松岡文太郎口演
桑原兵次郎筆述

二週間豫備 數學受驗法

東京 文魁堂發行

緒言

余ハ明治十九年ヨリ引續キ諸官立學校入學受驗者ノ爲メニ數學豫備講習ヲナセリ、然シテ今是等受驗者ヲシテ速ニ登第立身ノ途ヲ計ラシメント欲スルヿ切ナリ、是ニ於テ余ガ屢々實驗ヲ經タル受驗豫備自修ノ法ヲ授ケシニ聽ク者大ニ之ヲ便トシ筆記シテ以テ同志ニ頒タントヲ乞フ、幸ニ學友桒原君之ヲ補助セラル、依テ之ニ應シテ大要ヲ摘ミ印刷ニ附シタルナリ.

明治三十七年三月

私立數理學館主　松岡文太郎識ス

目次

以　上

二週間豫備

數學受驗法

受驗豫備總論

1. 試驗トハ抑モ如何ナル事實ノ遂行ナルカ；場所ハ指定セラレテ妄リニ出入ヲ許サレズ，時間ハ制限セラレテ些ノ猶豫ナク，嚴肅ナル監督ノ下ニ立チ，劇烈ナル競爭ノ間ニ夾マレ，質問ハ一切差止メラレ，參考書ハ悉ク取リ上ゲラル，此制限ノ中ニ在リテ與ヘラレタル問題ノ答案ヲ作成スル之ヲ試驗ヲ受クルト云ヒ；而テ試驗官ガ一人ノ答案ニ付平均三分時ヲ越ユルコトナキ短時間ニ於テ通覽審判シタルモノ表ハレテ評點トナル，之ヲ試驗成績ト云ヒ；此全部ヲ名ケテ之ヲ試驗ト云フ，

試驗ハ上述ノ如ク受驗者ニ種々ノ制限ヲ加ヘ參考書ヲ奪フテ記憶ニノミ依ラシメ，時限ヲ設ケテ推考ノ遑ナカラシムルヲ以テ，假ニ若シ試驗官ヲシテ急ニ其位置ヲ換ヘテ受驗者タラシメバ，果シテ及第點ヲ得ベキヤ否ヤヲ保シ難キコト屢之レアリ．夫レ試驗ノ[illegible]學力ノ

多少ニ基ヅクヿハ論ヲ竢タズト雖モ，平生ニ於テ相當ノ學力アリナガラ，試驗ニ掛リテ其成績ノ思ハシカラヌ人少ナカラズ，是レ平生ト試驗トハ同ジカラザル事實アルガ爲メナリ．　故ニ試驗ヲ受クルニハ多少ノ豫備ヲナサヾルベカラズ，之ヲ怠ルハ甚タ不覺ノヿナリトス．

サテ其受驗ノ豫備ハ云フ迄モナク試驗期ニ迫キタル或週間ニ行フハ普通ニシテ，且ツ最モ効アルヿトナス；依テ茲ニハ

受驗前二三週ニ於ケル豫備ノ方法，

ヲ與ヘテ，試驗ナルモノヽ性質事實ニ副フベキ復習ノ仕方ヲ知ラシメ；之ニ附隨シテ

登場ノ心得，

ヲモ與ヘテ，其當日ノ出來不出來ナカラシメ，以テ其學力ノ有ラン限リヲ發展セシメントスルニ在リ．

一　學力養成法

2　學力ヲ平素ニ養成スルヿハ本書ノ大目的ニアラザレド，素養ノ有無ハ試驗ニ大關係アルヲ以テ，少シク茲ニ記述スベシ，

數學ニ於ケル學力ノ養成法ハ唯一言ニテ盡ク，曰ク

問題ヲ解ケ．

然レド此語ノ妙意ヲ解セザル人モアルベケレバ，次ニ之ヲ分解シテ示サン．

時間ノ使用法　思想ハ連續セザルベカラズ，故ニ隔日ニ二時間ヅヽ學ブヨリハ毎日一時間ヅヽ學ブヲ優レリトス；一週ニ二回ヨリ少キ練習ハ殆ンド効ヲナサヾルガ如シ；又數學ハ諳記四分ニシテ悟道六分ノモノナレバ，他ヨリ習フノミニテハ，決シテ熟達スベキモノニアラズ；故ニ心靜ニ思ヲ凝ラスノ時ナクンバ，之ヲ學ブトハ言ヒ難シ，彼ノ物ヲ考フルハ枕上馬上厠上ヲ宜シトストト古哲ノ言ヒシハ實驗說ニテ，之ハ單ニ零碎ノ光陰ヲ使用セヨト云フ如クニ思ハルレド，其義ノミニアラズ，試ミニ厠上ニテ事理ヲ考察セヨ，所謂ル六根清淨ニシテ何等ノ邪念ナク，理想高尙ニ最モ善ク悟道ヲ啓クニ適スルヲ知ラン；之ニ依テ時ヲ數學ノ練習ニ用フル此厠上ニ在ル時ノ如クナルヲ要ス；初學者ガ數學ノ受業中ニ英語ノ下讀ミヲナスガ如キハ時ノ使用ヲ誤ルモノナリ [illegible]

ムベシ．又教師ヨリ受ケタル日課ハ必ズ復習スベク，其復習ハ必ズ其日ノ內ニナスベシ，是レ復習ノ秘訣ナリ何トナレバ其日ノ內ナレバ強テ書ヲ開カズトモ，ソレコソ道ヲ歩キナガラ考ヘ直ホシテモ，亦枕ニ就キ眼ヲ閉ヂテ其事ヲ考ヘ直ホシテモ容易ニ追想シ得ルノ便アレ𪜈，翌日ニナレバトテモ本ナシデハ其想像繰リ返ラズ，且ツ甚ダ其復習ノ勞ヲ感ズ，此事日ヲ歷ルニ從テ益ス多大ナリ，故ニ遂ニ自棄スルニ至ル，依テ其日ノ復習ハ時間ノ經濟ト學力ノ進步トヲ兼ヌル學問上ノ秘事ナリト知ルベシ．

讀書法． 二書三書ヲ讀マンヨリハ一書ヲ再讀三讀スルノ優レルニ若カズ；同書ヲ二度讀ムホドイヤナ氣ガスルヿハナク，之レホド學力ノ進ムヿハナシ；然ルニ誰レシモ一度學ビ終リタル所ハ復讀スルコトヲ厭フハ是レ數學ヲ學ブノ法ヲ知ラザルモノナリ；算術ヲ學ビタリトテ已ニ習ヒ得タル其問題ヲ忘レテ其レ以上ヲ考ノ浮ブ道理ナク，代數トテ公式及ビ其應用ヲ覺ヘエズ，幾何トテ定義及ビ定理ヲ暗記セズシテ推シ進マントスルハ，定石ヲ心得ズシテ猥リニ爭フざる碁ノ如シ何ノ進步ヲ得ンヤ．若シ一書ニ精通スレバ次ニ同種ノ他書ヲ讀ムヿハ新聞雜誌ヲ讀ムガ如ク，讀ムニ從テ其意ヲ得，一ツノ澁滯ナク不可解ナシ；之ヲ受驗ノ側ヨリ觀ルモ一書ニ精通スレバ決シテ落第ノ恐レナク，却テ好成績ヲ得ルノ例多

シ，故ニ一書ノ精讀ハ斯道ニ入ルノ大法ナリト知ルベシ，

偖又一書ヲ精讀スルトハ本文ヲノミ精讀スルノ義ニアラズ；其書ノ問題ヲ一ツ殘ラズ解クヿナリ；總テ書冊ニハ夫々著者ノ苦心アリテ本文ニ言ヒ盡サザル微妙ノ意義ハ題問ニ依テ自然ニ理解セシムル爲メ種々ノ方法ニテ之ヲ暗示セルガ故ニ初學者ノ考ヘ及ブ所ニアラズ，然ルニ是レハ無用ナリトテ自ラ取捨スルガ如キハ何等ノ無法ゾヤ，是レ斯道ニ入ルノ順序ヲ知ラザルモノナリ．

又算術ニモ普通ト高等トアリ，代數ニモ大ト小トアリ，然ルニ大ハ小ヲ兼ヌトノ格言ヲ誤用シテ普通算術ヨリ入ラズシテ[illegible]高等算術ヲ讀ミ，小代數ヲ見ズシテ大代數ヲ讀ムガ如キハ啻ニ益ナキノミナラズ，甚ダ有害ノヿナリ，斷ジテ此類ノ無稽ノヿヲナス勿レ．

問題ヲ解クニ就テノ心得． 問題ヲ解クニ當テ其終決ヲ得ヌトテ落膽シ或ハ不快ニ感ズルガ初學者ノ常ナレ𪜈，是レ甚ダ心得違ノヿナリ，其解キ試ムル內ニハ終決ヲ得ルヿモアルベク，又得ザルヿモアルベシ，其結果ヲ得ヌトテ其思考ガ無用ニ歸シタリ，其時間ガ無駄ニ費ヘタリトナスハ數ヲ學ブノ法ヲ知ラザルモノナリ，問題ガ十ガ十マデ解キ得ルヿハ一般ニ不可能ノヿナリ，然ルニ下手ナ人ホド其解ヲ急キ少シノ時間ニテモ考ヘテ済ムハ，下手ナシテ益ス下手タラシムルモノナリ，[illegible]智ト下愚トハ暫ク措キテ中等以上ノ教育ヲ[illegible]

テ見ルニ上手ト云フモ下手ト云フモ其差ハ甚ダ些細ノモノニテ，其上手ト下手トノ程度ヲ次ノ算術問題ニテ示シ聊カ諸子ノ參考トセン．

問題　一本ニ付一錢五厘ニテ鉛筆若干本ヲ買ヒ入レ之ヲ一本ニ付一錢八厘ニテ賣リ已ニ總原價ノ外ニ六十錢ヲ得タル後，尚ホ五十本ノ賣レ殘リアリ，其買入レシ鉛筆數如何

此問題ハ格別ニ六ケ敷トモ見ヘズ，[illegible]モノナルガ，實際之ヲ教場ニテ數十回課シ試ミシニ中學卒業以上ノ學力ヲ有スル生徒ニテ正解答ヲ[illegible]五十人中四五人ニ過ギズ，今此正解答ヲ得タル[illegible]上手トシ其他ヲ下手トセン，偖諸君ハ此問題ヲ[illegible]見ラレヨ，若シ其答ガ二百五十本トカ又ハ四百五十本トカ出タナラバ下手ノ仲間ニテ，若シ正シキ答[illegible]本ヲ得タラナバ上手ノ仲間ナリ；若シ其誤答ヲ得タ[illegible]更ニ又正答ヲ得ル迄ニ何程ノ思考力ト何程ノ時間[illegible]スルカヲ見バ是レ上手ト下手トノ差ニシテ其[illegible]キヲ知ラン．

問題ヲ解クニモ本ヲ讀ムニモ初手ハ[illegible]下ダシテ運算シ見レバ直ニ解ルヿモ[illegible]算スレバ非常ニ困難ヲ感ズルコトナリ，[illegible]モ幾度讀ミ直ホシテモ途ニ理解シ得ザル[illegible]若シ理解ニ難ムヿアラバ其時運算ヲ試ムベシ，[illegible]

意義貫通スベシ，若シ斯クシテモ尚ホ通ゼサレバ翌日更ニ又試ムベシ，尚ホ出來ザレバ二三日ヲ隔テヽ考フベシ，一氣ニ事ヲ成シ遂ゲントスルハ不可ナリ．　總テ學術技藝何事ニテモ幼小ノ時ニ學ビ初ムルヲ手ほどきト云ヒ，其手ほどきノアル人ハ自然ニ其學ビ工合ヲ知ルガ故ニ一氣ニあせらザレド，齢三十近クナリタル人ガ初メテ數學ニ志ストモ問題ハロクニ解カズ理屈ニノミ氣ヲあせるガ故ニ二三月ニテ自失スルヲ常トス，之ヲ觀テモ學問ハあせリテあせらぬガヨキナリ，殊ニ數學ヲ然リトス．

二　記憶　何人ガ言ヒ慣ラハセシカ數學ヲ記憶ノ學問ナラズト云フ，[illegible]解ハ固ヨリ斯學ノ根本ナレド其關係ヲ記憶スルノ度ニ依テ應用ニ敏活ナル度ヲ異ニス，故ニ平生ニ於テハ或程度以上ハ之ヲ補フニ本或ハ手控ヲ以テスルモ試驗ニ於テハ悉ク記憶ニ依ラザルベカラズ．　記憶ノ解答ヲ敏活ナラシムルハ言フニ及バズ，其定理，定則，公式，類題解等ヲ暗記セズシテ何ニ依テ數ヲ論ズルヿヲ得ン，問題ヲ解析シテ之ヲ綜合スルハ研究トシテ固ヨリ可ナリ，然レド或定理關係ヲ知リ居テ直ニ之ヲ應用スルノ敏捷ナルニハ若カザルナリ；解析ハ研究ノ素ナリ記憶ハ應用ノ素ナリ，重要ナル事項ヲ記憶セズシテ理否ノ即決ハ望ミ難シ，故ニ

平生ニ於テハ解析綜合シテ事理ノ連絡ヲ[illegible]

事ニ當リテハ記憶ノ内ヨリ誘導シテ直ニ[illegible]

登場ノ心得

3. 試驗ハ定時間ニ於テ執行スルモノナルガ故ニ，場ニ登リテ技能ヲ顯ハサントスルニハ，最モ心神ノ明快ヲ要ス，此時ニ當リ若シ身体ノ調和ヲ失セシカ正ニ學力ノ半ヲモ損スベシ，故ニ先ヅ健康ヲ有ツヿニ注意スベシ，殊ニ試驗前ニ於ケル過度ノ勉學ハ害アツテ益ナキヿナリ；何トナレバ數學ガ二日ヤ三日デ其學力ガ急進スルモノニアラザレバ徒ニ身体ヲ疲勞セシムルノミニテ其効ナキヿ明カナレバナリ． 去レバ受驗前夜ノ如キハ安眠シテ精神ヲ休養スルヲ要ス；サテ又其翌日登場ノ時ニハ次ノ十二箴ヲ服膺スベシ．

受驗十二箴

I 筆跡拙ナケレバ成績拙シ．

答案ハ自身ノ心覺ニ記スモノニアラズ，長上ニ閲ヲ乞ハンガ爲メノ目的ナレバ必ズ丁寧ニ分リ易ク書クベシ自身ニ見テサヘ讀ミ難キ答解ヲ試驗官トテ仔細ニ見ル理屈ナキハ明カナリ；加之ノミナラズ第一頁ニ記シタル如クシテ採點ハ行ハルレバナリ．

II 數字ヲ讀ミ違ヘヌ様ニセヨ．

問題ノ文意ヲ讀ミ違ヘル類ハ談ニナラズ，[illegible]數字ヲ見違ヘ又ハ見殘シ之ガ爲メニ運算其他ノ[illegible]

非常ナル困難ヲ來シ，時間ヲ空費シテ失敗ヲ招クノ例少ナカラズ，深ク注意スベシ．

III. 問ヲ悟ラザル答ハ答ニアラズ．

此式ヲ省略法ニテ計算セヨト命ゼラルヽトキ，省略スルヨリモ普通ニ計算シタル方更ニ完全ナレバトテ，之ニ普通法ヲ適用シタトテ其答ト云フモノニアラズ，況シヤ算術問題ヲ代數ニテ解シ，幾何問題ヲ三角法ニテ答ヘタリトテ之ヲ其答トハ見做シ難シ．

IV. 易題ヲ先ニシ難題ヲ後ニセヨ．

少シニテモ手掛リノアル問題ヨリ取リ掛レ．

V. 五問ニ粗ナランヨリハ四問ニ密ナレ．

問題ヲ殘ラズ解答センヿハ誰シモ望ム所ナレドモ，若シ能ハズンバ一問ヲ減ラシテ殘ル問題ニ完全ノ解答ヲ附セヨ，五問ノ内三問出來ルモ尚ホ及第點ハ取レルニアラズヤ．

VI. 質問ハ不能ヲ証明ス．

試驗場ニテハ何事モ無言ヲ尊ブ，質問シタトテ答ヘヌガ慣ヒナレバ必ズ言句ヲ發スルヿ勿レ．

VII. 答ハ繁ニ失センヨリ寧ロ簡ニ失セヨ．

答ハ要領ヲ得ルニアリ，試驗官ニ向テ講義ヲナスモノニアラズ，幾何問題ヲ解クニ本解ノ外ニ補題解ヲ附記スルノ類ハ其繁ニ堪ヘズ，簡單明亮ヲ務ムベシ．

VIII. 答案ニ樂書ヲ爲ス勿レ．

答案ニ本題ハ間違ナリ，或ハ時間來レリ嗟，或ハ不勉強ヲ悔ユノ類ヲ紙端ニ記スハ非禮ナリ；何レニシテモ滿足ナル答案トハ成ラズ，單ニ其輕跳ヲ示スニ止マル．

IX. 一番ニ答ヲ出スモノハ一番ノ成績ナシ

眞先ニ答案ヲ出スモノハ白紙カ，否ラザルモ決シテ優等者ニアラザルナリ，最優等ノ答案ハ統計ニヨルニ大約定時間ノ三分ノ二以上ニ成ルモノナリ，急グナカレ，

X. 恐ルヽ勿レ侮ル勿レ．

受驗場ヲ見渡セバ一騎當千ラシキ俊雄星ノ如ク，此内ヨリ幾人カ及第スルカト思ヘバ物スゴクモ亦危ボソシ，然レモ是等ノ多ハ似非俊雄ニテ存外出來ノ惡ルキモノナリ，問題ガ六ヶ數トテ恐ルヽニ足ラズ，然レモ却テ恐ルベキハ問題ガ平易ナル時ナリ，此時ハ一層ノ精力ヲ注ガザレバ衆ニ秀デ難シ必ズ侮ルヿ勿レ．

XI. 出來テモ出來ナクトモ出ルナ．

答案ガ出來上レバ兎角ニ氣ガ落チ附カズ，大手ヲ振シテ之レ見ヨガシニ試驗場ヨリ出タクナルガ常ナリ，出ヅルハ容易ナリ，落附テ答案ヲ再考セヨ．

XII. 及落ヲ心ニ掛クル勿レ．

已ニ登場シタル以上ハ出來ル丈ケシカ出來ズ，心配シタリトテ何ノ甲斐アラン，寧ロ日常自修室ニアルガ如クナルベシ，及落ノ念ヲ斷ツヿ正ニ是レ大安心．

受驗豫備法

4. 數學ノ問題ヲ解キ實力ヲ精鍊スルハ平生ノ事ニシテ，已ニ受驗前二三週ニ迫マリテ困難ナル問題ヲ解キ覺エントスルハ得策ニハアラザルナリ，之迄ニ習ヒ得タル所ヲ反覆復習シテ全般ノ記憶ヲ回復確實ニスベシ．

夫レ試驗ハ普通ニ知ルベキ所ヲ知ルヤ否ヤノ試驗ニシテ新理新問題ニ答ヘ得ルヤ否ヤノ試驗ニアラズ，之ニ由テ試驗ハ

一部ニ精通センヨリハ，全部ノ大要ヲ得ルニ若カズ．

試ニ見ヨ世ニ達人ト稱シ實際ニ於テモ達人ト認ムベキモノガ或ハ試驗ニ不結果ヲ得ルヿアリ，其故如何トナレバ平生ニ達人ト稱スルモノハ腦力ニモ富ミ諸種ノ問題ヲ解スル働キモ充分ニアルベク，又或部分ニハ非常ニ精通シタル所モアルベシ；去レド達人トテ習ヒ得タル所ハ何レモ其研究當時ノ如ク恒ニ同一ノ力ヲ保ツヿハ六ヶ敷，其朧ゲナル所モ忘レタル所モアルベシ；然シテ試驗ハ時間ニ制限アルヲ以テ其打捨テ置キタル所ニ出會ヘバ其朧ゲナル若クハ忘レタル記憶ヲ回復スルニ時間ヲ要スベシ，試驗ハ此記憶回復ノ時間ヲ許スヤ否ヤ，是レ達人ト雖モ尚ホ失敗ヲ招ク所以ナリ，況ンヤ常人ナキ．

受驗ニ處スルノ法如何，試驗ニハ時間ニ制限アリ，

其時間内ニ於テ解答ヲ完全スルニハ敏捷ナル働キヲ要スルコハ明ニシテ，此敏捷ナル働キヲナスニハ平生ノ如ク各題ヲ夫々解析綜合スルノ遑ヲ許サズ，隨テ或定理，或定則，或公式，或類題等ヲ記憶シ置キ，機ニ應ジテ其所設ノ問題ヲ已ニ知レル部分ニ誘フテ之ヲ解スルコトヲ務メザルベカラズ，此敏捷ノ働キヲナス豫備，卽チ受驗ノ豫備ハ，算術代數幾何三角法夫々多少ノ法ヲ異ニスト雖圧，要スルニ

受驗二三週間前ヨリ定理,公式,類題解等ヲ平生ヨリ多ク暗記スルコトニ務ムベシ.

尤モ之ヲ細別スレバ，其暗記スル事項ニモ，

第一　受驗前ニ暗記シ置クベキ事項，

第二　受驗當日丈ケ暗記スベキ事項，

トアリ．之レヨリ各科ニ就テ詳説セン，就テ見ルベシ，

算術試驗ノ受方

5．學問ニモ流行アリ；算術難問時代，理論時代ヲ經テ今ハ計算及ビ實地眞似事時代トナレリ；何方ノ入校試驗題問ヲ見テモ，小數點以下幾位マデ計算セヨト出テ居ラヌ試驗紙ハ唯ノ一枚モナイ，ソレニ又幾メートルヲ尺寸ニ直ホセ，又何年ニ閏ガアルカ，又一覽拂トカ利落公債トカ云フ樣ナル度量衡法ヤラ暦法ヤラ，商業上ノ術語ヤラヲ態々入レテ普通識ノ有無トカ何トカヲ試驗スルコガ流行ル；其等ノ流行ノ善キカ惡キカハ今論ズルニ及バズ，兎モ角モ試驗ヲ受ケル人ハ此流行ヲ心得テ置カネバナラヌ．此流行ハ强テ非難スベキニアラズト雖圧，或人ハ之ヲ極端ニ考ヘテ一哩ノ長サ又ハ一圓金貨ノ目方等ヲ普通識ノ中ニ加ヘテ問題ヲ與フルニ至レリ．之ニ依テ

メートル法，暦法，經度ト時トノ關係，寒暖計，ヨリ哩,海里ノ長サ,貨幣制度ノ一部；等マデ

受驗日丈ケニテモ暗記セザルベカラザルコトナレリ；而シテ是等ノ必要ナル事項ハ下文ノ問題解答ノ間ニ處々ニ分チ記セリ，就テ見ルベシ．

6．然リト雖圧其言葉其事實ハ如何ニ新シクシタリトテ，算術ハ四則，數性及ビ開方ノ應用ニ過ギザルヲ以テ其解法ハ永劫異ナル所ナシ．依テ次ニ算術ノ應用問題

中必要ナル問題ノミヲ擇ミ一々之ニ詳解ヲ附シ置キタレバ受驗前二三週間前ヨリ熟讀シテ少クモ下ニ記シタル題解ヲ暗記セラルベシ，是レ受驗ニ要スル知識ノ最下程度ヲ示シタルモノナレバ此以上ニ好キ問題ヲ擇シテ暗記セラルヽコヲ妨ケズ．

6. 前ニモ述ベタル如ク類題解ヲ記憶シ置クコハ，應用ヲ敏捷ニスルノ最要手段ナレバ此書ヲ讀ミ了リタル上テ其儘ニ顧ミザレバ其効薄シ，一回通覽シタル後ハ毎日必ズ一度ハ此書ヲつらつらト見渡スベシ，然[illegible]ノ書キ方モ自然ニ覺エラルベシ．

元來算術ハ解ノ書キ方ニテ試驗點數ニ甚ダシク相違ヲ生ズルモノナレバ，可成ハ解ノ書キ方モ同時ニ記憶セラルベシ．

7. 運算ノ達者ニナランヿ思ハヾ[illegible]シ，又開平及ビ開立ハ必ズ熟練ヲ要スルガ故ニ[illegible]ルベキヿ．

省略算法ハ小面倒ナル理屈アルモノナルガ故ニ之ヲ深ク知ルニモ及バサレ圧多少ノ心得ハナカルベカラズ．

8. 試驗前ニハ解ノ書キ方ヲモ稽古セザルベカラズ，特ニ算術解答ハ書キ難シ，時々之ヲ書キ試ミヨ．

9. 次ニ記憶スベキ最モ大切ナル問題ヲ[illegible]ハ豫メ一讀シ置キテ受驗前二三週間前ヨリ毎日少クモ一回十四五分時位ノ内ニツヽツヽト眼ヲ通[illegible]

受驗前ニ少クトモ記憶スベキ

算術問題

次ノ問題解ハ豫メ熟讀シ置キ受驗前二三週間前ヨリ毎日一回必ズ通覽スベシ．

四則

1 甲乙二旅人アリ，甲ハ毎日15里，乙ハ毎日12里ヲ歩ム，今270里[illegible]タル處ヨリ甲乙同日ニ相向テ出發セバ其後幾日ニシテ相會スルカ．

（解）出會フ迄ノ日數ハ甲乙同數ナリ，依テ毎一日ノ近寄リ高ヲ見ルニ甲15里ト乙12里ト合セテ15＋12里ヅヽナリ，然ルニ270里ヲ近寄ル，即チ相會スルニハ

$270\div(15+12)=10$日ヲ要ス．

2 甲乙二旅人アリ，甲ハ毎日15里，乙ハ毎日12里ヲ歩ム，今乙四日前ニ出發シ，甲之ヲ追ハヾ其後幾日ニシテ乙ニ追ヒ及ブカ．

（解）甲ガ出發セントスルトキ乙ハ已ニ12×4＝[illegible]48里先キヘ[illegible]，其時ヨリ甲ガ乙ニ追ヒ附ク迄ハ甲乙同日數ヲ歩マザル可カラズ，依テ甲ガ乙ヨリ毎一日幾何多ク歩ムカヲ見ルニ15－12里ナリ，[illegible]

48里ヲ多ク歩マンニハ $48\div(15-12)=16$ 日ヲ要ス

(3) 二輪車アリ前輪ノ周圍ハ95寸，後輪ノ周圍ハ62寸8分ナリ，此二輪車或距離ヲ往復セシニ後輪ハ前輪ヨリ966回多ク回轉セリト云フ，後輪ノ回轉數及ビ往復セシ距離ヲ問フ

（解）前輪ガ一回轉スル間ニ後輪ハ $\frac{950}{628}=1\frac{322}{628}$ 回轉スルガ故ニ前輪ノ一回轉毎ニ $\frac{322}{628}$ 回轉ノ差アリ，因テ $966\div\frac{322}{628}=1884$ ハ前輪ノ總回轉數ナリ，從テ所要ノ距離ハ $95\times1884=$ 1里13町43間 [illegible] 後輪ノ回轉數ハ $1884+966=2850$ 回

(4) 七時間內ニ遠距離ヲ自轉車ニテ往復セント [illegible] クニ每時二里ヅヽ徐行シ復ルニハ每時五里 [illegible] 丼ハ幾里ノ遠キニ到ルヲ得ルカ．

（解）往クモ復ルモ同里數ナリ，依テ [illegible] 往復時間ヲ考フルニ，往クニ $\frac{1}{2}$ 時復ルニ [illegible] 時ヲ要ス，故ニ七時間ニハ $7\div(\frac{1}{2}+\frac{1}{5})=10$ [illegible] 往復スルコトヲ得ベシ．

(5) 一組ノ生徒ニ書籍ヲ貸シ與ヘントス [illegible] 五人ニ四册，地理書ハ二人ニ一册ノ割ニテ合計 [illegible] 其一組ノ人數如何．

（解）歷史ヲ與フル人數モ，地理書ヲ與フル人數モ [illegible]

同數ナリ，依テ每一人ニ貸シ渡ス册數ハ兩書合セテ $\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$ 册ニシテ合計65册アレバ其人數ハ $65\div(\frac{4}{5}+\frac{1}{2})=50$ 人ナリ．

(6) 3000人ノ軍隊ヲ四列ニ行進セシメ，各列ノ間隔ヲ三尺トナシ，每時二里ノ速度ヲ以テ長サ120間ノ橋ヲ渡ルトキハ之ニ要スル時間如何．

（解）3000人ヲ四列トナセバ一列ノ人數ハ $3000\div4=750$ 人トナル，此一人每ノ間隔ハ半間ナルヲ以テ此一列ノ長サハ $.5\times(750-1)=374.5$ 間ナリ，之レト橋ノ長サト合セテ $374.5+120=494.5$ 間ナリ，而シテ此一列ガ橋ヲ [illegible] スル時間ハ其列ノ最後一人ガ其列長ト橋長トヲ進ムノ時間ニ等シキヲ以テ求ムル時間ハ

$$\frac{494.5}{2\times36\times60}\text{時}=6\text{分}52\frac{1}{18}\text{秒ナリ．}$$

(7) 或人每月80圓ヅヽ費シシニ六ケ月ヲ經テ若干ノ負債ヲ生ゼシニ依リ，其後ハ每月70圓ヅヽ費シ，十ケ月ニシテ之ヲ償却セリ，此人ノ月收入如何．

（解）初ノ六ケ月ニ消費セシ金高ハ $80\times6=480$ 圓ナリ，又後ノ十ケ月ニ消費セシ金高ハ $70\times10=700$ 圓ナリ，故ニ此 $6+10=16$ ケ月間ニ合計 $480+700=1180$ 圓ヲ消費セシコト明カニシテ，斯クテ過金ナク負債モ [illegible] シトイヘバ此一ケ月ノ收入ハ $1180\div16=$ [illegible] リ．

8. 雞 20 羽ヲ買ヒ，其中 13 羽ハ一羽 42 錢ヅヽニ，其他ハ一羽 48 錢ヅヽニ賣リシニ兩度ノ利益相等シカリシト云フ，一羽ノ原價如何.

（解）13 羽ノ總賣價ハ $42\times13=546$ 錢ニシテ，又其殘リ $20-13=7$ 羽ノ總賣價ハ $48\times7=336$ 錢ナリ，而シテ兩度ノ利益相等シト云ヘバ $13-7=6$ 羽ノ原價ハ $546-336=210$ 錢ナリ，由テ一羽ノ原價ハ $210\div6=35$ 錢ナリ.

15

9. 或人甲地ヨリ乙地ニ行クニ其速サ每時 21 [illegible] トセバ豫定ノ時刻ヨリ三時間遲ルヽヲ以テ，[illegible] 時 35 町トセシニ豫定ノ時刻ヨリ一時間早[illegible] ト云フ，然ラバ豫定ノ時刻ニ到着セシニハ[illegible] トセバヨロシキカ.

（解）每時 21 町行クト 35 町[illegible] 町行クニ付テ $\frac{1}{21}-\frac{1}{35}=\frac{2}{105}$ 時間ノ差[illegible] 然ルニハ此速サヲ以テ同ジ距離ナル甲乙兩地ノ間ヲ行クニ，三時間遲達スルト一時間早達スル[illegible] 時間ノ差ヲ爲スヲ見レバ此兩地ノ距離[illegible]

$4\div\frac{2}{105}=210$ 町ナルコト明カニシテ[illegible]
間ハ $(210\div21)-3=7$ 時ナリ，因テ之[illegible]
[illegible] 每時 210町$\div7=30$ 町ヲ行クベシ.

10. 二錢銅貨ト五錢白銅貨ト合セテ三十個アリ，其價合セテ九十六錢ナリ，各幾個ナルカ.

（解）若シ此 30 個ガ悉ク二錢貨ナラバ其總價ハ $2\times30=60$ 錢ナルベシ，然ルニ茲ニハ此ヨリ $96-60=36$ 錢多シ，今若シ二錢貨一個ヲ五錢貨一個ニ換フレバ其價 $5-2=3$ 錢ヲ增スヲ以テ，36 錢ヲ增サンニハ五錢貨 $36\div3=12$ 個混ズベキナリ，從テ二錢貨ノ數ハ $30-12=18$ 個ナリ.

11. [illegible]器ヲ運ブニ一個運ビ了レバ三錢ヲ得ベク，一個[illegible]五錢ヲ出スベキ約束ニテ百個ヲ運ビテ 260 錢ヲ得タリ，[illegible]ハ幾個ナルカ.

（解）百個ヲ悉ク運ベバ $3\times100=300$ 錢得ベキ豫定ナリ，然ルニ茲ニハ豫定ヨリ $300-260=40$ 錢少シ，是レ一個ヲ毀セバ三錢ヲ得ザルノミナラズ猶ホ五錢ヲ失フヲ以テ一個ヲ毀セバ豫定ヨリ $3+5=8$ 錢ノ不足ヲ生ズルニ由ル，故ニ其毀セシ數ハ $40\div8=5$ 個ナリ.

12. 金銀ノ混塊アリ其目方 106 匁ナリ，若シ之ヲ水中ニテ秤レバ其目方七匁ヲ減ズト云フ，金銀ノ目方各如何.

但シ金ノ比重ハ 19，銀ノ比重ハ 10 トス.

（解）106 匁ガ悉ク金ナラバ其目方[illegible]
匁減ズベキモノナルニ，茲ニハ是ヨリ[illegible]

匁多ク減ジタルハ銀ヲ含メルニ由ル, 一匁ニ付水中ニテ金ハ $\frac{1}{19}$ 銀ハ $\frac{1}{10}$ ヲ減ズルヲ以テ一匁ニ付金銀減リ方ノ差ハ $\frac{1}{10}-\frac{1}{19}=\frac{9}{190}$ 匁ナリ
故ニ $1\frac{8}{10}$ 匁多ク減ズルニハ銀 $1\frac{8}{10}\div\frac{9}{190}=30$ 匁ヲ含マザル可カラズ, 從テ金ハ $106-30=76$ 匁.

13. 甲ノミナラバ 12 日, 乙ノミナラバ 15 日ニ成ルベキ業アリ, 二人共ニ働ケバ幾日ニシテ成ルカ.

（解） 甲ハ一日ニ其一業ノ $\frac{1}{12}$ ヲナシ, 乙ハ一日ニ其一業ノ $\frac{1}{15}$ ヲナスヲ以テ, 二人共ニ働ケバ一日ニ其業ノ $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$ ヲナス, 因テ此一業ヲ全ウスルニハ $1\div(\frac{1}{12}+\frac{1}{15})=6\frac{2}{3}$ 日ヲ要ス.

14. 米ナラバ 20 石, 麥ナラバ 30 石買ヒ得ベキ金高ヲ以テ, 米麥同石數ニ買ハントス, 其石高如何.

（解） 其金高ヲ一單位トス, 然ルトキハ米一石ノ價ハ $\frac{1}{20}$, 麥一石ノ價ハ $\frac{1}{30}$ ナリ, 因テ米麥各一石ヲ買フ毎ニ其價ハ $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$ ナルヲ以テ, 斯クテ全金額ニテ買ヘバ各 $1\div(\frac{1}{20}+\frac{1}{30})=12$ 石ヲ得.

15. 馬五頭四日ニテモ牛三頭六日ニテモ運ビ得ベキ荷物アリ, 之ヲ牛馬各二頭ニテ運バシムレバ幾日ヲ要スルカ.

（解） 馬一頭一日ニテハ其荷物ノ $\frac{1}{4\times5}$ ヲ運ビ又牛一頭一日ニテハ其荷物ノ $\frac{1}{3\times6}$ ヲ運ブ, 故ニ各二頭ニテハ之ヲ $1\div\left\{\left(\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{3\times6}\right)\times2\right\}=4\frac{14}{19}$ 日ニテ運ブベシ.

16. 彌生, 春日ノ兩漁船甲乙兩港ノ間ヲ航海スルニ, 彌生丸ハ三晝夜, 春日丸ハ二晝夜半ヲ要ス, 本日午前八時ニ甲港ヲ出帆セシ春日ト前日ノ正午ニ乙港ヲ出帆セシ彌生ト出會スル時ヲ問フ.

（解） 兩船ハ夫々一時間ニ全距離ノ $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{60}$ ヲ航行スベシ, 故ニ春日ノ出帆スル時ニ方テ兩船ノ距離ハ全線路ノ $1-\frac{1}{72}\times20=\frac{13}{18}$, 因テ春日ガ出帆シテヨリ $\frac{13}{18}\div(\frac{1}{72}+\frac{1}{60})=23\frac{7}{11}$ 時間ニシテ相會スベク其時刻ハ翌日午前七時十一分ノ七ナリ.

17. 或職工七日ト二時間働キテ賃錢 432 錢ヲ得, 又五日ト六時間働キテ賃錢 336 錢ヲ得タリ, 一日ノ就業時間如何.

（解） 最初ノ場合ノ五倍即チ 35 日ト 10 時間働ケバ賃錢 $432\times5=2160$ 錢ヲ得ベク, 又終リノ場合ノ七倍即チ 35 日ト 42 時間働ケバ賃錢 $336\times7=2352$ 錢ヲ得ベシ, 而シテ 2352 錢−2160 錢 $=192$ 錢ハ 35 日 10 時間ノ賃錢ト 35 日 ……

間ノ賃錢トノ差即チ　32　時間ノ賃錢ナルコト明カナリ．故ニ一時間ノ賃錢ハ　192錢÷32＝6　錢　因テ最初ノ塲合ニハ　432÷6＝72　時間働キシナリ，故ニ所要ノ時間ハ（72−2）÷7＝10　時間ナリ．

18．第三時ト第四時トノ間ニ於テ

（1）分針ガ時針ト相重ル時刻如何

（2）分針ト時針ト直角ヲナス時刻如何

（解）（1）第三時ニハ時針ハ標記 III ヲ指シ分針ハ XII ヲ指スヲ以テ時針ハ分針ヨリ先ンズルコト 15 刻ミナリ，而シテ一時間ニ分針ハ 60 刻ミヲ，時針ハ 5 刻ミヲ進ムヲ以テ毎一時ニ分針ハ時針ヨリ 60−5 刻ミ多ク進ム，故ニ其後レタル 15 刻ミ多ク進ンデ兩針相重ナルニハ第三時ノ後 15÷(60−5) $=\frac{3}{11}$ 時 $=16\frac{4}{11}$ 分時 ヲ要ス．

（2）前同理ニテ分針ガ時針ヨリ 15＋15 即チ 30 刻ミ多ク進マントスルニハ第三時ノ後 30÷(60−5)＝$\frac{6}{11}$ 時 $=32\frac{8}{11}$ 分時 ヲ要ス．

19．長サ八十五間ノ列車ト長サ十五間ノ列車トガ並行シタル線路ニ於テ出會フトキハ四秒時ニシテ相離レ，又一ガ他ヲ逐フトキハ十秒時ニシテ逐ヒ越ス，兩列車毎秒時ノ速サ如何

（解）85間ノ列車ト 15 間ノ列車トノ相會フテ

4 秒時ニ離ルヽニハ一秒時ノ兩列車ノ進速ノ和ガ (85＋15)÷4＝25 間ナルベシ

又 一ガ他ヲ逐ヒ越スニ 10 秒時ナルニハ一秒時ノ兩車ノ進速ノ差ガ (85＋15)÷10＝10 間ナリ．

故ニ各車各秒時ノ速度ハ

$$\frac{25+10}{2}=17.5\ \text{間},\qquad \frac{25-10}{2}=7.5\ \text{間}.$$

注意　本題ハ長キ二ツノ物ノ出會ナリ，出合フテ離ルヽニハ其後端ト後端トガ出會迄ノ時間ヲ要シ，又逐ヒ越スニハ一ノ前端ガ他ノ後端ニ接シテヨリ，其第一ノ後端ガ第二ノ前端ニ逐ヒ附ク迄ノ時間ヲ要スト知レ．

20．甲槽ニハ水九石六斗，乙槽ニハ水一石二斗ヲ入ル，今若シ甲ヨリ毎時六斗ヅヽ乙ニ流レ込ムモノトスレバ幾時ノ後乙ノ水ハ甲ノ三倍トナルカ．

（解）甲乙水量ノ和ハ一定ナリ．故ニ乙ノ水量ガ甲ノ水量ノ三倍トナルノ時ハ，甲ガ兩槽ノ和

96＋12＝108　斗ノ　1＋3＝4　分ノ一トナルノ時ニシテ，此時ノ甲ノ水量ハ108÷4＝27　斗ナリ，依テ今ヨリ

(96−27)÷6＝11.5　時ノ後ナリ．

注意　問題ノ中ニハ其和ガ一定ナルモノ，或ハ其差ガ一定ナルモノトアリ．何レモ其題ヲ解クニ大切ナル關係ナリ，常ニ注意ヲ怠ルコ勿レ．

數ノ性質

1 矩形ノ地面アリ其長サ 120 間, 廣サ 84 間アリト云フ, 今其四隅及ビ周圍ニ櫻樹若干ヲ植エントスルニ樹ト樹トノ間ヲ等シクシテ成ルベク濶クセントス, 櫻樹幾本ヲ要スルカ,

解 兩樹ノ間ハ等シクシテ成ルベク廣クセントスルガ故ニ其間隔ヲ表ハス數ハ 120 間ト 84 間トノ最大公約數ナラザルベカラズ, 之ヲ求ムレバ 12 間ナルヲ知ル, 依テ此矩形ノ周圍ニ 12 間ヲ隔テヽ樹ヲ植ユルコトヽナル, 計算シテ答三十四本

2 周圍 3696「メートル」ノ馬場ヲ西洋馬ハ一分間ニ 660「メートル」ヲ走リ, 日本馬ハ 528「メートル」支那馬ハ 396「メートル」ヲ走ルト云フ, 今同時ニ同處ヨリ出發スレバ幾時後ニ出發點ニテ出會スルカ,

(解) 西洋馬ガ一周ニ要スル時間ハ $\frac{3696}{660}=\frac{28}{5}$ 分時

又　日本馬ガ……………… $\frac{3696}{528}=7$ 分時

又　支那馬ガ……………… $\frac{3696}{396}=\frac{28}{3}$ 分時

故ニ各馬ガ出發點ニ相會スルニハ各此一周ノ時間ノ倍數ナルベキヲ以テ, 其初メテ相會スル時間ハ以上ノ時間ノ最小公倍數二十八分時ヲ要スベシ.

3. 分數ノ最大公約數及ビ最小倍數ヲ求ムル法及ビ其理ヲ示セ.

(解一). 凡テノ分數ヲ通分母ニ化シ其分子ノ最大公約數及ビ其最小公倍數ヲ夫々分子トシ其通分母ヲ分母トシタル分數ハ其衆分數ノ最大公約數及ビ最小公倍數ナリ.

例バ $\frac{8}{15}$, $\frac{20}{21}$ ヲ通分母ニ化スレバ $\frac{56}{105}$, $\frac{100}{105}$ トナル, 而シテ此分子 56, 100 ノ最大公約數ハ 4 ニシテ其最小公約數ハ 1400 ナリ,

故ニ此最大公約數ハ $\frac{4}{105}$ 此最小公倍數ハ $\frac{1400}{105}=\frac{40}{3}$, 何トナレバ此分母ノ分數 $\frac{56}{105}$ $\frac{100}{105}$ ハ同單位 $\frac{1}{105}$ ヲ有ツヲ以テ $\frac{56}{105}=56$ 單位, $\frac{100}{105}=100$ 單位, 即チ 56, 100 ノ最大公約數及ビ最小公倍數ハ 4, 1400; 即チ 4 單位, 1400 單位; 即チ $\frac{4}{105}$, $\frac{1400}{105}$ ナルコト明カナリ.

(解二). 凡テ衆已約分數ニ於テハ其分子ノ最大公約數ヲ分子トシ其分母ノ最小公倍數ヲ分母トシタル分數ハ其最大公約數ニシテ, 又其分子ノ最小公倍數ヲ分子トシ其分母ノ最大公約數ヲ分母トシタル分數ハ其最小公倍數ナリ.

例バ $\frac{8}{15}$, $\frac{20}{21}$ ニ於テ是ハ已約分數ナルヲ以テ

$\begin{cases}\text{此分子 8, 20 ノ最大公約數ハ 4 ニシテ}\\ \text{此分母 15, 21 ノ最小公倍數ハ 105 ナリ}\end{cases}$

故ニ此最大公約數ハ $\frac{4}{105}$ ナリ.

$\begin{cases} \text{此分子　8, 20 ノ最小公倍數ハ 40 ニシテ} \\ \text{此分母　15, 21 ノ最大公約數ハ 3 ナリ.} \end{cases}$

故ニ此最小公倍數ハ $\frac{40}{3}$ ナリ.

何トナレバ一ツノ已約分數ヲ以テ他ノ已約分數ヲ除シテ其商ガ整數ナルニハ $\frac{8}{15}\div\frac{2}{45}=\frac{8}{15}\times\frac{45}{2}=\frac{8}{2}\times\frac{45}{15}=4\times3$, 即チ

$$\frac{a}{b}\div\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\times\frac{y}{x}=\frac{a}{x}\times\frac{y}{b}=(\text{整數})\times(\text{整數})$$

ナル如ク除數 $\frac{x}{y}$ ノ分子 x ハ, 被除數 $\frac{a}{b}$ ノ分子 a ノ約數ニシテ, 同ク除數ノ分母 y ハ, 同ク被除數ノ分母 b ノ倍數ナラザルベカラズ, 之ニ由テ一ツノ已約分數ガ多クノ已約分數ノ公約數ナルニハ其分子ハ各分子ノ公約數, 分母ハ其分母ノ公倍數ナルベク, 然シテ尚ホ其約數ヲ最大ナラシメンニハ其分子ヲ最大ニシ, 分母ヲ最小ナラシムルコトヲ要ス, 其最小公倍數ノ塲合ハ此反理ナルコト明カナリ.

注意　試驗ニハ最大公約數ノ應用問題ノ出ルコ稀ニシテ, 其最小公倍數ノ應用問題ノ出ツルコ甚ダ多シ; 而テ其分數ノ最小公倍數ヲ求ムルコハ忘レ易キモノナレハ殊ニ意ヲ用ヒテ其求ムル法ヲ記憶スベシ.

復名數

注意　外國度量衡ノ中ニテ「メートル」法ハ最モ大切ナリ; 其他ノモノハ其概要ヲ知レバ足ルベシ.

1「メートル」(米)　=3.3 尺,
1「アール」　=10 米平方,
1「リットル」(立)　=1「デシメートル」立方,
1「グラム」(瓦)　=4匁/15.　1匁 =15瓦/4 = 3.85
1「グラム」トハ攝氏四度ノ溫度ヲ有スル蒸溜水1立方「センチメートル」ノ目方ニ等シ.

英國ノ度量衡

1「マイル」(哩)　=1760「ヤード」(碼),
　=5280「フイート」(呎)
1「フート」(呎)　=12「インチ」(吋)
　=1.0058218 尺,
1 海里　=6080 呎 =16.075 町,
1 噸　=2240 封度=270.946009貫,
1 封度　=120.95804 匁,

一馬力ハ一分間ニ 33000 封度ノ重量ヲ一呎ダケ引上グル力, 或ハ一秒時間ニ 75 瓩ノ重量ヲ一米引キ上グル力ヲ云フ即一秒時間ニ 60 貫目ヲ一尺引キ上グル力ヲ云フ.

次ニ掲クルモノノ内ノ終リノ部ハ試驗當日丈ケハ必ズ記憶スベシ

1 平方尺 ＝100 平方寸,
1 坪 ＝36 平方尺,
1 立方尺 ＝1000 立方寸,
1 立坪 ＝1 間立方 ＝216 立方尺.
1 才 ＝1 立方尺,
尺〆トハ材木ノ切口 1 尺平方, 長サ 2 間ノ体積ヲ云フ
1 升桝ノ体積 $=49^2\times 27$
$=64.827$ 立方寸,
1 斤 ＝160匁＝600 瓦,
五圓金貨ノ目方 $=4\frac{1}{6}$ 瓦 $=1\frac{1}{9}$ 匁
金貨ノ品質……金九, 銅一.

1. 紀元二千五百六十三年十一月二十二日(日曜日)ニ或港ヲ出帆スル船アリ, 此船ハ十六日目毎ニ定期航海ヲナスモノトス, 然ラバ此船ガ日曜日ニ再ビ出帆スルハ何年何月何日ナルカ.

(解) 船ノ出帆スルハ 15 日毎ニシテ此出帆日ガ日曜日ニ當ルベキ最近日數ハ 7 ト 15 トノ最小公倍數 105 ニシテ, 卽チ最初ノ出帆日ヨリ 105＋1＝106 日目ナリ, 故ニ十一月廿二日ノ日曜日ヨリ 106 日目ニ當ル日ハ所要ノモノナリ. 然ルニ翌年ハ西洋紀元 1904 年ナルヲ以テ此數 1904 ハ 4 ニテ整除シ得ベクシテ閏年ナリ, 因テ二月ヲ二十九日トシテ計算スレバ三月六日ヲ答トス.

注意 現今我國ヲ始メ歐米各國(露西亞ヲ除ク)ニ用ヒラルヽ所ノ太陽暦ハ「グレゴリアン」暦ト稱スルモノニシテ西暦年數(或ハ我紀元年數ヨリ 660 ヲ減シタルモノ)ヲ 4 ニテ整除シ得ルトキハ其年ハ閏年ナレドモ西暦年數ガ 100 ニテ整除シ得ルモノヽ中, 其商ガ更ニ 4 ニテ整除シ得ザル數ノ年ハ平年ナリトス. 例ヘバ西紀 1900 年ハ平年ニシテ 2000 年ハ閏年ナルガ如シ.

2 東京ハ東經 139 度45分ナリ, 然ラバ中央標準時ノ午前第八時ハ東京地方時ノ何時ニ當ルカ

(解) 中央標準時ハ東經 135 度子午線ヲ基トス

今東京ハ中央標準時ノ經度ヨリ東ニ在ルコト，

$139^{0}, 45'-135^{0}=4^{0}, 45'$. ニシテ此レニ對スル時差ハ　24 時 $\times\dfrac{4\frac{45}{60}}{360}=19$ 分　トス，　東地ハ西地ヨリ時刻進メルヲ以テ，地方時ハ午前八時十九分ナリ．

注意　我國，凡沖繩以東ハ東經 135 度ノ子午線ヲ以テ定メ之ヲ中央標準時トイヒ，臺灣，澎湖嶋及ビ八重山附近一帶ノ地ハ東經 120 度ノ子午線ヲ用ヒ，之ヲ西部標準時ト云フ．故ニ內地ノ時刻ハ臺灣地方ノ時刻ヨリ一時間早クシテ內地ノ正午ノ時，臺灣ニテハ午前十一時ニ當ル．

次ニ經度ノ差ヨリ時差ヲ求ムルノ演算ハ下ノ表ニヨリテ行ヘバ便ナリ．

經度	時間
1^{0}	4,分
$1'$	4,秒
$1''$	$\frac{1}{15}$,秒

時間	經度
1時	15^{0}
1分	$15'$
1秒	$15''$

例バ上ノ問題ニ於テ　4 度 45 分ノ時差ハ

4 分 $\times 4=16$ 分，　$45'\div 15'=3$ 分

$\therefore$　$16+3=\underline{19}$ 分

比．比例

（或ハ　分數）

1．河水ヲ上下スルニ其時間ノ比五ト三トノ如シ，流速ト漕力トノ比如何．

（解）同處ヲ進ム速度ノ比ハ時間ニ反比スルモノナリ，故ニ此上下ノ進速ハ　$3:5$.

故ニ流速ト漕力トノ比ハ

$$\frac{5-3}{2}:\frac{5+3}{2},\ \text{即チ}\quad 1:4.$$

2．二丈八尺ニ付十圓五十錢ノ縮緬六尺ノ値如何．

（解）本題ヲ普通ニ解スレバ

28尺ノ價ハ　10.5　圓ナルヲ以テ，

1尺ノ價ハ　$\dfrac{10.5}{28}$　圓ナリ．

故ニ　6 尺ノ價ハ　$\dfrac{10.5}{28}\times 6=2.25$　圓．

（別解）本題ニ比例ヲ適用シテ解スレバ，品物ノ量ハ其價ニ正比スルモノナリ．故ニ所要ノ價ヲ x トスレバ，次ノ比例ヲ得．

$$28:6=10.5:x,$$

$$x=\frac{6\times 10.5}{28}=2.25.\qquad \text{答　2.25 圓}$$

3. 三十人ガ十二日働キテ成ルベキ業アリ，之ヲ二十四人ニテ爲セバ幾日ニ成ルカ.

（解）之ヲ普通ニ解スレバ，

○ 若シ 30 人 12 日ノ業ヲ一人ニテ爲セバ.

$30\times12=360$ 日ヲ要スベシ，又若シ之ヲ 24 人ニテ爲セバ，其日數ハ $360\div24=15$ 日ヲ要ス.

（別解）若シ之ニ比例ヲ適用シテ解スレバ，同ジ仕事ヲナスニ就テ，其日數ハ人數ニ反比スルモノナリ．故ニ次ノ比例ヲ得.

$$24:30=12:x$$

$$x=\frac{30\times12}{24}=15.$$　答 十五日

注意 或人ハ此題ハ比例ナリト云フ，此語ハ甚ダシク初學者ヲ惑ハシム．問題ガ縱令ヒ比ニテ與ヘラルトモ，其題ハ分數ニテモ解シ得ルコトナレバ，比例ノ問題ト分數ノ問題ト判然區別アルベキ理ナシ，唯之ヲ解スルノ時ニ當リ分數ヲ應用スルト比例ヲ應用スルトハ各自ノ隨意ナリト知ルベシ；問題自ラ比例題トナルコト能ハズ.

4. 一晝夜ニ四分進ム時計ヲ有スル人アリ某日午後第三時ニ或人ノ許ニ行ク可ク約セリ，然ルニ此人ノ家迄行クニハ常ニ此時計ノ 15 分間ヲ要スト云フ，今此時計ヲ其日ノ正午ニ合セ置タキハ自宅ヲ此時計ノ何時ニ出デバ違約セザルカ.

（解）一晝夜卽チ 24 時間ニ四分進ム時計ハ三時間ニハ $4分\times\frac{3}{24}=30秒$ 進ムヲ以テ某日ノ正午ニ正時ニ合セ置ケバ其日ノ午後三時ニハ此時計ハ第三時三十秒ヲ示スベキヲ以テ，若シソレヨリ 15分 時前ニ自宅ヲ出ヅベキモノトスレバ其時ハ，此時計ノ午後第二時四十五分三十秒ノ時ナラバ可ナリ.

5. 昨日ノ正午ニ正シキ時刻ニ合セ置キタル時計ガ今日ノ正午ニハ十一時五十二分ヲ示セリ；此時計ガ明朝午前八時ヲ示ストキノ正シキ時刻ヲ問フ．但シ今日ノ正午ニハ合セ置カザリシモノトス.

（解）此時計面ノ（24時－8分）ノ間ニ正シキ時刻ハ 8 分進ム割合ナリ，斯クシテ昨日ノ正午ヨリ明朝此時計ガ八時ヲ指ス迄卽チ此時計面ノ 44 時間ニハ正シキ時刻ハ幾何進ムカヲ求ムルニ

$$60\times24-8:60\times44-8::8:x$$

$$x=14分\ 44秒\ 164/179.$$

因テ所要ノ時刻ハ午前八時十四分四十四秒百七十九分ノ百六十四 ナリ.

6. 華氏ト攝氏トノ兩寒暖計ガ同度ヲ示スハ幾度ナルカ.

（解）華氏ハ沸騰點ヲ 212度，氷點ヲ 32度 トシ；又攝氏ハ沸騰點ヲ 100 度トシ氷點ヲ 0 度トスルヲ

以テ，華氏ノ　212−32=180　度ト攝氏ノ　100 度ト長短ヲ等シクス.

然シテ華氏ノ 0 度ハ氷點下 32 度ニアルガ故ニ爾計ガ同度ヲ示スハ氷點下　32度　ノ差ヲナス處ニアリ.　攝氏　100 度ニ對シテ華氏ハ　180−100 ノ差アルヲ以テ

$$180-100:32=100:x,\quad x=40.$$

答　零點下各四十度ノ時ナリ.

附言　華氏ノ　$11\frac{3}{7}$ 度ト攝氏ノ 0 點下 $11\frac{3}{7}$ 度ト同溫度ナレモ，之レハ呼ビ方ヲ異ニスルヲ以テ茲ニ取ラズ.

7.　馬三頭ヲ養フ費用ハ羊二十五頭ヲ養フ費用ニ等シトスレバ，馬六頭ト羊二十頭トヲ三十日間養フ費用ヲ以テ馬九頭ト羊三十頭トヲ幾日間養ヒ得ベキカ.

（解）馬 3 頭ヲ養フ費用ハ羊 25 頭ヲ養フ費用ニ等シ；故ニ馬 1……………………羊 $\frac{25}{3}$

故ニ馬 6 頭ト羊 20 頭トヲ養フ費用ハ

羊　$6\times\frac{25}{3}+20=70$　頭ヲ養フ費用ニ等シ.

又　馬　9 頭ト羊 30 頭トヲ養フ費用ハ

羊　$9\times\frac{25}{3}+30=105$　頭ヲ養フ費用ニ等シ.

故ニ所要ノ日數ハ

$$30日\times\frac{70}{105}=20日.$$

8.　男二人ト女五人ト協力シテ 10 日間ニ田 9000 坪ヲ耕スト云フ；此割合ヲ以テセバ男十五人ニテ田 12 町 7 反 25 歩ヲ幾日ニ耕シ得ルカ．但シ男五人ト女八人ト其力相等シ.

（解）男女一人ノ力ノ比ハ 8:5 ナルガ故ニ，男二人女五人ト男十五人トノ力ノ比ハ

$(8\times2+5\times5):(8\times15)$，即チ　41:120　ナリ，

又　12町7反25歩=38125坪　ナルヲ以テ，

次ノ比例式ヲ得

$$\left.\begin{array}{l}120:41\\9000:38125\end{array}\right\}::10:x,$$

$$x=\frac{41\times38125\times10}{120\times9000}=14\frac{409}{864}日.$$

9.　35 日間ニ仕上グベキ工事アリ，今 16 人ニテ毎日六時間宛働キ 20 日ニテ漸ク $\frac{2}{5}$ ノ業ヲナセリ，約束ノ期日マデニ殘業ヲ成シ終ルニハ毎日八時ヅヽ働カシムルモ尙ホ幾人ノ不足ナルカ.

（解）20 日ニテ $\frac{2}{5}$ ノ業ヲ成シタルガ故ニ殘業ハ $\frac{3}{5}$ ニシテ，コレヨリ約束期日迄ニハ 15 日間ノ日子アリ，因テ問題ハ先ヅ，毎日八時間宛働キ $\frac{3}{5}$ 丈ノ仕事ヲ 15 日間ニ仕上ルニハ幾人ヲ要スルカニ歸ス，因テ次ノ式アリ：

$$\left.\begin{array}{l} 15日:20日 \\ 8時:\ 6時 \\ \frac{2}{5}:\ \frac{3}{5}, \end{array}\right\} = 16 : x \qquad x = 24人.$$

答 24−16＝8人

10. 一磅英貨ノ品位 $\frac{11}{12}$ ノ重量 7.98805「グラム」ナリ今金銀ノ比價ヲ 38 ト 1 トノ如シトスレバ，品位 $\frac{37}{40}$，價二志ノ銀塊ノ重量幾「グラム」トナルカ．但シ小數第五位マデ算出シ以下四捨五入セヨ．

(解) 金塊ノ重量ハ品位，比價ニ逆比例シ，價ニ正比例ス，而シテ一磅ハ 20 志ニ等シキガ故ニ

$$\left.\begin{array}{l} \frac{37}{40}:\frac{11}{12} \\ 1:38 \\ 20:2 \end{array}\right\} = 7.98805瓦 : x瓦$$

$$x = 7.98805 \times \frac{11}{12} \times 38 \times 2 \times \frac{40}{37} \times \frac{1}{20} = 30.08113瓦$$

11. 三百ヤードノ競走ニ於テ甲ト乙ト爭ヘバ甲二十ヤード勝チ，乙ト丙ト爭ヘバ乙三十ヤード勝ツ，甲丙ト爭ヘバ甲幾ヤード勝ツカ．

(解) 甲 300 ヤード走ル間ニ，乙ハ 300−20＝280 ヤード走ル；又乙 300 ヤード走ル間ニ丙ハ 300−30＝270 ヤード走ルヲ以テ；甲ガ 300ヤード走ル間ニ丙ハ

$$300 \times \frac{280}{300} \times \frac{270}{300} = 252$$ ヤード走ル．答48ヤード

比例配分

1. 金五百二十五圓ヲ甲乙丙三人ニ分チ，其所得ヲ甲ト乙トガ 5 ト 4，乙ト丙トガ 3 ト 2 トノ比ナル樣ニセヨ．

(解) 比ノ兩項ニ等シキ數ヲ乘ズルモ比ノ値ハ變セザルヲ以テ

甲乙取分ノ比　5:4，即チ　15:12;

乙丙取分ノ比　3:2，即チ　12: 8;

トナスコヲ得．　依テ甲乙丙ノ取分ノ比ハ又

15:12:8　ト見做スコヲ得．然ルトキハ

$$甲ノ取分 = 525圓 \times \frac{15}{15+12+8} = 225圓,$$

$$乙ノ取分 = 525圓 \times \frac{12}{15+12+8} = 180圓,$$

$$丙ノ取分 = 525圓 \times \frac{8}{15+12+8} = 120圓,$$

2. 甲乙二人アリ，甲ハ二千五百圓，乙ハ四千圓ノ資本金ヲ出シ，相合シテ或商業ヲ營ミ一年後ニ至リテ決算シタルニ五百二十圓ノ損トナレリ；然ルニ此時丙ナル人四千五百圓ヲ出シテ前二人ニ聯合シテ更ニ一年間原商業ヲ續ケタルニ今回ハ二千三百五十八圓ノ利益ヲ得タリト云フ，甲乙丙ノ利益配分額ヲ問フ．但シ損益ハ出金額ニ比シ

ヲ分配シ且ツ丙ハ前回ノ損ニ關セザルモノトス.

（解）第二年目ニ於ケル甲乙兩人ノ資本金合計ハ $(2500+4000)-520=5980$圓 ナルヲ以テ, 第二年ニ於ケル利益分配ハ次ノ如シ,

$$2358\text{圓}\times\frac{5980}{5980+4500}=1345.5\text{圓}$$ ……甲乙ノ分

$$2358\text{圓}-1345.5\text{圓}=1012.5\text{圓}$$ ……丙ノ分

甲乙兩人ノ資本ノ割合ハ常ニ同一ナルニ依リ, 甲乙ノ利益分配ハ初年ノ金額ニ應シテ分テバ可ナリ, 依テ

$$1345.5\text{圓}\times\frac{2500}{2500+4000}=517.5\text{圓}$$ ……甲ノ分

$$1345.5\text{圓}-517.5\text{圓}=828\text{圓}$$ ……乙ノ分

答　甲517.5圓,　乙828圓,　丙1012.5圓,

3. 金 37 銅 3 ノ比ノ合成金 168 グラムアリ, 之ニ更ニ銅ヲ加ヘテ法定金貨性金 9 銅 1 ノ比ノ合成金ナサントスレバ混ズベキ銅ノ目方何程ヲ要スベキカ.

（解）合成金ノ金銅ノ比ハ $37:3$ 即チ $37\times9:3\times9$ 即チ $333:27$ ナリ, 又法定金貨性ノ合成金ノ金銅ノ比ハ $9:1$ 即チ $9\times37:1\times37$, 即チ $333:37$, 今金ノ量ヲ變ヘズ銅ヲ加ヘテ後ノ合金ヲ得ントスルニハ, 合金 $333+27$ ニ對シテ銅 $37-27$ ヲ加フベキナリ因テ加フベキ銅ノ目方ハ.

$$333+27:37-27=168:x;\qquad x=4\tfrac{4}{3}\ \text{グラム}$$

（別解）合成金 168 瓦中ニ金銅ノ重量ハ夫々

$$168\times\frac{37}{37+3}=155.4\text{瓦}$$ 及ビ $168-155.4=12.6$瓦 ナリ,

故ニ法定性ノ合成金ニ於テハ金 155.4瓦 ニ對シテ銅ハ $9:1=155.4:x$　$x=17.26$瓦 ヲ要スルヲ以テ茲ニハ $17.26-12.6=4.6$ 瓦ノ銅ヲ增スコトヲ要ス.

注意　比例配分ノ問題ヲ解クニハ, 其配分率ヲ發見セザルベカラズシテ, 之ヲ發見セシムルヲ此種ノ問題ノ目的トス; 去レバ之ヲ發見スル一二ノ例ヲ次ニ示サン.

例 1. 其取分ノ比甲ト乙トハ $2:3$, 乙ト丙トハ $4:5$, 丙ト丁トハ $6:7$, ト云フ時; 甲乙丙丁ヲ通ジタル取分ノ比ハ

$$2:3:3\times\tfrac{5}{4}:3\times\tfrac{5}{4}\times\tfrac{7}{6}$$ ナリ; 然レ圧分數ニテハ取扱上不便ナルガ故ニ之ニ 4×6 ヲ乘ジテ

$$2\times4\times6:3\times4\times6:3\times5\times6:3\times5\times7,$$

即チ $48:72:90:105$, ヲ其比トス.

例 2. 其取分ノ割合ハ甲ノ二倍ハ乙ノ三倍ニ等シク乙ノ取分ノ四倍ハ丙ノ取分ノ五倍ニ等シト云フ時;

甲ノ取分ヲ 1 トスレバ, 之ニ對シテ乙ハ $1\times\frac{2}{3}$, 又丙ノ取分ハ $1\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ ナリ, 此比ヲ整數ニナス爲メ之ニ 3×5 ヲ乘ズレバ, 其取分ノ比 $15:10:8$ ヲ得.

混 合 法

1. 一斤ニ付十二錢及ビ十七錢ノ砂糖アリ，之チ混ジテ平均一斤ニ付十五錢ノモノチ製ラントス，其混合ノ法如何.

(解) 1斤12錢ノ品チ15錢トスレバ,1斤ニ付3錢ノ利

又　1斤17錢 ············ 15 ··················· 1斤ニ付2錢ノ損

故ニ

1斤12錢ノ品チ15錢トスレバ,2斤ニ付6錢ノ利,

又　1斤17錢 ············ 15錢 ··················· 3斤ニ付6錢ノ損,

之ニ依テ下品二斤ト上品三斤トノ割合ニ混ズレバ損益ナシ.

注意　此答ノ二斤下三斤トハ又四斤ト六斤或ハ一斤ト一斤半トスルモ可ナルガ故ニ往々此答ハ不定ナリト謂フト雖トモ茲ニハ此混合ノ割合ガ 2:3 ナリト云フガ求ムル答ナレバ，答數ハ唯一ツノ外ナキト知ルベシ.

又此運算ハ通例下ノ如クスルガ故ニ以下便宜之チ用フ

$$15\left|\begin{array}{ll}12 & 2\\ 17 & 3\end{array}\right.$$

2. 一升ニ付八十錢六十錢及ビ五十錢ノ三種ノ酒アリ之チ混ジテ平均一升ニ付五十五錢ノ酒チ造ラントス，其混合ノ法如何.

80 25
60 5
55
50 5

(解) 本題ハ下ノ二問チ組合セタルモノナリ.

(A) 一升ニ付八十錢及ビ五十錢ノ酒アリ，之チ混ジテ平均一升ニ付五十五錢ノモノチ造ラントス，其法如何

答　$55\left|\begin{array}{ll|l}80 & 5 & 1\\ 50 & 25 & 5\end{array}\right.$　1:5 ノ割合.

(B) 一升ニ付六十錢及ビ五十錢ノ酒アリ之チ混ジテ平均一升ニ付五十五錢ノモノチ造ラントス，其法如何

答　$55\left|\begin{array}{ll|l}60 & 5 & 1\\ 50 & 5 & 1\end{array}\right.$　1:1ノ割合

本題ハ此二問チ組合セタルモノナレバ，茲ニ求ムル答數ハ前ニ[illegible]ルニツノ場合

八十錢ノ酒	六十錢ノ酒	五十錢ノ酒
$1\times m$		$:5\times m$
	$1\times n$	$:1\times n$

チ合セタル　$m:n:5m+n$　ナルハ明カナリ；茲ニ m, n ハ任意ノ數ナルチ以テ

$m=1$,　$n=1$　トスレバ，　1:1:6　ヲ得;

又　$m=1$,　$n=2$　トスレバ　1:2:7　チ得;

此他幾種ノ答チモ見出シ得ルチ以テ此場合ニ於テハ其答數不定ナリト知ルベシ.

注意　三種ノ相異ナル品物チ混ジテ一種ノ平均値ノ品物チ製造スル問題ハ試驗問題トシテハ不適當ナリ; 随テ試

驗ノ多クニ於テハ此類ノ問題ヲ見ルコナシ，然レ𪜈之ヲ知ラザレバ或他ノ塲合ニ不便アリ，依テ玆ニ掲ゲテ基本トス．

3．一圓ニ付五升四合替及ビ六升一合替ノ白米アリ，之ヲ混ジテ平均一圓ニ付五升八合ノモノヲ作ラントス，其混合ノ法如何．

（解）一圓ニ付 54 合ノ米ヲ 58 合ニ賣レバ 4 合ノ損，
又　一圓ニ付 61 合………58 …………………3 合ノ利．
故ニ一圓ニ付
　54 合ノ米ヲ 58 合ニ 3 圓分賣レバ 12 合ノ損，
又 61 合ノ米ヲ 58 合ニ 4 圓分賣レバ [illegible] 合ノ利，
因テ上米 3 圓分ト下米 4 圓分ト混ズレバ損益ナシ，
即チ之ヲ桝高ヨリ言ヘバ $54 \times 3 : 61 \times 4$，即 $81 : 122$
即チ　八升一合ト一斗二升二合トノ割合ニ混ズベシ．

附言　本題ヲ普通ニ解クニハ各一升ノ價 $\frac{1}{54}$ 圓，$\frac{1}{61}$ 圓ヲ求メ　而シテ平均一升ノ價 $\frac{1}{58}$ 圓ノモノヲ求ムルナリ，即チ

$$\frac{1}{58}\left|\begin{array}{l}\frac{1}{54}\\ \frac{1}{61}\end{array}\right.$$

ノ分數ヲ避ケンガ爲メニ，各項ニ 58，54，61 ノ最小公倍數 $58 \times 27 \times 61$ ヲ乘ズレバ，

$$1647\left|\begin{array}{l}1769\\ 1566\end{array}\right]\begin{array}{l}81\\ 122\end{array}$$

注意　本題ハ其割合ヲ誤リ易シ屹度注意スベシ

4．甲乙丙丁ノ四種ノ茶アリ，其價ハ一斤ニ付甲 43 錢乙 40 錢，丙 37 錢，丁 36 錢ナリ，今此四種ノ茶ヲ混ジテ一斤ニ付 39 錢ノ茶 100 斤ヲ得ント欲ス，丁幾斤ヲ要スル．カ但シ甲ト乙ト丙トハ四ト七ト三トノ如ク取ルコトトス．

（解）甲乙丙ノ平均價ヲ求ムレバ

$$\begin{array}{r}43 \times 4 = 172\\ 40 \times 7 = 280\\ 37 \times 3 = 111\\ \hline 14)\underline{563}\\ 40\frac{3}{14}\end{array}$$

斯クシテ得タル茶ト丁茶トヲ混ジテ一斤三十九錢ノ茶ヲ得ン爲メニ此兩種ノ茶ノ比ヲ求ムレバ

$$39\left|\begin{array}{l}40\frac{3}{14}\\ 36\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}3\\ 1\frac{3}{14}\end{array}\right|\begin{array}{l}42\\ 17\end{array}$$

此比ニ 100 斤ヲ分チテ丁茶ノ分ヲ求ムレバ

$$100 \times \frac{17}{42+17} = 28\frac{48}{59} 斤．$$

注意　此（4）問ノ如キハ試驗ニ出易キ問題ノ一ナリ

步合算 利息算

1. 元價五圓ノモノニ定價ヲ附シ，其定價ノ二割引ニ賣ルモ尙ホ二割ヲ利セントス，定價ヲ何程トナスベキカ

（解） 元價5圓ノ2割ヲ利セントスルニハ，

$5\times1.2=6$ 圓得ザルベカラズ，而テ之レガ定價ノ2割引ニ當ラシムルニハ定價ハ下ノ如クスベシ，

$6\div(1-.2)=7.5$圓

2, 或人甲乙丙ナル三個所ノ土地ヲ買[illegible]其面積ノ割合ハ 11:12:17 ニシテ其一坪ノ買價ノ割合ハ 7:5:3 ナリ，此人甲ヲ賣リテ一割[illegible]利シ，乙ヲ賣リテ七分ヲ利シ，丙ヲ賣リテ五分ヲ[illegible]引 381.15 圓ヲ利セリト云フ；甲乙丙ノ買價各[illegible]ルカ．

（解） 甲乙丙ノ買價及ビ純益ノ割合ハ

$7\times11:5\times12:3\times17:(7\times11\times0.12+5\times12\times0.07+3\times17\times0.05)$ 即チ 77:60:51:10.89 ナリ

因テ甲乙丙ノ買價ハ夫々

$$381.15\times\frac{77}{10.89}\text{圓},\quad 381.15\times\frac{60}{10.89}\text{圓}$$

$$381.15\times\frac{51}{10.89}\text{圓}$$

即チ 2695圓，2100圓，1785圓，ナリ

3. 整理公債証書年五分利附 7800 圓ヲ有スル人アリ之ヲ額面 100 圓ニ付市價 93 圓 50 錢ニテ悉ク賣拂ヒ其代金ヲ以テ年七分五厘利附ノ某起業債券ヲ額面 100 圓ニ付市價 110 圓 50 錢ニテ買フトキハ，六ヶ月間ノ所得ノ增減何程ナルカ．

（解） 整利公債 7800 圓ノ六ヶ月間ノ利子ハ

$7800\times0.05\times\frac{1}{2}=195$圓ナリ，

之ヲ額面百圓ニ付 93.5 圓ニ賣リテ 110.5 圓ノ起業債券ヲ買入ルレバ其額面ハ

$$7800\times\frac{93.5}{110.5}=6600\text{圓ナリ}.$$

今又此起業債[illegible]ヨリ生ズル六ヶ月ノ利子ヲ見ルニ

$\frac{1}{2}\times6600\times0.075=248.625$ 圓ナリ

故ニ此賣買ヨリ六ヶ月ノ所得ハ

$248.625-195=53.625$圓 ヲ增スベシ．

4. 二分ノ口錢ト一株拾錢ノ手數料トヲ出シテ株式株 50 圓拂込ノモノヲ買入レ置キシニ六分ノ利益配當ヲ受ケシニヨリ資金ニ對シテ八分ノ利益ニ當ルト云フ，一株ノ買入[illegible]算セヨ

（解） 六分ノ配當ガ資金ニ對[illegible]八分ニ當ルガ故

$$50\text{円}\times\frac{0.06}{0.08}=37.5\text{円}$$

ハ一株ニ對シテ此人ガ仕拂ヒタル金高ナリ，

故ニ此內ヨリ拾錢ヲ減ジタル殘リ即チ 37.40 圓ハ買入ノ時ノ相場ト其二分トノ和ヨリ成ル, 故ニ之ヲ 1.02 ニテ割レバ三拾六圓六拾六錢三分ノ二ヲ得.

5. 三ヶ月後ニ金百圓, 六ヶ月後ニ金二百圓, 九ヶ月後ニ金三百圓ヲ支拂フ代リニ總計金六百圓ヲ支拂ハントス期日ハ何月後ナルカ.

(解) 利息ノ步合ガ終始變動ナキモノトセバ元金百圓ガ三ヶ月間ニ生ム利息ト元金三百圓ガ一ヶ月間ニ生ム利息トハ相等シ, 故ニ

三ヶ月後ニ支拂フベキ 百圓 ヲ即時ニ支拂フトキハ 三百圓ノ利息一ヶ月分ヲ損スベシ
六………………二百圓………………千二百圓
九………………三百圓………………二千七百圓

故ニ此等ノ金額ノ和六百圓ヲ即時ニ支拂フトキハ 300+1200+2700=4200圓ノ利息一ヶ月分ヲ損スベシ因テ此損金ヲ償フ爲メ六百圓ノ利息ガ此損金ニ等シクナル迄支拂ハズニ置ケバ 4200÷600=7 ヶ月ニ當ルベシ. 乃チ此時六百圓ヲ一時ニ支拂ヘバ利息ニ損益ナキナリ

6. 元金若干圓アリ年利二割ニテ三ヶ年ノ利息ヲ算スルニ複利ハ單利ヨリ 24 圓多シト云フ元金如何. 但シ複利ノ計算ニ於テハ利息ハ一年毎ニ元金ニ繰込ムモノトス.

(解) 年利二割ニシテ三ヶ年ノ單利ニ依レバ其利子

ハ元金ニ 0.2×3=0.6 ヲ乘ジタルモノニ等シ.
又複利法ニ由ルトキハ其利子ハ元金ニ $(1+0.2)^{3}-1=0.728$ ヲ乘ジタルモノニ等シクシテ, 其複利法ト單利法トノ利子ノ差ハ元金ニ 0.728−0.6=0.128 ヲ乘ジタルモノニシテ之ガ24圓ニ當ルヲ以テ所要ノ元金ハ

24÷0.128=187.5圓 即チ 百八十七圓五十錢

7. 家屋ヲ五百圓ニテ新築シ之ニ保險ヲ附シ年一分ノ保險料ヲ拂ヒ一ヶ年內ニ燒失スルモ保險料ヲモ合セテ損金ナカラシメントス. 何程ノ保險ヲ附シ置クベキカ.

(解) 100 圓ノ保險ヲ附スレバ年一分ノ保險料ヲ拂フガ故ニ正味 100−1=99 圓入手スルコトナル. 故ニ 500 圓ヲ入手セントスルニハ

99 : 500 = 100 : x

$x=505\frac{5}{99}$圓ノ保險, 即チ實際ニハ 506 圓ノ保險ヲ附スレバ可ナリ.

注意 外割內割ノヿ, 眞割引商業割引ノヿ, 茲ニ掲ゲズト雖モ是等ノ事實ハ普通算術ニ審カナレバ必ズ之ヲ知ルノ必要アリ.

開　方

1 長サト幅トハ四ト三トノ比ヲ有スル面積 6348 坪ノ地面アリ，此長サ幅各幾間ナルカ

（解） 此面積ニ $\frac{4}{3}$ ヲ乘ズレバ其長サヲ一邊トシタル正方形ヲ得ベシ，之ニ依テ其長サハ

$\sqrt{6348\times\frac{4}{3}}=92$ 間，從テ幅ハ $92\times\frac{3}{4}=69$ 間，

2 東西兩地ヨリ同日ニ出發シタル甲乙二人ガ途中ニテ相會シテヨリ甲ハ四日ニシテ西地ニ着シ，乙ハ九日ニシテ東地ニ着セリト云フ，各全道程ニ要スル日數如何

（解） 甲乙二人出發ヨリ相會スル迄ハ同日數ヲ費セルヲ以テ，之ヲ x 日トスレバ甲ガ四日ニシテ達シタル道程ヲ乙ハ x 日ヲ要シ，又甲ガ x 日ヲ要シタル道程ヲ乙ハ九日ニテ達シ其日數ハ正比スルガ故ニ

$4:x=x:9,\quad x^2=4\times9\quad\therefore x=\sqrt{4\times9}=6$ 日

即チ相會スル迄ノ日數ハ六日，從テ所要ノ日數ハ夫々

$6+4=10$ 日 及ビ $6+9=15$ 日ナリ

注意 開平方ノ應用問題ハ上ノ如キ二問ニ歸スベク，開立方ノ應用問題ハ試驗ニ出ヅベキ價値ナキモノナリ。併シ此運算ハ大切ナレバ次ノ計算問題ノ部ヲ練習セヨ。

小數點ノ打方

小數除法ニ於テ何人モ誤リ易キハ小數點ノ打方ナリ，依テ茲ニ之ヲ記サン.

場合 1. 除數ガ整數ナルトキ，商ノ末位ハ除數ノ割リ仕舞ノ末位ト位ヲ等シクス.

例 1.　456) 7.89厘 (.01厘　　23) .040毛 (0.01毛

　　　　4.56　　　　　　　　　23

　　　　3.33厘　　　　　　　　17毛

此除數ノ割リ仕舞ノ末位ガ厘位ナル故ニ商ノ末位モ亦厘位，又毛位ナレバ亦毛位ナリ.

場合 11. 除數ガ小數ナルトキ，其除數ガ整數ニナル迄除數及ビ被除數ノ小數點ヲ切リ上グ可シ.

例 2.　6.948÷.87;　　.00064÷.016.

87) 694.8 (7.9　　16) .64 (.04

　　609　　　　　　.64

　　858

　　783

　　 75

除數ニ小數位ガアル丈ケ兩數ノ小數點ヲ切リ下ゲテ，除數ヲ整數トシテ扱フベシ，然ルトキハ例1ト等シク被數ノ末位ト商ノ末位ト其位ヲ同ジクス.

計算問題

1. 次ノ式ノ値ヲ小數第七位マデ算出セヨ.

$$\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times22}+\frac{1}{3\times22\times118}}$$

(解) 與ヘラレタル分數ノ兩項ニ $3\times22\times118$ ヲ

乘ズレバ $\frac{3\times22\times118}{22\times118-118+1}=\frac{7788}{2479}$

此商ヲ小數第七位マデ求メントスルニハ, 通例ノ除法ヲ用フ (省略除法ノ必要ナシ) 即チ

```
7788|2479
7437|3.1415893
 3510
 2479
 10310
  9916
   3940
   2479
   14610
   12395
    22150
    19832
     23180
     22311
       8690
       7437
       1253
```

答 3.1415893 强

2 圓周率 3.14159 ヲ $\frac{22}{7}$ トシテ算スレバ半徑 120 尺ノ圓周ニ於ケル誤差幾寸ナルカ.

(解) $3.14159=\pi_1$, $\frac{22}{7}=\pi_2$, $120=r$

トスレバ幾何學ノ証明スルコトニ依リテ, 圓周率ノ是等ノ値ニ對スル圓周ノ略近ノ値ハ夫々

$2\pi_1 r$, $2\pi_2 r$ ナリ. 故ニ是等二ツノ間ノ誤差ヲ表スニ ε ヲ以テスレバ

$\varepsilon=2\pi_2 r-2\pi_1 r=2r(\pi_2-\pi_1)=2\times120\times(\frac{22}{7}-3.14159)$

サテ $3.14286>\frac{22}{7}>3.14285$

$\therefore$ $\varepsilon<240\times(3.14286-3.14159)$

即チ $\varepsilon<240\times0.00127=0.3048$

又 $\varepsilon>240\times(3.14285-3.14159)=0.3024$

故ニ 誤差ハ 0.30 寸ナリ.

3 458.9276 ト 67.58423 トノ積ヲ 0.0427 ト 0.5839 トノ積デ割リテ商ヲ百ノ位マデ算出セヨ.

(解) 先ヅ第一ノ積ノ整數部分ハ五位ニシテ其首位ノ數字ハ 3, 又第二ノ積ハ小數八位ニシテ厘位ヨリ始マリ其數字ハ 2 ナルヲ知ル, 故ニ求ムル商ノ整數部分ニアル數字ノ數ハ七ナリ, サテ求ムル商ハ百位マデ計算セントスルニアルヲ以テ此除法ノ結果ハ第一ノ積ヲ第二ノ積ニテ割リタル商ヲ五位ダケ求ムルコトニ歸ス, 而シテコノ除法ニ於テ除數ハ 2 ヲ以テ始マルガ故ニ省略除法ヲ行フニ際シ除數中ニ要スル數字ノ數ハ求ムル商ノ位ノ數五ノ九倍(之レハ畧算ノ法ナリ) 45 ヨリ大ナル數(即チ除數中ニ於ケル最初ノ三位)

ト，此スグ次ニ 5−1 即チ四個丈ケノ數字ヲ書キ並ベタルモノナルガ故ニ，ツマリ該除數ニ要スル數字ノ數ハ七個ナリ．

前ニ述ベタル如ク被除數ノ首位ノ數字ハ 3，除數ニ於テハ 2 ナルヲ以テ，求ムル商ハ第一ノ積ヲ七位丈ケ計算シテ後省略除法ニ依テ計算スベシ

而シテ 458．9276×67．58423 ヲ首メヨリ七位丈ケ計算スルニハ上ノ積ニ於テ「コムマ」以下二桁丈ケ計算スレバヨシ．

458.9276	0.5839		××××
32485.76	0.0427	3101627	246 8 2 5 3
275356560	4 0873	2493253	12440
32124932	11 6782	608374	
2294635	233 56	498650	
367136	0.02493253	109724	
18356		99728	
916		9996	
135		9972	
310162670		22	答12440(百)

4. 次式ノ値ヲ小數三位マデ求メ以下四捨五入スベシ

$\sqrt{5 \div 72.86}$.

（解） 與ヘラレタ式ヲ小數以下三位マデ求メ以下四捨五入セントスレバ，ツマリ小數點以下四位マデ正シク求メザル可カラザルコトナル，然シテ 5÷72.86 ノ首位ハ厘位ナルヲ以テ，其平方根ヲ小數點以下四位迄正シク求ムルニハ此除商ヲ小數點以下六位迄求ムベク

即チ五桁ノ除法ヲナサヾル可カラズ 因テ

7286)5000000(.068624		68624	.2619
43716		4	
62840	46	286	
58288			
45520	521	276	
43716		1024	
1804		521	
1457	522	503	答
347		469	.262−
291		34	
56			

5. 547.306 ト 0.3492 トノ比例中數ヲ求ム，但シ小數五位マデ計算スベシ．

（解） 所要ノ比例中數ハ $\sqrt{547.306 \times 0.3492}$ ナリ，因テ之ヨリ計算スレバ，視察ニ由テ根號内ノ積ハ百九十餘個トナルヲ以テ，其平方根ハ一十餘個トナルベシ，茲ニハ小數點以下五位迄求ムベキヲ以テ七桁ノ平方根ヲ求メザル可カラズ，然ルニ之ヲ略算セントスルニ平方根ノ首位ハ一十ナルヲ以テ之ヲ所要ノ位マデ正シク計算セントスルニハ，平方根ヲ五桁マデ正シク計算シ，然ル後略法ヲ施スコヲ得，斯ク平方根ヲ五桁迄正シク計算スルニハ積ヲ小數點六位迄求メザルヲ得ザルヲ以テ，從テ其積ヲ求ムルニ略算ヲ用フルコハ不必要トナル，因テ先ヅ此根號内ノ積ヲ普通ニ求ムレバ 191.1192552 ヲ得，之ヲ平方ニ開キ商 13.824 マデ普通ニ計算シ然ルトキ其已ニ得タル立商ノ 2 倍

17648 ヲ以テ其時ノ殘餘 16279 ヲ略除スレバ次ノ二桁ノ數 58 ヲ得ベシ，答 13.82458＋

6 $\frac{227}{23}$ ノ平方根ト $\frac{355}{113}$ トノ差ヲ小數第七位マデ求メヨ．

（解） $\sqrt{\frac{227}{23}}=\sqrt{\frac{227\times23}{23^2}}=\frac{\sqrt{5221}}{23}$

分子ノ値ヲ小數第八位マデ省畧算法ニテ計算シ之ヲ分母ニテ除スレバ分數ノ値ヲ小數第八位マデ計算シ得ベク，從テ小數第七位マデ正シク計算スルコトヲ得ベシ依テ次ノ如ク計算ヲ行フ

```
             52.21 |72.2564
             49                    1265904 | 1445128
142           321                  1156096 | 8759
              284                   109808
1442          3700                  101157
              2884                    8651
14445         81600                   7225
              72225                   1426
144596         897500                 1296
               637036                  130
1445124         7046400
                5780496
                1265904
```

72.25648759÷23＝3.14158641

他ノ分數ノ値ハ通常ノ割算ヲ用テ 3.14159292 ヲ得，因テ此兩數ノ差ハ次ノ如シ（小數第七位マデ正シク）

0.0000065

注意 省畧開平方ニ於テ割算ニ移ル時ニ於テ次ノ數字ガ

零ナラザルヤ否ヤヲ注目スベシ．

7. 237184705.472 ノ立方根ヲ小數第三位迄算出セヨ

（解） 小數第三位迄算出スルニハ數字ノ數六ツヲ要ス，因テ首位ヨリ四（六桁ノ過半數）ツダケハ普通ノ開立方ニヨリ殘レル二ツハ割算ニヨリ求ムルヲ得，其運算ハ次ニ示スガ如シ，

```
181        108         237 | 184 | 705.472 | 619.0
            181 }      216
          10981 }      21184
              1 }      10981
1839      11163        10203705
          16551 }      10195659
18570   1132851 }       ) 8 46472 (07
             81 }        8046381
        1149483              111
```

答 619.007

8. 地球赤道ニ於ケル周圍ハ 40070368「メートル」ナリ，今其二万一千六百分ノ一ヲ一海里トスルトキハ一海里ハ何町何間何尺トナルカ．

（解） 一海里＝$\frac{40070368}{21600}$米＝$\frac{40070368\times3.3}{21600}$尺

＝6121.8617＝17町0間2.8617尺

9. 三里五町九間四尺五寸ハ幾「メートル」ニ當ルカ．

（解） 3里 5町 9間 4.5尺＝40738.5尺，

一「メートル」ハ3.3尺ナルヲ以テ

40738.5÷3.3＝12345米

10. 一「メートル」ノ幾倍ガ三尺ノ3.1416倍ニ等シキカ

(解) 本問ハ 3×3.1416尺ハ何「メートル」ニ當ルカヲ計算スルコトニ歸ス故ニ

$$3\times3.1416\text{尺}=\frac{3\times3.1416}{3.3}\text{米}=2.856\text{米}.$$

11 地球ガ太陽ヲ一周スル時間ハ 365日 5時 48分50秒ナリ, 之ヲ日ノ小數四位マデ求メヨ.

(解) 日ヨリ小ナルモノヲ秒ニ換算スレバ 2093秒トナル, 而シテ一日ハ86400秒ナルガ故ニ是ニテ前ノモノヲ割レバ 0.2422 ヲ得,

因テ求ムル時間ハ 365.2422 日ナリトス.

12 十二石九斗七升六合ハ幾「リットル」ニ當ルカ, 但シ一升桝ノ内法ハ底ノ各邊四寸九分深サ二寸七分ナリ

(解) 一升ハ $49^2\times27$ 立方分ナルガ故ニ與ヘラレタル容積ハ $49^2\times27\times1297.6$ 立方分ナリ, 然ルニ一「リットル」ハ一「デシメートル」立方即チ33分立方ニシテ 33^3 立方分ニ當ル因テ求ムル容積ハ $49^2\times27\times1297.6\div33^3=2341$ 弱ナルヲ以テ二千三百四十一「リツトル」弱ナリ.

13. 五万坪ノ地面ヲ縮尺千分ノ一ノ地圖ニ表ハサバ幾寸平方ニ等シクナルカ, 但シ小點二位迄求ムベシ.

(解)縮尺千分ノ一ナル時面積ハ $\frac{1}{1000^2}=\frac{1}{1000000}$ トナル, 故ニ 50000坪$=(10\times6)^2\times50000$平方寸即チ 180000000 平方寸ハ 180 平方寸トナル,

因テ $\sqrt{180}=13.42$ ニシテ 即チ 13.42寸平方ニ等シ.

14. 二個ノ圓アリ, 其面積甲ハ 150 平方寸, 乙ハ 120 平方寸ナリ, 大圓ノ直徑ハ小圓ノ直徑ノ幾倍ニ當ルカ, 小數點以下四位マデ求メヨ.

(解) 圓ノ面積ハ直徑ノ平方ニ比例スルヲ以テ圓ノ直徑ハ面積ノ平方根ニ比例スルヲ知ル.

因テ求ムル所ノ比ハ

$$\sqrt{\frac{150}{120}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}=1.1180\text{強}$$

15. $.8\dot{3}\dot{6}\times.\dot{1}8\dot{5}$ ノ積ヲ小數點以下五位迄求メヨ.

(解)

$$.8\dot{3}\dot{6}\times.\dot{1}8\dot{5}=\frac{836-8}{990}\times\frac{185}{999}=\frac{828}{990}\times\frac{185}{999}=\frac{46}{2673}$$

```
2673)46.00(.01720
     26 73
     19270
     18711
      5590
      5346
       244
```

答 .01720+

17. $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{11\times12}+\frac{1}{13\times14}+\frac{1}{15\times16}$ ヲ小數點以下六位迄求メヨ.

（解）此分數ヲ簡單ニスレバ，

$$此分數=\frac{477745}{720720}=0.662871\cdots\cdots\cdots$$

答　0.662871＋.

附言　此分數ハ簡單ニナシ易キ故ニ上ノ如クシタレ𪜈，若シ之ヲ集メテ單分數トナスニ手數ナル卄ハ，直ニ下ノ如ク割リテモ宜シ，（但シ其分數ガ九項マデハ望ム位ヨリ一桁多ク取リ十項以上九十九項マデハ二桁多ク取リテ計算シ；其末位ヲ何ニ係ラズ切リ上クベシ）茲ニハ八項ナル故一位多ク取リ七桁マデ計算シテ，

$$\frac{1}{1\times2}=0.5$$
$$\frac{1}{3\times4}=0.0833333$$
$$\frac{1}{5\times6}=0.0333333$$
$$\frac{1}{7\times8}=0.0178571$$
$$\frac{1}{9\times10}=0.0111111$$
$$\frac{1}{11\times12}=0.0075757$$
$$\frac{1}{13\times14}=0.0054945$$
$$\frac{1}{15\times16}=\underline{0.0041666}$$
$$0.6628718$$

答　0.662872±

斯ク略算シテ切リ上ルキハ其略値ハ過大ナルカ過少ナルカ郎チ强弱明カナラザルヲ以テ±ヲ附ス.

代數試驗ノ受方

10.　代數ハ其條項極メテ多ク一時ニ速成習得スベキ學問ニアラズ，平生ヨリ練習ニ心掛ケ，定理公式ヲ暗記スルハ勿論ニシテ其上ニ善ク其理屈ヲ呑ミ込マザルベカラズ，其力ヲ養フニ尤モ大切ナルハ先ヅ因子分解ト方程式トノ解法ナリ．　然シテ受驗ニモ平生ニモ最モ多ク必要ナルハ二次方程式ナリ．　今若シ中學卒業程度ニ於テ代數ノ試驗問題ガ五問出ルトスレバ其一問ハ必ズ方程式ノ解法，一問ハ二次方程式ノ性質，一問ハ對數カ級數カ順錯列カ二項式カノ中ヨリ出デ其他ノ二問ハ分數，指數，殘餘定理，公約數，因子分解等初部ノ内ナルベシ．

11.　**二三週間前ヨリノ受驗ノ豫備**　トシテハ次ノ如クスベシ．

既ニ學ビ得タル教科書ニ就テ，其注意スベキ條項ヲ指摘シ，之ニ紙ヲ貼ルカ，或ハ朱線ヲ引キテ目標ヲ作ルベシ；然ル後其注意スベキ條項件々ヲ毎日必ズ一回通覽スベシ；通覽ノ仕方ハ，初日ニ其書ノ初メヨリ其件々ヲ通覽セント務ムベシ，斯クスレバ漸クニ精魂疲レテ其四五分ノ一モ見透スヿ六ケ敷シカラン，然ル卄ハソレニテ休ミ，翌日又必ズ最初ヨリ見始ムベシ是レ復習通覽法ノ秘訣ナリ，此日モ未通覽シ得ザレバソレニテ休ミ，其翌日又必ズ最初ヨリ見始ムベシ，斯ノ如クセバ遂ニ學ビ得タル所ヲ

通覧シ得ルノ日アルベシ．其翌日ヨリハ毎日一回ツヽ之ヲ通覧スルヿヲ怠ルベカラズ，初メハ此通覧一回ニ二時間ヲ費スベキモ一週間之ヲ繼續スレバ十五分時位ニテ通覧シ得ル樣ニナリ，決シテ他科ノ豫備ヲ妨グルモノニアラズ．此法ニ依リ全部通覧スレバ代數ノ事，總テ暗記暗誦セラレテ其達者ナルヿ身自ラ驚クニ至ルベシ．試驗ノ結果想像スルニ難カラズ．

又取リ分ケ注意シ置クハ試驗前一週間ニ迫リテ六ケ敷問題ヲ解キ，又ハ新書ヲ多ク見ントスルガ如キ[illegible]ル可ラズ，トテモ其間際ニナリテ博覽强記セント[illegible]不可能ノヿナレバナリ；然レ圧自分ノ已ニ習ヒ[illegible]ヲ再三復習スルハ肝要ノヿナリ；[illegible]合ニハ[illegible]バ損ナルガ如キモ，弁ハ多慾ナリ，既習ノ所ヲ繰リ返[illegible]試驗題五問ノ内ノ三問ハ立ロニ解答シ得ルモ[illegible]殘ルニ問ノ内ノ何レカ一問ニ必死ノ力ヲ籠メ[illegible]ニ，恐クハ其一問ヲ得ン，斯クシテ[illegible]點ニ達スルノミナラズ寧ロ優等ノ位置ヲ得ル[illegible]ラズヤ．

12. 代數ノ通解ヲ記憶スベキモノナルニ依リ[illegible]其緊要ナル公式，定理，題解ヲ揭ゲ[illegible]

必ズ暗記スベキ

乗除法公式

I. $\begin{cases}(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2. \\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2.\end{cases}$

II. $\begin{cases}(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab. \\ (ax+b)(px+q)=apx^2+(aq+bp)x+bq.\end{cases}$

III. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
$\qquad =a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b).$

IV. $\begin{cases}(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3, \\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.\end{cases}$

V. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$\qquad =a^3+b^3+c^3-3abc.$

VI. $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4.$

VII. $(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4$

VIII. $\begin{cases}\dfrac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1} \\ \qquad (n\text{ハ整數}) \\ \dfrac{a^n-b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots-b^{n-1} \\ \qquad (n\text{ハ偶數}) \\ \dfrac{a^n+b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots+b^{n-1} \\ \qquad (n\text{ハ奇數})\end{cases}$

代數ノ原則

$+(+a)=+a,\quad -(+a)=-a,$

$+(-a)=-a,\quad -(-a)=+a.$

$+(a-b)=+a-b,$

$-(a-b)=-a+b.$

$\left[\begin{array}{l} +\infty\cdots\cdots+2\cdots+1\cdots\pm0\cdots-1\cdots-2\cdots-\infty \\ \text{即チ } a-b \gtreqless 0 \text{ ニ從テ } a \gtreqless b \text{ ナリ.} \end{array}\right]$

$\times(\times a)=\times a,\quad \div(\times a)=\div a,$

$\times(\div a)=\div a,\quad \div(\div a)=\times a.$

$\times(a\div b)=\times a\div b,$

$\div(a\div b)=\div a\times b.$

$\left\{\begin{array}{ll} (+a)(+b)=+ab, & (-a)(+b)=-ab, \\ (+a)(-b)=-ab, & (-a)(-b)=+ab, \end{array}\right.$

$\pm a\pm b\pm c=\pm a\pm c\pm b=\pm c\pm b\pm a=\cdots$

$\left\{\begin{array}{ll} a\times b=b\times a & \text{(互換原則)} \\ a\times b\times c=a\times(b\times c) & \text{(結合原則)} \\ (a\pm b)\times c=ac\pm bc & \text{(配分原則)} \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{ll} a^m\times a^n=a^{m+n} & \text{(指數ノ原則)} \\ a^m\div a^n=a^{m-n} & \\ (a^m)^n=a^{mn} & \\ (ab)^n=a^n b^n & \end{array}\right.$

殘餘定理

爰ニ x ニ關スル一ツノ多項式アリトシ，之ヲ x ニ就テ一次ノ式ニテ割ルトキハ其殘餘トシテ x ヲ含マザル式ヲ得ベシ，此殘餘ハ除法ヲ施サズトモ直チニ求メ得ベシ

今例トシテ極メテ平易ナル式ヲ採ルモ，ソノ證明ノ方法ハ一般ニ通用セラルベキモノナリ.

$$8x^3+4x^2+5x+3$$

ヲ $x-a$ ニテ割ルニ方リ，其商ハ之ヲ一次ノ式ニ乘ジテ三次ノ式ヲ得ベキモノナレバ必ズ二次ノ式ナルベクシテ Ax^2+Bx+C ナル形ヲ有スベシ，

茲ニ A, B, C, ハ未定數ノ係數ナリトス. 若シ殘余アルトキハ其殘餘ハ x ヲ含マザルベク，之ヲ R ニテ表ハス，然ルトキハ割算ノ定理ニヨリ

$$8x^3+4x^2+5x+3\equiv(x-a)(Ax^2+Bx+C)+R,$$

茲ニ A, B, C 及ビ R ハ此式ノ右邊ヲ實際ニ掛ケ合ハセ兩邊ニ於テ同類項ノ係數ヲ互ニ相等シト置キテ求メ得ベキモノタリ，然レドモ此式ハ恒同式即チ x ニ如何ナル値ヲ以テスルモ兩邊恒ニ全ク相等シキ値ヲ有スベキ式ナルヲ知ルガ故ニ，今 x ニ換フルニ a ヲ以テセバ前式ハ

$$8x^3+4x^2+5x+3\equiv(a-a)(Aa^2+Ba+C)+R$$

此右邊ノ第一因子ハ零トナルガ故ニ從テ[illegible]トナル

次ニ右邊ノ第二項 R ハ已ニ言ヒタル如ク x ヲ含マザルガ故ニ x ガ a ニ等シト置キタリトテ變ズモノニアラズ，故ニ

$$8a^3+4a^2+5a+3=R$$

之ニ因テ考フレバ R ハ始ノ多項式ニ於テ x ノ代リニ a ヲ置キ代フルコトニ依テ得ラルベシ．

若シ又前ノ式ヲ $x+a$ ニテ除スルトキハ次ノ恒同式ヲ得

$$8x^3+4x^2+5x+3=(x+a)(A'x^2+B'x+C')+R',$$

今 x ノ代リニ $-a$ ヲ置キ代フルトキハ

$$-8a^3+4a^2-5a+3=R'.$$

之ニ依テ次ノ法則ヲ得

x ニ就キテノ多項式ヲ x ノ一次式ニテ除シタル残餘ハ除式ヲ零トナスベキ x ノ値ヲ元ノ多項式中ニ置キ代フレバ可ナリ

又特別ノ場合トシテ若シ残餘ガ零ナルトキハ被除式タル多項式ハ除式ニテ整除セラルベキヲ示ス．

1　$x-1$ ヲ以テ x^2+ax+3 ヲ割リ切ラントスルニハ a ノ値ヲ幾何ニ定ムベキカ．

（解）x^2+ax+3 ガ $x-1$ ニテ割リ盡サルヽニハ此式ニ於ケル x ノ代リニ 1 ヲ置キタル時其數値 $a+4$ ガ零ナルヲ要ス，因テ求ムル a ノ値ハ [illegible]

2　$2x^3+mx^2+nx+2$，ガ $x-2$，及ビ $x-1$ ニテ割リ切ルヽ様ニ m，n ノ値ヲ定メヨ．

（解）$x-2$ ニテ除シ盡シ得ル爲ニハ其式ニ於テ $x-2=0$ 即 $x=2$ ト置キタル結果ガ零ナルコトヲ要ス，故ニ $2x^3+mx^2+nx+2$ ガ $x-2$ ニテ割リ切ルヽニハ

$$2\times2^3+m\times2^2+n\times2+2=0.$$

即チ　$2m+n+9=0$…………(1)　ナラザル可カラズ

同理ニテ此式ガ $x-1$ ニテ割リ切ルヽニハ

$$m+n+4=0……………(2)$$

(1)及ビ(2)ヨリ　$m=-5$，　$n=1$　ヲ得．

3．ax^2+bx+c ガ $x=\alpha$，及ビ $x=\beta$ ナルトキ各消滅スレバ　此式 $\equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$ トナル．

（解）題言ニ依レバ此式ノ x ヲ α トシタルトキ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ ナリト云ヘバ，此式ハ $x-\alpha$ ニテ除シ得ベシ．　同理ニテ此式ハ $x-\beta$ ニテモ除シ得ベシ．　依テ此式ハ $(x-\alpha)(x-\beta)$ ニテ除シ得ベク，之ヲ除シタル商ハ a ヲ得ベキニ依リ．

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)(x-\beta).$$

注意　此關係ハ二次三項式ノ性質トシテ甚ダ要用ナリ，随テ二次方程式ノ性質ニモ甚ダ必要ナリ，忘ルヽヿ勿レ

因子分解

<u>注意一</u>　因子分解ヲナスニハ乘除法ノ公式（第61頁ニ揭ゲ）ヲ最モ善ク記憶セザルベカラズ，但シ試驗ニ於テハ殊ニ除法公式 VIII ヲ運用スルコヲ要ス．然レトモ因子分解ハ平生ニ練熟スベキモノニシテ急稽古ナシ得ベキモノニアラズ，故ニ茲ニ數多ノ例ヲ揭グルモ益ナケレバ單ニ忘レ易キ數例ヲ示スニ止ム．（詳クハ因子分解活法ヲ見ヨ）

1.　x^4+4　ヲ因子ニ分カテ．

（解）此式ニ　$4x^2$　ヲ加ヘ又減ズレバ

$$x^4+4\equiv(x^4+4x^2+4)-4x^2$$
$$\equiv(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$\equiv(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$$
$$\equiv(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

2.　x^6-1　ヲ因子ニ分解セヨ．

（解）$\because x^6-1\equiv(x^3+1)(x^3-1)$
$$\equiv(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$

<u>附言</u>　$x^6-1\equiv(x^2)^3-1$
$$\equiv(x^2-1)(x^4+x^2+1)$$
$$\equiv(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
ハ面白カラズ．

3.　x^3+x^2+x-3　ヲ因子ニ分解セヨ．

（解）$x^3+x^2+x-3\equiv(x^3-1)+(x^2-1)+(x-1)$
$$\equiv(x-1)\{(x^2+x+1)+(x+1)+1\}.$$
$$\equiv(x-1)(x^2+2x+3).$$

4.　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$
ハ完全平方數ナルヿヲ證セヨ．

（解）此式$\equiv(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+1$
$$\equiv(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$$
$x^2+5x\equiv y$　トスレバ
$$\equiv(y+4)(y+6)+1$$
$$\equiv y^2+10y+25\quad 即チ\quad(y+5)^2$$
$$\equiv(x^2+5x+5)^2$$

5.　$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$　ヲ因子ニ分解セヨ．

（解）$(a+b+c)^3\equiv a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$
ナルニ依リ，之ヲ用フレバ
此式$\equiv a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)-a^3-b^3-c^3$
$$\equiv3(b+c)(c+a)(a+b).$$

6.　$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$
$$\equiv a^5+b^5+c^5+5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+ab+b^2\ldots$$
$$-a^5-b^5-c^5\equiv5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+ab+b^2\ldots$$

7. $(ax+by+cz)^3+(cx-by+az)^3$ ハ $(a+c)(x+z)$ ニテ除シ得ベキコトヲ証セ.

(解) 此式$\equiv\{(ax+by+cz)+(cx-by+az)\}\times$(整式)

$\equiv(ax+cx+az+cz)\times$(整式)

$\equiv(a+c)(x+z)$(整式)

故ニ此式ハ $(a+c)(x+z)$ ニテ除シ得.

8. n ガ正整數ナル時 $7^{2n}-1$ ハ 48 ニテ除シ得ベキコトヲ証セヨ.

(解) $7^{2n}-1=(7^2)^n-1=49^n-1$

$=(49-1)(49^{n-1}+49^{n-2}+\cdots\cdots+1)$

$=48\times$整數.

即チ 本數ハ 48 ノ倍數ナルヿ明カナリ.

9. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ ヲ因子ニ分解セヨ.

(解) 此式ニ於テ $b=c$ トスレバ,

此式 $a^3(c-c)+c^3(c-a)+c^3(a-c)=0$

故ニ此式ハ $b-c$ ニテ除シ得, 同理ニテ此式ハ $c-a$, $a-b$ ニテモ除シ得.

今此式ヲ見ルニ a, b, c ノ交代式ナルヲ以テ已ニ $(b-c)(c-a)(a-b)$ ナル因子ヲ得タル上ハ一次ノ對稱式 $a+b+c$ ナル因子アルベクシテ,

此式$\equiv N(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$

茲ニ N. ハ數係數ナリ. 今此恒同式ヨリ N ヲ求ムル爲メ, 兩邊ヨリ a^3b ノ係數ヲ比ブレバ N$=-1$ ヲ得, 依テ此式ハ下ノ如クナル,

$-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

注意 此 (9) 題ノ如キヿヲナスハ試驗場ニテハ甚ダ手數ナレバ, 問題ガ因子分解ナラザル限リハ可成ハ此結果ヲ諳記スルヿヲ要ス, 次ニ其結果ヲ掲ゲ置キタレバ之ヲ暗記スベシ. 此公式ハ分數ニ特効アリ.

公式

$(b-c)+(c-a)+(a-b)\equiv0$.

$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\equiv0$,

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\equiv ab(a-b)+bc(b-c)$
$+ca(c-a)$, $\equiv-(b-c)(c-a)(a-b)$.

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$
$\equiv-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$
$\equiv-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.

10. $(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b)$ 仝上.

(解) $(x+a)^2(b-c)\equiv(b-c)x^2+2a(b-c)x$
$+a^2(b-c)$ ナレバ,

此式$=\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}x^2$
$+2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}x+a^2(b-c)+b^2(c-a)$
$+c^2(a-b)\equiv-(b-c)(c-a)(a-b)$.

分　數

次式ヲ簡單ニセヨ

1 $(yz+zx+xy)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-xyz\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$.

（解） 與ヘラレタル式

$$=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}+2(x+y+z)-\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)$$

$$=2(x+y+z).$$

2 $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{4}{1+x^4}+\frac{8x^4}{1+x^8}$.

（解） 初ノ二項ヲ加フレバ $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}$

$\therefore$ 初ノ三項ノ和$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{4}{1-x^4}$

$\therefore$ 初ノ四項ノ和$=\frac{4}{1-x^4}-\frac{4}{1+x^4}=\frac{8x^4}{1-x^8}$

$\therefore$ 全式ノ和$=\frac{8x^4}{1-x^8}+\frac{8x^4}{1+x^8}=\frac{16x^4}{1-x^{16}}$

3 $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}$.

（解） 此分數≡

$$\frac{-a^2(b-c)(x+b)(x+c)-b^2(c-a)(x+c)(x+a)-c^2(a-b)(x+a)(x+b)}{(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)}$$

而ソ $-a^2(b-c)(x+b)(x+c)$

$$\equiv -a^2(b-c)x^2-a^2(b^2-c^2)x-a^2bc(b-c)$$

ナルヲ以テ

此分數ノ分子$\equiv-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}x^2$

$$+\{a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)\}x$$

$$-abc\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$$

$$\equiv(a-b)(b-c)(c-a)x^2$$ （頁69ヲ見ヨ）

故ニ　此分數$\equiv\frac{(a-b)(b-c)(c-a)x^2}{(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)}$

$$\equiv\frac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

4 $\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

（解） 與ヘラレタル三ツノ分數ヲ通分スルニ公分母ヲ $(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)$ トスレバ其分子ノ和ハ次ノ如シ

$-(b-c)(x-b)(x-c)-(c-a)(x-c)(x-a)-(a-b)(x-a)(x-b)$,

此式ハ a, b, c ノ内二ツヲ相等シトスレバ零トナル，因テ $(b-c)$ $(c-a)$ $(a-b)$ ナル因子ヲ有ス而シテ此代數式ハ此因子ト共ニ a, b, c ニ關スル三次式ナルガ故ニ分子ヲ $L(b-c)(c-a)(a-b)$ ニ等シトスレバ L ハ a, b, c ヲ含マザルヲ以テ此 L ヲ決定スル爲ニ a^2b ノ數係ヲ比較スレ

バ $L=1$. ナルヲ知ル；因テ與ヘラレタル分數ハ約シタル後次ノ如クナルベシ

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

附言　上ニ記シタルガ世間並ノ解ナレモ，之ニテハ大變ナリ，矢張リ頁 69 ノ公式ニ依テ下ノ如ク爲ス方宜シ，

$$\begin{aligned}\text{此分子}&\equiv-\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}x^2\\&\quad+\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}x\\&\quad-bc(b-c)-ca(c-a)-ab(a-b)\\&\equiv(b-c)(c-a)(a-b).\end{aligned}$$

5　$$\frac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(x-b)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

（解）此分數

$$\equiv\frac{-bc(b-c)(x-a)^2-ca(c-a)(x-b)^2-ab(a-b)(x-c)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

而シテ

$$-bc(b-c)(x-a)^2\equiv-bc(b-c)x^2+2abc(b-c)x-a^2bc(b-c)$$

ナルヲ以テ

$$\begin{aligned}\text{此分數ノ分子}&\equiv-\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}x^2\\&\quad+2abc\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}x\\&\quad-abc\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}\\&\equiv(a-b)(b-c)(c-a)x^2\quad(\text{頁69ヲ見ヨ})\end{aligned}$$

因テ此分數 $\equiv\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)x^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}\equiv x^2.$

方程式

同値方程式　其根ヲ全ク等シクスル二ツノ方程式或ハ二組ノ方程式ハ互ニ同値ナリト云フ.

方程式變化ノ要　ハ其同値方程式ヲ誘導スルニ在リテ其最モ注意スベキハ.

（1）方程式ノ兩邊ニ已知數ヲ加，減，乘或ハ除スルモ恒ニ同値方程式ヲ誘ク.

（2）其項ヲ他邊ニ移スモ亦同値方程式ヲ導ク.

（3）方程式ノ兩邊ニ零ヲ乘ジ，或ハ之レニテ除スルコヲ得ズ.（多クハ錯誤ヲ來ス）

（4）方程式ノ兩邊ニ未知數ヲ含ミタル式ヲ乘ジ或ハ之レニテ除スルトキハ，其式ハ所設ノ要件ニ關シテ零ナルコナキヤ否ヤヲ吟味セザルベカラズ.

（5）方程式ノ各邊ヲ平方スレバ一般ニ無緣根ヲ誘起ス．但シ其各邊ガ何レモ正數ナルコヲ知リ得ル場合ニ限リテ同値方程式ヲ誘ク.

方程式ノ根ノ個數　ハ一般ニ其次數ト等シ，卽チ二次方程式ハ恒ニ二個ノ根ヲ有シ，三次方程式ハ恒ニ三個ノ根ヲ有スルガ如シ．若シ二次方程式ガ三根ヲ有スレバ恒同方程式ナリト知ルベシ．　分數或ハ根數方程式ハ其次數ヲ決シ得ズ，往々一根ヲモ有セザルモノアリ.

分數方程式

1　$\frac{x+3}{3-x}+\frac{x+6}{6-x}+\frac{x+9}{9-x}=3.$　　ヲ解ケ

（解）各項ノ形ヲ變ズレバ

$$\frac{x+3}{3-x}-1+\frac{x+6}{6-x}-1+\frac{x+9}{9-x}-1=0.$$

即チ

$$\frac{2x}{3-x}+\frac{2x}{6-x}+\frac{2x}{9-x}=0,$$ 此兩邊ヲ $2x$ ニテ割リ，

$$\frac{1}{3-x}+\frac{1}{6-x}+\frac{1}{9-x}=0.$$

$(3-x)(6-x)(9-x)$ ハ零ニ等シカラズトシテ之ヲ方程式ノ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂ヘバ

$$(6-x)(9-x)+(3-x)(9-x)+(3-x)(6-x)=0.$$

括弧ヲ解キ同類項ヲ集メテ逐次簡單ニスレバ

$$3x^2-36x+96=0.$$

$$x^2-12x+32=0.$$

$$\therefore\quad x=6\pm\sqrt{36-32},$$

$$=6\pm\sqrt{4}.$$

コヽニ得タル値ハ先キニ方程式ノ兩邊ニ乘ジタル式ヲ零ナラシメズ，因テ是等ノ値ハ採用シ得ベキモノナリ．猶先キニ方程式ノ兩邊ヲ割リタルモノヲ零ニ等シトシテ置キテ得ベキ $x=0$ トヲ合セテ所要ノ根ハ次ノ三ツ $x=0$，或ハ $x=6\pm2$．

2　$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-5}{x-6}$，ヲ解ケ，

（解）與ヘラレタル方程式ヲ次ノ如ク變化ス

$$1+\frac{1}{x-2}+1+\frac{1}{x-7}=1+\frac{1}{x-3}+1+\frac{1}{x-6}.$$

兩邊ヨリ 1 ヲ二ツ去リテ

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-6},$$

轉項シテ

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-7},$$

$$\frac{-1}{(x-2)(x-3)}=\frac{-1}{(x-6)(x-7)},$$

$$\therefore\quad (x-2)(x-3)=(x-6)(x-7)$$

$$x^2-5x+6=x^2-13x+42,$$

$$8x=36$$

$$\therefore\quad x=\tfrac{9}{2}$$

注意　分數方程式ヲ間違ヒナク解クニハ，其方程式ノ項ヲ一邊ニ送リテ，之ヲ出來得ベキ丈ケ簡約ニシ，然ル後其分子ヲ零ト置キ其方程式ヲ解キテ答トスレバ恒ニ完全ナリトス．然レ𪜈普通ニ其手數ヲ省カンガ爲メニ，其分母ヲ拂フト雖𪜈，之レ正法ニアラザルヲ以テ其分母ノ最小公倍數ナラザルモノヲ乘ズレバ必ズ無緣根ヲ導ク．

例バ　$\frac{x}{x-1}+\frac{5}{1-x}=0$

ニ $(x-1)(1-x)$ ヲ乘ズレバ

$$x(1-x)+5(x-1)=0,$$

即チ $(x-5)(1-x)=0,$

之レヨリ $x=5$, 或ハ $x=1$ ヲ得テ, 此 $x=1$ ハ明ニ無縁根ナリ.

尤モ其分母ノ最小公倍數ヲ乘シテ分母ヲ拂フトモ, 無縁根ヲ導カズトハ限ラズ, 例バ

$$\frac{x^2-2x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$$

$(x+1)(x-1)$ ヲ乘ズレバ

$$x^2-2x+2(x^2-1)+x+1=0$$

ヲ得テ, 之ヲ解ケバ $x=1$ 或ハ $x=-\frac{1}{3}$ ヲ得テ $x=1$ ハ明ニ無縁根ナリ.

之ニ依テ分數方程式ヲ解クニハ, 例バ前題ニ於テハ

$$\frac{x^2-2x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}\equiv\frac{x^2-2x+2(x^2-1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\equiv\frac{(3x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\equiv\frac{3x+1}{x+1}=0,$$

ヨリ, 其最後ノ分數ノ分子ヲ零ト置キ, 即チ $3x+1=0$ ヨリ $x=-\frac{1}{3}$ ヲ求ムルヲ安全ナリトス.

故ニ若シ其値ヲ欲スル爲メ, 分母ヲ拂フテ解スルナラバ, 其結果ガ要件ニ適フヤ否ヤヲ悉ク驗スベシ; 而シテ若シ其中ニ不都合ノモノアラバ, 完全ナル仕方ニ遵リ直ホスベシ.

二次方程式ノ公式

二次方程式ノ解法幷ニ其性質ハ受驗ニハ最モ緊要ナルモノナレバ必ズ之レヲ記憶スベシ

$$ax^2+bx+c=0.$$

ナルトキ,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

然シテ此式ガ

實量異根ヲ有スル要件ハ $b^2-4ac>0,$

實量等根………………………… $b^2-4ac=0,$

虛量異根………………………… $b^2-4ac<0,$

又此二根ヲ α, β トスレバ

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}, \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a};$$

$$\alpha^2+\beta^2\equiv(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}.$$

$$\alpha^3+\beta^3\equiv(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{-b^3}{a^3}-3\times\frac{-b}{a}\times\frac{c}{a}$$

$$=\frac{-b^3+3abc}{a^3}.$$

又 $ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)(x-\beta).$

二次方程式ノ性質

1　$ax^2+bx+c=0$ ノ二ツノ根ヲ α, β トスレバ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \text{ 及ビ } \alpha\beta=\frac{c}{a}$$ ナルコトヲ證セ.

（解）殘除定理ニヨリ此方程式ノ左節ハ $x-\alpha$, $x-\beta$ ニテ除シ得ルヲ以テ次ノ恒等方程式ヲ得

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$a\neq 0$ トシ上ノ兩邊ヲ a ニテ除スレバ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\equiv x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

$$\therefore \frac{b}{a}=-(\alpha+\beta), \qquad \frac{c}{a}=\alpha\beta,$$

卽チ $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

2　$ax^2+bx+c=0$ ノ一根ガ他根ノ m 倍ナル條件如何.

（解）二根ヲ α, 及ビ $m\alpha$ トスレバ

$$\alpha+m\alpha=-\frac{b}{a}, \qquad \alpha(m\alpha)=\frac{c}{a}$$ ヲ得

コレヨリ α ヲ消去シテ $$\frac{(1+m)^2}{m}=\frac{b^2}{ac}.$$

3　$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ノ比ガ $m:n$ ナル條件

如何.

（解）$m:n=\frac{m}{n}:1$ ナレバ猶一根ガ他根ノ $\frac{m}{n}$ 倍ナリト云フニ同ジ, 因テ二根ヲ α, $\frac{m}{n}\alpha$ トスレバ前解ノ如ク $$\frac{(m+n)^2}{mn}=\frac{b^2}{ac}$$ ヲ得.

（尤モ比ノ性質ニ依リ此二根ヲ $m\alpha$, $n\alpha$ ト命ズレバ更ニ容易ニ解シ得ベシ）

4　$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トシ α^2, β^2 ヲ根トスル方程式及ビ $\frac{\alpha^2}{\beta}, \frac{\beta^2}{\alpha}$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ.

（解）α^2, β^2 ヲ二根トスル方程式ハ次ノ如シ

$$(x-\alpha^2)(x-\beta^2)=0,$$

卽チ $$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

而シテ方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ハ α, β ナルガ

故ニ $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a},$$

故ニ $$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}$$

$$=\frac{b^2-2ac}{a^2} \quad\cdots\cdots(2)$$

$$\alpha^2\beta^2=\frac{c^2}{a^2} \quad\cdots\cdots(3)$$

(2), (3)ノ右邊ヲ(1)中ニ置キ代フル時ハ

$$x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0$$

a ハ零ニアラザルガ故ニ兩邊ニ a^2 ヲ乘ジテ

$$a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0.$$

次ニ $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$, $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ ヲ二根トスル方程式ハ次ノ如シ

$$x^2-\left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}\right)x+\frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha}=0$$

即チ $x^2-\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}x+\alpha\beta=0$

而シテ $\alpha^3+\beta^3\equiv(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}$$

故ニ $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{-\dfrac{b^3}{a^3}+3\dfrac{bc}{a^2}}{\dfrac{c}{a}}=-\dfrac{b^3-3abc}{a^2c}$

故ニ求ムル所ノ方程式ハ

$$x^2+\frac{b^3-3abc}{a^2c}x+\frac{c}{a}=0$$

即チ $a^2x^2+(b^3-3abc)x+ac^2=0$

5 方程式 $x^2-(8\alpha-2)x+15\alpha^2-2\alpha-7=0$ ノ根ノ平方ノ和ガ 24 ナルトキハ α ノ値如何.

(解) 此方程式ノ二根ヲ x_1, x_2 トセバ次ノ関係アリ, $x_1+x_2=8\alpha-2$, $x_1x_2=15\alpha^2-2\alpha-7$,

與ヘラレタル條件ヨリ

$$x_1^2+x_2^2=24$$

$$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$
$$=(8\alpha-2)^2-2(15\alpha^2-2\alpha-7)=24$$

即 $17\alpha^2-14\alpha-3=0$

$$\alpha=\frac{7\pm\sqrt{49+51}}{17}=\frac{7\pm10}{17},\quad\therefore\alpha=1,\ \alpha=-\frac{3}{17}$$

6 $(x^2-2x+2)-m(x^2+2x+2)=0$

ガ等根ヲ有ツタメニ m ハ如何ナル値ヲ取ルベキカ.

此場合ニ於ケル根ヲモ求メヨ.

(解) 與ヘラレタル方程式ヲ次ノ如ク變化スレバ

$$(m-1)x^2+2(m+1)x+2(m-1)=0$$

此方程式ガ等根ヲ有ツタメノ要件ハ次ノ等式ニテ表ハスヲ得

$$\{2(m+1)\}^2-2(m-1)^2=0$$ $b^2-4ac=0$

即チ $m^2-6m+1=0$

コレヨリ $m=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm2\sqrt{2}$,

両根ガ相等シキトキハ共通ナル値ハ両根ノ和半

$-(m+1)/(m-1)$ ニ等シ

今 $m=3+2\sqrt{2}$ ナルト

$$x_1=\frac{-(4+2\sqrt{2})}{2+2\sqrt{2}}=\frac{-(2+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

$m=3-2\sqrt{2}$ ナルト

$$x_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

附言 上ノ二次方程式ノ二ツノ根ノ積ハ

$2(m-1)/(m-1)$ 即チ 2 ニシテ m ニ無關係

ナリ. 因テ若シモ根ガ相等シキナラバ $\pm\sqrt{2}$

ニ等シカルベキヲ豫知スルコヲ得

無理方程式

注意．$\sqrt{\ }$ ノ前ニ±號ヲ理解スト規約スルモノト，＋號ノミヲ理解スト規約スルモノトノ二説アリテ，後ノ規約ニ從フヲ最近ノ解法トス．

1．$\sqrt{x^2-9}=9-x$ ……………(1) ヲ解ケ．

（解）此各邊ヲ平方シテ

$$x^2-9=81-18x+x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

簡單ニシテ

$$18x=90,$$

$$\therefore x=5.$$

吟味 (1) ノ各邊ヲ平方シテ得タル (2) ハ

$$-\sqrt{x^2-9}=9-x \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ノ根ヲモ併セ含ムヲ以テ此 $x=5$ ガ (1) ノ根ナルヤ否ヤヲ驗メサザルベカラズ，依テ(1)ノ各邊ノ x ニ 5 ヲ換フレバ $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{5^2-9}=4$，$9-x=9-5=4$；由テ $x=5$ ハ此根ナルヲ知ル．

注意 本題ノ如キ平易ナルモノニ於テハ置キ換ヘテ驗メシヲ行ハザルモ視察ニ依テ直ニ知ルヿヲ得，即チ (1) ノ根ニシテ (3) ノ根ナラザル爲メニハ左邊ノ $9-x$ ガ正ナルヿ，即チ $9-x>0$，即チ $x<9$ ナレバ可ナリ．

由テ 5 ハ 9 ヨリ小ニシテ求ムル根ナリ．

2 $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2$ ヲ解ケ．

（解）兩邊ヲ平方シテ

$$2x+8-4\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}+4(x+5)=4,$$

簡約スレバ $3x+12=2\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}$，

再ビ兩邊ヲ平方シテ

$$9x^2+72x+144=4(2x+8)(x+5)$$

即チ $x^2=16$．$\therefore x=\pm 4$．

驗シヲ行フニ前ノ例ニ用ヒタル如クスルモ可ナレドモ此場合ニ於テハ二回平方シタルヲ以テ稍複雜ナル吟味ヲ來スガ故ニ x ノ値ヲ代用スルヲ以テ便ナリトス，斯クシテ x ノ何レ値モ方程式ヲ滿足セザルヲ知ル，因テ與ヘラレタル方程式ハ根ヲ有セズ，何トナレバ若シ根ヲ有スルトキハ其總テノモノハ逐次兩邊ヲ平方シテ得タル最後ノ方程式ノ根ノ中ニ必ズ現出スベキモノニシテ最後ノ方程式ノ根ガ皆與ヘラレタル方程式ヲ滿足セザレバ，コレ根ヲ有セザルナリ．

3 $x^2-5x+\sqrt{(x^2-5x+11)}=19$ ヲ解ケ． 7

（解）變形シテ

$$x^2-5x+11+\sqrt{x^2-5x+11}=30,$$

抑チ $(\sqrt{x^2-5x+11})^2+\sqrt{x^2-5x+11}-30=0,$

$$(\sqrt{x^2-5x+11}+6)(\sqrt{x^2-5x+11}-5)=0,$$

此第一ノ因子ハ二ツノ正數ノ和ナルヲ以テ決シテ零トナルコトナシ, 故ニ第二ノ因子ヲ零ナラシムベキ値ヲ求ムレバ可ナリ, 因テ

$$\sqrt{x^2-5x+11}=5,$$

ナル方程式ヲ解クコトニ歸ス, コレガタメニ根號ノ內ニアル式ヲシテ 5^2 ナラシムル x ノ値ヲ見出セバ足レリ, 因テ次ノ方程式アリ,

$$x^2-5x+11=25,$$
$$x^2-5x-14=0,$$
$$(x-7)(x+2)=0.$$
$$\therefore\quad x=7,\ 或ハ\ -2,$$

コヽニ得タル二ツノ根ハ與ヘラレタル方程式ノ根ナリ

○4　$\sqrt{(x^2-5x+1)}-4=\dfrac{5}{\sqrt{(x^2-5x+1)}}$ ……(1)

ヲ解ケ.

(解) 今 $\sqrt{(x^2-5x+1)}=y$ ト命ズレバ

$$y-4=\frac{5}{y}\text{……………………}(1')$$

サテ $y\neq0$ ナルコト明カナリ, 何トナレバモシ $y=0$ ナル時ハ方程式ハ不能ナルガ故ナリ, 因テ分母ヲ拂ヒ且項ヲ移セバ

$$y^2-4y-5=0\text{ ……………………}(2)$$

ハ (1′) ト同値從テ (1) ト同値ナリ,

$(y-5)(y+1)=0,\quad \therefore\ y=5$ 或ハ $y=-1.$

$\sqrt{(x^2-5x+1)}$ ノ根號ノ前ニハ常ニ正及ビ負號ヲ考ヘ得ルガ故ニ正ヲ考ヘタル時ニハ前ニ得タル y ノ二値ノ中, 唯5ノミヲ採リ, 根號ノ前ニ負ヲ考ヘタル時ハ -1 ヲ採ル, 故ニ各ノ場合ニ於テ次ノ如シ,

I　$y>0,\quad \sqrt{(x^2-5x+1)}=5$ ……………………(3)

兩邊ヲ平方シテ後項ヲ移セバ

$$x^2-5x-24=0,$$
$$\therefore\quad (x-8)(x+3)=0,$$
$$\therefore\quad x=8\ 或ハ\ x=-3.$$

x ノ此ノ二ツノ値ハ何レモ (3) ヲ滿足ス, 從テ (2) ヲ滿足シ倚ホ之ト同値ナル (1′), (1) ヲ滿足ス, 即チ上ノ二値ハ所要ノ根ナリ.

II　$y<0,\quad -\sqrt{(x^2-5x+1)}=-1$ ……………(3′)

兩邊ヲ平方シテ後轉項スレバ

$$x^2-5x=0$$
$$\therefore\quad x=0,\ 或ハ\ x=5,$$

此兩根ハ何レモ (3′) ヲ滿足シ, 從テ (2) ヲ滿足ス, 而シテ倚ホ之ト同値ナル (1′) 及ビ (1) ヲ滿足ス故ニ此二種ハ所要ノ根ナリ.

5　$\dfrac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}=\dfrac{x}{2a}$ ヲ解ケ.

(解) $\dfrac{(\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a})^2}{(\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a})(\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a})}$

$$=\frac{x}{2a};$$

即チ $\dfrac{(x+2a)+(x-2a)-2\sqrt{x^2-4a^2}}{(x+2a)-(x-2a)}=\dfrac{x}{2a},$

即チ $\dfrac{x-\sqrt{x^2-4a^2}}{2a}=\dfrac{x}{2a}$

$a=0$ ナラバ此式ハ不能ナルヲ以テ, a ハ零ナラズ

因テ　$x-\sqrt{x^2-4a^2}=x$

$\therefore\quad \sqrt{x^2-4a^2}=0$

$\therefore\quad x=\pm 2a.$

注意　無理方程式ハ乘冪セザレバ, 其根ヲ得ズ, 止ムヲ得ズシ乘冪スレバ無縁根ヲ導クノ恐レアリテ, 其解法ニ困難ヲ感ズルヿ一通リノヿニアラズ, 然レ圧受驗ノ際ナドニハ遠慮ナク乘冪ヲ遂行シテ, 其最後ニ得タル結果ガ元ノ方程式ニ當テハマルヤ否ヤヲ驗セバヨシ,

又(3)題解ハ特ニ注意スベキモノナリ, 隨テ(4)題解モ熟讀ヲ要ス,

高次方程式

1　次ノ方程式ヲ解ケ.

(A) $x^3-1=0$,　(B) $x^4+1=0$,　(C) $x^4-1=0$.

(解) (A) $x^3-1=0$,

即チ　$(x-1)(x^2+x+1)=0.$

$\therefore\quad x=1$, 或ハ　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},$

(B) $x^4+1=0$,

$x^4+2x^2+1=2x^2$,

$x^2+1=\pm\sqrt{2}x$

$x^2\mp\sqrt{2}x+1=0$

$x=\dfrac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}.$

(C) $x^4-1=0.$

$(x-1)(x+1)(x^2+1)=0,$

$\therefore\quad x=1$, 或ハ　$x=-1$, 或ハ　$x=\pm\sqrt{-1}$

2.　$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=120$　ヲ解ケ.

(解) 左邊ノ因子ノ順序ヲ換フレバ,

$(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)=120,$

即チ　$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120,$

$x^2-5x=y$　トズレバ

$(y+4)(y+6)=120$

即チ $y^2+10y-96=0$,

即チ $(y+16)(y-6)=0$.

$y+16=0$ 或ハ $y-6=0$

$x^2-5x+16=0$ 或ハ $x^2-5x-6=0$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{-39}}{2}$ $(x+1)(x-6)=0$

$x=-1$ 或ハ 6

3. $x^2-x-3=\dfrac{108}{x^2-x}$ ヲ解ケ.

(略解) $x^2-x=y$ トスベシ.

4. $\dfrac{x+2}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{x+2}=2\dfrac{1}{2}$ ヲ解ケ.

(解) $\dfrac{x+2}{x^2+1}=y$ トスレバ,

$$y+\frac{1}{y}=2\frac{1}{2},$$

之レヨリ $2y^2-5y+2=0$ ヲ得, 之ヲ解キテ

$y-2=0$ 或ハ $2y-1=0$ ヲ得. 然ルトキ,

$$\frac{x+2}{x^2+1}-2=0 \quad 或ハ \quad 2\frac{x+2}{x^2+1}-1=0.$$

二元一次方程式

$$\begin{cases} ax+by+c=o \\ a'x+b'y+c'=o \end{cases}$$

ニ於テ

x, y ガ一定有理ノ値ヲ有ツ要件ハ

$$ab'-a'b\neq o \quad 即チ \quad \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$$

ナラザルコニシテ, 此時ノ x, y ノ値ハ

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}, \quad y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$$

又此方程式ガ不能ナル為メノ要件ハ

$$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'},$$

又此方程式ガ不定ナル為メノ要件ハ

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'},$$

附言 以上ノ關係ハ方程式ノ能不能ヲ決定スル大切ノ關係ナレバ必ズ記憶スベシ.

(此用法ハ聯立方程式解法及ビ能不能ニ詳シ, 就テ見ヨ)

7

多元一次方程式

1. 代數式 $px+2q$ ニ於テ x ヲ 5 及ビ 20 トスレバ其値夫々ニ 87, 及ビ 12 トナルト云フ, 若シ x ヲ 3.5 トスレバ其數値如何, 尙ホ又其數値ヲ零ナラシムルニハ x ニ如何ナル値ヲ與フベキカ.

5

（解） 題意ニヨリ p, q ニ關シ次ノ方程式ヲ得,

$$5p+2q=87,$$
$$20p+2q=12.$$

此方程式ヲ解キテ $p=-5.$ $q=56.$

故ニ與ヘラレタル式ヲ y トスレバ次ノ如シ

$$y=-5x+112$$

$x=3.5$ トスレバ

$$y=-5\times3.5+112=94.5$$

又 $y=0$ ナル爲ニハ

$$5x=112$$

故ニ $x=22.4.$

2 $\left.\begin{array}{l} x-ay+a^2z=a^3, \\ x-by+b^2z=b^3, \\ x-cy+c^2z=c^3. \end{array}\right\}$ ヲ解ケ.

（解） 與ヘラレタル方程式トXニ關スル次ノ方程式トヲ聯立セシムレバ

$$x-yX+zX^2=X^3,$$

ニ於ケル三根ハ a, b, c ナルヿ明カナリ.

之ヲ變形スレバ

$$X^3-zX^2+yX-x=0$$

トナル. 依テ三次方程式ノ根ト係數トノ關係ヨリ

$$z=a+b+c, \quad y=bc+ca+ab, \quad x=abc.$$

3. $\left.\begin{array}{l} ax+by+cz=m, \\ a^2x+b^2y+c^2z=m^2, \\ a^3x+b^3y+c^3z=m^3, \end{array}\right\}$ ヨリ x, y, z ヲ算出セヨ.

（解） 三元一次方程式ノ根ヲ與フル公式ニ據リ

$$x=\frac{m(b^2c^3-b^3c^2)+m^2(b^3c-bc^3)+m^3(bc^2-b^2c)}{a(b^2c^3-b^3c^2)+a^2(b^3c-bc^3)+a^3(bc^2-b^2c)}$$

$$=\frac{m\{bc-m(b+o)+m^2\}}{a\{bc-a(b+c)+a^2\}}=\frac{m(m-b)(m-c)}{a(a-b)(a-c)}.$$

y, z ノ値ハ x ノ値ヨリ a, b, c ヲ循環ノ順序ニ置キ換ヘテ

$$y=\frac{m(m-c)(m-a)}{b(b-c)(b-a)}, \quad z=\frac{m(m-a)(m-b)}{c(c-a)(a-b)}.$$

c

4 $\left.\begin{array}{l} ax+y+z=1. \cdots\cdots\cdots(1) \\ x+ay+z=a. \cdots\cdots\cdots(2) \\ x+y+az=a^2, \cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right\}$ ヲ解ケ.

（解） (1)(2)(3)ヲ邊々相加フレバ

$$(a+2)(x+y+z)=1+a+a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$a+2\neq0$　ト假定シテ此方程式ノ兩邊ヲ除スレバ

$$x+y+z=\frac{1+a+a^2}{a+2} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(1)ノ兩邊ヨリ(4)ノ兩邊ヲ減ズレバ

$$(a-1)x=1-\frac{1+a+a^2}{a+2}=-\frac{a^2+1}{a+2}.$$

$a-1\neq0$　ト假定シテ此方程式ノ兩邊ヲ除スレバ

$$x=-\frac{a+1}{a+2},$$

(2)ト(3)トニ就テ前ト同樣ノ手數ヲ施セバ同ジ假定ノ下ニ

$$y=\frac{1}{a+2}, \qquad z=\frac{(a+1)^2}{a+2},$$

吟味　$a+2=0$, 即チ　$a=-2$　ナル時(1)(2)ヲ邊々加ヘタルモノハ　$-x-y+2z=-1$　トナリ,(3)ハ $x+y-2z=4$, 即チ　$-x-y+2z=-4$,　トナル因テ方程式ハ不能ナリ, $a-1=0$, 即チ　$a=1$　ナル時(1)(2)(3)ハ皆同ジモノトナル, 因テ此場合ハ不定ナリ.

多元二次方程式

次ノ各方程式ヲ程ケ

1　$x+y=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$

$xy=21 \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$

(解一)　(A)ヨリ　$y=10-x$, ヲ得之ヲ(B)式ニ代用シ

$$x(10-x)=21,\ \text{即チ}\ x^2-10x+21=0,$$

$$(x-7)(x-3)=0,\ \therefore x=7,\ \text{或ハ}\ x=3.$$

注意　又(B)ヨリ　$y=\frac{21}{x}$　ヲ得之ヲ(A)ニ代ユルモ可ナリ.

(解二)　(A)ヲ平方シテ之ヨリ(B)ノ 4 倍ヲ減ズレバ　$(x+y)^2-4xy=10^2-4\times21$, 即チ $(x-y)^2=16$,

$$\therefore\ x-y=\pm4 \cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

今(A)ト(C)トヲ加ヘ若クハ減ズレバ

$$2x=10\pm4, \qquad 2y=10\mp4,$$

$$\therefore\ x=7,\ \text{或ハ}\ 3; \qquad y=3,\ \text{或ハ}\ 7.$$

(解三)　二次方程式ノ性質ニヨレバ

X^2-(二根ノ和)$\mathrm{X}+$(二根ノ積)$=0$　ナリ,

而シテ爰ニハ　二數ノ和ハ10, 二數ノ積ハ21ヲ與ヘリ故ニ　$\mathrm{X}^2-10\mathrm{X}+21=0$　ヲ解キテ

$$(\mathrm{X}-7)(\mathrm{X}-3)=0,\ \mathrm{X}=7,\ \text{或ハ}\ 3$$

ヲ得; 此二根7及ビ3ハ所要ノ二數即 x,y ノ値ナリ

(解四) (A)ヨリ $x=5+z$, $y=5-z$ ト命ズルコトヲ得. 之ヲ(B)ニ代入スレバ

$$(5+z)(5-z)=21, \quad \text{即チ} \quad 25-z^2=21,$$

$$\therefore \ z^2=4, \qquad \therefore \ z=\pm 2.$$

$$\therefore \ x=5\pm 2 (\text{即チ } 7, \text{ 或ハ } 3),$$

$$y=5\mp 2 (\text{即チ } 3, \text{ 或ハ } 7).$$

<u>注意</u>　一般ニ $x+y=2a$ ナレバ $x=a+z$, $y=a-z$, ト命ジ, 又 $x-y=2a$ ナレバ $x=z+a$, $y=z-a$, ト命ズルコトヲ得テ, 之ヲ對稱方程式, 例ヘバ

$$x\pm y=l, \qquad x^4+y^4=m^4$$

ノ如キ方程式ニ用ヒテ甚ダ効アリト知ルベシ.

2　$x^2+xy+2y^2=44, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

　$2x^2-xy+y^2=16, \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(解一) $y=vx$ ト命ズ. 之ヲ(1)及ビ(2)ニ置キ換フレバ $x^2(1+v+2v^2)=44$, 　$x^2(2-v+v^2)=16$,

然ルヰ除シテ $\dfrac{1+v+2v^2}{2-v+v^2}=\dfrac{44}{16}=\dfrac{11}{4}$,

故ニ　$4(1+v+2v^2)=11(2-v+v^2)$,

即チ　$3v^2-15v+18=0$,

即チ　$3(v-2)(v-3)=0$,

$\therefore \ v=2$, 或ハ $v=3$,

爰ニ方程式 $x^2(1+v+2v^2)=44$ ノ v ノ代リニ2ヲ

置ケバ, ソレヨリ $x=2$, 或ハ -2 ヲ得,

而シテ $y=vx$ ナルヲ以テ之ニ應ジタル y ノ値ハ 4 或ハ -4 ナリ.

又同様ニ v ノ代リニ 3 ヲ置ケバ, 其レヨリ

$x=\sqrt{2}$, 或ハ $-\sqrt{2}$ ヲ得, 從テ $y=3\sqrt{2}$, 或ハ $-3\sqrt{2}$ ヲ得, 因テ此答數ハ

$$\left.\begin{matrix}x=2\\y=4\end{matrix}\right\}, \ \left.\begin{matrix}x=-2\\y=-4\end{matrix}\right\}, \ \left.\begin{matrix}x=\sqrt{2}\\y=3\sqrt{2}\end{matrix}\right\}, \ \left.\begin{matrix}x=-\sqrt{2}\\y=-3\sqrt{2}\end{matrix}\right\},$$

(解二) 二式ヨリ常數項ヲ消去スル爲ニ(1)ニ4ヲ乘ジ, (2)ニ11ヲ乘ジテ相減ズレバ

$$\begin{array}{r} 22x^2-11xy+11y^2=176 \\ 4x^2+4xy+8y^2=176 \\ \hline 18x^2-15xy+3y^2=0, \end{array} \ (-$$

即チ　$3(2x-y)(3x-y)=0$,

$\therefore \quad y=2x$, 或ハ $3x$,

之ヲ(1)ニ兩度別々ニ置キ換フレバ x 及ビ y ノ値ヲ得

(解三) x^2 ノ項ヲ消去スル爲ニ(1)ニ2ヲ乘ジソレヨリ(2)ヲ減ズレバ　$3xy+3y^2=72$,

故ニ　$y^2=24-xy, \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

又 y^2 ノ項ヲ消去スル爲メニ(2)ニ2ヲ乘ジソレヨリ(1)ヲ減ズレバ　$3x^2-3xy=-12$

故ニ　$x^2=xy-4 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)ト(4)トヲ邊々相乘ズレバ

$$x^2y^2=(24-xy)(xy-4),$$

簡約ニシテ　$2x^2y^2-28xy+96=0,$

即チ　$2(xy-8)(xy-6)=0,$

$\therefore\ xy=8,$ 或ハ $xy=6,$

之ヲ(1)及ビ(2)ニ別々ニ二度置キ換フレバ

$$\begin{cases}x^2+2y^2=36,\\2x^2+y^2=24,\end{cases}\quad\text{或ハ}\quad\begin{cases}x^2+2y^2=38,\\2x^2+y^2=22,\end{cases}$$

ヲ得，之ヨリ x^2 及ビ y^2 ヲ求ムベシ．

3.　$x^2+2xy=16,$ ……………(1)

$xy+2y^2=24,$ ……………(2)

（解）(1)及ビ(2)ノ左邊ヲ因數ニ分テバ

$x(x+2y)=16,$ ……………(1′)

$y(x+2y)=24,$ ……………(2′)

(1′)ヲ(2′)ニテ除スレバ

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}\quad\text{即}\quad x=\frac{2}{3}y\ \cdots\cdots(3)$$

(3)ヲ(1)ニ置キ代フレバ

$$\frac{4}{9}y^2+\frac{4}{3}y^2=16\quad\text{即チ}\quad\frac{16}{9}y^2=16,\quad y^2=9,$$

$\therefore\quad y=\pm3,\quad x=\pm4.$

4　$x^2+x=4y,$ ……………(1)

$x^3+1=6y,$ ……………(2)

（解一）(1)ノ各邊ヲ(2)ノ各邊ニテ除スレバ

$$\frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{4y}{6y}$$

即チ　$\begin{cases}x+1=0,\\ y=0,\end{cases}$　或ハ　$\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{2}{3},$

$\therefore\quad\begin{cases}x=-1,\\y=0\end{cases}$

又他式ヨリ分母ヲ拂フテ

$$2x^2-2x+2=3x,$$

簡約シテ　$2x^2-5x+2=0,$ 即チ $(x-2)(2x-1)=0,$

$\therefore\ x=2,$ 或ハ $x=\frac{1}{2};$ 之ニ應ジテ

$y=\frac{3}{2},$ 或ハ $y=\frac{3}{16}.$

<u>注意</u>　一ツノ方程式ヲ他ノ方程式ノ各邊ニテ除スルトキ，各邊ヨリ未知數ヲ含メル因子ガ同時ニ除去サルヽトキハ之ヲ一組トシテ各ヲ零トナスベシ．

（解二）y ノ項ヲ消去スル爲ニ(1)ニ3ヲ乘ジ，(2)ニ2ヲ乘ジテ相減ズレバ

$$3(x^2+x)=12y$$
$$2(x^3+1)=12y$$
$$2(x^3+1)-3x(x+1)=0$$

即チ　$(x+1)\{2(x^2-x+1)-3x\}=0,$

即チ　$(x+1)(x-2)(2x-1)=0,$

$\therefore\ x=-1$ 或ハ $x=2,$ 或ハ $x=\frac{1}{2},$

之ニ應ジテ　$y=0,$ 或ハ $y=\frac{3}{2},$ 或ハ $y=\frac{3}{16}.$

5　$x^2-xy=8x+3,$ ……………………(1)

$xy-y^2=8y-6,$ ……………………(2)

（解）(1)ヨリ(2)ヲ減ジテ

$(x-y)^2=8(x-y)+9,$

$\therefore\ (x-y)^2-8(x-y)-9=0,$

$\therefore\ (x-y-9)(x-y+1)=0,$

$\therefore\ x-y-9=0$ ……(3) 或ハ $x-y+1=0$ ……(4)

(1)ヲ變形スレバ $x(x-y)=8x+3,$

$\therefore\ 9x=8x+3$　〔(3)ヨリ〕

$\therefore\ x=3,\ y=-6,$

又　$-x=8x+3$　〔(4)ヨリ〕

$\therefore\ x=-\frac{1}{3},\ y=\frac{2}{3}.$

6.　$xy=6,$ ……………………(1)

$yz=12,$ ……………………(2)

$zx=8,$ ……………………(3)

（解）(1)ト(2)トノ積ヲ(3)ニテ除スレバ

$$\frac{xy\times yz}{zx}=\frac{6\times12}{8},$$

即チ　$y^2=9.$　$\therefore\ y=\pm3,$

之ヲ(1)及ビ(2)ニ置キ換ヘテ　$x=\pm2,\ z=\mp4$ ヲ得,

<u>附言</u>　或ハ此解ハ其手順ヲ變ヘテ，先ヅ(1)(2)(3)ヲ連乘シテ $x^2y^2z^2=6\times12\times8$ ヲ作リ，此兩邊ヲ平方ニ開キ　$xyz=\pm24$　ヲ得，此結果ヲ(1)(2)(3)ニテ夫々除

スレバ　$z=\pm4,\ x=\pm2,\ y=\pm3$　ヲ得.

7.　$x(y+z)=14,$

$y(z+x)=18,$

$z(x+y)=20,$

（解）各括弧ヲ解キテ

$$\begin{cases} xy+xz=14, \\ yz+yx=18, \\ zx+zy=20, \end{cases}$$

此三式中ノ二式ヲ加ヘ，殘ル一式ヲ夫々減ジ，且ツ其結果ヲ夫々2除スレバ

$xy=6,\quad yz=12,\quad zx=8,$

ヲ得，此二式ヲ相乘ジ殘ル一式ニテ除スレバ

$x^2=6\times8\div12=4\quad\therefore\ x=\pm2,$

從テ　$y=\pm3,\quad z=\pm4.$

8　$x(x+y+z)=6,$ ……………………(1)

$y(x+y+z)=12,$ ……………………(2)

$z(x+y+z)=18,$ ……………………(3)

（解）(1)(2)(3)ヲ加フレバ

$(x+y+z)(x+y+z)=36$

此各邊ヲ平方ニ開ケバ

$x+y+z=\pm6$

之ヲ以テ(1)(2)(3)ノ各式ヲ除シテ下式ヲ得，

$x=\pm1,\quad y=\pm2,\quad z=\pm3.$

方程式應用問題

1. 步行スレバ九時間ヲ要シ，人力車ニ乘レバ六時間ヲ要スベキ地ニ，七時間ニテ達セントスルニハ何時間人力車ニ乘ルベキカ.

（解） 人力車ニ乘ルベキ時間ヲ x 時トシ，全道程ヲ y 里トスレバ，步行一時間ノ速サハ $\frac{y}{9}$ 里，人力車一時間ノ速サハ $\frac{y}{6}$ 里ナリ，故ニ次ノ方程式ヲ得

$$\frac{y}{9}(7-x)+\frac{y}{6}x=y.$$

y ガ零ナラザル限リハ如何ナル數ニテモ可ナルヲ以テ y ヲ省約スレバ

$$\frac{1}{9}(7-x)+\frac{1}{6}x=1. \quad \therefore \quad x=4,$$ 答四時間

2. 長サ 153 碼ト長サ 135 碼トノ二列ノ汽車ガ相向テ進行スルトキハ相會シテヨリ離ルヽマデニ九秒ヲ要シ，同ジ方向ニ進行スルトキハ相會シテヨリ離ルヽマデニ一分十二秒ヲ要スト云フ，一秒時間ノ速サ各如何.

（解） 各一秒時間ノ速ヲ夫々 x 碼，y 碼トスレバ

$$\begin{cases} 9(x+y)=153+135, \cdots\cdots\cdots (1) \\ 72(x-y)=153+135. \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1) 及ビ(2)ノ各邊ヲ夫々 9 及ビ 72 除スレバ

$$x+y=32 \cdots\cdots\cdots (1')$$

$$x-y=4 \cdots\cdots\cdots (2')$$

之ヲ加ヘ，又相減ジテ $2x=36$, $2y=28$, ヲ得，之レヨリ $x=18$, $y=14$. 答 18碼, 14碼.

3. 19 斤ノ金ヲ水中ニテ測レバ一斤ヲ減少シ，十斤ノ銀ヲ水中ニテ測レバ一斤ヲ減少スベシ，空氣中ニテ106 斤ノ金銀混鎔物ヲ水中ニテ測レバ 99 斤トナルト云フ，各幾斤ヲ混鎔セルカ.

（解） 金ノ目方ヲ x 斤トスレバ，銀ハ $(106-x)$ 斤ナリ，

因テ $\frac{18}{19}x+\frac{9}{10}(106-x)=99$,

各項ヲ 9 除シテ分母ヲ拂ヘバ

$$20x+19\times106-19x=11\times10\times19,$$

$$\therefore \quad x=76,$$

答 金 76斤, 銀 30斤.

4. 甲合金ハ金 36 匁, 銀 54匁ヨリ成ル; 乙合金ハ金 27 匁, 銀 9 匁ヨリ成ル. 今此兩合金ヨリ金銀各 21 匁ヲ含有セル新合金ヲ造ラントス，甲乙兩合金各幾何ヲ要スルカ.

（解）新合金42匁ヲ得ルタメニ甲合金 x 匁ヲ取レバ，乙合金ハ $42-x$ 匁ヲ取ルコトヽナル，而シテ甲乙両合金ヨリ取リタルモノヽ中ニ在ル金ノ目方ハ

甲合金 x 匁ノ中ニ　　$x\times\dfrac{36}{36+54}=\dfrac{2}{5}x$ 匁

乙合金 $42-x$ 匁ノ中ニ

$$(42-x)\times\frac{27}{27+9}=\frac{3}{4}(42-x)\ \text{匁}$$

是等ノ目方ノ和ハ新合金ノ中ニアル金ノ目方ニ等シキヲ以テ次ノ方程式ヲ得，

$$\tfrac{2}{5}x+\tfrac{3}{4}(42-x)=21,$$

分母ヲ拂フテ　$8x+15(42-x)=420,$

$$\therefore\quad x=30,$$

因テ甲ヨリ 30 匁，乙ヨリ $42-30=12$ 匁ヲ取ルベシ.

5. 一時間 10 哩ノ速サヲ以テ鐵道線路ニ沿ヒテ騎行スル人アリ，初メ一時間 50 哩ヲ走ル急行列車ニ追越サレ其後又一時間 40 哩ヲ走ル普通列車ニ出會シテ各列車ノ全長ガ此人ノ傍ヲ通過スルニ要セシ時間ハ同一ナリト云フ，各列車ノ長サノ比ヲ求ム.

（解）急行列車，普通列車ノ長サヲ夫々 x 哩 y 哩トスレバ急行列車ガ人ノ傍ヲ通過スルニ要スル時間ハ $x/(50-10)$ 時，又普通列車ガ人ニ出會フテ其傍ヲ通過スルニハ $y/(40+10)$ 時ヲ要ス，因テ次ノ方程式ヲ得，

$$\frac{x}{50-10}=\frac{y}{40+10}\quad\therefore\quad\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$$

故ニ両列車ノ長サノ比ハ　4：5　ナリ.

6. 混合酒若干升アリ，其全量ノ $\frac{7}{10}$ ハ純酒ナリ；今之ヨリ九升汲ミ出シ同量ノ水ヲ以テ補フトキハ純酒ハ全量ノ $\frac{7}{12}$ ニ當ルト云フ，全量幾何ナルカ.

（解）混合酒ノ全量ヲ　x　升トス，

九升汲ミ出シタル殘量ノ中ニハ純酒 $\frac{7}{10}(x-9)$ ヲ含ムコトヲ知ル；又是レハ全量ノ $\frac{7}{12}$ ニ當ルト云フヲ以テ，次ノ方程式ヲ得ベシ

$$\tfrac{7}{10}(x-9)=\tfrac{7}{12}x,\qquad\therefore\quad x=54,$$

因テ混合酒ノ全量ハ　五斗四升ナリ.

7. 二個ノ燭火A及ビBアリ，其距離三尺ニシテAノ光度ハBノ光度ノ四倍ナリ，今A，Bヲ連結セル直線上如何ナル處ニ障子ヲ置ケバ此障子ノA，Bヨリ受クル光量相等シキカ．但シ障子ノ受クル光量ハ燭火ノ光度ニ正比シ距離ノ平方ニ逆比スルナリ.

（解）AヨリBノ方ニ計リテ所要ノ點迄ノ距離ヲ x 尺トスレバ，x ガ如何ナル値ナルモAヨリ此點ガ受

クル光量ト　Bヨリ受クル光量トハ題言ニ因テ次ノ如ク比例ヲナス,

$$x^2 : (3-x)^2 = 1 : 4$$

$$\therefore \quad 4(3-x)^2 = x^2,$$

各邊ヲ平方ニ開キテ,

$$2(3-x) = \pm x$$

之ヲ解キテ　$x=2$, 或ハ　$x=6$.

因テAヨリBノ方ヘ計リテ二尺或ハ六尺ノ處ニ障子ヲ置ケバ等シキ光量ヲ受クベシ.

8. 正午ニ甲府ヲ發スル普通列車ト, 午後六時ニ同所ヲ發スル急行列車トガ, 翌朝同時ニ乙府ニ到着スルトキハ急行列車ノ毎時ノ速度如何. 但シ甲乙兩府ノ距離ハ 320 哩ニシテ急行列車ハ普通列車ヨリ毎時平均 12 哩早シトス

(解) 急行列車ノ毎時ノ速度ヲ x 哩トスレバ, 普通列車ノ毎時ノ速度ハ $x-12$ 哩ナリ, 兩列車ガ甲地ヨリ乙地ニ達スル迄ニ要スル時間ハ夫々 $320/x$, $320/(x-12)$ ニシテ其差六時間ナリ; 因テ次ノ方程式ヲ得,

$$\frac{320}{x} = \frac{320}{x-12} - 6,$$

方程式ノ兩邊ニ $x(x-12)$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂ヒ, 且ツ簡單ニシテ　$x^2-12x-640=0$, $\therefore$ $x=32$, 或ハ -20,

此 -20 ハ明カニ問題ノ答トスル能ハズ, 而シテ 32 ハ正數ニシテ 12 ヨリ大キク, 且ツ分母ヲ拂フタメニ方程式ノ兩邊ニ掛ケタル式ヲ零ナラシメザルヲ以テ, 問題ノ答トシテ採用スルヲ得, 因テ急行列車ノ毎時ノ速度ハ三十二哩ナリ.

9. 鐵棒アリ其重量 36 斤ナリ, 若シ之ヲ一尺延長スルトキハ一尺ニ付重量半斤ヲ減ズト云フ; 棒ノ長サ幾何ナルカ.

(解) 所要ノ棒ノ長サヲ x 尺トスレバ, 元ノ一尺ノ重量ハ $36/x$ ニシテ, 延バシタルトキノ一尺ノ重量ハ $36/(x+1)$ ナリ. 而シテ後ノ一尺ハ重量半斤少キヲ以テ方程式 $\frac{36}{x} = \frac{36}{x+1} + \frac{1}{2}$. 即チ $x^2+x-72=0$,

ヲ解キテ $x=8$ 或ハ $x=-9$, ヲ得

此 -9 ハ問題ニ適セザルヲ以テ之ヲ棄テ. 八尺ヲ所要ノ棒ノ長サトス.

○10. 180 哩隔タリタル甲乙兩驛ヨリ二ツノ列車相向テ同時ニ出發シ, 其途中ニテ出會ヒタル後, 甲驛ヲ發シタル列車ハ二時間ヲ經テ, 乙驛ヲ發シタル列車ハ四時三十分間ヲ經テソレゾレ乙驛及ビ甲驛ニ達シタリ, 各ノ列車毎時平均何哩進行シタルカ.

（解）甲驛ヨリ二車ノ相會セシ點マデノ距離ヲ x 哩トスレバ，此會點ヨリ乙驛マデノ距離ハ $180-x$ 哩ナリ；而シテ甲ヨリセル列車ハ $(180-x)$ 哩ヲ二間ニテ達シタルガ故ニ一時間ノ速サハ $(180-x)/2$ 哩ニシテ；乙ヨリセル列車ハ x 哩ヲ四時間半ニテ達シタルガ故ニ一時間ノ速サハ $x/4\frac{1}{2}$ 哩ナリ．又各出發セシヨリ相會スル迄ノ時間ハ相等シキヲ以テ次ノ方程式ヲ得，

$$\frac{x}{\frac{180-x}{2}}=\frac{180-x}{\frac{x}{4\frac{1}{2}}},$$

即チ　$$\frac{x^2}{4\frac{1}{2}}=\frac{(180-x)^2}{2},$$

即チ　$$\frac{4}{9}x^2=(180-x)^2,$$

両邊ヲ平方ニ開キテ　$\frac{2}{3}x=\pm(180-x)$

$\therefore$　$x=108$, 或ハ $x=540$,

此 540 ハ全程 180 ヨリ大ナルヲ以テ採ルヲ得ズ，

因テ $x=108$ 哩トス，從テ每時ノ速サハ

甲ヨリスルモノ　$(180-108)\div 2=36$ 哩，

乙ヨリスルモノ　$108\div 4\frac{1}{2}=24$ 哩．

比例　分數定理

1.　$a:b=c:d$ ナル片，

$ad=bc.$

又 $a:c=b:d.$

又 $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$$

又 $$\begin{cases} ma:mb=nc:nd; \\ ma:nb=mc:nd. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>=<b \text{ ナルニ應テ，} & c>=<d; \\ a>=<c \text{ ……………} & b>=<d. \end{cases}$$

2.　$a:b=b:c=c:d$ ナル片，

$$\begin{cases} a:c=a^2:b^2, \\ a:d=a^3:b^3. \end{cases}$$ ナリ．

注意　比例ハ定理ヲ暗記スルニ依テ始メテ比例ノ効能ヲ生ズ；若シ此理ヲ知ラントナラバ方程式變化ヲ知レバ可ナリ；敢テ比例ヲ學ブニ及バズ．

之ヲ要スルニ比例ハ善ク其定理ヲ暗記シテ方程式變化ノ上ニ迄モ之ヲ應用シ得ル樣ニ心掛ケザルベカラズ．

上ニ示シタル關係ハ少クモ忘ルベカラザルモノナリ，之ヲ忘ルレバ比例ナキナリ．

1. $a:b=c:d$ ナル時，次式ヲ証セヨ．

$a^2+ab+b^2:c^2+cd+d^2=a^2-ab+b^2:c^2-cd+d^2.$

（解）$a:b=c:d.$ ヨリ次式ヲ得．

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

依テ

$$\frac{a^2}{c^2}=\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{a^2+ab+b^2}{c^2+cd+d^2}=\frac{a^2-ab+b^2}{c^2-cd+d^2}.$$

故ニ所題ノ如シ．

2. $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$ ナラバ，$x+y+z=0$ ナリ．

（解）$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=\lambda$ トスレバ，

$x=(a-b)\lambda,\quad y=(b-c)\lambda,\quad z=(c-a)\lambda,$

邊々相加フレバ $x+y+z=0$ ヲ得．

3. $x:a=y:b$ ナラバ，$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}=\frac{(x+y)^3}{(a+b)^2}$ ナリ．

（解）$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\lambda$ トスレバ，次式ヲ得

$x=a\lambda,\quad y=b\lambda.$

然ルトキ $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}=\frac{a^3\lambda^3}{a^2}+\frac{b^3\lambda^3}{b^2}\equiv(a+b)\lambda^3.$

又 $\frac{(x+y)^3}{(a+b)^2}=\frac{(a\lambda+b\lambda)^3}{(a+b)^2}\equiv(a+b)\lambda^3.$

依テ題言ノ如シ．

4 若シ $\frac{2b+2c-a}{x}=\frac{2c+2a-b}{y}=\frac{2a+2b-c}{z}$

ナレバ

$$\frac{2y+2z-x}{a}=\frac{2z+2x-y}{b}=\frac{2x+2y-z}{c}$$

ナリ其証ヲ問フ．

（解）與ヘラレタル三ツノ相等シキ分數ノ両項ニ順次 2, 2, −1 ヲ乗ジ，分子分母ヲ別々ニ加ヘタルモノヲ分子分母トスル分數ヲ作レバ此分數ハ與ヘラレタル分數ト相等シ

$$\frac{2(2b+2c-a)+2(2c+2a-b)-(2a+2b-c)}{2x+2y-z}$$

簡單ニシテ $\frac{9c}{2x+2y-z}$

同様ニシテ順次ニ −1, 2, 2 及ビ 2, −1, 2 ヲ乗ズルコトニ依テ得ベキ分數

$$\frac{9a}{2y+2z-x},\quad \frac{9b}{2z+2x-y},$$

ハ與ヘラレタル分數ニ等シ．同テ

$$\frac{9a}{2y+2z-x}=\frac{9b}{2z+2x-y}=\frac{9c}{2x+2y-z}$$

指數及ビ不盡數

指數原則 I $a^m\times a^n=a^{m+n}$, II $a^m\div a^n=a^{m-n}$

III $(a^m)^n=a^{mn}$ IV. $(ab)^n=a^nb^n$,

注意 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$, $a^0=1$,

1. $\frac{\{(a^m)^{\frac{1}{r}}(a^{\frac{q}{n}})\}^{nr}}{\{\sqrt[q]{b^n}(\sqrt[m]{b^r})\}^{mq}}\div\{(\frac{a}{b})^q\}^r$ ヲ簡單ニセヨ.

(解) 與ヘラレタル式$=\frac{\left(a^{\frac{m}{r}}a^{\frac{q}{n}}\right)^{nr}}{\left(b^{\frac{n}{q}}b^{\frac{r}{m}}\right)^{mq}}\div\frac{a^{qr}}{b^{qr}}$

$$=\frac{a^{mn}a^{qr}}{b^{mn}b^{qr}}\div\frac{a^{qr}}{b^{qr}}=\frac{a^{mn}}{b^{mn}}=(\frac{a}{b})^{mn}$$

2. $\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$, ヲ簡單ニセヨ.

(解) 與ヘラレタル式

$$=\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}+(ab-a^{-1}b^{-1})(b-b^{-1})}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}$$

$$=\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}+a^2b^2-a^2-b^2+1-1+a^{-2}+b^{-2}-a^{-2}b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}$$

$$=\frac{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}=1,$$

3. $\frac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$ ヲ簡單ニセヨ.

解 $(6-2\sqrt{7})(11+4\sqrt{7})=10+2\sqrt{7}=2(5+\sqrt{7})$,

$(7-2\sqrt{5})(31+13\sqrt{5})=87+29\sqrt{5}=29(3+\sqrt{5})$

ナルヲ以テ

與ヘラレタル式 $=\frac{29(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{7})}{2(5+\sqrt{7})(3+\sqrt{5})}=\frac{29}{2}=14\frac{1}{2}$:

4、 $\sqrt{11}$ ト $\sqrt[3]{37}$ トハ孰レガ大ナルカ.

(解) 同ジ根指數ヲ有セシムル爲ニ $\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}$ ナル定理ニヨリ二ツノ與ヘラレタル不盡根數ニ適用スレバ次ノ如ク書クコトヲ得

$$\sqrt{11}=\sqrt[6]{11^3}=\sqrt[6]{1331},$$

$$\sqrt[3]{37}=\sqrt[6]{37^2}=\sqrt[6]{1369},$$

故ニ明カニ $\sqrt{11}<\sqrt[3]{37}$.

5. $\sqrt{3}=1.73205$ ヲ與ヘテ $\frac{6}{\sqrt{3}-1}$ ヲ小數點以下五位マデ計算セヨ.

(解) $\frac{6}{\sqrt{3}-1}=\frac{6(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=3(\sqrt{3}+1)$

$$=3\times2.73205=8.19615.$$

6. $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ ヲ最簡ニセヨ

(解)與ヘラレタル式ノ第一，第二ノ根號內ナル分數

ノ両項ニ夫々消根因數 $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ ヲ乘ズレバ

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}+\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}}+\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}}=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4,$$

但シ根號ハ正數ヲ表ハスモノトシ, 正負二ツアルベキ根ノ内正號ノモノヽミヲ採レリ.

7. 方程式 $5x^2+7x-3=0$ ノ根ヲ小數點下三位マデ計算セヨ. 又此方程式ヲ解カズシテ次ノ三ツノモノヲ計算セヨ

(A) 二根ノ和, (B) 二根ノ積, (C) 二根ノ平方ノ和.

(解) 此方程式ノ根ヲ求ムレバ

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2+4\times5\times3}}{2\times5}=\frac{-7\pm\sqrt{109}}{10}$$

$$=-0.7\pm\sqrt{\frac{109}{100}}=-0.7\pm\sqrt{1.09}$$

然ルニ $\sqrt{1.09}=1.044$ (不足ナル近似數)

$\therefore\ x=-0.7\pm1.044$, $\therefore\ x_1=0.344$, $x_2=-1.744$,

又 方程式ヲ解カズシテ次ノ關係ヲ知ルコトヲ得

(A) $x_1+x_2=-\frac{7}{5}=-1.4$,

(B) $x_1x_2=-\frac{3}{5}=-0.6$,

(C) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$=(-1.4)^2-(-0.6)\times2=3.16$.

8. $11+2\sqrt{30}$ ノ平方根ヲ求メヨ.

(解) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ トシテ両邊ヲ平方スレバ $11+2\sqrt{30}=x+y+2\sqrt{xy}$

$\therefore$ $x+y=11$, $xy=30$,

觀察ニ依リ $x=6$, $y=5$, ヲ得

因テ求ムル所ノ平方根ハ $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ ナリ.

9. $\sqrt{5}=2.23607$, 及ビ $\sqrt{2}=1.41421$, ヲ與ヘテ次式ノ値ヲ求ム,

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}}.$$

(解) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}}=x$ トス,

各邊ヲ平方スレバ

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{\frac{5-3}{4}}=x^2,$$

即チ $\sqrt{5}-\sqrt{2}=x^2$,

即チ $2.23607-1.41421=x^2$

$\therefore\ x=\sqrt{.82186}=.906+$.

等差級數

注意　級數ノ試験問題ガ出ルトスレバ算術級數ナレバ應用問題，幾何級數ナレバ式題ガ出ルガ常ナリ．

$$l=a+(n-1)d,$$

$$s=\frac{n}{2}(a+l),\quad 或ハ\quad s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.$$

1. 8, 16, 24, 32……………ナル級數ノ初項ヨリ任意ノ項迄ノ和ニ 1 ヲ加ヘタルモノハ或奇數ノ平方ニ等シキヿヲ証セヨ．

（解）任意ノ項數ヲ n トシ其總和ヲ s トスレバ

$$s=8+16+24+32+\cdots\cdots n項マデ$$

$$=\frac{n}{2}\{2\times8+(n-1)\times8\}=4n^2+4n$$

$\therefore\ s+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$，即チ　$(\text{奇數})^2$．

2, 甲乙ノ旅人アリ甲ハ毎日 20 哩ヲ行ク，今甲出發ノ後三日ヲ經テ，乙之ヲ追フニ初日ニハ八哩ヲ行キ次日ヨリハ毎日四哩ツヽヲ増加シテ行キ若干日ノ終ニ丁度甲ニ追付ケリト云フ．其日數如何

（解）其求ムル日數ヲ n トスレバ，

$$\frac{n}{2}\{2\times8+(n-1)\times4\}=20(n+3)$$

之ヲ解キテ　$n=10$　ヲ得．

3. 甲乙ノ二人同時ニ 343 哩隔リタル兩地ヨリ相向テ出立セリ而シテ各毎日ノ行程ハ甲ハ二哩ヅヽ増加シ，乙ハ五哩ヅヽ減少セリ，此ノ如クニシテ兩人會合シタル日ハ各 20 哩ヲ歩ミシト云フ，幾日ニシテ相會セシヤ，

（解）求ムル日數ヲ n トスレバ，

甲ノ歩ミタル哩數ハ　$\frac{n}{2}\{2\times20+(n-1)(-2)\}$

乙……………………　$\frac{n}{2}\{2\times20+(n-1)\times5\}$

甲乙ノ行程ヲ加ヘテ

$$\frac{n}{2}(77+3n)=343.$$

之ヲ解キテ　$n=7$　或ハ　$n=-\frac{98}{3}$　ヲ得．

由テ求ムル日數ハ　七日．

4 連續自然數ノ $2n+1$ 項ノ和ハ恒ニ $2n+1$ ニテ割リ切ルヽコトヲ得ベシ，之ヲ証セ．

（解）初項ヲ a トスレバ $2n+1$ 項ノ總和ハ

$$S=\frac{2n+1}{2}\{2a+(2n+1-1)\times1\},$$

$$=\frac{2n+1}{2}(2a+2n)=(2n+1)(a+n).$$

是レ總和ハ $2n+1$ ノ倍數ナルガ故ニ恒ニ $2n+1$ ニテ整除シ得ルコト明カナリ．

等比級數

$l=ar^{n-1}$　　　　$r<1,\ n=\infty$ ナル時，

$s=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，　　　$s=\dfrac{a}{1-r}$.

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}+\cdots\cdots$20項ノ和ヲ求ム.

（解） 公比ハ

$\dfrac{\sqrt{3}^2}{\sqrt{3}+2}\div\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ 即チ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}\times\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2}$,

尙ホ分母子ニ $\sqrt{3}-2$ ヲ乘ジテ分母ヲ有理數ニ化スレバ $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2}\times\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{3-2}=1-\sqrt{3}$, ヲ得.

故ニ總和ヲ求ムル公式ヨリ

$$s=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\left\{1-(1-\sqrt{3})^{20}\right\}}{1-(1-\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}\left\{1-(1-\sqrt{3})^{20}\right\},$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\left\{1-(1-\sqrt{3})^{20}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left\{1-(1-\sqrt{3})^{20}\right\}.$$

2. $\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5^2}+\dfrac{2}{5^3}+\dfrac{3}{5^4}+\cdots\cdots\cdots$無窮項ノ和ヲ求ム.

（解） 此級數ヲ初ヨリ二項ヅヽ括弧ニ入ルヽ㕝ハ次ノ如キ等比級數ヲナス，即チ

$$\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}\right)+\left(\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}\right)+\cdots=\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}\right)+\frac{1}{5^2}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}\right)+\cdots$$

即チ 初項ハ$\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{25}\right)$，公比ハ $\frac{1}{25}$ ナルヲ以テ，無窮級數ノ總和ヲ求ムル公式 $s=\dfrac{a}{1-r}$ ニヨリ

求ムル所ノ總和ハ $\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{3}{25}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{13}{24}$. ナリ.

3 等比級數ノ n 項ノ和ヲ s_n トスル㕝

$s_1+s_2+s_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+s_n$ 　ノ和ヲ求ム.

（解） 初項ヲ a，公比ヲ r トスル㕝ハ

$$s_1=\frac{a(r-1)}{r-1},\quad s_2=\frac{a(r^2-1)}{r-1},\cdots\cdots s_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1},$$

今是等 n 項ノ和ヲ求ルニ 各項皆 $\dfrac{a}{r-1}$ ヲ有スルヲ以テ之ヲ括リ $(r-1)$，(r^2-1)，等ノ和ヲ求レバヨシ，故ニ

$$s_1+s_2+s_3+\cdots\cdots+s_n=\frac{a}{r-1}(r+r^2+r^3+\cdots+r^n-n),$$

$$=\frac{a}{r-1}\left\{\frac{r(r^n-1)}{r-1}\right\},$$ ヲ答トス.

4 第 m 項ハ $(-1)^m a^{4m}$ ナル所ノ級數 n 項ノ和ヲ求ム.

（解） 第 m 項ガ $(-1)^m a^{4m}$ ナルヲ以テ，

第一項$=(-1)^1a^{4\times1}=-a^4$,

第二項$=(-1)^2a^{4\times2}=+a^8$

第三項$=(-1)^3a^{4\times3}=-a^{12}$, ……………………

故ニ 公比$=a^8\div(-a^4)=-a^4$，因テ所要ノ總和ハ

$-a^4\{(-a^4)^n-1\}/(-a^4-1)=a^4\{(-a^4)^n-1\}/(a^4+1)$.

5. 等差級數ヲナス四數アリ此等ノ數ニ順次ニ一，一，三及ビ九ヲ加フレバ等比級數ヲナスト云フ，其數如何.

（解） 四數ヲ $a,\ a+d,\ a+2d,\ d+3d,$ トナスキハ次ノ方程式ヲ得，

$$\frac{a+1}{a+d+1}=\frac{a+d+1}{a+2d+3}=\frac{a+2d+3}{a+3d+9}$$

同値分數ノ理ニ由リテ，其分數ノ差ヲ分子トシ，分母ノ差ヲ分母トシタル分數ヲ作レバ

$$\frac{(a+1)-(a+d+1)}{(a+d+1)-(a+2d+3)}=\frac{(a+d+1)-(a+2d+3)}{(a+2d+3)-(a+3d+9)},$$

即チ $\qquad \dfrac{d}{d+2}=\dfrac{d+2}{d+6},$ 同樣ニシテ $\quad =\dfrac{1}{2},$

$$2d=d+2.$$

$$\therefore \quad d=2,$$

之ヲ初ノ式ニ換ヘテ

$\dfrac{a+1}{a+3}=\dfrac{a+3}{a+7},$ 同樣ニシテ $\quad =\dfrac{1}{2},$

$$2a+2=a+3,$$

$$\therefore \quad a=1,$$

故ニ求ムル所ノ四數ハ 1, 3, 5, 7.

6. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots\cdots$ 無限項ノ和ヲ求メヨ.

（解） $s=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\frac{1}{2}s=\qquad \frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ (—

$\frac{1}{2}s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1, \qquad \therefore\ s=2.$$

7. 年利率ヲ i トシ金 b 圓ヲ預ケ更ニ今後滿一年每ニ金 a 圓宛ヲ n 回預ルキハ n 年ノ後ニ元利合計幾何ナルカ

（解） 年利率ヲ i，最初 b 圓ヲ預ケ入レアルニヨリ n ケ年ノ後ニハ之ヨリ生ズル元利合計ハ

$$b(1+i)^n$$

第一年目ノ終リニ預ケ入レタル a 圓ハ夫ヨリ $n-1$ 年後ニハ $\quad a(1+i)^{n-1}$ 以下之ニ準ズ，故ニカク每年ノ末ニ a 圓ヅヽ預ケ入レタル金高ノ最初ヨリ n 年後ノ元利合計ハ次ノ如シ

$$a(1+i)^{n-1}+a(1+i)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a(1+i)$$

$$=a(1+i)\{(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+1\},$$

$$=a(1+i)\frac{1-(1+i)^{n-1}}{1-(1+i)}=a(1+i)\,\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i}$$

因テ所求ノ元利合計ハ次ノ如シ

$$b(1+i)^n+a(1+i)\,\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i}.$$

順　　列

$$ {}_n\mathbf{P}_r = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1), $$

$$ {}_n\mathbf{P}_n = |\underline{n}\,. $$

1　5, 3, 6, 4, 9 ナル五ツノ數字ヲ悉ク採リテ幾何ノ奇數ヲ作リ得ベキカ.

（解）此五ツノ數字ヲ悉ク用ヒテ作リ得ベキ奇數ノ末位ノ數字ハ 5, 3, 及ビ 9 ナリ, 例ヘバ 5 ヲ末位ニ有スル數ハ殘リノ四個ヲ悉ク取リテ作リ得ベキ順列ノ數 $|\underline{4}$ ニ等シ, 故ニ求ムル所ノ數ハ

$$ |\underline{4}\times 3 = 4\times 3\times 2\times 1\times 3 = 72. $$

2　10 人ヲ一列ニ坐セシムルニ其中3人ハ仲惡ルニテ隣席スルヲ得ザルモノトス, 其坐リ方幾種アルカ.

解　其仲惡ル 3 人ヲ除キ, 殘リ 7 人ノ坐スベキ法ハ　${}_7\mathrm{P}_7$ ニシテ,

其 3 人ガ此 7 人ノ傍ニ坐スベキ位置ハ其一順列ニ付 8 ケ處アリ, 故ニ其 3 人ノ坐スベキ種々ノ法ハ

$$ {}_8\mathrm{P}_3 \quad トス, $$

因テ前ノモノト結ビ付ケテ

$$ {}_7\mathrm{P}_7\times{}_8\mathrm{P}_3 = |\underline{7}\times 8\times 7\times 6 = 42\,|\underline{8} $$

3. 二個ノ皿ヲ有スル秤ニ於テ五個ノ異リタル分銅ヲ有スル片ハ幾種ノ重サヲ計リ得ベキカ.

（解）五個ノ分銅ヲ別々ニ使用スル片ハ其仕方ハ ${}_5\mathrm{P}_1$ ニシテ, 五個ノ中二個ヅヽ用ル片ハ其仕方ハ ${}_5\mathrm{P}_2$ ナリ, 其他之ニ準ズ, 故ニ相異リタル重サハ

$$ {}_5\mathrm{P}_1+{}_5\mathrm{P}_2+{}_5\mathrm{P}_3+{}_5\mathrm{P}_4+{}_5\mathrm{P}_5=325, $$

卽チ, 三百二十五種アリ.

4. 四人ガ圓坐スル仕方ハ幾通アルカ.

（解）坐席ニ特別ノ位置ナク, 唯其廻リ順ニノミ關スルモノトスレバ, 其内ノ一人ハ或場所ニ着席シタルマヽニテ他ノ三人ヲ種々ニ坐セシムレバ可ナルコトナル. 由テ其變數ハ

$$ {}_3\mathrm{P}_3 = 6. $$

5. ちちさははさ ナル文字ヲ種々ニ並ベ變ヘナバ幾種ノ語ヲ得ルカ.

（解）此種ノ順列ノ公式ニ依リテ直ニ次ノ答ヲ得.

$$ \frac{|\underline{6}}{(|\underline{2})^3} = 90. $$

15 632

20

36

組　　　合

$$ {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}} $$

$$ =\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} \qquad {}_nC_r={}_nC_{n-r}. $$

1. 三十人ノ議員ヨリ一人ノ議長ト五人ノ常置委員トヲ撰擧スル仕方ハ幾種アルカ.

（解） 30 人ノ中ヨリ議長, 委員合セテ六人丈ケ撰擧スル方法ノ數ハ ${}_{30}C_6$ ナリ; 而シテ是等ノ組合セノ各ニ就テ其組ヨリ議長一人ヲ撰ム方法ノ數ハ ${}_6C_1$ ナリ, 故ニ ${}_{30}C_6$ 組ニ就テハ

$$ {}_6C_1\times{}_{30}C_6=3562650 \text{ ナリ}. $$

2. 十人ノ中ヨリ五人ヲ撰ブニハ幾通リノ撰方アルカ, 但シ或二人ハ同時ニ撰ニ入ルヿ能ハザルモノトス.

（解） 10 ヨリ 5 人ヲ撰ブ仕方ハ ${}_{10}C_5$ ナリ, 然ルニ或ル特別ナル二人ガ相共ニ同時ニ此撰ニ入ルベキ數ハ, 先ヅ此二人ヲ取リ除ケ置キテ殘ル八人ヲ三人ヅヽ組合セテソノ各組合セニ前ノ特別ナル二人ヲ夫々加フルニアリ從テ此數ハ ${}_8C_3$ ナリ, 故ニ所要ノ撰方ハ

$$ {}_{10}C_5-{}_8C_3=\frac{\underline{|10}}{\underline{|5}\,\underline{|5}}-\frac{\underline{|8}}{\underline{|3}\,\underline{|5}}=252-56=196. $$

3. 母音子音各三字ヲ以テ六字ノ語ヲ綴ルニ母音ハ恒ニ偶位ニアル樣ニナストキハ幾種ノ語ヲ得ルカ. 又若シ此六字ヲ以テ子音母音各二字ヨリ成ル四字ノ語ヲ綴ラバ其數如何.

（解） 母音三字ヲ偶位ニ置ク仕方ハ ${}_3P_3$ アリ; 又子音三字ヲ奇位ニ置ク仕方モ ${}_3P_3$ アリ. 故ニ之ヲ合セテ六字ヲ所要ノ如ク置ク仕方ハ

$$ {}_3P_3\times{}_3P_3=\underline{|3}\times\underline{|3}=36. $$

又母音三字ノ中ヨリ二字ヅヽ取ル仕方ハ ${}_3C_2$

同樣ニ子音 ……… ……………………………… ${}_3C_2$

故ニ母音二字ト子音二字ト組ミ合セル仕方ハ

$$ {}_3C_2\times{}_3C_2 $$

ニシテ, 之ニ順序ヲ與ヘテ種々ニ順列スレバ

$$ {}_3C_2\times{}_3C_2\times{}_4P_4=216. $$

---

4. 正十角形ノ對角線ハ幾筋アルカ.

（解） 正十角形ノ角頂ハ 10 個アリ, 今若シ之ヲ二ツ宛結ベハ ${}_{10}C_2$ アリ; 而テ其中ノ十筋ハ邊ト一致スルヲ以テ對角線ノ數ハ ${}_{10}C_2-10=45-10=35$ 筋.

注意 順列或ハ組合セノ試驗問題ガ出タリトスレバ, 必ズ應用問題ニ限ル; 玆ニハ記憶スベキ大切ノ問題ノミヲ揭ゲト雖圧遑アラバ此他ノ問題モ涉獵スベシ.

二項法

$(a+b)^n=a^n+{}_nc_1a^{n-1}b+{}_nc_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$
$+{}_nc_ra^{n-r}b^r\cdots\cdots+{}_nc_{n-1}ab^{n-1}+{}_nc_nb^n$

$(a+b)^n$ ノ展開ニ於ケル第 $r+1$ 番ノ項ハ ${}_nc_ra^{n-r}b^r$ ナリ.

1 $(1-x)^{22}$ ノ展開ニ於テ第二十一項ヲ求ム.

(解) 第 $r+1$ 番目ノ項ハ ${}_nc_ra^{n-r}b^r$ ナルヲ以テ所要ノ項ハ

$${}_{22}c_{20}1^{22-20}(-x)^{20}=\frac{22\times21}{\underline{|2}}\times1^2\times x^{20}=231x^{20}.$$

2 $(1+x)^{10}$ ノ展開ニ於テ中央ノ項ヲ求ム.

(解) 此展開セル項數ハ $10+1=11$ ナリ, 因テ中央ノ項ハ $(11+1)\div2=6$, 即チ六番目ナリ 故ニ, 所要ノ項ハ ${}_{10}c_5.1^{10-5}x^5=\frac{\underline{|10}}{\underline{|5}\,\underline{|5}}x^5=252x^5$ ナリ.

3 $(1+x)^{p+q}$ ニ於テ x^p 及ビ x^q ノ係數ハ相等シキコトヲ證セヨ. 但シ p 及ビ q ハ整數トス.

(解) x^p ノ有スル係數ハ ${}_{p+q}C_p$ ニシテ, x^q ノ有スル係數ハ ${}_{p+q}c_q$ ナリ, 而シテ組合セノ定理ニ據テ ${}_{p+q}C_p={}_{p+q}C_q$ ナリ,
故ニ x^p 及ビ x^q ノ係數ハ相等シキナリ.

4 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ ノ展開中 x^2 ヲ含ム項ヲ求ム.

(解) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ ノ展開中 x^2 ヲ含ム項ハ $x^5\left(\frac{1}{x}\right)^3$ ノ項ニ相當ス即チ第四番目ノ項ナリ, 故ニ此係數ハ ${}_8c_3=\frac{8.7.6}{3.2.1}=56$, 故ニ求ムル所ノ項ハ $56x^2$ ナリ.

5 $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$ ノ展開ニ於テ x^r ノ係數ヲ求ム.

(解) 先ヅ求ムル所ノ x^r ハ第 $p+1$ 番目ニ起ルモノト假定スレバ此 $p+1$ 番目ノ項ハ次ノ如シ,

$${}_nC_p(x^2)^{n-p}\left(\frac{1}{x^3}\right)^p={}_nC_px^{2n-5p}$$

然ルニ此項ハ x^r ナルヲ以テ $2n-5p=r$ ナリ,
故ニ $P=\frac{2n-r}{5}$ ナルベシ, 因テ求ムル所ノ係數ハ

$${}_nc_p=\frac{\underline{|n}}{\underline{|\tfrac{1}{5}(2n-r)}\,\underline{|\tfrac{1}{5}(3n+r)}}$$ トス

但シ $\frac{2n-r}{5}$ ガ正整數ナラザレバ展開中 x^r ヲ含ム項ナシ.

對・數

カ

對數原理　I　$log_a(M\times_{\div}N)=log_aM\pm log_aN$,

II　$log_aN^k=k\,log_aN$,

III　$log_aN=\dfrac{1}{log_ba}log_bN$.

注意　(1)　$log_aa=1$,　(2)　$log_a1=0$,

(3)　$log_a0=\infty$.

カ

1　底4及ビ $2\sqrt{2}$ ニ於ケル 128 ノ對數ヲ求ム.

(解)$128=2^7=(2^2)^{\frac{7}{2}}=4^{\frac{7}{2}}$,　$\therefore\ log_4128=\frac{7}{2}$.

又　$128=2^7=(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{14}{3}}=(2\sqrt{2})^{\frac{14}{3}}$.

$\therefore\ log_{2\sqrt{2}}128=\frac{14}{3}$

2　底 10 ニ於ケル .01 ノ對數及ビ底 $\frac{1}{3}$ ニ於ケル $\sqrt{27}$ ノ對數ヲ求ム.

(解)$log_{10}.01=log_{10}\frac{1}{100}=log_{10}10^{-2}=-2$

又　$log_{\frac{1}{3}}\sqrt{27}=log_{\frac{1}{3}}(3^{\frac{3}{2}})=log_{\frac{1}{3}}(3^{-1})^{-\frac{3}{2}}=log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^{-\frac{3}{2}}$
$=-\dfrac{2}{3}$.

3　$2^{log_4x}=\sqrt{x}$　ヲ證セ

(解)　$2^{log_4x}=k$　トスレバ　$log_4x\,log_42=log_4k$,
即チ $log_4x\,log_4(4)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}log_4x=log_4x^{\frac{1}{2}}=log_4k$,　$\therefore\sqrt{x}=k$.

4　$log2=.30103$ ヲ與ヘテ $log\sqrt[3]{6.25}$　ヲ求ム.

(解)$log\sqrt[3]{6.25}=\dfrac{1}{3}log\dfrac{100}{2^4}=\dfrac{1}{3}(2-4\times.30103)$
$=.26529$.

5　$6\,log\frac{2}{3}-4\,log\,1\frac{1}{9}+2\,log\frac{25}{6}$　ノ値ヲ計算セヨ.

(解)與ヘラレタル式＝　$log\{(\frac{2}{3})^6\div(\frac{10}{9})^4\times(\frac{25}{6})^2\}$
$=log1=0$.

6　$log_{10}8062$　及ビ　log_68062　ノ指標ヲ求ム.

(解)$10^3<8062<10^4$,　$\therefore$ 指標ハ　3　ナリ,

又　$6^5<8062<6^6$　$\therefore$ 指標ハ　5　ナリ.

7　$log_{10}.00023$　及ビ　$log_{12}.00023$　ノ指標ヲ求ム.

(解)$10^{-4}<.00023<10^{-3}$,　$12^{-4}<.00023<12^{-3}$

$\therefore$ 指標-4.

8　.001　ヲ底數トセル　.0001　ノ對數ヲ求ム.

(解)$log_{.001}.0001=\dfrac{log_{10}.0001}{log_{10}.001}=\dfrac{-4}{-3}=\dfrac{4}{3}$.

指數方程式

1　$4^x-2^{x+1}=48$　ヲ解ケ.

(解)$2^x=y$　ト置ケバ　$4^x=(2^2)^x=(2^x)^2=y^2$
$2^{x+1}=2\times2^x=2y$　ナルヲ以テ次ノ如クナル
$y^2-2y-48=0$,　即チ　$(y-8)(y+6)=0$.
x ノ如何ナル値ニテモ y ハ恒ニ正數ナルヲ以テ第二ノ因子ハ零ナル能ハズ，因テ第一ノ因子ヨリ

$y=8$, 即チ $2^x=2^3$ $\therefore$ $x=3$.

カ **2** $4^x-2^x=56$ チ解ケ.

(解) $2^{2x}-2^x-56\equiv(2^x-8)(2^x+7)=0$,

$\therefore$ $2^x=8$ 即チ $2^x=2^3$ 或ハ $2x=-7$ (捨テル)

$\therefore$ $x=3$.

3 $3^x+7.3^{-x}=8$ チ解ケ.

ナ (解) 各項ニ 3^x チ乘ズレバ

$3^{2x}+7=8.3^x$ 之チ轉項シテ

$3^{2x}-8.3^x+7=0$, 即チ $(3^x-1)(3^x-7)=0$.

$\therefore$ $3^x=1$ 即チ $3^x=3^0$, $\therefore$ $x=0$,

或ハ $3^x=7$, 因テ $x\log 3=\log 7$, 即チ $x=\dfrac{\log 7}{\log 3}$.

4 $10^{\log 2}=\log x$ チ解ケ.

(解) 兩邊ノ對數チ取レバ

$\log 2\ \log 10=\log(\log x)$,

即チ $\log 2=\log(\log x)$,

$\therefore$ $2=\log x$ $\therefore$ $x=10^2=100$.

5 $\log x+\log y=1$, $x+y=11$ チ解ケ.

(解) $\log x+\log y=\log(xy)=1$, $\therefore$ $xy=10$,

因テ $x+y=11$, $xy=10$ ナル一組ノ方程式チ解ケバ

$x=1$, $y=10$. 或ハ $x=10$, $y=1$.

6 次ノ方程式チ解ケ

$\log\sqrt{3x+4}+\frac{1}{2}\log(5x+1)=1+\log 3$,

(解)與ヘラレタル方程式ハ次ノ如ク變化スルチ得,

$\log\sqrt{3x+4}+\log\sqrt{5x+1}=\log 10+\log 3$,

$\therefore$ $\log(\sqrt{3x+4}\sqrt{5x+1})=\log(10\times 3)$,

$\sqrt{3x+4}\sqrt{5x+1}=10\times 3$,

$(3x+4)(5x+1)=30^2$,

簡單ニシテ $15x^2+23x-896=0$,

此二次方程式チ解キテ

$$x=\frac{-23\pm\sqrt{23^2-4\times 896}}{15\times 2}$$

$\therefore$ $x=7$, 或ハ $-\dfrac{128}{15}$.

一度方程式ノ兩邊チ平方シタレバ之ガ爲ニ餘計ナル根チ誘導スルコトナキヤ明カナリ, 然レバ上ニ得タル負根ハ $3x+4$, $5x+1$ チトモニ負ナラシムルチ以テ採用スルチ得ズ, 何トナレバ負數ノ對數ハ實數ニアラザレバナリ; 因テ $x=7$ ノミ所要ノ根ナリ.

雜例解

1. 次ノ二ツノ方程式ニ共通ナル根ヲ求メヨ.

$$x^3+2x^2+9=0,$$

$$x^3-4x+15=0,$$

(解) 與ヘラレタル二方程式ニ共通ナル根ハ方程式ノ左邊ニアル二ツノ代數式ノ最大公約數ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ方程式ノ根ト同シ, 因テ先ヅ最大公約數ヲ求ムルニ $x+3$ ヲ得, 故ニ所要ノ根ハ方程式

$x+3=0$ ノ根 $x=-3$ ナリ

2. $ax^2+bx+c=0,$ ………(1)

$cx^2+bx+a=0,$ ………(2)

ガ公通一根ヲ有スベキ要件ヲ求ム.

(解) (1)ニ c ヲ, (2) ニ a ヲ乘ジテ相減ズレバ

$$\begin{array}{r} acx^2+bcx+c^2=0 \\ acx^2+abx+a^2=0 \\ \hline (bc-ab)x+c^2-a^2=0 \end{array} \quad (\sim$$

卽チ $(c-a)(bx+c+a)=0$

若シ $c-a=0$ 卽チ $a=c$ ナラバ, 二根公通トナルヲ以テ題義ニ合セズ, 故ニ

$bx+c+a=0$………(3)

又 (1)ニ a ヲ, (2)ニ a ヲ乘ジテ相減ズレバ

$$\begin{array}{r} a^2x^2+abx+ac=0 \\ c^2x^2+bcx+ac=0 \\ \hline (a^2-c^2)x^2+(ab-bc)x=0 \end{array} \quad (\sim$$

卽チ $x(a-c)\{(a+c)x+b\}=0$

x 及ビ $a-c$ ハ零ナラザルヲ以テ

$(a+c)x+b=0$……………(4)

(3) 及(4)ハ公通根ナルベキガ故ニ同値方程式ナリ;

故ニ $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c+a}{b}.$

卽チ $(a+c)^2=b^2.$

$\therefore$ $a+c=\pm b$ ハ所要ノ要件ナリ.

3. $x+y+6\sqrt{-1}=xy\sqrt{-1}+5,$ ニ適スベキ x, y ノ實値ヲ求ム.

(解) 此形ヲ變ズレバ

$x+y-5=(xy-6)\sqrt{-1},$

而シテ實値ト虛値ト相等シキハ各唯零ナル時ニ限ルヲ以テ $x+y-5=0,$ $xy-6=0$

之ヲ解キテ x, y ハ 2 及ビ 3 ナルヲ知ル.

4 $x^2+y^2-6x+4y+13=0.$ ニ適スベキ $x, y.$ ノ實値ヲ求ム.

(解) 此形ヲ變ズレバ

$$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=0,$$

即チ $(x-3)^2+(y+2)^2=0.$

而シテ $(x-3)^2$, 及ビ $(y+2)^2$ ハ x, y ガ實量ナルベキガ故ニ各正量ナリ，而シテ両正量ノ和ガ零ナルハ唯

$x-3=0$ $y+2=0$ ナル𪜈ニ限ル，

故ニ所要ノ答數ハ $x=3$, $y=-2$.

5. $x^2+y^2-6x-8y=0$ ニ適スベキ x, y ノ最大及ビ最小實値ヲ求ム.

（解） 此式ヲ變ズレバ

$$x^2-6x+9=-y^2+8y+9$$

之ヲ平方ニ開ケバ $x-3=\pm\sqrt{-(y-9)(y+1)}$

x ガ實量ナル爲ニハ $-(y-9)(y+1)\nless 0$ ナルベク，

即チ $-(y-9)(y+1)\nless 0$ ナルベクシテ，之ニ適スル y ノ最大値ハ 9, 其最小値ハ -1 ナルコト明カナリ

同様ニ原式ヨリ

$$y-4=\pm\sqrt{-(x-8)(x+2)}$$ ヲ得.

之ヨリ x ノ最大値ハ 8, 最小値ハ -2ナルコトヲ知ル.

6. $2s=a+b+c$ ナル𪜈

$2(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)$
$+c(s-a)(s-b)$ ノ最簡式ヲ求ム.

（解） $2(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-c)(s-b)$
$+b(s-c)(s-a)+c(s-a)(s-b)$
$=2(s^3-(a+b+c)s^2+(bc+ca+ab)s-abc$

$+(a+b+c)s^2-2(bc+ca+ab)s+3abc$
$=2s^3-(a+b+c)s^2+abc=abc.$

7. $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ナルトキハ x, y, z ノ中ノ何レカ一ツハ必ズ 1 ニ等シカラザルベカラザルコトヲ證明セヨ.

（解） 原式ヨリ $1-(x+y+z)=0$…………(1) ヲ得.

又 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1=0$ ヨリ，分母ヲ拂フテ

$yz+zx+xy-xyz=0$……………(2) ヲ得.

(1)ト(2)トヲ加ヘテ

$$1-(x+y+z)+(yz+zx+xy)-xyz=0$$

即チ $(1-x)(1-y)(1-z)=0.$

故ニ此要件ヲ滿タス爲メニハ $1-x$, $1-y$, $1-z$ ノ内ノ何レカ一ハ零ナラザルベカラズ. 故ニ題言ノ如シ.

8. $a+b+c=0$ ナル𪜈ハ

$a^3+b^3+c^3=3abc$ ナルコトヲ證セ.

（解） $a+b+c=0$ ヨリ $a+b=-c$,

之ヲ三乘シテ $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$,

故ニ $a^3+b^3+3ab(-c)=-c^3$,

轉項シテ $a^3+b^3+c^3=3abc.$

9. 一根ガ $3+5\sqrt{-1}$ ナル有理整方程式ヲ作レ

(解) 未知數ヲ x トスレバ

$$x=3+5\sqrt{-1},$$

因テ $x-3=5\sqrt{-1}$, 両邊ヲ平方シテ

$$x^2-6x+9=-5,$$

即チ $x^2-6x+14=0$,

是レ求ムル所ノ方程式ノ最簡ナルモノニシテ，其一般ナルモノハ x ノ任意有理，整，代數式ヲPトスレバ

$$P(x^2-6x+14)=0.$$

10. $x=\dfrac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$ ナルトキ次式ヲ証明セヨ，

$$x^3-3mx^2+3x-m=0,$$

(解) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$ ナルガ故ニ

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{(\sqrt[3]{m+1}+\sqrt{m+1})+(\sqrt[3]{m+1}-\sqrt{m+1})}{(\sqrt[3]{m-1}+\sqrt[3]{m+1})-(\sqrt[3]{m-1}-\sqrt[3]{m+1})}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m+1}}=\frac{\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m-1}},$$

故ニ $\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^3}=\dfrac{m+1}{m-1}$, 故ニ $\dfrac{(x1+)^3+(x-1)^3}{(x-1)^3-(x+1)^3}=\dfrac{m}{-2}$,

之ヲ簡略ニシテ分母ヲ拂ヘバ

$x^3-3mx+3x-m=0$ ヲ得

幾何試驗ノ受方

13. 幾何學ハ之ヲ學ブニシテモ其試驗ヲ受ケルニシテモ，此學ノ大体ノ組立ヲ知ラヌハ大ナル損ナリ；普通教科書ヲ眞正面ヨリ觀レバ，幾何學ハ圖形ノ學問ニシテ之ヲ考究スルニハ數ヲ用ヒズ，直ニ其量ニ就テ線ノ長短，角ノ大小等ヲ論ズルガ故ニ其所說ハ一般ナリト云フコトヲ知ルベク，是レ此學ノ大体ノ組立ニ相違ナケレ圧，此學ヲ早ク會得シ，又ハ充分ニ受驗ノ豫備ヲナサントスルニハ備ホ，之ヲ著述ノ[illegible]ヨリ觀タル秘密ノ組立ヲ知ラザルベカラズ；其秘密ノ組立トハ普通幾何教科書ニ擧ゲタル定理トハ何ノ所論ナルカ其次ニ記セル練習問題トハ何ノ所說ナルカヲ知ルコト是レナリ，抑モ幾何定理ト云フハ圖形ガ有スル性質ノ一部分ノ論定ナリ，又之ニ次ク問題トハ同ク圖形ガ有スル性質ノ他ノ一部分ノ論定ナリ，定理ト雖圧之ニ次ク問題ノ解ヲ抱括セズ，問題ト雖圧圖形ノ公性ヲ缺ケルニアラズ，定理問題固ト是レ圖形ノ性質ノ一部分ヲ夫々顯ハス同種ノ論定ノミ，唯定理ハ問題ニ比較シテ其用幾分カ廣キヲ撰ミテ著者ガ名ヅケタル稱號ナリト知ルベシ，之ニ依テ觀レバ幾何ノ定理ト問題ト算術代數ノ定理ト問題ト其關係ノ異ナルヲ知ルベク，別言スレバ幾何ノ定理ハ定理ニシテ其問題モ亦等シク定理

ナリト知ルベシ；隨テ幾何學ハ其定理ヲノミ定理ト思ヒ基本作圖ヲノミ基本作圖ト思フヿ勿レ，其練習題モ亦悉ク定理及ビ基本作圖ナリ，固ヨリ其已修ノ性質ハ如何ナル場合ニ之ヲ用ヒ之ヲ引証スルヲモ妨ケズ，其成ルベクハ人ノ多ク知レル性質ヲ用ヒテ之ヲ輪斷スルヲ優レリトスルノミ

幾何ノ組立上述ノ如シ，即チ定理，作圖，問題ハ何レモ圖形ノ性質ヲ論斷シ，或ハ必要充分條件ヲ與ヘテ之ヲ作成セシムルモノナリ，今其求ムル所ノ何タルニ關ラズ總テ之ヲ問題ト稱フルトキハ，問題ハ初等幾何學ニ於テハ二千ヲ越ユルヿナカルベク，其重モナルモノハ一千以下ニ在ラン，之ヲ以テ若シ幾何ニ於テ一千題ノ解答ヲ暗記スルニ於テハ幾何ノ達人トナリ試驗問題ハ悉ク既知ノモノノミトナルベシ．之ニ依テ

受驗ノ豫備　トシテハ其定理，基本作圖ハ勿論，其重ナル問題ヲモ合セテ其解答ヲ記憶スルヿ是レナリ；而テ普通幾何學教科書ニ於テハ其問題ノ最モ重モナルモノヲ擇ンデ四五百ノ間ニアルベシ，故ニ若シ善ク其一冊ヲ熟復セバ試驗問題五ツノ内ノ三ツ，恐ク四ツハ既知ノモノタラン其殘リノ一ツモ亦既知ノ性質ヨリ僅カ誘フテ之ヲ解キ得ン，故ニ幾何ノ試驗ヲ受ケントスルニハ一書ヲ熟讀精通センニハ若カザルナリ，依テ次ニ其書ヲ會得シ且ツ其解ヲ記憶スルノ法ヲ述ベン

幾何學ノ學ビ方　若シ人々ノ視力正確ニシテ線ノ長短，角ノ大小ヲ目分量ニテ測リ過誤ナクバ，幾何學ノ必要ナキナリ，既ニ目ガ正確ナラズトスレバ圖形ヲ觀察スルニハ既得ノ眞理ニ依リテ其都度判決セザルベカラズ然シテ若シ此判決ヲ速ニセントスルニハ，成ルベク其終決ニ近キ眞理ヲ擇マザルベカラズ，之ニ依テ幾何學ヲ學ブニハ其已ニ習ヒ得タル定理，作圖，重ナル問題ハ其語句ニ至ルマデ之ヲ諳記スルヿヲ務メザルベカラズ諳記ヲ旨トセザル幾何學ハ習フニアラザルナリ，之ヲ玩ブナリ；勿論何科ナリトテ忘レテ可ナルモノナケレドモ幾何學ハ取リ分ケ記憶ニ記憶ヲ重ネザルベカラス；而シテ之ヲ記憶スルノ最良法トシテ余ガ經驗ヲ積メルモノハ下ノ如シ

幾何題解ヲ記憶スル最良法　畫學紙ヲ縱四寸横三寸計リニ截チ定理ニアレ作圖題ニアレ毎日習ヒ得タル毎ニ一枚ニ一問ヅヽ丁寧ニ清書シ其証明モ概要ヲ附記スベシ，尤モ其紙ノ兩面ニ書スルヿヲ嚴禁ス是レ復習ニモ受驗ニモ大効力アル大切ノ材料タレバナリ；且ツ其端ニ見出シ易キ樣ニ其題ノ部屬ヲ記入シ置クベシ，例バ軌跡トカ，面積トカ，相似形トカノ類或ハ又其問題ガ作圖ニモ極大極小ニモ關係アレバ其兩樣ノ見出シヲ附スルガ如シ．斯クシテ日ヲ經，月ヲ閱ミセバ積ンデ數百枚ノ幾何かるたヲ得ベシ，而シテ此かるたヲ作ルヿハ甚ダ記憶ヲ助ケ且ツ此かるたノ使用ニ依テ解ヲ試ムルニ非常ノ便利ト

趣味トヲ與フ．此かるたヲ問題ノ解法ニ使用セントスルニ其解カントスル問題ガ角度ニ關シタルモノナラバ，其かるたノ中ヨリ角ニ關シタル，例バ相交ル二直線ニ垂直ナル二線ノ爲ス角ハ前ノ交角ニ等シトカ，又ハ同弧上ノ圓周角ハ相等シトカ，云フ如キ角バカリニ關係ノモノヲ集メテ之レヨリ推シテ考フレバ立ロニ其解ノ緒ヲ得ルノミナラズ尙ホ角ニ關スル諸般ノ關係ヲ概括スルノ知識ヲ得ベク，斯クテ其面積或ハ軌跡或ハ比例ノ知識ガ夫々自然ニ纒ラバ幾何學ヲ容易ニ且ツ面白ク學ブヿヲ得ベシ．又此かるたヲ受驗ノ豫備ニ用ヒントスルニハ受驗前二三週前ヨリ毎日一度ハ必ズ之ヲ繰リ返シ通覽スベシ然ルトキハ益ス其記憶ヲ强クス，

若シ又以上ノ記憶法ニ從フヿヲ得ザル場合ニハ自分ノ習ヒ得タル教科書ニ就テ其筆記帳ト照ラシ合セ成ルベク多クノ解答ヲ諳記スル樣ニセヨ，其法ハ代數ノ受驗法ニ記シタル如クセヨ，

又平生ニ於テ幾何學ハ特ニ學ビ掛ケタル一書ヲ中途ニ捨テヽ他書ヲ見ルヿヲ許サズ；又解式ヲ見ルヿヲ禁ズレ𪜈受驗間際ニハ無理ニ問題ヲ解カントスルヨリモ解義ヲ多ク載セタル本ヲ見ルヲ捷徑トス

15. 幾何定理，問題等ノ記憶ニ便シ受驗ニ便スル爲メ，かるた形幾何學ヲ出版スル積リナレ𪜈，今ハ間ニ合ハザルヲ以テ，次ニ記憶スベキ基本ノ(或ハ重ナル)定理問

題作圖等ヲ揭ゲ置キタレバ，之ニ依テ大要ヲ知ルベシ；尤モ其証明ヲ附セザルモノハ，普通教科書ニ必ズ記載セラレタルモノノミナルヲ以テ就テ見ルベシ；又其解ヲ附シタルハ最近ノ試驗問題ヨリ取リテ例解ニモナリ解ノ書キ方ノ手本ニモナサンガ爲メニ揭ゲタリ．

幾何問題ヲ解ク一般ノ注意

幾何問題ヲ解クニハ諸種ノ法アリト雖𪜈受驗トシテノ問題ノ解キ方ハ成ルベク多クノ題解ヲ記憶シ置キ其所設題ヲ僅ニ變ジテ已知ノ性質ニ誘クヲ最良トス；詳言スレバ例バ問題ガ軌跡ニ屬スレバ之ヲ解クニハ其軌跡ガ直線ラシキカ圓弧ラシキカヲ考ヘ圓弧ラシキナラバ其中心ノ所在ヲ搜ルカ或ハ定直線上ニ定角ヲ張ルカヲ搜ラザルベカラザルモ既ニ圓弧ヲナスベキ軌跡問題ヲ幾ツカ記憶シ居レバ少ク考フル內ニ已知ノ關係ト一致スルヲ常トスルガ如シ；作圖題ニテモ面積ニテモ極大極小，線或ハ積定量，點ノ定位，三線一會點，三點一直線等如何ナル場合ヲ問ハズ，其所設題ノ類題ノ記憶ナクシテ問題ヲ解カントスレバ之ヲ考フルニ甚ダ時間ヲ要シ其不利ナル此上ナキナリ尤モ解ノ書キ方ハ言葉ガ善イトカ，記號ニテハ惡シキトカ又ハ種々ノ場合ヲ吟味セヨトカ云フハ一通リノ解ガ出來テノ上ノ事ト知ルベシ

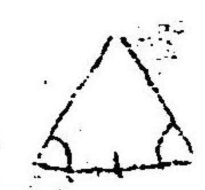
三角形ノ恒等ナル場合

1. 二個ノ三角形ニ於テ

ア(1) 三邊相等シキ件,

イ(2) 二邊ト其夾角相等シキ件,

ウ(3) 一邊ト之ニ隣接スル二角相等シキ件,



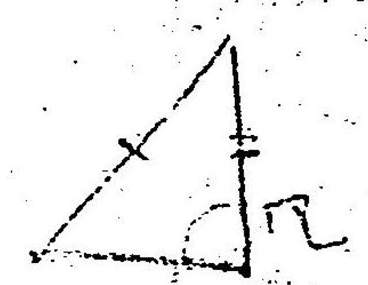
其三角形ハ恒等ナリ

2. <u>両意ノ場合</u> 二個ノ三角形ニ於テ二邊夫々相等シク其等シキ一邊ニ對スル角ガ相等シキ件此両形ハ恒等ナルカ,或ハ他ノ相等邊ニ對スル角ガ補角ヲナス.

<u>附言</u> 初學者ハ往々ニシテ,両三角形ノ二邊ト一角等シキヲ以テ,此両形ハ恒等ナリト云フ,此理ハ恒ニ眞ナラズト知ルベシ

3. 直角三角形ニ於テ其斜邊ト其他ノ一邊(若クハ其一鋭角)相等シケレバ,二ツノ三角形ハ全ク相等シ.

<u>附言</u> 此直三角形ノ恒同ナル場合ハ三角形特別ノ性質ニ屬スレ圧其用一般ノ場合ニ譲ラズ殊ニ注意ヲ要ス



邊ト角トノ關係

1. 三角形ニ於テ一邊ガ他邊ヨリ大等小ナルニ應テ其對角ハ他ノ對角ヨリ大等小ナリ. 又之ヲ反言シ得ベシ.

2. 三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ニシテ,其差ハ他ノ一邊ヨリ小ナリ.

3. 三角形ノ內角ノ和ハ二直角ニ等シク; 又其外角ノ和ハ四直角ニ等シ、一ツノ外角ハ內對角ノ和ニ等シ.

4. 三角形ノ底ノ中點ト頂點トヲ結ベル線ガ半底ヨリ大等小ナルニ隨テ頂角ハ鋭,直,鈍角ナリ. 又之ヲ反言シ得ベシ

---

5. 二個ノ三角形ニ於テ二邊夫々等シク,第三邊ニ大,等,小アレバ,其對角ニ大,等,小アリ 又之ヲ反言シ得ベシ

6. 直線外ノ一點ヨリ之ニ至ル諸線ノ中ニ就テ垂線最モ短ク而テ唯一線アリ; 又此點ヨリ等シキ長サノ斜線ハ二個ニ限ル; 而シテ其垂足ヲ離ルヽコト遠キモノハ近キモノヨリ大ナリ. 又此逆ハ眞ナリ.

<u>注意</u> 邊或ハ角或ハ邊ト角トノ關係ハ固ヨリ以上ニ止ラザレ圧茲ニハ其基本ノ關係ノミヲ示ス.

三角形ノ重要ナル性質

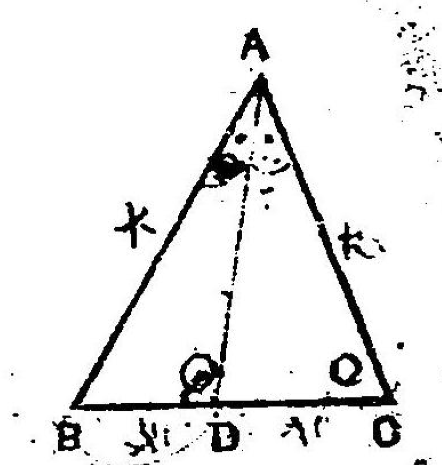
1. 二等邊三角形ノ頂點ト底ノ中點トヲ結ビタル直線ハ頂角ヲ二等分シ且ツ之ニ直立ス. 又此逆ハ眞ナリ.
2. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビタル線ハ底邊ニ平行シテ且ツ其半ニ等シ.
3. 直三角形ノ直角頂ト斜邊ノ中點トヲ結ビタル線ハ半底邊ニ等シ

注意 以上三ツノ性質ハ殊ニ大切ナルモノナリ

4. **外心** 三角形ノ各邊ノ中點ヨリ之レニ作リタル三ツノ垂線ハ一點ニ會ス
5. **內心** 三角形ノ內角ノ二等分線ハ一點ニ會ス
6. **傍心** 三角形ノ一內角及ビ他ノ二外角ノ二等分線ハ一點ニ會ス
7. **垂心** 三角形ノ三垂線ハ一點ニ會ス
8. **重心** 三角形ノ三中線ハ一點ニ會シ而テ其會點ハ各線ヲ三分ノ一ト二トニ分ツ. (頁154ニ解アリ)

注意 以上五ツノ性質ハ必ズ熟知シ置クベシ然ラザレバ急ニ考ヘ出シ得ベキモノニアラザルノミナラズ又種々ノ應用スベキ場合アレバナリ

(1) 三角形 ABC ノ A 角ノ二等分線ガ其對邊 BC ニ會スル點ヲ D トスレバ, BD ハ AB ヨリ小ニシテ, CD ハ AC ヨリ小ナリ, 其證ヲ求ム



(解) ∠ADB>∠CAD,

然シテ ∠CAD=∠BAD,

∴ ∠ADB>∠BAD,

∴ AB> BD.

同理ニテ

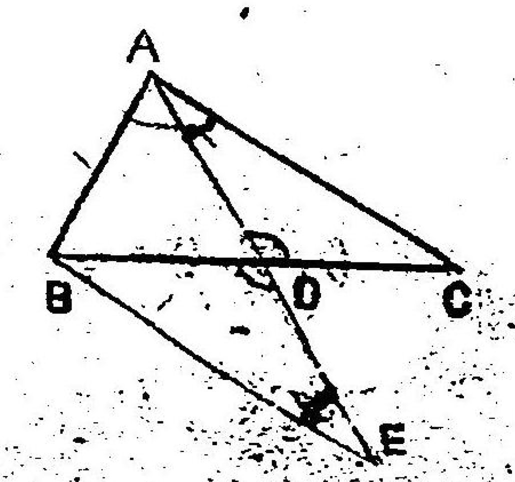
∠ADC>∠CAD

∴ AC>CD

(2) 三角形ノ中線ガ之ト隣ル邊トナス角ノ中ニ就テ小ナル邊トナス角ハ大ナル邊トナス角ヨリ大ナリ.

(解) 三角形ヲ ABC トシ, 其中線ヲADトス, 若シ AB<AC ナラバ ∠CAD<BAD ナリ.

何トナレバ AD ヲ延長シテ DE=AD ナラシメ, B, E ヲ連結ス, 然ルキ



AD=DE,

BD=CD.

∠ADC=∠BDE,

ナルヲ以テ

△ADC≡△BDE

故ニ　$AC=BE$,　$\angle CAD=\angle BED$.

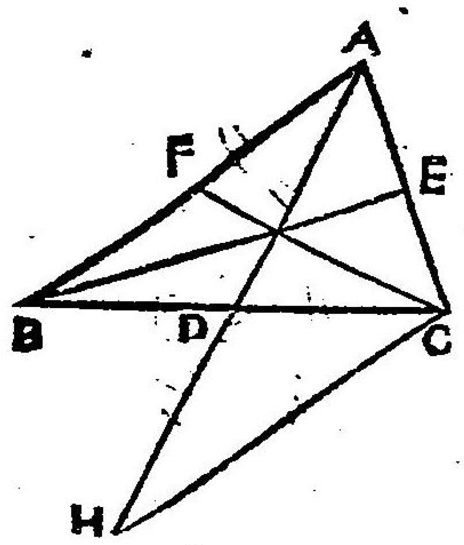
又三角形 ABE ヨリ

$BE>AB$ ナルヲ以テ, $\angle BAD>\angle BED$.

$\therefore\ \angle BAD>\angle CAD$.

(3)　三角形ノ三邊ノ和ハ其三中線ノ和ヨリ大ナリ,

(解)　三角形 ABC ノ三中線ヲ AD, BE. CF トスレバ, $AB+BC+CA>AD+BE+CF$ ナルベシ,



AD ヲ延長シテ $DH=AD$ トシ C, H ヲ連結スル時二ツノ三角形 ABD, CDH ハ二邊ト其夾角ヲ等シクスルヲ以テ全ク相等シクシテ　$AB=CH$.

三角形 ACH ヨリ

$$CA+CH>AH$$

即チ　$CA+AB>2AD$

$\therefore\ \frac{1}{2}(CA+AB)>AD$

同様ニシテ

$$\frac{1}{2}(AB+BC)>BE$$

及ビ　$\frac{1}{2}(BC+CA)>CF$

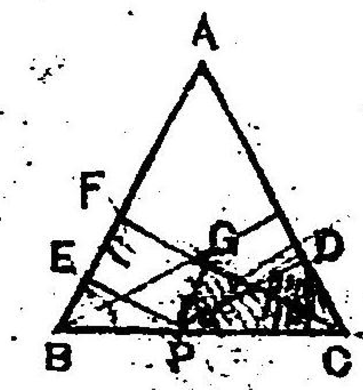
邊々相加ヘテ

$$AB+BC+CA>AD+BE+CF.$$

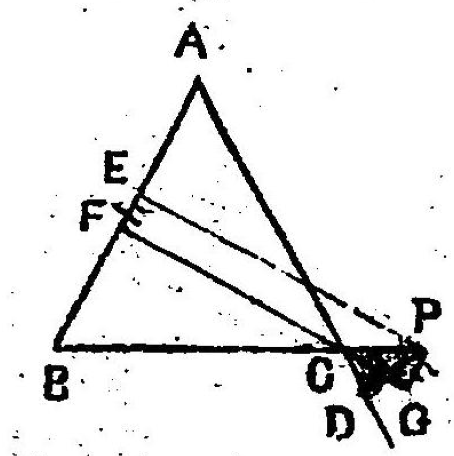
イッタカコノ問題ガ高校ニ出タヨ

(4)　二等邊三角形ノ底邊或ハ其延長ノ上ノ任意ノ一點ヨリ二邊ニ至ル距離ノ和或ハ差ハ一定ナリ.

(解)二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 或ハ其延長ノ上ニアル任意ノ點 P ヨリ AB, AC ニ至ル距離ヲ夫々 PE, PD トス, C ヨリ AB ニ垂線 CF ヲ引キ, 又 P ヨリ CF 或ハ其延長ノ上ニ垂線 PG ヲ引ケ; 然ル時ハ矩形 $PEFG$ ノ相對スル邊ナルヲ以テ



$$PE=FG,\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



二ツノ直角三角形 PGC. PDC ニ於テ斜邊ハ共通ニシテ

$\angle GPC=\angle ABC=\angle ACB=\angle PCD$,

ナルヲ以テ此兩三角形ハ全ク相等シク;　隨テ

$$PD=GC\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

〔第一〕 P ガ底邊ノ上ニアル時ハ (1) (2) ヨリ

$$PE+PD=FG+CG=CF\ (定長),$$

〔第二〕 P ガ底邊ノ延長ノ上ニアル時ハ (1) (2) ヨリ

$$PE-PD=FG-CG=CF\ (定長);$$

故ニ點 P ガ何レニアルモ PE, PD ノ和或ハ差ハ常ニ CF ニ等シ.

角ノ基本定理

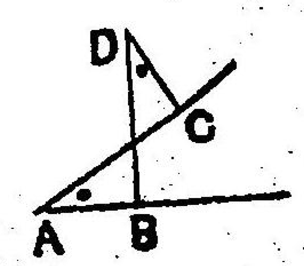
1 直角ハ相等シ.

2. 對頂角ハ相等シ.

3. 平行二線ニ他ノ一線ガ交ルトキ，錯角ハ相等シク；同位角ハ相等シク；同傍內角(或ハ外角)ハ補角ヲナス.

4. 二雙ノ相交ル二直線ガ夫々平行スレバ，其交角ハ等シキカ，或ハ補角ヲナス.

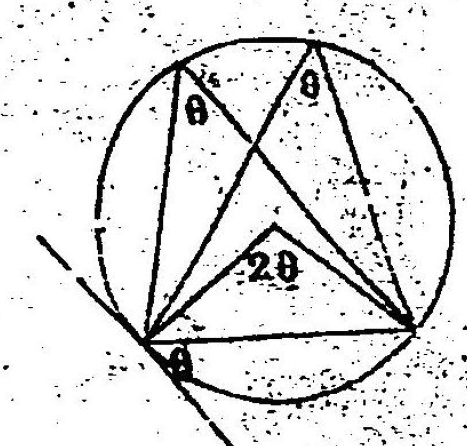
5. 相交ル二線ニ夫々直立シタル二線ノ交角ハ，初ノ二線ノ交角ニ等シキカ，或ハ補角ヲナス.



6. 三角形ノ內角ノ和ハ二直角ニ等シク，外角ノ和ハ四直角ニ等シ．又一外角ハ內對角ノ和ニ等シ.

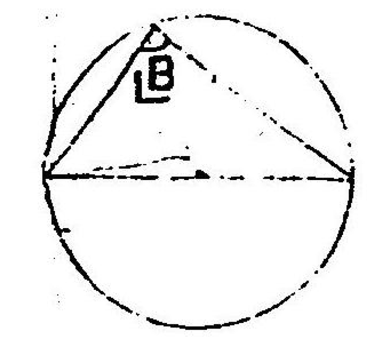
7. n 邊ノ凸多角形ノ內角ノ和ハ邊數二倍ノ直角ヨリ四直角ヲ減ジタルモノニ等シ．$(2n-4)R$.
又外角ノ和ハ恒ニ四直角ナリ

8. 同弧(或ハ同弦)上ノ圓周角ハ中心角ノ半ニ等シク；又其圓周角ト圓周角トハ相等シ.
逆ニ，一定線上ニ等角ヲ張ル諸角頂ハ同一圓周上ニ在リ

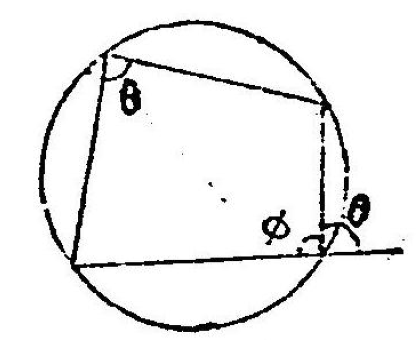


9. 半圓形ニ容ルヽ角ハ直角ナリ.

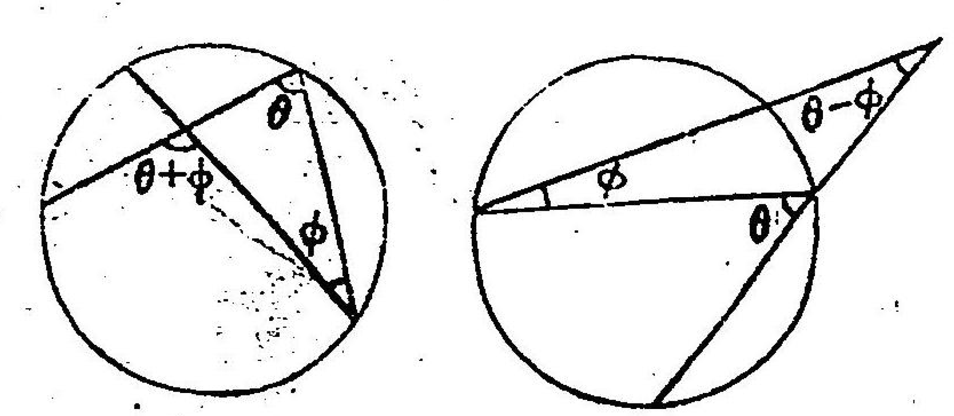
10. 圓ノ切線ト其切點弦トナス角ハ其弦上ノ圓周角ニ等シ.
又此逆ハ眞ナリ



11. 圓內四邊形ノ對角ハ補角ヲナス．又其一角ハ對角ノ外角ニ等シ.
逆ニ，四邊形ノ對角ガ補角ヲナセバ其各角頂ハ同一周圓上ニアリ.



12. 相交二弦(或ハ二割線)ノ交角ハ其二線ガ夾ム弧上ノ中心角ノ和半(或ハ差半)ニ等シ.



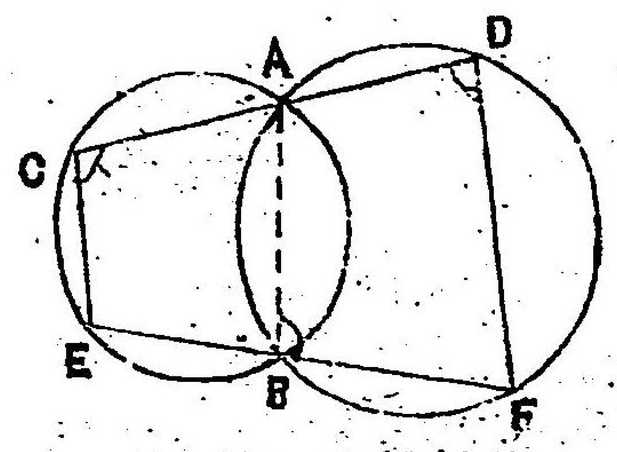
附言 若シ角ノ關係ヲ考フルヿアラバ，少クモ以上ノ定理ヲ記憶シ居テ，之ニ依テ判定スベシ；換言スレバ是等ノ角ノ定理ヲ直ニ思ヒ起シ得ズシテ，幾何問題ヲ解カントスルハ，蓋シ不可能ノヿナルベシ.

(1) 二圓ノ交點 A, B ヲ通シテ二直線 CAD, EBF ヲ引キ一圓ト C, E ニ於テ, 他ノ一圓ト D, F ニ於テ夫々交ラシムレバ, 直線 CE, DF ハ平行スルコトヲ證セヨ.

(解) A, B ヲ結ブ然ルトキハ圓內四邊形ノ對角ハ互ニ補角ヲナスヲ以テ

$\angle C = \angle ABF = \angle D$

故ニ CE ハ DF ニ平行ナリ.



(2) 圓ノ直徑ヲ AB トシ, B ニ於テ切線ヲ引キ A ヨリ AP, AQ ノ二直線ヲ引キ其圓周トノ交點ヲ P, Q トシ切線トノ交點ヲ E, F トス, 然ルトキハ角 EQF ハ角 FPE ニ等シ, 之ヲ證セヨ.

(解) P, Q 及ビ B, Q ヲ結ブ. 然ルトキ

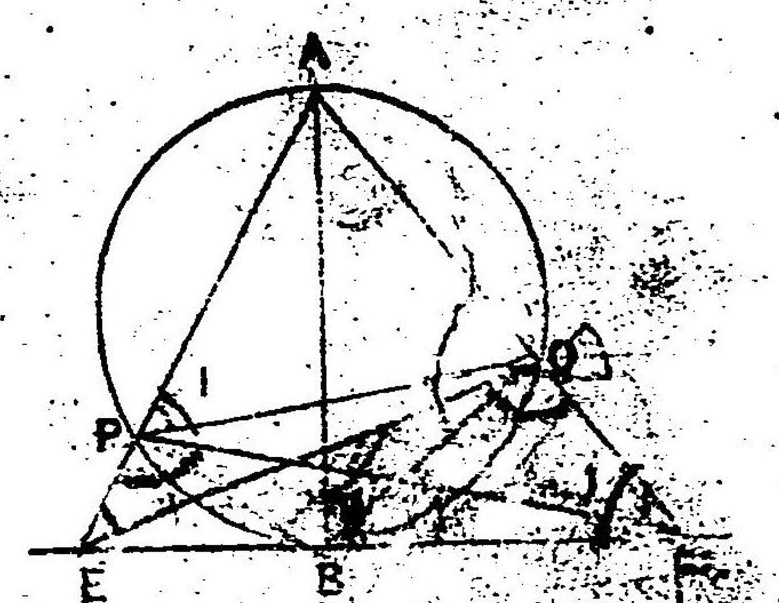
$\angle APQ$

$= \angle ABQ = \angle AFB$

故ニ四邊形 PEFQ ハ圓ニ內接スルコヲ得

故ニ $\angle EPF$

$= \angle EQF$.



(3) ABC ヲ三角形トス, 邊 BC ノ上ニ任意ニ一點 D ヲ取リ, 邊 AC ノ上ニ任意ニ一點 E ヲ取リ, 邊 AB ノ上ニ任意ニ一點 F ヲ取レ, 然ルトキハ三角形 AEF, BFD, CDE ノ外接圓ハ一點ニ會ス, 之ヲ證セ.

(解) 兩三角形 AFE, BFD ノ外接圓ノ交點ヲ O トシ OD, OE, OF ヲ結ベ, 二ツノ四邊形 AFOE, FBDO ハ共ニ圓ノ內接形ナルヲ以テ

$\angle A + \angle FOE = 2$ 直角

$\angle B + \angle DOF = 2$ 直角

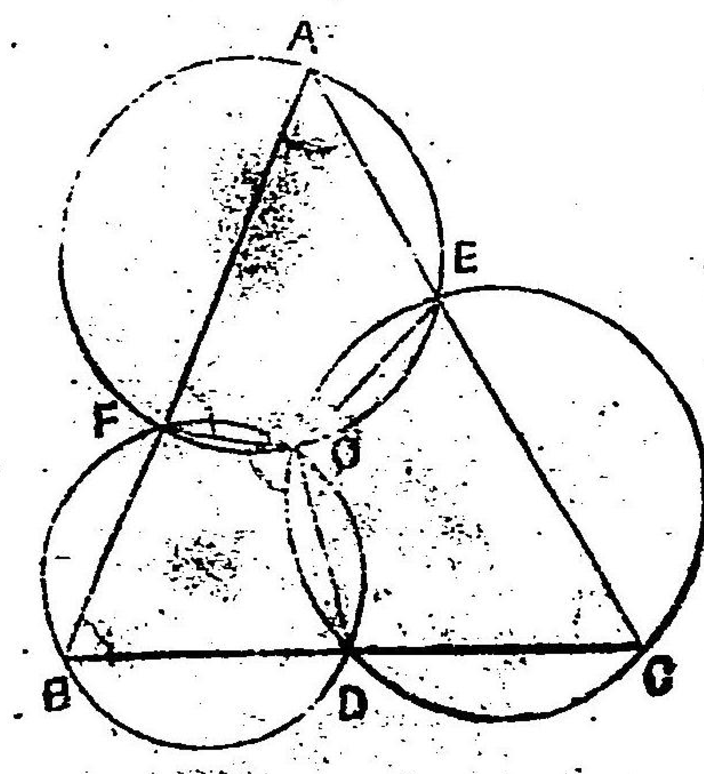
$\therefore$ $\angle A + \angle B + \angle FOE + \angle DOF = 4$ 直角.

又 三角形 ABC ヨリ

$\angle A + \angle B + \angle C = 2$ 直角

又 $\angle FOE + \angle DOF + \angle EOD = 4$ 直角

$\therefore$ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle FOE + \angle DOF + \angle EOD = 6$ 直角



此結果ト前ニ得タルモノト較シテ

$\angle C + \angle EOD = 2$ 直角

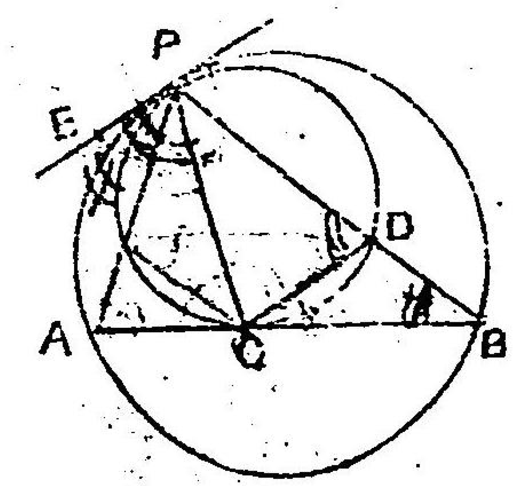
ナルヲ知ル. 因テ四邊形 EODC ニ外接圓ヲ畫クヲ得ベク, 從テ三角形 ECD ニ外接スル圓ハ一ツノ點 O ニ

於テ交ルベシ.

附言　D, E, F ノ取リ様ニテ種々ノ場合ヲ生ズレドモ今ハ一般ノ場合ヲ掲ゲテ他ヲ略シヌ.

(4) 點 P ニ於テ内切スル二圓アリ, 大圓ノ弦 AB ガ小圓ニ C ニテ切スレバ PC ハ ∠APB ヲ二等分スルコトヲ証セヨ.

(解) P ヲ通シテ兩圓ニ共通切線 PE ヲ作ル. PB ガ小圓周ト交ル點ヲ D トシ, D, C ヲ結ブ. 然ルトキハ



∠EPC=∠PDC,

又 ∠EPA=∠PBA

故ニ

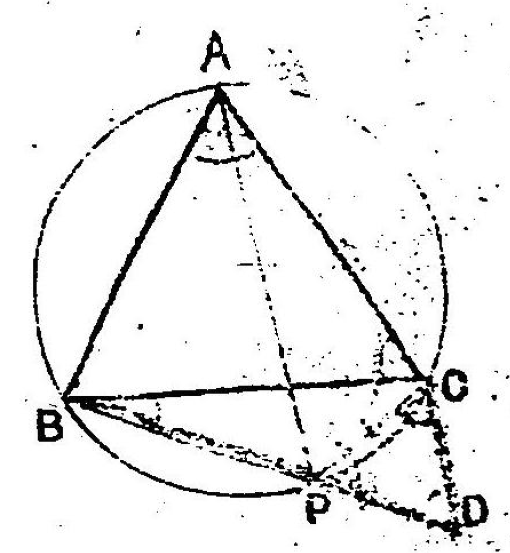
∠EPC−∠EPA=∠PDC−∠PBA,

即チ　∠APC=∠DCB

又　∠DCB=∠CPD

∴　∠APC=∠CPD

(5) 等邊三角形 ABC ニ外接スル圓アリ, 今劣弧 BC 上ノ任意ノ一點 P ヨリ PA, PB, PC ヲ引クトキハ PA ハ PB ト PC トノ和ニ等シ, 之ヲ証セ.



(解) BP ヲ延長シテ PD ヲ PC ニ等シ

カラシメ, C, D ヲ連結スレバ, 圓内四邊形 ABPC ノ外角 CPD ハ其内對角 BAC 即チ正三角形ノ一角ニ等シキヲ以テ, PCD ハ正三角形ナリ. 故ニ CD=PC,

又 ∠PCD=∠ACB ナルヲ以テ,

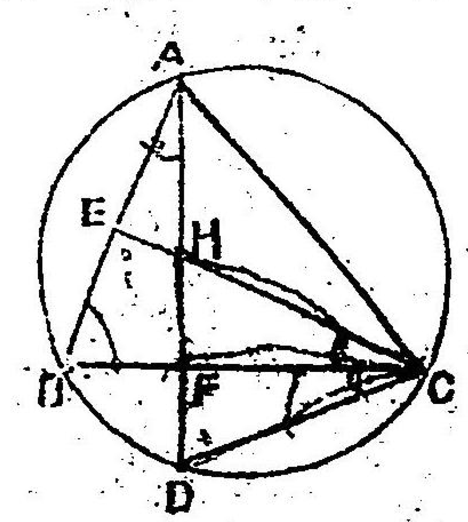
∠BCD=∠ACP.

又 AC=BC ナルヲ以テ, 二ツノ三角形 BCD, ACP ハ全ク相等シ. 依テ

AP=BD=BP+PD=BP+PC.

(4) 三角形 ABC ノ角頂 A ヨリ對邊 BC ニ垂線 AF ヲ引キ, 之ヲ延長シテ D ニテ其外接圓ニ會セシメ, 其三角形ノ垂心ヲ H トスレバ HD ハ BC ニ依リテ二等分セラル.

CH ヲ延長シ, AB トノ交點ヲ E トシ, C, D ヲ結ビ付ケヨ; 然ルトキハ三角形 CFD, CFH ニ於テ



∠DCF=∠DAB=∠ECB,

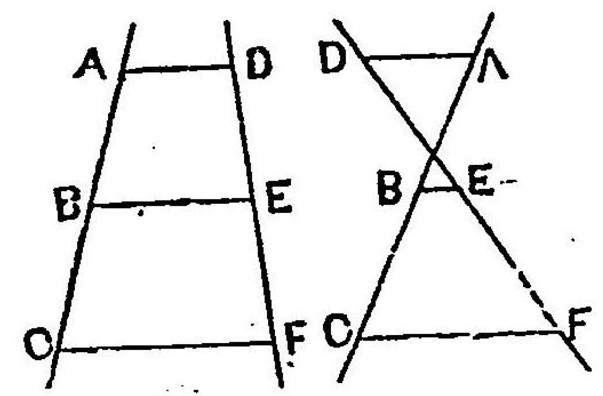
∠DFC=∠HFC=直角

而シテ邊 CF ハ兩形ニ通ズ, 故ニ是等ノ三角形ハ全ク相等シ.

故ニ FD ハ FH ニ等シク; 即チ HD ハ BC ニヨリテ二等分セラル.

等距ノ平行線　平行四邊形

1.　平行三線ガ一直線ニ交リ之レヲ相等シキ部分ニ截レバ，何レノ直線ト交ルモ，亦之ヲ相等シキ部分ニ截ル．



而テ其二線ノ間ニ夾マル平行線ノ部分ノ其中間ニアルモノハ，兩端ニアルモノヽ和半或ハ差半ニ等シ．

AD, BE, CF 平行ニシテ，

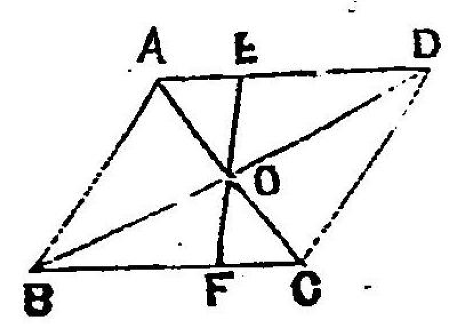
$AB=BC$　ナラバ，$DE=EF$；

又　$BE=\frac{1}{2}(AD\pm CF)$．

附言　此特別ナル場合ニ於テ三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビタル線ハ底ニ平行シ，且其半ニ等シ

2.　平行四邊形ハ，其對邊相等シク；　其對角相等シ，又其對角線ハ互ニ二等分ス．

又其對角線ノ交點ヲ通ジテ二平行線ノ間ニ引キタル部分ハ此點ニテ二等分セラル．



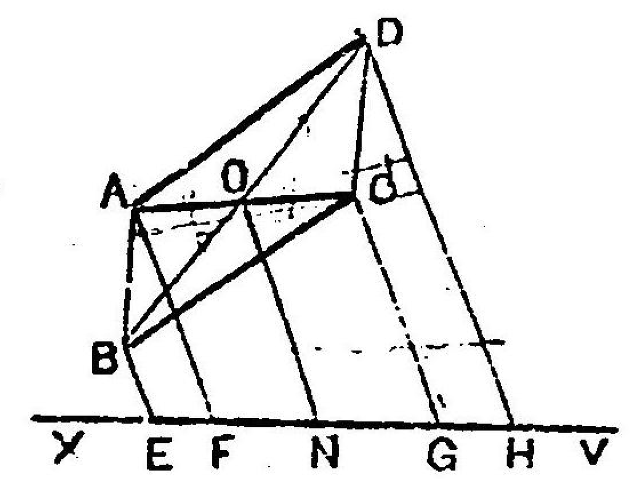
逆ニ，平行シタル等長ノ二直線ノ端ヲ結べバ一雙ハ平行シ，一雙ハ互ニ二等分ス．

(矩形，菱形，正方形ハ此特別ナル場合ニ屬ス)

注意　此二定理ハ，他ノ定理或ハ問題ノ証明ニ對シテ最モ大切ノモノナリ；又此定理ニ依テ作圖ヲナスコトハ後ノ作圖ノ部ニ擧ゲ置キタレバ參照スベシ．

(1)　平行四邊形 ABCD ノ對角項ヨリ或ル一線 XY 上ニ引キタル平行線 AF, CG ノ和ハ，BE, DH ノ和ニ等シ．

(解)　對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トシ，O ヨリ直線 XY ニ下シタル垂線ヲ ON トス．



然ル片ハ O ハ AC ノ中點ニシテ，且ツ AF, ON, CG ハ平行スルヲ以テ

$AF+CG=2ON$.

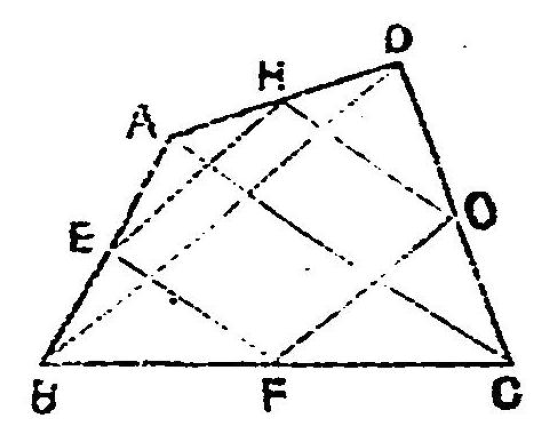
同理ニテ

$BE+DH=2ON$.

$\therefore\ AF+CG=BE+DH$.

(2)　四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結べハ平行四邊形ヲナス

(解)　平行四邊形ヲ ABCD トシ，邊 AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ E, F, G, H トス．然ル片 EFGH



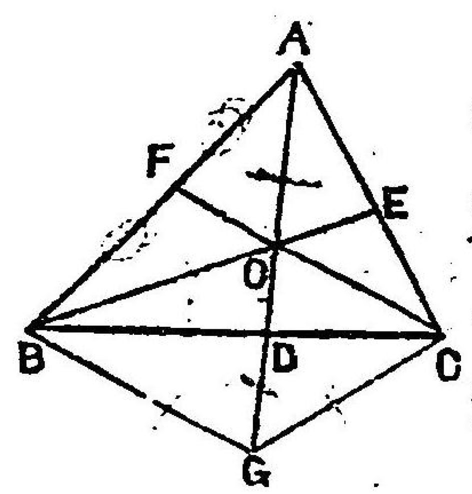
ハ平行四邊形ナリ.

何トナレバ E, F ハ AB, BC ノ中點ナルヲ以テ, EF ∥ AC. 同理ニテ HG ∥ AC.

同理ニテ EH, FG ハ各 AC ニ平行ナリ.

依テ EFGH ハ平行四邊形ナルヲ知ル.

(3) 三角形ノ三中線ハ同一ノ點ヲ過ギルヿヲ証セ.



(解) 三角形ヲ ABC トシ CA, AB ノ各中點ヲ E,F トシ, 又 BE, CF ノ交點ヲ O トス, AO ヲ結ビ之ヲ延長シテ BC ト交リタル點ヲ D トシ, 尙ホ更ラニ G ニマデ延長シテ GO=AO ニ取ル.

然ルトキハ AO=GO, AF=FB ナルヲ以テ FO ∥ BG, 又 AO=OG, AE=EC ナルヲ以テ EO ∥ CG; 故ニ OBGC ハ平行四邊形ナリ. 從テ OG, BC ハ互ニ二等分ス. 因テ D ハ BC ノ中點ナルコトヲ知ル, 即チ三中線ハ一點ニ會スルヲ知ル.

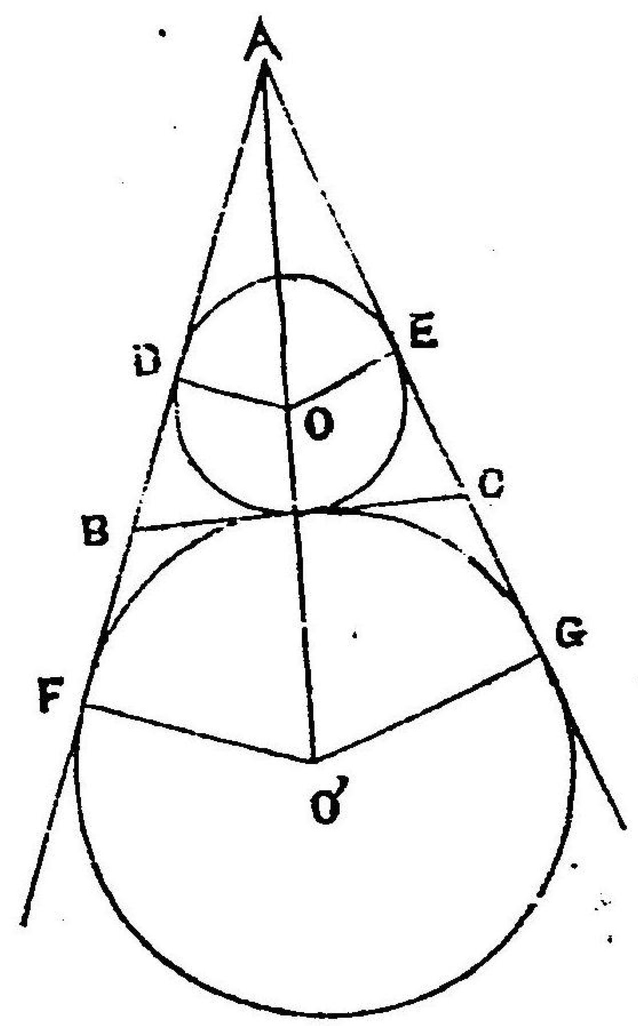
圓 ノ 性 質

1. 圓心ヨリ一點ニ至ル距離ガ半徑ヨリ大等小ニ應テ, 其點ハ圓ノ外上内ニ在リ.
2. 圓ノ半徑ハ相等シク, 直徑ハ圓ヲ二等分ス.
3. 圓ノ中心角或ハ圓周角ハ之ニ對スル弧ノ大小ニ正比ス.
4. 圓ノ劣弧ニ於テハ大等小ノ弧ハ大等小ノ弦ヲ張リ又優弧ニ於テハ之ニ反ス.
5. 圓心ト弦ノ中點トヲ結ヘバ其弦ニ直立ス. 又之ヲ反言スベシ.
6. 圓心ヲ距ル小等大ニ應テ弦ハ大等小ナリ.
7. 一直線上ニアラザル三點ヲ通ズル圓ハ唯一ツニ限ル.
8. 一直線ト一圓トノ交リ, 又一圓ト他圓トノ交リハ二點ヨリ多カラズ.
9. 相交ルニツノ圓ノ中心ヲ結ベハ, 其公通弦ヲ直角ニ二等分ス.
10. 二ツノ切圓ノ中心ヲ結ベハ切點ヲ過グ.
11. 二圓ノ中心ノ距離ガ兩半徑ノ和ヨリ大等小ナルニ應テ, 全ク外ニアルカ, 外切スルカ, 相交ルカ, スベシ; 又其半徑ノ差ヨリ大等小ナルカニ應テ相交ルカ, 内切スルガ, 全ク内ニアリ.

12. 圓外ノ一點ヨリ圓ニ引ケル二切線ノ長ハ相等シ.

13. 三角形ノ外接圓, 內接圓ハ各唯一ツアリ; 而テ其傍接圓ハ三ツアリ.

14. 三角形ノ一角頂ヨリ內接圓ノ切點ニ至ル距離ハ二邊ノ和ト底邊ノ差トノ半ニ等シク; 又其頂點ヨリ傍接圓ノ切點ニ至ル距離ハ三角形ノ半周ニ等シ.



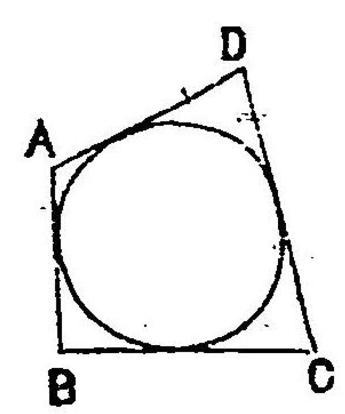
$$AD=AE$$
$$=\tfrac{1}{2}(AB+AC-BC).$$

又

$$AF=AG$$
$$=\tfrac{1}{2}(AB+AC+BC)$$

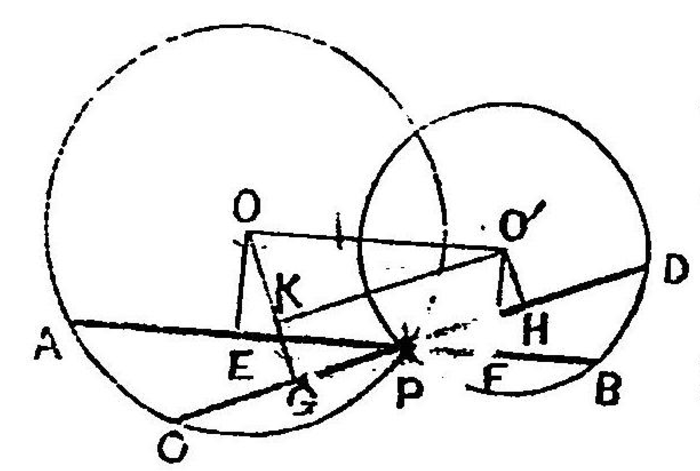
15. 圓ノ外接四邊形ノ對邊ノ和ハ相等シ.
又此逆ハ眞ナリ.

$$AB+CD=BC+DA.$$



(1) 兩圓ノ交點ノ一ヲ過ギリ, 兩圓周ニ限ラレタル諸直線ノ中, 其最大ナルモノハ兩圓ノ中心ヲ結ビ付ル直線ニ平行ナリ, 其証ヲ問フ.

(解) 中心 O, O′ ナル二ツノ圓ノ交點 P ヲ過ギル多クノ直線ノ中, 兩圓ノ間ニ夾マレタル部分ノ最大ナルモノハ OO′ ニ平行ナル直線 APB ナリ.



之ヲ証明スル爲ニ對偶命題, 即チ OO′ ニ平行セザル任意ノ直線 CPD ハ APB ヨリ小ナルコヲ証スレバ可ナリ.

O,O′ ヨリ AB, CD ニ垂線ヲ引キ, 其足ヲ E, F, G, H トスレバ, EF, GH ハ夫々 AB, CD ノ半分ニ等シ.

O′ヨリ CD ニ平行線 O′K ヲ引クトキ四邊形 O′E, HK ハ矩形ナルニヨリ

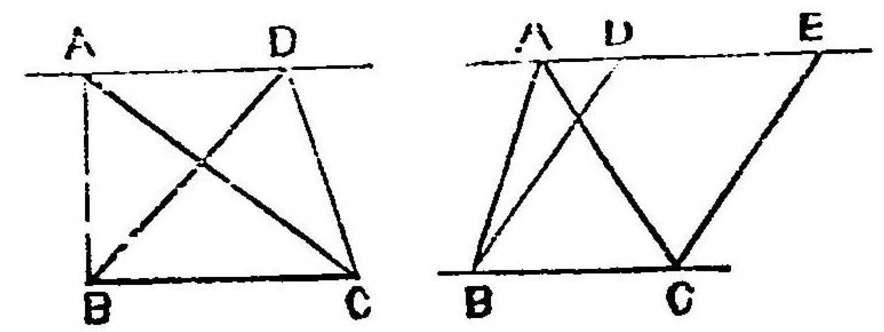
$$EF=OO',\quad GH=O'K,$$

直角三角形 OO′K ヨリ

$$O'K<OO',$$
$$\therefore\quad GH<EF,$$
$$\therefore\quad CPD<APB.$$

面積ノ基本定理

1. 同底同高ノ平行四邊形或ハ三角形ハ其面積相等シ.
又同底同高ノ平行四邊形ハ其三角形ノ面積ノ二倍ナリ.

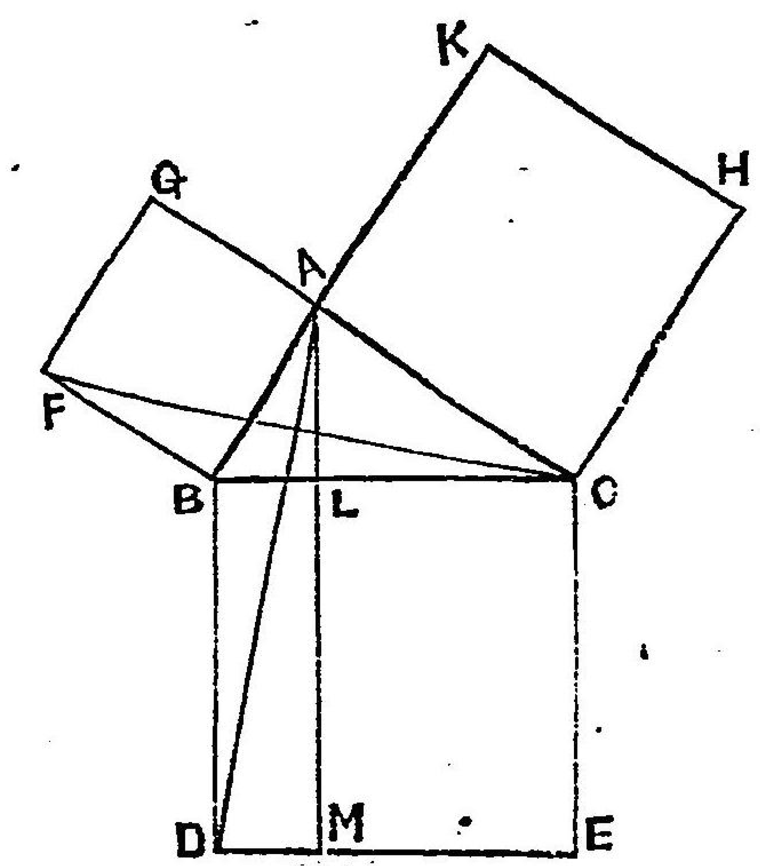


$AD \parallel BC$;
$\triangle ABC = \triangle DBC$.
$2\triangle ABC =$ 平行四邊形DBCE.

此逆ニ同底等積ノ平行四邊形或ハ三角形ハ同高ヲ有ツ

2. 平行四邊形ノ對角線ニ沿フ餘形ハ其面積相等シ.

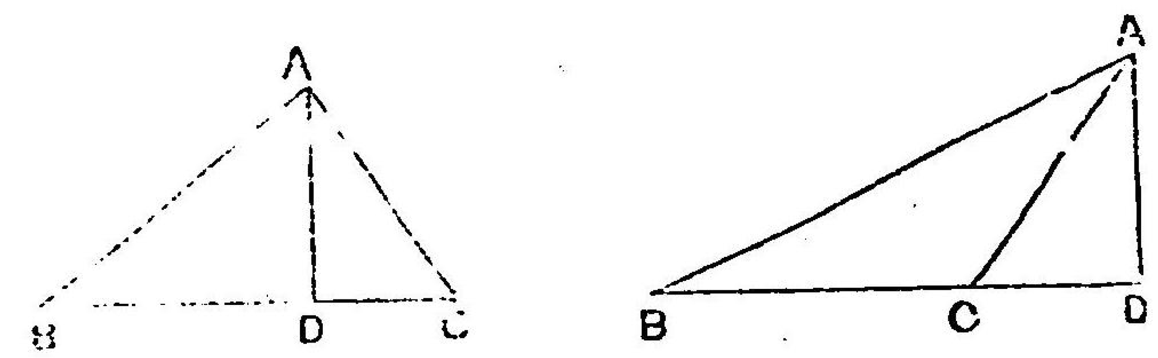
3. 直角三角形ノ斜邊上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ
(ピサゴラス定理)



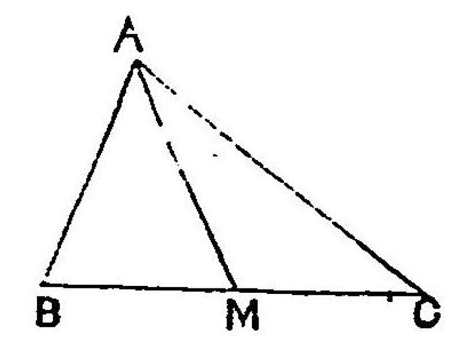
$AL \perp BC$.
$AB^2 + AC^2 = BC^2$.
(正方形ABCD =矩形BDML)
(正方形ACHK =矩形LMEC)

4 三角形ノ一邊ノ上ノ正方形ハ，其對角ガ鋭角ナルト鈍角ナルトニ應テ，他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ，其第二邊ト第三邊ガ第二邊ノ上ニナス正射影トナス矩形ノ二倍ヲ減シ，或ハ加ヘタルモノニ等シ.

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \mp 2BC.CD.$ $AD \perp BC.$

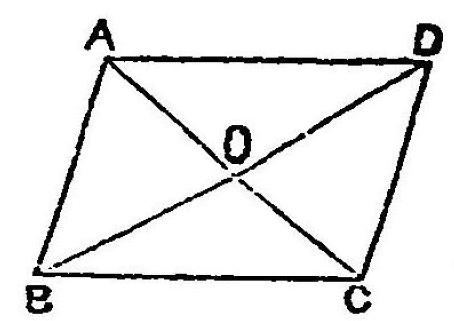


5. 三角形ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ハ半底ノ上ノ正方形ト中線ノ上ノ正方形トノ和ノ二倍ニ等シ.



$BM = MC$,
$AB^2 + AC^2 = 2(BM^2 + AM^2)$

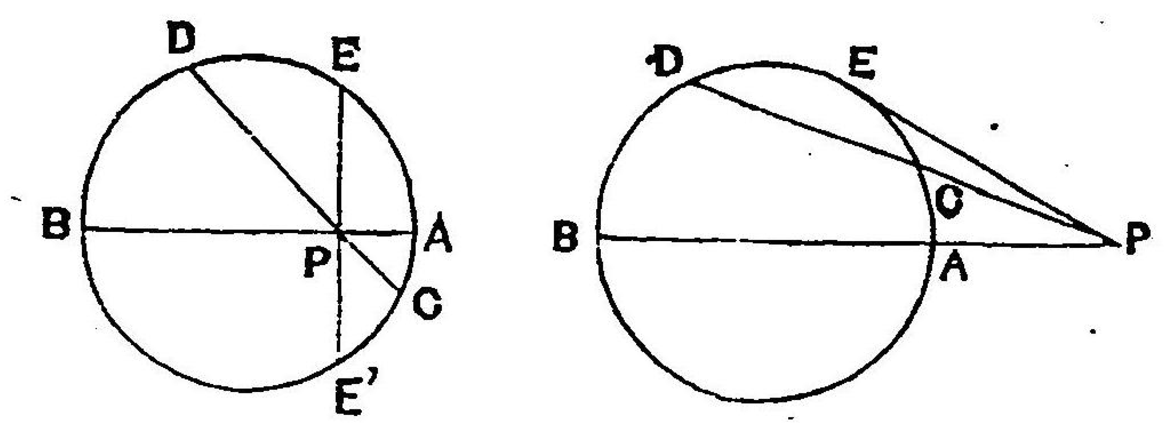
6. 平行四邊形ノ各邊上ノ正方形ノ和ハ對角線上ノ正方形ノ和ニ等シ.



$$AB^2 + AD^2 = 2AO^2 + 2BO.$$
$$BC^2 + CD^2 = 2CO^2 + 2BO^2 \quad (+$$
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4AO^2 + 4BO^2$$
$$= AC^2 + BD^2$$

7. 一定點Pヲ通シテ引キタル直線AB及ビCDノ圓周ニ至ル分ノ包ム矩形ハ相等シ; PA.PB=PC.PD.
又若シ其點ガ圓内ニアリテ弦 EE′ ガ P ニテ二等分セラルヽトキ, 或ハ其點ガ圓外ニアリテ切線 PE ト成ルトキハ

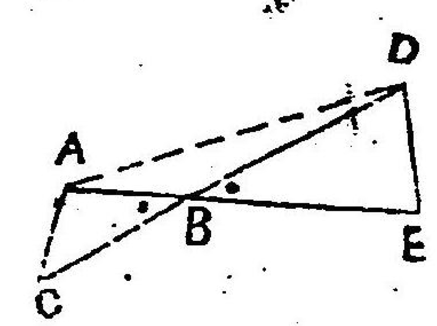
$$PE^2=PA.PB$$



此逆ニ, PA.PB=PC.PD ナルトキハ, A, B, C, D ノ四點ハ同圓周上ニアリ; 又 $PE^2=PA.PB$ ナルトキハ. A, B, E 三點ヲ通ズル圓ハ PE ニ切ス.

8. $a:b::c:d$ ナルトキ, $ad=bc$.
卽チ, 四線比例ヲナストキ, 其外項ノ包ム矩形ハ中項ノ包ム矩形ニ等シ. 又此逆ハ眞ナリ.

9. 等角ヲ有ツ二個ノ三角形或ハ平行四邊形ノ比ハ其角邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シ.



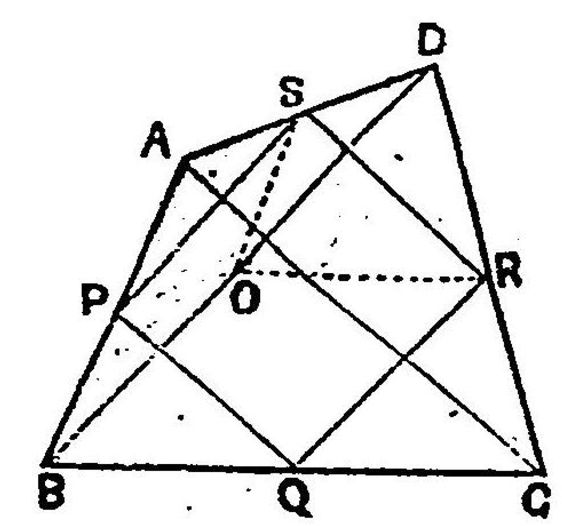
△ABC : △BDE=AB.BC : BD.BE.
系 △ABC=△BDE ナラバ AB.BC=BD.BE.

10. 相似三角形ノ面積ハ對應一邊ノ二乘比ナリ.

11. 三角形ノ二立邊ノ包ム矩形ハ, 其高ト外接圓ノ直徑トノ包ム矩形ニ等シ.

12. 圓内四邊形ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ハ, 其對角線ノ包ム矩形ニ等シ. (トレミー定理)(頁~~156~~165ヲ見ヨ)

(1) 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付クレバ平行四邊形ヲ得ベシ, 而シテ其積ハ原四邊形ノ半ニ等シ.



(解) ABCD ヲ與ヘラレタル四邊形トシ P, Q, R, S ヲ各邊ノ中點トスレバ, 四邊形 PQRS ハ平行四邊形ニシテ原四邊形ノ半分ニ等シ.
P, S ハ AB, AD ノ中點ナルヲ以テ PS ハ BD ニ平行ナリ.

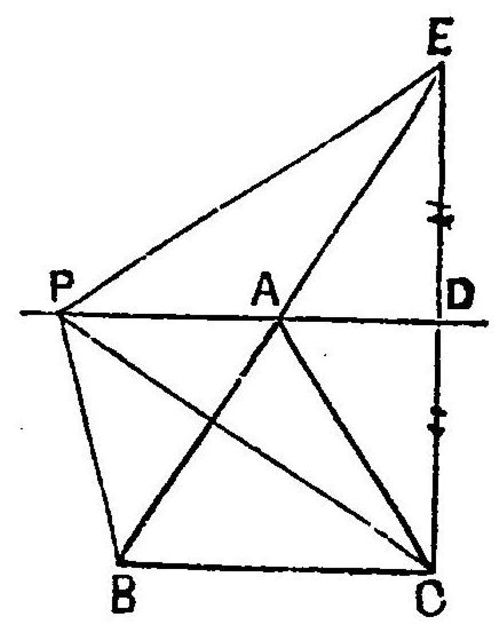
之ト同樣ニ QR ハ BD ニ平行ナリ, 之ニ依テ PS, QR ハ互ニ平行ナリ, 同樣ニ PQ ハ RS ニ平行ナリ, 故ニ四邊形 PQRS ハ平行四邊形ナリ.

BD ノ中點ヲ O トシ, OS, OR ヲ結ベバ四邊形 BPSO, BQRO ハ平行四邊形ニシテ, 夫々三角形 ABD, CBD ノ半分ニ等シ, 故ニ面積 BPSORQ ハ此四邊形ノ半分ニ等シ, 然ルニ SR=PQ

SO=PB, RO=QB ナルヲ以テ三角形 BPQ ハ RSO ニ等シ, 故ニ面積 BPSORQ ハ平行四邊形 PQRS ニ等シク即チ原四邊形ノ半分ナリ.

(2)　同底同高ヲ有スル三角形ノ中ニ就テ二等邊ノモノ其周最小ナリ, 之ヲ証セ.

(解) 三角形 ABC ニ於テ AB=AC トシ. 之ト同底同高ヲ有スル三角形ヲ PBC トス. 然ルヰハ



AB+AC<PB+PC.

C ヨリ AP ニ垂線 CD ヲ作リ且ツ之ヲ E ニ延長シテ ED=DC トス. EA, EP ヲ結ブ; 然ルヰハ

AE=AC, PE=PC,

又 $\angle PAB=\angle DAC=\angle EAD$ ナレバ BAE ハ直線ナリ.

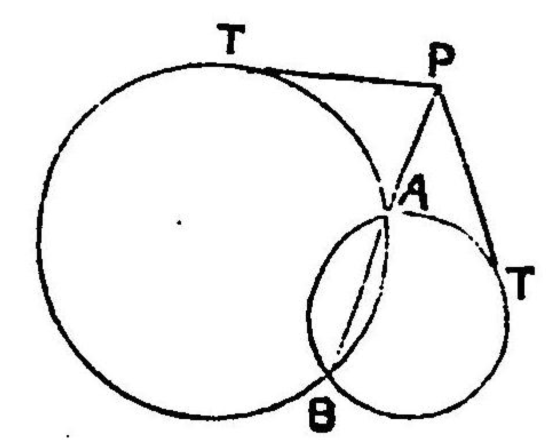
PB+PE>BE. (即チ BA+AE)

即チ PB+PC>BA+AC,

故ニ三角形 ABC ノ周ハ三角形 PBC ノ周ヨリ少ナリ

(3)　AB ガ二ツノ圓ノ共通弦ナルヰ AB ノ延長上ノ一點ヨリ二圓ヘ引ケル切線ハ相等シ, 其証ヲ問フ.

(解) 二圓ガ A 及ビ B ニテ交ルトス, AB ノ延長上ノ任意ノ點 P ヨリ各圓ニ切線 PT, PT′ ヲ作ルヰハ PT=PT′ ナルベシ.



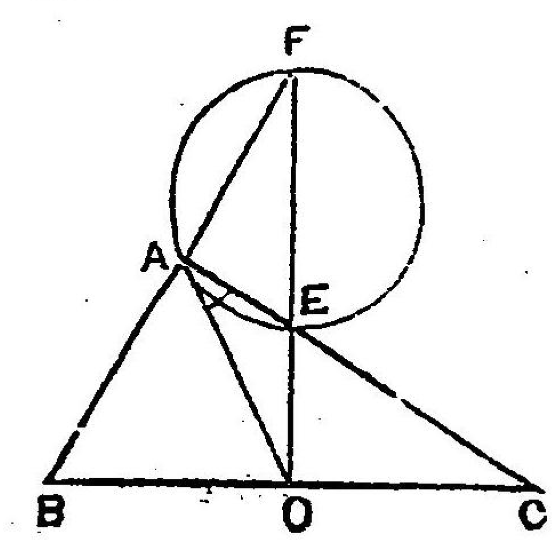
何トナレバ

$PT^2=PA.PB=PT'^2$

$\therefore\quad PT^2=PT'^2$

$\therefore\quad PT=TP'$,

(4)　直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ノ中點 O ヨリ此邊上ニ垂線ヲ立テ他ノ二邊ト E 及ビ F ニ於テ交ラシメ又直角ノ頂點 A ヲ O ニ結ビ付クルヰハ, AO ノ上ノ正方形ハ OE ト OF トノ包ム矩形ニ等シ, 之ヲ証明セヨ.



(解) 三角形 AOC ハ二等邊ナルヲ以テ

$\angle OAC=\angle OCA$

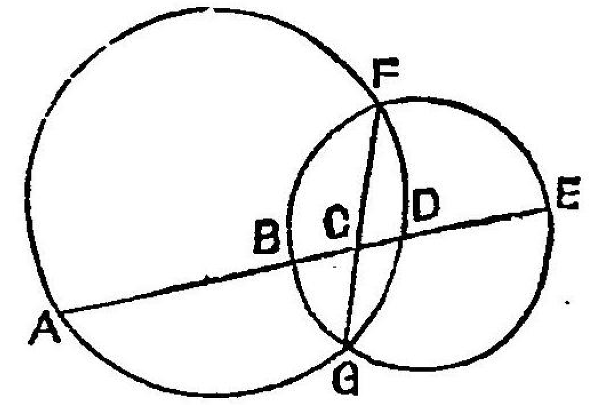
$=\angle B$ ノ餘角

又 直角三角形 BOF ヨリ

$\angle BFO=\angle B$ ノ餘角

因テ三角形 AEF ニ外接スル圓ハ OA ニ切スヘシ 故ニ $OA^2=OE.OF$.

(5) 相交ルニツノ圓ノ共通弦ノ上ニ在ル點 C ヲ通ツテ直線 ABCDE ヲ引キ一ツノ圓トノ交リヲ A, D 他ノ圓トノ交リヲ B, E トスルトキ AB:BC=ED:DC ナルヲ証セ.



(解) 二ツノ圓ノ交點ヲ F, G トス, 然ルトキハ圓 AFG ヨリ

$$CF.CG=AC.DC,$$

圓 EFG ヨリ

$$CF.CG=CE.BC,$$

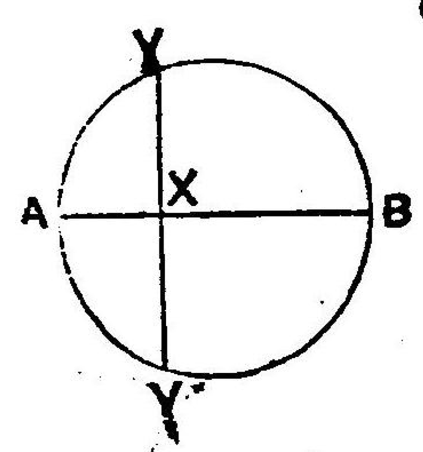
$$\therefore\ AC.CD=CE.BC,$$

即チ $AC:BC=CE:CD$

因テ $AC-BC:BC=CE-CD:CD.$

即チ $AB:BC=ED:DC.$

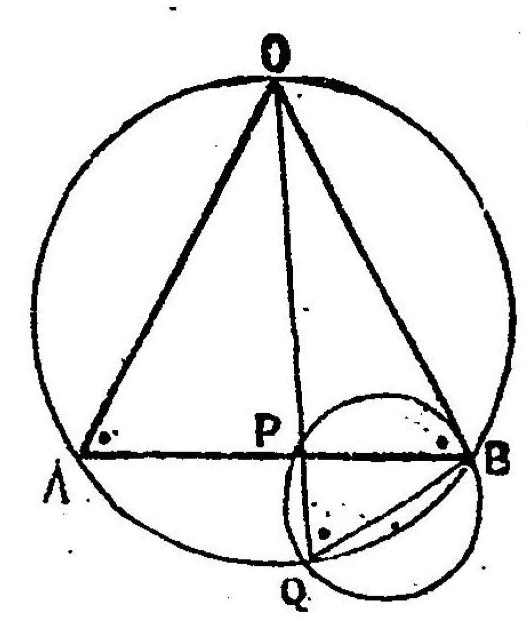
(6) 圓ニ内接セル矩形ノ二邊ノ和ガ定長ナルモノヽ中ニ就テ其積ノ最大ナルハ其邊ノ相等シキトキニアリ.



(解) AB ヲ與ヘラレタル矩形ノ二邊ノ和トス. AB ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ AB 上ノ任意ノ點 X ヨリ之ニ垂線 YXY′ ヲ作リ圓周トノ交點ヲ Y 及ビ Y′ トスレバ $AX.XB=YX.XY'$ ナリ.

今若シ此 AX 及ビ XB ノ有ツ矩形ヲ最大ナラシムルニハ XY, 及ビ XY′ ノ積ヲ最大ナラシムルヲ要ス; 而シテ之ガ最大ナルハ XY 及ビ XY′ ガ夫々半徑トナルトキ, 即チ X ガ AB ノ中點ニ來ルトキ, 即チ二邊相等シキトキニアリ.

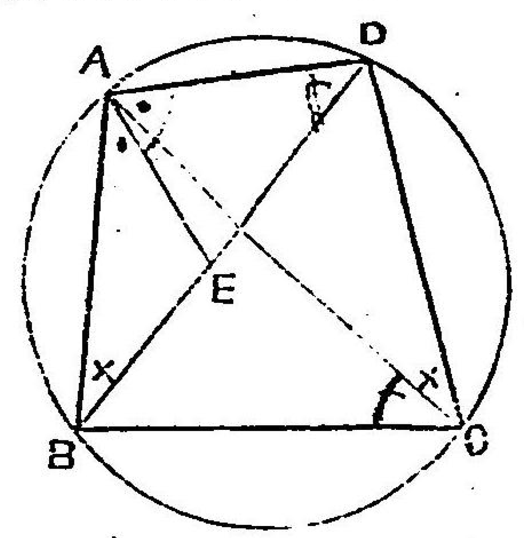
(7) 二等邊三角形 OAB ノ頂點 O ヨリ任意ノ直線ヲ引キ底邊 AB ト P ニ於テ交ラシメ外接圓ノ周ト Q ニ於テ交ラシムレバ OP ト OQ トノ包ム矩形ハ常ニ相等シ.



(解) BQ ヲ結ベバ $\angle OBP=\angle A=\angle OQB$, ナルヲ以テ若シ P, Q, B ノ三點ヲ通ズル圓ヲ畫ケバ OB ハ其圓ニ切スベシ, 之ニ依テ $OP.OQ=OB^2$. (即チ一定)

(8) 圓ニ内接シ得ベキ四邊形ノ對角線ノ包ム矩形ハ相對スル二邊ノ包ム矩形ノ和ニ等シ.

(解) DABC ヲ圓ニ内接スル四邊形トス, 然ル



𪜈ハ $AC.BD=AB.CD+AD.BC$ ナルベシ,

證明 AB ト角 DAC ニ等シキ角ヲナシテ線 AE ヲ引キ BD ト E ニテ會セシム,

然ル𪜈ハ

$\angle BAE=\angle DAC$,　(作法ニ依リ)

$\angle ABE=\angle ACD$,　(同弧上ノ圓周角)

$\therefore\ \triangle ABE \backsim \triangle ACD$

$AB:BE=AC:CD$

$\therefore\ BE.AC=AB.CD$ ……………………(1)

同樣ニ $\triangle EAD \backsim \triangle BAC$ ナルニヨリ

$AD:DE=AC:BC$

$\therefore\ DE.\ AC=AD.\ BC$ ……………………(2)

(1) ト (2) トヲ加ヘテ

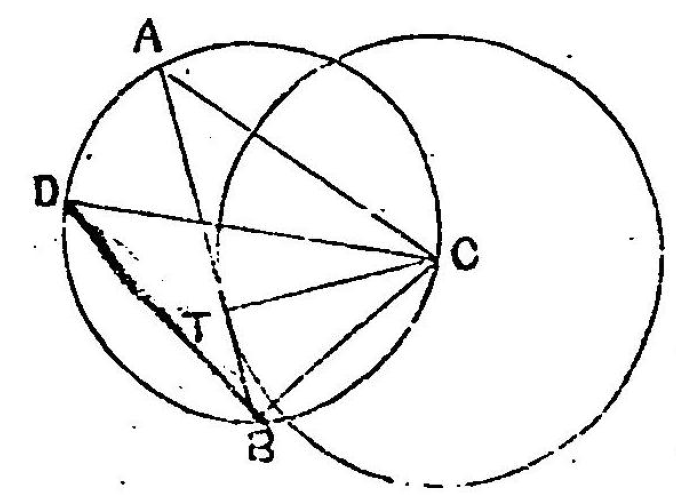
$(BE+ED)AC=AB.CD+AD.BC$

即チ　$BD.AC\quad=AB.CD+AD.BC.$

(9)　一定圓周上ノ一點 T ヨリ切線 ATB ヲ引キ其圓ノ中心 C ヲ過ル他ノ一定圓ト A 及ビ B ニ於テ交ヲルトス, AC 及ビ BC ノ包ム矩形ハ一定不變ナルコトヲ證セ.

(解) 切點ヲ T トシ CT ヲ結ビ第二ノ圓ノ直

徑ヲ CD トシ BD ヲ結ビ付ケヨ, 然ル𪜈ハ二ツノ三角形 ACT, CDB ニ於テ



$\angle CAT=\angle CDB$,

$\angle ATC=\angle CBD=$直角

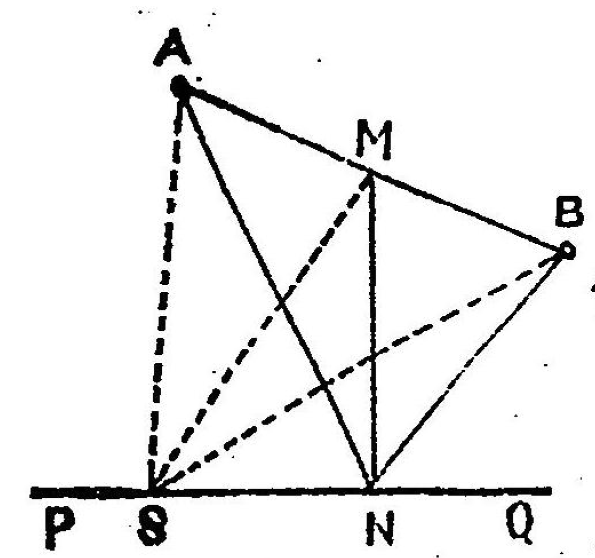
故ニ此二ツノ三角形 CAT CDB ハ相似形ナリ.

故ニ $CA:CT=CD:BC$

故ニ $AC.BC=CT.CD$

而シテ CT ハ第一圓ノ半徑 CD ハ第二圓ノ直徑ニシテ何レモ一定ナリ故ニ CA, CB ノ包ム矩形ハ一定ナリ.

(10)　與ヘラレタル直線外ノ與ヘラレタル二ツノ點ヨリ之ニ引ケル二ツノ直線上ノ正方形和ガ最小ナル點ヲ求ム.



(解) 與ヘラレタル直線ヲ P, Q 其線外ノ點ヲ A, B トス.

作法 A, B ヲ結ビ其中點 M ヲ求メ, M ヨリ直線 PQ ニ垂線 MN ヲ作リ, 其交點ヲ N トス, N ハ求ムル一點ナリ.

證明　PQ 上ニ任意ノ一點 S ヲ取ル，
　然ルトキハ　MN<MS，
而シテ　$AN^2+BN^2=2(MN^2+AM^2)$
　　又　$AS^2+BS^2=2(MS^2+AM^2)$
　$\therefore$　$AN^2+BN^2<AS^2+BS^2$，

軌　　跡

注意　軌跡ハ作圖法ノ總テヲ支配スルモノナレバ，豫メ之ヲ知リ置カザルベカラズ；而テ軌跡ノ研究ハ容易キモノニアラズ，是レ亦豫メ注意ヲ怠ルヿ勿レ.

1. 同方向ニアル點ノ軌跡ハ直線ナリ.
2. 一點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ圓周ナリ.
3. 一定線上ニ等角ヲ張ル角頂ノ軌跡ハ圓弧ナリ.
4. 二點ヨリ等距離ノ點ノ軌跡ハ，其二點ヲ結ブ直線ノ中點ニ作レル垂線ナリ.
5. 二線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ，其角ヲ二等分スル二個ノ直線ナリ.
6. 一線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ，其各傍ニ於ケル二個ノ平行線ナリ.
7. 二點ヨリ定比ヲ有スル點ノ軌跡ハ，此二點ノ距離ヲ其比ニ內分及ビ外分シタル兩分點ノ距離ヲ直徑トシタル圓周ナリ.
8. 二直線ヨリ定比ヲ有スル點ノ軌跡ハ，其交點ヲ通ズル二直線ナリ.　但シ二線ガ平行ナル場合ニハ，之ニ平行スル二直線ナリ.

注意　少ク𪜈以上ノ軌跡ノ心得ナクシテ作圖問題ヲ解カントスルハ，全ク此學ヲ解セザルモノヽ行爲ナリ.

9. 一點ヨリ一直線ニ至ル諸線ノ中點ノ軌跡ハ，其點ヨリ直線ニ作レル垂線ノ中點ヨリ其線ニ平行ニ引キタル直線ナリ．

10. 圓ノ定弦ノ中點ノ軌跡ハ同心圓ナリ．

11. 一點ヨリ圓周上ニ至ル中點ノ軌跡ハ圓ナリ．

12. 圓內(或ハ外)ノ一點ヲ通ズル弦(或ハ割線)ニ，中心ヨリ垂線ヲ引クキ，其垂足ノ軌跡ハ圓（或ハ圓弧）ナリ．

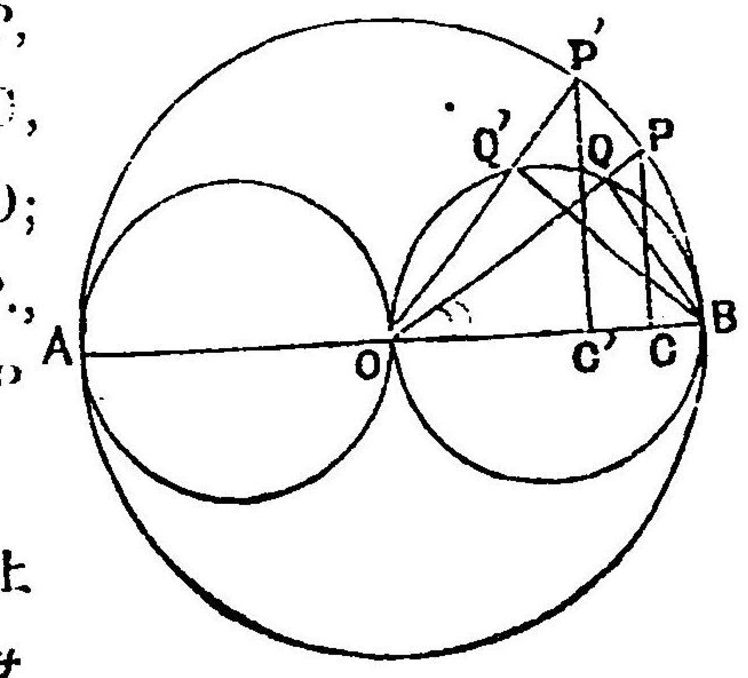
13. 直交二線ノ間ニ定長直線ガ滑ルキ，其中點ノ軌跡ハ圓弧ナリ．

14. 直交二線ノ間ニ直三角形ノ斜邊ヲ置キテ滑ラシムルキ，其直角頂ノ軌跡ハ直線ナリ．

15. 一定點ニ一角頂ヲ有チ，一定線上ニ一角頂ヲ有ツ相似三角形ノ頂點ノ軌跡ハ二ツノ直線ナリ．

軌跡ノ問題ヲ解クニハ　直線ナルヤ圓ナルヤヲ考定シテ若シ直線ナラバ，其軌跡ハ點ノ方向ヲ決定スルヿニ依テ解決ヲ得ベキモノナルガ故ニ，隨テ其點ハ所題ノ中ノ一定點ト一定線トヲ求メ其何レノ方向ニアルヤヲ搜リ其定方向角ヲ發見スルヲ要ス；又其軌跡カ圓或ハ圓弧ナラバ，其軌跡ハ定點即チ中心ノ所在ト半徑ノ長サトヲ求ムルカ，或ハ定長直線即チ弦ト其弧ヲ張ル定角トヲ發見スルカニ依テ解決シ得ルモノナレバ，必ズ先ヅ之ヲ求ムルヿヲ心掛クベシ．

(1) 定圓 O ノ圓周上ノ動點 P ヨリ定直徑 AOB ニ垂線 PC ヲ引キ半徑 OP ヨリ OC ニ等シク OQ ヲ取ルキハ，Q 點ノ軌跡如何．



（解）　$OB = OP,$

$OQ = OC,$

$\angle O = \angle O;$

$\therefore \triangle OQB \equiv \triangle OCP,$

$\therefore \angle OQB = \angle OCP$

$= \angle R.$

Q ハ定線 OB ノ上ニ定角(直角)ヲ張ルヲ以テ Q 點ハ OB ヲ直徑トスル圓周上ニ在リ．

逆ニ此圓周上ニ他點 Q′ ヲ取リ，OQ′ ヲ引長シ定圓周トノ交點ヲ P′ トシ，P′ ヨリ AB ニ垂線 P′C′ ヲ作レバ

$OP' = OB$，　$\angle OC'P' = \angle OQ'B =$ 直角，

$\angle O = \angle O$　ナルヲ以テ，　$\triangle OP'C' \equiv \triangle OBQ'$

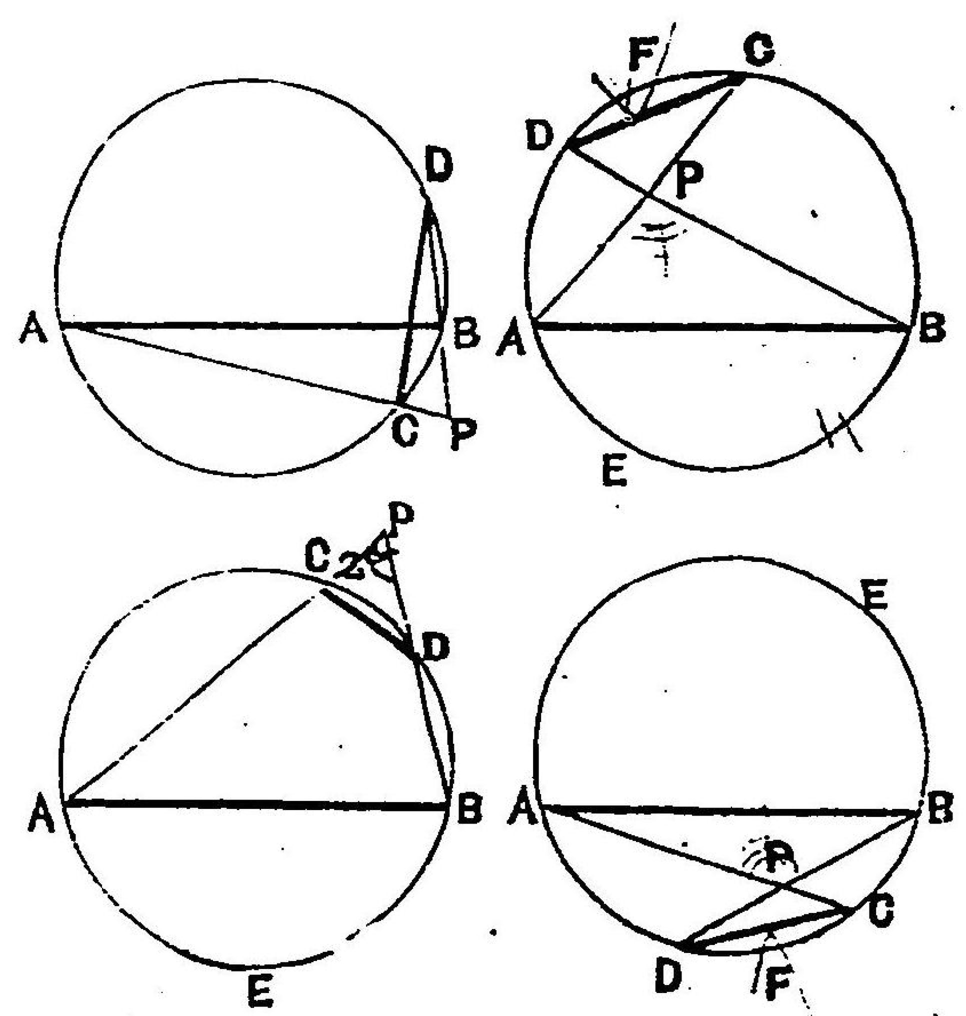
$\therefore \; OQ' = OC'.$

トナリテ，此要件ヲ滿足ス．故ニ Q ノ軌跡ハ OB（并ニ AO）ヲ直徑トスル圓ナリ．

注意　軌跡ノ證明ハ常ニ逆ヲモ證明セザレバ充分ナラズ，然レド，初學者ニハ甚困難ナルヲ以テ，次解ノ如ク多クハ之ヲ省略ス．

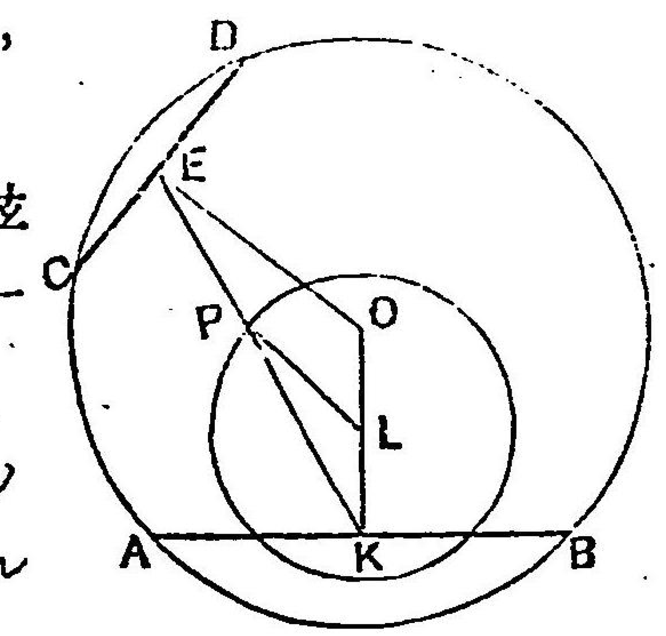
(2) AB ハ與ヘラレタル圓ノ定弦ニシテ CD ハ長サ一定セル動弦ナリ，AC, BD ノ交點ノ軌跡如何，

(解) AC, BD ノ交點チ P トスレバ角 APB ハ下ノ圖ニ以ケル右ノ一組ノ二ツノ弧 AEB, CFD, ノ和半チ以テ測ラレ，左ノ一組ニ於テハ其差半チ以テ測ラレ，弧 CFD ハ弦 CD ノ長サ一定セルチ以テ其大サ定マレリ，又 AEB ハ定弧ナリ，因テ角 APB ハ不易ナリ故ニ P ノ軌跡ハ AB ニ對シ不變ナル角チ含ム點ノ軌跡ニ同ジクシテ一般ニ四ツノ AB チ弦トスル圓弧ナリ．



(3) 圓 C ニ於テ AB チ定弦，CD チ定長動弦トシ，AB, CD ノ中點 K, E チ結ブ，其中點 P ノ軌跡如何．

(解) 圓心 O ト E, K チ連結スル片，OE, OK ハ圓心ヨリ定長ノ弦ニ至ル距離ナルチ以テ各一定ノ長サチ有ス．



定位置ノ直線 OK ノ中點 L ト P チ連結スレバ，直線 PL ハ三角形 EOK ノ二邊ノ中點チ通ズル線ナルチ以テ，PL ハ EO ノ半ニ等シ．

故ニ P ハ定點 L ヨリ常ニ一定ノ距離ニアリ；由テ P ノ軌跡ハ圓ナリ．

附言　本題ノ解チ充分ニ知ラント欲セバ數學雜誌第三卷第一號チ見ヨ．

作圖

1. 定直線ヲ二等分スルヿ.
2. 定角ヲ二等分スルヿ.
3. 定直線上（或ハ外）ノ一點ヨリ之ニ垂線ヲ作ルヿ.
4. 定線ニ定角ヲナスベキ一直線ヲ引クヿ.
5. 線外ノ一點ヨリ之ニ平行線ヲ引クヿ
6. 三點ヲ通ズル圓ヲ畫クヿ.
7. 一線ヲ定比ニ內分，或ハ外分スルヿ.
8. 三數ノ第四比例項ヲ求ムルヿ.

注意　以上ハ易題ニシテ，之ヲ他ニ引用スルモ多クハ證明ヲ要セザル已知ノ作法トナス.

9. 一定直線上ニ定角ヲ張ル弓形ヲ作ルヿ.
10. 一矩形ニ等シキ正方形ヲ作ルヿ.
11. 二點ヲ過キ一線ニ切スル圓ヲ畫クヿ.

注意　以上ノ三ツハ甚ダ要用ニシテ忘レ易キ作圖法ナレバ，恒ニ意ヲ用ヒテ記憶ニ存セシメヨ.

12. 三角形ノ三邊ヲ與ヘテ之ヲ作ルヿ.
13. 三角形ノ二邊ト一角トヲ與ヘテ之ヲ作ルヿ.
14. 三角形ノ二角ト一邊トヲ與ヘテ之ヲ作ルヿ.
15. 三角形ノ底邊ト高サト頂角トヲ與ヘテ之ヲ作ルヿ
16. 三角形ノ底邊ト頂角ト二邊ノ和或ハ差トヲ與ヘテ之

ヲ作ルヿ

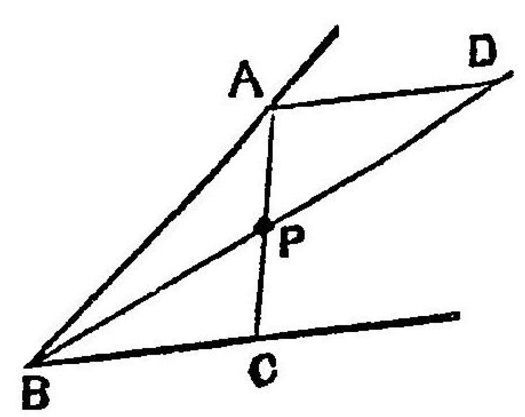
注意　以上ノ五題ハ三角形作圖ノ基本ナリ.

作圖ノ考ヘ方

作圖題ヲ解クニハ先ヅ其解ガ出來タモノトシテ之ヲ解析スルガ普通ノ順序ナレモ，解析スレバトテ目當テナシニ行ヘバ非常ノ時間ヲ要スベシ，故ニ例バ一定點ヲ通シテ一直線ヲ引キ直[illegible]クハ圓ニ至ル其長サヲ此點ニテ二等分セヨト云フ如キ問題アリトス，然ルｷ自身ハ線ノ二等分ト云フヿニ就テ如何ナル知識ヲ有スルカヲ心ニ求メザルベカラズ，若シ此時ニ平行四邊形ノ對角線ハ互ニ二等分スト云フヿヲ考ヘ附クカ，或ハ又三角形ノ一邊ノ二等分點ヨリ底邊ニ平行ニ引キタル線ハ他邊ヲ二等分スト云フヿヲ考ヘ附クカスレバ，其所設ノ問題ヲ此定理ニ當テ適マル樣ニ考ヘルガ，問題ノ考ヘ方ナリ，依テ下ニ其解法ヲ揭ゲテ考ヘ方ヲ示サン.

（例 I.）角ABC 內（或ハ外）ノ一定點 P ヲ通シテ直線 APC ヲ引キ AP ト CP ト等シカラシメヨ.

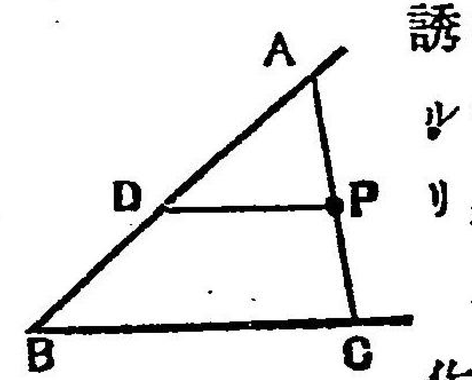
此作圖ヲ假ニ出來得タリトシ，之ヲ平行四邊形ノ性質ニ誘カントシテ考フルニ若シ APC ヲ平行四邊形ノ對角線ト見レバ，P ハ其中點ニシテ AB 及ビ BC ハ其二邊ト見做スヿヲ得.



依テ此形ヲ完成スル爲メ BP ヲ結ビ之ヲ D マデ延長シ DP=BP ニ作レバ平行四邊形ノ一角頂 D ヲ得, D 已ニ定マレバ AD ‖ BC ナルヲ以テ, 直ニ作圖法ヲ得.

(作圖法) BP ヲ結ビ之ヲ D ニ延長シテ DP=BP トシ, D ヲ通ジテ DA ヲ BC ニ平行ニ引キ AB トノ交點ヲ A トス, AP ヲ結ベハ是レ求ムル線ナリ.(證略ス)

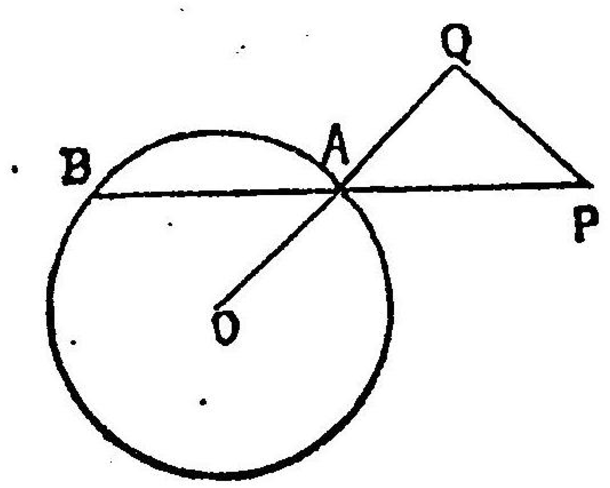
(別解)或ハ又此時ニ三角形ノ性質ヲ想像シテ, 之ニ誘カントス然ルトキ P ハ AC ノ中點ナルヲ以テ若シ BC ニ平行ニ PD ヲ作リ其 AB トノ交點ヲ D トスレバ AD=DB ナルコト明ニシテ隨テ次ノ作圖法ヲ得



(作圖法)P ヲ通ジテ PD ヲ BC ニ平行ニ引キ AB トノ交點ヲ D トシテ AD ヲ BD ニ等シク取リ A ヲ定メ AP ヲ結ベハ是レ所要ノ線ナリ.

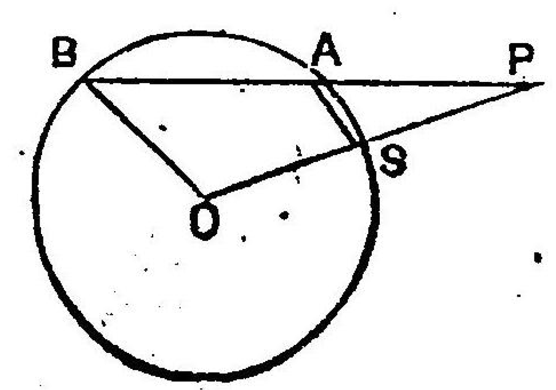
(例 II) 定圓 O 外ノ一定點ヨリ割線 PAB ヲ作リ其圓外ノ部分 PA ト圓內ノ部分 AB ト相等シカラシメヨ.

此作圖ガ假ニ出來タルモノトセヨ. 然ルトキ A ハ BP



ノ中點ナルガ故ニ之ヲ平行四邊形ノ對角線ノ中點ニ見立テ此形ヲ完成スル爲メ, OA ヲ結ビ之ヲ Q ニ延長シテ AQ ヲ AO ニ等シク取レバ B, O, P, Q ハ平行四邊形ノ四ツノ角頂ナルコト明カナリ. 四邊形ノ性質ニ依テ QP=OB, 即チ定圓半徑ナルコトヲ知ル, 隨テ次ノ作圖法ヲ得.

(作圖法) O ヲ中心トシ定圓直徑ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ, 又 P ヲ中心トシ定圓半徑ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ其交點ヲ Q トス, QO ヲ結ビ之ト定圓周トノ交點ヲ A トシ, PA ヲ結ベハ所要線ヲ得

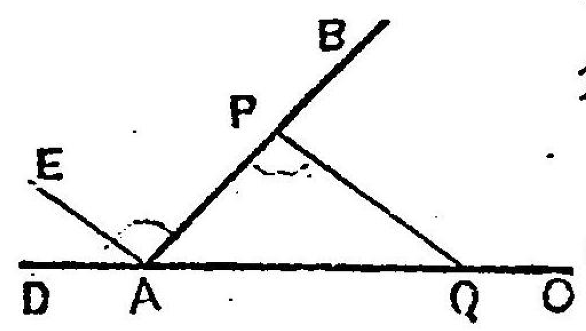


(別解)本題ヲ三角形ノ性質ニ導カントスル爲メ, PO, BO ヲ結ベハ A ハ三角形ノ邊 PB ノ二等分點トナルヲ以テ AS ヲ BO ニ平行ニ引キ PO トノ交點ヲ S トスレバ S ハ PO ノ中點トナル, PO ハ已知直線ナレバ隨テ S ハ已知點ナリ. 且ツ AS=$\frac{1}{2}$BO ナレバ, 次ノ作圖法ヲ得.

(作圖法) PO ヲ結ビ其中點 S ヲ求メ. S ヲ中心トシ定圓半徑ノ半ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ定圓周トノ交點ヲ A トス. PA ヲ結ベハ是レ所要ノ直線ナリ.

(1) AB. AC ハ二ツノ與ヘラレタル直線ニシテ P ハ AB 上ノ一點ナリトス, AC 上ニ一點 Q ヲ擇ミ角 APQ ヲシテ角 AQP ノ三倍ナラシムベキ Q 點ノ位置ヲ定ムベシ.

(解) AC ノ延長ト AB ガナス角 BAD ヲ四等分シ, 其 AD ニ最モ近キ等分線ヲ AE トスレバ P ヲ通シテ AE ニ平行スル直線ト AC トノ交點ハ所要ノ Q ナリ.



何トナレバハ AE QP 平行スルヲ以テ　$\angle AQP=\angle DAE$,

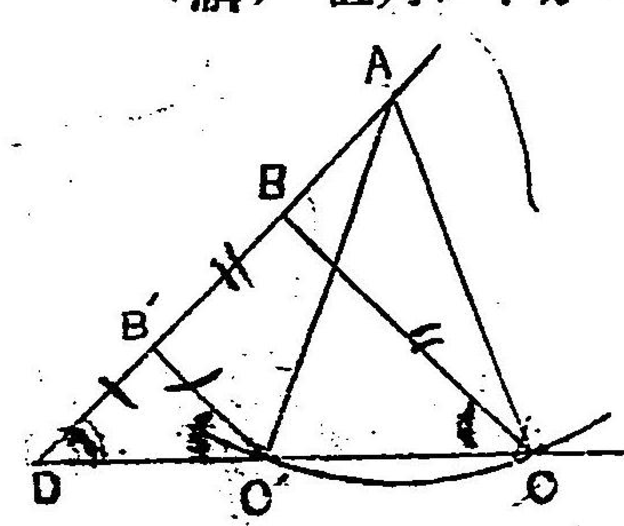
而シテ

$$\angle AQP+\angle APQ=\angle BAD=4\angle DAE=4\angle AQP$$

$$\therefore\ \angle APQ=3\angle AQP.$$

(2) 二邊ノ和ト斜邊トヲ與ヘテ直角三角形ヲ作ルコトヲ求ム.

(解) 直角ノ半分ニ等シキ角 CDA ノ一ツノ邊 DA ヲ與ヘラレタル二ツノ邊ノ和ニ等シクシ, A ヲ中心トシテ斜邊ニ等シキ半徑ヲ以テ弧ヲ畫キ CD ト C, C′ ニ於テ交ラシメ, C 或ハ C′ ヨリ AD ニ垂線 CB 或ハ

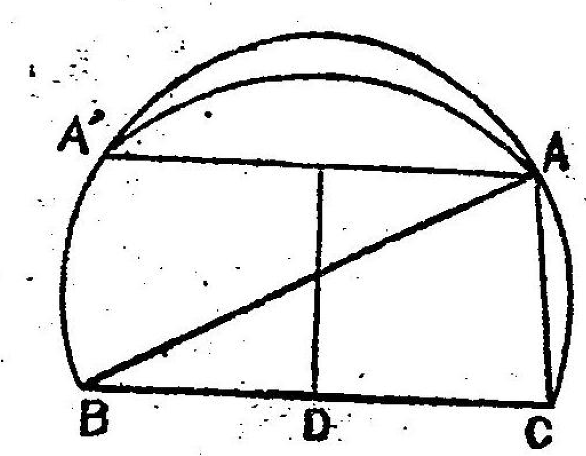


C′B′ ヲ引ケバ三角形 ABC 及ビ AB′C′ ハ所要ノ三角形ナリ.

何トナレバ角 B, B′ ハ直角ニシテ, 角D ハ其半ニ等シキヲ以テ角 B′C′D, BCD ハ半直角ナリ. 因テ $B'D=B'C'$, $BD=BC$; 故ニ $AB'+B'D=AB'+B'C'$, $AB+BD=AB+BC$ 即チ $AB'+B'C'$, $AB+BC$ トモニ與ヘラレタル二ツノ邊ノ和ニ等シ, 三角形 AB′C′, ABC ガ此要件ヲ滿足スルヤ明カナリ.

(3) 底邊ト底邊ニ引キタル中線ト頂角トヲ與ヘテ三角形ヲ作ル法如何.

(解) 底邊ヲ a トシ, a ニ引キタル中線ヲ m トシ, 頂角ヲ α トシ三角形ヲ作ルコト.



一直線上ニ a ニ等シク BC ヲ取リ, BC ノ中點 D ヲ中心トシ m ヲ半徑トシテ圓弧 AA′ ヲ畫ケ, BC ヲ弦トシ α ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ畫キ弧 AA′ トノ交點ヲ A, A′ トスレバ三角形 ABC, A′BC ハ所要ノモノナリ

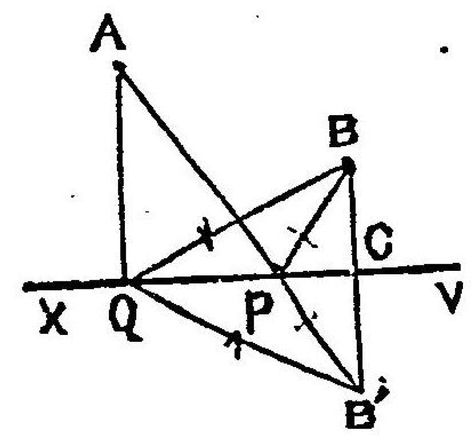
證明ハ作圖ニヨリ明瞭ナレバ略ス.

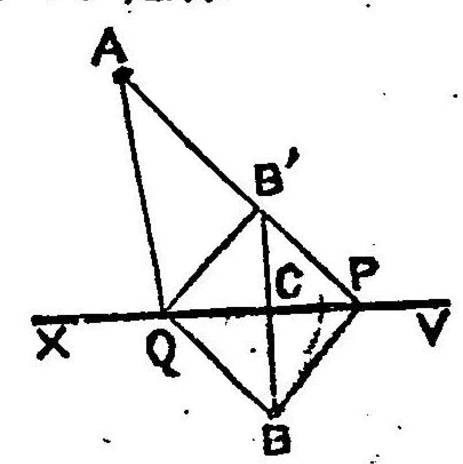
D ヨリ BC ニ立ツル垂線ハ畫ケル二圓ノ中心ヲ過グルヲ以テ共通弦 AA′ ニ垂線ナリ, 因テ AA′ BC

ハ平行ス; 故ニ其間ニアル二ツノ弧モ相等シクシテ $\angle A'CB=\angle ABC$ ナリ, 故ニ兩三角形 ABC, A'BC ハ合同形ナリ, 故ニ唯一ノ解アリ.

(4) 二定點ヨリ一直線上ノ一點ニ至ル距離ノ和ノ最小, 及ビ其差ノ最大ヲ求ム.

(解) 定二點ヲ A, B' トシ, 定線ヲ XY トス.





B ヨリ XY ニ垂線 BC ヲ作リ, 之ヲ B' マデ引長シテ R'C=BC ニ取リ, A, B' ヲ結ビ其 XY トノ交點ヲ P トスレバ P ハ求ムル點ナリ.

何トナレバ P ノ外ニ任意ノ一點 Q ヲ取ル; 然ルトキハ $BP=B'P$, $BQ=B'Q$ ナルヲ以テ

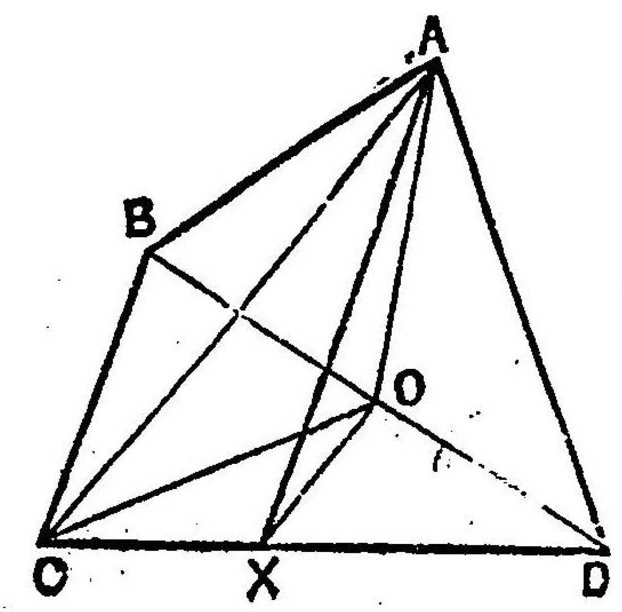
$$AQ\pm B'Q>AB'=AP\pm B'P=AP\pm BP,$$

附言 A, B ガ線ノ兩傍ニアルトキノ和ノ最小, 又 A, B ガ同傍ニアルトキノ差ノ最大ハ, A, B ヲ結ベハ直ニ點 P ヲ得ルヲ以テ略セリ.

注意 此題ハ極大極小ノ問題中, 大切ナル場合ナリ忘ルヽコトナカレ.

(5) 任意ノ四邊形ノ一角頂ヨリ一直線ヲ出シテ此四邊形ノ面積ヲ二等分セヨ.

(解) 任意ノ四邊形ヲ ABCD トシ其角頂ノ一ツ A ヲ通シテ其一直線ヲ引キ之ニ由テ其面積ヲ二等分スルコトヲ求ム



作圖 A ヲ通ゼザル對角線 BD ヲ作リ其中點ヲ O トシ OA, OC ヲ結ビ付クレバ面積 ABCO, ADCO ハ明カニ相等シ A, C ヲ結ビ O ヲ過リ之ニ平行ニ OX ヲ作リ CD ト X ニ會セシメ AX ヲ結ベバ是レ所要ノ線ナリ.

證明 AC, OX ハ平行スルヲ以テ $\triangle AXC=\triangle AOC$,

$$\therefore\ \triangle AXC+\triangle ABC=\triangle AOC+\triangle ABC$$

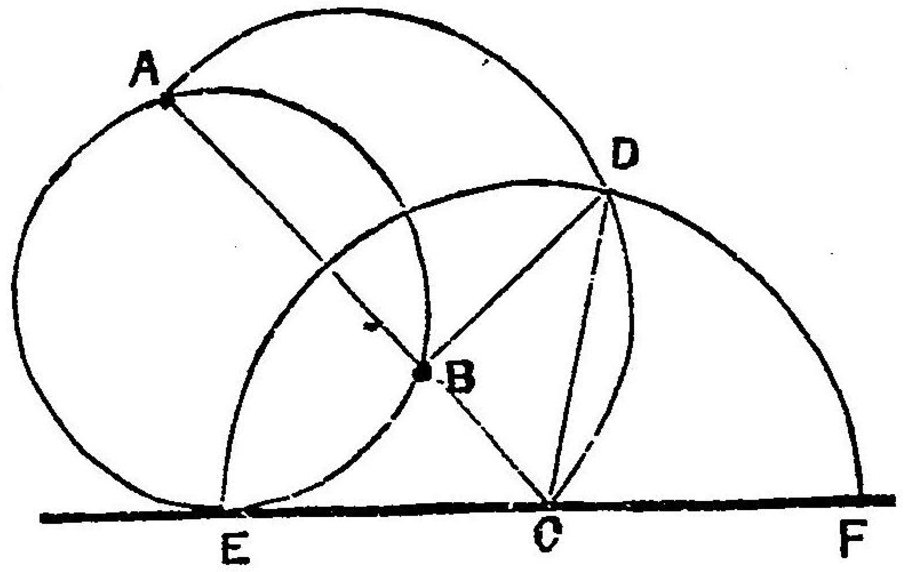
$$=\text{四邊形}ABCO$$

$$=\tfrac{1}{2}(\text{四邊形}\ ABCD).$$

注意 此種ノ問題ノ中ニ就テ 「三角形ノ邊上ノ一點ヨリ一線ヲ出シテ其面積ヲ二等分セヨ」ト云フ問題最モ大切ナリ; 豫メ研究シ置クヘシ, 若シ此點ガ邊上ニアラザレバ難題トナルコトヲ知ルベシ.

(6)　二ツノ與ヘラレタル點ヲ過ギテ一ツノ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ畫ケ.（何レノ教科書ニモ解アリ）

（解）　玆ニ普通ナラザル解ヲ掲ゲン



A, B ヲ與ヘラレタル二點 EF ヲ與ヘラレタル直線トシ A, B ヲ過リ EF ニ切スル圓ヲ畫クコトヲ求ム.

問題ヲ解キ得タルモノトシ ABE ヲ求ムル圓トセヨ, AB ヲ延長シ EF ト C 點ニ於テ會セシムレバ

$$CB.CA=\overline{CE}^2$$

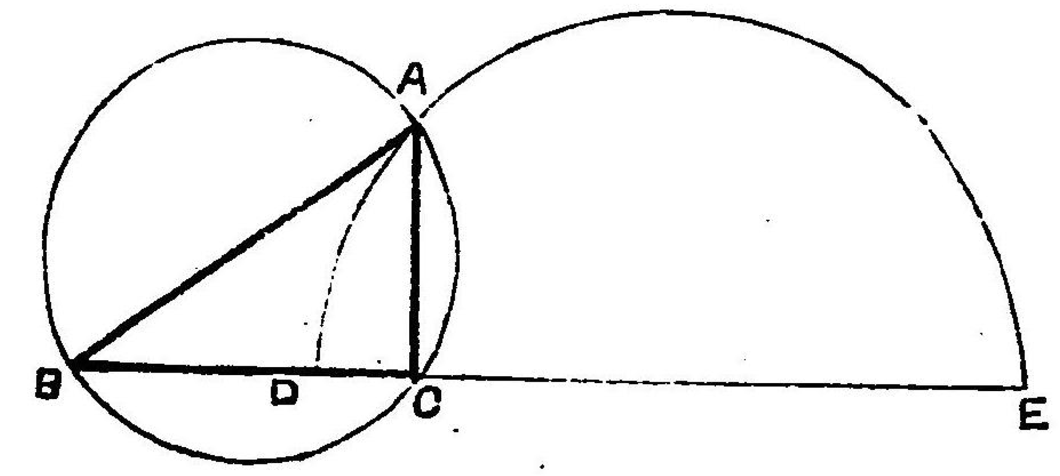
今 AC ヲ直徑トシテ圓 ADC ヲ作リ B ヨリ AC ニ垂線 BD ヲ作リ CD ヲ結ベバ $CB.CA=\overline{CD}^2$

$$\therefore \quad CE=CD$$

故ニ C ヲ中心トシ CD ヲ半徑トシテ圓 EDF ヲ畫キ與直線ト E, F ニ於テ交ラシムルトキハ E, F ハ求ムル圓ト直線トノ切點ナリ, 何トナレバ斯クシテ得タル點ニ就テ $CB.CA=\overline{CE}^2=\overline{CF}^2$ ナレバナリ.

(6)　底邊ト頂角及ビ他ノ二邊ノ比ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ

（解）　與ヘラレタル底邊ヲ BC, 頂角ヲ A, 他ノ二邊ノ比ヲ $m:n$ トス.



作圖　底邊 BC ノ上ニ與頂角 A ヲ含ムベキ弓形 BAC ヲ作リ 又 BC ヲ定比 $m:n$ ノ如ク內分及ビ外分シテ其分點ヲ D 及ビ E トス, DE ヲ直徑トシテ圓 DAE ヲ畫キ前ノ弓形トノ交點ヲ A トスレバ ABC ハ求ムル所ノ三角形ナリ.

證明　底邊及ビ頂角ガ與ヘラルヽトキ其頂點ノ軌跡ハ其頂角ヲ含ム弓形卽チ圓弧ナリ. 又二邊ノ比ガ與ヘラルヽトキ其頂點ノ軌跡ハ其底邊ヲ定比ニ內分及ビ外分シタル兩分點間ノ距離ヲ直徑トシテ畫キタル圓ナリ.

之ニ由テ前ニ求メタル A ハ此軌跡ノ交リナルヲ以テ求ムル要件ヲ何レモ滿足スルヿ明カナリ

比　例

1. 數多ノ平行線ガ二ツノ直線ト交リ，之ヲ數多ノ部分ニ截ルトキハ，其一直線ノ部分ノ比ハ，他ノ直線ノ之ニ對應スル部分ノ比ニ等シ．　逆ニ，二直線ヲ比例部ニ分チ之ヲ結ベハ其線ハ平行スルカ或ハ一點ニ會ス．

　附言　此特別ナル場合トシテ；三角形ノ底邊ニ平行ナル一線ヲ作リ，其邊ヲ內分或ハ外分スレバ其部分ハ比例ヲナス．　逆ニ，三角形ノ二邊ヲ比例部ニ分カテバ其分點ヲ結ビタル線ハ底ニ平行ス．

2. 同圓或ハ等圓ニ於テ中心角ノ比ハ其立ツ所ノ弧ニ正比ス．

3. 相等シキ高ノ平行四邊形（或ハ三角形）ノ面積ハ，其底邊ニ比例ヲナス．

　（以上ハ比例ノ基本定理ナリ）．

4. 一定直線ハ之ヲ或定比ニ內分シ或ハ外分スルコヲ得而テ其分點ハ各唯一ツニ限ル．

5. 相似三角形ハ各角相等シク其對應邊ハ比例ヲナス．

三角形ノ相似ナル場合ハ　(1)二角相等シキ；(2)二邊比例ヲナシテ，其夾角等シキ；　(3)三邊比例ヲナスキ；　(4)兩意ノ場合．二邊比例ヲナシテ其一對應邊ノ對角相等シキキ，他ノ對應邊ノ對角ハ相等シキカ或ハ補角ヲナス；而テ其角等シキキハ相似ナリ．

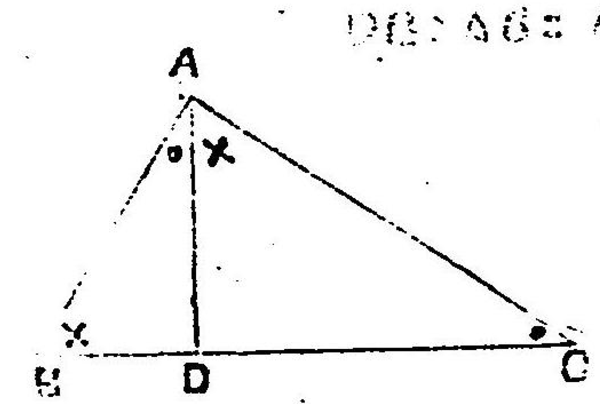
6. 三角形ノ頂角或ハ頂外角ノ二等分線ハ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分或ハ外分ス．　逆ニ，三角形ノ底邊ヲ二邊ノ比ニ內分或ハ外分シテ頂點ト結ベバ，其頂角或ハ頂外角ヲ二等分ス．

　附言　本題ハ試驗ニ大關係アリ特ニ記憶セヨ．

7. 對應邊夫々平行シタル相似形ノ對應シタル角頂ヲ結ベハ一點ニ會ス．

△ADB ∽ △CDA
∴ BD:AD = AD:DC
DB:AB = AD:AC

8. 直三角形ABCニ於テ，Aヲ直角，ADヲ斜辺BCヘノ垂線トスレバ，



$BD:AD = AD:DC$,

$BD:AB = AB:BC$,

$DC:AC = AC:BC$,

$AB^2:BC^2 = BD:DC$,

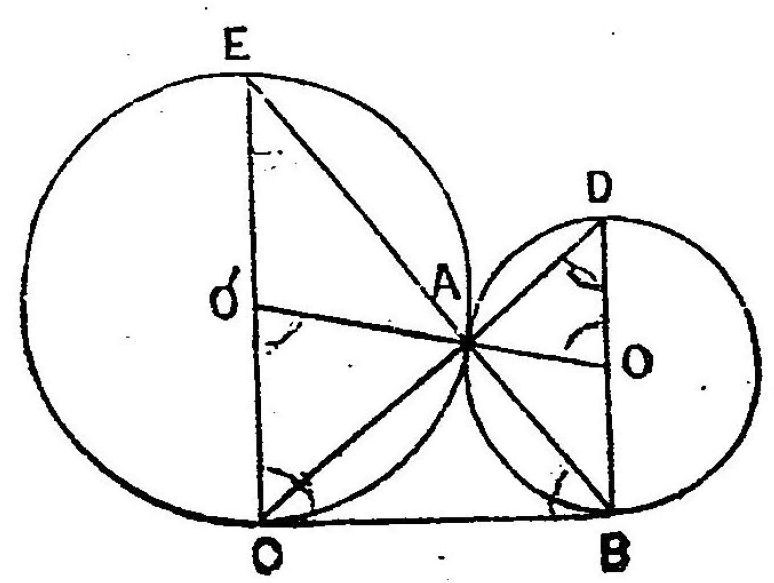
9. 相似三角形（一般ニ相似直線形）ノ面積ノ比ハ對應一邊ノ二乘比ナリ．

10. 一角ヲ等シクスル二ツノ三角形ハ，其角ヲ夾ム二邊ノ相乘比ナリ．

注意　以上ハ比例スベキ量ノ關係ニ就テ最モ大切ナルモノナレバ，少クモ是等ノ關係ヲ記憶シ置クベシ．

(1) 二ツノ圓ガ外切スル片ハ，切點ヲ過ラザル共通切線ノ其切點ノ間ニ在ル部分ハ，二ツノ圓ノ直徑ノ間ノ比例中項ナリ．

（解） 中心 O, O′ ニシテ A ニ於テ外切スル二圓ノ共通切線ノ內，切點Aヲ通ゼザルモノヽ切點ノ間ニアル部分ヲBCトシ，B,C ヲ通ズル直徑ヲ BD,CE トスレバ　　BD:BC＝BC:CE.



AヲO,O,′D,Cニ連結セヨ，然ル片ハ兩圓ハ外切スルヲ以テ AO，AO′ハ一直線ヲナス；又 BD, CE ハ切線BCニ垂線ナルヲ以テ互ニ平行ナリ，故ニ二ツノ二等邊三角形 ADO,ACO′ノ項角 O,O′ ハ相等シク；從テ底角 DAO,CAO′ ハ相等シ，因テ AD,AC モ亦一直線ヲナス．

同樣ニシテ AB;AE モ亦一直線ヲナス．

サテ　切線BC ト其切點ヲ通ズル弦 AB トナス角ABCハ隣レル弓形ニ於テノ角CDBニ等シク．

又　∠ECB＝∠DBC＝直角

因テ二ツノ三角形 ECB,DBC ハ相似形ニシテ．

BD : BC＝BC : CE,

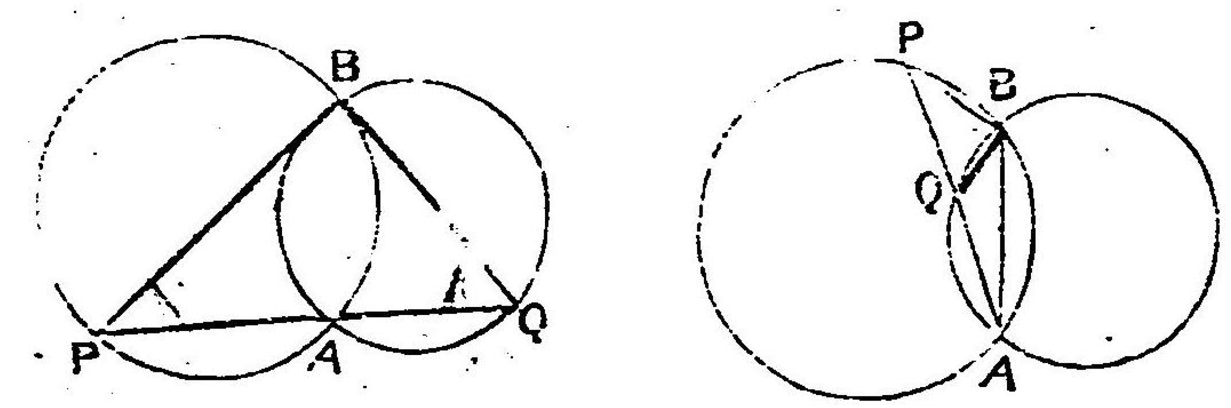
(2) AB ニテ交ル二圓ノ A ヲ通ジテ二圓ニ終ルベキ直線PQ ヲ引ケハ BP,BQ ハ定比ヲ有ツ.

（解） ∠AQB ハ圓 AQB ノ定弧 AB ノ半ニテ測ラルヽヲ以テ，一定ノ角ナリ．

又 ∠APB ハ圓 APB ノ定弧AB ノ半ニテ測ラルヽヲ以テ一定ノ角ナリ，

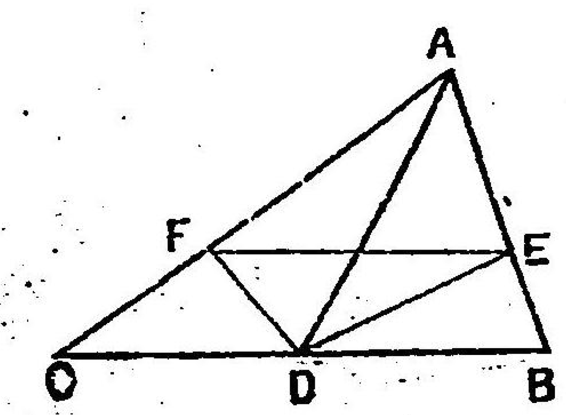
故ニ三角形BPQ ハ常ニ定角ヲ有ス.

故ニ比 BP : BQ ハ一定ナリ.



(3) 三角形ABC ノ底邊BC ノ中點ヲDトシ，角 ADB，角ADC ノ二等分線ガ邊 AB，邊AC ニ會スル點ヲ夫々E,F トセバ，EF ハ BC ニ平行ナリ，其証ヲ求ム.

（解） DE,DF ハ夫々三角形 ADB,ADC ノ二等分線ナルガ故ニ



AE:EB＝AD:DB

AF:FC＝AD:DC

(＝DB)

∴　AE;EC＝AF:FB

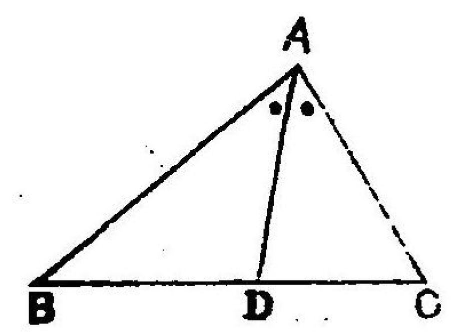
B

故ニ直線EFハ三角形ABCノ邊AB,ACト交リ之ヲ等比ニ分ツヲ以テ，底邊BCニ平行ナリ.

(4) ADヲ△ABCノA角ノ二等分線トスレバ

$\triangle ABD:\triangle ACD=AB:AC,$

ナル關係アリ



(a) 幾何學的ニ
(b) 三角術的ニ
之ヲ証明セヨ.

(解) (a) 同高ヲ有スル三角形ノ面積ハ底邊ニ比例スルヲ以テ

$\triangle ABD:\triangle ACD=BD:DC,$

而シテ三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ二邊ノ比ニ分ツヲ以テ

$BD:DC=AB:AC,$

$\therefore\ \triangle ABD:\triangle ACD=AB:AC.$

(b) $\triangle ABD=\frac{1}{2}AB.AD.\sin(BAD)$

$=\frac{1}{2}AB.AD.\sin\frac{1}{2}A,$

$\triangle ACD=\frac{1}{2}AC.AD.\sin(CAD)$

$=\frac{1}{2}AC.AD.\sin\frac{1}{2}A$

$$\therefore\ \frac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\frac{\frac{1}{2}AB.AD\sin\frac{1}{2}A}{\frac{1}{2}AC.AD\sin\frac{1}{2}A}=\frac{AB}{AC}.$$

(5) 三角形ABCノ頂角Aノ二等分線ガ底邊BCニ出會フ點ヲDトシ，又內心ヲOトセバ底邊ト他ノ二邊ノ和トノ比ハDOトOAトノ比ニ等シ,

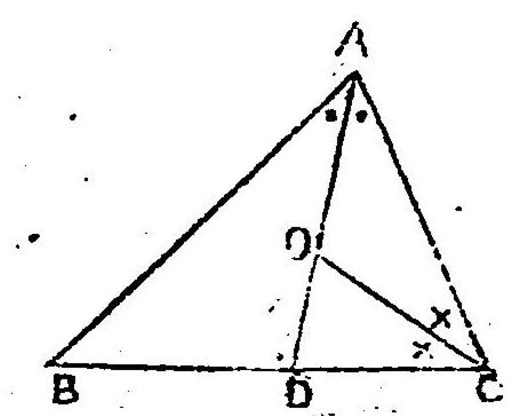
(解) ADハ三角形ノ頂角Aノ二等分線ナルヲ以テ

$BD:CD=AB:AC$

$\therefore\ BD+CD:CD=AB+AC:AC,$

即チ $BC:CD=AB+AC:AC,$

$BC:AB+AC=CD:AC,$



C,Oヲ結ブ時ハ角Cヲ二等分スベシ，依テ三角形ACDヨリ

$CD:AC=DO:OA,$

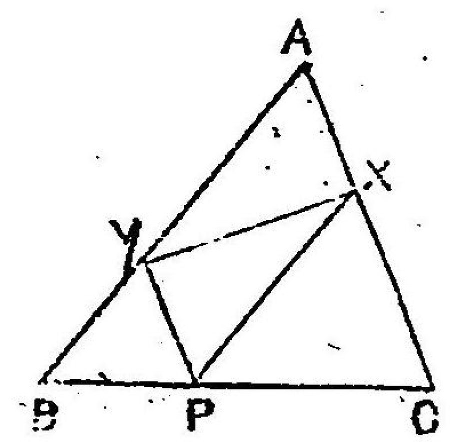
故ニ前ノ比例ト比シテ

$BC:AB+AC=DO:OA.$

(6) 三角形ABCノ底邊BCノ上ノ一點Pヨリ二邊AB,ACニ平行ニPX,PYヲ引キテ夫々AC,ABニX,Y,ニテ會セシメヨ; 然ル時ハ三角形AXYハ二

ツノ三角形 BPY,CPX ノ比例中項ナリ其証チ問フ.

（解） 二ツノ三角形 AXY,BPY ハ平行線 AB,BX ノ間ニ在ルチ以テ高サハ相等シ,



因テ　$\triangle BPY : \triangle AXY = BY : AY,$

同様ニシテ

$\triangle AXY : \triangle CPX = AX : CX.$

又　AC,PY ハ平行スルチ以テ

$BY : AY = BP : PC$

同様ニシテ

$AX : CX = BP : PC$

$\therefore\ BY : AY = AX : CX.$

故ニ前ノ二ツノ比例ヨリ

$\triangle BPY : \triangle AXY = \triangle AXY : \triangle CPX.$

立体幾何試験ノ受方

16.　立体幾何ハ其定理問題甚ダ多カラズ，之チ丸呑ミニナスモ高ノ知レタルヿナリ；況ンヤ幾何試験五問出ルトスレバ其中ニ立体ハ唯一問ナルベシ；随テ其一問ハ大切ナル部分ヨリ取ラザルベカラズ．　之ニ由テ考フルニ球面三角形ハ先ヅ以テ必要ナシ；空間定理ハ問題ニシマリナキチ以テ題ノ撰擇ニ苦ムベク，斯ク詮ジ來レバ立体幾何ノ試験題ニ最モ關スルハ四面体或ハ錐体ニ屬スル性質，即チ面角稜ノ關係或ハ面体積チ求ムルモノトナルベク，此他ハ小數ノ作圖題ニ過キズ；見ヨ此十數年來ノ試験問題ニ此性質殆ンド十ノ七八チ占ムルチ，而テ近來計算ノ流行ヨリ，之レガ面積体積チ求メシム，(尤モ計算ハ推シテ球面積或ハ球体積等ニモ及ブヿアリ）今受験ニ便セシガ爲メ，次ニ必ズ記憶スベキ定理或ハ問題ノ大切ナルモノノミチ掲ゲタレバ，此定理問題ハ受験前ニ教科書ニ就キ取調ベ置キ，其二週前ヨリハ少クモ一回之チ復習シ記憶チ確メ置クベシ．