PEQUEÑA BIBLIOTECA

DE

EDUCACION

AL USO DE LOS

PRECEPTORES, PROFESORES Y ALUMNOS

PUBLICADA BAJO LA DIRECCION

DE

A. JACQUES

Director del Colegio Nacional de Buenos Aires

ARITMÉTICA

LIBRO 1°: Los números enteros.

BUENOS AIRES

Imprenta y Litografía á vapor de J. A. Bernheim, calle Perú, 147.

1864

ADVERTENCIA.

El título general que encabeza este pequeño libro de Aritmética, indica bastante que no es mas que la primera de una série de publicaciones semejantes, todas destinadas á un objeto comun: la instruccion de la juventud. Otro librito de Geometría, entregado ya á la prensa, aparecerá poco despues de este. La Aritmética entera formará seis ó siete de estos volúmenes y la Geometría completa ocupará siete ú ocho de los mismos, cuya publicacion sucederá con muy cortos intérvalos. Con el tiempo y con la cooperacion de mis cólegas del Colegio Nacional, así como de las personas que quisieren un dia asociarse á nuestra obra, no desespero de abrazar en un vasto conjunto de libros, al mismo tiempo muy elementales en la forma y muy científicos en el fondo, todos los ramos principales de la enseñanza general que conviene á una nacion civilizada, ciencias y letras, filosofía é historia, idiomas vivos y muertos.

Explicaré otra vez detenidamente, en un volúmen á parte, las ideas generales que deben, á mi parecer, presidir á esta publicacion y á la direccion de la enseñanza pública en general. Aquí quiero decir solamente algunas palabras, tocante á los motivos que me han decidido á emprender esta tarea por una parte, y por otra á adoptar la forma poco comun en la que presentó al público las primeras muestras de mi trabajo.

Existen, tanto en francés como en español, muchas obras pequeñas, destinadas principalmente á la instruccion elemental, que por ser muy cortas se creen muy claras. Es un error grave; la claridad no nace de la extrema concision; resulta mas bien de la prolijidad en las explicaciones, de la abundancia y de la variedad en los ejemplos. Todos esos *Compendios* y *Catecismos* de Gramática, de Aritmética, de Historia y otras materias, que se aprenden de memoria y se recitan sin ser entendidos, no abren las inteligencias y su aridez hace tomar al estudio mas odio que aficion.

Hay por otra parte libros muy grandes, que pretenden ser y son muchas veces en la realidad muy sábios, pero erizados de fórmulas que constituyen para la mayor parte de los hombres otros tantos jeroglifos que descifrar. Parece que sus autores hubieran creido humillarse, descendiendo á ejemplos comunes, á comparaciones familiares, á explicaciones algo materiales.

Juzgo yo que la ciencia no se rebaja por vulgarizarse en la forma, y que puede hacerse mas accesible, sin perder nada de su rigor. Pienso que es posible introducir en todos los grados de la enseñanza los conocimientos mas profundos y mas árduos, con saber materializarlos un poco al principio y desenvolverlos gradualmente de los mas vulgares hechos. Pienso aun que este método de exposicion, ciertamente necesario en la enseñanza elemental, seria tambien muy útil en la enseñanza mas elevada que se dirige á los niños ya adultos; y no quisiera afirmar que no convendria á los hombres mismos ya grandes.

El libro que se escriba con este fin, tiene que ser serio sin fastidiar, científico sin ostentacion, fácil aunque erudito, teórico sin pedantería y práctico sin vulgaridad. A todo esto aspiro; el público juzgará si con buen éxito. Mi ambicion quedaria plenamente satisfecha, si estos libritos, á mas de ser aceptados en la enseñanza preparatoria, á cuyas necesidades aun las mas elevadas acabarán, creo, por responder cumplidamente, pudiesen penetrar tambien en las mas humildes escuelas primarias. Ahí educarian primeramente al preceptor, á falta de Escuela Normal, y despues, bajo la direccion del preceptor, á un grupo de jóvenes elegidos entre los mas inteligentes y los mas acomodados de la clase media, que se deberia tratar de detener en las bancas de la escuela algunos años mas que los otros, para formar una buena falange en la que la industria naciente de estos paises reclutaria un dia sus directores al menos subalternos.

Pero, lo repito, no es con reducir la ciencia á unos secos resúmenes que se consigue hacerla amar ó entender. Para hablar claro, en materia científica, es preciso hablar mucho; una cierta difusion es la condicion mas necesaria de esta clase de libros. Ahora hay á esto un inconveniente grave: el volúmen, abultándose, se encarece. Es para remediar en cuanto posible este mal inevitable que he adoptado un sistema de publicacion *por retazos*, si puedo decir asi.

En lugar de escribir un grueso Tratado de Aritmética de 800 páginas en 8°, que hubiera venido á costar 80 ó 100 pesos, desmenuzo la Aritmética (y así mismo los otros tratados) en 6 pequeños tomos que se estudiarán y por consiguiente se comprarán separada y sucesivamente; cada capítulo principal formará un tomo. Este contiene los *Números enteros*, el siguiente hablará de los *Quebrados* y de los *Números denominados*, el tercero de las *Fracciones decimales* y del *Sistema métrico*.........*etc*............ El gasto total así repartido en varios años, por entregas de á 15 ó 10 $ por ejemplo cada una, aun cuando salga finalmente superior, parecerá mas llevadero á las familias. Y lo será en la realidad: un volúmen abultado, puesto en manos del estudiante para dos años, nunca alcanza íntegro al término del estudio que requiere; se gasta y se destruye con una rapidez tanto mayor cuanto mayor es su bulto.

Ademas, una vez manchado y despedazado el libro, el niño le cobra repugnancia. ¿Quién de nosotros al contrario no ha experimentado, cuando estudiante, una reduplicacion de buena voluntad, cada vez que se acababa de repartir un libro nuevo? Hasta en eso, cierta variedad es buena y reanima el gusto. Mis pequeños volúmenes podrán suministrar cada uno la materia de tres meses de estudio; no es ni el tiempo de fastidiarse de ellos ni el de hacerlos pedazos, y por lo menos los buenos discípulos sabrán coleccionarlos, para ser al fin reunidos en uno solo.

Veo en esto otra ventaja: todos no quieren ir hasta el cabo de cada ciencia; á algunos bastan las operaciones elementales del cálculo; á ciertas artes es suficiente la geometría plana. Cada uno comprará solamente de lo que necesite la cantidad que precise, y proporcionará el importe así como la reparticion de su gasto á sus menesteres y á sus recursos.

En el éxito de esta empresa, no hay por parte mia ningun interés de amor propio ó de fortuna; mi único objeto es hacer algun bien á la enseñanza pública. Deseo ardientemente alcanzarlo, porque así pagaria al menos en parte mi deuda de gratitud á esta tierra hospitalaria, en la que he recibido tan generosa acogida de personas eminentes que no nombro, pero que no olvido.

Buenos Aires, Noviembre 1864.

A. JACQUES.

ARITMÉTICA

LIBRO PRIMERO

La numeracion y los números enteros.

§ I.

OBJETO DE LA ARITMÉTICA.

Las estrellas del cielo son *muchas;* pero *pocos* son los hombres que las conocen bien. Un ejército es la reunion de una *cantidad* muy grande de soldados; un regimiento se compone de un *número* menor de hombres y en una compañía no hay mas que *algunos.* Todas las cosas del mundo tienen así su *cantidad*, mayor ó menor, y todos los hombres, aun los mas ignorantes, son capaces de avaluarla así aproximadamente; todos entienden las proposiciones de la clase de estas que acabamos de enunciar; todos expresan á cada instante otras semejantes.

Los niños muy tiernos todavía no van mucho mas allá de este punto; hasta la edad de tres á cuatro años, saben apenas contar hasta tres; pasando de este número, no tienen de la cantidad de las cosas sino una idea muy confusa y todo lo que saben decir de ellas á este respecto es que son *muchas* ó que son *pocas.* Es muy probable que los hombres de los primeros tiempos del mundo que formaban las mas antiguas generaciones no sabían casi mas de esto que los niños de nuestro tiempo. Podemos juzgar de ello por los salvages que son unos niños grandes; hay en el Chaco naciones bárbaras que no tienen en su idioma palabra alguna para designar una cantidad superior á tres; y si no tienen la palabra, es porque no tienen la idea ó al menos no la tienen clara.

Pero poco á poco, á medida que se civilizaron, los hombres han aprendido á distinguir con claridad una de otra cantidades mas crecidas y de ahí otras aun mayores; y han llegado por grados á este punto de poder avaluar con exactitud, definir y nombrar todas las cantidades posibles. Este mismo progreso, los niños empiezan á hacerlo naturalmente y por sí mismos, antes de ir á la escuela. En la escuela, se los ayuda á ello; se les enseña á *contar*. En el colegio vienen para aprender *porque* se ha buscado y *como* se ha conseguido este resultado muy importante. Pues ¿quién no se reiria hoy de un comerciante que, preguntado del estado de sus negocios, supiera decir solamente que gana *poco* ó que ha perdido *mucho?* Un hacendado tampoco se contentará con poder avisar que tiene *muchas* ovejas y *pocas* vacas; debe saber el número exacto de estas y de aquellas.

Aprender á contar es ya estudiar la Aritmética; es con efecto uno de sus primeros y mas necesarios objetos el enseñarnos á avaluar con exactitud la cantidad de las cosas y á expresarla con propiedad, sea verbalmente, sea por escrito.

Pero no para en eso la Aritmética.

A cada momento, en las circunstancias mas vulgares de la vida comun, se presentan cuestiones que resolver sobre los números. Por ejemplo: un comerciante que tiene apuntadas una por una todas sus ventas del dia, querrá saber á la noche cuanto ha vendido por todo, sin tener que registrar su caja y contar sus monedas. — Un estanciero dueño de una manada considerable, avisado por su capataz que la peste ha hecho morir una cierta parte de sus animales, deseará saber cuantos son los que le quedan, sin ir al campo ni mandar rodeos. — Un dependiente que ha dejado en manos de su patron su sueldo mensual durante tres años, al momento de cobrarlo, tiene que averiguar cuanto se le debe. — Un general recibiendo del Gobierno dinero para repartirlo igualmente entre sus soldados, deberá conocer antes de la distribucion el tanto que toca á cada hombre.

Todas estas cuestiones y mil otras parecidas que ocurren diariamente á todos, se refieren á la cantidad; se trata ya de reunir, ya de partir, ya de comparar los números de mil modos diferentes. La Aritmética enseña á efectuar estas operaciones con facilidad y sin equivocacion, por medio de reglas sencillas y seguras. Si tratamos ahora de definirla, diremos:

La Aritmética es la ciencia de la cantidad; enseña á avaluarla exactamente y á practicar sobre los números todas las operaciones que puedan ser precisas.

En los ejemplos propuestos, hemos enunciado la naturaleza ó clase de las cosas que se trataba de contar ó de calcular, y cuando sucede así, se dice que el número es *concreto;* así *diez vacas*, *veinte y dos hombres*, *cien pesos*, son números concretos. Pero se suprime muchas veces sin inconveniente la enunciacion de la clase de objetos á que pertenecen las cosas numeradas y se dice simplemente: *diez*, *veintidos*, *cien*, sin mas; entonces el número se llama *abstracto*. Por lo demas, es muy claro que las reglas de la Aritmética serán las mismas, cualquiera que sea la naturaleza de las cosas á las que se apliquen; él que sabe contar pesos y monedas sabrá contar ovejas y ladrillos; él que sea capaz de sumar veinte naranjas con cincuenta otras, sumará del mismo modo veinte hombres con otros cincuenta, y así lo demas. Las reglas de la Aritmética son pues independientes de la naturaleza variable de los objetos; por lo tanto, esta ciencia no trata sino de la cantidad, prescindiendo ó haciendo *abstraccion* de todo lo demas y considerando los números en sí mismos sin otra enunciacion alguna. Es por esto que la llaman muchas veces ciencia *abstracta* de la cantidad. Por fin:

La Aritmética es la ciencia abstracta de la cantidad ó de los números. Enseña á avaluar con exactitud y á expresar con propiedad, sea verbalmente sea por escrito, todas las cantidades posibles, y á reunir, partir y comparar entre sí los números de todos los modos imaginables.

§ II.

NUMERACION HABLADA.

Supongo un hombre enteramente ignorante, que no haya jamas andado en la escuela, ó mas aun, si se quiere, un Indio salvage, recien capturado en la Pampa, y que no sepa contar sino hasta diez; é imagino que este hombre emprenda, á pesar de esto, contar toda una carretada de naranjas.

Si tiene un poco de buen sentido, si es capaz de alguna reflexion, hé aquí como podrá alcanzar su objeto, sin aprender nada á mas de lo que sabe, ni tampoco inventar nada de nuevo.

A la primera naranja que saque de la carreta, dirá poniéndola en otra parte: UNA. Despues sacará otra y colocándola al lado de la primera, dirá: DOS; despues otra mas y dirá TRES; y así sucesivamente: CUATRO, CINCO, SEIS, SIETE, OCHO, NUEVE, DIEZ.

Llegado á este punto, no tendrá ya nombres para expresar la cantidad de los grupos nuevos que vá á formar, si sigue agregando siempre una naranja mas al monton. Pero reflexionará que puede volver á empezar á contar las naranjas siguientes así como ha contado las primeras, designando las cantidades diferentes y sucesivas que obtenga por los mismos nombres. Solamente, para no olvidar que las naranjas nuevamente sacadas se agregan á un monton ya contado de diez, del cual vienen á aumentar cada vez la cantidad, tendrá buen cuidado, al repetir esos mismos nombres, de hacerles preceder por la palabra DIEZ que expresa la cantidad del grupo que sirve de punto de partida á su nueva cuenta. Dirá pues á la primera: DIEZ *y una;* á la segunda: DIEZ *y dos;* á la tercera: DIEZ *y tres* y así sucesivamente: DIEZ *y cuatro*, DIEZ *y cinco*, DIEZ *y seis*, DIEZ *y siete*, DIEZ *y ocho*, DIEZ *y nueve*, DIEZ *y diez*, ó lo que será lo mismo: DOS-DIEZES. Habrá así expresado con perfecta claridad, para él y para los otros, las cantidades diferentes á las cuales su monton haya sucesivamente alcanzado.

Hecho esto, volverá á empezar de la misma manera, partiendo de DOS-DIEZES que enunciará siempre, seguido de las mismas palabras en el mismo órden y diciendo: DOS-DIEZES *y uno*, DOS-DIEZES *y dos*, DOS-DIEZES *y tres*, DOS-DIEZES *y cuatro*.................. hasta TRES-DIEZES.

Así mismo irá de TRES-DIEZES á CUATRO-DIEZES, de CUATRO-DIEZES á CINCO-DIEZES, de CINCO-DIEZES á SEIS-DIEZES y seguidamente hasta DIEZ-DIEZES. Hélo aquí llegado á contar hasta aquella cantidad que nosotros llamamos CIEN, con diez palabras solamente, sin forjar ningun vocablo, sin aprender ninguno.

Paremos con él en este punto y reflexionemos un poco sobre lo que ha hecho ese hombre ignorante y bárbaro. Veremos que ese procedimiento tan sencillo y tan claro, que el buen sentido mas vulgar lo hubiera sugerido á cualquiera, es justamente, salvo algunas diferencias insignificantes, el que empleamos y que todas las naciones civilizadas han adoptado para contar hasta *cien* cualquiera clase de cosas; que ha sido sugerido á los hombres por una dificultad, sentida mas bien que entendida, semejante á aquella que ha conducido nuestro salvaje á inventarlo; y en fin que encierra el principio fundamental de la *numeracion hablada*, tal cual lo enseña la mas profunda Aritmética.

Ha sido probablemente en unas épocas en que el mundo estaba todavía en la barbarie, es decir en la infancia, y cuya historia no sabemos, pero cuyas circunstancias podemos representarnos por conjeturas plausibles, cuando se ha empezado á contar. Se habrá puesto primeramente nombres arbitrariamente elegidos, como todos los demas que componen los idiomas, á las primeras cantidades que los hombres aprendieron á distinguir. Estos nombres son ahora en español: *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*. Pero ¿se hubiera podido seguir así inventando siempre nuevos nombres para las cantidades nuevas que se alcanzaba á distinguir, arriba de diez? Es evidente que no.

A cualquiera cantidad, por mas crecida que sea, se puede siempre agregar *uno*, y formar así una cantidad superior, de suerte que la serie de los números posibles no tiene fin. Si hubiese sido preciso dar á cada uno un nombre propio, diferente de los nombres de los demas, por una parte no se hubiera podido inventarlos; las articulaciones distintas que se puede imprimir al sonido emitido por la voz con la lengua, los dientes y los labios, no son en número infinito y se hubieran agotado antes de llegar á contar así hasta *cien mil*. Por otra parte, inventados esos nombres, no hubiera sido posible retenerlos; la vida de un hombre apenas habria sido suficiente para aprender de memoria la serie infinita de los adjetivos numerales, y su vocabulario solo habria llenado, no digo volúmenes, sino bibliotecas. Posible era sin duda ir mas allá de diez y hallar algunas otras palabras para algunas de las cantidades subsiguientes; pero siempre llegaria un término allende del cual los vocablos faltarian, y mejor era parar antes de multiplicar con exceso el número de los vocablos, que la memoria los hubiera fácilmente confundido.

Es de creer que si han parado en la cantidad *diez*, mas bien que en cualquiera otra, es porque los dedos de las dos manos, que han debido servir mucho á los hombres primitivos, como sirven hoy dia á los niños pequeños para efectuar sus sencillos cálculos, alcanzan justamente al número *diez*. Efectivamente, todo se debia hacer entonces por una impulsion espontánea y por instinto mas bien que por reflexion. Habrá sucedido en esto lo que en la creacion de los idiomas, que tienen conjugaciones muy regulares que se creeria son arregladas al propósito por un congreso de sabios, mientras se han hecho tales como son por sí solas. Los gramáticos han venido en seguida para pulir la obra y explicar el resultado; pero lo han hallado establecido. Así mismo la Aritmética de los matemáticos de profesion ha encontrado la numeracion inventada, y no han hecho mas que exponer con órden las reglas practicadas largo tiempo antes de haber sido entendidas.

Dicho esto de paso, hablaremos ahora como los sabios, y sentenciaremos así: habiendo llegado, en la numeracion hablada, hasta la cantidad expresada por la palabra *diez*, se conviene en considerar este grupo de unidades como una unidad nueva y facticia, á la cual se dará el nombre de DECENA ó *unidad de segundo órden*, y en contar las decenas como se han contado las *unidades sencillas*, desde una hasta diez, sin poner nombres nuevos y desconocidos á los diferentes grupos de decenas. Aquellos que hemos supuesto empleaba nuestro hombre salvage habrian sido muy suficientes y venian muy bien al caso. Es para abreviar que se ha sustituido á las palabras *dos-diezes*, *tres-diezes*, *cuatro-diezes*........ los vocablos mas cortos VEINTE, TREINTA, CUARENTA........ etc........ Estos no eran necesarios y á no ser la costumbre arraigada que tenemos de emplearlos, los de invencion india eran mas significativos y mas claros.

Era muy natural tambien, despues de hecha esta primera convencion, pasar de una decena á dos decenas, de dos decenas á tres decenas........ etc........ enunciando primeramente el nombre de cada grupo de decenas y en seguida, para expresar las cantidades intermedias, los nombres de los diferentes grupos de unidades sencillas que pudieren agregarse, sin cambiarlos en nada y contentándose con interponer la conjuncion *y*, diciendo por ejemplo: *veinte y dos*, *treinta y tres*, *sesenta y cinco*........ etc........ Esta es efectivamente la regla que se sigue, salvo una excepcion sin importancia: las cinco primeras cantidades que siguen á diez han recibido un nombre abreviado, que no era tan necesario ponerles; se dice *once* en lugar de *diez y uno*, *doce* en lugar de *diez y dos*, *trece* en lugar de *diez y tres*, *catorce* en lugar de *diez y cuatro*, *quince* en lugar de *diez y cinco*. Mas allá de este término, la regla general vuelve á imperar hasta *cien*.

Hemos dejado á nuestro Indio en la cantidad CIEN, que él llamaba DIEZ-DIEZES. Podia ir mas adelante, y despues de haber hecho un primer monton de diez-diezes, hacer otro igual por el mismo procedimiento; entonces, al conjunto de estos dos montones, hubiera dado el nombre de DOS *diez-diezes*. En seguida, habiendo formado otro tercero igual á los dos primeros, los hubiera reunido bajo la denominacion de TRES *diez-diezes*; y continuando así, habria llegado sin tropiezo á diez montones de diez-diezes cada uno, á cuyo conjunto habria dado en fin el nombre de *diez diez-diezes.* Pero su lenguage ya se va embrollando por la repeticion de las mismas palabras así asociadas. Para designar por ejemplo la cantidad que nosotros llamamos *setecientos treinta y cinco*, tendria él que emplear este modo de hablar largo y oscuro : *siete diez-diezes y tres diezes y cinco.* Los hombres, que tienen por naturaleza el instinto de la simplicidad y de la analogía, han sentido este inconveniente; y obedeciendo á esa aspiracion de regularidad que los guia en muchas cosas, han hecho como si hubiesen tenido presente el raciocinio siguiente, que probablemente ha pasado en sus mentes sin que lo atendiesen ni tuviesen de él una conciencia clara:

Puesto que de diez unidades sencillas hemos formado ya una unidad nueva, la decena, de diez decenas formemos semejantemente otra nueva unidad, á la cual daremos un nombre tambien nuevo, el de *ciento* ó *centena.* Luego reuniremos las centenas por grupos y las numeraremos así como hemos numerado las decenas y las unidades, diciendo sin otra novedad en el lenguage : DOS *cientos*, TRES *cientos*, CUATRO *cientos*............hasta DIEZ *cientos*. En cuanto á las cantidades intermedias desde un ciento hasta dos cientos y desde dos cientos hasta tres cientos, se expresarán con los nombres asignados á los diferentes grupos de centenas enunciados en primer lugar y seguidos de aquellos que han servido ya para contar desde *uno* hasta *cien*. Se dirá por ejemplo : *ciento cincuenta y uno*, *trescientos veintidos*, *seiscientos sesenta y cuatro*.......... etc..........

Llegando á DIEZ *cientos*, la misma razon de analogía, el mismo instinto dominante de regularidad, el mismo raciocinio implícito impulsaban imperiosamente á eso mismo que aconseja la reflexion, esto es á formar una nueva unidad de cuarto órden, el MIL ó MILLAR y á contar los millares así como las centenas, las decenas y las unidades: DOS *mil*, TRES *mil*, CUATRO *mil*............ hasta DIEZ *mil*. Aquí otra vez, y siempre por los mismos motivos, otra unidad nueva, de quinto órden, la DECENA DE MILLAR, que ni tiene nombre propio, así como la siguiente unidad facticia de sesto órden, la CENTENA DE MILLAR, de la que diez reunidas forman por su conjunto una unidad superior, de séptimo órden, el MILLON. Del millon, conforme siempre á la misma regla y ley, se va á la DECENA DE MILLON, á la CENTENA DE MILLON, al MILLAR DE MILLON, á la DECENA DE MILLAR DE MILLON, á la CENTENA DE MILLAR DE MILLON y al BILLON. Del billon al TRILLON, y del trillon al CUATRILLON.................etc................. hay el mismo camino que del millon al billon y se recorre del mismo modo.

Así es que con algunas pocas palabras, que no son todas indispensables, se ha llegado á nombrar con claridad y á distinguir perfectamente entre sí en el lenguage, sin omitir ninguna cantidad intermedia, números ya tan crecidos que exceden en mucho el límite de nuestras necesidades ordinarias, y esto se ha hecho casi por sí solo; el inventor de este hermoso sistema tan bien arreglado, de este método tan cómodo y tan sencillo de expresar sin confusion el número infinito de las cantidades posibles, nadie es, sino todo el mundo; por lo tanto, todo el mundo lo ha aceptado.

Antes de presentar de todo esto un resúmen corto y conciso, hagamos una advertencia última que contribuirá á esclarecer lo expuesto. En la numeracion de los primeros grupos de unidades que se forman por adicion de un objeto á otro y de otro mas al grupo ya formado, y así sucesivamente, y en la invencion de los nombres que se han adoptado para expresar la cantidad de los primeros grupos, han parado en diez. Es lo que se significa, diciendo que la *base* de nuestro *sistema* de numeracion es diez ó que este sistema es el *sistema decimal*. Pero ya hemos reparado que se hubiera podido ir mas allá, v. g. hasta *quince* ó parar antes, v. g. en *cinco*. En este último caso, el sistema de numeracion hubiera sido el *sistema quinquenal*; se hubiera contado á los grupos que vienen en seguida de cinco, diciendo: CINCO *y uno*, CINCO *y dos*, CINCO *y tres*, CINCO *y cuatro*, DOS-CINCOS; se hubiera ido del mismo modo de dos-cincos á TRES-CINCOS, de trescincos á CUATRO-CINCOS, de cuatro-cincos á CINCO-CINCOS que se hubiera podido llamar CIEN y hubiera expresado lo que llamamos *veinticinco*. Cinco de estas centenas de nueva laya hubieran formado la unidad de cuarto órden á la cual se podia poner el nombre de *millar* y que equivaldria á cinco veces veinticinco ó á *ciento-veinticinco*, y así sucesivamente.

En el caso de elegirse por base la cantidad *quince*, tendriamos el *sistema quindecimal*. Despues de quince, se diria: QUINCE *y uno*, QUINCE *y dos*..................etc.................. hasta DOS *quinces*. Llegando así con regularidad á QUINCE-QUINCES, se diria CIEN en donde nosotros decimos *doscientos veinti-cinco*. La palabra *millar* hubiera sido aplicada á la reunion de quince centenas, equivalentes cada una á doscientas veinti-cinco unidades sencillas y hubiera designado por consiguiente la cantidad que actualmente se llama *tres mil trescientos veinticinco*; y así en los demas casos.

Habria así una multitud de sistemas de numeracion posibles. Entre todos ellos ¿cuál era el mejor? La costumbre que tenemos de usar el sistema decimal lo haria preferible para nosotros á cualquier otro, en todo caso. Pero tal vez que examinándolo con imparcialidad, fuéramos aun de este modo conducidos á reconocer que este sistema es muy adecuado á la medida de nuestras facultades y á la fuerza de nuestra memoria, de manera que en la eleccion misma de la base, así como en la institucion de las reglas, se dejaria vislumbrar esa sabiduría instintiva, esa rectitud natural que parece haber presidido á todos los actos espontáneos de las edades primitivas de la humanidad.

Ahora, reasumamos toda esta explicacion:

La cantidad de la cosa que se halla sola se expresa por la palabra UNO. La de los grupos sucesivos que se forman agregando á este objeto otro de la misma clase, y despues al grupo formado otro mas, y así seguidamente, se expresa por las palabras DOS, TRES, CUATRO, CINCO, SEIS, SIETE, OCHO, NUEVE, DIEZ.

El grupo de diez se mira como una nueva unidad. llamada DECENA, y los grupos de decenas se cuentan como los grupos de unidades sencillas, empleando los mismos nombres seguidos de la palabra DIEZ ó las abre-

viaciones que han reemplazado en el uso esas denominaciones complejas, es á saber: VEINTE (por dos-diezes), TREINTA (por tres-diezes), CUARENTA (por cuatro-diezes, CINCUENTA (por cinco-diezes), SESENTA (por seis-diezes), SETENTA (por siete-diezes), OCHENTA (por ocho-diezes), NOVENTA (por nueve-diezes), CIEN (por diez-diezes).

Las cantidades intermedias entre dos grupos sucesivos de decenas se expresan enunciando á continuacion del nombre propio de cada grupo de decenas el del grupo de unidades sencillas que le está agregado é interponiendo la conjuncion *y*; ejemplo: *treinta y tres*, *sesenta y siete*, *cuarenta y nueve*.

El grupo de diez decenas ó CIEN se considera á su vez como una nueva unidad la CENTENA y se cuentan los grupos de centenas como se han contado los de unidades sencillas y de decenas, diciendo: DOSCIENTOS, TRESCIENTOS, CUATROCIENTOS.............etc...........hasta DIEZ-CIENTOS, que forman otra vez una nueva unidad con el nombre de MIL ó MILLAR.

Del mismo modo diez-millares forman la unidad siguiente, la DECENA DE MILLAR, que no tiene nombre propio, y diez decenas de millar la CENTENA DE MILLAR, tambien sin nombre propio, y diez centenas de millar el MILLON. Del millon se va al BILLON, pasando ordenadamente por la decena de millon, la centena de millon, el millar de millon, la decena de millar de millon, la centena de millar de millon. Así mismo y pasando por los mismos intermedios se pasa del billon al TRILLON, del trillon al QUATRILLON, del quatrillon al QUINTILLON, del quintillon al SEXTILLON..................etc...................

Las unidades naturales y sus grupos son lo que se llama UNIDADES SENCILLAS y grupos de unidades sencillas.

La primera unidad artificial, la decena,
es la unidad de..segundo órden.
La centena, de..tercer órden.
El millar, de..cuarto órden.
La decena de millar, de..quinto órden.
La centena de millar, de..sesto órden.
El millar, de..séptimo órden.
Las unidades siguientes se clasifican de un modo análogo.

Toda cantidad, compuesta por la reunion de un número cualquiera de unidades de diferentes órdenes se enuncia expresando primeramente las unidades del mas alto órden y siguiendo para las otras su órden de magnitud decreciente, hasta las mas pequeñas. Si en una cantidad falta un órden cualquiera de unidades, de aquellos que componen la serie natural desde el mas elevado hasta las unidades sencillas, solo se suprimen los nombres de los órdenes ausentes.

En la enunciacion de una cantidad que pase de tres órdenes, se acostumbra reunir las centenas, decenas y unidades de millar en un solo grupo, del cual el nombre *mil* se pronuncia una sola vez y al fin de la enunciacion del grupo, diciendo por ejemplo: *doscientos cincuenta y tres mil* en lugar de: *doscientos mil, cincuenta mil y tres mil.*

Así mismo, en la enunciacion de un número que tenga mas de seis órdenes de unidades, se reune á las centenas de millar, decenas de millar, unidades de millar, centenas, decenas y unidades de millon en una sola enunciacion, emitiendo una sola vez la palabra *millon* al fin de la enunciacion del grupo.

§ III.

NUMERACION ESCRÍTA.

Acabamos de aprender como se pueden expresar verbalmente todas las cantidades posibles.

Pero, no es suficiente saber expresar de viva voz la cantidad de las cosas; es preciso que aprendamos tambien á anotarla por escrito. Sin eso ¿cómo alcanzaríamos á conservar el recuerdo de tantas cantidades que nos interesa no olvidarlas? ¿Cómo podríamos trasmitir á otros, á la distancia, lo que nos conviene comunicarles del valor numérico de mil objetos diferentes? Ademas, tendríamos que efectuar de memoria todos los cálculos, lo que es trabajoso é inseguro, aun cuando son sencillos, y se hace imposible cuando son algo complicados. Tratemos pues de inventar un modo fácil de representar las cantidades con signos que se pinten en el papel; tal es el objeto de la *numeracion escrita*.

La escritura comun no nos puede servir en este caso; una sola cantidad algo crecida ocuparia, escrita en letras, todo un renglon y á veces dos, y las letras tienen otro inconveniente mas grande: el de representar solamente el sonido de las palabras que expresan los números y no los números mismos. Mejor será buscar unos signos que nos pinten directamente y nos manifiesten á la simple vista el valor de las cantidades apuntadas, sin obligarnos á hacer una traduccion, pasando de la letra á la palabra y despues de la palabra á la cantidad que esta designa.

A esta condicion satisfacen perfectamente los nueve signos ó *cifras* inventados desde los tiempos mas remotos y usados ahora en todas las naciones civilizadas para representar ó pintar las nueve primeras cantidades formadas de unidades sencillas.

Son las siguientes:

1 2 3 4 5 6 7 8 9
uno - dos - tres - cuatro - cinco - seis - siete - ocho - nueve.

Ahora ¿seguiremos así inventando un signo nuevo y distinto para cada cantidad nueva que quiéramos escribir? Entonces, habria tantas cifras diferentes como cantidades numerables hay, esto es un número infinito. Inventarlas, no seria fácil; aprender á conocer y á pintarlas seria el trabajo de toda la vida. Nos encontramos aquí pues con la misma dificultad que tocamos en la invencion de la numeracion hablada; pero la solucion adoptada entonces nos facilitará sobre manera la que buscamos ahora.

Efectivamente, segun nuestro sistema de numeracion hablada, por mas abultada que sea una cantidad, el número de unidades de cualquier órden que la forma por sí solo ó que concurre juntamente con otras de órden diferente á formarla, nunca pasa de *nueve*, puesto que una unidad mas de cierto órden, agregada á nueve que ya se tengan del mismo órden, completa una unidad del órden superior. Luego las nueve cifras ya inventadas para representar todos los grupos posibles de unidades sencillas pueden servirnos igualmente para representar todos los grupos posibles de decenas, de centenas, de millares.......... etc.................. con la sola condicion de agregarles alguna señal distintiva que sin alterarlas, nos manifieste el órden de unidades que representen en cada caso.

Veamos pues como hallar algun medio de distincion que sea claro. Uno ocurre muy naturalmente y es hacer variar el tamaño de las cifras como varie el grandor de las unidades que representen. Si por ejemplo pintamos los grupos de unidades sencillas por las cifras pequeñas del renglon que sigue:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

emplearemos, para pintar los grupos correspondientes de decenas, las mismas cifras, pero de doble tamaño:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cuando sean grupos de centenas, el tamaño de las cifras será triple del primero:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

y así sucesivamente. En este sistema de numeracion escrita, la cantidad dictada verbalmente *tres mil cuatrocientos cincuenta y siete*, por ejemplo, se escribiria así:

3457,

y la cantidad escrita

4935

se leeria *cuatro mil novecientos treinta y cinco*.

El principal inconveniente de este metodo, que proponemos solamente como posible para hacer resaltar mejor la superioridad del que se emplea efectivamente, es que esta variacion de tamaño no puede sujetarse á una regla bien fija, sobre todo en los apuntes escritos de mano. Aquel que tenga la letra grande escribirá *tres* (3) como otro que tenga la letra diminuta escribiria *treinta* ó *trescientos*. Habrá siempre duda y muchas veces equivocacion.

Podríamos tambien recurrir á la escritura comun y combinando su empleo con el de las cifras anotar á la derecha y un poco arriba de cada cifra, con letras y en abreviatura, el órden de unidades que represente. Así por ejemplo, $6^{\text{dec.}}$ se leeria: *seis decenas*; $7^{\text{mil.}}$ representaria *siete millares*; $8^{\text{cent.}}$ *ochocientos*; $4^{\text{mill.}}$ *cuatro millones*, y así de los otros órdenes. Adoptada esta regla, la cantidad dictada: *dos millones setecientos cuarenta mil treinta y siete* se escribiria:

$2^{\text{mill.}}\ 7^{\text{cent. mil.}}\ 4^{\text{dec. mil.}}\ 3^{\text{dec.}}\ 7^{\text{u.}}$

y la cantidad escrita:

$8^{\text{cent. mil.}}\ 5^{\text{dec. mil.}}\ 9^{\text{mil.}}\ 3^{\text{cent.}}\ 3^{\text{dec.}}\ 8^{\text{u.}}$

se leeria: *ochocientos cincuenta y nueve mil trescientos treinta y ocho.*

Pero este empleo de las letras es todavía muy trabajoso y puede ser simplificado con preparar el papel destinado á escribir las cantidades del modo que vamos á manifestar.

Divídase el papel por una serie de rayas en columnas derechas é iguales; apúntese de una vez con letras arriba de las columnas el órden de unidades que se anotará en cada una de ellas, creciendo su magnitud de derecha á izquierda, de modo que las de órden inferior ó unidades sencillas se hallen colocadas en la última columna de la derecha, como se vé en el cuadro adjunto.

ÓRDENES DE UNIDADES								
Etc........	8º	7º	6º	5º	4º	3º	2º	1er
Etc..........etc...........	Decenas de millon	Millones	Centenas de millar	Decenas de millar	Millares	Centenas	Decenas	Unidades sencillas
	7	4	3		2	1	9	7
		4	2	4	0	2	6	
	2		3	7	8	2	1	3
		7	4		2	8	6	1

Asi dispuesto el papel, no hay cantidad dictada que no pueda escribirse con facilidad, ó escrita leerse corrientemente. Todo se reduce en la escritura de una cantidad á pintar la cifra que expresa el número de unidades de cada órden en la columna encabezada por el nombre de las unidades de este órden y á colocar todas estas cifras en un mismo renglon transversal; en la lectura, á pronunciar sucesivamente los nombres de los números representados por cada cifra de un mismo renglon, agregando luego la palabra que encabeza la columna y principiando por la izquierda como es costumbre tanto en la escritura como en la enunciacion verbal de las cantidades.

Por ejemplo, las cantidades que supondremos dictadas: *setenta y cuatro millones trescientos dos mil ciento noventa y siete* y *cuatro millones doscientos cuarenta y nueve mil doscientos sesenta*, estan escritas en los dos renglones superiores del cuadro.

Por otra parte, las cantidades que ocupan los dos renglones inferiores se leerán: *veinte millones trescientos setenta y ocho mil doscientos y trece* y *siete millones cuatrocientos dos mil ochocientos sesenta y uno.*

Ahora, todo este aparato de rayas, columnas y rótulos, muy útil para los niños principiantes (*) que recien aprenden á cifrar, se volveria pronto un estorbo, por la necesidad en que nos pondria de tener siempre á la mano un cuadro en blanco. Pero no tardará en llegar el tiempo en que puedan despreciar este auxilio. Con la práctica, el cuadro con sus rayas y títulos se grabará en la memoria; ya lo verán mentalmente, aunque no esté materialmente pintado, y podrán apuntar las cifras de cada órden en su lugar antes marcado por las columnas, ya borradas. Entonces, el rango solo que ocupe cada cifra en su renglon nos indicará bastante el valor de las unidades representadas por ella, sin necesidad de diferencia en el tamaño ni de letras añadidas. Para leer una cantidad escrita no tendremos mas que contar de derecha á izquierda las cifras de que conste y sabremos luego el nombre de las

(*) Es efectivamente nuestra opinion que en las escuelas primarias, se deberia tener pizarras y papeles alistados del modo que acabamos de manifestar y que este seria el método mas pronto y mas racional para enseñar á los principiantes la práctica de la numeracion escrita.

unidades representadas por la última á la izquierda y por consiguiente el de las siguientes á la derecha. Para escribir una cantidad dictada, bastará pintar al rango que le estaba asignado en el cuadro la cifra de las unidades de cada órden que contenga la cantidad total.

Falta solamente que salvar un inconveniente. Cuando las cantidades estaban escritas en el cuadro rayado, la falta de algunos órdenes de unidades estaba bastante significada por el vacío de las columnas correspondientes y cada una de las cifras escritas conservaba su rango, claramente señalado. Suprimidas las columnas, los claros ya pueden tener una significacion engañosa; una sola cantidad, con un intervalo vacío, aparece como dos cantidades separadas, y no se vé si son dos ó una. Puede dudarse tambien, no estando bien medido el espacio vacío, si falta solamente un órden ó dos consecutivos. En fin y sobre todo, en el caso que sean las unidades de órden inferior las que falten, hasta las unidades sencillas inclusive, nada hay que señale esta falta, y las unidades de órden superior no tienen su verdadero lugar. Para obviar á esto es que se emplea un signo particular, el *cero*, que se pinta así : 0, cifra sin valor ninguno por sí misma, pero indispensable para conservar á las otras su rango, del cual depende su valor, llenando todos los sitios que deje desocupados. Así es que borrados los delineamentos del cuadro, las cantidades anteriormente apuntadas en sus columnas se escribirán del modo siguiente, cuya claridad ya no deja nada que desear :

74302197 — 4249260
20378213 — 7402861

Reasumiéndolo todo, diremos :

Las cantidades de unidades sencillas que se expresan por las palabras :

Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, se representan en la escritura, tanto impresa como manuscrita por los signos ó *cifras*:

1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Las cantidades compuestas por la reunion de varios números de unidades de diferentes órdenes se representan en la escritura con los mismos signos, que se disponen en un mismo renglon horizontal, de modo que la primera cifra á la izquierda represente el número de unidades de la clase mas elevada que contenga la cantidad total que se trata de escribir, la última cifra á la derecha el número de unidades que haya de la menor especie ó las unidades sencillas, y las cifras intermedias el número de unidades de los órdenes intermedios en su órden de magnitud decreciente de izquierda á derecha.

Si falta en la enunciacion de una cantidad cualquiera algun órden de unidades de aquellos que componen la serie natural desde el órden mas alto que contenga hasta las unidades sencillas, se coloca en lugar del órden que falta el signo 0, que se llama *cero*, pero no se pronuncia jamas en la lectura de los números.

Se sigue de ahí que la última cifra á la derecha de una cantidad escrita expresa las unidades sencillas, ó su ausencia si es un cero; la primera á la izquierda de esta, las decenas, ó su ausencia si es un cero; la tercera siempre de derecha á izquierda las centenas; la cuarta los millares, la quinta las decenas de millar, la sesta las centenas de millar, la séptima los millones, y así sucesivamente; y en general que una cifra escrita á la izquierda de otra representa unidades del órden inmediatamente superior ó diez veces mayores, y á la derecha unidades del órden inmediatamente inferior ó diez veces menores.

Para escribir una cantidad dictada, como aquel que la dicta enuncia sus partes en el órden mismo en el que deben ser escritas, no hay sino que anotar á medida que las enuncia las cifras que representan las cantidades de los diferentes órdenes de que se compone la cantidad dictada, teniendo solamente el cuidado de colocar el cero donde quiera que el silencio de la persona que dicta significa la ausencia de uno ó de varios órdenes de unidades.

Esto es muy fácil cuando la cantidad dictada no tiene mas de tres cifras. Si tiene mas de tres, sin exceder de seis, se escribe primeramente el grupo de los millares como si fuera un número de tres cifras ó de menos, y callándose el que dicta despues de la palabra *mil*, se agregan tres ceros. Si la cantidad dictada pasa de seis cifras, sin exceder de doce, se escribe el grupo de los millones del mismo modo que se escribiria un número de seis cifras ó de menos, y callándose el que dicta despues de la palabra *millones*, se agregan seis ceros, y así sucesivamente.

Para leer una cantidad escrita, se enuncia primeramente el número de unidades de la mayor clase dándole su nombre, y sucesivamente los nombres de las unidades de las clases inferiores con su nombre hasta las unidades sencillas.

Como las centenas y las decenas de millar no tienen nombre propio, se reune en una sola enunciacion el número de centenas, decenas y unidades de millar que pueda contener la cantidad escrita, y no se hace oir la palabra *mil* sino una sola vez despues de haber enunciado la cantidad total que forma este grupo de tres cifras.

Así mismo, como las decenas, centenas, millares, decenas de millar y centenas de millar de millon tampoco tienen nombre especial, se reune tambien en una sola enunciacion la cantidad de millones que haya, y se pronuncia en seguida, una sola vez, la palabra *millon.*

Para facilitar este modo de descifrar, es bueno dividir la cantidad escrita, si es algo crecida, en grupos sucesivos de tres cifras cada uno, partiendo de la derecha, sea mentalmente sea por un punto que se marca entre medio de cada par de grupos. Entonces, si la cantidad pasa de tres cifras y no pasa de seis, se lee primeramente el grupo de la izquierda como si fuera de unidades sencillas y se agrega la palabra *mil;* si pasa de seis cifras, sin pasar de doce, se lee primeramente los dos últimos grupos á la izquierda como si fuera un número de seis cifras, y se hace seguir la palabra *millon;* si pasa de doce cifras, sin pasar de diez y ocho, se sigue la misma regla y se agrega la palabra *billon*.................etc..................

El sistema de numeracion escrita que acabamos de exponer es hoy el que usan todas las naciones civilizadas del mundo. Se dá el nombre de *cifras árabes* á los signos con que se pintan los números en este sistema. Pero parece probable que son originarios de la India. Traidos á Europa por los Arabes, empezaron á ser aceptados en el siglo XIII, primeramente en Inglaterra, despues en Italia; la Alemania los recibió en el siglo XIV y la Francia al fin del siglo XV; su figura acabó por ser uniforme desde 1534, y desde entonces todos los sistemas de numeracion antiguos quedaron olvidados. Sin embargo, el que empleaban los Romanos es todavia generalmente conocido y se usa en ciertas ocasiones, por exemplo para expresar en la escritura, sea impresa, sea manuscrita, el año ó el siglo de un acontecimiento histórico; en un libro dividido en capítulos, el número de cada seccion; en los cuadrantes de los relojes, las horas del dia.................etc.................. Será útil por consiguiente que demos de la numeracion escrita Romana una ligera exposicion.

Las cifras romanas no son otra cosa que ciertas letras del alfabeto, á saber: I que vale *uno*, V que vale *cinco*, X que vale *diez*, L que vale *cincuenta*, C que vale *cien*, D que vale *quinientos*, y M que vale *mil*.

Los números *uno*, *dos*, *tres* se escriben I, II, III; el número *cuatro* podria escribirse IIII; pero para evitar de escribir cuatro veces seguidas la misma letra, se ha convenido que la letra I colocada á la izquierda de la letra V disminuiria en una unidad el valor de esta, de modo que IV vale *cinco* menos *uno* ó *cuatro*; el número *cinco* se escribe V.

Los números *seis*, *siete*, *ocho* se escriben VI, VII, VIII, es decir *cinco y uno*, *cinco y dos*, *cinco y tres*. Para escribir el número *nueve*. se ha convenido que la letra I colocada á la izquierda de la letra X disminuiria el valor de esta en una unidad, de modo que IX vale *diez* menos *uno* ó *nueve*.

Se ha convenido del mismo modo que la letra X colocada á la izquierda de las letras L y C disminuiria en una decena el valor de estas, de manera que las decenas se escriben:

X *diez*.
XX *veinte*.
XXX *treinta*.
XL *cuarenta* (ó *cincuenta* menos *diez*).
L *cincuenta*.
LX *sesenta* (ó *cincuenta* y *diez*).
LXX *setenta*.
LXXX *ochenta*.
XC *noventa* (ó *cien* menos *diez*).

Para escribir las cantidades compuestas de decenas y de unidades, se colocan las letras que representan las unidades á la derecha de las que representan las decenas.

Así, las cantidades: *doce*, *veinticuatro*, *cuarenta y cinco*, *ochenta y siete* se escriben:

XII, XXIX, XLV, LXXXVII.

Se ha convenido tambien que la letra C colocada á la izquierda de las letras D y M, disminuiria en una centena el valor de estas, de manera que las centenas se escriben:

C *cien*.
CC *doscientos*.
CCC *trescientos*.
CD *cuatrocientos* (ó *quinientos* menos *cien*).
D *quinientos*.
DC *seiscientos* (ó *quinientos* mas *cien*).
DCC *setecientos*.
DCCC *ochocientos*.
CM *novecientos* (ó *mil* menos *cien*).

Para escribir las cantidades compuestas de centenas, de decenas y de unidades, se escribe sucesivamente caminando de izquierda á derecha las letras que representan las centenas, las que representan las decenas, y en fin las que representan las unidades. Así la cantidad *trescientos sesenta y siete* se escribe: CCCLXVII; y la cantidad *ochocientos noventa y cuatro* DCCCXCIV.

Para escribir las cantidades mayores que mil, se considera el millar como una nueva unidad principal; y se escriben los millares así como las unidades, con esta sola diferencia que se tira una raya horizontal arriba del número que las representa. Así, *treinta mil*, *setecientos mil* se escriben: $\overline{\text{XXX}}$, $\overline{\text{DCC}}$. Sinembargo *mil*, *dos mil*, *tres mil* se escriben M, MM, MMM.

Para escribir una cantidad compuesta de millares, de centenas, de decenas y de unidades, se coloca á continuacion unas de otras las letras que representan los millares, las centenas, las decenas y las unidades. Así, para escribir *seiscientos cuarenta y siete mil y ochocientos setenta y seis*, se pondria: DCXLVII, y DCCCLXXVI.

Pero raras veces se tiene que escribir en cifras romanas cantidades tan crecidas.

La fecha del año *mil ochocientos sesenta y cuatro* se pinta así: MDCCCLXIV.

Para leer un número escrito en cifras romanas, se le descompone en millares, centenas, decenas y unidades. Así el número MDCXLVII se descompone en un millar M, seis centenas DC, cuatro decenas XL y siete unidades VII. Se enuncia por consiguiente: *mil seiscientos cuarenta y siete*. Por lo mismo, la cantidad DCCCLXXV, se descompondrá en ocho centenas DCCC, siete decenas LXX y cinco unidades V, y se enunciará: *ochocientos setenta y cinco*.

Para escribir con cifras árabes un número escrito con cifras romanas, ó para escribir con cifras romanas un número escrito con cifras árabes, basta enunciar el número propuesto en idioma ordinario antes de pasar de una numeracion á otra.

§ IV.

SUMA Ó ADICION.

Un cocinero encargado de proveer al consumo diario de una mesa dá cuenta á su patron, al fin del dia, de las diferentes compras que ha realizado, avisándole que ha gastado: para carne 17 pesos; para una gallina 9 $; para las legumbres 6 $; para pan 8 $; para manteca y grasa 5 $; para vinagre 4 $. El patron podria pagarle cada uno de estos gastos por separado. Pero le será ciertamente mas cómodo reunir todas estas cantidades en una sola, para abonar el todo juntamente y de una vez.

Muchos otros casos hay en los que puede tenerse que formar así una totalidad de varias cantidades distintas y separadas. Por ejemplo, los alumnos internos de un Colegio estan divididos en tres secciones: la de los grandes que comprende 67 de ellos, la de los chicos que se compone de 152, y otra de medianos que alcanza hasta 86. Hay ademas 112 alumnos externos. El Rector teniendo que pasar un informe del estado del Colegio necesita saber cuantos alumnos tiene por todo.

Hé aquí otro ejemplo en el que las cantidades que se deben reunir son mayores, sin que haya por eso la mas mínima diferencia en la cuestion propuesta. Un hombre que está por hacer edificar una casa, quiere calcular de antemano el número de ladrillos que debe mandar hacer. Precisa 72000 para el frente; 49500 para la pared del fondo; 27900 para las dos paredes laterales; 12400 para los pisos y 5600 para la azotea. ¿Cuántos son los que necesita por todo?

Todos estos pedidos y mil otros semejantes á que podemos tener que satisfacer á cada instante no difieren entre sí sino en cuanto á la clase de los objetos contados. En el fondo, son siempre unas cantidades separadas que se trata de agregar entre sí, formando de todas una cantidad única, que represente por sí sola el valor de todas las otras reunidas.

Para alcanzar este objeto, no es absolutamente indispensable ir á la escuela y haber estudiado la aritmética. Bastaria con rigor saber contar ó numerar, aunque no sea mas que verbalmente; y vamos á manifestar desde luego como podria acertar á ello un hombre cuya ciencia se limitaria estrictamente á la numeracion hablada.

Volvamos á nuestro primer ejemplo que es el mas sencillo. Tiene esto de particular que salvo la primera de las cantidades enunciadas 17, todas las demas son inferiores á diez. Pero un número que no pasa de 10 puede siempre representarse con los dedos de las dos manos, y es por eso que se dá muchas veces á esta clase de números el nombre de números *dígitos* (del latin *digitum*, dedo). Podremos pues valernos para resolver esta primera cuestion de nuestros dedos, con el auxilio de los cuales representaremos sucesivamente los diferentes números dígitos que tenemos que agregar á 17.

Tomando por punto de partida esta primera cantidad, abriremos desde luego 9 dedos, no conservando cerrado sino uno solo; despues los cerraremos uno por uno, teniendo el cuidado, cada vez que bajemos uno de los abiertos de enunciar, segun las reglas de la numeracion, la cantidad que resulte de la agregacion de una unidad mas al primer número dado ó á cada uno de aquellos que obtengamos así sucesivamente. Al primer dedo bajado diremos: *diez y ocho*, al segundo: *diez y nueve*, al tercero: *veinte*, y así hasta haber bajado todos los dedos, lo que nos avisará que la cantidad *nueve* ya está agregada del todo y que reunida á la primera *diez y siete* forma *veinte y seis* pesos.

Partiendo entonces de nuevo de *veinte y seis* y abriendo seis dedos, añadiremos del mismo modo á este primer resultado la tercera cantidad *seis*, lo que nos dará *treinta y dos*, despues la cuarta *ocho*, que nos conducirá á *cuarenta*, en seguida la quinta *cinco* y la sesta *cuatro*, y al cabo de estas operaciones sucesivas, tendremos el resultado final: *cuarenta y nueve*, que será el número pedido, sin que hayamos hecho otra cosa que contar ó numerar.

Con algun poco de memoria y de ejercicio, un hombre aunque sea muy ignorante, un niño aunque sea muy jóven llegarán bien pronto á poder desempeñarse sin el auxilio de los dedos. Las ocasiones de agregar así pequeñas cantidades entre sí ó á otras mayores son tan frecuentes, nacen tan naturalmente para los niños de sus juegos mismos, y es tan fácil suscitárselas, que al cabo de un tiempo muy corto los resultados variados de estas operaciones incesantemente repetidas se habrán grabado en la mente para siempre. Sabrán de memoria todos los números que pueden formar por su reunion dos números dígitos añadidos uno á otro ó un número dígito añadido á otro mayor, lo que es casi tan fácil como lo primero; y dirán sin vacilar, al solo oir enunciar las cantidades que se trate de reunir: 7 y 8 son 15; 12 y 6 son 18; 25 y 4 son 29..................etc.................. En la realidad, hay pocos niños que no sepan esto desde la edad de seis á siete años, y muchos lo saben antes. Los pocos que se crian ignorándolo lo aprenden rápidamente en la escuela, leyendo y volviendo á leer aquellas tablas en las que se acostumbra reunir, arreglados con órden, todos los modos posibles de agregar entre sí dos á dos los números hasta 10, v. g. en la forma siguiente:

TABLA DE SUMAR

1	y	1	son	2	2	y	1	son	3	3	y	1	son	4
»	»	2	»	3	»	»	2	»	4	»	»	2	»	5
»	»	3	»	4	»	»	3	»	5	»	»	3	»	6
»	»	4	»	5	»	»	4	»	6	»	»	4	»	7
»	»	5	»	6	»	»	5	»	7	»	»	5	»	8
»	»	6	»	7	»	»	6	»	8	»	»	6	»	9
»	»	7	»	8	»	»	7	»	9	»	»	7	»	10
»	»	8	»	9	»	»	8	»	10	»	»	8	»	11
»	»	9	»	10	»	»	9	»	11	»	»	9	»	12
»	»	10	»	11	»	»	10	»	12	»	»	10	»	13

4	y	1	son	5	5	y	1	son	6	6	y	1	son	7
»	»	2	»	6	»	»	2	»	7	»	»	2	»	8
»	»	3	»	7	»	»	3	»	8	»	»	3	»	9
»	»	4	»	8	»	»	4	»	9	»	»	4	»	10
»	»	5	»	9	»	»	5	»	10	»	»	5	»	11
»	»	6	»	10	»	»	6	»	11	»	»	6	»	12
»	»	7	»	11	»	»	7	»	12	»	»	7	»	13
»	»	8	»	12	»	»	8	»	13	»	»	8	»	14
»	»	9	»	13	»	»	9	»	14	»	»	9	»	15
»	»	10	»	14	»	»	10	»	15	»	»	10	»	16

7	y	1	son	8	8	y	1	son	9	9	y	1	son	10
»	»	2	»	9	»	»	2	»	10	»	»	2	»	11
»	»	3	»	10	»	»	3	»	11	»	»	3	»	12
»	»	4	»	11	»	»	4	»	12	»	»	4	»	13
»	»	5	»	12	»	»	5	»	13	»	»	5	»	14
»	»	6	»	13	»	»	6	»	14	»	»	6	»	15
»	»	7	»	14	»	»	7	»	15	»	»	7	»	16
»	»	8	»	15	»	»	8	»	16	»	»	8	»	17
»	»	9	»	16	»	»	9	»	17	»	»	9	»	18
»	»	10	»	17	»	»	10	»	18	»	»	10	»	19

Todo esto no es todavía una operacion de aritmética; no es sino la numeracion misma, aplicada á unos ejemplos muy sencillos, ya con el auxilio de los dedos, ya sin él. La numeracion suministra el resultado buscado; la memoria lo retiene y ahorra el recurrir mas tarde á la numeracion, cuando se vuelve á presentar el mismo caso.

Si llegamos ahora á los otros dos ejemplos ya citados ó á algun otro parecido, vamos á reconocer luego la imposibilidad de atenernos á este procedimiento tan sencillo. Tenemos que reunir en una sola cantidad equivalente á todos ellos los números siguientes de alumnos pertenecientes á las diferentes secciones de un Colegio: 67, 152, 86, 112. En primer lugar, los dedos no alcanzan á representar estas cantidades, puesto que pasan de diez; pero poco supone esto. Se podria fácilmente suplir los dedos, con emplear en su lugar piedritas ó granos de mais ó de trigo. Se formaria cuatro montones separados y bien contados, el primero de 67 granos, el segundo de 152, el tercero de 86, el cuarto de 112; en seguida, partiendo de 86 que es la cantidad total del primer monton (y por eso mismo podria dejarse de formar este), se le agregaria uno por uno todos los granos del segundo, contando así como se hacia antes con los dedos y diciendo: 87, 88, 89..................etc................. Acabado el segundo monton, se pasaria al tercero para agregar del mismo modo los granos de que conste á los dos primeros ya reunidos, y agregando por fin el cuarto monton á los tres primeros, se tendria el resultado definitivo, sin haber aun hecho uso sino de la pura y simple numeracion.

Pero esto es largo y fastidioso. ¿Qué será cuando en lugar de ser cuatro los números que se trate de agregar, alcanzen á ser veinte, treinta, cuarenta, y cuando en lugar de limitarse á las centenas contengan millares ó millones? Una sola operacion de esta clase ocuparia algunas semanas. Y no hay aquí que confiarse en la memoria para abreviar las operaciones futuras; las cantidades que se presenten pueden variar infinitamente, y los diferentes modos de reunirlas entre sí son innumerables. No puede haber libro bastante abultado para contenerlos apuntados; no hay memoria suficiente para conservarlos.

Es preciso, pues, que nos busquemos algun recurso, algun ardid, si se puede decir así, para salir de esta dificultad. El procedimiento cuyo principio y cuyas reglas vamos á exponer y á justificar merecerá el nombre de operacion aritmética, porque ya será distinto de la simple numeracion, aunque por lo antes dicho no ha de ser sino un método mas corto y mas fácil de llegar al mismo fin, y se podria mirar como una *numeracion simplificada.* Se le dá el nombre de *suma ó adicion;* las cantidades que se agregan se llaman para abreviar: *sumandos*, y el resultado: *suma ó suma total ó* simplemente *total.*

Cuando uno no puede saltar un riachuelo de un solo brinco, echa algunas piedras cercanas unas á otras y pasa sobre ellas de una orilla á la opuesta en varios trancos. Es poco mas ó menos lo que vamos á hacer para sumar nuestros cuatro números; no pudiendo efectuarlo de una vez, dividiremos la operacion total en varias operaciones parciales, cuyos resultados procuraremos en seguida reunir. Acordémonos para esto, por una parte, que sabemos sumar números dígitos, y por otra, que cualquiera cantidad, por mas crecida que sea y aun cuando excediese en mucho á los sumandos de nuestro ejemplo, se compone siempre al fin de unidades de diferentes órdenes cuyo número, en cada órden, no pasa jamas de nueve. Agreguemos pues separada y sucesivamente las unidades de cada órden, primeramente las unidades sencillas, en seguida las decenas, despues las centenas.........etc..........; apuntemos á medida que los obtengamos los resultados de estas sumas parciales, observando las reglas de la numeracion escrita; y en fin los reuniremos en una sola enunciacion que expresará la suma total pedida. Así los sumandos que hemos supuesto son:

67 ; 152 ; 86 ; 112.

Diremos primeramente, en cuanto á las unidades sencillas: 7 y 2 son 9, y 6 son 15, y 2 son 17, esto es diez unidades y una decena. Como tenemos que sumar en seguida las decenas de los sumandos, no escribiremos sino las siete unidades y guardaremos la decena para agregarla á la suma siguiente, que se efectuará del mismo modo que la primera, diciendo: 1 decena reservada y seis del primer sumando de la izquierda son 7, y 5 son 12, y 8 son 20, y 1 son 21 decenas, ó una decena y dos centenas. Las dos centenas se guardarán para ser agregadas á la suma de las que contienen los sumandos y se escribirá la decena á la izquierda de las cinco unidades ya apuntadas. En fin, dos centenas procedentes de la suma de las decenas y una del segundo sumando y una mas del último son cuatro centenas, las cuales escritas en su rango, es decir á la izquierda de la cifra de las decenas completan la suma total: 417.

Este ejemplo es muy simple. Pero cualquiera que sea aquel que se le quiera sostituir, cualquiera que sea en este el número y la magnitud de los sumandos que se propongan, la operacion se efectuará de la misma manera, y será solamente mas larga.

En esta corta adicion, se ha podido sin mucho inconveniente dejar escritos en un mismo renglon los números que se trataba de agregar. Pero hubiera sido mas cómodo, en este mismo ejemplo, y se hace casi indispensable en otros mas complicados, colocar las cantidades de otro modo que evite saltar á cada instante de un número á otro para ir á buscar en cada uno de ellos las cifras de las unidades de cada órden que se sume. Ademas de que esto fatiga, y gasta tiempo, se puede fácilmente, procediendo así, equivocar el rango de la cifra que se busca y tomar algunas veces los millares por las centenas ó las decenas de millar por los millares. Es para remover esta causa de error que se escriben siempre los sumandos unos debajo de otros, de manera que las unidades de cada órden formen una misma columna, unidades sencillas debajo de unidades sencillas, decenas debajo de decenas, centenas debajo de centenas.................etc................ como se vé en el pequeño cuadro adjunto.

$$\begin{array}{r} 67 \\ 152 \\ 86 \\ 112 \\ \hline 417 \end{array}$$

De este modo las unidades de cada órden se presentan por sí mismas ya reunidas; no hay trabajo para buscarlas ni peligro de confundirlas con las de otro órden distinto. La operacion es pues al mismo tiempo mas rápida y mas segura. Pero es una condicion precisa que los sumandos esten exactamente colocados como se ha dicho; y á esto deben contraerse antes de todo los que quieran hacerse buenos contadores.

Es por lo comun fácil retener en la memoria las reservas de cada suma parcial Empero, en las largas adiciones en las que la suma de cada columna debe ser revisada antes de escribirse, se apuntan las reservas á parte en un papel distinto que sirve como de borrador, porque en las cuentas bien arregladas, no debe aparecer cifra alguna que no haga parte necesaria de las cantidades sobre las cuales se opera ó de aquella que expresa el resultado de la operacion. La raya que se tira siempre debajo de los sumandos tiene por objeto separarlos de la suma misma, para que se distinga de una sola mirada el resultado, sin tener que buscarlo.

Se entenderá ahora sin dificultad porque se empieza siempre la suma por la derecha, esto es por las unidades sencillas. Cada suma parcial dá las mas veces y puede siempre dar una ó varias unidades del órden inmediatamente superior, que es preciso guardar y agregar á las unidades de este órden que se encuentren en los sumandos. Luego si se diese principio por la izquierda, estas ya estarian sumadas y la suma de ellas escrita antes que se haya obtenido la reserva que pueda provenir en seguida de la adicion de la columna siguiente á la derecha. Se tendria por consiguiente que corregir una cifra ya escrita, lo que ensucia el papel y embrolla el resultado. Principiando por la derecha, las reservas son siempre conocidas antes que hayan sido sumadas las unidades del órden superior al cual pertenecen, y se llega á tiempo para agregarles la cantidad reservada, sin enmendaturas ni borrones.

Cuando se ha efectuado una operacion, es siempre bueno, por mucha costumbre que se tenga de ejecutarla, revisar el resultado, porque la menor distraccion puede traer errores de los que no se libran siempre ni los contadores mas hábiles y ejercitados. Esta averiguacion es lo que se llama la *prueba* de la operacion. Lo mas sencillo es generalmente volverla á hacer. Si se halla dos veces seguidas el mismo resultado, no es todavía cierto que este sea exacto; pero hay al menos mucha probabilidad de ello. En efecto no hay sino un solo resultado que sea verdadero; luego si se ha calculado bien, este es el que se hallará, y aun cuando se volviese á efectuar cien veces la operacion, siempre se dará con él, operando bien. Al contrario, si ha habido equivocacion, como hay cien mil modos de errar, los resultados podrán ser siempre y serán comunmente muy discordantes. Así la diversidad de los resultados obtenidos en dos sumas sucesivas de los mismos números es una prueba cierta que uno de ellos al menos es falso; y su concordancia es una probabilidad muy fuerte en pro de su exactitud. Es verdad que uno podria equivocarse dos veces del mismo modo; pero esta casualidad se hace muy improbable si se tiene el cuidado, al volver á hacer la operacion, de proceder en sentido inverso. Así, la primera vez se sumará cada columna de arriba abajo; la segunda vez se caminará de abajo arriba; presentándose entonces los sumandos en un órden inverso del primero, no se ofrecerá la ocasion de cometer el mismo error en el mismo punto. Esta averiguacion debe emprenderse separadamente para cada columna, antes de escribir definitivamente la suma; el primer resultado obtenido se apunta á parte en el borrador, para no olvidarlo, y no se lo escribe en el libro de cuentas, sino cuando el segundo sale conforme.

Esta es la prueba verdaderamente práctica y usual de la adicion. Existen varias otras, que son mas curiosas que útiles y mas expuestas á error que la operacion misma que son destinadas á legitimar. Hablaremos de ellas en el *Apéndice*.

En resúmen:

La *suma* ó *adicion* es una operacion por la cual, siendo dadas varias cantidades, se trata de reunirlas en una sola, equivalente á todas ellas juntamente.

Las cantidades dadas se llaman *sumandos*, y el resultado de la operacion *suma total* ó simplemente *total*.

Los sumandos se escriben los unos debajo de los otros, de modo que las unidades del mismo órden estén colocadas en una misma columna vertical (*), ésto es unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, centenas debajo de centenas..................etc.................. Se tira una raya debajo y se empieza á sumar por la derecha, esto es por las unidades sencillas, continuando por las decenas, despues por las centenas..................etc..................

Cada vez que una suma parcial no exceda de nueve, se escribe simplemente debajo de la raya y de la columna sumada; pero si excede de nueve, esto es si tiene decenas y unidades, no se escribe mas que la cifra de las unidades y se reserva la cifra de las decenas para agregarla á la suma parcial siguiente, hasta llegar á la última suma parcial que se escribe tal como sale.

La *prueba* de la adicion se hace volviendo á sumar en sentido inverso, esto es de abajo arriba si se ha sumado de arriba abajo; y si el resultado sale igual, la operacion es muy probablemente buena.

(*) Se ha de explicar una vez por todas á los niños, aunque sea por una definicion puramente material, la significacion de las palabras *vertical* y *horizontal*, cuyo empleo ahorra mucho tiempo.

§ V.

RESTA Ó SUSTRACCION.

Un niño tenia, al empezar el recreo, *quince* bolillas; ha jugado, y contando las que le quedan, no encuentra mas que *ocho*. Se le pregunta cuántas ha perdido. Esta pregunta se podria tambien expresar así: ¿Cuánto es lo que *falta* á *ocho* para ser igual á *quince?*

Una señora tratando de averiguar cuál es cabalmente la edad que tiene su hijo recuerda que ella tenia 27 años cuando nació el niño. Ahora tiene 59; y es claro que la cantidad en la que su edad actual *excede* á la edad que tenia cuando parió, representa exactamente el tiempo que el niño ha vivido ya; hallará pues lo que busca, avaluando este *exceso*.

Es tambien muy claro que esta segunda cuestion no difiere en el fondo de la primera. Efectivamente, si nuestro jóven colegial supiese en cuanto lo que antes tenia *excede* á lo que le queda ahora, sabria por lo mismo lo que le *falta* ó lo que ha perdido; y por otra parte, los años que ha vivido esa señora desde el nacimiento de su hijo son los que le *faltaban* entonces para alcanzar á la edad que hoy tiene.

Véase aquí otra cuestion que es aun la misma, aunque expresada eu términos diferentes:

Un negociante quiere al fin del año tomar razon de su posicion comercial. Encuentra que tiene, tanto en dinero como en mercaderías y buenos valores 8506 $, y que por otra parte debe 3278 $. Su haber neto y líquido es evidentemente la *diferencia* de estas dos cantidades y es esta diferencia lo que se trata de determinar. Pero la primera cantidad *difiere* de la segunda en esto que la *excede*, y así como la señora del anterior ejemplo, nuestro comerciante quiere saber en cuanto un número *excede* á otro. Por lo mismo, lo que tiene suyo es lo que *falta* á sus deudas reunidas para igualar su haber.

Un estanciero tenia 2536 cabezas de ganado. La sequía y la peste le han arrebatado 618 de ellas. En lugar de ir á contar directamente los animales que sobreviven, se propone determinar lo *restante* sin incomodarse. Es decir que busca lo que queda de una cantidad: 2536, cuando se le ha quitado otra: 618; y es lo mismo que buscar la *diferencia* de lo que habia á lo que ha perecido, ó la cantidad en la que su manada *excedia* numéricamente la pérdida que ha sufrido, ó aun lo que *falta* á la cifra de esta pérdida para que la manada sea completa.

Así pues, en todos estos casos y en muchos otros parecidos, hay que buscar la *diferencia* de dos cantidades, ó lo que *falta* á una para ser igual á la otra, ó lo que queda de la mayor cuando se le quita la menor. Todas estas expresiones, diversas en apariencia, significan una sola y misma cosa, y será de consiguiente por la misma operacion que se resolverán todas las cuestiones enunciadas, así como muchas otras semejantes que pueden ocurrir. A esta operacion, se le dá el nombre de *resta* ó *sustraccion;* al mayor de los dos números propuestos el de *minuendo*, porque efectivamente disminuye por la supresion del otro; á este último el de *sustraendo*, por esto mismo que se quita ó se *sustrae* del mayor; y al resultado el de *resíduo*, *exceso* ó *diferencia*.

La sustraccion es bien claramente distinta de la adicion, y aun es todo lo contrario, ó, si se quiere, es la operacion inversa de la suma. Por la adicion se agrega, por la sustraccion se quita. Aquella reune, esta separa; la una deshace, por decirlo así, lo que hace la otra, y es por la primera que puede recomponerse lo que por la segunda se ha descompuesto. Así es que el niño del primer ejemplo, si sabe una vez lo que ha perdido, agregándolo á lo que le queda, volverá á hallar lo que tenia al principio. El estanciero citado, sumando con el número de sus animales muertos el de los sobrevivientes supuesto conocido, obtendria la cifra total de su manada cual era antes de la peste y de la sequía; y así de los otros ejemplos.

Sacaremos de esta advertencia una nueva definicion de la resta, que nos servirá para explicar mas adelante el procedimiento de esta operacion, y hela aquí:

« La sustraccion es una operacion por la cual, dada la suma de dos números y uno de los sumandos, se busca el otro. »

En nuestro primer ejemplo, el sustraendo es un número dígito. Por lo tanto, la cuestion podrá fácilmente resolverse, así como todas las que se presenten en la misma condicion, con el solo auxilio de los dedos. Para esto, abriremos tantos dedos cuantas unidades tiene el sustraendo, esto es *ocho* en el caso propuesto. Despues, del minuendo, cuya enunciacion será el punto de partida, quitaremos *uno* cerrando un dedo, y *uno* mas cerrando otro dedo, y así seguidamente hasta haber cerrado todos los dedos que estaban abiertos, lo que nos avisará que la operacion ha concluido. Cada vez que se haya bajado un dedo, se habrá pronunciado el nombre del número que viene inmediatamente antes de aquel que se habia enunciado precedentemente, y pasando así por 14, 13, 12, 11, 10, 9 y 8, habremos llegado por fin á 7, que será el resíduo buscado, pues que se habrá quitado sucesivamente y una por una del minuendo todas las unidades de que se compone el sustraendo.

Es verdad que este modo de contar para atrás, al cual se podria llamar *denumeracion*, puesto que no es mas que la numeracion en sentido inverso, parece al primer aspecto algo mas difícil, porque estamos mas acostumbrados á recitar la serie de los números en su órden creciente que en su órden decreciente. Pero en el fondo es la misma cosa, y quien sabe contar, sabe por lo mismo *descontar*; no se precisa sino un poco de atencion y de costumbre, para hacerlo muy rápidamente y sin equivocacion.

Por otra parte ya sea el recuerdo de los resultados así obtenidos en muchas operaciones semejantes ya sea el empleo de la *tabla de sumar* grabada en la memoria suministrará al cabo de algun tiempo de ejercicio el resultado buscado, sin que sea menester recurrir á los dedos. Se entenderá esto fácilmente reflexionando un instante que siendo el minuendo una suma y el sustraendo uno de los sumandos, el otro que se busca está colocado en la tabla de adicion entre ambos y se halla asociado á ellos del mismo modo en la memoria, de suerte que si se nos pregunta lo que queda de 15 cuando se le quita 8, no habrá mas que pronunciar mentalmente las palabras: *ocho y*.......... pensando al mismo tiempo la suma *quince*, y las palabras: *ocho* y *siete* son *quince* asomarán de por sí á la punta de los labios. Se tendrá pues al otro sumando *siete* y el hábito hace pronto de este acto tan sencillo, en todos los casos semejantes, la cosa la mas natural y la mas fácil del mundo.

En esto, así como en el caso de la adicion de los números dígitos, no hay verdaderamente operacion aritmética. Es una numeracion al revés, con algunos de sus resultados aprendidos de memoria.. Pero esto nos va á servir de estribo suficiente para elevarnos á los casos mas complicados.

Volvamos primeramente á nuestro segundo ejemplo: de 59 años se trata de quitar 27. La tabla de sumar no contiene ni esta suma 59, ni el sumando 27. Es cierto que no se precisa ser un calculador muy hábil para hallar el resíduo, aunque sea sin escribir y, como se dice, mentalmente. Pero no nos olvidemos que no se trata aquí de enseñar la práctica del procedimiento, sino de explicarlo y que la explicacion será tanto mas clara cuanto mas sencillos sean los ejemplos sobre los que verse, y cuanto mas gradualmente se suba á los casos mas compuestos. Siendo pues admitido que no sabemos efectuar esta sustraccion de una vez, tratemos de reducirla al caso mas simple ya examinado.

No hay cosa mas fácil. Los dos números propuestos se componen de unidades y de decenas; sustraigamos primeramente las unidades de las unidades, despues las decenas de las decenas y reuniremos los resultados parciales en un solo número que escribiremos y enunciaremos en una sola vez. Es el mismo artificio que en la adicion, fundado sobre los mismos motivos; y, por las mismas razones tambien, convendrá escribir los dos números dados uno debajo del otro, el minuendo arriba, el sustraendo debajo, unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, y tirar una raya para que no se confunda el resíduo con los otros dos números.

$$\begin{array}{r} 59 \\ 27 \\ \hline 32 \end{array}$$

Hecho esto, como se vé en el cuadrito adjunto, se dirá: 7 unidades de 9, restan 2 unidades, y 2 decenas de 5, restan 3 decenas. El resíduo total: 32 se halla naturalmente escrito debajo de la raya y cada una de las dos cifras que lo componen ocupa el rango que le asigna su valor

Ahora complicad el jeemplo; tomad números que alcanzen á las centenas de millar de millones, si quereis; la operacion será mas larga, porque se compondrá de un número mayor de operaciones parciales; pero será la misma y el procedimiento así como el resultado se justificarán por los mismos principios.

Empero, esto no es cierto sino mediante una condicion; y es que así como en el ejemplo anterior, todas las cif as del minuendo sean mayores que las cifras correspondientes del sustraendo. Pero esto no se verificará siempre, y si volvemos á nuestro cuarto ejemplo, vamos á encontrarnos desde el primer paso en un apuro. Se trata par ael estanciero mencionado de restar 618 de 2536.

Despues de haber escrito las dos cantidades segun queda convenido y tirado la raya, tenemos primeramente, empezando por las unidades sencillas, que sustraer 8 de 6. Pero no se puede quitar un número mayor de otro menor. Esto es tan imposible como lo seria que un hombre pague 8 pesos no teniendo mas que 6. Supongamos sin embargo una cosa: que este hombre, á mas de los 6 pesos que tiene en su bolsillo derecho tenga en el bolsillo izquierdo 3 papeles de á 10 pesos cada uno. Podrá sacar uno de estos, agregarlo á los 6 pesos del bolsillo derecho, lo que completerá 16 pesos; entonces pagando con esto y haciéndose dar el vuelto, le quedarán 8 pesos en un bolsillo y solamente dos papeles de á 10 en el otro.

Podemos hacer exactamente como este hombre.

Nosotros tambien estamos solamente con 6 unidades en el minuendo; pero á la izquierda de estas unidades, tenemos 3 decenas. Tomemos una de ellas; agreguémosla á las 6 unidades, lo que hará 16 unidades; restemos de esta cantidad las 8 unidades del sustraendo; nos sobrarán 8 otras que escribiremos como resíduo. Solamente deberemos no olvidar que así como nuestro hombre no tiene ya mas que 2 papeles de á 10 pesos, nosotros tambien estamos reducidos á 2 decenas en el minuendo, puesto que hemos empleado una de las tres que habia.

Diremos pues, llegando á las decenas: 1 quitado de 2 (y no 1 quitado de 3) resta 1 que escribiremos. Pasando á las centenas, la misma dificultad y la misma solucion. No tenemos sino 5 centenas y es preciso quitar de ahí 6, lo que es imposible. Pero tenemos 2 millares á la izquierda de las 5 centenas en el minuendo; tomaremos uno de ellos, y como un millar vale 10 centenas, lo mismo que una decena vale 10 unidades, agregaremos estas 10 centenas á las 5 que hay, lo que formará 15 centenas, de donde sacando 6, quedan 9 que escribiremos debajo de la raya en el rango de las centenas. Del único millar que permanece en el minuendo, nada hay que quitar; se escribirá simplemente á la izquierda de los resíduos parciales anteriores y el resíduo total será, como se vé en el cuadro, 1918.

$$\begin{array}{r} 2536 \\ 618 \\ \hline 1918 \end{array}$$

Es muy importante no olvidar jamás los empréstitos que hayan sido hechos, para facilitar una sustraccion parcial, á la cifra siguiente á la izquierda del minuendo. Para esto será bueno, al momento de realizar el empréstito, señalar con un punto colocado arriba de ella cada cifra afectada de empréstito; este signo recordará al calculador que la cifra así señalada vale una unidad menos.

Este procedimiento parece aplicable á todos los casos. Sin embargo, si intentamos practicarlo sobre nuestro tercer ejemplo, se nos presentará otra dificultad que no se ha encontrado en los anteriores. Se trata de avaluar la diferencia entre 8506 $ y 3278 $. Aquí tambien no hay como restar directamente 8 unidades que tiene el sustraendo de 6 que tiene el minuendo; y ademas, no es posible recurrir á las decenas del minuendo, porque estan representadas por un cero, lo que quiere decir que ninguna hay; y quien no tiene nada, nada puede prestar.

Será otra vez el caso de nuestro hombre ya citado, que no tiene sino 6 $ para pagar 8 $, con esta diferencia que registrando su bolsillo izquierdo, en el que suele guardar los papeles de á 10 $, lo encuentra vacío. Pero supongamos que este hombre tenga otro tercer bolsillo destinado á los papeles de á 100 $, y que en este se hallen 5 papeles. Podrá tomar uno de ellos, cambiarlo préviamente en trueque de 10 papeles de á 10 $ cada uno, guardar 9 de estos en el bolsillo destinado á los billetes de esta clase, y el décimo lo reunirá á los 6 pesos sencillos, para formar un total de 16 $ de los cuales entregará 8 y guardará 8.

Hagamos como este hombre, cuyo caso es el nuestro propio; á falta de decenas, tomemos una centena que vale 10 decenas; dejemos 9 de estas decenas, pues que una sola es suficiente para facilitarnos la operacion, ó supongámoslas colocadas en el rango que les pertenece, esto es en el sitio del cero. Sustraígamos 8 de 16 y escribamos el residuo.

$$\begin{array}{r} 8506 \\ 3278 \\ \hline 5228 \end{array}$$

En seguida al pasar á las restas parciales siguientes, tendremos buen cuidado de acordarnos que el cero se ha vuelto 9 y que las 5 centenas se han reducido á 4, y operaremos con atencion á estas dos circunstancias.

Esto va bien; pero sino tuviesemos mas centenas que decenas ó, lo que es lo mismo, si el lugar de las centenas estuviese tambien ocupado por un cero, ó aun, para volver siempre á nuestra comparacion, si nuestro hombre no tuviese mas papeles de á 100$ que papeles de á 10$ ¿qué hacer¿ Entonces podria tal vez encontrar en su cartera algunos papeles de á 1000$, por ejemplo ocho. Tomaria uno; lo iria á cambiar por 10 papeles de á diez de los cuales uno solo, agregado á sus 8 sencillos, bastaria para verificar el pago; y finalmente se encontraria con 9 papeles de á 10$ en el primer bolsillo de la izquierda, con 9 de á 100$ en el segundo, y con solamente 7 de á 1000$ en la cartera..

Realizaremos este caso en la sustraccion suponiendo que el comerciante que saca su balance tiene de haberes 8006$ y de deudas como antes 3278$. Al calcular la diferencia, no pudiendo quitar 8 de 6, empleará uno de los 8 millares escritos á la extrema izquierda del minuendo. Un millar vale 100 decenas; reducirá una sola de estas á unidades sencillas y dejará las otras 99 que equivalen á 9 centenas y 9 decenas en los sitios respectivos de los dos ceros que representan en el minuendo estos dos órdenes de unidades, de manera que llegando á la sustraccion de las decenas y de las centenas, la efectuará como si estos ceros fueran nueves, y en fin rebajará una unidad á los 8 millares.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 99} \\ 8006 \\ 3278 \\ \hline 4728 \end{array}$$

La operacion se podrá representar como está apuntada en el cuadro, aunque en la práctica no se suele escribir los 9 arriba de los ceros, porque la memoria basta para tener en cuenta esta alteracion.

Ya van previstos todos los casos; en efecto, si en lugar de 2 ceros seguidos, hubiese 3, 4, 5.....etc.....se encontraria siempre á la izquierda del último de ellos una cifra de la cual se podria quitar una unidad, para convertirla en unidades de los órdenes inferiores; y entonces, por los mismos motivos ya largamente explicados y que se trata únicamente de extender repitiéndolos, todos los ceros consecutivos se transformarian en nueves.

Cuando se ha hecho un empréstito sobre una de las cifras del minuendo, parece á algunos mas cómodo agregar una unidad á la cifra correspondiente del sustraendo, que quitar una á la cifra misma del minuendo, afectada del empréstito; y esto viene evidentemente á ser lo mismo; pues lo que se agrega á un número que se sustrae de otro. antes de efectuar la sustraccion, se quitará en mas de este al efectuarla.

Este modo de operar puede por lo demas justificarse por un principio general que va á suministrarnos del procedimiento de la sustraccion en todos los casos posibles, una explicacion mucho mas sencilla que aquella que hemos propuesto. Si no la hemos preferido, es porque es mas abstracta y por esto mismo menos accesible á los principiantes.

El principio es este: «la diferencia de dos números no se altera cuando se aumenta al uno y al otro la misma cantidad.

Esto es evidente; pues la diferencia de dos números expresa cuantas unidades hay en el mayor que no se encuentran en el menor; de donde se sigue que esta diferencia no pu de ser alterada cuando se agrega á ambos números una misma cantidad de unidades; poniendo tantas en el uno como en el otro, no se hace que el menor gane las unidades que le faltaban para igualarse con el mayor; lo que se agrega á aquel no hace sino compensar lo que se ha agregado por otra parte á este.

Entendido esto, diremos simplemente: cuando una cifra del sustraendo sea mayor que la cifra correspondiente del minuendo, agréguese 10 á esta y hágase la sustraccion. En seguida, para compensar esta agregacion hecha al minuendo, se precisará hacer al sustraendo agregacion igual, esto es aumentarle 10 unidades del órden de aquellas que han sido aumentadas al minuendo, ó, lo que dará el mismo resultado, *una* unidad del órden inmediatamente superior; y es lo que se verifica, cargando uno mas á la cifra siguiente del sustraendo.

Esta regla es enteramente general y se aplica al caso en el que se encuentran en el minuendo unos ceros que ya no se considerarán como nueves. En este caso, se agregará 10 á cada cero, lo que producirá 10 sin mas; de 10 se sustraerá la cifra colocada debajo del cero y como siempre, pasando á la sustraccion parcial siguiente, se agregará 1 á la cifra del sustraendo que venga inmediatamente á la izquierda de aquella sobre la cual se acaba de operar.

Falta solamente que explicar porque debe siempre empezar la sustraccion por la derecha, esto es por las unidades sencillas. Resulta claramente de las explicaciones dadas que es á causa de ese transporte muchas veces necesario de una unidad de órden superior sobre las unidades de algun órden inferior. Cuando se presenta esta necesidad (y puede siempre encontrarse) si se hubiera ya operado antes sobre las unidades de los órdenes superiores, el resultado estaria escrito y seria preciso modificarlo; mientras que yendo de las menores á las mayores, la alteracion de estas se hace siempre á tiempo oportuno para que se pueda tenerla en cuenta, sin corregir nada.

No hay cosa mas fácil que entender y efectuar la prueba de la sustraccion. Puesto que el residuo hallado es lo que faltaba al sustraendo para ser igual al minuendo, agregando dicho residuo al sustraendo, se debe hallar el minuendo, si la operacion ha sido bien hecha. Se efectuará pues mentalmente y sin escribir nada la suma del sustraendo y del residuo, y se cotejará cada cifra de la suma, á medida que se obtenga, con la cifra correspondiente del minuendo; si salen iguales, se pasa á la cifra siguiente; si difiere una sola, es preciso volver á hacer la operacion.

En resumen:

La resta ó sustraccion es una operacion por la cual, siendo dadas dos cantidades, se trata de quitar una de ellas de la otra, ó de conocer en cuanto la mayor excede á la menor ó en fin de averiguar la diferencia entre las dos.

De las dos cantidades dadas, la mayor se llama *minuendo*, la menor *sustraendo*, y el resultado *residuo exceso ó diferencia*.

Siendo evidente que la menor de las dos cantidades agregada á la diferencia ó á lo que le faltaba para igua-

larse con la mayor debe reproducir á esta última, se puede definir tambien la resta una operacion por la cual, dada la suma de dos números y uno de los sumandos, se trata de determinar el otro.

Para proceder á la sustraccion, se escribe el minuendo arriba y el sustraendo debajo, teniendo el cuidado de que las unidades del mismo órden se correspondan verticalmente, y se tira una raya debajo. Se empieza luego á restar por la derecha, esto es por las unidades sencillas, pasando de ahí á las decenas, despues á las centenas..... etc.....

Cada vez que la cifra del sustraendo es menor que la correspondiente del minuendo, se escribe la diferencia debajo de la raya á su rango. Si sucede que alguna cifra del sustraendo sea mayor que la correspondiente del minuendo, se agrega 10 á esta y se efectua la sustraccion; pero al pasar á la resta parcial siguiente, se tiene el cuidado de rebajar en una unidad la cifra del minuendo que viene inmediatamente á la izquierda de aquella que se ha aumentado en 10, ó bien de aumentar en una unidad la cifra siguiente del sustraendo.

Cuando á la izquierda de la cifra que se precisa aumentar en 10 hay un cero ó una serie de ceros, en las restas parciales siguientes, los ceros se consideran como nueves y la cifra que sigue á la izquierda del cero ó de los ceros se rebaja en uno; ó bien los ceros se cuentan por diezes y se aumenta uno á cada una de las cifras colocadas debajo de los ceros y de la primera cifra que viene á la izquierda de ellos.

La prueba de la resta se hace sumando el sustraendo con el residuo; si la suma sale igual al minuendo, la operacion está buena.

§ VI.

MULTIPLICACION.

Un niño tenia que aprender de memoria una leccion de 3 páginas; no la ha sabido y su preceptor le ha dado por penitencia copiarla 6 veces. ¿Cuantas páginas tiene que copiar?—Sabrá esto fácilmente agregando el número 3 cinco veces seguidas al mismo, lo que equivale á sumar 6 cantidades, iguales todas á 3. Esta adicion podrá hacerse por escrito ó con los dedos. Para hacerla con los dedos, se abrirá seis de ellos; despues, cerrando el primero se dirá: 3, cerrando el segundo: y 3 son 6; el tercero: y 3 son 9; el cuarto: y 3 son 12; el quinto: y 3 son 15; el sesto: y 3 son 18. Todos los dedos bajados, la operacion estará concluida, y el resultado hallado. Por escrito la operacion se dispondrá y se efectuará como cualquiera otra adicion, y como lo manifiesta el cuadro adjunto. (ejemplo 1º)

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ \hline 18 \end{array}$$

Un dependiente que gana mensualmente 2875$ ha dejado su sueldo acumularse desde 7 meses atras en la caja de la casa. Quiere saber cuanto se le debe. Es claro que en el fondo esta cuestion no difiere de la precedente. Se trata como poco antes de agregar una cantidad dada 6 veces á ella misma ó de sumar 7 números iguales todos á 2875, y supone muy poco que sean páginas ó pesos y que haya de estos mas de lo que habia de aquellas. Solamente, el cálculo yá no se podrá efectuar con los dedos, porque no es tan simple. Se escribirá pues 7 veces seguidas la cantidad 2875, colocando estos 7 números iguales á modo de sumandos y se obtendrá por el procedimiento habitual de la suma el resultado 20125 (ejemplo 2º)

$$\begin{array}{r} 2875 \\ 2875 \\ 2875 \\ 2875 \\ 2875 \\ 2875 \\ 2875 \\ \hline 20125 \end{array}$$

Estas dos operaciones nada tienen de nuevo; son simples sumas, en las cuales se nota únicamente esta particularidad, que todos los sumandos son iguales entre sí. Pero puede presentarse casos parecidos en los que la operacion, sin ser mas nueva seria al menos mas larga, y algunas veces tan larga que se convertiria en poco menos que impracticable. Por ejemplo, se pregunta cuantos ladrillos se precisará para emparedar un corralon cuyo contorno equivale á 400 varas, sabiendo que entran 648 ladrillos en una sola vara. Aqui son 400 los sumandos iguales á 648 que se ha de escribir unos debajo de los otros y de sumar en seguida. El papel mas grande no podria contenerlos en una sola columna. Ademas, en una adicion tan larga, la atencion se cansa y un solo momento de distraccion es suficiente para hacer falsear toda la operacion. Es verdad que se podria dividir la operacion total en varias operaciones parciales, v. g. en 20 sumas de á 20 sumandos cada una. Se reuniria en seguida á las 20 sumas obtenidas en una sola por una última adicion final. Pero seria aun mucho papel y, sobre todo, mucho tiempo gastado. (ejemplo 3º)

¿Qué será, cuando el número de veces que sea preciso agregar la cantidad propuesta á ella misma alcanze á los millares ó arriba; y no es dificil que se presenten ejemplos de ello. Asi, puede necesitarse saber lo que cuesta anualmente la mantencion de un ejército de 9275 hombres, sabiendo que cada hombre consume término medio al año 4465 $. (ejemplo 4º)

Asi tambien, un impresor antes de emprender la impresion de una obra manuscrita que tiene 706 páginas de 34 renglones cada una, y conteniendo cada renglon próximamente 24 letras, quisiera conocer que cantidad de tipos precisara. Tiene primeramente que repetir 706 veces á 34, para saber el número de renglones y de este primer cálculo ya saldrán decenas de millar. En seguida habrá que repetir el número de letras 24 tantas veces cuantos renglones haya, es decir mas de 20000 veces, ¿Quién tendria la paciencia de emprender semejante trabajo, y la habilidad de llevarlo á cabo sin error? (ejemplo 5º)

Necesitamos pues, al menos para estos dos últimos casos ú otros semejantes cuyas ocasiones no faltan en la vida comun, un procedimiento que nos abrevie estas interminables sumas. Si lo encontramos, será bueno darle un nombre particular, aunque no ha de ser sino una adicion abreviada, aplicable al caso que todos los sumandos sean iguales entre si, asi como hemos dado un nombre á la suma, aunque no es sino una numeracion simplificada. Y con efecto, este procedimiento inventado desde tiempos atras es el que se llama *multiplicacion*, porque en la realidad la cantidad que se agrega á ella misma repetidas veces crece ó *multiplica*, en el mismo sentido que el ganado de una estancia multiplica, reproduciendose cada año. La cantidad que se repite se llama por analogia *multiplicando* y *multiplicador* aquella que expresa el número de veces que se debe repetir la otra; y como ambas concurren, cada una á su modo, á formar ó á *hacer* (en latin: *facere*) el resultado, se comprende muchas veces al multiplicando y al multiplicador bajo la denominacion comun de *factores*. En fin, el resultado que no es mas en el fondo que una suma, no debe dejar de tener su nombre propio, á causa del modo particular de obtenerlo, y se llama el *producto*.

En esto, así como en la exposicion de los procedimientos de la suma y de la resta, no perdamos de vista que los diferentes números de unidades de varios órdenes cuya reunion constituye una cantidad cualquiera no exceden jamás de 9 ó que cada uno de ellos es siempre un número dígito. Establecido esto, si aprendemos una vez á multiplicar uno por otro los números dígitos y á hallar con facilidad todos sus productos posibles, podremos en seguida resolver las operaciones mas complicadas en una serie de operaciones simples, efectuadas sobre números dígitos, y no faltará mas que reunir despues los resultados. Es lo que hemos hecho en la adicion y en la sustraccion de los números compuestos de varias cifras; y es lo que haremos sin mas dificultad en la multiplicacion de un número cualquiera por un número dígito, con tal que sepamos ya multiplicar cualquiera de estos por cualquier otro de los mismos. Así, volviendo al segundo ejemplo, en el que tenemos que repetir 7 veces la cantidad 2875, será lo mismo repetir 7 veces las 5 unidades de este número, 7 veces sus 7 decenas, 7 veces sus 8 centenas, y 7 veces por fin sus 2 millares. Todo se reduce pues á saber multiplicar 5, 7, 8 y 2 por 7 y en general un número dígito por otro, y á reunir los productos.

No cuesta mucho aprender de memoria todos los productos de los números dígitos entre sí. Se puede formarlos de uno en otro por adicion, ya con los dedos, ya por escrito, y á fuerza de volverlos á leer y á repetir y de emplearlos en el cálculo, se llega á tenerlos tan bien grabados en la mente que se presentan por sí mismos, al solo oir enunciar los dos factores. Para facilitar este primer aprendizage indispensable, se acostumbra construir unos cuadros que contienen reunidos en un pequeño espacio y distribuidos con órden todos esos productos de los números dígitos entre sí, de modo que se los pueda abrazar de una sola mirada y hallar fácilmente, cuando es menester, cualquiera de ellos; y se da á esos cuadros el nombre de *Tabla de multiplicar* ó á veces el de *Tabla de Pitágoras*, porque se atribuye su invencion á un sábio muy antiguo de la vieja Grecia, que se llamaba así.

Hay dos modos de construir una tabla de multiplicacion. El primero consiste en tirar primeramente 11 rayas verticales igualmente distantes una de otra, que forman 10 columnas iguales. Despues se tiran con la misma regla otras once rayas horizontales, tranversalmente sobre las primeras, lo que produce 10 hileras horizontales, divididas cada una en 10 pequeños cuadros ó *casillas* iguales, de las cuales hay 100 por todo. Hecho esto se escribe los números dígitos desde 1 hasta 10 en la primera hilera horizontal de arriba, y por otra parte se escribe los mismos números en la primera columna vertical de la izquierda. Para llenar la segunda hilera horizontal encabezada por el número 2, se agrega 2 á 2 y se escribe la suma 4 en la segunda casilla; despues 2 á 4 y se escribe la suma 6 en la tercera casilla; luego 2 á 6 y se escribe la suma 8 en la cuarta casilla, y así sucesivamente hasta la última. Es claro que los números así escritos en las casillas sucesivas de esta segunda hilera horizontal son 2 veces 2, 2 veces 3, 2 veces 4, 2 veces 5. . . etc. . . hasta 2 veces 10 y que representan los productos por 2 de todos los números dígitos escritos arriba de la columna vertical en la que se escribe cada producto.

Llenando por el mismo procedimiento de adicion la tercera hilera horizontal, estó es agregando 3 á 3, y á la suma 6 otra vez 3, y asi sucesivamente, se tendra por la misma razon, colocados por órden en un mismo renglon todos los prodnctos por 3 de todos los números dígitos colocados cada uno en la colnmna vertical encabezada por su otro factor. Se sigue llenando de la misma manera todos los renglones horizontales hasta haber llegado al último y la tabla ya está construida.

TABLA DE MULTIPLICAR.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

En cuanto á la manera de emplearla, es sumamente sencilla. Si se quiere por ejemplo hallar el producto de 7 por 8, se toma uno de los factores, v. gr. 7 en la primera columna vertical de izquierda, y el otro 8 en la primera hilera horizontal de arriba, y se sigue sea con el dedo sea con la vista de izquierda á derecha la hilera horizontal que empieza por 7 y de arriba abajo la columna vertical que principia por 8; el producto 56 se encuentra en el punto en que vienen á concurrir. Así el niño del primer ejemplo, teniendo su tabla de multiplicar, hubiera buscado 3 en el renglon de arriba y 6 en la columna izquierda y siguiendo las dos filas encabezadas por estos numeros, hubiera hallado 18 en su punto de encuentro; y asi en todos los demas casos.

El otro modo de construir la tabla de multiplicar es tal vez mas cómodo para el uso, aunque ocupa mas espacio. Se forma primeramente un pequeño cuadro separado de todos los productos por 2 de los números digitos; luego al lado de este un cuadro semejante de sus productos por 3; en seguida, el de los productos por 4. . . . . y así: hasta 10. El empleo de esta tabla no exige explicacion alguna:

OTRA TABLA DE MULTIPLICAR.

2 por 2 son 4	3 por 2 son 6	4 por 2 son 8
» » 3 » 6	» » 3 » 9	» » 3 » 12
» » 4 » 8	» » 4 » 12	» » 4 » 16
» » 5 » 10	» » 5 » 15	» » 5 » 20
» » 6 » 12	» » 6 » 18	» » 6 » 24
» » 7 » 14	» » 7 » 21	» » 7 » 28
» » 8 » 16	» » 8 » 24	» » 8 » 32
» » 9 » 18	» » 9 » 27	» » 9 » 36
» » 10 » 20	» » 10 » 30	» » 10 » 40

5 por 2 son 10	6 por 2 son 12	7 por 2 son 14
» » 3 » 15	» » 3 » 18	» » 3 » 21
» » 4 » 20	» » 4 » 24	» » 4 » 28
» » 5 » 25	» » 5 » 30	» » 5 » 35
» » 6 » 30	» » 6 » 36	» » 6 » 42
» » 7 » 35	» » 7 » 42	» » 7 » 49
» » 8 » 40	» » 8 » 48	» » 8 » 56
» » 9 » 45	» » 9 » 54	» » 9 » 63
» » 10 » 50	» » 10 » 60	» » 10 » 70

8 por 2 son 16	9 por 2 son 18	10 por 2 son 20
» » 3 » 24	» » 3 » 27	» » 3 » 30
» » 4 » 32	» » 4 » 36	» » 4 » 40
» » 5 » 40	» » 5 » 45	» » 5 » 50
» » 6 » 48	» » 6 » 54	» » 6 » 60
» » 7 » 56	» » 7 » 63	» » 7 » 70
» » 8 » 64	» » 8 » 72	» » 8 » 80
» » 9 » 72	» » 9 » 81	» » 9 » 90
» » 10 » 80	» » 10 » 90	» » 10 » 100

Pasemos ahora á nuestro segundo ejemplo y acordándonos la advertencia anterior, teniendo ademas la tabla presente ya sea á la vista ya sea á la memoria, hé aquí como podremos proceder para obtener el producto de 2885 por 7:

7 veces 5 unidades son.	35	unidades
7 veces 7 decenas son 49 decenas ó . .	490	—
7 veces 8 centenas son 56 centenas ó. .	5600	—
7 veces 2 millares son 14 millares. . . .	14000	—
Y sumando los productos parciales se tiene.	20125	—

Reflexionando un poco, veremos que no es preciso escribir así á parte esos diversos productos para sumarlos despues; bastará colocarlos cada uno en su rango á medida que se obtengan. Así como en la suma se tendrá el cuidado de no escribir de cada producto parcial sino la cifra de las unidades y de reservar la cifra de las decenas, cuando decenas haya, para agregarla al producto parcial siguiente, imponiéndose la ley de principiar siempre la multiplicacion por la derecha, esto es por las unidades sencillas; en efecto, las decenas de cada producto parcial serán siempre, por los principios mismos de la numeracion, unidades del órden que siga á la izquierda y uno estará siempre á tiempo, empezando por la derecha, para agregarlas al producto parcial de las unidades de ese órden inmediatamente superior por el multiplicador, puesto que este producto no será ni escrito ni aun efectuado. Entonces la operacion se reducirá á este simple cuadro, cuya formacion puede servir de norma para todos los casos semejantes, en los que, siendo el multiplicando un número compuesto, el multiplicador sea un número dígito.

$$\begin{array}{r} 2875 \\ 7 \\ \hline 20125 \end{array}$$

Nos resta el caso en el que el multiplicador, así como el multiplicando; es un número compuesto de varias cifras; sucede así en nuestro tercer ejemplo en el que se trataba de repetir 400 veces la cantidad 648.

Hay en este ejemplo esto de particular que el multiplicador no tiene mas que una cifra seguida de varios ceros, y esta circunstancia va á permitirnos resolverlo, así como todos aquellos que podrian presentarse con la misma condicion, por una regla muy sencilla, la cual generalizada nos suministrará la solucion de todos los demas casos, hasta los mas complicados y difíciles.

Veamos primeramente lo que sucede cuando se escribe un cero á la derecha de un número, v. g. de la cantidad 648, que se vuelve entonces 6480. En esta el 8 que representaba antes unidades sencillas representa ahora decenas, esto es unidades cuyo valor es 10 veces mayor. Por lo mismo, el 4, que expresaba decenas expresa ahora centenas, ó decenas de decenas, así es que tiene tambien un valor décuplo del que tenia antes; y lo mismo ha sucedido á las 6 centenas que se han hecho millares. Así pues todas las cifras de la cantidad 648 han adquirido un valor 10 veces mayor que aquel que tenian y es lo mismo que si toda la cantidad hubiera sido multiplicada por 10. La misma cosa se producirá evidentemente, toda vez que se agregue un cero á la derecha de una cantidad cualquiera, de suerte que podemos decir en general que para multiplicar un número cualquiera por 10, basta agregar un cero á la derecha de este número.

Si se agrega 2 ceros en lugar de uno, por ejemplo, si se escribe 64800 en lugar de 648, es fácil ver que la cantidad será multiplicada por 100. En efecto, la cifra que era la de las unidades sencillas es ya la de las centenas y todas las que siguen á la izquierda de esta han así atrasado de 2 rangos, lo que por el principio mismo de la numeracion escrita, les hace expresar decenas de decenas ó centenas del órden de unidades que antes expresaban. Luego *se multiplica por* 100 *una cantidad cualquiera, agregándole dos ceros á la derecha.*

Por una razon enteramente análoga y que no repetiremos, se veria que *para multiplicar una cantidad por*

1000, 10000, 100000, 1000000......etc.....*es suficiente escribir á la derecha tantos ceros cuantos hay en seguida de la unidad en cada uno de estos números.*

Ahora no es por 100 sino por 400 que tenemos que multiplicar al número 648. Pero 400 equivale á 4 veces 100 y por consiguiente repetir 400 veces 648 equivale á repetirlo por una parte 4 veces y á repetir en seguida 100 veces el producto obtenido, así es que nuestro tercer ejemplo no es mas difícil que el segundo, pues que es aun un número compuesto que se ha de multiplicar por un número dígito y hé aquí toda la operacion escrita:

$$\begin{array}{r} 648 \\ 400 \\ \hline 259200 \end{array}$$

Y esto no es particular al caso en que la cifra del multiplicador que precede á los ceros es la cifra 4, ni tampoco al caso en que el número de los ceros es dos. Es muy claro que la misma regla es aplicable á todos aquellos casos en los que el multiplicador conste de una sola cifra, cualquiera que sea, seguida de un número cualquiera de ceros, y que si tuviéramos por ejemplo que multiplicar 648 por 8000, seria suficiente multiplicarlo por 8 y añadir 3 ceros á la derecha del producto.

Esto bien entendido, podemos pasar sin dificultad al cuarto ejemplo. Se precisa, para conocer el gasto total de un ejército de 9275 hombres á razon de 4465 pesos por hombre y por año, repetir 9275 veces la cantidad 4465. Pero es evidente que lo mismo será repetir esta cantidad primeramente 5 veces, luego 70 veces, en seguida 200 veces, en fin 9000 veces y reunir todos los resultados. Ahora, acabamos de aprender á multiplicar una cantidad cualquiera por una cifra seguida de un número cualquiera de ceros, y de consiguiente por 70, por 200 y por 9000 : por otra parte sabíamos ya multiplicar por 5. Podemos pues efectuar estas cuatro multiplicaciones sucesivas y para esto el órden que adoptemos es indiferente. Solamente se deberá atender bien al número de ceros que se haya de escribir á la derecha de cada producto parcial, y que es siempre igual al de las cifras que en el multiplicador siguen á la derecha de aquella por la cual se multiplica. Los diferentes productos parciales debiendo ser sumados, se dispondrán desde el principio á modo de sumandos, unos debajo de otros, procurando que las unidades del mismo órden se correspondan. Damos aquí el cuadro de la operacion, efectuada de dos modos, ya empezando por las unidades de órden superior, ya principiando por las unidades sencillas.

4465	4465
9275	9275
40185000	22325
893000	312550
312550	893000
22325	40185000
41412875	41412875

Es de esta última manera que se dispone habitualmente, y entonces la primera cosa que se hace es escribir, para no olvidarlos, los ceros que deben figurar á la derecha de cada producto parcial, es decir que una vez efectuado y escrito el primero de ellos que es el de las unidades sencillas, se coloca un cero debajo de su primera cifra, y se forma luego el segundo producto; debajo de las dos primeras cifras de este, se colocan dos ceros y se forma el tercer producto y así sucesivamente.

En la práctica, no se acostumbra escribir los ceros, lo que es efectivamente inútil, puesto que no cuentan para nada en la adicion final. Se puede reemplazarlos por unos puntos ó simplemente dejar vacias las casillas que ellos ocuparian. Entonces, el cuadro de la operacion presenta el aspecto que se vé y la regla se expresa diciendo: escríbanse los productos parciales unos debajo de otros, haciendo correr cada uno de ellos de un rango á la izquierda con respecto al precedente.

```
   4465
   9275
  -----
  22325
 31255
 8930
40185
--------
41412875
```

Hemos producido al principio de este capitulo un quinto y último ejemplo que nos va á sugerir una advertencia importante. Se quiere saber cuantas letras hay en un manuscito de 706 páginas de 34 renglones cada una á razon de 24 letras por renglon. Busquemos primeramente el número de los renglones y para esto multipliquemos 34 por 706. Despues de haber formado el primer producto parcial, esto es el del multiplicando por la cifra de las unidades del multiplicador, encontramos en el sitio de las decenas un cero. Como multiplicar una cantidad por uno es tomarla una vez, no mas, multiplicarla por cero, es tomarla ninguna vez, y por consiguiente es hacer nada. No se multiplica pues por 0; y hay que pasar luego á la cifra 7 de las centenas Pero entonces es muy necesario no olvidar que el producto del multiplicando por esta cifra debe expresar no decenas, sino centenas y que si se escribiese á la derecha de este producto parcial los ceros que le han de dar su verdadero valor, se deberia colocar dos ceros en lugar de uno solo. Si no se escriben los ceros, se precisará hacer correr este segundo producto, no de un rango, sino de dos hácia la izquierda, como lo demuestra el cuadro de la operacion efectuada.

```
   34
  706
-----
  204
238..
-----
24004
```

Ahora, ya que tenemos el número de los renglones 24004, debemos buscar el número de letras, multiplicando al efecto 24 por 24004. Tenemos entonces dos ceros seguidos en el multiplicador, ocupando los sitios respectivos de las decenas y de las centenas. Los pasaremos por alto y al multiplicar por la cifra de los millares, tendremos buen cuidado de acordarnos de que la primera cifra de este segundo producto parcial deberia tener á su derecha tres ceros, puesto que expresa millares y que tenemos por consiguiente que dejar tres casillas vacias; asi pues debemos modificar la regla anterior como sigue: si en el multiplicador se encuentra un cero ó una serie de ceros, el producto del multiplicando por la cifra que viene inmediatamente despues de los ceros deberá correrse hácia la izquierda de tantos rangos mas uno cuantos ceros seguidos haya en el multiplicador y es conforme á la regla así modificada que se ha formado el cuadro adjunto.

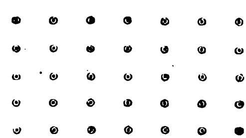
```
      24
   24004
   -----
      96
   96...
  48....
  ------
  576096
```

Este mismo ejemplo da lugar á otra observacion; cuando el multiplicador, segun acontece en esta última operacion tiene un número de cifras mucho mayor que el multiplicando, es generalmente mas cómodo intervertir el órden de los factores, esto es tomar el multiplicando de multiplicador y *vice-versa*. En efecto, este cambio disminuye el número de los productos parciales que hay que escribir. Es verdad que esta simplificacion no se verifica tan claramente en el ejemplo citado como en muchos otros, á causa de los ceros del multiplicador que no originan ningun producto parcial; pero, si en lugar de esos dos ceros, hubieramos tenido dos cifras de un valor efectivo, los productos parciales hubieran sido cinco diferentes, mientras que multiplicando un número, tan crecido como se quiera imaginarlo, por 24, no se tiene mas que dos productos parciales y la ventaja de este cambio es notable sobre todo cuando el multiplicador es una sola cifra y el multiplicando una cantidad muy larga. Asi por ejemplo, se ha pagado el sueldo de un cuerpo de ejército de 12865 hombres á razon de 5 duros por hombre y se quiere saber cuanto se ha pagado por todo.

$$\begin{array}{r} 12865 \\ 5 \\ \hline 64325 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 5 \\ 12865 \\ \hline 25 \\ 30. \\ 40.. \\ 10... \\ 5.... \\ \hline 64325 \end{array}$$

El multiplicando indicado por la cuestion es 5 que se tiene que repetir 12865 veces y la operacion dispuesta segun la costumbre dá el cuadro de la derecha. Haciendo la inversion indicada, como se ha hecho en el cuadro de la izquierda, se tiene una escritura mas clara y mas sencilla.

Pero no debemos contentarnos con ver que el resultado es el mismo; es preciso convencernos demostrativamente de que será siempre así, y lo haremos por un raciocinio aplicado á un ejemplo muy simple, pero que no siendo dependiente en ninguna manera de los números elegidos podrá extenderse á todos los ejemplos posibles. Imagino que se haya dispuesto sobre una mesa cinco hileras de naranjas de 7 naranjas cada una. Se podrá recogerlas con órden de dos maneras distintas, ya sea por hileras horizontales, y entonces se habrá alzado 5 veces 7 naranjas, ya sea por filas verticales y entonces se habrá alzado 7 veces 5 naranjas.



Pero es claro que en los dos casos, se tendrá el mismo número de naranjas, con tal que no se haya omitido ninguna; luego, 5 veces 7 ó 7 veces 5 dan el mismo producto, *ó un producto no se altera cuando se invierte el órden de sus factores.*

Este mismo principio nos va á suministrar el medio de hacer la prueba de la multiplicacion. Para esto se vuelve á multiplicar cambiando los factores de lugar ó tomando el multiplicando de multiplicador y *vice-versa*. Si el producto sale el mismo, la operacion es muy probablemente buena, pues que no hay mas que un solo resultado que sea exacto, mientras hay mil que son falsos. Seria pues casi un milagro que operando de dos modos diferentes, se viniese á dar dos veces con el mismo resultado erróneo, entre un número infinito de otros diferentes y tambien erróneos, mientras que es muy natural y aun necesario que se dé con el mismo resultado, si se opera bien, puesto que lo verdadero es único.

Haremos una advertencia última que se halla justificada con anticipacion. Si el multiplicador ó el multiplicando ó ambos terminan en un cero ó en una serie de ceros, se efectua la multiplicacion sin atender á ellos en el principio; despues, á la derecha del producto efectuado, se agregan tantos ceros cuantos haya en el multiplicando y en el multiplicador reunidos. Por ejemplo, teniendo que multiplicar 35400 por 26000, se operará como lo manifiesta el cuadro adjunto.

$$
\begin{array}{l}
354\,00 \\
26\,000 \\
\hline
2124 \\
708 \\
\hline
920400000
\end{array}
$$

Es fácil ver que el resultado debe ser exacto; el multiplicando consta de 354 centenas, y basta repetir esta cantidad 26000 veces y hacer despues expresar centenas al producto, lo que se consigue agregando dos ceros á la derecha. Por otra parte, multiplicar ese número de centenas por 26 y despues el producto por 1000 es lo mismo que multiplicarlo por 26 veces la cantidad mil, ó por 26000. Pero sabemos que la multiplicacion de un número por 1000 se hace agregando 3 ceros á la derecha.

En resúmen:

La multiplicacion es una operacion que consiste en repetir una cantidad propuesta un número dado de veces.

La cantidad que se repite se llama *multiplicando;* la que indica el número de veces que se debe repetir á la primera se llama *mnltiplicador;* se dá tambien el nombre de *factores* al multiplicando y al multiplicador reunidos, y el resultado es el *producto.*

Los productos de los números dígitos entre sí, se obtienen por la tabla de multiplicar cuyos resultados deben aprenderse de memoria.

Para multiplicar una cantidad compuesta de varias cifras por un número dígito, se escribe el multiplicando arriba y el multiplicador debajo y se tira una raya. Hecho esto, se multiplica sucesiva y separadamente las unidades, las decenas, las centenas......etc......del multiplicando por el multiplicador dígito, observando de escribir de cada producto parcial solamente la cifra de las unidades y de reservar la cifra de las decenas para agregarla al producto parcial siguiente.

Para multiplicar una cantidad escrita con varias cifras por otra compuesta tambien de varios órdenes de unidades, se multiplica sucesiva y separadamente todo el multiplicando, segun la regla anterior, por las unidades, decenas, centenas......etc...... del multiplicador, teniendo el cuidado de colocar los productos parciales unos debajo de los otros y de hacer correr cada uno de ellos un rango hácia la izquierda con respecto al precedente. Se tira en seguida una raya debajo de los productos parciales así colocados, y se suman para obtener el producto total.

Cuando entre las cifras del multiplicador se encuentra un cero ó una serie de ceros, se prescinde de ellos; pero al efectuar el producto parcial del multiplicando por la cifra que sigue á la izquierda de los ceros, se escribe este producto parcial haciéndolo correr á la izquierda tantos rangos mas uno cuantos ceros seguidos hay en el multiplicador.

La prueba de la multiplicacion se hace volviendo á multiplicar despues de haber escrito el multiplicador en el lugar del multiplicando y *viceversa*.

§ VII.

DIVISION.

Una persona caritativa quiere repartir por partes iguales entre 9 familias pobres sus cortas economias que alcanzan á 72 patacones y necesita saber cuanto tocará á cada uno de sus favorecidos.

La misma persona se inclina á otro partido, el de dar á cada familia pobre que encuentre 8 patacones; pero antes de decidirse, se pregunta cuantas familias podrá aliviar con este mismo caudal de 72 patacones.

En ambos casos. se trata de partir el dinero; la diferencia es que en el primero, hay que dividirlo en un número dado (9) de partes iguales, cuyo valor se busca; mientras que en el segundo hay que distribuirlo en partes iguales de un valor dado (8), cuyo número se quiere averiguar.

Aun cuando la persona supuesta en este ejemplo fuese enteramente ignorante, sabiendo solamente contar algun poco, no le seria dificil resolver en ambos casos la cuestion propuesta. Hé aquí lo que podria hacer:

Primeramente para distribuir en 9 partes iguales sus 72 $, formaria sobre una mesa una hilera de 9 patacones separados uno de otro: o o o o o o o o o. Volviendo luego del noveno al primero, pondria otra vez un patacon sobre cada uno de aquellos que estarian ya alineados; despues repetiria la misma maniobra, apilando siempre y elevando cada vez todas las pilas con un patacon mas, hasta que no tuviese ya plata ó que no le quedase bastante cantidad para alcanzar al fin de la fila. Es claro que cuantas veces hubiera podido efectuar esta operacion, tantos patacones habria en cada pila y que todas las pilas serian iguales. Seria pues suficiente que contase una de ellas para saber luego lo que tocaria á cada uno de sus pobres, y en el caso propuesto, encontraria que son 8 patacones, sin sobrante alguno.

El segundo modo de repartir el dinero es aun mas fácil. Para hallar el número de personas á quienes se puede dar 8 $ teniendo 72 $, no hay mas que sacar de la bolsa una primera vez 8 patacones, y colocarlos en un solo monton sobre la mesa; despues colocar, al lado de este, otro monton de 8 patacones, y continuar así hasta haber vaciado la bolsa del todo ó hasta no tener en ella sino un número de patacones inferior á 8. En el ejemplo propuesto, habria cabalmente 9 montones, sin resíduo, y se conoceria el resultado contándolos.

Si el dinero hubiera sido de 75 $ en lugar de 72 $, la persona esta se habria quedado con 3 patacones, que no habria podido, sin cambiarlos en monedas mas menudas, distribuir igualmente entre sus 9 pobres, ó de los cuales le fuera imposible hacer un monton igual á los nueve ya formados. Supondremos por el momento que los guarda, para no confundirse en la operacion.

Se vé por lo demas, muy claramente que las dos operaciones no difieren en el fondo, sino únicamente en el modo de arreglar y de distribuir las monedas sobre la mesa. Pero en la realidad, se ha sacado de la bolsa en la primera operacion 8 veces seguidas 9 patacones, y en la segunda 9 veces seguidas 8 patacones, lo que al fin no es mas que sacar, quitar, *sustraer* de una cantidad dada un cierto número de veces otra cantidad tambien dada. Esta simple advertencia nos va á sugerir un medio mas cómodo y mas pronto de efectuar la particion pedida.

En efecto, puesto que no se trata mas que de sustraer ó quitar un número de otro y que sabemos efectüar esta operacion que no es otra cosa que la resta, podremos hacerlo por escrito y segun la regla del § V. Para esto, escribirémos primeramente la cantidad dada 72 y, en el primer caso, restaremos de ella *nueve*, en el segundo *ocho*, tantas veces como se pueda hacerlo. Contaremos el número de sustracciones efectuada en ambos casos, y es 8 en el cuadro de la izquierda, 9 en el de la derecha; estos números son los resultados pedidos.

72	1ª	72	1ª
9		8	
63	2ª	64	2ª
9		8	
54	3ª	56	3ª
9		8	
45	4ª	48	4ª
9		8	
36	5ª	40	5ª
9		8	
27	6ª	32	6ª
9		8	
18	7ª	24	7ª
9		8	
9	8ª	16	8ª
9		8	
0		8	9ª
		8	
		0	

Para obtenerlos, no hemos aprendido ninguna operacion nueva. La sustraccion varias veces repetida ha sido suficiente y podria con rigor serlo para resolver todas las cuestiones parecidas á esta.

Sin embargo, tomemos algun otro ejemplo para ver si alcanzaremos siempre con tanta facilidad á nuestro objeto. Un comerciante ha comprado todo un cargamento de 348 toneles de vino de la misma procedencia y calidad, cuyo importe total, puestos los toneles en su casa y pagados los derechos y gastos de toda clase, es 266220 pesos. El quisiera saber á cuanto le sale cada tonel, y como la calidad del vino y la cabida de las vasijas es igual para todas, es claro que el precio total debe ser distribuido en tantas partes iguales cuantos toneles hay, esto es en 348 partes iguales. Es pues enteramente la misma cuestion que la precedente, y la única diferencia consiste en esto que las cantidades son mas crecidas. Pero esto mismo nos crea una dificultad que imposibilita casi el uso de los dos procedimientos recien empleados.

Juntar en pesos sueltos un caudal de 266220$ para formar de ellos, por el método de reparticion material arriba explicado 348 montones iguales, es poco menos que impracticable. Se podria, es verdad, emplear en lugar de pesos efectivos granos de maiz ó de trigo que los representarian y despues de haber contado 266220 de estos, distribuirlos como hemos hecho antes los 72 patacones; pero puede dudarse si la operacion se acabaría en un solo dia. Recurrir á la sustraccion, es algo mas expedito, sin serlo bastante; con un poco de penetracion natural, se advierte facilmente que en este ejemplo, que no es uno de los mas complicados que pueden citarse, habria que sustraer 348 de 266220 y de los residuos sucesivos mas de 700 veces, lo que no deja de ser una operacion desmedidamente larga y fastidiosa.

Algo mas ligera seria si nuestro comerciante se hiciera la pregunta análoga al segundo caso del ejemplo anterior, quiero decir, si conociendo que el tonel le cuesta 765$ y todo el cargamento 266220$ quisiera calcular el número de los toneles, supuesto que lo ignore. Pero aun así tendria que efectuar 348 restas y ya esto es excesivo para la rapidez que exigen los negocios de esta vida.

Hagamos pues lo que en la multiplicacion; busquemos algun estratagema, alguna invencion para abreviar estas sustracciones sin término ni fin. Lo encontraremos indudablemente, pues que hemos hallado bien el de la multiplicacion, y desde ahora podemos darle un nombre. El de *division* le viene bien, pues en los ejemplos ya propuestos (y será lo mismo en todos) se trata de partir ó *dividir* y se puede aun llegar al fin propuesto por una verdadera division material, comparable á ciertos respectos con aquella que consiste en partir una tabla con la sierra. Por el mismo motivo, la cantidad que se trate de partir se llamará bien *dividendo* y aquella que indique el número de partes ó el valor de cada una de ellas recibirá el nombre de *divisor*. En cuanto al resultado de la operacion, sacaremos su denominacion de la palabra latina *quoties*, la que quiere decir: *cuantas veces*, porque efectivamente el resultado nos indicará cuantas veces el divisor esté contenido en el dividendo; asi es que lo llamaremos *cuociente* ó *cociente*.

Asi en el primer ejemplo, 72 era el dividendo, 9 en un caso y 8 en otro era el divisor, y los cocientes correspondientes han sido 8 y 9. En el segundo ejemplo el dividendo era 266220, el divisor 348 y 765 el cociente en la primera forma de la cuestion; 765 el divisor y 348 el cociente, en la segunda.

Para inventar ó, mejor dicho, para explicar las reglas ya inventadas y muy conocidas de la division, una de las advertencias anteriormente hechas nos vá á dar una indicacion que nos será de trascendente utilidad. Hemos reconocido que las cuestiones propuestas podian ser resueltas por la resta, asi mismo que aquellas que dan lugar á una multiplicacion pueden ser tambien resueltas por la suma. En otras palabras, la division no es sino *un procedimiento abreviativo de la sustraccion. como la multiplicacion es un procedimiento abreviativo de la adicion.* Por otra parte, sabemos que la sustraccion es la operacion inversa de la adicion; podemos pues juzgar por esto solo que *la division será la operacion inversa de la multiplicacion*. La sustraccion consiste, siendo dada una suma y uno de los sumandos, en determinar el otro; por lo tanto, la division consistirá, siendo dado un producto y uno de sus factores. en determinar el otro.

Es fácil por lo demas que nos convenzamos de esto directamente. En efecto, la multiplicacion nos enseña á formar una suma compuesta de un cierto número de partes iguales; en la division, la suma está formada y se trata al contrario de descomponerla en un cierto número de partes iguales. Esta deshace pues lo que hace aquella, y la primera recompone lo que descompone la segunda. Asi, es cierto que si la persona caritativa citada hubiera sabido con anticipacion la cantidad de dinero que podia dar á cada uno de sus 9 pobres, repitiendo 9 veces esa cantidad (que es 8), habria hallado por producto la cantidad que tenia para repartirla, esto es 72 duros. Y el comerciante del otro ejemplo, habiendo una vez calculado lo que le cuesta cada tonel y sabedor ademas del número de los toneles comprados, volverá siempre á hallar el precio total cuando quiera, multiplicando estas dos cantidades entre sí. Asi pues, *el dividendo es un producto; el divisor y el cociente son sus dos factores.*

Ahora podemos cambiar ó completar la idea de la division que nos habian sugerido los ejemplos. Antes, nos hubieramos limitado á decir: «la division es una operacion por la cual, siendo dado un número, se trata de distribuirlo sea en un número dado de partes iguales, cuyo valor se busca, sea en partes de un valor dado, cuyo número se busca», ó lo que viene á ser lo mismo y es mas sencillo: «*la division es una operacion por la cual se averigua cuantas veces un número contiene á otro.*» Actualmente, diremos, porque esto nos alumbrará mejor la regla de la operacion: «*La division es una operacion por la cual, siendo dado un producto y uno de sus factores, se determina el otro.*»

Cuando el número de partes es lo que se da y su valor lo que se busca, el factor dado como divisor es el multiplicador. Cuando se da inversamente el valor de las partes y se busca el número de ellas, el multiplicando es el divisor dado. Pero como el órden en que se emplean los factores de un producto y el lugar ó el nombre que se les asigna no influye nada en el valor del producto mismo, es claro que esta diferencia insignificante no traerá ninguna modificacion al procedimiento de la division.

Volvamos luego sobre la marcha, y guiados por estas observaciones y por la definicion en la cual se vienen á reasumir, busquemos las reglas de la division, pasando siempre de lo mas fácil á lo mas dificil, como para resolver las operaciones mas complicadas en una serie de operaciones muy simples.

Para los casos sencillos, como es aquel del primer ejemplo, y en general para todos aquellos en los que el dividendo no pasa de 100 y el divisor es una sola cifra, la tabla de multiplicacion ó mas bien el recuerdo siempre presente de sus resultados nos suministrará inmediatamente el cociente. En efecto, el dividendo es un producto; todos los productos de los números digitos entre si, hasta el mayor de todos que es 10 por 10 ó 100, figuran ahi en frente de sus factores respectivos. Ved aqui pues lo que harémos: siendo dado v. gr. el producto 72 y uno de sus factores 9, buscarémos desde luego este en la primera hilera de arriba, y bajarémos en la columna vertical encabezada por 9 para encontrar en esta el producto 72, en frente y á la izquierda del cual, donde principia el renglon horizontal al que pertenece, está el otro factor 8 que es el cociente buscado, tal como lo encuentra de memoria y sin esfuerzo cualquier hombre algo ejercitado.

Podria suceder que el dividendo propuesto no se encontrase en la linea vertical en la que lo buscamos. Por ejemplo en la linea del 9 no encontrariamos á 75; pero entonces estaria siempre comprendido, aunque sin figurar escrito, entre dos productos sucesivos, uno mayor, otro menor que él, v. gr. en este caso entre 72 que es menor y 81 que es mayor. Siendo asi, es en frente y á la izquierda del menor 72 que se debe buscar el cociente, y la diferencia de este producto menor al dividendo propuesto 75 es lo que se llama el *residuo* de la division.

Vengamos ya á un caso en el que el dividendo pase de 100, sin que el divisor deje de ser digito. Por ejemplo, 6 sócios han ganado en un negocio comun 9258$ que quieren repartir igualmente entre ellos. No nos cansemos de producir siempre este mismo raciocinio, que encierra el secreto y es la clave de todas las operaciones de aritmética: Lo que no se puede hacer en una vez se hará en varias, aqui en 4; pues será evidentemente lo mismo repartir 9258$ entre 6 personas ó repartirles sucesivamente los 9 mil pesos, los 2 cientos pesos, los cincuenta pesos y los 8 pesos cuya reunion constituye este número.

Para esclarecer esto, supongamos por un momento que la cantidad total haya sido abonada al depositario encargado de la reparticion en billetes de banco, es á saber 9 de á 1000$, 2 de á 100, 5 de á 10 y 8 de un solo peso. Este hombre podrá empezar por distribuir los papeles de á 1000$, y dando uno de ellos á cada uno, le sobrarán tres de estos que ya no podrá partir igualmente entre los interesados sino cambiandolos. Cambiará pues este residuo en papeles de á 100$ y de estos se le dará 30 en cambio, los cuales agregados á 2 que ya tenia del mismo valor le completaran 32. Dará á cada sócio 5 papeles de á 100$, y habiendo asi empleado 30 de ellos le sobrarán dos. Otra vez recurrirá al cambio y convertirá sus dos papeles restantes de á 100$ en 20 de á 10$ los cuales agregados á 5 que tenia le harán 25 de esta clase; cuatro de estos remitidos á cada sócio, le quedará uno que se precisara aun cambiar en 10 papelitos de un peso y no faltará mas que agregarlos á los 8 ya existentes para formar uu último total de 18$ del cual cada sócio recibirá 3$ acabándose asi la reparticion. Cada uno tendrá por fin un billete de á 1000$, 5 de á 100, 4 de á 10 y 3 de un peso ó 1543$.

Lo que haria este hombre ignorante, guiado por el mas vulgar sentido comun, es justamente lo que vamos á hacer por escrito, siguiendolo paso á paso y tomándolo por modelo.

Para que la operacion esté bien dispuesta, el dividendo estará escrito, con el divisor 6 á su derecha; se tirará entre ambos una raya vertical para que no se confundan y debajo del divisor una raya horizontal para colocar ahi las cifras del cociente á medida que se obtengan.

$$\begin{array}{r|l}
9258 & 6 \\ \cline{2-2}
\underline{6} & 1543 \\
32 & \\
\underline{30} & \\
25 & \\
\underline{24} & \\
18 & \\
\underline{18} & \\
00 &
\end{array}$$

Hecho esto, asi como este hombre, empezarémos por repartir en 6 los 9 millares, sin ocuparnos de cuanto hay escrito á la derecha de ellos, y esto nos dará al cociente 1 millar; pero bastará escribir 1, porque las demas cifras que resultarán de las divisiones parciales siguientes y vendrán sucesivamente á tomar lugar á la derecha de este 1, le darán por fin su verdadero valor.

Multiplicando este millar del cociente por el divisor 6 y colocando el producto debajo de la cifra 9 de los millares del dividendo, obtendrémos por sustraccion un residuo de 3 millares, que nuestro hombre habia tenido que cambiar en billetes de á 100$ pero que nosotros cambiarémos en centenas por el mero hecho de escribir á su derecha las dos centenas del dividendo.

Hénos aquí con un segundo dividendo parcial de 32 centenas, que dá al cociente 5 centenas y su producto por el divsior, escrito del mismo modo que en la operacion ant rior y sustraido de 32, nos deja con un residuo de 2 centenas.

La cifra 5 de las decenas del dividendo, escrita á la derecha de este residuo, lo convierte en decenas, de las cuales hay 25 que dividir otra vez por 6, lo que da 4 decenas al cociente y una decena sobrante, la que convertida ó cambiáda por el mismo procedimiento en 10 unidades y agregada á 8 proporciona la última cifra 3 del cociente.

Se vé que no hay diferencia alguna en el fondo entre la operacion asi efectuada y la reparticion material practicada antes. Es el mismo órden en la distribucion de los valores, que allí eran dilletes de banco, aquí son unidades de diferentes órdenes. Son los mismos residuos provenientes de cada distribucion parcial, transformados cada vez, ya por el cambio de las monedas, ya por un simple artificio de númeracion escrita, en valores ó en unidades de órden inferior, para ser otra vez repartidos en esta nueva forma con las que se tenia del órden inferior. La division escrita da el mismo resultado que la division material, y es igualmente legítimo en ambos casos. Solamente hay esta ventaja grande en practicar la division por escrito, que sin cambio de monedas, y cualesquiera que sean aquellas en que el dinero haya sido abonado, se sabe al instante y aun antes de efectuar la particion, lo que toca á cada interesado; de su rte que se les puede pagar por separado y en una moneda cualqui ra.

Se abrevia aun esta operacion, dejando de escribir debajo de los dividendos parciales los productos del divisor por cada cifra del cociente. Basta para esto acostumbrarse á hacer mentalmente la sustraccion de cada uno de estos productos con cada uno de los dividendos parciales y no hay cosa mas fácil, sobre todo cuando el divisor es una sola cifra. Entonces, el cuadro de la operacion se reduce á esto:

$$\begin{array}{r|l} 9258 & \underline{\;6\;\;\;\;\;\;} \\ 32 & 1543 \\ 25 & \\ 18 & \\ 0 & \end{array}$$

Se puede aun abreviarlo en este caso, sin inconveniente, con ahorrarse de escribir los residuos de las sustracciones sucesivas y contentándose con retenerlos en la memoria y agregarlos mentalmente, reducidos á unidades del órden inferior, á la cifra que sigue á la derecha. Se dice entonces simplemente: la sesta parte de 9 es 1 (que se escribe debajo del 9) por 6 y sobran 3; la sesta parte de 32 es 5 por 30 y sobran 2 (se escribe 5 y se reserva 2); la sesta parte de 25 es 4 por 24 y sobra 1 (se escribe 4 y se reserva 1); en fin la sesta parte de 18 es 3, que se escribe.

$$\begin{array}{r|l} 9258 & \underline{\;6\;\;\;\;\;\;} \\ 1543 & \end{array}$$

Las reflexiones y los raciocinios que nos han conducido á operar como lo hemos hecho no dependen en nada del valor particular de los números sobre los cuales hemos operado. Podemos pues mirar el procedimiento seguido como una regla general, aplicable á todos los casos de la misma clase, en los que el dividendo siendo un número compuesto, el divisor no tenga mas que una sola cifra. Sin embargo, en algunos de ellos, se encontrarán particularidades de poca importancia, que no cambian nada al fondo de la operacion, pero que es bueno conocer, para no estrañarlas.

El primer dividendo parcial puede componerse de las dos primeras cifras á la izquierda del dividendo total, en lugar de ser una sola cifra; y es cuando la primera de ellas tomada sola es inferior al divisor, lo que sucederia por ejemplo si se tuviera que repartir 29538$ entre 5 personas. Entonces se toman 2 cifras y se dice: la quinta parte de 29 es 5 por 25, y se escribe el cociente 5 debajo de la cifra de los millares.

	29538	5
	5907	
residuo	3	

Otro tanto haria el hombre que tuviese el dinero contado en papeles de banco; no pudiendo evidentemente distribuir 2 papeles de un valor de 10000$ cada uno entre 5 personas sin cambiarlos, los reduciria luego por el cambio á 20 billetes de 1000 y efectuaria primeramente la distribucion de los 29 billetes de 1000$.

Uno de los dividendos parciales sucesivos puede tambien encontrarse inferior al divisor, y es lo que sucede aun en nuestro ejemplo actual, en el que pasamos á las decenas sin tener ningun resíduo procedente de la division anterior. Hallamos 3 decenas que no pueden cortarse en 5. Se cambian luego en 30 unidades; pero hay que atender bien á escribir entonces un cero debajo de la cifra de las decenas, porque sin eso las cifras anteriores del cociente no tendrian su verdadero valor.

En fin, esta division da lugar á un resíduo final de 3 unidades. En la reparticion material, se podria talvez cambiarlas en monedas mas pequeñas, por ejemplo en reales si son pesos, y distribuir los reales. En la division escrita, cualquiera que sea la clase de las cosas que se reparten, hay tambien un medio de cambiar las tres unidades, que consiste en hacer de ellas lo que se llama un *quebrado;* pero no ha venido todavía el tiempo de explicarnos sobre esto.

Estas observaciones hechas una vez por todas se aplicarán á los otros casos mas complicados que nos falta que examinar.

Se vé que la operacion de la division empieza por la izquierda y no por la derecha como la multiplicacion. Es que efectivamente la division es y debe ser en todo la operacion inversa de la multiplicacion. Lo que nos ha decidido á empezar esta por la derecha, ha sido la circunstancia de las reservas sucesivas de cada producto parcial, las que reducidas á unidades del órden inmediatamente *superior* se agregan al producto parcial de las unidades de este órden. En la division, son los resíduos sucesivos los que reducidos á unidades del órden inmediatamente *inferior*, se agregan al dividendo parcial de este órden. Era preciso pues, para que esta reduccion y agregacion pudiesen efectuarse oportunamente, que la division de cada órden se hiciera antes de haber hecho la del órden que le fuera inferior; sin eso, el cociente de este hubiera sido ya escrito y se hubiera tenido las mas veces que modificar y enmendarlo.

Sabemos ya dividir un número menor que 100 por un número de una sola cifra (esto se hace con la tabla de multiplicar) y un número cualquiera, tan grande como se suponga, por un número de una sola cifra (esto se resuelve en una sucesion de divisiones parciales que se reducen cada una al caso anterior). Falta que aprender á dividir una cantidad cualquiera, escrita con varias cifras, por otra cualquiera escrita tambien con varias cifras. Este caso general, el mas complicado de todos, presenta aun dos casos que es bueno distinguir: 1° aquel en el que el cociente no tenga sino una sola cifra; 2° aquel en el que deba tener, así como el dividendo y el divisor, varias cifras. Es claro que el primero es mas fácil que el segundo, y segun nuestro método invariable, empezaremos por el mas cómodo.

Pero ¿cómo vamos á saber anticipadamente, sin efectuar la operacion, si el cociente tendrá una sola cifra ó si tendrá varias? Un poco de reflexion nos va enseñarlo.

Supongamos primeramente que el dividendo y el divisor tengan el mismo número de cifras, y que haya que dividir por ejemplo 94608 por 26743. Admitamos por un momento que el cociente sea 10. Se sabe por la definicion misma que el dividendo es el producto del divisor por el cociente; de consiguiente este producto no puede ser jamás mayor que el dividendo; podrá solamente ser á veces menor, y será cuando la division haya dado un residuo final. Multipliquemos pues por el cociente supuesto 10 el divisor dado 26743, lo que se efectua agregando un cero á la derecha; tenemos por producto 267430, cantidad necesariamente mayor que el dividendo, pues que tiene una cifra mas que este. Luego no se puede admitir que el cociente sea 10 y menos aun superior á 10; luego es necesariamente inferior á 10 ó es un número de una sola cifra.

El cociente puede ser tambien de una sola cifra, aun cuando el dividendo tenga una mas que el divisor, y sucederá así toda vez que un cero agregado á la derecha del divisor hará este mayor que el dividendo. Por ejemplo, teniendo que dividir 29542 por 8675, el cociente no podrá ser 10, porque multiplicando el divisor por 10 ó agregándole un cero, se tiene 86750 que es una cantidad mayor que el dividendo, lo que es imposible. Mucho menos podrá ser superior á 10, porque si lo fuera, el producto del divisor por el cociente seria no solamente mayor que 29542, sino tambien mayor que 86750. Es preciso pues que sea menor que 10 y no tendrá mas que una sola cifra.

Si al contrario despues de la agregacion del cero á la derecha del divisor, este resultase inferior aun al dividendo, el cociente tendria al menos 2 cifras, puesto que esto significaria que es al menos igual á 10.

Tenemos así una regla muy sencilla y muy segura para juzgar, de una sola mirada, si el cociente de dos números ha de tener una ó mas cifras y la podemos expresar resumida así:

El cociente de dos números será de una sola cifra 1º *toda vez que el número de las cifras de que se compongan el dividendo y el divisor sea igual en ambos; 2º toda vez que teniendo el dividendo una cifra mas que el divisor, un cero agregado á la derecha de este lo haga mayor que el dividendo. En todo otro caso, el cociente tendrá al menos dos cifras.*

Bien entendido esto, busquemos el cociente dígito de 94608 por 26743. Se precisa aquí un tanteo, pues no hay tabla que pueda dar este cociente; pero, sí, tenemos una que sabemos de memoria y que contiene todos los productos de los números dígitos entre sí. Hagamos pues una cosa: busquemos en esa tabla el cociente de las 9 decenas de millar por las 2 decenas de millar, prescindiendo por un momento en los dos números propuestos de toda la parte que sigue á la derecha de estas cifras. Este cociente es 4. Pero ¿será el verdadero cociente de los números propuestos? Demasiado pequeño, no puede serlo; pues si se le aumenta una sola unidad, tomando 5 en lugar de 4, se tiene ya, multiplicando por 5 solamente las 2 decenas de millar del dividendo, 10 decenas de millar, esto es, mas unidades del órden superior del dividendo que este no tiene, y esto es inadmisible, porque el dividendo no puede ser menor que el producto del divisor por el cociente.

Pero esta cifra 4 podria ser demasiado grande; con efecto, cuando vengamos á multiplicar los millares del divisor por 4, el producto podrá darnos una reserva de decenas de millar, la cual agregada segun la regla de la multiplicacion al producto parcial siguiente, talvez nos complete un número de decenas de millar superior al que tiene de las mismas el dividendo; y es justamente lo que tiene lugar en el caso presente, puesto que 4 veces 6 millares son 24 millares ó 2 decenas de millar que agregadas á 4 veces 2 ó á 8, nos dará 10 que no las tiene el dividendo. Debemos pues ya desechar como excesivo el cociente 4, y rebajándolo en una unidad, probar el número inmediatamente inferior 3.

Este no es todavía seguramente bueno; lo único que sabemos es que no es demasiado pequeño; pero puede ser otra vez demasiado elevado, porque la reserva del producto de las centenas del divisor por 3 puede dar millares, los que agregados al producto de los millares del divisor por 3 produzcan otra reserva, la cual agregada á su turno al producto de las decenas de millar del mismo divisor por 3 podria finalmente dar mas de estas que las 9 del dividendo. Probaremos sin mas el cociente 3, multiplicando por él á todo el divisor, para ver si el producto total es superior al dividendo, en cuyo caso se necesitaria quitarle todavía una unidad; pero el hecho es que el producto 80229 es inferior al dividendo; luego el cociente 3 es bueno, y el residuo es: 14379.

```
94608|26743
80229|3
 14379
```

Operaremos del mismo modo sobre el segundo ejemplo: 29542 á dividir por 8675. Toda la diferencia será que en este buscaremos desde luego en la tabla el cociente de las dos primeras cifras reunidas del dividendo por la primera del divisor, porque hay una cifra mas en aquel que en este y que la primera del divisor no cabe en la primera del dividendo. Así es que diremos: en 29 hay 3 veces 8; el producto es 24 y el resíduo 5. Como el producto de los 6 millares del divisor por 3 no dá sino una decena de millar que llevar, y que tenemos 5 de menos que las que hay en el dividendo, este cociente es ya muy probablemente bueno y no hay mas que probarlo.

```
29542|8675
26025|3
  3517
```

Este procedimiento de tanteo parece penoso á los principiantes; pero es inevitable. Deberán hacer sus ensayos por escrito, sobre un borrador á parte. Pero el hábito facilita suficientemente este trabajo y los que se ejercitan en él adquieren pronto bastante penetracion para hacer mentalmente y sin escribir nada todos los ensayos preliminares. Uno se acostumbra tambien á efectuar al mismo tiempo la multiplicacion del divisor por el cociente y la sustraccion entre el producto que se obtiene y el dividendo, restando cada cifra del producto á medida que se forma de la cifra correspondiente del dividendo, lo que reduce la escritura á dos renglones en lugar de tres, puesto que el producto del divisor por el cociente no se escribe. Prescindiendo de estas simplificaciones y abreviaturas, que la práctica enseñará mucho mejor que las explicaciones mas prolijas, expresaremos en pocas palabras la regla particular al caso en el que el cociente no tiene sino una cifra:

El dividendo colocado á la izquierda del divisor y tiradas las rayas de costumbre, se empieza por dividir por la primera cifra escrita á la izquierda del divisor la primera cifra escrita á la izquierda del dividendo si el número de cifras es igual en ambos, ó las dos primeras cifras á la izquierda del dividendo, si hay una cifra mas en este que en el divisor. Antes de escribir el cociente así obtenido, se averigua si el producto de la segunda cifra á la izquierda del divisor multiplicada por el cociente probado dá una reserva tal que, agregada al producto de la primera cifra del divisor por el mismo cociente, forme una suma superior, igual ó inferior á la parte del dividendo sobre la cual se opera; si es superior, se rebaja una unidad al cociente probado y así rebajado se vuelve á probar; si es igual ó inferior, se hace, sea mentalmente sea por escrito y á parte, la multiplicacion de todo el divisor por el cociente, y quitando, si la sustraccion es posible, este producto de todo el dividendo, faltará solamente que escribir definitivamente el cociente y el resíduo, si hay alguno.

Ahora nos será muy fácil exponer y justificar el procedimiento aplicable al caso mas complicado de la division, es decir aquel en el que el cociente, así como el dividendo y el divisor, es un número compuesto de varias cifras; pues este procedimiento se va como siempre á resolver casi por sí solo, á la luz de las reflexiones que anteceden y de principios ya muchas veces aducidos, en una serie de operaciones sabidas y legitimadas de antemano.

Tomemos un ejemplo: un hombre que goza de un rédito anual de 94170 pesos quisiera saber, para arreglar su gasto diario, cuanta renta tiene al dia, esto es repartir su rédito total en 365 partes iguales, lo que es á todas luces el oficio de la division.

Colocará primeramente los dos números segun es costumbre; luego separará á la izquierda del divisor, sea por una raya, sea por un punto colocado entre las cifras, sea en fin mentalmente la cantidad de cifras necesaria y suficiente para formar un número que contenga al divisor. Aqui será 941, es decir tantas cifras cuantas tiene el divisor; en muchos casos, habrá que tomar una mas, y será cuando el divisor se encuentre mayor que la cantidad obtenida con apartar á la izquierda del dividendo un número de cifras solamente igual al de las cifras del divisor. De esta manera ó de la otra, se habrá siempre aislado, en el dividendo total, un primer dividendo parcial cuyo cociente será un número dígito y sobre el cual se podrá por consiguiente operar conforme á la regla anteriormente dada.

```
94170 | 365
 730  |-----
----- | 258
 2117 |
 1825
 -----
  2920
  2920
  ----
  0000
```

Pero ¿á que esta separacion y con que derecho se hace? Lo vamos á decir: es como si nuestro hombre se dijera: supongo primeramente que yo no tenga mas renta anual que 941 centenas de pesos; voy á empezar por hacer de ellas 365 partes iguales ó dividiré 941 por 365, lo que es fácil; en seguida procuraré repartir las centenas que pueden sobrar despues de esta primera particion, reduciendolas á decenas y agregando las 7 decenas que omito por ahora. El número de centenas por dia es 2 y quedan 211 que ya no puedo distribuir sobre 365 dias, sinó cambiándolas en decenas, y para esto basta escribir al lado y á la derecha de este residuo la cifra de las decenas del dividendo; escribo luego 2 al cociente y bajo el 7 cerca del residuo 211, de lo que me sale un segundo dividendo parcial, sobre el cual voy á operar asi como sobre el anterior.

La segunda division da por cociente 5 decenas que se colocan á la derecha de las 2 decenas ya escritas al cociente, y sobran 292 decenas ó 2920 unidades. Si hubiese habido unidades sencillas en el dividendo, se habria bajado la cifra de estas á la derecha de 292, y aunque faltan, no se ha dejado de bajar el cero, porque esto es necesario para reducir á unidades las decenas restantes. Asi formado el tercer y último dividendo parcial, se opera sobre él como sobre el precedente, y el cociente 8 escrito á la derecha de las demas cifras ya obtenidas del cociente lo completa, acabando de dar á estas su valor positivo. La cantidad diaria que se puede gastar es pues 258 pesos. La operacion abreviada por la supresion acostumbrada de los productos del divisor por el cociente se reduce al cuadro adjunto.

94170	365
2117	258
2920	
0000	

Este ejemplo es sumamente simple; pero aun cuando el dividendo tuviera cien cifras y el divisor sesenta, en cuyo caso el cociente tendria treinta y nueve ó cuarenta, los mismos raciocinios le serian aplicables, y la operacion sin ser mas difícil seria solamente mas larga. Para que todo esté previsto, basta recordar que si uno de los dividendos parciales formados por un residuo y la cifra siguiente del dividendo total bajada á su derecha se encuentra menor que el divisor, se debe escribir un cero al cociente y bajar inmediatamente otra cifra del dividendo.

En las largas divisiones, es bueno señalar con un punto colocado arriba de ellas cada cifra del dividendo que se baje, para no exponerse á bajar dos veces la misma cifra ó á omitir alguna por distraccion.

En cuanto á la prueba de la division, resulta claramente de la definicion misma; puesto que el dividendo es un producto, del cual se dá un factor que es el divisor y se busca el otro que es el cociente, es evidente que multiplicando el cociente hallado por el divisor ó inversamente, se debe volver á hallar el dividendo, si la operacion es exacta. Pero es importante no olvidarse de agregar el residuo final, si hay alguno, al producto del divisor por el cociente.

En resumen:

La division es una operacion por la cual se parte un todo dado ya en un número dado de partes iguales

cuyo valor se busca, ya en partes de un valor dado cuyo número se busca.

La division es la operacion inversa de la multiplicacion y se puede tambien definir una operacion por la cual, siendo dado un producto y uno de sus factores, se determina el otro.

La cantidad que se parte se llama *dividendo;* la que indica el número de las partes ó el valor de cada una de ellas se llama *divisor;* y el resultado *cociente.*

La division de una cantidad de una ó dos cifras por un número dígito se efectua con la tabla de multiplicar, buscando el factor dado en la primera hilera horizontal y el producto dado en la columna vertical que dicho factor encabeza; el factor buscado ó cociente se encuentra á la extremidad izquierda de la hilera horizontal á la que pertenece este producto. No encontrándose el producto dado, se tomará en la columna vertical mencionada aquel de los productos inscritos en ella que se acerque mas al dividendo, siéndole inferior; y la diferencia entre este producto y el dividendo propuesto es el *resíduo* de la division.

Para dividir un número escrito con varias cifras por un número dígito, se coloca el divisor á la derecha del dividendo, separándolos por una raya vertical y se tira otra raya horizontal debajo del divisor, para separarlo del cociente que se escribirá debajo de la raya.

Si la primera cifra á la izquierda del dividendo es igual al cociente ó mayor que él, se busca el cociente por la regla precedente; pero si dicha primera cifra es menor que el divisor, se toman dos y se busca del mismo modo el cociente. Escrito este en su lugar, se multiplica por él al divisor y el producto se resta del dividendo parcial.

Al lado del resíduo, se baja la cifra siguiente del dividendo total y se opera sobre el nuevo dividendo parcial así formado y sobre los siguientes que se forman, de la misma manera que sobre el primero, continuando así hasta que se hayan bajado todas las cifras del dividendo total.

Cuando un dividendo parcial es menor que el divisor, se escribe un cero al cociente y se baja la cifra siguiente del dividendo. El resíduo final, si hay alguno, queda escrito.

Para dividir una cantidad cualquiera por otra tambien cualquiera, se dispone la operacion así como en el caso anterior. Se toma á la izquierda del dividendo un número suficiente de cifras para formar un dividendo parcial igual cuando menos al divisor. Se busca por tanteo el cociente de esta primera division parcial, y se averigua su exactitud multiplicando el divisor por el cociente parcial probado, el cual se rebaja en una unidad si sale mayor que el dividendo parcial considerado. Averiguado este cociente parcial, se escribe en su lugar, se efectua la multiplicacion del divisor por él y se resta el producto del dividendo parcial.

Al lado y á la derecha del resíduo, se baja la cifra siguiente del dividendo total y se opera sobre el nuevo dividendo parcial resultante como sobre el primero y así sucesivamente hasta que se haya bajado á todas las cifras del dividendo.

Así como en el caso anterior, si un dividendo parcial es menor que el divisor, se escribe un cero al cociente y se baja la cifra siguiente del dividendo.

Para hacer la prueba de la division, se multiplica el divisor por el cociente hallado; al producto se agrega el resíduo de la division, si hay alguno; el total debe reproducir el dividendo.

APÉNDICE

ó ejercicios y explicaciones accesorias.

Este capítulo comprende algunas explicaciones accesorias que podrán servir sea para simplificar y abreviar en ciertos casos las operaciones aritméticas, sea para hacer entender mejor sus principios y su artificio; y tambien algunos motivos de ejercicio, sobre el modelo de los cuales se podrá imaginar otros, en el número que se quiera, para hacerse hábil en la práctica del cálculo.

§ I.

SIGNOS Y TERMINOS.

En la aritmética, no se efectuan siempre acto continuo las operacioues que exige la solucion de una cuestion. Es bueno entonces poder indicarlas de una manera abreviada, y para esto se han adoptado varios signos que representan las operaciones para hacerse. Ved aquí la lista, el nombre et y el sentido de estos signos :

La SUMA de dos ó mas cantidades se indica por una cruz derecha + colocada entre los sumandos y que se enuncia *mas*. Así, para expresar que se debe adicionar los: números :.2708, 347, 42619, se escribe : 2708 + 347 + 42619, y se lee 2708 *mas* 347 *mas* 42619.

La RESTA entre dos cantidades se indica por un guion — colocado entre el minuendo y el sustraendo escritos en el mismo órden en que se acaban de nombrar. Así para significar abreviadamente que hay que restar el número 3298 de 65027, se escribe 65027 — 3298 y se lee : 65027 *menos* 3298.

La MULTIPLICACION de dos catidades se indica por una cruz volcada × colocada entre los dos factores y se enuncia : *multiplicado por*. Si hay algun interés en conservar el órden natural de los factores, es el multiplicando que va adelante y el multiplicador sigue.

Así, 75 varas de paño á 22 pesos vara valen 22 $ × 75, lo que se puede leer : 75 veces 22 $ ó 22 $ multiplicado por 75.

La DIVISION puede indicarse sea por dos puntos : colocados entre el dividendo y el divisor, sea por una pequeña raya horizontal, arriba de la cual se escribe el dividendo y debajo el divisor, y ambos signos se enuncian diciendo : *dividido por*.

Así un dinero de 6850 $ debiendo ser repartido entre 4 personas, si no se quiere efectuar luego la operacion, se expresará por escrito la cantidad que toca á cada uno, poniendo $\frac{6850}{4}$, ó 6850 : 4, y se leerá : 6850 *dividido por* 4 ó algunas veces 6850 *sobre* 4.

Cuando dos cantidades son iguales, se expresa esto colocando entre ellas dos guiones uno sobre otro =, y se enuncia : *igual*.

Así, si despues de haber efectuado las diferentes operaciones arriba indicadas, se quisiese apuntar el resultado, dando á conocer de donde sale, se escribiria :

1.° $2708 + 347 + 42619 = 45674$.
2.° $65027 - 3298 = 61729$.
3.° $22 \times 75 = 1650$.
4.° $6850 : 4$ ó $\frac{6850}{4} = 1712 + 2$.

Si dos cantidades son desiguales, se indica esta desigualdad colocando entre ellas un signo que se parece á un compas abierto < cuya abertura debe siempre ser dirijida hácia la mayor de las dos cantidades.

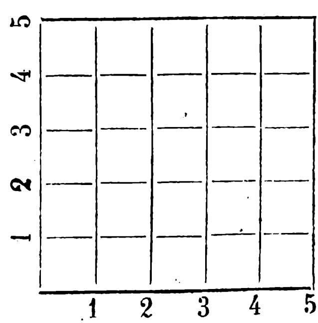
Así $5 \times 7 > 8 \times 4$ quiere decir que el producto de 5 por 7 es mayor que el producto de 8 por 4. La menor de las dos cantidades puede tambien escribirse la primera, así: $8 \times 4 < 5 \times 7$ se lee 8 *multiplicado por* 4 *es menor que* 5 *multiplicado por* 7.

Cuando se multiplica un número por sí mismo, el producto es lo que se llama la SEGUNDA POTENCIA de este número. Así 5×5 ó 25 es la segunda potencia de 5.

Si se multiplica otra vez este producto de dos factores iguales por el mismo factor, el nuevo producto es la *tercera potencia* del número. Así $5 \times 5 \times 5$ ó 125 es la tercera potencia de 5.

Se dá del mismo modo el nombre de *cuarta*, *quinta*, *sesta*, *séptima*. . . . . etc. *potencia* de un número al producto de 4, 5, 6, 7. . . . . etc. . . . . factores, iguales todos á este número.

Ademas la segunda potencia de un número se llama muchas veces *el cuadrado* de este número. Se entenderá facilmente la razon de esta denominacion, al parecer estraña, fijándose un instante sobre la figura adjunta.



Una línea está dividida en 5 partes iguales que supondremos ser *pulgadas*. Si sobre esta línea se forma un cuadrado tirando en una de sus extremidades otra línea igual y dividida del mismo modo, y llevando despues con la regla una serie de líneas tanto verticales como horizontales por todos los puntos de division de ambas, es fácil ver que el cuadrado de la línea total se compondrá de 5 hileras horizontales de pequeños cuadrados, que serán 5 en cada hilera, y por todo 5×5 ó 25. Es claro tambien que cada uno de los cuadraditos iguales entre sí representerá una pulgada en cuadro. Así pues el cuadrado de cinco pulgadas equivale á 5×5 ó á 25 pulgadas cuadradas, ó en general 25 es el *cuadrado* de 5. Y lo mismo sucederia cualquiera que fuese el número de las divisiones.

Por una razon análoga, que hallará su explicacion en la Geometría, se llama muchas veces á la *tercera potencia* de un número el *cubo* de este número.

Ahora el número que multiplicado por sí mismo dá ese producto que se llama su cuadrado toma el nombre de *raiz cuadrada* del mencionado producto; y aquel otro que multiplicado dos veces por sí mismo dá el producto llamado *cubo* es la *raiz cúbica* de dicho producto; y así mismo se dice *raíz cuarta*, *quinta*, *sesta*..... etc..... de un número á la cantidad que multiplicada por sí misma tres, cuatro, cinco..... etc. veces daria la cantidad expresada.

Así, 5 es la *raiz cuadrada* de 25 y la *raiz cúbica* de 125, y la raiz cuarta de 625, y etc.....

El grado de la potencia de un número se indica por una cifra pequeña que se escribe un poco arriba y á la derecha de la cantidad y se llama *exponente*. Así 5^2 expresa la segunda potencia de 5 ó su cuadrado, 5^3 su cubo ó su tercera potencia, 5^4 su cuarta potencia..... etc..... y se lee: 5 *cuadrado*; 5 *al cubo* ó 5 *tercera potencia*; 5 *cuarta potencia*..... etc..... ó tambien: 5 *exponente* 2, 5 *exponente* 3, 5 *exponente* 4..... etc.....

La raiz de cualquier grado de un número se indica con un signo que se parece á una V mayúscula, con una pequeña prolongacion á la derecha, debajo de la cual se coloca el número cuya raiz se quiere indicar. En cuanto al grado mismo de la raiz, se indica por una pequeña cifra colocada en la abertura superior de la V; solamente para la raiz cuadrada no se pone cifra alguna, porque faltando esta se sabe que se trata de la raiz del menor grado posible.

Así $\sqrt{25}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[4]{625}$, se leen: *raiz cuadrada de* 25; *raiz cúbica* ó *raiz tercera de* 125; *raiz cuarta de* 625..... etc.....

§ II.

REGLAS ACCESORIAS.

1° SUSTRACCION POR ADICION.

Hay un modo de hacer la sustraccion ó, mejor dicho, de di poner los núm ros minuendo y sustraendo que puede parecer mas sencillo y cómodo que aquel que se ha enseñado. Tiene al menos la principal ventaja de patentizar la verdad de esta definicion: la sustraccion es una operacion que consiste, dada la suma de dos números y uno de ellos, en determinar el otro.

Supongo que s· quiera saber, por ejemplo, lo que queda de 5925 pesos, cuando se ha gastado 1693. Es bien claro que se trata de una resta y no lo es menos que si se agregase la cantidad gastada á la cantidad restante, se tendria por suma la cantidad total que existia antes de hecho el gasto. Escribamos pues arriba el sumando conocido 1693 y debajo de este dejemos un renglon en blanco que será el sitio del sumando desconocido que buscamos; despues tiremos una raya y debajo de ella escribamos la suma dada 5925. Todo así dispuesto como en una adicion, faltará que buscar sucesivamente, empezando siempre por la derecha, cuál es la cifra que agregada á la del sumando arriba escrito daria la cifra correspondiente de la suma escrita debajo.

$$\begin{array}{r} 1693 \\ \ldots\ldots \\ \hline 5925 \end{array}$$

En cuanto á las unidades sencillas, será 2 que agregado á 3 da 5. En cuanto á las decenas, como no hay número que agregado á 9 dé 2, puesto que 9 es ya mayor que 2, esto nos indica que la cifra 2 de las decenas de la suma resulta de una suma parcial que ha producido, ademas de las dos decenas una unidad del órden superior; buscaremos luego cuanto se necesita agregar á 9 para completar 12, y escribirémos 3. Pero al pasar á la cifra siguiente, nos acordarémos que la suma parcial 9 centenas debe resultar no solamente del número que agregado á 6 daria 9, sino tambien de una centena reservada que procedia de la suma de las decenas; dirémos entonces: 6 y 1 reservado son 7, y 2 son 9. En fin á 1 millar se necesita agregar 4 para tener 5. El resultado (residuo, exceso ó diferencia) ó el sumando buscado queda así escrito en el segundo renglon.

1693
4232
5925

2° Sustraccion por complemento.

Se llama *complemento aritmético* de un número la diferencia entre este número y la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene. Así, 3 es el complemento aritmético de 7, porque 7 y 3 son 10; 26 es el complemento de 74, porque 26 y 74 son 100; 327 es el complemento de 673, porque 327 y 673 son 1000, y asi sucesivamente.

En otros términos, el complemento de un número es lo que se le debe agregar para formar el número que es escriba con la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tiene el número propuesto.

Se tiene frecuentemente, en los grandes cálculos, que quitar varios números de la suma de varios otros, lo que obliga á tres operaciones distintas y sucesivas: suma de los números que forman el minuendo total; suma de los sustraendos; resta de las dos sumas. En este caso, será muchas veces ventajoso sostituir á los sustraendos sus complementos aritméticos, y hé aquí como se opera: se escriben debajo de los minuendos, sin haberlos sumado, los complementos aritméticos respectivos de las cantidades sustraendas. Se adiciona el todo; se quita de la suma de la última columna á la izquierda tantas unidades del órden mayor cuantos complementos aritméticos hay, y la suma así rebajada es la diferencia buscada. Se hace de este modo una sola operacion en lugar de 3; y con un poco de costumbre, es tan fácil escribir el complemento aritmético de un número como este número mismo; para esto se agrega á la primera cifra a la derecha lo que le falta para que se iguale á 10 y á todas las siguientes lo que les falta para valer 9, puesto que la reserva que se agregará á 9 dará necesariamente 10. El complemento de cada sustraendo debe ser siempre su diferencia con la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras hay en el mayor de los sustraendos.

Por ejemplo, se tiene que quitar de 4237 + 3721 + 4449 las cantidades 2721, 342, 2323. El cuadro de la izquierda manifiesta la operacion efectuada segun el método acostumbrado y el de la derecha la operacion por complementos:

4237	2721	12407
3721	342	5386
4449	2323	——
———	———	7021
12407	5386	

	4237
	3721
	4449
COMPLEMENTOS	7279
	9658
	7677
	~~3~~7021

Se ha borrado en la suma de la derecha el 3 de las decenas de millar, porque se han empleado 3 complementos.

Es fácil darse cuenta de este proceder. En efecto, al emplear como sumandos los complementos aritméticos de los sustraendos, no solamente no se quita lo que se ha de sustraer, sino que se agrega lo que falta á cada sustraendo para equivaler á 10000. Luego el resultado queda aumentado en tantas veces 10000 cuantos complementos se emplean, y para restituirle su verdadero valor, es preciso quitarle tantas decenas de millar como complementos hay, esto es 3 en el caso presente.

3° TABLA DE MULTIPLICACION MAS EXTENSA.

Se tiene frecuentemente que multiplicar una cantidad por 12, particularmente al efectuar cálculos sobre unos números que expresan longitudes, avaluadas en varas y divisiones de la vara, porque el pié se divide en 12 pulgadas, la pulgada en 12 líneas, la línea en 12 puntos. Por otra parte, el número de los meses del año que es tambien 12, dá lugar al empleo contínuo de este factor. Será por consiguiente útil acostumbrarse á multiplicar por 12 un número dígito cualquiera, así como se multiplica un número dígito por otro, para evitar que resulten 2 renglones de productos parciales y una suma, pudiendo reducirse todo á un solo renglon.

Así mismo sucede con el número 25, que figura como factor preciso en toda reduccion de arrobas á libras, pues que cada arroba tiene 25 libras, y en varios otros casos.

Para acostumbrarse á la simplificacion indicada, lo mejor es agregar al renglon horizontal superior de la tabla estos números 12 y 25, y en las filas horizontales correspondientes sus productos por todos los números dígitos. Estos productos se calcularán fácilmente antes de haberlos escrito en la tabla, sea por adicion, sea por multiplicacion.

Se les reune generalmente los factores 11, 15 y 20, porque sus productos por los números dígitos se forman y se retienen muy fácilmente, los de 11 componiéndose siempre del otro factor, escrito dos veces seguidas; los de 15 que se obtienen duplicando mentalmente 15, luego 30, despues 60..., etc..., los de 20 que acaban en un cero precedido del producto por 2 del otro factor dígito.

Damos aquí un extracto de la tabla de multiplicar así aumentada:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	25
2										22	24	30	40	50
3										33	36	45	60	75
4										44	48	60	80	100
5										55	60	75	100	125
6										66	72	90	120	150
7										77	84	105	140	175
8										88	96	120	160	200
9										99	108	135	180	225
10										110	120	150	200	250

4° **Multiplicacion por 5, por 25, por 125 y por 625.**

Cuando se tiene que multiplicar una cantidad por 5, es á veces mas cómodo agregar un cero á la derecha y tomar la mitad, lo que viene á ser lo mismo, puesto que la agregacion del cero equivale á multiplicar por 10 ó á repetir la cantidad propuesta un número de veces duplo de lo que debe ser; se ha duplicado por lo mismo el producto y tomando la mitad, se le restituye su valor.

Así 5×287 equivale $\frac{2870}{2}$ ó 1435.

Asi mismo, cuando se tiene que multiplicar una cantidad por 25, puede parecer mas expedito agregarle dos ceros á la derecha y tomar la cuarta parte. La agregacion de los dos ceros equivale á multiplicar por 100, ó por 4 veces 25; luego se ha repetido la cantidad propuesta 4 veces mas de lo pedido y tomando la cuarta parte del producto, se le da su verdadero valor.

Así 25×287 equivale á $\frac{28700}{4}$ ó 7175.

Por una razon análoga, si se quiere multiplicar una cantidad por 125, se podrá agregarle tres ceros á la derecha y tomar la óctava parte; en efecto, la agregacion de los tres ceros equivale á multiplicar por 1000 ó por 8 veces 125; por lo tanto, el producto es 8 veces mayor de lo pedido y se debe dividir por 8.

Así 125×287 equivale $\frac{287000}{8}$ ó 15625.

En fin, se multiplicará una cantidad por 625 agregando 4 ceros á la derecha y tomando del resultado la cuarta parte y otra vez la cuarta parte de lo que salga. Efectivamente, la agregacion de los cuatro ceros hace la cantidad propuesta 10000 veces mayor y 10000 es 625 multiplicado por 16 ó por 4×4. Luego el producto se corregirá tomando la cuarta parte de la cuarta parte del producto por 10000.

Asi 625×287 equivale á la cuarta parte de $\frac{2870000}{4}$ ó á

$\frac{717500}{4}$ ó 179375.

Hay procedimientos análogos para abreviar la division por 5, 25, 125 y 625; pero su inteligencia exige el conocimiento de las fracciones decimales.

5° **Metodo abreviado para efectuar con seguridad multiplicaciones y divisiones de muchas cifras, sin emplear mas que la suma y la resta.**

Cuando se tiene que multiplicar entre sí dos cantidades muy crecidas, es fácil que se cometa en alguna de las multiplicaciones parciales un error que inutilize la operacion y obligue á volverla á hacer, hasta que la prueba justifique su exactitud. El calculador mas hábil no está exento de estas equivocaciones que causa la menor distraccion, tan comun en el curso de un largo cálculo. En este caso, habrá casi siempre ventaja, con respecto á la celeridad misma, y sobre todo con respecto á la exactitud, en operar del modo siguiente:

Se empezará por formar una tabla de los productos del multiplicando por todos los números dígitos hasta 10. Esto ni ofrece dificultad alguna ni exige mucho tiempo; se escribe primeramente el multiplicando y luego se agrega á si mismo por adicion para obtener su producto por 2; despues se obtiene el producto por 3 sumando el primer renglon con el segundo; en seguida el producto por 4 sumando el primero con el tercero que es el producto por 3; y asi sucesivamente. No hay que recelar errores en una serie de adiciones tan sencillas, que un niño principiante podria efectuarlas sin equivocacion en algunos momentos. Hecho esto, no falta mas que tomar sucesivamente en la tabla todos los productos del multiplicando propuesto que corresponden á las diferentes cifras del multiplicador y que escribirlos en su órden natural, segun la regla general de la multiplicacion, esto es haciendo correr cada uno de ellos de un rango hácia la izquierda con respecto al precedente, ó de varios rangos cuando se encuentren ceros en el multiplicador. La suma de los productos parciales se hace del modo acostumbrado. Hé aquí un ejemplo: sea á multiplicar 69548372 por 78324569.

Tabla de los productos del multiplicando.

Por	1.	69548372
—	2.	139096744
—	3.	208645116
—	4.	278193488
—	5.	347741860
—	6.	417290232
—	7.	486838604
—	8.	556386976
—	9.	625935348
—	10.	695483720

Multiplicacion.

69548372		
78324569		
625935348	por	9
417290232.	—	6
347741860 . .	—	5
278193488	—	4
139096744	—	2
208645116	—	3
556386976	—	8
486838604	—	7
5447346261551668		

Esta regla ya muy útil para la multiplicacion es particularmente ventajosa para la division; la abrevia notablemente. ahorrando todos los tanteos, y la hace mas segura reduciéndola á simples restas.

Se construye primeramente, del mismo modo que en la operacion anterior, el cuadro de los productos del divisor por las 9 primeras cifras, agregando el producto por 10 que se formará directamente como los demas por adicion del primer renglon y del noveno, porque su conformidad con el divisor mismo seguido de un cero servirá de averiguacion y de prueba á esta primera operacion.

Formada esta tabla, se trata simplemente de escribir debajo de los dividendos parciales sucesivos los productos escritos en la tabla, eligiendo en ella cada vez aquel que, siendo inferior al dividendo parcial considerado, se acerca mas á él. Se escribe luego al cociente el factor dígito que corresponde en la tabla al producto empleado, y se sustrae del dividendo parcial debajo del cual se ha escrito. Lo demas se practica segun la regla comun. Hé aquí un ejemplo:

La luna dista de la tierra 197077692 toesas (antigua medida francesa); 2283 toesas equivalen á una legua; se pregunta cuantas leguas hay de la tierra á la luna.

Tabla de los productos del divisor.

Por 1.....	2283
— 2.....	4566
— 3.....	6849
— 4.....	9132
— 5.....	11415
— 6.....	13698
— 7.....	15981
— 8.....	18264
— 9.....	20547
— 10.....	22830

Division.

```
197077692 | 2283
18264     |------
 14437    | 86324
 13698
   7396
   6849
    5479
    4566
    9132
```

6º Multiplicacion por inversion de las cifras del multiplicador.

Hay para hacer una multiplicacion un procedimiento que nos pareceria talvez mas sencillo y seria ciertamente mas ligero que el procedimiento habitual, si no estuviésemos tan acostumbrados á este. En todo caso. será bueno ejercitarse á practicarlo y los motivos que lo justifican manifestarán de una manera nueva los principios generales del cálculo.

Sea por ejemplo á multiplicar 325 por 234.

Se escribirá el multiplicando según la costumbre y el multiplicador debajo de él, pero invirtiendo el órden de sus cifras, es decir escribiendo 432 en lugar de 234 y colocando la primera cifra 4 del multiplicador así trastornado debajo de la primera cifra 5 á la derecha del multiplicando (1ª posicion).

1ª posicion	325	multiplicando.
	432	mult plicador invertido.
	63830	productos parciales.
	1222	reservas.
	76050	producto total.

2ª posicion 325
432

3ª posicion 325
432

4ª posicion 325
432

5ª posicion 325
432

Desde luego se multiplicará 4 por 5 y, del producto 20, se escribirá debajo de la raya la cifra de las unidades 0, y en un segundo renglon horizontal la cifra de las decenas 2, á su rango, esto es al segundo partiendo de la derecha.

De pues se supondrá que el multiplicando adelante de un rango hácia la derecha, de modo que ocupe la 2ª posicion (véase el cuadro) y se multiplicará sucesivamente las dos cifras del multiplicando á las cuales corresponden ahora verticalmente el 4 y el 3 del multiplicador por estas dos cifras 4 y 3; al mismo tiempo, se sumarán mentalmente los dos productos, diciendo: 4 por 2 son 8, y 3 por 5 son 15; 15 y 8 son 23. De esta suma, se escribirá la cifra de las unidades 3 á la izquierda del 0 ya escrito en el primer renglon y la reserva 2 sobre el segundo renglon al rango de las centenas.

Suponiendo otra vez que el multiplicando adelanta un rango hácia la derecha, de modo que los dos factores ocupen la 3ª posicion, se formarán sucesivamente y se sumarán á un tiempo los productos de todas las cifras del multiplicando por los que les corresponden ahora verticalmente en el multiplicador, esto es: de 4 por 3 que dá 12, de 2 por 3 que dá 6 (y 12 son 18), y de 5 por 2 que dá 10 (y 18 son 28). De la suma así obtenida: 28, se escribirá, así como en los dos casos anteriores, la cifra 8 de las unidades en el renglon superior á la izquierda de las dos ya escritas, y la reserva 2 de las decenas en el renglon inferior al rango de los millares.

Se operará del mismo modo para todas las posiciones sucesivas (4ª y 5ª) del multiplicando, adelantando éste cada vez un rango hácia la derecha, hasta que ya no haya cifras que se correspondan verticalmente en ambos factores, y se obtendrán así en el renglon superior las dos últimas cifras á la izquierda 3 y 6, y en el renglon inferior, que es el de las reservas, las cifras correspondientes 2 y 1.

Ya no faltará mas que sumar estos renglones y se tendrá el producto total 76050.

Escusado es advertir que, en la práctica, será inútil pintar como lo hemos hecho las diferentes posiciones sucesivas del multiplicando con respecto al multiplicador. Los principiantes podrán, para familiarizarse con este procedimiento, escribir el multiplicando sobre una tirita de papel que harán correr materialmente de un rango, despues de cada operacion parcial. Pero, con la costumbre, se ahorrarán pronto este trabajo y bastará que se representen claramente las posiciones sucesivas de los dos factores, para operar sobre ellos como si estuvieran escritos segun lo indica la regla enunciada.

Tratemos ahora de explicar y de justificar este procedimiento de multiplicacion.

Antes de todo, es claro que el producto total buscado se compondrá de unidades sencillas, de decenas, de centenas, de millares, de decenas de millar, y tal vez de centenas de millar, pero que no pasará de este órden de unidades. Efectivamente, la cifra mas elevada del multiplicando así como del multiplicador, representa centenas, y como cien por cien dá una decena de millar, habrá al menos una unidad de este órden. Por otra parte, el multiplicador no alcanza á 1000 y el mayor número posible de tres cifras, es á saber 999, multiplicado por 1000 daria solamente 999000, ó una cantidad que no alcanza á los millones; luego y con mas razon el producto de un número cualquiera de tres cifras por un factor inferior á 1000 no pasará de las centenas de millar. En general, el producto de dos factores cualesquiera tendrá un número de cifras igual cuando mas á la suma de los números del multiplicando y del multiplicador, y cuando menos igual á esta suma disminuida en una unidad, lo que se demostraria fácilmente por un raciocinio análogo al qué acabamos de producir.

Las unidades sencillas del producto no pueden provenir sino de la multiplicacion de las unidades sencillas del multiplicando por las unidades sencillas del multiplicador, y son las cifras que representan este órden inferior en ambos factores que figuran una debajo de otro en la primera posicion; su multiplicacion ha dado legitimamente 0 unidades sencillas y dos decenas de reserva.

Las decenas del producto total resultan solamente: 1º de la reserva mencionada, ya escrita en su lugar y de la cual no hay mas que ocuparse, 2º de la multiplicacion de las decenas del multiplicando por las unidades del multiplicador; 3º de la multiplicacion de las unidades del multiplicando por las decenas del multiplicador. Pero la colocacion de las cifras de los factores en la segunda posicion es tal que justamente las unidades de uno de los factores corresponden verticalmente á las decenas del otro; estos dos productos efectuados é inmediatamente sumados han dado 23 decenas, es decir 3 decenas que han sido apuntadas arriba en su rango y 2 centenas que se han marcado debajo en su lugar.

Asi mismo, las centenas del producto total proceden exclusivamente: 1º de la reserva de las decenas ya escrita; 2º de la multiplicacion de las centenas del multiplicando por las unidades del multiplicador, 3º de la multiplicacion de las decenas de este por las decenas de aquel, porque 10 por 10 da 100; 4º de la multiplicacion de las unidades del multiplicando por las centenas del multiplicador. Aquí tambien la posicion respectiva de las cifras de cada factor nos presenta una debajo de otra las cifras que multiplicadas entre sí pueden dar centenas. Luego, sumando estos tres productos y habiendo obtenido 28, se ha escrito, como debia hacerse, 8 arriba de la reserva de centenas ya marcada y 2 millares de reserva, con atraso de un rango á la izquierda, en el renglon inferior.

La cuarta posicion nos presentaba superpuestas verticalmente las decenas del multiplicando y las centenas del multiplicador por una parte y, por otra, las centenas del multiplicando y las decenas del multiplicador, esto es las únicas cifras que podian dar los millares del producto total, fuera de la reserva ya escrita del producto parcial anterior. Efectuando y sumando, se ha escrito 3 millares y á la reserva una decena de millar.

Por fin, la quinta y última posicion da á multiplicar entre sí las centenas de ambos factores y es la única combinacion que pueda producir decenas de millar, salvo la reserva, ya escrita, y centenas de millar, cuando las hay, lo que no sucede en este caso.

Es bien cierto por consiguiente que se han sacado todas las unidades de todos los órdenes que podia haber en el producto total, y que cada cifra figura en su rango en las dos líneas de productos parciales; luego el producto total que es la suma de dichas dos líneas es completo y exacto.

§ III.

PRUEBAS DE LAS OPERACIONES.

Las pruebas que hemos indicado para averiguar la exactitud de las operaciones son las pruebas verdaderamente prácticas, las que se usan efectivamente en los cálculos. Se conocen muchas otras, mas curiosas que útiles, pero cuya explicacion puede servir como ejercicio y con este fin manifestaremos las principales de ellas.

1º Para la suma:

Se puede volver á sumar empezando por la izquierda; debajo de la suma parcial ya escrita de cada columna, se escribe el número que falta á la suma que se obtiene de la misma columna para que sea igual al resultado escrito. Llegando á la última columna de la derecha, la suma de esta se debe encontrar igual á la que figura escrita, de modo que se tiene que escribir 0; esto es la prueba de que la operacion ha sido bien efectuada.

Por ejemplo, se ha obtenido de los cinco sumandos aqui escritos la suma 226419.

$$\begin{array}{r} 34789 \\ 2538 \\ 67095 \\ 76321 \\ 45676 \\ \hline 226419 \\ 22320 \end{array}$$

Volviendo á sumar por la izquierda, la primera columna da: $3+6+7+4=20$, y luego se escribe 2, porque es lo que falta á este resultado para alcanzar al valor de la última suma parcial escrita 22.

La suma de la columna siguiente es 24; se escribe 2, porque la suma que ya figura es 26 ó $24+2$. Se sigue así hasta llegar á la última columna de la derecha, la que dá 29, es decir una cantidad igual á la que resulta de las 9 unidades de la suma efectuada por el proceder directo reunidas á las 2 decenas de la suma anterior, efectuada por el proceder inverso. Luego la diferencia es 0 y la operacion es buena.

Con efecto, las sumas parciales ya escritas se componen cada una de la suma de las cifras de la columna que les corresponde y ademas de la reserva de la columna anterior. Es esta reserva lo que se escribe debajo, al sumar por la izquierda. Pero hay una suma parcial que en la adicion directa no ha sido recargada con ninguna reserva anterior y es la de la primera columna á la derecha, puesto que por ella se ha principiado; en ésta no se debe encontrar ninguna diferencia entre la suma de sus unidades obtenida por adicion directa y la misma obtenida por adicion inversa.

Se puede tambien, y es en el fondo la misma prueba que la precedente, volver á efectuar la adicion sea por la derecha sea por la izquierda, escribiendo como siempre de cada suma parcial solamente la cifra de las unidades; pero en lugar de agregar la cifra de las decenas como de costumbre á la suma siguiente, se escribe esta cifra en un renglon inferior y echándola á la izquierda de un rango. Se forma asi dos sumas, la una de las unidades de cada columna, la otra de las decenas de la misma, y las cifras que expresan estas ocupan el sitio que les asigna su valor. Sumando entonces los dos renglones, es claro que se debe hallar el mismo total que ya se tenia. El ejemplo siguiente, en el que la prueba se ha hecho empezando por la izquierda, lo que es indiferente, no precisa mas explicacion.

```
  257892
   98705
  924576
  155762
  345789
   87654
 -------
 1870378 suma.
 -------
  536058 unidades.
 133432. decenas.
 -------
 1870378 suma igual.
```

Hé aquí otra prueba bastante cómoda:

Se suman en el sentido horizontal las cifras de cada sumando y se escribe en frente cada suma parcial asi obtenida. Se suman del mismo modo las cifras d·l total probado y esta suma debe reproducir exactamente la de las sumas parciales de los renglones adicionados. Asi, en el ejemplo adjunto, los diferentes sumandos han dado por sus cifras adicionadas en el sentido horizontal: 16+15+9+3+3=46; y las cifras de la suma total adicionadas del mismo modo dan tambien 46.

323071.	16
211713.	15
230004.	9
2001.	3
30000.	3
796789.	46

La adicion propuesta como ejemplo tiene esto de particular que ninguna suma parcial ha dado sobrante que llevar y, sucediendo este caso, es muy fácil darse cuenta de la legitimidad de la prueba expuesta. En efecto se ha adicionado las mismas cifras ya por columnas verticales, ya por renglones horizontales y es claro que el órden en el que se agregan estas cifras nada influye en el valor de la suma, si no se omite ninguna de ellas.

Pero si hubiera habido reservas, como sucede casi siempre, se tendria que modificar en algo la prueba. Entonces se reflexionaria que en la adicion horizontal de los sumandos que se hace para probar el resultado, es siempre la suma completa de todas las cifras la que se saca, mientras que en la adicion horizontal de las cifras del total obtenido por la via acostumbrada, no va lo mismo. Al efectuar directamente esta suma total, no se ha escrito debajo de cada columna sino la cifra de las unidades de la suma parcial correspondiente, y las decenas de dicha suma convertidas en unidades del órden inmediatamente superior han sido llevadas á la columna siguiente con valor de unidades, es decir que las decenas de cada suma parcial se han cambiado en unidades. Por consiguiente, es necesario por una parte agregar á la adicion de las cifras del total tantas decenas cuantas se ha reservado por todo en las diferentes sumas parciales, y por otra parte quitarle tantas unidades cuantas se han reservado y transportado, porque de estas decenas no se ha perdido todo, sino que han pasado á la suma siguiente con calidad de unidades. Por lo demas, viene á ser lo mismo, cuando se hace la prueba, agregar á la suma de las cifras del total tantas decenas como reservas ha habido y á la suma de las cifras de los sumandos el mismo número de unidades; pues en la comparacion de dos resultados que deben servirse mutuamente de prueba por su identidad, se obtiene el mismo efecto agregando á uno de los resultados comparados una cantidad ó quitándola al otro. De todos modos, si se quiere emplear esta prueba, se deberá anotar en un renglon aparte las reservas que se hagan en el transcurso de la adicion; la suma de estas reservas se agregará á la de las cifras de los sumandos con valor de unidades, y con valor de decenas á la de las cifras del total. Ahi vá el ejemplo:

	Sumandos. — Suma de las cifras:	del total; —	de los sumandos.	
	67429		28	
	35854		25	
	7509		21	
	65432		20	
	12378		21	
Total	188602	25	115	
Reservas...	12223. 10 decenas ó	100	10	unidades.
		125	125	

2º Para la multiplicacion:

Se puede multiplicar de nuevo tomando las diferentes cifras del multiplicador de izquierda á derecha. Por lo visto, los varios productos parciales del multiplicando por las cifras sucesivas del multiplicador son independientes unos de otros y de consiguiente el órden en el que se los efectua es arbitrario y no cambia nada ni á cualquier de ellos ni á su total. Todo está en colocarlos en su sitio, de modo que la primera cifra á la derecha de cada uno de ellos represente siempre el órden de unidades de la cifra del multiplicador que ha sido empleada para formarlo. Esto se consigue, cuando se empieza la multiplicacion por la izquierda, haciendo correr cada producto parcial del número debido de rangos, pero á la derecha y nó á la izquierda. Ejemplo:

Multiplicacion	Prueba
324	324
643	643
972	1944
1296 .	1296
1944 . .	972
208332	208332

— Cuando uno sabe dividir enteros, la division puede servir de prueba á la multiplicacion, así como la multiplicacion sirve de prueba á la division. Efectivamente, puesto que el dividendo es un producto del cual el divisor y el cociente son los factores, recíprocamente el producto puede mirarse como un dividendo del cual el multiplicando es el divisor y el multiplicador el cociente ó *viceversa*, y se debe encontrar el multiplicador si se divide el producto por el multiplicando, ó el multiplicando, si por el multiplicador.

— Se emplea con frecuencia en las escuelas la prueba que consiste en duplicar uno de los factores y tomar la mitad del otro, volviendo luego á efectuar la multiplicacion con los factores así modificados; el resultado debe ser idéntico. Con efecto, si se hâ duplicado por ejemplo el multiplicador, esto equivale á repetir el multiplicando un número de veces doble de aquel que era indicado y por consiguiente el producto se halla duplicado; pero como no se toma sino la mitad del multiplicando, esta alteracion compensa la otra.

— Si se adoptase para multiplicar el método del multiplicador invertido, expuesto en el capítulo anterior, la operacion así efectuada admitiria una prueba especial de una perfecta sencillez. Se haria por una parte la suma de las cifras del multiplicando, por otra la de las cifras del multiplicador y se multiplicarian entre sí estas dos sumas. En el ejemplo ya propuesto, las dos sumas son 10 y 9 cuyo producto es 90.

325	....	10	$\left.\right\}$ $10 \times 9 = 90$
432	....	9	
63830	....	20	$\left.\right\}$ $20 + 70 = 90$
1222.	7 decenas	70	
76050			

En seguida se sumaria del mismo modo las cifras de los dos renglones de productos parciales, el de arriba que dá 20 y el de abajo que dá 7 decenas ó 70; y la suma $20 + 70$ debe ser igual al producto 9×10, si la operacion ha sido bien hecha, lo que sucede aquí.

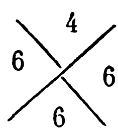
En cuanto á la razon de esto, se hallará reflexionando que todas las cifras del producto parcial de arriba 63830 representan las unidades de los productos de cada cifra del multiplicando por cada cifra del multiplicador, sin omitir ninguna ni en este ni en aquel, y que el renglon inferior 1222 encierra las reservas de estos productos, esto es sus decenas. Cuando se hace la suma de estos dos renglones, esto equivale á adicionar los productos obtenidos por separado de cada cifra del multiplicando por cada cifra del multiplicador. Pero se debe lograr el mismo resultado sumando las cifras del multiplicando, despues las del multiplicador y haciendo el producto de las dos sumas, y la necesidad casi evidente de esta conformidad se demostrará con rigor mas adelante.

— Las pruebas de la multiplicacion á las cuales se dan los nombres de *prueba por* 9 y *prueba por* 11, pueden ser aquí enunciadas, pero sin explicacion alguna, porque la inteligencia de estas pruebas depende de consideraciones que pertenecen á otra parte de la aritmética.

Se hace la prueba por 9 sumando por una parte las cifras del multiplicando y quitando de la suma la cantidad 9 tantas veces como la contiene; sumando por otra parte las cifras del multiplicador, con la misma condicion; y se escriben los dos resíduos uno debajo de otro entre los dos pares de brazos de una cruz volcada que se pinta de antemano así ×.

Se hace lo mismo con las cifras del producto obtenido, y se escribe el nuevo resíduo, suprimida como antes la cantidad 9 toda vez que se presente, en la esquina izquierda de la cruz. En fin, multiplicando entre sí los resíduos de los dos factores el producto dividido tambien por 9 debe dar un resíduo igual al resíduo del producto general.

Por ejemplo 742 multiplicado por 951 ha dado por producto 705642. La suma de las cifras del multiplicando es 13, residuo 4, que se escribe arriba. La suma de las cifras del multiplicador es 15, resíduo 6 que se escribe debajo.



La suma de las cifras del producto total es 24, resíduo 6; el producto de 4 por 6 es 24, resíduo 6 igual al precedente, lo que prueba que la operacion es buena.

No enunciaremos la prueba por 11, que es de muy poco uso.

La sustraccion y la division siendo respectivamente las operaciones inversas de la suma y de la multiplicacion, las mismas pruebas convenientemente modificadas se aplican á esas operaciones.

§ IV.

ALGUNOS EJERCICIOS TEÓRICOS.

Para familiarizarse con la teoria de las operaciones aritméticas, bueno será proponerse muchas cuestiones análogas á las que siguen ó estas mismas aplicadas á ejemplos variados.

1ª PREGUNTA—Un número tiene 45 cifras. ¿Cuál es la clase y el nombre de sus unidades de órden mas elevado?

RESPUESTA—Para saberlo, divídase por 6 el número de cifras expresado; si no hay residuo, del cociente hallado quítese una unidad; el nombre del cociente así rebajado, latinizándolo si es menester, y dándole la terminacion *illon* expresará un cierto órden de unidades, cuya primera cifra á la izquierda representará las centenas de millar. Si hay un residuo, no se quite nada al cociente y su nombre latinizado y seguido de la terminacion *illon* representará un órden de unidades cuya primera cifra á la izquierda será las unidades sencillas si el residuo es 1, las decenas si es 2, las centenas si es 3, los millares si es 4 y las decenas de millar si es 5.

Asi en el ejemplo propuesto, 45 dividido por 6 dá al cociente 7 y 3 de residuo; 7 da *septillones* y el residuo 3 indica que las unidades de mayor órden son *centenas de septillones*. Si el número propuesto hubiera tenido solamente 42 cifras, se hubiera quitado 1 al cociente exacto 7 y hubieramos tenido centenas de millar de sextillones.

Esto resulta tan claramente de las reglas de la numeracion escrita y hablada que no propondremos la explicacion, porque se hallará facilmente con un poco de reflexion.

2ª PREGUNTA—Dados dos números cualesquiera, y calculada la suma y la diferencia de ellos ¿que se hallará siempre que se agregue la diferencia á la suma ó que se quite la diferencia de la suma?

Respuesta—Sean los dos números 57 y 25; la suma es 82, la diferencia 32. La adicion de la diferencia y de la suma 82+32 da 114 ó dos veces 57; la sustraccion de la diferencia y de la suma ó 82—32 da 50, es decir dos veces 25 y cualquiera que sea el ejemplo, se hallará siempre que la suma y la diferencia adicionadas darán dos veces el mayor de los números propuestos, y que la sustraccion de la diferencia y de la suma dará 2 veces el menor.

Busquemos ahora la razon de este hecho; la encontraremos en las condiciones mismas de las operaciones suma y resta, y por eso mismo nos las manifestarán mejor. La diferencia de 2 números es lo que falta al menor para igualarse con el mayor; luego si á la suma que es ya una vez el mayor más el menor, se agrega ademas esto que falta al menor para equivaler al mayor, se tiene dos veces el mayor.

Por otra parte, la diferencia siendo el exceso del mayor sobre el menor, si se quita del mayor este exceso, quedará el menor. Pero en la suma de dos números, ya tenemos una vez el menor, y quitando á esta suma la diferencia, se reduce el valor del mayor al valor del menor; luego se tiene dos veces el menor.

3ª Pregunta—¿Qué se hace el producto de dos factores, si se agrega una unidad al mayor, quitando al mismo tiempo una unidad al menor?

Respuesta—Tomando ejemplos, se veria, que el producto disminuye siempre y examinándolos atentamente se descubriria que disminuye cabalmente de la diferencia entre el menor y el mayor de los dos factores, aumentada en 1. Asi 5×7 son 35 y 4×8 son 32; la diferencia de los dos productos es 3 ó el exceso de 7 sobre 5 aumentado en 1. Asi tambien 12×20 son 240 y 11×21 son 231: la diferencia de los dos productos es 9 ó la diferencia entre 20 y 12 aumentada en 1, y asi siempre.

Véase aquí el porqué: tomemos el mayor de los dos factores como multiplicando, lo que es siempre permitido, pues que el producto de dos números es el mismo, cualquiera que sea el órden en que se efectua la multiplicacion. Aumentando el multiplicando en 1, se agrega evidentemente al producto tantas veces 1 cuantas unidades tiene el multiplicador, es decir que se le agrega el multiplicador mismo. Pero por otra parte rebajando una unidad al multiplicador, se quita al producto una vez el multiplicando ya aumentado en uno; y como por suposicion el multiplicando es mayor que el multiplicador, se quita mas que lo que se agrega; luego el producto disminuye y puesto que lo que se agrega es el multiplicador y lo que se quita el multiplicando mas 1, debe disminuir de la diferencia de los dos factores aumentada en 1.

Se llegaria al mismo resultado, con un raciocinio análogo, dado el caso que el menor de los dos números sea el multiplicando.

4ª Pregunta—¿Cómo podria hallarse sin recurrir al procedimiento habitual de la multiplicacion el número que agregado á 3257203 haria á este 10000 veces mayor de lo que es?

Respuesta—El número propuesto, hecho 10000 veces mayor de lo que es ó, lo que es lo mismo, multiplicado por 10000, es este mismo número con 4 ceros escritos á la derecha, esto es 32572030000. El número que agregado al número propuesto dará por suma esta cantidad crecida será por consiguiente compuesto del modo siguiente: sus cuatro primeras cifras á la derecha serán los complementos aritméticos de las 4 primeras cifras á la derecha del número propuesto, es decir en el ejemplo propuesto 7, 9, 7, 2, las cuales escritas en su verdadero órden forman el primer grupo de la derecha 2797. Las cuatro cifras siguientes, yendo de derecha á izqnierda serán las diferencias que se precisaria agregar á las 4 cifras siguientes del número propuesto, para tener estas mismas 4 cifras de la derecha, teniendo en cuenta las reservas sucesivas. En el caso propuesto serán pues: 7 que agregado á 5 mas 1 de reserva da 13 ó 3 y una decena para reservar; en seguida 7 que agregado á 2 mas 1 dá 10 ó 0, y una decena para reservar; despues 8 que agregado á 3 mas 1 dá 12 ó 10 y una decena para reservar; en fin 6 que agregado á nada, sino á 1 de reserva, pues que ya no hay cifra alguna en el número propuesto forma 7. Finalmente las 3 últimas cifras á la izquierda no teniendo que agregarse á nada se escribirán tales como existen en el número propuesto. La operacion se dispondrá así:

$$\begin{array}{r} 3257203 \\ 32568772797 \\ \hline 32572030000 \end{array}$$

Sería muy fácil sacar de este ejemplo una regla general aplicable á todos los casos semejantes.

§ V.

PRINCIPIOS GENERALES RELATIVOS Á LA MULTIPLICACION Y Á LA DIVISION.

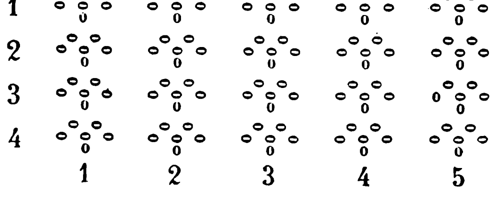
El estudio atento de los principios que vamos á exponer derramará una luz nueva sobre cuanto se ha dicho de la multiplicacion y de la division, y será una preparacion muy eficaz á la inteligencia de las operaciones ulteriores de la aritmética, las cuales en el fondo no son otra cosa que la multiplicacion y la divivision consideradas en ciertos casos particulares, asi como estas no son sino la adicion y la sustraccion que se identifican á su vez con la numeracion y la *denumeracion*.

1º PRINCIPIOS RELATIVOS A LA MULTIPLICACION.

Hemos manifestado que el producto de dos factores no cambia cuando se toma el multiplicador de multiplicando y *vice-versa*. Esta facultad de inversion de los factores se extiende al caso en el que haya mas de dos.

Desde luego, si hay 3 factores se puede invertir el órden de los dos últimos.—Por ejemplo, $6\times5\times4$ es la misma cosa que $6\times4\times5$.

En efecto, supongamos que se tenga 5 veces 4 ó 20 montones de naranjas, de á 6 naranjas cada uno. Se podrá alinear los montones en una mesa en 4 hileras de á 5 montones cada una. Hecho esto, si se recogen los montones por hileras horizontales, se alzará 4 *veces* 5 montones de 6 naranjas. Pero se puede tambien alzarlas por filas verticales y en este caso se sacará 5 *veces* 4 filas de 6 naranjas.



Es evidente que si no se ha omitido ningun monton, la cuenta de naranjas saldrá la misma en ambos casos; por consiguiente, 4 veces 5 montones de 6 y 5 veces 4 montones de 6, es la misma cosa; y como el número total de naranjas es el producto, efectuado por adicion, de los números propuestos, y que por otra parte este raciocinio no depende ni del valor de los números particulares que figuran en el ejemplo, ni mucho menos de la clase de los objetos que se cuentan, se puede decir que el producto de 6 por 4 veces 5 es el mismo que el producto de 6 por 5 veces 4; y mas generalmente, que un producto de 3 factores no cambia cuando se muda el órden de los dos últimos.

Ahora, el producto de varios factores tampoco cambiará si se invierte el órden de dos factores consecutivos cualesquiera.

Por ejemplo, en el producto de $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$, se puede intervertir el órden de los dos factores 5 y 4. Efectivamente, despues de la primera multiplicacion de 7 por 6 que dá 42, el principio anterior autoriza á multiplicar indiferentemente 42 por 5 y por 4 ó por 4 y por 5. El número resultante será el mismo en ambos casos, y el producto de éste número por los factores siguientes no se alterará por eso.

Se sigue de aquí que se puede intervertir de un modo cualquiera el órden de un número cualquiera de fáctores. Estando por ejemplo los factores 7, 6, 5, 4, 3, 2, acomodados en este órden, por el principio arriba mencionado, es lícito intervertir el órden de los dos primeros; el 7 ocupará entonces el segundo lugar y, á causa del principio inmediatamente precedente, se podrá hacerlo pasar al tercero, por permutacion con el 5, y enfin transportarlo así sucesivamente á todos los sitios posibles en la série de los factores. Cada uno de los demas factores está en el mismo caso y no hay lugar que no se le pueda hacer ocupar. Luego toda especie posible de inversion entre los factores es permitida.

Se sigue tambien que para multiplicar un número por el producto de varios factores, basta multiplicarlo sucesivamente por los factores de dicho producto.

Por ejemplo, para multiplicar 5 por 24 que es el producto de los factores 2, 3 y 4, se podrá multiplicar 5 por 2 y el producto por 3 y este segundo producto por 4. En efecto, el producto de 5 por 24 es el mismo que el de 24 por 5; pero 24 es igual á $2\times3\times4$; luego 5 multiplicado por 24 es igual á $2\times3\times4\times5$, ó haciendo pasar el factor 5 del cuarto lugar al primero á $5\times2\times3\times4$.

Sacarémos dos últimas consecuencias de las que haremos mucho uso en adelante:

1º En un producto de varios factores, se puede reemplazar un número cualquiera de ellos por su producto efectuado—Si los factores de que se trata vienen los primeros, esto es evidente, y siempre es posible por la inversion hacerles ocupar los primeros sitios.

2º Para multiplicar un producto por un cierto número, es suficiente multiplicar por este número uno de los factores. En efecto, para multiplicar todo el producto por un número, es suficiente introducir este número como factor. Pero por el principio anterior, se podrá reemplazar este factor nuevo y uno cualquiera de los otros por su producto efectuado, es decir multiplicar solamente uno de los factores por el nuevo.

2º Principios relativos á la division.

Para dividir una cantidad por el producto de varios factores, basta dividirla sucesivamente por cada uno de los factores de dicho producto.

Dividamos por ejemplo 240 por 24; el cociente será 10. El mismo cociente se sacaría dividiendo sucesivamente 240 por 2, despues por 3 y en seguida por 4, que multiplicados entre si dan 24.

Efectivamente, decir que 240 dividido por 24 da por cociente 10, es decir que 240 es igual á 24×10 ó, puesto que 24 equivale á $2\times3\times4$, 240 es igual á $2\times3\times4\times10$. Pero este producto quedará evidentemente dividido por 4 si se suprime el factor 4, y por 3 si se suprime el factor 3, y por 2 si se suprime el factor 2. Se tendrá pues el mismo cociente 10 dividiendo 240 ó su igual $10\times2\times3\times4$ ya por 24 de una sola vez ya sucesivamente por 2, 3 y 4.

Para dividir un producto, por un número cualquiera, basta dividir por este número uno de los factores del producto y multiplicar en seguida el cociente por los demas factores.

Así para dividir por 5 el producto 35 × 6 × 9, dividiremos 35 por 5 y multiplicaremos el cociente 7 por 6 y por 9, el resultado será 378 y hubiéramos sacado el mismo cociente efectuando desde luego el producto de los tres factores que hubiera sido 1870 y dividiéndolo por 5.

Efectivamente, desde que el cociente de 35 por 5 es 7, ó en otros términos desde que 35 es igual á 7 × 5, se puede escribir el dividendo propuesto de la manera siguiente: 7 × 5 × 6 × 9; pero es evidente que para dividir este producto por 5, es suficiente suprimir el factor cinco y esto equivale como se vé á dividir 35 por 5 y á multiplicar el cociente 7 por 6 y por 9.

2° Principios relativos á la multiplicacion y á la division.

Resulta de los principios precedentes:

Que, dados los factores de una multiplicacion, si se multiplica uno cualquiera de ellos por un cierto número, el producto mismo se halla multiplicado por dicho número; pues vale tanto multiplicar una cantidad sucesivamente por varios factores ó multiplicarla por su producto efectuado;

Y tambien que, dados los factores, si se divide uno cualquiera de ellos por un cierto número, el producto mismo se halla dividido por dicho número; pues vale tanto dividir un producto efectuado por una cantidad ó dividir uno de sus factores por esta cantidad y multiplicar en seguida el cociente por el otro factor;

Y en fin que, si se multiplica uno de los dos factores por un cierto número y si se divide al otro factor por el mismo número, el producto no se altera; pues por la primera operacion, el producto se halla multiplicado por el número dado y de consiguiente hecho tantas veces mayor cuantas unidades tiene este número; y por la segunda operacion, se halla dividido el producto por el número dado y de consiguiente hecho tantas veces menor cuantas unidades hay en este número. El producto gana por la multiplicacion de uno de sus factores lo que pierde por la division del otro, y las dos alteraciones se compensan.

Hemos aplicado ya este principio á la justificacion de una de las pruebas de la multiplicacion.

Resulta aun de los mismos principios:

Que, dados los términos de una division, si se multiplica el dividendo por un cierto número, sin tocar al divisor, el cociente se halla multiplicado por este numero; pues el cociente es uno de los factores del dividendo. considerado como un producto, y luego que el otro ó el divisor no ha cambiado, es preciso que este ó el cociente sea multiplicado por el número dado para que el producto lo sea tambien;

Y que inversamente, si se multiplica el divisor por un cierto número, sin tocar al dividendo, el cociente se halla dividido por este número; pues el dividendo ó producto del divisor y del cociente quedando intacto, es preciso que el aumento producido por la multiplicacion de uno de sus factores sea compensado por una disminucion igual, la cual no puede resultar sino de la division del otro factor por el mismo número;

Y que, si se divide el dividendo por un cierto número, sin tocar al divisor, el cociente se halla dividido por el mismo número; pues lo mismo tiene dividir un producto por una cantidad ó dividir por esta cantidad uno de sus factores;

Y que, si se divide el divisor por un cierto número, sin tocar al dividendo, el cociente se halla multiplicado por este número; pues la alteracion producida por la division de uno de los factores no puede ser compensada sino por la multiplicacion del otro, si el producto conserva su valor;

Y en fin que, si se multiplica ó si se divide al mismo tiempo los dos términos de una division por el mismo número, el cociente no se altera, porque las dos alteraciones siendo iguales y contrarias se compensan.

§ VI.

ALGUNOS PROBLEMAS DE APLICACION (*).

1. **Dos trenes caminan en un ferro-carril en sentido opuesto, es decir uno hácia el otro; la distancia entre ellos es de 70686 varas. El primero recorre 10 varas y el segundo 8 varas por segundo. Se pregunta al cabo de cuanto tiempo se encontrarán.**

SOLUCION—Durante cada segundo de tiempo, el primer tren camina 10 varas, el segundo 8 varas, y juntamente caminan 10+8 ó 18 varas. Asi pues la distancia que hay entre ellos disminuye de 18 varas por cada segundo, y se sabrá á que distancia quedan uno de otro al fin del primer segundo restando 18 de 70686; y al fin del segundo segundo, restando 18 del residuo; y al fin del tercero, restando otra vez 18 del nuevo residuo, y asi sucesivamente. Somos pues conducidos á restar 18 de 70686 tantas veces como se pueda; y el número de sustracciones será el número de segundos que pasará hasta que se encuentren. Pero una sucesion de sustracciones repetidas en las que el sustraendo es siempre la misma canti-

(*) El objeto de los pocos problemas que aquí proponemos es dar ejemplos de aplicacion de las reglas del cálculo, sobre el modelo de los cuales el profesor podrá y deberá inventar una multitud de otros para servir de ejercicios. Estos problemas se deben siempre elegir tales que el niño tenga que adivinar por sí mismo, al examinar los términos de la cuestion, cuales serán las operaciones que han de conducirle á la solucion. Será siempre muy útil hacerles redactar la solucion por escrito, con la indicacion sumaria de los raciocinios que los hayan guiado, y un órden perfecto en la disposicion de los cálculos. Les damos aquí algunos modelos de esta clase de redacciones.

dad es una division. Dividirémos pues 70686 por 18 y el cociente será el número de segundos buscado.

```
70686 18
166   3927
 48
 126
 000
```

El resultado es 3927 segundos. Ahora, hay 60 segundos en un minuto y 60 minutos en una hora. Luego cuantas veces 3927 contenga 60, tantos minutos serán; dividiendo, hallamos 65 minutos y un residuo de 27 segundos.

```
3927|60
 327|65
  27|
```

Luego en fin se encontrarán los dos trenes al cabo de 1 hora 5 minutos 27 segundos.

2. Hay en Francia 13 principales líneas de ferrocarril, á saber: la del Norte cuyo trayecto es de 924 kilómetros (*); la del Este, de 1818 kilometros; la del Oeste de 1143; la del Centro de 1748; la del Sur de 793; la de Lion al Mediterraneo de 1804; la de Lion á Ginebra de 229; la de Beziers, de 43; la de los Ardennas de 155; la del recinto de Paris, de 17; y tres otras pequeñas juntamente de 77. Se pregunta:

1º Cuál longitud darian los rieles de todas estas líneas, colocados unos á continuacion de otros y agregando 5796 kilómetros que conducen á los depósitos, galpones, talleres... etc...

(*) El kilómetro vale 1000 metros, y una legua métrica es de 4 kilómetros ó 4000 metros ó 46.9 varas poco mas ó menos.

2° Cuál es el peso de los rieles, sabiendo que el metro pesa termino medio 37 kilógramos?

3° Cuanto han costado estos rieles. sabiendo que salen á 300 francos cada tonelada?

Solucion—Para conocer la longitud total de los rieles colocados en fila, hay primeramente que sumar los números de kilómetros que representan respectivamente la longitud de cada uno:

Norte	924
Este	1618
Oeste	1143
Centro	1748
Sur	793
Lion-Mediterráneo . . .	1804
Lion-Ginebra.	229
Beziers	43
Ardennas	155
Recinto de Paris	17
Varias.	77
Suma total	8551 kilom.

Ahora, como hay generalmente en cada línea dos vias, una para ir y otra para volver, y que cada via se compone de dos hileras de rieles, es preciso multiplicar por 4 la suma totál obtenida;

$$\begin{array}{rr} & 8551 \\ & 4 \\ \hline & 34204 \\ \text{y agregar} & 5796 \\ \hline & 40000 \end{array}$$

Para determinar el peso total de 40000 kilómetros de rieles, á razon de 37 kilógramos por metro, hay que multiplicar primeramente 40000 por 1000, puesto que cada kilómetro vale 1000 metros, y eso se consigue agregando 3 ceros á la derecha del número propuesto; el resultado

o

40000000 es el número de veces que se debe repetir 37 kilógramos, y la multiplicacion efectuada dá 1480000000, ó mil cuatrocientos ochenta millones de kilógramos.

$$\begin{array}{r} 37 \\ 40000000 \\ \hline 1480000000 \end{array}$$

En fin, una tonelada es 1000 kilógramos; dividiendo el número de kilógramos obtenido por 1000, lo que se háce borrando 3 ceros á la derecha, y multiplicando el resultado 1480000 por 300 f. que es el precio de la tonelada, se obtiene 444000000 ó cuatrocientos cuarenta y cuatro millones de francos.

$$\begin{array}{r} 1480000 \\ 300 \\ \hline 444000000 \end{array}$$

3. En una barraca se han descargado 35 cueros que se han colocado, para reconocerlos, en una sola fila, á distancia de 3 varas uno de otro. Se manda á un peon recogerlos uno por uno y apilarlos sucesivamente sobre el primero. Se pregunta cuanto camino tendrá que recorrer el peon.—De la solucion de este problema se tratará de sacar una regla general para todos los casos semejantes.

Solucion—El primer viaje será de 3 varas para ir del primer cuero que no se remueve al segundo, y 3 varas para volver de este al primero; por consiguiente de 6 varas por todo. El segundo viaje será de 6 varas para ir y 6 para volver, por todo de 12 varas, puesto que el tercero dista del primero 2 veces 3 varas ó 6 varas. El tercer viaje será por una razon semejante de 2 veces 9 varas, ida y vuelta ó por todo de 18 varas; y asi sucesivamente. Habrá pues por todo 34 viajes redondos, porque hay 35 cueros de los cuales el primero queda en su sitio sin moverse, y se tendrá la solucion formando una serie de 34 sumandos, iguales el primero á 6, el segundo al primero mas 6, el tercero al segundo mas 6, el cuarto al tercero mas 6..... y así hasta el 34°. Es decir que los sumandos serán: 6, 18, 24, 30, 36........... 204. Una vez escritos uno debajo de otro, no habrá mas que adicionarlos.

6
12
18
24
30
36
42
48
54
60
66
72
78
84
90
96
102
108
114
120
126
132
138
144
150
156
162
168
174
180
186
192
198
204
3570

Pero si queremos abreviar esta larga adicion, hé aquí como podremos discurrir sobre el caso: reflexionaremos primeramente que el segundo viaje siendo igual al primero mas 6, y el tercero igual al segundo mas 6 ó al primero mas 2 veces 6, y el cuarto igual al tercero mas 6 ó al primero mas 3 veces 6, y asi siempre, el último ó el terdécimo-cuarto será igual al primero mas 33 veces 6. Asi es que podremos calcular en un instante el valor de ese último multiplicando 6 por 33 y agregando 6, y sale 204.

$$\begin{array}{r} 33 \\ 6 \\ \hline 198 \\ 6 \\ \hline 204 \end{array}$$

Ahora el primero 6 y el último 204 valen sumados 210. Pero el segundo es el primero mas 6 y el penúltimo es el último menos 6, de suerte que si sumamos este segundo con el penúltimo, tendrémos precisamente la misma suma: 210, puesto que por una parte agregamos 6 á dicha suma, tomando el segundo en vez del primero, y le quitamos por otra parte 6, tomando el penúltimo en vez del último, lo que evidentemente no altera el valor de la suma; y efectivamente 12+198 son 210. Por la misma razon, el tercero y el antepenúltimo sumados valen 210, y asi siempre; es decir que dos viajes cualesquiera tomados á igual distancia del primero y del último formarán siempre la misma suma: 210.

Siendo así, en lugar de adicionar los viajes como lo hemos hecho, imaginemos que se sumen dos á dos del modo siguiente: el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo........ y así sucesivamente. Todas estas sumas parciales serán iguales á 210 y habrá tantas de ellas como grupos de viajes se puedan formar, reuniéndolos dos á dos, es decir que habrá la mitad del número total de viajes, ó 34 dividido por 2, ó en fin 17 sumas. Pero la suma de 17 sumandos iguales todos á 210 es el producto de 210 por 17; multipliquemos pues 210 por 17 y tendremos el resultado pedido.

$$
\begin{array}{r}
210 \\
17 \\
\hline
1470 \\
210 \\
\hline
3570
\end{array}
$$

De ahí, esta regla general para todos los casos semejantes: teniendo que efectuar la suma de una serie de números tales que el segundo sea igual al primero mas una cierta cantidad, y el tercero igual al segundo mas la misma cantidad, y así sucesivamente, y conociendo solamente el número de los sumandos, se determina el valor del último multiplicando el primero por el número de los sumandos disminuido en uno; en seguida se suma el primero con el valor del último, y se multiplica esta suma por la mitad del número de los sumandos.

4. Un hombre ha alcanzado á la edad de 75 años, 8 meses y 14 dias. Para ejercitar su nieto en el cálculo, le encarga que saque el número de segundos que él ha vivido, teniendo en cuenta los años bisiestos y el número de dias que componen cada mes y sabiendo que ha nacido el 5 de Enero del año 1789.

Solución — Supongamos primeramente que todos los años sean de 365 dias; el número de dias que el hombre este habrá vivido en sus 75 años será 75 veces 365 ó

365 × 75. Pero cada cuatro años, hay un año bisiesto que tiene 366 dias. Tantas veces como 4 sea contenido en el número de años que el hombre ha vivido, otros tantos dias será preciso agregar al producto 27375, esto es, en el caso propuesto, 18 dias.

```
      365
  × ...75
  -------
     1825
    2555
  -------
    27375 dias.
+ .....18  — por los años bisiestos.
+ .....31  — de enero    5 á febrero    5 de 1864
+ .....29  — de febrero  5 á marzo      5   —
+ .....31  — de marzo    5 á abril      5   —
+ .....30  — de abril    5 á mayo       5   —
+ .....31  — de mayo     5 á junio      5   —
+ .....30  — de junio    5 á julio      5   —
+ .....31  — de julio    5 á agosto     5   —
+ .....31  — de agosto   5 á septiembre 5   —
+ .....14  — en mas de los 8 meses.
  ---------
   27651  suma total de dias.
      24
  ---------
  110604
  55302.
  ---------
  663624    horas.
      60
  ---------
 39817440   minutos.
      60
  ----------
2389046400 segundos.
```

Ahora los ocho meses que ha vivido á mas de 75 años, desde el 5 de enero 1864 hasta el 5 de septiembre del mismo año tienen respectivamente 31, 29, 31, 30, 31, 30, 31, 31 dias, lo que será siempre fácil averiguar, acordándose de la regla siguiente: ciérrese la mano y enúnciese por órden el nombre de los meses sucesivos del año, desde enero hasta diciembre, asignando el mes de enero al hueso de la primera falange, el de febrero al hueco que sigue, el de marzo al hueso de la segunda falange, el de abril al hueco siguiente, y así sucesivamente; todos los meses que vengan á caer sobre los huesos tienen 31 dias; y todos los que caigan en los huecos tienen 30, salvo el de febrero que tiene 28 solamente en los años comunes y 29 en los años bisiestos, lo que es el caso del año 1864, y por esto el intérvalo de febrero 5 á marzo 5 se ha contado de 29 dias. La suma total de dias 27651 multiplicada por 24 ha dado el número de horas, el cual multiplicado por 60 ha dado el número de minutos, el cual en fin multiplicado otra vez por 60 ha dado el número de segundos: dos mil trescientos ochenta y nueve millones, cuarenta y seis mil cuatrocientos.

5. Un comerciante ha comprado una pieza de paño de 64 yardas á razon de 91 pesos la yarda. Ha revendido 44 yardas á 112 pesos yarda; pero habiéndose apolillado lo restante, ha tenido que cederlo á razon de 63 pesos yarda. Se pregunta si ha ganado ó perdido y cuanto.

SOLUCION — Las 64 yardas á 91 pesos la yarda son:

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times\ 91 \\ \hline 64 \\ 576\ . \\ \hline 5824 \end{array}$$

5824 $ precio de compra..... $ 5824

Las 44 yardas vendidas á 112 pesos yarda son:

$$\begin{array}{r} 112 \\ 44 \\ \hline 448 \\ 448\ . \\ \hline 4928 \end{array}$$

4928 $... $ 4928

Las 10 yardas restantes á 63 pesos yarda son...

$$\begin{array}{r} 63 \\ 20 \\ \hline 1260 \end{array}$$

1260..... $ 1260

venta... $ 6188

La ganancia es el exceso de la venta sobre la compra................................ $ 364

6. La rueda principal de una locomotora tiene de contorno ó de circunferencia 22 piés. A cada vaiven del piston de la máquina dá una vuelta entera y se cuentan 3 vaivenes por segundo. Se pregunta lo que esta locomotora puede recorrer por hora.

SOLUCION — Es claro que por cada vuelta entera la locomotora anda un espacio igual á la circunferencia de su rueda, esto es 22 piés. En un segundo la rueda dá tres

vueltas enteras y por consiguiente el tren adelanta 3 veces 22 ó 22 × 3 .... 66 piés.
60 —

En un minuto, adelanta 60 veces lo que ——— en un segundo ó .... 3960 piés.
60 —

Y en una hora, 60 veces lo que en un minuto ó .... ——— 237600 piés.

Los piés se reducen á varas dividiendo por 3 lo que dá 79200 varas y las varas á leguas dividiendo por 6000; lo que dá por fin 13 leguas y un pequeño sobrante de varas que se puede despreciar.

792	60
192	13 leguas.
12	

7. Un teatro es alumbrado por 300 picos de gaz. Se pregunta cuanto cuesta por mes el alumbrado, sabiendo que un pico quema 5 piés cúbicos de gaz por hora, que el teatro da 12 funciones mensuales y se alumbra en los dias de funcion desde las 6 de la tarde hasta las 12 de la noche, y que el gaz cuesta á razon de 140 pesos por millar de piés cúbicos. Se pregunta ademas cuantas toneladas de carbon se gastan por mes en la fábrica para el alumbrado del teatro, sabiendo que una tonelada de carbon produce próximamente 10000 piés cúbicos de gaz.

Solucion—Si cada pico quema 5 piés cúbicos por hora, 300 picos queman por hora 300×5 ó 1500 piés cúbicos. Cada dia de funcion, el alumbrado dura 6 horas; luego se queman 6×1500 ó 9000 piés cúbicos de gaz en cada funcion. Hay 12 funciones mensuales; luego se quema al mes 9000 por 12 ó 108000 piés cúbicos al mes. Cada millar de piés cúbicos cuesta 140 pesos papel; luego, el alumbrado cuesta mensualmente 15120$. Para producir esta cantidad de gaz, la fábrica emplea 108000 dividido por 10000 ó cerca de 11 toneladas de carbon.

8. Un propietario quiere hacer edificar un galpon para abrigar una yunta de bueyes de labranza, 4 vacas lecheras, 4 crias de 1 á 2 años y 16 carneros finos. Se pregunta cuales deberán ser las dimensiones del galpon, sabiendo que se precisa para un buey 5 varas cuadradas, para una vaca 6 varas, para una cria 4 varas, para un carnero una vara. Se advierte que á causa de la disposicion del sitio, la construccion no puede tener de frente mas que 6 varas. ¿Cuál será el fondo?

Solucion—La cuestion es en extremo sencilla. Efectivamente, sáquese por multiplicacion y suma el número total de varas que se precisa, y divídase el resultado por 6; se tendrá la respuesta.

2	bueyes	á razon de	cinco varas cuadradas	uno	10 v. c.
4	vacas	—	seis	—	24 »
4	crias	—	cuatro	—	16 »
16	carneros	—	una	—	16 »
			Suma total de varas cuadradas		66 v. c.

Si el frente no puede tener mas de 6 varas, se dará al fondo 11 varas ó la sesta parte de 66, porque asi se tendrá evidentemente 6 lonjas de terreno iguales cada una á 11 varas cuadradas, ó por todo 66 varas cuadradas, que son lo que se pide.

ÍNDICE DE LAS MATERIAS