中學校用

用器畫解說

商務印書館出版

共和國教科書

用 器 畫 解 說

(中 學 校 用)

黃 元 吉 編
壽孝天 駱師曾校

商務印書館發行

編輯大意

一本書係備中等學校用器畫教科之用。

一本書分爲兩部分。解說以詳其理法。圖式以便於臨摹惟因較大之圖式。非尋常紙幅所能容。故將兩部分分訂爲兩册。而圖式一册之紙幅。面積獨寬。

一用器畫之爲術。係以適當之器具。依幾何學之原理。摹各種形體於一紙面上。然若不明畫法基本之所在。則或按諸實地而不切。或措諸應用而失當。故本書不專言畫法。必兼就初等幾何學範圍以內。略述畫法之由來。俾學者隨其幾何學智識所及。以究知畫法之根源。

一習用器畫之畫法者。當幷其分寸長短。深致辨析。故本書練習題。特指定所繪形體之大小。

一供人臨摹之圖。在初繪者。自必力求工緻。惟旣經雕刻印刷。能否與初繪絕不相違。所不敢必。學者當臨摹時。務宜依據解說。究其畫法。意謂臨出之圖。將視此圖式之圖。加精而益密。則庶乎可矣。

中學校教科書

用器畫解說目次

中學校教科書

用器畫解說

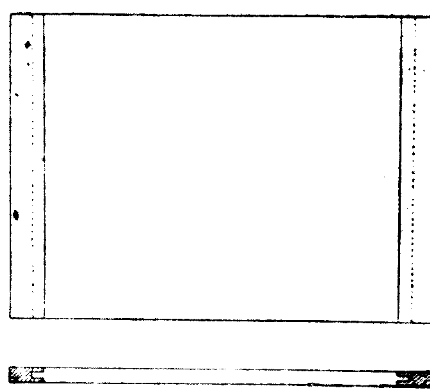
第一篇　平面幾何畫法

第一章　總說

第一節　畫具　種類甚多。然研究本書畫法者。以能備下列各種爲已足。凡圖畫之精妙。良由畫手之純熟。而其所用畫具。果爲良好。亦頗能助其精巧。

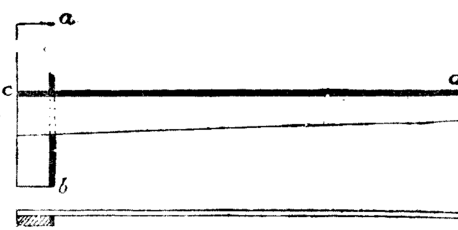
圖板　以乾燥之堅木爲之。其大小雖無定制。大約長一尺八寸闊一尺二寸厚五分。兩面須極平滑。其邊緣務取眞直。然自其製作以後。不無伸縮彎曲之虞。故必如第一圖。於其兩側。取堅木作細緣。令縱橫成紋。關以銜接之筍。俾勿彎曲。

第一圖



丁形定規　以乾燥之堅木爲之。其結構如第二圖。規頭 ab 與規身 cd 正交成直角。旋釘若干使牢接。其常取用之邊若 ab 若 cd。附以竹或黑柹爲細緣。規身略比圖板爲長。其用法。以 ab 邊密切於圖板左側。依之移動上下。以引水平線。且與三角定規併用。以引垂線及其餘各直線。詳本編第四圖。

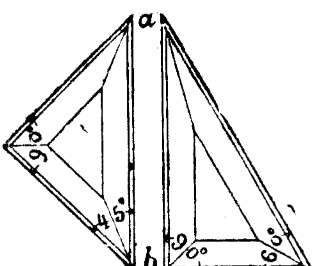
第二圖



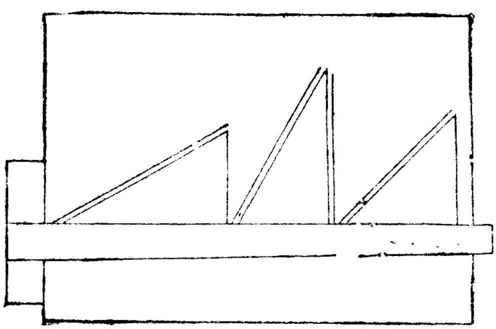
此與三角定規併用時。初學者輒專注於三角定規。不復顧及丁形定規之傾斜。然至習之既熟。則自能省製圖所費之時間。故必使利用之。

三角定規　製法不同。通常係以堅緻之薄木三枚配合而成。其緣附以竹或黑柹。如第三圖。定規兩枚。各具其角之定度。其大小。如 ab 之長。約六寸五分。

第三圖



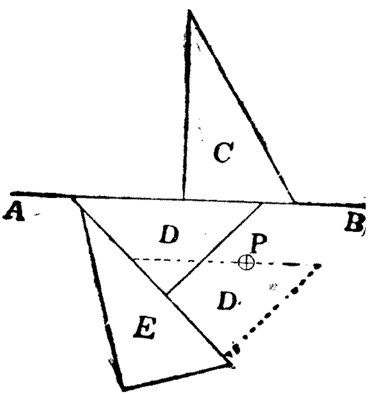
第四圖



此定規之用法。如第四圖。平移於丁形定規規身之上。能作垂線之平行線及傾斜六十度四十五度三十度各直線之平行線。

又如第五圖。取定規兩枚。能任作某直線之平行線及垂線。卽如由 P 點。作 AB 直線之平行線。則以 D 定規之一邊。湊合於 AB。而以其餘之任一邊。合與 E 定規相貼接。乃抵定 E 定規。而令 D 定規向 P 點滑移。至其所與 AB 湊合之一邊適與 P 點相切。乃止勿動。沿其切 P 點之邊。引一直線。卽與 AB 平行。

第　五　圖



又如 C 定規。其夾成直角之兩邊。以一邊湊合於 AB。而依其餘之一邊引一直線。卽爲 AB 之垂線。

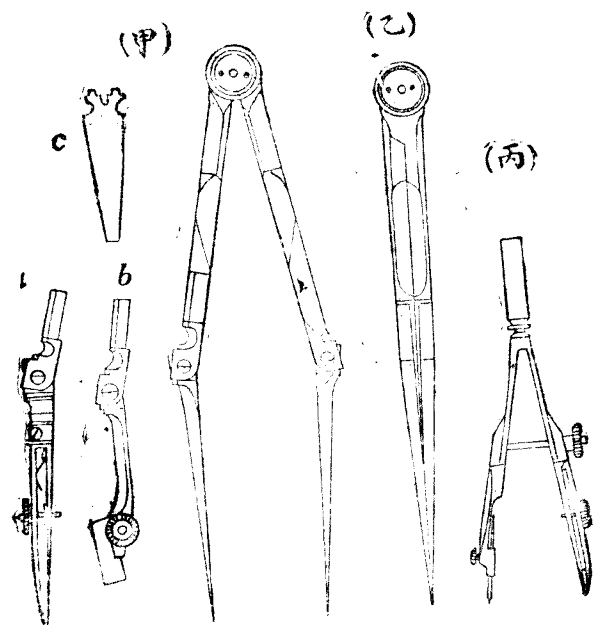
雲形定規　形狀不一。如第六圖。其一種也。此定規係用以規合曲線者。其用法。則於其所測知之各點。取近接之三點或三點以上。而以定規湊合之。乃依規聯其所湊合之點作曲線。至近於其所湊合最後之一點。

第六圖

即止。爲一次所作之曲線。而以最後之一點。併入下次。依同法。接成曲線。遞次如是。得所求之曲線。此用法初時頗困難。固宜加意熟習。此定規以堅緻之木爲之。通常備兩種爲已足。

圓規　種類不一。通常所用者。如第七圖。分兩種。

第七圖



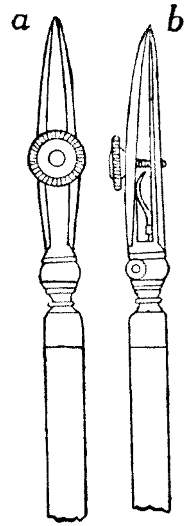
甲種　係備畫圓弧之用。其墨筆如 a。鉛筆如 b。可交替爲用。

乙種　能以其雙股展開之度。勻截各線。又以雙股所幅取之長。移置於其所需用之處。故或特稱之爲分割器。

使用圓規者。當注意於手指之壓力。勿使雙股間所定距離。因此變動　又雙股量爲屈曲。庶使輕抵紙面。成爲垂直。不穿大孔。此外如丙種者。裝墨筆。以之作小圓良便。又圖中 c。係圓規附屬品。爲旋匙。

鋼筆　如第八圖。鋼刃兩片。連柄合鑄。附小旋匙。以司開閉。亦有一片鑄定柄上。其餘一片設活機。去其旋匙。可任意開放。此價值較昂。惟使用以後。洗滌爲甚便也。製圖需此最緊。故宜選擇良品。

第八圖



尺　材質不一。刻度亦各異。畫本書之圖者。祇取竹製之公尺。(即密達尺)其刻度二公寸爲已足。

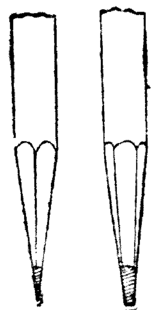
分度器　如圖式所載第十七圖。以銅或獸角爲之。其形半圓。其弧凡分畫一百八十度。

製圖紙　製圖之紙。最精者爲「霍滑特曼」。然計值過昂。故凡取以爲學習之用者。大率係「鏗脫」及其他界以方格之製圖紙。平坦堅硬。能耐橡皮磨擦。

墨　即取尋常之墨黏質少者用之。若洋墨水。則不特損圖畫之美觀。且恐剝蝕畫具。決不可用。

鉛筆 以筆管印有 *HH* 及 *HHH* 之記號爲最適當。(*H*數增其硬度亦增)畫直線者。如第九圖。削成鑿狀。所以使尖端之磨減少。乃能耐久也。 反是畫曲線者削針狀。

第九圖



第十圖

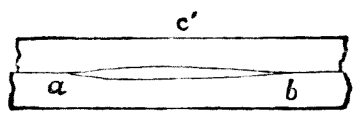
釘 如第十圖。通常取四枚。鎮圖紙之四隅。使着於圖板。若係小圖。祇需二枚。

橡皮擦 凡其質過硬。或攙及沙塵。能損紙面者宜避之。

第二節 畫具之檢驗及修正 直定規之邊。既宜取其眞直。而三角定規之直角。尤當務爲正確。故必密爲檢驗。其有誤差。亟爲修正。

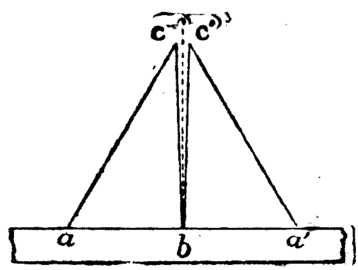
如第十一圖。直定規 *abc*。驗其 *ab* 邊果爲眞直與否。先沿 *ab* 作直線。次以 *abc* 翻爲 *abc'*。仍依 *ab* 作直線。若 *ab* 邊果爲眞直。則前後所作二直線。必疊成一線。如非眞直。則如第十一圖。卽顯其誤差之二倍。宜以刀鋒削之。至所作二線疊成一線而止。

第十一圖



又如第十二圖。三角定規。驗其直角果爲正確與否。先以 ab 邊託於直定規。沿 cb 邊作直線。次以 ab 翻爲 ba'。沿 $c'b$ 作直線。若其直角果爲正確。則前後所作二直線。必疊成一線。否則必有誤差。即依前法修正。

第十二圖



鋼筆需用最繁。故其磨滅亦加甚。宜時磨削以修正之。其法先閉筆尖。滴油。輕磨於砥石之上。使尖頭端正。乃寬旋匙。分別將筆尖。約傾三十度。徐向砥石磨刮。惟愼勿變其原形。磨畢。濡墨試畫。以能作精美之線（如直線則作矩形）而止。其筆尖之形狀。正面如前第八圖 a。略作圓形。俾勿刺紙。側面如 b。宜尖銳。

磨鋼筆者。初時頗憚其難。習久自易。

第三節　<u>製圖之次序</u>　凡完備之圖畫。其作法自宜正確。而所作各線。務取鮮明。紙面上配置亦極適當。乃覺所畫全體。清麗無匹。又時間不妄費。

畫時先於紙面取適當之位置。用鉛筆規定草稿。其誤引之線及引而不用者。以橡皮擦去。是時雖未染墨。而即此鉛筆所鈎。宜已力求鮮明。此當養成習慣也。

次以鋼筆。依草稿。濡墨爲之。先弧線。後直線。因由各直線規合弧線難。而由弧線引各直線易也。畫同心之圓。先規小圓。機叉之雙股。量爲屈曲。庶使經抵紙面成直角。不致穿破圓心成大孔也。如是濡墨畢。分別記列各字。以便舉示。作闌界。圖之右側下端。記作者姓名及年月日。凡此皆以簡明爲主。勿使妄費時刻。若墨筆有誤。或誤引無用之線。則以橡皮或鋒利之小刀削去之。然後以橡皮或麵麭。拭去鉛筆之痕迹及其他之汚染。而又將紙邊切正。乃始告成。

第四節　畫例　畫點及線。便宜設例如次，

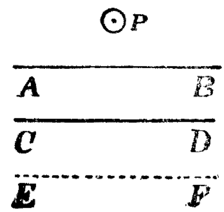
1.　既定之點或所求之點如 P。則作其周圍之小圓。以爲識別。

2.　既定之線如 AB。則作細線。

3.　所求之線如 CD。則作麤線。

4.　解題所用之線。名曰構造線如 EF。則作虛線。

第十三圖



第五節　點　僅占位置。無長無闊無厚。

線　惟計長短。無闊無厚。伸論之。線卽點之積。故線之兩端及兩線之交皆爲點。

直線　任於其線。截取一段。疊置之。無不脗合。以下單言線者。卽指直線而言也。

曲線　任於其線。截取一段。終非直線者也。

平行線　二線同在一平面上。其距離恆相等。又任延長之。決無相交之時。

凡繫重物之絲必向地心下垂。依此方向所作之直線。名爲**垂線**與垂線成正交者爲**水平線**

由一點引異向之二線。其間所夾謂之**角**。稱其所由之點爲頂點或稱**角頂**。其異向之二線爲邊。若由一點引三線。則其公共邊兩側所含之二角。互爲**鄰角**。

一點之周圍。凡分三百六十等分。依此所成之一角。謂之**一度**。每一度分爲六十等分。以其一爲**一分**。每一分分爲六十等分。以其一爲**一秒**。度分秒之記號爲。〃〃。例如五度四十二分三十八秒。則記之爲5°42′38″。

二線相交所成鄰角若相等則此二線互爲**正交**。其交點稱爲**正交點**。各角俱爲**直角**

比直角小者爲**銳角**。比直角大者爲**鈍角**。

兩角之和等於一直角者。則此兩角互爲**餘角**。兩角之和等於二直角者。則此兩角互爲**補角**。

有長有闊無厚者爲**面**。二面之交爲線。

任於面上取兩點聯成直線。若此直線全係貼合面上。則此面爲**平面**。

於平面上畫種種之形。謂之**平面幾何畫法**。

其形係以線向平面圍取之者。謂之**平面形**。在其界內者爲其**面積**。

平面形之界線爲直線者。謂之**多角形**。各直線爲多角形之**邊**。

多角形係三邊者謂之**三角形**。四邊謂之**四角形**。五邊以上類推。

多角形鄰接之二邊所夾之角。在形內者爲**內角**。二直角減內角之餘。爲其**外角**。

多角形不相鄰接之兩角點。聯成直線。爲**對角線**。

多角形各邊各角俱等者爲**正多角形**。

三角形任以一邊定爲**底邊**。則對此底邊之角點爲其**頂點**。由頂點引至底邊之垂線爲三角形之**高**。

三角形三邊皆等者謂之**等邊三角形**。二邊相等者謂之**二等邊三角形**。

三角形有一角成直角者爲**直角三角形**。直角之對邊謂之**斜邊**。

四邊形每相對之邊成平行者謂之**平行四邊形**。

四角形之四角皆成直角者謂之**長方形**或**矩形**。

矩形之各邊相等者謂之**正方形**。

以一曲線圍成平面形。而凡由其線上各點距其形內之中心（或稱圓心）恆相等者謂之**圓**。稱此曲線爲**圓周**。圓周上任取一段謂之**弧**。

貫圓心兩端抵圓周所成直線謂之**直徑**。由圓心至圓周上任意之點聯成直線謂之**半徑**。

由直徑分圓爲兩分。各爲**半圓**。

圓周上任取兩點聯成直線謂之**弦**。

直線僅與圓周交於一點者謂之**切線**其交點謂之**切點**。

圓與多角形一切之邊相切者。圓爲**內切**於多角形。而多角形爲**外切**於圓。

圓與多角形諸角之頂點相接者。圓爲**外接**於多角形。而多角形爲**內接**於圓。

第二章　點,直線,角

第六節　分AB直線爲二等分。〔圖式第一圖〕

畫法　以線之兩端若A若B爲圓心。以大於AB之半者爲半徑。規取兩弧。得其交點若a若b。聯成直線。此直線上任取何點。距AB兩點必相等。故C爲AB線之二等分點。

第七節　由AB直線中P點作AB之垂線。

(其一)　P點在AB之中央。〔圖式第二圖〕

畫法　以P爲圓心。任取半徑。規圓弧與AB線交於a,b兩點。乃以a及b爲半徑。以大於ab之半者爲半徑。規兩弧。得其交點c.聯結cP。此cP線上各點距a,b兩點恆相等。故cP爲ab即AB之垂線。

(其二)　P點近AB之一端。〔圖式第三圖〕

畫法　以P爲圓心。任取半徑。規abc弧。與AB線交於a點。由a點。準前半徑。截取ab。由b點。準前半徑。截取bc。乃由b,c兩點。任取相同之半徑。規兩弧。得其交點d。聯結dP。即所求之垂線。此蓋因APb角,BPc角各爲$60°$。而dP爲bPc角之二等分線。故APd角$=60°+30°=90°$。

第八節 由AB線外P點作AB之垂線。

（其一） P點在AB中央之上方。〔圖式第四圖〕

畫法 以P爲圓心。以大於Pd者爲半徑。規圓弧。與AB線交於ab兩點。乃以a及b爲圓心。以大於ab之半者爲半徑。規兩弧。得其交點c。聯結cP。即所求之垂線。

（其二） P點在AB一端之上方。

畫法甲 任於AB線上取ab兩點〔圖式第五圖〕爲圓心。各以其距P點者爲半徑。規二弧。得其交點若P若C。聯結PC。因ab線上各點距P,C兩點恆相等。故PC即所求之垂線。

畫法乙 任於AB線上取a點。〔圖式第六圖〕聯結Pa。依第六節畫法。得Pa之二等分點o。以o爲圓心。oa爲半徑。規圓弧。與AB線交於b點。聯結Pb。即所求之垂線。此因Pa爲Pba圓之直徑。故Pba角爲直角。

第九節 取一定之距離L。作AB之平行線。〔圖式第七圖〕

畫法 任於AB線上取a,b兩點。各爲圓心。以L爲半徑。規兩弧。作兩弧之公共切線若cd。即與AB平行。

第十節 由P點作AB之平行線。〔圖式第八圖〕

畫法 任於AB線上取a點。以P爲圓心。aP爲半徑。規圓弧。以a爲圓心。仍以aP爲半徑。規圓弧。與AB交於b點。乃

以 a 爲圓心。Pb 爲半徑。規圓弧。與以 P 爲圓心。aP 爲半徑所規之圓弧相交於 c 點。如是則 aPc 角等於 Pab 角。故 Pc 爲所求之平行線。

第十一節　截分一直線使成任意之比率。

例如 AB 爲既定之直線。截分之使成任意之比率如 $5:4:3:5:6$〔圖式第九圖〕

畫法　由 AB 之 A 端任從何向引 Ae 線。任於其上定單位。截分如次。

$Aa=5,\quad ab=4,\quad bc=3,\quad cd=5,\quad de=6.$

聯結 eB。由 a,b,c,d 各點。準與 eB 平行。引 af, bg 等線。即得 AB 線上 f,g,h,i 各分點。合所求之比率。此蓋因 Aaf, Abg, Ach, Adi, AeB 各三角形。皆係相似。

$\therefore Aa:ab:bc:cd:de=Af:fg:gh:hi:iB=5:4:3:5:6$。

第十二節　截分一直線使成若干等分。

例如 AB 爲既定之直線。任意截分爲六等分。〔圖式第十圖〕

畫法　由 AB 之 A 端。任從何向引 Am 線。任取等距離截分如次。

$A1=1.2=2.3=3.4=4.5=5.6.$

聯結 $B.6$。由 $1,2,3,4,5,6$ 各點。準與 $B.6$ 平行。引 $1.a$, $2.b$ 等線。即得 AB 線上 a,b,c,d,e 各分點。合所求之等分。其原理與前節同。

第十三節　求 L,M 兩直線之比例中項。

畫法甲　於一直線上〔圖式第十一圖〕取 $ab=L$, $bc=M$。以 ac 爲直徑。規半圓。由 b 點作 ac 之垂線。與半圓周交於 e 點。則 eb 卽所求之比例中項。此因 ae, ec 聯成直線。所得 abe 及 cbe 兩直角三角形爲相似。

$\therefore ab : be = be : bc.$　卽　$L : be = be : M.$

畫法乙　所定 L,M 兩直線較長者。則於 ab 線〔圖式第十一圖〕之一端向內截取 $bc_1=M$。以 ab 爲直徑。規半圓。由 c_1 點作 ab 之垂線。與半圓周交於 d 點。則 bd 卽所求之比例中項。此因 ad 聯成直線。所得 adb 及 dc_1b 兩直三角形爲相似。

$\therefore ab : bd = bd : bc_1.$　卽　$L : bd = bd : M.$

第十四節　求 L,M 兩直線之第三比例項。〔圖式十二圖〕

畫法　由一點任引兩斜線若 ac 若 ae。於其上取 $ab=L$, $bc=ad=M$。聯結 bd。由 c 點作 bd 之平行線。與 ae 交於 e 點。如是則 $ab : bc = ad : de$。卽 $L : M = M : de$。故 de 卽所求之第三比例項。

第十五節　求 L,M,N 三直線之第四比例項。〔圖式第十三圖〕

畫法　由一點任引兩線若 ac 若 ae。於其上取 $ab=L$, $bc=M$, $ad=N$。聯結 bd。由 c 點作 bd 之平行線。與 ae 交於 e 點。如是則 $ab : bc = ad : de$。卽 $L : M = N : de$。故 de 卽所求之第四比例項。

第十六節　求於 AB,CD 不相平行之兩線間。設一點。令其距兩線等於旣定之長。

於 AB 線取 EF 之距離。於 CD 線取 GH 之距離。求與此相合之一點。〔圖式第十四圖〕

畫法　由 AB 線取 EF 之距離。作其平行線若 FP。由 CD 線取 GH 之距離。作其平行線若 HP。而 FP 與 HP 之交點 P。卽所求之點。而與此相合者。計凡可得四點。

第十七節　求於 AB, CD 不相平行之兩直線間。設一點令其距兩線等於旣定之等距離。

畫法　此與前節所異者。惟 EF 與 GH 相等。依前法。求 AB,CD 之平行線。其交點卽所求之點。

第十八節　求於 BC 線上 B 點。作一等於 A 角之角。〔圖式第十五圖〕

畫法　以 A 爲圓心。任取半徑。規圓弧。與 A 角兩邊交於 a,b 兩點。乃以 B 爲圓心。仍前半徑規圓弧。於此圓弧上取 cd。係等於 ab 弧。聯結 dB。則 dBC 角卽所求之角。此因半徑相同。所作弧線若 ab 若 cd 相等。故其中心角若 A 若 B 亦必相等。

第十九節　求於 AB 線外 P 點引一線。令與 AB 線夾成一角。其度等於 C 角。〔圖式第十六圖〕

畫法　由 P 點。作 AB 之平行線若 Pa。依前法。求得 Pb。與 Pa 夾成等於 C 角之角。故 Pb 卽所求之線。此因 Pa 與 AB 平行。故 PbB 角等於 aPb 角。

第二十節　依分度器作其所求之角。或以分度器測知其所作之角度。

求於AB線上A點作一等於$65°$之角。〔圖式第十七圖〕

畫法　以分度器之中心o移就A點。其邊緣與AB線相貼合。由右檢其$65°$之分點C。誌於紙上。乃去分度器。聯結CA得BAC角。即所求之角。

或其所作爲BAC角。而欲測知其度數。則依前法設置分度器。即顯其爲$65°$之角。

若所求之角比$180°$大。則由$360°$減所求之角。按其餘度。於其反對之側作之可也。而所作爲大於$180°$之角。亦依同理測知之。

第二十一節　求於二直線間所夾之角。作其二等分線。

(其一)　ABC角之二等分線。係由其角點推定者。〔圖式第十八圖〕

畫法　以B爲圓心。任取半徑。規圓弧。與ABC角之二邊交於AC兩點。以A及C爲圓心。以大於AC之半者爲半徑。規二弧。得其交點d。則Bd即所求之二等分線。此因Bd正交於A,C之中點。故ABd角$=dBC$角。

(其二)　AB,CD兩線所夾之角。其二等分線不由其角點推定者。〔圖式第十九圖〕

畫法　任從何向作mn線。與AB,CD兩線交於m,n兩點。

準前法。求 Amn 角之二等分線若 mo。又求 Cnm 角之二等分線若 no。其交點爲 o。而此 o 點距 AB, CD 兩線必相等。故 o 爲所求二等分線上之一點。又求 Bmn 角之二等分線若 mp。求 Dnm 角之二等分線若 np。其交點爲 p。依同理。p 亦爲所求二等分線上之一點。故聯結 op。爲所求之二等分線。

第二十二節　分 ACB 直角爲三等分。〔圖式第二十圖〕

畫法　以角點 C 爲圓心。任取半徑 CA。規圓弧。與直角之二邊交於 A,B 兩點。以此兩點爲圓心。仍準 CA 爲半徑。規兩弧。與 AB 弧交於 a,b 兩點。如是則 Ca, Cb 卽所求之等分線。此因半徑 CA 所成之等邊三角形。如 ACa 角 $=BCb$ 角 $=60°$。故 Acb 角 $=bca$ 角 $=acB$ 角 $=30°$。

第二十三節　求於 P 點作一線。令通於 AB, CD 兩線之交點。惟此交點係難於直接使用者。〔圖式第二十一圖〕

畫法　貫 P 點。任作 bd 直線。與 AB 交於 b。與 CD 交於 d。任取若干距離。準與 bd 平行。作 ac 線。與 AB 交於 a。與 CD 交於 c。聯結 bc。又由 P 點準與 CD 平行引 Pe 線。與 bc 交於 e。由 e 點準與 AB 平行引 ef 線。與 ac 交於 f。如是則 Pf 卽所求之線。

此蓋因 bPe 與 bdc 兩三角形相似。cef 與 cba 兩三角形亦爲相似。故有比例如次。

$bP : Pd = be : ec = af : fc$ ……………………………………(1)

如令 AB, CD 兩線之交點爲 Q。而 PQ, ac 兩線之交點爲 f'。因 ac 與 bd 平行。故有比例如次。

$$Qf':QP=f'c:Pd.$$

$$Qf':QP=af':bP.$$

即 $$f'c:Pd=af':bP.$$

$$bP:Pd=af':f'c.$$

此與(1)式參證。知 f' 必與 f 疊成一點。故 f 為所求線上之一點。

第二十四節 求於 P、Q 兩點引兩線同抵於 AB 線上之一點。令與 AB 線夾成相等之角。〔圖式第二十二圖〕

畫法 由 P 點引一線。令與 AB 線正交於 r 點。引長至 s。令 $rs=Pr$。聯結 sQ。與 AB 交於 t 點。如是則 Pt, Qt 即所求之二線。此因 rt 正交於 Ps 之中點。故 Ptr 角 $=rts$ 角。而 rts 角為 QtB 角之對頂角。必相等。故 $PtA=QtB$ 角。

練習題一

1. A,B 兩點之距為二寸。求距 A 一寸二分距 B 一寸八分之一點。

2. AB 線長二寸四分。求於 A 端及 AB 線上距 A 一寸之 C 點各作 AB 之垂線。

3. 任作一直線。於其一端之上方任設一點。作垂線。

4. PQ 線長一寸七分五釐。求於其中點作垂線。

5. AB 線長六分。CD 線長一寸一分。EF 線長三寸。試截分 EF 線。令其比率等於 AB 與 CD 之比。

6. 任從何向。作 AB 線。距一寸五分。作其平行線。

7. AB線長三寸二分。試截成 $3:5:4:2:4$ 之比率。

8. AB線長三寸。試截爲七等分。

9. 距AB線一寸五分。設P點。由此點引一線。令與AB線夾成$50°$之角。

10. AB線長九分。CD線長一寸六分。試求其比例中項。

11. 任作二直線。令夾成一角。求此角之二等分線。惟勿由其角點推定。

12. AB,CD兩直線。不相平行。求距AB一寸距CD八分五釐之一點。

13. AB,CD兩線。不相平行。另設P點。由P點。引一線。令通於AB,CD之交點。惟此交點係離於直接使用者。

14. P點距AB線一寸。Q點距AB線三寸三分。P,Q兩點之距二寸。由此兩點引向AB線上R點所成PR,QR兩線之和。必使最小。求R點之位置。

第三章　尺度

第二十五節　凡製圖者必賴**尺度**。如截分直線。及任於直線測取單位。皆以善用尺度而始能得其精密者也。

所繪各物。與其眞狀大小脗合者。名爲眞尺之圖。若物體之大溢於紙面之容積。則當取物體各線。量爲縮短。或取二分之一。或取三分之一四分之一。循是類推。以縮臨紙上。謂之縮尺之圖。例如物體一尺。紙上縮爲五寸。則爲縮尺二分之一。蓋視其縮小之比率。而定爲縮尺幾分之幾也。

繪微細物體。難於精密。則宜取各線量爲伸長。定其比率。

以上伸縮之比率。悉由畫者便宜酌定。惟其所用伸尺縮尺。須於圖面標明尺度。并誌其伸縮之比率。

尺度種類雖多。然其作法大旨相類。故本書祇就中國尺度。略述其作法如次。 伸尺之作法。與縮尺無異。縮尺用處較廣。故以下專述縮尺之作法。

第二十六節 普通尺之作法

普通尺〔圖式第二十三圖〕係以若干長平行線與其所正交之若干短平行線構成者也。述其作法如次。

第一例 準縮率十五分之一。求作全長九尺之縮尺。并誌其尺寸之分畫。〔圖式第二十三圖〕

畫法 令x爲所求縮尺之長。準縮率得式如次。

$$15:9=10:x.(10\text{寸即}1\text{尺}) \quad \therefore \quad x=6\text{寸}.$$

即全長九尺之縮尺。合於眞尺六寸若AB。乃依第十二節畫法。分AB爲九等分。以左端之一等分。依同法。更分爲十等分。即成縮尺上尺寸之分畫。記0於左端第一等分與第二等分間。向右記1,2,3,4,5,6,7,8。向左記5,10。其橫引各平行線間之距離。雖可任意設置。然亦當與尺度相應。量爲增減。

用法 用此尺度者。由0向右檢知尺數。由0向左檢知寸數。例如檢五尺三寸者。以圓規之一端抵定0右之5。而以其餘一端抵定0左寸之第三分畫。如是則圓規兩端分張之度。適足五尺三寸。

九等分中僅左端一等分作寸之細畫。蓋例舉之也。

第二例　準縮率三萬分之一。求作全長十里之縮尺。幷誌其里步之分畫。〔圖式第二十四圖〕

畫法　令x為所求縮尺之長。準縮率得式如次。

1里$=360$步$=1800$尺

$30000:10\times 1800=10:x$(10寸卽1尺).　$\therefore\ x=6$寸.

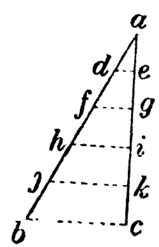
卽全長十里之縮尺。合於眞尺六寸若AB。分作十等分。爲里數之分畫。以左端之一等分。更分作六等分。爲每六十步之分畫。記0於左端第一等分與第二等分間。向右記自1至9各數。向左記180,360。檢法與前同。圖中a,b之距爲7里120步。

第二十七節　斜線尺之作法

斜線尺。係以若干斜線截分若干平行線而構成之者也。能測取微細之長。而致其精審。

如第十四圖。abc直角三角形。任於其ac邊截分e,g,i,k各點爲五等分。由各分點作底邊bc之平行線。與ab斜邊交於d,f,h,j各點。得式如次。

第十四圖



$$\frac{de}{ae}=\frac{fg}{ag}=\frac{hi}{ai}=\frac{jk}{ak}=\frac{bc}{ac}.$$

而 $ac=5ae,\ ak=4ae,\ ai=3ae,ag=2ae$. 若假定爲五分。

則$de=1$分,$fg=2$分,$hi=3$分,$jk=4$分。

斜線尺種類雖多。要不外此原理。

第一例　準縮率三十分之一。求作全長十五尺之縮尺。并誌其尺寸之分畫。〔圖式第二十五圖〕

畫法　令x爲所求縮尺之長。準縮率得式如次。

$30:15=10:x$(10寸卽1尺)． ∴ $x=5$寸．

卽全長十五尺之縮尺。合於眞尺五寸若AB。準與AB平行。任取相等之距離。作平行五線。截分爲十五等分。由其左端一等分內ab線之中點5。引向40兩點。成$5A$,50兩斜線。按次紀數。卽成所求之縮尺。

用法　由0向右檢知尺數。由0向左檢斜線知寸數。圖中兩細黑點之距。爲九尺七寸。

第二例　求作全長六寸之斜線尺。使能檢分釐之數。〔圖式第二十六圖〕

畫法　幅取眞尺六寸若AB爲斜線尺之全長。準與AB平行。任取相等之距離。作平行十線。截分爲六等分。於其左端一等分內$0A$,ac兩線。各截爲十等分。順次聯結各分點使成斜線。紀明數目。卽成所求之斜線尺。

用法　由0向右檢知寸數。由$0A$線上分目檢知分數。由Ac線上分目檢知釐數。如欲檢知三寸六分四釐。則於$0A$線上6點所引之斜線與Ac線上4點所引之水平線。檢其相交之點。作細黑點誌之。乃由0向右檢其由3點所引之垂線與第四平行線之交點。作細黑點誌之。如是則兩黑點間之距。合於所求之三寸六分四釐。作法之原理。與前同。

練習題二

1. 準縮率十分之一。求作全長五尺之縮尺。并誌其尺寸之分畫。

2. 試依第二十六節第二例所定尺度。求其畫法。

3. 求作全長五寸之斜線尺。使能檢分釐之數。

第四章　圓

第二十八節　求 ABC 圓之中心。〔圖式第二十七圖〕

畫法　任於圓周上取 A,B,C 三點。作 AB,BC 兩弦。各求中點。由中點引垂線。得其交點 O。即所求之圓心。此因 O 爲由兩弦中點所引垂線之交點。其距 A,B,C 三點必相等。故爲圓心。

第二十九節　以 R 爲半徑。求作一圓。令圓周通於一直線上 A,B 兩點。〔圖式第二十八圖〕

畫法　以 A 爲圓心。R 爲半徑。規圓弧。又以 B 爲圓心。R 爲半徑。規圓弧。兩弧交於 O 點。即以 O 爲圓心。R 爲半徑。規圓周。則 $OA=OB$。故合所求。

第三十節　任設 A,B,C 三點。惟不在一直線上。求以此三點規合圓周。

(其一)　紙面寬展能求圓心者。〔圖式第二十七圖〕

畫法　聯結 AB,BC 兩線。各由中點引垂線。得其交點 O。此 O 點距 A,B,C 三點必相等。故即爲所求圓周之中心。故以 O 爲圓心。OA 爲半徑。規圓周。合所求。

（其二） 限於紙幅不能求圓心者。〔圖式第二十九圖〕

畫法 以A及B爲圓心。AB爲半徑。規Ba及Ab兩弧。聯結AC,BC兩線。各延長之。與兩弧交於a,b兩點。取$a1$弧令等於$b1$弧。聯結$A1,B1$兩線。得其交點p。此p點必爲所求圓周上之一點。蓋Ab,Ba爲同一半徑之兩弧。而$a1=b1$。故$aA1$角等於$bB1$角。故ACB,ApB兩三角形內。CAB角$+CBA$角$=pAB$角$+pBA$角。ACB角$=ApB$角。故p爲ACB弧上之一點。

又依同理取$a5$弧等於$b5$弧。更推之12,23,34等弧。求如P點者凡若干點。用雲形定規聯結之。卽成所求之弧線。

此當從Ab,Ba兩弧上a,b兩點爲起點。截取相等各小弧爲便。

第三十一節 求於AB線上作弧線。所成圓周角令等於C角。〔圖式第三十圖〕

畫法 由AB線上B點。準與C角相等。作ABm角。又由B點作Bm之垂線。由AB之中點n作AB之垂線。兩垂線交於o點。卽以o爲圓心。oB爲半徑。規BpA卽所求之弧線。此因Bm爲切線。與AB線夾成之角。其度必與圓周減BpA弧之餘折半相等。故ApB角卽ABm角。等於C角。

此無論C角爲銳爲鈍。其理恆同。惟C角爲鈍。則圓心O在所求之形外。

第三十二節 由O圓內P點。引一弦。令其長等於L。〔圖式第三十一圖〕

畫法　任取圓周上 a 點。引 ab 弦。令其長等於 L。由圓心 O 引 ab 之垂線若 Oc。乃以 O 爲圓心。Oc 爲半徑。規圓周。由 P 點引此圓周之切線若 CD 若 EF。卽所求之弦。此因圓內各弦距圓心相等者。其長亦必相等故也。

第三十三節　由圓周上一點引一切線。

(其一)　由圓心求之者。〔圖式第三十二圖〕

畫法　P 爲圓周上一點。O 爲圓心。聯結 PO。由 P 點引 PO 之垂線若 Pa。卽所求之切線。此因切線與由切點所引之半徑必成正交故也。

(其二)　不由圓心求之者。〔圖式第三十三圖〕

畫法　R 爲圓周上一點。以 R 爲圓心。任取半徑。截圓周於 a,b 兩點。聯結 ab。由 R 點準與 ab 平行作 Rc。卽所求之切線。此因由 R 引半徑。必與 ab 弦正交於中點故也。

第三十四節　由圓外一點引切線。

(其一)　由圓心求之者。〔圖式第三十二圖〕

畫法甲　Q 爲圓外一點。以 Q 爲圓心。規圓弧。令通於圓心 O。又以 O 爲圓心。O 圓之直徑爲半徑。截 Q 圓於 b 點。聯結 Ob。與 O 圓交於 c 點。如是則 Qc 卽所求之切線。此因 Ob 弦等於 O 圓之直徑。c 爲 Ob 之中點。故 Qc 係與 Oc 卽 O 圓之半徑成正交。

依同法作 Qd。亦爲所求之切線。

畫法乙 R 爲圓外一點。聯結 OR。命爲直徑。作圓周。與 O 圓交於 e 點。聯結 Re。即所求之切線。此因 ReO 角兩邊抵直徑 OR 之兩端。其角點抵圓周。故必成直角。

依同法作 Rf。亦爲所求之切線。

(其二) 不由圓心求之者。〔圖式第三十三圖〕

畫法 S 爲圓外一點。由 S 點任從何向作 Se 線。與圓周交於 d,e 兩點。以 Se 爲直徑。作 Sfe 半圓。由 d 點作 Se 之垂線若 fd。與所作半圓交於 f 點。乃以 S 爲圓心。以 Sf 爲半徑。截圓周於 g,h 兩點。聯結 Sg,Sh。即所求之切線。

此因 $Sd\times Se=(Sf)^2=(Sg)^2=(Sh)^2$.

故 g,h 兩點必爲由 S 所引切線之切點。(參證第十三節)

第三十五節 作二圓之公共切線。〔圖式第三十四圖第三十五圖〕

畫法 O,O' 爲二圓心。聯結 OO'。與二圓周交於 a,b 兩點。即於 OO' 上取 ac。令等於 $O'b$。以 O 爲圓心。Oc 爲半徑。規圓周。由 O' 點引此圓之切線。其切點爲 d。而 Od 交 O 圓周於 e 點。由 e 點準與 dO' 平行作 ef。即所求之切線。此因 Od 與 $O'd$ 成正交。Oe 與 ef 亦成正交。而 de 等於 $O'f$。故 ef 爲所求之切線。

依同法作 hg。亦爲所求之切線。

第三十六節 以既定之半徑。求作一圓。令與 O,O' 二圓相切。〔圖式第三十六圖第三十七圖第三十八圖〕

畫法　聯結OO'。於其上取ab及cd。令各等於其所既定之半徑。(圖中所取ab,cd尺寸不齊係便宜爲之)以O爲圓心。Ob爲半徑。規圓弧。以O'爲圓心。$O'd$爲半徑。規圓弧。兩弧交於o點。聯結$Oo,O'o$二線。與O,O'二圓交於e,f兩點。則o即所求之圓之中心。以oe爲半徑。即合所求之圓。

此畫法(第一)係凡相切兩圓。其兩圓心之聯結線。必貫切點。(第二)係凡外切兩圓。其兩圓心之距。等於兩圓半徑之和。而凡內切兩圓。其兩圓心之距。等於兩圓半徑之差。

第三十七節　求作一圓。令與AB線切於Q點。而通過於AB線外之P點。〔圖式第三十九圖〕

畫法　聯結PQ。於其中點引垂線若ao。又於Q點作AB之垂線若Qo。兩垂線交於o點。則o即所求之圓之中心。以oQ爲半徑。即合所求之圓。

第三十八節　求作圓周。令與AB線相切。而通過於AB線外P,Q兩點〔圖式第四十圖〕

畫法　聯結PQ。延長其P端。至與AB線交於a點。以aQ爲直徑。作abQ半圓。由P點引aQ之垂線。與半圓交於b點。以a爲圓心。以ab爲半徑。規半圓。截AB線於c,d兩點。由此兩點各作AB之垂線。又由PQ之中點e作PQ之正交線。與由c,d所作之垂線交於o,o'兩點。此兩點即所求之圓之中心

此因ab爲aP,aQ之比例中項。(參證第十三節)

$(ab)^2=aP\times aQ$, 因 $ac=ad=ab$. 故 $(ac)^2=(ad)^2=aP\times aQ$.

第三十九節 求作圓周。令與 O 圓相切。而又通過於 P,Q 兩點。〔圖式第四十一圖〕

畫法 任作 $PbcQ$ 圓。係通於 P,Q 兩點。而與 O 圓交於 b,c 兩點聯結 PQ,bc 兩線。各延長之。相交於 a 點。由 a 點依第三十四節畫法。作 O 圓之切線。得其切點若 d 若 e。如是則由 PeQ 三點或 PdQ 三點作圓周。俱合所求。

此蓋因 $aP\times aQ=ab\times ac=(ad)^2=(ae)^2$.

故 d,e 兩點。皆係所求之圓與 O 圓相切之點。

第四十節 求於 AB,CD 兩線間 Q 點引兩圓。令各與 AB,CD 兩線相切。〔圖式第四十二圖〕

畫法 依第二十一節畫法。求於 AB,CD 兩直線間所夾之角。作其二等分線若 oo'。由 Q 點作 oo' 之垂線若 Qe。延長之。至與 AB (或 CD) 交於 a。於此延長線上截取 ep 令等於 Qe。乃由 Q,p 兩點。依第三十八節畫法。求與 AB 相切。作一圓。此圓既與 AB 相切。必兼與 CD 相切。(因 oo' 係 AB,CD 所夾角之二等分線)因是求得 ap,aQ 之比例中項爲 ab。卽由 AB 線上截取 ad,ac 各等於 ab。由 d,c 兩點。作 AB 之垂線與 oo' 線交於 o,o' 兩點。此兩點卽所求兩圓之中心。以 $oQ,o'Q$ 爲半徑。卽合所求之兩圓。

第四十一節 由 P 點求作一圓。令與 O 圓及 AB 線相切。

(其一) 兩圓外切。〔圖式第四十三圖〕

畫法　準與 AB 線成正交。作 O 圓之直徑若 fg。延長其 g 端。至與 AB 正交於 h。聯結 Pf。延長 P 端。至與 AB 交於 a。準 P,g,h 三點。規合圓周。與 fP 交於 q 點。乃依第三十八節畫法。貫 P,q 兩點。準與 AB 線相切。求作圓周。即得其圓心若 o 若 o'。俱合所求。

此蓋因 P,q,g,h 四點同在一圓周上。

$$fq \times fP = fg \times fh \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

聯結 fd。如令 fd 與 O 圓周之交點爲 i。則 fig 與 fhd 兩三角形相似。　$fg \times fh = fi \times fd$

準(1)式。　$fq \times fP = fi \times fd \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

然若以 i 爲 fd 與 o 圓之交點。其比例式視(2)式絕無以異也。故 i 必爲 O,o 兩圓周共有之一點。

次由 i 點作 iO,io 兩半徑。成 fiO 及 dio。俱爲二等邊三角形。因 Ofi 角 $=odi$ 角。故 fiO 角等於 dio 角。是 Oio 係聯成一直線。即 o 必爲所求之圓之中心。

依同理。o' 亦必爲所求之圓之中心。

(其二)　兩圓內切。〔圖式第四十四圖〕

畫法　命 O 圓半徑爲 r。即取 r 距離。準與 AB 平行。作 cd 線。以 P 爲圓心。r 爲半徑。規圓周。依前法。貫 O 點作圓周。令外切於其所作之 P 圓及 cd 線。即得其圓心若 o 若 o'。於其半徑加 r 若 oa 若 $o'b$。以 o 爲圓心。oa 爲半徑。以 o' 爲圓心。$o'b$ 爲半徑。作圓周。俱合所求。

第四十二節　求作圓周。令與O圓相切。且切於AB直線上之P點。〔圖式第四十五圖〕

畫法　由P點引AB之垂線若Po。由其P端下引至a。令Pa等於O圓半徑。聯結Oa。於其中點b引Oa之垂線若bo。與Po交於o。以o爲圓心。Po爲半徑。即合所求之圓周。此因Ooa爲二等邊三角形。Oo等於oa。故減去Od, Pa。餘od, oP亦相等。

依同理。由Po之o端上引至a'。令Pa'等於O圓半徑。聯結Oa'。於其中點b'引Oa'之垂線若$b'o'$。與Pa'之延長線交於o'。則o'亦必爲所求之圓之中心。

第四十三節　求作圓周。令與AB線相切。且切於O圓周上之P點。〔圖式第四十六圖〕

畫法　作OP半徑。由P點作O圓之切線若Pa。與AB線交於a點。乃於Pa與AB所夾之角。作其二等分線若ao若ao'。與OP之延長線交於o,o'兩點。以此兩點各爲圓心。以oP, oP'爲半徑。規兩圓周。則一與O圓外切。一與O圓內切。俱合所求。此因oo'與Pa成正交。o,o'兩點係在PaB角PaA角之二等分線上。故其距AB,Pa兩邊恆相等。

第四十四節　求作圓周。令與三直線相切。

畫法　任取三線所夾成之二角。各作二等分線。此兩二等分線之交點。距三線必相等。故即爲所求之圓之中心。而依此解答。凡可作四圓。俱合所求。若三線中有二線係平行者。則僅得二圓而止。

第四十五節　求作互切若干圓。且各與AB, CD兩直線相切〔圖式第四十七圖〕

畫法　依第二十一節畫法。求AB, CD兩直線所夾之角之二等分線若mn。任於mn線上取o_1點。由此點作AB（或CD）之垂線若o_1a。以o_1爲圓心。o_1a爲半徑。作圓周。必與AB, CD兩線相切。故o_1圓爲所求之第一圓。而此圓周與mn交於b點。由b點引o_1圓之切線卽mn之垂線若bc。截取cd令等於bc。由d點作AB(或CD)之垂線若do_2。與mn交於o_2。以o_2爲圓心。o_2d爲半徑。作o_2圓。爲所求之第二圓。蓋$bcdo_2$四邊形。cd等於bc。而o_2bc角與o_2dc角同爲直角。故o_2b等於o_2d。

又o_2圓與mn交於e點。由e點作mn之垂線若ef。截取fg令等於ef。由g點作AB之垂線若go_3。與mn交於o_3。以o_3爲圓心。o_3g爲半徑。作o_3圓。爲所求之第三圓。循是類推。得第四以下各圓。俱合所求。

練習題三

1.　A,B之距一寸二分。B,C之距一寸四分。C,A之距一寸六分。求聯此三點成一圓周。

2.　A,B之距一寸。B,C之距一寸八分。C,A之距二寸五分求作ABC弧。惟勿先求圓心。

3.　弦長二寸一分。求於此弦上作弧線。所成圓周角。令等於$65°$。

4.　弦長同前題。令圓周角等於130°。

5.　圓徑一寸八分。距其圓心一寸五分處設一點。由此點求作切圓線。

6.　小圓徑一寸。大圓徑一寸七分。兩圓心之距二寸。求作兩圓之公共切線。

7.　求作互切三圓。其圓徑一爲一寸。一爲一寸五分。一爲一寸八分。

8.　求作圓周。令貫Q點。而又與AB線上P點相切。其Q點距AB爲七分。距P點爲一寸二分。

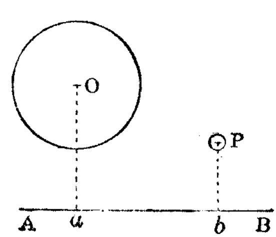
9.　求作圓周。令貫P,Q兩點。而又與O圓相切。其O圓徑爲一寸七分五釐。P點距圓心O二寸一分。Q點距圓心O一寸五分。

10.　作AB,AC兩線。令夾成45°之角。於其距AB四分距AC一寸之處設P點。貫P點作圓周。令與AB,AC兩線相切

11.　引二線。令夾成40°之角。求作大小互切之兩圓。令各與所引之二線相切。惟小圓半徑。須令等於6分。

12.　如第十五圖。O圓徑一寸六分。Oa,ab各爲一寸八分。Pb八分。求作圓周。令貫P點。而又與AB線及O圓相切。

第十五圖



第五章 多角形

第四十六節　已知L,M,N三邊。求作三角形。〔圖式第四十八圖〕

畫法　準與L等長作ab線。以a為圓心。N為半徑。規取cd弧又以b為圓心。M為半徑。規取ce弧。兩弧交於c點。聯結ca,cb。即成abc。合所求之三角形。

作等邊三角形或二等邊三角形法同。

第四十七節　已知L,M二邊及其夾角B。求作三角形。〔圖式第四十九圖〕

畫法　準與L等長作bc線。依第十八節畫法。作cba角係等於B角。其ba之長卽等於M故聯結ac。卽成abc。合所求之三角形。

第四十八節　已知L,M二邊及M邊所對之角A求作三角形。〔圖式第五十圖〕

畫法　作ac線。由a點引ab線。令與ac線夾成A角。其ab之長卽等於L以b為圓心。M為半徑。規圓弧。與ac線交於c。聯結cb。卽成abc。合所求之三角形。

此若M比L長。則abc祇得一形而止。若M比L短。則以b為圓心。M為半徑。所作圓弧。必與ac線相交於兩點。故abc有二形俱合所求。然若bc適為ac之垂線。則祇成abc直角三角形一形而止。

第四十九節 已知L邊及其兩端B,C兩角。求作三角形。〔圖式第五十一圖〕

畫法 準與L等長作bc線。於其b端引ba線。令與bc夾成B角。又由c端引ca線。令與bc夾成C角。其ba, ca之交點爲a。卽成abc。合所求之三角形。

(附誌) 凡三角形內角之和.等於二直角.故若既知之二角.一在L邊之一端.一爲L邊之對角.則以二直角減既知之二角得第三角.于是取L邊兩端之兩角如法求之可矣.

第五十節 已知底邊L高H及底邊一端之B角。求作三角形。〔圖式第五十二圖〕

畫法 準與L等長作bc線。於其b端引ba線。令與bc夾成B角。取H距離。準與bc平行作ca。與ba線交於a。聯結ca。卽成abc。合所求之三角形。

第五十一節 已知底邊M,其餘二邊之和L及底邊一端之A角。求作三角形。〔圖式第五十三圖〕

畫法 準與M等長作ab線。於其a端引ad線。令與ab夾成A角。其ad之長。卽等於L。聯結db。由b點引bc線。令與db夾成dbc角等於adb角。如是則abc卽所求之三角形。此因bcd爲二等邊三角形。故bc等於cd。卽$ac+bc=L$。故abc爲所求之三角形。

第五十二節 已知底邊L,高M及頂角A。求作三角形。〔圖式第五十四圖〕

畫法　準與L等長作bc線。依第三十一節畫法。求於bc線上。作$baa'c$弧。所成圓周角。令等於A角。乃取M距離。準與bc平行作aa'線。與弧線交於a。聯結ba,ca兩線。即成abc。合所求之三角形。aa'又與弧線交於a'。故$a'bc$亦合所求。

第五十三節　已知底邊L。求作正方形。〔圖式第五十五圖〕

畫法甲　準與L等長作ab線。於其a,b兩端作垂線。令與ab等長。即得ad,bc兩線。聯結dc成$abcd$。合所求之正方形。

畫法乙　準與L等長作ab線。以a及b各爲圓心。L爲半徑。規取兩弧。交於e點。其ae弧二等分於f點。準與ef等長。截取ec,ed。聯結ad,bc,cd三線成$abcd$。合所求之正方形。

此因弦與半徑等長者。其兩端與圓心聯成直線。必成等邊三角形。所夾各角皆爲$60°$。故eab角等於$60°$。而ead角爲eab角之半。故等於$30°$。故dab角爲直角。依同理。abc角亦爲直角。如是則$ad=bc=ab$。故$abcd$爲所求之正方形。

第五十四節　已知邊長L。求作正六角形。〔圖式第五十六圖〕

畫法　準與L等長作ab線。以a及b爲圓心。ab爲半徑。規兩弧。得交點o。以o爲圓心。ab爲半徑。規圓周。順次由b點準與ab等長。遞向圓周截取c,d,e,f各點。遞以各點聯成直線。即成$abcdef$。合所求之正六角形。蓋$abcdef$形之每邊。等於所作圓周之半徑。而此圓周即係所求正六角形之外切圓。

第五十五節 定每邊之長爲 L。任作一正多角形。〔圖式第五十七圖〕

畫法 準與 L 等長作 ab 線。任於其 b 端延長之。以 b 爲圓心。任取半徑。作半圓。如欲作五等邊形。則用分度器。分所作半圓爲五等分。由左向右記 1,2,3,4,5 各分點。聯結 $3b$。由其 3 端延長至 c。令 bc 等於 ab。由 ab 之中點 f 作 ab 之垂線若 of。由 bc 之中點 g 作 bc 之垂線若 og。卽此二垂線之交點爲 o。以 o 爲圓心。oa 爲半徑。作圓周。順次由 c 點準與 ab 等長。遞向圓周截取 d,e 各點。遞以各點聯成直線。卽得 $abcde$。合所求之正多角形。

此蓋因 n 等邊之正多角形。其每一內角之度數。恆等於二直角 $\times (n-2) \div n$。今任定爲五等邊形。則每一內角之度。必爲二直角 $\times \frac{3}{5}$。故所作 abc 角。合於正五角形之一角。

依此法任作若干等邊之正多角形。蓋無不可。

第五十六節 求作 ABC 三角形之內切圓。〔圖式第五十八圖〕

畫法 依第二十一節畫法。作 A, B 兩角之二等分線。其交點爲 o。以 o 爲圓心。由 o 點作 AB(或 BC 或 CA)之垂線若 oa 爲半徑。卽合所求之圓周。

此因角之二等分線上各點。距其夾角之二邊恆相等。而 o 爲兩二等分線上共有之點。故其距三邊無不相等。

第五十七節　<u>求作 ABC 三角形之外接圓。</u>〔圖式第五十九圖〕

畫法　依第三十節畫法。就 A,B,C 三點。規各圓周。即合所求之外接圓。

第五十八節　<u>求作 O 圓之內接正三角形及內接正六角形。</u>〔圖式第六十圖〕

畫法　任於圓周取 a 點爲圓心。即以 O 圓之半徑爲半徑。規圓弧。與 O 圓周交於 f,b 兩點。聯結 fb 爲半徑。b 爲圓心。規圓弧與 O 圓周交於 d 點。聯結 df,db。即成 bdf。合所求之正三角形。

次於圓周任取 a 點。準與 O 圓半徑相等。由 a 點遞向圓周截取 b,c,d,e,f 各點。遞以各點聯成直線。即成 $abcdef$。合所求之正六角形。此因圓半徑恆與其內接正六角形之每一邊相等故也。

第五十九節　<u>求作 O 圓之內接正方形及內接正八角形。</u>〔圖式第六十一圖〕

畫法　任作直徑 ac。由圓心 O 作 ac 之正交線若 bd。亦爲直徑。即就 a,b,c,d 四點。順次聯成直線。合所求之正方形。

次由正方形各邊之中點。作各邊之垂線。令與圓周相交。凡得其交點四或就 ab,bc,cd,da 四弧各求其中點。凡得其中點四。併 a,b,c,d 四點。即合所求正八角形之角點。

此因正方形兩對角線恆相等。且必於其中點互成正交。而一圓周上相等之弧所對之弦亦必相等云。

第六十節 求於 O 圓內任作一內接正多角形。〔圖式第六十二圖〕

畫法 依第五十五節畫法。任定爲五等邊成正五角形。而知其每一角之度數。依此度數由圓心 O 作 cOf 角。由 Of 之 O 端延長之。至與圓周交於 d。聯結 dc。此 dc 即係內接正五角形之一邊。故由 d 點準與 dc 等長。遞向 O 圓周截取 e,a,b 各點。遞以各點聯成直線。即成 $abcde$。合所求之正多角形。

此因 cOf 角即所求正多角形之一角。而 cOd 角爲其外角。凡正多角形外角之和。恆等於四直角。故繞 O 點之周圍。能分若干 cOd 角。即係若干等邊。今任定爲正五角形。其 cOf 角。爲正五角形之一角。則 cOd 角必爲四直角之五分之一。故 cd 爲五等邊形之一邊。

第六十一節 求於 O 圓外任作一外切正多角形。

畫法 準前節畫法。任定正多角形之邊數。得 O 圓內接正多角形之角點。由各角點作 O 圓之切線。各切線相交。即成所求之正多角形。

此因圓外一點引兩切線。其一點與兩切點之距恆相等。故 O 圓之外切正多角形。每鄰接之兩切點。其距皆相等。

第六十二節 求於任意所設之正多角形若 $ABCDE$。其邊數爲奇。作其內切外接兩圓。〔圖式第六十三圖〕

畫法 任由 C, D 兩角點作其對邊 EA, AB 之垂線若 Ca 若 Db。其交點爲 o。以 o 爲圓心。ob 爲半徑。合所求之內切圓。oC 爲半徑。合所求之外接圓。

此因Ca, Db兩線。爲C,D兩角之二等分線。故o點距正多角形之各邊皆相等。又Ca, Db兩線。卽於EA, AB兩線之二等分處成正交。故o點距正多角形之各角點皆相等。

第六十三節 求於任意所設之正多角形若$ABCDEF$。其邊數爲偶。作其內切外接兩圓。

畫法 任取相對兩角點若A, D若B, E。聯成兩對角線。其交點爲o。以o爲圓心。由o作一邊之垂線爲半徑。卽合所求之內切圓。以oA爲半徑。合所求之外接圓。

此因由o點作AB,BC兩邊之垂線若oa若ob。所成oaB, oBb兩三角形必相等。故$oa=ob$。卽o點距各邊皆相等。又oaA, oaB兩三角形必相等。故$oA=oB$。卽o點距各角點皆相等。

第六十四節 求作一正八角形。計凡相對四邊。令與$ABCD$正方形相疊合。〔圖式第六十四圖〕

畫法 作$ABCD$正方形之兩對角線若AC若BD。其交點爲o。以o爲圓心。oA爲半徑。得$ABCD$之外接圓。貫圓心o作AB,BC二邊之正交線若ij若kl。各係直徑。聯i, k, j, l四點成$ikjl$正方形。與$ABCD$正方形相交成$abcdefgh$。合所求之正八角形。

此因Dmf與ifn兩三角形內。$Dm=in$。而m,n俱爲直角。又Dfm角與ifn角爲對角相等。卽此兩三角形全相等。$mf=fn$。故$gf=fe$。

第六十五節 求作二等邊三角形。令與ABC三角形等積。〔圖式第六十五圖〕

畫法 任擇一邊若AB。於其中點a作垂線av。由C點準與AB平行。作Cv線。與av交於v。聯結vA,vB。即成vAB。合所求之三角形。

此因同底等高之兩三角形。其面積必相等。而二等邊三角形之頂點。下垂至底。必適在底邊二等分處云。

第六十六節 求作正三角形。令與ABC二等邊三角形等積。〔圖式第六十六圖〕

畫法 以AB底邊為一邊。作AbB等邊三角形。聯結bC。係與AB正交於中點a。即以ab為全徑。作acb半圓。依第十三節畫法。求得aC,ab之比例中項為ac。準與ac等長。向ab線上截取ad。由d點準與bA及bB平行。作de及df。即成def。合所求之三角形。

此因Aab與ead兩三角形相似。

$$ea : Aa = ad : ab.$$

又所作比例中項。

$$aC : ad = ad : ab.$$

故 $$ea : Aa = aC : ad.$$

即 $$ea \times ad = Aa \times aC.$$

此式左端為efd三角形面積。右端為ABC三角形面積。

第六十七節　<u>求作三角形。令與$ABCD$四邊形等積</u>〔圖式第六十七圖〕

畫法　作對角線AC。準與AC平行作Da。與BA之延長線交於a聯結Ca。即成aBC。合所求之三角形。

此因ADC與AaC兩三角形。同以AC爲底邊。且其高相等。故ADC與AaC等積。

〔附誌〕凡變種種多角形爲同積之三角形。即依本節畫法迭施之可矣。

第六十八節　<u>求作三角形。令與$ABCDEF$多角形等積。</u>〔圖式第六十八圖〕

畫法　作對角線EA。準與EA平行作Fc。又作EC, EB兩對角線。準與EC平行作Da。與BC之延長線交於a。由a點準與EB平行作ab。與AB之延長線交於b。聯結Eb。則Ecb即所求之三角形。

此因FcA與FcE兩三角形。又ECD與ECa兩三角形。又EBa與EBb兩三角形。各係同底等高。其積相等。故所作Ecb三角形與$ABCDEF$原形等積。

第六十九節　<u>求由P點引一三角形。令與$ABCDE$多角形等積。</u>〔圖式第六十九圖〕

畫法　由P點向A,B,C,D,E各角點聯成直線。由D點準與PC平行作Da。與BC之延長線交於a。由a點準與PB平行作ab。與AB之延長線交於b。次由左側依同法。作PE之平行線Dc。與AE之延長線交於c。作PA之平行線cd。與BA之延長線交於d。聯結Pb, Pd。即成Pbd。合所求之三角形。

此因PCD與PCa兩三角形。又PaB與PbB兩三角形。各係等積。故$PBCD$四角形與PbB三角形等積。依同理。$PDEA$四角形與PdA等積。故所作Pbd三角形與$ABCDE$原形等積。

第七十節 求作一正方形。令其積與三正方形併積相等。其三正方之邊爲L,M,N。〔圖式第七十圖〕

畫法 準與L等長作ab。由b點準與ab成正交作bc。bc之長卽等於M。聯結ac。由c點準與ac成正交作cd。cd之長卽等於N。如是則ad卽所求正方之邊。故補成$adef$合所求之正方形。

此因abc及acd兩直角三角形內。

$$(ab)^2+(bc)^2=(ac)^2.$$

$$(ac)^2+(cd)^2=(ad)^2.$$

卽 $$L^2+M^2+N^2=(ad)^2.$$

第七十一節 求作一正方形。令其積等於兩正方積之差。其兩正方形之邊爲L,M。〔圖式第七十一圖〕

畫法 作ab, ad兩線。令正交於a點。由a點取ac等於M。(M係比L爲短)以c爲圓心。L爲半徑。規圓。截ad於d點。如是則ad卽所求正方之邊。蓋凡直角三角形夾直角之一邊自乘。等於其餘一邊之自乘減斜邊之自乘之差。故$abcd$合所求之正方形。

第七十二節 求作正方形。令與ABC三角形等積。〔圖式第七十二圖〕

畫法　任以C爲頂點。作底邊AB之垂線若Ca。別作gh線截爲dh,dg兩分。dh即等於底邊AB。而dg係等於Ca之半若ba。依第十三節畫法。求dh,dg之比例中項若de。卽所求正方形之邊。補成$defc$。合所求之正方形。

此因三角積爲底高相乘之半。故得式如次。

$$AB\times ba=dh\times dg=(de)^2.$$

〔附誌〕如所作正方形。令與多角形等積。則先化多角形爲三角形。然後令與三角形等積求作正方形。

第七十三節　求作正方形。令與$ABCD$平行四邊形等積。〔圖式第七十三圖〕

畫法　以AB爲底邊。作其高ab。別作ec線。截爲dc等於AB。de等於ab。依第十三節畫法。求dc,de之比例中項若dh。卽所求正方形之邊。補成$dhgf$。合所求之正方形。

此因底高相乘。卽平行四邊形之面積。故得式如次。

$$AB\times ab=dc\times de=(dh)^2.$$

練習題四

1. 求作三角形。其三邊之長。爲一寸八分。二寸二分。二寸五分。

2. 求作二等邊三角形。其底邊爲二寸。頂角55°。

3. 求作三角形。底邊一寸七分。高一寸三分。頂角60°。

4. 求作三角形。底邊一寸八分。其餘二邊之和二寸六分。底邊一端之角42°。

5. 求作矩形。其一邊爲一寸五分。對角線二寸五分。

6. 求作多角形。定其尺度如下。

(i) 邊長一寸三分之正五角形。

(ii) 邊長一寸一分之正六角形。

(iii) 邊長一寸之正七角形。

7. 任作一三角形。求其內切圓及外接圓。

8. 求於直徑一寸八分之圓。各作其內接及外切正五角形。

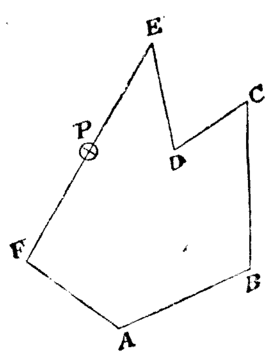
9. 準前題。求其內接正八角形。

10. 求於邊長八分之正七角形。作其內切圓。

11. 求作正八角形。計凡相對四邊。令與邊長二寸之正方形相疊合。

12. 求與第一題所作三角形等積。作正三角形及二等邊三角形。

第十六圖



13. 如第十六圖。求於 EF 之中點 P。引一三角形。其底邊卽在 AB 線上。而其面積令與 $ABCDEF$ 六角形之面積相等。但知 AB 爲一寸二分五釐。BC 一寸五分。CD 八分。DE 一寸。EF 二寸二分。FA 一寸。BE 二寸二分。EC 八分五釐。AE 二寸六分。

14. 求作一正方形。令其積與三正方倂積相等。其三正方形之邊爲七分。一寸。一寸二分。

15. 求與第一題所作三角形等積。作一正方形。

16. 任作一矩形。求與此矩形等積。作一正方形。

第六章　曲線

第七十四節　**楕圓**爲曲線類之一。任於楕圓周取 p 點。此 p 點無論如何。其距形內 F,F' 兩定點之和恆相等。〔圖式第七十四圖〕

此 F,F' 兩定點。稱爲**楕圓之兩心**。貫此兩心之直線若 AA'。爲**楕圓之長軸**。長軸之中點 C。爲**楕圓之中心**。貫 C 點與 AA' 成正交之 BB' 線。爲**楕圓之短軸**。

據此則任於楕圓周取一點。其距兩心之和。恆等於長軸 AA'。

拋物綫亦爲曲線類之一。任於其線上取 c 點。此 c 點無論如何。其距形內之心點 F。與距其準綫 MN。恆相等。〔圖式第七十九圖〕

貫 F 心點與 MN 準線成正交之 FX 線。爲**拋物綫之軸**。軸與曲線之交點 A。爲**拋物線之頂點**。

雙曲綫。任於其線上取 a 點。此 a 點無論如何。其距形內 F,F' 兩心之差恆相等。〔圖式第八十一圖〕

雙曲線係以相同之兩曲線反向對列。聯其兩心之直線交曲線於 A,A' 兩點。爲**雙曲綫之頂點**。AA' 卽爲其**正軸**。

據此則任於曲線上取一點。其距兩心之差。恆等於正軸AA'。

凡直線與以上諸曲線相切於一點者。爲諸曲線之切線。其相切之點。卽稱爲切點。

第七十五節　以上三種曲線。係就圓錐體。依平面截之所顯之截界是也。其原理具詳於解析幾何學。玆惟述其尋常畫法數種而止。

第七十六節　已知長軸AA'短軸BB'。求作橢圓。

畫法甲　令AA',BB'兩軸正交於其中點C。以B爲圓心。以長軸之半若AC爲半徑。規弧線。交長軸於F,F'兩點。此F,F'兩點。卽橢圓之兩心。〔圖式第七十四圖〕

以兩釘抵定F,F'兩點。取絲一圈。令其周等於BFF'三角形三邊之和。以此絲套於F' F'兩釘。而以鉛筆之尖剔此絲任令緊張於p點。循是移行鉛筆。常令此絲緊張。回轉一周。卽所求之橢圓。

畫法乙　如前法求得F,F'兩心。先以F爲圓心。任以比FA大比FA'小如Fa者爲半徑。規弧線。次以F'爲圓心。以AA'與Fa之差如$F'b$爲半徑。規弧線。兩弧交於m,m'兩點此兩點必在所求之橢圓周上。依同理。先以F爲圓心。Fa'爲半徑。規弧線。次以F'爲圓心。$F'b'$爲半徑。規弧線。兩弧交於n,n'兩點。又遞依同法。求得o,o',p,p'等點。以雲形定規聯合各點。卽所求之橢圓。〔圖式第七十五圖〕

以上二法。無論曲線上任何點。其距兩心之和。恆等於長軸。蓋卽據第七十四節推演而得之者也。

畫法丙　如前法。令AA', BB'正交於其中點C。以C爲圓心。CB爲半徑。作圓周。又以C爲圓心。CA爲半徑。作圓周。任取Caa'半徑。由a點作AA'之平行線。由a'點作BB'之平行線。相交於m。此m點必在所求之橢圓周上。依同法。任取Cbb', Ccc', Cdd'等各半徑。由b, c, d各點作AA'之平行線。由b', c', d'各點作BB'之平行線。卽得n, o, p各交點。以雲形定規聯合之。卽所求之橢圓。〔圖式七十六圖〕

第七十七節　$ABA'B'$橢圓形。求其中心及長短兩軸。〔圖式第七十七圖〕

畫法　任作平行兩線若ab若cd。與橢圓周交於a, b, c, d四點。取ab之中點e。cd之中點f。聯成直線。引長其兩端。與橢圓周交於g, h兩點。此gh線之中點C。卽所求之中心。以C爲圓心。任取半徑。規弧線。與橢圓周交於i, j兩點。聯成ij直線。由C點準與ij正交作AA'線。卽所求之長軸。由C點作AA'之垂線若BB'。卽所求之短軸。

第七十八節　APA'橢圓形。求於其周上P點作切線。〔圖式第七十八圖〕

畫法　由P點。準與F, F'兩心聯成直線。於$F'P$之P端引長至a。作aPF角之二等分線若Pb。此Pb卽所求之切線。

第七十九節 <u>APA' 橢圓形。求於其形外 Q 點作切線</u>〔圖式第七十八圖〕

畫法 以 Q 爲圓心。作弧線令交於 F, F' 兩心之 F' 點。乃以 F 爲圓心。長軸 AA' 爲半徑。作弧線。與前弧交於 c, d 兩點。聯結 Fc, Fd 兩線。與橢圓周交於 e, f 兩點。聯結 Qe, Qf。即所求之切線。

第八十節 <u>已知心點 F 及準線 MN。求作拋物線</u>〔圖式第七十九圖〕

畫法 由 F 點。準與 MN 準線成正交作 FX。即係所求拋物線之軸。軸之二等分點若 A。即所求拋物線之頂點。乃任於準線上取 g 點。準與 FX 平行作 ga。聯結 gF。取其中點 o。作正交線若 oa。與 ga 交於 a。則 a 距心點與距準線相等。故 a 點必在所求之拋物線上。又任於準線上取 h, i 各點。依同法。得 b, c 各點。均在所求之拋物線上。以雲形定規聯合之。即所求之拋物線。

第八十一節 <u>已知頂點 A 軸 Am 及拋物線上之一點 P。求作拋物線</u>〔圖式第八十圖〕

畫法 由 A, P 兩點。各作 Am 之垂線。由 P 點作 Am 之平行線。即成 $AoPm$ 長方形。於 Po 線任作若干等分。如分爲四等分。則定 a, b, c 各點。而 Ao 線上因之亦作四等分。定 a', b', c' 各點。由 a', b', c' 各點。引 Am 之平行線。由 A 點聯結 a, b, c 各點。如是則 Aa 與 $a'r$。Ab 與 $b's$。Ac 與 $c't$。凡相交之點若 r, s, t 幷 A, P 兩點聯合之。即成拋物線之一側面。

其餘一側。由 P 點引 Am 之垂線若 Pn。令 mn 等於 mP。即 n 爲拋物線上之一點。由此點依同法求之。又 Am 爲對稱之軸。求 r,s,t 諸點之對稱點。亦合。

第八十二節　已知正軸 AA'。兩心 F,F'。求作雙曲線。〔圖式第八十一圖〕

畫法　以 F 爲圓心。以大於 FA 若 Fm 者爲半徑。規弧線。又以 F' 爲圓心。以等於 $Fm+AA'$ 者爲半徑。規弧線。兩弧交於 a,a' 兩點。凡類此之點。其距兩心之兩線所差恆等於 AA'。故 a,a' 爲所求曲線上之兩點。依同法當以所取兩半徑之差等於 AA' 規兩弧。遞得其交點 b,b',c,c'。以雲形定規聯合之。即得所求曲線之左半。更依同法求其右半可也。

第八十三節　附捲於一圓周之絲。以其一端準與圓周同在一平面上引張之。此一端移行之跡爲曲線。爲其所附圓周之漸伸線。

第八十四節　求作 O 圓之漸伸線。〔圖式第八十二圖〕

畫法　任於圓周取 p 點。作 $pO6$ 直徑。由 6 點引切線。令其長等於圓周之半。如以 r 爲半徑。則 $6f=2\pi r\div 2=3.1416\times r$。乃以 $6f$ 與半圓周同分爲若干等分。如同分爲六等分。則其分點爲 a,b,c,d,e 爲 1,2,3,4,5。由圓周上各分點作切線。即於各分點作半徑之垂線若 $1a',2b',3c',4d',5e'$。令 $1a'=6a,2b'=6b,3c'=6c$ $4d'=6d,5e'=6e$。如是則 a',b',c',d',e' 及 p,f 各點。以雲形定規聯合之。即所求漸伸線之一段。依同法進求之。其長無限。

第八十五節　O圓沿AB線自轉一周。其圓周上任意一點環行之跡爲**擺線**。O圓名爲**母圓**。AB名爲**基綫**。〔圖式第八十三圖〕

O_1圓沿O圓之外周。自轉一周。其O_1圓周上任意之點環行之跡爲**外轉擺綫**。〔圖式第八十四圖〕

O_2圓沿O圓之內周。自轉一周。其O_2圓周上任意之點環行之跡爲**內轉擺綫**。〔圖式第八十四圖〕

以上O圓爲**基圓**。O_1圓爲**外轉母圓**。O_2圓爲**內轉母圓**。

第八十六節　求作擺線。〔圖式第八十三圖〕

既知之母圓O。其半徑爲r。AB爲基綫。

畫法　作母圓O令與AB基線相切。由圓心O作mn。係與AB平行。故母圓心總不出此線外。

AB之長。係與母圓之周相等。卽$2\pi r=2\times 3.1416\times r$。以$AB$與$O$圓周同分爲若干等分。如同分爲十二等分。則$AB$線上各分點爲$1',2',3',\cdots\cdots\cdots 11'$由此各分點作$mn$之垂線。其正交點爲$1'',2'',3'',\cdots\cdots\cdots 11''$以此各正交點爲圓心。$r$爲半徑。規各弧。由$O$圓周上各分點$1,2,3,\cdots\cdots 11$作$AB$之平行線。與所作各弧交於$1''',2''',3''',\cdots\cdots 11'''$各點。以雲形規聯此各點。卽所求之擺線。

此因O圓沿AB線自轉一周。其圓心O順次占$1'',2'',3''\cdots$等點之位置。同時圓周上$1,2,3,\cdots\cdots$等點。順次貼合於AB線上$1',2',3'\cdots\cdots$等點之位置。至自轉一周畢。O圓周上A點達

於 AB 線上 B 點。而 O 圓周上 1 點達於 AB 線上 $1'$ 點時。O 圓周上 A 點達於 $1'''$ 點。故作 $A1'''$ 間之曲線。卽爲擺線之一段。依同理規合 $A3'''\ 6'''\ 9'''\ B$ 合所求之擺線。

第八十七節　已知基圓 O。母圓 O_1。求作外轉擺線。〔圖式第八十四圖〕

外轉母圓之半徑爲 r。基圓之半徑爲 R。

畫法　以 O 爲圓心。R 爲半徑。作基圓 $A6'B$。又作外切於 $A6'B$ 基圓之母圓 O_1。乃以 O 爲圓心。OO_1 爲半徑。作 mn 弧。任以 O_1 圓周分爲若干等分。如分爲十二等分。則記其各分點爲 1,2,3,……等。取 $\frac{r}{R}\times 360$ 度爲 AOB 角之度。以 AB 弧準與 O_1 圓周同分爲十二等分。記其各分點爲 $1',2',3',$……等。由 O 點分向 $1',2',3',$……等點引直線。與 mn 弧交於 $1'',2'',3'',$……等點。以此各點爲圓心。r 爲半徑。規各弧。卽所以示外轉母圓種種之位置也。次以 O 爲圓心。準與 O_1 圓周上各分點相交規各弧線。與前所作各弧交於 $1''',2''',3'''$……等點。例如由 O 心所作交於 O_1 圓周 1 點之弧線。與由以 $1''$ 爲圓心 r 爲半徑所作之弧線相交於 $1'''$ 點。依同法。凡得 $1''',2''',3'''$……等點。以雲形定規聯合之。卽得 APB 合所求之外轉擺線。

此因母圓沿基圓自轉一周。占基圓 AB 弧之長。故 AB 弧之長。應等於 O_1 圓之周。而 AOB 角 : $360°=r:R$。故取 $\frac{r}{R}\times 360°$ 爲 AOB 角度。斯 AB 弧之長。等於 O_1 圓之周。mn 弧爲母圓自轉時其圓心 O_1 所經行之跡。$1'',2'',3''$……等點。所以示 O_1 心種

種之位置也。O_1圓周上 1, 2, 3,……等點。漸次與 AB 弧上 1′, 2′, 3′,…… 等點合為一致如 O_1 點至 1″。則 1 點至 1′。A 點至 1‴。故 $A1'''$ 間之曲線。為所求外轉擺線之一段。依同理推之。其 2‴, 3‴, 4‴,……B 等點。同在所求之外轉擺線上。

第八十八節　已知基圓 O。母圓 O_2。求作內轉擺線。〔圖式第八十四圖〕

內轉母圓之半徑為 r。基圓之半徑為 R。

畫法　與前節同。惟 O_1 圓外切於 AB 弧。而 O_2 圓為內切。觀圖便易理解。

第八十九節　作外轉擺線。若其母圓之直徑。漸次增大至於無窮。則以母圓周為直線。附捲於基圓之周。而引其一端。作基圓之漸伸線可也。故漸伸線可施用於外轉擺線特別之時。

練習題五

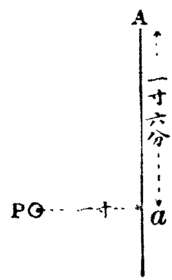
1.　長軸二寸五分。短軸一寸七分。求作橢圓。

2.　由前題所作橢圓。任於其周取一點。又任於形外取一點。各作切線。

3.　任取一橢圓形。求其兩軸及兩心。

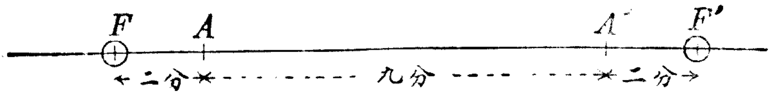
4.　如第十七圖。以 A 為頂點。Aa 為軸。求作拋物線。令通於 P 點。

第十七圖



5.　如第十八圖。以 AA' 爲正軸。F,F' 爲兩心。求作雙曲線。

第十八圖



6.　有絲附捲於直徑一寸二分之圓。試引其一端。令成漸伸線。至其絲退捲適符一圓周之數而止。

7.　母圓之直徑一寸五分。求作擺線。

8.　基圓之半徑二寸五分。母圓之半徑七分五釐。求作外轉擺線及內轉擺線。

9.　如前題。若母圓之直徑改爲二寸五分。其內轉擺線若何。

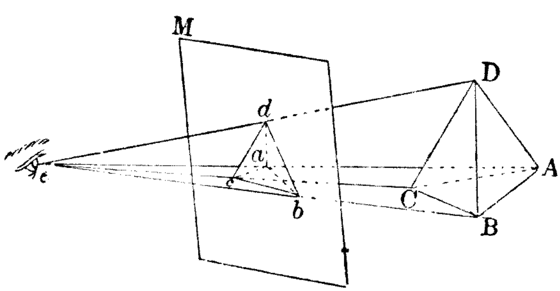
第二篇 投影畫法

第一章 總說

第九十節 投影畫法之宗旨。係以諸種物體畫於平面。幷其所以能定物體實際之形狀。依其方法。深致硏究。

第九十一節 人目隔玻璃窗望見一物。其光線係由物體一切之點。集合於目中。而此諸光線。透過玻璃窗。玻璃之表面。不啻留物體之印跡。於此卽生一圖畫。此圖畫與人目之位置不變。雖取去其物體。而仍與明見物體時。同一感覺也。又光線起於物體一切之點。而留於玻璃面上之痕跡。則惟顯物體之諸稜。蓋得物體之外形圖是也。此圖雖比之物體自身之存在。不能絕無歧視。而就其形狀。要可與其充分之觀念云。

第十九圖



如第十九圖。$ABCD$ 爲物體。e 爲人目。MN 爲物體人目間所置之玻璃板。Ae, Be, Ce 等爲由物體諸稜中諸點所發而集合於人目之光線。此諸光線與玻璃板之交點聯結之。成 $abcd$ 之圖。

凡此 $abcd$ 之圖。稱爲 $ABCD$ 物體於 MN 平面上之**投影**。由物體中一點。至其所對應之投影點。聯成直線。即光線或假設線。如 Aa, Bb 之類。稱爲**投影綫**。

第九十二節　投影畫之大別有三。述之如次。

透視畫　如前第十九圖。一切投影線。集合於一點如 e。名其投影爲透視畫。

正投影　投影線所集中之點。視物體爲無窮之距離。則投影線成平行。而各投影線不惟平行。且與所投之平面成正交。則名此投影爲**正投影**。

均角投影　如後第九章所述限於一投影面取一定之傾斜以投影物體者是。用特置之尺度畫之。

以上三種之畫法。惟正投影畫法爲最切於實用。平常所需者甚廣。故本書以此爲主。次均角投影畫法。至透視畫法。非惟嫌其複雜。且除特殊之使用外。其合於實用者甚鮮。故從略。

正投影。便宜省稱之爲投影。以下凡言投影。皆正投影也。

第九十三節　由以上所述。得定義如下。

平面上**一點之投影**。係由一點垂直向下著於平面上之正交點也。

平面上**一線之投影**。係由一線上一切之點之投影聯成之者也。

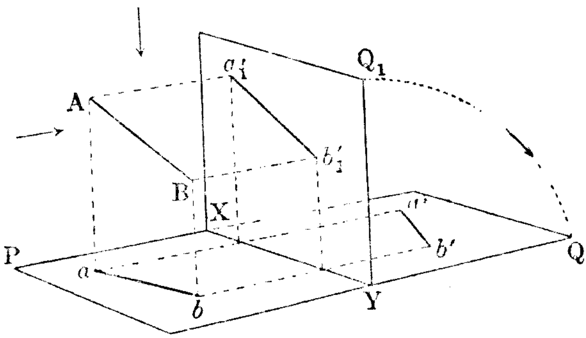
第九十四節　僅據一投影不足以定物體之原形蓋如第二十圖 ab 爲 AB 直線顯於紙面上之投影其 AB 之眞長必隨 A,B 兩點距紙面遠近而異今僅據投影 ab 固絕未示及距離者也

第二十圖

雖然有便宜之法在即取正交兩平面於此兩平面上求一物體之投影依此兩投影即可定物體之原形詳述如次

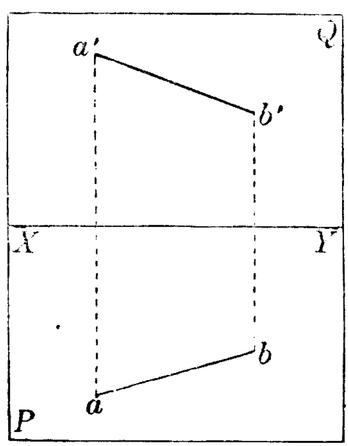
如第二十一圖 AB 爲直線 ab 爲 AB 顯於 PY 水平面上

第二十一圖



之投影 $a_1'b_1'$ 爲 AB 顯於 Q_1X 垂直面上之投影由此 ab 及 $a_1'b_1'$ 兩投影可定原線 AB 之眞長

然此兩投影無不可移於一平面上即以 XY 爲軸而令 Q_1X 垂直面下眠於 QX 水平面之位置則 ab 與 $a'b'$(即 $a_1'b_1'$)兩投影同在 PQ 一平面上



第二十二圖

第九十五節　物體投影於二平面上。在水平者爲**水平投影面**。在垂直者爲**垂直投影面**。合稱在此二平面者爲**兩投影面**。兩投影面之交線爲**軸綫**。本書以 XY 表之。

水平投影面上之投影。稱爲**平面圖**。垂直投影面上之投影。稱爲**縱面圖**。

第九十六節　如第二十二圖 XY 之下方爲平面圖。上方爲縱面圖。而其物體則如第二十一圖。在水平投影面之上方。垂直投影面之前方。物體對於兩投影面上。恆從其所占之位置而異也。

第九十七節　**規約**　本書例以英文大字母表示原點原線。英文小字母表示平面圖。而其縱面圖。則於小字母之右肩加 $'$ 以表示之。例如 p 爲 P 點之平面圖。p' 爲 P 點之縱面圖。以是推之 AB 線。則 ab 爲其平面圖。$a'b'$ 爲其縱面圖。

投影線及因解題而設之補助線。均用虛線表示之。物體背隱處所具之線。其投影亦以虛線表示之。但較補助用之虛線稍粗。

第二章　點，線

第九十八節　已知 P 點之位置。求其對於兩投影面之投影。

(一)　求平面圖　如 P 點在垂直投影面之**前方**。則其平面圖在 XY 軸線之**下方**。反是。P 點在垂直投影面之**後方**。則平面圖在 XY 之**上方**。而此平面圖與 XY 之距離。即等

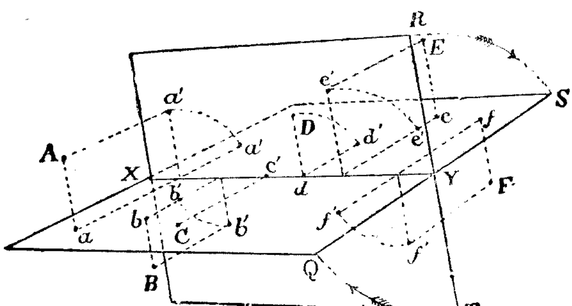
於P點與垂直投影面之距離。

(二) 求縱面圖 如P點在水平投影面**之上方**。則其縱面圖在XY之**上方**。反是。P點在水平投影面之**下方**。則縱面圖在XY之**下方**。而此縱面圖與XY之距離。卽等於P點與水平投影面之距離。

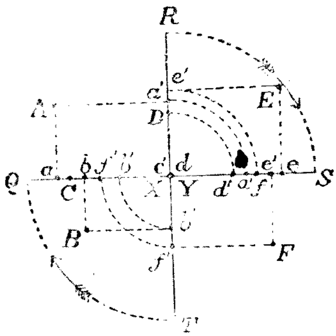
凡一點之平面圖及縱面圖。必同在一直線上。而此一直線。卽係與XY成正交。

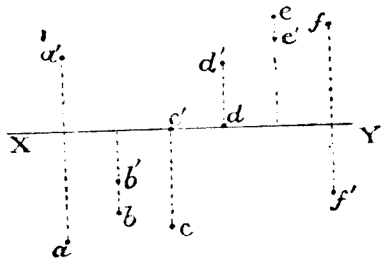
如第二十三圖爲A,B,C,D,E,F六點對於兩投影面所占種種之位置。而第二十四圖係自其側面視之者也。併此兩圖以觀。其所以能定以上諸點之投影。自易解悟。至第二十五圖。則以一平面示六點之投影。學者於此三圖。宜玩其兩投影面與諸點之關係。幷究知投影之方法。務當澈悟於心。蓋線,面,體等複雜之投影。無非以此諸點之投影法爲應用者也。

第二十三圖



第二十四圖　　第二十五圖





如上第二十三圖第二十四圖其 RYQ,RYS,SYT,TYQ 各二面角稱之爲第一,第二,第三,第四象限。

第九十九節　求以下所記各點之投影。(圖式第八十五圖)

A點　在垂直投影面之前方四分。水平投影面之上方一寸。

B點　在水平投影面中又在垂直投影面之前方一寸二分。

C點　在垂直水平兩投影面中。

D點　在垂直投影面之前方一寸二分水平投影面之下方一寸二分。

E點　在垂直投影面之後方一寸一分。水平投影面之上方八分。

畫法　按數作畫如次。

A點之平面圖a。作於XY之下方四分。其縱面圖a'作於XY之上方一寸。

B點之平面圖b。作於XY之下方一寸二分。其縱面b'。作於XY線中。

C點之平面圖c及縱面圖c'。同作於XY線中。

D點之平面圖d及縱面圖d'。同作於XY之下方一寸二分。

E點之平面圖e。作於XY之上方一寸一分。其縱面圖e'。作於XY之上方八分。

而一點之平面圖及縱面圖。同在一直線上。此一直線。卽係與XY成正交。

第一百節　設P點在水平投影面之上方一寸五分。已知其平面圖p。求縱面圖p'。〔圖式第八十六圖〕

畫法　由p點作pp'。與XY正交於p_1點。令p_1p'等於一寸五分。則p'卽所求之縱面圖。

第一百一節　設P點在垂直投影面之前方一寸六分。已知其縱面圖p'求其平面圖p。〔圖式第八十六圖〕

畫法　由p'點作$p'p$。與XY正交於p_1點。令p_1p等於一寸六分。則p卽所求之平面圖。

第一百二節　一直線中P, Q兩點之平面圖爲p, q。而P點係在水平投影面之下方四分。Q點係在水平投影面之上方一寸。求PQ線之投影。〔圖式第八十七圖〕

畫法　聯結 pq。即 PQ 線之平面圖。而 Q 點在水平投影面之上方一寸。故其縱面圖 q'。必在由 q 所作 XY 之正交線中距 XY 上方一寸之處。依同理。P 點之縱面圖 p'。必在由 p 所作 XY 之正交線中距 XY 下方四分之處。

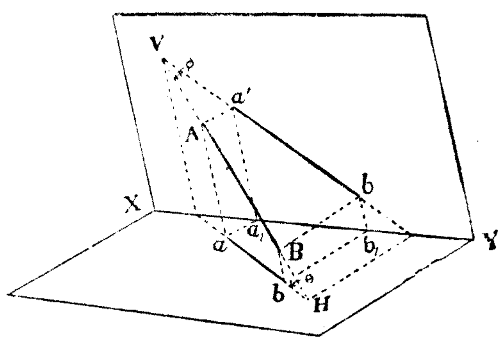
第一百三節　一線之所顯於平面之投影。即與其線成夾角。謂之**一綫對於一平面之傾角**。

一線或其延長線而與投影面相交於一點。謂之**一綫之跡**。其在垂直投影面者為**垂直跡**。水平投影面者為**水平跡**。

第一百四節　已知 AB 線之投影為 $ab, a'b'$、求 AB 線之長及 AB 線與兩投影面之傾角。并求 AB 線之跡。

(一)　求 AB 線之長。〔圖式第八十八圖第八十九圖〕

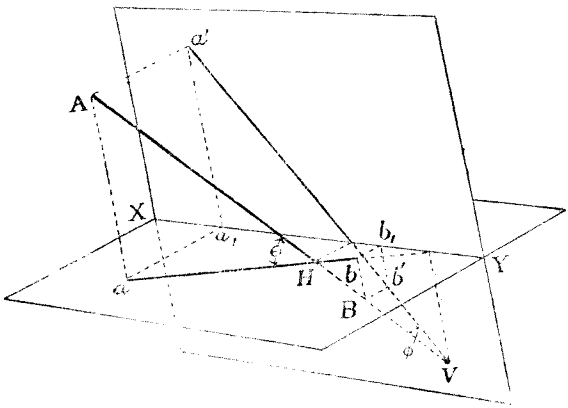
第　二　十　六　圖



畫法　準與 ab 正交而令其長等於 a_1a' 作 A_1a。又準與 ab 正交而令其長等於 b_1b' 作 B_1b。如是則 A_1B_1 即所求之長。

此可參證之如第二十六圖第二十七圖。AB 線與其投影 ab 及投影線 Aa, Bb 合成一四邊形。Aa 及 Bb 各與 ab 成直角。而 $Aa=a_1a'$, $Bb=b_1b'$。故準此作 abB_1A_1 四邊形。即可求知 AB 之長。

第　二　十　七　圖



〔附誌〕圖式第八十九圖與此第二十七圖.蓋皆以 AB 線之兩端.分占於水平面上下.而 Aa,Bb 亦在 ab 線上取向相反者也.

原線與投影面平行者.原線與投影其長相等.舍此則投影恆比原線短.

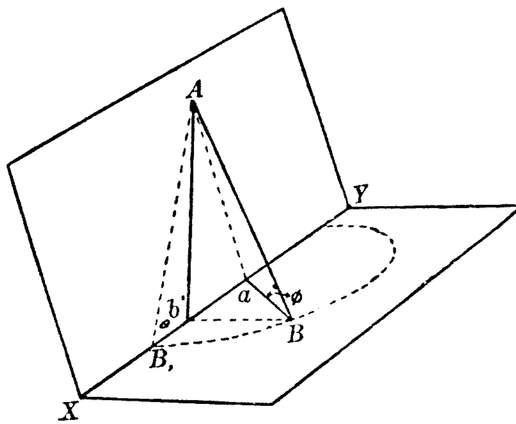
(二)　求 AB 線與兩投影面之傾角。〔圖式第八十八圖第八十九圖〕

畫法　如前法求得 A_1B_1。乃求 A_1B_1 與 ab 之交角 θ。即 AB 線與水平投影面之傾角。又依前法。準與 $a'b'$ 成正交而令其長等於 a_1a 作 $a'A_2$。又準與 $a'b'$ 成正交而令其長等於 b_1b 作 $b'B_2$。求 A_2B_2 與 $a'b'$ 之交角 ϕ。即 AB 線與垂直投影面之傾角。

又參證之如第二十六圖第二十七圖。AB 線與水平投影面之傾角。爲 AB 與 ab 即 A_1B_1 與 ab 之交角。而 AB 線與垂直投影面之交角。即同於 A_2B_2 與 $a'b'$ 之夾角。

簡法　如AB線之投影爲Ba, Ab'。〔圖式第九十圖〕則求AB線之長及傾角。其法至爲簡捷。因A爲AB線之垂直跡。B爲其水平跡。故以a爲圓心。aB爲半徑。規弧線。與XY交於B_1點。得AB_1卽AB線之眞長。而AB_1a角。卽AB線與水平投影面之傾角θ。

第二十八圖



此可參證之如第二十八圖。以Aa爲軸。而令AaB三角形移行至與垂直投影面相貼合。則B點達於B_1點。

$AB_1 = AB$,

AB_1a角$=ABa$角$=\theta$.

依同理。以b'爲圓心。$b'A$爲半徑。規弧線與XY交於A_1。則BA_1b'角。卽AB線與垂直投影面之傾角ϕ。

(三)　求AB線之跡。〔圖式第八十八圖第八十九圖〕

畫法甲　縱面圖$a'b'$或$a'b'$之延長線與XY交於h'。由h'作XY之垂線若$h'H$。而與平面圖ab或ab之延長線交於H。則H卽所求之水平跡。又ab或ab之延長線與XY交於v。由v作XY之垂線。而與$a'b'$或$a'b'$之延長線交於V。則V卽所求之垂直跡。

此蓋因一線之水平跡。即係其線與水平投影面相交之點。故恆在水平面中。而此水平跡之縱面圖。固即在其線之縱面圖中。且即此縱面圖與XY之交點如h'是也。又此水平跡之平面圖。固即在其線之平面圖中。且即由縱面圖h'所作XY之垂線與其線之平面圖相交之點如H是也。故H即所求之水平跡

依同理。V必爲所求之垂直跡。

畫法乙　準前(一)法。求得AB之眞長。乃求A_1B_1與ab之交點H。即所求之水平跡。又求A_2B_2與$a'b'$之交點V。即所求之垂直跡。

凡一線之平面圖及縱面圖。可聯成一直線而與XY成正交者。以用此畫法爲便。

第一百五節　已知ABC三角形之投影爲$abc, a'b'c'$。求其眞形。〔圖式第九十一圖〕

畫法　準前節(一)法。就既知之投影。求三角形三邊之眞長若A_1B_1若B_1C_1若AC。以此三線爲邊。可作ABC三角形。

因凡以三邊之長。合成三角形。必與原形適合。故所作ABC。即所求之三角形。

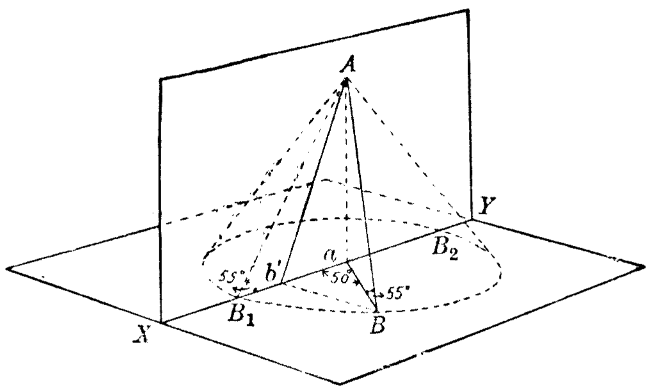
第一百六節　任設$ABCDE$多角形。已知其平面圖爲$abcde$。縱面圖爲$a'b'c'd'e'$。求其眞形。

畫法　任從a, a'點作對角線。凡分投影爲$abc, a'b'c', acd, a'c'd', ade, a'd'e'$,等三角形。依前節畫法。求得$ABC, ACD, ADE$等三角形之眞形。順次併列。即得$ABCDE$爲所求之眞形。

第一百七節　AB線與水平投影面之傾角爲55°。其平面圖與XY成角50°。求此線之投影。〔圖式第九十二圖〕

畫法　任於XY線中取B_1點。作B_1A。令其長與AB線相等。而與XY成角55°。由A作Aa。與XY正交於a點。乃以a爲圓心。aB_1爲半徑。規B_1B弧。準與XY成角50°作aB。由B作XY之垂線Bb'。聯結$b'A$。則aB卽所求之平面圖。Ab'卽所求之縱面圖。

第二十九圖

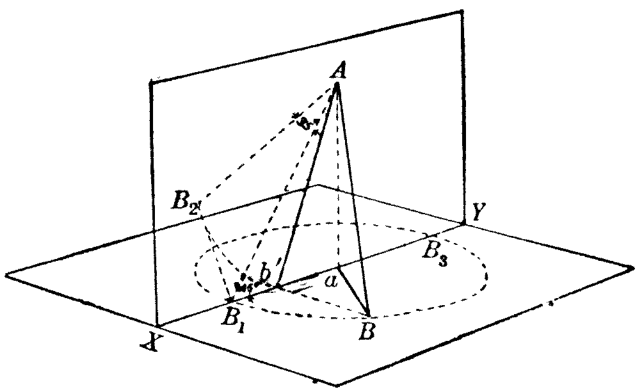


此可參證之如第二十九圖。立於水平投影面上之正圓錐體。(詳後第四章第一百二十三節)斜邊與底面成角55°。其軸係卽在垂直投影面中。而其斜邊等於AB線。如是則此圓錐之平面圖爲B_1BB_2圓。其半徑卽AB線之平面圖。故由a點準與XY成角50°。引半徑aB。卽所求之平面圖。而縱面圖之一端。卽圓錐頂點之縱面圖A。其他端則由B所作XY之垂線與XY正交於b'之b'是也。

第一百八節 已知 AB 線與水平投影面之傾角爲 45°。而與垂直投影面之傾角爲 35°。求 AB 線之投影。〔圖式第九十三圖〕

畫法 任於 XY 取 B_1 點。作 B_1A。令其長與 AB 線相等。而與 XY 成角 45°。由 A 點作 Aa。與 XY 正交於 a。以 a 爲圓心。aB_1 爲半徑。規 B_1B 弧。乃作 AB_2 令與 AB_1 成角 35°。由 B_1 作 B_1B_2。係與 AB_2 正交於 B_2。以 A 爲圓心。AB_2 爲半徑。規弧線。與 XY 交於 b'。由 b' 作 XY 之垂線。與 B_1B 弧交於 B。如是則 aB 即所求之平面圖。Ab' 即所求之縱面圖。

第三十圖



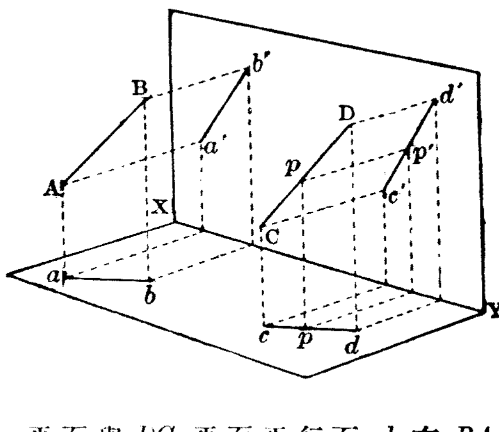
此可參證之如第三十圖。立於水平投影面之正圓錐體。斜邊與底面成角 45°。其軸係即在垂直投影面中。而其斜邊等於 AB 線。如是則此圓錐之平面圖爲 B_1BB_3 圓。其半徑

卽 AB 線之平面圖。而 AB_1 等於 AB 線之眞長。故 B_1B_2A 直角三角形。其 B_1AB_2 角等於 35°。知 AB_2 卽 AB 線之縱面圖。然 AB 線之縱面圖。其一端卽圓錐之頂點。他端當在 XY 線中。故 Ab' 爲 AB 線之縱面圖。由 b' 作 XY 之垂線。與 B_1B 弧交於 B。則 aB 卽所求之平面圖。

第一百九節　求作 AB 直線之平行線。惟必令通過於 P 點。〔圖式第九十四圖〕

畫法　通過 p 點作 ab 之平行線 cd。通過 p' 點作 $a'b'$ 之平行線 $c'd'$。如是則 cd, $c'd'$ 卽所求之線之投影。

第三十一圖



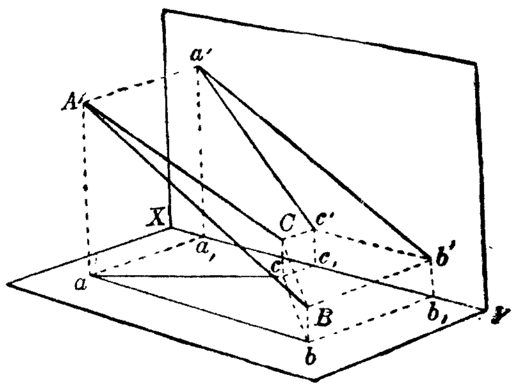
此可參證之如第三十一圖。平行二線。在同一平面上之投影。必相平行。如本圖。AB 與 CD 平行。Aa, Cc 各與水平投影面成正交。亦係平行。故 BAa 平面與 DCc 平面平行。而 ab 在 BAa 平面中。cd 在 DCc 平面中。故無論任何延長。決不相交。又所求之平行線。係通過 P 點。故其平面圖 cd。必通過 p 點。而平行於 ab。縱面圖 $c'd'$。必通過 p' 點。而平行於 $a'b'$。

第一百一十節　相交二直線。已知其投影 $ab, a'b'$ 及 $ac, a'c'$。求二線之夾角。〔圖式第九十五圖〕

畫法　任取 $b'c'$ 線。令與 XY 平行。由 b' 及 c'。各作 XY 之正交線。與 ab, ac 相交於 b 及 c。依第一百四節畫法。求 AB, AC 二線之眞長若 A_1B_1 若 A_1C_1。以之爲二邊。其 bc 即可作底邊。合成 bA_2c 三角形。頂角 A_2 即所求之角。

此可參證之如第三十二圖。$b'c'$ 係水平。故 bc 即 BC 之眞長。而 bA_2c 三角形遂全等於 BAC 三角形。故 bA_2c 角等於 BAC 角。

第三十二圖



練習題六

1.　求以下所記七點之投影

A 點　在垂直投影面前方五分。水平投影面上方一寸六分。

B 點　在水平投影面中。在垂直投影面前方一寸五分。

C 點　在垂直投影面後方一寸。水平投影面上方一寸四分。

D 點　在垂直投影面中。在水平投影面上方八分。

E 點　在垂直投影面後方一寸五分。水平投影面下方一寸一分。

F 點　在垂直水平兩投影面中。

G 點　在垂直投影面前方一寸二分。水平投影面下方九分。

〔附誌〕須用同一軸線。而諸點投影線間之距離。順次各四分。第三題亦依此例。

2. 設有 *A*,*B*,*C* 三點。*A* 點在水平投影面上方八分。*B* 點在水平投影面下方一寸二分。*C* 點在水平投影面中。而各點之平面圖。係在 *XY* 下方一寸五分。求此三點之投影。

3. 求以下所記四點之投影。

A 點　其平面圖在 *XY* 之上方一寸五分。原點在水平投影面上方一寸五分。

B 點　其平面圖在 *XY* 下方一寸二分。原點在水平投影面上方一寸七分。

C 點　其縱面圖在 *XY* 下方八分。原點在垂直投影面前方一寸六分。

D 點　其縱面圖在 *XY* 線中。原點在垂直投影面後方一寸二分。

4. AB線之平面圖長一寸八分。與XY成角32°。B點在水平投影面中。A點在垂直投影面中。而下距水平投影面一寸六分。求AB線之平面圖及縱面圖。

5. AB線之縱面圖$a'b'$長一寸五分。與XY成角40°。a'點在XY上方八分。A點在垂直投影面前方五分。B點在垂直投影面後方一寸四分。求AB線之投影。

6. 依4題。求AB之眞長及其與兩投影面之傾角。

7. 任設一線之投影。惟勿與兩投影面平行。又原線之兩端勿在投影面中。求此所設之線之眞長。及水平垂直兩跡。又其與兩投影面之傾角。

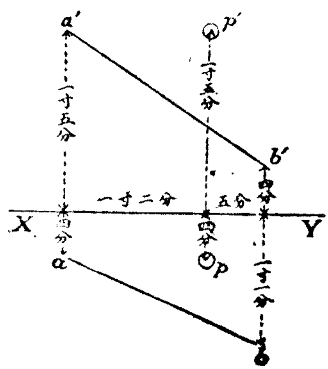
8. ABC三角形之平面圖爲abc。(ab一寸七分ab一寸九分ca二寸二分)A點高於水平投影面一寸。B點一寸五分。C點二寸。求ABC三角形之眞形。

〔附誌〕凡若此者.XY任取何向.原形不變.

9. 如第三十三圖。由P點引AB之平行線PQ令其長等於AB。求$APQB$四邊形之眞形。

10. AB線之平面圖長一寸六分。與XY成角38°。原線與水平投影面成角45°。A點在垂直投影面中。B點在水平投影面中。求AB線之投影。

第三十三圖

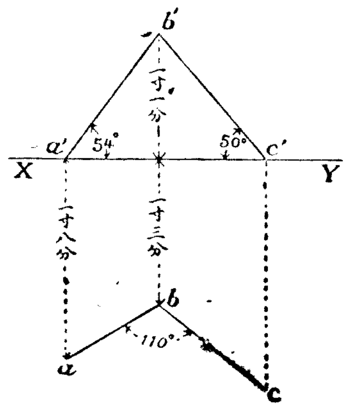


11. 一線之縱面圖與 XY 成角 43°。原線與水平投影面成角 30°。其眞長二寸三分。求此線之平面圖及縱面圖。

12 一線與水平投影面成角 50°。與垂直投影面成角 30°。水平垂直兩跡之距離二寸七分。求此線之投影。

13. 如第三十四圖。求 AB, BC 二線間之角度。

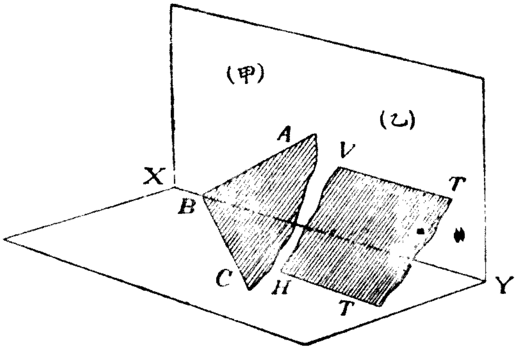
第三十四圖



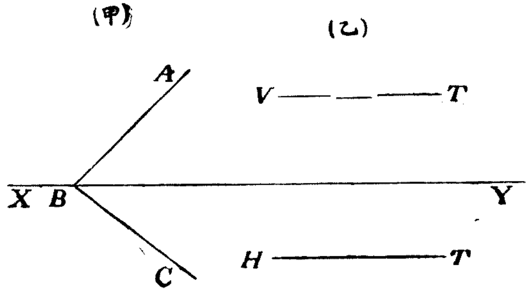
第三章　平面，平面形

第一百十一節　如第三十五圖。任取 ABC 平面。其與兩投影面之交線爲 AB 爲 BC。而與水平投影面之交線 BC。稱之爲 ABC 平面之**水平跡**。其與垂直投影面之交線 AB。稱之爲 ABC 平面之**垂直跡**。知此兩跡。可定平面。

第三十五圖



第三十六圖



如第三十五圖第三十六圖(甲)XY中B點爲一交點。(乙)VT,HT兩跡係與XY平行。卽(甲)平面與XY成傾斜。(乙)平面與XY成平行也。

由二平面之交線上任取一點。由此點分向二平面引交線之垂線。凡得兩垂線所夾之角。卽**二平面之交角。**

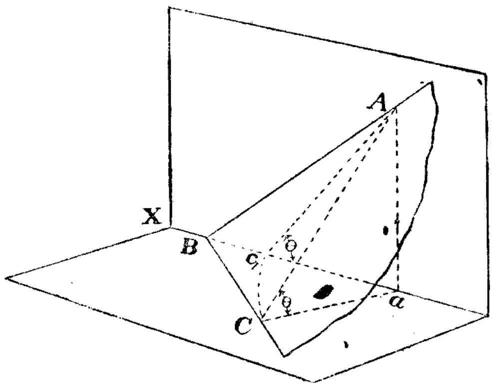
規約　既知或所求之平面之跡。畫以實線。其因解釋而設之補助面之跡。則以兩點一直之鏈線如‥—‥—‥—或以一點一直之鏈線如·—·—·—表示之。

第一百十二節　已知一平面之跡ABC。求此平面與兩投影面之傾角。(圖式第九十六圖)

畫法　任於XY取a點。由a作水平跡BC之垂線若aC。作XY之垂線若Aa。以a爲圓心。aC爲半徑。規弧線。與XY交於c_1。聯結Ac_1。則Ac_1a角。卽ABC面對於水平投影面之傾角θ。

此可參證之如第三十七圖。AC 爲 ABC 面中正交於 BC 線之線，而 aC 爲水平投影面中正交於 BC 線之線。故 ACa 角。爲 ABC 面對於水平投影面之傾角，然此角固卽 AC 線對於水平投影面之傾角。故求 ABC 面之傾角者。求 AC 線之傾角可矣。又如本圖。A,C 爲 AC 線之兩跡。依第一百四節(二)之簡法。卽得所求之傾角 θ。

第三十七圖



依同理。由 a 作 AB 之垂線若 aD。作 XY 之垂線若 aE。以 a 爲圓心。aD 爲半徑。規弧線。與 XY 交於 d_1。則 Ed_1a 角。卽 ABC 面對於垂直投影面之傾角 ϕ。

第一百十三節　一平面與水平投影面成角45°。求此平面之跡。〔圖式第九十七圖〕

畫法　任於 XY 中取 B 點。任從何向引 BC 線。由 C 點作 BC 之垂線，與 XY 交於 a。以 a 爲圓心。Ca 爲半徑。規弧線與 XY 交於 c_1。由 c_1 點準與 XY 成角45°引 c_1A。由 a 作 XY 之垂線，與 c_1A 交於 A，聯結 AB。則 ABC 卽所求平面之跡。

此係先知其傾角者。若逆證之，則所求者爲此傾角。依前節畫法。其傾角卽等於 Ac_1a 角。

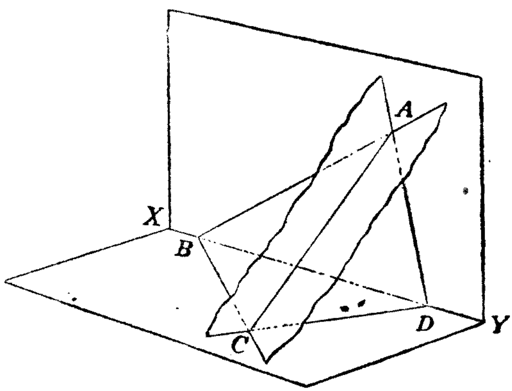
〔附誌〕 與一平面成某度傾角之平面.其數無限.故其一跡如 BC.任取何向.無不可定其他如 BA 之跡.而最簡最便之法.則莫如令水平跡 BC 與 XY 正交於 B 點.由 B 點引 BA 與 XY 成所定之角如 $45°$.則 ABC 合所求.

第一百十四節 已知相交兩平面之跡爲 ABC 爲 ADC.求其交線。〔圖式第九十八圖〕

畫法 二面垂直跡之交點 A。水平跡之交點 C。由此二點。各作 XY 之垂線若 Aa 若 Cc'。聯結 Ac', Ca。則 Ac' 卽所求之線之縱面圖。Ca 卽所求之線之平面圖。

此可參證之如第三十八圖。

第三十八圖

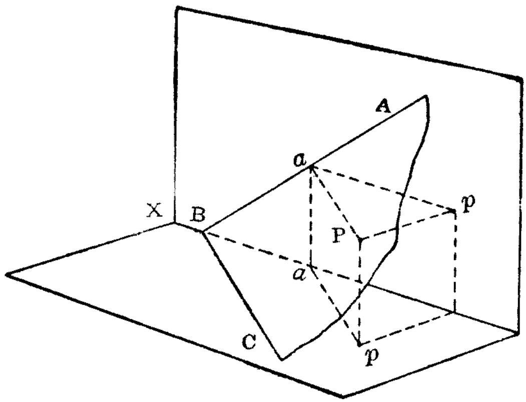


A, C 蓋卽二面交線之跡也。

第一百十五節 已知 ABC 平面中 P 點之平面圖 p。求其縱面圖。〔圖式第九十九圖〕

畫法 由 p 點。準與 ABC 平面之水平跡 BC 平行作 pa。與 XY 交於 a。由 a 點準與 XY 成正交作 aa'。與 ABC 平面之垂直跡交於 a'。由 a' 點準與 XY 平行作 $a'p'$。與由 p 點所引 XY 之正交線交於 p'。如是則 p' 卽所求之縱面圖。

此可參證之如第三十九圖。由P點。於ABC面中。作水平線Pa'。此Pa'線之平面圖。必通於p點。而與BC平行。又Pa'線之垂直跡a'。係卽在ABC面之垂直跡中。而a'與XY之距離。固卽等於P距水平投影面之高也。

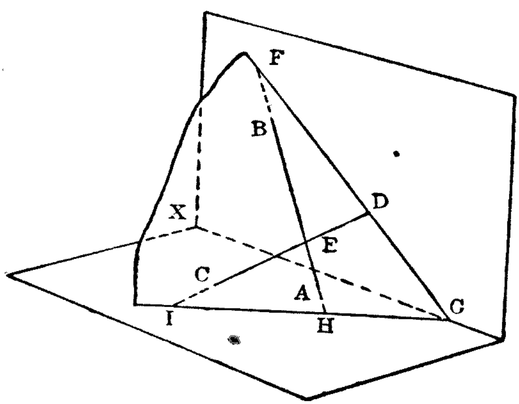


第三十九圖

〔附誌〕如先知P點之縱面圖p'。卽依同法。以求其平面圖可也。

第一百十六節　AB, CD二直線相交於E點。已知其投影。求含此二線之平面之跡。〔圖式第一百圖〕

畫法　依第一百四節。求得AB線之二跡爲F, H。CD線之一跡爲I。兩水平跡H, I聯成直線。延長之。與XY交於G。聯結GF。則FGI卽所求平面之跡。



第四十圖

此蓋因一線之跡。必在含此線之平面之跡中也。觀圖自知。

〔附誌〕二線交點之平面圖及縱面圖.必同在一直線中.而此一直線.係與 XY 成正交.

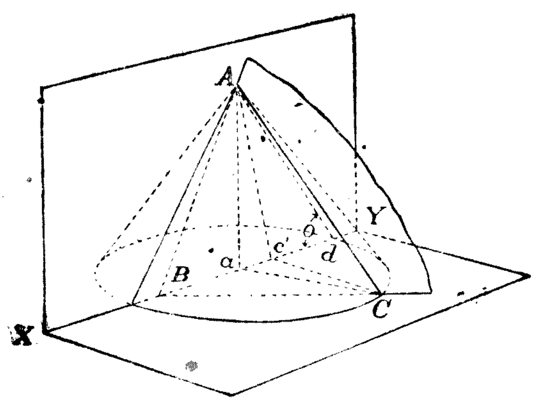
所含二直線.雖係平行.亦得依同法求其平面之跡.

第一百十七節 求於 ABC 平面中作一線.令與水平投影面成 θ 角。〔圖式第一百一圖〕

畫法 任於 XY 中取 d 點。準與 XY 成 θ 角引 dA。與垂直跡交於 A。由 A 引 Aa。與 XY 正交於 a。以 a 爲圓心。ad 爲半徑。規弧線。與水平跡 BC 交於 C。由 C 作 Cc'。與 XY 正交於 c'。如是則 aC 卽所求之線之平面圖。Ac' 卽所求之線之縱面圖。

此可參證之如第四十一圖。因所求之線之垂直跡水平跡必在 ABC 面之跡中。故 AC 線在 ABC 面中。依第一百四節(二)之簡法。卽易審定此線之傾角 θ

第四十一圖



〔附誌〕如其傾角爲對於垂直投影面者.仍依此法求其投影可也.

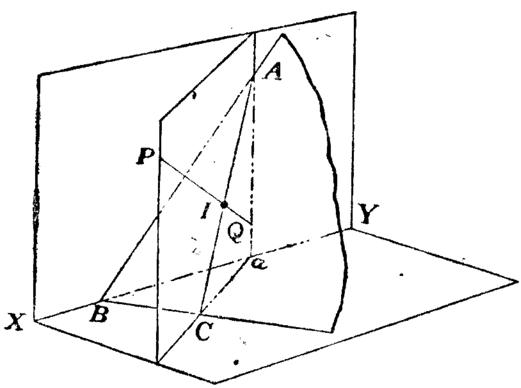
凡如 AC 線之傾角.恒小於 ABC 平面之傾角.

第一百十八節　已知平面之跡 ABC 及 PQ 直線之投影 $pq, p'q'$。求此平面與直線之交點。〔圖式第一百二圖〕

畫法　設 paA 垂直平面。係合此 PQ 直線者。與水平跡 pq 合為一致。其 Aa 垂直跡與 XY 成正交。依第一百十四節。求此面與 ABC 面交線之投影者 Ca, Ac'。而 $p'q'$ 與 Ac' 之交點 i'。即所求之點之縱面圖。由 i' 引 XY 之正交線。與 pq 交於 i。此 i 點即所求之點之平面圖。

此可參證之如第四十二圖。AC 為 ABC 面與 CaA 面之交線。而 PQ 線在 CaA 面中。故 I 點為 PQ 線與 AB 面之交點。

第四十二圖



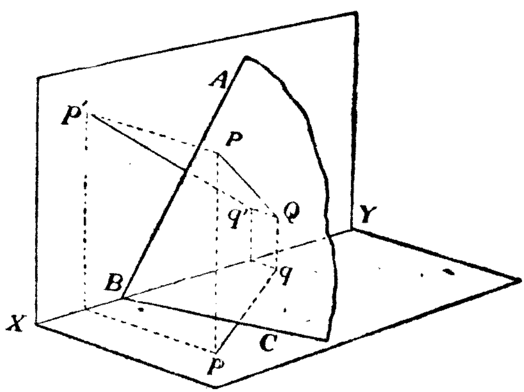
第一百十九節　由 P 點求作 ABC 平面之垂線。〔圖式第一百三圖〕

畫法　由P點之平面圖p作pq。與平面之水平跡BC成正交。又由P點之縱面圖p'作$p'q'$。與平面之垂直跡BA成正交。如是則$pq,p'q'$即所求之線之投影。

此可參證之如第四十三圖。PQ為ABC面之垂線。則凡ABC面中之線。無不與PQ成正交。故BC與PQ成正交。又Pp為水平投影面之垂線。則凡水平投影面中之線。無不與Pp成正交。故BC與Pp成正交。如是則$pPQq$平面與BC線成正交。然pq線為$pPQq$面中之一線。故必與BC成正交。

依同理。$p'q'$必與AB成正交。

第四十三圖



第一百二十節　由Q點求作一平面。令與AB直線成正交。〔圖式第一百四圖〕

AB直線之投影為$ab,a'b'$。Q點之投影為q,q'。

畫法　由q點作ab之正交線qr。與XY交於r點。由r引XY之垂線rr'。與由q'所作XY之平行線交於r'點。乃由r'作$a'b'$之正交線若LM。與XY交於M。由M作ab之正交線若MN。則LMN卽所求之平面之跡。

此蓋因ab與MN成正交。$a'b'$與LM成正交。故AB線與LMN平面成正交。參證第一百十五節。知Q點在LMN平面中。

第一百二十一節　已知平面形及此平面中之一線各對於水平投影面之傾角。求此平面形之投影。〔圖式第一百五圖〕

如已知之平面形爲$ABCDE$正五角形。其對於水平投影面之傾角爲45°。而AB一邊對於水平投影面之傾角爲30°。

畫法　準與XY成正交作Ss'。又準與XY成角45°作$s'R$。如是則$Rs'S$爲與水平投影面成45°角與垂直投影面成直角之平面之跡也。

於此平面之垂直跡中任取P點。準與XY成角30°作Ps_1。準與XY成正交作Pp_1。乃以p_1爲圓心。p_1s_1爲半徑。規弧線。與Ss'交於S。則Sp_1, $s'P$爲$Rs'S$平面中與水平投影面成角30°之線之投影。

以Ss'爲軸。令$Rs'S$平面中之PS線。隨$Rs'S$平面旋轉。至與水平投影面合爲一致。則S在水平跡中。固迄未移動。而P點則以s'爲圓心。$s'P$爲半徑。隨Pp_2弧至p_2點。故PS線達於水平投影面p_2S之位置。

於p_2S線上取A_1B_1係等於其所定正五角形之一邊。依之作$A_1B_1C_1D_1E_1$正五角形。以Ss'爲軸。令此正五角形隨$Rs'S$平面旋轉原位。則五角點同時空中畫弧。凡其所畫弧線之平面圖。俱係與Ss'成正交。而其各縱面圖。卽以s'爲圓心。各角點與Ss'之距爲半徑。所作之弧線也。如A_1點旋時所畫之弧。其平面圖爲A_1a。係與Ss'成正交。而其縱面圖爲$a_1'a'$弧是也。因係旋轉原位。故$A_1B_1C_1D_1E_1$正五角形之縱面圖$b'c'$。與Rs'合成一線。而由各角點之縱面圖作XY之正交線。與由各角點空中所作弧線之平面圖相交。據其交點。卽可定各角點之平面圖。如由a'點作XY之正交線。與由A_1點作Ss'之正交線相交於a點。則a卽正五角形一角點之平面圖。

此蓋以含平面形之平面。爲與垂直投影面成正交。故所含之平面形之縱面圖。成一直線。若依本篇第五章畫法。則不必拘定正交。無不可於垂直投影面。任取位置。以求其縱面圖。蓋所取垂直投影面中之位置。無論如何。要於其平面圖之有定。不相妨礙者也。

第一百二十二節 已知圓形之平面與水平投影面之傾角。求圓形之投影。〔圖式第一百六圖〕

如圓徑爲一寸二分。傾角45°。

畫法 準與XY成角45°作RS。由S準與XY成直角作ST。如是則RST爲與水平投影面成45°角與垂直投影面成直角之平面之跡也。視以爲所定之圓在此RST平面上。

於水平投影面上作直徑一寸二分之圓若 $A_1C_1B_1D_1$。由圓心 O_1 作 XY 之正交線。與 XY 交於 a_1'。與圓周交於 A_1 及 B_1。乃以 S 爲圓心。Sa_1' 爲半徑。規弧線。與 SR 交於 a'。由 a' 作 XY 之正交線。與由 A_1 及 B_1 作 ST 之正交線相交於 a 及 b。如是則 a 及 b 爲 A_1 與 B_1 兩點之平面圖。而 a' 及 b' 爲其縱面圖也。依同法。任於圓周取 C_1, F_1, D_1, E_1 等點。得其平面圖 c, f, d, e 等點。以雲形定規聯合之。卽所求之平面圖。因 RST 平面與垂直投影面成正交。故縱面圖成 $c'd'$ 一直線。

練習題七

1. 求以下所記諸平面之跡。

(1) 與水平垂直兩投影面均成正交者。

(2) 與水平投影面成角 40° 與垂直投影面成直角者。

(3) 與水平投影面成直角與垂直投影面成 45° 角者。

(4) 平行於水平投影面相隔一寸二分者。

2. 平面之水平跡與 XY 成角 38°。其垂直跡與 XY 成角 50°。求此平面對於兩投影面之傾角。

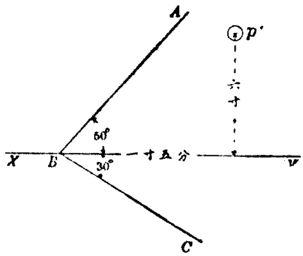
3. 平面之水平跡在 XY 下方一寸三分。卽與 XY 平行。其垂直跡在 XY 上方一寸五分。求此平面對於水平投影面之傾角。

4. 與水平投影面成角 60° 之平面。其水平跡與 XY 成角 45°。求此平面之垂直跡。

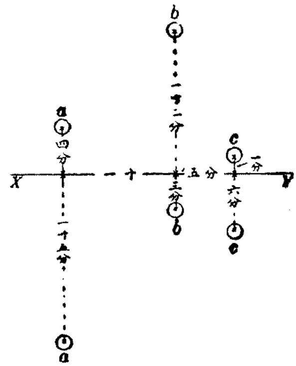
5.　甲平面之水平跡及垂直跡與 XY 成角 40° 及 65°。乙平面之水平跡及垂直跡。與 XY 成角 52° 及 43°。令此兩平面迎合成交。求其交線對於水平投影面之傾角。

6.　如第四十四圖 p' 爲既知之 ABC 平面上一點之縱面圖。求其平面圖之位置。

第四十四圖



第四十五圖



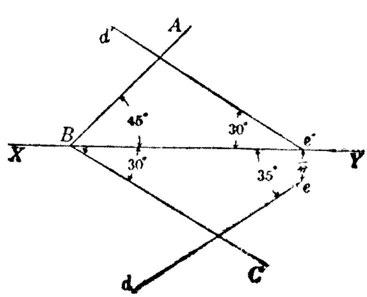
7.　如第四十五圖。求含 A,B,C 三點之平面之跡。

8.　求於與垂直投影面成直角與水平投影面成 50° 角之平面上引一線。令與水平投影面成角 30°。

9.　如第四十六圖。求 DE 線與 ABC 平面之交點。(Be' 一寸五分)

10.　ABC 三角形(AB 一寸五分 BC 一寸三分 AC 二寸)之面。與垂直投影面成正交與水平投影面成角 50°。其 AB 邊與水平投

第四十六圖



影面成角30°。求ABC三角形之投影。

11. 每邊一寸正六角形之面。與水平投影面成角 46°。其一邊與垂直投影面成正交。求此正六角形之投影。

12. 直徑一寸八分之圓之面。與垂直投影面成角 90°。與水平投影面成角 50°。圓心在水平投影面之上一寸。求此圓之投影。

第四章　簡易立體

第一百二十三節　有長有闊有厚者爲**立體**。

多面體係其所具之平面相合而成之立體也。其相鄰二面之交線。謂之多面體之稜。所圍之平面。謂之多面體之**面**。

正四面體。係以等邊三角形凡四。相合而成之多面體也。

立方體。係以正方形凡六。相合而成之多面體也。

正八面體。係以正三角形凡八。相合而成之多面體也。

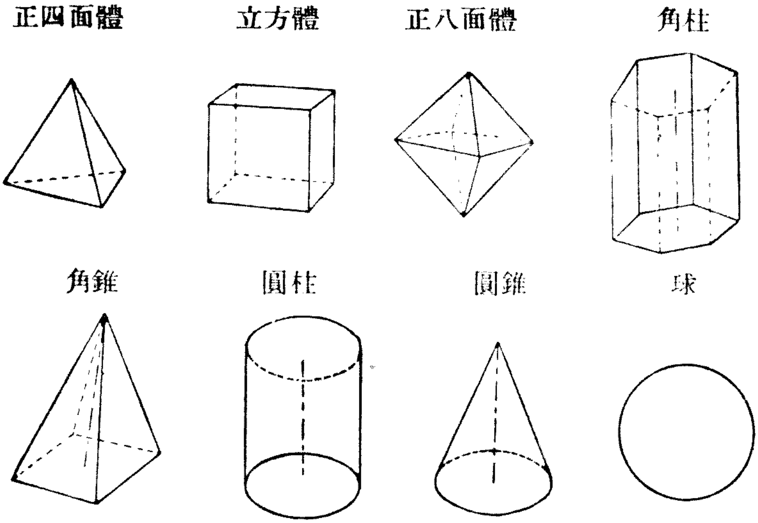
以平行且相等之兩正多角形爲**端面**。或稱**底面**。依其各邊。輔以矩形。如是則成爲**正角柱**。其矩形稱爲角柱之**側面**。

以正多角形爲**底面**。卽以此多角形之各邊爲底邊。輔以同占一點爲頂點之二等邊三角形。如是則成爲**正角錐**。其公共之頂點。稱爲角錐之**頂點**。所輔二等邊三角形。謂之角錐之**側面**。

角柱之**軸**卽其兩底面中心點之聯結線。角錐之**軸**。卽其底面之中心點與其頂點所聯成之直線。而正角柱及正角錐。其軸恆與底面成正交。

角柱之高。卽兩底面間之垂直距離。角錐之高。卽由頂點至底面之垂直距離。而在正角柱。輒稱其高爲長云。

第四十七圖



角柱及角錐。從其底面之形而異其名稱。如底面爲三角。則稱爲三角柱三角錐。底面爲五角。稱爲五角柱五角錐。

以下凡稱角柱角錐者。係卽正角柱正角錐之省稱也。

以矩形之一邊爲軸。而令旋轉一周。卽成一**正圓柱**。所定以爲軸之一邊。稱爲圓柱之**軸**。與軸相對之一邊。其兩端各旋成平圓。謂之圓柱之**底面**。

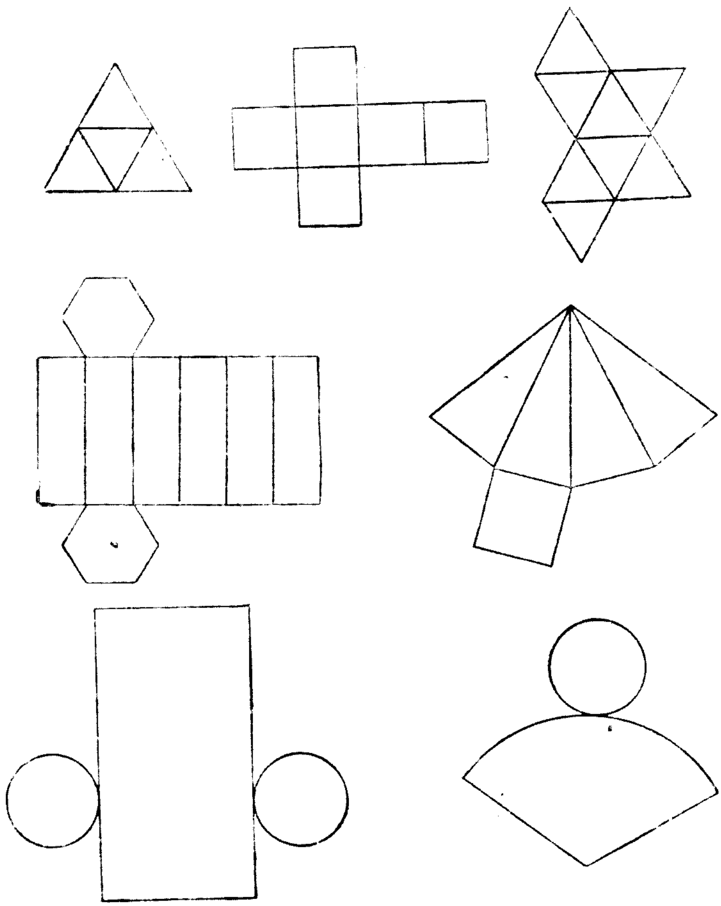
以直角三角形倚於直角之縱邊爲軸。而令旋轉一周。卽成一**正圓錐**。所定以爲軸之縱邊。稱爲圓錐之**軸**。其倚於直角之橫邊所旋成之平圓。謂之圓錐之**底面**。

以下凡稱圓柱圓錐者。係卽正圓柱正圓錐之省稱也。

圓球者。由其形內之中心點距其表面上各點。無不相等。而由中心點至表面各點之距離。稱爲球之半徑。

以立體之表面展開之。畫於一平面上。謂之立體表面之展開圖。

第四十八圖



如第四十八圖。除圓球外。即前第四十七圖所列各體之展開圖也。設以厚紙。酌定尺寸。畫各體之展開圖。依所畫之線。剪取而配合之。膠以薄紙。即成各種立體之模型。

展開圖之畫法。詳後第六章。

第一百二十四節 設立方體(稜長一寸一分)之一稜。在水平投影面中。其一面與水平投影面成角 25°。又其一面與垂直投影面成平行。求此立方體之投影。〔圖式第一百七圖〕

畫法 因其面與垂直投影面平行。故其縱面圖。必爲面之眞形。故由 XY 作 $d'c'$ 邊。令其長等於一寸一分。而即與 XY 成角 25°。依此邊作 $a'b'c'd'$ 正方形。即所求之縱面圖。由 a',b',c',d' 各點。作 XY 之正交線如 $a'a$ 等線。取 a_1a 等於一寸一分。由 a_1 及 a 作 XY 之平行線若 a_1c_1 若 ac。即得 $abcd$ 爲所求之平面圖。

第一百二十五節 立於水平投影面之六角柱。底面之一邊七分。高一寸五分。其一側面與垂直投影面成角 20°。求此六角柱之投影。〔圖式第一百八圖〕

畫法 作 ba 邊。令其長等於七分。而即與 XY 成角 20°。依此邊作 $abcdef$ 正六角形。即所求之平面圖。由此平面圖諸角點。作 XY 之正交線。計由底面之縱面圖 $c_1'f_1'$。取其相隔一寸五分之水平線若 $c'f'$。即頂點之縱面圖。故 $c'f_1'$ 爲所求之縱面圖。

第一百二十六節　下距水平投影面三分。而其底面卽與水平投影面相平行之五角錐。底面之一邊八分。高一寸五分。其一邊與垂直投影面成角 45°。求此五角錐之投影。〔圖式第一百九圖〕

畫法　作邊長八分之正五角形。其 ab 邊與 XY 成角 45°。由其中心 v 與各角點聯成直線。卽所求之平面圖。

因其底面取水平。故各角點之縱面圖在距 XY 上方三分之水平線 $b'e'$ 中。而頂點之縱面圖。則爲由 v 所引 XY 之正交線通過於 $b'e'$ 之上一寸五分處之 v' 點。由 v' 點與 a',b',c',d',e' 各點聯成直線。卽所求之縱面圖。

第一百二十七節　正八面體每稜一寸二分。其一軸成爲垂直。而其成爲水平之一稜與垂直投影面成角 60°。求此正八面體之平面圖及縱面圖。〔圖式第一百十圖〕

〔附誌〕正八面體。每相對兩角點聯成直線。名爲軸。全體凡具三軸。互成正交於其體之中心點。卽各於其軸之中點互成正交也。

畫法　作 $abcd$ 正方形。令其每邊之長等於一寸二分。而又 ab 一邊適與 XY 成角 60°。聯結 ac,bd 兩線。卽合所求之平面圖。

次由 e 作 ee'。與 XY 正交於 f'。取 $f'e'$ 係等於 ac 或 bd。由 $f'e'$ 之中點。作 XY 之平行線若 $b'd'$。乃由 a,b,c,d 各點。作 XY 之正交線。與 $b'd'$ 交於 a',b',c',d' 各點。如圖聯結之。卽合所求之縱面圖。

第一百二十八節 正四面體每稜一寸五分。其一面在水平投影面中。其一邊與 XY 成角 45°。求此立體之投影。〔圖式第一百十一圖〕

畫法 作一線。令與 XY 成角 45°。於此線中取 ab。係等於一寸五分。準 ab 線作 abc 正三角形。由其中心 d 與各角點聯成直線。即合所求之平面圖。

因 ABC 在水平投影面中。故其縱面圖。即係由 a,b,c 三點引 XY 之正交線交於 XY 之 a',b',c' 三點是也。而正四面體之高。必視稜長若干。乃得定其頂點 D。故由 d 引 dc 之正交線 dd_1'。而 dc 爲其斜倚之一稜之平面圖。其眞長等於 ac。故以 c 爲圓心。ac 爲半徑。畫弧線。與 dd_1' 交於 d_1'。則 dd_1' 即此立體之高。此蓋以 dc 爲軸。而令 $dd_1'c$ 三角形旋起 90°。則 d_1' 點正達於 D 點之位置也。乃由 d 作 dd' 與 XY 正交於 e。取 ed' 等於 dd_1'。由 d' 與 a',b',c' 三點聯結之。即合所求之縱面圖。

第一百二十九節 立於水平投影面上之圓柱。底面之直徑一寸二分。高一寸七分。求此圓柱之投影。〔圖式第一百十二圖〕

畫法 作直徑一寸二分之圓。即爲其平面圖。作闊 $a'b'$ 一寸二分長 $a'c'$ 一寸七分之矩形。即爲其縱面圖。

第一百三十節 立於水平投影面上之圓錐。底面之直徑一寸二分。高一寸七分。求此圓錐之投影。〔圖式第一百十三圖〕

畫法　作直徑一寸二分之圓。卽爲其平面圖。而頂點之平面圖。卽圓心v是也。其與XY平行之直徑爲ab。由a及b各作投影線。與XY交於a'及b'。由v作投影線。於其通於XY之上方一寸七分之處。定v'點。則$a'v'b'$三角形。卽所求之縱面圖。

第一百三十一節　圓球之直徑一寸二分。其中心點在水平投影面之上方一寸。在垂直投影面之前方九分。求此球之投影。(圖式第百一十四圖)

畫法　準與XY成正交作oo'線。於此線上由XY之下方九分取o點。XY之上方一寸取o'點。則o卽球心之平面圖。o'卽球心之縱面圖。故由此二點各作半徑六分之圓。卽合所求之投影。

第一百三十二節　三角柱底面之一邊一寸。長一寸六分。其$ABCD$一側面與水平投影面成角$60°$。而長邊AB與水平投影面成角$30°$。求此立體之投影。(圖式第一百十五圖)

畫法　準與XY成直角作ST水平跡。又準與XY成$60°$角作RS垂直跡。係成RST面。而其所定之三角柱一側面$ABCD$。視以爲在此RST面上。依第一百二十一節。於RST面中。取PT線。係與水面投影面成角$30°$。以水平跡ST爲軸。令PT線隨RST面旋轉。至與水平投影面合爲一致。則PT達於p_1T。於此p_1T線。準與所定之尺寸相等。作$A_1B_1C_1D_1$。此

蓋以 $ABCD$ 面之水平跡爲軸。而令 $ABCD$ 面眠貼於水平投影面。而成此 $A_1B_1C_1D_1$ 者也。乃以 ST 爲軸。令此 $A_1B_1C_1D_1$ 矩形。隨 RST 面旋轉原位。依法卽得此矩形之平面圖 $abcd$ 及縱面圖 $a'b'c'd'$。又作 $A_1D_1E_1'$ 三角形。係等於其所定之底面。由 E_1' 作 $E_1'F_1$。與 A_1D_1 正交於 E_1。與 B_1C_1 正交於 F_1。卽得 $A_1E_1D_1C_1F_1B_1$ 爲 $ABCD$ 一側面平置於水平投影面上時之三角柱之平面圖。由 E_1 作 E_1g。與 XY 正交於 g。以 S 爲圓心。Sg 爲半徑。規弧線。與 RS 交於 h'。由 h' 作 RS 之正交線 $h'e'$。係卽等於 $E_1'E_1$。由 E_1 作 XY 之平行線。與由 e' 所作 XY 之正交線交於 e。依同法。求 f', f 兩點。如圖聯結之。卽合所求之投影。

第一百三十三節　五角錐底面之一邊八分。高一寸三分。其底面與水平投影面成角45°。底面之一邊與水平投影面成角30°。求此立體之投影。〔圖式第一百十六圖〕

畫法　取水平跡 ST。係與 XY 成直角。令與水平投影面成角45°。定 RST 平面。而其所定之底面。視以爲在此 RST 平面上。依第一百二十一節畫法。求此底面正五角形之平面圖若 $abcde$。又縱面圖若 $a'b'c'd'e'$。次由 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 正五角形之中心點 V_1。(卽以 ST 爲軸而令底面眠貼於水平投影面上時角錐頂點之平面圖也)作 V_1V_1'。與 XY 正交於 V_1'。以 S 爲圓心。SV_1' 爲半徑。規弧線。與 RS 交於 f'。由 f' 作 RS 之垂線 $f'v'$。係卽等於角錐之高一寸三分。由 v' 作 XY 之正交線。

與由V'所作XY之平行線相交於v。由v與a,b,c,d,e各點聯結之。卽合所求之平面圖。由v'與a',b',c',d',e'各點聯結之。卽合所求之縱面圖。

第一百三十四節　圓柱直徑一寸二分。高一寸五分。其軸與水平投影面成角$60°$。求此立體之投影。〔圖式第一百十七圖〕

畫法　軸與水平投影面成角$60°$。其底面必與水平投影面成角$30°$。故準與垂直投影面成角$30°$。又準與水平投影面成直角。取RST平面。依第一百二十二節畫法。求於RST平面上等於底面之圓之平面圖若$acbd$及縱面圖若$c'd'$。乃由c',d'兩點。各作RS之垂線若$c'g'$若$d'h'$。各等於圓柱之高。聯結$g'h'$。卽成$c'd'h'g'$合所求之縱面圖。

次作$a'e'$卽$b'f'$。係與$c'g'$平行。由a,b,c,d各點。作XY之平行線。與由e',g',f',h'各點所作XY之正交線。相交於e,g,f,h各點。卽得圓柱頂面之平面圖。蓋如由e'所引之投影線。與a所引XY之平行線。相交於e。此e點卽圓柱頂面之平面圖中一點是也。

其AE, BF, CG, DH等線。蓋不啻角柱之側稜云。

練習題八

1. 正方柱底面之一邊一寸。高二寸。其一端面在垂直投影面中。一側面與水平投影面成角$30°$。最下之一稜。在水平投影面上方五分。求此立體之投影。

2. 大立方體每稜一寸五分小立方體每稜一寸三分。以小者疊於大者之上。其軸接成一致。而小立方體底面之邊與大立方體底面之邊成角45°。大立方體係立於水平投影面上其一側面與垂直投影面成角45°。求投影。

3. 正五角柱底面之一邊一寸二分。高二寸係立於水平投影面上。其一側面與垂直投影面平行。而在垂直投影面前方六分之處求此立體之投影。

4. 立於水平投影面上之六角錐。底面之一邊一寸。高二寸。其底面之一邊與XY成角20°。而與垂直投影面最近之一角點在垂直投影面前方四分之處。求此角錐之平面圖及縱面圖。

5. 圓柱之直徑一寸六分軸長二寸係立於水平投影面上。其軸在垂直投影面前方一寸二分之處。求此立體之投影。

6. 圓錐底面之直徑一寸七分高二寸二分。其底面在垂直投影面中。而其軸在水平投影面上方一寸四分之處。求此圓錐之投影。

7. 圓球直徑一寸八分。其中心點在水平投影面中而在垂直投影面前方二寸之處。求此圓球之投影。

8. 立於水平投影面上之正四面體每稜一寸六分。其底面之一邊與XY成角20°。求此立體之投影。

9. 求第一百二十七節正八面體之投影。

10. 立方體每稜一寸四分。其一側面與水平投影面成角 50°。而與垂直投影面成正交。此側面之一邊。與水平投影面成角 28°。求此立體之投影。

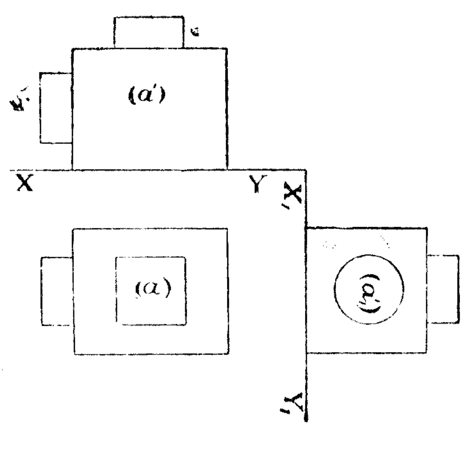
11. 圓錐底面之直徑一寸八分。高二寸。其軸與水平投影面成角 50°。底面與垂直投影面成正交。求此圓錐之投影。

12. 六角柱底面之一邊八分。高一寸八分。其一側面與垂直投影面成正交。而與水平投影面成角 60°。又此側之長邊與水平投影面成角 30°。求此六角柱之投影。

第五章　投影面位置之變更

第一百三十五節　既如前述。凡得一平面圖一縱面圖。可以定物體之眞形。然此惟簡易之立體爲然也。按之實際。必更得一幅或一幅以上之投影。乃始能定物體之眞形。

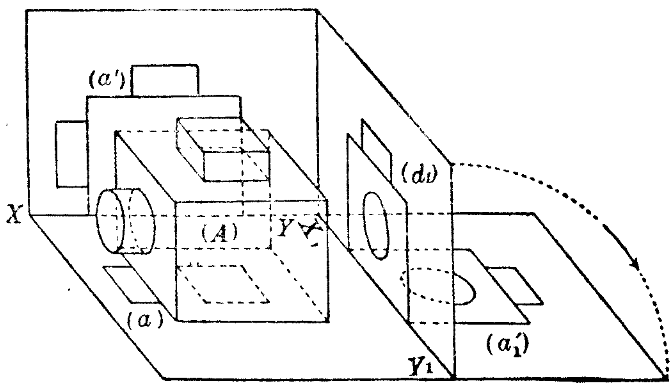
第四十九圖



如第四十九圖。(a') 爲四角柱之縱面圖。(a) 卽其平面圖。而此立體之上面及左側。或如本圖有突起者。則見此兩圖。知頂面之突起者。顯爲四角柱狀。而左側之突起。其爲四角柱。抑爲圓柱。猶未能定。而欲定

左側突起之果係何狀。則必於物體之左側。準與平行。特增一垂直投影面之投影畫。如 (a_1') 者是。此所增之垂直投影面與水平投影面之交線。爲特增之軸線。而 (a_1') 與 (a) 之關係。仍同於 (a') 與 (a) 之關係。惟投影之方向爲獨異耳。(參證下圖)

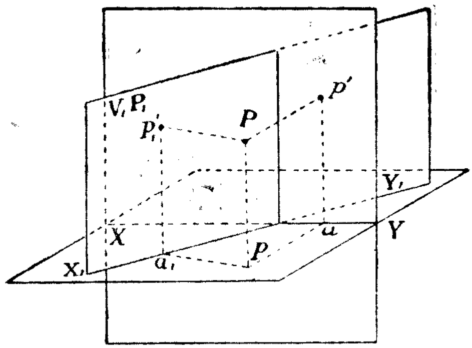
第五十圖



如第五十圖。(a_1') 爲此立體之正面圖。(a) 爲其平面圖。(a_1')爲其側面圖。

第一百三十六節 已知 P 點之平面圖 p。縱面圖 p'。求其他之縱面圖 p_1'。

第五十一圖



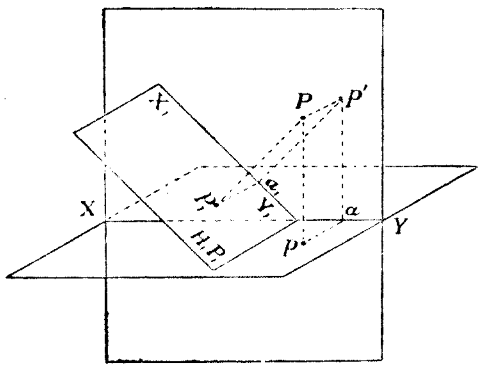
如第五十一圖。P為原點。其對於以XY爲軸之兩投影面之投影。爲p爲p'。今與水平投影面正交於X_1Y_1。取一V_1P_1平面。於此平面上p_1'點。卽P點之投影。而水平投影面。並無變更。則V_1P_1垂直投影面。無論如何。但使P點之高常等於Pp。其等式必爲$p_1'a_1=p'a$。如欲畫於一平面上。則以X_1Y_1爲軸。而令V_1P_1面眠貼於水平投影面上可矣。其畫法如次。

畫法　P點之投影。已知其爲p爲p'。〔圖式第一百十八圖〕而欲於其所特增之垂直投影面上。求新縱面圖。則準與新軸線X_1Y_1成正交。作投影線pp_1'。其P'點在XY之上方。故於X_1Y_1之上方。取$a_1p_1'=ap'$。若p'點在XY之下方。則於X_1Y_1之下方取$a_1p_1'=ap'$。據此以定p_1'點。合所求之新縱面圖。

第一百三十七節　已知P點之平面圖p。縱面圖p'。求其他之平面圖p_1。

如第五十二圖。H_1P_1 爲新增之水平投影面。其與垂直投影面之交線爲 X_1Y_1。

第五十二圖



畫法　既明前節之畫法。則本節之畫法無難解決。蓋若以本節之水平投影面與垂直投影面相爲對調。卽與前節畫法並無稍異。如由 p' 準與 X_1Y_1 成正交作投影線 $p'p_1$。〔圖式第一百十九圖〕其 p 點在 XY 之下方。故於 X_1Y_1 之下方。取 a_1p_1 等於 ap。若 p 點在 XY 之上方。則於 X_1Y_1 之上方。取 a_1p_1 等於 ap。據此以定 p_1 點。合所求之新平面圖。

第一百三十八節　已知 AB 線之平面圖 ab。縱面圖 $a'b'$。求其他之縱面圖。

畫法　AB 如係直線。則依第一百三十六節畫法。求 A, B 兩端之新縱面圖 a_1' 及 b_1'。聯成 $a_1'b_1'$ 直線。卽所求之新縱面圖。

AB 若爲曲線。則求其線中若干點之新縱面圖。以雲形定規聯結之卽合所求之新縱面圖。

第一百三十九節　ABC 三角形之投影 abc 及 $a'b'c'$。均成每邊二寸之等邊三角形求其新縱面圖。惟新軸 X_1Y_1 與原軸 XY 成角 45°。〔圖式第一百二十圖〕

畫法　依第一百三十六節畫法。求 A, B, C 三點之新縱面圖如 a_1', b_1', c_1'。如圖聯結之。卽合所求之新縱面圖。

第一百四十節　直立於水平投影面之圓形。其直徑一寸二分。而圓形之面與垂直投影面成角 45°。求此圓形之投影〔圖式第一百二十一圖〕

畫法　先準與圓形之面相平行。作一垂直投影面。求其縱面圖 $0'3'6'9'$。係卽等於直徑一寸二分之原圓。而其平面圖爲 93 直線。與 XY 相平行。乃準與 93 直線成角 45°。作 X_1Y_1 新軸線。任於圓周酌取若干點。而於以 X_1Y_1 爲軸之垂直投影面上。求其新縱面圖。如 $0_1', 1_1', 2_1', 3_1' \cdots\cdots\cdots 11_1'$ 等點是。以雲形定規聯結之。卽合所求之縱面圖。其 93 直線。卽所求之平面圖也。

第一百四十一節　橫臥於水平投影面上之正方柱。底面之一邊九分。長一寸六分。其一側面與水平投影面成角 60°。而直立投影面與角柱之端面成角 50°。求此角柱之縱面圖及平面圖。〔圖式第一百二十二圖〕

畫法　令此立體之 DH 長稜。貼合於水平投影面上。而含此 DH 長稜之 $ADHE$ 面。令與水平投影面成角 $60°$。卽得其平面圖 ag。又與此立體之端面相平行。設一垂直投影面。畫其補助縱面圖 $a'b'c'd'$。乃準與底面之平面圖 eg（或與 eg 相平行之 XY）成角 $50°$。作 X_1Y_1 爲軸線。於此軸線上所立之垂直投影面。求立體各角點之新縱面圖。順次如圖聯結之。卽合所求之縱面圖 $a_1'b_1'c_1'd_1'f_1'$。

垂直投影面之位置。無論如何。不與平面圖相涉。故 ag 卽所求之平面圖。

第一百四十二節　五角錐底面之一邊八分。高一寸五分。其一側稜與水平投影面成角 $35°$。求其投影。〔圖式第一百二十三圖〕

畫法　此當先以立體爲直立於水平投影面上。而令 VA 一側稜之平面圖 va 與 XY 相平行。卽得此立體之補助平面圖 $abcdev$ 及縱面圖 $a'b'c'd'e'v'$。乃準與 $v'a'$ 成角 $35°$。作 X_1Y_1 新軸線。依第一百三十七節畫法。求各角點之新平面圖 a_1，b_1，c_1，d_1，e_1，v_1。如圖聯結之。卽成 $a_1b_1c_1d_1e_1v_1$ 合所求之平面圖。而 $v'b'c'd'e'v'$ 合所求之縱面圖。

〔附誌〕僅據 AV 稜與水平投影面成角之度數。未遂能執定立體之位置。而以爲無可議更也。故玆所畫之圖。僅爲合題之一。

第一百四十三節　五角錐之尺寸與前節同。而其一側面如 VCD 三角形。與水平投影面成角 $30°$。此三角形之底邊 CD。係成水平。求此立體之投影。〔圖式第一百二十三圖〕

畫法　此當先以立體爲直立於水平投影面上。而令VCD一側面之縱面圖。成一直線。其CD底邊之平面圖cd與XY成正交。卽得其投影$abcdev$及$a'b'c'd'e'v'$。乃準與$v'c'$成角30°。作X_2Y_2新軸線。與前節同法。卽得$a_2b_2c_2d_2e_2v_2$合所求之平面圖。而$a'b'c'd'e'v'$合所求之縱面圖。

第一百四十四節　橫臥於水平投影面上之圓柱。直徑爲三寸。長四寸二分。底面與垂直投影面成角45°。求此立體之投影。〔圖式第一百二十四圖〕

畫法　先設一垂直投影面。令與底面相平行。求得其補助縱面圖$0'2'4'6'$及平面圖266_22_2。乃準與XY成角45°作X_1Y_1。依第一百四十節畫法。求得兩底面之新縱面圖$0_1'2_1'4_1'6_1'$及$0_2'2_2'4_2'6_2'$。聯結$0_1'0_2'$及$4_1'4_2'$。卽所求之縱面圖。

第一百四十五節　橫臥於水平投影面上之圓錐。底面之直徑爲一寸二分。高一寸五分。其軸係與垂直投影面相平行。求此立體之投影。〔圖式第一百二十五圖〕

畫法　先作一底邊一寸二分高一寸五分之二等邊三角形若$v'c'a'$。準與$v'a'$平行作vo。乃以$c'a'$爲直徑。作$a'b_1e_1c'$半圓。由圓周上e_1,b_1等點。作$a'c'$之垂線。得其正交點若b',e'等。由b',e'等點作XY之正交線。令$ob=od=o'b_1, ge=gf=e'e_1$。循是類推。卽得b,d,e,f等點。由c'及a'作XY之垂線。與vo交於e,a。以雲形定規聯合c,e,b,a,d,f等點。由v'作XY之垂線。與vo交於v。由v作雲形定規所聯曲線之切線。卽合所求之平面圖。而$v'a'c'$卽爲其縱面圖。

此蓋於其垂直投影面上以$e'c'$爲軸。另設一水平投影面而求其補助平面圖如$a'b_1e_1c'$半圓者。卽所求補助平面圖之半也。旣得此補助乃始於垂直投影面上以XY爲軸。求新平面圖惟此新平面圖必以平行於XY之vo。爲圓錐之軸之平面圖者耳。

第一百四十六節　<u>正四面體每邊一寸三分其ABC一面與水平投影面成角45°。而AC邊與水平投影面成角35°。求其平面圖及與AC線相平行之垂直投影面上之縱面圖。</u>〔圖式第一百二十六圖〕

畫法　依第一百二十一節作邊長一寸三分之正三角形令其面與水平投影面成角45°。其一邊AC與水平投影面成角35°。求得其縱面圖$a'b'c'$及平面圖abc乃依第一百二十八節由ABC三角形中心之縱面圖c'作$e'd'$係等於立體之高而爲$b'c'$之垂線聯結$d'a',d'b',d'c'$。又由d'作投影線。與由D_1所作XY之平行線相交於d。聯結da,db,dc卽合所求之平面圖。

次凡甲直線與乙平面相平行者則丙平面上甲線之投影與乙面之跡。亦必互相平行。故準與AC之平面圖ac相平行。作X_1Y_1新軸線。依第一百三十六節。求$a'b'c'd'$。卽合所求之縱面圖。

練習題九

1. 如第五十三圖。ac, $a'c'$ 爲長方形之投影。準與 XY 成角60°。作 X_1Y_1 新軸線。求其新縱面圖。

2. 直立於水平投影面上之圓形。直徑爲一寸六分。而與垂直投影面成角50°。求其投影。

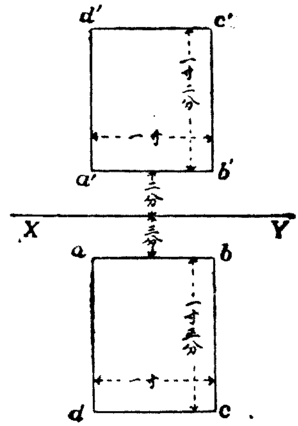
3. 圓錐底面之直徑一寸七分。高二寸。其軸係成水平。準與底面成角55°。設一垂直投影面。求對於此垂直投影面之縱面圖。

4. 如第五十四圖。爲階級體之投影。準矢所向。設一垂直投影面。求新縱面圖。（酌用縮尺。隨誌縮尺之比率。）

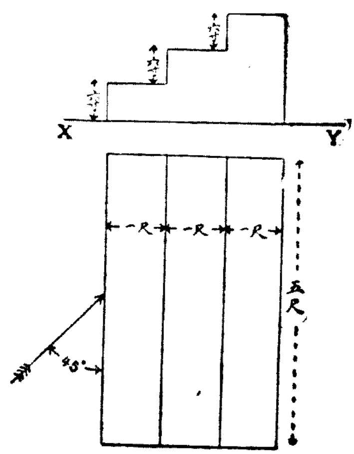
5. 立方體每稜一寸二分。其一稜貼合於水平投影面上。而與垂直投影面成角30°。含此稜之一側面。與水平投影面成角36°。求此立體之投影。

6. 正八面體每稜一寸五分。其一軸直立於水平投影面上。不

第五十三圖



第五十四圖



交於此軸之一稜。與垂直投影面成正交。求此立體之投影。且求其一側面成水平時之平面圖。

7. 三角錐底面之一邊一寸六分。高一寸九分。其通於頂點之一稜。直立於水平投影面上。求此錐之投影。

8. 六角錐底面之一邊一寸。高一寸八分。其一側面成水平。而此側面係三角形。其底邊與垂直投影面成正交。求其平面圖及縱面圖。

第六章　立體之截分　立體表面之展開

第一百四十七節　一切物體。至爲複雜。僅就外部觀之。其構造不甚明顯。故便宜以平面截其立體。截去若干。而留其餘者。以求投影。卽可明示物體內部之構造。因名其物體被截之面爲**截口**。而其所用以截斷之平面。稱爲**截斷平面**。存於截斷平面與水平投影面間之物體所顯之平面圖。稱爲**截斷平面圖**。存於截斷平面與垂直投影面間之物體所顯之縱面圖。稱爲**截斷縱面圖**。

表示截口之法。雖有多種。本書則以密排之平行線表示之。其被截於同一之平面。而截法各異者。則以密排之平行線作相異之方向。分別表示之。（第一百六十八節以下所詳之陰影法。其在不同之面上所顯之陰影。亦準此用方向相異之密排平行線。分別表示之。）

如欲求截口之眞形。則準與截斷平面相平行。設一平面。此於平面中。求其投影可也。

第一百四十八節　六角柱底面之一邊六分。高一寸六分。其一側面係成水平。而其軸與垂直投影面成角45°。今以平行於垂直投影面之截斷平面截此立體爲二等分。求其截斷縱面圖及其展開圖。(圖式第一百二十七圖)

畫法　先求截斷縱面圖。(甲圖)

角柱之軸。與垂直投影面成角45°。其餘角亦爲45°。引 ad 線與 XY 成餘角之度。於 ad 線上。作 $ab_1'c_1'd$ 爲每邊六分正六角形之半。卽得 $admn$ 爲角柱之平面圖。乃於角柱之軸之平面圖。取其中點。作 HT。令與 XY 平行。則 HT 卽截斷平面之水平跡。如以平行於 XY 之 $g'd'$ 爲軸之縱面圖。則截口之形。卽由 $g'd'$ 求對稱。故由 g,h,i,j 各點。作 XY 之正交線。而於 $g'd'$ 線之上下。取 bb_1' 卽 cc_1' 之距度。作 $h'i'$ 及 $l'k'$ 兩線。卽得 $g'h'i'j'k'l'$ 爲截口之縱面圖。且係截口之眞形。

又作 $ABCDEF$ 底面之縱面圖 $a'b'c'd'e'f'$。如圖聯結之。卽完成所求之縱面圖。

次求展開圖。(乙圖)

作 d_1d_1 線。令其長等於角柱底面六邊之和。於其上作 c_1,b_1,a_1,f_1,e_1 各分點。凡分 d_1d_1 爲六等分。由兩端及各分點。作 d_1d_1 之垂線。令 $d_1j_1=dj$, $c_1i_1=e_1k_1=ci$, $b_1h_1=f_1l_1=bh$, $a_1g_1=ag$ (參證甲圖) 聯結 $j_1, i_1, h_1, g_1, l_1, k_1, j_1$ 各點。卽圍於截口各線之展開圖。任取 a_1f_1 爲一邊。作正六角形。又任取 g_1l_1 爲一邊。作 $g_1h_1i_1j_1k_1l_1$ 等於截口之眞形。卽完成所求之展開圖。

第一百四十九節　五角錐底面之一邊八分。高一寸五分。其底面之一邊。與XY相平行。而其軸自頂點以下六分五釐之處。爲截斷平面所截。此截斷平面。與水平投影面成角40°。與垂直投影面成正交。求其截斷平面圖及截口之眞形。又求其存於截斷平面以下之立體。以其所圍之各側面展開之。〔圖式第一百二十八圖〕

畫法　先求截斷平面圖及截口之眞形。〔甲圖〕

準與XY相平行作ab。卽得角錐之平面圖$abcdev$。縱面圖$a'b'c'd'e'v'$。由其軸頂點以下六分五釐之處i'。作RS。係卽與XY成角40°。故RS爲截斷平面之垂直跡。而與角錐諸稜之縱面圖相交於f',g',h',i',j'各點。則$j'h'$卽截口之縱面圖。由f',g',h',i',j'各點。作XY之正交線。與對應諸稜之平面圖相交於f,g,h,j各點。卽截口F,G,H,J各角點之平面圖。因vd與$v'd'$同爲XY之正交線。不能相交於一點。故截口I角點之平面圖。當如下法以求之。

法取d_1d_1'等於vd。聯結$v'd_1'$。則$v'd_1'$卽錐稜之眞長。由i'作XY之平行線。與vd_1'交於i_1'。則i_1'卽VD稜中I點之位置。故於vd線中。取vi等於$i'i_1'$。卽i點爲截口I角點之平面圖。聯結f,g,h,i,j各點。卽合所求之截斷平面圖。

乃以RS爲新軸線由f',g',h',i',j'各點作此軸之正交線。於其上取$f'F=of$。蓋卽第一百三十七節之畫法。得截口之新平面圖$FGHIJ$。卽截口之眞形。

次求截斷平面以下所有之立體。展開其所圍之各側面。(乙圖)

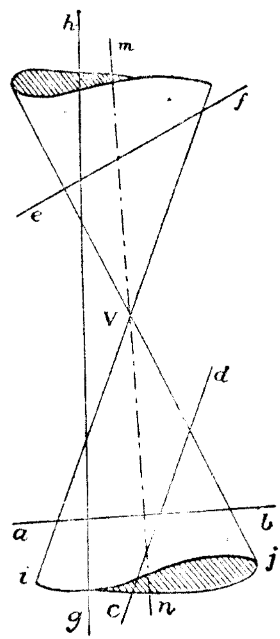
以 V 爲圖心錐稜之眞長 $v'd_1'$ 爲半徑。作 $CDEABC$ 弧。由弧線上 C 點。遞取通弦。令各等於底面之一邊 ab。即依其底面之邊數。取 CD,DE,EA,AB,BC 各弦。由 C,D,E,A,B,C 各點。與 V 點聯成直線。乃由 f',g',h',j' 等點。〔甲圖〕作 XY 之平行線。與 $v'd_1'$ 交於 f_1',g_1',h_1',j_1' 等點。如是則 $d_1'j_1'$ 即 JE 之眞長。$d_1'f_1'$ 即 AF 之眞長。$d_1'i_1'$ 即 DI 之眞長。$d_1'g_1'$ 即 BG 之眞長。$d_1'h_1'$ 即 CH 之眞長。故取 $CH=d_1'h_1'$, $DI=d_1'i_1'$, $EJ=d_1'j_1'$, $AF=d_1'f_1'$, $BG=d_1'g_1'$ 聯結 H,I,J,F,G,H 等點。即合所求之展開圖。

第一百五十節　圓錐之截口。

本節所謂圓錐。概置其底面不論。而其曲面。任推至於無窮。

(一)　截斷平面如 ab。係與圓錐之軸成正交。則其截口爲圓形。

(二)　截斷平面通於圓錐之軸。則其截口如 Vi,Vj 兩直線所夾之角。即圓錐之頂角。



第五十五圖

（三） 截斷平面cd。係與Vi相平行。而與iVj面成正交。則其截口之曲線。爲拋物綫。

（四） 截斷平面如ef。在頂點V之一側而與Vi,Vj兩直線相截。則其截口爲**橢圓**。

（五） 截斷平面gh與mn軸所成之角。比Vi與軸所成之角小者。則其截口爲**雙曲綫**。

第一百五十一節 直立於水平投影面上之圓柱。直徑九分。高一寸二分。於其軸之中點。設一截斷平面。令此截斷平面。與水平投影面成角35°。求立體之投影及截口之眞形。又求曲面之展開圖。〔圖式第一百二十九圖〕

畫法　先求立體之投影及截口之眞形。〔甲圖〕

依法作圓柱之平面圖及縱面圖。於其軸之中點d'。引MT。係與XY成角35°。則此MT卽截斷平面之垂直跡。

凡由圓柱之表面。任取相等之距度。準與其軸平行。作無數之直線。而與截斷平面相交。其各交點聯結之。卽截口之曲線。今分底面之圓周爲十二等距。由各等分點。準與其軸平行作直線。此各直線之縱面圖爲$a_1'a'$,$b_1'b'$,$c_1'c'$,$d_1'd'$等線。與垂直跡MT相交於a',b',c',d'等點。故$a'g'$卽截口之縱面圖。而$abgj$爲其平面圖。依第一百四十九節畫法。得$ADGJ$爲截口之眞形。

次求曲面之展開圖。〔乙圖〕

於 XY 之延長線上。取 A_1A_1。係等於圓柱之圓周。以此 A_1A_1 線準前分爲十二等距。各由等分點作垂直線。又由 a',b',c',d',e',f',g' 各點作水平線。由此縱橫兩線相應之交點。如圖聯結之。卽得 $A_1G_1A_1$ 合所求之展開圖。

〔附誌〕此截口之眞形.蓋爲橢圓也.故依其長軸 AG 短軸 DJ.準第七十六節法畫之.亦無不可.

第一百五十二節　直立於水平投影面上之圓錐。底面之直徑一寸二分。高一寸六分。於其軸之中點設一截斷平面。令此截斷平面與水平投影面成角 $50°$。而與垂直投影面成正交。求其截口之投影及曲面之展開圖。〔圖式第一百三十圖〕

$vaib$ 及 $v'a'b'$ 爲圓錐之投影。VT 爲截斷平面之垂直跡。

畫法　先求截口之投影。

任於底面之平面圖圓周。分作若干等分。由各等分點與圓心 v 聯成直線。卽爲由頂點引於圓錐表面上各直線之平面圖。而此各直線之縱面圖。與 VT 相交之點。必在截口之縱面圖中。故卽由各交點。引 XY 之正交線。求各點相應之平面圖。如圖聯結之。卽得截口之平面圖。惟 G 點之平面圖 g。求之者當由 v 引 vi 之正交線若 vv_1'。卽等於圓錐之高 $v'i'$。乃於 vv_1' 線上由 v 點取 $i'g'$ 之距離。作 vi 之平行線。與 iv_1' 交於 g_1'。由 g_1' 作 vi 之垂線。得其正交點 g。乃始爲 G 點之平面圖。

次求曲面之展開圖。

以v'為圓心。$v'a'$為半徑。規弧線。與第八十七節同法。取$a'A_1$弧。等於底面之圓周。而$a'A_1$弧準與底面之圓周。同分為若干等分。由各等分點與v'聯成直線。如圖參證。合所求之展開圖。

第一百五十三節 直立於水平投影面上之圓錐。底面之直徑一寸四分。高一寸七分。於其軸線上由頂點以下七分之處。設一截斷平面。令此截斷平面與垂直投影成正交。而與曲面上VA線相平行。求其投影及截口之眞形。〔圖式第一百三十一圖〕

畫法　先與前節同法。求圓錐之投影。及截斷平面之垂直跡。乃依下法。求其截口。

凡與其軸互成正交之平面。以之截圓錐。其截口必為圓形。故若以含有$s't'$垂直跡之水平面。截此圓錐。其截口必為以st為直徑之圓。此圓與今所設之截斷平面相交之點。必在今所求之截口曲線上。而交點之縱面圖為c'。故由c'作XY之正交線。與sct圓交於c,c_1兩點。此兩點卽為今所求截口曲線上兩點之平面圖。

遞依同法。求得截口曲線上各點之投影。如圖聯結之。卽得ebb_1及$e'b'$合所求之投影。由此投影。依第一百四十九節及一百五十一節求EBB_1。為其眞形。

第一百五十四節　以截斷平面截球體。其截口恆爲圓。而截斷平面通於球心者。截口爲大圓。不通球心者。截口爲小圓。

第一百五十五節　O球直徑一寸五分。於距球心之平面圖o三分之處。設一截斷平面。令此截斷平面與水平投影面成正交。而其水平跡HT與XY成角$55°$。求截斷縱面圖及截口之眞形。〔圖式第一百三十二圖〕

畫法　由o作os。其長爲三分。而與XY成角$35°$。卽$55°$之餘角。乃由s作os之正交線若HT。則HT必與XY成角$55°$。而爲所設截斷平面之水平跡。

然若截斷平面與垂直投影面相平行。其水平跡爲cd。則此截斷平面與球面之交線。必爲以cd爲直徑之圓如$c'k'd'$圓是也。而此以cd爲直徑之圓與今所設截斷平面之交點。必在今所求截口之曲線中。卽如k點是其平面圖也。故由k作XY之正交線。與$c'k'd'$圓交於k',k_1'兩點。此兩點卽今所求截口曲線中兩點之縱面圖。依同法。遞求s',s_1',i',i_1'等點。如圖聯結之。卽合所求之截斷縱面圖。

又因以截斷平面截球體者。其截口之眞形恆爲圓。故由a,b兩點。各作XY之正交線。與由o'所作XY之平行線相交於a',b'兩點。又由ab之中點s。作XY之平行線若ef。而令此ef水平跡之垂直面。與球面之交線爲圓形。其縱面圖卽如$e's'f'$圓是也由s引XY之正交線。與$e's'f'$圓交於s',s_1'兩點。乃以$a'b'$爲短軸。$s's_1'$爲長軸。作橢圓。亦爲截口之縱面圖。

次依前數節法。求截口之眞形。又或於 os 之延長線上任取一點。作 X_1Y_1。係與 os 成正交。取 no_1' 之長。爲如 o' 點之高。乃以 o_1' 爲圓心。sa 爲半徑。作圓周。亦爲截口之眞形。

第一百五十六節 已知球面上一點之平面圖。求其縱面圖。〔圖式第一百三十二圖〕

o,o' 兩圓爲球之投影。k 爲其面上一點之平面圖。

畫法　由 k 點。準與 XY 平行作 cd。而含此 cd 水平跡之垂直面與球面之交線爲圓形。其縱面圖卽如 $c'k'd'$ 圓是也。由 k 作 XY 之正交線。與 $c'k'd'$ 圓交於 k',k_1' 兩點。此兩點卽以 k 爲平面圖之球面上 K 點之縱面圖。蓋以 k 爲平面圖之 K 點。在球面上固可占兩位置者也。

練習題十

1. 五角柱底面之一邊一寸。高二寸五分。其一側面橫臥於水平投影面上。而於其軸之中點。設一截斷平面。此截斷平面。係與水平投影面成正交。而與其軸成角45°。若準與此截斷平面相平行。設一垂直投影面。其截斷縱面圖若何。

2. 截口如前題。求其展開圖。

3. 圓柱直徑一寸八分。長二寸。其軸與水平投影面成角50°。而圓柱之下端。係抵定於水平投影面上。若準與水平投影面相平行。而距水平投影面上方一寸三分。設一截斷平面。其截斷平面圖若何。

4. 準前題。求其存於截斷平面以下之立體。以其表面展開之。

5. 五角錐底面之一邊一寸。高二寸。其一側面橫臥於水平投影面上。而於其軸之平面圖中點。設一截斷平面。此截斷平面。與水平投影面成正交。而與其軸之平面圖成角50°。若準與此截斷平面相平行。設一垂直投影面。其截斷縱面圖若何。

6. 立於水平投影面上之球體。直徑爲二寸。於距球心五分之處。設一截斷平面。令與水平投影面成角50°。求其截斷平面圖及截口之眞形。

7. 立於水平投影面上之圓錐。底面之半徑一寸二分。高二寸七分。於距其軸四分之處。設一垂直面以截之。求其截口之眞形。

8. 立於水平投影面上之圓錐。其縱面圖爲$a'b'v'$係成二等邊三角形。$v'a'=v'b'=2.5$寸，$a'b'=2$寸。而錐之表面上一點P。其縱面圖p'。距a爲九分。距b'爲一寸六分。試畫其投影。并求P點之平面圖。

9. 四角柱高二寸。其底面爲矩形。長邊一寸二分。短邊五分。以一長邊抵定於水平投影面上。令短邊與水平投影面成角45°。即於抵定之長邊。取其中點。設一截斷平面。即令與抵定之長邊成角40°。而與水平投影面成正交。若準與截斷平面相平行。設一垂直投影面。則其截段大者之縱面圖若何。

第七章 立體之交切形 螺旋

第一百五十七節 此立體與彼立體相穿貫者。謂之交切。其交切線之求法如次。

求甲乙兩立體表面之交切線。恆以甲乙兩表面爲同截於丙表面。惟此丙表面與甲乙兩面之交切線。其投影爲直線爲圓。必求其易顯者。乃取丙面與甲面之交切線及丙面與乙面之交切線。觀其相交之點。知必爲甲乙兩面公有之點。而卽在所求之交切線中。依同法。求得數多之點。順次聯合之。卽合所求之交切線。

第一百五十八節 大正方柱底面之一邊一寸。長一寸七分。小正方柱底面之一邊七分。長一寸七分。各於其軸之中點作正交。兩側面相平行。而大正方柱爲直立。其一側面與垂直投影面成角30°。求此交切形之投影。〔圖式第一百三十三圖〕

畫法 準與XY成角30°。引dc線。作$abcd$及$efgh$爲兩柱之平面圖。準與ef平行。作X_1Y_1。以之爲軸。設一補助垂直投影面。於此面上作$d_1'c_1'i_1$及$h_1'g_1'j_1'$。爲兩柱之補助縱面圖。乃對於XY。施用第一百三十六節之畫法。卽合所求之縱面圖。

第一百五十九節 縱橫兩圓柱。縱者直徑一寸二分。橫者一寸。兩軸作正交。橫者之軸與垂直投影面相平行。求其交切線之縱面圖。〔圖式第一百三十四圖〕

畫法　作 $ef, e'f'$ 及 $gh, g'h'$ 爲兩柱之投影。若準與橫者之軸相平行。設一垂直之截斷平面。其水平跡如 HT。則此截斷平面與縱圓柱之交線所顯之平面圖。其一卽如 b 點是也。而其縱面圖。爲由 b 點所引 XY 之正交線若 $b'b'$ 線是也。

此截斷平面。又與橫圓柱相截。而與橫圓柱之交線。爲水平兩線。同以通於 b 點之水平線爲平面圖。顧其縱面圖則如何。當於橫圓柱軸之一端。準與橫圓柱軸成正交。設一平面。卽以與橫圓柱軸之平面圖成正交如 X_1Y_1 者爲軸之垂直投影面也。於此面上作 $b_1'a_1'b_1'c_1'd_1'$ 爲橫圓柱之縱面圖。而截斷平面對於 X_1Y_1 之垂直跡。必與 HT 聯成一致。故 HT 與圓周之交點若 b_1' 若 b_1'。卽爲截斷平面與橫圓柱之交線所顯之側面圖。又準與由 b_1', b_1' 兩點至 X_1Y_1 之距離相等。作 XY 之平行線。乃始爲同以平行於 XY 通於 b 點之水平線爲平面圖之水平兩線所顯之縱面圖。與由 b 所引 XY 之正交線相交於 b', b' 兩點。此兩點。卽所求交切線中所含兩點之縱面圖。

依同法。遞求交切線中所含各點之縱面圖。以雲形定規聯結之。合所求之縱面圖。

第一百六十節　立於水平投影面上之圓錐。底面之直徑爲一寸四分。高一寸八分。又圓柱直徑八分。長二寸。其軸成水平。而與垂直投影面相平行。於距圓錐之底面五分之高。與圓錐之軸相交。求此立體之交切形。〔圖式第一百三十五圖〕

畫法　此因圓錐之軸成垂直。圓柱之軸成水平。故以水平之截斷平面。截圓錐成圓形。截圓柱成直線。而此圓形與直線之交點。必皆在所求之曲線中。

先作兩立體之投影。次準與圓柱之軸成正交。以X_1Y_1爲軸設一垂直面。於其上作兩立體之側面圖。

水平截斷面之垂直跡爲VT。此截斷平面。截圓錐成FG圓。而其截圓柱則何如。蓋卽以e_1', e_1'兩點爲側面圖之二直線也。此二直線之平面圖。卽由e_1', e_1'兩點準與柱軸之平面圖相平行所作之二線若$e_1'e, e_1'e$是也。此線與fr圓之交點爲e爲e。卽所求交切線中所含兩點之平面圖。

由e作XY之正交線。與VT交於e'。卽e, e兩點公有之縱面圖。

依同法。求交切線中所含各點之投影。以雲形定規聯結之。合所求之交切形。

〔附誌〕以上二節。雖僅明左方之曲線。而其右方可類推。

第一百六十一節　o, o'爲球心之投影。$abcd, a'b'c'd'e'$爲正方柱之投影。求其交切線之縱面圖。〔圖式第一百三十六圖〕

畫法　若準與垂直投影面相平行。設一截斷平面以截此兩立體。則截斷平面與球之交線所顯之縱面圖爲圓。而與角柱側面之交線爲垂直之直線此直線與圓之交點。必在所求之交切線中。

如截斷平面之水平跡其一爲 HI。則截斷平面與球之交線所顯之縱面圖爲 $f'n'm'g'$ 圓。而與角柱之交線所顯之縱面圖爲 $g'f'$, $n'm'$ 兩線。此兩線與 $f'n'm'g'$ 圓相交於 f', n', m', g'。即交切線之縱面圖中所含之四點。

依同法。多設截斷平面以求各點。順次聯結之。即合所求之縱面圖。

第一百六十二節　abcv 及 a'b'c'v' 爲三角錐之投影。defg 及 d'e'f'g'o' 爲正方柱之投影。求其交切形之投影〔圖式第一百三十七圖〕

畫法　聯結 vd。延長之至與 ab 交於 h。則 vh 爲通於頂點 V 且含有角柱 DI 稜之垂直面所著之水平跡。而此垂直面與 VAB 面之交線所顯之平面圖。即爲 vh。其縱面圖爲 $v'h'$。因 VH 與 DI 同在一平面中。故其交點 i', i'。即 DI 稜與 VAB 一側面之交點。

依同法遞求角柱之稜與角錐之側面相交之點 K, L, N。

次角柱一側面之平面圖 de 與角錐一稜之平面圖 vb 相交於 j 此 j 點即 IDE 一側面與 VB 稜之交點所顯之平面圖。故由 j 作 XY 之正交線。與 $v'b'$ 交於 j'。則此 j' 點即 J 點之縱面圖。

依同法。求角錐之稜與角柱側面之交點。若 m, m' 若 r, r'。

又 $v'a'$ 與 $d'f'$ 之交點爲 s'。即 VA 稜與角柱頂面之交點所顯之縱面圖。故由 s' 作 XY 之正交線。與 va 交於 s。此 s 即其平面圖。

依同法。求角錐之稜與角柱之頂面之交點。若t, t'若u, u'。乃以求得諸點。如圖聯結之。卽合所求交切線之投影。

第一百六十三節　AA_1C_1直角三角形。〔圖式第一百三十八圖〕係以紙剪成者。其倚於直角之一邊若A_1C_1。介與圓柱之軸相平行。而以此直角三角形附卷於圓柱之表面。則AC_1斜邊所顯於表面上者。別成一種曲線。名曰螺旋。若AA_1之長適等於圓柱之圓周。則$a'b'c'$螺旋適足一卷。

由螺旋之一卷。至其次之一卷。其間悉依軸之方向。計其距離。此距離名爲螺旋距離。例如$a'c'$之長爲一螺旋距離。$a'e'$之長爲二螺旋距離。

第一百六十四節　作螺旋及螺旋之展開圖。〔圖式第一百三十八圖〕

所卷螺旋之圓柱所顯之平面圖爲ab圓。其縱面圖爲$a'f'$。螺旋距離爲$a'c'$。

畫法　任分ab圓爲十二等分。記其等分點如1, 2, 3, 4等。由各等分點作$a'b'$之正交線。又以$a'c'$同分爲十二等分。記其等分點如1, 2, 3, 4等。由各等分點作$a'b'$之平行線。於是平行線與正交線。各以同號所引之線相交。記其交點如a', g', h', d', i', c'等。均爲所求螺旋中含有之點。蓋螺旋依圓周十二分之一旋進。同時螺旋距離亦增高十二分之一。故求螺旋中所含各點之縱面圖。以雲形規定聯結之。卽合所求之螺旋。

如尚欲進求之者。則取 $c'e'$ 為其次之螺旋距離。卽依同法求之可也。

次求螺旋之展開圖。法於 $a'b'$ 之延長線中取 AA_1。係等於圓柱之圓周。於其上同分為十二等分。由各等分點作 AA_1 之垂線。由 $a'c'$ 之等分點引 AA_1 之平行線。其垂線與平行線之各交點。均為所求展開圖中含有之點。蓋如由 AA_1 線中 1 點引垂線。與由 $a'c'$ 線中 1 點所引之平行線相交於 G。此 G 點卽為展開圖中之一點。

如是則螺旋之展開圖為直線。其螺旋為兩卷者。其展開圖為 AC_1 及 CE 兩線。

第一百六十五節　螺旋有非單線所成者。如為三角形則稱為**三角螺旋**〔圖式第一百三十九圖〕為正方形則稱為**方形螺旋**。〔圖式第一百四十圖〕此種螺旋頂點所[illegible]之圓柱。命為**外圓柱**。而螺旋底面所附之圓柱。命為**內圓**[illegible]

第一百六十六節　求三角螺旋。〔圖式第一百三十九圖〕

畫法　此與第一百六十四節同法。先以 ac 水平線中 o 點為圓心。外圓柱半徑為半徑。作 $a3c$ 半圓。次仍以 o 為圓心。以內圓柱之半徑為半徑。作 bhd 半圓。由 a, b, o, d, c 五點。作 ac 之垂線。為內外兩圓柱之縱面圖。

乃以 $a3c$ 半圓周。任分為六等分。由其等分點 1,2,3,4,5 等。與圓心 o 聯成直線。又以其螺旋距離 ap。準半圓周等分之倍。卽分為十二等分。依第一百六十四節。作外圓柱上之螺旋若 afp。

次由 ap 之中點作水平線與由 b 點所作之垂直線交於 e。作 deg 螺旋。其螺旋距離係仍與前同。因 deg 螺旋卽爲三角螺旋之底。故聯結 ae, ep, df, fg 等線。卽合所求三角螺旋之一卷。

如更由 a 點所作之垂線上。遞取 pi, ij 等。令各等於 ap 之長。迭依同法。可進求三角螺旋之投影。

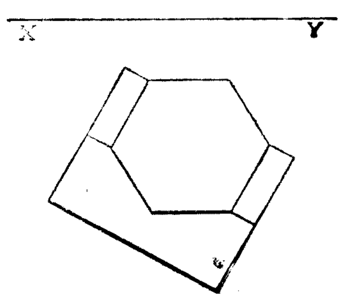
第一百六十七節 求方形螺旋。〔圖式第一百四十圖〕

畫法 此亦與第一百六十四節同法。以 o 爲圓心。外圓柱之半徑爲半徑。作 $a3c$ 半圓。取 ab 令等於螺旋距離 ap 之半。則以 ob 爲半徑。作 bed 半圓。爲內圓柱平面圖之半。於是依 ap 螺旋距離。遞於內外兩圓柱之表面上作螺旋。卽合所求之正方螺旋。觀圖自易索解。

練習題十一

1. 兩圓柱直徑同爲一寸八分。長同爲三寸。其一軸直立於水平投影面上。而與彼一軸互於中點作正交。凡此二軸均與垂直投影面相平行。求此交切形之投影。

第五十六圖



2. 如第五十六圖所顯之平面圖。係底面每邊一寸高二寸四分之六角柱與每邊二寸四分之正方柱相交切。而正方柱之軸係在六角柱底面上方一寸二分之處。求於以 XY 爲軸之垂直投影面上作此交切形之縱面圖。

3. 直徑一寸之水平圓柱與直徑一寸六分之垂直圓柱相穿貫。其兩軸之距爲二分。而互成正交。若令水平圓柱之軸與垂直投影面成角 30°。則此交切形之投影若何。

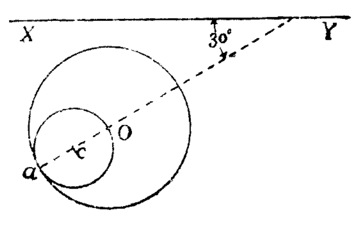
4. 如前題。依其交切線。將垂直圓之表面展開之。

5. 直立於水平投影面上之圓錐。其底面之直徑爲二寸四分。高二寸二分。又橫臥於水平投影面上之圓柱。直徑一寸二分。長三寸。以此兩體相穿貫。而圓柱之軸。係在圓錐之軸前方三分之處。二軸均與垂直投影面相平行。求此交切形之平面圖及縱面圖。

6. 如前題。依其交切線。將圓錐之表面展開之。

7. 如第五十七圖。爲直立於水平投影面上之圓柱與圓球兩相交切之平面圖。圓柱之直徑若 aO 爲一寸二分五釐。圓球之半徑若 Oa 亦爲一寸二分五釐。求於以 XY 爲軸之垂直投影面上。作此交切形之縱面圖。(球心之高及圓柱之長任便設置可也)

第五十七圖



8.　準〔圖式第一百三十七圖〕任設三角錐及三角柱令互相交切。求其投影。

9.　求於直徑二寸高二寸五分之圓柱上。作螺旋。其螺旋距離爲一寸二分五釐。

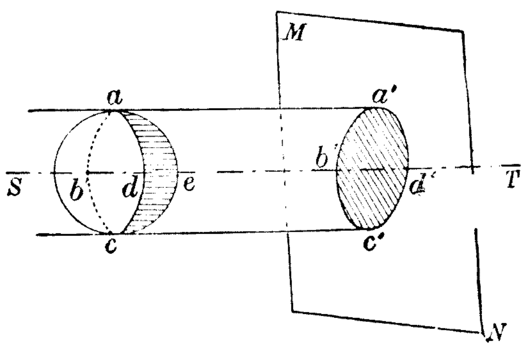
10.　外圓柱直徑二寸一分。內圓柱直徑一寸七分。若取螺旋距三分。作三角螺旋。其投影若何。

11.　外圓柱直徑二寸一分。內圓柱直徑一寸三分。若取螺旋距離八分。作方形螺旋。其投影若何。

第八章　陰影

第一百六十八節　由前所述畫法。知不難以種種之物體。表顯於一紙面上。使歸於精確。然猶有物體之陰影。能以單簡之投影。顯物體之形狀。亦自明確。

第五十八圖



如第五十八圖。ac 爲不透光之物體。其由光之根源所發之平行光線。如以 ST 示其方向。則爲光線切於物體所顯

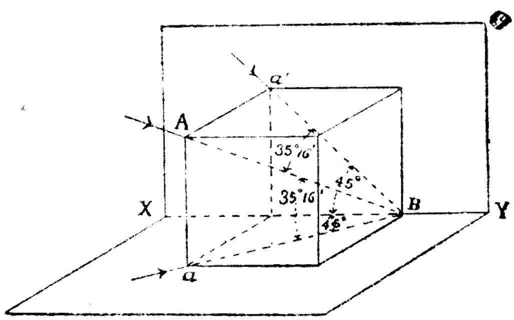
之形。蓋如柱狀者也。柱之內部物體之右方。光線全被遮斷。如 MN 紙面上 $a'b'c'd'$ 面為暗黑面。故稱此 $a'b'c'd'$ 面為 ac 物體顯於 MN 面上之影。

背光之面如 $abcde$。稱之為**暗面**。明暗兩面之界線。如 $abcd$ 線。稱之為**陰線**。而影之界線。即陰線之影。故知其陰線。即可求物體之影。

本書所稱光之根源。即太陽光是也。故一切光線。皆係平行。蓋太陽距地甚遠。固無不可以光線為平行者也。

光線之方向。從其便於尋常實用。恆使由畫者之左肩越下而斜向於右下方。而光線之平面圖及縱面圖。悉令與 XY 成角 45°。如第五十九圖。$a'AaB$ 為立方體。其對角線 AB。即係便於尋常日用之光線。其 aB, $a'B$ 兩投影。悉與 XY 成角 45°。如是則光線與水平垂直兩投影面成角 35° 16′。

第五十九圖



表示陰影之法。雖有多種。本書則取細距離。作密排之平行線以表示之。(參觀一百四十七節括弧內所詳)

第一百六十九節 求P點之影。〔圖式第一百四十一圖〕

畫法 凡某平面上某點之影。係卽由某點所顯之光線與某平面相交之一點是也。故由P點之投影p及p'。各準與XY成角45°。作pa及$p'a'$。爲光線之投影。於是察知光線之水平垂直兩跡中。孰爲近於P點。今如水平跡a是也。

一線之跡。雖有水平垂直兩跡。今以受影之面。固爲不透明者。故光線與一投影面相交。卽不再交於他投影面。如是則光線之水平跡a。卽所求之影。

第一百七十節 求PQ線之影。〔圖式第一百四十二圖〕

畫法 因線卽由點所積而成。故求線中各點之影。聯結之。卽成線之影。今PQ之投影若pq若$p'q'$。各爲直線。依前節畫法。先求P, Q兩端之影。若此兩點之影。同在一投影面上。則聯成直線。卽合所求之影。今如圖a', c係分投於兩投影面上則求PQ線之影者。其法如次。

由P點所顯之光線PB。其水平跡爲b。與Q點之影c聯成bc直線。則此bc卽係PQ線顯於水平投影面上之影。然bd在垂直投影面之後方。其垂直投影面非透明者。故由d準與pb平行作dr。聯結da'。則da'爲原線中PR一段所顯於垂直投影面上之影。而dc爲原線中RQ一段所顯於水平投影面上之影。

如是則$a'dc$合所求之影。又或依PQ線所顯之光線而求其含此光線之平面與投影面相交之線。亦合所求之影。

第一百七十一節　求 ABC 三角形所顯於水平投影面上之影〔圖式第一百四十三圖〕

畫法　依第一百六十九節畫法。求 A, B, C 三角點之影爲 d, e, f。聯結之。卽合所求之影。

第一百七十二節　圓形與垂直投影面相平行。求其顯於垂直投影面上之影。〔圖式第一百四十四圖〕

$ab, a'b'$ 爲圓形之投影。

畫法　圓形旣與垂直投影面相平行。則其顯於垂直投影面上之影仍與原圓相等。故求圓心 O 之影 c'。取 oa 之長爲半徑規圓周。卽合所求之影。

第一百七十三節　圓形與垂直投影面相平行。求其顯於水平投影面上之影。〔圖式第一百四十五圖〕

$ab, a'c'b'd'$ 爲圓形之投影。

畫法　任於圓周取 $a,a'; b,b'; c,c'; d,d'$ 等數多之點。求其影如 g,h,i,j 等點。以雲形定規聯結之。卽得 $gljhik$ 合所求之影。

第一百七十四節　直立於水平投影面上之五角柱。求其陰影。〔圖式第一百四十六圖〕

$abcde, a'b'c'd'e'c'_1$ 爲五角柱之投影。

畫法　求 B,C,D,E 點之影 g', h', i', j'。由 b,c 兩點。作 bf, ek。爲光線平面圖之方向。聯結 $kj', j'i', i'h', h'g', g'f$ 各線。卽合所求之影。因 BB_1. EE_1 均係垂直。故其分投於垂直投影面上之影若 $g'f$ 若 $j'k$。均與 XY 成正交。

又、BCB_1,CDC_1,DED_1三側面及$A_1B_1C_1D_1E_1$底面。皆爲暗面。而圖中所繪。惟BCB_1一面。畳爲表示暗面而已。

第一百七十五節 六角錐。底面成水平。求其陰影。〔圖式第一百四十七圖〕

$abcdefv$, $a'b'c'd'e'f'v'$爲六角錐之投影。

畫法 由底面之六角點A,B,C,D,E,F及頂點V。求其顯於水平投影面上之影如g,h,i,j,k,l及t。聯結lg, gh, hi, it, lt各線。卽得$tlghi$爲六角錐顯於水平投影面上之影。然tmn一段。在垂直投影面之後方。應依此移於垂直投影面上。故於垂直投影面上求得頂點之影爲s'。聯結$s'm$, $s'n$乃合所求之影。

次角錐之暗面。爲底面及FV EVD, DVC三側面。觀圖自知。

第一百七十六節 直立於水平投影面上之圓柱。求其陰影。〔圖式第一百四十八圖〕

$acbe$, $a'b'b_1'a_1'$爲圓柱之投影。

畫法 作ck, cf兩線。爲射於$acbe$圓光線之平面圖。卽光線之方向。又卽含光線而與圓柱相切之二平面所著之水平跡也。故其由兩切點e, c所立之垂線若EE_1, CC_1兩線及$CBDE$半圓。皆爲此圓柱之陰線。準前數節求$CBDE$弧之影$g'h'i'j'$及EE_1, CC_1兩線之影ekj', cfg'。卽合所求之陰影。

第一百七十七節　<u>直立於水平投影面上之圓錐。求其陰影。</u>〔圖式第一百四十九圖〕

畫法　於第一百七十五節角錐陰影之求法。既能理解。本節自易著手。

第一百七十八節　<u>直立於水平投影面上之圓柱。戴一正方板板之一側面與垂直投影面相平行。求此立體之陰影</u>〔圖式第一百五十圖〕

$ek, e_1'k'$ 為圓柱之投影。$bd, b'd'$ 為正方板之投影。

畫法　作 ij, lm 兩線。係切於 ek 圓而與 XY 成角 45°。又卽為含光線而與圓柱相切之二平面所著之水平跡也。故由兩切點 m, j 作 XY 之正交線若 $j_1'j'$ 若 $m'f'$。皆為圓柱之陰線。

板之底面所圍之邊若 LBI 一角。為其影投於圓柱表面之陰線。如欲詳求其影。則準與 ij 相平行作 gh。而以此 gh 為水平跡之垂直面。為含光線之面與圓柱交於 HH_1 直線。與板之底面 BC 邊交於 G 點。故由 g, g' 兩點引光線 $gh, g'h'$。與 $hh_1'h'$ 線交於 h, h' 兩點。卽得所欲詳求之影之一點如 h' 是也。

依同理。求其所投於圓柱表面上成影之各點。如 E 點為 A 點之影。F 點為 B 點之影。J 點為 I 點之影。合成 e', f', h', j'。為所欲詳求之影。

又此立體投於兩投影面上之影。觀圖自知。

〔附誌〕BL線係與垂直投影面成正交.故其影之縱面圖如$e'f'$成爲直線.如非正交.即成曲線矣.此宜注意.

第一百七十九節　半球中空。求於中空繪其影。〔圖式第一百五十一圖〕

$acbd$, $a'i'b'$爲半球內面之投影。mn, $m'n$爲光線之方向。

畫法　由平面圖之圓心o。準與mn成正交。作rs直徑。則r, s兩點。卽所求之影之兩端所顯之平面圖。而r', s'爲其縱面圖。

準與光線之平面圖mn相平行。作X_1Y_1軸線。卽得半球之新縱面圖$c_1'p_1'd_1'$及光線之新縱面圖$m_1'n_1'$。而mn及$m'n$與XY成角45°。其$m_1'n_1'$則與X_1Y_1成角35°16′。其說既詳於前。

乃由c_1'準與$m_1'n_1'$相平行作$c_1'p_1'$。與$c_1'p_1'd_1'$弧交於p_1'。卽由p_1'作$p_1'p$與cd直徑交於p。此cd直徑係與X_1Y_1相平行者也。如是則p點卽所求之影之外形線中一點之平面圖。故由p作XY之正交線pp'。令p'點之距XY。等於p_1'點之距X_1Y_1。則p'點卽其縱面圖。

次以平行於mn之ef爲水平跡。而含此水平跡之垂直面。與半球相截。其截口之新縱面圖爲$e_1'q_1'f_1'$半圓。由e_1'準與$m_1'n_1'$相平行作$e_1'q_1'$。與$e_1'q_1'f_1'$弧交於q_1'。卽由q_1'作$q_1'q$與ef正交於q。由q作XY之正交線qq'。令q'點之距XY。等於q_1'點之距X_1Y_1。如是則又得外形線中之一點。遞依同法。合成所求之影。

平行於XY之ab直徑。與影之外形線之平面圖相交於i。由i作XY之正交線。與$a'i'b'$半圓相交於i'。故i'即外形線縱面圖與$a'i'b'$半圓之交點。

第一百八十節　求球之陰影。〔圖式第一百五十二圖〕

$ab, e'f'$兩圓爲球之投影。

畫法　此球之陰線。即以平行於光線之線爲軸所成之圓柱適可包圍圓球而與球面相交切之交切線。蓋即球面之大圓是也。又此陰線之平面圖縱面圖。均爲橢圓。其長軸即直徑$ab, e'f'$。各與XY成角45°。

準與光線之平面圖相平行。又準與XY成角45°。作X_1Y_1。以X_1Y_1爲軸之垂直面所顯球之新縱面圖爲$c_1'd_1'$圓。準與此圓相切。又準與X_1Y_1成角35° 16′。作$c_1'i_1'$及$d_1'j_1'$。聯結其c_1', d_1'兩切點。成$c_1'd_1'$直徑。即陰線之新縱面圖。

由o點。準與X_1Y_1相平行作cj。與由c_1', d_1'兩點所作X_1Y_1之正交線。相交於c, d兩點。則cd爲陰線之平面圖橢圓短軸。故以ab爲長軸。cd爲短軸。作$abcd$橢圓。爲陰線之平面圖。

光線之平面圖縱面圖。既撰定以爲均與XY成角45°。則此陰線之縱面圖。必即與$abcd$橢圓相等。故由o'作$e'f'$之正交線$g'h'$。今$o'g', o'h'$各等於oc。以$e'f'$爲長軸。$g'h'$爲短軸。作$g'e'h'f'$橢圓。即陰線之縱面圖。

次求此球所投於水平投影面上之影。即陰線之影。而此影當爲橢圓。即包圍圓球之圓柱所著於水平投影面上之跡也。故由 o_1' 準與 $d_1'j'$ 相平行作 $o_1'l'$。由 l' 點作 X_1Y_1 之正交線。與由 a,b 兩點所作 X_1Y_1 之平行線相交於 k,l 兩點。又由 i',j' 兩點作 X_1Y_1 之正交線。與由 o 點所作 X_1Y_1 之平行線相交於 i,j 兩點。以 ij 爲長軸。kl 爲短軸。作 $ikjl$ 橢圓。即所求之球影。

第一百八十一節 同在一水平投影面上。一爲橫臥之六角柱。一爲直立之圓錐。求其陰影。〔圖式第一百五十三圖〕

$abv, a'b'v'$ 爲圓錐之投影。$cdefghi, c'd'e'f'g'h'i'$ 爲角柱之投影。

畫法 如法求得圓錐投於水平投影面上之影爲 mzn。而其陰線則爲 $vm, v'm'$; $vn, v'n'$。然此錐之影所投於水平投影面上者。實僅爲 myy_1n 一段。其餘皆在角柱上。

求此錐所投於角柱上之影者。準與角柱之端面相平行作 X_1Y_1。以 X_1Y_1 爲軸之垂直面所顯錐柱之縱面圖爲 $l_1'v_1'o_1'$ 及 $c_1'd_1'e_1'f_1'g_1'h_1'$。延長 $f_1'g_1'$ 至 p_1'。又由 v_1' 準與 X_1Y_1 成角 $35°16'$ 作 $v_1'z_1'$。與 $f_1'p_1'$ 交於 s_1'。則 s_1' 即 FGI 面上所受錐頂點 V 之影之補助縱面圖。由 s_1' 作 X_1Y_1 之正交線。與 vz 相交於 s。此 s 即其平面圖也。而以 $f_1'p_1'$ 爲跡之水平面所截圓錐之截口爲 prr_1 圓。故由 s 作此圓之切線若 sr 若 sr_1。則 rsr_1 爲圓錐投於以 $f_1'p_1'$ 爲跡之水平面上之影。故 TST_1 爲角柱 FGI 一側面上所受圓錐之影。

依同理。延長 $e_1'h_1'$ 至 u_1' 至 q_1'。以 $u_1'q_1'$ 爲跡之水平面上所受圓錐之影之平面圖爲 uuw_1。而 uw, vw_1 與 hh_2 交於 x, x_1 兩點。聯結 tx, t_1x_1。卽得 xtt_1x_1 爲角柱 HGH_2 一側面上所受圓錐之影之平面圖。其縱面圖則如 $x't't_1'x'_1$ 是也。

次聯結 xy, x_1y_1, $x'y'$, $x_1'y_1'$ 各線。則 XYY_1X_1 爲角柱 HCH_2 一側面上所受圓錐之影。

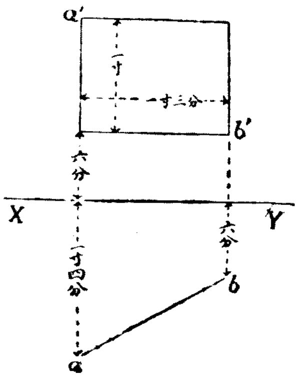
觀補助縱面圖。知對於 $c_1'd_1$, $d_1'e_1'$, $e_1'f_1'$ 三縱面圖之三側面爲暗。而其陰線之影。則爲 $cjbc'_1$ 是也。

練習題十二

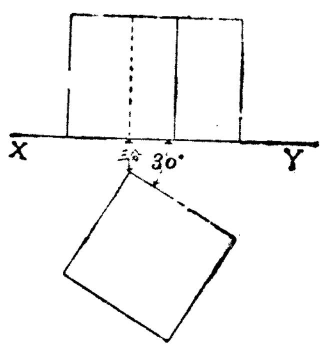
下列各題,其光線之平面圖縱面圖。皆與 XY 成角 $45°$。

1. 如第六十圖。求長方形 AB 之影。

第六十圖



第六十一圖



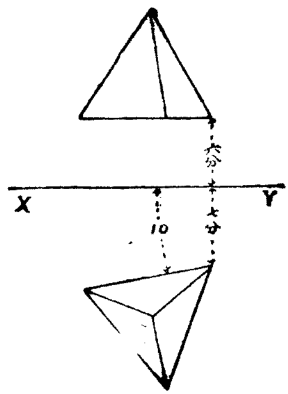
2. 水平投影面之上方一寸二分之處。有一水平圓形。直徑一寸六分。而圓周適與垂直投影面相切。試求其影。

3. 如第六十一圖所顯之立方體。每稜之長一寸四分。試求其影。

4. 六角柱之底面。在水平投影面之上方四分之處。其軸則爲垂直。而其一側面與垂直投影面成角12°。底面每邊一寸二分。高一寸二分。其最近於垂直投影面一之稜。距垂直投影面前方二分。求此立體之陰影。

5. 如第六十二圖所顯之正四面體。每稜之長一寸二分。求其陰影。

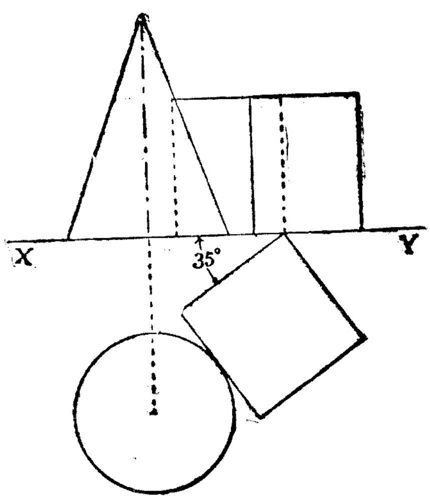
第六十二圖



6. 垂直圓錐。底面之直徑一寸六分。高二寸。底面之圓心。在水平投影面之上方六分。垂直投影面之前方一寸五分。求此錐之陰影。

7. 橫臥於水平投影面上之圓柱。直徑一寸六分。長一寸六分。其一端面。貼合於垂直投影面中。求此柱之陰影。

第六十三圖



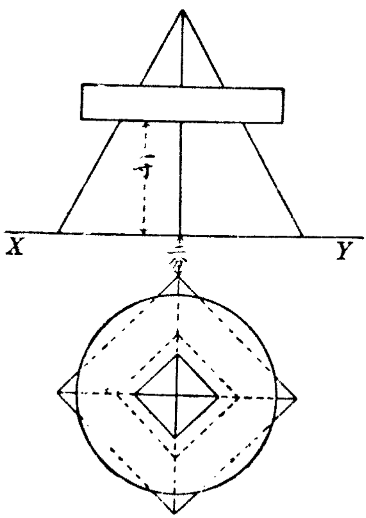
8. 立於水平投影面上之球。直徑一寸五分。其球心係在垂直投影面前方二寸之處。求其陰影。

9. 如第六十三圖所顯之圓錐。底面之直徑一

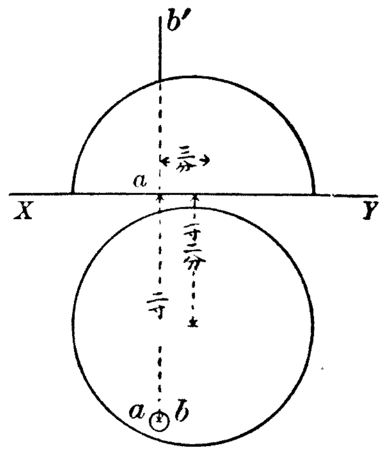
寸四分。高二寸。又立方體每稜一寸二分。求其陰影。

10. 如第六十四圖所顯之四角錐。底面之一邊一寸五分。高二寸。於其表面上套一圓板。直徑一寸八分。厚三分。求其所顯之影。

第六十四圖



第六十五圖



11. 如第六十五圖所顯之半球。直徑二寸一分。於其表面上貫一 AB 直線。長一寸五分。求其所顯之影。

第九章　均角投影

第一百八十二節　尋常使用之物體。其主要之方向有三。卽如立方體之一隅。以直角相交互是也。製圖者恆取其平行於此主要中之二方向。以定二投影平面。或更取三投影平面以上。以繪其物體。蓋依此法。則原線之眞長。不難顯示於投影。且於工業上繁雜之製圖。亦最爲適當者也。

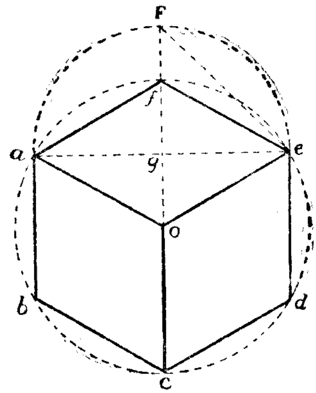
雖然。以一物體分摹於平面縱面等圖。其原形如何。非遂一望而能知也。故又不如繪其立體於一平面圖。或依單簡之規則。別造尺度。以期適用於圖面。則諸線之眞長。可以按圖而知之。此尤爲便利云。

凡諸線與水平投影面成傾度。若其度相等。則諸線之平面圖。對於原線之眞長。必成相同之比率。故若物體成形之諸稜。適與主要三方向相平行。則以諸稜抵於水平投影面上。令成相同之傾度。卽保持其平面圖各對於原線之眞長使成相等之比例。以適當之縮尺摹寫之。見此平面圖者。必不難推知諸線之眞長。

三線互成正交。其抵於水平投影面。令成相同之傾度。則三線之平面圖。必係互成120°之角。今如物體之諸稜。適與互成正交之三線相平行。則其平面圖。亦必與三線之平面圖相平行。故稱三線之平面圖爲投影之軸。依此軸所畫物體之投影。稱之爲**均角投影**。

第一百八十三節　均角投影所用之縮尺。

第六十六圖



如第六十六圖。$abcdefo$ 爲立方體之均角投影。其軸即 oa, oc, oe 三線是也。以立方體之三稜架於此三線之上。

如是則立方體之諸稜悉與紙面成傾斜。其投影之長。雖非諸稜之眞長。然 ae 之原線。與投影平面相平行。故 ae 即爲立方體一側面上對角線之眞長。如由 ae 之中點 g。準與 ge 等長作垂線 gF。則 Fe 即立方體一稜之眞長。而 Ffe 角 $=120°$, eFf 角 $=45°$。故準與 Ffe 三角形相似。作一三角形。其對於 $120°$ 之邊與對於 $45°$ 之邊相比。固無異以平行於投影之軸之線之眞長與其均角投影之長相比也。畫法如次。

畫法　等於尋常所用之尺作 AC。〔圖式第一百五十四圖〕由 A 點作 CAB 角 $=15°$。由 C 點作 ACB 角 $=45°$。乃由 AC 所刻之寸度。各作 CB 之平行線。以交於 AB。如是則 AB 即爲均角投影所用之縮尺。

〔附誌〕本書悉依此成規之縮尺作畫.其不以縮尺而仍用原尺者.雖亦無妨.惟其所作之圖.當知其伸長之比率爲 $AC \div AB$.

第一百八十四節　箱長一寸二分。闊八分。高五分。其板之厚一分。求其均角投影。〔圖式第一百五十五圖〕

畫法　以一角30°一角90°之三角定規如(A)。沿丁形定規之線。依其30°角作 ab 線。以(A)之三角定規反轉如(B)。作 ac 線。其交點爲 a。由 a 點如(C)作 ad 線。凡作三線。卽均角投影之軸。

依前節所定之縮尺。取 ab 爲一寸二分。ac 爲八分。ad 爲五分。由 d 點作 ab 及 ac 之平行線。與由 b,c 兩點所作之垂線相交於 e 點及 f 點。由 e 點作 df 之平行線。與由 f 點所作 de 之平行線相交於 g。卽成箱之外形線。

乃取 di, dh, cj, fk 各距離。令皆等於縮尺一分。由 h, k 兩點。作 de 之平行線。由 i, j 兩點。作 df 之平行線。卽得 $lmno$ 爲箱之入口之投影。

次由 l, m, n, o 四點。各準與 ad 平行。作 lp, mp, nr, os 四垂線。其長各等於縮尺四分。聯結 pq, qr, rs, sp 各線。卽成箱之內面之投影。

蓋其成爲立體之一切之稜。悉準與軸之三方向相平行。而必能完成其投影者也。

第一百八十五節　六角柱底面之一邊六分。長一寸九分。求其均角投影。〔圖式第一百五十六圖〕

畫法　依縮尺作角柱之底面 $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ 六角形。而包圍此六角形之矩形爲 $g_1h_1i_1j_1$。準前節引 gh, gj, gr 三軸線。

令 $gh=g_1h_1$, $gj=g_1j_1$。其 gr 之長爲縮尺一寸九分。係卽等於角柱之長也。於是補成 $jghir$ 爲四角柱之均角投影。令 $ga=g_1a_1$, $bh=b_1h_1$, $je=j_1e_1$, $id=i_1d_1$。而 f_1, c_1 爲 j_1g_1, i_1h_1 之中點。故 f, c 爲 jg, ih 之中點。如是則成 $abcdef$ 六角形。合所求之六角柱一端面。

次由六角點各作 gr 之平行線。卽得其他端之端面 $klmnop$。完成所求之投影。

此須注意者。如 ed, fp, ae 等線。因與投影之三軸相平行。故其投影適合於法。自可以縮尺計其長度。若 bc, cd 等線。則不得以縮尺計算。蓋 BC, CD 等線。雖爲原線之長。而與投影平面成角。旣非均一。則其投影 bc, cd 等線之長。變化各異。並無同等之比率矣。

第一百八十六節　立方體之面上有內切圓。求其均角投影。(圖式第一百五十七圖)

畫法　先作立方體之均角投影 adf。次以縮尺準與立方體之一面正方形相應。作 $a_1d_1a_1e_1$ 正方形。幷作其內切圓。卽於圓內作 a_1a_1, b_1b_1, c_1c_1 等數多之弦。均與正方形之一邊相平行。又準與 a_1a_1 成正交作 d_1e_1 直徑。

乃於 adf 立方體之面上。作 d_1e_1 之投影 de。令 $en=e_1n_1$, $nm=n_1m_1$, $mo=m_1o_1$。以定 n, m_1, o 各點。由各點引 n_1c_1, m_1b_1, o_1a_1 各線之投影。卽 $nc=n_1c_1$, $mb=m_1b_1$, $oa=o_1a_1$。如是則於 e, c, b, a, d 各點。以雲形定規聯結之。卽合所求之投影。

故凡求圓形之均角投影者。當先求其外切正方形之均角投影。然後依之求內切圓之投影。

第一百八十七節 求圓柱之均角投影。〔圖式第一百五十八圖〕

畫法 先作包圍圓柱之正方柱均角投影。乃依前節之畫法。求兩端內切圓之投影爲兩橢圓。準與其軸相平行作兩切線。即合所求之投影。

第一百八十八節 求桌之均角投影。〔圖式第一百五十九圖〕

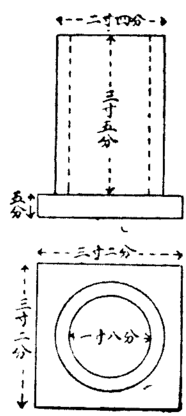
畫法 此蓋即以前數節爲應用者。故不贅述。學者按圖玩索。自能了解。

練習題十三

1. 木箱。自其中空量之。長三寸。闊二寸。高一寸二分。板厚四分,求其均角投影。

2. 如第六十七圖。求筆筒之均角投影。

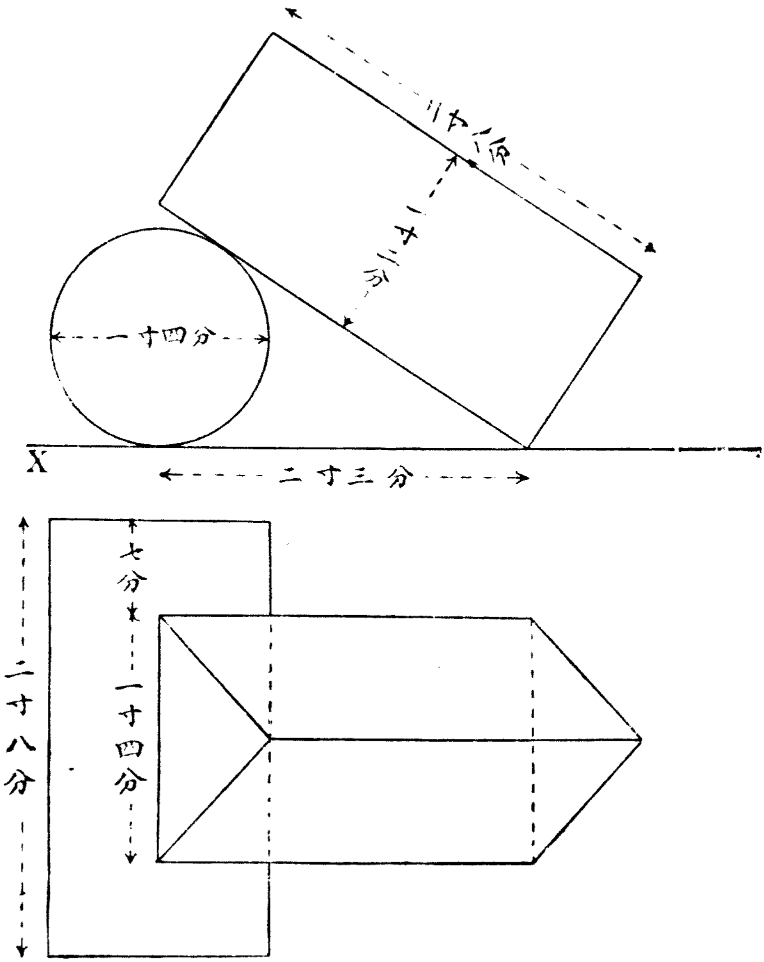
3. 正方板。每邊二寸一分。厚八分。於其中央穿成正六角形之孔。每邊八分。而正六角形之一邊。與正方形之一邊相平行。求此立體之均角投影。



第六十七圖

4.　如第六十八圖。求圓柱及三角柱之均角投影。

第　六　十　八　圖



5.　求桌之均角投影。其形狀及尺寸。任便擇定。