Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 5

> Verwandle große Schwierigkeiten in kleine und kleine in gar keine
>
> Chinesische Weisheit

Das Lösen von linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungssysteme werden mit dem *Eliminationsverfahren* gelöst, bei dem nach und nach Variablen eliminiert werden und schließlich ein besonders einfaches äquivalentes Gleichungssystem entsteht, das direkt gelöst werden kann (bzw. von dem gezeigt werden kann, dass es keine Lösung besitzt). Wir beginnen mit einem typischen Beispiel.

Beispiel 5.1. Wir wollen das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 1 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 7\,. \end{array}$$

über $\mathbb{R}$ lösen. Wir eliminieren zuerst x, indem wir die erste Zeile I beibehalten, die zweite Zeile II durch $II - \frac{3}{2}I$ und die dritte Zeile III durch $III - 2I$ ersetzen. Das ergibt

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ & -\frac{23}{2}y & -3z & +u & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & -10y & -6z & +2u & +2v & = & 1\,. \end{array}$$

Wir könnten jetzt aus der (neuen) dritten Zeile mit Hilfe der zweiten Zeile y eliminieren. Wegen der Brüche eliminieren wir aber lieber z (dies eliminiert gleichzeitig u). Wir belassen also die erste und zweite Zeile und ersetzen die dritte Zeile III durch $III - 2II$. Dies ergibt, wobei wir das System in einer neuen Reihenfolge[1] aufschreiben, das System

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +2z & & +5y & -v & = & 3 \\ & -3z & +u & -\frac{23}{2}y & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & & & 13y & -5v & = & 8\,. \end{array}$$

[1] Eine solche Umstellung ist ungefährlich, wenn man den Namen der Variablen mitschleppt. Wenn man dagegen das System in Matrizenschreibweise aufführt, also die Variablennamen einfach weglässt, so muss man sich diese Spaltenvertauschungen merken.

Wir können uns nun v beliebig (oder „frei") vorgeben. Die dritte Zeile legt dann y eindeutig fest, es muss nämlich

$$y = \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v$$

gelten. In der zweiten Gleichung können wir wieder u beliebig vorgeben, was dann z eindeutig festlegt, nämlich

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{23}{2}\left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v\right)\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{92}{13} + \frac{115}{26}v\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{93}{26} - u + \frac{12}{13}v\right) \\ &= -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v. \end{aligned}$$

Die erste Zeile legt dann x fest, nämlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(3 - 2z - 5y + v) \\ &= \frac{1}{2}\left(3 - 2\left(-\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v\right) - 5\left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v\right) + v\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{30}{13} - \frac{2}{3}u - \frac{4}{13}v\right) \\ &= \frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v. \end{aligned}$$

Daher kann man die Gesamtlösungsmenge als

$$\left\{\left(\frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v, \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v, -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v, u, v\right) \mid u, v \in \mathbb{R}\right\}$$

schreiben. Eine besonders einfache Lösung ergibt sich, wenn man die freien Variablen u und v gleich 0 setzt. Dies führt auf die spezielle Lösung

$$(x, y, z, u, v) = \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0\right) .$$

In der allgemeinen Lösung kann man u und v als Koeffizienten rausziehen und dann die Lösungsmenge auch als

$$\begin{aligned} \Bigg\{ \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0\right) &+ u\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right) \\ &+ v\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1\right) \mid u, v \in \mathbb{R}\Bigg\} \end{aligned}$$

schreiben. Dabei ist

$$\left\{u\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + v\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1\right) \mid u, v \in \mathbb{R}\right\}$$

eine Beschreibung der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

Definition 5.2. Es sei K ein Körper und seien zwei (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge gegeben. Die Systeme heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Lemma 5.3. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über K. Dann führen die folgenden Manipulationen an diesem Gleichungssystem zu einem äquivalenten Gleichungssystem.

(1) *Das Vertauschen von zwei Gleichungen.*
(2) *Die Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar $s \neq 0$.*
(3) *Das einfache Weglassen einer Gleichung, die doppelt vorkommt.*
(4) *Das Verdoppeln einer Gleichung (im Sinne von eine Gleichung zweimal hinschreiben).*
(5) *Das Weglassen oder Hinzufügen einer Nullzeile (einer Nullgleichung).*
(6) *Das Ersetzen einer Gleichung H durch diejenige Gleichung, die entsteht, wenn man zu H eine andere Gleichung G des Systems addiert.*

Beweis. Die meisten Aussagen sind direkt klar. (2) ergibt sich einfach daraus, dass wenn

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

gilt, dass dann auch

$$\sum_{i=1}^{n} (sa_i) x_i = sc$$

für jedes $s \in K$ gilt. Bei $s \neq 0$ kann man diesen Übergang durch Multiplikation mit s^{-1} rückgängig machen.

(6). Es sei G die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

und H die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = d\,.$$

Wenn ein Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ die beiden Gleichungen erfüllt, so erfüllt es auch die Gleichung $H' = G + H$. Und wenn das Tupel die beiden Gleichungen G und H' erfüllt, so auch die Gleichung G und $H = H' - G$. □

Für die praktische Lösung eines linearen Gleichungssystems sind die beiden Manipulationen (2) und (6) am wichtigsten, wobei man in aller Regel diese beiden Schritte kombiniert und eine Gleichung H durch eine Gleichung der Form $H + \lambda G$ (mit $G \neq H$) ersetzt. Dabei wird $\lambda \in K$ so gewählt, dass die neue Gleichung eine Variable weniger besitzt als die alte. Man spricht von *Elimination einer Variablen*. Diese Elimination wird nicht nur für eine Zeile durchgeführt, sondern für alle Zeilen mit Ausnahme von einer (geeignet gewählten) „Arbeitszeile“ G und mit einer fixierten „Arbeitsvariablen“. Das folgende *Eliminationslemma* beschreibt diesen Rechenschritt.

Lemma 5.4. *Es sei K ein Körper und S ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem über K in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Es sei x eine Variable, die in mindestens einer Gleichung G mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten a vorkommt. Dann lässt sich jede von G verschiedene*[2] *Gleichung H durch eine Gleichung H' ersetzen, in der x nicht mehr vorkommt, und zwar so, dass das neue Gleichungssystem S', das aus G und den Gleichungen H' besteht, äquivalent zum Ausgangssystem S ist.*

Beweis. Durch Umnummerieren kann man $x = x_1$ erreichen. Es sei G die Gleichung

$$ax_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i \;=\; b$$

(mit $a \neq 0$) und H die Gleichung

$$cx_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x_i \;=\; d.$$

Dann hat die Gleichung $H' = H - \frac{c}{a} G$ die Gestalt

$$\sum_{i=2}^{n} \left(c_i - \frac{c}{a} a_i \right) x_i \;=\; d - \frac{c}{a} b,$$

in der x_1 nicht mehr vorkommt. Wegen $H = H' + \frac{c}{a} G$ sind die Gleichungssysteme äquivalent. □

Das praktische Verfahren, bei dem man sukzessive das Verfahren im Beweis des vorstehenden Lemmas anwendet, um auf Dreiecksgestalt bzw. Stufengestalt zu kommen, nennt man *Gaußsches Eliminationsverfahren* (oder *Additionsverfahren*). Es werden also Variablen eliminiert, indem man geeignete Vielfache von Gleichungen zu anderen Gleichungen hinzuaddiert.

---

[2]Mit verschieden ist hier gemeint, dass die beiden Gleichungen einen unterschiedlichen Index im System haben. Es ist also sogar der Fall erlaubt, dass G und H dieselbe, aber doppelt aufgeführte Gleichung ist.

Satz 5.5. *Jedes (inhomogene) lineare Gleichungssystem über einem Körper K lässt sich durch die in Lemma 5.3 beschriebenen elementaren Umformungen und durch das Weglassen von überflüssigen Gleichungen in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem der Stufenform*

$$\begin{array}{cccccccccc}
b_{1s_1}x_{s_1} & +b_{1s_1+1}x_{s_1+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & +b_{1n}x_n & = & d_1 \\
0 & \ldots & 0 & b_{2s_2}x_{s_2} & \ldots & \ldots & \ldots & +b_{2n}x_n & = & d_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_{ms_m}x_{s_m} & \ldots & +b_{mn}x_n & = & d_m \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & = & d_{m+1}
\end{array}$$

überführen, bei dem alle Startkoeffizienten $b_{1s_1}, b_{2s_2}, \ldots, b_{ms_m}$ von 0 verschieden sind. Dabei ist bei $d_{m+1} = 0$ die letzte Zeile überflüssig und bei $d_{m+1} \neq 0$ besitzt das System keine Lösung.

Durch Variablenumbenennungen erhält man ein äquivalentes System der Form

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_{11}y_1 & +c_{12}y_2 & \ldots & +c_{1m}y_m & +c_{1m+1}y_{m+1} & \ldots & +c_{1n}y_n & = & d_1 \\
0 & c_{22}y_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & +c_{2n}y_n & = & d_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & c_{mm}y_m & +c_{mm+1}y_{m+1} & \ldots & +c_{mn}y_n & = & d_m \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & = & d_{m+1}
\end{array}$$

mit Diagonalelementen $c_{ii} \neq 0$.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Eliminationslemma, mi dem man sukzessive Variablen eliminiert. Man wendet es auf die erste (in der gegebenen Reihenfolge) Variable (diese sei x_{s_1}) an, die in mindestens einer Gleichung mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten auftaucht. Diese Eliminationsschritte wendet man solange an, solange das im Eliminationsschritt entstehende variablenreduzierte Gleichungssystem (also ohne die vorhergehenden Arbeitsgleichungen) noch mindestens zwei Gleichungen mit von 0 verschiedenen Koeffizienten erhält. Wenn dabei Gleichungen in der Form der letzten Gleichung übrig bleiben, und diese nicht alle die Nullgleichung sind, so besitzt das System keine Lösung. Wenn wir $y_1 = x_{s_1}, y_2 = x_{s_2}, \ldots, y_m = x_{s_m}$ setzen und die anderen Variablen mit $y_{m+1}, \ldots, y_n$ benennen, so erhält man das angegebene System in Dreiecksgestalt. □

Es kann sein, dass die Variable x_1 gar nicht n dem System mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt, und, dass in einer Variablenelimination gleichzeitig mehrere Variablen eliminiert werden. Dann erhält man wie beschrieben ein Gleichungssystem in Stufenform, das erst durch Variablenvertauschungen in die Dreiecksform gebracht werden kann.

Bemerkung 5.6. Ein lineares Gleichungssystem kann man kurz als

$$Ax = c$$

mit einer $m \times n$-Matrix und einem m-Tupel c schreiben. Die Manipulationen an den Gleichungen, die man im Gaußschen Eliminationsverfahren durchführt, kann man direkt an der Matrix durchführen oder aber an der erweiterten Matrix, die entsteht, wenn man A um die Spalte c ergänzt. Im Wesentlichen ersetzt man eine Zeile durch die Summe der Zeile mit einem Vielfachen einer anderen Zeile. Dies hat den Vorteil, dass man die Variablen nicht mitschleppen muss. Dann sollte man allerdings keine Variablenvertauschung durchführen. Zum Schluss muss man die entstandene Matrix in Stufenform wieder als lineares Gleichungssystem interpretieren.

Bemerkung 5.7. Gelegentlich möchte man ein *simultanes lineares Gleichungssystem* der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 & (= & d_1, & = & e_1, \ldots) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 & (= & d_2, & = & e_2, \ldots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m & (= & d_m, & = & e_m, \ldots) \end{array}$$

lösen. Es sollen also für verschiedene Störvektoren Lösungen des zugehörigen inhomogenen Gleichungssystems berechnet werden. Grundsätzlich könnte man dies als voneinander unabhängige Gleichungssysteme betrachten, es ist aber geschickter, die Umwandlungen, die man auf der linken Seite macht, um Dreiecksgestalt zu erreichen, simultan auf der rechten Seiten mit allen Störvektoren durchzuführen. Ein wichtiger Spezialfall bei $n = m$ liegt vor, wenn die Störvektoren die Standardvektoren durchlaufen, siehe Verfahren 12.5.

Bemerkung 5.8. Ein weiteres Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist das *Einsetzungsverfahren*. Dabei werden ebenfalls Variablen sukzessive eliminiert, allerdings in einer anderen Weise. Wenn man mit diesem Verfahren die Variable x_1 eliminieren möchte, so löst man eine Gleichung, sagen wir G_1, in der x_1 mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt, nach x_1 auf, und erhält eine neue Gleichung der Form

$$G_1' : \; x_1 = F_1 ,$$

wobei in F_1 die Variable x_1 nicht vorkommt. In allen weiteren Gleichungen $G_2, \ldots, G_m$ ersetzt man die Variable x_1 durch F_1 und erhält (nach Umformungen) ein Gleichungssystem $G_2', \ldots, G_m'$ ohne die Variable x_1, das zusammen mit G_1' äquivalent zum Ausgangssystem ist.

Bemerkung 5.9. Ein anderes Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist das *Gleichsetzungsverfahren*. Dabei werden ebenfalls Variablen sukzessive eliminiert, allerdings in anderer Weise. Bei diesem Verfahren löst man die Gleichungen G_i, $i = 1, \ldots, m$, nach einer festen Variablen, sagen wir x_1 auf. Es seien (nach Umordnung) $G_1, \ldots, G_k$ die Gleichungen, in denen die Variable x_1 mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt. Diese Gleichungen bringt man in die Form

$$G_i' : \; x_1 = F_i ,$$

wobei in F_i die Variable x_1 nicht vorkommt. Das Gleichungssystem bestehend aus

$$G_1', F_1 = F_2, F_1 = F_3, \ldots, F_1 = F_k, G_{k+1}, \ldots, G_m$$

ist zum gegebenen System äquivalent. Mit diesem System ohne G_1' fährt man fort.

BEMERKUNG 5.10. Unter einem *linearen Ungleichungssystem* über den reellen Zahlen versteht man ein System der Form

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \star & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \star & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \star & c_m\,, \end{array}$$

wobei $\star$ gleich $\leq$ oder $\geq$ ist. Die Lösungsmenge ist deutlich schwieriger zu beschreiben als im Gleichungsfall. Eine Eliminierung von Variablen ist im Allgemeinen nicht möglich.

Lineare Gleichungssysteme in Dreiecksgestalt

SATZ 5.11. *Es sei ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K in Dreiecksgestalt*

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \ldots & +a_{1m}x_m & \ldots & +a_{1n}x_n & = & c_1 \\ 0 & a_{22}x_2 & \ldots & \ldots & \ldots & +a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{mm}x_m & \ldots & +a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

gegeben, wobei vorne die Diagonalelemente alle ungleich 0 seien. Dann stehen die Lösungen $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ in Bijektion zu den Tupeln $(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in K^{n-m}$. D.h. die hinteren $n-m$ Variablen sind frei wählbar und legen eine eindeutige Lösung fest, und jede Lösung wird dabei erfasst.

Beweis. Dies ist klar, da bei gegebenem $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ die Zeilen von unten nach oben sukzessive die anderen Variablen eindeutig festlegen. □

Bei $m = n$ gibt es keine freien Variablen und es ist $K^0 = 0$ und das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung.

Das Superpositionsprinzip für lineare Gleichungssysteme

SATZ 5.12. *Es sei $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ eine Matrix über einem Körper K. Es seien $c = (c_1, \ldots, c_n)$ und $d = (d_1, \ldots, d_n)$ zwei n-Tupel und es sei $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$Mx = c$$

und $z = (z_1, \dots, z_n) \in K^n$ *eine Lösung des Systems*

$$Mx = d.$$

Dann ist $y + z = (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$ *eine Lösung des Systems*

$$Mx = c + d\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 5.17. □

KOROLLAR 5.13. *Es sei* K *ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über K *und es sei*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

das zugehörige homogene Gleichungssystem. Wenn $(y_1, \dots, y_n)$ *eine Lösung des inhomogenen Systems und* $(z_1, \dots, z_n)$ *eine Lösung des homogenen Systems ist, so ist* $(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$ *eine Lösung des inhomogenen Systems.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 5.12. □

Dies bedeutet insbesondere, dass wenn L der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems ist und y eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ist, so gibt es eine Bijektion

$$L \longrightarrow L',\ z \longmapsto y + z,$$

zwischen L und der Lösungsmenge L' der inhomogenen Gleichungssystems.