Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 37

Neben den drei Eckpunkten eines Dreieckes gibt es noch weitere charakteristische Punkte eines Dreieckes wie den Schwerpunkt, den Umkreismittelpunkt, den Inkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt.

Seitenhalbierende und Schwerpunkt

Definition 37.1. Zu einer Menge von n Punkten $P_1, \ldots, P_n$ in einem affinen Raum E über einem reellen Vektorraum V nennt man die baryzentrische Kombination

$$\frac{1}{n}P_1 + \frac{1}{n}P_2 + \cdots + \frac{1}{n}P_n$$

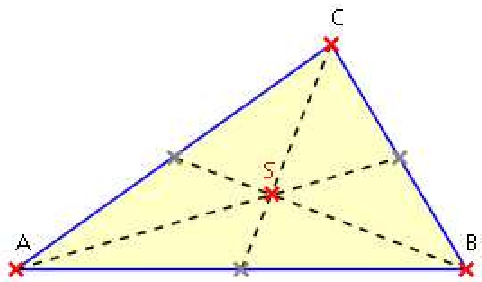
den *Schwerpunkt* der Punkte.

Es handelt sich also um diejenige baryzentrische Kombination der Punkte, bei der jeder Punkt mit der gleichen Gewichtung eingeht. Zu zwei Punkten $P, Q \in E$ heißt der Schwerpunkt $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$ auch der Mittelpunkt der beiden Punkte (oder der Strecke $\overline{P,Q}$). Bei zwei reellen Zahlen spricht man auch von arithmetischen Mittel der beiden Zahlen. Bei $n = 1, 2, 3$ ist der Schwerpunkt der Punkte auch der Schwerpunkt ihrer konvexen Hülle. Der Schwerpunkt von drei Punkten tritt als Durchschnitt der Seitenhalbierenden des Dreiecks auf.

Definition 37.2. Zu einem Dreieck A, B, C in einer euklidischen Ebene heißt die Gerade

$$\frac{B+C}{2} + s\left(A - \frac{B+C}{2}\right),\, s \in \mathbb{R}\,,$$

die *Seitenhalbierende* durch A



Satz 37.3. *In einem Dreieck in der euklidischen Ebene treffen sich die drei Seitenhalbierenden im Schwerpunkt* $\frac{A+B+C}{3}$ *des Dreiecks.*

Beweis. Wir betrachten die Bedingung

$$\frac{B+C}{2} + s\left(A - \frac{B+C}{2}\right) = \frac{A+C}{2} + t\left(B - \frac{A+C}{2}\right),$$

die auf

$$\begin{aligned} \frac{B-A}{2} &= t\left(B - \frac{A+C}{2}\right) - s\left(A - \frac{B+C}{2}\right) \\ &= \left(-s - \frac{t}{2}\right)A + \left(t + \frac{s}{2}\right)B + \frac{s-t}{2}C \end{aligned}$$

führt. Wir können $E = \mathbb{R}^2$ und $A = 0$ setzen, woraus sich, da B und C linear unabhängig sind,

$$s = t$$

ergibt. Daher ist

$$\frac{B-A}{2} = \left(-\frac{3}{2}s\right)A + \left(\frac{3}{2}s\right)B,$$

woraus

$$s = \frac{1}{3}$$

folgt. Somit ist der Schnittpunkt gleich

$$\frac{B+C}{2} + \frac{1}{3}\left(A - \frac{B+C}{2}\right) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

Wegen der Symmetrie ist dies auch der Schnittpunkt mit der dritten Seitenhalbierenden. □

Insbesondere schneidet der Schwerpunkt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1, wobei der längere Teil am Punkt anliegt.

Mittelsenkrechte und Umkreismittelpunkt

Definition 37.4. Zu zwei Punkten $A \neq B$ in der euklidischen Ebene nennt man die Gerade, die senkrecht auf der durch A und B gegebenen Gerade steht und durch den Mittelpunkt der Strecke zwischen A und B verläuft, die *Mittelsenkrechte* der Strecke.

Die Mittelsenkrechte wird durch

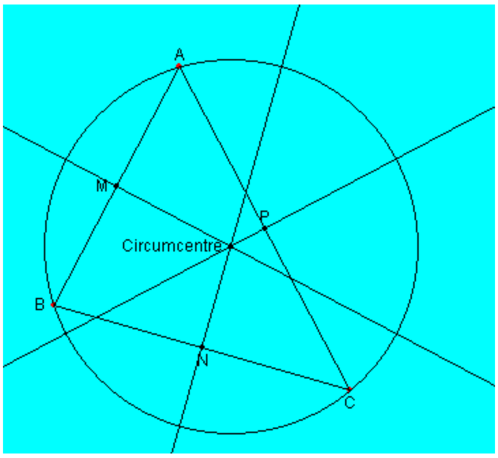
$$\frac{A+B}{2} + s(B-A)^{\perp},\ s \in \mathbb{R},$$

beschrieben, wobei $(B-A)^{\perp}$ einen beliebigen, zu $B-A$ senkrechten Vektor $\neq 0$ bezeichnet. Wenn $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in kartesischen Koordinaten gegeben sind, so ist die Mittelsenkrechte gleich

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_2 - a_2 \\ -b_1 + a_1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}\,.$$

Lemma 37.5. *Es seien A, B verschiedene Punkte in einer euklidischen Ebene. Dann besteht die Mittelsenkrechte zu A und B genau aus allen Punkten, die zu A und B den gleichen Abstand haben.*

Beweis. Siehe Aufgabe 37.5. □



Satz 37.6. *Die Mittelsenkrechten der drei Seiten in einem Dreieck der euklidischen Ebene schneiden sich in einem Punkt. Alle Eckpunkte des Dreiecks besitzen zu diesem Schnittpunkt den gleichen Abstand.*

Beweis. Die Mittelsenkrechte zur Strecke zwischen A und B besteht genau aus allen Punkten der Ebene, die zu diesen beiden Punkten den gleichen Abstand besitzt. Der Schnittpunkt P der Mittelsenkrechte zu A und B mit der Mittelsenkrechte zu A und C hat also zu allen drei Eckpunkten den gleichen Abstand. Dies ergibt den Zusatz und auch, dass sich alle drei Mittelsenkrechten in diesem Punkt treffen. □

Definition 37.7. Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten in einem Dreieck in der euklidischen Ebene heißt *Umkreismittelpunkt*.

Der Umkreismittelpunkt ist der Mittelpunkt des *Umkreises*; das ist derjenige Kreis, der die drei Eckpunkte des Dreiecks (auf seiner Peripherie) enthält.

Winkelhalbierende und Inkreismittelpunkt

Definition 37.8. Zu zwei linear unabhängigen Vektoren v und w in einem normierten reellen Vektorraum V nennt man die von

$$\frac{v}{||v||} + \frac{w}{||w||}$$

erzeugte Gerade die *Winkelhalbierende* der beiden Strahlen.

Die Winkelhalbierende wird also ohne Bezug auf einen Winkel definiert, es wird ja noch nicht einmal ein Skalarprodukt vorausgesetzt. Wenn sich aber die beiden Vektoren in einem euklidischen Raum befinden, so zeigt eine einfache Überlegung (siehe Aufgabe 37.6), dass die Winkelhalbierende in der Tat den Winkel halbiert. Die Definition überträgt sich direkt auf einen affinen Raum über einem normierten Vektorraum, und zwar definieren drei nicht kollineare Punkte jeweils eine Winkelsenkrechte durch jeden der beteiligten Punkte.

Lemma 37.9. *Es seien v, w linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Dann liegen auf der Winkelhalbierenden zu v und w nur Punkte, die zu $\mathbb{R}v$ und $\mathbb{R}w$ den gleichen Abstand haben. Wenn ein Punkt zu $\mathbb{R}v$ und $\mathbb{R}w$ den gleichen Abstand besitzt, so liegt er auf der Winkelhalbierenden zu v und w oder auf der Winkelhalbierenden zu v und $-w$.*

Beweis. Wir können annehmen, dass v und w normiert sind. Sei $P \in \mathbb{R}^2$. Nach Korollar 35.7 ist

$$d(P, \mathbb{R}v)^2 = ||P||^2 - \langle P, v \rangle^2$$

und entsprechend

$$d(P, \mathbb{R}w)^2 = ||P||^2 - \langle P, w \rangle^2 .$$

Also sind die Abstände genau dann gleich, wenn

$$\langle P, v \rangle = \pm \langle P, w \rangle$$

ist. Wenn

$$P = s(v+w)$$

ist, so ist

$$\langle P, v \rangle = \langle s(v+w), v \rangle = s + s \langle w, v \rangle = \langle s(v+w), w \rangle = \langle P, w \rangle$$

und die Gleichung gilt. Für die Umkehrung können wir

$$P = sv + tw$$

ansetzen. Bei

$$\langle P, v \rangle = \langle P, w \rangle$$

folgt

$$s + t \langle v, w \rangle = \langle sv + tw, v \rangle = \langle sv + tw, w \rangle = t + s \langle v, w \rangle$$

und somit

$$s (1 - \langle v, w \rangle) = t (1 - \langle v, w \rangle) .$$

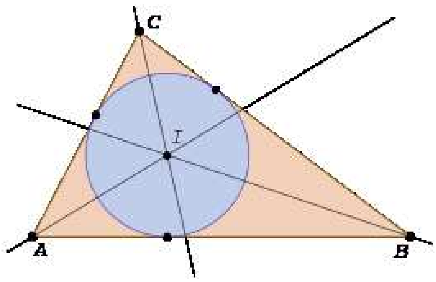
Da v und w normiert und nicht linear abhängig sind, ist

$$|\langle v, w\rangle| < 1,$$

der rechte Faktor ist nicht 0 und somit ist $s = t$. Bei

$$\langle P, v\rangle = -\langle P, w\rangle$$

folgt mit einer ähnlichen Überlegung $s = -t$. $\square$



Satz 37.10. *Die drei Winkelhalbierenden in einem Dreieck treffen sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt, der zu jeder Seite des Dreiecks den gleichen Abstand. Wenn die Eckpunkte durch* $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ *und die Seitenlängen mit* $a = d(B, C), b = d(A, C), c = d(A, B)$ *bezeichnet werden, so besitzt dieser Schnittpunkt die Koordinaten*

$$\frac{1}{a+b+c}\begin{pmatrix} aa_1 + bb_1 + cc_1 \\ aa_2 + bb_2 + cc_2 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Nach Lemma 37.9 besteht die Winkelhalbierende zu A aus Punkten, die zu den anliegenden Seiten(geraden) $\mathbb{R}\overrightarrow{AB}$ und $\mathbb{R}\overrightarrow{AC}$ den gleichen Abstand haben. Ebenso besteht die Winkelhalbierende zu B aus Punkten, die zu den anliegenden Seiten(geraden) $\mathbb{R}\overrightarrow{BA}$ und $\mathbb{R}\overrightarrow{BC}$ den gleichen Abstand haben. Daher besitzt der Schnittpunkt dieser beiden Winkelhalbierenden, den es geben muss, zu allen drei Seiten den gleichen Abstand. Darüber hinaus stimmt das Skalarprodukt von diesem Schnittpunkt mit den drei normierten Seitenvektoren überein, wie der Beweis zu Lemma 37.9 zeigt. Wiederum wegen Lemma 37.9 muss er dann auch auf der dritten Winkelhalbierenden liegenden.

Zur Koordinatenbestimmung schreiben wir die Winkelhalbierende durch A als

$$A + s\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s\left(\frac{1}{c}\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{b}\begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}\right).$$

Die Gleichsetzung mit der Winkelhalbierenden durch B führt auf

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s\left(\frac{1}{c}\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{b}\begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + t\left(\frac{1}{c}\begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{a}\begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix}\right).$$

Die Lösung ist durch

$$s = \frac{bc}{a+b+c}$$

und

$$t = \frac{ac}{a+b+c}$$

gegeben, da dies eingesetzt jeweils zu

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{1}{c}\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{b}\begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}\right) \\ = \ & \frac{1}{a+b+c}\begin{pmatrix} a_1(a+b+c) + b(b_1 - a_1) + c(c_1 - a_1) \\ a_2(a+b+c) + b(b_2 - a_2) + c(c_2 - a_2) \end{pmatrix} \\ = \ & \frac{1}{a+b+c}\begin{pmatrix} aa_1 + bb_1 + cc_1 \\ aa_2 + bb_2 + cc_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

führt. Dies ist also der Schnittpunkt, und zwar von allen drei Winkelhalbierenden. □

Definition 37.11. Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden in einem Dreieck in der euklidischen Ebene heißt *Inkreismittelpunkt*.

Der Kreis um den Inkreismittelpunkt, der die drei Seiten des Dreiecks tangential trifft, heißt entsprechend *Inkreis*.

Höhenschnittpunkt

Lemma 37.12. *Es sei U der Umkreismittelpunkt und S der Schwerpunkt eines Dreiecks in der euklidischen Ebene. Dann liegt der Punkt*

$$U + 3\overrightarrow{US}$$

auf jeder Höhe des Dreiecks. Insbesondere schneiden sich die drei Höhen in einem Punkt.

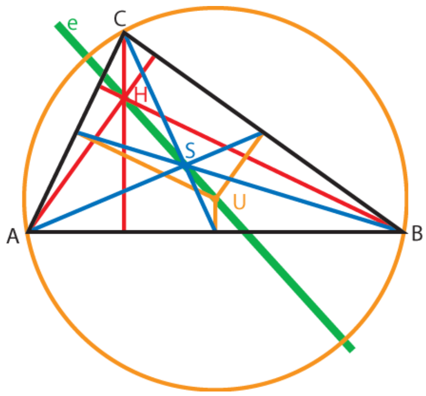
Beweis. Wir machen U zum Ursprungspunkt, so dass die Punkte A, B, C die gleiche Norm besitzen. Der in Frage stehende Punkt ist dann $A+B+C$. Die durch diesen Punkt und A gegebene Gerade hat den Richtungsvektor $B+C$. Sie verläuft durch A und es ist

$$\langle B+C, B-C \rangle = \langle B, B \rangle - \langle C, C \rangle .$$

Wegen der Normgleichheit ist dies 0, also handelt es sich um die Höhengerade durch A. □

Definition 37.13. Zu einem Dreieck A, B, C in einer euklidischen Ebene heißt der Schnittpunkt der drei Höhen der *Höhenschnittpunkt*.

Die eulersche Gerade



Korollar 37.14. *Der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks in der euklidischen Ebene liegen auf einer Gerade.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 37.12. □

Wenn das Dreieck gleichseitig ist, so fallen die drei Punkte zusammen und es gibt viele Geraden durch diesen Punkt. Andernfalls sind diese Punkte nicht gleich (siehe Aufgabe 37.2) und es gibt genau eine Gerade, die durch diese drei Punkte verläuft. Man nennt sie die *eulersche Gerade*.

Der Feuerbachkreis

Lemma 37.15. *Durch die Eckpunkte A, B, C sei ein Dreieck $\triangle$ in der euklidischen Ebene gegeben. Es sei N der Umkreismittelpunkt zu den Seitenmittelpunkten und F der entsprechende Kreis. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Der Radius von F ist die Hälfte des Umkreisradius von $\triangle$.*
(2) *Die Verbindungsstrecken des Höhenschnittpunkts und der Eckpunkte werden durch F halbiert.*
(3) *Die Höhenfußpunkte von $\triangle$ liegen auf F.*

Beweis. (1). Es sei U der Umkreismittelpunkt des Ausgangsdreiecks, den wir als Ursprung eines kartesischen Koordinantensystems ansetzen. Wir betrachten dann den Punkt

$$U' = \frac{1}{2}(A + B + C).$$

Der Mittelpunkt $A' = \frac{1}{2}(B+C)$ der Dreiecksseite durch B und C besitzt zu U' den Abstand

$$||\frac{1}{2}(B+C) - U'|| = ||\frac{1}{2}(B+C) - \frac{1}{2}(A+B+C)|| = \frac{1}{2}\,||A||\,.$$

Da die Normen von allen Eckpunkten A, B, C nach Wahl von U gleich sind, ist U' der Umkreismittelpunkt des Seitenmittelpunktsdreiecks und der Radius ist die Hälfte des Umkreisradius.

(2). Nach Lemma 37.12 ist $A+B+C$ der Höhenschnittpunkt. Daher ist der Mittelpunkt der Strecke von A zum Höhenschnittpunkt gleich

$$\frac{1}{2}(A+B+C) + \frac{1}{2}A \;=\; A + \frac{1}{2}(B+C).$$

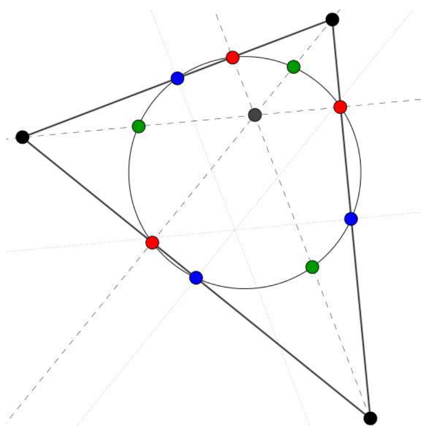
Der Abstand davon zu U' ist

$$||\frac{1}{2}(A+B+C) - \left(A + \frac{1}{2}(B+C)\right)|| = ||-\frac{1}{2}A|| = \frac{1}{2}\,||A||\,.$$

(3). Zunächst liegen die unter (1) bzw. (2) konstruierten Punkte auf dem Kreis gegenüber. Es ist ja

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(B+C)\right) + \frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{2}(B+C)\right) \;=\; \frac{1}{2}(A+B+C)$$

der Mittelpunkt. Somit bilden ein Seitenmittelpunkt, der gegenüberliegende Halbierungspunkt zwischen Eckpunkt und Höhenschnittpunkt und der entsprechende Höhenfußpunkt ein rechtwinkliges Dreieck. Dessen Thaleskreis ist stets der Feuerbachkreis. □



Die neun Punkte des Neun-Punkte-Kreises: Die Seitenmittelpunkte (blau), die Höhenfußpunkte (rot) und die Mittelpunkte (grün) zwischen Eckpunkten und Höhenschnittpunkt (schwarz).

Den Kreis in der vorstehenden Aussage nennt man den *Feuerbachkreis* oder auch den *Neun-Punkte-Kreis*.

Abbildungsverzeichnis