震旦學院課夲

幾何學

平面 第三冊

幾何學　目録

卷三

第十題	両相似多辺形必可分為等多三角形両両同方而相似
第十一題	(前題反証)両多辺形若可分為等多之三角形両両同方而相似則多辺形必相似
第十二題	両相似多辺形其周相比如両多辺形任相當之二辺為相比
第十三題	自勾股形直角之頂至弦作垂線
	(一)所分之両　三角形必各与原形相似亦彼此相似
	(二)垂線為弦両段之中率
	(三)原形之両腰各為弦及橤各腰一段之中率
系一	勾股形弦方　等於直角旁二辺方之和数,直角旁一辺之方即弦方与他一辺方之較
系二	正方形之対角線不能分各辺

勾股形辺弦及高之計算法

射影

橤	二幾何和及較之方由代数式得証
第十四題	凡三角形対鋭角辺之方等於餘両辺方之和減去其底乗彼一辺射影之倍
橤	鈍角三角形対鈍角辺之射影須過於三角形之外照上題作証
第十五題	凡三角形対鈍角辺之方等於餘両辺方之和加其底乗彼一辺射影之倍
第十六題	圜内有両弦相交則此弦両段相乗必等於彼弦両段相乗
第十七題	自圜外一点作圜之切線与割線則切線之方必等於割線乗其圜外之一段

有法多辺

釋明

第十八題	有法多辺形能作其外切圜及内切圜

(1)有法多边形能作其外切圜

(二)有法多边形能作其内切圜

系一　多边形之外切圜及内切圜為同一圜之心

系二　内切多边形各边所对之圜心角等於多边形边数分之四直角

第十九題　兩等边数之有法多边形為相似形

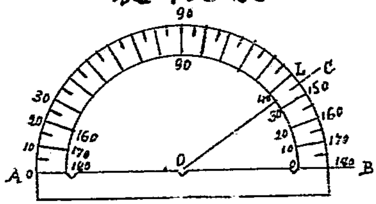
第二十題　边数等之有法多邊形其周相比如其内切圜之半徑或外切圜之半徑相比

無量幾何

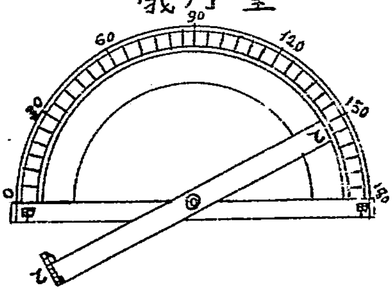
釋名

第一題　圜周相比如其全徑相比

象限表



量角儀



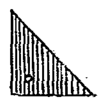
作法問題

目録

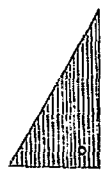
第十二題　於內切任有法多边形內求作其边数二倍之內切有法多边形

八边形之边等於其圜半徑乘方根二減方根二

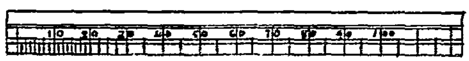
$$R=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$ (R=八边形之边)



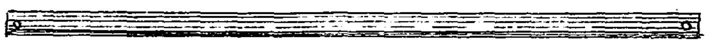
矩



矩



尺



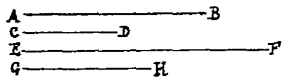
尺

幾何學　卷三

論比例線

於數學中所言之比例無論其數之大小只求某數之比理等於某數之比理而已若所言乃形學比例大率以線為用如求兩線之比理即以同量之準箇度之視各容幾次而已

設四直線AB, CD, EF, GH若AB與CD之比理等於EF與GH之比理則有比例式 $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$



比例線

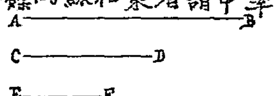
諸線兩兩之比理同者謂比例線如A, B, C, D各線與A', B', C', D'各線有比例即 $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$

四率比例線

若第四線與已知之三線成比例者謂四率比例線

中率比例線

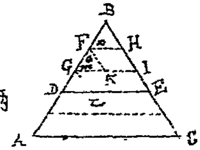
若比例線其第三線之方等於餘兩線相乘者謂中率比例線如 $\frac{AB}{CD}=\frac{CD}{EF}$ 或 $\overline{CD}^2=AB\times EF$



三率比例線

設第四線D與已知之三線A, B, C成比例若B=C則D線名曰三率比例線

(第一題)　於三角形內作線與底平行則此線分兩腰必有比例



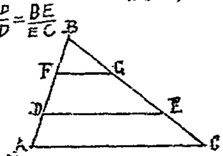
Hyp　任$\triangle ABC$, $DE /\!/ AC$

Prop　$\frac{BD}{AD}=\frac{BE}{EC}$

證　設以公因之幾何BF均分BD為三AD為兩則此兩線相比如三與二相比故$\frac{BD}{AD}=\frac{3}{2}$今試於AB線內被分各点各引線平行AC則BC亦必被均分為五,試於AB線內被分之F,G諸点各引線平行BC則$\triangle BFH=\triangle FGK$ ($BF=FG$ const, $\hat{B}=\hat{G}$ 同方角, $\hat{m}=\hat{n}$ 同方角) $\therefore BH=FK$ ($\because \hat{m}=\hat{n}$)
但$FK=HI$(平行為平行所截)故$BH=HI$而$\triangle FGK=GDL$(同理) $\therefore FK=GL$
$\because FK=HI$, $GL=IE$ $\therefore HI=IE$餘皆可仿此証故AC亦均分為五,BE容其三EC容其二$\therefore \frac{BE}{EC}=\frac{3}{2}$, $\therefore \frac{BD}{AD}, \frac{BE}{EC}$皆與$\frac{3}{2}$為比例即$\frac{BD}{AD}=\frac{BE}{EC}$

(系一)　1° $\because \frac{AB}{BD}=\frac{5}{3}$, $\frac{BC}{BE}=\frac{5}{3}$故$\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}$

2° $\frac{AB}{AD}=\frac{5}{2}$, $\frac{BC}{EC}=\frac{5}{2}$故$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{EC}$

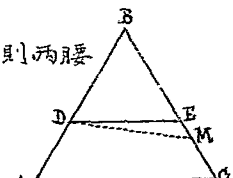


(1)

(系二)　凡比例有八式知其一式餘可類推故據前式可知

$\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{BE}$, $\frac{BC}{AB}=\frac{BE}{BD}$等

(系三)　三角形內有諸線平行其底者則兩腰被分有比例



(2)

Hyp　在$\triangle ABC$, $DF, EG /\!/ AC$ (視(1)圖)

Prop　$\frac{BF}{BG}=\frac{FD}{GE}=\frac{DA}{EC}$ (學者可自証之)

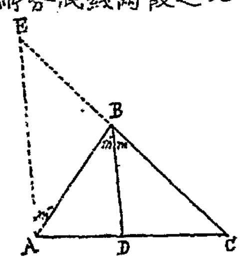
(第二題)　三角形內線分兩腰有比例者此線必與底平行

Hyp　$\frac{BD}{AD}=\frac{BE}{EC}$

Prop　$DE /\!/ AC$

因若作別線$Dm /\!/ AC$照上題即可知$\frac{BD}{AD}=\frac{Bm}{mC}$
但Hyp云$\frac{BD}{AD}=\frac{BE}{CE}$ $\therefore \frac{Bm}{mC}=\frac{BE}{CE}$不合于理
蓋$Bm>BE$, $mC<CE$第一比例大其二故必$DE /\!/ AC$

(第三題)　三角形平分其腰間角之線所分底線兩段之比例等於兩腰之比例



Hyp　ABC三角形BD為B角之分角線則$\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{AB}$ prop.

(証)　於A点作$AE /\!/ BD$引長BC遇E点成$\triangle ACE$
因$BD /\!/ AE$故$\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{EB}$又因$\hat{E}=\hat{m}$

(同方角) $m'=m''$(相对内角) 故 $\hat{E}=\underbrace{\hat{m}=\hat{m}'}_{\text{平分角}}=\hat{m}''$ 由知 $\hat{m}''=\hat{E}$ 則 ABC 為等腰三角形 故 $AB=BE$ 在 $\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{BE}$ 式内以 AB 代相等之 BE 即得 $\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{AB}$

(第四題) 上題反証　　(圖照上)

自三角形底边内一点分底边爲二段若此二段底边之比例等于两腰之比例則自此点至項之綫必爲分角綫 Hyp. △ABC 内 AC 底边于 D 点分爲 AD CD 二段連 BD 若 $\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{AB}$

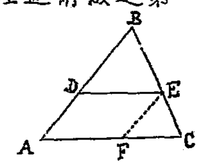
prop. 則 DB 爲 $\hat{B}$ 之分角綫

(證) 作 $AE /\!/ BD$ 引長 BC 遇 E 成 ACE 三角形因 $AE /\!/ BD$ 則 $\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{BE}$ 但 $\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{AB}$ (Hyp.) 故可作 $\frac{BC}{BE}=\frac{BC}{AB}$ 又因此比例式之分子既同分母自等以知 $BE=AB$ 爲等腰三角形即 $\hat{m}''=\hat{E}$ 但 $\hat{m}'=\hat{m}''$(相对内角) 故亦 $m'=E$ 而 $\hat{m}=E$(同方角) 故 $m'=m$ 此两角既等則中綫 BD 自爲 B 角之分角綫無疑

相似多边形 相似多边形者相當之角相等而边復有比例也

於相似多边形内其相當之边者即相同之地位也相似三角形内相當之边者即其各相对之角等也

(第五題) 三角形内有一直線平行於其任边所成之第二三角形必與原形相似



Hyp. 任三角形 ABC, $DE /\!/$ 任边 AC

Prop. △DBE 相似 △ABC

(証) 两三角形 BDE 與 BAC 有相當之角相等

因 B 角爲公角 $\hat{D}$ 與 $\hat{A}$ 以同方角之故又等 $\hat{E}$ 亦等於相等之同方角 $\hat{C}$ 後當証其相當之边有比例因 $DE /\!/ AC$ 故 $\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{DE}$ 自 E 点作 $EF /\!/ AB$ 故 $\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{AF}$ 但 $ADEF$ 爲平行方形 $AF=DE$ 若以 AF 代以相等之 DE 則 $\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE}$ 故 $\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE}$ 两三角形 BDE 與 ABC 既有角相等而其相當之边復有比例所以相似

相似三角形之主要

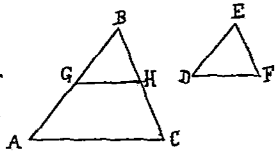
二三角形為相似者

1º角相等者　2º相當之边有比例者　3º若有一角等而等角旁之边有比例者　4º相當之各边平行或互為垂線者

（第六題）（一）兩三角形若相當之三角等即為相似形

Hyp　ABC, DEF兩三角形 $\hat{A}=\hat{D}, \hat{B}=\hat{E}, \hat{C}=\hat{F}$

Prop　$\triangle ABC$ 相似 DEF



（証）　於AB内截取BG=ED自G点作GH平行AC $\triangle ABC$ 相似GBH（第五題）今若證明以 $\triangle DEF$=GBH則 $\triangle DEF$ 自亦相似ABC矣然 $\triangle BGH$ 與DEF有一边相等其兩端之角又等以BG=DE $\hat{B}=\hat{E}$ $\hat{G}=\hat{D}$ 因 $\hat{G}=\hat{A}=\hat{D}$ 故此兩三角形相等即DEF相似ABC云

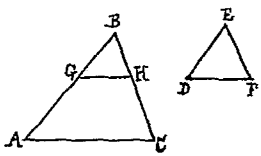
（系一）　兩三角形若有兩角相等則為相似形因第三角不等亦等故也

（系二）　兩勾股形有一銳角等者則為相似形

（第七題）（二）兩三角形相當边各有比例者即為相似形

Hyp　$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$ [1]

Prop　$\triangle ABC \approx DEF$



（証）　於BA线内截取BG=DE復於G点作GH∥AC故 $\triangle BGH \approx ABC$（此卷第五題）∴ $\frac{AB}{BG}=\frac{BC}{BH}=\frac{AC}{GH}$ 但BG=DE故試以DE易其相等之BG即得 $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{BH}=\frac{AC}{GH}$ [2] 據題 $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$ 今得 $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{BH}$ ∴ $\frac{BC}{BH}=\frac{BC}{EF}$ 此比例分子既等分母自必相等∴BH=EF而 $\frac{AC}{GH}=\frac{AC}{DF}$（同理）∴GH=DF∴ $\triangle BGH$=DEF（三边各等）∵BGH≈ABC∴ $\triangle$DE亦≈ABC云

(第八題) 3°兩三角形ABC,DEF若相當兩边各有比例而其間所夹之角亦相等則兩形相似

Hyp $\hat{B}=\hat{E}$, $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$

Prop $\triangle ABC\approx DEF$

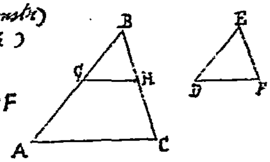
Constr 截BG于AB令$GB=DE$復自G点作GH平行AC

∴$BGH\approx ABC$ ∴$\frac{AB}{BG}=\frac{BC}{BH}$ 但$BG=DE$

(Constr) 可以DE代BG于上式則作

$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{BH}$ 惟因$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$ (Hyp) ∴$\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{BH}$ ∴$\frac{BC}{EF}\frac{BC}{BH}$因比例式分子既同分母自等∴$EF=BH$

∴$\triangle BGH=EDF$ $\begin{cases} GB=DE & \text{(Constr)} \\ \hat{B}=\hat{E} & \text{(Hyp)} \\ EF=BH \end{cases}$



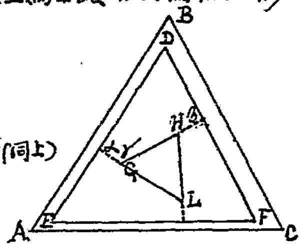
∵$\triangle BGH\approx ABC$而$\triangle BGH=EDF$

∴$\triangle EDF\approx\triangle ABC$

(第九題) 4°兩三角形各相當边平行或互為垂线者即為相似之形

Hyp $\begin{cases} 1° & AB /\!/ DE, BC /\!/ DF, AC /\!/ EF \\ 2° & GL\perp DE, HL\perp EF, GH\perp DF \end{cases}$

Prop $\begin{cases} 1° & \triangle ABC\approx DEF \\ 2° & \triangle GHL\approx DEF \end{cases}$



(証)一 $\hat{A}=\hat{E}$(卷二第九題一),$\hat{B}=\hat{D}$(同上)$\hat{C}=\hat{F}$(同上)

∴$\triangle ABC\approx DEF$(三角各等)

(証二) 據(卷一第九第十題)凡兩角之边兩兩平行或互為垂綫者非等即輔故共有四式可書 1° $\hat{E}+\hat{L}=2\partial r$. $\hat{F}+\hat{H}=2\partial r$. $\hat{D}+\hat{G}=2\partial r$.

2° $\hat{E}+\hat{L}=2\partial r$. $\hat{F}+\hat{H}=2\partial r$. $\hat{D}=\hat{G}$

3° $\hat{F}+\hat{L}=2\partial r$. $F=H$ $D=G$

4° $E=L$, $F=H$, $\hat{D}=G$

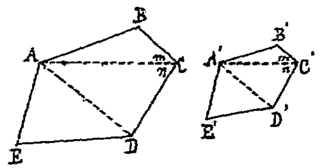
第一式與第二式皆與例不合因每三角形内角之和只等於兩直角也第三式與第四式適与題合故題言云云

(附証) $\hat{D}+\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\delta}=4\partial r$ ∵$\hat{\alpha}+\hat{\gamma}=2\partial r$(直角) ∴$\hat{\delta}+\hat{D}=2\partial r$ ∵$\delta+G=2\partial r$ ∴$\delta+G=\delta+D$各消去$\hat{\delta}$即得$\hat{G}=\hat{D}$餘仿此

《第十題》 兩相似多边形必可分為等多三角形兩兩同方而相似

Hyp $ABCDE \approx A'B'C'D'E'$ 即 $\begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'} \\ \hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \hat{C} = \hat{C}',\ \hat{D} = \hat{D}',\ \hat{E} = \hat{E}' \end{cases}$

Prop 所分諸三角形數同且兩兩同方而且相似



(証) 試自A作AC与AD两对角线，自A'作$A'C'$与$A'D'$两对角線則原形各分為三三角形而兩兩同方也明矣，今試証 $\triangle ABC \approx A'B'C'$ $\begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases}$ $\therefore \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$,

$\triangle ACD \approx \triangle A'C'D'$ $\begin{cases} \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} \left(\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}, \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}\right) \\ \hat{n} = \hat{n}' \ (\hat{m} = \hat{m}' \therefore \hat{C} - \hat{m} = \hat{C}' - \hat{m}') \end{cases}$

$\triangle AED \approx A'E'D'$ $\begin{cases} \frac{AE}{A'E'} = \frac{ED}{E'D'} \\ \hat{E} = \hat{E}' \end{cases}$

《第十一題》 (前題反証) 兩多边形若可分為等多之三角形兩兩同方而相似則多边形必相似

Hyp 兩多边形$ABCDE$与$A'B'C'D'E'$且知 $\triangle ABC \approx A'B'C'$, $\triangle ACD \approx A'C'D'$, $\triangle ADE \approx A'D'E'$

Prop $ABCDE \approx A'B'C'D'E'$ $\because \triangle ABC \approx A'B'C'$ $\therefore \hat{B} = \hat{B}', \hat{m} = \hat{m}'$ $\because \triangle ACD \approx A'C'D'$
$\therefore \hat{n} = \hat{n}'$ $\therefore m + n = \hat{m}' + \hat{n}'$ $\therefore \hat{C} = \hat{C}'$ 餘皆仿此

(上圖)

(証) $\because \triangle ABC \approx A'B'C'$ $\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ 因$\frac{AC}{A'C'}$既与$\frac{CD}{C'D'}$為比例復与$\frac{BC}{B'C'}$為比例

$\because \triangle ACD \backsim A'C'D'$ $\therefore \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}$ 因$\frac{AD}{A'D'}$既与$\frac{CD}{C'D'}$為比例復与$\frac{DE}{D'E'}$為比例

$\because \triangle ADE \approx A'D'E'$ $\therefore \frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'}$ 故試聯之即得 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{AE}$

《第十二題》 兩相似多边形其周相比如兩多边形任相当之二边為相比

Hyp $ABCDE$相似$A'B'C'D'E'$ 命兩多边形之周一為P一為P'

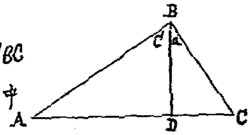
Prop $\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}$

(証) 既知两多边形相似则 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{AE}{A'E'}$ 但比例公例凡比例式其分子之和与分母之和相比如其中任一分子与一分母相比故 $\frac{AB+BC+CD+DE+AE}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+A'E'}=\frac{AB}{A'B'}$ 或 $\frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}$

(第十三题) 自勾股形ABC直角之顶B作BD⊥AC弦

1º 经BD分△ABC為ABD，DBC两勾股形

ABD ∾ DBC　ABD ∾ ABC　DBC ∾ ABC



2º BD垂线為弦所分二段比例之中率 $\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{CD}$ 或 $\overline{BD}^2=AD\times CD$

3º 勾股形每边為弦及附近其边所分一段弦比例之中率 $\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}$ 或 $\overline{AB}^2=AC\times AD$　$\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC}$ 或 $\overline{BC}^2=AC\times DC$

(証) 1º 三角形ABC相似ABD因 $\hat{A}$ 角為公又俱有直角均等第三角亦必等故三角等而两形相似也三角形ABC相似CBD与上同理二角形ABD相似BDC因各有直角均等 $\hat{A}=\hat{a}$ 因 $\hat{C}+\hat{A}=1D$ 又 $\hat{C}+\hat{a}=1D$ $\therefore \hat{C}+\hat{A}=\hat{C}+\hat{a}$ 各消去相同之C 第三角亦等三角等故二形相似也

2º $\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DC}$ 或 $\overline{BD}^2=AD\times DC$

(証) 因△ABD相似△BDC故 $\hat{c}=\hat{C}$ $\hat{A}=\hat{a}$ $\hat{c}$ 对边AD与C对边BD有比例 $\hat{A}$ 对边BD与 $\hat{a}$ 对边DC有比例故 $\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DC}$ 即 $\overline{BD}^2=AD\times DC$ (1)

3º $\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}$ 或 $\overline{AB}^2=AC\times AD$

$\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC}$ 或 $\overline{BC}^2=AC\times DC$

(証) 勾股形ABC相似ABD因直角等弦AC与AB相比又因 $\hat{C}=\hat{c}$ 故对边AB与AD相比故 $\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}$ 即 $\overline{AB}^2=AC\times AD$ (2)

由勾股形ABC相似BDC即照上理可知 $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC}$ 即 $\overline{BC}^2=AC\times DC$ (3)

(系一) 如以(2)(3)两比例式相加即得 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$ 因 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=AC\times AD+AC(\times CD)$ 故 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=AC\times AC=AC^2$ 或 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

如於此式內各 減一$\overline{AB}^2$或$\overline{BC}^2$即得$\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$或
$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$ 即 $\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$ 或 $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2$

由上[4]式可知句股形之弦方數等於 直角旁兩边方之和數

由上[5][6]兩式可知直角旁一边之方 即 弦方与他一边方之較

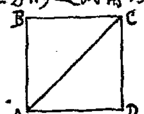
(系二) 證 ABCD正方形之 $AC=AD\sqrt{2}$ 或 $\frac{AC}{AD}=\sqrt{2}$

作AC对角线由勾股形ADC知 $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2$ 但 $\overline{AD}^2=\overline{DC}^2$ 故 $\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2$ 各得一方 $\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2$ 故 $AC=\overline{AD}\sqrt{2}$ [1]

各以AD分之 $\frac{AC}{AD}=$ 故 $\frac{AC}{AD}=\sqrt{2}$ [2]

因2有方根不能整分AC, AD线由可知正方形之对角浅不能分各边

Applications numeriques



(句股形弦股及高之計算法).

1º 試接上題 圖形令AD=35尺, 2寸 DC=19尺, 8寸以求AC, BD, AB, BC各得幾何

$AC=AD+DC=35,2+19.8=55$尺

由上題[1]式可知

$\overline{BD}^2=AD\times DC=35,2\times 19,8=696,96$ $\sqrt{\overline{BD}^2}=\sqrt{696,96}$ ∴BD=26尺4寸

由上題[2]式可知 $\overline{AB}^2=AC\times AD=55\times 35,2=1936$, $\sqrt{\overline{AB}^2}=\sqrt{1936}$ ∴AB=33尺

由上題[3]式可知 $\overline{BC}^2=AC\times DC=55\times 19,8=1089$ $\sqrt{\overline{BC}^2}=\sqrt{1089}$

2º 令AB=12尺, BC=5尺 試求AC, AD, DC, BD各得幾何須有小数三位

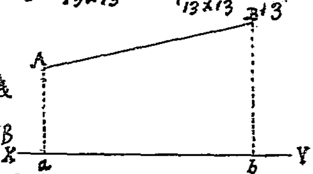
由上題[4]式可知 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=144+25=169$ $\sqrt{\overline{AC}^2}=\sqrt{169}$

AC=13尺

AD由上題[2]可知 $\overline{AB}^2=AC\times AD=\frac{AB^2}{AC}=\frac{144}{13}=11$尺$\frac{1}{13}=11,077$尺

$DC=\frac{\overline{BC}^2}{AC}=\frac{25}{13}=1尺\frac{12}{13}=10,923尺$

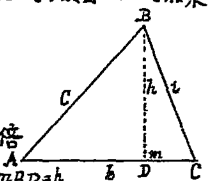
由上題[1]式 $\overline{BD}^2=AD\times DC=\frac{144}{13}\times\frac{25}{13}=\frac{3600}{13\times13}$ $BD=\sqrt{\frac{3600}{13\times13}}=\frac{60}{13}$ $=4尺\frac{8}{13}=4,615尺$



(射影) A点射影於xy线者即自A点射一垂綫於xy其垂線足即A点之射影也若AB線射影於xy線即自AB兩端各放一垂線於xy成ab线即AB之射影線也

(案) 1º 代数學已証二幾何和之方等於此幾何方加彼幾何方復加二幾何相乘之倍設此二几何一為a一為b 故 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

2º 二幾何較之方等於此几何方加彼几何方減去二几何相乘之倍即 $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$



(第㈣題) 凡三角形对銳角边之方等於餘兩边方之和減去其底乘彼一边射影綫之倍

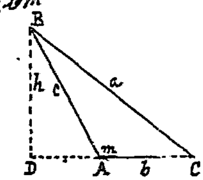
Hyp ABC三角形,C為銳角,命 $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $CD=m$, $BD=h$

Prop $c^2=a^2+b^2-2bm$

(証) ∵ABD為句股形 ∴ $c^2=h^2+\overline{AD}^2$ 但 $h^2=a^2-m^2$, $AD=b-m$ ∴ $\overline{AD}^2=(b-m)^2$ ∴ $\overline{AD}^2=b^2+m^2-2bm$ ∴ $h^2+\overline{AD}^2=a^2-\cancel{m^2}+b^2+\cancel{m^2}-2bm$ (消去 m^2).

∵ $h^2+\overline{AD}^2=c^2$

∴ $c^2=a^2+b^2-2bm$



案 如左圖A為鈍角則自B所作射影綫須遇於三角形之外

$c^2=a^2+b^2-2bm$ $(m=DC)$

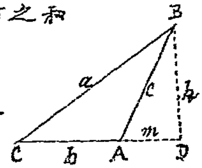
∵ $c^2=h^2+\overline{DA}^2$ 但 $h^2=a^2-m^2$

∴ $h^2+\overline{AD}^2=a^2-\cancel{m^2}+\cancel{m^2}+b^2-2bm$ (消去 m^2) $h^2+\overline{AD}^2=c^2$

∵ $DA=m-b$ ∴ $\overline{AD}^2=(m-b)^2=m^2+b^2-2bm$

∴ $c^2=a^2+b^2-2bm$

(第十五題) 凡三角形対鈍角边之方等於餘兩边方之和加其底乘彼一边射影線之倍

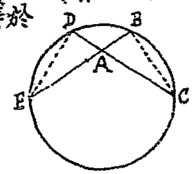


Hyp △ABC, C為鈍角, 命AB=a, BC=c, AC=b, CD=m, BD=h

Prop $a^2=b^2+c^2+2bm$

(証) $a^2=h^2+(b+m)^2=h^2+b^2+m^2+2bm$ 但 $h^2=c^2-m^2$ (第十三題三)
試以 (c^2-m^2) 代 h^2 即得 $a^2=c^2-m^2+b^2+m^2+2bm$ 或 $a^2=c^2+b^2+2bm$
(消去 m^2)

(第十六題) 圜内有兩弦相交則此弦兩段相乘必等於彼弦兩段相乘

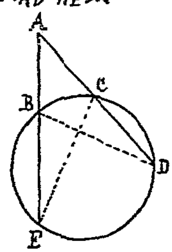


Hyp AB与DC兩弦相交

Prop AB×AE=AC=AD

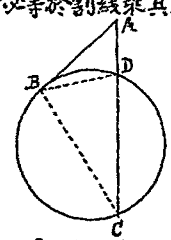
(証) 1º 試作ED与BC兩直線則成DAE与BAC兩三角形因 $\hat{C}=\hat{E}$ (皆為弧DB之半) $\hat{B}=\hat{D}$ (皆為弧EC之半)
故 △DAE∼△ABC 故其等角相対边有比例 ∴ $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ 或 AB×AE=AC×AD

2º 若兩割線交於圜外則AB×AE=AC×AD



(証) 試作EC与BD兩直線成兩三角形ACE与ABD
因 $\hat{E}=\hat{D}$ (皆為弧BC之半) $\hat{A}$ 為公
∴ △AEC∼ABD 故其等角相対边有比例
∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$ 或 AB×AE=AC×AD

(第十七題) 自圜外一点作圜之切線与割線則切線之方必等於割線乘其圜外之一段



Hyp AB切线, AC割

Prop $\overline{AB}^2=AC\times AD$

(証) 試作BD与BC兩直線則△ABD相似△ABC
因 $\hat{A}$ 為公 $\hat{C}=A\hat{B}D$ (皆為弧BD之半) 故此兩三角形相似其等角対边有比例 ∴ $\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}$ 或 $\overline{AB}^2=AC\times AD$

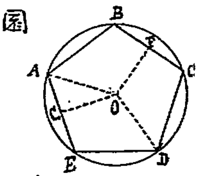
有法多边形

釋明　有法多边形者為角边相等之多边形如等三边角形及正方形類是也

若多边形之諸角頂切於圜内之圜周者名之曰内切多边形而其圜則名外切圜

若多边形之各边為圜之切线者名之曰外切多边形而其圜則名為内切圜

(第六題)　有法多边形能作其外切圜及内切圜



(一)有法多边形$ABCDE$能作其外切圜

1° { Hyp　$ABCDE$有法多边形
Thp　能作是多边形之外切圜

(証)　先以是多边形之角頂ABC三点求得中心O圜(作圖題)過此三点(二巻第十題)宜証是圜亦必过餘角頂如D点自O点作OF垂線於BC之中央連OA, OD将四边形$OFBA$折於$OFCD$上F角為两形相等之角且BF等于FC故BF適合於FC上B点自切於C点但B角等于C角所以BA与CD同方向而A点自切於D点因此OA適合于OD劃圜若以OA為半徑則自过D点矣其他角頂如E等亦可仿此証明之

(二)有法多边形$ABCDE$能作其内切圜

2° { Hyp　$ABCDE$有法多边形
Thp　能作是多边形之内切圜

(証)　外切圜内有法多边形之边AB, BC, CD ……… 為圜之等弦故其距圜心各等∴若其任边之中央垂線OF, OG為半徑作圜必與是多边形之各边中央點相切

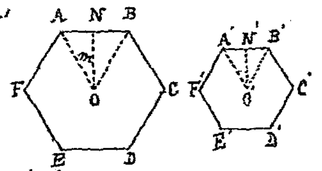
(系一)　多边之外切圜及内切圜心為同一圜之心

(系二)　内切多边形之AB, BC, CD, DE, EA等即為相等之弦而其所

乘之弧自等因此其圓心角 ACB, B C各等於多邊形(邊數)分之四直角

(第九題) 兩等邊數之有法多邊形爲相似形

Hyp 兩有法六多邊形 $ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F'$



Prop 1º $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$, $D=D'$, $E=E'$, $F=F'$

2º $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EF}{E'F'}=\frac{AF}{A'F'}$

(証) 因彼此兩形其角之和均等于八直角而A角爲和數六分之一A'角亦如之 其餘各角相等 証之亦然

所以 1º $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$, $D=D'$, $E=E'$, $F=F'$ 亦知

2º $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EF}{E'F'}$

因兩多邊形爲有法多邊形其比例式之各子(分)及其分母皆相等云

(第十題) 邊數等之有法多邊形其周相比如其內切圜之半徑或外切圜之半徑相比

Hyp $ABCDEF$与$A'B'C'D'E'F'$爲有法六邊形命兩多邊形之周爲P及P'

Prop $\frac{P}{P'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{ON}{O'N'}$

(証) AOB与$A'O'B'$兩三角形皆爲等腰三角形 $(OA=OB, O'A'=O'B')$ 且 $\hat{O}=\hat{O}$ (因皆爲四直角六分之一) 而 ON与$O'N'$爲兩角之分角線

因之 $m=m'$ $\therefore \triangle AON \sim A'O'N'$ $\begin{cases} m=m' \\ n=n' \text{直角} \end{cases}$

$\frac{OA}{O'A'}=\frac{ON}{O'N'}=\frac{AN}{A'N'}=\frac{2AN}{2A'N'}$) $\frac{OA}{O'A'}=\frac{ON}{O'N'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{6AB}{6AB}=\frac{P}{P'}$

$$\frac{P}{P'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{ON}{O'N'}$$

釋名

無量幾何　無量幾何者可大可小之幾何也

無量幾何之界　乃一定之界線此幾何能近之而不能即之也

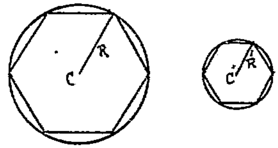
如前題圖 $AE+EB>AB$ 因之平分各边所乘之弧成倍边数之多边形其边漸与圜周相近依次分至無窮其边愈与圜周相近終不可即雖謂之合於圜周可也

故圜周可直命之為無定界边之内切有法多边形　由此可知圜周亦一有法多边形其边数無定而其值則与有法多边形無異云

(第三題)　圜周相比如其全徑相比

假設　C与C'兩圜 R与R'為兩圜之半徑

求證　$\frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'}$



(証)　試於兩圜内各作有法多边形令其边数相等命兩多边形之周為P及P'

故 $\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$(見手題)

如是疊次平分各边所乘之弧作其相配之多边形其多边形之周漸与圜周相近若直分至無窮究必与圜周相合故圜周相比亦如半徑相比 ∴ $\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}$[1] 或 $\frac{C}{C'}=\frac{2R}{2R'}$[2] 或 $\frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'}$[3]

此[1]与[2]之等式可知兩圜周之比例同於半徑或全徑之比例而[3]之等式可知圜周与其全徑$2R$之比例同於任何圜周与其全徑之比例所以此比例係一確定之数常以希臘文π表明之因此得公式 $\pi=\frac{C}{2R}$ 即 $C=2\pi R$，亦即 $R=\frac{C'}{2\pi}$

周 = 4		
多邊形之邊數	斷線之价值	半徑之价值
4	a = 0,5000000	r 0,7071068
8	a_1 = 0,6035534	r_1 0,6532815
16	a_2 = 0,6284174	r_2 0,6407289
32	a_3 = 0,6345731	r_3 0,6376435
64	a_4 = 0,6361083	r_4 0,6368754
128	a_5 = 0,6364919	r_5 0,6366836
256	a_6 = 0,6365878	r_6 0,6366357
512	a_7 = 0,6366117	r_7 0,6366237
1024	a_8 = 0,6366177	r_8 0,6366207
2048	a_9 = 0,6366192	r_9 0,6366199

$$\pi = \frac{4}{2 \times 0{,}636619} = \frac{2}{0{,}636619} = 3{,}141592. = 3{,}1416$$

半径 = 1		
邊 數	每邊之長短	多邊形之周
4	c = 1,414213	5,656852
8	c_1 = 0,765366	6,122928
16	c_2 = 0,390180	6,242880
32	c_3 = 0,196034	6,273088
64	c_4 = 0,098135	6,280640
128	c_5 = 0,049082	6,282496
256	c_6 = 0,024543	6,283008

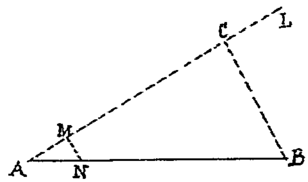
$$\pi = \frac{6{,}283008}{2} = 3{,}141504. = 3{,}1416$$

幾何學 巻三　求作

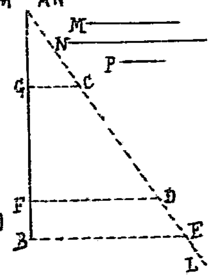
(第一題)　平分AB直线為數等分

Hyp　AB直线

Prop　求分為數等分如五



(証)　自A点作AL無定界線与AB相交作任角於AL直線内自A点連續作五等分至C連CB復於AL内第一分点作MN∥CB故 $\frac{AC}{AM}=\frac{AB}{AN}$ 而AM為AC内五等分之一故AN亦為AB内五等分之一



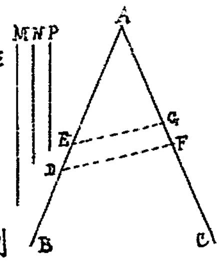
(第二題)　分直线AB与已知之M,N,P三線有比例

Hyp　M,N,P為已知之三直線

Prop　求分AB直線与MNP有比例

自A点作無定界線AL与AB作任角於AL内截取AC=M,CD=N,DE=P連EB自D,C点作DF,CG∥EB如是AB所分之AG,GF,FB必与已知之M,N,P有比例三角形ABE内(巻三第一題三系)

$\frac{AG}{AC}=\frac{GF}{CD}=\frac{FB}{DE}$ 即 $\frac{AG}{M}=\frac{GF}{N}=\frac{FB}{P}$



(第三題)　有已知之三直线M,N,P求其四率比例

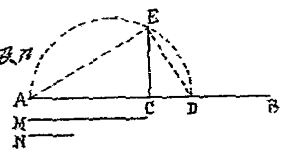
Hyp　M,N,P已知之三直線

Prop　求其四率比例(四率比例以x代之)即 $\frac{M}{N}=\frac{P}{x}$ 任作AB,AC両無

定界直線交成任角於AB作$AD=M$, $AE=N$, 於AC內截取$AE=P$連DF復作$EG \parallel DE$即知$AG=x$或即為所求之四率比(證)已知相似三角形DAF與EAG $\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{AF}{AG}$ 但$AD=M$, $AE=N$, $AF=P$

故$\frac{M}{N}=\frac{P}{AG}$或$\frac{M}{N}=\frac{P}{x}$

(第四題) 求一線為已知m及n線比例之中率



Hyp 已知線 m, n

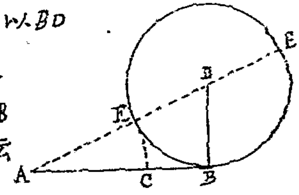
Prop $\frac{m}{x}=\frac{x}{n}$ 或 $x^2=m\times n$

Const 于AB任線上截$AC=M$, $CD=N$ 以AD為圓徑作一半圓再於C点作垂線CE此线即比例之中率

(證) 連AE, ED弦所為直角故成AED直形三角形EC為直角頂至弦之垂線為兩段弦AC及CD比例之中率 $\therefore \frac{AC}{EC}=\frac{EC}{CD}$ 但$AC=m$ $CD=n$即$\frac{m}{EC}=\frac{EC}{m}$ $\overline{EC}^2=m\times n$ EC即所欲求之x

(第五題) 求分已知直線AB為二 其大者自乘等於小者乘AB

於B点豎一垂线$BD=\frac{AB}{2}$即以D為心, 以BD為半徑作圓周復作ADE割线於是以A為心以AF為半徑向下作弧交AB於C点AC線即AB与CB之中率比例云



(證) 因AE為割线AB為切线故$\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AF}$

比例公例兩式各以分子減其分母其比例仍同故$\frac{AE-AB}{AB}=\frac{AB-AF}{AF}$ 然$AE-AB=AE-EF=AF=AC$而$AB-AF=AB-AC=BC$

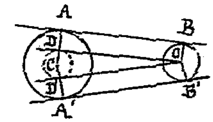
故$\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AF}$或$\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$因$AF=AC$即$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}$或$\overline{AC}^2=AB\times BC$

(案) 既知上式設命AB為a命AC為x故$AF=AC=x$, $DF=BD=\frac{a}{2}$ 因之$AD=x+\frac{a}{2}$ △ABD為句股形故$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2$或$(x+\frac{a}{2})^2=a^2+\frac{a^2}{4}$,

$(x+\frac{a}{2})^2=\frac{4a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$ 故試彼此開方即得$x+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{5}$或$x=\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}$或

$x=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$

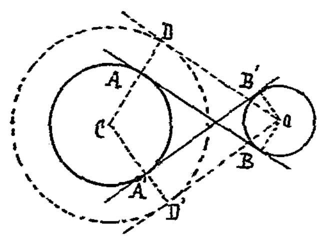
(第六題) 求作兩圓之公切線



(一)兩圓之外公切線

設C与O為兩圓之心又以大圓心為心以兩圓半徑之較為度作小圓周於O点作小圓之切線OD於是作CA半徑過切点D後於A点竪垂線AB即為所求之兩圓外公切線

(証) 於O点作OB∥AD ∴OB⊥AB (DA⊥AB, OB∥AD) ∴DABO為長方形 ∴OB=DA 但DA原等於O圓之半徑(∵CD+O圓半徑=CA) ∴OB為O圓之半徑 ∴AB為CA与OB之垂線即為兩圓之外公切線矣而A'B'亦為兩圓之外公切線其証同上云

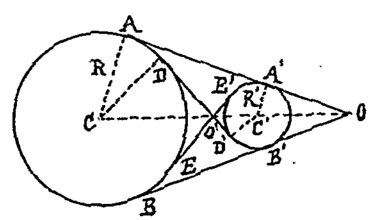


(二)兩圓之内公切線

以C為心以兩圓半徑之和為度作一圓周復於O作OD為此圓之切線於是連CD半徑過C圓之A点自A竪一垂線AB即所求兩圓之内公切線矣

(証) 於O点作OB∥AD ∴OB⊥AB (AD⊥AB, OB∥AD) ∴DABO為長方形 ∴OB=DA 但DA原等於O圓之半徑(∵CD=R+R') ∴OB為O圓之半徑 ∴AB為CA与OB之垂線即為兩圓之内公切線矣而A'B'亦為兩圓之内公切線其証同上云

(第七題) 求作兩圓之公切線



(一)兩圓之外公切線

設AA'為已作之外切

線，O為切線与連心線引長相遇之交点

試作半徑 $CA \parallel C'A'$ ∴ $\triangle CAO$ 相似 $C'A'O$ $\begin{cases} \hat{O} \text{ 公} \\ C=C' \text{ 同方角} \end{cases}$

$$\therefore \frac{R}{R'}=\frac{OC}{OC'}$$

即 $\frac{R-R'}{R'}=\frac{OC-OC'}{OC'}=\frac{CC'}{OC'}$ ∴ $\frac{R-R'}{R'}=\frac{CC'}{OC'}$ 據上式可知 OC' 為已知之 $R-R'$, R', CC' 三線之四率比例線故欲作此兩圜之外公切线可由 $R-R'$, R', CC' 三綫求得第四率比例線接於 CC' 連心线割於 O 点．後自 O 作 C' 圜之切綫引長之亦為 C 圜之切綫云

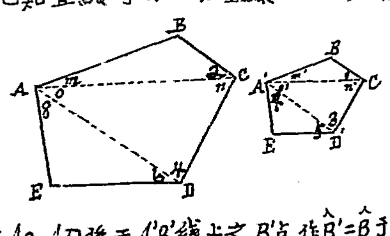
(証) 試作 $CA \parallel C'A'$ ∴ $\triangle CAO$ 相似 $C'A'O$ ∴ $\frac{CA}{C'A'}=\frac{OC}{OC'}$ 據前比例式 $\frac{R-R'}{R'}=\frac{CC'}{OC'}$

∴ $\frac{R-R'+R'}{R'}=\frac{CC'+OC'}{OC'}$ 或 $\frac{R}{R'}=\frac{OC}{OC'}$ ∵ $\frac{CA}{C'A'}=\frac{OC}{OC'}$ 而 $\frac{R}{R'}=\frac{OC}{OC'}$ ∴ $\frac{CA}{C'A'}=\frac{R}{R'}$ 但 $C'A'$ 原等於 R' 故 $CA=R$ 故 A 点必適在圜周之上且 $A=A'$ 故 OA 為 C' 圜之切線亦為 C 圜之切線云

(二) 兩圜之內公切線

設 DD' 為已作之內公切线　試作半徑 $CD \parallel C'D'$ ∴ $\triangle CDO'$ 相似 $C'D'O'$ $\begin{cases} D'=D & \text{相对内角} \\ C=C' & \text{相对内角} \end{cases}$ ∴ $\frac{R}{R'}=\frac{CO'}{C'O'}$ 即 $\frac{R+R'}{R'}=\frac{CO'+C'O'}{C'O'}$，$\frac{R+R'}{R'}=\frac{CC'}{O'C'}$ 據上式可知 $O'C'$ 為已知之 $R+R'$, R', CC' 三線之四率比例线故欲作此兩圜之內公切線可由 $R+R'$, R', CC' 三線求得四率比例线於 $C'C$ 綫自 C' 向 C 取一段使之等割於 O' 後自 O' 作 C' 圜之切綫引長之亦為 C 圜之切綫云(証)与外公切线同學者自証之可也

(第八題) 有一已知多边形及一已知直綫可自已知直線上作一多边形相似已知多边形



Hyp. $A'B'$ 直線，ABCDE 多边形

Drop. 作 $A'B'C'D'E'$ 多边形 $\backsim$ ABCDE 多边形

Cons. 於 ABCDE 形內作对角線 AC, AD 様于 $A'B'$ 綫上之 B' 点．作 $\hat{B'}=\hat{B}$ 于 A'

点作$\hat{m}'=\hat{m}$引$B'C'$，$A'C'$二边相交于C' ∴$A'B'C' \sim ABC \begin{cases}\hat{B}=\hat{B}' \\ \hat{m}=\hat{m}' \\ \hat{1}=\hat{2}\ 第三角\end{cases}$

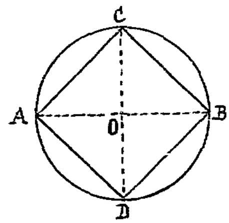
∴AC与$A'C'$有比例于$A'C'$作$\hat{o}'=\hat{o}$ $\hat{n}'=\hat{n}$引$A'D'$，$C'D'$二线相交于D'

∴$A'C'D' \sim ACD \begin{cases}\hat{n}=\hat{n}' \\ \hat{o}=\hat{o}' \\ \hat{3}=\hat{4}\ 第三角\end{cases}$

∴AD与$A'D'$有比例于$A'D'$線同上法作$\hat{5}=\hat{6}$ $\hat{7}=\hat{8}$ 引$A'E'$，$E'D'$二線相交于E'点 ∴$ADE \sim A'D'E' \begin{cases}\hat{5}=\hat{6} \\ \hat{7}=\hat{8} \\ \hat{E}=\hat{E}'\ 第三角\end{cases}$

∴二多边形内所函同方向之諸三角形既彼此相似 ∴二多边形亦相似

∴$A'B'C'D'E' \sim ABCDE$



（第九題） 求作一内切正方形

Hyp. $ABCD$圜

Prop. 求作是圜之内切正方形

（証） 連直徑垂线AB，CD之两端

$ACBD$為正方形中心O旁之四圜心角既相等其所乘之弧是等而乘此等弧之弦是亦必相等故$AC=CB=BD=DA$再者每角各為直角因各為半圜内所函之圜分角故也如CAD角之度等于半圜CBD之半

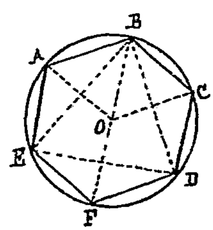
（系） ACO既為直角三角形則得$\overline{AC}^2=\overline{AO}^2+\overline{OC}^2=R^2+R^2=2R^2$

$$AC=\sqrt{2R^2}$$

$$AC=R\sqrt{2}$$

因知内切正方形之边如AC等於是圜之半径乘方根二

（第十題） 内切有法六边形之边等於其圜之半徑



Hyp. $ABCDFE$内切有法六边形

Prop. 求是多边形之边等於是圜之半徑

（証） 設已知之有法六边形及其边

6 圓心

AB作半徑OA, OB AOB角等于六分之360度或60度即知AOB三角形所餘之二角等於$180^\circ-60^\circ=120^\circ$但此二角相等因$OA=OB$故各等於60度而$AOB$三角形為等角三角形亦即為等邊三角形故$AB=AO=R$故若欲在圓內作有法之內切六邊形只須以半徑為度作相連之六等弦即是

(系) 若將每越一之兩角以直線聯之即成內切等邊三角形如BDE,若劃直徑BFO得句股形BFE有

$$\overline{BE}^2+\overline{FE}^2=\overline{BF}^2$$

但

$$FE=R,\quad BF=2R$$

$$\overline{BE}^2+R^2=2R\times 2R$$

$$\overline{BE}^2+R^2=4R^2$$

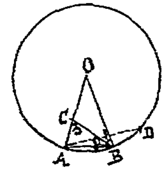
$$\overline{BE}^2=4R^2-R^2=3R^2$$

$$BE=\sqrt{3R^2}$$

$$BE=R\sqrt{3}$$

此即內切等邊三角形之邊等于其圓之半徑乘方根三也

《第十一題》 求於圓內作內切十邊形



作AB為內切十邊形之邊其邊適等於半徑分二段之大者為半徑及小段比例之中率

試連BO半徑 $\because \hat{O}=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$

$\because ABO$為三角形內角之和為180° $\therefore \hat{A}+\hat{B}=180^\circ-36^\circ=144^\circ$

$\because AO=BO$(半徑) $\therefore ABO$為等腰三角形

$\therefore \hat{A}=\hat{B}$ $\therefore \hat{A}$及$\hat{B}=\frac{144^\circ}{2}=72^\circ$ $\because 2\hat{O}=\hat{B}=\hat{A}$以分角線$CB$分$\hat{B}$為$\hat{1}$及$\hat{2}$ $\hat{1}=\hat{2}=\frac{72}{2}=36^\circ=\hat{O}$ $\therefore \hat{1}=\hat{O}$ $\therefore OCB$為等腰三角形$\therefore OC=CB$ $\because CBA$三角形內之$2=36^\circ$ $\hat{A}=72^\circ$ $\because \hat{3}=72^\circ$因三角形內角和為$180^\circ$ $\therefore \hat{3}=180^\circ-36^\circ-72^\circ=72^\circ$ $\therefore \hat{3}=\hat{A}$ $\therefore ACB$為等腰三角形

$\therefore CB=AB$ $\because CB=AB$, $OC=CB$

∴ $OC=AB$

∵ AOB 為 $\triangle ABC$ 為分角線

∴ $\frac{AC}{OC}=\frac{AB}{OB}$ 或 $\frac{OB}{AB}=\frac{OC}{AC}$

∵ $OB=OA$ 平邊 $AB=OC$

∴ $\frac{OA}{AB}=\frac{AB}{AC}$　即 $\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{AC}$

∴ 半徑所分之兩段其大段為比例之中率者即內切有法十邊形之边

如欲令 R 為圜之半徑照前第　題理可作 $AB=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

(案一)　如以圜之內切有法十边形之每二边連一綫即成內切有法五边形

(案二)　於上題形內自 A 点作弦 AD 等于半徑即有法六边形之边若以其所乘之弧 AD 減去內切有法十边形所乘之弧 AB 即餘 BD 弧其所乘之弦即為內切有法十五边形之边

∵ AD 弧 $=60^\circ$ (內切六边形之边) AB 弧 $=36^\circ$ (內切十边形之边)

∴ $BD=AB-AD=60^\circ-36^\circ=24^\circ$

∵ $BD=24^\circ$ 即全圜 360° 之十五分之一故 BD 所乘之弦亦等于全圜十五分之一即為圜內切十五边形之边

Prob　圜內切有法多边形

Prob　作有法多边形其边數倍已知有法多边形边数之倍

於已知多边形之边將其所含之弧皆均分為二作弦即所求之多边形之边也

設多边形為正方形則所求者為有法八边形由此可推十六边三十二边等

((案)) 據上理可推示示有法八边形之边 $AE=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

証 試作徑 $EF\perp AB$ 必平分 AB 且過 E 点 故 AEF 為勾股形 $(\because \angle A=\frac{EF}{2}=$直角$)$

於勾股形 EAF 內知 $AI\perp EF$ 故 $\overline{AE}^2=\overline{EF}\times EI$ $\because EF$ 為徑 $=2R$

$\therefore \overline{AE}^2=2R\times EI$ 但 $EI=R-OI$ 而 $OI=\sqrt{R^2-\overline{AI}^2}$ $(\because AIO$ 為勾股形$)$

因 $AI=\frac{AB}{2}$ 故 $\overline{AI}^2=\frac{\overline{AB}^2}{4}$

$\therefore OI=\sqrt{R^2-\frac{\overline{AB}^2}{4}}$ $\because \overline{AB}^2=2R^2$

$\therefore OI=\sqrt{\frac{4R^2-2R^2}{4}}$

$\therefore OI=\sqrt{\frac{2R^2}{4}}$

$\therefore OI=\frac{R}{2}\sqrt{2}$

$\therefore EI=R-\frac{R}{2}\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AE}^2=2R\left(R-\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)$

$\therefore \overline{AE}^2=2R\left(R-\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)$

$\therefore \sqrt{\overline{AE}^2}=\sqrt{2R^2-R^2\sqrt{2}}$

$\therefore AE=\sqrt{R^2(2-\sqrt{2})}$

$\therefore AE=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$