Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 22

Aufgabe 22.1. Bestimme den Hauptdivisor zu $\frac{1000}{333}$ auf Spek $(\mathbb{Z})$.

Aufgabe 22.2. Bestimme den Hauptdivisor zu $f = (t-3)^2(t-1)^{-5}t^2(t+2)^{-1}$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$.

Aufgabe 22.3. Bestimme den Hauptdivisor zu $f = \frac{t}{t^2+1}$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ mit $t = \frac{Y}{X}$ für die Körper $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$.

Aufgabe 22.4. Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ über einem Körper K sowie die affine Gerade

$$\mathbb{A}^1_K \subset \mathbb{P}^1_K = D_+(X) \cup \{\infty\}$$

mit dem globalen Schnittring

$$K[\frac{Y}{X}] = K[t].$$

Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Der Hauptdivisor zu einem Polynom $P \in K[t]$ besitzt in $\mathbb{A}^1_K$ keine negative Ordnung (keine Polstelle).
(2) Die Ordnung von einem Polynom $P \in K[t]$ in ∞ ist das negative des Grades von P.
(3) Es sei $D = \sum_P n_P \cdot P$ und K algebraisch abgeschlossen. Dann ist D genau dann ein Hauptdivisor, wenn $\sum_P n_P = 0$ ist.

Aufgabe 22.5. Sei $\mathbb{P}^n_K = \operatorname{Proj}(K[X_0, X_1, \ldots, X_n])$ der projektive Raum über einem Körper K. Zeige, dass die effektiven Weildivisoren auf $\mathbb{P}^n_K$ den normierten homogenen Polynomen $P \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ entsprechen.

Aufgabe 22.6. Zeige, dass auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^d_K$ über einem Körper je zwei Hyperebenen $H_1 = V_+(a_0X_0 + a_1X_0 + \cdots + a_dX_d)$ und $H_2 = V_+(b_0X_0 + b_1X_0 + \cdots + b_dX_d)$ zueinander linear äquivalent sind.

Aufgabe 22.7. Es sei $V = V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^d_K$ eine irreduzible Hyperfläche vom Grad d im projektiven Raum über einem Körper, die wir als Element in der Divisorenklassengruppe auffassen. Zeige, dass V linear äquivalent zu dH ist, wobei H die Klasse einer Hyperebene bezeichnet.

Aufgabe 22.8. Es sei X ein normales noethersches integres Schema und sei $Z \subset X$ eine abgeschlossene Teilmengen mit einer Kodimension ≥ 2. Zeige, dass die Divisorenklassengruppen von X und von $X \setminus Z$ übereinstimmen.

Aufgabe 22.9. Es sei X ein normales noethersches integres Schema und sei $U \subset X$ eine offene Teilmengen. Zeige, dass man durch Weglassen derjenigen Primdivisoren, die U nicht treffen, einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Div}(U)$ erhält. Zeige, dass dabei Hauptdivisoren auf Hauptdivisoren gehen und dass es daher einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\operatorname{KG}(X) \to \operatorname{KG}(U)$ gibt.

Aufgabe 22.10. Es sei X ein normales noethersches integres Schema und sei $x \in X$ ein Punkt. Zeige, dass man durch Weglassen derjenigen Primdivisoren, die nicht durch x verlaufen, einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Div}(\mathcal{O}_{X,x})$ erhält. Zeige, dass dabei Hauptdivisoren auf Hauptdivisoren gehen und dass es daher einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\operatorname{KG}(X) \to \operatorname{KG}(\mathcal{O}_{X,x})$ gibt.

Aufgabe 22.11. Es sei

$$D = \sum_Y a_Y \cdot Y = \sum_j a_j \cdot Y_j = \sum_j a_j \cdot V_+(G_j)$$

ein Weildivisor des projektiven Raumes $\mathbb{P}^d_K$, wobei die beteiligten Primdivisoren durch homogene Primelemente $G_j \in K[X_0, X_1, \ldots, X_d]$ beschrieben werden. Wir betrachten das Polynom $G := \prod_j G_j^{a_j}$ vom Grad $\delta = \sum_j a_j \operatorname{grad}(G_j)$. Zeige, dass die zugehörige invertierbare Untergarbe $\mathcal{L}_D$ in der Funktionenkörpergarbe im Sinne von Satz 22.9 mit der Realisierung der getwisteten Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(-\delta)$ durch Multiplikation mit G aus Beispiel 20.9 übereinstimmt.

In den folgenden Aufgaben arbeiten wir mit

$$\mathcal{O}_X(D) = -\mathcal{L}_D$$

zu einem Divisor D. Es ist also für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in K \mid \operatorname{ord}_Y(f) \geq -D \text{ für alle } Y \in U\}.$$

Aufgabe 22.12. Es sei X ein lokal faktorielles projektives integres Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und sei D ein Weildivisor auf X mit zugehöriger Garbe $\mathcal{O}_X(D)$. Zeige, dass es eine natürliche Korrespondenz zwischen den zu D linear äquivalenten effektiven Weildivisoren und den nichttrivialen globalen Schnitten von $\mathcal{O}_X(D)$ gibt, wobei man Schnitte miteinander identifiziert, wenn sie durch Skalierung auseinander hervorgehen.

Aufgabe 22.13. Es sei X ein lokal faktorielles noethersches integres Schema und sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Untergarbe der konstanten Funktionenkörpergarbe. Es sei

$$s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$$

ein nichttrivialer Schnitt. Zeige, dass die Nullstellenmenge zu s, also $Z(s) = X \setminus X_s$, in natürlicher Weise ein effektiver Weildivisor D auf X ist, derart, dass $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ ist.

Aufgabe 22.14. Es sei

$$F = F_1^{a_1} \cdots F_r^{a_r}$$

die Primfaktorzerlegung eines homogenen Polynoms $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_d]$ (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K) vom Grad e im homogene Primpolynome F_j und sei

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_j V_+(F_j)$$

der zugehörige Weildivisor auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}_K^d$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Man kann jeden effektiven Weildivisor auf dem projektiven Raum in dieser Form (eindeutig bis auf Skalierung) darstellen.
(2) Es gilt mengentheoretisch

$$V_+(F) = \bigcup_{j=1}^{n} V_+(F_i).$$

(3) Es sei $C \subseteq \mathbb{P}_K^d$ eine glatte projektive Kurve, die keine Teilmenge von $V_+(F)$ sei. Dann induziert D einen Weildivisor $D|_C$ auf der Kurve C, indem man zu jedem Punkt $P \in C$ die Ordnung von F in $\mathcal{O}_{C,P}$ betrachtet.
(4) Die eingeschränkte invertierbare Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^d}(e)|_C$ ist isomorph zur invertierbaren Garbe auf C ist, die zu $D|_C$ gehört. Es gilt also

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^d}(D)|_C = \mathcal{O}_C(D|_C).$$

(5) Linear äquivalente Divisoren auf dem projektiven Raum induzieren linear äquivalente Divisoren auf der Kurve.

Aufgabe 22.15. Es sei D ein effektiver Weildivisor im projektiven Raum $\mathbb{P}^d_K$ mit zumindest einer positiven Komponente. Zeige, dass D mit jeder projektiven Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^d_K$ einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.

Verwende, dass $D_+(f)$ affin ist und dass eine projektive Kurve nicht affin ist.

Insbesondere haben also auf der projektiven Ebene zwei Kurven einen nichtleeren Durchschnitt. Für glatte Kurven kann man auch mit Aufgabe 22.14 argumentieren. Diese Eigenschaft gilt keineswegs für alle projektiven Flächen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Aufgabe 22.16. Zeige, dass es auf der projektiven Fläche

$$V_+(XY - ZW) \subseteq \mathbb{P}^3_K$$

zueinander disjunkte Geraden (als Objekte im projektiven Raum) gibt.

Aufgabe 22.17.*

Zeige, dass es auf der projektiven Fläche

$$V_+(X^3 + Y^3 - Z^3 - W^3) \subseteq \mathbb{P}^3_K$$

vom Grad 3 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik $\neq 3$ zueinander disjunkte Geraden (als Objekte im projektiven Raum) gibt.

Aufgabe 22.18. Es seien C_1 und C_2 zwei konzentrische Kreise in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(0, 0)$. Bestimme die Schnittpunkte der Kreise (aufgefasst als projektive Kurven) in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Abbildungsverzeichnis