$，故由頁 8 定理 1，知 $c$ 有二値. 其一 $<90°$ 而其二則 $>90°$.

## 例　　題

解以下之直角球面三角形:

| No. | 已知部分 | | 所求部分 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a=132°6'$ | $b=77°51'$ | $A=131°27'$ | $B=80°55'$ | $c=98°7'$ |
| 2 | $a=159°$ | $c=137°20'$ | $A=148°5'$ | $B=65°23'$ | $b=37°54'$ |
| 3 | $A=50°20'$ | $B=122°40'$ | $a=40°42'$ | $b=134°31'$ | $c=122°7'$ |
| 4 | $a=160°$ | $b=38°30'$ | $A=149°41'$ | $B=66°44'$ | $c=137°20'$ |
| 5 | $B=80°$ | $b=67°40'$ | $A=27°12'$ | $a=25°25'$ | $c=69°54'$;或, |
| | | | $A'=152°48'$ | $a'=154°35'$ | $c'=110°6'$ |
| 6 | $B=112°$ | $c=81°50'$ | $A=109°23'$ | $a=110°58'$ | $b=113°22'$ |
| 7 | $a=61°$ | $B=123°40'$ | $A=66°12'$ | $b=127°17'$ | $c=107°5'$ |
| 8 | $a=61°40'$ | $b=144°10'$ | $A=72°29'$ | $B=140°38'$ | $c=112°38'$ |
| 9 | $A=99°50'$ | $a=112°$ | $B=27°7'$ | $b=25°24'$ | $c=109°46'$;或, |
| | | | $B'=152°53'$ | $b'=154°36'$ | $c'=70°14'$ |
| 10 | $b=15°$ | $c=152°20'$ | $A=120°44'$ | $a=156°30'$ | $B=33°53'$ |
| 11 | $A=62°59'$ | $B=37°4'$ | $a=41°6'$ | $b=26°25'$ | $c=47°32'$ |
| 12 | $A=73°7'$ | $c=114°32'$ | $a=60°31'$ | $B=143°50'$ | $b=147°32'$ |
| 13 | $B=144°54'$ | $b=146°32'$ | $A=78°47'$ | $a=70°10'$ | $c=106°28'$;或, |
| | | | $A'=101°13'$ | $a'=109°50'$ | $c'=73°32'$ |
| 14 | $B=68°18'$ | $c=47°34'$ | $A=30°32'$ | $a=22°1'$ | $b=43°18'$ |
| 15 | $A=161°52'$ | $b=111°8'$ | $a=166°9'$ | $B=101°49'$ | $c=50°18'$ |
| 16 | $a=113°25'$ | $b=110°47'$ | $A=112°3'$ | $B=109°12'$ | $c=81°54'$ |
| 17 | $a=137°9'$ | $B=74°51'$ | $A=135°3'$ | $b=68°17'$ | $c=105°44'$ |
| 18 | $A=144°54'$ | $B=101°14'$ | $a=146°33'$ | $b=109°48'$ | $c=73°35'$ |
| 19 | $a=69°18'$ | $c=84°27'$ | $A=70°$ | $B=75°6'$ | $b=74°7'$ |

20. 欲多作習題則可於上列三角形內取任意二部分解之而求其他三部分.

**7. 等腰三角形與象限三角形 (quadrantal triangle) 之解法.** 平面等腰三角形乃由分之爲二相等直角三角形然後解其一直角三角形以求之. 同理, 用由頂垂直於底之弧平分此等腰球面三角形爲二對稱直角球面三角形, 然後解其一直角球面三角形, 則可解出此等腰球面三角形.

象限三角形 (quadrantal triangle) 乃球面三角形之一邊爲一象限 ($=90°$) 者也. 由頁 3 之 ($f$), 知象限三角形之極三角形爲一直角三角形. 所以, 解一象限三角形僅須解其極三角形再求其所得各部分之補度 (supplements) 即得.

例 1. 解三角形, 已知 $c=90°$, $a=67°38'$, $b=48°50'$,

解. 因其一邊 $c=90°$, 故此爲象限三角形. 於是用頁 3 之 ($f$),求得其極三角形之諸相當部分. 此爲 $C'=90°$, $A'=112°22'$, $B'=131°10'$, 依通常方法解此直角三角形.

作極（直角）三角形.

已知 $A'=112^\circ 22'$, $B'=131^\circ 10'$:

求 $a'$

$c'_c$

$A'_c$　　　$B'_c$

$b'$　　　$a'$

$$\sin A'_c=\cos a' \cos B'_c$$

$$\cos a'=\frac{\cos A'}{\sin B'}.$$

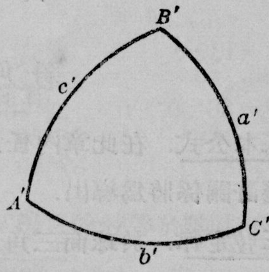
$\log \cos A'=9.5804\ (n)$

$\log \sin B'=\underline{9.8767}$

$\log \cos a'=9.7037\ (n)$

$180^\circ-a'=59^\circ 38'.$

$a'=120^\circ 22'.$




同理，得

$b'=135^\circ 23'$, $c'=68^\circ 55'$.

故於已知象限三角形內，得

$A=180^\circ-a'=59^\circ 38'.$

$B=180^\circ-b'=44^\circ 37'.$

$C=180^\circ-c'=111^\circ 5'.$

## 例　題

解下列象限三角形:

| No. | 已知部分 | | | 所求部分 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $A=139^\circ$ | $b=143^\circ$ | $c=90^\circ$ | $a=117^\circ 1'$ | $B=153^\circ 42'$ | $C=132^\circ 34'$ |
| 2 | $A=45^\circ 30'$ | $B=139^\circ 20'$ | $c=90^\circ$ | $a=57^\circ 22'$ | $b=129^\circ 42'$ | $C=57^\circ 53'$ |
| 3 | $a=30^\circ 20'$ | $C=42^\circ 40'$ | $c=90^\circ$ | $A=20^\circ 1'$ | $B=141^\circ 30'$ | $b=113^\circ 17'$ |
| 4 | $B=70^\circ 12'$ | $C=106^\circ 25'$ | $c=90^\circ$ | $A=33^\circ 28'$ | $a=35^\circ 4'$ | $b=78^\circ 47'$ |
| 5 | $A=105^\circ 53'$ | $a=104^\circ 54'$ | $c=90^\circ$ | $B=69^\circ 16'$ | $b=70^\circ$ | $C=84^\circ 30'$; 或, |
| | | | | $B=110^\circ 44'$ | $b=110^\circ$ | $C=95^\circ 30'$ |

解以下之等腰球面三角形:

| No. | 已知部分 | | | 所求部分 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | $a=54^\circ 20'$ | $c=72^\circ 54'$ | $A=B$ | $b=54^\circ 20'$ | $A=B=57^\circ 59'$ | $C=98^\circ 59'$ |
| 7 | $a=54^\circ 30'$ | $C=71^\circ$ | $A=B$ | $b=54^\circ 30'$ | $A=B=67^\circ 30'$ | $c=56^\circ 26'$ |
| 8 | $a=65^\circ 29'$ | $A=B=50^\circ 17'$ | | $b=66^\circ 29'$ | $c=111^\circ 30'$ | $C=128^\circ 42'$ |
| 9 | $c=156^\circ 40'$ | $C=187^\circ 46'$ | $A=B$ | $a=b=79^\circ$ 或 $101^\circ$ | | |
| | | | | $A=B=199^\circ 34'$ | | |

證下列直角球面三角形內各部分之關係 ($C=90^\circ$):

10. $\cos^2 A \sin^2 c=\sin(c+a)\sin(c-a)$.

11. $\tan a \cos c=\sin b \cot B$.

12. $\sin^2 A=\cos^2 B+\sin^2 a \sin^2 B$.

13. $\sin(b+c)=2\cos^2\frac{1}{2}A\cos b \sin c$.

14. $\sin(c-b)=2\sin^2\frac{1}{2}A\cos b \sin c$.

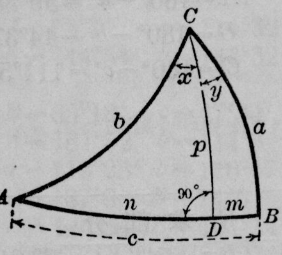
# 第二章

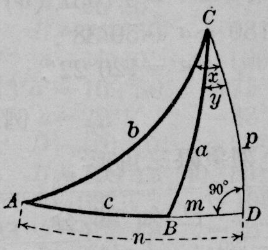
## 斜角球面三角形

8. 基本公式. 在此章內任意球面三角形（直角或斜角）諸邊與諸角之幾許關係將爲導出.

9. 正弦定律. 於球面三角形內其邊之正弦與其對角之正弦成比例.

證. 設 $ABC$ 爲任意球面三角形, 並作 $CD$ 弧垂直於 $AB$. 則按 $CD$ 之落於 $AB$ 線上（第一圖）或落於 AB 之引長線上（第二圖）而




有兩款. 爲簡明起見設 $CD=p$, $AD=n$, $BD=m$, 角 $ACD=x$, 角 $BCD=y$.

於直角三角形 $ADC$ 內（任一圖）

(A) $$\sin p=\sin b\sin A.$$ 定則 II, 頁 8.

於直角三角形 $BCD$ 內（第一圖）

(B) $$\sin p=\sin a\sin B.$$ 定則 II, 頁 8

此於第二圖內亦能成立, 因

$$\sin DBC=\sin(180°-B)=\sin B.$$

自 (A) 與 (B) 使 $\sin p$ 之數值相等,

$$\sin a\sin B=\sin b\sin A.$$

或, 以 $\sin A\sin B$ 除兩邊,

(C) $$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}$$

同樣，由 $A$ 及 $B$ 作垂線，則分別得出

(D) $$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}, \text{ 及}$$

(E) $$\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\sin a}{\sin A}.$$

寫 (C), (D), (E) 爲一式，則得正弦定律，

(11) $$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}. \quad *$$

**10.** 餘弦定律. 在一球面三角形內任意邊之餘弦等於他兩邊餘弦之積加該兩邊之正弦及其夾角之餘弦之乘積.

證. 用上節之圖，於直角三角形 $BDC$ 內，

$$\cos a=\cos p\cos m \qquad \text{定則 II, 頁 8.}$$
$$=\cos p\cos(c-n)$$
$$=\cos p\{\cos c\cos n+\sin c\sin n\}$$

(A) $$=\cos p\cos c\cos n+\cos p\sin c\sin n.$$

在直角三角形 $ADC$ 內，

(B) $$\cos p\cos n=\cos b.$$

由此得 $$\cos p=\frac{\cos b}{\cos n}.$$

又以 $\sin n$ 乘兩邊，

(C) $$\cos p\sin n=\frac{\cos b}{\cos n}\cdot\sin n=\cos b\tan n.$$

但 $$\cos A=\tan n\cot b, \text{ 或,} \qquad \text{定則 I, 頁 8,}$$

(D) $$\tan n=\tan b\cos A.$$

以 (D) 內 $\tan n$ 之值代入 (C)，得

(E) $$\cos p\sin n=\cos b\tan b\cos A=\sin b\cos A.$$

以 (B) 內 $\cos p\cos n$ 之值及 (E) 內 $\cos p\sin n$ 之值代入 (A)，則得餘弦定律.

(F) $$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

* 與葛氏平面三角法頁 102 之正弦定律比較.

同理，在 $b$ 邊及 $c$ 邊則得

$$(G)\qquad \cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B,$$

$$(H)\qquad \cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

11. 對偶之原則 (Principle of Duality). 有任意普通球面三角形已知含其諸邊 $a,b,c$, 及諸角 $A, B, C$ 之一個或幾個之某種關係. 在此情形之下則其極三角形 (以 $a',b',c'$ 表其邊以 $A',B',C'$ 表其角) 亦爲一普通三角形，而此已知關係亦必能成立，即，設於表示邊及角之字母上畫一撇，則爲已知關係應用於極三角形. 如上節之 $(F)$, $(G)$, $(H)$ 則能得出以下極三角形之餘弦定律:

$$(A)\qquad \cos a'=\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos A'.$$

$$(B)\qquad \cos b'=\cos c'\cos a'+\sin c'\sin a'\cos B'.$$

$$(C)\qquad \cos c'=\cos a'\cos b'+\sin a'\sin b'\cos C'.$$

但由頁 3, $(f)$,

$$a'=180^\circ-A,\qquad b'=180^\circ-B,\qquad c'=180^\circ-C,$$

$$A'=180^\circ-a,\qquad B'=180^\circ-b,\qquad C'=180^\circ-c.$$

以此代入關於極三角形之 $(A)$, $(B)$, $(C)$ 諸式內，則得

$$(D)\qquad \cos(180^\circ-A)=\cos(180^\circ-B)\cos(180^\circ-C)+\sin(180^\circ-B)\sin(180^\circ-C)\cos(180^\circ-a),$$

$$(E)\qquad \cos(180^\circ-B)=\cos(180^\circ-C)\cos(180^\circ-A)+\sin(180^\circ-C)\sin(180^\circ-A)\cos(180^\circ-b),$$

$$(F)\qquad \cos(180^\circ-C)=\cos(180^\circ-A)\cos(180^\circ-B)+\sin(180^\circ-A)\sin(180^\circ-B)\cos(180^\circ-c),$$

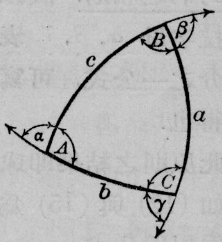
此諸式內則包含原來三角形之邊與角.

以上討論之結果，於是又可陳述如下式:

定理. 在普通球面三角形各部分之任何關係內，各部分皆可以其對部之補度代之，而此關係仍能成立.

當已上定理應用於含諸邊及諸角之補度（用以替代諸角）之一個或幾個之關係時亦得對偶之原則.

設以 $\alpha, \beta, \gamma$ * 表三角形各角之補度; 即,



$\alpha=180^\circ-A$, $\beta=180^\circ-B$, $\gamma=180^\circ-C$,

或, $A=180^\circ-\alpha$, $B=180^\circ-\beta$, $C=180^\circ-\gamma$.

當應用以上定理於邊及三角形各角之補度之關係時，實際即

以 $\alpha(=180^\circ-A)$ 代 $a$,

以 $\beta(=180^\circ-B)$ 代 $b$,

以 $\gamma(=180^\circ-C)$ 代 $c$,

以 $180^\circ-(180^\circ-a)=a$ 代 $\alpha(=180^\circ-A)$,

以 $180^\circ-(180^\circ-b)=b$ 代 $\beta(=180^\circ-B)$,

以 $180^\circ-(180^\circ-c)=c$ 代 $\gamma(=180^\circ-C)$,

或，易辭言之，互換其希拉及羅馬字母. 例如，以

$A=180^\circ-\alpha$, $B=180^\circ-\beta$, $C=180^\circ-\gamma$

代入上節之 $(F)$, $(G)$, $(H)$ 內. 則得出關於諸邊之餘弦定律. 爲一種新形式

(12) $\cos a=\cos b\cos c-\sin b\sin c\cos\alpha$,

(13) $\cos b=\cos c\cos a-\sin c\sin a\cos\beta$,

(14) $\cos c=\cos a\cos b-\sin a\sin b\cos\gamma$.

〔因 $\cos A=\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$, 等等〕

設應用以上定理於此諸公式時，則得關於諸角之餘弦定律，即,

(15) $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma\cos a$,

(16) $\cos\beta=\cos\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha\cos b$,

(17) $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cos c$,

* $\alpha, \beta, \gamma$ 即爲三角形之外角，如圖所示.

即，已誘導出三角形之邊與角之補度間之三種新的關係.* 今可陳述

對偶之原則. 設以羅馬字母 $a, b, c$ 表普通球面三角形之邊，而以希拉字母 $\alpha, \beta, \gamma$ 表其相當對角之補度，則，由含此六部分中任幾部分之一公式，可寫出一對偶公式，即僅互換其相當希拉羅馬字母而得也.

此原則之結果即球面三角形之公式成對出現，每對之中互為對偶.

如 (12) 與 (15) 為對偶公式；又 (13) 與 (16)，或 (14) 與 (17) 亦為對偶公式.

設以

$$A=180°-\alpha, \qquad B=180°-\beta, \qquad C=180°-\gamma$$

代入正弦定律（頁 15），則得

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha}=\frac{\sin b}{\sin \beta}=\frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

〔因 $\sin A=\sin(180°-\alpha)=\sin \alpha$, 等等.〕

應用對偶原則於此公式，得

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a}=\frac{\sin \beta}{\sin b}=\frac{\sin \gamma}{\sin c}.$$

與前式相同.

前所導出之餘弦定律為含代數和之形式. 因其不便於對數計算，故化之為乘積之形式.

**12.** 球面三角形諸角半補角之三角函數用其邊表之. 以 $s$ 表三角形三邊之和之半（即，半周介）. 則

$$(A) \qquad 2s=a+b+c,$$

或，

$$s=\tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

---

* 設用三角形諸內角於公式內（球面三角著者幾盡如是練習），則兩套餘弦公式將不為相同之形式，此節所用之方法有許多便利，繼續學習，漸漸自明，不僅得出之公式易於記憶：當已導出含諸角（或諸邊）之一組公式時，則其含諸邊（或諸角）之一組相當公式可以由觀察法應用對偶原則即刻寫出，則尤省勞力，應用對偶原則之最大便利 Mobius (1790—1868) 始指出之.

自 $(A)$ 之兩邊減 $2c$,

$$2s-2c=a+b+c-2c,\text{ 或,}$$

$(B)$ $$s-c=\tfrac{1}{2}(a+b-c).$$

同理,

$(C)$ $$s-b=\tfrac{1}{2}(a-b+c),\text{ 及}$$

$(D)$ $$s-a=\tfrac{1}{2}(-a+b+c)=\tfrac{1}{2}(b+c-a).$$

由平面三角法,

$(E)$ $$2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha=1-\cos\alpha,$$

$(F)$ $$2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha=1+\cos\alpha.$$

但由 (12), 頁 17, 解之而求 $\cos\alpha$,

$$\cos\alpha=\frac{\cos b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c};$$

故 $(E)$ 變爲

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha=1-\frac{\cos b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c};$$

$$=\frac{\sin b\sin c-\cos b\cos c+\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-(\cos b\cos c-\sin b\sin c)}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{-2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b\sin c},^{*}\text{或,}$$

$(G)$ $$2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c}.$$

[因 $\sin\frac{1}{2}(a-b-c)=-\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)=-\sin\frac{1}{2}(b+c-a)$.]

以 $(A)$ 與 $(D)$ 之值代入 $(G)$, 則得

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c},\text{ 或,}$$

(18) $$\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}.$$

---

* 設

$$\begin{array}{ll} A=a & A=a \\ B=b+c & B=b+c \\ \hline A+B=a+b+c & A-B=a-b-c \\ \frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(a+b+c). & \frac{1}{2}(A-B)=\frac{1}{2}(a-b-c) \end{array}$$

故, 代入葛氏平面三角法公式 (65), 頁 74,如下,

$$\cos A-\cos B=-2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B),$$

得 $\cos a-\cos(b+c)=-2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b-c)$.

同理，(F) 變為

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1+\frac{\cos b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{-2\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b\sin c},$$ * 或，

$$(H)\qquad 2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{2\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\sin c}.$$

〔因 $\sin\frac{1}{2}(b-c-a)=-\sin\frac{1}{2}(-b+c+a)=-\sin\frac{1}{2}(a-b+c)$.〕

以 $(B)$ 及 $(C)$ 之值代入 $(H)$，則得

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\sin(s-c)\sin(s-b)}{\sin b\sin c}，$$ 或，

$$(19)\qquad \cos\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}.$$

因　$\tan\frac{1}{2}\alpha=\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$，以 (18) 及 (19) 之值代入之，則得

$$(20)\qquad \tan\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$ †

---

* 設

$$A=b-c \qquad\qquad A=b-c$$
$$B=a \qquad\qquad B=a$$
$$A+B=a+b-c \qquad\qquad A-B=b-c-a$$
$$\tfrac{1}{2}(A+B)=\tfrac{1}{2}(a+b-c). \qquad \tfrac{1}{2}(A-B)=\tfrac{1}{2}(b-c-a)$$

故，代入葛氏平面三角法公式(65)，頁 74，如下，

$$\cos A-\cos B=-2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B),$$

得　$\cos(b-c)-\cos a=-2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(b-c-a)$，

† 於記此數公式時，注意其根號下之事實．甚有幫助，

($a$) 僅有正弦函數出見，

($b$) 於正弦餘弦公式內之分母，含三角形之不對所求角之二邊，

($c$) 在正切公式分數之分子及分母內，先有 $s$，然後有差數

$$s-a,\qquad s-b,\qquad s-c,$$

為循環次序；$s$ 與第一差數亦在其相當正弦公式之分子內出現，而其後二差數出現於其相當餘弦公式之分子內．

同理，則得

(21) $$\sin\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin c\sin a}},$$

(22) $$\cos\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c\sin a}},$$

(23) $$\tan\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin(s-c)\sin(s-a)}}.$$

又

(24) $$\sin\tfrac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}.$$

(25) $$\cos\tfrac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}.$$

(26) $$\tan\tfrac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin(s-b)}}.$$

在解三角形時有時用(20)，(23)，(26)之其他形式更爲便利．如於公式(20)之右端，以 $\sin(s-a)$ 乘根號下分數之分子及分母．則得

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\sin s\sin^2(s-a)}{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

$$=\sin(s-a)\sqrt{\frac{\sin s}{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

設 $$\tan\tfrac{1}{2}d^*=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}},$$

則 $$\tan\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\sin(s-a)}{\tan\frac{1}{2}d}.$$

同理，於 $\tan\frac{1}{2}\beta$ 及 $\tan\frac{1}{2}\gamma$ 亦然．故

(27) $$\tan\tfrac{1}{2}d=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}},$$

(28) $$\tan\tfrac{1}{2}a=\frac{\sin(s-a)}{\tan\frac{1}{2}d},$$

(29) $$\tan\tfrac{1}{2}\beta=\frac{\sin(s-b)}{\tan\frac{1}{2}d},$$

(30) $$\tan\tfrac{1}{2}\gamma=\frac{\sin(s-c)}{\tan\frac{1}{2}d}.$$

* b＝球面三角形內切圓之直徑，可以證出．

13. 球面三角形諸半邊之三角函數用其角之補角表之. 用頁 16 之對偶之原則，由公式 (18) 至 (30) 以對邊代其角之補角而以對角之補角代其邊，即得下列公式.

$$(31)\qquad \sin\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$(32)\qquad \cos\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$(33)\qquad \tan\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)}{\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}},$$

$$(34)\qquad \sin\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\sin\sigma\sin(\sigma-\beta)}{\sin\gamma\sin\alpha}},$$

$$(35)\qquad \cos\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\sin(\sigma-\gamma)\sin(\sigma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}},$$

$$(36)\qquad \tan\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\sin\sigma\sin(\sigma-\beta)}{\sin(\sigma-\gamma)\sin(\sigma-\alpha)}},$$

$$(37)\qquad \sin\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\sin\sigma\sin(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta}},$$

$$(38)\qquad \cos\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}},$$

$$(39)\qquad \tan\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\sin\sigma\sin(\sigma-\gamma)}{\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)}},$$

$$(40)\qquad \tan\tfrac{1}{2}\delta^{*}=\sqrt{\frac{\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}{\sin\sigma}},$$

$$(41)\qquad \tan\tfrac{1}{2}a=\frac{\sin(\sigma-\alpha)}{\tan\tfrac{1}{2}\delta},$$

$$(42)\qquad \tan\tfrac{1}{2}b=\frac{\sin(\sigma-\beta)}{\tan\tfrac{1}{2}\delta},$$

$$(43)\qquad \tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin(\sigma-\gamma)}{\tan\tfrac{1}{2}\delta},$$

其
$$\begin{aligned}\sigma&=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\\&=\tfrac{1}{2}(180^\circ-A+180^\circ-B+180^\circ-C)\\&=270^\circ-\tfrac{1}{2}(A+B+C).\end{aligned}$$

總其所作，即互換其相當之希拉與羅馬字母也.

* $\delta$ 爲外接圓直徑之補弧，可以證明.

14. 訥氏比論(Napier's analogies). 以(23)除(20), 則得

$$\frac{\tan\frac{1}{2}\alpha}{\tan\frac{1}{2}\beta}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}}\div\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin(s-c)\sin(s-a)}},$$

或,
$$\frac{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta}}=\sqrt{\frac{\dfrac{\sin s\sin(s-a)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\dfrac{\sin s\sin(s-b)}{\sin(s-c)\sin(s-a)}}}.$$

故
$$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}=\frac{\sin(s-a)}{\sin(s-b)}.$$

用比例之合比及分比,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta+\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta-\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}=\frac{\sin(s-a)+\sin(s-b)}{\sin(s-a)-\sin(s-b)}.$$

由葛氏平面三角法之(40), (41), 頁63, 及(66), 頁74, 此式左端等於

$$\frac{\sin(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta)}{\sin(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta)},$$

而右端

$$\frac{\sin(s-a)+\sin(s-b)}{\sin(s-a)-\sin(s-b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}[s-a+(s-b)]}{\tan\frac{1}{2}[s-a-(s-b)]}=\frac{\tan\frac{1}{2}c}{\tan\frac{1}{2}(b-a)}.\text{*}$$

置此得數爲等式, 注意 $\tan\frac{1}{2}(b-a)=-\tan\frac{1}{2}(a-b)$, 得

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=-\frac{\tan\frac{1}{2}c}{\tan\frac{1}{2}(a-b)},\text{ 或,}$$

$$(44)\qquad \tan\tfrac{1}{2}(a-b)=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\tan\tfrac{1}{2}c.$$

依同理可得 $\tan\frac{1}{2}(b-c)$ 與 $\tan\frac{1}{2}(c-a)$ 之二相似公式.

乘(20)與(23), 得

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha\tan\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin(s-c)\sin(s-a)}},$$

或,
$$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}=\frac{\sin s}{\sin(s-c)}.$$

用比例之合比及分比,

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta-\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta+\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}=\frac{\sin(s-c)-\sin s}{\sin(s-c)+\sin s}.$$

---

* 因 $s-a+s-b=2s-a-b=a+b+c-a-b=c$,

而 $s-a-s-b=b-a$.

由葛氏平面三角法之(42)，(43)，頁63，及(66)，頁74，左端等於

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)};$$

而右端

$$\frac{\sin(s-c)-\sin s}{\sin(s-c)+\sin s}=\frac{\tan\frac{1}{2}(s-c-s)}{\tan\frac{1}{2}(s-c+s)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(-c)}{\tan\frac{1}{2}(a+b)}.\ *$$

置此得數爲等式，注意 $\tan\frac{1}{2}(-c)=-\tan\frac{1}{2}c$，則得，

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=-\frac{\tan\frac{1}{2}c}{\tan\frac{1}{2}(a+b)},\ \text{或},$$

(45) $$\tan\tfrac{1}{2}(a+b)=-\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\tan\tfrac{1}{2}c.$$

依同理可得 $\tan\frac{1}{2}(b+c)$ 及 $\tan\frac{1}{2}(c+a)$ 之二相似公式. 應用對偶之原則，頁16，由公式(44)與(45)立即得出

(46) $$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=-\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\tan\tfrac{1}{2}\gamma,$$

(47) $$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=-\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\tan\tfrac{1}{2}\gamma.$$

依循環次序變其字母，立即寫出 $\tan\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$，$\tan\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$，$\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$，與 $\tan\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$ 諸相當公式.

此節導出之關係式稱爲訥氏比論(Napier's analogies).

因 $\cos\frac{1}{2}(a-b)$ 與 $\tan\frac{1}{2}\gamma=\tan\frac{1}{2}(180^\circ-C)=\tan(90^\circ-\frac{1}{2}C)=\cot\frac{1}{2}C$ 常爲正，則由(47)，$\cos\frac{1}{2}(a+b)$ 與 $\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 常有相反之符號；或，因 $\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\tan\frac{1}{2}(180^\circ-A+180^\circ-B)=\tan\frac{1}{2}[360^\circ-(A+B)]=\tan[180^\circ-\frac{1}{2}(A+B)]=-\tan\frac{1}{2}(A+B)$，故可知 $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ 與 $\tan\frac{1}{2}(A+B)$ 常有相同之符號. 故得

定理. 在一球面三角形內任二邊之和小於，大於，或等於 180°，依其相當對角之和之小於，大於，或等於 180° 而定.

**15.** 斜角球面三角形之解法. 今將開始研究斜角球面三角形之數字解法. 分爲三款每款更分爲二條以討論之.

---

* 因 $s-c-s=-c$,

而 $s-c+s=2s-c=a+b+c-c=a+b$,

款 I. (a) 已知其三邊.

(b) 已知其三角.

款 II. (a) 已知兩邊及其夾角.

(b) 已知兩角及其夾邊.

款 III. (a) 已知兩邊及對其一邊之角.

(b) 已知兩角及對其一角之邊.

**16.** 款 I. (a) 已知其三邊. 用頁21之公式，即，

$$\tan\tfrac{1}{2}d=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}, \tag{27}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\sin(s-a)}{\tan\frac{1}{2}d}, \tag{28}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\beta=\frac{\sin(s-b)}{\tan\frac{1}{2}d}, \tag{29}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\gamma=\frac{\sin(s-c)}{\tan\frac{1}{2}d}, \tag{30}$$

以求出 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, 故亦求得 $A$, $B$, $C$, 並以正弦定律

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}\cdot$$

核驗之.

例 1. 已知 $a=60°$, $b=137°20'$, $c=116°$; 求 $A$, $B$, $C$.

解.

$$\begin{aligned}
a&=60°\\
b&=137°20'\\
c&=116°\\
\hline
2s&=313°20'\\
s&=156°40'.\\
s-a&=96°40'.\\
s-b&=19°20'.\\
s-c&=40°40'.
\end{aligned}$$

用(27)求 $\log\tan\frac{1}{2}d$

$$\begin{aligned}
\log\sin(s-a)&=9.9971\\
\log\sin(s-b)&=9.5199\\
\log\sin(s-c)&=9.8140\\
\hline
&\phantom{=}29.3310\\
\log\sin s&=9.5978\\
2\,|&\phantom{=}19.7332\\
\hline
\log\tan\tfrac{1}{2}d&=9.8666
\end{aligned}$$

用 (28) 求 $A$

$$\begin{aligned}
\log\sin(s-a)&=9.9971\\
\log\tan\tfrac{1}{2}d&=9.8666\\
\hline
\log\tan\tfrac{1}{2}\alpha&=0.1305\\
\tfrac{1}{2}\alpha&=53°29'.\\
\alpha&=106°58'.
\end{aligned}$$

$\therefore A=180°-106°58'=73°2'.$

用 (29) 求 $B$

$$\begin{aligned}
\log\sin(s-b)&=9.5199\\
\log\tan\tfrac{1}{2}d&=9.8666\\
\hline
\log\tan\tfrac{1}{2}\beta&=9.6533\\
\tfrac{1}{2}\beta&=24°14'.\\
\beta&=48°28'.
\end{aligned}$$

$\therefore B=180°-48°28'=131°32'.$

用 (30) 求 $C$

$$\begin{aligned}
\log\sin(s-c)&=9.8140\\
\log\tan\tfrac{1}{2}d&=9.8666\\
\hline
\log\tan\tfrac{1}{2}\gamma&=9.9474\\
\tfrac{1}{2}\gamma&=41°32'.\\
\gamma&=83°4'.
\end{aligned}$$

$\therefore C=180°-83°4'=96°56'.$

核驗：

$$\begin{aligned}
\log\sin a&=9.9375\\
\log\sin A&=9.9807\\
\hline
&\phantom{=}9.9568
\end{aligned}\qquad
\begin{aligned}
\log\sin b&=9.8311\\
\log\sin B&=9.8743\\
\hline
&\phantom{=}9.9568
\end{aligned}\qquad
\begin{aligned}
\log\sin c&=9.9537\\
\log\sin C&=9.9969\\
\hline
&\phantom{=}9.9568
\end{aligned}$$

此核驗較通常臆想所及更近精密，如計算精密時可使末位數字最大差二.

## 例題

解以下球面斜角三角形:

| No. | 已知部分 | | | 所求部分 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a=38°$ | $b=51°$ | $c=42°$ | $A=51°58'$ | $B=83°54'$ | $C=58°53'$ |
| 2 | $a=101°$ | $b=49°$ | $c=60°$ | $A=142°32'$ | $B=27°52'$ | $C=32°28'$ |
| 3 | $a=61°$ | $b=39°$ | $c=92°$ | $A=35°32'$ | $B=24°42'$ | $C=138°24'$ |
| 4 | $a=62°20'$ | $b=54°10'$ | $c=97°50'$ | $A=47°22'$ | $B=42°20'$ | $C=124°38'$ |
| 5 | $a=58°$ | $b=80°$ | $c=96°$ | $A=55°58'$ | $B=74°14'$ | $C=103°36'$ |
| 6 | $a=46°30'$ | $b=62°40'$ | $c=83°20'$ | $A=43°58'$ | $B=58°14'$ | $C=108°6'$ |
| 7 | $a=71°15'$ | $b=39°10'$ | $c=40°35'$ | $A=130°36'$ | $B=30°26'$ | $C=31°26'$ |
| 8 | $a=47°30'$ | $b=55°40'$ | $c=60°10'$ | $A=56°32'$ | $B=69°7'$ | $C=78°58'$ |
| 9 | $a=43°30'$ | $b=72°24'$ | $c=87°50'$ | $A=41°27'$ | $B=66°26'$ | $C=106°3'$ |
| 0 | $a=110°40'$ | $b=45°10'$ | $c=73°30'$ | $A=144°27'$ | $B=26°9'$ | $C=36°35'$ |

17. 款 I. (*b*) 已知其三角. 用頁22之公式, 即 *

$$(40)\qquad \tan\tfrac{1}{2}S=\sqrt{\frac{\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}{\sin\sigma}},$$

$$(41)\qquad \tan\tfrac{1}{2}a=\frac{\sin(\sigma-\alpha)}{\tan\tfrac{1}{2}S},$$

$$(42)\qquad \tan\tfrac{1}{2}b=\frac{\sin(\sigma-\beta)}{\tan\tfrac{1}{2}S},$$

$$(43)\qquad \tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin(\sigma-\gamma)}{\tan\tfrac{1}{2}S},$$

以求 $a, b, c$; 並用正弦定律

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

以核驗之.

例 1. 已知 $A=70°$, $B=131°10'$, $C=94°50'$; 求 $a, b, c$.

解. 在此用各角之補角.

$$\begin{aligned}
\alpha&=180°-A=110°\\
\beta&=180°-B=\ \ 48°50'\\
\gamma&=180°-C=\ \ 85°10'\\
\hline
2\sigma&=244°\\
\sigma&=122°\\
\sigma-\alpha&=\ \ 12°\\
\sigma-\beta&=\ \ 73°10'.\\
\sigma-\gamma&=\ \ 36°50'.
\end{aligned}$$

用(40) 求 $\log\tan\tfrac{1}{2}S$

$$\begin{aligned}
\log\sin(\sigma-\alpha)&=\ \ 9.3179\\
\log\sin(\sigma-\beta)&=\ \ 9.9810\\
\log\sin(\sigma-\gamma)&=\ \ 9.7778\\
\hline
&\ \ 29.0767\\
\log\sin\sigma&=\ \ 9.9284\\
\hline
&2|19.1483\\
\hline
\log\tan\tfrac{1}{2}S&=\ \ 9.5742
\end{aligned}$$

* 此數公式可於頁 25, 款 I. *a* 所用之公式內, 僅互換其相當之希拉及羅馬字母而立即得之,

| 用(41) 求 $a$ | 用(42) 求 $b$. | 用(43) 求 $c$ |
|---|---|---|
| $\log\sin(\sigma-\alpha)=9.3179$ | $\log\sin(\sigma-\beta)=9.9810$ | $\log\sin(\sigma-\gamma)=9.7778$ |
| $\log\tan\frac{1}{2}S=9.5742$ | $\log\tan\frac{1}{2}S=9.5742$ | $\log\tan\frac{1}{2}S=9.5742$ |
| $\log\tan\frac{1}{2}a=9.7437$ | $\log\tan\frac{1}{2}b=0.4068$ | $\log\tan\frac{1}{2}c=0.2036$ |
| $\frac{1}{2}a=29°.$ | $\frac{1}{2}b=68°36'.$ | $\frac{1}{2}c=57°58'$ |
| $\therefore\ a=58°.$ | $b=137°12'.$ | $c=115°56'$ |

| 核驗 | | |
|---|---|---|
| $\log\sin a=9.9284$ | $\log\sin b=9.8321$ | $\log\sin c=9.9539$ |
| $\log\sin A=9.9730$ | $\log\sin B=9.8767$ | $\log\sin C=9.9985$ |
| $9.9554$ | $9.9554$ | $9.9554$ |

## 例 題

解下列斜角球面三角形

| No. | 已知部分 | | | 所求部分 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $A=75°$ | $B=82°$ | $C=61°$ | $a=67°52'$ | $b=71°44'$ | $c=57°$ |
| 2 | $A=120°$ | $B=130°$ | $C=80°$ | $a=144°10'$ | $b=148°49'$ | $c=41°44'$ |
| 3 | $A=91°10'$ | $B=85°40'$ | $C=72°30'$ | $a=80°51'$ | $b=85°49'$ | $c=72°32'$ |
| 4 | $A=138°16'$ | $B=31°11'$ | $C=35°53'$ | $a=100°5'$ | $b=49°59'$ | $c=60°6'$ |
| 5 | $A=78°40'$ | $B=63°50'$ | $C=46°20'$ | $a=39°30'$ | $b=35°36'$ | $c=27°59'$ |
| 6 | $A=121°$ | $B=102°$ | $C=68°$ | $a=130°50'$ | $b=120°18'$ | $c=54°56'$ |
| 7 | $A=130°$ | $B=110°$ | $C=80°$ | $a=139°21'$ | $b=126°58'$ | $c=56°52'$ |
| 8 | $A=28°$ | $B=92°$ | $C=85°26'$ | $a=27°56'$ | $b=85°40'$ | $c=84°2'$ |
| 9 | $A=59°18'$ | $B=108°$ | $C=76°22'$ | $a=61°44'$ | $b=103°4'$ | $c=84°32'$ |
| 10 | $A=100°$ | $B=100°$ | $C=50°$ | $a=112°14'$ | $b=112°14'$ | $c=46°4'$ |

18. 款 II. ($a$) 已知兩邊及其夾角，如 $a$, $b$, $C$. 用頁24之公式，即，

$$(46)\qquad \tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=-\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\tan\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$(47)\qquad \tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=-\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\tan\tfrac{1}{2}\gamma,$$

以求 $\alpha$ 與 $\beta$ 故亦求得 A 與 B；並用頁23之(44)解而求 $\tan\frac{1}{2}$ c，即由

$$(44)\qquad \tan\tfrac{1}{2}c=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

以求 $c$. 以正弦定律核驗之.

例 1. 已知 $a=64°24'$，$b=42°30'$，$C=58°40'$；求 $A$, $B$, $c$.

解. $\gamma=180°-C=121°20'$. $\therefore\ \frac{1}{2}\gamma=60°40'$.

| | |
|---|---|
| $a=64°24'$ | $a=64°24'$ |
| $b=42°30'$ | $b=42°30'$ |
| $a+b=106°54'$ | $a-b=21°54'$ |
| $\therefore\ \frac{1}{2}(a+b)=53°27'$. | $\therefore\ \frac{1}{2}(a-b)=10°57'$. |

求 $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 用(46)

$$\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}(a-b) &= 9.2786\\
\log\tan\tfrac{1}{2}\gamma &= 0.2503\\
&\phantom{=}\ 9.5289\\
\log\sin\tfrac{1}{2}(a+b) &= 9.9049\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= 9.6240(n)\\
\therefore\ \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= -22^\circ49'.^*
\end{aligned}$$

求 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 用(47)

$$\begin{aligned}
\log\cos\tfrac{1}{2}(a-b) &= 9.9920\\
\log\tan\tfrac{1}{2}\gamma &= 0.2503\\
&\phantom{=}\ 10.2423\\
\log\cos\tfrac{1}{2}(a+b) &= 9.7749\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) &= 0.4674(n)\\
180^\circ-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) &= 71^\circ11'.^\dagger\\
\therefore\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) &= 108^\circ49'.
\end{aligned}$$

求 $A$ 與 $B$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) &= 108^\circ49'\\
\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= -\ 22^\circ49'\\
\text{加，}\quad \alpha &= 86^\circ\\
\text{減，}\quad \beta &= 131^\circ38'.\\
\therefore\ A &= 180^\circ-\alpha=94^\circ.\\
B &= 180^\circ-\beta=48^\circ22'.
\end{aligned}$$

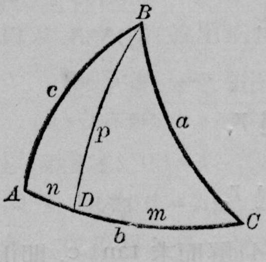
求 $c$ 用(44)

$$\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) &= 9.9761\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(a-b) &= 9.2867\\
&\phantom{=}\ 19.2628\\
\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= 9.5886(n)\\
\log\tan\tfrac{1}{2}c &= 9.6742^\ddagger\\
\tfrac{1}{2}c &= 25^\circ17'.\\
\therefore\ c &= 50^\circ34'.
\end{aligned}$$

核驗:

| | | |
|---|---|---|
| $\log\sin a=9.9551$ | $\log\sin b=9.8297$ | $\log\sin c=9.8878$ |
| $\log\sin A=9.9989$ | $\log\sin B=9.8735$ | $\log\sin C=9.9315$ |
| $9.9562$ | $9.9562$ | $9.9563$ |

設僅 $c$ 爲未知，則可不必先決定 $A$ 及 $B$ 而逕由頁 17，公式(14)餘弦定律以求之．但此公式不適於對數算法．以下又說明另一算法，此法根據直角球面三角形之解法，故僅需依訥氏循環部分定則，頁 8，推得之諸公式即可．




過 $B$ 作一大圓弧垂直於 $AC$，交 $AC$ 於 $D$．設

$$BD=p,\quad CD=m,\quad AD=n.$$

應用定則1，頁 8，於直角球面三角形 $BCD$，得

$$\cos C=\tan m\cot a,\ \text{或，}$$

$$\tan m=\tan a\cos C. \qquad (A)$$

應用定則 II，頁 8，於 $BCD$，

$$\cos a=\cos m\cos p,\ \text{或，}$$

$$\cos p=\cos a\sec m. \qquad (B)$$

* 因 $\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 爲負，$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 在第二或第四象限，但 $a>b$，故 $A>B$ 而 $\alpha>\beta$，因 $\alpha$ 與 $\beta$ 爲 $A$ 及 $B$ 之補角也，故 $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 必爲小於 $90^\circ$ 之負角．

† 此處 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 必爲小於 $180^\circ$ 之正角　因 $\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 爲負，$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 必在第二象限．故可由表求得其補角．

‡ $\tan\frac{1}{2}c$ 爲正，因 $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 爲負而其小數前應有負號也．

應用此定則於 $ABD$,

$$\cos c = \cos n \cos p, \text{ 或},$$

(C) $$\cos p = \cos c \sec n.$$

置 (B) 與 (C) 爲等式,

$$\cos c \sec n = \cos a \sec m, \text{ 或},$$

$$\cos c = \cos a \sec m \cos n.$$

但 $n = b - m$; 故

(D) $$\cos c = \cos a \sec m \cos(b - m).$$

今可由 (A) 與 (D) 以計算 $c$, 即,

(48) $$\tan m = \tan a \cos C,$$

(49) $$\cos c = \frac{\cos a \cos(b - m)}{\cos m}.$$

例 2. 已知 $a = 98°$, $b = 80°$, $C = 110°$; 求 $c$.

解. 應用適所說明之方法.

用(48)以求 $b - m$.

$\log \tan a = 0.8522(n)$

$\log \cos C = 9.5341(n)$

$\log \tan m = 0.3863$

$m = 67°40'$.

$\therefore b - m = 12°20'$.

用(49)以求 c

$\log \cos a = 9.1436(n)$

$\log \cos(b - m) = 9.9899$

$19.1335$

$\log \cos m = 9.5798$

$\log \cos c = 9.5537(n)$

$180° - c = 69°2'$.

$c = 110°58'$.

## 例 題

解斜角球面三角形:

| No. | 已知部分 | | | 所求部分 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $b = 137°20'$ | $c = 116°$ | $A = 70°$ | $B = 131°17'$ | $C = 94°48'$ | $a = 57°57'$ |
| 2 | $a = 72°$ | $b = 47°$ | $C = 33°$ | $A = 121°33'$ | $B = 40°57'$ | $c = 37°26'$ |
| 3 | $a = 98°$ | $c = 60°$ | $B = 110°$ | $A = 87°$ | $C = 60°51'$ | $b = 111°17'$ |
| 4 | $b = 120°20'$ | $c = 70°40'$ | $A = 50°$ | $B = 134°57'$ | $C = 50°41'$ | $a = 69°9'$ |
| 5 | $a = 125°10'$ | $b = 153°50'$ | $C = 140°20'$ | $A = 147°29'$ | $B = 163°9'$ | $c = 76°8'$ |
| 6 | $a = 93°20'$ | $b = 56°30'$ | $C = 74°40'$ | $A = 101°24'$ | $B = 54°58'$ | $c = 79°10'$ |
| 7 | $b = 76°30'$ | $c = 47°20'$ | $A = 92°30'$ | $B = 78°21'$ | $C = 47°47'$ | $a = 82°42'$ |
| 8 | $c = 40°20'$ | $a = 100°30'$ | $B = 46°40'$ | $A = 131°29'$ | $C = 29°33'$ | $b = 72°40'$ |
| 9 | $b = 76°36'$ | $c = 110°26'$ | $A = 46°50'$ | $B = 57°38'$ | $C = 125°32'$ | $a = 57°8'$ |
| 10 | $a = 84°23'$ | $b = 124°48'$ | $C = 62°$ | $A = 68°27'$ | $B = 129°53'$ | $c = 70°52'$ |

**19.** 款II. (*b*) 已知兩角及其夾邊，如 $A, B, C$. 用頁23, 24 之公式,* 即,

$$(44)\qquad \tan\tfrac{1}{2}(a-b)=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\tan\tfrac{1}{2}c,$$

$$(45)\qquad \tan\tfrac{1}{2}(a+b)=-\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\tan\tfrac{1}{2}c,$$

以求 $a$ 與 $b$; 並用頁24之(46)解之而求 $\tan\frac{1}{2}\gamma$, 即,

$$(46)\qquad \tan\tfrac{1}{2}\gamma=-\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)},$$

以求得 $\gamma$ 故亦求得 $C$. 以正弦定律核驗之.

例 1. 已知 $c=116°$, $A=70°$, $B=131°20'$; 求 $a, b, C$.

解. $\alpha=180°-A=110°$, 而 $\beta=180°-B=48°40'$.

$$\begin{array}{rlrlr}
\alpha= & 110° & \alpha= & 110° & \\
\beta= & 48°40' & \beta= & 48°40' & \\
\alpha+\beta= & 158°40' & \alpha-\beta= & 61°20' & c=116°. \\
\therefore\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)= & 79°20'. & \therefore\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta)= & 30°40'. & \therefore\ \frac{1}{2}c=58°.
\end{array}$$

求 $\frac{1}{2}(a-b)$ 用(44)

$$\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)&=9.7076\\
\log\tan\tfrac{1}{2}c&=0.2042\\
&\quad 9.9118\\
\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)&=9.9924\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(a-b)&=9.9194(n)\\
\therefore\ \tfrac{1}{2}(a-b)&=-39°43'.\dagger
\end{aligned}$$

求 $\frac{1}{2}(a+b)$ 用(45)

$$\begin{aligned}
\log\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)&=9.9346\\
\log\tan\tfrac{1}{2}c&=0.2042\\
&\quad 10.1388\\
\log\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)&=9.2674\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(a+b)&=0.8714(n)\\
180°-\tfrac{1}{2}(a+b)&=82°21'.\\
\therefore\ \tfrac{1}{2}(a+b)&=97°39'.
\end{aligned}$$

求 $a$ 與 $b$

$$\begin{array}{lrl}
& \frac{1}{2}(a+b)= & 97°39' \\
& \frac{1}{2}(a-b)= & -39°43' \\
\text{相加,} & a= & 57°56' \\
\text{相減,} & b= & 137°22'.
\end{array}$$

用(46)以求 $C$.

$$\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}(a+b)&=9.9961\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)&=9.7730\\
&\quad 19.7691\\
\log\sin\tfrac{1}{2}(a-b)&=9.8055(n)\\
\log\tan\tfrac{1}{2}\gamma&=9.9636\\
\tfrac{1}{2}\gamma&=42°36'.\\
\gamma&=85°12'.\\
\therefore\ C=180°-\gamma&=94°48'.
\end{aligned}$$

核驗:

$$\begin{array}{lll}
\log\sin a=9.9281 & \log\sin b=9.8308 & \log\sin c=9.9537 \\
\log\sin A=9.9730 & \log\sin B=9.8756 & \log\sin C=9.9985 \\
\qquad\quad 9.9551 & \qquad\quad 9.9552 & \qquad\quad 9.9552
\end{array}$$

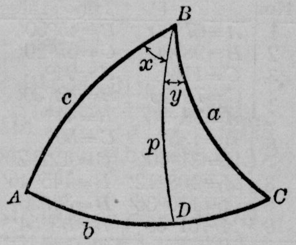
---

* 與頁 27，款 II，(*a*)，所用之公式相同，惟其希拉與羅馬字母互換

† 因 $A<B$ 故知 $a<b$，而 $\frac{1}{2}(a-b)$為負.

設僅 $C$ 爲未知，則不必先決定 $a$ 與 $b$，即分已知三角形爲二直角球面三角形以計算之即可，如頁 28 所示.

過 $B$ 作一大圓弧垂直於 $AC$，交 $AC$ 於 $D$. 設 $BD=p$，角 $ABD=x$，角 $CBD=y$. 應用訥氏定則 I，頁 28，於直角球面三角形 $ABD$，則得




$$\cos c=\cot x\cot A,\text{ 或,}$$

$$(A)\qquad \cot x=\tan A\cos c$$

應用頁 28，定則 II，於 $ABD$，則得，

$$\cos A=\cos p\sin x,\text{ 或,}$$

$$(B)\qquad \cos p=\cos A\csc x.$$

應用此二定則於 $CBD$，

$$\cos C=\cos p\sin y,\text{ 或,}$$

$$(C)\qquad \cos p=\cos C\csc y,$$

置 $(B)$ 與 $(C)$ 爲等式，

$$\cos C\csc y=\cos A\csc x,\text{ 或,}$$

$$\cos C=\cos A\csc y\sin y.$$

但 $\qquad y=B-x$; 所以

$$(D)\qquad \cos C=\cos A\csc x\sin(B-x).$$

今 $C$ 可由 $(A)$ 與 $(D)$ 計算之，即，

$$(50)\qquad \underline{\cot x=\tan A\cos c.}$$

$$(51)\qquad \cos C=\frac{\cos A\sin(B-x)}{\sin x}.$$

例 2. 已知 $A=35°46'$，$B=115°9'$，$c=51°2'$；求 $C$.

解. 應用適所說明之方法.

用 (50) 以求 $B-x$

$$\log\tan A=9.8575$$
$$\log\cos c=\underline{9.7986}$$
$$\log\cot x=9.6561$$
$$x=65°38'.$$
$$\therefore B-x=49°31'.$$

用 (51) 以求 $C$.

$$\log\cos A=9.9093$$
$$\log\sin(B-x)=\underline{9.8811}$$
$$19.7904$$
$$\log\sin x=\underline{9.9595}$$
$$\log\cos C=9.8309$$
$$C=47°21'.$$

## 例題

解以下球面斜角三角形:

| No. | 已知部分 | | | 所求部分 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $A=67°30'$ | $B=45°50'$ | $c=74°20'$ | $a=63°15'$ | $b=43°53'$ | $C=95°1'$ |
| 2 | $B=98°30'$ | $C=67°20'$ | $a=60°40'$ | $b=86°40'$ | $c=68°40'$ | $A=59°44'$ |
| 3 | $C=110°$ | $A=94°$ | $b=44°$ | $a=114°10'$ | $c=120°46'$ | $B=49°34'$ |
| 4 | $C=70°20'$ | $B=43°50'$ | $a=50°46'$ | $b=32°59'$ | $c=47°45'$ | $A=80°14'$ |
| 5 | $A=78°$ | $B=41°$ | $c=108°$ | $a=95°38'$ | $b=41°52'$ | $C=110°49'$ |
| 6 | $B=135°$ | $C=50°$ | $a=70°20'$ | $b=120°16'$ | $c=69°20'$ | $A=50°26'$ |
| 7 | $A=31°40'$ | $C=122°20'$ | $b=40°40'$ | $a=34°3'$ | $c=64°19'$ | $B=37°40'$ |
| 8 | $A=108°12'$ | $B=145°46'$ | $c=126°32'$ | $a=69°5'$ | $b=146°25'$ | $C=125°12'$ |
| 6 | $A=130°36'$ | $B=30°26'$ | $c=40°35'$ | $a=71°15'$ | $b=39°10'$ | $C=31°29'$ |
| 10 | $A=51°58'$ | $B=83°54'$ | $c=42°$ | $a=38°$ | $b=51°$ | $C=58°53'$ |

**20. 款 III.** (*a*) 已知兩邊及對其一邊之角, 如 $a$, $b$, $B$ (疑款* ambiguous case).

由頁 15 之正弦定律, 得

$$\text{(11)}\qquad \sin A=\frac{\sin a\sin B}{\sin b},$$

由此得 $A$.† 若求 $C$ 則用頁 24 之公式(46), 解之而求 $\tan\frac{1}{2}\gamma$, 即,

$$\text{(46)}\qquad \tan\tfrac{1}{2}\gamma=-\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}.$$

若求 $c$, 解頁 23 之公式(44)以求 $\tan\frac{1}{2}c$, 即,

$$\text{(44)}\qquad \tan\tfrac{1}{2}c=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

以正弦定律核驗之.

例 1. 已知 $a=58°$, $b=137°20'$, $B=131°20'$; 求 $A$, $C$, $c$.

解 用(11)以求 $A$

$$\begin{aligned}
\log\sin a &= 9.9284\\
\log\sin B &= 9.8756\\
&\overline{19.8040}\\
\log\sin b &= 9.8311\\
\log\sin A &= 9.9729\\
\therefore\ A_1 &= 69°58'.
\end{aligned}$$

或, $A_2=180°-A_1=110°2'$

$$\begin{aligned}
a &= 58° & a &= 58°\\
b &= 137°20' & b &= 137°20'\\
a+b &= 195°20' & a-b &= -79°20'\\
\tfrac{1}{2}(a+b) &= 97°40'. & \tfrac{1}{2}(a-b) &= -39°40'.
\end{aligned}$$

$$\beta=180°-B=48°40'.$$

因 $a<b$ 而 $A_1$ 與 $A_2$ 皆 $<B$, 即知有二解法.

* 恰如在平面斜角三角形解法之相當款內(葛氏平面三角法, 頁 105 與 161), 依其已知件而有兩解, 一解, 或全解.

† 因角 $A$ 由其正弦決定, 故必須研究其所得之各値, 設 $a>b$, 則 $A>B$; 設 $a<b$ 則 $A<B$. 故

[續次頁]

第一解. $\alpha_1=180^\circ-A_1=110^\circ 2'$.

$$\begin{aligned}\alpha_1&=110^\circ 2'\\ \beta&=\ \ 48^\circ 40'\\ \hline \alpha_1+\beta&=158^\circ 42'\\ \tfrac{1}{2}(\alpha_1+\beta)&=\ \ 79^\circ 21'.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1&=110^\circ 2'\\ \beta&=\ \ 48^\circ 40'\\ \hline \alpha_1-\beta&=\ \ 61^\circ 22'\\ \tfrac{1}{2}(\alpha_1-\beta)&=\ \ 30^\circ 41'.\end{aligned}$$

用(46)以求 $C_1$

$$\begin{aligned}\log\sin\tfrac{1}{2}(a+b)&=9.9961\\ \log\tan\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\beta)&=\underline{9.7733}\\ &\ \ 19.7694\\ \log\sin\tfrac{1}{2}(a-b)&=\underline{9.8050(n)}\\ \log\tan\tfrac{1}{2}\gamma_1&=9.9644\\ \tfrac{1}{2}\gamma_1&=42^\circ 39'.\\ \gamma_1&=85^\circ 18'.\\ \therefore\ C_1=180^\circ-\gamma_1&=94^\circ 42'.\end{aligned}$$

用(44)以求 $c_1$

$$\begin{aligned}\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\beta)&=9.9924\\ \log\tan\tfrac{1}{2}(a-b)&=\underline{9.9187(n)}\\ &\ \ 19.9111\\ \log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\beta)&=\underline{9.7078}\\ \log\tan\tfrac{1}{2}c_1&=10.2033\\ \tfrac{1}{2}c_1&=57^\circ 57'.\\ \therefore\ c_1&=115^\circ 54'.\end{aligned}$$

核驗: $\log\sin a=9.9284$　$\log\sin b=9.8311$　$\log\sin c_1=9.9541$

$\log\sin A_1=\underline{9.9729}$　$\log\sin B=\underline{9.8756}$　$\log\sin C_1=\underline{9.9985}$

$9.9555$　$9.9555$　$9.9556$

第一法. $\alpha_2=180^\circ-A_2=69^\circ 58'$.

$$\begin{aligned}\alpha_2&=\ \ 69^\circ 58'\\ \beta&=\ \ 48^\circ 40'\\ \hline \alpha_2+\beta&=118^\circ 38'\\ \tfrac{1}{2}(\alpha_2+\beta)&=59^\circ 19'.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2&=69^\circ 58'\\ \beta&=48^\circ 40'\\ \hline \alpha_2-\beta&=21^\circ 18'\\ \tfrac{1}{2}(\alpha_2-\beta)&=10^\circ 39'.\end{aligned}$$

求 $C_2$ 用(46)

$$\begin{aligned}\log\sin\tfrac{1}{2}(a+b)&=9.9961\\ \log\tan\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\beta)&=\underline{9.2743}\\ &\ \ 19.2704\\ \log\sin\tfrac{1}{2}(a-b)&=\underline{9.8050(n)}\\ \log\tan\tfrac{1}{2}\gamma_2&=9.4654\\ \tfrac{1}{2}\gamma_2&=16^\circ 17'.\\ \gamma_2&=32^\circ 34'.\\ \therefore\ C_2=180^\circ-\gamma_2&=147^\circ 26'.\end{aligned}$$

求 $c_1$ 用(44)

$$\begin{aligned}\log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\beta)&=9.9345\\ \log\tan\tfrac{1}{2}(a-b)&=\underline{9.9187(n)}\\ &\ \ 19.8532\\ \log\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\beta)&=\underline{9.2667}\\ \log\tan\tfrac{1}{2}c_2&=10.5865\\ \tfrac{1}{2}c_2&=75^\circ 28'.\\ \therefore\ c_2&=150^\circ 56'.\end{aligned}$$

核驗: $\log\sin a=9.9284$　$\log\sin b=9.8311$　$\log\sin c_2=9.6865$

$\log\sin A_2=\underline{9.9729}$　$\log\sin B=\underline{9.8756}$　$\log\sin C_2=\underline{9.7310}$

$9.9555$　$9.9555$　$9.9555$

設邊 $c$ 或角 $C$ 爲未知則不必先計算 $A$ 之數值, 可先化已知三角形爲二直角三角形然後再用訥氏定則, 如頁220及223之款II, $(a)$, 及款II, $(b)$所示.

定理. $A$ 之數値僅依 $a$ 之大於或小於 $b$ 而大於或小於 $B$ 者, 應當保存.

設 $\log\sin A=$ 一正値,則無解法.

## 例 題

解下列斜角球面三角形:

| No. | 已知部分 | | | 所求部分 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a=43°20'$ | $b=48°30'$ | $A=58°40'$ | $B_1=68°46'$ | $C_1=70°49'$ | $c_1=49°16'$ |
| | | | | $B_2=111°14'$ | $C_2=14°29'$ | $c_2=11°36'$ |
| 2 | $a=56°40'$ | $b=30°50'$ | $A=103°40'$ | $B=36°35'$ | $C=52°$ | $c=42°39'$ |
| 3 | $a=30°20'$ | $b=46°30'$ | $A=36°40'$ | $B_1=59°4'$ | $C_1=97°39'$ | $c_1=56°57'$ |
| | | | | $B_2=120°56'$ | $C_2=28°5'$ | $c_2=23°28'$ |
| 4 | $b=99°40'$ | $c=64°20'$ | $B=95°40'$ | $C=65°30'$ | $A=97°20'$ | $a=100°45'$ |
| 5 | $a=40°$ | $b=118°20'$ | $A=29°40'$ | $B_1=42°40'$ | $C_1=159°54'$ | $c_1=153°30'$ |
| | | | | $B_2=137°20'$ | $C_2=50°21'$ | $c_2=90°10'$ |
| 6 | $a=115°20'$ | $c=146°20'$ | $C=141°10'$ | 不可能 | | |
| 7 | $a=109°20'$ | $c=82°$ | $A=107°40'$ | $C=90°$ | $B=113°35'$ | $b=114°50'$ |
| 8 | $b=108°30'$ | $c=40°50'$ | $C=39°50'$ | $B_1=68°18'$ | $A_1=132°34'$ | $a_1=131°16'$ |
| | | | | $B_2=111°42'$ | $A_2=77°5'$ | $a_2=95°50'$ |
| 9 | $a=162°20'$ | $b=15°40'$ | $B=125°$ | 不可能 | | |
| 10 | $a=55°$ | $a=138°10'$ | $A=42°30'$ | $C=146°38'$ | $B=55°1'$ | $b=96°34'$ |

**21. 款III.** $(b)$ 已知兩角及對其一角之一邊, 如 $A$, $B$, $b$ (疑款*). 由正弦定律, 頁15, 得

$$\sin a=\frac{\sin A\sin b}{\sin B}. \tag{11}$$

由此得出 $a$.† 若求 $c$, 則用頁23之公式‡(44), 解而求 $\tan\frac{1}{2}c$, 即

$$\tan\tfrac{1}{2}c=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}. \tag{44}$$

若求 $c$, 則解頁24之公式(46), 以求 $\tan\frac{1}{2}\gamma$, 即,

$$\tan\tfrac{1}{2}\gamma=-\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}. \tag{46}$$

用正弦定以核驗之.

* 恰如款 II, $(b)$, 所示, 依其已知件可有兩解, 一解, 或無解

† 因邊乃由其正弦而決定, 故必須研究所求得之各值. 設 $A>B$ 則 $a>b$, 設 $A<B$ 則 $a<b$. 故得

定理. $a$ 之各值僅依 $A$ 之大於或小於 $B$ 而大於或小於 $b$ 者應當保存.

設 $\log\sin a=$ 一正值則無解法.

‡ 與頁32 款 III, $(a)$ 所用公式相同, 惟其希拉字母及羅馬字母互換.

例1. 已知 $A=110°$, $B=131°20'$, $b=137°20'$; 求 $a,c,C$.

解. $\alpha=180°-A=70°$, 而 $\beta=180°-B=48°40'$.

用(11)求 $a$

$$\log\sin A=9{\cdot}9730$$
$$\log\sin b=\underline{9{\cdot}8311}$$
$$19{\cdot}8041$$
$$\log\sin B=\underline{9{\cdot}8756}$$
$$\log\sin a=9{\cdot}9285$$
$$\therefore\ a_1=58°1',$$

或, $a_2=180°-a_1=121°59'$.

$$\alpha=70° \qquad \alpha=70°$$
$$\beta=\underline{48°40'} \qquad \beta=\underline{48°40'}$$
$$\alpha+\beta=118°40' \qquad \alpha-\beta=21°20'$$
$$\tfrac12(\alpha+\beta)=59°20'.\ \tfrac12(\alpha-\beta)=10°40'.$$

因 $A<B$ 而 $a_1$ 與 $a_2$ 皆 $<b$, 故知有二解.

第一解.

$$a_1=58°1' \qquad a_1=58°1'$$
$$b=\underline{137°20'} \qquad b=\underline{137°20'}$$
$$a_1+b=195°21' \qquad a_1-b=-79°19'$$
$$\tfrac12(a_1+b)=97°41'. \qquad \tfrac12(a_1-b)=-39°40'.$$

求 $c_1$ 用(44)

$$\log\sin\tfrac12(\alpha+\beta)=9.9346$$
$$\log\tan\tfrac12(a_1-b)=\underline{9.9187(n)}$$
$$19.8533$$
$$\log\sin\tfrac12(\alpha-\beta)=\underline{9.2674}$$
$$\log\tan\tfrac12 c_1=10.5859$$
$$\tfrac12 c_1=75°27'.$$
$$\therefore c_1=150°54'.$$

求 $C_1$ 用(46)

$$\log\sin\tfrac12(a_1+b)=9.9961$$
$$\log\tan\tfrac12(\alpha-\beta)=\underline{9.2750}$$
$$19.2711$$
$$\log\sin\tfrac12(a_1-b)=\underline{9.8050(n)}.$$
$$\log\tan\tfrac12\gamma_1=9.4661$$
$$\tfrac12\gamma_1=16°18'.$$
$$\gamma_1=32°36'.$$
$$\therefore C_1=180°-\gamma_1=147°24.$$

核驗: 

| | | |
|---|---|---|
| $\log\sin a_1=9.9285$ | $\log\sin b=9.8311$ | $\log\sin c_1=9.6869$ |
| $\log\sin A=\underline{9.9730}$ | $\log\sin B=\underline{9.8756}$ | $\log\sin C_1=\underline{9.7314}$ |
| $9.9555$ | $9.9555$ | $9.9555$ |

第二解. 由此得 $c_2=64°8'$, 而 $C_2=85°18'$,

注意 $a_2=121°59'$, 可核驗第二解法.

核驗:

| | | |
|---|---|---|
| $\log\sin a_2=9.9285$ | $\log\sin b=9.8311$ | $\log\sin c_2=9.9542$ |
| $\log\sin A=\underline{9.9730}$ | $\log\sin B=\underline{9.8756}$ | $\log\sin C_2=\underline{9.9985}$ |
| $9.9555$ | $9.9555$ | $9.9557$ |

故二解爲

$$a_1=58°1' \qquad c_1=150°54' \qquad C_1=147°23',$$

而 $$a_2=121°59' \qquad c_2=64°8' \qquad C_2=85°18'.$$

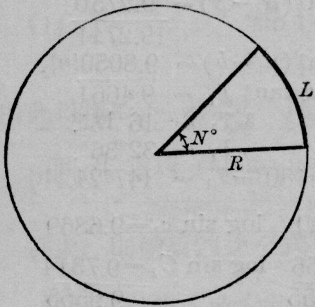
設角 $C$ 或邊 $c$ 爲未知則不必先計算 $a$, 可化已知三角形爲二直角三角形然後應用訥氏定則, 如頁28及頁31, 款 II, $(a)$ 及款 II, $(b)$ 所示

## 例題

解下列斜角球面三角形:

| No. | 已知部分 | | | 所求部分 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $A=108°40'$ | $B=134°20'$ | $a=145°36'$ | $b=54°45'$ | $c=34°9'$ | $C=70°18'$ |
| 2 | $B=116°$ | $C=80°$ | $c=84°$ | $b=114°50'$ | $A=79°20'$ | $a=82°56'$ |
| 3 | $A=132°$ | $B=140°$ | $b=127°$ | $a_1=67°24'$ | $C_1=164°6'$ | $c_1=160°6'$ |
| | | | | $a_2=112°36'$ | $C_2=128°21'$ | $c_2=103°2'$ |
| 4 | $A=62°$ | $C=102°$ | $a=64°30'$ | $c=90°$ | $B=63°43'$ | $b=66°26'$ |
| 5 | $A=133°50'$ | $B=66°30'$ | $a=81°10'$ | 不可能 | | |
| 6 | $B=22°20'$ | $C=146°40'$ | $c=138°20'$ | $b=27°22'$ | $A=47°21'$ | $a=117°9'$ |
| 7 | $A=61°40'$ | $C=140°20'$ | $c=150°20'$ | $a_1=43°3'$ | $B_1=89°24'$ | $b_1=129°8'$ |
| | | | | $a_2=136°57'$ | $B_2=26°59'$ | $b_2=20°36'$ |
| 8 | $B=73°$ | $C=81°20'$ | $b=122°40'$ | 不可能 | | |
| 9 | $B=36°20'$ | $C=46°30'$ | $b=42°12'$ | $A_1=164°44'$ | $a_1=162°38'$ | $c_1=124°41'$ |
| | | | | $A_2=119°17'$ | $a_2=81°17'$ | $c_2=55°19'$ |
| 10 | $A=110°10'$ | $B=133°18'$ | $a=147°6'$ | $b=155°5'$ | $c=32°59'$ | $C=70°16'$ |

**22.** 以長度單位表圓弧之長. 由幾何學知圓弧之長比圓周如圓弧之度數比360°.即




$$L : 2\pi R :: N : 360, \text{或}$$

$$L=\frac{\pi RN}{180}, \tag{52}$$

其 L＝弧長,

N＝弧之度數,

R＝半徑之長.

若弧長已知而求其所含之度數,則解而求 N, 得

$$N=\frac{180L}{\pi R}. \tag{53}$$

以地球作爲一球, 則其大圓上一分之弧稱爲一地理里(geographical mile)或一海里* (nautical mile). 故一度之弧含60海里, 而地球大圓之圓周含 $360 \times 60 = 21,600$海里, 設地球半徑爲

* 關於船之航行速度一海里亦稱爲一浬 (knot)

3960法定英里 (statute mile), 則一海里之長 ($=1$分$=\frac{1}{60}$之一度) 表爲法定英里, 由 (52) 即爲,

$$L=\frac{3.1416\times 3960\times\frac{1}{60}}{180}=1.15\text{哩}.$$

例1. 求半徑4吋 $22°30'$ 之圓弧之長.

解. 於此 $N=22°30'=22{\cdot}5°$ $R=4$吋.

代入 (52), $L=\dfrac{3.1416\times 4\times 22.5}{180}$ 1·57 吋. 答.

例2. 一船航行於一大圓周上$5\frac{1}{2}$小時, 每時速度爲12法定英里. 問其航行之弧有若干度?

解. 於此 $L=5\frac{1}{2}\times 12=66$哩, $R=3960$哩.

代入 (53), $N=\dfrac{180\times 66}{3.1416\times 3960}=\cdot 955°=57{\cdot}3'$. 答.

**23** 球面三角形之面積. 由球面幾何學知球面三角形之面積比球面面積如其球面盈餘 * (spherical excess) 之度數比720. 即,

三角形之面積 : $4\pi R^2$ : : $E$ : 720, 或,

(54) $$\text{球面三角形之面積}=\frac{\pi R^2 E}{180}$$

若三角形之角爲未知時, 則先解三角形而求之, 或, 設三角形之三邊爲已知, 可直接由呂氏公式 † (L'huilier's formula) 以求 E, 即,

(55) $$\tan\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\tan\tfrac{1}{2}s\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b)\tan\tfrac{1}{2}(s-c)}$$

其 $a$, $b$, $c$ 表邊而 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

球面多邊形之面積顯然爲由其對角線之大圓弧分成之諸球面三角形之面積之和.

例1. 半徑 25 吋之球, 其球面三角形之各角爲 $A=74°40'$. $B=67°30'$, $C=49°50'$. 求三角形之面積.

解. 於此 $E=(A+B+C)-180°=12°$.

代入 (54), 面積 $=\dfrac{3{\cdot}1416\times(25)^2\times 12}{180}=130{\cdot}9$方吋. 答.

* 球面三角形之球面盈餘 (常表爲E) 爲其各角之和大於180°之數, 如, 設 $A$, $B$, 與 $C$, 爲球面三角形之各角,

$$E=A+B+C-180°.$$

† 較深之書內授之.

## 例　　題

1. 半徑2呎6吋之圓，求其5°12′之弧長.　　　答. 2.72吋.

2. 半徑10碼之圓，求75°30′之弧長.　　　答. 13.17碼.

3. 設半徑爲6吋，其15吋長之弧爲若干度?　　　答. 143°18′.

4. 一船在地球大圓上每日行4度之弧. 問船行速度若干?

答. 每時11.515哩.

5. 半徑25吋之球。其球面三角形之邊爲48°, 126°, 80°, 求其周介.

答. 110.78吋.

6. 賽船路線爲三角形之形式，其邊長爲24哩，20哩，18哩，假設其路線爲大圓圓弧. 問其所行之弧含若干分?　　　答. 53.85分.

7. 球面三角形之角爲$A=63°$，$B=84°21'$, $C=79°$; 球半徑爲10吋. 三角形之面積若干?　　　答. 80·88方吋.

8. 球面三角形之邊爲$a=6.47$吋, $b=8.39$吋, $c=9.43$吋;球半徑爲25吋，三角形面積若干?　　　答. 26.9方吋,

授意. 用公式(55)求E.

9. 在球面三角形內$A=75°16'$, $B=39°20'$, $c=26$呎; 球半徑爲14呎. 求三角形之面積.　　　答. 158.45方呎.

10. 二船同時離波士頓. 第一日一船東行441哩，他船行287哩其方向爲E. 38°21′N. 設各船行於大圓弧上,問第一日終二船之位置及以波士頓作爲三頂之三角形之面積若干?　　　答. 41.050方哩

11. 船一隻每時行15浬緣一島之海岸而行，18小時一周，島形幾爲一等邊三角形. 問島之大概面積爲何?　　　答. 4651.1方哩

12. 求下列球面三角形之面積，已知

(a) $a=47°30'$, $b=55°40'$, $c=60°10'$; $R=10$呎.　　　答. 42.96方呎.

(b) $a=43°30'$, $b=72°24'$, $c=87°50'$; $R=10$吋.　　　59.21方吋.

(c) $A=74°40'$, $B=67°30'$, $C=49°50'$; $R=100$碼.　　　2094方碼.

(d) $A=112°30'$, $B=83°40'$, $C=70°10'$; $R=25$公分.　　　941.4方公分

(e) $a=64°20'$, $b=42°30'$, $C=50°40'$; $R=12$呎.　　　46.74方呎.

(f) $C=110°$, $A=94°$, $b=44°$; $R=40$桿.　　　2065.5方桿

(g) $a=43°20'$. $b=48°30'$, $A=58°40'$; $R=100$桿.　　　19.76英畝.

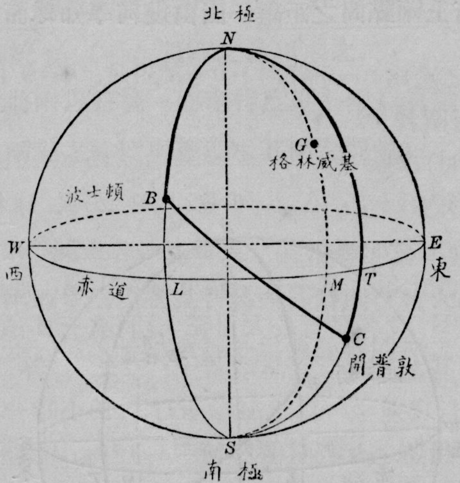
(h) $A=108°40'$, $B=134°20'$, $a=145°35'$; $R=3960$哩　　　364,65,667方哩

# 第三章

## 球面三角法應用於天球 (Celestial sphere) 及地球 (Terrestrial sphere)

**24.** 地理名詞 (Geographical terms). 此後將假定地球爲半徑3960法定英里之圓球.

地球上一地之子午線 (meridian) 者爲通過該地及北極南極之大圓也.




如，圖內表示地球，$NGS$ 爲格林威基之子午線，$NBS$ 爲波士頓之子午線，而 $NCS$ 爲開普敦 (Cape Town) 之子午線.

一地之緯度 (latitude) 爲由赤道至該地之子午線之弧. 緯度由赤道向北或向南度之各由 0° 至 90°. 如，在圖內，弧 $LB$ 度波士頓之北緯度，而弧 $TC$ 度開普敦之南緯度.

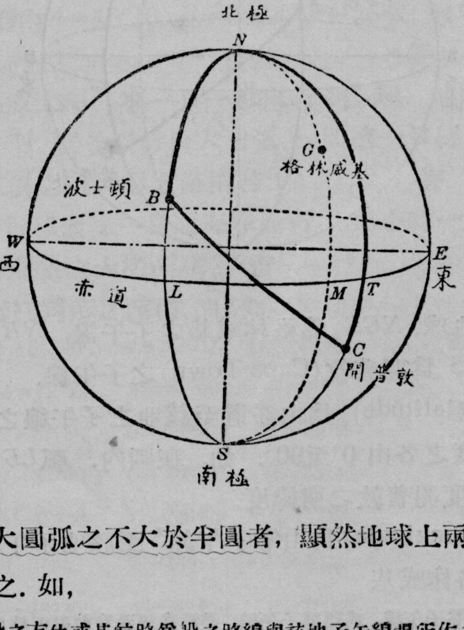
一地之經度 (longitude) 爲由零子午線* 至該地子午線間之赤道弧線. 經度乃由格林威基

* 如於此款，其零子午線，或標準子午線 通常爲經過倫敦附近格林威基之子午線.華盛頓與巴黎子午線亦用作標準子午線

子午線向東或向西由 0°度至 180°. 如，於圖內，弧$MT$度開普敦之東經度，而弧$ML$度波士頓之西經度. 因弧$MT$及$ML$分別爲角$MNT$及$MNL$之度量，顯然亦可介說一地之經度爲標準子午線及該地子午線間之角. 如，於圖內，角$MNT$爲開普敦之東經度，而角$MNL$爲波士頓之西經度.

由第一地方至第二地方之方位 (bearing) 爲由第一地方至第二地方之大圓弧，與第一地方之子午線間所成之角，如，於圖內，由波士頓至開普敦之方位以角$CBN$或角$CBL$度之，而由開普敦至波士頓之方位則以角$NCB$或角$SCB$* 度之.

**25.** 地球表面上兩點間之距離. 因由幾何學知球面上任意兩點間最短之距離爲




聯其兩點間之大圓弧之不大於半圓者，顯然地球上兩地間最短之距離亦以此法量之. 如，

* 在任意點一船之方位或其航路爲船之路線與該地子午線間所作之角

於圖內，波士頓與開普敦間之距離以大圓弧$BC$度之，今察此$BC$弧爲球面三角形之一邊而其他兩邊爲弧$BN$與$CN$. 因

弧$BN$ $=90°-$弧$LB=90°-$波士頓之北緯度,

弧$CN$ $=90°+$弧$TC=90°+$開普敦之南緯度,

而角$BNC$ $=$角$MNL+$角$MNT$

$=$波士頓之西經度

$+$開普敦之東經度

$=$波士頓與開普頓之經度差,

顯然若知波士頓及開普敦之緯度及經度，則有決定三角形$BNC$之兩邊及夾角之必要的已知件. 其第三邊 $BC$，爲波士頓及開普敦間最短之距離可如款 II，(a)，頁27之法以求之.

此後北緯度將附以符號$+$而南緯度則將附以符號$-$.

已知地球上兩點之緯度與經度求其兩點間最短之距離及彼此互成之方位之定則

第一步. 自90° 減去各地之緯度.* 其得數即爲球面三角形之二邊.

第二步. 設兩地皆爲東經或皆爲西經時則自較大經度減其較小經度而求其經度差，但設一爲東經一爲西經時則加之. 由此則得三角形之夾角†.

第三步. 用款 II，(a)，頁27以解三角形，則由第三邊即得出兩點間最短之距離表示其弧之度，‡ 而其兩角表示方位.

* 注意此爲代數的減法 如，兩緯度爲 25° $N$. 及24°$S$.，則將得三角形之二邊.

$$90°-25°=65° \text{ 及 } 90°-(-42°)=90°+42°=132°$$

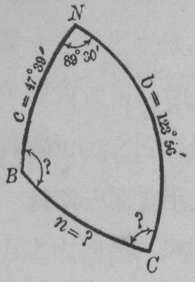
† 設求得之經度差大於 180°，則當由 360° 減之，用其餘數以爲夾角.

‡ 此弧之分數卽爲兩地鉅離之地理(海)里. 兩地距離表爲法定英里則由下公式求之

$$L=\frac{3\cdot 1416\times 3960\times N}{180}$$

其$N=$弧所含之度數.

例1．求地球表面上波士頓（緯度．42°21′N.，經度．71°4′W.）與開普敦（緯．33°56′S.，經18°26′E.）間最短之距離，及兩城互成之方位．




解．作一球面三角形與頁40相合．

第一步．

$c=90°-42°21'=47°39'$,

$b=90°-(-33°56')=123°56'$,

第二步．

$N=71°4'+18°26'=89°30'=$經度差．

第三步．用款II，(a)，頁27以解三角形，得

$n=68°14'=68\cdot23°=4094$海里，

$C=52°43'$,

而　$B=116°43'$.

故一船由波士頓向開普敦航行於一大圓上由波士頓出發其航路爲S.63°17′E．而漸近於開普敦時則其航路爲S.52°43′E.*

例　題

1．求巴特模（緯.39°17′N.，經.76°37′W.）與開普敦（緯.33°56′S.，經.18°26′E.）間最短之距離，及兩地互成之方位．

答．距離＝180°－65°48′＝6852海里，
S.64°58′E＝由開普敦至巴特模之方位，
N.57°42′W.＝由巴特模至開普敦之方位，

2．自紐約（緯.40°43′N.，經.74°W.）至利物浦（緯.53°24′N.，經.3°4′W.）之距離爲何？每地至他地之方位角爲何？一汽船自紐約至利物浦駛行於大圓上交50°W．之子午線於何緯度？其在該點之航路之方向爲何？

答．距離＝47°50′＝2870海里
N.75°7′W.＝由紐約至利物浦之方位，
N.49°29′E.＝由利物浦至紐約之方位．
緯度51°13′N.，航路N.66°54′E.

3．求下列地方間最短之距離爲地理里：

(a)紐約（緯.40°43′N.，經.74°W.）及舊金山（緯.37°48′N.，經122°28′W.）　答．2230.

(b)三地胡克（緯.40°28′N.，經74°1′W.）及馬地拉（緯.32°48′N.，經16°55′W.）．　答．2749.

(c)舊金山（緯.37°48′N.，經122°28′W.）及巴達維亞（緯.6°9′S.，經106°53′E.）．　答，7516.

(d)舊金山（緯.37°48′N.，經122°28′W.）及瓦巴瑞蘇（緯33°2′S.，經71°41′W.）．　答．5109.

* 一船駛行於大圓上（除却赤道與子午線）必繼續變更其航路，於上例設船保持航路S63°17′E則永不能到達開普敦．

4. 求波士頓(緯.42°21′N.,經71°4′W.)與格林維基(緯.51°29′N.)間之最短距離爲法定英里(取地球直徑爲7912哩),並兩地互成之方位角. 答. 距離=3275哩,

N.53°7′E.=格林威基至波士頓之方位角,

N.71°39′W.=波士頓至格林威基之方位角.

5. 如上題所示,求加爾各答(.緯22°33′N.,經88°19′E.)及瓦巴瑞蘇(緯.33°2′S.,經71°42′W.).間之最短距離並兩地互成之方位角,

答. 距離=11,012·5哩,

S.64°20·5′E=加爾各答至瓦巴瑞蘇之方位角,

S.54°54·5′W.=瓦巴瑞蘇至加爾各答之方位角.

6. 求奧柏林(經82°14′W.)至新海溫(經72°55′W.)間之最短距離爲法定英里,兩地之緯度爲41°17′N. 答. 483·3哩

7. 一點之緯度爲17°N.而經度爲130°W. 一船自該點航行長度爲4150法定英里之大圓弧,依S.54°20′W.方向出發,求該到達地點之經緯度,設1°之長爲69 $\frac{1}{6}$ 哩. 答. 緯19°42′S.,經178°21′W.

**26.** 天文問題. 球面三角法最要之用途即應用於天文學. 實際,三角法乃先由天文家所推進,數百年間皆僅與天文學聯合研究. 今將研究天文學上少許簡單問題.

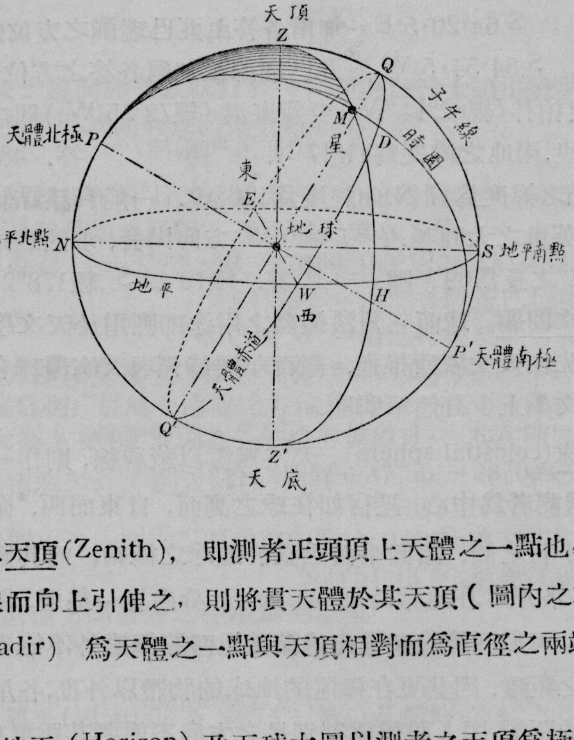
**27.** 天球(celestial sphere). 天空無雲以蔽視線,則作一大半球狀穹窿,以觀測者爲中心. 星宿如在球之裏面,自東而西,*徐徐滑動,其路線爲平行之圓,諸圓平面垂直於地球之極軸,而其圓心在軸之引長線上,各星† 在通常時刻 23 時 56 分內旋一整週,稱爲其日動(daily motion). 吾等除想像此球面確距吾等極遠外不能更進而估計其與吾等之距離,因其更在極遠的地球的物體以外也,各星對於測者如在一致的距離,因人眼僅能判別星之方向不能判其距離也. 故依數學的觀點,視諸天體所懸綴之假球有一無限長之半徑,甚爲自然且極便利. 此球稱爲天球(celestial sphere),

* 天空之此種自東而西的明白轉動,實因地球旋轉於反對方向,恰如一人坐於快車之內其車外物體如在旁行動,而車反如靜止也 天實不動,而地球則自西而東旋轉.

† 星即指恆星及一定星雲其相關位置變動極小,數百年間始感覺其變化.

看作其有如此一致之比例，使全太陽系（太陽，地，及行星）在其中心，如幾個塵點之在大輕氣球之中心也，恆星彼此相關之位置一若不變，在此方面有如地球表面上諸地點之位置不變．因自地球觀測，日，月，行星，及彗星亦懸綴於天體．但對於恆星，則此諸星顯然時刻變動其位置，彼此互相之位置亦變，如，太陽對於恆星，顯然向東移動，約每日一度，而月則約移動十三倍遠．

下圖表示天球，以地球爲球心，僅表爲一點，




觀測者之天頂(Zenith)，即測者正頭頂上天體之一點也，測者如持一鉛直線而向上引伸之，則將貫天體於其天頂（圖內之Z），

天底（Nadir）爲天體之一點與天頂相對而爲直徑之兩端（圖內之 $Z'$）．

觀測者之地平（Horizon）乃天球大圓以測者之天頂爲極者也；故地平（圖內之 $SWNE$）上之各點距天頂與天底皆爲90°．在觀測者所在地靜止水面之一切面*將交天體於其地平．

* 因距離太大，在測者所在地與球相切之平面將交天球於一大圓．此圓（如吾等所研究者），與觀測者之地平相合．

地球表面上各點皆有不同之天頂及地平.

凡過天頂之大圓皆垂直於地平；此等圓稱爲垂直圓 (vertical circles) (如圖內之$ZMHZ'$及$ZQSP'Z'$).

天體赤道 (celestial equator or equinoctial) 爲地球赤道平面交天球之大圓(圖內之$EQWQ'$).

天體赤道之兩極(poles)爲地軸引伸之後能貫天球之點(圖內之$P$與$P'$). 兩極又可介說爲天空兩點各該點有一恆星時則該星將無日動. 極星(Pole Star)近於天體北極，相距約爲$1\frac{1}{4}°$. 凡天體赤道上之點距各天體赤道之極皆爲90°.

地球表面上各點有相同之天體赤道與兩極.

地球上某地之地學子午線介說爲通過該地及北極南極之地球大圓. 地球上某地之天體子午線 (celestial meridian) 爲該地之地學子午線平面交天球之大圓(圖內之$ZQSP'Z'Q'NP$).故天體子午線顯然爲觀測者所在地之垂直圓，經過測者地平之南北兩點，地球上所有各點不在一條南北線上者則有不同之天體子午線.

某天體之時圓 (hour circle)即經過該天體 * 及天球南北極所作之天球上之大圓，在圖內$PMDP'$爲星$M$之時圓，各天體之時圓對於一觀測者繼續變化.

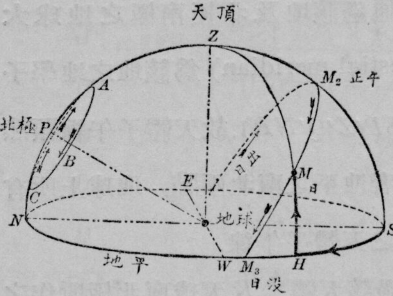
以北極，天頂，及一天體爲頂點之球面三角形$PZM$，爲天文學內最重要之三角形. 稱爲天文三角形(astronomical triangle).

28. 球面坐標 (Spherical coördinates). 於學習如何作一函數之圖時，學者已學得如何自互爲垂直之二定直線之稱爲坐標軸者度量距離以定平面內一點之位置，其二距離稱爲該點之直交坐標.

* 此意卽謂時圓過天球上該點. 此點卽吾人所見某天體之投影也.

設視表面爲球面以代平面，則在其面上定位諸點有一相似法則可以應用，擇二互爲垂直二定大圓爲參考圓，一點與此二參考圓之角距(angular distance)用爲此點之球面坐標．因參考圓互爲垂直，則每圓通過他圓之兩極．

在研究地理時學者已用似此之法則在地球表面以定點位，因地球上一點之緯度與經度實即此點之球面坐標，二參考圓即赤道與零度子午線也(通常爲格林威基子午線)．如，於39頁之圖，可視波士頓之球面坐標爲弧$ML$(西經)及弧$LB$(北緯)；而在開普敦則球面坐標將爲弧$MT$(東經)及弧$TC$(南緯)，同理，有球面坐標之法則以決定天球上一點之位置，今將作更重要之研究．




**29. 用地平與子午線爲參考圓** (The horizon and meridian system)．在此款內其互爲垂直二定參考大圓爲測者所在之地平($SHWNE$)及其子午線($SM_2ZPN$)而一星之球面坐標爲其高度(altitude)與地平經度(azimuth)．

一星之高度(altitude)爲其在地平以上之角距在一垂直圓上度之，由0°至90°.*如太陽$M$之高度爲弧$HM$．一星與天頂之距離稱爲天頂距(zenith distance)(圖內之$ZM$)，顯然爲其高之餘弧，天頂之高度爲90°．在日出或日入時太陽之高度爲零．

一星之地平經度(azimuth)爲該星之垂直圓與測者與子午線間之角，此角通常在地平上度之由南點．

* 在海上通常以六分儀量之．而在陸上則用測量經緯儀．

向西至星體垂直大圓*之足，如太陽 $M$ 之地平經度爲角 $SZH$，用弧 $SH$ 量之．而其在正午之地平經度爲零，在中夜之地平經度則爲 $180°$．在測者正西一星之地平經度爲 $90°$，在正北者爲 $180°$，在正東者爲 $270°$．

已知一星之地平經度與高度(球面坐標)，則能在天球上定其位置如下．由地平南點，如 $S$(可視爲坐標原點，因其爲二參考圓之交點也)，截地平經度，如 $SH$．然後在過 $H$ 之垂直圓截高度，如 $HM$．則星之位置即定於 $M$．

例題 1．於下各題內作一天球之圖並由已知之球面坐標以定星體之位置．

| | 地平經度 | 高度 | | 地平經度 | 高度 |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 45° | 45° | (j) | 0° | 0° |
| (b) | 60° | 30° | (k) | 180° | 0° |
| (c) | 90° | 60° | (l) | 0° | 90° |
| (d) | 120° | 75° | (m) | 90° | 0° |
| (e) | 180° | 55° | (n) | 270° | 0° |
| (f) | 225° | 0° | (o) | 360° | 0° |
| (g) | 300° | 60° | (p) | 330° | 45° |
| (h) | 315° | 15° | (q) | 75° | 75° |
| (i) | 178° | 82° | (r) | 90° | 90° |

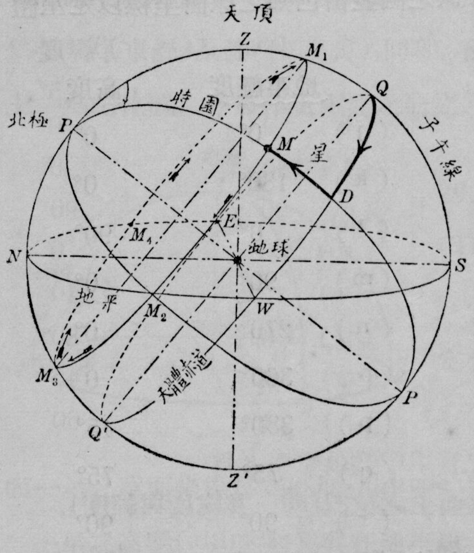
因在通常情形地球上任意兩地有不同之子午線與不同之地平，顯然此球面坐標之法則純爲地方的，太陽在東方地平之 $M_1$(高度爲零)升起，在天空逐漸升高，運行於平行天體赤道之圓($M_1M_2M_3$)，直到測者所在之子午線 $M_2$(正午，其高度爲極大)，然後下落至 $M_3$ 而沒於地平西方．

同理，於任何星體時亦然，皆繼續變化其高度與地平經度．對於一測者其天頂已示於圖內，在北方天空近北極之星永不沈沒，對於同一測者其近於南極之星永不上升，設其一日之經路繪於天球，則將爲一圓(如 $ABC$)圓心在其極軸上而在平行於赤道之平面上．

* 卽，地平經度按鐘針方向自 0° 至 360° 度之．

**30.** 用赤道與子午線爲參考圓(The equator and meridian system)在此款內其互爲垂直二定參考大圓爲天體赤道($EQDWQ'$)及測者子午線($NPZQSP'Z'Q'$);而一星之球面坐標爲其赤緯度(declination)及時角(hour angle).

一星之赤緯度(declination)爲其在天體赤道以北或南之角距在星之時圈上度之自0°至90°.*如,於圖內,弧$DM$爲星$M$之北赤緯度,北赤緯度常視爲正而南赤緯度則視爲負.故北極之赤緯度爲+90°,而南極之赤緯度爲-90°.




日,月,及行星之赤緯度繼續變化,但一定恒星在經年之中其赤緯度之變化至微,一星至天體北極之角距,在其時圈上度之者,稱爲該星之北極距(圖內之$PM$).一星之北極距顯然爲其赤緯度之餘弧.

一星之時角(hour angle)爲觀測者所在之子午線與星之時圈間之角由子午線向西度之自0°至360°.如,在圖內,星$M$之時角爲角$QPD$(以弧$QD$度之).此角普通用作時間之量度,故稱爲時角.如星$M$在二十四小時旋一整週;即,時角$QPD$繼續增加其等速度爲24小時內增加360°,或每小時增加15°.因此之故一星之時角通常計爲小時由0至24,因其一小

* 日,月,行星,及若干恆星在一年內任何時之赤緯度,常於美政府出版之航海通書(Nautical almanac)或美國歷表(American Ephemeris)中給出之.

時等於15°也*. 當星在$M_1$時(在觀測者所在子午線上)其時角爲零. 於是時角增加直到變爲角$M_1PM$(其時星在$M$). 當星沒於西方地平時其時角變爲$M_1PM_2$. 星在$M_1$以後十二小時則將在$M_3$, 其時之時角爲180°(=12時), 繼續在其輪道上, 星出於$M_4$而最後至$M_1$, 其時角變爲360°(=24小時), 或復爲0.°

知一星之時角於赤緯度(球面坐標), 吾人可在天球上定其星之位置如下. 自參考圓之交點$Q$, 截取時角(或弧)如$QD$. 然後在過$D$之時圓上截赤緯度, 如$DM$. 則星即在$M$.

例題 1. 在下列各題內作一天球之圖然後由已知之球面坐標, 定星之位置,

| | 時角 | 赤緯度 | | 時角 | 赤緯度 |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 45° | N. 30° | (j) | 60° | S. 45° |
| (b) | 60° | N. 60° | (k) | 0° | 0° |
| (c) | 90° | S. 45° | (l) | 180° | 0° |
| (d) | 120° | S. 30° | (m) | 90° | N. 90° |
| (e) | 180° | N. 50° | (n) | 270° | 0° |
| (f) | 5時 | N. 75° | (o) | 12時 | S. 10° |
| (g) | 15時 | − 25° | (p) | 3時 | + 80° |
| (h) | 6時 | + 79° | (q) | 9時 | − 45° |
| (i) | 0時 | − 90° | (r) | 20時 | + 60° |

**31.** 實際應用. 在天文學之實用中其最重要者爲:

(a) 決定一觀測者在地球表面上之位置(即, 其緯度與經度).

(b) 決定地球上一地之子午線.

(c) 確定測者所在地一日之正確時刻.

(d) 決定一星之位置.

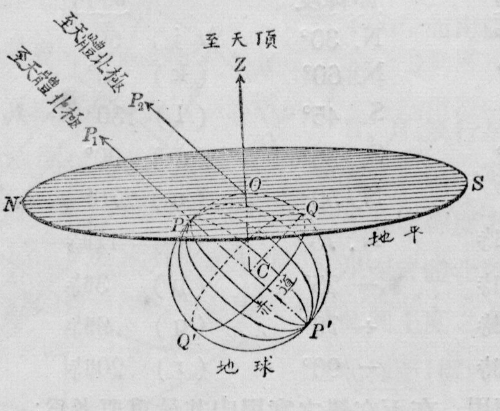
此中之第一項, 當用以決定一船在海面之地位時, 乃大都屬於天文學之關於經濟的重要問題.

---

* 因地球之繞日年年運行, 太陽旋一輪週較任何特別恒星約多需 4 分. 故太陽日較恒星日(sidereal day)約長 4 分, 但各種皆分爲 24 小時, 第一種得出尋常之鐘錶時, 而第二種得出恆星時, 多用於天文學, 當稱太陽的時角時卽默喻其以尋常之鐘錶時度之, 若說爲恆星的時角時則以恆星時度之, 無論何款, 1時=15°.

各大國之國立觀象台業經設立，逐年航海通書亦在印行以管理世界貿易，因其能供給航海者以必要的材料而用以精密迅速決定其地位也，

**32. 測者緯度與天體極高(altitude of celestial pole)之關係.** 對於在地球赤道上之觀測者(緯度爲零)極星在地平，即，星高爲零．設測者北行，則極星漸升，即，測者緯度與星高皆增，最後，當測者到地球北極時則緯度與星高皆增至90°．於是天空極之位置若依屬於測者緯度然，今將證天體之極之高度等於測者所在之緯度者然，今

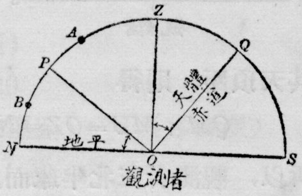



將證天體之極之高度等於測者所在之緯度.

設 $O$ 爲測地，如爲北半球某地；則角 $QCO$ (或弧 $QO$) 度其北緯度．引長地軸 $CP$ 直至貫天球於天體北極，自 $O$ 作一線與天體北極同方向(如 $OP_2$) 則將平行於 $CP_1$，因天體北極距地球無限遠(閱43頁，§27)．角 $NOP_2$ 度北極之高．但 $CO$ 垂直於 $ON$ 而 $CQ$ 垂直於 $OP_2$ (因其垂直於平行線 $CP_1$)；故角 $NOP_2$ 與角 $QCO$ 相等，而知在 $O$ 所測之極之高度等於 $O$ 之緯度.

**33. 決定地球上一地之緯度.** 設將天球在地平上之部分投影於測者所在之天體子午線.

平面上，則地平將投影爲一直線（如 $NS$），而天體赤道之上半部亦將投影爲一直線（如 $OQ$）．由上節知測者之緯度等於上面天體之極之高度（圖內之弧 $NP$），或，易詞言之，等於天頂與天體赤道（圖內之弧 $ZQ$）間之角距．設高處之極能以望見如天空之一定點，則觀測者所在地之緯度僅由度該極在地平上之角距即能求得．但並無能以望見之恒星恰在極軸貫天球之處，所謂爲極星也者其距天體北極約爲 $1\frac{1}{4}°$．以下爲決定地球上一地之緯度之若干方法，




第一法．由觀測位近地極之恒星 (circumpolar stars) 以決定緯度最明顯之法即爲用適當之儀器觀測接近地極某星之高度（如此接近地極，即此星永不沈沒；例如，恒星在天空之經路表爲圓 $ABC$，頁 46 之圖）而在當該星越過極上之子午線時的一刻測其高，又在 12 小時以後，該星復在子午線上而在極下時測之．在第一次其仰角爲最大；第二次則爲最小．兩次測驗高度之平均數顯然爲測者所在地之緯度．如，在此頁內之圖，設 $NA$ 爲星極大之高度而 $NB$ 爲極小之高度，則

$$\frac{NA+NB}{2}=NP=\text{極之高度}$$

$$=\text{觀測地之高度}.$$

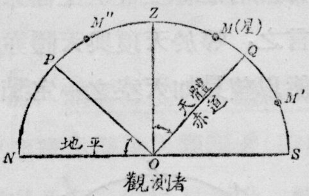
例 1．今測得近於極星一星之極大高度爲 $54°\ 16'$；而12時後其最小高度爲 $40°\ 24'$．其觀測地之緯度若何?

解．
$$54°16'+40°\ 24'=94°40'.$$

所以
$$\frac{94°\ 40'}{2}=47°20'=\text{北極之高度}$$

$$=\text{觀測地之北緯度}.$$

第二法．已知一天體之赤緯度由其子午線之高度以決定緯度．當一星 $M$ 在測者子午線時度出其高度．設由 90° 減此子午線之高度（圖內弧 $SM$），則得星之天頂距（$ZM$），在航海通書內即時可尋得此星之赤緯度；斯得弧 $QM$．加星之赤緯度於其天頂距，則得




$$QM+MZ=QZ=NP=\text{極之高}=\text{該地之緯度}.$$

所以，觀測者在北半球而星在子午線上在天頂之南時．

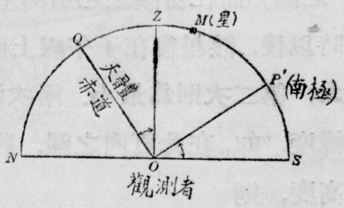
$$\text{北緯度}=\text{天頂距}+\text{赤緯度}.^{*}$$

設星在子午線上而在天頂與極之間（如在 $M''$†），則得

$$\text{北緯度}=NP=ZQ=QM''-ZM''$$

$$=\text{赤緯度}-\text{天頂距}.$$

設觀測者在南半球而星 $M$ 在其子午線上在天頂與南極之間，則將得




$$\text{南緯度}=SP'$$

$$=SM-MP'$$

$$=SM-(90°-QM)$$

$$=\text{高度}-\text{餘赤緯度}\ (\text{co-declination}),$$

設僅視其赤緯度之數值．

於作例題時學者當依圖而作較試記公式以該括各種款目者爲妥．

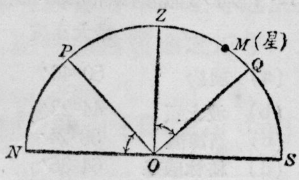
例 2．一觀測者在北半球當一星越過其天頂南之天體子午線之頃而測其高度．知其爲 63° 40′．同時星之赤緯度在航海通書內檢得爲 21°15′N．問測者之緯度爲何?

---

* 設星在天體赤道之南（如在 $M'$），此規則同樣成立，因如此則赤緯度爲負（南），而天頂距與赤緯度之代數和仍得出弧 $QZ$．

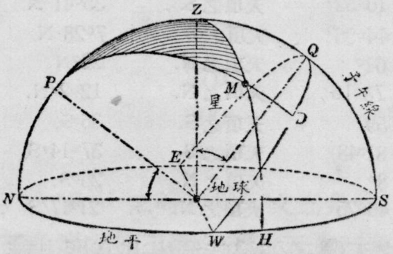
† 如爲一位近地極之星，則爲極大高度

解. 作半圓 $NZSO$. 截弧 $SM$＝高度＝63°40′, 定星之位置於$M$. 因星之赤緯度爲北緯, 則天體赤道可由向南截弧 $MQ$＝赤緯度＝21°15′ 以定其位置. 於是線 $QO$ 爲天體赤道之投影, 而垂直於 $QO$ 所作之直線 $OP$, 將定北極 $P$ 之位置.




$$天頂距＝ZM＝90°－SM(高)$$
$$＝90°－63°40′＝26°20′.$$
$$\therefore 測者之北緯度＝NP＝ZQ＝ZM(天頂距)＋MQ(赤緯度)$$
$$＝26°20′＋21°15′＝47°35′.$$

第三法. 當一天體之高度. 赤緯度, 及時角爲已知時, 以決定其緯度. 參考天文（球面）三角形 $PZM$, 知邊$MZ$




$$＝90°－HM(高)$$
$$＝餘高度 (co-altitude),$$

星之高度由度量法以求得之. 又邊 $PM＝90°－DM$(赤緯度)

$$＝餘赤緯度,$$

其星之赤緯度由航海通書以求得之.

角 $ZPM$＝時角, 爲已知. 若觀測太陽時, 則此時角爲地方時. 於是在球面三角形 $PZM$內有兩邊及對其一邊之角爲已知. 用頁 32, 款 III, (a) 解之而求邊 $PZ$, 得

$$測者之緯度＝NP＝90°－PZ.$$

例 3. 一星之赤緯度爲 69°42′N. 而其時角爲 60°44′. 設測知星高爲 49°40′, 問該地之北緯度爲何?

解. 參閱上圖, 在此題內, 得,

邊 $MZ$＝餘高度＝90°－49°40′＝40°20′,

邊 $PM$＝餘赤緯度＝90°－69°42′＝20°18′,

角 $ZPM$＝時角＝60°44′.

用頁 32, 款 III, (a) 解之而求邊 $PZ$, 得邊 $PZ$＝47°9′＝餘緯度.

$\therefore$ 90°－47°9′＝42°51′＝該地之北緯度.

角 $MZP$ 求得爲 27°53′; 故星之地平經度 (角 $SZH$) 爲 180°－27°53′＝152°7′.

## 例題

1. 下列乃觀測某位近北極之星而得之高度. 問各地之緯度爲何?

| | | 最大高度 | 最小高度 | | 北緯度 |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 紐約 | 50°46′ | 30°40′ | 答. | 40°43′ |
| (b) | 波士頓 | 44°22′ | 40°20′ | | 42°21′ |
| (c) | 新海溫 | 58°24′ | 24°10′ | | 41°17′ |
| (d) | 格林威基 | 64°36′ | 38°22′ | | 51°29′ |
| (e) | 舊金山 | 55°6′ | 20°30′ | | 37°48′ |
| (f) | 加爾各答 | 24°18′ | 20°48′ | | 22°33′ |

2. 在下列題內當某星體越過測者所在之天體子午線之頂測出其高度. 問各題內測者之緯度爲何? 其赤緯度乃由航海通書內查出.

| | 半求 | 子午線高 | 赤緯度 | 星在 | | 緯度 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 北 | 60° | N. 20° | 天頂之S. | 答. | 50°N. |
| (b) | 北 | 75°40′ | N. 32°13′ | 天頂之S. | | 46°33N. |
| (c) | 北 | 43°27′ | S 10°52′ | 天頂之S. | | 35°41′N. |
| (d) | 北 | 38°6′ | S. 44°26′ | 天頂之S. | | 7°28′N. |
| (e) | 北 | 50° | N. 62° | 天頂之N. | | 22°N. |
| (f) | 北 | 28°46′ | N. 73°16′ | 天頂之N. | | 12°2′N. |
| (g) | 南 | 67° | S. 59° | 天頂之S. | | 36°S. |
| (h) | 南 | 45°26 | S. 81°48′ | 天頂之S. | | 37°14′S. |
| (i) | 南 | 72° | S. 8° | 天頂之N. | | 26°S. |
| (j) | 南 | 22°18′ | N. 46°25′ | 天頂之N. | | 21°17′S. |

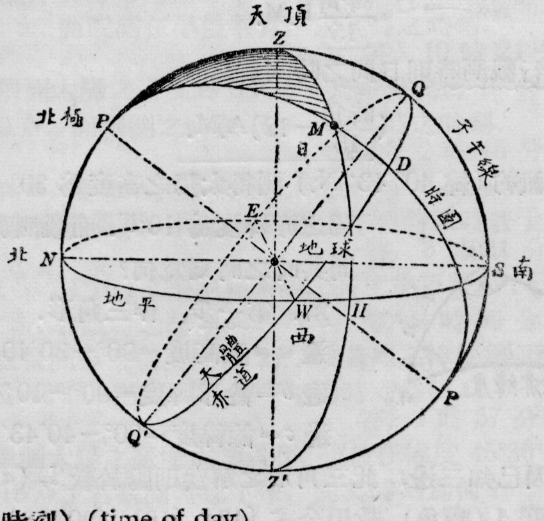
3. 在下例題內當某星體不在測者之天體子午線時測出其高度. 該時之時角及赤緯度爲已知. 求各題內測者之緯度.

| | 半球 | 高度 | 赤緯度 | 時角 | | 緯度 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 北 | 40° | N. 10° | 50° | 答. | 27°2′N. |
| (b) | 北 | 15° | S. 8° | 65° | | 35°38′N. |
| (c) | 北 | 52° | N. 19° | 2 小時 | | 48°16′N. |
| (d) | 北 | 64°42′ | N. 24°20′ | 345° | | 3°34′N. |
| | | | | | 或. | 46°46′N. |
| (e) | 北 | 0° | S. 5° | 5 小時 | | 71°22′N. |
| (f) | 北 | 25° | 0° | 21 小時 | | 53°18′N. |
| (g) | 北 | 0° | N. 11°14′ | 68°54′ | | 無解 |
| (h) | 北 | 9°26′ | 0° | 71°22′ | | 57°14′N. |
| (i) | 南 | 38° | S. 12° | 52° | | 33°56′S. |
| | | | | | 或 | 4°8′S. |
| (j) | 南 | 19° | N. 7° | 3 小時 | | 52°56′S. |
| (k) | 南 | 49°18′ | S. 15°23′ | 326° | | 49°14 S. |
| (l) | 南 | 0° | N. 14° | 38° | | 72°26′S. |
| (m) | 南 | 57°36′. | 0° | 2 小時 | | 12°50′S. |

**34.** 決定日間之時刻．(time of day) 太陽之時角與任何地方日間之時刻其間有一甚簡單之關係．太陽顯然各以每時 15° 之等速度由東向西運行，當太陽在一地之子午線時，顯然即爲該地之正午．比較，

| 太陽之時角 | 日間之時刻 (Time of day) |
|---|---|
| 0° | 正午 |
| 15° | 1 P.M. |
| 30° | 2 P.M. |
| 45° | 3 P.M. |
| 90° | 6 P.M. |
| 180° | 中夜 |
| 195° | 1 A.M. |
| 210° | 2 A.M. |
| 270° | 6 A.M. |
| 300° | 8 A.M. |
| 360° | 正午 |

太陽 $M$ 之時角爲天文三角形(球面) $PZM$ 內在 $P$ 頂之角．設知三角形之他三部分解此天文三角形而求其 $P$ 頂之角，可求出此時




角 (日間之時刻) (time of day).

$DM$＝太陽之赤緯度，可由航海通書內得之.

∴ 邊 $PM=90°-DM$＝太陽之餘赤緯度.

$HM$＝太陽之高度，可用六分儀或經緯儀測其在地平上之角距以得之.

∴ 邊 $ZM=90°-HM$＝太陽之餘高度.

$NP$＝天體極之高度

＝測者之緯度（頁 51）.

∴ 邊 $PZ=90°-NP$＝測者之餘緯度.

故得

已知一地之緯度．若太陽在該時該地之赤緯度與高度為已知時，決定該地日間之時刻之規則.

第一步．取球面三角形之三邊如下

太陽之餘高度，

太陽之餘赤緯度，

該地之餘緯度.

第二步：解此球面三角形而求其對第一邊之角．則得太陽之時角表為度數，設於午後舉行觀測．設於午前舉行觀測，則時角將為 360°－求得之角.

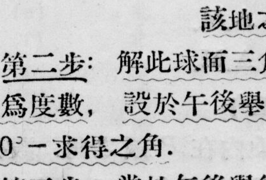
第三步．當於午後舉行觀測時則日間之時刻將為

$$\frac{時角}{15}\text{P.M.}$$

當於午前舉行觀測時則日間之時刻將為

$$\left(\frac{時角}{15}-12\right)\text{A.M.}$$

例 1. 在紐約（緯 40° 43′ N.）測得太陽之高度為 30° 40′ 給出太陽之赤緯度為 10°N. 而觀測於午後舉行，問其時之時刻為何？




解．第一步．作三角形.

邊 $a$＝餘高度＝$90°-30°40'=59°20'$.

邊 $b$＝餘赤緯度＝$90°-10°=80°$.

邊 $c$＝餘緯度＝$90°-40°43'=49°17'$.

第二步．因已知三邊，此三角形之解法則歸於款 I, ($a$)，頁 25.

但吾人僅求角 $A$（時角），故用公式 (18)，(19)，(20)．頁 19，

及頁 20, 其中之一公式即可省許多辛勞. 今用公式 (18),

$$a=59°20'$$
$$b=80°$$
$$c=49°17'$$
$$2s=188°37'$$
$$s=94°19'$$
$$s-a=34°59'.$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},$$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\tfrac{1}{2}[\log\sin s+\log\sin(s-a)-\{\log\sin b+\log\sin c\}]$$

$\log\sin s=9.9988$

$\log\sin(s-a)=9.7584$

分子之對數 $=19.7572$

分母之對數 $=19.8731$

$9.8841$

$2\,|\,19.8841$

$\log\sin\tfrac{1}{2}\alpha=9.9421$

$\tfrac{1}{2}\alpha=61°4'.$

$\alpha=122°8'.$

$\log\sin b=9.9934$

$\log\sin c=9.8797$

分母之對數 $=19.8731$

$\therefore A=180°-\alpha=57°52'=$太陽之時角.

第三步. 日間之時刻 $=\dfrac{\text{時角}}{15}$ P.M. $=3$ 時 51 分 P.M. 答.

## 例　　題

1. 在米蘭 (Milan 緯 45°30′N.) 午後觀測太陽之高度為 26°30′. 太陽之赤緯度為 8°S., 問其時之時刻為何? 答. 2 時 33 分 P.M.

2. 在紐約 (緯 40°43′N.) 午前觀測太陽得其高度為 30°40′. 其太陽之赤緯度為 10°S. 問其時之時刻為何? 答. 9 時 46 分 A.M.

3. 一航海人測得太陽之高度為 60°, 在觀測時其赤緯度為 6°N. 設船之緯度為 12°S., 而觀測在早晨舉行, 求其時之時刻.
答. 10 時 24 分 A.M.

4. 一航海家觀測太陽之高度為 35°23′, 其赤緯度為 10°48′S. 設船之緯度為 26°13′N., 而觀測之時在下午, 求其時之時刻.
答. 2 時 45 分 P.M.

5. 在緯度 40° N. 之某地測將太陽之高度為 41°. 設觀測時之赤緯度為 20°N., 而在清晨觀測, 問太陽到達子午線時需時若干?
答. 3 時 31 分.

6. 在倫敦(緯 51°31′N.)下午觀測太陽之高度為 15°40′. 已知太陽之赤緯度為 12°S., 求該時之時刻. 答. 2 時 59 分 P.M.

7. 一政府測量員測得太陽高度為 21°. 設其地之緯度為 27° N. 而太陽之赤緯度為 16°N., 若觀測時在下午問時刻為何?
答. 4 時 57 分 P.M.

8. 輪船船長觀測太陽之高度為 26°30′. 設彼在緯度 45°30′N. 而太陽之赤緯度為 18°N., 若觀測時在下午, 問其時刻為何?
答. 4 時 41 分 P.M.

**35.** 求日出或日沒之時刻．設一地之緯度及太陽之赤緯度爲已知，則得前題之一特例；因在日出與日沒時太陽在地平而其高度爲零也．故天文三角形之一邊，即餘高度，將爲 90°，而此三角形爲一象限三角形（頁 12）．於是此三角形可用上節之方法或作爲一象限三角形以解之．

例　題

1. 太陽設於孟椎耳（Montreal 緯 45°30′N.）在何時刻，設日落時之赤緯度爲 18°N.？　答．7 時 17 分 P.M.

2. 太陽出於巴拿馬（緯 8° 57′ N.）在何時刻，設日出時之赤緯度爲 23°2′S.？　答．6 時 15 分 A.M.

3. 大約每年四月一日太陽之赤緯度爲 4°30′N. 求下列各地日出之時刻其已知件如下：

(a) 紐約（緯 40°43′N.）．　答．5 時 45 分 A.M.

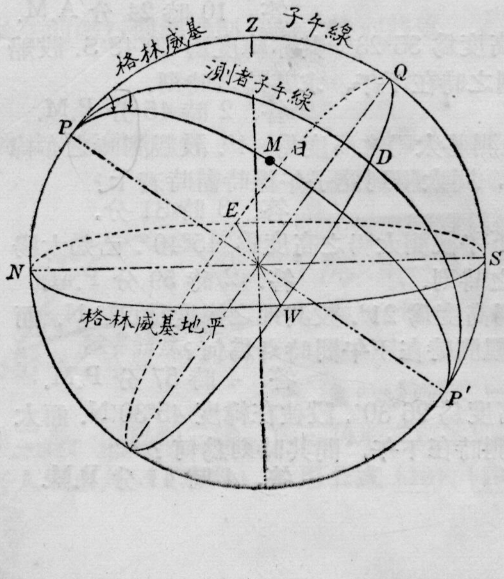
(b) 倫敦（緯 51°31′N.）．　5 時 37 分 A.M.

(c) 聖彼得堡（緯 60°N.）．　5 時 29 分 A.M.

(d) 新奧連司（New Orleans 緯 29°58′N.）．　5 時 50 分 A.M.

(e) 席德尼（Sydney 緯 33°52′S.）．　6 時 12 分 A.M.

**36.** 決定地球上一地之經度．由頁 39 地球經度之定義顯然知地球之子午線投影於天球爲時圓．故度觀測地之天體子午線（時圓）及格林威基天體子午線間之角（或弧）可取作該地經度之度量．如，於圖內，設 $PQP'$ 爲格林威基子午線（時圓）而 $PDP'$ 爲觀測地子午線（時圓），則角 $QPD$（或弧 $QD$）度該地之西經度．設 $PMP'$ 爲太陽之時圓，顯然



角 $QPM$ = 格林威基太陽之時角

= 格林威基之地方時;

角 $DPM$ = 觀測者太陽之時角

= 觀測地之地方時.

又, 角 $QPM$ − 角 $DPM$ = 角 $QPD$ = 地方之經度.

故觀測地之經度等於標準子午線及題內地方兩地方時之差* 或者, 普通有下列:

求經度之規則: 觀測者之經度即爲在格林威基之正午早於或晚於觀測地之正午之總量也, 設格林威基之時間早, 則觀測者爲東經度; 設晚, 則爲西經度.

前已說明(頁56)觀測者如何可求得其所在地之地方時, 今仍須決定格林威基之地方時而不必前往該地以實測之, 下二法普通常用.

第一法, 用電報(有線或無線)以求格林威基地方時. 此法久利用爲良好方法, 即用電報報告以直接比較觀測者之時計與已知經度某地方之時計也, 其二時計之差即爲兩地之經度差.

例 1. 戰艦上一航海家已決定其地方時爲 2 時25分 P.M. 由無線電報彼知在格林威基平均太陽日之時刻爲 4 時30分P.M.問船之經度爲何?

解. 格林威基時間較晚,

| | | |
|---|---|---|
| | 4 時 | 30 分 |
| 減. | 2 時 | 25 分 |
| | 2 時 | 5 分 = 船之兩經度. |

化此爲弧之度與分,

| | | |
|---|---|---|
| | 2 時 | 5 分 |
| 乘, | | 15 |
| | 31° | 15′ = 船之西經度. |

第二法, 由格林威基測時器(Greenwich chronometcr)以測格林威基時, 測時器僅爲一極精密之錶, 使此錶示某已知經度地方之格林威基時, 此後將錶無論携至何處俱保持此時刻,

* 取此時差不大於 12 時, 設兩地之時差算出而多於12時, 則由 24 時內減出, 取其餘作爲時差.

例 2. 一探險隊算出其所在地之地方時爲10時 A. M. 而彼等所携之格林威基測時器所示之時刻爲 8 時30分A.M.問其經度爲何?

解. 格林威基之時刻爲早.

$$\begin{array}{rl} & 10\text{ 時} \\ \text{減去,} & \underline{8\text{ 時 }30\text{ 分}} \\ & 1\text{ 時 }30\text{ 分}=22°30'=\text{東經度,} \end{array}$$

## 例 題

1. 在下列題內已知觀測者之地方時及其同時之格林威基時，求各題內觀測者之經度.

| | 觀測者之地方時 | 相對照之格林威基時 | 觀測者之經度 |
|---|---|---|---|
| (a) | 正午. | 3時30分P.M. | 答.52°30′W |
| (b) | 正午. | 7時20分A.M. | 70°E. |
| (c) | 中夜. | 10時15分P.M. | 26°15′E. |
| (d) | 4時10分P.M. | 正午. | 62°30′E. |
| (e) | 8時25分A.M. | 正午. | 53°45′W. |
| (f) | 9時40分P.M. | 中夜. | 35°W. |
| (g) | 2時15分P.M. | 11時20分A.M. | 43°45′E. |
| (h) | 10時26分A.M, | 5時16分A.M. | 77°30′E. |
| (i) | 1時30分P.M. | 7時45分P.M. | 93°45′W. |
| (j) | 正午. | 中夜. | 180°W,或E. |
| (k) | 6時P.M. | 6時A.M. | 180°E.或W. |
| (l) | 5時45分A.M. | 7時30分P,M. | 153°45′E, |
| (m) | 10時55分P,M, | 8時35分A.M. | 145°W. |

2. 設在格林威基時爲一月24日 9 時20分 P.M., 同時觀測地之時刻爲一月25日3時40分A.M.,問觀測者之經度爲何? 答. 95°E.

3. 某地之地方時爲三月四日 4 時40分 A.M., 而其相當之格林威基時爲三月三日 8 時P.M.,問某地之經度如何? 答. 130°E,

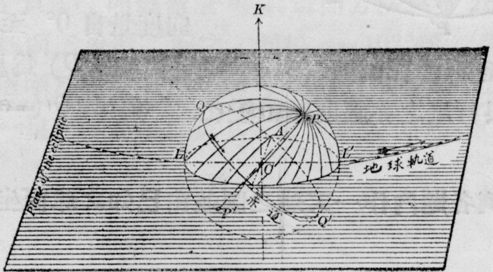
4. 在下列題內已知觀測者之地方時及同時某已知經度地方之地方時. 求各題內觀測者之經度.

| | 觀測者地方時 | 某地之相當時及經度 | 測者之經度 |
|---|---|---|---|
| (a) | 2時P,M. | 5時P.M.在哈瓦那(Havana經82°23′W.) | 答.127°23′W |
| (b) | 10時A.M, | 3時P.M.在橫濱(Yokohama經139°41′.E) | 64°41′E. |
| (c) | 5時20分P.M. | 11時30分P.M.在哥拉司靠(Glasgow經4°16′W.) | 96°46′W. |
| (d) | 8時25分A.M. | 6時35分A.M.在瓦拉庫(Vera Cruz經96°9′W.) | 68°39′W. |
| (e) | 9時45分P.M. | 中夜在巴達維亞(Batavia經106°52′E,) | 73°7′E, |
| (f) | 7時40分P.M. | 正午在直布羅陀(Gibraltar經5°21′W.) | 109°39′E. |
| (g) | 4時50分P.M. | 正午在奧克蘭(Auckland經174°50′E) | 112°40′W. |

5. 頁 57 例題內所述各地之經度爲何? 其同時之格林威基時給出如下:

| 頁 57 之例題 | 格林威基時 | | 地方之經度 |
|---|---|---|---|
| (a) 例題 3. | 2 時 12 分 P.M. | 答. | 經 57°W. (船) |
| (b) 例題 4. | 4 時 52 分 P.M. | | 經 31°45′W. (船) |
| (c) 例題 5. | 5 時 9 分 A.M. | | 經 50°E. (觀測者) |
| (d) 例題 7. | 10 時 33 分 P.M. | | 經 84°W. (測量員) |
| (e) 例題 8. | 6 時 25 分 P.M. | | 經 26°W. (船) |

**37.** 黃道及分點. 地球繞日年一整週. 對於吾人, 則有若太陽運行而地球靜止, 在群星之中, 其太陽之 (彷彿的) 年道爲一天球大圓稱之爲黃道 (ecliptic). 顯然地球軌道截天球於黃道. 赤道平面與




地球

黃道平面互相傾倚約爲 $23\frac{1}{2}°$ $(=e)$ 之角, 稱爲黃道傾度 (obliquity of the ecliptic, 圖內之角 LVQ).

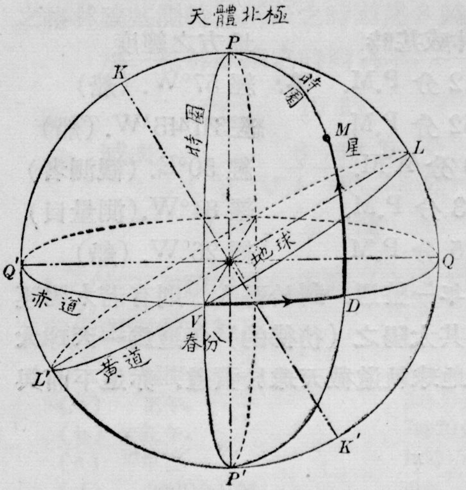
黃道交天體赤道之兩點稱爲分點 (equinoxes). 太陽北向運行越過天體赤道之點(在春季, 約在三月 21 日)稱爲春分(vernal equinox), 當南行越過天體赤道之點 (在秋季, 約在九月 21 日) 稱爲秋分. (autumnal equinox).

設將圖內之點 V 與 A 投影於天球上, 點 V 將投影於春分點而點 A 將投影於秋分點上.

**38.** 春分系之赤道與時圓. * 在此款內其一定之互爲垂直二參考大圓爲天體赤道 (QAQ′)

*有時稱爲赤道系.

及春分時圈 ($PVP'$)，又稱爲四季圈 (eqinoctical colure)；而一星之球面坐標爲其赤緯度(declination) 及赤經度 (right ascension).




一星之赤緯度已於頁48介說爲在該星時圈上度量之天體赤道以北或南之角距，由 0° 至 90°，設在天體赤道以北則爲正以南則爲負．在圖內 $DM$ 爲星 M 之北赤緯度．

一星之赤經度爲該星時圈與春分時圈間之角由後圈東向度量自 0° 至 360°，或以鐘點度之由 0 至 24．在圖內，角 $VPD$ (或弧 $VD$) 爲星 $M$ 之赤經度．日，月，與行星之赤經度繼續變化．* 角 $LVQ$ (=e) 爲黃道傾度 ($=23\frac{1}{2}°$).

例 1. 在下列各題內作一天球之圖並由已知之球面坐標以定星之位置.

| | 赤經度 | 赤緯度 | | 赤經度 | 赤緯度 |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 0° | 0° | (j) | 90° | 0° |
| (b) | 180° | 0° | (k) | 270° | 0° |
| (c) | 90° | N. 90° | (l) | 90° | S. 90° |
| (d) | 45° | N. 45° | (m) | 45° | S. 45°. |
| (e) | 60° | N. 60°. | (n) | 90° | S. 30°. |
| (f) | 120° | +30° | (o) | 240° | +60°. |
| (g) | 300° | −60° | (p) | 330° | −45°. |
| (h) | 12 時 | +45° | (q) | 6 時 | +1[illegible]°. |
| (i) | 20 時 | 0° | (r) | 9 時 | −75°. |

* 日，月，及行星之赤經度無論在一年之何時均可於航海通書內求之.

例 2. 一行星之赤經度爲 10 時 40 分. 而其赤緯度爲 S.6°. 求自此行星至一赤經度爲 3 時 20 分赤緯度爲 N.48° 之恆星之角距.

解. 定行星及恆星於天球上，作球面三角形其諸頂在北極，行星，及恆星. 於是.

角 $A$＝赤經度之差

＝10 時 40 分－3 時 20 分

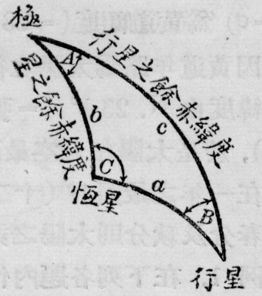
＝7 時 20 分＝110°.

邊 $b$＝恆星之餘赤緯度

＝90°－48°＝42°.

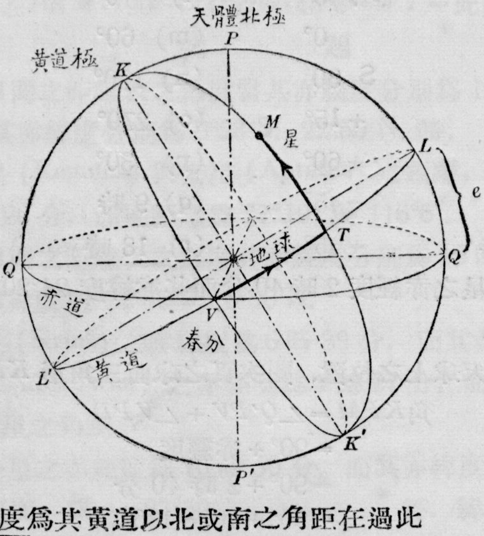
邊 $c$＝行星之餘赤緯度

＝90°－(－6°)＝96°. 求邊 $a$。




因已知兩邊及夾角，此三角形之解法歸入款 II, ($a$), 頁 27. 因僅需求 $a$, 其最簡方法爲頁 28 所述之法，其解法依直角球面三角形. 解之，則得 $a$＝107°48′. 答.

**39. 以黃道圈及過黃道之極與春分點*之大圓 $KVK'$ 爲參考圓系.** 在此款內其一星之球面坐標爲其緯度與經度. †




一星之緯度爲其黃道以北或南之角距在過此

* 有時稱爲黃道系

† 有時稱爲天體緯度與經度以別於地面上地方之緯度與經度（地球緯度與經度），後者已於頁39介說之，其意義不同.

星及黃道極之大圓上度之. 如, 在圖內, 弧 $TM$ 度星 $M$ 之北緯度.

一星之經度爲過星與黃道極之大圓, 及過春分點與黃道極之大圓間之角, 由後圓向東度量自 $0°$ 至 $360°$. 在圖內,角 $VKT$(或弧 $VT$) 爲恆星 M 之經度. 日, 月, 與行星之緯度及經度繼續變化. 角 $LVQ$ $(=e)$ 爲黃道傾度$(=23\frac{1}{2}°=$弧 $KP)$.

因黃道年路爲太陽之彷彿, 日之天體緯度亦爲零. 雖然, 太陽之赤緯度由 N. $23\frac{1}{2}°$ (=弧 $QL$), 其時在北半球一年之最長日 (六月 21), 於是太陽在天空最高處 (在$L$), 變化至 S. $23\frac{1}{2}°$ (弧 $Q'L'$) 其時在一年之最短日 (十二月 22), 於是太陽在天空之最低處(在 $L'$). 在春分及秋分則太陽之赤緯度爲零 (三月 21 與九月 21).

例 1. 在下列各題內作一天球之圖並由下列之球面坐標而定星之位置.

| 天體經度 | 天體緯度 | 天體經度 | 天體緯度 |
|---|---|---|---|
| (a) 0° | 0° | (j) 90° | 0° |
| (b) 90° | N. 90° | (k) 180° | 0° |
| (c) 180° | N. 45° | (l) 0° | S. 60° |
| (d) 270° | 0° | (m) 60° | N. 30° |
| (e) 45° | S. 30° | (n) 120° | N. 45° |
| (f) 135° | +15° | (o) 270° | −75° |
| (g) 315° | +60° | (p) 30° | −60° |
| (h) 6 時 | −45° | (q) 9 時 | 0° |
| (i) 15 時 | +45° | (r) 18 時 | +30° |

例 2. 已知一星之赤經度 2 時 40 分而其赤緯度 $24°20'$ N., 求其天體緯度及經度.

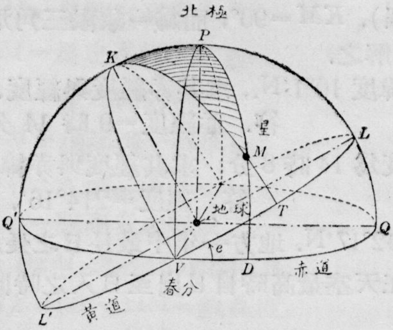
解. 定此星在天球上之位置. 閱次頁之球面三角形 $KPM$.

$$\begin{aligned}
\text{角}KPM &= \angle Q'PV + \angle VPD \\
&= 90° + \text{赤經度} \\
&= 90° + 2\text{ 時 }40\text{ 分} \\
&= 90° + 40° = 130°. \\
\text{邊 } PM &= \text{餘赤緯度} \\
&= 90° - 24°20' \\
&= 65°40'.
\end{aligned}$$

$$\text{邊}\, KP = LQ = e = 23°30'.$$

$$\text{求邊}\, KM = \text{此星之餘緯度},$$

而 $$\text{角}\, PKM = \text{此星之餘經度}.$$




因已知二邊及其夾角，此三角形之解法歸於款 II, (a)，頁 27. 解之，則得

邊 $KM = 81'52'$ 而 $\angle PKM = 44°52'$.

$\therefore$ $90° - KM = 90° - 81°52' = 8°8' = TM$ = 此星之緯度，

而 $90° - \angle PKM = 90° - 44°52' = 45°8' = VT$ = 此星之經度.

## 例　　題

1. 求日月間之距離表之爲度當其赤經度分別爲 12 時 39 分，6 時 56 分，而其赤緯度分別爲 9°23′S., 22°50′N. 時.　　答. 90°.

2. 求瑞星 (Regulus) 與安星 (Antares) 之距離，其赤經度爲 10 時與 16 時 20 分，而極距離爲 77°19′ 與 116°6′.　　答. 99°56′.

3. 求日月間之距離表之爲度其赤經度分別爲 15 時 12 分，4 時 45 分，而其赤緯度爲 21°30′S., 5°30′N.　　答. 152°23′.

4. 天狼星 (Sirius) 之赤經度爲 6 時 39 分，而其赤緯度爲 16°31′ S.; 金牛座 (aldebaran) 之赤經度爲 4 時 27 分，而其赤緯度爲 16° 12′N. 求二星之角距.　　答. 46°8′.

5. 已知一星之赤經度爲 10 時 50 分，而其赤緯度爲 12° 30′ N. 求其緯度與經度. 取 e＝23°30′.　　答. 緯度＝18°24′N.,
經度＝168°53′.

6. 設月之赤經度爲 4 時 15 分而其赤緯度 6°20′N., 其緯度與經度爲何?　　答. 緯度＝14°43′N.,　經度＝62°58′.

7. 太陽之經度為 $59°40'$. 其赤經度與赤緯度為何? 取 $e=23°27'$.

答. 赤經度 = 3 時 50 分, 赤緯度 $=20°5'$N.

授意. 太陽之緯度常為零, 因其運行於黃道上也. 故於三角形 $KPM$ (頁 65 之圖), $KM=90°$, 而為一象限三角形. 此三角形可用頁 12 所述之方法解之.

8. 已知日之赤緯度 $16°1'$N., 求其赤經度與經度. 取 $e=23°27'$.

答. 赤經度 = 9 時 14 分; 經度 $=136°7'$.

9. 太陽之赤經度為 14 時 8 分; 求其經度與赤緯度. 取 $e=23°27'$.

答. 經度 $=214°16'$. 赤緯度 $=12°56'$S.

10. 求在緯度 $42°17'$N. 地方一年中最長日之長度. 答. 15 時 6 分.

授意. 此為日在天空最高時自日出至日入之時間, 即, 其赤緯度為 $23°27'$N. 時.

11. 求在緯度 $42°17'$N. 地方最短日之長度. 答. 8 時 54 分

授意. 日在天空最低時, 即, 其赤緯度為 $23°27'$S. 時.

12. 求新海芬 (緯 $41°19'$N.) 最長日之長度. 取 $e=23°27'$.

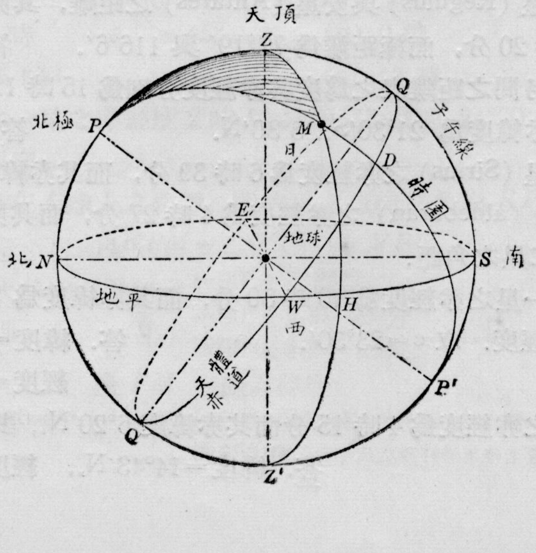
答. 15 時.

13. 求新海芬 (New Haven) 最短日之長度. 答. 9 時.

14. 求司托克好 (Stock holm 緯 $59°21'$N.) 最長日之長度. 取 $e=23°27'$. 答. 18 時 16 分.

15. 求司托克好之最短日. 答. 5 時 48 分.

**40.** 天文三角形 (The astronomical triangle). 吾人已知許多最重



要之天文問題皆屬於解天文三角形 $PZM$. 在任何之此類問題其第一件應作之事即天文三角形之何部分爲已知或能直接由已知件求得之，而何部分爲所求者. 此類問題中之各種量爲

$HM$＝星體之高度，

$DM$＝星之赤緯度，

角 $ZPM$＝星之時角，

角 $SZM$＝星之地平經度，

$NP$＝天極之高度.

＝觀測者之緯度.

其爲天文三角形 $PZM$ 之各部分者則有

邊 $MZ=90°-HM$＝餘高度，

邊 $PM=90°-DM$＝餘赤緯度，

邊 $PZ=90°-NP$＝餘緯度，

角 $ZPM$＝時角，

角 $PZM=180°-$地平經度（角 SZM）.*

學者當練習於例題之天文三角形內擇出其已知與未知部分並指出此三角形之解法歸於何款.

例如. 設取頁 69，例題 15，

已知部分
- 緯度 $=51°32'$N.
- ∴ 邊 $PZ=90°-51°32'=38°28'$.
- 高度 $=35°15'$.
- ∴ 邊 $MZ=90°-35°15'=54°45'$.
- 赤緯度 $=21°27'$N.
- ∴ 邊 $MP=90°-21°27'=68°33'$.

所求： 地方時＝時角＝角 $ZPM$.

因有三邊而求一角，此三角形之解法歸於款 I, (a)，頁 25. 斯得角 $ZPM=59°45'$＝3 時 59 分 P.M.

**41.** 度量物理量所發生之錯誤.† 凡由度量所得之已知件將不免各種錯誤. 例如，設以鋼製卷尺度一線之長，其因熱力澎漲所得之錯誤與夫因張弛不同下沈所得之錯誤必須計入. 或，假想一航海家在海中

* 當星體位於圖內時，設星體在測者子午線之東，則將得角 $PZM$＝地平經度 $-180°$.

† 與此有聯繫者學者最好讀葛氏平面三角法 §93

用六分儀測太陽之高度．測得之高度必須補正其因下列原因所得之錯誤:

1. 傾度（Dip）．因觀測者高處於海面之上（在甲板上或上層甲板之平台上），其測得之高度則因地平之傾度（或降低度）而太大．

2. 六分儀所示之錯誤（Index error of sextant）．因無有器械其構造爲十分完全，故每種器械有一定之錯誤可由實驗決定之．

3. 光之屈折．因光射入地球大氣發生屈折故吾人所見諸天體較其實在位置爲高．此種屈折將依天體在地平面上之高度，又依氣壓表及寒暑表之現狀而不同，因空氣之壓力及溫度能影響其密度也．

4. 太陽之半徑．因觀測者不能確定太陽之心在於何處，測出太陽低緣之高度（如此名之）而於其上加入由航海通書所察得該日之太陽已知半徑．

5. 視差（Parallax）．一天體之視差卽經過觀測者之地球半徑，如由天體視之，其所對之角．因由地面視一天體，較若在地心視天體時顯低，此卽可謂爲依天體之視差之故．

今將不再詳細討論此等補正法，因此等最好留待原野天文學（Field Astronomy）實際工作時研究之；吾人此處之目的僅在喚起學者注意於可能時儘量消去度量物理量時所生錯誤之必要．

爲簡單起見其必要的補正已見應用於例題已知件者可於此書中尋之．

## 雜　題

1. 亞洲大陸近於一等邊三角形之形狀．假定每邊爲 4800 地理里而地球半徑爲 3440 地理里，求亞洲之面積．

答．約 13,333,000方 哩．

2. 巴黎（緯 48°50′N.）與柏林（緯 52°30′N.）爲472地理里，在一大圓弧上度之．問當巴黎正午時柏林爲何時？　答．午後 44 分．

3. 北極之高爲 45°，地平上一恒星之地平經度爲 135°．求此星之極距離．　答．60°．

4. 在墨西哥城（緯 19° 25′ N.）太陽在 9 A.M. 之高度爲何？設在該時之赤緯度爲 8°23′．　答．45°5′．

5. 求在米尼持（Munich 緯．48°9′N.）一年中白晝最長之日 6 時 A.M. 太陽之高度．　答．高度＝17°15′．

6. 求在聖彼得堡（緯 59°56′N.）一年中白晝最長之日太陽正東及正西時之時刻．　答．6 時 58 分 A.M.，5 時 2 分 P.M.

7. 一牆在緯 52°30′N. 於一年白晝最長日 6 A.M. 無影射出，問其方向爲何？　答．75°11′，由地平之北點計算．

8. 某處在一年白晝最長日太陽升起恰在北東方向求其地之緯度．
答．55°45′N.

9. 某處在白晝最長日太陽沒入時爲 10 時 P.M. 求其地之緯度．
答．63°23′N 或 S.

10. 已知觀測地之緯度52°30′N.，一星之赤緯度 38°，其時角 28°17′ 求此星之高度．　答．高度＝65°33′．

11. 已知觀測地之緯度 51°19′N.，一星之極距離 67°59′，其時角 15°8′．求此星之高度與地平經度．
答．高度＝58°23′，地平經度＝27°30′．

12. 已知一星之赤緯度 7°54′N.，其高度22°45′，其地平經度 50°14′．求此星之時角與觀測者之緯度．
答．時角＝45°41′，緯度＝67°59′N.

13. 一星之緯度爲 51°N.，而其經度爲 315°．求其赤緯度，取 $e=23°27′$．　答．赤緯度＝32°23′N.

14. 已知觀測者之緯度 44°50′N.，一星之地平經度 41°2′，其時角 20°．求其赤緯度．　答．赤緯度＝20°49′N.

15. 已知觀測地之緯度 51°32′N.，子午線偏西太陽之高度 35°15′，其赤緯度 21°27′N. 求其地方時．

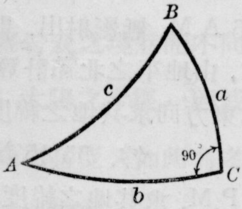
答．3 時 59 分 P.M.

# 第四章

## 公式述要

### 球面三角法

**42.** 直角球面三角形，頁 4－頁 5.




(1) $\cos c = \cos a \cos b,$

(2) $\sin a = \sin c \sin A,$

(3) $\sin b = \sin c \sin B,$

(4) $\cos A = \cos a \sin B,$

(5) $\cos B = \cos b \sin A,$

(6) $\cos A = \tan b \cot c,$

(7) $\cos B = \tan a \cot c,$

(8) $\sin b = \tan a \cot A,$

(9) $\sin a = \tan b \cot B,$

(10) $\cos c = \cot A \cot B.$

用訥氏循環部分定則以解直角球面三角形之普通指導在頁 8 給出.

球面等腰三角形與象限三角形在頁 12 討論之.

**43.** 斜角球面三角形之邊與角間之關係，頁 14－頁 24.

$\alpha = 180° - A, \qquad \beta = 180° - B, \qquad \gamma = 180° - C.$

$s = \frac{1}{2}(a+b+c), \qquad \sigma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).$

$d$ = 內切圓之半徑.

$S = 180°$ － 外接圓之半徑.

正弦定律，頁 15.

(11) $$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

或，
$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

關於邊之餘弦定律，頁 17.

(12) $\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha$

關於角之餘弦定律，頁 17.

(15) $$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma\cos a.$$

$\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}\gamma$ 之函數用諸邊表之，頁 19－頁 21.

(18) $$\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}.$$

(19) $$\cos\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}.$$

(20) $$\tan\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

(27) $$\tan\tfrac{1}{2}d=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}.$$

(28) $$\tan\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\sin(s-a)}{\tan\frac{1}{2}d}.$$

(29) $$\tan\tfrac{1}{2}\beta=\frac{\sin(s-b)}{\tan\frac{1}{2}d}.$$

(30) $$\tan\tfrac{1}{2}\gamma=\frac{\sin(s-c)}{\tan\frac{1}{2}d}.$$

半邊之函數用 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, 表之，頁 22.

(31) $$\sin\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}.$$

(32) $$\cos\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}.$$

(33) $$\tan\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)}{\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}}.$$

(40) $$\tan\tfrac{1}{2}\delta=\sqrt{\frac{\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}{\sin\sigma}}.$$

(41) $$\tan\tfrac{1}{2}a=\frac{\sin(\sigma-\alpha)}{\tan\frac{1}{2}\delta}.$$

(42) $$\tan\tfrac{1}{2}b=\frac{\sin(\sigma-\beta)}{\tan\frac{1}{2}\delta}.$$

(43) $$\tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin(\sigma-\gamma)}{\tan\frac{1}{2}\delta}.$$

訥氏比論，頁 23.

(44) $$\tan\tfrac{1}{2}(a-b)=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\tan\tfrac{1}{2}c.$$

(45) $$\tan\tfrac{1}{2}(a+b)=-\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\tan\tfrac{1}{2}c.$$

(46) $$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=-\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\tan\tfrac{1}{2}\gamma.$$

(47) $$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=-\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\tan\tfrac{1}{2}\gamma.$$

**44.** 解斜角球面三角形之普通指導，頁 24－頁 35.

款 I. (*a*) 已知三邊，頁 25.

(*b*) 已知三角，頁 26.

款 II. (*a*) 已知兩邊及其夾角，頁 27.

(*b*) 已知兩角及其夾邊，頁 30.

款 III. (*a*) 已知兩邊及對其一邊之角，頁 32.

(*b*) 已知兩角及對其一角之邊，頁 34.

**45.** 用長度單位表一圓弧之長，頁 36.

(52) $$L=\frac{\pi RN}{180}.$$

$N=$角之度數.

**46.** 球面三角形之面積，頁 37.

(54) $$\text{面積}=\frac{\pi R^2 \mathrm{E}}{180}.$$

$$\mathrm{E}=A+B+C-180°.$$

(55) $$\tan\tfrac{1}{4}\mathrm{E}=\sqrt{\tan\tfrac{1}{2}s\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b)\tan\tfrac{1}{2}(s-c)}.$$