洋算例題積分篇

洋算例題續第四篇巻之一

陸軍大尉福田　半編輯

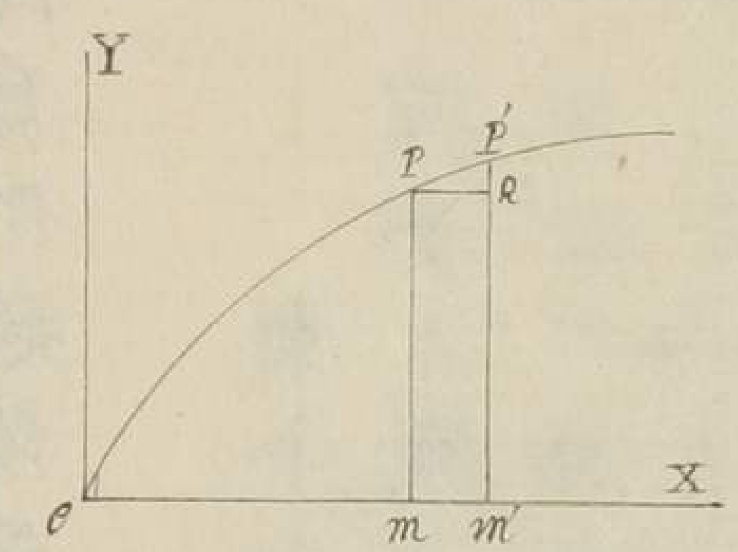
積分術總論

○積分ハ微分の還原にして其法の要ハ微分の凡百如の函數を識別するにあり假令ハx^2の式ありて$2xdx$を求むるハ微分法なり$2xdx$式を還原してx^2を求むるハ積分法なり

○積分ニ二種あり一ハ式より微分を求め而して相交し元式の關係を求むる法一ハ微分式ありて直ニ元式を求むる法是なり

○凡ミ微分ハ函數を直ニ微分せるを得る積分ハ微分式を積分せる者にして函數を直ニ積分せ

ゟけと能さるなり假令左圖の如き０Ｐなる曲線に於て縱横軸を(1)とし此曲線の式を(2)とせ又此曲線を抛物線とすれは其式は(3)なり今横線を増しm'に至らしむる時は(4)なり爰に於て圖を閲し(5)を得る式中iなる号は積の符号なり相加して(6)となる之に(1)(4)を容れ而してmm'は微數なる



(1) $Om = x$ $\quad$ $Pm = y$

(2) $y = f(x)$ (3) $y^2 = 4ax$

(4) $mm' = \partial x$ $\quad$ $P'Q = \partial y$

$$(5)\begin{cases} i.Pmm'Q = Pm \times mm' \\ i\triangle PP'Q = \frac{1}{2}PQ \times P'Q \end{cases}$$

(6) $i\,Pmm'P' = Pm \times mm' + \frac{1}{2}PQ \times P'Q$

(7) $\partial i = y\partial x + \frac{1}{2}\partial x\partial y$

(8) $\partial i = y\partial x$

(9) $\partial i = \partial x\sqrt{px}$

か故に(6)式の左項を∂iとすれは即ち(7)となる此式中∂iを一等の微數とせる時∂xに∂yを乗せしむる者は二等の微數なるか故に之を去る依て(8)を得る是に(3)を容れ(9)を得る今此式は原式なくして圖上にて積の微分を得しむるなり即ち此(9)式を知て其積を求むるを積分と云

或式を微分せる時定數は零なり故に微分式ありて元式を求るに定數何程属せる哉を知しき又変數にて隨意の數を命し得へし故に微分式ありて是より積分を求むるを不定積分と云ふ又定數を探知し全く元式を得るを定積分と云凡そ微分式ありて積分し元式を得ることは多く不

定積分なるは希なり然れとも消去せし定数を求め敢て定積分を知るに及さる事し如何となれは不定積分を知れは夫より定積分は容易に探知し得れはなり

○第一微分式在て積分を求むる所第一積分と云若し第二微分式あり其積分を求めんと欲せは一度積分し尚之を再ひ積分すへし之を第二積分と云第三微分式に於ては第三の積分必要す是を惣括して畳積分と云ふ

○積分は甚繁雑なる者にして自変数二个を有する式にては出来得ると雖とも自変数三個以上に至ては出来難きものなり

○不定の積分を示すに $\int$ なる符号を用ゆへし

○積分に三法あり

第一は開平号を有せさる式或は開平号を有せさる式を積分する法なり

第二開平根中変数を有する式を積分する法なり此式にありては積分し得さるもの多し

第三越式微分式を積分する法なり

○前に云ふ如く微分の生する処函数を得る所積分とす然る時は積分に或は常数の附有する有り或は附有せさるありて一定せす故に式中恒に常数を附し其常数を命して c とす c は或は同数なり或は 0 とす題に依て攷へ知るへし

微係数ハ函数と自変数と二変の比例を顕れ故ニ微分あるときハ積分を求むべし已ニ平変数あり又他数と同変の比例ある時ハ平変数又ハ設数とニ準し他数の同数を求むべし

假令 $\partial v = 3x^2\partial x$ あり此積分を求むる如きハ已ニ平変数 x なり又他数 v と同変の比例ありて v の同数を求むる時ハ $\int 3x^2\partial x = x^3$ 故ニ $v = x^3 + c$ 則チ x なるもし v ハ c ニ準し v の同数を得べき爲なり

例 平変数 x なり其変と他数変と二率の比例ハ一と ax^2 の比例の如し $a=9$ $x=10$ とし他数の同数を求むるときハ如何

他数の同数を命して v とし比例ニよりて則ち

$$\partial x : \partial v :: 1 : ax^2$$

故ニ

$$\partial v = ax^2\partial x$$

$$\int\partial v = \int ax^2\partial x$$

$$\int\partial v = a\int x^2\partial x$$

即ち

$$v = \frac{ax^3}{3}$$

求むる処の数ハ $v = 3000$ え

積分術

○微分第一の二則によれハ変数常数相乗の微分ハ変数の微分に常数を乗したる者に等し故に凡そ微分常数相乗の積分ハ微分の積分に常数を乗したるに等しかるべし

ax の微分ハ adx なり故に $\int adx = ax = a\int dx$ なり依て次の如し

第一則凡そ微分の積分を求むるに常数あれハ之を積分の号の外に列ぬべし

$$\int abx^2dx = ab\int x^2dx$$

微分第一の三則によれハ多項函數の微分を諸項微分の和式と較に等し故に多項微分式の積分と諸微分の積分の和式と較に等し

假令

$$a^2x^2-2ax^3-x$$

の微分

$$2ax\partial x-6ax^2\partial x-\partial x$$

なり故に

$$\int(2a^2x\partial x-6ax^2\partial x-\partial x)$$

と

$$a^2x^2-2ax^3-x$$

なり故に次のごとし

第二則凡そ若干微分の和或と較の積分と各微分の積分の和或と較に等し

微分第一の一則に依れバ常數項變數項の間に離れたる正員を論ぜし微分を求むるに之を用てこれ $x+c$ の微分と x の微分に異なし故に同一微分の積分變數相等しと雖とも常數と相等しからず故に次のごとし

$$\int\partial x=x+c$$

第三則凡そ微分の積分式を得たる後恒に一常數を加ふ可し

凡そ

$$x^{m+1}$$

の微分と

$$\partial y=(m+1)x^m\partial x$$

なり又

$$y=\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

の微分と

$$\partial y=x^m\partial x$$

なり

故に

$$\int x^{m}\partial x=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c$$

なり依て次の如し

第四則 凡そ一項微分 $x^{m}\partial x$ の類の積分を求むるには原式を置き指数に一を加へ實とし新指数に変数の微分を乗じ法として以て実を除するに等し

設題

今自変数 x なり其変と他数の変との比を一と $\frac{a}{b}x^{2}$ の如しとす他数の式如何

今 $\partial y=\frac{x^{2}\partial x}{a}$ なり其積分を問ふ

今 $\partial y=x^{-3}\partial x$ あり問ふ事前の如し

今 $\partial y=\frac{\partial x}{\sqrt{x}}$ あり問ふ事前の如し

今 $\partial y=\frac{\partial x}{x^{3}}$ あり問ふ事前の如し

今 $\partial y=ax^{2}\partial x+\frac{\partial x}{x^{2}}$ あり問ふ事前の如し

今 $\partial u=ax^{\frac{m}{n}}\partial x$ あり問ふ事前の如し

○本巻第四則に準し $m=-1$ とすれは

$$\int x^{-1}\partial x=\frac{x^{-1+1}}{-1+1}$$

$$=\frac{x^{0}}{0}$$

$$=\frac{1}{0}$$

$$=\infty$$

となり故に用ゆ可らされ今微分第三巻第二則に拠れは $x^{-1}\partial x=\frac{\partial x}{x}$ なり此式は x の對数微分なり故に $\int x^{-1}\partial x=\int\frac{\partial x}{x}=\log x+c$ 又 $\int\frac{a\partial x}{x}=a\log x+c$ なり

依て次の如し

第五則凡そ分数の分母子の微分に常数を乗せし者あれハ其積分ハ分母の訥氏對数に常数を乗せる者に等し

設題

今$\partial y=\frac{\partial x}{a+x}$あり其積分を問ふ

今$\partial y=\frac{abc\,\partial x}{a+bx}$あり問ふ事前の如し

今$\partial y=\frac{a\partial x}{bx}$あり問ふ事前の如し

今$\partial y=\frac{3d^{4}\partial x}{x}$あり問ふ事前の如し

第六則凡そ多項式$(a+bx+cx^2+\cdots\cdots)^n\partial x$の類ハ正整数なる者の積分を求むるにハ之を括弧中の数をn次自乗し得る所の各項に∂xを乗し各其積分を求め之を并せし者に等し本巻第二則を観れハ其理自ら明かなるん

設題

今$\partial y=(a+bx)^2\partial x$あり積分を問ふ

今$\partial y=(x+7x^2)^2\partial x$あり問ふ事前の如し

今$\partial y=(a+3x^2)^3\partial x$あり問ふ事前の如し

○微分第一巻に掲れる凡そ多項式何乗に抱ちかれハ其微分を求むる法ハ指数より一級減し原指

數を以て係數となし式の微分を以て之に乘ずるに等し

假令ば $y=(ax+x^2)^3$ の微分は $dy=3(ax+x^2)^2(a+2x)dx$ を得べし故に次則の如し

第七則 凡そ多項式何乘に抱きしは本微分を乘ずる者より積分を求むる法は原式を置き括弧の指數に一を加へ實とし對指數に式の微分を乘し法とし以て實を除するに等し

設題

十五 今 $dy=(a+3x^2)^2 6x\,dx$ なる微分式あり其積分を問ふ如何

十六 今 $dy=(x+ax)^{\frac{1}{2}}(1+a)dx$ なる微分式あり問ふ亦是前の如し

十七 今 $dy=(2x^2-1)6x^2dx$ なる微分式あり問ふ亦是前の如し

十八 今 $dy=\frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ なる微分式あり問ふ亦是前の如し

十九 今 $dy=(ax^2+bx^3)^2(2ax+3bx^2)dx$ なる微分式あり問ふ亦是前の如し

二十 今 $dy=(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}(a+2bx)dx$ なる微分式あり問ふまた前の如し

○凡そ合名の微分式

$$\partial u=(a+bx^n)^m x^{n-1}\partial x$$

の類括弧外変数の指数括弧内変数の指数より一个少なれハ上則の例を推して積分を求むへし

假令

$$\partial u=(a+bx^n)^m x^{n-1}\partial x$$

$$z=a+bx^n$$

$$\partial z=bnx^{n-1}\partial x$$

$$x^{n-1}\partial x=\frac{\partial z}{bn}$$

故に

$$\partial u=z^m\frac{\partial z}{bn}$$

$$u=\frac{z^{m+1}}{(m+1)bn}+C$$

$$u=\frac{(a+bx^n)^{m+1}}{(m+1)bn}+C$$

なり

故に次の如し

第八則凡そ合名微分にして括弧外変数の指数括弧内変数の指数より一個少き者なれハ其積分を求むる法ハ合名数の指数に一を加へ実とし新指数に括弧内変数の指数及ひ係数を乗し法とし以て実を除きて得へし

假令

$$\partial u=(a+3x^2)^3x\partial x$$

$$\int\partial u=\int(a+3x^2)^3x\partial x$$

$$u=\frac{(a+3x^2)^4}{4\times3\times2}+C$$

故に

$$u=\frac{(a+3x^2)^4}{24}+C$$

なり

設題

今 $\partial u=(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}mx\partial x$ なる微分式あり其積分を問ふ如何

廿二 今 $\partial u=(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}bx\partial x$ なる微分式あり其積分を問

廿三 今 $\partial u=\frac{x\partial x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ なる式あり問ふ亦た前の如し

廿四 今 $\partial u=(a^2+x^n)anx^{n-1}\partial x$ なる式あり問ふ亦た前の如し

廿五 今 x を函とする所の式あり毎秒中 x 増大一寸其変率の比例を爲す $\frac{1+x}{\sqrt{(2x+x^2)}}$ なり問ふ其原式如何

洋算例題續第四編巻之一終

洋算例題續第四編巻之二

陸軍大尉福田半編輯

級數積分法

○ $X\partial x$ の類 X を x の函數なり然等の式より積分を求むるに x の級數を詳かにし而して其級數若し斂式となれは積分の密率を推求するに甚た便なる是を名けて級數積分法と云ふ

例 $\frac{\partial x}{1+x}$ あり試に其積分を問ふ

合名法に準し $\frac{1}{1+x}$ の級數を作る

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots\cdots$$

偏く ∂x を乗すれは

$$\frac{\partial x}{1+x}=\partial x-x\partial x+x^2\partial x-x^3\partial x+x^4\partial x\cdots\cdots$$

前巻第四則に準し毎級各積分を求むれは

$$\int\frac{\partial x}{1+x}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots+c$$

設題

今 $\partial y=\frac{\partial x}{a+x}$ 式あり級数を作り積分を求むる如何

今 $\partial y=\frac{\partial x}{(a+x)^2}$ なる式あり問ふ事前に同し

今 $\partial y=\frac{\partial x}{(1-x^2)}$ なる式あり問ふ事前に同し

未定式を確定する法

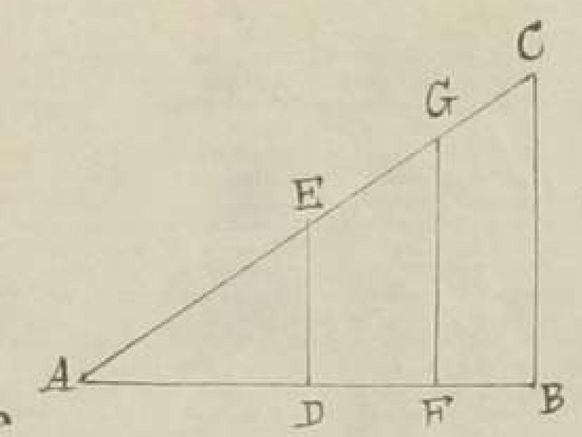
○以上求むる所の積分必ず一常数 c を加ふ然れとも c は何数なるを知る無こうし故に式中の積数未た明かなること能はされは之を未定の式と云

○未定の式既確定せしめんと欲する時は式中の変数積数同時に生すれは x を 0 となる時積数も 0 なり故に c も亦 0 なり又 x を a とする時積数初て生すれは c を改定することを得へし

○右の法を以て c の若干数なる哉又は 0 なる哉を知り得る時は随意に変数の同数を定め而して積数の定式を求むる得へし

假令𛂞ABCの勾股形あり面積に常數ある哉否を求む

左圖のCBをxとしABをnxとされハ即ち此如し



面積 $y=\frac{1}{2}nx^2$

微分 $dy=nx\,dx$

積分 $y=\frac{1}{2}nx^2+C$

右圖を按ひるに面積並にx共にA点に起る故にx若しOなれハyも亦Oなり

故に

$x=0$

$y=0$

$0=0+C$

$\therefore C=0$

なり

今前圖の如くEDGFの二垂線間の四辺形EDFGあり其面積に常數ある哉否を求む

$AD=x=a \quad DE=na \quad \triangle ADE=y$

$\therefore y=\frac{1}{2}na^2+C$

$AF=x=b \quad GF=nb \quad \triangle AFG=y'$

$\therefore y'=\frac{1}{2}nb^2+C$

四辺形 $EDFG=y'-y=z=\frac{1}{2}nb^2-\frac{1}{2}na^2$

故にC常數なしと知るべし

故に自変數に二同數を連用し相似大小二積數の較を求め得る時ハ常數Cを消去するものなり

得べし

〇上例の如き自変数一をaとし一をbとし其二積数を相減し其較数を取るなり之をa b二数の較積法と云ふ此法にて式を作る時は別に記号を設けて$\int_a^b$とするなり

假令

$$\int_a^b nx\partial x=\frac{1}{2}nb^2-\frac{1}{2}na^2$$
$$=\frac{1}{2}n(b^2-a^2)$$

なり

設題

四才

今$\int_a^b 2x\partial x$あり其積分を求め且式を作て之を説明にし且其値を求む

五才

今$\int_a^b 3x^2\partial x$あり其積分を求め且式を作て之を明めし

$a=4$ $b=6$とし之を其同数幾何なる哉

六才

今$\int_a^b \frac{\pi}{2}x^2\partial x$あり其積分を求め且式を作て之を明めし

$a=4$

$b=6$ とすれば其同數幾何なるや試

今 $\int_a^b 2(l+x)\partial x$ 式あり其積分を求め且式を作て之を明かし

$a=10$
$b=20$
$l=4$
とすれば其同數幾何

今 $\int_a^b 6(l+nx^2)nx\partial x$ の式あり其積分を求む且式を作て之を證明せ

$a=4$
$b=6$
$l=4$
$n=6$
とすれば其同數幾何なるや試

今 $\int_a^b \frac{\partial x}{l+x}$ 式あり其積分を求め且式を作て之を明せ

$a=2$
$b=3$
$l=4$
とすれば其同數幾何なるや試

圓函數微分の積分を論ず

○前篇巻之三才三則に據れば $\sin x$ の微分は $\cos x\partial x$ 故に

$\int \cos x\partial x = \sin x + C$ なり

○前篇巻之三第四則ニ拠レハ $\cos x$ の微分ハ $-\sin x\,\partial x$ 故ニ

$\int -\sin x\,\partial x = \cos x + c$ ナリ

○前篇巻之三第五則ニ拠レハ $\tan x$ の微分ハ $\sin^2 x\,\partial x$ 故ニ

$\int \sin^2 x\,\partial x = \cos x + c$ ナリ

○前篇巻之三第六則ニ拠レハ $\cot x$ の微分ハ $-\mathrm{cosec}^2 x\,\partial x$ 故ニ

積分ハ $\cot x + c$ ナリ

○前篇巻之三第七則ニ拠レハ $\sec x$ の微分ハ $\tan x \sin x\,\partial x$ 故ニ

$\int \tan x \sec x\,\partial x = \sec x + c$ ナリ

○前篇巻之三第八則ニ拠レハ $\mathrm{cosec}\, x$ の微分ハ $-\cot x\, \mathrm{cosin}\, x\,\partial x$ 故ニ

$\int -\cot x.\mathrm{cosec}\, x\,\partial x = \mathrm{cosec}\, x + c$ ナリ

○前篇巻之三第九則ニ拠レハ $\mathrm{versin}\, x$ の微分ハ $\sin x\,\partial x$ 故ニ

$\int \sin x\,\partial x = \mathrm{versin}\, x + c$ ナリ

設題

十　今 $\partial u=\tan x\partial x$ なる微分式あり積分を求む如何

十一　今 $\partial u=\cot x\partial x$ なる微分式あり積分を求む如何

十二　今 $\partial u=\frac{\partial x}{1+\cos x}$ なる微分式あり其積分を求む如何

十三　今 $\partial u=\frac{\sin x\partial x}{1+\cos x}$ なる微分式あり其積分を求む如何

十四　今 $\partial u=\frac{\partial x}{\sin x}$ なる微分式あり其積分を求む如何

十五　今 $\partial u=\tan^2 x\partial x$ なる微分式あり其積分を求む如何

十六　今 $\partial u=\sin^2 x\partial x$ なる微分式あり其積分を求む如何

○前篇巻之三第十三則に據り弧を z とし正弦を x とし半径を1とすれは $\partial z=\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ の式を得る故に

其積分は $\int\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}}=z+c$ なることは明かなり若し初度より起れり $z=0$ $y=0$ なり而して亦 $c=0$ なり故に $\int\frac{\partial y}{\sqrt{1-y^2}}=z$ 即ち正弦yの弧に等しきなり

總して $\partial z=\frac{\partial y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ の類の積分は助変数を用ひて之を推し易し其法 $v=\frac{y}{a}$ 即ち $y=av$ 故に $\partial y=a\partial v$ 且 $\sqrt{a^2-y^2}=a\sqrt{1-v^2}$ 此の

二同数を前式に用ゐれは $\partial z=\frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}}$ 故に $\int\frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}}=\sin^{-1}v=z$ なり依て正弦vの弧はzなり即ち正弦 $\frac{y}{a}$ の弧z

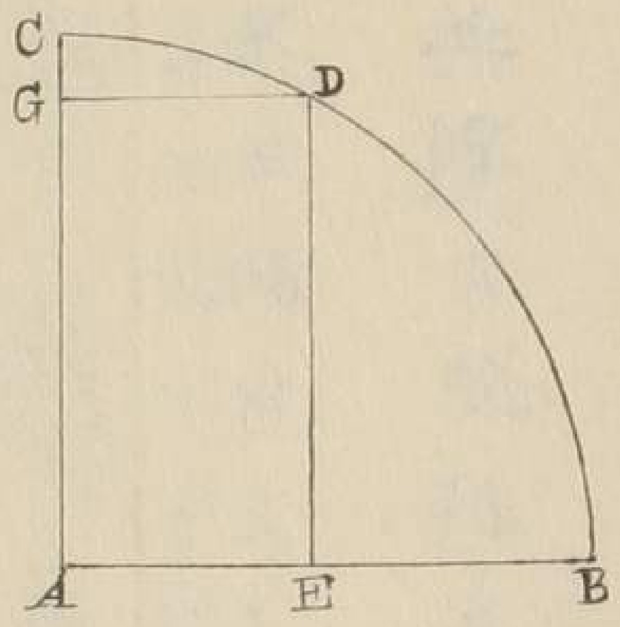
設題

今 $\partial y=\frac{\partial x}{\sqrt{4-x^2}}$ あり其積分を求む

今 $\partial y=\frac{5\partial x}{\sqrt{3-x^2}}$ あり其積分を求む

今 $dy=\frac{a\,dx}{\sqrt{a-ax^2}}$ あり其積分を求む

○前篇巻之三第十四則に拠り弧をzとし餘弦をxとし半径を1とすれば $dz=\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$ の式を得る故に其積分は $\int\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=z+C$ なるは明かなり若し弧初度B



より起り九十度に満つるときは $\cos=0$ $z=\frac{\pi}{2}$ なり故に $x=0$ にして式の左項 $\frac{1}{2}\pi$ なるか故に $C=0$ 而して $\int\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$ は餘弦xの弧に等し

○凡そ $dz=\frac{-dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ の数亦前法の如く助変数を用ひて積

を求むるも識得無し即 $\int\frac{-\partial y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=\cos^{-1}\frac{y}{a}$ なり

設題

今 $\partial y=\frac{-\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$ あり其積分を求む

今 $\partial y=\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$ あり其積分を求む

○凡そ弧をzとし正切をxとし前篇巻之三第十五則に拠れば $\partial z=\frac{\partial x}{1+x^2}$ 識得る故に $\int\frac{\partial x}{1+x^2}=z+c$ 若し弧線初度より起れば $z=0$ $\int\frac{\partial x}{1+x^2}=0$ なり故に $c=0$ 而して $\int\frac{\partial x}{1+x^2}$ は正切xの弧に等し

○凡そ $\partial z=\frac{\partial x}{a^2+x^2}$ 式の類より積分を求むるには助変数を用ゆることを得べし其法 $v=\frac{x}{a}$ $x=av$ $\partial x=a\partial v$ 之を前式中に用ゆれば $\partial z=\frac{a\partial v}{a^2+a^2v^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial v}{1+v^2}$ 故に正切vの弧に $\frac{1}{a}$

就乗せれ之を得る即ち正切 $\frac{x}{a}$ の弧に $\frac{1}{a}$ を乗せるものにひとし

設題

廿二 今 $\partial y=\frac{\partial x}{2+3x^2}$ あり其積分を求む

廿三 今 $\partial y=\frac{5\partial x}{4+7x^2}$ あり其積分を求む

廿四 今 $\partial y=\frac{\partial x}{7+5x^2}$ あり其積分を求む

○凡そ弧を之とし正割を x とし前篇巻之三第十六則に準ぜれば $\partial z=\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-1}}$ を得る故に $\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-1}}=z+C$ 若し弧線初度より起れるを $z=0$ $\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-1}}=0$ なり故に $C=0$ 而して $\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-1}}=\sec^{-1}x$ を得るなり

○凡そ $\partial y=\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ 式の類より積分を求むるには又助変数を用ひ $\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}$ を得るなり

凡そ $\partial y=\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ 式の類より積分を求むるに又助変数

を用ひ $\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}$ を得るなり

設題

今 $\partial y=\frac{\partial x}{x\sqrt{2x^2-1}}$ あり其積分を求む

今 $\partial y=\frac{2\partial x}{x\sqrt{3x^2-4}}$ あり其積分を求む

凡そ弧を z とし正矢を x とすれば前編巻之三第十七則に準し $\partial z=\frac{\partial x}{\sqrt{2x-x^2}}$ を得る故に $\int\frac{\partial x}{\sqrt{2x-x^2}}=\mathrm{vers}^{-1}x+c$ 若し弧線初度より起れば $z=0$ $\int\frac{\partial x}{\sqrt{2x-x^2}}=0$ 故に $c=0$ なり而して全積分 $\int\frac{\partial x}{\sqrt{2x-x^2}}$ は正矢 x の弧に等し

凡そ $\partial z=\frac{\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ の式の類より積分を求むるに又助変数を用ひ $\int\frac{\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}$ を得るなり

設題

七廿 今 $\partial y = \frac{5\partial x}{\sqrt{4x-2x^2}}$ あり其積分を求む

八廿 今 $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{6x-9x^2}}$ あり其積分を求む

九廿 今 $\partial y = \frac{3\partial x}{\sqrt{5x-2x^2}}$ あり其積分を求む

不定係數を用ひて積分を求むる法

一例． $\partial v = \frac{\partial x}{a^2-x^2}$ あり積分を求む

$$\partial v = \frac{\partial x}{a^2-x^2} = \frac{\partial x}{(a+x)(a-x)}$$

$$\frac{1}{(a+x)(a-x)} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x}$$

$$1 = A(a+x) + B(a-x) = Aa + Ba + (A-B)x$$

$$Aa + Ba = 1$$

$$A - B = 0 \quad \therefore A = \frac{1}{2a} \quad B = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a(a+x)} + \frac{1}{2a(a-x)}$$

$$\partial v = \frac{1}{2a}\left\{\frac{\partial x}{a+x} + \frac{\partial x}{a-x}\right\}$$

$$v = \frac{1}{2a}\int\frac{\partial x}{a+x} + \frac{1}{2a}\int\frac{\partial x}{a-x}$$

$$v = \frac{1}{2a}\log(a+x) - \frac{1}{2a}\log(a-x) + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} + C$$

二例 $\partial u = \frac{x\partial x}{(x+2)(x+3)^2}$ あり積分を求む

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{P}{x+2}$$

$$\therefore\ x = A(x+2) + B(x+3)(x+2) + P(x+3)^2$$

$$x = -3 \qquad \therefore -3 = A(2-3) = -A \qquad \therefore A = 3$$

$$x - 3(x+2) = B(x+3)(x+2) + P(x+3)^2$$

$$-2(x+3) = B(x+3)(x+2) + P(x+3)^2$$

$$\therefore\ -2 = B(x+2) + P(x+3)$$

$$x = -3 \qquad \therefore -2 = B(2-3) = -B \qquad \therefore B = 2$$

$$x = -2 \qquad \therefore -2 = P(3-2) = P \qquad \therefore P = -2$$

$$\therefore\ \frac{x}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2} - \frac{2}{x+3} - \frac{2}{x+2}$$

$$\therefore\ \int\frac{x\,\partial x}{(x+2)(x+3)^2} = \int\frac{3\,\partial x}{(x+3)^2} + \int\frac{2\,\partial x}{x+3} - \int\frac{2\,\partial x}{x+2}$$

$$= \frac{3}{x+3} + \log\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2 + C$$

設題

三十 今 $\partial u = \frac{x^2\,\partial x}{(x+2)^2(x+4)^2}$ あり不定係數を用ひ積分を求む

三十一 今 $\partial u = \frac{2x\,\partial x}{(x^2+1)(x^2+3)}$ あり前に同し

卅二 今 $\partial u = \frac{x^2\,\partial x}{(x^2+1)(x^2+4)}$ あり前に同し

卅三 今 $\partial u = \frac{(2x^2+x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)}\partial x$ あり前に同し

卅四 今 $\partial u = \frac{(1-x+x^2)}{(1+x)(1+x^2)}\partial x$ あり前に同し

卅五 今 $\partial u = \frac{\partial x}{x(1+x)^2(1+x+x^2)}$ あり前に同し

洋算例題續第四篇巻之二 終

洋算例題續第四篇巻之三

陸軍大尉福田半編輯

合名微分の積分を論ス

第九則 凡そ合名微分式括弧外の指數整正數なる者より積分を求むる法ハ括弧内の數を此指數ニ依て自乘すること若干次ありして各項を得て後弧外の乘數を乘し毎項各其積分を求め之を合す得へし 此理第二則ニ同し

設題

今 $\partial u = x^2(a+bx^3)^2\partial x$ 式の積分を求む

今 $\partial u = x^3(a+bx^2)^3\partial x$ 前ニ同し

今 $\partial u = x^4(a+bx^3)^3\partial x$ 前ニ同し

今 $x^5(a+b^2x^2)^2\partial x=\partial u$

今 $\partial u=(1-x)(2a-x^2)\partial x$

第十則凡ニ合名微分括弧外変数の指数に一を加ふる時ハ括弧内の変数の指数を以て之を約し至き者あれハ他変数を以て括弧内の数に代へ括弧外指数の母を以て指数とし式を変し而して其積分を求む可し

假令(1)式のmをnにて除ける

$$(1)\ \partial u=x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$(2)\ a+bx^n=z^q$$

$$(3)\ (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=z^p$$

$$(4)\ x^n=\frac{z^q-a}{b}$$

$$(5)\ x^m=\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$(6)\ mx^{m-1}\partial x=\frac{m}{n}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\frac{qz^{q-1}}{b}\partial z$$

$$=\frac{mq}{nb}z^{q-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\partial z$$

$$(7)\ mx^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\partial x=\frac{mq}{nb}z^{q+p-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\partial z$$

$$(8)\ \partial u=\frac{q}{nb}z^{q+p-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\partial z$$

を得可し今試に(2)とすれは(3)となる又(4)とすれは(5)を得る微分し(6)を得る(2)を乗し(7)となる故に(8)となるを得るなり右(8)式中 $\frac{m}{n}$ 若し整正数なれは第九則の法に依て積分を求め得可し然れとも若し $\frac{m}{n}$ 負数なれは後の第十三則のD号術に依て其指数を増し正となるに至て術を施す可し

今 $\partial u=x^5(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}\partial x$ あり積分を求

今 $\partial u=x^5(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}\partial x$

今 $\partial u=x^5(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}\partial x$

今 $\partial u=x^3(a+x^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x$

今 $\partial u=x^5(a^2+x^2)^{-1}\partial x$

第十一則 凡そ合名微分式括弧外変数の指数に一を加へ括弧内変数の指数を以て之を除し括弧外の指数に加へ整数を得れば其積分を求むるを得べし

假令

$$\partial u = x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$= x^{m-1}\left\{\left(\frac{a}{x^n}+b\right)x^n\right\}^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$= x^{m-1}(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}x^{\frac{np}{q}}\partial x$$

$$= x^{m+\frac{np}{q}-1}(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

右式中 $m+\frac{np}{q}$ を n にて除し整数を得れば前法(本篇第十則)を用ひて術を施し積分を求むるを得べし

蓋し $\frac{m+\frac{np}{q}}{n}$ と $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ に同し

例 $\partial u = a(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\partial x$ の式の其積分を求む

(1)式を積分するに先つ試に(2)とし変化して(3)とある故に(4)を得る又(3)に施て(5)を求め而し

(1) $\partial u = a(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\partial x$

(2) $x^{-2}+1 = v^2$

(3) $1+x^2 = v^2x^2$

(4) $(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = v^{-3}x^{-3}$

(5) $x^2 = \frac{1}{v^2-1}$

(6) $\partial x = \frac{-v\partial v}{x(v^2-1)^2}$

(7) $1 = x^4(v^2-1)^2$

(8) $\partial u = a(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\partial x,$ $= -\frac{a\partial v}{v^2}$

(9) $u = \frac{a}{v} = \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}+C$

して微分し(6)を得る(5)を自乗し(7)となる而し
て(4)(6)(7)連乗して(8)を得る之を積分し(9)とな
るなり

設題

十一 今 $\partial u = x^{-4}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x$ なる微分式有り積分を求む

十二 今 $\partial u = x^{-4}(1-2x^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x$ あり前に同し

十三 今 $\partial u = x^{-2}(1-2x^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x$ あり前に同し

十四 今 $\partial u = (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x$ あり前に同し

十五 今 $\partial u = \frac{2a\partial x}{x\sqrt{2ax-x^2}}$ あり前に同し

十六 今 $\partial u = x(2ax-x^2)^{-\frac{3}{2}}\partial x$ あり前に同し

十七 今 $\partial u = x^{-2}(a+x^3)^{-\frac{5}{3}}\partial x$ あり前に同し

十八 今 $\partial u = \frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ なる式あり前に同し

○凡そ合名微分の積分前に載せたる諸測の法に
て求むることを能はさる者は本式より簡なる式
を藉て之を求む為し其法合名数を二分となし
其一分の積分を已に知れるものとし即ち之を
分積分術と云

$$\partial(uv) = u\partial v + v\partial u$$

$$uv = \int u\partial v + \int v\partial u$$

$$\int u\partial v = uv - \int v\partial u$$

右式元来$u\partial v$式の積分を求むるなり然るに今変して$v\partial u$式の積分を求るの術となる是即ち分積分術なり

設題

今$\partial u=x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\partial x$即ち$x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}x\partial x$なる式あり其積分を求む

今$\partial u=\frac{x^3\partial x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$即ち$x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}x\partial x$なる式あり其積分を求む

今$\partial u=x\log x\partial x$なる式より積分を求む

今$\partial u=\frac{x^3\partial x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$あり前に同し

廿三 今$x^n\log x\partial x=\partial u$あり前に同し

廿四 今$\partial u=x^3(a-x^2)^{\frac{1}{2}}\partial x$あり前に同し

廿五 今$\partial u=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\partial x}{x^2}$あり前に同し

廿六 今$\partial u=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\partial x$あり前に同し

○合名微分簡法の式$x^m(a+bx^n)^p\partial x$としpを分数に代へ而してm n倶に整数に代ふべし

第十二則 凡そ微分式$x^m(a+bx^n)^p\partial x$の如きは其積分相似微分

式の積分を藉て得る本式括弧外変數の指數の内括弧内変數の指數を減し之ガ相似式とス

(1) $v=(a+bx^n)^s$

(2) $\partial v=bnsx^{n-1}(a+bx^n)^{s-1}\partial x$

(3) $u\partial v=x^m(a+bx^n)^p\partial x$

(4) $u=\dfrac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p-s+1}}{bns}$

(5) $\partial u=\dfrac{(m-n+1)x^{m-n}(a+bx^n)^{p-s+1}\partial x}{bns}+$
$\qquad+\dfrac{(p-s+1)x^m(a+bx^n)^{p-s}}{s}\partial x$

(6) $(a+bx^n)^{p-s+1}=(a+bx^n)(a+bx^n)^{p-s}$
$\qquad=a(a+bx^n)^{p-s}+bx^n(a+bx^n)^{p-s}$

(7) $\partial u=\left\{\dfrac{a(m-n+1)}{bns}x^{m-n}+\dfrac{(m+1+np-ns)x^m}{ns}\right\}$
$\qquad\times(a+bx^n)^{p-s}\partial x$

(8) $m+1+np-ns=0$

(9) $s=\dfrac{m+1}{n}+p$

(10) $\partial u=\dfrac{a(m-n+1)x^{m-n}(a+bx^n)^{p-s}}{b(np+m+1)}\partial x$

(11) $\int x^m(a+bx^n)^p\partial x=\dfrac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}-a(m-n+1)\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\partial x}{b(np+m+1)}$

試に(1)とし s ある指數ヲ何數にしても任意に用ゆべし微分し(2)を得る合名簡法の式を(3)とすれハ化して(4)を得る又微分し(5)を求め而して(6)を探知し以て(5)式に容れ(7)となる s の同數を求むるに(8)とすれハ(9)を得る故に(10)となる以て之が積分術公式に容れ(11)を得る之をA式と名つく

故に設くる所の微分の積分ハ $x^{m-n}(a+bx^n)^p\partial x$ の積分を藉て求め得べし此式原式括弧外變數の指數の内括

弧内変数の指数を減して得る所にして所謂る相似式なり

假令(1)の如き合名微分式の積分を求むるにA式に依てa b n pを(2)の如く換ふれば(3)を得る之をa式と号く

$$(1)\quad \partial X_m = \frac{x^m \partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(2)\quad a^2=a \qquad b=-1,\ n=2,\ p=\frac{1}{2}$$

$$(3)\quad X_m = \int \frac{x^m \partial x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$= \frac{(m-1)a^2}{m}\int \frac{x^{m-2}\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{(a^2-x^2)}$$

一例

$\partial X_0 = \frac{a\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ あり積分を求む

已に得る $\frac{a\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ はaを半径としxを正弦とする所の弧線の微分なり故に∂X_0を亦弧線の微分なり即ちX_0は弧線なり

二例

$\partial X_2 = \frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ あり積分を求む

2を以てa式中mに代へ $X_2=\frac{a}{2}X_0-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$ を得る即ち積分なり

今 $\partial X_4=\frac{x^4\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ あり積分を求む

今 $\partial X_6=\frac{x^6\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ あり積分を求む

今 $\partial X_8=\frac{x^8\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ あり積分を求む

○a式に準し合名微分式 $\int\frac{x^m\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ を化して $\int\frac{x^{m-2}\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 又化して $\int\frac{x^{m-4}\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 遂て此の如く遞推し $\frac{m}{2}$ に至り若しm偶数これは則ち積数は $\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ を籍て得へし $\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ は即ち $\frac{x}{a}$ を正弦とする所の弧なり

又a式の例ニ依て

$$X_m = \int\frac{x^m\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{(m-1)a^2}{m}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

を得る之をb式と号く

三例 $\partial X_4 = \frac{x^4\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ あり積分を求む

(4)を以てb式中のmニ代ゆれハ

$$X_4 = \frac{x^3}{4}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{3}{4}a^2\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

を得る即ち積分あり式中 $\frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ の積分は已ニ知る所の者あり（本巻十八題を見よ）

設ケて合名微分式 $\partial X_m = \frac{x^m\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ の如きは数を以て先づ代へa式ニ依て積分を求むへし今又別ニ術を起し之を求むる左の如し

法ニ云く試ニ(1)とし化して(2)とし微分を求め(2)を得る式中第二項は $m\partial X$ ニ等し故ニ化して(4)とし積分して(5)を得る之をc式と号く即ち次のごとし

(1) $\nu = x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}$

(2) $\nu = x^{m-1}(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}$

(3) $$\begin{cases} \partial \nu = \dfrac{a(2m-1)x^{2m-2}\partial x - mx^{2m-1}\partial x}{(2ax^{2m-1}-x^{2m})^{\frac{1}{2}}} \\ \quad = \dfrac{a(2m-1)x^{m-1}\partial x}{(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{mx^{m}\partial x}{(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

(4) $\partial X_m = \dfrac{a(2m-1)x^{m-2}\partial x}{m(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{\partial}{m}$

(5) $\displaystyle\int \frac{x^{m}\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{a(2m-1)}{m}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$

$\dfrac{x^{m-1}}{m}\sqrt{2ax-x^2}$

右式中 $\dfrac{a\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ は即ち原式指孤外変數の指數損一の式なり

四例 $\partial X_0 = \dfrac{a\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ あり積分を求む

已に得る $\dfrac{R\partial x}{\sqrt{2Rx-x^2}}$ はRを半径としxを正矢とする所の弧の微分なり故に ∂X_0 も亦弧の微分なり依て X_0 を弧としaを半径としxを正矢とする所の者なり

五例 $\partial X_1 = \dfrac{x\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ あり積分を求む

法に拠以てC式中のmに代ゆれは

$X_1 = X_0 - \sqrt{2ax-x^2}$

を得る

即ち積分なり

設問

今

$\partial X_2 = \dfrac{x^2 \partial x}{\sqrt{2mx-x^2}}$

あり積分を求む

今

$\partial X_3 = \dfrac{x^3 \partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$

あり積分を求む

今

$\partial X_4 = \dfrac{x^4 \partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$

あり積分を求む

○

C式の術に準合名式 $\int \dfrac{x^m \partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ の術分化して $\int \dfrac{x^{m-1} \partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ 又化して $\int \dfrac{x^{m-2} \partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ 此の如く逓推してm次に至る若しm整數ならされは則ち $\dfrac{x}{a}$ を正矢とする所の弧之

六例

$\dfrac{x^{\frac{3}{2}} \partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ あり其積分を求む

$\dfrac{3}{2}$ を以てC式中mに代へ(1)を得る(2)に依て

$$(1)\quad \int\frac{x^{\frac{3}{2}}\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{4a}{3}\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}-\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{4}\sqrt{2ax-x^2}$$

$$(2)\quad \frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{\partial x}{\sqrt{2a-x}}$$

$$(3)\quad \int\frac{\partial x}{\sqrt{2a-x}}=-2\sqrt{2a-x}$$

$$(4)\quad \int\frac{x^{\frac{3}{2}}\partial x}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{8a}{3}\sqrt{2a-x}-\frac{2x}{3}\sqrt{2a-x}$$

(3)を得以て(1)式に容れ(4)を得る即ち求むる所の積分へ

○A式に準し惟ふにmは正これを則ち指数損を無し今A式の例に依て又式を得るB式と号く負指数をして亦損れ然し

法A式を列し其母数 $b(np+m+1)$ と ∫号ノの係数 $a(m-n+1)$ と交互に相易へ

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\partial x=\frac{1}{a(m-n+1)}\left\{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}-b(np+m+1)\int x^m(a+bx^n)^p\partial x\right\}$$

を得る即ちB式なり

七例 $\frac{\partial x}{x^2(1+x^3)^{\frac{5}{3}}}$ あり積分を求む

法B式中(1)を用ゆれば(2)を得る即ち求むる所の積分なり

$$(1)\quad \begin{cases}-2=m-n\\ 1=a\\ 3=n\\ 1=b\\ -\frac{5}{3}=p\end{cases}$$

$$(2)\quad \int x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{5}{3}}\partial x=-x^{-1}(1+x^3)^{-\frac{2}{3}}-\int x(1+x^3)^{-\frac{5}{3}}\partial x$$

式中 $\int x(1+x^3)^{-\frac{5}{3}}\partial x$ は後の廿七題を見るべし

設題

今 $\frac{\partial x}{x^2(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 即ち $x^{-2}(2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\partial x$ あり積分を求む

第十三則 凡そ微分式 $x^m(a+bx^n)^p\partial x$ の如き其積分を相似別式を藉て之を求む挙し其別式括弧外の指数必ず一減損す

試に(1)とし微分を求め(2)を得る又設けて(3)と乃ち之を(4)と為る微分し(5)を得る惟ふに(6)なるか故に化して(7)となり(A)式の術に準し(8)として減求め(7)を化し(9)を得るを以て分積の術公式中

(1) $v = x^s$

(2) $\partial v = s x^{s-1}\partial x$

(3) $v\partial v = x^m(a+bx^n)^p\partial x$

(4) $v = \frac{x^{m-s+1}(a+bx^n)^p}{s}$

(5) $\partial v = \frac{(m-s+1)}{s}x^{m-s}(a+bx^n)^p\partial x + \frac{bnp}{s}x^{m-s+n}\times (a+bx^n)^{p-1}\partial x$

(6) $(a+bx^m)^p = (a+bx^n)(a+bx^n)^{p-1}$

(7) $\partial v = \frac{a(m-s+1)+b(m-s+1+np)x^n}{s}x^{m-s}(a+bx^n)^{p-1}\partial x$

(8) $m-s+1+np = 0 \quad \therefore s = m+1+np$

(9) $\partial v = \frac{-anpx^{m-s}(a+bx)^{p-1}\partial x}{np+m+1}$

(10) $\int x^m(a+bx^n)^p\partial x = \frac{x^{n+1}(a+bx^n)^p + anp\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\partial x}{np+m+1}$

ヿ容れ(10)級得る名付てC式と云ふ
故に求むる所の積分をして他の積分を藉て得せしむ而して他の積分括弧外の指數必ス一級損ス
例に依て他積分に又一の他積分を藉て得せし而して括弧外の指數又一を損ス此の如く遞推して括弧外の指數一より小に至らしむべし

設題

今 $\partial x\sqrt{a^2+x^2}$ あり積分を求む

今 $\partial x\sqrt{x^2-a^2}$ あり積分を求む

○C式に準じ惟ふに括弧外の指數正にあれを損す然し今C式の例に依て又術を得る負指數をして亦損スを然し名付てD式と云
法に云くC式を列し其母數を取り∫号の左の係數と交互に相易へ得る所の式左の如し即ちD式なり

$$\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\partial x = \frac{1}{anp}\left\{-x^{m+1}(a+bx^n)^p+(np+m+1)\int x^m(a+bx^n)^p\partial x\right\}$$

A.a.b.C.B.C.D.の諸公式に依て他の設題を積

分すべし

試題

卅六　今 $(2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\partial x$ あり積分を求む

卅七　今 $\frac{x\,\partial x}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}$ あり積分を求む

卅八　今 $x^3(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x$ あり積分を求む

卅九　今 $x^5(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x$ あり積分を求む

四十　今 $x^{-4}(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x$ あり積分を求む

四十一　今 $x^{-6}(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x$ あり積分を求む

四十二　今 $(a-x^2)^{\frac{1}{2}}\partial x$ あり積分を求む

四十三　今 $(a+x^2)^{\frac{3}{2}}\partial x$ あり積分を求む

今 $\frac{\partial x}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}$ あり積分を求む

今 $(a^2+x^2)^{-2}\partial x$ あり積分を求む

洋算例題續第四篇巻之三 終

洋算例題續第四篇巻之四

陸軍大尉福田半編輯

混淆問題

第一	$\int \partial u = \int \frac{(5x-2)\partial x}{x^3+6x^2+8x}$	の積分を求む
第二	$\int \partial u = \int \frac{(3x+1)\partial x}{x^3+2x^2+x}$	同
第三	$\int \partial v = \int \frac{\partial x}{1+3x+2x^2}$	同
第四	$\int \partial v = \int \frac{x\partial x}{(x-2)(x+3x)^2}$	同
第五	$\int \partial v = \int \frac{(x^2+3x+1)\partial x}{x^3+x^2-2x}$	同
第六	$\int \partial v = \int \frac{x\partial x}{(x+2x)(x+1)(x^2+1)}$	同
第七	$\int \partial v = \int \frac{\partial x}{x^6-1}$	同
第八	$\int \partial u = \int \frac{x^5\partial x}{(x^2+1)^3}$	同
第九	$\int \partial u = \int \frac{x^3\partial x}{x^4+1}$	同
第十	$\int \partial u = \int \frac{x^6\partial x}{x^2+1}$	同

以下 $\int \partial u$ を略し $\int$ ヲ用ユ

(11) $\int_x x\sqrt{a+x} = ?$

(12) $\int_x \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = ?$

(13) $\int_x \frac{1}{x\sqrt{x+a}} = ?$

(14) $\int_x (a+x)(b-x)^{\frac{m}{n}} = ?$

(15) $\int_x (x^2+a)\sqrt{x^2+4a} = ?$

(16) $\int_x \frac{\sqrt{a+bx^3}}{x} = ?$

(17) $\int_x \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} = ?$

(18) $\int_x \frac{1}{x-x^3} = ?$

(19) $\int_x \frac{x}{(x+a)(x+b)} = ?$

(20) $\int_x \frac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)} = ?$

(21) $\int_x \sqrt{2ax-x^2} = ?$

(22) $\int_x \frac{1}{x-x^2} = ?$

(23) $\int_x \frac{x^2}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$

(24) $\int_x^0 \frac{x^2}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$

(25) $\int_x \frac{x^5}{x^2+1} = ?$

(26) $\int_x^0 \sqrt{2ax-x^2} = ?$

(27) $\int_x \sqrt{x^2(\log x)^2} = ?$

(28) $\int_x \frac{x^2-5}{(x+1)^3(x-3)} = ?$

(29) $\int_x \frac{x}{(x^2+3x+2)^2} = ?$

(30) $\int_x^0 x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = ?$

(31) $\int_x \frac{(x+\sqrt{x})(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = ?$

(32) $\int_x^0 (a+bx)x = ?$

(33) $\int_x \frac{x^2\sqrt{x}}{1+x} = ?$

(34) $\int_x \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} = ?$

(35) $\int_x \frac{x}{(x+1)(x^2+3)(x+2)} = ?$

(36) $\int_x \frac{1}{x^3+x^2+x+1} = ?$

(37) $\int_x \frac{1}{x^4-4x+3} = ?$

(38) $\int_x \frac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}} = ?$

(39) $\int_x \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = ?$

(40) $\int_x \frac{1}{x^4+x^3+x^2} = ?$

(41) $\int_x \frac{1}{2x^4+3x^2} = ?$

(42) $\int_x \frac{1}{x^8+x^7-x^4-x^3} = ?$

(43) $\int_x \frac{x^4}{2+3x^2} = ?$

(44) $\int_x \frac{x}{a^4+x^4} = ?$

(45) $\int_x \frac{x^5}{1+2x^2} = ?$

(46) $\int_x \frac{x^4}{(1+x^2)^2} = ?$

(47) $\int_x \frac{x^5}{(1+x^2)^3} = ?$

(48) $\int_x \frac{1}{x^6(1+x^2)} = ?$

(49) $\int_x \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = ?$

(50) $\int_x \frac{1}{1+x+x^2} = ?$

(51) $\int_x \frac{1}{x^2+x-7} = ?$

(52) $\int_x \frac{1}{a+bx+cx^2} = ?$

(53) $\int_x \frac{x}{(1+x+x^2)^2} = ?$

(54) $\int_x \frac{x^5}{x^3+1} = ?$

(55) $\int_x \frac{1}{1-x^4} = ?$

(56) $\int_x \frac{x^2}{(x^4-a^4)} = ?$

(57) $\int_x \frac{3x^2}{1-x^6} = ?$

(59) $\int_x \frac{2x}{2x^4+2x^2+1} = ?$

(60) $\int_x \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \sin^{-1}x = ?$

(61) $\int_x \frac{x^4}{x^3+1} = ?$

(58) $\int_x \frac{3x^2}{1+x^6} = ?$

(62) $\int_x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}} = ?$

(63) $\int_x \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin^{-1}x = ?$

(64) $\int_x \frac{1}{x(1+x^3)} = ?$

(65) $\int_x \frac{1}{x(1+x^4)} = ?$

(66) $\int_x \frac{1}{x^4(a+bx^3)} = ?$

(67) $\int_x \frac{1}{x(1+x^3)^2} = ?$

(68) $\int_x x^2(a+bx)^{\frac{1}{2}} = ?$

(69) $\int_x \frac{x^3}{\sqrt{a+bx}} = ?$

(70) $\int_x \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = ?$

(71) $\int_x \frac{1}{x(bx+a)^{\frac{1}{2}}} = ?$

(73) $\int_x \frac{\sqrt{a+bx}}{x^2} = ?$

(74) $\int_x \frac{1}{x^2(4+3x)^{\frac{1}{2}}} = ?$

(72) $\int_x \frac{1}{x(bx-a)^{\frac{1}{2}}} = ?$

(75) $\int_x \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} = ?$

(76) $\int_x \frac{1}{x(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = ?$

(77) $\int_x \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{5}{3}}} = ?$

(78) $\int_x \frac{1}{x(1+2x)^{\frac{5}{2}}} = ?$

(79) $\int_x \frac{x^2}{(2+x)^{\frac{9}{2}}} = ?$

(80) $\int_x \frac{x^2}{\sqrt[3]{2+3x}} = ?$

(81) $\int_x \frac{x^3}{(1+x)^{\frac{2}{3}}} = ?$

(82) $\int_x x^3\sqrt{1+x^2} = ?$

(83) $\int_x x^{-6}\sqrt{1+x^2} = ?$

(84) $\int_x x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = ?$

(85) $\int_x x^3\sqrt{(1+x^2)^5} = ?$

(86) $\int_x \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} = ?$

(87) $\int_x \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} = ?$

(88) $\int_x \frac{1}{x^6\sqrt{1+x^2}} = ?$

(89) $\int_x \frac{1}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}} = ?$

(90) $\int_x (1-2x^2)^{\frac{3}{2}} = ?$

(91) $\int_x \frac{x^4}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$

(92) $\int_x \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$

(93) $\int_x \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} = ?$

(94) $\int_x \frac{x^5}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} = ?$

(95) $\int_x \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$

(96) $\int_x \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-2x}} = ?$

(97) $\int_x \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} = ?$

(98) $\int_x \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}} = ?$

(99) $\int_x \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}} = ?$

(100) $\int_x \frac{1}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$

(101) $\int_x \frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = ?$

(102) $\int_x \frac{1}{x} \log n \, \partial x = ?$

(103) $\int_x \frac{1}{x \log x} = ?$

(104) $\int_x \frac{x^4}{(\log x)^3} = ?$

(105) $\int_x a^x x^3 = ?$

(106) $\int_x e^x x^2 = ?$

(107) $\int_x e^{-x} x^3 = ?$

(108) $\int_x x e^{\sqrt{x}} = ?$

(109) $\int_x \frac{a^x}{x^4} = ?$

(110) $\int_x \frac{a^x}{\sqrt{x}} = ?$

(111) $\int_x \frac{\log x}{(1+x^2)} = ?$

(112) $\int_x \frac{x \log x}{\sqrt{1+x^2}} = ?$

(113) $\int_x \frac{1}{e^x+1} = ?$

(114) $\int_x \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^2} = ?$

(115) $\int_x \frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = ?$

(116) $\int_x \frac{x e^x}{(e^x-1)^3} = ?$

(117) $\int_x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}} = ?$

(118) $\int_x \frac{1}{(2ax+x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$

(119) $\int_x \frac{1}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$

(120) $\int_x \frac{1}{(1+x+x^2)^{\frac{5}{2}}} = ?$

(121) $\int_x \frac{1}{(1+x)^2\sqrt{x}} = ?$

(122) $\int_x \frac{x\sqrt{x}}{1+x} = ?$

(123) $\int_x \frac{1}{x^2\sqrt{2ax-x^2}} = ?$

(124) $\int_x x^3\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} = ?$

(125) $\int_x x^4(\log x) = ?$

(126) $\int_x x^3(\log x)^3 = ?$

(127) $\int_x (\sin\theta)^3 = ?$

(128) $\int_\theta (\cos\theta)^3 = ?$

(129) $\int_\theta (\sin\theta)^5 = ?$

(130) $\int_\theta (\cos\theta)^6 = ?$

(131) $\int_\theta (\sin\theta)^3(\cos\theta)^2 = ?$

(132) $\int_\theta (\cos\theta)^4(\sin\theta)^2 = ?$

(133) $\int_\theta (\sin\theta)^6(\cos\theta)^3 = ?$

(134) $\int_\theta (\sin\theta)^{-3} = ?$

(135) $\int_\theta \frac{1}{(\sin\theta)^5} = ?$

(136) $\int_\theta \frac{1}{(\cos\theta)^6} = ?$

(137) $\int_\theta \frac{(\sin\theta)^3}{(\cos\theta)^4} = ?$

(138) $\int_\theta \frac{(\sin\theta)^5}{(\cos\theta)^2} = ?$

(139) $\int_\theta \frac{(\cos\theta)^4}{(\sin\theta)^3} = ?$

(140) $\int_\theta \frac{1}{(\sin\theta)^2(\cos\theta)^3} = ?$

(141) $\int_\theta \frac{1}{(\sin\theta)^4(\cos\theta)^2} = ?$

(142) $\int_\theta (\tan\theta)^4 = ?$

(143) $\int_{\theta} \frac{1}{(\tan\theta)^5} = ?$

(144) $\int_{\theta} \theta^3 \cos\theta = ?$

(145) $\int_{\theta} \frac{x^2}{(1+x^2)} \tan^{-1} x = ?$

(146) $\int_{\theta} \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin^{-1} x = ?$

(147) $\int_{\theta} x^2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{x}{a}} = ?$

(148) $\int_{\theta} \theta^{ax} \cos kx = ?$

(149) $\int_{\theta} \theta^{-ax} \sin kx = ?$

(150) $\int_{\theta} \theta^{ax} \sin kx = ?$

(151) $\int_{\theta} \frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} = ?$

(152) $\int_{\theta} \frac{\cos\theta}{(1-\theta^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = ?$

(153) $\int_{\theta} (\cos\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta = ?$

(154) $\int_{\theta} \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} = ?$

(155) $\int_{\pi}^{0} \theta^{2A\cos x} = ?$

終