3

初等代數

下冊

編者　胡術五
　　　李修睦
校者　余介石

中華書局印行

初等代數下冊目次

第七章 分式

第八章 比例

第九章 乘方與開方

第十章 根式 指數與虛數

第十一章 一元二次方程式

第十二章 可化爲二次方程式求解的各種簡易方程式

第十三章 級數

初等代數下册

第七章

分式

I. 分式

115.定義 一式A,除以一式B(不爲零),記做$\frac{A}{B}$或A/B;被除式A叫**分子**,除式B叫**分母**. 代數式中分母含有文字或元的,叫**分式**.

對分式而言,分母不含文字或元的,叫**整式**.

如 $x+y$, $\frac{x+y}{2}$, 都是整式.

$\frac{1}{x}$, $\frac{1+x^2}{x}$, 都是分式.

上二分式中x是分母,1和$1+x^2$是分子.

【註】 分式與除法有同等意義,所以$\frac{1+x^2}{x}$也可以寫成$(1+x^2)\div x$,或$(1+x^2)/x$.

116.基本原則 和算術中關於分數的情形一樣,一分式用不爲零的任何數同時來乘或除分子、分母,

分式的值不變.

$$\frac{x}{y}=\frac{ax}{ay};\text{ 或 }\frac{ax}{ay}=\frac{ax\div a}{ay\div a}=\frac{x}{y}.$$

117.符號律 因爲分式與除法同義,所以分式的性質號,與除法商的性質符號一樣,可以由分子、分母的性質號來定.

【例】 $\frac{+x}{+y}=+\frac{x}{y}$; $\frac{-x}{-y}=+\frac{x}{y}$; (一)

$\frac{-x}{+y}=-\frac{x}{y}$; $\frac{+x}{-y}=-\frac{x}{y}$. (二)

觀察上四式,可併爲二式:

$$\frac{+x}{+y}=\frac{-x}{-y}=+\frac{x}{y};\quad \frac{-x}{+y}=\frac{+x}{-y}=-\frac{x}{y}.$$

更取前式寫作

$$+\frac{+x}{+y}=-\left(-\frac{x}{y}\right).$$

則有關係 $+\frac{+x}{+y}=-\frac{-x}{+y}$, (三)

或 $+\frac{+x}{+y}=-\frac{+x}{-y}$.

故得分式性質符號的符號律:

(一)分子、分母同號,則分式爲正.

(二)分子、分母異號,則分式爲負.

(三)分子、分母、分式前面三個性質符號,可以任意

改變兩個,對分式的符號不生影響.

【例】 $\frac{-3}{5-x}=\frac{-(-3)}{-(5-x)}=\frac{3}{x-5}$;

$$=-\frac{-(-3)}{5-x}=-\frac{3}{5-x};$$

$$=-\frac{-3}{-(5-x)}=-\frac{-3}{x-5}.$$

【註】 分式前面的正號,可以省去不寫.

習題四七

塡出下面各式的缺項:

1. $-\frac{3}{5}=\frac{?}{15}$.　**2.** $-\frac{5}{9}=-\frac{-10}{?}$.

3. $\frac{3x}{4x+5}=\frac{6x}{?}$.　**4.** $\frac{a+b}{a-b}=\frac{?}{a^2-b^2}$.

5. $\frac{x-3}{x}=\frac{3-x}{?}$.　**6.** $-\frac{2-x}{x-1}=\frac{x-2}{?}$.

118.約分 根據基本原則,用分母､分子的最高公因式來除分子､分母,使成互素.所得的分式叫**最簡分式**.

約一分式爲最簡分式的方法叫**約分**.

【例一】 約$\frac{-4ac^2}{12a^2c}$爲最簡分式.

【解】 分子､分母的$H.C.F.=4ac$.

$$\therefore\quad \frac{-4ac^2}{12a^2c}=\frac{-4ac^2\div 4ac}{12a^2c\div 4ac}=-\frac{c}{3a}.$$

可演算如次:

$$\frac{-4ac^2}{12a^2c}=-\frac{\cancel{2^2}\cancel{a}c^{\cancel{2}}}{\cancel{2^2}\cdot 3a^{\cancel{2}}\cancel{c}}=\frac{-c}{3a}.$$

【例二】 約分$\dfrac{2x-6}{x^2-5x+6}$

【解】 先分解分子、分母的因子,再消去公因子,

$$\frac{2x-6}{x^2-5x+6}=\frac{2(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{x-2}.$$

【例三】 約分$\dfrac{x^2-7x+12}{16-x^2}$.

【解】 $$\frac{x^2-7x+12}{16-x^2}=\frac{(x-3)(x-4)}{(4+x)(4-x)}=\frac{-(x-3)(x-4)}{-(4+x)(4-x)}$$

$$=\frac{(3-x)(x-4)}{(4+x)(x-4)}=\frac{3-x}{4+x}.$$

【註】 分子、分母所改的負號,可看作用 -1 相乘,這負號只能與一因子相乘,故只變一因子的號.

如 $-(x-3)(x-4)=-1\times(x-3)(x-4)=(x-3)(4-x)$, 或 $(3-x)(x-4)$,與$-(x-3+x-4)=-1\times(x-3+x-4)$裏面符號,乘出後全變者不同.

習題四八

約分下列各式:

1. $12ab^3/18a^2b$.　2. $(a^2-b^2)/(a+b)^2$.

3. $(14-7x)/(x^2-4)$.　4. $(d^2-c^2)/(c^2-d^2)$.

5. $(ab^4-ab^2c^2)/(a^3b^2+a^3bc)$.

6. $(9-x^2)/(7x-x^2-12)$.

7. $\dfrac{x^2-9x+18}{3x^2+3x-36}$.　8. $\dfrac{2x^2-22x+56}{63-9x-7y+xy}$.

119.通分　把分母不同的分式,變成分母相同的分式的方法叫通分.

根據基本原則,分式的分子、分母可以用任一不爲 0 的式來乘,便得通分的

法則　**先求各分式分母的 L. C. M.,再用原分母除 L. C. M.,以除得的商,乘各分式的分子與分母.**

【例一】　通分 $\dfrac{a}{2xy^2}$, $\dfrac{b}{3x^2y}$.

【解】　分母的 L. C. M. $=2\cdot3x^2\cdot y^2=6x^2y^2$.

$6x^2y^2\div2xy^2=3x$,

$6x^2y^2\div3x^2y=2y$.

$$\therefore\quad \frac{a}{2xy^2}=\frac{a\cdot3x}{6x^2y^2}=\frac{3ax}{6x^2y^2},\quad \frac{b}{3x^2y}=\frac{b\cdot2y}{6x^2y^2}=\frac{2by}{6x^2y^2}.$$

【例二】　通分 $\dfrac{x+5}{x^2-x-6}$, $\dfrac{x+3}{x^2+7x+10}$.

【解】　$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$,

$x^2+7x+10=(x+5)(x+2)$.

故分母的 L. C. M. $=(x-3)(x+2)(x+5)$.

$$\therefore \quad \frac{x+5}{x^2-x-6}=\frac{(x+5)(x+5)}{(x^2-x-6)(x+5)}=\frac{(x+5)^2}{(x-3)(x+2)(x+5)},$$

$$\frac{x+3}{x^2+7x+10}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x^2+7x+10)(x-3)}=\frac{x^2-9}{(x+5)(x+2)(x-3)}.$$

【例三】 通分 $a, \frac{b}{x-y}, \frac{c}{x+y}$.

【解】 整式 a 可視作分母爲 1 的分式.

分母的 $L.C.M.=(x-y)(x+y)=x^2-y^2$.

$$\therefore \quad a=\frac{a}{1}=\frac{a(x^2-y^2)}{x^2-y^2};$$

$$\frac{b}{x-y}=\frac{b(x+y)}{x^2-y^2};$$

$$\frac{c}{x+y}=\frac{c(x-y)}{x^2-y^2}.$$

習題四九

通分下列各組分式:

1. $\frac{a}{xy}, \frac{b}{yz}, \frac{c}{zx}$.
2. $\frac{a}{x}, \frac{2b}{x-y}, \frac{3c}{x+y}$.
3. $\frac{a}{x^2-6x+8}, \frac{a+b}{x^2-16}$.
4. $\frac{x+y}{x^2-2xy}, \frac{x-y}{xy-2y^2}$.
5. $x^2+x+1, \frac{1+x}{1-x}$.
6. $\frac{2x-3y}{6x^2+11xy+3y^2}, \frac{5x}{4x^2-9y^2}$.

II. 分式四則

120.分式加減法 分式四則運算法則和算術中

關於分數的情形完全一樣.

加減法法則:

(一)分母相同的分式相加減,以各分子加減的結果爲新分子,分母不變.

(二)分母不同的分式相加減,先通分,再照(一)算.

【例一】　求 $\frac{2a}{x+y}+\frac{b}{x+y}-\frac{a}{x+y}$ 的結果.

【解】　$\frac{2a}{x+y}+\frac{b}{x+y}-\frac{a}{x+y}=\frac{2a+b-a}{x+y}=\frac{a+b}{x+y}.$

【例二】　求 $\frac{2}{x^2-4x+3}-\frac{4}{x^2+2x-15}$ 的差.

【解】 $$\frac{2}{x^2-4x+3}-\frac{4}{x^2+2x-15}=\frac{2}{(x-1)(x-3)}-\frac{4}{(x+5)(x-3)}$$

$$=\frac{2(x+5)-4(x-1)}{(x-1)(x-3)(x+5)}$$

$$=\frac{2x+10-4x+4}{(x-1)(x-3)(x+5)}$$

$$=\frac{-2x+14}{(x-1)(x-3)(x+5)}$$

$$=-\frac{2(x-7)}{(x-1)(x-3)(x+5)}.$$

【註】　若結果式分子、分母有公因子,應約分.

習題五〇

求下列各式的結果.

1. $\dfrac{2a+n}{a+an}+\dfrac{2n+a}{a+an}$.

2. $\dfrac{n^3-n^2}{n+1}+\dfrac{2n^2}{n+1}$.

3. $\dfrac{m}{m-1}-\dfrac{1}{m+1}$.

4. $\dfrac{m}{n}-\dfrac{5}{2n^3}+\dfrac{x}{4}$.

5. $\dfrac{x+4}{x^2-9}-\dfrac{2x-3}{x^2-5x+6}$.

6. $\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}$.

7. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}+\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}$.

8. $\dfrac{x}{x^3+y^3}-\dfrac{y}{x^3-y^3}+\dfrac{x^3y+xy^3}{x^6-y^6}$.

121.分式乘法 用一分數去乘別數,就是將那數照分子倍起來,而照分母分爲等分;換句話說,就是用分子乘,用分母除,所以得

分式乘法法則 各分子相乘爲新分子,各分母相乘爲新分母.

如各分子與分母間有公因子,應先約分.

【例一】 $\dfrac{a^2-4}{3x}\cdot\dfrac{6x}{a-2}=\dfrac{(a+2)(a-2)}{(a-2)}\cdot\dfrac{2\times 3x}{3x}=2(a+2).$

【例二】 $\dfrac{x^2-1}{x^3+1}\cdot\dfrac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\cdot\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$

$$=\frac{1}{x-1}.$$

習題五一

求下列各題中諸式的積:

1. $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{y}$, $\frac{c}{z}$.　　2. $2a$, $\frac{3}{b}$, $\frac{c}{6}$.

3. $\frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}$, $\frac{2x+2a}{3x}$.　4. $\frac{5a+5c}{ax-cx}$, $\frac{ax^2-cx^2}{a^2+ac}$.

5. $\frac{x^2-4x+3}{x^2-8x+16}$, x^2-5x+4.　6. $\left(1+\frac{2-2a}{a^2-1}\right)$, $\left(\frac{2a}{a-1}-1\right)$.

7. $\frac{2+5x+3x^2}{(1+x)^3}$, $\frac{1+x}{4x^2}$.

8. $\frac{a^2-2ab-3b^2}{(a+b)^3}$, $\frac{a^2-4ab+3b^2}{a^3+b^3}$.

9. $\frac{x^2-x-20}{x^2-25}$, $\frac{x+1}{x^2+5x}$, $\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-8}$, $\left(1+\frac{4}{x+1}\right)^2$.

122.分式除法　除法是乘法的逆運算,如用$\frac{a}{b}$除c,得商為x,則以$\frac{a}{b}$乘x的積,應當是c,可見商必為$\frac{b}{a}\cdot c$故得分式除法法則如下:

顛倒除式的分子、分母,去乘被除式.

【例一】　$\frac{ab}{x}\div\frac{ac}{nx}=\frac{ab}{x}\cdot\frac{nx}{ac}=\frac{bn}{c}$.

【例二】　$\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}\div(x^2-4)=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}\div\frac{(x^2-4)}{1}$

$$=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x+2}{(x-1)^2(x-2)}.$$

習題五二

求下列各題的商:

1. $\frac{4a^2}{x}\div\frac{2a}{x^2}$.

2. $\frac{24a^4b^2}{5x^4y^3}\div 6a^2b^2$.

3. $\frac{x^2+2x-35}{x^2+10x+21}\div(x^2-4x-5)$.

4. $\left(2-\frac{y}{x+y}\right)\div\left(2-\frac{x}{x+y}\right)$.

5. $\left(\frac{n}{a}-\frac{9a}{n}\right)\div\left(\frac{n^2}{4a^2}-\frac{81a^2}{4n^2}\right)$.

6. $\left(3-\frac{1}{n+2}\right)\div\left(3-\frac{4}{n+3}\right)$.

7. $\left(x-3-\frac{28}{x}\right)\div\left(1-\frac{1}{x}-\frac{20}{x^2}\right)$.

123.繁分式 分子、分母皆含分式的分式,叫繁分式.

繁分式的運算,只須認清分子和分母,照分式四則化爲簡分式.

【例一】 化簡 $\dfrac{a}{x+\frac{a}{y}}$.

【解】 分母爲一分式,先照分式四則化簡分母.

$$\frac{a}{x+\frac{a}{y}}=\frac{a}{\frac{xy+a}{y}}$$

$$=a\div\left(\frac{xy+a}{y}\right)=a\cdot\frac{y}{xy+a}=\frac{ay}{xy+a}.$$

【例二】 化簡 $\dfrac{1-\frac{3}{a}-\frac{10}{a^2}}{a-13+\frac{40}{a}}$.

【解】 分子、分母都是分式,先照分式四則分別化簡分子和分母.

$$\frac{1-\frac{3}{a}-\frac{10}{a^2}}{a-13+\frac{40}{a}}=\frac{\frac{a^2-3a-10}{a^2}}{\frac{a^2-13a+40}{a}}$$

$$=\frac{(a-5)(a+2)}{a^2}\cdot\frac{a}{(a-5)(a-8)}$$

$$=\frac{a+2}{a(a-8)}.$$

習題五三

化簡下列各繁分式:

2. $\dfrac{a}{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}$.　　**2.** $\dfrac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$.

3. $\dfrac{1+\frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x-y}}$.　　**4.** $\dfrac{x+\frac{1}{x+2}-2}{x+\frac{1}{x-2}+2}$.

5. $\dfrac{\frac{x}{3y}-\frac{3y}{x}}{\frac{4y}{x+y}-1}$.　　**6.** $1+\dfrac{x}{1+x+\frac{2x^2}{1-x}}$.

III. 分方程式

124.分方程式解法　分式分母含有未知數的方程式叫**分方程式**.分母不含未知數的叫**整方程式**.

如 $\frac{1}{x-3}=2$, $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}-3=0$ 等都是分方程式.

分方程式的解法 先用各分式分母的 $L.C.M.$ 偏乘方程式,化爲整方程式再解.

解出的結果,必須代入原式驗算.

【註】 分方程式解法的討論,詳本局高中代數學.

【例一】 解方程式 $\frac{1}{x-3}=2$.

【解】 以分母的 $L.C.M.$ 偏乘方程式,得

$1=2x-6$. 解得 $x=\frac{7}{2}$.

【驗算】 $$\frac{1}{\frac{7}{2}-3}=\frac{1}{\frac{7-6}{2}}=1\times\frac{2}{1}=2.$$

$\therefore$ $x=\frac{7}{2}$ 爲分方程式的根.

【例二】 解分方程式 $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=3$.

【解】 以 x 偏乘方程式,得

$$1+2+3=3x.$$

$$\therefore\ x=2.$$

【驗算】 $$\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

【又解】 原方程式可寫作

$$\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{x}=3,$$

或 $$(1+2+3)\cdot\frac{1}{x}=3,$$

$$6=3x.$$

$$\therefore\ x=2.$$

【例三】　解方程式 $\frac{7x}{x-2}=\frac{6x}{x-1}+6$.

【解】　以 $(x-2)(x-1)$ 徧乘方程式,

$$7x(x-1)=6x(x-2)+6(x-2)(x-1),$$

$$7x^2-7x=6x^2-12x+6x^2-18x+12.$$

移項,合併,　$5x^2-23x+12=0$.

分解因子,　$(x-4)(5x-3)=0$.

$$\therefore\ x=4,\ 或\ x=\frac{3}{5}.$$

【驗算】　$x=4$, $\frac{7\times4}{4-2}=\frac{6\times4}{4-1}+6$, $14=14$.

$$x=\frac{3}{5}, \frac{7\times\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}-2}=\frac{6\times\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}-1}+6, \frac{21}{5}\times\frac{5}{-7}=\frac{18}{5}\times\frac{5}{-2}+6,$$

$$-3=-9+6,\quad -3=-3.$$

$\therefore$ 4, $\frac{3}{5}$ 爲分方程式二根.

習題五四

解下列分方程式並驗算結果:

1. $\frac{5}{x}=1$.　　2. $\frac{3+2x}{2x-3}=\frac{1}{4}$.

3. $\frac{5x+1}{x-11}+8=2x$.　　4. $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{x+3}{x+1}$.

5. $\frac{n}{x}+\frac{3n}{2x}=\frac{5}{4}$.　　6. $\frac{3}{5-3x}=\frac{4-3x}{3x-5}+\frac{7}{5}$.

125.應用問題

【例一】 兩數的和是162.小數除大數得商3餘14,求兩數.

【解】 設x為小數,

則$162-x$為大數.

依題意立方程式

$$\frac{162-x}{x}=3+\frac{14}{x}.$$

用x徧乘上面方程式,

$$162-x=3x+14,$$

$$4x=148.$$

$\therefore\quad x=37$ 小數.

$162-x=125$ 大數.

【驗算】 $\frac{125}{37}=3+\frac{14}{37}.$

【例二】 有一工程,甲獨做9日可成,甲乙共做$4\frac{4}{5}$日可成,問乙獨做幾日可成?

【解】 設乙獨做x日可成,

則 甲每日可成工程的$\frac{1}{9}$,

乙每日可成工程的$\frac{1}{x}$,

甲乙共做每日可成工程的$\frac{1}{9}+\frac{1}{x}$.

但甲乙共做每日可成工程的$\dfrac{1}{4\frac{4}{5}}$.

故得方程式　$$\frac{1}{9}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4\frac{4}{5}}$$

或　$$\frac{1}{9}+\frac{1}{x}=\frac{5}{24}.$$

移項,　$$\frac{1}{x}=\frac{5}{24}-\frac{1}{9}=\frac{7}{72}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{72}{7}=10\frac{2}{7}\text{日}.$$

即乙獨做$10\frac{2}{7}$日可成

【驗算】　$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10\frac{2}{7}}=\frac{1}{9}+\frac{7}{72}=\frac{15}{72}=\frac{5}{24}=\frac{1}{\frac{24}{5}}=\frac{1}{4\frac{4}{5}}.$$

習題五五

1.　分 328 爲兩份,使他們相除的商是 7.

2.　分 170 爲兩份,使他們相除得商 2,餘 23.

3.　一工程甲獨做 9 日可成,乙獨做 8 日可成,丙獨做日半可成,若三人合做,幾日可成?

4.　一長方形的長比闊大 4 倍,若長減 8 尺,闊加 3 尺,面積增大 104 方尺,求原來的長闊.

5.　一長方田闊是長的$\frac{2}{3}$,若長加倍,闊減少 32 尺,則面

積爲1584方尺,求原來的長闊.

6. 乙行1里所要的時間比甲行1里多3分鐘,乙行5里時,甲可以行6里.求甲乙兩人的速度

7. 甲乙共有銀1000元.甲用去他所有的$\frac{1}{2}$,乙用去他所有的$\frac{1}{3}$,若甲所用的恰比乙所用的多25元.求甲乙各有銀多少?

雜 題

求下列各式的結果:

1. $\dfrac{x-3}{x^2-3x-4}-\dfrac{x-1}{x^2-x-2}$.　**2.** $\dfrac{5}{3+x}-\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{6(1-x)}{x^2-9}$.

3. $\dfrac{4x+5}{1+2x+x^2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3x^2-5}{1-x^2}$.

4. $\left\{x+y-\dfrac{1}{x+y+\dfrac{xy}{x+y}}\right\}\times\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$.

解下列各方程式:

5. $\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{x-3}{2(x-4)}=0$.　**6.** $\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{2a}{x+2a}=\dfrac{1}{10}$.

7. $\dfrac{a^2}{x}-a=\dfrac{b^2}{x}+b$.　**8.** $\dfrac{a}{x-m}=\dfrac{m}{x-a}$.

【註】 a, b, m等都當作已知數.

9. 某車的速度若能加快6里,則行360里的路程可以少費2小時,求某車的速度.

10. 甲乙兩人在相隔 180 里之地相向而行,甲騎馬乙坐車,四小時後相遇;若馬的速度加倍,車的速度減至原速度的$\frac{3}{4}$,則三小時後便可相遇,求甲馬和乙車的速度.

11. 有二位數,用數字和來除得商 6,餘 6.若把數位顚倒,再用數字和來除,則得商 8,餘 3.求此數.

12. 一工程甲獨做 6 日可成,乙、丙獨做各要 8 日,丁獨做要15日,若四人合做幾日可成?

13. 一工程甲、乙、丙三人合做 $1\frac{3}{7}$ 日可成,若甲獨做要 3 日,乙獨做要 5 日,問丙獨做要幾日?

14. 某划船由甲城順流至相隔60里的乙城需 2 小時可到,回來需 5 小時,求水流的速度和某船划行的速度.

第八章

比例

I. 比

126.比　比較二數大小,有二種方法:

(一)看一數比他數多出或不足若干?

(二)看一數爲他數的幾倍或幾分之幾?

譬如我們先說12較4多8,或者說12比4大3倍.倍數3是用4除12得來的.以除法求二數商,以定其大小倍數,就產生比的觀念.換句話說,a被b除的商,就是a對於b的倍數,叫a與b的比,寫做$a:b$,或用分式$\frac{a}{b}$來表示;a稱爲前項,b稱爲後項.

【例】 $\frac{3}{4}$一比中,3爲前項,4是後項.

$m+3:m-5$是比,以$m+3$爲前項,$m-5$爲後項.

127.量的比　二量必屬於同類時,方能比較,並且必須用同一單位表出時,方可相比.

【例】　1小時與15分的比,并非1:15而爲60:15=4.

【注意】　由此知二名數相比時所得比值必定是不名數,又二量的比值與表二量的單位無關.譬如在上例中,1小時與15分的比,可寫爲60分:15分,也可寫成1小時:$\frac{1}{4}$小時

結果都是 4.

128.比的原則　比既然由除法產生,和分式是一樣,所以分式的運算原則,對於比依舊適用.注意除法、分式、比三者的關係如下表:

除法	被除數	除數	商
分式	分子	分母	分式值
比	前項	後項	比值

比中前後項,以同數乘或除,其比值不變.

【例一】　$8:6=8\times2:6\times2=16:12$

又　$=8\div2:6\div2=4:3.$

【例二】　$a-b:a^2-ab+b^2=a^2-b^2:a^3+b^3$(同以 $a+b$ 乘).

【注意】　二量必為同類,始能相比,而比值必為不名數,這是比與除法不同的地方,學生應當特別注意.譬如甲在 4 小時內走了 28 里,我們可用除法求得他的速度為每小時 7 里,但不能說是 28 里與 4 小時的比.

習題五六

化簡下列(1−9)各比,使比值為最簡分數:

1.　1 公尺:1 市尺.　　**2.**　1 市斤:1 公斤

【註】 兩種不同制度中單位的比,即其當量,可參看本局出版最新課程標準適用初中算術上冊第五章.

3. 1 市尺:1呎.　　**4.** 1 里:1哩.

5. $\frac{3}{10}$哩:100吋.　　**6.** 1 公畝:1英畝.

7. $x^2-2x+1:x^2-1.$　　**8.** $1-\frac{9}{x^4}:1+\frac{3}{x^2}.$

9. $\frac{2a^2-5a+3}{a^2-9}:\frac{a^2-2a+1}{a^2-5a+6}.$

10. 17:25與23:33二比孰大?

11. 有鋅與銅的合金52兩,含鋅12兩,求鋅與銅的比.

12. 某人存 520 元在銀行中,一年後,得本利和 550 元6角,求利金與本金的比.

13. 分 360 成三份,使成3:5:7的連比.

14. 分 660 成三份,使第一份與第二份的比爲 5:6, 第二份與第三份的比爲9:11.

II. 比 例

129.比例 二比相等時,成功比例,即有a,b,c,d四數,前二數的比,等於後二數的比.這比例式可寫爲

$$a:b=c:d,\quad 或\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

【註】 在算術中,常用符號::表比例,而書比例式爲

$$a:b::c:d.$$

但在代數中,常將比例視做方程式去解,故以用等號爲便.

130.比例的項　比例式$a:b=c:d$中,第一第四兩項,叫**外項**,卽 a 和 d;第二第三兩項,叫**內項**,卽 b 與 c. 而第四項,對於前三項言,叫**第四比例項**,譬如 d 是 a, b, c 的第四比例項.

131.比例的計算　如 a, b, c, d 四數成比例,則依定義,有

$$a:b=c:d.$$

以 bd 乘等號兩端各比,得$ad=bc$.故有

定理　**一比例式中,兩外項的乘積,等於兩內項的積.**

【註】　這種關係式,爲解比例式的基本原則.

132.解比例式　一比例式中,已知三項,可求得第四項,只須解一個一次方程式卽得.

【例一】　求 $a^2, 2ab, 3b^2$ 的第四比例項.

【解】　設x=所求的第四比例項,則

$$a^2:2ab=3b^2:x,\quad a^2x=2ab\cdot 3b^2.$$

$$\therefore\quad x=\frac{6ab^3}{a^2}=\frac{6b^3}{a}.$$

【例二】　法幣3元9角,可買筆六枝,問八枝需法幣多少?

【解】　令x=八枝筆的價值(元數),則

$$3.9:x=6:8,\qquad \therefore\quad x=\frac{8\times 3.9}{6}=5.2,$$

卽需法幣 5 元 2 角.

133.比例中項 比例式中,二內項相等時稱爲二外項的比例中項.

【例】 如 $a:m=m:b$,則 m 爲 a, b 的比例中項.

由上述解比例式方法,可得下面的定理.

定理 二數比例中項的平方,等於這二數的積.

即 $a:m=m:b$ 時, $m^2=ab$.

【例】 求 x^2-2x+1 與 x^2+2x+1 的比例中項.

【解】 $m^2=(x^2-2x+1)(x^2+2x+1)=(x-1)^2(x+1)^2$

$=[(x-1)(x+1)]^2=(x^2-1)^2$,或 $(1-x^2)^2$.

$\therefore\ m=x^2-1$, 或 $1-x^2$.

習題五七

求下列(1-3)各組數的第四比例項:

1. $p^3,\ pq,\ 5p^2q$.　　2. $a^2-ab+b^2,\ a^3+b^3,\ a-b$.

3. $x^2-4x+3,\ x^2-1,\ x^2-5x+6$.

求下列(4-6)各題的比例中項:

4. 16, 25.　　5. $12mx^4,\ 3m^3$.

6. $x^2-6x+9,\ x^2+4x+4$.

7. 某地圖上, $1\frac{1}{4}$ 寸的長表25里.如其上 A, B 二城相隔 $3\frac{1}{2}$ 寸,求二城間距離.

8. 5, 29, 10, 4 四數是否成比例? 如需同加一數,方成

比例,求這數.

9. 已知四數成比例,而第三數為第一二兩數的比例中項,試證第二數必為第三四兩數的比例中項.

10. 二數成 3:4 的比,同減 7 後,餘數成 2:3 的比,試求這二數.

134.化等積式為比例式　如二數乘積與另二數積相等,則可化成好幾種形式不同的比例.

設　$ad=bc$.　(1)

(一)以bd除兩端,得　$a:b=c:d$.　(2)

(二)以cd除兩端,得　$a:c=b:d$.　(3)

(三)以ab除兩端,得　$d:b=c:a$.　(4)

(四)如寫(1)式為　$bc=ad$,

再用ac除兩端,則有　$b:a=d:c$.　(5)

135.比例定理　由上節,知一比例式(2)化為等積式(1)後,得再變為(3),(4),(5)等形式,故得

(一)**更比定理**　**一比例式中,二內項可以對換,二外項也可對換.** [按(3)及(4)].

(二)**反比定理**　**一比例式中,二內項可和二外項同時對換.** [按(5)].

又如將(2)寫成:　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

而加 1 於其兩端,　$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$,

即 $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}. \qquad (6)$$

如兩端減 1,可得 $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}. \qquad (7)$$

(6),(7)兩端相除,又得 $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}. \qquad (8)$$

故有

(三)合比定理　四數成比例時,前二數和與第二數的比,等於後二數和與第四數的比.

(四)分比定理　四數成比例時,前二數差與第二數的比,等於後二數差與第四數的比.

(五)合分定理　四數成比例時,前二數和差與後二數和差也成比例.

136.對於分方程式的應用

【例一】　解 $\frac{2x+2}{2x-1}=\frac{5}{3}$.

【解】　按分比定理,得

$$\frac{2x+2-(2x-1)}{2x-1}=\frac{5-3}{3}, \text{即} \frac{3}{2x-1}=\frac{2}{3}.$$

$$2(2x-1)=3\cdot3, \quad 4x-2=9.$$

$$\therefore \quad x=\frac{9+2}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}.$$

【例二】　解 $\frac{x^2+x-2}{2-x}=\frac{4x^2+5x-6}{6-5x}$.

【解】　按合比定理,得

$$\frac{x^2+x-2+(2-x)}{2-x}=\frac{4x^2+5x-6+(6-5x)}{6-5x},$$

即
$$\frac{x^2}{2-x}=\frac{4x^2}{6-5x}.$$

$$x^2(6-5x)=4x^2(2-x),$$

$$x^2[(6-5x)-4(2-x)]=-x^2(x+2)=0.$$

$$\therefore\quad x=0,\ 或\ -2.$$

習題五八

已知 $a:b=c:d$，試證下列(1－5)各題:

1. $d:c=b:a$.　　**2.** $a+b:c+d=a:c$.

3. $ma:nb=mc:nd$.　　**4.** $a+b:c+d=a-b:c-d$.

5. $ma+nb:mb=mc+nd:md$.

解下列(6－9)各分方程式:

6. $\dfrac{3x-1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.　　**7.** $\dfrac{9-x}{12-x}=\dfrac{21-x}{33-x}$.

8. $\dfrac{3x-1}{6x-7}=\dfrac{7x-10}{9x+10}$.　　**9.** $\dfrac{2x-1}{x^2+2x-1}=\dfrac{x+4}{x^2+x+4}$.

10. 如 $p+q:p-q=m+n:m-n$，試證 $p:q=m:n$.

11. 從 $p+q:p-q=m-n:m+n$，可推得何種簡單的比例式?

12. 如 $\dfrac{p+q}{p-q}=-\dfrac{m+n}{m-n}$，可得何種簡單的比例式?

13. 已知二數和差的比爲 r，求這二數的比.

137.二比例式的相乘 將比例式

$$a:b=c:d,\quad m:n=p:q$$

兩端寫成分式,令兩端相乘,則 $am:bn=cp:dq$.故得

定理 二比例式中相當項各各相乘,其積仍成比例.

這理推廣到二個以上比例式時,也無不合.在特例,若 n 個比例式均相同,便得 $a^n:b^n=c^n:d^n$.故

一比例式中各項取同次羃,仍成比例.

【例】 如 $a:b=c:d$, $b:x=d:y$,試證

$$a:x=c:y$$

【證】 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{b}{x}=\frac{d}{y}$,兩端相乘,得 $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}$

$$\therefore\quad a:x=c:y.$$

138.和比定理 若干比相等時,令其公共比值爲 r, 可證明許多定理.今舉一重要者爲例.

定理 諸比相等時,以任意數同乘各比前後項,再取諸前項和與諸後項和爲一比,其比值必不變.

【證】 設 $a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots=r$,則

$$a=br,\ c=dr,\ e=fr,\cdots\cdots$$

$$(pa+qc+me+\cdots\cdots):(pb+qd+mf+\cdots\cdots)$$

$$=(pb+qd+mf+\cdots\cdots)r:(pb+qd+mf+\cdots\cdots)=r.$$

$$\therefore\quad a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots=r$$

$$=(pa+qc+me+\cdots\cdots):(pb+qd+mf+\cdots\cdots).$$

當　$p, q, m\cdots\cdots$,相等時,則

$$a:b=c:d=e:f=\cdots=r=(a+c+e+\cdots):(b+d+f+\cdots).$$

139.應用

【例一】　如 $a:b=c:d$,試證

$$a^2+ab+b^2:a^2-ab+b^2=c^2+cd+d^2:c^2-cd+d^2.$$

【證】　因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 即 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, 故

$$\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{ab}{cd}=\frac{a^2+b^2+ab}{c^2+d^2+cd}=\frac{a^2+b^2-ab}{c^2+d^2-cd}.$$

$$\therefore\ a^2+ab+b^2:a^2-ab+b^2=c^2+cd+d^2:c^2-cd+d^2.$$

【例二】　如 $p:b-c=q:c-a=r:a-b$,試證

$$p+q+r=0.$$

【證】　設 $p:b-c=q:c-a=r:a-b=k$,則

$$p=(b-c)k,\ q=(c-a)k,\ r=(a-b)k,$$

$$p+q+r=[(b-c)+(c-a)+(a-b)]k=0.$$

【注意】　爲簡便起見,也可據和比定理,得

$$\frac{p}{b-c}=\frac{q}{c-a}=\frac{r}{a-b}=\frac{p+q+r}{(b-c)+(c-a)+(a-b)}=\frac{p+q+r}{0}.$$

$$\therefore\ p+q+r=0.$$

但是除法中有一條重要的限制,即零不得爲除數(§32註),所以最後一比,實不合理,初學以不用爲宜.如爲計算簡便起見而採用,也必須明白其用意,以免養成錯誤的見解.

習題五九

如 $a:b=c:d$ 試證下列(1−6)各比例式:

1. $2a:7b=4c:14d$.　　**2.** $a^2:b^2=ac:bd$.

3. $5a+b:5a-b=5c+d:5c-d$.

4. $a^2+b^2:b^2=c^2+d^2:d^2$.

5. $(a+b)^2:2ab=(c+d)^2:2cd$.

6. $a^2-b^2:ab=c^2-d^2:cd$.

7. 設 b 為 a, c 的比例中項,試證 $\dfrac{a^2+b^2}{a+c}=\dfrac{a^2-b^2}{a-c}$.

如 $a:b=c:d$, $m:n=p:q$, 試證(8 及 9)各式:

8. $am:bp=cn:dq$.

9. $(a+b)(m+n):am=(c+d)(p+q):cp$.

10. 如 $p:a-b=q:b-c=r:c-a$, 試證

$$cp+aq+br=0.$$

11. 如 $p:a-b=q:b-c=r:c-a$, 試證

$$(a+b)p+(b+c)q+(c+a)r=0.$$

第九章

乘方與開方

I. 乘方

140.定義與記號 將一算式(或數),自乘幾次,而求其乘冪,叫做**乘方**.乘方的反運算,叫**開方**,所得結果叫**根**;就是已知一算式的幾次乘冪,而反求原式.乘方與開方的記號,和算術中相同,卽用指數記乘方次數,根號$\sqrt{}$記開方,次數記在根號前上角內,叫**根式指數**;不記出時,便表示開平方.

【例】 $5^2=25$, $\sqrt{25}=5$, (平方根)

$5^3=125$, $\sqrt[3]{125}=5$, (立方根)

$(3ax^2)^3=27a^3x^6$, $\sqrt[3]{27a^3x^6}=3ax^2$, (立方根)

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$.(平方根)

141.平方特性 平方是一數自乘所得的乘冪,故按 §31 有號數乘法法則,便知**不論原數是正還是負,平方一定是正數**.由此可得兩條重要結果如下:

(一)**正數有二個平方根,同值異號.**

但在算術裏僅講正數,所以只提及一個平方根.

【注意】 據此特性,$\sqrt{25}$應當作$+5$或-5(簡寫爲±5).

但一個算式表二相異數,易於相混,所以在數學中,我們約定只取正值,叫**主值**.如需用及負值,須加負號表明.

(二)任何有號數,都不能做負數的平方根.

這就像算術裏沒有負數,便不能從小數減去大數一樣.如要破除這層限制,非加一種新數不可,待下章再講.

142.乘方公式 乘方不過是乘法的特例,本可照乘法直接去求.但爲計算簡捷和應用於開方的緣故,特分節列舉三種重要乘方公式,卽

(一)單項式乘方　(二)二項式平方

(三)二項式立方

143.單項式乘方 按 §48 (上册)的乘法指數律中公式二和三便知

法則一 單項式的 n 次羃,等於各因式 n 次羃的積;換句話說,卽以 n 分乘各因式指數.

【例一】 $(4a^4b^5x^2)^2=4^2(a^4)^2(b^5)^2(x^2)^2=16a^8b^{10}x^4.$

【例二】 $(-3ab^3y^2)^5=-243a^5b^{15}y^{10}.$

【例三】 $\left(-\frac{1}{2}k^3u^2v^2\right)^4=\frac{1}{16}k^{12}u^8v^8.$

又按 §121 的理,可知分式乘方的法則如下:

法則二 分式乘方時,可將其分子、分母各別乘

方,即

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

【例四】　$\left(\frac{2ab^3}{3x^2y}\right)^4=\frac{16a^4b^{12}}{81x^8y^4}.$

習題六〇

求下列(1－6)各式的平方:

1. $4a^4b^5x^2$.　2. $-2ab^2cy^3$.　3. $-\frac{2}{3}pq^3u^5v$.

4. $\frac{-1}{2ax^2y}$.　5. $\frac{5ab^3}{2x^3y}$.　6. $\frac{3ap^3x^4}{4b^2qz^5}$.

求下列(7－14)各式的結果:

7. $(-b^3c^2x)^3$.　8. $(2a^3m^2z^6)^4$.　9. $\left(-\frac{1}{3}a^4b^7c^5\right)^2$.

10. $\left(\frac{3}{2}x^2y^2z^3\right)^6$　11. $\left(\frac{2ab^2c^3}{5p^4q^2r^3}\right)^5$.　12. $\left(\frac{-u^2v^3w^7}{4a^8b^2c^5}\right)^4$.

13. $\left(\frac{3xy^3z^2u}{a^3bc^4k^5}\right)^7$.　14. $\left(\frac{1.5a^4b^2x^3y^3}{\frac{1}{2}kh^3u^5v^4}\right)^5$.

144.二項式平方　二項式平方與其例解均已見§94, 又在習題三三中,曾提及應用這些公式求數字平方的方法,學生在此,應先複習一次.

如有分式的分子,分母均爲二項式,則按§121的理應按同一法則各別分求.

【例】　$\left(\frac{x-3y}{2a+bc}\right)^2=\frac{x^2-6xy+9y^2}{4a^2+4abc+b^2c^2}.$

145.二項式立方 用乘法可直接求得

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

由此可得求二項式立方的法則如下:

法則 (一)二數和的立方,等於兩數的立方和,加一數乘他數平方所得積的和的三倍.

(二)求二數差的立方時,取被減數立方減去減數立方,再自減數平方乘被減數的積,減去被減數平方乘減數的積,而求第一立方差加第二差數的三倍.

【例一】 $(2x+y)^3=(2x)^3+3(2x)^2y+3(2x)y^2+y^3$

$=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3.$

【例二】 $(3x-2a^2)^3=(3x)^3-3(3x)^2(2a^2)+3(3x)(2a^2)^2-(2a^2)^3$

$=27x^3-54a^2x^2+36a^4x-8a^6.$

如分式的分子、分母均爲二項式,則按§121的理,按同一法則分求即得.

【例三】 $\left(\dfrac{2x-a}{x+2a}\right)^3=\dfrac{(2x-a)^3}{(x+2a)^3}=\dfrac{8x^3-12ax^2+6a^2x-a^3}{x^3+6ax^2+12a^2x+8a^3}.$

【註】 二項式的 n 次乘羃也有公式表出(見後文第十三章III).

習 題 六 一

求下列各式(1－6)的平方:

1. $5xy-z$. **2.** x^2-2. **3.** $xy+yz+zx$.

4. $x-\frac{1}{x}$. **5.** $\frac{a}{3}-3b-\frac{3}{2}$. **6.** $\frac{4x^2+by}{az-5uv}$.

求下列(7－12)的立方:

7. $a-\frac{2b}{3}$. **8.** $5a-bc$. **9.** x^2+4y^2.

10. $3x-\frac{1}{2x^2}$. **11.** $\frac{x+a}{x-a}$. **12.** $\frac{1+ax}{3b-y}$.

II. 開 方

146.單項式開方　由 §143 及開方爲乘方反運算的理,即得單項式開方法則如下:

法則一　求數字係數的方根,再以開方次數,分除各因式指數.

【例一】　$\sqrt[3]{-64x^6}=-4x^2$.

【例二】　$\sqrt[6]{729a^{18}b^6x^{12}}=3a^3bx^2$.

【例三】　$\sqrt[4]{\frac{1}{16}a^4b^8x^4y^{16}}=\frac{1}{2}ab^2xy^4$.

法則二　分式開方時,可將其分子、分母,各別開方即得(參看後文 §158 公式(2)).

【例四】　$\sqrt{\frac{81x^{10}y^4}{25a^4b^6}}=\frac{9x^5y^2}{5a^2b^3}$.

習 題 六 二

求下列(1－3)各式的平方根:

1. $\frac{1}{16}a^8b^4x^6$.　2. $\frac{36}{a^{36}}$.　3. $\frac{289x^2y^4}{25u^4y^6}$.

求下列(4—9)各式的結果:

4. $\sqrt[7]{x^{14}y^{21}z^7}$.　5. $\sqrt[5]{-x^{10}y^{15}}$.　6. $\sqrt[8]{\frac{1}{256}a^8x^{64}y^{32}}$.

7. $\sqrt[7]{\frac{-128}{a^{49}x^{21}}}$.　8. $\sqrt[5]{\frac{a^{15}x^{20}}{c^{25}}}$.　9. $\sqrt[4]{\frac{81a^4b^4x^{12}}{8c^8z^{16}}}$.

147.三項平方式的平方根　辨別三項平方式的方法,已在§103中講過,其平方根,不難直接寫出.

【例一】 $\sqrt{25x^2-40xy+16y^2}=\sqrt{(5x)^2-2(5x)(4y)+(4y)^2}$

$=\sqrt{(5x-4y)^2}=5x-4y.$

【例二】 $\sqrt{\frac{64a^2}{9b^2}+4+\frac{32a}{3b}}=\sqrt{\left(\frac{8a}{3b}\right)^2+(2)^2+2\cdot2\cdot\frac{8a}{3b}}$

$=\sqrt{\left(\frac{8a}{3b}+2\right)^2}=\frac{8a}{3b}+2.$

如遇分式的分母,分子都是三項平方式,可各別求出,即得(參看§158 (2)式).

【例三】 $\sqrt{\frac{81x^2+36xy+4y^2}{9x^2-36xy+36y^2}}=\sqrt{\frac{(9x+2y)^2}{(3x-6y)^2}}=\frac{9x+2y}{3x-6y}.$

有時須繼續應用這理數次,方可求出平方根.

【例四】 求 $\sqrt{4a^2+b^2+c^2+4ab-4ac-2bc}$.

【解】 將根號內式寫成 a 的降冪式,得

$4a^2+4a(b-c)+(b^2-2bc+c^2)$

$=4a^2+4a(b-c)+(b-c)^2=[2a+(b-c)]^2.$

$\therefore\ \sqrt{4a^2+b^2+c^2+4ab-4ac-2bc}=2a+(b-c).$

148.完全立方式　如一四項式的結構,合於§145所述的法則,則必爲一二項式的立方,而稱**完全立方式**.凡這種四項式,可按立方公式

$$a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$$

反求其立方根.

【例一】　$\sqrt[3]{8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3}$

$$=\sqrt[3]{(2x)^3+3(2x)^2(5y)+3(2x)(5y)^2+(5y)^3}$$

$$=\sqrt[3]{(2x+5y)^3}=2x+5y.$$

【例二】　$\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}-1}=\sqrt[3]{\left(\frac{x}{2}\right)^3-3\left(\frac{x}{2}\right)^2+3\left(\frac{x}{2}\right)-1}$

$$=\sqrt[3]{\left(\frac{x}{2}-1\right)^3}=\frac{x}{2}-1.$$

【註】　如遇完全立方式所成的分式,而求其立方根時,則可分求分母、分子的立方根(參看§158公式(2)).

習題六三

求下列各式(1-4)的平方根:

1.　$81x^2-18xy+y^2$.　　**2.**　$25z^6-30z^3+9$.

3.　$a^2+4b^2+9c^2-4ab-12bc+6ca$.

4.　$\dfrac{x^2+4x+4}{2a^2-20ab+50b^2}$.

求下列各式(5-8)的立方根:

5.　$64a^3-144a^2b+108ab^2-27b^3$.

6. $x^3-9x+\frac{27}{x}-\frac{27}{x^3}$.　　7. $\frac{x^6}{y^3}-6x^4+12x^2y^3-8y^6$.

8. $\frac{8-36x+54x^2-27x^3}{8m^3-12m^2+6m-1}$.

149.多項式的平方根　如一多項式的平方根不能按二項式平方公式觀察求得時,仍可依這公式,逐步推求.現在先舉例如下,再說明法則.

【問題】　求 $25a^2x^2-12a^3x+16x^4+4a^4-24ax^3$ 的平方根.

【解】　寫成 x 的降冪式,再布算如下:

$$
\begin{array}{l|l}
 & 4x^2-3ax+2a^2 \quad (\text{平方根}) \\
\hline
 & 16x^4-24ax^3+25a^2x^2-12a^3x+4a^4 \\
 & 16x^4 \\
\hline
8x^2-3ax & -24ax^3+25a^2x^2 \\
 & -24ax^3+\ \ 9a^2x^2 \\
\hline
8x^2-6ax+2a^2 & \qquad\qquad 16a^2x^2-12a^3x+4a^4 \\
 & \qquad\qquad 16a^2x^2-12a^3x+4a^4 \\
\hline
\end{array}
$$

【說明】　先求最高項的平方根,即得平方根的第一項,設這項為 A (叫初商),而其餘各項的和為 B, 則原式必為

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2. \tag{1}$$

故從原式減去 A^2,便得 $2AB+B^2=B(2A+B)$.由此可見以二倍初商 A 除原式與 A^2 的差,便可得第二項(即 B 中第一項).再將這項加入 A, 作為一項,便可繼續求其餘各項.

由上可知從原式減去 $A+B$ 的平方,等於減去 A^2 後,再減

B 與 $2A+B$ 的積,這一點宜加留意.

求平方根法則 (一)將多項式排成某元的降冪式(如遇缺項,須留空位,以便計算);

(二)求最高項的平方根,得根的第一項;

(三)自原式減去第一項的平方,再以第一項的二倍除其差,卽得根的第二項;

(四)以第二項乘第二項與第一項二倍的和,從第三步的差數中減去;

(五)合第一二兩項爲一項,再依第三步繼續運算.

【註】 如不能使最後差數爲零,則原式不是完全平方.

【例】 求 $24+\frac{16y^2}{x^2}-\frac{8x}{y}+\frac{x^2}{y^2}-\frac{32y}{x}$ 的平方根.

【解】 排成 y 的降冪式,遇分式各項,則先寫分母次數低的,後寫高的,再依上述法則求出平方根如下:

$$\begin{array}{l|l}
 & \frac{16y^2}{x^2}-\frac{32y}{x}+24-\frac{8x}{y}+\frac{x^2}{y^2} \;\Big|\; \underline{\frac{4y}{x}-4+\frac{x}{y}}\ (\text{平方根}) \\
 & \underline{\frac{16y^2}{x^2}} \\
\frac{8y}{x}-4 & -\frac{32y}{x}+24 \\
 & \underline{-\frac{32y}{x}+16} \\
\frac{8y}{x}-8+\frac{x}{y} & \qquad\qquad 8-\frac{8x}{y}+\frac{x^2}{y^2} \\
 & \qquad\qquad \underline{8-\frac{8x}{y}+\frac{x^2}{y^2}}
\end{array}$$

【注意】 數字開平方的法則,與此相同,可取本局出版的最新課程標準適用初中算術下冊 §88 比較.

習 題 六 四

求下列(1－6)各式的平方根:

1. $4x^4-12x^3+29x^2-30x+25$.

2. $1-10x+27x^2-10x^3+x^4$.

3. $4x^4+9y^4+13x^2y^2-6xy^3-4x^3y$.

4. $x^6-22x^4+34x^3+121x^2-374x+289$.

5. $x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$. **6.** $x^4+2x^3-x+\frac{1}{4}$.

7. 求一二項式,使其與 $x^4-4x^3+6x^2-7x+6$ 的和為完全平方式.

8. $25x^4-30ax^3+49a^2x^2-30a^3x+25a^4$ 加一二次式為完全平方式,試求這式.

150.多項式的立方根 求多項式立方根法則,須以二項式立方公式為根據.舉例說明如下:

【問題】 求 $x^6-3x^5+5x^3-3x-1$ 的立方根:

$$
\begin{array}{llr|l}
 & & & x^2-x-1 \\
\hline
 & & & x^6-3x^5\qquad\qquad+5x^3-3x-1 \\
 & & & x^6 \\
\hline
3(x^2)^2 & = & 3x^4\qquad\qquad & -3x^5\qquad\qquad+5x^3 \\
3(x^2)(-x) & = & -3x^3\qquad & \\
(-x)^2 & = & +x^2 & \\
\hline
 & & 3x^4-3x^3+x^2 & -3x^5+3x^4-x^3 \\
\hline
3(x^2-x)^2 & = & 3x^4-6x^3+3x^2\qquad\qquad & -3x^4+6x^3-3x-1 \\
3(x^2-x)(-1) & = & -3x^2+3x\qquad & \\
(-1)^2 & = & +1 & \\
\hline
 & & 3x^4-6x^3\qquad+3x+1 & -3x^4+6x^3-3x-1 \\
\end{array}
$$

【說明】　先求最高項的立方根,即得第一項.設這項為 A (叫初商),而其餘各項的和為 B,則原式必為

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3. \qquad (2)$$

故從原式減去A^3,便得$3A^2B+3AB^2+B^3=B(3A^2+3AB+B^2)$.由此可見以三乘初商 A 的平方,除原式與A^3的差,便可得第二項(即 B 中第一項).再將這項加入 A,作為一項,依法陸續去求其餘各項.

由上可知從原式減$A+B$的立方,等於減去A^3後再減 B 與 $3A^2+3AB+B^2$ 的積.

【注意】　如不能使最後差數為零,則原式非完全立方式.

【註】　多項式開立方,用處甚少,故不再詳列法則.

151.數字開立方　數字開立方法,與多項式情形相同.但一數字分位而不分項,須先知原數位數與立方根位數如下表:

原數位數	1至3	4至6	7至9	…………
立方根位數	1	2	3	…………

所以當從一數的個位起,向左每三位用短線劃開成段,所分段數,即這數立方根位數,如原數是小數,再向右每三位分段.

【例一】　求50653的立方根.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 50\,|\,653\,\underline{|\,37\ } \\
 & 27\cdots\cdots\cdots\cdots 3^3 \\
\hline
30^2\times 3=2700 & 23\ 653 \\
30\times 7\times 3=\ \ 630 & \\
7^2=\ \ \ 49 & 23\ 653\cdots(30^2\times 3+30\times 7\times 3+7^2)\times 7 \\
\hline
3379 & \ \ 0
\end{array}
$$

【說明】　(1)先分50653為兩段;(2)首段50,大於 $3^3=27$ 而小於 $4^3=64$,故可知立方根的第一位數是3,叫做初商,記在右面;(3)從首段50減去 $3^3=27$,再將第二段接寫在減得差數之後,得23653.

命　$a=$個位數,則因

$50653=(30+a)^3=30^3+3\cdot 30^2\cdot a+3\cdot 30\cdot a^2+a^3,$

即 $50653-30^3=3\cdot 30^2 a+3\cdot 30\cdot a^2+a^3$

$=(3\cdot 30^2+3\cdot 30\cdot a+a^2)a.$

故　$(50653-30^3)\div(3\cdot 30^2+3\cdot 30\cdot a+a^2)=a.$

(4)$23653\div(3\times 30^2)=8+$,但試用8入算,結果嫌大,不合,改用較小的數7,來做個位數,叫做次商,記在右面,恰有

$$(3\cdot 30^2+3\cdot 30\cdot 7+7^2)\times 7=23653.$$

所以　50653的立方根是37。

【註】　多於二段的數,可照上法陸續求去.如迭次相減的差,總不為0,便知原數非完全立方,可在小數點後再求,得

不盡立方根的差近值.

【例二】　求25的立方根到小數第三位.

【解】

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & 25.000 \mid 000 \mid 000 \;\underline{\mid 2.924} \\
 & & 8 \\
3\times 20^2 = & 1200 & \overline{17.000} \\
3\times 20\times 9 = & 540 & \\
9^2 = & 81 & \\
\hline
 & 1821 & 16389 \\
\hline
 & & 611000 \\
3\times 290^2 = & 252300 & \\
3\times 290\times 2 = & 1740 & \\
2^2 = & 4 & \\
\hline
 & 254044 & 508088 \\
\hline
 & & 102912000 \\
3\times 2920^2 = & 25579200 & \\
3\times 2920\times 2^2 = & 35040 & \\
4^2 = & 16 & \\
\hline
 & 25614256 & 102457024 \\
\hline
 & & 454976\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{25}=2.924.$$

習題六五

求下列(1－4)各式的立方根:

1.　$1-6x+21x^2-44x^3+63x^4-54x^5+27x^6$.

2.　$y^6-3y^5z+6y^4z^2-7y^3z^3+6y^2z^4-3yz^5+z^6$.

3.　$27x^6-54ax^5+117a^2x^4-116a^3x^3+117a^4x^2$

$$-54a^5x+27a^6.$$

4. $\frac{x^3}{a^3}-\frac{12x^2}{a^2}+\frac{54x}{a}-112+\frac{108a}{x}-\frac{48a^2}{x^2}+\frac{8a^3}{x^3}$.

5. $8x^6+12x^5-30x^4-30x^3+12x+8$ 與一三次式的和爲完全立方式,求這式.

6. 設上題中六次式與一四次式的和的立方根,最高項爲 $2x^2$, 常數項爲 2,求這四次式.

7. 求下列各數的立方根:

(1) 4913. (2) 614125. (3) 8.869743.

(4) .001771561. (5) $11\frac{8721}{9261}$.

8. 求下列各數立方根的差近值到小數第三位.

(1) 16. (2) 31.92. (3) 319.2. (4) $\frac{5}{6}$.

雜 題

1. 設一球半徑爲 r, 表面積爲 s, 則 $s=4\pi r^2$,試證:

$$s_1:s_2=r_1^2:r_2^2.$$

2. 同上題,球體積爲 $v=\frac{4}{3}\pi r^3$,試證:

$$v_1:v_2=r_1^3:r_2^3.$$

3. 由上二題求證: $v_1^2:v_2^2=s_1^3:s_2^3$.

4. 設 $2x-3y:3z+y=z-y:z-x=x+3z:2y-3x$,試證諸比值等於 $x:y$. 更由此證明必 $x=y$ 或 $z=x+y$.

5. 如 b 爲 a 與 c 的比例中項,求證

$$a:a+b=a-b:a-c.$$

6. 求證上題的逆定理.

7. 解方程式 $\dfrac{x^2-2x+3}{2x-3}=\dfrac{x^2-3x+5}{3x-5}$.

8. 如將一多項式 P 開平方,得平方根 Q,最後差數 R,求以等式表 P, Q, R 三者關係.

9. 如將一多項式 P 開立方,得立方根 Q,最後差數 R,求 P, Q, R 三者間關係.

10. 求下列各式的平方:

(1) a^2-b^2.　(2) $x^3-\dfrac{1}{x^2}$.　(3) $x+1+\dfrac{1}{x}$.

11. 求下列各式的立方:

(1) $ax+by+c$.　(2) $a^2-1+\dfrac{1}{a^2}$.

【提示】 合二項爲一,繼續用立方公式二次,即可展開.

求下列(12—14)各式的平方根:

12. $4x^2+9y^2+25z^2+12xy-30yz-20zx$.

13. $9x^4+4x^2y^2-12z^2x^2+y^4-6y^2z^2+9z^4$.

14. $-3a^3+\dfrac{25}{9}+a^4-5a+\dfrac{67}{12}a^2$.

15. 求下列各數的平方根:

(1) 231.04.　(2) $67\dfrac{6}{25}$.　(3) $\dfrac{578}{6962}$.

16. 求下列各數的立方根:

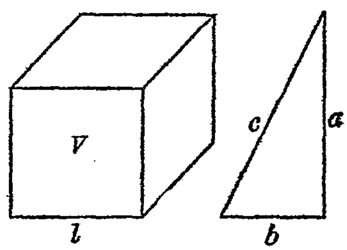
(1) 24389. (2) 300.763. (3) $\frac{4096}{50653}$.

第十章

根式　指數與虛數

I. 根式

152.根式　【問題】　(一)已知一立方體體積爲V,求每邊l的長.(二)已知一直角三角形兩腰(或稱勾與股)爲a, b,求斜邊(或稱弦)c的長.



【解】　(一)　$l=\sqrt[3]{V}$.

(二)　$c=\sqrt{a^2+b^2}$.

凡含有根號的算式,像$\sqrt[3]{V}$, $\sqrt{a^2+b^2}$等,又如$\sqrt{a^2-2ab+b^2}$, $a+\sqrt{b}$等,都叫**根式**.根號下的算式,叫**被開方式**,如上題中的V, a^2+b^2.開方的次數,叫**根式指數**,對根式言,叫做這根式的**次**.譬如$\sqrt[3]{V}$是三次根式,$\sqrt{a^2+b^2}$是二次根式,根式指數各爲3與2.

153.有理數　**有理數即正負整數,和所成分數.**

【例】　81, -9, $\frac{12}{7}$, 5.017, $10.\dot{6}0\dot{5}$都是有理數.

【注意】　小數是分數特例,而以特殊記法寫出.凡分數化成的小數,或是有限位,或是循環(看後文第十二章).

【註】　整式及分式合稱**有理式**,如a^2+b, $\frac{a^2+b^2}{a-b}$都是.

154.不盡根 被開方數是有理正數,但不能開方適盡的,叫不盡根.不盡根非有理數.

【例】 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{\frac{3}{8}}$ 等都是不盡根.

【註】 $\sqrt{2}$ 等何以不能開盡,換句話說,即何以不能化爲分數,須在高中代數裏再講(見本局最新課程標準適用高中代數).

【注意】 不盡根的值雖不能以小數完全表出,但按開方的算法,可求到任意多少位小數,而使其準確度適合實際上的應用.例如 $\sqrt{2}=1.4142136\cdots\cdots$

(右邊的無盡小數,位數不循環,不能化成分數),即表示

$$1.414213<\sqrt{2}<1.414214,$$

所以用左右兩差近值時,和 $\sqrt{2}$ 相差不過 0.000001.我們如需要更大的準確度時,也不難辦到.

故在實際問題中,凡遇不盡根,都可用適宜的差近小數值代替.但在本章,將論及根式的運算方法,而保留其根式形狀.即使有代入差近值的必要,也宜在最後化簡的結果中代入,如此可使計算大爲簡便.

155.無理數 凡不能化爲分數的數,叫無理數

【例】 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{\frac{3}{8}}$ 等不盡根都是無理數.

156.主根 開平方所得的不盡根,叫二次不盡根,如 $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{3}{8}}$ 即是.由 §141 的理,知這種不盡根有正負

二值,而以其正值爲主根.根式也依此規定.

【例】 $\sqrt{49}+\sqrt{36}=7+6=13$,如取正負根,尚可得 -13, $+1$, -1 等值.欲表這些結果時,須寫爲

$-\sqrt{49}-\sqrt{36}=-13$, $\sqrt{49}-\sqrt{36}=+1$, $-\sqrt{49}+\sqrt{36}=-1$.

對於高次根,也有這種規定.推廣來說,$\sqrt[n]{a}$ 有 n 個值.(見本局最新課程標準適用高中代數) **凡正數各偶次根,至少有一正值,負數各奇次根,至少有一負值,卽爲主根.** 負數的偶次根,爲一種新數,待到本章 III 中再說.

習 題 六 六

1. 指出右列各根式的次: $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[5]{a}$.

2. 將 3 寫成二次根式,三次根式,n 次根式.

3. 根式是不是必爲不盡根? 不盡根是不是必爲根式? 是不是必爲無理數?

4. 分別下列各數,孰爲有理數?不盡根?無理數?

$$4\frac{1}{2},\ \sqrt{9},\ \frac{\sqrt[3]{7}}{2},\ \sqrt{7+\sqrt{3}},\ \sqrt{8+\sqrt{1}}.$$

5. 說出 81, 256, 625 的二個四次根來,孰爲主根?

6. 說出 729 的二個六次根來,孰爲主根?

7. 說出 -729 的一個三次根來,這根是否主根?

求下列(8－10)各式的值:

8. $\sqrt{16}-\sqrt{4}$.　**9.** $\sqrt[4]{625}-\sqrt{9}$.　**10.** $\sqrt{25}-\sqrt[3]{-8}$.

11. $\sqrt{3^2}+\sqrt{4^2}$ 和 $\sqrt{3+4}$ 是不是相等? $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$ 和 $\sqrt{a^2+b^2}$ 呢? 就幾何上講,可以怎樣去解釋?

157.根式運算原則　乘方與開方,既互爲反運算,故得根式運算的原則如下:

一數 n 次冪的 n 次根,或 n 次根的 n 次冪仍爲原數. 即:　$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$.

如用分指數寫上式,卽爲: $(a^n)^{\frac{1}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^n=a$, 更易瞭然.

158.根式運算律　按指數各律(§§48, 54, 143)知

(一) $(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab=(\sqrt[n]{ab})^n$,

卽
$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}, \tag{1}$$

故乘積的 n 次根,等於各因子 n 次根的積.

(二)同理有
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \tag{2}$$

故分式的 n 次根,可分求分子,分母的 n 次根.

(三)又因
$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$$
$$=\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn},$$

而有
$$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}, \tag{3}$$

卽根指數能分解爲因數時,可取各因數爲根式指數,連續開方.

159.根式的化簡　以§§157, 158爲根據.

【問題一】　求 $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

【解】　(一) $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{0.428571\cdots\cdots}=0.6546\cdots\cdots$.

(二) $\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{1.7321\cdots\cdots}{2.6458\cdots\cdots}=0.6546\cdots\cdots$.

(三) $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{7}}=\sqrt{\frac{21}{49}}=\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{4.5826\cdots\cdots}{7}$

$=0.6546\cdots\cdots$.

【問題二】　求 $2\cdot\sqrt[3]{16}$.

【解】　(一) $2\cdot\sqrt[3]{16}=2\times2.5198\cdots\cdots=5.0396\cdots\cdots$.

(二) $2\cdot\sqrt[3]{16}=2\cdot\sqrt[3]{2^3\times2}=2\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}=4\cdot\sqrt[3]{2}$

$=4\times1.2599=5.0396\cdots\cdots$.

【問題三】　$\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{\sqrt[3]{3^3}}=\sqrt{3}=1.7320\cdots\cdots$.

由上各問題,可知求根式值時,宜先化簡根式形狀.

160.最簡根式　如一根式中被開方式合於下述三條件,這根式便稱**最簡根式**.

(一)爲整式.

(二)若有因子爲有理式乘冪,其指數應小於根式指數(如此則被開方式已化至最簡).

(三)指數和根式指數,應爲互素(如此則根式的次數已化爲最低).

不合於條件時,應當設法化簡,茲舉六例,以一、二兩例說明(一);三、四兩例說明(二);五、六兩例說明(三).

【例一】 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{6}{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{6}$(按§158公式(2)).

【例二】 $4\sqrt{\dfrac{5}{2a}}=4\sqrt{\dfrac{10a}{4a^2}}=4\dfrac{\sqrt{10a}}{2a}=\dfrac{2}{a}\sqrt{10a}$.

【註】 根號外式,叫根式的係數,如$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{a}$.

【例三】 $\sqrt{9x^3}=\sqrt{9x^2\cdot x}=\sqrt{(3x)^2x}=3x\sqrt{x}$

(按§158公式(1)).

【例四】 $\sqrt{54-27\sqrt{2}}=\sqrt{27(2-\sqrt{2})}=\sqrt{9\cdot 3(2-\sqrt{2})}$

$=3\sqrt{3(2-\sqrt{2})}$.

【例五】 $\sqrt[12]{8}=\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt[4]{2}$(按§158公式(3)).

【例六】 $\sqrt[4]{x^2y^6}=\sqrt{\sqrt{(xy^3)^2}}=\sqrt{xy^3}=y\sqrt{xy}$.

【注意】 兩種指數,因約去公因數而降低,與分式約分情形一樣.

161.化簡法則 由上述各例,可得下列

法則 (一)被開方式爲整式時,分爲各因子乘羃

的積.

(二)如因子乘冪指數有大於根式指數的,須將可成完全方冪的一部分開方,移到根號外,作為係數.

(三)如被開方式為一式的乘冪,而其指數與根式指數有公因數,可以約去.

(四)如被開方式為分式,則分母依上法化簡後,再以適當根數同乘分子、分母,使分母為完全方式,而化去其根號.

(五)如被開方式為繁分式,先化為簡單分式再求.

【例】 $\sqrt[4]{1+\frac{2ab+a^2}{b^2}}=\sqrt[4]{\frac{b^2+2ab+a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{a+b}{b}}.$

習題六七

化簡下列各根式:

1. $\sqrt[3]{16y^5}$. 2. $\sqrt[4]{96x^5y}$. 3. $\sqrt[3]{\frac{-54a^3}{150x^5}}$.

4. $\sqrt[3]{-(x^2-xy)^5}$. 5. $\frac{3}{x}\sqrt[3]{\frac{2}{x^2}}$. 6. $\frac{2x}{3a}\sqrt[3]{\frac{4a^7}{5x}}$.

7. $\sqrt[12]{81x^8y^4}$. 8. $\sqrt[6]{8x^3y^9}$. 9. $\sqrt[6]{0.008a^9}$.

10. $\sqrt[3]{\frac{a^2-3ab}{b}-\frac{b^2-3ab}{a}}$. 11. $\sqrt{2x+\frac{(x-3a)^2}{7a}+a}$

162.同類根式 二同次根式中,如被開方式也相同,便叫做同類根式.

【例】 $5\sqrt{2a}, 7\sqrt{2a}, \frac{1}{2}\sqrt{2a}$都是同類根式,而與$3\sqrt[3]{2a}$,或$5\sqrt{2b}$為異類.又$\sqrt{\frac{1}{5}}$與$\sqrt{45}$各化為$\frac{1}{5}\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$後,也成同類根式.

【註】 欲知兩根式是否同類,常化為最簡根式後再看.

163.根式的加減 根式的加減,和單項式情形一樣(看上冊§§41, 44).

法則 (一)異類根式加減,祇用+、−號聯絡卽得.

(二)同類根式加減,先合併各係數,而附以公共的根式,卽得.

【例一】 $3\sqrt{4}$與$4\sqrt{3}$的和為$3\sqrt{4}+4\sqrt{3}$.

$4\sqrt[3]{a}$與$2\sqrt{a}$的差為$4\sqrt[3]{a}-2\sqrt{a}$.

【例二】 $$7\sqrt{2a}-5\sqrt{2a}-\frac{1}{2}\sqrt{2a}=\left(7-5-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2a}$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{2a}.$$

【例三】 $$\sqrt{12}-\sqrt{\frac{1}{3}}=2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}=1\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

164.同次根式 【問題】 化$\sqrt{3}$與$\sqrt[3]{2}$為同次的根式.

【解】 $$\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt[3]{3^3}}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}.$$
$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2}}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{4}.$$

【註】 這種手續和§160(三)相反,可看該節例六後注意.

由上例便知根式都可化爲同次,其法如下:

法則　(一)求根式指數的 L. C. M.

(二)以原根式指數除 L. C. M. 的商,同乘原根式指數與被開方數的指數,使諸根式化成同以這 L. C. M. 爲新根式指數的根式.

【例】　化 $\sqrt[4]{2ax^3}$, $\sqrt{3ax}$, $\sqrt[6]{4a^2x^5}$ 爲同次根式.

【解】　各原根式指數爲 4, 2, 6, 其 L. C. M. 爲 12,故

$$\sqrt[4]{2ax^3}=\sqrt[4\times3]{(2ax^3)^3}=\sqrt[12]{8a^3x^9}.$$

同理得

$$\sqrt{3ax}=\sqrt[2\times6]{(3ax)^6}=\sqrt[12]{729a^6x^6},$$

$$\sqrt[6]{4a^2x^5}=\sqrt[6\times2]{(4a^2x^5)^2}=\sqrt[12]{16a^4x^{10}}.$$

165.單根式乘除　a 爲有理數時,$\sqrt[n]{a}$ 叫單根式.乘除時,先化爲同次,再按 §158 (1),(2) 二式計算,最後將結果化爲最簡根式.

【例一】

$$\sqrt{5xy}\cdot\sqrt[3]{100x^2}=\sqrt[6]{125x^3y^3}\cdot\sqrt[6]{100^2x^4}$$

$$=\sqrt[6]{5^3\cdot(5^2\times4)^2x^7y^3}=\sqrt[6]{5^7\cdot16\cdot x^7y^3}=5x\sqrt[6]{80xy^3}.$$

【例二】

$$\frac{\sqrt[3]{4xy^2}\cdot\sqrt{2x}}{\sqrt[6]{16x^5y^3}}=\frac{\sqrt[6]{16x^2y^4}\cdot\sqrt[6]{8x^3}}{\sqrt[6]{16x^5y^3}}$$

$$=\sqrt[6]{\frac{16x^2y^4\cdot8x^3}{16x^5y^3}}=\sqrt[6]{8y}.$$

習題六八

求下列(1−7)各根式的和差:

1. $8\sqrt{3}-6\sqrt{3}$.　　2. $\sqrt{8x}+\sqrt{32x}$.

3. $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}$.　　4. $\sqrt{\frac{1}{2}}\div3\sqrt{2}$.

5. $\sqrt{3a^2}-\sqrt{27a^2}+5a\sqrt{3}$.　　6. $8\sqrt{a^3}-4a\sqrt{a}$.

7. $\sqrt{9a}-\sqrt{16a}+\sqrt{25a}+\sqrt{49a^3b^2}$.

化簡下列(8－10)各題:

8. $\sqrt{\frac{3}{5}y}\cdot\sqrt{15y^3}$.　　9. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a^{2n-1}}$.

10. $\dfrac{\sqrt{2x^3}\cdot\sqrt[3]{4x^3y}}{\sqrt[4]{8x^2y^5}}$.

11. 求$5\sqrt{2}$與$2\sqrt{5}$的比,由此斷定二式中何者值較大?

12. $4\sqrt{6}$與$7\sqrt{2}$二式中,何者值爲大?

166.複根式乘法　二異類單根式,或單根式與有理式的和差,叫**複根式**;相乘時與**多項式乘法相同**,不過積中各項根式,須再化簡.

【例一】　求$7\sqrt{2}-4\sqrt{6}$與$3\sqrt{2}+2\sqrt{6}$的積.

【解】

$$\begin{array}{r}
7\sqrt{2}-4\sqrt{6}\\
3\sqrt{2}+2\sqrt{6}\\
\hline
21\times2-12\sqrt{12}\\
-8\times6+14\sqrt{12}\\
\hline
-6\quad+\ 2\sqrt{12}=4\sqrt{3}-6
\end{array}$$

【註】　同類根式,宜寫在一行上,以便加減.

【例二】　求 $a+b-\sqrt{ab}$ 與 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的積.

【解】

$$
\begin{array}{r}
a+b-\sqrt{ab} \\
\sqrt{a}+\sqrt{b} \\
\hline
a\sqrt{a}+b\sqrt{a}-a\sqrt{b} \qquad\qquad \\
-b\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{b} \\
\hline
a\sqrt{a} \qquad\qquad\qquad +b\sqrt{b}
\end{array}
$$

【註】 $\sqrt{a}\sqrt{ab}=a\sqrt{b}$,

$\sqrt{b}\sqrt{ab}=b\sqrt{a}$.

167.有理化因子　二根式的乘積爲有理式時,則互稱有理化因子.

【例】　二項二次根式 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 互爲有理化因子.

【註】　二項高次根式的有理化因子,見本局最新課程標準適用高中代數,本書只論二項二次根式.

168.複根式除法　複根式除法,須用分母的有理化因子同乘分子,分母,使分母化成有理式.

【例一】　求 $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$ 被 $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ 除的商.

【解】　$2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ 的有理化因子是 $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$,故得

$$\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(2\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(2\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{16+5\sqrt{15}}{20-3}$$

$$=\frac{16+5\sqrt{15}}{17}.$$

【例二】　化簡 $\dfrac{2a}{\sqrt{b^2-4ac}-b}$.

【解】 $$\frac{2a}{\sqrt{b^2-4ac}-b}=\frac{2a(\sqrt{b^2-4ac}+b)}{(\sqrt{b^2-4ac}-b)(\sqrt{b^2-4ac}+b)}$$
$$=\frac{2a(\sqrt{b^2-4ac}+b)}{(b^2-4ac)-b^2}$$
$$=\frac{-1}{2c}(\sqrt{b^2-4ac}+b),$$

習題六九

求下列(1－6)各乘積或乘羃:

1. $(5\sqrt{8b}-6\sqrt{3b})\sqrt{2b}$. **2.** $(6\sqrt{3}+\sqrt{6})(3\sqrt{2}+1)$

3. $(\sqrt{11}+\sqrt{6})(\sqrt{11}-\sqrt{6})$. **4.** $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$.

5. $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$. **6.** $(\sqrt{5+2x}+\sqrt{5-2x})^2$.

7. 證明 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

【提示】 取兩端平方,看是否相等.

8. 證明 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 不等於 $\sqrt{a+b}$.

9. 如 $x=10+\sqrt{2}$, 求 $x^2-20x+98$ 的值.

10. 如 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, 求 x^2+x-1 的值.

求下列(11－15)各根式中的有理化因子,及二者乘積:

11. $\sqrt{7}-2\sqrt{3}$. **12.** $a-\sqrt{b}$. **13.** $\sqrt{a+b}-\sqrt{b}$

14. $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$. **15.** $-b-\sqrt{b^2-4ac}$.

求下列(16－25)各商:

16. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$. 17. $\frac{4-\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$.

18. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. 19. $\frac{a-b^2}{\sqrt{a}-b}$. 20. $\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$.

II. 指 數

169.指數的應用 在科學的記載中,常遇着很大或很小的數值,必需用指數式記出,方覺簡明.

【例一】 光的速度,約爲每秒 186,000 哩,光行一年的距離叫光年,其值約爲 5.88×10^{12} 哩.

【例二】 銀河中星的個數,約爲 10^{11} 個.

【例三】 一個電子的質量爲 $\frac{9.01}{10^{28}}$ 公分(g).

【例四】 一個氫分子的直徑爲 $\frac{2.4}{10^8}$ 公分(cm).

170.指數定律 在本書以前(§§48, 54, 143)講過的指數定律如下:

同底定律 (一) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

(二) $(a^n)^m=a^{mn}$.

(三) $$\frac{a^m}{a^n}=\begin{cases}a^{m-n} & (\text{如 } m>n),\\ 1 & (\text{如 } m=n),\\ \frac{1}{a^{n-m}} & (\text{如 } m<n).\end{cases}$$

同指數二律 (四) $(ab)^n=a^nb^n$.

(五) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

各式中指數,必爲正整數,方有意義可言.今據同底三律,來擴充指數範圍,破除指數必爲正整數的限制.

原則 擴充指數意義時,以不背同底三律爲原則.換句話說,即擴充而得的新指數,仍舊適合三律.

171.零指數 同底第三律,因 m 與 n 二值的大小而分三種結果.我們試定零指數意義,使$m>n$與$m=n$二條,可合爲一式.

將 $m=n$ 代入 a^{m-n} 即得 a^0,我們就命

$$a^0=1.$$

即任何不爲零的數,其零次羃常爲 1.

【註】 0^0 一式無意義,因 0 不能爲除數也(§32 註).

【例一】 $\frac{5^3}{5^3}=5^{3-3}=5^0=1.$

【例二】 $\frac{b^6}{b^6}=b^{6-6}=b^0=1.$

172.負指數 如合同底第三律中 $m>n$ 與 $m<n$ 兩種情形爲一條,即可得負指數的適當意義.

【問題】 $\frac{a^3}{a^7}=\frac{a^3}{a^3\cdot a^4}=\frac{1}{a^4}=\frac{1}{a^{7-3}}.$

若直接應用第一結果,則得

$$\frac{a^3}{a^7}=a^{3-7}=a^{-4}.$$

所以我們當取$a^{-4}=\frac{1}{a^4}$.推廣來說,可取

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

卽任何不爲零的數的負指數乘羃,爲其等值正整指數乘羃的倒數.

習 題 七 〇

1. 用指數記法表(一)百萬, (二)十萬萬, (三)千萬分之一.

2. 地球距日 93,000,000 哩,用冪數表出.

3. 銀河系直徑,約爲 220,000 光年,合多少哩?

4. x光線波長,約爲$\frac{12}{10^8}$公分,試用負指數記出.

求下列(5－6)各數的值:

5. $3^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\frac{1}{3^{-2}}-8^0$.　　6. $\frac{2}{9^0}-16^2\times4^{-2}+\frac{2^{-1}}{3^{-1}}$.

用正整數表下列(7－12)各式:

7. $a^{-n}\times\frac{1}{a}$.　　8. $(x^{-2})^{-3}$.　　9. $\frac{a}{b^{-m}}$.

10. $\left(-\frac{2p}{q}\right)^{-3}$.　　11. $\frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$.　　12. $\frac{2x^0y^{-1}z^2}{3a^{-1}b^{-2}c^3}$

13. $(-10)^n, 10^{-n}, -10^n$,三式有無區別?看$n=2,3$的情形.

14. 化簡$\frac{x^2y^{-4}}{a^{-5}b^3}$與$\frac{x^2+y^{-4}}{a^{-5}-b^3}$二式.

173.分指數 【問題】 $a^{\frac{1}{2}}$的意義如何,方可使同底第二律,對這種新指數(即分指數)也適合? 又$a^{\frac{2}{3}}$的意義應如何

【解】 如能適合,則應有$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2=a^{\frac{1}{2}\times 2}=a.$

但因開方與乘方爲反運算(§140),即$(\sqrt{a})^2=a.$

所以$a^{\frac{1}{2}}$的意義應作爲$\sqrt{a}$.

同理可得$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$, $\left[因\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3=a^{\frac{1}{3}\times 3}=a\right]$

$$a^{\frac{2}{3}}=[a^2]^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a^2}.$$

照上題推廣,便有 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$,

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

即一數的分指數乘冪,按其分子乘方,按分母開方.

【注意】 乘方開方兩種運算次序先後,可以任意,如

$27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=\sqrt[3]{729}=9$, 或 $(\sqrt[3]{27})^2=3^2=9.$

174.分指數與根式 應用分指數來運算根式頗爲便利,舉例如下:

【例一】 §158的根式運算律(1),(2),(3)可用分指數和負指數寫出如下:

(根式記法)	(指數記法)
$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$,	$(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$,
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,	$(ab^{-1})^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{-\frac{1}{n}}$,
$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.	$a^{\frac{1}{mn}}=(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}$.

在此又可見指數定律,對於分指數,負指數一樣能合用.

【例二】　化簡 $\sqrt{5xy}\cdot\sqrt[3]{100x^2}$.

【解】　原式 $=5^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{4}{6}}\cdot 5^{1\frac{1}{6}}x^{1\frac{1}{6}}y^{\frac{3}{6}}$

$=5x\cdot 2^{\frac{4}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{3}{6}}=5x\sqrt[6]{80xy^3}$.

【註】　和§165例一比較.

【例三】　化簡 $\dfrac{\sqrt[3]{4xy^2}\cdot\sqrt{2x}}{\sqrt[6]{16x^5y^3}}$.

【解】　原式 $=2^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{4}{6}}x^{-\frac{5}{6}}y^{-\frac{3}{6}}$

$=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{4}{6}}x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}-\frac{3}{6}}$

$=2^{\frac{3}{6}}x^{0}y^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{8y}$.

習題七一

用根號及分式記下列(1－6)各式:

1. $x^{\frac{1}{n}}$.　　**2.** $2b^{1\frac{1}{2}}$.　　**3.** $3c^{\frac{1}{3}}$.

4. $-2x^{-\frac{1}{3}}$.　　**5.** $c\cdot c^{\frac{1}{4}}$.　　**6.** $3y^{-\frac{a}{b}}$.

用分指數及負指數記下列(7－12)各式:

7. $\sqrt[7]{a^3}$. 8. $\sqrt[3]{a^{-2}}$. 9. $\sqrt[3]{-a^2}$.

10. $\sqrt[5]{ab^{-2}}$. 11. $\sqrt{a^m b^n}$. 12. $x\sqrt[n]{a^c}$.

13. 求$32^{\frac{2}{5}}-81^{\frac{3}{4}}+5^0+100^{\frac{3}{2}}-27^{\frac{2}{3}}$的值.

14. 求$(0.04)^{\frac{3}{2}}+(0.008)^{\frac{1}{3}}-(0.027)^{\frac{2}{3}}+(70^6)^0$的值.

15. $a=8$, $b=2$, 求$\dfrac{16a^0b^{-2}-9a^{-\frac{4}{3}}}{3a^{-\frac{2}{3}}+4b^{-1}}$的值.

III. 虛數

175.虛數的產生 由開方乘方互爲反運算的理卽可知$\sqrt{2}$的意義乃指一平方爲 2 的數,卽$(\sqrt{2})^2=2$. 推廣來說,以$\sqrt[n]{a}$所表的數,其n次方爲a.所以$\sqrt{-2}$應當作平方爲-2的數,卽$(\sqrt{-2})^2=-2$.同理,設a爲正數,卽

$$(\sqrt{-a})^2=-a.$$

在此有一很大的困難,卽上式與§141 所述平方性質相牴觸.欲免去這種矛盾,便不得不視這結果爲一種新數的產生,而稱爲**虛數**.換句話說,負數的平方根,是一種新數,叫**虛數**.

新數的產生,在數學中,並非創舉.我們最初只知正整數,但爲解釋不可整除的情形,不得不產生分數

爲解釋從小數減大數的情形,不得不產生負數;爲解釋不盡根及其他情形,不得不產生無理數.

176.實數　對於虛數言,凡有理數,無理數,合稱實數.即實數平方必爲正數,虛數平方必爲負數.

177.虛單位　a 爲正數時,虛數 $\sqrt{-a}$ 可視爲 $\sqrt{-1}$ 與實數 $\sqrt{a}$ 的積.$\sqrt{-1}$ 便叫虛單位,常記爲 i;$\sqrt{a}$ 叫係數.

基本公式　$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i\,(a>0)$;而 $i^2=-1$.

【例】
$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i,\ \sqrt{-12}=2\sqrt{3}\,i,$$
$$\sqrt{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i.$$

178.虛數加減法　與同類項相似(§§41, 44).

法則　幾個虛數相加減,可加減其係數,而附以公共的虛單位.

【例一】
$$\sqrt{-8}+\sqrt{-\frac{1}{4}}-\sqrt{-\frac{2}{9}}=2\sqrt{2}\,i+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i-\frac{\sqrt{2}}{3}\,i$$
$$=2\frac{1}{6}\sqrt{2}\,i.$$

【例二】
$$\sqrt{-b^2}+\sqrt{2ab-(a^2+b^2)}=bi+(a-b)i=ai.$$

179.複數　實數與虛數,不能由加減併爲一數.實數與虛數用 +,− 號聯合時,便叫複數.

【例】　$2-\sqrt{3}\,i$ 是複數,$a+bi$ 也是複數.

【註】　負數的偶次方根如 $\sqrt{-3}$,負數的對數,都是虛

數,在此還不能說明其理(參看本局最新課程標準高中代數).

180.虛數乘除法 虛數和虛數或實數相乘除時,須分開虛單位再算.并須注意$i^2=-1$,且$\frac{i}{i}=1$.

【例一】 $\sqrt{-3}\times\sqrt{-2}=\sqrt{3}\,i\sqrt{2}\,i=\sqrt{6}\,i^2=-\sqrt{6}$.

【注意】 萬不可照右式算:$\sqrt{-3}\times\sqrt{-2}=\sqrt{(-3)\times(-2)}$

$=\sqrt{6}$.

【例二】 $a^2\div\sqrt{-a^2}=\frac{a^2}{ai}=\frac{a}{i}=\frac{ai}{i^2}=-ai$.

【註】 分母中虛數須化去,和根式情形相做(§§160-161).

181.複數的乘除 複數乘除法和根式的相同(§§166,168),但須注意結果中如有i^2,須代以-1.

【例一】 $(4-3i)(2+5i)=8+14i-15i^2$

$=8-(-15)+14i=23+14i$.

【例二】 $\frac{7+2i}{5-3i}=\frac{(7+2i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)}=\frac{35+31i+6i^2}{5^2-3^2i^2}$

$=\frac{35-6+31i}{25-(-9)}=\frac{29+31i}{34}=\frac{29}{34}+\frac{31}{34}i$.

習 題 七 二

求化下列(1-14)各題為虛數或複數:

1. $5\sqrt{-n^2}+3\sqrt{-9n^2}$. **2.** $(5+\sqrt{-2})(5-\sqrt{-2})$.

3. $3\sqrt{-a^2-2ab-b^2}-7\sqrt{-a^2-b^2+2ab}$.

4. $(7-\sqrt{-3})(5+\sqrt{-6})$. **5.** $(6+2i)(3-2\sqrt{3}\,i)$.

6. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^2$.　　7. $(a+bi)^2-(a-bi)^2$.

8. $\frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-6}}$.　　9. $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-6}}$.

10. $\frac{12}{1+i\sqrt{3}}$.　　11. $\frac{6-7\sqrt{-1}}{8-15\sqrt{-1}}$.

12. $\frac{(2+3i)(i-1)}{(2-5i)(1+i)}$.　　13. $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$.

14. $1+\frac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^2$.

15. 求證 $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$ 爲 1 的立方根.

【提示】 求這二複數的立方.

16. 設 $x=2+2\sqrt{-3}$, 求 $x^2-4x+16$ 的值.

17. 設 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$, 求 x^2+x+1 的值.

雜　題

1. 複數最普通形狀爲 $a+bi$, 其中 a, b 爲實數.如 $a=0$, 這式表何種數? $b=0$ 呢?

2. 有理數是不是實數? 無理數是不是實數? 實數是否必爲有理數,還是必爲無理數?

3. 實數有無能爲虛數的時候? 複數能不能?

4. 將本章所述各種數,列爲一表,以明統屬的關係(譬

如分數是有理數的一種).

化簡下列(5－9)各根式:

5. $\sqrt[5]{\frac{64x^7}{y^{13}}}$. **6.** $\sqrt[3]{x^2-\frac{1}{x}}$. **7.** $\sqrt[12]{\frac{1}{16}(ax+by)^4}$.

8. $\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}}$. **9.** $\sqrt[3]{\frac{x^2}{3x+y}+\frac{y^2}{3y+x}}$.

化去下列(10－12)各式的分指數和負指數:

10. $\frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$. **11.** $\frac{x^{-n}}{x^{n-3}}$. **12.** $\frac{3x^0y^{-1}z^{-\frac{1}{5}}}{5a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{4}}}$.

13. 證明 $a^{-(-n)}=a^n$.

化簡下列(14－19)各式:

14. $\left(\sqrt{\frac{3x}{5y}}-\sqrt{\frac{y}{5x}}\right)^2$. **15.** $(p+3\sqrt{q})(p-3\sqrt{q})$.

16. $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

17. $\frac{\sqrt{x}+5\sqrt{z}}{\sqrt{x}-2\sqrt{z}}$. **18.** $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{c}}$.

19. $\frac{\sqrt{m+b}}{6-\sqrt{m+b}}$.

化簡下列(20－27)各複數:

20. $5\sqrt{-8}+10\sqrt{-50}$. **21.** $\sqrt{-x^2}+7\sqrt{-x^4}$.

22. $(6+i)(6-i)$. **23.** $(a+bi)^2$. **24.** $(1+i)^3$.

25. $\frac{42}{1+2i\sqrt{5}}$. **26.** $\frac{i}{(1-i)^2}$. **27.** $\frac{a+bi}{c+di}$.

28. x 的值如何,則 $y=\sqrt{x-3}$ 爲虛數?

29. x 的值如何,則 $y=\sqrt{(x-2)(7-x)}$ 爲虛數?

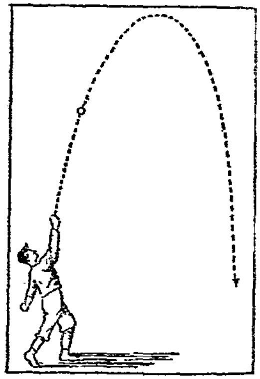
30. 設 $x=-1+2i$, 求 x^2+2x+5 的值.

31. 太陽距地球約 93×10^6 哩,光每秒行 186000 哩,求太陽光達到地面上所需時間.

第十一章

一元二次方程式

I. 二次函數圖解



182.拋物線 將一彈丸或他種小物件,向上拋去,則見其在空中軌道成一弧線如右圖.這種曲線叫拋物線.按前所述,二次函數

$$y=ax^2+bx+c$$

的圖解,與這曲線相同,不過間有上下倒置的形狀.

【註】 二次函數的圖解爲拋物線的理,見物理學.

這種圖解的詳細討論,在初中暫難講到,今就重要特例,以察其一般的性質.

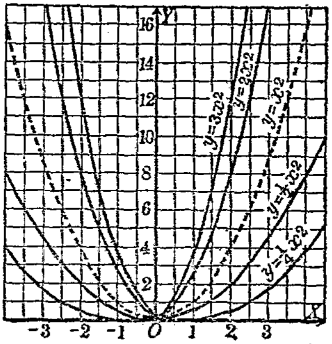
183. $y=ax^2$ **的圖解** 取下列五函數:

(1) $y=3x^2$, (2) $y=2x^2$, (3) $y=x^2$,

(4) $y=\frac{1}{2}x^2$, (5) $y=\frac{1}{4}x^2$,

均爲 $y=ax^2$

的特例.按 §90 的方法作出各函數的圖解如下.在圖



中可見 a 值愈大時,曲線愈峭,愈小時,曲線愈平,各與直拋及平拋一物的情形相類.

又如 a 是負數,所得曲線,形狀仍同,不過上下倒置便了.試取 $a=-3,\ -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}$ 作圖,所得結果與倒視上圖相同.

184. $y=ax^2+m$ 的圖解　下列各曲線爲

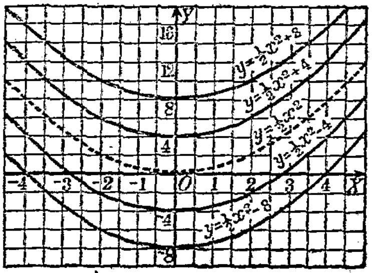
(1)　$y=\frac{1}{2}x^2+8,$

(2)　$y=\frac{1}{2}x^2+4,$

(3)　$y=\frac{1}{2}x^2,$

(4)　$y=\frac{1}{2}x^2-4,$

(5)　$y=\frac{1}{2}x^2-8$

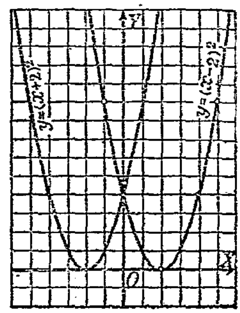


的圖解.就圖可見各曲線形狀均同,常數項(即 m)的影響在使 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖解,作上下的平移.且其值卽曲線與 y 軸交點的縱標.

如 a 爲負數,結果的圖形如何?試先預測,再將上五函數中 a 值改爲 $-\frac{1}{2}$ 而作圖,與上圖比較.

185. $y=(x+d)^2$ 的圖解 取

$$y=(x-2)^2, \qquad y=(x+2)^2$$



二函數作圖如右.將這二曲線與上頁中$y=x^2$的圖解比較,可見形狀并無差異,以$(x+d)$代 x 的結果,不過只是曲線向左或右平移.

由上述各節,能否預測

$$y=a(x+d)^2, \quad y=a(x+d)^2+m$$

各種函數圖解的情形?

習題七三

作下列各函數的圖解:

1. $y=-4x^2$. **2.** $y=-\frac{1}{3}x^2$. **3.** $y=-x^2+\frac{3}{2}$.

4. $y=-2x^2-4$. **5.** $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. **6.** $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-4$.

7. $y=x^2+2x+3$. 【提示】 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$.

8. $y=x^2-2x+3$. **9.** $y=2x^2+4x+6$.

10. $y=-2x^2+12x-16$.

186.配方術 【問題】 如何將 $f(x)=5x^2-10x-12$ 配成一次式平方與常數和差,再乘以另一常數的形狀?

【解】 問題在於將 $f(x)$ 寫成 $a(x+d)^2+m$ 形式.

(一)定 a: $f(x)=5\left(x^2-2x-\frac{12}{5}\right)$, $\therefore\ a=5$.

(二)定 d: $x^2-2x-\frac{12}{5}=(x^2-2x+1)-1-\frac{12}{5}$

$$=(x-1)^2-\frac{17}{5},\quad \therefore\ d=-1.$$

(三)定 m: $f(x)=5\left[(x-1)^2-\frac{17}{5}\right]=5(x-1)^2-17$,

$$\therefore\ m=-17.$$

因 $x^2+2kx+k^2$ 爲三項平方式(§103),其中常數項是 x 係數折半的平方,故得配方術法則如下:

法則 (一)用原式 x^2 係數 a 除全式,使成 x^2+px+q 的形狀.

(二)加 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ 於前二項,使成完全平方式 $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$.

(三)再減去 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$,則 $\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$ 卽爲配方後的常數項.

【例一】 將 $f(x)=7x^2-2x-5$ 配方.

【解】 $f(x)=7\left(x^2-\frac{2}{7}x-\frac{5}{7}\right)$, 而 $\frac{2}{7}\div 2=\frac{1}{7}$, $\left(\frac{1}{7}\right)^2=\frac{1}{49}$,

$$\therefore\ x^2-\frac{2}{7}x-\frac{5}{7}=\left(x^2-\frac{2}{7}x+\frac{1}{49}\right)-\frac{5}{7}-\frac{1}{49}$$

$$=\left(x-\frac{1}{7}\right)^2-\frac{36}{49}.$$

故得 $7x^2-2x-5=7\left[\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{36}{49}\right]=7\left(x-\frac{1}{7}\right)^2-\frac{36}{7}$.

【例二】　將 $f(x)=-\frac{x^2}{6}+\frac{4x}{3}-\frac{5}{2}$ 配方.

【解】　$f(x)=-\frac{1}{6}(x^2-8x+15)$;　$-\frac{8}{2}=-4$, $(-4)^2=16$,

$\therefore$　$x^2-8x+15=(x^2-8x+16)+(15-16)=(x-4)^2-1$,

故　$-\frac{x^2}{6}+\frac{4x}{3}-\frac{5}{2}=-\frac{1}{6}[(x-4)^2-1]=-\frac{1}{6}(x-4)^2+\frac{1}{6}$.

187.二次函數圖解　用配方術,可將任何二次函數 ax^2+bx+c 都配成 $a(x+d)^2+m$ 的形狀,按§§183－185各節,便知 a 的數值大小,定曲線的平或峭,a 的號爲正或負,定曲線的順或倒,m 表曲線上下平移的距離 d 表左右平移的距離.所以**二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖解,都是拋物線,**不過彎曲度有平或峭,位置有順有倒,地位還可作上下左右的平移.

習題七四

塡下列(1－4)各式缺項使成三項平方式:

1.　$-x^2+7x+(\quad)$.　　2.　$3x^2-6ax+(\quad)$.

3.　$ax^2+bx+(\quad)$.　　4.　$x^2+px+(\quad)$.

將下列(5－8)各式配方,使成 $a(x+d)^2+m$ 形狀:

5.　$3x^2-6x-6$.　　6.　$-2x^2+16x-34$.

7. $\frac{1}{2}x^2-x+2$.　　8. $\frac{1}{4}x^2+2x+3$.

9. 利用§183的圖作第5至8各題的圖解.

【提示】將 $y=ax^2$ 的圖解上下移 d 格,左右移 m 格.

10. 上題中曲線如與 x 軸相交,讀出交點的橫標.將這橫標值代入原式,其函數值應如何?

11. 前題中那幾條曲線與 x 軸不相交?看 a 與 m 的號有無一定關係?

II. 一元二次方程式解法

188.配方解法　上册§108所講的分解因子法,只能求二次方程式中有理根,但配方解法則能普遍應用.

配方法法則　(一)將 $ax^2+bx+c=0$ 配方,成

$$a(x+d)^2+m=a\left[(x+d)^2+\frac{m}{a}\right]=0.$$

(二)因 $a\neq0$(否則不成二次方程式),按§31注意,知必

$$(x+d)^2+\frac{m}{a}=0.$$

(三)移項得 $(x+d)^2=-\frac{m}{a}$.

(四)兩端開方 $x+d=\pm\sqrt{-\frac{m}{a}}$.

(五)移項得 $x=-d+\sqrt{-\frac{m}{a}}$,或 $-d-\sqrt{-\frac{m}{a}}$ 二根.

【注意】如 m 與 a 異號,則 $-\frac{m}{a}$ 為正,故二根為實數;如

m 與 a 同號,則 $-\frac{m}{a}$ 為負,而二根為複數,詳細討論見後.

【例一】 解 $x^2+2x-3=0$.

【解】 配方, $x^2+2x-3=(x^2+2x+1)-1-3=0$,

即 $(x+1)^2-4=0$.

移項,兩端開方, $(x+1)^2=4$, $x+1=\pm 2$.

$\therefore$ $x=2-1=1$, 或 $-2-1=-3$.

【驗算】 $1^2+2\cdot 1-3=0$, $(-3)^2+2(-3)-3=0$.

【例二】 解 $9x^2-12x=1$.

【解】 將 1 移至左端而配方,

$$9x^2-12x-1=9\left(x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}\right)=0.$$

因 $\frac{4}{3}\div 2=\frac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

故 上式 $=9\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right)=9\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{5}{9}\right]=0$.

移項,兩端開方, $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$, $x-\frac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\therefore$ $x=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}$, 或 $\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

【驗算】 $9\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2-12\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

$$=9\left(\frac{4}{9}+\frac{4\sqrt{5}}{9}+\frac{5}{9}\right)-12\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=1.$$

其他一根,學生試自驗算.

【例三】 解 $x^2+x+1=0$.

【解】　配方，$x^2+x+1=x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=0$,

即　$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0.$$

移項,兩端開方，$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}, x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}.$

$$\therefore\ x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\text{或} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

【驗算】　$$\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$$
$$=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=0.$$

【注意】　參看習題七十二第15及17二題.

習題七五

試用配方法解習題七四中第5至第8各二次函數所成方程式.

189.二次方程式根的公式　任何二次方程式,都可寫成　$$ax^2+bx+c=0$$
的形狀,故稱爲標準式.故解這標準式,即得一切二次方程式根的公式.茲依配方法解出如下:

(一)配方　$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right), \frac{b}{a}\div 2=\frac{b}{2a}$,

$$\text{原式}=a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0.$$

(二)移項,開方 $\begin{cases}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2},\\ x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\end{cases}$

(三)根的公式 $\boldsymbol{x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$

$$\boldsymbol{x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

【例一】 用公式解§188中例一,例二及例三.

【解】 (一) $x^2+2x-3=0$, 即 $a=1$, $b=2$, $c=-3$.

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1(-3)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm4}{2}.$$

$$\therefore\ x_1=\frac{-2+4}{2}=1,\quad x_2=\frac{-2-4}{2}=-3.$$

(二) $9x^2-12x=1$, 即 $a=9$, $b=-12$, $c=-1$.

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot9(-1)}}{2\cdot9}=\frac{12\pm\sqrt{144+36}}{18}$$

$$=\frac{12\pm\sqrt{180}}{18}=\frac{12\pm6\sqrt{5}}{18}=\frac{2\pm\sqrt{5}}{3}.$$

$$\therefore\ x_1=\frac{2+\sqrt{5}}{3},\qquad x_2=\frac{2-\sqrt{5}}{3}.$$

(三) $x^2+x+1=0$, 即 $a=1$, $b=1$, $c=1$.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore\quad x_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【例二】　用公式解 $x^2-4x+4=0$.

【解】　$x=\dfrac{+4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\dfrac{+4\pm\sqrt{16-16}}{2}$

$$=\frac{+4\pm0}{2}.$$

$$\therefore\quad x_1=2,\qquad x_2=2.$$

【註】　由公式求得 x_1, x_2 二根相同時,這根叫重根.

【例三】　解分方程式 $\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{x-3}$.

【解】　仍照§124所述解法,先化爲整方程式,得

$$18(x-3)+2x(x-3)=18x,$$

即　$x^2-3x-27=0$.　　　$\therefore\quad x=\dfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{117})$.

【註】　這無理根,一望而知不能使分母爲零.

習題七六

1. 用根的公式解習題七五中各題.

用適宜方法解下列(2–15)各題,結果都要核對:

2. $x^2-3x+3=0$.　　3. $3x^2+8x-4=0$.

4. $x^2-10x+15=0$.　　5. $12y^2-5y=3$.

6. $2y(y-2)=70$.　　7. $2x^2+13x+10=0$.

8. $15n^2-19n=-6$.　　9. $y^2+8y+14=0$.

10. $5y^2-22y=-25$.　　11. $w(2w+3)=104$.

12. $x^2+6ax+8a^2=0$.　　13. $3x^2+56x=2b^2$.

14. $2x^2-2ax+a^2=0$.　　15. $n^2-(n-2a)^2=(n-4a)^2$.

【註】 a, b 爲常數.

16. 將根的公式代入標準式,看是否適合.

解下列(17—20)各分方程式:

17. $x+\frac{5}{x}=10.5$.　　18. $\frac{n}{n-2}+\frac{n-1}{n^2-4}=\frac{3}{2}$.

19. $\frac{5x}{x-2}-\frac{4x-5}{x+2}=\frac{1}{2}$.　　20. $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{2c}{x+c}$.

190.根的性質 由上節所得根的公式,即可不必解一二次方程式,而斷其二根的性質.

(一)根的虛或實 如 b^2-4ac 爲正或零,則兩根爲實數;如 b^2-4ac 爲負,則兩根是相異複數或虛數.

(二)根的有理或無理 如 b^2-4ac 爲完全平方,則爲有理數;如 b^2-4ac 爲正而非完全平方,則爲無理數.

【注意】 零是完全平方,又負數(如-4)決非完全平方.

(三)根的相等或相異 如 b^2-4ac 不爲零,則兩根

相異(可實可虛);如b^2-4ac為零,則兩根相等,而為重根.

由根的公式,知這重根為$-\frac{b}{2a}$.

根的性質,即由b^2-4ac一式的值決定,故這式稱為二次方程式的判別式.

由上面討論,可列成一表如下:

判別式 $D=b^2-4ac$		零	正數		負數
			完全平方	非完全平方	
根的性質	(一)	相等	相異		
	(二)	有理數		無理數	複數或虛數

【例】　取§188各例,及§189例(二)應用上理,判別二根性質.

【解】　(一) $x^2+2x-3=0$,　$D=2^2-4\cdot1(-3)=4+12=16=4^2$

為完全平方,故二根為相異有理數.

(二) $9x^2-12x-1=0$,　$D=(-12)^2-4\cdot9(-1)=144+36$

$=180>0$,但非完全平方,故二根為相異無理數.

(三) $x^2+x+1=0$,　$D=(+1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$,

故二根為複數(或虛數).

(四) $x^2-4x+4=0$,　$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=16-16=0$,

故二根為相等有理數.

習題七七

試由判別式定習題七六中第 2 至15題各二次方程式根的性質.

191.根與係數的關係　由 §189 知二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根爲

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

今求其和與積.

(一)和:　$x_1+x_2=-\dfrac{2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}.$

(二)積:　$x_1x_2=\dfrac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a}.$

故得根與係數間兩種關係如下:

(一)兩根的和,等於 x 的係數被 x^2 係數除,所得的商而改號.

(二)兩根的積,等於常數項被 x^2 係數除的商.

【例一】　$9x^2-12x=1$, 即$9x^2-12x-1=0$的二根爲

$$x_1=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3},\ x_2=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$x_1+x_2=\frac{4}{3}=-\left(\frac{-12}{9}\right),\ x_1x_2=\frac{-1}{9}.$$

【註】　這種關係,可作根的驗算,較代入計算爲便.

【例二】　定 k 的值,使 $x^2+kx+18=0$ 有一根爲他根的

$\frac{1}{2}$.

【解】 設一根為x_1,則他根$x_2=\frac{1}{2}x_1$,按(二)得

$$x_1x_2=x_1\cdot\frac{1}{2}x_1=\frac{1}{2}x_1^2=18.\qquad\therefore\quad x_1=\pm6.$$

$\therefore\ k=-(x_1+x_2)=6+3=9$, 或 $-6-3=-9$.

【註】 高次方程式中,根與係數也有一種類似的關係,見本局高中代數學內方程式論一章.

習題七八

1. 用根與係數關係,核對習題七六中第 2 至 15 各題的根.

定下列(2－8)各題的 k 值,使左邊方程式的根有右邊所列的性質:

2.	$x^2-4x+k=0$.	一根為 3.
3.	$x^2+kx-12=0$.	一根為 -3.
4.	$kx^2-2x+1.5=0$.	兩根的和為 4.
5.	$y^2-6y+k=0$.	兩根的差為 4.
6.	$3x^2-10x=k$.	兩根的比為 5.
7.	$kx^2-5x+2=0$.	一根為他根倒數.
8.	$8x^2-kx+1=0$.	一根為他根平方.

192.已知兩根,求二次方程式 由上節所述,可見

一二次方程式的兩根爲已知時,不難定其係數.

【例】 作一二次方程式,使其兩根爲 -3 及 $\frac{1}{4}$.

【解】 因 $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=-3$,

$$\therefore\quad x_1+x_2=-\frac{11}{4}=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=-\frac{3}{4}=\frac{c}{a}.$$

故所求的二次方程式爲 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0$,

或 $$4x^2+11x-3=0.$$

193.二次三項式的因子分解 上冊 §§105, 106 所述的兩種情形,不能應用於一切的二次三項式.由觀察分解,只限於該節中 a, b 等數爲有理數的時候,如遇無理數,或複數,虛數,便無從分配.

按 §108 的解二次方程式法,知 $f(x)=ax^2+bx+c$ 可分解成 $a(x-x_1)(x-x_2)$,則 $f(x)=0$ 以 x_1, x_2 爲其二根.今按 §191 根與係數關係,可以證明他的逆定理.

定理一 如 x_1, x_2 爲 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 的二根,則 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

【證】 $a(x-x_1)(x-x_2)=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]$

按 §191 $$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=ax^2+bx+c=f(x).$$

【註】 當 $f(x)=0$ 爲高次方程式時,這理也合,證見下章.

【例一】 解上節的例.

【解】　$f(x)=[x-(-3)]\left[x-\frac{1}{4}\right]=x^2+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0$.

如除去係數分母,即得　$4x^2+11x-3=0$.

再按§189根的公式,將x_1, x_2的值代入,即得

定理二　二次三項式 ax^2+bx+c 常可分解爲兩個一次因子,如

$$a\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

【例二】　分解二次三項式 $8x^2-12x+3$.

【解】　依根的公式,得 $x_1=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}$, $x_2=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

$$\therefore\ 8x^2-12x+3=8\left(x-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right).$$

習題七九

用§§192－3的兩種方法,求作二次方程式,使有下列(1－13)各組數爲其兩根:

1. $6, \frac{2}{3}$.　**2.** $5, -\frac{1}{4}$.　**3.** $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}$.　**4.** $-\frac{3}{8}, -\frac{2}{5}$.

5. $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$.　**6.** $\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}$.　**7.** $-4k, \frac{3}{5}k$.

8. $3+\frac{1}{2}\sqrt{7}, 3-\frac{1}{2}\sqrt{7}$.　**9.** $-3+2\sqrt{5}, -3-2\sqrt{5}$.

10. $\frac{-2+\sqrt{10}}{3}, \frac{-2-\sqrt{10}}{3}$.　**11.** $\frac{1+\sqrt{5}\,i}{2}, \frac{1-\sqrt{5}\,i}{2}$.

12. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

13. $\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}, \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

分解下列(14－19)各二次三項式爲因子:

14. $10x^2-7x+1$. **15.** $12x^2-17x+6$.

16. $27x^2+51x-56$. **17.** $2x^2-10x+5$.

18. $x^2-6x+10$. **19.** x^2+x+1.

194. 應用問題 【例一】 若物體下墜時的速度爲每秒 v 呎, t 秒後,此物下降 s 呎,則由物理學知 $s=vt+16t^2$.

今有人自高 384 呎處的飛行機,以每秒 32 呎的速度擲下一物,問經若干秒後,物體可落地上?

【解】 將所設各數代入公式,得 $384=32t+16t^2$,

即 $t^2+2t-24=0$, $\therefore$ $t=-6$ 或 4.

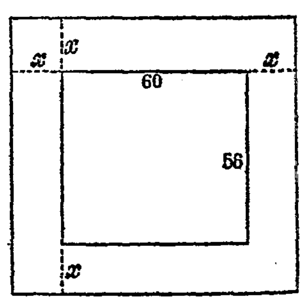
但負數在本題爲無意義,故得答案爲 4 秒.

【註】 解應用問題時,須答數有實際意義,方爲適合.

【例二】 有長方形草地,闊 56 尺,長 60 尺,草地周圍有路,其闊處處相同,而面積與草地相等,求路闊.

【解】 設 $x=$ 路闊尺數.

按題意路與草地面積共計爲草地的二倍,照右圖得



$$(60+2x)(56+2x)=2\cdot60\cdot56,$$

化簡爲 $4x^2+2\times116x-60\cdot56=0$,

即 $x^2+58x-840=0$.

$\therefore$ $x=12$ 或 -70.

但負數在本題爲無意義,故得路闊爲12尺.

【注意】 負數有時可作相當解釋,如財產爲負,便是欠債.

習題八〇

1. 二相隣正偶數平方和爲884, 求此二數.

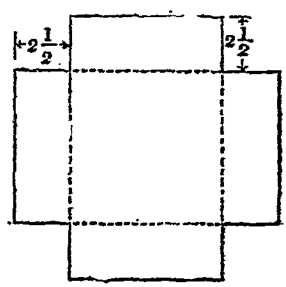
2. 分56爲二數,使一數爲他數平方.

3. 一長方田一邊較他邊短5丈,面積爲176方丈,求其長與闊.

4. 一三角形面積爲16方呎,高較底多4呎,求高與底.

5. n角形有$\frac{1}{2}n(n-3)$條對角線,某多角形有135條對角線,求邊數.

6. 自一長方形洋鐵,各角剪去$2\frac{1}{2}$寸長的小正方形後,造成一長方匣,可容80立方寸.求這洋鐵每邊的長.



7. 一室長比闊多4尺,中舖一地毯,四周餘地闊各爲2尺.如未舖毯的地方,面積適和毯相等,求室長和闊.

8. 將一物體以每秒v呎的速度向上拋去,經t秒後,與地相距s呎,則按物理學,知$s=vt-16t^2$.

如一鎗彈以每秒 200 呎的速度,向空射放,問經幾秒後,彈離地 600 呎? 又何時鎗彈墜地? 這時為零的一根,應如何去解釋?

9. 一人有款若干元,用去 15 元後,所餘元數和原有元數的積為 100, 求原有元數. 這題中負數答案,應怎樣解釋

10. 希臘人研究美學,求得一結果,即一長方形長 l 與闊 w 的關係,合於 $\frac{w}{l}=\frac{l}{l+w}$ 時,最覺悅目.試求以 w 表 l 的公式.如 $w=6$ 呎,求 l.

11. 如長方形周界長 p 呎,求合上題關係的 l 和 w.

12. 某甲在限定時刻內需到相距 45 里的一處,走了全程十分之六時,估計照此速度走去,在限定時刻內,只能走全程十分之九,於是以每小時加快 3 里的速度走去,恰合限定時間,求原來走路時的速度.

雜題

先判別下列(1－9)各二次方程式根的性質,再用適宜的方法解出:

1. $x^2+6x+12=0$.　　**2.** $3x^2-5\sqrt{2}x+1=0$.

3. $0.09x^2-0.21x+0.1=0$.　　**4.** $x^2-3x+15=0$.

5. $5(2x+1)(x-5)-(4x-3)(5x+29)=0$.

6. $\frac{2}{x+3}+\frac{4}{3}=\frac{3}{x-7}$.　　**7.** $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{cx-d}{ax-b}$.

8. $\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}-\frac{2x+1}{(x+3)(2-x)}=\frac{3x}{(1-x)(x-2)}$.

9. $x^2-4x+4=a^2$.

10. 作上列第1至4題左端函數的圖解,求其極大或極小.

11. 分解第1至4題左端二次式的因子.

用兩種方法,作二次方程式,以下列(12－21)各組數爲其兩根:

12. $-5, \frac{2}{3}$.

13. $-b, -4b$.

14. $n, -3n$.

15. $-2, -2$.

16. $\frac{2+\sqrt{5}}{3}, \frac{2-\sqrt{5}}{3}$.

17. $3+\frac{1}{2}\sqrt{7}, -3-\frac{1}{2}\sqrt{7}$.

18. $\frac{7+\sqrt{3}i}{2}, \frac{7-\sqrt{3}i}{2}$.

19. $-2+i, -2-i$.

20. $\frac{1}{2}(a-b), \frac{2}{a-b}$.

21. $(m+n)^2, (m-n)^2$.

22. 求二整數,使其差爲4,其積爲117.

23. 已知 $x-3$ 與 $x+3$ 的積,比其差大10,求 x.

24. 一梯形田,下底爲高的二倍,而上底較高長17丈,如知其面積爲45方丈,求上下底長.

25. 一圓半徑比他圓者長2吋,其面積的和爲 $106\frac{6}{7}$ 方吋.求二圓半徑.

26. 有 n 條電話線,其在交換盤上接線的配合法,共有

$\frac{n(n-1)}{2}$ 種,如知共有 4950 種配合,求電話線條數.

27. 一飛機飛行 1950 哩.在飛行過一半距離時,因天氣轉佳,故速度較前每小時增 25 哩,今知飛行時間共爲 22 小時 3 刻,求原來速度.

28. 有學生若干人可排成一實方陣,或二小實方陣.但後者每邊人數,各較前者每邊人數各少 1 及 8,求學生人數.

【提示】 先求每邊人數.

29. 兄弟二人共 35 歲,歲數的積爲兄 10 年後歲數的 10 倍,求二人年齡.所得二個根,是否均合實際意義?

30. 已知 $ax+by=k$,問 x 及 y 的值,則 x^2+y^2 爲極小.

第十二章

可化爲二次方程式求解的各種簡易方程式

I. 高次方程式

195.因子分解與求根 如一多項式$F(x)$可分解成因子$f_1(x)$, $f_2(x)\cdots$等等.則$f_1(x)=0$, $f_2(x)=0\cdots$等方程式的根,必爲$F(x)=0$的根.在特例,如這些因子是一次或二次式,則$F(x)=0$的根,可以完全求出.

【例一】 解$F(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$.

【解】 $x-1=0$, 則$x=1$;

$x^2+x+1=0$, 則$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

【例二】 解$F(x)=x^4-1=0$.

【解】 $F(x)=(x^2)^2-1=(x^2-1)(x^2+1)$

$=(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$.

$x-1=0$, 則$x=1$; $x+1=0$, 則$x=-1$;

$x^2+1=0$, 則$x=\pm i$.

【註】 1的n次根,即$x^n-1=0$的各根.由上二例知

(一) 1的三個立方根爲$1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(二) 1 的四個四次方根爲 $1, -1, +i, -i$.

196.因子定理 上節所說方法的逆定理,也能成立,即

因子定理 如 $x=a$ 是多項式 $F(x)=0$ 的根,則 $F(x)$ 有一因子爲 $x-a$。

【證】 設以 $x-a$ 除 $F(x)$,得商爲 Q,餘數爲 R,則因 $x-a$ 爲一次式,故 R 必爲常數.按 §58 公式得

$$F(x)=(x-a)Q+R.$$

以 $x=a$ 代入兩端,原設 a 是 $F(x)=0$ 的根,故 $F(a)=0$;而右端變爲 $(a-a)Q+R=0\cdot Q+R=R$,故 $R=0$,

$$\therefore \quad F(x)=(x-a)Q.$$

【注意】 實際上運算,用綜合除法(§59),以 $x-a$ 除 $F(x)$,如此同時可得商式 Q.

【例一】 求證 x^3-1 和 x^4-1 都以 $x-1$ 爲一因子.

【解】

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & +1 & +1 & +1 \\ \hline & 1 & +1 & +1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & +1 & +1 & +1 & +1 \\ \hline & 1 & +1 & +1 & +1 & 0 \end{array}$$

$\therefore \quad x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. $\quad x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$.

【例二】 解 $x(x+1)(x+2)(x+3)=1\cdot2\cdot3\cdot4$.

【解】 由上式易知 $x=1$ 和 -4 時,都能適合,化全式爲多項式形狀,再以綜合除法連除如下:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-24=x^4+6x^3+11x^2+6x-24.$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & +6 & +11 & +6 & -24 \\
 & & +1 & +7 & +18 & +24 \\
\hline
-4 & 1 & +7 & +18 & +24 & 0 \\
 & & -4 & -12 & -24 & \\
\hline
 & 1 & +3 & +6 & 0 &
\end{array}$$

故上式分解因子為

$$(x-1)(x+4)(x^2+3x+6),$$

所以各根為

$$x=1,\ -4\ 及\ \frac{-3\pm\sqrt{15}\,i}{2}.$$

習 題 八 一

1. 證明 $4x^4-5x^3+1$ 有因子 $x-1$,并求他一因子式.

2. 證明 x^n-b^n 常有因子 $x-b$, n 可為奇數或偶數.

3. 證明當 n 為奇數時, x^n+b^n 必有因子 $x+b$. 又 n 為偶數時如何?

4. 證明當 n 為偶數時, x^n-b^n 有因子 $(x-b)(x+b)$.

由觀察求下列(5−8)各方程式一根,然後再求他根:

5. $2x^3+3x=4x^2+1.$　　**6.** $3x^3+2x^2+1=0.$

7. $x^3+2k^2x=3k^3.$　　**8.** $x^2(2x-a)=a^3.$

9. 解 $x^4+1=0.$　【提示】 $x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2$

10. 解 $x^4+x^2+1=0.$　　**11.** 解 $x^4-x^2+1=0.$

12. 以 $x-a$ 除 $F(x)$, 所得餘數必為 $F(a)$, 試加證明.

【註】 這理叫餘數定理,因子定理不過是他的特例.

197.準二次方程式　設 u 表 x 的函數,能記為

$au^2+bu+c=0$ 形狀的方程式,叫**準二次方程式**.

凡準二次方程式,可化爲 $u=u_1$, $u=u_2$ 再解.

【例一】　解 $x^6-6x^3-16=0$.

【解】　令 $u=x^3$, 則得 $u^2-6u-16=(u+2)(u-8)=0$.

取 $u-8=0$, 則 $x^3=8$,

$$\therefore\quad x=2,\ 2\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1\pm\sqrt{3}i.$$

取 $u+2=0$, 則 $x^3=-2$,

$$\therefore\quad x=-\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

【例二】　解 $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$.　(§196 例二)

【解】　化爲 $(x^2+3x)(x^2+3x+2)-24=0$,而以 u 代 x^2+3x,

則
$$u(u+2)-24=u^2+2u-24=(u+6)(u-4)=0.$$

取 $u-4=0$, 則 $x^2+3x-4=0$,　$\therefore$ $x=1$ 或 -4.

取 $u+6=0$, 則 $x^2+3x+6=0$,　$\therefore$ $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}\,i}{2}$.

【例三】　解 $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{5}{6}$.

【解】　令 $u=\dfrac{x+1}{x-1}$, 則 $\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{u}$,代入得分方程式

$u-\dfrac{1}{u}=\dfrac{5}{6}$,再化爲整方程式

$$6u^2-5u-6=(3u+2)(2u-3)=0.$$

取 $2u-3=0$, 則 $2(x+1)=3(x-1)$,　$\therefore$ $x=5$.

取 $3u+2=0$, 則 $3(x+1)=-2(x-1)$,　$\therefore$ $x=-\dfrac{1}{5}$.

【例四】　解 $x^4+x^3+x^2+x+1=0.$ (1)

【解】　以 x^2 徧除得 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$

令　$x+\frac{1}{x}=u$, 則 $u^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$, 卽 $x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2.$

故原式變爲　$u^2+u-1=0,$

其兩根爲 $u_1=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-1)}\right)=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}),$

$$u_2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}).$$

取　$x+\frac{1}{x}=u_1$, 則得 $x^2+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})x+1=0.$

取　$x+\frac{1}{x}=u_2$, 則得 $x^2+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x+1=0.$

這二方程式的判別式 $D=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{5})^2-4$

$=\frac{1}{4}(6\pm2\sqrt{5})-4$, 均爲負數,故四根均爲複數.

【注意】　這四複數和 1, 爲 1 的五個五次方根.

【註】　(1)式是一種倒數方程式(參看本局高中代數).

習　題　八　二

解下列各方程式:

1. $2x^4-5x^2+2=0$　　2. $2x^6+x^3-15=0.$

3. $2(x-3)^4-11(x-3)^2+12=0.$

4. $(x^2+x+1)^2=3x^2+3x+1.$

5. $(x^2+x)(x^2+x+1)=24.$

6. $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=40.$

7. $2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+7\left(x-\frac{1}{x}\right)=4.$ 8. $\frac{a+2x}{a}=\frac{a}{a-2x}+4.$

9. $x^4+x^3+2x^2+x+1=0.$

10. $4x^3-4x^3-7x^2-4x+4=0.$

II. 根式方程式

198.根式方程式 【問題】 一直角三角形,周界長15寸,一腰長3寸,求他腰.

【解】 設x=所求他腰長的寸數,則按幾何的理,知斜邊應長$\sqrt{x^2+3^2}=\sqrt{x^2+9}$.按題設得

$$3+x+\sqrt{x^2+9}=15.$$

如能解這方程式,便可求x值.(解法見下節例一)

一方程式中如含有未知數的根式,或未知數的分指數,便叫根式方程式.

【例】 $3+x+\sqrt{x^2+9}=15$是根式方程式;又如$\sqrt{x-3}-5=0$,或$x^{\frac{4}{3}}+9=10x^{\frac{2}{3}}$,也是根式方程式.

【注意】 $\sqrt{2}(x+2)=3^{\frac{1}{4}}x^2$不是根式方程式.何故?

199.根式方程式解法 先看下列各例.

【例一】 解$3+x+\sqrt{x^2+9}=15.$

【解】 移項,使左端只含根式$\sqrt{x^2+9}$,即$\sqrt{x^2+9}=12-x.$

兩端乘方得　$x^2+9=144-24x+x^2$，$x=\frac{135}{24}=5\frac{5}{8}$.

【驗算】　$3+5\frac{5}{8}+\sqrt{\left(5\frac{5}{8}\right)^2+9}=3+5\frac{5}{8}+\frac{51}{8}=15$.

【注意】　依§156主根的規定當取根式 $\sqrt{\left(5\frac{5}{8}\right)^2+9}$ $=\sqrt{\frac{2601}{64}}$ 的正值,故得驗算如上.

由上例知只含一根式的根式方程式解法如下:

法則　移項使一端只含這根式,再兩端乘方,化去根號,然後解之.

如根式方程式不只含一根式,須照上法則,繼續將各根號盡行化除,方可再解.

【例二】　解　$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+2}=1$.　(1)

【解】　移項,使左端只含一根式,即

$$\sqrt{x+2}=1-\sqrt{2x+5}.$$

兩端平方, $x+2=(1-\sqrt{2x+5})^2=1-2\sqrt{2x+5}+(2x+5)$,

移項合併,幷使左端只含一根式,便得

$$2\sqrt{2x+5}=x+4.$$

兩端再平方,　$4(2x+5)=x^2+8x+16$,

即　$x^2-4=0$,　$\therefore$　$x=+2$ 或 -2.

【驗算】　$\sqrt{2\cdot2+5}+\sqrt{2+2}=\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2\neq1$, 不合.

$$\sqrt{2\cdot(-2)+5}+\sqrt{-2+2}=\sqrt{1}+\sqrt{0}=1,$$

故只 $x=-2$ 一根能合.

由此知解根式方程式,所得的根,必須驗算.

【注意】由上面的驗算,可看出$x=2$是$\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+2}=1$的根,書這式爲$(\sqrt{2x+5}-1)-\sqrt{x+2}=0$,書(1)爲$(\sqrt{2x+1}-1)+\sqrt{x+2}=0$,而相乘,便得$(\sqrt{2x+5}-1)^2-(\sqrt{x+2})^2=0$,即$(\sqrt{x+2})^2=(\sqrt{2x+5}-1)^2$.可見第一次兩端平方,實由加乘一因子而致,所以不知不覺間,加入了這因子的根.但這根幷不合原式,故須棄去.

【註】　根式方程式解法討論,詳見本局高中代數.

習題八三

解下列(1－10)各根式方程式:

1. $\sqrt{5x+11}=6.$　　**2.** $3\sqrt{2x+3}-2=7.$

3. $2(x-4)^{\frac{1}{2}}=(2x+3)^{\frac{1}{2}}.$　　**4.** $\sqrt{x^2+4x-5}=\sqrt{2(1-x)}.$

5. $\sqrt{x+1}=\sqrt[4]{x+1}.$　　**6.** $\sqrt{x-2}=\sqrt{x}-\sqrt{2}.$

7. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2x-1}.$　　**8.** $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=\sqrt{3}.$

9. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$　　**10.** $\dfrac{5a^{\frac{1}{2}}}{(2x-a)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{(2x+4a)^{\frac{1}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}}.$

11. 解$\sqrt{3+x}\pm\sqrt{x}\pm\sqrt{4-3x}=0$,而察求得諸根所合的各方程式,其根號前正負號,應如何取定?

12. 一直角三角形斜邊較一腰長1寸,而周界爲56寸,求斜邊和兩腰的長.

III. 聯立方程式

200.一次方程式與二次方程式聯立　常就一次方程式解出某未知數,代入二次方程式中再解.

既解得一未知數,仍就一次方程式求他未知數.

【例】　解$\begin{cases} x-2y=2, & (1) \\ x^2-y^2=4. & (2) \end{cases}$

【解】　就(1)解出 x, 得　　$x=2y+2,$　　(3)

代入(2)中,　　$(2y+2)^2-y^2=4,$

即　　$4y^2+8y+4-y^2-4=3y^2+8y=0.$　　(4)

解(4)得　　$y=0$, 或 $y=-\frac{8}{3}$.

代入(3)求 x 相當值,　　$x=2$, 或 $x=-\frac{10}{3}$.

驗算　$\begin{cases} 2-2\cdot 0=2 \\ 2^2-0^2=4 \end{cases}\begin{cases} -\frac{10}{3}-2\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{-10+16}{3}=\frac{6}{3}=2. \\ \left(-\frac{10}{3}\right)^2-\left(-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{100-64}{9}=\frac{36}{9}=4. \end{cases}$

【注意】　如將 $y=0$ 代入二次方程式(2),得 $x^2=4-0=4$, $\therefore x=\pm 2$, 但只有 $y=0$ 與 $x=2$ 爲一組解,而 $y=0$, $x=-2$ 不能合成一組.

習　題　八　四

解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x^2+y^2=106, \\ x=14-y. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x-y=0, \\ xy=16. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x^2+4y^2=64, \\ x-2y=0. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x-5y=-21. \\ y-2x^2=4. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x+5=4y, \\ x^2+4y^2=25. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x^2-5=4y^2, \\ y+5=2x. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 4x^2+25y^2=2, \\ 5y=2-2x. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^2+y^2+2y=9, \\ x-y=5. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x^2-4xy-5=0, \\ y-x+2=0. \end{cases}$

201.兩個二次方程式的聯立 兩個二次方程式聯立,解法并無一定,且有時須化歸一元三次或四次方程式求解.本書只論能化爲二次方程式的.

解得各未知數的值,須配合成組,務使能同時適合聯立各方程式.

【例一】 解方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=20, & (1) \\ \qquad xy=8. & (2) \end{cases}$

【解】 就(2)解出 x,得 $x=\dfrac{8}{y}$, (3)

而代入(1),有 $\dfrac{64}{y^2}+y^2=20$, 即 $y^4-20y^2+64=0.$ (4)

將(4)的右端分解因子, $(y^2-4)(y^2-16)=0$,

$\therefore\ y=+2,\ -2,\ +4,\ -4.$

代入(3)中,求得 x 的相當值,　$x=+4,\ -4,\ +2,\ -2.$

【驗算】　$\left.\begin{aligned}2^2+4^2=4+16=20,\\ 2\cdot4=8.\end{aligned}\right\}$　$\left.\begin{aligned}(-2)^2+(-4)^2=20,\\ (-2)(-4)=8.\end{aligned}\right\}$

同理可驗得他兩組根也合.

【例二】　解 $\begin{cases}2x^2+3y^2=21, & (1)\\ 3x^2-4y^2=23. & (2)\end{cases}$

【解】　設 $x^2=u,\ y^2=v$, 得

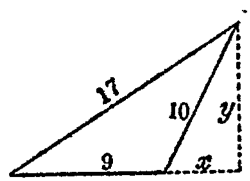
$$\begin{cases}2u+3v=21, & (3)\\ 3u-4v=23. & (4)\end{cases}$$

照聯立一次方程式解法,得

$$u=x^2=9,\ v=y^2=1.$$

$$\therefore\ x,\ y=3,\ 1;\ 3,\ -1;\ -3,\ 1;\ -3,\ -1.$$

202.應用問題　【例一】　一三角形三邊爲 9, 10, 17, 求長爲 9 一邊上的高.



【解】　如右圖, y 是長,爲 9 一邊上的高, x 是這邊延長線與高交點間一段的長.由圖得

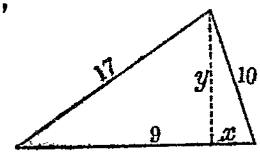
$$\begin{cases}x^2+y^2=100, & (1)\\ (x+9)^2+y^2=289. & (2)\end{cases}$$

(2)−(1),　$(x+9)^2-x^2=289-100=189,$

即　　$18x+81=189,$　解得　$x=6.$

$\therefore \quad y=\sqrt{100-6^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8.$

【注意】 如畫圖時欠準確,得右圖,則上二方程式爲



$$\begin{cases} x^2+y^2=100, & (1') \\ (x-9)^2+y^2=289. & (2') \end{cases}$$

同時解得 $x=-6$, y 仍爲 8.至 x 負值的解釋,參看本局初中幾何推廣畢氏定理下的註.

【例二】 有款若干,依單利算一年後,得本利和 795 元.如利率增高1.5%,而款額增50元,則得本利和 860 元,求本金及利率.

【解】 設 A 爲本金, $\frac{r}{100}$ 爲利率.按題意得

$$A\left(1+\frac{r}{100}\right)=795, \quad (A+50)\left(1+\frac{r}{100}+\frac{15}{1000}\right)=860.$$

即

$$\begin{cases} \frac{Ar}{100}+A=795, & (1) \\ \frac{Ar}{100}+1\frac{15}{1000}A+\frac{50r}{100}=809\frac{1}{4}. & (2) \end{cases}$$

(2)-(1), $\quad \frac{15}{1000}A+\frac{50}{100}r=14\frac{1}{4}.$ (3)

由(3)解出 A, $\quad A=\frac{1}{3}(2850-100r).$ (4)

代入(1),得 $\quad \frac{1}{3}(2850-100r)\left(1+\frac{r}{100}\right)=795,$

即 $\quad r^2+71.5r-465=(r-6)(r+77.5)=0.$ (5)

$\therefore \quad r=6$ (負根 $r=-77.5$ 不合實際意義).

再按(4)，　$A=\frac{1}{3}(2850-600)=\frac{1}{3}\times 2250=750.$

習題八五

解下列(1－9)各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ xy=-10. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^2-y^2=2, \\ x^2+2y^2=41. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y^2=8-x, \\ y^2=16-17x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x^2-3y^2=29, \\ x^2-y=15. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x^2-6y=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2=3-y^2-xy, \\ 2x^2=9+y^2+xy. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ x+y=3. \end{cases}$

【提示】　以下式兩端,各除上式兩端後再解.

8. $\begin{cases} y=7-x, \\ y^3=133-x^3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=13, \\ x^3+y^3=91. \end{cases}$

10. 已知一直角三角形斜邊長 125，面積爲 2574，求其兩腰.

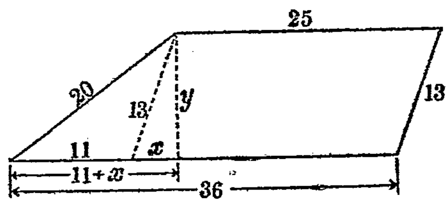
11. 某商人以10元購鏡子若干面後,打破 4 面,若每鏡售價較原價高 3 角,全數售去後,仍可賺 4 元 7 角,求鏡子面數.

12. 二汽車在二道路正交處相遇.如相背開駛,則半小時後相距35哩,如一向東一向南開駛,則半小時後相距25哩.

求二汽車每小時速度.

13. 求二數,使其和,積,及平方差皆相等.

14. 一梯形上下底長為25與36,兩腰長為13及20.求這梯形的高.



15. 一汽船逆流行24里,費時較順流多1小時半.如這船本身速度(即在靜水中速度)每小時增2里,則順流每小時可行18里.求船本身速度及水流速度.

16. 一人以1500元存入銀行,按某種利率以單利計算,經若干時後得本利和1875元.如時期延長一年,利率增1%,則可得本利和2040元.求利率及時期.

雜　題

下列(1－4)各方程式有一根或數根易於察得,求出此等根後再解:

1. $x^3+x^2-42x=0.$

2. $(x-3)^3-5(x-3)^2+14x-12=0.$

3. $x^4-x^3-8x^2+16x-8=0.$　**4.** $6x^3-23x^2+12x+20=0.$

解下列(5－13)各方程式:

5. $\left(x+\frac{4}{x}\right)^2-\left(x+\frac{4}{x}\right)-2=0.$　**6.** $x+\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{x}.$

7. $59x^2=15x^4+52.$　　**8.** $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0.$

9. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}-2=0$　　**10.** $1+\sqrt{x+2}=\sqrt{x}.$

11. $x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}-2=0.$　　**12.** $\frac{3}{x}-10=x^{-\frac{1}{2}}.$

13. $\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}=\frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{2}}.$

解下列(14－19)聯立方程式:

14. $\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ 3x-y=7. \end{cases}$　　**15.** $\begin{cases} y+10x-3xy=0. \\ y=x+2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ xy=35. \end{cases}$　　**17.** $\begin{cases} 5xy+y^2=43-x^2, \\ 5xy-y^2=25-x^2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^3+y^3=126, \\ x^2-xy+y^2=21. \end{cases}$　　**19.** $\begin{cases} x^3=y^3+19, \\ x=y+1. \end{cases}$

20. 一長方田面積爲1200方丈,對角線長50丈,求長闊.

21. 一水菓商販賣橘子,如每打售價減6分,則每元可多得10個,求每打價目.

22. 一直角三角形面積爲96平方寸,自兩腰和減去斜邊,所得的差爲8寸,求三邊.

23. 一梯形上下底爲45及90,兩腰長53與 x,而長爲 x 的一腰與兩底垂直.求 x 及梯形面積.

24. 一自由車向北開駛,另一自由車在其正東3里處,繼續向東前行.在 $1\frac{1}{3}$ 小時後,二車相離17里; $3\frac{1}{3}$ 小時後,相

離53里,求二車速度.

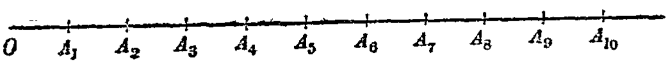
25. 某甲自A城赴B城,同時某乙自B城來A城,二人相遇後,甲更行$6\frac{2}{3}$小時抵B,乙更行15小時抵A,如知二城相距 300 里,求二人速度.

第十三章

級數

I. 等差級數

203.等差級數 【問題】 十個芋薯放在一直線上,每個相隔 5 丈,一人在這直線上隔第一芋薯 5 丈的 O 點起,跑



到 A_1, 把第一芋薯拾起,送回起點 O 放下,照這樣依次將各芋薯盡行移到起點 O,求下列三問:

(一)拾放各芋薯,所跑的路,各為幾丈?

(二)拾放相隣二芋薯,所跑的路相差多少?

(三)這人總共跑多少路?

【解】 (一)所跑的路依次各為10丈,20丈,30丈……100丈.

(二)拾放任意相隣二芋薯,所跑的路,相差均是10丈.

(三)這人所跑的路,總共丈數如下:

$$10+20+30+40+50+60+70+80+90+100. \qquad (A)$$

上列(A)式中,各項的數,有一特性.即每相隣二數的差均相等(而同為10).這樣的一組數,叫等差級數

各數叫項,第一數叫**首項**,最後一數叫**末項**.每一項減相隣前項的差,叫**公差**.所有各項的和,叫級數的**總和**.

【例一】 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 是一等差級數,共有 7 項.首項為 1,末項為 19,公差為 3,總和為 70.

【例二】 5, 3, 1, −1, −3, −5, −7, −9, −11 也是一等差級數,共有 9 項.首項為 5,末項為 −11,公差為 −2,總和是 −27.

以後都以 a 記首項, l 記末項, d 記公差, n 記項數, s 記總和.我們要研究的問題為:在 a, l, d, n, s 中已知其三,如何去求其餘二數.

204.末項求法　卽已知 a, d, n, 求 l.

按等差級數定義,卽知各項依次為

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\cdots\cdots$$

察各項中公差前係數比項數少 1,故如末項 l 為第 n 項,則有

$$l=a+(n-1)d. \tag{1}$$

按此知 a, d, n, l 四數中,任知其三,卽可得第四數.

【例一】 求等差級數 5, 8, 11,……中第 15 項.

【解】 在此 $a=5,\ d=3,\ n=15$, 代入公式(1),卽得

$$l=5+(15-1)3=5+42=47.$$

【例二】 已知一等差級數第三項為 7,第 8 項為 −18,求這級數首項至第八項.

【解】　本題中 a 及 d 都爲未知數,但由已知二種關係,可得下列聯立方程式,因以解得 a 和 d:

$$\begin{cases} 7=a+2d, \\ -18=a+7d. \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} d=-5, \\ a=17. \end{cases}$$

而所求的八項爲 $17, 12, 7, 2, -3, -8, -13, -18$.

習題八六

求下列(1－6)各等差級數指定的項:

1.　$2, 6, 10, \cdots\cdots$;第12項.　**2.**　$10, 7, 4, \cdots\cdots$;第9項.

3.　$2\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}, \cdots\cdots$;第14項.　**4.**　$4x, 9x, \cdots\cdots$;第11項.

5.　$6\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \cdots\cdots$;第10項.

6.　$x+2y, 2x+3y, 3x+4y, \cdots\cdots$;第8項.

7.　等差級數 $9, 13, 17, \cdots\cdots$ 中,第幾項是77?

8.　一等差級數第四項爲 -2, 第10項爲18,求這級數中首項到第六項.

9.　自飛機中擲下一物,第1秒落16.1呎,第2秒落48.3呎,第3秒落80.5呎.求第10秒時此物下落幾呎.

10.　一人以500元存入銀行,年利率6%,以單利計算,問各年終的本利和,是否成等差級數?

11.　在 $y=2\frac{1}{2}x$ 中,令 $x=1, 2, 3, 4, 5$, 所得各數是否成爲一等差級數?

12. 以一等差級數的末項做首項,依逆次序反看各項,是否也成一等差級數? 這二級數的公差有何關係?

205.等差中項 一等差級數中,不相隣二項間各項,叫做這二項的等差中項.

【例】 有等差級數 3, 6, 9, 12, 15,其中 6, 9, 12 是 3 和 15 二項的等差中項.

按上節公式(1),即可在已知二數間,插入任意幾個等差中項.

【例】 在 7 與 22 間,插入四個等差中項.

【解】 插入四項後,共得六項,即 $n=6$, 又 $a=7$, $l=22$.

$$\therefore\quad 22=7+(6-1)d, \qquad 即\ d=3.$$

故得所求四項爲 10, 13, 16, 19.

206.總和求法 一等差級數的總和,本可用普通加法求得,但手續嫌繁.今述一公式,可由 a, n, d, 求 s.

將一等差級數,依順逆兩種次序排列,分別求和,得

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l,$$

$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a.$$

再就兩端相加,便得

$$2s=(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)=n(a+l).$$

$$s=\frac{n}{2}(a+l), \tag{2}$$

又按(1) $l=a+(n-1)d$ 代入得

$$s=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]. \tag{3}$$

【註】 (1),(3)二公式,表示 a, d, n, l, s 五數間兩種基本關係.如知其中三數時,即可由聯立方程式,求他二數.

【例一】 求從 1 到 50 各正整數的總和.

【解】 在此 $a=1$, $l=50$, $n=50$, 代入公式(2),得

$$s=\frac{50}{2}(1+50)=25\times51=1275.$$

【例二】 一等差級數若有18項,總和為 360, 首項為 3, 求公差.

【解】 $a=3$, $n=18$, $s=360$, 求 d, 可用公式(3).

$$360=\frac{18}{2}[2\times3+(18-1)d]=9(6+17d),$$

$$\therefore\quad d=\frac{1}{153}(360-54)=\frac{1}{153}\times306=2.$$

習 題 八 七

求於下列(1−4)各組數間,插入指定項數的等差中項:

1. 49,……7; 4 中項. **2.** $5\frac{1}{2}$,……$27\frac{1}{2}$; 3 中項.

3. $\sqrt{5}$,……$3\sqrt{5}$; 4 中項. **4.** $2x^2$,……$-4x^2$; 2 中項.

5. 試證二已知數間如插入一等差中項,則這中項為二數和的 $\frac{1}{2}$(叫做二數的算術平均數).

求下列(6−11)各等差級數總和 s:

6. $a=3.25,\ l=16.75,\ n=9.$

7. $a=10\frac{1}{2},\ l=-7\frac{1}{2},\ n=15.$

8. 5, 1, −3,……;到 18 項.　　9. 4, $4\frac{2}{3}$,……;到 16 項.

10. $5a,\ 7a,$……;到 n 項.

11. $\sqrt{2},\ 2,\ 4-\sqrt{2},$……;到 15 項.

12. 有等差級數 30,26,22,……,問若干項的總和方可為 120? 試示此題可有兩答案.

13. 已知等差級數 −10, −4, 2,………,若干項的總和為 220, 求其末項.

14. 一人以房產抵押60000元,擬在12年內付清,每年年底須付本金 5000 元,和單利六釐(即 6%)所生的利金.問 12 年內這人總共付出多少元?

15. 一演講廳內有坐位20排,第一二兩排,每排各有坐位 30,第三四兩排各有坐位 32,……,但自第16排起,坐位不復增加,問這廳共有多少坐位?

II. 等比級數

207.等比級數 【問題】 某富翁有家產一萬萬元,其女三年後將出嫁,他問這女兒要多少粧奩,這女兒請求在月底代儲洋 1 分,以後每月加倍,即第二月 2 分,第三月 4 分等等,到嫁出時為止.他以為女兒的請求,眞是太低,便滿口應允

問

(一)每月應儲的款各爲若干?

(二)相隣二月應儲的款,相差幾倍?

(三)到出嫁時,一共儲多少錢?

【解】　(一)每月應存款的分數,依次爲

$$1,\ 2,\ 4=2^2,\ 8=2^3,\cdots\cdots 2^{34},\ 2^{35}. \qquad (A)$$

(二)每月所儲款與上一月所儲款的比爲 2.

(三)單就末次說,應付 $P=2^{35}$ 分.這數很大,因 $2^7=128>10^2$,故得

$$P=(2^7)^5\text{ 分}>(10^2)^5\text{ 分}=10^{10}\text{ 分}=10^8\text{ 元(即一萬萬元)}.$$

可見那富翁傾家都不夠付.

上列(A)式中各數,有一特性.即每相隣二數的比均等(而同爲 2).這樣的一組數,叫**等比級數**.各數叫**項**,第一數叫**首項**,最後一數叫**末項**.每一項與前項的比,叫**公比**.一切各項的和,叫等比級數的**總和**.

【例一】　$12,\ 6,\ 3,\ 1\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8}$ 是一等比級數,共有 6 項,首項爲 12,末項爲 $\frac{3}{8}$,公比爲 $\frac{1}{2}$,總和爲 $23\frac{5}{8}$.

【例二】　$-\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ 4,\ -8$ 是一等比級數,共有 5 項,首項爲 $-\frac{1}{2}$,末項爲 -8,公比爲 -2,總和爲 $-5\frac{1}{2}$.

以後以 r 記公比,a, l, n, s 意義仍如§203,所研

究問題的性質也完全相同.

208.末項求法　即已知 a, r, n, 求 l.

按等比級數定義,即知各項依次爲

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ \cdots\cdots.$$

察各項中 r 指數,比項數少 1.故如末項爲 n 項,則

$$l=ar^{n-1}. \tag{1}$$

按此知 a, r, n, l 四數中,已知三數,可定第四數.

【例一】　求級數 $10,\ -5,\ 2\frac{1}{2},\cdots\cdots$ 中第 8 項.

【解】　在此知 $a=10,\ r=-\frac{1}{2},\ n=8$, 代入公式(1),得

$$l=10\left(-\frac{1}{2}\right)^{8-1}=10\left(-\frac{1}{128}\right)=-\frac{5}{64}.$$

【例二】　已知一等比級數第三項爲 2,第七項爲 162, 求這級數首項至第七項.

【解】　本題中 a 及 r 都爲未知數,但由已知二種關係,可得下列聯立方程式,因以解得 a 和 r:

$$\begin{cases} ar^6 = =162, \\ ar^2=2. \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} r^4=81 \text{ 即 } r=\pm3, \\ a\ =\frac{2}{9}. \end{cases}$$

而所求的七項是 $\frac{2}{9},\quad \frac{2}{3},\ 2,\quad 6,\ 18,\quad 54,\ 162;$

$$\text{或 } \frac{2}{9},\ -\frac{2}{3},\ 2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162.$$

【註】　如用 $r^4=81$ 的虛根,尚有 $r=\pm3i$ 二值.但我們在此假設級數各項爲實數,所以棄去這兩虛根不用.

習題八八

求下列(1－6)各等比級數指定的項:

1. 27, 9, 3……;第 8 項. **2.** $\frac{16}{45}, \frac{8}{15}, \frac{4}{5}$,……;第 9 項.

3. $-16, 12, -9$,……;第 7 項.

4. $\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}$,……;第 12 項.

5. 0.3, 0.03,……;第 5 項. **6.** $1, x^2, x^4$,……;第 12 項.

7. 等比級數 32, 16, 8,……中,第幾項是$\frac{1}{8}$?

8. 一等比級數第三項是$\sqrt{2}$,第六項是$\sqrt{54}$,求這級數中首項到第五項.

9. 一人以 250 元存入銀行,利率 6%, 以複利計算,問各年的本利和是否成等比級數?

10. 在$y=\frac{1}{2}\cdot 3^x$中令 $x=1, 2, 3, 4$, 所得各數是否成一等比級數?

11. 以一等比級數的末項做首項,依逆次反看各項,是否仍成一等比級數? 這二級數的公比有何關係?

209.等比中項　一等比級數中,不相鄰二項間各項,叫這二項的**等比中項.**

【例】　有等比級數 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$,其中 9, 3, 1 是 27 和 $\frac{1}{3}$ 二項的等比中項.

按上節公式(1),即可在已知二數間,插入任意幾

個等比中項.

【例】　在16和81間,插入三個等比中項.

【解】　插入三項後,共得五項,卽 $n=5$。又 $a=16$, $l=81$.

$$\therefore\quad 81=16r^4,\qquad 卽\ r=\pm\frac{3}{2}.$$

故得所求三項爲24, 36, 54; 或 −24, 36, −54.

【註】　r 尙有二虛值,棄去不用(看上節註).

210.總和求法　今述一公式,可由 a, r, n 求 s.

因　$s=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}$.

故　$sr=\quad ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n$.

再就從下式減去上式,便得

$$sr-s=s(r-1)=ar^n-a=a(r^n-1).$$

$$\therefore\quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1},\ 或\ \frac{a(1-r^n)}{1-r}. \tag{2}$$

又按(1)式, $l=ar^{n-1}$ 代入得

$$s=\frac{rl-a}{r-1},\ 或\ s=\frac{a-rl}{1-r}. \tag{3}$$

【註】　看 §208 註.

【例一】　求等比級數 2, −6, 18,⋯⋯內五項的總和.

【解】　在此 $a=2$, $r=-3$, $n=5$, 代入公式(2),得

$$s=\frac{2-2(-3)^5}{1-(-3)}=\frac{2+486}{4}=122.$$

【例二】　一等比級數首項爲2,公比爲3,總和爲6560,求項數.

【解】　$a=2,\ r=3,\ s=6560$, 求 n, 仍用公式(2),

$$6560=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1.$$

$$\therefore\quad 3^n=6560+1=6561,\ 而\ n=8.$$

習題八九

求於下列(1－4)各組數間,插入指定項數的等比中項:

1.　$\frac{1}{4},\cdots\cdots,-32$; 6 中項.　**2.**　$-320,\cdots\cdots,-5$; 5 中項.

3.　$\sqrt{6},\cdots\cdots,4\sqrt{3}$; 2 中項.　**4.**　$2x^3,\cdots\cdots,750x$; 3 中項.

5.　試證二已知數間,如插入等比中項,則這中項必為那二數的比例中項.

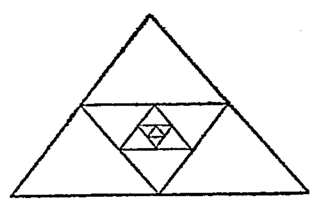
求下列(6－9)各等比級數的總和 s:

6.　$a=5,\ r=2,\ l=640.$　**7.**　$2\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{10},\cdots\cdots$;到 5 項.

8.　$3a^3,\ 6\sqrt{a^5},\cdots\cdots$;到 5 項.　**9.**　$a=48,\ l=\frac{3}{16},\ n=9.$

10.　三數成等差級數,和為21,依次加 1, 5, 25 後,便成等比級數.求這三數.

11.　有一三角形,周界長15寸,取各邊中點,聯成一小三角形,則周界為前者的$\frac{1}{2}$,照這法作五個三角形,而求其周界的總和.



12.　一瓶內裝酒精,用去$\frac{1}{4}$後,將水裝滿,照這樣裝到第五次時,酒精的成份為百分之幾?

211.複利與存款

(一)定期存款 按銀行規定,長期定期存款,多按複利計算,即存款滿第一期後所生利息,併入下期本金繼續生利的,叫複利.算法如下:

設 p 爲本金, r 爲一期的利率由是

第一期末的本利和 $= p(1+r)$,

第二期末的本利和 $= p(1+r)^2$,

第三期末的本利和 $= p(1+r)^3$,

....

....

照推至第 n 期末的本利和 $= p(1+r)^n$.

即爲複利公式,式中 n 表期數.至於一期的長短,如論年,或半年,或季,或月,均須事先訂明.

【例】 本金 100 元,年利 8 釐(即 8 %),半年爲一期,求二年六個月後的本利和.

【解】 年利 8 釐,半年一期的利率爲 4 釐,又二年六個月是 5 期.由複利公式,得

$$\begin{aligned}\text{滿期後的本利和} &= 100\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^5\text{元}\\ &= 100\times(1.04)^5\text{元}\\ &= 100\times1.2167\text{元}\\ &= 121.67\text{元}.\end{aligned}$$

【註】 $(1.04)^5 = 1.2167$ 由複利表中查出.本局的最新課程

標準初中算術附有這表.也可用本書後文§216的方法求出.

(二)分期存款

【例一】 按各銀行章程零存整取辦法,定期九年以上,以年利率10%,半年一期的複利計算,某甲於每年一六兩月初,存入50元,定期10年,問期滿時共得本利和多少?

【解】 第一次存款期滿可得 $50(1+0.05)^{20}$,

第二次存款期滿可得 $50(1+0.05)^{19}$,

…………………………………………

末次的存款期滿可得 $50(1+0.05)$,

故總和為 $50[1.05^{20}+1.05^{19}+\cdots\cdots+1.05]$

$$=\frac{50\times1.05\times(1.05^{20}-1)}{1.05-1}$$

$$=\frac{50\times1.05\times2.65330}{0.05}$$

$=2785.97$元.

【例二】 某人每年一六兩月陸續存一定款額於上海銀行,依上題方法計利,如欲12年後,得2000元,問此定額為若干?

【解】 設所求定額的數為 x,則按上題方法,得

$$2000=x[1.05^{24}+1.05^{23}+\cdots\cdots+1.05]$$

$$=x\times\frac{1.05\times(1.05^{24}-1)}{1.05-1}=\frac{1.05\times(3.2251-1)}{0.05}x=21\times2.2251x,$$

$$\therefore\quad x=\frac{2000}{21\times2.2251}=\frac{2000}{46.4271}=43.08\text{元}.$$

212.分期攤款 【例】 某甲欠債1000元,年利六釐(即

6%)，以每年一期的複利計算,如欲年終付本息一次,十年付清,每次付出的款要相等,求應付款額.

【解】　在10年年終,1000元的本利和是

$$1000\times(1+0.06)^{10}=1000\times1.79085=1790.85.$$

假設每次應付的款為 x,則付出各款的本利總和是

$$x[1.06^9+1.06^8+\cdots\cdots+1.06+1]$$

$$=x\times\frac{1.06^{10}-1}{1.06-1}=x\times\frac{1.79085-1}{1.06-1}=\frac{0.79085}{0.06}x.$$

這兩筆本利和應相等,即 $\frac{0.79085}{0.06}x=1790.85.$

$$\therefore\quad x=\frac{1790.85\times0.06}{0.79085}=135.87\text{ 元.}$$

欠款每年終的本金利息,可列為**分年還銀表**如下:

年份	欠款在年初的本金	年終按六釐息所生利金	年終攤還的款	除利息外付還本金額
1	1000.00元	60.00元	135.87元	75.87元
2	924.13	55.45	135.87	80.42
3	843.71	50.62	135.87	85.25
4	758.46	45.51	135.87	90.36
5	668.10	40.09	135.87	95.78
6	572.32	34.34	135.87	101.53
7	470.79	28.25	135.87	107.62
8	363.17	21.79	135.87	114.08
9	249.09	14.95	135.87	120.92
10	128.17	7.69	135.87	128.18
		共358.69元	共1358.70元	1000.01元

習題九〇

1. 某人每年年初存入銀行 100 元,依年利率 12% 每年一期的複利計算,問在第九年年底,可得若干元?

2. 如上題利率改依半年一期的複利計算,結果和上題相差若干元?

3. 某人於每年年底可餘70元存入銀行,設銀行年利率爲 9%, 依半年一期的複利計算,問在第八年年底,這人共餘若干元?

4. 同上題,但款分六月底和十二月底兩次存入,每次35元,問第八年年底,這人共餘若干元?

5. 同上題,但款分一月初和七月初兩次存入,每次35元,求第八年年底這人共餘元數.

6. 同上題,但一月初可存45元,七月初只存25元,結果和上題相差多少?

7. 一人年45歲,擬在60歲時退職休養,預計需養老金3000元,如銀行儲蓄,利率爲10%,半年複利一次,問每年年終應預儲多少元?

8. 同上題,但分六月底十二月底兩次儲存,每次應儲若干?

9. 一人欠債 500 元,年利 8%, 以每年一期的複利計

算,如欲每年終付本息一次,四年付清,每次所付的款相等,求應付元數,并作分年還銀表.

10. 同上題,但以每半年一期的複利計算,問每次應付多少?如改爲每半年付一次,問應付多少?試各作分年還銀表.

213.無窮項等比級數 【問題】 化無盡小數0.4545……爲分數.

【解】 $0.4545\cdots\cdots=0.45+0.0045+0.000045+\cdots\cdots$

$$=\frac{45}{100}+\frac{45}{100^2}+\frac{45}{100^3}+\cdots\cdots.$$

這等比級數中$a=0.45$, $r=\frac{1}{100}$, 而n的值大到無有限制.但當n愈大時,$\frac{1}{100^n}$的值愈小,n既大到無有限制,$\frac{1}{100^n}$就可小於任何數值.譬如取一個極小的數$\frac{1}{10^{100}}$,只要取n大於50時,$\frac{1}{100^n}$就小於$\frac{1}{10^{100}}$了.在

$$0.45\cdots\cdots=0.45\frac{1-\frac{1}{100^n}}{1-\frac{1}{100}}$$

中,略去這可以小到任何程度的數$\frac{1}{100^n}$,即得

$$0.45\cdots\cdots=\frac{0.45}{1-\frac{1}{100}}=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}.$$

由此例可見小數0.4545……的位數取得愈多,其值和$\frac{5}{11}$愈相近,我們便說0.4545……以$\frac{5}{11}$爲極限.注意

在通例,如公比 r 的數値大於 1,則 r^n 的值,隨 r 增大;等於 1,則 r^n 的數値爲 1,均不可略去,只在小於 1 時,r^n 的數値可小到任何程度,故得

定理　如 $|r|<1$, 則無窮項等比級數

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^n+\cdots\cdots$$

總和的極限爲 $\frac{a}{1-r}$.

證　$a+ar+\cdots\cdots+ar^n=a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

原設 $|r|<1$,故如 n 無限增大,則 r^{n+1} 可小至任何程度,略去之,便得總和的極限爲 $\frac{a}{1-r}$.

【註】　總和的極限,簡稱總和.

214.循環小數　小數可分二種:像 0.4, 0.0125 等數,位數是有限的,叫**有盡小數**;像 $\pi=3.14159\cdots\cdots$,位數是無窮盡的,叫**無盡小數**.位數雖無盡,但循環出現的,如上節問題中的 $0.4545\cdots\cdots$,叫**循環小數**.這循環部份叫做節,爲便於表明計,在一循環節的首尾二數字上各加一點爲記,如

$$0.4545\cdots\cdots=0.\dot{4}\dot{5},\ 0.1\dot{4}=0.1444\cdots\cdots,$$

$$0.2351351\cdots\cdots=0.2\dot{3}5\dot{1}.$$

循環小數分二種:小數點後,全部循環的,叫**純循環小數**,如 $0.\dot{4}\dot{5}$ 便是;自某一位起,方開始循環的,叫**雜循環小數**,如 $0.1\dot{4}$, $0.2\dot{3}5\dot{1}$ 等都是.凡循環小數如上節所述,

都可用無窮項等比級數來表,而可化成分數.

【例】 化 $0.10\dot{1}8\dot{5}$ 爲分數.

【解】 $0.10\dot{1}8\dot{5}=0.10+0.00185+0.00000185+\cdots\cdots$

$$=0.10+\frac{185}{10^5}+\frac{185}{10^5}\cdot\frac{1}{10^3}+\frac{185}{10^5}\cdot\frac{1}{10^6}+\cdots\cdots$$

$$=0.10+\frac{185}{10^5}\left[1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(10^3)^n}+\cdots\cdots\right]$$

$$=0.10+\frac{185}{10^5}\div\left(1-\frac{1}{10^3}\right)=\frac{1}{10}+\frac{185}{10^5}\times\frac{10^3}{999}$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{185}{999\times10^2}=\frac{999\times10+185}{99900}$$

$$=\frac{10(1000-1)+185}{99900}=\frac{10185-10}{99900}$$

$$=\frac{10175}{99900}=\frac{11}{108}.$$

習題九一

求下列(1－4)各無窮項等比級數總和(卽總和極限):

1. $4,\ 1,\ \frac{1}{4},\cdots\cdots$ **2.** $6,\ -2,\ \frac{2}{3},\cdots\cdots$

3. $8,\ 1.6,\ 0.32,\cdots\cdots$ **4.** $2,\ -\sqrt{2},\ 1,\cdots\cdots$

5. $\sqrt{3},\ 1,\frac{1}{3}\sqrt{3},\cdots\cdots$ **6.** $\frac{10}{9}x,\ \frac{2}{3}x,\ \frac{2}{5}x,\cdots\cdots$

化下列(7－10)各循環小數爲分數:

7. $0.\dot{2}\dot{6}$. **8.** $0.0\dot{2}\dot{6}$. **9.** $0.\dot{0}2\dot{6}$. **10.** $0.2\dot{3}5\dot{1}$.

11. 一個球從30丈的塔上下落,假設每次反躍的高爲下落距離的 $\frac{2}{5}$,而繼續不已,求這球所經總距離的極限.

III. 二項定理

215.二項展式 求一式各次乘冪所得的多項式叫**展式**.二項式 n 次乘冪 $(a+b)^n$ 的展式,有一種簡便的方法可求.

由乘法可得

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$

這些展式都是 $(a+b)^n$ 的特例,由此可看出當 n 爲正整數時,有下列的規則:

(一)項數 展式中共 $n+1$ 項.

(二)指數 第一項中 a 的指數爲 n, 以後各項,逐漸減 1, 到最末項中不含 a, 也可說 a 的指數是零(何故?). 至於 b 的指數,則在第一項中爲 0, 以後逐漸加 1, 至末項中爲 n.

(三)係數 (1)第一項係數爲 1.

(2)第二項係數爲 n.

(3)任何項的係數,爲前一項係數,與 a 的指數相乘後,再用 b 的指數加 1 去除,所得的商.

【註】　這理的證明,見本局最新課程標準高中代數學.

【例】　$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

$$\frac{6\cdot5}{1+1}=15,\ \frac{15\cdot4}{2+1}=20,\ \frac{20\cdot3}{3+1}=15,\ \frac{15\cdot2}{4+1}=6,\ \frac{6\cdot1}{5+1}=1.$$

【注意】　因$(b+a)^n=(a+b)^n$,可知$a^{n-k}b^k$與$b^{n-k}a^k$的係數必定相同.換句話說,即距首末二項等遠的項,係數都相等.所以只須求到中間一項後,將已得各係數,依逆序寫去,便得其餘各項係數.

216.二項定理　上述法則,叫**二項定理**,寫出算式來,便得

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots+nab^{n-1}+b^n.$$

這公式對於三角學(如三角函數造表法),其他高等數學,以及應用數學(如統計學),都很有用,初學不可不知.

【例一】　求$(x+2)^6$.

【解】　$$(x+2)^6=x^6+6\cdot x^5\cdot2+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}x^4\cdot2^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}x^3\cdot2^3+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^2\cdot2^4+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x\cdot2^5+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot2^6$$
$$=x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+64.$$

【例二】　求1.06^5的值到五位小數.

【解】　$1.06^5=(1+0.06)^5$

$=1+5\times0.06+10\times0.06^2+10\times0.06^3+5\times0.06^4+0.06^5$

$=1+0.30+0.036+0.00216+0.0000648+0.0000007776$

$=1.33823.$

如只須求到第四位小數,則末項可略去.

【註】 應用此法,可代複利表.

習題九二

求展下列(1−3)各式:

1. $(2x+3y)^5$. **2.** $\left(3n^2+\frac{2}{n}\right)^5$. **3.** $\left(\frac{s-5}{3}\right)^4$.

求展下列(4−6)各展式至第四項:

4. $(2x+5)^9$. **5.** $\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)^{15}$. **6.** $\left(2y^2-\frac{1}{2}\right)^{10}$.

求下列(7−12)的值到第五位小數(和複利表比較):

7. 1.06^6. **8.** 1.08^7. **9.** 1.05^9.

10. 1.10^5. **11.** 1.09^8. **12.** 1.12^6.

13. $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdots r}$是二項展式中第幾項的係數?

用上題結果,求下列兩個二項展式中指定的項:

14. $\left(\frac{x}{2}+2\right)^{10}$,第 4 項. **15.** $(1+0.04)^{10}$,第 6 項

16. 求$(x-2y)^8$展式內中間一項.

【提示】 展式共 9 項,中間一項即第五項.

17. 求$\left(\frac{x}{2}+y\right)^7$展式內居中的兩項.

18. 求$(n^2-1)^{14}$中含n^{10}一項的係數.

雜 題

求下列(1－4)各級數的和:

1. $0.5, 2.5, 12.5, \cdots\cdots, 937.5.$　**2.** $9, 3\sqrt{3}, 3, \cdots\cdots$到9項

3. $3m-n,\ n,\ 3(n-m), \cdots\cdots, 3(1-k)m+(2k-1)n.$

4. $2p,\ 4p^{\frac{3}{2}}, \cdots\cdots, 2\cdot 4^k p^k\sqrt{p}.$

求於下列(5－7)兩數中,插入3等差中項,3等比中項:

5. $4,\ 324.$　**6.** $8,\ 12\frac{1}{2}.$　**7.** $-\frac{1}{3},\ \frac{81}{32}.$

8. 一等比級數,總和為$78\frac{3}{4}$,首項為40,末項為$1\frac{1}{4}$,求各項.

9. 有人需在10年內償清欠款,每年除付息金外,還本$\frac{1}{10}$,今知利率為6%,第三次付還592元,第六次付還520元,求本金,及歷年所付款額.

求下列(10－13)各題空格中各數:

	本　金	利　率	時　期	本利和	附　註
10.	2000	8%	八　年	…………	半年一期
11.	…………	7%	十　年	491.79	每年一期
12.	330	12%	…………	1510.29	半年一期
13.	P	9%	…………	$3P$	每年一期

14. 一人欠債2500元,利率7%,依半年一期的複利計

算,原言定分八年攤還,每年六月底十二月底各還一次,所還款額相等,問每次應還若干?

15. 上題中至第四年六月時,欠債者欲一次清償,問須還款若干?

16. 設一等比級數奇數項的總和為 s,將公比改號後的總和為 s',求證 $s:s'=1+r:1-r$.

求化下列(17−19)各循環小數為分數:

17. $0.0\dot{4}0\dot{7}$.　　**18.** $0.83\dot{8}33\dot{8}$.　　**19.** $8.3\dot{8}3\dot{8}$.

20. 求 $\left(x^3-\dfrac{2}{x}\right)^8$ 中 x^{12}, x^8 等項的係數.

求下列(21−23)各值到第四位小數:

21. 1.075^4.　　**22.** 1.025^8.　　**23.** 1.033^9.

總習題

1. 如何方可使一分式數值為正?為負?

試求 x 值,使下列各分式值為正. 如何可使其為負?

2. $\frac{x}{x-1}$.　　3. $\frac{x-2}{x+3}$.　　4. $\frac{2x+1}{3x-4}$.

5. 如 x 為正數,試證 $\frac{x}{x+3}<\frac{x+4}{x+7}$.

【提示】 以正數乘不等式兩端其向不改(§74公理一).

6. 如 a 為正數,則 $\frac{7+2a}{7+3a}$ 與 $\frac{7+4a}{7+5a}$ 二分式值孰大?

7. 分式 $\frac{x+y}{x-y}$ 的分子分母各減 y,試證如 $y<x<2y$ 時,其值必增加.

8. 將一分數的分子分母,同加一正數,討論這分數值增加或減少的條件. 如減一正數,應如何討論?

9. 比較 3:4, 7:8, 13:16 各比值的大小.

10. 如 $7x-4y:3x+y$ 的比值為 $\frac{5}{13}$,求 $x:y$.

11. 如 $x:y$ 的比值為 $\frac{5}{7}$,求 $x+y:y-x$.

12. 如 $b:a$ 的比值為 0.4,求 $2a-3b:3b-a$.

13. 如 $a:b$ 與 $x:y$ 的比值各為 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{5}{7}$,求

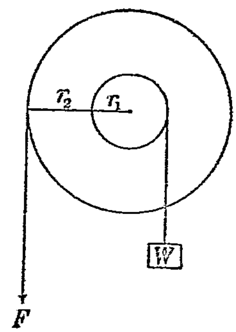
$$3ax-by:4by-7ax.$$

14. 如 $p:q$ 一比的前後項各減 x,所得新比值,為原比值的平方,試證: $\frac{1}{x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

15. 如 $a:b=c:d=e:f$,試證這比值等於

$$\sqrt[3]{2a^2c+3c^3e+4e^2c}:\sqrt[3]{2b^2d+3d^3e+4f^2d}.$$

16. 下圖為一輪及其軸,在物理中證明,如輪的半徑為 r_2,軸的半徑為 r_1,施於輪上的力 F 與懸軸上的重量 w 平衡時,則 $F:w=r_1:r_2$.



今 $r_1=3$ 吋, $r_2=1$ 呎,問起一重200磅的重量,需用力多少?

17. 如 $a:b=b:c=c:d$, 試證 $b+c$ 為 $a+b$ 和 $c+d$ 的比例中項.

18. 如 $a+b:b+c=c+d:d+a$, 試證必 $a=c$ 或 $a+b+c+d=0$.

19. 如 $a:b=x;y$, 試證:

(1) $al+xm:bl+ym=ap+xq:bp+yq$.

(2) $pa^2+qax+rx^2:pb^2+qby+ry^2=a^2+x^2:b^2+y^2$.

20. 試解 $x-12:y+3=2x-19:5y-13=5:14$.

21. 求下列各式平方與立方:

(一) x^2+1.　　(二) $\dfrac{ax-2by}{bx+2ay}$.　　(三) $2x^2-x+3$.

求下列各式(22－24)的平方根:

22. $\dfrac{a^4}{64}+\dfrac{a^3}{8}-a+1$.　　**23.** $x^4-2x+\dfrac{1}{9}+\dfrac{29}{3}x^2-6x^3$.

24. $\dfrac{x^4}{4}+4x^2+\dfrac{ax^2}{3}+\dfrac{a^2}{9}-2x^3-\dfrac{4ax}{3}$.

25. 求$\frac{x^3}{27}-\frac{x^2}{3}+2x-7+\frac{18}{x}-\frac{27}{x^2}+\frac{27}{x^3}$的立方根.

26. 求下列各式的值:

(一) $2^{-2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}-16^{-1}$.

(二) $32^{\frac{3}{5}}-81^{\frac{3}{4}}+5^0+100^{\frac{3}{2}}-27^{\frac{2}{3}}$.

(三) $(0.04)^{\frac{3}{2}}+(0.008)^{\frac{1}{3}}-(0.027)^{\frac{2}{3}}+(70)^0$.

(四) $(0.09)^{0.5}+243^{0.2}-\left(\frac{1}{64}\right)^{0.3}$.

27. 下列各數中,孰為不盡根? 無理數?

$\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3^2+4^2}$, $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{3\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

28. 化簡下列各根式:

(一) $\sqrt{\frac{2a^2-a^4}{50x^3}}$.　(二) $\sqrt[4]{\frac{1}{x+1}-\frac{3x}{(x+1)^3}}$.

(三) $\sqrt{\frac{y^4}{x^2}-\frac{2y^5}{x}+y^6}$.　(四) $\sqrt[3]{\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3}-\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}-64}$.

29. 化簡下列各式:

(一) $3\sqrt{4}+\sqrt[6]{1024}$.　(二) $5\sqrt[3]{-40}+2\sqrt[3]{5}-6\sqrt[3]{135}$.

(三) $3\sqrt[3]{81}-6\sqrt[3]{-24}+10\sqrt[3]{-375}-8\sqrt[3]{-192}$.

(四) $(\sqrt{5}+6)(\sqrt{3}-2)$. (五) $(\sqrt{10}-2)\div(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

(六) $(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{9x^2-9y^2}+\frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{25xy^2-25y^3}{x+y}}$

30. 化簡下列各式:

(一) $\sqrt[3]{a^2b^2}(\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b})$. (二) $(\sqrt{1+bc}-\sqrt{1-bc})^2$.

(三) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\sqrt{xyz}$. (四) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}$.

(五) $(a-\sqrt{b})\div(a-2\sqrt{b})$. (六) $(\sqrt[3]{a}+1)\div(\sqrt[3]{a}-1)$.

【提示】 $\sqrt[3]{a}-1$的有理化因子是$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1$.

31. 試由a, b二者的大小,去斷$a\sqrt{b}$與$b\sqrt{a}$的大小.

32. 不必求差近値,而證$2\sqrt{2}-\sqrt{7}$爲正.

【提示】 用其有理化因子$2\sqrt{2}+\sqrt{7}$(爲正數)相乘.

解下列(33－47)各方程式:

33. $\frac{3x^2}{5}=15(x-2)(x+2)$.

34. $3(x-3)^2-11(x-3)-4=0$. 35. $\frac{2x^2}{3}-x\sqrt{2}=1$.

36. $(7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x=2$.

37. $x^2-8ax+16a^2-9b^2=0$.

38. $9x^2-2k^2+2km+3kx+3mx=0$.

39. $(a^2+b^2)(x^2+1)+2(a^2-b^2)x=2ab(x^2-1)$.

40. $\frac{7}{2x-1}+\frac{6}{x+2}=2$. 41. $\frac{a^2b}{x^2}+\left(1+\frac{b}{a}\right)a=2b+\frac{a^2}{x}$.

42. $8x^3-6x^2-5x+3=0$.

43. $5x^2(a-x)=(a^2-x^2)(x+3a)$.

44. $x+5-\sqrt{45-x^2}=8$.

45. $\sqrt{3(x+2)}+\sqrt{x+4}=\sqrt{7x+1}$.

46. $\sqrt[4]{x}=\sqrt{x}-2$. 47. $\frac{(x-4)^{\frac{1}{2}}}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}{(x-4)^{\frac{1}{2}}}=2$.

解下列(48－53)各聯立方程式:

48. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y=9-x. \end{cases}$

49. $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x^2+3y^2=27-xy, \\ 2x^2-3y^2=xy. \end{cases}$

51. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=13, \\ x^3+y^3=91. \end{cases}$

52. $\begin{cases} x^2+xy=12, \\ xy-y^2=2. \end{cases}$

53. $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ 2x^2+xy-15=0. \end{cases}$

【提示】 消去常數項,分成兩個一次因子,再各以因子和任一原式聯立求解.

試作下列(54－56)各二次函數的圖:

54. $y=x^2+4x-3$.

55. $y=3x^2-8x+4$.

56. $y=-2x^2+11x-12$.

57. 設書二次方程式標準式爲$ax^2+2bx+c=0$,求兩根的公式.

58. 設書二次方程式標準式爲 $x^2+px+q=0$, 求兩根與係數的關係.

59. 設x_1, x_2爲$ax^2+bx+c=0$的兩根,求

(一) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$. (二) $x_1^2+x_2^2$.

60. 設$ax^2+bx+c=0$二根的比爲3:1, 求a, b, c間關係.

61. $x^2+(4m-2)x+3m^2+5=0$ 的一根,爲他根的二倍,求m,并定此二根.

62. 設 $x^2-9x+a=0$ 兩根的立方和為 0, 求 a.

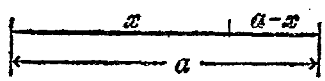
63. 設 $\frac{a}{x+a-m}+\frac{b}{x+b-m}=1$ 的兩根同值異號,求 m.

64. 有三數為相續整數,前二數的積,比第三數的平方二倍少 86,求這三數.

65. 我們能否求出三個相續數,使最大一數的平方等於他二數的平方和? 三個相續奇數呢? 偶數呢?

66. 有雞蛋 960 個裝箱運往他處,每箱所裝蛋數應相等.但購到箱數較預定少 40 個,幸喜箱子還大,每箱可多裝 40 個,恰好裝完;求擬購箱子個數.

67. 將一線段 a, 分為兩段.使其較長的一段 x, 合於比例



$$a:x=x:a-x,$$

求以 a 表 x.

68. 有兩飛機,一向東飛,速度為每小時 40 哩,一向南飛,速度為每小時 30 哩.較速一機在正午時,經過二路線的交點,他一機在半小時後,方過這一點,問何時兩機相距 136 哩?

69. 一圓直徑為 13 寸,其一內接長方形周界為 34 寸,求這長方形的長與闊.

70. 一圓直徑為 10 寸,其一內接長方形面積為 40 方寸,求這長方形的長與闊.

71. 如一汽車的速度,每小時增 5 里,則行某路程,可省

16分鐘.若速度每小時減 5 里,則反多需24分鐘.求路程長及汽車原來的速度.

72. 有二位數,其各位數字平方和,比這數大 9,又各位數字乘積的兩倍,等於原數,求這數.

73. 已知聲的速度爲每秒1100呎,今投石井中,經 5.94 秒後,聽見聲音,按物理學知自由墜體距離 s 與時間 t 關係爲 $s=\frac{1}{2}gt^2$,而 $g=32$,求井深.

74. 犬走 4 步的時間,兔可走 5 步,但犬的 2 步,可抵兔的 3 步.設兔已行 100 步,犬在其後追逐,問須走幾步,方能追及?

75. 甲自 A 城往 B 城,同時乙自 B 城來 A 城.二人相遇時,甲已較乙多走40哩.相遇後,甲再走 2 小時到 B 城,乙再走 8 小時到 A 城.求兩人行路速度,及二城距離.

76. 一水池有冷熱水管各一,兩管齊開,$22\frac{1}{2}$分鐘可滿.如單開熱水管,則較單開冷水管需多耗時24分鐘,而可使水池裝滿,求單開各管使池水裝滿所需時數.

77. 甲乙二農夫共有牛30頭,但以不同的價售出,而得款相等.如甲依乙的售價,則可得 320 元,乙依甲的售價,則可得 245 元,求原售價.

78. 一等差級數有三項,其和爲39,其積爲2184,求諸數.

79. 一等差級數有五項,其和爲40,首末兩項的積爲400.

求諸數.

80. 求分 183 為三部,成一等比級數,且使其首末兩項的和為第二項的 $2\frac{1}{10}$ 倍.

81. 一等比級數有 n 項,而 n 為奇數,求證各項連乘積為中間一項的 n 次乘冪.

82. 有一無窮項等比級數,其首兩項的和為 1,又每項均為其後各項總和極限的兩倍,求這級數.

83. 求無窮項等比級數 $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$, 1, $\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$.........總和的極限.

84. 化循環小數 $0.0\dot{6}06\dot{7}$, $0.\dot{0}606\dot{7}$, $0.060\dot{6}\dot{7}$ 等為分數.

85. 有機器一件售價30000元,須即付現款,而購者欲分三次付清,第一次即付,再每隔半年支付一次.如三次所付的款相等,而利率為年利 7%, 依單利計算,問每次應付多少?

86. 有房屋一所,售價可分三種辦法支付:(一)即付 3000 元,以後每年付 1000 元,共付四年.(二)即付 3500 元,以後每年付 700 元,共付五年.(三)即付 2500 元,第一年底付 2000 元,第二年底再付 2500 元.如年利率為 7%, 依半年一期的複利計算,問何種付款法,較為合算?

87. 某人購一地產,即付現金 3000 元,以後每半年付款 500 元,經十年清訖.設年利率為 7%, 以半年一期的複利計算,如欲將地價一次付現清訖,問應付多少元?

88. 某甲欠債 700 元,年利率 9%, 以每年一期的複利計算,應在四年後本利一併付清.如存款年利率為 7%, 以每半年一期的複利計算,問他每年底應儲存款若干(每次款數相等)方能到期償還這債?

89. 按銀行章程,定期儲蓄在三年以上,依年利率 8% 的複利計算,每半年為一期,但在每半年間所存入的款,則只依單利計算.某甲每月儲款10元於銀行,問五年後可得款若干?

90. 同上題,如一人欲於六年後,儲蓄 2000 元,問每月應存款若干?

中西名詞對照表

(一) 中西對照

(二) 西中對照

民國三十五年十一月發行
民國三十六年六月再版

初等代數（全二冊）

◎下冊定價國幣一元
（郵運匯費另加）

編　者　胡術五
　　　　李修睦
校　者　余介石
發行人　中華書局股份有限公司代表　顧樹森
印刷者　上海澳門路八十九號　中華書局永寧印刷廠
發行處　各埠中華書局