Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 50

Übungsaufgaben

Wenn in den folgenden Aufgaben nach Extrema gefragt wird, so ist damit gemeint, dass man die Funktionen auf (isolierte) lokale und globale Extrema untersuchen soll. Zugleich soll man, im differenzierbaren Fall, die kritischen Punkte bestimmen.

Aufgabe 50.1. Untersuche die Addition

$$+ \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x+y,$$

und die Multiplikation

$$\cdot \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x \cdot y,$$

auf kritische Punkte und auf Extrema.

Aufgabe 50.2. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.3. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 - y^4,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.4. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 5xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.5. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 4xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.6.*

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto (3x^2 - 2xy - y^2 + 5x),$$

und entscheide, ob in diesen kritischen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

Aufgabe 50.7.*

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y,z) \longmapsto \frac{xz}{x^2+y^2}$$

(es ist also $y > 0$).

a) Berechne die partiellen Ableitungen von f und stelle den Gradienten zu f auf.

b) Bestimme die isolierten lokalen Extrema von f.

Aufgabe 50.8.*

Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto -3x^2 + 2xy - 7y^2 + x,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.9. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto xy^2 - x^3y,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.10.*

Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 + xy - 6y^2 - y,$$

auf kritische Punkte und Extrema.

Aufgabe 50.11.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B\,(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ definierten Funktion

$$f\colon B\,(0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 + y^3 - y^2 - y.$$

Aufgabe 50.12. Bestimme für die Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto xy\sqrt{3-x^2-y^2},$$

den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und untersuche die Funktion auf Extrema.

Aufgabe 50.13. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto 1-t^2.$$

Für welches $x \in [0,1]$ besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 50.14.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto 1-t^2.$$

Für welche $x,y \in [0,1]$, $x<y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 50.15. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f,g\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

Aufgabe 50.16. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\dim(V) \geq 2$, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f,g\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 50.17. (4 Punkte)

Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 + 9y^2 + 6xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.18. (4 Punkte)

Sei $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Untersuche die Funktion

$$f\colon I \times I \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto \frac{\cos x}{\cos y},$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.19. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto t^2.$$

Für welche $x, y \in]0,1[$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 50.20. (5 Punkte)

Sei

$$h\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und betrachte

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto h(x^2 + y^2).$$

Zeige, dass f allenfalls im Nullpunkt $(0,0)$ ein isoliertes lokales Extremum besitzen kann, und dass dies genau dann der Fall ist, wenn h in 0 ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 50.21. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein isolierter Punkt, d.h. es gebe eine offene Umgebung $P \in U$ derart, dass $\varphi(Q) \neq \varphi(P)$ ist für alle $Q \in U$, $Q \neq P$. Zeige, dass dann φ in P ein isoliertes lokales Extremum besitzt.