Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 45

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 45.1. Negiere die Aussage, dass eine Folge x_n in einem angeordneten Körper eine Cauchy-Folge ist, durch Umwandlung der Quantoren.

Übungsaufgaben

Aufgabe 45.2. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 45.3. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge in einem angeordneten Körper. Zeige, dass jede Teilfolge ebenfalls gegen x konvergiert.

Aufgabe 45.4.*

Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K, die eine konvergente Teilfolge enthalte. Zeige, dass die Folge konvergiert.

Aufgabe 45.5. Zeige, dass die Folge

$$x_n = n$$

in keinem angeordneten Körper konvergiert. Kann sie beschränkt sein?

Aufgabe 45.6. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K derart, dass

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen und es sei die Differenzfolge $z_n - x_n$ eine Nullfolge. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 45.7. Zeige, dass eine Teilfolge einer Cauchy-Folge wieder eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 45.8. Es seien $K \subseteq L$ angeordnete Körper und es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K, die in L gegen $x \in L$ konvergiert. Zeige, dass die Folge in K eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 45.9. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende, nach unten beschränkte Folge. Zeige, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 45.10.*

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K beschränkt ist.

Aufgabe 45.11. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K mit $x_n, y_n \in K_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Quadratfolgen x_n^2 und y_n^2 seien konvergent und es sei $x_n^2 - y_n^2$ eine Nullfolge. Zeige, dass $x_n - y_n$ ebenfalls eine Nullfolge ist.

Aufgabe 45.12.*

Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K mit $x_n, y_n \in K_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $x_n^2 - y_n^2$ eine Nullfolge. Zeige, dass $x_n - y_n$ ebenfalls eine Nullfolge ist.

Aufgabe 45.13. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper. Zeige, dass es eine Teilfolge x_{n_i}, $i \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass folgende Eigenschaft erfüllt ist: Zu jedem $k \in \mathbb{N}_+$ gilt für alle $i, j \geq k$ die Abschätzung

$$\left| x_{n_i} - x_{n_j} \right| \leq \frac{1}{k}.$$

Aufgabe 45.14. Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K. Zeige, dass die Folge eine wachsende oder eine fallende Teilfolge enthält.

Aufgabe 45.15. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für die Folge der Stammbrüche die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Die Folge $\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge.
(2) Die Folge $\frac{1}{n}$ ist eine Cauchy-Folge.
(3) Der Körper K ist archimedisch angeordnet.

Aufgabe 45.16. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$ mit $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n \leq 2$$

gilt.

Aufgabe 45.17. Zwei Personen, A und B, sitzen in der Kneipe. A will nach Hause gehen, aber B will noch ein Bier trinken. „Na gut, dann trinken wir eben noch ein Bier, das ist aber das allerletzte“ sagt A. Danach möchte B immer noch Bier, aber da das vorhergehende Bier definitiv das letzte war, einigen sie sich auf ein allerletztes halbes Bier. Danach trinken sie noch ein allerletztes Viertelbier, danach noch ein allerletztes Achtelbier, u.s.w. Wie viel „allerletztes Bier“ trinken sie insgesamt?

Aufgabe 45.18.*

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K sei durch einen Anfangswert $x_0 \in K$ und durch die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = -x_n$$

gegeben. Bestimme die Anfangswerte, für die diese Folge konvergiert.

Aufgabe 45.19.*

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K sei durch einen Anfangswert $x_0 \in K_+$ und durch die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = (x_n)^{-1}$$

gegeben. Bestimme die Anfangswerte, für die diese Folge konvergiert.

Aufgabe 45.20. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper K. Zeige, dass die Folge genau dann gegen $x \in K$ konvergiert, wenn die durch

$$y_n := x_n - x$$

gegebene Folge eine Nullfolge ist.

Aufgabe 45.21.*

Zeige

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Aufgabe 45.22. Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ in einem archimedisch angeordneten Körper konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 45.23. (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine Folge, die nicht konvergiert, aber eine konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 45.24. (3 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper und es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in K. Zeige, dass die Summenfolge

$$z_n = x_n + y_n$$

ebenfalls eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 45.25. (5 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper K. Zeige, dass es eine Teilfolge x_{n_i}, $i \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft gibt, dass zu jedem $k \in \mathbb{N}_+$ für alle $i, j \geq k$ die Abschätzung

$$\left| x_{n_i} - x_{n_j} \right| \leq \frac{1}{k}$$

gilt.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 45.11 hilfreich.

Aufgabe 45.26. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $c \in K_+$. Es seien $x_0, y_0 \in K_+$ Startwerte und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörigen Heron-Folgen zur Berechnung von $\sqrt{c}$. Zeige, dass $x_n - y_n$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 45.27. (4 Punkte)

Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ beschränkt ist.