

Analysis II**Arbeitsblatt 56****Übungsaufgaben**

AUFGABE 56.1. Es seien L und M metrische Räume. Zeige, dass die Menge C der stetigen Abbildungen von L nach M durch

$$d(f, g) := \min(\sup(d(f(x), g(x)), x \in L), 1)$$

zu einem metrischen Raum wird.

AUFGABE 56.2. Es seien L und M metrische Räume, wobei M vollständig sei. Zeige, dass die Menge C der stetigen Abbildungen von L nach M durch

$$d(f, g) := \min(\sup(d(f(x), g(x)), x \in L), 1)$$

zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

AUFGABE 56.3.*

Es sei

$$b \geq 1 \geq a > 0$$

fixiert und sei

$$M = \{f : [a, b] \rightarrow [a, b] \mid f \text{ stetig}\}.$$

a) Zeige, dass die Abbildung

$$H : M \longrightarrow M, f \longmapsto H(f) = \sqrt{f},$$

wohldefiniert ist.

b) Sei nun zusätzlich $a > \frac{1}{4}$. Zeige, dass die Abbildung H aus a) eine starke Kontraktion ist (wobei M mit der Maximumsnorm versehen sei).

c) Zeige, dass M durch die Maximumsnorm ein vollständiger metrischer Raum wird.

d) Bestimme den Fixpunkt von H .

AUFGABE 56.4. Es sei

$$f: I \times U \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld, das auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraums definiert sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Es sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in I$ und $P \in U \cap W$ die Beziehung $f(t, P) \in W$ gilt. Zeige, dass eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w \in U \cap W$$

ganz in W verläuft.

AUFGABE 56.5. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y + 1 \text{ mit } y(0) = 0.$$

mit der Picard-Lindelöf-Iteration.

AUFGABE 56.6.*

Bestimme für das Anfangswertproblem

$$y' = y \text{ mit } y(0) = 1$$

explizite Formeln für die Picard-Lindelöf-Iterationen.

AUFGABE 56.7. Bestimme in Beispiel 56.5 eine explizite Formel für die Iterationen φ_n .

AUFGABE 56.8.*

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y^2 + t + yt^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

AUFGABE 56.9. Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 2$ und $y(0) = -7$.

AUFGABE 56.10.*

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $y(0) = 1$.

AUFGABE 56.11. Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -t & t^2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$.

AUFGABE 56.12. Wogegen konvergiert die Picard-Lindelöf-Iteration in der Situation von Bemerkung 56.6, wenn w ein Eigenvektor von M ist?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 56.13. (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, u, v) \longmapsto (t^2 uv, u^2 - tv^2).$$

Bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ die nicht-regulären Punkte des Vektorfeldes

$$f_t: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \longmapsto (t^2 uv, u^2 - tv^2).$$

Welche Ortspunkte sind zu keinem Zeitpunkt regulär?

AUFGABE 56.14. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(1) = (3, 2, 6)$$

zum ortsunabhängigen Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (t, x, y, z) \longmapsto t^3(3, 1, 4) - e^{-2t}(2, -1, 7) + (t - t^2 e^t)(0, 4, 5) + (2, 2, 2).$$

AUFGABE 56.15. (3 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 4$ und $y(0) = 5$.

AUFGABE 56.16. (5 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = 1$.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5