collated 7/10/39 m. w.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST. PÉTERSBOURG.

TOME VI.

AVEC

L'HISTOIRE DE L'ACADÉMIE

POUR L'ANNÉE 1813 ET 1814.

ST. PETERSBOURG,

DE L'IMPRIMÉRIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

1818.

Publié par ordre de l'Académie, et avec l'obligation d'envoyer, où il convient, le nombre d'exemplaires fixé par la loi.

N. Fuſs
Secrétaire perpétuel.

TABLE DES MATIÈRES.

Histoire de l'Académie Impériale des Sciences.

Années 1813 et 1814.

*

MÉMOIRES

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

I. Section des sciences mathématiques.

II. Section des sciences physiques.

III. Section des sciences politiques.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Années 1813 et 1814.

I.

EVÈNEMENT MÉMORABLE.

1. Don patriotique fait pour l'avancement de l'Histoire de Russie.

Le 24 Décembre 1813 S. E. M^{gr}. le Ministre de l'Instruction publique fit savoir a la Conférence que S. E. M^{gr}. le Chancelier de l'Empire, Comte *Nicolas* de *Roumäntsoff*, dans la vue patriotique de contribuer au perfectionnement de l'Histoire nationale, en repandant les sources de cette Histoire, a destiné une somme de 25,000 Roubles, qui doit fournir les fraix de la publication des meilleures Annales Russes que l'Académie possède dans sa Bibliothèque.

II.

CHANGEMENS ARRIVÉS DANS L'ACADÉMIE.

1. Membres décédés.

a) *Académiciens ordinaires.*

L'Académie fit en 1813 une très grande perte par la mort d'un Académicien aussi estimable par la droiture de son caractère, que distingué par le rang où il a sû se placer parmi les Géomètres de son tems et de sa nation. Mr. *Simeon Gourieff*, Académicien ordinaire pour les Physico-Mathématiques, Membre de l'Académie Impériale Russe, Professeur de Mathématiques à l'Académie éclésiastique de St. Pétersbourg et à l'Institut des Ingénieurs des voyes de Communication, Conseiller-d'Etat et Chevalier de l'ordre de Ste. Anne de la 2de classe, décéda le 11 Décembre 1813, dans la 47e année de son âge. Le Défunt fut reçu Adjoint de l'Académie le 26 Mai 1796 et nommé Académicien ordinaire, à la suite d'un ordre Suprême, le 31 Janvier 1798. Avant son entrée au service de l'Academie il avoit été Capitaine d'Artillerie et Professeur de Physico-Mathématique et d'Artillerie du Corps des Officiers de la Flotte à rames. Ayant reçu ses premières leçons de Mathématiques au 2d corps des Cadets, dit alors Corps des Cadets d'Artillerie et du Génie, où il fut placé comme Cadet en 1778, un gout décidé pour les Mathématiques et un talent supérieur le portèrent bientôt au-de-là de l'instruction élémentaire de ses maîtres, et après sa sortie en 1784, il fut nommé maître de navigation et d'Artillerie du Corps des Cadets grecs. En 1792 il fit, avec permission Suprème, un voyage en Angleterre, pour y examiner les ouvrages hydrauliques; et c'est à son retour en 1793, qu'il fut avancé au rang de Capitaine et chargé de donner des leçons aux Officiers de la Flotte à rames. Dès lors il étudia les ouvrages des meilleurs auteurs et embrassa successivement toutes les branches des hautes Mathématiques pures et appliquées, avec un succès qui le rendit digne d'entrer dans la carrière académique, qu'il a parcourue depuis avec tant de distinction. Un esprit juste et méthodique, et un goût dominant pour la méthode des Anciens, lui firent embrasser un genre de recherches analogue à ce goût. Préférant à la gloire de découvrir des vérités nouvelles le mérite d'établir sur des bases plus solides les vérités connuës et les principes déjà établis, il s'attacha principalement à les démontrer d'une manière plus rigoureuse. Sa Géométrie et son Calcul différentiel, ainsi que la plûpart des mémoires qu'il a présentés à l'Académie, et qui roulent sur des sujets analogues, prouvent que ses efforts louables n'ont pas été sans succès, comme ils n'ont pas été sans récompenses. Des pensions, des gratifications, des avancemens civils et des décorations ont attesté, en ces occasions, comme en une infinité d'autres, combien notre Monarque adoré aime à protéger les sciences et à encourager ceux qui travaillent à les perfectionner. Les services que feu Mr. *Gourieff* a rendus aux sciences comme Professeur ne sont guères inférieurs à ceux qu'il leur a rendus comme Académicien. Dans les établissemens d'enseignement nommés plus haut, ainsi que dans l'Ecole d'Architecture navale, dans L'Academie de Nevski et dans l'Institut des Ingénieurs des voyes de communication, où il a donné de leçons depuis, il a formé nombre de bons Elèves, qui contribueront à leur tour à répandre en Russie le goût des Mathématiques et la bonne méthode dans leur enseignement. Une veuve et sept orphelins pleurent la mort d'un époux et d'un père chéri, et sa mémoire vivra dans le souvenir de ses amis, de ses collègues et de ses disciples, dont quelques uns servent la patrie et leur Souverain dans les places les plus éminentes.

Une autre perte non moins sensible que l'Academie fit en 1814 fut celle de son respectable Doyen, Mr. *Wolfgang Louis Krafft*, Académicien pour la Physique expérimentale, Conseiller d'Etat et Chevalier des ordres de St.

Anne de la 2de. classe et de St. Vladimir du 4^{e}. dégré, Membre de la Société Impériale libre économique, du Bureau britannique d'Agriculture, de la Société des Naturalistes de Moscou, de celle de Berlin etc., mort le 20 Novembre 1814 dans la 72^{me} année des son âge, d'un épuisement total des forces, suite de quelques attaques d'apoplexie. Le Défunt nâquit à St. Petersbourg le 25 Août 1743, et quitta cette capitale en très bas âge avec son père, lequel après avoir été pendant plusieurs années membre effectif de l'Académie Impériale des Sciences, fut rappellé dans sa patrie, pour remplir la place de Professeur de Mathématique et de Physique à l'Université de Tubingen. Elevé, après la mort de son père, dans un des Séminaires du Duché de Würtemberg, et destiné à l'état éclésiastique, le jeune *Krafft* s'adonna néanmoins par goût aux sciences qui avoient fait la réputation de l'auteur de ses jours et publia déjà en 1764 à Tubingen un mémoire de Mathématique sous le titre: De ratione ponderum sub polo et aequatore. Lorsqu'en 1767 l'Académie prépara plusieurs expéditions astronomiques, pour observer le dernier passage de Venus devant le disque du soleil, Mr. *Krafft* chercha et obtint une part active à ces expéditions; l'Académie lui conféra celle d'Orenbourg, où il alla observer ce phénomène important. Ayant été nommé Adjoint de l'Académie en 1768, et Académicien ordinaire en 1771, il aida, après son retour, feu Mr. *Léonard Euler* dans les calculs de ses Tables de la lune et dans ceux de sa nouvelle Théorie de la lune, dont la publication avoit précédé celle des Tables. Un grand nombre de mémoires insérés dans les Novi Commentarii, les Acta et les Nova Acta de l'Académie prouvent son activité scientifique et son zéle à remplir ses devoirs académiques. En 1782 il fut nommé Professeur de Physique du 1r Corps des Cadets, et quelques années après Professeur de Mécanique et de Physique du Corps Impérial des Mines, places qu'il a remplies avec distinction et succès pendant une longue suite d'années. En 1802 le Département Impérial de l'Amiranté l'associa à ses travaux, en qualité de membre honoraire. Mais le plus important et le plus cher de ses devoirs fut celui de donner des leçons de Mathématique et de Physique à l'Héritier présomtif du Thrône Impérial et à son Auguste frére, Monseigneur le Grand-Duc *Constantin*, leçons qu'il a continuées dans la suite aux plus jeunes Grands-Ducs, et à Mesdames les Grandes-Duchesses, et qu'il n'a cessé que depuis très peu de tems de donner à Nosseigneurs les Grands-Ducs *Nicolas* et *Michel*. Tous ceux qui ont connu le Défunt savent avec quel zèle infatigable et quelle scrupuleuse fidélité il a rempli les devoirs attachés à ses places, et que ce n'est que sa dernière maladie qui en a interrompu le cours, après un exercice de près d'un demi-siècle. La décoration de St. Vladimir en 1793, celle Ste Anne en 1801, le rang de Conseiller de Colléges en 1799, celui de Conseiller d'Etat en 1804, des gratifications nombreuses et des pensions ont été les récompenses de ses services, et une longue carrière constamment heureuse et presqu'exempte de maladie, a été celle d'une vie active, sobre, calme et regulière. Il a laissé une veuve, avec laquelle il a vecu 37 ans dans l'union la plus douce, et un fils qui sert depuis nombre d'années avec distinction dans la carrière diplomatique.

b) *Académicien extraordinaire.*

Une troisieme perte sensible que l'Académie a faite dans le cours des deux années, dont nous traçons l'histoire est celle de Mr. *Auguste Chrêtien Lehrberg*, Académicien extraordinaire pour l'Histoire, Conseiller de Cour, mort d'une hydropisie de poitrine le 23 Juillet 1813, dans la 43e année de son âge. Le Défunt nâquit à Dorpat le 7 Août 1770. La mort lui ayant ravi son père avant sa naissance, il a dû sa première éducation à la tendresse maternelle. Après que l'école publique de Dorpat lui eût donné la première instruction il se rendit à Jena et y fréquenta, pendant quatre ans, les leçons des Professeurs de cette Université avec tant de succès qu'un Gentilhomme Livonien, Mr. de *Bock*, qui avoit entendu parler de Mr. *Lehrberg* avec éloges, le fit achever ses études à Göttingue et voyager à ses fraix, et le nomma, à son retour d'Angleterre, Gouverneur de ses fils. Il vecut 17 ans dans ce poste et au sein d'une famille qui étoit devenue la sienne. En 1798 il épousa Mlle *Anne Eleonore Ehlertz*, fille d'un Négociant et membre du Magistrat à Dorpat, qui lui donna cinq enfans, dont une seule fille lui a survecu. En 1804 il se rendit à St. Pétersbourg avec la famille *Bock*, et y ayant fait la connoissance de quelques Académiciens qui eurent occasion de reconnoître ses profondes connoisances dans l'histoire ancienne, et surtout dans la géographie ancienne de Russie, il fit présenter à l'Académie un mémoire: *Geographische Beiträge zur Russischen Geschichte*, qui obtint l'approbation de l'Académie et lui valut la réception au nombre de ses Adjoints, laquelle eut lieu le 11 Mars 1807 et fut suivie le 7 Février 1810 de sa nomination au rang d'Académicien extraordinaire. Quoiqu'atteint, presque dès son entrée dans l'Académie, de la paralysie au point de se voir privé totalement de l'usage de ses jambes, son activité literaire ne connût point de bornes. Il a fait présenter successivement à l'Académie dix mémoires, dont chacun éclaircit un point important de l'histoire ancienne et qui ont été mis au jour par son ami et Collègue, Mr. l'Académicien *Krug*, et c'est d'après ces mémoires que le monde savant peut apprécier la perte que l'Académie a faite par la mort de ce Savant estimable et regretté.

c) *Membres honoraires de l'Intérieur.*

S. E. Mr. *André* de *Nartoff*, Conseiller privé actuel, Président de l'Académie Impériale Russe et de la Société libre économique, Chevalier de l'Ordre de St^e Anne de la 1re classe, Commandeur de l'ordre de Danebrog, Membre honoraire de l'Académie depuis le 15 Décembre 1796, mourût le 2 Avril 1813 dans la 77^e année de son âge.

Mr. *Thomas Tichorsky*, Docteur en Médecine, Membre du Conseil médicinal et de l'Académie IMPÉRIALE de Médecine et de Chirurgie, Conseiller d'Etat, Chevalier des Ordres de St^e Anne de la 2de classe et de St. Vladimir du 4^e dégré, mort à St. Pétersbourg le 2 Février 1814, dans la 81^{me} année de son âge. Le Défunt avoit été reçu membre de l'Académie le 15 Octobre 1798.

d) *Membres honoraires externes:*

Mr. le Comte *Louis La Grange*, Membre du Sénat Conservateur et de l'Institut national des Sciences et des Arts, Officier de la Légion d'honneur et grand croix de l'ordre de la réunion, autrefois successeur de *Léonard Euler* à l'Académie de Berlin, et après la mort de celui-ci le premier Géomètre de son tems, décéda à Paris le 10 Avril 1813, agé de 78 ans.

Mr. *Charles Bossut*, Membre de l'Institut national et un des premiers Géomètres de France, mort à Paris au mois de Janvier 1814, dans un âge très-avancé. Le Défunt avoit été reçu au nombre des membres honoraires de l'Académie le 13 Octobre 1778.

e) *Correspondant externe*:

Mr. *Maurice de Prasse*, Professeur des Mathématiques à l'Université de Leipsic. Le Défunt avoit été reçu le 19 Sept. 1796 et mourût à Leipsic le 21 Janvier 1814, agé de 45 ans.

II. Nouvelles réceptions.

a) *Au nombre des Adjoints.*

Mr. *Edouard Collins*, Elève de l'Académie de la 1re classe, élu unanimement Adjoint pour les Mathématiques, le 26 Janvier 1814.

b) *Au nombre des Membres honoraires de l'Intérieur.*

S. E. Mr. le Prince *Pierre Volkonski*, Lieutenant-Général, Aide-de-Camp Général de SA MAJESTÉ IMPERIALE et Chef de l'Etat-Major de Ses armées, Chevalier de plusieurs ordres; reçu le 27 Janvier 1813.

S. E. Mr. *Paul Tchitschagoff*, Amiral et Chevalier des Ordres de St. Alexandre Nevsky, de Ste Anne de la 1re classe et de St. George du 4e dégré; reçu le 16 Février 1814.

S. E. Mr *Guillaume de Richter*, Docteur en Médécine, Conseiller d'Etat actuel, Président de la Société physico-médicale à Moscou et Chevalier de l'ordre de Ste. Anne de la 2de classe; reçu le 16 Février 1814.

S. E. Mr. le Baronet *Jacques Wylié*, Conseiller d'Etat actuel, Médecin du Corps de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE et Président de l'Académie IMPÉRIALE de Médecine et de Chirurgie, Chevalier de l'Ordre de Ste Anne de la 1re classe et de St. Vladimir du 2d degré. Reçu le 25 Mai 1814.

S. E. Mr. *Alexandre Crichton*, Conseiller d'Etat actuel, Médecin du Corps de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE, Chevalier de l'Ordre de St. Vladimir du 2d degré; reçu le 25 Mai 1814.

Son Eminence Mgr. *Stanislas Sistrencewicz* de *Bohusz*, Archevêque Métropolitain de Mohilef sur le Borysthène, Président du Collège catholique Romain, Chevalier des

Ordres de St. André, de St. Alexandre Nevski, de St. Vladimir du 1r degré et de Ste Anne; reçu le 17 Août 1814.

c) *Au nombre des Membres honoraires externes.*

Mr. *Fréderic Guillaume Bessel*, Profeseur d'Astronomie et Directeur de l'Observatoire Royal à Königsberg en Prusse; reçu le 25 Mai 1814.

d) *Au nombre des Correspondans de l'Intérieur.*

Mr. *Joseph Hamel*, Docteur en Médecine; reçu le 23 Juin 1813.

Mr. *Joseph Samuel Littrow*, Professeur d'Astronomie à l'Université IMPÉRIALE de Kazan; reçu le 23 Décembre 1813.

Mr. *Alexandre Wilbrecht*, Capitaine en Chef des Mines de la 5e classe, Professeur de Mathématique au Corps IMPÉRIAL des Cadets des Mines, premier Géographe du Dépot IMPÉRIAL des cartes et du Directoire général des Ecoles de l'Empire, Chevalier des Ordres de Ste Anne de la 2de classe et de St. Vladimir du 4e dégré; reçu le 16 Février 1814.

Mr. *Charles Fréderic Ledebour*, Conseiller de Cour, Professeur d'Histoire naturelle et de Botanique à l'Université IMPÉRIALE de Dorpat; reçu le 25 Mai 1814.

Mr. *Jean André Lobenwein*, Conseiller de Collège, Doyen de la faculté de Médécine de l'Université IMPÉRIALE de Vilna; reçu le 17 Août 1814.

Mr. *Louis Henri Bojanus*, Professeur de Médécine vétérinaire à l'Université IMPÉRIALE de Vilna, Chevalier de l'Ordre de St. Vladimir du 4e degré; reçu le 17 Août 1814.

Mr. *Cornelius Auguste Reissig*, Conseiller de Cour et Chevalier de l'Ordre de Ste Anne de la 2de classe et de St. Vladimir du 4e degré; reçu le 17 Août 1814.

III. Election d'un membre du Comité d'Administration.

1813. Le 11 Août Mr. l'Académicien *Schubert* fut élu membre du Comité pour deux ans, à la place de Mr. l'Academicien *Sevastïanoff*.

1814 Le 17 Août S. E. Mr. l'Académicien *Fufs*, pour deux ans, à la place de Mr. l'Académicien *Severguine*.

IV. Distinctions litéraires.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Tilésius* fut reçu au nombre des Membres honoraires externes de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.

S. E. Mr. l'Académicien *Ozeretskovsky*, fut reçu le 17 Novembre 1813 au nombre des Associés honoraires de l'Académie IMPÉRIALE de Médecine et de Chirurgie.

Mr. l' Académicien extraordinaire *Schlegelmilch* fut reçu au nombre des membres honoraires non-résidans de la Société IMPÉRIALE des Naturalistes de Moscou.

Mr. l' Académicien extraordinaire *Nassé* fut reçu Correspondant de la Société IMPÉRIALE libre économique, et membre honoraire de la Société physico-médicale à Moscou.

V. Gratifications, Décorations et Avancemens civils.

S. E. Mgr. le Ministre ordonna au Comité d'Administration de payer à la veuve et aux enfans de feu Mr. l'Académicien *Gourieff* une gratification de 2000 Roubles, que SA MAJESTÉ L'EMPEREUR avoit daigné assigner au dit Académicien, pour le récompenser de quelques travaux particuliers dont il avoit été chargé.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Tilésius* fut décoré de l'ordre de St. Vladimir du 4e dégré, le 21 Sept. 1814.

III.

PRÉSENS FAITS À L'ACADÉMIE.

1. *Pour la Bibliothèque:*

De la part de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm:

1°) Kongl. Vetenskaps Akademiens Nya Handlingar. Julius — December 1811, Januar — December 1812. 8°.
2°) Kongl. Vetenskaps Akademiens Handlingar af Ar 1813. Stockholm 1813. 8°.

De la part de l'Académie IMPÉRIALE Russe:

1°) Сочиненія и переводы издаваемые Императорскою Россійскою Академіею. Часть VI. С. П. бургъ 1813. 8°.

2°) Разсужденіе о сочиненіи: Сходство между Санскритскимъ и Россійскимъ языками, и о произхожденіи Славянскаго народа. сочин. Ив. Леванды. С. П. бургъ 1812 8°.

3°) Ликей, или Кругъ словесности древней и новой; Соч. П. Ф. Лагарпа; перев. Дм. Соколовымъ. Часть 5я. С. П. бургъ 1812 8°.

4°) Ночь на размышленія. Стихотвореніе Князя Сергія Шихматова. С. П. бургъ 1814. 8°.

6°) Краткая и справедливая повѣсть о пагубныхъ Наполеона Бонапарте помыслахъ и проч: перевелъ съ Нѣмецкаго языка Александръ Шишковъ. С. П. бургъ 1814. 8°.

De la part de la Société Royale des Sciences d'Edinbourg:

1°) Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. VI. Edinburgh 1812. 4°.
2°) Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. VII. Part 1. Edinburgh 1814. 4°.

De la part de la Société Royale des Sciences de Londres:

1°) Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the years 1809 Part 2; 1810 Part 1 and 2; 1811 Part 1 and 2; 1812. Part 1. London 1809 — 1812. 4°.

2°) Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year 1812. Part 2; for the year 1813 Part 1 and 2. London 1812 and 1813. Trois Vol. in 4°.

De la part de la Société des Amis Scrutateurs de la nature à Berlin:

1°) Der Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin Magazin für die neuesten Entdeckungen in der gesammten Naturkunde. Vten Jahrgangs 2s Quartal. Berlin 1811. 4°.

2°) Der Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin Magazin für die neuesten Entdeckungen in der gesammten Naturkunde; VIten. Bandes 1s, 2s, und 3s Quartal. Berlin 1812. 4°.

De la part de la Société biblique à Londres:

1°) The ninth report of the British and foreign Bible Society. MDCCCIII, with an appendix and a list of subscribers and benefactors. London 1813. 8°.

2°) Ἡ καινὴ διαθήκη τοῦ Κυρίου καὶ Σωτῆρος ἡμῶν Ἰησοῦ Χριστοῦ δίγλωττος. Ἐν Λονδινῳ. 1810. 8°.

De la part du Comité de Censure de l'Université IMPÉRIALE de Dorpat:

1°) 61 diverses brochures imprimées.

2°) Trente trois ouvrages imprimés depuis le 15 Octobre 1813.

3°) Trente et un ouvrages imprimés depuis le 8 Mai 1814.

De la part de la Société IMPÉRIALE des Naturalistes de Moscou:

Mémoires de la Société IMPÉRIALE des Naturalistes de Moscou. Tome IV. Moscou 1813. 4°.

De la part du Bureau des Longitudes:

Observed Transits of the fixed Stars and Planets over the Meridian, in the years 1799, 1806, 1807, 1808 and 1810.

De la part de l'Université IMPÉRIALE de Dorpat:

Praelectiones Semestres in Universitate litterarum Caesarea, quae Dorpati constituta est; a Calendis Febr. 1814 habendae.

De la part de la Société des Sciences de Kharkoff:

Уставъ Харковскаго общества Наукъ.

De la part de l'Académie Royale de Berlin:

Abhandlungen der Historisch-philologischen Klasse der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften, aus den Jahren 1804—1811. Berlin 1814. 4°.

De la part du Département de la Marine:

Морской мѣсяцословъ на лѣто 1815. С. П. бургъ 1814. 8°.

De la part de l'Académie de Médecine et de Chirurgie résidante à Moscou:

1°) Діэтетика, или наука о сохраненіи здоровья лошадей, изданная Профессоромъ при Берлинскомъ ветеринарномъ училищѣ Науманомъ; переводъ съ Нѣмецкаго. Москва 1814. 8°.

2°) Описаніе и лѣченіе обыкновенныхъ дѣтскихъ болѣзней. Сочиненіе Доктора Я Шерера, переведено съ Нѣмецкаго С. Левицкимъ. Москва 1814. 8°.

De la part de la Société Royale de Göttingue:

Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis recentiores. Vol. II ad annos 1811—1813. Göttingae 1813. 4°.

De la part de l'Académie Royale des Sciences de Munic:

Denkschriften der Königl. Akademie der Wissenschaften zu München, für das Jahr 1812. München 1814. 4°.

De la part de Mr. *Vater*, Professeur à Königsberg:

1°) Königsberger Archiv für Philosophie, Theologie, Sprachkunde und Geschichte; Jahrgang 1812. 4tes Stück. Königsberg 1812. 8°.

2°) Königsberger Archiv für Naturwissenschaften und Mathematik. 4tes Stück. Königsberg 1812. 8°.

De la part du Capitaine de la Flotte du 1^{r}. rang Mr. de Krusenstern:

1°) Путешествіе вокругъ свѣта въ 1803, 4, 5 и 1806 годахъ, по повелѣнію Его Императорскаго Величества, на корабляхъ Надеждѣ и Невѣ и проч. Часть III. С. П. бургъ 1812. 4°.

2°) Mémoire sur une carte du détroit de la Sonde et de la rade de Batavia; par le Capitaine de Krusenstern etc. St. Pétersbourg 1813. 4°.

3°) Wörter-Sammlungen aus den Sprachen einiger Völker des östlichen Asiens und der Nordwestküste von Amerika; bekannt gemacht von A. J. von Krusenstern etc. St. Petersburg 1810. 4°.

4°) Атласъ къ путешествію вокругъ свѣта Капитана Крузенштерна. С. П. бургъ 1813. Deux Volum. fol. grand Impérial.

De la part de Mr. *Fischer,* Directeur de la Société des Naturalistes à Moscou:

1°) Изслѣдованіе объ ископаемыхъ въ Московской Губерніи находящихся. Москва 1812. 8°.

2°) Zoognosia, tabulis synopticis illustrata, in usum praelectionum Academiae Imp. medico-chirurgicae Mosquensis. Auctore G. Fischer. Tom 1 et 2. Mosquae 1813.

De la part de Son Eminence Mgr. le Métropolitain Stanislave Siestrencewicz de Bohusz:

1°) Recherches sur l'origine des Sarmates, des Esclavons et des Slaves. St. Pétersbourg 1812. 8°.

2°) Table des noms propres qui indiquent les matières contenues dans les recherches historiques sur l'origine des Sarmates, des Esclavons et des Slaves. St. Pétersbourg 1813. 8°.

De la part de Mr. *Etter*:

1°) Il regno degli Slavi, hoggi corrottamente detti Shiavoni, Historia di Don Mauro Orbini. In Sesaro 1601. fol. min.

2°) A companion of the London Museum and Pantheon; by W. Bullok London 1813. 8°.

De la part de Mr. le Professeur et Chevalier Thunberg à Upsala:

1°) Facts, observations and conjectures relative to the generation of the Opossum of North-America. In a letter from Prof. Barton to Mr. Roume of Paris. Philadelphia 1806. 8°.

2°) A discourse on some of the principal desiderata in Natural history, and on the best means of promoting the tudy of this science in the united States; by Benjamin Barton. Philadelphia 1807. 8°.

3°) Annales Botanici, redacti cura Dominici Viviani. Vol. 1. pars 2. Genuae 1804. 8°.

4°) Plusieurs dissertations et programmes de l'Université d'Upsala, au nombre de dix.

5°) Caroli Petri Thunberg etc. Flora Capensis. Volumen primum. Upsaliae 1813. 8°.

De la part de Mr. Patterson, Membre et Agent de la Société biblique à Londres:

1°) Eight reports of the Britisch and foreign Bible Society, for the years 1805 — 1812. 4 Volumes. London 1805. 8°.

2°) The tenth report of the British and foreign Bible-Society. London 8°.

De la part Mr. le Conseiller d'Etat actuel et Chev. Dshounkovski:

Краткое Описаніе важнѣйшихъ красильныхъ растѣній и способъ разведенія ихъ въ Россіи. С. П. бургъ 1812. 8°.

De la part de Mr. le Professeur Morgenstern à Dorpat:

1°) Auszüge aus den Tagebüchern und Papieren eines Reisenden. Italien. 1sten Bandes 3tes Heft. Dorpat 1813. 8°.

2°) Praelectiones Semestres in Universitate litterarum Caesarea quae Dorpati constituta est, habendae etc.

3°) Zwei Reden am Sarge Sr. Durchlaucht des Russisch-Kaiserlichen General - Feld - Marchall's Fürsten Golenischtschef-Kutusoff - Smolenskoi, am $\frac{14}{26}$ Mai 1813 zu Dorpat gehalten von D. Karl Morgenstern. Dorpat 1813.

4°) Dörptische Beyträge für Freunde der Philosophie, Litteratur und Kunst. Herausgegeben von Karl Morgenstern 1813. 1ste Hälfte. Dorpat 1813. 8°.

5°) Klopstock als vaterländischer Dichter. Eine Vorlesung gehalten von C. Morgenstern. Dorpat 1814. 4°.

De la part de Mr. William Maltby à Londres:

Catalogue of the Library of the London Institution. London 1813. 8°.

De la part de Mr. l'Académicien extraordinaire Langsdorff:

1°) Some account of the Herbarium of Professor Pallas; by Aylmer Bourke Lambert Esq. from the Transactions of the Linnean Society. Vol. X.

2°) Discurso sobre a utilidade de Instituçao de Jardins nas provincias de Brazil; por Man. Arruda da Camara etc. Rio de Janeiro 1810. 8°.

3°) Dissertacâo sobre as plantas de Brazil; por Manoël Arruda da Camara etc. Rio de Janeiro 1810. 8°.

De la part de Mr. le Colonnel des Ingénieurs de Waxell:

Brookshaw's Pomona Britannica, or the Nobleman and Gentleman's Fruit-Repository Nr. XX, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, XXX, (avec un cahier supplémentaire et le texte de l'ouvrage); gr. Roy. fol.

De la part de Mr. l'Académicien extraordinaire Tilésius:

Naturhistorische Früchte der ersten Kaiserlich-Russischen unter dem Kommando des Herrn v. Krusenstern glücklich vollbrachten Erdumseglung, gesammelt von Dr. Tilesius. Erstes Heft, St. Petersburg 1813. 4°.

De la part de Mr. le Professeur Struve à Dorpat:

De geographica positione Speculae astronomicae Dorpatensis; Auctore H. F. W. Struve. Mitaviae 1813. 4°.

De la part de Mr. le Chevalier de la Coudraye:

1°) Теоретическіе и практическіе уроки для наблюденія долготы на морѣ, посредствомъ разстоянія луны отъ солнца или отъ звѣздъ; Сочиненные Г. Шевалье дела Кудре. С. П. бургъ 1813. 8°.

2°) Réponse aux réflexions de Mr. le Baron d'Eggers sur la nouvelle noblesse héréditaire en France. St. Pétersbourg 1813. 8°.

De la part de Mr. le Conseiller d'Etat actuel et Chev. Richter:

1°) Commentationes Societatis physico-medicae, apud Universitatem litterarum Caesaream Mosquensem institutae. Vol. I. pars 1 et 2. Mosquae 1808 — 1811. 4°.

2°) Geschichte der Medizin in Russland, entworfen von Dr. Wilhelm Mich. Richter. 1ter Theil. Moskwa 1813. 8°.

3°) Медико Физическій журналъ, или Труды Общества соревнованія врачебныхъ и Физическихъ наукъ. Часть 1. Москва 1808. 8°.

4°) Исторія Медицины въ Россіи. Часть 1. Москва 1814. 8°.

De la part de Mr. le Conseiller privé Hermbstädt:

Chemische Grundsätze der Kunst Bier zu brauen, von S. F. Hermbstädt. Berlin 1814. 8°.

De la part de Mr. le Prof. Liebau à Mitau:

1°) Ueber die Hauptbegebenheit in der Hekabe des Euripides. Ein Versuch von Dr. H. C. Liebau. Mitau 1811. 4°.

2°) Einige Szenen aus dem Philoctetes des Sophocles, übersetzt von Dr. H. C. Liebau. Mitau 1813. 4°.

De la part de S. E. Mr. Conseiller d'État actuel Korniloff:

1°) Сигналы, посредствомъ коихъ производятся тактическія дѣйствія гребнаго Флота. Сочинены Капитаномъ 1го ранга Корниловымъ. С. П. бургъ 1800. deux Vol. in folio.

2°) Краткое Сигналопроизводство гребнаго Флота, выбранное изъ сигнальной Книги и проч. 1801. 8°.

De la part de Mr. Buldakoff, Directeur de la Compagnie Russe Américaine:

1°) Sept livres sur divers sujets, en langue Japonaise.
2°) Deux livres de Comptoir, en Japonais.

De la part de Mr. le Grand-Baillif Schröter:

Beobachtungen des grofsen Cometen von 1807, samt einem Nachtrage zu den aphroditographischen Fragmenten. Göttingen 1811. 8°.

De la part de S. E. Mr. le Conseiller privé et Sénateur Golénichtcheff-Koutousoff:

1°) Ода на истребленіе враговъ и изгнаніе ихъ изъ предѣловъ любезнаго отечества; соч. Павла Г. Кутузова. Москва 1813. 4°.

2°) Радостная пѣснь во славу безсмертныхъ подвиговъ великаго Государя Александра I. Соч. П. Гол. Кутузова. Москва 1814. 4°.

3°) Ода на покореніе Столицы Франціи. соч. П. Гол. Кутузовымъ. Москва 1814. 4°.

De la part de Mr. Sage:

1°) Institutions de Physique; par B. G. Sage. Tome I. II. III. et Supplément. Paris 1811. 8°.

2°) Opuscules de Physique; par B. G. Sage. Paris 1813. 8°.

3°) Tableau comparé de la conduite qu'ont tenue envers moi les Ministres de l'ancien Regime, avec celle des Ministres du nouveau Regime; par B. G. Sage. Paris 1814. 8°.

De la part de Mr. le Comte de Rumford:

1°) Recherches sur le bois et le charbon; par le Comte de Rumford. Paris 1813. 8°.

2°) Recherches sur la chaleur développée dans la combustion et dans la condensation des vapeurs; par le Comte de Rumford. Paris 1813. 8°.

De la part de Mr. le Conseiller privé et Chevalier Léonhard à Hanau:

Taschenbuch für die gesammte Mineralogie. VIIten Jahrg. 1te und 2te Abtheilung. Frankf. a. M. 1813. 8°.

De la part de Mr. le Prof. Giese à Kharkoff:

Фр. Гизе Всеобщая Химія для учащихся. Часть III. Харьковъ 1814. 8°.

De la part de Mr. le Prof. Neumann:

1°) Prinzipien der Politik. Ein Fragment von Prof. Joh. Neumann. Dorpat 1814. 8°.

2°) Начальныя основанія уголовнаго права; соч. Проф. Ивана Неймана. С. П. бургъ. 1814. 8°.

De la part de Mr. le Conseiller d'Etat de Zimmermann:

Australien, in Hinsicht der Erd-Menschen- und Producten-kunde, nebst einer allgemeinem Darstellung des grossen Oceans, gewöhnlich das Südmeer genannt. 1ten Bandes 1te und 2te Abtheilung von E. W. A. von Zimmermann. Hamburg 1810. 8°.

De la part de Mr. le Comte Sierakovsky, Recteur de l'Université de Cracovie:

Architektura obeymuiaca wszelki Gatunek murowania i budowania Tom 1 et 2. w Krakowie 1812. fol.

De la part de Mr. l'Académicien Bode:

J. E. Bode's Erläuterungen über die Einrichtung und den Gebrauch seiner Astronomischen Jahrbücher, nebst einem Verzeichniss von 1025 Sternen, nach Piazzi's Beobachtungen. Berlin 1811. 8°.

De la part des Auteurs ou Éditeurs:

De nova explicatione phaenomeni elasticitatis corporum rigidorum; Auctore G. M. Pauker. Dorpati 1813. 4°.

Ueber den Zweck und die Organisation der Thier-Arzeney-schulen; von Dr. L. Bojanus. Frankf a. M. 1805. 8°.

Ueber die Ausrottung der Rindviehpest; von L. Bojanus. Riga 1810. 8°.

Anleitung zur Kenntniss und Behandlung der wichtigsten Seuchen unter dem Rindvieh und den Pferden, entworfen von L. Bojanus. Riga 1810. 8°.

Douze dissertations académiques; par Mr. Hälström, Professeur à l'Université IMPÉRIALE d'Abo.

Fragments of the natural history of Pensylvania; by Benjamin Smith-Barton Part 1. Philadelphia 1799. fol.

Hints on the Etymology of certain english words, and on their affinity to words in the languages of different European, Asiatik and American nations; in a letter from Dr. Barton to Dr. Thomas Beddoes.

A memoir concerning the fascinating faculty, which has been ascribed to the Rattle-Snake, and other American Serpents; by Benj. Smith-Barton. Philadelphia 1796. 8°.

Supplement to a memoir, concerning the fascinating faculty, which has been ascribed to the Rattle-Snake and other American Serpents. In a letter to Prof Zimmermann.

Facts, observations and conjectures relative to the generation of the Opossum of North-America. In a letter from Prof. Barton to Mr. Roume of Paris. Philad. 1806. 8°.

A discourse on some of the principal desiderata in natural history, and on the best means of promoting the study of this science in the united States, by Benj. Smith-Barton. Philad. 1807. 8°.

Slovnik Jezyka Polskiego, przez M. Samuela Bogomila Linde. Vol. V. R — T. w Warszawie 1812. 4°.

De summatione serierum secundum datam legem differentiatarum. Auctore C. H. Kupfer. Mitaviae 1813. 4°.

Chemische Untersuchungen, mineralischer, vegetabilischer und animalischer Substanzen. 3te Fortsetzung des chemischen Laboratoriums; von I. F. v. John etc. Berlin 1813. 8°.

British Mineralogy, or coloured figures to elucidate the Mineralogy of Great-Britain, by James Sowerby. Nr. XXVIII et XXIX. 1805.

A new elucidation of colours, original, prismatik and material etc.; by I. Sowerby. London 1809. 4°.

Observations on the effects of Magnesia, in preventing an increased formation of uric acid; with some remarks on the composition of the urine; by William Brande. London 1810. 4°.

Additional observations on the effects of Magnesia; by William Brande. London 1813. 4°.

Experiments to ascertain the state in which spirit exists in fermented liquors; by W. Brande. London 1811. 4°.

Chemical Researches on the blod and some other animal fluids; by William Brande. London 1812. 4°.

Formulae linearum subtangentium ac subnormalium, tangentium ac normalium, castigatae et diligentius, quam fieri solet, explicatae a Fr. Th. Busse. Lipsiae 1798. 8°.

Gang und Gröſse der Weichheit des Wassers, aus den Versuchen des Herrn v. Zimmermann gefolgert, von F. G. Busse. Leipzig 1805. 8°.

Vergleichung zwischen Carnot's und meiner Ansicht der Algebra, und unserer beiderseitigen vorgeschlagenen Abhelfung ihrer Unrichtigkeit; von F. G. Busse. Freyberg 1804. 8°.

Neue Methode des Gröſsten und Kleinsten, nebst Beurtheilung und einiger Verbesserung des bisherigen Systems; von F. G. Busse. Freyberg 1808. 8°.

Erster Unterricht in der algebraischen Auflösung arithmetischer und geometrischer Aufgaben; von F. G. Busse. Erster Theil. Freyberg 1808. 8°.

Etrennes chronométriques pour l'an 1811 etc. par A. Janvier. Paris 1810. 12°.

Essai sur les horloges publiques etc.; par A. Janvier. Paris 1811. 8°.

Des révolutions des corps célestes par le Mécanisme des rouages; par A. Janvier. Paris 1812. 4°.

Thoughts on the expediency of disclosing the progresses of manufactures; by John Clennel. Newcastle upon Tine. 1807. 8°.

The new agricultural and commercial Magazine, or general Dispository of arts, Manufactures and Commerce; by John Clennel. Nr. 1 — 15. London 1811. 1812. 8°.

Grammaire de la langue arabe, vulgaire et littérale, ouvrage posthume de Mr. Savary; publié par L. Langles. Paris 1813. 4°.

Notice de quelques ouvrages de Littérature Indienne, publiés en Bengale. Paris 1814. 8°.

Praktische Grammatik der Russischen Sprache, in Tabellen und Regeln; von Dr. Joh. Severin Vater. Leipzig 1808. 8°.

Ueber Gasometrie, nebst einigen Versuchen über die Verschiedbarkeit der Gase. Eine von der philosophischen Facultät zu Dorpat gekrönte Preisschrift, von Fried. Parrot. Dorpat 1814 8°.

2. *Pour le Cabinet de Curiosités.*

De la part de Mr. Ogneff, Directeur des Écoles du Gouvernement de Poltava:

Une toison d'agneau d'un beau jaune foncé.

De la part du Cabinet de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE:

1°) Un crane de Rhinocéros, du poids de 50 livres, trouvé dans le district de Kolyvan.

2°) Deux jumeaux en esprit de vin, dont l'un n'a aucun signe apparent de sexe.

Envoyé par l'Empailleur Philippoff à Astrachan:

Vingt-huit oiseaux empaillés.

Huit peaux d'animaux.

Une peau de sanglier.

Une peau de l'Antilope Saïga.

Une peau de Pélican.

De la part de Mr. l'Académicien extraordinaire Langsdorff à Rio de Janeiro:

Trente-six feuilles représentans des papillons, dont les écailles mêmes sont appliquées sur le papier, selon une méthode nouvelle et particulière au donateur.

De la part du marchand Chabounine à Kola:

1°) Squalus Canicula.

2°) Raja clavata.

3°) Spongia Norvegica.

De la part de la Régence médicinale du Gouvernement de Koursk:

Deux Jumeaux mâles joints par les côtés, avec la déscription.

De la part de Mr. Buldakoff, Directeur de la Compagnie-Russe Américaine:

1°) Deux petits temples d'idoles, de la baie de Yaniva de l'isle de Saghaline.

2°) Une caisse vernissée remplie des bougies de cire végétale.

3°) Une coquille enchassée, à l'usage des prêtres ambulans.

4°) Un bonnet à l'usage des mêmes.

5°) Un trébuchet ou balance.

6°) Un collier de défenses de sanglier, des îles de Mendoza.

7°) Une machoire de Dauphin (Delphimus Orca) de la mer pacifique.

8°) Un poisson de bois à deux têtes, tiré d'une baleine prise aux environs de la forteresse de Novo-Archangelsk.

9°) Une plante épineuse des îles de Sandwich.

10°) Un javelot à longue manche.

De la part du Correspondant, Mr. le Conseiller de Collèges Lokhtine:

Une défense et une dent molaire de Mamouth, trouvées dans le cercle de Tchernoyar.

De la part de Mr. le Chevalier Thunberg à Upsala:

Deux collections de plantes sêches exotiques, contenant des plantes rares du Cap de bonne Espérance, de la nouvelle Hollande, de la nouvelle Wales etc.

3. *Pour le Cabinet de Médailles.*

De la part de S. E. Mr. le Comte d'Armfeld, Chancelier de l'Université d'Åbo:

Un exemplaire en argent de la médaille frappée aux frais de l'Université, en mémoire des bienfaits que SA MAJESTÉ l'EMPÉREUR a daigné lui conférer.

4. *Pour le Cabinet de Minéralogie.*

De la part de Mr. le Minéralogiste-Etter, Correspondant de l'Académie:

Un morceau de Molybdène mélé avec de la Hornblende et du Feldspath compacte.

De la part de Mr. l'Académicien Zakharoff:

1°) Une pierre d'étain mélée de talc transparent et de Schörlite, pésant 4 livres.

2°) Une pierre d'étain compacte cristallisée en partie, pésant 3 livres.

Ces pièces ont été tirées du district de Nertchinsk de la rive gauche de l'Onon.

De la part de Mr. Sowerby à Londres:

Une gravure, représentant en grandeur naturelle trois météorolithes tombés: en Yorkschire le 13 Décembre 1785; à Possile en Ecosse le 5 Avril 1804; et à Tipperary en Irlande au mois d'Août 1810.

De la part du Correspondant, Mr. le Conseiller de Collège Lokhtine:

Deux morceaux d'argille blanche, parsemés de feuilles de plantes pétrifiées, trouvés aux eaux minérales du Caucase.

De la part de Mr. le Conseiller privé et Chevalier Léonhard à Hanau:

Deux modeles d'une représentation plastique de la forme externe des montagnes, avec le texte explicatif de ces modèles.

5. *Pour la Bibliothèque de l'Observatoire:*

De la part de Mr. le Professeur Bessel:

Einige Resultate aus Bradley's Beobachtungen gezogen; von F. W. Bessel; Königsberg 1813.

De la part de Mr. l'Académicien Bode à Berlin:

1°) Astronomiches Jahrbuch für das Jahr 1815; herausgegeben von J. E. Bode. Berlin 1812. 8°.

2°) Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1816; herausgegeben von J. E. Bode. Berlin 1813. 8°.

3°) Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1817. Berlin 1814. 8°.

De la part de Mr. le Conseiller de Cour et Chevalier Reissig:

Une machine déclinatoire, de l'invention de ce savant et habile Artiste, supérieurement bien exécutée.

IV.

MÉMOIRES ET AUTRES OUVRAGES MANUSCRITS, PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

1813.

Neue Analyse des Smolenskischen Meteorsteins; par Mr. Schérer.

Ueber einen handschriftlichen Chronographen in der Bibliothek der Ermitage, als eine von den Quellen der Niconischen Chronik in der Akademischen Bibliothek. Ein Beitrag zur Kritik der Russischen Jahrbücher; par Mr. Krug.

Выписка изъ донесенія Г. Фигюйе Монпельерскому Обществу Знаніи и Искуствъ, о способѣ дѣлать сиропъ изъ кукурузы или пшенички; par Mr. Zagorski.

Continuation du Journal des observations astronomiques; par Mr. Wisnievsky.

De Cancris Camtschaticis; par Mr. Tilésius.

Histoire de l'Académie Impériale des Sciences. Année 1812; par Mr. Fufs.

Uebersicht der Witterung zu St. Petersburg während 20 Jahren, von 1792 bis 1812; par Mr. Pétroff.

Ueber die anzuwendenden Mittel den Gefahren vorzubeugen, die durch Anhäufung von Cadavern entstehen können, und über die Verbesserung der Luft bei epidemischen Krankheiten; par Mr. Nassé.

Résultats tirés des tableaux métriques depuis 1796 jusqu'à 1809, relevés sur ceux qui confessent la réligion grècqne en Russie; par Mr. Herrmann.

О произхожденіи и образованіи безоардовъ во внутренностяхъ животныхъ. Сочиненіе Вокелена; par Mr. Sévastianoff.

О строеніи радужной оболочки морскаго пса. Наблюденіе Г. Гигу, Доктора Медицины и Хирургіи въ Ливорнѣ; par Mr. Zagorski.

Объ озерныхъ соляхъ или самосадкахъ: 1°) Астраханской; 2°) Уральской; 3°) Маныцкой; 4°) Крымской; 5°) Коряковской; 6°) Эбелейской; 7°) Туазакульской; 8°) Борзинской; par Mr. Ozeretskovski.

Описаніе горъ около Тифлиса лежащихъ; par Mr. Schlégelmilch.

О Вареніи кушанья посредствомъ паровъ; par Mr. Zagorski.

Einfache und wolfeile Zubereitung des unglasurten irdenen Geschirr's, wodurch selbiges nicht allein wasserdicht, sondern auch geschickt gemacht wird die verdünnten Mineral-Säuren darin zu kochen; par Mr. Kirchhof.

Essai sur les ruines de Saratchik; par Mr. Hermann à Pskof.

Ein neues Eudiometer, oder ein äusserst schnell wirkendes eudiometrisches Mittel, nebst Bemerkungen über die Phosphorescenz; par Mr. le Prof. Grindel à Dorpat.

Clavis Botanices antiquioris, sive synonyma auctorum Ante-Linneanorum, nominibus genericis recentiorum accomodata (Plantae phaenogamicae); par Mr. le Docteur Trinius.

О металлу подобныхъ тѣлахъ изъ огнепостоянныхъ щелочей, ихъ способѣ приготовленія, свойствахъ и содержаніи къ другимъ тѣламъ; par Mr. le Docteur Hamel.

Минералогическія примѣчанія объ островѣ Готландѣ, на Балтійскомъ морѣ; par Mr. Séverguine.

О выгоднѣйшемъ употребленіи теплотвора при винокуреніи; par Mr. Zakharoff.

Ueber die Wolochen Nestors. Ein Bruchstück kritischer Vorarbeiten zur Geschichte der Russen; par Mr. Ewers à Dorpat.

Основанія всеобщей политической Исторіи; par Mr. Kaidanoff.

Versuche über die Erzeugung des sogenannten Kali-Metall's (Kalimetalloïd, Kalihydroidete) aus blossem Wasser; par Mr. Grindel à Dorpat.

Краткое изложеніе различныхъ способовъ изъяснять диффеpенціальное исчисленіе; par Mr. Gourieff.

Сферическая Тригонометрія; par le même.

Plantarum nondum cognitarum Decas prima (iconibus illustrata); par Mr. Hermann à Pskof.

De foëtus canini velamentis, imprimis de ipsius membrana allantoïde. Observatio anatomica iconibus illustrata; par Mr. le Prof. Bojanus à Vilna.

Физіологическое разсужденіе о причинахъ родимыхъ пятенъ и другихъ пороковъ устроенія въ человѣческомъ тѣлѣ; par Mr. Zagorski.

Philosophia botanica, praelectionibus tyronum botanicorum accomodata; par Mr Smélovski.

Наблюденія надъ свѣтящимися животными; par Mr. Sévastianoff.

Continuation du Journal d'Observations astronomiques; par Mr. Wisnievski.

De derivationibus analyticis dissertatio; par Mr. le Professeur Pauker à Mitau.

Allgemeine Russische Sterblichkeits-Ordnung, von 1ten bis 107ten Jahr; par Mr. Muhlert, Instituteur à Wyborg.

Замѣчанія хозяйственныя и до климата относящіяся, учиненныя въ 1811 году въ Барнаулѣ; par Mr. Spaski.

Methodus facilior investigandi novas ill s series, quibus Eulerus sinum et cosinum anguli multipli postremo exprimere docuit; par Mr. Fuss.

Выписка учиненнымъ въ С. Петербургѣ, при Императорской Академіи Наукъ, наблюденіямъ о погодахъ и воздушныхъ явленіяхъ и перемѣнахъ въ 1812 году; par Mr. l'Elève Tarkhanoff.

Démonstration du théorème de Taylor; par Mr. Schubert.

Chemische Analyse des Doroninskischen Aërolithen; par Mr. Schérer.

Investigatio terminorum seriei ex datis productis quotcunque terminorum contiguorum; par Mr. Fuss.

Mémoire sur le théoréme de Taylor; par Mr. Werkmeister, Instituteur à Moscou.

Abbildung und Beschreibung der sonderbaren Südamerikanischen Handblume (*Cheirostemon Platanoïdes Humboldi*) und ihrer innern Structur insbesondere; par Mr. Tilésius.

Erklärung aller in den Russischen Chroniken vorkommenden Namen von Sonntagen, nach ihnen benannten Wochen und Heiligentage, mit genauer Bestimmung der Zeit in die sie fielen; par Mr. Krug.

Beschreibung eines neuen Alkoholometers, nebst einer vol-

Réflexions ultérieures sur les fractions continues périodiques qui expriment les racines carrées des nombres entiers, et sur leur usage dans la recherche des facteurs des nombres; par Mr. Kausler.

Continuation du Journal d'observations astronomiques; par Mr. Wisnievski.

О холодильникахъ и ихъ умозрѣніи; par Mr. Zakharoff.

Outre cela l'Académie à reçu regulièrement dans la courant de l'année les observations météorologiques, faites à Astrakhan, Nicolayeff et Cathérinbourg.

1814.

De la monnaie de cuivre, et particulièrement de celle de Russie. Première Section. De la monnaie de cuivre en général; par Mr. Storch.

Начальныя основанія сравнительной Анатоміи І. Ф. Блюманбаха; par Mr. Sévastianoff.

О извлекаемомъ веществѣ животныхъ и прозябаемыхъ тѣлъ; par Mr. Zagorski.

Résumé des affaires scientifiques traitées dans les séances ordinaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences, dans le courant de l'année 1813; par Mr. Fuſs.

Decades sex plantarum novarum in Imperio Rossico indigenarum; par Mr. Ledebour.

Recherche d'une ellipse dont les dimensions approchent le plus des déterminations des arcs de méridien faites au Pérou, en France, en Angleterre et en Lapponie; par Mr. Wilbrecht.

Краткое изчисленіе минераловъ найденныхъ Оберъ-Бергъ-Мейстеромъ Эйхфельдомъ въ Молдавіи, Валахіи и Бесарабской Области.

Критическое разсмотрѣніе рода рыбъ конькомъ или пегасомъ называемаго (Pegasus Linn.); par Mr. Sévastianoff.

Extrait des observations météorologiques faites à Astrakhan, depuis 1804 jusqu'à 1814; par Mr. Lokhtine.

Données statistiques sur le Commerce de l'Intérieur de la Russie, qui s'est fait par eau en 1813; par Mr. Herrmann.

О вываренныхъ соляхъ и добываемыхъ воздушнымъ градированіемъ; par Mr. Ozeretskovski.

Минералогическое обозрѣніе сѣверовосточной части Памбакскихъ горъ; par Mr. Schlégelmilch.

Continuation du Journal des observations astronomiques, depuis le 26. Janvier jusqu'au 13. Mars, par Mr. Wisnievski.

Tableau général qui indique la part que chaque branche de l'industrie nationale a eu dans le commerce qui s'est fait par eau en 1813; par Mr. Herrmann.

Ueber die Reinigung der inländischen Cochenille (Червецъ, Coccus polonicus) durch Befreyung derselben von einer fetten Substanz, welche ihre Anwendung in der Färbekunst erschwert; par Mr. Kirchhof.

Выписка учиненнымъ въ С. Петербургѣ при Императорской Академіи Наукъ наблюденіямъ о погодахъ и воздушныхъ явленіяхъ и переменахъ въ 1813 году; par Mr. l'Elève Tarkhanoff.

Disquisitiones ad theoriam epicyclorum pertinentes; par Mr. Littrow.

Von einer merkwürdigen Verknöcherung der Brustbeinmuskeln einer Henne; par Mr. Tilésius.

Réflexions sur la théorie du calcul différentiel; par. Mr. Schubert.

Естественныя произведенія и примѣчанія достойныя вещи въ Царствѣ Ископаемыхъ; par Mr. Zinovieff.

О рыбѣ железницѣ иначе бѣшеной называемой; par Mr. Zinovieff.

Обозрѣніе перемѣны погоды въ теченіи послѣднихъ шести мѣсяцовъ 1812 года; par Mr. Zinovieff à Kazan.

Примѣчанія о вѣроятной древности и образованіи различныхъ хребтовъ горъ Россійскихъ; par Mr. Séverguine.

О винокуренныхъ колпакахъ; par Mr. Zakharoff.

De monstrosa genitalium deformitate et spina befida Commentatio ; par Mr. Lobenwein.

De la monnaie de cuivre, et particulièrement de celle de Russie. Section II. De la monnaie de cuivre russe, dans son rapport avec la monnaie d'argent; par Mr. Storch.

Observations astronomiques, faites à l'Observatoire de l'Université IMPÉRIALE de Vilna, depuis le commencement de l'an 1814 jusqu'au mois de Juillet ; par Mr. Sniadecki.

Coleoptera Capensia, antennis lamellatis, sive clava fissili instructa; par Mr. Thunberg.

De summatione serierum; par Mr. Littrow.

Gedrängter Auszug aus den Mathematischen, physisch-mathematischen, physicalischen und astronomischen Abhandlungens der Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, auf Veranstaltung derselben, von einem ihrer Mitglieder verfertigt. IIter. Band. Geometrische und trigonometrische Wissenschaften, Polygonometrie und Anwendung der Analysis auf Geometrie und Trigonometrie. Nebst einem Nachtrage zum 1ten Bande ; par Mr. Kausler.

Beobachtungen um die Zeit des Sommer - Solstitiums 1814, zur Erfindung der Schiefe der Ekliptik, auf der Königl. Sternwarte zu Königsberg angestellt von F. W. Bessel.

О Циклоидахъ, Эпициклоидахъ и Гипоциклоидахъ, и о другихъ подобнымъ образомъ раждающихся кривыхъ линіяхъ ; par Mr. Fufs.

Гермштета руководство къ практико - экономическому добыванію сахара и полезнаго сыропа изъ свеклы, такъ же и къ другимъ разнымъ употребленіямъ оной ; par Mr. l'Elève Moukhine.

Возраженіе противъ новыхъ мнѣній Гг. Морески и Гуме, о пользѣ селезенки ; par Mr. Zagorski.

Система природы Карла Линнея. Часть III. Статья II. Птицы; par Mr. Sévastianoff.

Philosophiae botanicae. praelectionibus tyronum botanicorum accommodatae, pars altera ; par Mr. Smélovski.

О вершинѣ рѣки Волги; par Mr. Ozeretskovski.

Continuation du Journal des observations astronomiques, faites depuis le 15 Mars jusqu'au 19 Juin de l'année 1813; par Mr. Wisnievski.

О химическомъ изслѣдованіи обыкновеннаго пороха, и о способахъ служащихъ къ поправленію испорченнаго пороха; par Mr Schérer.

Ueber die Rangordnung im spätern Griechenland, verglichen mit der im frühern Rufsland; par Mr. Krug.

Beobachtungen über die Ausdehnung des Wassers durch's Gefrieren in luftdicht verschlossenen Flaschen, bey künstlicher und natürlicher Kälte, par Mr. Nassé.

De la monnaie de cuivre et particulièrement de celle de Russie. Section III. De la monnaie de cuivre dans son rapport avec l'assignat; par Mr. Storch.

Betrachtung über die successive Bildung der algebraischen Gleichungen, und Folgerungen aus derselben für die Bestimmung der Anzahl reeller und imaginärer Wurzeln, die sich in einer gegebenen allgemeinen algebraischen Gleichung, je nachdem die Beschaffenheit der Coëfficienten ist, befinden müssen, par Mr. le Docteur Kupfer.

Données statistiques sur les principales foires en Russie; par Mr. Herrmann.

Anomaliae verae per mediam determinatio; par Mr. Littrow.

La déscription et le dessin d'un tigre royal, tué le 19 Octobre 1813 dans le district de Kolyvan. par Mr. Spaski.

Réponse à deux questions proposées à Mr. Spaski de la part de la Conférence.

Observations météorologiques faites aux mines des Schlangenberg, depuis le mois de Juin 1812 jusqu'au 14 Juillet 1814; par. Mr. Spaski.

Ueber Seguin's Ledergerberey - Methode; par Mr. Nassé.

Continuation du Journal des observations astronomiques; par Mr. Wisnievski.

Ueber die Basaltformation im Hochgebirge des Kaukasus; par Mr. Schlégelmilch.

Ueber die Zuckerbildung beym Malzen des Getreides und beim Bebrühen des Mehls mit kochendem Wasser; par Mr. Kirchhof.

Sur le mouvement des corps qui s'attirent en raison directe de leurs distances; par Mr. le Prof. Littrow.

Новая химическая номенклатура, сочиненная Провизоромъ Оландской военной гошпитали, Кондратомъ Цисевскимъ.

Réflexions sur la théorie du calcul différentiel. Second mémoire; par Mr. Schubert.

V.

OBSERVATIONS, EXPÉRIENCES ET NOTICES INTÉRESSANTES, FAITES ET COMMUNIQUEÉS À L'ACADÉMIE.

1. Le Secrétaire lut un rapport de Mr. l'Académicien extraordinaire *Wisnievski*, daté de Stavropol du 11 Décbr. 1812. Il mande d'avoir découvert le 19 Juillet une petite Comète dans la constellation du Lynx, et de l'avoir observée jusqu'au 17 Septembre. C'est la même que Mr. *Bouvard* a découverte le 1 Août à Paris.

2. Mr. *Bessel*, Professeur d'Astronomie à Königsberg, donne un apperçu de ses travaux entrepris dans la vue de mieux connaître la nature des étoiles doubles. Un grand nombre d'observations exactes a mis Mr. *Bessel* en

état de déterminer le mouvement annuel propre de ces étoiles, et les résultats qu'il en tire semblent venir à l'appui de l'assertion que les étoiles doubles et les groupes d'étoiles sont autant de systèmes de corps, ayant chacun un mouvement commun autour d'un corps central.

3. Mr. le Docteur *Pansner* communique le résultat de ses calculs sur la hauteur d'un des volcans du Kamtchatka, savoir de celui qui est situé à 15 ou 20 verstes du Port de St. Pierre et St. Paul, dont il évalue la hauteur à 8278 pieds de France, d'après les observations barométriques et thermométriques des Physiciens qui avoient accompagné La Pérouse.

4. Mr. *Struve*, Astronome à Dorpat, communique une suite d'occultations d'étoiles fixes et d'immersions et émersions des satellites de Jupiter qu'il a observées. Le prix de ces observations est rehaussé par la détermination plus exacte de l'Observatoire de Dorpat, dont Mr. *Struve* fixe la longitude à $1^h. 37'. 38''$ à l'Est de Paris et la latitude à $58^d. 22'. 41'',5$.

5. Mr. l'Académicien extraordinaire *Tilésius* présente une notice ayant pour titre: *Ein chirurgisches Meisterstück der Natur*, contenant la déscription d'une ossification totale des muscles pectoraux d'une poule, ossification par laquelle la

nature a guéri la fracture de la poitrine de cet animal, de même que la fracture d'un os de l'aile, enveloppé entièrement d'une croûte calleuse.

6. Mr. l'Académicien extraordinaire *Wisniefski*, dans une lettre de Stavropol, mande d'avoir mesuré avec le Sextant à réflexion la hauteur de l'Elbrus, et de l'avoir trouvée de 16,700 pieds de Paris au dessus du niveau de la mer, ce qui surpasse de 2300 pieds la hauteur du Mont-blanc. Arrivé à Géorgiefsk où il va se rendre dans quelques jours, Mr. *Wisniefski* se propose de repéter cette mésure et d'obtenir un résultat plus exact, cette ville étant plus proche de l'Elbrus, et les erreurs, provenans de la réfraction terrestre et de l'observation d'un aussi petit angle d'élévation, de moindre influence sur la détermination de la hauteur de la montagne, et où il aura par dessus cela l'avantage de pouvoir déterminer plus exactement la distance, au moyen d'observations de l'azimuth et de la position géographique relative de Stavropol et Géorgiefsk. Dans ses calculs il tiendra compte de l'aplâtissement de la terre et donnera à l'Académie le résultât aussi précis que faire se pourra.

7. Mr. l'Académicien extraordinaire *Tilésius* présente à la Conférence quelques os de Mamouth (Extremitas humeri

inferior et Ulna) qui ont été déterrés à Volkova Derevna par les Sappeurs des gardes occupés à creuser un fossé.

8. Mr. l'Académicien extraordinaire *Wisniefski* mande d'avoir découvert sur les bords du Kuban une terre argilleuse vitriolique, dont il a tiré un très beau vitriol (sulfate de fer). Il examinera le local et verra s'il seroit avantageux d'y établir une fabrique d'alun et de vitriol.

9. Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer* présente: *Chemische Analyse des Doroninskischen Aërolithen*. Selon cette analyse les parties constituantes de la pierre de Doroninsk sont sur cent parties:

Chrome —	2, 00,
Manganèse —	1, 25,
Terre siliceuse	40, 50,
Terre métallique	18, 50,
Terre argilleuse	3, 25,
Nickel — —	10, 00,
Terre calcaire	6, 25,
Terre talcqueuse	9, 00,
Soufre — —	8, 12,
Perte — —	1, 13,
	100, 00.

La pierre de Doroninsk est donc rémarquable à cause du Chrome qu'elle contient.

10. Mr. l'Académicien extraordinaire *Nassé* présenta à la Conférence: *Beobachtungen über die Bereitung des corrosiven salzsauren Quecksilbers auf nassem Wege.* Par des procédés, dont Mr. *Nassé* donne la déscription, il a obtenu deux espèces de sels de Mercure corrossif, dont il croit qu'il seroit utile d'examiner les vertus médicinales par des expériences comparatives; c'est pourquoi il proposa à la Conférence de communiquer son mémoire au Conseil médicinal.

11. Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer* présenta un mémoire sous le tître: *Chemische Analyse des Charkovschen Meteorsteins.* Selon cette analyse les parties constituantes sont sur cent parties:

Silice	–	51, 0,
Talc	–	20, 5,
Fer	–	19, 8,
Manganèse		4, 2,
Nickel	–	1, 5,
Perte	–	3, 0,
		100, 0.

La perte provient en grande partie du soufre qui, combiné avec l'hydrogène, s'échappe en forme de gaz.

12. Mr le Docteur *Joseph Hamel*, Correspondant de l'Académie, dans une lettre datée de Bath, communique à la Conférence plusieurs notices intéressantes: 1°.) Sur la fabrique établie autrefois par le Dr. *Gibbes*, pour convertir la chair des animaux en une espèce de blanc de baleine, ou de cire, dont on peut faire des bougies; 2°.) Sur l'invention d'un Graveur en pierre, Mr. *Bankes*, de donner une couche noire à l'agathe de Saxe, en le laissant cuire quelques heures dans de l'acide sulfurique concentré 3°.) Sur une nouvelle maniere qui se pratique en Angleterre pour conserver fraiche, pendant des navigations de longue durée, la viande cuite ou rôtie. La lettre de Mr. le Dr. *Hamel*, étoit accompagnée d'échantillons du blanc de baleine du Dr. *Gibbes*, de la cire fondue de cette substance et d'un morceau d'agathe à couche noire.

13. Mr. *Müller*, Directeur des Ecoles du Gouvernement d'Irkoutsk et Correspondant de l'Académie, mande que le 22 Août on a ressenti à Irkoutsk un tremblement de terre qui a duré 40 Secondes. À un bruit souterrein succédèrent deux secousses assez fortes, qui n'ont cependant causé aucun dommage. Le baromètre étoit à 28′5 pouces anglais, le ciel sérein et la chaleur de 14 degrés de l'échelle de Réaumur.

14. Le Secrétaire fit voir à la Conférence un mémoire imprimé que lui a envoyé un Physicien avantageusement connu, Mr. le Docteur *Seebek*, qui a réussi à produire dans des cubes et cylindres de verre, par des rayons de lumière polarisés et reflèchis, des configurations symmétriques coloriées très remarquables et très variées.

15. Mr. l'Académicien extraordinaire *Pétroff*, chargé de repeter les expériences de Mr. *Morechini* sur la propriété prétendue du rayon violet, de communiquer la vertu magnétique à une aiguille, sur laquelle on le promène, présenta à la Conférence l'appareil dont il s'est servi et lut la déscription de tous les procédés qu'il a observés dans ses expériences. Quoique Mr. *Pétroff* eut apporté à ces expériences tous les soins imaginables et la plus scrupuleuse attention, il a eu le même sort que Configliachi, et il lui a été impossible de produire le magnétisme, ni par le rayon violet, ni par le rayon rouge.

16. Mr. l'Académicien *Schubert* communiqua une lettre de Mr. de *Krusenstern*, datée de Londres et contenant des notices intéressantes: 1°. Sur un chronomètre double dans une seule boëte, inventé par *Bréguet*, dans la vue de faire servir de régulatif à la marche l'influence réciproque que les deux montres exercent l'une sur l'autre;

2^b. sur le nouveau cercle entier de six pieds, fait par *Trougthon* pour l'Observatoire de Greenvich d'après un nouveau principe.

17. Mr. *Fischer*, Directeur de la Société IMPÉRIALE des Naturalistes à Moscou et Correspondant de l'Académie, donne connoissance d'un météore qu'il a observé à Moscou le 28 Octobre 1814, à 7 heures 50 minutes du soir. C'étoit un globe de feu d'une lumière blanchâtre et de la grandeur de la pleine lune à son lever. Ce globe se dirigeoit du Nord au Sud avec une vitesse moindre que celle des météores qu'on appelle étoiles tombantes. Il étoit à une hauteur très considérable et paroissait avoir un mouvement de rotation autour de son axe. Quelques personnes prétendent l'avoir vu avec une chevelure, ce que Mr. *Fischer* n'a pas pu remarquer, quoiqu'il tient pour possible qu'une phosphorescence de son atmosphère ait pu produire quelque chose de semblable à une queue.

18. Mr. le Conseiller privé et Chevalier *Léonhard* à Hanau, Correspondant de l'Académie, donne plusieurs notices intéressantes concernant la Minéralogie. Entre autres: 1°) sur une pierre météorique, tombée, il y a 50 ans, près d'Aix la Chapelle et déterrée au commencement du mois de Novembre de l'année passée. De cet aërolithe, qui

pèse 17000 livres, Mr. *Léonhard* espère d'obtenir des fragmens, dont il promet d'envoyer un à l'Académie; 2°) il parle de la pierre Salam (variété du Spinel) trouvée au St. Gotthard; 3°) de l'opale noble trouvée dans du basalte aux environs de Frankfort sur le Mayn; 4°) il promet un supplément à la collection orognostique des minéraux qu'il transmettra à l'Académie au printems prochain.

VI.

RAPPORTS PRÉSENTÉS PAR DES ACADÉMICIENS CHARGÉS DE COMMISSIONS PARTICULIÈRES.

1. Le Secrétaire lut un rapport de Mr. l'Académimicien extraordinaire *Wisnievsky*, daté, de Stavropol le 4 Décembre 1812 et contenant ce qui suit: 1°) la position géographique de quelques points de la ligne du Caucase, calculées par Mr. *Wisnievsky*, d'après ses observations, à la prière de Mr. *Butzkowsky*, Lieutenant-Colonnel de la Suite de S. M. J., chargé d'une levée topographique et militaire de la ligne. Mr. *Wisnievsky* espère que l'Académie ne désapprouvera pas cet acte de complaisance qu'il s'est permis en faveur d'une entreprise aussi utile et commandée par le Gouvernement; 2°) Mr. *Wisnievsky* ayant

retrouvé le 19 Juillet à Novo-Tscherkask, la Comète de 1811, il en a observé la marche depuis ce jour jusqu'au 5 Août, et il se flatte que ces 29 observations ne contribueront pas peu à la correction des élémens de cette Comète, et surtout à la détermination de son tems périodique, parcequ'il y a un intervalle de près de 18 mois entre sa première apparition et la dernière observation de Mr. *Wisnievsky*.

2. S. E. Mr. l'Académicien *Fuſs*, rapporta d'avoir lu le mémoire de Mr. le Professeur *Littrow* à Kazan, sur une nouvelle méthode de déterminer les hauteurs observées près du Méridien, et de l'avoir trouvé digne d'être imprimé avec les mémoires de l'Académie qui seront choisis pour la Section des Sciences mathématiques du 5e Tome. Il ajouta que l'auteur mérite d'être encouragé par l'Académie à lui continuer ses communications.

3. Mr. l'Académicien extraordinaire *Krug* rapporta d'avoir lu le mémoire de Mr. *Spassky*: О древныхъ Сибирскихъ курганахъ, et de l'avoir trouvé intéressant; et jugeant d'après ce mémoire et d'après ceux que Mr. *Spasski* avoit fait présenter précédemment à l'Académie, que par son goût pour des recherches historiques, et par le lieu de son séjour actuel, il seroit en état et à portée de résoudre quelques questions qui intéressent les Historiens,

il proposa de lui en communiquer deux, qu'il présenta pour cet effet, et qui furent transmises à Mr *Spassky*.

4) Mr. l'Akadémicien *Zakharoff* reporta le mémoire de Mr. le Dr. *Hamel*, présenté le 5 Mai, sous le tître: *О металлоподобныхъ тѣлахъ изъ огнепостоянныхъ щелочей, ихъ способѣ приготовленія, свойствахъ и содержаніи къ другимъ тѣламъ;* et il en fit son rapport contenant en substance: que ce mémoire mérite l'attention de l'Académie, parcequ'il renferme nombre de nouvelles observations, tant sur la manière de produire les métaux, que sur leurs qualités et propriétés; qu'il seroit à désirer que l'Auteur continuât ses recherches, dans la vue de mieux déterminer la quantité de l'oxygéne dans les différens degrès d'oxydation, et qu'il repetât ses expériences avec l'acide boracique et avec la base à couleur foncée qu'il en a tirée, en examinant bien les propriétés de cette dernière.

5) Mr. l'Académicien *Storch* reporta l'ouvrage manuscrit de Mr. *Kaidanoff*, Professeur-Adjoint du Lycée de Sarskoye-Sélo: *Основанія всеобщей политической исторіи*, que la Conférence l'avoit chargé d'examiner, à la suite d'un ordre de S. E Mgr. le Ministre, et il présenta son rapport contenant en substance: qu'il a lu cet ouvrage avec intérêt; que le travail de l'auteur lui semble méritoire; que sa méthode est facile et claire; que les sources,

d'où il a puisé, sont bonnes et le choix des évènemens racontés dans ce Cours d'Histoire conforme au but de l'ouvrage, ainsi que les réflexions, que ces évènemens amènent, adaptées à la conception des élèves; que l'auteur a bien fait de mettre en avant de l'histoire de chaque état la déscription géographique du païs, sans tourmenter la mémoire des jeunes gens, en la surchargeant des dates exactes des années, se contentant de nombres ronds; que l'auteur mérite la reconnoisance du public Russe, de lui avoir rendu accessibles par son travail les bons auteurs historiques étrangers, tels que *Goldsmidt*, *Heeren*, *Meiners Mannert* etc; qu'enfin Mr. l'Académicien extraordinaire *Krug* porte le même jugement sur cet ouvrage.

6. Mr. l'Académicien extraordinaire *Pétroff* rapporta d'avoir eté à Okhta, pour y examiner les paratonnères, en vertu d'une résolution de la Conférence, et de les avoir trouvé tous en très bon état; qu'ayant remarqué cependant que le puits, dans lequel aboutit le conducteur du plus petit magazin à poudre, n'a qu'une demie Archine d'eau, il a conseillé de lui donner plus de profondeur.

7. Mrs. les Académiciens extraordinaires *Krug* et *Lehrberg* présentèrent leur rapport sur le mémoire intitulé: *Ueber die Wolochen Nestor's*, que Mr. le Prof. *Evers* a

soumis au jugement de l'Académie. Ce rapport contient en substance: qu'aussi dans ce fragment d'un nouvel ouvrage, sur l'histoire des Russes, Mr. *Ewers* persiste à soutenir son idée, émise dans un ouvrage antérieur (*Vom Ursprunge des Russischen Staats*): savoir que les Slaves ont habité originairement les bords du Danube inférieur; qu'il convient à la vérité que déjà avant le 5^{e}. siècle ils se soyent répandus au-de-là des Carpathes, mais qu'il les fait encore chasser en Russie, en Dalmatie, en Servie etc. par des Bulgares du 7^{e}. Siècle, qui, selon lui, sont le Woloches de Nestor. Tout en rendant justice à la sagacité et à la vaste lecture de l'auteur, ainsi qu'à son zèle pour les sciences, les rapporteurs déclarent n'être pas d'accord avec ce résultat, dont ils seront en état de démontrer le défaut de solidité, sitôt qu'ils seront chargés d'entrer dans une discussion complette de l'objet en question.

8. Mrs. les Académiciens extraordinaires *Schérer* et *Nassé*, chargés d'examiner un mémoire de Mr. le Professeur *Grindel*, sur la formation du métalloïde de kali produit par le Galvanisme dans l'eau au moyen du mercure, en firent leur rappoit, dont la substance est: que les expériences de Mr. *Grindel* ne sauroient servir de preuve à la formation réelle d'un métalloïde; que l'amalgamation du mercure qui garde sa fluidité ne peut point venir à

l'appui des assertions de l'auteur, parceque cet amalgame a pu provenir du fil d'argent dont il s'est servi comme conducteur, ce qui est d'autant plus probable qu'ayant negligé de recueillir et d'examiner le gaz qui s'est développé pendant l'effervescence, il avoue lui-même que l'eau, après l'amalgamation du mercure, n'a montré aucune propriété alcaline.

9. Mr. l'Académicien *Schubert*, chargé d'examiner un mémoire de Mr. *Werkmeister*, sur le théorème de *Taylor*, en fit son rapport, contenant en substance: que la démonstration du théorème, donnée par l'auteur du mémoire, fait preuve de la subtilité plutôt que de la solidité de son esprit; que toute sa démonstration consiste dans un raisonnement métaphysique qui, souvent sans contredit, est d'une grande utilité dans les Mathématiques, mais qui, pour ne pas devenir plus pernicieux qu'utile, doit réunir en lui trois qualités essentielles: l'évidence, l'ordre et la solidité, ce qui n'est pas le cas de l'auteur, qui confond ouvertement avec l'essence des corps la manière dont on conçoit en Géométrie leur engendrement, c'est-à-dire qu'il confond l'idéal avec le réel; qu'attaché à sa manière de concevoir la formation des corps, l'auteur se voit dans la nécessité d'avoir recours à deux autres idées métaphysi-

ques, celle du mouvement et du tems, et d'amalgamer ainsi deux grandeurs hétérogènes, le tems et l'espace.

10. S. E. Mr. l'Académicien *Fufs*, chargé d'examiner la déscription d'un Télémètre, présenté à l'Académie p r Mr. le Docteur *de Lamberti*, en fit son rapport, contenant en substance: que cet instrument, par son principe et sa construction même, est sujet à donner dans la pratique des résultats très-peu exacts; et que, quoique d'un usage commode et expéditif, pour prendre des distances à la militaire et sans prétendre à un dégré tolérable de précision, il ne sauroit être d'aucune utilité pour des levées exactes.

11. Mr. l'Académicien extraordinaire *Kirchhof*, chargé par la Conférence d'examiner deux compositions prises des fusées de *Congrève* et envoyées à l'Académie par le Comité savant du Ministère de la guerre, en fit son rapport, contenant le résultat de son analyse de ces deux substances. D'après cette analyse les deux compositions contenoient sur 100 parties:

La première:

Nitre	—	—	58,
Soufre	—	—	18,
Charbon	—	—	22,
Perte	—	—	2,
			100.

La seconde:

Subst. résineuse	—	20,
Nitre	— —	54,
Antimoine	—	5,
Soufre	— —	18,
Perte	— —	3,
		100.

12. Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer*, chargé d'examiner le mémoire de Mr. le Professeur *Grindel*: *Ein neues Eudiometer, oder ein äufserst schnell wirkendes eudiometrisches Mittel, nebst Bemerkungen über die Phosphorescenz*, en fit son rapport. L'opinion de Mr. *Schérer* contient en substance: que la pierre de Bologne ne sauroit servir de moyen eudiométrique, ni, à plus forte raison, être un moyen très-actif et très-sensible, par la raison que 1°) toutes les pierres phosphoriques terreuses luisent sans s'oxyder et que 2°) des expériences multiplées ont prouvé que, pendant que ces pierres luisent, il ne se fait pas la moindre absorption de l'air. De plus Mr. *Schérer* observe que la réussite plus ou moins complette de la préparation de la piere de Bologne est fortuite et accidentelle, et que par conséquent l'application de cette pierre à l'Eudiométrie est sujette à des grandes difficultés, parce qu'une des qualités essentielles d'un bon Eu-

diomètre est de pouvoir en faire autant qu'on veut de parfaitement correspondans. Enfin Mr. *Schérer* attribue à à la contraction de l'air, produite par un changement de température, les variations que Mr. *Grindel* a observées au moyen de son appareil et qu'il attribue à une absorption de l'air.

13. Mr. l'Académicien *Séverguine*, chargé d'examiner l'ouvrage de Mr. le Conseiller de Cour *Pansner: Resultate der Untersuchungen über die Härte und specifische Schwere der Mineralien*, en fit son rapport contenant en substance: que les peines que l'auteur s'est données, en déterminant la dureté et la pésanteur spécifique d'un grand nombre de fossiles, méritent toute l'attention des Minéralogistes; mais que son idée, de fonder sur ces deux qualités un nouvel arrangément systématique des minéraux, ne sauroit obtenir leur approbation, aussi peu que son moyen de déterminer leur dureté, d'autant moins que la méthode de *Werner* est beaucoup plus simple et plus exacte.

14. Mr. l'Académicien extraordinaire *Tilésius*, chargé d'examiner un mémoire de Mr. le Professeur *Lédébour: Decades sex plantarum novarum in Imperio Rossico indigenarum*, exhiba son opinion, portant en substance: que cette déscription de soixante plantes, pour la plûpart du Kam-

tchatka et des îles Kouriles, ramassées par lui-même et non encore, ou mal connuës et décrites, est plus courte, plus claire et plus exacte qu'il n'auroit pu la donner lui-même, et qu'elle mérito, par conséquent, d'être publiée dans les Mémoires de l'Académie.

15. S. E. Mr. l'Académicien *Fuſs*, chargé d'examiner un mémoire de Mr. le Capitaine en Chef des mines de la 5^e. classe et Chevalier *Wilbrecht: Recherche d'une ellipse, dont les dimensions approchent le plus des déterminations des arcs de méridien faites au Perou, en France, en Angleterre et en Lapponie,* en fit son rapport contenant en substance: que ce mémoire présente un essai intéressant de mettre plus d'accord entre les différentes mésures des arcs de méridien; et que l'Auteur s'est donné beaucoup de peines à trouver une ellipse dont les dimensions différassent le moins que possible des principales mesures du degré du méridien.

16. Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer* présenta son rapport, concernant l'analyse de deux prétendues compositions des fusées de Congrève, instituée par un Comité nommé par le Ministre de la Police, à laquelle Mr. *Schérer* avoit été chargé par la Conférence d'assister. Il se trouve que cette analyse confirme celle qui avoit été instituée antérieurement par

Mr. l'Académicien extraordinaire *Kirchhof.* Le résultat en est: que l'une des deux masses est la composition des fusées ordinaires, et que l'autre, contenant des parties résineuses, de la cire et de l'antimoine, loin de brûler d'une flamme inextinguible, se laisse éteindre par une très petite quantité d'eau. Mr. *Schérer* doute que ce soit la véritable masse des fusées de Congrève.

17. Mr. l'Académicien *Storch* chargé d'examiner le mémoire de Mr. le Prof. *Neumann: Ueber die Wichtigkeit der Kenntniss und Bearbeitung des alten Slavischen Rechts u. s. w.* en fit son rapport contenant en substance: 1°) que l'Auteur de ce mémoire s'efforce de prouver qu'il existe un ancien droit Slave indépendant du droit Germain et Scandinave; 2°) qu'après avoir établi cette thèse, appuyée de preuves historiques générales, l'Auteur passe à la Правда Руская, comme à une des principales sources où il faut puiser les notions de ce droit, et dont il essaye de donner une explication nouvelle; 3°) que la troisième section du mémoire contient une application de cet ancien droit Slave à quelques cas particuliers propres à éclaircir l'histoire des Russes et des peuples Slaves en général; 4°) que le mémoire est terminé par quelques vues sur l'importance de la connoissance de ce droit Slave pour la vérification des auteurs qui ont écrit sur l'histoire de ces peu-

ples ; 5°) que l'Auteur du mémoire y fait preuve d'une pénétration peu commune; qu'il peut bien avoir été trop loin dans quelques unes de ses assertions, mais que son travail est celui d'une bonne tête et qu'il est le résultat de recherches pénibles et d'une connoissance intime des loix Russes.

18. Mr. l'Académicien et Bibliothécaire *Schubert* rapporta que tous les livres, destinés par la Conférence à réparer, autant que cela pouvoit dépendre d'elle, les pertes de l'Université IMPÉRIALE de Moscou, c'est-à-dire, tant les doublettes de la Bibliothèque académique, que les ouvrages publiés par l'Académie et imprimés dans sa Typographie (un exemplaire de chacun) ont été encaissés avec soin et seront expédiés le 9 Mars à Moscou, par des rouliers loués à cet effet.

19. Mrs. les Académiciens extraordinaires *Smélovsky* et *Tilésius,* chargés d'examiner un mémoire de Mr. le Professeur *Jason Petroff: Descriptio botanica novae speciei Veronicae*, en remirent leur opinion, portant en substance: que la plante sêche, décrite par Mr. *Petroff*, loin d'être une nouvelle espèce, n'est qu'une des nombreuses variétés de la Véronique (*Veronica incana, spicata, minor, angustifolia*) vue en fleurs dans son païs natal et décrite par *Gmélin.*

20. Mr. l'Académicien extraordinaire *Petroff* fit rapport d'avoir été à Okhta 18 Juin 1814, pour y examiner les paratonnères. D'après cet examen tous les quatre conducteurs sont en bon état et les puits, où vont aboutir leurs extrémités inférieures, beaucoup mieux fournis d'eau, depuis les améliorations faites à ces puits, à la suite d'une proposition de Mr. *Petroff*, contenue dans son rapport de l'année passée.

21. Mr. l'Académicien extraordinaire *Kirchhof*, chargé d'examiner les eaux minérales de Mohileff, envoyées à l'Académie par Son Eminence Mgr. le Métropolitain *Siestrencevicz de Bohusz*, présenta son rapport, contenant le résultat de cet examen. La substance en est: que l'eau de la bouteille N°. 1. contient de la chaux dissoute dans l'acide carbonique. Après l'évaporation jusqu'à siccité une livre de cette eau s'est trouvée contenir deux grains seulement d'un précipité gris consistant en carbonate de chaux et un sel qui, à cause de sa très petite quantité, n'a pu être réconnu, mais qui est vraisemblablement de l'acide nitrique. L'eau de la bouteille N°. 2 manifesta par les réagens la présence de l'acide nitrique et d'une chaux dissoute dans de l'acide carbonique. Une livre évaporée jusqu'à siccité laissa un grain et-demi d'un précipité grisâtre contenant de la carbonate de chaux et de l'acide

muriatique. La trop petite quantité du résidu des deux eaux, ne permit pas d'y reconnoître ni toutes les parties constituantes, ni leur proportion.

VII.

VOYAGES SCIENTIFIQUES.

1. Mr. L'Academicien extraordinaire *Wisnievsky* continua en 1813 ses courses astronomiques, en poursuivant le plan dressé par lui et approuvé par l'Académie. Les endroits, où il a institué des observations, sont Stavropol, Kavkaskaya, Oust-Labinskaya, Egorlitskaya, Novo-Tscherkask, Kamenskaya - Stanitsa, Khopersk, Tambof, Riazan, Klin, Vychney - Volotchok, Valdaï etc.

2. Mr. l'Académicien extraordinaire *Wisnievsky*, empressé de finir en 1814 sa longue et pénible tâche par une dernière excursion dans les Gouvernemens de Novgorod, Olonetz, Yaroslav et Kostroma, fit ce dernier voyage et envoya la continuation du Journal de ses observations astronomiques Ce sont les observations instituées depuis le 26 Janvier jusqu'au 13 Mars de cette année à Oust-Waga, Archangel, Mésèn, Pinéga, Kholmogori, Emetskoe, Shenkursk, Welsk, Weliki-Oustioug, Solwytchegotsk, Yarensk et Oust - Sysolsk.

3. S. E. Mr. l'Académicien *Ozeretskovsky* fit la proposition de l'envoyer faire un voyage autour du lac Séliguer, dont les environs sont encore peu connus sous le rapport de l'histoire naturelle, quoiqu'ils fussent très remarquables, à cause du voisinage des sources du Volga, du Dnepr et de la Dvina. Comme un tel voyage parut promettre une bonne recolte pour les sciences, étant fait par un observateur aussi exercé, la Conférence applaudit à la proposition, le voyage eut lieu, et les résultats de cette excursion seront publiés par l'Académie, dès que Mr. *Ozeretskovsky* les aura rédigés.

VIII.

OUVRAGES PUBLIÉS PAR L'ACADÉMIE ET PAR DES ACADÉMICIENS.

1°) Mémoires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences de St. Pétersbourg. Tome IV, avec l'histoire de l'Académie pour l'année 1811. St. Pétersbourg 1813. 4°.

2°) Основанiй Алгебры Леонгарда Ейлера, части первой первыя три отдѣленiя, переведенныя съ Французскаго языка на Россiйской, со многими присовокупленiями, Василiемъ Висковатовымъ, Академiи Наукъ Экстраординарнымъ Академикомъ. Томъ 1й содержащiй въ себѣ отдѣленiе 1е. и 2е. С. П. бургъ. 1812. 8°.

3°) Словарь Химическiй, содержащiй въ себѣ ѳеорiю и практику Химiи и пр. Трудами Академика Вас. Севергина. Часть IV съ фигурами. С. П. бургъ 1813. 8°.

COMMENTATIO
IN FRACTIONEM CONTINUAM,
QUA ILLUSTRIS LA GRANGE POTESTATES BINOMIALES EXPRESSIT.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 20 Mart. 1780.

I.

Iste vir illustris hanc potestatem Binomialem $(1+x)^n$ methodo prorsus singulari ex ejus differentiali logarithmico in hanc fractionem continuam convertit:

$$(1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(1-n)x}{2 + \cfrac{(1+n)x}{3 + \cfrac{(2-n)x}{2 + \cfrac{(2+n)x}{5 + \cfrac{(3-n)x}{2 + \cfrac{(3+n)x}{7 + \text{etc.}}}}}}}},$$

quae expressio hac insigni proprietate gaudet, ut quoties exponens n fuerit numerus integer, sive positivus, sive negativus, abrumpatur et ad formam finitam redigatur

II. Quoniam haec fractio continua non lege uniformi, sed interrupta, progreditur, eam ad legem uniformem revocemus, id quod commodissime fiet, si eam sequenti modo per partes repraesentemus:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{A};$$
$$A = 1 + \frac{(1-n)x}{2 + \underbrace{(1+n)x}_{B}};$$
$$B = 3 + \frac{(2-n)x}{2 + \underbrace{(2+n)x}_{C}};$$
$$C = 5 + \frac{(3-n)x}{2 + \underbrace{(3+n)x}_{D}};$$
$$D = 7 + \frac{(4-n)x}{2 + \underbrace{(4+n)x}_{E}};$$

etc.

Hinc igitur per reductionem habebimus

$$A = 1 + \frac{(1-n)Bx}{2B+(1+n)x} = 1 + \frac{(1-n)x}{2} - \frac{(1-nn)xx:2}{2B+(1+n)x}$$
$$= 1 + \frac{(1-n)x}{2} + \frac{(nn-1)xx:4}{B+\left(\frac{1+n}{2}\right)x}.$$

Simili modo erit:

$$B = 3 + \frac{(2-n)Cx}{2C+(2+n)x} = 3 + \frac{(2-n)x}{2} - \frac{(4-nn)xx:2}{2C+(2+n)x}$$
$$= 3 + \frac{(2-n)x}{2} + \frac{(nn-4)xx:4}{C+\left(\frac{2+n}{2}\right)x}.$$

Eodem modo habebimus

$$C = 5 + \frac{(3-n)Dx}{2D + (3+n)x} = 5 + \frac{(3-n)x}{2} - \frac{(9-nn)xx:2}{2D + (3+n)x}$$
$$= 5 + \frac{(3-n)x}{2} + \frac{(nn-9)xx:4}{D + \left(\frac{3+n}{2}\right)x}.$$

et ita porro.

III. Quodsi jam hos valores ordine loco A, B, C, etc. substituamus, fractio continua sequentem induet formam:

$$(1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(1-n)x}{2} + \cfrac{(nn-1)xx:4}{3(1+\frac{1}{2}x) + \cfrac{(nn-4)xx:4}{5(1+\frac{1}{2}x) + \cfrac{(nn-9)xx:4}{7(1+\frac{1}{2}x) + \cfrac{(nn-16)xx:4}{etc.}}}}}.$$

IV. Quo hinc fractiones partiales abigamus, statuamus $x = 2y$, ut nanciscamur hanc expressionem:

$$(1+2y)^n = 1 + \cfrac{2ny}{1 + (1-n)y + \cfrac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \cfrac{(nn-4)yy}{5(1+y) + \cfrac{(nn-9)yy}{7(1+y) + etc.}}}},$$

quae forma facile transmutatur in hanc:

$$\frac{2ny}{(1+2y)^n - 1} = 1 + (1-n)y + \cfrac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \cfrac{(nn-4)yy}{5(1+y) + etc.}}.$$

Addatur utrinque ny, ut producet

$$\frac{ny(1+(1+2y)^n)}{(1+2y)^n - 1} = 1 + y + \cfrac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \cfrac{(nn-4)yy}{5(1+y) + etc.}},$$

quae expressio jam ordine satis regulari procedit.

V. Dividamus jam utrinque per $1+y$, et membrum sinistrum evadet: $\frac{ny}{1+y} \cdot \frac{(1+2y)^n+1}{(1+2y)^n-1}$. Ex parte dextra autem singulae fractiones supra et infra per $1+y$ dividantur, prodibitque haec forma:

$$1+\cfrac{(nn-1)yy:(1+y)^2}{3+\cfrac{(nn-4)yy:(1+y)^2}{5+\cfrac{(nn-9)yy:(1+y)^2}{7+\cfrac{(nn-16)yy:(1+y)^2}{9+\cfrac{(nn-25)yy:(1+y)^2}{11+etc.}}}}}.$$

VI. Hanc igitur expressionem denuo ad majorem concinnitatem reducemus, statuendo $\frac{y}{1+y}=z$, ita ut sit $y=\frac{z}{1-z}$. Hoc autem modo membrum sinistrum, ob $1+2y=\frac{1+z}{1-z}$, accipiet hanc formam: $\frac{nz[(1+z)^n+(1-z)^n]}{(1+z)^n-(1-z)^n}$, quod ergo aequabitur huic fractioni continuae:

$$1+\cfrac{(nn-1)zz}{3+\cfrac{(nn-4)zz}{5+\cfrac{(nn-9)zz}{7+\cfrac{(nn-16)zz}{9+etc.}}}}$$

quae, ob elegantiam, summam attentionem meretur.

VII. Nunc igitur per se manifestum est, istam expressionem semper alicubi abrumpi, quoties n fuerit numerus integer, sive positivus, sive negativus. Evidens autem est etiam membrum sinistrum eundem valorem retinere, etiamsi pro n scribatur $-n$. Hoc enim facto evadet:

$$\frac{-nz[(1+z)^{-n}+(1-z)^{-n}]}{(1+z)^{-n}-(1-z)^{-n}},$$

quae fractio, si supra et infra per $(1-zz)^n$ multiplicetur, induet hanc formam:

$$\frac{-nz[(1-z)^n+(1+z)^n]}{(1-z)^n-(1+z)^n}=\frac{nz[(1+z)^n+(1-z)^n]}{(1+z)^n-(1-z)^n},$$

quae est ipsa expressio praecedens. Sicque perinde est, sive litterae n valor positivus, sive negativus tribuatur.

VIII. Ita si sumamus $n = \pm 1$ fit membrum sinistrum $= 1$, qui etiam est valor dextri. Porro posito $n = \pm 2$ membrum sinistrum evadit $= 1 + zz$, membrum vero dextrum fit etiam $= 1 + zz$. Simili modo sumto $n = \pm 3$ pars sinistra, ut et dextra, fiunt $\frac{3(1+3zz)}{3+zz}$.

IX. Hinc autem nonnullas conclusiones maximi momenti deducere licet, prouti exponenti n tribuatur valor vel evanescens vel infinitus, imprimis autem casus, quo litterae z datur valor imaginarius, perducit ad insignem conclusionem, quandoquidem ipsa fractio continua nihilominus manet realis, a qua igitur conclusione initium sumamus.

Conclusio I.

qua $z = t\sqrt{-1}$.

X. Hoc igitur casu fractio continua hanc habebit formam:

$$\cfrac{1-(nn-1)tt}{3-\cfrac{(nn-4)tt}{5-\cfrac{(nn-9)tt}{7-\cfrac{(nn-16)tt}{9-\text{etc.}}}}}$$

at vero pars sinistra nunc erit:

$$\frac{nt\sqrt{-1}\,[(1+t\sqrt{-1})^n+(1-t\sqrt{-1})^n]}{(1+t\sqrt{-1})^n-(1-t\sqrt{-1})^n},$$

quae non obstantibus partibus imaginariis certe habere debet valorem realem, quem ergo hic investigemus. Hunc in finem ponamus $t = \frac{\sin.\Phi}{\cos.\Phi}$, ita ut sit $t = \text{tang.}\,\Phi$; tum igitur erit:

$$(1+t\sqrt{-1})^n = \frac{(\cos.\Phi+\sqrt{-1}\sin.\Phi)^n}{\cos.\Phi^n} = \frac{\cos n\Phi+\sqrt{-1}\sin.n\Phi}{\cos.\Phi^n},$$

similique modo:

$$(1-t\sqrt{-1})^n = \frac{(\cos.\Phi - \sqrt{-1}\sin.\Phi)^n}{\cos.\Phi^n} = \frac{\cos.n\Phi - \sqrt{-1}\sin.n\Phi}{\cos.\Phi^n}.$$

His igitur valoribus substitutis nostrum membrum sinistrum evadit:

$$\frac{2n\sqrt{-1}.\,tg.\Phi\cos.n\Phi}{2\sqrt{-1}\sin.n\Phi} = \frac{n\,tg.\Phi\cos.n\Phi}{\sin.n\Phi} = \frac{n\,tg.\Phi}{tg.n\Phi}.$$

XI. Posito ergo tg. $\Phi = t$ habebimus sequentem fractionem continuam maxime memorabilem;

$$\frac{nt}{tg.n\Phi} = 1 - \cfrac{(nn-1)tt}{3 - \cfrac{(nn-4)tt}{5 - \cfrac{(nn-9)tt}{7 - \text{etc.}}}}$$

quae igitur hoc modo repraesentari poterit:

$$tg.\,n\Phi = \cfrac{nt}{1 - \cfrac{(nn-1)tt}{3 - \cfrac{(nn-4)tt}{5 - \cfrac{(nn-9)tt}{7 - \text{etc.}}}}}$$

quae ergo expressio commode adhiberi potest ad tangentes angulorum multiplorum per tangentem anguli simplicis t exprimendas. Ita si fuerit $n = 2$, habebimus tg. $2\Phi = \frac{2t}{1-tt}$. Eodem modo si $n = 3$, erit:

$$tg.\,3\Phi = \cfrac{3t}{1 - \cfrac{8tt}{3-tt}} = \frac{3t - t^3}{1 - 3tt}.$$

Hic casus maxime notabilis se offert quando exponens n accipitur infinite parvus, tum enim erit tg. $n\Phi = n\Phi$, ergo, utrinque per n dividendo, orietur ista forma:

$$\Phi = \cfrac{t}{1 + \cfrac{tt}{3 + \cfrac{4tt}{5 + \cfrac{9tt}{7 + \text{etc.}}}}}$$

qua fractione continua per tangentem t ipse angulus exprimitur.

XII. Consideremus nunc casum, quo exponens n accipitur infinite magnus, at vero angulus Φ infinite parvus, ideoque etiam eius tangens t infinite parva, ita tamen, ut sit $n\Phi = \theta$, ideoque etiam $n\,t = \theta$; tum igitur habebimus istam fractionem continuam:

$$\text{tg.}\,\theta = \cfrac{\theta}{1 - \cfrac{\theta\theta}{3 - \cfrac{\theta\theta}{5 - \cfrac{\theta\theta}{7 - \text{etc.}}}}}$$

qua formula, ex dato angulo θ, eius tangens determinari poterit, quae ergo expressio tanquam reciproca praecedentis spectari potest.

Conclusio II.

qua exponens n evanescens assumitur:

XIII. Hoc ergo casu fractio continua erit:

$$1 - \cfrac{zz}{3 - \cfrac{4zz}{5 - \cfrac{9zz}{7 - \cfrac{16zz}{9 - \text{etc.}}}}}$$

Pro parte sinistra autem notandum est esse $\frac{(1+z)^n - 1}{n} = l(1+z)$, ideoque $(1 + z)^n = 1 + n\,l\,(1 + z)$; simili modo erit:

$(1-z)^n = 1 + n\,l\,(1-z)$, unde membrum sinistrum evadet

$$nz\,\frac{[2+nl(1+z)+nl(1-z)]}{nl(1+z)-nl(1-z)} = \frac{2z}{l\,\frac{1+z}{1-z}},$$

hinc ergo habebimus istam formam:

$$\frac{2z}{l\,\frac{1+z}{1-z}} = 1 - \cfrac{zz}{3 - \cfrac{4zz}{5 - \cfrac{9zz}{7 - \cfrac{16zz}{9 - \text{etc.}}}}},$$

hincque ipse logarithmus sequenti modo exprimetur:

$$l\,\frac{1+z}{1-z} = \cfrac{2z}{1 - \cfrac{zz}{3 - \cfrac{4zz}{5 - \text{etc.}}}}$$

Conclusio III.

qua sumitur exponens n infinite magnus.

XIV. Hic ergo, ut fractio continua finitum sortiatur valorem, nisi quantitas z infinite parva statuatur, ponatur $nz = v$, ut sit $z = \frac{v}{n}$, atque nostra fractio continua erit:

$$1 + \cfrac{vv}{3 + \cfrac{vv}{5 + \cfrac{vv}{7 + \cfrac{vv}{9 + \text{etc.}}}}}$$

Pro membro autem sinistro constat esse $(1+\frac{v}{n})^n = e^v$, similique modo $(1-\frac{v}{n})^n = e^{-v}$, ergo membrum sinistrum habebit hanc formam:

$$\frac{v(e^v + e^{-v})}{e^v - e^{-v}} = \frac{v(e^{2v}+1)}{e^{2v}-1},$$

quam ob rem habebimus hanc memorabilem fractionem continuam:

$$\frac{v(e^{2v}+1)}{e^{2v}-1} = 1 + \cfrac{vv}{3 + \cfrac{vv}{5 + \cfrac{vv}{7 + \cfrac{vv}{9 + \text{etc.}}}}}$$

cuius valor transcendens etiam hoc modo per series sclitas exhiberi potest:

$$\frac{1 + \frac{vv}{1.2} + \frac{v^4}{1.2\ 3.4} + \frac{v^6}{1.2\ldots 6} + \text{etc.}}{1 + \frac{vv}{1.2.3} + \frac{v^4}{1.2\ldots 5} + \frac{v^6}{1.2\ldots 7} + \text{etc.}}$$

ANALYSIS FACILIS AEQUATIONEM RICCATIANAM PER FRACTIONEM CONTINUAM RESOLVENDI.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 2 Mart. 1780.

I. Jam pridem equidem aequationis Riccatianae resolutionem per fractionem continuam tradidi, sed usus sum methodo haud parum operosa, quae transformationes satis abstrusas requirebat. Nunc autem se mihi obtulit alia via longe facilior idem praestandi, quae cum ad fractionem continuam multo simpliciorem perducat, haud indigna mihi visa est, ut eam cum publico communicarem, praecipue cum insignes Geometrae hoc argumentum summo studio perscrutari coeperint.

II. Considero autem aequationem Riccatianam, sub hac forma expressam:

$$a\,dy + yy\,dx = x^{n-2}\,dx,$$

quam autem hoc modo repraesento:

$$a\,dy - \frac{by\,dx}{x} + yy\,dx = x^{n-2}\,dx,$$

quae quidem revera priore non est generalior; posito enim:

$$y = x^{\frac{b}{a}} v \quad \text{fit} \quad dy = x^{\frac{b}{a}}\,dv + \frac{b}{a} x^{\frac{b-a}{a}}\,v\,dx,$$

hoc modo novus terminus introductus iterum tolletur, orieturque sequens aequatio:

$$a x^{\frac{b}{a}} dv + x^{\frac{2b}{a}} vv dx = x^{n-2} dx.$$

Verum forma assumpta ad institutum nostrum imprimis est accommodata; statuo autem praeterea $y = \frac{z}{x}$, ponoque brevitatis gratia $a + b = c$, ut prodeat sequens aequatio:

$$axdz - czdx + zzdx = x^n dx.$$

III. Fiat nunc ista substitutio $z = c + \frac{x^n}{p}$, ita ut sit $dz = \frac{npx^{n-1}dx - x^n dp}{pp}$, factaque substitutione, et sublatis fractionibus, pervenietur ad hanc aequationem:

$$axdp - (c + na) pdx + ppdx = x^n dx,$$

quae prorsus similis est praecedenti; tantum enim eo discrepat, quod in secundo termino loco c habeamus $c + na$.

IV. In hac aequatione jam statuamus porro $p = c + na + \frac{x^n}{q}$, et calculo evoluto perveniemus ad sequentem aequationem:

$$axdq - (c + 2na)\, qdx + qqdx = x^n dx,$$

quam quidem immediate ex praecedente deducere potuissemus, scilicet loco p scribendo q et coëfficientem secundi termini, qui erat $c + na$, denuo quantitate na augendo.

V. Simili modo intelligitur, si hic porro statuamus $q = c + 2na + \frac{x^n}{r}$, proditurам esse hanc aequationem:

$$axdr - (c + 3na) rdx + rrdx = x^n dx,$$

atque ulterius, si hic statuam $r = c + 3na + \frac{x^n}{s}$, prodibit ista aequatio:

$$axds - (c + 4na)\,sdx + ssdx = x^n dx.$$

Sicque porro in infinitum progredi licet.

VI. Quodsi iam loco litterarum p, q, r, s, etc. valores successive substituamus, pro variabili z reperiemus sequentem fractionem continuam satis concinnam:

$$z = c + \cfrac{x^n}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \cfrac{x^n}{c + 4na + \cfrac{x^n}{c + 5na + \text{etc.}}}}}},$$

unde aequationis praecedentis, quae, ob $b = c - a$, erat:

$$ady + (a - c)\frac{ydx}{x} + yydx = x^{n-2} dx,$$

valor y hac fractione continua exprimetur:

$$y = \frac{c}{x} + \cfrac{x^{n-1}}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \text{etc.}}}}$$

VII. Hinc igitur pro ipsa aequatione primum proposita:

$$ady + yydx = x^{n-2} dx,$$

ubi scilicet est $c = a$, erit:

$$y = \frac{a}{x} + \cfrac{x^{n-1}}{a(1+n) + \cfrac{x^n}{a(1+2n) + \cfrac{x^n}{a(1+3n) + \text{etc.}}}}$$

VIII. Quodsi ergo vicissim proponatur ista fractio continua:

$$z = c + \cfrac{x^n}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \text{etc.}}}}$$

nunc certi sumus valorem ipsius z determinari per hanc aequationem differentialem:

$$axdz - czdx + zzdx = x^n dx,$$

cuius ergo integrale, rite sumptum et ad hunc casum accommodatum, praebebit valorem illius fractionis continuae; scilicet integrale ita definiri debet, ut, posito $x = 0$, fiat $z = c$, si quidem n fuerit numerus positivus; at si fuerit negativus, prodire debet $z = c$, posito $x = \infty$.

IX. Hinc plurima egregia consectaria deduci possunt pro casibus, quibus aequatio differentialis proposita integrationem admittit. Ita pro aequatione primum assumpta, ubi est $c = a$, si ponamus $n = 2$, erit $ady + yydx = dx$, unde colligitur $dx = \frac{ady}{1 - yy}$, cuius integrale est:

$$x + a = \tfrac{1}{2} al \frac{1+y}{1-y},$$

et ad numeros ascendendo $\Delta e^{\frac{2x}{a}} = \frac{1+y}{1-y}$, unde vicissim erit:

$$y = \frac{\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1}, \text{ hincque } z = xy = x\frac{(\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1)}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1},$$

qui valor complectetur summam huius fractionis continuae:

$$z = a + \cfrac{xx}{3a + \cfrac{xx}{5a + \cfrac{xx}{7a + \cfrac{xx}{9a + \text{etc.}}}}},$$

quae cum praebeat $z = a$, sumpto $x = 0$, inde valor constantis Δ rite determinari potest.

X. Cum igitur, ob $z = xy$, invenerimus:

$$z = \frac{(\Delta e^{\frac{2x}{a}} - 1)x}{\Delta e^{\frac{2x}{a}} + 1},$$

constans Δ ita determinari debet, ut, posito $x = 0$, fiat $z = a$. Hoc autem casu tota haec formula evanescit, nisi etiam eius denominator simul euanescat, quod fieri nequit, nisi sumatur $\Delta = -1$. Cum igitur sit:

$$z = -x \frac{(1 + e^{\frac{2x}{a}})}{1 - e^{\frac{2x}{a}}} = x \frac{(1 + e^{\frac{2x}{a}})}{e^{\frac{2x}{a}} - 1},$$

sumpto x quasi infinite paruo fiet $e^{\frac{2x}{a}} = 1 - \frac{2x}{a}$, quam obrem hoc casu habebimus:

$$z = x \frac{(2 + \frac{2x}{a})}{\frac{2x}{a}} = a + x,$$

ideoque facto $x = 0$, fiet $z = a$, prorsus uti requiritur. Quocirca nostrae fractionis continuae hic propositae valor erit:

$$z = x \frac{(1 + e^{\frac{2x}{a}})}{e^{\frac{2x}{a}} - 1},$$

qui etiam hoc modo repraesentari potest:

$$z = x \frac{(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}})}{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}}},$$

cuius fractionis numerator, facta evolutione, fit:

$$2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{xx}{aa} + \frac{1}{24}\frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{720}\frac{x^6}{a^6} + \text{etc}\right).$$

Denominator vero erit:

$$\frac{2x}{a}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{xx}{aa} + \frac{1}{120}\frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{5040}\frac{x^6}{a^6} + \text{etc}\right),$$

unde nanciscimur:

$$z = \frac{1 + \frac{xx}{2aa} + \frac{x^4}{24a^4} + \frac{x^6}{720a^6} + \text{etc.}}{\frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{xx}{aa} + \frac{1}{120}\frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{5040}\frac{x^6}{a^6} + \text{etc.}\right)}.$$

XI. Quodsi ergo sumamus $a = 1$, ut habeamus hanc fractionem continuam:

$$z = \frac{x(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = 1 + \cfrac{xx}{3 + \cfrac{xx}{5 + \cfrac{xx}{7 + \text{etc.}}}}$$

eadem fractio continua quoque ita exprimitur:

$$\frac{1 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{6}xx + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{5040}x^6 + \text{etc.}},$$

quae ambae series eo magis convergunt, quo minor valor ipsi x tribuatur. Scilicet si ponatur $x = 1$, huius fractionis continuae:

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \text{etc.}}}}}$$

valor erit : $\frac{e^1 + e^{-1}}{e^1 - e^{-1}} = \frac{ee + 1}{ee - 1}$

XII. Verum etiam ipsa haec fractio continua vehementer convergit. Si enim indices 1. 3. 5. 7. etc. ordine disponamus, et more solito fractiones subscribamus, eae continuo propius ad verum valorem huius formae procedunt; haec autem erit huius operationis species:

$$\begin{array}{ccccccc} 1. & 3. & 5. & 7. & 9. & 11. & \text{etc.} \\ \frac{1}{0}; & \frac{1}{1}; & \frac{4}{3}; & \frac{21}{16}; & \frac{151}{115}; & \frac{1380}{1051}; & \text{etc.} \end{array}$$

Quo autem pateat, quam vehementer hae aequalitates ad veritatem convergant, considerentur differentiae inter terminos contiguos, quae erunt alternatim positivae et negativae, atque ita ordine procedunt:

$$\infty; \; -\frac{1}{3}; + \frac{1}{3 \cdot 16}; \; \frac{-1}{16 \cdot 115}; \; + \frac{1}{115 \cdot 1051}; \; \frac{-1}{1051 \cdot 11676}.$$

Nunc igitur certo scimus errorem postremae nostrae fractionis $\frac{1380}{1051}$ certe minorem esse, quam $\frac{1}{1051 \cdot 11676} = \frac{1}{12271476}$. Minus ergo discrepat a valore vero $\frac{ee+1}{ee-1}$.

XIII. Hic autem quaestio magni momenti se offert, quantus futurus sit valor fractionis continuae pro z inventae:

$$z = a + \cfrac{xx}{3a + \cfrac{xx}{5a + \text{etc.}}}$$

si loco xx scribamus $-tt$, ita ut sit $x = t\sqrt{-1}$. Tum autem habebimus:

$$z = t\sqrt{-1}\,\frac{(e^{\frac{t\sqrt{-1}}{a}} + e^{\frac{-t\sqrt{-1}}{a}})}{e^{\frac{t\sqrt{-1}}{a}} - e^{\frac{-t\sqrt{-1}}{a}}}.$$

unde ergo imaginaria extrudere oportet. Cum autem sit:

$$e^{\phi\sqrt{-1}} = \cos.\,\phi + \sqrt{-1}\sin.\,\phi \text{ et}$$
$$e^{-\phi\sqrt{-1}} = \cos.\,\phi - \sqrt{-1}\sin.\,\phi,$$

erit valor quaesitus $z = \dfrac{t}{a\,\mathrm{tg.}\frac{t}{a}} = \frac{t}{a}\cot.\frac{t}{a}$, qui ergo est valor huius fractionis continuae:

$$z = a - \cfrac{tt}{3a - \cfrac{tt}{5a - \cfrac{tt}{7a - \text{etc.}}}}$$

Ex illa autem aequatione, posito $t = 0$, manifesto fit $z = a$.

XIV. Hoc casu, quo harum fractionum continuarum valores actu determinare licuit sive per formulas exponentiales, sive per arcus circulares, prima aequatio proposita integrationem admisit. Quia autem infiniti alii casus integrabiles dantur, examinemus adhuc casum, $n = -2$, et prima aequatio erit $ady + yydx = \frac{dx}{x^4}$, ubi scilicet est $c = a$, pro qua integranda statuamus $y = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{xx}$, qua substitutione facta prodibit haec aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\alpha a}{xx} - \frac{2\beta a}{x^3} + \frac{\beta\beta}{x^4} \\ +\frac{\alpha\alpha}{xx} + \frac{2\alpha\beta}{x^3} \end{array}\right\} = \frac{1}{x^4},$$

ubi igitur requiritur ut sit $\alpha = a$ et $\beta\beta = 1$, ideoque vel $\beta = +1$, vel $\beta = -1$. Sicque geminum habemus valorem pro y, quorum alter est $y = \frac{a}{x} + \frac{1}{xx}$, alter vero $y = \frac{a}{x} - \frac{1}{xx}$.

XV. Haec autem integralia tantum sunt particularia; pro nostro scopo autem integrale completum nosse oportet, ut scilicet constans arbitraria ad statum quaestionis accommodari possit. Quia hic vero binos habemus valores particulares, eos ponamus $\frac{a}{x} + \frac{1}{xx} = p$ et $\frac{a}{x} - \frac{1}{xx} = q$, ita ut reuera sit $adp + ppdx = \frac{dx}{x^4}$ et $adq + qqdx = \frac{dx}{x^4}$, harum utraque subtrahatur ab ipsa aequatione integranda, et orientur hae duae aequalitates:

$$a(dy - dp) + dx(yy - pp) = 0 \text{ et}$$
$$a(dy - dq) + dx(yy - qq) = 0,$$

quarum illa per $y - p$, haec vero per $y - q$ divisa, praebet has aequationes:

$$a\frac{(dy - dp)}{y - p} + dx(y + p) = 0 \text{ et}$$
$$a\frac{(dy - dq)}{y - q} + dx(y + q) = 0,$$

quarum haec, ab illa subtracta, relinquit:

$$a\frac{(dy - dp)}{y - p} - a\frac{(dy - dq)}{y - q} + dx(p - q) = 0;$$

cuius ergo integrale est:

$$al(y - p) - al(y - q) + \int dx(p - q) = \text{const.}$$

Quia igitur est $p - q = \frac{2}{xx}$, erit: $\int dx(p - q) = -\frac{2}{x}$, sicque habebimus: $al\frac{y - p}{y - q} = C + \frac{2}{x}$, unde porro colligitur:

$$\frac{y - p}{y - q} = \Delta e^{\frac{2}{ax}}.$$

XVI. Ponamus hic brevitatis gratia $e^{\frac{2}{ax}} = \omega$, unde colligitur: $y = \frac{p - \Delta\omega q}{1 - \Delta\omega}$, et pro p et q, restitutis valoribus, habebitur $y = \frac{1 + ax + (1 - ax)\Delta\omega}{xx(1 - \Delta\omega)}$. Hincque porro erit:

$$z = \frac{1 + ax(1 - ax)\Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)} = \frac{1 + \Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)} + a.$$

Quia vero est $c = a$ et $n = -2$, fractio nostra continua pro z inventa erit:

$$z = a + \cfrac{x^{-2}}{-a + \cfrac{x^{-2}}{-3a + \cfrac{x^{-2}}{-5a + \cfrac{x^{-2}}{-7a + etc.}}}}$$

XVII. Quia nunc in hac expressione, sumpto $x = \infty$, fit $z = a$; constans illa arbitraria Δ convenienter debet determinari, quam ob rem, posito $x = \infty$, fieri debet $\frac{1 + \Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)} = 0$, hic autem est $\omega = e^{\frac{2}{ax}}$, qui valor, sumpto $x = \infty$, euadit $= 1$, quo obseruato fieri debet $0 = \frac{1 + \Delta}{x(1 - \Delta)}$. Quia vero hinc Δ nondum determinatur, haec investigatio accuratius institui debet; sumpto scilicet x praemagno, ex fractione continua, per unum membrum continuata, fit $z = a - \frac{1}{axx}$, cui ergo aequari debet haec expressio $a + \frac{1 + \Delta\omega}{x(1 - \Delta\omega)}$, ideoque esse debet $\frac{1 + \Delta\omega}{1 - \Delta\omega} = \frac{-1}{ax}$, unde colligitur $\Delta\omega = \frac{1 + ax}{1 - ax} = \Delta\left(1 + \frac{2}{ax}\right)$, sicque erit $\Delta = \frac{ax(1 + ax)}{(1 - ax)(2 + ax)}$. Posito hic $x = \infty$ prodit $\Delta = -1$, ideoque erit $z = a + \frac{1 - \omega}{x(1 + \omega)}$, existente $\omega = e^{\frac{2}{ax}}$, cuius expressionis valor etiam per series communes satis commode exprimi poterit. Cum enim sit $\omega = e^{\frac{2}{ax}}$, fractio $\frac{1-\omega}{1+\omega}$ hac forma exprimi poterit: $\dfrac{e^{\frac{-1}{ax}} - e^{\frac{1}{ax}}}{e^{\frac{-1}{ax}} + e^{\frac{1}{ax}}}$, cujus numerator in hanc seriem evolvitur $-2\left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{6a^3x^3} + \frac{1}{120a^5x^5} + \text{etc.}\right)$, denominator vero erit:

$$2\left(1 + \frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{24a^4x^4} + \frac{1}{720a^6x^6} + \text{etc.}\right).$$

Tum manifestum est, fore:

$$z = a - \frac{\left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{6a^3x^3} + \frac{1}{120a^5x^5} + \text{etc.}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{24a^4x^4} + \frac{1}{720a^6x^6} + \text{etc.}\right)}.$$

XVIII. Praeterea cum in fractionibus primam sequentibus partes absolutae sint negativae, eas facile in positivas transmutare licet. Ponatur enim $z = a + \frac{x^{-2}}{v} + n$, ut sit:

$$v = -a + \cfrac{x^{-2}}{-3a + \cfrac{x^{-2}}{-5a + \cfrac{x^{-2}}{-7a + \text{etc.}}}}$$

unde fit $-v = a + \cfrac{x^{-2}}{3a + \cfrac{x^{-2}}{5a + \cfrac{x^{-2}}{7a + \text{etc.}}}}$

Quare cum sit $z = a - \frac{x^{-2}}{-v}$, loco $-v$ substituto valore habebimus:

$$z = a - \cfrac{x^{-2}}{a + \cfrac{x^{-2}}{3a + \cfrac{x^{-2}}{5a + \cfrac{x^{-2}}{7a + \text{etc.}}}}}$$

XIX. Consideremus nunc iterum fractionem continuam generalem, pro z inventam, quae erat:

$$z = c + \cfrac{x^n}{c + na + \cfrac{x^n}{c + 2na + \cfrac{x^n}{c + 3na + \cfrac{x^n}{c + 4na + \text{etc.}}}}}$$

ubi valores ipsius z ex hac aequatione differentiali:

$$a x dz - c z dx + z z dx = x^n dx,$$

determinantur. Jam in fractione continua omnes partes absolutae, quae sunt c, $c + na$, $c + 2na$, $c + 3na$ etc. progressionem arithmeticam constituunt secundum differentiam na crescentem, at vero numeratores omnes sunt inter se aequales, scilicet x^n. Hinc ergo vicissim: quoties talis fractio continua occurrit, eius valor per aequationem differentialem ad genus Riccatianum pertinentem determinari poterit, id quod in sequente problemate accuratius prosequamur.

Problema.

XX. Proposita in genere hac fractione continua:

$$z = m + \cfrac{\Delta}{m + n + \cfrac{\Delta}{m + 2n + \cfrac{\Delta}{m + 3n + \cfrac{\Delta}{m + 4n + \text{etc.}}}}}$$

cuius partes absolutae in progressione arithmetica progrediantur, numeratores vero omnes sint inter se aequales; ejus valorem z ad resolutionem aequationis Riccatianae reducere.

Solutio.

Si haec forma cum modo ante allata comparetur, evidens est, eam in hanc converti, si statuamus $a = 1$ et $c = m$ tum vero potestati x^n tribui debet valor Δ, quod quidem nonnisi integratione peracta fieri licet. Quam ob rem valor quaesitus pro z ex hac aequatione differentiali:

$$x\,dz - mz\,dx + zz\,dx = x^n\,dx,$$

derivari debet.

XXI. Ut nunc hanc aequationem ad consuetam formam Riccatianae reducamus, statuamus $z = x^m v$ ut scilicet hoc modo aequatio ad tres terminos reducatur:

$$x^{m+1}\,dv + vvx^{2m}\,dx = x^n\,dx,$$

quae, per x^{m+1} divisa, abit in hanc:

$$dv + vvx^{m-1}\,dx = x^{n-m-1}\,dx,$$

quam formam ut penitus ad Riccatianam reducamus, ponamus $x^m = t$, ut fiat $x^{m-1}\,dx = \frac{dt}{m}$ et $x = t^{\frac{1}{m}}$, ideoque $dx = \frac{1}{m}t^{\frac{1-m}{m}}\,dt$ et $x^{n-m-1} = t^{\frac{n-m-1}{m}}$, quibus substitutis aequatio nostra fiet $dv + \frac{vvdt}{m} = \frac{1}{m}t^{\frac{n-2m}{m}}\,dt$, sive $mdv + vvdt = t^{\frac{n-2m}{m}}\,dt$, quae est ipsa aequatio Riccato debita.

XXII. Perpendamus nunc ante omnia casus, quibus haec aequatio resolutionem admittit, qui sunt quando in termino ad dextram posito exponens $\frac{n-2m}{m}$, in hac forma continetur $\frac{-4i}{2i+1}$, denotente i numerum quemcunque integrum, sive positivum, sive negativum. Ponamus igitur $\frac{n-2m}{m} = -\frac{4i}{2i+1}$, et utrinque binarium addendo habebimus $\frac{n}{m} = \frac{2}{2i+1}$, unde sumi poterit $m = 2i+1$ et $n = 2$. Hinc patet sumto $n = 2$, quoties fuerit m numerus impar quicunque, sive positivus, sive negativus, valorem fractionis continuae actu assignari posse, quod ergo contingit si fuerit:

$$z = 2i+1+\cfrac{\Delta}{2i+3+\cfrac{\Delta}{2i+5+\cfrac{\Delta}{2i+7+\text{etc.}}}}$$

Ubi quidem notandum est absoluta integratione fieri debere $x^n = \Delta$, hoc est $xx = \Delta$, estistente $x^m = t = x^{2i+1}$.

XXIII. Quoties autem fractio continua proposita non his conditionibus continetur, tum etiam per methodos adhuc cognitas finito modo neutiquam exprimi poterit, sed contenti esse debemus ejus valorem ad aequationem Riccatianam perduxisse, quippe cujus resolutio per series infinitas satis commode exhiberi potest, id quod unico exemplo declarabimus.

Exemplum I.

XXIV. Proposita nobis sit haec fractio continua:

$$z = 1+\cfrac{\Delta}{2+\cfrac{\Delta}{3+\cfrac{\Delta}{4+\text{etc.}}}}$$

Hic ergo erit $m = 1$ et $n = 1$, atque valor ipsius z ex hac aequatione differentiali quaeri oportet:

$$x\,dz - z\,dx + zz\,dx = x\,dx,$$

hacque aequatione resoluta loco x scribi oportebit Δ, unde patet integrationem ita institui debere, ut posito $x = 0$ fiat $z = 1$.

Ponatur nunc $z = xv$, ut oriatur haec aequatio: $dv + vv\,dx = \frac{dx}{x}$, quae ut commode in seriem resolvatur, ponamus $v = \frac{du}{u\,dx}$, et sumto elemento dx constante fit $xddu - udx^2 = 0$, quae jam facile in seriem resolvi poterit per potestates naturales ipsius x ascendentem. Statuatur ergo $u = ax^\lambda + bx^{\lambda+1} + cx^{\lambda+2} + dx^{\lambda+3} +$ etc. eritque:

$$\frac{ddu}{dx^2} = a\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + b(\lambda+1)\lambda x^{\lambda-1} + c(\lambda+2)(\lambda+1)x^\lambda + d(\lambda+3)(\lambda+2)x^{\lambda+1} + \text{etc.}$$

quae series aequari debet ipsi $\frac{u}{x}$, hoc est:

$$ax^{\lambda-1} + bx^\lambda + cx^{\lambda+1} + dx^{\lambda+2} + ex^{\lambda+3} + \text{etc.}$$

Unde patet prioris seriei terminum $a\lambda(\lambda-1)$ ad nihilum redigi debere, id quod duplici modo fieri debet, sumendo vel $\lambda = 0$ vel $\lambda = 1$.

XXV. Sumatur ergo primo $\lambda = 0$ et series nostrae coaequandae erunt:

I. $2c + 6dx + 12ex^2 + 20fx^3 + \text{etc.}$ et

II. $ax^{-1} + b + cx + dxx + ex^3 + \text{etc.}$,

erit igitur:

$$a = 0;\ c = \frac{b}{1.2};\ d = \frac{c}{2.3} = \frac{b}{1.2.2.3};$$

$$e = \frac{d}{3.4} = \frac{b}{1.2.2.3.3.4};\ f = \frac{e}{4.5} = \frac{b}{1.2.2.3.3.4.4.5},$$

quamobrem nostra series pro n sumto $b = 1$ erit:

$$u = x + \frac{1}{1.2}xx + \frac{1}{1.2^2.3}x^3 + \frac{1}{1.2^2.3^2.4}x^4 + \frac{1}{1.2^2.3^2.4^2.5}x^5 + \text{etc.}$$

XXVI. Simili modo evolvamus casum $\lambda = 1$, ac series pro $\frac{ddu}{dx^2}$ inventa erit:

$$1.2b + 2.3cx + 3.4dx^2 + 4.5ex^3 + 5.6fx^4 + \text{etc.}$$

cui aequalis esse debet:

$$\frac{u}{x} = a + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.}$$

unde fit:

$$a = 2b;\ b = \frac{1}{1.2}a;\ c = \frac{b}{2.3} = \frac{a}{1.2^2.3};$$

$$d = \frac{c}{3.4} = \frac{a}{1.2^2.3^2.4};\ e = \frac{d}{4.5} = \frac{a}{1.2^2.3^2.4^2.5}\ \text{etc.}$$

Hinc ergo sumto $a = 1$, pro u habebimus hanc seriem:

$$u = x + \frac{1}{1.2}xx + \frac{1}{1.2^2.3}x^3 + \frac{1}{1.2^2.3^2.4}x^4 + \frac{1}{1.2^2.3^2.4^2.5}x^5 + \text{etc.}$$

quae cum praecedente prorsus congruit.

XXVII. Invento jam valore litterae u, ob $v = \frac{du}{udx}$ erit nunc:

$$v = \frac{1 + x + \frac{x^2}{1.2^2} + \frac{x^3}{1.2^2.3^2} + \frac{x^4}{1.2^2.3^2.4^2} + \text{etc.}}{x + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2^2.3} + \frac{x^4}{1.2^2.3^2.4} + \frac{x^5}{1.2^2.3^2.4^2.5} + \text{etc.}}.$$

Quocirca ipse valor fractionis continuae propositae erit:

$$z = \frac{1 + x + \frac{xx}{1 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \text{etc.}}{1 + \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{xx}{1 \cdot 2^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{x^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} + \text{etc.}},$$

ubi commode evenit, ut sumto $x = 0$ fiat $z = 1$. Quamobrem, si faciamus $x = \Delta$, verus valor fractionis continuae propositae erit:

$$z = \frac{1 + \Delta + \frac{\Delta^2}{1 \cdot 2^2} + \frac{\Delta^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{\Delta^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \text{etc.}}{1 + \frac{\Delta}{1 \cdot 2} + \frac{\Delta^2}{1 \cdot 2^2 \cdot 3} + \frac{\Delta^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{\Delta^4}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} + \text{etc.}}.$$

Corollarium.

XXVIII. Sumamus $\Delta = 1$, ita ut proponatur haec fractio continua:

$$z = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \text{etc.}}}}}$$

atque valor ipsius z etiam sequenti modo exprimetur:

$$z = \frac{2 + \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} + \text{etc.}},$$

cuius valor in fractionibus decimalibus satis commode exprimi poterit. Reperitur autem numerator $= 2{,}278584$ et denominator $= 1{,}590635$, unde porro colligitur valor ipsius $z = 1{,}432490$.

XXIX. Potest vero etiam iste valor ex ipsa fractione continua deduci. Cum enim omnes numeratores sint $= 1$, partes absolutae tanquam indices ordine scribantur, et more solito fractiones subscribantur, ut sequitur:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7	
$\frac{1}{0}$;	$\frac{1}{1}$;	$\frac{3}{2}$;	$\frac{10}{7}$;	$\frac{43}{30}$;	$\frac{225}{157}$;	$\frac{1393}{972}$	etc.

quae fractiones eo propius ad veritatem accedent, quo ulterius continuentur.

DE INTEGRALIBUS QUIBUSDAM INVENTU DIFFICILLIMIS.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 1 Maii 1780.

§. 1. Obtulerat se mihi jam dudum haec formula integralis $-\int\frac{\partial x\, lx}{\sqrt{1-xx}}$, cujus valorem, ab $x=0$ ad $x=1$ extensum, cognoscere optabam. Suspicabar enim, non sine ratione, eum partim per quadraturam circuli, partim per logarithmos exprimi: Verum omnes conatus istum valorem investigandi irriti fuere, atque semper in eiusmodi series infinitas incidi, quarum summam assignare nullo modo licebat. Primo enim evolvi formam radicalem in seriem more solito, ut haberem hanc formulam:

$$s=-\int\partial x\, lx\left(1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\text{etc.}\right),$$

pro qua integranda cum sit:

$$\int -x^n\partial x\, lx=-\frac{x^{n+1}}{n+1}lx+\int\frac{x^n\partial x}{n+1}=-\frac{x^{n+1}}{n+1}lx+\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Sumendo $x=1$ erit $\int -x^n\partial x\, lx=\frac{1}{(n+1)^2}$, et singulis terminis hoc modo integratis reperitur:

$$s=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7^2}+\text{etc.}$$

Haec autem series ita est comparata, ut ejus summatio nullo modo pateat.

§. 2. Conatus igitur eram factorem lx in seriem resolvere, cujus singuli termini perducerent ad formulas integrabiles, sed pluribus tentaminibus institutis res non successit, donec tandem nuper in idoneam resolutionem ipsius lx in seriem incidi, qua totum negotium feliciter expediri poterat. Scilicet cum sit $lx = \frac{1}{2} lxx$, hic loco xx scripsi $1 - (1 - xx)$. Hinc enim statim prodibat:

$$-lxx = \frac{1 - xx}{1} + \frac{(1 - xx)^2}{2} + \frac{(1 - xx)^3}{3} + \text{etc.}$$

sicque formula proposita in hanc transformabatur:

$$s = \int \partial x \left(\frac{(1 - xx)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{(1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}}{6} + \text{etc.} \right),$$

cujus omnes partes facile ad quadraturam circuli reducuntur.

§. 3. Quo hoc facilius praestari possit constituamus hanc reductionem:

$$\int \partial x (1 - xx)^n = A x (1 - xx)^n + B \int \partial x (1 - xx)^{n-1},$$

unde differentiando et per $\partial x (1 - xx)^{n-1}$ dividendo oritur haec aequatio: $1 - xx = A(1 - xx) - 2nAx^2 + B$, unde fieri debet $A + B = 1$ et $A + 2nA = 1$. Hinc colligitur $A = \frac{1}{2n+1}$ et $B = \frac{2n}{2n+1}$, quocirca, sumto $x = 1$, habebitur ista reductio generalis:

$$\int \partial x (1 - xx)^n = \frac{2n}{2n+1} \int \partial x (1 - xx)^{n-1},$$

et loco n scribendo $\lambda + \frac{1}{2}$ erit:

$$\int \partial x (1 - xx)^{\lambda + \frac{1}{2}} = \frac{2\lambda + 1}{2\lambda + 2} \int \partial x (1 - xx)^{\lambda - \frac{1}{2}}.$$

§. 4. Cum nunc, integrationes semper ab $x=0$ ad $x=1$ extendendo, sit $\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}}=\frac{\pi}{2}$, reperietur per istam reductionem:

$$\int\partial x(1-xx)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2};$$
$$\int\partial x(1-xx)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2};$$
$$\int\partial x(1-xx)^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2};$$
$$\int\partial x(1-xx)^{\frac{7}{2}}=\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2};$$
etc.

His igitur valoribus ordine introductis nanciscemur sequentem seriem:

$$s=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2.2}+\frac{1\cdot 3}{2.4.4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4\ 6.6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2.4.6.8.8}+\text{etc.}\right),$$

quae series multo simplicior est ea quam supra attulimus; interim tamen insignem affinitatem tenet, atque adeo istae duae series inter se sunt aequales.

§. 5. Ut summam hujus seriei investigemus, consideremus hanc generaliorem:

$$v=\frac{t^2}{2.2}+\frac{1\cdot 3}{2.4.4}t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6.6}t^6+\text{etc.}$$

unde differentiando adipiscimur:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{t}{2}+\frac{1\cdot 3}{2.4}t^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6}t^6+\text{etc.}$$

cujus valor manifesto est $\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-tt}}-1\right)$. Hinc ergo fiet $v=\int\frac{\partial t}{t}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-tt)}}-1\right)$, quo integrali invento poni debebit $t=1$; ac tum erit summa quaesita $s=\frac{\pi}{2}v$.

§. 6. Hic primo irrationalitatem abigamus, ponendo $\sqrt{1-tt}=u$, ut sit $t=\sqrt{1-uu}$. Nunc autem integrationem extendi oportebit a termino $t=0$, hoc est $u=1$, usque ad $t=1$, hoc est $u=0$. Tum autem erit $\frac{\partial t}{t}=-\frac{u\partial u}{1-uu}$, ex quo conficitur:

$$v=-\int\frac{u\partial u}{1-uu}\left(\frac{1-u}{u}\right)=-\int\frac{\partial u}{1+u},$$

cujus integrale praebet $v=C-l(1+u)$, ubi constans C esse debet $l2$. Nunc igitur facto $u=0$ prodit $v=l2$ ideoque $s=\frac{1}{2}\pi l2$, qui ergo est valor formulae initio propositae, tantopere desideratus. Praeterea vero etiam series anteinventas nunc summare licet, scilicet series ex §. 1, quae erat

$$\frac{1}{1.1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7^2}=\frac{1}{2}\pi l2,$$

tum vero

$$\frac{1}{2.2}+\frac{1.3}{2.4.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6.6}+\text{etc.}=l2,$$

quae summationes per se satis abstrusae videri possunt. Hinc subjungimus sequens

Theorema.

Proposita formula integrali $\int\frac{-\partial x\, lx}{\sqrt{1-xx}}$ *ejus valor, a termino* $x=0$ *usque ad* $x=1$ *extensus, est* $=\frac{1}{2}\pi l2$.

§. 7. Si hanc formulam comparemus cum ista simpliciore: $\int\frac{-\partial x\, lx}{1-x}$, mirum utique erit, hanc non simili modo tractari posse, cum tamen aliunde constet, ejus valorem, ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensum, esse $= \frac{\pi\pi}{6}$. Cum enim sit:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc. et}$$

$$\int - x^{n-1} \partial x \, lx \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{nn},$$

inde oritur haec series:

$$\int \frac{-\partial x \, lx}{1-x} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$$

cujus summam olim primus inveni esse $= \frac{\pi\pi}{6}$, quem tamen valorem ex ipsa formula integrali nullo adhuc modo elicere potui. Hinc ergo sequitur ista proportio satis memorabilis:

$$\int \frac{-\partial x \, lx}{1-x} : \int \frac{-\partial x \, lx}{\sqrt{1-xx}} = \pi : 3\, l\, 2.$$

§. 8. His vestigiis insistenti, formulam integralem multo latius patentem mihi simili modo tractare licuit, quam operationem in sequente problemate explicabo:

Problema.

Proposita formula integrali $S = \int \frac{-x^{m-1} \partial x \, lx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}$, *ejus valorem, ab* $x = 0$ *ad* $x = 1$ *extensum, per expressionem finitam, tantum arcubus circularibus et logarithmis constantem, exhibere.*

Solutio.

§. 9. Hic ante omnia observasse juvabit hanc formulam: $\int \frac{x^{m-1} \partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}$ ab irrationalitate prorsus liberari posse, ponendo $\frac{x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} = t$. Hinc enim ista formula abit in hanc: $\int \frac{t^m \partial x}{x}$; tum autem erit $x^n = t^n (1 - x^n)$ ideoque $x^n = \frac{t^n}{1+t^n}$, sive in logarithmis:

$$n l x = n l t - l (1 + t^n),$$

unde differentiando prodit $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t(1+t^n)}$, ita ut per hanc substitutionem prodeat $\int \frac{t^{m-1} \partial t}{1+t^n}$, ubi, quia, sumto $x = 0$, fit etiam $t = 0$, at posito $x = 1$, fit $t = \infty$, hoc integrale a $t = 0$ usque ad $t = \infty$ est extendendum. Jam dudum autem demonstravi, istius formulae valorem hoc casu esse

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}.$$

Hinc ergo sequitur, etiam formulae integralis:

$$\int \frac{x^{m-1} \partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}},$$ ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensae

valorem esse $\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$, cujus loco, brevitatis gratia, scribamus Δ.

§. 10. Hoc praenotato in ipsa formula proposita loco lx scribamus $\frac{1}{n} l x^n$, hujusque loco porro $\frac{1}{n} l (1 - (1 - x^n))$, sicque, facta evolutione habebimus:

$$- l x = \frac{1-x^n}{n} + \frac{(1-x^n)^2}{2n} + \frac{(1-x^n)^3}{3n} + \text{etc.},$$

qua serie substituta, formula nostra integralis induet hanc formam:

$$S = \int x^{m-1}\partial x\left(\tfrac{1}{n}(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}} + \tfrac{1}{2n}(1-x^n)^{2-\frac{m}{n}} + \tfrac{1}{3n}(1-x^n)^{3-\frac{m}{n}} + \text{etc.}\right)$$

cujus singula membra ad valorem ante introductum $\frac{\pi}{m \sin. \frac{m\pi}{n}}$ revocare licebit. Hunc enim in finem constituamus hanc reductionem generalem:

$$\int x^{m-1}\,\partial x\,(1-x^n)^{\lambda} = A\int x^{m-1}\,\partial x\,(1-x^n)^{\lambda-1} + B x^m (1-x^n)^{\lambda},$$

factaque differentiatione ac divisione per

$$x^{m-1}\,\partial x\cdot(1-x^n)^{\lambda-1},$$

prodit haec aequatio:

$$1 - x^n = A + Bm(1-x^n) - \lambda n B x^n,$$

unde literae A et B ita definiuntur:

$$A = \frac{\lambda n}{m+\lambda n} \text{ et } B = \frac{1}{m+\lambda n}.$$

Quamobrem, quia omnia haec integralia ab $x=0$ ad $x=1$ sunt extendenda, habebimus hanc reductionem generalem:

$$\int x^{m-1}\,\partial x\,(1-x^n)^{\lambda} = \frac{\lambda n}{m+\lambda n}\int x^{m-1}\,\partial x\,(1-x^n)^{\lambda-1}.$$

§. 11. Hujus reductionis ope singulas partes evolvamus, ac pro prima parte erit $\lambda = 1 - \frac{m}{n}$ ideoque $\lambda n = n - m$, unde colligitur:

$$\int x^{m-1}\,\partial x\,(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}} = \frac{n-m}{n}\,\Delta.$$

Pro secunda parte erit $\lambda = 2 - \frac{m}{n}$, sive $\lambda n = 2n - m$, hincque colligitur pars secunda:

$$\int x^{m-1}\partial x\,(1-x^n)^{2-\frac{m}{n}} = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\Delta.$$

Pro tertia parte, ob $\lambda = 3 - \frac{m}{n}$ et $\lambda n = 3n - m$, erit:

$$\int x^{m-1}\partial x\,(1-x^n)^{3-\frac{m}{n}} = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{3n-m}{3n}\cdot\Delta.$$

Eodemque modo erit pars quarta:

$$\int x^{m-1}\partial x\,(1-x^n)^{4-\frac{m}{n}} = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{3n-m}{3n}\cdot\frac{4n-m}{4n}\cdot\Delta,$$

et ita porro.

His igitur singulis partibus colligendis pro valore quaesito S hanc habebimus expressionem:

$$S = \Delta\left(\frac{n-m}{n\cdot n} + \frac{(n-m)(2n-m)}{n\cdot 2n\cdot 2n} + \frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 3n} + \text{etc.}\right),$$

cujus ergo seriei summam investigari oportet.

§. 12. Hunc in finem consideremus istam seriem generaliorem:

$$T = \frac{n-m}{n\cdot n}t^n + \frac{(n-m)(2n-m)}{n\cdot 2n\cdot 2n}t^{2n} + \frac{(n-m)(2n-m)(2n-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 3n}t^{3n} + \text{etc.}$$

eritque differentiatione instituta et per t multiplicando:

$$\frac{t\partial T}{\partial t} = \frac{n-m}{n}t^n + \frac{(n-m)(2n-m)}{n\cdot 2n}t^{2n} + \frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n}t^{3n} + \text{etc.},$$

cujus seriei summa manifesto est $(1-t^n)^{-\frac{(n-m)}{n}} - 1$, unde ergo deducitur $\partial T = \frac{\partial t}{t}\left((1-t^n)^{-\frac{(n-m)}{n}} - 1\right)$, consequenter habebimus $T = \int\frac{\partial t}{t}\left((1-t^n)^{-\frac{(n-m)}{n}} - 1\right)$, quod integrale a termino $t = 0$ usque ad $t = 1$ extendi debet, quo facto erit noster valor quaesitus $S = \Delta T$.

§. 13. Nunc igitur jam tantum sumus lucrati, ut res deducta sit ad novam quidem formulam integralem sed nullos logarithmos involventem. Hanc vero formulam adeo ad rationalitatem perducere licebit statuendo $1 - t^n = u^n$, tum enim fiet $\frac{\partial t}{t} = -\frac{u^{n-1}\partial u}{1-u^n}$, atque hinc nanciscemur

$$T = -\int \frac{(u^{m-1} - u^{n-1})\partial u}{1-u^n},$$

quod integrale, cum a termino $t = 0$ usque ad $t = 1$ extendi debebat, nunc extendi debet ab $u = 1$ usque ad $u = 0$.

Permutatis igitur terminis integrationis fiet:

$$S = \Delta \int \frac{(u^{m-1} - u^{n-1})\partial u}{1-u^n} \left[\begin{smallmatrix} ab\ u = 0 \\ ad\ u = 1 \end{smallmatrix}\right],$$

quod integrale jam certe per logarithmos et arcus circulares exprimere licet, sicque problemati proposito plane est satisfactum.

§. 14. Hujus formulae pars posterior integrationem sponte admittit, cum sit $\int \frac{u^{n-1}\partial u}{1-u^n} = -\frac{1}{n} l(1-u^n)$, qui valor jam evanescit facto $u = 0$, at vero pro altero termino prodit infinitus; pars prior integrata continet quoque tale membrum $-\frac{1}{n} l(1-u)$, quod cum praecedente conjunctum dat $\frac{1}{n} l \frac{1-u^n}{1-u}$. Cum igitur sit $\frac{1-u^n}{1-u} = n$, ambo haec membra junctim sumta praebebunt $\frac{1}{n} l\, n$, omnes autem reliquae integralis partes habebunt finitam magnitudinem;

§. 15. Quanquam autem jam passim praecepta sunt tradita, integralia talium formularum inveniendi, haud inutile fore arbitror totam hanc integrationem ex primis principiis repetere; atque modo parumper discrepante tractare quam ergo investigationem, succinctius quam vulgo fieri solet, hic adjungam.

Problema.

Proposita formula integrali hac: $T = \int \frac{u^{m-1} - u^{n-1}}{1 - u^n} \partial u$, *ejus valorem, a termino* $u = 0$ *usque ad* $u = 1$ *extensum, investigare.*

Solutio:

§. 16. Modo notavimus, partis posterioris integrale esse $\frac{1}{n} l(1 - u^n)$, ejusque valorem infinitum, casu $u = 1$, a parte priore iterum destrui, unde solius partis prioris integrationem tradere sufficiet; hanc ob rem statuamus $U = \int \frac{u^{m-1} \partial u}{1 - u^n}$, ita ut sit $\partial U = \frac{u^{m-1} \partial u}{1 - u^n}$, ubi cum denominator manifesto habeat factorem $1 - u$, inde nascitur talis fractio partialis: $\frac{A \partial u}{1 - u}$, ubi erit $A = \frac{u^{m-1}(1 - u)}{1 - u^n}$, posito scilicet $u = 1$. Modo autem vidimus, fractionis $\frac{1 - u}{1 - u^n}$, valorem esse $\frac{1}{n}$, ita ut sit $A = \frac{1}{n}$, hincque orietur prima pars integralis $\frac{1}{n} \int \frac{\partial u}{1 - u} = - \frac{1}{n} l(1 - u)$ quae cum posteriore parte ipsius T conjuncta producit, ut vidimus, valorem $\frac{1}{n} l\, n$.

§. 17. Pro reliquis partibus hujus integralis inveniendis sit $1 - 2u \cos. \theta + uu$ factor quicunque denominatoris $1 - u^n$, quem ita comparatum esse oportet, ut, posito $uu = 2u \cos. \theta - 1$, etiam ipse denominator evanescat, ex qua conditione angulum θ determinare licebit. Hinc autem sequitur fore in genere $u^\lambda = 2u^{\lambda-1} \cos. \theta - u^{\lambda-2}$, ex qua forma intelligitur, potestates ipsius u seriem constituere recurrentem, cujus scala relationis est $2 \cos. \theta, -1$ atque hinc omnes potestates altiores ipsius u per solam primam et constantes difinire licebit. Evidens autem est, etiam quaevis multipla harum potestatum, veluti $A uu$, $A u^3$, $A u^4$, etc. secundum eandem scalam relationis $2 \operatorname{coc.} \theta, -1$ progredi, ita ut ex binis quibuscunque sequens facile colligi queat.

§. 18. Observavi autem hanc progressionem fieri simplicissimam, sumto $A = \sin. \theta$, quo facto in subsidium vocamus hoc lemma notissimum:

$$\sin. (\lambda + 1) \theta = 2 \cos. \theta \sin. \lambda\theta - \sin (\lambda - 1) \theta,$$

hincque series harum potestatum sequenti modo adornabitur:

$$\begin{aligned}
u \sin. \theta &= u \sin. \theta; \\
u^2 \sin. \theta &= u \sin. 2\theta - \sin. \theta; \\
u^3 \sin. \theta &= u \sin. 3\theta - \sin. 2\theta; \\
u^4 \sin. \theta &= u \sin. 4\theta - \sin. 3\theta; \\
u^5 \sin. \theta &= u \sin. 5\theta - \sin. 4\theta; \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

atque hinc in genere concludimus fore:

$$u^{\lambda} \sin.\theta = u \sin.\lambda\theta - \sin.(\lambda - 1)\theta.$$

§. 19. Cum nunc sit:

$$\sin.(\lambda - 1)\theta = \sin.\lambda\theta \cos.\theta - \cos.\lambda\theta \sin.\theta,$$

hinc fiet:

$$u^{\lambda} \sin.\theta = u \sin.\lambda\theta - \sin.\lambda\theta \cos.\theta + \cos.\lambda\theta \sin.\theta,$$

consequenter:

$$u^{\lambda} = \frac{(u - \cos.\theta)\sin.\lambda\theta}{\sin.\theta} + \cos.\lambda\theta,$$

quae formula ad sequentem usum optime est accomodata. Nunc ad ipsum angulum θ quaerendum sumamus $\lambda = n$, erit:

$$u^{n} = \frac{(u - \cos.\theta)\sin.n\theta}{\sin.\theta} + \cos.n\theta,$$

unde colligitur denominator:

$$1 - u^{n} = \frac{\sin.\theta(1 - \cos.n\theta) - (u - \cos.\theta)\sin.n\theta}{\sin.\theta},$$

qui cum debeat nihilo aequari, praebet has duas aequalitates: $\sin.n\theta = 0$ et $\cos.n\theta = 1$, unde patet fore $n\theta = i\pi$, ubi i est numerus integer sive par, sive impar, quia vero $\cos.n\theta$ debet esse $= 1$, evidens est pro i sumi debere numeros pares, ita ut valores pro angulo θ assumendi sint:

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \frac{8\pi}{n}, \text{etc.}$$

quorum primus 0 dat factorem denominatoris $(1 - u)$, quem jam supra expedivimus.

§. 20. Denotet nunc θ quemcunque alium istorum valorum eritque haec formula $1 - 2u\cos.\theta + uu$ certe factor nostri denominatoris $1 - u^n$, atque fractio $\frac{u^{m-1}}{1-u^n}$ resoluta certe continebit partem hujus formae: $\frac{N}{1-2u\cos.\theta+uu}$; cujus numerator N reperietur, uti alibi demonstravi, ex hac forma: $N = \frac{u^{m-1}(1-2u\cos.\theta+uu)}{1-u^n}$, posito scil. $uu - 2u\cos.\theta + 1 = 0$, quo ergo casu tam numerator quam denominator evanescet; unde ad valorem hujus fractionis $\frac{1-2u\cos.\theta+uu}{1-u^n}$ inveniendum, differentialia loco numeratoris et denominatoris substituta dabunt $\frac{u-\cos.\theta}{-nu^{n-1}}$, quod, ob $u^n = 1$, fit $\frac{u(u-\cos.\theta)}{-n}$, sicque numerator quaesitus N erit:

$$-\frac{u^m(u-\cos.\theta)}{n} = \frac{1}{n}(u^m\cos.\theta - u^{m+1}).$$

Supra autem invenimus:

$$u^\lambda = \frac{(u-\cos\theta)\sin.\lambda\theta}{\sin.\theta} + \cos.\lambda\theta;$$

quamobrem erit:

$$u^m\cos.\theta = \frac{(u-\cos.\theta)\cos.\theta\sin m\theta}{\sin.\theta} + \cos.\theta\cos.m\theta$$

$$-u^{m+1} = -\frac{(u-\cos.\theta)\sin.(m+1)\theta}{\sin.\theta} - \cos.(m+1)\theta;$$

hinc

$$N = \frac{1}{n}\left(\frac{(u-\cos.\theta)(\cos.\theta\sin.m\theta - \sin.(m+1)\theta)}{\sin.\theta}\right) + \cos.\theta\cos.m\theta - \cos.(m+1)\theta,$$

sive

$$N = \frac{1}{n}\left(-\frac{(u-\cos.\theta)\sin.\theta\cos.m\theta}{\sin.\theta} + \sin.m\theta\sin.\theta\right),$$ sive

$$N = \frac{1}{n}(\sin.\theta\sin.m\theta - (u-\cos.\theta)\cos.m\theta).$$

§. 21. Nostra igitur fractio $\frac{u^{m-1}}{1-u^n}$ hanc continebit fractionem partialem:

$$\frac{\sin.\theta\sin.m\theta - (u-\cos.\theta)\cos.m\theta}{n(1-2u\cos.\theta+uu)},$$

quam ergo, per ∂u multiplicatam, integrari oportet. Quia autem duabus constat partibus, earum postrema $\frac{1}{n}\int\frac{(u-\cos.\theta)\cos m\theta\,\partial u}{1-2u\cos.\theta+uu}$ integrata dat $\frac{\cos.m\theta}{2n}l(1-2u\cos.\theta+uu)$; prior vero pars:

$$\tfrac{1}{n}\sin.m\theta\int\frac{\partial u\sin.\theta}{1-2u\cos.\theta+uu}=\tfrac{1}{n}\sin.m\theta\,\mathrm{A\,tag.}\frac{u\sin.\theta}{1-u\cos.\theta}.$$

Sicque totum integrale hujus partis erit:

$$=-\frac{\cos.m\theta}{2n}l(1-2u\cos.\theta+uu)+\frac{\sin.m\theta}{n}\mathrm{A\,tag.}\frac{u\sin.\theta}{1-u\cos.\theta}.$$

§. 22. Hoc integrale manifesto jam evanescit posito $u=0$. Superest igitur tantum ut loco u scribamus 1, quo facto pars logarithmica erit:

$$\frac{\cos.m\theta}{2n}l(2-2\cos.\theta)=\frac{\cos.m\theta}{2n}l4\sin.\tfrac{1}{2}\theta^2=\frac{\cos.m\theta}{n}l2\sin.\tfrac{1}{2}\theta.$$

Pars autem circularis erit:

$$\frac{\sin.m\theta}{n}\mathrm{A\,tag.}\frac{\sin.\theta}{1-\cos.\theta}=\frac{\sin.m\theta}{n}\mathrm{A\,tag.}\frac{\cos.\frac{1}{2}\theta}{\sin.\frac{1}{2}\theta}=\frac{(\pi-\theta)\sin.m\theta}{2n},$$

consequenter totum integrale ortum ex denominatoris factore $1-2u\cos.\theta+uu$ erit:

$$-\frac{\cos m\theta}{n}l2\sin.\tfrac{1}{2}\theta+\frac{(\pi-\theta)}{2n}\sin.m\theta.$$

Quod si jam in hac formula loco θ successive substituantur valores supra assignati, qui erant $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$ etc. et in genere $\frac{2i\pi}{n}$, summa omnium harum formularum dat verum valorem ipsius T, postquam scilicet addiderimus terminum $\frac{1}{n}ln$. Posito autem in genere $\theta=\frac{2i\pi}{n}$, integralis pars inde orta erit:

$$-\tfrac{1}{n}\cos.\frac{2mi\pi}{n}l2\sin.\frac{i\pi}{n}+\frac{(n-2i)\pi}{2nn}\sin.\frac{2mi\pi}{n},$$

ubi loco i scribi debent numeri 1, 2, 3, 4, etc., donec integrale

6 *

fiat completum, quibus omnibus expeditis erit valor quaesitus T inventus.

Illustremus haec aliquot exemplis

Exemplum 1.

§. 23. Sit $n = 2$, et quia m minus esse debet quam n, ne quantitas $\Delta = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$ fiat infinita, necessario erit $m = 1$, ideoque $\Delta = \frac{\pi}{2}$. Tum vero erit $T = \frac{1}{2} l 2$. Addatur igitur terminus $\frac{1}{2} l 2$, prodibitque $T = l 2$; sicque erit, ut ante invenimus, $S = \frac{\pi}{2} l 2$, qui est valor formulae $\int \frac{-\partial x l x}{\sqrt{1 - xx}}$.

Exemplum 2.

§. 24. Sit nunc $n = 3$, eritque m vel 1 vel 2. Ex utroque autem valore prodit $\Delta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Tum vero sumi debet $\theta = \frac{2\pi}{3}$, quem valorem solum sumsisse sufficiet, ex quo:

$$T = -\tfrac{1}{3} \cos. \tfrac{2}{3} m\pi l \sqrt{3} + \tfrac{1}{18} \pi \sin. \tfrac{2}{3} m\pi,$$

ubi insuper addi debet $\frac{1}{3} l 3$. Pro casu igitur $m = 1$ erit

$$T = \tfrac{5}{12} l 3 + \tfrac{1}{12\sqrt{3}} \pi, \text{ hincque } S = \tfrac{\pi\pi}{3 \cdot 18} + \tfrac{5\pi l 3}{18\sqrt{3}},$$

qui est valor formulae integralis $\int \frac{-\partial x l x}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$. Pro altero casu, ubi $m = 2$, erit ut ante $\Delta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, at vero

$$T = \tfrac{5}{12} l3 - \tfrac{1}{12\sqrt{3}} \pi, \text{ hinc } S = \tfrac{5\pi l3}{18\sqrt{3}} - \tfrac{\pi\pi}{54},$$

qui ergo est valor hujus formulae integralis: $\int \frac{-x\partial x l x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$.

§. 25. Loco plurium exemplorum formulam generalem tradamus pro numero quocunque n, sumendo $\theta = \frac{2i\pi}{n}$, donec fiat $2i > n$, quippe quos casus omnes rejici oportet. Tum igitur ex forma pro casu $\theta = \frac{2i\pi}{n}$ evoluta et loco i ordine scribendo 1, 2, 3, etc. reperiemus hunc valorem:

$$\begin{aligned} T = \tfrac{1}{n} ln &- \tfrac{1}{n} \cos. \tfrac{2m\pi}{n} l2 \sin. \tfrac{\pi}{n} + \tfrac{(n-2)\pi}{2nn} \sin. \tfrac{2m\pi}{n} \\ &- \tfrac{1}{n} \cos. \tfrac{4m\pi}{n} l2 \sin \tfrac{2\pi}{n} + \tfrac{(n-4)\pi}{2nn} \sin. \tfrac{4m\pi}{n} \\ &- \tfrac{1}{n} \cos. \tfrac{6m\pi}{n} l2 \sin. \tfrac{4\pi}{n} + \tfrac{(n-6)\pi}{2nn} \sin. \tfrac{6m\pi}{n} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Has scilicet partes eo usque continuari oportet, quamdiu fuerit $i < \frac{1}{2}n$, atque hoc valore invento habebitur pro problemate primo $S = \Delta T$, existente $\Delta = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$.

§. 26. Duplicis igitur generis termini in hac expressione occurrunt, quorum priores tantum logarithmos involvunt, posteriores autem quadraturam circuli π, atque hic commode usu venit, ut istae posteriores partes omnes in unicam formulam contrahi queant, quod, si etiam circa priores partes logarithmicas praestari posset, id pro invento maximi momenti esset habendum. Quod autem ad partes circulares attinet, earum contractionem sequenti problemate docebimus.

Problema.

Omnes partes circulares, ad quas in problemate praecedente sumus perducti in unam summam contrahere, sive, omisso factore communi $\frac{\pi}{2nn}$, *hanc seriem:*

$$(n-2)\sin.\frac{2m\pi}{n}+(n-4)\sin.\frac{4m\pi}{n}+\ldots\ldots(n-2i)\sin.\frac{2im\pi}{n},$$

summare quousque scil. 2i *non superat* n.

Solutio:

§. 27. Ponamus brevitatis gratia $\frac{m\pi}{n}=\Phi$ atque series proposita sponte in has duas resolvitur:

$$n\sin.2\Phi+n\sin.4\Phi+n\sin.6\Phi+\ldots\ldots+n\sin.2i\Phi$$

$$2\sin.2\Phi+4\sin.4\Phi+6\sin.6\Phi+\ldots\ldots+2i\sin.2i\Phi$$

tum enim prior, demta posteriore, dabit valorem, quem quaerimus.

§. 28. Pro priore jam statuamus:

$$p=\sin.2\Phi+\sin.4\Phi+\sin.6\Phi+\ldots\ldots+\sin.2i\Phi$$

ac multiplicando per $2\sin.\Phi$ fiet:

$$\begin{aligned}2p\sin.\Phi=\cos.\Phi&-\cos.3\Phi-\cos.5\Phi-\cos.7\Phi\\&+\cos.3\Phi+\cos.5\Phi+\cos.7\Phi\\&-\cos.(2i-1)\Phi-\cos.(2i+1)\Phi\\&+\cos.(2i-1)\Phi\end{aligned}$$

unde fit $p=\frac{\cos.\Phi-\cos(2i+1)\Phi}{2\sin.\Phi}$.

§. 29. Pro altera serie summanda consideremus primo hanc seriem:

$$q = \cos. 2\,\Phi + \cos. 4\,\Phi + \cos. 6\,\Phi + \ldots\ldots + \cos. 2\,i\,\Phi$$

cujus differentiale statim dat:

$$\frac{-\partial q}{\partial \Phi} = 2\sin. 2\,\Phi + 4\sin. 4\,\Phi + 6\sin. 6\,\Phi + \ldots\ldots + 2\,i\sin. 2\,i\,\Phi.$$

Jam vero reperiemus:

$$\begin{aligned} 2q\sin.\Phi = -\sin.\Phi &+ \sin. 3\,\Phi + \sin. 5\,\Phi + \sin. 7\,\Phi \\ &- \sin. 3\,\Phi - \sin. 5\,\Phi - \sin. 7\,\Phi \\ &+ \sin.(2\,i-1)\,\Phi + \sin.(2\,i+1)\,\Phi \\ &- \sin.(2\,i-1)\,\Phi \end{aligned}$$

sive

$$2\,q\sin.\Phi = -\sin.\Phi + \sin.(2\,i+1)\,\Phi,$$

ideoque

$$q = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin.(2\,i+1)\,\Phi}{2\sin.\Phi},$$

consequenter habebimus:

$$\frac{\partial q}{\partial \Phi} = \frac{(2\,i+1)\cos.(2\,i+1)\,\Phi}{2\sin.\Phi} - \frac{\sin.(2\,i+1)\,\Phi\cos.\Phi}{2\sin.\Phi^2},$$

quibus valoribus inventis series prior, demta posteriore, hoc est $np + \frac{\partial q}{\partial \Phi}$, dabit valorem quaesitum, series vero in problemate proposita, ducta in $\frac{\pi}{2\,n\,n}$, dabit summam omnium partium circularium, quam quaerimus.

§. 30. Verum ad valores p et q inveniendos duos casus considerari convenit, prouti n fuerit vel numerus par, vet numerus impar. Sit igitur primo par, ponaturque $n = 2i$, ita ut i superare nequeat $\frac{n}{2}$, et quoniam posuimus $\Phi = \frac{m\pi}{n}$, erit nunc $\Phi = \frac{m\pi}{2i}$, unde deducimus:

$$p = \tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{m\pi}{2i} - \tfrac{1}{2}\cos.m\pi\cot.\tfrac{m\pi}{2i} + \tfrac{1}{2}\sin.m\pi,$$

quae expressio, ob $\sin.m\pi = 0$, reducitur ad hanc:

$$p = \tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{m\pi}{2i}\,(1 - \cos.m\pi);$$

ubi est $\cos.m\pi = \pm 1$, prouti m fuerit vel numerus par vel impar, atque priori casu erit $p = 0$, posteriori vero $p = \cot.\frac{m\pi}{2i}$.

§. 31. Porro autem hoc casu $n = 2i$ erit:

$$\frac{\partial q}{\partial \Phi} = i\cos.m\pi\cot.\tfrac{m\pi}{2i} - \tfrac{1}{2}(2i+1)\sin.m\pi - \tfrac{1}{2}\sin.m\pi\cot.\tfrac{m\pi^2}{2i},$$

quae expressio, ob $\sin.m\pi = 0$, abit in hanc:

$$\frac{\partial q}{\partial \Phi} = i\cos.m\pi\cot.\tfrac{m\pi}{2i}.$$

Quare cum summa quaesita sit $np + \frac{\partial q}{\partial \Phi}$, ea erit $i\cot.\frac{m\pi}{2i}$, consequenter, loco $2i$ restituendo n, erit summa $= \frac{1}{2}n\cot.\frac{m\pi}{n}$.

§. 32. Evolvamus nunc etiam alterum casum, quo n est numerus impar, et quoniam $2i+1$ superare non debet n, manifesto poni poterit $2i+1 = n$, quo facto statim habemus $p = \frac{1}{2}\cot.\frac{m\pi}{n} - \dfrac{\cos.m\pi}{2\sin.\frac{m\pi}{n}}$. Deinde vero

$$\frac{\partial q}{\partial \Phi} = \frac{n\cos.m\pi}{2\sin.\frac{m\pi}{n}} - \frac{\sin.m\pi\cot.\frac{m\pi}{n}}{2\sin.\frac{m\pi}{n}},$$

hincque ipsa summa quaesita:

$$np + \frac{\partial q}{\partial \Phi} = \frac{n \cos. \frac{m\pi}{n}}{2 \sin. \frac{m\pi}{n}} = \tfrac{1}{2} n \cot. \tfrac{m\pi}{n}.$$

§. 33. Cum igitur, sive n sit numerus par sive impar, eadem summa prodeat, scilicet $\frac{1}{2} n \cot. \frac{m\pi}{n}$, haec per $\frac{\pi}{2nn}$ multiplicata dabit summam omnium partium circularium, quarum ergo summa erit $\frac{\pi}{4n} \cot. \frac{m\pi}{n}$; consequenter formula generalis supra pro T inuenta erit nunc:

$$\begin{aligned} T = \tfrac{1}{n} l n + \tfrac{\pi}{2n} \cot. \tfrac{m\pi}{n} & - \tfrac{1}{n} \cos. \tfrac{2m\pi}{n}\, l\, 2 \sin. \tfrac{\pi}{n} \\ & - \tfrac{1}{n} \cos. \tfrac{4m\pi}{n}\, l\, 2 \sin. \tfrac{2\pi}{n} \\ & - \tfrac{1}{n} \cos. \tfrac{6m\pi}{n}\, l\, 2 \sin. \tfrac{4\pi}{n} \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

quae expressio porro, ducta in $\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$, dabit valorem expressionis in primo problemate tractatae, sicque nunc ex hac nova formula multo facilius erit exempla particularia, quotquot libuerit, evolvere.

§. 34. Circa formulam integralem, in problemate primo tractatam, casus prorsus singularis occurrit, quando $m = n$; tum enim fit $\Delta = \infty$. At vero habebitur $T = \int o\, \partial u$, sicque prodit $S = \Delta T = \infty. o$, cujus ergo valor hoc modo plane non determinatur. Eum ergo immediate ex ipsa prima formula eruere convenit. Posito autem $m = n$ erit:

$$S = -\int \frac{x^{n-1}\partial x\, lx}{1-x^n},$$

quae formula per seriem ita evolvitur:

$$S = \int -x^{n-1}\partial x\, lx\,(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \text{etc.}),$$

quae, ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensa, ob $\int - x^{\lambda-1}\partial x\, lx = \frac{1}{\lambda\lambda}$. statim ducit ad hanc seriem:

$$S = \frac{1}{nn}(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{etc.}),$$

cujus seriei summa cum sit $\frac{\pi\pi}{6}$, erit $S = \frac{\pi\pi}{6nn}$. At vero nulla via patet, hunc valorem ex praecedente solutione derivandi.

Problema.

Proposita formula integrali hac: $V = \int - \partial v\,(1-v)^{\theta-1}\, lv$, *ejus valorem, a termino* $v = 0$ *ad* $v = 1$ *extensum, per expressionem finitam repraesentare.*

Solutio:

§. 35. Cum sit $lv = l(1-(1-v))$ erit per seriem:

$$-lv = \frac{1-v}{1} + \frac{(1-v)^2}{2} + \frac{(1-v)^3}{3} + \text{etc.}$$

sicque erit:

$$V = \int \partial v\left(\frac{(1-v)^\theta}{1} + \frac{(1-v)^{\theta+1}}{2} + \frac{(1-v)^{\theta+2}}{3} + \text{etc.}\right).$$

Quare cum in genere sit $\int \partial v\,(1-v)^\lambda = -\frac{(1-v)^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C$, hoc ut evanescat, posito $v = 0$, fieri debet $C = \frac{1}{\lambda+1}$. Facto nunc $v = 1$, erit pro nostro casu $\int \partial v\,(1-v)^\lambda = \frac{1}{\lambda+1}$.

Quamobrem habebimus:

$$V = \frac{1}{1(\theta+1)} + \frac{1}{2(\theta+2)} + \frac{1}{3(\theta+3)} + \text{etc.}$$

§. 36. Cum nunc sit $\frac{1}{1(\theta+1)} = \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{\theta+1}\right)$, et in genere $\frac{1}{\alpha(\theta+\alpha)} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\theta+\alpha}\right)$, series nostra in duas partes resolvitur. Erit enim:

$$V = \frac{1}{\theta}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{\theta+1} - \frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{\theta+3} - \frac{1}{\theta+4} - \frac{1}{\theta+5} - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

quae quo facilius ad formulas integrales redigi queant, prior ita repraesentetur:

$$p = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \text{etc.}$$

altera vero hoc modo:

$$q = \frac{y^{\theta+1}}{\theta+1} + \frac{y^{\theta+2}}{\theta+2} + \frac{y^{\theta+3}}{\theta+3} + \text{etc.}$$

quippe quae casu $y = 1$ in nostras series abeunt. Inde vero prodit:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \text{etc.} = \frac{1}{1-y},$$
$$\frac{\partial q}{\partial y} = y^\theta + y^{\theta+1} + y^{\theta+2} + \text{etc.} = \frac{y^\theta}{1-y}.$$

Hinc igitur habebimus $\partial p - \partial q = \frac{\partial y(1-y^\theta)}{1-y}$ consequenter erit $p - q = \int \frac{\partial y(1-y^\theta)}{1-y}$. Formulam istam integralem ab $y = 0$ ad $y = 1$ extendendo, valor noster quaesitus erit $V = \frac{1}{\theta}\int\frac{\partial y(1-y^\theta)}{1-y}$, qui utique semper per logarithmos et arcus circulares assignari poterit.

Corollarium 1.

§. 37. Quo has formulas ad majorem affinitatem cum ante tractata reducamus, ponamus primo $v = x^n$, ita ut ipsa formula proposita nunc sit:

$$V = nn \int -x^{n-1} \partial x (1 - x^n)^{\theta - 1} lx.$$

Tum vero in formula, ad quam sumus perducti, statuamus simili modo $y = u^n$, fietque $V = \frac{n}{\theta} \int \frac{u^{n-1} \partial u (1 - u^{n\theta})}{1 - u^n}$, cujus formulae jam denominator et alterum membrum cum forma supra inventa $T = \int \frac{(u^{m-1} - u^{n-1}) \partial u}{1 - u^n}$ congruit. Quare ut paritas perfecta reddatur, statuamus $n\theta + n = m$, ideoque $\theta = \frac{m-n}{n}$, sicque forma proposita fiet:

$$V = nn \int -x^{n-1} \partial x (1 - x^n)^{\frac{m-2n}{n}} lx, \text{ sive}$$

$$V = nn \int \frac{-x^{n-1} \partial x \, lx}{\sqrt[n]{(1 - x^n)^{2n-m}}}.$$

Tum vero idem valor etiam ita exprimetur:

$$V = \frac{nn}{m-n} \int \frac{u^{n-1} - u^{m-1}}{1 - u^n} \partial u,$$

hoc est $V = \frac{nn}{n-m} T$. Hinc ergo, cum ex problemate primo sit $S = \Delta T$, nunc ambae formulae S et V ita a se invicem pendent ut sit $V = \frac{nn}{n-m} \cdot \frac{S}{\Delta}$.

Scholion.

§. 38. Haec reductio ad similitudinem adhuc alio modo peragi potest, statuendo $n\theta = m$, sive $\theta = \frac{m}{n}$, atque nunc formula proposita erit:

$$V = nn\int -x^{n-1}\partial x\, lx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} \text{ sive}$$

$$V = nn\int \frac{-x^{n-1}\partial x\, lx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}};$$

tum vero formula inde derivata erit:

$$V = \frac{nn}{m}\int\left(\frac{u^n - u^{m+n-1}}{1-u^n}\right)\partial u.$$

Cum autem sit $u^{m+n-1} = u^{m-1}(1-(1-u^n))$, haec formula transformabitur in hanc:

$$\frac{nn}{m}\int u^{m-1}\partial u + \frac{nn}{m}\int \frac{u^n - 1 - u^{m-1}}{1-u^n}\partial u,$$

ideoque $V = \frac{nn}{mm} - \frac{nn}{m}T$, quam obrem istae duae formulae integrales:

$$S = \int \frac{-x^{m-1}\partial x\, lx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}} \quad \text{et} \quad \frac{V}{nn} = \int \frac{-x^{n-1}\partial x\, lx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}$$

ita inter se cohaerent, ut, ob $T = \frac{S}{\Delta}$, sit $V = \frac{nn}{mm} - \frac{nn}{m}\frac{S}{\Delta}$, unde, quia formula posterior tanquam simplicior ipsius S spectari potest, valore ipsius V invento erit $S = \Delta\left(\frac{1}{m} - \frac{m}{nn}V\right)$. Haec autem reductio longe est praeferenda illi, quam ante invenimus, quippe quae laborabat hoc defectu, quod fractio differentialis ibi integranda erat spuria, cum in numeratore occurrat potestas $u^{n\theta+n-1}$, quae utique altior est quam potestas denominatoris u^n; quocirca nunc demum integrale pro quantitate T ante evolutum hic usurpari poterit.

SOLUTIO SUCCINCTA ET ELEGANS PROBLEMATIS,

QUO QUAERUNTUR TRES NUMERI TALES, UT TAM SUMMAE QUAM DIFFERENTIAE BINORUM SINT QUADRATA.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 11 Maii 1780.

§. 1. Etsi hoc problema jam a variis auctoribus est tractatum et resolutum, sequens tamen solutio omni attentione digna videtur, ideo quod non solum plura calculi artificia involvat, sed etiam facili negotio plures solutiones, alias inventu difficillimas, suppeditat.

§. 2. Sint x, y, z, tres numeri quaesiti, quorum maximus sit x, minimus vero z, ac statim patet, ponendo $x = pp + qq$ et $y = 2pq$ fore $x + y = (p + q)^2$ et $x - y = (p - q)^2$. Simili modo, ponendo $x = rr + ss$ et $z = 2rs$ erit $x + z = (r + s)^2$ et $x - z = (r - s)^2$, sicque jam quatuor conditionibus est satisfactum, si modo fuerit $rr + ss = pp + qq$. Tum vero adhuc duae conditiones adimplendae restant, scil. ut $y + z = 2pq + 2rs$ et $y - z = 2pq - 2rs$ quadrata reddantur.

§. 3. Ut primo fiat $rr + ss = pp + qq$ statuatur $x = (aa + bb)(cc + dd)$; tum enim iste valor duplici modo in duo quadrata resolvi potest: Fiet enim

$$p = ac + bd; \quad r = ad + bc;$$
$$q = ad - bc; \quad s = ac - bd.$$

Hinc ergo habebimus $y = 2(aacd + abdd - abcc - bbcd)$ et $z = 2(aacd + abcc - abdd - bbcd)$ hincque adeo $y + z = 4cd(aa - bb)$ et $y - z = 4ab(dd - cc)$, quas ergo duas formulas adhuc quadrata reddi oportet.

§. 4. Faciamus igitur primo productum:

$$yy - zz = 16abcd(aa - bb)(dd - cc) = \square,$$

unde primo necesse est ut haec formula:

$$ab(aa - bb) \times cd(dd - cc),$$

ad quadratum revocetur. Hunc in finem statuamus:

$$cd(dd - cc) = nnab(aa - bb)$$

et quia res a relatione inter binas literas a, b et c, d pendet, ponere licebit $d = a$, unde habebimus:

$$c(aa - cc) = nnb(aa - bb);$$

unde deducitur $aa = \frac{nnb^3 - c^3}{nnb - c}$, quae ergo fractio ad quadratum reduci debet.

§. 5. Hoc autem facile praestabitur, ponendo $a = b + c$, ut fiat $\frac{nnb^3 - c^3}{nnb - c} = bb + 2bc + cc$, qua aequatione evoluta termini b^3 et c^3 utrinque se destruent; nascetur enim ista aequatio: $0 = (2nn - 1)bbc + (nn - 2)bcc$; unde colligitur $\frac{b}{c} = \frac{2 - nn}{nn - 1}$.

§. 6. Quod si ergo ponamus $b = 2 - nn$ et $c = 2nn - 1$ erit $a = nn + 1$. Nunc totum negotium eo reducitur, ut vel haec formula: $ab(dd - cc)$ vel haec: $c\partial(aa - bb)$ reddatur quadratum. Prior autem formula ob $d = a$ et $d + c = 3nn$ et $d - c = 2 - nn$, erit $ab(dd - cc) = 3nn(nn + 1)(2 - nn)^2$, quae quadratum erit, dummodo fuerit $3(nn + 1) = \square$.

§. 7. At vero ista formula $3(nn + 1)$ nullo modo quadratum effici potest; interim tamen remedium facile adhiberi potest, dummodo loco valoris $a = b + c$ statuatur $a = b - c$, quo facto fiet $\frac{nnb^3 - c^3}{nnb - c} = bb - 2bc + cc$, unde evolvendo colligitur $\frac{b}{c} = \frac{nn + 2}{2nn + 1}$.

§. 8. Ponatur ergo $b = nn + 2$ et $c = 2nn + 1$, erit $a = nn - 1 = d$; unde ista formula $ab(dd - cc)$ reducitur ad hanc:

$$3nn(nn - 1)(nn + 2)^2.$$

Tantum ergo opus est, ut ista formula $3(nn - 1)$ efficiatur quadratum, id quod facillime praestatur, quia $nn - 1$ habet factores. Quodsi enim ponatur $3(nn - 1) = \frac{ff}{gg}(n + 1)^2$ fieri debet $3(n - 1) = \frac{ff}{gg}(n + 1)$, unde fit $n = \frac{ff + 3gg}{3gg - ff}$.

§. 9. Hoc igitur modo omnibus conditionibus praescriptis est satisfactum, unde regrediamur ad quantitates supra introductas; Ac primo quidem ex hoc valore pro n invento deducimus:

$a = d = \frac{12ffgg}{(3gg-ff)^2}$; $b = nn + 2 = \frac{3f^4 - 6ffgg + 27g^4}{(3gg-ff)^2}$ et $c = \frac{3f^4 + 6ffgg + 27g^4}{(3gg-ff)^2}$. Jam vero quia tota solutio tantum a ratione inter literas a, b, c, d, pendet, primo denominatores omittamus, numeratores vero per communem divisorem 3 dividamus, hocque modo sequentes obtinebimus valores:

$$a = d = 4ffgg;$$
$$b = f^4 - 2ffgg + 9g^4;$$
$$c = f^4 + 2ffgg + 9g^4.$$

Ex his derivemus literas p, q, r, s, quae erunt:

$$p = 8ffgg(f^4 + 9g^4); \quad r = f^8 + 30f^4g^4 + 81g^8;$$
$$q = -(f^4 - 9g^4)^2; \quad s = 16f^4g^4.$$

Praestat autem a primis valoribus f et g, pro arbitrio assumtis, per gradus, primo ad literas a, b, c, d, hinc vero porro ad literas p, q, r, s, hinc denique ad ipsos numeros quaesitos x, y, z, ascendere. Ubi imprimis notasse juvabit, hunc calculum per valores negativos neutiquam turbari; semper enim eorum loco valores positivos tuto scribere licet. Hanc investigationem nonnullis exemplis illustremus.

Exemplum 1,

quo $f = 1$ et $g = 1$.

§. 10. Hic ergo erit $a = d = 4$; $b = 8$; $c = 12$, qu valores depressi fiunt $a = d = 1$; $b = 2$; $c = 3$. Hinc porro colligimus $p = 5$; $q = 5$; $r = 7$; $s = 1$, unde $x = 50$; $y = 50$; $z = 14$, qui valores utique satisfaciunt; verum ista solutio ob simplicitatem ab indole quaestionis excludenda est.

Exemplum 2,
quo $f = 2$ et $g = 1$.

§. 11. Hic erit $a = 16$; $b = 17$; $c = 33$; $d = 16$. Hinc ergo porro deducitur $p = 800$; $q = 305$; $r = 817$; $s = 256$, quamobrem ipsi numeri quaesiti erunt:

$$x = 733025;\ y = 488000;\ z = 418304;$$

Hinc autem erit:

$$x + y = 1105^2;\quad x - y = 495^2;$$
$$x + z = 1073^2;\quad x - z = 561^2;$$
$$y + z = 952^2;\quad y - z = 264^2.$$

Exemplum 3,
quo $f = 3$ et $g = 1$.

§. 12. Hic ergo erit $a = 36$; $b = 72$; $c = 108$; sive per 36 deprimendo erit $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$; $d = 1$. Hinc ergo ad ipsum exemplum primum revolvimus, id quod semper evenit, quando pro f multiplum ternarii accipitur. Posito enim $f = 3h$ fiet $n = \frac{gg + 3hh}{gg - 3hh}$, quae a praecedente forma non discrepat.

Exemplum 4.
quo $f = 1$ et $g = 2$.

§. 13. Hic erit $a = 16$; $b = 137$; $c = 153$; $d = 16$; ideoque $p = 4640$; $q = 20705$; $r = 21217$; $s = 256$. Hinc autem ipsi numeri quaesiti x, y, z nimis fiunt magni, quam ut operae pretium sit eos evolvere.

Nota.

§. 14. Quoniam inventis numeris a, b, c, d, hincque p, q, r, s, ipsa solutio ita est adornata, ut fiat $x + y = p + q$, $x - y = p - q$; $x + z = r + s$ et $x - z = r - s$, quadrata etiam, quibus formulae $y + z$ et $y - z$ aequantur, evolvi conveniet. Invenimus autem $y + z = 4cd\,(aa - bb)$, quae, substitutis valoribus supra inventis, per f et g expressis, reducitur ad hanc formam:

$$4\,(f^4 + 2ffgg + 9g^4)^2\, 4ffgg\,(f^4 - 6ffgg + 9g^4),$$

quae manifesto est quadratum, cujus radix:

$$4fg\,(ff - 3gg)\,(f^4 + 2ffgg + 9g^4),$$

ita ut jam sit:

$$\sqrt{y + z} = 4fgc\,(ff - 3gg).$$

Simili modo cum sit $y - z = 4ab\,(dd - cc)$ erit

$$y - z = 4 \cdot 4ffgg\,(f^4 - 2ffgg + 9g^4)^2\,(f^4 + 6ffgg + 9g^4)$$

ideoque

$$\sqrt{y - z} = 4fg\,(ff + 3gg)\,(f^4 - 2ffgg + 9g^4) = 4fgc\,(ff + 3gg).$$

§. 15. Ceterum, quanquam haec solutio innumerabiles valores satisfacientes pro x, y, z, complectitur, ea tamen nequiquam pro generali est habenda. Quoniam enim supra §. 5. et 7 posuimus $a = b + c$ et $a = b - c$, evidens est, hanc positionem maxime esse particularem, quandoquidem huic aequationi infinitis aliis modis satisfieri potest. Interim tamen hic observasse juvabit, postquam hac methodo numeri idonei pro x, y, z, fuerint inventi, ex iis facile alios, qui sint X, Y, Z, deriuari posse, sumendo $X = \frac{yy + zz - xx}{2}$, $Y = \frac{xx + zz - yy}{2}$ et $Z = \frac{xx + yy - zz}{2}$. Tum enim $X + Y = zz$; $X - Y = xx - yy = \square$; $X + Z = yy = \square$; $Z - X = xx - zz = \square$; $Y + Z = xx = \square$;

$$Z - Y = yy - zz = \square.$$

Hoc autem modo statim ad numeros praegrandes deducimur. Similique modo continuo ad numeros majores pertingere licet.

Additamentum.

§. 16. Pauciores ambages requirit sequens problema affine et jam saepius tractatum.

Problema.

Invenire tria quadrata, xx, yy, zz, *ita ut binorum differentiae sint quadrata.*

Solutio.

§. 17. Posito $x = pp + qq$ et $y = 2pq$ fiet $xx - yy = (pp - qq)^2$. Simili modo, posito $x = rr + ss$ et $z = 2rs$, fiet $xx - zz = (rr - ss)^2$. Tantum igitur superest ut $yy - zz = 4(ppqq - rrss)$ reddatur quadratum, postquam scilicet factum fuerit.

$$pp + qq = rr + ss,$$

quod fit, uti supra est ostensum, sumendo $p = ac + bd$; $q = ad - bc$; $r = ad + bc$; $s = ac - bd$. Hinc autem, ut $yy - zz$ fiat quadratum, istud productum $abcd(aa - bb)(dd - cc)$ fiat quadratum, quod vidimus fieri, sumtis $a = d = nn \pm 1$; $b = 2nn \mp 1$ et $c = nn \mp 2$.

§. 18 Quod si jam loco n scribamus $\frac{m}{n}$, habebimus sequentes geminas determinationes:

$$a = d = mm \mp nn; \quad b = 2mm \pm nn; \quad c = mm \pm 2nn.$$

Hinc ergo sumendo pro m et n numeros simpliciores sequens tabula exhibet plures valores idoneos pro literis a, d, b, c. Ubi notandum est, si neuter numerorum m et n fuerit per 3 divisibilis, tum valores ex signis superioribus ortos per 3 deprimi posse, uti in sequente tabula factum est.

Tabula

exhibens valores idoneos pro literis a, b, c, d,

m	n	$a = d$	b	c
1	1	0	1	1
		2	1	1
2	1	1	3	2
		5	7	2
3	1	8	19	11
		10	17	7
3	2	5	22	17
		13	14	1
4	1	5	11	6
		17	31	14
4	3	7	41	34
		25	23	2
5	1	8	17	9
		26	49	23
5	2	7	18	11
		29	46	17
5	3	16	59	43
		34	41	7

m	n	$a = d$	b	c
5	4	3	22	19
		41	34	7
6	1	35	73	38
		37	71	34
6	5	11	97	86
		61	47	14
7	1	16	33	17
		50	97	47
7	2	15	34	19
		53	94	41
7	3	40	107	67
		58	89	31
7	4	11	38	27
		65	82	17
7	5	8	41	33
		74	73	1
7	6	13	134	121
		85	62	23
8	1	21	43	22
		65	127	62

m	n	$a=d$	b	c
8	3	55	137	82
		73	119	46
8	5	13	51	38
		89	103	14
8	7	5	59	54
		113	79	34
10	1	33	67	34
		101	199	98

Qui applicationem facere voluerit, notet, tam literas a et d, quam c et b, inter se permutari pose. Ac si numeri negativi prodeant, signum negationis omittetur, quo observato calculus fiet satis facilis.

Exemplum desumtum ex numeris $m=2$ et $n=1$ pro signis in ferioribus.

§ 19. Hic igitur est $a=5$; $b=7$; $c=5$; $d=2$ unde fit $p=39$; $q=25$; $r=45$; $s=11$; unde:

$x=2146$; $y=1950$; $z=990$ sive

$x=1023$; $y=975$; $z=445$.

§. 20. Praeterea notari meretur, ex qualibet solutione hujus problematis facile deduci posse solutionem praecedentis, quo quaeruntur tres numeri X, Y, Z, ita ut binorum tam summa quam differentia sit quadratum, quemadmodum modo ante animadvertimus; quia autem ibi fractiones occurrerent sumantur quadrupla:

$$X = 2(yy + zz - xx)$$
$$Y = 2(xx + zz - yy)$$
$$Z = 2(xx + yy - zz)$$

qui ergo omnes tres numeri semper erunt pares ideoque diversae prorsus sunt indolis ab illis numeris, quas solutio superior suppeditavit, ubi scilicet unus trium numerorum necessario est impar, quia alioquin deprimi possent.

DE RADIO CURVEDINIS CURVARUM DUPLICIS CURVATURAE, DEQUE CIRCULI OSCULANTIS POSITIONE, FACILLIME INDAGANDIS

AUCTORE

N. FUSS.

Conventui exhibuit die 2 Mai 1810.

Tab. I. Fig. 1. §. 1. Sit Z punctum quodcunque in curva non in eodem plano sita, sive duplici curvatura praedita, cujus ergo puncti situs per ternas coordinatas inter se normales $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, ita determinetur, ut tam y quam z spectari possint tanquam functiones ipsius x, unde statuamus $\partial y = p\partial x$ et $\partial z = q\partial x$; ubi ergo p et q erunt functiones ipsius x; hincque porro differentiando ponatur $\partial p = p'\partial x$ et $\partial q = q'\partial x$. Ex his igitur elementis definiamus radium osculi curvae pro puncto Z.

§. 2. Sit igitur punctum H centrum circuli osculantis, hocque punctum determinabitur ope ternarum coordinatarum inter se normalium $AF = f$, $FG = g$, $GH = h$, eritque HZ radius osculi quaesitus; atque manifestum est hanc lineam HZ eandem magnitudinem retinere debere, dum punctum Z non solum per proximum curvae elementum, sed adeo per duo proxima promoveatur; unde sequitur non solum differentiale primum istius rectae HZ, sed etiam ejus differentiale secundum nihilo aequari debere.

§. 3. Vocemus jam hunc radium osculi $HZ = r$, atque evidens est eum per coordinatas illas x, y, z, et f, g, h, ita determinari ut sit:

$$r^2 = (x - f)^2 + (y - g)^2 + (z - h)^2,$$

cujus ergo expressionis differentiale tam primum quam secundum nihilo aequari debet. At vero prima differentiatio, facta divisione per $2\,\partial x$, praebet hanc aequationem:

$$x - f + p\,(y - g) + q\,(z - h) = 0$$

altera vero differentiatio, facta divisione per ∂x, suppeditat:

$$1 + pp + qq + p'(y - g) + q'(z - h) = 0$$

atque ex his binis aequationibus definiri poterunt valores $y - g$ et $z - h$.

§. 4. Si enim prior harum aequationum ducatur in q', ab eaque auferatur altera in q ducta, remanet:

$$q'(x - f) + (pq' - qp')(y - g) - q\,(1 + pp + qq) = 0$$

unde sequitur fore:

$$y - g = \frac{q\,(1 + pp + qq) - q'(x - f)}{pq' - qp'}.$$

Sin autem a priore illarum aequationum, in p' ducta, subtrahatur altera per p multiplicata, prodibit:

$$p'(x - f) + (qp' - pq')(z - h) - p\,(1 + pp + qq) = 0$$

unde nanciscimur:

$$z - h = \frac{p(1 + pp + qq) - p'(x - f)}{qp' - pq'}.$$

§. 5. Ponamus nunc brevitatis gratia $1 + pp + qq = ss$ et $pq' - qp' = u$, atque superiores determinationes ita succinctius erunt expressae:

$$y - g = \frac{qss - q'(x - f)}{u}$$
$$z - h = \frac{p'(x - f) - pss}{u}$$

quibus valoribus, in expressione supra pro radio osculi data, substitutis reperietur fore:

$$rr = \frac{(p'p' + q'q' + uu)(x - f)^2}{u^2} - \frac{2s^2(pp' + qq')(x - f)}{u^2} + \frac{s^4(pp + qq)}{u^2}.$$

§. 6. Singularis hic circumstantia se offert, quod nempe linea f non sit determinata, unde etiam positio puncti H indeterminata manet et in infinitum variari poterit. Omnia autem ejus loca in lineam rectam cadent, propterea quod binae reliquae coordinatae g et h per unicam dimensionem ipsius f definiuntur; quare omnia plane puncta hujus lineae rectae pro puncto nostro quaesito H accipi poterunt.

§. 7. Quodsi enim rem attentius perpendamus, mox deprehendimus, hunc determinationis defectum cum statu
Tab 2. quaestionis egregie consentire. Sit enim circulus CDZ
Fig. I. circulus osculator curvae nostrae in puncto Z, in plano repraesentatus; et quoniam per operationes supra institutas

id quaesivimus punctum, quod ubique aequaliter distet a peripheria hujus circuli, manifestum est hanc proprietatem non solum proprio centro H hujus circuli convenire, sed etiam omnibus punctis H′ in rectä H H′, ad planum circuli normaliter erecta, sumtis. Unde mirum non est si calculus nobis innumerabilia puncta H exhibet in eadem linea recta sita.

§. 8. Cum autem omnes istae rectae H′ Z pro radiis osculi nostrae curvae haberi nequeant, sed is solus quaesito satisfacit, qui ex ipso centro H circuli ad punctum Z ducitur, ex innumerabilibus valoribus pro r inventis eum quaeri oportet, qui ipsi centro H conveniat. Facile autem intelligitur istum valorem minimum esse inter omnes valores pro r inventos; quamobrem haud difficile erit eum per methodum maximorum et minimorum eruere.

§. 9. Quoniam autem omnia illa puncta H′ ad unicum nostrum punctum Z referuntur atque ex sola variabilitate quantitatis f nascuntur, in hac minimi investigatione omnes quantitates x, y, z, p, q, p', q', pro constantibus sunt habendae; unde cum valor pro r^2 inventus talem habeat formam:

$$r\,r = A - 2\,B f + C f\!f$$

ejus differentiale nihilo aequale positum dat $f = \frac{B}{C}$, qui ergo est valor desideratus pro f, ex quo fit $r^2 = \frac{AC - BB}{C}$ unde verus radius osculi pro nostro puncto Z innotescit.

§. 10. Quo nunc formulam supra §. 5. pro rr inventam ad hanc postremam revocemus, statuamus, ut modo fecimus, $rr = A - 2B(x-f) + C(x-f)^2$, cujus differentiale nihilo aequatum dat $x - f = \frac{B}{C}$, quo valore substituto fit $rr = \frac{AC - BB}{C}$, ut supra. Cum autem sit:

$$A = \frac{s^4(pp+qq)}{uu};$$
$$B = \frac{ss(pp'+qq')}{uu};$$
$$C = \frac{p'p'+q'q'+uu}{uu};$$

habebimus $x - f = \frac{ss(pp'+qq')}{p'p'+q'q'+uu}$, et quadratum radii osculi

$$rr = \frac{s^4(pp+qq)}{uu} - \frac{s^4(pp'+qq')^2}{uu(p'p'+q'q'+uu)}.$$

§. 11. Cum autem haec expressio non sit admodum commoda, eam magis evolvere conveniet, quod facillime sequenti modo efficietur. Ex valoribus pro A, B, C, supra assignatis quaeratur:

$$AC = \frac{s^4}{u^4}[(pp+qq)(p'p'+q'q') + uu(pp+qq)]$$
$$BB = \frac{s^4}{u^4}(pp'+qq')^2,$$

eritque differentia:

$$AC - BB = \frac{s^4}{u^4}[(pp+qq)(p'p'+q'q') - (pp'+qq')^2]$$
$$+ \frac{s^4}{u^4}(pp+qq)uu.$$

Facta autem evolutione reperietur:

$$(pp+qq)(p'p'+q'q')-(pp'+qq')^2=(pq'+qp')^2=uu$$

quo substituto erit:

$$AC-BB=\frac{s^4}{u^2}(1+pp+qq)=\frac{s^6}{u^2}$$

unde porro fit

$$rr=\frac{AC-BB}{C}=\frac{s^6}{p'p'+q'q'+uu},$$

ita ut jam hanc nacti simus expressionem valde concinnam pro radio osculi quaesito:

$$r=\frac{(1+pp+qq)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p'p'+q'q'+(pq'-qp')^2}},$$

prorsus uti ab *Eulero* aliisque jam olim est inventus.

§. 12. Methodo commodisimae heic expositae radium osculi curvarum non in eodem plano sitarum investigandi jam pridem usus sum in dissertatione: *Solution de quelques problèmes relatifs au développement des courbes à double courbure.* Ea non solum simplicior est aliis, sed insuper quaestioni propositae melius satisfacit, ideo quod, praeter ipsam quantitatem radii osculi, etiam ipsam circuli osculantis positionem declarat. Cum enim invenerimus (§. 10.):

$$x-f=\frac{ss(pp'+qq')}{p'p'+q'q'+(pq'-qp')^2},$$

hoc valore in expressionibus §. 5. pro $y-g$ et $z-h$ inventis substituto erit:

$$y-g=\frac{ss(pqq'-p'(1+qq))}{p'p'+q'q'+(pq'-qp')^2},$$

$$z-h=\frac{ss(pp'q-q'(1+pp))}{p'p'+q'q'+(pq'-qp')^2},$$

unde pro quovis puncto Z curvae propositae centrum circuli osculantis H per ternas coordinatas f, g, h determinari poterit.

Applicatio I.

ad curvas in plano tabulae descriptas.

§. 13. Quod si ergo curva proposita in ipso plano tabulae fuerit descripta, erit $z = 0$, ideoque etiam $q = 0$ et $q' = 0$, unde expressio pro radio osculi erit:

$$r = \frac{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{p'}.$$

Pro situ autem centri circuli osculantis habebimus:

$$x - f = \frac{p(1 + pp)}{p'};$$

$$y - g = -\frac{(1 + pp)}{p'};$$

quae formulae cum elementis cognitis egregie conveniunt.

Applicatio II.

ad curvas in plano quocunque descriptas.

§. 14. Aequatio pro plano quocunque inter ternas coordinatas est: $z = a + \alpha x + \beta y$, unde si y fuerit functio quaecunque ipsius x, ob $\partial y = p \partial x$ et $\partial p = p' \partial x$ fiet $q = \alpha + \beta p$ et $q' = \beta p'$. Hoc igitur casu habebimus:

$$ss = 1 + pp + qq = 1 + pp + (\alpha + \beta p)^2,$$

$$u = pq' - qp' = -\alpha p'$$

et radium osculi $r = \frac{(1 + pp + (\alpha + \beta p)^2)^{\frac{3}{2}}}{p' \surd 1 + \alpha\alpha + \beta\beta}$. Pro positione denique centri circuli osculantis habebimus:

$$x - f = \frac{ss\,(\alpha\beta + p\,(1 + \beta\beta))}{p'\,(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)};$$
$$y - g = -\frac{ss\,(\alpha\beta p + \alpha q + 1)}{p'\,(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)};$$
$$z - h = \frac{ss\,(\alpha p - \beta)}{p'\,(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}.$$

Applicatio III.

ad curvas in superficie cylindri descriptas.

§. 15. Sit radius basium cylindri $= a$, ejusque axis in ipsam rectam A B incidat. Erit igitur hic $yy + zz = aa$, unde pro curva quacunque in superficie hujus cylindri descripta statui poterit $y = a \cos. \Phi$ et $z = a \sin. \Phi$, existente angulo Φ functione quacunque abscissae x. Hancobrem ponamus $\partial\Phi = t\partial x$ et $\partial t = t'\partial x$, hincque habebimus $p = \frac{\partial y}{\partial x} = -at \sin. \Phi$ et $q = \frac{\partial z}{\partial x} = at \cos. \Phi$, tum vero Tab. I. Fig. 1.

$$p' = \frac{\partial p}{\partial x} = -at' \sin \Phi - att \cos. \Phi;$$
$$q' = \frac{\partial q}{\partial x} = +at' \cos. \Phi - att \sin. \Phi;$$

ex quibus valoribus colligitur:

$$ss = 1 + aatt,$$
$$u = aat^3,$$
$$p'p' + q'q' + uu = aa\,(t't' + sst^4).$$

Hinc autem sequitur fore radium osculi quaesitum:

$$r = \frac{s^3}{a\surd(t't' + sst^4)}$$

et pro positione centri circuli osculantis habebimus:

$$x - f = \frac{sstt'}{t't' + sst^4},$$
$$y - g = \frac{ss\,(sstt\cos.\Phi + t'\sin.\Phi)}{a\,(t't' + sst^4)},$$
$$z - h = \frac{ss\,(sstt\sin\Phi - t'\cos.\Phi)}{a\,(t't' + sst^4)}.$$

§. 16. Hae formulae valent pro omnibus curvis, quas in superficie cylindri describere licet, inter quas praecipue notari meretur helix Archimedea, in qua angulus Φ abscissae x est proportionalis. Ponamus igitur pro hac curva $x = na\Phi$, sive $\Phi = \frac{x}{na}$, unde fit $t = \frac{1}{na}$ et $t' = 0$, unde radius osculi erit $r = a\,(1 + nn)$, constans, uti per se est perspicuum, quandoquidem ista curva ubique aequaliter incurvata esse debet, eritque radius osculi ad radium baseos cylindri ut $1 + nn$ ad 1.

§. 17. Quod positionem centri circuli osculantis attinet, ea determinabitur his formulis:

$$x - f = 0,$$
$$y - g = a\,(1 + nn)\cos.\Phi = (1 + nn)\,y;$$
$$z - h = a\,(1 + nn)\sin.\Phi = (1 + nn)\,z,$$

unde fit $f = x$; $g = -nny$, $h = -nnz$. Ex primo valore intelligitur punctum F in ipsum punctum X incidere. Ex secundo patet rectam FG capiendam esse ad alteram axis partem et quidem $FG = nn\,.\,XY$. Ex tertia perspi-

Tab. I. Fig. 3.

citur normalem GH, in G erectam, coordinatae YZ oppositam esse debere et $GH = nn \, . \, YZ$. Tum erit H centrum circuli osculantis; unde patet radium osculi ZH per ipsum punctum X transire, quandoquidem triangulum FHG omnino simile est triangulo XZY et $FH = nn \, . \, XZ$ et $HZ = (1 + nn) XZ$, ideoque $HZ : XZ = 1 + nn : 1$, uti requiritur.

Applicatio IV.

ad curvas in superficie conica descriptas.

§. 18. Statuatur vertex coni in puncto A, ejusque axis incidat in rectam AF, erit sectio ad hunc axem normalis, in puncto X facta, circulus, cujus radius, proportionalis abscissae $AX = x$, statuatur hanc ob caussam $= nx$, ita ut n sit tangens dimidii anguli in vertice coni, eritque ubique $yy + zz = nnxx$. Pro curvis igitur in superficie hujus coni descriptis statui poterit $y = nx \cos. \Phi$ et $z = nx \sin. \Phi$, existente angulo Φ functione ipsius x, unde ut ante statuamus $\partial \Phi = t \partial x$ et $\partial t = t' \partial x$; fietque:

$$p = n \cos. \Phi - ntx \sin. \Phi,$$

$$q = n \sin. \Phi - ntx \cos. \Phi,$$

$$p' = -2nt \sin. \Phi - nt'x \sin. \Phi - nttx \cos. \Phi,$$

$$q' = 2nt \cos. \Phi + nt'x \cos. \Phi - nttx \sin. \Phi,$$

unde porro deducuntur valores:

$$ss = 1 + nn(1 + ttxx),$$
$$u = nn(2t + t'x + xxt^3),$$
$$p'p' + q'q' + uu = nnvv,$$

existente

$$vv = (1+n^2)(2t+t'x)^2 + t^4x^2(1+n^2t^2x^2) + 2n^2(2t+t'x)x^2t^3,$$
$$r = \frac{s^3}{nv}.$$

Quod positionem centri II attinet, quoniam valores p, q, p', q', s, u, modo assignavimus, quovis casu oblato facile erit eam ex formulis generalibus supra §. 12. allatis derivare.

§. 19. Inter curvas in superficie coni descriptas illa singularem attentionem meretur, quae brevissima est inter data duo puncta cujus natura his formulis exprimitur:

$$x = \frac{a\sqrt{\lambda\lambda - 1}}{\cos.\omega}$$
$$y = \frac{a}{\cos.\omega}\,.\,\cos.\lambda\omega,$$
$$z = \frac{a}{\cos.\omega}\,.\,\sin.\lambda\omega,$$

quae si cum nostris formulis generalibus §. 18. comparemus, manifestum est sumi debere $\Phi = \lambda\omega$ et $\frac{a}{\cos.\omega} = nx$, ita ut habeamus $x = \frac{a}{n\cos.\omega} = \frac{a\sqrt{\lambda\lambda-1}}{\cos.\omega}$, ergo $n = \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda-1}}$ et $\lambda = \frac{\sqrt{1+nn}}{n}$. Hinc omnia ad angulum ω reducendo erit $\partial x = \frac{a\partial\omega\sin.\omega}{n\cos.\omega^2}$, unde porro fit $t = \frac{\lambda\partial\omega}{\partial x} = \frac{\lambda n\cos.\omega^2}{a\sin.\omega}$, hincque $t' = -\frac{\lambda nn}{aa}\frac{\cos.\omega^3(1+\sin.\omega^2)}{\sin.\omega^2}$. Quod si nunc in formulis §. 18. loco t et x valores hic inventi substituantur, prodibit:

$$p = n\cos.\Phi - \frac{\lambda n \sin.\Phi \cos.\omega}{\sin.\omega},$$

$$q = n\sin.\Phi + \frac{\lambda n \cos.\Phi \cos.\omega}{\sin.\omega},$$

$$p' = \frac{\lambda n \cos.\omega^2}{a \sin.\omega^2}[n(1-\sin.\omega)^2 \sin.\Phi - \lambda n \cos.\omega \cos.\Phi],$$

$$q' = -\frac{\lambda n \cos.\omega^2}{a \sin.\omega^2}[n(1-\sin.\omega)^2 \cos.\Phi + \lambda n \cos.\omega \sin.\Phi],$$

$$s^2 = 1 + nn + \lambda\lambda nn \cot.\omega^2,$$

$$p'p' + q'q' = \frac{\lambda^2 n^4}{a^2}\cot.\omega^4 (\lambda\lambda \cos.\omega^2 + (1-\sin.\omega)^4),$$

$$r = \frac{a(1 + nn + \lambda\lambda nn \cot.\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda nn \cot.\omega^2 \sqrt{\lambda\lambda \cos.\omega^2 + (1-\sin.\omega)^4 + vv}},$$

existente $v = \frac{a u}{\lambda nn \cot.\omega^2}$.

§. 20. Evolutionem aliorum casuum specialium ulterius non prosequor, quoniam ex applicationibus supra factis usus nostrarum formularum generalium jam abunde perspicitur. Majoris momenti mihi videtur sequentium binorum problematum solutio, quorum altero quaeritur positio plani ad directionem curvae in puncto Z normalis, altero positio plani in quo minima curvae portiuncula est sita, quam igitur solutionem heic coronidis loco subjungamus.

Problema I.

§. 21. *Proposita curua quacunque non in eodem plano sita, determinare positionem plani, quo curva in puncto Z normaliter trajicitur.* Tab. I. Fig. 4.

Solutio:

Quoniam punctum curvae Z per ternas coordinatas $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ determinatur, quarum binae tanquam functiones tertiae spectari possunt, ponamus ut supra $\partial y = p\partial x$, $\partial z = q\partial x$. Jam concipiatur planum per punctum Z transiens, ad quod curvae directio sit perpendicularis, atque ponamus intersectionem hujus plani cum plano tabulae esse rectam NKV, axem AB in puncto K secantem; sicque quaestio huc redit, ut positio hujus rectae determinetur. Hunc in finem ponamus intervallum $AK = k$ et angulum $PKV = \theta$, et evidens est, si a quolibet hujus rectae puncto V ad Z ducatur recta VZ, eam quoque ad curvam fore normalem, unde ejus quantitas nullum accipiet incrementum, dum punctum Z per elementum promovetur, quamobrem differentiale hujus rectae VZ nihilo erit aequale statuendum.

Vocemus intervallum $KV = v$, ac demisso ex V in axem AB perpendiculo VP, erit $KP = v \cos.\theta$ et $VP = v \sin.\theta$, unde fit intervallum $XP = k + v \cos.\theta - x$, sicque habebimus:

$$VZ^2 = (k + v \cos.\theta - x)^2 + (v \sin.\theta - y)^2 + zz$$

cujus differentiale, nihilo aequatum, praebet hanc aequationem:

$$k + v \cos.\theta - x + (v \sin.\theta - y)\, p - q z = 0$$

ex qua positio rectae N K V debet definiri, hoc est tam intervallum A K $= k$ quam angulus P K V $= \theta$. Quoniam autem haec aequatio locum habere debet ubicumque punctum V accipiatur, sumamus $v = 0$ et aequatio evadet:

$$k - x - p y + q z = 0,$$

quae ab illa subtracta relinquit:

$$v \cos.\theta + p v \sin.\theta = 0,$$

unde angulus θ ita definitur ut sit tag. $\theta = -\frac{1}{p}$. Ipsum autem intervallum k ex superiore aequatione ita definitur ut sit:

$$k = x + p y + q z,$$

sicque problema perfecte est solutum.

Corollarium 1.

§. 22. Si ex puncto Y in rectam N K demittatur perpendiculum Y O, manifestum est punctum O inter omnia puncta rectae N V fore id, cujus distantia a puncto curvae Z est minima. Ad hoc punctum per calculum determinandum etiam ex X in rectam K N demittatur perpendiculum XQ, atque ob KX $= k - x$ erit XQ $= (k - x)\sin.\theta$ et KQ $= (k - x)\cos.\theta$. Deinde si ex X ad YO demittatur perpendiculum X S, ob angulum X Y S $= \theta$, erit XS $=$ QO $= y \sin.\theta$ et Y S $= y \cos.\theta$, unde porro elicitur.

$$K\,O = (k - x)\ \cos.\theta - y \sin.\theta\,,$$
$$O\,Y = (k - x)\ \sin.\theta + y \cos.\theta\,,$$

quae postrema linea cum sit subnormalis nostrae curvae, si eam ultra Y ita producamus usque in T, ut sit $OY : YZ = YZ : YT$, erit subtangens:

$$Y\,T = \frac{zz}{(k - x)\sin.\theta + y\cos.\theta}\,.$$

Corollarium 2.

§. 23. Quod si vero in has postremas formulas, loco anguli θ, quantitates nostras p et q introducere velimus, notetur esse $\operatorname{tg}.\theta = -\frac{1}{p}$, hinc $\sin.\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+pp}}$ et $\cos.\theta = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$; tum vero erit $k - x = py + qz$, unde porro concluditur fore

$$\text{Subnormalis } O\,Y = \frac{-qz}{\sqrt{1+pp}}\,,$$
$$\text{Subtangens } Y\,T = \frac{-z\sqrt{1+pp}}{q}\,.$$

Problema 2.

§. 24. *Proposita linea duplici curvatura praedita, pro quovis ejus puncto Z investigare planum, in quo minima curvae portiuncula sit sita.*

Solutio.

Tab. I. Fig. 5. Positis ut supra coordinatis ternis $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ tum vero $\partial y = p\,dx$, $\partial z = q\,dx$, ac denuo differentiando $\partial p = p'\partial x$ et $\partial q = q'\partial x$, consideremus bina curvae elementa contigua, quae, quatenus in directum sunt posita, planum aliquod determinabunt, quod, si productum intelligatur, planum tabulae intersecari debet secundum rectam quampiam N S M, axem vero A B in puncto S, pro quo statuamus intervallum $AS = s$ et angulum $ASN = \Phi$. Ad hanc rectam tam ex Y quam ex Z demittantur perpendiculares YP et ZP, eritque, ut in §. 22 est ostensum:

$$YP = (s - x) \sin. \Phi + y \cos. \Phi.$$

Vocemus angulum $ZPY = \omega$, quo nempe inclinatio plani quaesiti ad planum tabulae determinatur, et cum sit

$$\text{tag. } ZPY = \frac{YZ}{YP}, \text{ erit}$$

$$\text{tag. } \omega = \frac{z}{(s - x) \sin. \Phi + y \cos. \Phi},$$

sive, quod usui sequenti magis accommodatum erit:

$$\cot. \omega = \frac{(s - x) \sin. \Phi + y \cos. \Phi}{z}.$$

Quoniam autem requiritur ut curvae propositae bina elementa proxima in eodem plano MZN sint sita, necesse est ut inclinatio hujus plani, seu angulus ω, nullam mutationem patiatur, dum punctum Z per bina elementa proxima promovetur, unde sequitur hujus anguli ω non solum differentiale primum, sed etiam secundum, nihilo aequale esse debere, id quod pariter de ejus tangente et cotangente erit tenendum.

Sumatur jam differentiale cotangentis anguli ω, sumtis solis coordinatis x, y, z pro variabilibus, eoque nihilo aequato prodibit:

$$\frac{p\cos.\Phi}{z} - \frac{\sin.\Phi}{z} - \frac{sq}{zz} + \frac{qx\sin.\Phi}{zz} - \frac{qy\cos.\Phi}{zz} = 0,$$

cujus expressionis nunc etiam differentiale secundum est capiendum, quod quo facilius fieri possit ponamus brevitatis gratia:

$$P = \frac{q}{zz},$$

$$Q = \frac{1}{z} - \frac{qx}{zz} = \frac{z - qx}{zz},$$

$$R = \frac{p}{z} - \frac{qy}{zz} = \frac{pz - qy}{zz},$$

ita ut aequatio differentianda sit:

$$\text{I.} \quad -Ps - Q\sin.\Phi + R\cos.\Phi = 0,$$

cujus differentiale nihilo aequale positum dat istam aequationem:

$$\text{II.} \quad -s\,\partial P - \partial Q\sin.\Phi + \partial R\cos.\Phi = 0.$$

Hoc ergo modo duas adepti sumus aequationes ex quibus ambas incognitas s et Φ investigari oportet. Ex prima harum aequationum fit:

$$1^\circ)\quad s = \frac{R\cos.\Phi - Q\sin.\Phi}{P},$$

ex secunda autem emergit:

$$2^\circ)\quad s = \frac{\partial R\cos.\Phi - \partial Q\sin.\Phi}{\partial P},$$

qui valores si inter se comparentur, reperietur primo:

$$\text{tag.}\,\Phi = \frac{R\,\partial P - P\,\partial R}{Q\,\partial P - P\,\partial Q},$$

tum vero sin ita inter se combinentur ut 1 ducatur in $R\partial P$, 2 vero in $P\partial R$, reperietur fore:

$$s = \frac{(Q\partial R - R\partial Q)}{R\partial P - P\partial R} \sin. \Phi,$$

existente

$$\sin. \Phi = \frac{R\partial P - P\partial R}{\sqrt{(R\partial P - P\partial R)^2 + (Q\partial P - P\partial Q)^2}}.$$

Cum autem sit $\frac{Q}{P} = \frac{z - qx}{q}$, habebimus differentiando:

$$\frac{P\partial Q - Q\partial P}{PP} = -\frac{q'z\partial x}{qq},$$

unde porro facile derivatur:

$$Q\partial P - P\partial Q = \frac{q'\partial x}{z^3}.$$

Simili modo cum sit $\frac{R}{P} = \frac{pz - qy}{q}$, differentialibus sumtis erit

$$\frac{P\partial R - R\partial P}{PP} = \frac{(p'q - q'p)\, z\partial x}{qq},$$

unde porro sequitur fore:

$$R\partial P - P\partial R = \frac{(pq' - qp')\,\partial x}{z^3}.$$

Denique ob $\frac{R}{Q} = \frac{pz - qy}{z - qx}$ erit:

$$\frac{Q\partial R - R\partial Q}{QQ} = \frac{\partial x\,[p'z(z - qx) + q'z(px - y)]}{(z - qx)^2},$$

unde, multiplicando per Q, fit:

$$Q\partial R - R\partial Q = \frac{[p'(z - qx) + q'(px - y)]\,\partial x}{z^3}.$$

His valoribus inventis, facile inde derivantur sequentes determinationes:

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{pq' - qp'}{q'},$$

$$\sin.\,\Phi = \frac{pq' - qp'}{\sqrt{q'q' + (pq' - qp')^2}},$$

$$s = \frac{p'(z - qx) + q'(px - y)}{\sqrt{q'q' + (pq' - qp')^2}},$$

quibus igitur positio plani quaesiti penitus est assignata, dum non solum punctum, ubi axem trajicit, sed etiam inclinatio ejus ad planum tabulae innotescunt.

Corollarium 1.

§. 25. Utraque formula tam pro intervallo s, quam pro angulo Φ continet p' et q'. Quod si statuamus $p' = 0$ et $q' = 0$, erit $s = \frac{0}{0}$ et tag. $\Phi = \frac{0}{0}$. Hoc enim casu curva proposita est linea recta, et omnia plana per hanc rectam ducta conditioni problematis satisfaciunt; unde mirum non est si punctum s et angulus Φ manent quantitates indeterminatae.

Corollarium 2.

§. 26. Idem evenit, si statuatur $z = 0$, ita ut tota curva in plano tabulae sit descripta, tum enim erit $q = 0$, $q' = 0$, ideoque tg. $\Phi = \frac{0}{0}$ et $s = \frac{0}{0}$, ut supra, quod mirum non est, quoniam ipsum planum tabulae hoc casu quaesito satisfacit.

Corollarium 3.

§. 27. Omnia autem haec clariora evadent, si ex valoribus supra inventis etiam ipsam plani quaesiti inclinationem ω quaeramus. Erat autem ejus tangens:

$$\text{tag. } \omega = \frac{z}{(s-x)\sin.\Phi + y\cos\Phi};$$

quae expressio, sponte evanescens casu $z=0$, ob

$$(s-x)\sin.\Phi + y\cos.\Phi = \frac{p'z}{\sqrt{q'q' + (pq' - qp')^2}};$$

in sequentem abit per p et q definitam:

$$\text{tag. } \omega = \frac{\sqrt{q'q' + (pq' - qp')^2}}{p}.$$

DUARUM CURVARUM TRANSCENDENTIUM EARUMQUE PROPRIETATUM INVESTIGATIO.

AUCTORE

E. COLLINS.

Conventui exhibuit die 30 Sept. 1812.

§. 1. Utraque curvarum, quarum investigationem hic mihi scopo proposui, est logarithmica ac aequationes, quas reperi inter coordinatas earum, similes inter se. Conditiones, quibus determinantur hae aequationes, sunt simplicissimae, perinde ac expressiones inde resultantes pro radiis curvedinis, rectificatione arcuum, cet. Contemplatus sum eas prius singulatim, tum vero ambas conjuncte, habito respectu ad mutuas earum relationes. Itaque sequitur ipsa disquisitio.

Problema 1.

Tab. II. Fig. 1.

§. 2. *Invenire curvam, in qua, si a puncto quocunque* X *axis abscissarum* A B *erigatur perpendiculum* V X *ad tangentem* T Y, *hoc perpendiculum ubique aequetur datae constanti lineae* a.

Solutio:

Positis: abscissa $AX = x$, applicata $YX = y$, angulo $YTX = \Phi$, ejusque tangente $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, ob:

$VX = YX \cdot \cos. VXY = y \cdot \cos. \Phi = y \times \frac{1}{\sqrt{1 + pp}} = a$, erit $y = a\sqrt{1 + pp}$, hincque $p = \frac{\pm\sqrt{yy - aa}}{a}$, et separatis variabilibus: $\partial x = \frac{a \partial y}{\pm\sqrt{yy - aa}}$, unde colligitur integrando: $x = al(y \pm \sqrt{yy - aa}) + C$. Si, pro determinanda constante C, ponamus abscissam x evanescentem posito $y = a$, habemus $C = -a\,l\,a$, hincque:

$$x = a\,l\,\frac{y \pm \sqrt{yy - aa}}{a}.$$

Corollarium 1.

§. 3. Hac aequatione inter x et y inventa, facile definietur tractus curvae. Ex illa enim patet pro $x = 0$, Tab. II.
sive pro initio abscissarum, applicatam esse $= a$. Pari Fig. 2.
modo cadit in oculos, pro $y < a$, abscissam x fieri imaginariam, aeque ac pro $-y$, (ob $y > \sqrt{yy - aa}$). Porro cum sit $l\,\frac{y - \sqrt{yy - aa}}{a} = l\,\frac{a}{y + \sqrt{yy - aa}} = -l\,\frac{y + \sqrt{yy - aa}}{a}$, potest etiam scribi $x = \pm\, a\,l\,\frac{y + \sqrt{yy - aa}}{a}$, unde sequitur curvam nostram habere duos ramos aequales, RS et RS′, eosque sine ullis punctis singularibus semper supra axem vergentes.

Corollarium 2.

§. 4. Relatio inter coordinatas hujus curvae etiam egregie exhiberi potest ope anguli curvedinis $YTX = \Phi$; expressionesque inde collectae pro x. et y sunt:

$$y = \frac{a}{\cos.\Phi} \text{ et } x = a l \frac{1 + \sin.\Phi}{\cos.\Phi} = a l . \operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}(90^\circ + \Phi).$$

Scholion.

§. 5. Sumto vertice R pro initio abscissarum mutatisque axibus coordinatarum, quod efficitur scribendo loco y et x, $x' + a$ et y', prodit sequens aequatio:

$$y' = \pm\, a l \frac{x' + a + \sqrt{2ax' + x'^2}}{a};$$

hincque patet curvam inventam esse *Catenariam*. (V. Traité de mécanique par Francoeur, 1807, §. 92; et Умозрительныя изслѣдованія Импер. Акад. Наукъ. Tom. II. О веревочной линіи, соч. Семена Гурьева, pag. 123.)

Theorema 1.

§. 6. *Radius curvaturae hujus curvae ubique aequalis est Normali.*

Demonstratio:

Ex aequatione fundamentali nanciscimur:

$$\partial x = \frac{a \partial y}{\sqrt{yy - aa}},\ p = \frac{\sqrt{yy - aa}}{a} \text{ et } \partial p = \frac{y \partial y}{a\sqrt{yy - aa}};$$

hinc erit Radius

$$= - \frac{\partial x (1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{\partial p} = - \frac{\frac{a \partial y}{\sqrt{yy - aa}} \cdot \left(\frac{yy}{aa}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{y \partial y}{a \sqrt{yy - aa}}} = - \frac{yy}{a}.$$

Eadem expressio oritur pro Normali: erit enim

$$y \sqrt{1 + pp} = y \times \frac{y}{a} = \frac{yy}{a}.$$

Scholion.

§. 7. Hinc patet catenariam eadem proprietate gaudere ac circulus, ut nempe sit Normalis aequalis Radio osculi. Re vera autem ex aequatione:

Norm. $=$ Rad. osc.,

si expressio pro radio praedita fuerit signo negativo, reperietur aequatio pro circulo, at eadem, sumta cum signo positivo, dat aequationem hic inventam.

Theorema 2.

§. 8. *Arcus curvae*, RY, *aequatur rectae* VY, *quae est pars tangentis comprehensa inter punctum curvae* Y *et perpendiculum* VX.

Demonstratio.

Ob $\partial x = \frac{a \partial y}{\sqrt{yy - aa}}$, erit $\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{y^2 \partial y^2}{yy - aa}$, unde fit

$$\text{Arc.} = \int \frac{y \partial y}{\sqrt{yy - aa}} = \sqrt{yy - aa}.$$

At $y =$ YX et $a =$ VX, ergo arcus RY $= \sqrt{\text{YX}^2 - \text{VX}^2} =$ VY.

Theorema 3.

§. 9. *Area curvae,* ARYX, *aequatur rectangulo* VYZX *descripto binis rectis* VX *et* VY.

Demonstratio.

$$\int y\,\partial x = \int \frac{a\,y\,\partial y}{\sqrt{} - a\,a} = a\sqrt{y\,y - a\,a};$$

erit ergo: Area ARYX $=$ VX . VY $=$ rectangul VYZX.

Theorema 4.

§. 10. *Superficies solidi, rotatione arcus* RY *circa* AX *geniti, aequatur superficie cylindri, cujus radius basis* $=$ VX *et altitudo aequalis semisummae abscissae et subtangentis.*

Demonstratio.

Cum formula generalis $2\pi \int y\,\partial s$ hic abeat in:

$2\pi \int y \times \frac{y\,\partial y}{\sqrt{y\,y - a\,a}}$, habemus integrando:

$$\text{Sup.} = 2\pi \left(\frac{y\sqrt{y\,y - a\,a} + a\,a\,l\,\frac{y + \sqrt{y\,y - a\,a}}{a}}{2}\right),$$

sive, ob $a\,l\,\frac{y + \sqrt{y\,y - a\,a}}{a} = x$, erit:

$$S = \pi\,(y\sqrt{y\,y - a\,a} + a\,x) = \pi(\mathrm{YX} \,.\, \mathrm{VY} + \mathrm{VX} \,.\, \mathrm{AX});$$

at, quia YX : XP $=$ VX : YV, hincque YX . VY $=$ VX . PX, erit denique: $S = \pi\,\mathrm{VX}(\mathrm{AX} + \mathrm{PX}) = \pi\,\mathrm{VX} \,.\, \mathrm{AP} = 2\pi\,\mathrm{VX} \times \frac{1}{2}\mathrm{AP}$.

Theorema 5.

§. 11. *Solidum eadem rotatione genitum aequatur eodem cylindro.*

Demonstratio.

Formula generalis $\pi \int y y \partial x$, qua determinatur illud Solidum, pro nostra curva induit hanc formam:

Sol. $= \pi \int y y \times \frac{a \partial y}{\sqrt{yy - aa}} = a \pi \int \frac{y y \partial y}{\sqrt{y y - a a}}$, seu integrando:

$$\text{Sol.} = a\pi\left(\frac{y\sqrt{yy-aa}+aal\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a}}{2}\right) = \tfrac{1}{2}a\pi(y\sqrt{yy-aa}+ax)$$

$= \frac{1}{2}\pi \, VX^2 \, . \, AP$. (§. 10.)

Problema 2.

§. 12. *Invenire curvam, in qua intervallum* VY *sit ubique aequale constanti cuilibet b.* Tab. II. Fig. 1.

Solutio.

Ob $VY = b = YX . \sin . VXY = y . \sin \Phi = y \times \frac{p}{\sqrt{1 + pp}}$, erit $p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{\pm\sqrt{yy - bb}}$, hincque variabilibus separatis: $\pm \partial y . \sqrt{yy - bb} = b \partial x$, et integrando:

$$bx = \tfrac{1}{2}(\pm y\sqrt{yy - bb} - bbl(y \pm \sqrt{yy - bb})) + C.$$

Posito, ut ante, $x = 0$ pro $y = b$, erit $C = \frac{1}{2} bblb$, unde colligitur fore:

$$x = \frac{\pm y\sqrt{yy-bb} - bb\,l\,\frac{y\pm\sqrt{yy-bb}}{b}}{2b}$$

$$= \pm\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{y}{b}\sqrt{yy-bb} - b\,l\,\tfrac{y+\sqrt{yy-bb}}{b}\right) \text{ (§. 3.)}$$

Corollarium 1.

Tab. II. Fig. 3. §. 13. Pro determinando tractu curvae valent eaedem fere notationes ac supra §. 3. Liquet praeterea hanc curvam habere cuspidem in puncto R.

Corollarium 2.

§. 14. Aequationes exhibentes valores ipsarum x et y, ope anguli curvedinis, sunt sequentes: $y = \frac{b}{sin.\,\Phi}$ et $x = \frac{b\,cos.\,\Phi}{2\,sin.\,\Phi^2} - \frac{b}{2}\,l\,\frac{1+cos.\,\Phi}{sin.\,\Phi} = \frac{b}{2}(\text{cot.}\,\Phi.\,\text{cosec.}\,\Phi - l.\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Phi)$.

Theorema 1.

Tab. II. Fig. 4. §. 15. *Punctis* V *et* P *junctis, si normalis* YP *producatur usque ad intersectionem* Q *cum recta* TQ *ducta parallela rectae* VP: *intervallum* PQ *aequatur radio osculi.*

Demonstratio:

Ob $\partial x = \frac{\partial y.\sqrt{yy-bb}}{b}$ et $p = \frac{b}{\sqrt{yy-bb}}$ erit $\sqrt{1+pp} = \frac{y}{\sqrt{yy-bb}}$ et $\partial p = -\frac{by\partial y}{(yy-bb)^{\frac{3}{2}}}$, hincque Radius $= +\frac{yy\sqrt{yy-bb}}{bb}$. At cum sit $y = $ YX, $b = $ VY et $\sqrt{yy-bb} = $ VX, habemus hanc proportionem:

$$VY^2 : XY^2 = VX : \text{Rad.};$$

sive, ob $XY^2 = VX \cdot YP$, erit:

$$VY^2 : VX \cdot YP = VX : \text{Rad.};$$

sive $VY^2 : VX^2 = YP : \text{Rad.}$,

et, ob $VX^2 = VY \cdot TV$, fit:

$$VY^2 : VY \cdot TV = YP : \text{Rad.},$$

unde colligitur denique:

$$VY : TV = YP : \text{Rad.}$$

Ergo Radius $= PQ$.

Scholion.

§. 16. Ponatur, perinde ac supra §. 7., formulam $\frac{y\sqrt{1+pp}}{pp}$, exhibentem in quavis curva rectam PQ, aequalem esse formulae generali pro radio curvaturae: liquet ut, sumta hac posteriore cum signo negativo, debeat prodire aequatio pro curva cummaxime inventa; sin autem eidem detur signum positivum, evadet alia curva exhibita aequatione $x = \sqrt{bb - yy} - b\,l\frac{b + \sqrt{bb + yy}}{y}$, quae talis est indolis, ut tangens ubique aequetur constanti b. Videtur mihi hanc mutationem signorum in nonnullis casibus commendabilem esse ad investigandas, ope curvarum quomodocunque inventarum, aut novas curvas, aut proprietates singulares curvarum jam cognitarum.

Theorema 2.

§. 17. *Arcus curvae, RY, aequatur semidifferentiae tangentis et parametri* b.

Tab. II. Fig. 3.

Demonstratio:

Erit hic elementum arcus $\partial s = \sqrt{\frac{\partial y^2 . (yy - bb)}{bb} + \partial y^2} = \frac{y \partial y}{b}$, unde fit integrando: $s = \frac{1}{2}(\frac{yy}{b} - b)$. Pro tangente autem obtinemus: $TY = \frac{y\sqrt{1+pp}}{p} = \frac{y \times \frac{y}{\sqrt{yy-bb}}}{\frac{b}{\sqrt{yy-bb}}} = \frac{yy}{b}$, ergo

$$\text{Arc.} = \tfrac{1}{2}(\text{Tang.} - \text{Param.}). = \tfrac{1}{2} TV.$$

Theorema 3.

§. 18. *Area curvae,* ARYX, *aequatur* $\frac{2}{3}$ *trianguli* TVX.

Demonstratio.

Cum sit pro hac curva elementum $y\partial x = \frac{y\partial y \sqrt{yy-bb}}{b}$, nanciscimur integrando:

$$\text{Aream} = \frac{(yy-bb)^{\frac{3}{2}}}{3b} = \frac{VX^3}{3VY} = \tfrac{2}{3}.\tfrac{1}{2}VX.\frac{VX^2}{VY} = \tfrac{2}{3}.\tfrac{1}{2}VX.VT = \tfrac{2}{3}\Delta TVX.$$

Theorema 4.

§. 19. *Superficies solidi aequatur trienti differentiae superficierum duorum cylindrorum, quorum alter habet pro radio baseos applicatam* YX *et pro altitudine tangentem* TY, *alter vero radium et altitudinem aequales constanti* b = VY.

Demonstratio.

$$2\pi\int y\,\partial s = 2\pi\int\frac{yy\,\partial y}{b} = \frac{2\pi y^3}{3b} + C = \tfrac{1}{3}\left(\frac{2\pi y^3}{b} - 2\pi b^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}(2\pi YX \,.\, TY - 2\pi VY^2).$$

Theorema 5.

§. 20. *Solidum aequatur summae duorum Cylindrorum, quorum alter habet pro diametro baseos rectam* VX *et altitudinem aequalem subtangenti* TX, *alter vero pro diametro rectam* VY *et pro altitudine abscissam* AX.

Demonstratio.

$$\pi\int yy\,\partial x = \pi\int\frac{yy\,\partial y\sqrt{yy-bb}}{b};\ \text{at}$$
$$\int yy\,\partial y\sqrt{yy-bb} = \int y(yy-bb) \times \frac{y\,\partial y}{\sqrt{yy-bb}} = y(yy-bb)^{\frac{3}{2}}$$
$$-\int(3yy-bb)\sqrt{yy-bb}\,.\,\partial y \ (\text{ob} \int P\,dQ = PQ - \int Q\,dP)$$
$$= y(yy-bb)^{\frac{3}{2}} - 3\int yy\,\partial y\sqrt{yy-bb} + bb\int\partial y\sqrt{yy-bb};$$
ergo $4\int yy\,\partial y\sqrt{yy-bb} = y(yy-bb)^{\frac{3}{2}} + b^3 x$ (§. 12.), hincque:
$$\pi\int\frac{yy\,\partial y\sqrt{yy-bb}}{b} = \frac{\pi y(yy-bb)^{\frac{3}{2}}}{4b} + \frac{\pi bbx}{4} = \frac{\pi}{4}(VX^2\,.\,TX + VY^2\,.\,AX).$$

§. 21. Progredior nunc ad comparationem binarum curvarum, quas huc usque singulatim contemplatus sum. Positis scilicet vel applicatis, vel constantibus, vel etiam angulis curvedinis binarum curvarum aequalibus inter se, colliguntur nonnullae relationes mutuae ac proprietates, quas sequentibus theorematibus demonstrabo.

§. 22. *Positis in utrique curvarum applicatis et constantibus aequalibus inter se, anguli curvedinis unius curvae erunt supplementa angulorum alterius.*

Sit y applicata et a constans communes duabus curvis, et α angulus curvedinis prioris curvae ac β angulus alterius; erit ob §§ 4 et 14:

pro prima curva: $y = \frac{a}{\cos.\alpha}$,

pro altera vero: $y = \frac{a}{\sin.\beta}$, hincque

$\cos.\alpha = \sin.\beta$, unde fit $\alpha = 90^\circ - \beta$.

§. 23. *Iisdem conditionibus stabilitis erit:*

Tangens 1^{mae} *curvae* = *Normali* 2^{dae} *curv.*

Subtangens - - = *Subnormali* - -

et vice versa.

Positis ut supra erit:

	pro 1^{ma} curva:		pro altera:
Tang. =	$\frac{a}{\sin.\alpha.\cos.\alpha}$	-	$\frac{a}{\sin.\beta^2}$
Norm. =	$\frac{a}{\cos.\alpha^2}$	-	$\frac{a}{\sin.\beta.\cos.\beta}$
Subt. =	$\frac{a}{\sin.\alpha}$	-	$\frac{a.\cos.\beta}{\sin.\beta^2}$.
Subn. =	$\frac{a\ \sin.\alpha}{\cos.\alpha^2}$	-	$\frac{a}{\cos.\beta}$,

at $\alpha = 90^\circ - \beta$ (§. 22.), ergo .... etc.

§. 24. *Iisdem admissis conditionibus erunt radii curvedinis proportionales cosinibus angulorum curvedinis.*

Cum sit

$$\text{Rad. 1 curvae} = \frac{a}{\cos.\alpha^2}$$

$$\text{- 2 -} = \frac{a.\cos.\beta}{\sin.\beta^3} = \frac{a.\cos.\beta}{\cos.\alpha^3}, \text{ erit}$$

$$\text{Rad. 1 : Rad. 2} = \frac{a}{\cos.\alpha^2} : \frac{a.\cos.\beta}{\cos.\alpha^3} = \cos.\alpha : \cos\beta.$$

§. 25. *Constantibus et angulis aequalibus positis erit:*

Subt. 1^{mae} *curv.* = *applicatae* 2^{dae} *curvae,*

Subn. 2^{dae} *curv.* = *applicatae* 1^{mae} *curvae.*

Ex demonstratione §. 23 patet esse: Subt. 1 $c. = \frac{a}{\sin.\alpha}$ et Subn. 2 $c. = \frac{a}{\cos.\beta}$; si ergo fuerit $\alpha = \beta$, erit, ob §§. 4 et 14: Subt. 1 c. = applicatae 2 c, et Subn. 2 c. = appl. 1 c.

Scholion 1.

§. 26. Quod attinet relationem abscissarum, positis applicatis et constantibus aequalibus et denotante x abscissam prioris curvae ac u abscissam alterius, colligitur: $x + 2u = \frac{y\sqrt{yy - aa}}{a}$ = Subtang. 2^{dae} curvae = Subn. 1^{mae} c.

Scholion 2.

§. 27. Mente concipiamus tertiam curvam, cujus applicatae sint aequales applicatis binarum illarum curvarum, cuilibet vero respondeat abscissa aequalis aggregato abscissae prioris curvae et abscissae alterius bissumtae, eidem applicatae respondentium. Pro hac nova curva habemus sequentem aequationem algebraicam: Tab. II. Fig. 5.

$$x = \frac{y\sqrt{yy - aa}}{a},$$

quae est ejusmodi indolis, ut, *junctis punctis* A *et* Y *recta* AY *demissoque perpendiculo ex puncto* X *ad ipsam* AY, *intervallum* MY *sit ubique aequale constanti a.*

Theorema.

§. 28. *Alteruter ramorum curvae probl. II. est evoluta curvae primi probl.; si parameter illius, b, aequetur parametro alterius bissumto longitudoque fili excedat arcum evolutae constante a.*

Demonstratio.

Capiatur initium coordinatarum pro priore curva in vertice ejusdem deturque ipsae curvae talis positio, ut sit concava ad axem abscissarum, qui ut supra sumatur horizontalis. Hunc in finem, positis nova abscissa $= x'$ et nova applicata $= y'$, in aequatione (§. 2) $x = al\frac{y + \sqrt{yy - aa}}{a}$ poni debet $y = x' + a$ et $x = y'$; quibus valoribus substitutis nanciscimur:

$$y' = a\, l\, \frac{x' + a + \sqrt{2ax' + x'^2}}{a}.$$

Ad investigandam evolutam hujus curvae designemus ejus radium osculi, normalem et subnormalem literis r, n et m; pro evoluta autem ponamus abscissam $= t$ atque applicatam $= u$; habemusque ope formularum vulgo notarum:

$$t = x' + \frac{rm}{n} \quad \text{et} \quad u = \left(\frac{r}{n} - 1\right) y'.$$

At, ob $\frac{\partial y'}{\partial x'} = p' = \frac{a}{\sqrt{x'^2 + 2ax'}}$ et $\frac{\partial p'}{\partial x'} = -\frac{a(a + x')}{(2ax' + x'^2)^{\frac{3}{2}}}$, erit $r = \frac{(a + x')^2}{a}$, $n = \frac{y'(a + x')}{\sqrt{2ax' + x'^2}}$ et $m = \frac{ay'}{\sqrt{2ax' + x'^2}}$, hincque

$$t = x' + (x' + a) = 2x' + a \quad \text{seu} \quad x' = \frac{t - a}{2} \quad \text{et}$$

$$u = \frac{(x' + a)\sqrt{2ax' + x'^2}}{a} - a\,l\,\frac{x' + a + \sqrt{2ax' + x'^2}}{a}$$

$$= \frac{(t + a)\sqrt{(t - a)(t + 3a)}}{4a} - a\,l\,\frac{t + a + \sqrt{(t - a)(t + 3a)}}{2a} \text{ (A)};$$

unde patet longitudinem fili in vertice evolutae aequalem esse quantitati a.

Nunc, si in curva 2 probl. ponatur $b = 2a$ deturque eidem talis positio, ut axem abscissarum spectet latere convexo, abit aequatio pro eadem inventa, §. 12., in sequentem:

$$y' = \frac{x'\sqrt{x'x' - 4aa} - 4aa\,l\,.\,\frac{x' + \sqrt{x'x' - 4aa}}{2a}}{4a}.$$

Sin autem initium abscissarum appropinquet verticem versus quantitate a, quod evenit ponendo $x' = x'' + a$, erit:

$$y' = \frac{(x'' + a)\sqrt{x''^2 + 2ax'' - 3a^2} - 4a^2\,l\,\frac{x'' + a + \sqrt{x''^2 + 2ax'' - 3a^2}}{2a}}{4a}$$

$$= \frac{(x'' + a)\sqrt{(x'' - a)(x'' + 3a)}}{4a} - a\,l\,\frac{x'' + a + \sqrt{(x'' - a)(x'' + 3a)}}{2a};$$

quae aequatio perfecte congruit cum aequatione A.

METHODUS FACILIOR
INVESTIGANDI NOVAS ILLAS SERIES,
QUIBUS EULERUS SINUM ET COSINUM ANGULI MULTIPLI POSTREMÒ EXPRIMERE DOCUIT.

AUCTORE

N. FUSS.

Conventui exhibuit die 11 Aug. 1813.

§. 1. In dissertatione illustris quondam et de theoria calculi angulorum, ut et de universa mathesi, meritissimi viri *L. Euleri*, quae nuper Tomo quinto Dissertationum academicarum (Mémoires de l' Académie Impériale des Sciences) fuit inserta sub titulo: *De seriebus memorabilibus, quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimere licet*, laudatus ille Geometra series exhibuerat, quae quidem, ut ipse ingenue fatetur; in multiplicatione angulorum exigui sunt subsidii, quas autem, ob calculi artificia, quibus ad eas fuerit perductus, obque egregiam simplicitatem legis, secundum quam termini serierum procedunt, Geometrarum attentione non indignas censuit. Series autem, de quibus hic sermo est, in Tomo V Commentationum nostrarum pag. 63. et 72. ita expressae reperiuntur:

$$\cos.2x\Phi = \left\{\begin{array}{l} 1 - 2\left(\frac{x}{1}\right)\sin.\Phi\sin.\ \Phi - \ \ 4\left(\frac{x}{2}\right)\sin.\Phi^2\cos.2\Phi \\ + \ \ 8\left(\frac{x}{3}\right)\sin.\Phi^3\sin.3\Phi + \ 16\left(\frac{x}{4}\right)\sin\ \Phi^4\cos.4\Phi \\ - \ 32\left(\frac{x}{5}\right)\sin.\Phi^5\sin.5\Phi - \ 64\left(\frac{x}{6}\right)\sin.\Phi^6\cos.6\Phi \\ +128\left(\frac{x}{7}\right)\sin.\Phi^7\sin.7\Phi + 256\left(\frac{x}{8}\right)\sin.\Phi^8\cos.8\Phi \\ \qquad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.} \end{array}\right\},$$

$$\sin.2x\Phi = \left\{\begin{array}{l} + \ \ 2\left(\frac{x}{1}\right)\sin.\Phi\cos.\ \Phi - \ \ 4\left(\frac{x}{2}\right)\sin.\Phi^2\sin.2\Phi \\ - \ \ 8\left(\frac{x}{3}\right)\sin.\Phi^3\cos.3\Phi + \ 16\left(\frac{x}{4}\right)\sin.\Phi^4\sin.4\Phi \\ + \ 32\left(\frac{x}{5}\right)\sin.\Phi^5\cos.5\Phi - \ 64\left(\frac{x}{6}\right)\sin.\Phi^6\sin.6\Phi \\ -128\left(\frac{x}{7}\right)\sin.\Phi^7\cos.7\Phi + 256\left(\frac{x}{8}\right)\sin.\Phi^8\sin.8\Phi \\ \qquad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.} \end{array}\right\}.$$

Ubi characteres uncinulis inclusi $\left(\frac{x}{1}\right)$, $\left(\frac{x}{2}\right)$, $\left(\frac{x}{3}\right)$, etc. denotant potestatis x^{mae} binomii coëfficientes multoties jam ab *Eulero* et aliis hoc modo designatos.

§. 2. Methodus autem, qua *Eulerus* usus est, in investigatione harum serierum, eo redit, ut pro cos. $x\ \Phi$ fingatur series secundum characteres $\left(\frac{x}{1}\right)$, $\left(\frac{x}{2}\right)$, $\left(\frac{x}{3}\right)$, etc. procedens, tum vero termini his coëfficientibus affecti ex evolutione casuum specialium $x = 1$, 2, 3, 4, etc. deducantur. Cum autem ista methodus non solum justo aliquanto sit prolixior, sed etiam inductioni in ea, ut mihi quidem videtur, nimis tribuatur, viam aliquanto simpliciorem et magis directam, ad easdem series ducentem, tentare volui, quod quomodo mihi successerit ex sequentibus pagellis perspicietur.

§. 3. Ex elementis Analyseos trigonometricae constat esse:

$$\cos. 2n\Phi + \sqrt{-1}\sin. 2n\Phi = (\cos. 2\Phi + \sqrt{-1}\sin. 2\Phi)^n,$$
$$\cos. 2n\Phi - \sqrt{-1}\sin. 2n\Phi = (\cos. 2\Phi - \sqrt{-1}\sin. 2\Phi)^n,$$

unde concluditur fore:

$$2\cos. 2n\Phi = (\cos. 2\Phi + \sqrt{-1}\sin. 2\Phi)^n + (\cos. 2\Phi - \sqrt{-1}\sin. 2\Phi)^n.$$

Jam loco anguli dupli 2Φ introducamus angulum simplicem Φ, et cum sit:

$$\cos. 2\Phi = 1 - 2\sin. \Phi^2,$$
$$\sin. 2\Phi = 2\sin. \Phi\cos. \Phi;$$

his valoribus substitutis nanciscimur:

$$\cos. 2\Phi + \sqrt{-1}\sin. 2\Phi = 1 + 2\sqrt{-1}\sin. \Phi(\cos. \Phi + \sqrt{-1}\sin. \Phi),$$
$$\cos. 2\Phi - \sqrt{-1}\sin. 2\Phi = 1 - 2\sqrt{-1}\sin \Phi(\cos. \Phi - \sqrt{-1}\sin. \Phi).$$

§. 4. Statuamus nunc brevitatis gratia $2\sin. \Phi = b$, ponaturque:

$$\cos. \Phi + \sqrt{-1}\sin. \Phi = p,$$
$$\cos. \Phi - \sqrt{-1}\sin. \Phi = q;$$

atque habebimus:

$$\cos. 2\Phi + \sqrt{-1}\sin. 2\Phi = 1 + bp\sqrt{-1},$$
$$\cos. 2\Phi - \sqrt{-1}\sin. 2\Phi = 1 - bp\sqrt{-1}.$$

Hinc igitur sequitur fore:

$$2\cos. 2n\Phi = (1 + bp\sqrt{-1})^n + (1 - bq\sqrt{-1})^n,$$

factaque evolutione potestatis n^{mae} horum binomiorum erit:

$$2 \cos. 2n\phi = \left\{\begin{array}{l} 2+\binom{n}{1} b\ (p - q)\sqrt{-1} - \binom{n}{2} b^2 (p^2 + q^2) \\ -\binom{n}{3} b^3 (p^3 - q^3)\sqrt{-1} + \binom{n}{4} b^4 (p^4 + q^4) \\ +\binom{n}{5} b^5 (p^5 - q^5)\sqrt{-1} - \binom{n}{6} b^6 (p^6 + q^6) \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Cum igitur sit:

$$\begin{array}{l|l} (p - q)\sqrt{-1} = -2 \sin. \phi & p^2 + q^2 = 2 \cos. 2\phi \\ (p^3 - q^3)\sqrt{-1} = -2 \sin. 3\phi & p^4 + q^4 = 2 \cos. 4\phi \\ (p^5 - q^5)\sqrt{-1} = -2 \sin. 5\phi & p^6 + q^6 = 2 \cos. 6\phi \\ \qquad \text{etc.} & \qquad \text{etc.} \end{array}$$

Si hi valores substituantur, tum vero per 2 dividatur, pro $\cos. 2n\phi$ emergit haec series:

$$\cos. 2n\phi = \left\{\begin{array}{l} 1-\binom{n}{1}\ b \sin. \phi - \binom{n}{2} b^2 \cos. 2\phi + \binom{n}{3} b^3 \sin. 3\phi \\ +\binom{n}{4} b^4 \cos. 4\phi - \binom{n}{5} b^5 \sin. 5\phi - \binom{n}{6} b^6 \cos. 6\phi \end{array}\right\} \text{etc.}$$

quae est ipsa series *Euleriana*, commodius tantum expressa et absque tantis ambagibus eruta.

§. 5. Quoniam valor litterae n nullo modo ad numeros integros et positivos restringitur, siquidem evolutio binomii *Newtoniana*, cui praesens methodus insistit, etiam pro fractis, negativis, et adeo surdis valeat, manifestum est ex nostra solutione, seriem illam veram esse, quicunque numeri pro n accipiantur, id quod ex methodo *Eule-*

riana nullo modo patet, quippe quae potius veritatem seriei traditae ad numeros positivos et integros restringere videtur (Conf. l. c. pag. 60, 61, 62.).

§. 6. Quo hanc summationem unico saltem exemplo illustremus, sumamus pro n numerum negativum, puta $n = -1$, atque ob $\binom{n}{1} = -1$, $\binom{n}{2} = +1$, $\binom{n}{3} = -1$, $\binom{n}{4} = +1$ et ita porro, obtinebimus sequentem seriei satis notabilis egregiam summationem:

$$\cos. 2\phi = \begin{cases} 1 + b \sin. \phi - b^3 \sin. 3\phi + b^5 \sin. 5\phi - \text{etc.} \\ - b^2 \cos. 2\phi + b^4 \cos. 4\phi - b^6 \cos. 6\phi + \text{etc.} \end{cases}$$

Ita si sumatur $\phi = 45°$, prodibit:

$$0 = 1 + 1 - 2 - 4 - 4 + 8 + 16 + 16 - 32 - 64 - 64 + 128 + \text{etc.}$$

cujus veritas est manifesta, et adhuc evidentior evadit, si series ista discerpatur in ternas sequentes:

$$0 = \begin{Bmatrix} + \ (1 - 4 + 4^2 - 4^3 + 4^4 - 4^5 + \text{etc.}) \\ + \ (1 - 4 + 4^2 - 4^3 + 4^4 - 4^5 + \text{etc.}) \\ -2 \, (1 - 4 + 4^2 - 4^3 + 4^4 - 4^5 + \text{etc.}) \end{Bmatrix}.$$

Si sumatur $\phi = 30°$, habebimus:

$$\tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} + \text{etc.}$$

At si haec series in sequentes ei aequivalentes discerpatur:

$$+ \quad [1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}]$$
$$+ \tfrac{1}{2} [1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}]$$
$$- \tfrac{1}{2} [1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}]$$

veritas summationis est obvia.

§. 7. Si in serie generali §. 4. inventa ponatur n infinite parvum, habebimus $\cos. 2n\Phi = 1$, tum vero hoc casu erit:

$$\left(\frac{n}{1}\right) : n = 1;$$
$$\left(\frac{n}{2}\right) : n = \frac{n-1}{2} = -\tfrac{1}{2};$$
$$\left(\frac{n}{3}\right) : n = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} = +\tfrac{1}{3};$$
$$\left(\frac{n}{4}\right) : n = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} = -\tfrac{1}{4};$$

et ita porro, unde, facta divisione per n, et substitutione peracta, habebimus:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{b \sin. \Phi}{1} + \frac{b^3 \sin. 3\Phi}{3} - \frac{b^5 \sin. 5\Phi}{5} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{b^2 \cos. 2\Phi}{2} - \frac{b^4 \cos. 4\Phi}{4} + \frac{b^6 \cos\ 6\Phi}{6} - \text{etc.}$$

Hinc autem sequitur inter se aequales fore has series:

$$\frac{b \sin. \Phi}{1} - \frac{b^3 \sin. 3\Phi}{3} + \frac{b^5 \sin. 5\Phi}{5} - \text{etc.}$$
$$\frac{b^2 \cos. 2\Phi}{2} - \frac{b^4 \cos. 4\Phi}{4} + \frac{b^6 \cos. 6\Phi}{6} - \text{etc.}$$

Easdem series in dissertatione saepius citata, pag. 64, *Eulerus* ex alio fonte, remotiore et minus naturali derivavit atque aequales esse ostendit.

§. 8. Alteram seriem pro $\sin. 2n\Phi$ supra §. 1 expositam quod attinet, facile intelligitur eam simili prorsus modo inveniri posse. Cum enim ex §. 3 habeamus: $2\sqrt{-1}\sin.2n\Phi=(\cos.2\Phi+\sqrt{-1}\sin.2\Phi)^n-(\cos.2\Phi-\sqrt{-1}\sin.2\Phi)^n$, si hic loco sin. 2 Φ et cos. 2 Φ valores supra §. 3 dati substituantur, tum vero denominationes b, p, et q, §. 4 stabilitae, introducantur, facta divisione per $\sqrt{-1}$ habebimus

$$2\sin.2n\Phi=\frac{(1+bp\sqrt{-1})^n-(1-bq\sqrt{-1})^n}{\sqrt{-1}},$$

quae expressio, rite evolutis binomiorum potestatibus, sequentem subministrat seriem:

$$2\sin.2n\Phi=\left\{\begin{array}{l}+\binom{n}{1}b\ (p+q)+\binom{n}{2}b^2(p^2-q^2)\sqrt{-1}\\-\binom{n}{3}b^3(p^3+q^3)-\binom{n}{4}b^4(p^4-q^4)\sqrt{-1}\\+\binom{n}{5}b^5(p^5+q^5)+\binom{n}{6}b^6(p^6-q^6)\sqrt{-1}\\\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Cum igitur sit:

$$\begin{array}{l|l}p+q=2\cos.\ \Phi & (p^2-q^2)\sqrt{-1}=-2\sin.2\Phi\\p^3+q^3=2\cos.3\Phi & (p^4-q^4)\sqrt{-1}=-2\sin.4\Phi\\p^5+q^5=2\cos.5\Phi & (p^6-q^6)\sqrt{-1}=-2\sin.6\Phi\\\qquad\text{etc.} & \qquad\text{etc.}\end{array}$$

Si hi valores substituantur, series quaesita ita se habebit:

$$\sin.2n\Phi=\left\{\begin{array}{l}\binom{n}{1}b\ \cos.\ \Phi-\binom{n}{2}b^2\sin.2\Phi-\binom{n}{3}b^3\cos.3\Phi\\+\binom{n}{4}b^4\sin.4\Phi+\binom{n}{5}b^5\cos.5\Phi-\text{etc.},\end{array}\right.$$

quae series itidem cum *Euleriana*, in citata dissertatione pag. 72 exhibita, consentit, de eaque, ob rationes supra §. 5. jam allatas, aequo jure ac de priore pro cos. $2n\Phi$

inventa, asseverare possumus, eam veram esse pro quolibet numero n, integro vel fracto, positivo vel negativo, rationali vel surdo.

§. 9. Illustremus hanc summationem aliquot exemplis. Ac primo quidem patet, sumto $\Phi = 90^\circ$, omnes termini seriei fore evanituri, aeque ac summa eorum $\sin. 2n\Phi$, si quidem fuerit n numerus integer. Sin autem n fuerit fractio, tum quidem $\sin. 2n\Phi$ non evanescit, sed finitum obtinet valorem; verum idem etiam de terminis seriei notandum est, scilicet: eos hoc casu, ob $b = 2\sin.\Phi = 2$, mox tantopere increscere, ut eorum summa utique fieri possit finita, cujus rei, ut cuique constat, innumerabilia dantur exempla in seriebus divergentibus. Etiam casus $\Phi = 60^\circ$ et $\Phi = 45^\circ$ ad hujusmodi series divergentes perducunt.

§. 10. Sit igitur $\Phi = 30^\circ$, eritque $b = 1$ et $\sin. 2n\Phi = \sin. \frac{n\pi}{3}$, cujus valor per seriem ita exprimitur:

$$\sin. \frac{n\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{n}{1}\right) - \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{4}\right) - \left(\frac{n}{5}\right) + \left(\frac{n}{7}\right) - \left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{10}\right) - \text{etc.}\right]$$

unde si loco n successive scribantur numeri 1, 2, 3, 4, etc., sequentes inde emanabunt valores:

$\sin. \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin. \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin. \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin. \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin. \frac{3\pi}{3} = 0$	$\sin. \frac{6\pi}{3} = 0$,

qui omnes egregie cum veritate sunt consentanei.

§. 11. Sumatur $n = -1$, ita ut habeamus $\left(\frac{n}{1}\right) = -1$, $\left(\frac{n}{2}\right) = +1$, $\left(\frac{n}{3}\right) = -1$, $\left(\frac{n}{4}\right) = +1$, etc., et cum sit $\sin.\frac{n\pi}{3} = -\sin.\frac{\pi}{3}$, erit:

$$\sin.\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}[2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + \text{etc.}]$$

hoc est $\sin.\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, uti requiritur.

§. 12. Sumatur $n = -1$, eritque $\left(\frac{n}{1}\right) = -2$, $\left(\frac{n}{2}\right) = +3$, $\left(\frac{n}{3}\right) = -4$, $\left(\frac{n}{4}\right) = +5$, $\left(\frac{n}{5}\right) = -6$, et ita porro. Tum vero erit:

$$\sin.-\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}[-2-3+5+6-8-9+11+12-14-\text{etc.}],$$

quod commodius ita repraesentemus:

$$\sin.\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\begin{array}{l} +2-5+8-11+14-17+\text{etc.} \\ +3-6+9-12+15-18+\text{etc.} \end{array}\right.$$

Harum serierum, differentias primas constantes $= 3$ habentium, summae erunt: superioris $= \frac{2}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, inferioris vero $= \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, ita ut sit $\sin.\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}]$, hoc est

$$\sin.\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

uti requiritur.

§. 13. Sumatur $n = -3$, atque habebimus $\left(\frac{n}{1}\right) = -3$, $\left(\frac{n}{2}\right) = +6$, $\left(\frac{n}{3}\right) = -10$, $\left(\frac{n}{4}\right) = +15$, $\left(\frac{n}{5}\right) = -21$, $\left(\frac{n}{6}\right) = +28$, et ita porro; tum vero erit per seriem

$$\sin.\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\begin{array}{l} +3-15+36-66+105-\text{etc.} \\ +6-21+45-78+120-\text{etc.} \end{array}\right]$$

quae series cum habeant differentias secundas constantes, earum summae sequenti modo, ope regulae cognitae, determinari poterunt:

Pro priore

3	15	36	66	105	153	etc.
12	21	30	39	48	etc.	
9	9	9	9	etc.		

ergo summa erit $\frac{3}{2} - \frac{12}{4} + \frac{9}{8} = -\frac{3}{8}$.

Pro altera

6	21	45	78	120	171	etc.
15	24	33	42	51	etc.	
9	9	9	9	etc.		

ergo summa erit $= \frac{6}{2} - \frac{15}{4} + \frac{9}{8} = + \frac{3}{8}$. Hinc autem sequitur fore:

$$\sin. \pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{3}{8} - \frac{3}{8}\right] = 0;$$

uti rei natura postulat.

§. 14. Casus notatu dignus hic adhuc se offert, quando n assumitur infinite parvum; tum enim constat fieri $\sin. 2n\Phi = 2n\Phi$, unde si tota series per n dividatur, haec littera omnino e formula expellitur atque habebitur series arcum circularem quemcunque 2Φ per sinus et cosinus multiplorum ejusdem arcus exhibens. Facta enim divisone per n, ob hunc numerum infinite parvum, erit, ut jam supra §. 7. vidimus:

$$\binom{n}{1} : n = 1;$$
$$\binom{n}{2} : n = \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{2};$$
$$\binom{n}{3} : n = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} = +\frac{1}{3};$$
$$\binom{n}{4} : n = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} = -\frac{1}{4};$$

et ita porro, unde series nostra erit:

$$2\Phi = \begin{cases} +\frac{b \cos.\Phi}{1} - \frac{b^3 \cos.3\Phi}{3} + \frac{b^5 \cos.5\Phi}{5} - \text{etc.} \\ +\frac{b^2 \sin.2\Phi}{2} - \frac{b^4 \sin.4\Phi}{4} + \frac{b^6 \sin.6\Phi}{6} - \text{etc.} \end{cases}$$

§. 15. Cum igitur hoc modo invenerimus arcum circularem quemcunque 2Φ vel Φ, per seriem expressum secundum sinus et cosinus arcuum multiplorum procedentem, non inutile erit nunc quoque problema inversum aggredi et explorare summam istius seriei, quasi adhuc esset incognita. Disquisitio haec, non parum ardua, praeterquam quod nobis ansam praebebit in usum vocandi varia haud contemnenda calculi artificia, quoque ipsam veritatem summationis illius memorabilis, paragrapho praecedente traditae, adhuc magis corroborabit.

§. 16. Cum seriem, cujus summa quaerenda est, jam discerpserimus in duas, quarum altera scilicet secundum cosinus arcuum multiplorum imparium, altera vero secundum sinus arcuum multiplorum parium procedit, vocentur hae series u et v, ita ut:

$$u = \frac{b\cos\Phi}{1} - \frac{b^3\cos.3\Phi}{3} + \frac{b^5\cos.5\Phi}{5} - \text{etc.}$$
$$v = \frac{b^2\sin.2\Phi}{2} - \frac{b^4\sin.4\Phi}{4} + \frac{b^6\sin.6\Phi}{6} - \text{etc.}$$

atque inquirendum erit in valorem summae $u + v$. Quem in finem utriusque seriei summam seorsim investigemus, nullo habito respectu ad relationem, quae inter b et Φ subsistit.

§. 17. Quoniam igitur b spectare licet, quasi ab angulo Φ non pendeat, si sumamus differentiale primae seriei, nihil impedit quo minus littera b ut constans spectetur, eritque:

$$\frac{\partial u}{\partial \Phi} = - b\sin.\Phi + b^3\sin.3\Phi - b^5\sin.5\Phi + \text{etc.}$$

Hanc seriem jam ducamus in trinomium $1 + 2b^2\cos.2\Phi + b^4$, et cum sit:

$$2\cos.2\Phi\sin.n\Phi = \sin.(n+2)\Phi + \sin.(n-2)\Phi$$

adhibita hac reductione habebimus:

$$\begin{array}{rl}
+\frac{\partial u}{\partial \Phi} = & - b\sin.\Phi + b^3\sin.3\Phi - b^5\sin.5\Phi + b^7\sin.7\Phi - \text{etc.} \\
+2b^2\cos.2\Phi\frac{\partial u}{\partial \Phi} = & - b^3\sin.3\Phi + b^5\sin.5\Phi - b^7\sin.7\Phi + \text{etc.} \\
& - b^3\sin.\Phi + b^5\sin.\Phi - b^7\sin.3\Phi + \text{etc.} \\
+b^4\frac{\partial u}{\partial \Phi} = & + b^5\sin.\Phi + b^7\sin.3\Phi - \text{etc.}
\end{array}$$

unde deletis terminis se mutuo destruentibus nanciscimur:

$$(1 + 2b^2\cos.2\Phi + b^4)\frac{\partial u}{\partial \Phi} = - b(1 - bb)\sin.\Phi$$

ex qua aequatione sequitur fore:

$$\partial u = \frac{-b(1-bb)\partial\Phi\sin.\Phi}{1 + 2b^2\cos.2\Phi + b^4}.$$

§. 18. Quo nunc integrale hujus formulae commodius assignare valeamus, loco cos. 2Φ scribamus $2\cos.\Phi^2 - 1$ in denominatore, eritque:

$$\partial u = \frac{-b(1-bb)\partial\Phi \sin.\Phi}{(1-bb)^2 + 4bb\cos.\Phi^2}.$$

Vocetur jam $\frac{2b\cos.\Phi}{1-bb} = z$, fietque denominator:

$$(1-bb)^2 + 4bb\cos.\Phi^2 = (1-bb)^2(1+zz);$$

numerator vero, ob $\frac{-2b\partial\Phi\sin.\Phi}{1-bb} = \partial z$, fiet:

$$-b(1-bb)\partial\Phi\sin.\Phi = \tfrac{1}{2}(1-bb)^2\partial z$$

unde statim concluditur fore:

$$\partial u = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{1+zz},$$

cujus integrale est:

$$u = \tfrac{1}{2}\text{ Arc. tg. } z = \tfrac{1}{2}\text{ Arc. tg. }\frac{2b\cos.\Phi}{1-bb}.$$

§. 19. Nunc alteram seriem v eodem modo tractemus, hoc est ejus differentiale, per $\partial\Phi$ divisum, ducamus in $1 + 2bb\cos.2\Phi + b^4$, atque habebimus:

$$+\frac{\partial v}{\partial\Phi} = b^2\cos.2\Phi - b^4\cos.4\Phi + b^6\cos.6\Phi - b^8\cos.8\Phi + \text{etc.}$$
$$+2b^2\cos.2\Phi.\frac{\partial v}{\partial\Phi} = +b^4\cos.4\Phi - b^6\cos.6\Phi + b^8\cos.8\Phi - \text{etc.}$$
$$+b^4\cos.0\Phi - b^6\cos.2\Phi + b^8\cos.4\Phi - \text{etc.}$$
$$+b^4.\frac{\partial v}{\partial\Phi} = \qquad +b^6\cos.2\Phi - b^8\cos.4\Phi + \text{etc.}$$

Hinc, deletis terminis se mutuo destruentibus nascitur haec aequatio:

$$(1 + 2bb\cos.2\Phi + b^4)\frac{\partial v}{\partial\Phi} = b^2(\cos.2\Phi + bb),$$

ex qua porro elicitur:

$$\partial v = \frac{b^2(\cos.2\Phi + bb)\partial\Phi}{1 + 2bb\cos.2\Phi + b^4}.$$

§. 20. Integratio hujus formulae fiet facillima, si statuatur $\frac{bb\sin.2\Phi}{1+bb\cos.2\Phi} = z$, tum enim denominator fiet:

$$1 + 2b^2\cos.2\Phi + b^4 = (1 + bb\cos.2\Phi)^2(1 + zz),$$

numerator autem induet hanc formam:

$$b^2(\cos.2\Phi + bb)\partial\Phi = \tfrac{1}{2}(1 + bb\cos.2\Phi)^2\partial z,$$

ita ut tota formula jam evadat:

$$\partial v = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{1+zz},$$

cujus integrale est:

$$v = \tfrac{1}{2}\,\text{Arc. tg. } z = \tfrac{1}{2}\,\text{Arc. tg. } \frac{bb\sin.2\Phi}{1+bb\cos.2\Phi}.$$

§. 21. Inventa hoc modo summa utriusque seriei u et v, seriei propositae ex illis ambabus conflatae summa erit

$$u + v = \tfrac{1}{2}\,\text{A. tg. } \frac{2b\cos.\Phi}{1-bb} + \tfrac{1}{2}\,\text{A. tg. } \frac{bb\sin.2\Phi}{1+bb\cos.2\Phi}.$$

Hos jam duos arcus in unicum colligamus, ope reductionis notissimae:

$$\text{A. tg. } \frac{\pi}{\varrho} + \text{A. tg. } \frac{\sigma}{\tau} = \text{A. tg. } \frac{\pi\tau + \varrho\sigma}{\varrho\tau - \pi\sigma},$$

et cum nostro casu sit:

$$\pi = 2b\cos.\Phi = 4\sin.\Phi\cos.\Phi;$$
$$\varrho = 1 - bb = 1 - 4\Phi\sin.\Phi^2;$$
$$\sigma = bb\sin.2\Phi = 4\sin.\Phi^2\sin.2\Phi;$$
$$\tau = 1 + bb\cos.2\Phi = 1 + 4\sin.\Phi^2\cos.2\Phi;$$

numerator et denominator tangentis, cujus arcum quaerimus fient:

$$\pi\tau + \varrho\sigma = 4\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi\,(1 - 2\,\text{sin.}\,\Phi^2)(1 + 8\,\text{sin.}\,\Phi^2)$$
$$\varrho\pi - \pi\sigma = (1 - 8\,\text{sin.}\,\Phi^2 + 8\,\text{sin.}\,\Phi^4)(1 + 8\,\text{sin.}\,\Phi^2)$$

quibus valoribus substitutis summa quaesita nostrae seriei expressa erit per unicum arcum circularem; erit enim:

$$u + v = \tfrac{1}{2}\,\text{A. tg.}\,\frac{4\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi\,(1 - 2\,\text{sin.}\,\Phi^2)}{1 - 8\,\text{sin.}\,\Phi^2 + 8\,\text{sin.}\,\Phi^4}.$$

§. 22. Iste autem arcus ad formam simplicissimam reducetur sequentem in modum. Statuatur:

$$4\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi\,(1 - 2\,\text{sin}\,\Phi^2) = \text{P},$$
$$1 - 8\,\text{sin.}\,\Phi^2 + 8\,\text{sin.}\,\Phi^4 = \text{Q},$$

ita ut sit summa seriei:

$$u + v = \tfrac{1}{2}\,\text{Arc. tag.}\,\tfrac{\text{P}}{\text{Q}};$$

et cum noverimus esse:

$$4\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi = 2\,\text{sin.}\,2\,\Phi,$$
$$1 - 2\,\text{sin.}\,\Phi^2 = \text{cos.}\,2\,\Phi,$$

manifestum est fore:

$$\text{P} = \text{sin.}\,4\,\Phi.$$

Tum vero constat esse

$$\text{cos.}\,4\,\Phi = 8\,\text{cos.}\,\Phi^4 - 8\,\text{cos.}\,\Phi^2 + 1,$$

unde cum sit:

$$\text{cos.}\,\Phi^2 = 1 - \text{sin.}\,\Phi^2 \quad \text{et}$$
$$\text{cos.}\,\Phi^4 = 1 - 2\,\text{sin.}\,\Phi^2 + \text{sin.}\,\Phi^4,$$

facile intelligitur fore:

$$\cos. 4\Phi = 1 - 8 \sin. \Phi^2 + 8 \sin \Phi^4,$$

ita ut jam nacti simus:

$$Q = \cos. 4\Phi;$$

unde porro sequitur fore summam quaesitam u et v, hoc est

$$u + v = \tfrac{1}{2} A . \operatorname{tg}. \operatorname{tg}. 4\Phi = 2\Phi,$$

consequenter et summa seriei propositae est $= 2\Phi$.

§. 23. Cum igitur duplici modo demonstraverimus esse arcum:

$$2\Phi = b \cos. \Phi + \tfrac{1}{2} b^2 \sin. 2\Phi - \tfrac{1}{3} b^3 \cos. 3\Phi - \tfrac{1}{4} b^4 \sin 4\Phi$$
$$+ \tfrac{1}{5} b^5 \cos. 5\Phi + \tfrac{1}{6} b^6 \sin. 6\Phi - \text{etc.}$$

ut hanc summationem unico saltem exemplo illustremus, statuamus $\Phi = 30° = \frac{\pi}{6}$, eritque $b = 1$, unde emergit sequens summatio:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} [1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} - \text{etc.}]$$

cujus veritatem sequenti modo commodissime ostendere licet. Consideretur haec series generalior:

$$s = z + \tfrac{1}{2} z^2 - \tfrac{1}{4} z^4 - \tfrac{1}{5} z^5 + \tfrac{1}{7} z^7 + \tfrac{1}{8} z^8 - \tfrac{1}{10} z^{10} - \text{etc.}$$

quae in nostram abit posito $z = 1$. Haec series differentiata dat:

$$\frac{\partial s}{\partial z} = 1 + z - z^3 - z^4 + z^6 + z^7 - z^9 - \text{etc}$$

Est vero summa hujus seriei cognita $= \frac{1}{1 - z + zz}$, ideoque habebimus:

$$\partial s = \frac{\partial z}{1 - z + zz}.$$

§. 24. Integrale autem hujus formulae commodissime explorabitur, si eam ita repraesentemus:

$$\partial s = \frac{4 \partial z}{4 - 4z + 4zz} = \frac{4 \partial z}{(2 - z)^2 + 3zz}.$$

Ex hac enim forma denominatoris statim suspicari licet negotium absolvi posse statuendo $\frac{z\sqrt{3}}{2 - z} = x$, tum enim fit numerator formulae:

$$4 \partial z = \frac{2}{\sqrt{3}} (2 - z)^2 \partial x,$$

denominator vero evadit.

$$4 - 4z + 4zz = (2 - z)^2 (1 + xx),$$

quibus substitutis adipiscimur:

$$\partial s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\partial x}{1 + xx},$$

unde integrando fit:

$$s = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{A} . \text{tg.}\ x = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{A} . \text{tg.}\ \frac{z\sqrt{3}}{2 - z}.$$

Hoc integrale evanescit, posito $z = 0$, uti requiritur; sumto autem $z = 1$, s abit in seriem illam, quae, ducta in $\frac{\sqrt{3}}{2}$ exhibuit supra §. 23. valorem arcus $\frac{\pi}{3}$, ita ut sit nunc:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \text{A tg.}\ \sqrt{3},$$

quod, ob $\text{A} . \text{tg.}\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, manifesto cum veritate consentit.

§. 25. Antequam huic dissertatiunculae finem faciam, adhuc monendum habeo, seriebus ab *Eulero* pro sinu et cosinu arcus multipli $2n\Phi$ in dissertatione ejus saepius citata exhibitis, hic vero multo commodius expressis et demonstratis, tam ob majorem usum, quem in multiplicatione ac divisione angulorum praestare possunt, quam ob simplicitatem in lege progressionis conspicuam, longe anteferendas esse eas series, quas jam altiquoties pro sinus et cosinus anguli multipli, postremo in novorum Actorum Tomis IX. et XII. in medium attuli ac demonstravi. Hae series ita se habent:

$$\sin. n.\Phi = \cos.\Phi^n \left[\left(\frac{n}{1}\right)\text{tg.}\Phi - \left(\frac{n}{3}\right)\text{tg.}\Phi^3 + \left(\frac{n}{5}\right)\text{tg.}\Phi^5 - \text{etc.}\right];$$

$$\cos. n\Phi = \cos.\Phi^n \left[1 - \left(\frac{n}{2}\right)\text{tg.}\Phi^2 + \left(\frac{n}{4}\right)\text{tg.}\Phi^4 - \left(\frac{n}{6}\right)\text{tg.}\Phi^6 + \text{etc.}\right].$$

INVESTIGATIO TERMINORUM SERIEI EX DATIS PRODUCTIS QUOTCUNQUE TERMINORUM CONTIGUORUM.

AUCTORE

N. F U S S.

Conventui exhibuit die 25 Aug. 1813.

§. 1. Sint a, b, c, d, etc. termini seriei, et res eo redit, ut hi termini determinentur, si vel binorum, vel ternorum, vel quaternorum etc. terminorum contiguorum producta fuerint data. Primum quidem casum, eumque simplicissimum, quod attinet, quo nempe producta ex binis terminis contiguis cognita assumuntur, problema hoc jam pridem a summo quondam Geometra nostro *Eulero* solutum reperitur in Tomo primo Opusculorum analyticorum, idque duplici modo, per interpolationem nimirum et per fractiones continuas. Cum autem istud argumentum, si modo memoratum Geometram excipias, a nemine adhuc, quantum quidem mihi constat, tractatum fuerit, operae pretium mihi visum est, methodum priorem, utpote usui magis accommodatam, licet minus directam etiam ad illos casus extendere, quibus producta ex ternis, quaternis, quinis, etc. terminis contiguis ut data spectantur.

§. 2. Quo autem natura methodi et formularum lex progressionis clarius perspiciatur, exordiamur a casu illo simplicissimo, statuendo data esse producta ex binis terminis contiguis seriei a, b, c, d, etc., quem in finem ponamus:

$$A = ab,\ B = bc,\ C = cd,\ D = de$$

et ita porro, ubi igitur A, B, C, D, etc. sunt quantitates datae, ex quibus terminos seriei a, b, c, d, etc. determinari oportet.

§. 3. Hic spectari potissimum debet natura progressionis A, B, C, D, etc. examinando quomodo ejus termini infinitesimi sint comparati, utrum fiant inter se aequales, vel differentias habeant, sive primas, sive secundas, constantes, vel denique progressionem constituant geometricam. Sufficiet autem casum tantum postremum considerasse, quandoquidem etiam termini infinitesimi aequales, vel differentias constantes habentes, progressionem geometricam constitui assumuntur.

§. 4. Tum vero hic quoque monendum est, ob $ab = A$, $bc = B$, $cd = C$, etc. omnes seriei quaesitae terminos ex solo primo a atque datis A, B, C, D, etc. definiri. Erit enim:

$$\begin{array}{l|l} b = \frac{A}{a} & c = \frac{aB}{A} \\ d = \frac{AC}{aB} & e = \frac{aBD}{AC} \\ f = \frac{ACE}{aBD} & g = \frac{aBDF}{ACE} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Prout igitur termini A, B, C, D, etc. continuo propius ad rationem aequalitatis accedunt, ita etiam numeri quaesiti a, b, c, d, etc. tandem aequales fieri sunt censendi.

§. 5. Quodsi igitur binos quoslibet proximos horum terminorum a, b, c, d, etc. inter se aequales statuamus, indeque valorem primi a eruamus, ejus valor continuo propius ad veritatem accedet, quo longius fuerimus progressi. Ita aequalitas $a = b$ dat $a^2 = A$; aequalitas $b = c$ dat $a^2 = \frac{A^2}{B}$; aequalitas $c = d$ dat $a^2 = \frac{A^2 C}{B}$; et ita porro. Hoc modo pro a^2 successive emergent valores sequentes continuo propius ad veritatem accedentes:

$$\begin{array}{l|l} a^2 = A \cdot 1 & a^2 = A \cdot \frac{AC}{B^2} \cdot \frac{CE}{D^2} \\ a^2 = A \cdot \frac{A}{B} & a^2 = A \cdot \frac{AC}{B^2} \cdot \frac{CE}{D^2} \cdot \frac{E}{F} \\ a^2 = A \cdot \frac{AC}{B^2} & a^2 = A \cdot \frac{AC}{B^2} \cdot \frac{CE}{D^2} \cdot \frac{EG}{F^2} \\ a^2 = A \cdot \frac{AC}{B^2} \cdot \frac{C}{D} & \text{et ita porro} \end{array}$$

Hinc jam facile perspicitur valorem infinitesimum, hoc est verum, ita expressum iri:

$$A^2 = A \cdot \frac{AC}{B^2} \cdot \frac{CE}{D^2} \cdot \frac{EG}{F^2} \cdot \frac{GI}{H^2} \cdot \frac{IL}{K^2} \cdot \text{etc.}$$

Hoc nempe productum, in infinitum continuatum, exhibet valorem primi termini seriei quaesitae, et quidem non solum quando termini infinitesimi progressionis A, B, C, etc. rationem aequalitatis tenent, ut *Eulerus* innuerat (Op. anal. T. I. pag. 5.) sed etiam, ut infra videbimus, quando differentias habent constantes vel progressionem constituunt geometricam. Invento autem primo termino a, omnes reliqui ex §. 4. innotescunt.

§. 6. Ut rem aliquot exemplis magis illustremus, statuamus primo esse:

$$\begin{aligned} A &= ab = 1, \\ B &= bc = 2, \\ C &= cd = 3, \\ D &= de = 4 \end{aligned}$$

et ita porro, ac reperietur:

$$a^2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} \cdot \text{etc.}$$

Constat autem, hoc productum infinitum esse $= \frac{2}{\pi}$, denotante π peripheriam circuli, cujus diameter est unitas; unde sequitur fore primum terminum seriei quaesitae $a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, quo invento etiam reliqui ex §. 4. innotescunt. Erit enim:

$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$b = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$c = \frac{2}{1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$d = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$e = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$f = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$g = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$h = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$i = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$k = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
etc.	etc.

Cum hi valores duplicis sint formae, eos in duabus columnis ita disposuimus, ut ordo, secundum quem procedunt, clarissime perspiciatur.

§. 7. Consideremus nunc casum quo $ab = 1$, $cd = 2$, $ef = 3$, $gh = 4$, etc. eritque interpolando $bc = \frac{3}{2}$, $de = \frac{5}{2}$, $fg = \frac{7}{2}$, etc., ideoque habebimus:

$$\begin{aligned} A &= ab = 1, \\ B &= bc = \tfrac{3}{2}, \\ C &= cd = 2, \\ D &= de = \tfrac{5}{2}, \\ E &= ef = 3, \end{aligned}$$

et ita porro, quibus valoribus substitutis ex §. 5. habebimus:

$$a^2 = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 6}{5\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 8}{7\cdot 7} \cdot \frac{8\cdot 10}{9\cdot 9} \cdot \text{etc.}$$

Cum igitur sit per productum *Wallisii*:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \cdot \frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \cdot \text{etc.}$$

erit $a^2 = \frac{\pi}{4}$, ideoque $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ex quo reliqui termini ope formularum §. 4. exhibitarum sequenti modo determinantur:

$a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$b = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$c = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$d = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}$
$e = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$f = \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}$
$g = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$h = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}$
etc.	etc.

ubi iterum ordo, secundum quem hi termini procedunt, est manifestissimus.

§. 8. Consideretur nunc ista progressio: $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = \frac{3}{4}$, $D = \frac{4}{5}$, $E = \frac{5}{6}$, $F = \frac{6}{7}$, etc., eritque:

$$a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \text{etc.}$$

unde extracta radice nanciscimur:

$$a = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} \cdot \text{etc.} = \frac{2}{\pi}.$$

Termini igitur quaesiti erunt:

$a = \frac{2}{\pi}$	$b = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$
$c = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{\pi}$	$d = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$
$e = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{2}{\pi}$	$f = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}$
$g = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{\pi}$	$h = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2}$
etc.	etc.

§. 9. Adhuc considerari meretur sequens casus ad seriem numerorum naturalium deducens:

$$A = ab = 1 \cdot 2 = 2,$$
$$B = bc = 2 \cdot 3 = 6,$$
$$C = cd = 3 \cdot 4 = 12,$$
$$D = de = 4 \cdot 5 = 20,$$

et ita porro. Videamus quid formulae nostrae hoc casu sint praebiturae. Ac primo quidem erit:

$$a^2 = 2 \cdot \frac{2 \cdot 12}{6 \cdot 6} \cdot \frac{12 \cdot 30}{20 \cdot 20} \cdot \frac{30 \cdot 56}{42 \cdot 42} \cdot \frac{56 \cdot 90}{72 \cdot 72} \cdot \text{etc.}$$

quod, fractiones reducendo, ita repraesentari potest:

$$a^2 = 2 \cdot \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdot \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 7} \cdot \frac{7 \cdot 10}{8 \cdot 9} \cdot \frac{9 \cdot 12}{10 \cdot 11} \cdot \text{etc.}$$

Deletis jam in numeratore ac denominatore factoribus aequalibus, evidens est fore $a = 1$, tum vero ex §. 4. sequitur fore $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$, etc., uti requiritur.

§. 10. Consideretur nunc progressio sequens geometrica $A = 1$, $B = 2$, $C = 4$, $D = 8$, $E = 16$, etc. et jam supra innuimus hoc casu etiam seriei quaesitae terminos a, b, c, d talem necessario constituere debere progressionem, saltem in infinito. Quodsi igitur ex postremis supra §. 4. pro a, b, c, d, etc. exhibitis valoribus formentur hae fractiones:

$$\frac{f}{e} = \frac{A^2\,C^2\,E}{a^2\,B^2\,D^2} \quad \text{et} \quad \frac{g}{f} = \frac{a^2\,B^2\,D^2\,F}{A^2\,C^2\,E^2},$$

eae inter se debebunt esse aequales unde elicitur:

$$a^4 = \frac{A^4\,C^4\,E^3}{B^4\,D^4\,F}, \quad \text{sive}$$

$$a^4 = A^2 \cdot \frac{A^2\,C^2}{B^4} \cdot \frac{C^2\,E^2}{D^4} \cdot \frac{E}{F}.$$

Hinc jam facile intelligitur verum valorem fore:

$$a^4 = A^2 \cdot \frac{A^2\,C^2}{B^4} \cdot \frac{C^2\,E^2}{D^4} \cdot \frac{E^2\,G^2}{F^4} \cdot \frac{G^2\,I^2}{H^4} \cdot \cdot \cdot \frac{Z}{Z'},$$

denotantibus Z et Z′ terminos infinitesimos contiguos, eritque pro nostro casu $Z' = 2Z$ et $\frac{Z}{Z'} = \frac{1}{2}$. Quodsi nunc valores numerici substituantur, habebimus:

$$a^4 = 1^2 \cdot \frac{1^4 \cdot 2^4}{2^4} \cdot \frac{2^4 \cdot 2^8}{2^{12}} \cdot \frac{2^8 \cdot 2^{12}}{2^{20}} \cdot \frac{2^{12} \cdot 2^{16}}{2^{28}} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{1}{2},$$

hoc est $a^4 = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 2^{-\frac{1}{4}}$. Reliqui termini erunt:

$$b = 2^{\frac{1}{4}},\ c = 2^{\frac{3}{4}},\ d = 2^{\frac{5}{4}},\ e = 2^{\frac{7}{4}},\ f = 2^{\frac{9}{4}},\ \text{etc.}$$

Unde patet etiam hos terminos constituere progressionem geometricam. Solutio igitur facilior fuisset, si, sumendo exponentem hujus progressionis $= z$, posuissemus:

$$b = az,\ c = az^2,\ d = az^3,\ e = az^4,\ \text{etc.}$$

inde enim sequentes resultant aequationes:

$$\begin{aligned}
A &= ab = a^2 z = 1, \\
B &= bc = a^2 z^3 = 2, \\
C &= cd = a^2 z^5 = 4, \\
D &= de = a^2 z^7 = 8, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

quarum si quaelibet per praecedentem dividatur, prodibit $z^2 = 2$, ideoque $z = \sqrt{2}$ et $a^2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, hincque $a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, ut supra.

§. 11. Si fuerit in genere $B = Am$, $C = Am^2$, $D = Am^3$, $E = Am^4$, etc. tum, sumendo ut ante fecimus:

$$b = az,\ c = az^2,\ d = az^3,\ \text{etc.}$$

ob $ab = A = a^2 z$ et $bc = B = a^2 z^3 = Am$, erit $\frac{B}{A} = z^2 = m$, ergo $z = \sqrt{m}$ et termini seriei quaesitae erunt:

$a = \sqrt{A} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{m}}$	$d = \sqrt{A} \cdot \sqrt[4]{m^5}$
$b = \sqrt{A} \cdot \sqrt[4]{m}$	$e = \sqrt{A} \cdot \sqrt[4]{m^7}$
$c = \sqrt{A} \cdot \sqrt[4]{m^3}$	$f = \sqrt{A} \cdot \sqrt[4]{m^9}$

et ita porro.

§. 12. Si litterae A, B, C, D, etc. constituant seriem hypergeometricam, hoc est si fuerit:

$$A = ab = 1,$$
$$B = bc = 1.\ 2,$$
$$C = cd = 1.\ 2.\ 3,$$
$$D = de = 1.\ 2.\ 3.\ 4,$$
$$E = ef = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5,$$

et ita porro, tum termini infinitesimi quidem etiam geometrice procedunt; verum fractio $\frac{z}{z'}$ fit infinita, quamobrem peculiari evolutione opus erit. Expressio quidem §. 10. exhibita, qua:

$$a^4 = A^2 \cdot \frac{A^2 C^2}{B^4} \cdot \frac{C^2 E^2}{D^4} \cdot \frac{E^2 G^2}{F^4} \cdot \frac{G^2 I^2}{H^4} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{Z}{Z'},$$

declarat sequentes valores continuo propius ad veritatem accedere:

$$a = \frac{ACE}{BDF} \sqrt[4]{G^2 \cdot \frac{G}{H}}$$
$$a = \frac{ACEG}{BDFH} \sqrt[4]{I^2 \cdot \frac{I}{K}}$$
$$a = \frac{ACEGI}{BDFHK} \sqrt[4]{L^2 \cdot \frac{L}{M}}$$
$$a = \frac{ACEGIL}{BDFHKM} \sqrt[4]{N^2 \cdot \frac{N}{O}}$$

et ita porro. Verum idem valor a, verus adeo, multo commodius ita eruitur. Cum sit:

$b = \frac{1}{a}$	$c = 2 . a$
$d = \frac{1 \cdot 3}{a}$	$e = 2 . 4 . a$
$f = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{a}$	$g = 2 . 4 . 6 . a$
$h = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{a}$	$i = 2 . 4 . 6 . 8 . a$
etc.	etc.

posito $b^2 = ac$ fit $a^4 = \frac{1}{2}$; ex $c^2 = bd$ fit $a^4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}$, ex $d^2 = ce$ oritur $a^4 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4}$; ex $e^2 = df$ nanciscimur $a^4 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4}$; ex $f^2 = eg$ prodibit $a^4 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6}$. Continuando hoc modo tandem emerget verus valor:

$$a^4 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \, . \text{ etc.}}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \, . \text{ etc.}} = \frac{2}{\pi}$$

ergo $a = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}$. Termini igitur seriei quaesitae ita se habebunt:

$a = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}$	$b = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}$
$c = 2 \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}$	$d = 1 . 3 . \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}$
$e = 2 . 4 . \sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$f = 1 . 3 . 5 . \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}$
$g = 2 . 4 . 6 . \sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$h = 1 . 3 . 5 . 7 \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}$
etc.	etc.

qui quomodo ulterius procedant perspicuum est.

§. 13. Sit $A' = a$, $B' = ab$, $C' = abc$, $D' = abcd$ et ita porro, et cum sit $A = ab$, $B = bc$, $C = cd$, $D = de$, etc. habebimus:

$$
\begin{array}{ll|ll}
A' = a & & B' = A & \\
C' = a\,B & & D' = A\,C & \\
E' = a\,B\,D & & F' = A\,C\,E & \\
G = a\,B\,D\,F & & H' = A\,C\,E\,G & \\
\text{etc.} & & \text{etc.} &
\end{array}
$$

ubi termini secundae columnae constituunt datam progressionem quae interpolari poterit, qua operatione eosdem assequimur valores continuo propius ad veritatem accedentes, quos supra §. 5. pro a^2 exhibuimus:

§. 14. Aggrediamur nunc problema terminos investigandi seriei a, b, c, d, e, etc. si data fuerint producta ex *ternis* terminis contiguis. Hunc in finem ponamus:

$$
\begin{aligned}
A &= a\,b\,c\,, \\
B &= b\,c\,d\,, \\
C &= c\,d\,e\,, \\
D &= d\,e\,f\,,
\end{aligned}
$$

et ita porro. Hic, ut antea, assumere licebit numeros A, B, C, etc. ita esse comparatos, ut infinitesimi sint inter se aequales; unde manifestum est idem evenire debere in serie a, b, c, d, etc. cujus terminos ex duobus primis a et b, una cum datis A, B, C, etc. definire licet hoc modo:

$c = \frac{A}{ab}$	$d = \frac{aB}{A}$	$e = \frac{bC}{B}$
$f = \frac{AD}{abC}$	$g = \frac{aBE}{AD}$	$h = \frac{bCF}{BE}$
$i = \frac{ADG}{abCF}$	$k = \frac{aBEH}{ADG}$	$l = \frac{bCFI}{BEH}$
$m = \frac{ADGK}{abCFI}$	$n = \frac{aBEHL}{ADGK}$	$o = \frac{bCFIM}{BEHL}$
etc.	etc.	etc.

ubi lex progressionis est perspicua, dummodo, ut fecimus, triplicis formae termini rite a se invicem distinguantur. Superest ut determinentur a et b. Hunc in finem statuamus primo $n = o$, eritque:

$$\frac{a}{b} = \frac{ACDFGIKM}{B^2 E^2 H^2 L^2}.$$

tum vero statuamus $m = o$, fiet:

$$ab^2 = \frac{ABDEGHKL}{C^2 F^2 I^2 M}.$$

Quodsi haec postrema fractio ducatur in quadratum prioris, deletis factoribus communibus in numeratore et denominatore reperitur:

$$a^3 = \frac{A^3 D^3 G^3 K^3 M}{B^3 E^3 H^3 L^3};$$

unde facile intelligitur si ulterius progredi et terminos magis a primis quam m, n et o remotos aequales ponere velimus, valores a^3 inde derivati continuo propius ad veritatem accedere, quo longius fuerimus progressi, et valorem verum per sequens productum infinitum expressum iri:

$$a = A \cdot \frac{A^2 D}{B^3} \cdot \frac{D^2 G}{E^3} \cdot \frac{G^2 K}{H^3} \cdot \frac{K^2 N}{L^3} \cdot \text{etc.}$$

Simili modo reperietur quoque b^3. Cum enim, posito $n = m$, sit

$$a^2 b = \frac{A^2\,D^2\,G^2\,K^2}{B\,C\,E\,F\,H\,I\,L},$$

tum vero ex positione $n = o$ oriatur:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{B^4\,E^4\,H^4\,L^4}{A^2\,C^2\,D^2\,F^2\,G^2\,I^2\,K^2\,M^2}$$

ambarum fractionum productum nobis subministrat hunc valorem:

$$b^3 = \frac{B^3\,E^3\,H^3\,L^3}{C^3\,F^3\,I^3\,M^2}.$$

unde concluditur verum valorem per hoc productum infinitum exprimi:

$$b^3 = B \cdot \frac{B^2\,E}{C^3} \cdot \frac{E^2\,H}{F^3} \cdot \frac{H^2\,L}{I^3} \cdot \frac{L^2\,O}{M^3} \cdot \text{etc.}$$

§. 15. Progrediamur nunc ad casum, quo producta ex *quaternis* terminis contiguis ut data spectantur, hoc est ubi cogniti ponuntur valores:

$$A = a\,b\,c\,d,$$
$$B = b\,c\,d\,e,$$
$$C = c\,d\,e\,f,$$
$$D = d\,e\,f\,g,$$

et ita porro, atque manifestum est hoc casu fore:

$d = \frac{A}{abc}$	$e = \frac{aB}{A}$	$f = \frac{bC}{B}$	$g = \frac{cD}{C}$
$h = \frac{AE}{abcD}$	$i = \frac{a\;F}{AE}$	$k = \frac{bCG}{BF}$	$l = \frac{cDH}{CG}$
$m = \frac{AEI}{abcDH}$	$n = \frac{aBFK}{AEI}$	$o = \frac{bCGL}{BFK}$	$p = \frac{CDHM}{CGL}$
etc.	etc.	etc.	etc.

Hi valores sunt quadruplicis formae et quomodo procedant in qualibet columna perspicuum est. Quod si nunc statuatur $m = p$ erit:

$$a\,b\,c\,c = \frac{A\,C\,E\,G\,I\,L}{D^2\,H^2\,M};$$

tum vero, posito $n = o$, habebimus:

$$\frac{a}{b} = \frac{A\,C\,E\,G\,I\,L}{B^2\,F^2\,K^2},$$

quarum fractionum productum dat:

$$a\,a\,c\,c = \frac{A^2\,C^2\,E^2\,G^2\,I^2\,L^2}{B^2\,D^2\,F^2\,H^2\,M}.$$

Posito porro $n = p$ nanciscimur:

$$\frac{a}{c} = \frac{A\,D\,E\,H\,I\,M}{B\,C\,F\,G\,K\,L},$$

unde concluditur fore:

$$a\,a\,c\,c \times \frac{a\,a}{c\,c} = a^4 = \frac{A^4\,E^4\,I^4\,M}{B^4\,F^4\,K^4}.$$

Hinc jam facile intelligitur verum valorem fore:

$$a^4 = A \cdot \frac{A^3 E}{B^4} \cdot \frac{E^3 I}{F^4} \cdot \frac{I^3 N}{K^4} \cdot \frac{N^4 R}{O^4} \cdot \text{etc.}$$

Simili modo reperietur fore:

$$b^4 = B \cdot \frac{B^3 F}{C^4} \cdot \frac{F^3 K}{G^4} \cdot \frac{K^3 O}{L^4} \cdot \frac{O^3 S}{P^4} \cdot \text{etc.}$$

$$c^4 = C \cdot \frac{C^3 G}{D^4} \cdot \frac{G^3 L}{H^4} \cdot \frac{L^3 P}{M^4} \cdot \frac{P^3 T}{Q^4} \cdot \text{etc.}$$

Inventis autem hoc modo a, b, c, reliqui termini etiam innotescunt quemadmodum tabula supra data declarat.

§. 16. Hinc jam tuto concludere licet, si data fuerint producta ex quinis terminis contiguis, hoc est si fuerit:

$$A = a\,b\,c\,d\,e,$$
$$B = b\,c\,d\,e\,f,$$
$$C = c\,d\,e\,f\,g,$$
$$D = d\,e\,f\,g\,h,$$

et ita porro, tum fore:

$$a^5 = A \cdot \frac{A+F}{B5} \cdot \frac{F+L}{G5} \cdot \frac{L+Q}{M5} \cdot \frac{Q+U}{R5} \cdot \text{etc.}$$
$$b^5 = B \cdot \frac{B+G}{C5} \cdot \frac{G+M}{H5} \cdot \frac{M+R}{N5} \cdot \frac{R+W}{S5} \cdot \text{etc.}$$
$$c^5 = C \cdot \frac{C+H}{D5} \cdot \frac{H+N}{I5} \cdot \frac{N+S}{O5} \cdot \frac{S+X}{T5} \cdot \text{etc.}$$
$$d^5 = D \cdot \frac{D+I}{E5} \cdot \frac{I+O}{K5} \cdot \frac{O+T}{P5} \cdot \frac{T+Y}{U5} \cdot \text{etc.}$$

Reliqui termini dantur per a, b, c, d, et per cognita producta A, B, C, D, etc.

§. 17. Hoc igitur modo problema nostrum in genere quasi pro soluto est habendum, quandoquidem ordo, secundum quem valores terminorum pro datis productis ex senis, septenis, etc. contiguis procedunt jam est evidentissimus, ita ut facile omnia ad quotquot lubuerit terminos contiguos, in se invicem ductos, extendi queant.

INVESTIGATIO CURVARUM QUARUNDAM; QUAS DESCRIBIT PUNCTUM CURVAE DATAE DATAQUE LEGE MOTAE.

AUCTORE

E. COLLINS.

Conventui exhibuit die 10 Nov. 1813.

Problema I.

Data curva quaecunque TDY *movetur super recta* MN *ita, ut in singulis punctis successive tangatur a hac recta: invenire curvam* YS, *quam tali motu describit punctum quoddam* Y *in data curva pro lubitu assumtum.* Tab. III. Fig. 1.

Solutio:

Sit T punctum curvae datae, in quo ea hac ejus positione tangitur à recta MN; S autem punctum in quod cadebat punctum Y, curva motum suum incipiente: perspicuum est, arcum TY aequalem fore rectae TS. Determinentur puncta T et Y in data curva coordinatis orthogonalibus GY, DG et TV, DV, existente DH axe et D initio abscissarum; punctum Y autem in curva quaesita exhibeatur coordinatis XY et SX. Positis nunc

DG $=c$, GY $=-f$, DV $=p$, TV $=q$, SX $=x$, XY $=y$, arcubus DY $=-\alpha$ et DT $=\int\sqrt{\partial p^2+\partial q^2}=\Phi$, tangente RT $=v$ et subtangente RV $=w$, ob aequationem inter coordinatas p et q datam, exhiberi potest:

1°. arcus α per c sive per f, et

2°. arcus Φ, tangens v, subtangensque w, per p sive per q.

Ducatur recta TF axi DH parallela, agaturque, ex intersectione ejus F cum applicata GY producta, recta FI ipsi MN parallela; erigatur denique perpendiculum TK. Ob triangula TVR, FYI et FKT similia, erit:

$$1°.\ \mathrm{TR} : \mathrm{VR} = \mathrm{FY} : \mathrm{YI} = \frac{\mathrm{VR}\cdot\mathrm{FY}}{\mathrm{TR}} = \frac{w(q-f)}{v},$$
$$2°.\ \mathrm{TR} : \mathrm{TV} = \mathrm{FY} : \mathrm{FI} = \frac{\mathrm{TV}\cdot\mathrm{FY}}{\mathrm{TR}} = \frac{q(q-f)}{v},$$
$$3°.\ \mathrm{TR} : \mathrm{VR} = \mathrm{TF} : \mathrm{FK} = \frac{\mathrm{VR}\cdot\mathrm{TF}}{\mathrm{TR}} = \frac{w(c-p)}{v},$$
$$4°.\ \mathrm{TR} : \mathrm{TV} = \mathrm{TF} : \mathrm{KT} = \frac{\mathrm{TV}\cdot\mathrm{TF}}{\mathrm{TR}} = \frac{q(c-p)}{v}.$$

Hincque colliguntur:

$$y = \mathrm{YX} = \mathrm{YI} + \mathrm{KT} = \frac{w(g-f)-q(p-c)}{v}\ \text{(I)}$$
$$\text{et } \mathrm{TX} = \mathrm{FI} - \mathrm{FK} = \frac{q(q-f)+w(p-c)}{v}.$$

Hoc vero valore pro TX invento, facile definietur abscissa x. Nam, ob SX $=$ TS $-$ TX $=$ Arc. TY $-$ TX, erit: $x=\Phi-\alpha-\frac{q(q-f)+w(p-c)}{v}$ (II.).

Reductis nunc aequationibus I. et II. ad ejusmodi, quas ingrediuntur solae variabiles x, y et p (sive q), eliminataque deinceps hac postrema, innotescit relatio inter coordinatas curvae quaesitae.

Corollarium 1.

Cum sit $v = \frac{q \partial \Phi}{\partial q}$ et $w = \frac{q \partial p}{\partial q}$, aequationes illae inventae pro coordinatis curvae quaesitae, exhiberi possunt etiam sub hac forma:

$$\text{I. } y = \frac{(q-f)\partial p - (p-c)\partial q}{\partial \Phi} \text{ et}$$

$$\text{II. } x = \Phi - \alpha - \frac{(q-f) + (p-c)\partial p}{\partial \Phi}.$$

Scholion 1.

Cel. *Waring* in egregio suo opere: *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus*, Lib. II. Cap. II., docendo rectificationem curvarum tali motu ortarum, per quadraturas curvilinearum, aliasque earundem proprietates, primus eas appellavit *Curvoides*; curvas vero generatas a puncto in una curva super altera tanquam basi rotante, vocavit *Epicurvoides*.

Corollarium 2.

Si pro puncto Y assumatur vertex curvae propositae, aequatione pro eadem ita comparata ut pro c evanescente fiat simul $f = 0$, aequationes modo inventae evadunt simplicissimae. Colligitur enim fore:

$$y = \frac{q \partial p - p \partial q}{\partial \Phi} \text{ et } x = \Phi - \frac{q \partial q + p \partial p}{\partial \Phi}.$$

Exemplum.

Sit curva data circulus descriptus radio a, quo casu curvam quaesitam cycloidem fore cuique notum est. Eandem etiam dant formulae nostrae. Ob $q = \sqrt{2ap - pp}$ erit $\partial q = \frac{(a-p)\partial p}{\sqrt{2ap - pp}}$ et $\partial \Phi = \frac{a \partial p}{\sqrt{2ap - pp}}$. Nunc, quia pro circulo eodem redit, ubicunque punctum assumitur curvam quaesitam describens, aequationibus in coroll. 2. erutis utar, utpote simplicissimis. His autem adhibitis invenitur:

$$y = p \text{ et } x = \int \frac{a \partial p}{\sqrt{2ap - pp}} - \sqrt{2ap - pp} = \int \frac{a \partial y}{\sqrt{2ay - yy}} - \sqrt{2ay - yy}$$
$$= a \,.\, \text{Arc.} \left(\sin. = \frac{\sqrt{2ay - yy}}{a}\right) - \sqrt{2ay - yy},$$

haecque est notissima cycloidis proprietas.

Corollarium 3.

Si, ad solutionem nostram generaliorem reddendam, ponamus punctum Y vel extra vel intra curvam cadere, colligimus sequentes aequationes:

I. Pro casu, quo Y cadit extra curvam:

$$y = \frac{(q-\alpha)\partial p - (p-c)\partial q}{\partial \Phi} \text{ et}$$
$$x = \Phi - \alpha + k - \frac{(q-\alpha)\partial q + (p-c)\partial p}{\partial \Phi},$$

ubi, ceteris manentibus ut ante, denotant $-\alpha$ distantiam perpendicularem puncti Y ab axe; c abscissam ei respondentem; k distantiam puncti Y (dum cadit in rectam MN) a puncto curvae tacto hac positione ab illa recta; $-\alpha$

denique arcum curvae situm inter punctum postremo allatum et initium abscissarum.

II. Pro casu, quo Y cadit intra curvam datam:

$$y = \frac{(q-a)\partial p - (p-c)\partial q}{\partial \Phi} \quad \text{et}$$
$$x = \Phi - \alpha - m - \frac{(q-a)\partial q + (p-c)\partial p}{\partial \Phi},$$

denotante $-a$ iterum puncti Y distantiam perpendicularem ab axe, m vero puncti curvae respondentis abscissae c distantiam a puncto quodam rectae MN, cujus locus definitur perpendiculo demisso e puncto Y in hanc rectam, ea curvae positione, qua tangebatur a recta MN in puncto illo respondente abscissae c; littera α denique designatur arcus respondens eidem abscissae. Perspicuum est, applicatam y, pro abscissa $x = 0$, jam habere valorem quendam, quippe qui aequatur illi perpendiculo e puncto Y in rectam MN demisso.

Corollarium 4.

Revertamur ad aequationes in coroll. 1°. erutas, quae ita differentiatae, ut $\partial\Phi$ tanquam constans spectetur, praebent has:

$$\partial y = \frac{\partial^2 p\,[(q-f)\partial q + (p-c)\partial p]}{\partial \Phi \,.\, \partial q} = \frac{\partial^2 p\,(\Phi - \alpha - x)}{\partial q},$$
$$\text{et} \quad \partial x = \frac{\partial^2 p\,[(q-f)\partial p - (p-c)\partial q]}{\partial \Phi \,.\, \partial q} = \frac{\partial^2 p \,.\, y}{\partial q},$$

unde dividendo colligitur:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\Phi - \alpha - x}{y}, \quad \text{hincque:}$$
$$\frac{y\,\partial y}{\partial x} = \Phi - \alpha - x,$$

quae indicat, rectam TX esse Subnormalem curvae inventae, unde etiam concluditur ipsam TY fore Normalem.

Corollarium 5.

Ob radium osculi curvae datae $= \frac{\partial q \cdot \partial \Phi}{\partial^2 p}$ et $\frac{\partial^2 p}{\partial \Phi} = \frac{\partial x}{y}$ (cor. 4.) erit: $r = \frac{y \partial \Phi}{\partial x}$. Cum autem sit $\partial \Phi = \partial (\frac{y \partial y}{\partial x}) + \partial x$, erit quoque $r = \dfrac{y \cdot \partial (\frac{y \partial y}{\partial x})}{\partial x} + y$.

Corollarium 6.

E coroll. 4. reperitur:

$$\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial s = \frac{\partial^2 p}{\partial q} \sqrt{(q-f)^2 + (p-c)^2},$$

unde, ob $\sqrt{(q-f)^2 + (p-c)^2} =$ Normali curvae inventae, erit:

$$\partial s = \frac{N \partial \Phi}{r},$$

posita illa Normali $=$ N. Haec autem aequatio monstrat, Normalem curvae inventae esse ad Radium curvedinis curvae propositae, ut elementum illius curvae ad elementum posterioris, manente scilicet eadem positione mutua ambarum curvarum, quae exstat in figura.

Corollarium 7.

Cum sit (cor. 4.) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\Phi - \alpha - x}{y}$, erit

$$\frac{\partial (\frac{\partial y}{\partial x})}{\partial x} = \frac{y (\frac{\partial \Phi}{\partial x} - 1) - (\Phi - \alpha - x) \frac{\partial y}{\partial x}}{yy};$$

hincque invenitur pro radio osculi curvae inventae, quem designo littera R, sequens expressio:

$$R = \frac{-(yy + (\Phi - \alpha - x)^2)^{\frac{3}{2}}}{y^2 (\frac{\partial \Phi}{\partial x} - 1) - (\Phi - \alpha - x)^2},$$

quae, ob $y^2 + (\Phi - \alpha - x)^2 = N^2$ (cor. 6.) et $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{r}{y}$ (cor. 5.), mutatur in hanc:

$$R = \frac{-N^3}{yr - N^2}.$$

Hujus formulae ope cognitoque radio r, radius R facillime construi potest. Hunc in finem exhibeat recta T I radium r curvae propositae; demittatur e puncto I in Normalem T Y curvae inventae perpendiculum I K; in puncto Y erigatur perpendiculum Y L aequale Normali N; jungantur porro puncta L et K; ducatur denique recta LO normalis ad ipsam LK et producta Normali TY usque ad intersectionem ejus cum LO, recta O Y erit Radius osculi R curvae inventae. Nam $OY = \frac{TY^2}{\frac{YX \cdot TI}{TY} - TY}$ (Comp. cum *Miscel. anal. l. c. coroll. II.*). Tab. III. Fig. 2.

Corollarium 8.

Ex aequatione $\partial s = \frac{N \partial \Phi}{r}$ statim deducitur formula data a *Waringio* pro incremento arcus curvoidis. Cum enim sit (cor. 5.) $\frac{\partial \Phi}{r} = \frac{\partial x}{y} = \frac{\partial y}{\frac{y \partial y}{\partial x}}$, prodit:

$$\partial s = \frac{N \cdot \partial y}{\frac{y \partial y}{\partial x}} = \frac{TY \cdot \partial : YX}{TX} \text{. } (\textit{l. c. Probl. I.}).$$

Scholion 2.

Curva super basim MN rotans aut duos habet ramos in infinitum vergentes, aut est curva in se rediens. Cum motus priore casu fieri possit tam a dextra sinistram versus quam retrorsum, curva a puncto Y descripta etiam duos habere debet ramos infinitos, utrosque ipsam MN concavo spectantes latere, atque in puncto S, tanquam origine motus, cuspidem formantes axi MN normaliter insistentem. Altero vero casu, quia motus utrinque sine fine durare potest, curva rotatione curvae datae genita gaudere debet infinitate ramorum finitorum, aequalium junctorumque inter se punctis reflexus axi MN normaliter insistentibus: liquet autem curvoidem tunc transcendentem esse. Hinc concluditur, ne unicam quidem curvam algebraicam in se redientem algebraice rectificabilem fore, quoniam alioquin ex aequationibus I. et II. coroll. 1., post eliminationem variabilium p et q, evadere deberet aequatio algebraica inter coordinatas x et y.

Scholion 3.

Ope formularum huc usque inventarum etiam resolvendum est Problema inversum, quo quaeritur relatio inter coordinatas curvae, cujus rotatione super recta quacunque a puncto quodam in illo sito describitur alia quaecunque curva data. Nam, ob aequationem inter coordinatas x et y hic datam, erui possunt duae aequationes definientes aut solam x aut y; haeque comparatae inter se praebebunt relationem inter coordinatas p et q, ubi autem supersunt constantes c et f ita determinandae, ut pro $p = c$ fiat $q = f$.

Problema II.

Moveatur super recta MN *data curva quaecunque* BDY *ita, ut simul transeat per quoddam punctum fixum* B: *invenire curvam* CY, *quae tali motu describitur* Tab. III.
a puncto Y *in priore curva pro arbitrio assumto.* Fig. 3.

Solutio.

Manentibus iisdem lineis auxiliaribus ac denominationibus usurpatis in problemate praecedente, liquet, etiam expressionem supra inventam pro applicata y fore eandem, nempe:

$$y = \frac{w(q-f) - q(p-c)}{v}. \text{ (I.)}$$

Nunc, ad valorem pro abscissa ei respondente eruendum, addamus adhuc sequentia:

Demittantur primo perpendicula BA, YI, BZ et EF, designetque E punctum curvae propositae coincidens cum puncto fixo B, dum recta MN curvam in Y tangit, quod evenire statuamus in puncto C ejusdem rectae MN. Producta porro BZ ad punctum K usque, ubi secat rectam KY ipsi ZD parallelam, demittantur denique perpendicula KO et BL.

Sit $BA = a$, $AC = -b$, abscissa $CX = x$, $BZ = u$, $DZ = t$, $EF = h$ et $FD = g$, erit $BK = u - f$ et $KY = GZ = t - c$. Nunc, ob triangula TVR, BKL et KOY similia, colliguntur hae proportiones:

$$1^{\circ}.\ TR : TV = BK : BL = \frac{TV \cdot BK}{TR} = \frac{q(u-f)}{v},$$

$$2^{\circ}.\ TR : VR = KY : OY = \frac{VR \cdot KY}{TR} = \frac{w(t-c)}{v};$$

hincque fit:

$$IY = AX = BL + OY = \frac{q(u-f) + w(t-c)}{v}.$$

At $AX = -b + x$, ergo erit:

$$-b + x = \frac{q(u-f) + w(t-c)}{v},$$

unde sequitur fore:

$$x = b + \frac{q(u-f) + w(t-c)}{v}, \text{ (II.)}$$

quam aequationem, aeque ac I., tantum ingrediuntur quantitates a curva cognita pendentes.

Alia Solutio.

Etiamsi haec solutio sit multo longior priore, fortasse tamen nonnulla attentione digna aestimari potest, quia monstrat, applicatis ad hunc casum legibus motus compositi, easdem aequationes resultare ac praecedente solutione. Quare ausus sum et hanc solvendi methodum hic impertire.

Hunc in finem sit curva data primo ita disposita, ut tangatur a recta MN in puncto illius Y, curvam quaesitam generante. Hanc ejus positionem exhibeat Fig. 4. Determinetur illud punctum coordinatis DG et GY, atque simili modo ejusdem punctum E, coincidens cum puncto fixo B, coordinatis DF et EF, existente ut ante DH axe et D abscissarum initio. Incipiat nunc curva motum describatque punctum Y arcum curvae GY. Ad viam curvae investigandam decompono ejus motum in duos alios, quorum altero curva fertur motu parallelo rectae MN: perspicuum est, punctum Y hoc motu describere lineam rectam ipsi MN parallelam; altero motu autem moveatur curva aeque ac in problemate praecedente, quo casu etiam punctum Y generabit curvam ibidem inventam, quam in sequentibus vocabo curvam A. Itaque exhibeat $Y\nu$ elementum illius rectae priore motu ortae, $Y\mu$ vero elementum curvae A posteriore provolutione genitae: liquet, punctum Y, motu ex utroque composito, describere diagonalem $Y\omega$ parallelogrammi $Y\mu\omega\nu$, ope elementorum $Y\nu$ et $Y\mu$ completi. Demisso perpendiculo $\omega\xi$ erit $Y\xi$ elementum abscissae cur- Tab. III. Fig. 4. Tab. III. Fig. 5.

vae quaesitae, quod, ob ipsam abscissam $CX = x$, ponatur $= \partial x$; particula $\varrho\nu$ vero erit elementum abscissae $SX = x'$ curvae A, quod igitur sit $= \partial x'$; patet etiam, perpendiculum $\omega\varrho$ exhibere tam elementum applicatae curvae quaesitae respondentis abscissae x, quam applicatae respondentis abscissae x' in curva A. Posita illa applicata $= y$, hac vero $= y'$, erit igitur $\partial y = \partial y'$ et etiam $y = y'$, ut in priore solutione.

Ad valorem secundum pro $Y\nu = \partial x + \partial x'$ eruendum, contemplemur etiam motum puncti B, seu potius puncti curvae propositae, quod, hac puncti Y elevatione supra axem, incidit in punctum fixum B. Perspicuum est, si primo curva feratur motu parallelo rectae MN, hoc punctum idem elementum lineae rectae describere ac punctum Y; tum, si ea feratur altero motu, (tali scilicet quo oritur curva A) idem punctum quoque progignere elementum cujusdam curvae ipsi A similis: hoc autem elemento motus absoluto, terminus elementi arcus DB necessario incidit in punctum fixum B. — Itaque inquirendum est, ad quodnam punctum usque priore motu curva sit promovenda, sive, quod eodem redit, in quonam puncto rectae MN perpendiculum AB sit erigendum, ut, si curva tum feratur altero motu, terminus elementi arcus DB cadat in punctum B.

Sit nunc $B\beta$ elementum curvae datae, $A'B'$ positio perpendiculi AB respectu hujus curvae, quippe ita motae ut punctum B descripserit elementum $B'B$ aequale elemento $Y\nu$; exhibeant porro curvae $I'\beta$ et IB arcus curvarum curvae A similium descriptarumque punctis β et B, atque designet $B'\beta$ elementum prioris curvae, quo absoluto punctum β cadit in B'.

His stabilitis determinanda est lineola $B'B$. Hunc in finem ponantur $TV = q$, $DV = p$, $TR = v$, $VR = w$, $BZ = u$, $DZ = t$, $\beta Z' = u$, $DZ' = t'$, arc. $DT = \phi$, $BD = \psi$ et $\beta D = \psi'$.

Rectis autem $\beta\alpha$ et BA exhibitis simili modo ut in problemate praecedente applicata YX, erit:

$$BA = \frac{q(t-p) - w(u-q)}{v}$$
$$\text{et } \beta\alpha = \frac{q(t'-p) - w(u'-q)}{v}, \quad \text{(Probl. I.)}$$

hincque:

$$\beta\alpha - BA = \beta\gamma = \frac{q(t'-t) - w(u'-u)}{v} = \frac{q\partial t - w\partial u}{v};$$

unde fit:

$$\gamma B = \sqrt{B\beta^2 - \beta\gamma^2} = \sqrt{\partial\psi^2 - \frac{(q\partial t - w\partial u)^2}{v^2}} = \frac{q\,du + w\partial t}{v},$$

Ope solutionis probl. praec. autem invenitur:

$$I'\alpha = -[\phi - \psi' + \frac{q(u'-q) + w(t'-p)}{v}] \text{ et}$$
$$I'A' = -[\phi' - \psi + \frac{q'(u'-q') + w'(t'-p')}{v'}],$$

hincque:

$$\mathrm{I}'\alpha - \mathrm{I}'\mathrm{A}' = \mathrm{A}'\alpha = \mathrm{B}'\gamma = \partial\Phi + \text{dif. part.} \left[\frac{q(u'-q)+w(t'-p)}{v}\right],$$

hac posteriore expresssione ita differentiata, ut quantitates u' et t' tanquam constantes spectentur. Erit ergo:

$$\mathrm{B}'\mathrm{B} = \mathrm{B}'\gamma + \gamma\mathrm{B} = \partial\Phi + \partial\,.\,\text{part.}\left[\frac{q(u'-q)+w(t'-p)}{v}\right] + \frac{q\partial u + w\partial t}{v}.$$

Hocque valore comparato cum supra pro elemento $\mathrm{Y}\nu$ eruto, colligitur haec altera aequatio:

$$\partial x' + \partial x = \partial\Phi + \partial\,.\,\text{part.}\left[\frac{q(u'-q)+w(t'-p)}{v}\right] + \frac{q\partial u + w\partial t}{v}.$$

At, ob $\partial x' = \partial\Phi - \partial\,\frac{q(q-f)+w(p-c)}{v}$ (Probl. I.) erit:

$$\partial x = \partial\,.\,\text{part.}\left[\frac{q(u-f)+w(t-c)}{v}\right] + \frac{q\partial u + w\partial t}{v},$$

si, neglectis ∂u et ∂t respectu u et t, scribatur u loco u' et t loco t'. Cum autem sit:

$$\partial\,.\,\text{part.}\left[\frac{q(u-f)+w(t-c)}{v}\right] + \frac{q\partial u + w\partial t}{v} = \partial\,\frac{q(u-f)+w(t-c)}{v};$$

tum erit:

$$x = \text{Const.} + \frac{q(u-f)+w(t-c)}{v}.$$

Corollarium 1.

Facile perspicitur, constantem in hac solutione eandem esse, quam in priore. Nam pro $x = 0$ fit $q = f$, $p = c$, $u = h$, $t = g$, (sol. prior.); ergo, si ponatur eodem casu fore $v = m$ et $w = n$, erit:

$$-\,\mathrm{C} = \frac{f(h-f)+n(g-c)}{m},$$

qui revera est valor ipsius $-\,b$. Quare erit $\mathrm{C} = b$.

Corollarium 2.

Ad relationem inter applicatas q et u, sive abscissas p et t, determinandam demittatur in axem MN perpendiculum QZ, quod simul rectam BZ normaliter secat in puncto P. Ob triangula TVR, RZQ et BZP similia erit: Tab. III. Fig. 3.

$$1^{o}.\ QZ = \frac{TV \cdot RZ}{TR} = \frac{q(t-p+w)}{v} \text{ et}$$

$$2^{o}.\ PZ = \frac{VR \cdot BZ}{TR} = \frac{uw}{v}.$$

At $QZ - PZ = AB$, ergo:

$$a = \frac{q(t-p) - w(u-q)}{v}.$$

Cum autem q sit functio cognita ipsius p, u vero ipsius t, haec aequatio reduci poterit ad aliam inter duas variabiles u et q, sive p et t.

Eadem aequatio etiam praebet hanc:

$$a = \frac{f(g-c) - n(h-f)}{m} \text{ (coroll. 1.).}$$

Corollarium 3.

Ob $v = \frac{q\partial\Phi}{\partial q}$ et $w = \frac{q\partial p}{\partial q}$ erit quoque: $y = \frac{(q-f)\partial p - (p-c)\partial q}{\partial\Phi}$, $x = b + \frac{(u-f)\partial q + (t-c)\partial p}{\partial\Phi}$, et $a = \frac{(t-p)\partial q - (u-q)\partial p}{\partial\Phi}$, hincque porro sequitur fore:

$$y = a + \frac{(u-f)\partial p - (t-c)\partial q}{\partial\Phi},$$

unde etiam fit:

$$(x-b)^2 + (y-a)^2 = (u-f)^2 + (t-c)^2,$$

quae aequatio quoque ex solo intuitu figurae facillime invenitur.

Corollarium 4.

Aequationes modo inventae evadunt simplicissimae, si ponatur punctum B situm esse in ipsa recta MN assumaturque pro puncto Y vertex curvae datae, aequatione inter ejus coordinatas ita comparata, ut pro abscissa evanescente simul evanescat applicata. Adipiscimur enim sequentes aequationes:

$$y = \frac{q\,\partial p - p\,\partial q}{\partial \Phi}, \text{ et}$$

$$x = \frac{q\,\partial q + p\,\partial p}{\partial \Phi},$$

ob $u = q$, $t = p$, et a, b, c, $f = 0$.

Scholion.

Liquet hoc casu eandem prodire curvam ac si, ductis Tab. III. Fig. 6. tangentibus TY, T′Y′, T″Y″, etc. ad singula puncta curvae datae AYY′ demissisque in illas perpendiculis AV, AV′, AV″, etc. assumantur partes tangentium VY, V′Y′, V″Y″, etc. pro abscissis curvae cujusdam, quibus respondeant applicatae illis perpendiculis aequales. Curva ita descripta eadem nempe erit, quae oritur motu curvae illius datae in coroll. praec. considerato.

Corollarium 5.

Cum sit (coroll. 3.):

$$\partial y = \frac{(\partial u\,.\,\partial p - \partial t\,.\,\partial q)\,\partial q + ((u-f)\,\partial q + (t-c)\,\partial p)\,\partial^2 p}{\partial q\,.\,\partial \Phi}$$

$$= \frac{(\partial u\,.\,\partial q + (t-c)\,\partial^2 p)\,\partial p - (\partial t\,.\,\partial q - (u-f)\,\partial^2 p)\,\partial q}{\partial q\,.\,\partial \Phi},$$

$$\partial x = \frac{(\partial u \cdot \partial q + \partial t \cdot \partial p)\partial q - ((u-f)\partial p - (t-c)\partial q)\partial^2 p}{\partial q \cdot \partial \Phi}$$
$$= \frac{(\partial u \cdot \partial q + (t-c)\partial p)\partial q + (\partial t \cdot \partial q - (u-f)\partial^2 p)\partial p}{\partial q \cdot \partial \Phi};$$

erit:

$$\partial y^2 + \partial x^2 = \frac{(\partial u \cdot \partial q + (t-c)\partial^2 p)^2 + (\partial t \cdot \partial q - (u-f)\partial^2 p)^2}{\partial q^2},$$

hincque elementum arcus curvae inventae:

$$\partial s = \sqrt{(\partial u + (t-c)\frac{\partial^2 p}{\partial q})^2 + (\partial t - (u-f)\frac{\partial^2 p}{\partial q})^2}.$$

Problema III.

Moveatur super recta AC *data curva quaecunque* TDY *ita, ut semper tangatur ab illa simulque ab alia recta* AB *angulum datum* BAC *cum illa* AC *constituente: invenire curvam, quam tali motu describit punctum quoddam* Y *in data curva ubicunque assumtum.* Tab. III. Fig. 7.

Solutio.

Demittantur perpendicula YG, YX, MZ et TV, existentibus M et T punctis, in quibus curva data hac positione tangitur ob utroque crurum anguli BAC. Producantur rectae AM et RZ ad earum intersectionem usque in N, agaturque denique perpendiculum RO. — Ponantur: XY $= y$, EX $= x$, AE $= - b$, (ubi E denotat punctum, in quod, motu inchoante, cadebat illud Y) GY $= -f$,

$DG = c$, $TV = q$, $DV = p$, $VR = w$, $TR = v$, arcus $DT = \Phi$, $MZ = u$, $DZ = t$, $MN = m$, $NZ = n$, arcus $DM = \psi$ sinusque anguli $BAC = \beta$.

Cadit in oculos, expressionem pro applicata y curvae quaesitae hic iterum eandem fore ut in Probl. I, nempe:

$$y = \frac{w(q-f) - q(p-c)}{v}.$$

Itaque tantum superest abscissam x definire, hocque efficitur in sequentibus:

Ob $RZ = t - p + w$ erit $NR = n - t + p - w$, hincque

$$OR = \frac{MZ \cdot NR}{MN} = \frac{u(n-t+p-w)}{m},$$

unde fit:

$$AR = \frac{OR}{\sin.(180^\circ - \angle BAC)} = \frac{OR}{\sin. BAC} = \frac{u(n-t+p-w)}{\beta m}.$$

$$\text{At } TX = \frac{q(q-f) + w(p-c)}{v} \quad \text{(sol. Pr. I.)},$$

ergo:

$$RX = TX - TR = \frac{q(q-f) + w(p-c)}{v} - v$$
$$= \frac{w(p-c-w) - fq}{v} \quad (\text{ob } v^2 - q^2 = w^2),$$

hincque:

$$AX = x - b = \frac{u(n-t+p-w)}{\beta m} + \frac{w(p-c-w) - fq}{v},$$

unde denique sequitur fore:

$$x = b + \frac{u(n-t+p-w)}{\beta m} + \frac{w(p-c-w) - fq}{v}.$$

Corollarium 1.

Cum sit $180^\circ - \angle BAC = \angle TRV - \angle MNZ$, erit: $\sin. \angle BAC = \beta = \sin. TRV. \cos. MNZ - \cos. TRV. \sin.$

$MNZ = \frac{q}{v} \cdot \frac{n}{m} - \frac{w}{v} \cdot \frac{u}{m} = \frac{qn - uw}{vm}$; haecque aequatio inservit relationi inter variabiles q et u sive p et t determinandae.

Corollarium 2.

Aequationes inventae pro coordinatis x et y una cum aequatione eruta in coroll. praec., ob:

$$v = \frac{q\partial\Phi}{\partial q},\ w = \frac{q\partial p}{\partial q},\ m = \frac{u\partial\psi}{\partial u} \text{ et } n = \frac{u\partial t}{\partial u},$$

induunt has formas:

$$y = \frac{(q-f)\partial p - (p-c)\partial q}{\partial\Phi},$$

$$x = b + \frac{(u\partial t - t\partial u)\partial q + (q\partial p - p\partial q)\partial u}{\beta\partial q . \partial\psi}$$

$$- \frac{(q\partial p - p\partial q)\partial p + (c\partial p + f\partial q)\partial q}{\partial q . \partial\Phi} \text{ et}$$

$$\beta = \frac{\partial t . \partial q - \partial u . \partial p}{\partial\Phi . \partial\psi}.$$

Corollarium 3.

Ponatur $\beta = \frac{1}{k}$, erit: $\partial\Phi . \partial\psi = k(\partial t . \partial q - \partial u . \partial p)$, sive:

$$(\partial p^2 + \partial q^2)(\partial t^2 + \partial u^2) = k^2(\partial t . \partial q - \partial u . \partial p)^2,$$

hincque colligitur:

$$\partial p^2 . \partial t^2 + 2\partial p . \partial t . \partial q . \partial u + \partial q^2 . \partial u^2$$

$$= (k^2 - 1)(\partial t^2 . \partial q^2 - 2\partial t . \partial q . \partial u . \partial p + \partial u^2 . \partial p^2)$$

unde, radicibus extractis, erit:

$$\partial p . \partial t + \partial q . \partial u = (\partial t . \partial q - \partial u . \partial p)\sqrt{kk - 1},$$

quae praebet has:

$$\partial u = \frac{\partial t(\partial q\sqrt{kk-1} - \partial p)}{\partial q + \partial p\sqrt{kk-1}}, \text{ et}$$

$$\partial\psi = \frac{k\ \partial t . \partial\Phi}{\partial q + \partial p\sqrt{kk-1}}.$$

His vero valoribus substitutis in aequatione pro x postremo inventa, nanciscimur hanc:

$$x = b + \frac{(u - f)\partial q + (t - c)\partial p + [(u - q)\partial p - (t - p)\partial q]\sqrt{kk - 1}}{\partial \Phi}.$$

Corollarium 4.

Sit angulus BAC rectus, erit $k = 1$, hincque:

$$x = b + \frac{(u - f)\partial q + (t - c)\partial p}{\partial \Phi},$$

existente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial q} \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial q}.$$

Quamobrem etiam erit:

$$x = b + \frac{(u - f)\partial t - (t - c)\partial u}{\partial \psi}.$$

RÉFLEXIONS
SUR LA THÉORIE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 15 Juin 1814.

§. 1. Malgré le nombre des plus importantes decouvertes, dont les différentes parties des Mathématiques sont redevables au calcul infinitésimal, on ne saurait disconvenir que c'est précisément cette belle partie de l'analyse qui, à la manière dont elle est traitée ordinairement, manque plus que toute autre, des qualités les plus essentielles aux sciences mathématiques, de l'évidence et de la solidité. La méthode ordinaire consiste à traiter les différentielles ∂x, ∂y, comme des quantités infiniment petites, c'est à dire, comme de vrais zéros, et à chercher en même tems le rapport de ces zéros, à résoudre même des problèmes de la plus haute importance, par ex. celui des *Maxima*, par la supposition que l'une de ces différentielles devient effectivement égale à zéro, tandis que l'autre ne l'est pas, etc. C'est avec raison, que la notion bizarre de quantités infiniment petites qui, malgré celà, sont traitées comme des quantités réelles, a attiré à la science la plus exacte une foule d'objections. On cherche en vain de l'évidence, ou même du bon sens, dans des notions comme celles de quantités infiniment petites ou infiniment grandes du second degré, du troisième, d'un demi-degré, ou dans des propositions comme celles-ci, qu'un zéro est plus grand, et même infiniment plus grand qu'un autre zéro ; qu'une quantite infiniment grande est infiniment surpassée par une autre, etc. Que dirait-on enfin de ces quantités batardes qui, selon quelques géomètres, forment une espèce de transition du fini à l'infini, les $\infty^{\frac{1}{2}}$, comme l'ordonnée d'une parabole dont l'abscisse est infiniment grande? Le philosophe ne peut être satisfait d'un calcul qui ne donne qu'un à peu près, ou qui n'est donné pour exact, que dans le cas où les quantités qui entrent dans ce calcul, deviennent rigoureusement égales à zéro, et par conséquent ne peuvent plus être un objet du calcul.

§. 2. Pour éviter cette pierre d'achoppement, on a introduit les limites des rapports, à la place des infiniment petits. Mais il est facile de voir que l'idée de l'infiniment petit, quoique plus cachée, n'en est pas moins le principe de cette méthode. En effet, elle consiste à prendre l'*asymptote* pour la courbe même, puisqu'on convient que $\frac{\partial y}{\partial x}$ est le rapport duquel les différences de x et de y approchent de plus en plus, mais qu'elles n'atteignent effectivement, qu'au moment où elles sont rigoureusement $= 0$. Il faut donc avouer que cette méthode des limites, quoiqu'elle donne plus de solidité au calcul différentiel sous un point de vue purement mathématique, ne le justifie pas aux yeux du logicien ou du métaphysicien.

§. 3. La méthode dont *Newton* s'est servi pour exposer son calcul de *fluxions*, développée et perfectionnée par *Maclaurin*, est assés généralement regardée comme plus exacte et solide, pour ce qui regarde la métaphysique de ce calcul. Mais ceux qui se sont familiarisé le calcul des fluxions, n'ignorent pas que l'idée de l'infiniment petit y entre également, de manière que *Newton* lui-même dénota les fluxions par o, ou leur donna le zéro pour facteur. Au reste, on ne peut disconvenir que c'est une faute contre la méthode, de dériver d'une branche des mathématiques mixtes (la mécanique), les principes de la partie la plus universelle des mathématiques pures (l'analyse).

§. 4. *La Grange* à qui tous ces inconvéniens ne pouvaient échapper, jugeant que ces êtres énigmatiques devaient être tout à fait expulsés de la mathématique, soit qu'on leur donne le nom de différentielles, de fluxions, ou d'asymptotes des rapports, à démontré, dans un ouvrage qui est entre les mains de tous les géomètres, par la seule transformation et dérivation des fonctions, toutes les règles du calcul différentiel et intégral, sans avoir recours à l'infiniment petit. Cette méthode est aussi ingénieuse et rigoureuse qu'on pouvait l'attendre d'un pareil génie, et j'avoue qu'elle m'a fourni l'idée que je vais développer dans ce mémoire. Mais d'un autre coté, il faut convenir que cette méthode est nécessairement beaucoup plus longue et moins simple que le calcul différentiel vulgaire, et que les géomètres sont obligés de se familiariser avec un nouvel algorithme, sans pouvoir se passer de l'ancien, auquel on doit les plus beaux ouvrages et les plus grandes découvertes.

§. 5. Je n'ai donné qu'une esquisse des objections que l'on peut faire contre les méthodes connues, parceque les lecteurs sur lesquels je puis compter, y suppléeront aisément. Elles m'ont fait croire qu'il ne serait pas inutile d'envisager cet objet important d'une nouvelle manière, et d'employer un autre principe, pour démontrer rigoureusement toutes les règles du calcul différentiel vulgaire, et sa liaison avec le calcul intégral, sans avoir recours aux infiniment petits; et ce n'est pas sans une certaine timidité, que j'ose présenter à l'Académie cette méthode que je ne regarde que comme un premier essai. Mais ce qui m'a encouragé, c'est la persuasion qu'une plume plus habile que la mienne, pourra lui donner un degré de perfection qui la rendra peut-être importante pour la métaphysique de ce calcul.

§. 6. Le calcul différentiel peut être envisagé sous plusieurs points de vue, très-différens l'un de l'autre, dont chacun, dépendant du but qu'on se propose dans ce calcul, exige un raisonnement tout à fait différent, pour le justifier. Il est donc necessaire, pour qui veut avoir une idée nette de la métaphysique de ce calcul, de séparer soigneusement les divers usages qui s'en font dans les mathématiques.

Dans les cas où il ne s'agit que de trouver la variation, à laquelle une fonction quelconque est sujette, lorsque la variable dont elle est fonction, subit un très-petit changement, l'emploi du calcul différentiel est évidemment permis, parceque le seul but qu'on se propose, n'est qu'une approximation. Un problème très-commun dans l'astronomie pratique, est, de chercher l'influence qu'une petite erreur d'observation peut avoir sur le résultat de cette observation, ce qui se fait ordinairement par les formules différentielles des triangles sphériques. Dans de pareils cas, on n'a pas besoin de démontrer l'exactitude de la mèthode, parcequ'aucun astronome ne s'avise de la donner pour exacte. La méthode est absolument la même que celle dont on se sert ordinairement, pour trouver les racines d'un nombre ou d'une équation par des approximations successives: on néglige les puissances supérieures d'une quantité très-petite, ce qui est sans doute permis, lorsqu'il ne s'agit que d'une approximation.

§. 7. La question, s'il est permis de différentier une fonction y de x, en ne tenant compte que des premières puissances des différences et s'il on peut être sûr de retrouver, par les règles vulgaires de l'intégration, la fonction y, dont on a tiré par la différentiation $\frac{\partial y}{\partial x} = P$, n'est pas plus difficile à résoudre. L'intégration est une opération opposée à celle de la différentiation: dans l'une et l'autre on suit les mêmes règles dans l'ordre interverti. Quelque fautif que soit le procédé qu'on s'est permis dans la différentiation, on trouvera toujours la véritable valeur de la fonction y par l'intégration, pourvû qu'on y commette les mêmes fautes que dans celle-là, ou bien, pourvû qu'on connaisse ces fautes, et qu'on en tienne compte; comme, en multipliant le quotient par le diviseur, on trouvera la vraie valeur du dividende, en faisant les fautes opposées à celles qu'on avait faites en divisant, par ex. en ajoutant le residu qu'on avait négligé dans la division. Si je suppose $\partial . x^n = n x^{n-1} \partial x$, ou $\partial . l x = \frac{\partial x}{x}$, et qu'un autre, en integrant les formules $n x^{n-1} \partial x$ ou $\frac{\partial x}{x}$, fasse les mêmes suppositions, il n'y a pas de doute qui'il ne trouvera $y = x^n$ ou $y = l x$, quand-même ces suppositions seraient fausses. Mais ce cas n'a lieu que là où l'on forme la différentielle d'une fonction analytique exprès, pour la réstituer par l'intégration; et il est clair qu'un pareil cas ne saurait être d'aucune utilité, si ce n'est de proposer une énigme, ou de s'exercer dans le calcul.

§. 8. Mais il y a d'autres cas où il ne s'agit pas simplement, de trouver la différentielle d'une fonction analytique; mais au contraire, où, supposant les expressions analytiques des différentielles, ou de leurs rapports, comme données, on les emploie pour résoudre des problèmes généraux. Dans un pareil cas, les expressions analytiques des différentielles ne sont actuellement développés, que lorsqu'il s'agit d'appliquer la solution générale à un cas particulier, ou à une courbe, une fonction donnée. Un problème étant donné, par rapport aux quantités x, y, etc. la première démarche de l'analyse est, d'exprimer les conditions du problème par une équation; mais il y a des cas, où il est impossible ou extrèmement difficile, de trouver une équation entre les quantités x, y, elles-mêmes, tandis que les conditions du problème donnent sans difficulté une équation entre leurs différentielles: et c'est le cas dont nous parlons ici, qui renferme toutes les découvertes des modernes; lesquelles étaient inaccessibles aux anciens. Ces problèmes peuvent être réduits sous deux classes, dont la première renferme ceux qui sont déja complètement résolus par l'équation différentielle même: l'application de cette solution à une fonction ou courbe quelconque, consiste à exprimer les différentielles $\partial x, \partial y$, ou plûtòt leurs rapports, par les quantités x, y; ce qui se fait, en différentiant la fonction donnée y de x d'après les règles vulgaires. Dans les problèmes de la seconde classe, il ne suffit pas d'avoir trouvé l'équation différentielle, il faut encore l'integrer, pour résoudre le problème. Mais, comme l'intégration se fait suivant les mêmes règles que la différentiation, on voit qu'ici tout se réduit à démontrer que, dans le premier cas, la quantité cherchée, et que, dans le second cas, son rapport différentiel, est en effet et rigoureusement exprimé par la différentiation vulgaire. Un exemple de la première classe est l'expression analytique de la sous-tangente sur l'axe des $x = \frac{y \partial x}{\partial y}$; un exemple de la seconde classe est la rectification des courbes par la formule $\int \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, où il ne s'agit pas des règles qu'il faut observer, pour différentier une fonction, mais tout se réduit à démontrer que l'ordonnée, divisée par le rapport différentiel $\frac{\partial y}{\partial x}$ trouvé par ces règles connues, est rigoureusement égale à la sous-tangente, etc. ou plutôt, que le principe duquel on dérive, par des considérations géométriques, la valeur de la sous-tangente $= \frac{y \partial x}{\partial y}$, est le même sur lequel se fondent les théorèmes, $\frac{\partial . x^n}{\partial x} = n x^{n-1}$, etc. parceque, si ces principes étaient différens, il ne serait pas permis, d'appliquer l'expression générale de la sous-tangente $\frac{y \partial x}{\partial y}$ à une courbe quelconque, par ex. à la parabole, pour en trouver la sous-tangente $= 2x$.

C'est donc dans les problèmes de cette nature, qu'il est proprement question de la métaphysique de ce calcul; tout le reste ne regarde que l'opération mécanique du calcul.

§. 9. Le principe sur lequel je vais fonder la métaphysique du calcul différentiel, parait simple et évident:

le voici. Lorsqu'une variable x est augmentée ou diminuée d'une quantité quelconque que je nommerai Δx, il est clair qu'en général chaque quantité dépendante de x, chaque fonction de x, que je nommerai y, subit en même tems une augmentation ou diminution Δy, laquelle peut être plus ou moins grande que Δx, et avoir tous les rapports possibles à Δx, d'aprés la manière dont y dépend de x (la nature de la fonction) : mais il est évident que, dans tous les cas, la grandeur de la variation de y dépendra aussi de la quantité dont x a changé : Δy croîtra, diminuera, et s'évanouira avec Δx. Il s'en suit que le rapport qui a lieu entre ces deux variations, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dépend de deux choses, savoir, de la liaison qui existe entre les quantités x, y, ou de la nature de la fonction y, et du changement même que x a subi, ou de la grandeur absolue de Δx. Il n'est pas moins évident que ce n'est que le premier de ces deux objets, savoir, la partie du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, laquelle dépend de la nature de la fonction, qui puisse servir vice versa, à déterminer cette fonction. Or, comme ceci est précisément le but du calcul infinitésimal, il suit que, dans ce calcul, il ne faut tenir compte que de cette partie du rapport différentiel, qui est indépendante de la grandeur de Δx.

Quoique la proposition précédente paraisse évidente par elle-même, il ne sera pas inutile, comme elle est la base de notre théorie, de la rendre aussi claire que possible. En voici la démonstration en deux mots. Si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne dépendait que de la nature de la fonction, toutes les fonctions seraient du premier degré, elles n'exprimeraient que des lignes droites, et il n'y aurait pas de courbes; si, au contraire, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne dépendait que de la grandeur de Δx, toutes les fonctions ou courbes se ressembleraient, et il n'existerait qu'une seule courbe: donc, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dépend de l'une et de l'autre.

§. 10. Si l'on regarde toute équation à deux variables, x, y, comme exprimant la nature d'une courbe, ce qui est toujours permis, la vérité de cette proposition est évidente. En dérivant de l'équation proposée (A) entre x et y, l'équation (B) qui exprime la rélation de leurs différences Δx, Δy, on ne fait effectivement autre chose, qu'introduire deux nouvelles coordonnées Δx, Δy, dont les axes sont parallèles à ceux des x et y: en effèt, l'équation de la courbe (A) étant donnée entre $x = AP$ et $PM = y$, on trouve l'équation (B), en introduisant les nouvelles coordonnées $MQ = \Delta x$, $QS = \Delta y$, l'axe des nouvelles abscisses étant MN, et leur origine le point donné M. Or, on sait que par cette transformation des coordonnées, le degré ou la nature de l'équation n'est point changée. Si donc dans l'équation (B) le rapport Tab. IV. Fig. 1.

des coordonnées $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne dépendait point de Δx, ou Δy, le rapport des coordonnes $\frac{y}{x}$ dans l'équation (A) serait également indépendant des variables x, y, et par conséquent constant, ce qui donne la ligne droite. Si, au contraire. le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dépendait uniquement de la grandeur de Δx ou Δy, et non de x ou y lesquelles, dans un point donné M, doivent être regardées comme constantes. le rapport $\frac{y}{x}$ de l'équation (A) serait également indépendant des constantes, c'est à dire des coëfficiens, de sorte que toutes les fonctions ou toutes les équations (A) seraient les mêmes.

Il ne sera pas superflu, de donner à cet objet plus de clarté par des considérations purement analytiques. Pour cet effêt, nous supposerons que la fonction y peut être regardée comme étant développée suivant les puissances de x, ou comme ayant la forme $y = fx$, ce qui est toujours permis moyennant l'inversion des séries.

§. 11. Soit donc $y = b + Qx$, Q étant une fonction quelconque de x; soit de plus $\Delta y = P\Delta x$, P étant une fonction de x, mais non de Δx, de sorte que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P$ est indépendant de Δx; donnons ensuite à la variable x une autre valeur x', moyennant laquelle y devient $= y'$, de sorte que $y' = b + Q'x'$, Q' étant la même fonction de x', que Q l'était de x: ce qui nous donne $y' - y = Q'x' - Qx$. Or,

$\Delta y = y' - y$, $\Delta x = x' - x$, et $\Delta y = P \Delta x$, par conséquent

$$Q' x' - Q x = P(x' - x), \text{ et } \frac{Q' x' - Q x}{x' - x} = P,$$

équation qui a lieu dans tous les points de la courbe. Supposant donc $x = 0$, on a $\frac{Q' x'}{x'}$ ou $Q' = P$. Puisque donc P, ne dépend pas de x', mais seulement de x, il faut aussi que Q' soit indépendant de x'. Or, Q étant la même fonction de x, que Q' de x', il s'en suit que Q est indépendant de x, c'est à dire, une quantité constante. par conséquent, l'équation $y = b + Q x$ est du premier degré, et la ligne définie par les coordonnées x, y, est une droite. Donc, dans toutes les fonctions ou lignes courbes en général (à l'exception de celles du premier degré ou des lignes droites), le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dépend de la grandeur de Δx. C'est ce qu'on voit encore plus clairement par la considération des courbes. Soit $AP = x$, $PM = y$, et qu'on tire MN parallèle à l'axe des abscisses, puis SQ, TR, perpendiculaires à MN. Maintenant, si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ était indépendant de Δx, il serait, pour chaque valeur déterminée de x, ou dans chaque point M de la courbe, un rapport constant, de sorte qu'on aurait Tab. IV. Fig. 1.

$$\Delta x : \Delta y = MQ : QS = MR : RT, \text{ etc.}$$

donc, toute la partie de la courbe MST serait une ligne droite, et faisant $x = 0$, la ligne entière ALMST serait droite.

§. 12. Avant d'aller plus loin, nous ferons une observation qui suit immédiatement de ce que nous venons de voir, et qui sera importante dans la suite: c'est que, si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, comme nous l'avons prouvé, ne dépend pas seulement de la nature de la fonction, mais aussi de la grandeur des différences, et qu'on n'employe dans le calcul que la première partie qui, par la supposition, est indépendante de Δx, on regarde en effèt la courbe au delà de M, comme une ligne droite, et on la peut traiter comme telle, tant qu'on n'emploie que cette partie du rapport complet $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

§. 13. D'un autre coté, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne peut pas dépendre uniquement de la grandeur absolue de Δx, parcequ'alors, les Δx étant supposées égales, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ serait le même dans toutes les courbes, ou dans toutes les fonctions, de quelle nature qu'elles soient. Qu'il soit donné deux différentes fonctions de x,

$$y = b + Qx, \text{ et } z = c + Rx,$$

Q et R étant des fonctions quelconques de x; qu'on augmente x de Δx, dans l'une et l'autre des fonctions y, z: alors, on aurait $\Delta z = \Delta y$, si le rapport des différences ne dépendait que de la grandeur de Δx. Or, on a

$$\Delta y = Q . \Delta x + x . \Delta Q + \Delta x . \Delta Q,$$

$$\Delta z = R . \Delta x + x : \Delta R + \Delta x . \Delta R, \text{ donc}$$

$$(Q + \Delta Q - R - \Delta R)\,\Delta x + (\Delta Q - \Delta R)\,x = 0.$$

Puisque donc x et Δx sont indépendantes l'une de l'autre, on peut égaler séparement les deux coëfficiens à zéro, ce qui donne

$$Q + \Delta Q - R - \Delta R = 0, \text{ et } \Delta Q - \Delta R = 0,$$

par conséquent $Q = R$: d'où il suivrait que y et z seraient les mêmes fonctions de x.

On trouve le même résultat par la considération des courbes. Si deux courbes passent par un point M (*Fig.* 1.), il faudrait qu'aux mêmes Δx, c'est à dire, MQ, MR, etc. répondissent dans les deux courbes les mêmes Δy, QS, RT, ce qui veut dire que toutes les courbes, passant par le même point M, auraient aussi tous les points suivans S, T, de commun, de sorte qu'elles coïncidéraient, et qu'il n'y aurait qu'une seule courbe.

§. 14. Il est donc démontré qu'en général, quelle que soit la fonction y de x, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est composé de deux parties, dont l'une dépend de la grandeur de Δx, tandis que l'autre en est tout à fait indépendante. Cette dernière partie a, dans chaque point de la courbe, où x est donnée, une valeur déterminée qui ne dépend que de la nature de la fonction; elle peut donc servir réciproquement à déterminer cette fonction, aussi bien que l'équation fondamentale entre x et y: et c'est précisément en cela que consiste toute la théorie du calcul différentiel et intégral. L'autre partie de ce rapport, dépendant de la grandeur tout à fait arbitraire des différences, n'a qu'une valeur vague et indéterminée, qui ne peut aucunement servir à définir la nature de la fonction. Mais pour baser sur cela la théorie du calcul infinitésimal, comme nous allons le faire, il faut supposer qu'il est dans notre pouvoir, de présenter sous une forme isolée la première partie du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, laquelle, dans un point donné de la courbe, reste la même, quelque valeur qu'on donne aux différences Δx, Δy, et de la séparer entièrement de l'autre partie qui n'a qu'un sens vague, et qui ne peut déterminer la nature de la fonction. En d'autres mots, il faut prouver que ces deux parties ne sont pas liées ensemble par la multiplication ou une autre opération plus compliquée, mais par la simple addition; de sorte que dans tous les cas on puisse former l'équation

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + Q \Delta x + R \Delta x^2 + \text{etc.}$$

P, Q, R, étant des fonctions de x.

§. 15. Soit $y = fx$, f désignant une fonction quelconque: on aura $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, c'est à dire, une fonction de $(x + \Delta x)$ qui devient égale à $y = fx$, lorsque $\Delta x = 0$. Il faut donc que $y + \Delta y$ soit de cette forme $fx + X\Delta x$, X étant fonction de x et Δx; ce qui donne $\frac{\Delta y}{\Delta x} = X$, où il faut prouver que X ne peut avoir que cette forme $X = P + Q.\Delta x + R.\Delta x^2 +$ cet. ou bien $\Delta y = P.\Delta x + Q.\Delta x^2 +$ cet. Or, comme il est toujours possible de donner à Δy cette forme, par l'inversion des séries, tout se réduit à prouver, 1) que X ne peut contenir aucune puissance fractionnaire de Δx, et 2) que les coëfficiens P, Q, etc. ne sont dans aucune fonction égaux à zéro, à l'exception de cas particuliers. La première proposition a été démontrée par *La Grange* dans sa *Théorie des Fonctions analytiques* pag. 7. 8. il ne reste donc qu'à prouver la seconde.

§. 16. Soit donc l'équation proposée qui exprime la nature de la fonction ou de la courbe, celle-ci :

$$(A)\ 0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \text{cet.}$$

d'où l'on tire l'équation aux différences, en substituant $x + \Delta x$ pour x, et $y + \Delta y$ pour y, et en otant l'équation primitive (A). Or, il est clair par le théorème binomial, que chaque terme de l'équation (A) donne, pour coëfficient de la première puissance de Δx ou Δy, une fonction de x, y, moins élevée d'un degré que ce terme; pour coëfficient de la seconde puissance des différences, une fonction moins élevée de deux degrés, etc. comme par ex. le terme $x^r y^s$ donne

$$r \,.\, x^{r-1} y^s \,.\, \Delta x + s \,.\, x^r y^{s-1} \,.\, \Delta y + \frac{r(r-1)}{2} \,.\, x^{r-2} y^s \,.\, \Delta x^2$$
$$+ rs \,.\, x^{r-1} y^{s-1} \,.\, \Delta x \,\Delta y + \frac{s(s-1)}{2} \,.\, x^r y^{s-2} \,.\, \Delta y^2 + \text{cet.}$$

où les coëfficiens de Δx et de Δy sont des fonctions de x, y, du $(r+s-1)$ degré, ceux de Δx^2, $\Delta x \Delta y$, et Δy^2, des fonctions du $(r+s-2)$ degré, etc. Si donc l'équation (A) est du degré n, son terme le plus élevé donnera pour coëfficient de Δx ou de Δy, une fonction du degré $(n-1)$, le terme suivant une fonction du degré $(n-2)$, etc. et le premier terme $\beta x + \gamma y$ donnera une quantité constante, savoir β ou γ. Ainsi, la somme de tous ces termes donnera le coëfficient entier de Δx ou Δy, lequel, par conséquent, sera une série suivant les puissances de x, y, depuis 0 jusqu'à $n-1$.

L'équation aux différences, tirée de (A), sera donc de cette forme :

$$(B)\; 0 = p \,.\, \Delta x + q \,.\, \Delta y + r \,.\, \Delta x^2 + s \,.\, \Delta x \Delta y + t \,.\, \Delta y^2 + \text{cet.}$$

p, q, étant des fonctions de x, y, du degré $(n-1)$, r, s, t, du degré $(n-2)$, etc.

Maintenant, supposons

$$(C)\; \Delta y = P \,.\, \Delta x + Q \,.\, \Delta x^2 + R \,.\, \Delta x^3 + \text{cet.}$$

ce qui étant substitué en (B), donne :

$$(D)\, o = (p+qP)\Delta x + (r+qQ+sP+tP^2)\Delta x^2 + \text{cet.}$$

où, Δx étant une quantité arbitraire, ou une variable qui ne dépend ni de x, y, ni des fonctions p, q, r, etc. il faut que le coëfficient de chacune de ses puissances soit égal à zéro ; ce qui donne :

$$o = p + qP, \quad o = r + qQ + sP + tP^2, \text{ etc.}$$

Si donc P était $= o$, la première équation donnerait $p = o$, ce qui fournirait une équation du degré $(n - 1)$, outre l'équation primitive (A) du degré n. Si Q était égal à zéro, on aurait, en vertu des deux équations,

$$o = r + sP + tP^2 = r - \frac{sp}{q} + \frac{tp^2}{q^2},$$

ce qui donnerait une équation du degré $(n - 2)$. Dans l'un et dans l'autre cas, on aurait deux équations au lieu d'une, à l'aide desquelles on pourrait éliminer y, ce qui donnerait une équation qui ne renfermerait que x, et qui, par conséquent, déterminerait un certain point ou un nombre fini de points dans la courbe, ou enfin une certaine valeur de x. Il est donc clair que dans aucune fonction ou courbe, P ni Q, ni aucun des coëfficiens suivans de l'équation (C), ne peut être égal à zéro, généralement parlant, et que celà ne peut arriver que dans un certain point ou pour une certaine valeur de x, où par ex. y est un *maximum*, ce qui donne, comme on sait, $P = o$.

22 *

On a donc généralement $\Delta y = P . \Delta x + Q . \Delta x^2 +$ cet. et $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + Q . \Delta x + R . \Delta x^2 +$ cet. dont le premier terme P est indépendant de la grandeur arbitraire des différences, tandis que tous les autres termes $Q . \Delta x +$ cet. en dépendent.

§. 17. Il ne sera pas superflu d'éclaircir celà par les sections coniques dont l'équation est

(A) $o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon x y + \zeta y^2$, ce qui donne

$$\text{(B) } o = (\beta + 2\delta x + \varepsilon y)\Delta x + (\gamma + \varepsilon x + 2\zeta y)\Delta y + \delta . \Delta x^2 + \varepsilon . \Delta x \Delta y + \zeta . \Delta y^2.$$

Supposant donc $P = o$ ou $p = o$, on a $o = \beta + 2\delta x + \varepsilon y$, équation de la ligne droite. Ainsi, la courbe n'est pas une section conique, mais composée de deux lignes droites: car dans ce dernier cas on a effectivement $p = o$ et $q = o$. En effèt, supposons deux lignes droites dont les équations sont $o = a + bx + cy = r$, et $o = f + gx + hy = s$, lesquelles, étant multipliées l'une par l'autre, donnent l'équation du second degré

(A) $o = af + (bf + ag)x + (cf + ah)y + bgx^2 + (bh + cg)xy + chy^2$, d'où l'on tire l'équation aux différences

$$\text{(B) } o = (bf + ag + 2bgx + (bh + cg)y)\Delta x + (cf + ah + (bh + cg)x + 2chy)\Delta y + bg . \Delta x^2 + (bh + cg)\Delta x \Delta y + ch . \Delta y^2 = p\Delta x + q\Delta y + \text{cet.}$$

Or, on a $p = bs + gr$ et $q = cs + hr$, donc $p = 0$ et $q = 0$, parceque $r = 0$ et $s = 0$. L'équation (B) devient donc

$$0 = bg \,.\, \Delta x^2 + (bh + cg)\, \Delta x\, \Delta y + ch \,.\, \Delta y^2$$
$$= (b \,.\, \Delta x + c \,.\, \Delta y)(g \,.\, \Delta x + h \,.\, \Delta y),$$

ce qui n'est en effet autre chose que le produit des équations qui expriment la rélation qui existe entre les différences des deux fonctions r, s, lesquelles donnent

$$0 = b \,.\, \Delta x + c \,.\, \Delta y \quad \text{et} \quad 0 = g \,.\, \Delta x + h \,.\, \Delta y.$$

§. 18. Au reste, il est aisé de voir que, si l'équation primitive ne contient aucune puissance de y, supérieure à la première, ni aucun terme où y est multiplié par x, de sorte que y est une fonction *uniforme* de x, la série $\Delta y = P \,.\, \Delta x + Q \,.\, \Delta x^2 +$ cet. sera interrompue dans le terme Δx^n, n étant la plus haute puissance de x, qui se trouve dans l'équation primitive. Ainsi, cette série contiendra au moins un nombre de termes, égal au degré de l'équation primitive, de manière que, si c'est l'équation de la ligne droite, on aura $0 = Q = R$, etc. et $\Delta y = P \,.\, \Delta x$, P étant une quantité constante; et si c'est une équation du second degré, qui ne renferme aucun terme de la forme y^2 ou xy, etc. on aura $R = 0$, $S = 0$, etc. et $\Delta y = P \,.\, \Delta x + Q \,.\, \Delta x^2$. C'est pour cette raison, que nous nous sommés borné aux deux premiers coëfficiens P et Q.

Si par ex. l'équation proposée exprime la Parabole, les abscisses x étant prises du sommet et perpendiculaires à l'axe, les ordonnées y parallèles à l'axe, de sorte que $ay = x^2$, et $a . \Delta y = 2x . \Delta x + \Delta x^2$, substituant

$$\Delta y = P . \Delta x + Q . \Delta x^2 + R . \Delta x^3 + \text{cet.}$$

on a $0 = (aP - 2x) \Delta x + (aQ - 1) \Delta x^2 + aR . \Delta x^3 + \text{cet.}$ par conséquent $P = \frac{2x}{a}$, $Q = \frac{1}{a}$, $R = 0$, $S = 0$, etc.

On se souviendra que tout celà est absolument conforme aux règles vulgaires du calcul intégral. Car il est connu par le théorème de *Taylor*, qu'en supposant

$$\Delta y = P . \Delta x + Q . \Delta x^2 + R . \Delta x^3 + S . \Delta x^4 + \text{cet.}$$

les coëfficiens P, Q, R, etc. ne sont autre chose que les coëfficiens ou rapports différentiels des différens degrés, multipliés par un certain nombre, ∂x étant supposé constant, savoir, $P = \frac{\partial y}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial \partial y}{2 \partial x^2}$, $R = \frac{\partial^3 y}{2 . 3 . \partial x^3}$, etc. et on sait que l'intégral de l'équation différentielle $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = 0$ est

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots\ldots + \lambda x^{n-2} + \mu x^{n-1},$$

ce qui veut dire que, si l'un des coëfficiens de la série $\Delta y = P . \Delta x + \text{cet.}$ et par conséquent tous les suivans sont égaux à zéro, y est une fonction uniforme de x, dans laquelle les puissances de x montent au même degré que celles de Δx dans la série $\Delta y = P . \Delta x + \text{cet.}$ ou bien, que le plus grand exposant de x est d'un degré moins élevé que celui de l'équation différentielle $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = 0$.

Nous avons donné à ce sujet un plus grand développement qu'il n'était nécessaire pour notre but, parcequ'il est toujours utile d'envisager un objet sous plusieurs points de vue, et de parvenir au même résultat par des méthodes tout à fait différentes.

§. 19. On peut donc exprimer généralement le rapport des différences par une équation de cette forme $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + X . \Delta x$, P étant fonction de x, y, seulement, et X une fonction de x, y, et de leurs différences. En séparant ces deux parties, la première donnera $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P$ entre x et y, laquelle servira à déterminer la nature de la fonction y dont elle dépend uniquement, aussi bien que l'équation primitive donnée entre x et y, dont on a tiré $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P$.

Il est aisé de voir qu'on trouve cette équation, en substituant dans l'équation primitive, $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$ au lieu de x et y, et en négligeant toutes les puissances de Δx et Δy, supérieures à la première, c'est à dire, en formant sa *différentielle* d'après les règles vulgaires. La première substitution donne $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + X . \Delta x$, d'où l'on tire, de la manière ordinaire, $\frac{\partial y}{\partial x} = P$, parceque $\Delta x = 0$. D'après notre principe, on sépare la partie P de l'équation complète $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + X . \Delta x$, non pas parceque $\Delta x = 0$, mais parcequ X . Δx est une expression vague, dépendant de la grandeur arbitraire de Δx, et que P seule exprime la nature de la fonction.

Il est donc clair que P est la même fonction qu'on trouve par la différentiation vulgaire, et qu'elle est trouvée de la même manière, par notre méthode, quoique fondée sur un autre principe : savoir, en égalant Δx et Δy, ou plutôt leurs coëfficiens X, à zéro, dans le second membre de l'équation $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + X . \Delta x$, ou bien, en rejettant dans l'équation complète entre Δx et Δy, tous les termes multipliés par les carrés ou des puissances plus élevées de Δx ou Δy. Nous appellerons donc aussi $\frac{\partial y}{\partial x} = P$ le rapport *différentiel* de x et y, qui n'est autre chose que la partie du rapport des différences complet, laquelle ne dépend que de la nature de la fonction, et qui conserve toujours la même valeur, quelque valeur qu'on donne aux différences Δx, Δy.

§. 20. L'opération inverse qu'on appelle *intégration*, étant fondée sur la même supposition, n'a pas besoin d'être démontrée particulièrement. Le problème général du calcul intégral est celui-ci. Une fonction différentielle P de x ou de plusieurs variables, étant donnée, trouver la fonction y de ces variables, dont P a été formée par la différentiation ; et il est supposé que P n'est autre chose que l'équation complète des différences de y, dont on a supprimé tous les termes qui contiennent des puissances de ces différences, supérieures à la première, ou ce qui revient au même, tous les termes de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ multipliés par Δx ou Δy, ce qu'on fait effectivement en formant les rapports différentiels.

On pourrait appeler calcul *sommatoire*, la méthode de dériver la fonction y, ou l'équation primitive, de sa différence complète; par ex. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x . \Delta x + \Delta x^2$, ou $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{2x^2} + \frac{\Delta x^2}{3x^3} -$ cet. étant donné, de trouver $y = x^3$ ou $y = \log x$; au lieu que l'objet du calcul *intégral* est, de deviner ces séries entières moyennant le premier terme, ou de déduire la fonction intégrale y immédiatement de ce premier terme, lequel, comme on sait, n'est que le commencement d'une série dont on a supprimé tout le reste. Le résultat de l'intégration serait donc juste, comme nous l'avons déja dit (§. 7.), quand même les principes du calcul différentiel seraient faux, parcequ'au fond, tout se réduit à écrire par ex. $3x^2 +$ *cet.* au lieu de $3x^2 + 3x . \Delta x + \Delta x^2$. Tout ce calcul est donc fondé sur un raisonnement très-simple, qu'il suffira d'expliquer par un seul exemple. Il est rigoureusement démontré que, l'équation $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x . \Delta x + \Delta x^2$

étant donnée, y ne peut être que $x^3 + const.$, et il est aisé de démontrer que chaque équation aux différences $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est une série recurrente dont tous les termes suivans sont déterminés par le premier $3\,x^2$, ou bien que, si l'équation $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3\,x^2 + cet.$ est donnée, y ne peut être que $x^3 + const.$ parceque dès que cette fonction subit le moindre changement, en faisant par ex. $y = x^n$ ou $y = x^3 + x^n$, le premier terme de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sera aussi changé en $n\,x^{n-1}$ ou $3\,x^2 + n\,x^{n-1}$: d'où il suit que le premier terme $\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2$ suffit pour trouver la fonction de x, dont la différence complète est $3\,x^2 \,.\, \Delta x + 3\,x \,.\, \Delta x^2 + \Delta x^3$. L'intégration n'étant donc que l'opération inverse de la différentiation, dont les principes sont justifiés d'ailleurs, est un pur calcul mécanique: c'est pourquoi il est permis dans le calcul intégral, de donner aux équations la forme la plus propre au calcul, quoiqu'à la rigueur contraire à la métaphysique de ce calcul. C'est sous ce point de vue, qu'il faut envisager la méthode adoptée dans le calcul intégral, d'employer les caractères ∂x, ∂y, comme des quantités réelles, au lieu des rapports différentiels. L'analyse d'un problème ayant donné par ex. cette équation $\frac{\partial y}{\partial x} = x^n + \frac{a}{x}$, la question est, quelle est la fonction y de x, dont le rapport différentiel, ou dépendant uniquement de la nature de cette fonction, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, est égal à $x^n + \frac{a}{x}$; et en se rappellant les règles qu'on suit dans le calcul différentiel, on voit aisément, que cette fonction ne saurait être que $C + \frac{x^{n+1}}{n+1} + a \cdot \log x$. Mais, pour la pratique du calcul il est plus commode, de multiplier par ∂x, et de donner à l'équation cette forme $\partial y = x^n . \partial x + a \frac{\partial x}{x}$, à laquelle les règles mécaniques du calcul intégral s'appliquent plus facilement. C'est pour cette raison, qu'on peut écrire les équations différentielles de cette manière $\frac{\partial y}{\partial x} = X$, ou de celle-ci $\partial y = X . \partial x$, la dernière se rapportant toujours au calcul intégral.

§. 21. Le calcul fondé sur ce principe, est donc absolument le même que le calcul différentiel vulgaire. L'équation complète des différences $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + Q . \Delta x +$ cet. étant donnée, il s'agit de séparer le terme P qui n'est pas multiplié par Δx, ce qui se fait, en formant de la manière ordinaire, le rapport différentiel $\frac{\partial y}{\partial x} = P$.

Avant d'aller plus loin, il sera nécessaire de faire voir, comment on peut trouver, sans avoir recours à la notion de l'infiniment petit, la différentielle de certaines fonctions, dont la différentiation est fondée ordinairement sur cette notion que nous nous sommes proposé d'éviter entièrement.

§. 22. Soit n un nombre entier et positif, et $y = a . x^n$: on a donc $\Delta y = an . x^{n-1} \Delta x + an \frac{n-1}{2} x^{n-2} \Delta x^2 +$ cet.

par conséquent

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = anx^{n-1} + a.\Delta x\left(\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^{n-3}.\Delta x + \text{cet.}\right),$$

$$\text{et } \frac{\partial y}{\partial x} = anx^{n-1};$$

ce qui est la formule différentielle connue qui n'a pas besoin d'être démontrée, parceque le théorème binomial est fondé sur les règles élémentaires de la multiplication, tant que n est un nombre entier et positif.

Soit donc $y = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, de sorte que

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{m}{n}}$; ce qui donne

$$(y + \Delta y)^n = x^m\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m = (x + \Delta x)^m.$$

Puisque $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{m}{n}}$ devient égal à l'unité, lorsque Δx s'évanouit, supposons $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{m}{n}} = 1 + A\frac{\Delta x}{x} + B\frac{\Delta x^2}{x^2} + \text{cet.} = S$; ce qui donne

$$(y + \Delta y)^n = x^m S^n = x^m\left[1 + n\left(A\frac{\Delta x}{x} + B\frac{\Delta x^2}{x^2} + \text{cet.}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{2}\left(A^2\frac{\Delta x^2}{x^2} + 2AB\frac{\Delta x^3}{x^3} + \text{cet.}\right) + \text{cet.}\right] \text{ et}$$

$$(x + \Delta x)^m = x^m + mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}\Delta x^2 + \text{cet.}$$

Comparant celà à

$$(y + \Delta y)^n = x^m + nAx^{m-1}\Delta x + n\left(B + \frac{n-1}{2}A^2\right)x^{m-2}\Delta x^2 + \text{cet.}$$

on obtient $A = \frac{m}{n}$,

$$B = \frac{m(m-1)}{2n} - \frac{n-1}{2}A^2 = \frac{m}{2n}\left(m - 1 - \frac{m(n-1)}{n}\right),$$

ou bien $B = \frac{m(m-n)}{2n^2} = \dfrac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n} - 1\right)}{2}$.

et ainsi de suite; par conséquent

$$y+\Delta y = x^{\frac{m}{n}} S = x^{\frac{m}{n}} + \tfrac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \Delta x + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)}{2} x^{\frac{m}{n}-2} \Delta x^2 + \text{cet.}$$

ce qui sont les mêmes formules qu'on trouverait par le théorème binomial, appliqué à un exposant fractionnaire, en substituant $\frac{m}{n}$ à la place de n. On en tire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tfrac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} + \Delta x \left(\frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)}{2} x^{\frac{m}{n}-2} + \text{cet.}\right);$$

et $\frac{\partial y}{\partial x}$ ou $\dfrac{\partial (x^{\frac{m}{n}})}{\partial x} = \tfrac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$.

§. 23. Soit $y = \frac{1}{x^n}$, $y+\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^n} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{(1+\frac{\Delta x}{x})^n}$.

Comme nous venons de prouver que

$$(1+\tfrac{\Delta x}{x})^n = 1 + n\tfrac{\Delta x}{x} + \tfrac{n(n-1)}{2} \cdot \tfrac{\Delta x^2}{x^2} + \text{cet.}$$

dans le cas même où n est une fraction, on a, en divisant,

$$y+\Delta y = \tfrac{1}{x^n}\left(1 - n\tfrac{\Delta x}{x} - \tfrac{n(n-1)}{2} \cdot \tfrac{\Delta x^2}{x^2} - \text{cet.} + n^2\tfrac{\Delta x^2}{x^2} + \text{cet.}\right)$$
$$= \tfrac{1}{x^n} - \tfrac{n \cdot \Delta x}{x^{n+1}} + \tfrac{n(2n-n+1)}{2} \cdot \tfrac{\Delta x^2}{x^{n+2}} - \text{cet.}),$$

ou bien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -n x^{-(n+1)} + \tfrac{n(n+1)}{2} x^{-(n+2)} \cdot \Delta x - \text{cet.}$$

d'où il résulte

$$\frac{\partial (x^{-n})}{\partial x} = -n x^{-n-1};$$

ce qui est conforme au théorème binomial, en supposant l'exposant n égal à un nombre négatif, entier ou fractionnaire.

Nous avons donc prouvé, sans la considération de l'infiniment petit, qu'en général $\frac{\partial . x^n}{\partial x} = n x^{n-1}$, quelle que soit la valeur de n, positive ou négative, entière ou fractionnaire, ce qui renferme toutes les fonctions *algébraïques* sans exception. Il ne reste, maintenant, que les fonctions *transcendantes*, où tout se réduira à trouver les séries connues des logarithmes et des lignes trigonométriques, sans avoir recours aux infiniment petits.

§. 24. Dans chaque système, il faut que le logarithme de $(1+x)$ soit une telle fonction de x, qui croît, décroît, et s'évanouit, en même tems que x, parceque $\log 1 = 0$. Nous supposerons donc

$$\log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 \dots + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + Ix^9 + \text{cet.}$$

d'où l'on tire de suite

$$\log(1-x) = -Ax + Bx^2 - Cx^3 + Dx^4 - Ex^5 + Fx^6 - Gx^7 + Hx^8 - Ix^9 + \text{cet.}$$

$$\log(1-x^2) = -Ax^2 + Bx^4 - Cx^6 + Dx^8 - Ex^{10} + \text{cet.}$$

Or, $1 - x^2$ étant aussi $= (1+x)(1-x)$, nous avons

$$2Bx^2 + 2Dx^4 + 2Fx^6 + 2Hx^8 + \text{cet.}$$
$$= -Ax^2 + Bx^4 - Cx^6 + Dx^8 - \text{cet.}$$

ce qui donne

$1)\ B = -\frac{A}{2},\quad 2)\ D = +\frac{B}{2},\quad 3)\ F = -\frac{C}{2},\quad 4)\ H = +\frac{D}{2}$, etc.

De la même manière on a

$$\log(1 - x^3) = -Ax^3 + Bx^6 - Cx^9 + \text{cet.}$$

Or, $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$, et substituant $x + x^2$ au lieu de x dans la première série, on trouve

$$\begin{aligned}\log(1+x+x^2) = {} & Ax + Ax^2 + Bx^2 + 2Bx^3 + Bx^4 + Cx^3 \\ & + 3Cx^4 + 3Cx^5 + Cx^6 + Dx^4 + 4Dx^5 \\ & + 6Dx^6 + 4Dx^7 + Dx^8 + Ex^5 + 5Ex^6 + 10Ex^7 \\ & + 10Ex^8 + 5Ex^9 + \text{cet.} + Fx^6 + 6Fx^7 \\ & + 15Fx^8 + 20Fx^9 + \text{cet.} \\ & + Gx^7 + 7Gx^8 + 21Gx^9 + \text{cet.} \\ & + Hx^8 + 8Hx^8 + \text{cet.} + Ix^9 + \text{cet.}\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\log(1-x)(1+x+x^2) = {} & (A+2B)x^2 + 2Bx^3 + (B+3C+2D)x^4 \\ & + (3C+4D)x^5 + (C+6D+5E+2F)x^6 \\ & + (4D+10E+6F)x^7 \\ & + (D+10E+15F+7G+2H)x^8 \\ & + (5E+20F+21G+8H)x^9 + \text{cet.}\end{aligned}$$

ce qui étant comparé à $\log(1-x^3) = -Ax^3 + Bx^6 - Cx^9 + \text{cet.}$ donne, outre les coëfficiens trouvés plus haut,

$5)\ 3C + 4D = 0,\quad 6)\ 4D + 10E + 6F = 0,$

$7)\ D + 10E + 15F + 7G + 2H = 0$, donc

$$B = -\frac{A}{2},\ D = -\frac{A}{4},\ C = +\frac{A}{3},\ F = -\frac{A}{6},$$
$$E = +\frac{A}{5},\ H = -\frac{A}{8},\ G = +\frac{A}{7},\ \text{etc.}$$

Nous avons donc

$$\log\ (1+x) = A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \text{cet.}\right),$$

A étant le *module* du système. Faisant donc $A = 1$, on a

$$\log.\ \text{nat.}\ (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{cet.}$$

ce qui est la série connue.

§. 25. Pour ce qui regarde les lignes trigonométriques, la géométrie élémentaire donne les théoremes suivans: $\sin(-z) = -\sin(+z)$, $\cos(-z) = +\cos(+z)$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$; d'où il suit que $\sin z$, étant développé en série, ne peut contenir que les puissances impaires de z, tandis que la série de $\cos z$ ne contiendra que les puissances paires, son premier terme étant égal à l'unité. Nous aurons donc

$$\sin z = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + Ez^9 + \text{cet.}$$
$$\cos z = 1 + az^2 + bz^4 + cz^6 + dz^8 + \text{cet.}$$

De plus, on a par la géométrie élémentaire, $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$: par conséquent, les deux séries supposées donnent ces deux équations:

$$\left.\begin{array}{rl}
2\sin z\cos z = & 2Az + 2Bz^3 + 2Cz^5 + 2Dz^7 + 2Ez^9 + \text{cet.} \\
& \quad + 2Aaz^3 + 2Baz^5 + 2Caz^7 + 2Daz^9 \\
& \quad\quad + 2Abz^5 + 2Bbz^7 + 2Cbz^9 \\
& \quad\quad\quad + 2Acz^7 + 2Bcz^9 \\
& \quad\quad\quad\quad + 2Adz^9 \\
\sin 2z = & 2Az + 8Bz^3 + 32Cz^5 + 128Dz^7 + 512Ez^9 + \text{cet.}
\end{array}\right\}(A)$$

$$\left.\begin{array}{rl}
\cos^2 z - \sin^2 z = & 1 + 2az^2 + 2bz^4 + 2cz^6 + 2dz^8 + \text{cet.} \\
& \quad + a^2z^4 + 2abz^6 + 2acz^8 \\
& \quad\quad + b^2z^8 \\
& - A^2z^2 - 2ABz^4 - 2ACz^6 - 2ADz^8 - \text{cet.} \\
& \quad - B^2z^6 - 2BCz^8 \\
\cos 2z = & 1 + 4az^2 + 16bz^4 + 64cz^6 + 256dz^8 + \text{cet.}
\end{array}\right\}(B).$$

Employant donc alternativement les équations (A) et (B), pour déterminer les coëfficiens, on trouve

1) $2a = -A^2$, 2) $3B = Aa$, 3) $14b = a^2 - 2AB$,
4) $15C = Ba + Ab$, 5) $62c = 2ab - 2AC - B^2$,
6) $63D = Ca + Bb + Ac$, 7) $254d = 2ac + b^2 - 2AD - 2BC$,
8) $255E = Da + Cb + Bc + Ad$, etc.

ce qui donne

2) $a = -\frac{A^2}{2}$, 2) $B = -\frac{A^3}{2\cdot3}$, 3) $b = +\frac{A^4}{2\cdot3\cdot4}$, 4) $C = +\frac{A^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$,
5) $c = -\frac{A^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$, 6) $D = -\frac{A^7}{2\cdot3\cdots\cdots7}$, 7) $d = +\frac{A^8}{2\cdot3\cdots\cdots8}$,
8) $E = +\frac{A^9}{2\cdot3\cdots\cdots9}$, etc.

Nous avons donc

$$\sin z = Az - \frac{A^3 z^3}{2 \cdot 3} + \frac{A^5 z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{A^7 z^7}{2 \cdot 3 \ldots 7} + \text{cet.}$$
$$\cos z = 1 - \frac{A^2 z^2}{2} + \frac{A^4 z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{A^6 z^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{cet.}$$

ce qui est conforme aux séries connues, si $A = 1$; et c'est ce que nous allons démontrer, quoiqu'il paraisse évident par la géométrie élémentaire. En effet, Euclide ayant prouvé què, par la bisection continuée de la périphérie du cercle, on peut toujours parvenir à un arc dont la différence de sa corde est moindre qu'une quantité donnée, quelque petite qu'elle soit, il s'en suit que la limite de la corde d'un arc, ou du sinus d'un arc z, relative au decroissement de z, est $\sin z = z$. Le second membre de l'équation que nous venons de trouver,

$$\sin z = Az - \frac{A^3 z^3}{2 \cdot 3} + \text{cet.}$$

a pour limite, par rapport au décroissement de z, le premier terme Az. Or, il est évident que, deux quantités étant toujours égales entr'elles, quelle que soit la valeur de la variable z dont elles dépendent, leurs limites, relatives à l'accroissement ou au décroissement de z, doivent aussi être égales: ce qui donne $z = Az$, donc $A = 1$. Mais, comme nous nous sommes proposé d'éviter non-seulement la notion de l'infini, mais aussi celle des limites, nous allons prouver encore d'une autre manière, que $A = 1$; ce que nous ferons en prouvant que A ne peut être ni plus ni moins grand que l'unité.

§. 26. Supposant d'abord $A > 1$, faisons, pour abréger, $\frac{A^2 z^2}{2 \cdot 3} = m$, $\frac{A^2 z^2}{4 \cdot 5} = n$, $\frac{A^2 z^2}{6 \cdot 7} = p$, $\frac{A^2 z^2}{8 \cdot 9} = q$, etc. de sorte que $\sin z = A z (1 - m + mn(1 - p) + mnpq(1 - r) + \text{cet.})$. Prenons un angle z tel que $z^2 < \frac{6(A-1)}{A^3}$, ce qui est toujours permis, vû que A est une quantité constante, et que z peut prendre toutes les valeurs possibles: alors on aura $m < 1 - \frac{1}{A}$, et toutes les quantités m, n, p, q, r, $1 - p$, $1 - r$, etc. seront positives et renfermées entre 0 et $+1$, de sorte qu'en substituant $m = 1 - \frac{1}{A} - \alpha^2$, $1 - p = \beta^2$, $1 - r = \gamma^2$, etc. on aura

$$\sin z = A z \left(\frac{1}{A} + \alpha^2 + mn\beta^2 + mnpq\gamma^2 + \text{cet.}\right),$$

ou bien $\sin z = z + A z (\alpha^2 + mn\beta^2 + \text{cet.})$, tous les termes de cette série étant positifs: par conséquent, $\sin z > z$, ce qui est impossible.

§. 27. Supposant ensuite $A < 1$, prenons $z^2 < \frac{6(1-A)}{A(6-A^2)}$, ce qui donne $\frac{A z^2}{6} = \frac{1-A}{5 + (1 - A^2)}$, donc $\frac{A z^2}{6} < \frac{1}{5}$, et $A^2 z^2 < \frac{6}{5}$. Faisant donc $A^2 z^2 \cdot \frac{A z^2}{6} = \frac{6\alpha}{25}$, α sera renfermé entre 0 et $+1$. La série trouvée pour $\sin z$ (§. 25.) donne

$$\frac{\sin z\ (1 + z^2)}{z} = A \left[1 + \left(1 - \frac{A^2}{2 \cdot 3}\right) z^2 - \frac{A^2}{2 \cdot 3}\left(1 - \frac{A^2}{4 \cdot 5}\right) z^4 \right.$$
$$\left. + \frac{A^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{A^2}{4 \cdot 5}\left(1 - \frac{A^2}{6 \cdot 7}\right) z^6 - \frac{A^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{A^2}{4 \cdot 5} \cdot \frac{A^2}{6 \cdot 7}\left(1 - \frac{A^2}{8 \cdot 9}\right) z^8 + \text{cet.}\right],$$

et la supposition $\frac{(6 - A^2) z^2}{6} < \frac{1-A}{A}$ fait que la somme des deux premiers termes $1 + \left(1 - \frac{A^2}{6}\right) z^2$ est moindre que $\frac{1}{A}$.

Qu'elle soit donc $= \frac{1-\beta^2}{A}$, de sorte que

$$\frac{\sin z\,(1+z^2)}{z} = 1 - \beta^2 - \frac{A^3 z^4}{2.3}\left[1 - \frac{A^2}{4.5} - \frac{A^2 z^2}{4.5}\left(1 - \frac{A^2}{6.7}\right) + \frac{A^2 z^2}{4.5}\cdot\frac{A^2 z^2}{6.7}\left(1 - \frac{A^2}{8.9}\right) - \text{cet.}\right].$$

Après avoir fait, pour abréger,

$$\frac{4.5 - A^2}{4.5} - \frac{6.7 - A^2}{4.5.6.7}A^2z^2 + \frac{8.9 - A^2}{4.5.6.7.8.9}A^4z^4 - \frac{10.11 - A^2}{4.5.6\ldots\ldots11}A^6z^6 + \text{cet.} = R,$$

et nommé S la somme de tous les termes positifs, T celle des négatifs, de sorte que $R = S - T$, supposons

$$T = A^2z^2(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \ldots\ldots + \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} + \text{cet.}).$$

Nous avons donc $\mathfrak{A} = \frac{6.7 - A^2}{4.5.6.7}$, $\mathfrak{B} = \frac{10.11 - A^2}{4.5\ldots\ldots11}A^4z^4$, et en général $\mathfrak{P} = \frac{A^n z^n((n+6)(n+7) - A^2)}{4.5.6\ldots\ldots(n+6)(n+7)}$, et $\mathfrak{Q} = \frac{A^{n+4}z^{n+4}((n+10)(n+11) - A^2)}{4.5.6\ldots\ldots(n+10)(n+11)}$, ce qui donne $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}} = \frac{(n+8)(n+9)(n+10)(n+11)((n+6)(n+7) - A^2)}{A^4z^4((n+10)(n+11) - A^2)}$, où réstituant les valeurs $A < 1$, $A^2z^2 < \frac{6}{5}$, on obtient

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}} > \frac{(n+8)(n+9)(n+10)(n+11)((n+6)(n+7) - 1).25}{36.(n+10)(n+11)}, \text{ ou}$$

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}} > \frac{25(n+8)(n+9)(n^2+13n+41)}{36}.$$

On voit donc, que le rapport de deux termes consécutifs $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}}$ augmente très-rapidement, à mesure qu'on s'éloigne d'avantage du premier terme $\mathfrak{A}$, et on trouve la moindre valeur de ce rapport, en faisant $n = 0$, ce qui donne $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > \frac{25.72.41}{36}$, ou $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > 2050$. Formant donc une progression géométrique dont le premier terme est égal à l'unité, et l'exposant $= \frac{1}{2050}$, on vient de voir que

$$T < A^2z^2.\mathfrak{A}\left(1 + \frac{1}{2050} + \frac{1}{2050^2} + \text{cet.}\right).$$

Or, la somme de cette dernière série est égale à $\frac{1}{1-\frac{1}{2050}} = \frac{2050}{2049} = 1 + \frac{1}{2049}$, $\mathfrak{A} = \frac{6.7 - A^2}{4.5.6.7}$, et $A^2 z^2 < \frac{6}{5}$: par conséquent $T < \frac{2050}{2049} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6.7}{4.5.6.7}$, ou $T < \frac{1}{16}$.

La série des termes positifs S est également très-convergente; mais nous n'avons pas besoin de connaître sa somme; il suffit de se rappeller que, n'étant composée que de termes positifs, elle est nécessairement plus grande que son premier terme $\frac{4.5 - A^2}{4.5}$, donc à plus forte raison $S > \frac{4.5 - 1}{4.5}$ ou $S > \frac{19}{20}$, d'où il suit que $S - T$ est plus grande que $\frac{19}{20} - \frac{1}{16}$ ou que $\frac{71}{80}$, et que $R = S - T$ est toujours une quantité positive.

En reprenant l'équation $\frac{\sin z (1 + z^2)}{z} = 1 - \beta^2 - \frac{A3 z^4}{2.3} R$, on voit que $\frac{\sin z (1 + z^2)}{z} < 1$, ou bien $\sin^2 z (1 + z^2)^2 < z^2$, et $\sin^2 z (1 + z^2) < \frac{z^2}{1 + z^2}$, donc à plus forte raison, $\sin^2 z (1 + z^2) < z^2$: d'où il suit $\sin^2 z < z^2 (1 - \sin^2 z)$, ou $\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} < z^2$ c'est à dire, $\tang z < z$: ce qui est absurde, vû que dans cette équation l'angle z peut être aussi petit qu'on veut, la seule condition que nous avons établie, étant que $z^2 < \frac{6(1-A)}{A(6-A^2)}$. (Voy. *Traité du Calcul Différentiel etc. par Lacroix*, T. I. 33. 34. 35.)

§. 28. Nous avons donc prouvé que A ne peut être ni plus ni moins grand que l'unité, donc $A = 1$, ce qui donne (§. 25.)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{cet.}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \text{cet.}$$

Il serait facile de développer plus loin ces séries, aussi bien que celles des logarithmes (§. 24.) ; mais celà serait d'autant plus inutile, parcequ'il nous suffit ici, de connaître les deux premiers termes.

§. 29. Maintenant, il est aisé de trouver les rapports différentiels de ces fonctions transcendantes. Soit

$$y = \text{log. nat. } x,$$

d'où, nommant e la base des logarithmes naturels, on tire $e^y = x$, et $e^{y + \Delta y} = x + \Delta x$, c'est à dire,

$$x + \Delta x = e^y \,.\, e^{\Delta y} = x \,.\, e^{\Delta y},$$

où bien $1 + \frac{\Delta x}{x} = e^{\Delta y}$, par conséquent,

$$\Delta y = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} + \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \text{cet. } (\S.\ 24.), \text{ et}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} - \Delta x \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{\Delta x}{3x^3} + \text{cet.}\right),$$

ce qui donne $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}$, ou $\partial y = \frac{\partial x}{x}$ (§. 20.), non pas, parceque les termes suivans, étant multipliés par $\partial x = 0$, s'évanouissent, mais qu'ils contiennent la partie vague du rapport, laquelle n'ayant aucun sens précis, ne peut servir à déterminer la nature de la fonction $y = \log x$.

§. 30. Soit $y = \sin x$, donc

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x,$$

et faisant usage des séries que nous venons de trouver (§. 28.),

$$y + \Delta y = \sin x\left(1 - \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x^4}{2.3.4} - \text{cet.}\right) + \cos x\left(\Delta x - \frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{cet.}\right)$$

ce qui donne $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x - \frac{\Delta x}{2}\sin x - \frac{\Delta x^2}{2.3}\cos x + \text{cet.}$ et $\frac{\partial x}{\partial y}$ ou $\frac{\partial . \sin x}{\partial x} = \cos x$, et $\partial . \sin x = \partial x . \cos x$.

Soit $y = \cos x$: on aura

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x) = \cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x$$

$= \cos x\left(1 - \frac{\Delta x^2}{2} + \text{cet.}\right) - \sin x\left(\Delta x - \frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{cet.}\right)$, donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x - \frac{\Delta x}{2}\cos x + \frac{\Delta x^2}{2.3}\sin x + \text{cet.} \text{ et } \frac{\partial x}{\partial y} \text{ ou}$$

$\frac{\partial . \cos x}{\partial x} = -\sin x$, et $\partial . \cos x = -\partial x . \sin x$.

Soit $y = \text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, donc $\Delta y = \frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - y$

$$= \frac{\sin x\left(1 - \frac{\Delta x^2}{2} + \text{cet.}\right) + \cos x\left(\Delta x - \frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{cet.}\right)}{\cos x\left(1 - \frac{\Delta x^2}{2} + \text{cet.}\right) - \sin x\left(\Delta x - \frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{cet.}\right)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} \sin x \cos x\left(1 - \frac{\Delta x^2}{2} + \text{cet.}\right) + \cos^2 x\left(\Delta x - \frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{cet.}\right) \\ - \sin x \cos x\left(1 - \frac{\Delta x^2}{2} + \text{cet.}\right) + \sin^2 x\left(\Delta x - \frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{cet.}\right) \end{array}\right\}}{\cos^2 x\left(1 - \frac{\Delta x^2}{2} + \text{cet.}\right) - \sin x \cos x\left(\Delta x - \frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{cet.}\right)}$$

$$= \frac{\Delta x - \frac{\Delta x^3}{2.3} + \text{cet.}}{\cos^2 x - \Delta x \sin x \cos x - \frac{\Delta x^2}{2}\cos^2 x + \text{cet.}}, \text{ ce qui donne}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - \frac{\Delta x^2}{2.3} + \text{cet.}}{\cos^2 x\left(1 - \Delta x . \text{tg}\, x - \frac{\Delta x^2}{2} + \text{cet.}\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{\Delta x^2}{2.3} + \text{cet.}}{\cos^2 x}\left(1 + \Delta x . \text{tg}\, x + \frac{\Delta x^2}{2} + \text{cet.}\right),$$

et enfin $\frac{\partial y}{\partial x}$ ou $\frac{\partial . \text{tang}\, x}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, ou bien $\partial . \text{tang}\, x = \frac{\partial x}{\cos^2 x}$.

De la même manière on trouve les différentielles des autres lignes trigonométriques.

§. 31. Lorsque y est une fonction de plusieurs variables x, z, indépendantes l'une de l'autre, il est clair que la différence Δy ne dépend pas seulement de Δx, mais aussi de Δz, de sorte que le rapport différentiel ne peut être exprimé ni par $\frac{\partial y}{\partial x}$ ni par $\frac{\partial y}{\partial z}$, mais par une formule composée de l'une et de l'autre, telle que $\frac{\partial y}{p\partial x + q\partial z}$, p et q étant des fonctions de x, z. Ainsi, ayant vû que la détermination du rapport différentiel d'après notre principe, aussi bien que la différentiation vulgaire, se réduit à rejetter dans l'équation des différences complètes, tous les termes multipliés par des puissances des différences, supérieures à la première (§. 19.), on ne conservera ici que les premières puissances de Δx, Δy, Δz, etc. dans l'équation aux différences, trouvée de la manière ordinaire à l'aide de celle proposée entre x, y, z, etc. ce qui donnera une équation de cette forme

$$0 = L . \Delta y + M . \Delta x + N . \Delta z,$$

par conséquent, $\frac{L \Delta y}{M . \Delta x + N . \Delta z}$ ou $\frac{\partial y}{p\partial x + q\partial z} = -1$.

Soit par ex. $y = xz$: alors, si z est fonction de x, de sorte que $\frac{\partial z}{\partial x}$ est un rapport donné par cette fonction, on a

$\Delta y = z \,.\, \Delta x + x \,.\, \Delta z + \Delta x \,.\, \Delta z$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = z + x \frac{\Delta z}{\Delta x} + \Delta z$, et $\frac{\partial y}{\partial x} = z + \frac{x \partial z}{\partial x}$, ou $\partial y = z \partial x + x \partial z$. Si z est indépendant de x, le rapport $\frac{\partial z}{\partial x}$ ne peut être exprimé par x ou z; mais, comme les accroissemens Δx, Δz, sont tout à fait arbitraires et indépendans l'un de l'autre, il est évident que Δy dépend de l'un et de l'autre, ou bien de Δx et du rapport $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ lequel, quoique arbitraire, doit avoir une valeur déterminée dans chaque cas particulier, et qui, ne dépendant de x, ni par conséquent de Δx, doit être le même, quelle que soit la grandeur de Δx, de manière que $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$, comme dans la ligne droite. Nommant donc ce rapport $\frac{\Delta z}{\Delta x} = n$, la seule différence entre ce cas et les cas précédens, est qu'ici n n'est pas fonction de x, mais une constante arbitraire, à laquelle il faut supposer dans chaque cas particulier une valeur déterminée, pour que Δy ne soit pas tout à fait vague. Nous aurons donc $\Delta z = n \,.\, \Delta x$, $\Delta y = \Delta x (z + nx + n \,.\, \Delta x)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = z + nx + n \,.\, \Delta x$, et $\frac{\partial y}{\partial x} = z + nx$, ou $\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{z}{n} + x$; ce qui est le vrai sens dans lequel il faut entendre le rapport différentiel d'un produit de plusieurs variables. Lorsqu'il s'agit d'intégrer, on peut lui donner, pour faciliter le calcul, une autre forme. Réstituant $n = \frac{\partial z}{\partial x}$, on a $\frac{\partial y}{\partial x} = z + \frac{x \partial z}{\partial x}$, donc relativement au calcul intégral, $\partial y = z \partial x + x \partial z$; c'est à dire, l'intégral de $z \partial x + x \partial z$ est $= xz$.

§. 32. La fonction y étant donnée par une équation quelconque entre x, y, savoir

$$(A)\, 0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \varkappa x y^2 + \lambda y^3 + \text{cet.}$$

l'équation compléte aux différences sera

$$\begin{aligned}(B)\, 0 = {} & (\beta + 2\delta x + \varepsilon y + 3\eta x^2 + 2\theta xy + \varkappa y^2)\,\Delta x \\ & + (\gamma + \varepsilon x + 2\zeta y + \theta x^2 + 2\varkappa xy + 3\lambda y^2)\,\Delta y \\ & + (\delta + 3\eta x + \theta y)\,\Delta x^2 + (\varepsilon + 2\theta x + 2\varkappa y)\,\Delta x \,.\, \Delta y \\ & + (\zeta + \varkappa x + 3\lambda y)\,\Delta y^2 + \eta \,.\, \Delta x^3 + \theta \,.\, \Delta x^2 \,.\, \Delta y \\ & + \varkappa\,\Delta x \,.\, \Delta y^2 + \lambda \,.\, \Delta y^3 + \text{cet.}\end{aligned}$$

ou en abrégeant,

$$\begin{aligned}(B)\, 0 = {} & A \,.\, \Delta x + B \,.\, \Delta y + C \,.\, \Delta x^2 + D \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y \\ & + E \,.\, \Delta y^2 + F \,.\, \Delta x^3 + G \,.\, \Delta x^2 \,.\, \Delta y + H \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y^2 + K \,.\, \Delta y^3,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} = {} & -\frac{A}{B} - \frac{C}{B}\,\Delta x - \frac{D}{B}\,\Delta y - \frac{E}{B} \,.\, \frac{\Delta y}{\Delta x} \,.\, \Delta y - \frac{F}{B} \,.\, \Delta x^2 \\ & - \frac{G}{B}\,\Delta x \,.\, \Delta y - \frac{H}{B}\,\Delta y^2 - \frac{K}{B} \,.\, \frac{\Delta y}{\Delta x} \,.\, \Delta y^2 - \text{cet.}\end{aligned}$$

ou $\frac{\Delta y}{\Delta x} = M + N \,.\, \Delta x + Q \,.\, \Delta y$, M étant une fonction de x, y, tandis que N, Q, sont des fonctions de x, y, et de Δx, Δy. On a donc $\frac{\partial y}{\partial x} = M = -\frac{A}{B}$, tous les autres termes dépendant de la grandeur arbitraire de Δx et Δy.

Lorsqu'après avoir donné à x une valeur déterminée, on trouve $A = 0$, on a $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, au lieu que, si $B = 0$, on a $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{B}{A} = 0$, ou comme on l'exprime ordinairement, $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$. Il peut aussi arriver qu'une certaine valeur de x étant substituée, A et B s'évanouissent à la fois : dans un pareil cas, l'équation (B) devient

$$o = C \,.\, \Delta x^2 + D \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y + E \,.\, \Delta y^2 + F \,.\, \Delta x^3 + \text{cet.}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-D \pm \sqrt{(D^2 - 4\,C\,E)}}{2\,E};$$

et l'on sait que celà indique un point *double* dans la courbe. Comme tout celà est connu par le calcul différentiel vulgaire, nous ne nous y arrêterons pas plus longtems.

§. 33. Passons maintenant à l'objet principal dont nous avons parlé plus haut (§. 8.), et qui renferme les problèmes qui ne peuvent guères être résolus que par les rapports différentiels. Nous avons vû que tout se réduit à prouver que ces formules différentielles, trouvées par le même principe qui est la base du calcul différentiel, donnent une solution rigoureuse du problème, ce qui n'est un objet de l'analyse, que dans le cas où le problème même est purement analytique. Dans tous les autres cas, il faut fonder cette démonstration sur les principes de la science qui a fourni le problème, par ex. la géométrie ou la mécanique. Dès que celà est démontré, la solution générale du problème est obtenue; et dans chaque cas particulier, on n'a qu'à exprimer ces formules différentielles par les quantités x, y, ce qui se fait par la différentiation vulgaire de l'équation proposée (A) entre x et y; bien entendu, que la formule différentielle d'un arc, d'une surface, ou de l'espace parcouru par un corps, trouvée par la première opération à l'aide de considérations tirées de la géométrie ou de la mécanique, est fondée sur le même principe ou raisonnement, que la différentiation vulgaire.

Si la solution complète du problème exige l'intégral des formules différentielles, cette intégration, faite d'après les règles vulgaires, ne peut donner qu'un juste résultat, parce qu'on y fait la même supposition qui sert de base à la différentiation (§. 7.).

Lorsqu'il s'agit par ex. de la rectification générale des courbes, il faut démontrer par la géométrie, qu'en détachant du rapport qui existe entre l'accroissement de l'arc s et l'hypothénuse du triangle formé par les accroissemens des coordonnées x, y, la partie indépendante de la grandeur arbitraire de ces accroissemens, on la trouve, dans toutes les courbes, égale à l'unité, $\frac{\partial s}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = 1$. Or, comme nous avons vu que cette partie du rapport est identique avec le rapport différentiel vulgaire, et que l'intégration ne fait que réstituer la quantité différentiée suivant cette règle (§. 7.), il est sûr que l'intégration vulgaire de $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ donnera l'exacte valeur de l'arc: car tout le reste n'est qu'une opération de calcul. Si la solution générale $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ doit être appliquée à une courbe quelconque, donnée par l'équation (A) entre x, y, on tire de cette équation, par la différentiation vulgaire, $\frac{\partial y}{\partial x} = \mathrm{P}$, et la valeur de $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial x . \sqrt{(1 + \mathrm{P}^2)}$, laquelle étant intégrée de la manière ordinaire, donne l'arc s en fonction de x et y.

§. 34. Le rapport différentiel $\frac{\partial y}{\partial x} = \mathrm{P}$ est, d'après notre méthode, cette partie du rapport des différences $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, laquelle, étant tout à fait indépendante de la grandeur arbitraire de ces différences, ne dépend que de la nature de la fonction y, ou de la courbe proposée: de sorte que la valeur de $\mathrm{P} = \frac{\partial y}{\partial x}$ reste constamment la même, quelle que soit la grandeur qu'on attribue aux différences de x et y. Or, nous avons vu (§. 12.) qu'en ne considérant que ce rapport des différences, qui est indépendant de leur grandeur, on regarde effectivement la continuation de la courbe comme une ligne droite. Le même résultat suit de la forme de l'équation $\frac{\partial y}{\partial x} = \mathrm{P}$, laquelle étant du premier degré, indique une ligne droite, ∂x et ∂y étant regardées comme les deux coordonnées, comme Δx et Δy le sont pour la véritable courbe au delà du point pour lequel on a donné à x et y une valeur déterminée, de sorte que, pour la continuation de la courbe, x et y doivent être regardées comme des quantités constantes. Au delà de ce point où l'on a pris les différences, l'arc de la courbe est donc réellement regardé comme se confondant avec sa corde, non pas parceque l'un et l'autre sont infiniment petits, mais qu'en excluant la partie du rapport des différences, qui dépend de leur grandeur, on a réellement éliminé la courbure de la courbe, de manière qu'il ne reste qu'une ligne droite équivalente à la courbe, et qui, par sa position, détermine la nature de la courbe.

Tab. IV. Fig. 2 §. 35. Soit maintenant l'arc $ALM = s$, son accroissement ou l'arc $MmS = \Delta s$, la corde $MS = \Delta z$: il est clair que Δs est une fonction de Δz, de sorte que

$$\Delta s = Q . \Delta z + R . \Delta z^2 + \text{cet.} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta z} = Q + R . \Delta z + \text{cet.} \quad \text{et} \quad \frac{\partial s}{\partial z} = Q,$$

ce dernier étant le rapport indépendant des quantités Δs, Δz. Or, nous venons de voir que cette partie du rapport des différences est équivalente à la supposition que la continuation de la courbe coïncide avec sa corde: par conséquent nous avons $\frac{\partial s}{\partial z} = 1$. Maintenant, les élémens de la géométrie donnent l'équation exacte $\Delta z = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, ce qui étant substitué dans l'équation précédente, nous donne $\frac{\partial s}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = 1$, ou rélativement au calcul intégral, $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial x \sqrt{(1 + P^2)}$, le rapport différentiel $\frac{\partial y}{\partial x}$ étant toujours désigné par P.

Pour répandre plus de jour sur ce raisonnement qui pourrait paraître à quelques'uns de nos lecteurs ne donner qu'une approximation, aussi bien que les principes vulgaires du calcul différentiel, arrètons-nous encore un moment. Nous avons fait deux hypothèses, l'une géométrique, qu'on peut regarder l'arc s d'une courbe comme une ligne droite z de la même longueur (sans quoi on ne pourrait la rectifier du tout), l'autre purement analytique, qu'il faut faire abstraction de la partie du rapport différentiel, qui dépend de la grandeur des différences. L'une et l'autre de ces hypothèses étant évidemment légitime, il reste à savoir, quel sera le résultat de leur combinaison. Or, nous avons prouvé que ces deux hypothèses se rencontrent de manière qu'en appliquant la dernière à l'équation d'une courbe, la droite z devient, non à peu près (ce qui serait réellement le cas, si l'on considérait le rapport complet des différences), mais rigoureusement égale à la corde de l'arc s. Par conséquent, l'intégration de cette différentielle ∂z, faite en prenant pour base la même hypothèse que nous avons appellée analytique, ne peut donner que l'exacte valeur de l'arc s. Voilà en quoi consiste l'esprit du raisonnement duquel nous nous sommes servi.

Tab. IV. Fig. 2. §. 36. Il ne sera pas inutile de prouver la justesse de l'expression de l'arc encore d'une autre manière. Soit $AP = x$, $PM = y$, $MQ = \Delta x$, $QS = \Delta y$, et supposons que l'équation de la courbe (A) donne l'équation des différences (B) $\Delta y = P \,.\, \Delta x + Q \,.\, \Delta x^2 + R \,.\, \Delta x^3 +$ cet. (Voy. §. 32.): donc $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + Q \,.\, \Delta x + R \,.\, \Delta x^2 +$ cet. quelles que soient les valeurs de Δx et Δy. Prenons un point quelconque m entre M et S, et nommant $Mp = \zeta$, $pm = \xi$, on aura par l'équation (B), $\xi = P \,.\, \zeta + Q \,.\, \zeta^2 + R \,.\, \zeta^3 +$ cet., et par les triangles semblables MQS, Mpq,

$$pq = \frac{\Delta y}{\Delta x}\zeta = P \,.\, \zeta + Q \,.\, \Delta x \,.\, \zeta + R \,.\, \Delta x^2 \,.\, \zeta + \text{cet.}$$

par conséquent $\xi - pq$ ou $qm = Q \,.\, \zeta(\zeta - \Delta x) + R \,.\, \zeta(\zeta^2 - \Delta x^2) +$ cet. Or, nous savons que l'exclusion de la partie du rapport des différences, qui dépend de leur grandeur, se réduit à supprimer les termes multipliés par des puissances des différences, supérieures à la prémière, c'est à dire, à égaler les coëfficiens Q, R, etc. à zéro: d'où il suit qu'en substituant les différentielles au lieu des différences complètes, on a $\xi - pq = 0$, $\xi = pq$, $pm = pq$; c'est à dire, l'arc se confond avec sa corde, et on a

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial s}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{\partial s}{\partial x \sqrt{(1 + P^2)}} = 1,$$

lorsqu'on ne tient compte que de la partie du rapport des différences, laquelle est indépendante de leur grandeur. Or, comme on fait la même supposition dans le calcul intégral, il est clair qu'on trouve l'exacte valeur de l'arc s, par l'intégration vulgaire de la formule $\partial x \sqrt{(1 + P^2)}$.

§. 37. Celà prouve en même tems une vérité importante, dont il serait difficile de se convaincre autrement. Il est clair que, dans chaque courbe, l'arc MS est toujours plus grand que sa corde. Il parait aussi évident, que la différence entre l'arc et la corde sera plus ou moins grande, selon la distance des points M, S, ou la grandeur de la corde, et que, la grandeur étant la même, cette différence ne peut être la même dans toutes les courbes, c'est à dire, qu'elle depend aussi bien de la grandeur que de la nature de la courbe. Cependant, nous venons de voir que la différence entre l'arc et la corde, en tant qu'elle ne dépend point de la grandeur, mais seulement de la nature de la courbe, est dans toutes les courbes nulle. Il est aisé de voir que cette dernière différence dépend immédiatement de la *courbure* de la courbe, vû que chaque courbe s'écarte plus ou moins de sa corde, selon qu'elle est plus ou moins courbée. Le sens de cette contradiction apparente est donc, que la courbure de chaque courbe est nulle, tant qu'on ne considère que le rapport des premières différentielles, comme nous avons fait jusqu' ici, et que, par conséquent, la courbure ne peut être exprimée que par le rapport des secondes différentielles: ce qui est conforme à la théorie connue. Nous allons en donner une nouvelle preuve, en parlant des tangentes.

Tab. IV. Fig 3. §. 38. Qu'il soit proposé de tirer une *tangente* de la courbe $AM\nu$ au point M, c'est à dire, une droite TMt qui n'a que ce seul point M commun avec la courbe: car on voit facilement que cette condition satisfait à la définition classique des tangentes, donnée par les anciens géomètres, d'après laquelle la tangente est une droite qui passe par un point de la courbe de manière qu'il est impossible de mener par le même point une autre droite entre la tangente et la courbe, c'est à dire, qui ne rencontre pas la courbe dans un autre point; ce qui suppose l'impossibilité de mener par le même point d'une courbe plusieurs droites qui n'aient que ce seul point commun avec la courbe. Il s'agit donc, de trouver la position d'une ligne droite par M, qui ne rencontre la courbe que dans ce seul point: et cette position est donnée par l'angle $tMm = \Phi$ que cette ligne fait avec l'axe des abscisses, ou par celui qu'elle fait avec les ordonnées, et qui est $= 90° - \Phi$.

Pour cet effet, tirons par M et d'autres points μ, ν, les cordes Mμ, Mν, lesquelles feront avec l'axe des abscisses les angles μ M m, ν M n, dont les tangentes sont $\frac{\mu m}{M m}$, $\frac{\nu n}{M n}$, de sorte-qu'en nommant ψ l'angle que fait une corde par M avec l'axe des abscisses, on a généralement $\text{tang}\,\psi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Il est clair que cet angle change avec la distance du point μ ou ν au point M, c'est à dire, avec la grandeur de la corde, aussi bien que sa tangente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou le rapport complet des différences dépend de leur grandeur. La valeur de cet angle est donc tout à fait vague, mais elle est déterminée, et indépendante de la grandeur des différences ou de la distance du point μ, lorsqu'on substitue le rapport différentiel $\frac{\partial y}{\partial x}$ au lieu de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Il est donc question de savoir, quelle est la ligne droite passant par M, qui fait avec les abscisses un angle Φ dont la tangente est $= \frac{\partial y}{\partial x}$. La réponse est tout simple. Comme nous venons de voir que, de toutes les lignes Mt, Mμ, Mν, etc. c'est la seule dont la position est déterminée, de manière qu'il n'y a qu'une seule droite qui satisfasse à cette condition, il est hors de doute que ce ne peut point être une corde ou *sécante*, dont il y a une infinité, et dont la position est tout à fait vague, mais que ce ne peut être que la seule *tangente* passant par M, dont la position est unique ou déterminée. Ceci est rigoureusement démontré par la seconde condition, d'après laquelle sa position est indépendante de la distance de l'autre point μ, par lequel elle passerait, si elle n'était pas la tangente, vû que la position d'une corde dépend essentiellement de cette distance. Il est évident qu'une ligne droite, passant par M, dont la position est absolument indépendante de la situation d'un autre point par lequel elle est censée de passer, ne peut en effet passer par aucun autre point de la courbe: d'où il suit que c'est une *tangente* de la courbe en M.

Nous avons donc prouvé que la tangente d'une courbe fait, dans le point du contact, avec une ligne parallèle aux x, un angle dont la tangente est le rapport différentiel des coordonnées rectangles, indépendant de la grandeur des différences, c'est à dire, $\frac{\partial y}{\partial x}$. Si la prolongation de la tangente rencontre l'axe des abscisses x dans le point T, on a, MR étant perpendiculaire à la tangente,

$$\operatorname{tang} MTP = \operatorname{tang} tMm = \frac{\partial y}{\partial x} = P = \operatorname{tang} PMR,$$

$$\operatorname{tang} PMT = \operatorname{tang} PRM = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{P},$$

$$\sin PRM = \frac{1}{\sqrt{(1+P^2)}} = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \sin PMR = \frac{P}{\sqrt{(1+P^2)}} = \frac{\partial y}{\partial s},$$

la *sous-tangente* $PT = MP \,.\, \operatorname{tang} PMT = \frac{y}{P} = \frac{y\partial x}{\partial y}$,

la *sous-normale* $PR = MP \,.\, \operatorname{tang} PMR = y \,.\, P = \frac{y\partial y}{\partial x}$,

la *normale* $MR = \sqrt{(y^2 + PR^2)} = y\sqrt{(1 + P^2)} = \frac{y\partial s}{\partial x}$,
la *tangente* $MT = \sqrt{(y^2 + PT^2)} = \frac{y\sqrt{(1 + P^2)}}{P} = \frac{y\partial s}{\partial y}$,

§. 39. Si la tangente TMt et l'ordonnée $N\mu$, étant prolongées, se rencontrent en t, et qu'on nomme $Mm = \Delta x$, $m\mu = \Delta y$, on a $mt = Mm \,.\, \text{tang}\, tMm = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x = P \,.\, \Delta x$, et $m\mu = \Delta y$: donc $Mt = \Delta x \,.\, \sqrt{(1 + P^2)}$, et

$$M\mu = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = \Delta x \,.\, \sqrt{(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2})}$$
$$= \Delta x \,.\, \sqrt{(1 + (P + Q \,.\, \Delta x + \text{cet.})^2)}.$$

Or, l'arc $M\mu = \Delta s$ étant nécessairement renfermé entre la corde $M\mu$ et la tangente Mt, il s'en suit que $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ est une fonction dont la valeur est constamment renfermée entre les deux limites $\sqrt{(1 + P^2)}$ et $\sqrt{(1 + (P + Q.\Delta x + \text{cet.})^2)}$: le rapport différentiel, indépendant de la grandeur des différences, $\frac{\partial s}{\partial x}$, est donc renfermé entre les limites $\sqrt{(1 + P^2)}$ et $\sqrt{(1 + P^2)}$, par conséquent $\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{(1 + P^2)}$,

$$\partial s = \partial x : \sqrt{(1 + P^2)} = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)},$$

comme ci-dessus.

Il s'en suit encore, ce qui est d'ailleurs évident, qu'indépendamment de la longueur de l'arc, ou de la distance du point μ, c'est à dire, dans le point M seul, l'arc et sa tangente ont la même direction. En effet, l'arc étant renfermé entre la tangente et la corde, sa direction, ou l'angle qu'il fait avec l'axe des x, est renfermé entre deux angles dont les tangentes sont $\frac{\partial y}{\partial x}$ et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, limites qui se confondent en $\frac{\partial y}{\partial x}$, quand on fait abstraction de la grandeur de l'arc, ou du point μ: par conséquent, l'arc fait dans le point M avec une droite quelconque le même angle, ou bien, il a la même direction, que sa tangente.

§. 40. La formule vulgaire pour la *quadrature* des courbes résulte sans difficulté, des mêmes raisonnemens que nous avons employés jusqu'à présent. Il s'agit d'exprimer la différence de la surface $APM = S$ par une formule qui, étant intégrée d'après les règles vulgaires, donne l'exacte valeur de S. Comme nous avons donc prouvé que l'intégration vulgaire est fondée sur ce principe que, dans la formation des rapports différentiels, on n'a conservé que la partie indépendante de la grandeur des différences, il faut, pour satisfaire à cette condition, et trouver par là le véritable intégral, supprimer dans l'expression complète du rapport dont il s'agit, tous les termes multipliés par les différences. Or, nous avons $\Delta S = MPNQSmM$, égal au rectangle MN, plus le triangle $MQSmM$ dont les trois cotés sont Δx, Δy, et Δs; et nous avons vû que, faisant abstraction de la partie du rapport qui dépend des grandeurs arbitraires, l'arc Δs se confond avec la corde (§. 34.), ce qui donne ce triangle $= \frac{1}{2} \Delta x . \Delta y$,

Tab. IV. Fig. 2.

donc $\Delta S = y \,.\, \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x \,.\, \Delta y$, $\frac{\Delta S}{y \Delta x} = 1 + \frac{\Delta y}{2y}$, et $\frac{\partial S}{y \partial x} = 1$, ou $\partial S = y \partial x$.

On peut s'en convaincre encore d'une autre manière qui nous servira ci-après à trouver le volume d'un corps. Soit encore SR parallèle à l'axe des x, de sorte que la surface ΔS est renfermée entre deux rectangles, $PQ = y \,.\, \Delta x$, et $PS = (y + \Delta y) \Delta x$, dont la différence est égale au rectangle $MS = \Delta x \,.\, \Delta y$. Or il est évident que la surface $MQSmM$, étant une partie de ce rectangle, peut toujours être exprimée par $V \,.\, MS = V \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y$, V étant une fraction qui dépend de la nature de la courbe, ou une fonction de x, y. Nous avons donc $\Delta S = y \,.\, \Delta x + V \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y$, et $\frac{\partial S}{y \partial x} = 1$.

§. 41. Le *volume* d'un corps se trouve par le même raisonnement. Soit A M B N la base d'un cylindre droit Tab. IV. dont la hauteur $= b$, le rayon $CA = a$, soit $CP = x$, Fig. 4. $PM = PN = y$, $Pp = \Delta x$, $m\mu = n\nu = -\Delta y$, et S le volume du cylindre. D'abord il est clair que S dépend nécessairement de a et de b, et qu'en prenant parallèlement à son axe, une partie quelconque de S, son expression analytique V sera fonction de b, x, y, et son accroissement fonction de ces mêmes quantités et de Δx, Δy, b étant constant. Il s'agit donc, de trouver la fonction V de x, y, non pas immédiatement par la nature du cylindre, comme Archimède l'a fait, mais par une analyse qui s'applique également à tous les corps. Si l'on connaissait le rapport différentiel de cette fonction $\frac{\partial V}{\partial x}$, qui est indépendant de la grandeur des différences Δx, on en trouverait facilement la fonction V même par l'intégration vulgaire; et on aura moins de difficulté de trouver, par des considérations géométriques, le rapport des accroissemens $\frac{\Delta S}{\Delta x}$, que le cylindre S même. Or, ayant trouvé la valeur de $\frac{\partial S}{\partial x}$ exprimée par x, y, il est évident que cela ne peut être que la fonction qu'on aurait obtenue, en différentiant V de la manière ordinaire, parceque l'une et l'autre eût été trouvée d'après le même principe, et qu'il est impossible que S ou V soit égale à deux différentes fonctions. Il s'agit donc, d'exprimer ΔS par x, y, Δx, Δy, d'après les élémens de la géométrie, ce qui donnera en même tems $\frac{\partial S}{\partial x}$, et par l'intégration $V = \int \partial S$.

Soit DCENPM la base d'une partie quelconque X du demi-cylindre dont la base est le demi-cercle DCEAD, de manière que MNnpm est la base de ΔX. Or, ayant mené CA, Mμ, mq, Nν, nr, perpendiculaires à DE, on obtient les rectangles $M\nu = 2y \cdot \Delta x$, $mr = 2(y - \Delta y)\Delta x$, et leur différence, savoir la somme des deux rectangles

$q\mu + r\nu = 2\Delta x.\Delta y$, ce qui étant multiplié par la hauteur b du cylindre, donne les prismes $M\nu = 2by.\Delta x = P$, $mr = 2b(y - \Delta y).\Delta x = \Pi$, et leur différence $p = 2b.\Delta x.\Delta y$. Or il est clair que ΔX, étant toujours renfermé entre les prismes P et Π, est égal à Π plus une partie de p qui dépend de la nature du cercle, de sorte que nous avons $\Delta X = \Pi + Q.p$, Q étant une fonction de x, y, moindre que l'unité qu'on n'a pas besoin de connaître, comme nous allons voir. En effet, on a $\Delta X = 2b(y - \Delta y)\Delta x + 2bQ.\Delta x.\Delta y$, $\frac{\Delta X}{\Delta x} = 2by - 2b(1 - Q)\Delta y$, et $\frac{\partial X}{\partial x} = 2by$, ou $\partial X = 2by\partial x$. Or on sait que l'intégral de $2y\partial x$ est égal au segment circulaire DCENPM $= z$ (§. 40.), ce qui donne $X = bz$, et nommant C la surface entière de la base, laquelle, d'après les élémens de la géométrie, est $= \pi a^2$, on aura le cylindre entier $= bC = \pi b a^2$: un cylindre droit est égal à sa base multipliée par sa hauteur.

§. 42. Soit maintenant APBCA un corps rond quelconque, tourné sur son axe PC, et qu'il soit donné une équation entre $CF = x$ et $FD = FE = y$, qui exprime la nature de la courbe APB, par la révolution de laquelle le corps est né; soit, de plus, $FK = \Delta x$, $KG = KH = y - \Delta y$, $Gg = Dd = Hh = Ee = \Delta y$. Nommant donc S une partie indéterminée ADFEB de ce corps, son accroissement DGKHEFD $= \Delta S$ sera toujours renfermé entre les deux Tab. IV. Fig. 5.

cylindres Dh et dH, et nous venons de voir que $Dh = \pi y^2 . \Delta x$, et $dH = \pi (y - \Delta y)^2 \Delta x$, dont la différence est l'anneau cylindrique $DdGgEeHh = \pi . \Delta x (2y \Delta y - \Delta y^2)$, de manière que ΔS est égal au cylindre dH plus une partie de cet anneau, donc

$$\Delta S = \pi . \Delta x (y^2 - 2y . \Delta y + \Delta y^2) + Q . \pi . \Delta x (2y . \Delta y - \Delta y^2),$$

Q étant fonction de x, y: ce qui donne

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \pi y^2 - \pi (1 - Q)(2y - \Delta y) \Delta y,$$

et $\frac{\partial S}{\partial x} = \pi y^2$, d'où l'on obtient, par l'intégration vulgaire, $S = \text{Const.} + \pi \int y^2 \partial x$. Or, nommant le rayon de la base $= a$, la hauteur du corps $CP = b$, il faut déterminer la constante de manière que S devient égal à zéro, lorsque $y = a$ ou $x = 0$, et ensuite faire $x = b$ ou $y = 0$.

Soit par ex. le corps un *cone*, où $PC : CA = PF : FD$, donc $y = \frac{a}{b}(b - x)$, $\partial y = -\frac{a}{b} \partial x$, $\partial x = -\frac{b}{a} \partial y$, ce qui donne $S = C - \frac{\pi b}{3a} y^3 = \frac{\pi b}{3a}(a^3 - y^3)$ et le cone entier, prenant $y = 0$, $S = \frac{\pi}{3} b a^2$.

Soit le corps un *hémisphère* dont le rayon $CA = CP = a$: on aura $y^2 = a^2 - x^2$, $S = C + \pi \int (a^2 - x^2) \partial x = \pi x (a^2 - \frac{x^2}{3})$, et prenant $x = a$, l'hémisphère entier $= \frac{2}{3} \pi a^3$.

§. 43. Arrêtons nous un moment, pour considérer avec attention le raisonnement que nous venons de faire, pour parvenir à ce résultat. La partie de l'hémisphère ADEB peut être envisagée sous deux points de vue, savoir comme un corps géométrique S, et comme une fonction analytique de x, que nous nommerons V; et nous supposons qu'on ne connait ni l'un ni l'autre, quoiqu'à la vérité Archimède ait démontré que S est égal à deux tiers d'un cylindre ou d'un prisme de la même base et de la même hauteur. On aura donc une idée nette de ce qui distingue V de S, si l'on s'imagine qu'Archimède ait fait cette découverte, sans pouvoir définir le volume du cylindre par une expression analytique: car, dans ce cas, on connaitrait S géométriquement, sans connaitre V analytiquement, parcequ'on peut représenter, par une construction géométrique, le prisme ou le cylindre, dont les deux tiers sont de même trouvés géométriquement, en coupant ce prisme par la troisième partie de sa hauteur. Quoique donc V et S soient inconnus, la géométrie nous apprend, 1) que l'accroissement de ce corps S, pris parallèlement à sa base, ou ΔS, est renfermé entre les deux cylindres Dh et dH, 2) que la différence de ces deux cylindres est égale au rectangle $\Delta x \,.\, \Delta y$ multiplié par un facteur inconnu. Il s'en suit qu'en ne cherchant que les rapports différentiels qui sont indépendans de la grandeur des accroissemens, il faut rejetter cette différence $\Delta x \,.\, \Delta y$ (§. 19.), et que par conséquent, le rapport différentiel $\frac{\partial s}{\partial x}$ est exactement le même que le rapport de l'un ou de l'autre de ces deux cylindres, par ex. Dh que nous nommerons L: de sorte que $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{L}{\Delta x}$. Voilà un théorème purement géométrique qui ne nous ferait pas connaître la fonction V, si la géométrie ne nous apprenait encore que le cylindre L peut être exprimé par une fonction analytique de x ou y, savoir $L = \pi y^2 . \Delta x$, quelle que soit la grandeur de Δx; et c'est dans cette proposition que consiste la transition de la géométrie à l'analyse. Car $\frac{L}{\Delta x}$ étant égal à πy^2, nous avons obtenu pour le rapport différentiel du corps S une fonction analytique, savoir $\frac{\partial S}{\partial x} = \pi y^2$: il est donc certain que, si l'on connaissait la fonction V, on trouverait par la différentiation qui, d'après notre méthode, est fondée sur le même principe dont nous nous sommes servi pour trouver $\frac{\partial S}{\partial x}$, la même fonction pour $\frac{\partial V}{\partial x}$ que nous venons de trouver pour $\frac{\partial S}{\partial x}$ par des considérations géométriques, par conséquent $\frac{\partial V}{\partial x} = \pi y^2$; et l'intégration vulgaire qui est encore fondée sur le même principe, donnera la fonction analytique cherchée $V = \int \pi y^2 \partial x$.

Celà suffira, ce me semble, pour répandre sur notre méthode toute la clarté dont elle pouvait encore avoir besoin.

§. 44. Passons maintenant au *rayon osculateur*. Comme les courbes en général diffèrent de la ligne droite, en ce qu'elles changent continuellement de direction, tandis que la droite a une direction invariable; le cercle se distingue par l'invariabilité de sa courbure, de toutes les autres courbes dont la courbure change d'un point à l'autre. Mais celà n'empêche pas que la courbe la plus irrégulière n'ait dans chaque point une courbure déterminée, parcequ'autrement on ne pourrait dire que sa courbure augmente ou diminue d'un point à l'autre: de la même manière on dit d'un corps, malgré l'irrégularité de son mouvement, qu'il se meut dans chaque instant plus ou moins vite qu'un autre corps, que sa vitesse croit ou décroit, etc. Quoique nous ne puissions former une idée nette de la vitesse, autrement que par le rapport de l'espace parcouru au tems, et quoique dans le mouvement accéléré ou rétardé il n'y ait pas le moindre espace qui soit parcouru avec la même vitesse, il faut cependant que dans chaque instant la vitesse soit d'une grandeur déterminée, parcequ'un corps dont la vitesse est nulle, est en repos, tandis qu'une vitesse infinie ne pourrait durer qu'un instant, et ne tomberait pas sous les sens: ce qui prouve que la vitesse n'est pas le mouvement même, mais une tendance, un effort qui n'a besoin que d'un instant pour se manifester et pour produire son effèt. De la même manière, l'idée que nous nous formons ordinairement de la courbure, est fondée sur le plus ou moins, dont la courbe s'éloigne de sa tangente ou de sa corde, en passant d'un point à l'autre, ce qui paraît contradictoire à la nature des courbes, vû que leur courbure ne reste pas la même d'un point à l'autre; cependant nous n'hésitons pas à attribuer à chaque courbe dans chaque point une courbure déterminée, parcequ'une ligne dont la courbure est nulle, n'est que la ligne droite, et qu'une courbure infinie donnerait un point conjugué au lieu d'une ligne: ce qui prouve que la courbure n'est pas un arc, quelque petit qu'il soit, mais une tendance qui se manifeste dans un seul point, comme la vitesse d'un corps dont le mouvement n'est pas uniforme.

Ce que nous venons de dire, nous apprend deux choses: 1) que la courbure dans chaque point n'a rien de commun avec la grandeur de l'arc, et que par conséquent, elle ne peut être exprimée que par les rapports qui sont indépendans de la grandeur des accroissemens, c'est à dire, par les rapports différentiels; 2) que le moyen le plus simple de déterminer la courbure, est d'indiquer le rayon d'un cercle qui a la même courbure, non seulement parceque la courbure du cercle est constamment la même dans toute son étendue, mais parcequ'il y a un moyen mécanique très-simple de décrire un cercle d'une certaine courbure, son rayon étant donné.

§. 45. Le problème du *rayon osculateur* d'une courbe en M se réduit à trouver le centre C, ou le rayon MC du cercle BM qui en M coïncide avec la courbe AMS: d'où il suit d'abord que ce centre C est situé quelque part dans la prolongation de la normale MR, vû que le rayon CM d'un cercle est toujours perpendiculaire à son arc ou à sa tangente, par conséquent aussi à celle de la courbe coïncidente. Mais, cette coïncidence ne peut avoir lieu que dans le seul point M, parceque, si elle existait d'un bout à l'autre d'un arc MS d'une grandeur quelconque, la courbe serait effectivement composée d'arcs circulaires: d'où il suit que la coïncidence du cercle avec la courbe en M, aussi bien que l'expression analytique du rayon osculateur, doit être tout à fait indépendante de la grandeur de l'arc ou de Δx; proposition d'ailleurs évidente, parcequ'autrement la courbe en M aurait autant de différens rayons osculateurs ou différentes courbures, que l'on peut donner de valeurs arbitraires à Δx, c'est à dire, une infinité, ce qui est absurde. On se rappellera qu'il en est de même des tangentes rectilignes, que de ces cercles tangents. Il s'agit donc, de trouver un cercle coïncidant avec la courbe en M, de manière que leur coïncidence est indépendante de la grandeur de l'arc, ou des différences Δx, Δy, en général; et pour cet effêt, notre méthode nous fournit un moyen très-simple, savoir, de chercher

Tab. IV. Fig. 6.

d'abord l'expression générale du rayon d'un cercle qui a un arc quelconque MS commun avec la courbe, et ensuite de rendre cette expression indépendante de la grandeur de cet arc, ce qui se fait, en substituant les rapports différentiels à la place des rapports complets des différences.

Tab. IV. Fig. 6. §. 46. Soit donc BMS ce cercle, C son centre situé dans la normale MR, et son rayon MRC $= z$: soient de plus, CTB, MQ, parallèles à l'axe des x, MN, ST, parallèles aux ordonnées y, $MQ = \Delta x$, $QS = \Delta y$: alors la nature du cercle donnera les équations:

(1) $CN^2 + NM^2 - z^2 = 0$, (2) $CT^2 + TS^2 - z^2 = 0$, ou bien

$$(2)\ (CN - \Delta x)^2 + (NM + \Delta y)^2 - z^2 = 0.$$

La différence de ces deux équations, (2) — (1), donne

$$(3)\ \Delta x^2 + \Delta y^2 = 2\,CN.\Delta x - 2\,NM.\Delta y.$$

En vertu de la condition que le centre C doit être situé dans la normale MR, l'angle NMC est égal à l'angle PMR dont nous avons trouvé le sinus $= \frac{P}{\sqrt{(1+P^2)}}$ (§. 38.): ce qui donne $CN = \frac{P.z}{\sqrt{(1+P^2)}}$ et $NM = \frac{z}{\sqrt{(1+P^2)}}$. Substituant ces valeurs dans l'equation (3), on obtient

$\Delta x^2 + \Delta y^2 = \frac{2z(P.\Delta x - \Delta y)}{\sqrt{(1+P^2)}}$, ou bien $z = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{2(P.\Delta x - \Delta y)} \sqrt{(1+P^2)}$.

Or, nous avons toujours supposé (§. 16.)

$$\Delta y = P.\Delta x + Q.\Delta x^2 + R.\Delta x^3 + \text{cet.}$$

ce qui donne

$$z = \frac{\Delta x^2 (1 + P^2 + 2 PQ . \Delta x + cet.)}{-2 (Q . \Delta x^2 + R . \Delta x^3 + cet.}\sqrt{(1 + P^2)}$$
$$= \frac{1 + P^2 + 2 PQ . \Delta x + cet.}{-2 (Q + R . \Delta x + cet.)}\sqrt{(1 + P^2)}.$$

Maintenant, pour rendre cette expression indépendante de la grandeur arbitraire des différences Δx, il faut rejeter les termes qui en dépendent, $2 PQ . \Delta x$, $2 R . \Delta x$, etc. ce qui donne $z = \frac{(1 + P^2)^{\frac{3}{2}}}{-2 Q}$. Substituant $P = \frac{\partial y}{\partial x}$ et $1 + P^2 = \frac{\partial s^2}{\partial x^2}$ (§. 35.), on a $z = \frac{\partial s^3}{-2 Q . \partial x^3}$. De plus, il est connu par le théorème de *Taylor*, que $2 Q$ n'est autre chose que le rapport $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2}$ trouvé par le calcul différentiel vulgaire, ∂x étant supposé constant. Comme nous avons donné, dans un autre mémoire, une démonstration rigoureuse de ce théorème, sans la considération de l'infini, nous nous rapportons à ce mémoire qu'on peut regarder comme un supplément de celui-ci. Substituant donc $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2}$ au lieu de $2 Q$, nous avons

$$z = \frac{\partial s^3}{-\partial x . \partial \partial y}.$$

§. 47. Voici une autre méthode de déterminer le rayon osculateur, même sans avoir recours aux secondes différentiations. Soit M le point dans la courbe A M N, pour lequel on cherche le rayon osculateur: soit (S) l'équation entre $AP = x$, $PM = y$, qui exprime la nature de la courbe; soient enfin $x = a$, $y = b$, les valeurs par lesquelles le point M est donné. Ayant mené la normale Tab. IV. Fig. 7.

MRZ, nous avons (§. 38.) la sous-normale $PR = b\frac{\partial y}{\partial x}$, la normale $MR = b\frac{\partial s}{\partial x}$. Prenons maintenant MZ pour l'axe, et M pour l'origine des abscisses, et nommons $MB = t$, $BN = u$, la dernière étant perpendiculaire à MZ; tandis qu'on a pour le même point N, $AD = x$, $DN = y$. Les triangles semblables PRM, BNC, DRC, nous fournissent $NC = \frac{MR}{PR}u$, $BC = \frac{PM}{PR}u$, $DR = \frac{PR}{MR}CR$, $DC = \frac{PM}{MR}CR$, CR étant égal à $MR - t - BC$: nous avons donc $NC = \frac{\partial s}{\partial y}u$, $BC = \frac{\partial x}{\partial y}u$,

$$CR = \frac{\partial s}{\partial x}b - t - \frac{\partial x}{\partial y}u, \quad DR = \frac{\partial y}{\partial x}b - \frac{\partial y}{\partial s}t - \frac{\partial x}{\partial s}u,$$

$DC = b - \frac{\partial x}{\partial s}t - \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\cdot u$; donc, $AD = AP + PR - DR$, $DN = DC + NC$, c'est à dire, $x = a + \frac{\partial y}{\partial s}t + \frac{\partial x}{\partial s}u$, $y = b - \frac{\partial x}{\partial s}t + \frac{\partial y}{\partial s}u$, où il faut mettre a et b à la place de x et y dans les rapports différentiels $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$. Nommant donc ces valeurs données $\frac{\partial x}{\partial s} = \alpha$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \beta$, de manière que

$$x = a + \beta t + \alpha u, \quad y = b - \alpha t + \beta u,$$

et substituant ces valeurs de x, y, dans l'équation (S), on obtient une équation (T) du même degré entre t, u. Maintenant, prenons dans la normale un point quelconque Z, et menons ZN, laquelle sera $= \sqrt{(BN^2 + BZ^2)}$. Nommant donc $MZ = z$, on a $ZN^2 = u^2 + z^2 - 2z\,.\,t + t^2$. Après cela, il sera facile de déterminer le centre du cercle osculateur Z, ou la longueur de son rayon z, par le raisonnement suivant. Il est certain que tous les cercles qui ont leurs centres dans la normale MRZ quelque part en Z' ou Z'', et qui ont respectivement les rayons $Z'M$ ou $Z''M$, toucheront la courbe en M, intérieurement ou extérieurement; mais tous ces cercles ne sont pas osculateurs. En prenant le centre Z' très-près de M, on obtient un cercle qui, tombant au dedans de la courbe, a une courbure beaucoup plus grande. La différence entre la courbure du cercle et celle de la courbe, diminue à mesure qu'on recule le point Z'; jusqu'à ce que la distance MZ'' devient assés grande, pour faire tomber le cercle hors de la courbe, et rendre sa courbure moins grande que celle de la courbe. Il faut donc, d'après la loi de continuité, que ces deux genres de cercles, intérieurs et extérieurs, renferment un cercle unique qui, formant la transition des uns aux autres, ne tombe ni au dedans ni hors de la courbe, dont, par conséquent, la courbure n'est plus ni moins grande que celle de la courbe: et celui-ci est précisément le cercle osculateur que nous cherchons. Il est évident que le cercle tombe hors de la courbe, si son rayon z est plus grand que ZN, et en dedans, s'il est moins grand: le rayon osculateur ne sera donc ni l'un ni l'autre, c'est à dire, z sera égal à ZN. Ceci nous donne l'équation $z^2 = u^2 + z^2 - 2zt + t^2$, ou bien $z = \frac{u^2 + t^2}{2t}$. Sous cette forme générale, z serait le rayon d'un cercle, ayant son centre dans la normale MZ, et coupant la courbe en M et N; mais comme il ne s'agit ici que de la coincidence du cercle avec la courbe dans le seul point M, où $t = 0$, il faut égaler t à zéro, après avoir trouvé la valeur de u en t par l'équation (T), et divisé $u^2 + t^2$ par $2t$.

§. 48. On peut aussi trouver la valeur de z, sans avoir recours à l'équation (T). Les valeurs de x et y, trouvées plus haut, nous donnent

$$\alpha\beta u = \beta(x - a) - \beta^2 t = \alpha(y - b) + \alpha^2 t,$$

donc $t = \frac{\beta(x-a) - \alpha(y-b)}{\alpha^2 + \beta^2}$. De plus, $u^2 + t^2$ est le carré de la corde MN, par conséquent $u^2 + t^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$, et $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial s^2} = 1$; donc $\frac{u^2 + t^2}{2t}$, ou

$$z = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{2\beta(x-a) - 2\alpha(y-b)},$$

où il faut substituer $x = a$ et $y = b$. Comme cette substitution fait $z = \frac{0}{0}$, il faut différentier le numérateur et le dénominateur, ce qui donne $z = \dfrac{x - a + (y-b)\frac{\partial y}{\partial x}}{\beta - \alpha\frac{\partial y}{\partial x}}$.

Or, $\alpha\frac{\partial y}{\partial x}$ étant $= \beta$ (§. 47.), on a encore $z = \frac{0}{0}$; mais on trouve, par une seconde différentiation,

$$z = \frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + (y-b)\frac{\partial\partial y}{\partial x^2}}{-\alpha\frac{\partial\partial y}{\partial x^2}}.$$

∂x étant regardé comme constant: ce qui donne, à cause de $y - b = 0$, $z = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{-a\partial \partial y} = \frac{\partial s^3}{-\partial x \partial \partial y}$, ce qui est l'expression vulgaire.

§. 49. Il ne sera pas inutile, d'éclaircir la première méthode (§. 47.) qui paraît la plus simple, par un ou deux exemples.

Exemple I.

Soit la courbe donnée la *parabole* conique, pour laquelle on a (S) $y^2 = px$, $b^2 = pa$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}$ ou $\partial y = \frac{p}{2b}\partial x$, $\partial s^2 = \frac{p^2 + 4b^2}{4b^2}\partial x^2 = \frac{p + 4a}{4a}\partial x^2$, donc $\frac{\partial x}{\partial s} = \alpha = \sqrt{\frac{4a}{p+4a}}$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \beta = \frac{p}{2b}\sqrt{\frac{4a}{p+4a}}$, ou bien $\alpha = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{(p+4a)}}$, $\beta = \sqrt{\frac{p}{p+4a}}$, ce qui donne, en faisant, pour abréger, $p + 4a = q$,

$$x = a + t\sqrt{\frac{p}{q}} + 2u\sqrt{\frac{a}{q}},\ y = b - 2t\sqrt{\frac{a}{q}} + u\sqrt{\frac{p}{q}},$$

valeurs qui, substituées en (S), donnent

$$(\mathrm{T})\, 0 = \begin{matrix} b^2 - 4bt\sqrt{\frac{a}{q}} + 2bu\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{4tu\sqrt{ap}}{q} + \frac{4a}{q}t^2 + \frac{p}{q}u^2, \\ -pa - pt\sqrt{\frac{p}{q}} - 2pu\sqrt{\frac{a}{q}} \end{matrix}$$

ou bien, substituant $b = \sqrt{pa}$,

$$(\mathrm{T})\ 0 = pu^2 + 4at^2 - 4tu\,.\sqrt{ap} - qt\,.\sqrt{pq}.$$

Cette équation donne $u^2 = -\frac{4a}{p}t^2 + 4tu\,.\sqrt{\frac{a}{p}} + t\,.\sqrt{\frac{q^3}{p}}$; $\frac{u^2+t^2}{2t} = \frac{p-4a}{2p}t + 2u\,.\sqrt{\frac{a}{p}} + \frac{q^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}}$.

Substituant donc $t = 0$, et par conséquent aussi $u = 0$, on obtient

$$z = \frac{u^2+t^2}{2t} = \frac{q^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}} = \frac{(p+4a)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}}.$$

D'après la méthode vulgaire, on a $2y\partial y = p\partial x$, $2\partial y^2 + 2y . \partial\partial y = 0$, $\partial s^2 = \frac{p^2+4y^2}{4y^2}\partial x^2 = \frac{p+4x}{4x}\partial x^2 = \frac{p+4a}{4a}\partial x^2$, $\partial\partial y = -\frac{\partial y^2}{y} = -\frac{p^2\partial x^2}{4y^3} = -\frac{\partial x^2 . \sqrt{p}}{4x\sqrt{x}} = -\frac{\partial x^2 . \sqrt{p}}{4a . \sqrt{a}}$, donc $= -\frac{\partial s^3}{\partial x\partial\partial y} = \frac{(p+4a)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}}$, ce qui est conforme à la formule trouvée par notre méthode.

Exemple II.

Qu'il soit proposée une *ellipse* dont le sommèt en A, les demi-axes m et n, de sorte que

$$(S)\ y^2 = \frac{n^2}{m^2}(2mx - x^2).$$

Nous avons donc $\partial y = \frac{n^2(m-x)}{m^2 y}\partial x$,

$$\partial s^2 = \frac{m^2n^2 + (m^2 - n^2)(2mx - x^2)}{m^2(2mx - x^2)}\partial x^2,$$

$$\alpha = \frac{m\sqrt{x(2m-x)}}{\sqrt{[m^2n^2 + (m^2 - n^2)x(2m-x)]}},$$

$$\beta = \frac{n(m-x)}{\sqrt{[m^2n^2 + (m^2 - n^2)x(2m-x)]}}.$$

Substituant $x = a + \beta t + \alpha u$, $y = b - \alpha t + \beta u$, dans l'équation (S), et faisant, pour abréger,

$$\frac{n^2}{m^2} = \nu^2,\quad \frac{m^2 - n^2}{m^2} = 1 - \nu^2 = \mu^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned}(T)\ 0 = b^2 + \nu^2 a^2 - 2\nu^2 ma + 2t(\nu^2\beta a - \alpha b - \nu^2\beta m) \\ + 2u(\beta b + \nu^2\alpha a - \nu^2\alpha m) + t^2(\alpha^2 + \nu^2\beta^2) \\ + u^2(\beta^2 + \nu^2\alpha^2) - 2\mu^2\alpha\beta . tu;\end{aligned}$$

ce qui, après avoir substitué

$$b^2 = \nu^2 a(2m - a),\quad \alpha = \frac{\sqrt{a(2m-a)}}{\sqrt{[n^2 + \mu^2 a(2m-a)]}},$$

$$\beta = \frac{\nu(m-a)}{\sqrt{[n^2 + \mu^2 a(2m-a)]}},\quad \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

et après avoir fait, pour abréger,

$$n^2 + \mu^2 a\,(2m - a) = q^2, \text{ donne}$$

$$(\mathrm{T})\ 0 = -2t\,.\,\frac{\nu^3 (m-a)^2 + \nu a (2m-a)}{q} - 2tu\,.\,\frac{\mu^2 \nu (m-a)\sqrt{a(2m-a)}}{q^2}$$

$$+ t^2 \left(1 - \frac{\mu^2 \nu^2 (m-a)^2}{q^2}\right) + u^2 \left(1 - \frac{\mu^2 a (2m-a)}{q^2}\right), \text{ ou bien}$$

$$(\mathrm{T})\ 0 = -2\nu q\,.\,t - 2\mu^2 \nu\,.\,tu\,\frac{(m-a)\sqrt{a(2m-a)}}{q^2}$$

$$+ \frac{\nu^2 n^2 + \mu^2 (1+\nu^2)\, a (2m-a)}{q^2}\, t^2 + \frac{n^2}{q^2}\, u^2.$$

Cette équation donne

$$u^2 = \frac{2\nu q^3}{n^2}\, t + \frac{2\mu^2 \nu (m-a)\sqrt{a(2m-a)}}{n^2}\, tu - \frac{\nu^2 n^2 + \mu^2 (1+\nu^2)\, a (2m-a)}{n^2}\, t^2,$$

$$\text{et } \frac{u^2 + t^2}{2t} = \frac{\nu q^3}{n^2} + \frac{\mu^2 \nu (m-a)\sqrt{a(2m-a)}}{n^2}\, u + \frac{\mu^2 (n^2 - (1+\nu^2)\, a (2m-a))}{2n^2}\, t.$$

Faisant donc $t = 0$ et $u = 0$, on obtient le rayon osculateur $z = \frac{\nu q^3}{n^2} = \frac{q^3}{mn}$: ce qui est parfaitement conforme à sa valeur trouvée par la formule vulgaire $\frac{\partial s^3}{-\partial x \partial\partial y}$. En effet, nous avons vu que $\partial s^2 = \frac{q^2 \partial x^2}{2ma - a^2}$, $y\partial y = \nu^2 (m - x)\,\partial x$, ce qui donne $\partial y^2 + y \partial\partial y = -\nu^2 \partial x^2$, donc

$$\partial\partial y = -\frac{\nu^2 \partial x^2}{y} - \frac{\partial y^2}{y} = -\nu^2 \partial x^2\, \frac{y^2 + \nu^2 (m-x)^2}{y^3} = \frac{-\nu m^2 \partial x^2}{(2ma - a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donc $\frac{\partial s^3}{-\partial x \partial\partial y} = \frac{q^3}{\nu m^2} = \frac{q^3}{mn}$.

§. 50. La théorie des *Maxima* et *Minima* est une suite immédiate du théorème de *Taylor*, ou de la formule qui définit l'angle formé par la tangente et l'axe des abscisses (§. 38.), selon qu'on regarde cet objet analytiquement ou géométriquement. Ayant donc prouvé l'un et l'autre sans la notion de l'infini, il serait inutile de nous y arrêter plus longtems. En général, on verra aisément que, les formules fondamentales ayant été démontrées, tout le reste qui regarde les règles du calcul différentiel et intégral, en suit nécessairement.

§. 51. Pour ce qui regarde la différentiation, non pas d'une fonction donnée, mais d'une quantité appartenante à la physique ou à quelque partie des mathématiques mixtes, dont l'expression analytique n'est pas connue, mais doit être trouvée par l'intégration de sa différentielle; c'est proprement un objet, non pas de l'analyse, mais de la science qui a fourni le problème. Cependant, nous en avons donné l'application à quelques problèmes de géométrie, et il ne sera pas inutile, de montrer que notre méthode donne les formules fondamentales de la mécanique, sans avoir recours à l'infiniment petit: ce qui servira en même tems de modèle pour toutes les autres sciences mathématiques.

§. 52. Lorsqu'un corps est en mouvement, il se transporte d'un point A à un autre B, et la loi de continuité exige que, pour parvenir de A en B, il ait parcouru une ligne (soit droite, soit courbe), terminée par ces deux points A, B. Dans ce mouvement il se présente plusieurs objets: 1) l'espace parcouru s lequel n'est autre chose que l'arc (ou, le corps n'étant sollicité par aucune force, la ligne droite) terminé par les deux points A, B; 2) le tems t pendant lequel cet espace est parcouru, parce qu'il faut du tems, pour qu'un effèt physique soit produit. Le mouvement uniforme qui se fait selon la simple loi d'inertie, durerait par sa nature éternellement, comme la rotation des corps célestes: on peut donc choisir pour t telle partie du tems infini qu'on voudra, et le mouvement continuant toujours, s croit sans cesse avec t. Mais, plusieurs corps K, k, étant en mouvement, on s'apperçoit aisément que, quoique dans chacun l'espace parcouru s'accroisse avec le tems, le rapport dans lequel celà se fait, n'est pas le même dans tous les corps, mais que, l'espace S parcouru par le corps K croissant de ΔS dans le tems suivant Δt, celui parcouru par k n'augmente dans le même tems que de Δs, de sorte que $\Delta S > \Delta s$, et le rapport $\frac{\Delta S}{\Delta t} > \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Dans ce cas, on appelle le mouvement de K plus vite que celui de k, et c'est de cette manière que s'est formé une nouvelle notion, composée de l'espace et du tems, qu'on appelle *vitesse*, et que nous désignerons par v. C'est donc le rapport de l'accroissement de l'espace à celui du tems, qui ne peut être exprimé analytiquement que par $\frac{\Delta s}{\lambda \Delta t}$ ou $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$.

§. 53. On dit que le mouvement est *uniforme*, lorsque la vitesse v est constante, ce qui arrive, quand aucune force n'agit sur le corps. Dans ce cas, la même vitesse a lieu, non seulement dans l'espace Δs immédiatement suivant, mais durant tout le mouvement s ou t: de sorte qu'on a pour le mouvement uniforme, non seulement $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$, mais $\frac{s}{t} = v$, ce qui est le caractère essentiel de ce mouvement.

Ceci a une ressemblance frappante avec ce que nous avons dit par rapport aux différences des lignes droites (§. 11.). En effet, désignant le tems par les abscisses, l'espace parcouru par les ordonnées, la courbe deviendra une ligne droite, lorsque le mouvement est uniforme. Qu'on choisisse un tems quelconque, par ex. une minute, pour l'unité universelle de tous les tems, qu'on lui donne sur
Tab. IV. Fig. 8. l'axe des abscisses AP telle grandeur AB qu'on voudra, par ex. un pouce, de sorte que AB est l'unité pour le tems: qu'on choisisse ensuite une vitesse quelconque pour l'unité des vitesses, par ex. celle avec laquelle les corps décrivent une toise en une minute. Pour un corps qui se meut avec cette vitesse $= 1$, on fait donc $BC = AB$, et tire la droite ACM: alors, pour chaque tems donné $t = n$ minutes, on a $AP = n . AB$, et $PM = AP = n . AB = n\ BC$, donc, $AP = t$, $PM = s = t$, et la vitesse $v = \frac{s}{t} = 1$. On

aurait pu choisir une autre ligne qu'un pouce, pour l'unité des espaces s, ou pour représenter la toise. Alors BC, au lieu d'être égale à AB, eût été $BC = m . AB$, et on aurait eu pareillement $AP = n . AB$, $PM = n . BC = nm . AB$, donc la vitesse $\frac{s}{t} = \frac{PM}{AP} = \frac{mn . AB}{n . AB} = m = \frac{BC}{AB} = 1$. Pour un autre corps qui ne parcourt qu'une demie-toise en une minute, on fait $BD = \frac{1}{2} BC$; et ayant mené la droite ADN, on a $PN = \frac{1}{2} PM = s$, et sa vitesse $v = \frac{s}{t} = \frac{\frac{1}{2} PM}{AP} = \frac{1}{2}$. On voit donc, que les vitesses sont exprimées par les tangentes des angles MAP, NAP.

§. 54. Comme d'après la loi d'inertie, chaque corps, étant une fois mis en mouvement, le continue éternellement, sauf les obstacles extérieurs, les quantités, s, t, augmentent à l'infini; par conséquent, la quantité du mouvement ne peut être assignée ni par s ni par t seul, mais par la combinaison ou le rapport de ces deux quantités, c'est à dire, par la vitesse. C'est ce qui a également lieu, lorsque le corps est poussé par un choc ou une force quelconque. L'essentiel des forces consiste à mouvoir un corps; et ce mouvement est, en vertu de l'inertie, éternel, quand même les forces n'agissent plus: par conséquent, l'intensité de la force ne peut être déterminée par s ou t seul, mais par leur rapport ou la vitesse.

L'effèt d'un choc consiste à communiquer au corps un certain degré de vitesse; un choc p sera deux ou trois fois aussi grand qu'un autre q, s'il communique au même corps une vitesse deux ou trois fois plus grande que q: celà veut dire, que l'intensité du choc p est proportionelle à la vitesse qu'il communique; donc $v = \lambda p$, λ étant un coëfficient constant, sur lequel l'expérience doit consulter la nature, parcequ'il n'est pas fondé sur les loix du mouvement, mais sur l'échelle arbitraire que l'Auteur de la nature a choisie. Il en est de même d'une force P qu'on peut regarder comme une percussion permanente. Ce qu'on appelle *force* dans la mécanique, se distingue du choc, en ce qu'elle communique de la vitesse, non pas une seule fois, mais d'après la loi de continuité dans chaque instant une nouvelle vitesse, par conséquent, dans le tems Δt une somme de nouvelles vitesses, laquelle sera d'autant plus grande que l'action dure plus longtems, et qui sera évidemment proportionelle à cette durée, si la force ne change pas pendant ce tems, de sorte que tous les coups qu'elle donne, sont de la même vigueur. La vitesse Δv communiquée pendant le tems Δt, est donc proportionelle, non seulement à la force P, mais aussi au tems Δt: donc $\Delta v = \lambda P . \Delta t$, ou $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lambda P$.

§. 55. Cette équation donne une idée nette et précise, quand P est une force *constante* qui ne change pas avec le tems, ou qui en est indépendante. Dans un pareil cas, on peut substituer dans la formule $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lambda P$, au lieu de Δt, Δv, telle valeur qu'on voudra, ce qui veut dire, que ce rapport est indépendant de la grandeur de Δt, Δv : on peut donc également substituer le rapport $\frac{\partial v}{\partial t}$ qui est aussi indépendant de ces quantités, de sorte que $\frac{\partial v}{\partial t} = \lambda P$ ou $\partial v = \lambda P \partial t$, ce qui, étant intégré, donne $v = \lambda P t$. Mais si P est une force variable, c'est à dire, une fonction du tems, telle que $P = \alpha + \beta t + \gamma t^2 +$ cet. le résultat n'est plus le même : ce n'est plus P qui agit durant le tems Δt, c'est $P + \Delta P$, ΔP étant la somme de tous les accroissemens que P a pris pendant le tems Δt. Mais cette force $P + \Delta P$ n'a pas agi non plus durant tout le tems Δt : d'abord ce n'était que la force P, dans l'instant suivant une force P', et ainsi de suite, jusqu'à la force $P + \Delta P$ qui a agi dans le dernier instant. Mais, P et $P + \Delta P$ étant les deux extrêmes, il est visible que le même effet peut être produit par une force P' qui, tenant le milieu entre P et $P + \Delta P$, aurait agi uniformement durant tout le tems Δt ; de sorte qu'on a, en vertu de ce que nous avons prouvé des forces constantes (§. 54.), $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lambda P'$. Sans connaître cette forc intermédiaire P′, il est évident que sa différence d'avec la force P croîtra ou diminuera avec le tems Δt, parceque P change d'un moment à l'autre, que par conséquent, cette différence sera fonction du tems Δt, de sorte que son expression analytique aura cette forme $P' - P = p \,.\, \Delta t + q \,.\, \Delta t^2 +$ cet. p, q, étant des fonctions dépendantes de la loi que suit la variation de la force P, fonctions que nous n'avons pas besoin de connaitre. En effèt, nous avons $P' = P + p \Delta t +$ cet. et $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lambda P' = \lambda(P + p \,.\, \Delta t +$ cet.$)$ valeur tout à fait vague, vû qu'elle dépend de la quantité arbitraire Δt, mais la partie déterminée de ce rapport, celle qui ne dépend point de la quantité Δt, est $\frac{\partial v}{\partial t} = \lambda P$, ou $\partial v = \lambda P \partial t$.

§. 56. Quand on veut appliquer l'expression de la vitesse (§. 52. 53.) aux forces, on voit facilement que,
Tab IV. deux valeurs de t et s étant données, savoir AB et BC,
Fig. 8. il n'est pas permis de tirer une ligne droite par les points A, C, mais que ACM sera une courbe. Cependant, la notion que nous nous formons de ce qu'on appelle la
Fig. 3. vitesse du corps en M, ne peut être exprimée que par le rapport qui existe entre l'espace parcouru depuis M, et le tems écoulé (§. 52.), ce qui donnerait pour le mouvement sollicité par des forces, $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{m\mu}{Mm} = \operatorname{tang} mM\mu$, comme dans le mouvement uniforme (§. 53.), ou bien

$v = \frac{n\nu}{Mn} =$ tang $n\,M\,\nu$, de sorte qu'on aurait autant de valeurs différentes, qu'on peut concevoir de points μ, ν, etc. dans la courbe. Mais, on n'a qu'à se rappeler ce que nous avons dit des tangentes (§. 38.). Ce n'est pas la vitesse depuis M jusqu'à μ ou ν, qu'on cherche; c'est celle dans le point M seul, laquelle, comme nous l'avons dit (§. 44.), n'a besoin que d'un moment, ou d'un seul point de la courbe décrite par le corps, pour se manifester ou produire son effèt: il faut donc que l'idée d'un autre point μ ou ν soit tout à fait écartée de l'expression de tang $\mu\,M\,m$ ou de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, il faut que $\mu\,M\,m$ ne soit pas l'angle formé par la corde $M\mu$, mais par la tangente Mt; c'est à dire, qu'il faut prendre la seule partie du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, qui est indépendante de la distance arbitraire des points μ, ν, ou de la quantité Δt: et c'est ce qui se fait en substituant $\frac{\partial s}{\partial t}$ au lieu de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. On a donc généralement, quelle que soit la force P, $v = \frac{\partial s}{\partial t}$; et l'on peut se convaincre de la justesse de cette équation encore par le raisonnement suivant. On comprend sous le mot de *vitesse* le rapport de l'éspace, parcouru avec cette vitesse, au tems employé: par conséquent, dans le point M, où $AP = t$, $PM = s$, la vitesse serait $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, ce qui exprime en effèt la vitesse pendant Δt ou par $M\mu$. Mais comme elle change continuellement depuis M jusqu'à μ (parceque la force ne cesse pas d'agir), $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ n'exprime pas une seule vitesse, mais tous les différens degrés de vitesse, qui ont lieu pendant Δt, ou de M en μ, de sorte que $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ sera le milieu entre toutes ces vitesses; elle sera donc moindre que la vitesse en μ, et plus grande que celle en M, si la force va en augmentant; ou vice versa, si elle décroit. Pour déduire donc de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ la seule vitesse qui a lieu en M, il n'en faut garder que sa partie indépendante des points suivans μ, ν, ou de la grandeur des différences, c'est à dire, qu'il faut poser $v = \frac{\partial s}{\partial t}$.

§. 57. Cette expression de la vitesse $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ est une fonction de t, si le mouvement est sollicité par des forces, c'est à dire, le corps a une autre vitesse en M qu'en A, une autre en μ qu'en M, etc. et cette fonction se trouve par la première différentiation de la fonction s, conformement aux règles vulgaires. Nous avons donc deux équations différentielles entre t, v, et s, savoir $v = \frac{\partial s}{\partial t}$, et $\partial v = \lambda P \partial t$ (§. 55.). Pour en trouver une entre t et s seulement, il faut éliminer v, ce qui se fait, en intégrant la seconde, et substituant cet intégral à la place de v dans la première, ou en substituant la différentielle de la première ∂v dans la seconde. Le dernier moyen est plus simple, parce qu'on n'a qu'à prendre la différence complète de v, qui sera donnée par les puissances de Δt, vû que v est fonction de t. Mais comme le but de tout celà est, de tirer de ces formules différentielles les valeurs absolues de s, v, etc. par l'intégration ordinaire, et que les règles de celle-ci supposent toujours, qu'on n'a conservé que la partie des rapports, qui est indépendante de la grandeur des différences, il faut rejeter de $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ tous les termes multipliés par Δt, ce qui réduit cette opération à la différentiation vulgaire (§. 19.) Ayant trouvé de cette manière $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)}{\partial t}$, on substitue cette valeur dans l'autre équation $\frac{\partial v}{\partial t} = \lambda P$, ce qui donne $\frac{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)}{\partial t} = \lambda P$, ou pour la rendre propre à être intégrée (§. 20.), $\partial\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) = \lambda P . \partial t$: la première intégration donne $\frac{\partial s}{\partial t} = \lambda . \int P \partial t$, et la seconde

$$s = \lambda \int \partial t \;.\; \int P \,\partial t.$$

Puisque dans les intégrations consécutives, comme celle-ci, il est nécessaire de savoir, quelle différentielle est supposée constante, on prend ordinairement, dans ces formules de mécanique, ∂t pour constante, ce qui donne, d'après les règles vulgaires, $\partial\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) = \frac{\partial \partial s}{\partial t}$, par conséquent, $\partial \partial s = \lambda P \partial t^2$, ce qui est la forme qu'on donne ordinairement à cette équation.

Nous avons donc trouvé les trois équations fondamentales de la mécanique :

1) $v = \frac{\partial s}{\partial t}$;

2) $\frac{\partial v}{\partial t} = \lambda P$;

3) $\frac{\partial \partial s}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$;

d'où l'on tire la quatrième $\partial \partial s = \lambda P \partial t^2$.

ANOMALIAE VERAE PER MEDIAM DETERMINATIO.

AUCTORE

LITTROW.

Conventui exhibuit die 2 Nov. 1814.

Nullum forsitan, qua late patet astronomia, invenietur problema, in quo enucleando plus desudarint geometrae, quam hoc, quo anomalia vera per mediam definitur. Posteaquam *Keplerus* leges motus, quo planetae circa solem feruntur, felicissimo successu et divina quadam mente detexerit, primus etiam problemati nostro operam suam novavit methodumque ad illud solvendum indirectam in usum vocavit, cum directam ejus solutionem, ut ipsius verbis utar, propter sinus et arcus ἑτερογενείαν, invenire non potuit. Patrem astronomiae recentioris, a quo etiam problema nostrum nomen problematis *Kepleriani* nactus est, magna sectatorum secuta est caterva, inter quos celeberrima nomina virorum de astronomia quam optime meritorum, *Gregory*, *Wallis*, *Keill*, *Machin*, *Newton*, *Simpson* totque aliorum elucent, qui eandem rem variis viis aggredientes, geometricas constructiones curvarum, vel Cycloidis, vel Quadratricis *Tschirnhausenii*, vel curvae, quae vocatur sinarum et in usum vocantes, solvere conati sunt, quae autem solutiones fere omnes ad calculum commode absolvendum nequaquam fuerunt adaptatae. Missis proinde his solutionibus primo, ni fallor, maximo *Newtono* in mentem venit, anomaliam veram per mediam ope seriei infinitae exhibere, quae si ratio excentricitatis ad axem majorem non ita magna sit et commodiori calculo absolvitur et, ni revera directa methodo inventa sit, speciem tamen quandam directae solutionis prae se ferre videtur. Haec autem series, quamvis a diversis auctoribus diversimode expressa sit, ita e. g. *Camerer* eam per potentias sinuum anomaliae simplicis exhibere studuit (Berliner Jahrbuch 1794) nihilominus semper eo laboravit incommodo, ut, singulis terminis quam maxime intricatis, lege simplici, qua quousque libet continuari posset, prorsus carere videretur, cui incommodo mederi primo conatus est *Lagrange* (Mém. de l'Acad. de Berlin 1769.), quem post triginta fere et quinque annos secutus est *Oriani* (Opuscoli astronomici di *Barnaba Oriani*), qui primus omnium legem nostrae progressionis clare enuntiavisse censendus est. Cum autem persuasum habeam, eandem legem etiam alia, forsan simpliciori, saltem breviori, ratione exprimi posse, hanc eandem rem iterum resumere et quae mihi quaerenti sese obtulerunt, hic proponere operae pretium duxi.

§. 1. Ac primo quidem, ut a facilioribus ordiamur, quaeramus anomaliam mediam per datam veram.

Designando anomaliam mediam, excentricam et veram eodem ordine per m, e et ω et rationem excentricitatis ad dimidium axem majorem per ε, habebitur, anomaliis a puncto perihelii computatis, ut constat,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} &= \operatorname{tg}\frac{e}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \\ m &= e - \varepsilon \sin e \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Ex quibus binis aequationibus earumque debita conjunctione omnia, quae sequuntur, petenda sunt.

Jam ex prima aequatione invenitur methodo satis nota vel

$$\left.\begin{aligned} \frac{e}{2} &= \frac{\omega}{2} - \alpha\sin\omega + \frac{\alpha^2}{2}\sin 2\omega - \frac{\alpha^3}{3}\sin 3\omega + \text{etc.} \\ &\text{vel etiam} \\ \frac{\omega}{2} &= \frac{e}{2} + \alpha\sin e + \frac{\alpha^2}{2}\sin 2e + \frac{\alpha^3}{3}\sin 3e + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

ubi $\alpha = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, quibus seriebus, ut aliunde notis, non immoror.

Ponamus jam quantitatem $\frac{\alpha\sin\omega}{1+\alpha^2+2\alpha\cos\omega}$ aequalem esse seriei sequenti:

$$A\sin\omega - B\sin 2\omega + C\sin 3\omega - \text{etc.}$$

unde pro determinandis factoribus A, B, C . . habebimus:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\sin\omega \\ &- [(1+\alpha^2)A - \alpha B]\sin\omega \\ &+ [(1+\alpha^2)B - \alpha A - C\alpha]\sin 2\omega - \text{etc.} \end{aligned}$$

et hinc aequationes conditionum:

$$A(1+\alpha^2)=\alpha(1+B)$$
$$B(1+\alpha^2)=\alpha(A+C)$$
$$C(1+\alpha^2)=\alpha(B+D)$$
etc.

ubi facile videmus, his aequationibus satisfieri, ponendo

$$A=\alpha$$
$$B=\alpha^2$$
$$C=\alpha^3$$
etc.

et unde tandem concluditur fore:

$$\frac{\alpha \sin\omega}{1+\alpha^2+2\alpha\cos\omega}=\alpha[\sin\omega-\alpha\sin 2\omega+\alpha^2\sin 3\omega-\alpha^3\sin 4\omega+\text{etc.}].$$

Cum autem prima aequationum (I) sit:

$$\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}=\left(\frac{1-\cos e}{1+\cos e}\right)\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

erit, eruto valore quantitatis $\cos e$,

$$\cos e=\frac{\varepsilon+\cos\omega}{1-\varepsilon\cos\omega} \text{ et hinc } \sin e=\frac{\sin\omega.\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\varepsilon\cos\omega},$$

vel cum $\varepsilon=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$,

$$\sin e=\frac{(1+\alpha^2)\sin\omega}{1+\alpha^2+2\alpha\cos\omega}.$$

Substituto proinde valore invento quantitatis:

$$\frac{\sin\omega}{1+\alpha^2+2\alpha\cos\omega},$$

habebitur:

$$\sin e=(1-\alpha^2)(\sin\omega-\alpha\sin 2\omega+\alpha^2\sin 3\omega-\text{etc.}).$$

Substitutis denique valoribus quantitatum e et $\sin e$ in aequatione $m=e-\varepsilon\sin e$, obtinebitur

$$
\begin{aligned}
m = \omega - 2\,\varepsilon \sin\omega &+ 2\,\alpha\,(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\alpha)\sin 2\,\omega \\
&- 2\,\alpha^2\,(\varepsilon - \tfrac{2}{3}\alpha)\sin 3\,\omega \\
&+ 2\,\alpha^3\,(\varepsilon - \tfrac{3}{4}\alpha)\sin 4\,\omega \\
&- 2\,\alpha^4\,(\varepsilon - \tfrac{4}{5}\alpha)\sin 5\,\omega \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}
$$

qua proinde serie anomalia media per veram exhibetur.

Aliam ejusdem seriei demonstrationem dedit *Rohde* (IV. Supplementband der Berl. astron. Jahrbücher), quamvis nescio quo errore per eandem seriem problema inversum, quod multo difficilius est, non absque ὑψηγοριᾳ sé omnium primum solvisse praefatus sit, cum tamen ne nostrum quidem problema primus absolvit, cujus nimirum solutio jam longe antea ab Ill. *Laplace* (Mec. céleste Liv. II. N°. 16.) data fuerat.

§. 2. Simplicissima nostri problematis solutio habebitur si valor quantitatis $\operatorname{tg}\frac{e}{2}$, ope secundae aequationum (I) in prima substituatur. Invenitur autem per methodum satis superque notam ex aequatione secunda:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\tfrac{e}{2} &= \operatorname{tg}\tfrac{m}{2} + \varepsilon\operatorname{tg}\tfrac{m}{2} + \frac{\varepsilon^2}{1.2\,\partial m}\,\partial\,.\,(1 - \cos m) \\
&+ \frac{\varepsilon^3}{1.2.3\,\partial m^2}\,\partial^2.(\sin m(1-\cos m)) + \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4\,\partial m^3}\,\partial^3.(\sin^2 m(1-\cos m)) + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Ante omnia ergo quaerendi sunt valores quantitatum

$$\frac{\partial^{n+1}.\sin^n m}{\partial m^{n+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{n+1}.(\sin^n m\cos m)}{\partial m^{n+1}}.$$

1. *Pro quantitate prima.*

Posito brevitatis causa:

$$n = n_1$$
$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = n_2$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = n_3$$
etc.

habebitur

$$2^n \cos^n x = \cos nx + n_1 \cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x + n_3 \cos(n-6)x + \text{etc.}$$

unde facile concluditur fore, si n est numerus impar:

$$\pm 2^n \cdot \frac{\partial^{n-2} \cdot \cos^n x}{\partial x^{n-2}}$$
$$= n^{n-2} \sin nx + n_1 (n-2)^{n-2} \sin(n-2)x + n_2 (n-4)^{n-2} \sin(n-4)x + \text{etc.}$$

signum superius, si $n-2$ est formae sequentis $2(2p+1)+1$
— — inferius — — — — — $2(2p)+1$

et si n est numerus par:

$$\pm 2^n \cdot \frac{\partial^{n-2} \cos^n x}{\partial x^{n-2}}$$
$$= n^{n-2} \cos nx + n_1 (n-2)^{n-2} \cos(n-2)x + n_2 (n-4)^{n-2} \cos(n-4)x + \text{etc.}$$

signum superius, si $n-2$ est $2(2p)$
— — inferius — — — $2(2p+1)$.

Jam ponatur $x = 90 - m$, unde pro quacunque quatuor praecedentium aequationum e. g. pro prima, ubi $n-2 = 2(2p+1)+1$, habebitur

$$\frac{2^n \cdot \partial^{n-2} \cos^n x}{\partial x^{n-2}} = -\frac{2^n \cdot \partial^{n-2} \sin^n m}{\partial m^{n-2}}$$
$$n^{n-2} \sin n(90-m) + n_1 (n-2)^{n-2} \sin(n-2)(90-m)$$
$$+ n_2 (n-4)^{n-2} \sin(n-4)(90-m) + \text{etc.}$$

Cum autem nostro casu sit n vel 5 vel 9 vel 13.. erit

$$\sin n\ (90 - m) = \cos n\, m$$
$$\sin (n - 2)(90 - m) = - \cos (n - 2) m$$
$$\sin (n - 4)(90 - m) = \cos (n - 4) m$$
$$\sin (n - 6)(90 - m) = - \cos (n - 6) m$$
etc.

unde demum concluditur fore

$$\frac{\partial^{n-2} . \sin^n m}{\partial m^{n-2}} = -\frac{1}{2^n}[n^{n-2} \cos n\, m - n_1 (n-2)^{n-2} \cos (n-2) m + n_2 (n - 4)^{n-2} \cos (n - 4) m - \text{etc.}]$$

et hinc per triplicem differentiationem

$$\frac{\partial^{n+1} . \sin^n m}{\partial m^{n+1}} = -\frac{1}{2^n}[n^{n+1} \sin n\, m - n_1 (n-2)^{n+1} \sin (n-2) m + n_2 (n - 4)^{n+1} \sin (n - 4) m - \text{etc.}]$$

II. *Pro altera quantitate.*

Multiplicata aequatione supra adhibita

$$2^n \cos^n x = \cos n\, x + n_1 \cos (n - 2) x + n_2 \cos (n - 4) x + \text{etc.}$$

per $2 . \sin x$, obtinebitur

$$\begin{aligned} 2^{n+1} \cos^n x \sin x = \ & [\sin (n + 1) x - \sin (n - 1) x] \\ & + n_1 [\sin (n - 1) x - \sin (n - 3) x] \\ & + n_2 [\sin (n - 3) x - \sin (n - 5) x] \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

unde saepius differentiando et, uti pro prima parte factum erat, non nisi casum primum, quo $n = 2 (2 p + 1)$, adhibendo, id quod ad expressionem generalem eliciendam sufficit, facile habebitur

$$-\frac{2^{n+1}.\partial^{n+1}.\cos^n x\ \sin x}{\partial x^{n+1}}$$

$$=[(n+1)^{n+1}\cos(n+1)x-(n-1)^{n+1}\cos(n-1)x]$$

$$+n_1[(n-1)^{n+1}\cos(n-1)x-(n-3)^{n+1}\cos(n-3)x]$$

$$+n_2[(n-3)^{n+1}\cos(n-3)x-(n-5)^{n+1}\cos(n-5)x]$$

$+$ etc.

Posito autem $x=90-m$, erit

$$\cos(n+1)x = \sin(n+1)m$$

$$\cos(n-1)x=-\sin(n-1)m$$

$$\cos(n-3)x = \sin(n-3)m$$

etc..

III. *Substitutis denique valoribus inventis in aequatione:*

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon)\operatorname{tg}\frac{m}{2}$$

$$+\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.\Sigma\frac{\varepsilon^{n+1}\,\partial^{n+1}}{1.2.3..(n+2)\partial m^{n+1}}[\sin^n m\,(1-\cos m)],$$

ubi signum Σ indicat, pro n ordine naturali ponendos esse numeros $0, 1, 2, 3$ etc. erit expressio nostra quaesita, omnibus scilicet rite reductis,

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon)\operatorname{tg}\frac{m}{2}+\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{\varepsilon^{n+2}}{1.2.3..(n+2)2^{n+1}}\times$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}(n+1)^{n+1}\sin(n+1)m-2n^{n+1}\sin nm\\ -(n-1)^{n+2}\sin(n-1)m+2(n-2)^{n+1}\sin(n-2)m\\ +(n-3)^{n+2}.\frac{n}{1.2}.\sin(n-3)m-2(n-4)^{n+1}\sin(n-4)m\\ -(n-5)^{n+2}.\frac{n(n-1)}{1.2.3}.\sin(n-5)m+2(n-6)^{n+1}\sin(n-6)m\\ +(n-7)^{n+2}.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}.\sin(n-7)m-2(n-8)^{n+1}\sin(n-8)m\end{array}\right\}$$

$-$ etc..

ubi $n=0, 1, 2, 3$ etc.

Hac proinde ratione, si ad quintam duntaxat excentricitatis potestatem procedere animus est, habebis:

$$\operatorname{tg} \tfrac{\omega}{2} = \left(\tfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} (1+\varepsilon) \operatorname{tg} \tfrac{m}{2}$$
$$+ \left(\tfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon^2}{2} \sin m + \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2 \sin 2m - \sin m) \\ + \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^2} (3^3 \sin 3m - 2^4 \sin 2m - \sin m) \end{array} \right\}.$$

§. 3. Series in §. praecedenti inventa satis quidem simplex est et calculo haud omnino incommodo absolvi potest, eo autem laborat incommodo, quod loco ipsius anomaliae verae non nisi tangentem hujus quantitatis exhibeat, unde in calculo perturbationum, quas planetae ab aliis sibi vicinis patiuntur, omni fere usu destituitur. Restat proinde, ut anomaliam veram per seriem exprimamus, quae secundum sinus multiplorum anomaliae mediae incedit, id quod duplici modo fieri potest.

Quaeratur primo ex prima aequationum (I.) valor quantitatis ω per sinus multiplorum anguli e, quam seriem nomine *primae* insigniemus.

Deinde ex altera aequationum (I.) quaeratur e per sinus multiplorum anguli m, unde series *altera* redundat.

Postremo ope ejusdem aequationis quaeratur $\sin ne$ per sinus multiplorum anguli e, unde series *tertia* orietur.

Substituta deinde serie secunda et postrema, in prima, habebitur series quarta, quae valorem ipsius ω per sinus multiplorum anguli m exprimit. Haec quarta series erit series nostra quaesita, qua problema datum resolvitur.

His constitutis, singulis nunc partibus problematis nostri invigilandum est.

I. Prima series jam §. 1. (aequat. II.) inventa est et ita se habet:

$$\frac{\omega}{2} = \frac{e}{2} + \alpha \sin e + \frac{\alpha^2}{2} \sin 2e + \frac{\alpha^3}{3} \sin 3e + \text{etc.}$$

ubi $\alpha = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$.

II. Altera aequationum ζ methodo nota tractata praebet sequentem:

$$e = m + \varepsilon \sin m + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot \partial m} \partial \cdot \sin^2 m \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \partial^2 \cdot \sin^3 m + \text{etc.}$$

Supra autem (§. 2. N°. I.) inventum fuerat:

$$\frac{\partial^{n-2} \cdot \sin^n m}{\partial m^{n-2}} = -\frac{1}{2^n} [n^{n-2} \cos nm - n_1 (n-2)^{n-2} \cos(n-2)m + \text{etc.}],$$

quae aequatio differentiata in sequentem abit

$$\frac{\partial^{n-1} \cdot \sin^n m}{\partial m^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \left\{ \begin{array}{l} n^{n-1} \sin nm - n_1 (n-2)^{n-1} \sin(n-2)m \\ \quad + n_2 (n-4)^{n-1} \sin(n-4)m - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

unde demum concluditur fore:

$$e = m + \Sigma \frac{\varepsilon^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot n \cdot 2^n} \left\{ \begin{array}{l} n^{n-1} \sin nm - n_1 (n-2)^{n-1} \sin(n-2)m \\ \quad + n_2 (n-4)^{n-1} \sin(n-4)m - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

ubi n est 1, 2, 3, 4, etc., ita quidem ut sit

$$e = m + \varepsilon \sin m$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} \sin 2m$$
$$+ \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2} (3^2 \sin 3m - 3 \sin m)$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^3} (4^3 \sin 4m - 4 \cdot 2^3 \sin 2m)$$
$$+ \text{etc.}$$

quae est series secunda.

III. Eodem modo ope secundae aequationum (I.) invenitur

$$\frac{1}{n} \sin ne = \frac{1}{n} \sin nm + \varepsilon \sin n \cos nm$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot \partial m} \partial \,.\, [\sin^2 m \cos nm]$$
$$+ \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial m^2} \partial^2 \,.\, [\sin^3 m \cos nm]$$
$$+ \text{etc.}$$

cujus seriei terminus generalis est

$$\frac{\varepsilon^\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \,..\, \pi \;\; \partial m^{\pi-1}} \,.\, \partial^{\pi-1} \,.\, [\sin^\pi m \cos nm].$$

Est autem per eandem aequationem, qua supra usi sumus

$$2^\pi \cos^\pi x \cos nm = \cos \pi x \cos nm + \frac{\pi}{1} \,.\, \cos(\pi - 2) x \cos nm$$
$$+ \frac{\pi(\pi-1)}{1 \cdot 2} \cos(n - 4) x \cos nm + \text{etc.}$$

Posito deinde $x = 100 - n$ erit pro $\pi = 5, 9, 13, 17$ etc.

$$\cos \pi x = \sin \pi m$$
$$\cos(\pi - 2) x = - \sin(\pi - 2) m$$
$$\cos(\pi - 4) x = \sin(\pi - 4) m$$
$$\text{etc.}$$

unde series praecedens est:

$$2^\pi \sin^\pi m \cos nm = \sin \pi m \cos nm - \pi \sin(\pi - 2) \cos nm$$
$$+ \frac{\pi(\pi-1)}{1 \cdot 2} \sin(\pi - 4) m \cos nm - \text{etc.}$$

et hinc, singulis productis in factores simplices resolutis,

$$
\begin{aligned}
2^{\pi+1}\sin^{\pi} m \cos nm = & \; [\sin(\pi+n)m + \sin(\pi-n)m] \\
& - \pi [\sin(\pi-2+n)m + \sin(\pi-2-n)m] \\
& + \frac{\pi(\pi-1)}{1.2}[\sin(\pi-4+n)m + \sin(\pi-4-n)m] \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Comparatis deinde differentialibus hujus seriei quartis, octavis, duodecimis etc., erit

$$
\frac{\varepsilon^{\pi}.\partial^{\pi-1}.\sin^{\pi} m \cos nm}{1.2.3\ldots\pi.\partial m^{\pi-1}} =
$$

$$
= \frac{\varepsilon^{\pi}}{1.2.3..\pi.2^{\pi+1}} \cdot \left\{
\begin{aligned}
& (\pi+n)^{\pi-1}\sin(\pi+n)m + (\pi-n)^{\pi-1}\sin(\pi-n)m \\
& - \pi [(\pi-2+n)^{\pi-1}\sin(\pi-2+n)m \\
& \qquad + (\pi-2-n)^{\pi-1}\sin(\pi-2-n)m] \\
& + \frac{\pi(\pi-1)}{1.2}[(\pi-4+n)^{\pi-1}\sin(\pi-4+n)m \\
& \qquad + (\pi-4-n)^{\pi-1}\sin(\pi-4-n)m] \\
& - \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)}{1.2.3}[(\pi-6+n)^{\pi-1}\sin(\pi-6+n)m \\
& \qquad + (\pi-6-n)^{\pi-1}\sin(\pi-6-n)m] + \text{etc.}
\end{aligned}
\right\}
$$

et hinc facili negotio deducitur, posito $\pi = n$,

$$
\begin{aligned}
& \sin ne = \sin nm + \frac{n\varepsilon}{2}[\sin(n+1)m - \sin(n-1)m] \\
& + \frac{n\varepsilon^2}{1.2.2^2}[(n+2)\sin(n+2)m - 2n\sin nm + (n-2)\sin(n-2)m] \\
& + \frac{n\varepsilon^3}{1.2.3.2^3}\left\{
\begin{aligned}
& (n+3)^2\sin(n+3)m - 3(n+1)^2\sin(n+1)m \\
& + 3(n-1)^2\sin(n-1)m - (n-3)^2\sin(n-3)m
\end{aligned}
\right\} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

IV. Substitutis nunc valoribus inventis quantitatis e (ex N°. II.) et $\sin ne$ (ex N°. III.), in aequatione N°. I., nullo fere negotio habebitur:

$$\omega = m + \Sigma \frac{\varepsilon^n}{1.2\ 3 \ldots n . 2^n} \left\{ \begin{array}{l} n^{n-1} \sin nm - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1} \sin(n-2)m \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1} \sin(n-4)m - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

$$+ \Sigma \frac{2\alpha^n}{n} \left\{ \begin{array}{l} \sin nm + \frac{n\varepsilon}{2}[\sin(n+1)m - \sin(n-1)m] \\ + \frac{n\varepsilon^2}{1.2.2^2}[(n+2)\sin(n+2)m - 2n\sin nm + (n-2)\sin(n-2)m] \\ + \frac{n\varepsilon^3}{1.2.3.2^3}[(n+3)^2\sin(n+3)m - 3(n+1)^2\sin(n+1)m \\ \qquad + 3(n-1)^2\sin(n-1)m - (n-3)^2\sin(n-3)m] \end{array} \right\}$$

ubi $n = 1, 2, 3$ etc.

quae est nostra series quaesita.

Exemplum.

Quaeratur terminus seriei praecedentis, qui non nisi tertias excentricitatis potestates continet.

Ad hunc terminum inveniendum, quaerendi sunt factores quantitatum ε^3, $\alpha\varepsilon^2$, $\alpha^2\varepsilon$, α^3 unde

prima pars seriei dabit pro

$$n = 3 \ldots\ldots \frac{\varepsilon^3}{8}(3\sin 3m - \sin m)$$

altera pars pro $n = 1 \ldots 2\alpha[\sin m + \frac{\varepsilon^2}{8}(3\sin 3m - \sin m)]$

$$n = 2 \ldots \alpha^2\varepsilon(\sin 3m - \sin m)$$

$$n = 3 \ldots \frac{2\alpha^3}{3}\sin 3m.$$

Cum autem $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^3}{8} +$ etc. summa quantitatum praecedentium erit:

$$\frac{\varepsilon^3}{8}(3\sin 3m - \sin m) + \varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\left(\sin m + \frac{\varepsilon^2}{8}(3\sin 3m - \sin m)\right)$$
$$+ \frac{\varepsilon^3}{4}(\sin 3m - \sin m) + \frac{\varepsilon^3}{12}\sin 3m$$

quae, omisso termino $\varepsilon \sin m$, est

$$\tfrac{13}{12}\varepsilon^3 \sin 3m - \tfrac{\varepsilon^3}{4} \sin m$$

et revera eadem quantitas in aequatione centri omnibus nota occurrit.

Hac proinde ratione secundam nostri problematis solutionem nacti sumus ope seriei, cujus lex progressionis nec nimis composita, nec etiam pro evolutione singulorum terminorum numerica nimis molesta est, qua de causa haec solutio caeteris jure mihi proponenda esse videtur.

Sunt autem forsitan, quibus solutio praecedens ob introductionem quantitatis α minus elegans videatur, quamvis eadem sit, cui maxima pars brevitatis, qua solutio ista gaudet, debetur. In eorum igitur gratiam adhuc tertiae solutionis periculum faciamus, qua nimirum anomalia vera per meras quantitates ε et m; nullis aliis quantitatibus auxiliaribus adscitis, quaerenda erit.

§. 4. Haec autem solutio sponte se ex antecedenti offert, si tantum loco quantitatis α^n ejusdem valor

$$\alpha^n = \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^n \left\{ 1 + n\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \tfrac{n(n+3)}{1.2}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^4 + \tfrac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^6 + \tfrac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1.2.3.4}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^8 + \text{etc.} \right\}$$

(vide Mec. céleste Liv. II. N°. 22.) substituatur, cujus terminus generalis est:

$$\frac{n(n+x+1)(n+x+2)\ldots(n+2x-1)}{1.2.3\ldots(x-1).x}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^{2x}.$$

Qua ergo substitutione facta erit omnibus rite reductis:

$$\frac{\omega}{s} = \frac{m}{2} + \Sigma \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{1.2.3..n} \left\{ \begin{array}{l} n^{n-1} \sin nm - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1} \sin(n-2)m \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1} \sin(n-4)m \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-6)^{n-1} \sin(n-6)m \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

$$+ \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n . A^0 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+1} . A^1 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2} (A^2 + A^0 n) \\ + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+3} (A^3 + A^1 n) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+4} \left(A^4 + A^2 n + A^0 . \frac{n(n+3)}{1.2}\right) \\ + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+5} \left(A^5 + A^3 n + A^1 . \frac{n(n+3)}{1.2}\right) \\ + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+6} \left(A^6 + A^4 n + A^2 . \frac{n(n+3)}{1.2} + A^0 . \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\right) \\ + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+7} \left(A^7 + A^5 n + A^3 . \frac{n(n+3)}{1.2} + A^1 . \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\right) \\ + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+8} \left(A^8 + A^6 n + A^4 . \frac{n(n+3)}{1.2} + A^2 . \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3} \right. \\ \qquad \left. + A^0 . \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1.2.3.4}\right) \\ + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+9} \left(A^9 + A^7 n + A^5 . \frac{n(n+3)}{1.2} + A^3 . \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3} \right. \\ \qquad + A^1 . \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1.2.3.4} + \text{etc.} \end{array} \right\} \text{(A)}$$

ubi $n = 1, 2, 3, 4$ etc.

et ubi

$$A^\pi = \frac{1}{1.2.3..\pi} \left\{ \begin{array}{l} (\pi+n)^{\pi-1} \sin(\pi+n)m - \frac{\pi}{1}(\pi+n-2)^{\pi-1} \sin(\pi+n-2)m \\ + \frac{\pi(\pi-1)}{1.2}(\pi+n-4)^{n-1} \sin(\pi+n-4)m \\ - \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)}{1.2.3}(\pi+n-6)^{n-1} \sin(\pi+n-6)m + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

hoc est pro $\pi = 0, 1, 2$ etc.

$$A^0 = \frac{1}{n} \sin nm,$$

$$A^1 = \sin(n+1)m - \sin(n-1)m$$

$$A^2 = \frac{1}{1.2}[(n+2)\sin(n+2)m - 2n \sin nm$$
$$+ (n-2)\sin(n-2)m]$$

etc.

Aequatio (A) tertiam nostri problematis solutionem continet, quae nihil amplius desiderandum relinquere videtur.

§. 5. Expressio (A) autem modo multo concinniori repraesentari potest, cum quaevis binarum partium, ex quibus conflata est, plures reductiones admittit. Pro prima parte absque negotio invenietur:

$$\frac{\Sigma^n \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{1.2.3..n}\left[\Sigma^r \left\{ \begin{matrix} \pm \frac{n(n-1)(n-2)..(n-(r-2))}{1.2.3..(r-1)} . (n-(2r-2))^{n-1} \times \\ \times \sin(n-(2r-2)) \end{matrix} \right\}\right].$$

ubi r ordine naturali 1, 2, 3 etc. signumque superius vel inferius, prout r vel numerus impar vel par est.

Altera pars duplicem contractionem admittit. Primo quidem quilibet factor quantitatis $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ in genere erit:

$$\Sigma^r\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+r-1}\left(A^{r-1} + A^{r-3}n + A^{r-5} . \frac{n(n+3)}{1.2} + A^{r-7} . \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3} + \text{etc.}\right)$$

ubi $r = 1, 2, 3$ etc.

quae series continuabitur usque dum terminus ultimus erit pro r numero pari:

$$A^1 \frac{n\left(n+\frac{r}{2}\right)\left(n+\frac{r+2}{2}\right)..(n+r-4)(n+r-3)}{1.2.3...\frac{r-4}{2}.\frac{r-2}{2}}$$

et pro r numero impari

$$A^0 \frac{n\left(n+\frac{r-1}{2}\right)\left(n+\frac{r+3}{2}\right)\left(n+\frac{r+5}{2}\right)..(n+r-2)}{1.2.3...\frac{r-3}{2}.\frac{r-1}{2}}.$$

Denique terminus generalis seriei praecedentis, quae ipsa est terminus generalis secundae partis nostrae aequationis, erit:

$$\Sigma^r . \Sigma^s \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+r-1} \left(A^{r-(2s-1)} . \frac{n(n+s)(n+s+1)(n+s+2)\ldots(n+2s-4)(n+2s-3)}{1.2.3\ldots(s-2)(s-1)}\right)$$

ubi $s = 1, 2, 3$ etc.

Omnibus proinde contractionibus congestis habebimus pro ultima nostri problematis solutione sequentem expressionem:

$$\omega = m + \Sigma^n \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{1.2.3.n} \left[\Sigma^r . \pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-2))}{1.2.3\ldots(s-1)} (n-(2r-2))^{n-1} \sin(n-(2r-2))\right]$$
$$+ 2\Sigma^n \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n . \left[\Sigma^r \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{r-1} . \left[\Sigma^s . \frac{n(n+s)(n+s+1)\ldots(n+2s-3)}{1.2.3\ldots(s-1)} . A^{r-(2s-1)}\right]\right] \ldots (B)$$

ubi pro s, r, n, ordine naturali substituendi sunt numeri 1. 2, 3... et ubi signum positivum partis primae pro r numero impari locum habet.

Haud omnino superfluum erit breviter indicare, quo modo expressione ultima (B) uti deceat.

Ad obtinendam partem primam calculabis quantitatem

$$\pm \frac{n(n-1)\ldots(n-(r-2))}{1.2\ldots(r-1)} (n-(2r-2))^{n-1} \sin(n-(2r-2)) \ldots (C)$$

pro singulis ipsius r valoribus, puta pro $r = 1, 2, 3\ldots$ Multiplicatis deinde singulis his valoribus quantitatis C per $\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{1.2.3\ldots n}$ et positis in singulis his productis pro n numeris 1, 2, 3 ... erit summa omnium productorum pars prima aequationis (B).

Pro altera ejusdem aequationis parte calculabis primo

$$\frac{n(n+s)(n+s+1)\ldots(n+2s-3)}{1.2.3\ldots(s-1)} A^{r-(2s-1)} \quad \ldots (D)$$

pro singulis ipsius s valoribus, puta pro $s = 1, 2, 3 \ldots$ Multiplicatis deinde singulis partibus per $(\frac{\varepsilon}{2})^{r-1}$, in singulis his productis pro r ponendi sunt numeri 1, 2, 3 etc. Denique multiplicatis omnibus hisce productis per $2\,(\frac{\varepsilon}{2})^n$ et substitutis pro n numeris 1, 2, 3 etc. erit summa omnium productorum secunda pars aequationis (B).

Revera, institutis his mutationibus in expressione generali, erit

$$\Sigma^n \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^n \Sigma^r \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^{r-1} . \Sigma^s \frac{n(n-s)(n+s+1)\ldots(n+2s-3)}{1.2.3\ldots(s-1)} . A^{r-(2s-1)}$$

$$= \Sigma^n \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^n \Sigma^r \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^{r-1} [A^{r-1} + n A^{r-3} + \frac{n(n+3)}{1.2} A^{r-5} + \text{etc.}]$$

$$= \Sigma^n \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^n [A^0 + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) . A^1 + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 (A^2 + A^0 n) + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^3 (A^3 + n A^1) + \text{etc.}]$$

quae expressio cum secunda aequationis (A) parte prorsus identica est.

§. 6. Coronidis loco aequationes nostras inventas exemplo quodam confirmemus, quem in finem aequationem (A) §. 4. adhibebimus, cum altera (B) §. 5. ob nimias contractiones evolutioni numericae minus idonea esse videatur.

Quaeramus ergo factores quantitatum ε, ε^2 ε^3, ε^4 et ε^5. Ponendo brevitatis caussa $\overset{1}{A}{}^{0}$, $\overset{2}{A}{}^{0}$, $\overset{3}{A}{}^{0}$ etc. loco A^0 eo casu, quo $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ etc., et eodem modo cum caeteris, unde ope aequationis (A) deducitur:

Pro $n = 1$:

$$\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \sin m + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \overset{1}{A}{}^{0} = a.$$

Pro $n = 2$:

$$\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 \sin 2m + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 \left(\overset{1}{A}{}^{1} + \overset{2}{A}{}^{0}\right) = b.$$

Pro $n = 3$:

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^3 (3 \sin 3m - \sin m) + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^3 \left(\overset{1}{A}{}^{2} + \overset{1}{A}{}^{0} + \overset{2}{A}{}^{1} + \overset{3}{A}{}^{0}\right) = c.$$

Pro $n = 4$:

$$\tfrac{4}{3}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^4 (2 \sin 4m - \sin 2m)$$
$$+ \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^4 \left(\overset{4}{A}{}^{6} + \overset{3}{A}{}^{1} + \overset{2}{A}{}^{2} + \overset{2}{A}{}^{0} + \overset{1}{A}{}^{3} + \overset{1}{A}{}^{1}\right) = d.$$

Pro $n = 5$:

$$\tfrac{1}{24}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^5 (5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m)$$
$$+\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^5 \left(\overset{5}{A}{}^{6} + \overset{4}{A}{}^{1} + \overset{3}{A}{}^{2} + 3\overset{3}{A}{}^{0} + \overset{2}{A}{}^{3} + 2\overset{2}{A}{}^{1} + \overset{1}{A}{}^{4} + \overset{1}{A}{}^{2} + \overset{1}{A}{}^{0}.2\right) = e.$$

Cum autem, ut in §. 4. invenimus, sit

$$A^\pi = \frac{1}{1.2.3..\pi} \left\{ \begin{array}{l} (\pi + n)^{n-1} \sin (\pi + n)\, m \\ - \frac{\pi}{1} (\pi + n - 2)^{\pi - 1} \sin (\pi + n - 2)\, m \\ + \frac{\pi(\pi - 1)}{1.2} (\pi + n - 4)^{n-1} \sin (\pi + n - 4)\, m \\ - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

nullo fere negotio invenitur

$$A^{1}_{0} = \sin m,$$
$$A^{1}_{1} = \sin 2m,$$
$$A^{1}_{2} = \tfrac{1}{2}(3 \sin 3m - \sin m),$$
$$A^{1}_{3} = \tfrac{1}{3}(8 \sin 4m - 4 \sin 2m),$$
$$A^{1}_{4} = \tfrac{1}{24}(5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m);$$

ac porro

$$A^{2}_{0} = \tfrac{1}{2} \sin 2m,$$
$$A^{2}_{1} = \sin 3m - \sin m,$$
$$A^{2}_{2} = 2(\sin 4m - \sin 2m),$$
$$A^{2}_{3} = \tfrac{1}{6}(25 \sin 5m - 27 \sin 3m + 4 \sin m);$$

neque non

$$A^{3}_{0} = \tfrac{1}{3} \sin 3m,$$
$$A^{3}_{1} = \sin 4m - \sin 2m,$$
$$A^{3}_{2} = \tfrac{1}{2}(5 \sin 5m - 6 \sin 3m + \sin m);$$

et denique

$$A^{4}_{0} = \tfrac{1}{4} \sin 4m,$$
$$A^{4}_{1} = \sin 5m - \sin 3m,$$
$$A^{5}_{0} = \tfrac{1}{5} \sin 5m,$$

His factis erit

$$a = 2\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \sin m$$
$$b = \tfrac{5}{2}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 \sin 2m$$
$$c = \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^3 \left(\tfrac{13}{3} \sin 3m - \sin m\right)$$
$$d = \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^4 \left(\tfrac{103}{12} \sin 4m - \tfrac{11}{3} \sin 2m\right)$$
$$e = \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^5 \left(\tfrac{1097}{3 \cdot 4 \cdot 5} \sin 5m - \tfrac{43}{4} \sin 3m + \tfrac{5}{6} \sin m\right)$$

unde confestim ope aequationis (A) invenitur

$$\begin{aligned}\omega = m &+ 2\,\varepsilon \sin m\\ &+ \tfrac{5}{2^2}\varepsilon^2 \sin 2\,m\\ &+ \tfrac{\varepsilon^3}{2^2}\left(\tfrac{13}{3}\sin 3\,m - \sin m\right)\\ &+ \tfrac{\varepsilon^4}{2^3 . 3}\left(\tfrac{103}{2^2}\sin 4\,m - 11 \sin 2\,m\right)\\ &+ \tfrac{\varepsilon^5}{2^5}\left(\tfrac{1097}{2 . 3 . 5}\sin 5\,m - \tfrac{43}{2}\sin 3\,m + \tfrac{5}{3}\sin m\right)\end{aligned}$$

Unde simul patet, evolutionem numericam aequationis (A) commodissimo simplicissimoque calculo absolvi posse, ita ut inde aequatio centri ad duodecimam usque excentricitatis protestatem spatio paucarum horarum elici possit, id quod de aliis hucusque datis expressionibus vix ac ne vix quidem affirmare licebit.

OBSERVATIONS

DE LA GRANDE COMÈTE DE L'ANNÉE 1811 FAITES A NOUVEAU - TCHERKASK AU MOIS D'AOÛT 1812.

PAR

V. WISNIEWSKI.

Présenté à la Conférence le 20 Sept. 1815.

La mémorable comète de l'année 1811. fut découverte par Mr. *Flaugergues* le 25. Mars N. St. dans la partie antérieure du navire, sa position étant le lendemain au soir 120° 26′ d'ascension droite et 29° 3′ de déclinaison australe. Lors de son apparition elle n'était visible à l'oeil nu que très difficilement, et quoique son éclat augmentât dans la suite, néanmoins elle n'a été observée qu'en France pendant sa première apparition; où, après avoir traversé la constellation de l'atelier typographique et celle du monecéros, elle se perdit dans les rayons solaires. On l'a observé pour la dernière fois le 2. Juin auprès de la tête de l'hydre à 119° 57′ d'ascension droite et 5° 17′ de déclinaison boréale. La comète s'étant derobée à la vue des astronomes, continua sa route géocentrique dans la constellation de l'écrevisse, et fut en conjonction avec le soleil le 6. Août au-dessus de la tête du lion, d'où elle se porta dans la constellation du petit lion. Les astronomes ayant calculé son orbite, annoncerent sa reparition ; et en effet notre comète fut découverte pour la seconde fois le 22. Août à 148° 20′ d'ascension droite et 33° 33′ de déclinaison boréale. Je l'apperçus le 4. Septembre, mais je ne pus d'abord l'observer, parcourant alors la mer caspienne ; et quoique je l'aie observée plusieurs fois après mon arivée à Astrakhan, je ne présenterai pas ces observations à l'Académie Impériale, puisque elles ont été faites dans le tems du plus grand éclat de la comète, durant lequel on la poursuivait assidument dans presque tous les observatoires. — La comète dirigea sa course du petit lion sur les jambes de derrière de la grande ourse, et après avoir passé au-dessus de la tête d'astérion, elle parvint au maximum de son éclat au commencement du mois d'Octobre ; sa queue ayant alors au-delà de 15°. de longueur. Elle passa le 2. Octobre très près de l'étoile η de la grande ourse, ensuite entre la tête du bouvier et le quart de cercle mural ; de là en continuant sa route au-dessus des pieds d'hercule et de la constellation de cerbère, elle se porta dans celle de l'aigle, et passa très près de la luisante de l'aigle *Atair* le 2 Decembre. En diminuant graduellement d'éclat, elle se perdit pour la seconde fois dans les rayons du soleil à l'entrée dans la constellation du verseau ; où elle fut observée en dernier lieu à Seeberg le 10. Janvier 1812, à 312° 53′ d'ascension droite et 1° 10′ de declinaison australe.

Mr. *Bessel* ayant calculé les observations de cette comète, faites depuis sa première apparition jusqu'au 1. Novembre 1811., remarqua : qu'on ne saurait satisfaire à ces observations par une orbite parabolique ; la déclinaison calculée étant affectée à la fin du mois d'Août d'une erreur de deux minutes et demie. Il détermina en conséquence une orbite elliptique, dont voici les élémens:

Passage au périhélie l'année 1811. Septembre 12,25175
tems moyen de Paris

Longitude du noeud ascendant – – –	140°24′29″,9
Inclinaison de l'orbite – – – – – –	106°57′24″,4
Longitude du périhélie – – – – – –	75° 1′ 9″,2
Excentricité – – – – – – – – –	0,9954056
Logarithme de la distance périhélie – –	0,0151120
– – – du demi-paramètre – – – –	0,3151432
– – – du mouvement moyen diurne –	9,9374598
Révolution de la comète – – – – –	3383 années.

On voit, que l'excentricité, et par conséquent la révolution aussi, doit être sujette à une incertitude assez grande, vu qu'elle est fondée sur une trop petite base; savoir sur l'erreur de l'orbite parabolique de $2\frac{1}{2}$ minutes. C'est donc principalement pour obtenir une détermination plus approchée de cet important élément, que les astronomes ont souhaité de continuer les observations de la comète, si elle viendrait encore à reparaître après s'être degagée des rayons du soleil au mois de Juillet de l'année 1812. Voyageant alors dans les gouvernements méridionaux de la Russie Européenne, je saisis l'occasion, que le beau climat de cette contrée m'offroit, pour contribuer au succès de cette entreprise, autant que mon observatoire ambulant le permettroit. Heureusement mes soins ne resterent pas inutiles, puisque ayant retrouvé la comète le 31. Juillet N. St., je l'ai observée jusqu'au 17. Août. Comme ces observations sont les seules, qui aient été faites pendant la troisième apparition de la comète, j'ose les présenter à l'Académie Impériale, en remarquant: que c'est la première comète, qui a été observée onze mois après son passage au périhélie.

Observations de la comète
faites à Nouveau-Tcherkask sous 47° 24′ 34″ de latitude et 2^h 31′ 4″ à l'est de Paris.

Après quelques essais, qui ne réussirent pas à cause du mauvais tems et du clair de lune, j'apperçus enfin la comète le 31. Juillet 1812. N. St. à minuit. Elle avait une lumiere jaunâtre et ressemblait à une tache nébuleuse très-pâle et mal terminée, ayant moins d'une minute et demie de diamètre. Je ne pouvais remarquer aucune trace d'une queue; et les nuages m'empechant de faire une observation complette, je me bornai à marquer la position de la comète par rapport aux étoiles voisines. Elle formait alors un triangle rectangle avec les étoiles N° 104. et N° 102. du Verseau (d'après le grand catalogue de Mr. *Bode.*) dont l'angle droit était à la première étoile; la comète se trouvait à peu près 50′ au sud de cette étoile.

Le mauvais tems ne permit pas de revoir la comète avant le 8. Août. Elle n'avait changé sensiblement de forme et d'éclat depuis le 31. Juillet. Pour déterminer sa position, je la comparais avec une étoile anonyme de la 8[me] grandeur, que je designerai par la lettre (*a*), par le moyen d'un diaphragme circulaire adapté au foyer de la lunette de Dollond de trois pieds et demi. Le rayon du diaphragme est de 14′ 23,″9.

Nr.			Tems moyen de l'observation		Différence de l'ascension droite en tems moyen	Les cordes en tems moyen
I.	La comète au nord du centre du diaphragme	Im.	11^{h}57'46",3	11^{h}58'37",1	—0'22",0	+1'41",6
		Em.	59 27,9			
	L'étoile (a) au nord du centre	Im.	58 9,5	58 59,1		+1 39,2
		Em.	59 48,7			
II.	La comète au nord du centre	Im.	12 2 41,1	12 3 33,5	—0 20,8	+1 44,8
		Em.	4 25,9			
	L'étoile (a) au nord	Im.	3 7,9	3 54,3		+1 32,8
		Em	4 40,7			
III.	La comète au nord du centre	Im.	12 6 40,3	12 7 37,3	—0 21,4	+1 54,0
		Em.	8 34,3			
	L'étoile (a) au nord	Im.	7 5,9	7 58,7		+1 45,4
		Em.	8 51,5			
IV.	La comète au nord	Im.	12 46 43,5	47 37,7	—0 23,6	+1 48,4
		Em.	48 31,9			
	L'étoile (a) au nord	Im.	47 11,1	48 1,3		+1 40,4
		Em	48 51,5			

Le 11. Août. La comète était très difficile à appercevoir, l'athmosphère étant chargée de vapeurs; c'est pourquoi je ne pus faire plus de deux observations très-douteuses. La comparaison fut faite avec l'étoile (b) N° 39. de l'aérostat d'après le grand catalogue de Mr. *Bode*.

Nr.			Tems moyen de l'obser vation		Différence de l'ascen-sion droite en tems moyen	Les cordes en tems moyen
I.	L'étoile *b*) au nord du centre du diaphragme	Im. Em.	12h27' 3". 28 47,8	12h27'55",6		+ 1 44",4
	La comète au nord du centre	Im. Em.	28 37,8 30 40,2	29 39,0	+ 1'43",4	+ 2 2,4
II.	L'étoile (*b*) au nord du centre	Im. Em	12 58 45,4 13 0 5,0	12 59 25,2		+ 1 19,6
	La comète au nord du centre	Im. Em.	0 11,4 1 57	13 1 4,4	+ 1 39,2	+ 1 46,0

Le 12. Août. Le ciel étant serein, la comète était plus distinctement visible que la nuit précédente; elle avait à peu-près une minute de diamètre, et son éclat n'etait guères égal à celui des étoiles de la onzieme grandeur. Comme le centre de la comète n'était pas assez marquant, j'étais toujours obligé d'éstimer à peu-près son Immersion et Emersion à la circonférence du diaphragme. Je la comparais avec l'étoile (*b*) N° 39. de l'aérostat, et avec une autre étoile anonyme de la huitieme grandeur, qui je designerai par la lettre (*c*).

I.	L'étoile (*b*) au nord du centre du diaphragme	Im. Em.	11h12' 5,"0 14 2,2	11h13 3,6		+ 1'57,"2
	La comète au sud du centre	Im. Em	11 12 54,2 14 27,8	11 13 41,0	+ 0'37,"4	— 1 33,6
II.	L'étoile (*b*) au nord du centre	Im. Em.	11 15 59,0 17 55,0	11 16 57,0		+ 1 56,0
	La comète au sud	Im. Em.	16 47,8 18 23,0	17 35,4	+ 0 38,4	— 1 35,2

Nr.			Tems moyen de l'observation		Différence de l'ascension droite en tems moyen	Les cordes en tems moyen
III.	L'étoile (*b*) au nord du centre	Im.	11h19'49",8	11h20'49",6		+1'59",6
		Em.	21 49,4			
	La comète au sud	Im.	11 20 44,2	21 26,8	+0'37",2	—1 25,2
		Em.	22 9,4			
IV.	L'étoile (*b*) au nord	Im.	11 36 57,4	11 37 53,8		+1 52,8
		Em.	38 50,2			
	La comète au sud	Im.	37 43,8	38 30,4	+0 36,6	—1 33,2
		Em.	39 17,0			
V.	L'étoile (*b*) au nord	Im.	11 45 40,6	11 46 34,8		+1 48,4
		Em.	47 29,0			
	La comète au sud	Im.	46 25,0	47 11,0	+0 36,2	—1 32,0
		Em.	47 57,0			
VI.	L'étoile (*b*) au nord	Im.	11 54 57,0	11 55 55,6		+1 57,2
		Em.	56 54,2			
	La comète au sud	Im.	55 49,8	56 32,0	+0 36,4	—1 24,4
		Em.	57 14,[illegible]			
VII.	L'étoile anonyme (*c*) au sud du centre	Im.	12 25 49,4	12 26 31,8		—1 24,8
		Em.	27 14,2			
	La comète an sud	Im.	28 31,0	29 19,8	+2 48,0	—1 37,6
		Em.	30 8,6			
VIII.	L'étoile anonyme (*c*) au sud	Im.	12 37 56,2	12 38 35,4		—1 18,4
		Em.	39 14,6			
	L'étoile (*b*) au nord	Im.	39 48,6	40 47,8		+1 58,4
		Em.	41 47,0			
	La comète au sud	Im.	40 34,6	41 20,4	+2 45,0 +0 32,6	—1 31,6
		Em.	42 6,2			
IX.	L'étoile (*c*) au sud	Im.	12 50 57,0	12 51 37,4		—1 20,8
		Em.	52 17,8			
	La comète au sud	Im.	53 38,2	54 22,8	+2 45,4	—1 29,2
		Em.	55 7,4			

Le 15. Août. L'air n'étant pas assez serein, la comète etait très difficile à appercevoir, elle disparaisait même quelquefois dans le champ de la lunette; c'est ce qui rendait les observations douteuses. La comparaison fut

faite avec une étoile anonyme (*d*) et une autre (*e*) Nº 35 de l'aérostat d'après le grand catalogue de Mr. *Bode*.

Nr.			Tems, moyen de l'observation		Difference de l'ascension droite en en tems moyen	Le cordes en tems moyen
I.	L'étoile (*d*) au sud du centre du diaphragme	Im. Em.	11h52' 6,"6 54 7,8	11h53' 7",2		—2' 1",2
	La comète au nord du centre	Im. Em.	53 7,0 54 19,8	53 43,4	+0'36",2	+1 12,8
II.	L'étoile (*d*) au sud	Im. Em.	11 55 40,2 57 32,6	11 56 36,4		—1 52,4
	La comète au nord	Im Em.	56 40,6 57 46,6	57 13,6	+0 37,2	+1 6,0
III.	La comète au nord du centre	Im. Em	12 4 4,6 5 58,6	12 5 1,6	—1 12,4	+1 54,0
	L'étoile (*e*) au sud	Im. Em.	5 13,4 7 14,6	6 14,0		—2 1,2
IV.	La comète au nord	Im. Em.	12 8 51,4 10 40 6	12 9 46,0	—1 11,6	+1 49,2
	L'étoile (*e*) au sud	Im Em.	9 57,4 11 57,8	10 57,6		—2 0,4
V.	La comète au nord	Im. Em.	12 14 35,0 16 37,0	12 15 36,0	—1 13,2	+2 2,0
	L'étoile (*e*) au sud	Im. Em.	15 55,8 17 42,6	16 49,2		—1 46,8
VI.	L'étoile (*d*) au sud	Im. Em.	12 21 17,8 23 1,8	12 22 9,8		—1 44,0
	La comète au nord	Im. Em	22 2,6 23 25,8	22 44,2	+0 34,4	+1 23,2
VII.	L'étoile (*d*) au sud	Im. Em.	12 56 9,8 57 32 6	12 56 51,2		—1 22,8
	La comète au nord	Im. Em.	56 28,6 58 23,0	57 25,8	+0 34,6	+1 54,4
VIII.	L'étoile (*d*) au sud	Im. Em.	13 19 1,4 20 51,4	13 19 56,4		—1 50,0
	La comète au nord	Im. Em.	19 43,4 21 10,2	20 26,8	+0 30,4	+1 26,8

Le 17. Août. Les observations d'aujourd'hui ont été faites principalement pour la détermination de la déclinaison; mais elles sont sujettes à quelque incertitude, vu que la lumière de la comète était extrêmement foible, et que le vent sécouait la lunette. La comète fut comparée avec l'étoile anonyme (*d*) du 15. Août, comme il suit:

Nr.			Tems moyen de l'observation		Différence de l'ascension droite en tems moyen	Les cordes en tems moyen
I.	La comète au sud du centre du diaphragme	Im.	13ʰ16′20″,7	13ʰ16′57″,1	—1′40″,6	—1′12″,8
		Em.	17 33,5			
	L'étoile anonyme (*d*) au sud	Im.	17 50,7	18 37,7		—1 34,0
		Em.	19 24,7			
II.	La comète au sud	Im.	13 23 38,3	13 24 17,1	—1 41,2	—1 17,6
		Em.	24 55,9			
	L'étoile (*d*) au sud	Im.	25 11,9	25 58,3		—1 32,8
		Em.	26 44,7			
III.	La comète au nord du centre	Im.	13 28 51,9	13 29 32,5	—1 40,2	+1 21,2
		Em.	30 13,1			
	L'étoile (*d*) au nord	Im.	30 39,1	31 12,7		+1 7,2
		Em.	31 46,3			
IV.	La comète au sud	Im.	13 38 13,1	13 39 0,1	—1 43,2	—1 34,0
		Em.	39 47,1			
	L'étoile (*d*) au sud	Im.	39 54,7	40 43,3		—1 37,2
		Em.	41 31,9			
V.	La comète au nord	Im.	13 44 5,1	13 44 55,5	—1 44,0	+1 40,8
		Em.	45 45,9			
	L'étoile (*d*) au nord	Im.	45 51,1	46 39,5		+1 36,8
		Em.	47 27,9			

Nr			Tems, moyen de l'observation		Différence de l'ascension droite en tems moyen	Lescorrect. en tems moyen
VI.	La comète au nord	Im. Em.	13^{h}49′31,″9 50 54,3	13^{h}50′13″,1	−1′43″,8	+1′22″,4
	L'étoile (*d*) au nord	Im. Em.	51 18,3 52 35.5	51 56,9		+1 17,2

Le mauvais tems, et la trop petite élévation de la comète au-dessus de l'horison, ne permirent pas de continuer les observations les nuits suivantes.

DES MAXIMA ET MINIMA

D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES.

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 18 Oct. 1815.

§. 1. La recherche des *maxima* et des *minima*, qui se fait si facilement par une suite de différentiations, si la fonction proposée ne renferme qu'une seule variable, présente plus de difficultés, lorsqu'il s'agit d'une fonction de plusieurs variables. Le célèbre *Euler*, en traitant ce sujet (*), n'a examiné que les fonctions de deux variables, et il faut convenir avec Mr. *Lacroix* (**), que le caractère distinctif des *maxima* et des *minima*, indiqué par *Euler*, n'est pas suffisant. Le célèbre *Lagrange* y a suppléé (***); mais comme il ne pouvait traiter cette matière qu'en passant, je crois qu'il ne sera pas inutile de repandre plus de jour sur cet objet important, et de dévelop-

(*) *Instit. Calc. Differ. Cap. XI. n°. 286. sqq.*

(**) *Traité du Calcul Differ. et Int* Tome I. pag. 275.

(***) *Méchanique analyt.* pag. 39. sqq. et *Théorie des fonctions*, pag. 192. sqq.

per avec clarté le raisonnement qui me parait devoir servir de base à cette recherche.

§. 2. Le raisonnement d'*Euler* qui a été suivi par tous les analystes, se réduit à ceci. Les variables x, y, dont u est fonction, étant tout à fait indépendantes l'une de l'autre, il est permis de les traiter séparément, comme on fait lorsqu'il s'agit de différentier une fonction de x, y: c'est à dire, il est permis de chercher d'abord la valeur de x qui donne un *maximum* ou *minimum*, en regardant y comme constante, et ensuite celle de y, x étant regardée comme constante. Ces opérations donnant autant d'équations, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, qu'il y a de variables, on en déduit les valeurs de x et de y, desquelles il faut combiner seulement celles, par ex. $x = a$, $y = b$, dont chacune rend la fonction u à la fois un *maximum* ou un *minimum*. Pour cet effêt, il faut qu'après la substitution de $x = a$, $y = b$. les différentielles secondes $\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial\partial u}{\partial y^2}$ deviennent positives ou négatives en même tems. Ainsi, u étant fonction de x, y, z, etc. la règle qu'il faut suivre pour trouver les *maxima* ou *minima* de u, se réduit à trouver des valeurs $x = a$, $y = b$, $z = c$, etc. qui rendent $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, etc. et qui donnent le même signe (+ ou —) aux coëfficiens différentiels du second ordre $\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial\partial u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial\partial u}{\partial z^2}$, etc.

§. 3. Cette règle ne peut être en défaut, si le raisonnement sur lequel elle est fondée, est juste ; et il parait que ceux qui, après avoir adopté ce raisonnement comme légitime, trouvent la règle qui en résulte, vicieuse, sont en contradiction avec eux-mêmes. *Euler*, en donnant cette règle, était plus conséquent ; mais il ne faisait pas attention à une circonstance très-essentielle. Le raisonnement que nous venons d'exposer, étant fondé sur la supposition que les variables x, y, etc. sont entièrement indépendantes l'une de l'autre, ne saurait donner un juste résultat que dans le cas où cette condition a lieu dans toute sa rigueur. Il est vrai que dans une *fonction* u de x, y, ces variables sont tojours censées être indépendantes, tant qu'il n'est pas donné une ou plusieurs *équations* entre x, y, etc.; mais elles deviennent dépendantes l'une de l'autre, dès qu'il existe une pareille équation. Or c'est précisément ce qui peut avoir lieu, et ce qui en effet arrive souvent, à cause des équations $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; et il est clair que dans un pareil cas, le raisonnement sus dit sur lequel on a basé la théorie des *maxima* et *minima*, ne peut être appliqué. Celà mérite d'être rendu plus clair.

§. 4. Si dans la fonction proposée u, les variables x, y, etc. sont séparées l'une de l'autre, les équations

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, etc. en donnent chacune immédiatement par des constantes, de sorte que les valeurs $x = a$, $x = a'$, etc. $y = b$, $y = b'$, etc. données par des équations de cette forme, $\frac{\partial u}{\partial x} = X = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Y = 0$, n'ayant aucune liaison entre elles, on peut les combiner à volonté, sans contrarier les équations $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, etc.; pourvu que les valeurs combinées, par ex. a et b, rendent u en même tems un *maximum* ou un *minimum*, ce qui est indiqué, comme ci-dessus, simplement par le signe $(\pm)$ des quantités $\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial\partial u}{\partial y^2}$. (Il sera bon d'observer que dans ce cas, ce sont les seules différentielles du second degré, $\frac{\partial\partial u}{\partial x \partial y}$ étant nulle, par ce que $\frac{\partial u}{\partial x}$ est fonction de x seul, comme $\frac{\partial u}{\partial y}$ de y). Mais, si les variables x, y, etc. sont melées ensemble, de maniere que $\frac{\partial u}{\partial x}$, etc. sont fonctions de plusieurs variables, alors, les équations $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, etc. déterminant une certaine relation entre x, y, l'une devient fonction de l'autre, et par conséquent le raisonnement susdit n'est plus légitime. Il est vrai qu'ayant autant d'équations $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, etc. qu'il y a de variables, on peut les éliminer à une près, laquelle sera donnée par des constantes. Mais on ne peut plus combiner à volonté les différentes valeurs $x = a$, $x = a'$, $y = b$, $y = b'$, etc. Chaque valeur a de x a sa valeur correspondante de y, par ex. b, et on ne peut substituer une autre valeur $y = b'$ avec $x = a$, sans détruire les équations $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, etc.: donc la valeur de y dépend de celle de x, ou y est fonction de x.

§. 5. Il faut donc, dans toutes les opérations qui supposent les équations $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, etc. c'est à dire, dans les différentielles secondes et celles d'un ordre supérieur, lorsqu'il s'agit de trouver les *maxima* ou *minima*, il faut, dis-je, regarder y comme fonction de x, et $\frac{\partial u}{\partial y}$ comme fonction de x et de y: par conséquent, ∂u étant $= (\frac{\partial u}{\partial x})\partial x + (\frac{\partial u}{\partial y})\partial y$, sa différentielle par rapport à x renfermera la différentielle par rapport à x, tant du premier terme lequel devient $(\frac{\partial \partial u}{\partial x^2})\partial x^2$, que du second terme ou $\left(\frac{\partial \cdot \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x}\right)\partial x \partial y$: il n'est donc pas permis de négliger ce second terme, dans la seconde différentielle de u prise par rapport à x, excepté le cas où ce terme n'a pas de différentielle par rapport à x, c'est à dire, où $\frac{\partial u}{\partial y}$ n'est pas affecté par les variations de x, étant fonction de y seulement, comme $\frac{\partial u}{\partial x}$ de x, de manière que les variables sont séparées dans u. Nous voilà donc revenus au même résultat qui donne la règle suivante. Si les variables x, y, etc. sont séparées dans la fonction u, de sorte que $\frac{\partial u}{\partial x} = X$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Y$, etc. u sera un *maximum* ou *minimum*, lorsque $X = 0$, $Y = 0$, et que $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$, ont le même signe. Mais si elles ne sont pas séparées, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, étant fonctions de plusieurs variables, il ne suffit pas que $\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial\partial u}{\partial y^2}$, etc. soient affectés du même signe; il faut y ajouter d'autres conditions, à cause des termes $\frac{\partial\partial u}{\partial x\partial y}$, etc.

§. 6. Il est donc clair que le raisonnement qu'on a toujours employé dans cette recherche, et qui est fondé sur l'indépendance des variables, n'est admissible que tant que ces variables sont réellement indépendantes, ce qui n'a lieu que jusqu'à la première différentiation. — Pour donner à cet objet toute la clarté et solidité qui sont le caractère des mathématiques, je me servirai d'un raisonnement qui ne suppose pas du tout que les variables, x, y, etc. soient indépendantes l'une de l'autre. Nommant u' ce que devient la fonction u, lorsqu'on y met $x+h$, $y+k$, $z+l$, etc. au lieu de x, y, z, etc. le théorème de *Taylor* donne l'équation:

$$(A)\ u' - u = [\tfrac{\partial u}{\partial x}h + \tfrac{\partial u}{\partial y}k + \tfrac{\partial u}{\partial z}l + \text{cet.}] + \\ + \tfrac{1}{2}[\tfrac{\partial\partial u}{\partial x^2}h^2 + \tfrac{\partial\partial u}{\partial y^2}k^2 + \tfrac{\partial\partial u}{\partial z^2}l^2 + \tfrac{2\partial\partial u}{\partial x\partial y}hk + \text{cet.}] + \text{cet.}$$

d'où il suit que, pour que u devienne un *maximum* ou *minimum*, il faut que le premier terme de cette série, ou la première différentielle, disparaisse, et que le second terme, ou la seconde différentielle, reste toujours positif ou négatif, quelque valeur qu'on donne aux quantités arbitraires, h, k, l, etc. ou que dans le cas ou ce second terme s'évanouit, le troisième soit aussi $= 0$, etc. Or, de quelque manière que les variables x, y, etc. dépendent l'une de l'autre, en vertu des équations $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, etc. (§. 4.), comme cette dépendance nait de la supposition du *maximum* ou *minimum*, elle cesse hors de ces poins ou de cette valeur de u, et de celles de $x = a$, $y = b$, etc. qui ont donné le *maximum*, de manière que, dès qu'on donne à x une autre valeur, par ex. $a + h$, on peut changer y, z, comme on veut. Il est donc évident que, quoique x, y, z, etc. soient dépendantes l'une de l'autre dans le cas du *maximum* ou *minimum*, les quantités h, k, l, etc. sont tout à fait indépendantes, qu'on peut les faire à volonté positives ou négatives, ou bien, l'une positive, l'autre négative ou égale à zéro, etc. Par conséquent le premier terme ne peut disparaître, à moins que tous les coëfficiens des quantités h, k, etc. ne deviennent égales à zéro, chacun en particulier: d'ou l'on obtient les équations

$$\text{(B)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \text{ etc.}$$

qui suffisent pour déterminer les valeurs de x, y, etc., leur nombre étant égal à celui de ces variables. Soient $x = a$, $x = a'$, etc. $y = b$, $y = b'$, etc. $z = c$, etc. les différentes valeurs ou racines données par la solution des équations (B), et supposons que la substitution d'une de ces racines, par ex. $x = a$, $y = b$, $z = c$, etc. donne

$$\frac{\partial\partial u}{\partial x^2} = \mathrm{A}\,,\quad \frac{\partial\partial u}{\partial y^2} = \mathrm{B}\,,\quad \frac{\partial\partial u}{\partial z^2} = \mathrm{C}\,,\quad \text{etc.}$$
$$\frac{\partial\partial u}{\partial x\partial y} = \mathrm{A}_b\,,\quad \frac{\partial\partial u}{\partial x\partial z} = \mathrm{A}_c\,,\quad \frac{\partial\partial u}{\partial y\partial z} = \mathrm{B}_c\,,\quad \text{etc.}$$

alors le second terme deviendra

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}h^2 + \mathrm{B}k^2 + \mathrm{C}l^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + 2\,\mathrm{A}_b hk + 2\,\mathrm{A}_c hl + 2\,\mathrm{B}_c kl + \text{cet.}\end{array}\right\}.$$

Il faut donc que, lors des *maxima* ou *minima*, la quantité

$$\mathrm{A}h^2 + \mathrm{B}k^2 + \mathrm{C}l^2 + \ldots\ldots + 2\,\mathrm{A}_b hk + 2\,\mathrm{A}_c hl + \text{cet.} = m$$

soit telle que, quelques valeurs qu'on donne aux quantités arbitraires h, k, etc. m reste toujours positif ou négatif, sans pouvoir passer d'un état à l'autre.

§. 7. Voici le raisonnement par lequel *Lagrange* a satisfait à cette condition. D'après la loi de continuité, une quantité quelconque ne peut devenir négative, après avoir été positive, qu'en passant par zéro: il est donc impossible que la quantité m passe d'un état à l'autre, si elle ne peut devenir nulle. Or c'est ce qui a lieu, lorsque l'équation $m = 0$ n'a que des racines imaginaires. Regardant h comme l'inconnue dans l'équation $m = 0$, elle donne

$$h + \frac{\mathrm{A}_b k + \mathrm{A}_c l + \ldots}{\mathrm{A}} = \sqrt{\left(\frac{(\mathrm{A}_b k + \mathrm{A}_c l + \ldots)^2}{\mathrm{A}^2} - \frac{\mathrm{B}k^2 + \mathrm{C}l^2 \ldots + 2\,\mathrm{B}_c kl + \ldots}{\mathrm{A}}\right)}.$$

La condition nécessaire pour l'existence des *maxima* ou *minima* est donc que la quantité sous le radical reste toujours négative, ou que

$$A\,(Bk^2 + Cl^2 + \ldots . + 2\,B_c\,kl + \ldots .)$$

soit plus grand que $(A_b k + A_c l + \ldots .)^2$, ou bien que

$$(1)\;(AB - A_b^2)\,k^2 + (AC - A_c^2)\,l^2 + \text{cet.} > 0.$$

Pour que la quantité sous le radical soit toujours négative, il faut, d'après le même raisonnement, qu'elle ne puisse devenir nulle, ou que l'équation

$$\begin{aligned} 0 = (AB - A_b^2)k^2 + (AC - A_c^2)l^2 + \text{cet.} \\ + 2\,(AB_c - A_b A_c)\,kl + \text{cet.} \end{aligned}$$

n'ait que des racines imaginaires. Faisant, pour abréger,

$$AB - A_b^2 = I,\; AC - A_c^2 = K,\; AB_c - A_b A_c = L,$$

cette équation donne

$$k + \frac{Ll + \textit{cet.}}{I} = \sqrt{\left(\frac{(Ll + \textit{cet.})^2}{I^2} - \frac{Kl^2 + \textit{cet.}}{I}\right)}:$$

il faut donc, comme ci-dessus, que

$$(2)\;\;(IK - L^2)\;l^2 + \text{cet.}$$

soit positif; et ainsi de suite. Supposant donc d'abord l, etc. $= 0$, on aura $(1)\;AB - A_b^2 > 0$, et par le même raisonnement, $(2)\;IK - L^2 > 0$, et ainsi de suite; d'où il suit en même tems que les produits AB, IK, doivent être positifs, ou les quantités A et B, I et K, affectées du même signe.

Voilà donc toutes les conditions des *maxima* ou *minima*, quand la fonction u ne renferme que trois variables. Elles se réduisent à ces quatre: 1) AB positif, 2) IK positif, 3) $AB > A_b^2$, 4) $IK > L^2$. Comme la troisième exige que $AB - A_b^2 = I$ soit positif, la seconde se réduit à ce que K ou $AC - A_c^2$, et par conséquent aussi AC soit positif. Nous avons donc ces conditions:

1) AB et AC positifs, ou A, B, C, affectés du même signe;

2) $AB > A_b^2$, 3) $AC > A_c^2$,

4) $(AB - A_b^2)(AC - A_c^2) > (AB_c - A_b A_c)^2$.

§. 8. Sans insister sur ce qu'une quantité peut passer de l'état positif au négatif, aussi bien par l'infini que par le zéro, vérité trés-connue et d'un fréquent usage dans le théorème de *Taylor*, je me bornerai à développer pour le cas de quatre variables une méthode indiquée par *Lagrange*, qui me parait plus simple, et qui donne toutes les conditions des *maxima* ou *minima*, sans qu'on ait besoin de recourir aux racines imaginaires. Il est évident que la condition nécessaire pour l'existence des *maxima* ou *minima*, savoir que la quantité m ne puisse passer de l'état positif au negatif, ou vice versa, ne peut avoir lieu que dans le cas où m est la somme de quantités positives, multipliée par un facteur commun positif ou négatif, le premier donnant les *minima*, le second les *maxima*. Mais comme les quantités qui composent m, renferment les arbitraires h, k, etc. il est impossible que ces quantités restent dans tous les cas positives, à moins que ce ne soient des quarrés : il faut donc que m ait cette forme : $m = n\,(p^2 + q^2 + r^2 + \text{cet.})$, n étant le facteur commun qui distingue les *maxima* d'avec les *minima*. Il est clair que tous les quarrés p^2, q^2, etc. doivent être affectés du signe $+$: car si l'on donnait à un ou à plusieurs quarrés, par ex. à r^2 le signe $-$, la différence des quarrés $p^2 + q^2 - r^2 = \frac{m}{n}$ pourrait devenir positive ou négative, d'après les différentes valeurs de h, k, l, etc.

§. 9. Soit u une fonction des quatre variables v, x, y, z, auxquelles ayant donné les valeurs $v = a$, $x = b$, $y = c$, $z = d$, les coëfficiens différentiels

$$\frac{\partial\partial u}{\partial v^2},\ \frac{\partial\partial u}{\partial x^2},\ \frac{\partial\partial u}{\partial y^2},\ \frac{\partial\partial u}{\partial z^2},\ \frac{\partial\partial u}{\partial v\partial x},\ \frac{\partial\partial u}{\partial v\partial y},\ \frac{\partial\partial u}{\partial v\partial z},\ \frac{\partial\partial u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial\partial u}{\partial x\partial z},\ \frac{\partial\partial u}{\partial y\partial z},$$

reçoivent les valeurs $A, B, C, D, A_b, A_c, A_d, B_c, B_d, C_d$, de sorte qu'en substituant $v = a + a'$, $x = b + b'$, $y = c + c'$, $z = d + d'$, la quantité que nous avons désignée par la lettre m, et dont le signe ($+$ ou $-$) sert à reconnaitre les *maxima* et les *minima*, devient

$$\begin{aligned}(A)\, m = {} & A a'^2 + B b'^2 + C c'^2 + D d'^2 + 2 A_b a' b' + 2 A_c a' c' \\ & + 2 A_d a' d' + 2 B_c b' c' + 2 B_d b' d' + 2 C_d c' d'.\end{aligned}$$

Or il est aisé de voir qu'on peut lui donner cette forme:

$$m = A[(a' + \alpha b' + \beta c' + \gamma d')^2 + \lambda^2(b' + \delta c' + \varepsilon d')^2 + \mu^2(c' + \eta d')^2 + \nu^2 d'^2],$$

qui a autant de termes et de la même forme rélativement aux quantités a', b', c', d', que l'équation (A). Le développement des quarrés donne l'équation

$$(B)\ \tfrac{m}{A} = a'^2 + (\alpha^2 + \lambda^2)b'^2 + (\beta^2 + \lambda^2\delta^2 + \mu^2)c'^2 + (\gamma^2 + \lambda^2\varepsilon^2 + \mu^2\eta^2 + \nu^2)d'^2 + 2\alpha\,.\,a'b' + 2\beta\,.\,a'c' + 2\gamma\,.\,a'd' + 2(\alpha\beta + \lambda^2\delta)b'c' + 2(\alpha\gamma + \lambda^2\varepsilon)b'd' + 2(\beta\gamma + \lambda^2\delta\varepsilon + \mu^2\eta)c'd'.$$

Observant maintenant que les quantités a', b', c', d', sont indépendantes l'une de l'autre (§ 6.), la comparaison des équations (A) et (B) servira à déterminer les neuf coëfficiens α, β, etc. Ayant fait, pour abréger,

$$AB - A_b^2 = F,\ AC - A_c^2 = G,\ AD - A_d^2 = H,$$
$$AB_c - A_b A_c = I,\ AB_d - A_b A_d = K,\ AC_d - A_c A_d = L,$$

on trouvera les équations suivantes :

1) $\alpha = \frac{A_b}{A}$, 2) $\beta = \frac{A_c}{A}$, 3) $\gamma = \frac{A_d}{A}$, 4) $\lambda^2 = \frac{B}{A} - \alpha^2 = \frac{F}{A^2}$,
5) $\lambda^2\delta = \frac{B_c}{A} - \alpha\beta$, ou $\delta = \frac{I}{F}$, 6) $\lambda^2\varepsilon = \frac{B_d}{A} - \alpha\gamma$,
donc $\varepsilon = \frac{K}{F}$, 7) $\mu^2 = \frac{C}{A} - \beta^2 - \lambda^2\delta^2 = \frac{FG - I^2}{A^2 F}$,
8) $\mu^2\eta = \frac{C_d}{A} - \beta\gamma - \lambda^2\delta\varepsilon$, ou $\eta = \frac{FL - IK}{FG - I^2}$,
9) $\nu^2 = \frac{D}{A} - \gamma^2 - \lambda^2\varepsilon^2 - \mu^2\eta^2 = \frac{1}{A^2 F}\left(FH - K^2 - \frac{(FL - IK)^2}{FG - I^2}\right)$.

Il faut donc que les quantités 4), 7), 9.) soient positives;

et comme le quarré A^2 est nécessairement positif, la première donne

$$F > 0;$$

ce qui étant substitué, l'équation 7) donne

$$G > 0, \text{ et } F G - I^2 > 0.$$

Celà posé, il résulte de l'équation 9), que $FH - K^2$ est positif et plus grand que la quantite positive $\frac{(FL - IK)^2}{FG - I^2}$, d'où il suit

$$H > 0, \ FH - K^2 > 0, \text{ et } (FG - I^2)(FH - K^2) - (FL - IK)^2 > 0.$$

Les conditions $F > 0$, $G > 0$, $H > 0$, nous apprennent en même tems que A, B, C, D, doivent être affectés du même signe.

§. 10. Il est vrai que les conditions $H > 0$ et $FH - K^2 > 0$, sont des suites immédiates de la dernière et des précédentes; mais, dans la recherche des *maxima* et *minima*, il vaut mieux commencer par les conditions les plus simples, et passer à celles qui sont plus compliquées, parceque, dès qu'on voit que les valeurs $v = a$, $x = b$, etc. ne satisfont pas à une seule de ces conditions, il serait inutile de continuer le calcul.

Nous avons donc trouvé qu'afin que la fonction u devienne un *maximum* ou *minimum*, il faut que toutes les quantités suivantes soient positives:

$$F = AB - A_b^2,\ G = AC - A_c^2,\ H = AD - A_d^2,\ FG - I^2,$$
$$FH - K^2, \text{ et } (FG - I^2)(FH - K^2) - (FL - IK)^2.$$

Mais il est aisé de voir qu'il y a encore d'autres conditions à remplir, lesquelles se manifesteront par la simple permutation des quantités a', b', c', d', parcequ'on peut placer les variables v, x, y, z, dans tel ordre qu'on voudra, et qu'on peut ordonner les équations (A) et (B) par rapport à B ou C ou D, au lieu de A, comme nous avons fait (§. 9.). Dans cette permutation qui est singulièrement facilitée par la manière dont nous avons désigné les coëfficiens différentiels A, A_b, etc. il faut se rappeller que, d'après les principes du calcul différentiel, on a

$$B_a = A_b,\ C_a = A_c,\ D_a = A_d,\ C_b = B_c,\ D_b = B_d,\ D_c = C_d.$$

Celà posé, on trouvera que la permutation des quantités a', b', c', d', change F, G, H, que nous appellerons quantités du premier ordre, en

$$BC - B_c^2 = F',\ BD - B_d^2 = G',\ CD - C_d^2 = H'.$$

§. 11. Les quantités du second ordre, $FG - I^2$ et $FH - K^2$, étant développées donnent

$$FG - I^2 = A(ABC + 2A_bA_cB_c - AB_c^2 - BA_c^2 - CA_b^2) = A.N, \text{ et}$$
$$FH - K^2 = A(ABD + 2A_bA_dB_d - AB_d^2 - BA_d^2 - DA_b^2) = A.P,$$

de la dernière desquelles on forme de suite, en substituant C au lieu de B,

P

$GH - L^2 = A(ACD + 2A_c A_d C_d - AC_d^2 - CA_d^2 - DA_c^2) = A.Q.$
Ces trois quantités AN, AP, AQ, ont éte trouvées dans la supposition que A soit le facteur commun de m (§. 9.); et il est permis de choisir pour ce facteur, B ou C ou D, au lieu de A. Mais on verra qu'en substituant dans ces trois quantités B au lieu de A, et A au lieu de B, N et P ne changent point, tandis que Q se transforme en

$$BCD + 2B_c B_d C_d - BC_d^2 - CB_d^2 - DB_c^2 = R,$$

et que par conséquent $FG - I^2$ devient $B.N = \frac{B}{A}(FG - I^2)$, que $FH - K^2$ devient $B.P = \frac{B}{A}(FH - K^2)$, et que $GH - L^2$ devient B.R. Permutant ensuite A et C, N et Q ne changent pas, mais P devient $= R$; donc $FG - I^2$ devient $C.N = \frac{C}{A}(FG - I^2)$, $FH - K^2$ devient C.R et $GH - L^2$ devient $C.Q = \frac{C}{A}(GH - L^2)$. La permutation de A avec D ne fait aucun changement à P ni à Q, mais elle change N en R, de sorte que $FG - I^2$ se transforme en D.R, $FH - K^2$ en $D.P = \frac{D}{A}(FH - K^2)$. et $GH - L^2$ en $D.Q = \frac{D}{A}(GH - L^2)$. Celà nous donne ces équations de condition :

$$(a)\ AN > 0,\ AP > 0,\ AQ > 0,\ BN > 0,\ BP > 0,\ BR > 0,$$
$$CN > 0,\ CR > 0,\ CQ > 0,\ DR > 0,\ DP > 0,\ DQ > 0;$$

lesquelles se réduisent a ces quatre, $AN > 0$, $AP > 0$, $AQ > 0$, $AR > 0$, parceque A, B, C, D, doivent être affectés du même signe (§. 9.).

§. 12. Quant à l'équation du troisième ordre (§. 9.)

$$(FG - I^2)(FH - K^2) - (FL - IK)^2 > o,$$

elle peut être mise sous cette forme $(b)\ F . \mathfrak{A} > o$, $\mathfrak{A}$ étant

$$= FGH + 2IKL - FL^2 - GK^2 - HI^2.$$

La permutation des trois lettres B, C, D, entre elles ne produisant aucun changement dans la quantité $\mathfrak{A}$, il en résulte les trois équations: $F . \mathfrak{A} > o$, $G . \mathfrak{A} > o$, $H . \mathfrak{A} > o$, lesquelles ne donnent qu'une seule, savoir $\mathfrak{A} > o$, parceque toutes les quantités du premier ordre, F, G, H, doivent être positives (§. 10.). On a donc

$$(b)\ FGH + 2IKL - FL^2 - GK^2 - HI^2 > o,$$

où il faudrait encore substituer B, C, D, au lieu de A. Mais il est aisé de voir que la quantité $\mathfrak{A}$ n'éprouve aucun changement par cette permutation. En effêt, son développement donne $\mathfrak{A} = A^2 . \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ étant =

$$\begin{aligned} = ABCD &- AB . C_d^2 - AC . B_d^2 - AD . B_c^2 - BC . A_d^2 \\ &- BD . A_c^2 - CD . A_b^2 \\ &+ 2A . B_cB_dC_d + 2B . A_cA_dC_d + 2C . A_bA_dB_d + 2D . A_bA_cB_c \\ &- 2A_bA_cB_dC_d - 2A_bA_dB_cC_d - 2A_cA_dB_cB_d \\ &+ A_b^2 . C_d^2 + A_c^2 . B_d^2 + A_d^2 . B_c^2. \end{aligned}$$

Cette expression de $\mathfrak{M}$ étant tout à fait symmétrique par rapport aux quantités a, b, c, d, il est évident qu'elle reste toujours la même, de quelle manière qu'on transpose ces quatre quantités. Ces transpositions fournissent donc ces quatre équations, $A^2 \mathfrak{M} > 0$, $B^2 \mathfrak{M} > 0$, $C^2 \mathfrak{M} > 0$, $D^2 \mathfrak{M} > 0$. Or, les quarrés A^2, B^2, C^2, D^2, étant nécessairement positifs, il en résulte une seule équation: $\mathfrak{M} > 0$, ou $\mathfrak{A} > 0$.

§. 13. Rassemblant ces résultats, on obtiendra, pour les *maxima* ou *minima* d'une fonction de quatre variables, toutes les équations de condition, qu'il sera bon de classer d'après leur plus ou moins grande simplicité.

Une fonction u de quatre variables v, x, y, z, étant proposée, les seules valeurs de v, x, y, z, qui puissent rendre u un *maximum* ou *minimum*, sont données par les quatre équations

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Que, parmi les valeurs ainsi trouvées, on choisisse quatre correspondantes,

$$v = a, \ x = b, \ y = c, \ z = d,$$

et qu'après les avoir substituées dans les secondes différentielles de u, on désigne ce qu'elles deviennent par cette substitution, de la manière suivante:

$$\frac{\partial\partial u}{\partial v^2} = A, \ \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} = B, \ \frac{\partial\partial u}{\partial y^2} = C, \ \frac{\partial\partial u}{\partial z^2} = D,$$

$$\frac{\partial\partial u}{\partial v \partial x} = A_b, \ \frac{\partial\partial u}{\partial v \partial y} = A_c, \ \frac{\partial\partial u}{\partial v \partial z} = A_d, \ \frac{\partial\partial u}{\partial x \partial y} = B_c,$$

$$\frac{\partial\partial u}{\partial x \partial z} = B_d, \ \frac{\partial\partial u}{\partial y \partial z} = C_d.$$

Alors, les conditions auxquelles il faut satisfaire, afin que u devienne un *maximum* ou *minimum*, se réduisent à ce que d'abord les quatre coëfficiens différentiels, A, B, C, D, soient affectés du même signe (+ ou —), et qu'ensuite, ayant fait, pour abréger,

$$AB - A_b^2 = F, \quad AC - A_c^2 = G, \quad AD - A_d^2 = H,$$
$$BC - B_c^2 = F', \quad BD - B_d^2 = G', \quad CD - C_d^2 = H',$$
$$AB_c - A_b A_c = I, \quad AB_d - A_b A_d = K, \quad AC_d - A_c A_d = L,$$
$$BC_d - B_c B_d = M, \quad FG - I^2 = N, \quad FH - K^2 = P,$$
$$GH - L^2 = Q, \quad F'G' - M^2 = R,$$
$$FGH + 2IKL - FL^2 - GK^2 - HI^2$$
$$= F(GH - L^2) + I(KL - HI) + K(IL - GK) = \mathfrak{A},$$

toutes les quantités F, G, H, F', G', H', N, P, Q, R, $\mathfrak{A}$, soient positives. Si les valeurs de v, x, y, z, satisfont à toutes ces conditions, la fonction u sera un *minimum*, lorsque A, B, C, D, sont positives, un *maximum*, quand elles sont négatives.

§. 14. On a vu que toute la question dépend entièrement des quantités λ^2, μ^2, ν^2, (§. 9.) qui doivent être positives: on peut donc regarder le problème comme resolu par trois équations du second degré, qui ont les racines λ, μ, ν; ce qui conduit à la méthode de Lagrange. Si une seule de ces racines est imaginaire, ce qui donne à leurs quarrés λ^2, ou μ^2, ou ν^2, une valeur négative, le problème est impossible, et la fonction n'a pas *maxima* ni *minima*, dans l'hypothèse de $v = a$, $x = b$, etc. Mais on voit en même tems que les quantités λ^2, μ^2, ν^2, peuvent être nulles, sans que les *maxima* ou *minima* deviennent impossibles. On aurait dans un pareil cas (§. 9.)

$$m = A\,[(a' + \alpha b' + \beta c' + \gamma d')^2] = A\,.\,n^2, \text{ ou}$$

$$m = A\,(n^2 + p^2)\,, \text{ etc.}$$

donc m resterait toujours positif ou négatif, selon le signe de A. Les conditions des *maxima* ou *minima* se réduisent donc à ce qu'aucune des quantités F, etc. (§. 13.), ne soit négative.

Il faut cependant observer que, dans le cas où les quantités λ^2, μ^2, ν^2, disparaissent, la comparaison des deux valeurs (A) et (B) de m (§. 9.) donne plus d'équations qu'il n'y a d'indéterminées, α, β, etc. ce qui amènera de nouvelles conditions. Supposant par ex. $F = 0$ et par conséquent $\lambda^2 = 0$, la comparaison des deux valeurs de $\frac{m}{A}$ (§. 9.) donnera ces équations:

1) $\alpha^2 = \frac{B}{A}$ 2) $\beta^2 + \mu^2 = \frac{C}{A}$, 3) $\gamma^2 + \mu^2\eta^2 + \nu^2 = \frac{D}{A}$, 4) $\alpha = \frac{A_b}{A}$, 5) $\beta = \frac{Ac}{A}$, 6) $\gamma = \frac{A_d}{A}$, 7) $\alpha\beta = \frac{B_c}{A}$, 8) $\alpha\gamma = \frac{B_d}{A}$, 9) $\beta\gamma + \mu^2\eta = \frac{C_d}{A}$.

Ayant déterminé les six quantités $\alpha, \beta, \gamma, \mu^2, \eta, \nu^2$, à l'aide des équations 4) 5) 6) 2) 9) 3), savoir

$\alpha = \frac{A_b}{A}, \beta = \frac{A_c}{A}, \gamma = \frac{A_d}{A}, \mu^2 = \frac{G}{A^2}, \eta = \frac{L}{G}, \nu^2 = \frac{GH - L^2}{A^2 G}$, il faut encore satisfaire aux équations 1) 7) 8). La première donne $\frac{B}{A} = \frac{A_b^2}{A^2}$ ou $AB = A_b^2$, ce qui est identique avec $F = 0$. Les deux autres donnent $\frac{B_c}{A} = \frac{A_b A_c}{A^2}$ et $\frac{B_d}{A} = \frac{A_b A_d}{A^2}$, ou $B_c = \frac{A_b}{A} A_c$ et $B_d = \frac{A_b}{A} A_d$, d'où il suit d'abord $\frac{B_c}{A_c} = \frac{B_d}{A_d}$, et puis, substituant $A_b = \sqrt{AB}$,

$$B_c = A_c . \sqrt{\frac{B}{A}} \text{ et } B_d = A_d \sqrt{\frac{B}{A}}:$$

ce qui donne

$$I = A_c (\sqrt{AB} - A_b) = 0, \text{ et } K = A_d (\sqrt{AB} - A_b) = 0.$$

Il faut donc que, lorsque F est nul, I et K s'évanouissent en même tems: alors les formules du §. 9. deviennent

$$\alpha = \sqrt{\frac{B}{A}}, \beta = \frac{A_c}{A}, \gamma = \frac{A_d}{A}, \lambda^2 = 0, \delta = \frac{0}{0}, \varepsilon = \frac{0}{0},$$
$$\mu^2 = \frac{G}{A^2} - \frac{0}{0} 0 = \frac{G}{A^2}, \eta = \frac{FL}{FG} = \frac{L}{G},$$
$$\text{et } \nu^2 = \frac{1}{A^2 F}(FH - \frac{(FL)^2}{FG}) = \frac{1}{A^2 F}(FH - \frac{FL^2}{G}) = \frac{H}{A^2} - \frac{L^2}{A^2 G};$$

équations absolument conformes à celles que nous avons trouvées ici, vû que les quantités indéterminées δ, ε, n'entrent pas dans ce calcul. Si on ne satisfaisait pas aux conditions $I = 0$ et $K = 0$, les quantités $\delta, \varepsilon, \mu^2, \nu^2$, deviendraient infinies dans les formules du §. 9.

§. 15. Lorsqu'un des coëfficiens différentiels A, B, C, D, par ex. A, s'évanouit, toutes les quantités F, G, etc. deviendront négatives, à moins qu'elles ne soient nulles. Dans le premier cas, la fonction n'est pas susceptible de *maxima* ni de *minima*; dans le second, il faut recourir aux troisièmes différentielles.

Comme il arrive très-rarement qu'un probleme analytique présente des fonctions de quatre variables, il serait inutile d'appliquer cette méthode à des fonctions d'un plus grand nombre de variables.

Lorsque la fonction proposée u ne renferme que trois variables, v, x, y, toutes les quantités qui se rapportent à z ou d, disparaissent dans les formules précedentes : on a donc (§. 13.)

$o = D = A_d = B_d = C_d$, d'où il suit que les quantités H, G′, H′, K, L, M, P, Q, R, 𝔄, disparaissent tout à fait. Les conditions des *maxima* et *minima* se réduisent donc à celles-ci : les différentielles A, B, C, doivent être affectées du même signe, et les quantités F, G, F′, N, positives.

Si la fonction u ne renferme que deux variables v, x, toutes les quantités précédentes disparaissent, excepté F; on n'a donc que ces deux conditions à remplir : les coëfficiens différentiels $\frac{\partial\partial u}{\partial v^2}$, $\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}$, doivent être affectés du même signe, et leur produit doit être plus grand que le quarré de $\frac{\partial\partial u}{\partial v \partial x}$.

Il ne sera pas inutile d'appliquer ces règles à un petit nombre d'exemples.

§. 16. La fonction proposée étant

$$u = v^3 + x^3 + 6vy + 2xz + 3y^2 + 2z^2 + 4z;$$

on a ces quatre équations

$$(a)\ \frac{\partial u}{\partial v} = 3v^2 + 6y = 0\,,\ \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2z = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6v + 6y = 0\,,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2x + 4z + 4 = 0.$$

lesquelles donnent

$$(b)\ \frac{\partial\partial u}{\partial v^2} = A = 6a\,,\ \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} = B = 6b\,,\ \frac{\partial\partial u}{\partial y^2} = C = 6,$$
$$\frac{\partial\partial u}{\partial z^2} = D = 4,\ \frac{\partial\partial u}{\partial v\partial x} = A_b = 0,\ \frac{\partial\partial u}{\partial v\partial y} = A_c = 6,$$
$$\frac{\partial\partial u}{\partial v\partial z} = A_d = 0,\ \frac{\partial\partial u}{\partial x\partial y} = B_c = 0,\ \frac{\partial\partial u}{\partial x\partial z} = B_d = 2,$$
$$\frac{\partial\partial u}{\partial y\partial z} = C_d = 0,$$

a et b étant les valeurs substituées au lieu de v et x, en vertu des équations (a). Il s'en suit

$$F = 36ab,\ G = 36(a-1),\ H = 24a,\ F' = 36b,$$
$$G' = 4(6b-1),\ H' = 24;\ I = 0,\ K = 12a,\ L = 0,$$
$$M = 0;\ N = 36\times 36\,.\,ab(a-1),\ P = 144a^2(6b-1),$$
$$Q = 6\times 144\,.\,a(a-1)\,,\ R = 144b(6b-1);$$
$$\mathfrak{A} = GP = 36\times 144\,.\,a^2(a-1)(6b-1).$$

Les valeurs de G et G′ suffisent pour nous apprendre qu'on ne peut supposer que des valeurs positives pour v et x, et que v et $6x$ doivent être plus grands que l'unité : alors, il est clair que toutes les quantités qui déterminent les *maxima* ou *minima* (§. 13.) sont positives. Les équations (a) donnent ces résultats :

$\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial y} = 3v^2 - 6v = 0$, donc $v = 0$ et $v = + 2$, dont la première ne peut donner *maxima* ni *minima*, comme nous venons de voir. On a donc $v = + 2$, et $y = - v = - 2$. Il y a de plus

$$\frac{2\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 6x^2 - 2x - 4 = 0,$$

ce qui donne

$$x = \tfrac{1}{6} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{36} + \tfrac{2}{3}\right)} = \tfrac{1 \pm 5}{6},$$

dont il faut prendre la racine positive, parceque x doit être positif. Nous avons donc

$$x = + 1, \text{ et } z = - \tfrac{3}{2}x^2 = - \tfrac{3}{2}.$$

Les valeurs

$$v = + 2,\ x = + 1,\ y = - 2,\ z = - \tfrac{3}{2},$$

donnent donc pour la fonction u un *minimum*, A, B, C, D, étant positifs. Le *minimum* de u est donc

$$u' = - 7\tfrac{1}{2}.$$

En effet, faisant $v = 2 + g$, $x = 1 + h$, $y = - 2 + k$, $z = - \frac{3}{2} + l$, on trouve, en négligeant les troisièmes puissances de g, h, k, l,

$$u = u' + 6g^2 + 3h^2 + 6gk + 2hl + 3k^2 + 2l^2$$
$$= u' + 6\left(g + \tfrac{1}{2}k\right)^2 + 3\left(h + \tfrac{1}{3}l\right)^2 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{5}{3}l^2 = u' + m,$$

où m, étant la somme de quatre quarrés, est toujours positif, et par conséquent $u > u'$, quelques valeurs qu'on donne à g, h, k, l.

Si l'on eût choisi une des autres racines, par ex. $v = 0$, à laquelle répond $y = 0$, on eût trouvé $u' = -3\frac{1}{2}$, et ensuite, faisant $v = g$, $x = 1 + h$, $y = k$, $z = -\frac{3}{2} + l$,

$$u = u' + 3h^2 + 6gk + 2hl + 3k^2 + 2l^2$$
$$= u' + 2h^2 + (h+l)^2 + 3k^2 + l^2 + 6gk = u' + m,$$

où m peut devenir positif ou négatif, à cause du dernier terme $6gk$. Prenant par ex. $g = 2h$, $k = -2h$, $l = -h$, on aura $m = -9h^2$: il n'y a donc ni *maximum* ni *minimum*.

§. 17. Soit $u = v^3 + x^3 \pm \alpha . vy \pm \beta . vz \pm \gamma . xy \pm \delta . yz$; donc $\frac{\partial\partial u}{\partial y^2} = C = 0$ et $\frac{\partial\partial u}{\partial v \partial y} = A_c = \pm \alpha$; par conséquent, quelques valeurs qu'on donne à v, x, y, z, il est toujours $C = 0$, $A_c^2 = \alpha^2$, et $G = AC - A_c^2 = -\alpha^2$, une quantité négative: ce qui suffit pour nous apprendre que la fonction u n'est pas susceptible de *maxima* ou *minima*.

§. 18. Soit proposée la fonction transcendante

$$u = \sin(v + x + y + z) + \alpha \cos(v + x + y) + \beta . \log v - \gamma x^2 - \delta v.$$

Faisant, pour abréger, $v + x + y + z = p$, $v + x + y = q$, $\sin p = \Phi$, $\cos q = \psi$, on a $\frac{\partial u}{\partial v} = \cos p - \alpha \sin q + \frac{\beta}{v} - \delta = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos p - \alpha \sin q - 2\gamma x = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \cos p - \alpha \sin q = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \cos p = 0$: donc

$\cos p = 0$, $\sin q = 0$, $x = 0$, et $v = \frac{\beta}{\delta}$, ou $\Phi = \pm 1$, $\psi = \pm 1$. Les secondes différentielles donnent, en faisant $\Phi + \alpha\psi = \xi$, $A = -\xi - \frac{\delta^2}{\beta}$, $B = -\xi - 2\gamma$, $C = -\xi$, $D = -\Phi$,

$A_b = A_c = B_c = -\xi$, $A_d = B_d = C_d = -\phi$; $G = AC - A_c^2 = \frac{\delta^2}{\beta}\xi$; $H' = CD - C_d^2 = \alpha\phi\psi$; ce qui suffit pour faire voir qu'il faut prendre des valeurs positives pour ϕ et ψ, savoir $\phi = \psi = +1$. En effèt, la valeur de G nous apprend que ξ doit être positif, d'où il suit que ϕ l'est aussi, parceque C et D doivent être affectés du même signe (—) ; donc ψ doit également être positif, à cause de $H' = \alpha\phi\psi$. Les valeurs $\phi = \psi = +1$ donnent, en faisant $1 + \alpha = \varepsilon$, et $\frac{\delta^2}{\beta} = \eta$, $A = -(\varepsilon + \eta)$, $B = -(\varepsilon + 2\gamma)$, $C = -\varepsilon$, $D = -1$, $A_b = A_c = B_c = -\varepsilon$, $A_d = B_d = C_d = -1$; $F = \varepsilon(\eta + 2\gamma) + 2\eta\gamma$, $G = \varepsilon\eta$, $H = \alpha + \eta$, $F' = 2\gamma\varepsilon$, $G' = \alpha + 2\gamma$, $H' = \alpha$; $I = \varepsilon\eta$, $K = \eta$, $L = \eta$,

$$M = 2\gamma;\ N = 2\gamma\varepsilon\eta(\varepsilon + \eta),\ P = (\alpha + 2\gamma)\eta^2$$
$$+ (\alpha\varepsilon + 2(1 + 2\alpha)\gamma)\eta + 2\alpha\gamma\varepsilon,\quad Q = \alpha\eta(\varepsilon + \eta),$$
$$R = 2\alpha\gamma(2\gamma + \varepsilon);\quad \mathfrak{A} = 2\alpha\gamma\eta(\varepsilon + \eta)^2.$$

Ainsi, toutes les quantités F, G, etc. étant positives, et A, B, C, D, négatives, il s'en suit que les valeurs supérieures

$$v = \tfrac{\beta}{\delta},\ x = 0,\ \sin p = +1,\ \cos q = +1,$$

rendront u un *maximum*. Ces valeurs donnent

$$q = \tfrac{\beta}{\delta} + y,\ p = \tfrac{\beta}{\delta} + y + z,\ \text{donc}\ y = 4nr - \tfrac{\beta}{\delta},$$

la lettre r désignant l'angle droit, d'où l'on tire

$$p = 4nr + z,\ \sin p = \sin z = 1,\ \text{et}\ z = (4n' + 1)r;$$

n et n' étant des nombres entiers quelconques. Nous avons donc les valeurs

$$v = \frac{\beta}{\delta},\ x = 0,\ y = 4nr - \frac{\beta}{\delta},\ z = (4n' + 1)r,$$

qui donnent le *maximum* de la fonction u, savoir

$$u' = 1 + \alpha + \beta(\log\beta - \log\delta - 1).$$

En effet, supposant

$$v = \frac{\beta}{\delta} + g,\ x = h,\ y = 4nr - \frac{\beta}{\delta} + k,\ z = (4n' + 1)r + l,$$

et négligeant les puissances de g, h, k, l, supérieures à la seconde, on trouve $u =$

$$\begin{aligned}\sin[(4n + 4n' + 1)r + g + h + k + l] + \alpha\cos(4nr + g + h + k)\\ + \beta(\log(\beta + \delta g) - \log\delta - 1) - \delta g - \gamma h^2\\ = \cos(g + h + k + l) + \alpha\cos(g + h + k)\\ + \beta(\log\beta + \log(1 + \tfrac{\delta}{\beta}g) - \log\delta - 1) - \delta g - \gamma h^2\\ = u' - \frac{(g+h+k+l)^2}{2} - \frac{\alpha}{2}(g + h + k)^2 - \gamma h^2\\ + \beta\left(\frac{\delta}{\beta}g - \frac{\delta^2}{2\beta^2}g^2 + \text{cet.}\right) - \delta g,\end{aligned}$$

ou bien, faisant pour abréger,

$$g + h + k + l = a,\ g + h + k = b,\ u = u' - \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{\alpha}{2}b^2 - \gamma h^2 - \tfrac{\delta^2}{2\beta}g^2;$$

d'où il suit que $u' > u$, quelques valeurs qu'on donne à g, h, k, l, pourvû qu'elles soient très-petites. On voit donc, que u' est un *maximum*, mais qu'elle ne l'est plus, si $\cos(v + x + y) = -1$, ou ce qui revient au même, si α est négatif.

Faisant par ex. $\cos(v + x + y) = -1$, et $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$, $\delta = 6$, la fonction u devient

$$u' = 1 - 1 + 4 \log \tfrac{2}{3} - 4 = -4(1 + \log \tfrac{3}{2}),$$
$$\text{et } u = u' - \tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{2} b^2 - 2 h^2 - \tfrac{9}{2} g^2.$$

Prenant $h = g$, $k = 2g$, $l = -3g$, on a $a = g$, $b = 4g$. donc $u = u' + g^2 (8 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{9}{2}) = u' + g^2$: u' n'est donc pas un *maximum*.

§. 19. Prenons pour dernier exemple la fonction

$$u = x^3 + y^3 + \tfrac{125}{72} x^2 + 3y^2 + 5xy - x - \tfrac{33}{25} y,$$

qui nous fera voir que, même dans les fonctions de deux veriables, la règle indiquée par *Euler* ne suffit pas pour décider des *maxima* et *minima*. Elle fournit les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + \tfrac{125}{36} x + 5y - 1 = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + 6y + 5x - \tfrac{33}{25} = 0.$$

La première donne $y = -\dfrac{3x^2 + \frac{125}{36} x - 1}{5}$, d'où il suit

$$y^2 = \frac{9x^4 + \frac{125}{6} x^3 + \frac{7849}{1296} x^2 - \frac{125}{18} x + 1}{25},$$

ce qui étant substitué dans la seconde, donne

$$0 = \tfrac{27}{25} x^4 + \tfrac{5}{2} x^3 + \tfrac{7849}{10800} x^2 - \tfrac{5}{6} x + \tfrac{3}{25} - \tfrac{18}{5} x^2 - \tfrac{25}{6} x + \tfrac{6}{5} + 5x - \tfrac{33}{25}$$
$$= \tfrac{27}{25} x^4 + \tfrac{5}{2} x^3 + \left(\tfrac{7849}{10800} - \tfrac{18}{5}\right) x^2,$$

d'où il suit deux fois $x = 0$, $y = +\frac{1}{5}$, et ensuite

$$0 = 27x^2 + \tfrac{125}{2} x + \left(\tfrac{7849}{432} - 90\right), \quad \text{ou} \quad 0 = x^2 + \tfrac{125}{54} x - \tfrac{31031}{108^2};$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{-125 \pm \sqrt{(125^2 + 31031)}}{108} = \frac{-125 \pm 216}{108} = -\tfrac{125}{108} \pm 2.$$

Nous avons donc $x = +\frac{91}{108}$ et $x = -\frac{341}{108}$. La première donne $y = -\frac{73}{90}$, la seconde $y = -\frac{323}{90}$. Il y a donc, pour les *maxima* et *minima* de la fonction u, les trois cas suivans :

$$1)\, x = 0,\ y = +\tfrac{1}{5};\quad 2)\, x = +\tfrac{91}{108},\ y = -\tfrac{73}{90};$$
$$3)\, x = -\tfrac{341}{108},\ y = -\tfrac{323}{90}.$$

Les secondes différentielles donnent

$$\frac{\partial\partial u}{\partial x^2} = A = 6x + \tfrac{125}{36};\quad \frac{\partial\partial u}{\partial y^2} = B = 6y + 6;\quad \frac{\partial\partial u}{\partial x \partial y} = A_b = 5.$$

Il vient donc, pour le premier cas, où $x = 0$, $y = +\frac{1}{5}$,

$$A = \tfrac{125}{36},\ B = \tfrac{36}{5},\ F = AB - A_b^2 = 25 - 25 = 0;$$

ce qui prouve que, dans le premier cas, u est un *minimum*. Nommant u' cette valeur de u, et faisant $x = h$, $y = \frac{1}{5} + k$, on trouvera

$$u = u' + \tfrac{3}{5}k^2 + \tfrac{125}{72}h^2 + 3k^2 + 5hk = u' + \tfrac{125}{72}\left(h + \tfrac{36}{25}k\right)^2;$$

d'où l'on voit que u' est un *minimum*, et que dans les formules du §. 9. λ^2 s'évanouit, parceque $F = 0$.

Le second cas, où $x = +\frac{91}{108}$, $y = -\frac{73}{90}$, donne

$$A = +\tfrac{307}{36},\ B = +\tfrac{17}{15},\ F = \tfrac{17 \cdot 307}{15 \cdot 36} - 25 = -15\tfrac{181}{540}:$$

d'où l'on voit que, quoique A et B soient affectés du même signe, la fonction n'est ni *maximum* ni *minimum*, parceque F a une valeur négative. Nommant u' la valeur de u dans cette hypothèse, et faisant $x = \frac{91}{108} + h$, $y = -\frac{73}{90} + k$, on trouve

$$u = u' + \tfrac{91}{36} h^2 - \tfrac{73}{30} k^2 + \tfrac{125}{72} h^2 + 3k^2 + 5hk$$

$$= u' + \tfrac{307}{72} \left[\left(h + \tfrac{180}{307} k\right)^2 - \tfrac{99372}{471245} k^2\right],$$

ce qui peut être plus ou moins grand que u', selon les différentes valeurs de h et k.

Dans le troisième cas, où $x = -\frac{341}{108}$, $y = -\frac{323}{90}$, on a $A = -\frac{557}{36}$, $B = -\frac{233}{15}$, $F = +215\frac{181}{540}$: donc u un *maximum*.

En effet, on trouve, comme ci-dessus,

$$u = u' - \tfrac{341}{36} h^2 - \tfrac{323}{30} k^2 + \tfrac{125}{72} h^2 + 3k^2 + 5hk$$

$$= u' - \tfrac{557}{72} \left[\left(h - \tfrac{180}{557} k\right)^2 + \tfrac{1395372}{1551245} k^2\right]:$$

donc, u' est évidemment un *maximum*.

DETERMINATIO LATITUDINIS GEOGRAPHICAE OBSERVATORII CASANENSIS,

AUCTORE

LITTROW.

Conventui exhibuit die 8 Nov. 1815.

Observationes sequentes a me institutae sunt circulo, quem vocant multiplicatorio diametro sedecim digitorum. Instrumentum hoc a cel. *Baumann* Stuttgardiensi ad unguem usque elaboratum, columna verticali fixa instructum est et uno tantum tubo anteriori gaudet.

Cum autem novum nostrum observatorium nondum ex omni parte finitum esset, observationes pluribus incommodis laborabant, quae fere omnes a loci, cui circulus adoptandus est; importunitate nascuntur. Sic e. g. factum est, ut observationes una fere cum culminatione solis inciperent, obstante fenestrarum jugamento, cui incommodo mederi, nisi mutando circuli locum, nullo modo potui. Futuro autem anno, quo eandem poli altitudinem ope stellae polaris majori observationum numero mihi explorare animus est, ab his similibusque difficultatibus me liberatum fore spero.

I.

Priusquam observationes ipsas in medium proferam, liceat mihi methodos aliquas, quae mihi novae videntur, easdem calculandi breviter attingere.

Sit π distantia stellae observatae a polo boreali aequatoris; z ejusdem distantia a polo horizontis, quae pro momento culminationis abeat in Z; sitque ψ altitudo aequatoris, s angulus horarius et $x = z - Z$. His positis habetur, ut cuivis satis superque constat,

$$\cos(Z + x) = \cos\pi \cos\psi + \sin\pi \sin\psi \cos s,$$

quae aequatio variis modis in series convergentes transformari potest.

Sit brevitatis causa $\theta = \sin\frac{s}{2}$, $p = \frac{\sin\pi \sin\psi}{\sin Z}$, $q = \operatorname{cotg} Z$ et $P = \frac{2p}{\sin 1''}$, $Q = \frac{1}{2} q \sin 1''$.

Ponamus primo, valorem quantitatis x satis exiguum esse, ita ut liceat quantitati $\sin x$ substituere $x \sin 1''$, id quod pro serie non ita magna observationum prope meridiani planum institutarum fere nunquam non licebit. Hoc ergo casu invenies ope aequationis praecedentis

$$x = P\theta^2 - P^2Q\,\theta^4 + \frac{1.4}{1.2} P^3Q^2\theta^6 - \frac{1.5.6}{1.2.3} P^4Q^3\theta^8 + \frac{1.6.7.8}{1.2.3.4} P^5Q^4\theta^{10} + \text{etc.}$$

cujus seriei lex perspicua est.

Quodsi autem loco ipsius x potestatem quamcunque ejusdem quantitatis desideres, habebis

$$x^n = P^n \theta^{2n} - \frac{n}{1} P^{n+1} Q \theta^{2(n+1)} + \frac{n(n+3)}{1 \cdot 2} P^{n+2} Q^2 \theta^{2(n+2)}$$
$$- \frac{n(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^{n+3} Q^3 \theta^{2(n+3)} + \text{etc.}$$

ubi, si ponatur $n = 1$, prodibit series primo inventa. Eundem valorem quantitatis x etiam ope fractionis continuae exprimere licet hoc modo:

$$x = \cfrac{P\theta^2}{1 - \cfrac{PQ\theta^2}{-1 - \cfrac{PQ\theta^2}{1 - \cfrac{PQ\theta^2}{-1 - \cfrac{PQ\theta^2}{1 - \text{etc.}}}}}}$$

vel etiam, si logarithmi placent:

$$\log x = \log(P\theta^2) - PQ\theta^2 + \frac{3}{2}(PQ)^2\theta^4 - \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3}(PQ)^3\theta^6 + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4}(PQ)^4\theta^8 - \text{etc.}$$

quarum omnium serierum lex progressionis nulla explicatione indiget. Alias autem multas similes nullo fere negotio inde deducere licet, quibus hic, brevitati consulens, supersedendum esse existimavi, eo magis, cum non nisi supponendo $\sin x = x \sin 1''$ valeant et sequentes aequationes, hoc incommodo, si revera incommodum est, liberatae praecedentibus anteferendae sint.

Ponatur $a = p \sin^2 \frac{s}{2}$ et $b = a - q$ et habebis pro n numero quocunque:

$$(\text{tang}\, \tfrac{x}{2})^n = a^n + n a^{n+1}(a-q) + \frac{n(n+3)}{1 \cdot 2} a^{n+2}(a-q)^2$$
$$+ \frac{n(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n+3}(a-q)^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n+4}(a-q)^4 + \text{etc.}$$

Accepto in hac serie $n = 1$, erit

$$\tang\tfrac{x}{2} = p\theta^2 - p^2 q\theta^4 + (1 + \tfrac{4}{2} q^2) p^3 \theta^6$$
$$- (\tfrac{4}{2}\cdot 2 + \tfrac{5\cdot 6}{2\cdot 3} q^2) p^4 q \theta^8 + (\tfrac{4}{2} + \tfrac{5\cdot 6}{2\cdot 3} 3 q^2 + \tfrac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4} q^4) p^5 \theta^{10}$$
$$- (\tfrac{5\cdot 6}{2\cdot 3}\cdot 3 + \tfrac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot 4 q^2 + \tfrac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} q^4) p^6 q \theta^{12} + \text{etc.}$$

Quodsi eodem modo ponatur $n = 3, 5, 7$ etc. casusque hi singuli evolvantur substituanturque in aequatione notissima

$$\tfrac{x}{2} = \tang\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{5}\tang^5\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{7}\tang^7\tfrac{x}{2} + \text{etc.}$$

habebitur

$$\tfrac{x}{2} = p\theta^2 - p^2 q\theta^4 + (\tfrac{2}{3} + 2 q^2) p^3 \theta^6 - (3 + 5 q^2) p^4 q \theta^8$$
$$+ (\tfrac{6}{5} + 12 q^2 + 14 q^4) p^5 \theta^{10} - (10 + \tfrac{140}{3} q^2 + 42 q^4) p^6 q \theta^{12} + \text{etc.}$$

quae est series a cel. *Mollweide* data.

Eodem modo valor quantitatis $\sin\frac{x}{2}$ ope expressionis praecedentis pro $(\text{tg}\,\frac{x}{2})^n$ derivari poterit, cum sit

$$\sin\tfrac{x}{2} = \frac{\tang\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}} = \text{tg}\,\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{2}\text{tg}^3\tfrac{x}{2} + \tfrac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 2^2}\text{tg}^5\tfrac{x}{2} - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}\text{tg}^7\tfrac{x}{2} + \text{etc.}$$

Pro $\cos\frac{x}{2}$ habebitur pari ratione

$$\cos\tfrac{x}{2} = 1 - \tfrac{1}{2}\text{tg}^2\tfrac{x}{2} + \tfrac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 2^2}\text{tg}^4\tfrac{x}{2} - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}\text{tg}^6\tfrac{x}{2} + \text{etc.}$$

Porro simili calculo invenitur

$$\cos x = \frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = 1 - 2\,\text{tg}^2\tfrac{x}{2} + 2\,\text{tg}^4\tfrac{x}{2} - 2\,\text{tg}^6\tfrac{x}{2} + 2\,\text{tg}^8\tfrac{x}{2} - \text{etc.}$$

$$\sin x = \frac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = 2\,\text{tg}\,\tfrac{x}{2} - 2\,\text{tg}^3\tfrac{x}{2} + 2\,\text{tg}^5\tfrac{x}{2} - 2\,\text{tg}^7\tfrac{x}{2} + \text{etc.}$$

$$\tang x = \frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \text{tg}\,\tfrac{x}{2} + \text{tg}^3\tfrac{x}{2} + \text{tg}^5\tfrac{x}{2} + \text{tg}^7\tfrac{x}{2} + \text{etc.}$$

quibus evolutionibus, utpote facillimis, hic immorandi non est locus.

Si autem, ut supra, logarithmos adhibere placet, habebis

$$\log.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x = \log(p\theta^2) - pq\theta^2 + \left\{\begin{matrix} 1 \\ +\frac{3}{2}q^2 \end{matrix}\right\} p^2\theta^4 - \left\{\begin{matrix} \frac{3}{2}\cdot 2 \\ +\frac{4\cdot 5}{2\cdot 3}q^2 \end{matrix}\right\} p^3 q\,\theta^6$$

$$+\left\{\begin{matrix} \frac{3}{2} \\ +\frac{4\cdot 5}{2\cdot 3}\,3q^2 \\ +\frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4}q^4 \end{matrix}\right\} p^4\theta^8 - \left\{\begin{matrix} \frac{4\cdot 5}{2\cdot 3}\cdot 3 \\ +\frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4}\,4q^2 \\ +\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}q^4 \end{matrix}\right\} p^5 q\,\theta^{10}$$

$$+\left\{\begin{matrix} \frac{4\cdot 5}{2\cdot 3} \\ +\frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4}\,6q^2 \\ +\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,5q^4 \\ +\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}q^6 \end{matrix}\right\} p^6\theta^{12} - \text{etc.}$$

ubi lex progressionis patet.

Vel denique, fractiones continuas adhibendo,

$$\text{tang}\,\frac{x}{2} = \cfrac{p\theta^2}{1 + \cfrac{(p\theta^2 - q)\,p\theta^2}{-1 + \cfrac{(p\theta^2 - q)\,p\theta^2}{1 + \cfrac{(p\theta^2 - q)\,p\theta^2}{-1 + \text{etc.}}}}}$$

Quarum omnium serierum termini duo vel tres primi quovis in casu, qui revera in Astronomia practica occurrere potest, sufficiunt. Demonstrationes autem harum serierum, longiores quam difficiliores, hic negligendas esse censeo. Coronidis loco adjiciam demonstrationes aliarum formularum satis concinnarum, quas ante annum et quod excurrit alia via inventas publici juris feci.

Ex aequatione $\cos z = \cos\pi \cos\psi + \sin\pi \sin\psi \cos s$ facili transformatione derivabitur series sequens.

$$\log\cos\tfrac{z}{2} = \log\cos\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\psi}{2} + p\cos s - \tfrac{1}{2}p^2\cos 2s + \tfrac{1}{3}p^3\cos 3s - \text{etc.}$$

ubi $p = \text{tang}\,\tfrac{\pi}{2}\,\text{tang}\,\tfrac{\psi}{2}$.

Jam denotet ζ distantiam stellae a zenith tempore culminationis, quo casu series praecedens, cum sit $s = 0$, in hanc abit:

$$\log\cos\tfrac{\zeta}{2} = \log\cos\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\psi}{2} + p - \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{3}p^3 - \tfrac{1}{4}p^4 + \text{etc.}$$

quarum proinde differentia erit

$$\log\cos\tfrac{\zeta}{2} = \log\cos\tfrac{z}{2} + 2\left(p\sin^2\tfrac{s}{2} - \tfrac{1}{2}p^2\sin^2\tfrac{2s}{2} + \tfrac{1}{3}p^3\sin\tfrac{3s}{2} - \text{etc.}\right)$$

Pro observatione secunda, tertia etc. erit z et s vel z', s' vel z'', s'' etc. Facile autem apparet, aequationem ultimam, si s sit angulus parvus et p fractio satis exigua, id quod fere semper, et praecipue pro stella polari, quae hunc in usum κατ' ἐξοχὴν adhiberi solet, locum habet, in sequentem abituram:

$$\log\cos\tfrac{\zeta}{2} = \log\cos\tfrac{z}{2} + 2\sin^2\tfrac{s}{2}\,(p - 2p^2 + 3p^3 - 4p^4 + \text{etc.}).$$

Est autem

$$p - 2p^2 + 3p^3 - \text{etc.} = \frac{p}{(1+p)^2} = \frac{\sin\pi\sin\psi}{4\cos^2\frac{\pi-\psi}{2}},$$

unde sequitur fore

$$\log\cos\frac{\zeta}{2} = \log\cos\frac{z}{2} + 2\sin^2\frac{s}{2}\cdot\frac{\sin\pi\sin\psi}{4\cos^2\frac{\pi-\psi}{2}}.$$

Sit A summa omnium numerorum ex tabula notissima *Delamberiana* (Connaiss. des tems l'an XII.), divisa per numerum n observationum singularum. Cum numeri hujus tabulae contineant valores quantitatis $\left(\frac{2\sin^2\frac{s}{2}}{\sin 1''}\right)$, erit pro omnibus observationibus simul sumtis, adhibendo logarithmos communes,

$$\log\cos\frac{\zeta}{2} = \frac{\log\left[\cos\frac{z}{2}\cos\frac{z'}{2}\cos\frac{z''}{2}\ldots\right]}{n} + A\mu\sin 1''.\frac{\sin\pi\sin\psi}{4\cos^2\frac{\pi-\psi}{2}}.$$

Jam sit $Z = z + z' + z'' + \ldots$ et $z^0 = \frac{1}{n}.Z$, quibus positis facili negotio demonstratur fore

$$\cos\frac{z}{2}\cos\frac{z'}{2}\cos\frac{z''}{2}\ldots = \left(\cos\frac{z^0}{2}\right)^n$$

siquidem differentialia altiorum ordinum negligantur, id quod saepissime licebit. Hinc ergo aequatio nostra quaesita erit:

$$\log\cos\frac{\zeta}{2} = \log\cos\frac{z^0}{2} + A\mu\sin 1''.\frac{\sin\pi\sin\psi}{4\cos^2\frac{\pi-\psi}{2}}.$$

Eadem denique methodo invenies

$$\log\sin\frac{\zeta}{2} = \log\sin\frac{z^\circ}{2} - A\,\mu\,\sin 1''.\,\frac{\sin\pi\,\sin\psi}{4\sin^2\frac{\pi-\psi}{2}}\ \text{et}$$

$$\log\text{tang}\frac{\zeta}{2} = \log\text{tang}\frac{z^\circ}{2} - A\,\mu\,\sin 1''.\,\frac{\sin\pi\,\sin\psi\cos(\pi-\psi)}{\sin^2(\pi-\psi)}$$

ubi $\log\mu\,\sin 1'' = 4.3233592$.

Cognito autem ope harum formularum valore quantitatis ζ, cognoscitur etiam verus valor quantitatis quaesitae ψ vel latitudinis loci observationum.

II.

Observationes meas ita adornavi, ut cuivis easdem aliis elementis ab integro calculandi potestas superesset. Ego autem, quoad declinationes, tabulis novis solaribus cel. de *Zach*, respectu ad latitudinem solis haud neglecto, et quoad refractionem tabulis a cel. *Bessel* nuper editis usus sum. Literae demum *a* et *b* notant divisionem libellae columnae verticali affixae in utraque parte ejusdem, *a* prope observatorem, et *b* prope stellam observatam.

1 8 1 5.

	Junii 26	—	—		Junii 27	a	b		Junii 29	a	b		Julii 1	a	b
	Horolog:	a	b	1	6h 19′ 2″	1.7	1.7	1	6h 27′ 6″	3.0	2.7	1	6h 5′ 23″	3.0	4.5
1	6h 17′ 7″	2.7	1.7	2	20	1.5	1.7	2	28 58	3.5	2.5	2	36 46	3.5	3.7
2	18 33	3.0	1.0	3	21	3.5	-0.5	3	30 2	3.7	1.2	3	38 7	3.7	3.7
3	19 52	3.5	-0.2	4	24	1.0	2.5	4	31 21	3.7	2.2	4	39 18	3.7	3.7
4	21 15	3.0	1.0	5	25	3.5	-0.2	5	32 43	3.5	2.2	5	40 11	3.7	3.7
5	22 15	4.0	0.2	6	25	2.0	1.5	6	33 35	2.7	3.0	6	41 55	4.0	3.5
6	23 13	3.0	1.0	7	27	3.5	-0.2	7	34 31	3.0	3.2	7	42 6	3.7	3.7
7	24 21	3.5	0.5	8	28	1.5	1.7	8	35 25	4.0	2.0	8	42 58	4.0	3.2
8	25 31	3.0	0.7	9	29	3.7	-0.1	9	36 24	5.2	0.7	9	44 13	3.2	4.0
9	26 40	3.5	-0.2	10	30	1.5	2.0	10	37 25	2.2	3.5	10	45 9	3.7	.2
10	27 42	2.7	0.7	11	31	3.7	-0.7	11	38 20	2.5	3.5	11	46 20	3.0	4.0
11	29 5	3.7	0.2	12	33	1.5	1.7	12	39 15	2.7	3.4	12	47 41	4.0	3.5
12	30 47	2.7	0.8	13	34	3.7	-0.5	13	39 57	3.0	2.9	13	48 40	3.2	4.1
13	31 52	4.0	-0.7	14	35	1.2	2.0	14	40 45	3.5	2.5	14	49 35	4.0	3.2
14	33 2	2.7	1.0					15	41 59	3.2	2.7	15	50 31	3.5	3.5
15	34 22	4.2	-1.0					16	42 56	4.0	2.0	16	51 27	3.7	3.5
16	35 54	2.7	0.7					17	43 49	3.7	2.0				
								18	44 45	3.2	2.5				

	Julii 9	*a*	*b*		Julii 10	*a*	*b*		Julii 28	*a*	*b*		Aug. 10	*a*	*b*
1	$7^h\ 7'\ 3''$	3. 7	2. 2	1	$7^h10'47''$	4. 5	0. 5	1	$8^h21'\ 4''$	3. 0	—0. 2	1	$9^h15'14''$	2. 8	3. 2
2	9 9	2. 5	3. 5	2	11 51	2. 0	3. 5	2	22 13	1. 0	2. 0	2	16 1	2. 2	4. 0
3	10 17	4. 5	1. 5	3	13 8	4 7	0. 2	3	23 7	3. 5	—0. 8	3	16 58	3. 2	3. 0
4	11 16	3. 0	3. 0	4	14 9	0. 2	4. 5	4	24 2	1. 2	1. 7	4	18 6	2. 2	3. 7
5	12 12	4. 7	1. 0	5	15 52	5. 0	0. 0	5	24 53	3. 5	—0. 8	5	19 7	3. 2	2. 8
6	13 10	3. 0	3. 0	6	16 47	1. 5	3. 7	6	25 36	0. 7	2. 0	6	20 6	2. 0	4. 0
7	14 2	5. 0	0. 7	7	17 46	5. 0	—0.5	7	26 38	3. 7	—1. 0	7	20 57	3. 4	2. 6
8	14 55	3. 0	3. 0	8	18 37	0. 5	4. 5	8	27 22	0. 0	2. 7	8	21 53	2. 2	3. 7
9	16 24	5. 2	0. 5	9	19 28	5. 0	—0.5	9	28 22	3. 5	—0. 8	9	22 46	4. 0	2 0
10	17 11	3. 2	2. 7	10	20 26	1. 2	3. 7	10	29 4	0. 5	2. 5	10	23 30	2. 7	3. 5
11	18 9	5. 5	0. 2	11	21 21	5. 2	—0.7	11	29 53	3. 7	—1. 0	11	24 23	3. 7	2. 3
12	19 3	3. 2	2. [illegible]	12	22 20	0. 0	4. 7	12	30 41	0. 5	2. 2	12	25 3	2. 7	3. 2
13	20 4	5. 5	0. 0	13	23 31	5. 2	—0.5	13	31 40	3. 7	—1. 0				
14	21 3	3. 2	2. 5	14	24 43	1. 7	3. 2	14	32 21	0. 0	2. 5				
15	22 2	5. 2	0. 5					15	33 32	3. 5	—0. 8				
16	23 3	3. 5	2. 5					16	34 22	0. 7	2. 0				
17	24 4	5. 2	0. 2					17	35 15	4. 0	—1. 3				
18	25 14	3. 5	2. 5					18	36 24	—0. 5	2. 7				

His observationibus in Sole factis accedit observatio α Aquilae, cujus positio ex catalogo cel. *Piazzi* desumta. Erat autem haec observatio sequens:

	Augusti 10		
	Temp. horol.	*a*	*b*
1	$19^h\,46'\,42''$	4. 0	4. 4
2	48 12	4. 1	4. 1
3	49 20	4. 1	4. 3
4	50 48	4. 1	4. 2
5	51 46	4. 1	4. 3
6	54 4	4. 0	4. 5
7	55 13	4. 6	3. 8
8	56 23	3. 7	4. 7
9	57 26	4. 0	4. 4
10	58 37	4. 1	4. 5

Sit jam A summa numerorum tabulae I. (Conn. des tems l'an XII.) et *a* summa numerorum tabulae III., sit δ vera solis declinatio, respectu latitudinis habito, et $\Phi = 55° \, 47' \, 28''$. Ponatur brevitatis causa

$$F = \frac{\sin\Phi \cos\delta}{\sin(\Phi - \delta)} \qquad f = F^2 . \operatorname{cotg}(\Phi - \delta)$$

erit reductio $\Phi = AF - af$,

qui valor quantitatis Φ, ob motum horologii, quod fere secundum tempus siderale incedebat, correctus sit Φ'. Sit denique θ tempus horologii pro momento meridiei veri et T, B status Thermometri Réaum. et Barometri dig. ang. expressus. Quo facto habebitur tabula sequens.

	Arcus percursus	θ	T	B	AF	af	ϕ	ϕ'	Declin. vera
			+						
Jun. 26	518°55′.42″. 3	6^h 17′ 6″	21	29 7. 1	3540″71	5.60	3535. 11	3515. 8	23 24 29. 23
27	454 7 0. 7	6 25 20	22	29 7. 8	1680.58	13. 13	1667 45	1658. 27	23 22 37. 93
29	585 29 32. 5	6 29 23	20	29 6. 5	2678. 7	2. 70	2676. 0	2661. 4	23 17 41. 88
Julii 1	522 4 20. 0	6 37 30	16	29 6. 8	1880. 27	1. 72	1878. 55	1868.28	23 11 7. 00
9	600 5 56. 2	7 9 43	16	29 8. 7	2496. 2	2. 3	2493. 9	2480.3	22 28 43. 10
10	468 6 55. 5	7 13 46	17. 5	29 7. 8	906 10	0. 40	905. 70	900.75	22 21 39. 10
28	658 54 5. 0	8 24 3	22. 7	29 7. 4	1234.4	0. 5	1233. 9	1227. 2	19 11 36. 90
Aug. 10	479 35 50. 0	9 19 6	17. 5	29 6. 7	228. 69	0. 0	228. 69	227. 44	15 49 6. 75
10	474 13 11. 2	—	16. 2	29 6. 6	1394. 9	0. 0	1394. 9	1394 9	8 23 28. 75

Tempore postremae observationis (Atair) horologium accelerabat $0^h\ 2'\ 10'',8$.

Cum valor unius divisionis libellae sit $5'',72$ habebitur correctio columnae verticalis pro quavis observationum serie

$$\tfrac{5,72}{2}\left[(a+a'+a''+\ldots)-(b+b'+b''+\ldots)\right]=\tfrac{5,72}{2}\,\Sigma\,(a-b),$$

quae correctio vocetur ∂l. Variationem autem declinationis et refractionis per $\partial\delta$ et ∂r, ipsamque refractionem veram per r et parallaxin altitudinis per p indicabimus, unde prodit tabula sequens.

	Junii 26	Junii 27	Junii 29	Julii 1
16 Z	518° 55′ 42″.3	454° 7′ 0″.75	585° 29′ 32″.5	522° 4′ 20″
$-\Phi'$	− 58 35.8	− 27 38.27	− 44 21.4	− 31 8.28
$\partial\delta$	9.1	7.50	14.7	15.75
∂r	1 4	0.70	1.1	0.76
∂l	2 8.41	59.77	41.76	− 3.15
16 Z	517 59 25.41	453.40.30.45	584.46 8.66	521 33 25.08
Z	32 22 27.84	32 24 19.32	32 29 13 82	32 35 50.32
r	34.38	34.34	34.68	35.44
p	− 4.63	− 4 63	− 4.53	− 4.65
δ	23 24 29 23	23 22 37.93	23 17 41.88	23 11 7.00
Altitud. Pol.	55 47 26.82	55 47 26.96	55 47 25 85	55 47 28.11

	Julii 9	Julii 10	Julii 28	Augusti 10	Augusti 10
	600° 5 56″.25	438°6′55″.50	656°54 [illegible] 0	479°3[illegible]′50″.0	474°13′11″ 25
$-\varphi'$	— 41 20.3	— 15 0.75	— 20 27.2	— 3 47.44	— 23 14 90
$\partial \varsigma$	36 85	17 50	41 8	10 68	0.80
∂r	0 95	0.35	0.5	0.11	— 6 [illegible] 6
∂l	1 55 83	44.04	1 7.5	— 10.58	473 49 50.29
	599 27 9 58	407 52 56 64	658 3[illegible] 27 6	479 32 2.77	47[illegible] 22 59 03
Z	33 18 [illegible]0.53	33 45 12 62	36 35 18 2	39 57 40. 3	—
r	36 62	36 42	39 90	46.07	59 93
ρ	— 4.63	— 4 72	— 5 04	- 5.52	-
δ	22 28 4[illegible] [illegible]0	22 2 39 [illegible]0	19 11 36.90	15 49 6.75	8 23 28 75
Altit. Poli	55°47′25″62	55 47 23.42	55 47 29 96	55 47 27.5[illegible]	55 47 7.71

Quibus omnibus simul sumtis habebitur pro determinanda latitudine observatorii Casanensis tabula sequens

Num. observ.	Latitudo
16	55° 47′ 26″ 8
30	55 47 26. 9
48	55 47 26. 5
64	55 47 26. 9
82	55 47 26. 7
96	55 47 26. 1
114	55 47 26. 7
126	55 47 26. 8
136	55 47 26. 9

CALCUL DES OBSERVATIONS DE LA COMÈTE DE 1815,

FAITES À L'OBSERVATOIRE DE ST. PÉTERSBOURG.

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 22 Nov. 1815.

Cette comète, digne de la plus grande attention des astronomes, a été observée par M. l'Académicien *Wisnefski*, chaque nuit où le ciel l'a permis, depuis le 30 Mars jusqu'au 5 May, nouveau Style, derniers jour où il fut possible d'appercevoir cet astre, à cause des crépuscules qui, dans notre climat, durent toute la nuit dès le 23 Avril n. St. Après sa conjonction avec le Soleil, la comète se trouva trop peu élevée sur l'horison de St. Pétersbourg, pour être visible. En général, la lumière de cette comète était si faible, qu'il m'était impossible de l'observer avec précision, de sorte que M. de *Wisnefski*, doué d'une vue extrêmement bonne, fut obligé de se charger seul de ces observations. En revanche je me suis volontiers chargé de les calculer.

Les observations ont été faites avec deux micromètres annulaires, dont les diamètres sont de 28′ 47″, 78 et de 52′ 58″, 5. Le nombre des observations faites dans chaque nuit est de trois à quinze, selon que le ciel était plus ou moins favorable. J'ai calculé toutes ces observations, je les ai soumises à une critique rigoureuse, qui m'a fait voir qu'il n'y en a que trois ou quatre qu'il faut rejeter; enfin, tenant compte du degré de précision que chaque observation fait espérer pour la détermination de l'ascension droite ou de la déclinaison, selon la grandeur de la corde, j'en ai pris un milieu. Le calcul, dans lequel j'ai employé la précession, aberration et nutation, donne pour résultat les ascensions droites et déclinaisons *apparentes* de la comète. Au reste, elle fut toujours observée à une si grande hauteur, qu'il aurait été inutile d'avoir égard à la refraction.

Je commencerai par calculer les positions apparentes des étoiles, avec lesquelles la comète a été comparée. Il y en a en tout dix que je désignerai par les lettres A, B, etc. K: les six premières, A jusqu'à F, ont été calculées d'après le dernier catalogue de M. *Piazzi*; les quatre dernières, lesquelles ne s'y trouvent pas, d'après le grand catalogue de M. *Bode*. J'ai calculé la précession annuelle d'après les formules données par M. *Bessel*, l'aberration et la nutation d'aprés les formules trigonométriques.

		Grandeur	1800, Moyenne Asc. droite	Decl. boréale
A	*d* Persée	5. 6	61°.46′.59″,1	46°. 0′.18″,4
B	*c* —	5	58. 32. 52, 0	47. 9. 47, 2
C	9 Cocher	5. 6	72. 45. 42, 4	51. 18. 48, 5
D	24 Caméléopard	7	81. 31. 13, 5	56. 27. 23, 5
E	2 Lynx	4. 5	90. 29. 25, 2	59. 3. 43, 3
F	12 —	6	97. 7. 54, 5	59. 37. 26, 1
G	233 Persée	6	66. 38. 34.	47. 54. 8.
H	235 —	6	67. 5. 17.	49. 35. 3.
I	226 —	7	64. 54. 19.	49. 42. 2.
K	*k* Caméléopard	6	83. 22. 54.	56. 50. 1.

	Précession annuelle en ÆR	Précession annuelle en déclin.	Précession jusqu'à l'époque de l'observation en ÆR	Précession jusqu'à l'époque de l'observation en déclin.
A	+64″,3111	+ 9″,4782	+16′.20″,744	+2′.24″,645
B	+64, 4597	+10, 4600	+16. 23, 009	+2. 39, 660
C	+69, 9256	+ 5, 9407	+17. 47, 414	+1. 30, 809
D	+75, 9914	+ 2, 9560	+19. 21, 905	+0. 45, 284
E	+79, 4596	− 0, 1716	+20. 16, 527	−0. 2, 632
F	+79, 9524	− 2, 4888	+20. 24, 871	−0. 38, 190
G	+66, 3853	+ 7, 2484	+16. 52, 374	+1. 50, 679
H	+67, 7000	+ 7, 8044	+17. 12, 762	+1. 59, 212
I	+67, 4231	+ 8, 5020	+17. 8, 878	+2. 9, 915
K	+76, 4850	+ 2, 3105	+19. 30, 217	+0. 35, 407

	Lors de l'observation, Moyenne Asc. droite	Lors de l'observation, Moyenne Declin. boréale
A	62°. 3′.19″,84	46°. 2′.43″,04
B	58. 49. 15, 01	47. 12. 26, 86
C	73. 3. 29, 81	51. 20. 19, 31
D	81. 50. 35, 40	56. 28. 8, 78
E	90. 49. 41, 73	59. 3. 40, 67
F	97. 28. 19, 37	59. 36. 47, 96
G	66. 55. 26, 37	47. 55. 58, 68
H	67. 22. 29, 76	49. 37. 2, 21
I	65. 11. 27, 88	49. 44. 11, 91
K	83. 42. 24, 22	56. 50. 36, 41

	Aberation en AR	Aberation en déclin.	Nutation en AR	Nutation en declin.	Leur somme en AR	Leur somme en decl.
A	−18″,47	+ 4″,36	−22″,23	−4″,54	−40″,70	−0″,18
B	−20, 36	+ 3, 95	−22, 19	−4, 85	−42, 55	−0, 90
C	−20, 12	+ 6, 34	−24, 43	−3, 30	−44, 55	+3, 04
D	−24, 60	+ 7, 57	−26, 81	−2, 18	−51, 41	+5, 39
E	−25, 72	+ 8, 99	−28, 36	−1, 02	−54, 08	+7, 97
F	−23, 84	+10. 13	−28, 74	−0, 17	−52, 58	+9, 96
G	−18, 60	+ 5, 22	−23, 05	−4, 03	−41, 65	+1, 19
H	−19, 89	+ 5, 45	−23, 51	−3, 96	−43, 40	+1, 49
I	−21, 50	+ 4, 81	−23, 37	−4, 17	−44, 87	+0, 64
K	−24, 97	+ 7, 75	−27, 07	−1, 94	−52, 04	+5, 81

	Lors de l'observation Ascens. droite apparente	Lors de l'observation Déclinaison apparente
A	62°. 2′.39″,1	46°. 2′.42″,9
B	58. 48. 32, 5	47. 12. 26, 0
C	73. 2. 45, 3	51. 20. 22, 3
D	81. 49. 44, 0	56. 28. 14, 2
E	90. 48. 47, 6	59. 3. 48, 6
F	97. 27. 26, 8	59. 36. 57, 9
G	66. 54. 44, 7	47. 55. 59, 9
H	67. 21. 46, 4	49. 37. 3, 7
I	65. 10. 43, 0	49. 44. 12, 6
K	83. 41. 32, 2	56. 50. 42, 2

Le 30 Mars, nouveau Style, premier jour d'observation, la comète parut dans la lunette de nuit, d'une couleur jaune assés vive, dont la lumière était condensée vers le centre, où M. de *Wisnefski* crut appercevoir un très-petit noyeau, accompagné d'une queue à peine perceptible: le diamètre de la Photosphère fut d'environ une minute et demie. Aucune étoile connue ne se trouvant dans le voisinage de la comète, elle fut comparée onze fois avec une étoile de la 7. 8. grandeur, pour s'assurer de la direction et de la vitesse de sa marche. N'ayant pu vérifier la position de cette étoile, je n'ai pas calculé ces observations.

Le 4 Avril le vent était si violent, qu'on ne put faire qu'une seule observation, peu sure à cause du vent. La comète fut comparée avec *d* Persée (A).

Le 5 Avril le diamètre de la Photosphère parut de 3 minutes, la longueur de la queue de 15 minutes, et on put l'appercevoir à la vue simple. Elle fut comparée quatre fois avec *c* Persée (B).

Le 7 Avril elle fut comparée quatre fois avec 233 Persée (G).

Le 9 Avril sa lumière parut déja un peu plus faible. Elle fut comparée six fois avec 235 Persée (H).

Le 11 Avril sa lumière se trouva sensiblement affaiblie, le diamètre de sa Photosphère d'environ 2 minutes, la longueur de la queue de 15 minutes. Elle fut comparée trois fois avec 226 Persée (I).

Le 13 Avril elle parut encore plus faible, à cause du clair de lune; son diamètre était de moins de 2 minutes, et on eut de la peine à appercevoir la queue, longue d'environ 5 minutes. La comète fut comparée cinq fois avec 9 Cocher (C).

Le 25 Avril elle fut comparée quinze fois avec 24 Caméléopard (D).

Le 27 Avril elle fut comparée dix fois avec *k* Caméléopard (K).

Le 2 May elle fut comparée onze fois avec 2 Lynx (E).

Le 4 May elle fut comparée six fois avec 12 Lynx (F).

Le 5 May, dernier jour d'observation, la comète fut comparée sept fois avec la même étoile (F).

La table suivante présente les résultats de toutes ces observations.

Jours n. St.	Tems vrai de St. Pétersb.	Æ de la comète, moins celle de l'étoile	Décl. de la com., moins celle de l'ét.	Ascens. droite apparente de la comète	Déclinaison apparente de la comète
4 Avril	9h.42'.54",0	+0°.17'.23",8	+36'.32",8	62°.20'. 2",9	46°.39'.15",7
5 —	11. 25. 57,1	+4. 15. 39,1	— 1.26,7	63. 4. 11,6	47. 10. 59,3
7 —	11. 37. 10,0	—2. 22. 44,4	+15. 7,3	64. 32. 0,3	48. 11. 7,2
9 —	11. 52. 53,3	—1. 16. 14,0	—26. 9,2	66. 5. 32,4	49. 10. 54,5
11 —	11. 22. 36,1	+2. 27. 18,1	+24. 53,1	67. 38 1,1	50. 9. 5,7
13 —	10. 37. 3,7	—3. 42. 24,8	- -	69. 20. 20,5	- - -
25 —	10. 47. 24,8	+0. 13. 28,6	— 0. 6,5	82. 3. 12,6	56. 28. 7,7
27 —	10. 49. 40,7	+0. 57. 23,5	+24. 43,9	84. 38 55,7	57. 15. 26,1
2 May	11. 7. 10,9	+1. 0. 8,1	— 2. 54,1	91. 48. 55,7	59. 0. 54,5
4 —	11. 25. 48,9	—2. 28. 6,8	+ 0 23,0	94. 59. 20,0	59. 37. 20,9
5 —	11. 38. 46,3	—0. 49. 25,7	+17. 18,9	96 38. 1,1	59 54. 16,8

Le 13 Avril, les cordes étaient si grandes qu'on ne peut se fier sur la déclinaison; c'est pourquoi je l'ai supprimée.

Le 27 Avril, l'ascension droite est peu sure, à cause de la petitesse des cordes.

CALCUL DE L'OPPOSITION DE JUPITER

OBSERVÉE À ST. PÉTERSBOURG L'AN 1816.

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 28 Août 1826.

Les observations de cette opposition, faites par MM. de *Wisnefski* et *Tarkhanoff*, n'ont réuissi que quatre nuits, à cause des nuages.

Vieux Style Avril	Passages au méridien d'après une pendule réglée sur le tems sidéral		
	Spica	Bord occidental de Jupiter	2. α ♎
11	$13^h.15'.23'',58$	$14^h.14'.31'',08$	$14^h.40'.35'',88$
12	– – 23, 90	– 14. 1, 65	– – 36, 27
13	– – 23, 73	– 13. 32, 28	– – 36, 20
14	– – 23, 58	– 13. 2, 42	– – 35, 80

	Distances au zénit observées au grand quart-de-cercle mural			Therm. Réaum.	Barom. français
	Spica	Bord bor. de ♃	2. α ♎		
Avr. 11	70°.5′.36″,8	71°.53′. 7″,7	75°.9′.1″,1	0°,0	28′.6″,0
— 12	– – 37,6	– 50. 39,0	– – 0,8	+ 2,5	28. 4,8
— 13	– – 41,9	– 48. 16,3	– – 6,6	+ 3,5	28. 3,0
— 14	– – 38,4	– 45. 42,7	– – 0,8	– 0,5	28. 2,6

	Ascension droite moyenne		Longitude du Soleil
	Spica	2. α ♎	
Avril 11	13^h.15′.31″,74	14^h.40′.43″,98	1^s.3°.36′.
— 12	– – 31,75	– – 44,00	– 4. 34.
— 13	– – 31,76	– – 44,00	– 5. 32.
— 14	– – 31,77	– – 44,01	– 6. 30.

	Déclinaison moyenne australe		
	Spica	2. α ♎	☊ ☾
Avril 11	10°.11′.43″,67	15°.16′.3″,69	2^s.17°.46′.
— 12	– – 43, 72	– – 3,73	– – 43.
— 13	– – 43, 77	– – 3,77	– – 39.
— 14	– – 43, 82	– – 3,81	– – 36.

	Aberration et Nutation en			
	Ascension droite		Déclinaison	
	Spica	α ♎	Spica	α ♎
Avril 11	+ 0″,109	+ 0″,128	+ 1″,584	+ 2″,062
— 12	+ 0,104	+ 0,131	+ 1,570	+ 2,078
— 13	+ 0,099	+ 0,134	+ 1,557	+ 2,095
— 14	+ 0,094	+ 0,136	+ 1,543	+ 2,112

	Asc. droite apparente		Déclinaison apparente	
	Spica	α ♎	Spica	α ♎
11	13h.15′.31″,849	14h.40′.44″,115	10°.11′.45″,25	15°.16′.5″,75
12	– – 31,853	– – 44,127	– – 45,29	– – 5,80
13	– – 31,856	– – 44,139	– – 45,33	– – 5,86
14	– – 31,860	– – 44,150	– – 45,36	– – 5,92

	Réfractions		
	Spica	Jupiter	α ♎
Avril 11	2′.48″,46	3′.6″,14	3′.48″,54
— 12	– 45,86	– 2,82	– 44,96
— 13	– 44,18	– 0,58	– 42,70
— 14	– 47,19	– 3,46	– 46,79

Avr.	La pendule retard. Spica	♃	α ♎	Æ corrigée de Jupiter en tems	en degrés
11	8″,27	8″,25	8″,23	14ʰ.14′.39″,33	213°.39′.49″,95
12	7,95	7,90	7,86	— 14. 9,55	— 32. 23,25
13	8,13	8,03	7,94	— 13. 40,31	— 25. 4,65
14	8,28	8,31	8,35	— 13. 10,73	— 17. 40,95

Avr.	Distances au zénit corrigées par la réfraction Spica	Jupiter	α ♎
11	70°.8′.25″,26	71°.56′.13″,84	75°.12′.49″,64
12	— — 23,46	— 53. 41,82	— — 45,76
13	— — 26,08	— 51. 16,88	— — 49,30
14	— — 25,59	— 48. 46,16	— — 47,59

Avr.	Différences des déclinaisons de Jupiter et des étoiles Spica	α ♎
11	1°.47′.48″,58	3°.16′.35″,80
12	1. 45. 18,36	3. 19. 3,94
13	1. 42. 50,80	3. 21. 32,42
14	1. 40. 20,57	3. 24. 1,43

	Déclinaison observée du bord boréal de ♃		
	par la comparaison avec		Milieu
	Spica	α ♎	
11	11°.59′.33″,83	11°.59′.29″,95	11°.59′.31″,89
12	– 57. 3,65	– 57. 1,86	– 57. 2,75
13	– 54. 36,13	– 54. 33,44	– 54. 34,78
14	– 52. 5,93	– 52. 4,49	– 52. 5,21

Dans le calcul suivant, je me suis servi des tables de M. *Delambre* pour le Soleil, et de celles de M. *Bouvard* pour Jupiter. Pour cet effèt, il fallait convertir le tems sidéral en tems moyen solaire.

	Tems moyen des observations à	
	St. Pétersbourg	Paris
Avril 11	12^h. 7′.23″,37	22^h.15′.27″,37
— 12	12. 2. 57,77	— 11. 1,77
— 13	11. 58. 32,70	— 6. 36,70
— 14	11. 54. 7,29	— 2. 11,29

Avr.	Longitude de la terre de l'équinoxe moyen	Rayon vecteur = R	Angle au Soleil = ♃ — ♁
11	7^s.3°.35′.54″,01	1,00658845	+ 1°.32′. 7″,98
12	— 4. 34. 5,32	1,00685507	+ 0. 38. 29,75
13	— 5. 32. 15,03	1,00711850	— 0. 15. 6,96
14	— 6. 30. 23,22	1,00737822	— 1. 8. 41,97

Avr.	Longitude et Latitude héliocentriques de Jupiter		Rayon vecteur $= r$
11	215°. 8′. 1″,99	1°.10′.29″,20 bor.	5,4352775
12	— 12. 35,07	— — 26,09	5,4351402
13	— 17. 8,07	— — 23,27	5,4349933
14	— 21. 41,25	— — 20,46	5,4348604

Ces élémens m'ont donné, par le calcul trigonométrique, ce qui suit :

	Angle à la terre $= \odot - ♃$	Longitude et Latitude géocentriques de Jupiter	
11	+ 178°. 6′.55″,51	215°.28′.58″,5	1°.26′.29″,80
12	+ 179. 12. 44,60	— 21. 20,7	— — 26,76
13	— 179. 41. 26,70	— 13. 41,7	— — 23,72
14	— 178. 35. 40,03	— 6. 3,2	— — 20,35

Les observations nous ont donné les résultats suivans:

	Ascension droite du bord ocidental de ♃	Déclinaison australe du bord boréal
Avril 11	213°.39′.49″,95	11°.59′.31″,89
— 12	— 32. 23,25	— 57. 2,75
— 13	— 25. 4,65	— 54. 34,78
— 14	— 17. 40,95	— 52. 5,21

Dans la réduction de ces observations au centre de Jupiter, j'ai employé la parallaxe horisontale du Soleil

$= 8'',74 = \mathrm{P}$;

distance moyenne de ♃ au Soleil $= 5,20279 = a$,
demi-diamètre moyen de Jupiter $= 19'',12 = d$,
rayon vecteur de la terre - $= 1,00738 = \mathrm{R}$,
rayon vecteur de Jupiter - $= 5,43499 = r$.
distance de Jupiter au zénit - $= 71°51'17'' = \alpha$,
déclinaison de Jupiter - - $= 11°54'35'' = \delta$.

A l'aide de ces élémens, le calcul trigonométtique m'a donné :

la distance de Jupiter à la terre $= 4,42814 = \varrho$,
parallaxe horisontale de Jupiter $= \frac{\mathrm{P}}{\varrho} = 1'',974 = p$,
parallaxe de hauteur - $= p \sin \alpha = 1'',876 = p'$,
demi-diamètre de Jupiter - $= \frac{a}{\varrho} d = 22'',46 = d'$,
le même réduit au parallèle $= \frac{d'}{\cos \delta} = 22'',96 = d''$.

Il faut donc ajouter $d'' = 22'', 96$ aux ascensions droites, et $d' - p' = 20'', 58$ aux déclinaisons, pour les réduire au centre ; d'où il viendra :

	Ascension droite et Declinaison observées du centre de ♃	
Avril 11	213°.40′.12″,9	11°.59′.52″,47
— 12	— 32. 46,2	— 57. 23,33
— 13	— 25. 27,6	— 54. 55,36
— 14	— 18. 3,9	— 52. 25,79

Réduisant ces lieux à l'écliptique, par le calcul trigonométrique, et supposant l'obliquité de l'écliptique $= 23°27'50'',7$; j'ai trouvé ce qui suit :

	Longitude et Latitude observées de Jupiter		Longitude vraie
11	215°.28′.46″,85	1°.26.′47″,45	215°.28′.53″,9
12	— 21. 5,01	— — 43,19	— 21. 12,1
13	— 13. 30,92	— — 40,21	— 13. 38,0
14	— 5. 51,60	— — 36,81	— 5. 58,7

La nutation de Jupiter en longitude est $= - 18'',64$; son aberration $= - 11'',55$; il faut donc ajouter $7'',09$ à toutes les longitudes observées ou apparentes, pour les convertir en longitudes vraies, ce qui donne les nombres renfermés dans la dernière colonne. La correction de la latitude est nulle.

La comparaison de ces lieux, conclus des observations, avec ceux que nous avons tirés des tables, donne le résultat, que les tables donnent la longitude de Jupiter trop grande, le 11 Avril de $4'',6$; le 12 de $8'',6$; le 13 de $3'',7$; le 14 de $4'',5$; et au contraire sa latitude trop petite, le 11 Avril de $17'',6$; le 12 de $16'',4$; le 13 de $16'',5$; le 14 de $16'',5$. Le milieu est $+ 5'',35$ et $- 16'',75$, pour les longitudes et latitudes géocentriques. Pour réduire ces erreurs aux lieux héliocentriques, il faut les multiplier par

$$\frac{\text{tang lat. hélioc.}}{\text{tang lat. géoc.}} = 0,81475\,;$$

ce qui donne les corrections à appliquer aux tables, savoir $-4'',36$ pour les longitudes, et $+13'',65$ pour les latitudes.

L'opposition a eu lieu le 13 Avril matin à
$3^h48'38''$ tems moyen de Paris, ou
$5^h40'34$ — — — — St. Pétersbourg.

OPPOSITION DE JUPITER ET OCCULTATIONS

OBSERVÉES À L'OBSERVATOIRE DE L'ACADÉMIE

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 7 Février 1816.

L'intention de réunir les deux oppositions de Jupiter des années 1814 et 1815, m'avait empeché jusqu'à présent, de présenter la première à l'Académie. Mais comme celle de l'an 1815 n'a pas réussi, n'ayant pu observer Jupiter qu'une fois, à cause des nuages, je ne l'ai voulu différer plus longtems. J'y ai joint quelques occultations d'étoiles par la lune, les seules que j'ai pu observer dans ce tems-là, qui était extrèmement défavorable.

I. Opposition de Jupiter, l'an 1814.

Observations de Jupiter, comparé avec Régulus.

Vieux Style Février	Passages au méridien d'après une pendule régleé sur le tems sidéral: Régulus	Bord occidental de Jupiter
10	$9^h.58'.49'',20$	$10^h.31'.\ 9'',97$
11	– – 49,80	– 30. 40,75
12	– – 50,62	– 30. 12,57
13	– – 51,60	– 29. 43,72
14	– – 51,98	– 29. 14,96

	Distances au zénit, observées au grand quart-de-cercle mural: Régulus	Bord boréal de ♃	Therm. Réaum.	Barom. français
10 Février	$47^\circ.3'.14'',56$	$49^\circ.\ 7'.20'',89$	$-13^\circ,8$	$28'.\ 8'',17$
11 —	– – 12,40	49. 4. 22,57	–16,2	– 11, 25
12 —	– – 13,77	49. 1. 27,59	–13,9	– 11, 10
13 —	– – 17,73	48. 58. 32,63	–11,6	– 9, 30
14 —	– – 18,21	48. 55. 33,73	–13,9	– 7, 60

Le 14, le ciel commença à se couvrir de nuages, et l'air était déja pendant l'observation si trouble, que les astres paraissaient sautiller dans la lunette, de sorte que l'observation de ce jour est un peu douteuse. Le lendemain il n'y eut plus moyen d'observer.

Calcul de ces observations.

Févr.	Æ moyenne de Régulus	Décl. moyenne boréale	Longitude du ☉	☊ ☾
10	149°.36′.56″,225	12°.52′.19″,633	11ˢ.3°.44′	3ˢ.29°.42′
14	– – 56,752	– – 19,444	– 7. 45	– – 29

	Aberration en		Nutation en	
	Æ	déclinaison	Æ	déclinaison
10 Févr.	+19″,394	–6″,815	–16″,031	+2″,962
14 —	+19, 196	–6, 813	–16, 057	+2, 990

	Æ apparente de Régulus		Déclinaison apparente
	en degrés	en tems	
10 Février	149°.36′.59″,59	9ʰ.58′.27″,97	12°.52′.15″,78
11 —	– – 59,66	– – 27,98	– – 15,74
12 —	– – 59,74	– – 27,98	– – 15,70
13 —	– – 59,82	– – 27,99	– – 15,66
14 —	– – 59,89	– – 27,99	– – 15,62

	Réfractions	
	Régulus	♃
10 Février	1′.11″,67	1′.16″,81
11 —	1. 13,21	1. 18, 21
12 —	1. 12,10	1. 17,18
13 —	1. 11,09	1. 15,85
14 —	1. 11,59	1. 14,23

	La pendule avançoit		Æ de ♃ corrigée	
	Régul.	♃	en tems	en degrés
10 Février	21″,23	21″,24	$10^h.30'.48'',73$	157°.42′.10″,95
11 —	21,82	21,84	— 30. 18,91	— 34. 43,65
12 —	22,64	22,66	— 29. 49,91	— 27. 28,65
13 —	23,61	23,62	— 29. 20,10	— 20. 1,50
14 —	23,99	24,00	— 28. 50,96	— 12. 44,40

	Distances au zénit, corrigées par la réfraction		Différence de ces distances et des déclin.	Déclinaison observée du bord boréal
Févr.	Régulus	Jupiter		
10	47°.4′.26″,23	49°. 8′.37″,70	2°. 4′.11″,47	10°.48′. 4″,31
11	— — 25,61	49. 5. 40,78	2. 1. 15,17	— 51. 0,57
12	— — 25,87	49. 2. 44,77	1. 58. 18,90	— 53. 56,80
13	— — 28,82	48. 59. 48,48	1. 55. 19,66	— 56. 56,00
14	— — 29,80	48. 56. 47,96	1. 52. 18,16	— 59. 57,46

Pour consulter les tables, il faut convertir le tems sidéral des observations en tems moyen solaire.

	Tems moyen des observations à	
	St. Pétersbourg	Paris
10 Février	$12^h.22'.\ 5'',47$	$22^h.30'.\ 7'',47$
11 —	— 17. 39,82	— 25. 41,82
12 —	— 13. 14,98	— 21. 16,98
13 —	— 8. 49,35	— 16. 51,35
14 —	— 4. 24,37	— 12. 26,37

Pour ces époques les tables de M. *Delambre* m'ont donné les lieux héliocentriques de la terre, et celles de M. *Bouvard* les lieux de Jupiter, les uns et les autres comptés de l'équinoxe moyen. Leur combinaison donne l'angle au Soleil, ou ce qu'on appelle angle de *commutation*, ainsi qu'on le verra dans la table suivante.

	Long. héliocentr. de ♃, sur l'écliptique	Rayon vecteur de Jupiter	Lat. hélioc. boréale de ♃
10 Février	$155°.\ 5'.14'',50$	5,399733	$1°.5'.48'',97$
11 —	— 9. 51,18	5,399953	1. 5. 52,49
12 —	— 14. 27,83	5,400175	1. 5. 56,00
13 —	— 19. 4,43	5,400397	1. 5. 59,44
14 —	— 23. 41,09	5,400619	1. 6. 2,88

	Long. héliocentr. de la terre	Rayon vect. de la terre	Angle au Soleil $= ♃ - ♁$
10 Février	153°.44′. 3″,71	0,9900060	+ 1°.21′.10″,79
11 —	154. 44. 13,15	0,9902356	+ 0. 25. 38,03
12 —	155. 44. 20,64	0,9904665	− 0. 29. 52,81
13 —	156. 44. 25,99	0,9906995	− 1. 25. 21,56
14 —	157. 44. 29,36	0,9909345	− 2. 20. 48,27

Avec ces élémens, j'ai calculé par la trigonométrie, l'angle à la terre, ou d'*élongation*, et la latitude géocentrique de Jupiter: le premier donne immédiatement la longitude géocentrique de Jupiter.

Févr.	Angle à la terre $= \odot - ♃$	Longit. géocentr. de Jupiter	Latit. géocentr. de Jupiter
10	+ 178°.20′.35″,63	155°.23′.28″,08	1°.20′.35″,07
11	+ 179. 28. 36,52	155. 15. 36,63	— — 39,92
12	− 179. 23. 24,43	155. 7. 45,07	— — 44,40
13	− 178. 15. 27,76	154. 59. 53,75	— — 48,48
14	− 177. 7. 33,77	154. 52. 3,13	— — 52,19

Avant de réduire les ascensions droites et déclinaisons observées à l'écliptique, il faut les corriger par la parallaxe et le diamètre apparent de Jupiter. Supposant la parallaxe moyenne du Soleil $= 8'',8$, et nommant R la distance de Jupiter à la terre, r sa distance au Soleil,

λ la latitude héliocentrique de Jupiter, γ sa latitude géocentrique, on a $R = \frac{r \sin \lambda}{\sin \gamma}$, et la parallaxe horisontale de Jupiter, $p = \frac{8'',8}{R} = \frac{8'',8 . \sin \gamma}{r . \sin \lambda}$, et on trouve pour le 10 Février $p = 1'',9953$; pour le 14 Février $p = 1'',995$; ou bien $p = 2'',00$. De plus, nommant a la distance moyenne de Jupiter au Soleil, d son demi-diamètre apparent à cette distance, son demi-diamètre géocentrique sera $d' = \frac{a d}{R} = \frac{a d p}{8'',8}$. Supposant donc $a = 5,20279$; $d = 19'',12$: on trouve $d' = 22'',55$. La parallaxe p, étant multipliée par le sinus de la distance de Jupiter au zénit, donne celle qui doit être appliquée aux observations; et on la trouve

pour le 10 Février $= p . \sin 49° \; 8' \; 38'' = 1'',509$;

— — 14 — $= p . \sin 48° \; 56' \; 48'' = 1'',505$:

donc, pour tous les cinq jours, $p' = 1'',51$. Ainsi, la correction des distances de Jupiter au zénit est

$$22'',55 - 1'',51 = 21'',04:$$

ce qu'il faut retrancher des déclinaisons, parceque le bord boréal a été observé. Pour corriger les passages au méridien, il faut réduire le demi-diamètre de Jupiter à son parallèle, en le divisant par le cosinus de la déclinaison qui est égale à 10° 54′; et on trouve ce demi-diamètre réduit $= 22'',97$; ce qu'il faut ajouter à l'ascension droite, puisque c'est le bord occidental qui a été observé.

De cette manière on trouve

	Æ corrigée du centre de Jupiter	Déclinaison corrigée du centre de ♃
10 Février	157°.42′.33″,92	10°.47′.43″,27
11 —	— 35. 6,62	— 50. 39,53
12 —	— 27. 51,62	— 53. 35,76
13 —	— 20. 24,47	— 56. 34,96
14 —	— 13. 7,37	— 59. 36,42

Réduisant ces lieux à l'écliptique, par la trigonométrie, et supposant l'obliquité de l'écliptique = 23°27′45″,2; j'ai trouvé ce qui suit.

	Longitude géocentrique de Jupiter	Latitude géocentrique de Jupiter
10 Février	155°.23′.16″,08	1°.20′.41″,16
11 —	155. 15. 22,56	1. 20. 43,22
12 —	155. 7. 40,35	1. 20. 49,87
13 —	154. 59. 46,05	1. 20. 55,09
14 —	154. 22. 0,15	1. 21. 6,22

Ces longitudes et latitudes étant conclues des observations, et par conséquent affectées de la nutation et aberration, il faut les en délivrer, pour les comparer avec celles tirées des tables, puisque celles-ci sont comptées de l'équinoxe moyen. On trouve la nutation en longitude $= - 14'', 8$; en latitude $= 0$; l'aberration en longitude $= + 11'',9$; en latitude $= - 0'',16$. Il faut les changer de signe, parcequ'il s'agit de convertir la longitude apparente en longitude comptée de l'équinoxe moyen: ainsi, la correction des longitudes est $= + 2'', 9$; celle des latitudes $= + 0'', 16$: d'où l'on obtient ce dernier resultat des observations.

	Longitude géocentrique de ♃ comptées de l'équinoxe moyen	Latitude géocentrique de ♃
10 Février	155°.23′.18″,98	1°.20′.41″,32
11 —	155. 15. 25,46	1. 20. 43,38
12 —	155. 7. 43,25	1. 20. 50,03
13 —	154. 59. 48,95	1. 20. 55,25
14 —	154. 52. 3,05	1. 21. 6,38

Comparant ces longitudes et latitudes géocentriques que nous venons de conclure des observations, avec celles tirées des tables, on voit que celles-ci donnent la longitude plus grande que les observations, le 10 Février de $9'', 10$; le 11 de $11'', 17$; le 12 de $1'', 82$; le 13 de $4'', 80$; le 14 de $0'',08$; et la latitude plus petite, le 10 Février de $6'',25$; le 11 de $3'',46$; le 12 de $5'',63$; le 13 de $6'',77$;

le 14 de 14″,19: d'où, en rejettant l'observation du 14, dont on a vu la raison ci-dessus, on tire l'erreur moyenne des tables, en longitude $= + 6'',72$; en latitude $= - 5'',53$: ce qu'il faut encore réduire aux lieux héliocentriques, en multipliant ces erreurs par $\frac{\tan g\,\lambda}{\tan g\,\gamma} = 0,8166$. La correction que les tables exigent, serait donc en longitude $= - 5'',5$; en latitude $= + 4'',5$.

Au reste, il est aisé de conclure de ces résultats, que l'opposition de Jupiter a eu lieu le 12 Février V. St. avant midi à peu près à $11^h 17' 8''$ tems moyen de St. Pétersbourg.

II. *Occultation de 1. ψ ♒ par la Lune, 1813 le 25 Septembre V. St.*

J'observai l'*immersion* à $20^h 24' 18'',5$. Pour vérifier la pendule qui est réglée sur le tems sidéral, j'observai dans la même nuit, les passages de *α* ♒ et de *Marcab*, à $21^h 55' 55'',34$ et à $22^h 55' 11'',72$.

Les ascensions droites moyennes de ces deux étoiles étaient $21^h 56' 12'',663$ et $22^h 55' 29'',181$; la somme de la nutation et aberration $- 0'',033$ et $+ 0'',334$; donc leurs Æ apparentes $21^h 56' 12'',63$ et $22^h 55' 29'',515$. Il suit de là, en prenant le milieu, que la pendule retardait de $17'',54$; et que l'immersion fut observée à $20^h 24' 36''$ tems sidéral de St. Pétersbourg.

III. *Immersion* de ζ ♊, 1814 le 17 Février V. St.
observée à $9^h 8' 57'',8$.

Passage de Régulus à $9^h 58' 53'',02$. Son ascension droite moyenne $= 9^h 58' 28'',06$. Aberration et nutation $= + 0'',191$. Æ apparente de Régulus $= 9^h 58' 28'',25$. La pendule avançoit donc $= 24'',77$: ce qui donne le Tems sidéral de l'immersion $= 9^h 8' 33''$.

IV. *Emersion* de 3. *l* ♍, 1814 le 24 Février V. St.
observée à $14^h 13' 47'',1$.

	α² ♎	Gemma	α du Serpent
Passage au méridien	$14^h.41'.4'',42$	$15^h\ 27'.\ 6'',98$	$1[illegible].35'.34'',43$
Æ moyenne	14. 40.37,00	15. 26 4[illegible],207	15. 35. 7,124
Aberr. et nutation	— 0,205	— 0,299	— 0 454
Æ apparente	14. 40.36,795	15. 26. 48,908	15. 35. 6,670
La pendule avance	— — 27 625	— — 28,072	27,760

Milieu $= 27'',32$.

Tems sideral de l'émersion $= 14^h 13' 19'',3$.

V. *Occultation* de δ ♋, 1814 le 18 Mars V. St.
Immersion observée à $8^h 33' 55'',4$. Emersion à $9^h 43' 22'',2$.

	Sirius	Castor	Alphard
Passage au méridien	$6^h.37'.\ 4'',51$	$7^h.22'.50'',05$	$9^h.18.35'',17$
Æ moyenne	6. 36. 58,069	7. 22. 43,510	9. 18. 27,216
Aberr. et nutation	— 0,862	— 1,029	— 0,113
Æ apparente	6. 36. 57,207	7. 22. 42,481	9. 18. 27,103
La pendule avance	7,303	7,569	8,067

Milieu $= 7'',646$.

Tems sidéral de l'immersion $= 8^h.\ 33'.\ 47'',75$.
— — — l'émersion $= 9.\ 43.\ 14,\ 55$.

II.
SECTION
DES
SCIENCES PHYSIQUES.

DE MONSTROSA GENITALIUM DEFORMITATE ET SPINA BIFIDA COMMENTATIO.

AUCTORE

J. A. LOBENWEIN.

Conventui exhibuit die 6 Julii 1814.

Magnam in constructione humani corporis abnormitatem, rarumque aberrationis naturae phoenomenon, eruditorum contemplationi propono, cui simile ullum in magno monstrorum numero, quae vel in locupletissimis rerum naturalium collectionibus et museorum academicorum thesauris, vel in exactissimis anatomiae et physiologiae commentariis hucusque continentur, aut connotantur, invenire haud licet.

Eminet quidem hoc in subjecto mira genitalium deformitas, haud minor tamen est intestinorum et systematis uropoëtici, atque singularis denique caudae equinae degeneratio. Praeter varios autem illos structurae lusus, quos anatomia sibi vindicat, plura adhuc sunt alia, quae respectu physiologico, immo et medico, iisdem hisce ex fontibus eruenda occurrunt. Suppeditat scilicet haec observatio argumentum non solum de monstrositatis hujus ratione et genesi, sed simul de singulari quadam specie hermaphrodismi spurii; de formatione vesicae urinariae ejusque inversione; de differentia inter hernias connatas et exomphalum; de usu denique vesiculae umbilicalis in foetu, et de diagnosi hydrorhachitidis et spinae bifidae, atque diversa hujus lethalitate.

Historia.

Infans monstrosus, cujus memoriam hisce paginis tradituri sumus, quarta pauperculae familiae hebraicae progenies, in lucem prodiit Vilnae, in suburbio Zarzecz, anno 1811 die 11ma Novembris; nata e matre annorum viginti quinque, staturae habitusque mediocris, patre autem pusillo, gracili, tricennario; parentibus, quibus a natura normalis concessa fuit corporis conformatio, et non interruptae sanitatis usus. Priores etiam ipsorum tres infantes nulla vel constitutionis physicae corporis, vel rectae valetudinis, afficiebantur labe, nisi frequentiore glandularum jugularium intumescentia. In nullo unquam utriusque parentum genealogiae individuo singularis quaedam observata fuit corporis deformitas. Mater administratione rei familiaris, seu egestatis potius, occupata domi; pater, merces circumferendo, difficili sustentandae existentiae intentus erat curae; utriusque vitae genus miserrimum.

Cordi perquam timido et sensibilitati magnae indulgens mater, priorum quatuor graviditatis mensium periodo, terrores inter et curas insolitae saepius dejectioni virium erat obnoxia, cum subsequente nonnunquam animi deliquio; etsi objecta, terrores illos excitantia, adeo essent innocua, ut imaginationi maternae tantam inculcare impressionem nullo modo potuerint, quae origini abnormitatis foetus explicandae sufficeret, si unquam naevos infantum imaginationis maternae effectus esse credideris. Quid, quod ipsa denique mater bene sibi fuerit conscia, nihil eorum omnium singulari mentem affecisse ratione, nihilque aliorum graviditatis tempore accidisse symptomatum, quod qualemcumque cum monstrositate foetus aleret analogiam, cuive vel minima conceptionis abnormis inhaereret ratio, aut remotissima evolutionis irregularis suspicio.

Legitima gestationis periodo incessit motus infantis in utero, is vero debilis usque in dies graviditatis ultimos, quam justo termino absolvit partus, laboriosus quidem, sed omnino naturalis, nec non a matre sine ullo sanitatis detrimento perpetratus.

Octava post nativitatem die infaustam prima vice conspeximus prolem, funiculo umbilicali tunc jam rite deciduo. Vidimus infantem a monstrosa imi ventris affectione, cujus rationem sequentibus redditeri sumus, continuis heu! tantisque excruciatum doloribus, ut sugendis vix, et ne vix quidem, aptus esset matris uberibus. Miserabili hoc in statu vitam non traxit ad diem nisi quartam et decimam, ejulatus inter et lacrymas extenuatus in modum sceleti, ad extremitates inferiores paralyticus, et sine convulsionibus extinctus. Cauta post mortem instituta fuit ejus dissectio anatomica, qua absoluta monstrum, in museo anatomico Universitatis repositum, ad hodiernam usque diem adservabatur. Bene conformati ceterum infantis hujus physiognomia, patri nonnihil consimilis, tota tamen a perpessis doloribus Hippocratica. Ossium compages, pelvis praesertim proportio, sexus videbatur esse potioris; abnorme non erat corpus, nisi quoad imum ventrem, partes genitales, spinam medullamque dorsi, et interna abdominis pelvisque viscera; quare externas imprimis abnormitates considerabimus, quales in ipsa corporis superficie simplex docuit aspectus, illa dein connotaturi, quae interna partium patefecit dissectio.

Abnormitates externae.

Cum externa capitis, thoracis et extremitatum super-

-ficies conditionis fuerit omnino legitimae, nihil eorum commemorabimus, quae non differebant a forma solita, ut mox transeamus ad illa, quae structurae normali exterius erant contraria.

Abdomen.

In anteriore, inferiore, abdominis regione notabilis in conspectum veniebat plaga [1]) rubra, penitus excoriata, duos ultra pollices lata, cujus circumferentia, lineam fere parabolicam [2]) describens, ex ima parte regionis epigastricae mediae [3]) deorsum divergens, cruribusque suis [4]) in utrumque inguen demissa, complectebatur umbilicum [5]), jam persanatum, totamque simul regionem hypogastricam, pubem et inguina. Excoriatam hanc dicimus regionem, deerat scilicet cuticula; cutis autem adeo erat tenuis, ut transparerent musculi, ruborem perquam exaltantes. Tuberculum aliud [6]), penitus superficiale, umbilico superius, sinisterius, levi tantum parietis abdominalis convexitate notatum, nullius erat momenti, mere cutaneum.

---

[1]) Tab. V. A. A. A A.
[2]) Tab. V. B. C. D.
[3]) Tab. V C.
[4]) Tab. V. B. D.
[5]) Tab. V. E.
[6]) Tab. V. F.

Tegumenta communia parietis abdominalis in toto plagae rubrae ambitu verum terminabantur in limbum prominulum, qui lineam illam parabolicam [1]) constituens, certos designabat limites inter plagam abnormem et reliquam abdominis circumferentiam, ut adeo tota illa area [2]), limitibus istis circumscripta, tenuissimo sub involucro cutaneo nudam fere exhiberet ibi aponevrosim abdominis, tenerrimam, et cum tenuissimo illo involucro cutaneo ita in unum conflatam, ut ubique hac in regione transpareret rubor musculorum subjacentium, neque ullum albae lineae daretur vestigium.

Pudenda.

Quod autem primo intuitu eminus exultare videbatur, membrum virile [3]), etsi solito in loco positum, singularis tamen erat conditionis, proportionisque, consuetam multum excedentis. Cylindricum illud membrum normali erat mollius, totum eleganter rubrum, tres, et quod superat, pollices longum, auricularem adulti digitum aequans crassitie, instar cornu sursum, sinistrorsum, incurvatum, striis subtilissimis, transversim annularibus, vermiculorum more nota-

---

[1]) Tab. V. B. C. D.

[2]) Tab. V. A. A. A. A.

[3]) Tab. V. G.

tum, in fine orificio [1]), solito majore, hians, glande carens, et praeputio; quare magno quidem gentis Israëliticae dolore solemnis neonati circumcisio celebrari non potuit. Majorem autem excitabat necessario attentionem spectantium, quod insolitum illud membrum, dum viveret infans, flavam continuo lentamque stillaret alvum, leni motu vermiculari ipsius membri provectam; urinae nihil.

Membrum illud spurium toto in decursu carebat epidermide, cute rubra involutum, sed tam tenui, ut striae circulares muscularis tunicae intestinalis, de qua dicemus serius, transparerent. Quam vile fuerit indumentum hoc cutaneum, vel inde intelligitur, quod neque praeputium efformaverit, nec frenulum, sed talis ejus ad membri orificium fuerit adaptatio, qualis est illa dermidis ad labia oris.

Scrotum [2]) eadem, qua membrum, excoriatione rubens, rugosum, sede, magnitudine et forma adparebat normale, sursum, extrorsum, utrinque saccatum [3]), testes occultos ibi mentiens, nullo attactu detegendos.

De partibus muliebribus externis nullum aderat vestigium.

Orificium ani solito in loco nullum, sed porus exiguus, inter postremas scroti rugulas altissime absconditus,

---

[1]) Tab. V. H.

[2]) Tab. V. I.

[3]) Tab. V. K. K.

qui, sursum introrsum delitescens, difficillime admittebat stylum tenuem [1]).

In utroque inguine basi fixa insolitum residebat corpusculum [2]) fabae magnitudinis, defectu tegumentorum pariter rubrum, forma fere mammillari, inferius in papillam quasi muliebrem desinens [3]), sub qua fluxu lento, sed continuo excernebatur lotium per viam angustissimam, oculos latentem, cui setam [4]) vix per interiora trajicere licuit. Ipsa quidem haec corpuscula mammillaria testiculos, in scroto attactu desideratos, indicare videbantur, quam tamen suspicionem facile infregit villosa illorum superficies, et interna prorsus denegavit structura, quam suo loco perlustrabimus.

Dorsum.

In superiore parte regionis sacralis oculis sese manifestabat tumor [5]), ovum anserinum magnitudine excedens, mollis, elasticus, indolens, cuti sanae concolor, fluctuans, pressioni adhibitae non ita cedens, ut ejus volumen imminueretur quidpiam. Erat idem is tumor spinae bifidae,

---

[1]) Tab. V. L.
[2]) Tab. V. M. M.
[3]) Tab. V. N. N.
[4]) Tab. V. O. O.
[5]) Tab. VI. A.

cujus nostro cum consensu mentionem fecit D. *Herberski* in dissertatione sua inaugurali de hydrope specus vertebralis, Vilnae anno 1812 edita. Tumor, quem videre est in *Mohrenheimii* observationibus [1]), quoad exteriora summam quidem cum nostro analogiam exhibet, quoad interna vero nec minimam.

Dissectio partium internarum.

Ut eodem, quo exteriora corporis perlustravimus, modo procedamus jam in dissectione partium quoque internarum, ante omnia dicamus, oportet, contenta thoracis rite constituta fuisse omnia; ipso etiam in encephalo nihil innotuit erroris, nisi ille in ventriculo quarto, quem pro meliori rerum nexu inferius in paragrapho de spina dorsi commemorabimus. Hoc igitur pacto in descriptione partium internarum ordiemur a disectione abdominis, ea imprimis connotaturi, quae hac in cavitate naturae legibus observabantur contraria, quaeque proxima ducent via ad indagandas abnormitates, quibus interna genitalium ludebat structura, et ad detegendos errores, quibus columna peccabat dorsalis. Illa vero omnia, quae in statu normali et sano versari videbantur, silentio praeterire duximus.

---

[1]) Beobachtungen verschied. chirurg. Vorfälle, B. I. S. 172. Tab. II.

Abdomen.

Non erat abdomine aperto, qualem tertia offert tabula, viscerum conscpectus; hic enim illa tantum prae caeteris sunt exposita, quae imo in ventre latebant abnormia. Reapse veio a prima dissectione abdominis hepar praegrande offendebat oculos, adeo antrorsum et deorsum protractum, ut volumine suo superius ventriculum et omentum majus, inferius intestina maximam partem in pelvim depressa, obtegeret, atque anteriore superficie parieti abdominali interius magno in ambitu accretum esset usque infra umbilicum. Exemto jam hepate simul cum ventriculo, liene, colo et omento, reliqua tantum repraesentavimus viscera, in abdomine semivacuo, pro faciliori demonstratione, studio ab invicem dislocata et explicata, atque intestina sursum protracta, ut illa omnia, quae sub iis laterent inferius, petefi.nt visui.

Ita tractus intestinorum tenuïum [1]), qui gressu naturali per omnem umbilici et hypograstrii regionem circumduci debuisset, arte nunc de loco motus, a superioribus deorsum tendere videtur, ubi continuo tramite supra pubem e cavo pelvis egressus, spurium illud mentiebatur membrum [2]), quod in Tabula I. occurrit sub littera g.

---

[1]) Tab. VII. a a. a. a.

[2]) Tab. VII. b.

Quod igitur praegrande apparebat membrum virile, aliud nihil erat, quam verum intestinum ileon, loco insolito super symphysi pubis ad exteriora emergens, fere nudum, transparentibus striis annularibus membranae suae muscularis rubrum, quare in vivo lenem exercere videbatur motum peristalticum, vi cujus per orificium ejus [1]) profluebat alvus loco lotii.

Maxima quidem tractus intestinalis abnormitas consistebat in eo, quod nullum adesset intestinum coecum, nullus appendix vermicularis, et nullus daretur transitus intestini tenuis in crassum, tanta enim illorum ab invicem erat separatio, ut intestinum tenue, a ventriculo ad exteriora usque progressum, per se hiaret exterius loco urethrae, interius vero nec minimum ejus cum intestinis crassis daretur vinculum aut communicatio.

Normalis aberat vesica urinaria; aberant vesiculae seminales, urethra et prostata: nullum in pene illo spurio habebatur vestigium cavernosi corporis; nullum glandis aut praeputii, musculorumve erectorum aut acceleratorum.

Scrotum denique cum sacculis suis duobus lateralibus [2]), dissectionis ope perscrutatum, totum omnino vacuum,

---

[1]) Tab. VII. c.

[2]) Tab. V. I. K. K.

testiculorum loco inanem tantum cellularem, quasi membranam dartos, parum exauctam, continebat. Sed nec in inguine, nec in cavo pelvis aut abdominis, nec ulla alia in parte corporis inveniebantur testiculi.

Sicut autem monstrum istud carebat testiculis, ita etiam vero carebat utero et ovariis; spuria tamen uteri vestigia demonstrabimus postea.

Quod Tab. VII. lit. *d.* adparet intestinum crassum, liberioris adspectus gratia parum magis ad dextra delineatum, totum forma siliquae latuit loco recti retro infimam partem intestini ilei, per pelvim egressui, minime tamen ipsi junctum. Cum supremum ejus principium [1]), parum acutius, ante vertebras lumbares decurreret [2]), illam quidem partem pro fine coli habendam fuisse credimus, unde rectum sine ulla sigmoidea inflexione deorsum continuabatur ad perinaeum, ut inter postremas scroti pliculas aperiretur poro angustissimo, ope styli [3]) notato. Arcta recti capacitas interna excrementorum loco humorem continuit mucosum, cujus nulla a superioribus dabatur scaturigo, cum suprema intestini extremitas, etsi deficiente

---

[1]) Tab. VII. c.

[2]) Tab. VII. c. d.

[3]) Tab. VII. f.

cocco, ipsa tamen clausa, in cavo abdominis libere fluctuaret [1]).

Dictu multo difficiliora duo illa sunt corpuscula [2]), quae eleganter symmetrica ex utroque intestini recti latere e cavo pelvis in cavum abdominis adscendebant. Corpuscula haecce, tum habitu, tum structura, penitus abnormia, neque testibus, nec vesiculis seminalibus viri, nec ovariis faeminae similia, adcuratiorem sibi descriptionem exposcunt. Olivarum fere illa, etsi dimidiae vix magnitudinis, formam referentia, exterius colorem affectabant uterinum, interius cava, fundoque suo, deorsum crassiore, fundo pelvis insidentia, interno scilicet perinaei parieti accommodata, sine ullo tamen cum perinaeo ipsò aut cavitate pelvis commercio. Superior autem cujusvis extremitas conica continuum excurrebat in canaliculum, sursum tendentem, tenuem, album, candore, tubis Fallopianis alieno, nitidiusculum, gyris continuo decrescentibus serpentino more, seu potius in modum cochleae, quinquies retortum, fine ultirmo perexiguas in fimbrias abeuntem, colore, forma et structura fimbriarum uterinarum quasi diminutivas, aëri tamen et mercurio, per canaliculos illos injectis, impervias, ut externum fimbrillarum orificium suspicari quidem, nullo tamen modo de-

---

[1]) Tab. VII. e.
[2]) Tab. VII. g. g.

monstrare licuerit. Liberae illae sine ligamentis retro peritonaeum latebant fimbriae, vicinis partibus, aeque ac corpuscula olivaria eorumque canaliculi serpentini, nequaquam junctae.

Corpusculorum olivarium parietes omni nota, immo et quoad minimas rugulas internas et texturam intimam, parietibus uteri erant simillimi, eorum autem cavitas, capacitatis circiter nucis pistaciae minoris, humore limpido, parum mucoso, penitus referta. Erat igitur horum corpusculorum utrumque respectu structurae analogum utero, cujus situs esset inversus; canaliculi autem serpentini origine, situ, directione et fine suo tubis Fallopianis videbantur consimiles, structura tamen elastica, colore candido, nec non splendore proprio, vasis deferentibus spermaticis viri similiores, ut adeo in toto horum cospusculorum olivarium, canaliculorum, fimbrillarumque apparatu singularis quaedam genitalium internorum degeneratio et organorum sexualium commixtio intercederet; utriusque scilicet sexus vestigia, neutrius tamen perfectio, etsi plura feminini, pauciora masculini essent generis.

Renum [1]) et situs et conditio a naturae legibus haud aberrasset quidpiam, nisi glandula suprarenalis reni dextro

---

[1]) Tab. VII. h. h.

defuisset penitus. Ureterum quilibet [1]) recto tramite e rene suo deferebatur in pelvim, ibi vero cum normalis praesto non esset vesica urinaria, cui lotium infunderent, quivis, suo in latere sub ligamento Pouparti egressus, implantabatur singulari papillae inguinali [2]), rubrae, villosae, qualem jam in Tabula V. sub literis M. M. delineavimus. Latebat exterius utriusque ureteris osculum in papilla sua inguinali valde absconditum [3]), perangustum, cui setam [4]) introduximus eadem via, qua lotium lento quidem, sed continuo, per inguina defluxit stillicidio.

Quantamcunque externa harum papillarum inguinalium positio de testiculis spuriis movere posset suspicionem, nulla tamen illas inter et testiculos quoad structuram internam intercedebat similitudo. Neque cum papillis mammarum ulla locum habuit comparatio, etsi enim forma papillarum inguinalium luderet sub specie mammillarum, aderant tamen praeterea in recens nato infante verae papillae mammillares pectoris in loco solito, illae vero inguinales, villosae, ejusdem videbantur structurae, cujus vesica uri-

[1]) Tab. VII. i. i.
[2]) Tab. VII. k. k.
[3]) Tab. VII. l. l.
[4]) Tab. VII. m. m.

naria eversa nonnunquam occurrit ad exteriora pubis, quod uberius explicabimus in adnotatione VII.

Sufficit hic monuisse, quod vesica urinaria non adfuerit normalis, nec urethra, nec vesiculae seminales, nec prostata, neque partes genitales rite constitutae alterutrius aut utriusque sexus, nec externae, nec internae, omnes enim, quas hoc in infante descripsimus, excepto scroro, deformes erant ac erroneae, ut difficile esset de sexu illius judicium, quod in adnotatione II. dilucidare tentabimus.

Tumor Sacralis.

Quod interiorem tumoris sacralis [1]), seu spinae bifidae conditionem attinet, non hujus tantum tumoris dissectione contenti, totam ommino columae vertebralis compagem perlustremus, opportet, ipsum prius encephalum, et in specie ventriculum ejus quartum, examinaturi, ut continuo inde tractu vertebralem specum et medullam spinalem prosecuti, perveniamus ad sedem spinae bifidae, et raram ibi detegamus caudae equinae abnormitatem.

In ambitu cerebri et cerebelli nulla quidem aquarum aderat extravasatio; ventriculi etiam laterales et tertius vacui, non distenti, normales. Ventriculus autem quartus, etsi pariter vacuus, ad capacitatem tamen, amygdalae

---

[1]) Tab. VI. A.

majori continendae aptam, distentus, in fundo per totam calami scripiorii longitudinem disruptus, retro medullam oblongatam trium linearum spatio in latum hians, serum transmisit pellucidum, quod inde e ventriculo quarto inter posteriorem medullae spinalis superficiem ejusque vaginam defluendo, in sacralem illum spinae bifidae tumorem demersum fuisse videbatur. Hujus ex tumoris cavitate sectionis tempore sex circiter aquae limpidae evacuabantur unciae, partim ex ipso tumoris sacco, partim e lumbari specus vertebralis contignatione redundantes.

Columna vertebralis viginti tantum et tribus componebatur vertebris, lumbares enim nonnisi quatuor erant numero. Costae utrinque duodecim, quarum quaelibet loco debito inserta. Ipsa autem columna vertebralis a vertebra dorsali quinta usque ad duodecimam in latus dextrum, inde vero per lumbares usque ad os sacrum sinisteriora versus incurvata. Vertebrarum dorsalium corpora a quinta ad nonam usque, etsi alias naturae lege semper angustissima, hic tamen praeter modum coarctata, friabilia et adeo coalita, ut cartilagines eorum intervertebrales e lateribus tantummodo essent conspicuae. Ultimae autem vertebrae dorsales tres, omnesque, quatuor scilicet, lumbares tumidiores, ita ut corporum crassities a superioribus deorsum solitam incrementi proportionem excederet. Vertebrae lumbares praeterea omnes a posterioribus nimis antrorsum protrusae, ut perinde magna in lumbis oriretur concavitas posterius, anterius vero convexitas, promontorio consueto altior, nimis in abdomen protuberans, et in harum quidem vertebrarum specu potissima observaretur aquarum circa medullam collectio.

Processus spinosi vertebrarum lumbarium erant normales, sed spinae sacrales tres superiores, seu spuriae, valde imperfectae, bifidae, et adeo divergentes, ut rotundus inter illas oriretur hiatus, circulum fere describens, cujus diameter perpendicularis linearum novem, transversa linearum octo. En! hiatus, per quem una cum aquis evasit medulla spinalis ita, ut pars ejus posterior, nullam ibi formans caudam equinam, substantiam medullarem ipsam porrigeret extrorsum instar lamellae medullaris, transversim ovalis, quasi bifoliatae [1]), expansam, quae, nitidissimo colore perlaceo instructa, toto in ambitu circumdabatur posteriore pariete spinalis vaginae, sub tegumentis communibus [2]) magnum in tumorem extensae, cujus in cavitate [3]) colligebantur aquae, continuo flumine e specu vertebrali derivatae, foliumque illud undique alluentes.

---

[1]) Tab. VIII. γ. γ.

[2]) Tab. VIII. α. α. α. α.

[3]) Tab. VIII. β. β. β. β.

In ipso denique illo medullae folio, sub specie coloris perlacei cineream cerebri substantiam referente, tria ludebant foramella; superius [1]), medium [2]), et inferius [3]), quorum supremum erat maximum, calami columbini capacitatis, stylum inter vaginam et posteriorem medullae parietem admittens, eadem, qua serum scaturiebat, via. Foramellum medium, in ipso folii medullaris centro positum, omnino coecum, fundo interius mox clauso desinens. Foramellum inferius angustum, inter anteriorem medullae et vaginae partem delitescens, nullum inter illas transmittebat serum, vagina ibi medullae utique in statu naturali sat arcte respondente.

Nervi sacrales posteriores, sic ut ipsa foramina ossis sacralia posteriora, deerant; anteriores vero, ex anteriore parte abnormis illius medullae propagati, more normali progrediebantur, cum posterior tantum caudae equinae portio deficeret. Ita nervi crurales et obturatorii, ex tribus primis lumbaribus, ischiadici vero ex duobus lumbaribus ultimis et sacralibus primis cujusvis lateris suborti. Hiatus triangularis ille, qui inferiori in parte ossis sacri pro exitu

---

1) Tab. VIII. δ.
2) Tab. VIII. ε.
3) Tab. VIII. ζ.

finis ultimi caudae equinae, id est, arteriae spinalis anterioris, ceu imparis nervi veterum, destinatus esse solet, hic superinducto singulari ligamento transverso clausus erat.

Epicrisis.

Inquirere in naturam monstrorum in genere, ingratam aeque ac sterilem esse operam, effatum est, multis quidem familiare philosophis, veritati tamen haud consentaneum, nisi studia dicas inutilia, quae difficultate sunt plena. Etsi enim variae illae et speciosae, quas humanum in explicanda monstrorum origine excogitavit ingenium, theoriae sagaciori scrutinio hucusque satis haud fecerint, et numerosissimae, quas dives insuper collegit experientia, observationes parum quid addiderint utilitatis scientiis physicis, et vix uberius locupletarint rem medicam, multum tamen prodest illorum indagatio vel in affirmandis, vel in refutandis variis de generatione sententiis, et in explicandis diversis ejus phoenomenis. Testantur id immortales virorum, in re physiologica clarissimorum, *Stelleri*, *Wolfii*, aliorumque labores. Sunt et nostro in casu nonnula, quae vario respectu singularem quandam mereri videntur attentionem, quaeque sequentibus examini subjicere et propius indagare animus est, cetera vero omnia illis committere, qui curiositatis plus, quam utilitatis studio delectantur.

Neque igitur laborum et difficultatum, quibus desudarunt omnium temporum physiologi in demonstrandis et explanandis monstrorum in genere aliarumque organisationis humanae abnormitatum causis et lusibus participes nos reddere, neque observata omnia, quae nostro ex specimine redundare possent, funditus exhaurire intendimus.

Quatuor hoc pacto adnotationes ex recensione infantis, cujus historiam hisce paginis connotavimus, prae ceteris animadvertendas proponimus, quarum prima in definitionem et classificationem abnormitatis inquirit, altera vero perquam difficili dubii sexus occupatur analysi. Tertia, missis monstrorum rationibus in genere, tractabit de causis et origine monstrositatis hoc tantum in subjecto in specie, cum ratio ejus abnormitatis in promptu sit. Adnotatio quarta, in praecipuos spinae bifidae caracteres inquirens, operi finem imponet.

Adnotatio I.

Abnormitatis Classificatio.

Infantem in ipsa hujus commentationis fronte appelavimus monstrum, fas est, ut hunc titulum comprobemus argumentis. Non insistemus hoc sensu definitioni *Halleri,* qui in operum anatomicorum minorum tomo III. p. 3.

monstrum appellat *aberrationem animalis a consueta suae speciei fabrica adeo evidentem, ut etiam ignarorum oculos feriat.* Definitionem hanc nimis esse generalem, in aprico est, errores enim quantitatis aeque ac qualitatis monstrositatibus adnumerat, minime advertens, quantum discriminis intercedat in eo, utrum illi errores conformationi primitivae tribuendi sint, an morbo; dummodo formae vitium grave sit, et in oculos cadat, quare nostra quidem opinione illud tantum individuum speciei humanae monstrum dici meretur, quod ex conformatione primitiva laborat abnormitate corporis magna et insigni, structurae normali prorsus contraria, vel quoad qualitatem partium. Quo minus autem assentimus *Hallero* in monstrorum definitione, eo lubentius ejus classificationem amplectimur, qua rite illa distinguit respectu partium abnormium in monstra per excessum, per defectum, per transpositionem, et per transformationem, addendo hisce subdivisiones cujusvis classis in specie.

Fixo jam ita recto monstra dijudicandi modo, nulli dubitamus, infantem, de quo nobis sermo est, omni jure ad monstra referendum esse, omnes enim in eo deprehendimus caracteres, qui monstri definitionem absolvunt. Aderat error formae; error nativus; error permagnus et insignis, conformationi naturali valde contrarius; error tum qualitatis, tum quantitatis, et quidem partium corporis plurium, tam externarum, quam internarum. Hisce rationibus confisi, objectionis vix aliquid timemus contra sententiam, qua monstri titulum judicamus tribuendum esse infanti, cujus insignis abnormitas rari phaenomenis instar a structura legitima aberrabat nimium, quam ut inter simplices corporis humani deformitates recenseri posset, etsi maxima corporis pars reliqua typum servaverit legitimum. Accedit, quod hoc in subjecto omnes omnino obviam veniant caracteres cujusvis speciei monstrorum, idque ad quamlibet eorum classem pertineat; erat enim id monstrum per excessum, per defectum, per transpositionem, et per transformationem.

Per excessum: Membrum virile spurium praegrande; papillae mammillares in utroque inguine; uterus spurius duplex.

Per defectum: Defectus urethrae cum prostata et corporibus cavernosis vesiculisque seminalibus; absentia testiculorum aeque ac ovariorum; absentia intestini coeci et maximae partis coli; absentia renis succenturiati dextri et quintae vertebrae lumbaris atque nervorum sacralium posteriorum.

Per transpositionem: Abnormis directio et exitus intestini ilei et recti; deviatio ureterum, et vesicae urinariae bipartitae translocatio; situs inversus uteri spurii gemini; aberratio medullae spinalis.

Per transformationem: Transmutatio intestini ilei in formam penis; corpuscula mammillaria dimidiatae vesicae urinariae; corpuscula olivaria loco uteri, et singularis denique illa degeneratio caudae equinae per spinam bifidam, in folium medullare desinens.

Peccabat igitur structura hujus infantis partium nonnullarum superadditione, plurium defectu, aliarum translocatione nec non singulari quarundam contra naturae legem transformatione, ut tanto deformitatum numero nomen monstri omni jure meruerit.

Adnotatio II.

Monstri Sexus.

Cum tanta esset abnormitas atque confusio partium genitalium hujus infantis, ut spuria quaedam utriusque sexus contineret vestigia, neutrius tamen vera, cumque caracteres sexuales proprii re ipsa essent ambigui, etsi primo intuitu valde apparerent distincti, singularis inde, neque curiositatis indigna, cuivis sponte sese obtrudit quaestio, cujusnam denique sexus mirum illud fuerit monstrum? Anceps in configuratione partium genitalium erat natura, anceps igitur aeque ac difficilis in determinando sexu fluctuabit opinio, donec ad certa de hermaphrodismo revocetur principia.

Constat ex praemissa superius anatomia monstri, partes adfuisse genitales utriusque sexus complures, tum externas, tum internas; praesentes denique ipsas fuisse vel de loco solito in alienum translatas, vel a naturali forma multum aberrantes, vel singulari inter se modo confusas.

Exterius cornu illud praegrande, quod tum magnitudine, tum rubore, priapi gerebat omen, quodque respectu situs ad externam pubis regionem et propter figuram suam cylindricam facile pro virili habebatur membro, non potuit primo intuitu non indicare sexum potiorem. Membrum tamen illud non erat, nisi spurium, seu supposititium, erat id scilicet ileon intestinum, penis loco foras productum, deerant enim, excepto scroto, vera omnia sexus masculini organa externa, ut supra jam monuimus, sive, quod idem est, erat virilis monstri caracter omnino spurius. Non immerito penis ille dicitur monstrosus, tum respectu formae, tum respectu magnitudinis, praesertim vero respectu abnormitatis intrinsecae, cum interna ejus structura similis esset vero intestino, peni autem nullatenus. Ita etiam, sexus sequioris partes genitales externas defuisse omnes, diximus; desiderabantur enim labia, vagina, clitoris; verbo: externa omnia pubis femineae vestigia.

Quoad interiora, notatu digna sunt duo illa, quae suo loco [1]) commemoravimus corpuscula olivaria, quoad structuram parietum internam sexui femineo analoga; porro nitidi illi duo canaliculi, ex hisce corpusculis continui, etsi perquam serpentini, ortu tamen, situ, directione et fine fimbriato tubis uterinis feminae, candore autem suo, sicut et habitu et structura vasis deferentibus viri similes, hic tubarum uterinarum vices agentibus. Deerant tamen sexui masculino interius vesiculae seminales ipsae, sic ut femineo ligamenta uteri et ovaria. Patet ex his omnibus, quaedam intus adfuisse utriusque, et plura quidem sequioris, sexus indicia, deficientibus reliquis: ipsa vero praesentia fuisse spuria, abnormia, confusa; caracterum tamen horum omnium perfectissimi erant utriusque uteruli parietes et fimbriae.

Si jam coëxistentia partium genitalium utriusque sexus in eodem subjecto denotat hermaphroditum, et quidem hermaphroditum spurium in specie, dum partium illarum caracteres ipsi fuerint spurii, elucet, infantem huncce hermaphroditis spuriis adnumerandum esse. Juxta mentem *Wrisbergii* [2]) pertinebit ille ad classem hermaphroditorum

---

[1]) Tab. VII. g. g.

[2]) Comment. de singulari genital. deformitate et hermaphroditis. §. 16.

quartam, seu monstrosam, cum partium illarum genitalium plurimae non spuriae solum fuerint, sed omnino monstrosae. Ulterius autem si quaeras, an hermaphroditus iste monstrosus inter androgynos, an inter androgynas potius referendus sit, singulare hoc naturae phaenomenon eodem jure utrique horum ac neutri adscribendum esse, censebis? Neutri: illo enim in infante nullus adparet hermaphrodismus, adeoque neutra ejus species, donec anatomia partes internas non combinaverit cum externis, cum exterius sola tantum occurrant virilia; simul autem considerando interna utramque habebis speciem, si androgynum dicas, in quo inter partes utriusque sexus praedominantur masculae, androgynam vero, in qua praecellunt femineae. Hic manifesto exterius praedominabantur genitalia masculina; penis scilicet praegrandis, etsi spurius, et scrotum verum, deficientibus muliebribus omnibus; interius autem notabiliores erant partes femineae, uteri scilicet duo spurii, et fimbriae verae, interim dum illis perparum quid appositum esset virilium, si ambigua illa vasa deferentia, tubarum loco posita, huc referas; unde patet, infantem respectu internarum androgynam. Erat igitur hermaphroditus ille spurius, ex caracteribus externis et internis compositus, seu, ut ita dicere liceat, occultus, siquidem placuerit hermaphroditos spurios distinguere in conspicuos, qui aspectu externo spurios utriusque sexus manifestant caracteres, et in occultos, in quibus alterutrius sexus vestigia latent interius. Variis enim atque diversae indolis exemplis ludere visa est natura, dum uno eodemque in individuo partes genitales utriusque sexus ita nonnuqam disponeret, ut caracteres unius, modo solos, modo alterius comites, collocaret exterius, interim dum alias sexus oppositi notas vel seorsim, vel penes organa sexus alterius, intimis humanae structurae absconderet repagulis. Verbo: monstrum illud exterius ad apparentiam erat puer, interius androgyna; utrumque autem, simul consideratum, sistit in sensu stricto hermaphroditum spurium, monstrosum, occultum.

Adnotatio III.

Ratio monstrositatis.

Duo sunt, nuperrimis quidem anatomiae demonstrationibus probe cognita, quae ad explicandam hujus monstrositatis originem et genesim faciunt praecipue; situs scilicet intestionorum extra umbilicum, prima embryonis periodo legitimus; et normalis bipartitio atque inversio vesicae urinariae, tunc quoque ad exteriorem imi ventris superficiem obviae.

In dato infante primus jam docet aspectus, parietem abdominalem anteriorem ab inferiore parte regionis epigastricae ad pubem usque, juxta longitudinem fissum fuisse antea, et succedente tandem coalitione in loco fissurae plagam illam rubram contraxisse, quae longe lateque circa umbilicum circumducta erat; quatenus enim plagae extendebatur rubor, eatenus locum denotari censemus, ubi musculis, rite quidem sibi respondentibus, externa tamen tegumenta superinducta non fuerant. Talis et hic ante nativitatem in alba abdominis linea restitisse videtur fissura, qualis in casu vesicae, exterius retardatae, in recens nato superest. Patet scilicet prima embryonis aetate cavum abdominis, ut, quod infra dicemus uberius, extrorsum tunc sita deprehendantur intestina et ipsa vesica urinaria, quorum successive introëuntium in ambitu paries abdominalis fissurae in modum collimat. Dum vero nascitur foetus, stante adhuc fissura, et extus adhuc haerente vesica, immo et intestinis, tunc vesica nuda cadit sub oculos, penitus inversa, et improprie prolapsus nomine salutata, non potuit enim prolabi, quod intus in cavitatem abdominis nondum erat susceptum. Vesicae ita exterius retardatae ac inversae membrana villosa interna, ad exteriorem abdominis superficiem patula, lotium tunc ex rubra quasi spongia, fonte perquam abscondito, extrorsum destillat. Neque nimis rara vesicae, ita extrorsum inversae, occurrunt exempla, magno enim auctorum comprobantur numero, inter quos classici eminent *Roose* [1]) et *Herder* [2]). Similem hic per transennam tantum commemorasse licebit abnormitatem, quam, praesente simul atresia membri, observavimus anno 1809. in puero vivo, decenni, ceterum sano, cujus inversionis vesicae delineatio extat in museo anatomico Caesareae Universitatis Vilnensis.

Facile intelligitur ex ante dictis, in monstro, cujus historiam scribimus, eandem in linea alba abdominis praeextitisse fissuram, quae alias sic dicto inversae vesicae urinariae prolapsui ansam praebere, et circa solum dein umbilicum consolidari solet, hic autem toto in tractu a superioribus deorsum coaluit, remanente tantum hiatu partis infimae, transeunti intestino destinatae, atque hoc in subjecto insinuanti sese ileo inservientis. Quanta autem viscerum abdominalium versus fissuram illam antrorsum fuerit inclinatio, docet adhaesio hepatis ad peritonaeum usque infra umbilicum; et quantus in loco fissurae quondam esse debuerit musculorum hiatus, magnus tegumentorum, ope intercedentis ibi plagae adhuc excoriatae distantium, testatur ambitus, etsi subjacentes hi musculi ipsi perfecte juncti jam fuerint, et clausus rite umbilicus.

---

1) De nativo vesicae urinariae inversae prolapsu, Gött. 1 94. 4.

2) De nativo prolapsu vesicae urinariae inversae, in puella observato, Jenae 1796. 4.

Quemadmodum igitur in recens nato saepius observatur vesica ante fissuram abdominalem residua, ita et in illis, quibus ipse hiatus umbilicalis justo serius contrahitur, facile intestina exterius, penes funiculum umbilicalem haerentia, occurrunt, sive illa coarctationis retardatio a propria intestinorum, peregrinationem suam, de qua mox dicemus, procrastinantium inertia, sive a nima musculorum ipsorum laxitate, provenerit. Eminet tunc ad umbilicum magnus intestinorum quasi prolapsus, qui vulgo herniae umbilicalis congenitae nomen obtinet, etsi solo peritonaeo involutus, et omni velamento cutaneo destitutus adpareat, interim dum hernia umbilicalis vera tegumentis communibus oducta sit. Signum id est caracteristicum, quod certam inter duas herniarum umbilicalium species ponit diagnosin; adeo enim inter se differunt, ut propriam sibi classificationem nosologicam exposcant. Inter genuinos herniarum in genere caracteres requiritur, ut tegantur illae indumento cutaneo; itaque herniae umbilicalis nomen non meretur, nisi quae cute obtegitur, et qualis nonnunquam infanti paulo post nativitatem in loco funiculi umbilicalis decidui emergere, aut a difficiliori partu evadere solet matri: illa vero species herniae, de qua hic agitur, ipso sese jam offert nativitatis tempore; portio scilicet intestinorum, tunc ad exteriora umbilici haerentium, solo peritonaeo involuta immo nonnunquam vel hoc ipso carens. Neque herniam dixeris, deficiente cute; neque prolapsum intestinorum, quoniam haec intestina tunc temporis, quod etiam de vesica diximus, nondum erant intus in abdomine; ut enim infra videbimus, legitima in embryone haec intestinorum extra umbilicum est positio, quae post nativitatem vertitur in vitium.

Rectius forte hic tumor vecabitur exomphalus, eodem saltem jure, quam quo bulbus oculi, extra orbitam protuberans, exophthalmus dicitur; modo enim nomen illud exomphali usurpatur pro hernia umbilicali, modo pro diversis tumoribus aliis, in regione umbilici occurrentibus, promiscue. Exomphalorum horum exempla non adeo quidem rara, sed sine medela sunt omnia, plerumque enim paucis post nativitatem diebus miseri tales infantuli inevitabile subeunt fatum, cujus ipsi tribus in casibus fuimus testes. In uno illorum concessum nobis fuit, assistere ipsi nativitati infantis, quem, brevi postea mortis victimam, conservavimus in collectione anatomica Caesareae Universitatis Vilnensis. Viderunt tamen, quasi per exceptionem, *Vratislavienses* [1]) infantem alium, hoc malo affectum, tertio adhuc aetatis anno vita superstitem.

---

[1]) Bresl. Samml. Vers. 17. p. 90.

In tenerrimis jam embryonibus hunc intestinorum situm extra umbilicum delineaverunt *Albinus* [1]), *Wrisberg* [2]), *van Doeveren* [3]), *Soemmerring* [4]); et, si plures alios silentio praeterire licet, solertissimas tamen hac in re dissectiones meminisse juvabit, quibus demonstravit *J. Fridericus Meckel* [5]), situm hunc intestinorum usque in tertium embryonis mensem esse normalem. Quare si status intestinorum exomphalicus usque post nativitatem parduraverit, in eo tantum error naturae videtur consistere, quod id organon illo etiam tempore perseveraverit in inferiore adhuc evolutionis gradu, qualis primis tantum embryonis mensibus competit. Magnus est numerus auctorum, quorum observata de hac intestinorum retardatione, seu sic dicta hernia umbilicali recens natorum, testantur: omnes in eo conveniunt, abdominis viscera tunc in hacce contineri hernia; omnes tamen id vitium incongruo herniae umbilicalis designant titulo. Bene ceterum animadvertit *Richter* [6]), hepar cum intestinis plerumque in hisce contineri herniis.

---

1) Annot. Acad. Lib. I. Tab. V. Fig. 3.

2) Descript. anat. embryon. Obs. II.

3) Specim. obs acad. pag. 59.

4) Icon. embr. hum. Fig. III.

5) Abhandl. aus d. menschl. u. vergleich. Anat. u. Physiol. p. 284. 300.

6) Anfangsgr. d. Wundarzneik. B. 5. §. 539.

Omnia immo abdominis viscera in tali exomphalo contenta observavit *Bachmann* [1]. Exomphalum simul cum spina bifida refert *Sandifort* [2] et *J. F. Meckel* [3].

Aliter autem res nostro in monstro se habuit; etsi enim ex proclivitate hepatis ad anteriorem abdominis parietem usque infra umbilicum interius accreti, facilis esset conclusio, hujus etiam infantis viscera prius extra umbilicum collocata fuisse; in nato tamen infante consolidato jam umbilico, intestina cum hepate comprehensa jam erant in cavo abdominis, ita ut nihil jam observaretur exomphali, seu herniae connatae extra umbilicum, nisi ileon intestinum, non forma herniae, sed loco penis exterius a pube pendulum. Singularis omnino haec erat abnormitas, nemini forsan hucusque observata, quam ad intelligendam opus erit commemorare hic loci theoriam de usu vesiculae umbilicalis, quam de structura animalium in genere ingeniosissime proposuit *Oken* [4], quamque de specie humana observatis confirmavit *Kieser* [5]. Erit illa nobis auxilio in

---

[1]) Ephem. nat. cur. Dec. II. a. 6. app. obs. 45. p. 54.

[2]) Obss. anat. pathol. L. III. c. p. 11.

[3]) Handb. d. pathol. Anat. B. I. p. 135.

[4]) *Oken* und *Kieser*, Beyträge d. vergleich. Zoologie, 1806. Heft I. p. 3. Heft II. pag. 84. Tab. IV. Fig. III. IV.

[5]) Der Ursprung des Darmkanals aus der vesicula umbilicalis, 1810. Göttingen.

demonstranda origine hujus monstri, fors et monstrum inserviet auctoribus vicissim ad confirmandam theoriam de umbilicali vesicula. Multum etiam huc faciunt exactissimae illae de formatione intestinorum in ovis incubatis observationes, quarum ope quadraginta jam abhinc annis abunde demonstravit *Wolffius* [1]), intestina in embryone pulli gallinacei primis diebus extra cavum abdominis contineri in cavitate amnios, ut ait, spurii, cum de usu vesiculae umbilicalis res illo tempore inter physiologos satis ventilata nondum fuerit.

Juxta sententiam *Okenii*, ex propriis ejus aliorumque auctorum observationibus deductam, prima illa periodo, qua embyronis abdomen adeo imperfectum et angustum adhuc est, ut ejus in cavo intestina contineri nondum possint, deprehenduntur illa in funiculo umbilicali, duplici in serie decurrentia, quarum una intestinum tenue, crassum altera denotat, utrumque in cavitatem abdominis delitescens, tenue nimirum fine interno sursum continuatur serpentinis ductibus ab umbilico ad ventriculum, crassum vero per interiora desuper finitur in anum. Ambae utriusque intestini extremiates externae, paralello situ sibi contiguae, immediata tunc continuatione hiant in vesiculam umbili-

---

[1]) Nov. Comment. Acad. scient. Imperat. Petropolit. T. XII. p. 403. T. XIII. pag. 478.

calem, extra cavitatem amnii positam. Non continentur tamen intestina in ipsa hac vesicula, sed est haec communis quasi bulbus, e quo intestini utriusque penes invicem emergit principium, quam ob rem bene docet *Okenius*, intestina originem suam trahere e vesicula umbilicali. Ea jam proportione, qua augetur imi ventris capacitas, quaque is in cavitatem suam magis magisque adsciscit intestina, paullatim introtrahuntrur haec per umbilicalem finiculum, quo fit, ut externae eorum extremitates continuo magis elongentur, et extenuentur. Tensione hac indies aucta, vesiculam inter et intestina commune quasi porrigitur collum seu ductus umbilicointestinalis, cujus interventu distantia relativa vesiculae umbilicalis augetur continuo, donec successu temporis ipsum illud collum extendatur adeo, ut quodam in puncto obliteretur penitus, et absoluta hac obliteratione rumpatur cohaesio, atque intestina derelinquant vesiculam, ipsa particulam colli secum trahentia. Externae tunc utriusque intestini extremitates, quae semper sibi in situ paralello erant contiguae, nunc sibi respondent ad angulum, qui valvulam coli efformat in posterum, tractui communi quasi intermediam. Exterius autem particula illa colli, quam intestina secum abripiunt, mutatur in intestinum coecum, cujus processus vermicularis extenuatam colli obliterati caudam refert. Post spontaneam illam vesiculae umbilicalis separationem sensim ulterior succedit intestinorum introtractio in cavum abdominis, atque musculi circa umbilicalem funiculum clauduntur ita, ut in statu normali nativitatis tempore nihil jam intestinorum conspiciatur exterius.

Nostro in subjecto natura huic regulae aliqua tantum ex parte obtemperasse videtur, ex ipsa enim abnormitatis conditione facile eruitur, obliterationis illius opus fuisse erroneum et imperfectum, huncque conformationis errorem fuisse causam totius abnormitatis. Illa nimirum obliteratio, quae consueta naturae lege in media colli, visiculam et intestina intercedentis, parte absolvitur, hoc in infante ipso jam in tractu intestini crassi contigit, et quidem in tanta ejus altitudine, ut colon inde resultaverit brevissimum. Cum scilicet infima tantum adesset coli portio, recto jam proxima, videtur deficiens ejus principium propter obliterationem, loco nimis alto positam, evolvi non potuisse. Exclusa ita parte coli, excludebatur simul et coecum, sive potius futura ejus origo. Quamprimum enim collum vesiculae non dehiscebat lege solita in medio, sed ab ipso canali intestini crassi, vel immo cum portione ejus proxima, secessit collum vesiculae integrum; abiit igitur et simul cum vesicula in vanum abscessit non solum pars coli, sed illa etiam pars colli, quae coeco efformando destinata esse solet. Intestinum autem tenue, quod absoluta obliteratione colli vesiculae in ipso separationis illius procinctu, quo valedixit vesiculae, jam nunc intestino crasso respondere debuisset in continuum ad efformandam coli valvulam, errore typi normalis seorsim a collo vesiculae solutum fuisse videtur, aut avulsum; unde factum est, ut nunc, deficiente coeco, et colo praepropere introrsum delitescente, derelictum exterius ileon, et ipso in transitu retardatum, sedem futuri penis occuparet, ibique cum non haberet, cuinam adhaeresceret parti, libere residuum dependeret a pube, fine hiante, cui nec locus erat insertionis, nec modus valvulae.

Neque alia desunt exempla, in quibus tenue separatum erat a crasso. In distantia separati ilei et coeci intercessisse vincula filamentosa et cellularia, refert *Desgranges* 1); in alio caecos fines interruptionis sibi obversos fuisse, testatur *Osiander* 2); immo casum notat *Aubery* 3), ubi tractus intestinalis adeo erat bipartitus, ut penitus diremta fuerit continuitas, intercedente pancreate. Sunt quidem hi casus nostro haud satis analogi, nihilominus in his ipsis utrumque intestinum erat separatum, etsi ambo

---

1) Journal de Med. par *Corvisart*, an X. Thermidor.

2) Neue Denkwürdigkeiten etc. I. B. I. Th. p. 179.

3) Bulletin de la Sociéte de Med. 1806. Janv.

continerentur in abdomine, ut adeo nullum constet exemplum nostro perfecte simile. Cum tamen illorum quoque ratio iisdem ex fontibus derivanda veniat, eo solum discrimine, quod in illis utrumque intestinum, abnormi oblitteratione laborans, cavum abdominis receptum fuerit, interim dum in nostro alterum exterius retardatum haeserit, faciunt tamen haec omnia ad confirmandam doctrinam *Okenii* de usu vesiculae umbilicalis, et nostram monstrositatis explicationem in dato infante comprobant.

Quantumvis doctrinam hanc, ab *Okenio* ingeniosissime excogitatam, et a *Kiesero* et *Meckelio* ulterius excultam, argumentis et experimentis oppugnare tentaverint *Emmert* et *Hofstetter* (vide: *Archiv für die Physiol. von Reil und Autenrieth*, Band IX. 1809.), nihil tamen detrimenti inferunt gravissimis *Wolffii* observationibus, quae jam ante quadraginta sex annos in actis Caesareae Academiae scientiarum Petropolitanae prima quodammodo hujus doctrinae fundamenta posuerant. Confirmatur porro *Okenii* theoria recentioribus *Lucae* animadversionibus de diverticulis intestinorum (vide *Lucae anat. Bemerkk. über die Diverticula im Darmcanal. Nürnberg*, 1813.), quibus ille diverticulorum horum originem eodem ex fonte, pristina scilicet intestinorum in embryonibus bipartitione redundare docet, unde et monstri nostri genesim derivavimus, eo solum discrimine, quod juxta mentem *Lucae* locus bipartitionis hujus intestinorum in embryonibus non sit constanter idem.

Tres propemodum de loco pristinae intestinorum bipartitionis stant sententiae: prima *Okenii* et *Kieseri* locum illum supponit ad valvulam coli; altera *Meckelii*, supra valvulam, seu in ima parte ilei; tertia denique *Lucae*, modo in tenui, modo in crasso intestino sedem indicat, ut pro re nata eorum alterutrum prius evolvatur et exactius.

Primae fere speciei nostrum adscribimus exemplum, certo enim aderat separatio in loco futurae valvulae coli; aderat enim ileon, deerat coecum, unde colligimus, separationem fuisse in ipso loco valvulae coli, ad quam conformandam crassum conspirare debuisset cum tenui.

Quemadmodum vero ex abnormitate intestinorum hujus monstri confirmatur theoria *Okenii* de migratione intestinorum in embryonibus, ita quoque idem hoc monstrum inservit ad corroborandam sententiam *I. F. Meckelii* de conformatione vesicae urinariae [1]). Si enim consideremus, ileon intestinum retardatione sua ad exteriora pubis de-

---

1) Handbuch d. pathol. anat. 1814. B. I. pag. 716.

tentum, et membri et urethrae occupasse locum, eorumque praepedivisse existentiam, magis adhuc animadvertendum erit, vesicam quoque urinariam eo ipso de sede sua exclusam fuisse, et a primordiis relegatam in latera. Quae nimirum utroque in inguine adparebat papilla, aliud nihil erat, quam semivesica urinaria, quarum cuilibet, situ post nativitatem insolito, suus e rene respondebat ureter, cujusque membrana villosa extrorsum inversa mammillae rubrae mentiebatur formam.

Si jam juxta mentem *Meckelii* vesica embryonum lege normali primitus semper in duas partes divisa sit, quae serius in vesicam unicam conformantur, intelligitur facile, hoc in monstro statum vesicae fuisse abnormem non quoad rem, sed tantum quoad retardatum evolutionis stadium, vesicam scilicet perstitisse in statu bipartitionis primitivo, cum ulterior ejus compositio intercedente ileo prohibita fuerit, atque infantis vesica usque post nativitatem perseveraverit in statu embryonis.

Congruit hoc phaenomenon quam aptissime cum duabus observationibus aliis, quarum unam notat *Voisin* [1]; alteram *Soemmerring* [2]; atque hisce aliisque monstrorum exemplis innixus, rite induxit *Meckelius*, simillimum duabus

---

[1]) *Sedillot* Recueil period. T. XXI. pag. 353—3?4.

[2]) *Wolff*, Quaest. med. varii argumenti. Harderovici 1791. p. 65.

ex laminis esse cavearum corporis humani ortum, et vesicam urinariam initio exterius occurrere apertam et bipartitam, ut inversam sese et prolapsam sistat, dein convolvi, et intus trahi docuit [1]).

Si jam detur in foetu ascensus vesicae, sicuti datur testiculorum descensus, forsan reciproco hoc in processu quaedam analogia quoad modum, quo natura diversum id opus peragit: erit forsan urachus vesicae, quod gubernaculum *Hunteri* est testiculo, et in casu retardationis vesicae manebit illa exterius inversa, sicut a retardato testiculo intus latet testicondus.

Mammillas autem inguinales hujus monstri quod attinet, ad evitandam omnem suspicionem, an illae considerandae non fuerint pro supplemento monstroso mammillarum pectoris, transpositionis lusu forsan in inguina aberrantium, supra jam monuimus, infantulum papillis mamillarum normalibus instructum fuisse in superficie pectoris, sede legitima.

Quod ratione ilei contigit vesicae urinariae, idem contigisse videtur utero, ocupabat enim ileon situ suo insolito loçum etiam uteri, unde et ille quoque duo in corpuscula olivaria sejunctus detinebatur ad latera, non inver-

---

1) l. c. p. 716. 734.

sis quidem parietibus, immutato tamen situ adeo, ut fundus utriusque corpusculi uterini esset inferius. Fors et utero, sicut vesicae urinariae, prima embryonis periodo bipartitio et situs inversus, conditiones sunt statu normali familiares.

Adnotatio IV.

Spina Bifida.

An tumorem, in regione sacrali hujus infantis positum, pro hydrorhachitide, utrum pro spina bifida habere liceat, dijudicandum superest, quam ut exactius resolvamus quaestionem, propius examinanda erit utriusque vocis vis et significatio.

Spina bifida et hydrorhachitis seu hydrorhachis pro synonimis haberi solent improprie, realis tamen inter illas intercedit differentia: datur enim hydrorhachitis sine spina bifida, spina autem bifida sine hydrorhachitide rarissime quondam observatur. Hydrorhachitis nimirum, seu aquarum collectio in specu vertebrali, locum habet aliquando sine ulla spinae dorsi fissurra; ubi vero fissae sunt spinae, plerumque subsunt aquae in specu, vel qualecunque demum extravasatum aliud; vix enim morborum aliquis, nisi hic unicus, sensim sine sensu spinas vertebrarum eo distrudere valet, ut findantur instar juguli, dum spinas, ut Halleri [1]) verbis utamur, aut non sinit coire, aut male conglutinatas dividit et obliterat. Neque tamen in omnibus haec fissurae est ratio, abunde enim demonstravit *Murray* [2]), processus spinosos vertebrarum a prima saepe ossium conformatione esse fissos, sive potius imperfectos, aut spinas quasdam, aliasve vertebrarum partes deficere penitus, quare ipsa spina bifida plerumque vel connata apparet, vel primis saltem infantiae oriri solet temporibus, donec spinae adhuc vel cartilagineae, vel tenerioris saltem oseae compagis sunt: rarissime enim in adultis ejusmodi fissura visa est, spinis jam solidioribus. Qui de spinis, vi externa ruptis, notantur casus, huc referendi non sunt, cum hic loci loquamur de illa solum spina bifida, quae oritur ex hydrorhachitide.

Eadem igitur inter hydrorhachitidem et spinam bifidam intercedit ratio, quae inter causam et effectum; iis scilicet in casibus, ubi hydrorhachitis spinas dorsales distrudit, erit spina bifida effectus hydrorhachitidis; ubi vero connata spinarum fissura successu temporis invitavit aquas, in ratione reciproca hydrorhachitis erit effectus spinae bifidae. Cum tamen hydrorhachitis existere possit, etsi spina non sit bifida, distinguenda erit hydrorhachitis

---

1) Elem. physiol. T. IV. pag. 87.

2) Spinae bifidae ex mala ossium conformatione initia. Götting. 1779.

in clausam et fissam, ut clausa sistat hydropem specus vertebralis, seu extravasatum aquarum, in specu coërcitum; fissa vero spinam bifidam cum extravasati tumore, ad externam dorsi superficiem conspicuo.

Stante hac diagnosi, nostro in casu hydrorhachitis erat fissa; vera scilicet spina bifida cum tumore extravasati in regione sacrali. Rarior quidem hujus loci morbus est, frequentior enim occurrit in regione lumbari; rarissimus denique in dorso aut collo.

Quod autem majoris momenti esse, et singularem omnino attentionem sibi mereri videtur, mira illa hoc in monstro caudae equinae est transformatio, cujus exemplum nullibi deprehendimus, et cujus unica igitur observatio in re anatomica videtur notatu dignissima. Aliis enim in casibus spinae bifidae cauda equina, per hiatum spinarum in tumorem seu saccum externum egressa, extremis nervorum suorum finibus interno ipsius sacci parieti affigi solet et inseri, eo fere, quo id in *Mohrenheimii* specimine [1]) delineatur, more; vel colliquatione succedente fatiscit; nostro autem in subjecto res alio prorsus, idque valde abnormi, se habebat modo. Nullum formabat, ut intra vertebram lumbarem primam alteramve formare solet,

---

[1]) l. c.

medulla spinalis nodulum centralem; nullam porro caudam equinam, sed individua continuabatur in specum sacralem, ut nervos inde redderet sacrales anteriores; paries autem medullae posterior, nullos in nervos disjunctus, sed continuo solidus et integer, per hiatum spinae sacralis bifidae in saccum tumoris externum egressus, et sub egressu quasi detruncatus ipsi huic spinarum fissurae posterius insidebat instar folii medullaris explanati, quod cinereae potius medullae spinalis substantiae erat analogum. Connata haec erat medullae spinalis abnormitas, cujus origo nec fissurae spinae bifidae; nec vi aquarum, in sacculo contentarum, tribuenda foret. Alluebatur quidem folium illud medullare aquis, e specu transeuntibus, undique et continuo, serius profecto futurae macerationi obnoxium, nunc vero sicut ipsa medullae columna, nec quoad colorem, nec quoad densitatem substantiae suae depravatum, quae pluribus in casibus, maceratione diutius perdurante, vel emollita vel colliquata, vel corruptione immutata adparere solet.

Aquae, hoc in tumore contentae, erant limpidissimae, quae aliis in exemplis plus, minus, cruentae aut ichorosae occurrunt.

Aquarum fontem internus suppeditavit hydrocephalus, vi cujus illae, ventriculo quarto ad inferiora disrupto, inter posteriorem medullae spinalis parietem ejusque vaginam descendentes, per spinam bifidam ossis sacri in externum tumoris saccum insinuatae, colligebantur.

Notavimus, quod praesentibus quidem extremitatum inferiorum nervis, hae tamen extremitates paralysi affectae fuerint; medullae scilicet spinalis pars infima, horum utpote nervorum origo, aquis in specu vertebrali contentis nimium compressa, non potuit non afficere paralysi partes, quarum functio ab incolumitate nervorum sacralium unice dependet. Ex paralysi porro nervorum sacralium facile explicaretur incontinentia urinae per illorum cum sympathico magno anastomosin, siquidem in vesica per totum abnormi, ad intelligendam incontinentiam opus esset ad nervos recurrere; ita vero in statu vesicae disjunctae simul et inversae deerat et cavum, quod susciperet, et sphincter, qui contineret lotium, ut adeo ejus incontinentia prius abnormitati vesicae, quam paralysi nervorum sacralium tribuenda fuerit.

Neque id silentio praetereundum esse videtur, quod, si mirum fuerit, infantem inter tot abnormitatis reliquae cruciatus ad diem vitae decimam quartam usque fuisse superstitem, id certe haud minorem sibi attentionem exposcere, quod vel ipsa haec spina bifida prius jam non fuerit lethalis, cum, stante hoc morbo, exempla vitae, ultra dies aliquot protractae, sint rarissima ob compressionem tumoris, ipso sub partu plerumque lethalem. Non ignoramus quidem casus, in quibus vita, non obstante spina bifida, ad aetatem provectiorem usque perducta fuit, sed parcus eorum est numerus. Ita spinam bifidam annorum quinque refert *Rosenstein* [1]; annorum septem *Mohrenheim* [2]; annorum octo *Acrel* [3]; annorum duodecim *Trew* [4]; annorum septemdecim *Welse* [5]; exemplum aliud annorum octodecim adducit *Budgen* [6]; annorum viginti *Warner* [7]; annorum viginti octo *Camper* [8]; immo annorum quinquaginta *Swagermann* [9]. Quinquaginta etiam annorum homo quidem, sed non ejusdem aetatis morbus erat, cujus mentionem fecit *Joann. Petr. Franc* [10]; qua quidem de spina bifida singulare id animadvertendum est, quod illa in medico Badensi, *Buch*, quinquagesimo demum

---

[1]) Anweis. z. Kenntn. u. Kur. d. Kinderkrankh. pag. 659.

[2]) l. c. pag. 176.

[3]) Vetensk. akad. Handling. 1748. pag. 91.

[4]) Nov. act. nat. curios. T. II. pag. 394.

[5]) *Acrel*, l. c.

[6]) Philos. transact. Nr. 410.

[7]) Cases of Surgery, pag. 22.

[8]) Hist. de la Soc. Royale de Med. 1784.

[9]) Ontleed. heelkund. Verhendl. Amsterd. 1767.

[10]) Delect. opuscul. med. Vol. II. pag. 33.

aetatis anno sponte supervenerit. Quem autem *Hochstaedter*[1]) de spina bifida quinquagenariae mulieris casum refert, utique vi, ossi sacro illata, ortum, is ad fracturas potius, quàm ad spinam bifidam connatam pertinet. Cum ceterum exempla longaevae, aut serius subortae, spinae bifidae sint oppido rara, casus illos pro exceptionibus potius, quam pro regulis, habendos esse liquet.

Erant, in quibus pressione in caput adhibita, tumorem hydrorhachitidis augeri vidit *Hebenstreit*[2]); erant alii, in quibus, tumore spinae aperto, subsidebat, clauso, intumuit caput, teste *Rosenstein*[3]); in aliis denique dabatur tumoris intumescentia cuivis inspirationi synchrona, observante *Roux*[4]); immo intercessisse nonnullis communicationem inter tumorem hydrorhachitidis et vias urinarias, ut non mitteretur lotium, tumore nisi pleno, aut arte presso, notat *Mohrenheim*[5]): horum omnium nihil hoc in infante observavimus. Coëxistentia vero vesicae inversae, utut adhuc dimidiatae, et spinae bifidae eodem in subjecto ingeniosissimam iterum *J. F. Meckelii* observationem confir-

---

[1]) Dissert. de spina bifida. Altdorf. 1703. pag. 491.

[2]) *Bell* Lehrb. d. Wundarzn. T. IV. pag. 338.

[3]) l. c. pag. 660.

[4]) Journ. de Med. T. XXIX. pag. 140.

[5]) l. c. pag. 175.

mat, qua is [1]) teste *Littre, Revolat, Voisin* et *Delfini*, vesicam inversam saepius, praesente simul spina bifida, occurrere advertit.

Quod denique diversum lethalitatis spinae bifidae gradum attinet, expertissimo facile consentimus *Portalio*, suspicionem moventi [2]), tumorem hunc in regione caudae equinae minus forsitan inferre periculi, quam superius; erit enim pressio medullae spinalis eo pejor, quo altiori contigerit loco, cum nervi spinales eo sint functione nobiliores, quo superiores origine.

Explicatio Tabularum.

Tabula V.

Partes abnormes abdominis externae, in situ naturali delineatae.

A.A.AA. Plaga rubra, excoriata, parietis abdominalis, lusu naturae tegumentis communibus orba.

B. C. D. Linea fere parabolica, confines tegumentorum communium limites denotans.

E. — Umbilicus.

---

[1]) l. c. pag. 735.

[2]) Anat. med. Vol. I. pag. 303.

F. — Tuberculum superficiale parietis abdominalis aliud, nullius momenti.

G. — Finis intestini ilei, membrum virile mentientis.

H. — Orificium hujus membri spurii, urinae loco alvum excernens

I. — Scrotum inane.

K. K. Convexitates scroti laterales, vacuae, ceu sacculi sine testiculis.

L. — Stylus in anum, loco inconsueto inter postremas scroti rugulas latentem, introductus.

M. M. Papillae duae rubrae quasi mammillares in inguine, poro quaevis unico perforata.

N. N. Pori hi duo angustissimi, occulti, papillarum mammillarium inguinalium, urinam excernentes.

O. O. Setae, papillarum poris immissae, viam urinae indicantes.

Tabula VI.

Tumor spinae bifidae, in regione sacrali positus, magnitudinem ovi anserini excedens.

A. Ejus convexitas externa, tumore adhuc integro a posterioribus conspicua.

Tabula VII.

Abdomen apertum: omentum, hepar, ventriculus, colon, lien, ejus e cavo exemta; intestina vero tenuia sursum tracta.

a. a. a. a. Intestina tenuia, altius quid de loco mota, ut partes subjacentes magis fierent conspicuae.

b. — Finis intestini ilei, membri virilis locum occupans (vide Tab. I. G.); in statu naturali sursum spectans, hic autem, abdomine discisso, deorsum pendulus.

c. — Orificium hujus membri spurii, urinae loco alvum excernens. (Confer Tab. I. H.).

d. — Intestinum rectum, siliculare.

e. — Ejus extremitas superior, coeca, ceu finis coli, ceterum deficientis.

f. — Stylus, per anum abnormem, inter postremas scroti rugulas latentem, trajectus. (Confer Tab. I. L.).

g. g. Corpuscula duo olivaria, penitus abnormia; structurae uterinae.

h. h. Renes, quorum dextro defuit ren succenturiatus.

i. i. Ureteres.

k. k. Papillae mammillares duae inguinales. (vide Tab. I. M. M.).

l. l. Oscula ureterum externa, hisce sub papillis hiantia (confer. Tab. I. N. N.).

m. m. Stillicidium urinae, in Tab. I. ope setarum O. O. indicatum.

Tabula VIII.

Tumor spinae bifidae dissectus, ut spinae hiatus, et spinalis medullae per eum transitus, compareat.

α. α. α. α. Margines tegumentorum communium tumoris a posterioribus dissectorum.

β. β. β. β. Cavitas tumoris, depletis aquis parietem interiorem, a vagina medullae spinalis constitutum, exhibens.

γ. γ. Finis medullae spinalis, loco caudae equinae per hiatum spinae bifidae ossis sacri egressus, instar folii medullaris, transversim ovalis, extenuatus.

δ. — Foramellum super folio medullari inter posteriorem parietem spinalis medullae ejusque vaginam sursum ducens, qua via e specu vertebrali aqua fluxerat in saccum spinae bifidae.

ε. — Foramellum angustius in medio folii, coeco fine introrsum in centro medullae spinalis brevissime delitescens.

ζ. — Foramellum angustissimum, ab inferioribus inter anteriorem medullae spinalis parietem et ejus vaginam sursum ducens via arctissima, aquis carente.

η. — Massa ligamentota, hiatui triangulari ossis sacri, per quem finis caudae equinae transire debuisset, quasi obturaculum transversum superimposita.

COLEOPTERA CAPENSIA, ANTENNIS LAMELLATIS, SIVE CLAVA FISSILI INSTRUCTA.

DESCRIPTA A

C. P. THUNBERG.

Conventui exhibuit die 17 Aug. 1814.

Coleoptera Insecta, quae antennis clava fissili instruxit Sapientissimus Creator, inter speciosa et majora hujus Classis plerumque aestimari solent, ideoqve maxime, a curiosis Entomologis adamata, collecta et non raro summo pretio acquisita. Superbiunt in musaeis magnatum maximae *Geotrupes* species, *Actaeon*, *Hercules*, *Neptunus*: speciosissimi *Lucani*, *Cetoniae*, *Coprides*, et antennis suis pergrandibus ostentans, exiguus licet corpore, rarissimus ille *Ptyocerus*.

Pauca ex hisce frigidas regiones, ut patriam suam agnoscunt; pleraque sub ardentiori Sirio sitas, calefactas et fere adustas Globi terraquei plagas incolunt, Africae, Indiaeque utriusque feliciora climata amantia.

Quae australem angulum Africae inhabitant, et huc usque Europaeis innotuerunt, sequentes enumerant paginae, quorumque descriptiones illustr. Imperiali Scientiarum Academiae submisse offeruntur.

Majorem horum partem in Capite bonae spei collegi, at descripsi dudum annis 1772, 1773 et 1774, eo tempore omnino incognitam, et, ut dici solet, novam. Plures deinde scientiae cultoribus innotuerunt, partim in propriis meis editis opusculis, partim in aliorum operibus entomologicis. Supersunt tamen adhuc non paucae species, heic descriptae, quae antea neque per me, neque per alios publici juris factae sunt: quarumque ideo delineationes Entomologiae herois et studiosis non omnino ingratas fore spero.

LUCANUS.

L. *capensis:* niger, cylindricus, elytrorum sulcis punctatis. *
Lucanus capensis. *Thunb.* Nov. Insect. Spec. 1. p. 5. f. 1.

GEOTRUPES.

G. *Boas:* thorace retuso prominentia duplici; capitis cornu recurvo; elytris laevibus. *
Geotrupes Boas. *Fabric.* Eleuter. 1. p. 8.
Similis G. *nasicorni* magnitudine, glabritie, colore et tota structura, excepta thoracis prominentia duplici, nec triplici.

G. *ferrugineus:* thorace bilobo, subtus hirsutus. *

Similis G. *nasicorni*, sed quadruplo minor, totus ferrugineus, subtus villosus villo denso ferrugineo.

Caput medio costa transversa, medio subcornuta.

Thorax convexus, antice obsolete bilobus, laevis.

Elytra laevia, corpore breviora.

G. *retusus*: thorace retuso, capitis cornu exciso, femoribus posticis crassissimis.*

Geotrupes retusus. *Fabric.* Eleuterat. 1. pag. 19.

Corpus magnitudine Melolonthae *vernalis*, convexum; supra glabrum, piceum; subtus rufescens, villosum.

Antennae fissiles laminis tribus uti et palpi rufae.

Caput conico-elevatum in cornu obtusum, marginatum, subexcisum, obsolete rugosum, thorace multo angustius.

Thorax subangulato-rotundatus, convexus, marginatus, antice plano-retusus, inermis punctis minutissimis impressis.

Scutellum obtusum, brevissimum.

Elytra abdomine breviora, laevia, glabra, marginata; intra suturam stria unica.

Femora crassa, postica crassissima, inermia.

Tibiae breves, crassae; anticae extus tridentatae, intus unidentatae, apice trispinosae; posticae extus muticae, apice laminis quatuor compressis obtusis.

Tarsi ciliati, unguiculati.

Obs. Caput singulare, applanatum in conum erectum, bifidum.

G. *cornutus:* thoracis cornu simplici ante lacunam impressam; capite exciso. *

Corpus magnitudine Scarabaei *stercorarii*, totum piceum, supra glabrum, subtus villosum.

Caput subquadratum, depressum, marginatum, excisum, inerme, thorace multoties angustius.

Antennae clavatae, fissiles laminis tribus, piceae, articulo intermedio globoso, pilis aliquot explicatis ferrugineis ciliato.

Thorax rotundatus, convexus, marginatus, antice lacuna lunulata magna impressa, minutissime punctatus, cornutus: *Cornu* in ipso margine antico erecto, truncato, simplici, brevissimo. Margo thoracis subtus ferrugineo-ciliatus; in medio linea glabra.

Scutellum breve, punctatum.

Elytra abdomine paulo breviora, impresso-rugosa, costis aliquot obsoletis glabris.

Pectus ferrugineo-villosum.

Pedes ciliati, pilis ferrugineis.

Femora compressa, inermia.

Tibiae posticae extus unidentatae, apice quadridentatae; anticae extus tridentatae, apice unidentatae.

G. *Syrichtus:* thorace rotundato glabro, capitis cornu recurvo simplici; elytris pilosis. *

Geotrupes syrichtus. *Fabric.* Eleut. 1. p. 16.

Corpus magnitudine Scarabaei *stercorarii*, totum piceum, glabrum, punctatum, convexum, fulvo-villosum.

Caput subrotundum, depressum, marginatum, thorace multo angustius. Margo anticus retuso-elevatus. *Cornu* simplex, recurvum, longitudine capitis.

Antennae fissiles clava trifoliata.

Thorax convexus, lateribus rotundatus, postice truncatus, antice pro capite excisus, marginatus, inermis absque pilis, margine subtus valde piloso, pilis fulvis.

Scutellum brevisimum, obtusum.

Elytra convexa, abdomine breviora, marginata, obsolete striata, pilis raris fulvis pilosa.

Pectus fulvo-hirsutum.

Abdomen et pedes fulvo-villosi.

Femora mutica.

Tibiae anticae extus tridentatae dentibus validis, compressae, intus unidentatae; posticae extus ciliato-serratae seu pectinatae, bispinosae spinis longioribus.

Tarsi ciliati, unguiculati.

G. *aries*: thorace rotundato inermi; capitis cornu subulato brevissimo; corpore subtus rufo-piloso. *

Geotrupes aries. *Fabric.* Eleut. 1. p. 17.

G. *arator*: thorace laevi inermi niger; elitris punctato-striatis.

Geotrupes arator. *Fabric.* Eleuter. 1. p. 21.

G. *globator*: thorace punctato inermi niger; elytris punctato-striatis.

Geotrupes laborator. *Fabric.* Eleut. 1. p. 21.

Similis priori, sed thorax huic punctatus.

SCARABAEUS.

S. *Coryphacus*: thorace bicorni, corpore ferrugineo. †

Scarabaeus coryphaeus. *Fabric.* Eleut. 1. p. 22.

APHODIUS.

A. *ater*: capite trituberculato, medio subcornuto; elytris striatis glabris. *

Aphodius ater. *Fabric.* Eleut. 1. p. 71.

A. *ruficornis*: thorace inermi, elytris striato-punctatis, pedibus anticis villosis.

A. *oblongus*, convexus, ater, supra glaber, subtus pectore pedibusque anticis villoso-rufis.

Antennae rufae, uti et femora antica.

Caput et thorax laevia, inermia.

Elytra striata striis punctatis, longitudine abdominis.

A. *brunneus:* muticus niger, thoracis angulo antico elytrisque ferrugineis striatis. *

Magnitudine Aphodii *merdarii*, seu pediculi maioris magnitudine, ovatus, niger, angulo thoracis exteriori antico elytrisque totis rufis.

Elytra obscura, immaculata, striata.

A. *merdarius:* muticus elytris testaceis; sutura nigra. *

Aphodius merdarius. *Fabric.* Eleuter. 1. p. 80.

A. *binotatus:* muticus thorace nigro, lateribus rubro; elytris testaceis puncto nigro. *

Corpus magnitudine et statura Melolonthae *horticolae*, depressum.

Caput oblongo-quadratum, marginatum, nigrum, glabrum, punctatum.

Oculi fusco-glauci.

Antennae nigrae articulis octo, clavato-fissiles.

Palpi quatuor, interioribus brevioribus.

Thorax quadrato-angulatus, convexus, niger, marginatus, lateribus sanguineus puncto nigro.

Scutellum nigrum.

Elytra testacea, glabra, striato-punctata. Margo exterior et sutura nigrae nigredine versus apicem sensim latiore. In medio singuli elytri punctum unicum subquadratum.

Pectus et abdomen nigra, glabra, pilis cinerascentibus obtecta.

Pedes omnes nigri, glabri. Tibiae anticae extus dentatae, extimi paris longiores, spinosae.

A. *contaminatus:* muticus ater, elytris striatis griseis, signaturis fuscis. *

Aphodius contaminatus. *Fabric.* Eleuter. 1. p. 77.

ONITIS.

O. *apelles*: capitis cornu brevissimo, elytris cinereis, callis albis. *

Onitis apelles. *Fabric.* Eleut. 1. p. 28.

O. *aygulus:* capite tuberculato, elytris testaceis.

Onitis aygulus. *Fabric.* Eleut. 1. p. 27.

COPRIS.

C. *oedipus:* thoracis cornu plano subtus dentato; capitis truncato tridentato. *

Copris oedipus. *Fabric.* Eleuter. 1. pag. 30.

C. *nemestrinus:* thorace bicorni utrinque impresso; clypeo unicorni, integro. *

Copris nemestrinus. *Fabric.* Eleut. 1. p. 31.

Habitat in acervis fimi, quos perforat.

Corpus magnitudine Scarabaeum *stercorarium* superat, totum atrum, glabrum.

Capitis clypeus lunatus, integer, marginatus, utrinque costatus costa ab oculis ducta, tenuissime punctatus, basi cornutus. *Cornu* cylindricum, erectum, simplex, clypeo brevius.

Thorax convexus, marginatus, retusus, lateribus utrinque impressus, medio cornutus cornubus duobus porrectis simplicibus, capite brevioribus.

Elytra abdomine vix breviora, marginata, clausa, striata striis tenuissime punctatis.

Os, pectus et abdomen antice ferrugineo-pilosa.

Femora ovata, crassa. *Tibiae* dentatae.

Antennae fissiles palpique rufescentes.

Similis C. *molosso*, a quo vix differt, nisi

1. magnitudine minori, et
2. elytris striatis.

Similem e China habui, omnibus partibus majorem:

1°. thorace truncato, retuso, costa transversa repando-dentata, et capitis cornu brevi latiusculo bifido;

2°. aliumque thorace, ut in priori, sed angulis costae magis exstantibus et capitis cornu erecto, conico, simplici.

C. *Jachus:* thorace prominente bilobo; capitis cornu recurvo simplici. *

Copris jachus. *Fabric.* Eleuterat. 1. pag. 31.

C. *splendens:* thorace aeneo cornubus duobus nigris compressis; capitis erecto apice compresso. *

Copris splendidulus. *Fabric.* Eleuter. 1. pag. 32.

C. *hamadryas:* thorace tricorni intermedio plano acuto bidentato, clypeo reflexo bicorni. *

Copris hamadryas. *Fabric.* Eleuter. 1. p. 36.

C. *caelatus:* thorace triretuso tricorni medio quadridentato; capitis elongato recurvo, intus unidentato. †

Copris caelata. *Fabric.* Eleuter. 1. p, 37.

C. *sexdentatus:* thorace retuso sexdentato; capitis cornu recurvo simplici. *

Corpus magnitudine Scarabaei *vernalis*, convexum, atrum, glabrum.

Capitis clypeus semiorbiculatus, antice rotundatus, excisus, marginatus, depressus; postice truncatus vertice cornuto, callis adspersus, latitudine fere thoracis, margine subtus ciliatus. *Cornu* simplex, longitudine dimidia thoracis, recurvatum.

Antennae fissiles clava triphylla, piceae.

Thorax rotundatus, marginatus; antice retusus, praemorso-sexdentatus; callis adspersus: Dentes quatuor, intermedii minuti, laterales duo majores; postice laevis, latere utroque puncto impressus, convexus, medio obsolete sulcatus.

Elytra clausa, convexa, abdomine paulo breviora, punctis impressis striisque obsoletissimis exarata, laevia.

Subtus omnia glabra, punctata.

Femora mutica, piloso - ciliata.

Tibiae anticae extus tridentatae, apice unispinosae; posticae extus unidentatae, trispinosae.

Tarsi ciliato - serrati, unguiculati.

C. *sagittarius:* thorace antice mucronato, capitis cornu erecto. *

Copris sagittarius. *Fabric.* Eleut. 1. p. 41.

C. *hyaena:* thorace subbidentato, capitis cornu erecto basi dilatato. †

Copris hyaena. *Fabric.* Eleuter. 1. p. 51.

C. *hispanus:* thorace mutico; clypeo capitis exciso cornuto; elytris striatis; femoribus intermediis remotissimis. *

Copris hispanus. *Fabric.* Eleutr. 1. p. 49.

Corpus magnitudine Scarabaei *stercorari* paulo majus, totum nigrum, glabrum.

Capitis clypeus lunaris, marginatus, antice exciso - fissus, callis tectus, costis duabus lateralibus, cornutus.

Cornu in vertice simplex, rectum, thoracis longitudine.

Os, collum et clypeus margine subtus ferrugineo-pilosa.

Antennae clavatae, fissiles, rufescentes.

Thorax marginatus, antice late lunulato-retusus, postice rotundatus, callis sparsis rugosus, margine postico magis laevi. Intra marginem lateralem costa cum fovea depressa.

Elytra marginata, abdomine breviora, striata, striis in singulo praeter marginalem octo tenuibus.

Pectus punctatum, margine et juxta femur pilosum.

Abdomen punctatum, segmentis posticis rugosum, anoque supra punctatissimo.

Femora crassiuscula, angulata, punctata, intus hirta; par secundum affigitur basi longa.

Tibiae dentatae, angulatae, apice incrassatae, bispinosae

Tarsi articulis quatuor, triangularibus, compressis, dilatatis, valde pilosis.

C. *pectoralis:* thorace mutico; capitis cornu recurvo; elytris striatus. *

Corpus magnitudine Copridis *nuchicornis*, totum atrum, opacum.

Capitis clypeus rotundatus, marginatus, integer, thorace angustior, margine subtus ciliatus, callis minutissimis adspersus, vertice cornutus. *Cornu* recumbens, simplex, longitudine fere thoracis. Inter oculos costa transversa.

Antennae fissiles, laminis tribus.

Subtus inter os et pectus macula magna glauca.

Thorax rotundatus, convexus, marginatus, laevis, frequentissime callosus, callo glabro in utroque margine notatus.

Elytra abdomine paulo breviora, marginata, striis obsoletis, octo punctis minutissimis exarata, nigra, immaculata.

Pedes pilosi. *Femora* compressa, mutica. *Tibiae* anticae extus quadridentatae, apice intus unidentatae, compressae; posticae angulatae, ciliato-serratae. *Tarsi* brevissimi, angustissimi, antici uniunguiculati, postici biunguiculati.

C. *binodis:* thorace mutico antice transverse costato; capite bicostato, elytris laevibus. *

Paulo major Copride *nuchicorni*, totus ater, opacus, convexus.

Capitis clypeus rotundatus, integer, reflexo-marginatus, costa in medio transversa et alia versus basin.

Thorax convexus, antice retusus costa in medio transversa subbiloba. In utroque latere punctum impressum.

Elytra vix manifeste striata.

C. *ciliatus:* thorace mutico ciliato, occipite tuberculato. *

Magnitudine paulo minor Copride *nuchicorni*, totus ater, opacus.

Capitis clypeus rotundatus, integer margine reflexo. In medio costa transversa obsoleta; in occipite tuberculum erectum, minimum.

Elytra laevia, vix manifeste striata.

Femina paulo minor tuberculo capitis minori.

ATEUCHUS.

A. *sacer:* clypeo sexdentato; thorace inermi crenato; tibiis posticis ciliatis; elytris laevibus. *

Ateuchus sacer. *Fabric.* Eleut. 1. p. 54.

A. *laevis:* clypeo sexdentato; thorace gibbo laevi, margine punctato-crenulato. *

Ateucho *sacro* duplo minor, totus ater.

Clypeus capitis sexdentatus.

Thorax gibbus, laevissimus, margine crenulato ciliatus.

Elytra convexa, marginata, laevia, obsoletissime striata.

A. *pius:* clypeo sexdentato; thorace punctato ciliato; elytris laevibus. *

Similis omnino Ateucho *sacro*, sed quadruplo minor, totus ater.

Capitis clypeus sexdentatus.

Thorax convexus, punctatus, ciliatus.

Elytra convexa, laevia.

A. *minutus:* clypeo sexdentato, pedibus posticis elongatis.*

Ateuchus minutus. *Fabric.* Eleuter. 1. p. 56.

A. *intricatus:* clypeo sexdentato; thorace punctato costato; elytrorum callis quadratis. *

Ateuchus intricatus. *Fabric.* Eleuter. 1. pag. 56.

A. *bacchus:* clypeo quadridentato; thorace gibbo elytrisque glabris. *

Ateuchus bacchus. *Fabric.* Eleuter. 1. p. 57.

A. *barbatus:* clypeo quadridentato; capite thorace pedibusque barbatis. *

Magnitudine ateuchi *sacri*, sed magis gibbus, totus ater, laevis.

Capitis clypeus angulatus, quadridentatus, antice cum incisura laterali minori ciliatus.

Thorax valde convexus, punctatus, ciliatus barba postice erecta longiori.

Elytra gibba, marginata, obsolete striata, punctata.

Tibiae valde hirsutae.

A. *cupreus:* clypeo exciso supra cupreus, subtus violaceus.*

Ateuchus cupreus. *Fabric.* Eleuter. 1. p. 59.

Habitat in stercore ad Krum - rivier et alibi.

Corpus magnitudine melolonthae *horticolae* paulo majus, subdepressum, totum supra rufescens et aeneum foveis impressis; subtus violaceum, glabrum.

Caput angulatum, excisum, arcu costaque elevatis.

Antennae fissiles, trifoliatae.

Thorax angulatus, marginatus, pro capite excisus, postice rotundatus; in singulo latere punctum majus et profundius impressum.

Elytra abdomine paulo breviora, striata, absque punctis, clausa. *Dens* lateralis nullus, licet elytra eo loco contracta.

Femora latere interiori dentata, crassiuscula.

Tibiae utrinque dentatae, compressae.

Tarsi spinosi, minimi.

A. *flagellatus:* clypeo exciso niger, thorace elytrisque scabris. *

Ateuchus flagellatus. *Fabric.* Eleuter. 1. pag. 59.

A. *callosus:* clypeo exciso; thorace laevi; elytris papillosis. *

Ateuchus scabratus. *Fabric.* Eleut. 1. pag. 59.

Habitat juxta urbem in stercore equino.

Totus ater, opacus, magnitudine melolonthae *horticolae*, depressus.

Capitis clypeus subtriangularis, marginatus, antice retuso-excisus cum incisura laterali obsoleta, postice rotundatus.

Thorax convexus, immarginatus, punctatus, antice retusus, lateribus dilatatus, elytris latior, postice rotundatus. In medio costa glabra interrupta.

Elytra marginata, abdomine paulo breviora; singulum serie sextuplici papillosum papillis globosis nitidulis.

Femora mutica; anteriora latere interiori macula splendenti ex pilis fulvis notata; *Tibiae* anticae extus dentibus quatuor validis armatae; posticae utrinque dentatae dentibus minimis pluribus. *Tarsi* valde tenues, unguiculati.

A. *spinipes:* clypeo exciso, femoribus posticis bidentatis.*

Similis omnino ateucho *Scheferi*, sed paulo major, totus testaceo-fuscus.

Clypeus excisus, rotundatus, marginatus.

Thorax convexus, ciliatus.

Elytra striata.

Pedes intermedii elongati; femora tibiaeque spina simplici armata. Postici magis elongati, femoribus crassis, bispinosis spina baseos majori. *Tibiae* curvatae.

A. *costatus:* clypeo exciso fuscus, elytris tricostatis. *

Inter minimos, magnitudine Piperis, totus cinereo-fuscus, pulverulentus.

Capitis clypeus excisus.

Thorax convexus.

Elytrum singulum costis tribus tenuibus notatum.

Pedes postici elongati, curvati, inermes.

CETONIA.

C. *pubescens:* obscure aenea thoracis segmentorumque margine albo bipunctato. †

Cetonia pubescens. *Fabric.* Eleuter. 2. pag. 138.

C. *hirsuta:* obscure aenea thoracis margine albo; elytris tricostatis. *

Similis cetoniae *pubescenti*, sed minus virescens, et minor, obscure aenea, supra pubescens; subtus aenea, immaculata, hirsuta.

Thorax marginatus, postice intra marginem lineola alba.

Elytra punctata costis tribus in singulo nitidioribus.

C. *atra:* atra, glabra elytris obsolete tricostatis. *

Habitat prope Svartkops rivier et Zout-pann.

Corpus cetonia *aurata* paulo minus, depressiusculum, totum glabrum, atrum, punctis lineolisque transversis tenuissimis flexuosis impressis rugosum, immaculatum.

Caput thorace multoties angustius, passim aeneo-nitens.

Thorax octangulatus, marginatus, convexus, postice latior carina in medio obsoleta; in margine postico puncta duo impressa.

Scutellum elytris multo brevius costa obsoleta.

Elytra abdomine breviora costis aliquot obsoletis, postice coëuntibus intermediis in callum.

Femora compressa, mutica.

Tibiae compressae, extus unidentatae, apice quadrispinosae.

C. *cuspidata:* nigra capitis clypeo porrecto, basi utrinque sinuato; thoracis limbo elytrorumque margine cinereis. †

Cetonia cuspidata. *Fabric.* Eleut. 2. p. 138.

C. *cordata:* atra, nitida capitis clypeo cordato. †

Cetonia cordata. *Fabric.* Eleut. 2. p. 139.

C. *strigosa:* nigra thorace lobato lineato; elytris strigis abbreviatis ferrugineis. †

Cetonia strigosa. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 139.

C. *rauca:* nigra, obscura elytris obsolete rufo-maculatis. †

Cetonia rauca *Fabric.* Eleuter. 2. p. 143.

C. *cornuta:* nigra obscura, immaculata, thoracis margine antico subcornuto. †

Cetonia cornuta. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 143.

C. *fascicularis:* thoracis lineis quatuor albis; elytris viridibus; abdominis lateribus barbatis. *

Cetonia fascicularis. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 144.

Magnitudine cetoniae *auratae*, plana.

Caput quadratum, nigrum, punctatum, glabrum, paulo retusum, ante oculos utrinque sulco laterali.

Antennae nigrae, clavatae, fissiles.

Thorax niger, glaberrimus, punctis minutissimis: latera elevato-marginata; lineis quatuor albis pictus.

Scutellum nigrum, glaberrimum, utrinque sulcatum.

Elytra viridia, rugoso-lineata, pone costas coarctata, abdomine paulo breviora; costae nigrae.

Pectus nigrum, pilis fulvis dense obtectum.

Abdomen nigrum, glaberrimum, incisuris ad latera pilis fulvis. Latera et anus teguntur pilis fulvis in penicillos collectis.

Pedes nigri, glabri. *Femora* crassa, sulcata. *Tibiae* primi et secundi paris extus dentatae dentibus quatuor; tertii paris spinosae. Tarsi quatuor digitis ungviculatis.

C. *aulica:* viridis, nitida thoracis margine elytrorumque maculis albis. *

Cetonia aulica. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 144.

C. *Capensis:* hirta, rufa, albopunctata. *

Cetonia capensis. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 144.

Magnitudine cetoniae *auratae*, tota glabra, fusco-rufescens.

Caput subquadratum, punctatum, anntennis fissilibus.

Thorax sexangulatus, marginatus, punctatus, ruber, maculis nigris oblongis.

Scutellum nigrum, punctatum, elytris triplo brevius.

Elytra abdomine breviora, punctata, rufa, maculis nigris adspersa.

Abdomen fuscum maculis rubris.

Femora crassa, nigra, rufo-maculata.

Tibiae spinosae digitis unguiculatis.

Sternum porrectum.

C. *signata:* thorace nigro margine albo; elytris testaceis sutura margineque nigris. *

Cetonia signata. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 145.

Habitat prope Riet-valley et Buffeljagstrivier.

Magnitudine cetoniae auratae.

Caput subquadratum, laeve, nigrum, antennis fissilibus

Thorax angulatus, convexus, laevissimus, niger, lateribus albis lineaque ferruginea.

Elytra abbreviata, laevia, ferruginea, sutura nigra. Linea subulata a costa ad medium et macula ante basin utrinque nigra. In margine externo guttae aliquot albae. Dens lateralis niger punctis albis. Scutellum nigrum.

Pectus et abdomen nigra, glabra, lana densa ferruginea.

Anus niger, maculis oblongis quatuor punctisque duobus parvis albis.

Femora nigra, ferrugineo-pilosa. Tibiae et tarsi nigri.

C. *interrogationis*: brunnea thorace maculis quatuor atris; elytris macula flexuosa flava. *

Cetonia flavo-maculata. *Fabric.* Eleut. 2. p. 146.

Habitat prope Swattkops Zout-pani.

Magnitudine cetonia *aurata* major, depressiuscula, tota glabra, ferruginea.

Caput oblongo-quadratum, subexcisum, thorace angustius.

Thorax subocto-angulatus, postice latior latitudine fere elytrorum, marginatus, convexo-planus, laevis; in medio maculae quatuor, magnae, nigrae, quarum par posticum majus; praeterea in latere utroque unica et postice quatuor obsolete nigrae.

Scutellum elytris multoties brevius, maculis nigris duabus.

Elytra abdomine paulo breviora, laevia, linea arcuata nigra in singulo, figuram signi quaestionis formante.

Incisurae abdominis nigrae.

Femora mutica. *Tibiae* latere externo tridentatae, compressae.

C. *sinuata:* fusca, thorace elytrisque margine et maculis duabus flavis. *

Cetonia sinuata. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 147.

C. *fimbriata:* viridis, thoracis etytrorumque marginibus ferrugineis. *

Magnitudine cetoniae *auratae*, paulo major, depressa, glabra.

Caput quadrato-oblongum, marginatum, subexcisum, viride, prominens, thorace multoties angustius, punctatum, oculis olivaceis.

Thorax angulatus, convexus, marginatus, tenuissime punctulatus, viridis, lateribus ferrugineis, antice angustior, postice latitudine fere elytrorum.

Scutellum viride, brevissimum.

Elytra abbreviata, tenuissime striata, postice nodo utrinque elevato, viridia, lateribus ferrugineis.

Pectus et pedes virides, punctati.

Femora, imprimis postica, crassa, inermia.

Tibiae apice spinosae, medio unidentatae.

C. *trilineata:* nigra, thorace lineis tribus albis, elytris fascia flexuosa scutelloque albis. †

Cetonia trilineata. *Fabric.* Eleuterat. 2. pag. 147.

C. *semipunctata:* viridis, thorace quadrilineato; elytris basi lineatis, apice punctatis. *

Cetonia semipunctata. *Fabric.* Eleut. 2. pag. 148.

C. *africana:* viridi-nitens, capitis spina incumbente; sterno porrecto; elytris punctis nigris impressis. *

Cetonia africana. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 149.

C. *acuminata:* obscure aenea, pallido-maculata, elytris acuminatis. *

Cetonia acuminata. *Fabric.* Eleut. 2. p. 154.

Paulo minor cetonia *aurata*, nigro-aenea, subtus cinereo-hirsuta, supra undique cinereo-variegata.

Clypeus capitis fissus.

Elytra prope suturam apice acuminata, lateribus et apice depressiuscula extra costam curvatam.

Abdominis latera albo maculata.

C. *haemorrhoidalis:* nigra, elytris viridibus; thoracis margine anoque rufis. *

Cetonia haemorrhoidalis. *Fabric.* Eleut. 2. p. 154.

Habitat in Swartland et alibi.

Variationes plures occurrunt varie maculatae.

C. *carmelita:* nigro-viridis; thorace elytrisque testaceis; ano biguttato. *

Cetonia carmelita. *Fabric.* Eleut. 2. p. 140.

C. *velutina:* nigra, elytris fascia lata ferruginea. *

Habitat prope Svartkops Zout-pan.

Magnitudine cetoniae *auratae*, depressiuscula, tota glabra et nigra, excepta fascia elytrorum, callisque duobus lateralibus pectoris.

Caput thorace multoties angustius, inerme, laeve.

Thorax subangulato-rotundatus, marginatus, convexus, laevis, postice latior, latitudine fere elytrorum, inermis.

Scutellum elytris multoties brevius.

Elytra abbreviata, obsolete sulcata, basi prope scutellum apiceque nigra, in medio fascia latissima luteo-ferruginea. *Fascia* interdum simplex, interdum in medio fascia fusca notata transversa, sic ut fasciae ferrugineae binae videantur.

Subtus omnia atra.

Basis dentis pectoralis lateralis et callus ante basin elytri ferruginea.

Femora compressa, mutica.

Tibiae latere externo unidentatae; apice quadrispinosae.

C. *adspersa:* ferruginea, elytris viridibus albo-guttatis. †
Cetonia adspersa. *Fabric.* Eleuterat. 2. pag. 154.

C. *albopunctata:* thorace ferrugineo, punctis quatuor nigris; elytris ferrugineis albo-guttatis, limbo atro. †
Cetonia albopuncta. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 155.

C. *cinerascens:* thoracis dorso atro, linea cinerascente; elytris cinereis nigro-maculatis. †
Cetonia cinerascens. *Fabric.* Eleut. 2. p. 156.

C. *irrorata:* nigra, elytris striatis ferrugineis nigro maculatis. †

Cetonia irrorata. *Fabric.* Eleuter. 2. pag. 156.

C. *furvata:* thorace elytrisque testaceis nigro-punctatis; abdomine hirto rufo, incisuris atris. *

Cetonia furvata. *Fabric.* Eleut. 2. p. 156.

Habitat in Svartland.

Melolontha horticola paulo major, tota ferruginea, sed supra magis pallida.

Caput angustum, rufo-fuscum, marginatum, antice rotundatum.

Thorax convexus, laevis, rotundatus, antice angustior, maculis pluribus nigris et intersparsis albis minoribus variegatus, quarum in medio quatuor quadratim positae.

Elytra abbreviata, tenue striata, ornata maculis nigris, per series positis, stercori muscarum similibus.

Pectus, abdomen et pedes pilosi.

Abdomen subtus et supra anum cineritie alba maculatum.

Femora macula nigra notata.

C. *pubera:* thoracis marginibus albis; elytris viridibus; abdomine albo-maculato. *

Magnitudine cetoniae *auratae,* depressa, tota exceptis maculis viridi-aenea, pilosa pilis albis.

Caput parvum, angustum, subquadratum.

Antennae fissiles lamellis tribus.

Thorax marginatus, octoangulatus, antice angustior, lunulato-excisus, convexus, punctatus; linea alba utrinque intra margines laterales.

Scutellum mediocre, punctatum, sulco utrinque ante apicem.

Elytra abbreviata, punctato-rugosa; humeri rufescentes. Ante humeros squamula separata viridis, puncto albo. Dens lateralis mediocris.

Abdominis segmenta ad latera utrinque duplici ordine macularum albarum notantur, uti et anus fascia et gutta duplici alba.

Pedes spinosi, punctati. *Femora* antica fovea impressa; posteriora linea alba.

Obs. in ano deficiunt interdum fascia guttaque alba.

C. *hirsuta:* hirta, aeneo-atra, scutello sulco duplici. *

Magnitudine C. *auratae*, depressa, tota atro-aenea, nitens, villosa, punctis frequentissimis minimis.

Caput rotundatum, thorace multo angustius, marginatum, antice quadridentatum: dentes laterales instar punctorum eminentium: intermedii paulo longiores. *Palpi* quatuor. *Antennae* trilamellatae.

Thorax subocto-angulatus, inermis, marginatus, medio linea obsoleta: intra margines laterales linea alba pone medium dimidiata.

Scutellum elytris multo brevius, acutum, utrinque sulco insculpto a medio ad apicem.

Elytra abbrevita humeris et callo postico, singula costis quatuor obsoletis, coëuntibus, subrugoso-punctata.

Caput, thorax et elytra pilis sparsis erectis villosa.

Anus supra gutta utrinque alba.

Pectus et abdomen valde hirsuta villo longo subferrugineo.

Femora crassa, angulata, conpressiuscula, mutica.

Tibiae extus unidentatae, apice quadrispinosae.

C. *lugubris:* atra, glabra, elytris macula laterali anoque albis. *

Cetonia lugubris. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 158.

C. *hottentotta:* atra, glabra, elytris postice maculis duabus albis. †

Cetonia hottentotta. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 159.

C. *Mucorosa:* thorace elytrisque sangvineis, maculis nigris; abdomine rufo nigroque. *

Magnitudine cetoniae *auratae*, tota obscure rufa seu sangvinea, glabra.

Clypeus capitis quadratus, subexcisus, marginatus, piceus.

Thorax angulatus, convexus, punctatus, maculis pluribus nigris.

Elytra striata, punctata, maculis sparsis nigris.

Abdomen nitidum, rufum, maculis magnis atris seu potius lateribus nigrum.

Obs. varietas adest punctis maculisque thoracis obsoletis.

C. *gutatta:* atra, nitida thoracis margine rufo; elytris albo-guttatis. *

Magnitudine cetoniae *sticticae*, ejusque similitudine, tota atra, nitida, thoracis margine solo rufo.

Clypeus capitis excisus.

Thorax elytraque albo-guttata, guttis sparsis plurimis.

Elytra abbreviata, sulcata.

Abdominis incisurae ad latera guttis minimis albis notata.

Pedes pilosi.

Variat elytris viridibus.

MELOLONTHA.

M. *alopex:* thorace abdomineque hirsuto; elytris glabris ferrugineis. *

Habitat in remotis regionibus, terram perforans.

Magnitudine melolonthae vulgaris, ovata tota, exceptis elytris, dense hirsuta pilis pallide ferrugineis.

Clypeus capitis antice marginatus, nudus, excisus.

Antennae et palpi glabri, ferruginei.

Pileus capitis, thorax et pectus conspici non possunt, prae densitate villorum.

Elytra glabra, abbreviata, marginata.

Abdomen postice ferrugineum, minus hirsutum.

Femora lata, dentata, interiori latere nuda. *Tibiae* filiformes, trispinosae.

M. *longicornis*: nigra, elytris rufis; pectore hirsuto. *
Melolontha longicornis. *Fabric.* Eleut. 2. p. 166.
Magnitudine fere melolonthae *solstitialis*, cylindrica.

Caput rotundatum, retusum, depressum, integrum, punctatum, pilosum, thorace angustius, nigrum.

Anntennae fissiles laminis tribus, piceae.

Thorax subangulatus, convexus, postice truncatus, niger, marginatus, punctatus, pilis minutissimis cinereis tectus.

Scutellum nigrum, brevissimum.

Elytra abbreviata, convexa, ferruginea, punctata, cinereo-tomentosa.

Pectus valde pilosum.

Abdomen nigrum, pilis brevissimis tectum.

Pedes villosi. *Femora* mutica. *Tibiae* extus tridentatae, intus unidentatae.

Differt a melolontha *brunnea* elytris non striatis, sed punctatis.

M. *pilosella:* rubra, pectore hirsuto. *

Magnitudine melolonthae *solstitialis*, cylindrica.

Caput, thorax, elytra, scutellum et abdomen punctis minutissimis confertissimis impressa, pilis brevissimis cinereis obtecta.

Pectus hirsutum villo ferrugineo pallido.

Pedes pilis raris villosi.

Caput subrotundum, depressum, marginatum, integrum, lunula in medio transversa, elevata; thorae angustius.

Thorax subangulatus, convexus, marginatus, margine subtus ciliatus.

Elytra abbreviata, costa elevata, absque striis.

Femora mutica. *Tibiae* extus tridentatae, intus unidentatae.

M. *bicolor:* glabra, viridis, subtus testacea; pedibus apice aureis. *

Melolontha bicolor. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 166.

M. *pallida:* glabra, testracea, capite elytrorumque sutura nigris. *

Melolontha pallida. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 168.

M. *variolosa:* villosa, nigra, thorace elytrisque variolosis. †

Melolontha variolosa. *Fabric.* Eleut. 2. p. 169.

M. *rufa:* glabra, rufescens, elytris testaceis, clypeo quinquedentato. †

Melolontha rufa. *Fabric.* Eleut. 2. p. 171.

M. *virens:* hirta, fusco-aenea, capite thoraceque viridibus; elytris testaceis. *

Paulo minor melolontha *solstitiali*, subtus aeneofusca, hirsuta.

Capitis clypeus transversus, integer, marginatus, viridinitens.

Thorax convexus, viridi-nitens, puncto in utroque latere impresso.

Elytra convexa, laevia nodo anali exstanti, testacea cum viredine interlucente.

M. *viridis:* glabra, supra viridis, subtus aurea. *

Melolontha viridis. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 166.

M. *splendida:* atra, elytris vitta abbreviata aurea. †

Melolontha splendida. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 174.

M. *proboscidea:* hirta, nigra, elytris testaceis margine nigro. *

Melolontha proboscidea. *Fabric.* Eleut. 2. p. 179.

M. *fuliginosa:* glabra, supra nigra, subtus picea. *

Quadruplo fere minor melolontha *variabili*, cui similis, ad-

eoque inter minimas tota glabra, subcylindrico-convexa, supra nigra, subtus picea seu rufescens.
Pedes rufescentes, femoribus posticis crassis.
Clypeus capitis angulatus.

M. *analis:* hirta, nigra, ano rufo. *
magnitudine melolonthae *variabilis*, paulo minor melolontha *brunnea*, ovata, convexa, postice latior, tota fusca vel nigra, supra glabrata, subtus villosa.
Clypeus capitis marginatus margine reflexo, integer, quadratus.
Elytra laevia.
Abdomen postice sanguineum.

M. *picea:* glabra, ferruginea elytris striatis. †
Melolontha picea. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 183.

M. *haemorrhoa:* hirta, atra, elytris postice tibiisque posticis rufis. *
Duplo minor melolontha *brunnea*, convexa, ovata; tota subtus atra, villosa; supra glabrata, capite, thorace elytrisque basi nigris.
Clypeus capitis excisus, marginatus.
Elytra basi et sutura nigra, ceterum rufa.
Tibiae posticae rufae.

M. *caffra:* glabra, rufa, capite pedibusque nigris. *

Melolonthae brunneae magnitudine, cui similis, colore tamen magis saturate rufo.

Corpus ovatum, convexum, glabrum, postice latius.

Caput nigrum, clypeo angulato, marginato, subexciso.

Thorax obsoletissime punctatus, brunneus, margine fusco.

Elytra tenuissime punctata absque striis, brunnea, sutura fusca.

Subtus corpus et pedes nigra, ano sanguineo.

M. *dimidiata:* hirta, nigra, thorace postice elytris pedibusque testaceis. *

Quadruplo minor melolontha *brunnea*, convexa.

Capitis clypeus excisus, marginatus, niger.

Thorax convexus, glaber, antice niger, postice sanguineus.

Elytra laevia, glabra, pallide flava, marginibus antico et laterali atque suturae basi nigris.

Abdomen et pectus hirta, nigra, ano rufo.

Pedes valde hirti, rufescentes.

M. *totta:* hirta, nigra, elytris plaga rufescente, margine pallidis. *

Habitat prope Cap in Taffelberg, vulgaris.

Magnitudine aphodii *erratici*, seu *plagiato* major, tota hirta, ovata.

Caput nigrum, punctatum, clypeo exciso.

Antennae nigrae, fissiles, laminis clavae quatuor.

Thorax niger, punctatus, margine antico pilis erectis ciliatus; fascia interdum postice arcuata, rubra.

Elytra nigra, punctata absque striis, abdomine paulo breviora, pilis sparsis canis erectis hirta, margine exteriori tenuissime pallide flavo. Saepe elytra notantur plaga postica rufescente.

Pectus et pedes nigri, valde pilosi pilis erectis.

Abdomen nigrum, incisuris brevissime pilosis, albidis.

Anus interdum rubet.

Variat. 1. thorace fascia elytrisque plaga rufa.

2. thorace unicolore, elytris plaga rufescente.

3. thorace elytrisque unicoloribus.

4. thorace unicolore, elytrorum plaga anoque rubris.

Differt ab aphodio *plagiato*:

1. pilis corporis, thoracis elytrorumque erectis.
2. margine elytrorum pallido.
3. statura ovata magis, quam cylindrica.
4. magnitudine saltem triplo majori.

M. *gibba*: gibba, testacea, tomento cinereo nitidula. †
Melolontha gibba. *Fabric.* Eleut. 2. p. 183.

M. *setigera*: supra brunnea punctato-pilosa, subtus cinereo-hirta. *

Major melolontha *vulgari*, supra tota brunnea punctatosubvariolosa punctisque setigeris; subtus cinereo-tomentosa.

Capitis clypeus marginatus, excisus, antice concavus.

Thorax convexus, angulatus, marginatus, medio sulco obsoleto et macula utrinque nitida.

Elytra convexa, marginata, irregulariter punctato-variolosa, costa et postice nodo elevato, abdomine breviora.

Pectus et femora hirsuta villo longiori.

Femora crassa, inermia. *Tibiae* quadrispinosae.

TRICHIUS.

T. *punctigerus*: hirtus, testaceus, elytris punctis quatuor nigris. *

Magnitudine melol. *horticolae*, capite, thorace omnibusque subtus densissime hirsutis, cinereis.

Elytra testacea. abbreviata: puncta parva, nigra in medio, in singulo elytro bina.

Variat situ punctorum in elytris.

T. *lineatus*: pubescens, thorace fulvo-nigro-lineato; elytris testaceis: sutura fulva. †

Trichius lineatus. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 133.

T. *nigripes*: hirtus, fuscus, elytris testaceis: margine apicis cinerascente. †

Trichius nigripes. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 134.

T. *maculatus:* supra glaber, cinereo-maculatus, capite thoraceque nigris; elytris piceis. *

Trichius maculatus. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 134.

T. *villosus:* hirtus, supra niger, subtus albidus. †

Trichius hirtus. *Fabric.* Eleuter. 2. pag. 134.

T. *pilosus:* hirtus, subtestaceus, capite thoraceque nigris; elytris piceis. †

Trichius pilosus. *Fabric.* Eleut. 2. p. 134.

T. *limbatus:* hirtus, niger, elytris ferrugineis: macula triangulari atra. *

Paulo minor trichio *fasciato*, totus subtus ater, villosus.

Capitis clypeus excisus, marginatus, niger.

Thorax ater, macula flexuosa brunnea intra singulum latus.

Elytra testacea costa longitudinali; margo externus, sutura, macula disci trigona et suturae apex nigra.

Variat maculis thoracis obsoletis et omnino nullis

T. *bipunctatus:* viridis ano biguttato; elytris testaceis.*

Trichius bipunctatus. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 132.

Elytrorum sutura et margo viridia.

T. *saxicola:* villosus, cyaneus, elytris testaceis: margine omni nigro. *

Habitat in summo monte Witsenberg.

Quadruplo major melol. *horticola*, subtus fusco-cyaneus, hirtus, immaculatus.

Capitis clypeus viridis, margine valde elevato-reflexo.

Thorax subangulatus, convexus, marginatus, viridis, villosus.

Elytra abbreviata, marginata, testacea costa elevata, striato-punctata, marginibus suturaque nigris.

Similis melol. abdominali.

T. *campicola*: niger, nitidus, thorace cyaneo; elytris brunneis; abdominis lateribus albo maculatis. *

Similis melol. horticolae, sed minor et totus glaber, subtus niger, capite thoraceque cyaneis.

Clypeus reflexus.

Thorax in medio unistriatus,

Scutellum nigrum.

Elytra striata, tota rufa, immaculata.

Abdominis latera albo-maculata.

T. *carbonarius*: villosus, ater, elytris testaceis: costis nigro-variegatis. *

Duplo major melol. *horticola*, totus ater, opacus, hirsutus subtus, capite thoraceque atro punctatoque. *

Elytra testacea, costis paulo elevatis nigro-irroratis.

Variat elytris magis nigris et fere totis.

T. *rupicola*: villosus, virescens, capite nigro. *

Melolontha rupicola. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 173.

T. *ursus:* hirsutissimus, ater, pedibus quatuor testaceis. *
Melolontha ursus. *Fabric.* Eleut. 2. p. 184.
Elytra glabra.
T. *bombylius:* pilosus, niger, elytris testaceis: lineis tribus apicis albis. *
Melolontha bombylius. *Fabric.* Eleut. 2. p. 185.
T, *capicola:* hirsutus, ater, immaculatus, clypeo acuminato bifido, *
Melolontha capicola. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 179.
Duplo minor trichio *urso*, alias simillimus, totus hirsutus, aterrimus etiam elytris.
Variat 1°. totus aterrimus.
2°. ater pectore albo-hirsuto.
Valde affines sunt trich. *capicola* et *discolor*, forsan tantum varietates.
T. *discolor:* supra ater villo atro, subtus ferrugineo. *
Minor paulo melol. *horticola*, totus ater, hirsutus, vellere supra nigro, subtus ferrugineo.
Clypeus acuminatus, fissus.
Anus cinereus.
T. *crinitus:* hirtus, supra viridis, subtus niger. *
Melolontha crinita. *Fabric.* Eleuter. 2. pag. 184.
T. *capucinus:* hirsutus, ater, elytris piceis. *
Minor melol. *horticola*, totus hirsutus.

Clypeus acuminatus, ater, glaber, capite basi hirsuto, villo atro.

Thorax ater, hirsutus villo nigro, cinctus undique circulo villorum alborum.

Elytra brunnea, pilosa pilis atris.

Anus albidus, hirsutus.

Abdomen nigrum, atro - hirsutum, lateribus albo - villosum uti et pedes, altero latere albo - villosi, altero nigro - villosi.

Pedes postici elongati, inermes.

T. *ursula:* hirsutus, supra ater, subtus albus; elytrorum marginibus albis. *

Magnitudo et statura omnino trichii capicolae, cum quo proxime convenit; sed subtus abdomen huic uti et pectus albo - tomentosa villoque albo longiori tecta; supra niger vellere rariori nigro vestitus.

Clypeus porrectus, bifidus.

Elytrorum margo omnis cinerascens.

Pedes omnes hirti; postici elongati, latere altero vellere nigro, altero albo ciliati, inermes.

T. *vittatus:* pilosus, cyaneus, elytris testaceis: lineis tribus albicantibus. *

Melolontha vittata. *Fabric.* Eleuter. 2. pag. 185.

T. *lynx:* hirtus, niger, elytrorum margine aureo. *

Melolontho lynx. *Fabric.* Eleuterat. 2. p. 184.

T. *hirtus:* hirtus, capite thoraceque viridibus; elytris fuscis. *

Melolontha hirta. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 185.

T. *ovinus:* cinereo-hirsutus, niger, elytris brunneis. *

Duplo minor melol. *horticola*, subtus totus niger, tectus hirsutie densa cinerea.

Caput atrum, pilosum, acuminatum, fissum.

Thorax ater, pilosus.

Elytra brunnea, immaculata, pilosa.

T. *tricolor:* albo-hirsutus, capite atro; thorace cinereo; elytris anoque testaceis. *

Minor melol. *horticola*, totus hirsutus.

Capitis basis hirta; clypeus integer margine elevato reflexo.

Thorax cinereus pilis erectis nigris sparsis.

Elytra brunnea, immaculata, pilis sparsis erectis nigris.

Abdomen et pectus albo-tomentosa, hirta.

Anus hirtus, ferrugineus.

T. *depressus:* ater, subtus flavo-hirsutus, supra pilosus. *

Duplo minor melol. *horticola*, totus ater; supra pilosus pilis raris sparsis; subtus cinereus densa villositate tectus.

Capitis clypeus acuminatus, fissus.

Elytra in medio dorso versus suturam fovea depressa.

Anus cinereus fascia atra.

Pedes postici elongati, inermes.

T. *monachus:* hirsutus, thorace nigro, lineis duabus albis; elytris brunneis, marginibus atris. *

Non nihil minor melol. *horticola.*

Clypeus acuminatus, fissus, pilosus, niger.

Thorax ater, hirtus, cinctus villo albo; in medio lineae binae abbreviatae niveae.

Elytra brunnea, fusco-pilosa, marginibus exterioribus atris.

Pectus albido-hirsutum.

Abdomen potius albo-tomentosum, immaculatum.

T. *bistriatus*: hirsutus, ater, elytris brunneis: lineis duabus suturalibus atris. *

Magnitudine melol. *horticolae*, totus subtus ater, hirsutus.

Clypeus capitis integer, marginatus margine reflexo, atro, basi villoso.

Thorax ater, hirsutus villo atro.

Elytra brunnea; intra suturam utrinque stria villosa atra.

Pedes postici elongati, crassiores.

T. *vulpes:* aureus, fulvo hirtus, abdomine ferrugineo. *

Melolontha vulpes. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 185.

T. *marginellus:* albo-tomentosus, thorace nigro, margine albo; elytris brunneis. *

Melolontha marginella. *Fabric.* Eleut. 2. pag. 181.

T. *tibialis:* albo-tomentosus, thorace nigro hirto; elytris fusco-brunneis. *

Similis trichio *marginello*, corpore subtus albo-tomentoso, sed pectore magis hirsuto differt.

Caput et thorax atra, villo atro hirsuta.

Elytra brunnea, basi fusca.

Tibiae posticae elongatae, curvatae.

T. *femoratus:* glaber, ater, elytris brunneis; femoribus posticis compressis spinosis. *

Vix Oryzae magnitudinis totus ater, glaber.

Clypeus capitis acuminatus, fissus.

Scutellum album.

Elytra brunnea, immaculata.

Subtus ater, lateribus abdominis albo-guttatis.

Anus ater, fascia alba.

Pedes postici elongati. *Femora* crassa, compressa, basi dente valido armata. Tibiae curvae, terminatae spina insigni.

T. *pusillus:* glaber, brunneus, capite nigro. *

Octies minor melol. *brunnea*, adeoque sufficienter distinctus ab illa et a melol. *melanocephala*. A mel. *ferruginea Fabricii* Eleut. pag. 170. n°. 56. distinctus quoque, quod minime punctatus, sed laevis.

Clypeus rotundatus, integer, marginatus, niger, reflexus.

Thorax, Elytra, corpus, pedes brunnea, laevia, immaculata.

T. *costatus:* glaber, supra cinereus, subtus albo-tomentosus, elytris costis duabus. *

Dimidio minor melol. *horticola*, totus albo-tomentosus pectoreque albo-villoso.

Supra cinereus, thoracis lateribus albidis.

Elytra exciso-angustata, costis in singulo duabus tenuibus.

Anus obtusus, spina terminatus.

T. *sulcatus:* hirtus, subtus albus, supra niger elytris brunneis sulcatis albo-lineatis. *

Magnitudine circiter melol. *horticolae.*

Clypeus subquadratus, marginatus, integer.

Thorax immaculatus.

Elytra fusco-brunnea, basi latiora, tenuissime punctata et villosa, sulcata sulcis lineisque pluribus albis; in ipso apice lunula alba.

Pectus hirsutum villo albo.

Abdomen tomentosum, album, immaculatum, obtusissimum.

Pedes atri, hirti. *Femora* postica crassa, mutica, apice spina exteriori latere terminata. *Tibiae* crassae, inermes, spina utrinque terminatae.

Variat ano flavescente et tibiis rufis.

T. *multiguttatus:* tomentoso-cinereus, elytris ferrugineis, maculis octo cinereo-albidis. *

Minor melol. *horticola*, totus pilis densissimis brevissimis tectus, flavescens.

Caput minus tomentosum, fuscum, clypeo parum exciso marginatum.

Thorax cinereus maculis tribus ferrugineis.

Elytra ferrugineo-tomentosa, maculis in singulo quatuor ablongis, albidis.

Scutellum cinereo- albidum.

Pectus hirsutum villis albis.

Abdomen tomentoso-album, immaculatum, uti et pedes toti.

Femora postica crassa, inermia. *Tibiae* incrassatae, inermes, spina utrinque terminatae.

Ungues nudi, rufi, validi, curvi.

T. *chiragricus:* pubescens, ater, elytris albis: linea atra; femoribus posticis bidentatis. *

Magnitudine melol. horticolae, sed latior, totus ater exceptis marginibus elytrorum, tenuissime nigro-pubescens.

Clypeus excisus.

Elytra alba: linea in medio lata obliqua atra, apicem non attingente.

Pedes postici elongati, monstrosi. *Femora* crassa, basi dente obsoleto et intra apicem spina valida armata.

Tibiae posticae curvatae, compressae, spina valida terminatae.

T. *rufipes:* glaber, ater, palpis pedibusque anticis rufis; femoribus posticis bidentatis. *

Inter minores, magnitudine scarab. *arenarii*, totus glaber, ater, palpis solis pedibusque anticis rufis.

Femora postica crassa, basi apiceque dente parvo armata.

Tibiae incurvae, extus ciliatae, spina terminatae.

T. *cancroides:* ater, albo-irroratus; femoribus posticis elongatis crassis; tibiis unidentatis. *

Melolontha cancroides. *Fabric.* Eleut. 2. p. 181.

Latera abdominis albo-maculata, medium totum tomentoso-album.

T. *crassipes*: glaber, niger, capitis clypeo quadridentato. *

Melolontha crassipes. *Fabric.* Eleut. 2. p. 180.

Corpus totum nigrum, glabrum, laeve.

Caput marginatum clypeo antice rotundato, quadridentato dentibus obtusis.

Antennae nigrae, fissiles, clava trilamellata fusca.

Thorax convexus, marginatus.

Elytra abdominis longitudine, convexa, marginata, sulcis tenuissimis.

Femora valde crassa, angulata, parum compressa, inermia.

Tibiae anticae compressae, dilatatae, tridentatae; posteriores dentatae, ciliatae, ungviculatae.

Obs. Thorax subtus et capitis clypeus postice subtus ciliata, villis nigris.

T. *arthriticus:* niger elytris griseis; clypeo tridentato; femoribus posticis incrassatis subinermibus. *

Melolontha arthritica. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 180.

T. *atomarius:* albo-farinosus thorace canaliculato atro; elytris fuscis; abdomine albo: punctis lateralibus atris. *

Melolontha atomaria. *Fabric.* Eleut. 2. p. 177.

T. *dentipes:* niger, elytris testaceis; clypeo quadridentato; pedibus tibiisque posticis spinosis. *

Melolontha dentipes. *Fabric.* Eleut. 2. p. 180.

T. *spinipes:* niger, elytris brunneis; scutello toto lateribusque abdominis albo-punctatis; pedibus posticis elongatis. *

Corpus magnitudine melol. *brunneae,* glabrum, nigrum.

Caput depressum, punctatum.

Oculi et antennae fissiles nigrae; *os* pilosum.

Thorax convexus, punctatus, postice sulcatus.

Elytra marginata, abbreviata, subrugosa, glabra absque striis et punctis, brunnea: lineis obsoletis ex pilis albis brevissimis.

Pectus et abdomen pilosa.

Anus pulverulento-flavescens.

Abdominis latera albo-punctata, scilicet ex pilis albis punctis quatuor utrinque.

Pedes anteriores quatuor fusco-ferruginei, spinosi; postici elongati, crassi, longitudine corporis. *Femora* crassa, extus convexa, intus concava, basi dentata, margine pilosa, ferruginea. *Tibiae* inflexae, falcatae, medio unidentatae. *Plantae* ciliato-spinosae.

T. *gonagra:* grisea, pedibus rufis; pedibus posticis incrassatis muticis. *

Melolontha gonagra. *Fabric.* Eleut. 2. p. 180.

Corpus totum tomentoso-flavum supra infraque, pedibus rufis glabris.

T. *abbreviatus:* villosus, niger, clypeo tridentato, elytris abbreviatis testaceis. *

Melolontha abbreviata. *Fabric.* Eleut. 2. pag. 181.

T. *podagricus:* niger, clypeo tridentato; femoribus tibiisque posticis dentatis. *

Melolontha podagrica. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 180.

T. *deustus:* glaber, thoracis lateribus albis; elytris lunula apiceque nigris; abdomine albo-maculato. *

Corpus magnitudine melol. *horticolae* paulo minus, totum glabrum.

Caput angustum, marginatum, punctatum, antice rotundatum, nigrum, antennis fissilibus rufescentibus.

Thorax convexus, angulatus, marginatus, antice attenuatus, pro capite excisus, glaber, marginibus lateralibus linea interrupta alba.

Elytra abbreviata, testacea, glabra, striis punctatis; margo exterior, sutura et apices nigra. Pone medium lunula subtriangularis communis nigra.

Scutellum nigrum.

Pectus et abdomen nigra, subpilosa; abdominis latera albo-punctata. Anus supra maculis duabus albis pictus.

Femora rufescentia pilosa. Tibiae fusco-rufescentes.

T. *calcaratus:* niger, elytris flavis: fascia atra; femoribus tibiisque posticis spinosis rufis. †

Melolontha calcarata. *Fabric.* Eleuterat. 2. pag. 180.

T. *sexlineatus:* pubescens, niger, elytris lineis sex cinereis. *

Quadruplo minor melol. *horticola,* totus pubescens, niger.

Clypeus excisus.

Scutellum cinereum.

Elytra lineis sex cinereo-albis picta.

Pectus, latera abdominis strigaque ani cinerea.

Pedes antici tridentati, intermedii ciliati; postici elongati, valde incrassati, spina baseos valida. *Tibiae* curvatae, spina terminatae.

T. *minutus:* niger, elytris griseis; pedibus testaceis; femoribus posticis acute dentatis. *

Melolontha minuta. *Fabric.* Eleut. 2. p. 182.

T. *fuscus:* glaber, fuscus, elytris brunneis; femoribus incrassatis inermibus. *

Pediculo duplo major, trichio *minuto* valde similis, sed obscurior, femoribus muticis. *

Caput, thorax et omnia subtus nigra.

Elytra testacea seu fusco - brunnea, immaculata.

Pedes antici picei. *Femora* postica incrassata, inermia. *Tibiae* posticae incrassatae, spina terminatae.

T. *thoracicus:* hirtus, thorace nigro: margine lineisque duabus luteis. *

Paulo minor melol. horticola.

Corpus nigrum, subtus albo - hirsutum, supra anusque flavescenti - tomentosum.

Clypeus subquadratus, marginatus, margine valde elevato, integer, niger, capite basi hirto.

Thorax niger, hirtus, lateribus et margine postico flavis; lineae duae in medio dorso abbreviatae, flavae.

Elytra hirta, laevia, brunnea, sutura et margine postico flavis.

Pedes antici picei; postici elongati, nigri.

T. *fulvipes:* hirtus, thorace cinereo; elytris ferrugineis; margine postico flavo; pedibus rufis. *

Magnitudo, statura et similitudo trichii *thoracici.*

Corpus subtus nigrum, vellere albo tectum, ano flavo-tomentoso.

Clypeus integer, concavus, margine erecto, niger.

Thorax hirtus, cinereo-tomentosus.

Elytra ferruginea, laevia, margine postico flavo.

Pedes pilis raris hirti, basi villosi, rufi; anticorum tibiae bidentatae; postici elongati, inermes.

T. *fuscipes:* hirsutus, subtus albidus, supra ferrugineus, elytrorum margine postico flavo. *

Statura et similitudo trichii *fulvipedis* et *thoracici*, eorumque magnitudo.

Corpus subtus nigrum, hirsutie alba tectum, ano lateribusque fulvis.

Caput basi hirsuto-fulvum; clypeus subexcisus, concavus, marginatus, niger.

Thorax hirsutie fulva longiori tectus.

Elytra ferruginea, villosa, margine postico lunula flava.

Pedes omnes nigri, pilosi; antici extus tridentati; postici elongati.

T. *setosus:* villosus, subtus albus, supra testaceus, elytris pilis nigris striatis. *

Quadruplo minor melol. *horticola*, subtus hirsutus, albus, ano ferrugineo.

Clypeus integer, marginatus.

Thorax fusco-cinereus, villosus.

Elytra testacea, seriebus aliquot e pilis nigris erectis.

Pedes nigri, hirti.

Penicillus ad oculum utrinque pilorum nigrorum singularis exstat cristatus.

T. *bilateralis:* hirtus, subtus albus, elytris brunneis: margine nigro alboque. *

Duplo minor. melol. *horticola*, hirtus totus.

Corpus subtus antice albo-villosum, abdomine nitido atro segmentorumque marginibus albis.

Clypeus integer, concavus, marginatus, niger.

Thorax niger, valde hirsutus.

Elytra brunnea, angustata: margine nigro fimbria alba, suturaque dimidia postice alba.

Anus ater cingulo albo.

Pedes antici rufi, bidentati; reliqui nigri, postici elongati inermes.

T. *bilobus:* hirtus, thorace gibbo sulcato; elytris nigris; lineola punctoque ferrugineis. *

Pediculi tripla magnitudine, totus tenuissime hirtus.

Thorax valde gibbosus, fuscus, ferrugineo-pubescens, medio striatus.

Scutellum ferrugineum.

Elytra nigra; in singulo lineola abbreviata et punctum ferruginea.

Subtus ferrugineo-villosus, niger.

Pedes ferrugineo-hirti; antici bispinosi spinis validis; postici elongati.

T. *trilineatus*: glaber, supra cinereus, thorace lineis quatuor, elytris tribus fuscis. *

Aphodii statura, oblongus, pediculo quadruplo major, cineritie totus tectus.

Clypeus integer, marginatus.

Thorax lineis quatuor fuscis.

Elytra linea costali abbreviata et sutura fuscis.

In pectore juxta pedes intermedios macula magna flavescens.

Pedes rufi, antici tridentati; *Tibiae* posticae fuscae; ultimi elongati, inermes.

Scutellum minimum, nigrum.

T. *ruficaudis*: glaber, ater, elytris, abdomine pedibusque rufis. *

Pediculo quadruplo major, totus glaber.

Clypeus quadratus, marginatus, integer, niger.

Thorax convexus, niger, lateribus puncto impresso, postice stria obsoleta.

Elytra laevia, testacea, immaculata.

Pectus nigrum.

Abdomen rufum, immaculatum.

Pedes omnes et toti rufescentes; antici bidentati; postici elongati femoribus incrassatis inermibus.

T. *araneoides:* flavescens clypeo subreflexo, elytris ferrugineis fusco-fasciatis. *

Melolontha araneoides. *Fabric.* Eleuter. 2. p. 183.

T. *binotatus:* hirtus, cinereus, elytris testaceis; ano punctis duobus nigris. *

Duplo minor melol. *horticola*, subtus pectore nigro, abdomine rufo, cinereo villo tectis.

Clypeus transversus, marginatus, pubescens.

Thorax valde convexus, olivaceus, hirtus.

Elytra angustata, testacea, immaculata, glabra.

Latera abdominis albo-maculata.

Anus ferrugineus, tomentosus, punctis duobus atris.

Pedes rufi, hirti; antici tridentati; postici elongati, femoribus inermibus crassis.

T. *sexstriatus:* subtus albo-hirsutus, supra niger elytris sexlineatis; ano flavescente. *

Similis in multis trichio *sexlineato*, imprimis elytrorum lineis; sed quadruplo major, femoribus elongatis, non vero clavatis.

Magnitudine circiter melol. *horticolae*, brevior sed latior; totus niger, sed subtus tectus hirsutie alba; anus flavescens; supra cinereo-pubescens.

Clypeus bifidus.

Thorax niger, punctis minutissimis albis griseus, margine postico albido.

Elytra fusca, lineis tribus in singulo cinereo-albidis.

Scutellum cinereum.

Pedes antici tridentati; intermedii ciliati; postici elongati, hirsuti.

PTYOCERUS

P. *mustacinus.* * Act. Stockholm. 1806. pag. 1. Tab. 2. fig. 1. 2. 3.

TROX.

T. *sulcatus:* niger thorace sulcato alato; elytris costis octo margineque serratis. *

Trox luridus. *Fabric.* Eleuterat. 2. pag. 111.

Habitat in collibus extra urbem.

Corpus Trosabuloso majus, totum cinereo-nigrum, ovatum.

Caput parvum, nodoso-inaequale, glabrum.

Antennae trilamellatae.

Thorax convexus, rugosus, antice late excisus; postice-rotundatus, ciliatus; in medio sulcus profundus et utrinque lateralis curvus. Latera in alas planas, tenuissime ciliatas producta. *Scutellum* minimum.

Elytra abdomen undique includentia; in singulo costae, quatuor crenatae, coalitae, inter quas duplex ordo punctorum; margo exterior serratus, postice ciliatus.

Abdomen planum.

Femora et tibiae angulata, punctata, pilis hispida; femora antica macula ferruginea notata; *Tibiae* spinosae; *tarsi* articulis quatuor cilito-spinosis.

T. *silphoides:* niger, glaber; thorace elytrisque cartilagineo-ciliatis. *

Habitat juxta urbem Cap.

Magnitudine Silphae *grossae*, oblongus, supra convexus, subtus planus, scaber, fuscus.

Thorax convexus, nodosus nodis pluribus parvis; latera complanata, dilatata; margo omnis cartilagineo ciliatus.

Elitra clausa, marginata, rugosa et nodulosa per series, nodulis quibusdam apice cinerascentibus e pilis laevissimis fere penicillatis; margo tenuissime cinereo-ciliatus.

Femora crassa; tibiae spinosae.

Silphae facies, sed antennae trilamellatae.

DECADES TRES ELEUTHERATORUM NOVORUM DESCRIPSIT

J. F. ESCHSCHOLTZ.

Conventui exhibuit die 25 Jan. 1815.

Nonnullas eleutheratorum descriptiones offero, quae partim nova, partim in nova genera distributa quaedam continent entomologiae peritis non plane indigna. Continent genera Cetonia et Melolontha *Fabric.* adhuc plures species habitu valde differentes: si inde nonnullis e speciebus nova condidi genera, non frustra rei curam imposuisse arbitror. Constat inter entomologiae peritos, multisque comprobatur exemplis, quam difficile saepe sit, eundemque animalculum in singulis sectari, et omnibus partibus absolutam ejus tradere historiam, ne quid amplius addendum vel corrigendum vel mutandum supersit. — Plurimi descriptorum eleutheratorum in Livonia indigeni, nonnulli in regionibus Caucasicis lecti, et duo quoque e Surinamo allati sunt.

1. Lethrus ferrugineus.

L. corpore oblongo, ferrugineo.

Caput ferrugineum, scabrum, pilis paucis instructum; antice margine laevi, triangulo medio elevato, tuberculisque duobus in margine antico atris.

Oculi magni, globosi, atri.

Antennae ferrugineae, pilosae, ante oculos insertae, simillimae Lethri cephalotis, at clava excavata (urceolata).

Labrum breve, transversum, late emarginatum, ciliatum.

Mandibulae magnae, porrectae, validae, integerrimae, apice obtusae, extus pilosae, intus nudae, ferrugineae; angulis nigris; longitudine capitis.

Maxillae breves, membranaceae, rectae, pilosae, integrae.

Palpi quatuor filiformes: anteriores articulis quatuor inaequalibus, glabris; posteriores breves; articulis tribus pilosis.

Ligula membranacea, integra, pilosa.

Labium corneum, rotundatum, inflexum.

Thorax ferrugineus, magnus, gibbus, punctatus; angulis anticis deflexis, margine utrinque elevato, puncto laterali majori impresso, nigro.

Scutellum triangulare, ferrugineum, pilosum.

Elytra ferruginea, pilosa, marginata, convexa, haud connata, punctato striata; striis octo; longitudine abdominis, sutura nigricante, humero elevato.

Alae magnae.

Pectus et abdomen ferruginea, nitida, setis sparsis instructa.

Pectoris latera laminis triangularibus, facie elytrorum, punctatis, marginatisque tecta.

Pedes ferruginei, pilosi; tibiis dentatis, tarsis omnibus articulis quinque elongatis, pilosis.

Habitat in regionibus Caucasicis. Mus. rer. natur. Univers. Caesar. Dorpat.

Differt species haec (magnitudine Aphodii fimetarii) multis in partibus cum Lethri genere, quo tamen separandam non putavi.

---

2. Geotrupes thoracicus.

G. muticus, brunneus, capite thoraceque atris, elytris punctato striatis.

Caput atrum, nitidum, laeve, glabrum; clypeo piceo, punctato, emarginato, margine elevato.

Oculi picei.

Antennae pilosae, piceae.

Thorax ater, nitidus, glaber; punctis sparsis lateralibus impressis.

Scutellum brunneum, laeve, nitidum.

Elytra brunnea, nitida, punctato striata; lineis quinque regularibus, caeteris irregularibus, punctis nonnullis sparsis impressis, humero laevi.

Pectus, abdomen pedesque picea, nitida, glabra.

Habitat Surinami. Mus. rer. natur. Univ. Caes. Dorpat. Magnitudine G. Monodontis, at corpore cylindrico.

---

3. Scotodes.

Character genericus:

Palpi quatuor inaequales:
anteriores securiformes,
posteriores clavati.

Maxilla membranacea, bifida.

Labium corneum, transversum.

Antennae filiformes.

Scotodes annulatus.

Corpus oblongum, elongatum, pubescens, immarginatum, tardum, Blapibus affinis.

Caput insertum, inflexum, elongatum, complanatum, griseo pubescens.

Oculi magni, globosi, atri, reticulati.

Antennae filiformes, versus apicem increscentes, thorace longiores, ante oculos insertae, pilosae; articulo tertio elongato.

Labrum corneum, subquadratum, pilosum.

Mandibulae corneae, unidentatae, breves.

Maxillae membranaceae, rectae, bifidae; laciniis aequalibus, pilosis: exteriori magna, triangulari, interiori parva, lineari.

Palpi quatuor inaequales: anteriores quadriarticulati, elongati, securiformes; articulo secundo elongato, ultimo magno, triangulari, compresso: posteriores articulo ultimo majori, ovato.

Ligula membranacea, bifida; laciniis quadratis, pilosis.

Labium corneum, transversum, pilosum.

Thorax subquadratus, griseo pubescens, immarginatus, antice rotundatus, elevatus, capitis basin tegens, elytris angustior; margine postico medio leviter emarginato.

Scutellum parvum, orbiculatum, pilosum, album.

Elytra linearia, libera, grisco pubescentia, dense punctata, immarginata, abdomine longiora, lateribus deflexa, rigida, fornicata, laevia, apice rotundata.

Alae magnae, diaphanae.

Corpus subtus nigro pubescens, nitidum.

Pedes femoribus nigris, teretibus, tibiis griseis; annulis nigris; tarsis griseis, quatuor anticis quinque-articulatis, posticis quadriarticulatis; articulo primo et ultimo elongatis; unguibus duobus bipartitis, incurvis, ferrugineis.

Habitat in Livoniae locis umbrosis.

Scotodes convenit multis in partibus cum Blapis genere, differt tamen satis antennis filiformibus, palpis anterioribus securiformibus, labioque transverso (in Blapibus rotundo). — Nomen genericum a σκοτώδης, tenebricosus.

---

4. Carabus cyanipennis.

C. apterus, ater, elytris violaceis, striatis.

Caput atrum, nitidum.

Oculi grisei

Antennae piceae, basi nigrae, pilosae, thorace longiores.

Thorax ater, nitidus, cordatus, canaliculatus; marginibus externis elevatis.

Scutellum parvum, atrum, nitidum.

Elytra violacea, fere plana, libera, marginata, leviter striata; striis novem; margine toto apiceque tribus punctis impressis.

Alae nullae.

Corpus subtus pedesque brunnea, glabra.

Habitat in regionibus Caucasicis.

Species haec magnitudine C. leucophthalmi.

---

5. Hydrophilus chalcaspis.

H. griseus, elytris striatis, capite aeneo.

Caput viridi aeneum, nitidum, punctatum, a basi ad medium usque carinatum.

Oculi nigri.

Antennae flavae, thorace breviores.

Thorax ferrugineus, punctatus, nitidus; disco nigro aeneo, ferugineo carinato.

Scutellum minimum, griseum.

Elytra grisea, valde convexa, crenate striata; striis e punctis impressis, basique una inter primam et secundam abbreviata; disco nigricante, punctoque in medio marginis nigro.

Pectus et abdomen atra, nitida.

Pedes ferruginei; femoribus quatuor posticis basi atris.

Habitat in Livoniae aquis stagnantibus, plantis aqua submersis adhaerens.

Species haec, magnetudine H. marginelli, facie subaliena, qua de causa organa cibaria examinavi, at Hydrophili characteribus genericis aequalia inveni. Nomen triviale chalcaspis a χάλκασπις, aeneum clypeum gerens.

6. Dytiscus (Dyticus illiger) flavicollis.

D. thorace elytrorumque margine flavis, elytris cinereis, semipunctatis.

Caput atrum; antice macula cordata posticeque lineis duabus juxta positis ferrugineis, punctisque utrinque tribus ante oculos impressis.

Oculi grisei.

Antennae, palpi labiumque ferruginea; antennis longitudine thoracis.

Thorax flavus, laevis, glaber; macula media, punctis duobus lateralibus, duobusque ad marginem posticum minimis nigris.

Scutellum parvum, atrum.

Elytra grisea, glabra; punctis rivulisque parvis a basi ultra medium usque impressis, margine exteriori late suturaque tenerrime flavis.

Pectus atrum, nitidum.

Abdomen ferrugineum, glabrum; segmentis fusco marginatis.

Pedes quatuor antici flavi; tarsis simplicibus; postici ferruginei; tarsis natatoriis.

Habitat in Livoniae paludibus.

Statura D. cinerei, at magnitudine D. bipustulati.

7. Dytiscus (Dyticus. illig.) sericeus.

D. livido sericeus, capite, elytrorum marginibus pedibusque fuscis.

Caput fuscum, glabrum; postice linea semicirculari nigra.

Oculi nigri.

Antennae longitudine thoracis, fuscae.

Thorax ater, punctatus; disco laevi, nitido, limbo livido sericeo, marginibus exterioribus brunneis; postice loco scutelli productus.

Scutellum nullum.

Elytra nigra, livido sericea; margine exteriori fusco.

Pectus et abdomen atra, nitida.

Pedes fusci; tarsis posticis natatoriis.

Habitat in Livoniae aquis stagnantibus.

Inter minores hyjus generis, magnitudine D. ovati, at corpore magis complanato.

---

8. Tillus aterrimus.

T. hirsutus, ater, elytris punctato striatis.

Caput atrum, hirsutum, nitidum, punctatum.

Oculi fusci.

Antennae atrae, longitudine thoracis.

Thorax ater, nitidus, hirtus; pilis atris; transverse rugosus.

Scutellum parvum, rotundatum, glabrum, opacum.

Elytra atra, nitida, punctato striata; striis novem; pilosa; pilis atris.

Pectus et abdomen atra, pilosa.

Pedes atri, pilosi; tibiis quatuor posticis flavescentibus.

Habitat in Livonia.

Longitudine circiter quatuor linearum.

---

9. Corynetes aeneus.

C. nigro aeneus, thorace elytrisque pilosis.

Caput nigro aeneum, pilosum; nitidum.

Oculi atri, opaci.

Antennae longitudine thoracis, pilosae, nigrae, perfoliatae, fere filiformes, versus apicem paullo incrassatae.

Thorax nigro aeneus, pilosus, rotundatus, marginatus; limbo exteriori elevato, scabro.

Scutellum parvum, nigro aeneum.

Elytra pubescentia, pilosa, laevia, nigro aenea.

Pectus, abdomen pedesque nigro aenea, glabra; tarsis piceis.

Habitat in Livonia.

Antennae a Corynetis genere paullo diversae, at statura et magnitudo omnino Corynetis violacei.

10. C a n t h a r i s p l u m b e a.

C. thorace marginato: limbo, ore, pedibus abdomineque pallidis, elytris cinereis.

Caput nigrum, pubescens; ore palpisque pallidis.
Oculi atri, nitidi.
Antennae ferrugineae.
Thorax ater, marginatus; limbo pallido.
Scutellum cinereum.
Elytra pubescentia, cinerea.
Alae nigrae.
Pectus cinereum, sericeo nitens.
Abdomen pallidum; segmentis nonnullis nigro maculatis.
Pedes pallidi; femoribus posticis geniculo nigro, tarsis ferrugineis.

Habitat in Livonia frequens.

Affinis videtur C. nigricanti illig. et C. pellucidae *Fabric.*, differt tamen elytris cinereis, abdomineque pallido.

---

11. C a n t h a r i s l i t t e r a t a.

C. thorace marginato, ferrugineo: medio M nigro, elytris testaceis.

Caput rufum, basi nigro maculatum.
Oculi atri.

Antennae nigrae, basi ferrugineae.

Thorax marginatus, ferrugineus; medio M punctisque utrinque duobus versus marginem posticum nigris.

Scutellum testaceum (intérdum nigricans).

Elytra testacea, immaculata.

Alae cinereae.

Pectus nigrum, sericeum.

Abdomen nigrum; margine rufo.

Pedes ferruginei; femoribus omnibus striis duabus longitudinalibus nigris.

Habitat in Livoniae betulis.

Magnetudine variat; macula thoracis media constans, at puncta duo postica interdum in maculam unam confluunt.

---

12. Cantharis melanodera.

C. thorace marginato, nigro punctato, pallida, capitis basi corporeque subtus atris, ano ferrugineo.

Caput pallidum; vertice atro.

Oculi atri.

Antennae ferrugineae, basi rufae.

Thorax ferrugineus, marginatus, angustatus; macula longitudinali, nigra.

Scutellum cinereum.

Elytra pallida, immaculata.

Alae albae.

Pectus atrum, nitidum.

Abdomen atrum; ano ferrugineo.

Pedes pallidi; femoribus posticis macula nigra.

Habitat in regionibus Caucasicis.

Magnitudine C. testaceae.

---

13. Cantharis melanoptera.

C. thorace marginato, rufa, capitis basi elytrisque atris.

Caput rubrum; vertice atro.

Oculi atri.

Antennae nigrae, basi rubrae.

Thorax rufus, marginatus, immaculatus, nitidus.

Scutellum rufum.

Elytra atra, nitida, immaculata.

Alae nigrae.

Pectus, abdomen pedesque pallido rufa, immaculata.

Habitat in Livonia.

Magnitudine praecedentis.

---

14. Coccinella rufimana.

C. coleoptris atris: punctis rubris quatuor, capite, thoracis lateribus pedibusque anticis flavis.

Caput flavum, nitidum, glabrum, antice late emarginatum.

Oculi nigri.

Antennae flavae.

Thorax gibbus, glaber, nitidus, ater; lateribus macula magna, triangulari, flava.

Scutellum parvum, atrum, nitidum.

Elytra atra, nitida, subpubescentia; puncto altero disci maculari, altero apicis minuto, rubro.

Pectus et abdomen atra.

Pedes antici flavi, quatuor postici femoribus nigris; tibiis tarsisque flavis.

Habitat in Livonia.

Statura parva, magnetudine C. rufipedis.

---

15. Cocinella exclamationis.

C. cassidea, coleoptris atris: signis duobus exclamationis transversis, rubris.

Caput rubrum, marginatum, nitidum.

Oculi atri.

Antennae flavae.

Thorax angulis anticis productis, ater; disco nitido punctisque duobus impressis, lateribus opacis.

Scutellum minimum, atrum.

Elytra atra, nitida, glabra; linea disci transversa cuneiformi punctoque versus marginem rubris; late marginata; limbo punctato.

Corpus subtus atrum, opacum; abdomine supra rubro, subtus rufo marginato.

Pedes atri; geniculis tarsisque ferrugineis.

Habitat in Livoniae pinis.

Magnitudine C. arcticae, at coleoptris magis convexis.

---

16. Chrysomela humeralis.

C. viridi aenea, thorace elytrisque punctatis, ano ferrugineo.

Caput viridi aeneum, punctatum.

Oculi grisei,

Antennae longitudine thoracis; articulo primo magno viridi aeneo, glabro; sequentibus quatuor ferrugineis, glabris, ultimis nigris, pilosis.

Thorax planus, immarginatus, punctatus, viridi aeneus, transversus.

Scutellum parvum, aeneum, laeve.

Elytra marginata, punctata, viridi aenea; basi lineis nonnullis elevatis obscuris abbreviatis, humero elevatissimo.

Alae nigrae.

Corpus subtus pedesque viridi aenea, laevia, nitida.

Anus rufus.

Habitat in Livoniae alnis.

Statura magnitudineque C. lapponicae.

---

17. Cryptocephalus bicolor.

C. violaceus, elytris limbo flavo.

Caput violaceum, nitidum; ore flavo.

Oculi grisei.

Antennae corpore breviores, obscure violaceae; basi articulis tribus ferrugineis.

Thorax violaceus, nitidissimus, immaculatus.

Scutellum violaceum, nitidum.

Elytra punctato striata; striis obliquis novem; violacea; tenuissime violaceo marginata.

Pectus, abdomen pedesque violacea, immaculata.

Habitat in regionibus Caucasicis.

Variat elytris limbo basi abbreviato, punctisque nonnullis impressis limbi nigris. — Magnitudine C. flavifrontis.

---

18. Cryptocephalus rufimanus.

C. violaceus, ore, antennarum basi pedibusque anticis rufis.

Caput violaceum; fascia inter antennas rubra, labro violaceo.

Oculi atri.

Antennae longitudine corporis, pilosae, nigrae, basi rubrae.

Thorax violaceus, nitidus, laevis.

Scutellum, violaceum, laeve.

Elytra violacea, nitida, punctata; punctis nonnullis in strias singulares congestis.

Pectus et abdomen atra, nitida.

Pedes antici flavi; femoribus stria nigra; caeteri atri; femoribus basi paullo rufescentibus.

Habitat in Livoniae salicibus.

Magnitudine praecedentis.

---

19. Mimetes.

Character genericus:

Palpi quatuor inaequales; articulo ultimo majori; truncato.

Maxilla bifida: lacinia exteriori cornea, apice fissa.

Ligula membranacea, bifida.

Antennae setaceae.

Mimetes unicolor.

Corpus ovatum, elongatum, opacum, laeve.

Caput insertum, inflexum, fere rostratum, cyaneum, nitidum.

Oculi parvi, globosi, reticulati, laterales, nigri.

Antennae setaceae, thorace longiores; articulo secundo minimo; atrae.

Labrum quadratum, ciliatum.

Mandilulae corneae, exsertae, apice fissae.

Maxillae bifidae: lacinia exteriori cornea, lineari, apice fissa; interiori membranacea, integra, breviori, ciliata.

Palpi quatuor inaequales: anteriores articulo ultimo majori, compresso, triangulari; posteriores breves, articulo ultimo majori, cylindrico, truncato.

Ligula membranacea, bifida: laciniis divaricatis, rotundatis, pilosis.

Labium corneum, integrum, rotundatum.

Thorax ater, nitidus, antice capite multo latior, postice angustatus; lateribus rotundatis, margine postico elevato; late canaliculatus.

Scutellum parvum, rotundatum, atrum.

Elytra atra, opaca, rigida, fornicata, haud connata, abdomen tegentia, basi deflexa, thorace duplo latiora, ultra medium latitudine increscentia, apice rotundata, marginata, punctata; striis quatuor longitudinalibus subelevatis, humero prominente.

Alae magnae, diaphanae.

Corpus subtus atrum, opacum.

Pedes atri; tarsis quatuor anticis articulis quinque, primo elongato; posticis articulis quatuor, primo longissimo; unguibus duobus incurvis, simplicibus, rubris.

Habitat in Livoniae sorbi aucupariae floribus.

Genus habitu proximum Mylabridibus, species haec magnitudine Mylabridis decempunctatae. — Nomen generis μιμητής, simulator, capitis inflexi causa.

---

20. Stenodera.

Character genericus:

Palpi quatuor aequales; articulo ultimo majori, truncato.

Maxilla cornea, apice membranacea, pilosa.

Ligula membranacea, bifida.

Antennae setaceae.

Stenodera sexpunctata.

Corpus oblongum, immarginatum, laeve, subpubescens, tardum.

Caput magnum, depressum, rotundatum, exsertum, inflexum, punctatum, atrum, subtus pilosum.

Oculi magni, ovati, marginales, reticulati, atri.

Antennae setaceae, nigrae, ante oculos insertae, corpore breviores; articulo secundo minimo.

Labrum porrectum, corneum, ovale, atrum, ciliatum.

Mandibulae corneae, breves, intus membranaceae, extus pilosae.

Maxillae corneae, integrae; apice lamina membranacea geniculo trunco inserta, pilosa.

Palpi quatuor aequales; articulo ultimo majori, compresso, oblique truncato.

Ligula membranacea, bifida: laciniis elongatis, truncatis, pilosis.

Labium corneum, ovatum.

Thorax ater, nitidus, elongatus, antice angustatus, postice latior margineque elevato; puncto magno prope marginem posticum medio impresso.

Scutellum parvum, ovatum, atrum, opacum.

Elytra molliuscula, fornicata, immarginata; longitudine abdominis; haud connata, thorace duplo latiora, glabra, rubra; punctis duobus inaequalibus basi juxta positis, ultraque medium macula sinuosa nigris; subrugosa; lineis nonnullis obscuris longitudinalibus elevatis; humero elevato.

Aliae daphanae.

Pectus et abdomen nigra, sericea.

Pedes elongati, nigri, sericei; tarsis elongatis, quatuor anticis articulis quinque; posticis quadriarticulatis; unguibus duobus bifidis, rubris, incurvis.

Habitat in regionibus Causcasicis.

Genus inter Lyttam et Mylabridem *Fabr.*; species haec magnitudine Lyttae erythrocephalae. — Nomen stenodera a στενός, angustus, et δέρη, cervix.

---

21. Mordella flavifrons.

M. ano inermi, atra, antennarum basi, ore pedibusque anticis ferrugineis.

Caput atrum, nitidum; ore palpisque ferrugineis.

Oculi atri.

Antennae pilosae, atrae; basi articulis tribus ferrugineis glabris.

Thorax, scutellum elytraque atra, nitida, immaculata.

Alae nigrae.

Pedes antici ferruginei, caeteri atri; spinis tibiarum flavis.

Anus inermis.

Habitat in Livoniae sorbi aucupariae floribus.

Magnitudine M. thoracicae.

---

22. Mordella punctata.

M. ano inermi, nigra, ore thoraceque ferrugineo: puncto nigro.

Caput nigrum; ore palpisque ferrugineis.

Oculi atri.

Antennae pilosae, nigrae, basi flavae.

Thorax ferrugineus; puncto medio nigro.

Scutellum elytraque nigra, immaculata, opaca.

Alae nigrae.

Pectus et abdomen nigra, nitida.

Pedes quatuor antici flavi; geniculis nigris: postici nigri; geniculis tibiarumque spinis ferrugineis.

Anus inermis.

Habitat in regionibus Caucasicis.

Magnitudine praecedentis.

---

23. Anthypna.

Character genericus:

Palpi filiformes.

Maxilla bifida, apice setosa.

Mandibula cornea.

Ligula membranacea, bifida.

Labium tridentatum.

Antennae clavato lamellatae: clava orbuculata.

Huic novo generi sequentes melolonthae *Fabr.* species, corpore hirto, elytris angustis, planis, apice divaricatis clavaque antennarum orbiculata differentes, adnumero:

a) *Anthypna ursus.*

Melolontha ursus. *Fabr.* syst. eleuth. 2. 184. 140.

Trichius. illiger. Magaz. 4. 84. 140.

b) *Anthypna bombyliformis.*

Mololontha bombyliformis. *Fabric.* syst. eleuth. 2. p. 184. 141.

M. crinita. Herbst. Col. 3. tab. 25. fig. 14.

Trichius. illig. Mag. 4. 84. 141.

c) *Anthypna arctos.*

Melolontha arctos. Herbst. Col. 3. tab. 25. fig. 11.

d) *Anthypna lynx.*

Melolontha lynx. *Fabr.* syst. eleut. 2. p. 184. 142.

Trichius. illig. Mag. 4. 84. 142.

e) *Anthypna crinita.*

Melolontha crinita. *Fabr.* syst eleut. 2. p. 184. 143.

Trichius. illig. Mag. 4. 84. 143.

f) *Anthypna cyanipennis.*

Melolontha cyanipennis. *Fabr.* syst. eleuth. 2. 184. 144.

g) *Anthypna hirta.*

Melolontha hirta. *Fabr.* syst. eleuth. 2. 185. 145.

Trichius. illig. Mag. 4. 85. 145.

h) *Anthypna vulpes.*

Melolontha vulpes. *Fabr.* syst. eleut. 2. p. 185. 146.

Corpus elongatum, hirtum, immarginatum.

Caput breve; clypeo quadrato, marginato.

Oculi globosi, laterales, magni.

Antennae longitudine capitis, clavato lamellatae; clava orbiculata.

Labrum membranaceum, clypeo tectum, integrum.

Mandibulae corneae, breves, compressae, acutae, intus membranaceae, extus barbatae.

Maxillae corneae, bifidae; lacinia externa geniculata, pilosa.

Palpi quatuor filiformes, subaequales; articulo ultimo majori, ovato, subtruncato; posteriores hirti, elongati.

Ligula membranacea, labii apici inserta, bifida: laciniis elongatis, divaricatis, pilosis.

Labium corneum, tridentatum.

Thorax transversus, marginatus.

Scutellum latum, breve, rotundatum.

Elytra fere plana, marginata, abdomine breviora, apice divaricata.

Alae magnae.

Pectus sterno nullo.

Pedes elongati; tarsis omnibus quinquearticulatis, articulis omnibus elongatis, filiformibus; unguibus duobus paullo incurvis.

Anthypnae organa cibaria a melolontha valde differunt, trichio autem multis in partibus conveniunt, qua de causa hic quoque ad comparationem trichii instrumenta cibaria, ab anthypna differentia, exposui:

Mandibulae membranaceae, angustae, rectae, clypeo breviores.

Ligula cornea, labio subtus adnata, bifida: laciniis crassis, triquetris, medio fossa ad maxillae receptionem magna.

Labium corneum, elongatum, apice emarginatum.

Anthypna ab ἄνθος, flos, et ὑπνόω, dormio, quia in floribus (anthypna bombyliformis in tulipa gesneriana) pernoctare solent.

---

24. Anticheira.

Character genericus:

Maxilla cornea, tridentata: dente primo integro, secundo bifido, tertio trifido.

Labrum corneum, tridentatum, clypeo tectum.

Antennae clavato lamellatae.

Pertinent ad hoc genus sequentes Cetoniae *Fabric.* species, clypeo rotundato, scutello magno, elytris coriaceis, apice tubere nullo, sterno lato incurvato, pedumque anticorum ungue interno lato, bifido notatae:

a) *Anticheira tetradactyla.*
Cetonia tetradactyla. *Fabr.* syst. eleut. 2. p. 151. 80.
Melolontha tetradact. Herbst. Col. 3. tab. 27. fig. 1.

b) *Anticheira bicolor.*
Melolontha bicolor. Herbst. Col. 3. tab. 26. fig. 4.
(Melol. bicolor. *Fabr.* syst. eleut. 2. 166. 33. ?)

c) *Anticheira smaragdula.*
Cetonia smaragdula. *Fabr.* syst. eleut. 2. p. 143. 44.
Melolontha virens. Herbst. Col. 3. tab. 27. fig. 2.
Cetonia smaragdula. Herbst. Col. 3. 265. 62. ?

d) *Anticheira fucata.*
Cetonia fucata. *Fab.* syst. eleut. 2. 151. 82.
C. cincta. Herbst. Col. 3. tab. 31. fig. 5.

e) *Anticheira clavata.*
Cetonia clavata. *Fabr.* syst. eleut. 2. 151. 81. ?

f) *Anticheira* chrysis.
Cetonia chrysis. *Fab.* syst. eleut. 2. 140. 28.
Melolontha chrysis. Herbst. Col. 3. tab. 26. fig. 6.

g) *Anticheira virens.*
Cetonia virens. *Fab.* syst. eleut. 2. 141. 29.

h) *Anticheira splendida.*
Cetonia splendida. *Fabr.* syst. eleut 2. 141. 30.

Melolontha splendida. Herbst. Col. 3. tab. 26. fig. 7.

i) Anticheira lucida.

Cetonia lucida. *Fabr.* syst. eleut. 2. 141. 31.

Corpus ovatum, supra glabrum, subtus plerumque pilosum, immarginatum, tardum.

Caput rotundatum, fere exsertum; clypeo rotundato, marginato.

Oculi globosi, laterales.

Antennae distantes, clypeo subtus ad mandibulae insertionem insertae; longitudine capitis clava oblonga, elongata.

Labrum corneum, sub capitis clypeum reconditum, tridentatum: dentibus paullo prominentibus.

Mandibulae corneae, crassae, compressae, intus unidentatae; extus margine crenato, reflexo.

Maxillae corneae, crassae, tridentatae; dentibus acuminatis; primo magno, integro, secundo bifido, tertio trifido.

Palpi quatuor subaequales: articulo ultimo majori, ovato, obtuso.

Ligula membranacea, labio subtus adnata, triangularis, bifida: laciniis divaricatis, pilosis.

Labium corneum, lateribus ante apicem, apiceque emarginatum.

Thorax transversus; angulis anticis deflexis, porrectis, antice lateribusque marginatis.

Scutellum magnum, triangulare, nonnullis in speciebus elytris dimidio brevius.

Elytra lata, coriacea, fornicata, abdomine breviora; margine integro (non infra humerum ut in Cetonia aurata etc. emarginato), apice tubere fossaque media nullis.

Alae magnae.

Pectus sterno magno, depresso, elongato, triangulari, incurvo; pectoris latera non (ut in Cetoniis propriis) inter thoracem et elytra supra producta.

Pedes femoribus quatuor posticis complanatis; tibiis anticis dentatis, posticis spinosis; tarsis anticis ungue interno lato, compresso, bifido: lacinia exteriori acuminata, interiori compressa, truncata; tarsis quatuor posticis ungue externo elongato, ab altero deorsum remoto. — Articulo ultimo tarsi antici spinoso, pedes antici tetradactyli apparent.

Ad meliorem Anticheirae generis distinctionem ab Melolontha (cum Cetonia nunquam permutare potest) instrumenta cibaria Melolonthae, ab Anticheira differentia, exponere volo:

Labrum membranaceum, clypei apici insertum, inflexum, bifidum, subtus medio inter mandibulas productum.

Mandibulae corneae, crassae, triangulares, intus subdentatae, extus edentulae.

Maxillae breves, corneae, apice truncatae, multidentatae; dentibus brevibus, simplicibus, acutis.

Anticheira ab *ἀντίχειρ*, pollex.

---

25. Elater depressus.

E. linearis, niger, thorace margine ferrugineo, elytris testaceis: sutura nigra.

Caput atrum, nitidum; palpis testaceis.

Oculi nigri.

Antennae testaceae.

Thorax depressus, niger; margine ferrugineo.

Scutellum parvum, nigrum.

Elytra linearia, punctato-striata; striis octo pubescentia, testacea; sutura margineque abbreviata nigra.

Corpus subtus nigrum, nitidum; ano testaceo.

Pedes testacei.

Habitat in Livoniae betulis.

Simillimus E. *pusillo*, at corpore lineari thoraceque depresso, ferrugineo marginato distinctus.

---

26. Elater flavescens.

E. pallidus, thorace ferrugineo, elytris testaceis.

Caput ferrugineum, glabrum; clypeo truncato, margine elevato, puncto magno triangulari medio impresso.

Oculi atri.

Antennae fuscae, pilosae; articulo primo ferrugineo.

Thorax ferrugineus, nitidus, elongatus, complanatus, subpunctatus; margine antico ciliato.

Scutellum parvum, testaceum, pubescens.

Elytra testacea, pubescentia, punctato striata; striis novem.

Pectus glabrum, nitidum, ferrugineum.

Abdomen pedesque pallida.

Habitat in regionibus Caucasicis.

Affinis videtur E. ferrugineo, at corpore minori, thorace depresso elongato satis distinctus.

---

27. Elater atripennis.

E. ater, thorace convexo, aeneo, elytris crenatis, pedibus rufis.

Caput aeneum, nitidum, convexum.

Oculi atri.

Antennae longitudine thoracis, atrae.

Thorax convexus, aeneus, nitidus, subtomentosus, laevis.

Scutellum parvum, atrum, concavum.

Elytra atra, subpubescentia, crenato striata; striis e punctis excavatis novem.

Pectus et abdomen atra, opaca.

Pedes rufi; tarsis testaceis.

Habitat in regionibus Caucasicis.

Differt ab E. rufipede, cui affinis videtur, corpore oblongo, thorace convexo, aeneo, elytris crenato striatis, antennis atris et magnitudine E. pusillum aequante.

---

28. Cerambyx acanthopterus.

C. thorace elytrisque bispinosis, flavus, elytris costatis.

Caput flavum, punctatum; vertice lineaque inter antennas scabris, ferrugineis, dentibus duobus elevatis, acutis inter antennas, duobusque aliis ad insertionem mandibularum productis, ferrugineis; punctis duobus magnis ante antennas impressis; mandibulis apice atris.

Oculi magni, atri, aureo nitentes, versus antennas late excavati.

Antennae corpore longiores, piceae; articulo primo majori, flavo, glabro, tereti, scabro, secundo minimo, rotundato, piceo, punctato, glabro, caeteris angulatis, elongatis, piceis, scabris, tertio, quarto quintoque pilosis.

Thorax flavus, scaber, utrinque spinis duabus obtusis, scabris, ferrugineis; posteriore majore; tuberculis utrinque duobus elevatis, scabris ferrugineis; medio carina elevata scabra, ferruginea.

Scutellum cordatum, flavum.

Elytra flava, subrugosa, marginata; costis tribus longitudinalibus elevatis concoloribus laevibus, marginibus spinisque duabus apicis brunneis, acuminatis; exteriore longiore; sutura elevata.

Pectus ferrugineum, sericeum.

Abdomen pallidum, glabrum, nitidum.

Pedes testacei, glabri; femoribus quatuor posticis ad articulationem bispinosis, tibiis pubescentibus.

Habitat Surinami. Mus. rer. natur. Univ. Caes. Dorpat.

Affinis certe C. bicorni, differt tamen antennis piceis, capite quadridentato, thoracis spina posteriori majori, praecipue elytris bispinosis, immaculatis, abdomine pallido et pedibus omnibus testaceis.

---

29. Saperda pectoralis.

S. violacea, scutello striisque duabus lateralibus pectoris niveis.

Caput violaceum, punctatum; labro piloso.

Oculi atri.

Antennae corpore longiores, nigrae; articulo primo violaceo.

Thorax violaceus, tenerrime punctatus, glaber, subtus ad pedes anticos albo maculatus.

Scutellum niveum, opacum.

Elytra violacea, cyaneo nitida, dense punctata, glabra, apice ciliata.

Pectus violaceum, punctatum, glabrum; lineis duabus lateralibus longitudinalibus niveis, opacis.

Abdomen violaceum, nitidum, glabrum; ano villoso.

Pedes atri, opaci; tibiis tarsisque pilosis.

Habitat in regionibus Caucasicis. Mus. rer. natur. Univ. Caes. Dorpat.

Affinis S. violaceae, at minor et distincta, signis caeteris exceptis, corpore fere toto glabro.

---

30. Callidium venosum.

C. thorace plano, inermi, elytris rugosis, viridi aeneis, antennis ferrugineis.

Caput cupreum, punctatum, canaliculatum.

Oculi atri.

Antennae corpore breviores, pilosae, ferrugineae; articulis apice nigris.

Thorax planus, cordatus, antice posticeque marginatus, medio cupreus, laevis, lateribus et subtus scaber, viridi aeneus.

Scutellum viridi aeneum punctatum.

Elytra viridi aenea, plana, punctata; lineis duabus longitudinalibus rugisque transversis cum lineis coëuntibus elevatis.

Pectus, abdomen pedesque picea; femoribus compresso clavatis.

Habitat in Livoniae pinis.

Magnitudine C. violacei.

PLANTARUM NOVARUM AUT MINUS COGNITARUM PENTAS PRIMA.

AUCTORE

C. B. TRINIUS.

Conventui exhibuit die 15 Febr. 1815.

Quod si Botanicorum ii, quibus terras australes et minus cognitas adire concessum, novis indies copiis ditati, scientiae ambitum recens detectis plantarum speciebus amplificare et splendidioribus artis operibus exornare facile possunt; nobis, ad hoc hiemale coelum relegatis, quibus neque natura magnam florum abundantiam submittit, nec horti Kewenses largas suas opes explicant, praeter diligentem herbariorum nostrorum usum nihil fere relictum est, in quo studium sese nostrum exerceat et experientia qualicunque edoceatur. Qua ratione parum plerumque ab homine privato praestari potest, nisi si cui, praeter domesticas copiolas aditus ad Musea publica et Academiarum uberiores collectiones feliciori quadam sorte reclusus fuerit. Itaque nihil profecto exoptatius mihi contingere potuit, quam quod ill. Scient. Academ. Petropolitana veniam benigne concessit inspiciendi et usurpandi, quae variis per orbem Ruthenicum institutis itineribus a celeberrimis naturae scrutatoribus reportata quondam et collecta possidet, locupletissima herbaria. Jam etsi dolendum omnino est etiam circa eximias has collectiones probari de novo tristissimam illam experientiam, qua, ut fieri solet, quo quid est in suo genere praestantius, eo hac ipsa praestantia, plures omnis modi hostes, ad perdendum paratos allici et, quasi agmine facto, undique irrumpere animadvertimus; equidem tamen inter ea, quibus aut tempus edax, aut rapacitas voracissimorum in hoc genere furum paulo clementius pepercit, non pauca nova et cognitu digna deprehendisse mihi videor, quibus deinceps edendis humanissimo ill. Academiae consilio satisfacere conabor.

Inspectis itaque pluribus, Imperii Ruthenici et imprimis Siberiae indigenarum, plantarum fasciculis, ex variis Botanicorum nostrorum operibus jam satis cognitarum, et ad eos perveni, qui ex itinere infelicis Gmelini junioris inter alios bene multos asservati, prae ceteris digni nobis visi sunt, qui diligenter excutiantur. Etsi enim haec Gmelini farrago, parum accurate, plantas cultas et sponte crescentes, praecipue in provincia Gilanensi lectas, inter sese confundat, nec locus natalis pluribus rite sit adscriptus, nec Ptinus atrox vel illis satis pepercerit ita, ut et color et forma raro integra illis manserit, auctor denique nomina plerumque iis obtruserit mira sane et maxime singularia; tamen plures ex iis expedivisse mihi videor, quas, tamquam novas aut saltem non satis cognitas, per singulas *Pentades* una cum illis editurus sum, quas in proprio eoque satis amplo herbario pro novis agnoscendas esse intellexi.

1. *Bromus tomentosus.* Tab. IX.

B. panicula erecta, spiculis lanceolatis subcompressis glabris, aristis gluma brevioribus, culmo foliisque strictis mollissime tomentosis

Habitat in Provincia Gilan. Perennis.

Radix repens.

Culmi pedales aut sesquipedales, adscendentes, teretes, striato, tomento albo vestiti, inferneque geniculis aliquot intercepti.

Folia in culmis junioribus approximata, alterna, linearia, patentia, crassa, subpungentia, striata, lanugine mollissima undique tecta.

Vaginae teretes, striatae, aeque lanuginosae,

Ligula brevis, lacinulata, glabra.

Panicula palmaris, erecta, contracta, pauciflora.

Rachis inter ramos inferiores paniculae tomentosa, superius scabra, teretiuscula, striata, parum flexuosa, Rami simplices, flexuosi, erecti, scabri.

Spiculae flavescentes, lanceolatae, subcompressae, 6—9 florae, flosculis imbricatis.

Glumae calycinae lanceolatae, compressae, glabrae, inaequales: majori acutiuscula nervis tribus, minori acuta nervo unico notata.

Gluma corollina exterior elliptico-lanceolata, glabra, superne margine membranacea, nervis tribus hispidiusculis percussa, sub apice bifido arista recta gluma triplo breviori terminata; Gluma interior exteriorem aequans, paulo angustior, apice bifida, ad flexurae angulos ciliata.

Axis scaber, truncatus.

Germen hirsutum.

Explicatio Tabulae IX.

a) spicula integra *m. n.*

b) calyx *m. n.*

c) corollae gluma exterior *a.*

d) corollae gluma interior *a.*

e) Pistillum *a.*

Tab. X. 2. *Aristida pennata.*

A. panicula erecta ramosa, foliis filiformibus longissimis, aristis aequalibus plumosis.

Patriam ignoro. Inter plantas praesertim Dauricas *b.* Pallasii absque nomine locique natalis indicio inveni. Perennis.

Radix in arena late repens videtur.

Culmi bipedales, conferti, erecti, geniculati, superne ramosi, teretes, glabri, ad imum usque foliorum vaginis tecti.

Folia alterna, patentia, convoluto-filiformia, longissima, incurva, retrorsum scabra, glaucescentia.

Vaginae teretes, striatae, scabriusculae.

Ligula brevissima, truncata, villis brevibus dense barbata.

Panicula longa, ramosissima, erecta, ante anthesin contracta.

Rachis angulosa, leviuscula, striata.

Rami tenues, elongati, divisi, subflexuosi, scabri.

Spiculae compressae, lineares, glaberrimae, uniflorae.

Calyx aristas subaequans: glumis lanceolatis in acumen longum attenuatis, glaberrimis, inaequalibus; exteriori nervis quinque, interiori paulo minori nervis tribus leviter notata.

Gluma corollina calyce multo brevior, linearis, glabra, convoluta, basi fasciculo pilorum brevissimo stipata.

Aristae 3. terminales, patentes, subaequales; plumosae, corolla quadruplo longiores, calycem vix superantes.

Obs. Panicula omnino *Aristidae pungentis* Desf. (Fl. Atlant. T. 35.). Ceterum gramen nostrum foliis longissimis filiformibus flaccidis abunde diversum.

Explicatio Tabulae X.

Icon graminis, quale in herbario asservatur, paniculam exhibet nutantem. Haec autem conversio ratione magnitudinis plagulae, in qua siccandum reposuit inventor, specimini data esse videtur; adfuerunt enim et culmi breviores, panicula instructi erecta, quorum unum figurae addi curavimus apud *α*.

a) spicula *m. n.*
b) glumae calycinae *m. n.*
c) corolla integra *m. n.*
d) eadem absque aristis *a.*
e) insertio aristarum, earumque una *a.*

Tab XI. 3. *Crucianella stylosa.*

C. procumbens, capitulis terminalibus pedunculatis, floribus quinquefidis pentandris, foliis subnonis lanceolatis cauleque hispidis.

Habitat inter saxa montium Sanamisicorum; floret Julio. Perennis.

Radix brevis horizontalis, lignosa, fibris brevibus ramosa.

Caulis dodrantalis, pedalis et ultra, procumbens, infra nudus atque ex nodis lignosis fibras emittens tenues radicantes, sulcato tetragonus, angulis aculeis brevissimis rarisque sursum hispidus, simplex, rarius ramosus: ramis oppositis patentibus.

Foliorum verticilli remoti; inferioribus brevioribus reflexis; compositi foliis *infra* senis, *superne* plerumque nonis, lanceolatis, aut ovato-lanceolatis, mucronatis, margine revoluto carinaque aculeato-hispidis.

Pedunculus ex summo verticillo pollicaris, interdum palmaris, rectus.

Flores in capitulo terminali hemisphaerico plurimi, ?luridi, bracteis suffulti, exterioribus perianthium commune mentientibus, ad basin singuli, flosculi singules lineari-lanceolatis, acuminatis, margine aculeis longiusculis rarisque ciliatis.

Corollae infundibuliformis tubus quam in congeneribus longior, filiformis, limbum versus paulo dilatatus. Limbus quinquefidus, patens: laciniis brevibus lineari-lanceolatis angustis, obtusiusculis nec unguiculatis.

Stamina 5. fauci corollae adnata.

Stylus — ? ante foecundationem tubo brevior, ea peracta — corolla duplo fere longior.

Stigma clavatum, rugulosum, bicorne; sub foecundatione apicibus callosis patentissimum, ante et post eam clausum.

Obs. 1. Hanc ex Rubiacearum familia plantam elegantissimam a Gmelino *Laxmannia fasciculata* dictam in ejus hereditate botanica saepius videre mihi contigit; specimen majus, idque ramosum delineari curavi; sed ob analogiam plantae nostrae cum Crucianellis maximam ab harum tribu eam dissociare non ausus sum, etsi staminum numerus, ceteroquin in pluribus Crucianellae speciebus quinus, limbusque non unguiculatus sejunctionem suadere videantur.

Obs. 2. Cum *Cr. capitata* Bill. (Pl. Syr. Dec. 1. T. 3.) a qua foliorum numero, altitudine caulis, florumque colore, ut cetera taceam, satis differt, confundi non poterit.

Explicatio Tabulae XI.

a) flos *m. n.*

b) ejusdem faux aperta *a.*

c) stamen *a*.

d) stigma clausum *a*.

e) idem hians *a*.

f) germen *a*.

g) tubi basis bractea munita *a*.

4. *Crucianella Gilanica*. Tab. XII.

C. procumbens, foliis quaternis lineari-lanceolatis scabris, floribus remote spicatis, bracteis ovatis subciliatis.

Habitat in montibus Sanamisicis et Gambu dictis. Perennis.

Radix tenuis, fibris ad nodulos lignosos parvis repens.

Caules spithamei, pedales, et ultra, geniculati, infra et imum versus nudi, subtetragoni, levissime striati, glabri, basi ramulos foliiferos, superne ramum unum alterumve floriferum emittentes.

Folia in medio caule congesta, quaterna, linearia aut lineari-lanceolata, acuta, patentissima, saepe reflexa, margine inflexa, facie punctis prominentibus scabra, glaucescentia.

Flores in spica racemiformi plerumque simplici, subinde composita remotiusculi, oppositi, divergentes.

Bracteae ad florem singulum ternae, quarum extima paulo major, ovatae aut ovato-lanceolatae, acutae, tubi basin obvolventes, margine pilis brevissimis ciliatae.

Corollae tubus satis longus; extrorsum incurvus, pallidus; limbus atrorubens quiquefidus: laciniis linearibus unguiculatis patentissimis.

Stamina quatuor, fauci corollae inserta.

Stylus tubo brevior.

Obs. a *Cr. ciliata* Lam. cui proxima, bractearum forma earumque margine vix evidenter ciliato, sicut et florum magnitudine distinguitur.

Explicatio Tabulae XII.

a) flos *m. n.*

b) bracteae ad basin tubi *a.*

c) germen *a.*

d) tubi faux aperta cum genitalibus *a.*

Tab. XIII. 5. *Achillea vermicularis.*

A. foliis semiteretibus tomentosis glaucis, pinnis oblongis spinoso-dentatis imbricatis, corymbo simplici.

? A. *teretifolia*, foliis pinnatis teretibus cano-pubescentibus, pinnis transversis truncatis dentatis dense imbricatis, corymbo simplici. Willd. sp. pl. Tom. III. p. 2198.

Habitat in Provincia Gilan. Perennis.

Radix lignosa, subfusiformis, multiceps.

Caules plurimi, fasciculati, pedales, erecti, teretes, tomento albido tecti, simplicissimi.

Folia vix pollicaria, linearia, apice paulo latiora, obtusa, pinnata: pinnis minimis (inferiorum distinctis marginalibus; superiorum serraturam argutam mentientibus, faciem lateraque arcte obtegentibus) oblongis, sub lente spinoso-dentatis, tomento albo intertextis. — Ex horum alis fasciculi sessiles aut petiolati foliorum semipollicarium, ob pinnas arcte imbricatas semiteretium.

Corymbus terminalis, simplicissimus, pauciflorus.

Flores magnitudine florum *A. Ptarmicae*, ochroleuci.

Calyx imbricatus squamis ovato-lanceolatis carinatis, margine ciliatis.

Flores radii circiter 7. lacinia reflexa, emarginata; disci plurimi saturatiores.

Receptaculi paleae lanceolatae, pilosiusculae, longitudine flosculorum.

Obs. Ob. cl. Willdenowii descriptionem mihi non satis planam *Achilleae* suae *teretifoliae*, cujus pinnas apice truncatas dicit, nostram, pinnis oblongis acutis instructam, cum planta ejus conjungere non audeo, usque dum specimen herbarii viri clarissimi cum icone nostra comparari poterit.

Explicatio Tabulae XIII.

a) flos *m. n.*

b) squama calycina *a.*

c) et *d.* flosculi radii *a.*

e) flos disci *a.*

f) palea *a.*

g) pars folii inferior a tergo visa *a.*

h) facies partis folii pinnis obtecta *a.*

DE PISCATU VOLGENSI.

AUCTORE

N. OZERETSKOVSKY.

Conventui exhibuit die 22 Mart. 1815.

Piscatum Volgensem descripturus operae pretium duxi statim a limine de piscibus ipsis aliquid praefari; quorum cognitionem cum magis ad vulgi judicium habeam accomodatam; ideo neque ea momenta hic proferre possum, quae historicus naturalis, ichthyologus praecipue, in hac re praestitisset. Itaque primum simpliciter numerabo per nomina pisces, quos Volga alit, dein divisionem, quam vulgus format, monstrabo, tempusque, quo cujusque celebrioris major copia capitur, declarabo, post haec jam reliqua omnia suo ordine procedent.

Aquis Volgensibus circa Astrachaniam ducuntur pisces sequentes: белуга, осетръ, севрюга, сомъ, стерлядь, сазанъ, бѣлая рыбица, лосось (rarissime haec species occurrit), щука, бершъ, судакъ, ясь, лещъ, подлѣщикъ, карась, линь, окунь, головль, красноперка, тарань, ершъ, бѣшеная, сабля, усачъ, вобла, жерехъ, чоня, сельдь.

Omnes hos in tres classes dividunt vulgo: *prima* appellatur *красная рыба* (rubra), quo refertur *бѣлуга, осетръ, севрюга, сомъ* et *стерлядь*. *Secunda чистяковая* (depurganda, nimirum desquamanda); sub hoc nomine veniunt, *сазанъ, бѣлая рыбица, лосось, щука, бершъ, судакъ*. Tertia audit *мѣлочная* (usualis sive parva), ad quam reliqui ut ignobiles vilioresque relegantur.

Чистяковая et *мѣлочная* quolibet anni tempore in fluviis aut lacubus obvii sunt, et nunquam non capiuntur, exceptis ex eo numero tantum duobus, sc. *бѣлая рыбица* et *бѣшеная*, tatarice *Mai Balyk* (pinguis piscis). Prior non nisi hiberno tempore in Volga glacie probe obducta Januario maxime hamis extrahitur. Posterior plena tantum aquarum turgentium et turbidarum inundatione sub oculos venit, qui cum saepissime ex iisdem in altum prosiliat, appellatus est *бѣшеная*, quod latine furentem designat. Ejus tunc temporis tanta multitudo conspicitur, ut pueri Astrachanenses in pontibus stantes unculis extremitati baculi elongati infixis pro unaquaque fere mersione piscem corripiant extrahantque. A Tataris is comeditur, a Rossis minime.

Красная рыба certum emigrationis, quae apud piscatores dicitur *ходъ рыбѣ*, tempus agnoscit. Glacie in Volga solutâ, quod sub finem Februarii vel initio Martii accidere solet, statim *Beluga* ex mari Caspio ultro in Volgam passim abit. Hanc duabus circiter hebdomadibus praeterlapsis sequitur *севрюга*, perque integrum mensis spatium maxima in copia capitur, nominanturque eo tempore ambae hac species *бѣлякъ*; tempus vero ipsum audit *ходъ бѣляку*. Circa medium Aprilis majori ex parte jam graditur *осетръ*, concomitante *стерлядь*; aquis tempore inundationis subsidentibus, iterum *осетръ* et *севрюга*, *бѣлуга* vero tum rarius, et si quando occurrit, nominatur tunc *ходовая*, (errans, seu migrans), multis gregibus versus mare retro tendit, ut vulgus dicit. Quo tempore piscis appellatur *локатная* (*volvens sese*). *Севрюга* vero dein *жаркая* (calida) audit, quae diebus jam calidis sub finem Julii et circa medium Augusti capitur; initio autumni iterum ad tempus frigoris, ut loquuntur, emigrat. Dum vero frigore aquae rigere incipiunt, *осетръ* cum *севрюга* occultatur, Beluga vero remanet, quaerens sibi loca propter hiemandum, ut loquuntur, profunda, quae maxime ad concursum duorum vel trium fluviorum solent fieri. Omnes hae tres species unà sub oculos veniunt natantque in aquis Volgae. Circa loca ejusmodi natans *бѣлуга* dicitur *на ямы ложится* (in foveas deponitur), quae loca versus mare tantum observantur. Celebriora ex illis sunt: *таганская*, *угаринская*, *кумузяцская*, *колоевертная* et *кольская*.

Quomodo ex his locis *Belugae* extrahantur, suo loco a me describetur.

Autumnales pisces vernalibus ejusdem speciei pinguiores sunt, vernales vero aestivalibus postponuntur. Aestivo tempore occurrentes plerumque absque ovis (икра) capiuntur, unde dicuntur *ялавая* vel *холостая* (coelebs); vere vero autumnoque majori ex parte cum ovis, unde audiunt *икряная*.

Magnitudo piscium varia et diversa observatur. *Beluga* non excedit ultra 25 spithamas Rossicas; unicum tantum mihi casum narrabant, quo piscator Belugam autumno 33 spithamarum longam ad ostium *Busan* extraxit; infra vero 4 spithamas non descendit. Ordinarie capitur 7, 8, 9, 10 ad 12 spithamas longa.

Осетръ, jam maximus, non attingit plus quam 9 spithamas, minor vero 3 spithmarum, dictus *голбышъ*, non extrahitur; usitatoque 5, 6 et 7 spithamis longus irretitur.

Севрюга mensurae maximae 8 spithamarum, minimae 3, ordinariae 5 et 6, in Volga capitur.

Reliquarum piscium certa magnitudo determinari a paucis potest, cum eorum numerus magis quam magnitudo in venditione aut piscatione spectetur.

Ex varia Belugae magnitudine varia iterum ejus denominatio oritur: quae 12 tantum spithamas attingit, appellatur *мѣрная*, infra hanc mensuram descendens, *полумѣрная*, hac inferior, *салковая* dicitur; a 13 ad 15, 16 spithamas *урмоидная*, a 16 ad 18 *полуматерая*, quae ultra, *матерая* audit. *Горбуша* 13 spith. *хлапуша* ad 8. Caput habet, magnum corpus tenue prolongatum; est valde vorax, quodcunque obvium in Volga degluciens; et hoc tantum valet de Beluga: in reliqvarum mensuratione hae appellationes non habent locum.

Mensura magni momenti est apud piscatores atque eorum herum (хозяинъ), nam uterque ex ea praetium piscibus sumit, licet nonnunquam heri ad trutinam pisces aliis, quanti singulis *pud* contraxerint, vendant. Mensurantur pisces a dimidio oculi ad extremum pinnarum ani. Belugae debita mensura aestimatur 12 spitham. *осетру* 6 spitham. *севрюгѣ* debita mensura non statuitur; piscis, qui debitam dimensionem non attingit, vocatur *недомѣрокъ*; quare pro eodem praetio duo ejusmodi loco unius, mensuram debitam non adimplentis, dantur.

Sed hoc totum pendet a contractu herili cum piscatoribus, a quibus saepius piscium spectatur numerus, non mensura consideratur. De his fusius alio loco agetur.

Instrumentorum, quibus in Volga piscibus insidiantur, tria sunt genera: *sepimenta*; *hami* seu *unci*, et *retia*.

Sepimentum duplex est: unum audit *забойка*, alterum *перебойка*, aliter *колóва*: hamorum s. uncorum sunt *снасти*, *удочки*, *лучкѝ*, et *самолóвье*: retium *погоняй*, *неводъ*, *сѣтки*, *сенчатки*, *солокуша*, *поѣздуха* et *ахань*. De singulis his nunc sigillatim.

Забойка conficitur sequenti modo: primo figuntur transversum fluvii pali, unus ab alio in dimidium аршинъ remoti; ubi aqua strenua est, modo arcuato et flexuoso, ita ut tota eorum series ritu serpentis ad extremitates usque decurrat; ubi placide aquae manent, ordine recto porriguntur. Palis his sic consertis, ab adverso fluminis cursu carceres, quos *избы* appellant, ex palis pariter crassis etiam per inflexionem extruuntur, ad figuram exovato-cordatam efformati, a seque invicem in 3 circiter orgyias discedentes, quod spatium ab uno carcere ad alium *поле* audit. In introitu carceris patente, quem sinum rectius apello, pali laxius figuntur, ut si *матерая* introiverit, ejus magnitudini cedere possint. Palorum omnium intercapedo obturata est continuis sepibus baculatis, vimine tribus in locis transversaliter vinctis, quae ne a palis disjungantur, cum laqueis supra et infra demittuntur. Carcerum pro spatio fluvii numerus varius est: alicubi 13, inde 10 et 11 aedificantur. Medius audit *матерая изба* propterea, quod ex eo, ut pote medium aquae cursum excipiente, plerumque Beluga *materaja* extrahi soleat.

Sepes interstitia palorum sepimenti et carceris obturant; dum piscis, ultra sese in aquis promovens, ostium carceris ingreditur, tum vel dextrorsum, vel sinistrorsum in sinum ejus descendit, qui cum sit angustus, ita ut retro ipsi ad ostium converti aut inflecti non permittat, cogitur exinde in tali statu manere, qualem latera vel ipse carceris sinus impertit. Modus iste capiendi pisces in Volga quatvor tantum locis, quae Uczugi nominantur, mare versus celebris est: de quibus suo loco agemus.

Ex diversis officiis diversis quoque nominibus operarii insigniuntur. Primus est *багорщикъ*: hic bis de die, mane et vespere debet *zabojkas* lustrare, an quid piscium detur; scrutatur autem unco magno acutissimo. Huic subjecti sunt duo *подбагорщики*, quorum munus est stare in navigio ad ostia carceris cum uncis parvo manubrio infixis, et malleis ligneis sive clavis, quas *текуша* appellant, et si quem piscem *багорщикъ* ex puppi pendens extraxerit, mox eum uncis ad cymbam corripere et *текуша* frontem percutere, atque sic captum ad *учугъ* deponere. Reliquorum operariorum, qui sunt *солильщикъ*, *икря-*

никъ, *клесвщикъ*, *сборщикъ*, *рѣзальщикъ*, munera, alio loco exponentur.

Bis singulis annis *zabojka* reficienda est, primo statim vere, et initio autumni, nonnunquam etiam tertia vice sc. post inundationem. Reficiuntur autem non ex integro, sed tantum iis locis, quae ab aquis corrupta sunt. Sicubi palus e radicibus evulsus est, novus infigitur; ubi sepes adeo jam rimosae evadent, novis resarciuntur. Antequam reficiantur *zaboikae*, aquambulorum, qui de industria duo in uczugis aluntur, munus est mergi in fundum, et partes sepimenti singulas per vices mersionis plurimas manibus contrectare; ubi quod corruptum invenerint, mox emergendum, inspectorique denunciandum, qui eodem tempore, dum hi lustrant, ad zaboikam in navigio praesto fit. Locis laesis ab aquambulone demonstratis atque iisdem refectis altera vice ei mergendum est, certoque scrutandum, an omnia bene resarcita sint; ne vero quid per ejus negligentiam inrefectum relinquatur, vocatur alter ex aliis uczugis, qui a socio omnia bene scrutata experimento, nimirum mersione, testetur. Tale testimonium alteri de altero invicem agendum est. Fundum maxime, an eum sepes perfecte tangant, experiri debent. Si quo Loco spatium vacuum detur, saccis terra refertis, quos *нѣмцы* vocant, obturatur. Ut horum laborem arduum ob oculos ponam, describam nunc, quo ritu ad lustrandas *zaboikas* hi accedunt. Ante omnia cyatho unico, 4 circiter unciarum capaci, spiritus vini exhausto, introit balneum calidissime paratum, quod eum ob finem proxime ad zaboikas extruitur; hic nudus, per spatium unius horae vel duarum commorans, usque dum corpus satis calidum sit, pellem induit, navigiumque ascendit, et ubi lustrandum est, veste dejecta, signoque crucis ter in corpore efformato, pedetentim in aquas descendit, et fundum petit, ad quem pedetentim tendens sursum attollitur, semper manibus structuram operis contrectans, dein iterum deorsum abit, atque sic alternis vicicibus nunc sursum nunc deorsum sese attollens demittensque in aquis manet, usque dum respirationis necessitas urgebit, quam prima vice demersus vel calidissimus et robustissimus ad 7 momenta saltem continere potest. Respiratione urgente, in superficiem aquarum caput attollit, haustoque aliquoties aëre libero iterum opus suum agere pergit, quod non intermittit, usque dum corpus riguerit tremueritque; quod dum senserit, statim iterum in balneum deponitur, ciathusque spiritus vini alter ori admovetur; qua dosi sumpta, corporeque in balneo iterum calefacto, pariter pelle induitur, ad operam suam promovendam exit, cujus continuandae modo supra dicto finem tum jam eo die facit, cum sanguis ex naribus auribusque fluxerit, semique animis extractus in navigio, eum, semper sequente, prostratus fuerit. Qui robustus est, quatuor et quinque vicibus balneum post frigus vel frigus post balneum tolerare potest. Debilior vero vix tres vices balnei frigorisque patitur. Utramque tamen naturam et debilem et robustam casus ille ultimus concomitatur. Ad perlustrandam totam molem sepimenti ut jam minimum 7 dierum spatium requiritur. Singulis ergo diebus operis, post unumquemque quieti datum, stuporem animi et corporis perpeti hi aquambulones coguntur. Nullus eorum est, qui non ante tempus immaturum vitam suam cum morte commutarit. Nullus nec plus 10 annis hoc munere fungi potest. Alius post tres quatuorve totus membris laxatur; alius tumore corporis corripitur. Leviora damna sunt, cum oculorum acies infringatur, aurium efficacia minuatur, capitisque perpetui vertigines assiduique tintinnitus postea sentiantur. At inter dolores nec numerantur vulnera illa, quae tempore lustrationis ad palos et surculos sepium in aquis illisi accipiunt. Haec est conditio aquambulonum, qua gravius et intolerabilius nil unquam in piscatu exercendo excogitari potest. Eliguntur ex iisdem operariis, qui proprii uczugorum sunt; praeter solarium, singulis zaboikae lustrationibus, amphora una spiritus vini ipsis datur.

Перебойка. Hoc genus sepimenti a primo multum differt, prorsusque alius ejus struendi modus servatur.

Pali in transversum fluvii semper recti figuntur, spatio orgyiae a se invicem distantes, trabibusque in totum sui ordinem connexi, quae trabes unum fluvii latus apprime contingunt, alterum in unam circiter orgyiam cum dimidia liberum propter navigia deducenda, quod etiam in zaboicis solet fieri, relinquunt. Omnes pali fixi aliis aeque crassis, modo obliquo, ex adverso fluminis cursu sunt suffulti, ne impetu aquarum sedibus elocentur. Interstitia palorum claudunt sepes, confectae ex baculis abietinis, ad 3 circiter digitos crassis, qui per 3 vices transversaliter bacillis tenuioribus, ope viminis conligantur. Ne vero a palis discedant, versus extremitatem supremam baculis ad palos clavo transversaliter insertis comprimuntur. Carceres autem, quos etiam *избы* appellant, quorum numerus pro spatio fluvii etiam varius, ut in zaboika est, alicubi 4, inde 6, hunc in modum conficiuntur: ex opposito duorum sepimenti palorum figuntur frontaliter alii duo in spatium etiam orgyiae, ita ut carcer quatuor angulos pari latitudine et longitudine habeat. Horum summitates etiam trabibus trabem transversaliter tangentibus sunt colligatae; tria latera carceris ad proportionem sepis paratae occludunt; quartum latus, quod sinistrum erit, si secundum fluvii cursum consideres, occupat etiam sepes, sed eum in modum confecta, ut sursum extolli deorsumque iterum demitti possit. Attollitur autem per funem trocheae injectum, quae trabi medium carceris occupanti infixa est. Labitur vero onere proprio adjuvantibus lapidibus hunc in finem ei appensis. In fundum carceris demittitur *clathrum*, (*решотка*) ex baculis trium circiter pollicum crassis cruciatim se invicem tangentibus praeparatum, ad cujus singulos angulos conti longi propter extrahendum sunt accommodati; ad baculos vero clathrum constituentes secundum mediam latitudinem fila, qualia apud sutores calceorum sunt in usu, plicantur (синьки apud piscatores audiunt), quae a fundo ad instar chordarum protensa atque versus extremum in fasciculum collecta, fusti, trabibus adnexo, alligantur. Ne vero inter se invicem contorqueantur, tabella parva tenuis, quae *гребенка* audit, illis versus fasciculum interposita est. A fasciculo adnectitur funiculus paululo crassior, vix unius ulnae longus, unco parvo ligneo, quem *чижикъ* appellant, terminatus. Totius vero hujus machinae, propter pisces incarcerandos instruendae, modus sequens est. Janua carceris per trocheam sursum sublata ad infimam sui ligaturam, quam baculi transversales ope viminis constituunt, ut antea monui, in medio excipitur tigno manus humanae crasso, unius ulnae longo.

Hujus extremitatem alteram aliud tignum aequalis longitudinis deprimit; ambo tigna eum ad modum accommodantur, ut inferius transversim, superius longitudinaliter, in trabibus aliis infra trabes, quae palos connectunt, sitis, jaceant. Internum tignum, januam tenens, trabi anteriori per laxum funem unico tantum loco est copulatum; superni, quod inferni alteram extremitatem, trabem posteriorem attingentem premit, una extremitas per laqueum firmum aliquantisper cohaeret, in alteram relaxatur. Cuneus parvus per transversum iniicitur, qui ne de ipso prosiliat, ab utraque extremitate funiculo infra trabem decurrente illaqueatur, januam versus simpliciter per nodum, versus chordas vero per laqueum cunei hujus extremitates tenentur. Supra laqueum huncce cuneum detinentem imponitur unculus ligneus, a chordis supra memoratis in funiculo protensus, qui tam caute huic applicatur, ut, si vel minimum retrorsum chordas moveris, laqueus, cuneum tigno superiori impositum detinens, per uncum illi injectum detrahatur. Atque sic tota haec machina effectum suum edit. Effectus autem hic concomitatur sequenti modo. Piscis, adversus aquam tendens, ad sepimentum hocce dum devenerit, rostro scrutatur sibi ulteriorem progressionem, quam longe aliquando sepimentum acerrime quatiens molitur, sed sentiens omnia iri incassum, tendit recta ad sepimenti claustrum, atque sic locum exitus sibi explorans carcerem ingreditur, quo semel ingressus necessario jam premit chordas, per totum carcerem in transversum protensas, quas dum tetigerit, unculus a pressione piscis retroversum tractus simul detrahit laqueum, cuneum parvum detinentem, qui tum prosilit, tignum supernum, infernum premens, laxatur; infernum vero, transversale scilicet, cum a superiore jam non sit impeditum, sursum exilit, gravitate januae elisum. Quo janua liberata deorsum praeceps ruit, atque piscem ut jam in cavea tenet clausum. Hoc modo, dum fuerit incarceratus piscis, clathrum in fundum submersum pro quatuor contis illi haerentibus extrahitur, piscisque veluti in patera, jucundum spectaculum! sursum depromitur. Medium spatium *перебойки* circiter orgyiam vacuum propter undas, acrius hic loci in fluvio agi solitas, relinquitur. Ne vero pisces transcendere possint, cautum est sacco, quem *охапъ* appellant. Parant hunc ex funibus cannabinis digito circiter crassis in initio, ad extremum vero ejus fundum duplo tenuioribus; plectitur autem ad modum cuculli, oris extremitate quadrangulari, ad 8 circiter orgyias totus profundus; ad latera oris, quo saccus hiat, annuli viminei, interstitio spithamae unus ab altero, per tenuia funicula applicantur; ad palos vero, vacuum interstitium fluvii prementes, figuntur in fundum conti longi, extremitate superna palis adnexi. In hosce contos injiciuntur annuli memorati, quorum primus utrinque arcte ad contos jungitur; reliqui omnes liberi sunt, facileque mergendi. Ultimi anguli, qui in fundum cum lapide ibidem inserto abire debent, cum funibus longis demerguntur, ut si piscis saccum intraverit, opportune per hos illi extrahi colligique unà in contis possint. Saccus vero ipso jam aquae cursu extenditur, utpote contra eum hiscens; ut autem certo piscem in saccum intrasse constet, sequentia signi loco adhibentur. In ipsa superficie aquae, in saccum fluentis, transversim jacet trabs palis apprime per clavos juncta. In medium trabis firmiter infigitur arcus quercinus non adeo magnus, similis illis, quibus parva dolia vincire solemus, eum in modum, ut una extremitas ejus haereat in trabe, altera, quae brevior et tenuior est, saccum quasi naso prospectet. Ad hanc prospectantem chordae, similes carcerinis, mediae latitudini sacci nexae, atque a fundo protensae, copulantur, cum quibus tintinnabulum parvum eidem arcus extremitati applicatur. Itaque piscis dum saccum intrat, chordasque movet, arcus inflectitur, statimque campanula sonum edens operariis nunciat praedam in sacco dari, quo audito mox funes ultimis angulis sacci applicatos corripiunt, collectisque his omnibus saccum foras extrahunt, praedaque potiuntur.

Hoc genus sepimenti non est ita perrenne uti zaboika, sed singulis annis de novo exstruendum. Usus ejus ex initio autumni ad aquae congelationem tantum valet, quod temporis spatium non nisi tres circiter menses comprehendit; nimirum, ex initio Septembris ad exitum Novembris; aquis gelu obductis destruitur, dimidia quantitate materiae sub glacie pereunte. Sex operarii tempore piscatus ad *перебойкамъ* praesto esse debent, qui vicibus alternis dies noctesque vigiles ad eam sint, piscemque incarceratum extrahant, et machinam iterum mox apparent. Non in cimbis hi ad sepimentum navigant, sed in una rate longa, remumque aut conum nullum adhibent, at manibus palos apprehendentes ratem, quo volunt, promovent. Appulsi ad hunc aut illum carcerem trabes ascendunt, quibus cum etiam asseres sint superimpositi, nullo negotio et pisces extrahere et januam demissam attollere, cuneos chordasque nec non reliquos artus machinae, invicem attemperare possunt. Pisces capti vivi deponuntur in navigium, cujus carina de industria rimis perforata est, auditque exinde *прорѣзъ* (excisa), aqua semper recente in eo permanente, perque dies aliquot pisces vivos servante. Ex hoc dein jam vel vatagam saliendi, vel in lacum singularem vivi ad tempus frigoris mittendi deportantur.

Propter Zaboicas electa sunt loca plana, opportuna, nimirum tales fluvii, qui ostiis apertis et spatiosis, quod caput est, prae reliquis magis profundis in mare Caspium hiant, per quae verno tempore tanta multitudo piscium graditur, ut saepius manus piscatorum prae piscibus deficere censenda sit. Greges sunt, ut si cymba per fluvium fueris praetervectus, ad remos saepe saepius piscis illidatur, nec non in aquae superficie dorsa eorum conspiciantur. Itaque prae omnibus Volgae locis, quae vulgo piscosa (*рыбныя*) appellantur, zaboicarum loca praestantissima et tam quaestuosa sunt, ut de his 40 millia rubellorum lucri annui ex piscibus devenditis Astrachanense rationum conclave (*рыбная кантора*) capiat. —

Propter *перебойка* sive *калѳва* eliguntur fluvii angustiores, ostio profundo in Volgam veram decidentes, neque adeo undas acres agentes, ad haec ejusmodi, ut ad unum latus profunditatis majoris, ad alterum minoris sint, fundo ut sint arenoso non lutoso, puro, nullisque arboribus in eum demersis; (post inundationem hoc accidere solet, trunci enim cum radicibus evulsi fundum fluviorum saepius intercipiunt, quos *карчи* piscatores appellare consueverunt) conspurcato. Ostium fluvii eligendi tanti est momenti, ut, si profunditas ejus profunditati proximae Volgae non respondeat, aut si casu aliquo post factum jam sepimentum arena obruatur quam minimum; non modo quaestum ullum, sed ne piscem quidem unicum capere herus possit. Talem jacturam audivi fecisse mercatorem Czernojarensem, qui per tres autumnales menses unicum *осетръ* ceperit, fluvii, in quo erat *колова* fixum, ostio non satis electo profundo. Ejusmodi commoditatibus instructa loca adeo rara sunt, ut ab Astrachánia duo tantum ad Czariczin observentur, nimirum fluvius *Enotaevka*, versus *черная гряда*, nec non fluvius *малая Сатковка* versus stationem *Каминская*. Non spernendum vero lucrum, ex hoc pisces capiendi genere locis opportunis, heri acquirunt. Pro tribus mensibus ad minimum jam mille rubellorum de piscibus lucrantur, praeter eam pecuniae summam, quam operariis solvunt, et quantum in exstruendum sepimentum erogant. In fluvio *Кáма* hoc genus sepimenti maxime celebre est. Primus ejus inventor praesul Kasaniensis *Theophilact* habetur.

Ad extruendum integrum *калóва* spatium duarum septimanarum requiritur. Instrumenta adhibentur tantum rates cum festuca, mallei et securis. Materia lignorum ex urbibus Volgae superioribus deportatur. In sepimentum faciendum cum omni ad id pertinenti apparatu sumtus 800 rubell. erogatur.

Et haec sunto de genere instrumentorum primo dicta; nunc agendum est de altero sc. de hamis. In primis igitur de *снасть*.

Снасть in lingua Rossica latiori sensu designat quemlibet apparatum ad aliquem effectum vel per insidias vel aperte producendum accommodatum. Apud piscatores vero proprium nomen obtinuit, quo hoc instrumentum ab omnibus reliquis distinguitur. Praeparandi ejus modus sequens est.

Funi cannabino (a piscatoribus *хрептина* vocatur) septem vel octo orgyias longo, digitum crasso, implicantur per nodum funiculi pennam anserinam crassi minus quam duae spithamae longi, in unam cum dimidia a se invicem distantes, piscatorice *поводцы*, ductores. Ad horum singulorum extremitates filis tenuibus etiam cannabinis (piscatorice *прищепная пряжа*) annectuntur arctissime et firmissime unculi ferrei (piscatorice *кованцы*), versus extremum probissime inacuati. Horum sinuationi mediae laqueus parvus ex setis equinis contortus innodatur, cui versus extremum inseritur sudes seu cortex salicis aut populi nigrae jam olim vetustae, *вершокъ* mensurae Rossicae crassus et longus, figurae vel quadriangularis vel subrotundae (*балбирка* piscatorice audit). Funis transversalis, ejus-

65 *

modi unculos numero 60 excipiens, audit apud piscatores *длинникъ*; duo vero aut tres *длинники* in unum copulati vocantur *сталъ*.

Itaque hosce *сталъ* modo dicto praeparatos in fundum fluvii transversum pluribus ordinibus, quas *порядки* vocant, demittunt; ne vero cursu aquarum loco fixo moveantur, ad extremitatis funis transversalis lapides ponderosi adplicantur, a quibus etiam alii funes sursum in superficiem aquae ab utraque extremitate ducuntur, supra aquas signi loco tigna, innatantia tenentes.

Situs in aqua hamorum hic est: funis transversalis ipsam fundi arenam tangit, funiculos vero cum uncis sursum sublatos suber tenet, in aquarum cursu perpetuo horsum vorsum ludibundum. Cum itaque piscis in fundo graditur aquam dissecando, et nunc huc nunc illuc sese flectendo, suber leve, motum aquae persequens, uncum secum ad piscem trahit, atque sic eum corpori admovet. Piscis vero, acie ejus punctus, magis undas quatere et fundum petere incipit, ad quarum majorem impetum proximi etiam hami ope suberum pertrahuntur; eum miserum multis locis vulneratum jam ii tantum hami tenent, qui profundius sese in corpus ejus insinuaverunt. Ita certe hocce instrumentum est praeparatum, ut quo acrius sese piscis defendat atque fugam moliatur; eo fortius et durius inhaeretur. Non imprudens atque rudis videtur is fuisse, qui primus has insidias piscibus struendi usum invexit.

Triplicis generis *снасти* usus in Volga datur; haec, quam descripsi, audit *балбирошная* vel *самалоевная* (ipsa capiens), altera vocatur *кускосая* (frustulenta): in hujus uncos loco suberum frusta carnis piscini aut *Belugae* aut *Som* in escam piscibus figuntur; hanc minus solent in fundum demergere, sed funis transversalis hamos possidens, funibus perpendicularibus indice instructis applicatus, in aquis mediis manet. Hoc modo solent praecipue circa Vatagas capere Calmuci *сомъ*, nonnunquam et *белуга* in fraudem inducitur. Tertium genus *нажиеная* (ad vivum capiens) scilicet pisciculus parvus, *таранъ* vel *вобла* dictus, unculis accomodatus, pisces praecipue *Belugam* allicit, perque suum interitum illum interire facit. Versus ostia fluviorum mare versus tantum tali ritu pisces capiuntur. Inter Astrachaniam et Czariczin nullibi mihi videre contigit.

Tribus perdiem vicibus *снасть* lustratur, nimirum mane, meridie et vespere, aut duabus saltem, mane et vespere. Lustratur autem hoc modo. Ad funem indicem ex cymba dejecta anchora, quam *кошка* appellant, comprehendit extremitatem ejus dentibus *сгалъ*, atque eum extractum in uncum ferreum puppi cymbae insertum imponit, dein jacens in puppi sensim funem transversalem cum unculis a fundo attollit, totamque ejus longitudinem ad modum mensurantis manibus recolligit. Si piscis fuerit inhamatus, clava in frontem percussum in cymbam attrahit minoris molis solus, majoris vero cum operario, qui tum ad remum sedet. Si nullus fuerit piscis, funem demittit, atque ulterius eumdem corripit, et sic continuare pergit, donec totum *сталъ* lustraverit. Uno perlustrato ad alterum navigat, scrutatisque omnibus ad stationem cum piscibus revertitur, quos in caveam seu piscinam, quam *тетенъ* appellant, ex viminibus contextam deponit, aut ad funem ligatos in aquas mittit, quod piscatorice *на куконъ посадить* audit. Si jam decem aut plus piscium per dies aliquot ceperit, ad vatagam deportat, et hero reddit.

Quilibet piscator *сталъ* ad manum semper praesto habere debet, 40 ut jaceant in aquas demersa; par eorum numerus propter permutationem servandus. Mutant autem singulis septimanis madidos extrahendo, et siccos in loca eadem immergendo.

Hoc genere instrumenti utuntur piscatores a subsessione aquarum ad initium autumni; ponuntur etiam hieme Volgâ glacie probe obducta; sed hoc majori in usu est circa ostia fluviorum in mare fluentia, nec non in ipso Caspio mari, in quo quanto periculo piscatores, dum piscantur, exponant sese, enucleabo, posteaquam de officiis eorum agam.

Fluvii fundo declivi et arenoso magnam piscium copiam piscatoribus largiuntur, profunditate eorum prorsus non proficua aut certe parum; aestate enim pisces, praecipue *сезрюги*, in profundo rarissime nec non tempore nubilo et turbulento solum graditur, magis vero ducitur arena, per quam sese volvit, acclivi et non satis alta. Quare si alicubi haec opportunitas locorum detur, non nisi in hisce arenosis declivibus *снасти* demergi solent.

Alterum genus uncorum constituunt *лучки* (arcus), uni tempori et ad unum piscem capiendum inservientes, sc. piscantur *бѣлая рыбица* tantum sub finem mensis Decembris nec non Januario, quo tum larga ejus copia apparet. Modus ejus conficiendi est sequens.

Primum securi aut alio instrumento exciditur in glacie ad aquam fluidam fossula (*прорубь*) non adeo spatiosa, nimirum qualis pisci extrahendo est apta. Prope ipsam eam in glaciem defigitur arcus parvus et humilis vimineus, cujus cornua nive madida applicata adeo frigore constringuntur, ut ne robustissimus quidem a glacie abstrahere avellereque possit. Pone arcum hunc sic firmatum, in intervallum minimum locantur tres conti ad staturam humanam simul alti, figura triangulari conica, situ tali, ut infernis extremitatibus sint ad aliquod spatium a se invicem remoti inque glaciem infixi, supernis per nodum connexi. In sic connexis suspenditur laqueus, cui vectis, contis duplò longior et aliquantum crassior, adstringitur eum in modum, ut si inflectatur anterior ejus extremitas, super arcum fossulam prospiciat; si retro demittatur posterior a sua gravitate, aut addito sibi aliquo pondere, deorsum cadens, anteriorem sursum attollat. Dein his rite confectis, anteriori vectis extremitati applicatur funiculus, ex sex vel octo filis tenuioribus contortus, ejus longitudinis, qui in fossulam demissus tantillum fundum fluvii non tangat. Fini hujus funiculi annectitur unculus ferreus illis, ut qui in *снасть* fiunt, multo tenuior, versus extremitatem incurvam denticulatus et valde inacuatus. Truncus unculi offunditur stanno aut plumbo figura tali, ut pisciculi parvi speciem prae se ferre videatur, facieque ementita piscem, propter quem hae insidiae tenduntur, ad extremam perniciem adducat; ut vero quasi vivus sit, moverique videatur, in unculi aculeum squama *сазанъя*, disco lateraliter infigitur, quae tali insertione aquis facta opposita, cursu earum ut pote adverso, sine intermissione percutitur, qua re plumbum piscem ementiens horsum vorsum moveri et resplendere cogitur; unde et modus iste capiendi audit блесниць. Ne vero hamus demissus a fundo longius undis acrioribus abstrahatur, frustulum plumbi versus unculum filo additur. Tota machina instruitur sequenti modo. Ad finem anteriorem vectis in eodem loco, quo hamus pendet, innodatur funiculus cuneolo parvo terminatus, ita longus, ut si vectis inflectatur, cuneolo arcum attingere valeat; in filum vero pisces hamans, ad spithamam circiter infra funiculum cuneolo instructum implicatur filum simile, longitudinis ad arcum proportionatae, extremitate altera tenens ednexam sibi lamellam, ei in transversum copulatam. Vecte inflexa hamoque in aquas cuneolus per arcum intromittitur, perpendiculariterque instruitur tali modo, ut unam ejus extremitatem arcus detineat, alteri lamella pariter intus arcum ducta, poneque eum in transversum posita obicem faciat. Itaque, dum piscis pisciculum ementitum escam sibi esse putans, unculum deglutit, abstahit cum hamo funiculum lamellae adnexum; cuneolus vero ex sub arcu a gravitate ponderis posteriori extremitati vectis additi exsilit, hamusque de fossula extrahitur, atque sic piscis inhamatus in superficiem glaciei dejicitur. Qui hoc instrumento piscaturam hieme exercent; singuli ad 20 numero ejusmodi machinas ad intervalla non satis longa in ipso aquarum volvendarum cursu collocant, inque medio eorum ordine, confecto sibi tugurio, prospectant in partem utramque, atque ubi viderint vectem sursum sublatum, illuc advolant, deque hamo pisce detracto iterum supra memorato modo machinam instruunt. Singulis diebus, cui fortuna faverit, ad 10 et 15 numero pisces extrahunt; cui jam minus eadem adspirarit, 5 aut 3 piscantur. Praeter frigus, quod tempestatibus expositi perpeti coguntur, alia nulla damna sollicitudinesque hoc genere instrumenti piscantes gravant torquentque.

De usitatissimo reliquorum hamorum genere hic fuse perscribere non mihi necesse videtur, cum eorum praeparatio adeo simplex sit, ususque talium ubique in fluviis piscosis communis idemque habeatur. Quare extremitati baculi longiusculi attenuati adnexum filum lineum vel ex setis equinis contorsum ad sui limitem cum pondere plumbi unculum, qui escam piscium; lumbricos terrestres puta aut micam panis vel piscis alicujus vehit, insertum tenens, ut jam vel pueris hoc piscandi instrumentum notum relinquo; placet tamen unicum ex his ut singularem et forte nullibi usitatum referre modum, quo Tatari Astrachanenses circa fluvios in desertis errantes, in capiendo *сомъ* utuntur; sane is est notatione non indignus; piscantur non ex ripa, sed ex navigio ratione sequenti. Rana viva in unculum funiculo 2 circiter orgyiarum longo puppique navigii adhaerenti annexum infixa, addito pondere in aquam demissa, remex leniter cymbam remis ultra propellit, ad clavum vero sedens, tenendo una manu hamum, altera patinam manubrio instructam, disco ejus profunde cavato superficiem aquarum per intervalla quatit, ut sonus momentaneus obscurusque in aquis exaudiatur. *Сомъ* ad perceptum eum adnatat; conspectamque ranam ore apprehendit, quam simul cum unculo ingurgitans inhamatur extrahiturque. Hic maxime mirari licet, quid est, quod piscis hic ad editum sonum adfugiat, cum reliqui aufugiant? Plurimi dicunt sonum illum esse similem voci, quam edit femina *сомъ*, maremque ficta et simulata hac allici defraudarique. Sed cum incertum sit, an femina *сомъ* vocem aliquam proferat, nequaquam igitur in vulgi sententiam pedibus eo, potius vero statuo sonum hunc repraesentare vocem ranae, cujus unica mihi incerta species semper in aquis lacuum delitescens, ut ipse multoties audivi, simillimum edit voce *bſu*, quod etiam, dum aquam quocunque cavo percutiás, exaudiri solet. Nemo vero nescit, piscem *сомъ* esse animal omnivorum, saepiusque illud ranas cancrosque appetere solere. Nil igitur mirum est, cum audito ficto sono illuc adnatare, conspec-

66 *

tamque ranam devorare. Ratio talis piscandi audit Rossice *сомовъ клочитъ*.

Ultimum uncorum locum, quamquam improprie, occupat in Volga *сандоеве*, quod nihil aliud est, quam ferrum in bifurcam aut trifurcam dissectum, versus extremum denticulatum, inacuatum, baculoque sive manubrio versus fundum insertum. Incolae harum regionum, non piscatores proprie, hoc bidenti in feriendis *сазанъ* et *щука* utuntur verno tempore, cum inundationis moles in loca arundinacea, declivia, parvosque lacus sese insinuare ceperit. Tunc enim utramque hanc speciem ova ejicere dicunt; hinc est, quod in maxima copia, *сазанъ* praesertim, locis supra dictis appareat, cum ejusmodi et loca et tempus ad generationem in actum producendam ipsis convenire vulgi opinio sit. Ceterum omnes affirmant, verno tempore *сазанъ* loca profunda vitare, ducique eum tunc aquis placidis et stagnantibus, in quibus, ut saepius curiosi observarunt, multis gregibus inter arundineta aut herbas lutumque vagantur, mane et vespere furiosi acresque adeo, ut ad 2 ulnas supra aquam in altitudinem prosiliant, lymphamque totam perturbent; meridie vero in unum locum 6 aut 10 numero congressi, perstant mites et dormientibus similes, ita, ut ni jam tetigeris aut perstrepueris, vix loco sese moveant, conspectumque hominem minime aufugiant; quod solum tempus hoc instrumento iis feriendis favet. In compungendis quoque illis quaedam peritia scienda est: scilicet nunquam a fronte aut a latere recte feriendi sunt, sed a cauda adversus squamas jaculandi; squamae enim hujus piscis tam durae et lubricae sunt, ut saepius ictum ipsis impactum eludant et absque noxa recedant. Praeterea robustus sit necesse, cui volupe est praeda potiri, alias nec vulnus efficiet, nec si leviter vulneraverit, manubrium manibus detinebit. Tanta enim vi et robore *сазаны* valent, ut icti saepius ferientem prosternant, quem casum ipse ego aliquoties sum expertus. Crasnojariae adjacentes insulae, lacubus refertae, magnum sasanorum proventum incolis praebent, qui in iis supra memorato modo jaculandis summum oblectamentum verno tempore ponunt, ephebusque juvenum existimatur, qui majorem quantitatem eorum hocce instrumento compunxerit.

Tertium instrumentorum genus constituunt retia, quae pro diversa latitudine et longitudine, variaque foraminum spatiositate, insertioneque ponderis et indicis, diversis quoque nominibus insigniuntur.

Неводъ plectitur modo usitato ex filis cannabinis, tenuioribus, tribus simul junctis; latitudo ejus jam maxima nunquam excedit 250 orgyias; profunditas etiam jam maxima duas cum dimidia aequat. Membra, ex quibus rete hoc coagmentatur, piscatorice audiunt *доли* (partes), quarum in *неводъ*, si ejus latitudinem maximam consideres, unamquamque 5 orgyias latam ponendo, 50 numero erit. Partes extremae seu alae, ut loquuntur, foramina 4 digitos spatiosa habent, versus sinum medium sive saccum, quem *матня* seu *рукавъ* appellant, angustiora possident; sacci vero, qui ad 4 argyias cavus, et sensim ad angustum redactus est, foraminibus vix duos digitos permittentibus; fila eum constituentia prae reliquis crassiora adhibentur, ne a multitudine piscium, quorum semper major copia ex eo extrahitur, disrumpatur. Funis superior, rete sibi applicatum tenens, vocatur a piscatoribus *подбора верхняя*, in quem etiam subera vel lamellae aut cortex betulae more usitato, ne submergatur, per parva interstitia locantur. Inferior funis lapidibus, qui rete ad fundum pertrahant, onustus, audit *подбора нижняя*. *Неводъ* ejusmodi appellatur a piscatoribus *стрежневой* vel *рѣчной* (fluviatilis); nimirum, quod illo piscari solent in fluviis profundis ac spatiosis. Dantur vero adhuc duae ejus species, quarum primam *ильменной*, alteram *распорной* vocant. *Ильменной* (nomen de lacu sumtum) a fluviatili in hoc differt, quod et non tam latus et profundus sit, ex que filis crassioribus plectatur, saccumque minorem (*матня*) possideat. Piscantur eo in lacubus magnis et spatiosis, maxime *сазть*, et, qui luto ducuntur, pisces; *распорной* vero ex toto convenit fluviatili, sed differt in eo, quod partes, ex quibus copulatur, non ita inter se cohaerent, ut non possint parvo momento, necessitatis tempore, separari, et quaedam ab iis invicem demi. Utuntur hoc in ipso mari ex cybmis operarii piscantes; ubi, ni greges piscium conspiciant, nunquam retia tendunt; si in ingentem eorum multitudinem inciderint, *неводъ* partibus quibusdam demtis involvunt; si parcius videant, spatiosius distendunt; hocque ideo agunt, ut in majori piscium copia extrahenda, labor minori retium spatio minuatur; in casu vero inopiae, ut vel ipsa retium spatiositate plurimos irretiant. Ad *неводъ* fluviatilem requiruntur 10 operarii, et undecimus, qui audit *неводчикъ*; ad *ильменной* vero, incluso *неводчикъ* 10, totidem et ad *распорной*. Operariorum officium est trahere tantum retia; *неводчикъ* vero debet primum in funes rete inserere, applicare lapides et subera loco debito, ubi quid ruptum fuerit, reficere, imo loca ipsa piscosa, ubi sint, divinare. Operarii apud *неводчикъ* non aliàs quam servi sunt in domini potestate.

Волокуша et *поѣздуха* sunt etiam species *невода*: differunt in eo, quod *поѣздуха* absque sacco seu sinu conficitur, vixque 20 aliquando orgyias excedit, in unam orgyiam tantum profunda. Adhiberi solet in rivulis aut lacubus parvis propter pisces parvos, uti *марань, окунь* etc. illaqueandos. Si ad *лоѣздуха* addes saccum nec non aliquot retium membra, ut nim. sit ad 50 vel 60 orgyias lata; tum erit tibi *волокуша*. Altera retium species audit *погоняй*. Rete hoc foramina habet ad spithamam spatiosa; plectitur ex funiculis penna anserina paulo tenuioribus, latitudine nunquam excedit 120 orgyias, profunditate quatuor adimplet; in imo sui nullum habet pondus, neque est in funem recollectum; superne tantum funi in sui latitudinem adstipulatur, cui baculi, ad spithamam cum dimidia longi, tres circiter pollices crassi, versus extremitatem attenuati adustique, pro indice in propriis funiculis adhaerent, unus ab alio duas spithamas remoti. Piscatorice hi *гельцы*, funiculus vero eos tenens *тонiокъ* audit. Adhibetur hoc rete statim post glaciem in Volga solutam, et autumno, nimirum quando beluga graditur, eamque solam fere irretiunt. Dum rete hoc a piscatore in aquas fuerit dejectum, baculi indices sursum eriguntur, quos ubi viderit piscator saepius hinc vel inde demergi, certior exinde fit piscem rete intrasse. Quare mox projecto fune, quem retibus applicatum ad unam semper alam in cymba navigans tenet, adnatat illuc, correptumque rete in navigium attrahit, atque adeo piscem illaqueatum ex eo demit, rursusque in aquas illud demittit, et iterum ad alam in cymba descendit. Emensus omne sibi ad piscatum spatium adscriptum, ad caput ejus iterum collectis retibus proficiscitur, rursusque ea ibi aquis reddit, quam operam aliquando vicibus decem continuat, in uno eodemque loco piscans. Nox vel maxime his conatibus adspirat, quam nonnulli totam insomnem vigiles agunt, vespere quoque et summo mane piscantur.

Cѣтки aliter *свинчатки* (nomen de plumbo tractum) conficiuntur ex duobus retibus, ex raris sc. et densis, simul copulatis, plectuntur etiam ex filis cannabinis tribus, tenuoribus in unum junctis. Rarum rete in profunditatem comprehendit 8 foramina tantum, quae piscatores *ячеи* appellant; densum vero 24; quibus utrumque rete non nisi in unicam orgyiam est profundum; latitudo autem eorum ad 200 orgyias extenditur. In his pro pondere, loco lapidum, funi inferiori retibus per latitudinen annexo, frustula plumbi in lamellas ducta compressaque applicantur; ubi aqua strenue currit, passim; ubi placide, rarius inseruntur. Spatium unius frustuli ab alio piscatores vocant *огниво*; superiori vero funi retium subera, qualia in *снасть* sunt, adduntur. Ad utramque retium alam adnectuntur funes, elongati, quorum unus tenet tignum aut fasciculum arundinaceum (*курсинъ* piscatorice), tempore pis-piscationis natatilem reteque erigentem; alter propter eandem retium demersorum erectionem, puppi navigii applicatur: hoc modo retia instructa, dum per fluvii spatium distenduntur, fundumque petunt, piscator in puppi sedens manuque funem cymbae copulatum tenens, ubi senserit retia tremere, vel funem quasi de manu eripi, mox collectis retibus piscem jam paratum sumit, rursusque ea distendit, atque ad eundem in hoc piscatu modum procedit, qualem, cum *логоняй* utuntur, servant. Inserviunt haec retia tempore inundationis, nec non etiam aestate; loca fluvii pura nullisque arboribus in fundum demersis intercepta eliguntur. Quare nunquam solent piscatores prima vice nova retia in aquas deponere, sed primum veteribus fundum explorant, in quo si quid obstaculi invenerint, iisdem eximunt, dein jam purgato solo nova immittunt. Cosaci donenses primi inventores ejusmodi retium existimantur, ususque eorum in Don tantum notus fuerat, nunc ita familiaria in Volga quoque reddita sunt, ut nemo piscatorum ea non habeat.

Restat nunc mihi ultimam retium speciem explanare: nim. *аханъ*, qui nihil aliud dici potest, quam saccus reticulatus, ad 2 tantum orgyias longus, ad ulnas duas circiter profundus et latus; plectitur ex funibus crassioribus, qui vulgo *лыки* vocantur (ex cortice tiliae parati), versus orificium quadrangularis, fundo convexo, ad singulos sui angulos funes etiam crassos longos, quos *стражи* (custodes) piscatores vocant, adnexos habens. Saccus hic cum in fundum demittitur, funes duo, in longitudinem sibi oppositi, laxantur, ut scilicet apprime uno oris latere, cui etiam pondera levia adduntur, fundum contingat; alteri duo intenduntur, ut nim. ille sit in aqua ore hiante. Ex duabus cymbis solent hoc sacco piscari; quo submerso manibus funes intensos ex opposito apprehendunt, dumque piscis eo fuerit involutus, laxos funes mox corripiunt, ambobusque utrinque protractis, cymbisque sibi invicem exinde approximatis, praeda in sacco quasi in cunis aut praesepio jacens in superficiem deducitur, exemptaque in cymbam deponitur. Uni tempori locisque determinatis hicce *ахань* in piscatu tantum Belugae inservit: nim. cum aquae jam rigere, piscesque iterum in loca profunda migrare prae frigore ceperint. In principio jam monui, circa *uczugos* tantum, versus mare caspium, ejusmodi foveas, plerumque in concursu duorum aut trium fluviorum existentes, dari, alias nullibi et nusquam in Volga exstare. Quo vero ritu quaque pompa hic piscatus quolibet anni tempore uberrimus spectatuque jucundissimus procedat, ordine nunc exponam ea, quae ipse oculis usurpavi.

Cum aquae, calore aestivo praeterlapso, rigorem coeli sentire coeperint, praefectus piscaturae mittit ad inspectores uczugorum mandata, quibus praecipit, ut omnibus piscatoribus tam propriis, quam ex contractu inibi piscantibus, eorum locorum, ubi foveae sunt, aditum interdicant, caveantque, ne quis praeternavigantium clamorem aut strepitum aliquem, explosionemque, qua pisces terreri auffugereque possint, excitet. Inspectores, acceptis mandatis, piscatoribusque illinc remotis, custodes debitis locis ponunt, qui omnem operam dent, ne quocunque modo ingens piscium copia, ibi certo cubitura, conturbetur consterneturque. Die exemptionis, ut ita loquar, adveniente, (qui tum maturus et opportunus putatur, cum pisces in illis locis saepius emergere demergique conspiciuntur, quod initio novembris maxime usuvenit) nunciatur omnibus piscatoribus, ut ad horam dictam in hunc vel illum uczug conveniant, instrumentis instructi. Dein director ipse, invitatis plurimis hospitibus, praesertim optimatibus, eodem ex Astrachania profiscitur, tractatisque iis lauta mensa (coena nim: opima parari solet), singulisque piscatoribus spiritus frumenti portione data, quae si parum eos inebriaverit, tum vel ipsi coëmto proprio ad crapulam usque se ingurgitant, summo statim diluculo ad locum certum cum spectatoribus abit, comitante eum tertia piscatorum parte, reliqua enim turba divisa ad alias foveas mittitur; dum eo attigerit, jubet retia *ахань* jaci, quae postquam fuerint demersa, locaque omnia occlusa, piscatores rupto, quod prius servaverant, silentio, tantos clamores strepitusque subito sustollunt, ut vel surdo molesti viderentur. Pisces, vociferatione insolenti conterriti, alii de fundo in superficiem aquarum enatant, alii in mediis aquis haerent, quocunque modo sibi fugam molientes, sed frustra; undiquaque enim circumfusi piscatores viam omnem abeundi praecludunt. Hic vidisses ingentis molis corpora supra aquas provolare; conspexisses, quo modo piscantium navigia ab iis invertantur; percepisses, quo ritu hi madidi simulque ebrii cantilenas vocibus dissimilibus cantent; audisses rixas vituperiaque, cum alter in alterius cymbam casu illiditur, vel de industria loco eum movet; animadvertisses livorem invidiamque, si uni majoris ponderis piscem extrahere coram alterius oculis contigerit. Posteaquam jam satis de fundo pisces turbaverint, plurimosque de eo sumserint; projecto *ахань*, *погонный* singuli distendunt, piscesque in mediis aquis natantes irretiunt, ordinem eum servantes, ut unus alium sequatur, spatiumque omne emensus, ultimus iterum a capite loci incipiat. Quantas etiam tunc lites excitant, cum hic vel ille alterius vicem praeoccupavit, aut ad alterius retia sua proxime admovit;

quae tamen approximatio nequaquam vitari potest; spatium enim foveae vix trecentas orgyias in longitudinem excedit, piscatorum vero tum jam in minimum 150 navigiis tantas angustias occupantibus. Jucundum sane tale spectaculum est, et qui nondum oculis usurpavit, plane gratum; nam uno fere intuitu ingens piscium copia, quasi de industria propter spectaculum exhibendum, in unum tam compressum locum redacta conspicitur, et neminem fere puto, qui non summum in modum admiraretur, si videret ponderosissima corpora, alio anni tempore robusta, et vel decem hominum manus in extrahendo defatigantia, tunc absque omni reluctatione mitia et veluti inanimata duorum saltem piscatorum robore corripi eximique. Mansuetudinis hujus causam eam esse volunt, quod frigoris tempore eorum tota cutis obducitur materia quadam tenaci, lubrica, densa, quam utpote ad injuriam coeli propellendam a natura sibi datam usque adeo curant illaesam, ut extracti etiam moveri adversarique non audeant. Piscatores mucum hunc nominant *шуба*, haud invective sumto nomine de *pelle*, rigorem aëris a humano corpore coercente. Talis piscium de foveis exemptio duarum circiter horarum spatio tantum peragitur; intra quod tempus edito tam ludicro spectaculo, piscibus jam omnibus, quotquot ibi jacebant, extractis atque in sua cujuslibet navigia depositis, integra piscatorum turba ad portum, nim: uczugum non sine cantilenis quoque proficiscitur, ibique praedam coram inspectore exonerat, justum praetium pro ea sumtura. Neque hic loci res absque invidia et ingentibus clamoribus agi solet. Quodlibet sodalitium festinat citius a se pisces sumi; exinde fit, ut unus alterius cymbam a rate, in quam exponunt, amoveat; hic depulsus in eum non alias quam in hostem saevit, rixaque si satis incaluerit, venitur ad manus; franguntur remi, scinduntur cymbae, impinguntur colaphi, nec non in aquas praecipites dantur. Qui proximi adstant, non solum lites non componunt, verum, nacti opportunitatem, protrusis ambobus, sese ultra promovent. Ultimi enim, donec a propioribus pisces inspectori porriguntur mensuranturque, per totum aliquando diem suas in redditione vices expectant.

De Uczugis.

Uczugi in Astrachania audiunt vici s. coloniae, in quibus habitant operarii cum suis familiis, munia perpetua et propria circa pisces in sepimentis (*забойки*) captos obeuntes, non mercenarii uti piscatores, sed salario conducti, a longo jam tempore ex diversis locis illuc deducti. Quatuor ejusmodi vici versus mare caspium infra Astrachaniam siti sunt. Primus est *таганъ* ab urbe 25 stadiis; secundus *иванчукъ* pari intervallo distans; tertius *кумызякъ*, a *таганъ* 5 stad. remotus; ultimus *увары* a *кумызякъ* ad 6 stad. circiter divulsus. In singulis ad 50 domus operariorum dantur, nec non etiam in quolibet templum est extructum. Omnes in tumulis posisi sunt ad fluvios ejusdem appellationis, ex vera Volga decidentes, nec non ostiis apertis in mare fluentes.

Annis aliquot abhinc pertinebant hi ad coronam caesaream, piscaturaque in illis ex publico per praefectos mandato constitutos exercebatur, lucrumque totum de piscibus sumtum in fiscum deponebatur; ex anno 1763 societati mercatorum astrachanensium in perpetuam possessionem ab Augusta Imperatrice erant adscripti. Quaestum uberrimum loca haec largiuntur, quem nunc solent nec integrum neque in omnes dividere, sed collectam pecuniam in cantora servant, aliquam tantum portionem vel per biennium vel per triennium 115 hominibus dividentes, qui vel nullas suas proprias vatagas possident, aut possidendi facultatibus carent; tributum vero pro omnibus tam divitibus quam pauperibus ex eadem pecuniae summa solvunt. Ex tempore possessionis constituta est Astrachaniae cantora piscatoria dicta. Singulis annis ad eam gubernandam eligi solent ex primae crassis mercatoribus praefectus cum titulo *directoris*, penes quem duo etiam socii nec non summa rei uczugensis communisque utilitatis penderet, annui adduntur. Huic etiam, qui pecuniam tractaret, ex iisdem designatur; scribarum vero, qualis decet numerus, ex infima classe constituitur. Ad singulos quoque uczugos mittuntur inspectores, (*лоѳѣренные*) dicti, nimirum, quibus concreditur seu traditur omnis cura in operarios, eorumque officia, nec non ipsam piscaturam absque ullo furto aut aliquo damno exercendam inspiciendi. Hi obligantur omnia mandata a cantora missa exequi, et unaquaque septimana ei rationem reddere, quot piscium in singulis sepimentis extractum sit. Ad haec eligitur praecipuus inspector, qui *розъѣздной лоѳѣренной* appellatur; h. e. qui omni tempore nunc ad hunc nunc ad illum uczug excurrere aliosque inspectores, nec non ipsos operarios, an rite quilibet suum officium agat, observare; praesertim vigilare debet, ne quis pisces captos in alia loca aut proximas vatagas apportet. Huic et stipendii prae reliquis inspectoribus plus nec non honoris habetur. Omnibus autem his et singulis uti directori, sociis et scribis cujuslibet officii, ratione spectata, stipendium ex eadem sociali summa depromitur.

Munus operariorum ad uczugos pertinentium in genere comprehendit ea omnia, quae vel ad sepimentum reficiendum, vel ad materiam propter id parandam sepesque plectendas, nec non ad ceteras circa pisces captos necessitates requiruntur, quae munia omnes, quotquot sunt, obire abligantur, exceptis tantum illis, quibus jam singulare officium est praescriptum, quorum primus est aquambulo non nisi lustrandae zaboicae tantum assignatus; secundus *багорщикъ* et *подъбагорщики*: horum officia supra jam exposui. Tertius audit *солильщикъ*, h. e. qui pisces sale aspergit. Huic addicti sunt aliquot operarii, qui vocantur *поддатни*, h. e. subjicientes pisces salsamentario. Quartus *потрощикъ* vel *рѣзальщикъ*, exantherator, qui pisces dissecat, ova eorum eximit, et vesicam extrahit, nec non colopiscium amovet. Horum officium non est determinatum; nam nullus fere est, qui artem secandi non norit; is tamen proprie *потрощикъ* salutatur, qui et citissime et modo congruo piscium partes scindit; quintus est *икряникъ*, ova piscium sale condienda praeparans; sextus *клеёвщикъ* secundum artem et formam colopiscium conficiens. Huic subjiciuntur aliquot pueri, qui audiunt *сборщики*, colligentes; hi nimirum colligunt colopiscium ex pisce exemtum, lavant, distendunt, depurgant, et nil aliud sunt quam disciKpuli *клеёвщика*. Quod vatagas concernit, in his multo minor turba operariorum alitur; necessarii enim sunt tantum *солильщикъ, икряникъ и кліòвщикъ* cum aliquot pueris, nec non tres aut quinque operarii, qui et vices *потрощика* gerunt, et pisces salsamentario porrigunt. In huncce numerum non includo operarios illos, qui a heris conducti, retibus pisces minores, nimirum *сасанъ, судакъ, бершъ* et reliquos piscantur, quanquam et hi etiam in vatagis habitent. Horum enim numerus non nullibi trigenarius aut quadrigenarius occurrit, neque tamen spectat proprie ad vatagas, sed ad piscaturam.

Modus piscis secandi, sale condiendi, colopiscium nec non ova praeparandi.

Pro diversa piscium magnitudine diverso modo etiam sectio in vatagis instituitur. *Beluga*, debitam mensuram, de qua supra jam dictum est, excedens, in quinque partes dissecari solet. Primum exscinditur ejus abdomen, quod *тіòшка* nominant; dein exempta *икра, клей* et *вязига,* partes laterales abdomini haerentes amoventur, quas appellant *мякотныя* (molles), post has dorsum a cauda in transversum divellitur; dorsum audit *хрящовикъ*, cartilago; cauda, quae in tranversum abdominis secatur, pro quinta parte habetur, *махалка* audit (vibratula); hoc est, quod piscis dum natat, semper ea vibret. Talis beluga in quinque partes scissa pro quinque piscibus apud piscatores aestimatur. Caput, quod *башка* audit, cum branchiis ejusmodi piscis a corpore separatur, extraque mensuram aestimari solet; palatum quoque ex eo exscinditur, separatimque sale conditur, quod *тумакъ* appellant; minoris vero molis aut mensurae debitae beluga simul cum capite dissecta in sal immergitur; scinditur autem talis a mandibula inferiore, quam *манйста* vocant, longitudinaliter ad extremum usque caudae, fronte capitis integra remanente vel paulisper intus tantum insecta; tali quoque modo et *осетръ* cum *севрюга* cultrari solent, etiamsi debitam magnitudinem excedant. Hoc tamen sciendum est, quod omnium horum piscium abdomen, nimirum *тёшка*, exsecetur separatimque salsetur, quanquam in eadem fovea. Apud *сомъ* non nisi pars dimidia corporis, quae *лёскъ* audit, ad usum in vatagis valet, saleque conditur, cum venter et caput canibus devorandum projiciantur, et id quoque, nisi jam in maxima copia obveniant, curatur; ceterum in totum hic piscis negligitur.

Minores pisces, uti *щука*, *бершъ*, et *судакъ*, excepto *сазанъ*, quem etiam dissecant, simpliciter exanterati, ad latera tribus aut quatuor locis oblique, neque adeo profunde insecantur, atque sic in sal deponuntur.

Postquam fuerint pisces dissecti, de majoribus loquor, trahuntur in cellam, ibique in muriam demittuntur. Durant in illa aestivo tempore per duos dies; autumno vero per unum. Cum jam satis salis in se conceperint, eximuntur atque in pavimentum sternuntur. Hic sinitur, ut ex toto muria de illis defluat; qua defluxa in acervos rediguntur, singulis eorum ordinibus multo sale adspersis. *Осетръ* et *севрюга* semel coacervati saleque reconditi, jacent in uno loco, neque magis curae sui requirunt. *Белуга* vero primum in acervos parvos cogitur, quos *ласлонокъ* vocant, auditque tum *jacere* въ *ласлонкахъ*, cumque in his per aliquot dies jacendo, sal substratum absorbuerit, tum altera vice aspergitur et in cumulos grandes colligitur, atque adeo jam in iis per reliquum tempus durat (quod audit въ *корню* jacere).

Autumnali tempore maxime parari solet piscis *малосольная* dictus, hoc est parum salsitudinis habens; aestivo vero tempore *засольная*, valde salsus, qui etiam *коренная* dicitur. Modus utriusque parandi unus idemque est, nisi quod aestas majorem salis quantitatem, autumnus minorem propter aspergendos pisces requirant.

Parvi pisces etiam non alia ratione sale imbuuntur, qua et maximi, praeter quod hi in pavimento cellae semper jaceant madidi; illi ex cumulis post multum jam sal haustum, tempore aestivo libero aëre exsiccandi, foras deportantur. Hunc in finem in vatagis, quae ex his lucrantur, exstruuntur areae, sive in columnis trabes plurimis ordinibus ponuntur, ad quas pisces funiculis rudibus, *мочалы* dictis, pro mandibula correpti fasciculatim suspenduntur. Exsiccati denuo in cumulos locantur, atque in illis asservantur. 120 *судаковъ* audit in vatagis *мтина*, quae in se comprehendit 20, ut vocant, ligaturas (*связки*), singulas ex 6 piscibus constantes. Unusquisque piscis non minor debet esse quam 8 *вершковъ*. Hujus mensurae piscis appellatur *рядовая* (ordinaria), inferioris vero sc. 6 vel 5 *вершковъ* vocatur *бершовикъ*; quatenus jam hic majori ex parte *бершъ* et *судакъ* parvae molis reperitur. Qui octo *вершковъ* superant, *пластъ* vocantur, quoniam tales non solum exanterari, verum in duas partes secari solent; *secare* vero apud piscatores proprie dicitur *пластать*, hinc *пластъ*.

Ova piscium sub triplici specie praeparantur: aut enim evadunt *зернистая* aut *мешешная*, vel denique *паюсная икра*. *Зернистую* et *мешешную* salsandi modus idem est: nim. de piscibus exempta statim deferuntur ad cisternam, muriam continentem, perque clathrum, quod *грахотка* nominant, cisternae imponi solitum, a fibris partibusque carnosis separata, in eam demerguntur, postea ab *икряникъ* uno vel simul cum operatio horsum vorsum spatulis, *мѣшалка* dictis, miscentur. Diebus calidis aestivis ad spatium quadrantis tantum horae, frigidis, sc. autumno aut hieme, mixtura talis non tam diu procedit. In casu priori efficiuntur ova valde salsa, vocanturque ejusmodi *икра засольная* vel *жаркая*; in posteriori minus salsitudinis contrahunt, audiuntque ejusmodi *малосольная икра*. Hocce modo insalsata de cisterna tolluntur, atque per cribrum humore salso de illis defluxo in dolia reponuntur; quae tum *икра* audit *зернистая*, hoc est, cujus granula sunt illaesa neque condensata. Si volunt *мѣшошная* conficere, tum ova e cisterna exempta sacculis linteis 8 vel 10 libras capacibus excipiunt, atque ad contos, de quibus supra dixi, admovent, quorum superiori saccorum orificia complicata adeo firmiter intorquent, ut nil succi salsi in ovis resideat, toto humore per lintei foraminula a pressione exeunte. Postquam satis jam condensata fuerint, e sacco eximuntur, atque etiam in dolia reponuntur asservanturque. Propter praeparationem ejusmodi ovorum, ova requiruntur recentia, nim. statim de pisce capto sumta.

Паюсная aestivo tantum tempore diebus fervidissimis confici solet; quoniam tum calor *зернистой* aut *мѣшеш-*

ной fieri non patitur. Praeparatur ea sequenti modo; ova extracta simul cum fibris et partibus carunculosis in asseres, ex cortice tiliae paratos, *лубки* dictos, sternuntur, multoque sale asperso in solem, ut dicunt, exponuntur, qui cum ea paulisper arefecerit, miscentur, iterumque ut arefiant, sinunt; quae mixtura alternis vicibus per aliquot horas exercetur. Cum sol humorem absorbuerit, eaque condensaverit; tum cultris ab operariis secantur, fibraeque et carunculae ejiciuntur; tandem sale tantulum aspersa permixtaque de asseribus in dolia colliguntur. Sex horarum spatio, et hoc die fervido, talia ova maturantur; coelo vero subnubilo integer dies requiritur. Si quo die pluvia ceciderit, tum sub tectum afferuntur, ubi aliquando per duos tres ve dies jacent immatura, hoc est non condensata, si condensari tempestas non permiserit.

Colopiscii parandi ratio talis est: vesicula a tergo piscis desumpta cultello parvo inciditur, inque aqua purificata in asseribus sternitur, aestate foris, hieme in tepidis domiciliis, siniturque aliquantulum siccitatis contrahere, qua concepta cuticula superior, carnis adiposae non nihil habens, ab ea detrahitur; interior, quae ipsum colopiscium constituit, in pateram aliquam aut amphoram colligitur. Ex hisce collectis efficiuntur placentae unâ super aliam involutâ, externeque cuticulis superioribus de iisdem tractis obductae excipiuntur linteo ex omni parte eas tegente, sicque circumvestita prelo mandantur. Postquam sub hoc ad certum temporis spatium jacuerint; tum exemtae, linteoque nec non cuticulis solutae materiam ex se mollem, facileque in quaslibes formas ductilem praebent. Itaque ex hac jam artifex secundum normam debitam minora frustula majori una cuticula involvendo ad figuram propemodum cordatam et corniculatam colopiscium, secundum leges artis, parat conficitque. Ne vero cornua in exsiccatione discedant, formaque debita pereat, cautum est cuneolo parvulo tenui ligneo, quem *слиска* vocant, versus cornuum extrema intorto. Ita demum confecta in fila aut fustes longiusculos tenues recolliguntur, subque tecto aliquo foris aut in domibus ad parietes suspensa exsiccantur. Frusta ejusmodi ad formam redacta audiunt *скобки*. Ad unamquemque talem *скобка* piscis *севрюги* vesiculae tres requiruntur; *осетровая* una sufficit; ex *belugae* vero unica tres parari solent. In pondere Rossico *pud* mille *скобки* numerantur. Hinc colligi potest, quot piscibus cujuslibet speciei opus sit ad colopiscii *pud* comparandum. Nimirum *севрюги* tria millia; *осетровъ* mille; *бѣлугъ* 333.

DESCRIPTIONES QUATUOR *PROTEAE* NOVARUM SPECIERUM.

A

C. P. THUNBERG.

Conventui exhibuit die 5 Julii 1815.

Dedi antea descriptiones aliquot novarum specierum e genere *Proteae*, quas in Novis suis Actis Academiae Imperiali, et quidem volumine XV, pag. 458. inserere placuit. E penu meo botanico iterum conquisivi quatuor ex hoc ipso pulcro et specioso genere africano specimina, nova et huc usque scientiae amatoribus incognita, quae, ut spero et vehementer opto, eadem ac priora benevolentia benignoque in memet ipsum affectu fore velim accepta, nec non cum orbe erudito, in augmentum amabilis scientiae communicata.

Patriam hae, ut omnes in genere Proteae, promontorium agnoscunt bonae spei Africes australis, sterilia et nudos ejus campos montesque exornantes, semper fruticosae, rarius arborescentes.

Hae vero species crescunt singulae in interioribus et remotioribus versus orientem sitis regionibus, adeoque rarius occurrentes peregrinantibus curiosis.

Ut vero eo magis descriptiones succinctas illustrarem, earum simul icones adjungere volui, debui.

PROTEA.

P. *plumigera*: foliis filiformibus, subtrifidis, glabris; caule erecto; capitulis plumosis. Tab. XIV.

Caulis frutescens, erectus, glaber, ramosus.

Folia sparsa, filiformia, simplicia, apice saepe bifida, saepius trifida, patentia et curvato-erecta, glabra, pollicaria vel paulo ultra.

Capitula globosa, terminalia, plumosa, nuce avellana majora.

Differt a Pr. *decumbente*, cui similis:

1. caule erecto.
2. capitulis hirsutissimis.

P. *coarctata*: foliis filiformibus, triternatis, glabris; caule ramisque erectis; calycibus brevissimis obtusis. Tab. XV.

Caulis frutescens, erectus, glaber, ramosus.

Rami pauci versus summitatem erecto-coarctati, rigidi, glabri.

Folia sparsa, frequentia, filiformia, triternata seu supradecomposita; trifida, glabra, patulo-erecta, tripollicaria vel ultra.

Capitula terminalia, hirsuta, alba.

Calicinae squamae brevissimae, acutae.

a Pr. *patula* differt:

1. ramis divaricato-patulis, rigidis.
2. calycinis squamis acuminatis.

Tab. XVI. P. *laevis*: foliis lanceolatis, glabris, laevibus, imbricatis; capitulis terminalibus; involucro brevi.

Caulis frutescens, totus glaber, subdichotomus.

Rami pauci, subdichotomi, elongati, foliis tecti, subfastigiati.

Folia sessilia, oblongo-lanceolata, obtusiuscula, imbricata, laevia, ungvicularia.

Capitula terminalia, glabra.

Involucra laevia.

Similis Pr. *coniferae*, a qua tamen differt, quod:

1. in *hac* folia laevia, imbricata: in *conifera* rugosa.
2. in *hac* rami pauciores, elongati, subdichotomi: in *conifera* sparsi, flexuosi.

Tab. XVII. P. *ovata*: foliis ovatis, obtusis, integris, glabris; capitulo terminali; squamis calycinis ovatis, glabris.

Caulis fruticosus, teres, rufescens, glaber, erectus, ramosus.

Rami alterni, erecti, cauli similes, subfastigiati.

Folia sparsa, sessilia, ovata, obtusa, integerrima, plana, erecto-patula, pollicem lata, sesquipollicaria.

Capitulum florum terminale, solitarium, obovatum, grande, glabrum, erectum.

Calycinae squamae imbricatae, ovatae, glabrae.

DE NOVA MEDUSARUM SPECIE.

AUCTORE

TILESIO.

Conventui exhibuit die 23 Aug. 1815.

Proëmium.

In ultimis binis, et quod excurrit, decenniis, historia naturalis Molluscorum sensim increscere incepit. Plura itinera nautica partim ad insularum australium geographiam augendam, partim ad historiam naturalem animalium et vegetabilium exoticorum promovendam instituta, etiam ad Molluscalorum numerum et cognitionem profecerunt. Imprimis Francogalliae scrutatores a *Cuviero* celeberrimo incitati inferiores animalium classes respexerunt, et in simplicioris structurae animalcula marina per seculum fere neglecta attentiores facti vultum induxerunt.

Peronus in itinere nautico Francogallorum, *Bodino* duce ad novae Hollandiae littora instituto, rerum Zoologiam et Ethnographiam spectantium egregius observator, Argonautis Rossicis per triennium antecessit, et praeter multa alia Medusarum copiam collegit, quarum nomina et sciagraphiam in Actorum Musaei Parisiensis fascilulo 94 et 95 publici juris fecit *). Infelicissimo vero ductus consilio auctor nec icones neque observationes specierum, quas detexit, peculiares nobiscum communicavit, sed potius ulteriori et majori opusculo reservandas reposuit. Hisce vero iconibus et phaenomenorum observationibus reservatis sciagraphiae suae bases et argumenta insunt, quae ergo, cum auctor ipse praematura morte Zoologiae studio ac scientiae cultoribus ereptus fuerit, absque fundamento remansit. Sciagraphia haec typis mandata *Peroni* nil nisi prodromum refert, in quo neutiquam nova sua detecta separatim nobiscum communicare voluit, uti primum debuisset, sed potius conspectum systematicum omnium Medusarum auctor in hoc libello exhibuit. Novas et a *Perono* detectas Medusarum species ex hoc libello, in quo nec depictae nec late satis descriptae sunt, cognoscere non possumus, sed legimus tantum earum nomina cum iis jam cognitarum in systema quasi redacta, quae spem frustraneam plura cognoscendi excitant. Conspiciendi et in systema redigendi libido nosrris temporibus ita arrisit, ut nil nisi differentias specificas et genericas respiciant auctores, quo fit, ut sin-

---

*) Tableau des charactères génériques et specifiques de toutes les espèces de Meduses connues jusqu'à ce jour par MM. *Péron* et *Lesueur* inseré dans les Annales du Museum d histoire naturelle de Paris. Cahier 94 et 95 de la Collection ou Cahier IX. et X. an. VII. pag. 325—366. (Voyez le Tome 14. des Annales pag. 325. Genre X.)

gula non satis explorentur et hypotheses ingeniosae factis substituantur.

Permultis igitur Medusarum scrutatoribus, nisi per autopsiam animalium viventium ex ipso oceano praeparati medusarum sciagraphiam *Peroni* aggrediantur, Medusarum structura obscura manebit, donec icones et organorum analyticae explicationes accedant. Qua de causa plures Medusarum novae species, quae et mihi in cursu nautico nostro per triennium occurrebant, et quae meo deinceps studio exploratae sunt, earumque descriptiones et icones communicabo, antequam Commentarium in *Peroni* sciagraphiam Medusarum jam diu consignatum publici juris faciam. Peronii libellus usque adhuc vix plus praestabit, ac Zoologiae Danicae prodromus praestaret, priusquam auctor egregii operis paulo post subsequentis icones illustrantes adjecisset.

Novas ex Archipelago Japonico lectas Medusarum species jam anno 1805 et 1806 delineavi et descripsi, et antequam vix ex itinere redux societati Regiae Goettingensi communicavi, sed cum per seriem annorum typis nondum demandatae nec publici juris factae sint, vereor ne oblivioni prorsus traderentur vel ne aliquis successorum meorum me antecessorem praetereat novaque detecta mihi praeripiat. Hoc saltem certum est, quod jam ex mera *Peroni* sciagraphia Medusarum intellexi, me maximam partem Medusarum in itinere trienni detectarum perdidisse, nisi Peronus antecessor indefessus rem suam inversam incepisset. Ex unico Linnaei genere Medusarum Peronus viginti novem genera stabilivit. An quartum *Peroni* genus Geryonia dictum Medusam saccatam Japonicam meam complectetur, an Melicerta fasciculata *Peroni* vel an Orythia sua cum Medusa mea saltatrice Japonica conveniat? ex brevissimis sciagraphiae definitionibus vix elucet. Telephorum meum australem, quem in collectione iconum historiam itineris celederrimi *Krusenternii* illustrantium vario situ ad vivum delineavi (Tab. XXI. fig. 30 — 36.), ovarium animatum Salpae et Monophorae noctilucae *Borgi de Saint Vincent* nec non Pyrosomae *Peroni* synonymon esse, ex utriusque auctoris relatione itineraria facile intelligitur. Etsi jam nova mea non ad superficiem tantum indagaverim, nec verear, ne coaetaneus vel successor eandem descriptionem completiorem repeteret, tamen mallem nova mea judicio scrutatorum publico submitti, quam suppressa senescere. Monographiae meae de Physaliis errores tantum, neutiquam vero ejusdem virtutes a criticastro quodam e Museo invidia seducto in Ephemeridibus Jenensibus nuperrime indicatas esse, me non impedit, quo minus observationes ulteriores de Medusis Velellis, Porpitis, Actiniis, Ascidiis aliisque molluscis vobiscum communicem. Animalium adeo, quorum nomina saltem jam per secula cognita sunt, descriptiones et icones vobiscum in posterum communicandae praebent, me non novandi sed augendi studio flagrare. Cum enim plurimorum cura et labor eo spectet, ut nova potius invenire, quam jam inventa rite cognoscere studeant, non immerito cum *Retzio* celeberrimo quaero, uter eorum, qui perpetuo novas res detexerit, an qui notitiam rerum jam inventarum firmiorem reddere et augere studet, rerum scientiae melius consuluerit?

Penitiorem rerum novarum et cognitarum cognitionem studeamus et recommendemus.

MEDUSA SALTATRIX, Japoníca nova species ex portu Nangasaki, Japonice *Cassa curragé* dicta.

Medusa pellucida, ovatô-subhemisphaerica, *umbella* campanulata, *margine* umbellae in systole coarctato, *laciniis* octo rubro punctatis tentaculiferis, totidemque *tentaculorum* filiformium *fasciculis emarginato*, intus cava peritonaeo vasculoso vestita *quadricostata, fasciculis* quatuor *intestinulorum* convolutis, spiralibus, glaucis, et *rostro* contorto rubescente centrali *styliformi, stigmate* terminali quadrifido pendulis repleta.

Obs. Medusa subconica, interdum ovata, saepius campanaeformis, pellucida, ac mira et distincta partium fabrica constructa, contra Medusarum morem agilis et continua mobilitate versatilis, ita, ut ne momentum quidem quiescat, sed perpetuo, in systolen ac diastolen sese contrahens, motu agitetur, alternis pulsibus frequentissimis in undis propellit, et ranae ad instar porrectis tentaculis saltat vel prosilit, qua de causa saltatricem denominavi Medusam, caeterum ob structuram intestinulorum, Medusis insolitorum internam admodum complicatam omnium difficillima, iconibus analyticis illustranda.

Umbella hemisphaerico - conica supra gelatinosa, subtus campanulata, tota pellucida, *cavum umbellae* internum, subtus (fig. 4.) apertura ampla dilatabili hians, peritonaeo vasculoso seu venoso membranae arachnoideae simillimo vestitum, *costis* octo (rarius quatuor) ex centro verticali ad peripheriam decurrentibus (fig. 1. *b. b. b. b.*) intertextum (a superiore parte visum fig. 2. et 3. a latere fig. 1; ut systema digestionis et contractionis elucescat). Vascula seu venulae membranae arachnoideae plerumque horizontalem observant directionem (fig. 3 B. gelatina farta A), *costae* vero perpendicularem. Transeunt costae quasi, postquam ad verticem umbellae interioris incurvarunt, in-

intestinula, et intestinula, postquam convolvendo ascenderunt, in rostrum (fig. 1. *a*.). *Costae* sunt organa musculosa et simul vasculosa vel venosa, donec membranae arachnoideae intertextae sunt, venulae enim horizontales vel circulares (fig. 3. B.) ex iis oriuntur vel iisdem communicant. Donec vero ex membrana arachnoidea versus umbellae interioris verticem descendunt vel recedunt, liberae sunt et pensiles, et in hoc statu chordarum elasticarum more (fig. 2. *c. c.*) convolvuntur, fasciculos formant intestinulorum similes, quam ob rem intestinula appellavi. Ex intestinulis ascendentibus ac in centro verticali umbellae iterum conjunctis oritur denique rostrum (*a*. fig. 1.) vel stylus, quod in fig. 1. et 2[da] demonstratum est. *Stylus* vel rostrum centrale rubens cavum campanulatum umbellae (fig. 1. *a*.) occupans (fig. 4. D. *a*.) a quatuor intestinulis (fig. 7.) convolutis circumdatum, contortum, tubulosum, pistilliforme, stigmate quadrifido (fig. 6. et 4. *a*. D.) hians, vel *ore* unico quadrilaciniato instructum oesophagi munere fungi videtur. Descendit nunc oesophagus cum orificio suo quadrilabiato, umbella in systole contracta, ita, ut stigma vel orificium ejus extra aperturam umbellae promineat. In diastole vero rostrum ascendit et in cavum umbellae iterum retrahitur. Costae radiatim ex centro verticali ad marginem umbellae descendentes (fig. 1. *b*. D. fig. 2. *b*.) inseruntur laciniis totidem tentaculiferis (fig. 1. D. fig. 5. D), quae contractione costarum, in systole, fornicatam formam induunt, et tentacula undulata marginalia flagellorum ad instar sursum versus dispergunt vel attollunt, quo facto fibrarum, quibus margo umbellae cingitur ejusdemque apertura coarctatur, circularium ope in diastole introrsum versus iterum retrahuntur, ita, ut hoc motu alterno, aquam feriant, cavo umbellae praedam adducant, humorum in vasis circuitum promoveant, motum respiratorium augeant et Medusam ipsam quovis pulsu ex loco propellant.

Apertura umbellae clausa ac cavo eiusdem interno sat aqua praedaque impleto, medusa formam vertit in subglobosam.

Lacinae tentaculiferae octo semicirculares crassiusculae supra globulis vel granulis rubris ornatae (fig. 5.) subtus tentaculiferae marginem umbellae cingunt, octo tentaculorum fasciculos (fig. 4. *d.d d.d.*) jaculantur, ac imperio (fig. 5. 6.) costarum subditae mox attolluntur mox deprimuntur vel dilatantur vel constringuntur.

Tentacula numerosa, marginem umbellae cingentia, cirrhosa coloris lactei, filiformia, undulato-subulata, fibris longitudinalibus internis et circularibus externis instructa, ad marginem laciniarum inferiorem in octo fasciculos distributa, in quovis fasciculo quindecim vel viginti numerantur tentacula medusa duplo longiora.

Rostri vel *pistilli centralis* pars superior fibris vel vasis membranae arachnoideae, cavum umbellae interioris investientis, circularibus cincta (Fig. 1. C. Fig. 2. *a*) ex intestinulis quatuor spiralibus pensilibus orta ventriculi loco adesse videtur, cui ab oesophago contorto rubescente (Fig. 7.) alimenta ingeruntur, quae deinde per intestinulorum canales quator suscipiuntur, costis adducuntur, et per costarum vasa parallela vel circularia membranae arachnoideae intertexta, per totum umbellae ambitum circumvagantia reliquis partibus nutriendis communicantur. In margine crassiusculo umbellae, laciniis octo tentaculiferis - sinuatis emarginato, praeter fibras circulares, quae lactei coloris sunt et impediunt, quominus subjacentia organa distingui possint, *vena circularis* cum costis octo descendentibus conjuncta inesse mihi videbatur, et forsan haec vena eiusdem naturae ac costae ipsae cognoscitur, musculosae nempe ac venosae simul, et forsan lacteae istae fibrae circulares ad peripheriam umbellae venam ipsam constituunt. Ad peripheriam enim, ubi maxima vis et motus vehementissimi contrahendo et dilatando animadversi fuere, in tenebris etiam annulus noctilucus visus est, et papillae coccineae fere scintillarunt, quod a nullo alio, quam respiratorio motu effici potest. Haec ergo sunt quae mihi persuadent, venam circularem, quae marginem umbellae cingit, respirationis munere fungi. Sic etiam costae cum earum vasculis rectangularibus vel circulis parallelis membranae arachnoideae itertextis systematis nonsolum nervoso-musculosi sed etiam vaculosi organa esse et arteriarum munere fungi videntur: non solum enim facultate sese et omnia cum iis conjuncta contrahendi manifesta gaudent, sed etiam vasorum nutrientium loco inservire videntur. Costas nimirum tubulosas esse, ex vertice umbellae iterum descendere, intestinulorum spiralium nutantium et libere in cavo umbellae fluctuantium formam induere, adeoque in rostri centralis superiorem partem coire vel oesophago contorto jungi, certum mihique ex multis majoribus minoribusque individuis observatis compertum est. Non solum socius Dr. *Horner*, qui animalculum ad vivum delineavit, sed etiam reliqui socii systolen ac diastolen a costis tubulosis simul cum fibris umbellae citcularibus ac laciniis marginalibus tentaculiferis in vivo mollusco perfici primo intuitu observarunt. Medusa haec ex sola partium internarum structura situ et forma admodum contractilis et elastica iterum probat, ut hoc plures jam praeteritis temporibus a me observatae

Medusae probarunt, systema nervoso-musculare cum vasculoso respiratorio et nutriente vel digestionis in unum confluere, ac naturam in his animalibus marinis inferiorum ordinum ac simplicioris structurae plures functiones physiologicas, v. gr. locomovendi, praedam arripiendi, digerendi, in succum et sanguinem vertendi, respirandi etc. conjungere. Nuperrime etiam celeberrimus *Meckel*, Halensis, in explorandis rebus ad anatomen comparatam attinentibus expertus, simile quidquam in Ascidiis detexit, saccum nempe branchialem oesophagi munere fungi ac nullam aliam viam adesse, per quam aqua cum particulis nutrientibus ad ventriculum pervenire possit nisi haec sola, quam in dessertatione de ascidiarum structura demonstravit et icone adjecta illustravit, in qua anatomen ascidiae majoris explicavit.

Organa jam descripta elastica ad inferiorem umbellae superficiem affixa et membranae arachnoideae intertexta, costae nimirum punctum fixum habent in margine umbellae, ubi maxima vis constrigendi, jactandi et vario modo movendi locum habet, donec autem libera fiunt vel ex membrana arachnoidea egrediuntur, pensilia ac nutantia sunt ac per centrum gravitatis, quod rostro centrali inest, antagonisticam vim accipiunt et proprio vigore impetum faciunt. Simillimam fere structuram, partium numerum et functionem in *Slabberi* *) Medusa cymballoidea (Tab. XII. fig. 1. 2. 3.) videmus, et haec species simul probat rostri centralis functionem, quippe quod pisciculo degludiendo accupatum auctor delineavit. In hoc felicisiimo momento, quo auctori contigit, ipsam functionem rostri centralis observandi, forma rostri mirum in modum dilatati neutiquam dignoscenda est. Costae, fibrae musculares vel organa costarum analoga, quorum imperio umbella in systole ac diastole varie movetur, nec non membranula, cui partes in cavitate umbellae pendules affixae et intertextae sunt, ita pellucida fuere, ut non a pictore percepta nec delineata sint. In simillima forsitan specie, quam celeberrimus *Baster* **) delineari curavit, utriusque generis organa in conspectum veniunt, imprimis membranula arachnoidea, forsan laesa et

*) In origine: Naturkundige Verlustigingen behelzende mikroscopische Wahrnehmingen van in- en iutlandssen Waater- en Land-Dieren door *Martin Slabber* sied van de Keiserlike Academie der Natur Ondersoekeren etc. Harlem by J. Bosch 1778 in 4to 17 color Platen; vel germanice versum a Statio Müllero: *Martin Slabbers* physikalische Belustigungen oder mikroscopische Wahrnehmungen von 43 in und ausländischen Wasser und Landthierchen mit XVIII fein illuminirten Kupfertafeln, herausgegeben von A. W. Winterschmidt, Kunsthändler u. Kupferstecher in Nürnberg 1781. in gr. 4to (pretium 3 rt. 8 gr.).

**) *Jobi Basteri* opuscula subseciva Tom. II. lib. II. Tab. V. fig 2 et 3. pag. 55. 56. 57. 58. In ipsa descriptione auctor plura adhuc observata annatovit, quae persuadere valent, medusam suam cum nostra maximam habuisse similitudinem, icones vero probant, artifices, nisi sint rerum ipsarum curiosi, quas stylo repraesentant, male ad hoc negotium applicari.

laciniis quibusdam pendulis lacerata, et si rostrum centrale ac reliquae partes pensiles in cavo umbellae male delineatae vel neglectae sint.

Plura Beröes cucumeris individua cum sex Medusae nostrae saltatricis minoribus individuis in cylindro seu vase vitreo sat amplo et capaci aqua marina repleto ad observandum reposita male se habebant in hacce societate propter vehementissimos saltus et ictus, et mox Medusas a Berois separare coactum me vidi, quia Medusae saltatrices, etsi minores, vehementissimis tamen earum pulsibus haec mollusca multo majora et graviora motu lento et aequali minutissimorum ciliorum ope remigentia, ab una ad alteram vasis partem ejaculatae sunt.

Magnitudo naturalis Medusae nostrae pollicaris, interdum et tripollicaris rarius quadripollicaris est, tentacula illaesa, licet retractilia, tamen duplo longiora. Mense Martio anni 1805 Medusam nostram in Archipelago Japonico ad portum Nangasaki et Megasaki frequentissimam legi et observavi. In spiritu vini conservata brevi tempore collapsa colorem et formam amiserat. Mihi non nisi picturis et descriptionibus in forma naturali conservanda fuit.

Explicatio tabulae:

Tab. XVIII.

Fig. 1. Medusam Saltatricem, a Japoniae indigenis Cassa Cu-

ragé vel curasché dictam a latere sistit. Varietas octoradiata est, vel octo costata, naturali magnitudine et in diastole laciniis reclinatis tentaculisque dispersis, delineata. A gelatina pellucida umbellam exteriorem formans intus C. peritonaeo costato vel membrana arachnoidea vestita *b.b.b.b.* costae vel radii ad lacinias marginales rubro punctatas D tentaculiferas descendentes. *a*) apertura umbellae, in cujus centro rostrum tamquam pistillum vel malleus in campana pendet.

Fig. 2. Umbellam cum partibus in cavitate pendulis a superiore parte visam sistit C. gelatina farta *b.b.b.* costae descendentes *c.c.* intestinula ex costis orta pensilia, quae postquam convolvendo ascenderunt, ad formandum pistillum a) vel rostrum conveniunt.

Fig. 3. Umbella ex solo vertice visa A. gelatina farta, eiusdem crassities usque ad internam umbellae superficiem, membranula arachnoidea C. vestitam et vasculis circularibus intertexta *b.b.b.b.* costae octo in inferiore umbellae superficie descendentes et in vertice *a*) ad formanda intestinula et pistillum conjunctae.

Fig. 4. Medusa ab inferiore parte visa D. apertura umbellae hians *a*) stigma vel os quadrilaciniatum

rostri, quod in centro cavitatis dependet *c.c.* intestinula quatuor, quae rostrum circumdant et in eadem cavitate dependent. *d.d.d.d.* fasciculi octo tentaculorum laciniis totidem affixorum.

Fig. 5. Lacinia tentaculifera singula cum singulo tentaculorum fasciculo, a latere visa, magnitudine aucta, D) margine abscissa. *b.* costa, cuius imperio sursum deorsumque dirigitur *d.d.d.* tentaculorum insertiones, glandulis vel globulis coccineis supra notatae.

Fig. 6. Rostrum vel pistillum ex inferiore parte visum, ut stigma vel orificium quadrilabiatum et musculi, quorum imperio labia absorbendo moventur, in conspectum veniant.

Fig. 7. Rostrum a superiore parte visum, ut intestinulorum circumvolventium vestigia, quorum ope nutrimentum ex praeda capta absorptum ad intestinula et costas transfertur, in conspectum veniant.

DESCRIPTIO ET ANALYSIS CHEMICA STEINHEILITHI

AUCTORE

J. GADOLIN.

Conventui exhibuit die 28 Febr. 1816.

Ad morem mineralogorum, qui fossilia, vel recens detecta, vel, ob deficientem cognitionem, improprie antea denominata, novis appellant vocabulis, recordationi virorum de aucta Oryctognosia meritorum convenientibus, nos quoque ausi sumus, in memoriam Excellentissimi Comitis, Generalis et Finlandiae Gubernatoris, Domini Fabiani de Steinheil, *Steinheilithum* vocare lapidem in Finlandia repertum, *quartzum caeruleum* hucusque nuncupatum, cujus naturam a quartzo alienam esse primus, quod sciamus, observavit Excellentissimus Vir; qui successivas horas, quotquot summi negotii curarum vacuas habet, scientiae mineralogicae et geologicae studiis impendere amans, nulli peperuit operae nec pretii, ut genuinam illius lapidis formam ceteraque criteria certius indagaret.

Quae, svasu Excellentissimi Comitis de Steinheil, in hunc lapidem instituimus experimenta analytica judicio jam submittimus Illustris Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, exordium, venia Excellentissimi Comitis, ducentes a descriptione characterum genericorum, quam nobiscum benignissime communicavit, in linguam latinam, adhibitis terminis technicis celebris Reussii, conversa.

Sic vero lapidem descripsit Comes de Steinheil:

„Color fossilis sincerissimi est *obscure violaceo-azureo-* et *berolino-caeruleus*, qui vero, in majoribus crystallis, per *picturas maculatas*, *fasciatas* et *nubiformes*, transit in *clarius caeruleum*, *griseo-caeruleum*, *viri-descenti-griseum* et *nigro-viridem*, prout in lapide parcius vel abundantius immixtae sint particulae quartzi aut substantiae micaceae *minutissime squamosae*, *reticulatae*, oculo nudo vix discernendae. Rarius inspersae repe-riuntur maculae *rubro-caryphyllino-* vel *capillari-brunae*. Propter parvas fissuras atque rupturas, frequentissime in lapide obscure caeruleo comparentes, cernitur interdum vividus diversorum *colorum lusus*. Nonnunquam adeo obscurus est caeruleus color, ut, qui, lapide versus lumen spectato, viridissimus apparet, in quocunque ceteroquin situ, nigri speciem prae se ferat.

„Qua figuram externam, habetur aut *compactum*, in frustis *irregulariter angulosis;* aut *crsytallinum*, sub sequentibus formis:

A) prismatum quadrilaterorum, s. parallelepipedorum,
  a) aequilaterorum, rectangulorum,
  b) duobus planis oppositis latioribus, duobus angustioribus comprehensorum,
  c) *marginibus terminalibus truncatis*, quod rarissimum est,
  d) singulis *marginibus longitudinalibus*, vel uno plano *truncatis*, vel duobus planis *acuminatis*. Ubi, adeo crescente latitudine *planorum truncaturae*, ut haec in ipsis prismatis planis concurvant, transformata videtur crystallus, vel in

B) prisma sexlaterale *compressum*, cujus aut
  a) quatuor latiora et duo angustiora sunt plana opposita, aut
  b) duo latiora opposita et quatuor angustiora; vel in

C) prisma octolaterale *compressum*, sub quatuor latioribus et quatuor angustioribus planis ita comprehensum, ut contigua quaeque duo latiora duoque angustiora alternatim se mutuo excipiant. Ex contiguis duobus sive latioribus, sive angustioribus planis, unum plerumque prae altero majorem habet latitudinem. — Sed unumquodque aequale semper et parallelum est plano sibi ad alteram prismatis partem opposito. Margo inter latius et angustius planum plerumque est *obtuse truncatus*, rarius vero margo inter duo latiora plana, et rarissime auctus ille, qui inter duo plana angusta situs est. Interdum plana latiora, et inter se, et cum *planis truncaturae* adeo obtusos formant angulos, ut efficere videantur partes superficiei continuae curvatae convexae. Praeterea aciem oculi fugere solet verus planorum situs, propter strias et inaequalitates, secundum longitudinem prismatis frequentissime observatas.

„Magnitudine per omnes gradus, inter *eximie grandes* et *parvas* variant crystalli. *Eximie grandia* inveniuntur prismata sexlatera et octolatera, quae raro omni ex parte perfecta sunt, sed saepius per coalescentiam cum quartzo et pyrite alterata, coarctata et varie deformata. *Mediocriter grandes* et *parvae* crystalli raro sunt solitariae, utplurimum vero planis suis aut angustioribus aut latioribus ita inter se connatae, ut aggregata *scapiformia* repraesentent. Haec per coagmentationes prismatum breviorum cum longioribus *decussata* et *fasciculata* novas sistere videntur crystallorum formas plus minus irregulares, quarum superficies scabrae sunt et sulcatae, terminique valde gibberi.

„Superficies lapidis plerumque est striata, apud specimen *compactum inaequalis*, apud crystallinum *laevis*.

Illa semper fere obtecta est cortice talcosa nigra, grisea vel obscure viridi; haec cuticula tenuiore, *cericum nitorem* monstrante, aut *nitoris experte.*

„Aspectus internus fossilis obscure caerulei est *multum nitens* vel *vitreus*, pallidioris *minus nitens*, *nitore cerico* distinctus, vel prorsus *expers nitoris.*

„Fractura obscure caerulei speciem habet *festucarum majuscularum* vel *minuscularum*, et transire videtur ad *formam conchae imperfectam*, interdum adeo *planatam*, ut *squamas* fere *lamellosas* exhibeat. Hic transitus speciatim in lapide pallidiore ejusque *fractura transversali* observatur. *Fractura* ejus *principalis* faciem *confuse lamellosam* ostendit.

„Fragmenta plerumque irregularia sunt et *marginibus acutis* praedita. Nonnunquam formas exhibent rhomboïdales, praesertim in speciminibus clarius caeruleis. In frustulis segregatis intertexta esse videtur materia *obscurior, pellucida* striis et fasciis nonnisi *transparentibus, clarioribus, rectis*, *testaceis*, quae totum frustulum transeuntes consistere videntur ex membranis *cinereis, micaceis,* nudo oculo vix discernendis, antequam ignitus fuerit lapis; tum vero comparentibus sub forma squamularum opacarum, colore flavo in fisso lapide conspicuarum, quae picturas producunt *viridescentes*, *nubosas*, *maculatas*, destructo simul, magna ex parte, pulcro lapidis colore caeruleo.

„Pelluciditas frustulorum *obscure caeruleorum* et *brunorum*, quae crassitiem duarum linearum habent, evidens est. Viridescentia specimina nonnisi *transparentia* sunt, et interdum in acutissimis tantum marginibus radios luminis transmittunt.

„Duritia, quartzo simile est.

„Ductilitate fere caret. Non enim obstat tenacitas lapidis, quominus facillime frangatur.

„Gravitas ejus *parva* est. Pondere specifico parum a quarzo differt.

„Odorem afflatu prodit *argillaceum*, in speciminibus viridescentibus maxime notabilem.

„Transitus in lapidem talcosum duplici comparet modo. Aut enim terminos crystallorum parvarum, cuticula nigra obtectos, penetravisse observatur substantia serpentinea *coloris corvino-nigri*, quae per gradus insensibiles in caeruleo lapide avanescit; aut ita comparata esse videtur tota crystallus, ut ab una parte sit nigra, et hunc colorem pedetentim in griseo-viridem mutet, ab altera parte caerulea, gradatim evadens pallide viridis, deinde magis magisque ad luteum et nigrum vergat, desinatque tandem, aut in corticem nigram, aut in speciem *actinoti*.

„Locus natalis est fodina cupri ad Orijervi in paroecia Kisko Nylandiae, gubernii Tavastehusensis sita. Ibi quondam in vena antiqua, jam deserta, detectum hoc fossile, nomine *quartzi caerulei* hucusque nuncupatum, uberius pulchriusque, quam in recentioribus venis comparuit, admixtum utplurimum vel quartzo vulgari, vel pyritae cupreo, varietatibusque talci. Massae ejus majores *tuberosae* et *reniformes* passim offensae sunt circumdatae cortice asbestina, actinoto, chlorite aut mica, materiave laevi serpentino simili. Copiose quoque sibi immixtum habuerunt pyritem cupreum, parcius pseudogalenam, et galenam plumbi, nonnunquam etiam molybdaenam. Forma crystallina magis regularis et claritas coloris eminentior esse cernitur in speciminibus ex vena illa antiqua desumtis: in recentioribus autem venis magnitudine insigniores repertae sunt hujus fossilis massae."

Ad experimenta nostra selegimus frusta lapidis intensius caerulea et maxime pellucida, quorum pondus specificum, in temperatura caloris 16 graduum thermometri centigradi, invenimus esse 2,6026, repraesentante unitate pondus specificum aquae.

Ante tubum ferruminatorium igni exposita mox indolem prodiderunt a natura quartzi diversam, siquidem cum carbonate sodae neque phaenomenon effervescentiae produxerunt, neque in vitrum coiverunt. A borace facilius suscipiebantur; sed hujus quoque magna copia necessaria fuit ad solutionem praestandam. Globulus vitreus sic productus pellucidus fuit et colore destitutus.

In vase aperto ignita plurimas obtinuerunt rimas, quae opacitate, colore lacteo, cinereo vel rubente conspicuae, lapidem decussatim penetraverunt, eumque in partes fere rhombicas diviserunt. Rimis interjacentes lapidis partes vitreum servaverunt nitorem, sed minus pellucidae evaserunt, et colorem obtinuerunt partim pallidius caeruleum, partim flaventem et opalinum. Diffracto lapide usto, in superficiebus rimarum conspectui sese obtulerunt particulae micaceae. Itaque probabile nobis fuit, hoc fossile non ex homogenis constitui partibus, sed formatum potius idem esse ex quartzo et mica inter se commixtis, usque quo, peracta ustione in vasa bene clauso, observaremus alia obtinere phaenomena. Sic enim candefacta frustula integritatem et homogeneam apparentiam servaverunt. Color tum in obscuriorem griseo-caeruleum conversus fuit, pelluciditas diminuta et nitor vitreus in cericum mutatus. Propterea existimamus, aequali probabilitate explicanda esse phaenomena diversorum colorum atque rimarum visibilium ex aëris in materiam lapidis actione, cum illi ad hujus partes interiores, pateret per fissuras aditus.

Fissuras in lapide, sub ustione ortas fuisse censemus, partim ex destructa cohaerentia partium per inaequalem earundem dilatationem vi ignis aegre transmissi, partim ex eruptione particularum aquae, inibi pariter ac in salibus crystallinis occultatae, vi ignis ad formam elasticam redactarum. Observavimus enim hunc lapidem in igne notabilem pati ponderis jacturam eamque diversam pro variato ignis gradu et tempore ustionis. Sic centenarius lapidis, qui ad rubedinem ignitus nonnisi dimidiam libram ponderis amisit, in igne ad fundendum ferrum sufficiente candefactus, tres libras cum quadrante perdidit. Observavimus porro, minus detrimentum capisse lapidem repetitis vicibus ignitum et interea refrigeratum, quam qui semel diutiusque ureretur; et minus, qui in apertis, quam qui in clausis perureretur vasis. Quae phaenomena indicare videntur, ab admisso aëre recuperari partem ponderis per fugatam aquam perditi, sive magis fixam in lapide fieri aquam ex affectione sibi per accedentem aërem communicata. Indeque concludimus, quantitatem aquae in Steinheilitho contentam certius excedere tres centesimas hujus ponderis partes.

Pro experimentis sequentibus lapidem triturando cum aqua, in mortario achatino ad subtilissimum pulverem redegimus. Sub trituratione sentiebamus odorem, qualis ex humectatis corporibus argillaceis, quae ferrum parum oxidatum fovent, exhalare solet. Ipse pulvis adhuc humidus cinereo comparuit colore, siccatus fere albus evasit. Ad singula experimenta ejus centenarium adhibuimus docimasticum, sive octavam unciae partem, quam pro unitate habemus, numeris integris vel decimalibus significantes pondera aliarum substantiarum.

Experimentum 1.

a) Pulveri lapidis superfundebantur 17$\frac{2}{3}$ pondera acidi muriatici, quod mox flavescebat, et, juvante calore, signa effervescentiae producebat, odoremque nonnihil foetidum, illi similem, quem excitant vapores acidi muriatici cum gase hydrogenio mixti. Liquor, sub diutina digestione saepius agitatus, evaporata maxima acidi parte, spissitudinem mellis contraxit, et colorem e viridi fuscum: Multa aqua dilutus decantabatur e pulvere albo non soluto, qui tandem sufficienter elotus, in filtro chartaceo collectus et siccatus dimidium circiter lapidis pondus habuit. Ante tubum ferruminatorium, cum carbonate sodae, sub effervescentia solvebatur in globulum vitreum pellucidum, cum acido phosphorico in globulum opacum, proptereaque indicavit, omnes fere partes solubiles, per acidum muriaticum e conjunctione silicae subtractas fuissse.

b) Solutio saporem in lingua excitavit acidum, dulcem posteaque austerum. Privata, per carbonatem potassae, acido abundante, luteo conspiciebatur colore. Insuper addito carbonate, praecipitatum exhibuit flaventem, valde diffusum, quod, decantato liquore, in filtro colligebatur et aqua eluebatur.

c) Superficies liquoris aquosi ita obtenti aëri exposita tegi videbatur pellicula tenuissima. Ex eodem, super ignem collocato, secernebatur pulvis albus, qui lateribus vasis adhaerebat, et ab addito acido sulphurico, cum effervescentia facile solvebatur, liquidum producens sapore sulphatis magnesiae distinctum.

d) Praecipitatum (*b*) siccatum ab instillato acido sulphurico non sensibiliter mutabatur. Adfusa vero aqua, totum fere pedetentim solvebatur, liquorem exhibens non coloratum, qui, evaporata iterum aqua parte, demisit pulverem album, initio subtilem, deinde in massam granosam coëuntem. Restituta hujus, peradditam aquam, solutio, sapore dulci austero praedita erat. Admiscebatur ipsi ammoniaca pura aquosa, quae subflavum dejecit pulverem. Liquor supernatans vix mutabatur a solutione potassae purae, vel carbonatis potassae.

e) Pulvis per ammoniacam dejectus, aqua sufficiente elotus, digerebatur cum decem ponderibus carbonatis ammonicae in aqua solutis, quibus nihil tradere comperiebatur. Decantatus enim liquor limpidus, et ad siccitatem evaporatus, avolavit deinceps vi caloris, sine residuo.

f) Eidem pulveri, aqua denuo eloto, adhuc humido, adfundebatur acetum destillatum, quod in frigidiore temperatura lacteam obtinuit opacitatem, in calore vero claruit, solutionem praebens flavo vini colore conspicuam, quae per evaperationem in minus spatium coarctata obtegi videbatur levi spuma alba pulverea, tandemque tota ad formam gelatinae cogebatur. Admixta ipsi aqua liquidam iterum produxit solutionem, natantem super materia fusca gelatinosa.

g) Hocce mixtum, ammoniaca pura saturatum, mox totum in gelatinam abiit. Paullatim vero secernebatur liquor limpidus coloris expers e subsidente materia gelatinosa flavente, quae decantato liquore, per novam aquam pluries eluabatur. Ex his liquoribus commixtis et evaporatis separari videbantur particulae ochraceae, quae seorsim collectae et siccatae formam acquisiverunt squamularum flavo-fuscarum nitentium, naturamque oxidi ferri prodiderunt.

h) Materiae gelatinosae (g) e solutione acetica praecipitatae admiscebatur aequalis quantitas solutionis potassae causticae aquosae concentratae, quae in fortiore digestionis calore omnem gelatinam in liquidam solutionem convertebat, excepto pauxillo pulveris obscure rubri. Sub refrigeratione vero nebulosus evasit liquor, deposuitque pulverem ochraceum notabiliorem qui itidem naturam ferri oxidati prae se tulit.

i) Solutio haec alcalina ab addito sulphate ammoniacae turbata, fugata vi caloris ammoniaca, pulverem dejecit fere album, aluminae simillimum solvebatur enim paullatim ab acido sulphurico aqua diluto et calefacto, cui saporem aluminis impertiebat. Veras quoque crystallos octaëdricas aluminis, per additum solutioni nonnihil potassae, progenuit.

Consideratis phaenominis hujus experimenti, ad eam ducimur conclusionem, quod potissimum ex silica et alumina, cum minore quantitate magnesiae et ferri compositus sit Steinheilithus. Vestigia gasis hydrogenii, sub solutione in acido muriatico observata existimavimus derivanda esse ex actione aquae in partes lapidis parum oxidatas.

Experimentum 2.

Pulvis lapidis cum quadruplo pondere acidi nitrici digestus et coctus parum mutari videbatur, nisi quod ad subcaeruleum ejus vergeret color, simulac leviter flaveret acidus liquor. Addebantur quatuor pondera acidi muriatici, quibus efficacia ad pulverem solvendum augebatur. Cum per diutinam digestionem et evaporationem acidi superflui in massam spissam, coloris flavo-fusci redactus esset liquor, coivit hic, sub refrigeratione, in solidum ex parvis crystallis contextum, quod, aqua ebulliente extractum, intactum reliquit pulverem album. Hic cum nova acidi nitro-muriatici portione digestus nonnihil minuibatur, tandemque aqua elotus, et in temperatura aëris ad gradus 60 calefacti siccatus, effecit 0,567 pondera. Tactu quidem lenis fuit, at cum aequali circiter quantitate carbonatis sodae in foco tubi ferruminatorii effervescentiam produxit et in vitrum pellucidum coivit.

Liquori, evaporatione ad spatium octo ponderum aquae redacto, admiscebatur solutio sulphatis ammoniacae, quae effecit, ut sub refrigeratione secernerentur crystalli octaëdricae, quae separatim collectae ponderi 3,2 aequales fuerunt, saporem habuerunt acidum, dulcem, nonnihil acrem, et quae in aëre calido, partim in pulverem fatiscebant, partim formam crystallinam sustinebant. Has ex alumine et sulphate magnesiae ac potassae, sale ferri contaminatis, mixtas fuisse comperimus.

Separato a crystallis liquori addebatur ammoniaca fere ad saturationem acidi. Deinde admiscebatur benzoas ammoniacae aqua solutus, qui pulverem ochraceum dejecit. Hic elotus et in aëris temperatura siccatus nigrum obtinuit colorem et pondus 0,15. Ignitus magneti obediit et 0,04 ponderavit.

Evaporato denique liquore colatione separato, obtinuimus crystallos sulphatis ammoniacae, quibus immixtae erant aliae, subtiles, plumosae, in aëre calido fatiscentes, ponderis 0,162, quae sapore amaro indicaverunt salem magnesiae, et odore, dum fortius calefierent, acidum benzoicum.

Experimentum 3.

A) Acidum sulphuricum, sive concentratum, sive aqua dilutum nihil efficere videbatur in frustula lapidis caerulea. Lapidis igniti rimae, fusco colore conspicuae, per coctionem cum acido sulphurico, albae evaserunt. Nihilominus inde neque augmentum neque detrimentum ponderis cepisse observabatur lapis, neque partes quasdam solutas suscepisse acidum.

B) Ipse quoque pulvis lapidis, cum decuplo pondere acidi sulphurici concentrati digestus, initio parum mutabatur. Cum vero ad ebullitionem redactum esset mixtum, nigrescente liquore, pungentem sparsit odorem acidum vaporans. Addita aqua, flavens oriebatur solutio, in qua, sub refrigeratione, aciculae salinae nascebantur, quae, per evaporationem aquae, crescendo massam crystallinam formabant in aqua calida solubilem. Attamen hac via vix ultra septimam totius pulveris partem solutam obtinuimus. Ex residuo, quod colore et odore argillae griseae simile fuit, per acidum muriaticum, difficilius quam ex pulvere lapidis antea intacti suscipi videbantur partes solubiles.

C) Pulvis lapidis aqua calida humectatus digerebatur per aliquot horas cum octuplo acidi sulphurici pondere, pari aquae quantitate diluti. Evaporata aqua, et aucto calore usque fere ad ebullitionem acidi, nigrescebat liquor et spissitudinem contraxit, quam etiam refrigeratus servavit. Addito vero aquae pauxillo, crystallos obtubit et refrigeratus in massam solidam salinam concrevit. Adhuc tamen maximam lapidis partem non resolutam fuisse deprehendimus.

D) *a*) Subtilissimus lapidis pulvis, elutriatione per aquam ex particulis adhuc granosis separatus, cum 30-plo pondere aquae calidae et triplo pondere acidi sulphurici, in ebullitionis calore digerebatur, usque quo, evaporatione abiret aqua. Liquor acidus obscuro jam tinctus colore et spissus ad siccitatem vi ignis redigebatur. Aqua ipsi adfusa calorem excitavit et partem massae dissolvit. Pars non soluta pulverea fuit, subcinereo comparens colore. Haec denuo cum acido sulphurico digesta, per aquam tandem elota et siccata in temperatura 60 graduum thermometra ponderavit 0,571, ignita 0,518. Naturam habuit silicae fere purae.

b) Solutiones per acidum sulphuricum factae, commixtae evaporabantur, usque quo, per refrigerationem, in massam solidam crystallinam concrescerent. Huic vi caloris liquefactae adfundebatur alcohol, quod copiosum dejecit pulverem album salinum, qui alcohole elotus, in filtro chartaceo collectus et in temperatura aëris vulgari post intervallum aliquot hebdomadum ad siccitatem redactus, ponderis 3,65 fuit, atque in triplo aquae perfecte solubilis. Ex solutiones hujus aquosa, per lentam evaporationem primum obtinebantur crystalli granosae quadrangulares, ponderis 0,66, quae ab aqua fervida solutae, admixto carbonate potassae, dederunt carbonatem magnesiae, fere purum, praecipitatum, ponderi 0,22 aequalem; in quo propterea circiter 0,05 pondera magnesiae purae latuerunt.

c) Separatus ab his crystallis liquor, ulteriusque evaporatus coivit in massam mollem squamosam, sensibiliter acidam, cujus per aquam facta solutio, alcali saturata ab oxalate potassae non mutabatur, cum carbonate vero potassae praecipitatum dedit album nonnihil flaventem, quod siccatum colore terrae tripolitanae conspiciebatur, et in igne ad rubedinem ustum aequale fuit ponderi 0,32. In hoc aluminam potissimam partem efficere comperimus, praetereaque nonnihil magnesiae et tantillum oxidi ferri.

d) Liquor alcoholicus fortiter acidus fuit. Evaporato, vi caloris, alcohole, massam praebuit nigram ex immixtis particulis carbonaceis. Admixta ipsi solutio carbonatis potassae praecipitatum protulit luteum spongiosum, quod una cum carbonacea substantia in filtro collectum, elotum, siccatum et in igne rubente ustum ostendit naturam ochrae ferri, obscure fuscae, magneti obedientis, ponderis 0,05.

Experimentum 4.

a) Pulvis lapidis cum duplo pondere pulveris crystallorum carbonatis potassae commixtus, in crucibulo argenteo igni exponebatur, quo argentum liquescere incipiebat. Reperiebatur in crucibulo massa obscure grisea, fere nigra, parum cohaerens, quae jactura ponderis sui indicavit fere omnem aquam crystallisationis et acidum carbonicum e carbonate fugata fuisse. Per adfusam aquam calidam obtinebatur solutio alcalina, quae cum acido nitrico parum effervescebat. Liquoris ita saturati parti adstillabatur solutio nitratis plumbi, quae limpiditatem non deminuit. Alteri ejusdem parti admiscebatur solutio sulphatis ammoniacae, ex qua lactescebat, pulveremque album ad fundum vasis demittebat. Hic pulvis separatus, nonnisi quae partem ab acido sulphurico suscipiebatur, alumen cum eodem producens. Ex his phaenomenis vidimus, in solutione alcalina nullam latuisse substantiam quae cum plumbi oxido solem insolubilem progignere potuisset, aluminae vero et silicae tantum adfuisse deteximus, ut simul sumtae ponderi 0,018 aequarentur.

b) Pulvis ab aqua intactus, adhuc fere niger, cum acido muriatico sensibilem produxit calorem et odorem gasis hydrothionici. Quum, per coctionem cum aqua, inde extractae essent partes solubiles, restitit pulvis nigricans, qui elotus et siccatus pondere effecit quintam lapidis partem. Hanc mox pro parte lapidis non mutata habuimus; sed observavimus ipsam nigrum colorem in igne servasse; cum borace abundante in vitrum pellucidum non coloratum; cum minore boracis quantitate vitrum obscure tinctum produxisse, carboni, super quo in foco tubi ferruminatorii tenebatur, non adhaerens; eandemque per diutinam coctionem cum acido muriatico dimidium sui ponderis, ad modum ipsius lapidis perdidisse, et remanente pulvere albo, solutionem obtulisse viridescentem, ex qua, per alcali praecipitata, obtinebatur pulvis flavens, in roseum vergens, cujus naturam et originem, alia occasione propius examinare nobis proposuimus.

c) Solutio, quam ex lapide cum potassa usto et aqua eloto, per acidum muriaticum impetravimus, evaporatione in gelatinam coivit, qua ad siccitatem redacta, per aquam et acidum muriaticum extracta, residua obtinuimus 0,448 pondera silicae, quae per ignitionem ad 0,376 reducebantur.

d) Separata silica, ferrum solutum per prussiatem potassae vulgarem, sive ferro oxidato onustum, dejecimus, et obtinuimus 0,27 pondera prussiatis ferri, quae nobis indicaverunt 0,045 pondera ferri metallici. Ex quo judicavimus 0,057 pondera ferri in toto lapidis pulvere latuisse.

In residua solutione muriatica, per phaenomena supra memoratis similia, adfuisse intelleximus aluminam et magnesiam.

Experimentum 5.

a) Pulvis lapidis, cum quadruplo pondere carbonatis sodae, aqua crystallisationis privati, commixtus, in crucibulo platinaceo igni expositus convertebatur in massam opacam, albam, nonnihil flaventem, quae ab acido muriatico diluto soluta, facta evaporatione, formam contraxit gelatinae. Haec siccata digerebatur cum aqua acido muriatico acuata. Remansit pulvis silicae albus, cujus pondus, post siccationem in temperatura aëris aestiva aequalis fuit ponderi 0,6776 post ignitionem vero nonnisi 0,45.

b) Solutioni muriaticae admiscebatur potassa acido hydrothionico saturata, ex qua atro tingebatur colore et plane opaca evasit. Lentissimeque, in vase bene clauso servatum, deposuit pulverem atrum, subtilissimum, valde spatiosum. Hic pulvis, filtri ope, a liquido separatus colorem in aëre paullatim mutavit primo in lividum, deinde, cum siccum evaderet, in ochraceum. Post exsiccationem aqua calida elotus, iterumque in temperatura aestiva siccatus aequivaluit ponderi 0,735. Fortiter vero ignitus reductus fuit ad pondus 0,336, et tum particulas ochraceas obscure fuscas, albis granosis immixtas exhibuit.

c) Liquor ex hoc praecipitato colatus mox nigricans fuit, deinde, accedente ipsi aëre, claruit, tandemque limpidus, coloris expers evasit. Per additum oxalatem potassae turbatus copiosum demisit pulverem album, qui post perfectam in temperatura aëris siccationem ponderi 0,18, post ignitionem vero ponderi 0,09 aequalis fuit. Ustus ab acido muriatico lentissime, qua partem tantum, solvebatur. Perficiebatur ejus solutio juvante digestionis calore, cum additum esset acidum sulphuricum aqua attenuatum.

Sic tamen quoque remansit insolutus exiguus pulvis siliceus, cum aciculis nonnullis gypseis mixtus ponderis circiter 0,005.

d) Tandem liquorem ex praecipitato oxalico colatione separatum per carbonatem potassae dirimendo, obtinuimus pulverem pallide flaventem ponderis 0,076, qui igne candefactus ad pondus 0,05 reducebatur.

e) Ex hoc pulvere cum praecipitato (*b*) commixto per acidum sulphuricum et muriaticum, juvante calore, extraximus aluminum oxidumque ferri, quae praecipuae erant utriusque partes. Atque sic obtinuimus residuum pulverem subtilem roseum, ponderis 0,018 quem pro terra silicea habuimus, per inquinamentum quoddam rubente, quia cum carbonate sodae eum facillime vitrum pellucidum formare vidimus, in igne quidem flavens, post refrigerationem vero colore destitutum.

Itaque ex phaenomenis hujus experimenti conclusimus silicam in pulvere lapidis contentam, partes ejusdem 0,473 effecisse. Et cum ex experimento 4, (*d*) intelligeremus ferri metallici pondus fuisse 0,057, ejus oxidati quantitatem in praecipitatis experimenti 5 supputandam esse aequalem ponderi 0,073 judicavimus. Proinde esset pondus aluminae aequale ponderibus $0,336 + 0,05 - 0,018 - 0,073 = 0,295$. Magnesiae quantitatem, secundum experimentum 5 (*c*), exprimendum esse pondere 0,085 censemus.

His consideratis, partes constitutivas Steinheilithi ita exponimus, ut in centarario lapidis sit *silicae* librae 47,3

aluminae	29,5
magnesiae	8,5
ferri oxidati	7,3
Defectum ponderis ex jactura *partium fugacium*, potissimum *aquae*, derivandum putamus	7,4
	100,0.

Ferrum, quod certius minimo gradu oxidatum in lapide adest, propterea non videtur tantam ibi efficere partem ponderis, quantam in hac expositione ferro oxidato tribuimus; sed cum ad fidem pronum sit, ceteras substantias cum ferro conjunctas similiter esse in lapide comparatas, sive magis minusve ad naturam radicalium suorum inflammabilium propinquas, ponderaque singularum terrarum ibidem non eadem fuisse, ac quae in segragatis et igne torrefactis partibus inveniuntur; existimamus, per experimenta analytica nondum exacte satis definire posse veram rationem ponderis singularum partium.

Aquam notabilem efficere hujus lapidis partem vidimus ex tentaminibus in antecessum jam memoratis. Utrum vero omnis defectus ponderis in serie partium constutivarum observatus, dependeat ab aqua sola, cujus copia sic in lapide etiam candefacto longe major esset quantitate aquae in partibus lapidis segregatis et ignitis residua, multo vero minor illa quae substantiis in temperatura caloris 60 graduum siccatis adhaeret, nobis non certo constat, cum experimenta nostra indicent alias praeterea substantias volatiles in lapide occultatas esse.

Sic odor foetidus, quam acquisivit acidum muriaticum exp. 1. cum pulvere lapidis digestum, et niger color acidi sulphurici cum eodem fortius celefacti, exp. 3. indigitasse visi sunt praesentiam substantiae oleosae vel carbonaceae, similiterque odor hepatius experimenti 4, (*b*) praesentiam sulphuris, quamvis propter nimiam exilitatem nudari non potuerint hae substantiae.

Dubium quoque nobis adhuc est, annon calx, cujus vestigia heic nonnunquam reperimus ad ipsum lapidem pertineat, vel utrum potius aut ex peregninis substantiis fossili nostro forte immixtis venerit, aut aliter sese sub nostris experimentis insinuaverit.

Quamvis ceteroquin analysin jam descriptam, tantum non omni ex parte perfectam, et, per congruentiam plurium experimentorum variis viis institutorum, quodammodo confirmatam esse putaremus: postea tamen deprehendimus aliquam ejus correctionem necessariam esse, propter non satis nobis perspectam naturam materiae in pulvere rubro experimenti 5. (*e*) haerentis. Hunc enim, cujus color roseo-ruber peculiarem poposcerat attentionem, cursim tantum, cum admodum exigua ejus nobis supperesset quantitas nonnullis adhuc subjicientes periculis, sequentia deteximus phaenomena.

1) In igne ad rubedinem calefactus colorem roseum sustinuit. Fortius calefactus, praesertim super carbone in foco flammae recluentis ante tubum ferruminatorium, obscure griseus tandemque nigricans evasit.

2) Cum carbonate sodae in flamma reducente fusus nigrum produxit vitrum, in foco oxidationibus apto colorem fere perdidit et pelluciditatem acquisivit globus vitreus. Hic, ex addito frustulo ferri metallici, viridem contraxit colorem, pellucidusque mansit. Neque mutata esse videbatur superficies nitida ferri.

3) Cum borace similiter fere sese habuit, tardius vero solvebatur, vitrum coloris expers produxit.

4) Cum phosphate ammoniacae globulum produxit lacteo colore conspicuum, qui ex aucta phosphatis quantitate fere pellucidus fiebat. Ferrum cum hoc globulo

fusum regulum candidum ferri phosphorei progenuit, vix mutato aspectu vitri.

5) Ab acido nitrico frigido non mutabatur. In calore digestionis nonnullas bullulas aëreas emisit, et acido colorem vini flaventis impertiit. Ipse tamen pulvis non sensibiliter minuebatur, neque qua colorem mutabatur.

6) Acidum muriaticum et nitro-muriaticum, vi caloris efficacius agere videbantur, cum in illis bullulae aëreae continuae e pulvere emanare cernerentur. Attamen color pulveris ne sic quidem destruebatur, licet diutinam digestionem cum copiose addito acido muriatico nonnihil pallidior fieret. Ex majore levitate specifica pulveris, qui spatium initio occupatum adhuc sustinens, in liquore jam fere natavit, cutelleximus plurimas ejus partes solutas fuisse. Liquor subflavo colore laeviter tinctus, ad siccitatem evaporatus massam salinam praebuit, albam vel subflavam, in aqua solubilem.

7) Acidum sulphuricum aqua attenuatum mox non visibilem, ex immissa pulvere subiit mutationem, cum vero, vi caloris maxima pars aquae avaporasset, rufulum obtinuit tinctum liquor acidus, nondum visibiliter mutata quantitate aut colore pulveris. Hic tandem, cum diutius for-

tiusque calefieret liquor, atque eo ipso obscure rutilus evaderet, ipse quoque obscuriorem nigro-fuscum obtinuit colorem, magna ex parte adhuc non solutus.

8) Acidum phosphoricum ab aqua solutum cum pulvere digestum nihil efficere videbatur antequam ad siccitatem redactum esset. Tum vero massam nigram obtulit. Ex hac, aqua extrahere valuit partes salinas, quae solutionem flaventem dederunt. Remansit pulvis griseo-fuscus non solutus.

9) Singulae solutiones (5,6,7,8,) saporem habuerunt stypticum, plus minus acidum. Per ammoniacam turbatae praecipitata dederunt alba, vel subflava pulverum subtilium, per prussiatem potassae caerulea, et per tincturam gallarum flava, vel aurantii colore in liquore conspicua.

Ex his patuit pulverem illum roseum neque silicae purae neque oxidi ferri proprietatibus gaudere. Cum neque affectiones ejus quadrent cum indole ullius alii nobis hucusque cognitae substantiae, ponere licebit, usque quo natura ejus melius indagata fuerit, novam illum efficere sui generis substantiam. Ex similitudine phaenomeni in experimento 4. (*b*) memorati, ducimur ad eam sententiam, quod ex illa quoque substantia ortae sint peculiares affectiones massae nigrae, acida difficilius subeuntis, quodque ibidem per inferiorem oxidationis gradum et colorem nigrum massae in igne tractatae, et viridescentem solutionis per acidum muriaticum factae produxerit. Haec si ita sint, supputandum esse videtur pondus ejus aequale dimidio massae illius nigrae, sive decimae parti totius lapidis. Quapropter demtis ex ponderibus silicae, aluminae et ferri, quae, in serie supra exhibita, ipsis nimia attribuimus, ita exhiberentur partes lapidis constitutivae, ut ex centenario ejus eductae sint silicae circiter librae 45,5; aluminae 23, substantiae novae adhuc problematicae 10, magnesiae 8,5 et ferri oxidati 5,6.

ARUNDO WILHELMSII

AUCTORE

LEDEBOUR.

Conventui exhibuit die 28 Febr. 1816.

A. penicula stricta patula, calycibus acutis bifloris, arista dorsali retrofracto-divaricata corolla longiori, pilis corollam aequantibus.

Hab. circa Tiflin. ♃.

Radix . . . . . .

Culmus (in nostris speciminibus sesquipedalis) simplex, erectus, teres, tenuissime striatus, glaber, ad paniculam fere usque foliosus.

Folia sparsa, versus apicem remotiora; vaginantia, praesertim superiora cauli adpressa, lanceolato-linearia, acuminata, septem-nervia, margine et in pagina superiori scabriuscula, subtus glabra, 1 — $2\frac{1}{2}$ lineas longa, superiora sensim minora.

Vaginae strictae, glaberrimae, foliis multo longiores.

Ligula exserta, truncata, lacera, culmo arcte adpressa, lateribus decurrens.

Panicula erecta, stricta, patula, 4 — 6 uncialis.

Rhachis flexuosa, teres, glabra, striata.

Rami erecti, tenues, flexuosi, structura et superficie rhachidis; inferiores plerumque terni, unico unifloro, duobus 3 — 5 floris; superiores gemini, altero unifloro, altero 3 — 5 floro; summi solitarii.

Spiculae biflorae, pedicellatae; pedicellis longitudine variis, apice incrassatis, violaceis.

Glumae calycinae violaceae, nitidae, inaequales; exterior lanceolata, acuminata, valde carinata, margine membranaceo-pellucida, integerrima, undique glabra; interiori duplo majori, acuta, margine membrana lata pellucida cincta, paullo lacera, valde carinata; carina vix aut ne vix quidem hispidula.

Flosculi calyce paullo minores, aristati; inferiori sessili, nudo, vel pilis rarissimis, brevissimis quandoque suffulto; superiori pedicellato, affixo lateri pedicelli pilis sericeis, corollam aequantibus undique obtecti.

Gluma corollina exterior violacea, lanceolata, apice bifida; laciniis vario modo flexis; margine diaphana, versus apicem serrulata, carina a basi ad aristam usque scabra; interior minor, albida, diaphana, apice integra, margine versus apicem serrulata, carina glabra.

Arista e glumae exterioris carina paullo supra medium proveniens, flosculo paullo longior, retrofracto-divaricata, subflexuosa, hispida, apice tantum glabra.

Obs. 1. Calycibus bifloris ab omnibus hujus generis speciebus differt, excepta solummodo A. benghalensi Retz, quae etiam spiculis bifloris gaudet, caeterum vero diversissima est.

Obs. 2. In honorem *Wilhelmsii*, qui plantis investigandis assidue incumbit, nomen dedi triviale.

Explicatio tabulae XIX.

a. Spicula magnitudine naturali.
A. eadem magn. aucta.
b. Calyx magn. naturali.
B. idem magn. aucta.
c. Flosculus inferior magn. naturali.
C. idem magn. aucta.
d. Flosculus superior magn. naturali.
D. idem magn. aucta.

DISQUISITIO DE LIMITATIS IN COMPOSITIONE SALIUM PROPORTIONIBUS,

A

J. GADOLIN.

Conventui exhibuit die 13 Nov. 1816.

In confesso dudum fuit, insitas esse in corporibus universis vires, quibus distantia ad mutuam trahuntur viciniam, confinia sibi invicem adhaerescunt, et commixta non raro ita uniuntur ut praecipuae singulorum affectiones in composito discerni nequeant. Utrum vero eaedem ubique agant vires, an ex variis caussis dependeant reciprocae corporum diversimode sitorum appetitiones, explorari nondum potuit. Post stabilitum a summo *Newtono* systema de gravitate corporum dissitorum universali, probabile multis visum fuit, dominari eandem vim, *attractionis* nomine appellatam, in corporibus propinquis atque contiguis, immo per eandem effici plurimas corporum mixtorum mutationes. Sic propensiones variarum substantiarum sese inter se conjungendi, aliasque e societate excludendi, propter singulares partium minimarum figuras, densitates ceterasque minus cognitas conditiones, specie tantum ab attractione corporum universali differre, praeeuntibus *Buffon* et *Torberno Bergman*, censuerunt haud pauci chemicorum, ipsis nomen *attractionum chemicarum* tribuentes, et quidem *electivarum*, cum data videretur pluribus substantiis optio socias sibi eligendi. Alii vero, ad qvos hodierni fere omnes accesserunt, incerti de identitate caussarum, ubi non satis perspecta fuit effectuum similitudo, *affinitates* nuncupaverunt facultates substantiarum sese chemice conjungendi, quia *affines* eas optime dici existimaverunt, quae mutuam petunt societatam. Horum exemplo receptas jamdudum denominationes, utpote minime ambiguas, et caussis quibuscunque conjunctionum convenientes, nos quoque in sequentibus adoptabimus.

Celebri Gallorum chemico *Geoffroy* seniori, seculo abhinc vigenti primam debemus expositionem affinitatum, inter varias substantias, chemicarum, quarum leges a natura singularum materiarum definitas, proptereaque semper constantes esse judicavit. Contra sententiam ejus mox quidem variae objectae sunt observationes, quibus affinitas substantiarum superari interdum videbatur ab aliis affinitatibus, quas, secundum praescriptum ordinem vincere deberet. Sed neque defuerunt, qui, phaenomenis attentius consideratis, anomalias illas, salva theoria Geoffroyana explicari posse autumarent. Cumque in serie affinitatum extendenda et varia ratione emendanda plurimi jam occupati fuissent, tandem de ipsius doctrinae veritate, tempore *Bergmanni* nulla superesse videbatur dubitandi ansa. Ostendit namque illustris vir, saepius evenire, ut conjunctiones, quae pro simplici effectu duarum in se mutuo agentium substantiarum habitae sunt, a pluribus simul viribus, per *attractiones*, ut dixit, *electivas duplices* vel *multiplices*, originem ducant. Docuit, quod firmitate differant nexus inter easdem substantias diversa proportione conjunctas; et denique, quod ex variis extrinsecus advenientibus caussis fiat, ut duae substantiae affines interdum facilius, interdum difficilius, interdum plane non coëant; indeque variabilis nobis appareat ceteroquin sibi constans affinitatis vis.

In partibus salium constitutivis luculentius quam alibi conspicui fuerunt effectus affinitatum chemicarum. Acida namque et bases salium, quae seorsim considerata manifestis distinguuntur characteribus, per conjunctiones justa proportione factas, salia progignunt *neutra* s. *saturata*, in quibus plene delitescunt notae propriae substantiarum inter se sociatarum. Perfectum igitur ibi adesse credebatur aequilibrium virium oppositarum, quarum mensurae ex indagatis quantitatibus partium, salia neutra constituentium inveniri possent. In corpore enim quocunque homogeneo non potest non eadem esse affectio singularum molecularum: propterea erit vis totius corporis aequalis viribus omnium molecularum simul sumtis, et inde oriturus effectus tanto major, quanto majus sit pondus corporis ex multitudine molecularum derivandum. Si itaque datus sit, ad quem tendant vires, effectus, ad hunc producendum tanto minus sufficiet corporis pondus, sive tanto minor molecularum multitudo, quanto major singularum vis fuerit. Aequales quidem in neutris salibus erunt saturationis effectus, si datum quodvis acidum data ubique vi sese diversis offerat basibus, et propterea ex unaquaque basi constanter eandem vim ad aequilibrium poscat, et si pariter data quaevis basis, ad aequalibrium secum aequales ex singulis acidis desideret vires. Quae sententia confirmata fuit chemicis, cum animadverterent, neutra pleraque salia varie inter se mixta partes suas constitutivas, salva neutralitate, permutare posse; et sufficere quantitates singularum basium, quae datum unius acidi pondus saturare valent, alii cuicunque acido saturando, quod cum una basium sal producit neutrum; similiterque quantitates singulorum acidorum, quibus data satiari potest basis, aequale cujuscunque baseos pondus saturare. Posito igitur, quod aequales sint omnium acidorum ad singulas bases, ut etiam omnium basium ad singula acida saturanda necessariae vires, erunt vires molecularum, sive affinitates acidorum aut basium, quibus saturatio cum data basi aut dato acido efficitur, in ratione ponderum illorum inversa; atque e contrario affinitates dati cujusque acidi aut baseos ad diversas bases vel acida in ratione directa ponderum, quae ex his ad saturationem poscit illorum alterum. Hoc fundamento nixi plures chemicorum investigare voluerunt relativas affinitatum quantitates numeris exprimendas. Sed quominus hac exacte definirentur, obstitit vix opinata difficultas proportiones partium in salibus accurate indagandi, sive determinandi quantum ponderis tribuendum sit partibus salinis vere activis, quantum ex aqua inefficaci ipsis adhaerente venerit. Qua in re enodanda infatigabili studio maxime sategerunt celebres R. *Kirwan* et I. B. *Richter*.

Richter fusius quam ante se ullus eam exposuit doctrinam, quod in salibus neutris constantes sint proportiones et acidorum, quae datum basis cujusdam pondus saturare valent, et basium, quae a dato cujusque acidi pondere saturantur. De veritate horum axiomatum ex analysi plurium salium pervasus apertam sibi esse viam intellexit, qua computando inveniret quantitatis partium in iis quoque salibus, quae per analysin chemicam non peterant accuratius investigari. Comparatis vero inter se homologis diversorum salium partibus, miras in iisdem inveniri putavit harmonias, quod nempe quantitates s. pondera acidorum plerorumque ad datam basin saturandam necessariae, exprimerentur per series numerorum in continua proportione geometrica se invicem non omnino deinceps sequentium, et quantitates basium datum quodvis acidum saturantium per series numerorum arithmetice proportionalium. Sic in ordine acidorum mineralium volatilium primum locum occuparet acidum fluoricum, cujus quantitate per c significata, essent quantitates acidorum muriatici, sulphurici et nitrici aequales terminis cd^3, cd^5, cd^7 apud salia basibus alkalium vel terrarum alkalinarum gaudentia, sed terminis cd^6, cd^8, cd^{10} apud salia aluminosa, ubi d esset quantitas constanter eadem, variante c secundum naturam cujusque baseos; in ordine acidorum vegetabilium et animalium, posita quantitate acidi carbonici $= c$, repraesentarentur quantitates acidorum sebacici, oxalici, formici, succinici, acetici, citrici, tartarici per cd^3, cd^4, cd^8, cd^{11}, cd^{14}, cd^{15}, cd^{16}, ubi itidem d esset constans, c vero pro natura baseos variaret; in ordine alkalium, posita ammoniacae quantitatae $= a$, et sodae $= a + b$, esset quantitas potassae $= a + 5b$; in ordine terrarum, positis alumina $= a$ et magnesia $= a + b$, esset calx $= a + 3b$, strontiana $= a + 9b$, et baryta $= a + 19b$. Et cum ad perspicacitatem redegisset legem a *Bergmanno* detectam, quod ex singulis metallis datum acidum saturantibus aequalis *phlogisti* quantitas extricetur, sive, secundum recentioris nomenclaturae idioma loquendo, quod metalla cum aequali *oxigenii* quantitate conjuncta ad saturationem dati acidi pariter sufficiant, in salibus metallicis per datum acidum productis eam esse perhibuit rationem oxidorum metallicorum, ut positis quantitatibus oxidi manganesii $= u + a$ et oxidi niccoli $= u + a + b$ essent oxida ferri $u + a + 2b$, zinci $u + a + 3b$, cupri $u + a + 4b$, chromii $u + a + 5b$, antimonii $u + a + 9b$, cobalti $u + a + 14b$, auri $u + a + 15b$, stanni $u + a + 16b$, platini $u + a + 17b$, titanii $u + a + 20b$, uranii $u + a + 22b$, tellurii $u + a + 24b$, bismuthi $u + a + 29b$, arsenici $u + a + 32b$, plumbi $u + a + 36b$, argenti $u + a + 38b$, molybdeni $u + a + 64b$, hydrargyri $u + a + 70b$: repraesentantibus u quantitatem oxygenii, et a, $a + b$ etc. pondera ipsorum metallorum, ita comparata, ut pro quocunque acido eadem valeat proportio inter u, a et b. Nemini quidem praeter opinionem erit, quod in systemate recens condito non omnia statim essent exactissime determinata, quod series suas, novis subvenientibus experimentis, varia ratione emendatiores reddere conatus esset *Richter*, atque quod numeros ex observationibus desumtos saepius corrigendos esse duceret, ut perfecte congruerent, quae propter errores in experiundo vix evitandos discrepare visa sunt phaenomena. At per multiplicem experientiam adeo confirmata ipsi videbantur sua enuntiata, ut novis interea detectis acidis, basibus aut metallis certius assignaret locum, quem in seriebus jam definitis occuparent, et alias adhuc detectum iri substantias praesagiret, quae vacua supplerent in seriebus intervalla. Observaverunt autem recentiores, nondum ad hodiernam exactitudinem tempore *Richteri* pervenisse analysin chemicam, et experimenta ab illo citata repetentes invenerunt eorum haud pauca tantum a vero deviare, ut, justa facta correctione, subsistere nequaquam possit laudata serierum doctrina; quam proinde, cum neque ullum ejus ex caussis naturalibus cognosceretur fundamentum, omnino deserendam esse judicaverunt, qui experimentis de novo institutis phaenomena perscrutari studuerunt.

In communem plerique adducti fuerunt opinionem, quod nonnisi saturata, per affinitates chemicas, producerentur composita, et quod in salium formatione vix ullus ex superflua acidi aut baseos parte oriretur effectus, cum, ad finem vergente seculo praeterlapso statueret perspicacissimus *C. L. Berthollet*, egregia experimentorum serie suffultus, nullibi adeo valere pronitatem duarum substantiarum ad mutuam saturationem, ut prorsus inefficax sit abundantius addita alterutrius quantitas, sed facultatem substantiae cujuscunque aliam secum ligandi ab adhibita sui quantitate non minus quam ab affinitate dependere. Ostendere conatus est, nunquam non evenire, quod antea quoque interdum alii observaverant, ut substantia majore affinitate ad alteram praedita, quam tertia eidem prius sociata, hanc totum sejungere non valeat, nisi longe majore addatur copia, quam quae ad compositum saturatum cum altera illa formandum sit necessaria. Itaque cum singula corpora in alia sibi per mixtionem applicata, et vi affinitatum substantiis propriarum, et vi quantitatum materiei agant, fieri semper debere, ut substantia alias affinitate sibi superiores copiosius addita vincat, atque ut unumquodque corpus duobus aliis sibi inaequaliter affinibus simul expositum pro ratione et affinitatis et quantitatis utriusque inter ipsa dividatur. Autumavit igitur conjungi posse duas substantias affines in proportionibus numero infinitis, nisi propter accedentes caussas peregrinas efficiatur, ut in data aliqua proportione sociatae e contactu reliquarum partium commixtarum subtrahantur. Et hoc quidem fieri, quoties ex pluribus corporibus in communi menstruo liquido solutis, nonnulla ita comparata evadunt, ut aut vi calorici praesentis formam obtineant aëream, aut cohaesionis viribus obediendo, solidam acquirentia formam menstruum deserant, alios ut taceam casus.

Nova *Bertholleti* doctrina, quae primo intuitu subvertere videbatur acceptam hucusque fere omnibus theoriam affinitatem chemicarum multos nacta est adversarios. Assertionem ejus de non limitatis substantiarum conjunctionibus conciliari non posse putaverunt cum examinibus corporum natura vel arte compositorum, invariatas plerumque proportiones partium constitutivarum ostendentibus. Existimaverunt crystallisationes aliasque ex cohaesione molecularum oriundas conditiones, quas *Berthollet* pro impedimentis habuit, quominus in quacunque proportione formentur connubia, non esse caussas peregrinas actioni substantiarum mutuae adversantes, sed potius ipsarum affinitatum effectus. Contendunt ergo hodieque plurimi, conjunctiones substantiarum chemicas saepissime ea ratione fieri, ut mutua succedat saturatio, et aberrationes ab hac regula, quae in salibus, *imperfectis* olim, hodie *acidis* aut *basicis* appellatis, in sulphuretis quibusdam, in oxidis plurium metallorum *e. s. p.* obveniunt, ita semper esse definitas, ut in unoquoque composito constantes reperiantur proportionum termini, inter quos intermediae frustra quaerantur. Neque vim hujus argumenti infringere censuerunt vulgarem experientiam de solutionibus corporum, quae per gradus indefinitos successive peraguntur, cum perhibeant sollicite distingvenda esse talia phaenomena solutionum a phaenomenis per chemicas affinitates productis, atque in conjunctionibus chemicis tum demum patere veram proportionem partium, cum a menstruo solvente separatum sit corpus ex illis compositum.

Has explicationum diversitates propius considerantes facile novimus, in verbis fere tantum in re ipsa parum dissentiri. Ab utraque enim parte admittitur, quod ex substantiis data proportione inter se conjunctis gigni possit compositum neutrum sive saturatum, in quo aequilibrium adsit virium partes connectentium, quodque hac conditione sociatae utplurimum, non obstante praesentia alterius partis uberioris, a menstruo solvente decedant, cum quod nimium est, aut ab ipso menstruo aut ab alia quavis substantia sibi affini retineatur. Sed nemini unquam dubium fuit, quin a diversis menstruis non raro solvantur indefinitae quantitates plurium substantiarum. Itaque cum in perfecta et homogenea solutione concipere vix liceat inaequalem partium solutarum distributionem, concedendum est, substantias solutas saepius in proportionibus indefinitis conjunctas essse. Si ipsum menstruum ab alterutra substantia non differt, ex. gr. ubi sulphur aut metallum quoddam cum sulphureto metalli fusum in corpus homogeneum coit, aut ubi duo metalla utcunque commixta per fusionem semper exhibent compositum omnibus suis partibus integrantibus simillimum, in aprico est, non aliter vi affinitatum chemicarum orta fuisse haecce connubia, quam si in data proportione neutralitatis commixtae fuissent substantiae conjungendae. Neque ferme alia est ratio, ubi a menstruo peregrino peragitur solutio, modo quod tum simul consideranda veniat affinitas menstrui cum substantiis solutis: non enim facile quisquam negabit, tantillam quamque baseos salinae quantitatem solutioni acidi aquosae additam, pari ratione, vi affinitatis chemicae, a toto acido et aqua suscipi atque solvi, qua major utcunque determinata ejusdem quantitas suscipiatur. Itaque omni sine dubio affinitatibus chemicis tribuendum est, quod solutioni salis cujusdam neutri, salva limpiditate liquoris, addi possit nova sive acidi, sive baseos quantitas: similiterque, quod in solutionibus salinis nonnullorum metallorum, per vim aëris vel acidi nitri, vel alius substantiae oxygenatae, sucessive augeantur oxidationes metallicae, per gradus inter minimum et maximum infinitos, quousque sub hac operatione uniformis et homogeneus maneat liquor. Sed missa haec facimus, ut ad propositum redeamus, leges consideraturi, quibus determinatae inveniuntur compositorum partes.

Animadverterunt non ita pridem chemici, abundantem in salibus acidis aut basicis partem saepius proxime aequalem esse ei, quae saturationi sufficit, interdum vero ejusdem vel multiplicem vel sesquiplicem. Observaverunt quoque diversa gasa non raro ea ratione potissimum inter se conjungi, ut unum volumine sit alteri aequale, vel hujus sesquiplex aut multiplex, atque hac proportione conjuncta teneri, si vel concrescendo aëream perdant formam. Solliciti itaque, ut de hisce rebus generales invenirent naturae leges, hodierni multifaria instituerunt experimenta. Inter hos celebris *J. Berzelius*, infatigabili impensa industria, ad eas adductus est conclusiones: quod in oxidis singulorum metallorum, aliorumque corporum inflammabilium, quae plures admittunt oxidationis gradus, quantitates oxygenii apud magis oxidata multiplices semper sint quantitatis oxygenii, per quam minima efficitur oxidatio; propterea que illae inter se sequantur rationem numerorum integrorum, ubi unitate significetur quantitas oxygenii minima: quod in salibus acidis pars acidi ad saturationem baseos necessaria sit aut dimidia totius acidi, aut alia ejusdem pars aliquota: quod in salibus neutris, pro dato acido, constans sit quantitas oxygenii baseos: quod in salibus et neutris et acidis oxygenium acidi multiplex sit oxygenii baseos: et generatim, quod in corporibus, ex pluribus substantiis oxidatis, compositis, oxygenium substantiae, quae minimum ejus habet, sit pars aliquota oxygenii in singulis ceterarum.

Cum de conditionibus substantiarum inter se saturatarum infra fusius inquirere conabimur, jam in iis separatim considerandis nonnihil morabimur, quae binas substantias diversa proportione conjunctas respiciunt. Quocirca in antecessum monere liceat, phaenomena experimentis etiamnum vel scientissime institutis patefacta quaesitam veritatem raro non aliquatenus infucatam exhibere. Obstant vitia instrumentorum, fallaciae sensuum, aliaeque non provisae circumstantiae, ne exquisitissima quaeque adminicula ad conclusiones omni ex parte naturae consonas ducant. Correctiones consectariorum hic illic facere oportet, ut constans habeatur tentaminum variata ratione captorum et repetitorum convenientia. Sed natura duce fiant correctiones necesse est, non sola svadente phantasia, quae acutissimum quemque observatorem fallere possit. Si enim ambiguis nituntur argumentis, vel inductionibus ex analogia indubiorum phaenomenorum non probabilibus, aut si ex aliter factis errorum in experiundo inevitabilium emendationibus diversae depromi possint non minus rationabiles conclusiones: ne dicam, si praesumta naturae lex se ipsa contradictionem involvat; satius certe erit in iis acquiescere, quae nudae suggesserunt observationes, quam sublatis, quae incerta adhuc et dubia sunt, mendis periclitari, ut falsa in loca verorum substituantur. His perpensis, palmaria quaedam conteplemur phaenomena, ex quibus sua depromserit *Berzelius* dogmata.

Exactissime institutis pluriesque repititis experimentis invenit oxidum plumbi flavum in 100 sui ponderis partibus continere 92, 765 partes metalli et 7, 235 partes oxygenii. In eodem pondere oxidi plumbi rubri latere comperit 90 partes metalli et 10 partes oxygenii, atque in oxido plumbi fusco adesse 86, 51 partes metalli et 13, 49 oxygenii. Propterea habebunt 100 partes plumbi secum sociatas

in oxido flavo 7, 799 partes oxygenii
in oxido rubro 11, 111
in oxido fusco 15, 594.

Si intermedio horum numerorum addatur 0, 587, et ultimo 0, 004, prodeunt numeri 7, 799; 11, 698; 15, 598, qui rationem habent numerorum 1; $1\frac{1}{2}$, 2, sive 2, 3, 4. His proinde in serie proportionis arithmeticae constitutis accuratius exprimi putavit quantitates oxygenii in diversis plumbi oxidis. Quodsi vero ita fiat correctio, ut ex numero intermedio subtrahatur 0,08, et ultimo addatur 0,004, obtinentur numeri 7,799; 11,031; 15,598, qui in serie continuae proportionis geometricae constituti sunt, rationem sequentes numerorum $1; \sqrt{2}, 2$, ad quam igitur propius, quam ad arithmeticam rationem accedunt numeri experiundo reperti.

Experimentis cum stanno factis, invenit *Berzelius*, 100 partes hujus metalli secum conjunctas habere

in oxido nigro partes oxygenii 13, 6,
in oxido albo —— —— 19, 13,
in oxido flavo —— —— 27, 2

qui numeri, jubente *Berzelio*, ita correcti, ut intermedio addatur 1, 27, convertuntur in 13,6; 20,4; 27,2, rationem itidem habentes numerorum $1, 1\frac{1}{2}, 2$. Si vero intermedio nonnisi 0,1 addatur, prodeunt 13,6; 19,23; 27,2, inter se ut $1, \sqrt{2}, 2$.

Oxidationes sulphuris per experimenta investigando detexit, 100 sulphuris partes secum tenere consociatas

in oxido sulphuris partes oxygenii 47, 28,
in acido sulphuroso —— —— 100, 12,
in acido sulphurico —— —— 149, 70.

Si, secundum praeceptum *Berzelii*, ab intermedio horum numerorum subtrahatur 1, 63, habentur numeri 47, 28; 98,49; 149, 70, quantitates oxygenii accuratius indicaturi, qui inter se sunt ut 1; 2,083; 3,166, sive fere ut 1,2,3.

Cuivis vero patet, quod aeque facile ita corrigi possint illi numeri, ut proportionales fiant terminis primo, tertio et quarto seriei geometricae 1, a, a^2, a^3.

Ex his liquere existimamus, ipsa experimenta non certo eas indicavisse series numerorum, quibus, secundum *Berzelii* sententiam conveniant quantitates duarum substantiarum, dum in pluribus proportionibus conjunguntur. Quo vero videamus, utrum ipsa sibi constare possit concepta theoria, ponere licebit, duas substantias mutuam amantes societatem, quae praeter illam proportionem qua mutua succedit saturatio, in nonnullis quoque aliter determinatis coeunt, ea conditione inter se semper conjungi, ut, data alterius quantitate, exprimantur quantitates alterius per terminos seriei secundum constantem legem progredientis. Sint quantitates ipsius A quae cum data substantia B conjungi possunt, quidam ex terminis A, aA, bA, cA, dA, etc; erunt consequenter quantitates ipsius B, quae cum data A conjungantur, correspondentes termini seriei B, $\frac{B}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{B}{c}$, $\frac{B}{d}$ etc. Quia vero ex hypothesi constans est serierum lex, eadem erit natura seriei $1, a, b, c, d$ etc. atque seriei $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}$, 1. Ambarum itaque termini non possunt ordinem proportionis arithmeticae sequi: tum enim esset $1 + d = a + c$; simulque $\frac{1}{d} + 1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$; adeoque $\overline{a + c - 1} = c - 1$; et $a = 1 = b = c = d$;

quod indicaret nullum fieri conjunctionem nisi in unica proportione A: B. Aderit autem tum demum universalis harmonia legis, cum efficerent quantitates substantiae A cum data B conjungendae terminos seriei $A, nA, n^2A, n^3A n^4A$ simulac quantitates substantiae B cum data A conjungendae repraesentarentur per B, $n^{-1}B$, $n^{-2}B$, $n^{-3}B$, $n^{-4}B$. Commemoravit *Berzelius* ordinem progressionis arithmeticae, quo se invicem sequi videntur quantitates acidi in salibus pariterque oxygenii in oxidis, non similiter convenire quantitatibus basium salinarum aut radicalium in corporibus oxidatis: qua observatione corroborata adhuc esse videtur hypothesis de proportionibus geometricis: apertum enim est, terminos progressionis geometricae ab unitate ascendendo non omnino deinceps numeratos ex. gr. 1, n, n^3 non adeo differre a numeris in serie arithmetica locatis, ac differunt correspondentes termini 1, n^{-1}, n^{-3}. Sed quamvis hypothesis progressionum geometricarum eo sese commendare videatur, quod proxime congruat cum allatis oxidationum plumbi, stanni et sulphuris phaenomenis, in eadem tamen inculcanda persistere non audemus. Usquequo enim minime distinctam habemus cognitionem caussarum, cur in nonnullis proportionibus libentius quam in quibuscunque aliis succedant conjunctiones chemicae substantiarum, non sufficere censemus pauca hucusque instituta experimenta ad decernendum, utrum eadem ubique, aut in plurimis casibus valeat quantitatum ratio, anne pro diversitate substantiarum omnimode haec sit variabilis.

Ad phaenomena plenae saturationis illustranda hodiernis chemicis nova suborta esse videtur spes. Observaverunt plurimas substantias inter se maxime affines originem ducere e corporibus inflammabilibus *radicalibus* illarum proinde appellatis. Compererunt porro, corpora inflammabilia, quorum combustione natae substantiae ad salia formanda aptae sunt, ipsa quoque ad societates ineundas apta esse: immo saepius evenire, ut ea proportione secum invicem potissimum conjungantur radicalia, qua in sale neutro, ex productis per combustionem illorum acido atque basi formato, sociata latent: et generatim, in salibus sive neutris, sive acidis aut basicis eas non raro reperiri radicalium proportiones, quibus ipsa radicalia nuda firmissime inter se connecti videntur. Hinc probabile fuit, quod in radicalibus inflammabilibus lateant caussae affinitatum inter partes salium constitutivas.

Ad has affectiones investigandas consideremus praecipua conjunctionum phaenomena, quae in corporibus inflammabilibus maxime conspicua sunt. Mutatio temperaturae caloris nunquam fere non sentitur, ubi corpora novas formas capiunt. Frigus quidem oboriri visum est, quando solida corpora in liquida, vel haec in aëriformia vertuntur; calor e contrario, cum ad majorem cohaerentiam concrescunt. Tum praesertim caloris sensibilis augmentum patuit, cum inter se conjungerentur substantiae adeo diversae, ut suas invicem proprietates quasi destruerent, atque ubi ex data mixtorum proportione connubium omnimode saturatum oriretur. Luculentissimum vero dudum fuit phaenomenon ignis, sub combustione corporum inflammabilium in aëre producti. Existimaverunt pridem physici, calorem sensibilem vel ignem ita patefactum prodire ex calorico in corporibus antea latente, quod, diminuta horum capacitate, liberum evadat: diminui vero capacitates corporum pro calorico, quoties per conjunctiones secum invicem, aut ex quacunque alia caussa concretiorem suscipiant formam. Sic ignem sub combustione corporum inflammabilium in aëre, oriri judicaverunt ex calorico aëris vitalis, qui formam tenens elasticam prae omnibus fere corporibus maxima gaudere capacitate calorici, cum inflammabilibus vero concrescens multum ejusdem perdere videbatur. Quae interpretatio ne antea quidem satis consona observationibus auctarum vel imminutarum densitatum, hodie minime quadrare censetur cum phaenomenis ignis, sub conjunctione nonnullorum metallorum cum sulphure aliisve corporibus inflammabilibus orti, qui vehementia non cedit igni per combustiones producto. Quin contra illum explicandi modum aperte pugnare videntur recens detecta phaenomena respirationis, ex qua calorem animalium vitalem derivatum habuerunt physici. Cum enim observarent, aërem vitalem respiratu animalis in acidum carbonicum converti, concluserunt calorem animalium similiter ortum suum ducere a lentiore aëris et carbonii sangvinis mutatione, atque vulgo ignis oritur a rapidiore carbonum deflagratione. Sed ex experimentis a cel. *Brodie* nuper in Anglia factis evictum est, sustineri non posse, per respirationem arte effectam, calorem animalis, venenis adeo sopiti, ut vitales ejus cessarent functiones, quamvis hoc artificio et aequalis aëris vitalis quantitas consumeretur, et aequalis obtineretur acidi carbonici copia, ac in vigente animali, quod per vires naturales eodem tempore spiritum duxit. Hinc indubitate patere existimamus, calorem sub combustione carbonum ex alia caussa, quam ex mera conjunctione carbonii cum substantia aëris vitalis oriri. Et sic ad fidem maxime pronum habemus, quod neque alibi ex mutata solum capacitate corporum respectu calorici originem ducant plurima caloris phaenomena.

Omnia vero svadent, ut credamus vires ab *electricitate* denominatas in conjunctionibus chemicis activas esse. Ilarum duae sese sensibus nostris offerre solent sibi mutuo oppositae, se invicem appetentes, quae per conflictum inter se interire videntur, simulac phaenomenon lucis, vel ignis lucidi, vel caloris producatur. Comparent illae ubi fricentur superficies variorum corporum, ubi ad mutuum contactum admittantur substantiae inter se maxime affines, aut ubi mutationes formae ac densitatis subeant corpora quaecunque. Sub oxidationibus metallorum easdem excitari docuerunt experimenta, *galvanica* dicta, quibus evictum est, alteram electricitatem se prodere in ea metalli superficie, quae metallicam perdit faciem, simulac opposita electricitatis affectio in superficie ex adverso posita appareat. Ex his concludere licebit, occultatas in corporibus latere electricitatis vires, quae varia ratione patefieri possint, atque tum vel immutatam electricam indolem demonstrent, vel inter se confligendo caloris aut ignis phaenomena exhibeant. Hinc quoque magna probabilitate sese commendat sententia, quod et ignis corporum inflammabilium in aëre ardentium, et is, qui sub mutua horum conjunctione, ubi ex. gr. metalla cum sulphure confunduntur, erumpit, pariterque caloricum sub commixtione acidorum cum basibus salinis, cum aqua, alkohole etc., atque sub aliis corporum consociationibus observatum, ex concursu electricitatum oppositarum nascantur. Si vero ex duplici simul agente caussa succederent, si non omnes, plurimae saltem corporum conjunctiones chemicae, altera affinitatis ipsorum corporum, qua cohaereant copulata, altera, qua sese mutuo petant patefactae electricitatis vires, cum sub forma ignis vel calorici e sinu substantiarum ponderabilium abeant. Sed paullo altius nobis persequenda esse videntur combustionum phaenomena.

Innotuit jamdudum, plurima corpora inflammabilia in aëre ad ignem alendum apto, quem *gas oxygenium* hodie vocant, ardentia, ipsum aërem elasticitate privatum secum conjungere, adeoque ex toto ejus pondere incrementa capere. Cum similis mutatio corporis inflammabilis fieri, idemque huic accedere augmentum ponderis observaretur, ubi combustio per alias substantias antea ustas perficeretur, putaverunt chemici, post traditum sibi ab illustri *Lavoisier* phaenomena ista interpretandi praeceptum, adjungi sub omni ustione corporibus inflammabilibus substantiam sibi semper similem, quam *oxygenium* nominaverunt, ipsa corpora usta, communi cognomine *oxidatorum* ab inflammabilibus distinguentes. Hanc theoriam non confirmatam modo, sed et egregie illustratam esse censuerunt ex phaenomenis illorum inflammabilium, quae per aquam puram oxidari videbantur, quia indubitata jam nemini fere non evasit doctrina de aquae natura. Cum enim evidenter pateret, aquam ex gasibus oxygenii et hydrogenii commixtis atque accensis produci, totoque horum gasium pondere comparere, eandemque iterum per actiones virium electricarum in gasa ista converti posse, certius demonstratum esse judicaverunt, quod aqua sit substantia ex elementis gasium oxygenii et hydrogenii composita. Rem vero ex integro meditantes, ne temeritatis contrahere videamur culpam! sententiae ab universis fere chemicis hodie adoptatae non possumus non adversari, cum eam neque in diversitates corporum oxidatorum bene convenire, neque cum ipsis aquae phaenomenis omnino congruere existimemus.

Novimus aërem vitalem, sive gas oxygenium utplurimum simul cum gase hydrogenio ex aqua per electricitatem agitata prodire: non vero semper ex eadem aquae particula, sed, ut evidenter docuit cel. *Ritter*, ex diversis notabili distantia dissitis, neque vi unius, sed duarum simul agentium oppositis electricitatum viribus formari. Propterea, nisi praejudicata alia capiamur opinione, ex hoc phaenomeno persuasum habemus, aquam non per chemicam analysin in gasa illa resolvi, sed per novas accessiones diversimode modificatam fieri. Neque facile ex alio capite explicabitur phaenomenon interdum observatum, quod non utrumque simul gas, sed alterutrum tantum per vim electricitatis ex aqua eliceretur. Itaque cum neque aliunde probabile sit, ponderabilem aquae substantiam ex partibus diversi generis compositam esse, veritati maxime consentanea erit interpretatio, quod et gas oxygenium et gas hydrogenium ex unico ponderabili elemento aquae per diversas electricitates transformato constituantur. Quod si vero admittatur, substantiam aquae esse ponderabilem gasis oxygenii partem, in confesso etiam erit, omne augmentum ponderis corporibus inflammabilibus per combustionem additum, unico deberi principio aqueo. Vix autem est credibile, quod contrariae affectiones, quas diversa saepius, nec raro eadem acquirunt radicalia, dum in acida aut bases salium convertuntur ab unica caussa additi oxygenii invariati oriantur. Constat namque inter omnes, acida et bases salium per oppositas vires electricas nexu liberari, quo in salibus neutris conjuncta tenebantur, et sic separata ad primitivam indolem restaurari. Ex quo perspicuum est, diversam eorum naturam, saltem ubi vinculis liberata sunt mutuis, electricitati utrique propriae tribuendam esse. Neque obscurum erit, electricitatem acidis convenientem eam esse, quae aquae principium in gas oxygenium convertat, et illam e contrario basibus competere electricitatem, quae cum eodem gas progignat hydrogenium: siquidem ostenderint experimenta electrica, quod partes corporis cujuscunque acidae ibi per vim electricitatis contrahantur, ubi ex aqua gas oxygenium produci possit, bases vero salium in opposito apparatus loco in conspectum veniant, ubi scilicet ex aqua nascatur gas hydrogenium. Cum igitur corpora inflammabia, quae per combustionem acquirunt naturam acidi, principium aquae sibi adsciscant alia electricitate modificatam, ac quae baseos induunt formam, omnimode variabilis erit substantia, quae diversas efficit oxidationes, et fortasse ne eadem quidem in acidis vel basibus liberis ac in iisdem inter se copulatis. Propterea neque eidem convenire videtur oxygenii nomen, utpote quo substantia certis definita characteribus, elementum scilicet aëris vitalis significetur. Itaque loco ejus in sequentibus denominationem *halomeleogenii* substituere voluimus, qua substantias non improprie indicari censemus ex aëre vitali et aqua in acidis et basibus salium residuas, quarum efficacia progenita sint praecipua haecce *membra*, sive constitutivae *salium* partes.

His praemissis, initium facere aggrediemur theoriae affinitatum, quae, si nondum firmis probetur argumentis, neve fulciente experientia hodierna ad praecipua saturationis phaenomena plene explicanda sufficiat, iis tamen, quae hucusque detecta sunt, nobis saltem cognitis non repugnabit, neque plane differet a reputationibus aliorum antehac interdum adumbratim indicatis. Ponimus phaenomenon ignis produci ex oppositis electricitatibus libere motis, et sibi mutuo obviis, itidemque caloricum ex leviore harum virium collisu: atque inverso ordine ex dissolutione ignis vel calorici obtineri duas electricitates, si modo adsint substantiae, quae alterutram in sinu suscipere ament. Ponimus cuncta corpora complecti electricitates plus minus occultatas, quae partim nonnunquam, admotis sibi mutuo corporibus, conspectui nobis offeruntur, et per substantias ad se alio conducendum aptas auferri videntur: instabiles vero esse has electricitatum jacturas, quae, quamdiu non aliam subeant corpora mutationem, ex vicinis vel calorico vel electricitatibus libere oberrantibus continue resarciuntur. Ponimus porro, corpora, per conjunctiones secum invicem, mutata, perdidisse partem propriarum electricitatum, residuas tamen adhuc habere electricitates tenacius sibi adhaerentes, quibus ad mutuam tetenderunt societatem; et propterea duas substantias eatenus inter se affines esse, quatenus in sinu foveant electricitates oppositas, easdemque se mutuo saturare, cum perfectum obtineatur inter electricitates aequilibrium. In combustione gasium oxygenii et hydrogenii commixtorum haec aequalitas virium evidenter obtingere videtur electricitatibus, quae similem utrinque ponigentes substantiam, sese mutuo destruendo, aquam producunt liquidam. Et cum nulla nobis data sit occasio credendi, quod aliter effectae sint electricitates, quibus diversae copulantur substantiae; ponimus denique, quod ex eadem data proportione electricitatum oppositarum aequilibrium semper oriatur inter vires corpora conjungentes. Quia vero in corporibus ustis, pariter ac in gasibus modo nominatis, aquae principium secum sociatum habeant electricitates, patebit inde, quod et ex diversa harum natura, et ex reciprocis earundem quantitatibus determinata sint halomeleogenia acidi et baseos in sale quocunque neutro. Experimentis compertum est, quod ex data aqua 7,5 circiter partes ab altera electricitate in gas oxygenium convertantur, simul ac una ejusdem pars per alteram electricitatem in gas hydrogenium transformetur, et quod vicissim duo haecce gasa, in proportione ponderum 7,5: 1, inter se commixta et accensa, per combustionem in aquam puram 8,5 ponderis partium redeant. Propterea, si vis acidi cujusdam basin secum conjungendi dependeret a mera gasis oxygenii electricitate, et vis baseos illi opposita ab electricitate gasis hydrogenii, sequeretur, quod in sale neutro ex his partibus producto radicale acidi augmentum sui ponderis haberet ex 7,5 oxygenii partibus, dum in basi delitescat ex hydrogenio augmentum ponderis $= 1$. Si autem et in acido et in basi mixtae sint electricitates, utrobique consideranda venient et ex oxygenio et ex hydrogenio aucta pondera, et alia orietur proportio ad saturationem necessaria inde definienda, quod in acido atque basi simul adesse debeant 7,5 partes oxygenii versus unam hydrogenii partem.

Vice quoque versa, ex explorata proportione inter partes salis cujuscunque neutri, et cognitis incrementis, quibus adaucta sunt pondera radicalium tam in acido quam in basi, posito quod praeter halomeleogenia nihil ipsis accesserit, per computationem invenire licebit, quae in singulis partibus sit proportio electricitatum oppositarum. Signetur electricitas oxygenio propria per ϑ, et electricitas hydrogenii per Φ. Sit halomeleogenium acidi $= m\vartheta + n\Phi$, et halomeleogenium baseos $= r\vartheta + s\Phi$, repraesentantibus m et r pondera oxygenii, et n, s pondera hydrogenii; $m + n$ pondus halomeleogenii in acido, et $r + s$ pondus halomeleogenii in basi. Rationem $m + n : r + s$ quae per analyses chemicas determinari possit, ponimus esse datam $= a : 1$. Sitque ratio constans inter oxygenium et hydrogenium, ad aequilibrium electricitatum necessaria $= c : d$, quae ex hypothesi neutralitatis in sale erit

$=m+r:n+s$. Itaque $\overline{m+r}.d=\overline{n+s}.c$; et $\overline{m+n}=a.\overline{r+s}$. Inde habemus $m:n=ac.\overline{r+s}-rd+cs:ad\times\overline{r+s}+dr-cs$, et $r:s=\overline{m+n}\,c-a.\overline{dm-cn}:\overline{m+n}.d+a.\overline{dm-cn}$. Jam vero in omnibus accuratius examinatis salibus neutris eam detectam habent chemici uniformitatem, ut singularum basium, datum quodcunque acidum saturantium, aequalia sint halomeleogenia. Itaque cum in dato acido constantes sint m et n, pro omnibus idem saturantibus basibus, constans non modo erit $r+s$ et constans ratio $a:1$, sed constantes quoque erunt r, s et rationes $m:s=r:n=m+r:n+s=c:d$. Hinc $m=\frac{cs}{d}$; $n=\frac{dr}{c}$, $m+n=\frac{c^2s+d^2r}{cd}$; $s=\frac{m+n-ar}{a}$; $m+n=\frac{c^2\,\overline{m+n}-c^2ar+ad^2r}{acd}=\frac{ar}{c}\cdot\frac{c^2-d^2}{c-ad}$; et proinde

$$m+n:m=a.\overline{c^2-d^2}:c.\overline{ac-d};$$
$$m+n:n=a.\overline{c^2-d^2}:d.\overline{c-ad};$$
$$r+s:r=c^2-d^2\quad:c.\overline{c-ad};$$
$$r+s:s=c^2-d^2\quad:d.\overline{ac-d};$$

ubi sequentes apparent casus:

Si $a:1=c:d$; erit $n=0$, $r=0$, h. e. halomeleogenium acidi erit purum oxygenium, et halomeleogenium baseos purum hydrogenium.

Si $a:1=d:c$; erit $m=0$, $s=0$. h. e. oxygenium erit totum apud basin et hydrogenium apud acidum.

Si $a : 1 = 2cd : c^2 + d^2$; erit $m = n$. h. e. acidum continebit aequale pondus oxygenii et hydrogenii.

Si $a : 1 = c^2 + d^2 : 2cd$; erit $r = s$. h. e. pondera oxygenii et hydiogenii penes basin aequalia.

Si $a = 1$; erit $m = r$, et $n = s$. h. e. similia erunt halomeleogenia in acido atque basi.

Substitutis pro c et d valoribus supra indicatis 7,5 et 1; habemus $m + n = a \,.\, 55,25$; $m = 7,5 \,.\, \overline{a \,.\, 7,5 - 1}$; $n = 7,5 - a$; $r + s = 55,25$; $r = 7,5 \,.\, \overline{7,5 - a}$; $s = 7,5 \,.\, a - 1$. Et positis $m + n = a$; $r + s = 1$, exhibentur pro diversis rationibus $a : 1$, sequentes valores quantitatum m, n, r, s.

Si $a = 7,5$,	erit	$m = 7,500$;	$n = 0,000$;	$r = 0,000$;	$s = 1,000$.
$a = 7$,	—	$m = 6,991$;	$n = 0,009$;	$r = 0,068$;	$s = 0,932$.
$a = 6,5$	—	$m = 6,482$;	$n = 0,018$;	$r = 0,136$;	$s = 0,864$.
$a = 6$,	—	$m = 5,973$;	$n = 0,027$;	$r = 0,204$;	$s = 0,796$.
$a = 5,5$	—	$m = 5,464$;	$n = 0,036$;	$r = 0,271$;	$s = 0,729$.
$a = 5$,	—	$m = 4,955$;	$n = 0,045$;	$r = 0,339$;	$s = 0,661$.
$a = 4,5$	—	$m = 4,446$;	$n = 0,054$;	$r = 0,407$;	$s = 0,593$.
$a = 4$,	—	$m = 3,937$;	$n = 0,063$;	$r = 0,475$;	$s = 0,525$.
$a = 3.817$,	—	$m = 3,750$;	$n = 0,067$;	$r = 0,500$;	$s = 0,500$.
$a = 3,5$	—	$m = 3,438$;	$n = 0,072$;	$r = 0,543$;	$s = 0,457$.
$a = 3$,	—	$m = 2,919$;	$n = 0,081$;	$r = 0.611$;	$s = 0,389$.
$a = 2,5$	—	$m = 2,410$;	$n = 0,090$;	$r = 0,679$;	$s = 0,321$.

Si $a=2$,	erit $m=1,900$;	$n=0,100$;	$r=0,747$;	$s=0,253$.
$a=1,5$	— $m=1,391$;	$n=0,109$;	$r=0,814$;	$s=0,186$.
$a=1$,	— $m=0,882$;	$n=0,118$;	$r=0,882$;	$s=0,118$.
$a=0,75$,	— $m=0,628$;	$n=0,122$;	$r=0,916$;	$s=0,084$.
$a=0,5$,	— $m=0,373$;	$n=0,127$;	$r=0,950$;	$s=0,050$.
$a=0,262$,	— $m=0,131$;	$n=0,131$;	$r=0,983$;	$s=0,017$.
$a=0,25$	— $m=0,118$;	$n=0,132$;	$r=0,984$;	$s=0,016$.
$a=0,133$,	— $m=0,000$;	$n=0,133$;	$r=0,000$;	$s=0,000$.

Secundum theoriam, quam tuemur, invariata in salibus neutris erit ratio $a:1$, quantitatis halomeleogeniorum in acidis et basibus. Propterea cum aequales sint in omnibus basibus $r+s$, aequales etiam in omnibus acidis debent esse $m+n$. At observaverunt chemici, aequalia non esse augmenta radicalium in diversis acidis, quae datam saturare valent basin Nón itaque semper erunt augmenta haecce ipsa acidorum halomeleogenia, per $m+n$ nobis significata. Et nos aegerrime conficeremus negotium rem interpretandi, nisi subsidio esset indubitata plurium acidorum convenientia. Ex fidissimis hodiernorum analysibus innotuit, nonnulla salium neutrorum acida, ut muriaticum, carbonicum, phosphoricum, arsenicicum, aceticum, etc. sua habere radicalia quam proxime duplo pondere aucta, respectu incrementi quo in iisdem salibus gaudent

79 *

radicalia basium. Compertum insuper est, eandem esse rationem incrementorum in conjunctionibus mutuis diversorum oxidorum metallicorum, ubi alterum locum tenet acidi alterum baseos ab illo saturatae. Addimus, quod firmissime cohaereant nonnulla metalla ea proportione conjuncta, ut per justam oxidationem alterum pondere duplo magis quam alterum increscere possit. Quapropter parilis sit in connubio oxidorum ratio, siquidem metallorum inter se, ut et aliorum corporum inflammabilium conjunctiones ab iisdem dependeant viribus, quibus oxida eorum connectantur, quamvis in illis desideretur ponderosa aquae substantia. Ex his itaque observatis colligimus proportionem halomelcogeniorum in acidis atque basibus salium perfecte saturatorum esse ut 2 ad 1, et consequenter, secundum computationem modo allatam, esse proportionem oxygenii ad hydrogenium in acidis, sive $m:n$ ut 19 : 1, et in basibus, sive $r:s$, ut 747 : 253, seu proxime ut 3 : 1. Sic nobis probabile est, diversitates illorum acidorum, quae a memoratis abludere visa sunt, inde venire, quod vel sub oxidatione radicalium ex aëre vitali et igne aut major aut minor ipsis accesserit electricitatis copia, quam quae oxygenio et hydrogenio eorum conveniat, vel quod ex alia caussa in ipsis aut adsit uberior substantiae aqueae quantitas, affinitatem acidis propriam inefficax, aut desit halomeleogenio necessarium ex aqua pondus. Nonnulla eorum singulatim considerabimus.

Acidum sulphuricum in salibus neutris ea ratione cum basibus conjunctum esse reperitur, ut augmentum radicalis ejus ubique triplo sit majus augmento radicalis in basi. Si hanc rationem haberent inter se halomeleogenia sulphatum, esset $m:n = 2919:81$, et $r:s = 611:389$; quod non convenit conditioni basium in aliis salibus. At in acido sulphurico non ambigua apparent indicia praesentis aquae in formatione salium inefficacis. Novimus enim hocce acidum per combustionem radicalis sui, sulphuris, in aëre sicco non produci, sed sic generari acidum sulphurosum, quod nonnisi juvantibus aquae vaporibus in sulphuricum convertitur. Ex aliis quoque experimentis satis constat, latere in omni acido sulphurico libero aquam, cujus pars inde facile fugari potest, ubi cum basi quadam conjunctum in sal neutrum transierit. Cum vero ne probabile quidem sit, hac via omnem abire aquam, quae praeter oxygenium et hydrogenium in acido haereat, svadente omnimoda ceteroquin similitudine inter sulphuricum et plura alia acida, sumimus substantiam, qua in hoc acido auctum est sulphuris pondus, in ligato nunquam non residuam, compositam esse ex halomeleogenio, quod pondere bis superet halomeleogenia basium in salibus neutris et aqua, quae tertiam circiter augmenti partem efficiat.

In salibus neutris per *acidum nitricum* formatis magis a lege ceterorum acidorum deflectere visa est ponderum ratio. Sed fateamur oportet, quod nondum satis ad amussim explorata sit hujus acidi natura. A tempore praeclarorum *Cavendish* et *Lavoisier* notissimum est, quod acidum nitricum generetur ex azoto et oxygenio, quod vero differat phaenomenon hujus formationis a phaenomenis, quae aliorum corporum combustiones in gase oxygenio comitantur. Inde praesumserunt plures chemici, azotum non esse primitivum acidi nitrici radicale, sed potius oxidum quoddam per inferiorem ustionis gradum antea exortum. A quo vero radicali, utrum a carbonio, an ab hydrogenio, an ab alia quaquam jam cognita substantia inflammabili originem duceret, incerti et inter se dissentientes fuerunt, usque quo ex electricis experimentis celebris *Davy* innotesceret, plures substantias, quae per analysin chemicam nondum dividi poterant, et praecipue quidem alkalia fixa, vi electricitatis in corpora inflammabilia metallis similia converti, per quorum ustionem iterum sub pristina forma prodeant. Haec enim experimenta cum repeterent latiusque extenderent *Berzelius* et *Pontin* compererunt ammoniacam quoque reduci ad naturam substantiae inflammabilis, metallis in eo similis, quod cum hydrargyro in nitidum amalgama coeat. Hanc pro radicali ammoniacae habitam et nomine *ammonii* distinctam, docente nuperiore experientia, originem suam nonnisi azoto debere intellexerunt, ex quo cum hydrogenio sociato composita esse cognoscitur ammoniaca. In ammoniaca itaque hydrogenium non aliter quam in quacunque alia basi salina partem efficere videtur halomeleogenii. Quae vero praeterea sit compositio ammoniacae et azoti, cum nondum diverte erui potuerit, determinare conabimur ex analysi muriatis ammoniacae a *Berzelio* tradita. Ex hac novimus compositum esse muriatem ammoniacae a 50,86 partibus acidi muriatici et 31,95 partibus ammoniacae. Cum vero contineant 50,86 partes acidi muriatici partes 29,96 halomeleogenii, erit halomeleogenium 31,95 partium ammoniacae dimidium illius, sive = 14,98. Per investigationes ab *Henry* et *Davy* factas detectum habemus, quod in 100 partibus ammoniacae reperiantur 81,833 partes azoti et 18,167 partes hydrogenii. Propterea latebunt in 31,95 partibus ammoniacae 26,146 partes azoti et 5,804 partes hydrogenii, cujus conditio nonnihil mutata esse videtur, cum in composito partem halomeleogenii efficiat. Ex toto halomeleogenio ammoniacae 14,98 latebunt in azoto 14,98 — 5,804 = 9,176 partes: eritque quantitas radicalis in 31,95 partibus ammoniacae, sive in 26,146 partibus azoti = 26,146 − 9,176 = 16,970. Propterea compositi erunt 100 partes *azoti* ex 64,905 p. ammonii et 35,095 p. adaucti ponderis, et 100 partes *ammoniacae* ex 53,114 p. ammonii et 46,1886 p. halomeleogenii. Quoniam denique ex 100 partibus azoti producuntur 156,935 partes oxiduli azoti; 213,86 p. oxidi azoti; 289,77 p. acidi nitrosi et 327,76 p. acidi nitrici, continebuntur in 100 partibus:

oxiduli azoti	41,358	ammonii et	58,642 augmenti ejusdem,
oxidi azoti	30,349	— — —	69,651
acidi nitrosi	22,399	— — —	77,601
acidi nitrici	19,803	— — —	80,197.

His datis, ex analysibus nitratum definire liceat quantitatem halomeleogenii in acido nitrico. In nitrate ammoniacae invenit *Berzelius* 67,625 partes acidi 21,143 partibus ammoniacae conjunctas. At secundum lemmata nostra erunt in 21,143 p. ammoniacae, 11,23 p. ammonii et 9,913 p. halomeleogenii: propterea latebunt in 67,625 p, acidi nitrici 19,826 p. halomeleogenii. Cum vero in eodem acido auctum sit ammonium pondere 54,233, continebit idem aquae ad bases saturandas inefficacis partes 54,233 − 19, 826 = 34,407. In nitrate plumbi inveniuntur, secundum analysin a *Chevreuil* praestitam, 33 p. acidi et 67 p. plumbi flavi. Continent vero 67 p. oxidi plumbi

4,79 p. halomeleogenii. Propterea erunt in 33 p. acidi 9,58 p. halomeleogenii, quae ab augmento ponderis in hoc acido 26,465 subtractae relinquunt 16,885 partes pro valore aquae. Si autem cum *Berzelio* ponimus 100 partes nitratis plumbi consistere ex 32,71 p. acidi et 67,29 p. oxidi plumbi, habemus hujus halomeleogenium = 4,81, et halomeleogenium acidi = 9,62. Et cum totum in acido augmentum sit 26,232, erit hujus aqua = 16,612. In 100 partibus nitratis argenti obtulerunt sese *Berzelio* 31,6 p. acidi et 68,4 p. oxidi argenti, in quo 4,74 p. halomeleogenium efficiunt. Sed 31,6 p. acidi nitrici consistere posuimus ex 6,258 p. ammonii et 25,342 p. aucti ponderis. Ideo erunt in hoc acido 9,48 p. halomeleogenii et 15,862 p. aquae. Comparatis inter se his consectariis, colligimus augmentum ponderis in 100 partibus acidi nitrici, sive 80,197 ejus partes, consistere, secundum analysin nitratis ammoniacae a *Berzelio* exhibitam ex 29,318 halom. et 50,879 aquae.

secundum analysin nitratis plumbi a *Chevreuil* datam, ex	29,030	—	—	51,167	—
secundum eandem a *Berzelio*, ex	29,410	—	—	50,787	—

secundum analysin nitratis
argenti a *Berzelio* factam, ex 30,000 — — 50,197 —
Itaque mediis assumtis numeris, continebunt 100
partes acidi nitrici — 29,439 halom. et 50,758 aquae.

Acidum fluoricum a plurimis aliis ita abludere visum est, ut augmentum radicalis ejus plerumque aequale inveniretur augmento radicalis basium. Cum autem neque hujus acidi natura sufficienter adhuc cognita sit, neque salia neutra per ipsum producta satis examinata, discernere nondum tuto possumus, utrum ad eundem ordinem ac pleraque alia saturata salia pertineant fluates. Ex suis cum radicali acidi fluorici institutis experimentis conclusit *Davy*, idem non ex oxygenio, sed ex hydrogenio oxidatum esse. Quod si ita sit, fieri potest, ut ob defectum aquae, pondere minus augeatur radicale ejus, quam ceterorum acidorum radicalia, cum minorem aquae quantitatem habeat hydrogenium quam oxygenium vi electricitatis contrariae aequaliter pollens, in quod pro formando acido partim transmutetur.

In *vegetabilibus acidis*, utpote ex carbonio, hydrogenio et oxygenio compositis, erit, secundum nostrum rem concipiendi modum, carbonium radicale omnibus commune, utrum vero hoc per aquam, variata quantitatis ratione immixtam ita modificetur, ut alias atque alias sibi sumendo halomeleogenii quantitates diversas procreet acidorum species, anne potius lateat horum diversitatis caussa in occultatis radicalibus alcalium, terrarum aut oxidorum metallicorum, quorum tantilla in omnibus corporibus organicis, ut et in cineribus acidorum perustorum reperiuntur vestigia, certius decisum non esse videtur. Quantitates halomeleogenii illorum ex consideratis salibus neutris per oxidum plumbi productis computare convenientissimum duximus.

Quae in praecipuis acidis adsint radicalium quantitates, et quae augmenta his accesserint in sequenti tabula exhibere studuimus, prima columna radicalium indicantes pondera, et secunda incrementa eorum in 100 acidi cujusque partibus. Tertiam, quae quantitates halomeleogeniorum, quousque ex examinibus salium neutrorum certius determinatae esse videantur, et quartam quae aquam superfluam latentem significent, pro acidis minus adhuc perscrutatis, vacuas reliquimus.

100 partes	radicale	augm. pond.	halomeleog.	aquam
acidi carbonici continent	27,00	73,00	73,00	0,00
— muriatici —	41,10	58,90	58,90	0,00
— phosphorici —	46,50	53,50	53,50	0,00

100 partes		radic.	augm. pond.	halom.	aquam
acidi oxalici continent	–	34,90	65,10	42,40	22,70
— sulphurici	–	40,12	59,88	39,90	19,98
— arsenicici	– –	66,04	33,96	33,96	0,00
— acetici	– –	64,00	36,00	31,00	5,00
— nitrici	– –	19,80	80,20	29,44	50,76
— citrici	– – –	34,00	66,00	28,60	37,40
— tartarici	– –	39,50	60,50	23,58	36,92
— sulphurosi	–	49,97	50,03		
— nitrosi	– –	22,40	77,60		
— gummosi	–	34,00	66,00		
— fluorici	– –	45,05	54,95		
— boracici	–	40,50	59,50		
— arsenicosi	– –	74,48	25,52		
— tellurici	–	80,10	19,90		
— wolframici	–	80,00	20,00		
— molybdici	– –	66,67	33,33		
— chromici	–	48,02	51,98		
— muriatici superoxygenati		14,85	85,15		
— hydrothionici	–	93,76	6,24		

Praecipuarum basium radicalia, et acquisita, per horum combustiones, augmenta ponderis, quae pro ipsis basium halomeleogeniis habemus sequentes ostendunt series:

100 partes	radicale		halomeleogenium
ammoniacae continent	53,11	—	46,89
aluminae —	53,27	—	46,73
magnesiae —	61,20	—	38,80
oxidi ferri —	69,32	—	30,68
calcis — —	71,84	—	28,16
sodae —	74,34	—	25,66
oxiduli ferri —	77,22	—	22,78
oxidi manganesii albi	78,10	—	21,90
oxidi cobalti —	78,55	—	21,45
oxidi niccoli —	78,56	—	21,44
oxidi cererii —	79,29	—	20,71
oxidi cupri —	80,00	—	20,00
oxidi zinci —	80,39	—	19,61
potassae —	83,02	—	16,98
oxiduli antimonii	84,46	—	15,54
oxiduli cererii	85,09	—	14,91
strontianae —	85,91	—	14,09
oxidi platini —	85,94	—	14,06
oxidi palladii	87,70	—	12,30
oxiduli stanni —	88,03	—	11,97
oxiduli cupri —	88,89	—	11,11
barytae —	89,53	—	10,47
oxidi bismuthi	89,70	—	10,30

100 partes	radicale	halomeleogenium
oxidi titanii —	90,00 —	10,00
oxiduli platini —	92,35 —	7,65
oxidi hydrargyri	92,60 —	7,40
oxidi plumbi flavi	92,85 —	7,15
oxidi argenti	93,08 —	6,92
oxiduli auri —	96,15 —	3,85
oxiduli hydrargyri	96,25 —	3,75.

Posito jam halomeleogenio baseos cujuscunque = 1, habemus sequentia pondera acidorum halomeleogenium = 2 foventium, quae propterea cum illa producent neutra salia.

acidi carbonici —	2,740	acidi arsenicici —	5,889
— muriatici —	3,396	— acetici —	6,452
— phosphorici —	3,738	— nitrici —	6,793
— oxalici —	4,717	— citrici —	6,993
— sulphurici —	5,0125	— tartarici —	8,482.

Et pondera basium, quorum halomeleogenium = 1, quae proinde ad saturandum quantitates singulorum acidorum modo enumeratas sufficiant, erunt:

ammoniacae -	2,133	oxiduli cererii	6,707
aluminae -	2,140	strontianae -	7,097
magnesiae -	2,577	oxidi platini -	7,112
oxidi ferri -	3,259	oxidi palladii -	8,130
calcis - -	3,551	oxiduli stanni -	8,354
sodae - -	3,897	oxiduli cupri -	9,000
oxiduli ferri -	3,259	barytae -	9,551
oxidi manganesii albi	4,566	oxidi bismuthi -	9,709
oxidi cobalti -	4,662	oxidi titanii -	10,000
oxidi niccoli -	4,664	oxiduli platini -	13,072
oxidi cererii -	4,829	oxidi hydrargyri	13,5135
oxidi cupri -	5,000	oxidi plumbi flavi	13,986
oxidi zinci -	5,099	oxidi argenti -	14,450
potassae - -	5,889	oxiduli auri -	25,974
oxiduli antimonii -	6.435	oxiduli hydrargyri	26,667.

Quae ex his datis computatae sunt rationes ponderis acidorum et basium in 100 partibus salis cujusque neutri, sequenti tabula exposuimus, comparationis ergo simul exhibentes rationes per experimenta chemicorum analytica erutas. Quantitatem aquae crystallisationis in nonnullis salibus determinatam indicavimus, adjunctis simul proportionibus inter acida et bases salium siccatorum. Nominibusque chemicorum appositis significavimus diversarum analysium auctores.

	computata acidum	computata basis	per analyses detecta acid.	per analyses detecta basis	per analyses detecta aqua cryst.	
Carbonatis						
— ammoniacae	56,23	43,77	56,00	19,00	25,00	*Schrader*
			::74,67	:25,33		
			44,00	56,00		*Gay.Lussac*
— aluminae	56,15	43,85	54,04	45,96		*Richter*
— magnesiae	51,53	48,47	52,00	48,00		*Bucholz*
			35,00	42,00	23,00	idem
			::45,45	:54,55		
— ferri oxidi	45,67	54,33				
— calcis	43,55	56,45	43,60	56,40		*Berzelius*
			42,08	57,92		*Richter*
			43,00	56,50	0,50	*Bucholz*
			::43,22	:56,78		
— sodae	41,28	58,72	41,24	58,76		*Berzelius*
			40,17	59,83		*Richter*
— ferri oxiduli	38,57	61,43	38,40	61,60		*Berzelius*
— manganesii	37,50	62,50	34,16	55,84	10,00	idem
			::37,95	:62,05		
— cobalti	37,02	62,98				
— niccoli	37,01	62,99	31,70	55,00	13,30	*Berzelius*
			::36,55	:63,45		
— cererii oxidi	36,20	63,80	36,17	63,83		idem

	computata		per analyses detecta			
	acidum	basis	acid.	basis	aqua cryst.	
carbonatis						
— cupri oxidi	35,40	64.60				
— zinci	34.93	65,07	34,80	65,20		*Berzelius*
— potassae	31,75	68,25	49,00	51,00		idem
			32,38	67,62		id., in sale basico
			26,43	73,57		*Richter*
— antimonii	29,86	70,14				
—cererii oxiduli	29,04	70,96	22,70	57,90	17,40	*Berzelius*
			::28,16	:71,84		
— strontianae	27,85	72,15	27,65	72,35		*Richter*
			25,00	74,50	0,50	*Bucholz*
			::25,12	:74,88		
			30,00	69,50	0,50	*Klaproth*
			::30,12	:69,88		
— platini oxidi	27,81	72,19				
— palladii	25,21	74,79				
— stanni	24,70	75,30				
— cupri oxiduli	23,34	76,66				
— barytae	22,29	77,71	22,10	77,90		*Berzelius*
— bismuthi	22,01	77,99				
— titanii	21,51	78,49	20,55	75,00	4,45	*Berzelius*

	computata acidum	basis	per analyses detecta acid.	basis	aqua cryst.	
carbonatis						
— titanii			::21,53	:78,47		
- platini oxiduli	17,33	82,67				
— hydrarg. oxidi	16,86	83,14				
— plumbi	16,38	83,62	16,00	84,00		*Berzelius*
— argenti	15,94	84,06	15,90	84,10		idem
— auri	9,54	90,46				
— hydr. oxiduli	9,32	90,68				
Muriatis						
— ammoniacae	61,42	38,58	50,86	31,95	17,19	*Berzelius*
			::61,42	:38,58		
— aluminae	61,34	38,66	57,51	42,49		*Richter*
			29,45	30,00	40,55	*Bucholz*
			::45,54	:50,46		
— magnesiae	56,86	43,14	55,02	44,98		*Wenzel*
			53,65	46,35		*Richter*
— ferri oxidi	51,03	48,97				
— calcis	48,88	51,12	24,69	25,71	49,60	*Berzelius*
			48,88	51,12		id., in sale siccato
— sodae	46,57	53,43	46,56	53,44		idem
			45,63	54,38		*Wenzel*

	computata acidum	basis	per analyses detecta acid.	basis	aqua cryst.	
muriatis						
— ferri oxiduli	43,62	56,38				
— manganesii	42,65	57,35	24,70	38,50	36,80	*John*
			::39,08	:60,92		
— cobalti	42,15	57,85	42,13	57,87		*Rothoff*
			43,43	56,57		*Wenzel*
— niccoli	42,13	57,87	42,10	57,90		*Berzelius*
— cererii oxidi	41,29	58,71				
— cupri oxidi	40,45	59,55	26,00	39,00	35,00	*Berzelius*
			::40,00	:60,00		
— zinci	39,98	60,02				
— potassae	36,57	63,43	36,58	63,42		*Berzelius*
			35,26	64,74		*Wenzel*
— antimonii	34,54	65,46				
— cererii oxiduli	33,60	66,40				
— strontianae	32,37	67,63	32,40	67,60		*Davy*
			32,15	67,85		*Rose*
— platini oxidi	32,32	67,68	32,00	68,00		*Berzelius*
— palladii	29,46	70,54				
— stanni	28,90	71,10				
— cupri oxiduli	27,40	72,60	27,10	72,90		*Berzelius*
			26,05	73,95		*Proust*

	computata acidum	basis	per analyses detecta acid.	basis	aqua cryst.	
muriatis						
— barytae	26,24	73,76	23,35	61,85	14,80	*Berzelius*
			::27,41	:72,59		
			26,23	73,77		id., in sale ignito
			24,77	75,23		*Bucholz*
— bismuthi	25,91	74,09	26,98	73,02		*Berzelius*
— titanii	25,35	74,65	25,31	74,69		idem
- platini oxiduli	20,62	79,38	20,625	79,375		idem
—hydrarg. oxidi	20,09	79,91	19,80	80,20		idem
— plumbi	19,54	80,46	19,61	80,39		idem
— argenti	19,06	80,94	19,07	80,93		idem
			18,27	81,73		*Wenzel*
— auri	11,57	88,43				
— hydr. oxiduli	11,29	88,71	11,28	88,72		*Berzelius*
Phosphatis						
— ammoniacae	63,89	36,11	59,34	40,66		*Richter*
— aluminae	63,59	36,41	65,06	34,94		idem
— magnesiae	59,19	40,81	61,42	38,58		idem
— ferri oxidi	53,42	46,58				
— calcis	51,28	48,72	55,25	44,75		*Richter*
			41,00	59,00		*Vauquelin*

	computata acidum	basis	per analyses detecta acid.	basis	aqua cryst.	
phosphatis						
— calcis			31,40	68,50		*Klaproth*
			54,00	46,00		*Fourcroy et Vauquelin* in sale acid.
— sodae	48,96	51,04	16,65	20,35	63,00	*Berzelius* in sale basico
			::45,00	:55,00		
			52,91	47,09		*Richter*
— ferri oxiduli	45,99	54,01				
— manganesii	45,01	54,99				
— cobalti	44,50	55,50				
— niccoli	44,49	55,51				
— cererii oxidi	43,63	56,37				
— cupri oxidi	42,78	57,22	35,00	49,50	15,50	*Berzelius*
			::41,42	:58,58		
— zinci	42,30	57,70				
— potassae	38,83	61,17	35,00	65,00		*Berzelius*
			41,00	59,00		*Wenzel*
			37,85	62,15		*Richter*
— antimonii	36,74	63,26				
— cererii oxiduli	35,79	64,21				

	computata acidum	computata basis	per analyses detecta acid.	per analyses detecta basis	per analyses detecta aqua cryst.	
phosphatis						
— strontianae	34,50	65,50	41,24	58,76		*Vauquelin*
— platini oxidi	34,45	65,55				
— palladii	31,50	68,50				
— stanni	30,91	69,09				
— cupri oxiduli	29,34	70,66				
— barytae	28,13	71,87	27,80	72,20		*Berzelius*
— bismuthi	27,79	72,21				
— titanii	27,21	72,79				
— plat. oxiduli	22,24	77,76				
— hydrarg. oxidi	21,67	78,33				
— plumbi	21,09	78,91	20,80	79,20		*Berzelius*
— argenti	20,55	79,45				
— auri	12,58	87,42				
— hydr. oxiduli	12,31	87,69				
Oxalatis						
— ammoniacae	68,86	31,14	59,37	26,88	13,75	*Berzelius*
			::68,83	:31,17		
— aluminae	68,79	31,21				
— magnesiae	64,67	35,33	63,73	36,27		*Richter*
— ferri oxidi	59,14	40,86				
— calcis	57,05	42,95	57,62	42,38		*Richter*

	computata acidum	computata basis	per analyses detecta acid.	per analyses detecta basis	per analyses detecta aqua cryst.	
oxalatis calcis			49,50	38,50	12,00	*Vogel*
			::56,25	:43,75		
— sodae	54,76	45,24				
— ferri oxiduli	51,80	48,20	55,00	45,00		*Bergman*
— manganesii	50,81	49,19				
— cobalti	50,29	49,71				
— niccoli	50,28	49,72				
— cererii oxidi	49,41	50,59				
— cupri oxidi	48,54	51,46				
— zinci	48,05	51,95	46,90	53,10		*Berzelius*
— potassae	44,47	55,53	44,50	55,50		*Berzelius*
— antimonii	42,30	57,70				
— cerer. oxiduli	41,29	58,71				
— strontianae	39,93	60,07	39,76	60,24		*Thomson*
— platini oxidi	39,88	60,12				
— palladii	36,72	63,28				
— stanni	36,09	63,91				
— cupri oxiduli	34,39	65,61				
— barytae	33,06	66,94	32,75	67,25		*Richter*
— bismuthi	32,70	67,30				
— titanii	32,05	67,95				
— plat. oxiduli	26,52	73,48				

	computata acidum	basis	per analyses detecta acid.	basis	aqua cryst.	
oxalatis hydrargyri oxidi	25,87	74,13				*Berzelius*
— plumbi	25,22	74,78	25,20	74,80		
— argenti	24,61	75,39				
— auri	15,37	84,63				
— hydr. oxiduli	15,03	84,97				
Sulphatis ammoniacae	70,28	29,72	53,10	22,60	24,30	*Berzelius*
			::70,15	:29,85		
— aluminae	70,08	29,92	70,07	29,93		*Berzelius*
— magnesiae	66,05	33,95	66,64	33,36		idem
— ferri oxidi	60,60	39,40	60,44	39,56		idem
— calcis	58,53	41,47	46,00	33,00	21,00	idem
			::58,23	:41,77		
			59,00	41,00		*Kirwan*
— sodae	56,26	43,74	24,76	19,25	56,00	*Berzelius*
			::56,27	:43,73		
			55,73	44,27		*Wenzel*
			56,00	44,00		*Kirwan*
— ferri oxiduli	53,31	46,69	28,90	25,70	45,40	*Berzelius*
			::52,93	:47,07		
— manganesii	52,33	47,67	33,66	31,00	35,34	*John*

	computata acidum	computata basis	per analyses detecta acid.	per analyses detecta basis	per analyses detecta aqua cryst.	
sulphatis manganesii			::52,06	:47,94		
— cobalti	51,81	48,19	52,11	47,89		*Berzelius*
— niccoli	51,80	48,20	29,37	25,63	45,00	*Tupputi*
			::53,40	:46,60		
— cererii oxidi	50,93	49,07				
— cupri oxidi	50,06	49,94	50,77	49,23		*Proust*
			31,40	32,30	36,30	*Berzelius*
			::49,29	:50,71		
— zinci	50,01	49,99	31,46	32,09	36,45	idem
			::49,50	:50,50		
— potassae	45,94	54,06	45,25	54,75		*Wenzel*
			46,21	53,79		*Berzelius*
— antimonii	43,79	56,21				
— cererii oxiduli	42,77	57,23				
— strontianae	41,39	58,61	42,00	58,00		*Klaproth*
— platini oxidi	41,34	58,66	37,74	53,81	8,45	*Berzelius*
			::41,22	:58,78		
— palladii	38,14	61,86				
— stanni	37,50	62,50				
— cupri oxiduli	35,77	64,23				

	computata acidum	computata basis	per analyses detecta acid.	per analyses detecta basis	per analyses detecta aqua cryst.	
sulphatis						
— barytae	34,42	65,58	34,32	65,68		*Berzelius*
— bismuthi	34,05	65,95	33,65	66,35		
— titanii	33,39	66,61				
— plat. oxiduli	27,72	72,28				
— hydrarg. oxidi	27,07	72,93				
— plumbi	26,38	73,62	26,35	73,65		*Berzelius*
			26,00	74,00		*Klaproth*
— argenti	25,75	74,25	25,78	74,22		*Berzelius*
— auri	16,18	83,82				
— hydr. oxiduli	15,82	84,18	16,00	84,00		*Berzelius*
Arseniatis ammoniacae	73,40	26,60				
— aluminae	73,35	26,65				
— magnesiae	69,56	30,44				
— ferri oxidi	64,38	35,62	66,67	33,33		*Berzelius*
— calcis	62,38	37,62				
— sodae	60,18	39,82				
— ferri oxiduli	57,29	42,71	41,50	36,50	22,00	*Chenevix*
			::53,21	:46,79		
— manganesii	56,33	43,67				
— cobalti	55,81	44,19	38,00	39,00	23,00	*Bucholz*

	computata acidum	computata basis	per analyses detecta acid	per analyses detecta basis	per analyses detecta aqua cryst.	
arseniatis cobalti			::49,35	:50,65		
— niccoli	55,80	44,20				
— cererii oxidi	54,94	45,06				
— cupri oxidi	54,08	45,92	41,10	35,00	23,90	*Chenevix*
			::54,01	:45,99		
— zinci	53,60	46,40				
— potassae	50,00	50,00				
— antimonii	47,78	52,22				
— cerer. oxiduli	46,75	53,25				
— strontianae	45,35	54,65				
— platini oxidi	45 30	54,70				
— palladii	42,01	57,99				
— stanni	41,35	58,65				
— cupri oxiduli	39,55	60,45				
— barytae	38,14	61,86				
— bismuthi	37,75	62.25				
— titanii	37,04	62,96				
— plat. oxiduli	31,06	68,94				
— hydrarg. oxidi	30,35	69,65				
— plumbi	29,63	70,37	29,63	70,37		*Berzelius*
— argenti	28,95	71,05				

	computata acidum	computata basis	per analyses detecta acid.	per analyses detecta basis	per analyses detecta aqua cryst.	
asseniatis auri	18,48	81,52				
— hydr. oxiduli	18,09	81,91				
Acetatis ammoniacae	75,15	24,85	70,35	29,65		*Richter*
— aluminae	75,11	24,89				
— magnesiae	71,46	28,54	71,14	28,86		*Berzelius*
— ferri oxidi	66,46	33,54				
— calcis	64,50	35,50	64,22	35,78		*Berzelius*
— sodae	62,36	37,64	36.95	22,94	40,11	idem
			::61,70	:38,30		
			60,36	39,64		*Wenzel*
— ferri oxiduli	59,51	40.49				
— manganesii	58,56	41,44				
— cobalti	58,05	41,95				
— niccoli	58,04	41,96				
— cererii oxidi	57,19	42,81				
— cupri oxidi	56,34	43,66	47,00	37,00	16,00	*Berzelius*
			::55,95	:44,05		
— zinci	55,86	44,14				
— potassae	52,36	47,64	49,85	50,15		*Berzelius*
			36,00	37,80	26,20	*Richter*
			::48,57	:51,43		

	computata		per analyses detecta			
	acidum	basis	acid.	basis	aqua cryst.	
acetatis antimonii	50,07	49,93				
— cererii oxiduli	49,03	50,97				
— strontianae	47,62	52,38				
— platini oxidi	47,57	52,43				
— palladii	44,25	55,75				
— stanni	43,57	56,43				
— cupri oxiduli	41,76	58,24				
— barytae	40,32	59,68	37,66	55,73	6,61	*Berzelius*
			::40,33	:59,67		
— bismuthi	39,91	60,09				
— titanii	39,21	60,79				
- platini oxiduli	33,05	66,95				
— hydrarg. oxidi	32,32	67,68	32,90	67,10		*Strohmeyer*
— plumbi	31,57	68,43	26,00	58,00	16,00	*Thenard*
			::30,95	:69,05		
— argenti	30,87	69,13	31,23	68,77		*Berzelius*
— auri	19,90	80,10				
— hydr. oxiduli	19,48	80,52	21,80	78,20		*Strohmeyer*
Nitratis ammoniacae	76,10	23,90	67,62	21,15	11,23	*Berzelius*
			::76,17	:23,83		

	computata acidum	computata basis	per analyses detecta acid.	per analyses detecta basis	per analyses detecta aqua cryst.	
nitratis aluminae	76,05	23,95				
— magnesiae	72,50	27,50	72,00	28,00		*Bucholz*
			70,00	30,00		*Wenzel*
— ferri oxidi	67,58	32,42				
— calcis	65,67	34,33	66,18	33,82		*Wenzel*
			61,00	39,00		*Bucholz*
— sodae	63,55	36,45	62,50	37.50		*Wenzel*
— ferri oxiduli	60,70	39,30				
— manganesii	59,80	40,20				
— cobalti	59,30	40,70	61,81	38,19		*Wenzel*
— niccoli	59,29	40,71				
— cupri oxidi	57,60	42,40	61,30	26,70	12,00	*Berzelius*
			::69,66	:30,34		
— zinci	57,12	42,88				
— potassae	53,56	46,44	53,80	46,20		*Berzelius*
			51,88	48,12		*Wenzel*
— antimonii	51,35	48,65				
— cererii oxiduli	50,32	49,68				
— strontianae	48,91	51,09	48,40	47,60	4,00	*Berzelius*
			::50,42	:49,58		
— platini oxidi	48,85	51,15				

	computata acidum	basis	per analyses detecta acid.	basis	aqua cryst.	
nitratis palladii	45,52	54,48				
— stanni	44,85	55,15				
— cupri oxiduli	43,01	56,99				
— barytae	41,56	58,44	41,75	52,25		*Berzelius*
— bismuthi	41,16	48,84	34,20	48,80	17,00	idem
			::41,20	:58,80		
— titanii	40,45	59,55				
-platini oxiduli	33,69	66,31				
—hydrarg.oxidi	33,45	66,55				
— plumbi	32,69	67,31	32,71	67,29		*Berzelius*
— argenti	31,98	68,02	31,60	68,40		idem
— auri	20,73	79,27				
— hydr. oxiduli	20,30	79,70				
Citratis ammoniacae	76,63	23,37	72,46	27,54		*Richter*
— aluminae	76,56	23,44	76,16	23,84		idem
— magnesiae	73,07	26,93	73,16	26,84		idem
— ferri oxidi	68,21	31,79				
— calcis	66,32	33,68	67,15	32,85		*Richter*
			62,56	37,44		*Vauquelin*
— sodae	64,21	35,79	57,90	42,10		*Richter*
			60,70	39,30		*Vauquelin*

	computata acidum	computata basis	per analyses detecta acid.	per analyses detecta basis	per analyses detecta aqua cryst.	
citratis ferri oxiduli	61,43	38,57				
— manganesii	60,50	39,50				
— cobalti	60,00	40,00				
— niccoli	59,99	40,01				
— cererii oxidi	59,15	40,85				
— cupri oxidi	58,31	41,69				
— zinci	57,83	42,17	57,83	42,17		*Berzelius*
			50,00	50,00		*Vauquelin*
— potassae	54,29	45,71	55,55	44.45		idem
			51,10	48,90		*Richter*
— antimonii	52,08	47,92				
— cererii oxiduli	51,04	48.96				
— strontianae	49,63	50,37				
— platini oxidi	49,58	50,42				
— palladii	46,24	53,76				
— stanni	45,57	54,43				
— cupri oxiduli	43,73	56,27				
— barytae	42,27	57,73	43,03	56,97		*Richter*
— bismuthi	41,87	58,13				
— titanii	41,15	58,85				
— platini oxiduli	34,85	65,15				
— hydrarg. oxidi	34,10	65,90				

	computata acidum	basis	per analyses detecta acid.	basis	aqua cryst.	
citratis plumbi	33,33	66,67	33,33	66,67		*Berzelius*
— argenti	32,61	67,39	31,00	64,00	5,00	idem
			::32,63	:67,37		
— auri	21,21	78,79				
— hydr. oxiduli	21,17	78,83				
Tartratis ammoniacae	79,91	20,09	74,13	25,87		*Richter*
— aluminae	79,85	20,15	77,70	22,30		idem
— magnesiae	76,70	23,30	74,77	25,23		idem
			79,00	21,00		*Bucholz*
— ferri oxidi	72,24	27,76				
— calcis	70,49	29,51	69,70	30,30		*Richter*
			66,00	34,00		*Vauquelin*
— sodae	68,52	31,48	66,20	26,80	7,00	*Bucholz*
			::71,18	:28,82		
— ferri oxiduli	65,89	34,11	58,00	29,00	13,00	*Berzelius*
			::66,67	:33,33		
— manganesii	65,01	34,99				
— cobalti	64,53	35,47				
— niccoli	64,52	35,48				
— cererii oxid.	63,72	36,28				
— cupri oxidi	62,91	37,09				

	computata acidum	computata basis	per analyses detecta acid.	per analyses detecta basis	aqua cryst.	
— zinci	62,46	37,54				
— potassae	59,02	40,98	58,70	41,30		*Berzelius*
			48,00	45,00	7,00	*Klaproth*
			::51,61	:48,39		
— antimonii	56,86	43,14				
— cererii oxiduli	55,84	44,16				
— strontianae	54,45	45,55	56,02	43,98		*Richter*
			47,12	52,88		*Vauquelin*
— platini oxidi	54,39	45,61				
— palladii	51,06	48,94				
— stanni	50,38	49,62				
— cupri oxiduli	48,51	51,49				
— barytae	47,04	52,96	44,24	55,76		*Richter*
— bismuthi	46,63	53,37				
— titanii	45,89	54,11				
— plat. oxiduli	39,35	60,65				
— hydrarg. oxidi	38,56	61,44				
— plumbi	37,75	62,25	37,75	62,25		*Berzelius*
			34,00	66,00		*Thenard*
— argenti	36,99	63,01				
— auri	24,62	75,38				
— hydr. oxiduli	24,13	75,87				

Ex hac comparatione patet, proportiones partium in salibus neutris a nobis computatas, plerumque iis convenire, quae per novissima experimenta analytica erutae sunt; saltem non magis ab his discrepare, quam inter se differunt consectaria ex experimentis directe deducta. Ulteriora chemicorum tentamina ostendent si in salibus nondum satis examinatis ea adhuc detegatur compositionis ratio, quam ipsis assignavimus. Fieri utique posse nobis videtur, ut in quibusdam basibus vera halomeleogenia cum incremento ponderis a radicalibus earum suscepti non quadrent, et ut propterea apud eas quoque talis correctio necessaria sit, qualem in determinandis halomeleogeniis nonnullorum acidorum adhibuimus. Quod si quandoque a veris phaenomenis nimis abludere inveniatur nostra aedificatiuncula, si neque, post factas emendationes lemmatum nostrorum, naturae evadere queat consentanea, speramus tamen benigne judicaturos esse, quorum judicii res sit, non plane perperam neque inaniter nos consummatiori aliorum disquisitioni tantillam praebuisse materiam.

d. 17 Octob. 1814.

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES,

FAITES À ST. PÉTERSBOURG

PAR

FEU MR. *INOKHODTSOW*

ANNÉE MDCCCVI D'APRÈS LE VIEUX STYLE, †

RÉDIGÉ PAR

B. PETROW.

Présenté à la Conférence le 18 Oct. 1815.

† Voyez Tome II. des Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg page 224.

I. Baromètre.

Hauteurs extrêmes, variation, milieu arithmétique, hauteur moyenne et nombre des jours, auxquels la hauteur du baromètre a été au-dessus de 28 *pouces de Paris.*

NB. m. signifie matin ou avant midi, à m. à midi, apr. m. après midi, et s. soir ou après midi.

Mois	Hauteurs les plus grandes, pouces	jours	Hauteurs les plus petites, pouces	jours	variation, pouces	milieu arithmétique, pouces	hauteur moyenne, pouces	hauteurs au-dessus de 28 pouces, jours
Janv.	28,98	le 24 s.	27,54	le 1 m.	1,44	28,26	28,144	18
Févr.	28,80	le 9 apr. m.	27,16	le 14 apr. m.	1,64	27,98	28,165	19
Mars	28,76	le 11 apr. m.	27,41	le 3 s.	1,35	28,085	28,223	24
Avr.	28,53	le 10 m.	27,75	le 15 m.	0,78	28,14	28,231	25
Mai	28,57	le 4 s.	27,50	le 23 m.	1,07	28,035	28,156	22
Juin	28,19	le 27 m.	27,52	le 24 m.	0,67	27,855	27,910	9
Juill.	28,44	le 29 m. et apr. m.	27,58	le 4 m.	0,86	28,010	28,034	16
Août	28,35	le 3 m. et 20 à m.	27,83	le 11 m.	0,52	28,090	28,154	29
Sept.	28.48	le 18 m.	27,29	le 27 m.	1,19	27,885	28,141	24
Oct.	28,62	le 27 s.	27,60	le 12 m.	1,02	28,110	28,053	20
Nov.	28,46	le 16 à m. et apr. m.	26,83	le 22 m.	1,63	27,645	27,846	14
Déc.	28,25	le 8 s.	27,04	le 14 s.	1,21	27,645	27,696	12
A.	28,98	le 24 s. en Janvier	26,83	le 22 m. en Novembre	2,15	27,978	28,063	232
H.	28,98	le 24 s. en Janvier	27,16	le 14 apr. m. en Février	1,82	28,070	28,049	101
E.	28,62	le 27 s. en Oct.	27,29	le 27 m. en Sept.	1,33	27,997	28,075	120

A. marque l'intervalle de toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1806, comprenant les 365 jours de l'année.

H. marque l'intervalle de six mois d'hiver depuis le 1 Novembre 1805 jusqu'au 1 Mai 1806, comprenant 181 jours.

E. marque l'intervalle de six mois d'été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1806, comprenant 184 jours.

Ce tableau fait voir: 1) que la variation totale ou annuelle du baromètre, c'est-à-dire, la différence entre la plus grande hauteur du baromètre (28,98 pouces) et entre la plus petite (26,83 pouces) est égale à 2,15 pouces; 2) que la variation du baromètre a été la plus grande (de 1,64 pouce) en Février, et la plus petite (0,52 de pouce) en Août; 3) que la hauteur moyenne du baromètre se trouve être la plus grande (de 28,231 pouces) en Avril, et la plus petite (de 27,696 pouces) en Décembre.

II. Thermomètre de Mr. *Délisle*.

1) Températures extrêmes de l'atmosphère avec leur différence ou variation, milieu arithmétique et températures moyennes, pendant les matins et les soirs, à midi ou bientôt après midi, et pour chaque mois de l'année 1806.

Mois	Températures extrêmes				leurs différences,	leur milieu arithmétique,	Températures moyennes		
	les plus basses,		les plus hautes,				les matins et les soirs,	à midi, ou bientôt apr midi,	de chaque mois
	degrés	jours	degrés	jours	degrés	degrés	degrés	degrés	degrés
Janv.	189,4	le 20 m.	149,4	le 7 m.	40	169,4	168,4	162,7	165,5
Févr.	183,7	le 26 m.	142,8	le 9 à midi	40,9	163,3	165,2	156,2	162,2
Mars	171,2	le 19 m.	139,2	le 15 apr. m.	32	155,2	156,3	145,3	152,6
Avr.	169,6	le 1 m.	122,4	le 30 apr. m.	47,2	146	144,6	135,1	141,6
Mai	151	le 16 m.	111	le 31 apr. m.	40	131	135,8	126,7	132,9
Juin	140	le 10 m.	120	le 5 apr. m.	20	130	132,8	129,2	131,4
Juill.	134	le 1 et le 2 m.	108	le 26 apr. m.	26	121	126,6	120,4	124,4
Août	138,8	le 28 m.	109	le 5 apr. m.	29,8	123,9	126,1	119,3	123,9
Sept.	151,9	le 28 m.	123,8	le 5 apr. m.	28,1	137,85	137,1	132,3	135,4
Oct.	165	le 27 m.	142,5	le 5 apr. m.	22,5	153,75	150,8	148,2	149,9
Nov.	179	le 20 m.	146	le 25 apr. m.	33	162,5	155,6	153,9	154,6
Déc.	189,4	le 28 m.	145	le 12 apr. m.	44,4	167,2	158,3	152,5	156,5
A.	189,4	le 20 Janv. et le 28 Dec. m.	108	le 26 Juillet apr. m.	81,4	148,7	146,5	140,2	144,2
H.	189,4	le 20 Janv. et le 28 Déc. m.	122,4	le 30 Avril apr. m.	67	155,9	158,6	152,1	156,1
E.	165	le 27 Oct m.	108	le 26 Juillet apr. m.	57	136,5	134,9	129,4	132,9

On voit par le tableau précédent: 1) que le plus grand froid (de 189,4 degrés) avait été le 20 Janvier et le 28 Décembre matin; 2) que la plus grande chaleur (de 108 degrés) fut le 26 Juillet à 2 heures après midi; 3) que la plus grande différence entre la plus basse et la plus haute température de l'atmosphère a été (de 47,2 degrés) en Avril, et la plus petite (de 20 degrés) en Juin; 4) que la variation totale ou annuelle c'est-à-dire, la différence entre la plus basse et la plus haute température dans toute l'année, a été de 81,4 degrés; 5) que la température moyenne, pendant les matins et les soirs, se trouve être la plus basse (de 168,4 degrés) en Janvier, et la plus haute (de 126,1 degrés) en Août; et 6) qu'à midi ou bientôt après midi, la température moyenne la plus basse (de 162,7 degrés) se trouve être aussi en Janvier, et la plus haute (de 119,3 degrés), comme ci-dessus, en Août.

2) Nombre des jours, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et les soirs, à midi, ainsi que bientôt après midi de chaque mois, au-dessous et au-dessus de quelques divisions principales du thermomètre.

Mois	Pend. les matins et les soirs la tempér. a été plus basse que				A midi, ou bientôt après midi la température a été plus haute que				
	180°	170°	160°	150°	150°	140°	130°	120°	110°
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	10	15	24	30	1				
Févr.	4	11	21	28	6				
Mars		1	12	31	26	5			
Avr.			2	8	29	23	8		
Mai				1	31	29	17	8	
Juin					30	30	17		
Juill.					31	31	31	12	1
Août					31	31	31	15	1
Sept.				3	30	26	13		
Oct.			4	18	23				
Nov.		3	9	19	11				
Déc.	1	5	10	22	11				
A.	15	35	82	160	260	175	117	35	2
H.	16	38	92	151	75	28	8		
E.			4	22	176	147	109	35	2

3) Nombre des joúrs, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et les soirs, ainsi qu'à midi et bientôt après midi de chaque mois, tant au-dessous qu'au-dessus et entre quelques divisions principales du thermomètre.

Mois	Pendant les matins et les soirs la température a été					A midi, ainsi que bientôt après midi la température a été					
	au dessous de 180°	entre 180° et 170°	entre 170° et 160°	entre 160° et 150°	au dessous de 150°	au dessus de 150°	entre 150° et 140°	entre 140° et 130°	entre 130° et 120°	entre 120° et 110°	au dessus de 110°
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	10	5	9	6	30	1					
Févr.	4	7	10	7	28	6					
Mars		1	11	19	31	26	21	5			
Avr.			2	6	8	29	6	15	8		
Mai				1	1	31	2	12	9	8	
Juin						30		13	17		
Juill.						31			19	11	1
Août						31			16	14	1
Sept.				3	3	30	4	13	13		
Oct.			4	14	18	23	23				
Nov.		3	6	10	19	11	11				
Déc.	1	4	5	12	22	11	11				
A.	15	20	47	78	160	260	78	58	82	33	2
H.	16	22	54	59	151	75	40	20	8		
E.			4	18	22	176	29	38	74	33	2

Il a commencé à geler le 25 Septembre matin 1805, et il a gelépour la dernière fois le 16 Mai 1806, après un intervalle de 234 jours. En A. et notamment en E., où il avait gelé pour la dernière fois le 16 Mai, il a recommencé à geler le 28 Septembre 1806, après un intervalle de 134 jours.

Il a gelé, pendant les matins et les soirs, en A. 160 jours, en H. 151 jours, et en E. 22 jours. Il n'a gelé point du tout, à midi, ainsi que bientôt après midi, en A. 260 jours, en H 75 jours et en E. 176 jours.

La rivière Newa, après avoir été couverte de glace, du 16 Octobre 1805, debacla le 14 Avril 1806, par conséquent après un intervalle de 181 jours. Le 26 Octobre 1806 elle se couvrit de nouvelle glace, après avoir été ouverte pendant 197 jours.

III: Vents.

Mois	calme,	La force des vents, v. faible et médiocre,	vent fort,	vent très-fort,	Rapport de la direction des vents, Nord	Est	Sud	Ouest
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janvier	4	23	4		2	9	10	6
Février	5	14	8	1	1	4	6	12
Mars	7	19	4	1	4	4	5	11
Avril	4	23	3			8	6	12
Mai	2	20	9		9	9	1	10
Juin		15	13	2	2	3	15	10
Juillet		20	11		13	10	6	2
Août		18	10	3	3	4	22	2
Septembre		17	11	2	8	3	11	8
Octobre	1	26	4		9	7	8	6
Novembre	1	17	10	2	6	5	16	2
Décembre	3	22	6		8	6	10	4
A.	27	234	93	11	65	72	116	85
H.	21	113	43	4	17	26	46	72
E.	3	116	58	7	44	36	63	38

Ce tableau fait voir : 1) que les mois Juin, Juillet, Août, Septembre et Novembre ont été plus venteux, que tous les autres ; 2) que l'hiver H. a été un peu plus calme, que l'été E., qui l'a suivi dans le rapport de 116+58+7 : 113+43+4, ou de 181 : 160; 3) que le vent dominant était dans l'année celui du Sud.

IV. L'état de l'atmosphère.

Mois	Ciel			brouillard	pluie	l'arc-en-ciel	tonnerre et éclaire	grêle	gelée blanche	neige	parasélènes
	serein	nuages	couvert								
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	9	10	12	7						10	
Févr.	9	9	10	14						7	
Mars	14	8	9	9	1					11	1
Avr.	7	14	9	14	10		3	2		3	
Mai	11	12	8	3	13	1	2	1		2	
Juin	3	17	10		19		2	1			
Juill.	13	16	2		13		3	1			
Août	9	19	3		12	1	4				
Sept.	6	18	6	2	14				1	1	
Oct.	5	11	15	2	3					9	
Nov.	1	9	20	2	2					9	
Déc.	1	16	14	6	2					7	
A.	88	159	118	59	89	2	14	5	1	59	1
H.	44	55	82	48	28			2		68	1
E.	47	93	44	7	74	2	11	3	1	12	

Le tableau précédent indique: 1) que le nombre des jours entièrement sereins a été le plus grand en Mars, Mai et Juillet; 2) que par les mois de Novembre et Décembre on n'en a compté qu'un seul jour serein; 3) qu'en hiver H. il *y* en avait presqu'autant qu'en été E. dans le rapport de 44 : 47.

Cette année-ci il neigea pour la dernière fois le 16 Mai, et pour la première fois le 29 Septembre, après un intervalle de 135 jours.

Il tonna pour la première fois le 24 Avril, et pour la dernière fois le 25 Août.

Enfin, cette année-ci on n'a pas observé qu'une seule parasélène le 17 Mars, un parhelie le 18 du même mois et deux aurores boréales le 7 et 9 aussi en Mars.

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES,

FAITES À ST. PÉTERSBOURG

ANNÉE MDCCCVII D'APRÈS LE VIEUX STYLE,

PAR

B. PETROW.

Présenté à la Conférence le 6 Avril 1814.

I. Baromètre.

Hauteurs extrêmes, variation, milieu arithmétique, hauteur moyenne et nombre des jours, auxquels la hauteur du baromètre a été au-dessus de 28 *pouces de Paris.*

NB. m. signifie matin ou avant midi, apr. m. après midi, et s. soir ou après midi.

Mois	Hauteurs les plus grandes, pouces	Hauteurs les plus grandes, jours	Hauteurs les plus petites, pouces	Hauteurs les plus petites, jours	variation, pouces	milieu arithmétique, pouces	hauteur moyenne, pouces	hauteurs au dessus de 28 pouces, jours
Janv.	28,58	le 11 apr. m. et s.	26,92	le 1 toute la journée	1,66	27,75	27,623	9
Févr.	28,62	le 18 apr. m.	27,12	le 11 m.	1,50	27,87	27,978	15
Mars	28,67	le 11 apr. m.	27,37	le 2 s.	1,30	28,02	27,980	17
Avr.	28,73	le 10 m.	27,50	le 18 s.	1,23	28,115	27,985	16
Mai	28,80	le 5 m.	27,50	le 12 s.	1,30	28,15	28,115	26
Juin	28,20	le 5 toute la journée	27,54	le 12 apr. m.	0,66	27,87	27,956	12
Juill.	28,48	le 31 apr. m.	27,96	le 3 s. et le 4 m.	0,52	28,22	28,185	30
Août	28,33	le 17 m.	27,17	le 30 s.	1,16	27,75	28,084	28
Sept.	28,37	le 22 après m. et s. et le 25 m.	27,48	le 27 s. le 28 m. et après m.	0,89	27,93	28,026	20
Oct.	28,42	le 11 m.	26,96	le 16 s.	1,46	27,69	27,876	15
Nov.	28,46	le 3 et le 18 apr. m.	27,12	le 22 s.	1,34	27,79	27,990	20
Déc.	28,48	le 25 s.	27,29	le 31 apr. m.	1,19	27,88	27,895	14
A.	28,80	le 5 Mai	26,92	le 1 Janvier	1,88	27,86	27,974	222
H.	28,73	le 10 Avril	26,83	le 22 Nov. 1806	1,90	27,78	27,734	83
E.	28,80	le 5 Mai	26,96	le 11 Oct.	1,84	27,88	28,040	131.

A. marque l'intervalle de toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1807, comprenant les 365 jours de l'année.

H. marque l'intervalle de six mois d'hiver depuis le 1 Novembre 1806 jusqu'au 1 Mai 1807, comprenant 181 jours.

E. marque l'intervalle de six mois d'été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1807, comprenant 184 jours.

On voit par le tableau précédent: 1) que la variation totale du baromètre a été la plus grande (de 1,66 pouce) en Janvier, et la plus petite (de 0,52 pouce) en Juillet; 2) que la hauteur moyenne se trouve être la plus grande (de 28,185 pouces) en Juillet, et la plus petite (de 27,623 pouces) en Janvier.

II. Thermomètre de Mr. *Délisle*.

1) Températures extrêmes de l'atmosphère, leur différence, milieu arithmétique, et l'état moyen pendant les matins et les soirs, à midi ou bientôt après midi, pour chaque mois de l'année 1807.

Mois	Températures extrêmes				leurs différence,	milieu arithmétique,	Températ. moyennes	
	les plus basses,		les plus hautes,				pend. les matins et les soirs,	à midi, ou bientôt après midi,
	degrés	jours	degrés	jours	degrés	degrés	degrés	degrés
Janv.	185	le 6 et le . 1 m.	146,2	le 19 apr. m.	38,8	165,6	162,70	159,7
Févr.	179	le 18 m.	144,4	le 4 apr. m.	34,6	161,7	158,14	151,72
Mars	174	le 7 m.	136,9	le 18 apr. m.	37,1	155,45	154,99	147,09
Avr.	164	le 9 m.	130,2	le 25 apr. m.	33,8	147,10	150,73	143,88
Mai	153	le 1 et le 12 m.	117,2	le 30 et 31 apr. m.	35,8	135,10	138,92	130,25
Juin	136,9	le 9 m.	106,9	le 6 apr. m.	30,0	121,9	130,45	123,31
Juill.	134	le 17 m.	114	le 12 et 23 apr. m.	20,0	124	124,60	120
Août	136,9	le 30 s. et 31 m.	114	le 27 apr. m.	22,9	125,45	127,93	123,36
Sept.	155	le 13 m.	132	le 15 apr. m.	23	143,5	141,63	137,87
Oct.	157	le 20 m.	138	le 5, 16 et 30 apr. m.	19	147,5	148,19	145,58
Nov.	168	le 19 m.	146	le 1 m.	22	157	152,18	150,99
Déc.	180	le 7 et 8 m.	145	le 18 s.	35	162,5	156,03	154,65
A.	1[illegible]5	le 6 et 11 Janv	106,9	le 6 Juin	78,1	145,95	145,54	140,70
H.	189,4	le 28 Déc. 1806.	130,2	le 25 Avril	59,2	159,8	156,63	152,12
E.	157	le 20 Oct.	106,9	le 6 Juin	50,1	131,95	135,29	130,06

Ce tableau fait voir: 1) que le plus grand froid (de 189,4 degrés) a été en 1806 le 28 Décembre; 2) que la plus grande chaleur (de 106,9 degrés) est arrivée le 6 de Juin; 3) que la plus grande différence entre la plus basse et la plus haute températures de l'atmosphère fut (de 38,8 degrés) en Janvier, et la plus petite (de 19 degrés) en Octobre; 4) que la température moyenne, pendant les matins et les soirs, se trouve être la plus basse (de 162,70 degrés) en Janvier, et la plus haute (de 124,60 degrés) en Juillet; 5) qu'à midi ou bientôt après midi la température moyenne la plus basse (de 159,7 degrés) a été en Janvier, et la plus haute (de 120 degrés) en Juillet.

2) Nombre des jours, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et les soirs, à midi ou bientôt après midi de chaque mois, au-dessous et au-dessus de quelques divisions principales du thermomètre.

Mois	Pend. les matins et les soirs la tempér. a été plus basse que				A midi, ou bientôt après midi la température a été plus haute que				
	180°	170°	160°	150°	150°	140°	130°	120°	110°
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	4	9	18	29	5				
Févr.		2	15	27	6				
Mars		2	7	28	22	2			
Avr.			4	20	25	7	1		
Mai				2	31	30	14	3	
Juin					30	30	25	4	2
Juill.					31	31	31	14	
Août					31	31	27	5	
Sept.				3	30	20			
Oct.				17	27	4			
Nov.			3	20	14				
Déc.	2	5	10	26	12				
A.	6	18	57	172	264	155	98	26	2
H.	7	23	62	150	81	9	1		
E.				22	180	146	97	26	2

3) Nombre des jours, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et les soirs, à midi ou bientôt après midi de chaque mois, autant au-dessous qu'au-dessus et entre quelques divisions principales du thermomètre.

Mois	Pendant les matins et les soirs la température a été					A midi, ainsi que bientôt après midi la température a été					
	au dessous de 180°	entre 180° et 170°	entre 170° et 160°	entre 160° et 150°	au dessous de 150°	au dessus de 150°	entre 150° et 140°	entre 140° et 130°	entre 130° et 120°	entre 120° et 110°	au-dessus de 110°
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	4	5	9	11	29	5	5				
Févr.		2	13	12	27	6	6				
Mars		2	5	21	28	22	20	2			
Avr.			4	16	20	25	18	6	1		
Mai				2	2	31	1	16	11	3	
Juin						30		5	21	2	2
Juill.						31			18	13	
Août						31		3	23	5	
Sept.				3	3	30	10	20			
Oct.				17	17	27	23	4			
Nov.			3	17	20	14	14				
Déc.	2	3	5	16	26	12	12				
A.	6	12	39	115	172	264	109	56	74	23	2
H.	6	17	43	90	150	81	71	8	1		
E.				22	22	180	34	48	73	23	2

Il a commencé à geler le 28 Septembre 1806, c'est-à-dire encore avant le commencement de l'intervalle II., et il a gelé pour la dernière fois le 10 de Mai 1807, après un intervalle de 225 jours. En A. et notamment en E., où il avait gelé pour la dernière fois le 10 de Mai, il a recommencé à geler le 12 Septembre 1807, par conséquent après un intervalle de 124 jours.

Il a gelé, pendant les matins et les soirs, en A. 172 jours, en H. 150 jours, et en E. 22 jours. Il n'a gelé à midi ou bientôt après midi en A. 264 jours, en H. 81 jours et en E. 180 jours.

La rivière Newa, après avoir été converte de glace, du 28 au 29 d'Octobre 1806, debacla le 28 Avril 1807 après midi, conséquemment après un intervalle de 182 jours. Le 24 matin de Novembre se formèrent de nouvelles glaces, mais ce ne fut que du 30 Novembre au 1 Décembre pendant la nuit, qu'elle en fut entièrement prise, après avoir été ouverte pendant 210 jours.

III. Vents.

Tableau général de la force et de la direction des vents pour chaque mois de l'année 1807.

Mois	calme,	La force des vents, v. faible et médiocre.	vent fort,	vent très-fort,	Rapport de la direction des vents, Nord	Est	Sud	Ouest
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janvier	5	15	7	4	5	6	11	4
Février	6	11	8	3	4	3	12	3
Mars	2	13	13	3	6	4	10	9
Avril	1	11	10	8	10	8	3	8
Mai	5	14	5	7	7	5	4	10
Juin	3	10	12	5	4	6	7	10
Juillet	8	21	2		9	7	5	2
Août	6	16	6	3	7	4	6	8
Septembre	10	8	11	1	4	14	1	1
Octobre	2	16	11	2	6	7	9	7
Novembre	1	10	12	7	3	4	12	10
Décembre	3	15	6	7	7	3	10	8
A.	52	160	103	50	72	71	90	80
H.	20	91	50	20	40	28	62	31
E.	34	85	47	18	37	43	32	38

Les mois de Mars, d'Avril, de Juin et de Novembre ont été les plus venteux; ceux de Janvier, de Février, d'Août, de Juillet et de Septembre les plus calmes. L'hiver H. a été un peu plus venteux que l'été E., qui l'a suivi dans le rapport de $85 + 47 + 18 : 91 + 50 + 20$, ou de $150 : 161$.

Le vent dominant était dans l'hiver celui du Sud.

IV. L'état de l'atmosphère.

Mois	Ciel			brouillard	pluie	arc-en-ciel	tonnerre et éclaire	grêle	gelee blanche	neige	parasélènes
	serein	nuages	couvert								
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	4	9	17	1						11	1
Févr.	3	13	12	6	1					13	1
Mars	2	13	16	3	1					15	1
Avr.	1	20	9		9			1	1	8	
Mai	9	19	3	1	7		2			2	
Juin	3	19	8	1	16	2	1				
Juill.	10	18	3	8	2		2				
Août	3	23	5	14	10	1					
Sept.	2	13	15	12	15	1					
Oct.	1	9	21	9	12					7	1
Nov.	1	6	23.	10	6				1	7	1
Déc.		9	22	4	4					11	2
A.	39	171	154	69	83	4	5	1	2	74	7
H.	15	70	96	18	15					62	3
E.	28	101	55	45	62	4	5			9	1.

Le nombre des jours entièrement sereins a été le plus grand en Mai et Juillet; en Avril. Octobre et Novembre on n'en a compté, qu'un par mois, et en Décembre il n'y en avait aucun. Il y en avait en été E. beaucoup plus, et notamment 28, qu'en hiver H., où on n'en a compté que 15.

Cette année-ci il neigea pour la dernière fois le 10 de Mai, et pour la première fois le 2 d'Octobre, après un intervalle de 144 jours.

Il tonna pour la première fois du 9 au 10 de Mai, et pour la dernière fois le 25 de Juillet à dix heures du soir.

On n'a remarqué qu'une seule aurore boréale (faible) le 28 Juillet à dixième et onzième heures du soir.

III.

SECTION

DES

SCIENCES POLITIQUES.

86*

DONNÉES STATISTIQUES
SUR LES PRINCIPALES FOIRES DE LA RUSSIE

PAR

C. T. HERRMANN.

Présenté à la Conférence le 2 Novembre 1814.

Les foires forment le centre du commerce de l'intérieur et font connoître l'état des manufactures du pays. Le commerce a choisi les principaux points de réunion, le Gouvernement en a crée un grand nombre de moins considérables. C'est quelquefois à l'ombre d'un monastère, quelquefois sur une vaste plaine que le grand marché des nations s'établit. Un Gouvernement paternel respectera le choix des ancêtres fait sous des circonstances qui peut-être n'existent plus depuis des siècles. Il est toujours difficile de les transférer même sur un lieu beaucoup plus commode, sans faire tort au commerce. Les grandes foires comme les grandes routes de commerce sont toujours du choix libre de l'industrie nationale.

1. *La foire de Makariew.*

De toutes les foires de la Russie celle de Makariew est la plus célèbre *). C'est aux environs du Monastère du même nom, presque au milieu des gouvernemens orientaux et occidentaux de la Russie que les marchands de toutes les nations de l'Empire et des États voisins de l'Asie se rassemblent. Une nouvelle ville nait et disparoit annuellement, l'industrie nationale étale ses produits et c'est ici qu'on peut porter un jugement impartial sur son état actuel. Les Tatares et les Arméniens, les Géorgiens et les Buchares arrivent en grand nombre pour acheter des manufactures européennes et pour vendre les productions de leur pays. Il paroit que ce sont eux qui ont choisi

*) Cette petite ville est située sur la rive gauche de la Volga dans le gouvernement de Nigegorod, à 81 werstes de la ville de ce nom. C'étoit un village habité par environ 2 0 paysans appartenans autrefois au Monastère de Makariew et apresent à la Couronne. Ils vivoient de l'industrie forestière. La ville a 213 maisons. Le Monastère qui est devenu le point central du plus grand revirement du commerce de l'intérieur en Russie fut fondé sous le règne du Grand Duc Wasili Wasilewitsch le tenebreux vers la moitié du 14me siècle, puis ruiné par les Tatares en 1[illegible]3[illegible] et retablit en 620. La foire commence à la fête de St. Pierre et continue depuis les premiers jours du mois de Juillet jusq'au 16 Août. Vis à vis de Makariew sur la rive droite de la Volga se trouve le bourg Liskowo à l'embouchûre d'une petite rivière du même nom qui forme un port ou les navires arrivent pendant le tems de la foire avec les produits volumineux de l'argriculture et des mines. C'est ici le grand marché pour le cuivre et le fer, pour les chevaux et les cuirs non appretes. Les habitans ont la réputation de faire des toiles de très bonne qualité mais etroites.

autrefois Makariew pour lieu d'échange avec les Russes. La situation politique des nations a changé, mais leur point de ralliement a survecu aux revolutions des États.

L'année 1811 étoit une année de paix, nous la choisissons pour faire le tableau de cette fameuse foire. La valeur des marchandises russes exposées au grand marché montoit à 32,346,000 r. celle des marchandises étrangères

à 11,224,000 r.

Enfin la valeur des marchandises russes apportée au port de Liskowo à 8,584,359 r.

total 52,154,359 r.

Les noms des différentes rangées de boutiques sont très anciennes et font connoitre l'état de ce commerce dès son origine. C'est ainsi qu'il y a les boutiques de toiles non blanchies, celles des passemens d'or, la rangée ancienne et nouvelle d'Astrachan, celle de Siberie, celle de livres, de soieries, de draps et de chapeaux de Moscou et de Nigegorod; suivent la premiere et la seconde ligne de pelleteries de Siberie, d'argenteries et de quincailleries, d'épingles de Jaroslaw, les boutiques pour l'échange des monnoies, les boutiques pour la bonneterie, pour les ustensiles en cuivre et en étain; les armes blanches et fusils, les attelages, les cuirs de Russie et d'Arsamas, les images saintes, les épingles de Moscou;

les modes et souliers de dames, les marchandises coloniales, la porcelaine, les miroirs et meubles ont leurs rangées particulières. Enfin on voit les boutiques pour les boissons, les boutiques des Tatares, les ustensiles en fer de Jaroslaw, celles pour le savon, les boutiques de l'Oural, celles des fruits, de tabac, les boutiques des arts et métiers, des cordages et provisions de bouche. Jusqu'aprèsent les marchands s'établissent dans les différentes files de boutiques selon la qualité de leurs marchandises. Il y a bien quelques exceptions de cette règle, mais peu considérables. Nos données sur les différentes marchandises arrivées à la foire en 1811 sont encore d'après les rangées des boutiques, d'où resulte quelque difficulté quand on veut classifier les marchandises; mais cette disposition est un document historique qui prouve que les marchands russes apporterent au marché de Makariew depuis le 15me siècle des toiles et toileries, des passemens d'or, de l'argenterie, des Soieries, des draps, du savon et des fruits; que les manufactures de Moscou, de Nigegorod, de Jaroslaw, les cuirs de Russie étoient alors reputées et que les tatares d'Astrachan, les peuples de l'Oural et de la Siberie visitèrent cette foire.

Noms des marchandises.	Valeur en roubles.	Noms des marchandises.	Valeur en roubles.
Passemens en or	550,000 pour les Arméniens et Géorgiens.	Ouvrages en fer, cloux, haches etc.	455,000 se vend: surtout aux Buchares et Arméniens
Perses, demi-perses, toiles grises ou ravendouk, toiles de flandres et toileries	2,870,000 se vend: surtout en Russie, le reste aux Arméniens et Tatares.	Savon	500,000 se vendent en Russie
Livres et cartes géographiques	pour 300,000 rbls.	Coffres de Siberie et de Makariew, cabarets de Siberie	150,000, les coffres se vendent aux Buchares, le reste en Russie
Serviettes et nappes, toiles colorées	326,000, vont à Kiachta, la toile colorée en Perse, le reste en Russie	Habillemens russes et allemands	255,400, se vendent en Russie
Chapeaux de Moscou et de Nigegorod	pour 200,000 de M. pour 200,000 de N. se vend: en Russie	Toiles ordinaires	540,300, se vendent aux Arméniens et Cosaques
Ouvrages en or et argent	558,000 se vendent en Russie	Tabac	22,000 se vendent en Russie
Ustensiles en cuivre et en étain	250,000 se vendent en Russie	Souliers, bottes et bas de paysans	127,300, se vendent en Russie
Bouloirs de Toula et de Jaroslaw, fusils, couteaux et fourchettes etc.	365,000 se vendent en Russie	Pelléteries ordinaires	183,000, se vendent en Russie
Harnois et attelages	100,000 se vendent en Russie	Equipages	30,500, se vendent en Russie
Cuirs ordinaires	700,000, en Russie et aux Arméniens	Nattes	27,500, se vendent aux marchands en foire
Images saintes et autres tableaux	67,000 se vendent aux marchands russes	Miel, poissons, caviar et chandelles	5,800 se vendent aux marchands en foire
Souliers de dames et bottes de Moscou	141,000 se vendent aux marchands russes.	Ustensiles en bois	7,700 se vend: aux marchands russes et aux paysans
Essuie-mains et petites toileries	49,000 se vendent en Russie	Mêches	3,000 se vendent en Russie
Miroirs et meubles	628,000 se vendent surtout aux Buchares et aux Arméniens	Verrerie	460,000 aux Arméniens et en Russie
		Corderies	21500 se vend: aux marchands en foire pour l'emballage.

Total 10,293,000.

Marchandises russes en concurrence avec les productions étrangères.

Noms des marchandises.	Valeur des marchandises russes.	Valeurs des marchandises étrangères.	Total.
Soieries fortes à la manière perse	3,960,000 se vend. surtout aux Armén.	50,000	4,010,000
Cottonneries et soieries legeres	6,400,000 se vendent aux Géorgiens	130,000	6,530,000
Fils et petites cottonneries	150,000 se vendent en Russie	168,000	318,000
Draps, mouchoirs de soie, nanquins et thé	500,000 se vend: aux Arméniens et aux Russes	5,745,000	6,245,000
Différentes marchandises en laine	2,300,000 vont surtout à Kiachta	150,000	2,450,000
Pelléteries	2,220,000 se vend: surtout en Russie	40,000	2,260,000
Argenteries, parfumeries, instrumens de musique	1,723,000 se vendent en Russie	20,000	1,743,000
Bas de soie, bonnêts, gants	120,000 se vend: à Tiflis, en Perse et aux Arméniens	6,000	126,000
Perles, ambre jaune, quincailleries en ver, épingles	1,000,000, se vendent aux Armén. Tatares et Russes	162,000	1,162,000
Modes et schalls	80,000 se vend: en Russie	70,000	150,000
Sucre, thé, vitriol, sandal, couleurs	230,000 se vend: en Russie	2,541,000	2,771,000
Porcellaine, faiance et crystaux	200,000 se vendent Russie	15,000	215,000
Vins et eaux de vie de Kislar et de Taganrog	1,200,000	714,000	1,914,000
Différentes marchandises Buchares et cuirs russes	2,000,000, le cuir russe se vend aux Buchares, va à Brodi et à Kiachta, le reste en Russie	2,400,000	4,400,000
Fruits et bougies	200,000 se vendent en Russie	9,000	209,000
Horlogeries	40,000 aux Arméniens et tatares	10,000	50,000
Total	22,323,000 rbls.	12,230,000	34,553,000

sement des marchands de se procurer d'avance un emplacement. Le loyer des boutiques au grand marché et aux environs montoit en 1311 à 112,017 R. C'est la couronne qui les loue pour le tems de la foire. En 1813, malgré la désastreuse année de 1812, ce loyer montoit à 111,021 R. Les marchands sont si pressés qu'ils payent la grande moitié du loyer d'avance. C'est ainsi qu'en 1811 ils avoient avancé pour le loyer de 1812 86,169 rbls. en 1812 pour l'année 1813 76,339 — et en 1813 pour 1814 81,225 — .

L'histoire des dernières années éclaircit ces données, la première indique l'état naturel des choses, la seconde prouve combien le commerce a du souffrir par l'invasion de l'ennemi, la troisième fait voir que le commerce reprend son ancien cours.

Voyons aprésent quels étoient les articles où les manufactures russes n'avoient point de concurrence à soutenir et puis ceux où elle existoit. Ce point de vue nous fera connoître l'état de nos manufactures en 1811. (Voyez les tableaux pour la page 689.)

Il resulte de ces tableaux que les manufactures russes qui prospèrent particulièrement sont :

1) celles de soieries legères, taffetats, mouchoirs de soie, rubans, mouchoirs et gilets de cachemire, mitkals, ceinturons, filatures et petites cottonneries ; on en apporta à la foire pour la somme de 6,550,000 Roubles. Le grand marché de ces marchandises c'est la Géorgie.

2) Puis viennent les toiles et toileries qui sous différentes dénominations montoient à 4,045,300 r. Les Arméniens, les Géorgiens, les Tatares, les Chinois et les Perses les recherchent.

3) Les soieries fortes dans le gout asiatique pour 3,960,000 r. se vendent surtout aux Arméniens.

4) Les cuirs de tout genre pour 2,968,300 r. Leur marché est en Bucharie, à Brodi, à Kiachta et en Russie.

5) Les petites marchandises en laine qui vont surtout en Chine pour 2,300,000 r.

Il paroit que les manufactures étrangères ne font nullement tort aux nôtres pour tout ces articles qui ont leur marché particulier en Asie et en Russie et qui sont travaillés dans un genre qui convient aux peuples qui les recherchent et dans lequel les étrangers ne travaillent pas. Voilà donc nos manufactures naturelles qui prospèrent sans moyens artificiels. Il y avoit deux tiers de marchandises russes au grand marché contre un tiers des manufactures étrangères. Les articles que les étrangers apportoient en échange étoient

1) Des draps, des mouchoirs de soie, du nanquin et du thé pour 5,745,000 r.

Comme le commerce chinois exige absolument le drap contre lequel les chinois aiment surtout troquer le thé et le nanquin, on trouve ces marchandises réunies aux mêmes boutiques.

2) marchandises coloniales et des couleurs pour 1,541,000. r.

3) Des marchandises asiatiques en laine et en cotton que les Buchares apportent pour 2,400,000 r.

D'où il resulte 1) que nos manufactures de drap ne sont pas encore parvenues à ce degié de perfection pour nous faire passer de celles des étrangers malgré tous les avantages offerts à nos entrepreneurs. D'ailleurs ce ne sont pas les draps de première qualité qui sont les plus recherchés dans commerce chinois, mais les draps prussiens de moyenne qualité. Le manque de ces draps pendant quelque tems a dû considérablement rencherir le thé.

2) Les marchandises coloniales, les couleurs et le bois de teinture soutiennent nos manufactures jusqu'a ce qu'on trouvera des moyens pour les remplacer par des produits indigènes.

3) Les cottoneries buchares font si peu tort à nos cottonneries que ces dernières sont du nombre de nos manufactures les plus florissantes.

Il y a encore des manufactures et fabriques russes qui ne sont pas de l'importance de celles que nous avons indiquées, mais qui paroissent prospérer, tels sont

1) les chapeaux Russes apportés à la foire pour 400,000 r.
2) les miroirs et meubles - - - 628,000 —
3) le savon - - - - - - 500,000 —
4) différens ouvrages en fer, cuivre, étain - 971,000 —

Un commerce très considérable se fait en perles fines, ambre jaune etc. Il montoit à un million.

Les pelleteries russes montoient à 2,220,000 de r. tandis que les étrangères ne sont marquées que pour la petite somme de 40,000, les vins de Taganrog et les eaux-de-vie de Kislar surpassoient celles des étrangers pour la quantité, notre faiance et nos crystaux de même.

Jettons un coup d'oeil sur l'autre bord de la rivière au port de Liskowo. L'agriculture et les mines exposent leurs produits, ici tout est national et la valeur de ces marchandises montoit à 8 millions et demi. Parcourons les principaux articles

1) produits agricoles

Cire	—	—	—	pour	108,490	roubles
Poisson salé	—	—	—		10,175	—
Caviar	—	—	—		20,910	—
Huile de lin	—	—	—		12,000	—
Chanvre	—	—	—		38,250	—
Goudron	—	—	—		18,720	—
Potasse	—	—	—		112,725	—
Chevaux	—	—	—		232,931	—
Peaux de rennes		—	—		29,500	—
— — bêtes à cornes			—		411,480	—
— — lievres		—	—		72,386	—
— — moutons		—	—		339,587	—
— — chevaux		—	—		650,475	—
				total	2,057,729	roubles

2) produits des mines

Cuivre de fonte	—	—	—	—	1,620,185	roubles
Cuivre blanc	—	—	—	—	12,880	—

fer de différentes qualités non ouvré	4,007,738	roubles
fer ouvré — — — —	414,579	—
fer de fonte — — — —	58,584	—
Acier — — — — —	69,068	—
Souffre — — — — —	25,000	—
Pierres à moulin — — —	126,300	—
total	6,334,334	roubles

Il résulte de ce tableau que Makariew est le grand marché pour les cuirs non appretés et que le commerce en chevaux, en cire et en potasse y est considérable, les autres produits agricoles du tableau qui n'ont pas été marquées ici se consument à la foire et aux environs.

Mais c'est surtout par son commerce en métaux ouvrés et non ouvrés que cette foire se distingue, la quantité de fer non ouvré est réellement étonnante, celle du cuivre est grande. Voilà nos fabriques naturelles.

La comparaison des années 1811 et 1813 fera connoître combien cette foire avoit perdue par l'invasion de l'ennemi, quelles manufactures baissoient et quels articles se sont soutenus?

Marchandises apportées à la foire de Makariew	en 1811	en 1813	moins	plus
soieries fortes à la manière perse	pour 43,570,000 r.	3,069,000	941,000	
passemens en or	550,000	580,000		30,000
cottoneries et soieries legères	6,530,000	3,739,000	2,791,000	
perses, demi-perses, toiles grises, toile de flandres etc.	2,870,000	1,782,600	1,087,400	
fils et petites cottoneries	318,000	176,700	141,300	
livres et cartes géographiq.	300,000	147,000	153,000	
draps, mouchoirs de soie, nanquins et thé	6,245,000	6,705,000		460,000
serviettes, nappes, toiles colorées etc.	526,000	520,000	6,000	
differentes marchand: en laine	2,450,000	845,000	1,605,000	
chapeaux de Moscou	200,000	110,000	90,000	
de Nigegorod	200,000	54,050	145,950	
pelleteries	2,260,000	2,209,500	50,500	
petites marchandises en or et argent	558,000	518,200	39,800	
argenteries, parfumeries, instrumens de musique	1,743,000	281,500	1,461,500	
bas de soie bonnets, gants	126,000	163,000		37,000
ustensiles en cuivre et en étain	250,000	167,000	83,000	
bouloirs, fusils, coutellerie	365,000	190,000	175,000	
harnois et attelages	100,000	80,000	20,000	
cuirs ordinaires	700,000	416,000	284,000	
images saintes et autres tableaux	67,000	41,200	25,800	
perses, ambre jaune, quincailleries, epingles	1,162,000	781,600	380,400	
modes et schalls	150,000	206,000		56,000

Marchandises aportées à la foire de Makariew	en 1811	en 1813	moins	plus
souliers de dames et bottes de Moscou	pour 141,000r.	50,000	91,000	
petites toileries	49,000	136 000		87,000
sucre, thé, couleurs	2,771,000	1,763,500	1007,500	
porcelaine, faiance et crystaux	215,000	330,000		115,000
miroirs et meubles	6[illegible]8,[illegible]00	241,500	386,500	
vins et eaux de vie de Kislar et de Taganrog	1,914,000	2,307,000		293,000
différentes marchandises Buchares et cuirs de Russie	4,400,000	351,000	3,254,000	
ouvrages en fer, cloux, haches	455,000	1,146,000	104,000	
savon coffres et cabarets	500,000 150,000	493,600	156 400	
habillemens russes et allem.	255,400	257,500		2,100
fruits et bougies	209,000	80,100	129,000	
grosses toiles	540,000	384,500	155,800	
tabac	22,000	3,000	17 000	
souliers, bottes et bas pour les paysans	127,300	45,600	8[illegible],700	
pelleteries ordinaires	183,000	188,600		5,600
horlogerie	50,000	20,000	30,000	
équipages	30,500	20,000	10,000	
nattes	27,500	3[illegible],500		5,000
miel, poissons, caviar, chandelles	5,800	21,400		16.100
ustensiles en bois	7,7[illegible]0	4,700	3,000	
mêches	3,000	2,900	100	
verreries	460,000	223,500	231,500	
corderies	21,500	27,8[illegible]0		6,300
Total	43,570,000	30,915,850	15,138,15[illegible]	1 213,100

moins 13,925,050

La foire avoit donc presque baissé d'un tiers, les manufactures de Moscou étoient en grande partie ruinées, celles de Smolensk avoient beaucoup souffertes, de là la diminution considérable des cottonneries et soieries legères et fortes, des perses, des marchandises en laine, des argenteries. À cause du manque des capitaux de Moscou les marchandises coloniales devinrent rares et le commerce avec les Buchares languissoit. Les manufactures qui se sont soutenues à la foire ou qui ont peu perdues étoient les toileries de Jaroslaw, toutes les autres ont considérablement diminuées, d'un tiers ou d'un quart. Au contraire les passemens d'or qui ont leur marché en Géorgie et en Arménie, la bonneterie, les petites toileries, les porcellaines se trouvoient en plus grande quantité à la foire. Nos pelleteries se sont assez bien soutenues, les vins et eaux-de-vie de Taganrog et de Kislar ont gagnés, mais ce qui est sur tout remarquable c'est la quantité de draps, de nanquin et de thé.

Marchandises arrivées au port de Liskowo:

1) produits agricoles

cire	—	en 1811	108,490	en 1813	7,750
poisson salé	—	—	10,175	— —	—
caviar	— —	—	20,910	— —	500

huile de lin	en 1811	12,000	en 1813		—
chanvre	— —	38,250	—	—	—
goudron	— — —	18,720	—	—	—
potasse	— — —	112,725	—	—	—
chevaux	— — —	232,931	—	—	30,000
cuirs de bétes à cornes		411,480	—	—	—
— — lievres—	—	72,386	—	—	—
— — moutons	—	339,687	—	—	9,100
— — chévaux	—	650.475	—	—	—
		2,057,729			47,350

2) produits des mines

	en 1811 rbls.	en 1813 roubles	cop.
cuivre fondu	1,620,185	223,435	60
cuivre blanc	12,880	—	
fer non ouvré	4,007,738	2,385,646	
pierres à moulin	126,300	69,000	
fer ouvré	414,579	248,561	
fer de fonte	58,584	76,120	
acier —	69,068	268,501	
souffre —	25,000	3,330	
pierres à moulin	126,300	69,000	
	6,334,334	3,284,593	
fripperie	65,800	4,400.	

Les produits agricoles avoient presque tout à fait disparu à la foire, les chévaux étoient le seul article marquant, les productions des mines avoient diminuées de la moitié. Les suites de la guerre furent donc encore plus désastreuses pour l'agriculture que pour les manufactures.

On vend ordinairement plus que la moitié des marchandises apportées à la foire, c'est ainsi que la valeur des marchandises arrivées en 1813 étoit

de	30,915,850	
dont on vendit pour	19,444,870	
reste	11,460,980	roubles.

Le rapport général sur la foire de 1814 prouve, que le commerce a reprit son ancien cours, et il est étonnant que ce changement heureux ait pu arriver en si peu de tems. Il est dit: que la valeur des marchandises apportées à la foire avoit passées 50 millions de roubles tout comme en 1811 et que plus que la moitié des marchandises avoit été vendue, comme c'étoit arrivé même pendant la foire de 1813.

Voici encore quelques détails sur la vente de 1813, les soieries fortes à la manière perse ont été bien vendues puisqu'il y en avoit moins qu'autrefois, car de la valeur de 3,069,000 roubles, on a vendu pour 2,080,000. Les passemens d'or de même, car de 580,000, on a vendu pour 435,000, mais les cottonneries et soieries n'ont pas été récherchées, à peine en a t-on vendu un tiers, et de la grande quantité de draps, mouchoirs de soie, nanquin et thé on a à peine vendu la moitié, le marché en étoit surchargé et les acheteurs manquoient. Le commerce en livres, desquels on n'avoit apporté que la moitié d'autrefois, alloit encore pire, on n'en vendit que pour 4,000 roubles d'une valeur de 147,000. Les fils et petites cottonneries, les serviettes et nappes et les pelleteries alloient bien, on en vendit jusqu'aux deux tiers, mais l'argenterie alloit mal comme aussi les ustensiles en cuivre et en étain. Les marchandises coloniales furent recherchées, de 1,763,500 roubles, on a vendu pour 1,415,500, mais la porcellaine, la faiance, les meubles ne le furent pas. Les vins de Taganrog et les eaux de vie de Kislar eurent un très grand débit, car malgré qu'on en eut apporté pour deux millions trois cents mille roubles, ou presque pour 400,000 plus qu'en 1811, il n'en restoit que pour la valeur de 676,000 roubles. Un des articles les plus renommés de la foire de Makariew consiste en manufactures buchares, il n'y en avoit pas le quart d'autrefois, mais ce qui s'y trouvoit fut assez bien vendu, de la valeur de 1,146,000 roubles on vendît pour 748,000. Le savon fut encore un article très recherché, il se vendoit presque tout, quant au tabac il n'en restoit qu'un cinquième, l'horlogerie se vendit mieux que les équipages.

Des personnes entendues dans les affaires de ce commerce ont calculé qu'à la foire de 1813 il y eut sur un capital de 30,915,850 roubles 1,868,365 de profit. En admettant le nombre rond de deux millions sur 31, on auroit $6\frac{1}{2}$ pour cent, profit assez modique qui se trouve dans tous les grands reviremens *).

2. *La foire d'Irbit.*

Les produits de la Sibérie en pelleteries, en cuivre et en fer, les marchandises chinoises de Kiachta, les manufactures des Buchares arrivées par Orenbourg et les marchandises européennes par Moscou et Archangel

*) Des voyageurs instruits assurent: que dans les années communes il y avoit jusqu'à trente millions de roubles en argent blanc sur la place, et que le revirement des marchandises montoit jusqu'à trois cents millions de roubles en assignats; que les marchands de trente deux Gouvernemens se rendoient à cette foire et la noblesse de six, que le total de la population montoit à 300,000 personnes; qu'on vendoit pour un tiers de marchandises en argent et pour un autre tiers à lettres de change. Le grand marché fut consommé par les flammes en 1816 et la foire transferée à Nigegorod en 1817.

furent échangées depuis le 17^{me} siècle au bourg d'Irbit Gouvernement de Perme, à une werste de l'embouchure de la riviére Irbit que les Tatares nomment Irbée. La foire se tient au fort de l'hiver à la mi Janvier pour profiter du trainage, et elle dure environ trois semaines. Le bourg Irbit fondé en 1633 fut nommé ville en 1775. Le grand marché tout prés de la cathédrale forme un carré en bois qui contient 91 boutiques, et deux autres rangées de boutiques dans l'intérieur en renferment 58. Aux environs on construit pour le tems de la foire encore d'autres boutiques, où l'on vend les provisions de bouche, des boissons et des marchandises peu considérables. La ville est entourée de palisades et a deux portes, l'une sur le chemin de Tobolsk, l'autre sur le chemin de Werchotour, qu'on ferme le soir pendant le tems de la foire.

Les données que nous avons pu consulter se bornent à l'année 1814, où l'on se ressentoit encore des desastres de Moscou. Les marchandises arrivées à la foire furent évaluées à la somme de 5,015,800 r. dont on vendit

argent comptant pour	2,774,850
et à crédit pour	1,097,850
	3,771,910 roubles.

Il y eut donc pour 1,143,890 r. de reste. On auroit plus vendu, mais le manque d'argent étoit trop sensible, les anciennes lettres de change dûrent être prolongées pour la prochaine foire de Makariew. Des 149 boutiques du grand marché, 23 étoient restées vuides et aux environs on ne comptoit que 32 boutiques. Le nombre de marchands étrangers montoit à 251, les plus nombreux étoient ceux de Catherinenbourg 28, de Tobolsk 27, de Moscou 20, de Kasan 13, de Tioumen 12; autrefois la foire étoit plus nombreuse.

Les cottoneries étoient l'article qui se trouvoit en plus grande abondance, 29 boutiques en etoient remplies, les manufactures européennes et asiatiques montoiənt à la valeur de 1,798,000 r. et se vendoient à meilleur marché que l'année passée.

Dix boutiques renfermoient du thé et du nanquin pour 275,000 r. Le thé se trouvoit en trop petite quantité à la foire et revenoit à 80 r. plus cher la caisse que l'année passée, le nanquin au contraire étoit à bon marché, mais les filatures avoient rencheries.

Les soieries et le drap se vendoit à meilleur marché qu'en 1813, les pelleteries étoient en assez grande quantité à la foire, mais comme le nombre des acheteurs étoit plus grand que l'année passée, elles se vendoient à 10 pour cent plus cher et encore au delà.

En argenterie il y eut pour 25,000 r. En ustensiles de cuivre pour 52,000 r. en quincaillerie et épingles pour 85,000 r. en fer ouvré pour 230,000. Le produit des mines étoit donc pour cette foire de 392,500 r. outre une petite quantité d'étain qui se trouve confondue avec le bois de sandal. Le fer se vendit tout, le cuivre pas si bien, la quincaillerie mieux, l'argenterie assez bien.

En porcelaine et en faïance on trouvoit pour 120,000, r. dont on vendit les trois quarts, la moitié pour de l'argent, et un quart à credit.

Le sucre fut presque tout vendu. On en avoit apporté pour 209,200 r. et on en vendit pour 199,200.

Les cuirs appretés alloient assez bien, de la valeur de 72,900 r. on vendit pour 65,500.

La librairie ne debita que la moitié de ses marchandises qui montoient à 10,000 r. mais elle eut cela de caractéristique qu'elle est la seule branche de commerce qui ne fit point de credit.

Les couleurs furent très recherchées, il y en avoit pour 25,000 r. et on en vendit pour 24,000.

Le papier d'écriture est une marchandise de grand prix pour ces contrées. On en avoit apporté pour 78,950 r. ce qui est beaucoup en proportion d'autres articles et on vendit pour 62,000.

Les fruits font encore un grand article du commerce de Siberie, on en avoit apporté pour 130,600 r. et vendît argent comptant pour 68,860 r. et à crédit pour 60,350, total 129,210.

La nature de la marchandise forçoit les marchands de faire le plus de crédit. On payoit pendant la foire le change du cuivre contre des petits assignats de 2 à 3 k. du rouble et le rouble d'argent 3 r. 80 k. jusqu'à 4 r. 10 k. en billets.

Le commerce dans ces boutiques construites pour le tems de la foire aux environs du grand marché où se fait le commerce en poissons, en tabac, en houblon, en boissons et provisions de bouche étoit, proportion gardée, plus actif que celui du grand marché. Ces 32 petites boutiques renfermoient pour 1,243,600 r. de marchandises et on en vendit pour 783,700 r. comptant

et pour 264,700 à credit

total 1,048,400 roubles.

La foire d'Irbit a été autrefois plus considérable et comme elle fur particulièrement fournie de Moscou, elle n'a pu se relèver aussi vite que Makariew situé plus au centre de la Russie, En 1814 les marchands de Moscou avoient très peu de marchandises et il y en avoit beaucoup moins qu'à l'ordinaire, le revirement à la foire de 1814 ne surpassoit celui de 1813 que de 179,410 roubles.

Il resulte de ces données que malgré que la foire d'Irbit, dont nous avons fait le tableau pendant une année où le commerce étoit encore très gené, ne sauroit être comparée à la foire de Makariew, elle est toujours pour la Siberie ce que Makariew est pour la Russie européenne.

3. *La foire de Romen.*

Les foires de Makariew et d'Irbit sont les premières pour la Russie et pour la Siberie entière. Nous venons aprésent à une seconde classe de foires qui sont importantes pour certaines contrées. La foire de Romen l'est surtout pour la petite Russie. Cette ville du Gouvernement de Poltawa est située sur la riviere Soula qui se réunit avec le Dnepre par la rive gauche. La ville a quatre foires, dont celle qui commence à la fête de St.

Elie est la plus reputée, elle dure depuis le 20 jusqu'au 30 de Juillet et mérite le nom d'une fête nationale. La noblesse des Gouvernements limitrophes, un grand nombre de personnes titrées, enfin les personnes les plus distinguées s'y rassemblent plutôt pour s'amuser que pour affaires. Une telle affluence de beau monde fait que la foire est très visitée des marchands et a surpassé ces dernières années même celle d'Irbit. La valeur des marchandises arrivées en 1814 pour la foire de St. Elie montoit à 8,591,850 r. Mais le manque d'argent se fit aussi sentir dans ces contrées et on ne vendit que pour 3,802,525 r. il y eut donc un reste considérable de 4,789,325 r. C'est bien dommage qu'il n'y a pas plus de détails sur une foire aussi intéressante. Tout ce qu'on sait sur la nature de ce commerce c'est qu'il est surtout calculé pour les premières classes, parconsequent on y trouve les soieries, les cottoneries, les toileries étrangères et russes, les modes, porcelaines, crýstaux, argenterie, quincaillerie en abondance. Quant aux autres articles le plus remarquable c'est le tabac d'Oukraine qui se vend ici en grande quantité.

4. *La foire de Korennaia Poustina.*

La réligion a fait naître depuis plusieurs siècles cette foire célèbre. L'hérmitage ou le Monastère près duquel cette foire se tient est situé à 27 werstes de Koursk à droite de la grande route d'Orel. C'est ici qu'on trouva en 1300 la bannière de la St. Vierge placée sur un tronc d'arbre le jour même de la nativité, d'où vient le nom de l'hérmitage du tronc (Korennaia). En 1597 on y bâtit une belle église en pierre en honneur de la nativité de la sainte Vierge, puis une autre à l'endroit où l'on avoit trouvé la bannière C'est ici qu'une source d'eau vive jaillît de la terre quand on posa les fondemens de cette église située au pied d'une montagne sur la rivière Touskara. Un bel escalier de 130 degrés, large et commode, orné de colonnes en pierre et couvert, conduit les pélerins à l'endroit où parut pour la première fois le saint étendard sur la montagne. Bientot le monastère eut une enceinte en pierre et encore une église: Mais la ville du Gouvernement eut en 1612 son Monastère et c'est en 1618 qu'on transporta la bannière de l'hérmitage à la ville, mais on la rapporta toujours à l'hermitage en grande procession le neuvieme vendredi après Paques. Cette procession se fit pendant 149 ans, et attira un monde immense. Depuis 1767 elle ne se fait plus et on a remarqué que le nombre de pélerins a considérablement diminué. Mais la foire qui a pris son origine pendant les céremoniens religieuses peuple encore annuellement les bords rians de la Touskara Le commerce se fit d'abord en chevaux, les seigneurs des environs les vendoient à ceux qui venoient en pélerinage, et encore le marché en chevaux est ici très considérable. Les acheteurs commencèrent insensiblement à payer les chevaux par les produits de leur industrie et c'est ainsi que s'établit la foire près de l'hérmitage du trone. Plus de cent familles de gentilshommes établissent sur la pélouse leurs tentes, d'autres font construire des maisonnettes en planches ou en claye, chacun à sa fantaisie. Un petit bois près de la rivière sert de point de réunion. C'est près de ce bois que les tentes et les maisonnettes s'établissent. Delà l'oeil parcourt une vaste prairie et découvre dans le lointain nombre de villages. Environ 400 boutiques s'élèvent sur la plaine, les marchands de Moscou et d'autres Gouvernemens étalent leurs marchandises, une foule immense se repand depuis le bois sur la prairie autour des boutiques, aux environs du Monastère, le long de la rivière et se promène dans le bois; les uns sont en affaires, d'autres vont en pélerinage, d'autres s'amusent. A la foire de 1814 il y eut des marchands de St. Pétersbourg, de Moscou, de Jaroslaw, de Twer, de Novgorod, de Kalouga, de Toula, de Tambow, d'Orel, de Woronesch, de Charkow, de Jekaterinoslaw, de Taganrog, de Nachitschewan, ville commercante du Gouvernement de Jekaterinoslaw située sur le Don, des marchands de Kislar, de Kiew, de Cherson, d'Odesse, de Nigegorod, de Tschernigow, de Poltawa, de Kasan, de Kasimow, de Staradoub, de Kostroma, de Sousdal et d'autres villes. Leurs marchandises montoient à 7,616,000 roubles.

Les articles les plus marquans étoient

soieries — — — pour	984,000	roubles
cottonerie — —	974,000	—
toileries — — —	546,800	—
draps — — — —	476,000	—
argenterie et modes —	860,000	—
pelleterie — — —	275,000	—
peaux de lievres et de moutons	267,000	—
perles — — — —	596,000	—
cire — — — —	345,000	—
ustensiles en fer — —	488,000	—
couleurs et vitriol — —	94,000	—
chapeaux — — —	26,000	—
ustensiles en cuivre — —	169,800	—
Vins et eaux de vie de Taganrog, de Kislar, Odesse et Nigen pour -	95,000	—
ustensiles en bois — —	40,000	—.

On remarque surtout ces ustensiles en bois faites d'une manière très élégante par les filles des villages d'alentour qui les mettent aussi en couleurs tirées de plantes sauvages.

Chévaux cosaques et des steppes de la Tauride pour
306,000 roubles,

poissons salés arrivés des mêmes contrées
99,600 roubles.

Le beau ou le mauvais tems influe infiniment sur le succès de cette foire; malheureusement il y eut des pluies continuelles pendant la foire de 1814 et les chemins étoient affreux. C'est pour cela qu'il y eut peu de monde et on ne vendit que pour 2,865,000 r. Beaucoup de marchands furent obligés de vendre à tout prix et ne trouvoient pas même à qui laisser leurs marchandises.

RESULTATS STATISTIQUES SUR L'ÉTENDUE DE LA SURFACE ET SUR LA POPULATION DE L'EMPIRE DE RUSSIE

DEPUIS 1803 JUSQU'EN 1811 INCLUSIVEMENT

PAR

C. T. HERRMANN.

Présenté à la Conférence le 5 Avril 1815.

J'ai calculé les données que je possedois d'abord par Gouvernemens et puis par plateaux.

Première partie.

Resultats statistiques sur l'Etendue et la Population de la Russie par Gouvernemens.

1. *L'Etendue de la surface.* 1. *Etendue.* L'Empire de Russie s'étend depuis le 43 dégrés latitude Nord jusqu'au 78^{me} et occupe parconsequent un espace de 35 dégrés de latitude. Sa longitude s'étend depuis le 38° 50′ jusqu'au 208° de l'Isle de Ferro, ce qui fait un total de 169½ degrés de longitude. Sa suface est environ de 295,152 milles carrées ou de 1,478,258,146 Dessatines.

Dans cet espace ne sont pas compris: la nouvelle Finlande, le pays des Cosaques du Don, le district de Tarnopol, les nouvelles conquêtes faites sur les Turcs et les Perses, la Géorgie, la steppe des Kirgises, les possessions de la Compagnie Américaine et Nowaia Semla, puisque les données sur leur étendue ou manquent entièrement ou paroissoient suspectes.

De cette étendue de 295,152 milles carrés le Gouvernement d'Irkoutzk occupe environ 127,088,
celui de Tobolsk et de Tomsk 85,387,

l'étendue de la Sibérie est donc de 212,575 milles carrés, reste pour la Russie européenne 82,677 milles carrés. Nos données sur l'étendue des Gouvernemens du midi Catherinoslaw et Cherson, Astrachan et la Caucasie sont du tems où ces Gouvernemens étoient réunis. Catherinoslaw et Cherson ont 2876 milles carrés, Astrachan et la Caucasie 5742. Les autres Gouvernemens suivent dans l'ordre suivant selon l'étendue de leur surface

1. Archangel	—	12,131	milles carrés
2. Wologda	—	8,406	— —
3. Orenbourg	—	5,620	— —
4. Perme	— —	5,039	— —
5. Saratof	— —	4,292	— —

6.	Olonetz —	3,147	milles	carrés
7.	Waetka — —	2,221	—	—
8.	Nowgorod —	2,063	—	—
9.	Kostroma —	1,808	—	—
10.	Minsk — —	1,755	—	—
11.	Woronesch —	1,434	—	—
12.	Simbirsk —	1,403	—	—
13.	Podolsk — —	1,327	—	—
14.	Wilna — —	1,284	—	—
15.	Tschernigow —	1,170	—	—
16.	Twer —	1,135	—	—
17.	Volinsk —	1,132	—	—
18.	Tambof —	1,072	—	—
19.	Kasan — —	1,044	—	—
20.	Smolensk —	1,008	—	—
21.	Nigegorod —	961	—	—
22.	la Livonie —	953	—	—
23.	la Tauride —	831	—	—
24.	Orel — — —	803	—	—
25.	Wladimir —	802	—	—
26.	Pleskou — —	795	—	—
27.	l'ancienne Finlande	781	—	—
28.	Pensa — — —	777	—	—
29.	St. Pétersbourg —	774	—	—

30. Poltawa	— —	718	milles carrés
31. Mohilef	— —	683	— —
32. Koursk	— —	677	— —
33. Grodno	— —	675	— —
34. Resan	— —	613	— —
35. Jaroslaw	— —	606	— —
36. Charkow	—	595	— —
37. Kiew	— —	593	— —
38. Kalouga	— —	553	— —
39. Witebsk	— —	550	— —
40. Toula	— — —	498	— —
41. Moscou	— —	474	— —
42. la Courlande	—	337	— —
43. l'Esthlande	— —	$304\frac{1}{2}$	— —
44. Bialystok	— —	206	— —

Le plus grand des Gouvernemens Irkoutzk est environ 617 fois plus grand que le plus petit district Bialystok.

La plupart des Gouvernemens du Nord et du Sud de la Russie et des ci devant Gouvernemens polonois ont la plus grande étendue, la plupart des Gouvernemens russes et allemands sont de moyenne grandeur.

Dans tout un autre ordre suivent les Gouvernemens d'après leur population. L'année normale qu'on a pris *2. Population.*

pour base est l'an 1810. Les états sur la population portoient 36,329,962 personnes des deux sexes sans les Capitales, le militaire, les peuples nomades et les provinces nouvellement aquises. Ici commence le Gouvernement de

1. Pultawa avec	—	1,391,626	habitans des deux sexes
2. Koursk	—	1,212,703	— — — —
3. Podolsk	—	1,138,968	— — — —
4. Kiew	— —	1,137,281	— — — —
5. Volinsk	—	1,112,783	— — — —
6. Moscou	—	1,108,208	— — — —
7. Tschernigof	—	1,077,662	— — — —
8. Tambof	—	1,029,778	— — — —
9. Orel	— —	1,024,564	— — — —
10. Twer	—	1,009,249	— — — —
11. Woronesch	—	979,426	— — — —
12. Waetka	—	949,983	— — — —
13. Perme	— —	940,078	— — — —
14, Smolensk	—	919,828	— — — —
15. Wladimir	—	907,469	— — — —
16. Resan	— —	903,769	— — — —
17. Toula	—	896,972	— — — —
18. Nigegorod	—	879,897	— — — —
19. Simbirsk	—	854,090	— — — —
20. Minsk	—	845,248	— — — —

21.	Charkow avec	—	844,636	habitans	des	deux	sexes
22.	Kasan	—	827,000	—	—	—	—
23.	Saratof	— —	821,862	—	—	—	—
24.	Kostroma	—	813,132	—	—	—	—
25.	Wilna	—	810,391	—	—	—	—
26,	Mohilef	—	806,763	—	—	—	—
27.	Jaroslaw	—	797,641	—	—	—	—
28.	Kalouga	—	750,967	—	—	—	—
29.	Pensa	— —	745,574	—	—	—	—
30.	Orenbourg	—	736,725	—	—	—	—
31.	Pleskou	—	719,781	—	—	—	—
32.	Witebsk	—	707,638	—	—	—	—
33.	St. Pétersbourg		666,669	—	—	—	—
34.	Nowgorod	—	635,781	—	—	—	—
35.	Wologda	—	606,547	—	—	—	—
36.	Grodno	—	586,836	—	—	—	—
37.	la Livonie	—	573,611	—	—	—	—
38.	Tobolsk	—	427,066	—	—	—	—
39.	Catherinoslaw		416,550	—	—	—	—
40.	la Courlande	—	387,439	—	—	—	—
41.	Irkoutzk	—	376,740	—	—	—	—
42.	Tomsk	—	293,967	—	—	—	—
43.	Cherson	—	280,406	—	—	—	—
44.	la Tauride	—	253,825	—	—	—	—

45. l'Esthlande avec	–	211,170	habitans des deux sexes
46. Archangel	–	201,305	— — — —
47. Olonetz	–	199,549	— — — —
48. la Finlande	–	195,822	— — — —
49. Bialystok	–	193,903	— — — —
50. Astrachan	–	68,681	— — — —
51. la Caucasie	–	62,773	— — — —

Les capitales se trouvant sous un Gouvernement particulier ne sont pas comprises dans la population des Gouvernemens de Moscou et de St. Pétersbourg. En 1814 la population de Moscou étoit de 124,553 hommes
et de 61,520 femmes
186,055 individues.
Celle de St. Pétersbourg consistoit en 243,620 hommes
et 100,457 femmes
344,077 personnes
total 530,132 habitans
des deux capitales.

Le militaire dont le nombre doit changer selon les circonstances ne sauroit être évalué à moins de 600,000 hommes.

Les peuples nomades qu'on peut évaluer à un million et demi ne sont pas compris dans la population des

Gouvernemens qu'ils habitent, puisque les Gouverneurs ne marquent ordinairement que les habitans dont la demeure est fixe.

D'après cela le Gouvernement le plus peuplé Pultawa, a environ 22 fois plus d'habitans que le moins peuplé, la Caucasie.

La Russie a 10 Gouvernemens qui ont plus d'un million d'habitans. 27 où la population s'élève d'un demi million à un million

12 où elle s'élève d'environ 200,000 à un demi million et

2 où elle est au desous de 100,000.

3. Rapport de la population à l'étendue du terrain.

Mais pour juger de la grandeur réelle de la population il faut la rapporter à l'étendue du terrain. On a pris pour base les revisionaires comme la classe la plus exactement comptée et qui fait le gros de la nation. On s'est servi des états complets de la 5eme revision en 1795 et 1796. Le nombre des révisionaires étoit de 18,094,012.

1. Moscou est a leur tête avec

	1,020 revisionaires par mille carré		
2. Kiew	998	—	—
3. Toula	896	—	—

4.	Pultawa	-	882	revisionaires	par mille carré
5.	Orel	-	861	—	—
6.	Resan	-	726	—	—
7.	Charkow	-	711	—	—
8.	Kalouga	-	691	—	—
9.	Witebsk	-	647	—	—
10.	Jaroslaw	-	633	—	—
11.	Koursk	-	616	—	—
12.	la Courlande		591	—	—
13.	Wladimir	-	571	—	—
14.	Mohilef	-	561	—	—
15.	Tambof	-	504	—	—
16.	Volinsk	-	500	—	—
17.	Grodno	-	472	—	—
18.	Bialystok	-	469	—	—
19.	Smolensk	-	463	—	—
20.	Tchernigow		441	—	—
21.	Nigegorod	-	441	—	—
22.	Podolsk	-	439	—	—
23.	Pensa	-	437	—	—
24.	Twer	-	436	—	—
25.	Kasan	-	400	—	—
26.	Wilna	-	394	—	—
27.	Pleskou	-	391	—	—

28. Woronesch	349	revisionaires	par mille carré
29. l'Esthlande -	345	—	—
30. Simbirsk -	299	—	—
31. la Livonie -	284	—	—
32. St Petersbourg	255	—	—
33. Minsk -	252	—	—
34. la Finlande	250	—	—
35. Kostroma -	224	—	—
36. la Tauride	222	—	—
37. Waetka -	210	—	—
38. Nowgorod -	152	—	—
39. 40. Cherson et Catherinoslaw	151	—	—
41. Saratow -	94	—	—
42. Perme - -	90	—	—
43. Orenbourg -	69	—	—
44. Wologda -	34	—	—
45. Olonetz -	32	—	—
46. 47. Astrachan et la Caucasie	17	—	—
48. Archangel -	7	—	—
49. 50. Tobolsk et Tomsk -	5	—	—
51. Irkoutzk -	$1\frac{1}{2}$	—	—

La population est donc très inégalement partagée ; le Gouvernement de Moscou a sur la même étendue de pays 680 fois plus d'habitans que le Gouvernement le moins peuplé, Irkoutzk. Cette proportion seroit moins saillante si tous les nomades de ce Gouvernement étaient comptés et compris dans le nombre des revisionaires.

Il resulte de ce tableau que 16 Gouvernemens de la Russie ont par mille carré de 500 à 1000 revisionaires,
18 Gouvernemens
une population de 250 à 500 hommes,
6 Gouvernemens
une population de 150 à 250,
7 Gouvernemens
une population de 17 a 100 habitans,
et 4 Gouvernemens
moins que 10 revisionaires par mille carré.

Les Gouvernemens les plus peuplés sont ceux où se trouvent les anciennes Capitales de la Russie, Moscou et Kiew. De ces deux points de ralliement, la population de la Russie européenne diminue vers le Nord de 1000 ames par mille carré jusqu'à 7 à Archangel ; vers le sud jusqu'à 34 dans la partie septentrionale de l'Oural à Wologda, jusqu'à 90 sur le milieu de l'Oural à Perme, et jusqu'à 69 sur l'Oural méridional à Orenbourg; vers l'Ouest dans la partie septentrionale de cette frontière dans l'ancienne Finlande jusquà' 250, vers le milieu à Bialystok et Grodno jusqu'à 472, au Sud en Podolie jusqu'à 439.

En jettant un coup d'oeil sur la Carte, nous voyons que les Gouvernemens les mieux peuplés se trouvent entre Moscou et Kiew; Toula, Orel, Poltawa, Charkow, aux environs de Moscou: Raesan, Kalouga, Wladimir, aux environs de Kiew, enfin la plûpart des Gouvernemens polonois. Outre cela, parmis les provinces riches en bled se distinguent encore Tambow, Nigegorod et la Courlande, parmi ceux où l'industrie manufacturière et le commerce sont parvenus à un certain degré de perfection, Jaroslaw, Twer, Kasan; preuve incontestable que les progrés de la population dépendent des moyens de subsistance. Là où le sol est moins fertile comme à Pétersbourg, en Finlande, à Waetka, à Nowgorod la population diminue; là où le paysan souffroit autrefois, comme en Livonie, elle s'arreta par une autre stérilité que celle du sol. Des peuples nomades comme en Tauride, à Cherson et Catherinoslaw, à Astrachan et en Caucasie, des peuples pêcheurs, comme à Olonetz et Archangel, des peuples chasseurs comme en Sibérie, s'éloignent par degré, en raison du genre de leur industrie qui permet plus ou moins l'accumulation des capitaux de la population des peuples argicoles, manufacturiers et commerçans.

La Russie n'est pas mal peuplée, on ne sauroit le repêter assez souvent, elle n'a que ses colonies et ses avant-postes militaires contigues, et pas audelà des mers comme l'Angleterre, le Portugal et l'Espagne; elle traite tous ses enfans de la même manière et ne distingue pas le nouveau sujet ou le colon de l'ancien russe, elle occupe et elle doit occuper pour la sûreté de ses frontières et pour des vues de commerce certains points et langues de terre separés des pays habitables par des terrains inhabitables, et occuper parconséquent un terrain immense, elle n'a eu après de longues guerres civiles le bienfait de la sûreté publique que par l'avenement au trône de la maison de Romanow; elle n'est devenue importante dans la balance politique de l'Europe que depuis le regne de Pierre le Grand; elle n'a eu une administration mieux organisée que depuis le regne de Catherine II, et elle a beaucoup soufferte de la grande lutte entre l'anarchie et la tyrannie contre les Gouvernemens légitimes, lutte qui vient d'être finie à Paris par les libérateurs de l'Europe.

D'après des données sûres il y avoit en 1811 sans les deux Capitales 550 villes, dont on connoissoit la population entière selon les deux sexes, savoir: 4. Population des villes.

5 villes dont la population montoit de 30 à 70,000 personnes, elles comprennoient		133,020	hommes
		103,070	femmes
	total	236,090	individus
28 villes de 10 à 30,000 habitans comprenans - -		230,320	hommes
		210,420	femmes
	total	440,740	individus
80 villes avec une population de 5 à 10,000 habitans, il y avoit		268,828	hommes
		278,955	femmes
	total	547,783	individus
209 villes contenans 2 à 5000 habitans parmis lesquels -		336,098	hommes
		332,917	femmes
	total	669,015	individus
128 villes de 1000 à 2000 habitans dont - -		93,031	hommes
		90,685	femmes
	total	183,716	personnes

100 villes dont la population etoit moins que de mille habitans. Ces villes comprennoient - 34,006 hommes

	32,083	femmes
total	66,089	personnes

Les 550 villes comprennoient donc 1,095,305 hommes

	1,048,130	femmes
total	2,143,435	habitans

A ce nombre il faut ajouter les deux Capitales: St. Pétersbourg dont la population

étoit en 1814 de -	243,620	hommes et de
	100,467	femmes
total	344,077	personnes,
Moscou comprenant -	124,553	hommes
	61,502	femmes
	186,055	personnes

Grand total de 552 villes dont la population entière étoit connue: 1,463,478 hommes

1,210,089	femmes
2,673,567	personnes

Mais il y a encore 72 villes où seulement le nombre des hommes est marqué, qui montoit à 150,534 individus.

Il y avoit donc dans les 624 villes de l'Empire de la Russie 1,614,012 hommes, et en n'admettant pour les

villes dont le nombre de femmes n'est pas marqué
que 100,000, il y auroit
1,310,089 femmes

Grand total : 2,924,101 habitans des villes.

On peut donc, eu égard aux erreurs inévitables évaluer la population des villes en Russie à trois millions d'habitans.

L'industrie des villes est celle des manufactures et du commerce, l'industrie des campagnes est l'argiculture, l'éducation des bestiaux, la pêche et la chasse ; et ces deux genres d'industrie sont liés entre elles par les mines et les salines. On pourra donc juger du genre d'industie qui prédomine dans un Etat quand on sait combien d'habitans des campagnes reviennent sur un habitant des villes.

Les rapports que nous présentons méritent confiance pour les anciens Gouvernemens russes, pour les provinces baltiques et pour les Gouvernemens polonois, puisqu'ils sont basés sur des rapports détaillés. Mais dans les Gouvernemens où se trouvent beaucoup de peuples nomades, le nombre des habitans de la campagne est moins connu, et parconséquent les rapports seront moins justes.

Sous ce point de vue les Gouvernemens de la Russie suivent dans l'ordre suivant :

1. Mohilew	a un habit.	des villes	sur 30	habit.	des campagnes
2. Waetka	—	—	29½	—	—
3. Minsk	—	—	29	—	—
4. Podolsk	—	—	26	—	—
5. Kostroma	—	—	23	—	—
6. Wladimir	—	—	22	—	—
7. la Finlande	—	—	22	—	—
8. Raesan	—	—	21	—	—
9. Grodno	—	—	21	—	—
10. Plescou	—	—	20	—	—
11. Smolensk	—	—	20	—	—
12. Volinsk	—	—	20	—	—
13. Vologda	—	—	19½	—	—
14. Perme	—	—	19	—	—
15. Nowgorod	—	—	18	—	—
16. Nigegorod	—	—	18	—	—
17. Simbirsk	—	—	17½	—	—
18. Kiew	—	—	17	—	—
19. Pultawa	—	—	16	—	—
20. Irkoutzk	—	—	15	—	—
21. Witebsk	—	—	15	—	—
22. Orenbourg	—	—	15	—	—

23. Koursk a un	habit. des villes	sur	14	habit. des	campagnes
24. Jaroslaw	—	—	14	—	—
25. Catherinoslaw	—	—	14	—	—
26. Twer	—	—	13	—	—
27. Kalouga	—	—	12	—	—
28 la Courlande	—	—	12	—	—
29 Tambof	—	—	12	—	—
30. la Livonie	—	—	11	—	—
31. Orel	—	—	11	—	—
32 Woronesch	—	—	11	—	—
33. Wilna	—	—	$10\frac{1}{2}$	—	—
34 Toula	—	—	10	—	—
35. Saratof	—	—	10	—	—
36. Olonetz	—	—	10	—	—
37. Charkow	—	—	10	—	—
38. Tomsk	—	—	10	—	—
39. Archangel	—	—	$9\frac{1}{2}$	—	—
40. l'Esthlande	—	—	$9\frac{1}{2}$	—	—
41. Pensa	—	—	9	—	—
42 Kasan	—	—	9	—	—
43. Tschernigof	—	—	9	—	—
44. la Tauride	—	—	9	—	—
45. Tobolsk	—	—	8	—	—
46 Bialystok	—	—	7	—	—

47. Cherson a un habit. des villes sur		4 habit. des campagnes			
48. la Caucasie	—	—	3	—	—
49. Moscou	—	—	1 $\frac{1}{4}$	—	—
50. St. Pétersbourg		—	1	—	—
51. Astrachan	—	—	a $\frac{4}{7}$	—	—

Le raisonnement général sur ce tableau est: qu'à mesure que le nombre des habitans des campagnes diminue, l'industrie des villes prédomine dans un Gouvernement, mais ce raisonnement très juste en lui même souffre des modifications en Russie dans les Gouvernemens où les peuples nomades font la principale population des campagnes, elle est ambulante et parconséquent moins connue, mais toujours l'industrie des villes prédomine extrêmement dans ces Gouvernemens. Tel est le cas d'Astrachan, de la Caucasie et de la Sibérie où il y a peu d'argiculture, le commerce, les manufactures rassemblent les hommes dans les villes, la chasse et la pêche y trouvent les grands marchés. Dans ces Gouvernemens le rapport n'existe pas entre l'industrie des villes et l'agriculture, mais à d'autres genres d'industrie argicole, ou plutôt c'est le rapport de la population fixe et connue à la population ambulante et moins connue. Mais parmis les Gouvernemens où l'industrie des campagnes est réellement l'argiculture, Moscou et Pétersbourg se distinguent par la population de leurs villes. En parcourant ce tableau, on voit les rapprochemens les plus frappans: Archangel, Kasan et la Tauride, donnent les mêmes propoitions, de même Toula, Olonezt, et Tomsk, mais en refléchissant on devine aisément les différentes causes locales qui les ont produites. Les bornes de ce mémoire ne nous permettent pas de développer ces causes qui exigent un mémoire particulier, dont l'objet seroit infiniment curieux.

Seconde partie.

Resultats statistiques sur l'Etendue et la Population de la Russie par Plateaux.

La division d'un pays par zones et par degrés est prise du ciel et coupe indistrinctement les terrains les plus différens. La division par plateaux est une division prise sur la terre qui suit la nature du sol. Les vues générales sont confuses et erronnées selon la première; car tous les élemens les plus différens s'y trouvent mêlés, elles sont claires et justes selon la seconde, puisqu'on suit la nature sans la gêner par les carrés des degrés. Dans un pays d'une grande étendue, dans un pays agricole, cette, division par plateaux est essentielle.

Nous distinguons sept plateaux dans la Russie européenne

1) le plateau du Nord depuis la mer glaciale jusque là où les bois de chêne commencent et parconséquent la terre noire, il comprend les Gouvernemens d'Archangel, d'Olonetz, de Wologda, le Nord de Waetka et de Perme, enfin la Fin-lande, St. Petersbourg et le Nord de Nowgorod,

2) le plateau des Gouvernemens baltiques, c'est l'Esthlande, la Livonie et la Courlande.

3) l'élévation autour des sources de la Volga, c'est aujourd'hui Twer, Plescou et Smolensk.

4) le plateau de l'Oural depuis l'Oural de Catherinenbourg jusqu'à l'élévation sur la Volga; il comprend dans sa partie orientale: le Sud de Waetka et de Perme, les Gouvernemens riches en bois de chêne: Kasan, Nigegorod, Simbirsk, Tambow, Orenbourg, Pensa et Saratow du coté droit de la Volga. Dans sa partie occidentale: Jaroslaw, Kostroma, Moscou, Wladimir, Kalouga, Toula, Résan, Orel, Kursk et Woronesch.

5) le plateau des basses terres comprend la Russie blanche et la Lithuanie.

6) le plateau des Carpathes depuis la mer noire jusqu'au plateau de l'Oural; c'est cherson, Catherinoslaw. Pultawa, Charkow, Tschernigow, Kiew, Podolsk et Volinsk,

7) le plateau des steppes ou la Caucasie, Astrachan, Saratow du coté gauche de la Volga, la Tauride et les terres des Cosaques du Don et de la mer noire.

Les caractères de chaque plateau sont exposés dans les mémoires de l'Academie T. 1. page 662 seq.

La Sibérie a différens plateaux, mais comme ils ne nous intéressent pas ici sous le rapport de la population, nous parlerons de la Sibérie sans la diviser par plateaux.

Par rapport à l'etendue du terrain les plateaux suivent dans l'ordre suivant.

La Sibérie a	—	212,475	milles	carrés	Etendue.
le plateau du Nord	—	34,572	—	—	
le plateau de l'Oural partie orientale		15,168	—	—	
partie occidentale	—	8,268	—	—	
le plateau de carpathes	—	8,411	—	—	
le plateau des steppes	—	6,573	—	—	
le plateau de Basses terres	—	5,153	—	—	
l'élévation sur la Volga	—	2,938	—	—	
les terres baltiques	—	1,594	—	—	

Des 36,329,962 personnes de l'année 1810 le plus grand nombre se trouve sur la partie occidentale du plateau de l'Oural — — 9,304,851 — 2. Population a) totalité.

puis vient celui des Carpathes — 7,399,812

la partie orientale du plateau de l'Oural				5,894,926
le plateau du Nord	—		—	4,395,734
le plateau des Basses-terres			—	3,950,779
l'élévation sur la Volga	—		—	2,648,858
les terres baltiques	—		—	1,172,220
la Sibérie	—	—	—	1,097,503
le plateau des Steppes	—		—	375,279.

Le nombre des peuples nomades manque au moins en grande partie aux deux derniers titres

b) Division de la totalité par sexe.

Parmi lè nombre de 36 millions se trouvoient

18,228,229 hommes

18,101,733 femmes.

La proportion générale est donç pour tout l'Empire de 1,000 hommes a 993 femmes. Mais il y a des plateaux où le nombre des femmes surpasse celui des hommes-

Sur la partie orientale du plateau de l'Oural il y a sur 1000 hommes 1,026 femmes

sur l'élévation de la Volga sur le même nombre d'hommes 1,024 —

Mais dans tous les autres plateaux les hommes sont plus nombreux que les femmes.

En Sibérie il y a sur 1000 hommes 995 femmes

le plateau du Nord a — 992 —

la partie occidentale du plateau de l'Oural a de mêm sur 1000 hommes 992 femmes
le plateau de Carpathes — 987 —
les terres baltiques — — 973 —
les Basses terres — — 966 —
le plateau des steppes — 794 —

Le nombre des habitans des villes est le plus grand sur le plateau des steppes où sur 10 habitans des villes ne se trouvent que 34 habitans des campagnes, puis vient le plateau du Nord où sur 10 habitans de villes se trouvent 74 habit. des campagnes par habitations.

la Sibérie — — 101 — —
la partie occidentale du plateau de l'Oural a sur 10 habitans des villes 102 — —
les terres baltiques — 111 — —
la partie orient. du plateau de l'Oural 122 — —
le plateau de Carpathes 136 — —
les Basses terres — 167 — —
l'élévation sur la Volga — 169 — —

Nous avons dû prendre pour base la 5me révision comme la plus complette et la plus exacte de nos données. Il y avoit 17,142,899 hommes de la classe productive sur 951,113 de la classe improductive sans le militaire. par états et conditions.

La proportion générale seroit d'après cela 1 à 18. Mais il manque à la 5^{me} revision la noblesse, les officiers civils, le militaire et les nomades. La proportion devroit donc être un peu changée, mais pour ne pas confondre les données sûres avec les calculs vraisemblables, nous nous sommes arrêtés aux proportions qui resultent des etats de la 5^{me} révision.

Le nombre de productifs est le plus grand sur les terres baltiques où sur 10 improductifs il y a 595 productifs

la partie occidentale du plateau de l'Oural a sur 10 improductifs	522	—
l'élévation sur la Volga —	419	—
la Sibérie — — —	193	—
le plateau du Nord — —	189	—
des carpathes —	162	—
les Basses terres — —	161	—
la partie orientale du plateau de l'Oural	141	—
le plateau des steppes a sur 20 improductifs seulement	15	—

On peut supposer avec raison que le nombre des productifs est plus grand en général et surtout dans ces derniers plateaux. Car parmis la classe de Rasnoschinzi qui est la plus nombreuse de la classe improductive il y a beaucoup d'hommes industrieux ou agricoles. En Tauride par exemple nombre de cultivateurs jouissoient des privilèges de la Noblesse, comme aussi en Pologne, et ressemblent à nos Odnodurortzi. Donc il paroît que des 951,113 hommes qui composent la classe improductive d'après notre tableau, environ un tiers devroit être reçu parmis les productifs et les proportions générales, surtout celles des Basses terres et du plateau des steppes seroient changées. Les autres proportions paroîssent plus justes.

D'après nos tableaux il y a dans tout l'Empire 123 personnes par mille carré. Mais en particulier 3. Rapport la population à l'étendue du terrain

la partie occidentale de l'Oural a par mille carré —	1,136	pers. des deux sexes	
l'élévation sur la Volga —	902	—	—
le plateau des Carpathes —	880	—	—
les Basses terres —	767	—	—
les terres baltiques —	736	—	—
la partie orientale du plateau de l'Oural — —	389	—	—
le plateau du Nord —	127	—	—
le plateau des steppes —	57	—	—
la Sibérie — —	5	—	—

En reduisant l'étendue adoptée de 295,152 milles carrés en Dessétines carrés on obtient 1,478,258,146.

Le rapport de la population des 36 millions 329,962 personnes des deux sexes a ce nombre est: que $40\frac{2}{3}$ Dessétines reviennent sur chaque personne pour tout l'Empire.

En particulier

en Sibérie — — —	975	Dessét.
au plateau des Steppes — —	88	—
— — du Nord — —	38	—
dans la partie orientale du plateau de l'Oural	13	—
aux terres baltiques — —	7	—
aux Basses terres — —	$6\frac{2}{3}$	—
au plateau des Carpathes — —	$5\frac{2}{3}$	—
sur l'élévation de la Volga — —	$5\frac{2}{5}$	—
sur la partie occidentale du plateau de l'Oural	$4\frac{1}{3}$	—

4. Progrès de la population

Nous présentons ici les changemens arrivés dans la population pendant sept années consécutives d'après les Comptes-rendus des Gouverneurs et puis la comparaison entre la 5^{me} revision et la 6^{me}.

Plateaux	1804	1805	1806.	1807.	1808	1809	1810.	terme moyen.
Plateau du Nord	4,397,508	4,370,338	4,400,74[illegible]	4,403,800	4,405,626	4,412,936	4,395,734	4,398,097
Elevation sur la Volga	2,547,068	2,539,472	2,544,334	2,546,284	2,557,900	2,559,351	2,648,858	2,563,427
Terres baltiques	1,179,681	1,162,637	1,192,637	1,192,637	1,191,421	1,194,720	1,172,220	1,187,993
Plat. de l'Oural part e orientale	5,723,396	5,769,115	5,768,117	5,892,303	5,862,598	5,895,670	5,894,926	5,829,446
partie occidentale	9,313,583	9 311,6 [illegible]	9.303.772	9,361,963	9,421,766	9,408,764	9,394,851	9,36[illegible],330
total	15,036,979	15,080,728	15,091,889	15,254,266	15,284,364	15,304,434	15,289,777	15,191,776
plateau des Basses terres	3,881,951	3,885,770	3.870,047	3,877 054	3,893,391	3,750,248	3,950,779	3,872,749
plateau des carpathes	7,111,988	7,464,078	7,382,695	7,435 433	7,438,248	7,488,246	7,399 812	7,383,643
plateau des steppes	320,298	327,216	319,753	335,996	369,636	374,123	375,270	345.042
la Siberie	1,022,523	1,042,097	1,057,064	1,062,080	1,086,135	1,093.902	1,097.503	1,065 902
Total	35,497,999	35,902,336	35,859,179	36,107,559	36,219,714	36,177,960	36,329 9.2	36,013,529

Les progrès de la population étoient sur l'élévation de la Volga 101,790, sur le plateau de l'Oural, partie orientale 171,530, partie occidentale 81,1268 total 252,798. Sur le plateau des basses terres 68,825, sur le plateau des carpathes 287,824, sur le plateau des steppes 54,981, et en Sibérie 74,980. Les progrès de la population montoient sept années à 831,963. La population à diminuéesur le plateau du Nord de 1,774, et sur les terres baltiques 7,461 total 9,235. donc la population a augmentée de 822734. personnes.

En supposant le nombre des habitans en 1804 10,000, on trouve les proportions suivantes par la comparaison des autres années :

Plateaux	1804.	1805.	1806.	1807.	1808.	1809.	1810.	terme moyen.
I. plateau	10,000	9,938	10,007	10,014	10,018	10,035	9,996	10,001
II. plateau	10,000	9,970	9,989	9,997	10,042	10,048	10,399	10,063
III. plateau	10,000	10,109	10,109	10,109	10,099	10,127	9,937	10,070
IV. Plateau part: orient.	10,000	10,079	10,078	10,295	10,243	10,30	10,299	10,[illegible]85
part: occident.	10,000	9,998	10,011	10,152	10,[illegible]16	10,102	10,187	10,[illegible]52
dans tout plateau	10,000	10,029	10,036	10,144	10,164	10,178	10,108	10,103
V. plateau	10,000	10,010	9,969	9,962	10,029	9,661	10,177	9,976
VI. plateau	10,000	10,495	10,381	10,455	10,459	10,529	10,405	10,389
VII. plateau	10,000	10,216	9,983	10,490	11,321	11,680	11,717	10,772
VIII. plateau	10,000	10,191	10,337	10,387	10,622	10,698	10,728	10,424
terme moyen	10,000	10,114	10,102	10,172	10,203	10,191	10,234	10,145

On voit avec plaisir que presque sur tous les plateaux se trouve une augmentation, et que la diminution est très péu signifiante. Mais comme les Comptes-rendus n'ont commencé que depuis 1804, et que l'expérience de tous les pays a prouvé, que les dénombremens réitérés se perfectionnent annuellement, on pourroit douter des progrès réels de la population et on pourroit croire que ces 831,963 personnes qui font l'augmentation de sept années consécutives sont au moins en grande partie le résultat d'un dénombrement plus exact pour les classes qui ne sont pas soumises aux levées militaires et aux impôts directs. Nous avouons que peut-être cela a eu lieu en plusieurs Gouvernemens et que parconséquent une partie de l'augmentation doit être mise sur le compte de dénombremens plus exacts, mais nous sommes persuadés, que pour la plûpart des Gouvernemens les mêmes irrégularités existent encore, plus le dénombrement des classes exemptes de la capitation, et que parconséquent l'augmentation doit avoir été réelle. Mais la preuve la plus convaincante de la réalité des progrès de la population se trouve dans la comparaison entre la 5^{me} et la 6^{me} révision.

La sixième révision n'est pas encore entièrement terminée, elle l'est pourtant dans la plûpart des Gouvernemens et pour les classes les plus nombreuses. Les résultats partiels font prévoir que le résultat général, que nous donnerons dans la suite, sera toujours favorable.

Le nombre des paysans en 47 Gouvernemens c'est-à-dire dans toute la Russie à l'exception de Vitebsk, Vilna, Tobolsk et le district de Bialystok étoit à la 5^{me} révision de 15,287,628 hommes, à la 6^{me} révision 17,068,195 hommes. L'augmentation est donc de 1,780,567 hommes ou environ de $\frac{1}{9}$, le premier nombre est au dernier comme 1000 à 1116. Seize ans se sont écoulés entre la 5^{me} et 6^{me} révision depuis 1795 jusqu'en 1811.

Le nombre des habitans qui payent des impôts directs étoit dans ces 47 Gouvernemens à la 5^{me} révision de 16,000,099 hommes et à la 6^{me} de 17,840,050. Ces classes avoient augmentées de 1,839,951 hommes, ou d'environ $\frac{1}{9}$; la proportion est presque la même: 1000 à 1115.

Le nombre des bourgeois n'avoit pas beaucoup augmenté dans ces 47 Gouvernemens, il étoit à la 5^{me} révision de 622,804 hommes et à la 6^{me} de 638,397, il n'y avoit donc que 15,593 hommes de plus ou environ $\frac{1}{40}$, la proportion étoit de 1000 à 1025. Mais le nombre des marchands, qui font classe a part en Russie, avoit fait plus de progrès dans ces mêmes Gouvernemens. Il étoit à la 5^{me} Révision de 89,667 hommes et à la 6^{me} de 123,324. Cette classe avoit augmentée de 33,657 hommes ou d'environ $\frac{3}{8}$, la proportion est 1000 à 1375.

Les charretiers (Jaemschiki) étoient à la 5^{me} Révision de 43,022 et à la sixième de 48,234 hommes, leur nombre avoit augmenté de 5212 hommes ou d'environ $\frac{1}{8}$, la proportion est pe 1000 à 1122.

Le nombre des ecclésiastiques dans les 35 Gouvernemens où la Révision pour cette classe est finie, étoit à la 5^{me} Révision de 167,316 et à la sixième de 182,808, il y avoit donc 15492 de plus ou $\frac{1}{11}$, le rapport du premier nombre est au dernier comme 1000 à 1093.

Les Rasnoschintzi en 31 Gouvernemens où la Révision est finie pour cette classe avoient diminué. Leur nombre étoit à la 5^{me} Révision de 579,045 et à la sixième de 561,515, donc il y avoit 17530 de moins ou environ $\frac{3}{10}$, la proportion est de 1000 à 970.

La Révision pour les habitans qui ne payent pas des impôts directs a été finie en 31 Gouvernemens. Il y en avoit à la 5^{me} Révision 712,176 et à la 6^{me} 729,199, c'est une augmentation de 17,023 hommes ou environ $\frac{1}{42}$, le premier nombre se rapporte au dernier comme 1000 à 1024.

La sixième Revision étant entièrement terminée en 31 Gouvernemens on a trouvé le nombre total des habitans à la 5^{me} Revision de 11,213,649 habitans et à la 6^{me}

Revision de 12,439,525

augmentation 1,226,876 ou environs $\frac{1}{9}$.

La proportion est 1000 à 1109.

Le classe, des paysans et des marchands ont fait des progrès considérables, celle des simples bourgeois se trouve dans un état stationaire, enfin celle de Rasnoschinzi a diminuée par les circonstances. La Russie est un Etat souverainement agricole, son commerce est actif, mais les ouvriers libres pour les manufactures et les artisans ne sont pas nombreux.

On peut hardiment évaleur les progrès de la population en Russie pendant les 16 années, depuis la cinquième à la sixième Revision, à un neuvième ou à deux millions d'hommes.

DES ENTRAVES À L'IMPORTATION DES MARCHANDISES ÉTRANGÈRES, COMME MOYEN D'ENCOURAGER LA PRODUCTION NATIONALE.

PAR

H. STORCH.

Présenté à la Conférence le 12 Février 1817.

Première partie.

Une des principales mesures dont se sert le système mercantile pour enrichir la nation, consiste à entraver l'importation des marchandises étrangères qui sont de nature à être produites dans le pays. En agissant ainsi on a le double but en vue, d'abord d'encourager l'industrie du pays, et finalement d'y accumuler l'or et l'argent, qu'on regarde comme la seule et véritable richesse. Dans ce mémoire je me bornerai à examiner les effets des entraves du commerce par rapport à l'industrie nationale, et indépendamment de leur influence sur l'accumulation des richesses métalliques, objet dont l'inutilité est aujourd'hui trop généralement reconnue pour avoir besoin de nouvelles preuves. Mais tel administrateur qui désavoue tout haut cette erreur populaire, que l'argent constitue la richesse des nations, n'en est pas moins un défenseur zélé des entraves à l'importation des marchandises étrangères : il les sollicite, il les maintient, non pas, comme il dit, pour accroître la masse du numéraire dans le pays, mais pour enrichir la nation par le travail, pour perfectionner les branches d'industrie qu'elle exerce, et pour lui en procurer de nouvelles. Il n'est donc pas inutile d'examiner de nouveau et sous toutes ses faces la question importante: si les entraves à l'importation répondent au but qu'on se propose ; et supposé qu'elles aient quelques effets salutaires, si leurs inconvéniens ne surpassent pas le bien qu'elles peuvent opérer.

C'est surtout contre les *produits manufacturés* de l'étranger que se dirigent les entraves à l'importation : car dans le systême mercantile, l'agriculture est censée être moins lucrative que les manufactures et le commerce étranger, et en conséquence elle est moins protégée. D'ailleurs l'agriculture étant exercée partout, on croit avoir moins de motifs de s'en occuper que des manufactures et du commerce étranger, dont les progrès naturels paroissent toujours trop lents et trop tardifs.

Les moyens dont on se sert pour entraver l'importation, sont de deux espèces: les *droits d'entrée*, et les *pro-*

hibitions. Les *droits* ont pour objet d'élever le prix des marchandises étrangères sur lesquelles ils portent, et de *diminuer* par là leur consommation dans le pays; les *prohibitions* ont pour but de *faire cesser* entièrement cette consommation; le tout pour obliger la nation à produire et à consommer des marchandises nationales.

Observons d'abord que ni l'une ni l'autre de ces mesures n'atteignent complètement leur but. Quant aux droits d'entrée, du moment qu'ils excèdent les fraix de contrebande, on peut se procurer les marchandises qui en sont chargées, à un prix moindre que celui auquel le législateur avoit intention de les élever; et quant aux prohibitions, elles sont absolument sans effet comme telles, et n'agissent que comme un impôt. Pendant la durée du système prohibitif en Russie *), l'entrée de presque toutes les marchandises de manufacture étrangère étoit entièrement défendue; néanmoins le marché de ce pays en étoit constamment fourni, et tout l'effet des prohibitions se réduisoit à élever le prix de ces marchandises des fraix de la contrebande et du profiit du contrebandier. En France,

*) Ce sytême a commencé le 19 Décembre 1810, et il a fini le 31 Mars 1816; ainsi sa durée a été de 5 ans et 3 mois. Le tarif de 1816 est loin d'accorder une entière liberté au commerce; cependant il permet l'importation de la plupart des marchandises jusque-là prohibées, en les chargeant de droits plus ou moins forts.

la contrebande est bien plus difficile que chez nous, tant à cause de la nature des frontières, que parce que les marchandises qui entrent en fraude sont confisquées au profit des employés des douanes; cependant l'assurance de la contrebande n'est en général que de dix pour cent, sur lesquels on compte quatre pour cent en remboursement des fraix du contrebandier. Ainsi une marchandise anglaise, prohibée en France, ou chargée d'un droit de cent pour cent, n'y revient que de dix pour cent plus cher qu'en Angleterre, en y ajoutant les fraix de transport et le profit du marchand *).

Cependant, quoique l'effet de ces entraves soit en général peu proportionné à l'intention du gouvernement, on voit qu'il est toujours assez grand pour faire renchérir considérablement les objets d'importation contre lesquels se dirigent ces entraves. Ainsi en gênant par des droits ou par une prohibition absolue l'importation des marchandises dont on veut favoriser la production dans le pays, on assure plus ou moins à l'industrie nationale qui s'emploie à les produire, un *monopole* dans le marché inté-

*) *Simonde, De la richesse commerciale, T. II. p. 229.* Suivant cet auteur, la somme des marchandises confisquées monte, année commune, à 12 millions de francs; s'il en est ainsi, la masse des assureurs n'est réellement à couvert de cette perte, que lorsqu'elle a fait entrer en France pour 200 millions de marchandises prohibées.

rieur. Or ce mode d'encouragement prétendu ne peut presque jamais produire aucun bien, et il peut faire beaucoup de mal: *inutile* ou *nuisible*, voilà l'alternative.

Quand les marchandises nationales ne sont ni moins bonnes ni plus chères que les marchandises étrangères de la même espèce, chargées des frais d'importation, ces dernières ne sont point importées; le monopole existe par la nature des choses, il est *inutile* de le proclamer. Le tarif des douanes de l'Angleterre défend l'entrée d'une infinité de marchandises qu'on produit à meilleur prix et de meilleure qualité dans ce pays que partout ailleurs: ces défenses sont inutiles.

Dans la supposition contraire, quelque peu de cas exceptés dont il sera question dans la suite, le monopole est toujours *nuisible*. Arrêtons-nous à cette dernière considération, et examinons en détail les effets qu'un pareil monopole produit.

Premier effet: il force la nation à changer avec perte la direction de son travail et de ses capitaux.

Il n'y a pas de doute qu'un pareil monopole ne donne souvent un grand encouragement à l'espèce particulière d'industrie qui en jouit, et qu'il ne fasse souvent naître dans le pays les productions qu'on veut y établir; mais c'est la plus grande de toutes les erreurs d'imaginer que ces nouvelles productions sont un accroissement d'industrie et de richesse. Point de travail industriel sans capital : ainsi la quantité de travail applicable à un objet quelconque est toujours limitée par la quantité de capital qu'on peut y employer. Si j'ai un capital de 20,000 roubles, et qu'on me propose deux entreprises industrielles qui me rapporteront 20 pour cent, il est clair que je puis faire l'une ou l'autre avec ce profit aussi longtems que je me borne à une seule ; mais qu'en faisant l'une, il n'est pas en mon pouvoir de faire l'autre, et que, si je partage mon capital entre les deux, je ne gagnerai pas plus de 20 pour cent, mais je risque de gagner moins, et même de changer le gain en perte. Si cette proposition est vraie pour un individu, elle est vraie pour tous les individus qui composent la nation. L'industrie nationale est donc limitée par le capital national. Or comme il n'est pas au pouvoir du gouvernement d'augmenter ce capital, ses mesures prohibitives ne font naître ni plus d'industrie ni plus de richesse dans le sein de la nation qu'il y en avoit auparavant; tout l'effet qu'elles produisent se borne à mettre de nouvelles industries à la place des anciennes.

La conduite de presque tous les gouvernemens démontre que les hommes sont peu sensibles à cette vérité si manifeste en apparence. Quand les gouvernemens encouragent par leurs prohibitions telle branche d'industrie, ce n'est pas toujours parce qu'ils la croyent plus lucrative que telle autre, mais parce que c'est une branche d'industrie de plus, et qu'on ne sauroit trop en avoir. Comme si toute industrie ne portoit pas sa propre récompense ; comme si une industrie improfitable valoit la peine d'être encouragée ; comme si une industrie profitable avoit besoin de l'être ; comme si enfin par ces opérations arbitraires on faisoit autre chose que transporter les capitaux d'une branche d'industrie dans une autre.

„ L'avidité, dit *Bentham*, veut embrasser plus qu'elle ne peut tenir. Avoir les yeux plus grands que le ventre, est une phrase proverbiale de nourrice qui convient aux enfans ; mais elle est applicable à l'homme d'État qui croit pouvoir étendre infiniment l'industrie de ses administrés, sans s'apercevoir qu'elle est limitée par leurs capitaux. Cette comparaison n'est pas noble, mais elle est juste ; et quand les erreurs se couvrent d'un masque imposant, on est tenté de les mettre dans un jour qui les humilie. "

Jusque-là l'effet du monopole ne paroît qu'être *nul* ; mais il est réellement *nuisible*. L'emploi des capitaux d'une nation ne peut être changé sans qu'il en résulte des pertes pour elle. La plupart des industries exigent des matériaux, des instrumens, des procédés qui leur sont propres : si on ne peut point s'en servir du tout dans les nouvelles entreprises, la perte de leur valeur est entière ; s'il est possible de les adapter aux nouveaux usages, la perte est moindre, mais toujours il y a de la perte. D'ailleurs ces pertes sont d'autant plus grandes que le changement est plus subit et plus général.

On voit que si le système prohibitif a fait naître quelques nouvelles manufactures en Russie, cet effet n'a eu lieu qu'aux dépens des anciens travaux, auxquels on a retiré en partie les ouvriers et les capitaux qui les alimentoient ; et que ce changement n'a pu s'effectuer qu'avec une perte très-sensible pour la richesse nationale. Si les entrepreneurs des nouveaux établissemens ne se sont pas ressentis de cette perte, c'est qu'ils ont été dédommagés par le monopole ; mais ceux dans les anciennes branches d'industrie qui ont dû retrécir ou abandonner leurs entreprises, en ont souffert plus ou moins; et en dernière analyse cette perte s'est repartie sur les consommateurs des produits de toutes les industries, tant anciennes que nouvelles, c'est-à-dire sur la nation entière.

Mais peut-être la nation est-elle dédommagée de ces pertes par le surplus de produit que donnent les nouvelles industries? Peut-être celles-ci sont-elles si avantageuses que leur profit l'emporte de beaucoup sur celui des anciennes occupations qu'elles ont fait tomber? Pour décider cette question, il suffit de se rappeler que les anciens emplois du travail et des capitaux n'avoient guère besoin d'un monopole pour se maintenir; qu'exposés à la concurrence de l'étranger, ils rendoient aux entrepreneurs des profits dont les consommateurs n'avoient guère à se plaindre. Les articles suivans nous montreront si ces avantages sont surpassés par les nouvelles industries, fruit du monopole.

Second effet du monopole: il force la nation à travailler à perte.

La Russie a besoin de draps fins pour le vêtement de ses habitans de la classe aisée. Elle pourroit fabriquer elle-même ces draps; mais le taux de l'intérêt et celui du profit des entrepreneurs y sont si hauts, la division du travail y a fait si peu de progrès, les ouvriers et les instrumens nécessaires à cette fabrication y sont encore si rares et si peu perfectionnés, qu'une archine de drap y coûte, je suppose, moitié plus à produire qu'en Angleterre *). D'un autre coté l'Angleterre a besoin de suifs pour ses chandelles, ses savons et l'usage de ses fabriques; et le degré de prospérité auquel elle est parvenue, lui rendent l'éducation du bétail si dispendieuse que le prix nécessaire d'un poud de suif y est moitié plus haut qu'en Russie. Dans cette supposition, n'est-il pas clair que les Russes perdent 50 pour cent à fabriquer chez eux des draps, s'ils peuvent les acheter en Angleterre; et que les Anglais en perdent autant à produire chez eux des suifs, s'ils peuvent les acheter en Russie; enfin que ces valeurs perdues auroient pu être employées à produire chez les deux nations d'autant plus de suif, d'autant plus de drap, ou d'autant plus de toute autre marchandise?

Généralisons cette proposition. Chaque pays, vu la nature de son sol et de son climat, vu le degré de richesse, d'industrie et de civilisation auquel il est parvenu, peut fournir au monde commerçant certaines productions à moins de fraix que les autres pays. Interdire ou entraver chez une nation l'importation des marchandises que d'autres nations peuvent lui fournir de meilleure qualité

*) Un écrivain vivant en Russie a calculé que les draps fins de ce pays reviennent de 85⅙ pour cent plus cher que ceux d'Angleterre, quand on les compare sous les deux rapports du prix et de la qualité. Voyez. *Ansichten über das Tarifsystem in Russland*, von C. Arnold. St. Petersb. 1816 p. 25

ou d'une manière moins dispendieuse, à raison de quelque avantage particulier de leur industrie, c'est donc se refuser de participer à cet avantage naturel dont elles jouissent, c'est forcer la nation à produire chez elle ce qui lui coûte plus d'avances et plus de travail; en un mot, c'est employer ses ouvriers et ses capitaux à perte *).

Ce n'est que dans les procédés de nation à nation qu'on voit un tel égarement; entre particuliers, celui qui en agiroit ainsi, seroit censé avoir perdu son bon sens. La maxime de tout particulier raisonnable est de ne jamais faire chez soi la chose qui lui coûtera moins à acheter qu'à faire. Le tailleur ne cherche pas à faire ses souliers, mais il les achète du cordonnier; le cordonnier ne tâche pas de faire ses habits, mais il a recours au tailleur; le marchand ne s'essaie point à faire ni les uns ni les autres, mais il s'adresse à ces deux artisans. Il n'y a pas un seul de ces individus qui ne voie qu'il y va de son intérêt d'employer son travail tout entier dans le genre d'industrie dans lequel il a quelque avantage sur ses concitoyens, et d'acheter les autres objets de sa consommation avec le produit de son travail, ou, ce qui est

*) Comparez mon *Cours d'Economie politique*, T. *IV*, *p.* 167 — 169, *et p.* 188 — 192.

la même chose, avec l'argent que lui rapporte la vente de ce produit. Or ce qui est raisonnable dans la conduite de chaque particulier, ne peut guère être folie dans celle d'une nation *).

Une nation qui produit chez elle ce qu'elle pourroit acheter à meilleur compte au-dehors, empêche pour le moins l'accroissement de son capital, et quelquefois le diminue réellement. Une marchandise dont le prix nécessaire dans le pays est plus élevé que celui dans l'étranger, ne peut point se produire parce qu'il y auroit perte pour le producteur. Le monopole dont nous examinons les effets, rend la production de cette marchandise possible, en rejettant la perte sur les consommateurs. Ceux-ci sont obligés de prendre ce surplus de dépenses sur leurs revenus. Cependant, c'est sur ces revenus que doivent être faites les économies qui seules peuvent augmenter les capitaux.

---

*) Cette vérité est sentie par tous les hommes d'un esprit juste, lors même qu'ils n'ont point médité sur les principes de l'Economie politique. Du tems de Henri IV, cette science étoit presqu'inconnue en France; cependant le grand Sully savoit bien deviner ce qui convient sous ce rapport à l'Etat. Il s'étoit déclaré contre l'établissement forcé des manufactures de soie, de tapisseries etc. que Henri IV encourageoit à grand fraix. Un jour que quelques-uns de ces entrepreneurs s'étoient présentés chez le roi avec des échantillons de leurs produits que Henri l'invitoit à admirer, Sully lui dit *qu'il ne trouvoit jamais rien de beau ni de bien fait, quand il coûtoit le double de sa vraie valeur.* (*Mémoires de Sully*, T. *VI*, p. 301.).

En les diminuant on rend donc impossible l'accroissement de ces capitaux; peut-être même, si on repète sur trop d'objets cette opération, rendra-t-on le revenu net insuffisant pour fournir à cette dépense, et forcera-t-on les consommateurs à entamer leurs capitaux. Ainsi, en forçant par le monopole le maintien de productions dont le prix nécessaire domestique est au-dessus du prix nécessaire dans l'étranger, le gouvernement ne fait qu'augmenter la dépense et diminuer le revenu national, en d'autres termes, il appauvrit la nation *).

On pourroit objecter que la différence des prix étant payée aux nationaux, la perte des consommateurs est compensée par le gain des producteurs, et qu'ainsi la nation ne s'appauvrit ni ne s'enrichit par cette mesure. Mais il faut observer qu'il ne s'agit point ici de la différence du prix nécessaire aux prix courant, qui constitue le gain du producteur, mais de la différence de deux prix nécessaires, de celui de la marchandise nationale et de celui de la marchandise étrangère. Une marchandise dont la production ne peut se soutenir qu'à l'aide d'un monopole, n'est pas régulièrement plus chère parce qu'elle donne un gain extraordinaire à l'entrepreneur, mais parce qu'elle lui coûte

*) *Cours d'Econ. polit.* T. II, p. 113 et 169 — 173.

réellement plus à produire. Sans doute, dans les commencemens le monopole, dont jouissent les producteurs les met à portée de hausser le prix de leurs marchandises et de faire des gains très-considérables; mais tôt ou tard la concurrence qu'ils se font entre eux, réduit ces gains au profit ordinaire qui a lieu dans toutes les entreprises pareilles. Le prix nécessaire de leurs marchandises, au contraire, peut rester le même pendant plus d'un siècle; car les causes qui diminuent les fraix de production, telles que la baisse de l'intérêt et du profit de l'entrepreneur, les progrès de la division du travail, ceux des lumières, l'invention et l'emploi des machines etc., ne se dévéloppent que très-lentement et dans l'espace de plusieurs siècles.

Ainsi, tant que le système prohibitif étoit maintenu en Russie dans toute sa rigueur, le haut prix des manufactures russes qui servoient à remplacer les manufactures étrangères, provenoit en partie du monopole dont les producteurs jouissoient dans l'intérieur de l'Empire, et sous ce rapport il ne diminuoit point la richesse de la Russie, quoiqu'il causât un déplacement injuste de fortune, en enrichissant gratuitement quelques individus aux dépens des consommateurs. Mais la principale cause de ce haut prix étoit dans le taux de l'intérêt, du loyer, des salaires et du profit d'entrepreneur, qui est plus élevé en Russie que dans les autres pays manufacturiers, et de plus dans le défaut de connoissances, de procédés et de machines nécessaires à la fabrication. Tout le surcroît de prix occasionné par cette seconde cause, étoit une perte effective pour la richesse de l'Empire, car il étoit payé par les consommateurs sans augmenter le gain des fabricans. Si le système avoit duré plus longtems, le gain de monopole des entrepreneurs auroit bientôt cessé ; mais les fraix de fabrication ne pouvoient diminuer qu'avec le progrès lent et imperceptible de la richesse et de la civilisation de l'Empire ; et par conséquent la différence des prix nécessaires et les pertes de la Russie auroient continué pendant plus d'un siècle peut-être. C'est donc une mesure très-sage, d'avoir au moins limité ces pertes par le tarif de 1816.

Je viens de dire que le gain de monopole des producteurs, quoique fruit d'une loi injuste, n'appauvrit point la nation; mais cette thèse même n'est vraie qu'avec certaines restrictions. L'expérience prouve que des profits supérieurs au taux accoutumé, et qui ne sont pas acquis par une plus grande activité de travail ou une supériorité de mérite, invite les producteurs à donner plus d'instans à l'oisiveté, et leur font contracter des habitudes plus dispendieuses. Ce qui se gagne aisement, dit le proverbe, se dépense de même. Tel entrepreneur qui, sans la faveur du monopole, seroit laborieux et frugal, se livre aux distractions et au luxe, parce qu'il compte sur un bénéfice qui ne lui coûte ni plus d'avances ni plus de travail. Quand on a observé le train de vie que le système prohibitif a fait embrasser chez nous à la plupart de ses favoris, on peut raisonnablement douter que leur gain de monopole les a enrichis. Ainsi, même sous ce rapport, le monopole tend à appauvrir le pays.

Troisième effet du monopole: il fait renchérir un grand nombre d'objets de consommation.

Nous venons de voir que le monopole éléve le prix des marchandises qui en sont frappées, soit que le consommateur achète la marchandise étrangère dont le prix est augmenté par les droits de douane ou les fraix de contrebande, soit qu'il s'en tienne à la marchandise nationale, dont le prix est naturellement plus haut par les fraix de production et s'élève encore davantage par le monopole accordé au producteur. Mais le renchérissement ne se borne pas là: il s'étend sur un grand nombre d'autres denrées. Le monopole, en attirant les capitaux vers les industries qu'il favorise, en prive d'autres industries déjà exercées; la production de celles-ci diminue, et comme la demande de leurs produits reste la même, il faut bien que le prix de ces produits monte.

Ainsi le monopole fait payer plut chér aux consommateurs :

1°. Les marchandises étrangères prohibées ou chargées de gros droits qui entrent par contrebande ;

2°. Les marchandises nationales destinées à remplacer les premières ; et

3°. Les marchandises nationales dont la production diminue par l'effet du monopole.

On voit que dans le systême prohibitif l'intérêt des consommateurs est toujours sacrifié à celui des fabricans. Cependant la nation n'est point composée exclusivement de fabricans ni d'artisans, mais elle ne compte pas un individu qui ne soit un consommateur. Ainsi l'intérêt national, sous ce rapport, n'est pas l'intérêt des fabricans ou des artisans, mais il est évidemment celui des consommateurs, c'est-à-dire de l'universalité des citoyens, ou de la classe qui comprend toutes les autres.

Au reste, comme les fabricans appartiennent également à la classe des consommateurs, ce systême leur cause des pertes à eux-mêmes, par rapport à tous les objets de consommation qui ne sont point des produits de leur industrie. „Je conçois, dit *Turgot*, que des fabricans qui ne connoissent que leur fabrique, imaginent qu'ils gagneroient davantage s'ils avoient moins de concurrens. Il n'est point de producteur qui ne voulût être seul vendeur de sa denrée; il n'est point de commerce dans lequel ceux qui l'exercent ne cherchent à écarter la concurrence, et ne trouvent quelque sophisme pour faire accroire que l'État est intéressé à écarter du moins la concurrence des étrangers, qu'ils réussissent plus aisement à représenter comme les ennemis de l'industrie nationale. Si on les écoute, toutes les branches de production seront infectées de ce genre de monopole. Ces imbécilles ne voient pas que ce même monopole qu'ils exercent, non pas, comme ils le font accroire au gouvernement, contre les étrangers, mais contre leurs concitoyens, leur est rendu par ces mêmes concitoyens dans les autres branches de production, lorsque ceux-ci deviennent à leur tour monopolistes et eux acheteurs. Ils ne voient pas que toutes ces associations de gens du même métier ne manquent pas de s'autoriser des mêmes prétextes pour obtenir du gouvernement séduit la même exclusion des étrangers; ils ne voient pas que dans cet équilibre de vexations et d'injustices entre tous les genres d'industrie, où les fabricans et les marchands de chaque espèce oppriment comme vendeurs, et sont opprimés comme acheteurs, il n'y a de profit pour aucune partie; mais qu'il y a une perte réelle pour la totalité de la production nationale ou pour l'État, qui, achetant moins à l'étranger, lui vend moins aussi. Cette augmentation forcée des prix pour tous les acheteurs diminue nécessairement la somme des jouissances, la somme des revenus disponibles, la richesse des propriétaires et du souverain, et la somme des salaires à distribuer au peuple. Cette perte est doublée encore, parce que dans cette guerre d'oppression réciproque, où le gouvernement prête sa force à tous contre tous, on n'a excepté que la seule branche de l'agriculture, que toutes oppriment de concert par ces monopoles sur les nationaux, et qui, loin de pouvoir opprimer personne, ne peut même jouir du droit naturel de vendre sa denrée; en sorte que de toutes les classes de citoyens laborieux, il n'y a que le cultivateur qui souffre du monopole comme acheteur et qui en souffre en même tems comme vendeur. Il n'y a que lui qui ne puisse acheter librement des étrangers aucune des choses dont il a besoin; il n'y a que lui qui ne puisse vendre aux étrangers librement la denrée qu'il produit, tandis que le fabricant de drap ou tout autre achète tant qu'il veut le blé des étrangers. Quelques sophismes que peut accumuler l'intérêt particulier de quelques classes de producteurs, la vérité est que toutes les branches de production doivent être libres, également libres, entièrement libres; que le système de quelques politiques modernes qui s'imaginent favoriser la production nationale en interdisant l'entrée des marchandises étrangères, est une pure illusion; que ce système n'aboutit qu'à rendre toutes les branches de production ennemies les unes des autres, à nourrir entre les nations un germe de haines et de guerres dont les plus foibles effets sont mille fois plus coûteux aux peuples, plus destructifs de la richesse, de la population, du bonheur, que tous les petits profits mercantiles qu'on s'imagine s'assurer ne peuvent être avantageux aux nations qui s'en laissent séduire. La vérité est qu'en voulant nuire aux autres, on se nuit à soi-même: non-seulement parce que la représaille de ces prohibitions est si facile à imaginer que les autres nations ne manquent pas de s'en aviser à leur tour, mais encore parce qu'on s'ôte à soi-même les avantages inappréciables d'un commerce libre; avantages tels que si un grand État comme la France vouloit en faire l'expérience, les progrès rapides de son industrie forceroient bientôt les autres nations de l'imiter pour n'être pas appauvries par la perte totale de leur commerce *). "

*) Oeuvres de Turgot, T. VI. p. 441. et suiv.

Quatrième effet du monopole: il diminue le commerce extérieur de la nation, et il écarte les capitaux qui seroient venus alimenter l'industrie nationale.

Lorsqu'un gouvernement met des entraves à l'importation des marchandises étrangères, il n'a proprement en vue que de diminuer cette importation, mais son but n'est pas de nuire à l'exportation des marchandises nationales: bien au contraire; cependant ce dernier effet est inséparable de l'autre. Si jamais les étrangers n'avoient plus rien à envoyer en Russie, que pourroient-ils en tirer? Vendre sans acheter est la pierre philosophale du commerce. Ainsi les entraves à l'importation, sont encore indirectement des entraves à l'exportation, c'est-à-dire qu'ils diminuent en général le commerce extérieur.

On dira peut-être que, comme les entraves à l'importation ne s'étendent pas sur toutes les marchandises étrangères, les autres nations peuvent nous envoyer d'autant plus de ces marchandises dont l'accès n'est point entravé chez nous: mais en raisonnant ainsi on oublieroit que le débit d'une marchandise quelconque est toujours borné par la demande, et que, du moment que l'offre surpasse la demande effective, le prix de la marchandise offerte s'avilit. C'est ce que nous avons vu arriver en 1812, dans nos transactions commerciales avec l'Angleterre. La paix ayant été rétablie avec ce pays, les Anglais firent d'abord des achats considérables en Russie, et ne pouvant les payer avec leurs manufactures, ils y amenèrent d'autant plus de matières premières; mais les suites les dégoûtèrent bientôt de cette tentative. La valeur de ces marchandises se déprécia tellement en Russie, qu'elles s'y vendoient pour la plupart au-dessous de leur prix nécessaire; le sucre en poudre, par exemple, vendu à St. Pétersbourg, ne paya pas même les fraix de transport et le droit d'entrée imposé sur cette marchandise. Ainsi les Anglais ne pouvant élever le montant de leurs importations en Russie à celui de leurs exportations de ce pays, ils se virent dans la nécessité de réduire ces dernières, c'est-à-dire de restreindre la totalité du commerce qu'ils faisoient avec la Russie.

On entend souvent avancer que la plupart des objets de notre commerce d'exportation sont de nature à ne pouvoir être remplacés par d'autres objets, ni fournis de la même qualité et dans la même abondance par aucun autre pays. L'expérience des dernières années a bien prouvé le contraire. De tous les pays de l'Europe, l'Angleterre est celui qui consomme le plus de produits russes, et qui en a le besoin le plus absolu, à cause de l'immensité de sa marine et de sa fabrication; cependant, lorsque le système continental lui ferma les ports de la Russie, il trouva moyen de se pourvoir ailleurs de ces marchandises, ou il sut les remplacer d'une manière ingénieuse par des produits de son propre sol. L'Amérique méridionale lui fournit, en partie du moins, les peaux, les suifs et les savons dont il avoit besoin; et quant aux suifs et aux huiles de chenevis, leur consommation fut sensiblement diminuée par l'usage de l'huile de baleine et par la belle invention du gaz carbonique, qui sert actuellement à éclairer la plupart des grands ateliers et même les rues de Londres. Six livres de charbon de terre donnent, en le décomposant, autant de fluide lumineux qu'une livre de suif donne de lumière; et ce fluide ne coûte en réalité que l'intérêt de la somme déboursée pour l'achat des fourneaux, gazomètres et tuyaux; car après sa décomposition, le charbon non-calciné conserve, à peu de chose près, la même valeur qu'avant d'en avoir extrait le gaz. Mais ce dernier n'est pas le seul produit qu'on en tire: à l'aide des mêmes procédés chimiques on en obtient du goudron, de la poix et une espèce de thérébentine que les manufacturiers anglais assurent être égales et même supérieures à celles de ces trois productions qu'ils tiroient du nord. La colle de poisson, produit exclusivement propre à la

Russie, et qu'on croyoit indispensable pour purifier les bierres, est remplacée par celle qu'on tire des poissons de mer, et qu'on a vu s'améliorer au point, qu'au dire des inventeurs, les îles Britanniques en fourniront bientôt aux autres peuples de l'Europe. La fabrication des toiles, loin de souffrir par le système continental, s'est accrue tant en Angleterre qu'en Irlande; et c'est ce dernier pays qui a fourni le lin nécessaire à cette fabrication. Les immenses forêts, jusque-là intactes, du Canada, de la Nouvelle-Ecosse et de l'île de Terre-Neuve, ont été mises à contribution pour les bois de construction; jamais on n'a bâti plus en Angleterre qu'à cette époque: mais aussi jamais on n'a porté plus loin l'art d'économiser le bois dans la charpente des maisons et dans la construction des navires. Le besoin extrême de chanvres, objet si important pour la marine militaire, en a étendu la culture en Irlande, au Bengale, et jusque dans la Nouvelle-Zélande. Enfin, malgré un accroissement rapide dans sa population, l'Angleterre n'a aperçu aucun indice de disette, quoiqu'elle ait cessé tout à coup de recevoir des fromens de l'étranger; tant la culture de son sol a fait de progrès *).

Ces exemples prouvent que, s'il le faut, l'Angleterre

*) Ces faits sont tirés de l'écrit de Mr. *d'Ivernois*, intitulé: *Effets du blocus continental* etc.

peut à la rigueur se passer des produits de la Russie; et si l'Angleterre le peut, les autres nations européennes le peuvent aussi. C'est donc une politique bien mal-entendue que celle qui conseille d'entraver les importations de l'étranger, et qui par là le force de renoncer à nos produits ou d'en restreindre la consommation chez lui. Mais nous avons encore d'autres raisons de ménager les étrangers dans nos relations commerciales. Lorsque deux nations inégalement riches commercent ensemble, la plus riche des deux devient prêteuse, c'est-à-dire qu'elle vend à crédit les marchandises qu'elle importe chez l'autre. Or ces marchandises sont un capital qui sert à vivifier l'industrie de la nation emprunteuse *). Jusqu'à ce moment la Russie se range encore parmi les nations pauvres ou emprunteuses, puisque son capital ne suffit pas à nourrir toutes les branches d'industrie auxquelles elle peut se livrer; et les nations qui font pour elle son commerce étranger, sont toutes plus riches qu'elle, et lui fournissent les capitaux dont elle manque. Entraver l'importation des marchandises étrangères, c'est donc entraver les prêts que les autres nations veulent nous faire de leurs capitaux, c'est retarder les progrès de notre industrie. En considérant

*) Voyez le développement de ce principe dans mon *Cours d'Econ. polit.* T. *III*, *p.* 212 *et suiv.*

tout le mal que le système prohibitif cause aux peuples qui s'y soumettent, on est conduit à regarder la contrebande comme un léger correctif à ces maux. Cependant, des lois qui réduisent le commerce des nations à peu près à un trafic de contrebande, ont le même effet que les lois qui, dans les siècles de barbarie, faisoient défense au marchand d'emprunter les capitaux dont il avoit besoin pour son commerce : ces lois absurdes n'empêchèrent pas absolument tout emprunt, mais elles forcèrent l'emprunteur à payer une usure au lieu d'un intérêt légitime. Les entraves portées au commerce étranger ont des effets analogues, quoique moins sensibles : elles n'empêchent pas absolument tout emprunt de nation à nation, mais elles forcent la nation emprunteuse à payer plus cher ceux qu'elle peut encore faire par la contrebandes.

Cinquième effet du monopole: il arrête le perfectionnement de l'industrie.

Nous avons vu combien le monopole pèse sur les consommateurs, et combien il fait de tort à l'industrie en lui fermant ses débouchés et en lui retirant les capitaux étrangers qui étoient venus l'alimenter. Mais l'industrie en souffre encore d'une autre manière : son perfectionnement est arrêté par le monopole, puisque celui-ci la prive des modèles que l'industrie des peuples plus avancés lui fourniroit par le commerce étranger, puisqu'il a une tendance directe à éteindre l'émulation, à engourdir le génie et le talent. À quoi sert de se distinguer lorsqu'on est assuré de vendre? À quoi sert de chercher à faire mieux, lorsque le gouvernement a pris l'engagement de trouver des acheteurs à ceux mêmes qui font plus mal? À quoi sert de sur-prendre le secret des fabricans étrangers, lorsqu'on n'aura jamais à craindre leur concurrence? C'est dans cette position, c'est lorsque le fabricant ne voit plus ses intérêts liés à sa réputation qu'il s'appesantit dans sa routine et qu'il se refuse à tout effort généreux qui pourroit l'en faire sortir. Ce n'est qu'en ayant sous les yeux les produits de l'industrie étrangère la plus avancée, et en étant constamment alarmé par leur perfectionnement, que les chefs d'atelier comprennent ce qu'ils peuvent faire pour l'intérêt des consommateurs et pour le leur propre.

Le célèbre *Chaptal*, autrefois ministre de l'intérieur en France, en énumérant dans un de ses ouvrages les inconvéniens attachés à la prohibition des marchandises étrangères, n'oublie pas celui-ci: *de ne plus offrir de stimulant à l'émulation des fabricans français; aussi*, ajoute-t-il *je veux que les produits des fabriques étrangères viennent* *concourir sur nos propres marchés avec ceux de nos fabriques nationales.* Quoique les préjugés du gouvernement français se soient opposés à l'exécution de ce dessein généreux, le temoignage que Chaptal en a laissé dans ces lignes n'en est pas moins une preuve que les hommes éclairés de tous les pays sont d'accord sur le principe de la liberté du commerce.

Sixième effet du monopole: il est une source d'injustices, de vexations et de faux-fraix, et il tend a démoraliser la nation.

Nous avons examiné en détail les maux directs que produit le système prohibitif; jetons un coup-d'oeil sur les maux accessoires qui l'accompagnent.

1°. Il est fécond en *injustices*. D'abord il sacrifie l'intérêt du consommateur à celui du producteur: mais de quel droit force-t-on les consommateurs à se refuser des jouissances innocentes, ou à faire des dépenses plus fortes pour se procurer leurs besoins indispensables, le tout pour augmenter l'embonpoint de quelques fabricans, ou pour enrichir quelques contrebandiers et commis de douanes?

Le système prohibitif sacrifie encore l'intérêt de certaines classes de producteurs à celui de certaines autres classes de producteurs. Les prohibitions ne sont jamais générales; mais quand même elles le seroient par les lois, elles ne le seroient pas par le fait. Une denrée qui ne revient pas plus cher à produire dans le pays que dans l'étranger, une marchandise dont le transport au loin est fort coûteux, n'ont point à craindre que les produits étrangers de la même espèce viennent se mettre en concurrence avec elles : leurs producteurs participent donc aux inconvéniens des prohibitions sans partager les profits du monopole.

Enfin, dans les industries même qui profitent du monopole, les gains ne se partagent pas équitablement entre tous ceux qui concourent à la production: les chefs d'entreprises exercent un monopole, non-seulement à l'égard des consommateurs et des producteurs dans les autres branches, mais encore, et par d'autres causes, à l'égard de leurs propres agens et ouvriers ; de manière que ceux-ci participent aux désavantages du monopole comme consommateurs, et ne participent pas aux gains forcés comme producteurs.

2°. Le système prohibitif est une source de *vexations* et de *faux-fraix*. La dépense perdue la plus apparente est celle des douaniers, des inspecteurs, des gardes-côtes;

mais la plus réelle est celle de la perte du travail, ou le travail stérile de ceux qui font leur métier de la contrebande, et de ceux qui font ou paroissent faire leur occupation de la prévenir.

Parmi les faux-fraix, il ne faut pas oublier ceux occasionnés par des transports inutiles. Les marchandises qui, si leur entrée étoit libre, pourroient arriver par mer, ou n'auroient que peu de chemin à faire, sont obligées d'arriver par terre, ou de faire des détours immenses, sur des routes peu praticables, pour se présenter à l'endroit de la frontière où la contrebande est plus aisée. Les habitans des côtes ou des provinces frontières qui pourroient s'approvisionner à leur porte de tel article de leur consommation, s'il étoit permis de l'importer, se voient forcés de le tirer à grands fraix des provinces éloignées du pays. Dans ce cas-ci, comme dans l'autre, les fraix de transport et le travail inutile des voituriers sont perdus sans compensation pour la nation.

3°. Enfin partout où le système prohibitif est en rigueur, il fait naître infailliblement un *système régulier de contrebande*. Sous le rapport de la richesse nationale, comme je l'ai déjà observé, la contrebande est un mal plus léger que le monopole, puisqu'il sert en quelque sorte de correctif à ce dernier; mais sous tous les autres rapports c'est un mal de la nature la plus dangereuse. Un métier qui conduit à mépriser les lois de l'État, à se jouer de ses devoirs comme citoyen et comme sujet, à devenir parjure à ses sermens, doit certainement être regardé comme une peste morale: néanmoins les gouvernemens n'hésitent pas d'exposer leurs administrés à cette funeste contagion pour atteindre un but illusoire, un but qui, s'il pouvoit être atteint, nuiroit à la richesse nationale au lieu de lui être utile! N'a-t-on pas vu des administrateurs s'opposer à la réduction des droits d'entrée, de peur de rendre la contrebande moins lucrative, et conséquemment moins forte *)? C'est à cet excès d'extravagance qu'on parvient en se pénétrant des principes d'un système factice et contraire à l'ordre naturel des choses!

*) C'est en effet la raison sur laquelle le directeur des douanes françaises, *Magnien*, fondoit son opposition dans un écrit publié il y a quelques années. Dès que la fraude ne serois plus si lucrative, il pense qu'on ne la feroit plus avec autant d'ardeur et que cet effet entraîneroit celui que les douaniers, ne voyant plus l'attrait des confiscations, se dégoûteroient de leur métier et s'en acquitteroient avec négligence. Il croit donc important d'agraver les droits pour donner de l'activité à la contrebande, seul moyen qu'il connoisse pour en communiquer aux employés de la douane. Ceci revient au principe que le gouvernement doit encourager le crime pour avoir les moyens de le punir. On croit entendre un juge qui s'afflige de la réforme des moeurs, parce que si l'on parveroit à n avoir plus de scélerats, on n'auroit bientôt plus de tribunaux. (*Simonde*, *De la richesse commerciale*, T. *II*, *p.* 229.)

DES ENTRAVES À L'IMPORTATION DES MARCHANDISES ÉTRANGÈRES COMME MOYEN D'ENCOURAGER LA PRODUCTION NATIONALE.

PAR

H. STORCH.

Présenté à la Conférence le 13 Août 1817.

Seconde partie.

Tels sont les effets des mesures qui excluent les produits de l'industrie étrangère du marché intérieur, ou qui ne les y admettent que chargés de gros droits. Mais avant de quitter cette matière, il importe de faire connoître les raisons qu'on allègue en faveur de ces mesures. Cette discussion, loin d'affoiblir les principes que je viens d'exposer, leur prêtera au contraire de nouvelles forces, et fera sentir d'autant plus leur solidité.

Les pertes, dit-on, *qu'une nation fait en prohibant ou en entravant l'entrée des marchandises étrangères qu'elle peut produire chez elle, ne sont que foibles et momentanées : en la forçant de se suffire à elle-même, elle acquiert de nou-*

velles branches d'industrie qui l'enrichiront d'autant plus par la suite.

Observons d'abord que les pertes occasionnées par ces mesures sont beaucoup plus grandes et plus durables qu'on se l'imagine ordinairement. On a calculé la perte que la Russie a faite par la prohibition d'un seul article, des draps étrangers, à 25 millions de roubles assignats par an *), et cette évaluation ne paroît point exagérée. Si l'on pouvoit supposer que vingt années eussent suffi pour faire parvenir nos fabriques de draps, par le moyen du monopole, au même point de perfection où se trouvent les fabriques étrangères, la Russie eût sacrifié, pour atteindre ce but, la somme énorme de 500 millions. Mettons la moitié, toujours le sacrifice eût été au-delà de toute proportion, surtout si l'on considère que le but n'auroit été atteint qu'à demi. Car à force d'efforts et de dépenses les fabricans russes pourroient peut-être pervenir dans l'espace de vingt ans à fabriquer d'aussi bons draps que les étrangers, quoique j'en doute; mais ils ne pourroient certainement pas les fournir au même prix. Ce qui rend nos marchandises manufacturées chères, en comparaison de celles de l'étranger, c'est principalement le taux élevé de

---

*) *Arnold, Ansichten über das Tarifsystem in Russland, p.* 26.

l'intérêt et du profit de l'entrepreneur : or ces deux élémens du prix ne peuvent jamais baisser que par l'enrichissement général de la société, par l'augmentation du capital national; et cette augmentation est l'affaire des siècles. Il a fallu plus de trois siècles en Angleterre pour y faire descendre l'intérêt de 10 pour cent à 4 *). C'est beaucoup espérer de la Russie que d'y attendre une pareille baisse au bout de la moitié de ce tems : donc, si le système prohibitif y eût été constamment maintenu, la Russie eût fait constamment des pertes, quoique graduellement moins fortes, sur cette branche de sa production, pendant plus d'un siècle encore. Elle eût, à la vérité, acquis une nouvelle branche d'industrie, mais loin de s'enrichir par là, elle se fût appauvrie. Or le but de la législation économique n'est pas d'appauvrir la nation, mais de l'enrichir. Quelles que soient les branches d'industrie qui mènent à ce but, c'est indifférent, pourvu qu'elles y mènent. Chez les peuples riches, l'industrie manufacturière est peut-être plus productive que l'industrie agricole; mais chez les peuples pauvres c'est tout le contraire **).

Cependant, dit-on, *presque toutes les nations européennes*

---

*) *Smith*, *Wealth of nations*, *the 7th edition*, *Vol. I*, *p.* 135.

**) Voyez le développement de ce principe dans mon *Cours d'Econ. polit.* T. *IV*, *p.* 163, *les chap. II et III.*

ennes ont employé le système prohibitif pour introduire chez elles les branches d'industrie qui leur manquoient, et elles se sont enrichies par ce moyen. La première partie de cette assertion n'est que trop fondée, mais il seroit difficile de prouver la seconde. *Smith* a démontré jusqu'à l'évidence, que ce n'est pas par ses mesures réglémentaires que l'Angleterre s'est enrichie, mais malgré ces mesures, et qu'elle auroit fait des progrès bien plus rapides vers l'opulence, si le gouvernement avoit laissé prendre à l'industrie la route que l'intérêt individuel lui prescrivoit. Les mêmes observations se sont vérifiées par rapport à la France et à tous les pays florissans de l'Europe. Le progrès naturel de la prospérité amène immanquablement chez toute nation cette époque où la culture des terres ne peut absorber le capital national, et où il devient avantageux de le diriger vers l'établissement des manufactures *): si, par hasard, la nation adopte le système prohibitif à cette époque, l'accroissement de son industrie paroît être l'effet de ces mesures législatives, tandis qu'en réalité il n'est que le résultat de sa situation naturelle, résultat que ces mesures entravent au lieu de le seconder. Ainsi, quand du tems d'*Elisabeth* et de *Louis* XIV. le système prohibi-

*) Voyez *Cours d'Econ. polit. T. IV, p.* 340 *le chap. XIII.*

tif fut établi en Angleterre et en France, les progrès de l'industrie de ces pays ne furent pas l'effet de ce système, mais de la sûreté mieux garantie des personnes et des propriétés, de l'accumulation des capitaux et de l'extension des lumières, causes qui, sans la manie réglementaire des gouvernemens, eussent fait également naître des manufactures, et avec bien plus de profit pour ces nations *). Si le systême prohibitif avoit produit ces effets en France et en Angleterre, il auroit dû les produire dans tous les tems et dans tous les pays où il a été employé dans cette vue: mais les mêmes mesures qui réussirent à

---

*) Les proneurs du systême réglémentaire n'ont pas manqué d'attribuer l'état florissant de l'agriculture en Angleterre à un des expédiens de leur systême, savoir à la loi qui accorde une gratification (*bounty*) pour l'exportation des blés. Voici ce que Smith dit à cette occasion. „Ce systême de lois qui est lié avec l'établissement de la gratification, ne paroît nullement mériter les éloges qui lui ont été prodigués. L'amélioration et la richesse de la Grande Bretagne, qu'on a si souvent attribuées à ces lois, peuvent très-aisément s'expliquer par de tout autres causes. Cette assurance que donne la Constitution anglaise à tout individu, de pouvoir compter sur la jouissance des fruits de son travail, est seule suffisante pour faire prospérer un pays, en dépit de tous ces réglemens; et cette assurance a été portée au plus haut degré par la révolution, presqu'au même moment où la gratification a été établie . . . Parce que l'époque de la plus grande prospérité de la Grande Bretagne et de ses plus grands progrès dans la culture a été postérieure à ce systême de lois, il ne faudroit pas, pour cette raison, en faire honneur à ce systême. Cette époque a aussi été postérieure à la dette nationale: or, ce qu'il y a de plus certain au monde, c'est qu'elle n'a pas été amenée par la dette nationale.“ (*Wealth of nations, Vol. II, p.* 3·9.)

Colbert, n'eurent aucune suite sous *Henri* IV. *); et l'application du système prohibitif, qui est censé avoir rendu la France et l'Angleterre les pays les plus industrieux de l'Europe, n'a point produit cet effet en Suède, en Danemarc et dans plusieurs autres pays où elle a été faite avec la plus grande rigueur et la persévérance la plus étonnante. Ce n'est donc point aux mesures prohibitives du gouvernement, que les nations opulentes de l'Europe doivent leur industrie et leur richesse, mais au progrès naturel de la prospérité, lequel, sans doute, auroit été bien plus rapide si ces mesures ne l'avoient entravé.

Les écrivains qui démontrent le vice des mesures règlementaires, sont souvent accusés d'être contraires au progrès des manufactures et du commerce étranger, parce qu'ils n'approuvent pas les moyens violens par lesquels on tâche d'introduire et d'étendre ces industries, avant le terme que la nature des choses prescrit à leur développement spontané. C'est ainsi que des lecteurs superficiels ont avancé que j'avois prêché une pareille doctrine dans mon cours d'Économie politique, et qu'ennemi des arts et du commerce, je voudrois que la Russie restât éternellement un état agricole. Ce seroit avec le même fondement qu'on

*) Voyez *Mémoires de Sully*, T. III, p. 410.

accuseroit un instituteur d'être l'ennemi des sciences, lorsqu'il conseilleroit à son élève d'attendre, pour s'y vouer, le tems où il aura acquis les connoissances élémentaires et la maturité d'esprit nécessaires à leur culture. De même qu'un jeune homme qui n'est pas bien versé dans le calcul, ne peut point entreprendre l'étude des mathématiques sans retarder ses progrès dans cette science, une nation dont le capital ne suffit pas encore pour bien cultiver ses terres, ne peut point entreprendre les manufactures et le commerce, sans faire tort à l'avancement de sa richesse. Mais du moment où le capital est parvenu à ce terme, rien ne peut empêcher la nation d'étendre la sphère de son activité industrielle, et ses progrès sont alors d'autant plus marquans qu'ils sont le résultat de ses efforts spontanés. Pour accélérer ce moment, tout ce qu'il est au pouvoir du gouvernement, c'est contribuer à répandre les connoissances générales et de protéger l'accroissement du capital national; mais en dirigeant de force l'industrie nationale vers des industries précoces, il appauvrit la nation et agit en sens contraire de son but.

Cette théorie, dit-on, *est séduisante; mais malheureusement elle n'est pas constatée par l'expérience. Nulle-part en Europe le commerce n'a été libre, et nous n'avons point d'e-*

xemple d'une nation chez laquelle l'industrie se fût développée spontanément et sans le secours des mesures prohibitives. Ceux qui tiennent ce langage, ignorent, ou supposent que d'autres ignorent, que la Suisse n'a jamais connu le système-prohibitif; que la Hollande ne l'a pratiqué qu'avec beaucoup de modération, et par représailles plutôt que par choix; que plusieurs contrées de l'Allemagne, de l'Italie et même de l'Espagne, telles que la Saxe, Venise, la Toscane et la Biscaie, en ont été également plus ou moins exemptes; enfin que ces pays étoient au nombre des plus industrieux et des plus florissans de l'Europe. Parmi ces exemples, celui qui prouve le plus en faveur de la liberté du commerce, c'est la Suisse, parce que ce pays est le seul qui ait adopté constamment pour règle de conduite cette sage politique dans sa plus grande extension, et que les fruits qu'il en a recueillis sont encore visibles aux yeux de tout le monde. Écoutons ce qu'un habitant éclairé de ce pays nous rapporte sur ce sujet.

„Jamais, dit Mr. *Simonde* *), il n'a existé de tarif de douanes dans les divers États de la Suisse; jamais on n'a cherché à y protéger l'industrie nationale par l'exclusion de l'industrie étrangère et aux dépens des consommateurs.

---

*) *De la richesse commerciale,* T. *II*, *p.* 411.

Toutes les portes de l'État sont ouvertes, et si l'on y perçoit des droits, ce sont des péages pour la réparation des chemins, et non point des douanes. On n'y a jamais fondé aucune manufacture qui ne pût soutenir la plus libre concurrence, mais aussi toutes celles que la Suisse possède sont florissantes, et ne contribuent pas moins à l'avantage du consommateur qu'à celui du fabricant. Les capitaux de la Suisse ont suivi la direction naturelle: ils ont, avant toute chose, alimenté l'agriculture, et l'ont porté au plus haut point de perfection peut-être où elle soit arrivée dans aucun pays du monde. Il faut se rappeller quel rude climat habitent les Helvétiens, et combien d'obstacles ils rencontrent dans la rigueur des frimats et dans l'apreté du sol. Ils n'ont point pu, comme dans les belles plaines de Lombardie ou les heureuses collines de la Toscane, faire succéder une récolte à une autre; mais ils ont toujours su connoître ce qui étoit le plus propre à leur terre, ils ne lui ont demandé que cela, et ils l'ont obtenu avec un degré de perfection qu'aucun autre peuple n'a su atteindre. Plus de la moitié de la Suisse ne peut produire que de l'herbe, mais nulle-part on n'a mieux entendu l'art de faire produire en abondance à la terre de la bonne herbe, de conserver aux foins toute leur saveur et toute leur vertu, d'élever de beau bétail, et de tirer un grand parti de son laitage. Quelques collines d'un sol stérile d'ailleurs se sont trouvées propres à la vigne: on les en a couvertes, et il n'existe pas dans l'univers de plus beau vignoble, dont la culture soit mieux entendue, dont le produit soit plus prodigieux, et rembourse plus régulièrement les fraix exorbitans, qu'on ne regrette point de faire pour son explotation, que celui des bords du lac Léman, et surtout de la Vaux. Peu de terres sont propres au blé; on n'a point cherché à en faire produire à celles qui s'y refusent, mais toutes les fois qu'on leur en demande, on leur prodigue tant de soins qu'on est assuré d'obtenir d'elles d'abondantes recoltes.

„ Après que la plus productive de toutes les industries, l'agriculture, à été complètement saturée de capitaux, les Suisses ont destiné les leurs à commercer sur ses produits; un fonds très-considérable est consacré à ce négoce; on en pourra juger en apprenant que le seul petit canton de Schwitz, qui n'a pas quinze lieues carrées de superficie, dont près de la moitié peut-être est occupée par des rochers stériles ou des glaces éternelles, exporte chaque année par son port de Brunnen, trois mille vaches d'une si belle race qu'elles ne se vendent pas moins de quinze louis l'une dans l'autre; en sorte que son exportation en bétail seulement s'élève à 1,080,000 francs. Il faut y ajouter celle en fromages, en bois et en merrains, qui est aussi très-considérable. Les autres cantons font, aussi bien que celui-là, un commerce immense sur les productions de la terre.

„Pour faciliter les transports, les Suisses ont ouvert dans tous les sens des chemins au travers de leurs montagnes; on ne peut les traverser sans admirer l'immensité du travail qui les a tracés, et leur parfaite conservation. Mais ces industrieux montagnards ne pouvoient vaincre complètement la nature: plusieurs de leurs chemins ne sont point praticables pour des chars; cette difficulté a renchéri les frais de voiture. Les marchandises les plus précieuses sont celles qui peuvent le mieux supporter ces frais considérables, et c'est sans doute pour cette raison qu'il a convenu aux Suisses, lorsqu'ils ont entrepris des manufactures, de s'attacher à celles d'un prix élevé et qu'on pouvoit transporter plus au loin: les montres et la joaillerie du Locle et de la Chaux-de-Fond; les indiennes et les toiles de coton d'Appenzell, de Saint-Gall, de Zurich etc. vont chercher des consommateurs jusqu'aux extrémités de l'Europe.

„Le commerce intérieur, qu'on n'estime jamais à sa vraie valeur, est porté en Suisse au plus haut degré d'activité. Quel doit être l'étonnement du voyageur qui suit pour la première fois les bords du lac Léman, et qui rencontre de deux lieues en deux lieues des petites villes, toutes florissantes, où tous les habitans respirent l'aisance, sont bien nourris, bien vêtus, bien logés, et où presque toutes les maisons contiennent des magasins et des boutiques, qui ne redouteroient point la comparaison avec celles des villes les plus marchandes de la France. Tout commerce y est également libre; celui d'importation n'y est point regardé de mauvais oeil: aussi le consommateur Suisse peut-il obtenir à meilleur marché ses habits, ses instrumens et tout ce qui lui vient du dehors, qu'aucun autre peuple de l'Europe.

„ Après que toutes les voies de la circulation ont été saturées de capitaux, il en a surabondé encore, et les Suisses, outre le commerce étranger d'importation et d'exportation, ont entrepris aussi celui de transport. Des capitaux de Neufchâtel, de Bâle, de Lausanne, de Genève, étoient destinés à faire les échanges des Français entre-eux ou avec d'autres nations; ceux des villes de Zurich, Schafhausen et Saint-Gall rendoient le même service aux Allemands; ceux d'Altorf, de Lucerne, de Coire et d'une foule de villages semés sur la pente méridionale des Alpes, en faisoient autant pour l'Italie, où l'on trouve un nombre prodigieux de riches négocians Grisons, sortis de villages à peine connus. Dans tous ces États, l'on voit des colonies Suisses et Genevoises, colonies d'un genre bien différent de celles que les Européens ont fondées dans les autres parties du monde, puisqu'elles ne viennent s'établir chez les peuples, que pour les assister de leurs richesses et de leur industrie.

„La Suisse, cruellement dévastée par une guerre aussi injuste que ruineuse *), se relève du milieu de ses désastres, avec une force que personne n'attendoit d'elle... La Suisse est encore riche, et le capital prodigieux qu'y avoit accumulé l'industrie humaine, ferme partout les plaies qu'on lui a infligées. C'est un grand exemple que le sien à citer en faveur de la liberté du commerce et de l'abolition de toutes les barrières qui, sous prétexte de balances défavorables, empêchent l'entrée des produits d'une industrie étrangère.“

Dans les ci-devant républiques des Pays-Bas et de Venise, l'importation d'aucune marchandise étrangère n'étoit défendue; celles-ci payoient un léger droit d'entrée (en Hollande ce droit étoit de deux pour cent de leur valeur, dans les États de Venise d'un pour cent seule-

---

*) Mr. *Simonde* écrivoit en 1803.

ment) : cependant l'affluence des produits de l'industrie étrangère n'a point empêché les Hollandais et les Vénitiens d'établir chez eux des manufactures de tout genre et de devenir les nations les plus opulentes de l'Europe.

Dans le royaume de Saxe, l'intérêt évident du commerce de la ville de Leipsic a fait triompher le principe de la liberté commerciale sur les préjugés populaires; toutes les marchandises étrangères y entrent librement : cependant de toutes les contrées de l'Allemagne, la Saxe est la plus industrieuse et la plus manufacturière.

La Toscane, au tems de la république Florentine, avoit été soumise au régime des prohibitions. Le Grand-Duc *Léopold* rendit la liberté au commerce. Les contributions, qui étoient en grand nombre, furent toutes levées au profit du fisc; aucune n'appuyoit un monopole mercantile. Or tout le monde sait quelle étoit la situation florissante de la Toscane sous cette administration éclairée, et combien ses manufactures et son commerce étoient supérieurs à ceux des autres États d'Italie.

Enfin, pour se convaincre des effets heureux de la liberté du commerce, il suffiroit de lire ce qu'un témoin aussi instruit que véridique rapporte sur la situation de la Biscaie, à une époque peu antérieure aux derniers troubles qui ont dévasté l'Espagne. Suivant le récit de Bourgoing *), l'activité, l'industrie, l'aisance qui régnoient dans cette province, formoient un contraste singulier avec l'inertie et le dénuement de celles qui l'avoisinoient : aussi ces dernières étoient-elles soumises à toutes les vexations du système prohibitif, tandis qu' à quelques restrictions près, toutes les marchandises du dehors entroient librement dans la Biscaie. „Les Biscaiens, ajoute l'auteur, ont pour les douanes une aversion qu'en plusieurs occasions ils ont prouvé être insurmontable. " La cour, en ménageant l'esprit indépendant des Biscaiens, leur avoit fourni des moyens de prospérité dont elle se doutoit fort peu, ou qu'elle déploroit peut-être comme des entraves à cette prospérité.

Ces exemples, dont on pourroit encore augmenter le nombre, prouvent bien que le principe de la liberté commerciale n'est point un rêve philantropique, un principe fondé sur une théorie purement spéculative, et dont l'application seroit douteuse, peut-être funeste, parce que ses effets sont encore inconnus: tout au contraire, l'expérience nous apprend que maint peuple a vu son industrie entravée et ses progrès vers l'opulence retardés par le régime

---

*) *Tableau de l'Espagne moderne*, 3e *édit.* T. I. *ch.* 1.

prohibitif; mais elle ne fournit pas un seul exemple où la liberté du commerce n'ait été suivie du développement prompt et facile de toutes les facultés qui concourent à produire l'opulence nationale. Il est donc permis à tout citoyen éclairé de joindre ses voeux à ceux de Mr. *Simonde*, "pour que tout gouvernement qui désire ardemment le bien, qui ne pleure aucun sacrifice pour le procurer au peuple, réfléchisse encore sur la routine à laquelle il se livre, et qu'il profite des leçons muettes mais énergiques de l'expérience!"

Il y a des personnes qui, convaincues des avantages d'un commerce libre, sont cependant d'avis *qu'il seroit dangereux d'établir cette liberté dans un pays où le papier-monnaie a remplacé le numéraire métallique, parce qu'elles supposent que la valeur de ce papier dépend du change étranger, lequel peut devenir défavorable au pays, si l'importation des marchandises étrangères n'y est assujéti à aucunes entraves.* Les partisans de cette opinion sont très-nombreux en Russie. *Si le commerce étoit libre*, disent-ils, *l'importation des marchandises étrangères excéderoit l'exportation de nos produits, et le change nous deviendroit contraire, ce qui aviliroit encore davantage nos assignats déjà dépréciés. Le système prohibitif, au contraire, en limitant* *l'importation, nous rend le change favorable, et améliore par là notre papier.*

Si ce raisonnement étoit fondé, il ne s'ensuivroit pas encore que le gouvernement dût recourir, pour sauver la valeur de son papier, à une mesure aussi violente et nuisible que la prohibition d'une branche du commerce. Pourquoi n'emploieroit-il pas plutôt un moyen de guérison radical qu'un mauvais palliatif? Pourquoi ne diminueroit-il pas la masse des assignats et ne leur donneroit-il pas une garantie pour assurer leur valeur, plutôt que de venir à leur secours par des mesures, lesquelles, supposé qu'elles pussent opérer quelque bien dans ce sens, font en même tems plus de mal dans un autre?

Mais ce raisonnement est absolument faux, comme la discussion suivante le prouvera à tout esprit non-prévenu.

1°. Il ne s'ensuit pas que, le commerce étant libre, la balance du commerce et le change seroient défavorables à la Russie. Au contraire, ils n'ont jamais été plus à notre avantage que dans le tems où il y avoit le moins de prohibitions. Dans l'espace de 69 ans (depuis 1700 jusqu'en 1768) le change ne nous a été contraire que dans les trois années de la guerre de sept ans, de 1759 à 1761; pendant tout le reste de cette longue période il a été constamment au-dessus du pair, et le plus souvent de 10 à 42 pour cent *). Or, dans cette période, presque toutes les marchandises étrangères entroient librement en Russie, et les droits qu'elles payaient étoient pour la plupart modiques.

2°. Les prohibitions n'empêchent pas l'entrée des marchandises étrangères; elles la rendent seulement plus ou moins coûteuse, suivant le volume et la valeur des marchandises. Dans ces derniers tems les prohibitions s'étendoient sur presque tous les objets manufacturés de l'étranger, et cependant la contrebande nous en fournissoit toujours, et en abondance.

3°. Enfin la valeur du papier-monnaie ne dépend pas du *change étranger*, mais de la *quantité du papier*. Lorsque cette quantité est au dessous du besoin de la circulation intérieure, les espèces métalliques se maintiennent plus ou moins dans le pays, et le papier ne peut point se déprécier, quand même le change seroit défavorable au pays. Lorsqu'au contraire le papier monnaie excède le besoin de la circulation, les espèces sortent tout-à-fait du pays et le papier se déprécie, quelque favorable que puisse être le change étranger. Dans ce cas, les sommes

*) Voyez le *Tableau Nr. VII* dans le *sixième volume de mon Cours d'Econ. polit.*

d'argent qu'il fait entrer dans le pays, en sont aussi-tôt expulsées par la surabondance du papier, et le cours de ce papier, s'il s'est relevé momentanément par l'importation des espèces, ne tarde pas de retomber au taux que lui prescrit sa quantité relativement au besoin de la circulation.

Quelque bien fondé que soient ces principes, ils sont encore loin d'être généralement reconnus en Russie. Je crois donc utile de les prouver par l'exemple même de *Tableau.* nos assignats. J'ai dressé à cet effet le Tableau ci-joint, qui présente la comparaison de la valeur de l'assignat dans l'intérieur et dans le change étranger *). Il résulte de ce Tableau :

1°. Que le rouble assignat a valu presque constamment davantage dans le change étranger que dans la circulation intérieure; car le change à été au-dessus du pair de l'assignat pendant 34 années; il a été au pair pendant 4 ans, et il n'a été au-dessous du pair que pendant 9 années.

2°. Que la dépréciation progressive de l'assignat a toujours précédé de plusieurs années l'époque où le change

*) Ce Tableau est extrait de ceux qui se trouvent dans le 6me volume de mon *Cours*, sous les N-os. V. et VII. J'y ai compris les dernières années et réduit le taux du change sur les différentes places à un terme moyen, exprimé en copeks d'argent, pour faciliter la comparaison.

Tableau ad p. 794.

Années.	Variations générales de l'assignat dans l'intérieur.	Taux de l'assignat dans l'intérieur : cop. d'arg	Taux de l'assignat dans le change : cop. d'arg.	Variations générales de l'assignat dans le change étranger.
1769	Baisse	99	120	Au-dessus du pair.
1770		99	112	
1771		98	116	
1772		97	116	
1773	Hausse	98	107	
1774		100	112	
1775	Baisse	99	117	
1776		99	117	
1777		99	119	
1778		99	116	
1779		99	107	
1780		99	100	
1781		99	107	
1782		99	107	
1783		99	102	
1784		98	101	
1785		98	105	
1786		98	107	
1787		97	104	
1788		93	93	au pair.
1789		92	80	Au-dessous du pair.
1790		87	80	
1791		81	72	
1792		79	66	
1793		74	65	
1794		71	71	au pair.
1795		68	74	Au-dessus du pair.
1796	Hausse	70	77	
1797		79	79	
1798	Baisse	73	74	
1799		67	68	
1800		65	68	
1801	Hausse	66	70	
1802		71	76	
1803		80	85	
1804	Baisse	79	82	
1805		77	81	
1806		73	73	au pair.
1807		67	61	Au-dessous du pair.
1808		54	48	
1809		45	43	
1810		33	29	
1811		25	28	Au-dessus du pair.
1812		26	35	
1813		25	34	
1814		25	29	
1815		24	25	
1816				

est devenu contraire à la Russie. Depuis la création des assignats, le change n'est tombé que deux fois au-dessous du pair de l'assignat: la première fois en 1789, lorsque l'assignat s'étoit déjà déprécié depuis 1775, et plus sensiblement depuis 1784; et la seconde fois en 1807, tandis que la baisse réitérée de l'assignat avoit déjà commencé en 1804.

3°. Que l'assignat a souvent éprouvé des variations en sens contraire du change; par exemple dans les années 1772 et 73, où il monta tandis que le change baissa; et dans les années 1770 et 71, 1774 et 75 et 1794 et 95, où l'assignat tomba dans le tems même où le change s'améliora.

Le change ne peut donc pas être la cause des variations de l'assignat, et il faut la chercher dans d'autres événemens. Celle de la *baisse* progressive de ce papier se montre pour ainsi dire d'elle-même, dans les émissions progressives *). Nous voyons qu'en 1769 le gouvernement avoit créé 40 millions d'assignats, qui furent mis successivement en circulation. Quoique le montant et l'époque de chaque émission en particulier ne soient point marqués dans le Tableau auquel je viens de renvoyer mes

---

*) Ces émissions sont indiquées dans le Tableau Nr. V. du *Cours*.

lecteurs, le taux de l'assignat nous les indique assez clairement. Dès la première émission, le rouble assignat ne vaut que 99 copeks, et il se déprécie successivement pendant les trois années suivantes. Cette baisse étoit l'effet naturel de l'augmentation subite du numéraire; elle dut frapper également les espèces métalliques et l'assignat, et faire sortir du pays à-peu-près autant de millions en espèces qu'on en avoit émis en papier. L'équilibre s'étant rétabli par cette sortie des espèces, et aucune nouvelle émission de papier ne le troublant derechef, le taux de l'assignat remonte dès l'année 1773, et l'année suivante le papier atteint sa valeur nominale. De nouvelles émissions l'en font descendre de nouveau depuis 1775; mais comme elles sont très-modérées, l'assignat se maintient pendant neuf ans au taux de 99 copeks. Dès l'année 1784 des émissions plus fortes le font tomber davantage, et en 1787 sa chute est accélérée par la création de 60 millions de nouveaux assignats. Cette somme est augmentée depuis 1790 par des émissions annuelles, dont l'effet se montre si évidemment par la baisse progressive de l'assignat, que la simple vue du Tableau suffit pour se convaincre de la liaison de ces deux phénomènes.

Mais si la *baisse* de l'assignat est l'effet des émissions de ce papier, comment s'expliquer sa *hausse* deux fois répérée, dans un tems où les émissions n'avoient guère cessé *)? Pour résoudre cette contradiction apparente, il suffit d'observer :

1°. Que cette hausse de l'assignat n'a été que momentanée, l'une n'ayant duré que deux ans, et l'autre trois;

2°. Que les époques de cette hausse sont celles de deux nouveaux règnes, dont chacun débuta par des mesures d'ordre et d'économie dans l'intérieur, et par des arrangemens pacifiques au-dehors. L'effet de ces mesures devoit être d'autant plus grand, que l'opinion du peuple les devançoit et leur prêtoit de nouvelles forces;

3°. Que l'acquisition des provinces polonaises et de la Courlande qui précéda la première période, avoit ouvert un nouveau champ aux assignats et avoit considérablement agrandie la sphère de leurs opérations;

4°. Enfin que, dans la dernière de ces périodes, le commerce et l'industrie en général jouirent d'une liberté, et l'Empire d'une paix et d'une prospérité rares, et que ces causes firent naître un surcroît de production et d'activité commerciale, lequel, à son tour, exigea un surcroît de valeur dans le numéraire, pour opérer le surcroît d'échanges qui se faisoient.

---

*) Dans les années 1796 et 97, et dans celles de 1801 à 1803.

On voit que ces circonstances passagères expliquent suffisamment la hausse momentanée des assignats, comme les émissions sans cesse réitérées expliquent leur baisse constante et progressive. S'il restoit encore le moindre doute à l'égard de cette seconde cause, les dernières années de notre Tableau le détruiroient. Depuis 1811 que les émissions ont cessé, la chute de l'assignat s'est arrêtée; car, après les variations brusques et fortes des années précédentes, on peut compter pour rien les légères différences qui ont eu lieu dans la valeur de l'assignat pendant ces six années.

En résumant ces observations, on se convaincra, j'espère, que la liberté du commerce ne peut point influer d'une manière désavantageuse sur le taux de nos assignats. Au contraire, pourvu que la masse de papier ne soit point augmentée, plus le commerce sera libre, plus il se fera d'échanges dans lesquels les assignats seront employés; plus, par conséquent, il seront recherchés, et plus leur taux haussera.

Enfin les partisans du système prohibitif essaient quelquefois de justifier ses mesures *par la considération de l'indépendance nationale. A les entendre, on diroit qu'il est honteux d'acheter quelque-chose aux étrangers; ils appellent* tribut *les sommes que la partie leur paye pour leurs marchandises, et ils conseillent au gouvernement de l'affranchir à tout prix d'un joug aussi ignominieux.* Les soi-disant patriotes qui tiennent ce langage, paroissent oublier que, dans le commerce entre deux nations, la dépendance est mutuelle, et que, si les Russes, par exemple, payent un tribut aux étrangers pour des etoffes, des vins et des marchandises coloniales, les étrangers leur en payent un pareil pour des blés, des fers et des bois de construction. S'il y a quelque dépendance dans ce rapport mutuel, certes elle n'est point du côté de la nation agricole. Celle-ci achète aux étrangers des objets de commodité et de luxe, dont elle peut se passer quand la nécessité l'ordonne; son débit est plus étendu, plus sûr et plus lucratif; il le devient d'autant plus que les autres nations font des progrès plus marquans dans leur industrie, tandis que ces mêmes progrès exposent les nations manufacturières et commerçantes à perdre le leur *). Mais lors même que la dépendance seroit égale des deux côtés, où en seroit le mal pour les nations qui s'y soumettent? Partout où les besoins se multiplient et où la civilisation s'étend par le moyen du commerce, les nations deviennent de plus en

---

*) Voyez la preuve de ces assertions dans mon *Cours d'Econ. polit. T. II*, *p.* 357. *et suiv.*, *T. IV*, *p.* 183 *et suiv.*, *et T. V*, *p.* 115 *et suiv.*

plus dépendantes les unes des autres: ainsi, pour annéantir cette dépendance, il faudroit renoncer à tout commerce extérieur, et la politique du Japon seroit le comble de la sagesse législative.

Cependant, s'il est absurde de prétendre à une entière indépendance commerciale, *tout gouvernement doit prendre des mesures pour rendre l'Etat aussi peu dépendant que possible des autres nations, pour tout ce qui regarde sa défense ou sa sûreté extérieure.* Quelque violentes que soient ces mesures, si le but ne peut être atteint par d'autres plus douces, le gouvernement sera justifié aux yeux de la raison de les avoir employées. Ainsi un souverain qui encourage la fabrication des armes et des munitions de guerre parmi ses sujets, même par les mesures les plus sevères du systême prohibitif et aux dépens de la richesse nationale, n'en est point blêmable, parce que cette branche d'industrie est nécessaire à la défense du pays, et qu'en tems de guerre une combinaison de circonstances contraires peut le mettre dans l'impossibilité de s'en pourvoir de l'étranger. C'est sous ce point de vue que Smith justifie *l'acte de navigation,* ou cette loi anglaisse qui donne aux vaisseaux et aux matelots de la Grande-Bretagne le monopole de la navigation marchande de leur pays *).

---

*) *Wealth of nations, Vol. II, p.* 192.

Cette loi n'est rien moins que favorable au commerce de l'Angleterre, ou à l'accroissement de cettte opulence dont le commerce est la source, comme on l'a souvent faussement supposé sur le continent. La nation anglaise seroit bien plus dans le cas d'acheter à bon marché, si, par la liberté de la navigation, elle encourageoit toutes les nations à lui apporter les marchandises qu'elle désire d'acheter; et elle seroit bien plus dans le cas de vendre cher, si, par le moyen de cette même liberté, ses marchés étoient remplis du plus grand nombre d'acheteurs possible. L'acte de navigation, en restreignant le nombre des vendeurs et des acheteurs étrangers dans les marchés de la grande-Bretagne, oblige les Anglais, non-seulement à acheter plus cher les marchandises étrangères, mais encore à vendre les leurs à meilleur marché que si la navigation étoit entièrement libre. Toute-fois, comme la sûreté de l'État est d'une plus grande importance que sa richesse, *Smith* n'hésite pas d'appeler cet acte un des réglemens de commerce les plus sages de l'Angleterre. Car la défense de ce pays dépend principalement de sa marine, et l'acte de navigation contribue non-seulement à augmenter le nombre et à perfectionner la construction des vaisseaux, mais encore à former une pépinière d'excellens matelots. On voit combien il seroit déraisonnable de la part d'une puissance continentale, dont la sûreté ne dépend point de ses flottes, d'imiter l'exemple de l'Angleterre, et de se soumettre aux mêmes sacrifices sans en retirer les mêmes avantages.

Il existe encore un autre cas dans lequel il paroît qu'il seroit avantageux de mettre quelque charge sur l'industrie étrangère pour encourager l'industrie nationale, savoir *quand le produit de celle-ci est chargé lui-même de quelque impôt dans l'intérieur.* Dans ce cas il paroît raisonnable d'établir un pareil impôt sur le produit du même genre, venu de fabrique étrangère. Ceci n'aura pas l'effet de donner à l'industrie nationale le monopole du marché intérieur : tout l'effet qui en résultera, ce sera d'empêcher que cette partie du capital et du travail du pays qui s'y seroit porté naturellement, n'en soit détournée par l'impôt pour prendre une direction moins naturelle, et de laisser la concurrence entre l'industrie étrangère et l'industrie nationale sur le même pied qu'auparavant.

Mais ce principe n'est-il pas susceptible d'une application beaucoup plus générale, et *dans le cas où les premières nécessités de la vie fussent imposées dans un pays, ne conviendroit-il pas d'imposer, non-seulement les objets de même espèce qui seroient importés des autres pays, mais* *toute espèce de marchandise étrangère, de nature à concourir avec tout autre produit de l'industrie nationale?*

Sans doute les impôts sur les premières nécessités de la vie haussent le prix du travail et par conséquent celui de toute marchandise produit de ce travail: cependant ce renchérissement n'est pas la même chose que celui d'une marchandise particulière, causé par un droit imposé directement sur elle, et il en diffère sous les deux rapports suivans:

1°. Il est toujours aisé de connoître avec la plus grande exactitude, de combien une marchandise se trouve renchérie par un droit directement imposé sur elle, mais il seroit impossible de déterminer avec quelque précision, de combien le renchérissement général de travail pourroit influer sur le prix de chaque marchandise particulière produite par le travail. Il y auroit donc impossibilité de proportionner, avec quelque exactitude, l'impôt sur chaque marchandise étrangère au renchérissement de chaque marchandise nationale.

2°. Les impôts sur les choses nécessaires à la vie ont, sur le sort du peuple, à-peu-près le même effet qu'un sol ingrat ou un mauvais climat. Ces impôts renchérissent les denrées de la même manière que si elles coûtoient plus de travail et de dépense qu'à l'ordinaire pour être produites. Comme dans la cherté naturelle qui procède de la pauvreté du sol ou de la dureté du climat, il seroit absurde de prétendre diriger les gens sur la route qu'ils ont à prendre pour l'emploi de leurs capitaux et de leur industrie, il ne le seroit pas moins de le vouloir faire dans cette cherté artificielle causée par les impôts. Leur laisser assortir, du mieux qu'ils l'entendent, leur industrie à leur situation, c'est évidemment le parti le plus avantageux pour eux. Mais les charger d'un nouvel impôt, parce qu'ils sont déjà surchargés d'impôts; et par la raison qu'ils payent déjà trop cher les choses nécessaires à la vie, vouloir leur faire payer également plus cher la plupart des autres objets de leur consommation, c'est à coup sûr une manière fort étrange d'adoucir leur situation.

Les restrictions que nous venons d'apporter au principe de la liberté du commerce, nous conduisent à l'examen des deux questions suivantes :

1°. *Jusqu'à quel point est-il à propos de laisser subsister la libre importation des marchandises d'une nation, qui, chez elle, gêne ou empêche l'importation des nôtres ?*

Dans ce cas, la revanche porte naturellement à user de représailles, et cette conduite peut être d'une bonne politique quand il y a probabilité qu'elle amènera la révocation des gros droits ou prohibitions dont on a à se plaindre. Mais quand cette probabilité n'existe pas, c'est évidemment une mauvaise méthode pour compenser le dommage fait à quelques classes du peuple, que de faire un autre dommage, tant à ces mêmes classes qu'à presque toutes les autres.

2°. *Jusqu'à quel point et de quelle manière convient-il de rétablir la libre importation des marchandises étrangères, après qu'elle a été interrompue pendant quelque tems, et lorsque par l'effet du systême prohibitif, certaines branches d'industrie se sont étendues au point d'employer un grand nombre de bras?*

Dans ce cas, l'humanité autant que la sûreté publique peuvent exiger que la liberté du commerce ne soit rétablie que graduellement et avec beaucoup de circonspection et de reserve. Si on alloit tout d'un coup supprimer ces gros droits et ces prohibitions qui gênent l'importation des marchandises étrangères, il pourroit se faire que le marché intérieur fût inondé aussi-tôt de ces marchandises à plus bas prix, tellement que plusieurs milliers de nos concitoyens se trouvassent tous à la fois privés de leurs occupations et dépourvus de tout moyen de subsistance. Il y a pourtant de bonnes raisons pour croire que le mal seroit beaucoup moins grand qu'on se le figure d'ordinaire, même dans un pays qui auroit suivi le système prohibitif depuis plus d'un siècle et l'auroit maintenu dans sa plus grande rigueur.

D'abord, toutes les marchandises qu'un tel pays produit au même prix et de la même qualité que les marchandises étrangères de la même espèce, lorsqu'elles sont arrivées sur son sol, ne se ressentiroient que fort peu ou point du tout de la concurrence de l'étranger. Et quand même quelques consommateurs viendroient par engouement à préférer la marchandise étrangère, un tel caprice s'étendroit à si peu de personnes, qu'il ne produiroit aucun effet sensible sur l'occupation générale du peuple.

Ensuite, quoique dans le cours du rétablissement de la liberté commerciale, un grand nombre de gens dussent se trouver par là privés de leur manière habituelle de subsister, il ne s'ensuivroit point qu'ils fussent totalement privés d'emploi et de subsistance. Lors de la réduction des troupes de terre et de mer, en Angleterre, à la paix de 1763, plus de cent-mille soldats et gens de mer furent tous à la fois déplacés de leur emploi ordinaire; mais quoiqu'ils en aient eu sans doute à souffrir un peu, ils ne se trouvèrent pas pourtant dénués de tout moyen de subsistance. La majeure partie des gens de mer vraisemblablement entrèrent successivement au service des vaisseaux marchands; et en même tems eux et les soldats se fondirent dans la masse du peuple et s'adonnèrent à une foule de professions diverses. Un changement si grand et si subit dans le sort de plus de cent-mille hommes, non-seulement n'entraîna aucune convulsion dangereuse, mais même aucun désordre sensible; les salaires même du travail ne souffrirent de réduction dans aucune profession, excepté dans celle de matelot au service du commerce *). Cependant, si nous comparons les habitudes d'un soldat et celles d'un ouvrier d'industrie, nous trouverons que celles du dernier ne tendent pas autant à le rendre impropre à un nouveau métier, que celles de l'autre à le rendre impropre à toute espèce de travail. L'ouvrier a toujours été accoutumé à n'attendre sa subsistance que de son travail; le soldat à l'attendre de sa paye. L'industrie et l'assiduité doivent être familières à l'un; la fainéantise et la dissipation à l'autre. Or il est certainement beaucoup plus aisé à changer la direction de l'industrie d'une espèce à une autre, que d'amener la dissipation et la fainéantise à une occupation quelconque.

---

*) *Smith, Wealth of nations, Vol. II, p.* 204.

D'ailleurs, la plus grande partie des manufactures ont d'autres branches de manufacture collatérales, qui ont avec elles tant d'analogie, qu'un ouvrier peut aisément transporter son industrie de l'une à l'autre *). Et puis la plupart de ces ouvriers ainsi reformés, trouvent accidentellement de l'emploi dans les travaux de la campagne. Le capital qui les mettoit en oeuvre auparavant, restera toujours dans le pays pour les occuper de quelqu'autre manière. Ainsi, pour éviter les inconvéniens qui pourroient résulter de la chute de quelques manufactures pour les ouvriers qui y sont employés, il suffit de laisser à tous la liberté d'exercer toute espèce d'industrie qu'ils jugent à propos d'exercer, et de détruire les privilèges exclusifs des corporations et des métiers dans les pays où ces gênes de l'industrie existent. Alors, ni la société ni les individus n'auront pas plus à souffrir d'un événement qui disperseroit quelques classes d'ouvriers, qu'il n'ont à souffrir du licentiement des soldats. Les manufacturiers sont sans doute des gens fort utiles à leur patrie, mais ils ne peuvent pas l'être davantage que ceux qui la défendent au prix de leur sang, et ils ne peuvent pas se plaindre s'ils sont traités comme eux.

Les *entrepreneurs* des manufactures tombantes, dans le cas d'une liberté de commerce rendue subitement au pays,

---

*) Voyez en des exemples dans mon *Cours*, T. *II*, *p.* 18 *et suiv.*

souffriroient sans doute un dommage considérable. Cette partie de leurs capitaux qui s'emploie habituellement en achat de matières premières et en salaires d'ouvriers, trouveroit peut-être sans beaucoup de difficulté un autre emploi; mais ils ne pourroient pas disposer, sans une perte sensible, de cette autre partie de leurs capitaux qui étoit fixée dans leurs ateliers et autres instrumens de métier. Une juste considération pour les intérêts de ces entrepreneurs exige donc que de tels changemens ne soient jamais faits brusquement, mais qu'ils soient amenés à pas lents et successifs, et après avoir été annoncés de loin. C'est pour cette raison que tout gouvernement devroit se garder avec le plus grand soin d'établir jamais aucun nouveau monopole en faveur de l'industrie nationale, ni de donner la moindre extention à ceux qui sont déjà établis. Chaque réglement de ce genre introduit dans l'État un germe réel de désordre, qu'il est bien difficile de guérir ensuite sans occasionner un nouveau désordre.

TABLEAUX STATISTIQUES
SUR
LE COMMERCE ÉTRANGER DE L'EMPIRE DE RUSSIE
PENDANT
LES ANNÉES 1802 ET 1807, ET DEPUIS 1812 JUSQU'EN 1815.

PAR

C. T. HERRMANN.

Présentés à la Conférence le 24 Sept. 1817.

Nous présentons *deux tableaux* sur le Commerce étranger de l'Empire de Russie, le premier depuis 1802 jusqu'en 1807, le second depuis 1812 jusqu'en 1815. Les données statistiques sur les années 1808—1811 nous manquent, et cette lacune rend les differénces entre les deux tableaux encore plus frappantes, dont l'un est du tems du systême continental, et l'autre du tems de l'Europe délivrée.

Le total du commerce de la Russie par mer et par terre pendant ces dix années étoit comme suit:

années	importation	exportation	années	importation	exportation
	Roubles			Roubles	
1802	56,530,094	63,277,759	1812	79 365,560	139,255,713
1803	55,557.855	67,148,643	1813	121,084,865	133,807,040
18 4	49,500,109	59,017,549	1814	113,785,322	196,216,820
1805	55,529,118	72,400,185	1815	114,729,440	220,895,110
1806	51,641,466	62,649,556	total	426,965.187	690,174,683
1807	40.403 662	53,564,901	terme moyen	106,741,296	172,543,670
total	309,162,304	378,088,593			
terme moyen	51,527,051	63,014,766			

Il resulte en comparant les termes moyens, que l'importation a plus que doublée dans les dernières années; car il y a 55 millions de plus; l'exportation a presque triplée, car elle surpasse de 109 millions celle des années marquées dans le premier tableau.

En général l'exportation a été plus forte que l'importation. D'après le premier tableau on avoit exporté pour 12 millions de plus, d'après le second pour 66 millions. Même en supposant à l'importation une contrebande considérable, le surplus de l'exportation sera toujours en faveur de la Russie.

L'année la moins favorable pour le commerce étoit l'année 1807, l'année la plus brillante étoit l'année 1815. Le total du commerce étranger dans la première année étoit de 93 millions, et de la dernière de 334, donc 241 millions de plus, ce qui donne environ la proportion de 1 à $3\frac{3}{5}$.

Tout le revirement du commerce montoit dans la première période à terme moyen par année à 114,541,817, et dans la seconde à 279,284,966 r. et surpassoit donc celui de la première période de 164,743,149, c'est-à-dire qu'il avoit plus que doublé, sans le commerce de transit, dont nous parlerons séparément dans la suite.

Nous n'entrerons point dans la recherche intéressante des causes, qui ont opéré un si heureux changement, puisqu'elle surpasseroit les bornes de ce Mémoire et entraineroit des discussions sur des objets qu'on peut envisager différemment; je me borne à remarquer, que le système continental prédominoit en Europe dans la première période, que la dernière période si brillante pour le Commerce russe commence en 1812, quand l'ennemi avoit passé les frontières de l'Empire, et que depuis cette année mémorable les progrés du Commerce russe rivalisoient avec les progrès des armes victorieuses de la Russie.

Les grandes routes de ce commerce par mer et par terre, les *principales marchandises* importées et exportées, enfin le *commerce de St. Pétersbourg* en particulier, méritent l'attention du statisticien politique.

I. *Commerce par Mer.*

Années	sur la mer Baltique		sur la mer blanche		sur la mer noire et d'Asow		sur la mer Caspienne	
	St. Pétersbourg et Cronstadt Riga, Pernau, Narwa, Arensbourg, Wibourg, Libau, Friedrichsham, Windau, Reval, Hapsal.		Archangel, Onega.		Odesse, Nikolaew Ovidiopol, Eupatoria. Sewastopol, Kertsch, Feodosia, Taganrok, Mariopol, Jenicale.		Astrachan.	
	importation	exportation	Importat	Exportat	Importat.	Exportat.	Importat.	Export.
	R o u b l e s							
1802	32,983,418	46,917,134	549,732	4,796,017	2,054,789	2,983,096	666,044	89,984
1803	30,125,676	49,430,718	504,506	4,802,638	2,960,886	4,924,050	802,192	150,138
1804	27,107,653	45,152,030	388,669	2,221,490	4,216,34[illegible]	4,915,357	757,241	96,485
1805	28,930,001	52,115,188	389,872	3,754,091	5,365,059	7,403,372	857,201	126,564
1806	27,191,468	49,143,759	287,2[illegible]6	4,095,661	4,730,138	3,628,323	544,760	91,443
1807	27,394,978	43,027,294	587,424	3,287,034	584,977	397,694	1,077,610	185,599
total	173,733,194	285,786,113	2,707,429	22,956,931	19,956,93	14,254,892	4,705,048	740,213

Il résulte de ce tableau:

1. que l'importation sur la mer Baltique et sur la mer blanche étoit dans cette période très inférieure à l'exportation, que le commerce étoit plus égal sur la mer noire, mais que l'importation surpassoit de beaucoup l'exportation sur la mer Caspienne.

2. que l'importation a diminuée sur la mer Baltique pendant cette période, mais que l'exportation s'est mieux soutenue. Le premier phénomène étoit l'effet du système continental, le second provenoit du besoin que les étrangers avoient des productions russes.

3. que le Commerce sur la mer blanche est surtout commerce d'exportation, qui s'est assez bien soutenue malgré tous les obstacles,

4, que le commerce sur la mer noire est le commerce le plus égal entre les nations commerçantes. Le surplus qui se trouve pourtant à l'exportation provient surtout du commerce d'Odesse en bled,

5, que le commerce sur la mer caspienne est le plus désavantageux à la Russie, l'importation étant sept à huit fois plus grande que l'exportation.

6, que l'importation générale par mer montoit pendant cette période à terme moyen à 33,506,643 r. et l'exportation à 55,623,024. La balance étoit donc en faveur de la Russie, car il y avoit 22,116,381 r. plus d'importé qu'exporté. Assurément qu'on doit compter la contrebande pour quelque chose, pourtant la balance étoit toujours favorable pour cet Empire.

7, que le revirement général montoit à 89,129,667 à tetme moyen par année.

Le second tableau sur le commerce de mer contient les données suivantes.

années	sur la mer Baltique		sur la mer blanche		sur la mer noire et d'asow		sur la mer caspienne	
	importation	Exportation	Importation	Exportat.	Importation	Exportation	Importat.	Exportat.
	R		o	u	b	l	e	s
1812	47,542,819	82,933 106	8,713,083	10,609,158	3,019,905	10,767,677	1,059,138	309,689
1813	89,937,446	76,474,118	5,549,598	7,723,398	6,364,631	15,480 616	2,337,734	1,918,824
1814	80,072,063	129,517,007	1,140,864	8,845,528	9 600,063	15,396,537	2,062,288	1,769,625
1815	80,135,941	41,682,571	2,499,332	15,854,110	7,714,971	22,020,421	2,263,644	2,032,182
total	297,688,269	430 606,8[illegible]9	17,902 877	43,032,191	26,699,573	63,665,251	8,56[illegible],904	6,030,320

Le même phénoméne se reproduit dans cette période d'un commerce florissant, l'exportation est partout de beaucoup supérieure à l'importation, excepté sur la mer caspienne.

L'importation sur la mer Baltique en 1813 est unique dans son genre, elle surpasse de 42 millions celle de l'année 1812, elle surpasse même l'exportation de 13 millions. Quand les victoires des armes russes avoient donné un resultat décisif, quand le systême continental étoit tombé, l'Angleterre surtout combloit les ports de la Russie de marchandises coloniales et de ses Manufactures, autant que le Tarif existant alors le permettoit. Ni la France ni l'Espagne pouvoient encore prendre une part active à cette importation énorme en Russie, les villes anséatiques étoient en parie ruinées, donc c'est surtout de l'Angleterre que doit venir cette masse énorme de marchandises importées. Ce moment passé, l'importation sur la mer Baltique tomba de quelque chose, mais elle resta toujours de 33 millions supérieure à l'année 1812 et de 53 millions aux dernières années de la période précédente. Sur la mer blanche l'importation pendant la dernière période monta d'un demi million et moins, subitement a plus de 8 millions, c'étoit un cas extraordinaire qui est fondé sur les événemens militaires de cette année. Quand la Russie avoit pris une assiette plus tranquille, la grande importation reprit son cours ordinaire par St. Pétersbourg, elle diminua nécessairement à Archangel, mais elle resta toujours de deux tiers supérieure à ce qu'elle avoit eté dans la période précédente. Sur la mer noire et sur celle d'Asow le commerce augmenta mais pas si rapidement comme sur la mer baltique, puisque le commerce sur cette mer avoit joujours essuyé moins d'entraves pendant la période du systême continental. Enfin le commerce sur la mer Caspienne a conservé son caractère, c'est-à-dire, que l'importation surpasse l'exportation, pourtant il s'y trouve infiniment plus d'égalité qu'autrefois, où pendant six années on importa pour 4 millions et demi, et n'exporta que pour 700,000 r. car dans ces dernières années on a importé pour 8 millions et demi, mais on a aussi exporté pour 6 millions, exportation inouie par cette route, et qui paroit augmenter annuellement.

L'exportation présente sur toutes les routes les resultats les plus satisfaisans. Elle surpasse (en ne comptant que par millions) l'importation

sur la mer Baltique de	—	133 millions
sur la mer blanche de	—	26 —
sur la mer noire et d'Asow de		37 —
	total	196 millions

que les étrangers ont payés à la Russie en quatre années de victoires, pas dans le genre de recette extraordinaire du tems de la revolution françoise, mais par un Commerce libre et regulier. Elle surpasse l'exportation dans la période du systême continental de 145 millions sur la mer Baltique, de 21 — sur la mer blanche, de 39 — sur la mer noire et d'Asow, total 205 millions exportés en quatre ans, plusqu'auparavant en 7 années d'un commerce languissant. Nous avons déjà fait mention combien l'exportation sur la mer Caspienne a gagnée, nommement 5,390,107 roubles.

Le total de l'importation par mer pendant ces quatre années monte à 350,853,623 r. ou terme moyen par année à 87,723,405, plus 54,216,762 que pendant la premiere période; elle a donc plus que doublée.

Le total de l'exportation étoit de 543,344,567 r., par année 135,836,141, ou 80,213,177 r. plus que pendant les six années précédentes. Les progrés du commerce sont naturellement plus grands à l'exportation qu'à l'importation, puisque la première est toujours plus favorisée.

Le revirement général étoit année commune de 223,559,546 r. il etoit donc plus grand de 134,429,879 r. que pendant la période où le bras de fer du despotisme tenoit l'Europe enchainée.

II. *Commerce par terre, premier tableau.*

Années	avec la Suède, par les Gouvernemens de la Finlande et Olonetz, et nommément par Serdopol, Nychlot, Wilmanstrand et Jouschkoser		avec la Prusse, l'Allemagne et l'Autriche, par les G. de Vilna, Grodno, par la Volhynie et la podolie Polangnen, Jourbourg, Kowno, Grodno, Brett, Radsiwilow		avec la Moldavie la Walachie et la Bessarabie, par les G. de Podolie et de Cherson Mohilew et par Parkansk et Dubossar.	
	Importation	Exportation	Importation	Exportation	Importation	Exportation
	R	o	u	b	l e	s
1802	99,068	110,391	11,572,345	4 487,995	2,471,867	779,004
1803	53,656	68.423	11,018,314	4,784,639	3,087 655	473,056
1804	64,016	43.606	8,459 563	3,426.157	2,268,863	415,838
1805	83,881	57,302	8,122,163	4.924,251	2,687,708	481,119
1806	82.249	62,421	10,260,180	2,584,227	1,616,202	434,176
1807	72,196	58,295	3,186,052	2,756,710	779,222	449,423
total	455,066	400,438	51,618,617	22,963,979	12,911,517	3,032,676

Année	avec la Perse et les peuples montagnards, par les G. d'Astrachan et la Caucasie, Kislar, Proteschnookopsk, Oustlabinsk et Mosdok		avec Chiwa, la Bucharie et les Kirgises, par les G. d'Orenbourg, Tomsk et Tobolsk, Orenbourg, Omsk. Troisk Petropawlowsk, Presnogarkowsk, Semipalatirsk, Kaminegorsk et Buchturma		avec la Chine, par le G. d'Irkoutzk, Kiachta et Zourouchantouewsk.	
	Importation	Exportation	Importation	Exportation	Importation	Exportation
	R	o	u	b	l e	s
1802	201,268	5,348	2,440,256	1 079.410	4,491,307	2,016,320
1803	192,177	16,881	2,993,664	793,298	3,819,129	1,704.802
1804	138,982	6,826	[illegible],345,144	784,020	4,753,635	1,955,[illegible]50
1805	180,483	9,934	3,169,936	1,180,980	5,742,814	2,377,384
1806	281,542	15,506	2,671,009	1,104,127	3,976,692	1,489,913
1807	184,021	4,615	1 099,156	881,772	5,438,096	2,513,465
total	1,178,472	72,110	13,719,165	5,823,607	28,221,603	12,057,634

Le principal commerce de la Russsie par terre est celui avec la Prusse, l'Allemagne et l'Autriche depuis Polangen jusqu'à Radziwilow, et avec la Chine par Kiachta; le second rang tient le commerce avec Chiwa et la Bucharie, avec la Moldavie, la Walachie et la Bessarabie; le commerce le moins considérable est celui avec la Perse et avec la Suède.

Et sur toutes ces différentes routes de commerce la Russie perdoit énormement pendant cette triste période; car le terme moyen de l'importation connue montoit à 18,017,408 r. tandis que l'exportation n'étoit à terme moyen que de 7,391,741 r. Et comme les frontières par terre sont beaucoup plus difficiles à garder contre les contrebandiers que les ports de mer, surtout sur une étendue si énorme que celle depuis la Finlande jusqu'à la Chine, on peut être bien sûr, que l'importation surpassoit l'exportation au moins de deux tiers.

Les plus grandes *variations* du commerce se présentent à l'importation dans le commerce avec la Prusse, l'Allemagne et l'Autriche, car de 10 à 11 millions il tomboit tout d'un coup à 3, les circonstances politiques en étoient la cause, le commerce avec la Chine, quoique toujours défavorable à la Russie, s'est mieux soutenu.

Mais nous allons jetter un coup d'oeil sur le second tableau pour le comparer au premier, afin d'en tirer les derniers résultats, Il est composé d'après une autre forme et contient moins de détails que le premier, mais on peut facilement s'orienter.

Années	par les frontières d'Europe de Polangen jusqu'à Dubossar		avec la Perse		par les frontières asiatiques depuis la mer Caspienne jusqu'a la Chine		avec la Chine	
	Importation	Exportation	Importati.	Expor	Importation	Exportation	Importation	Exportati.
	R	o	u		b	l	e	s
1812	8,014,229	28,928,981	1,002,728	71,753	4,829,537	3,291,486	2,936,167	1,397,676
1813	7,485,145	23,471,019	1,390,114	104,315	2,979,221	3,016,909	5,464,673	4,238,477
1814	9,229,887	31,350,484	1,185,864	100,524	5,229,377	3,808,269	3,934,077	3,268,654
1815	7,683,089	27,749,124	864,888	93,927	6,966,326	4,214,860	5,802,258	5,002,116
total	9,412,350	111,499,608	4,443,594	370,522	20,004,461	14,331,524	18,137,175	14,906,923

Le *total de l'importation* montoit à 71,997,580 r. l'*exportation* à 141,108,577 r. donc il y avoit un surplus de 69,110,997 r. phénomène qu'on n'avoit pas vu depuis longtems, mais tels sont les effets heureux de la valeur et de la liberté.

L'importation étoit donc à terme moyen de 17,999,395 r. par an, l'exportation de 35,252,244 c'est à dire du double. L'importation est restée à peu près la même comme dans la première période, mais c'est *l'exportation* qui a augmenté d'une manière étonnante.

Elle n'à pas augmenté sur toutes les routes du commerce par terre, ce n'est que sur la route par les frontières d'Europe qu'on trouve ce surplus énorme, partout ailleurs l'importation surpasse l'exportation, pourtant l'exportation par les frontières asiatiques et par Kiachta a infiniment gagnée, d'où il s'ensuit qu'à cet égard les deux tableaux portent le même caractère, savoir: la Russie perd jusqu'aprésent dans son commerce par les frontières asiatiques et avec la Perse et la Chine; mais elle gagne par celui qu'elle fait par ses frontières d'Europe.

En comparant le commerce par mer et le commerce par terre de la Russie, nous trouvons les données suivantes:

Commerce par mer.

depuis 1802 — 1807 à terme moyen par année		depuis 1812 — 1815 à terme moyen par année	
Importation	Exportation	Importation	Exportation
R o u b l e s			
33,506,643	55,623,024	37,713,405	135,836,141

Commerce par terre.

18,017,408	7,391,741	17,999,395	35,252,244

L'exportation a toujours été favorable à la Russie dans son commerce par mer, elle ne l'étoit pas dans la période précédente pour le commerce par terre.

Dans la première période le commerce par terre étoit à celui par mer comme 1 à 3 et environ $\frac{3}{4}$; dans la dernière comme 1 à 4 et quelque chose de plus.

Le commerce par mer est non seulement le plus considérable de la Russie, mais il est aussi le plus lucratif; dans toutes les périodes elle y a gagnée plus ou moins. Le commerce par terre est seulement favorable à la Russie par les routes, qui ménent par ses frontières européennes, mais dans l'état actuel des choses tout autre commerce par terre lui est indispensable à la vérité, mais toujours plus ou moins défavorable.

Les principales marchandises qui occupent ce commerce sont environ 24 *articles d'exportation*, parmis lesquels le lin et le chanvre avec leurs semailles et leur huile, le bled, le suif et le bois sont les principales en premières matières; le fer, les toiles, les cuirs, la potasse, le goudron, la cire, le savon, les cordages et les pelleteries étoient les objets les plus considérables pour le commerce en produits de manufactures et fabriques.

Il y a plus de 32 *articles d'importation* parmis lesquels les provisions de bouche, surtout le sucre, le café et le vin, les premières matières pour les manufactures et les produits des manufactures étrangères sont les plus remarquables.

Dans les tableaux russes sur le commerce on divise toutes ces marchandises ordinairement en provisions de bouche, en métaux, en premières matières pour les manufactures, en produits des manufactures, en bestiaux, en diamans, et tout le reste est compris sous le titre général de différentes marchandises. Dans ces derniers tems on a encore distingué les drogues dont on se sert pour la médecine, ils étoient autrefois comprises sous le titre de premières matières. Pour ne pas entrer en trop de détails, nous nous bornerons aux termes moyens pour la première période.

Marchandises	Importation	Exportation	Transit
provisions de bouche	16 251,875	12,856,473	175,784
Métaux et demi-métaux	9,658,197	3,582,775	2,023,522
premières matières pour les manufactures	10,449,066	37,678,487	733,237
Manufactures	13,444 243	7,198,491	3,101,602
bestiaux	790 715	1,175,727	———
Diamans et perles fines	138,691 680,944	——— ———	——— 25,021
diverses marhandises	223,286	522,812.	24,963
total du terme moyen	51,527,021 r.	63,014,765 r.	6,170,129 r.

L'importation des *provisions de bouche* varioit de 14 millions et demi à 17 et demi, l'exportation de 5 millions en 1807 a 21,900,000 en 1805, elle étoit très variable, tandis que l'importation tournoit toujours autour de 16 millions.

L'importation en *mètaux et demì-mètaux* tomboit de 11 millions 800,000 r. en 1803, à 7 millions en 1804, l'exportation varioit beaucoup. Elle étoit en 1802 et 1803 de 4 millions et demi, en 1804 à 1 million 900,000, et puis elle remonta à 3 millions et demi, le transit de ces marchandises est très considérable.

Les *premières matières pour les manufactures* furent importées en 1804 et en 1807 pour 8 millions, en 1805 et en 1806 pour 12 millions, en 1802 et en 1803 pour 10 millions. Mais leur exportation est une des principales sources de la richesse de la Russie; les meilleures années étoient celles de 1803 et de 1804, où l'on exportoit de 39 à 40 millions de lin et de chanvre, de suif etc. Il n'y a pas eu d'année absolument mauvaise.

Mais quant aux *manufactures*, l'importation faisoit presque le double de l'exportation. En 1802 l'importation des manufactures étrangères passoit 17 millions et demi, elle tomba en 1807 à 8 millions et demi. Notre exportation s'est mieux soutenue, car de 7,800,000 r. qu'elle étoit en 1802, elle n'a baissé en 1807 qu'à 6,800,000. Le transit de cet article est très considérable.

Le commerce en *bestiaux* est en faveur de la Russie. La plus forte importation pendant les annees 1803 et 1806 étoit de 8 à 900,000 r. la moindre en 1802 de 700,000, mais notre exportation passoit souvent 1 million et demi.

L'importation en *diamans* a été peu considérable, elle a variée de 200 r. en 1807 a 61,260 r. en 1806, celle des perles fines étoit plus considérable, car en 1804 et en 1805 elle montoit presque à un million. Il n'y a pas eu d'exportation de ces articles, mais bien du transit pour les perles fines.

Le titre de *différentes marchandises* n'étoit pas important.

Voici le tableau sur la seconde période.

Marchandises	1812 Importation	1812 Exportation	1813 Importation	1813 Exportation
	R o	u	b l	e s
Provisions de bouche	35,075,5[illegible]1	36,937,576	62,501,105	34,140,817
Drogues pour les Apothicaireries,	1,965,854	483,364	1,839,216	575,281
Métaux et demi-métaux	3,304,[illegible]88	6,080,773	3,[illegible]26,685	5,418,871
Premières matières pour les manufactures	17,[illegible]90,073	52,528,233	28,324,426	42,620,873
Manufactures	5,684,136	7,6[illegible],668	7,817,823	5,224,390
Bestiaux	1,0[illegible]4,778	184,510	564,676	150,391
Diamans et perles fines	1,900	———	203,495	39,100
Diverses marchandises	12,[illegible]9,320	35,435,[illegible]88	16,731,[illegible]39	44,457,956
Total	76,365,560	139,255,712	12[illegible],5[illegible]8,565	132,427,079

Marchandises	1814 Importation	1814 Exportation	1815 Importation	1815 Exportation
	R o	u	b l	e s
Provisions de bouche	54,01[illegible],940	33,144,005	59,489,762	33,155,249
Drogues pour les Apothicaireries,	2,144,835	459,147	1,130,730	680,662
Métaux et demi-métaux	[illegible],969,4[illegible]0	[illegible],4[illegible]9,927	3,34[illegible],669	12,795,538
Premières matières pour les manufactures	22,979,520	53,717,079	22,703,[illegible]2	58,353,[illegible]40
Manufactures	[illegible]0,48[illegible],370	11,316,963	7,545,312	16,252,141
Bestiaux	354,643	5,546,610	619,425	6[illegible]6[illegible]7,487
Diamans et perles fines	108,800	5,000	62,950	———
Diverses marchandises	20,404,368	78,428,700	8,97[illegible],486	9[illegible]6[illegible]5,138
Total	113,354,863	194,056,631	113,870,456	2[illegible]9,449,455

Ce tableau contient tant de phénomènes extraordinaires, que ce seroit faire tort à l'intérêt qu'il peut inspirer, si l'on vouloit en extraire les termes moyens comme cela étoit possible dans la première période.

Parmis les *provisions de bouche* que les étrangers nous *importent* le sucre, le café et le vin tiennent le premier rang, parmis celles que nous exportons, les bleds. A peine les barières, dont le systême continental entouroit l'Europe, étoient elles tombées, que l'importation monta de 16 millions à 35 en 1812, doubla presque encore une fois en 1813, baissa un peu, mais se releva bientôt, et s'approcha en 1815 de nouveau de 60 millions. Et la Russie seule a presque consommé toutes ces marchandises, car ce qui en est sorti est bien peu de chose, ce n'étoit que la première année que le Transit approcha de 2 millions, déjà l'année suivante nos voisins étoient si bien pourvu, que, d'une masse énorme de la valeur de 62 millions et demi, il n'en est sorti que pour 125,801 r. Notre *exportation* qui étoit de 12 millions, année commune, monta tout d'un coup presque à 37 millions, et se soutenoit assez également de 34 à 33 millions. Les étrangers ont un avantage décidé à cet article, et il paroit que nos besoins étoient grands, de même que pour les drogues médicinales, qui entrent ordinairement pour la valeur de 2 millions, et nous en exportons environ pour un demi million.

Parmis les *métaux* que nous exportons, c'est surtout notre fer qui doit nous donner l'avantage dans la balance du commerce. Cette branche de commerce étoit tombée dans la période passée jusqu'à 3 millions et demi, et l'étranger nous importoit deux fois autant en plomb et en demi-métaux. Le fer nous a reconquis notre commerce en fer, nous avons commencé par exporter pour 6 millions en 1812, et nous avons fini par en exporter 12 et demi en 1815. Ce resultat est pour nous d'autant plus satisfaisant, que l'importation étrangère a considérablement baissé, elle est tombée de 9 millions et demi à 3 et demi, et presque 2 en 1814.

Nos *premières matières pour les manufactures* avoient toujours un avantage décidé même dans la période où le commerce languissoit, nous exportions toujours trois fois plus, et nous avons conservé notre prépondérance dans cette dernière période d'un commerce florissant. De 37 millions et demi, que nous exportions de cet article, l'exportation est montée presque à 58 et demi. Mais aussi l'importation étrangère a considérablement augmentée, vû les besoins croissans de nos manufactures nouvellement établies, elle s'est élevée de 10 millions et demi jusqu'à 22 et demi, et même jusqu'au delà de 28 millions en 1813.

Preuve certaine de l'activé de nos *manufactures*, c'est que de 7 millions que nous en exportions, nous sommes parvenus à en exporter pour plus que 16, en contre l'importation étrangère a beaucoup diminuée, de 13 millions et demi elle est tombée à 11, à 10 et même à 5 millions.

Le commerce en *bestiaux* est devenu un article si intéressant dans cette période, que d'un million nous sommes parvenus à vendre en 1815 pour 6 millions et demi.

Mais l'article le plus remarquable est cet amalgame de toutes les marchandises, qui ne sont pas comprises sous les titres précédens, j'entends les *diverses marchandises*. Il n'existoit plus pour ainsi dire, et notre exportation vient de s'élever à la somme étonnante de 91 millions et demi, la rapidité avec laquelle nous avons obtenu ce resultat, est incroyable; cet article remonte presque de zero, où il étoit, à 35 millions, augmente jusqu'à 44, parvient à 78, et arrive enfin à 91, de manière qu'il a même surpassé de beaucoup l'article le plus brillant de notre exportation, celui de premiéres matières pour les manufactures. L'importation a aussi fait des progrès, elle est parvenue à

20 millions, mais elle est bien loin de la somme, pour laquelle nous en avons exporté.

Le *dernier resultat* de ce tableau intéressant, est que nous avons l'avantage sur l'étranger sous tous les rapports, excepté à l'article des provisions de bouche, et peut-être que les tableaux sur les années de 1816 et 1817 nous donnerons encore l'avantage à cet égard, vû l'énorme quantité de bled que nous venons d'exporter.

Il nous reste à parler *du Transit* que nous marquerons pour la première période par terme moyen, mais pour la seconde par année, à cause des changemens considérables que ce genre de commerce vient d'essuyer.

Marchandises	terme moyen de 1802 — 1807	1812	1813	1814	1815
	Roubles				
Provisions de bouche	de 175,784	1,906,441	123,801	964,963	82,750
Pour la médecine	———	8,594	———	936	———
Métaux et demi méraux	2,023,522	———	———	———	———
Premières matières pour les manufact.	733,237	957,444	———	253,159	13,320
Manufactures	3,191,602	437,717	869,667	327, 70	654,773
Bestiaux	———	———	———	———	———
Diamans et perles fines	25,021	———	———	———	———
Diverses marchan.	24,963	382,560	383,899	613 660	694 806
total	6,170,129	3,692,756	1,379,360	2,160,188	1,445,654

Le commerce de transit en général a beaucoup baissé. Ce n'est pas à l'article des provisions de bouche et au titre des diverses marchandises que ce déficit se manifeste, au contraire le transit a gagné sur ces marchandises, mais c'est le commerce en métaux et démi-métaux qui a entièrement cessé, et nous devons nous en féliciter, puis qu'il paroît que nous pourvoyons nos voisins en Asie des produits de nos propres fabriques: de même l'article des manufactures étrangères a beaucoup perdu en partie, puisque nos manufactures pouvoient plus fournir, mais surtout puisque le commerce de transit des draps de Prusse étoit interrompu, et comme cette branche de commerce vient d'être relevée, il y a lieu de cróire, que cet article déviendra plus important dans la suite.

La ville de *St. Pétersbourg* comme premier entrepôt du commerce étranger de la Russie, merite une attention particulière. Nous allons considérer le *total de son commerce* dans les deux périodes.

années	importation	exportation	années	importation	exportation
	Roubles			Roubles	
1802	24,735,483	30,456,802	1812	39,210,883	58,906,537
1803	22,823,617	31,703,765	1813	75,799,838	53,634,495
1804	21,0[illegible]5,007	29,269,244	1814	64,440,375	91,795,342
1805	20,489,067	29,83[illegible],416	1815	65,573,193	107,355,470
1806	18,776,[illegible]93	28,739,540	total	245,024,289	311,091,844
1807	18,202,536	28,631,[illegible]26	terme moyen	61,256,072	77,922,961
total	126,091,903	178,632,593			
termè moyen	21,051,317	29,772,099			

Il en resulte, que l'importation de St. Pétersbourg a presque triplée dans la dernière période, et que l'exportation a plus que doublée, c'est à dire qu'elle se rapporte comme 1 à $2\frac{2}{3}$ environ. Le total du commerce de la Russie par terre et par mer ayant été dans la *premiére* période à terme moyen: *importation* pour 51,527,051 r. St Pétersbourg en a eu un tiers et environ $\frac{1}{13}$, l' *exportation* ayant été de 63,014,766 r. St. Pétersbourg en a fait un tiers et $\frac{1}{8}$ environ.

Dans la *dernière* période St, Pétersbourg a eu presque la moitié et $\frac{1}{4}$ de *l'importation* et un tiers et environ $\frac{1}{8}$ de *l'exportation.*

St. Pétersbourg a donc ordinairement plus d'un tiers du Commerce étranger de la Russie, et cette proportion s'est assez bien soutenue dans les deux périodes.

Les principales mar-

Marchandises	à terme moyen pour les années 1802 — 1807		en 1812	
	Importat.	Exportation	Importation	Exportation
	R	o	u -	
Provisions de bouche	7,601,576	709,726	10,461,708	4,243,648
Pour la médécine	——	——	——	——
Métaux et demi-métaux	1,704,003	2,627,588	1,914,110	2,541,677
premières matières pour les manufactures	5,618,769	21,517,032	18.437,317	45,517,321
Manufactures	5,942,162	4,858,545	8,376,553	6,625,654
bestiaux	57,329	337	——	35
Diamans et perles fines	2,946 18,644	—— ——	1,900 ——	—— ——
Diverses marchandises	69,947	58,872	19,295	8,202

chandises étoient.

1813		1814		1815	
Importation	Exportation	Importation	Exportation	Importation	Exportation
	b	l	e	s	
38,303,120	4,850,332	33,483,278	4,968,587	33,721,136	3,401,856
1,452,852	152,093	1,604,178	219,391	741,820	399,587
2,281,757	676,193	778,433	2,844,059	2.665,602	5,785,633
21,161,587	25,106,110	12,995,828	29,149,649	15,026,996	34,820,752
2,510,138	2,451,306	1,819,300	9.064,088	848,700	11,371,425
1,270	—	48,500	—	700	210
3,650	— —	— —	— —	— —	— —
10,085,064	20,397,481	13,710,858	45,549,568	12,568,209	51,576,007

En comparant l'importation et l'exportation de St. Pétersbourg, pendant la dernière période avec celle du commerce de la Russie en général, nous trouvons que le commerce de St. Pétersbourg, quant à l'importation, roule surtout sur les provisions de bouche, par lesquelles on doit entendre sur tout le sucre, le café et les vins, et puis sur les manufactures et diverses marchandises étrangères. Les principaux articles d'exportation sont les premières matières pour les manufactures, de même que les manufactures et diverses marchandises russes. L'année 1812 étoit encore une année de stagnation pour la plupart des articles de son commerce, à l'exception du lin et du chanvre, mais pendant les années suivantes, le commerce de St. Pétersbourg a repris son cours ordinaire.

Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences Tome VI. Tab. 1.

Fig. 1.

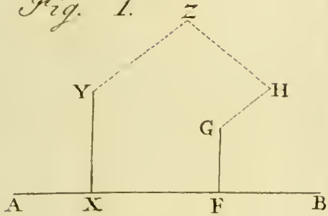


Fig. 2.

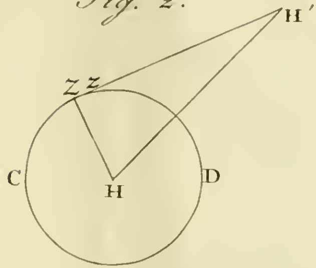


Fig. 3.

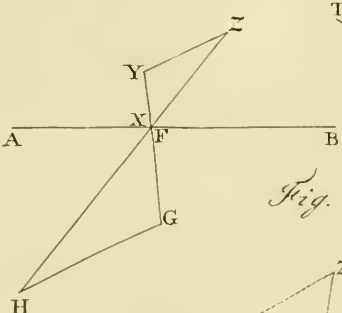


Fig. 4.

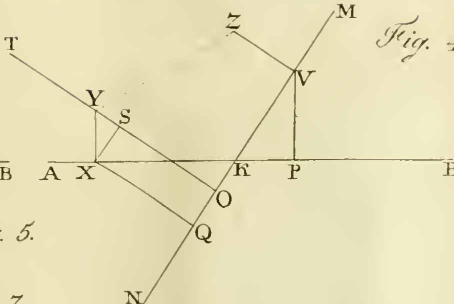
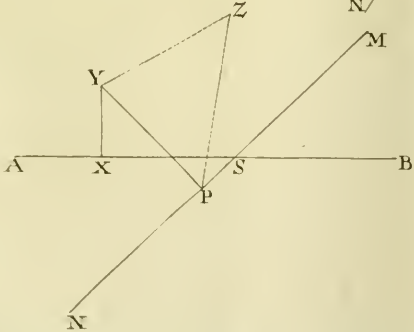
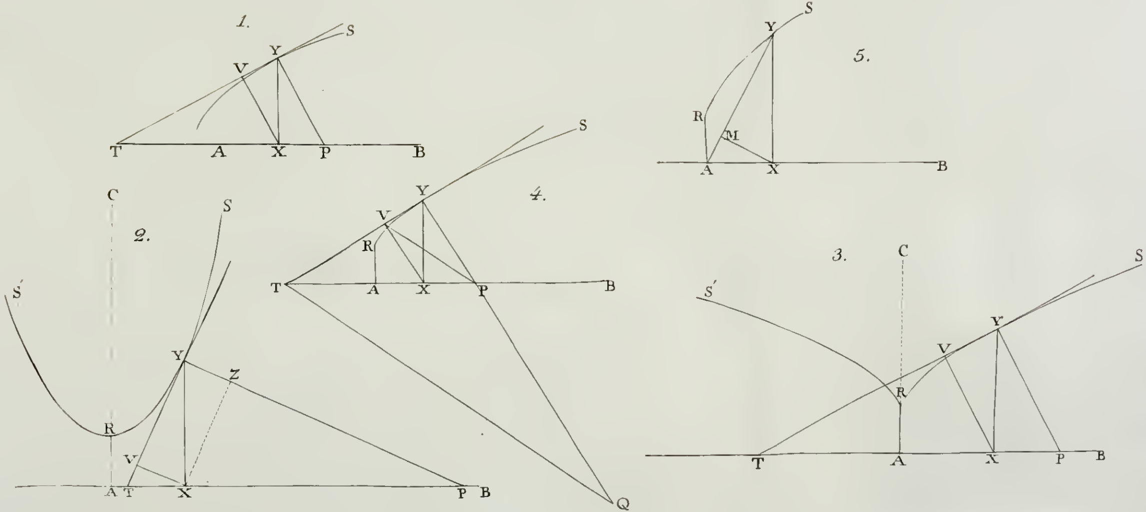


Fig. 5.




1.
S
Y
V
T
A
X
P
B
2.
C
S
S'
Y
Z
R
V
A
T
X
P
B
4.
S
Y
V
R
T
A
X
P
B
Q
5.
S
Y
R
M
A
X
B
3.
C
S
S'
Y
V
R
T
A
X
P
B

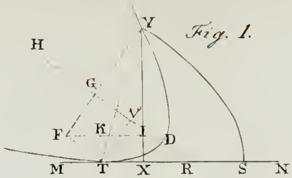


Fig. 1.

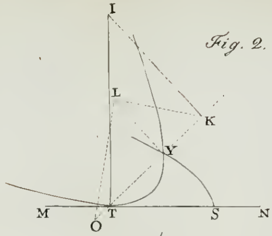


Fig. 2.

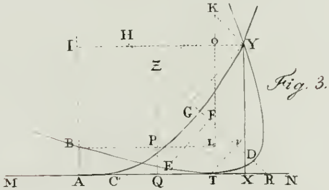


Fig. 3.

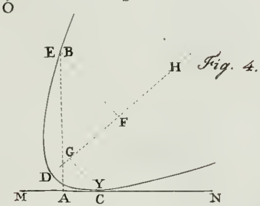


Fig. 4.

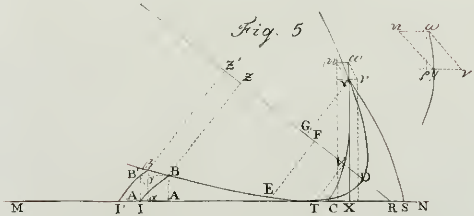


Fig. 5

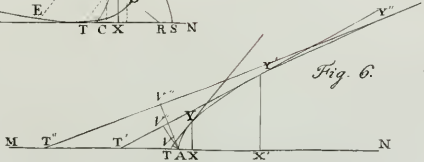


Fig. 6.

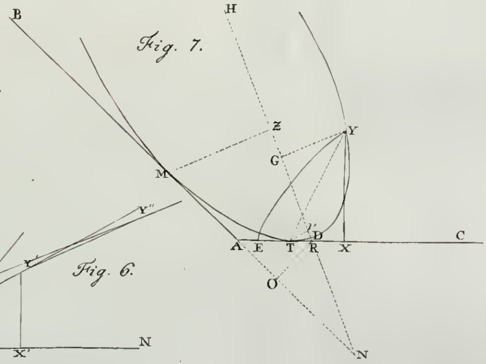


Fig. 7.

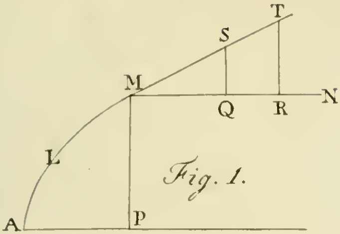


Fig. 1.

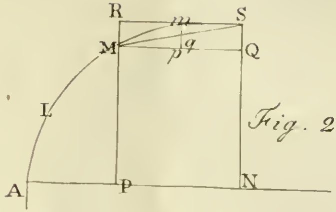


Fig. 2.

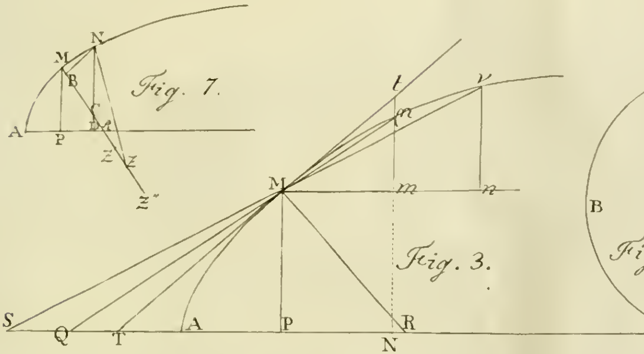


Fig. 7.

Fig. 3.

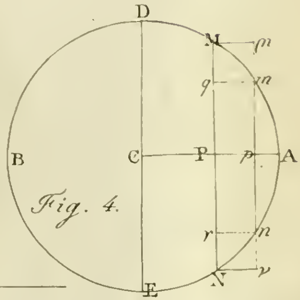


Fig. 4.

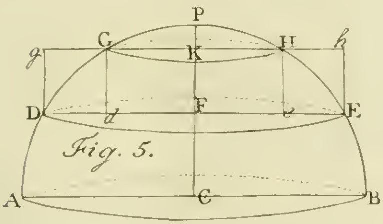


Fig. 5.

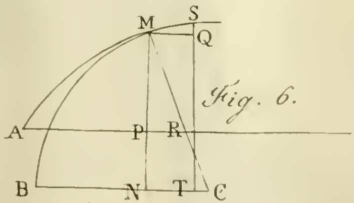


Fig. 6.

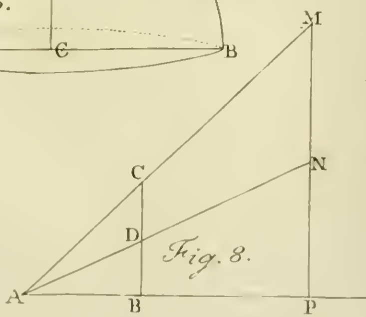
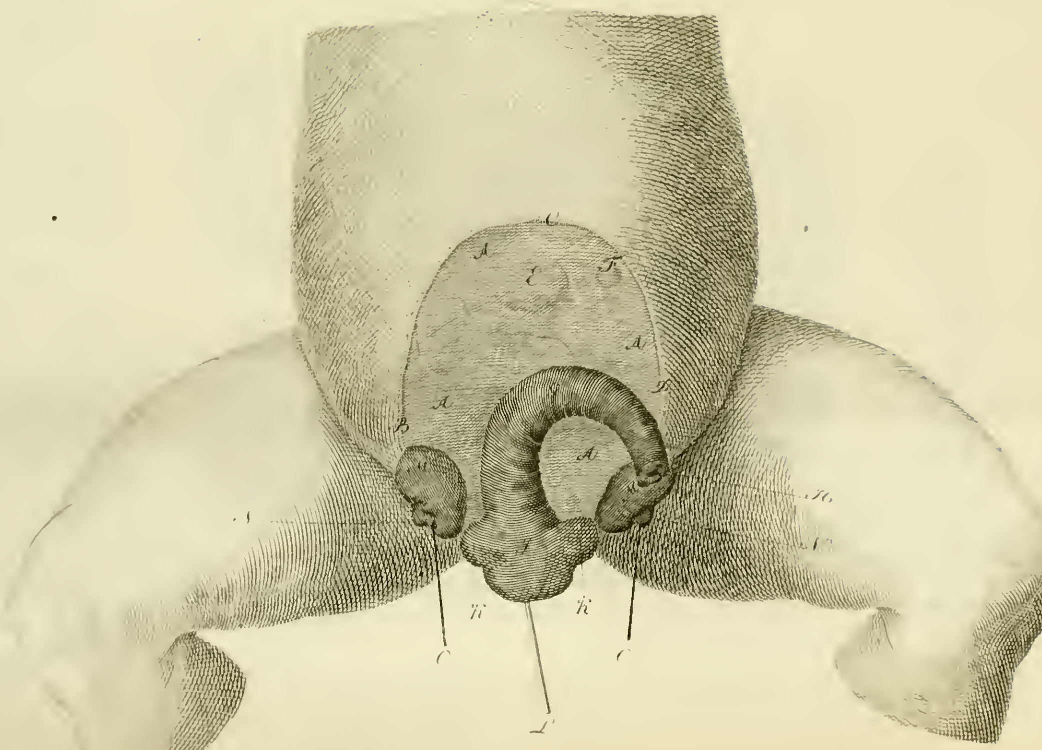
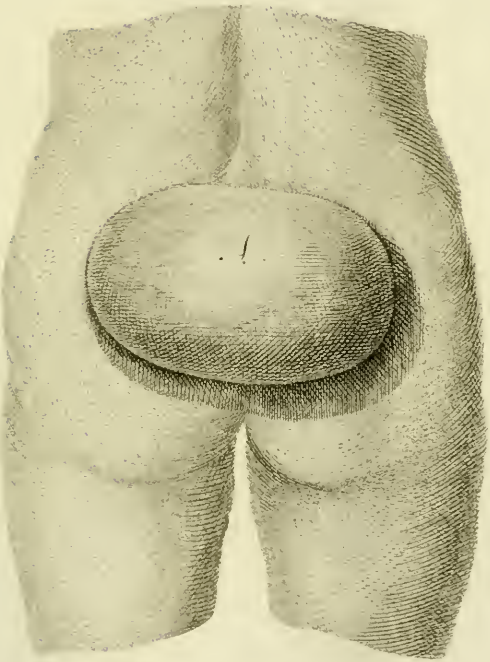


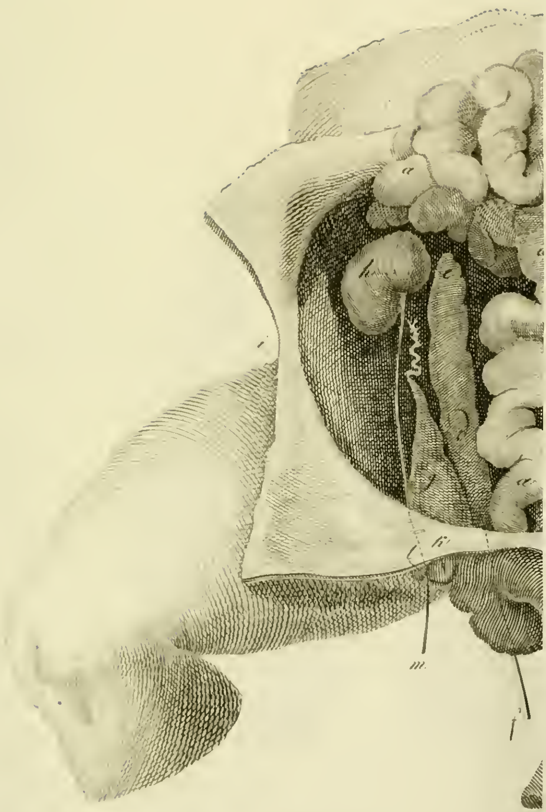
Fig. 8.


C
A
E
F
A
D
A
B
A
H
C
C
K
K
L

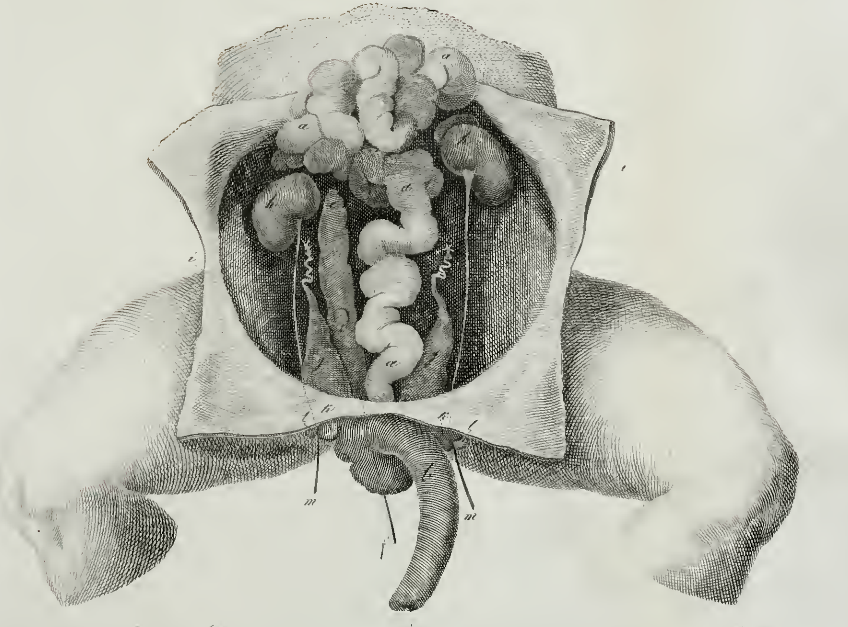
Умозрит. Изслѣд. Томъ V. Листъ 10.
Mémoires de l'Academie T VI Tab. 6.



D. L. Bojanus F. Geiger sc.

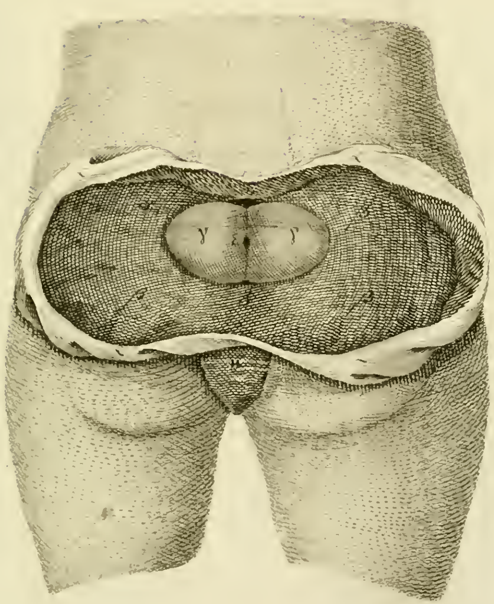


Del. Dr L. Bojanus ad ips. corpus effinxit



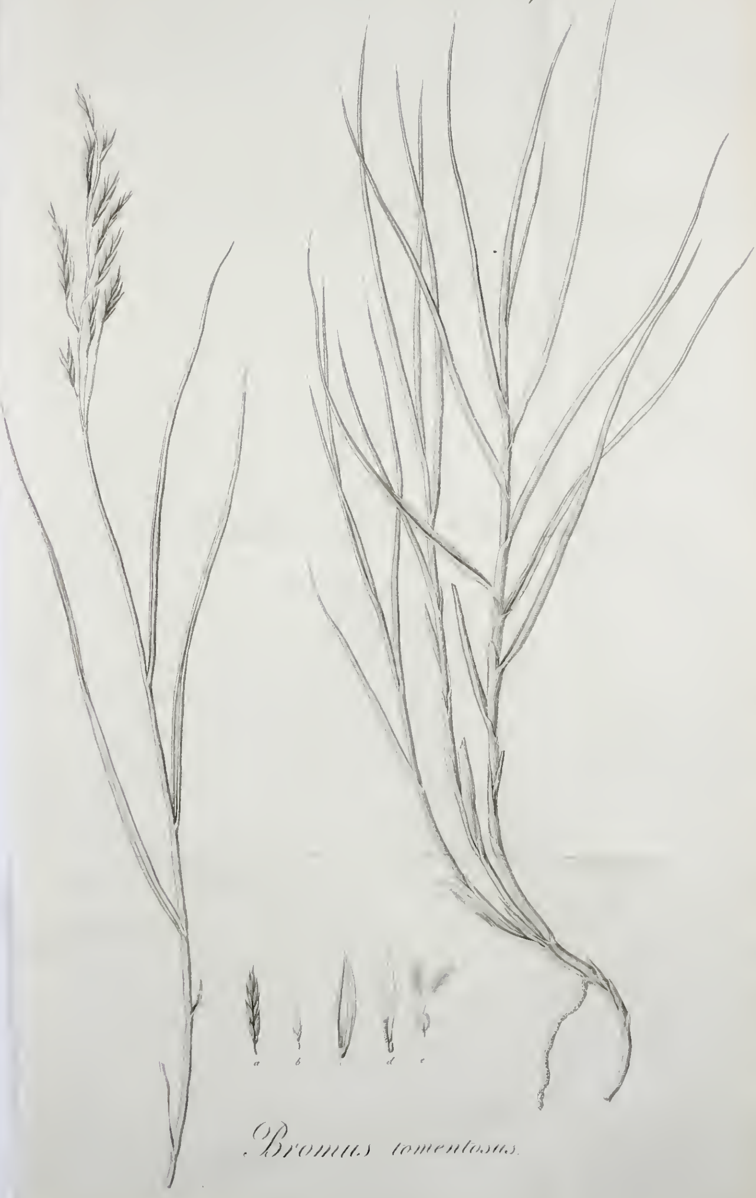
Del. Dr. L. Bojanus ad ips. corpus efforme.

F. Neu sc.



Bojanus del [illegible]

Br



Bromus tomentosus.


a
b
c
d
e
1
2

Aristida pennata

: des Sc: Tome VI. Tab XI

Cr

Crucianella stylosa

Mém: des

a *b* *c* *d*

Crucia

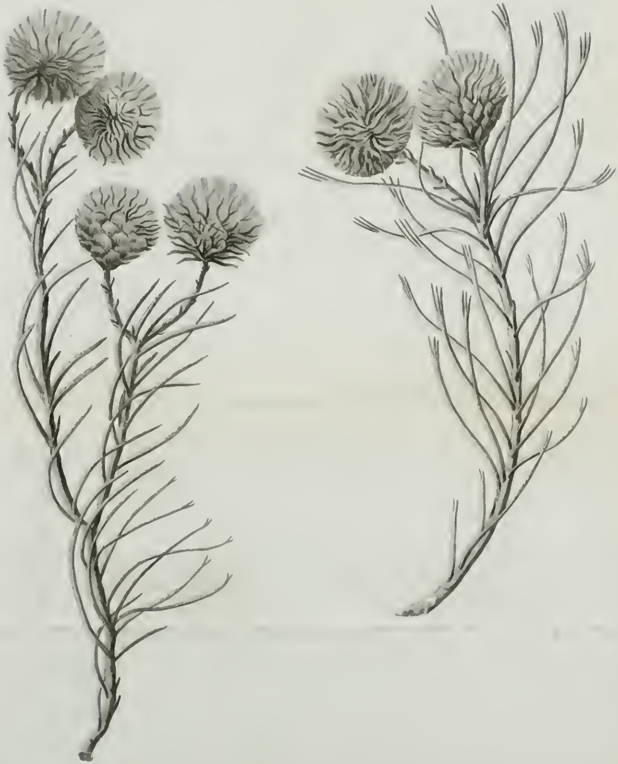
Crucianella gilanica.

nie Imp: des

Aci.

Achillea vermicularis.

Protea plumigera.



Protea plumigera.

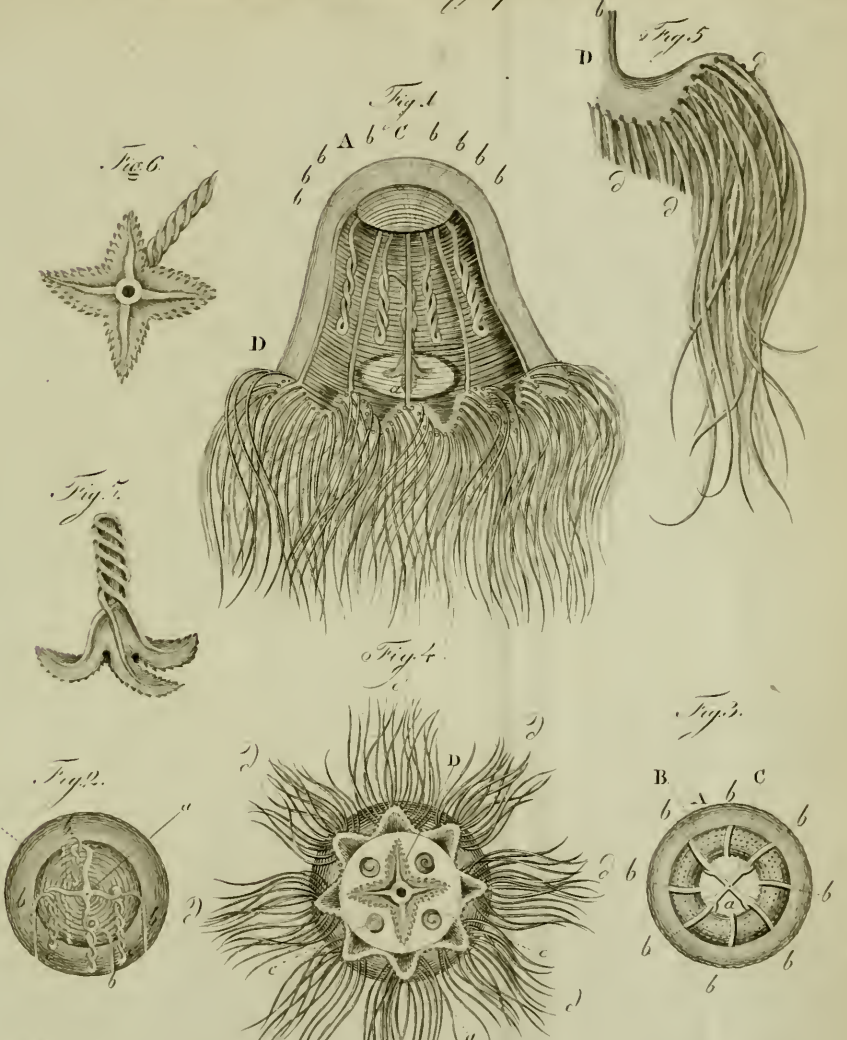
Protea coarctata.

Protea levis.

Protea levis

D

Protea ovata.



Medusa pillatrix Japonica. Cassa Curagé jap.

J. Neyer sc.

Mémoires de l'Acad. Imp. des Sc. Tome VI. Tab. LII.