理學士 林 茂增先生講述

代數學講義

全

東京 帝國書院刊行

代數學講義目次

代數學講義目次畢

代數學講義

理學士林　茂增述

第一章　緒　論

第一節　代數學ノ目的

1. 代數學ノ目的　代數學ハ算術ノ如ク數ニ關スル事項ヲ論ズル學科ニテ其主ナル目的ハ數ニ係ハル問題ノ解キ方ヲ簡明ナラシメ其結果ヲ廣ク同種類ノ問題ニ應用セントスルノデアル。

2. 數ノ記號　前條ノ目的ヲ達セシムルタメニ數通例ノ數字 1, 2, 3,…… ノ外ニ數ヲ代表スル記號トシテ普通 a, b, c, d …… ノ羅馬文字ヲ用キルノデ此文字ハ任意ノ數ヲ表ハスコトガデキルケレドモ一ツノ運算ヲナス間ハ同ジ文字ハ唯一定ノ値ヲ有スルノデアル。

3. 運算ノ記號　代數學ニ於テハ算術ト同ジク $+, -, \times, \div$ 等ノ記號ヲ用キルケレドモ唯算術ト異ナルトコロハ文字ト文字トノ間或ハ數字ト文字トノ間ニハ乘法ノ記號 $\times$ ヲ略ス。

例ヘバ $a\times b$ ハ ab ト書キ $3\times x\times y\times z$ ハ $3xyz$ ト書ク。

コヽニ注意スベキコトハ 3×4 ノ如キ數字ト數字トノ間ニハ此記號ヲ省キテハイカヌ。何故トナレバ若シ $\times$ ヲ省ケバ 3×4 ガ 34 ナル

一ツノ數トナツテシマウカラデアル。

冪ノ記號法及稱ヘ方モ算術ト同ジコトデ a ノ平方ヲ a^2 ト書キ b ノ四乘冪ヲ b^4 ト書ク。a ハ a ノ一乘冪ニテ a^1 ノコトデアル。

冪根ノ記號即チ根號(ラヂカル)モ亦タ算術ト同ジコトニテ a ノ平方根ハ $\sqrt[2]{a}$ 或ハ $\sqrt{a}$ ト書キ x ノ五乘根ヲ $\sqrt[5]{x}$ ト書ク。

4. 關係記號 a ガ b ニ等シキコトヲ示スニ $a=b$ ト書キ, a ガ b ヨリ大ナルコトヲ示スニ $a>b$ ト書キ, a ガ b ヨリ小ナルコトヲ示スニ $a<b$ ト書ク。

又タ「故ニ」ト云フ語ノ代ハリニ ∴ ナル記號ヲ用ヰ「何トナレバ」ト云フ語ノ代ハリニ ∵ ナル記號ヲ用ヰルコトガアル。

5. 括弧 ( ) { } [ ] ノ括弧及ビ —— ノ括線ノ用ヰ方モ算術ト同ジコトデアル。

例ヘバ $a-(b+c)$ ハ a ヨリ b ト c トノ和ヲ引クコトニテ $(a+b)c$ ハ a ト b トノ和ニ c ヲ掛クルコトヲ表ハス。

第二節 代 數 式

6. 代數式 運算ノ記號ヲ以テ文字及數字ヲ結付ケテ運算ヲ示スモノヲ **代數式** ト云フ。或ハ單ニ **式** ト云フ。

例ヘバ $3a^3+(7a^2-8)b+3c^2$ ハ一ツノ代數式デアル。

7. 整數式及分數式 代數式ニ於テ文字ノ分母ヲ有スル式ヲ **分數式** ト云ヒ然ラザルモノヲ **整數式** ト云フ。

例ヘバ $a^3+3a^2b-b^3$, $\sqrt{2x^2+3y^2}$ ノ如キハ整數式ニテ $\frac{b+c}{3a}$ ノ如

キハ分數式デアル。

8. 項 例ヘバ上ノ整數式 $a^3+3a^2b-b^3$ ニ於テ $a^3, 3a^2b, b^3$ ハ + 及 − ノ記號ニテ界セラレテオルガ斯クノ如ク代數式ニ於テ + 或ハ − ニテ界セラレタル各部分ヲ **項** ト云フ。

項ノ數ニ由リ以テ整數式ヲ呼ブコトアリ。例ヘバ $3x^2y^3z$ ノ如キ一ツノ項ノミヨリ成レル式 (即チ + 或ハ − ノ記號ヲ有セザル整數式) ヲ **單項式** ト云ヒ, $2a^3b+5ab^3$ ノ如キ二ツノ項ヨリ成レル式ヲ **二項式** ト云ヒ $3a^3b+2a^2b^2+5ab^3$ ノ如キ三ツノ項ヨリ或レル式ヲ **三項式** ト云フ。又タ二項以上ノ式ヲ總稱シテ **多項式** ト云フ。

9. 因數及係數 二ツ以上ノ數ヲ乘ズルトキ此各數ヲ此積ノ **因數** ト云フ。而シテ一ツノ項ノ因數ノ一ツガ數字ナルトキハ此數字ヲ **係數** ト云フ。

例ヘバ a^3b^2c ニ於テ a^3, b^2, c ハ各 a^3b^2c ノ因數ニテ $3xy$ ノ 3 ハ xy ノ係數デアル。

コヽニ注意スベキハ係數ガ若シ 1 ナルトキハ通常此 1 ヲ省ク。例ヘバ $1ab$ ト書カズシテ ab ト書ク又タ x^2y ノ係數ハ 1 デアル。

時トシテハ項中ノ特別ナル文字ニツキテ其文字ノ外ノ因數ヲ係數ト云フコトアリ。例ヘバ $4ax$ ニ於テ x ノ係數ハ $4a$ デアル。

注意 初學者ハ係數ト指數トヲ混ジ易キユヱ能ク此區別ヲ明ニ了解スルコトガ必要デアル。即チ $5a$ ハ $a+a+a+a+a$ ニテ a^5 ハ $a\times a\times a\times a\times a$ デアツテ若シ a ガ 3 デアレバ $5a=5\times3=15$ ニテ $a^5=3^5=3\times3\times3\times3\times3=243$ デアル。

15
15

10. 次數 n 個（n ハ $1,2,3\cdots$ ノ如キ整數）ノ文字ノ連乘積ナル項ヲ n ノ次項ト云フ。例ヘバ $3a^3b^2c$ ハ $3aaabbc$ ニテ文字ノ數ハ 6 ナルユヱ此項ハ六次デアル。即チ

項ノ次數ハ其因數ノ指數ノ和ニ等シクアル。

代數式ノ次數ハ其式中ノ最高次ナル項ノ次數ヲ以テスルノデアル。例ヘバ $ax^2y+bx^2y^2+cy^3$ ニ於テ初ノ項 ax^2y ノ次數ハ 2, 次ノ項 bx^2y^2 ノ次數ハ 4, 終ノ項 cy^3 ノ次數ハ 3 ニテ則中ノ項ノ次數カ最モ高クシテ四次ナルユヱ此多項式ハ四次式デアル。

又タ式ノ次數ヲ數フルニ特別ナル文字ニツキテスルコトガアル。例ヘバ上ノ多項式ハ x ニツキテハ二次式ニテ y ニツキテハ三次式デアル。

11. 代數式ノ數値 例ヘバ $a=1, b=2, c=3, d=4$ ナルトキ次式ノ數値ヲ求ムルニ $7a^3+3a^2b^2-d^2+6bd-c^3$

$$=7\times1^3+3\times1^2\times2^2-4^2+6\times2\times4-3^3$$

$$=27+12-16+48-27=24$$

問　題

(1) $a=12, b=7, c=5, d=0, m=3, n=1$ ナルトキ次式ノ數値ヲ求ム。

(a) $\frac{1}{c}\{[(a+3c)\times b+ac-b^2]-5(a+b+c)\}$

(b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(c) $\frac{13m+10d-2b}{2m-n}$

(2) $a=3, b=2, c=1, d=4, e=\frac{1}{2}, f=\frac{1}{3}$ ナルトキ次式ノ數値ヲ求ム。

(a) $\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

(b) $(e+f)^3-e^3-3e^2f-3ef^2-f^3$

(c) $abcd+bcde+cdef+defa+efab+fabc$

(3) 次ノ代數式ノ各項ノ次數ヲ求ム。

$16a^2b+3bc^2-7ab^3+6a^2c$

(4) 次式ハ何次式ナルカ

(a) $4a^2b^2+5a^3b-7ab^3+6b^4$

(b) $x^5+2x^4y-5x^2y^3-6xy^4+2y^5$

(5) $4x^3+x^2y+3y^4+xy^2$ ハ x ニツキテ何次式ナルカ又タ y ニツキテ何次式ナルカ

(6) a ト b トノ和ノ立方ヲ c ノ平方ニテ除シタルモノガ a ト b トノ差ノ平方ニ等シキコトヲ示セ

(7) x ノ三倍ニ y ノ四倍ヲ加ヘタルモノト x ノ二倍ヨリ y ノ五倍ヲ減シタルモノトノ積ガ x ノ平方ノ三倍ヨリ x ト y トノ積ヲ減シタルモノニ y ノ平方ノ二倍ヲ加ヘタルモノヨリ大ナルコトヲ代數式ニテ示セ

第三節　正數及負數

12. 負數及正數 算術ニ於テハ加フベキ項ノ和ハ常ニ引ク

ベキ項ノ和ヨリ大ニテ若シ引クベキモノガ大デアルトキハ其結果ハ算術上ニテハ全ク意味ノ分ラヌトコロノモノデアル。代數ニ於テハ各文字ノ示ス數ハ任意ノ數ニテ其計算ハ一般ナルユエ若シ上ノ如クナリテハ制限ヲ置カネバナラヌコトヽナリテ誠ニ不便デアル。此不便ヲ除カンタメニ負數ナルモノヲ設ケントスルノデアル。

今0ヨリ一ツヅツ増シ行クトキハ

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\cdots$$

ノ如クナリテ無限ニ0ヨリ大ナル數ヲ得ルコトガデキル。之ヲ逆ニ考フレバ6ヨリ5, 5ヨリ4,・・・・ト漸次ニ一ツヅヽ減ジテ0ニ至ルノデアル。

然シ0ヨリ小ナル數ヲ作リ置クトキハ便利デアルユエ0ヨリ一ツ小ナルモノヲ-1ニテ表ハシ, 0ヨリ二ツ小ナルモノ卽チ-1ヨリ一ツ小ナルモノヲ-2ニテ表ハシ, 0ヨリ三ツ小ナルモノヲ-3ニテ表ハシテ次第ニ斯クノ如クシテ一ツヅツ小ナル數ヲ作レバ無限ニ出來テ次ノ如クナル。

$$\cdots,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0$$

上ノ如キ0ヨリ小ナル數($-\frac{3}{5}$ ノ如キ分數ノ前ニ一ノ記號ノ附キタルモノニテモ)ヲ **負數** ト云フ。之ニ對シテ0ヨリ大ナル數ヲ**正數**ト云フ。

上ノ如ク用ヰタル +, − ノ記號ヲ **性質ノ記號** ト云フ。

13. 絶對値 正數及負數ノ大キサヲ其性質卽チ +, − ナル記號ヨリ離レテ考ヘタルモノヲ其 **絶對値** ト云フ。

例ヘバ -3 ノ絶對値ハ3ニテ$+5$ノ絶對値ハ5デアル。

上ノ說明ヨリ考フレバ

正數ハ絶對値ノ大ナルホド大ニシテ負數ハ絶對値ノ小ナルホド大小デアル

14. 正數及負數ノ應用 正數及負數ハ多クノ場合ニ應用セラルヽモノニテ例ヘバ財產ニツキテ考フルニ利益ノ金高ヲ + ニテ表ハセバ損失ノ金高ハ − ニテ表ハサル。卽チ六圓ノ利益ハ $+6$圓ニテ五圓ノ損失ハ -5圓デアル。

又タ一ツノ直線ノ上ニ於ケル或ル物ノ運動ニツキテ考フルニ右ノ方ニ動キタル長サヲ + ニテ表ハセバ左ニ動キタル長サヲ − ニテ表ハス。

斯クノ如ク正數ト負數トハ全ク正反對ノ性質ヲ表ハスノデアル。

15. 正數及負數ノ加法ト減法 正數ヲ加ヘ或ハ減ズルコトハ算術ニ於ケル如ク加フレバ增加ヲ生ジ減ズレバ減少ヲ生ズルノデアル。故ニ $7+(+3)=7+3=10$ $7-(+3)=7-3=4$

負數ヲ加ヘ或ハ減ズルコトハ如何ナル意味デアルカ規約ヲ設クル必要ガアル。卽チ次ノ如ク定ムルノデアル。

負數ヲ加フルハ其絶對値ヲ減ズルコトニシテ負數ヲ減ズルコトハ其絶對値ヲ加フルコトナリ。

例ヘバ $7+(-3)=7-3=4$ $7-(-3)=7+3=10$

之ヲ見レバ負數ヲ加ヘルコトト正數ヲ減スルコトヽハ同ジク減少ヲ生ジ負數ヲ減ズルコトト正數ヲ加フルコトヽハ同ジク增加ヲ生ズル

ノデアル。

算術ニテハ減法ハ被減數ガ減數ヨリ大ナルトキニ限ルクレドモ代數學ニテハ負數ナルモノヲ設ケテ上ノ如キ規約ヲ定メタルユエ小ナル數ヨリ大ナル數ヲ減ズルコトモ出來ルノデアル。

16. 正數及負數ノ乘法 正數ヲ乘スルコトハ算術ニ示セル如ク整數或ハ分數ヲ乘ズルニハ被乘數ヲ若干倍スルカ或ハ之ヲ若干等分シタルモノヲ若干倍スベキモノデ

$$5\times(+3)=5+5+5=15 \qquad (1)$$

$$-5\times(+3)=(-5)+(-5)+(-5)=-15 \qquad (2)$$

ノ如クデアル。

負數ヲ乘ズルニハ次ノ如キ規約ヲ定ム。

負數ヲ乘ズルトハ其絶對値ヲ被乘數ニ乘ジ其結果ノ記號ヲ變ズルコトナリ。

例ヘバ $$5\times(-3)=-5\times3=-15 \qquad (3)$$

$$-5\times(-3)=+5\times3=+15 \qquad (4)$$

此 (1) (2) (3) (4) ヨリ次ノ乘法ニ關スル記號ノ法則ヲ得。

同記號ノ積ノ記號ハ正ニシテ異記號ノ積ノ記號ハ負ナリ。

17. 正數及負數ノ除法 除法ハ乘法ノ逆ナルユエ

$$+15\div(+3)=+5 \qquad -15\div(+3)=-5$$

$$+15\div(-3)=-5 \qquad -15\div(-3)=+5$$

之ヨリ次ノ除法ニ關スル記號ノ法則ヲ得。

同記號ノ商ノ記號ハ正ニシテ異記號ノ商ノ記號ハ負ナリ。

問題

(1) -5 ト -8 ト孰ヅレガ何レダケ大ナルカ。

(2) 0 ト -9 ト孰ヅレカ大ナルカ。

(3) 13 ニ -5 ヲ加ヘヨ。又タ 13 ヨリ -5 ヲ減セヨ。

(4) -7 ニ -6 ヲ加ヘヨ又 -7 ヨリ -6 ヲ減ゼヨ。

(5) 0 ヨリ 4 ヲ減ゼヨ又 0 ヨリ -4 ヲ減ゼヨ。

(6) 次式ノ積ヲ求ム。

(a) $3\times(-4)$ (b) $(-4)\times(-9)$ (c) $\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(+\frac{4}{5}\right)$

(7) 次ノ商ヲ求ム。

(a) $12\div(-3)$ (b) $-24\div(-6)$ (c) $\left(-\frac{4}{5}\right)\div\left(+\frac{8}{25}\right)$

第二章　整數式ノ加減乘除

第一節　加法

18. 交換ノ定則ト組合セノ定則　算術ニ於テ順序ヲ變ジテ加フルモ結果ハ同ジキコトヲ知テ居ル。即チ

$$3+4+5=4+3+5=3+5+4=\cdots\cdots$$

之ヲ代數記號ニテ表ハセバ

$$a+b+c=b+a+c=a+c+b=\cdots\cdots$$

此式ノ a, b, c ハ正數デアル。然シ前章ニ述ベタル負數ノ計算ノ規約ニ由リ a, b, c ハ必ズシモ正數デナクトモ上ノ定則ハ適合スルノデアル。

例ヘバ　$7+5-8$ ハ $7+5+(-8)$ ト同ジモノニテ之ハ　$-8+7+5$ トシテ $7-8+5$ トシテモ同ジ結果デアル。故ニ

$$a+b+c=b+a+c=a+c+b=\cdots\cdots$$

$$a+b-c=b+a-c=a-c+b=\cdots\cdots$$

之ガ加法及減法ニ關スル交換ノ定則デアル。

次ニ又タ算術ニ於テ次ノ定則ヲ知テ居ル。即チ多クノ數ノ和ヲ加フルモ之ヲ別々ニ加フルモ結果ハ同ジ又タ多クノ數ノ和ヲ減ズルモ之ヲ別々ニ減ズルモ結果ハ同ジ。

$$13+(4+7)=13+4+7 \qquad 13-(4+7)=13-4-7$$

之ヲ代數記號ニテ表ハセバ

$$a+(b+c)=a+b+c \qquad a-(b+c)=a-b-c$$

此 a, b, c ハ正數デナクトモ負數ノ場合ニテモ適合スルノデアル。

之ガ加法及減法ノ組合ノ定則デアル。

19. 正項及負項　$4+5-3$ ハ 4 ニ 5 ヲ加ヘ其和ヨリ 3 ヲ減ズルコトデアルガ此式ハ $4+(+5)+(-3)$ ト見做スコトガデキル。故ニ $+$ ノ附キタル項ヲ**正項**ト云ヒ，$-$ ノ附キタル項ヲ**負項**ト云フ。

式ノ始メノ項ノ記號ガ $+$ ノトキハ通常之ヲ略ス。故ニ若シ式ノ始メノ項ノ前ニ記號ナキトキハ $+$ ノアルモノ即チ正項デアル。

コヽニ注意スベキコトハ正項ナリトテ其値ハ必ズシモ正數デナク，負項ナリトテ其値ハ必ズシモ負數デナイノデアル。

例ヘバ a ヲ -3 トスレバ $+a$ ノ値ハ -3 トナリテ負トナリ又タ $-a$ ノ値ハ $+3$ トナリテ正トナル。

20. 正數及負數ノ加法　負數ノ計算ノ規約ニ由リ

$$+5+2=7 \qquad -5+(-2)=-7$$

$$-5+2=-3 \qquad +5+(-2)=3$$

即チ　(一)同號ノ數ヲ加フルニハ其絶對値ノ和ニ共有ノ記號ヲ附スベシ。又タ(二)異號ノ數ヲ加フルニハ其絶對値ノ差ニ大ナル方ノ記號ヲ附スベシ。

又タ 18. 條ノ定則ニ由リ

$$(+6)+(-3)+(+9)+(-8)=+6+(+9)+(-3)+(-8)$$

$$=6+9-3-8=6+9-(3+8)=4$$

$$(-6)+(+3)+(-9)+(+8)=-6+(-9)+(+3)+(+8)$$
$$=-6-9+3+8=-(6+9)+(3+8)$$
$$=-15+11=-4$$

斯クシテ次ノ法則ヲ得

正數及負數ヲ加フルニハ先ヅ正ノ法則ノ第一ニ由リテ同號ノ數ヲ別々ニ加ヘ第二ニ由リテ兩者ヲ加フベシ。

例ヘバ $(+10)+(+8)+(-5)+(+7)+(-12)$

$$=+(10+8+7)-(5+12)=+25-17=8$$

21. 同類項 係數ト＋，－ノ記號ダケ異ナリテ其他ハ全ク同一ナル二ツノ項ヲ同類項ト云フ。

例ヘバ $3x^3y^2z-7x^3y^2z$ ハ係數ハ 3 ト 7, 記號ハ ＋ ト － ニテ異ナリテ他ハ兩者共ニ x^3y^2z ナルユヱ同類項デアル。

22. 同類項ノ加法 例ヘバ $3ab$, $5ab$ ノ和ヲ求ムルニ此二ツハ夫レ々 ab ヲ三ツト五ツトニテ此和ハ ab ガ八ツデアル。即チ

$$3ab+5ab=(3+5)ab=8ab$$

又タ $12xy$, $-9xy$ ノ和ヲ求ムルニ xy ヲ 12 ダケノモノニ 9 ダケ少ナキモノヲ足スユヱツマリ 12 ダケノ中ヨリ 9 ダケ引去ルノデアル。

$$12xy+(-9xy)=(12-9)xy=3xy.$$

斯クノ如クニテ係數ダケノ計算ヲナセバヨシ。即チ次ノ法則ヲ得。

同類項ヲ加フルニハ 20. 條ノ法則ニ由リ各係數ノ加法ヲ行ヒ此和ヲ係數トシテ共有ノ文字ヲ書キ添フベシ。

例ヘバ $4ax^2y^3$, $-6ax^2y^3$, $9ax^2y^3$, $3ax^2y^3$, $-7ax^2y^3$ ヲ加フレバ

$$4ax^2y^3+(-6ax^2y^3)+(9ax^2y^3)+(3ax^2y^3)+(-7ax^2y^3)$$
$$=(4-6+9+3-7)ax^2y^3=3ax^2y^3$$

但シ係數ナキ項ハ 1 ナル係數ノ有ルモノトシテ計算スルノデアル。

斯クノ如ク若干ノ同類項ヲ加ヘテ一ツノ同類項トナスコトヲバ**簡約ス**或ハ**簡單ニス**ト云フコトアリ。

同類項ノ加法ハ次條ノ多項式ノ加法ノ基トナルユヱ心算ニ和ヲ求メ得ルヤウニ熟練シテオラネバナラヌ。

23. 多項式ノ加法 例ヘバ $3a^2b+4ab^3$ ト $5a^2b-7ab^3$ ヲ加フルニ

$$3a^2b+4ab^3+(5a^2b-7ab^3)=3a^2b+(+5a^2b)+4ab^3+(-7ab^3)$$
$$=3a^2b+5a^2b+(4ab^3-7ab^3)=8a^2b-3ab^3$$

斯クテ次ノ法則ヲ得。

多項式ヲ加フルニハ夫レ々同類項ヲ上下同行ニアラシムル樣ニ各式ヲ書シ各行ノ和ヲ其下ニ書クベシ。

例ヘバ $8x^5-3x^4y+2x^3y^2-x^2y^3$, $-4x^4y-3x^3y^2+6xy^4$, $2x^4y+5x^2y^3+4xy^4+y^5$ ヲ加フレバ

$$\begin{array}{rrrrrr}
8x^5 & -3x^4y & +2x^3y^2 & -x^2y^3 & & \\
 & -4x^4y & -3x^3y^2 & & +6xy^4 & \\
 & 2x^4y & & +5x^2y^3 & +4xy^4 & +y^5 \\
\hline
8x^5 & -5x^4y & -x^3y^2 & +4x^2y^3 & +10xy^4 & +y^5
\end{array}$$

加法ノ計算ノ結果ノ正否ヲ撿スルニハ順序ヲ變ヘ加ヘテ前ノ結果ト較ブレバヨシ。

問題

(1) $12a^2x^2,\ -5a^2x^2,\ 7a^2x^2,\ -4a^2x^2,\ -a^2x^2$ ヲ加ヘヨ。

(2) $3a+(-4a)+(+6a)+(-7a)+(-5a)+(+8a)$ ヲ簡約セヨ。

(3) $6b^2-3bx^2,\ 4b^2x^2-5b^2,\ 6-bx^2,\ 10bx^2+5b^2,\ 2b^2x^2-3$ ヲ加ヘヨ。

(4) $m^2-2mn+n^2,\ 3m^2+2n^2,\ 2mn-4m^2-3n^2$ ノ和ヲ求ム。

(5) $3x^5+12x^4y-6x^3y^2,\ 2x^5+2x^2y^3-10x^2y^3,\ 4x^4y+3x^3y^2+x^2y^3,\ x^3y^2-10x^2y^3-7xy^4+y^5$

(6) $\frac{1}{2}a^2-c^2+b^2-\frac{1}{3}d^2,\ -5b^2+\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{6}d^2,\ \frac{1}{3}a^2-\frac{1}{4}d^2+6b^2+\frac{1}{4}c^2,\ \frac{1}{4}a^2-b^2+\frac{3}{2}c^2-\frac{1}{4}d^2$ ノ和ヲ求ム。

(7) $p=l^2-3mn+2lm-n^2,\ q=m^2-5lm+3mn+4nl-l^2,\ r=n^2+3lm-4nl-m^2$ ナラバ $p+q+r=0$ ナルコトヲ證セ。

第二節　減法及括弧用法

24. 減法 ハ丁度加法ノ逆ニテ正數ヲ減ズルコトハ減少ヲ生ジ負數ヲ減ズルコトハ増加ヲ生ズ即チ正數ノ減法ハ負數ノ加法ニ同ジク負數ノ減法ハ正數ノ加法ニ同ジクアル。故ニ次ノ法則ヲ得。

一式ヨリ他式ヲ減ズルニハ減式ノ記號ヲ變ジテ被減式ニ加フベシ

例ヘバ $4a^3-a^2b+3ab-5b^2+b^3$ ヨリ $3a^2b+3ab-2a^3+2b^2$ ヲ減ズルニ

$$\begin{array}{l} 4a^3-a^2b+3ab-5b^2+b^3 \\ 2a^3-3a^2b-3ab-2b^2 \\ \hline 6a^3-4a^2b \qquad -7b^2+b^3 \end{array}$$

法則ニ從ヒ減式ノ各項ノ記號ヲ變ジテ加フルノデアルガ熟練スルニ至レバ減式ノ記號ヲ變ヘズ其マヽ被減式ノ下ニ書キテ心ノ中ニテ各項ノ記號ヲ變ジツヽ加ヘ合ハスノデアル。

25. 括弧用法 第18條ノ組合セノ法則ニ由リ括弧ノ前ノ記號ガ＋ナルトキハ其マヽ括弧ヲ取去ルコトヲ得又タ括弧ノ前ノ記號ガ－ナルトキハ括弧内ノ各項ノ記號ヲ變ジテ括弧ヲ取去コルトガデキル。

例ヘバ $3a-b+(2a-b)=3a-b+2a-b=5a-2b$

又タ $3a-b-(2a-b)=3a-b-2a+b=a$

注意　括弧ヲ取去リタルトキ同類項アレバ一ツニナスコトハ上ノ例ノ如ク勿論デアル。

又タ括弧内ニ括弧ガ有リテ括弧ガ幾ツモアルトキ括弧ヲ取去ルニハ最モ内ナル括弧ヨリ始メ漸次外ノ括弧ニ及ブノデアル。但シ此時最モ外ナル括弧ヨリ始メテ漸次内部ニ移テモヨシ。

例ヘバ $a+[b-\{c+(d-e)\}]=a+[b-\{c+d-e\}]$
$=a+[b-c-d+e]=a+b-c-d+e$

逆ニ任意ノ項ヲ括弧内ニ入ルヽニハ最モ外ナル括弧ヨリ始ムルノデ前ニ正號ノアル括弧ノ内ニ入ルヽニハ各項ノ記號ヲ其マヽニシ又タ前ニ負號アル括弧内ニ入ルヽニハ各項ノ記號ヲ變ズルノデアル。

何故トナレバ括弧ヲ取去ルトキニ括弧ノ前ニ正號アレバ各項ノ記號ヲ其マヽニシ負號アレバ記號ヲ變ゼネバナラヌカラデアル。

例ヘバ $a-b+c-d=a-\{b-c+d\}=a-\{b-(c-d)\}$

問 題

(1) $9x^2-6xy+y^2$ ヨリ $7x^2-2xy-3y^2$ ヲ減ゼヨ

(2) $2p^3+3q^2-2pq+r^3+4pr$ ヨリ $p^3-2p^2-3pq+2pr+qr$ ヲ減ゼヨ

(3) $x^5+4x^4y+3x^3y-5x^2y^3+xy^4-2y^5$ ヨリ $x^5-2x^4y+10x^3y^2-x^2y^3+5xy^4+y^5$ ヲ減ゼヨ

(4) $x^5-3x^4y+5x^3y^2-2x^2y^3+4xy^4-y^5$ ト $x^5-4x^4y+2x^3y^2-5x^2y^3+3xy^4-y^5$ トノ和ヨリ $4x^3y^2-5x^4y+6x^2y^3-2xy^4+y^5$ ヲ減ゼヨ

(5) $\frac{1}{2}a^3-3a^2x+\frac{1}{5}ax^2-x^3$ ヨリ $\frac{1}{4}a^3-5a^2x-\frac{3}{20}ax^2+2x^3$ ヲ減ゼヨ

次ノ括弧ヲ取去リ同類項アラバ集メテ簡單ニスベシ

(6) $4x^2y-(-2x^2y)$ (7) $a+b-(5a-2b)-(3a-b)$

(8) $x^2-xy-y^2-[x^2-2xy-2y^2-\{x^2-3xy-3y^2-(x^2-4xy-4y^2)\}]$

(9) $15-2x-[4x-\{6-5x+(3x-11-8x)\}]$

(10) $3a^3-2b^3-3a^2b+5ab^2$ ニ於テ $2b^3$ ヨリ以下ヲ負號ヲ有スル括弧內ニ入レヨ

第三節 乘法

26. 交換組合セ, 分配及指數ノ諸定則 算術ニ於テ順序ヲ變ジテ掛ケルモ結果ハ同ジキコトヲ知テ居ル。即チ

$$3\times4\times5=3\times5\times4=4\times3\times5=\cdots\cdots$$

之ヲ代數記號ニテ表ハセバ

$$a\times b\times c=a\times c\times b=b\times a\times c=\cdots\cdots$$

此式ノ a, b, c ハ正數デアルケレドモ負數ノ計算ノ規約ニ由リ必ズシモ正數デナクテモ此ノ定則ハ適合スルノデアル。

例ヘバ $7\times5\times(-8)=7\times(-8)\times5=5\times7\times(-8)=\cdots\cdots$

$$(-3a)\times2b\times(-c)=2b\times(-3a)\times(-c)$$

$$=(-3a)\times(-c)\times2b=\cdots\cdots$$

之ガ乘法ノ交換ノ定則デアル。

次ニ又タ算術ニ於テ多クノ數ノ積ヲ掛ケルモ之ヲ別々ニ掛ケルモ結果ハ同ジデアルコトヲ知テ居ル。即チ

$$13\times(4\times7)=13\times4\times7$$

之ヲ代數記號ニテ表ハセバ $a\times(b\times c)=a\times b\times c$

此 a, b, c ハ負數ニテモ此定則ハ適合スル。

例ヘバ $4a\times(-5b\times6c)=4a\times(-5b)\times6c$

之ガ乘法ノ組合セノ定則デアル。

又タ算術ニ於テ多クノ數ノ和ニ一數ヲ掛ケルモ其各ニ一數ヲ掛ケテ加フルモ結果ハ同ジキコトヲ知ル。即チ

$$(2+3+4)\times5=2\times5+3\times5+4\times5$$

之ヲ代數記號ニテ表ハセバ

$$(a+b+c)\times d=a\times d+b\times d+c\times d$$

此等ノ文字ハ負數ニテモ適合ス。例ヘバ

$$(3a^2-5ab+6b^2)\times 2abc=3a^2\times 2abc+(-5ab)\times 2abc$$
$$+6b^2\times 2abc$$

之ガ乘法ノ分配ノ定則デアル。

次ニ $4^3\times 4^2=4^{3+2}=4^5$

ナルコトハ算術ニ於テ知リタルガ代數學ニ於テモ用キラルヽコトハ明カデアル。即チ $a^m\times a^n=a^{m+n}$

但シ m, n ハ正整數(正數ニテ整數ナルコト)デアル而シテ文字ニ指數ナキトキハ1ナル指數ノアルモノトシテ計算スルノデアル。

$$a^m\times a=a^{m+1}$$

之ガ指數ノ定則デアル。

27. 單項式ノ乘法 ハ前節ニ述ベタル諸定則ニ由リ計算ヲ行フコトガデキル。例ヘバ

$$5ab\times 6c=5\times a\times b\times(6\times c)$$
$$=5\times a\times b\times 6\times c \quad \text{(組合セノ定則ニ由ル)}$$
$$=5\times 6\times a\times b\times c \quad \text{(交換ノ定則ニヨル)}$$
$$=30abc \quad \text{(指數ノ定則ニヨル)}$$

又タ $3a^2b\times(-4ab^3)=3\times a^2\times b\times(-4)\times a\times b^3$ (組合ノ定則ニヨル)
$$=3\times(-4)\times a^2\times a\times b\times b^3 \quad \text{(交換ノ定則ニヨル)}$$
$$=-12\times(a^2\times a)\times(b\times b^3)$$
(記號及組合セノ定則)
$$=-12a^3b^4 \quad \text{(指數ノ定則ニヨル)}$$

斯クテ次ノ法則ヲ得

單項式ニ單項式ヲ乘ズルニハ先ヅ記號ノ定則ニ由リテ積ノ記號ヲ定メ係數ノ積ヲ求ムル積ノ係數トシ次ニ文字ノ積ヲ求ムベシ但シ同文字アルトキハ指數ノ定則ニ由リ其積ヲ作ルベシ。

28. 多項式ト單項式トノ乘法 前條ノ法則ト分配ノ定則トニ由リ多項式ニ單項式ヲ乘ズルコトヲ得。

例ヘバ $5a(b+c)=b\times 5a+c\times 5a=5ab+5ac$
$$5a(b-c)=5a\{b+(-c)\}=5ab+5a\times(-c)$$
(分配ノ定則ニヨル)
$$=5ab+(-5ac) \quad \text{(前條ノ法則ニヨル)}$$
$$=5ab-5ac$$

又タ $(10x^2+xy-3y^2)\times 3xy=10x^2\times 3xy+xy\times 3xy+(-3y^2)\times 3xy$
(分配ノ定則)
$$=30x^3y+3x^2y^2-9xy^3$$
(前條ノ法則ニヨル)

斯クテ次ノ法則ヲ得。

多項式ニ單項式ヲ乘ズルニハ前條ノ法則ニ由リ多項式ノ各項ニ單項式ヲ乘ズベシ。

29. 多項式ト多項式トノ乘法 分配ノ定則ニ由リ $a+b$ ヲ一數ト見做セバ $(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$
$$=ac+bc+ad+bd$$

斯クテ次ノ法則ヲ得。

二ツノ多項式ヲ乘ズルニハ被乘數ニ乘數ノ各項ヲ乘ジテ得タル積

ヲ加フベシ。

例ヘバ　$(2a^2-4ab+b^2)\times(4a^2+3ab-2b^2)$

$$=(2a^2-4ab+b^2)\times 4a^2+(2a^2-4ab+b^2)\times 3ab$$
$$+(2a^2-4ab+b^2)\times(-2b^2)$$
$$=8a^4-16a^3b+4a^2b^2+6a^3b-12a^2b^2+3ab^3-4a^2b^2$$
$$+8ab^3-2b^4$$

同類項ヲ集メテ　$=8a^4-10a^3b-12a^2b^2+11ab^3-2b^4$

然シ實際ニ計算スルニハ次ノ如クスルガヨシ。

$$\begin{array}{r}
2a^2-4ab+b^2\\
4a^2+3ab-2b^2\\
\hline
8a^4-16a^3b+4a^2b^2\\
6a^3b-12a^2b^2+3ab^3\\
-4a^2b^2+8ab^3-2b^4\\
\hline
8a^4-10a^3b-12a^2b^2+11ab^3-2b^4
\end{array}$$

左圖ノ如クニ式ヲ書キテ先ヅ乘數ノ初メノ $4a^2$ ヲ被乘數ノ各項ニ掛ケタル積 $8a^4-16a^3b+4a^2b^2$ ヲ書キ次ニ $3ab$ ヲ各項ニ掛ケタル積 $6a^3b-12a^2b^2+3ab^3$ ヲ次ノ列ニ書ク此時初ノ $6a^3b$ ガ上列ノ積ニ於テ之ト同類項ナル $-16a^3b$ ノ下ニ，$-12a^2b^2$ ガ之ト同類項ナル $4a^2b^2$ ノ下ニ在ル如クス。次ニ $-2b^2$ ヲ掛クルトキモ其積ヲ同類項ガ同ジ縱ノ行ノ中ニ在ル如クシテ加法ヲ行フノデアル。

即チ　多項式ノ乘法ヲ行フニハ被乘數ノ下ニ乘數ヲ書キ乘數ノ各項ヲ時ヲ順序ニ被乘數ニ掛ケテ其積ヲ次第ニ書キ同類項ガ同ジ縱ノ行ニ在ル樣ニシテ各行毎ニ加法ヲ行フベシ。

30. 項ノ順序　乘數及被乘數ノ兩式ヲ共ニ或ル文字ニツキテ降羃ノ順(或ル文字ノ羃ノ高キ項ヨリ始メ順次低キ項ニ移ル如ク)

カ或ハ昇羃ノ順(或ル文字ノ羃ノ低キ項ヨリ始メ順次高キ項ニ移ル如ク)ニ排列スルガヨシ。斯クナストキハ同類項ガ容易ニ同ジ縱ノ行ニ在ルコトヲ得テ大ニ便利トナルノデアル。

例ヘバ　$3a^4-4a^3b-5a^2b^2+ab^3-6b^4$ ニ $ab-2b^2+3a^2$ ヲ掛ケルニ先ヅ被乘數ハ a ニツキ降羃ノ順ナルユヱ乘數ヲ a ニツキ降羃ノ順ニ排列スレバ $3a^2+ab-2b^2$ トナル。斯クシテ乘法ヲ行フ。

$$\begin{array}{r}
3a^4-4a^3b-5a^2b^2+ab^3-6b^4\\
3a^2+ab-2b^2\\
\hline
9a^6-12a^5b-15a^4b^2+3a^3b^3-18a^2b^4\\
3a^5b-4a^4b^2-5a^3b^3+a^2b^4-6ab^5\\
-6a^4b^2+8a^3b^3+10a^2b^4-2ab^5+12b^6\\
\hline
9a^6-9a^5b-25a^4b^2+6a^3b^3-7a^2b^4-8ab^5+12b^6
\end{array}$$

問　　題

次ノ各式ノ積ヲ求ム

(1)　$6x^2y^2z,\quad -4xy^4z^2.$　　(2)　$10a^2bc,\quad 5ab^2c,\quad -6abc^3.$

(3)　$7a^2-6b^2,\quad 3ab.$　　(4)　$3x-7y,\quad 5x+6y.$

(5)　$x^5-x^2y^3+x^3y^2-y^5, x^2+xy-y^2$

(6)　$x^3-2x^2+x-4,\quad x-1$

(7)　$a^2+b^2-c^2, a^2-b^2+c^2, a^2+b^2+c^2.$

(8)　$x^5-3ax^4+2a^2x^3+a^4x-a^5,\quad ax^4+3a^2x^3+2x^5+5a^5-4a^4x.$

(9)　$a^3-4a^2+11a-24,\quad a^2+4a+5.$

(10)　$\frac{1}{2}x^2-2xy+\frac{1}{3}y^2,\quad 4x^2+\frac{1}{6}xy-7y^2.$

次式ヲ最簡式ニ化セ

(11)　$(a+b)(b+c)(c+a)-(a-b)(b-c)(c-a).$

(12) $\{(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z\}+\{(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z\}$

$+\{(c-a)x+(a-b)y+(b-c)z\}$

第四節　除法

31. 除法ハ丁度乘法ノ逆ニテ乘數ト積トヲ知リテ被除數ヲ求ムル運算デアル。故ニ a, b, c ハ正數ナドデモ負數デモ次ノ諸式ハ成立ツノデアル。

$a\div b\div c=a\div c\div b$ ……………交換ノ定則

$a\div(b\times c)=a\div b\div c$ …………組合セノ定則

$(a+b)\div c=a\div c+b\div c$ …………分配ノ定則

$a^m\div a^n=a^{m-n}$ …………………指數ノ定則

何トナレバ除法ノ定義ニ由リ　$(a\div b)\div c\times c=(a\div b)$

故ニ　$(a\div b)\div c\times c\times b=a\div b\times b$　即チ $(a\div b)\div c\times c\times b=a$

乘法ノ交換ノ定則ニ由リ　$(a\div b)\div c\times b\times c=a$

故ニ　$(a\div b)\div c\times b=a\div c$　又タ $(a\div b)\div c=a\div c\div b$

即チ　$a\div b\div c=a\div c\div b$　(交換ノ定則)

次ニ此定則ヨリ

$c\div a\div b=c\div b\div a$　即チ　$c\div a\div b\times a=c\div b\div a\times a$

故ニ　$c\div a\div b\times a=c\div b$　又タ　$c\div a\div b\times a\times b=c\div b\times b$

乘法ノ組合ノ定則ニ由リ　$c\div a\div b\times(a\times b)=c$

故ニ　$c\div a\div b=c\div(a\times b)$　(組合ノ定則)

次ニ除法ノ定義ニ由リ

$(a\div c)+(b\div c)=\{(a\div c)+(b\div c)\}\times c\div c$

$=\{(a\div c)\times c+(b\div c)\times c\}\div c$

$=(a+b)\div c$　　(分配ノ定則)

次ニ乘法指數ノ定則ニ由リ

$a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}=a^m$

故ニ　$a^m\div a^n=a^{m-n}$　　(指數ノ定則)

32. 零ナル指數　上ノ式ニ於テ n ガ m ニ等シキトキハ

$a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0$

トナル。然シ或ル文字ノ冪ハ其指數ダケ文字ヲ掛ケ合ハスコトナルユエ a^0 ハ何ナルカ其意味明カデナイガ a^m ニ 1 ヲ掛ケレバ a^m トナリテ a^m ヲ a^m ニテ割レバ商 1 ヲ得ルノデアル。故ニ a^0 自身ハ何ノ意味ヲ有セネド 1 ニ等シクシテ考フルノデアル。即チ

$a^0=1$

33. 單項式ノ除法　第 31 條ノ諸定則ニ由リ單項式ノ割リ算ヲナスコトヲ得。

例　$18a^3b^2$ ヲ $-3ab^2$ ニテ除セ

$18a^3b^2\div(-3ab^2)=-(18a^3b^2\div 3ab^2)$　　(記號ノ定則ニ由ル)

$=-(18\times a^3\times b^2\div 3\div a\div b^2)$

(組合ノ定則ニ由ル)

$=-(18\div 3\times a^3\div a\times b^2\div b^2)$

(交換ノ定則ニ由ル)

$=-\{(18\div 3)\times(a^3\div a)\times(b^2\div b^2)\}$

(組合ノ定則ニ由ル)

$$=-6\times a^{3-2}\times b^{2-2} \qquad \text{(指數ノ定則ニ由ル)}$$

$$=-6a^1\times b^0=-6a.$$

斯クシテ次ノ法則ヲ得。

單項式ヲ單項式ニテ除スルニハ多項式ノ記號定則ニ由リテ記號ヲ定メ數字係數ノ商ヲ書キ次ニ指數定則ニ由リ共通因數ノ除法ヲ行ヒテ得タル商ト被除數中ニ殘レル因數トノ積ヲ記スベシ。

34. 單項式ト多項式トノ除法 分配ノ定則ニ由リ

$$(a+b+c+\cdot\cdot)\div m=(a\div m)+(b\div m)+(c\div m)+\cdot\cdot$$

トナルユヱ前條ノ法則トニ由リテ次ノ法則ヲ得。

一項式ニテ多項式ヲ除スルニハ前條ノ法則ニ由リ多項式ノ各項ヲ一項式ニテ除シ其商ヲ列記スベシ。

何 $45x^3y^4z^5-10x^2y^5z^5-5x^2y^2z^8$ ヲ $5x^2y^2z$ ニテ除セ

$$(45x^3y^4z^5-10x^2y^5z^5-5x^2y^2z^8)\div 5x^2y^2z$$

$$=45x^3y^4z^5\div 5x^2y^2z+(-10x^2y^5z^5\div 5x^2y^2z)+(-5x^2y^2z^8\div 5x^2y^2z)$$

$$=9xy^2z^3-2y^3z^3-z^7$$

35. 多項式ノ除法 法則ハ次ノ如クデル。

多項式ヲ多項式ニテ除スニハ先ヅ兩式ヲ同ジ文字ノ降羃(或ハ昇羃)ノ順ニ列ベ除數ノ首項ヲ以テ被除數ノ首項ヲ除シテ得タルモノヲ商ノ首項トシ之ヲ除數ニ乘ジタル積ヲ被除數ヨリ減ジ其剩餘ノ首項ヲ除數ノ首項ニテ除シ商ノ第二項ヲ定メ之ヲ除數ニ乘ジタル積ヲ前ノ剩餘ヨリ減スベシ以下同法ヲ續行シ剩餘ノ首項ガ除數

ノ首項ニテ除シ得ザルニ至リテ止ムベシ。

例一. $8a^4-10a^3b-12a^2b^2+11ab^3-2b^4$ ヲ $2a^2-4ab+b^2$ ニテ除セ。

$$
\begin{array}{r|l|l}
2a^2-4ab+b^2 & 8a^4-10a^3b-12a^2b^2+11ab^3-2b^4 & 4a^2+3ab-2b^2 \\
 & \underline{8a^4-16a^3b+4a^2b^2} & \\
 & \qquad 6a^3b-16a^2b^2+11ab^3 & \\
 & \qquad \underline{6a^3b-12a^2b^2+3ab^3} & \\
 & \qquad\qquad -4a^2b^2+8ab^3-2b^4 & \\
 & \qquad\qquad \underline{-4a^2b^2+8ab^3-2b^4} &
\end{array}
$$

被除數ノ首項 $8a^4$ ヲ除數ノ首項 $2a^2$ ニテ除シタル商 $4a^2$ ヲ求ムル商ノ首項トス之ヲ除數ニ乘ジテ引キ算ヲ行ヒ剩餘 $6a^3b-16a^2b^2$ ヲ得之ニ次ノ項 $+11ab^3$ ヲ足シテ其首項 $6a^3b$ ヲ $2a^2$ ニテ除シ $+3ab$ ヲ商ノ第二項トシ之ヲ除數ニ乘ジテ引キ算ヲ行ヒ剩餘ニ次ノ項 $-2b^4$ ヲ足シテ其首項 $-4a^2b^2$ ヲ $2a^2$ ニテ除シ $-2b^2$ ヲ商ノ第三項トシ之ヲ除數ニ乘ジテ引キ算ヲ行ヒ剩餘ナキユヱ $4a^2+3ab-2b^2$ ガ求ムル商デアル。

例二. $x^4+x^2y^2+2y^4$ ヲ y^2+x^2-xy ニテ除セ

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2-xy+y^2 & x^4\qquad\qquad +x^2y^2 \qquad\qquad +2y^4 & x^2+xy+y^2 \\
 & \underline{x^4-x^3y+x^2y^2} & \\
 & \qquad x^3y \qquad\qquad\qquad +2y^4 & \\
 & \qquad \underline{x^3y-x^2y^2+xy^3} & \\
 & \qquad\qquad x^2y^2-xy^3+2y^4 & \\
 & \qquad\qquad \underline{x^2y^2-xy^3+\ y^4} & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad y^4 &
\end{array}
$$

被除數ハ x ニツキ降羃ノ順ナルユヱ除數亦タ x ノ降羃ノ順ニ列ベテ x^2-xy+y^2 トシ除法ヲ行フ。斯クシテ剩餘 y^4 ヲ得ルニ至レバ最早 x^2 ニテ除數シ得ザルニ由リ y^4 ハ此除法ノ剩餘デアル。

注意 除法ノ結果ノ正否ヲ檢スルニハ算術ト同ジク商ニ除數ヲ乘ジ

之ニ剩餘ヲ加ヘテ之ヲ被除數ト比較スレバヨシ。

例第二ノ如ク欠ケタル項アルトキハ其場所ヲ明ケ置クノデアル。又タ剩餘ヲ分數ノ形ニ書クニハ其分數式ノ前ニ＋ノ記號ヲ附ケ置クベキノデアル。

問　　題

次ノ各問題ニ於テ前式ヲ後式ニテ除セ。

(1)　$-72a^3b^2c,\ -6abc$　　(2)　$x^4+x^2+1,\ x^2+x+1$

(3)　$6a^3b^3-3a^2b^4+12ab^5,\ 3ab^2$　　(4)　$x^3-1,\ x-1$

(5)　$x^2+2xy+y^2-z^2,\ x+y-z$

(6)　$a^3+b^3+c^3-3abc,\ a+b+c.$

(7)　$a^2+2ab+b^2-c^2,\ a+b-c$

(8)　$x^4+3x^2y^2+4xy^3+5y^4,\ x^2-3xy-y^4$

(9)　$2a^3+\frac{17}{3}a^2b-2ab^2+\frac{1}{6}b^3,\ \ 2a-\frac{1}{3}b.$

(10)　$(x^3+y^3)(x^3-y^3)$ ノ積ヲ x^2-y^2 ニテ除セ

(11)　$(a^4-b^4)\div(a^2+b^2)\times(a^4+a^2b^2+b^4)$ ヲ簡單ニセヨ

(12)　$x-3y$ ニ何ヲ乘ズレバ $4x^3-14x^2y+7xy^2-3y^3$ トナルカ

第二編　一次方程式

第一章　一元一次方程式

36. 方程式　二式相等シキコトヲ示シタルモノヲ**等式**ト云ヒ其相等シキ兩式ヲ等式ノ**邊**或ハ**節**ト云フ。例ヘバ

$$(x+3)(x+1)=x^2+4x+3\qquad 2x+3=5$$

ノ如キハ皆等式デアル。

等式ニ二種アリテ上ノ第一式ハ x ニ如何ナル値ヲ入ルヽモ等式ノ兩邊恒ニ相等シク第二式ハ x ノ値ガ 1 ナルトキノミ此等式ノ兩邊相等シキノデアル。

第一式ノ如ク等式中ニ含マレタル文字ニ如何ナル値ヲ代入スルモ兩邊恒ニ相等シキモノヲ**恒等式**ト云フ。前編ニ述ベタル計算法ハ此恒等式ノ左邊或ハ右邊ヲ與ヘテ他ノ一邊ヲ求ムル方法デアル。

第二式ノ如ク等式中ニ含マレタル文字ガ或ル特別ナル値ヲ持ツトキニ限リ其兩邊相等シキモノヲ**方程式**ト云フ。

特別ナル文字即チ未知數ガ方程式ニ適合スベキ値（即チ兩邊ガ相等シクナルベキ未知數ノ値）ヲ此方程式ノ**根**ト云ヒ之ヲ求ムルコトヲ方程式ヲ**解ク**ト云フ。

方程式ニ於テ未知數ヲ表ハスニ通例羅馬文字ノ末ノ文字 x, y, z 等ヲ以テスルノデ其未知數ノ最モ高次ノ次數ヲ以テ方程式ノ次數トスルノデアル。例ヘバ $x^2+3xy+y^2=0$ 二次方程式ニテ $x^4+3x^2+1=5$

ハ四次方程式デアル。

37. 定理 方程式ハ兩邊相等シキユヱ次ノ諸定理ノ成立ツコトハ明カデアル。

(1) 等式ノ兩邊ニ同數ヲ加フルモ兩邊相等シ。

(2) 等式ノ兩邊ヨリ同數ヲ減ズルモ兩邊相等シ。

(3) 等式ノ兩邊ニ零ナラザル同數ヲ乘ズルモ兩邊相等シ。

(4) 等式ノ兩邊ヲ零ナラザル同數ニテ除スルモ兩邊相等シ。

(5) 等式ノ兩邊ノ各項ノ記號ヲ變ズルモ兩邊相等シ。

即チ $a=b$ ナル等式アリトスレバ

$$a+m=b+m \quad (1) \qquad a-m=b-m \quad (2)$$

$$a\times m=b\times m \quad (3) \qquad \frac{a}{m}=\frac{b}{m} \quad (4)$$

$$-a=-b \quad (5)$$

ノ等式ハ成立ツノデアル。今 $a+b=c-d$ ニ於テ此兩邊ヨリ b ヲ引ケバ (2) ニ由リ　$a+b-b=c-d-b$　即チ　$a=c-d-b$

斯クテ左邊ノ b ハ右邊ニ移リテ其記號ハ正ヨリ負ニ變ジタノデアル

又タ初メノ式ノ兩邊ニ d ヲ加フレバ (1) ニ由リ

$$a+b+d=c-d+d \quad 即チ \quad a+b+d=c$$

斯クテ右邊ノ $-d$ ハ左邊ニ移リ其記號ハ負ヨリ正ニ變ジタノデアル

故ニ　等式ノ項ヲ他邊ニ移スニハ其記號ヲ變スベシ。

例ヘバ　$x-a=3x-5a$　ニ於テ左節ノ　$-a$ ヲ右邊ニ轉シ右邊ノ $3x$ ヲ左節ニ移セバ　$x-3x=-5a+a$　トナルノデアル。

38. 一元一次方程式ノ解法 例ヘバ

$$12x+6=32-x$$

ヲ解クニ左邊ノ$+6$ヲ右邊ニ，右邊ノ$-x$ヲ左邊ニ移セバ前條ニ由リ

$$12x+x=32-6 \quad 即チ \quad 13x=26$$

トナル。而シテ兩邊ヲ 13 ニテ割レバ前條(4)ニ由リ

$$x=2$$

即チ求ムル根ハ 2 デアル。

斯クテ次ノ法則ヲ得。

一元一次方程式ヲ解クニハ先ヅ分數項アルトキハ各分母ノ最小公倍數ヲ兩邊ニ乘シ次ニ未知數ヲ含ム項ヲ方程式ノ一邊ニ集メ他ノ諸項ヲ他邊ニ集メテ同類項ヲ合一シ未知數ノ係數ニテ兩邊ヲ除スベシ。

注意 得タル根ガ其方程式ニ適合スルヤ否ヤヲ必ズ驗セネバナラヌノデアル。例ヘバ上ノ 2 ヲ原方程式ニ代入スレバ

$$12\times 2+6=32-2$$

トナリテ兩邊共ニ30ニテ相等シキユヱ 2 ハ求ムル根デアル。

方程式ニ於テ未知數二ツアルトキハ此方程式ヲ二元方程式ト云ヒ未知數三ツアルトキハ三元方程式ト云フ。例ヘバ $ax=b$ ハ一元方程式ニテ $ax^2+bxy=c$ ハ x,y ナル二ツノ未知數アルユヱ二元方程式又タ $ax+by+cz=d$ ハ三元方程式デアル。

本章ハ一次ニテ一元方程式即チ一元一次方程式ノミニツキテ論ズ。

例.　$\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}=a^2+b^2$　ヲ解ケ

先ヅ分母ノ最小公倍數 ab ヲ兩邊ニ乘シテ

$$\frac{ax}{b}\times ab+\frac{bx}{a}\times ab=(a^2+b^2)\times ab \text{ 即チ } a^2x+b^2x=(a^2+b^2)\times ab$$

同類項ヲ合一シテ　$(a^2+b^2)x=(a^2+b^2)\times ab$

兩邊ヲ a^2+b^2 ニテ除シテ　$x=ab$

即チ求ムル根ハ ab デアル。

問　　題

次ノ各方程式ヲ解ケ

(1) $4x+39=3x+45$ $x=6$　　(2) $ax+b+c=dx+e$

(3) $7(x-4)=5(x-2)$ $x=9$　　(4) $6(x-3)=7(x+1)-30$ $x=5$

(5) $(x+7a)(x-3a)=(x-5a)(x-15a)$

(6) $(a^2+x)(b^2+x)=(ab+x)^2$

(7) $\frac{5x-7}{2}-\frac{2x+7}{3}=3x-4$

(8) $\frac{x+3}{2}+\frac{x+4}{3}+\frac{x+5}{4}=16$

(9) $\frac{1}{3}(6+x)+x-\frac{5}{6}=\frac{1}{2}(x+2)+1$

(10) $(x+1)(x+2)(x+3)=(x-1)(x-2)(x-3)+3(4x-2)(x+1)$

(11) $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$

(12) $1.5x-2.5=19+.4$

第二章　一元一次方程式ノ應用問題

39. 應用問題ノ解法 前章ニ述ベタル方程式ヲ問題ノ解法ニ應用スルニ次ノ如キ順序ニ行ヘバヨシ。

一. x ヲ以テ未知數ヲ表ハスコト。

二. 未知數ト既知數トノ關係ヲ代數記號ニテ表ハシ方程式ヲ作ルコト。

三. 方程式ヲ解キテ未知數ノ値ヲ求ムルコト。

四. 得タル値ガ能ク問題ニ適合スルヤ否ヤヲ撿スルコト。

例一. 二ツノ數アリ其和五十六ニシテ其差八ナリト云フ二數ヲ求ム。

大ナル數ヲ x トスレバ小ナル數ハ $x-8$ ニテ此二數ノ和ハ 56 ナルユヱ $x+(x-8)$ ハ 56 ニ等シ。故ニ次ノ方程式ヲ得。

$$x+(x-8)=56$$

此方程式ヲ解キテ得ル根ハ大ナル數デアル。先ヅ此式ヲ變ジテ

$$2x-8=56$$

項ヲ移シテ　$2x=56+8$　即チ　$2x=64$

故ニ　$x=64\div 2$　即チ　$x=32$……大數

$32-8=24$…………小數

[驗] 大小二數ノ和ハ $32+24$ ニテ 56 トナリ二數ノ差ハ $32-24$ 即チ 8 トナリテ問題ニ適合スルノデアル。

答　大數 三十二,　小數 二十四.

例二. 或人其所持金ヲ甲乙丙ノ三人ニ分ツニ甲乙二人ノ所得金ノ和ハ六十圓. 乙丙二人ノ和ハ六十五圓ニシテ丙甲二人ノ所得金ノ和ハ七十五圓ナリト云フ所持金及甲乙丙各ノ所得金ヲ問フ。

甲ノ所得金ヲ x 圓トスレバ甲乙二人ノ所得金ノ和ハ六十圓ナルユヱ

乙ノ所得金ハ 60－x 圓デアル又タ丙甲二人ノ所得金ノ和ハ七十五圓ナルユヱ丙ノ所得金ハ 75－x 圓デアル。然ルニ乙丙二人ノ所得金ノ和ハ六十五圓ナルユヱ次ノ方程式ヲ得。

$$60-x+75-x=65$$

即チ項ヲ移セバ　$-x-x=65-60-75$　即チ　$-2x=-70$

兩邊ノ記號ヲ變ジテ　$2x=70$　即チ　$x=35$……甲

$60-35=25$……乙　$75-35=40$……丙

$35+25+40=100$……所持金

[驗] 乙丙二人ノ所得金ノ和ハ 25+40 即チ 65 圓ニテ問題ニ適合ス。

答　甲 三十五圓，　乙 二十五圓，　丙 四十圓
　　所持金 百圓

例三. 長サ四尺二寸ノ糸ヲ二分シテ其一部分ヲ他部分ノ四分ノ三ナラシメントス各部分ノ長サヲ問フ。

今一部分ノ糸ノ長サヲ x 寸トスレバ他部分ノ長サハ 42－x 寸デアル。然ルニ一部分ガ他部分ノ四分ノ三ナルユヱ次ノ方程式ヲ得。

$$x=\frac{3}{4}(42-x)$$

分母ヲ除キテ　$4x=3(42-x)$　即チ　$4x=126-3x$

$4x+3x=126$　即チ　$7x=126$

故ニ　$x=18$……一部分　$42-18=24$……他部分

[驗] 兩部分ヲ合ハスレバ 18+24=42，又タ 24 寸ノ四分ノ三ハ 18 寸ニテ問題ニ適合ス。

答　一部分 一尺八寸，　他部分 二尺四寸

例四. 父ノ年齢ハ子ノ年齢ノ三倍ニシテ今ヨリ四年前ニハ子ノ年齢ノ四倍ナリシト云フ父子ノ年齢ヲ問フ。

子ノ年齢ヲ x トスレバ父ノ年齢ハ $3x$ デアル。然ルニ今ヨリ四年前ニハ父ノ年齢ハ $3x-4$ ニテ子ノ年齢ハ $x-4$ デアル。此時父ノ年齢ガ子ノ年齢ノ四倍ナルユヱ次ノ方程式ヲ得。

$3x-4=4(x-4)$　即チ　$3x-4=4x-16$

$3x-4x=-16+4$　即チ　$-x=-12$

由リテ　$x=12$……子ノ年齢　$12\times3=36$……父ノ年齢

[驗] 四年前ニハ父ハ 36－4 即チ 32 ニテ子ハ 12－4 即チ 8 デ 32 ハ 8 ノ四倍ナルユヱ問題ニ適合ス。

答　父 三十六歳，　子 十二歳

例五. 五十錢銀貨一圓銀貨若干個アリ其金額合計八圓ニシテ一圓銀貨ノ數ハ五十錢銀貨ノ數ヨリ一枚少シト云フ各銀貨ノ數ヲ求ム。

五十錢銀貨ノ數ヲ x トスレバ一圓銀貨ノ數ハ $x-1$ デアル。然ルニ兩銀貨各ノ總額ハ $50\times x$ 錢，$100(x-1)$ 錢ニテ此和ガ八圓即チ 800 錢ナルユヱ次ノ方程式ヲ得。

$$50x+100(x-1)=800$$

$50x+100x-100=800$　即チ　$150x=900$

由リテ　$x=6$……五十錢銀貨ノ數　$6-1=5$……一圓銀貨ノ數

[驗] 五十錢銀貨六枚ニテ $50\times6=300$ 錢ニテ三圓，一圓銀貨五枚ニテ五圓ナルユヱ合計八圓ニテ問題ニ適合ス。

答　五十錢銀貨六枚，一圓銀貨五枚

問　題

(1)　二數アリ其和三十三ニシテ其差七ナリト云フ二數ヲ求ム。

(2)　某數ハ其五分ノ一ヨリ二十四大ナリト云フ某數ヲ求ム。

(3)　一數アリ[redacted]ヲ減ジタルモノハ其四倍ヨリ三十五ヲ減ジタルモノニ等シト云フ其數ヲ求ム。

(4)　百八十八ヲ二分シ其一部分ノ四倍ヲシテ他部分ノ八倍ヨリ十四ダケ大ナラシメントスルニハ如何ニ分ツベキカ。

(5)　甲ハ五十圓ヲ所持シ乙ハ十四圓ヲ所持セリ今幾何ノ金ヲ甲ヨリ乙ニ與フレバ甲ノ所持金ガ乙ノ所持金ノ三倍トナルカ。

(6)　硝石．硫黄及木炭ニテ火藥ヲ製スルニ硝石ハ全量ノ半ヨリ六斤多ク硫黄ハ全量ノ三分ノ一ヨリ五斤少ク木炭ハ全量ノ四分ノ一ヨリ三斤少シト云フ各何斤ナルカ。

(7)　兄ノ年齡四十二歲ニシテ弟ノ年齡十八歲ナリ幾年前ニハ弟ノ年齡ノ五倍ナリシカ又タ幾年ノ後ニハ二倍トナルカ。

(8)　五圓，一圓，二十錢貨幣合ハセテ二十八個アリ其總額五十六圓ナリ而シテ二十錢貨幣ノ數ノ三倍ハ一圓貨幣ノ數ニ等シト云フ各貨幣ノ數ヲ求ム。

(9)　五時ト六時トノ間ニ於テ時計ノ長短兩針ガ相重ナル時刻ヲ問フ。

(10)　三時ト四時トノ間ニ於テ時計ノ兩針ノ直角ヲナス時刻ヲ問フ。

(11)　將官アリ其兵卒ヲ以テ正方形ニ列ベタルニ四十人ノ不足ヲ生ゼリ仍テ各邊ノ人數ヲ一人ツツ減ジタルニ三十六人餘レリト云フ兵卒ノ數ヲ求ム。

(12)　鳥獸合ハセテ二十八匹アリ其足數百アリト云フ鳥獸各ノ數ヲ求ム。

(13)　金六圓ヲ以テ鷄卵ヲ買フニ若シ其相場二割高ケレバ買ヒ得ラルヽ鷄卵ノ數四十個少ナカルベシト云フ鷄卵一個ノ價ヲ問フ。

(14)　或ル仕事ヲナスニ甲ハ二時間ヲ要シ乙ハ四時間ヲ要ス今甲初メ此仕事ニ着手シテ若干時ノ後乙甲ニ代ハリテ爲セシニ初メヨリ七時間ニテ成就セリト云フ甲，乙各働キシ時間ヲ問フ。

(15)　二數アリ其和二ニシテ其平方ノ差三十二ナリト云フ兩數如何。

第三章　聯立一次方程式

40.　聯立一次方程式　二ツ或ハ二ツヨリ多クノ未知數ヲ有スル唯一ツノ方程式ニテハ其方程式ニ適合スル未知數ハ無數デアル。之ハ其未知數ノ一ツニ任意ノ値ヲ與フルニ從ヒ之ニ相應スル他ノ未知數ノ値ヲ得ル故デアル。例ヘバ二ツノ未知數 x 及 y ヲ有スル一ツノ方程式 $x-3y=12$ ニツキテ考フルニ此式ヲ變ズレバ

$$x=3y+12$$

$y=0$ トスレバ　$x=12$　　　$y=0,\ x=12$

$y=1$ トスレバ	$x=3\times1+12=15$	$y=1,\ x=15$
$y=2$ トスレバ	$x=3\times2+12=18$	$y=2,\ x=18$
$y=3$ トスレバ	$x=3\times3+12=21$	$y=3,\ x=21$

....

ノ如クyノ値ヲ種々變ズルニ從ヒテxノ値ヲ無數ニ得ラル。若シ此方程式ノ外ニ$x+3y=18$ナル方程式アルトキハ兩方程式ニ同時ニ適合スル未知數ノ値ハ唯$x=15,\ y=1$ノミニテ多クノ値ヲ得ルコトハナイノデアル。一般ニ方程式ノ數ガ未知數ノ數ト同ジトキハ同時ニ此等ノ方程式ニ適合スル未知數ノ値ハ定マツテ居ル。

二ツ或ハ二ツヨリ多クノ方程式ガ其含メル各未知數ノ同ジ値ニテ同時ニ滿足スルトキハ此等ノ方程式ヲ**聯立方程式**ト云フ而シテ各方程式ニ於テ未知數ノ指數ノ和ガ一次ヨリ高カラザルトキハ之ヲ聯立一次方程式ト云フ。

41. 二元一次方程式ノ解法 二ツノ未知數ヲ有スル聯立一次方程式ヲ解ク方法ニ二法アリ。

例一 次ノ方程式ヲ解ケ
$$\left.\begin{array}{ll}3x-4y=2 & (1)\\ 7x-9y=7 & (2)\end{array}\right\}$$

yヲ消去スルタメニ(1)式ニ(2)式ノyノ係數9ヲ乘ジ(2)式ニ(1)式ノyノ係數4ヲ乘ズレバ
$$\left.\begin{array}{l}27x-36y=18\\ 28x-36y=28\end{array}\right\}$$
兩方程式ノ各邊ヲ相減ズレバ
$$-x\qquad=-10\qquad(3)$$
トナリテyノ項ハ消去セラレテxノミヲ含ム一次方程式ヲ得之ヨリ$x=10$ヲ得。xノ此値ヲ(1)式ニ代入スレバ

$$3\times10-4y=2\qquad 故ニ\qquad y=7$$

上ノ計算ニテハ(3)ト(1)トヨリ(1)(2)兩式ニ適合スベキx及yノ値ヲ求メタノデアルガ(3)ノxノ値ヲ(2)式ニ代入シテモ得ラルヽノデアル。

又タ上ノ方法ハyヲ消去シテ初メニxノ値ヲ求メ後ニyノ値ヲ求メタノデアルガxヲ消去シテ初メニyノ値ヲ求ムルモ同ジ結果デアルガ方程式ノ形ニ由リx或ハyヲ初メニ求ムルノデアル。

上ニ得タル$x=10, y=7$ガ(1)(2)兩方程式ニ適合スルヤ否ヤヲ驗スルニ此値ヲ(1)式ニ代入スレバ左邊ハ$3\times10-4\times7$即チ28トナリテ滿足シ(2)式ニ代入スレバ左邊ハ$7\times10-9\times7$即チ7トナリテ滿足ス。

斯クテ次ノ法則ヲ得。

二ツノ方程式ニ其未知數ノ一ツノ係數ノ絶對値ヲシテ相等シカラシムル如キ數ヲ乘ジ邊々相加ヘ或ハ相減ジテ其未知數ヲ消去シ一ツノ未知數ヲ有スル方程式ヲ作ルベシ而シテ其根ヲ求メ之ヲ原方程式ノ一ツニ代入シテ他ノ未知數ノ値ヲ求ムベシ。

此法ヲ**消去法**或ハ**逐出シノ法**ト云フ。

42. 二元一次方程式解法ノ別法 他ノ方法ニ由リテ二元一次方程式ヲ解クコトヲ説明セン。

例二. 次ノ方程式ヲ解ケ
$$\left.\begin{array}{ll}\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=25 & (1)\\ \frac{x}{4}-\frac{2y}{3}=3 & (2)\end{array}\right\}$$

兩式ノ分母ヲ除去スルタメニ(1)式ニ 4, (2)式ニ 12 ヲ乘ズレバ

$$\left.\begin{array}{ll} 2x+y=100 & (3) \\ 3x-8y=36 & (4) \end{array}\right\}$$

(3)式ヨリ $y=100-2x$ (5)

之ヲ(4)式ノ y ニ代入スレバ

$$3x-8(100-2x)=36$$

即チ $3x-800+16x=36$

由リテ $x=44$

之ヲ(5)式ニ代入スレバ $y=100-2\times44=12.$

(3)式ヨリ $x=\frac{100-y}{2}$ トシテ(4)式ニ代入スルモ同ジ結果ヲ得。

斯クテ次ノ方程式ヲ得。

方程式ノ一ツヨリ一ツノ未知數ヲ他ノ未知數ヲ含ム式ニテ表ハシ之ヲ他ノ方程式ニ代入シテ其未知數ヲ求メ次ニ他ノ未知數ヲ求ムベシ。

此法ヲ代用法或ハ置換法ト云フ。

43. 二元一次方程式解法ノ例 前條ノ方法ニ由リテ解キ得ル二三ノ例ヲ次ニ示サン。

例一. $\left.\begin{array}{ll} (x+1)(y+5)=(x+5)(y+1) & (1) \\ xy+x+y=(x+2)(y+2) & (2) \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

此方程式ハ一次方程式ナラザル如ク見ユルモ括弧ヲ取去レバ一次方程式トナル。即チ(1)式ノ括弧ヲ去レバ

$$xy+5x+y+5=xy+x+5y+5$$

即チ $4x=4y$ 即チ $x=y$ (3)

(2)式ノ括弧ヲ去レバ

$$xy+x+y=xy+2x+2y+4$$

即チ $x+y+4=0$ (4)

(3)式ノ x ヲ(4)式ニ代入スレバ $y+y+4=0$

即チ $2y=-4$ 故ニ $y=-2$

此 y ノ値ヲ(3)式ニ代入シテ $x=-2$

由リテ此方程式ノ根ハ $x=-2, y=-2$ デアル。

例二 $\left.\begin{array}{ll} \frac{5}{x}+\frac{6}{y}=3 & (1) \\ \frac{15}{x}+\frac{3}{y}=4 & (2) \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

此方程式ハ分母ヲ拂ヘバ二次方程式トナルモ今 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ ヲ未知數ト見做ストキハ一次方程式ト同様ニ解クコトヲ得。即チ $\frac{1}{x}$ ヲ X, $\frac{1}{y}$ ヲ Y トスレバ上ノ二式ハ

$$\left.\begin{array}{ll} 5X+6Y=3 & (3) \\ 15X+3Y=4 & (4) \end{array}\right\}$$

トナル。(4) 式ニ 3 ヲ乘ジテ減ズレバ $15Y=5$ トナリテ $Y=\frac{1}{3}$ ヲ得之ヲ (3) 式ニ代入シテ $X=\frac{1}{5}$ ヲ得。

故ニ $\frac{1}{x}=\frac{1}{5}, \frac{1}{y}=\frac{1}{3}$ ニテ $x=5, y=3$ ヲ得。

例三 $\left.\begin{array}{ll} 4x-3y=10 & (1) \\ 3x-4y=18 & (2) \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

前條ノ法則ニ由ラズ次ノ如クシテ求ムルコトヲ得。即チ先ヅ(1)(2)

兩式ヲ加フレバ　$7x-7y=28$

之ヲ7ニテ除セバ　$x-y=4$　(3)

之ニ3ヲ乘シテ(1)式ヨリ減ズレバ

$$\begin{array}{r} 4x-3y=10 \\ 3x-3y=12 \\ \hline x\quad=-2 \end{array}$$

此xノ價ヲ(3)式ニ代入シテ　$y=-6$

即チ　$x=-2,\ y=-6$　ガ求ムル根デアル。

44. 三元一次方程式ノ解法　三ツノ未知數ヲ含ム三ツノ一次方程式ヨリ三ツノ未知數ヲ求ムルコトハ二元一次方程式ノ解法ニ於テ一ツノ未知數ヲ逐出シテ唯一ツノ未知數ノミヲ含ム方程式ニ變ジタルト同ジク次第ニ未知數ヲ逐出シテ終ニ唯一ツノ未知數ヲ含ム方程ニ變ジ一元一次方程式ノ解法ニ由リテ其未知數ヲ求メ之ヨリ他ノ未知數ヲ求ムルノデアル。

例一　$\left.\begin{array}{ll} x+3y+2z=11 & (1) \\ 2x+y+3z=14 & (2) \\ 3x+2y+z=11 & (3) \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

(3)式ニ2ヲ掛ケテ　$6x+4y+2z=22$

(1)式ハ　$\underline{x+3y+2z=11}$

引キ算ヲ行ヒテ　$5x+y\quad=11$　(4)

次ニ(3)式ニ3ヲ掛ケテ　$9x+6y+3z=33$

(2)式ハ　$\underline{2x+y+3z=14}$

引キ算ヲ行ヒテ　$7x+5y\quad=19$　(5)

故ニ(4)ト(5)トヨリx及yヲ求ムレバヨシ即チ

(4)式ニ5ヲ掛ケテ　$25x+5y=55$

(5)式ハ　$\underline{7x+5y=19}$

引キ算ヲ行ヒテ　$18x\quad=36$

故ニ　$x=2$　從テ　$y=1$

由リテ　$x=2,\ y=1,\ z=3$　ヲ得。

例二　$\left.\begin{array}{ll} y+z=14 & (1) \\ z+x=18 & (2) \\ x+y=24 & (3) \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

前ノ如ク順々ニ未知數ヲ逐出シテモヨケレドモ此時ハ次ノ方法ニ由ルノガ最モ簡便デアル。即チ

此三式ノ兩邊ヲ夫々相加フレバ　$2(x+y+z)=56$

即チ　$x+y+z=28$　(4)

(4)ヨリ(1)ヲ引ケバ　$x=28-14$　即チ　$x=14$

(4)ヨリ(2)ヲ引ケバ　$y=28-18$　即チ　$y=10$

(4)ヨリ(3)ヲ引ケバ　$z=28-24$　即チ　$z=4$

問題

次ノ方程式ヲ解ケ

(1)　$\left.\begin{array}{l} 3x-2y=11 \\ 4x+3y=26 \end{array}\right\}$　　(2)　$\left.\begin{array}{l} 10x+9y=290 \\ 12x-11y=130 \end{array}\right\}$

(3) $\left.\begin{aligned}\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y=1\\ \frac{7}{3}x+\frac{5}{6}y=2\end{aligned}\right\}$ (4) $\left.\begin{aligned}\frac{8}{x}+\frac{5}{y}=3\\ \frac{20}{x}-\frac{15}{y}=2\end{aligned}\right\}$

(5) $\left.\begin{aligned}10x-32y=7\\ 3x-28y=6\end{aligned}\right\}$ (6) $\left.\begin{aligned}\frac{30}{x+y}+\frac{8}{2x-y}=8\\ \frac{18}{x+y}-\frac{4}{2x-y}=2\end{aligned}\right\}$

(7) $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}+5=\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=10$

(8) $\left.\begin{aligned}(a+b)x+(a+c)y=a+b\\ (a+c)x+(a+b)y=a+c\end{aligned}\right\}$

(9) $\left.\begin{aligned}4x+5y+2z=16\\ x-3y+7z=15\\ 4z-3x-2y=6\end{aligned}\right\}$ (10) $\left.\begin{aligned}x+y-z=4\\ y+z-x=6\\ z+x-y=2\end{aligned}\right\}$

(11) $\left.\begin{aligned}\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=b\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c\end{aligned}\right\}$ (12) $\left.\begin{aligned}(x-1)(y-2)-(x-2)(y-3)=5\\ (x+2)(y+1)-(x+1)(y-1)=20\end{aligned}\right\}$

第四章　聯立方程式ノ應用問題

45. 應用問題ノ解法 聯立方程式ノ解法ニ由リテ解キ得ル二三ノ應用問題ノ解法ノ例ヲ次ニ示ス。

例一　二位ノ數アリ其數ハ列數字ノ和ノ三倍ニ等シク此數ニ45

ヲ加フレバ數字ノ位置轉倒スルト云フ此數ヲ求ム。

十位ノ數ヲ x, 一位ノ數ヲ y トスレバ此數ハ $10x+y$ ニテ此數字ヲ顚倒シタル數ハ一位ノ數カ x ニテ十位ノ數ガ y ナルユエ $10y+x$ デアル（例ヘバ 23 ハ $2\times10+3$ デアル）故ニ次ノ方程式ヲ得。

$$\left.\begin{aligned}10x+y&=3(x+y) \quad (1)\\ 10x+y+45&=10y+x \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

(1) 式ヲ變ジテ　$7x=2y$　(3)

(2) 式ヲ變ジテ　$9x-9y+45=0$

即チ　$x-y+5=0$　(4)

(4) ヨリ $x=y-5$ ヲ得テ之ヲ (3) 式ニ入ルレバ

$$7(y-5)=2y$$

之ヨリ $y=7$ ヲ得 (3) ヨリ $x=2$ ヲ得。

由リテ求ムル數ハ 27 デアル。

注意 或ル數ヲ組立ツル數字ハ必ズ 9 マデノ數ニテ正數デアルユエ此條件ニ由リテ問題ヲ解クコトガデキル。即チ上ノ問題ハ唯「二位ノ數アリ其數ハ列數字ノ和ノ三倍ニ等シ」ト云フニテ求ムルコトヲ得ルノデアル。即チ上ノ (1) ノ方程式ダケニテ解キ得ルノデアル。

(1) 式ヲ變ジテ (3) 式トナシ猶ホ變ジテ　$x=\frac{2}{7}y$

トナス。然ルニ x ハ數ヲ組立ツル數字ナルユエ整數デアル。故ニ y ハ 7 ニテ割切レネバナラヌ即チ y ハ 7 ノ倍數デアル。

y モ亦タ數ヲ組立ツル數字ナルユエ 9 ヨリ小ナル數デアル。9 ヨリ小ニテ 7 ノ倍數ナル數ハ唯 7 デアル。故ニ $y=7$ ニテ從テ $x=2$

デ求ムル數ハ 27 デアル。

例二　某分數ノ分母ヨリ 2 ヲ減シ分子ニ 1 ヲ加フレバ 2 トナリ分母ニ 5 ヲ加ヘ分子ニ 3 ヲ加フレバ $\frac{2}{3}$ トナルト云フ此分數ヲ求ム。

求ムル分數ノ分母ヲ x トシ分子ヲ y トスレバ此分數ハ $\frac{y}{x}$ デアル故ニ次ノ方程式ヲ得。

$$\frac{y+1}{x-2}=2 \quad (1),\qquad \frac{y+3}{x+5}=\frac{2}{3} \quad (2)$$

(1) ヲ變ズレバ　$y+1=2(x-2)$　即チ　$2x-y=5$　(3)

(2) ヲ變ズレバ　$3(y+3)=2(x+5)$　即チ　$2x-3y=-1$　(4)

(3) ヨリ (4) ヲ減ズレバ　$2y=6$　即チ　$y=3$

從テ (3) 或ハ (4) ニ由リ　$x=4$ ヲ得

由リテ求ムル分數ハ $\frac{3}{4}$ デアル。

例三　矩形ノ地アリ幅ヲ二間，長サヲ三間增ストキハ面積六十四坪ヲ增シ又タ幅ヲ三間，長サヲ二間增ストキハ面積六十八坪ヲ增スト云フ其他ノ幅及長サヲ求ム。

長サヲ x 間，幅ヲ y 間トスレバ其面積ハ xy 坪デアル。幅ヲ二間長サヲ三間增ストキハ幅ハ $y+2$ 間，長サハ $x+3$ 間トナリテ其面積ハ $(x+3)(y+2)$ 坪デアル。次ニ幅ヲ三間，長サヲ二間增ストキハ幅ハ $y+3$ 間，長サハ $x+2$ 間トナリテ其面積ハ $(x+2)(y+3)$ 坪デアル。故ニ次ノ方程式ヲ得

$$\left.\begin{array}{ll}(x+3)(y+2)-xy=64 & (1)\\ (x+2)(y+3)-xy=68 & (2)\end{array}\right\}$$

兩式ヲ變シテ

$$\left.\begin{array}{llll}xy+2x+3y+6-xy=64 & 即チ & 2x+3y=58 & (3)\\ xy+3x+2y+6-xy=68 & & 3x+2y=62 & (4)\end{array}\right\}$$

(3) 式ニ 3 ヲ掛ケレバ　$6x+9y=174$

(4) 式ニ 2 ヲ掛ケレバ　$6x+4y=124$

引キ算ヲ行ヒテ　$5y=50$　即チ　$y=10$

之ヲ (3) 式ニ代入スレバ $x=14$ ヲ得

即チ求ムル矩形ノ長サハ十四間ニテ幅ハ十間デアル。

例四　金二千五百圓ヲ甲乙丙丁ノ四人ニ分配スルニ乙ノ所得ハ甲所得ノ半分ニシテ丙ノ所得ハ甲乙兩人ノ所得ノ和ノ五分ノ一ニ等シク乙ノ所得ハ丙丁兩人ノ所得ノ和ニ等シト云フ各人ノ所得ヲ求ム。

甲乙丙各人ノ所得ヲ夫レ々 x 圓，y 圓，z 圓トスレバ丁ノ所得ハ 2500圓 $-(x+y+z)$圓 デアルユヱ次ノ方程式ヲ得。

$$\left.\begin{array}{ll}y=\frac{1}{2}x & (1)\\ z=\frac{1}{5}(x+y) & (2)\\ y=z+2500-(x+y+z) & (3)\end{array}\right\}$$

各式ヲ變シテ

$$\left.\begin{array}{ll}2y=x & (3)\\ 5z=x+y & (4)\\ x+2y=2500 & (5)\end{array}\right\}$$

(3) 式ノ x ヲ (5) 式ニ代入シテ　$y=2500$　即チ　$4y=625$

故ニ　$x=625\times2=1250$

$5z=1250+625$　即チ　$z=375$

從テ　$2500-(x+y+z)=2500-(1250+625+375)=250$

由リテ甲ノ所得ハ千二百五十圓，乙ノ所得ハ六百二十五圓，丙ノ所得ハ三百七十五圓，丁ノ所得ハ二百五十圓デアル。

問　題

(1) 甲ノ所持金ニ三十五圓ヲ增セバ乙ノ所持金ノ二倍トナリ乙ノ所持金ヨリ五圓ヲ減ズレバ甲ノ所持金ニ等シト云フ兩人ノ所持金ヲ求ム。

(2) 若干ノ人ニ蜜柑ヲ分ツニ五個ヅツ與フレバ二十五個餘リ八個ヅツ與フレバ二十個不足スト云フ人數及蜜柑ノ數ヲ求ム。

(3) 甲乙二人ノ旅客アリ其手荷物合ハセテ百斤アリ各人ノ手荷物ノ目方ガ無賃ニテ許サルヽ制限ノ目方ヲ超過シタルタメ甲ハ一圓二十五錢，乙ハ七十五錢ヲ拂ヘリ而シテ此荷物若シ一人ノ所有ナランニハ三圓五十錢ヲ拂ハザルベカラズト云フ一人ニツキ無賃ニテ許サルヽ制限ノ目方ヲ求ム。但シ制限ヲ超過シタル手荷物ノ運賃ハ其超過シタル目方ニ比例スルモノトス。

(4) 兎ト犬ト其步數ヲ比較スルニ犬ガ五步行間ニ兎ガ七步飛ブ又タ犬ガ三步ニテ行ク處ヲ兎ハ五步ニテ飛ブト云フ今兎先ヅ八十步進ミシ後犬之ヲ追フトキハ幾步ニシテ兎ニ追付クベキカ。

(5) 一圓銀貨，五十錢銀貨，十錢銀貨ニテ合計三十五個アリ五十錢銀貨ノ總金額ハ十錢銀貨ノ總金額ヨリ三圓多ク又タ一圓銀貨ノ數ト五十錢銀貨ノ數トノ和ノ二倍ガ十錢銀貨ノ數ノ五倍ニ等シト各銀貨ノ數ヲ求ム。

(6) 甲乙二人同時ニ東西兩地ヲ出發シ相向テ行クニ甲每時ノ速サガ乙ノ速サヨリ二里多キトキハ兩人三時間ニテ出會フト云フ又タ若シ乙ハ每時ノ速サヲ一里增シ甲ハ前ノ三分ノ二ニ減ズルトキハ四時間ニテ出會フト云フ東西兩地ノ距離ヲ求ム。

(7) 九十ヲ三分シテ第一部ノ二倍ニ四十ヲ加ヘタルモノハ第二部ノ三倍ニ二十ヲ加ヘタルモノニ等シ又タ第三部ノ四倍ニ十ヲ加ヘタルモノニ等シカラシメントス各部分ノ數ヲ求ム。

(8) 上下二種ノ酒アリ上酒ハ一升ニツキ二十五錢，下酒ハ二十二錢ナリ今之ヲ混合シテ一升二十四錢ノ酒二斗七升ヲ作ラントス各何升ヅツ混ズベキカ。

(9) 三十石ヲ容ルベキ水槽アリ甲乙丙ノ三管ヲ以テ二十四分間ニ之ヲ充タスコトヲ得甲管ノミヲ以テスルトキハ丙管ノミヲ以テスルヨリ猶ホ多ク三十分ヲ要ス而シテ一分間ニ丙管ヨリ出ル水量ハ同時間ニ甲乙兩管ヨリ出ヅル量ノ和ヨリ二斗五升少ナシト云フ甲乙丙各管ノ水槽ヲ充タスニ要スル時間ヲ求ム。

(10) 三位ノ數アリ列數字ノ和ノ三十四倍ニ等シク又タ百位ノ數字ト一位ノ數字トヲ顚倒シタル數ヨリ元トノ數ヲ減ジタル殘リハ列數字ノ和ノ三十三倍ニ等シ而シテ中央ノ數字ハ兩端ノ數字ノ和ヨリ十二少ナシト云フ此數ヲ求ム。

第三章　約數及倍數

第一節　乘法公式

45. 二量ノ和及差ノ平方　乘法ニ由リ

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

又タ $$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

故ニ　二量ノ和ノ平方ハ二量ノ平方ノ和ニ二量ノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。

二量ノ差ノ平方ハ二量ノ平方ノ和ヨリ二量ノ積ノ二倍ヲ減ジタルモノニ等シ。

二量ト和ト差トノ積ハ二量ノ平方ノ差ニ等シ

例ヘバ　$(3x+2y)^2=(3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2=9x^2+12xy+4y^2$

$(2a-3b)^2=(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2=4a^2-12ab+9b^2$

$(2a+3b)(2a-3b)=(2a)^2-(3b)^2=4a^2-9b^2$

46. 二量ノ和及差ノ立方　乘法ニ由リ

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

故ニ　二量ノ和ノ立方ハ二量ノ立方ノ和ニ一量ノ平方ハ他量トノ積ノ三倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。

二量ノ差ノ立方ハ第一量ノ立方ト第二量ノ立方トノ差ヨリ第一量ノ平方ト第二量トノ積ノ三倍ヲ減ジ第一量ト第二量ノ平方トノ積ノ三倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。

例ヘバ　$(2a+3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2(3b)+3(2a)(3b)^2+(3b)^3$

$=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$

$(2a-3b)^3=8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$

47. 二量ノ立方ノ和及差

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

故ニ　二量ノ立方ノ和ハ二量ノ平方ノ和ヨリ二量ノ積ヲ減ジタルモノト二量ノ和トノ積ニ等シ。

二量ノ立方ノ差ハ二量ノ平方ノ和ニ二量ノ積ヲ加ヘタルモノト二量ノ差トノ積ニ等シ。

例ヘバ　$(3a)^3+(2b)^3=(3a+2b)\{(3a)^2-(3a)(2b)+(2b)^2\}$
$=(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$

$125x^3-y^3=(5x)^3-y^3=(5x-y)\{(5x)^2+5xy+y^2\}$
$=(5x-y)(25x^2+5xy+y^2)$

問　題

前節ニヨリテ次式ヲ變形セヨ

(1) $(2x+4y^2)^2$　(2) $(\frac{1}{2}a-4b)^3$　(3) $(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$

(4) $(3a^2-2ab+b^2)^2$　(5) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

第二節　因　數

48. 因數分解　凡ベテ整式ヲ其因數ノ積ニテ表ハスコト

ヲ**因數ニ分解**スト云フ。

因數ニ分解スルニハ一定ノ法則ナケレドモ其形ニヨリテハ公式或ハ乘法中ニ得タル結果或ハ觀察等ニ由リ分解スルノデアル。

49. 各項ニ共有ナル因數アル式ノ因數分解

今 $a+b+c=d$ ヲ掛ケレバ $ad+bd+cd$ ニテ之ヲ逆ニ書ケバ

$$ad+bd+cd=(a+b+c)d$$

故ニ

多項式ノ各[illegible]同ジ因數アルトキハ此式ヲ此公因數ト各項ヨリ此公因數ヲ省キタルモノトニ分解スルコトヲ得。

例ヘバ $a^4b+a^2b^4$ ノ各項ハ a^2b ヲ含ムユヱ

$$a^4b+a^2b^4=a^2b(a^2+b^3)$$

50. 公式ニ因ル因數分解

前節ノ公式ノ右邊ト左邊トヲ換フレバ

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

ニテ或ル式ガ此等ノ式ノ左邊ノ如キ形ヲナストキハ此等ノ公式ニ由リテ右邊ノ如キ形ニ分解スルコトヲ得。

例一. $x^4+8x^2y^2z^2+16y^4z^4=(x^2)^2+2(x^2\times 4y^2z^2)+(4y^2z^2)^2$

$$=(x^2+4y^2z^2)^2$$

例二. $a^2b^2-4abc^2+4c^4=(ab)^2-2(ab\times 2c^2)+(2c^2)^2$

$$=(ab-2c^2)^2$$

例三. $16x^4-81y^4=(4x^2)^2-(9y^2)^2=(4x^2+9y^2)(4x^2-9y^2)$

$$=(4x^2+9y^2)\{(2x)^2-(3y)^2\}$$

$$=(4x^2+9y^2)(2x+3y)(2x-3y)$$

例四. $8a^3+x^3=(2a)^3+x^3=(2a+x)\{(2a)^2-2ax+$ [illegible]

$$=(2a+x)(4a^2-2ax+x^2)$$

51. x^2+px+q ナル形ヲナス式ノ因數分解法

$x+a$ ニ $x+b$ ヲ掛ケレバ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

之ヲ見ルニ a,b ガ共ニ正或ハ共ニ負ナルトキハ第三項ハ正ニテ a,b ノ積ニ等シク x ノ係數ハ a 或ハ b ト同符號ニテ a,b ノ和ニ等シ。又タ a,b ノ符號ガ異ナルトキハ第三項ハ負ニテ a,b ノ積ニ等シク x ノ係數ハ a,b ノ中大ナルモノト同符號ニテ a,b ノ差ニ等シ。

由リテ

x^2+px+q ノ如キ形ヲナセル二次三項式ガ二ツノ因數 $x+a$, $x+b$ ニ分解シ得ラルヽトキハ a,b ハ q ガ正ナルトキ同符號ニテ p ノ符號ト同ジク p ハ a,b ノ和ニ等シク q ハ其積ニ等シ。又タ q ガ負ナルトキ a,b ハ符號ヲ異ニシ ab ノ中絕對値(符號ヲ除キタルモノ)ノ大ナルモノヽ符號ハ p ト同ジク p ハ a,b ノ差ニ等シク q ハ其積ニ等シ。

例一. $x^2+9x+18=(x+3)(x+6)$

第三項 18 ハ正ナルユエ和ガ 9 ニテ積ガ 18 トナル二數ヲ求ムレバ 3 ト 6 デアル。然ルニ x ノ符號ガ正ナルユエ前式ノ a, b ガ $+3$, $+6$ ニテ $x+3$ ト $x+6$ トニ分解セラル。

例二. $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

第三項 12 ガ正ナルユエ和ガ 7 ニテ積ガ 12 トナル二數ヲ求ムレバ 3 ト 4 デアル。然ルニ x ノ係數ガ -7 ニテ負ナルユエ a, b ハ -3, -4 ニテ $x-3$ ト $x-4$ トニ分解セラル。

例三. $x^2+6x-16=(x+8)(x-2)$

第三項ガ -16 ニテ負ナルユエ差ガ 6 ニテ積ガ 16 トナル二數ヲ求ムレバ 8 ト 2 デアル。然ルニ x ノ係數ガ 6 ニテ正ナルユエ 8 ト 2 トノ中大ナル 8 ノ符號ハ正ニテ 2 ガ負デアル。斯クテ $x+8$ ト $x-2$ トニ分解セラル。

52. 一般ノ二次三項式ノ因數分解法

ax^2+bx+c ハ二次三項式ノ一般ノ形ニテ

$$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}$$

括弧ノ中ニ於テ $\frac{b}{a}$ ノ半分 $\frac{b}{2a}$ ノ平方ヲ加ヘテ減ズレバ

$$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2+4ac}{4a^2}\right\}=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$

公式ニ由リ $$=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

例. $$3x^2-8x-3=3\left(x^2-\frac{8}{3}x-1\right)=3\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}-\frac{16}{9}-1\right)$$

$$=3\left\{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right\}=3\left\{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2\right\}$$

$$=3\left\{x-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right\}\left\{x-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}\right\}$$

$$=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)=(3x+1)(x-3)$$

問題

次ノ諸式ヲ因數ニ分解セヨ

(1) $6a^3bx+4a^2b^2y$　　(2) $9x^4+24x^2y^2+16y^4$

(3) $\cancel{3a^3-6a^2b+3ab^2}$　　[redacted]

~~(5)~~ $\cancel{a^2-b^2-(a+b)^2}$　　(6) $4ab+1-4a^2-b^2$

(7) x^8+x^4+1　　(8) x^6-y^6

(9) $x^2+12x+35$　　(10) $x^2-7x-44$

(11) $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$　　(12) $(a+b)^3-(a-b)^3$

(13) $6a^2-ab-2b^2$　　(14) $(x+3)(x+7)(x+1)(x+5)+15$

第三節　最大公約數

53. 最大公約數 二ツ或ハ二ツヨリ多クノ代數式ノ各ヲ整除シ得ベキ式ヲ此等ノ式ノ公約數 **通因子** ト云ヒ其最モ高次ナルモノヲ此等ノ式ノ **最大公約數** ト云フ。

例ヘバ a, b, $3ab$, $3a^2b$ ハ何ヅレモ $6a^3b$, $9a^2b^2$ ノ二式ヲ割切ルユエ兩式ノ通因子ニテ $3a^2b$ ガ此最大公約數デアル。

54. 容易ニ因數ヲ求メ得ベキ式ノ最大公約數

算術ニ於テ最大公約數ヲ求ムル法ト同ジ理由ニテ次ノ法則ヲ得。

各式ニ共通ナル因數ヲ取リ其指數ヲシテ各指數中ノ最モ低キモノト同ジカラシメ數係數ノ最大公約數ヲ數係數トナス式ヲ作ルベシ。

例一. $16a^4b^2c,\ 20a^3b^3d,\ 12a^2b^4cd$ ノ最大公約數ヲ求ム。

此三式ニ共通ナル文字ハ a, b ニテ此中 a ノ最モ低キ指數ハ 2 又タ b ノ最モ低キ指數ハ 1デアル。次ニ數係數 16, 20, 12 ノ最大公約數ハ 4 トナルユヱ求ムル最大公約數ハ $4a^2b^2$ デアル。

例二. $(x-2)^3(x-1)^2(x-3)$ ト $(x-2)^2(x-1)(x-3)^2$ ノ最大公約數ヲ求ム。

兩式ニ共通ナル因數ハ $(x-2)$, $(x-1)$, $(x-3)$ ニテ $x-2$ ノ指數ノ最モ低キモノハ 2 デアル。又タ $x-1$ ノ指數ノ最モ低キモノハ 1 ニテ $x-3$ ノ指數ノ最モ低キモノハ 1 デアル。故ニ求ムル最大公約數ハ

$$(x-1)(x-2)^2(x-3)$$

デアル。

例三. $6(x^2-7x+12)$, $3x^2+6x-45$ ノ最大公約數ヲ求ム。

$$6(x^2-7x+12)=6(x-3)(x-4)$$

$$3x^2+6x-45=3(x^2+2x-15)=3(x+5)(x-3)$$

兩式ニ共通ナル因數ハ $x-3$ ニテ指數ハ 1 デアル。次ニ兩式ノ數係數 3 及ビ 6 ノ最大公約數ハ 3 デアル。由リテ求ムル最大公約數ハ $3(x-3)$ デアル。

55. 多項式ノ最大公約數ヲ求ムル別法

因數ヲ容易ニ見出スコトノデキヌ三ツノ式ノ最大公約數ヲ求ムルニハ前條ノ法ニ由ルコトガデキヌ。此場合ニハ算術ニ於テ割算ヲ續ケ最大公約數ヲ求メタルト同樣ノ方法ヲ行フノデアル。例ヘバ $x^2+8x+15$ ト $x^3+13x^2+56x+80$ トノ最大公約數ヲ求ムルニ次ノ如ク次第ニ割算ノ剩除ニテ其除數ヲ割リテ

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
x^2+8x+15) & x^3+13x^2+56x+80\ (x+5 \\
 & \underline{x^3+8x^2+15x} \\
 & \quad 5x^2+41x+80 \\
 & \quad \underline{5x^2+40x+75} \\
x+5) & x^2+8x+15\ (x+3 \\
 & \underline{x^2+5x} \\
 & \quad 3x+15 \\
 & \quad \underline{3x+15}
\end{array}
$$

即チ求ムル所ノ最大公約數ハ $x+5$ デアル。

此運算ノ理由ハ次ノ二定理ニ基ヅク

一式ガ他式ヲ整除スルトキハ前式ハ二式ノ最大公約數ナリ。

二式ノ最大公約數ハ其除數ト剩除トノ最大公約數ニ等シ。

此定理ノ第一ハ例ヘバ A ガ B ニテ割切ルヽトキハ A,B ノ最大公約數ハ B デアルト云フコトニテ此理ハ先ヅ B ハ A及B ヲ割切ルユヱ A,B ハ公約數デアル。而シテ B ヨリ大ナル公約數即チ B ニ或ル式ヲ掛ケタル積ハ A ヲ割切ルコトハデキルカモ知レヌガ B ヲ割切ルコトハデキヌ。即チ B ヨリ大ナル公約數ハ A,B ノ公約數デナイ。故ニ B ガ A 及 B ノ最大公約數デアル。

此定理ノ第二ハ例ヘバAヲBニテ割リ商Qト剩餘Rヲ得タトスレハBトRトノ最大公約數ガAトBトノ最大公約數デアルト云フコトニテ此理ハ $R=A-BQ$ ナルユエAトBトヲ割切ルモノ即チA,Bノ公約數ハ $A-BQ$ 即チRヲ割切ル。故ニA,Bノ公約數ハスベテB,Rノ公約數デアル。次ニ上式ハ $A=R+BQ$ トナルユエB,トRトヲ割切ルモノ即チB,Rノ公約數ハ $R+BQ$ 即チAヲ割切ル。故ニB,Rノ公約數ハスベテA,Bノ公約數デアル。即チA,Bノ公約數ニテB,Rノ公約數ナラザルモノハナクB,Rノ公約數ニテA,Bノ公約數ナラザルモノハナイユエA,Bノ公約數トB,Rノ公約數トハ同ジモノデアル。故ニA,Bノ最大公約數ハB,Rノ最大公約數デアル。

$$B)\ A\ (Q$$
$$\underline{BQ}$$
$$R$$

此第二ノ定理ニ由リ $x^2+8x+15$ ト $x^3+13x^2+56x+80$ トノ最大公約數ハ $x^2+8x+15$ ト第一ノ定理ニ由リ $x+5$ トノ最大公約數デアル。然ルニ $x+5$ ハ $x^2+8x+15$ ヲ割切ルユエ $x+5$ ガ $x+5$ ト $x^2+8x+15$ トノ最大公約數デアル。故ニ $x^2+8x+15$ ト $x^3+13x^2+56x+80$ ノ最大公約數ハ $x+5$ デアル。

由リテ次ノ法則ヲ得。

一式ヲ以テ他ノ式ヲ割リ其剩餘ヲ以テ除數ヲ割リ又其第二ノ剩餘ヲ以テ第二ノ除數ヲ割リ次第ニ斯クノ如クシテ終ニ剩餘ナキニ至レバ其最終ノ剩餘ガ初メノ二式ノ最大公約數ナリ。

注意 上ノ理ニ由リテ二式ノ中一式ヘ他ノ式ノ中ニ含マザル因數ヲ掛クルモ二式ノ最大公約數ハ變ラヌノデアル。故ニ上ノ法則ニ由リテ計算ヲナストキ途中ノ除法ニ於テ商ガ分數ノ形トナルヤウナコトガアルトキハ被除數ニ除數中ニナキ因數ヲ掛ケルカ或ハ除數ヲ被除數ノ中ニナキ因數ニテ割リテモ結果ハ變ラヌノデアル。

例　x^3-2x^2+3x-6 ト $x^4-x^3-x^2-2x$ トノ最大公約數ヲ求ム

$$x^3-2x^2+3x-6)\ x^4-x^3-x^2-2x\ (x+1$$
$$\underline{x^4 \mp 2x^3 \pm 3x^2 \mp 6x}$$
$$x^3-4x^2+4x$$
$$\underline{x^3-2x^2+3x-6}$$
$$-2x^2+x+6$$

$-2x^2+x+6$ ニテ x^3-2x^2+3x-6 ヲ除スレバ $-\frac{1}{2}x$ ナル商ヲ得ルユエ x^3-2x^2+3x-6 ニ2ヲ掛ケテ割算ヲ行フ

$$2x^2+x+6)\ x^3-2x^2+3x-6$$
$$\underline{\times\qquad 2}$$
$$2x^3-4x^2+6x-12\ (-x$$
$$\underline{-2x^3-x^2-6x}$$
$$-3x^2+12x-12$$

又2ヲ掛ケテ

$$\underline{\times\qquad 2}$$
$$-6x^2+24x-24\ (3$$
$$\underline{-6x^2+3x+18}$$
$$21x-42$$

$21x-42$ ニテ $-2x^2+x+6$ ヲ割レバ $-\frac{2}{21}x$ ナル商ヲ得ルユエ $21x-42$ ヲ21ニテ割リテ $x-2$ 割算ヲ行ヘバ

$$x-2)\ -2x^2+x+6\ (-2x-3$$
$$\underline{-2x^2+4x}$$
$$-3x+6$$
$$\underline{-3x+6}$$

由リテ求ムル最大公約數ハ $x-2$ デアル。

56. 三ツ以上ノ多項式ノ最大公約數 ヲ求ムルニ若シ其因數ヲ視察ニ由リテ求ムルコトノデキヌ場合ニハ先ヅ其中ノ二式ノ最大公約數ヲ求メ次ニ其結果ト第三式トノ最大公約數ヲ求メ其結果ト第四式トノ最大公約數ヲ求ムル如ク逐次ニ求メ行クノデアル。

問 題

次ノ最大公約數ヲ求ム。

(1) $12x^3y,\ 18x^2y^4$ (2) $35a^2b^3x^3y^4,\ 49a^7b^4x^4y^3$

(3) $a^2-6ab+5b^2,\ a^3-4a^2b-7ab^2+10b^3$

(4) $4(x+1)^2,\ 6(x^2-1)$ (5) $6ab(a+b),\ 8b(a^3+b^3)$

(6) $x^2-7xy+12y^2,\ x^2+6xy+8y^2,\ x^2+5xy+6y^2$

(7) $x^3-8x^2+11x+20\ \ 2x^4-7x^3-4x^2+x-4$

(8) $a^3+2a^2b-13ab^2+10b^3,\ a^4-3a^3b+6ab^3-4b^4$

(9) $x^3-x^2y+xy^2+14y^2,\ 4x^3+3x^2y-6xy^2+2y^3$

(10) $x^2+3x-70,\ x^3-39x+70,\ x^3-48x+7$

第四節 最小公倍數

57. 最小公倍數 二ツ或ハ二ツヨリ多クノ代數式ノ各ニヲ整除シ得ベキ式ヲ此等ノ式ノ**公倍數**ト云ヒ其最モ低次ナルモノヲ此等ノ式ノ**最小公倍數**ト云フ。

例ヘバ $a,\ ab,\ b^2$ ハ何ツレモ $a^2b^2,\ 3a^3b^2$ 等ヲ割切ルユエ $a^2b^2;\ 3a^3b^2$ ハ

$a^2,\ ab,\ b^2$ ノ公倍數ニテ a^2b^2 ガ此等ノ三式ノ最小公倍數デアル。

58. 容易ニ因數ヲ求メ得ベキ式ノ最小公倍數

算術ニ於テ最小公倍數ヲ求ムル法ト同ジ理由ニテ次ノ法則ヲ得。

各式中ニ在ル悉クノ因數ノ積ヲ作リ其因數中二式以上ニ共通ナルモノハ指數ノ最大ナルモノヲ其因數ノ指數トシ數係數ノ最小公倍數ヲ數係數トナス式ヲ作ルベシ。

例 $16(a-b)^4(b-c)(c-a),\ 20(a-b)^3(b-c)^3(d-a)$ ノ最小公倍數ヲ求ム。

此二式中ニ在ル因數ハ $a-b,\ b-c,\ c-a,\ d-a$ ノ四ツデアル。$a-b$ ノ指數ハ前式ニ於テハ 4, 後式ニ於テハ 3 ナルユエ最大ナルハ 4, 又 $b-c$ ノ指數ノ最大ナルハ 3 デアル。而シテ $c-a,\ d-a$ ハ兩式ニ共通ナラヌユエ指數ハ其マヽデアル。次ニ數係數 16, 20 ノ最小公倍數ハ 80 デアル。由リテ求ムル最小公倍數ハ

$$80(a-b)^4(b-c)^3(c-a)(d-a)\ \text{デアル。}$$

59. 二ツノ多項式ノ最小公倍數ヲ求ムル別法

A 及 B ヲ二ツノ整式トシ其最大公約數ヲ G, 最小公倍數ヲ L トス。G ハ A, B ノ最大公約數ナルユエ明カニ A B ヲ割切ル。A 及 B ヲ G ニテ割リタル商ヲソレゾレ a 及 b トスレバ $A=a\times G,\ B=b\times G$

G ハ最大公約數ナルユエ $a,\ b$ ノ間ニ公約數ナキコトハ明カデアル。(若シ $a,\ b$ ノ間ニ c ナル公約數アリトスレバ $c\times G$ ガ A 及 B ノ最大公約數トナリテ G ガ A B ノ最大公約數トナラヌカラデアル) 故ニ $a,\ b$ ノ最小公倍數ハ ab ニテ A 及 B 即チ aG 及 bG ニテ割切ル

ノ最低次ノモノ即チ L ハ abG デアル。

$$L=abG=aG\times\frac{bG}{G}=A\times\frac{B}{G}$$

斯クシテ次ノ法則ヲ得

先ヅ二式ノ最大公約數ヲ求メ之ヲ以テ二式ノ中ノ一ツヲ割リ其商ヲ他ノ式ニ乘ズベシ。

例　$x^2+2x-8,\ x^3-x^2-17x+12$ ノ最小公倍數ヲ求ム。

先ヅ此二式ノ最大公約數ハ $x+4$ デアル。故ニ

$$\{(x^2+2x-8)\div(x+4)\}(x^3-x^2-17x+12)=x^4-3x^3-15x^2+46x-24$$

由リテ求ムル所ノ最小公倍數ハ $x^4-3x^3-15x^2+46x-24$ デアル。

60.　三ツ以上ノ多項式ノ最小公倍數 ヲ求ムルニ若シ其因數ヲ視察ニテ求ムルコトノデキヌ場合ニハ其中ノ二式ノ最小公約數ヲ求メ次ニ其結果ト第三式トノ最小公倍數ヲ求メ其結果ト第四式トノ最小公倍數ヲ求ムル如ク逐次ニ求メ行クノデアル。

問　　題

次ノ最小公倍數ヲ求ム。

(1)　$3x^2yz,\ 27x^3y^2z^3,\ 6xy^2z^4$　　(2)　$4a(a+b),\ 6b(a^3+b^3)$

(3)　$4x^2-5xy+y^2,\ 3x^3-3x^2y+xy^2-y^7$

(4)　$9a^3-ab^2-2b^3,\ 3a^3-10a^2b-7ab^3-4b^3$

(5)　$x^4-2x^3-3x^2+8x-4,\ x^4-5x^{3}2+0x-16$

(6)　$a^3-6a^2+11a-6,\ a^3-9a^2+26a-24$

(7)　$8a^3-18ab^2,\ 8a^3+8a^2b-6ab^2,\ 4a^2-8ab+3b^2$

(8)　$x^2+xy-20y^2,\ 24y^3+x^2y-10xy^2,\ x^2y+30xy^2-x^3$

欠

MISSING

ノ最小公倍數ヲ公分母トスルノデアル。

斯クテ次ノ法則ヲ得

分數ヲ通分スルニハ各分母ノ最小公倍數ヲ公分母トナシ之ヲ各分母ニテ除シタル商ト其分子トノ積ヲ分子トセル分數ヲ作ルベシ。

例　$\dfrac{x}{a^2b(a+b)}$, $\dfrac{y}{ab^2(a-b)}$, $\dfrac{z}{ab(a^2-b^2)}$　ヲ通分ヨセ。

此等ノ分數ノ分母 $a^2b(a+b)$, $ab^2(a-b)$, $ab(a^2-b^2)$　最小公倍數ハ $a^2b^2(a^2-b^2)$　ニテ之ヲ $a^2b(a+b)$, $ab^2(a-b)$, $ab(a^2-b^2)$ ニテ割リタル商ハソレゾレ $b(a-b)$, $a(a+b)$, ab ナルユエ

$$\frac{x}{a^2b(a+b)}=\frac{b(a-b)x}{a^2b^2(a^2-b^2)},\quad \frac{y}{ab^2(a-b)}=\frac{a(a+b)y}{a^2b^2(a^2-b^2)},$$

$$\frac{z}{ab(a^2-b^2)}=\frac{abz}{a^2b^2(a^2-b^2)}$$

問　題

次ノ各分數ヲ約分セヨ。

(1) $\dfrac{10ab^2c^3}{15a^2b^2c}$　(2) $\dfrac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$　(3) $\dfrac{a^2+4ab+3b^2}{a^2+7ab+6b^2}$

15

(4) $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^6-y^6}$　(5) $\dfrac{a^2-a-12}{a^3-10a^2+21a+12}$

次ノ各分數ヲ通分セヨ

(6) $\dfrac{7}{6x^2yz^2}$, $\dfrac{8}{15x^2y^2z}$, $\dfrac{9}{10xy^2z^2}$

(7) $\dfrac{3}{x+1}$, $\dfrac{5}{x+2}$, $\dfrac{4}{x+3}$

(8) $\dfrac{a}{x-y},\ \dfrac{b}{x^2+xy+y^2},\ \dfrac{c}{x^3+y^3}$

(9) $\dfrac{4}{x-3},\ \dfrac{3x+2}{x^2+3x+9},\ \dfrac{x^2+3x}{x^3-27}$

(10) $\dfrac{a}{x^2-(a+b)x+ab},\ \dfrac{b}{x^2-(b+c)x+bc},\ \dfrac{c}{x^2-(c+a)x+ca}$

第二節　分數ノ加法及減法

63. 分數ノ加法及減法 $\dfrac{a}{c}\times c=a,\ \dfrac{b}{c}\times c=b$ ニテ

$\dfrac{a}{c}\times c+\dfrac{b}{c}\times c=a+b$ 即チ $\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)\times c=a+b$

故ニ $$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

同理ニテ $$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

又タ **62** 條ニ由リ $\dfrac{a}{c}=\dfrac{ad}{cd}$ $\dfrac{b}{d}=\dfrac{bc}{cd}$ ニテ $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{ad}{cd}+\dfrac{bc}{cd}$

$=\dfrac{ad+bc}{cd}$ デアル。

斯クテ次ノ法則ヲ得。

分數ヲ加ヘ或ハ減ズルニハ先ツ通分シテ其公分母ヲ分母トシテ分子ノ和或ハ差ヲ分子トセル分數ヲ作ルベシ。

例一. $\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{c}{a-b}$ ヲ加ヘヨ

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c(a-b)}{(a+b)(a-b)},\quad \frac{c}{a-b}=\frac{c(a+b)}{(a+b)(a-b)}$$ ニテ

$$\frac{c}{a+b}+\frac{c}{a-b}=\frac{c(a-b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{c(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{c(a-b)+c(a+b)}{(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{ca-cb+ca+cb}{a^2-b^2}=\frac{2ca}{a^2-b^2}$$

例二. $\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{ab}{a^2-b^2}+\dfrac{a^2}{a^2+b^2}$ ヲ求ム

$a+b,\ a^2-b^2, a^2+b^2$ トノ最小公倍數ハ a^4-b^4 ニテ

$$\frac{a}{a+b}=\frac{a\{(a^4-b^4)\div(a+b)\}}{a^4-b^4}=\frac{a(a^3-a^2b+ab^2-b^3)}{a^4-b^4}$$

$$\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{ab\{(a^4-b^4)\div(a^2-b^2)\}}{a^4-b^4}=\frac{ab(a^2+b^2)}{a^4-b^4}$$

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2\{(a^4-b^4)\div(a^2+b^2)\}}{a^4-b^4}=\frac{a^2(a^2-b^2)}{a^4-b^4}$$

故ニ $$\frac{a}{a+b}-\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a(a^3-a^2b+ab^2-b^3)-ab(a^2+b^2)+a^2(a^2-b)}{a^4-b^4}$$

$$=\frac{2a^4-2a^3b-2ab^3}{a^4-b^4}$$

注意 若シ上ノ如クシテ得タル分數ノ分母ト分子トノ間ニ公約數アルトキハ約シテ既約分數トナスノデアル。

問　　題

次式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{ab}$　　(2) $\dfrac{y^2}{a^2x}+\dfrac{y}{ax^2}$

(3) $\dfrac{a^2}{a^2-b^2}+\dfrac{ab}{(a+b)^2}$　　(4) $\dfrac{x-2a}{x+2a}-\dfrac{x+2a}{2a-x}+\dfrac{8ax}{x^2-4a^2}$

(5) $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}-2\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$ (6) $\frac{x}{x-y}+\frac{x}{x+y}+\frac{2^2x}{x^2+y^2}+\frac{4x}{x^4+y^4}$

(7) $\frac{1}{(x+2)(x+3)(x+4)}-\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+6x+8}$

(8) $\frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}$

第三節 分數ノ乘法及除法

66. 分數ノ乘法 今 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=x$ トスレバ

此兩邊ニ bd ヲ乘ズレバ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times bd=x\times bd$

交換ノ定則ニ由リ $\frac{a}{b}\times b\times\frac{c}{d}\times d=x\times bd$

即チ $a\times c=x\times bd$ $ac=x\times bd$

故ニ $x=\frac{ac}{bd}$

由リテ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

同樣ニ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$

斯クテ次ノ法則ヲ得。

分數ヲ乘ズルニハ分子ノ積ヲ分子トシ分母ノ積ヲ分母トセル分數ヲ作ルベシ。

例. $\frac{3a^2}{(a+b)^2}=\frac{4(a^2-b^2)}{3ab}$ ヲ乘ゼヨ

$$\frac{3a^2}{(a+b)^2}\times\frac{4(a^2-b^2)}{3ab}=\frac{3a^2\times4(a^2-b^2)}{(a+b)^2\times3ab}=\frac{3a^2\times4(a+b)(a-b)}{(a+b)^2\times3ab}$$

$$=\frac{4a(a-b)}{3(a+b)}$$

例二. $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ ヲ求ム。

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a\times a\times a}{b\times b\times b}=\frac{a^3}{b^3}$$

一般ニ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\cdots n$ 因子 $=\frac{a\times a\times\cdots n\text{ 因子}}{b\times b\times\cdots n\text{ 因子}}=\frac{a^n}{b^n}$

注意 整式ハ分母ガ1ナル分數ト見做スコトヲ得ルユヱ整式ト分數式ノ積ヲ作ルトキハ整式ト分子トノ積ヲ分子トスルノデアル。又タ掛ケ算ヲ行フトキ若シ分母及分子ノ中ニテ互ニ約セルモノガアルトキハ豫メ約シテ後ニテ掛ケ算ヲ行フガヨシ。

67. 分數ノ除法 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ ヲ考フルニ

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\div(c\div d)$$

$$=\frac{a}{b}\times d\div c$$

$$=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

斯クテ次ノ法則ヲ得。

分數ニテ除スルニハ除數ノ分母ト分子トヲ顚倒シタル分數ヲ被除數ニ乘ズベシ。

例 $\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}$ ヲ $\frac{4ab}{a^2-b^2}$ ニテ除セ。

$$\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}\div\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{(2a^2+2b^2)(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)\times4ab}$$

$$=\frac{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)\times4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

68. 複雜ナル分數式 ノ計算ハ分數ノ横線ハ其分子ヲ分母ニテ割ルコトヲ表ハスモノナルコヲ考ヘテ行フベキモノデアル。

例 $\dfrac{\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}}{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}}$ ヲ簡單ニセヨ。

分子 $\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}=\dfrac{(a+x)^2+(a-x)^2}{(a-x)(a+x)}=\dfrac{a^2+\cancel{2ax}+x^2+a^2-\cancel{2ax}+x^2}{a^2-x^2}$

$$=\frac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}$$

分母 $\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}=\dfrac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(a-x)(a+x)}=\dfrac{a^2+2ax+x^2-(a^2-2ax+x^2)}{a^2-x^2}$

$$=\frac{4ax}{a^2-x^2}$$

故ニ $\boxed{\dfrac{\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}}{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}}=\dfrac{\dfrac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}}{\dfrac{4ax}{a^2-x^2}}=\dfrac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}\times\dfrac{a^2-x^2}{4ax}=\dfrac{a^2+x^2}{2ax}}$

問　題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\dfrac{x^2}{yz}\times\dfrac{y^2}{zx}\times\dfrac{z^2}{xy}$　　(2) $\dfrac{x(a-x)}{x^2+2ax+a^2}\times\dfrac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$

(3) $\left(x+\dfrac{xy}{x-y}\right)\left(y-\dfrac{xy}{x+y}\right)$

(4) $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-5ax+6a^2}\times\dfrac{x^2-4ax+4a^2}{x^2-4ax+3a^2}\times\dfrac{x^2-6ax+9a^2}{x^2-3ax+2a^2}$

(5) $\dfrac{(x-y)^2-z^2}{(x-z)^2-y^2}\times\dfrac{y^2-(z-x)^2}{z^2-(x-y)^2}$

(6) $\dfrac{5a^2bc^2}{4x^3yz}\div\dfrac{7bc^2}{6xyz}$　　(7) $\dfrac{x^3-y^3}{x^3-y^3}\div\dfrac{(x-y)^2}{x^4-y^4}$

(8) $\left(\dfrac{x^4}{a^4}-\dfrac{a^4}{x^4}\right)\div\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)$

(9) $\dfrac{x^2-3ax+2a^2}{x^2-6ax+9a^2}\div\dfrac{x^2-5ax+6a^2}{x^2-2ax+a^2}$

(10) $\dfrac{2}{3x+\dfrac{2}{3x+\dfrac{1}{x}}}$　　(11) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x}-\dfrac{y}{x+2y}}{\dfrac{x+y}{x+2y}+\dfrac{y}{x}}$

(12) $b=\dfrac{3}{4}a$ ナルトキ次式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-b^2}$$

第五章 分數方程式

第一節 一元及聯立方程式

69. 分數方程式 分數式ヲ含メル方程式ニ於テ分母ニ未知數ヲ含ムトキハ分母ノ最小公倍數ヲ方程式ノ兩邊ニ掛ケテ分母ヲ除去シテ整式トナシ第二章ニ述ベタル方法ニ由リテ解クノデアル。若シ解キテ得タル根ガ即チxノ値ガ分母ノ或ル者ヲ零トナス如キモノナルトキハ其根ハ無効デアル。故ニ分數方程式ヲ解キタルトキ得タル根ヲ元トノ方程式ニツキテ檢セネバナラヌ。

例一. $\dfrac{3x}{x-5}+\dfrac{2x}{x-3}=5$ ヲ解ケ

分母$x-5$, $x-3$ノ最小公倍數$(x-3)(x-5)$ヲ方程式ノ兩節ニ掛ケルトキハ

$$\frac{3x}{x-5}\times(x-5)(x-3)+\frac{2x}{x-3}\times(x-5)(x-3)=5(x-5)(x-3)$$

即チ $3x(x-3)+2x(x-5)=5(x-5)(x-3)$

即チ $5x^2-19x=5x^2-40x+75$

即チ $21x=75$ 　故ニ $x=\dfrac{75}{21}=\dfrac{25}{7}$

驗算 $x=\dfrac{25}{7}$ヲ左邊ニ代入スレバ。

$$\frac{3\times\frac{25}{7}}{\frac{25}{7}-5}+\frac{2\times\frac{25}{7}}{\frac{25}{7}-3}=\frac{75}{-10}+\frac{50}{4}=\frac{25}{2}-\frac{15}{2}=\frac{10}{2}=5$$

故ニ $\dfrac{25}{7}$ガ求ムル根デアル。

例二. $\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-6}=\dfrac{x-7}{x-8}-\dfrac{x-8}{x-9}$ ヲ解ケ

分母ノ最小公倍數ヲ兩邊ニ掛クベキモノデアルガ次ノ如クスル方ガ簡單デアル。

$$\frac{(x-4)(x-6)-(x-5)^2}{(x-5)(x-6)}=\frac{(x-7)(x-9)-(x-8)^2}{(x-8)(x-9)}$$

即チ $$\frac{x^2-10x+24-(x^2-10x+25)}{(x-5)(x-6)}=\frac{x^2-16x+63-(x^2-16x+64)}{(x-8)(x-9)}$$

即チ $$-\frac{1}{(x-5)(x-6)}=-\frac{1}{(x-8)(x-9)}$$

兩邊ノ符號ヲ變ジテ $$\frac{1}{(x-5)(x-6)}=\frac{1}{(x-8)(x-9)}$$

故ニ $(x-5)(x-6)=(x-8)(x-9)$

即チ $x^2-11x+30=x^2-17x+72$

即チ $6x=42$ 　故ニ $x=7$

驗算 $x=7$ヲ左邊ニ代入スレバ

$$\frac{7-4}{7-5}-\frac{7-5}{7-6}=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$$

右邊ニ代入スレバ

$$\frac{7-7}{7-8}-\frac{7-8}{7-9}=-\frac{1}{2}$$

故ニ7ガ求ムル根デアル。

70. 聯立方程式 分數式ヲ含メル聯立方程式ノ解法ハ前條ト同ジク先ヅ分母ヲ除去シテ整式トナシ第二編ニ述ベタル如クニ解

クノデアル。

例 $\frac{x+5}{y-1}-\frac{x+1}{y}=\frac{12}{y}\cdots\cdots(1)$, $2x+y=8\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$ ヲ解ケ

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{x+5}{y-1}-\frac{x+1}{y}=\frac{12}{y}\cdots\cdots & (1)\\ 2x+y=8\cdots\cdots\cdots\cdots & (2)\end{array}\right\}\text{ヲ解ケ}$$

先ツ(1)式ニ於テ分母ノ最小公倍數 $y(y-1)$ ヲ掛クレバ

$$y(x+5)-(y-1)(x+1)=12(y-1)$$

即チ $x-8y=-13$ (3)

(2)式ノ各邊ヨリ(3)式ノ各邊ニ2ヲ掛ケタルモノヲ減ズレバ

$17y=34$ 即チ $y=2$

之ヲ(3)式ニ代入スレバ $x-16=-13$ 故ニ $x=3$

驗算 $x=3, y=2$ ヲ(1)式ノ左邊ニ代入スレバ

$$\frac{3+5}{2-1}-\frac{3+1}{2}=8-2=6$$

右邊ニ代入スレバ $\frac{12}{2}=6$

又タ(2)式ノ左邊ニ代入スレバ $2\times3+2=8$

故ニ $x=3, y=2$ ガ求ムル根デアル。

問　　題

次ノ方程式ヲ解ケ

(1) $\frac{3-x}{3}+\frac{2x+7}{6}=\frac{13}{x-4}$

(2) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}$

(3) $\frac{3-2x}{1-2x}-\frac{2x-5}{2x-7}=1-\frac{4x^2-1}{7-16x+4x^2}$

(4) $\frac{x^2+2x+4}{x+2}+\frac{x^2-2x+4}{x-2}=2x$

(5) $\frac{m(x+a)}{x+b}+\frac{m(x+b)}{x+a}=m+n$

(6) $\frac{x}{y+1}-\frac{x-1}{y}=\frac{1}{2y}$, $\frac{x}{x+2}=\frac{y}{y+3}$

(7) $\frac{x+3}{y+7}=\frac{x-2}{y-3}$, $\frac{x+3y-4}{x+y}=2$

(8) $\frac{x}{a-b}+\frac{y}{a+b}=2$, $\frac{bx-ay}{a^2+b^2}=-1$

(9) $\frac{6}{x}+\frac{4}{y}=4$; $\frac{27}{x}-\frac{12}{y}=3$

第二章　應用問題

71. 應用問題 ニ由リテハ一次方程式ニテモ聯立方程式ニテモ解キ得ルモノガアリテ區別ナキ場合ニハ何ヅレニテ解キテモヨケレド聯立方程式ニテ解クトキハ説明ハ明瞭デアルガ此解法ノ計算ガ一次方程式ヨリモ煩雜ノ恐レガアル。又問題ニヨリテハ得タル根ニツキ解釋ヲ要スルコトガアル。

例一. 兄ハ十六歳ニシテ弟ハ十二歳ナリ弟ノ年齡ガ兄ノ年齡ノ三分ノ二ナルハ何時ナルカ。

x 年後ニ於テ弟ノ年齡ガ兄ノ年齡ノ三分ノ二ナリトスレバ其時ニ於ケル兄ノ年齡ハ $16+x$, ノ弟ノ年齡ハ $12+x$ ニテ

$$\frac{2}{3}(16+x)=12+x$$

之ヲ解キテ　$2(16+x)=3(12+x)$

即チ　$32+2x=36+3x$

即チ　$x=-4$

由リテ四年前ニ於テ弟ノ年齢ガ兄ノ年齢ノ三分ノ二デアツタノデアル。

例二．一工事ヲナスニ甲乙二人ナラバ之ヲ三十二日間ニテナシ乙丙二人ナラバ百二十日間ニテナシ甲乙丙三人ナラバ三十日間ニナストスフ各一人ヅツニテハ幾日ヲ要スルカ

甲，乙，丙ガ此工事ヲ一人ヅツニテ爲スニ要スル日數ヲソレゾレx, y, zトスレバ一日ニ爲ス仕事ノ量ハソレゾレ全工事ノ$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$デアル。由リテ次ノ方程式ヲ得。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{32} \quad (1) \quad , \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{120} \quad (2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{30} \quad (3)$$

(3)ヨリ(2)ヲ減ズレバ　$\frac{1}{x}=\frac{1}{30}-\frac{1}{120}$　即チ　$\frac{1}{x}=\frac{1}{40}$　(4)

故ニ　$x=40$

次ニ(1)ヨリ(4)ヲ減ズレバ　$\frac{1}{y}=\frac{1}{32}-\frac{1}{40}$　即チ　$\frac{1}{y}=\frac{1}{160}$　(5)

故ニ　$y=160$

次ニ(2)ヨリ(5)ヲ減ズレバ　$\frac{1}{z}=\frac{1}{120}-\frac{1}{160}$　即チ　$\frac{1}{z}=\frac{1}{480}$

由リテ　$z=480$

故ニ甲一人ナラバ四十日，乙一人ナラバ百六十日，丙一人ナラバ四百八十日ヲ要ス。

問題

(1)　分數アリ分母ヨリ 3 ヲ減ジ分子ニ 5 ヲ加フレバ二分ノ三トナリ分母ニ 5 ヲ加ヘ分子ニ 7 ヲ加フレバ 1 トナルト云フ．此分數ヲ求ム。

(2)　甲乙二人アリ甲ハ毎時一里，乙ハ毎時三里ノ速サヲ以テ同方向ニ旅行スルニ或ル時ハ乙ハ甲ヨリモ十二里前方ニ在ルヲ見タリト云フ兩人何時出會フカ。

(3)　鷄卵ノ價二割騰貴シタルタメニ三圓ニツキ二十個減ジタリト鷄卵一個ノ價ヲ求ム。

(4)　酒ト水トヲ混合セル二個ノ樽アリ甲ノ樽ニ於ケル酒ト水ノ比ハ 1:3 ニシテ乙ノ樽ニテハ 3:5 ナリ然ルトキハ酒五石水九石ノ混成液ヲ得ントスルニハ各樽ヨリ幾石ヲ取出スベキカ。

(5)　金若干圓アリ之ヲ若干人ニ分ツテ若シ人數ガ三人増加スルトキハ一人ノ割前十錢ヲ減ス若シ人數ガ二人減少スルトキハ一人ノ割前十錢ヲ増スト云フ一人ノ割前幾何ナルカ。

第六章　方程式ノ續キ

第一節　一元二次方程式

72. 一元二次方程式　未知數ノ二次ヨリ高キ冪ノモノヲ含マザル整數方程式ヲ一元二次方程式ト云フ。例ヘバ $3x^2=12$, $5x^2-4x=3$, ノ如キハ一元二次方程式デアル。

方程式ノ中ニハ未知數ノ二次ノ項ト一次ノ項ト未知數ヲ含マヌ項トノ外ハナキユエ項ヲ移シテ簡單ニナストキハ一般ニ $ax^2+bx+c=0$ ノ如キ形トナスコトガデキル。但シ場合ニ由リテハ b ガ 0 ニテ x ノ一次ノ項ノナキコトアリ又 c ガ 0 ナルコトモアル。

73. $ax^2=c$ ナル形ノ方程式ノ解法　例ヘバ $4x^2=36$ ナル方程式ヲ解クニ兩邊ヲ 4 ニテ除セバ $x^2=9$ トナル。即チ平方シテ9トナルモノガ此方程式ノ根デアル。然ルニ 9 ノ平方根ハ 3 ナルユエ $+3$ ノ平方モ -3 ノ平方モ 9 トナル。即チ此方程式ノ根ハ $+3$ 或ハ -3 デアル。即チ $x=\pm3$

場合ニ由リテハ平方根ヲ求ムルニ開キ切レザルコトガアル。例ヘバ $x^2=5$ ニ於テ 5 ノ平方根ハ 2,23・・・・トナリテ開キ切レヌ。斯クノ如ク平方ニ限ラズ立方等ニ開キ切レザル數ヲ**不盡根數**或ハ**無理數**ト云フ。而シテ之ニ對シ從來ノ整數, 分數, 小數ヲ**有理數**ト云フ。

次ニ $x^2=-9$ ニ於テ $+3$ ヲ平方スルモ -3 ヲ平方スルモ $+9$ トナリテ -9 トナラヌ。即チ吾々ハ平方シテ -3 トナル數ヲ知ラヌ。斯クノ如キ數即チ $\sqrt{-3}$ ノ如キ數ヲ**虛數**ト云ヒ從來ノ數ヲ**實數**ト云フ。

無理數, 虛數ハ分數及負數ノ如ク交換, 組合, 配分ノ諸法則ニ從フ如ク定ム。由リテ $x^2=5$ ノ根ヲ $x=+\sqrt{5}$ 及 $x=-\sqrt{5}$ ト記ス。

74. 一般ナル一元二次方程式ノ解法

方程式 $ax^2+bx+c=0$ ニ於テ

c ヲ右邊ニ移シテ　$ax^2+bx=-c$

兩邊ヲ x^2 ノ係數 a ニテ割リテ　$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

x ノ係數ノ半即チ $\frac{b}{2a}$ ノ平方ヲ兩邊ニ加ヘテ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

即チ
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

故ニ
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

即チ
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

故ニ
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad 即チ\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

由リテ求ムル方程式ノ根ハ　$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

斯クテ次ノ法則ヲ得

一元二次方程式ノ項ヲ移シテ右邊ヲ 0 トナストキハ此方程式ノ根

ハ x^2 ノ係數ノ二倍ヲ分母トシ，x ノ係數ノ平方ヨリ x^2 ノ係數ト既知項トノ積トノ積ノ四倍ヲ減ジタル殘リノ平方根ヲ x ノ係數ノ符號ヲ變ジタルモノヲ加ヘ或ハ減ジタルモノヲ分子トシタルモノナリ。

例 $3x^2+13x-10=0$ ヲ解ケ

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2+4\times3\times(-10)}}{3\times2}=\frac{-13\pm\sqrt{169+120}}{6}$$

$$=\frac{-13+17}{6}$$

故ニ一根ハ $\quad x=\dfrac{-13+17}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

他ノ一根ハ $\quad x=\dfrac{-13-17}{6}=\dfrac{-30}{6}=-5$

75. x ノ係數ガ偶數ナル場合ノ積

若シ b ガ偶數ナルトキ例ヘバ $b=2m$ ナルトキハ

$$x=\frac{-2m\pm\sqrt{4m^2-4ac}}{2a}=\frac{-2m\pm\sqrt{4(m^2-ac)}}{2a}$$

$$=\frac{-2m\pm2\sqrt{m^2-ac}}{2a}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-ac}}{a}$$

ナルユヱ分母ハ x^2 ノ係數其マヽ（即チ二倍セズニ）ヲ以テシ分子ノ前項ハ x ノ係數ノ半ノ符號ヲ變ジタルモノ，後項ノ平方根ノ內ハ x ノ係數ノ半ノ平方ヨリ x^2 ノ係數ト既知項トノ積ヲ減ジタルモノヲ以テスレバヨシ。

例 $x^2-8x+12=0$ ヲ解ケ

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-1\times12}}{1}=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm\sqrt{4}=4\pm2$$

故ニ一根ハ $\quad 4+2=6$

ヲ作レ $\quad 4-2=2$

デアル。

76. 方程式ノ左邊ガ因數ニ分解シ得ル場合

若シ與ヘラレタル方程式ヲ變シテ右邊ヲ 0 ナル形トナストキ左邊ガ容易ニ分解スルコトヲ得レバ其各因數ヲ 0 ニ等シト置キタル方程式ノ根ガ求ムル根デアル。

例 $x^2-8x+12=0$ ヲ解ケ

此左邊ヲ因數ニ分解スレバ $\quad (x-2)(x-6)=0$

二ツノ積ガ0トナルニハ其中ノ一ツガ0トナラネバナラヌ。由リテ

$x-2=0$ 或ハ $x-6=0$

故ニ $\quad x=2$ 或ハ $x=6$

由リテ求ムル根ハ 2 及 6 デアル。

問　題

次ノ方程式ヲ解ケ

(1) $3x^3-4=x^2+8$ (2) $2x^2-1+3(5-x^2)=10$

(3) $x^2-5x+6=0$ (4) $2x^2-9x=4$

(5) $12x^2-23bx+10b^2=0$ (6) $x^2-\dfrac{52}{7}x+3=0$

(7) $6(x-2)+13(1-x)(x-2)+6x^2=6(2x-1)$

第二節　一元二次方程式ノ根ト係數トノ關係

77. 二根ノ和及積　今 $ax^2+bx+c=0$ ナル方程式ノ二根ヲ α 及 β トスレバ前節ニ由リ二根ハ

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

此兩根ヲ相加フレバ

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}$$

$$=-\frac{b}{a}$$

兩根ヲ相乘スレバ

$$\alpha\beta=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a\times 2a}$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}$$

$$=\frac{c}{a}$$

而シテ $ax^2+bx+c=0$ ノ兩邊ヲ a ニテ割レバ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

此式ト上ニ得タル二根ノ和及積トヲ比較スレバ次ノ關係ヲ得。

一元二次方程式ヲ變ジテ x^2 ノ係數ガ1ナル如クスルトキハ二根

ノ和ハ x ノ係數ノ符號ヲ變ジタルモノニ等シク二根ノ積ハ既知項ニ等シ。

例一．　$3x^2-5x-4=0$ ノ二根ノ和及積ヲ求ム。

此方程式ノ兩邊ヲ 3 ニテ割レバ　$x^2-\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}=0$

故ニ二根ノ和ハ　$-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$

二根ノ積ハ　$-\frac{4}{3}$

デアル。

例二．　3 及 -4 ヲ二根トセル方程式ヲ作レ。

求ムル方程式ノ x ノ係數ハ其二根ノ和ニ符號ヲ變ジタルモノニ等シキユヱ　$-\{3+(-4)\}=1$

ニテ既知項ハ二根ノ積ニ等シクシテ　$3\times(-4)=-12$

由リテ求ムル方程式ハ　$x^2+x-12=0$

例三　$2x^2-4x+5=0$ ノ根ノ平方ヲ根トセル方程式ヲ作レ。

此方程式ノ二根ヲ α 及 β トスレバ

$$\alpha+\beta=-\left(-\frac{4}{2}\right)=2,\qquad \alpha\beta=\frac{5}{2}$$

求メントスル方程式ノ二根ハ α^2 及 β^2 ニテ其和ハ

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=2^2-2\times\frac{5}{2}=4-5=-1$$

又其積ハ　$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

由リテ求ムル方程式ハ　$x^2-x+\frac{25}{4}=0$

兩邊ニ 4 ヲ乘シテ分母ヲ除ケバ　　$4x^2-4x+25=0$

問　　題

(1)　-3，　-2 ヲ二根トスル方程式ヲ作レ

(2)　$\frac{1}{5}$，　$-\frac{3}{4}$ ヲ二根トスル方程式ヲ作レ

(3)　$x^2-14x+5=0$ ノ二根ノ平方ヲ二根トスル方程式ヲ作レ

(4)　$3x^2+4x+m=0$ ガ等根ナルトキ m ノ値ヲ求ム

(5)　$x^2+4x+11=0$ ノ二根ノ商ヲ二根トスル方程式ヲ作レ

第三節　二次方程式ニ導キ得ル方程式

78. 分數方程式　分母ニ未知數ヲ含ム方程式ノ解法ハ第五章ニ説明シタル如ク各分母ノ最小公倍數ヲ兩邊ニ乘シテ分母ヲ除去シ整式トナシテ解クノデアル。但シ前ニモ述ベタル如ク分母ノ最小公倍數ヲ零トナス如ク余計ノ根ノ入込ムコトユエ必ズ得タル根ヲ一應吟味セネバナラヌ。

79. 無理方程式　根號$\sqrt{\ }$内ニ未知數アル式ヲ含ム方程式ヲ無理方程式ト云フ。例ヘバ　$\sqrt{x-4}+2\sqrt{2x-3}=5$ ノ如キハ無理方程式デアル。

無理方程式ヲ解クニハ兩邊ヲ平方或ハ立方等自乘シテ根號ヲ取去ラネバナラヌ。然シテ斯クシテ得タル方程式ヲ解フトキハ分數方程式ノ場合ノ如ク往々除外ノ根ガ入込ムコトアルユエ必ズ得タル根ガ

原方程式ニ適方スルヤ否ヤヲ撿スベキノデアル。

本講義ニテハ根號ガ平方根ノ場合ノミニツキテ説明スル。ソレニツキテハ 4 ノ平方根ハ $+2$ ト -2 ノ正負ナル二ツノ値アルケレドモ便宜上 $\sqrt{4}$ ハ $+2$ ヲ表ハスモノト規約ヲ定メン。

例一　$\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x-4}$ ヲ解ケ。

兩邊ヲ平方スレバ

$$4x-3-2\sqrt{4x-3}\sqrt{x+3}+x+3=x-4$$

項ヲ移シテ簡單ニナセバ

$$4x+4=2\sqrt{4x-3}\sqrt{x+3}$$

兩邊ヲ 2 ニテ除セバ　　$2x+2=\sqrt{4x-3}\sqrt{x+3}$

兩邊ヲ平方スレバ　　$4x^2+8x+4=(4x-3)(x+3)$

即チ　　$4x^2+8x+4=4x^2+9x-9$

由リテ　　$x=13$

此値ヲ原式ニ代入シテ撿スレバ左邊ハ

$$\sqrt{4\times 13-3}-\sqrt{13+3}=\sqrt{49}-\sqrt{19}=7-4=3$$

右邊ハ　　$\sqrt{13-4}=\sqrt{9}=3$

即チ $x=13$ ハ原方程式ニ適合スルユエ求ムル根ハ 13 デアル。

例二　$\sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0$ ヲ解ケ

項ヲ移シテ　　$\sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+11}$

兩邊ヲ平方スレバ　　$x+4-2\sqrt{x+4}\sqrt{x+20}=4(x+11)$

即チ　　$-2\sqrt{x+4}\sqrt{x+20}=2x+20$

即チ　　$-\sqrt{x+4}\sqrt{x+20}=x+10$

兩邊ヲ平方スレバ　$(x+4)(x+20)=x^2+20x+100$

之ヲ解キテ　$x=5$

之ヲ原方程式ニ代入スレバ左邊ハ

$$\sqrt{5+4}-\sqrt{5+20}-2\sqrt{5+11}$$

$$=\sqrt{9}-\sqrt{25}-2\sqrt{16}=3-5-2\times4=-10$$

即チ0トナラヌユエ5ナル根ハ適合セヌ。

故ニ此方程式ニ適合スル根ナシ。

80. 高次方程式　二次ヨリ高キ高次方程式ハ初等代數學ニテハ一般ニ解クコトガデキヌガ或ル或ル特別ナル形ヲ有スルモノニ限リ解クコトガデキル。

例一　$x^4-25x^2+144=0$ ヲ解ケ

今 $x^2=X$ トスレバ $x^4=X^2$ ニテ　$X^2-25X+144=0$

トナル。之ヲ二次方程式ノ解法ニ由リテ解ケバ

$$X=\frac{25\pm\sqrt{25^2-144\times4}}{2}=\frac{25\pm\sqrt{625-576}}{2}$$

$$=\frac{25\pm7}{2}\quad 即チ\quad \frac{25+7}{2}=16\quad 或ハ\quad \frac{25-7}{2}=9$$

例二　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$ ヲ解ケ

二ツヅツ掛クレバ　$\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}=24$

即チ　$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$

今 $x^2+5x=y$ トスレバ　$(y+4)(y+6)=24$

即チ　$y^2+10y+24=24$

$$y^2+10y=0\quad 即チ\quad y(y+10)=0$$

由リテ　$y=0$ 或ハ $y=-10$

即チ　$x^2+5x=0$ 或ハ $x^2+5x=-10$

初メノ方程式　$x^2+5x=0$ ヨリ $x(x+5)=0$

故ニ　$x=0$ 或ハ $x=-5$

第二ノ方程式　$x^2+5x=-10$ ヨリ

$$x^2+5x+10=0$$

之ヲ解キテ　$x=\frac{-5\pm\sqrt{-15}}{2}$

由リテ求ムル根ハ　0,　-5,　$\frac{-5+\sqrt{-15}}{2}$,　$\frac{-5-\sqrt{-15}}{2}$　デアル

問　題

次ノ方程式ヲ解ケ

(1)　$\frac{3x-1}{x+9}=\frac{2x-9}{x-4}$　　(2)　$\frac{10}{x-4}-\frac{9}{x}=\frac{4}{x-5}$

(3)　$\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}=\frac{2}{4x^2-1}+1$

(4)　$\frac{a+c}{x+2b}+\frac{b+c}{x+2a}=\frac{a+b+2c}{x+a+b}$

(5)　$\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2$

(6)　$\sqrt{8x+9}+\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=0$

(7)　$\sqrt{(x-1)(x-[illegible])}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$

(8)　$\frac{x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=2$　　(9)　$x^4-8x^2-9=0$

(10)　$x^3-1=0$　　(11)　$2x^2-6x+\sqrt{(x^2-3x+5)}=11$

第四節　聯立二次方程式

81. 聯立二次方程式 二ツノ未知數ヲ含ム二ツノ二次方程式ハ一般ニハ初等代數學ニテハ解クコトヲ得ザレトモ本節ニ於テ一元二次方程式解法ニ由リテ解キ得ル場合ノミヲ次ニ說明セン。

82. 第一法 聯立方程式ノ一ツガ一次式ニテ他ノ一式ガ二次ナル場合ニハ先ヅ一次方程式ヨリ一ツノ未知數ヲ他ノ未知數ニテ表ハシテ之ヲ二次方式中ニ代入シテ一ツノ未知數ヲ含ム二次方程式トナシ之ヲ第一節ノ方法ニ由リテ解クノデアル。

例一 $\left.\begin{aligned} 2x+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 5x^2-xy=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{aligned}\right\}$ ヲ解ケ

(1) 式ヨリ　$y=5-2x \cdots\cdots (3)$

之ヲ (2) 式ニ代入スレバ　$5x^2-x(5-2x)=2$

即チ　$7x^2-5x-2=0$

之ヲ解キテ　$x=1$ 或ハ $-\dfrac{2}{7}$

之ヲ (3) 式ニ代入スレバ $x=1$ ナルトキハ $y=5-2=3$

$x=-\dfrac{2}{7}$ ナルトキハ $y=5-\left(-\dfrac{2}{7}\right)\times 2=\dfrac{39}{7}$

由リテ求ムル根ハ　$\left.\begin{aligned} x=1 \\ y=3 \end{aligned}\right\}$　$\left.\begin{aligned} x=-\frac{2}{7} \\ y=\frac{39}{7} \end{aligned}\right\}$

例二 $\left.\begin{aligned} 2x^2+3xy-5y^2-x-5y=26 \cdots\cdots\cdots (1) \\ 2x-3y=5 \cdots\cdots\cdots (2) \end{aligned}\right\}$ ヲ解ケ

(2) 式ヨリ　$x=\dfrac{3y+5}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

之ヲ (1) 式ニ代入スレバ

$$2\left(\frac{3y+5}{2}\right)^2+3\left(\frac{3y+5}{2}\right)y-5y^2-\frac{3y+5}{2}-5y=26$$

即チ　$$\frac{(3y+5)^2}{2}+\frac{3(3y+5)}{2}y-5y^2-\frac{3y+5}{2}-5y=26$$

分母ヲ除去スレバ

$$(3y+5)^2+3(3y+5)y-10y^2-(3y+5)-10y=52$$

之ヲ簡單ニスレバ　$8y^2+32y-32=0$

即チ　$y^2+4y-4=0$

之ヲ解キテ　$y=2+2\sqrt{2}$ 或ハ $-2-2\sqrt{2}$

之ヲ (3) 式ニ代入スレバ

$y=-2+2\sqrt{2}$ ナルトキハ　$x=\dfrac{(-2+2\sqrt{2})\times 3+5}{2}=\dfrac{6\sqrt{2}-1}{2}$

$y=-2-2\sqrt{2}$ ナルトキハ　$x=\dfrac{(-2-2\sqrt{2})\times 3+5}{2}=\dfrac{-6\sqrt{2}-1}{2}$

83. 第二法 聯立方程式ノ二ツガ共ニ二次式ニシテ一次ノ項ナキ場合ニハ兩方程式ノ各ニ或ル數ヲ乘シテ既知項ヲ等シクシテ之ヲ加ヘ或ハ減ジテ既知項ヲ消去シタル方程式ヲ作リ之ヨリ一ツノ未知數ヲ他ノ未知數ニテ表ハシタル二個ノ方程式ヲ得此各ト原方程式ノ一ツトヨリ第一法ニ由リテ根ヲ求ムルノデアル。

例 $\left.\begin{aligned} x^2+xy-y^2=5 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2x^2-3xy+2y^2=14 \cdots\cdots\cdots (2) \end{aligned}\right\}$ ヲ解ケ

(1) 式ニ 14 ヲ掛ケ (2) 式ニ 5 ヲ掛ケテ減算ヲ行ヘバ

$$\begin{array}{r} 14x^2+14xy-14y^2=70 \\ 10x^2-15xy+10y^2=70 \\ \hline 4x^2+29xy-24y^2=0 \end{array}$$

此左邊ヲ因數ニ分解スレバ $(4x-3y)(x+8y)=0$

故ニ $4x-3y=0$ 或ハ $x+8y=0$

即チ $x=\frac{3}{4}y$ 或ハ $x=-8y$

之ヲ (1) 式ニ代入スレバ

$x=\frac{3}{4}y$ ……(3) ヨリ $\left(\frac{3}{4}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2-y^2=5$

即チ $y^2=16$ 故ニ $y=\pm4$

之ヲ (3) 式ニ代入スレバ $y=4$ ナルトキハ $x=3$

$y=-4$ ナルトキハ $x=-3$

次ニ $x=-8y$ ……(4) ヨリ $(-8y)^2-8y^2-y^2=5$

即チ $11y^2=1$ 故ニ $y=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}$

$y=\frac{1}{\sqrt{11}}$ ナルトキハ (4) 式ヨリ $x=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}$

$y=-\frac{1}{\sqrt{11}}$ ナルトキハ $x=\frac{8}{\sqrt{11}}$

由リテ求ムル根ハ

$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-3 \\ y=-4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=\frac{8}{\sqrt{11}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{11}} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-\frac{8}{\sqrt{11}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{11}} \end{array}\right\}$

84. 第三法 二ツノ聯立方程式ノ各ニ於テ二ツノ未知數ヲ互

ニ入レ換フルモ其式ガ變化セザル場合ニハ先ヅ兩未知數ノ和及積ヲ求ムルノデアル。

例一. $\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ xy=12 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

今兩未知數ノ和7ノ符號ヲ變ジタルモノヲ未知數ノ一次ノ係數トシ積 12 ヲ既知項トシ二次ノ係數ヲ 1 トセル二次方程式ヲ作レバ

$$X^2-7X+12=0$$

ヲ得。然ルトキハ第二節ニ由リ此新方程式ノ二根ノ和ハ 7 ニテ其積ハ 12 デアル。然ルニ x 及 y ノ和モ 7 ニテ其積モ 12 デアル。由リテ此新方程式ノ二根ガ x 及 y ノ殖デアル。値

此新方程式ヲ解ケバ X=3 或ハ 4

由リテ原方程式ノ根ハ $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y=4 \\ y=3 \end{array}\right\}$

此聯立方程式ニ第一法ニ由リテモ解クコトヲ得レドモ此場合ニハ上ノ方法ガ最モ簡單デアル。

例二. $\left.\begin{array}{r} x^2-x^2y^2+y^2=19 \text{ ………… (1)} \\ x-xy+y=4 \text{ ………… (2)} \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

(2) 式ヨリ $x+y=4+xy$ ………… (3)

兩邊ヲ平方スレバ $x^2+2xy+y^2=16+8xy+x^2y^2$

即チ $x^2+y^2=x^2y^2+6xy+16$

之ヲ (1) 式ニ代入スレバ

$$x^2y^2+6xy+16-x^2y^2=19$$

即チ　$6xy=3$　$xy=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

之ヲ(3)式ニ代入スレバ　$x+y=\frac{9}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(4)及(5)ヨリ　$X^2-\frac{9}{2}X+\frac{1}{2}=0$

即チ　$2X^2-9X+1=0$

ナル新方程式ヲ解ケバ　$X=\frac{1}{4}(9\pm\sqrt{73})$

故ニ求ムル根ハ

$$\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}(9+\sqrt{73})\\ y=\frac{1}{4}(9-\sqrt{73})\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}(9-\sqrt{73})\\ y=\frac{1}{4}(9+\sqrt{73})\end{array}\right\}$$

例三　$\left.\begin{array}{l}x^4+y^4=272\cdots\cdots(1)\\ x+y=6\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$ ヲ解ケ

今 $x=3+a$ トスレバ (2)式ヨリ　$y=3-a\cdots\cdots\cdots(3)$

之ヲ(1)式ニ代入スレバ　$(3+a)^4+(3-a)^4=272$

即チ　$81+108a+54a^2+12a^3+a^4+81-108a+54a^2-12a^3+a^4=272$

即チ　$2a^4+108a^2-110=0$

2ニテ兩邊ヲ除スレバ　$a^4+54a^2-55=0$

之ヲ80條例一ノ如クシテ解クトキハ　$a=\pm1,\quad\pm\sqrt{-55}$

$a=1$ トスレバ(3)式ヨリ　$x=4,\ y=3$

$a=-1$ トスレバ　$x=3,\ y=4$

$a=\sqrt{-55}$ トスレバ　$x=3+\sqrt{-55},\ y=3-\sqrt{-55}$

$a=-\sqrt{-55}$ トスレバ　$x=3-\sqrt{-55},\ y=3+\sqrt{-55}$

由リテ求ムル根ハ

$$\left.\begin{array}{l}x=4\\ y=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=3\\ y=4\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=3+\sqrt{-55}\\ y=3-\sqrt{-55}\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=3-\sqrt{-55}\\ y=3+\sqrt{-55}\end{array}\right\}$$

85. 三ツノ未知數ヲ含ム聯立方程式ノ解法　ハ一般ニハ求ムルコトハデキヌ。次ニ特別ナル形ノ解法ノ例ヲ一二示サン。

例一．　$\left.\begin{array}{l}xy=6\cdots\cdots\cdots(1)\\ yz=10\cdots\cdots\cdots(2)\\ zx=15\cdots\cdots\cdots(3)\end{array}\right\}$ ヲ解ケ

此三式ヲ掛ケ合ハスレバ　$x^2y^2z^2=900$

即チ　$xyz=30$ 或ハ -30

$xyz=30$ ヲ(2)式ニテ割レバ　$x=3$

(3)式ニテ割レバ　$y=2$

(1)式ニテ割レバ　$z=5$

又 $xyz=-30$ ヲ(2), (3), (1)式ニテ順次ニ割レバ

$$x=-3,\quad y=-2,\quad z=-5$$

故ニ求ムル根ハ　$\left.\begin{array}{l}x=3\\ y=2\\ z=5\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}x=-3\\ y=-2\\ z=-5\end{array}\right\}$

例二，　$\left.\begin{array}{l}yz=1+y+z\\ zx=2+z+x\\ xy=5+x+y\end{array}\right\}$ ヲ解ケ

各式ノ項ヲ移シテ兩邊ニ同數ヲ加フレバ

$$\left.\begin{array}{l} yz-y-z+1=2 \\ zx-z-x+1=3 \\ xy-x-y+1=6 \end{array}\right\} \quad \text{即チ} \quad \left.\begin{array}{l} (y-1)(z-1)=2 \\ (z-1)(x-1)=3 \\ (x-1)(y-1)=6 \end{array}\right\}$$

前例ト同様ニ三式ヲ乘ジテ平方ニ開ケバ

$$(x-1)(y-1)(z-1)=\pm 6$$

之ヲ順次各式ニテ除スレバ

$$x-1=\pm 3, \quad y-1=\pm 2, \quad z-1=\pm 1$$

由リテ求ムル根ハ

$$\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=3 \\ z=2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-1 \\ z=0 \end{array}\right\}$$

問 題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ

(1) $\left.\begin{array}{l} 5x+7y=1 \\ 4x^2+3xy-2y^2=10 \end{array}\right\}$

(2) $\left.\begin{array}{l} xy+2x=5 \\ 2xy-y=3 \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array}\right.$

(3) $\left.\begin{array}{l} x+y=a+b \\ \dfrac{a}{x+b}+\dfrac{b}{y+a}=1 \end{array}\right\}$

(4) $\left.\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=3 \\ x^2-2xy+4y^2=4 \end{array}\right\}$

(5) $\left.\begin{array}{l} x^2-xy=(a-b)^2 \\ xy+y^2=4ab \end{array}\right\}$

(6) $\left.\begin{array}{l} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{array}\right\}$

(7) $\left.\begin{array}{l} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{array}\right\}$

(8) $\left.\begin{array}{l} x^5-y^5=242 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$

(9) $\left.\begin{array}{l} x(x+y+z)=6 \\ y(x+y+z)=12 \\ z(x+y+z)=\cancel{}18 \end{array}\right\}$

誤18

(10) $\left.\begin{array}{l} (x\pm y)(x+z)=a^2 \\ (y+z)(y+x)=b^2 \\ (z+x)(z+y)=c^2 \end{array}\right\}$

第五節　應用問題

86. 二次方程式ノ應用問題 二次方程式に由リテ解キ得ル問題ノ例一二ヲ次ニ示サン。

例一，大小二數アリ其和ハ 100 ニシテ其積ハ大數ノ十倍ヨリ 1800 多シ之ノ二數ヲ求ム。

大數ヲ x トスレバ小數ハ $100-x$ デアル。故ニ

$$x(100-x)-10x=1800$$

即チ $\qquad x^2-90x+1800=0$

之ヲ解キテ $\qquad x=60$ 或ハ 30

$x=60$ ナルトキ小數ハ $100-60$ 即チ 40 デアル。

又 $x=30$ トスレバ小數ハ $100-30$ 即チ 70 トナリテ反テ 30 ヨリ大トナリテ不合理デアル。

故ニ求ムル二數ハ　　大數 60,　　小數 40

デアル。

例二，二位ノ數アリ十位ノ數字ハ一位ノ數字ヨリ 2 ダケ大ナリ此數ニ兩數字ノ和ヲ乘ズレバ 900 トナルト云フ此數ヲ求ム。

各式ノ項ヲ移シテ兩邊ニ同數ヲ加フレバ

$$\left.\begin{aligned} yz-y-z+1&=2\\ zx-z-x+1&=3\\ xy-x-y+1&=6 \end{aligned}\right\}\quad 即チ\quad \left.\begin{aligned} (y-1)(z-1)&=2\\ (z-1)(x-1)&=3\\ (x-1)(y-1)&=6 \end{aligned}\right\}$$

前例ト同樣ニ三式ヲ乘シテ平方ニ開ケバ

$$(x-1)(y-1)(z-1)=\pm 6$$

之ヲ順次各式ニテ除スレバ

$$x-1=\pm 3,\qquad y-1=\pm 2,\qquad z-1=\pm 1$$

由リテ求ムル根ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=4\\ y&=3\\ z&=2 \end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} x&=-2\\ y&=-1\\ z&=0 \end{aligned}\right\},$$

問　　題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ

(1) $\left.\begin{aligned} 5x+7y&=1\\ 4x^2+3xy-2y^2&=10 \end{aligned}\right\}$　　(2) $\left.\begin{aligned} xy+2x&=5\\ 2xy-y&=3 \end{aligned}\right\}$ $\left\{\begin{aligned} x&=\tfrac{5}{4}\\ y&=2 \end{aligned}\right.$ $\left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=3 \end{aligned}\right.$

(3) $\left.\begin{aligned} x+y&=a+b\\ \frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}&=1 \end{aligned}\right\}$　　(4) $\left.\begin{aligned} x^2-xy+y^2&=3\\ x^2-2xy+4y^2&=4 \end{aligned}\right\}$

(5) $\left.\begin{aligned} x^2-xy&=(a-b)^2\\ xy+y^2&=4ab \end{aligned}\right\}$　　(6) $\left.\begin{aligned} xy(x+y)&=30\\ x^3+y^3&=35 \end{aligned}\right\}$

(7) $\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=35\\ x+y&=5 \end{aligned}\right\}$　　(8) $\left.\begin{aligned} x^5-y^5&=242\\ x-y&=2 \end{aligned}\right\}$

(9) $\left.\begin{aligned} x(x+y+z)&=6\\ y(x+y+z)&=12\\ z(x+y+z)&=18 \end{aligned}\right\}$　　(10) $\left.\begin{aligned} (x+y)(x+z)&=a^2\\ (y+z)(y+x)&=b^2\\ (z+x)(z+y)&=c^2 \end{aligned}\right\}$

誤ナリ。

第五節　應用問題

86. 二次方程式ノ應用問題　二次方程式ニ由リテ解キ得ル問題ノ例一二ヲ次ニ示サン。

例一，大小二數アリ其和ハ 100 ニシテ其積ハ大數ノ十倍ヨリ 1800 多シト之ノ二數ヲ求ム。

大數ヲ x トスレバ小數ハ $100-x$ デアル。故ニ

$$x(100-x)-10x=1800$$

即チ　　$x^2-90x+1800=0$

之ヲ解キテ　　$x=60$ 或ハ 30

$x=60$ ナルトキ小數ハ $100-60$ 即チ 40 デアル。

又 $x=30$ トスレバ小數ハ $100-30$ 即チ 70 トナリテ反テ 30 ヨリ大トナリテ不合理デアル。

故ニ求ムル二數ハ　　大數 60,　　小數 40

デアル。

例二，二位ノ數アリ十位ノ數字ハ一位ノ數字ヨリ 2 ダケ大ナリ此數ニ兩數字ノ和ヲ乘ズレバ 900 トナルト云フ此數ヲ求ム。

十位ノ數字ヲ x, 一位ノ數字ヲ y トスレバ此數ハ $10x+y$ ニテ次ノ方程式ヲ得。

$$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ (10x+y)(x+y)=900 \cdots\cdots (2) \end{array}\right\}$$

(1) 式ヨリ　$y=x-2 \cdots\cdots (3)$　之ヲ (2) 式ニ代入スレバ

$$(10x+x-2)(x+x-2)=900$$

即チ　$22x^2-26x-896=0$

兩邊ヲ 2 ニテ除セバ　$11x^2-13x-448=0$

之ヲ解キテ　$x=7$ 或ハ $-\frac{64}{11}$

然ルニ x ハ數ヲ組立ツル數字ナルユヱ $-\frac{64}{11}$ ノ如ク負數ナルコトハデキヌ。

$x=7$ ヲ (3) 式ニ代入スレバ　$y=5$

由リテ求ムル數ハ 75 デアル。

例三 或ル集會ノ費用六十八圓四十錢ニシテ之ヲ會員ニ等分シテ割リ當テシニ其中三人ハ會費ヲ出サヾリシユヱ殘リノ人數ニテ負擔セシニ各六錢ヅツ多ク出セリト云フ此會ノ人數ヲ問フ。

人數ヲ x トシ各人ニ割リ當テタル會費ヲ y 錢トスレバ

$$\left.\begin{array}{l} xy=6840 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ (x-3)(y+6)=6840 \cdots\cdots (2) \end{array}\right\}$$

(2) 式ヨリ　$xy+6x-3y=6858 \cdots\cdots (3)$

(3) 式ヨリ (1) 式ヲ減ズレバ $6x-3y=18$ 即チ $2x-y=6$

之ヨリ　$y=2x-6 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

之ヲ (1) 式ニ代入スレバ　$x(2x-6)=6840$

即チ　$2x^2-6x-6840=0$ 或ハ $x^2-3x-3420=0$

之ヲ解キテ　$x=60$ 或ハ -57

然ルニ x ハ人數ニ負ナルコトハデキヌユヱ　$x=60$

即チ求ムル人數ハ六十人デアル。

問題

(1) 大小二整數アリ其和ハ32ニシテ其積ハ252ナリ各數ヲ求ム。

(2) 或ル人東地ヲ出發シ西地ニ行クニ其步ミタル數ノ三倍ハ其平方ヨリ 18 少ナシト云フ步ミシ里數ヲ求ム。

(3) 45 ヲ二分シ其平方ノ和ヲシテ 1025 ニ等シカラシメヨ。

(4) 矩形アリ長邊ヨリ九寸ヲ減ジ短邊ニ一尺二寸ヲ増ストキハ其面積變セズ又長邊ヨリ六寸ヲ減ジ短邊ヨリ三寸ヲ減ズレバ其面積元トノ半トナルト云フ各邊ノ長サヲ求ム。

(5) 鷄卵アリ其價騰貴シテ八十錢ニツキ二個ヲ減ズレバ鷄卵十二個ニツキ二錢ヲ増スト云フ鷄卵十二個ノ價ヲ求ム。

(6) 甲乙兩滊車同時ニ同所ヲ發シ百四十四里隔レル某地ニ行クニ甲ハ乙ヨリ毎時間一里ヅツ少ナク進ミタルヲ以テ乙ヨリモ二時間遲ク到着セリト云フ兩滊車ノ速サヲ求ム。

(7) 甲一人ニテ或ル仕事ヲ成スニ要スル日數ハ乙一人ニテ同ジ仕事ヲ成スニ要スル日數ヨリ四日少ナシ今或ル仕事ヲ甲一人ガ二十一日間就業シ殘業ヲ乙一人ニテ八日間ニ完セリト云フ各一人ニテ此

仕事ヲ成スニハ幾月ヲ要スルカ。

(8) 100 里ヲ隔レル二停車場アリ甲乙ノ二列車ガ同時ニ兩停車場ヲ發シ一時十五分ノ後兩車相會セリ而シテ甲車ハ乙車ヨリ一時二十分早ク先地ニ達セリト云フ各一時間ノ速サ幾何

(9) 林檎二十個ノ價ノ錢ハ七十五錢ニテ買ヒ得ベキ林檎ノ數ノ三倍ヨリ十五少ナシト云フ林檎一個ノ價幾何

(10) 甲乙二人二哩ノ競走ヲナセシニ第一回ニ於テハ乙甲ヨリ二分時勝チ第二回ニハ甲毎時ノ速度ヲ二哩ニ增シ乙ハ二哩減ジタルタメ甲ハ乙ヨリ二分時勝テリト云ヲ兩人ノ速度幾何ナルカ。

第七章 冪根及指數定義ノ擴張

第一節 冪

87. 同數ノ冪ノ積 m 及 n ヲ正整數トスレバ

$$a^m = a\times a\times a\times \cdots\cdots (m \text{個})$$

$$a^n = a\times a\times a\times \cdots\cdots (n \text{個})$$

故ニ

$$a^m \times a^n = a\times a\times a\times \cdots (m \text{個}) \times a\times a\times a\times \cdots (n \text{個})$$

$$= a\times a\times a\times \quad (m+n \text{個})$$

$$= a^{m+n}$$

同樣ニ

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n}\times a^p = a^{m+n+p}$$

斯クテ

同數ノ冪ノ積ハ又同數ノ冪ニシテ其ノ指數ハ各因數ノ指數ノ和ニ等シ。

88. 同數ノ冪ノ商 前條ニ由リ

$$a^{m-n}\times a^n = a^{m-n+n} = a^m \quad \text{但} \ m>n \text{トス}$$

故ニ

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

斯クテ

或ル數ノ冪ヲ同數ノ他ノ冪ニテ除シタル商ハ又同數ノ冪ニシテ其指數ハ被除數ノ冪指數ヨリ除數ノ指數ヲ減ジタルモノニ等シ。

89. 冪ノ冪 m 及 n ヲ正整數トスレバ

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots n \text{ 因數}$$

87 條ニ由リ $= a^{m+m+\cdots+n\text{個}} = a^{mn}$

斯クテ

或數ノ冪ノ冪ハ兩指數ノ積ヲ指數トセル同數ノ冪ニ等シ。

之ニ由リ $(a^m)^n = a^{mn}, \quad (a^n)^m = a^{mn}$

ナルヲ以テ

或ル數ノ冪ノ冪ハ其指數ヲ入レ換フルモ其値ヲ變ゼズ。

90. 積ノ冪 m ヲ正整數トスレバ

$$(ab)^m = ab \times ab \times ab \times \cdots\cdots m \text{ 因數}$$

$$= (a \times a \times a \times \cdots\cdots m \text{ 因數}) \times (b \times b \times b \times \cdots\cdots m \text{ 因數})$$

$$= a^m \times a^n = a^m b^m$$

同様ニ $(abc)^m = \{(ab)c\}^m = (ab)^m c^m = a^m b^m c^m$

斯クテ

若干ノ數ノ積ノ冪ハ各因數ノ冪ノ積ニ等シ。

91. 商ノ冪 m ヲ正整數トスレバ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots\cdots m \text{ 因數}$$

$$= \frac{a \times a \times a \times \cdots\cdots m \text{ 因數}}{b \times b \times b \times \cdots\cdots m \text{ 因數}} = \frac{a^m}{b^m}$$

斯クテ

商ノ冪ハ被除數ノ冪ヲ除數ノ冪ニテ除シタル商ニ等シ。

92. 負數ノ冪 m ヲ正整數トスレバ

$$(-a)^{2m} = \{(-a)^2\}^m = (a^2)^m = a^{2m}$$

$$(-a)^{2m+1} = (-a)^{2m}(-a) = a^{2m} \times (-a) = -a^{2m+1}$$

斯クテ

負數ノ冪ハ其指數ガ偶數ナルトキハ正ニシテ奇數ナルトキハ負ナリ。

問　題

次式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $(x^3)^5$　　(2) $(-3a^2b)^3$　　(3) $\left(\frac{4a^2b}{3cd^2}\right)^2$

(4) $(-a^2)^3(-2a^3)^4(3a)^5$　　(5) $(-a)^{2m} \times (-b)^{2m+1}$

第二節　開　方

93. 根指數 一般ニ n 乘シタルモノガ a ニ等シキ數 a ノ m 乘根ト云ヒ之ヲ $\sqrt[n]{a}$ ニテ表ハシ根號内ノ n ヲ**根指數**ト云フ。

$x = \sqrt[n]{a}$ ハ $x^n = a$ ニテ此方程式ヲ解クノデアルカラ或ル數ノ平方根ハ二ツ立方根ハ三ツ，四乘根ハ四ツアル。即チ根指數ダケ根ガアル。然シ其中正ニテ實數ナルモノヲ $\sqrt[n]{a}$ ニテ表ハスモノト規約ヲ定メン。

94. 積ノ m 乘根 第 90 條ニ由リ

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2(\sqrt{c})^2 = abc$$

故ニ $\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$

又 $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n(\sqrt[n]{c})^n = abc$

故ニ $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$

斯クテ

積ノ n 乘根ハ各因數ノ n 乘根ノ積ニ等シ

95. 商ノ n 乘根 第91條ニ由リ

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}\quad 故ニ\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

斯クテ

商ノ n 乘根ハ除數及被除數ノ n 乘根ニ等シ。

96. 單項式ノ n 乘根 第89條ニ由リ

$$(a^pb^q)^n=(a^p)^n(b^q)^n=a^{pn}b^{qn}$$

故ニ $$\sqrt[n]{a^{pn}b^{qn}}=a^pb^q$$

斯クテ

單項式ノ n 乘根ハ各因數ノ指數ヲ n ニテ除シタルモノニ等シ。

例 $\sqrt[4]{16a^4b^8c^{12}}=\sqrt[4]{16}a^{\frac{4}{4}}b^{\frac{8}{4}}c^{\frac{12}{4}}=2ab^2c^3$

97. 多項式ノ開平 今 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ニテ $a^2+2ab+b^2$ ノ平方根ハ $a+b$ デアル。

今 $a^2+2ab+b^2$ ノ平方根ヲ求ムル運算ノ順序ヲ考フレバ先ヅ第一項 a^2 ノ平方根ガ求ムル平方根ノ第一項ニ當ル。其平方 a^2 ヲ與ヘラレタル式ヨリ減ズレバ殘リハ $2ab+b^2$ デアル。

$$\begin{array}{r|l} & a^2+2ab+b^2 \quad \big|\; a+b \\ & a^2 \\ \hline 2a+b & 2ab+b^2 \\ b & 2ab+b^2 \\ \hline \end{array}$$

此殘ノ第一項 $2ab$ ハ求ムル平方根ノ第一項ノ二倍ト第二項 b トノ積ニ等シキユエ殘リノ第一項ヲ求ムル平方根ノ第一項ノ二倍ニテ割レバ第二項ヲ得。

此第二項 b ヲ第一項ノ二倍 $2a$ ニ加ヘテ其和ニ第二項 b ヲ掛ケテ前ノ殘リヨリ減ズレバ殘リナシ。即チ $a+b$ ガ求ムル根デアル。

此運算ノ理ニ由リ多項式ノ平方根ヲ求ムルコトヲ得

例 $$\sqrt{4x^4-12ax^3+25a^2x^2-24a^3x+16a^4}=2x^2-3ax+4a^2$$

$$\begin{array}{rr} & 4x^4 \\ \hline 4x^2-3ax & -12ax^3+25a^2x^2 \\ -3ax & -12ax^3+9a^2x^2 \\ \hline 4x^2-6ax+4a^2 & 16a^2x^2-24a^3x+16a^4 \\ 4a^2 & 16a^2x^2-24a^3x+16a^4 \\ \hline \end{array}$$

根ノ第一項ハ與ヘラレタル式ノ第一項 $4x^4$ ノ平方根 $2x^2$ デアル。$2x^2$ ノ平方 $4x^4$ ヲ與ヘラレタル式ヨリ減ジタル殘 $-12ax^3+25a^2x^2-24a^3x+16a^4$ ノ第一項 $-12ax^3$ ヲ根ノ第一項 $2x^2$ ノ二倍 $4x^2$ ニテ割リテ得タル商 $-3ax$ ヲ根ノ第二項トシ $4x^2$ ニ $-3ax$ ヲ加ヘタル $4x^2-3ax$ ニ $-3ax$ ヲ掛ケテ此積ヲ $-12ax^3+25a^2x^2-24a^3x+16a^4$ ヨリ減ジ殘リ $16a^2x^2-24a^3x+16a^4$ ヲ得。

此殘リノ第一項 $16a^2x^2$ ヲ根ノ第一項ノ二倍 $4x^2$ ニテ割リテ得タル商 $4a^2$ ヲ根ノ第三項トシ $2x^2$ ニ $-3ax$ ヲ加ヘタル $2x^2-3ax$ ノ二倍 $4x^2-6ax$ ニ $4a^2$ ヲ加ヘテ之ニ $4a^2$ ヲ掛ケテ此積ヲ殘リヨリ減ズレバ殘リナシ。故ニ $2x^2-3ax+4a^2$ ハ求ムル根デアル。

斯クテ次ノ法則ヲ得。

多項式ノ平方根ヲ求ムルニハ先ヅ之ヲ或文字ノ降羃若クハ昇羃ノ順ニ記シ其最モ高次或ハ最モ低次ナルモノヽ平方根ヲ求ムル平方根ノ第一項トシ其平方ヲ減ジテ殘リノ項ノ第一項ヲ平方根ノ第一項ノ二倍ニテ除シ其商ヲ求ムル平方根ノ第二根トシ第一項ノ二倍ニ之ヲ加ヘタル和ニ得タル第二項ヲ乘ジテ前ノ殘リヨリ減ジ以下同法ヲ繰

返スベシ。

問題

次式ノ平方根ヲ求ム

(1) $4x^4-4x^3+5x^2-2x+1$

(2) $a^6-6ab^5-20a^3b^3+15a^4b^2+15a^2b^4-6a^5b+b^6$

(3) $\frac{25x^2}{y^2}-\frac{20x}{y}+2+\frac{4y}{5x}+\frac{y^2}{25x^2}$

(4) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$

(5) $4x+1+6x^2+x^4+x^3$ ノ四乘根ヲ求ム

第三節　指數定義ノ擴張

98. 指數定義擴張ノ必要 指數ハ凡ベテ正整數トシテ說明シタレドモ斯クテハ不便ナルユヱ指數ガ正整數ノトキ得タル法則ニ適合セシムルタメ分數或ハ負數ナル指數ヲ次ノ如ク定ム。

99. 分數ナル指數 n ガ正整數ナルトキハ指數ノ法則ニ由リ

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\cdots n\text{ 因數}$$

$$=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}\cdots\cdots n\text{項}}$$

$$=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$$

即チ　$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^m$

故ニ　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$

由リテ

指數ガ分數ナルトキハ其分數ノ分母ハ根指數ヲ表ハシ分子ハ羃ノ指數ヲ表ハス。

100. 零ナル指數 m ガ正整數ナルトキハ指數ノ法則ニ由リ

$$a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0$$

然ルニ a^m ヲ a^m ニテ割レバ商ハ 1 ナルユヱ $a^0=1$

由リテ

指數ガ零ナルトキハ其文字ノ値如何ニ係ハラズ 1 ナリ。

101. 負數ナル指數 m 及 n ヲ正整數トスレバ

$$a^n\times a^{-n}=a^{n-n}=a^0=1$$

ナルユヱ　$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

又　$a^{-\frac{m}{n}}=(a^{-\frac{1}{m}})^m=\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}\right)^m=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

由リテ

指數ガ負數ナルトキハ其符號ヲ變ジタルモノヽ逆數ヲ表ハス。

例一　$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}}$ ヲ $a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$ ニテ除セ

$$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}}\div a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}-(-\frac{1}{2})}b^{\frac{4}{5}-\frac{1}{2}}$$

$$=a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{3}{10}}$$

例二　$\{(x^{-2})^{\frac{1}{3}}\}^{-\frac{3}{4}}=x^{-2\times\frac{1}{3}\times(-\frac{3}{4})}=x^{2\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

問　題

次式ヲ簡單ニセヨ

(1) $(16)^{\frac{3}{4}}$　(2) $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$　(3) $(9^{-\frac{1}{2}})^3$

(4) $(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{2}{3}})^{12}$　(5) $\sqrt[6]{x^5\sqrt[3]{x^4}}\times\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^{-3}}}$

(6) $a^b\div a^{-c}$　(7) $(xy)^{x+y}\times x^{-y}y^{-x}$

(8) $x^{-\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{x^{-3}}$ ヲバ正整數ノ指數ニテ表ハセ

(9) $\sqrt{(a^3b^{-2})}\div\sqrt[3]{(a^{-4}b^5)}$ ヲ分指數ニ化シ簡單ニセヨ

(10) a^4+a^2+1 ニ $a^{-4}-a^{-2}+1$ ヲ乘セヨ

(11) $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ ヲ $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$ ニテ除セヨ

(12) $\dfrac{ax^{-1}+a^{-1}x+2}{a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-1}$

第八章　不盡根數

第一節　不盡根數ノ化法

102. 不盡根數　或數ガ丁度開キ切レザルトキハ其根ヲ**不盡根數**ト云フ。例ヘバ $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ ノ如キハ不盡根數デアル。

有理數ハ必要ノ場合ニハ不盡根數ノ形ニテ示スコトヲ得。

例ヘバ　$a=\sqrt{2^2}=\sqrt[3]{a^3}$ 一般ニ　$a=\sqrt[n]{a^n}$

$5=\sqrt[4]{5^4}=\sqrt[6]{5^6}$

次ニ第 94 條ニ由リ　$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$

ナルヲ以テ根號內ニ在ル數ノ因數ノ中開キ得ベキモノハ根ヲ求メテ之ヲ其根號ノ外ニ出スコトヲ得又不盡根數ノ根號ノ前ニ在ル數ヲ1トナスコトヲ得。

例一　$\sqrt{56}=\sqrt{4\times14}=\sqrt{4}+\sqrt{14}=2\sqrt{14}$

例二　$\sqrt[3]{135}=\sqrt[3]{27\times5}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{5}=3\sqrt[3]{5}$

例三　$4\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4^3}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4^3\times2}=\sqrt[3]{128}$

又第 95 條ニ由リ　$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

ナルヲ以テ根號內ニ在ル分數ノ分母ヲ有理數トナスコトヲ得。

例　$\sqrt{\dfrac{13}{18}}=\sqrt{\dfrac{13\times2}{18\times2}}=\dfrac{\sqrt{13\times2}}{\sqrt{18\times2}}=\dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{36}}=\dfrac{\sqrt{26}}{6}$

$\sqrt[3]{\dfrac{9}{16}}=\sqrt[3]{\dfrac{9\times4}{16+4}}=\dfrac{\sqrt[3]{9\times4}}{\sqrt[3]{16\times4}}=\dfrac{\sqrt[3]{36}}{4}$

不盡根數ト有理數トノ積ニ於テ有理數ノ因數ヲ不盡根數ノ係數ト云フ。

103. 根指數ノ變化

$$(\sqrt[mn]{a})^{mn}=\{(\sqrt[mn]{a})^{m}\}^{n}=a^{n}$$

ナルユエ
$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$$

之ニ由リテ異ナリタル根指數ヲ有スル不盡根數ヲ同ジ根指數ヲ有スルモノニ變ジ或ハ根指數ヲ簡單ナルモノトナスコトヲ得ルノデアル

例一　$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{5}$ ノ根指數ヲ同ジカラシメヨ

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{4}\,,\qquad \sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}$$

各根指數ノ最小公倍數ヲ以テ此同一ナル根指數トナスベキノデアル

例二　$\sqrt[4]{5}$ ト $\sqrt[6]{11}$ ト何ヅレガ大ナルカ

先ヅ兩數ノ根指數ヲ同ジカラシムルニ根指數及ノ最小公倍數ハ 12 ナルユエ根指數 12 ナルモノニ變ズレバ

$$\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$$

$$\sqrt[6]{11}=\sqrt[12]{11^2}=\sqrt[12]{121}$$

明カニ 125 ハ 121 ヨリ大ナルユエ $\sqrt[4]{5}$ ハ $\sqrt[6]{11}$ ヨリ大デアル。

例三　$\sqrt[12]{8}$ ヲ簡單ニセヨ

$$\sqrt[12]{8}=\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[4]{2}$$

問　題

(1)　次ノ各ヲ三次ノ不盡根數ニ變ゼヨ

(a)　3　　(b)　x^2y^3　　(c)　$\dfrac{b^2}{a}$

(2)　次ノ各不盡根數ノ係數ヲ根號ノ內ニ移セヨ

(a)　$4\sqrt{7}$　　(b)　$3\sqrt[3]{6}$　　(c)　$x\sqrt[n]{axy^4}$

(3)　$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{6}$ ヲ同次ノ不盡根數ニ化セ

(4)　$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$ ヲ大小ノ順ニ列ヨベ

第二節　不盡根數ノ加減乘除

104. 同類不盡根數

$3\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ ノ如ク同ジ不盡根數 $\sqrt{3}$ ヲ因數トセルモノヲ**同類不盡根數**ト云フ

一見スレバ同類不盡根數ナラザルガ如キモノニデモ之ヲ簡單ニナストキ往々同類ノモノトナルコトアルユエ前條ニ由リ必ズ根號內ノ數ヲ簡單トナスベキモノデアル。

例ヘバ $3\sqrt{12}$ ト $7\sqrt{3}$ トヲ比較スルニ

$$3\sqrt{12}=3\sqrt{4\times3}=3\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

トナリテ $7\sqrt{3}$ ト同類不盡根數デアル。

105. 不盡根數ノ加法及減法

不盡根數ハ整數ノ諸法則ニ從フモノト規約セルユエ同類不盡根數ヲ加ヘ或ハ減ズルニハ其係數ノ和及差ヲ係數トナシ其不盡根數ノ部分ハ共通ナル不盡根數ヲ以テスルノデアル。又同類ナラザル不盡根數ヲ加ヘ或ハ減ズルニハ其マヽ或ハ符號ヲ變ジテ列記スルモノデアル。

例一　$4\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, $-3\sqrt{3}$ ヲ加ヘヨ

$$4\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{2}=(4+5-3)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

例二　$7\sqrt[3]{2}$ ヨリ $4\sqrt[3]{2}$ ヲ減ゼ

$$7\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2}=(7-4)\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$$

例三　$2\sqrt[3]{6}$, $3\sqrt{5}$, $-4\sqrt{2}$ ヲ加ヘヨ

$$2\sqrt[3]{6}+3\sqrt{5}-4\sqrt{2}$$

106. 不盡根數ノ乘法及除法 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}$ 及 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ナルニ由リ同ジ根指數ヲ有スル不盡根ノ積或ハ商ハ其根號內ノ數ノ積或ハ商ニ同ジ根指數ヲ有スル根號ヲ冠ラスルノデアル。

例一 $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2\times5}=\sqrt[3]{10}$

例二 $2\sqrt{14}\div\sqrt{2}=2\sqrt{14\div2}=2\sqrt{7}$

例三 $7\sqrt{12}\times(-2\sqrt{27})=-2\times7\sqrt{12\times27}=-14\sqrt{324}$

$$=-14\times18=-252$$

若シ根指數ガ同ジカラザルトキハ一旦根指數ノ同ジキモノニ變化シテ後チ上ノ如ク行フノデアル。

例一 $4\sqrt[3]{2}\times2\sqrt[4]{4}=4\sqrt[12]{2^4}\times2\sqrt[12]{4^3}$

$$=8\sqrt[12]{2^4\times4^3}=8\sqrt[12]{1024}$$

例二 $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3\sqrt[6]{2^3}}{2\sqrt[6]{3^2}}=\frac{3\sqrt[6]{8}}{2\sqrt[6]{9}}=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[6]{9}}=\frac{3}{2}\sqrt[6]{\frac{8}{9}}$

107. 不盡根數ヲ有スル多項式ノ計算 前ニ云ヘル如ク不盡根數ハ整數分數等ノ諸法則ニ從フ規約ナルユエ普通ノ多項式ノ如ク不盡根數ヲ有スル多項式ノ計算ヲナスコトガデキル。

例一 $3\sqrt{2}+7\sqrt{3}$ ニ $5\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ ヲ乘ゼヨ

$$(3\sqrt{2}+7\sqrt{3})\times(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})=(3\sqrt{2}+7\sqrt{3})\times5\sqrt{2}$$

$$-(3\sqrt{2}+7\sqrt{3})\times2\sqrt{3}$$

$$=3\sqrt{2}\times5\sqrt{2}+7\sqrt{3}\times5\sqrt{2}-3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}-7\sqrt{3}\times2\sqrt{3}$$

$$=30+35\sqrt{6}-6\sqrt{6}-42=29\sqrt{6}-12$$

例二 $x-y$ ヲ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ニテ除セ

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\ )\ x-y\ (\sqrt{x}-\sqrt{y}$$
$$x+\sqrt{xy}$$
$$-\sqrt{xy}-y$$
$$-\sqrt{xy}-y$$

故ニ $(x-y)\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

108. 分母ノ有理化 公式ニ由リ

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$$

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a+b$$

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$$

ナルユエ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ヲ有理化スルニハ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ヲ掛ケ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ヲ有理化スルニハ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ヲ掛ケ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ ヲ有理スルニハ $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ ヲ掛ケレバヨシ

例一 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}-4}$ ノ分母ヲ有理化セヨ

$$\frac{3}{3\sqrt{2}-4}=\frac{3(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}=\frac{9\sqrt{2}+12}{(3\sqrt{2})^2-4^2}$$

$$=\frac{9\sqrt{2}+12}{18-16}=\frac{9\sqrt{2}+12}{2}$$

例二 $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1}$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{4+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-2)}{2(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2(6-4)}$$

$$=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

例三 $$\frac{2}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}=\frac{2\{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2\}}{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3})\{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2\}}$$

$$=\frac{2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{2})^3-(\sqrt[3]{3})^3}=\frac{2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}{2-3}$$

$$=-2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})$$

問　題

(1) $3\sqrt{12}-\sqrt{27}+2\sqrt{75}$ ヲ簡單ニセヨ

(2) $\sqrt[4]{32ab}+\sqrt[4]{162ab^5}-\sqrt[4]{512a^5b}$ ヲ簡單ニセヨ

(3) $1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ニ $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ヲ乘ゼヨ

(4) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ ニ $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ヲ乘ゼヨ

(5) $5\sqrt[3]{6a^2}\div3\sqrt{5a^2}$ ヲ求メ

(6) x^4+1 ヲ $x^2-x\sqrt{2}+1$ ニテ除セ

(7) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ノ分母ヲ有理化セヨ

(8) $\frac{2}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ 分母ヲ有理化セヨ

(9) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$ ヲ簡單ニセヨ

(10) $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$ ヲ小數第三位マデ求ム

第三節 不盡根數ノ開方

109. 定理 $\sqrt{b}$, $\sqrt{d}$ ガ不盡根數ナルトキ $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ ナレバ $a=c$, $b=d$ ナリ。

何トナレバ　$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$

ヨリ　$a-c+\sqrt{b}=\sqrt{d}$

兩邊ヲ平方スレバ　$(a-b)^2+2(a-c)\sqrt{d}+b=d$

故ニ　$2(a-c)\sqrt{b}=d-b-(a\ \ c)^2$

之ニ由リテ $a=c$ ナラザルトキハ左邊ノ不盡根數ガ右邊ノ有理數ニ等シト云フ不合理ナル結果ヲ得。故ニ $a=c$ ナラザルベナラヌ從テ $b=d$ デアル。

110. 有理數ト二次ノ不盡根數トヨリ成ル二項式ノ開平 上ノ定理ニ由リ有理數ト根號指數ガ 2 ナル不盡根數トヨリ成ル二項式ノ平方根ヲ求ムルコトガデキル。

例ヘハ $a+\sqrt{b}$ ノ平方根ヲ求ムルニ

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

トスレバ兩邊ヲ平方スレバ　$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$

上ノ定理ニ由リ　$a=x+y$,　$\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$

即チ　$x+y=a$,　$4xy=b$

之ニ由リ　$(x+y)^2-4xy=a^2-b$

即チ　$(x-y)^2=a^2-b$　　$x-y=\pm\sqrt{a^2-b}$

此式ト $x+y=a$ ナル式トヨリ

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},\quad y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$$

或ハ　$$x=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2},\quad y=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$$

由リテ　$$\sqrt{a+\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

若シ $\sqrt{a^2-b}$ ガ開ケザルトキハ反テ前ヨリ復雜スルユエ上法ヲ行ハズ其マヽノ方ガヨシ。

例一 $6+2\sqrt{5}$ ノ平方根ヲ求ム

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

トシ兩邊ヲ平方スレバ $6+2\sqrt{5}=x+y+2\sqrt{xy}$

故ニ $x+y=6,\quad 2\sqrt{xy}=2\sqrt{5}$

即チ $x+y=6,\quad xy=5$

之ヲ解キテ $x=5,\quad y=1$

故ニ $\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{5}+\sqrt{1}=\sqrt{5}+1$

例二 $4-\sqrt{15}$ ノ平方根ヲ求ム

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

トシ兩邊ヲ平方スレバ $4-\sqrt{15}=x+y-2\sqrt{xy}$

故ニ $x+y=4,\quad 2\sqrt{xy}=\sqrt{15}$

即チ $x+y=4,\quad 4xy=15$

或ハ $x+y=4,\quad xy=\frac{15}{4}$

今 $z^2-4z+\frac{15}{4}=0$

即チ $4z^2-16z+15=0$

ナル方程式ヲ作レバ此二根ガ即チ x 及 y デアル。

之ヲ因數ニ分テハ $(2z-3)(2z-5)=0$

故ニ $2z-3=0$ 或ハ $2z-5=0$

即チ $z=\frac{5}{2}$, 或ハ $z=\frac{5}{2}$

然ルニ普通根號ノ前ハ正トナスユエ x ヲ y ヨリ大トセネバナラヌ

故ニ $x=\frac{5}{2},\quad y=\frac{3}{2}$

由リテ $\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$$

問題

次ノ各式ノ平方根ヲ求ム

(1) $7+4\sqrt{3}$ (2) $16-6\sqrt{7}$ (3) $2+\sqrt{3}$

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ

(4) $\frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(3-2\sqrt{2})}}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{(5+\sqrt{24})}}$

(6) $\frac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}-\frac{1}{\sqrt{(8-\sqrt{60})}}-\frac{2}{\sqrt{(10+\sqrt{84})}}=0$ ナルコトヲ證セ

第九章　比及比例

第一節　比

111. 比　同種ノ二量アリテ第一數量ガ第二數量ノ幾倍或ハ幾分ノ幾ツニ當ルカヲ表ハス關係ヲ第一數量ノ第二數量ニ於ケル**比**トイフ

即チ両數量ヲ a, b トスレバ b ニ何ヲ乘ズレバ a トナルカヲ表ハス數ガ a ノ b ニ於ケル比ニシテ之ヲ表ハスニ $a:b$ ト記ス。

$a:b$ ニ於テ a 及 b ヲ比ノ項ト云ヒ a ヲ前項, b ヲ後項ト云フ。

上ノ定義ニ由リ $a:b$ ナル比ノ値ハ $\frac{a}{b}$ 等等シクアル。由リテ比ハ分數ト同樣ニ取扱フコトヲ得。

112. 定理　比ノ兩項ニ同數ヲ乘ズルモ或ハ比ノ兩項ヲ同數ニテ除スルモ比ノ値ハ變ズルコトナシ。

比 $a:b$ ノ値ハ $\frac{a}{b}$ ニテ分數ノ定理ニ由リ分母子ニ同數ヲ乘ジタル $\frac{ma}{mb}$ ハモトノ分數ニ等シクシテ $ma:mb$, 比ノ値ハ $\frac{ma}{mb}$ ナルユヱ $ma:mb$ ハ $a:b$ ニ等シクアル。

113. 比ノ大小　二ツノ比ノ大小ヲ比較スルニハ其値ヲ表ハス分數ヲ比較スレバヨシ。

例　$2:3$ ト $3:4$ トヲ比較セヨ

$\frac{2}{3}$ ト $\frac{3}{4}$ トヲ比較スルニ

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12},\qquad \frac{3}{4}=\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}$$

ニテ $\frac{9}{12}$ ハ $\frac{8}{12}$ ヨリ大ナルユヱ $3:4$ ハ $2:3$ ヨリ大デアル。

114. 定理　比ノ兩項ガ正ナルトキ兩項ニ正數ヲ加フレバ其値ハ 1 ニ近ヅク。

a, b, x ヲ正ナリトシ $\frac{a}{b}$ ト $\frac{a+x}{b+x}$ トヲ比較スルニ

兩分數ヲ通分スレバ

$$\frac{a}{b}=\frac{a(b+x)}{b(b+x)},\quad \frac{a+x}{b+x}=\frac{b(a+x)}{b+x}$$

而シテ　$a(b+x)=ab+ax$,　$b(a+x)=ab+bx$

ナルユヱ ax, bx ヲ比較スレバヨシ。

今 $a>b$ ナルトキハ $ax>bx$ ニテ　$\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$

即チ $\frac{a}{b}$ ガ 1 ヨリ大ナルトキハ分母子ニ同數 x ヲ加フレバ $\frac{a}{b}$ ヨリモ小トナリテ 1 ニ近ヅク。

次ニ $a<b$ ナルトキハ $ax<bx$ ニテ　$\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$

即チ $\frac{a}{b}$ ガ 1 ヨリ小ナルトキハ分母子ニ同數 x ヲ加フレバ $\frac{a}{b}$ ヨリモ大トナリテ 1 ニ近ヅク。

115. 等比ノ定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$ ナルトキハ

$\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$ ハ此等ノ比ニ等シ。

何トナレバ　$\frac{a}{b}=k$ トスレバ $\frac{c}{d}=k$, $\frac{e}{f}=k$, $\cdots$

ニテ　$a=bk$,　$c=dk$,　$e=fk$,　$\cdots$

由リテ　$a+c+e+\cdots=bk+dk+fk+\cdots$

即チ　$a+c+e+\cdots=(b+d+f+\cdots)k$

$$\therefore\quad \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=k$$

トナルカラデアル。

又　$\sqrt[n]{\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)}$ モ各比ニ等シ。

何トナレバ　$pa^n=pb^nk^n,\quad qc^n=qd^nk^n,\quad re^n=rf^nk^n$

ナルユヱ　$pa^n+qc^n+re^n=pb^nk^n+qd^nk^n+rf^nk^n$

$$=(pb^n+qd^n+rf^n)k^n$$

故ニ　$\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}=k^n$

$$\therefore\quad \sqrt[n]{\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}}=k$$

トナルカラデアル。

116. 複比　若干ノ比ノ前項ノ積ヲ前項トシ後項ノ積ヲ後項トセル比ヲ此等ノ比ノ**複比**ト云フ。

例ヘバ $a:b$, $c:d$ ノ複比ハ $ac:bd$ デアル。

$a^2:b^2$, $a^3:b^3$ ヲ $a:b$ ノ二乘比(或ハ平方比), 三乘比(立方比)ト云フ。

又 $\sqrt{a}:\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}$ ヲ $a:b$ ノ平方根比, 立方根比ト云フ。

甲乙丙ノ比ガ $a:b:c$ ナリトハ甲乙ノ比ガ $a:b$, 乙丙ノ比ガ $b:c$, 甲丙ノ比ガ $a:c$ ニ等シキコトデアル。

問題

(1) 2:3 ノ兩項ニ如何ナル同數ヲ加フレバ 7:8 ノ比ニ等シクナルカ

(2) $\sqrt{2}:2$ ト $\sqrt[3]{2}:\sqrt{2}$ ト孰レガ大ナルカ

(3) $\sqrt[3]{2}:\sqrt{2}$ ハ 1 ヨリ大ナルコトヲ證セ

(4) 二數アリ其比ハ 2:3 ノ比ニ等シク其差ト平方ノ差トノ比ハ 1:25 ニ等シト云フ二數ヲ求ム

(5) 二數ノ和ハ 35 ニシテ二數ノ比ハ 3:4 ニ等シト云フ二數ヲ求ム

(6) 4:9, 15:77, 49:64 ノ複比ヲ求ム

(7) $x:1$ ナル比ガ $8:x$ ナル比ノ二乘比ニ等シト云フ x ヲ求ム

(8) $2x^2+5xy=3y^2$ ナルトキ $x:y$ ノ値ヲ求ム

(9) a, b ハ正ニシテ $a>b$ ナルトキ $a^2-b^2:a^2+b^2$ ハ $a-b:a+b$ ヨリ大ナルコトヲ證セ

第二節　比例

117. 比例　四數量アリ第一數量ノ第二數量ニ於ケル比ガ第三量ノ第四量ニ於ケル比ニ等シキトキハ此等四數ハ**比例**ヲナスト云フ。

例ヘバ $a:b$ ガ $c:d$ ニ等シキトキハ a, b, c, d ハ比例ヲナスノデ

アル。

之ヲ表ハスニ　$a:b=c:d$　或ハ　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ト記シ a 及 d ヲ比例ノ外項ト云ヒ b 及 c ヲ比例ノ內項ト云フ。

118. 連比例 $a,b,c,d,\cdots$ ノ諸數量アリテ $a:b=b:c=c:d=\cdots$ ナルトキハ $a,b,c,d,\cdots$ ハ連比例ヲナスト云フ。

三數ガ**連比例**ヲナストキハ $a:b=b:c$ ノ如クニテ b ヲ a,c ノ**比例中項**ト云ヒ c ヲ a,b ノ第三比例項ト云フ。

119. 定理第一 比例ノ內項ノ積ハ外項ノ積ニ等シ。

例ヘバ　$a:b=c:d$ ナルトキ $bc=ad$ デアル。

何トナレバ　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ナルユヱ此兩邊ニ bd ヲ掛ケレバ　$ad=bc$

トナルカラデアル。

之ニ由リ比例ヲナス四數ノ中一數ガ未知數ナルトキハ之ヲ求ムルコトヲ得。

例ヘバ　$9:16=x:24$ ナルトキ x ヲ求ムルニ

上ノ定理ニ由リ　$16x=9\times24$

故ニ

$$x=\frac{9\times24}{16}=\frac{27}{2}$$

次ニ若シ三數ガ連比例ヲナストキ例ヘバ $a:b=b:c$ ナルトキハ

$$b^2=ac \quad 或ハ \quad b=\sqrt{ac}$$

トナル。

120. 定理第二 $ad=bc$ ナルトキハ $a:b=c:d$ ナリ。

何トナレバ $ad=bc$ ノ兩邊ヲ bd ニテ割レバ　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\therefore \quad a:b=c:d$$

トナルカラデアル。

121. 比例式ノ變化 $a:b=c:d$ ナルトキハ $a+b:a-b=c+d:c-d$ ナリ。

何トナレバ　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ナルユヱ此兩邊ニ 1 ヲ加フレバ

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \quad 即チ \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad (1)$$

故ニ　$a+b:b=c+d:d$

次ニ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ兩邊ヨリ 1 ヲ減ズレバ

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad 即チ \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad (2)$$

故ニ　$a-b:b=c-d:d$

而シテ (1) 及 (2) ヨリ　$\frac{a+b}{b}\div\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}\div\frac{c-d}{d}$

$$\frac{a+b}{b}\times\frac{b}{a-b}=\frac{c+d}{d}\times\frac{d}{c-d} \quad 即チ \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

故ニ　$a+b:a-b=c+d:c-d$

問題

(1) $x+3:x+1=x+7:x+4$ ナルトキ x ヲ求ム

(2) $x^2+x+1:62(x+1)=x^2-x+1:63(x-1)$ ヨリ x ヲ求ム

(3) 三數連比例ヲナスアリ其中項ハ 36 ニシテ他ノ二數ノ和

78ナリト云フ三數ヲ求ム

$a:b=c:d$ ナルトキ次ノ式ヲ證セ

(4) $a\sqrt{c^2+d^2}=c\sqrt{a^2+b^2}$

(5) $a^2+ab+b^2:a^2-ab+b^2=c^2+cd+d^2:c^2-cd+d^2$

(6) $a^2+b^2:ab+bc=ab+bc:b^2+c^2$

(7) a,b,c,d ガ連比例ヲナストキ $a:d=a^3:b^3$ ナルコトヲ證セ

(8) $(a+b)^2$ ト $(a-b)^2$ トノ比例中項ヲ求ム

第十章 級 數

第一節 等差級數

122. 等差級數 若干ノ數アリ各一數ト其前ノ數トノ差ガ常ニ相等シキトキハ此等ノ數ヲ**等差級數**ト云ヒ常ニ相等シキ差ヲ**通差**ト云ヒ最モ初ノ項ヲ**初項**,終ノ項ヲ**末項**ト云フ。

例ヘバ 4, 7, 10, 13, 16 ハ通差ガ 3 ナル等差級數ニテ初項ガ 4, 末項ガ 16 デアル。又 13, 11, 9, 7 ハ通差ガ −2 ナル等差級數ニテ初項ガ 13, 末項ガ 7 デアル。

初項ヲ a, 末項ヲ l, 通差ヲ d, 項數ヲ n ニテ表ハス。

第二項ハ $a+d$

第三項ハ $a+d+d=a+2d$

第四項ハ $a+2d+d=a+3d$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

之ヲ見ルニ d ノ係數ハ項數ヨリ一ツ少ナシ。故ニ末項即チ第 n 項ハ

$$l=a+(n-1)d$$

例一. 15, 12, 9, ⋯⋯ナル等差級數ノ第十項ヲ求ム

$a=15,\ d=-3,\ n=10$ ナルユエ

$$l=15+(10-1)\times(-3)=15-27=-12$$

例二. 第三項 8, 第七項 20 ナル等差級數ノ第九項ヲ求ム

第三項　$a+2d=8$

第七項　$a+6d=20$

此方程式ヲ解キテ　$a=2,\ d=3$

由リテ第九項ハ　$l=2+(9-1)\times 3=26$

123. 級數ノ和

n 項ノ和ヲ S トスレバ

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l$$

反對ノ順序ニ加フレバ

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a$$

此二式ヲ加フレバ（第一項ハ第一項ト，第二項ハ第二項ト，‥‥

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)$$

此右邊ノ $a+l$ ハ n 個アルユエ　$2S=n(a+l)$

故ニ　$S=\frac{n}{2}(a+l)$

前條ノ公式 $l=a+(n-1)d$ ヲ之ニ代入スレバ

$$S=\frac{n}{2}\{a+a+(n-1)d\}$$

$$=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

例一. 6, 9, 12 ‥‥ ナル等差級數ノ初ヨリ十六項ノ和ヲ求ム

$a=6,\ d=3$ ニテ　$S=\frac{16}{2}\{6\times 2+(16-1)\times 18\}$
3

$=8\times 252.=2016$

例二. 3, 7, 11, ‥‥ ナル等差級數ノ何項ヲ取ラバ其和 136 トナルカ

$a=3,\ d=4$ ニテ求ムル項數ヲ n トスレバ

$$136=\frac{n}{2}\{3\times 2+(n-1)\times(4)\}$$

$$=n(1-2n)$$

即チ　$2n^2-n+136=0$

之ヲ解キテ　$n=8$ 或ハ $-\frac{17}{2}$

然ルニ項數ハ負ナルコトモ分數ナルコトモデキヌユエ $n=8$

故ニ求ムル項數ハ S デアル。

124. 等差中項

三數ガ等差級數ヲナストキ其中ノ數ヲ他ノ二數ノ等差中項ト云フ。

二數ノ等差中項ハ二數ノ和ノ半ニ等シ。

例ヘバ a, b, c ガ等差級數ヲナストスレバ b ハ a 及 c ノ等差中項ニテ等差級數ノ定義ニ由リ　$b-a=c-b$

即チ　$2b=a+c$　　故ニ $b=\frac{1}{2}(a+c)$

例　3, 7 ノ等差中項ヲ求ム

$$(3+7)\times\frac{1}{2}=5$$

125. 等差諸中項

若干ノ數ガ等差級數ヲナストキ其兩端ノ數ノ間ニ在ル諸數ヲ此二數ノ等差諸中項ト云フ。

例ヘバ　4, 7, 10, 13, 16 ニ於テ 7, 10, 13 ハ 4, 16 ノ等差諸中項ニアル。

二數ノ間ニ若干ノ等差諸中項ヲ挿入スルコトガデキル。

例ヘバ　$a,\ b$ 間ニ n 個ノ等差諸中項ヲ挿入セントスルニ通差ヲ d トスレバ全體ニテ初項ガ a，末項ガ b，項數ガ $n+2$，通差ガ

d ナル等差級數ガデキル。

故ニ第 $n+2$ 項ハ $a+(n+2-1)d$ 即チ $a+(n+1)d$

ニテ之ガ丁度 b ニ當ルユエ $a+(n-1)d=b$

之ヨリ $d=\frac{b-a}{n+1}$

由リテ挿入スベキ等差諸中項ハ

$$a+\frac{b-a}{n+1},\quad a+2\frac{b-a}{n+1},\quad \cdots\cdots,\quad a+n\frac{b-a}{n+1}$$

デアル

例 4, 19 ノ間ニ四個ノ等差諸中項ヲ挿入セヨ

$d=\frac{b-a}{n+1}$ ヨリ $d=\frac{19-4}{4+1}=3$

故ニ挿入スベキ項ハ $4+3,\ 4+3\times2,\ 4+3\times3,\ 4+3\times4$

即チ 7, 10, 13, 16

問　題

(1) 5, 7, 9, 11,……ノ第七項ヲ求ム

(2) $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{11}{6}$, ノ第十項ヲ求ム

(3) 第三項 8, 第八項 23 ナル等差級數ノ初項及通差ヲ求ム

(4) 2, 6, 10,…… ノ二十項ノ和ヲ求ム

(5) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1,……ノ九項ノ和ヲ求ム

(6) 1, 3, 5, 9,……ナル奇數ノ幾項ノ和モ平方數ニ等シキコトヲ證セ

(7) 3, 4, 5,……ノ幾項ノ和ガ 25 トナルカ

(8) 100 ト 1000 トノ間ニ在ル 6 ノ倍數ノ和ヲ求ム

(9) a, b, c ガ調和級數ヲナストキハ $a:c=a-b:b-c$ ナルコトヲ證セ

(a, b, c ガ調和級數ヲナストハ其逆數ガ $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ガ等差級數ヲナスコトナリ)

第二節　等比級數

126. 等比級數 若干數アリ各一數ト其前ノ數トノ比ガ常ニ相等シキトキハ此等ノ數ヲ**等比級數**ト云ヒ常ニ相等シキ比ヲ**通比**ト云フ。

例ヘバ 3, 6, 12, 24,……ハ通比ガ 2 ナル等比級數デアル。

通比ヲ r ニテ表ハス。

第二項ハ ar

第三項ハ $ar\times r=ar^2$

第四項ハ $ar^2\times r=ar^3$

之ヲ見ルニ r ノ指數ハ項數ヨリ一ツ少ナシ。故ニ末項即チ第 n 項ハ

$$l=ar^{n-1}$$

例 等比級數ノ初項 3 通比 -2 ナルトキ第六項ヲ求ム

$$l=3\times(-2)^{6-1}=3\times(-2)^5$$
$$=-3\times32=-96$$

127. 等比級數ノ和 初メヨリ n 項ノ和ヲ S トスレバ

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$$

兩邊ニ r ヲ乘ズレバ

$$rS=\qquad ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n$$

此二式ヲ減ズレバ　　$S-rS=a-ar^n$

即チ　　$(1-r)S=a(1-r^n)$

故ニ　　$S=a\dfrac{1-r^n}{1-r}$

又ハ之ニ $l=ar^{n-1}$ ヲ置換ヘレバ　　$S=\dfrac{a-lr}{1-r}$

例　$3,-6,12,\cdots\cdots$ ナル等比級數ノ初ヨリ七項ノ和ヲ求ム

$a=3,\ r=-2$ ニテ　　$S=3\times\dfrac{1-(-2)^7}{1-(-2)}=3\times\dfrac{1+128}{1+2}$

$$=3\times\frac{129}{3}=129$$

128. 無限等比級數ノ和　1ヨリ小ナルモノ即チ0.1ノ如キ數ノ冪ヲ作レバ　$(0.1)^2=0.01,\ (0.1)^3=0.001,\ (0.1)^4=0.0001,\cdots\cdots$ ナル如ク $(0.1)^n$ ハ其指數 n ガ大トナルニ從ヒ次第ニ小トナリテ n ガ甚ダ大トナレバ甚ダ小トナリテ殆ド無キモノト見做スコトガデキル故ニ

$$S=a\frac{1-r^n}{1-r}$$

ナル式ニ於テ r ノ絶對値ガ1ヨリ小ナルトキ即チ符號ヲ取去リタルモノガ1ヨリ小ナルトキ(r ガ1ト -1 トノ間ニ在ルトキ)ハ n ガ甚ダ大ナルトキハ r^n ハ殆ド0ニテ殆ド　$S=a\times\dfrac{1}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}$ トナル。之ヲ略シテ等比級數ノ無限項ノ和ハ $\dfrac{a}{1-r}$ ニ等シト云フ。

例一　$2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}+\cdots\cdots$ ノ無限項ノ和ヲ求ム

$a=2,\quad r=\dfrac{1}{3}$ ニテ　　$S=2\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=2\times\dfrac{1}{\frac{2}{3}}=2\times\dfrac{3}{2}=3$

例二　$3.4\dot{2}\dot{5}$ ヲ分數ニ化セ

$$3.4\dot{2}\dot{5}=3.4252525\cdots\cdots\cdots$$

$$=3.4+0.025+0.00025+0.0000025+\cdots\cdots\cdots$$

$$=3\frac{4}{10}+\frac{25}{1000}+\frac{25}{100000}+\frac{25}{10000000}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{34}{10}+\frac{25}{1000}+\frac{25}{1000}\times\frac{1}{100}+\frac{25}{1000}\times\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\cdots$$

第二項以下ハ初項 $\dfrac{25}{1000}$ 通比 $\dfrac{1}{100}$ ナル等比級數ノ無限項ノ和ナルユヱ

$$=\frac{34}{10}+\frac{25}{1000}\times\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{34}{10}+\frac{25}{1000}\times\frac{100}{99}$$

$$=\frac{34}{10}+\frac{25}{990}=\frac{34\times99+25}{990}=\frac{3391}{990}=3\frac{421}{990}$$

例三　第二項ガ $\dfrac{1}{3}$, 無限項ノ和ガ $-\dfrac{3}{4}$ ナル等比級數ノ初項及通比ヲ求ム

初項ヲ a 通比ヲ r トスレバ第二項ハ ar ニテ

$$ar=\frac{1}{3}\qquad\qquad \frac{a}{1-r}=-\frac{3}{4}$$

後式ノ分母子ニ r ヲ乘ジ　　$\dfrac{ar}{r-r^2}=-\dfrac{3}{4}$

トシ前式ヲ代入スレバ

$$\frac{\frac{1}{3}}{r-r^2}=-\frac{3}{4}\qquad 即チ\ \frac{1}{3r-3r^2}=-\frac{3}{4}$$

分母ヲ除去スレバ　　$3(3r-3r^2)=-4$

即チ　　$9r^2-9r-4=0$

之ヲ解キテ　　$r=-\frac{1}{3}$ 或ハ $\frac{4}{3}$

然ルニ　$S=\dfrac{a}{1-r}$ ハ r ガ1ヨリ小ナル場合ニ得ラレタルモノニテ1ヨリ大ナル場合ニ用キルコトガ キヌ 故ニ r ガ $\frac{4}{3}$ ナルコトハデ

キヌ。由リテ $r=-\frac{1}{3}$

之ヲ第一式ニ代入スレバ $a=-1$

129. 等比中項 三數ガ等比級數ヲナストキハ其中ノ數ヲ他ノ二數ノ等比中項ト云フ。

二數ノ等比中項ハ二數ノ積ノ平方根ニ等シ。

例ヘバ a, b, c ガ等比級數ヲナストキハ b ガ a, c ノ等比中項ニテ等比級數ノ定義ニ由リ $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$

即チ $b^2=ac$ 故ニ $b=\sqrt{ac}$

例 5, 45 ノ等比中項ヲ求ム

$$\sqrt{5\times 45}=\sqrt{225}=\pm 15$$

130. 等比諸中項 若干ノ數ガ等比級數ヲナス時其兩端ノ間ニ在ル諸數ヲ此二數ノ等比諸中項ト云フ。

例ヘバ 3, 6, 12, 24 ニ於テ 6, 12 ハ 3 及 24 ノ等比諸中項デアル。

二數ノ間ニ若干ノ等比諸中項ヲ挿入スルコトガデキル。

例ヘバ a, b ノ間ニ n 個ノ諸中項ヲ挿入スルニ通比ヲ r トスレバ全體ニテ初項 a、末項 b 通項比數 $n+2$ ナル等比級數ヲ得テ第 $n+2$ 項ハ ar^{n+2-1} 即チ ar^{n+1} ナルユヱ

$$ar^{n+1}=b$$

故ニ $r^{n+1}=\frac{b}{a}$ 即チ $r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$

例 16 ト $\frac{1}{2}$ トノ間ニ四個ノ等比諸中項ヲ插入セヨ

$a=16,\ b=\frac{1}{2},\ n=4$ ニテ

$$r=\sqrt[5]{\frac{\frac{1}{2}}{16}}=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\frac{1}{2}$$

故ニ插入スベキ項ハ

$$16\times\tfrac{1}{2},\quad 16\times(\tfrac{1}{2})^2,\quad 16\times(\tfrac{1}{2})^3,\quad 16\times(\tfrac{1}{2})^4$$

即チ 8, 4, 2, 1

問 題

(1) $18, 9, \frac{9}{2}, \cdots\cdots$ ノ第八項ヲ求ム

(2) $4, -10, 25\cdots\cdots$ ノ第六項ヲ求ム

(3) $2, 6, 18, \cdots\cdots\cdots$ ノ六項ノ和ヲ求ム

(4) $\frac{1}{5}-\frac{2}{15}+\frac{4}{45}\cdots\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求ム

(5) $8, 4, 2, \cdots\cdots$ ノ無限項ノ和ヲ求ム

(6) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$ ノ無限項ノ和ヲ求ム

(7) 第二項ガ -2, 無限項ノ和 $4\frac{1}{2}$ ナルトキ比級數ヲ求ム

(8) 4 ト 18 トノ間ニ二數ヲ插入シ初メノ三數ハ等差級數ヲナシ後ノ三數ガ等比級數ヲナサシメヨ

(9) 1 ト 256 トノ間ニ三個ノ等比諸中項ヲ插入セヨ

第十一章　順列組合

第一節　順列

131. 順列　a, b, c ナル三個ノモノヽ中ヨリ二個ヅツ取リテ種々ノ順序ニ列ブレバ

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb$$

ヲ得。

一般ニ n 個ノモノヽ中ヨリ r 個ヅツ取リテ種々ノ順序ニ列ブル仕方ヲ n 個ノモノヨリ r 個取リタル**順列**ト云フ。而シテ其列ベ方ノ數ヲ ${}_nP_r$ ニテ表ハス。

例ヘバ上ノ例ノ如ク三ツノモヨリ二ツヅツ取リタル順列ノ數ハ 6 ニテ

$${}_3P_2=6$$

132. 順列ノ公式　今 $a, b, c, \cdots$ ナル d 個ノモノアリテ先ヅ此中ヨリ一ヅツ取ル仕方ハ明カニ n 通アル。

次ニ二ツヅツ取ル仕方ヲ考フルニハ先ヅ一ツヅ ${}_nP_1=n$ ノ $n-1$ 個ノ中ヨリ一ヅツ取レバヨシ例ヘバ a ヲ先ヅ取ルトキハ其次ニハ殘リノ $b, c, d \cdots\cdots$ 中ヨリ一ツ取リテ

$$ab,\ ac,\ ad, \cdots\cdots\cdots\cdots$$

ノ如クスレバヨシ此仕方ハ明カニ $n-1$ 通デアル。

又タ b ヲ初メニ取リタル場合ニモ同様ニ $n-1$ 通アル。

c ニテモ同様デアル。

故ニ全體ニテ $n-1, n$ 倍即チ $n(n-1)$ 通アル。

故ニ　$${}_nP_2=n(n-1)$$

次ニ三ツヅヽ取ル仕方ヲ考フルニハ上ノ $n(n-1)$ 通リアル其中ノ一ツ例ヘバ ab ノ次ニ殘リノ $n-2$ ノ中ヨリ一ツヅ取レバヨシ此仕方ハ明カニ $n-2$ 通アル。

故ニ全體ニテ $n(n-1)(n-2)$　　即チ　${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$

此理ヲ推シテ一般ニ

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-(r-1))$$

即チ　$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-\cancel{r個})\ (n-r+1)$$

例　五個ノ中ヨリ三個ヅツ取リテ作ル順列ノ數ヲ求ム

$n-r+1=5-3+1=3$ ニテ ${}_5P_3=5\times4\times3\cancel{\times2}=\cancel{120}$

即チ~~百二十~~六十通デアル。　60

若シ $r=n$ ナルトキハ　${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)$

即チ　$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3.2.1$$

$n(n-1)(n-2)\cdots3.2.1$ ヲ $n!$ ニテ表ハス。　故ニ　${}_nP_n=n!$

$n!$ ヲ n ノ階乘ト云フ。

例一　0, 1, 2, 3 ノ四數字ヲ用キテ四桁ノ數ヲ幾種作リ得ベキカ

四ツモノヲ四ツ取ル順列ハ　${}_4P_4=4\times3\times2\times1=24$

ニテ此四數字ノ列ベ方ハ 24 通アル。然シ此中 0 ノ左端ニ在ルモノダケヲ除カネバナラヌ。0 ノ左端ニ在ル……ノ如ク 0 ヲ除キテ殘リノ三數字ガ種々ニ列ビタル數即チ ${}_3P_3=3\times2\times1=6$ ダケデアル。

故ニ 0, 1, 2, 3 ノ四數字ニテ作リ得ベキ四桁ノ數ハ 24−6=18 通アル。

例二　六人ガ圓狀ニ列ブ仕方ハ幾通アルカ

先ヅ六人ガ種々順序ニ變ジテ列ビ得ル仕方ハ ${}_6P_6=6!$ 通アル。其中ニ一人オクリニ座ヲ變ヘテ互ノ位置ノ變ラザルモノ六ツヅツアルユヱ圓狀ニ列ブ仕方ハ

$$6!\times\frac{1}{6}=6\times5\times4\times3\times2\times1\times\frac{1}{6}=120$$

通リアル。

或ハ互ノ位置ノ變化ノ數ヲ求ムルノデアルカラ其中一人ヲ固定シテ他ノ五人ガ種々動キテ位置ノ變化ヲ生ズルモノト見レバ同ジコトニテ其數ハ

$$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$$

通デアル。

133. 同文字ヲ有スル順列ノ數

今 n 個ノ中 p 個ダケ同ジモノ a アリ q 個ダケ同ジモノ b アリ r 個ダケ同ジモノ c ガアリテ其他ノモノハ各一個ヅツナルトキ之ヲ悉ク取リタル順序ノ數ヲ求ムルニ其所要ノ順列ノ數ヲ P トス。

今 p 個ノ a ガ悉ク異ナリタル $a_1, a_2, a_3, \cdots a_p$ ニ置換ヘレバ他ノ文字ノ位置ハ其マヽニテ $a_1, a_2, a_3, \cdots a_p$ ノ位置ノミ變リテ $p!$ 個ノ順列ヲ得ル即チ p 個ノ a ガ悉ク異ナリタルモノトスレバ其時ノ順列ノ數ハ $P\times p!$ デアル。

同理ニテ猶ホ q 個ノ b ヲ悉ク異ナリタルモノトスレバ順列ノ數ハ前ノ順列ノ數ノ $q!$ 倍ニテ $P\times p!\times P!$ デアル。

又 r 個ノ c ヲモ悉ク異ナリタルモノトスレバ順列ノ數ハ同理ニテ

$P\times p!\times q!\times r!$ デアル。

斯クシタルトキハ n 個ノ文字ガ悉ク異ナリ取ルモノニテ之ヲ悉ク取ル順列即チ n 個ノモノヲ n 個取リテ種々ノ順序ニ位置ヲ變ジ得ル順列ノ數ハ明カニ前條ニ由リ ${}_nP_n$ 即チ $n!$ デアル。

由リテ
$$P\times p!\times q!\times r!=n!$$

故ニ
$$P=\frac{n!}{p!\times q!\times r!}$$

一般ニ n 個ノモノヲ悉ク取ルトキ其中ニ p 個, q 個, r 個, $\cdots$ ヅツ同ジモノガアルトキハ其順列ノ數ハ

$$P=\frac{n!}{p!\times q!\times r!\times\cdots}$$

例一　Mississippi ナル語ノ文字ヲ種々ニ列ブルトキ幾種ノ語ヲ得ベキカ

合計十一個ノ中 s ガ四個, i ガ四個 p ガ二個アルユヱ其仕方ノ數ハ

$$P=\frac{11!}{4!\times4!\times2!}=\frac{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1\times2\times1}$$

$$=34650\text{ 通}$$

例二　1, 2, 2, 3, 3 ノ五文字ヲ用ヰテ五桁ノ數ヲ幾種作リ得ベキカ

五個ノ中 2 ガ二個, 3 ガ二個アルユヱ其仕方ノ數ハ

$$\frac{5!}{2!\,2!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1}=30\text{ 通}$$

問題

(1)　${}_{10}P_4$ ヲ求ム

(2) 七人ノ學生ヲ一列ニ列ブル仕方ハ幾通アルカ

(3) 1, 2, 3, 4, 6, 9, ノ五數字ヲ以テ幾種ノ數ヲ作リ得ベキカ

(4) 1, 3, 4, 5 ヲ用キテ 2000 ト 5000 トノ間ノ數ヲ幾種作リ得ベキカ

(5) 八人ノ生徒ヲ一列ニ列ブルニ其内或ル特別ナル二人ガ相隣ナラザル樣ニスル方法幾通アルカ

(6) ${}_nP_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$ ナルコトヲ證セ

第二節　組合セ

134. 組合セ a, b, c ナル三個ノモノヨリ其順序ニ拘ハラズ唯二ツヅツ組合ハスレバ　a ト b,　a ト c,　b ト c

ナル三通アル。

斯クノ如ク相異ナル n 個ノモノノ中ヨリ r 個ヅツ其順序ニ拘ハラズ種々ノ組合セヲ n 個ノモノヨリ r 個ヅツ取リタル組合セト云フ。而シテ其組合セノ數ヲ ${}_nC_r$ ニテ表ハス。

例ヘバ上ノ例ノ如ク三ツノモノヨリ二ツヅツ取リタル組合セノ數ハ3ニテ　${}_3C_2=3$

135. 組合セノ公式 n 個ノモノヨリ r 個ヅツ取リタル組合セノ數 ${}_nC_r$ ノ中任意ノ一ツヲ取リテ其順序ヲ種々ニ變ズレバ $r!$ 個ノ順列ヲ得。

由リテ ${}_nC_r$ 全體ヲ各其順序ヲ變ズレバ $r!$ 個ヅツヲ得ルユヱ ${}_nC_r\times r!$ ダケノ仕方アリテ之ガ丁度 n 個ノモノヨリ r 個取リタル順列 ${}_nP_r$ 等シ。

故ニ　${}_nC_r\times r!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$

故ニ　${}_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$

此公式ノ分母子ニ $(n-r)!$ 即チ $(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1$ ヲ乘ズレバ　${}_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1}{r!\times(n-r)!}$

故ニ　${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

此公式ニ於テ r ノ代ハリニ $n-r$ トオケバ

$${}_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ニテ　${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

ナルユヱ n 個ノモノヨリ r 個ヅツ取ル組合セト $n-r$ 個ヅツ取ル組合セトハ其數等シ。

注意　$0!$ ハ全ク無意味ナレド上式ニ於テ r ノ代ハリニ n トオケバ

$${}_nC_n=\frac{n!}{(n-n)!n!}=\frac{n!}{0!n!}=\frac{1}{0!}$$

然ルニ明カニ ${}_nC_n=1$ ナルユヱ $0!=1$ トナル。

例一　九人ノ中ヨリ四人ヲ選ブニ其中或ル特別ナル二人ガ同時ニ選バルヽ場合ハ幾通アルカ

兎ニ角九人ノ中ヨリ四人ヲ選ブ仕方ハ ${}_9C_4$ ダケアレド特別ナル二人ノ選バルヽ場合ヲ考フルニハ九人ノ中ヨリ此二人ヲ除キテ殘リ七人ノ中ヨリ二人(四人ヨリ二人少ナキ)ヲ選ミテ之ニ特別ナル二人ヲ加ヘレバヨシ。故ニ此仕方ハ　${}_7C_2=\dfrac{7!}{2!\times5!}=21$ 通

デアル。

例二　歩兵五人騎兵六人砲兵四人アリ各兵ヨリ哨兵トシテ二人ヅツ選マントス其方法幾何

歩兵五人ノ中ヨリ二人ヲ選ム方法ハ $_5C_2$ 通アリ

其一ツニツキ次ノ騎兵六人ノ中ヨリ二人ヲ選ミテ哨兵トスルノデアルガ其仕方ハ $_6C_2$ 通リデ歩兵二人騎兵二人ヲ哨兵トシテ選ム仕方ハ $_5C_2\times{}_6C_2$ 通デアル。

猶砲兵二人ヲ選ムノデアルカラ全體ニテ

$$_5C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2=900 \text{ 通}$$

アル。

問　　題

（1）$_7C_3$, $_{10}C_5$ ヲ求ム

（2）$_{2n}C_3=12\times{}_nC_3$ ヨリ n ノ値ヲ求ム

（3）十二人ノ内ヨリ委員五人ヲ選ムニ或ル一人ガ選マルヽ場合ト選マレザル場合トノ數ヲ求ム

（4）兵卒十人士官三人ノ内ヨリ哨兵トシテ兵卒三人士官一人ヲ選マントス其方法幾何

（5）生徒二十人教師五人ノ内ヨリ四人ノ委員ヲ選ムニ少クトモ教師一人ガ選マルヽ方法幾何

（6）一平面上ニ n 點アリ其内ノ三點ハ何レモ一直線上ニ在ルモノナシトス此各二點ヲ連結シテ幾何ノ直線ヲ得ベキカ

（7）十邊形ニ幾何ノ對角線ヲ引キ得ベキカ

第十二章　二項定理

136. 二項定理ノ目的

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

等ハ能ク知リ居レド $(a+b)^{10}$ ノ如キハ十度掛ケ合ハサネバナラヌユヱ非常ニ煩雜デアル。之ヲ一ツノ公式ニ由リテ容易ニ計算セントスルノデアル。

137. 二項定理ノ公式

n ハ正ノ整數ヲ表ハスモノトシテ $(a+b)^n$ ノ公式ヲ求ムルニ

$$(a+b)^n=(a+b)(a+b)(a+b)\ldots\ldots(a+b)\ldots\ldots n \text{ 因數}$$

此右邊ノ連乘積ヲ求メンニ n 個ノ各因數ヨリ a 若クハ b ヲ一ツヅツ取リテ成ル n 個ノ文字ノ積ニテ

$$a^n,\quad a^{n-1}b,\quad a^{n-2}b^2,\quad \ldots\ldots a^{n-r}b^r,\quad \ldots\ldots b^n$$

ダケアル。

此等ノ數係數ヲ求ムルニ n 個ノ各因數ヨリ a ヲ一ツヅツ取ル仕方ハ唯一通ノミナルユヱ a^n ノ係數ハ 1 デアル。

次ニ n 個ノ因數ノ中ノ一ツヨリ b ヲ取リテ殘リノ $n-1$ 個ノ因數ノ中ヨリ a ヲ一ツヅツ取ル仕方ハ n 個ノモノヲ一ツヅツ取ル組合セノ數 $_nC_1$ ダケナルユヱ $a^{n-1}b$ ノ係數ハ $_nC_1$ デアル。

次ニ n 個ノ因數ノ中ニ二ツヨリ一ツヅツ b ヲ取リテ殘リノ $n-2$ 個ノ因數ノ中ヨリ a ヲ一ツヅツ取ル仕方ハ n 個ノモノヲ二ツヅツ取ル組合セノ數 $_nC_2$ ダケナルユヱ $a^{n-2}b^2$ ノ係數ハ $_nC_2$ デアル。

斯クテ $a^{n-r}b^r$ ノ係數ハ n 個ノ因數ノ中ノ r 個ヨリ一ツヽツ b ヲ取リテ殘リノ $n-r$ 個ノ因數ノ中ヨリ a ヲ一ツヾヅヲ取ル仕方ハ n 個ノモノヲ r 個ヅツ取ル組合セノ數 ${}_nC_r$ ダケナルユヱ $a^{n-r}b_r$ ノ係數ハ ${}_nC_r$ デアル。

最後ニ n 個ノ各因數ヨリ b ヲ一ツヾツ取ル仕方ハ唯一ツユヱ b^n ノ係數ハ 1 デアル。故ニ

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r$$
$$+\cdots\cdots+b_n$$
$$=a^n+na^{n-1}b+\frac{n\,!}{2\,!(n-2)\,!}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n\,!}{r\,!(n-r)\,!}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n$$
$$=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b$$

之ヲ見ルニ第二番目ノ項ハ ${}_nC_1a^{n-1}b$，第三番目ハ ${}_nC_2a^{n-1}b^2$ ニテ一般ニ第 $r+1$ 番目ノ項ハ ${}_nC_ra^{n-r}b^r$ 即チ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r$$

デアル。之ヲ普通項ト云フ。

例一　$(2x-3y)^5$ ヲ展開セヨ

$$(2x-3y)^5=(2x)^5+5(2x)^4(-3y)$$
$$+\frac{5\times4}{1\times2}(2x)^3(-3y)^2+\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}(2x)^2(-3y)^3$$

$$+\frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4}(2x)(-3y)^4+(-3y)^5$$
$$=32x^5-240x^4y+270x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5$$

例二　$\left(x^2-\dfrac{a}{x}\right)^{20}$ ノ x^7 ハ第何項ナルカ

第 $r+1$ 項ハ ${}_{20}C_r(x^2)^r\left(-\dfrac{a}{x}\right)^{20-r}={}_{20}C_rx^{2r}\dfrac{(-a)^{20-r}}{x^{20-r}}$

$$={}_{20}C_rx^{2r-(20-r)}(-a)^{20-r}={}_{20}C_r(-a)^{20-r}x^{3r-20}$$

故ニ x ノ指數 $3r-20=7$ ナル項ヲ取レバヨシ。

$3r-20=7$ ヨリ $r=9$ ナルユヱ

求ムル項ハ第九項デアル。

例三　$(51)^3$ ヲ求ム

$51=50+1$ ナルユヱ二項定理ニ由リ

$$(51)^3=(50+1)^3=50^3+3\times50^2\times1+3\times50\times1+1$$
$$=125000+7500+150+1=132651.$$

問　題

(1)　$(2x^2+3)^4$ ヲ展開セヨ

(2)　$(1+x)^8$ ノ中央項ヲ求ム

(3)　二項定理ノ展開式ニ於テ初項ヨリ計ヘテ第 $r+1$ 番目ノ係數ト終ヨリ計ヘテ第 $r+1$ 番目ノ係數トハ相等シキコトヲ證セ

(4)　$(a-x^2)^{15}$ ノ展開式ノ初ノ三項ト終リノ三項トヲ書ケ

(5)　$(2-3x)^{12}$ ノ x^{11} ノ係數ヲ求ム

(6)　99^4 ヲ二項定理ニ由リテ求ム

(7)　$(1+x)^{m+n}$ ノ展開式ニ於テ x^m 及 x^n ノ係數相等シキコトヲ證セ

第十三章　複利及年金算

對數ニツキテハ既ニ三角法ニ於テ詳シク述ベラレタルユエ本講義ニ於テハ之ヲ省キ其應用ナル年金算ニツキテ述ベン。

137. 複利法 ハ既ニ算術ニ於テ其一部ヲ學バレタルガ玆ニハ對數ノ助ヲ借リテ一般ノ計算ヲ述ベン。

元金ヲ P, 期限數ヲ n, 利率(一期間ノ)ヲ r, 利息ヲ I, 元利合計ヲ A トス。

第一年ノ終ニ於テハ元利合計ハ $P(1+r)$, 之ガ第二年初メノ元金ニテ第二年ノ終ノ元利合計ハ $P(1+r)\times(1+r)$ 即チ $P(1+r)^2$

同樣ニ第三年ノ終ノ元利合計ハ $P(1+r)^3$

斯クテ第 n 年ノ終ノ元利合計ハ $A=P(1+r)^n$

從テ利息ハ　$I=P(1+r)^n-P=P\{(1+r)^n-1\}$

對數ヲ用キルトキハ　$\log A=\log P+n\log(1+r)$

由リテ　$n=\dfrac{\log A-\log P}{\log(1+r)}$

之ニ由リ期限ヲ求ムルコトガデキル。

又タ上式ヨリ　$\log(1+r)=\dfrac{\log A-\log P}{n}$

之ニ由リ利率ヲ求ムルコトガデキル。

例　元金十圓ヲ貸シテ十年後ニ元利合計十六圓二十九錢ヲ得ンニハ利率ヲ幾何トスベキカ。

$P=10,\ A=16.29,\ n=10$ ニテ

$$\log(1+r)=\frac{\log 16.29-\log 10}{10}=\frac{1.21192-1}{10}$$

$$=0.021192\quad=\log 1.05$$

$$\therefore\ 1+r=1.05\qquad\therefore\ r=0.05$$

即チ年利率五分トスレバヨ[illegible]。

138. 割引 n 年後ニ拂フベキ金 A ノ現價 P ヲ求ムルニ年利率ヲ r トスレバ元金 P ノ n 年後ニ於ケル元利合計ハ $P(1+r)^n$ ニテ即チ A デアル。故ニ　$A=P(1+r)^n$

$$P=\frac{A}{(1+r)^n}$$

割引高ハ　$A-\dfrac{A}{(1+r)^n}=A\left\{1-\dfrac{1}{(1+r)^n}\right\}$

對數ヲ用キレバ　$\log P=\log A-n\log(1+r)$

139. 年金算 毎年同額ノ金高ヲ貯蓄シ或ハ受取ルトキ此金額ハ年金或ハ年賦金ト云ヒ此計算ヲ年金算ト云フ。

第一. 毎年末ニ拂フ年金ノ高, 利率, 期限ヲ知リテ現價ヲ求ムルコト。

年金ヲ A, 利率ヲ r, 期限ヲ n, 現價ヲ Q トスレバ

第一年末ニ拂フベキ年金 A ノ現價ハ前條ニ由リ $\dfrac{A}{1+r}$

第二年　〃　〃　〃　〃　〃　〃　$\dfrac{A}{(1+r)^2}$

第三年　〃　〃　〃　〃　〃　〃　$\dfrac{A}{(1+r)^3}$

………………

第 n 年 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $\dfrac{A}{(1+r)^n}$

故ニ n 年間毎年 A ヅヽ拂フ現價ハ

$$Q=\frac{A}{1+r}+\frac{A}{(1+r)^2}+\frac{A}{(1+r)^3}+\cdots\cdots+\frac{A}{(1+r)^n}$$

$$=\frac{A}{1+r}\left\{1+\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(1+r)^{n-1}}\right\}$$

$$=\frac{A}{1+r}\times\frac{1-\dfrac{1}{(1+r)^n}}{1-\dfrac{1}{1+r}}=\frac{A}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}$$

第二　毎年初ニ同額ノ金高ヲ貯蓄スルトキハ元利合計ヲ求ムルコト。

第一年末ノ元利合計ハ　$A(1+r)$

第二年末 〃 〃　$A(1+r)^2$

第三年末 〃 〃 〃　$A(1+r)^3$

………………

第 n 年末 〃 〃 〃　$A(1+r)^n$

故ニ元利合計ノ總額ハ

$$A(1+r)+A(1+r)^2+A(1+r)^3+\cdots\cdots+A(1+r)^n$$

$$=A(1+r)\{1+(1+r)+(1+r)^2+\cdots\cdots+(1+r)^{n-1}\}$$

$$=A(1+r)\times\frac{(1+r)^{n-1}}{1+r-1}$$

$$=\frac{A(1+r)}{r}\left\{(1+r)^{n-1}\right\}$$

問題

(1)　年利率五步ニテ幾年間貸ストキハ元利合計ガ元金ノ三倍トナルカ

(2)　年五步ノ複利ニテ三十年後ニ八百圓ヲ拂フベキ金ヲ直チニ拂フトキハ割引高幾何ナルカ

(3)　幾何ノ金高ヲ年五分ニテ借ルトキハ十五年間百圓ヅヽ拂ヒテ返濟シ終ルベキカ

(4)　年毎百圓ヅヽ貯蓄スルトキ十年間ニ幾何トナルカ但年五分トス

代數學講義畢

代數學講義

解答

完

山口高等學校教授

理學士

林茂增先生述

大日本普通學講習會

藏版

代數學講義解答

第一章第二節(第4頁)

(1) (a) 16 (b) 1385. (c) 5.

(2) (a) $\sqrt{18}$. (b) 0. (c) $33\frac{2}{3}$.

(3) 第一項ハ三次,第二項ハ五次,第三項ハ四次,第四項ハ三次,ナリ。

(4) (a) 四次式 (b) 五次式

(5) x ニツキテ三次式, y ニツキテ四次式

(6) $\frac{(a+b)^3}{c^2}=(a-b)^2$ (7) $(3x+4y)(2x-5y)>3x^2-xy+2y^3$

同章第三節(第9頁)

(1) -5ハ-8ヨリ3ダケ大ナリ (2) 0

(3) $13+(-5)=8$, $13-(-5)=18$

(4) $-7+(-6)=-13$, $-7-(-6)=-1$

(5) $0-4=-4$, $0-(-4)=4$

(6) (a) $3\times(-4)=-12$ (b) $(-4)\times(-9)=36$

(c) $\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)=-\frac{2}{3}$

(7) (a) $12\div(-3)=-4$ (b) $-24\div(-6)=4$

(c) $\left(-\frac{4}{5}\right)\div\left(\frac{8}{25}\right)=-\frac{5}{2}$

第二章第一節(第14頁)

(1) $9a^2x^2$　(2) a

(3) $3+6b^2+6bx^2+6b^2x^2$　(4) $0.$

(5) $5x^5+16x^4y-19x^2y^3-7xy^4+y^5$　(6) $\frac{7}{8}a^2+b^2+c^2$

同章第二節(第16頁)

(1) $2x^2-4xy+4y^2$　(2) $p^3+5q^3+pq+r^3+2pr-qr$

(3) $2x^4y-7x^3y^2-4x^2y^3-4xy-3y^5$

(4) $2x^5-2x^4y+3x^3y^2-13x^2y^3+9xy^4-3y^5$

(5) $\frac{1}{4}a^3+2a^2x+\frac{1}{4}ax^2-3x^3$　(6) $6x^2y.$　(7) $-7a+4b$

(8) $2xy+2y^2$　(9) $10-16x$　(10) $2a^3-(2b^3+3a^2b-5ab^2)$

同章第三節(第21頁)

(1) $-24x^3y^6z^3$　(2) $-300a^4b^4c^4$　(3) $21a^3b-18ab^3$

(4) $15x^2-17xy-42y^2$　(5) $x^7+x^6y-xy^7+y^7$

(6) $x^4-3x^3+3x^3-5x+4$

(7) $a^6+a^4b^2+a^4c^2-a^2b^4-a^2c^4+2a^2b^2c^2-b^6+b^4c^2+b^2c^4-c^6$

(8) $10x^{10}-5ax^9-5a^4x^7+22a^5x^5-13a^6x^4-11a^7x^3+6a^8x^2+9a^9x-5a^{10}$

(9) $a^5-41a-120$

(10) $2x^4-\frac{143}{12}x^3y-\frac{8}{3}x^2y^2+\frac{379}{18}xy^3-\frac{7}{3}y^4$

(11) $2a^2b+2abc+2ac^2+2b^2c$　(12) $0.$

同章第四節(第26頁)

(1) $12a^2b$　(2) x^2-x+1　(3) $2a^2b-ab^2+4b^3$

(4) x^2+x+1　(5) $x+y+z$　(6) $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

(7) $a+b+c$　(8) $x^3+3xy+13y^2$ ト殘 $32xy^3+18y^4$

(9) $a^2+3ab-\frac{1}{2}b^2$　(10) $x^4+x^2y^2+y^4$　(11) a^6-b^6

(12) $4x^2-12xy+y^2$

第三章第一節(第30頁)

(1) 6.　(2) $\frac{c-b-c}{a-d}$　(3) 9.　(4) 5.

(5) $4a.$　(6) 0　(7) $-\frac{11}{7}$　(8) 11.

(9) 1.　(10) 3.　(11) $\frac{a+b+c}{(3)}$　(12) 14.6

同章第二節(第34頁)

(1) 20、13.　(2) 30.　(3) 10 (三十五ヲ減ジタルハ五ヲ減ジタルノ誤)

(4) $61\frac{1}{2}, 126\frac{1}{2}.$　(5) 二圓　(6) 硝石十八斤、硫黃,木炭各三斤　(7) 十二年前,六年後　(8) 問題ニ誤アリ

(9) 五時二十七分十六秒余　(10) 三時三十二分四十三秒余

(11) 三十六人ハ三十五人ノ誤ニテ初メノ正方形ノ一邊ノ人數ヲ x トスレバ $x^2-40=(x-1)^2+35$

之ヲ解キテ $x=38$ 故ニ $38^2-40=1404$ 千四百四人

(12) 鳥六羽,獸二十二匹　(13) 誤　(14) 七時間ハ三時間

ノ誤ニテ甲一時間, 乙二時間　(15)　9, 7

同章第三節(第41頁)

(1) $x=5, y=2.$　(2) $x=20, y=10$　(3) $x=\frac{156}{157}, y=-\frac{60}{157}$

(4) $x=4, y=5$　(5) $x=\frac{1}{46}, y=-\frac{39}{184}$　(6) $x=\frac{121}{42}, y=\frac{55}{21}.$

(7) $x=\frac{2}{3}, y=3$　(8) $x=1, y=o$

(9) $\left.\begin{array}{l} x=\frac{902}{1529} \\ y=\frac{2486}{1529} \\ z=\frac{383}{139} \end{array}\right\}$　(10) $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=5 \\ z=4 \end{array}\right\}$　(11) $\left.\begin{array}{l} x=\frac{2}{(b+c-a)} \\ y=\frac{2}{(c+a-b)} \\ z=\frac{2}{(a+b-c)} \end{array}\right\}$

(12) $x=8, y=1$

同章第四節(第46頁)

(1) 甲二十五圓, 乙三十圓.　(2) 十五人, 百個

(3) 甲ノ手荷物ノ目方ヲ x 斤トシ制限ノ目方ヲ y 斤トスレバ

$\frac{125}{x-y}=\frac{75}{100-x-y}=\frac{350}{100-y}$ ニテ制限ノ目方三十斤

(4) 四百二十一歩　(5) 一圓銀貨ノ數ヲ x, 五十錢銀貨ノ數ヲ y トスレバ

$50y=10(35-x-y)+300, 2(x+y)=5(35-x-y)$ ニテ一圓銀貨十七枚, 五十錢銀貨八枚, 十錢銀貨十枚

(6) 乙每時ノ速サヲ x 哩, 兩地間ノ距離ヲ y 哩トスレバ

$y=(x+2+x)\times 3=\left\{x+1+\frac{2}{3}(x+2)\right\}\times 3\frac{1}{2}$ (四時間ハ三時間半ノ誤) 八十四哩　(7) 35, 30, 25.　(8) 上酒一斗八升, 下酒九升　(9) 丙管一時間　(10) 百位ノ數字ヲ x, 十位ノ數字ヲ y, 一位ノ數字ヲ z トスレバ求ムル數ハ $100x+10y+z$ ニシテ

$100x+10y+z=34(x+y+z)$, $100z+10y+x-(100x+10y+z)$
$=33(x+y+z)$, $y=x+z-12$. ナレドモ問題ニ誤アルヲ以テ省ク

第四章第一節(第49頁)

(1) $4x^2+16xy+16y^4$　(2) $\frac{1}{4}a^2-4ab+16b^2$　(3) x^4-a^4

(4) $9a^4-12a^3b+10a^2b^2-4ab^3+b^4$　(5) $8x^3+27y^3$

同章第二節(第53頁)

(1) $2a^2b(3ax+2by)$　(2) $(3x^2+4y^2)^2$　(3) $3a(a-b)^2$

(4) $4a^2x^2(3+y^2)(3-y^2)$　(5) $-2(a+b)b.$

(6) $(1+2a-b)(1-2a+b)$　(7) $(x^4+x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(8) $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-y+y^2)$　(9) $(x+5)(x+7)$

(10) $(x-11)(x+4)$　(11) $(x+2)(x-1)(x+4)(x-3)$

(12) $2b(3a^2+b^2)$　(13) $(3a-2b)(2a+b)$

(14) $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$

同章第三節(第58頁)

(1) $6x^2y.$　(2) $7a^2b^3x^3y^3.$　(3) $a^2-6ab+5b^2$

(4) $2(x+1)$　(5) $2b(a+b)$　(6) p ナシ　(7) x^2-3x-4

(8) $a^2-3ab+2b^2$ ($4b^2$ ハ $4b^4$, ノ誤) (9) ナシ

(10) $x-7$ ($39x$ ハ $59x$ ノ誤)

同章第四節(第60頁)

(1) $54x^3y^2z^4$ (2) $12ab(a^2+b^2)$

(3) $12x^4-15x^3y+7x^2y^2-5xy^3+y^4$

(4) $9a^4-36a^3b+a^2b^2+2ab^3+8b^4$

(5) $x^5-6x^4+5x^3+20x^2-36x+16$ ($-5x^32+0x$ ハ $-8x^3+20x$ ノ誤)

(6) $a^5-6a^4+7a^3+18a^2-44a+64$ (7) $32a^5-80a^3b^2+18b^4$

(8) $xy(x^3-5x^2y-26xy^2+120y^3)$

第五章第一節(第63頁)

(1) $\frac{2c^2}{3a}$ (2) $\frac{x-y}{x+y}$ (3) $\frac{a+3b}{a+6b}$ (4) $\frac{1}{x^2-y^2}$

(5) $\frac{a+3}{a^2-6a-3}$ (6) $\frac{70y}{60x^2y^2z^2}$, $\frac{32z}{60x^2y^2z^2}$, $\frac{54x}{60x^2y^2z^2}$.

(7) $\frac{3(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $\frac{5(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

$\frac{4(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

(8) $\frac{a(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5)}{x^6-y^6}$ $\frac{b(x^4-x^3y+xy^3-y^4)}{x^6-y^6}$,

$\frac{c(x^3-y^3)}{x^6-y^6}$

(9) $\frac{4(x^2+3x+9)}{x^3-27}$, $\frac{(3x+2)(x-3)}{x^3-27}$, $\frac{x^2+3x}{x^3-27}$

(10) $\frac{a(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, $\frac{b(x-a)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$,

$\frac{c(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

同章第二節(第65頁)

(1) $\frac{a+b+c}{abc}$. (2) $\frac{xy^2+ay}{a^2x^2}$ (3) $\frac{a^3+2a^2b-ab^2}{(a+b)^2(a-b)}$

(4) $\frac{2x^2+8ax+4a^2}{x^2-4a^2}$ (5) $\frac{8a^2x^2}{a^4-x^4}$

(6) $\frac{16x^8}{x^8-y^8}$ ($+\frac{2^2x}{x^2+y^2}+\frac{4x}{x^4+y^4}$ ハ $+\frac{4x^2}{x^2+y^2}+\frac{8x^4}{x^4-y^4}$ ノ誤)

(7) 0. (8) 0.

同章第三節(第68頁)

(1) 1. (2) $\frac{ax}{a^2-x^4}$ (3) $\frac{x^2y^2}{x^2-y^2}$ (4) 1.

(5) 1. (6) $\frac{15a^2}{14x^2}$ (7) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ ($\frac{x^3-y^3}{x^3-y^3}$ ハ $\frac{x^3-y^2}{x^3+y^3}$ ノ誤)

(8) $\frac{x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6}{a^2x^3}$ (9) $\frac{(x-a)^3}{(x-3a)^3}$ (10) $\frac{6x^2+2}{9x^3+5x}$

(11) 1. (12) $\frac{34}{7}$

第六章第一節(第72頁)

(1) 10. (2) $\frac{5}{2}$, (3) -1. (4) 0.

(5) $-\frac{ma^2+nb^2-2ab}{(m-1)a+(n-1)b}$ {$m(x+b)$ ハ $n(x+b)$ ノ誤} (6) $x=2$, $y=3$

(7) $x=5, y=9.$ (8) $x=\frac{a^3+a^2b-3ab^2+b^3}{a^2+20b-b^2}, \frac{a^3+3a^2b+ab^2-b^3}{a^2+20b-b^2}$

(9) $x=3,\ y=2$

同章第二節(第75頁)

(1) $\frac{13}{15}$ (2) 六時間(乙ハ甲ヨリモハ甲ハ乙ヨリモノ誤)

(3) 二錢五厘 (4) 甲樽ヨリ x 石,乙樽ヨリ y 石取出ストス

$\frac{x}{4}+\frac{3y}{8}=5,\ \frac{3x}{4}+\frac{5y}{8}=9$ ニテ $x=2,\ y=12$ (5) 五十錢

第七章第一節(第79頁)

(1) $x=\pm\sqrt{6}$ ($3x^3$ ハ $3x^2$ ノ誤) (2) ± 2 (3) 2,3

(4) $\frac{9\pm\sqrt{113}}{4}$ (5) $-\frac{2}{3}b,\ \frac{5}{4}b$ (6) $7, \frac{3}{7}$

(7) $\frac{33\pm\sqrt{193}}{14}$

同章第二節(第82頁)

(1) $x^2+5x+6=0$ (2) $20x^2+11x-3=0$

(3) $x^2-186x+25=0$ (4) $\frac{4}{3}$ (5) $11x^2+6x+11=0$

同章第三節(第85頁)

(1) 5, 17 (2) $9, \frac{20}{3}$ (3) 根ナシ

(4) $-\frac{2(a^3-a^2b-a^2c+ab^2-b^2c-b^3)}{(a-b)^2}$ (5) 適合スル根ナシ

(6) 適合スル根ナシ (7) 2, 3 (8) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(9) $\pm\sqrt{-1},\ \pm 3$ (10) $1, \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ (11) 4, -1

同章第四節(第92頁)

(1) $x=-4, y=3,\ x=3,\ y=-2$ (2) $x=1, y=3, x=\frac{5}{4}, y=2$

(3) $\left.\begin{array}{l} x=a \\ y=b \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=2a-b \\ y=2b-a \end{array}\right\}$ (4) $\left.\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x\times\pm\frac{4}{7}\sqrt{7} \\ y=\mp\frac{1}{7}\sqrt{7} \end{array}\right\}$

(5) $\left.\begin{array}{l} x=\pm\frac{(a-b)^2}{a+b} \\ y=\pm\frac{4ab}{a+b} \end{array}\right\}$ (x^2-xy ハ x^2+xy ノ誤) (6) $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right\}$

(7) $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right\}$ (8) $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right\}$

(9) $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{array}\right\}$ (13ハ18ノ誤) (10) $x=\pm\frac{a^2b^2+c^2a^2-b^2c^2}{2abc}$

$y=\pm\frac{b^2c^2+a^2b^2-c^2a^2}{2abc}$

$z=\pm\frac{c^2a^2+a^2b^2-b^2c^2}{2abc}$

同章第五節(第95頁)

(1) 18,14 (2) 六里 (3) 20, 25

(4) 一尺二寸, 四寸(元トノ半ハ元トノ八分ノ一ノ誤)

(5) 三十錢　(6) 甲每時九里. 乙每時八里

(7) 甲二十八日, 乙三十二日　(8) 甲三十町, 乙十八町

(9) 三錢　(10) 甲 $\frac{8}{11}$ 哩, 乙 $2\frac{2}{3}$ 哩

第八章第一節(第99頁)

(1) x^{15}　(2) $-27a^6b^3$　(3) $\frac{16a^4b^2}{9c^2a^4}$　(4) $-3888a^{23}$

(5) $-a^{-m}b^{-m+1}$

同章第二節(第102頁)

(1) $2x^2-x+1$　(2) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3) $\frac{5x}{y}-2-\frac{y}{5x}$　(4) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

$-4\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2-2+\frac{1}{x^2}-4\left(x-\frac{1}{x}\right)+4=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-4$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)+4=\left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2$

故＝ $x-\frac{1}{x}-2$

(5) $\sqrt[4]{\{x^4+4x^3+6x^2+4x+1\}}=\sqrt{\{\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}\}}$

$=\sqrt{\{x^2+2x+1\}}=x+1$

同章第三節(第104頁

(1) 8.　(2) $\frac{16}{9}$　(3) $\frac{1}{27}$　(4) $\frac{b^3}{6^3}$　(5) $x^{\frac{11}{9}}$

(6) a^{b+c}　(7) x^xy^y ($x\div y$ ハ $x+y$ ノ誤)　(8) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}$, $\frac{1}{x}$

(9) $\sqrt{(a^3b^{-2})}\div\sqrt[3]{(a^{-4}b^5)}=a^{\frac{3}{2}}b^{-1}\div a^{-\frac{4}{3}}b^{\frac{5}{3}}=a^{\frac{17}{6}}b^{-\frac{8}{3}}$

(10) a^4+1+a^{-4}　(11) $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$　(12) $\frac{(a+x)(a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}})}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}}$

第九章第一節(第106頁)

(1) (a) $\sqrt[3]{27}$　(b) $\sqrt[3]{x^6y^6}$　(c) $\sqrt[3]{\frac{b^6}{a^3}}$

(2) (a) $\sqrt{112}$　(b) $\sqrt[3]{152}$　(c) $\sqrt[n]{ax^{n-1}y^n}$

(3) $\sqrt[12]{16}$, $\sqrt[12]{27}$, $\sqrt[12]{36}$ ($\sqrt{6}$　$\sqrt[4]{6}$ ノ誤)

(4) $\sqrt{2}=\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{81}$, $\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{125}$

$\therefore$ $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$

同章第二節(第110頁)

(1) $13\sqrt{3}$　(2) $(2+3b-4c^2)\sqrt[3]{2ab}$　(3) $2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2$

(4) $\frac{7-2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$　(5) $\frac{5}{3}\sqrt[6]{\frac{36}{125a^2}}$　(6) $x^2+x\sqrt{2}+1$

(7) $\frac{4+\sqrt{6}}{10}$　(8) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}-\sqrt{5}-1}{3}$　(9) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(10) $\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\frac{4(\sqrt{5}+1)}{4}=\sqrt{5}+1=$ 3.236……

同章第三節(第113頁)

(1) $2+\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{14}-\sqrt{2}$　(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{8}{2}}$

(4) $\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$ (5) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(6) 原式$=\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\Big\{\sqrt{7}+\sqrt{5}$

$-(\sqrt{5}+\sqrt{3})-(\sqrt{7}-\sqrt{3})\Big\}=0$

第十章第一節(第117頁)

(1) 5. (2) $\sqrt[3]{2}:\sqrt{2}$

(3) $\sqrt[3]{2}:\sqrt{2}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{\frac{2^2}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{1}{2}}<1$ (1ヨリ大ハ1ヨリ小ノ誤)

(4) 10,15 (5) 15, 20

(6) $4\times15\times49:9\times77\times64$ 即チ $35:528$

(7) $x:1=8^2:x^2$ $x=4$

(8) $2x^2+5xy-3y^2=0$ $(2x-y)(x+3y)=0$ $\therefore$ $2x=y$ 或ハ $x=-3y$

故ニ $x:y$ ハ $\frac{1}{2}$ 或ハ -3

同章第二節(第119頁)

(1) $(x+3)(x+4)=(x+1)(x+7)$ $\therefore$ $x=5$

(2) $63(x-1)(x^2+x+1)=62(x+1)(x^2-x+1)$ $63(x^3-1)=62(x^3$

$+1)$ $\therefore$ $x=5$

(3) x,y,z ガ連比例ヲナストスレバ $y^2=xz$ 然ルニ $y=36,x+z=78$

$\therefore$ $z+x=78$, $zx=36^2$ 之ヲ解キテ $x=24$, $z=54$

故ニ 24,36,54

(4) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ トスレバ $a=bk$, $c=dk$ ニテ

$a\sqrt{c^2+d^2}=bk\sqrt{d^2k^2+d^2}=bdk\sqrt{1+k^2}$ $c\sqrt{a^2+b^2}=$

$dk\sqrt{b^2k^2+b^2}=bdk\sqrt{1+k^2}$

(5) $a=bk$, $c=dk$ ヲ代入シテ各節ノ比ノ値ガ相等シキコトヲ證スベシ

(7) $a:b=b-b\div c=c:d$ 即チ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ トスレバ$a=bk$,b

$=ck$, $c=dk$, 故ニ $a=dk^3$, $b=dk^2$, $c=dk$ トシテ代入スベシ。

(8) $\sqrt{(a+b)^2(a-b)^2}=\pm(a+b)(a-b)$ 即チ a^2-b^2 或ハ $-(a^2-b^2)$

第十一章第一節(第124頁)

(1) $5+2\times(7-1)=17$ (2) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\times(10-1)=-10$

(3) $a+2d=8$, $a+7d=23$ $\therefore a=2$, $d=3$

(4) $\frac{20}{2}\times\Big\{2\times2+(6-2)\times(20-1)\Big\}=800$ (5) $\frac{40}{3}$

(6) n項ノ和ハ $\frac{n}{2}\Big\{1\times2+(n-1)\times2\Big\}=n^2$

(7) $\frac{n}{2}\Big\{3\times2+(n-1)\times1\Big\}=25$ 之ヲ解キテ $n=5$

(8) 100 以上シテ 100 ニ最モ近キ 6 ノ倍數ハ 102, 又1000 以下ニテ 1000 ニ最モ近キ 6 ノ倍數ハ 996 ナルユエ初項 102, 末項 996, 通差 6 ナル等差級數ノ和ヲ求ムレバヨシ。此項數ヲ n トスレバ 996

$=102+6(n-1)$

ニテ $n=150$ 故ニ $\frac{150}{2}\left\{102+996\right\}=142350$

(9) $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ 故ニ $\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}$ 由リテ $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$

$\therefore\ a:c=a-b:c-c$

同章第二節(第129頁)

(1) $18\times\left(\frac{9}{18}\right)^{8-1}=\frac{9}{2048}$ (2) $4\times\left(-\frac{10}{4}\right)^{6-1}=-\frac{3125}{8}$

(3) 通比ハ 3 ニテ $2\times\frac{3^6-1}{3-1}=728$ (4) $\frac{1}{5}\times\frac{1-(-\frac{2}{5})^n}{1-(-\frac{2}{5})}$

$=\frac{1}{7}\left\{1-(-\frac{2}{5})^n\right\}$

(5) $\frac{8}{1-\frac{1}{2}}=16$

(6) $\frac{1}{2-\sqrt{2}}\div\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

故ニ $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{1-\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2$

(7) $ar=-2,\ \frac{a}{1-r}=4\frac{1}{2}$ 之ヲ解キテ $r=-\frac{1}{3}$ ($\frac{4}{3}$ハ1ヨリ大ナルヲ以テ従テ $a=6$ $\therefore$ 6, $-2,\frac{2}{3},$ ………

(8) 挿入スベキ二數ヲ x,y トスレバ $4,x,y$ ハ等差級數ヲナスユエ $2x=4+y$ (1) 又 x,y 18 ガ等比級數ヲナスユエ $y^2=18x$ (2) (1)及(2)ヲ解キテ $x=8,\ y=12$ 或ハ $x=\frac{1}{2},\ y=-3$

(9) 通比ハ $\sqrt[4]{\frac{256}{1}}=\pm4$ 故ニ挿入スベキ項ハ 4,16,64 或ハ $-4,16,-64$

第十二章第一節(第135頁)

(1) $10\times9\times8\times7=5040$ (2) ${}_7P_7=5040$ 通 (3) ${}_5P_5=120$ 通

(4) 四數字ヲ悉ク用キテ作リ得ベキ數ハ ${}_4P_4$ 通アリ此中 2000 以下ノ數即チ 1 ガ最モ左ニ在ル場合ハ殘リノ三數字ガ種々順序ヲ變ズルダケ即チ ${}_3P_3$ 通アリ又 5000 以下ノ數ハ 5 ガ最モ左ニ在ル場合ニテ之ガ ${}_3P_3$ ダケアリ由リテ ${}_4P_4-{}_3P_3-{}_3P_3=12$ 通

(5) 特別ナル二人ノ中一人ヲ除キテ殘七人ガ一列ニ列ブ仕方ハ ${}_7P_7$ 通アリ此各列ニ於テ除キタル一人ヲ入ルレバヨシ此入レ得ベキ箇所ハ各人ノ間ト兩端トニテ合計八箇所アリ。サレド此中ニ在ル特別ナル一人ノ兩側ニハ入ルヽコト能ハザルユエ 6 箇所入リ得ル仕方アリ。故ニ

${}_7P_7\times6=3240$ 通

(6) ${}_rP^n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)=n\{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-1-(r-2))\}=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$

同章第二節(第136頁)

(1) $\underset{73}{C}=\frac{7!}{3!\,4!}=35$, $\underset{106}{C}=\frac{10!}{6!\,4!}=210$

(2) $\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot2\cdot3}=12\times\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}$ $n=5$

(3) 或ル一人ガ選マルヽ場合ヲ考フルニハ初メヨリ其一人ヲ除キ

テ殘十一人ノ內ヨリ委員四人ヲ選ミ猶此特別ナル一人ヲ委員ニ加ヘタルモノニテ十一人ノ內ヨリ四人ヲ選ム仕方ハ ${}_{11}\mathrm{C}_{4}=330$ ニテ此人ノ選マルヽ場合ハ 330 通アリテ選マレザル場合ハ ${}_{11}\mathrm{C}_{5}-330=462$ 通アル。

(4) 兵卒十人ノ內ヨリ三人ヲ選ム仕方ハ ${}_{10}\mathrm{C}_{3}=120$ 通アリ其一ツノ仕方ニツキ士官三人ノ中ヨリ一人ヲ選ム仕方 ${}_{3}\mathrm{C}_{1}$ 即チ三通ツツアリ故ニ求ムル仕方ノ數ハ ${}_{10}\mathrm{C}_{3}\times{}_{3}\mathrm{C}_{1}=360$

(5) 敎師一人生徒三人ガ選マルヽ場合ハ ${}_{20}\mathrm{C}_{3}\times{}_{5}\mathrm{C}_{1}$ ダケアリ。敎師三人生徒二人ガ選マルヽ場合ハ ${}_{10}\mathrm{C}_{2}\times{}_{5}\mathrm{C}_{2}$ ダケ.敎師三人生徒一人ガ選マルヽ場合ハ ${}_{20}\mathrm{C}_{1}\times{}_{5}\mathrm{C}_{3}$ ダケ.敎師ノ三四人ガ選マルヽ場合ハ ${}_{5}\mathrm{C}_{4}$ ダケアリ由リテ求ムル仕方ノ數ハ ${}_{20}\mathrm{C}_{3}\times{}_{5}\mathrm{C}_{1}+{}_{20}\mathrm{C}_{2}\times{}_{5}\mathrm{C}_{2}+{}_{20}\mathrm{C}_{1}\times{}_{5}\mathrm{C}_{3}+{}_{5}\mathrm{C}_{4}=7805$

(6) n 點ノ中ヨリ二點ヲ選ム仕方ハ ${}_{n}\mathrm{C}_{2}$ 即チ $\frac{n(n-1)}{2}$ ダケアリ由リテ直線ノ數ハ $\frac{n(n-1)}{2}$ ダケアリ。

(7) 角頂十アル中ヨリ二點ヲ選ミテ直線ヲ引キ得ル仕方ハ ${}_{10}\mathrm{C}_{2}$ ナリ。此中十邊形ノ邊ヲナスモノヲ除ケバ他ハ皆對角線ナリ由リテ對角線ノ數ハ ${}_{10}\mathrm{C}_{2}-10=35$ ナリ。

第十三章(第34頁)

(1) $(2x^2)^4+{}_{4}\mathrm{C}_{1}(2x^2)^3\times3+{}_{4}\mathrm{C}_{2}(2x^2)^2\times3^2+{}_{4}\mathrm{C}_{3}(2x^2)\times3^3+3^4=16x^8$

$+96x^6+216x^4+216x^2+27$ (2) 展開式ノ項數ハ $8+1=9$. アルユヱ中央項ハ第五項ニテ ${}_{8}\mathrm{C}_{4}x^4=70x^4$ (3) $(a+b)^n$ ニ於テ第 $r+1$ 番目ノ係數ハ ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$ ニテ終ヨリ計ヘテ第 $r+1$ 番目ハ初ヨリ第 $n-r+1$ 番目ナルユヱ此係數ハ ${}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$ ナリ然ルニ第 135 條ニ由リ ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$

(4) 初ノ三項ハ $a^{15}-{}_{15}\mathrm{C}_{1}a^{14}(x^2)+{}_{15}\mathrm{C}_{2}a^{13}(x^2)^2$ 即チ $a^{15}-15a^4x^2+105a^{11}x^4$ 終ノ三項ハ $-{}_{15}\mathrm{C}_{2}(a^2)^2(x^2)^{13}+{}_{15}\mathrm{C}_{1}a^2(x^2)^{14}-(x^2)^{15}$ 即チ $-105a^4x^{26}+15a^2x^{28}-x^{30}$

(5) 第 $r+1$ 項ハ ${}_{13}\mathrm{C}_{r}\,2^{13-r}(-3x)^r$ 即チ ${}_{13}\mathrm{C}_{r}\,2^{13-r}\times(-3)^r x^r$ 此 x^r ガ x^{12} ナル場合即チ r ガ 12 ナル場合ハ ${}_{13}\mathrm{C}_{12}\,2^{13-12}(-3)^{12}x^{12}$ ニテ係數ハ ${}_{13}\mathrm{C}_{12}\,2(-3)^{12}$ 即チ 26×3^{12} ナリ

(6) $99^4=(100-1)^4=100^4-{}_{4}\mathrm{C}_{1}\times1003\times1+{}_{4}\mathrm{C}_{2}\times100^2\times1^2-{}_{4}\mathrm{C}_{3}\times100\times1^3+1^4=100000000-4000000+60000-400+1=9605961$

(7) x^m ノ係數即チ第 $m+1$ 項ノ係數ハ ${}_{m+n}\mathrm{C}_{m}$ ニテ x^n ノ係數即チ第 $n+1$ 項ノ係數ハ ${}_{m+n}\mathrm{C}_{n}$ ナリ。然ルニ第135條ニ由リ ${}_{m+n}\mathrm{C}_{m}={}_{m+n}\mathrm{C}_{m+n-m}$

$={}_{m+n}\mathrm{C}_{n}$

第十四章(第　頁)

(1) 元金ヲ P トスレバ n 年後ノ元利合計ハ $\mathrm{P}\times(1+0.05)^n$ ニテ

$\mathrm{P}\times(1+0.05)^n=3\mathrm{P}$ 即チ $(1+0.05)^n=3$

$$\therefore\ n=\frac{\log3}{\log1.05}=\frac{0.47712}{0.02119}=22.5\cdots\cdots$$

即チ約ソ二十二年半.

(2) $\log P=\log 800-30\log(1+0\cdot05)=2\cdot26239$

$P=185\cdot09,\ 800-185\cdot09=614\cdot91$

即チ約ソ六百十四圓九十一錢

(3) $\dfrac{100}{0\cdot05}\left\{1-\dfrac{1}{(1+0\cdot05)^{15}}\right\}=1038$ 圓

(4) $\dfrac{100\times(1+0\cdot05)}{0\cdot05}\left\{(1+0\cdot05)^{10}-1\right\}=1321$ 圓

代數學解答 畢

明治四十四年七月十日印刷
明治四十四年八月廿五日發行

定價 金七拾五錢

編輯者 大日本普通學講習會編輯局
右代表者 東京市麻布區宮下町四十四番地 村瀨秉太郎

發行者 東京市京橋區南水谷町七番地 村瀨壽衛

印刷者 東京市京橋區南水谷町七番地 森潤二

印刷所 日進舍

發行所 東京市麻布區宮下町 帝國書院
大日本普通學講習會出版部

70

代数学講義

林　茂増／著