三角術

普通教育学会／著

三角術

普通教育學會著

全

東京修學堂

緒　　言

該書ハ又，受驗全書ノ一編トシ，中學生，及中學卒業生ノ爲メニ，物セルモノナリ。サレバ材ヲ多ク各官立學校ノ入學試驗問題ニ採リ，又殆ンド各種ノ問題ヲ，此一小冊子ニ集メシヲ以テ，諸氏ガ嘗テ修得セル，三角術ノ備忘志トシテ，書中載スル處ノ幾多ノ公式ト相俟チテ，常ニポッケット中ニ藏シテ益アルべキ信ズ。

明治四十年三月二十日

博覧會開會當日

著　者　誌

特71
683

目次

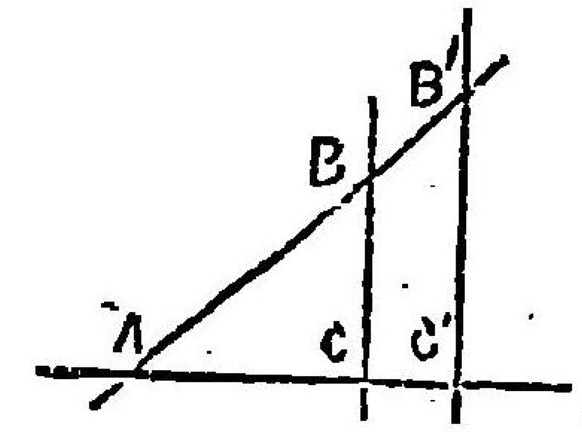
三角術目次

目次終

三角術

一 銳角の三角函數

一 三角函數 角 BAC が一定なれば、三角形 ABC; AB′C′, に於て、其邊の比は夫々相等しかるべし。即ち

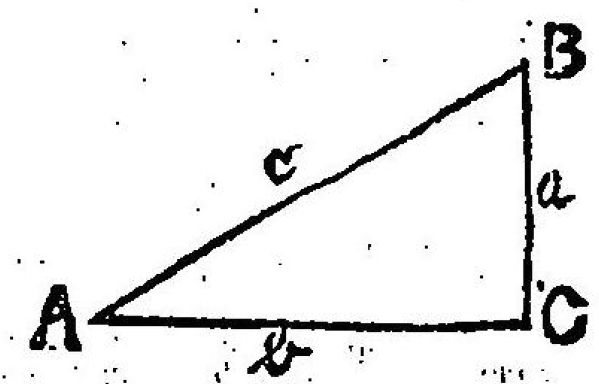


$$AB:AC=AB':AC'$$

$$AC:BC=AC':B'C'$$ 等の如し

而して此比は角の關係により異なるものにして邊の大さに關せず。即ち此比の値の變化は角の大小に由るかゝる函數を三角函數と云ふ

次に其比の名稱を擧げむ。



一　基礎の公式

Aのsine(正弦)　之を

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$$

Aの cosine(餘弦)　之を

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$$

Aの tangent(正切)　之を

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$$

Aの cotangent(餘切) 之を

$$\cot A=\frac{b}{a}$$

Aの secant(正割)　之を

$$\sec A=\frac{c}{b}$$

Aの cosecant(餘割)　之を

$$\mathrm{cosec}A=\frac{c}{a}$$

一　注意　此方程式を六線と稱し三角術の基本をなすものなり

二　注意　角 A,B,C, に對する邊を夫々 $a,b,c,$ とするは一般の定めなり

三　注意　$\tan A$ を往々 $tg A$ と書くことあり.

二　直接三角函數

角を與へて其角の函數を論ずるを云ふ. 次に論ずるは總て直接三角函數なりと知るべし.

二　定　理

$$\sin A.\mathrm{cosec}A=1$$

$$\cos A.\sec A=1$$

$$\tan A.\cot A=1$$

證明　$\sin A.\mathrm{cosec}A=\frac{a}{c}.\frac{c}{a}=1$

其他も仝樣なり

系　$\sin A=\frac{1}{\mathrm{cosec}A}$,　$\mathrm{cosec}A=\frac{1}{\sin A}$

$$\cos A=\frac{1}{\sec A},\quad \sec A=\frac{1}{\cos A}$$

$$\tan A=\frac{1}{\cot A},\quad \cot A=\frac{1}{\tan A}$$

三 定 理

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$$

證明 $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}=\frac{\sin A}{\cos A}$

$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{\cos A}{\sin A}$$

四 定 理

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$

$$1+\cot^2 A=\mathrm{cosec}^2 A$$

證明 前圖に由り $a^2+b^2=c^2$ なり之を c^2, b^2, a^2 にて夫々割れば得べし

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}$$

$$\therefore\quad \sin^2 A+\cos^2 A=1$$

五 餘角 與へられたる角と一直角との差を云ふ

六 一角と其餘角との三角函數の關係 前の圖に於て

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \cos B=\frac{a}{c}$$

$$\therefore\quad \sin A=\cos B$$

然るに $A+B=90°$, $B=90°-A$

$$\therefore\quad \sin A=\cos B=\cos(90°-A)$$

七 定 理

一角の *sine*＝其餘角の *cosine*

一角の *cosine*＝其余角の *sine*

一角の *tangent*＝其余角の *cotangent*

一角の *cotangent*＝其余角の *tangent*

一角の *secant*＝其余角の *cosecant*

一角の *cosecant*＝其余角の *secant*

例題一 $a=\sqrt{m^2+n^2}$, $b=\sqrt{2mn}$ なるとき $\sin A$ を求む

(解) $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\sqrt{m^2+n^2+2mn}}$$

$$=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\sqrt{(m+n)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}$$

二　$a=\sqrt{m^2+mn}$, $c=m+n$ なるとき $\tan A$ を求む。

(解)

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{a}{\sqrt{c^2+a^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{m^2+mn}}{\sqrt{(m+n)^2-(m^2+mn)}}$$

$$=\frac{\sqrt{m^2+mn}}{\sqrt{m^2+2mn+n^2-m^2-mn}}$$

$$=\frac{\sqrt{m^2+mn}}{\sqrt{mn+n^2}}$$

三　$\tan A=\frac{11}{3}$, $b=\frac{27}{11}$ なるときcを求む

(解)

$$c\tan A=\frac{a}{b},\quad \frac{11}{3}=\frac{a}{\frac{27}{11}}$$

$$\therefore\quad a\frac{11}{3}\cdot\frac{27}{11}=9.$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9^2+\left(\frac{27}{11}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{9^2\times 11^2+27^2}{11^2}}=\frac{\sqrt{10530}}{11}$$

$$=\frac{\sqrt{81\times 130}}{11}=\frac{9}{11}\sqrt{130}$$

四　$\cot A\cos A+\sin A=\operatorname{cosec} A$ なることを証せ.

(解)

$$\cot A\cos A+\sin A=\frac{\cos A}{\sin A}\cos A$$

$$+\sin A=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A}$$

$$=\frac{1}{\sin A}=\operatorname{cosec} A$$

五　$(1-\tan A)^2+(1-\cot A)^2$

$$=(\sec A-\operatorname{cosec} A)^2$$

なることを證せ

(解)　$(1-\tan A)^2+(1-\cot A)^2$

$$=1-2\tan A+\tan^2 A+1-2\cot A+\cot^2 A$$

$$=1+\tan^2 A-2(\tan A+\cot A)+\cot^2 A+1$$

$$=\sec^2 A-2\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)+\operatorname{cosec}^2 A$$

$$=\sec^2 A-2\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}+\operatorname{cosec}^2 A$$

$$=\sec^2 A-2\frac{1}{\cos A\sin A}+\operatorname{cosec}^2 A$$

$$=\sec^2 A-2\sec A\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}^2 A=(\sec A-\operatorname{cosec} A)^2$$

六　α と β とが互に餘角なるとき次式を證せよ

$\cos^3\alpha+\cos^3\beta$

$$=(\sin\alpha+\sin\beta)(1-\sin\alpha\sin\beta)$$

(解)　$\cos^3\alpha+\cos^3\beta$

$$=(1-\sin^2\alpha)\cos\alpha+(1-\sin^2\beta)\cos\beta$$

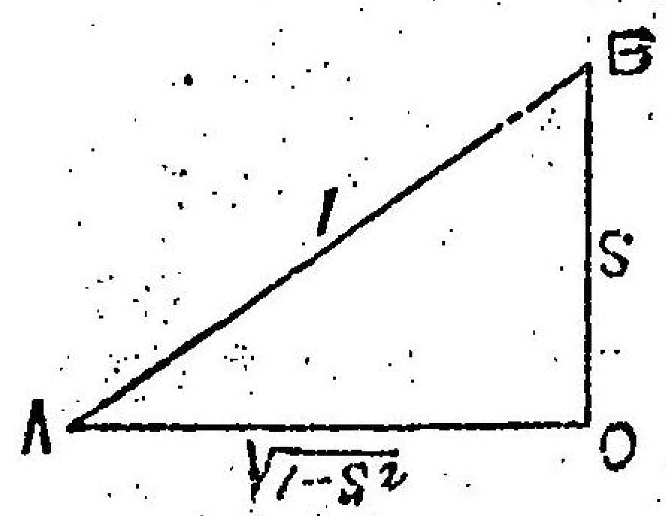
$$=(1-\sin^2\alpha)\sin\beta+(1-\sin^2\beta)\sin\alpha$$

$$=\sin\beta+\sin\alpha-\sin^2\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin^2\beta$$

$$=(\sin\alpha+\sin\beta)(1-\sin\alpha\sin\beta)$$

八　一角の三角函數が與へられし時其他の函數を求むること

一　總ての函數を正弦の項にて表はすこと.



幾何學的には AB=1として ABC なる直角三角形を作れ

然れば BC=S とすれば.

$$sinA=\frac{AC}{AB}=\frac{S}{1}=S,$$

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{1-S^2}$$

$$cosA=\sqrt{1-S^2}=\sqrt{1-sin^2A}$$

$$tanA=\frac{S}{\sqrt{1-S^2}}=\frac{sinA}{\sqrt{1-sin^2A}}$$

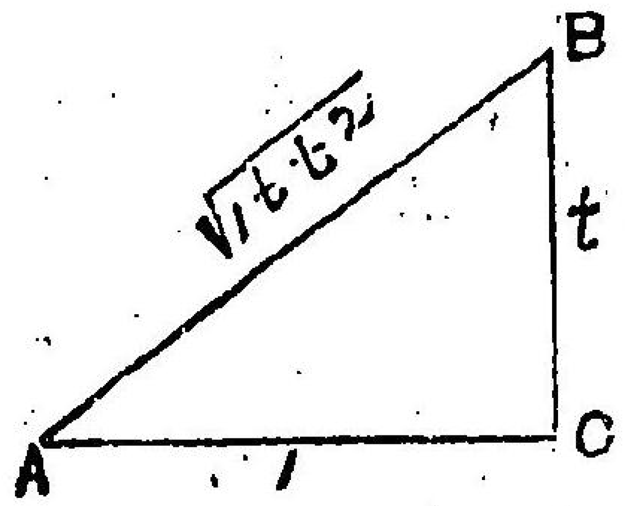
代數學的に表はせば

$$sin^2A+cos^2A=1$$

なるを以て

$$cosA=\sqrt{1-sin^2A}$$ 等なり

二　總ての函數を正切の項にて求むること



幾何學的には

$AC=1$

$BC=t$

とすれば

$$tanA=\frac{BC}{AC}$$

$$=\frac{t}{1}=t,\quad AB=\sqrt{1+t^2}$$

$$sinA=\frac{BC}{AB}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$=\frac{tanA}{\sqrt{1+tan^2A}}$$

$$cosA=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+tan^2A}}$$

代數學的に表せば

$$sinA=\frac{1}{cosecA}=\frac{1}{\sqrt{1+cot^2A}}$$

$$=\frac{tanA}{\sqrt{tan^2A+1}}$$ 等なり

二　對　數

一　對數の定義　或數の對數とは他の一定數を若干乘すれば之の數と等しくなるとき，其指數を或數の對數と云ふ。

一　稱呼　$a^x=n$ に於て，x は n の對數なりと云ふ。之を次の如く書

く。

$$\underbrace{x}_{\text{對數}}=\log_{\underbrace{a}_{\text{底數}}}\underbrace{n}_{\text{眞數}}$$

二　常用對數　對數の性質は底數の取方に由りて異なれども．普通三角術に於て用ふる處は常用對數なり．之は底數10を以てす。

例一　10を底數とする對數4の眞數を求む．

（解）　$10^4=10000$　即ち眞數は10000なり

三　定理　積の對數は其因數の對數の和に等し．

$$\log_a(p\times q\times r\times\cdots\cdots)$$
$$=\log_a p+\log_a q+\log_a r+\cdots\cdots$$

證明　$a^x=p\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$\therefore\quad x=\log_a p\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$a^y=q\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$\therefore\quad y=\log_a q\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$\therefore\quad a^{x+y}=p\times q$

$\therefore\quad x+y=\log_a(p\times q)$

然るに　$x+y=\log_a p+\log_a q$

同樣にして多くの因子の場合も之を證するを得．

四　定理　分數の對數は分子の對數より分母の對數を減ぜし差に等し

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n$$

證明　$a^{x-y}=\dfrac{m}{n}$

$\therefore\quad x-y=\log_a\dfrac{m}{n}$

然るに　$x-y=\log_a m-\log_a n$

五　定理　或數の若干乘の對數は其對數と指數との積に等し．

$$\log_a m^k=k\log_a m$$

證明　$m^k=(a^x)^k=a^{kx}$

$\therefore\quad kx=\log_a m^k$

$k.x=k.\log_a m$

六　定理　或數の若干根の對數は其數の對數を根數にて除したるもの

に等し.

$$\log_a m^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{k}\log_a m$$

證明　$a^{\frac{x}{k}}=m^{\frac{1}{k}}$ とす

$$\frac{x}{k}=\log_a m^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{x}{k}=\frac{1}{k}\log_a m$$

注意　常用對數を用ふるときには底數 10 は普通之を省略す

例題　$x=\log 6$　x を求む

(解)　$\log 6=\log(2\times3)$

$=\log 2+\log 3$

$=\cdot3010300+\cdot4771213$

$=\cdot7781513$

二　$x=\log\frac{7}{3}$　x を求む

(解)　$\log\frac{7}{3}=\log 7-\log 3$

$=\cdot8450980=\cdot4771213$

$=\cdot3679767.$

三　$x=\log 3^5$　x を求む

(解)　$\log 3^5=5\times\log 3$

$=5\times\cdot4771213$

$=2\cdot3856065.$

四　$x=\log\sqrt[3]{\frac{12}{17}}$　x を求む

(解)

$$\log\sqrt[3]{\frac{12}{17}}=\log\left(\frac{3\times4}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\log\frac{3\times4}{7}$$

$$=\frac{1}{3}\times(\log 3+\log 4-\log 7)$$

$$=\frac{1}{3}\times\cdot2340833=\cdot0780278.$$

五　$x=\log_a n$　$y=\log_b n$　なれば $\log_b a.\log_a b=1$ なることを證せ

(解)　$x=\log_a n$, $y=\log_b n$ なる故

$$n=a^x=b^y$$

$$a^{\frac{x}{y}}=b\quad b^{\frac{y}{x}}=a\quad \frac{x}{y}=\log_a b$$

$$\frac{y}{x}=\log_b a$$

$$y=x.\log_b a=\frac{x}{\log b}$$

$\therefore\ \log_b a=\log_a b$...

六 $a^{\log b}=b^{\log a}$ なることを証せ

(解) $\log a^{\log b}=\log b.\log a$

$=\log a.\log b=\log b^{\log a}$

七 任意の數の對數

任意の數の對數は小數又は帶小數なり

$10^0=1$ $10^1=10$ $10^2=100$

$10^3=1000$ 等

$\log 1=0$ $\log 10=1$ $\log 100=2$

$\log 1000=3$ 等

$10^{-1}=\cdot1$ $10^{-2}=\cdot01$

$10^{-3}=\cdot001$ $10^{-4}=\cdot0001$ 等

$\log\cdot1=-1$ $\log\cdot01=-2$

$\log\cdot001=-3$ $\log\cdot0001=-3$ 等

故に此間の數は或る小數を有すべし例へば 1 と −1 との間に於ては其對數は 0 と −1 との間の數即ち

−1＋小數なるが如し，對數表は之を計算して表に作れるものなり.

八 指標 假數

或る數の整數部分を指標と云ひ小數部分を假數と云ふ. 例へば 3·12567 に於て 3 は指標にして ·12567 は假數なるが如し.

一 注意 1 より大なる數の對數の指標は整數の位より 1 少し

二 注意 1 より小なる數の對數の指標はコンマ以下の 0 の數より 1 多し

系 $\log\frac{n}{10^k}=\log n-k$

例へば $\log 2723=3\cdot43505$ ならば

$$\log\frac{2723}{10^2}=3\cdot43505-2$$

$$=1\cdot43505$$

三 注意 對數を除すること

對數を除するには指標は常に割り切れる樣に導くべし

例題一　$log\cdot 0015627=\bar{3}\cdot 1938756$

なるとき $log\cdot 0015627^{\frac{1}{7}}$ を求めよ

(解)

$$log\cdot 0015627^{\frac{1}{7}}=\frac{1}{7}log\cdot 0015627$$

$$=\frac{1}{7}(-3+\cdot 1938756)$$

$$=\frac{1}{7}(-7+4\cdot 1938756)$$

$$=-1+\cdot 59912508$$

$$=\bar{1}\cdot 5991251$$

九　比例部分の定則　二つの眞數及び其各の對數ありて，夫々の差が甚だ小なるときには，二つの眞數の比は其各の對數の比に等し．

例題　176537 の對數を求めよ

(解)　表に由りて之を夾む最も近き二つの數を求め其對數を取れば，九の規則に成りて．

$$\begin{array}{l} log176530=5\cdot 2468185 \\ log176540=5\cdot 2468431 \\ \hline 10\qquad\ \ \cdot 0000246 \end{array}$$

更に

$$\begin{array}{l} log176537 \\ log176530 \\ \hline \qquad 7 \end{array}$$

$$10:7=\cdot 0000246:x$$

$$x=\frac{7\times\cdot 0000246}{10}=\cdot 00001722.$$

$$\therefore\ log176537=5\cdot 2468185$$
$$+\cdot 0000172$$
$$=5\cdot 2468357.$$

二　對數 2.2527777 の眞數を求めよ

(解)　表によつて 2527777 を夾む最近き對數を求め夫に對する眞數を比較すれば，

$$\begin{array}{l} 2\cdot 2527560=log178\cdot 96 \\ 2\cdot 2527802=log178\cdot 97 \\ \hline \cdot 000242 \qquad\qquad \cdot 01 \end{array}$$

更に

$$\begin{array}{l} 2\cdot 2527777 \\ 2\cdot 2527560 \\ \hline \cdot 0000217 \end{array}$$

$$\therefore\ 242:217=\cdot 01:x$$

$$x=\frac{217\times 01}{242}=\cdot 0089$$

∴ 2·2522777

0.+96.871(log=089)

=log178·9689.

注意　最等の場合に於て.端數は常に四捨五入して表の桁さ同じにすべし.

十　三角函數及び其對數

或る一定の角に對しての三角函數は一定の値を有せり.例へば $\cos 60^\circ$ は 0.5 $\tan 60^\circ$ は $\sqrt{3}$ なる如し.之は表に上せあり.

而して此三角函數の値を眞數としたる其對數を用ふるこさは非常に便なり.故に或る角に對する三角函數の對數を其角よりして直に求め得らるゝ表が作らるゝ由て又逆に.其對數よりして夫に對する角を求むるこさを得べし.

一　注意　比例部分の定則は此場

合にも成立つ.

二　注意 *sine cosinen* の値は常に1よりも大ならず.又*tangent, cotangent* に於ても $0^\circ-45^\circ$ に於ては 1 よりも大ならず.故に之等の對數の指標は負なり.然れども表に於ては.かく記すは不便なるを以て.之に 10 を加ふるこさゝせり.之を表對數と云ふ.故に之には皆 10 を加へあるものさ知るべし.

三法意

（イ）角を與へて*sine, tangent*,或は其對數を求むる場合には.表中之を求む二つの角の中.小さき角の *sine, tangent* 或は其對數に比例部分を加ふべし.

（ロ）*cosine, cotangent* 或は其對數を求むる場合には.小さき角の *cosine, cotangent* 或は其對數より比例部分を減くべし.

四　注意

三角函數或は其對數を與へて．之に適する角を求むる場合には．先づ表中之を夾む二つの角の中．小さき角の函數或は其對數と．與へられたる數さの差を見出せ．而して此差に由て比例部分を計算し．之を小き角に加ふべし

五　注意　對數のこさは普通對數表の初めに其引方を記載しあるを以て．之を熟讀し．力めて多く練習すべし．

例題一　$\sin 34^\circ 17' 45''$ の眞數を求む．

(解)　$\sin 34^\circ 17' = \cdot 5632857$

$\sin 34^\circ 17'' 45'' = \cdot 5632857 + x$

$isn 34^\circ 18' = 563260$

$\therefore\ 1' : 45'' = .0002403 : x$

$x = \dfrac{45 \times \cdot 0002403}{60} = \cdot 0001802$

$\therefore\ \sin 34^\circ 17' 45''$

$= \cdot 5632857 + \cdot 0001802$

$= \cdot 5634659.$

二　$\cot 34^\circ 12' 42''$ の眞數を求む

(解)　$\cot 34^\circ 12' = 1 \cdot 4714553$

$\cot 34^\circ 12' 42'' = 1 \cdot 4714553 - x$

$\cot 34^\circ 13' = 1.4705350$

$\therefore\ 60 : 42 = \cdot 0009203 : x$

$x = \cdot 0006442$

$\therefore\ \cot 34^\circ 12' 42'' = 1 \cdot 4714553 - \cdot 0006442$

$= 1 \cdot 4708111$

三　$\tan\theta = \cdot 6808932$ なるさきθを求む

$\tan 34^\circ 15' = \cdot 6808758$

$\tan 34^\circ 15' + x = \cdot 6803932$

$\tan 34^\circ 16' = \cdot 6813016$

$\therefore\ \cdot 0004258 : 680932 - \cdot 6808758$

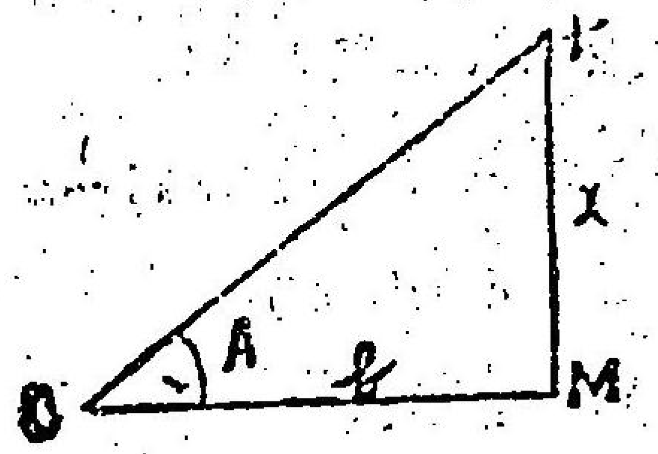
$= 60'' : x$

$x = 2 \cdot 4$

$\therefore\ \cdot 6808932 = \tan 34^\circ 15' 2 \cdot 4''$

三 物体の高さ及び距離

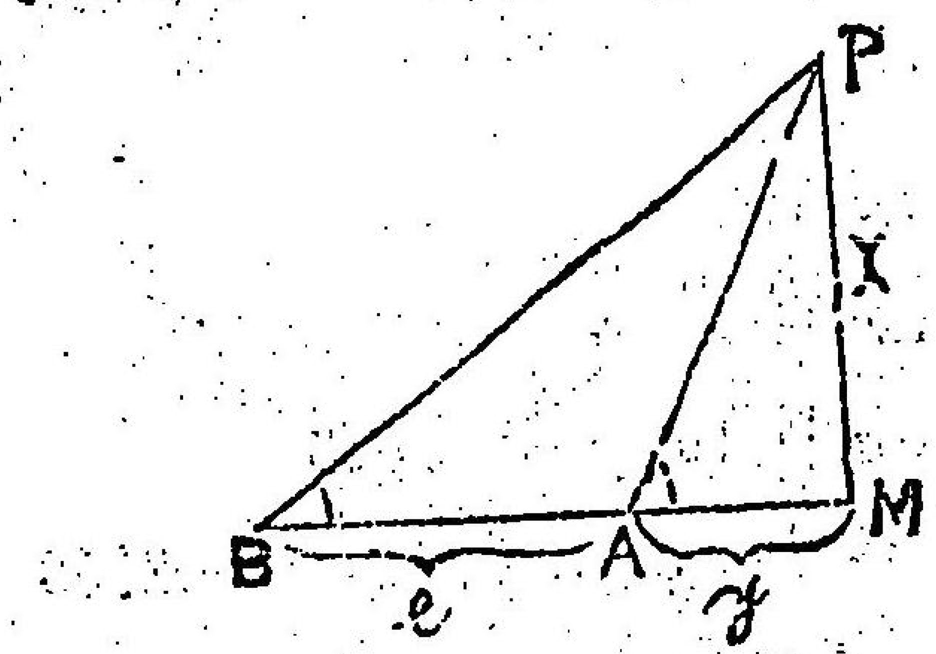
一 圖に於て l, $\angle A$ を知りて x を求むること



$$\frac{x}{l}=\tan A$$

$$x=l\tan A$$

二 l, $\angle A$, $\angle B$ を知りて x 及び y を求むること



$$\frac{BM}{x}=\cot B$$

$$\therefore\quad BM=x\cot B$$

$$\frac{AM}{x}=\cot A$$

$$\therefore\quad AM=(x\cot A)$$

$$x(\cot B-\cot A)=BM-AM=l$$

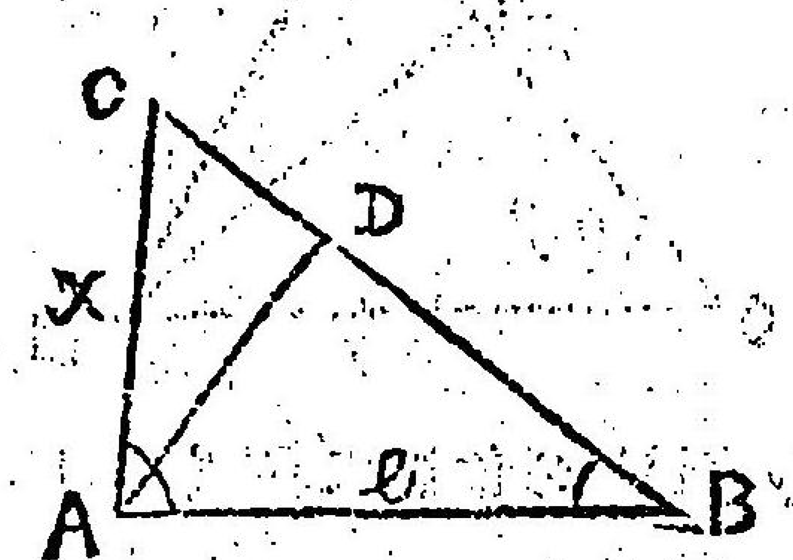
$$x=\frac{l}{\cot\beta-\cot A}$$

更に

$$\frac{y}{x}=\cot A \qquad y=x\cot A$$

$$\therefore\quad y=\frac{l\cot A}{\cot B-\cot A}$$

三 l, $\angle A$, $\angle B$ を知りて x を求む



$$\frac{AD}{AB}=\sin B$$

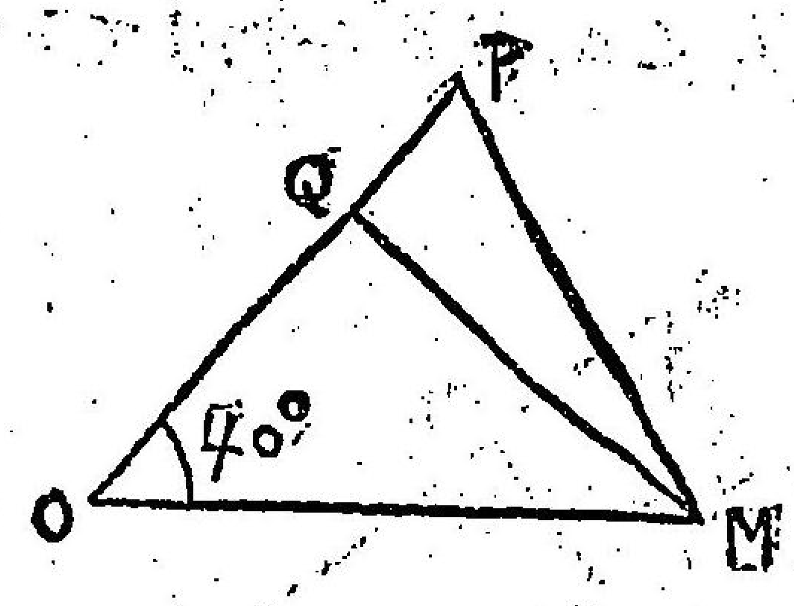
$$\frac{AD}{AC}=\sin C$$

$$\therefore\quad \frac{AC}{AB}=\frac{\sin B}{\sin C} \qquad x=l\frac{\sin B}{\sin C}$$

例題一　∠POM＝40°をなす二本の棒あり。之に與へられたる長さの棒を入れて三角形を作り．底邊 OM を最大ならしめんとす．棒を如何なる位置に置くべきか．

(解)　$\frac{MQ}{OM}=\sin 40^\circ$

∴　$OM=\frac{MQ}{\sin 40^\circ}$



棒を MP の位置に置くとし垂線 MQ を引け．

$\sin 40$ は一定なる値なり．故に OM を最大ならしめんとすれば．MQ を最大ならしむるを要す．

MQ が最大なる爲めには棒 MP が此位置に來る時なり．

即ち　∠MPQ は直角なるを要す

故に棒は水平面と 50° の角をなすとき OM が最大なり

二　平地上 250「メートル」の山上より觀測者と同一垂直面にある平地上の二點を望み．俯角 28°，及び 33°,2を得たり．二點間の距離を求む．

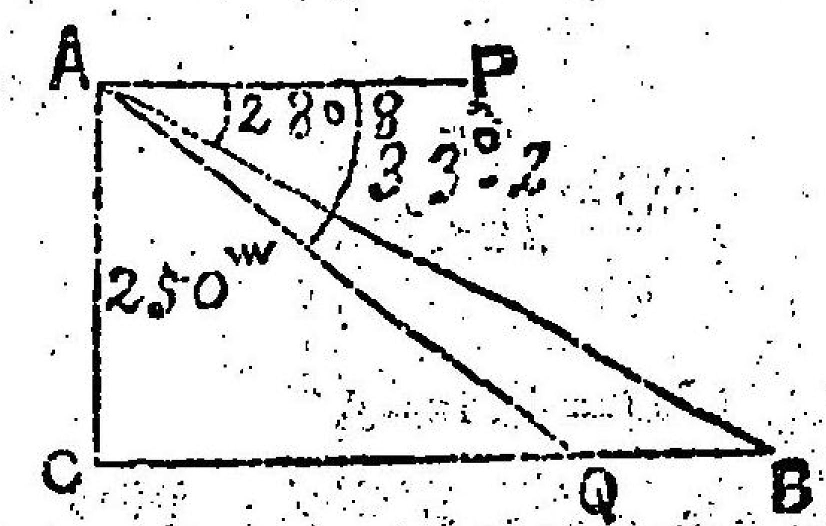
(解)　$AC=250^m$，

$\angle PAB=28^\circ 8$

$\angle PAQ=33^\circ,2$

∴　$\angle ABQ=28^\circ 8$,

$\angle AQC=33^\circ 2$



△ABC に於て $BC=AC\cot 28^\circ 8$

△AQC に於て $QC=AC.\cot 33^\circ.2$

∴　$BD=BC-QC$

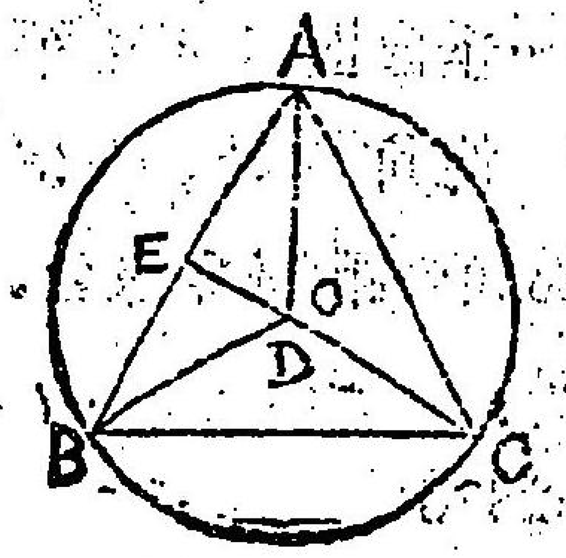
$=AC(\cot 28^\circ 8-\cot 33^\circ.2)$

$$=250^m(\cot 28°.8-\cot 33°.2)$$

表によりて之を計算せば

EQ=73「メートル」

三　正三角形ABCの外接圓の中心Oより其三角形の平面に垂線ODを立て、OD=ABならしむるときは面ABCと面ABDとの爲す角の余弦を求む。



(解)　$EC=AC\sin 60°$

$$EC=\frac{\sqrt{3}}{2}AC$$

$$\therefore \quad EO=\frac{AC}{2\sqrt{3}}$$

$$OD=AB=AC$$

直角三角形EDOに於て、

$$ED=\sqrt{\overline{EO}^2+\overline{OD}^2}$$

$$=\sqrt{\frac{\overline{AC}^2}{12}+\overline{AC}^2}$$

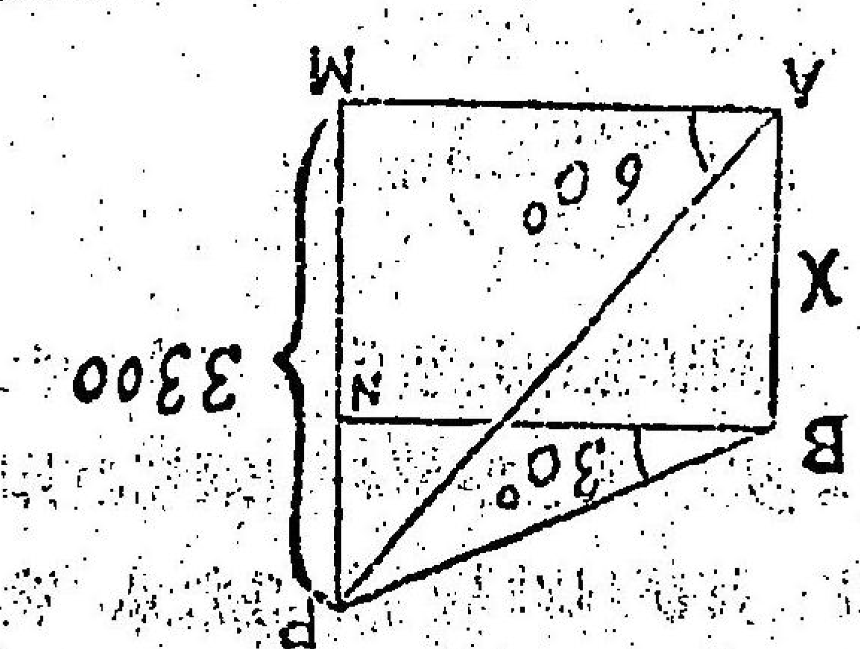
$$=\sqrt{\frac{11\overline{AC}^2}{12}}=\frac{AC}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$$

∠DEOはABC及びEDOの二面を測る角なり

$$\cos DEO=\frac{EO}{ED}$$

$$=\frac{AC}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{AC}\sqrt{\frac{3}{11}}=\frac{1}{\sqrt{11}}$$

四　水平面上の一點Aより高さ3300呎の山頂を望み仰角60°を得たり。今Aより放ちたる空中飛行機が眞上に上ること5分にて仰角を測り30°を得たり。空中飛行機毎時速度如何。



(解)　$\frac{AM}{3300}=\cot 60°$

∴ $AM=3300\cot 60°$

$$\frac{BN}{3300-x}=\cot 30°$$

$$BN=(3300-x)\cot 30°$$

∴ $3300\cot 60°=(3300-x)\cot 30°$

$$x=\frac{3300(\cot 30°-\cot 60°)}{\cot 30°}$$

$$=\frac{3300\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}$$

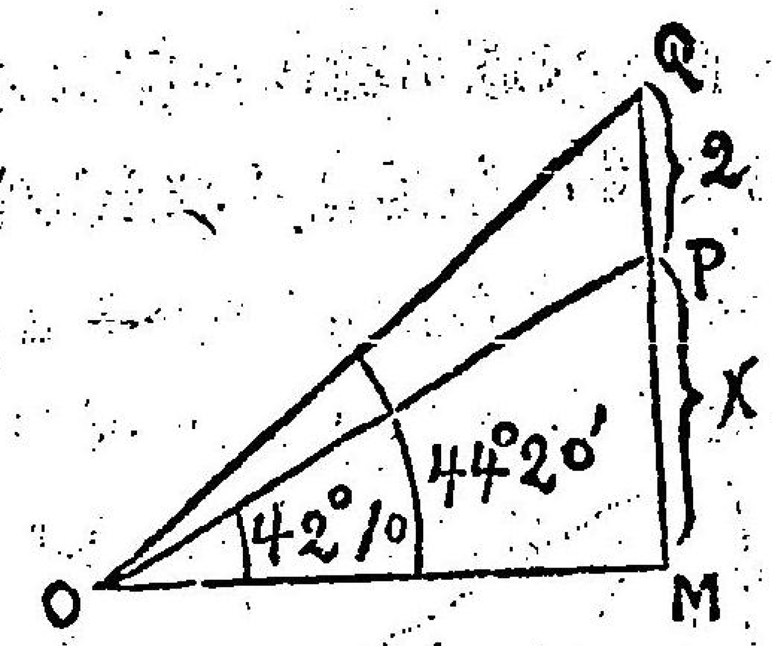
$$=\frac{3300(3-1)}{3}=2200$$

$$\frac{60}{5}\times 2200=26400\text{呎}$$

$$=\left(\frac{26400}{5280}\right)=5\text{哩}$$

四　平面地上より丘上に立てたる長さ2丈の旗竿を望み．兩端の仰角44°20′及び42°10′を得たり．然らば丘の高さ如何．

（解）



$$\frac{OM}{x+2}\cot 44°20'$$

∴ $OM=(x+2)\cot 44°22'$

又　$\frac{OM}{x}=\cot 42°10'$

∴ $OM=x\cot 42°10'$

∴ $(x+2)\cot 44°20'=x\cot 42°10'$

表にりて $\cot 44°20'=1.0235$,

$\cot 42°10'=1.1041$

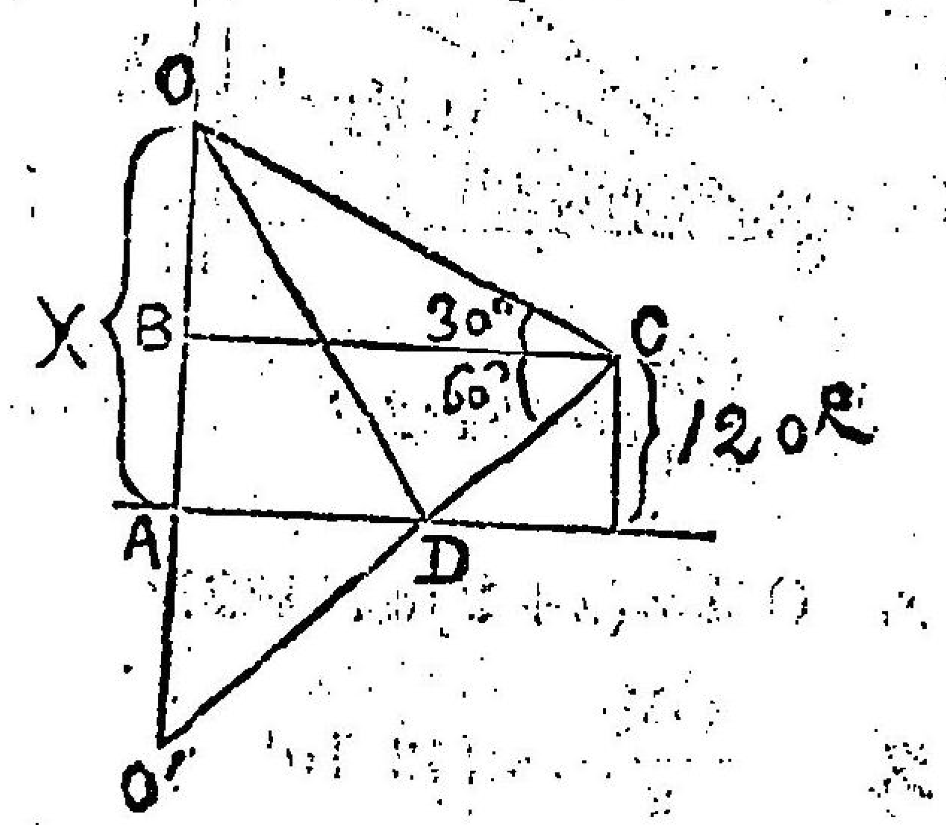
∴ $x=\frac{2\cot 44°20'}{\cot 42°10'+\cot 44°20'}$

$$=\frac{2\times 1\cdot 0235}{1\cdot 1041-1\cdot 235}$$

$$=25.4\text{丈}$$

五　輕氣球あり湖水面より120尺の高所にて之を望み．仰角30°を得

たり．而して湖水面に投影せるものを望みて 60° を得たり．輕氣球の高さ如何．



(解) $BC\tan 30° = OB = x - 120$

$BC\tan 60° = BO' = x + 120$

初めの式を次の式にて割れば

$$\frac{\tan 30°}{\tan 60°} = \frac{x-120}{x+120}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{x-120}{x+120}$$

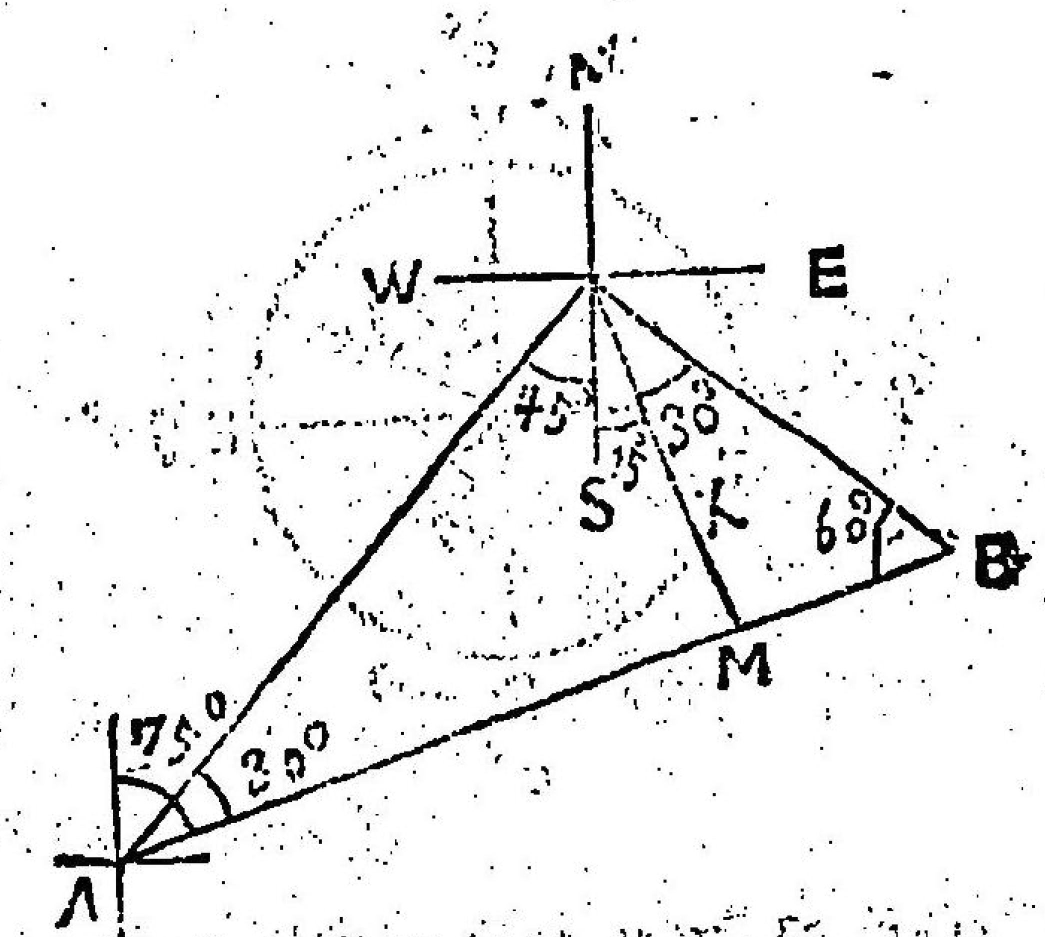
$\therefore\ x+120 = 3(x-120),\ 2x = 480$

$x = 240$尺

六　二岬角 AB の距離は 12浬に

して AB の方向は N75°E なり．毎時 10 浬の速度にて S15°E の方向に走る船が或る處にて A を S.W に B を S.E に見たり．然らば船が AB の線を横ぎるには何程の距離を行るべきか．

(解) $\angle AOB = 45° + 45° = 90°$



$\angle BAO = 75° - 45° = 30°$

$\angle ABO = 90° - 30° = 60°$

$\angle OMB = 45° + 15° + 30°$

$= 90°$

求むる距離 OM を x にて表せば

$AM = x\cot 30^\circ$

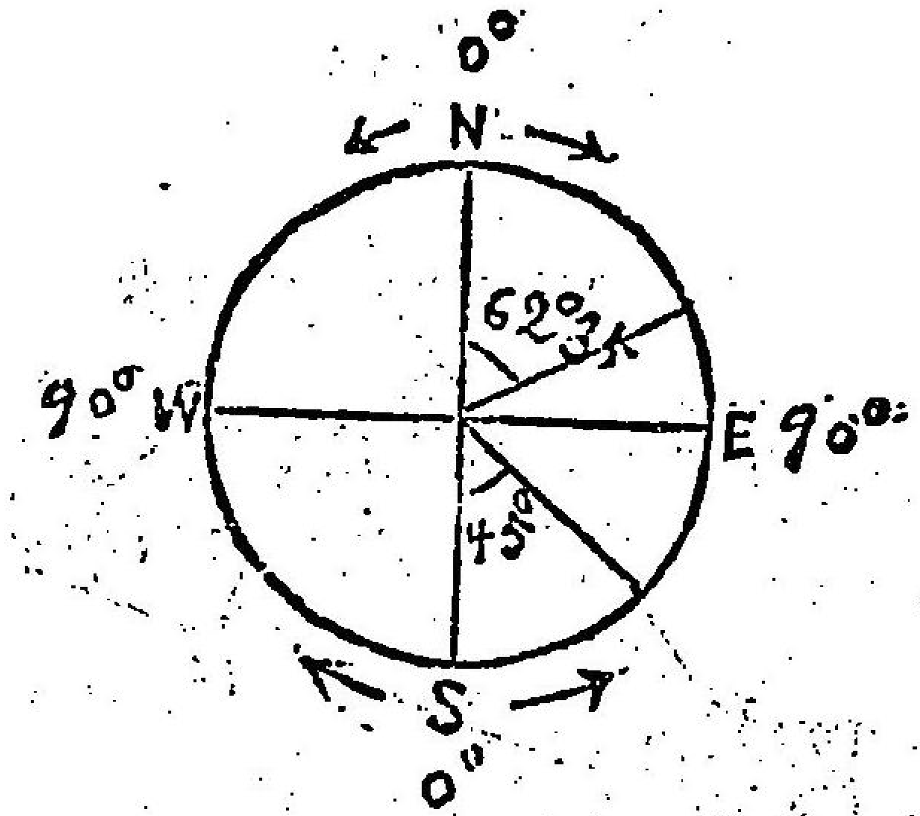
$BM = x\cot 60^\circ$

$AM + BM = x(\cot 30^\circ + \cot 60^\circ)$

$12 = x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore \quad x = 3\sqrt{3}$

注意　方角を表すは次の如し



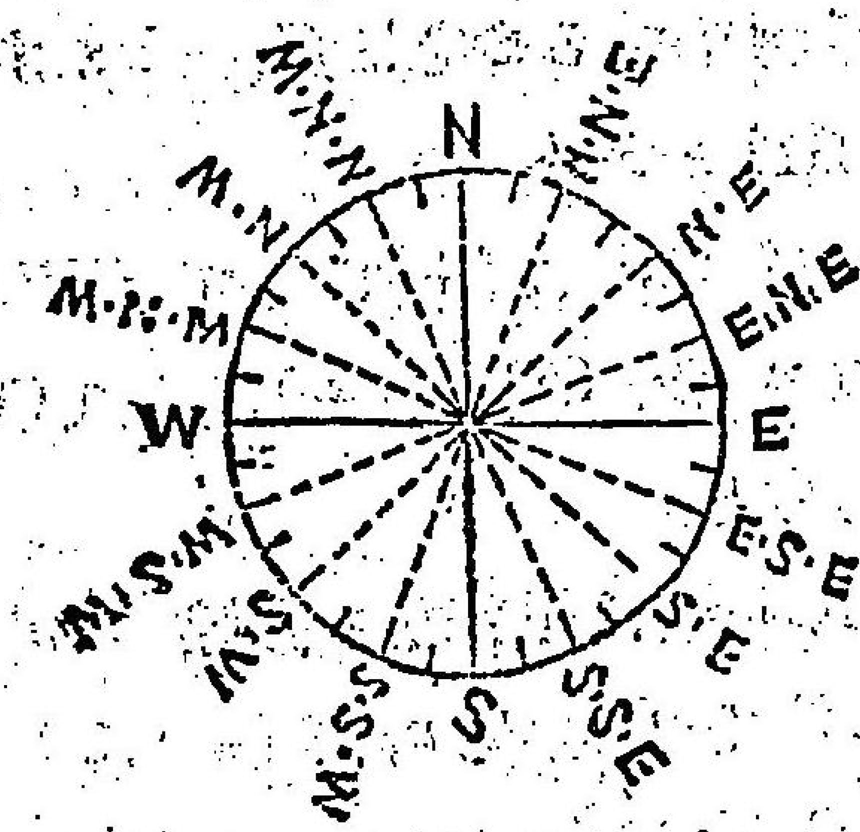
凡てＮ及びＳより讀み初む．故に圖の如き方角にては．之を表はすには下の如し

N62°.35′E

S45°E 等

又之を呼ぶに次の圖の如く云ふも

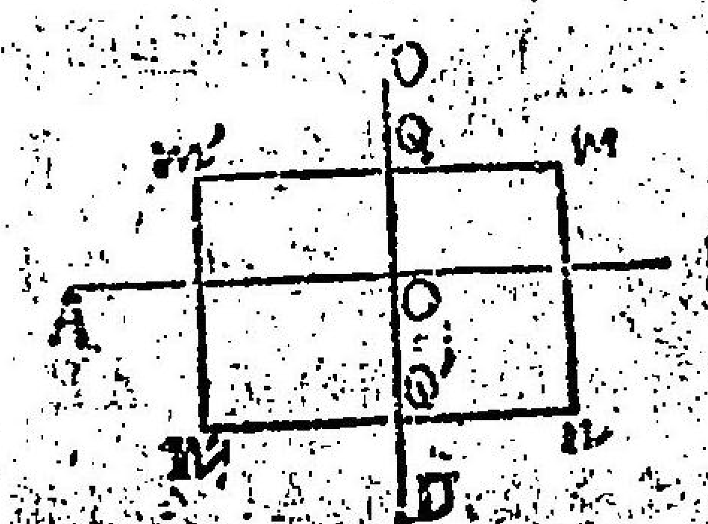
宜し．



四　任意の角の三角函數

一　正負のこと　三角函數を取扱ふに於て．或る直線．圓弧．角の位置を定むるに當りて．正負の適用を次に述ぶべし．

一　直線の正負　先づＯに於て直角に交る二つの軸 AB, CD を取り之より上又は右

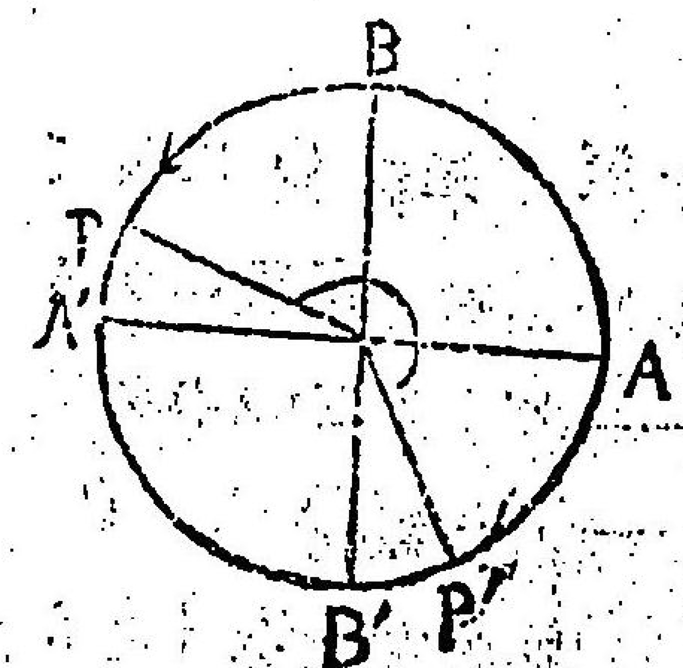


に測りたるときは．正(+)とし．下又は左に測りたるときは負(−)とす．O を原点と云ふ

例へば OP は(+)にして OP′ は(−)なり．又 OQ は(+)にして OQ′ は(−)なり．

又 AB 軸に平行なる直線 mm', nn' に於て Qm, Q′n, は(+)にして Qm', Q′n' は(−)なり．又 BB′ と平行なる直線 mn, $m'n'$ に於ては．Pm, P′m' は(+)にして Pn, P′n' は負なるが如し．

第二 圓弧及び角の正負　回轉線 OP が原点 O を中心として．OA より初めて廻轉するときは．一つの圓周を畫くべし．而して A より初めて．AB の方向に進むときは．弧 AP 又は角



AOP の如きを(+)とし．若し AP′ の方向に進むときは弧AP′，角AOP′ の如きを(−)とす．之は何回廻るも全じことなり．

一．注意　廻轉線は其位置の如何に關せず常に正なりとす．

二　注意　弧 AP を正弧．角AOP を正角．弧AP′ を負弧，角 AOP′ を負角と云ふことあり．

三　注意　前圖に於ける如く．AA′, BB′ にて分たれたる四分圓を象限と云ふ．而して原点 A より初めて正の方向に．第一．第二．第三．第四象限と云ふ

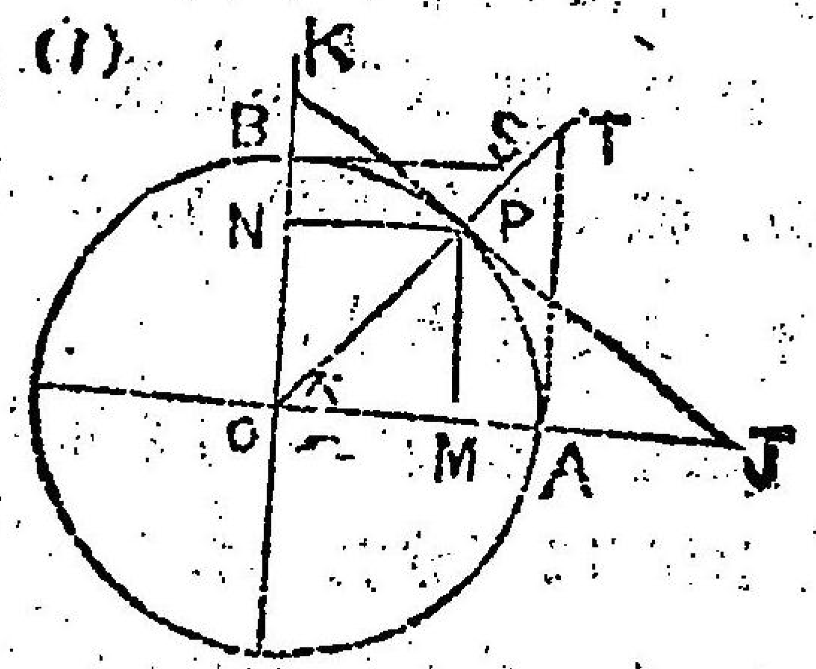
四　注意　180° を π なる記符を以て表す．故に 360° は 2π なり

但し π は元來直徑と圓周との比なり．故に半徑1なる圓に於ては圓周は實に 2π なり．然るに 2π なる圓周は四直角に對せるを以て．π を以て又2直角の代用とせり

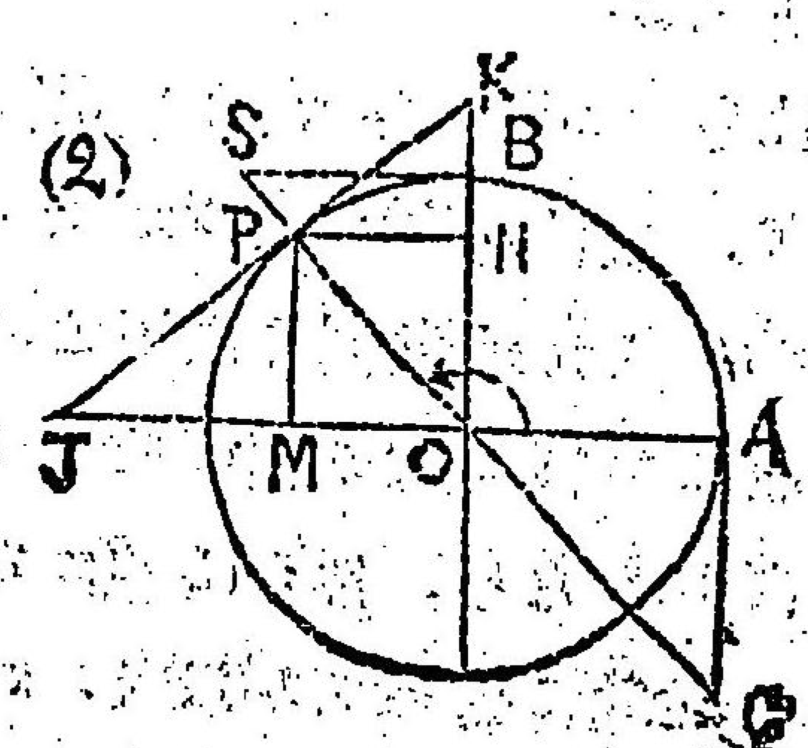
二 任意の弧の三角函數

次の四圖は半徑を 1 とせる圓なりとす. OA, OB が互に垂直に交れりとし. 弧 AP を θ とすれば. 任意の三角函數を幾何學的に表し得.

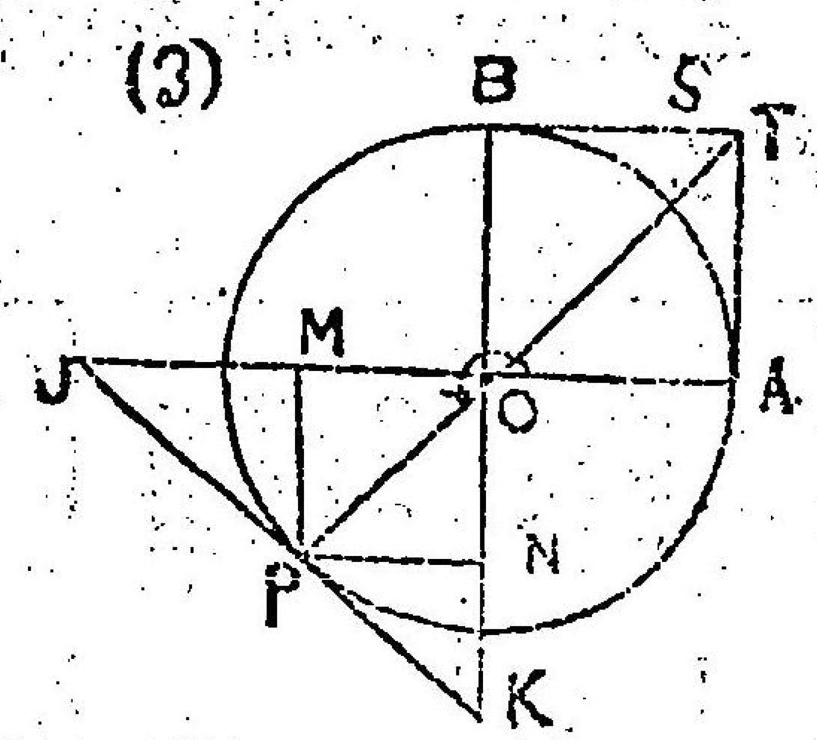
(1)



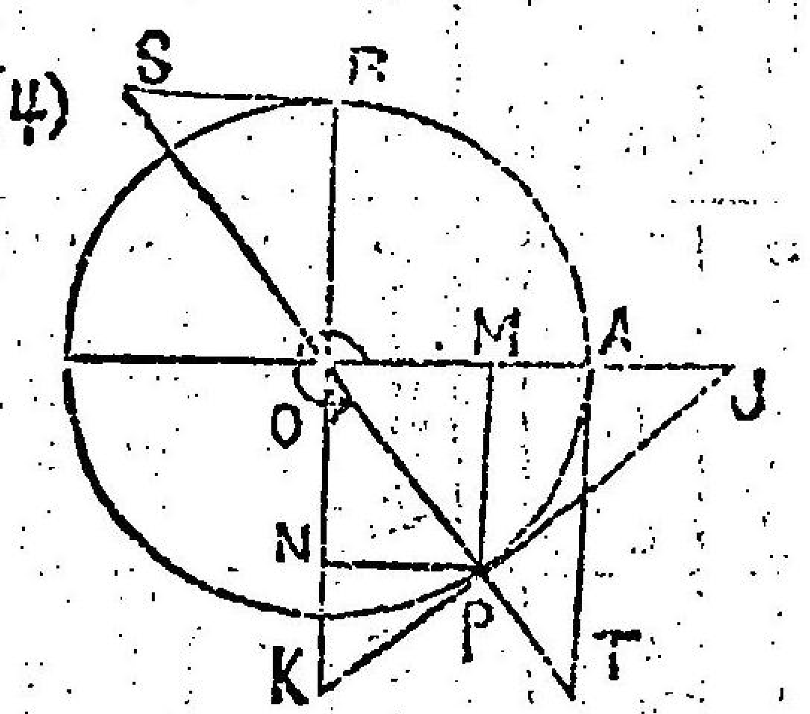
(2)



(3)



(4)



$\sin\theta = PM$, $\cos\theta = OM$

$\tan\theta = AT$ $\cot\theta = BS$

$\sec\theta = OT$ $\mathrm{cosec}\,\theta = OK$

注意 任意の角の三角函數も仝樣に表し得.

三 三角函數の値及び符號の變化

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
sin	0 —— 1	1 —— 0	0 —— -1	-1 —— -0
cosec	∞ —— 1	1 —— ∞	∞ —— -1	-1 —— ∞
cos	1 —— 0	0 —— -1	-1 —— -∞	-∞ —— 1
sec	1 —— ∞	∞ —— 1	-1 —— ∞	-∞ —— 1
tan	0 —— ∞	∞ —— -0	-0 —— ∞	∞ —— 0
cot	∞ —— 0	0 —— -∞	-∞ —— 0	0 —— -∞

注意　sin の最大値=1 及び −1　cosの最大値=1 及び −1

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
sin, cosec	+	+	−	−
cos, sec	+	−	−	+
tan cot	+	−	+	−

四　週期函數　三角函數の任意の角に對して或る角又は其任意の整數倍を加ふるも毫も値を變せざる角あり．斯かる角の最小なるものを其函數の週期と云ふ

例へば前圖よりして直に次のことを知り得べし.

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$$

故に $\tan$, $\cot$ に於ては π 其週期なり.故に π を幾倍するも値は變せず.

$$\tan\theta=\tan(n\pi+\theta)$$
$$\cot\theta=\cot(n\pi+\theta)$$

但し n は正負に關せず.

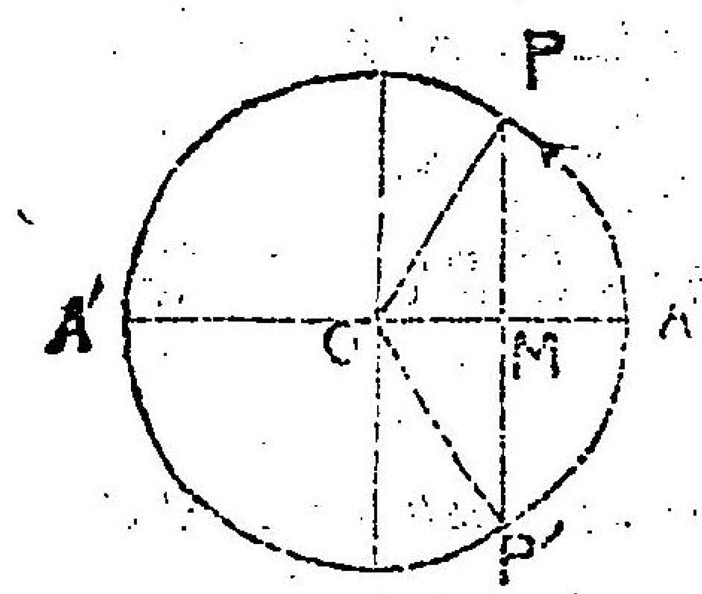
又 $\sin$, $\cos$, cosec に於ては 2π が週期なり

$$\sin\theta=\sin(2n\pi+\theta)$$
$$\cos\theta=\cos(2n\pi+\theta)$$
$$\sec\theta=\sec(2n\pi+\theta)$$
$$\mathrm{cosec}\,\theta=\mathrm{cosec}(2n\pi+\theta)$$

五　負角の三角函數

圖に於て $\angle AOP=\theta$ とせよ然れば

$$\angle AOP'=-\theta$$



$$MP'=-MP$$

然るに半徑を1とするときは

$$MP=\sin\theta,$$
$$MP'=\sin(-\theta)$$
$$\therefore\quad \sin(-\theta)=-\sin\theta.$$

仝樣に又

$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

六　補角の三角函數

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$
$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$
$$\therefore\quad \sin(\pi-\theta)=\sin[\pi+(-\theta)]$$
$$=-\sin(-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$
$$\because\quad \cos(\pi-\theta)=\cos[\pi+(-\theta)]$$
$$=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$$
$$\therefore\quad \tan(\pi+\theta)=\tan\theta,$$
$$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$$

$$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta,$$

$$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta.$$

一系　今迄述べし式を一般に表はせば次の如し.

$$\sin[(2n+1)\pi\pm\theta]=\mp\sin\theta$$

$$\cos[(2n+1)\pi\pm\theta]=-\cos\theta$$

$$\tan(n\pi\pm\theta)=\pm\tan\theta.$$

二系　和及び差が 90° の整數倍なる角の關係を次に示さむ

	-A	90°-A	90°+A	180-A	180°+A
sin	-sinA	cosA	cosA	sinA	-sinA
cos	cosA	sinA	-sinA	-cosA	-cosA
tan	-tanA	cotA	-cotA	-tanA	tanA
cot	-cotA	tanA	-tanA	-cotA	cotA
sec	secA	coscA	-cosecA	-secA	-secA
coseo	-cosecA	secA	secA	cosecA	-cosecA

例題一　$\tan(-1000°)$ を簡單にせよ。

(解)　$\tan(-1000°) = -\tan 1000°$

$= -\tan(360° \times 2 + 280°)$

$= -\tan 280°$

$= -\tan(180° + 100°)$

$= -\tan 100°$

$= -\tan(180° - 80°) = \tan 80°$

$= \tan(90° - 10°) = \cot 10°$

二　$\cos(1035°)$ を簡單にせよ

(解)　$\cos 675° = \cos(360 \times 2 + 315°) = \cos 315°$

$= \cos(180° + 135°)$

$= -\cos 135°$

$= -\cos(180° - 45°)$

$= \cos 45°$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

三　$(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = \dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$ なることを證せ

(解)　$\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}\right)^2$

$= \dfrac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = \dfrac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$

$= \dfrac{(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$= \dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

四　$\sin\theta(1+\tan\theta) + \cos\theta(1+\cot\theta) = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$ を證せ

(解)

$\sin\theta(1+\tan\theta) + \cos(1+\cot\theta)$

$= \sin\theta \times \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta} + \cos\theta\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta\cos\theta + 1 - \cos^2\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta\cos\theta + 1 - \sin^2\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta\cos\theta + \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$+\frac{\sin\theta\cos^2\theta+\cos\theta-\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\sec\theta+\mathrm{cosec}\,\theta$$

五　$2\cos^2x+3\sin x-3=0$　に於て x を求めよ。

（解）　$2(1-\sin^2x)+3\sin x-3=0$

$$2\sin^2x-3\sin x+1=0$$

$$(2\sin x-1)(\sin x-1)=0$$

$$\sin x=\frac{1}{2}\ \text{及び}\ \sin x=1$$

$$x=30^\circ\quad x=90^\circ$$

$$x=180^\circ-30^\circ=150^\circ$$

∴　x の総ての値は

$$30^\circ,\quad 90^\circ,\quad 150^\circ$$

六　$a\tan A=b\tan B$.　$a^2x^2=a^2-b^2$ なるとき

$$(1-x^2\sin^2B)(1-x^2\cos^2A)=1-x^2$$

なることを証せよ。

（解）　$a\tan A=b\tan B$

$$a^2\frac{1-\cos^2A}{\cos^2A}=b^2\frac{\sin^2B}{1-\sin^2B}$$

$$(1-\cos^2A)(1-\sin^2B)$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\cos^2A\sin^2B$$

$$1+\sin^2B\cos^2A-\sin^2B-\cos^2A$$

$$-\frac{b^2}{a^2}\cos^2A\sin^2B=0$$

$$1+\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2B\cos^2A$$

$$-\sin^2B-\cos^2A=0$$

然るに

$$a^2x^2=a^2-b^2$$

$$x^2=1-\frac{b^2}{a^2}$$

∴　$1+x^2\sin^2B\cos^2A-\sin^2B$

$$-\cos^2A=0$$

$$x^2+x^4\sin^2B\cos^2A-x^2\sin^2B$$

$$-x^2\cos^2A=0$$

$$x^4\sin^2B\cos^2A-x^2\sin^2B$$

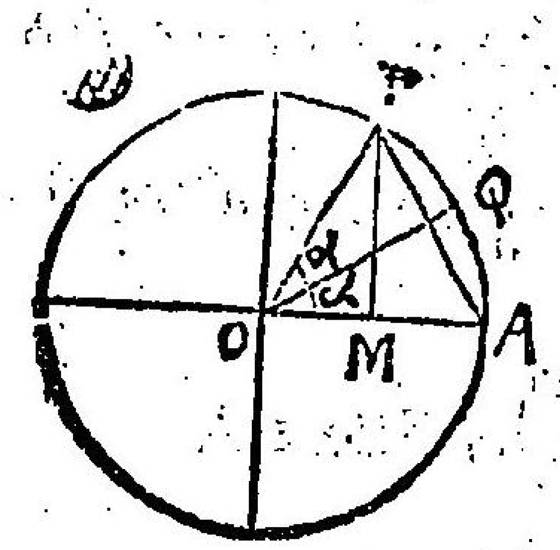
$$-x^2\cos^2A+1=1-x^2$$

∴　$(1-x^2\sin^2B)(1-x^2\cos^2A)$

$$=1-x^2$$

七　$2\sin\alpha$ が $\sin 2\alpha$ よりも大なることを作圖によりて證明せよ。

（解）　單位圓（半徑1なる圓）を畫き、之に任意の角 $\angle AOQ$ を取り其2倍に $\angle AOP$ を取れば、



$\angle AOQ=\angle QOP$, $AO=PO$ なるを以て。

OQ は AP の中央に垂直なるべし

而して $\sin\angle QOP=\sin\alpha=PN$

$\therefore\ 2\sin\alpha=2PN=PA$

及び $\sin\angle AOP=\sin 2\alpha=PM$

然るに $\triangle APM$ に於て

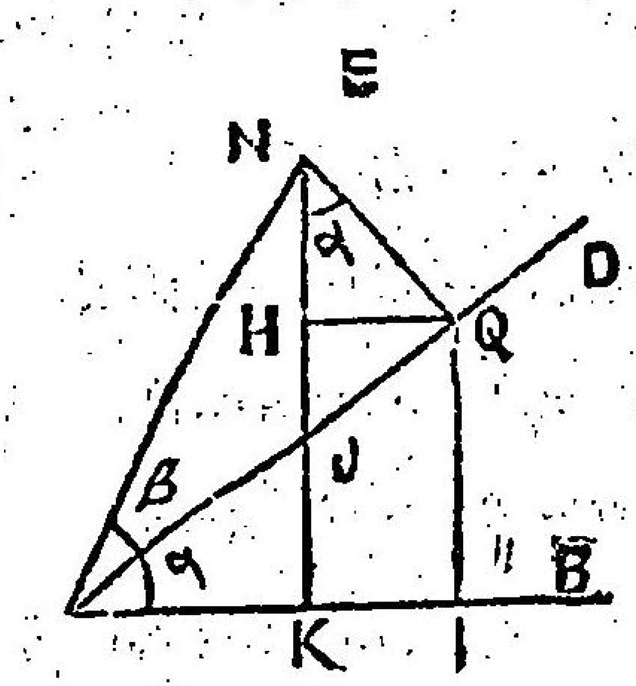
$\angle AMP$ は垂直なるを以て

$PA>PM$

$\therefore\ 2\sin\alpha>\sin 2\alpha.$

五　二角の和及び差の三角函數

一　定理二角の和の $\sin$



$\angle BOD=\alpha$,　$\angle DOE=\beta$ とせば

$\angle BOE=\alpha+\beta$

$NQ\perp OD$

圖に由りて

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{KN}{ON}=\frac{KH+HN}{ON}$$

$$=\frac{QI}{ON}+\frac{HN}{ON}$$

$$=\frac{QI}{OQ}\cdot\frac{OQ}{ON}+\frac{HN}{QN}\cdot\frac{QN}{ON}$$

$$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

二　二角の差の $\sin$

$\sin(\alpha+\beta)$ に於て β を $-\beta$ とす

れば

$$\sin[\alpha+(-\beta)]$$
$$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$
$$\therefore\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

三、定理　二角の和の $\cos$

$\sin(\alpha-\beta)$ に於て α を α' の余角とすれば. α は $90^\circ-\alpha'$, なり

故に $\sin(\alpha-\beta)=\sin\{(90^\circ-\alpha')-\beta\}$
$$=\sin\{90^\circ-(\alpha'+\beta)\}$$
$$=\cos(\alpha'+\beta)$$
$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\sin(90^\circ-\alpha')\sin\beta$$
$$-\cos(90^\circ-\alpha')\cos\beta$$
$$\cos(\alpha'+\beta)=\cos\alpha'\cos\beta-\sin\alpha'\sin\beta.$$
$$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

四　定理　二角の差の $\cos$

$\cos(\alpha+\beta)$ に於て β を $-\beta$ とすれば

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

注意　以上を基礎の四公式と云ひ重要なるものなり.

一系　$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ に於て β を α となせばよし

二系　$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

三系　$\sin(\alpha+\beta)$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

四系
$$\left.\begin{aligned}\cos2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&=2\cos^2\alpha-1\\&=1-2\sin^2\alpha\end{aligned}\right\}$$

五系 $\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \\ &= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\}$

六系 $\left.\begin{aligned} \sin^2\frac{A}{2} &= \frac{1-\cos A}{2} \\ \cos^2\frac{A}{2} &= \frac{1+\cos A}{2} \end{aligned}\right\}$

五 定理 二角の和の tan

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

六 定理 二角の差の tan

仝樣にして

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

七 二つの tan の和

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

八 二つの tan の差

仝樣にして

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

一系 $\tan(\alpha+\beta)$ に於て β を α とせば

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

二系

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$\cot^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

三系

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

注意　系二に於ては對數を引くに當りて．$\cos\alpha$ のみを知れば宜しきも $\sqrt{}$ があるを以て．符號を吟味せざるべからず．

又系三に於ては $\sqrt{}$ は無きも．$\cos\alpha$．$\sin\alpha$ の二つの値の對數を求めざるべからず．

故に $\tan\frac{\alpha}{2}$，又は $\cot\frac{\alpha}{2}$ を求むるに當りては．何れを用ふるか宜しきかは事宜によりて定むべし．

例題一　$\cos60^\circ$，$\sin60^\circ$，$\tan60^\circ$ の値を求めよ．

(解)　$\sin120^\circ=\sin60^\circ$

然るに　$\sin120^\circ=2\sin60^\circ\cos60^\circ$

$\therefore$　$2\sin60^\circ\cos60^\circ=\sin60^\circ$

由て　$\cos60^\circ=\frac{1}{2}$．

次きに　$\sin60^\circ=\sqrt{1-\cos^2 60^\circ}$

$$=\sqrt{1-(\tfrac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$　$\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

隨て　$\tan60^\circ=\sqrt{3}$

二　$\sin30^\circ$，$\cos30^\circ$，$\tan30^\circ$ の値を求めよ

(解)　$\sin60^\circ=\cos30^\circ$

然るに　$\sin60^\circ=2\sin30^\circ\cos30^\circ$

$\therefore$　$2\sin30^\circ\cos30^\circ=\cos30^\circ$

由て　$\sin30^\circ=\frac{1}{2}$

$\therefore$　$\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

隨て　$\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$

三　$\sin45^\circ$，$\cos45^\circ$，$\tan45^\circ$，の値を求めよ．

(解) $\sin 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ)$

$= \sin 90^\circ \cos 45^\circ - \cos 90^\circ \sin 45^\circ$

$= \sin(2\times 45^\circ)\cos 45^\circ - 0$

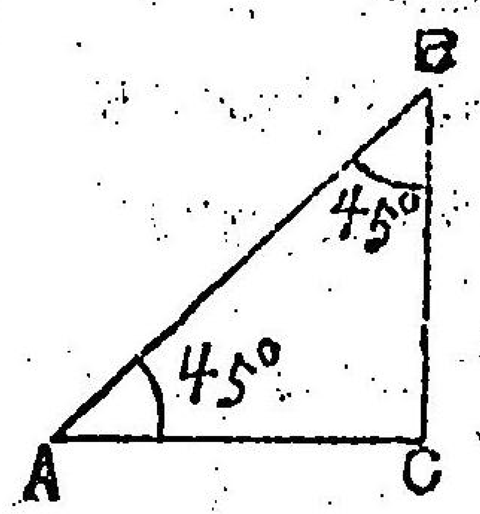
$= 2\sin 45^\circ . \cos 45^\circ$

$\therefore \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

仝樣に　$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

隨て．　$\tan 45^\circ = 1.$

(別解)　之は幾何學的に直た求め得べし．



$\angle A = \angle B = 45^\circ$

$\therefore \quad AC = AB$

$AB = \sqrt{\overline{AC^2} + \overline{BC^2}}$

$= \sqrt{2\overline{AC^2}}$

$= AC\sqrt{2}$

$\frac{AC}{AB} = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

隨て　$\tan 45^\circ = 1$

四　75°,　15°　の函數を求めよ．

(解)　$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)$

$= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$

$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

六 複角の三角函數

一 基礎の四公式の和及び差

一 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$
$=2\sin\alpha\cos\beta$

二 $isn(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$
$=2\cos\alpha\sin\beta$

三 $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$
$=2\cos\alpha\cos\beta$

四 $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$
$=2\sin\alpha\sin\beta$

二 二角の正弦及び二角の余弦の和及び差

前の公式に於て

$\alpha+\beta=S,\ \alpha-\beta=D$ とせば

$\alpha=\frac{1}{2}(S+D),\ \beta=\frac{1}{2}(S-D)$

$\sin S+\sin D$
$=2\sin\frac{1}{2}(S+D).\cos\frac{1}{2}(S-D)$

今 S を α, D を β とすれば

$\sin\alpha+\sin\beta$
$=2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\sin\alpha-\sin\beta$
$=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\cos\alpha+\cos\beta$
$=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\cos\beta-\cos\alpha$
$=2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

一系 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$
$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

二系 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$
$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

七 倍角の三角函數

一 二倍角の三角函數 前に述べたり

二 三角の和の三角函數及び三倍角の三角函數

一 $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$
$=\sin\{(\alpha+\beta)+\gamma\}$

$$=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma$$
$$+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$$

よりして

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha$$
$$+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

二　$\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$-\cos\beta\sin\gamma\sin\alpha-\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta$$

三　$\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ に於て

$\alpha=\beta=\gamma$ とすれば

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

四　$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

五　$\tan(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}$$

六　$\tan3\alpha$

$$=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan\alpha}$$

例題一　$\alpha+\beta+\gamma=m\pi$ にして m が整數なるとき次式を證せよ

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$$
$$=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

(解)　$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan m\pi=0$

故に分子が0ならざる可からず.

$$\therefore\quad \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$$
$$=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$$

二　$\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2}\pi$ なるとき次式を證せ

$$\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha$$
$$+\tan\alpha\tan\beta=1$$

(解)　$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan\frac{\pi}{2}$ なる故

$$\cot(\alpha+\beta+\gamma)=\cot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0$$

然るに

$$\cot(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$=\frac{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}$$

$\therefore\quad 1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha=0$

即ち　$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1.$

三　$\sin 18^\circ$,　$\cos 36^\circ$　の值を求む.

(解)　$2\sin 36^\circ\cos 36^\circ=\sin 72^\circ\ \cdots\cdots\cdots(1)$

$2\sin 72^\circ\cos 72^\circ=\sin 144^\circ=\sin 36^\circ\ \cdots(2)$

(1)×(2)　$2\cos 36^\circ\cos 72^\circ=\dfrac{1}{2}$.

然るに　$2\cos 36^\circ\cos 72^\circ$

$=\cos 36^\circ+\cos 108^\circ=\cos 36^\circ-\cos 72^\circ$

$\therefore\quad \cos 36^\circ-\cos 72^\circ=\dfrac{1}{2}$

今　$\cos 36^\circ=x$,　$\cos 72^\circ=y$ とすれば.

$$x=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\qquad y=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$\therefore\quad \cos 36^\circ=\sin 54^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

$\cos 72^\circ=\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

注意　180° 此内の必要なる三角函數

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{1}{\sqrt2}$	$\frac{1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{1}{\sqrt2}$	$\frac{1}{\sqrt2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt2}$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	−1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt3}$	1	$\sqrt3$	∞	$-\sqrt3$	−1	$-\frac{1}{\sqrt3}$	0
cot	∞	$\sqrt3$	1	$\frac{1}{\sqrt3}$	0	$-\frac{1}{\sqrt3}$	−1	$-\sqrt3$	∞
sec	1	$\frac{2}{\sqrt3}$	$\sqrt2$	2	∞	−2	$-\sqrt2$	$-\frac{2}{\sqrt3}$	−1
cosec	∞	2	$\sqrt2$	$\frac{2}{\sqrt3}$	1	$\frac{2}{\sqrt3}$	$\sqrt2$	2	∞

此他倚時として必要なる三角函数は次の如し

	15°	18°	36°	64°	72°	75°
sin	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$		$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$		$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
cos	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$		$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$		$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
tan	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$					$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

雜題一　$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ なることを證せ

(解)　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}\div\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha}$$

$$=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

二　$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ なることを證せ

(解)　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1}=\frac{1-\tan^2\alpha}{\sec^2\alpha}$$

故 $=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

三　$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\sec 2\alpha-\tan 2\alpha$ なることを證せ

(解)　$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$

$$=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos2\alpha}$$

$$=\frac{1-\sin2\alpha}{\cos2\alpha}-\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}$$

$$=\sec2\alpha-\tan2\alpha$$

四　$\sec\alpha\pm\tan\alpha=\tan\left(45^\circ\pm\frac{\alpha}{2}\right)$

なることを證せ

(解)　$\sec\alpha\pm\tan\alpha$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1\pm\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\pm2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\mp\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{1\pm\tan\frac{\alpha}{2}}{1\mp\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{\tan45^\circ\pm\tan\frac{\alpha}{2}}{1\mp\tan45^\circ\tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\tan\left(45^\circ\pm\frac{\alpha}{2}\right)$$

五　$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$

なることを證せ

(解)　$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

六　$\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$

なることを證せ

（解） 前問に倣へ

七 $\cot\alpha + \tan\alpha = 2\operatorname{cosec}2\alpha$ なることを證せ

（解） $\cot\alpha + \tan\alpha$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$= 2\operatorname{cosec}2\alpha$$

八 $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$ なることを證せ

（解） 前問に倣へ

九 $\operatorname{cosec}\alpha + \cot\alpha = \cot\frac{\alpha}{2}$ なることを證せ

（解） $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$= \frac{1+\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1+\cos\alpha)^2}}{\sqrt{(1-\cos\alpha)}\sqrt{(1+\cos\alpha)}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos\alpha}}{\frac{1}{2}\sqrt{1-\cos\alpha}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\cot\frac{\alpha}{2}$$

十 $\operatorname{cosec}\alpha-\cot\alpha=\tan\frac{\alpha}{2}$ なることを證せ

（解） 前問に倣へ

十一 $\sin m\alpha=\sin\alpha\cos(m-1)\alpha-\sin\alpha\sin(m-1)\alpha$

なることを證せ

（解） $\sin m\alpha=\sin\{\alpha+(m-1)\alpha\}$

$=\sin\alpha\cos(m-1)\alpha+\cos\alpha\sin(m-1)\alpha$

十二 $\cos m\alpha=\cos\alpha\cos(m-1)\alpha-\sin\alpha\sin(m-1)\alpha$

なることを證せ

（解） 前問に倣へ

注意 以上の諸問題は公式に準じて重要なるものなり．

十三 $\cos 2A+\dfrac{2}{\cot^2 A+1}$ を簡單にせよ

(解) $\cos 2A+\dfrac{2}{\cot^2 A+1}$

$$=1-2\sin^2 A+\frac{2}{\operatorname{cosec}^2 A}$$

$$=1-2\sin^2 A+2\sin^2 A=1$$

十四 $\dfrac{\cos\alpha\cos 13\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$ を簡單にせよ

(解) $\dfrac{\cos\alpha\cos 13\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\dfrac{\cos\alpha\cos 13\alpha}{2\cos 4\alpha\cos\alpha}$

$$=\frac{\cos(\pi-4\alpha)}{2\cos 4\alpha}=\frac{-\cos 4\alpha}{2\cos 4\alpha}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

十五 $\dfrac{4\tan^2\alpha}{1-\tan^4\alpha}=\sec 2\alpha-\cos 2\alpha$ なることを證せ

(解) $\dfrac{4\tan^2\alpha}{1-\tan^4\alpha}=\dfrac{4\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}}$

$$=\frac{4\sin^2 a}{\cos^2 a}\cdot\frac{\cos^4 a}{\cos^4 a-\sin^4 a}$$

$$=4\sin^2 a\frac{\cos^2 a}{\cos^2 a-\sin^2 a}$$

$$=\frac{\sin^2 2a}{\cos^2 2a}=\frac{1-\cos^2 2}{\cos 2a}$$

$$=\sec 2a-\cos 2a$$

十六　ABCは各三角形の一つなるとき次式あることを證せ

$$\sin A+\sin B+\sin C$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

（解）　$\sin A+\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}(180^\circ-C)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\sin A+\sin B+\sin C$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\tfrac{1}{2}(A-B)+\sin C$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)+\sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\sin\tfrac{1}{2}(A-B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A-B-C)$$

$$=4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$$

十七　$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$　なるとき

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\frac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos2\theta}}$$

なることを證せ

(解)　$\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$

$$=\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}}=\frac{2}{\sqrt{1-\tan^2\theta}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}}$$

$$=\frac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos2\theta}}$$

十八　$\cos\theta=\dfrac{\cos\phi-e}{1-e\cos\phi}$　なるとき

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\phi}{2}$$

なることを證せ

(解)　雜題九よりして

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

然るに

$$1+\cos\theta=1+\frac{\cos\phi-e}{1-e\cos\phi}$$

$$=\frac{1-e\cos\phi+\cos\phi-e}{1-e\cos\phi}$$

$$=\frac{(1-e)(1+\cos\phi)}{1-e\cos\phi}$$

$$=\frac{(1-e)2\cos^2\dfrac{\phi}{2}}{1-e\cos\phi}$$

$$1-\cos\phi=1-\frac{\cos\phi-e}{1-e\cos\phi}$$

$$=\frac{1-e\cos\phi-\cos\phi+e}{1-e\cos\phi}$$

$$=\frac{(1+e)(1-\cos\phi)}{1-e\cos\phi}$$

$$=\frac{(1+e)2\cos^2\dfrac{\phi}{2}}{1-e\cos\phi}$$

$$\therefore\ \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\phi}{2}$$

十九　$\tan^2\theta=2\tan^2\psi+1$ なるとき

$$\cos2\psi=2\cos^2\theta+1$$

なることを證せ

(解)　$\cos2\psi=2\cos^2\psi-1\cdots\cdots(1)$

然るに　$\tan^2\theta=2\tan^2\psi+1$

$\therefore\ 1+\tan^2\theta=2(\tan^2\psi+1)$

$$sec^2\theta = 2sec^2\psi$$

$$\therefore \quad cos^2\psi = 2cos^2\theta$$

故に(1)或は

$$cos2\psi = 2.2cos^2\theta - 1 = 4cos^2\theta - 1$$
$$= 2(2cos^2\theta - 1) + 1$$
$$= 2cos2\theta + 1$$

二十　$tan\theta = 2\kappa + 1$, $tan\mu = 2\kappa - 1$ なるとき $cot(\theta - \mu) = 2\kappa^2$ なることを證せ

(解)　$cot(\theta - \mu) = \dfrac{1}{tan(\theta - \mu)}$

$$= \frac{1 + tan\theta tan\mu}{tan\theta - tan\mu}$$

$$= \frac{1 + (2\kappa + 1)(2\kappa - 1)}{(2\kappa + 1) - (2\kappa - 1)}$$

$$= \frac{1 + 4\kappa^2 - 1}{2} = 2\kappa^2$$

廿一　$x = acos\theta$, $y = bsin\theta$ なる兩方程式より θ を消去せよ

(解)　$\dfrac{x}{a} = cos\theta$,　$\dfrac{y}{b} = sin\theta$ 兩式

の平方を加ふれば

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cos^2\theta + sin^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

注意　消去することを時としては逐出すと云ふことあり

廿二　$mstan\phi = 1 + tan\phi$,
　　$nsec\phi = 1 - tan\phi$
より ϕ を逐出せ

(解)　$m\dfrac{1}{cos\phi} = 1 + \dfrac{sin\phi}{cos\phi}$

$$\therefore \quad m = cos\phi + sin\phi$$

$$n\frac{1}{cos\phi} = 1 - \frac{sin\phi}{cos\phi}$$

$$\therefore \quad n = cos\phi - sin\phi$$

$$\therefore \quad m^2 + n^2 = (cos\phi + sin\phi)^2 + (cos\phi - sin\phi)^2$$
$$= (2cos^2\phi + sin^2\phi) = 2.$$

廿三　$sin\alpha sin(\alpha + \beta)$
　　$+ sin(\alpha + \beta)sin(\alpha + 2\beta)$

$$+\sin(\alpha+2\beta)\sin(\alpha+3\beta)\ \cdots$$

の n 項の和を求む

(解) $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\{\cos\beta-\cos\overline{2\alpha+\beta}\}$

$\sin(\alpha+\beta)\sin\overline{\alpha+2\beta}=\frac{1}{2}\{\cos\beta-\cos\overline{2\alpha+3\beta}\}$

……………………………………

$\sin\overline{\alpha+\overline{n-1}\beta}\sin\overline{\alpha+n\beta}=\frac{1}{2}\{\cos\beta-\cos\overline{2\alpha+\overline{2n-1}\beta}\}$

上の諸式の和は下の如し．之を S とせば

$$S=\frac{1}{2}n\cos\beta-\frac{1}{2}\{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha+3\beta)$$
$$+\cos(2\alpha+5\beta)+\cdots\cdots+\cos\overline{2\alpha+\overline{2n-1}\beta}\}$$

$$=\frac{1}{2}n\cos\beta-\frac{1}{2}\frac{\cos(2\alpha+\beta+\overline{n-1}\beta)\sin n\beta}{\sin\beta}\ *$$

$$*\ =\frac{1}{2}\left\{n\cos\beta-\frac{\cos(2\alpha+n\beta)\sin n\beta}{\sin\beta}\right\}$$

八　三角方程式

一　反函數及び直接圓函數

角を與へて其三角函數を求むることを直接三角函數と云ふ．而して直接三角函數の値は一つのみなり．

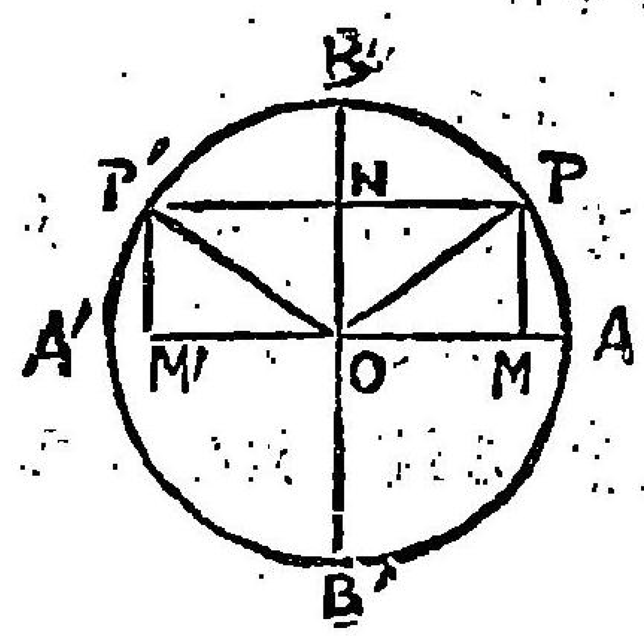
然るに函數の値を與へて．其値に適合する角を求むることを反函數と云ふ．而して反函數に於て其値に適する角は無限にあり：

例へば $sin30°$ の直接三角函數の値は $\frac{1}{2}$ なるも．$\frac{1}{2}$ なる値に適合する値は．$sin(2n\pi+30°)$ なるを以て n の値に由りて無限にあるべし．

二　三角方程式　未知角の三角函數を含有する方程式を云ふ．故に其方程式を解くとは此未知角を求むるにあり．

而して其方程式の一般の値とは夫に適する總ての角を云ふ．

三　Sinの一般の値　Sin か a に等しき角を作ること



Oを中心とせる單位圓の半徑 OB 上に．a に等しき値を取れ．而して N を過ぎ AA′ に平行に PP′ を引けば圓周とP及びP′ にて交る．今PM及びP′M′ をAA′ に垂直に引けば PM＝P′M′＝ON なるを以て弧 AP，及びAP′のsin は皆 a に等し然るにAP，AP′ は互に補弧をなすを以て．AP を α とすれば．AP′は $\pi-\alpha$ なり．

故に θ を以て其 sin が a なる値を有する一般の角とすれば．

$$\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha),$$

又 $$\sin\alpha=\sin(2n\pi+\alpha)$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\{2n\pi+(\pi-\alpha)\}$$
$$=\sin\{(2n+1)\pi-\alpha\}$$

$$\sin\theta=\sin(2n\pi+\alpha)$$

$$=\sin\{(2n+1)\pi-\alpha\}=a$$

$\therefore\quad \theta=2n\pi+\alpha$

又は　$\theta=(2n+1)\pi-\alpha$

系　Sin の方程式 $\sin\theta=a$ より θ の一般の値を求むること．

$\sin\theta=a$ に適する最小角を α とすれば．

$$\theta=2n\pi+\alpha$$

又は　$\theta=(2n+1)\pi-\alpha$

四　Cosの一般の値　$\cos$がaに等しき角を作ること．

θを以て其 $\cos$ がaなる値を有する一般の角とすれば．

$$\cos\alpha=\cos(-\alpha)$$

又　$\cos(2n\pi+\alpha)=\cos(2n\pi-\alpha)$

$\therefore\quad \theta=2n\pi\pm\alpha$

系　Cos の方程式　$\cos\theta=a$　より θ の一般の値を求むること

$\cos\theta=a$ に適する最小角を α とすれば

$$\theta=2n\pi\pm\alpha$$

五　Tanの一般の値　$\tan$がaに等しき角を作ること

θ を以て其 $\tan$ が a なる値を有する一般の角とすれば

$$\tan\theta=\tan(n\pi+\alpha)$$

$$\theta=n\pi+\alpha$$

系　Tan の方程式　$\tan\theta=a$ より θ の一般の値を求むること．

$\tan=a$ に適する最小角を α とすれば

$$\theta=n\pi+\alpha.$$

一　注意　方程式を解くに當りては成可く兩邊の平方を避くべし．

(例)　$\cos\theta=\kappa\sin\theta$ を解け

(解)　$\cos^2\theta=\kappa^2\sin^2\theta$

$$=\kappa^2(1-\cos^2\theta)$$

$$\cos^2=\frac{\kappa^2}{1+\kappa^2}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\pm\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}$$

今 $\cos\theta=\dfrac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}$ に適する最小角を α とすれば.

$$\theta=2n\pi\pm\alpha \quad なり$$

然るに原式は直に $\cot\theta=\kappa$ なる形になし得べし.

由て $\quad \theta=n\pi+\alpha$

即ち平方せる結果 $\cos\theta=-\kappa\sin\theta$ なる別の方程式を誘導せるに由るなり.

二 注意 平方を避くる爲めには補助角を用ふべし.

補助角とは對數の計算に適用せしめ又は計算を便ならしむるに要する角なり.

(例) $a\cos\theta+b\cos\theta=1$ を解け

(解) 原式を變じて

$$a\left(\cos\theta+\frac{b}{a}\cos\theta\right)=1$$

とし對數表よりして $\tan$ が $\dfrac{b}{a}$ に等しき一角を求め之を α とし.之に

代用すれば．

$$a(\cos\theta+\tan\theta)=1$$

$$\therefore\quad a\left(\frac{\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=1$$

即ち $\cos(\theta-\alpha)=\frac{\cos\alpha}{a}$

對數表よりして $\cos\alpha$ の値を見出し

又表より $\cos$ が $\frac{\cos\alpha}{a}$ に等しき角を

見出し．之を β とすれば．

$$\cos(\theta-\alpha)=\cos\beta$$

$$\therefore\quad \theta-\alpha=2n\pi\pm\beta$$

即ち $\theta=\alpha+2n\pi\pm\beta$

例題一 $\sin3\theta=\sin\theta\cos^2\theta$ に於て

θ の一般の値を求む．

（解） $\sin(\theta+2\theta)-\sin\theta\cos2\theta=0$

$$\sin\theta\cos2\theta+\cos\theta\sin2\theta-\sin\theta\cos2\theta=0$$

$$\cos\theta\sin2\theta=0$$

$\therefore\quad \cos\theta=0$ 及び $\sin=2\theta=0$

$\cos\theta=0$ より $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\sin 2\theta=0$ …… $2\theta=n\pi$ $\theta=\frac{n}{2}\pi$

注意 θ を出すに當り．之れに附帶し如何なる已知數あるも．夫を一團と見做し．一般の値に當措め．後に之を處理して θ を出すべし．
例へば前例に於て．$\sin 2\theta=0$ より θ を出すには．$2\theta=n\pi$ として後に θ を出すべきなり．

二　$\sin 9\theta-\sin\theta=\sin 4\theta$ より θ を求む．

（解）$2\cos 5\theta\sin 4\theta=\sin 4\theta$

$$\sin 4\theta(2\cos 5\theta-1)=0$$

$$\sin 4\theta=0 \text{ 又は } \cos 5\theta=\frac{1}{2}$$

$\sin 4\theta=0$ より $4\theta=n\pi$

$$\therefore\quad \theta=\frac{n\pi}{4}$$

$\cos 5\theta=\frac{1}{2}$ より

$$5\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{2n\pi}{5}\pm\frac{\pi}{15}$$

三　$\tan\theta+\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$ θ を求む

（解）$\tan\theta+\dfrac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=2$

$$\therefore\quad \tan\theta+\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=2$$

$$\therefore\quad \tan^2\theta=3 \quad \therefore\quad \tan\theta=\pm\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad \theta=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

四　$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}$

より θ を求む．

（解）$\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad \sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sin\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\therefore \quad \theta+\frac{\pi}{6}=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$$

五　$(\cot\theta-\tan)^2(2+\sqrt{3})$
$=4(2-\sqrt{3})$　より　θ を求む.

(解)　$(\cot\theta-\tan\theta)^2=\dfrac{4(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}$

$$=4(2-\sqrt{3})^2$$

$$\therefore \quad \cot\theta-\tan\theta=\pm2(2-\sqrt{3})$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm2(2-\sqrt{3})$$

$$\frac{2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\pm2(2-\sqrt{3})$$

$$\frac{2\cos2\theta}{\sin2\theta}=\pm2(2-\sqrt{3})$$

$$\therefore \quad \cot\theta=\pm(2-\sqrt{3})$$

$$2\theta=n\pi\pm\frac{5\pi}{12},$$

$$\theta=\frac{n\pi}{2}\pm\frac{5\pi}{24}$$

九　反記法

一　反函數の記法

例へば $\sin\theta=a$ なるとき. a を以て θ を表すには. $\theta=\sin^{-1}a$ と書く.之は a なる値を有する $\sin$ の角なることを意味す.

全様に凡ての反函數は次の如く記す

$\sin\theta=a\cdots\cdots\theta=\sin^{-1}a$

$\cos\theta=a\cdots\cdots\theta=\cos^{-1}a$

$\tan=a\cdots\cdots\theta=\tan^{-1}a$

$\cot\theta=a\cdots\cdots\theta=\cot^{-1}a$

$\sec\theta=a\cdots\cdots\theta=\sec^{-1}a$

$\mathrm{cosec}\,\theta=a\cdots\cdots\theta=\mathrm{cosec}^{-1}a$

注意　此記方は代數に於ける負の倍數の如くなれども其意味は稍異れり.

二　直接三角函數と反函數との關係

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$\theta_1+\theta=\tan^{-1}\left\{\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}\right\}$$

今 $\tan\theta_1=a_1$, $\tan\theta_2=a_2$ とせば

$$\theta_1=\tan^{-1}a_1,\ \theta_2=\tan^{-1}a_2$$

故に $\theta_1+\theta_2=\tan a_1+\tan a_2$

$$=\tan^{-1}\left\{\frac{a_1+a_2}{1-a_1a_2}\right\}$$

$\therefore\ \tan^{-1}a_1\pm\tan^{-1}a_2$

$$=\tan^{-1}\left\{\frac{a_1+a_2}{1-a_1a_2}\right\}$$

例題一 $x+y=90°$, $\sin x+\cos y$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… x, y を求む

(解) $x+y=90°$ $\quad y=90°-x$

$\therefore\ \cos y=\sin x$

$\therefore\ \sin x+\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad\therefore\ x=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$

仝じく $\cos y=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ y=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$

二 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$ の一つの値に 45° なることを證せ

(解) $\tan^{-1}\frac{1}{2}=\alpha$, $\tan^{-1}\frac{1}{3}=\beta$ とせば

$$\tan\alpha=\frac{1}{2}\ \text{及び}\ \tan\beta=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$$

然るに $\tan 45°=1$ $\therefore\ \alpha+\beta$ 即ち $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$ の一つの値は 45° なり

三 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$ より x を求む.

(解) $\sin x=\alpha$, $\sin^{-1}\frac{x}{2}=\beta$

させば $sin\alpha=x$, $sin\beta=\frac{x}{2}$

然るに $sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta$
$+cos\alpha sin\beta$

$$\therefore\ sin(\alpha+\beta)=x\times\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{1-x^2}.\frac{x}{2}$$

然るに $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore\ sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}}=x.\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$$\sqrt{2}=x\sqrt{1-x_2}+x\sqrt{1-x^2}$$

$$2-2x\sqrt{2}.\sqrt{4-x^2}+x^2(4-x^2)=x^2(1-x^2)$$

$$2x\sqrt{2(4-x^2)}=-(3x^2+2)$$

$$\therefore\ 17x^4-20x^2+4=0$$

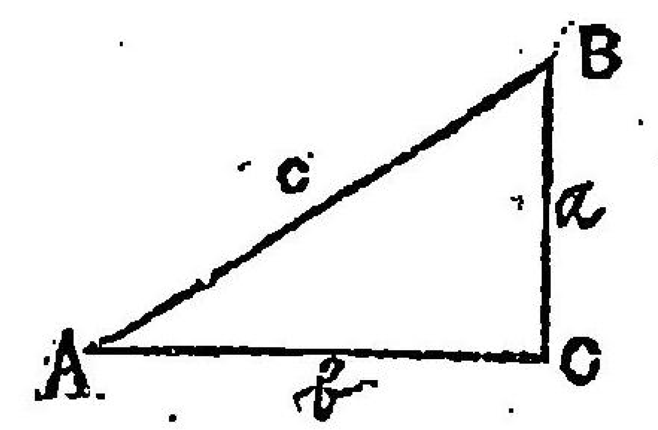
之より x を求むることを得

附言 反函數は中學又は中學卒業程度に於て、入學試験問題として出づること寧ろ稀なり

十 三角形の邊と角との關係

イ 直角三角形

一 定理



ABC なる三角形に於て ∠C を直角なりとせよ.

然れば $\frac{a}{c}=sin\mathrm{A}$, $\frac{b}{c}=cos\mathrm{A}$

$\therefore\ a=c.sin\mathrm{A}$. $b=c.cos\mathrm{A}$

二 定理

$\frac{a}{b}=tan\mathrm{A}$ $\therefore\ a=b.tan\mathrm{A}$.等

系 $a=c.cos\mathrm{B}$, $b=c.sin\mathrm{B}$,
$a=c.cot\mathrm{B}$

例題一 直角三角形 ABC に於て

$$tan^2\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)=\frac{c-a}{c+a}=tan^2\frac{B}{2}$$

なることを示せ.

(解) $tan^2\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)$

$$=\left\{\frac{tan45^\circ-tan\frac{A}{2}}{1+tan45^\circ tan\frac{A}{2}}\right\}$$

$$=\left\{\frac{1-tan\frac{A}{2}}{1+tan\frac{A}{2}}\right\}^2$$

$$=\left\{\frac{cos\frac{A}{2}-sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}+sin\frac{A}{2}}\right\}^2$$

$$=\frac{1-2sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}}{1+2sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}}=\frac{1-sinA}{1+sinA}$$

$$=\frac{1-\frac{a}{c}}{1+\frac{a}{c}}=\frac{c-a}{c+a}$$

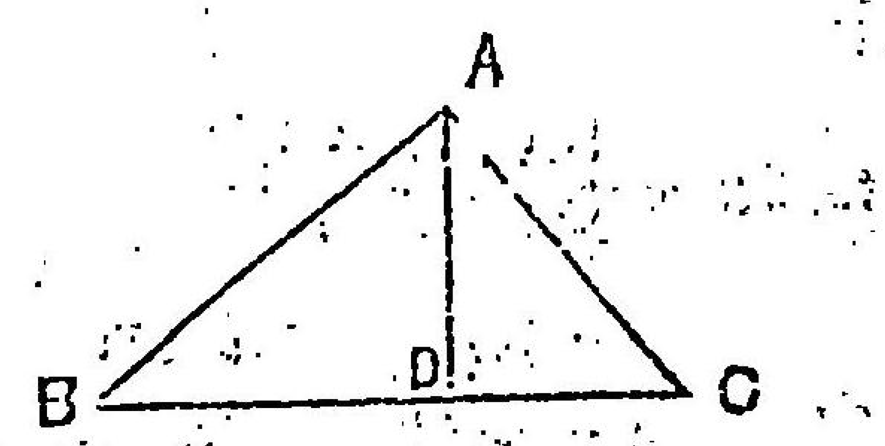
二　$sin3A=\frac{3ab^2-a^3}{c^3}$ なることを示せ

(解)　$sin3A=3sinA-4sin^2A$

$$=3\frac{a}{c}-4\frac{a^3}{c^3}=\frac{3ac^2-4a^3}{c^3}$$

$$=\frac{3a(a^2+b^2)-4a^3}{c^3}=\frac{3ab^2-a^3}{c^3}$$

三　BD:DC$=cotB:cotC$ なることを証せ



(解)

△ABC に於て BD$=$AD$cotB$

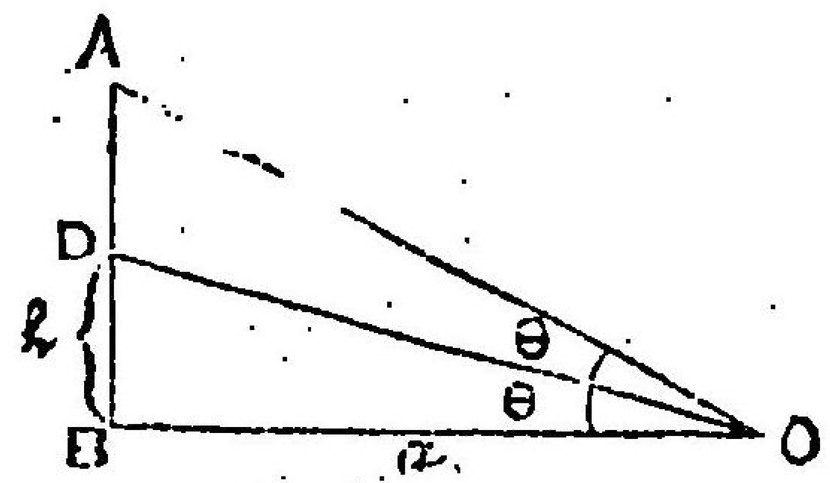
△ADC に於て CD$=$AD$cotC$

後式にて前式を割れば

BD:DC$=cotB:cotC$

四　塔あり塔底を距る a 尺の處に於て其塔身及び其塔上にある尖標

の長さを見る角は相等しと云ふ．今塔身の高さを h とするときは．尖標の長さは $\frac{a^2+h^2}{a^2-h^2}$ なることを證せ．



(解) $\angle DCB=\angle ACD=\theta$ とすれば

$$\tan 2\theta=\frac{BA}{BC}=\frac{h+AD}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{h+AD}{a}$$

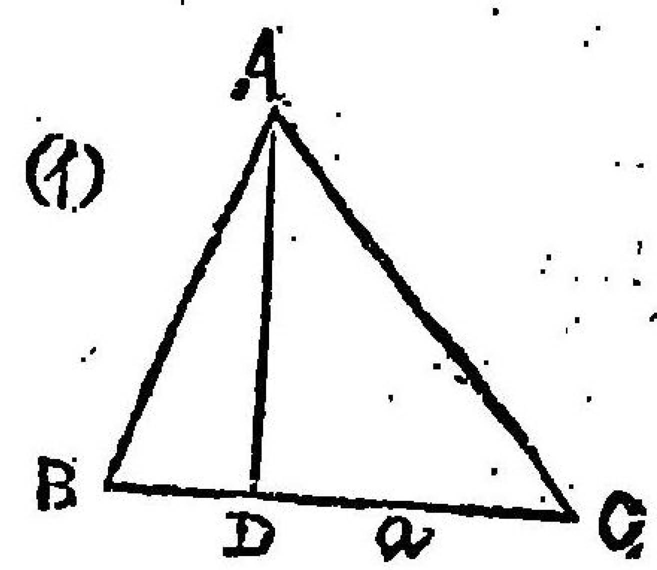
然るに $\tan\theta=\frac{BD}{BC}=\frac{h}{a}$

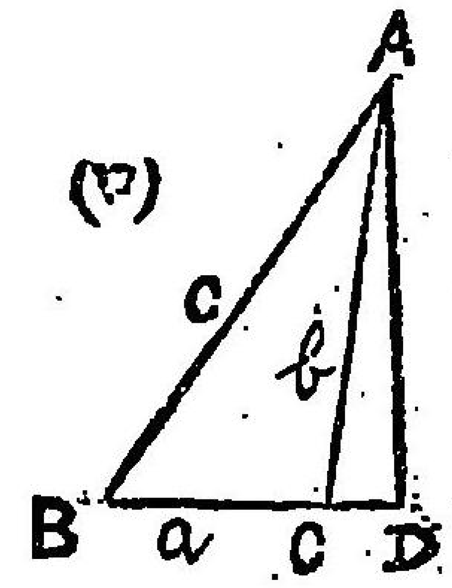
$$\therefore \quad \frac{2\frac{h}{a}}{1-\frac{h^2}{a^2}}=\frac{h+AD}{a}$$

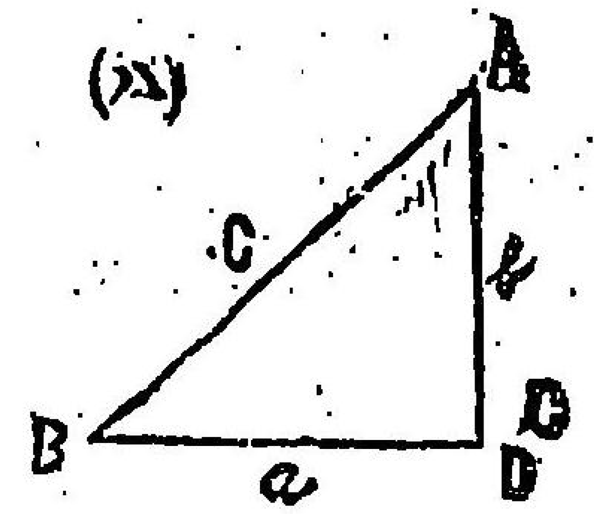
$$\therefore \quad AD=\frac{a^2+h^2}{a^2-h^2}h$$

ロ 斜三角形

一 定理 三角形の各邊は夫々其對邊の sin と比例をなす。







（イ） B, C, が鋭角なるとき

$AD=AB.\sin B.$

$AD=AC\sin C$

$\therefore \quad AB\sin B=AC\sin C$

$A:AB=\sin B:\sin C$

即ち $b:c=\sin B:\sin C$

(ロ) C が鋭角なるとき.

$AD = AC\sin ACD = AC\sin C$,

$AD = AB\sin B$

∴ $AC\sin C = AB.\sin B$

$AC : AB = \sin B : \sin C$

即ち $b : c = \sin B : \sin C$

(ハ) C が直角なるとき.

$a = c\sin A,\ a : c = \sin A : 1$

然るに $1 = \sin 90^\circ = \sin C$

∴ $a : c = \sin A : \sin C.$

故に一般に

$a : c = \sin A : \sin C$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

一系 $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$

證明 $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin A}{\sin C},\quad \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$

∴ $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\sin A + \sin B}{\sin C}$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C.\cos\frac{1}{2}C}$$

然るに $\cos\frac{1}{2}C = \cos\{90^\circ - \frac{1}{2}(A+B)\}$

$= \sin\frac{1}{2}(A+B)$

∴ $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}.$

注意 a, b, c 及び A, B, C を輪換して

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}$$

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C-A)}{\sin\frac{1}{2}B}$$

二系 $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$

證明 $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin A - \sin B}{\sin C}$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}$$

然るに

$\sin\frac{1}{2}c = \sin\{90^\circ - \frac{1}{2}(A+B)\}$

$= \cos\frac{1}{2}(A+B)$

∴ $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$

三系 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$

證明 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin B}$,

$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin B}$

$\therefore$ $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$

然るに $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$

$\therefore$ $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$

二 定理

$$\left.\begin{array}{l} a=c.\cos B+b\cos C \\ b=a.\cos C+c\cos A \\ c=b.\cos A+a.\cos B \end{array}\right\}$$

證明 定理一の圖よりして

(イ) $BC=BD+DC=AB.\cos B+AC.\cos C$

$\therefore$ $a=c\cos B+b.\cos C$

(ロ) $BC=BD-CD=AB.\cos B-AC\cos C(180°-C)$

$\therefore$ $a=c.\cos B+b.\cos C$

(ハ) $a=c.\cos B=c.\cos B+b\cos C.$

注意 a,b,c 及び A,B,C の輪換によりても得.

三 定理

$$\left.\begin{array}{l} a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca.\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C \end{array}\right\}$$

證明 定理二の公式に順次にa,b,cを乘じ.第一より第二.第三の式を減ずれば.

$$\begin{aligned} a^2-b^2-c^2&=a(b\cos C+c.\cos B) \\ &-b(c.\cos A+a.\cos C) \\ &-c(a.\cos B+b\cos A) \end{aligned}$$

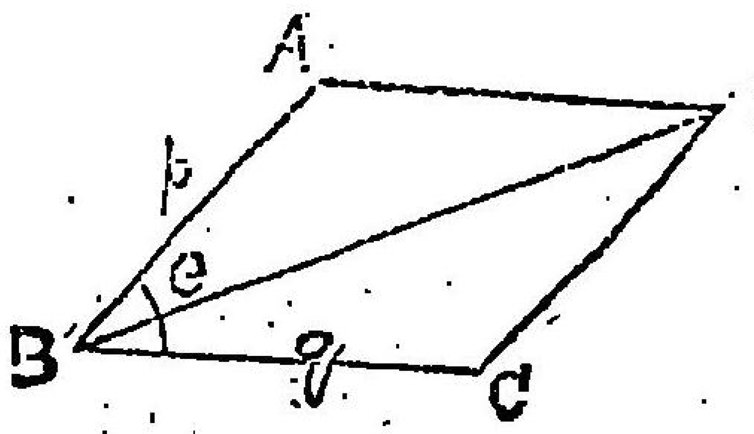
$\therefore$ $a^2-b^2-c^2=-2bc.\cos A$

系一 三角形の各邊にて其一角の cos を表すこと

前式を變じて直に次のものを得.

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

系二　平行四邊形に於て其二邊と夾角とを知りて其對角と結ぶ對角線を求むること.



△BCD に於て　CD＝AB＝p.

$$R^2=p^2+q^2-2pq\cos\angle BCD$$
$$=p^2+q^2-2pq\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=p^2+q^2+2pq\cos\theta$$
$$\therefore\quad R^2=p^2+q^2+2pq.\cos\theta$$

注意　之は物理學上、力の平行四邊形に於て、二力の合力を求むるに用ゐらる.

四　定理　三角形の一角の半角の $\sin$ を各邊の項にて表すこと.

今　$2bc.\cos A=b^2+c^2-a^2\cdots\cdots(1)$

$$2bc=2bc\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)－(1)　$2bc(1-\cos A)$

$$=a^2-(b-c)^2$$

$$4bc\sin^2\frac{A}{2}=(a+b-c)(a-b+c)$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}\text{ 等}$$

今三角形の三邊の和の半分を s とせば

$$a+b+c=2s.$$
$$a-b+c=2(s-b),$$
$$a+b-c=2(s-c)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}$$

注意　A,B,C. は皆 90° 以内なるを以て符號は(＋)を取りしなり

五　定理　三角形の一角の半角の $\cos$ を各邊の項にて表すこと

前の(1)+(2)により

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}\text{等}$$

同樣に亦

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos^2\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}$$

五　定理　三角角の一角の半角の $\tan$ を各邊の項にて表すこと

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\quad\text{より}$$

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\end{aligned}\right\}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

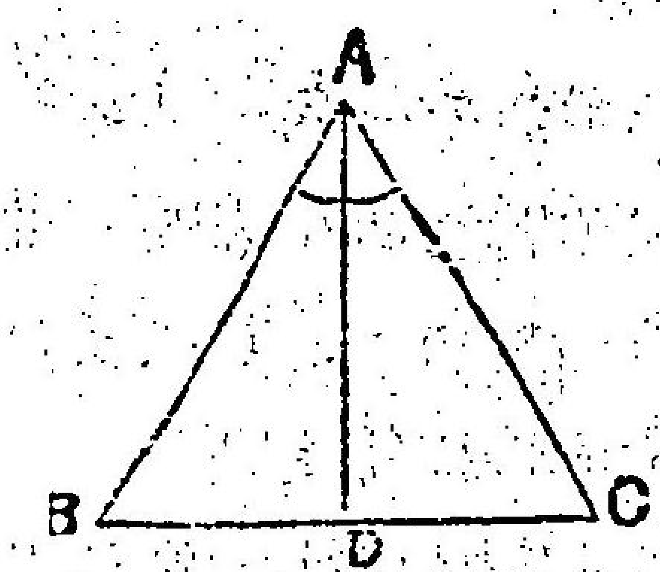
系

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

證明　$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

例題一　三角形 ABC に於て角Aの二等分線と底邊 BC との交點を D とせよ。然れば



BD:CD$=\sin$C:$\sin$B なることを證せ

（解）　BD:DC=AB:AC　（幾何定理）

然るに　AB:AC$=\sin$C$:\sin$B

∴　BD:CD$=\sin$C$:\sin$B

二　三角形 ABC に於て

$$a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$$

なることを證せ

（解）　$a=c\cos B+b\cos C$. なる公式に　$a(b\cos C-c\cos B)$　を乘ずれば

$$a(b\cos C-c\cos B)$$
$$=(b\cos C+c\cos B)(b\cos C-c\cos B)$$
$$=b^2\cos^2 C-c^2\cos^2 B$$
$$=b^2(1-\sin^2 C)-c^2(1-\sin^2 B)$$
$$=b^2-c^2-b^2\sin^2 c+c^2\sin^2 B$$
$$=b^2-c^2$$

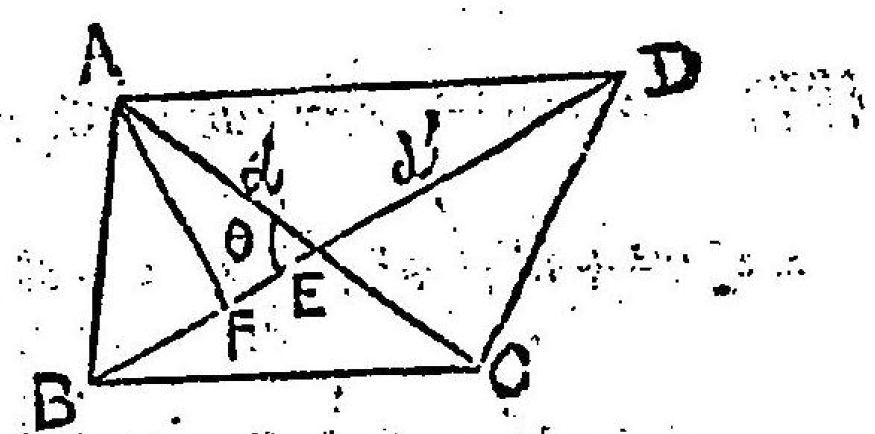
三　三角形の一角が 120° なるとき. 其角の對邊の平方は. 他の二邊の平方の和を加へ. 其二邊の相乘積を加へしものに等し.

（解）　A角=120° とすれば公式により

$$b^2+c^2-a^2=2bc\cos 120^\circ$$
$$=2bc(-\tfrac{1}{2})=-bc$$

$$\therefore\ a^2=b^2+c^2+qc$$

四　四角形 ABCD の對角線AC, BD を順次に d, d' とし. 其交角を θ とすれば.其四角形の面積は $n\theta\frac{1}{2}dd'si$ なることを示せ



（解）　△ABDの面積$=\frac{1}{2}$AE×BD

$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{AE}\sin\theta\times d'$$

△BCDの面積$=\frac{1}{2}$CF$\sin\theta\times d'$

兩式を加ふれば

$$四角形の面積=\frac{1}{2}\mathrm{AE}\sin\theta\times d'$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{CE}\sin\theta\times d'$$
$$=\frac{1}{2}d'\sin\theta(\mathrm{AE}+\mathrm{CE})$$
$$=\frac{1}{2}dd'\sin\theta$$

五　三角形 ABC に於て次式を證せよ.

$$c^2=(a+b)^2\sin^2\frac{1}{2}C+(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C.$$

(解)　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$=(a^2+b^2)\left(\sin^2\frac{1}{2}C+\cos^2\frac{1}{2}C\right)-2ab\left(\cos^2\frac{1}{2}C-\sin^2\frac{1}{2}C\right)$$

$$=\sin^2\frac{1}{2}C(a^2+2ab+b^2)+\cos^2\frac{1}{2}C(a^2-2ab+b^2)$$

$$=(a+b)^2\sin^2\frac{1}{2}C+(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C$$

六　$bc\cos\frac{1}{2}A+ca\cos^2\frac{1}{2}B+ab\cos^2\frac{1}{2}C=S^2$

なることを證せ.

(解)　$bc\cos^2\frac{1}{2}A=s(s-a)$

$$ca\cos^2\frac{1}{2}B=s(s-b)$$

$$ab\cos^2\frac{1}{2}C=s(s-c)$$

上の三式を加ふれば

$$bc\cos^2\frac{1}{2}A+ca\cos^2\frac{1}{2}B+ab\cos^2\frac{1}{2}C=s(s-a+s-b+s-c)$$

$$=s(3s-a-b-c)=s^2$$

七　$a^2\sin2B+b^2\sin2A=2ab\sin C$ なることを證せ.

(解)　$a^2\sin2B+b^2\sin2A$

$$=a^22\sin B\cos B+b^2.2\sin A\cos A$$

$$=2a.a\sin B.\cos B+2b.b\sin A\cos A$$

$$=2a.b\sin A\cos B+2b.a\sin B\cos A$$

$$=2ab(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$$

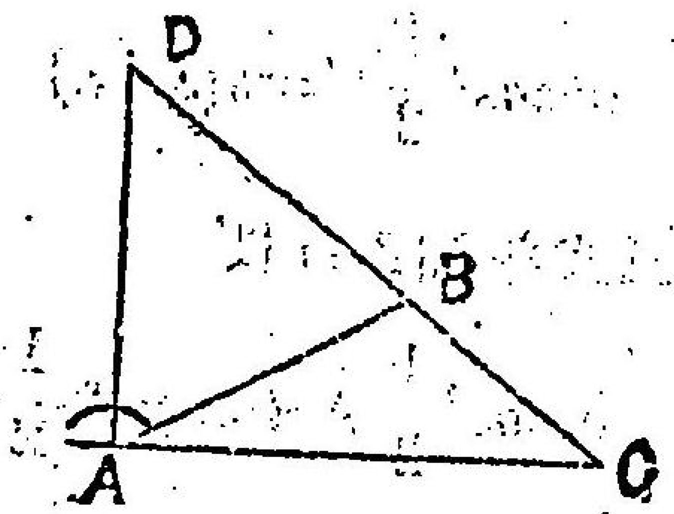
$$=2ab\sin(A+B)=2ab\sin C.$$

八　三角形 ABC の一角 A の外角の二等分線と其對邊 CB の延長

線との交點を D とすれば，

$$AD=\frac{2bc\sin\frac{1}{2}A}{b-c}$$

なることを示せ．但し $b>c$.



(解) $\frac{DC}{BD}=\frac{b}{c}$

$\therefore\ \frac{DC-BD}{DC}=\frac{b-c}{b}$,

$\therefore\ \frac{a}{DC}=\frac{b-c}{b}$,

$DC=\frac{ab}{b-c}$ ……(1)

△ACD に於て

$$\frac{AD}{DC}=\frac{\sin C}{\sin DAC}$$

$$\therefore\ \frac{AD}{DC}=\frac{\sin C}{\sin(90^\circ+\frac{1}{2}A)}$$

$$=\frac{\sin C}{\cos\frac{1}{2}A}\cdots\cdots(2)$$

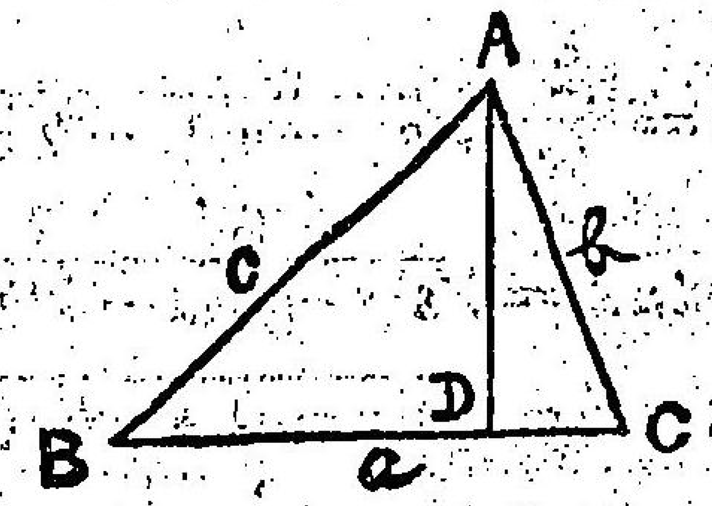
(2)×(1) $AD=\frac{ab\sin C}{(b-c)\cos\frac{1}{2}A}$

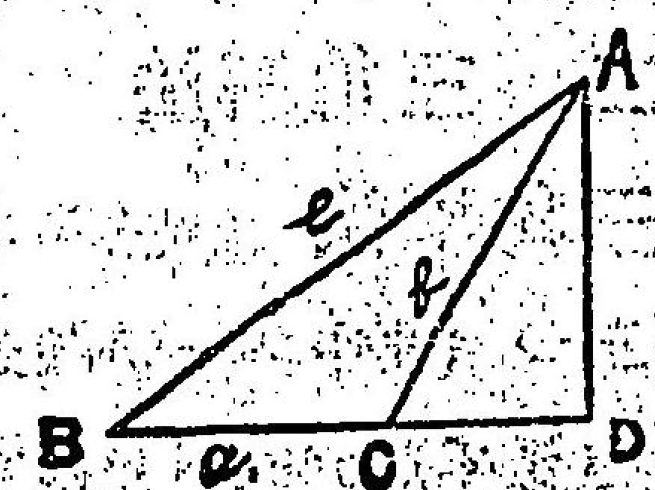
$$=\frac{bc\sin A}{(b-c)\cos\frac{1}{2}A}=\frac{2bc\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{(b-c)\cos\frac{1}{2}A}$$

$$=\frac{2bc\sin\frac{1}{2}A}{b-c}$$

十一　三角形の面積

一　定理





$\triangle ABC$ の面積$=\frac{1}{2}BC.AD$

$=\frac{1}{2}BC.(AB.\sin B)$ 三角形の

面積を S とせば

$$\left.\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}a.c.\sin B\\ S&=\frac{1}{2}b.c\sin C\\ S&=\frac{1}{2}c.b\sin A \end{aligned}\right\}$$

二 定理

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\frac{1}{2}b.c.\sin A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

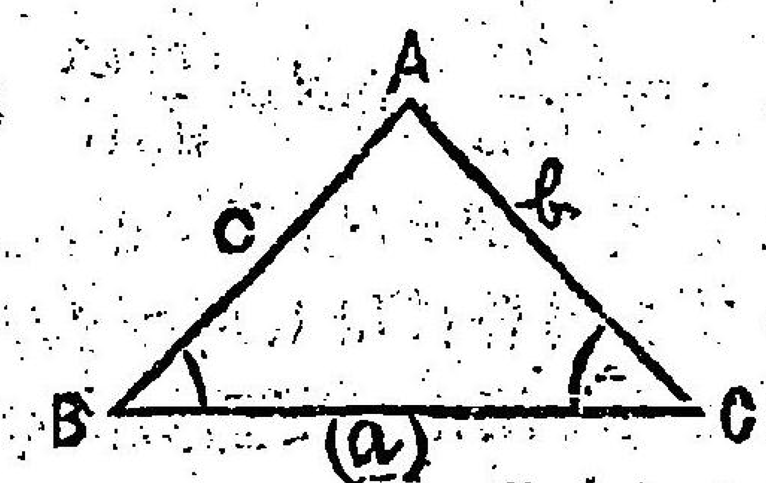
但し $a+b+c=2s$

十二 三角解法

一 三角解法 三角形の六の要素中三つ（其中の一つは必ず邊なることを要す）が與へられたる時は一般に他の要素を決定することを得斯くの如く或る要素によりて他の要

素を定むることを三角解法と稱す.

二 定理 一邊, 二角が與へられたるとき（例へば, $a,b,c.$）

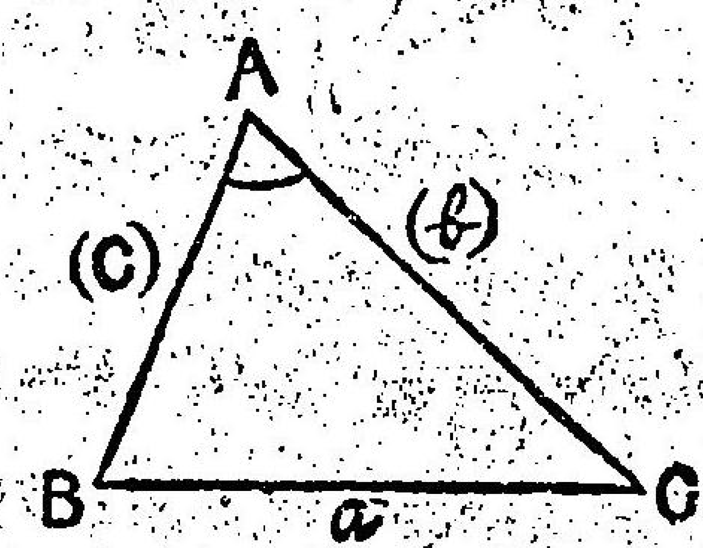


$A=180^\circ-(B+C)$ (1)

$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ $\therefore b=\frac{a\sin B}{\sin A}$ (2)

$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$ $\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ (3)

三 定理 二邊, 夾角が與へられたるとき,（例へば b, c, A）



$B+C=180^\circ-A$ (1)

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\tan\frac{B+C}{2} \quad (2)$$

斯くして得たる B+C 及び B−C より B 及び C を得

叉 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$　∴ $a=\frac{b\sin A}{\sin B}$　(3)

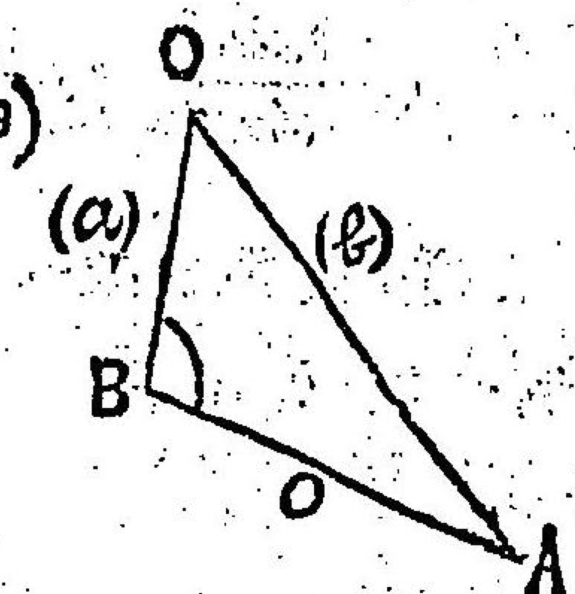
時として $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ は簡單なる場合に用ふることを得

叉補助角を用ふれば對數計算にも用ふることを得べし

四　定理　二邊及び其一つに對する角が與へられしとき、

(例へばa,b,B)

(甲)



$a<b$

∴ $A<B$

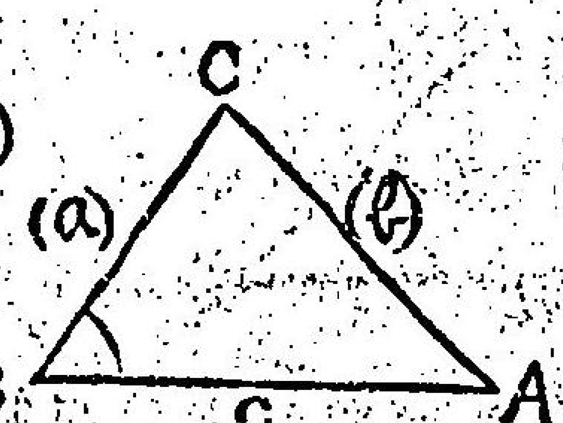
∴ A は鈍角ならず此解は只一つ

$a=b$

∴ $A=B$

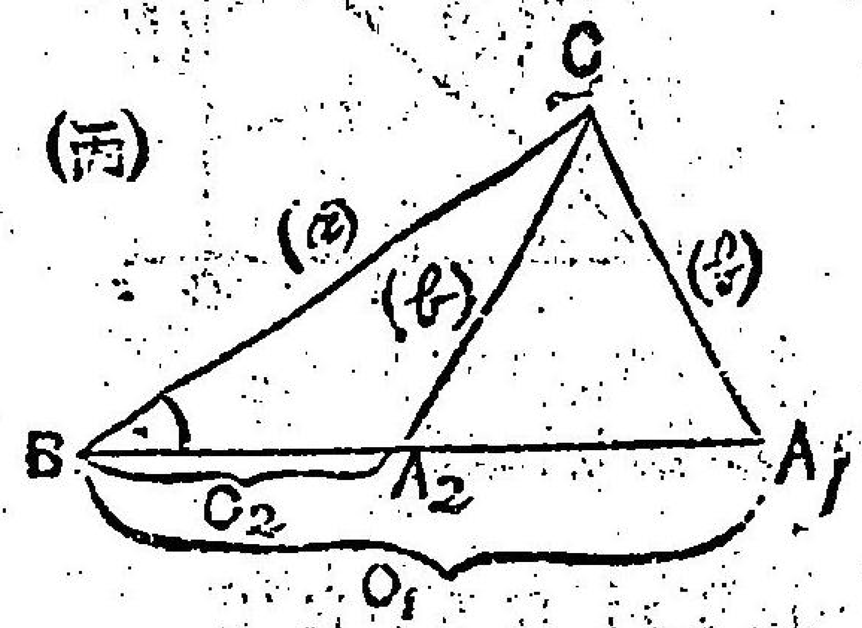
∴ B が鋭角ならざれば不

(乙)



合理鋭角なれば ∠A も亦鋭角，此解は只一つ

(丙)



$a<b$

∴ $A>B$

B が鋭角ならざれば解なし

B が鋭角なれば三の場合あり

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$　∴ $\sin A=\frac{a\sin B}{b}$　(1)

$c=180^\circ-(A+B)$　(2)

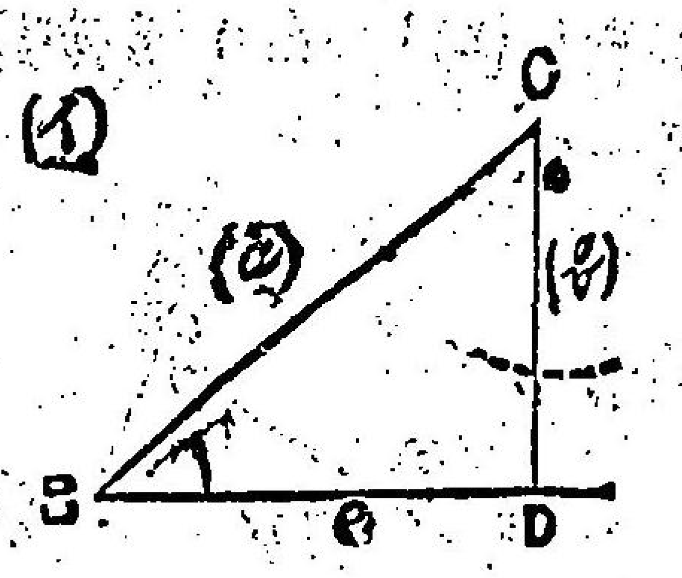
$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$　∴ $c=\frac{b.\sin C}{\sin B}$　(3)

丙の三つの場合の吟味

$a>b$, B が鋭角なるとき

$a\sin B \gtreqless b$, 即ち $\log a+\log\sin B-\log b \gtreqless 0$, なるに從て、次の三の場合あり

(イ)



$a\sin B > b$ なれば

$\frac{a}{b}\sin B > 1$ なるを以て

方程式 (1) に適する角なし

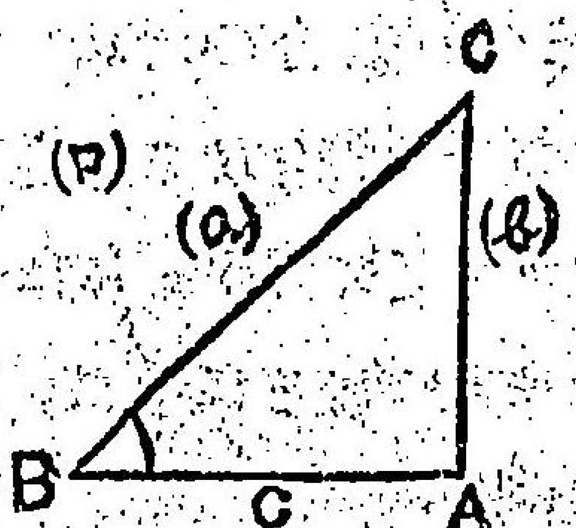
故に解なし

幾何學的に述ぶれば

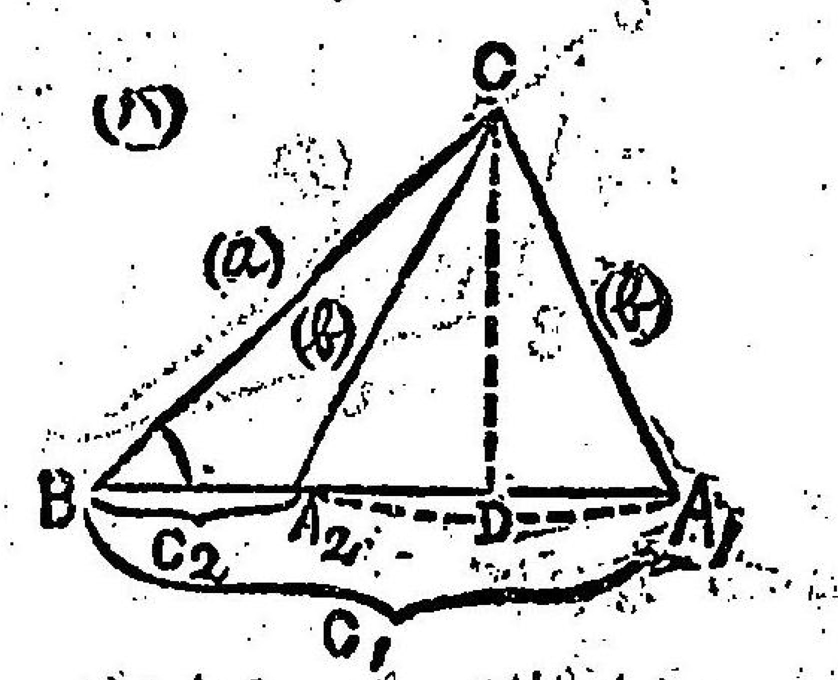
$a\sin B$ は C より對邊へ引ける垂線なり

而して邊 b が垂線より小なること能はず

(ロ)



(ハ)



$a\sin B > b$ なれば

$\frac{a\sin B}{b} > 1$ なるを以て

方程式 (1) に適する角は二ありて互に補角なり，而して何を取るも要件に適す

故に解二つあり

代數學的に述ぶるも同じ

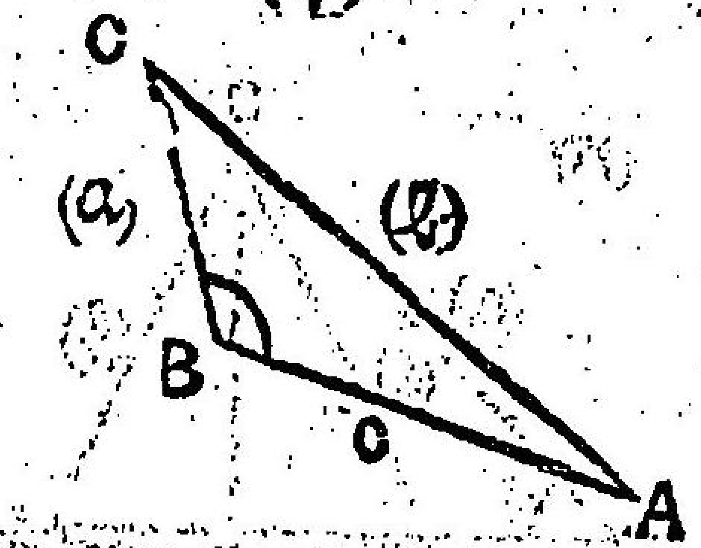
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

之は c に就て二次方程式なり

$c_1 = a\cos B + \sqrt{b^2 - a^2\sin^2 B}$

$c_2 = a\cos B - \sqrt{b^2 - a^2\sin^2 B}$

(甲)



$a<b$ なれば

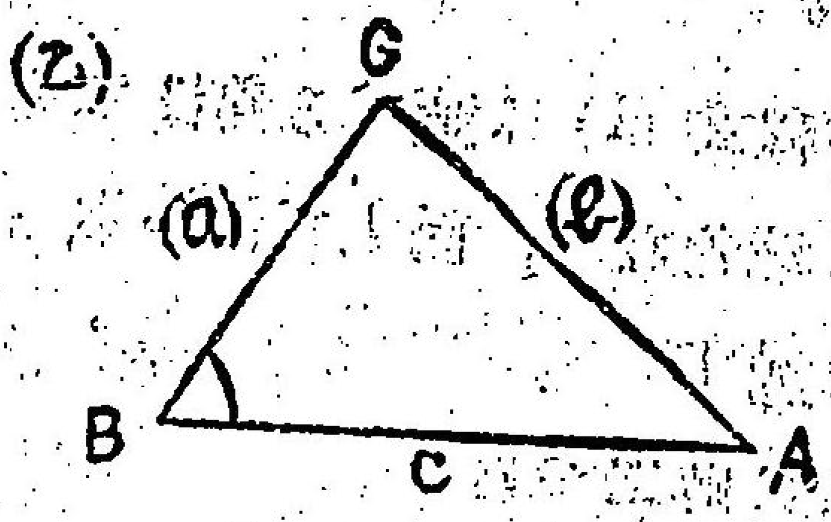
$b^2-a^2\sin^2 B>a^2-a^2\sin^2 B$

即ち　$+\sqrt{b^2-a^2\sin^2 B}>a\cos B$

∴ c_1 は正にして c_2 は負

∴ 解は只一

(乙)



$a=b$ にして

B が鋭角なるときは

$c_1=2a\cos B,\ c_2=0$

∴ 只一つの角あり

若し B が ∠R なれば c_1, c_2 は

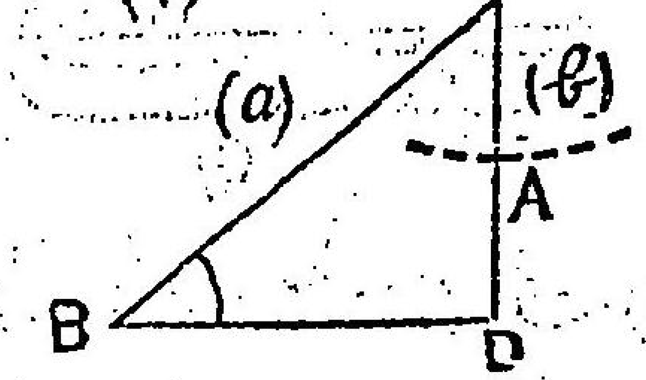
何れも 0 なり

又 B が鈍角なれば c_1 は 0 にして c_2 負

∴ B が直角又は鈍角の場合には解なし

(丙) $a>b$, B が鋭角なるとき

(イ)



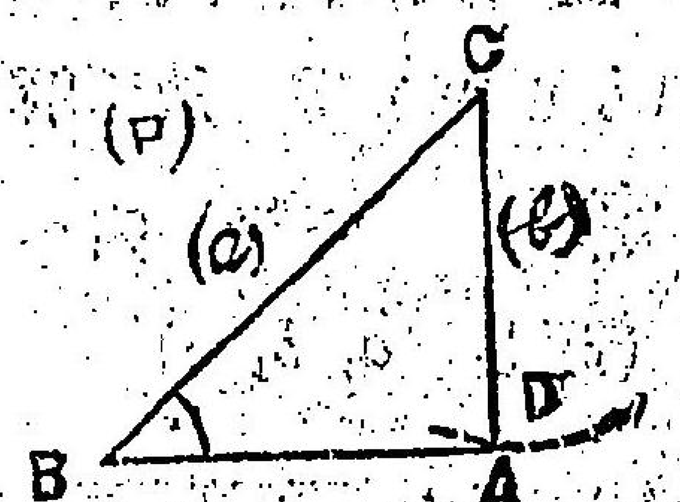
$a\sin B>b$ なれば

$b^2-a^2\sin^2 B$ は負なるを以て

c_1, c_2 は虚数なり

故に解なし

(ロ)



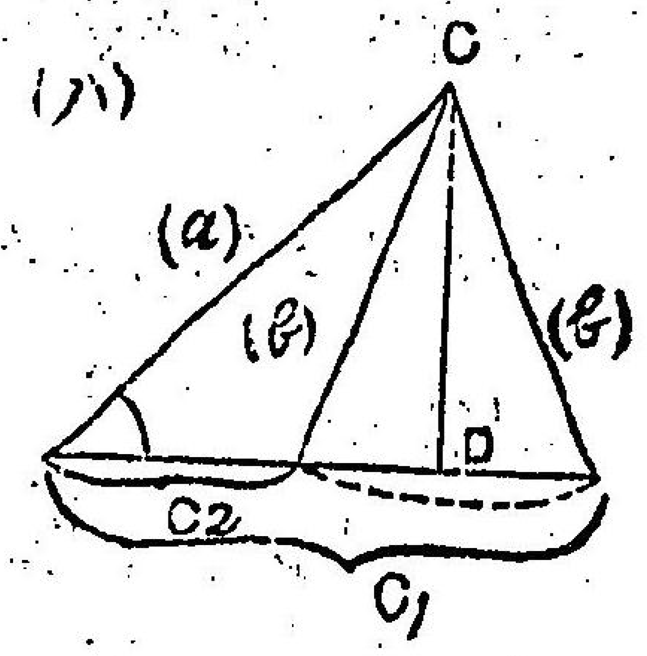
$a\sin B=b$ なれば

$b^2-a^2\sin^2 B=0$ なる故

$c_1=c_2=a\cos B$

故に解は只一

(ハ)



$a\sin B<b$ なれば $b^2-a^2\sin^2 B$ は正にして其二乗根は $a\cos B$ よりも小なるを以て c_1 及び c_2 は何れも正

故に解は二なり

此場合に於て

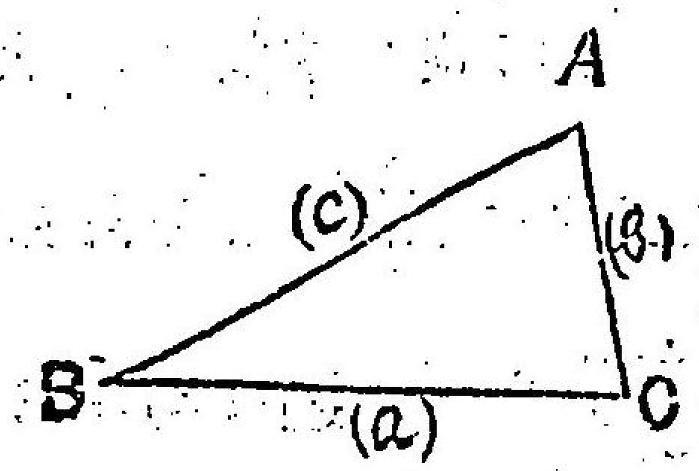
B が直角又は鈍角なれば c_1, c_2 は何れも正ならず　故に解なし

五　定理　三邊が與へられしとき　(即ち　a, b, c)

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \qquad (1)$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \qquad (2)$$

$$c=180^\circ-(A+B) \qquad (3)$$



又は　$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ 等

$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ 等

一　注意　只一つの角を見出さんとする時には，何れの公式を用ふるも手數は同じ．

然れども總ての角を要するときは $\tan\frac{A}{2}$ の公式を用ふるをよしとす，如何となれば $\tan\frac{A}{2}$ の式にては對數四を要するに對して，$\sin\frac{A}{2}$ 又は

$\cos\frac{A}{2}$ 式にては對數六つを要すべければなり.

二 注意 $\sin$ の値の變化は 90° 近邊に行くに從て緩なり, 故に $\sin\frac{A}{2}$ 式を用ゐて $\frac{A}{2}$ の値を計算するときは, $\frac{A}{2}$ が 90° 近邊にあるときは精密ならず.

同樣に $\cos\frac{A}{2}$ 式を用ゐて計算するときは $\frac{A}{2}$ が小なれば又精密を缺く,

然るに $\tan\frac{A}{2}$ 式にては角が如何なるときにも, より精密なり, 是れ對數計算に $\tan\frac{A}{2}$ 式を用ふる以所なり.

三 注意 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

此式は直接對數計算には適用し能はざれども, a, b, c の桁が小なるときは用ゐて便なり.

例題一 $a=90^\circ$ $B=50^\circ30'$ $C=122^\circ9'$ なるとき b, c, A を求む.

(解) $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(50^\circ30'+122^\circ9')$

$=7^\circ21'$

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A} \quad \therefore\ b=\frac{a\sin B}{\sin A}$$

$\therefore\ \log b=\log a+\mathrm{Log}\sin B-\mathrm{Log}\sin A$

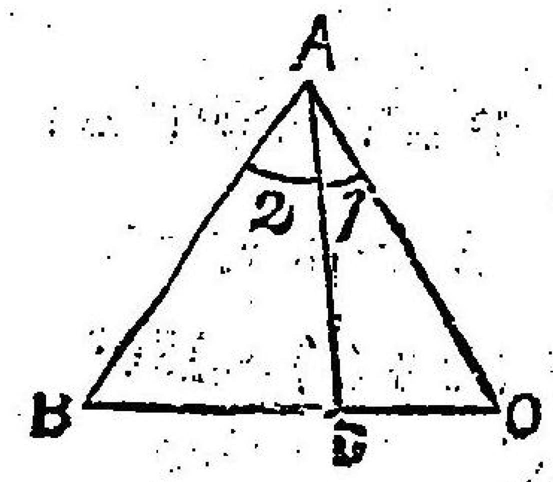
$$\begin{array}{rl} \log a=1.9542425 & \\ \mathrm{Log}\sin B=9.8874061 & (+ \\ \hline 11.8416486 & \\ \mathrm{Log}\sin A=9.1069729 & (- \\ \hline \log b=2.7346757 & \end{array}$$

$\therefore\ b=542.850$ 以下略

二 等邊三角形 ABC に於て, 角 A を 2:1 の比に分つべき直線 AD は, 對邊 BC を如何なる比に分つか.

(解) $\angle BAD:\angle DAC=2:1$

$\therefore\ \angle BAD=40^\circ$ $\angle DAC=20^\circ$



△ABD に於て

$$\frac{AD}{BD}=\frac{sinB}{sinBAD}$$

$$=\frac{sin60°}{sin40°}$$

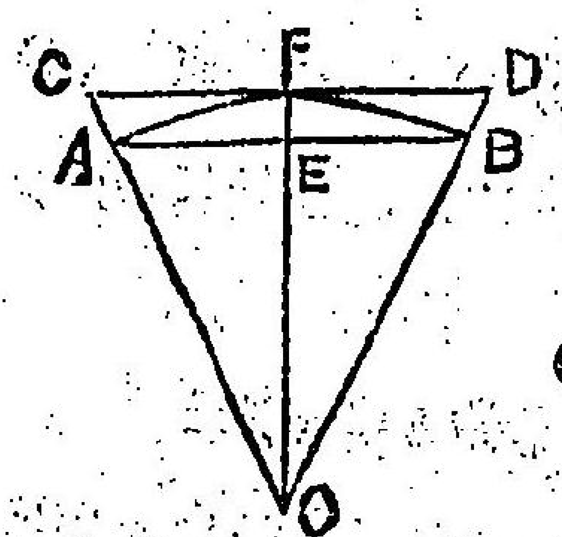
△ADC に於て $\frac{AD}{DC}=\frac{sin60°}{sin20°}$

上式にて下式を除すれば

$$\frac{DC}{BD}=\frac{sin20°}{sin40°}=\frac{1}{2.cos20}$$

三　圓の圓接正多角形と之に相應する外接正多角形とに於て，其各形の面積の比は 3:4 なり，然らば其邊数如何.

(解)　CD は外接正多角形の一邊 AB は内接正多角形の一邊 とす



此兩正多角形の面積の比は 3:4

故に △OAB:△OCD=3:4

然るに $\frac{\triangle OAB}{\triangle OCD}$

$$=\frac{\overline{OE}^2}{r^2}\quad \therefore \frac{\overline{OE}^2}{r^2}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{OE}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

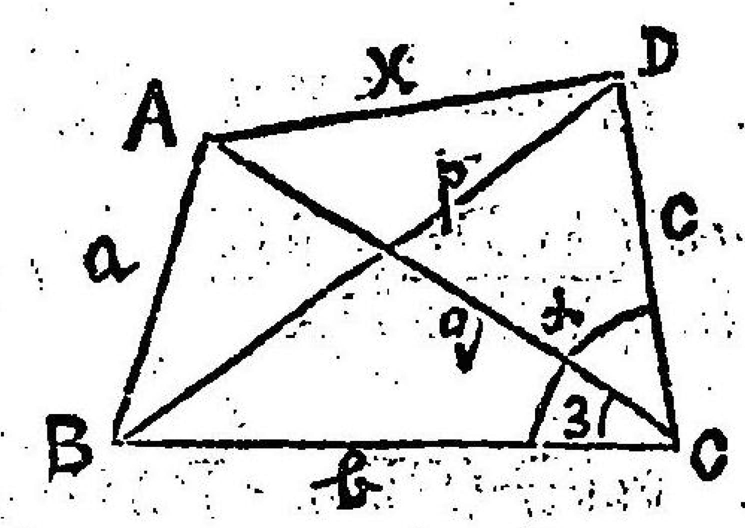
即ち　$cosBOE=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$　BOE=30°

$\therefore$　∠AOB=30°×2=60°

$\therefore$　邊数=360°÷60°=6.

四　四邊形 ABCD に於て AB=a, BC=b, CD=c と兩對角線 AC=p, BD=q を知りて AD=x を求めよ.



(解)　∠BCD=α　∠BCA=β とす

△ABC に於て $a+b+q=2s$ とせば

$\tan\beta=\sqrt{\frac{(s-b)(s-q)}{s(s-a)}}$ 之より

β を求む

又 △BCD に於て $b+c+p=2s'$ とせば

$\tan\alpha=\sqrt{\frac{(s'-b)(s'-c)}{s'(s'-p)}}$ 之より

α を求む

∴ $\angle ACD=\alpha-\beta$ にして已知なり之を r とすれば

△ACD に於て $\angle CAD+\angle ADC=180^\circ-r$ ....(1)

又 △ACD に於て $\frac{q-c}{q+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(ACD-DAC)}{\tan\frac{1}{2}(ACD+DAC)}$ (公式)

∴ $\tan\frac{1}{2}(CDA-DAC)=\frac{q-c}{q+e}\tan\frac{1}{2}(ACD+DAC)=\frac{q-c}{q+c}\tan\frac{1}{2}(180^\circ-r)$

之より ∠ACD−∠DAC を求め得

斯くして得たる ∠ACD−∠DAC の値と (1) 式とよりして, ∠CAD 及び ∠ADC の度數を求め得.

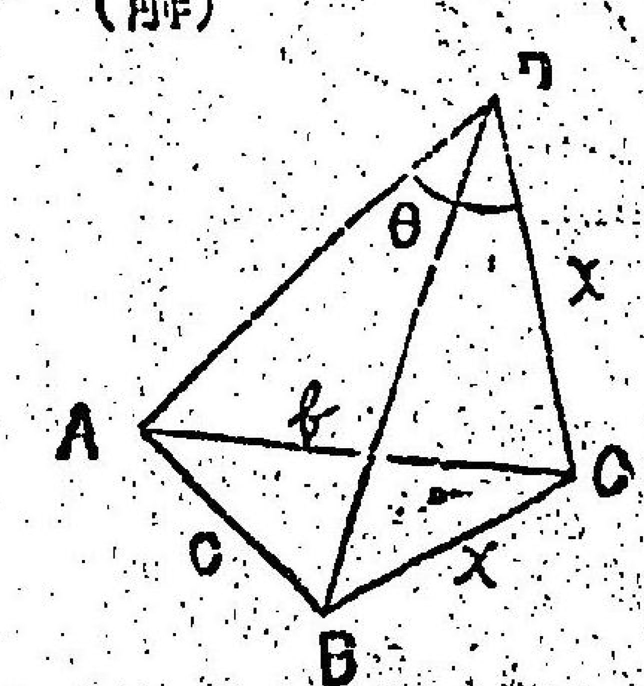
而して △ADC に於て

$\frac{x}{c}=\frac{\sin r}{\sin DAC}$ ∴ $x=\frac{c\sin r}{\sin DAC}$

五 塔 CD の底 C より, 地平面上に CA. なる二直線を引き, AB を結ぶ,

而して今 AB=c, BC=a, AC=b, ∠ADB=θ なることを測定し得たり, 然らば CD の高さ如何。

(解)



△ADB に於て

$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{DB}^2-2AD.DB\cos\theta$

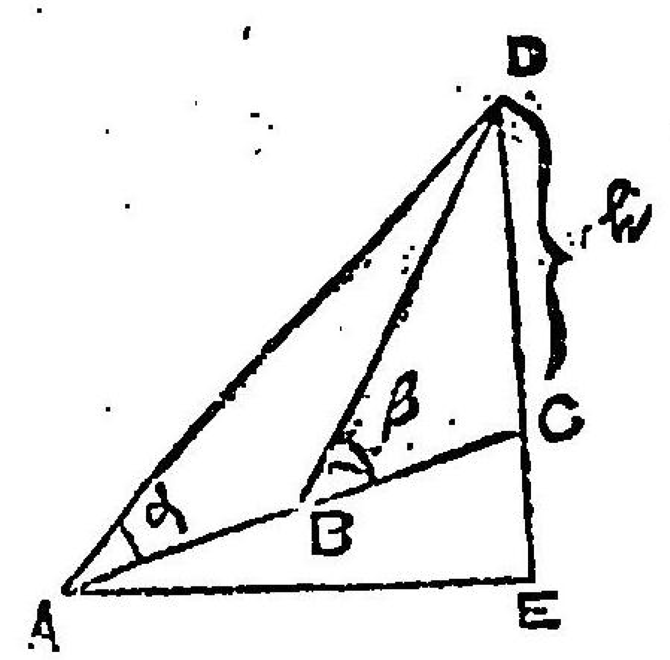
$c^2=(b^2+x^2)+(a^2+x^2)-2\sqrt{b^2+x^2}\sqrt{a^2+x^2}\cos\theta$

但し　$\angle DCA = \angle DCB =$ 直角

由て上の方程式より x を求め得

六　山腹の一点 A に於て山頂の三角標 CD（高さ）を求む角を測り α を得たり，夫より a 米登りし所の一点 B に於て三角標を求む角を測り β を得たり，然らば此山の地平面に於ける傾斜は

$$\cos^{-1}\left\{\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{h\sin(\beta-\alpha)}\right\}$$ なることを証せ.



（解）$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin ABD}{\sin ADB}$$

$$= \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

又 $$\frac{h}{AD} = \frac{\sin DAC}{\sin DCA}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ+\theta)}$$

上の二式を乗ずれば，

$$\frac{h}{AB} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\sin(90^\circ+\theta)}$$

$$\therefore \quad \frac{h}{a} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\cos\theta}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{h\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left\{\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{h\sin\theta-\alpha\beta}\right\}$$

（完）

明治四拾年三月三十日印刷
明治四拾年四月 三 日發行

（三角術奥付）

著　者　普通教育學會
東京市神田區表神保町七番地
發行者　吉 末 本 辻
東京市本郷區湯嶋一丁目二番地
印刷者　椿 市 太 郎
東京市本郷區湯嶋一丁目二番地
印刷所　株式會社 秀 光 社

東京市神田區表神保町七番地
電話本局三五七一（振替貯金三二八）
發賣所　修學堂書店

洋歷史▲東洋歷史▲算術▲代數▲平面幾何▲立体幾何▲平面三角▲測量▲微分▲積分▲解析▲球面三角▲物理▲有機化學▲無機化學▲動物▲植物▲礦物▲生理▲解剖▲法制▲經濟▲外國語▲農業▲法學通論▲其他講演時事雜報

本會は當代に於て名聲嘖々たる人士に謀り本講義を發刊し聊か以上の缺點を補はむとす而して講師は經驗に富み學識に秀でたる博士學士教師等を以てし叮嚀深切を旨とししかも材料豊富學説最新行文平易記事正確以て獨修者をして一點の遺憾だも無からしめんことを期す◎亦特に本會は購讀者の便を計り講義錄中既に原稿結了せし分に限り講師諸氏の承諾を得修學堂に命じ各科合卷として發行せしむ依て左に側記の課目中必要の部は各書店にて御購求あれ各合本何れも洋裝金文字入麗美本

東京　普通教育學會

東京市神田區表神保町
(電話本局一七五三番)

陸軍中尉講師	松本小七郎著	▲算術講義(合本)	代價八十錢	小包十錢
研數學館主	奥平浪太郎著	▲代數學講義(合本)	同一圓	同十錢
研數學館主	奥平浪太郎著	▲平面幾何學講義(合本)	同一圓	同十錢
研數學館主	奥平浪太郎著	▲立體幾何學講義(合本)	同一圓	同十錢
研數學館主	奥平浪太郎著	▲三角法講義(合本)	同一圓	同十錢
理學士	東條林岸太郎著	▲物理學講義(合本)	同一圓	同十錢
理學士	廣仲宗太著	▲最新物理學講義(合本)	同六十錢	同十錢
理學士	杉谷佐五郎著	▲化學講義(合本)	同一圓	同十錢
理學士	廣仲宗太著	▲最新有機化學講義(合本)	同六十錢	同十錢
理學士	廣仲宗太著	▲最新無機化學講義(合本)	同六十錢	同十錢
法學博士	和田垣謙三著	▲法制講義(合本)	同一圓廿錢	同十錢
法學博士	和田垣謙三著	▲經濟講義(合本)	同一圓廿錢	同十二錢

酒井勉編纂

改正 日本六法全書 全一冊

總クロース金文字入美本 正價五十錢 郵税六錢

夫れ法文は簡潔なり故に一字の誤謬だも決して宥すべらず然るに世の續々發行せらるゝ六法全書を見るに概ね誤字脱字等多く學者をして其の意を誤解せしむるもの尠からず若し「得」とあるべきを「得ズ」となさむか其の意味や正反對となすべく又「債務者」とあるべきに「債權者」とあらむか主客の顚例となるべし弊堂此に見るあり酒井先生の嚴密なる校正を以て本書を發行し請ふ續々採用の榮を賜はらむことを。

▲自宅獨修通信教授▼

會頭 帝國大學教授 法學博士 和田垣謙三
編輯主任 文學士 松平桃蹊
學監 教學院長中學校長 上野清
外講師 博士 學士 三十五名

普通教育 全科講義

毎月二冊發行廿四冊卒業▲紙數一ヶ月分七百頁▲會費一ヶ月六十錢▲三ヶ月一圓六十錢▲六ヶ月三圓▲十二ヶ月五圓四十錢▲入會の節束修二十錢を要す

◎毎號質問券あり○詳細の規則御入用の向きは郵券四錢御送附あれ直ちに送附す

…∧科目∨…

▲倫理▲教育▲論理▲國語▲漢文▲日本地理▲世界地理▲地文▲日本歴史▲圖

拾七大家講述

澁田菊苗先生述　生駒萬治先生述　芳賀矢一先生述

長連恒先生述　荻野仲三郎先生述　可兒德先生述

吉田靜致先生述　後藤牧太先生述　重野安繹先生述

八木光貫先生述　關根正直先生述　鈴木米次郎先生述

岡田正美先生述　紀平正義先生述　其他三名　若山水枏

北川三友兩先生共編

大增補　中學校　師範學校　高等女學校　教員受驗撮要　合卷全一冊

紙數千餘頁製本優美

正價金壹圓

小包料金拾錢

附錄自第一回至第最近教員檢定試驗問題、倫理、教育、國語、漢文、歷史、地理、數學、物理化學、動物、植物、鑛物、生理、體操、音樂、家事、裁縫、外國語、簿記、法制經濟、農業、工業、商業、手工、習字、圖畫、問題解釋例受驗規則◎增補科目、家事、裁縫、外國語、簿記、農業、商業、工業、習字、圖畫、法制經濟◎出版以來非常の好評を博し廿日間を出ですして八千部を賣盡し今や增刷の機運に接す此の際二百餘頁の增補をなす眞に完全無缺!!! ◎本文には諸大家の學識幷に研究方法を掲載す所謂航海の羅針盤。

官立諸學校 入學試驗問題講義 合卷

菊大判五百五十餘頁
挿圖九十餘個製本既成
正價金九拾錢
郵送料金十錢

受持講師

内海 弘藏　安田 又一　長澤龜之助　足立震太郎　神谷 一郎
上田 半江　上田 富輔　岡田 晉藏　小熊與一郎　杉村廣太郎
名取 弘三　阿部 秀典　吉本 大古　上原 甚六　建部 政治
宮田耀之助　内村逵二郎　齋藤 坦藏　笠 巴　鐵耕 居士
神戸順三郎　士生 實

高等學校　陸軍士官學校　高等師範學校　東京高等工業學校
海軍兵學校　高等商業學校　海軍機關學校　大阪高等工業學校
商船學校　外國語學校　札幌農學校　外諸課目講義

學運の進歩今や其の頂點に達し、官立諸學校入學の志願者年々其の數を增し、從つて諸學校入學試驗の制度漸く嚴に以て多數志願者より其の善良なる者のみを選ぶに至る、此に於てか受驗者にして不合格に終る者多く、多年の苦學も一朝にして水泡に歸し、百年の希望を抛ち一生を誤る者亦た尠しとせず、これ試驗の困難なるなりは寧ろ受驗者の好伴侶たるべき者なきによる、本書は聊か其の欠を補はんと欲し、官立諸學校の入學試驗問題に、各種専門諸先生の多年の經驗と豐富なる學力とによれる正確なる答案を附し、加之一々該博精透なる講義を加へ受驗者をして試驗場に於て、應問答案するのみならず、親しく教へらるゝの思あらしむる者、是れ本書の世間同種の書と異なり、大に世に誇らんとする所なり、去れば受驗者一たび本書を購讀し座右の好伴侶となさば、受驗の艱しみなく一生を誤る憂ひなからん。

法典研究會編纂（改訂増補）

文官普通及裁判所書記 試驗問題解答 全一冊

正價金七十五錢 郵税金六錢

駸々乎タル文明ノ潮流ハ社會全般ノ事業ヲシテ複雑ナラシメタリ故ニ其局ニ當ルモノ益々其選用ヲ増シ官廳ノ如キモ其登用ヲ爲スコト年々歳々其多キヲ加フ而シテ又之ニ應スルモノ少ナキニ非サレトモ就中文官普通試驗ノ如キ頻年各所ニ行フ志望者之ニ伴フモ其合格スルモノ亦稀ナリ之畢竟試驗[illegible]困難ナルニ非スシテ受驗者ノ侶伴トナルヘキ好著書ナキニ因ス弊店大ニ之ヲ憂ヒ法典研究會ニ於テ之レカ指南車タル良書ヲ編纂セラルヽト聞キ敢テ會ニ請ヒ之レカ出版ヲ爲シ世ニ公ニスルコトトナレリ本書ハ最近數年間ノ各地ニ於ケル文官普通試驗問題ヲ網羅シ之ニ親切丁寧ナル答案ヲ附シ其文章ノ平易簡明ニシテ一般ニ任官タルヘキ試驗ノ答案トシテハ坊間鬻ク所ノモノ恐ラク本書ノ右ニ出ツルモノナカラン特ニ受驗者心得ヲ附シタル等萬事ニ於テ遺憾ナキ近來ノ好著書ナリ請フ志望ノ諸氏ハ一本ヲ繙キ其眞價ヲ判セラレヨ

卅一年
卅二年
卅三年

官立學校 入學試驗問題 全三冊

正價各十五錢宛 郵税二錢宛

卅四年
卅五年
卅六年
卅七年
卅八年
卅九年

官立學校 入學試驗問題 全六冊

正價各十五錢宛 郵税二錢宛

所以なり。

一 他の書、多くは偏狹にして、或は地理に偏し、或は歴史に傾き、或は故實有識に流れ、或は之を兼ぬるも、浩澁繁冗に失するの嫌あるものあり。之に似ず本書は、苟も和漢兩學の故事熟語に關するものは、地理と云はず、歴史と云はず、人名と云はず、動植と云はず、故實有識を問はず、古言今語を論ぜず、一切網羅せざるはなし。故に一卷を備ふるものは、あらゆる故事熟語に於ては、多々の典籍を繙くの煩なかるべし。

一 索引に便ならしめんため、書中の語を「イロハ」別に分類收集して、一目瞭然已が欲する所を見出すに利あらしむ。其他の特色の如きは姑く世評に聞はんのみ。

右の如き輕便便利なる珍書なるを以て、其の需要も亦頗る廣かるべし。先づ小學校尋常正准教員檢定受驗者、全上教員準備、尋常入學者、中學校、男女師範學校、高等女學校、各種學校、男女高等師範學校入學試驗者等に、無二の良師友たるべきは勿論、右各々校教授上の參考書になり、更に文部省教員檢定受驗者にも唯一の好侶伴たるべきは、決して虛言にあらず。請ふ、大方の諸子、一卷を備へて其の眞なるを了し給はんことを。

余仁吉先生校訂　同文學會講師鈴木靈眞編

(新刊) 日清會話獨修

洋裝全一冊　正價廿五錢　郵稅四錢　紙數三百頁

本書は實用的也、速成的也、學生官使商人初學の士と否とを問はず其最好の書は本書を措て他に得べからず今は有事の日也軍人實業家は宜しく本書を供へて事を問れ附するに單語雜辭等を以てし原音には余大先生の嚴正なる校訂を經て我か假名を傍附したれば獨修に最も便也而して内容の豐富適なるは勿論印刷紙質製本の佳良は市上未だ見ざる處也有爲の士幸ひに一本を供へ給へ

白井義督著
平面幾何學問題詳解　全二冊　正價一冊各卅五錢、郵税四錢

松本小七郎著
立體幾何學問題詳解　全一冊　正價一冊卅五錢、郵税一冊四錢

原濱吉著
平面三角問題詳解　全一冊　正價卅五錢、郵税四錢

普通代數學講義
教育　全二冊　正價各卅五錢、郵税各四錢

伴徳政先生著
物理學計算問題詳解　全一冊　正價一冊卅五錢、郵税一冊四錢

伴徳政先生著
化學計算問題詳解　全一冊、正價一冊卅五錢、郵税一冊四錢

白井義督著
數學公式及原理　全一冊　正價卅五錢、郵税四錢

國語漢文研究會編纂

國語漢文獨習自在　全一冊

紙數二百八十頁　語數二千餘
正價金三十五錢　郵税六錢

右は著者が多年和漢學研鑽の結果、蒐積して成りたるものなれば、其の内容の有實なる、其の中の一語を講じ一事を記すも、一として讀者の實力とならざるはなく、閲者の裨益とならざるはなし。方今辭典の書多々益々辨ずべく、汗牛充棟も啻ならずと雖、其の體裁或は多岐冗雜に渉り、或は偏狹簡略に陷るの弊なき能はず。本書は務めて其の冗雜を去り、其偏狹を防ぎ、苟も和漢學を研究するものをして、一覽博通、欣然意會するの便あらしめたり。いでや本書の特色を左に示さんか。

一本書の編輯は、素、營利的にあらず。實用的にあり。故に其の收むる所一として親切懇篤ならざるはなく、實益便利ならざるはなし。是其の他書の及ばざる

本書目次

東京英語學會各講師編纂
マスターチフアーツ、國民英學會講師高野禮太郎主任

◎英語學自修全書

全部十六冊正價一冊金二十五錢
郵税一冊四錢　完結

日英同盟後我國に於て英語の攻究は最も其の必要を感ずるに至れり、政治に文學に實業に交通に將た日常の談話に苟しくも志ある者誰れか英語の必要を感ぜざる者あらんや、然れども世間修學の書に乏しく、其の會々刊行せらるゝ者を見るに多くは片々たる斷篇のみにして眞に英語學全科を大成せし者あるを見ず是れ實に英語攻究者にとりて一大遺憾なりとす、本會此の遺憾を補はんかため專門諸大家の贊助を得て本書を發行し篇を重ぬる十六、今や既に全部完成を告ぐるに至れり、本書收むる所、皆な斯學必須の學科にして各專門大家の親しく執筆せられたる者なれば法意周到簡易平明を主とし加ふるに實地活用に迂ならず實に近時稀に見る一大良書なり、篤學の士、本書を讀了せば英語全科に通ずるを得るのみならず本書は各篇皆な各科の蘊奥を說きたる者なれば一篇を繙くも其科の學に通ずるを得ん翼くは篤學の士本書を以て斯學攻究の便に供せられなば幸甚、

—△各種書目—

本國史	全
日本地理	全
西洋史	上下
外國地理	上中下
東洋史	全
化學	上下
地文學	全
物理學	上下
算數學	全
生理衞生學	全
動物學	上下
植物學	上下
鑛物學	全
日本史年表	上下
西洋史年表	上下
東洋史年表	上下
代數學	上下
幾何學	上下
三角術	全
漢文典	全
英文典	全
國文典	全
會話及作文	全
立體幾何學	全

醫學士講師高塚三歩三郎著

獨逸語三ケ月自修書

全一冊　正價五十錢　郵税六錢　紙數二百廿頁

獨習ノ書抄カラズ然レドモ多クハ讀本ノ直譯ニシテ只字句ニノミ譯ヲ付シテ之ヲ讀者ニ對シ甚不親切ナルモノヽミナリキ弊堂之ヲ慨シ高塚先生ニ乞フテ本書ヲ世ニ公ニシ聊カ斯學ノ爲ニ盡ス處アラントス本書ハ先生カ多年ノ經驗上ニ一種新案ノ教授法ニ則リ初學者ヲシテ三ケ月間ヲ期シテ發音字ヨリ進テ譯讀文法會話等ニ至ルマテ自修セシムルノ方法ナリ加フルニ一ニ丁寧親切ナル說明ヲ加ヘアレハ邦文ヲ解スルモノハ何人ト雖モ容易ニ獨逸語學ノ蘊奧ヲ通曉スルニ至ル是レ本書ノ特色ナリ請フ愛讀アレ。