上 [illegible]

近 世 代 數 學

譯 者

高 凱 [illegible] 王 [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

漢　譯

范氏大代數學

譯　者

高佩玉　王喬南

王俊奎　李士奇

北平科學社印行

1935

王　　序

學理隨時代而推進，教材因需要而變更，任何科學皆如是，不獨代數一門爲然焉。目下坊間出售之代數教科書，或失之簡，或失之繁，且多涉于陳腐，欲求一善本，足爲後學南針者，誠不可得，范氏 Fine 大代數 College Algebra 一書，久爲美著中之佼佼者，取材宏富，深淺合度，洵爲高中代數之標準課本，王君俊奎等鑒于此，謀課餘之力，將是書譯成漢文，俾國內習代數，而不諳西文者，得一善本，爲之指導，其造福于士林，非淺鮮焉。

民國二十三年五月王仁輔識于北平

目錄

第一編　數

		頁
I.	自然數，一數法，加法及乘法………	1
II.	減法與負數………………………………	16
III.	除法及分數………………………………	27
IV.	無理數……………………………………	39
V.	虛數及複素數……………………………	70

第二編　代數

I.	緒論………………………………………	79
II.	基本演算…………………………………	93
III.	一元一次方程式…………………………	110
IV.	聯立一次方程組…………………………	127
V.	除法………………………………………	155
VI.	有理整式之因子…………………………	176
VII.	最高公因子及最低公倍…………………	196
VIII.	有理分式…………………………………	213
IX.	對稱函數…………………………………	245
X.	二項式定理………………………………	252
XI.	開方………………………………………	260
XII.	無理函數，根式及分指數………………	271
XIII.	二次方程…………………………………	298
XIV.	二次方程之討論。極大與極小………	304
XV.	高次方程之可用二次方程解之者……	309

XVI. 聯立方程之可用二次方程解之者…… 317
XVII. 不等式…………………………… 340
XVIII. 不定一次方程…………………… 342
XIX. 比及比例，變式………………… 347
XX. 等差級數…………………………… 354
XXI. 等比級數…………………………… 357
XXII. 調和級數…………………………… 362
XXIII. 逐差法．高級等差級數．插入法……… 364
XXIV. 對數………………………………… 374
XXV. 排列及組合………………………… 393
XXVI. 多項式定理………………………… 408
XXVII. 適遇法……………………………… 409
XXVIII. 算學歸納法………………………… 424
XXIX. 方程論……………………………… 425
XXX. 三次方程及四次方程……………… 483
XXXI. 行列式及消去法…………………… 492
XXXII. 無窮級數之收斂…………………… 520
XXXIII. 無窮級數之演算…………………… 539
XXXIV. 二項級數，指數級數，對數級數…… 553
XXXV. 循環級數…………………………… 560
XXXVI. 無窮連乘積………………………… 564
XXXVII. 連分式……………………………… 566
XXXVIII. 連續函數之性質…………………… 577

范氏大代數

第一編　數

I. 自然數，一數法，加法及乘法

物羣及其基數

物體之羣． 由吾人每日經驗，凡歷目前之物，非僅單獨者，蓋常聯合或聚集而成羣(*Group*) 或團 (*assemblage*). 例如手指，馬隊，多角形之頂均物羣也． 1

設視其全體(非各個)與他物有別，而於概念中構成．一團結之純粹目的物，即能想定某物為結合之一羣．

凡組成一羣之諸物，簡稱為該羣之元 (*Element*).

等羣．一一對應． 設有字母 ABC 及 DEF 二羣，可以其一羣之各元與他羣之各元，一元對一元分配成雙而結合之，即可分配 A 與 D, B 與 E, 及 C 與 F. 2

設無論如何均能依此法分配二羣之諸元而無遺，則稱此二羣相等；而諸元之匹配處置稱為致二羣成一對一，或一一對應 (*one-to-one correspondence*) 之關係．

3 **定理.** 設二羣各等於同一第三羣，則彼此相等.

蓋由假定能令其二羣之各元與第三羣一一對應，設以其分配於第三羣同元之各二元視爲新偶，則致此二羣一一對應矣.

4 **基數.** 設想像所有物羣，何者可列入等羣之類，任二已知羣屬於同類或異類，當按能否令其一一對應而定.

如，二羣字母 $ABCD$ 及 $EFGH$ 屬於同類，而 $ABCD$ 及 EFG 二羣爲異類.

一類諸羣之共同性，與他類諸羣之區別爲一羣物體之數，或其基數 (*Cardinal number*).

或曰一羣物體之個數或基數爲其本羣及能與其成一一對應之各羣之共同性.

又曰一羣物體之基數，爲"任意排列羣內之物體，或以他物一一換置而該羣仍保持不變之本性"；復次"又爲具有物體本身特質及排列而成之羣之本性".

排列諸物或以他物一一換置之，則只能變爲另一相等之羣 § 2，於變其羣內之排列及物之特質時，而其本性常保持不變.

部分. 設第一羣之元爲第二羣之數元，但非全體， 5
則稱第一羣爲第二羣之一部。

如，ABC 羣爲 $ABCD$ 羣之一部。

由此定義即得

設三羣中之第一羣爲第二羣之一部而第二羣爲第三羣 6
之一部，則第一羣亦爲第三羣之一部。

定羣及不定羣. 設一羣或團不等於其自身諸部 7
之一，則稱爲定羣或定團；設等於其本羣之某部*，則稱爲
不定羣或不定團。

如, ABC 爲定羣, 因不能令其與 BC, 或其他任一部分一一對應.

但任何無窮記號或符號之連續數, 例如無窮連續數 1, 2, 3, 4 ……, 係一不定團.

例如，可於全團 1,2,3,4,… 及其自 2 起始之部分成立一一對應之關係，

即於　　1,　2,　3,　4,　5,…………　　(a)
及　　2,　3,　4,　5,　6 …………　　(b)
間，分配 (a) 中之 1 與 (b) 之 2, (a) 之 2 與 (b) 之 3, 依此類推, —— 可任擇 (a) 之每數與 (b) 之諸數相當.

故集團 (a) 等於其部分 (b) 而 (a) 爲不定.

大小基數. 令 M 及 N 表任一定羣，必合於下式之 8
一。

1. M 及 N 相等，

或　2. M 等於 N 之一部，

或　3. N 等於 M 之一部。

---

*自然不能以一一對應確實計算一不定羣，或團之諸元；然每用上述之律察知各已知物屬於此羣或否則可斷定該團.

於第一式稱M及N有同一基數，第4節，或等基數；於第二式，稱M之基數小於N者；於第三式，稱M之基數大於N者。

如。設M爲字母 abc 之羣，及N爲 $defg$ 羣，則M等於N之一部。例如，等於 def 之部分。

故M之基數小於N者，而N之基數大於M者。

9 **註**。由§7定羣之定義可知關於"等"，"大"，及"小"之關係如上文所示已無疑義。

如，定義不能令M之基數同時等於及小於N之基數，意若M等於N且爲N之一部分，§3則N爲不定，§7.

10 **系**。設三基數之第一數小於第二數，第二數小於第三數，則第一數亦小於第三數。

設M,N,P表任意物羣之基數，M等於N之一部，而N等於P之一部；則M等於P之一部，§§3, 6.

11 **基數法**。設由含一元之一羣起始而重復"加"一新物，於是得下面之基數綱要：

1. 一"羣"之基數，如 |，即含一單元。
2. 一羣之基數如 ||，以一單元加於首類之一羣而得者。
3. 一羣之基數如 |||，以一單元加於第二類之一羣而得之。
4. 由此類推，以至無窮。

茲稱此諸連續基數爲"一"，"二"，"三"，……，而以符號1, 2, 3, ……表之。

此法之申述. 任意定羣之基數稱爲定基數，下面 12
之指示可視爲上述基數之綱目：

第一．此綱目中各基數均有定．

如羣 | 有定，因不能等於其一部分，§7；而各相隣之羣有定，因加一新物於定羣故仍爲有定*．如 || 爲定羣，因 | 爲定羣；||| 爲定羣因 || 爲定羣，餘類推．

第二．各定基數均含此綱目之內．

由定義，各定基數爲若干定羣之基數，如 M．故可繪成符號羣 ||| .... | 等於任意已知定羣 M，以構成 M 內各目的物之記號，此符號羣必有一最末記號，故必含於 §11 之綱目內，若記號無有止境，則其本羣與 M 爲不定矣，§7．

第三．諸基數之任何兩個不相等．

由 §8 之定義而知之．因已證，所有諸羣 |，||，|||，.... 爲有定；且其中每二羣之一爲他羣之一部固甚明確．

---

*可證明如次 (G. Cantor. Math. Ann. 46 卷, 490 頁)：
設 M 表一定羣，及 e 爲單物，則 Me 羣爲以 e 加於M而得，亦有定，
令 G ≡ H 表二羣 C 及 H 相等.
設 Me 爲不定，必等於其部分之一，§7：
令 P 表此部分，則 Me ≡ P.
(1) 設 P 不含 e.
令 f 表 P 內與 Me 中之 e 配合之元，而以 P_1 表 P 之餘部.
則因 Me ≡ P_1 f 及 e ≡ f，得 M ≡ P_1.
然此不可能，因 M 爲定羣而 P_1 爲 M 之一部，§7.
(2) 設 p 含 e.
p 中之 e 不能與 Me 中之 e 配合，若能配合，則 p 之餘部亦爲 M 之一部，而等於 M 矣. 然可設 p 中之 e 與他元如 Me 中之 g 配合及 Me 中之 e 與 p 中之 f 配合.
設 Me ≡ p 爲眞，則復配合 e，f，g. 諸元如 p 中之 e 與 Me 中之 e 及 p 中之 f 與 Me 中之 g 亦眞. 然如前證，p 之一部等於 M，故此假設亦不可能.

自然碁度．方程及偏程

13 **自然數．** 玆稱符號 1, 2, 3, ... 或其名"一", "二", "三", ... 爲正整數或自然數 (*Natural numbers*). 故一自然數爲一碁數之一象徵或符號．

14 **自然碁數．** 試按 § 11 所表之已知碁數之次序而排列之，得無窮之連續符號

1, 2, 3, 4, 5, ...,

或"一", "二", "三", "四", "五", ...，稱爲自然碁度或 (*Natural Scale*), 或自然數之度．

15 碁度之各符號表示指算已定部分之符號之個數．

如，4 表符號 1, 2, 3, 4 之個數，因此符號 1, 2, 3, 4, 之個數與 |, ||, |||, ||||, 諸羣之個數相等，換言之，即與末羣符號||||之線條數相等，§ 8, 此通常之解釋也．

16 **碁度之序數．** 自然碁度，由其本身言之．僅爲一羣不同符號，如其首符號爲 1, 加之以定羣，得次符號，即 2; 再施之得下之符號，即 3; 進行至於無窮．

換言之，自然碁度僅爲按一定次序一個隨一個而構成一羣之不同符號而已，且有最前而無最末之符號．

由此觀之，自然數本身，僅爲次序之記號，即當讀此碁度時——關於時間——之次序的記號．

17 普通碁度與所有其他按定次序排列之已知元之聚合物，顯然有下之性質;

1. 玆稱其任何二元一在"先"而他在"後"，且"先""後"二字應用於元中之某一對與應用於任何其他一對有同樣意義。

2. 設已知其任意二元，恒可定孰先而孰後。

3. 設 a, b, 及 c 表任意三元而 a 先於 b, 及 b 先於 c, 則 a 先於 c.

設自然界示人之羣物，或人以己意規定擇去之順序而列置之物，則此集合物，均可具有前述性質，無論任何情形，均稱此種集合爲序數法 (*ordinal system*).

第一類之例如 (1) 自然基度本數；(2) 某時間內之一連續事件；(3) 由左至右沿水平線列成之點行。第二類之例爲按其姓名之字母次序排列之一羣人。

一集合體亦可有"符合"之元，如，事物之羣有兩個或多個爲同位或同時者。 18

設上述 1, 2, 3 之關係適用於不符合元中，則稱此集團爲序數集團，——元之眞確性如下：

4. 設 a 與 b 合，及 b 與 c 合，則 a 與 c 合。

5. 設 a 與 b 合，而 b 先於 c, 則 a 先於 c.

基度中之次序關係類似於自然數所表之基數中之大小關係。 19

任意二已知基數，其自然數在基度之較後者，必較大。

故可以"設 a 先於 b, 而 b 先於 c, 則 a 先於 c"之關係，以代表基度中"設三基數之第一個小於第二個，而第二個小於第三個，則第一個小於第三個"之關係。

實則於比較基數時，率用上述各法，因不用§8之方法直接比較物羣之基數也。遂言之，即以適宜之自然數表之，由其自然數在基度中之關係次序推知孰大而孰小。當述談任意二自然數時，若即刻認其孰先與孰後則能令人於此基度不費思索迅速印入腦筋。如設談及 A, B 二城，A 之人口為 120000，而 B 為 125000，則立刻斷定 B 城居民較多，因知其 125000 於基度中在 120000 之後故也。

20　**數之方程及偏程.**　"數"之一字意謂自然數，§13；而字母 a, b, c，即表此任意諸數。

21　設欲令 a 及 b 表同數，或自然基度中之"符合數"，應用方程式 (*Equation*).

$a = b$，讀作"a 等於 b".

22　設於自然基度中，欲表 a 先而 b 後，應用下列偏程式 (*Inequality*) 之一。

$a < b$，讀作"a 小於 b"；

$b > a$，讀作"b 大於 a".

23　嚴密言之，此"等""小"及"大"諸字，自然非謂符號 a 及 b 之本身，而指其所代表之基數；如"a 小於 b"一語，僅為"a 所表之基數小於 b 所表之基數"之簡稱而已。

然一切偏程式 $a < b$ 於符號 a 及 b 本來之意義謂在基度中 a 先於 b.

24　方程及偏程式之規則，由§§17, 18 與§§21, 22之定義，即得

1．設 $a = b$ 及 $b = c$，則 $a = c$.

2．設 $a < b$ 及 $b < c$，則 $a < c$.

3．設 $a = b$ 及 $b < c$，則 $a < c$.

數　法

算術爲用可結合之諸數而運算存在於自然數間之順序關係之初步事項。 25

算術之運用以一數法(*counting*)爲基本。

一數法. 擬知某已知羣目的物之基數爲何，故計算此羣。 26

此運算極爲尋常，即於一物上寫"一"，次物寫"二"，依此進行以至寫徧，須按基度次序讀口述符號「一」「二」…而按適宜或便利之順序擇定諸物慎勿遺漏，於此處置末後所記符號即所求——此羣基數之名，由度算之次序標識，此末一符號表已經讀過若干符號也，§ 15,故得此羣之物爲若干個，§ 8.

即一數法之運算可認爲導所算之羣與自然基度之各部成一一對應，§ 2——即自"一"起始而以計算中之末數爲止之部分對應。

注意自然數於一數法具有二重意義：(1) 僅用其一羣爲籌碼以完成此運算；及 (2) 應用末一字以記錄計算之結果。

此已無形中暗示目的物依何種順序而選擇之，茲可證明如下:

定理. 計算一定羣物體無論如何擇定順序結果均同。 27

例如，設按一種順序 P 擇取諸物計算一定羣之結果爲 99.然按他種順序 Q，則爲 97.

然此不可能，因此羣之一部等於其全體矣；但由假設，此羣爲定羣 § 7，故曰不可能。

28 **基數之另一定義．** 玆可將上述定理，作成定羣基數之基本定義，即一定物羣之基數爲該羣之本性，無論以任何順序計算此羣均得同一自然數。

此基數定義也。設如 § 16所規定，以數之討論作起點選擇諸物而構成自然基度，則此定義自然明瞭。

加 法

29 **加法定義．** 加3於5即求自然基度5之後據其第三位置者爲何數，可由6起，在基度上向前讀計三數，即：6, 7, 8，而得數目，8.

玆以符號＋表此演算，讀爲「加」(*Plus*)，寫作 $5+3=8$.總之，加 b 於 a 即求自然基度中 a 後據第 b 位置者爲何數。

因基度中無最末符號，此數常可求得，稱之爲 a 及 b 之和(*sum*)且以式 $a+b$ 表之。

30 **註．** 求 $a+b$ 之演算爲於自然基度中以 b 物之一羣之元一次一個而加於 a 物之一羣，故 (1) 其末後處置之結果爲 $a+b$ 物之一羣，§ 8，及 (2) 設 a 及 b 表定基數，於是得 $a+b$，參看5頁底註。

因 $a+1, a+2$,等等，表 a 後之第一，第二兩數，連續 31
數 $a+1, a+2, \cdots$ 表其度中 a 後之一切諸部。

故 a 後之任意已知數可以 $a+d$ 式表之，此處 d 表一有定自然數。

演算. 用一數法加一大數必甚繁雜，故須記憶若干 32
小數之和(加法表)。且應用下節說明之加法「定律」(*law*)
以導出大數之和。

加法定律. 加法為"交換"及"結合"之演算；即 33
依次二定律：

交換定律. (*Commutative law*) $a+b=b+a$. 34

加 b 於 a 與加 a 於 b 結果相等。

結合定律. (*Associative law*) $a+(b+c)=(a+b)$ 35
$+c$, 先加 c 於 b 再加其和於 a,與先加 b 於 a 再加其和於 c
結果相等。

註. 於實用時，可以 $a+b+c$ 代 $(a+b)+c$ 式，更 36
當瞭然 $a+b+c+\cdots$ 式表加 b 於 a,加 c 於其和，等等之結
果。

定律之證明. 茲證明諸定律如下： 37

第一。交換定律：$a+b=b+a$.

如，3+2 之和與 2+3 相等。

因 3+2 示自然其度中先度三數，再度二數；即

所算之羣	1, 2, 3,	4, 5,	(*a*)
指算者標記之符號	1, 2, 3,	1, 2,	(*b*)

但於 (*a*) 及 (*b*) 之記號羣間為一對一之關係，而每一
對一之關係為交互的，§ 2, 故可互換 (*a*) 及 (*b*) 之所表；
即設 (*b*) 為所算之羣，(*a*) 必表指算者所書符號之羣。

故得 $3+2$ 等於一一度算記號

$$1,2,3,\quad 1,2 \tag{b}$$

之羣。

同理，得 $2+3$ 等於一一度算下面之記號羣。

$$1,2,\quad 1,2,3, \tag{c}$$

然 (b) 及 (c) 含符號個數相同僅其符號之排列不同耳，故一一度算之結果相等，§ 27；即

$$3+2=2+3.$$

任意二自然數 a 及 b 亦同此理。

第二。結合定律：　$a+(b+c)=(a+b)+c.$

先於 a 後度至第 b 符號，即至 $a+b$，而於其後再度至第 c 符號，即至 $(a+b)+c$，若已度算 $b+c$ 個符號然後謂其在 a 後度至第 $(b+c)$ 符號，即至第 $a+(b+c)$ 其在其度位置當然相同。

基數之意義即含於上面之證明，然加法定律之獨立意義於下面底註釋明之*。

---

* 意大利數學家皮阿氏不用基數之意義曾用一種"假定"而立自然數法茲述於後——凡"數"均指"自然數"。

1. 符號 1 爲一數。
2. 於各數 a 後必有一降次數，——稱之爲 $a+$。
3. 此 $a+$ 數永不爲一。　　4. 設 $a+=b+$，則 $a=b$。
5. 設逐次取 a 之降次數，則各已知數 a 成連續數 $1,\ 1+,\ (1+)+,\cdots$ 認定 $2,3\cdots$ 諸數爲：$2=1+,\ 3=2+,\cdots\cdots$

如數 $a+b$，意指由連續公式 $a+1=a+,\ a+2=(a+1)+,\ \cdots\cdots$ 而定者（由 5 推出）.

上面之連續公式等於簡單公式.

6. $a+(b+1)=(a+b)+1.$

茲可由 6 之"算術導言"，導出加法定律：

7. $a+(b+c)=(a+b)+c.$　　8. $a+b=b+a.$

第一．若 $c=k$，設 7 爲眞，則 $c=k+1$ 時亦眞．因由 6 及 7

$$\begin{aligned} a+[b+(k+1)]=a+[(b+k)+1] &= [a+(b+k)]+1 \\ &= [(a+b)+k]+1 \\ &= (a+b)+(k+1). \end{aligned}$$

設 $c=1$ 由 6,7 爲眞.

故設　$c=2$，如 7 爲眞．∴設 $c=3,\cdots\cdots$ 設 $c=$ 任意數，7 亦爲眞，由 5.

第二．茲先證特殊情形：8'. $a+1=1+a$，然後證 8.

於 $a=k$，設 8' 爲眞，則於 $a=k+1$ 亦眞.

茲於 $a=1$. 8' 爲眞，於 $a=2$ 亦眞，∴$a=3\cdots\cdots$ 皆眞.

最後，設於 $b=k$，8 爲眞，則於 $b=k+1$ 亦眞，由 7 及 8.

$$\begin{aligned} a+(k+1)=(a+k)+1 &= 1+(a+k) \\ &= 1+(k+a)=(1+k)+a \\ &= (k+1)+a. \end{aligned}$$

故設 $b=1$ 而 8 爲眞（由 8'）於 $b=2$ 亦眞，∴於 $b=3,\cdots\cdots$ 皆眞.

· 參看 Stolz 及 Gmeiner，數論，13 頁後，所引證皮阿氏 (Peano) 說；且引韓廷頓 (Huntington) 在美國數學會之報告，第 IX 編，40 頁，高拉斯曼 (H. Grassmann) 曾首先自 6 導出 7 及 8. (Lehrbuch der Arithmetik).

和之普通定理. 前述第 34, 35 節中定律之應用問題即可證。 38

任何定個之數之和，無論如何排定其次序，或無論若何結合之情形，加之均等。

如　$a+b+c+d=a+c+b+d.$

因　$a+b+c+d=a+(b+c)+d$　§35

$=a+(c+b)+d$　§34

$=a+c+b+d$　§35

和之等式不等式之法則. 第一。由 §29 和之定義，及 §24 之法則，因得 39

1．設 $a=b$, 則 $a+c=b+c.$

2．設 $a<b$, 則 $a+c<b+c.$

3．設 $a>b$, 則 $a+c>b+c.$

其 1 已顯瞭然。因設 $a=b$, 則 a 及 b 表同數茲可證 3 如下，且以同法證 2.

設 $a>b$,　令 $a=b+d$, §31.

則 $a+c=(b+d)+c=(b+c)+d$, §§34, 35, $\therefore >b+c$.

第二。由 1, 2, 3, 之逆而得

4．設 $a+c=b+c$, 則 $a=b$.

5．設 $a+c<b+c$, 則 $a<b$.

6．設 $a+c>b+c$, 則 $a>b$.

如設　$a+c=b+c$, 則 $a=b$.

否則必得 $a<b$ 而成 $a+c<b+c$(由 2), 或 $a>b$ 而成 $a+c>b+c$ 矣 (由 3). 此與原設不合。

第三。且由 1, 2, 3, 而得

7．設 $a=b$, 及 $c=d$, 則 $a+c=b+d$.

8．設 $a<b$ 及 $c<d$, 則 $a+c<b+d$.

9．設 $a>b$ 及 $c>d$ 則 $a+c>b+d$.

即設 $a=b$, 則 $a+c=b+c$, 及設 $c=d$, 則 $b+c=b+d$ 故 $a+c=b+d$,

乘　法

40　**乘法定義.** 以 b 乘 a 即求 b 個數目每數均爲 a 者之和。

茲稱其和爲以 b 乘 a 之積 (*product*)而以 $a\times b$, 或 $a\cdot b$, 或簡書 ab 表之。

故由定義

41　$$ab = a + a\cdots\cdot \text{至 } b \text{ 項}.$$

42　稱 a 爲被乘數 (*multiplicand*), b 爲乘數, (*multiplier*), 且稱 a 及 b 爲 ab 之因數. (*Factors*).

43　**演算.** 若以累次加法求積殊爲繁雜, 故宜孰記小數之積(乘法表). 由此及加法定律與下面所釋之乘法定律之輔助而導出大數之積.

44　**乘法定律.** 乘法亦如加法, 爲一交換及結合之施算, 而分配於加法式, 即依次之三定律:

45　**交換定律.** $ab = ba$,

以 b 乘 a 及以 a 乘 b 結果相等.

如, $2\cdot3 = 6$ 及 $3\cdot2 = 6$.

46　**結合律.** $a(bc) = (ab)c$.

以 bc 之積乘 a 與以 c 乘 ab 之積結果相等.

如, $2(3\cdot4) = 2\cdot12 = 24$; 及 $(3\cdot2)4 = 6\cdot4 = 24$.

47　於實用上則書 abc 以代 $(ab)c$. 比較 §36.

分配定律. (*distributive law*) $a(b+c) = ab+ac$.

先以 b 及 c 之和乘 a 與先以 b 乘 a 次以 c 乘 a 然後加其各積結果相等.

如 $3(4+5)=3\cdot 9=27$; 及 $3\cdot 4+3\cdot 5=12+15=27$.

三定律之證明. 茲證此定律如下: 48

第一. 分配定律: $ab+ac=a(b+c)$. (1)

因 $ab+ac=(a+a+\cdots\cdot$ 至 b 項$)+(a+a\cdots\cdot$ 至 c 項) §41

$=a+a+a+\cdots$ 至$(b+c)$項$=a(b+c)$. §§35, 41.

故 $a(b+c+\cdots\cdot)=ab+ac+\cdots\cdot$. (2)

如, $a(b+c+d)=a(b+c)+ad=ab+ac+ad$. 由 (1) 及 §35.

又得 $ac+bc=(a+b)c$. (3)

因 $ac+bc=(a+a+\cdots\cdot$ 至c項$)+(b+b+\cdots\cdot$ 至 c 項)

$=(a+b)+(a+b)\cdots\cdot$ 至 c 項$=(a+b)c$. §38

第二. 交換定律 $ab=ba$.

$ab=(1+1+\cdots\cdot$ 至 a 項$)b$

$=1\cdot b+1\cdot b+\cdots\cdot$ 至 a 項　由 (3)

$=b+b+\cdots\cdot$ 至 a 項 $=ba$　§41.

第三. 結合定律 $(ab)c=a(bc)$.

$(ab)c=ab+ab+\cdots\cdot$ 至 c 項　§41.

$=a(b+b+\cdots\cdot$ 至 c 項$)=a(bc)$. 由(2) 及§41.

積之普通定理. 此諸定律可推廣於任意有定個數之因數之積, 即任何定個因數之積不必依所乘諸因數之結合次序. 49

積之等式及不等式. 即: 50

1. 設 $a=b$ 則 $ac=bc$. 4. 設 $ac=bc$, 則 $a=b$.

2. 設 $a<b$ 則 $ac<bc$. 5. 設 $ac<bc$, 則 $a<b$.

3. 設 $a>b$ 則 $ac>bc$. 6. 設 $ac>bc$, 則 $a>b$.

其1顯爲顯明，因設 $a=b$, 則 a 及 b 表同數，茲證 3 如下，且可以同理證 2.

設 $a>b$, 今 $a=b+d$, 則 $ac=(b+d)c=bc+dc \therefore >bc$.

法則 4, 5, 6 爲 1, 2, 3 之逆，故由 §39 所用之理由而得其證。

自 1, 2, 3, 應用 §39 之理由，而得

設 $a=b$ 及 $c=d$, 則 $ac=bd$.

設 $a<b$ 及 $c<d$, 則 $ac<bd$.

設 $a>b$ 及 $c>d$, 則 $ac>bd$.

II. 減法與負數

完全基度

51 **減法.** 由 5 減 3 即求於自然基度中在 5 前據第三位置者何數。茲於 4 始，逆度三數，即 4, 3, 2, 而得 2.

以符號－表此演算，讀作[減] (*minus*) 寫爲 $5-3=2$.

總之，自 a 減 b 即求在 a 前據第 b 位置者爲何數。

由 a 減 b 所得之數稱爲餘數(*remainder*), 而以 $a-b$ 式表之, a 稱爲被減數(*minuend*)而 b 稱爲減數(*Subtrahend*).

52 **加與減爲相反之演算.** 在 5 前之第三數當然加三而復得 5.

總之，可稱此餘數 $a-b$ 爲 a 前之第 b 數，或以 b 加之而復得 a 者之數，即可以下面方程決定之

53 $$(a-b)+b=a.$$

復次，因知7據4後第三位置與4據7前第三位置之語意相同，故得$4+3-3=4$. 總之，

$$(a+b)-b=a.$$ 54

因　$a+b-b=a$, § 54, 此以減法消其所加者；及因 55
$a-b+b=a$, § 53, 此以加法彌其所減者，故稱加與減為相反之演算。

完全基度. 自然基度不足應用於減法之所求數；56
因其基度有首數1, 不能超過此數反向後面度算之。

如，於自然基度不能由2減4.

若能任意向前或左度算，亦如向後或向右度算，則有重大便利；且因自然基度本身僅為一組按一定次序排列之符號，當然可以新符號的序數組置於其前反向而推廣之，此亦不成問題。

故創若干連續符號：0, 置於1前；-1, 置於0前；-2, 置於-1前；餘類推。

由此寫出造成完全基度。

$$\cdots\cdots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$$

為一串無始無終之符號或"數", 故向前（或左）任意推算，亦如向後(或右)推算。

注意此基度關於符號0而對稱(*symmetry*), 如3為0後 57
之第三符號，而-3為0前之第三符號；且他數亦然。

新數之意義. 諸新數之一，即0可有一基數意義，58
如，自3反向一一計算，相當於任何三物之羣之元每時消

去一個之演算，此演算可繼續至於諸元完全消去，玆稱 0 爲此最後無物之"羣"之基數符號，故常視 0 爲自然數之一。

然 $-1, -2, -3, \cdots$ 無任何基數意義。

反之，凡此新符號與自然數有同樣序數字碼其每個字碼亦如自然數所含性質據於序數組之一位定置，且可由其正確位置而決定之，亦如自然數由基度中之位置而決定相同，此即稱此諸符號 $-1, -2, -3, \cdots$ 爲數之充足理由。

59 **正與負.** 爲區別新數 $-1, -2, -3, \cdots$ 與舊數之種類，玆稱新者爲負(*Negative*)舊者爲正(*Positive*).
此二類之數及 0，稱爲整數(*Integers*)示與後節所論之他數有別。

60 **代數的等式及不等式.** 令 a, b, c，表完全基度中任何三數，視 a 先於，合於，或後於 b，而寫作 $a<b$, $a=b$, $a>b$.

61 由定義知完全基度爲一序數組，§17，且應用 §24 之法則；即得

設 $a<b$ 及 $b<c$，則 $a<c$.

62 設 $a<b$ 即在完全基度中 a 先於 b，或 b 在代數意義上大於 a.

注意"小"及"大"二字，於完全基度中用作"先"及"後"（或左及右）之釋譯——此外別無他意，如"-20"小於"-18"僅謂"-20"在"-18"之前(或左)而已。

63 **絕對值或數值.** 玆稱 3 爲 -3 之數值(*numerical value*)或其絕對值(*absolute value*)，且以符號 $|-3|$ 表之，寫作 $|-3|=3$. 同法施於任何負數。
一正數或 0 之數值，爲其本數。如 $|3|=3$.

數之等式及不等式． 自另一方面言之，完全基度之任二數如 a 及 b，其 a 之數值是否小於，等於，或大於 b 之數值，依 $|a|<,=,$ 或 $>|b|$ 而定。 64

如，-3 之代數值小於 2，而其數值大於 2；又 -7 之代數值小於 -3，而其數值大於 -3 之數值。

含負數式之演算

新演算． 茲聯合負數與 0 及一他數且與諸自然數，而創立新演算，如下面由加，乘，及減法以結合之諸數。 65

茲以同樣名詞稱此演算，且以表自然數演算之同樣方法表之。

如 §60．應用 a 表完全基數之任意數，但 a 及 b 僅表自然數，茲規定新演算如下：

加法及減法之定義． 即： 66

1．$a+b$ 意謂 a 後之第 b 數。

2．$a-b$ 意謂 a 前之第 b 數。

3．$a+0$ 及 $a-0$ 意謂與 a 相同之數。

4．$a+(-b)$ 意謂與 $a-b$ 相同之數。

5．$a-(-b)$ 意謂與 $a+b$ 相同之數。

換言之，加正數 b 於任意數 a 意即在基度上，向後度算 b 個位置；若自 a 減之，則反向度算 b 個位置；若加及減一負數各等於減及加其相當的正數。

如，由 1，$-3+2=-1$，因 -1 為 -3 後之第二數。

由 2, $2-5=-3$, 因 -3 爲 2 前之第五數。

由 4, $-5+(-2)=-5-2=-7$ (由 2).

由 5, $-6-(-2)=-6+2=-4$ (由 1).

67 **乘法之定義.** 即:

1. $0\cdot a$ 及 $a\cdot 0$ 意均爲 0.
2. $a(-b)$ 及 $(-a)b$ 意即 $-ab$.
3. $(-a)(-b)$ 意即 ab.

換言之，若因數無一爲 0 者，則二因數之積爲正或負依因數有同號或異號而定；且於各式，其積之數值，爲其二因數之數值之積。

如。 由 2, $3\times-2=-6$, 及 $-3\times2=-6$

由 3, $-3\times-2=6$.

68 **諸定義之原理及意義.** 試觀 §§ 66 及 67 所述既非假設又非定理故須證明之，因何稱之爲——新演算之定義。

如，試證 $2(-3)=-2\cdot3$, 除由自然數之乘法定義而外 § 40,無所適從，若勉强引用亦不合理，因 -3 非自然數故耳，蓋“將 2 取 -3 次”一語爲無意義。

然則何須創作此種演算耶? 蓋於諸數本身關係之學習及世界上關於吾人之事物愈能利用負數愈覺造物之妙。

此新演算並非任意創造者；反可謂此法爲舊演算對於新數之自然推廣。

爲處理自然數起見，先規定加法爲——向後度計——之演數，然後證此演算之結果，有兩種性質與所加數之值無關。即:

1. $a+b=b+a$.　　2. $a+(b+c)=(a+b)+c$.

同理可證其積具有三普通性質:

3. $ab=ba$. 4. $a(bc)=(ab)c$. 5. $a(b+c)=ab+ac$.

設用字母以表數，此 1 至 5 之性質即成加法及乘法演算定義之一切目的；蓋實際上當然不能純爲向後度計之演算，餘類推。

設以新數作適當演算，當然可des利用，"定義" 1－5 亦必須用之，而 §§ 66,67 不過述及下面問題之解釋:

欲構成加法，乘法，及減法之推廣意義，故完全基度之任意數之和及積可有性質 1－5，且其減法仍可繼續視爲加法之逆。

如，(1)設規定加一正數 b 於 a 爲向後方度算，而自 a 減之爲反向推算，此不過加法及減法之舊定義之重述而已。

(2) 由此加法定義而得 $-b+b=0$.

設適用交換律 $a+b=b+a$,必得 $-b+b=b+(-b)$,故 $b+(-b)=0$; 因 $b-b=0$, 故得 $b+(-b)=b-b$.

此即暗示 $a+(-b)=a-b$.

(3) 設新加法及減法亦如前述爲相反之演算，則由前面($a-(-b)+(-b)=a$ 及 $a+b+(-b)=a$) 之理，必得 $a-(-b)=a+b$. 如 § 66,5.

(4)復次，若保持加法及乘法之原舊聯絡，§ 41,如 § 67, 2; 故得

$$\begin{aligned}(-a)b&=-a+(-a)+\cdots\text{至 } b \text{ 項}\\&=-a-a-\cdots\cdots\text{至 } b \text{ 項}=-ab.\end{aligned}$$

(5)設適用交換率 $ab=ba$, 亦必得 $a(-b)=(-b)a=-ba=-ab$, 如 § 67, 2.

(6)同理，$0+0+\cdots$ 至 a 項 $=0$, 用此式定律 $ab=ba$ 以導出 § 67,1 之定義，即 $0\cdot a=0$ 及 $a\cdot 0=0$;

(7)最後，由(6)而得 $(-a)(-b+b)=-a\cdot 0=0$,

設適用分配定律，亦必得$(-a)(-b+b)=(-a)(-b)+(-a)b=(-a)(-b)-ab$，由(4)．

故得$(-a)(-b)-ab=0$．且因$ab-ab=0$，遂導出$(-a)(-b)$為ab，如§67,3．

69 上諸演算均適合於交換，結合，及分配定律；茲仍須證明此新演算完全合於所擬定之諸律。

$$a+(b+c)=a+b+c, \tag{1}$$

$$a-(b+c)=a-b-c, \tag{2}$$

$$a+b-b=a-b+b=a, \tag{3}$$

均用§37,52之理，加法及減法之定義為向後方度算及反向度算。

I．交換定律。 $a+b=b+a$.

第一，$-a+b=b+(-a)$.

因設 $a>b$，令 $a=d+b$. §§31,34,

則 $-a+b=-(d+b)+b$

$=-d-b+b=-d$; 由(2)及(3)

及 $b+(-a)=b-(b+d)$, §66,4,

$=b-b-d=-d$. 由(2)

設 $b>a$ 亦可用同法證之。

第二，$-a+(-b)=-b+(-a)$.

因，$-a+(-b)=-(a+b)=-(b+a)=-b+(-a)$，由(2)及§66,4.

II．結合律。 $a+(b+c)=(a+b)+c$.

第一，$a+[b+(-c)]=a+b+(-c)$.

設 $b>c$，令 $b=d+c$. §§31,34.

則 $a+[b+(-c)]=a+[d+c+(-c)]=a+d$.

及　$a+b+(-c)=a+d+c+(-c)=a+d$. 由(3)及 § 66, 4.

設 $c>b$ 可以同法證之。

第二，$a+[(-b)+c]=a+(-b)+c$.

此結果可由 1 而得，且其式正如所擬。

第三，$a+[-b+(-c)]=a+(-b)+(-c)$.

此結果由 (2) 及 § 66, 4 而得，因 $-b+(-c)=-(b+c)$.

Ⅲ. 交換定律.　$ab=ba$

第一，$(-a)b=b(-a)$.

因　$(-a)b=-ab=-ba=b(-a)$.　§ 45; § 67, 2

第二，$(-a)(-b)=(-b)(-a)$.

因　$(-a)(-b)=ab=ba=(-b)(-a)$，　§ 45, § 67, 3

Ⅳ. 結合定律.　$a(bc)=(ab)c$.

第一，$(-a)[(-b)(-c)]=[(-a)(-b)](-c)$，

因　$(-a)[(-b)(-c)]=(-a)\cdot bc=-abc$.　§ 46; § 67, 2, 3

及　$[(-a)(-b)](-c)=ab\cdot(-c)=-abc$.　§ 67, 2, 3

第二，其他諸式可由同法證之，

Ⅴ. 分配定律.　$a(b+c)=ab+ac$.

第一，$a[b+(-c)]=ab+a(-c)$.

因　$[b+(-c)]a=[b+(-c)]+[b+(-c)]+\cdots$ 至 a 項

$=b+b+\cdots$ 至 a 項 $+(-c)+(-c)+\cdots$ 至 a 項

$=ba+(-c)a$.　§ 41; § 67, 2; II 及 III

故　$a[b+(-c)]=ab+a(-c)$.　由 III

第二，其他諸式均可由此推出。

如，$(-a)[b+(-c)]=-a[b+(-c)]$

$=-[ab+a(-c)]=(-a)b+(-a)(-c)$.

70 **總結果.** 如前§68所示，於文字的算術或代數，定律 $a+b=b+a$ 等等，實等於加法及乘法之定義。即用字母 a, b, c 表自然數亦同；且已證明此諸定義可應用於完全基度之一切數。

由諸定律之意義可變換文字式之形狀而不影響其值，式中所含文字，可表完全基度之任何數。

如，無論 a, b, c 表正整數或負整數，得

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d.$$
$$=ac+bc+ad+bd.$$

71 **和之等式及不等式之法則.** 由§39中之同一理由可證，

相當於 $a <, =$ 或 $> b$ 者，

為 $a+c <, =$ 或 $> b+c$；

及其逆。

於正數及負數均為眞確，如次述。

72 設加同數於兩邊，或自兩邊各減同數，則方程仍為方程，及偏程仍為偏程(不等式)而原意不變。

73 **積之等式及不等式之法則.** 若變更任意二數 a 及 b 符號即反其在完全基度中之順序，§57.

如， 已知 $-3<-2$, 然 $3>2$; $-5<2$, 然 $5>-2$.

由此事實及§50之理由因得

相當於 $a <, =$, 或 $> b$ 者。

為 $ac <, =$, 或 $> bc$.

但 $a(-c) >, =$, 或 $< b(-c)$；

及其逆亦眞。故

以正或負等數乘方程之兩邊仍可爲一方程。 74

以正號等數乘偏程之兩邊其原意不變。

然以負號等數乘偏程之兩邊則變其原意由 <至>，或其逆。

由此首一法則及用 0 乘算之定義，即 $a\cdot 0=0$，導出次之重要定理。

1. 設 $a=b$，　則 $ac=bc$. 75

2. 設 $ac=bc$，　則 $a=b$，　但 $c=0$ 除外。

於 2 之例外式須常注意。

如，由實數方程 $2\cdot 0=3\cdot 0$，自然不能因此而得 $2=3$.

零之積。 設一積式爲 0，其因數之一必爲 0. 76

如　設 $ab=0$，　或 $a=0$，或 $b=0$.

因，$0\cdot b$ 亦等於 0，

得　　$ab=0\cdot b$，

故　　$a=0$，若此則 $b=0$ 除外。　　§ 75

積之數值。 二或多因數之積之數值爲其各因數之數值之積。 77

如　$|(-2)(-3)(-4)|=|-24|=24$;

及　$|-2|\cdot|-3|\cdot|-4|=24$.

和之數值。 設二數同號則其之和之數值，爲其各數值之和；設二數爲異號則和之數值爲其數值之差。 78

如，$|-3+(-5)|=|-8|=8$;

及　$|-3|+|-5|=3+5=8$.

然　$|2+(-5)|=|-3|=3$; 及 $|-5|-2=3$.

量中之整數應用

79　**量．** 應用數目非只記錄度算異物之羣之結果也，且須表示度量（*measurement*）大小之結果；如時間，直線，表面之部分等等，凡大小久暫稱爲量．

80　凡測度一"量"須選一同類之特別量作度量單位（*unit*）與原"量"比較之．

81　設此量恰含單位之一定次數，即稱此數爲其量數（*measure*）．

於特別類，稱線段之量數爲其線段之長

如，度量一線段即選單位線段（稱爲尺），沿線逐次貼置之，以求有若干次．

設得恰含尺之三次，則稱之爲三尺長，或其長——即其量數——爲3．

82　自然數應用於量數正爲以自然數度中之位置關係，表其量數之大小關係．

83　**負數之應用於量數．** 由某處"遞及之點"，常能構成其反對"方向"之量數．

如，度量時間爲耶穌降生之前，及後若干年；經線爲格林維基或華盛頓之西及東若干度；溫度爲零下及上若干度．

茲以簡單代表方法以區別由一方向與由他向構成之量數，即以正數表其一，而以負數表其他．

84　如　下圖

$\cdots -4$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$4\cdots$
$\cdots\, P_{-4}$	P_{-3}	P_{-2}	P_{-1}	0	P_1	P_2	P_3	$P_4\cdots$

此處述及之定點，或一原點，爲 O，其單位爲 OP_1，及諸點 $P_2, P_3, \cdots, P_{-1}, P_{-2}, \cdots$ 均按 $OP_1=P_1P_2=P_2P_3=\cdots P_{-1}O=P_{-2}P_{-1}=\cdots$ 而作者。

在諸點上按其本來順序，註以完全基度之數，令 O 正在 O 上。

自 O 至各點 P 之距離，——即線段 OP 之長，——以書於其上者之數值表之；而自 O 至 P 方向以該數之符號表之。

如，-3 在 P_{-3} 上表 P_{-3} 在 O 之左距離 3 單位。

且，線上之諸點之順序，以基度中之相當數之順序表之。

用點以畫數. 於諸點 $\cdots, P_{-2}, P_{-1}, O, P_1, P_2, \cdots$ 之組及諸數 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ 之組之間成一對一之關係，可用任一組以表其他組，因此常能用點以畫數。 85

III. 除法及分數

除及累次減

除法之二類. 茲有兩種演算須應用除法(*division*)於算術及代數中，其一可稱爲累次減法，其他稱爲乘法之逆；茲有二者符合之式，稱之爲整除式。 86

除即累減. 以 3 除 7 其第一意即答次二問題， 87

1. 若自 7 減 3 將減若干次始得一小於 3 之餘數？
2. 其餘數爲何？

茲逐次減 3 而得其兩個問題之答，即，$7-3=4$ 及 $4-3=1$，必減 3 兩次或必減 3×2，而其餘數爲 1.

故此類除法，等於累次減法，其關係於減法者類似乘法之於加法。

試觀 7, 3, 2, 1, 四數可以下面方程結合之。

$$7 = 3\cdot 2+1.$$

總之，設 a 及 b 爲任意二自然數，若以 b 除 a,意爲求二自然數，q 及 r,(其一可爲 0)，能合於

88 $a = bq + r$ 及 $r < b$ 者。

89 茲稱 a 爲被除數(*dividend*), b 爲除數(*divisor*) q 爲商數(*quotient*), 及 r 爲餘數(*remainder*).

90 **註。** 設 a 及 b 爲已知，常可求得滿足 § 88 之二數 q 及 r.

如，設 $a<b$, 則得 $q=0$ 及 $r=a$.

如 $a \geqq b$, 則由 § § 31, 35 必能繼續 $b + b + \cdots\cdots$ 之和至等 a 或再加另一 b 而大於 a. 且設 q 表此和之項數，則由 § 41, 或得

$a=bq$, 或 $a=bq+r$, 其 $r<b$.

復次，設 a 及 b 爲已知，則必有適合於 § § 88 之 q 及 r 二數存在。

設另有其他二數，如 q', r', 能有

$bq+r=bq'+r'$ 之關係，則必 $b(q-q')=r'-r$.

然此不可能，因 $r'-r$ 之數值小於 b, 而 $b(q-q')$ 之數值不小於 b 故也。

91 **整除。** 設被除數 a 爲除數 b 之倍數，如 $a = 12$ 及 $b=3$, 其餘數爲 0. 則稱 a 可以 b 整除之。於此類 § 88 之方程化爲 $a=bq$, 或

92 $$qb = a.$$

設 a 可以 b 整除之，亦可稱商數 q 為"以 b 乘之而得 a"之數。 93

且於此類，可表此除法如 $a \div b$，而於 a, b 項間用符號 94
$\frac{a}{b}$ 或 a/b 之一表其商，寫作 $q=\frac{a}{b}$，意與 $qb=a$ 相同。

關於整除之定理及公式

定理1. 整除及乘法為相逆之演算；即 95

$$a \div b \times b = a, \text{ 及 } a \times b \div b = a.$$

上二式各自 § 93 及 § 87 之定理而得。

定理2. 設除法為整除，則以同數乘被除數及除數而 96
其數商不變。

設，$a = qb$，則 $am = q \cdot bm$. § § 50, 46

即，設 $q=\frac{a}{b}$，則 $q=\frac{am}{bm}$. § 94

定理3. 整除，亦如乘法，可關於加法及減法而分 97
配之：即。

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \text{ 及 } \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

設 $a = qc$, 及 $b = q'c$,

得 $a + b = qc + q'c = (q + q')c$. §§ 39, 47

故 $\frac{a+b}{c} = q + q' = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. § 94

同法證其減法。

如 $\frac{18}{3}+\frac{9}{3}=6+3=9$; 及 $\frac{18+9}{3}=\frac{27}{3}=9$.

商之加減公式. 98

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

因 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$. §§96, 97

可以同法證其減式。

如 $\frac{18}{3}+\frac{10}{5}=6+2=8$, 及 $\frac{18\cdot5+10\cdot3}{3\cdot5}=\frac{120}{15}=8$.

99 **商數乘積之公式。** 即:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

設 $a=qb$, 及 $c=q'd$. 得 $ac=qq'\cdot bd$. §§50, 45, 46

故 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=q\cdot q'=\frac{ac}{bd}$. §94

如 $\frac{15}{3}\cdot\frac{6}{2}=5\cdot3=15$; 及 $\frac{15\cdot6}{3\cdot2}=\frac{90}{6}=15$.

100 **設為整除，以一商數除他一商數之公式。** 為

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

設 $a=qb, c=q'd$, 且 $q=q''q'$,

得 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=q\div q'=q''$, §94

及 $\frac{ad}{bc}=\frac{qbd}{bq'd}=\frac{q}{q'}=q''$. §§96, 94

如 $\frac{24}{6}\div\frac{10}{5}=4\div2=2$; 及 $\frac{24\cdot5}{6\cdot10}=\frac{120}{60}=2$.

101 **負數之整除。** 於§93所示之商之定義以除數適可整除被除數，無論其數值如何，當然亦含有負數之意義；表此諸商數如§94, 得次之定理:

102 **理定**4. 設 a 可以 b 整除之，則，

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

設 $a=qb$, 得 $-a=(-q)b$. §§73.67.

故 $$\frac{-a}{b}=-q=-\frac{a}{b}$$ §94

可以同法證他式。

零之於整除. 1. 自另一方面而言，§93 所示商之 103
定義若除數爲 0 則無意義。

因無論 q 表何數 $q\times 0=0$, 故 (1) 各數以 0 乘之得 0; 及 (2) 以 0 乘之而得 a 者，實無此數。

換言之，相當於 §93 及 §94 之定義，符號 $0/0$ 表任意各數而 $a/0$ 則非數。

2. 然設被除數爲 0, 而除數 b 不爲 0, 則 §93 之意義有意義，即以 $0/b$ 表其商爲 0.

因依 §94, $0/b$ 表以 b 乘之而得 0 之數; 而 0 即爲此數(僅此一個), 因 $0\cdot b=0$ 故也。

分數. 除法即乘法之逆

於 §86 所述除法之第二類僅爲 §93 所規定整除之約略，故須於數之內部，導出分數; 茲求此新數之序數定義，類似於 §56 之負數者，下面定理暗示其定義之一，其 a, b, c, d 表自然數。

定理5. 設 a 可以 b,及 c 可以 d 整除之，則商數 a/b 104
及 c/d 在自然裴度中之關係次序與積數 ad 及 bc 之次序相同: 即

$$a/b<,=,\text{或}>c/d, \text{依 } ad<,=\text{或}>bc \text{ 而定。}$$

1. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a}{b}bd=\frac{c}{d}db$. §50

然 $\frac{a}{b}b=a$, 及 $\frac{c}{d}d=c$. §§93, 91,

故 $ad=bc$.

可以同法證下式。

設 $a/b < c/d$, 則 $ad < bc$; 及設 $a/b > c/d$ 則 $ad > bc$.

2. 逆之，因上諸式而得，

$$設\ ad = bc,\ 則\ a/b = c/d.$$

否則必得 (1) $a/b < c/d$, 而致 $ad < bc$, 或 (2) $a/b > c/d$, 而致 $ad > bc$, 然均與假設不合。

設 $ad < bc$, 則 $a/b < c/d$; 設 $ad > bc$, 則 $a/b > c/d$.

105 **擴充序數組**. a, b, c, d 所表諸值無論能否以 b 除 a 及以 d 除 c, 而 ad 及 bc 在基度中之關係次序為已知。

故取任意二自然數，a 及 b, 而 b 不為零，即可以之構成$\frac{a}{b}$, 或 a/b 之式。

設 a 確可以 b 除之，如前，令 a/b 表自然數以 b 除 a 之商；設不能除可暫視 a/b 僅為一新符號，讀作"a 在 b 上"，其關係於除法者將於 § 122 示之。

於是得許多符號 $a/b, c/d$ 等等。試用表自然數之順序性質依下述法則而排列之；a/b 先於，合於，或後於 c/d, 依 ad 先於，合於，或後於 bc 而定。

或應用符號 $<, =, >$, ，如前以代[先][合][後]之意，——

106 令 $a/b <, =$, 或 $> c/d$, 按 $ad <, =$, 或 $> bc$ 而定。

如 $4/5$ 先於 $7/8$, 即 $4/5 < 7/8$, 因 $4 \cdot 8 < 7 \cdot 5$. 復次 $2/3$ 在 0 及 1 之間，或 $0 < 2/3 < 1$. 蓋 $0/1 < 2/3$, 因 $0 \cdot 3 < 2 \cdot 1$; 及 $2/3 < 1/1$, 因 $2 \cdot 1 < 3 \cdot 1$ 故也。

107 **此諸符號 a/b 亦表諸自然數，此法即於基度本體中指定其正當位置；餘法則指定諸位置於基度中連續諸數之間。**

註． 擬求任意特別數關於某度中數之位置，只化 a 108
爲 $a=bq+r$ 式即可，其 $r<b$, §§88 設 $r=0$, 則 $a=bq$, 此規則致令 a/b 與 q 符合，然 r 不爲 0,則按規則應置 a/b 於 q 及 $q+1$ 之間。

符號 a/b 之完全集團應按一類似自然某度但只構成其 109
部分——之規定而列爲次序組。

因其有 §§17, 18 中一一枚舉之序數組之一切性質。

如　設 $a/b<c/d$, 及 $c/d<e/f$, 則 $a/b<e/f$.

因　$a/b<c/d$, 及 $c/d<e/f$.

得　$ad<bc$, 及 $cf<ed$. §106

以第二偏程式之兩邊乘第一式之相當邊，得

$adcf<bced$. §50

因而　$af<be$. §50

故　$a/b<e/f$. §106

分式． 設 a/b 不表自然數則稱之爲分式(*fraction*)； 110
及 a 與 b 均爲分式之項 (*terms*) 故

分式爲 a/b 之形狀，而以其含於自然數中之序數組之位置決定之。

故自序數觀之，正可稱分式爲數*。

---

* §106 之法則亦可用以規定 1/0, 2/0 等式之序數的符號。

如　由法則，1/0 必在分母 b 不爲 0 之 a/b 各數之後因 1/0 > a/b, 而 1·b > a·0 故也.

復次，1/0, 2/0, 等等，必據有序數組之同一位置，因 1·0 = 2·0, 則 1/0 = 2/0 故也.

然此法不能示符號 0/0 以定位置，無論 a 及 b 之值如何均得 0/0 = a/b, 因 0·b = a·0 故也.

111 **負分式.** 玆亦可作一分式令其分子，分母，或子母，均爲負整數者，如$\frac{-a}{b}$，$\frac{a}{-b}$，$\frac{-a}{-b}$，定其值如次。

1. $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$；$\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$；$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.

2. 各負分式均在0之前。

3. 關於各個負分式(及負整數)之排列，應依下法：

$-\frac{a}{b}<,=,$ 或 $>-\frac{c}{d}$，依 $-ad<,=,$ 或 $>-bc$ 而定。

112 **有理數組.** 玆爲區別整數，分式與他種數起見，而稱整式分式爲有理數(*rational number*). 含一切此種數組稱爲有理數組(*rational system*).

此組具有一重要性質不屬於整數組者，即

113 有理數組爲緻密的；即在各二不等有理數間必另有許多有理數。

如 令$\frac{a}{b}$及$\frac{c}{d}$爲任意二分式設$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$. 玆可證分式$\frac{bc+ad}{2bd}$在$\frac{a}{b}$及$\frac{c}{d}$之間，如下：

因 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ 得 $ad<bc$.

1. 設加 ad 於 $ad<bc$ 之兩邊，由§§39, 50, 106.

$2ad<bc+ad$, $\quad\therefore a(2bd)<b(bc+ad)$.

$\therefore\frac{a}{b}<\frac{bc+ad}{2bd}$

2. 設加 bc 於 $ad<bc$ 之兩邊，以同法得

$bc+ad<2bc$, $\therefore(bc+ad)d<c(2bd)\ \therefore\frac{bc+ad}{2bd}<\frac{c}{d}$.

如 在$\frac{3}{4}$及$\frac{5}{6}$之間可得$\frac{4\cdot 5+3\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{38}{48}=\frac{19}{24}$.

故若述及有理數時，須避免"鄰數，儆大，或儆小" 於已知數之語句：因無此數存在也，於每個整數可有一鄰次整數，然於任意有理數及一想定之鄰次有理數之間，仍有其他若干有理數。 114

分數演算． 茲令 a, b, c, d 表任意已知正負整數。 115
於 §§ 98—102 已證，設 a/b 及 c/d 表整數，得

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.　　2. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.　　4. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$，設 $\frac{ad}{bc}$ 爲整數。

但若 a/b 及 c/d 非爲整數而 1, 2, 3, 4 各方程之右邊仍有意義，上列各式均爲 § 110, 111 所規定之定値分數類。

故 1, 2, 3, 4 即暗示加減乘除之推廣意義而構成此諸算法應用於分數，即。

二分數 a/b 及 c/d 之和意同於分數 $(ad+bc)/bd$. 116

由分數 a/b 減 c/d 之差意同於分數 $(ad-bc)/bd$. 117

二分數 a/b 與 c/d 之積意同於分數 ac/bd. 118

以分數 c/d 除分數 a/b 所得之商意同於 ad/bc. 119

由上可知此諸定義與初等數學所示計算分數之法則相同。

交換，結合，及分配定律． 亦能施於此諸總括計算。 120

如　$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$　　§§ 118, 69

121　此種計算於§§71, 73, 之等式及不等式亦真。

如，設 $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$，　則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

因 $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$，則 $aedf=cebf$ §§118,106,111.

故 $ad=cb$，因而 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.　　§§73,106,111.

122　**分數之定義亦爲商.** 分數 a/b 茲可視爲以 b 乘之而得 a 之一數，即以下列方程規定之一數。

123
$$\frac{a}{b}.b=a.$$

因 $\frac{a}{b}\cdot b=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{1}=\frac{ab}{1\cdot b}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{b}=a$.　§§106, 111, 118,

124　**除法爲乘法之逆.** 由§§118, 119, 因得，

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\text{ 及 }\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b};$$

換言之，其§§118, 119 中規定之乘法及除法爲相反(互逆)施算，比較§55.

因由§§118, 119, 及§§106, 111 得，

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{dc}{cd}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\div\frac{c}{d}=\frac{acd}{bdc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{cd}{dc}=\frac{a}{b}.$$

故可稱上面此種除法爲乘法之逆，且曰

125　若以 c/d 除 a/b，即求以 c/d 乘之而得 a/b 之一數。

導分數計算於算數部，常可依法求得一種結果而除數 c/d 爲0者除外。

此爲算術及代數中除法之普通意義，亦即眞實除法之推廣 § 93.

化簡分數爲最低項．最簡分數． 設分數之分子及分母有一公因數，可同時消去之，其分數之值不變． 126

如 $\dfrac{am}{bm}=\dfrac{a}{b}$; 因 $am\cdot b=a\cdot bm$, § 106.

設其所有公因數均已消去，則此分數稱爲最低項或最簡項式(*irreducible*).

定理． 設 a/b 爲最簡分數，及 a'/b' 爲與其相等之任意他分數，則 a' 及 b' 各爲 a 及 b 之同倍數． 127

因 $a'/b'=a/b$, 故 $a'b=ab'$, a 爲 $a'b$ 之一因數．

然由假設，a 與 b 無公因數，故 a 必爲 a' 之因數．

§ 492, 1.

因得 $a'=ma$, 其 m 爲整數．

代入 ma 於 $a'b=ab'$ 之 a', 得 $mab=ab'$ 故 $b'=mb$, § 50.

系． 設二最簡分數相等，則其分子必等，且分母亦必等． 128

分數之應用於量

分數長度． 於 § 81 已知長度之定義只能應用恰合單位線段 s 一定倍數之某線段 S. 129

然設 S 不恰合 s 整倍數，則亦稱與 s 爲可度；即可正合 s 之半，三分之一，或其他有盡分數部分，茲規定此類之長如次：

設一已知線段正合單位線段 b 分割中之 a 倍則稱其長爲分數 a/b. 130

如設 S 恰合 s 之 10 分割中之 7 倍，則 S 之長(以 s 表之)爲 7/10.

註． 依定義可知設 a/b 爲以 s 所表 S 之長，亦必爲 ma/mb 式之分數． 131

因 S 恰含 s 之 b 分割中之 a 亦必含 mb 分割中之 ma 分割。

132 分數在量中甚爲有用，與整數之應用於量中之理由相同。即，以有理數組中之關係位置表其線段之長之關係尺寸。

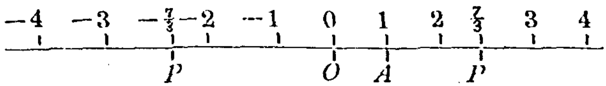
如，設 a/b 及 c/d 爲以 s 所表 S 及 T 之長，且亦爲 ad/bd，及 bc/bd，§ 131；即於 s 之 bd 分割中 S 正含 ad 分割，T 正含 bc 分割。

故 $S <, =,$ 或 $> T$，依 $ad <, =,$ 或 $> bc$ 而定。

即 $S <, =,$ 或 $> T$，依 $a/b <, =,$ 或 $> c/d$ 而定，§ 106

133 **註。** 略言之，此處所示之線長定義與初等數學中之分數定義相同，而其較大或較小之分數隨視相當於較大或較小之線段或其他數量而定。

134 **以點繪出之有理數.** 分數，亦同於整數，可以在無限長的直線上之點繪出之，§ 85.



如，欲繪一點 P，表 7/3，蓋與繪 A 表 1 有同樣方法，不過由原點 O 起向右截取單位 OA 之三分一分割七次。

P' 爲 O 之左邊之相當點，$-7/3$ 之圖形。

於任意已知分數；無論正負均可以此同法施之。

135 所有此類諸點均可按其相當於有理數之順序沿線繪出之，須熟記普通稱謂一有理數，在他有理數之左或右，或在他二有理數之間。

Ⅳ. 無理數

序論

定義. 茲以 a^2 表乘積 $a\cdot a$, 讀作"a 之平方"; 以 a^3 136
表乘積 aaa, 讀作"a 之立方"; 以 a^n 表 $aaa\cdots$ 至 n 個因數之積, 讀作"a 之 n 次冪"(*nth power*).

於記號 a^2, a^3, a^n, 其 $2, 3, n$ 諸數稱爲指數,(*exponents*); a 稱爲其各冪之底(*base*).

由 a 求 a^2 稱爲平方其 a; 求 a^3, 稱爲立方之; 求 a^n, 即連乘 a 至 n 次冪.

凡乘一已知數至一已知方冪亦稱爲乘方(*involution*).

根及對數. 設 a 爲有理數, 及 n 爲正整數; a^n 亦 137
爲有理數, 稱之爲 b;則

$$a^n = b.$$

此方法暗示二新問題.

第一, 予 n 及 b 以定值而求 a.

第二, 予 a 及 b 以定值而求 n.

如(1)令 $n=2$ 及 $b=9$. 則方程化爲

$$a^2 = 9.$$

而求得 $a=3$ 或 -3; 因 $3^2=9$ 及 $(-3)^2=9$.

復次, (2)令 $a=2$ 及 $b=8$. 則此方程化爲

$$2^n = 8.$$

而得 $n=3$; 因 $2^3=8$.

設 $a^n = b$ 133

1. 稱 a 爲 b 之 n 次根(*nth root*), 且以 n 及 b 各項之符號 $\sqrt[n]{b}$ 表之, 其簡單符號 $\sqrt{b}$ 稱"b 之平方根", 於 $n=2$ 時用之.

2. 稱 n 爲 b 之 a 底對數(*logarithm*), 而以 a 及 b 各項組成之符號 $\log_a b$ 表之.

如 $3^2=9$ 及 $(-3)^2=9$，其 3 及 -3 皆為 9 之平方根，且均可寫作 $\sqrt{9}$；仍宜參看 § 139.

復次，2 為 9 之對數以 3 為底者；即 $2=\log_3 9$.

139 **註.** 以記號 $\sqrt{9}$ 代表 9 之兩平方根時，可以 $\sqrt{9}$ 表其正根 3，而以 $-\sqrt{9}$ 表其負根 -3，此為初等代數中表示平方根之普通方法，後面仍之.

140 **開方與求對數.** 設 n 及 b 為已知，求 $\sqrt[n]{b}$ 之演算，稱為求 b 之 n 次根，或開方(*evolution*).

設 a 及 b 為已知，求 $\log_a b$ 之演算，稱為求 b 之 a 底對數.

此種演算為乘方之法，§§ 55，124.

141 **註.** 加法及乘法各有一種相反計算，而乘方則有兩種逆算，其理由可比較下三方程而知之.

1. $a+b=c$,　　2. $ab=c$,　　$a^b=c$.

因　$a+b=b+a$，及 $ab=ba$，問題：已知 1 或 2 中之 c 及 b，求 a，與已知 c 及 a 求 b 之問題為同類.

然 a^b 不等於 b^a，問題：已知 3 中之 c 及 b 求 a，與已知 c 及 a 求 b 之問題完全不同.

142 **需要之新數.** 俟後當逐次學習新計算法，代數學中之基本四則不過次要而已；然關於數之部分之進一步的推廣殊為必要.

雖則 $\sqrt[n]{a}$ 可表有理數然為一例外.

如　極簡單之例 $\sqrt{-1}$ 及 $\sqrt{2}$ 均非有理數，因

1. 各有理數之平方為正，凡有理數皆無平方為 -1 者，故 $\sqrt{-1}$ 不能表一有理數.

2. 凡有理數實無平方為 2 者存在，當然 2 非任何整數之平方；下面且可證 2 非任何分數之平方.

設 p/q 為一最低項分數，而

$$(p/q)^2=2, \text{或 } p^2/q^2=2/1.$$

然因 p^2/q^2 為其最低項，§ 492, 2, 由此而得，§ 128, $p^2=2$, 然此不可能，因 p 為整數。

故 $\sqrt{2}$ 不能表一有理數。

同法可證設 a/b 為任意最低項之分數，$\sqrt[n]{a/b}$ 不能表一有理數，除非 a 及 b 均為整數之 n 次冪方可。

茲創作二種新數以補數組之不足：即無理數(*irrational numbers*)，如 $\sqrt{2}$ 其一也，及虛數(*imaginary numbers*)，如 $\sqrt{-1}$ 其一也。

茲於本章討論無理數，而於次章論虛數。

無理數之普通定義

本章凡 a, b, c 等字母，表正或負整數或分數之任意有理數。

有理數組之普通性質. 有理數構成之一組有 143
下列性質：

1. 為一序數組。

2. 為稠密的(*dense*)；即此組內各二不等數 a 及 b 之間，仍有此組之他數在焉。

3. 此組之各二數之和，差，積及商，仍為此組之數；求任意數之商時而 0 須除外。

由此定義而得，若再創立一種具有三同樣性質之推廣數組，而有理數組亦含其內。

第一類之分離數. 1. 數 $\frac{1}{2}$ 隔開有理數組為二部，144
一部含(小於) $\frac{1}{2}$ 前之有理數，他部含(大於) $\frac{1}{2}$ 後之一切有理數。茲各稱此二部數為 C_1 及 C_2.

C_1　　　$\frac{1}{3}$　　　C_2

如圖，在 $\frac{1}{3}$ 點左邊之半線含 C_1 部中一切數之圖點，而其右邊之半線含 C_2 部中一切數之圖點，§ 134.

由 § 109, 111, 及 113, 即得

1. C_1 中之各數必在 C_2 中之各數之前。

2. 無 C_1 中之最後數，亦無 C_2 中之最前數。

如，設 C_1 中有一最後數，則此數及 $\frac{1}{3}$ 之間仍有若干數，§ 1.3, 此不可能，因由假設，所有小於 $\frac{1}{3}$ 之有理數均在 C_1 中也。

145 2. 爲表示分離有理數組爲三部分 C_1, $\frac{1}{3}$, C_2 計，可連接 $\frac{1}{3}$ 於 C_1, 則構成 C_1' 一部以總括 C_1 及 $\frac{1}{3}$, 而曰:

數 $\frac{1}{3}$ 隔開全部有理數組爲兩部分，C_1' 及 C_2;且令

1. C_1' 中各數均在 C_2 中各數之前。

2. C_1' 中有一末數即 $\frac{1}{3}$,然 C_2 中無首數。

146 3. 或連接 $\frac{1}{3}$ 於 C_2, 稱其結果部分爲 C_2', 而曰:

數 $\frac{1}{3}$ 隔開全部有理數組爲兩部分，C_1 及 C_2', 且令

1. C_1 中各數均在 C_2' 中各數之前。

2. C_1 中無末數，然 C_2' 中有一首數，即 $\frac{1}{3}$

當然每個有理數，均能仿此而作有理數組之分離數。

147 逆言之，設能以任何法分離完全有理數組爲兩部，B_1 及 B_2,其 B_1 中各數均在 B_2 中各數之前，而 B_1 中有一末數，或 B_2 中有一首數；此隔離數當視爲首數或末數，以別於其他一切諸數，據此意而規定之。

如，指定諸負有理數於 B_1，而其餘諸有理數於 B_2，則 B_1中無末數，而 0 爲 B_2中之首數，設稱零爲 B_2之首數，示與其他諸數有別，而以理想符號 0 表出之。

註． 當然不能同時 B_1 有一末數而 B_2 有一首數，因此二有理數之間必有若干有理數也，§ 113. 茲由假設，此各有理數或屬於 B_1 或屬於 B_2． 148

第二類之隔離數． 仍可以各種方法分離全部有理數組爲無末數之 A_1 部分，及無首數之 A_2 部分． 149

如，因無平方爲 2 者之有理數存在，§ 142，各有理數或有一個其平方小於 2，或有一個平方大於 2 者。

令 A_2 包括其平方大於 2 者之一切正有理數，且令 A_1 包含其他一切有理數，則

1．A_1 中各數均在 A_2 中各數之前。

因令 a_1 爲 A_1 中任意數，及 a_2 爲 A_2 中任意數。

設 a_1 爲負或 0 當然 $a_1 < a_2$. 又設 a_1 爲正，$a_1^2 < a_2^2$，故 $a_1 < a_2$.

2．A_1 中無末數，而 A_2 中無首數。

設任意正有理數 a_1 已指定爲平方小於 2 者之某值．然可再求一較前數稍大之有理數其平方仍小於 2 者，§ 183,2 (3)；故不能指定某有理數爲 A_1 中之末數。同理可證不能指定某有理數爲 A_2 中之首數。

新數 $a=\sqrt{2}$． 在 A_1 及 A_2 二部數間之關係，當然與 § 144 中所述相當隔離數 $\frac{1}{3}$ 在 C_1 及 C_2 二部數間之關係嚴密相同。 150

但相當於分離部分 A_1, A_2 無有理數存在，或，不能據此意而規定之。

因各有理數或屬於 A_1 或屬於 A_2，然在 A_1 及 A_2 之間無有理數可以存在，如 $\frac{1}{3}$ 之在 C_1 及 C_2 之間者。

且因 A_1 無末數及 A_2 無首數，故相當於此隔離無有理數存在，如 $\frac{1}{3}$ 相當於 § 145 之隔離部分 C_1', C_2, 如或 § 146 之隔離部分 C_1, C_2' 者(比較 147).

故此隔離部分 A_1, A_2 創立一新序數位置，即在 A_1 中一切數之後及 A_2 中一切數之前之一數。

茲創造此類之一數。以字母 a 表之，嗣後設因 a 而施行乘法可得 $a^2=2$, 故可用更有意義之符號 $\sqrt{2}$ 以代表 a, § 182.

151 於是定此新數 a 為介於平方小於 2 及其平方大於 2 之一切正整數間之一數。

亦可用下之公式表此定義。

$$a_1 < a < a_2$$

式中 a_1 及 a_2 表各在 A_1 及 A_2 內之任何數，而 < 意謂"先於"，同前章。

152 **註．** 注意此定義與第 § 56, 110 所示之負數及分數定義為同類，試比較之，a 亦為含在自然數內諸符號之序數組中以其位置而定之一符號而已；故可確定其在同一右方而稱之為數。

創立此數及相似諸數之理由與創立負數及分數之理同，此數在前章諸數之關係研究，且於世間各種事物中是一有用意義。

由序數立場上言之，增此無理數與前章隔離部分 A_1 A_2 中以公式 $a_1 < a < b < a_2$ 按次序決定之二數 a 及 b 任何隔離部分之間多於一數之說並無矛盾。

但與另外創造之他種數多於一個之說不合，參看67頁底註(3)．

一般之無理數．實數組． 前面論述有理數組 153
之特別間隔，爲同類數字中可有的間隔中無窮之一。

茲於每一間隔創一新數，關於有理數組諸數按次序定之確如 § 151 所定 $a=\sqrt{2}$ 之一數。

爲別此新數於有理數，而稱之爲無理數 (*irrational numbers*).

復次，爲別此有理數及無理數於虛數又另擬名稱，稱之爲實數(*real numbers*).

末後，稱包含一切有理數及無理數者爲實數組(*system of real numbers, or real system*).

故用 a 表任意無理數，因得此數之普通定義。

設有 A_1 及 A_2 兩部之數，(1) A_1 中各數均在 A_2 中各 154
數之前，及 (2) A_1 中無末數且 A_2 中無首數；於任何處按定律指出各有理數對於 A_1、A_2 兩部分中之一數之關係，遂決定一無理數 a；於是 a 之定義爲：介於 A_1 內及 A_2 內諸數中間之一數。

此處表示在 A_1 及 A_2 兩部均有若干數存在；且示 A_1 及 A_2 均含全部有理數組。

無理數 a 按其在 0 之先或後而稱爲負或正。 155

實數組爲序數組． 凡構成之諸數均可按一定且 156
已知之次序而排列之，§ 17；各無理數之定義表明其位置與各有理數之關係；且由每兩個已知無理數之定義，即能知其彼此之關係位置若何。

如令 a 及 b 表任意二已知無理數；於是

1. 設各有理數均先於 a 且先於 b，及其他各有理數均後於 a 同時且後於 b，則 a, b 二數關於有理數組諸數而據有同一位置；故由 §154 無理數之定義，a 及 b 表一相同數，可用下之公式表之。

$$a=b$$

2. 設有理數中，有若干數後於 a 而先於 b，則 a 必先於 b（或 b 後於 a）. 可以下之公式表之。

$$a<b \quad 或 \quad b>a.$$

3. 設有理數中有若干數先於 a 而後於 b，則 a 必後於 b（或 b 先於 a）. 可以下之公式表之。

$$a>b \quad 或 \quad b<a.$$

157 因此推知設有兩個不同實數，立能道其孰先而孰後；關於三已知實數 a, b, c，可書出下面之結論。

$$設\ a=b, \quad 及 \quad b=c, \quad 則\ a=c,$$

$$設\ a<b, \quad 及 \quad b<c, \quad 則\ a<c,$$

$$設\ a=b, \quad 及 \quad b<c, \quad 則\ a<c.$$

158 **實數組爲稠密的.** 介於任意二不等有理數間非僅有幾個有理數也. §113, 且在任何二不等無理數間，及任何一有理數一無理數間亦然. §156.

159 **實數組爲連續的** (*Continuous*). 實數組實具有 §143 中列舉之有理數組諸性質之第一及第二，然亦有不屬於有理數組之另外性質，即；

設分完全實數組爲兩部分 R_1 及 R_2, 令其 R_1 內各數均先於 R_2 內各數，則 R_1 內或無末數， R_2 內或無首數，但不能同時成立。

擬分實數組成 R_1 及 R_2 兩部可先分有理數組爲 A_1 及 A_2 兩部，則一部包含 R_1 內一切有理數，他部含 R_2 內一切有理數。

各有理數或屬於 A_1 或屬於 A_2, 且 A_1 內各有理數均在 A_2 內各有理數之前。

令 a 爲 § § 147, 154 所規定間隔 $A_1 A_2$ 中之一數。

則 a 或爲有理數——即 A_1 內之末數或 A_2 中之首數。§ 147,——或設 A_1 無末數而 A_2 無首數，於是 a 爲在 A_1 及 A_2 間之一無理數，§ 154.

1. 設 a 爲 A_1 之末數，則亦爲 R_1 之末數；若 R_1 中在 a 後有任何數，則在該數及 a 之間有若干有理數在 a 之後，此與 A_1 含 R_1 內一切有理數之假設不合，故不可能。

2. 同理。設 a 爲 A_2 中之首數，則亦爲 R_2 中之首數。

3. 設 a 爲無理數，必設其屬於 R_1 或 R_2, 設 a 屬於 R_1, 必爲 R_1 中之末數；若在 R_1 中有任何數在 a 之後，則在該數及 a 之間必有若干有理數，§ 158, 亦即在 A_1 中後有若干有理數，然不可能。同理，設 a 屬於 R_2, 必爲 R_2 之首數。

最後，一數不能同時爲 R_1 之末數及 R_2 之首數，否則該二數之間，必有若干有理數， § 158, 即有若干有理數不屬 A_1, 亦不屬於 A_2, 但此不可能。

爲表示實數組爲稠密的，且同時具有上述之性質，故曰實數組爲連續的(*Continuous*).

定理。 於完全實數組隨時引述一律分爲 R_1, R_2 兩部，令其 R_1 內各數先於 R_2 內各數。以指定一實數 a 爲有理數或無理數；則 a 或爲 R_1 內之末數，或爲 R_2 內之首數。 160

此即§§147, 159之結論。

無理數之漸近值

161　已知一無理數 a, 如§154之所規定，由下法可得一小於 a 一大於 a 之二有理數；且能令其差至任意小，此二有理數稱爲 a 之漸近值。

令 a 爲無理數 $\sqrt{2}$，則此數在"其平方小於 2 及其平方大於 2"之一切正有理數之間。

1. 茲先求 a 介於某二連續整數之間，因逐次計算 1, 2, 3, 之平方，至大於 a 者而止。

即得　$1^2<2$　及　$2^2>2$.

故 a 在 1 及 2 之間，或　$1<a<2$.

2. 於是逐次計算 $1.1^2, 1.2^2, \cdots$ 以求 a 介於某二連續的一位小數之間至其平方大於 2 者而止。

因得　$1.4^2<2$ 及 $1.5^2>2$; 因 $1.4^2=1.96, 1.5^2=2.25$.

故 a 在 1.4 及 1.5 間，或 $1.4<a<1.5$.

3. 逐次以同法進行，即得

$1.41<a<1.42$,　$1.414<a<1.415$, 依此推算以至無窮。

4. 令 a_1 表連續數 $1.4, 1.41, 1.414, \cdots\cdots$ 中之第 n 數，及 a_2 表連續數，$1.5, 1.42, 1.415, \cdots\cdots$ 中之第 n 數。

則　$a_1<a<a_2$ 及 $a_2-a_1=1/10^n$.

選 n 爲足用之大數，即令 $1/10^n$ 小於任何正數 δ，可任意選定 δ 至任何小。

5. 茲稱 1.4, 1.41, 1.414 爲 $a=\sqrt{2}$ 至第一，第二，第三位小數之漸近值；餘類推。

上法當然可應用於任意無理數 a；爲決定小於 a 或大於 a 之某二有理數之一切必要施算乃爲試驗，而§154 a 之定義常能用於此種試驗，故得下之定理。

令 a 表任何已知無理數，設定 δ 為任意正數但不太小， 162
常能求二有理數 a_1, a_2 而令其

$$a_1 < a < a_2 \quad 及\ a_2 - a_1 < \delta.$$

此定理當然對於有理數亦眞。

例如設 a 表已知有理數，及 $a_1 = a - 1/10^n$, $a_2 = a + 1/10^n$, 已知 $a_1 < a < a_2$, 可得 $a_2 - a_1 = 2/10^n$ 選 n 至足用之大而令 $2/10^n$ 至適意之小。

加，減，乘，除

茲述及實數組中列舉於 § 143 之有理數組之第三性質，須用下面之定理：

定理。 令 A_1 及 A_2 為兩部有理數，且令 163

1. A_1 中各數均小於 A_2 中各數。
2. A_1 中無末數而 A_2 中無首數。
3. 設定 δ 并不太小，於 δ 之各正值，可於 A_1 中求一數 a_1 及 A_2 中求一數 a_2 令其

$$a_2 - a_1 < \delta.$$

則可斷定 A_1 及 A_2 之間有一數但僅有一數。

由 § 154　1 及 2 而知其至少必有一數。

復由 3 而知其不能多於一數。

設在 A_1 中每個 a_1 及 A_2 中每個 a_2 之間有二有理數 d 及 d'，如下圖所示：

$$\overline{a_1 \qquad d \qquad d' \qquad a_2}$$

則於每個 a_1, a_2 而得。

$$a_2 > d' \quad 及 \quad -a_1 > -d. \qquad §§ 73, 121$$

故 $$a_2 - a_1 > d' - d, \qquad §§ 39, 121$$

此與 3 矛盾，故不可能。

亦非有二數(一數或兩數爲無理數)在每個 a_1 及 a_2 之間也；若然，則在該二數之間仍有二有理數在每個 a_1 及 a_2 之間 § 158，前已示其不可能矣。

164 **註。** 此定理與 § 154 無理數之定義不同者在於並非假設各有理數，佔在 A_1 或 A_2 內之一部分。

165 **加法。** 令 a 及 b 表任二已知實數，有理或無理數，且令 a_1 a_2 b_1 b_2 表任意有理數，同時令其

$$a_1 < a < a_2 \text{ 及 } b_1 < b < b_2. \qquad (1)$$

注意由 a_1 或 b_1 所表之數類無末數，而由 a_2 或 b_2 所表之數類無首數；且設定 δ 爲不太小之正數，則由 § 162 可選定 a_1, a_2 及 b_1, b_2 令其

$$a_2 - a_1 < \delta \text{ 及 } b_2 - b_1 < \delta. \qquad (2)$$

設 a 及 b 均爲有理數，即云 $a = \alpha$ 而 $b = \beta$，可由 § 116 之法則求其和 $\alpha + \beta$；自 § 121 而得

$$a_1 + b_1 < \alpha + \beta < a_2 + b_2$$

且無論 a 及 b 爲有理與否，由 § 121，自 (1) 而得

$$a_1 + b_1 < a_2 + b_2 \qquad (3)$$

此式可定 a, b 之和 (其一或二數均爲無理)，如下：

166 a 及 b 之和書作 $a + b$，意謂介在 $a_1 + b_1$ 所有諸數及 $a_2 + b_2$ 所有諸數之間之一數，換言之，即由下面公式所定之一數。

$$a_1 + b_1 < a + b < a_2 + b_2.$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2，表任意有理數，而

$$a_1 < a < a_2 \quad \text{及} \quad b_1 < b < b_2.$$

爲明此定義，須示其有一個且僅有一個 $a+b$ 數，由 §163 而得

1. 每個 a_1+b_1 小於每個 a_2+b_2.

2. a_1+b_1 無末數，而 a_2+b_2 無首數。

即 $a_1'+b_1'$ 不能爲末數 a_1+b_1；因無末數 a_1 且無末數 b_1 故也，可選定 a_1 及 b_1 令其 $a_1>a_1'$ 及 $b_1>b_1'$，故 $a_1+b_1>a_1'+b_1'$.

3. 設定一任意正有理數 δ，則能選出 a_1, a_2, b_1, b_2，令其 $a_2-a_1<\delta/2$ 及 $b_2-b_1<\delta/2$，　§162

故能令　$(a_2+b_2)-(a_1+b_1)<\delta$.　§121

$-a$ **之定義。** 令 a, a_1, a_2，之意義同於 §165，亦如 §165 之假定，若 a 爲無理數，可定 $-a$ 之義如下： 167

符號 $-a$ 意謂以下列公式規定之一數。 168

$$-a_2<-a<-a_1,$$

式中 a_1, a_2 表示常具下列關係之任意有理數。

$$a_1<a<a_2.$$

自 §163 知其必有一數 $-a$ 但僅有一數；因

1. 每個 $-a_2$ 必小於每個 $-a_1$，因 $a_1<a_2$、　§73, §111.

2. 無末數 $-a_2$ 且無首數 $-a_1$，若有一末數 $-a_2$，亦必有首數 a_2；但無此種數存在。

3. 常能選定 a_1, a_2 令其

$$-a_1-(-a_2)=a_2-a_1<\delta.\qquad §162$$

減法。 由 a 減 b 之結果寫作 $a-b$，意謂 $a+(-b)$ 之一數；即 169

$$a-b=a+(-b).$$

$a+(-b)$ 之義已見於 §§166, 168.

自 §§166, 168 而知 $a-b$ 亦可用下列公式定之：

$$a_1-b_2<a-b<a_2-b_1,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2, 表恆具下列關係之任意有理數:

$$a_1 < a < a_2 \quad \text{及} \quad b_1 < b < b_2.$$

170 **乘法. 兩因數均正者.** 令 a 及 b 爲任意二已知正數, 及 a_1, a_2, b_1, b_2 爲恆具下列關係之正數:

$$a_1 < a < a_2, \quad \text{及} \quad b_1 < b < b_2. \qquad (1)$$

設 a 及 b 均爲有理數, $a=\alpha$, $b=\beta$, 則由 § 121(1)而得

$$a_1b_1 < \alpha\beta < a_2b_2,$$

且於 a_1, a_2, b_1, b_2, 之逐次各數而得

$$a_1 b_1 < a_2 b_2. \qquad (2)$$

若 a, b 二數之一或均爲無理數, 故因上式而定其積爲:

171 二正數 a, b 之積寫作 ab, 意謂介在 a_1b_1 所有諸數及 a_2b_2 所有諸數之間之一數. 換言之, ab 爲以下列公式規定之一數:

$$a_1b_1 < ab < a_2b_2,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 表示恆具下列關係之正數:

$$a_1 < a < a_2 \text{ 及 } b_1 < b < b_2.$$

由 § 163 可知其必有一數但僅有一數 ab; 因

1. 每個 a_1b_1 小於每個 a_2b_2.
2. 無末數 a_1b_1 且無首數 a_2b_2 (比較 § 166, 2 之證).
3. 可由下式選定 a_1, a_2, b_1, b_2, 而得任意正數 δ.

$$a_2b_2 - a_1b_1 < \delta.$$

因 $\quad a_2b_2 - a_1b_1 = a_2(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1).$

由 § 162 且能選定 a_1, a_2, b_1, b_2, 令其

$$b_2 - b_1 < \delta/2a_2 \text{ 及 } a_2 - a_1 < \delta/2b_1, \qquad (1)$$

故能令 $\quad a_2(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1) < \delta. \qquad (2)$

茲可選擇 a_1, a_2, b_1, b_2, 如下:

先於 b_2 取任意特別數 b_2' 再選, a_1, a_2, 令其

$$a_2 - a_1 < \delta/2b_2'. \qquad (3)$$

次用依上法求得之 a_2, 而選 b_1, b_2, 令其

$$b_2 - b_1 < \delta/2a_2, \qquad \text{如(1)}$$

因 $b_1 < b_2'$ 故 $\delta/2b_2' < \delta/2b_1$,　　由(3)而得

$$a_2 - a_1 < \delta/2b_1, \qquad \text{如(1)}$$

乘法．有一或二因子爲負或零者． 令 a 及 b 表任意二已知正數，則 172

1. $a(-b)$ 及 $(-a)b$ 意爲 $-ab$.
2. $(-a)(-b)$ 意爲 ab.
3. $a\cdot 0$ 及 $0\cdot a$ 意爲 0.

$1/a$ 之定義． 令 a 爲任意正數，而 a_1, a_2 爲任意正有理數，同時令其 173

$$a_1 < a < a_2.$$

若 a 爲無理數亦如 § 165 之假設則定 $1/a$ 如下：

符號 $1/a$ 意謂以下列公式而定之一數： 174

$$1/a_2 < 1/a < 1/a_1,$$

式中 a_1, a_2 表示恆具下列關係之任意有理數；

$$a_1 < a < a_2.$$

由 § 163 而知其必有一數但僅有一數 $1/a$; 因

1. 每個 $1/a_2$ 小於每個 $1/a_1$, § 106.
2. 無末數 $1/a_2$ 且無首數 $1/a_1$,(比較 § 168, 2 之證)。
3. 選定任意正數 δ, 茲可選出 a_1, a_2, 令其

$$1/a_1 - 1/a_2 < \delta$$

設 $a_2 - a_1 < \delta\cdot a_1 a_2$ 則 $1/a_1 - 1/a_2 < \delta$　　§§ 106, 117.

然設 a'_1, 表 a_1 類中任意特別數，必能選擇 a_1, a_2, 令其 $a_1 > a_1'$, 及 $a_2 - a_1 < \delta\, a_1'^2$, 故能 $< \delta\, a_1 a_2$.

$1/(-a)$ 之定義． 令 a 表任意已知正數，則 $1/(-a)$ 意爲 $-1/a$. 175

176 **除法.** 以 b 除 a 之商（b 不爲 0）意爲 $a\cdot 1/b$ 之一數，即

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}.$$

$a\cdot 1/b$ 之意由前諸定義蓋已明瞭.

若 a 及 b 爲正則由 §§171,174 可以下列公式而定 a/b;

$$a_1/b_2<a/b<a_2/b_1,$$

式中 a_1、a_2, b_1, b_2, 表示具有下列關係之正有理數:

$$a_1<a<a_2 \text{ 及 } b_1<b<b_2.$$

177 **交換，結合，及分配定律.** 茲所闡釋之演算，適合於有理數演算之推廣，減法繼加法之後而爲加法之逆，除法繼出爲乘法之逆，終則繼加法乘法之後依法而生交換，結合，及分配諸律.

設 a,b 及 c 爲任意規定之三正數，如 § 170，用公式

$$a_1<a<a_2,\quad b_1<b<b_2,\quad c_1<c<c_2,$$

而得 $$a(b+c)=ab+ac.$$

由 §§ 166, 171, $a(b+c)$ 及 $ab+ac$ 以下式定之:

$$a_1(b_1+c_1)<a(b+c)<a_2(b_2+c_2). \qquad (1)$$

$$a_1b_1+a_1c_1<ab+ac<a_2b_2+a_2c_2. \qquad (2)$$

由 § 120, $a_1(b_1+c_1)=a_1b_1+a_1c_1$ 及 $a_2(b_2+c_2)=a_2b_2+a_2c_2$.
故由 (1) 及 (2) 所定之數必同.

178 **等式及不等式之法則.** 此節亦能適用於前所論釋之和及積，即:

從 $a<,=,$ 或 $>b$,

因而 $a+c<,=,$ 或 $>b+c$,

又 $ac<,=,$ 或 $>bc$, 設 $c>0$,

但 $ac>,=,$ 或 $<bc$, 設 $c<0$,

設 $a<b$, 則 $a+c<b+c$

令 d 及 $d+\alpha$ 爲 a 及 b 間任意二有理數，且選 c_1 令其 $c_1<c<c_1+\alpha$.

因 $a<d$ 及 $c<c_1+\alpha$, 故得 $a+c<d+c_1+\alpha$, (1)

且因 $d+\alpha<b$ 及 $c_1<c$, 故得 $d+\alpha+c_1<b+c$, § 166. (2)

然自 (1) 及 (2) 而知 $a+c<b+c$. § 157

設 $a<b$ 而 $c>0$, 則 $ac<bc$, 證法同上。

但於此試選 c_1 令其 $c_1<c<c_1(1+\alpha/d)$.

如 § 39, 由此法而知設 $a<b$ 及 $c<d$, 則 $a+c<b+d$, 179
餘類推；且如 § 50 若 a, b, c, d 爲正，設 $a<b$ 及 $c<d$, 則 $ac<bd$, 依此類推。

於漸近值。 1. 於 § 169 已闡釋無理數之減法； 180
茲述 § 162 之定義如下：

設任意無理數 a 爲已知，且定 δ 爲頗小之任意有理數，必能求得有理數 a_1 及 a_2, 令其與 a 之差小於 δ.

由 § 162, 可得 a_1 及 a_2 令其 $a_1<a<a_2$ 及 $a_2-a_1<\delta$.

然自 § 178, $a<a_2$ 而知 $a-a_1<a_2-a_1$ 故 $a-a_1<\delta$.

同法，因 $-a<-a_1$ 可證 $a_2-a<\delta$.

如 § 161, $\sqrt{2}-1{\cdot}41<{\cdot}01$ 及 $1{\cdot}42-\sqrt{2}<{\cdot}01$.

故謂 a_1 或 a_2 可代表 a 雖有誤差不超過 δ.

2. 於特別計算常用無理數之漸近值，較用本數更爲普通。設 a_1 及 b_1 各爲 a 及 b 之漸近值，則 a_1+b_1 必爲其和 $a+b$ 之漸近值。然爲確保其誤差不超過 δ, 通常須擇 a_1 及 b_1 各令其誤差不超過 $\delta/2$. 此由 166 節之證明而知之。自 168, 171, 174 等節之證明引申之，同法可求 $a-b$, ab, 及 a/b 之漸近值，令其誤差不超過 δ.

乘方及開方

181 **方羃.** 無理數之方羃與有理數同形．以 $a^2, a^3, \cdots$ 表 $aa, aaa, \cdots$.

182 **根.** 任意已知正數 b 之 m 次根書作 $\sqrt[m]{b}$, 意謂其 m 次方爲 b 之一正數；即 $\sqrt[m]{b}$ 表示以公式 $(\sqrt[m]{b})^m = b$ 所規定之正數．

爲明此定義，須示其必有一數且僅有一數確實存在，兹述之如下：

183 **定理.** 實數組包含每個實數 b 之 m 次根．

1. 設 b 爲有理數之 m 次方，此定理爲眞已甚明瞭．如，設 $b = 8/27 = (2/3)^3$, 則 $\sqrt[3]{b} = 2/3$.

2. 設 b 非一有理數之 m 次方，則 b 之 m 次根爲在其 m 次方小於 b 之一切有理數 a_1, 及其 m 次方大於 b 之一切有理數 a_2 之間之一實數 a, 比較 § 151.

由 § 154 知其必有一數，且僅有一數 a, 因 (1) 每個正有理數爲 a_1 或 a_2, (2) 每個 a_1 小於每個 a_2 及 (3) 無末數 a_1 且無首數 a_2.

兹可證 (3) 如下：

設有一末數 a_1 稱之爲 p. 則 $p^m < b$, 於 p^m 及 b 之間必有若干有理數，令其一數爲 $p^m + \delta$, 兹僅證可求得一有理數 $q > p$ 令其 $q^m < p^m + \delta$, 或 $q^m - p^m < \delta$; 於是得 $p^m < q^m < b$ 故 p 非末數 a_1.

但 $q^m - p^m = (q - p)(q^{m-1} + q^{m-2}p + \cdots + qp^{m-2} + p^{m-1})$ § 308.

$\therefore < (q-p)ma_2'^{m-1}$, 設 a_2' 爲任意特別數 a_2,

$\therefore < \delta$. 設 $q = p + \delta/ma_2'^{m-1}$

同法可證其無首數 a_2.

此理成立，即可迅速證明 $a = \sqrt[m]{b}$.

因 $a_1 < a < a_2$, 得 $a_1^m < a^m < a_2^m$.　§§171, 181.

但 b 爲每個 a_1^m 及每個 a_2^m 間之僅有數.

故 $a^m = b$, 即 $a = \sqrt[m]{b}$.

等式及不等式之法則. 令 a 及 b 表任意正實數, 及 m 爲任意正整數, 則　184

從　$a <, =$, 或 $> b$,

因而　$a^m <, =$, 或 $> b^m$,　(1)

及　$\sqrt[m]{a} <, =$, 或 $> \sqrt[m]{b}$.　(2)

可複用 §179 而證明(1).

設 $a < b$ 則 $a \cdot a < b \cdot b$, 則 $a^2 < b^2$; 餘類推,

復自 (1) 引申(2). 設 $a = b$, 則 $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$; 又 $\sqrt[m]{a} <$ 或 $> \sqrt[m]{b}$, 因 $a <$ 或 $> b$.

指數法則. 令 a 及 b 表任意二實數, 而 m 及 n 表任意二正整數, 則　185

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.　2. $(a^m)^n = a^{mn}$.　3. $(ab)^m = a^m b^m$.

如 $a^3 \cdot a^2 = aaa \cdot aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2}$,　§177

$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3}$,　由 1

$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = aaa \cdot bbb = a^3 \cdot b^3$.　§177

於 m 及 n 之任何其他正整數值均同此理.

關於根之定理. 令 a 及 b 表任意正實數, 及 m 表任意正整數, 則　186

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}.$$

因　$(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m$

$= ab$　§§182, 185, 3

及　$(\sqrt[m]{ab})^m = ab$　§182

而 $$(\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{ab})^m.$$

故 $$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}.\qquad\S\,184,(2)$$

變數與極限

187 **變數.** 於無窮之連續數，

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots,$$

設予每個特別項 a_n 以定值，或已示其標號 n 之位置，該項之值可計算而得，則此連續數稱為已知。

算術中常遇一項一項無窮之連續數值而稱之為變數(*Variables*).

如 $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots\frac{n}{n+1},\cdots$ 即一無窮連續數，而設 x 為歷此連續數，而逐次取得 $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots$ 諸值之一變數。

188 **極限.** 若 x 遍歷連續數 $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots$，其值繼續漸近於 1，於此情形，設指定 δ 為不太小之正數，則差數 $1-x$ 最後可化成且損減至小於指定之數，如，此連續數至 x 後第 100 項，$1-x$ 必小於 $\cdot 01$.

當 x 歷經此連續數，$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots$，為表此情形稱 x 漸近於 1 為其限(*limit*).總之

189 設變數 x 歷經已知無窮數之各值，則稱 x 漸近於數 a 為其限，設差數 $a-x$ 最後化成且剩餘小於可指定之正數 δ.

注意僅此尚不能謂 $a-x$ 化為小於 δ；尤須謂其剩餘小於 δ，設 x 漸近於 a 為其限。

如設 x 歷經連續數 $\frac{1}{2},0,\frac{2}{3},0,\frac{3}{4},0,\cdots$，差數 $1-x$ 雖可化成小於指定之各 δ，但剩餘不能逐次小於 δ，而 x 不能漸近於 1 為其限。

於特別值 $a-x$ 可成 0，則 x 可至其限 a.

爲表明 x 漸近其限 a，書作 $x\doteq a$，讀作"x 漸近於 a 爲其限"，或 $\lim x=a$，讀作"x 之限爲 a" 190

一變數 x 或漸近於一限，或不完全依照其假設歷經諸值之連續數之數字。 191

如，設 x 歷經連續數 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$ 則 x 漸近於一限，設其歷經連續數 $1, 2, 3, 4, \cdots$，或連續數 $1, 2, 1, 2, \cdots$ 則 x 不能漸近於一限。

故得次之重要定理：

定理 1. 設變數 x 繼續增加，但常保持其值小於已知數 c，則 x 漸近於限，且其限爲 c 或小於 c 之一數。 192

由假設，必有 x 永不超過之若干數，令此諸數屬於 R_2 部，而 x 最後超過之其他諸數屬於 R_1 部。

則分離完全實數組爲 R_1, R_2，兩部，式 R_1 內各數均小於 R_2 內各數。

R_1 中當然無末數，由 § 160，R_2 內有一首數，稱此數爲 a，當 x 增加，必漸近於 a 爲其限。

設 δ 可爲任何小之正數，$a-\delta$ 屬於 x 最後超過之 R_1 諸數之部，因 x 最後保持於 $a-\delta$ 及 a 之間，故與 a 之差小於 δ.

同法可證

設變數 x 繼續減少，但常保持其值大於已知數 c，則 x 漸近於限，且其限爲 c 或大於 c 之某數。 193

規律連續數. 設 x 漸近於限時，有時逐次增加，或逐次減少，故不一定。 194

如當 x 歷經連續數 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\cdots$，故有時增加，有時減少；然 x 漸近於 0 為其限。

若證 x 漸近於限或否，應視 x 是否歷經下列定義所述數目 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\cdots$ 諸值之連續數，

195 設連續數，$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\cdots$ 中能求一適當之一 a_k 項與各鄰次項數目之差小於可指定之各正試算數 δ，則此連續數稱為規律的(*Regular*)。

1. 如 § 161 (1) 連續數 1·4, 1·41, 1·414···· 為規律的。

其第一項 1·4 與各次項之差小於 1/10；第二項 1·41 與各次項之差小於 $1/10^2$；其第 n 項與各次項之差小於 $1/10^n$。

δ 固可為小數，茲能予 n 一值令 $1/10^n$ 更小；且設 k 關於 n 值表示一數能令 1·4, 1·41····之第 k 項與各次項之差小於 δ 值。

例如，設與 δ 之值為 1/500000，則得 $1/10^6 < \delta$，故 1·4, 1·41····之第六項各與其一後隣項之差比此 δ 之值為小。

2. 下列諸連續數亦為規律的。

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \cdots,$　　(2)　　$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \cdots,$　　(3)

$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\cdots$　　(4)　　$2, 1, 1, 1\cdots$　　(5)

試觀 (2) 中各項均繼以較大之數，(3) 中則繼以較小之數，於 (4)，時而繼以較大數，時而繼以較小數。

有時遇規律連續數如 (5)，在某定項後之諸項均同，當然一變數歷經此種連續數最後成為常數，即達其極限。

3. 下面諸連續數為不規律的：

$1, 2, 3, 4, \cdots,$　　(6)　　$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$　　(7)

因 (6) 內一項與一後項之差恆可爲無限大，而 (7) 內可常爲 $\frac{1}{6}$，故不能小於一指定數，例如 $\frac{1}{7}$.

1. **規律連續數之公式.** 玆以公式表 a_k 項與各次項 a_p 之關係，由 § 63. 196

$$|a_p-a_k|<\delta \qquad 於每個\ p>k \qquad (1)$$

2. 復次，凡 $>a_k$ 之任意諸項 a_p 必在 a_k 及 $a_k+\delta$ 之間，而 $<a_k$ 之任意諸項 a_p 必在 $a_k-\delta$ 及 a_k 之間，亦可寫作

$$a_k-\delta<a_p<a_k+\delta \qquad 於每個\ p>k. \qquad (2)$$

3. 由 (2) 可知設 a_p 有若干項小於 a_k 及若干項大於 a_k，則該二項之差可超過 δ，但不超過 2δ.

然能求得一項 a_l 當 a_k 相當於 δ 時令其相當於 $\delta/2$，在 a_l 後各二項之差之絕對值必小於 $2(\delta/2)$，或 δ；即此諸項中各二項之關係可以下列公式表之.

$$|a_p-a_q|<\delta \qquad 於每個\ p>q>l. \qquad (3)$$

定理 2. 設變數 x 歷經假定 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 諸值連續數而漸近於限則 x 爲規律連續數. 197

因其右方之諸數 x 最後必逐次止於其所歷經 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_k \cdots\cdots$ 之連續數. (1)

如設 δ 及 a_k 之意如上，則 x 恆在 $a_k-\delta$ 之右，此後且達於 a_k 值，§ 196(2).

令此諸數屬於 R_1 類，而其他諸數——即 x 歷經其右方之諸數——屬於 R_2 類.

因得劃分完全實數組爲 R_1, R_2 兩部，其在 R_1 內之各數均小於 R_2 內之各數，由 § 160, 知其間隔中必有一定數 a 存在。

如，設連續數爲 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$，則諸負有理數構成 R_1，且 0 及諸正有理數組成 R_2；而 a 爲 0.

當 x 歷經連續數(1)，則必漸近於 a 爲其限。

指定任意正試算數 δ，其值并不太小，因(1)爲規律的，故由 § 196(3)可求得 a_m 項令其

$|a_p-a_q| < \delta/2$ 　　於每個 $p>q>m$. (2)

但因 $a-\delta/2$ 屬於 R_1，於某項後 x 之諸值必在 $a-\delta/2$ 之右，且因 $a+\delta/2$ 屬於 R_2 此諸值中必有若干項在 a_m 之後而在 $a+\delta/2$ 之左；否則 $a+\delta/2$ 屬於 R_1，因 x 最後止於其右也。

如設連續數爲 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 而 $\delta=\frac{1}{10}$，在第四項 $\frac{1}{16}$ 後 x 之一切值必在 $a-\delta/2$ 及 $a+\delta/2$ 之間，即在 $-\frac{1}{20}$ 及 $\frac{1}{20}$ 之間。

令 a_q' 表上述 x 之值，則

$$a-\delta/2 < a_q' < a+\delta/2,$$

或 $|a-a_q'| < \delta/2$. (3)

由 (2) 及 (3)，因 $q'>m$，自 §§ 78, 178 而得

$|a-a_p| < \delta$ 　　於每個 $p>q'$.

換言之，在 x 達到 a_q' 值之後，其差 $a-x$ 之絕對值漸減而小於 δ.

故 x 漸近於 a 爲其限。 § 189.

198 **逆言之。** 設 x 漸近於限 a，則 x 所歷經 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r, \cdots$ 諸值之連續數爲規律的。

因差數 $a-x$ 之絕對值最後化成且損減至小於各指定之正數 δ，由 §189 可選出 a_k 令其

$$|a-a_k|<\delta/2 \text{ 及 } |a-a_p|<\delta/2 \qquad \text{於每個 } p>k;$$

因得

$$|a_p-a_k|<\delta \qquad \text{於每個 } p>k.$$

故連續數 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \cdots$ 爲規律的，§196(1).

一變數漸近於限之足用且必須之條件爲該變數假定歷經之諸值之連續數爲規律的。 199

關於極限之重要定理

本節中 a 及 b 表任意已知實數，x 及 y 表示假定其歷經已知無窮連續諸值之變數。

極限 0. 由 §189 極限定義，則得 200

1. 設變數 x 之絕對值最後化成且減損至小於可指定之正數 δ，則 x 漸近於 0 爲其限；其逆亦眞。

2. 設 x 漸近於 a 爲其限，則 $a-x$ 漸近於零爲其限；其逆亦眞。

若 x 歷經連續數 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots\cdots$ 則漸近於極限 0;

若 x 歷經連續數 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$，則 $1-x$ 漸近於極限 0.

極限爲 0 之一變數稱爲極小數(*infinitesimal*).

定理 1. 設 $x \doteq 0$ 及 $y \doteq 0$，且當 x 及 y 變時，而 A 及 B 之絕對值損減至小於定數 c，則 $Ax+By \doteq 0$. 201

指定任意正數 δ，其值幷不太小。

因 $x \doteq 0$，x 絕對值最後損減至 $<\delta/2c$. §200,1

因 $y \doteq 0$, y 絕對值最後損減至 $< \delta/2c$.　§ 200, 1

故 $Ax + By$ 之絕對值最後損減至 $< 2c\frac{\delta}{2c}$, $\therefore < \delta$ 故漸近於 0 爲其限, § 200, 1.

如, 設 $x \doteq 0$ 及 $y \doteq 0$, 則 $(xy - 3)x + 2y \doteq 0$.

202　**註.**　此定理可推廣於有定個數之變數。

如　設 $x \doteq 0$, $y \doteq 0$ 及 $z \doteq 0$, 則 $Ax + By + Cz \doteq 0$.

203　**定理 2.**　各漸近於限之二變數之和, 差, 積, 商等於其限之和, 差, 積, 商; 即設 x 及 y 各漸近其限 a 及 b, 則

1.　$x + y \doteq a + b$.　　3.　$xy \doteq ab$.

2.　$x - y \doteq a - b$.　　4.　$x/y \doteq a/b$. 但 b 不爲 0.

因　$a - x \doteq 0$ 及 $b - y \doteq 0$, § 200, 則自 § 201 而得

$$A(a - x) + B(b - y) \doteq 0. \tag{1}$$

公式 1, 2, 3, 4 可自 (1) 導出,　即

1.　$a + b - (x + y) = (a - x) + (b - y) \therefore \doteq 0$.　由 (1)

即　$x + y \doteq a + b$.　§ 200, 2

2.　$a - b - (x - y) = (a - x) - (b - y) \therefore \doteq 0$,　由 (1)

即　$x - y \doteq a - b$.　§ 200, 2

3.　$ab - xy = (a - x)b + (b - y)x \therefore \doteq 0$,　由 (1)

即　$xy \doteq ab$.　§ 200, 2

4.　$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \left(\frac{a}{b} - \frac{x}{b}\right) + \left(\frac{x}{b} - \frac{x}{y}\right)$

$= (a - x)\frac{1}{b} - (b - y)\frac{x}{by}$, $\therefore \doteq 0$　由 (1)

即　$x/y \doteq a/b$.　§ 200,2

204　**系.**　若 $x \doteq a$, 則 $x^n \doteq a^n$.

205　**定理 3.**　漸近於極限之一變數之 n 次根之極限等於其限之 n 次根; 即

設　$x \doteq a$, 則 $\sqrt[n]{x} \doteq \sqrt[n]{a}$,

1. 設 $a=0$，指定任意正數 δ.

因 $x \doteq 0$，x 之絕對值最後損減而 $<\delta^n$.　§ 200, 1

則 $\sqrt[n]{x}$ 之絕對值最後損減而 $<\delta$.　§ 184

故　$\sqrt[n]{x} \doteq 0$.　§ 200, 1

2. 設 a 不為 0，則由後面 § 308 可知 $x-a$ 恰可以 $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}$ 除盡，設 $x \doteq a$，而其商 Q 不漸近於極限 0.

故由 § 203 (1) 可知，置 $A=1/Q$ 及 $B=0$，則

$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}=(x-a)/Q \doteq 0$，即 $\sqrt[n]{x} \doteq \sqrt[n]{a}$　§ 200, 2

無理數於度量中之關係

與單位不可公度之線段之長. 設一線段 S 與單位線段 s 為不可公度 (*incommensurable*)，——如設 S 及 s 為一正方形之對角線及一邊，則可證雖分 s 至任何小，亦無整倍分盡部分恰能容於 S 之內者——則 § 130 內之長度定義不適用於 S.　203

但下面關於 S 有一定無理數 a 在焉，

能與單位 s 可公度之二線段可屬於小於 S 大於 S 之二類。

於 § 130 內線段之長適合此二類者，可以有理數表之，玆稱為 A_1 及 A_2，各正有理數或屬 A_1 或屬 A_2，A_1 內各數在 A_2 內各數之前，且 A_1 內無末數 A_2 內無首數*

---

* 若 A_1 內有末數，則在與 s 可公度且小於 S 之諸線段中必有一極大者稱為 S'.

但無此線段存在，依後面底註阿奇默德氏公理，可求得 s 之小於 S－S' 之分盡部分；且 S' 及與 s 可公度之此 s 部分之和小於 S 而大於 S',

由 §154, 於 A_1 內諸數及 A_2 諸數之中間必有一定無理數 a 在焉，茲稱此數 a 爲 S 之長，故有次之定義；

207 凡與單位 s 不可公度之任意線段 S 之長，爲在小於 S 線段長度之一切有理數及大於 S 線段長度之一切有理數中間之無理數 a.

如 $\sqrt{2}$ 爲正方形以其一邊作單位所表對角線之長.

208 設以 s 作單位以表 S 之長爲 a, 寫作 $S = as$, 而 a 可爲有理數或無理數.

209 **以點繪出之實數.** 如 §134 內之圖，作任意正線，線上定點 O 爲原點；且取適當單位 s, 以度線長，其任意點 P 至 O 之直線距離，顯然爲以 s 表示之線段 OP 之長，§§130, 207.

若擬繪任意已知數 a 之圖形，即自 O 取與 O 之距離之線長絕對值爲 a 之一點 P, 此點在 O 之右或左，視 a 之爲正或負而定.

設 a 爲有理數，必能將 a 確實繪出，§134, 若設 a 爲無理數，則 P 常不能繪出，換言之可假定 P 能存在，則該線上必有一單獨點 P, 位在小於 a 之圖示有理數之諸點及大於 a 之圖示有理數之諸點之中間*.

* 此並非幾何公理之討論；但應注意下面關於度量本旨之原理.

1. 阿奇默德氏公理，設 s 及 S 表二線段 s<S, 必能求一整數 m 致 ms > S 者.

2. 連續之公理，設一正線內所有諸點分爲 R_1 及 R_2 兩部，令其 R_1 內各點在 R_2 內各點之左，則 R_1 內必有一末點或 R_2 內有一始點.

(1) 阿奇默德氏公理含於凡各線段均能度量之假定，第一步以 s 作單位度 S 以求整數 m, 因得 $(m-1)s<S<ms$.

(2) 公理 1 及 2 可證 §209 "各已知無理數 a 必有一相當點 p 存在" 之假定.

因 a 劃分有理數爲兩部分，茲各命爲 B 及 C, 其相當於各數之諸點各稱爲

反之，設 P 爲已知，必能度 OP 以得 a，最低限度亦漸近之，其結果符號屬於 + 或 − 視 P 在 O 之右或左而定。 210

如設 P 在 O 之右，則可沿 OP 截 s 五倍，沿此部分尚超出 s 之十分之一分劃之七倍，且沿此部分尚超出 s 之百分之一分劃之六倍，於是 5.76 爲 a 至第二位小數之值。

觀此情形可於一切實數及線上諸點之間創立一一對應之關係，由 § 2；且設 a 及 b 表任意二實數，而 P 及 Q 表其相應點，P 在 Q 之左或右依 a 小於或大於 b 而定。 211

如設 a 及 b 爲正及 $a<b$，且設 c 表 a 及 b 間之有理數，而 R 表其相應點，由 § 206 得

$$OP<OR \text{ 及 } OR<OQ \text{ 故 } OP<OP.$$

B 點及 C 點，茲證在線內有一定點 P，能由一切 C 點隔開一切 B 點。

先指定 B 點及屬於 R_1 部與其右方之 R_2 部之一切中間諸點，且令 P 表示以 2 限定之間隔點。

次指定 C 點及屬於 S_2 部與左方之 S_1 部之一切中間諸點，且令 Q 表示以 2 限定之間隔點。

則 P 及 Q 點必相合。設不重合，令 PQ 表其中間線段，自 1，可求一整數 m，令其

$$m \cdot PQ > s, \text{ 故 } PQ > s/m.$$

然此不可能，因能自 B 選一數 b，自 C 選一數 c，令其 $c-b<1/m$，且設 L 及 M 各爲相當與 b 及 c 之點，則得

$$LM < s/m, \text{ 及 } PQ < LM, \text{ 故 } PQ < s/m.$$

即此處僅有一點 P 或 Q，能適合於 § 209.

(3) 末後，試觀相當於 2 之實數組有 § 160 所述之性質及相當於 1 者相當下列性質。

設 a 及 b 爲任意二正實數，必能求一整數 m，令其 $mb>a$。

因自 § § 108, 176, 178 能選一整數 m，令 $m>a/b$ 則 $mb>a$，

實數組雖不具此性質——至少亦須除去其他若干性質——於 § 154 所述實數組之而隔，皆能創造多於一個之無理數。

如設各有理數爲 a_1 或 a_2 及 $a_1<b<c<a_2$ 於每個 a_1, a_2，得 $c-b<a_2-a_1$，§ 178 及 § 163 之說。

雖指定任何小之正數 δ，然不能求一整數 m 能令其大至 $m(c-b)>\delta$。

設爲可求，則 $c-b>\delta/m$，此不可能，因 $c-b<a_2-a_1$ 且能選定 a_1, a_2，令其 $a_2-a_1<\delta/m$ 也。

212 **定理.** 設以 T 作單位表 S 之長爲 a. 又以 s 表 T 之長爲 b, 則以 s 作單位表 S 之長爲 ab.

1. 設 a 及 b 爲有理數.

令 $a=\alpha/\beta$, 及 $b=\gamma/\delta$, 式中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 均表整數.

因 S 含 T 之 β 分一之 α 倍, § 130, 故 βS 必含 T 之 α 倍, 即

$$\beta S = \alpha T. \tag{1}$$

同理 $$\delta T = \gamma s. \tag{2}$$

但由(1)及(2)即得

$$\beta\delta S = \alpha\delta T \text{ 及 } \alpha\delta T = \alpha\gamma s,$$

故 $$\beta\delta S = \alpha\gamma s.$$

即 S 之長如以 s 表之爲 $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ 或 $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}$. § 130

2. 設 a 及 b 有一或二數爲無理數.

令 S_1 及 S_2 表與 T 公度之任意線段, 令其

$$S_1 < S < S_2,$$

且令 a_1, a_2 爲以 T 作單位所表 S_1, S_2 之長, 則

$$S_1 = a_1T \text{ 及 } S_2 = a_2T, \text{ 式中 } a_1 < a < a_2, \quad \text{§ 208}$$

同法, 令 T_1 及 T_2 表與 s 可公度之任意線段, 令其

$$T_1 < T < T_2.$$

且令 b_1, b_2, 爲以 s 作單位所表 T_1, T_2 之長, 則

$$T_1 = b_1s, \text{ 及 } T_2 = b_2s, \text{ 式中 } b_1 < b < b_2.$$

因 $S_1 = a_1T$ 及 $T > T_1$, 與 $T_1 = b_1s$.

自前段 1 而得 $$S_1 > a_1b_1s.$$

同理, $$S_2 < a_2b_2s.$$

因而 $$a_1b_1s < S_1 < S < S_2 < a_2b_2s,$$

故得 $$a_1b_1s < S < a_2b_2s.$$

上述諸數 a_1b_1 及 a_2b_2 爲以 s 作單位所表之線段之長, 各小於及大於 S 者, 故在 a_1b_1 及 a_2b_2 一切數之間之一數 ab, 由 § 171 知爲以 s 所表 S 之長, § 207.

系. 設以 s 表 S 及 T 之長各爲 a 及 b, 則以 T 表 S 213
之長爲 a/b.

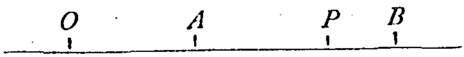
令 T 所表 S 之長爲 x, 而以 s 表 T 之長爲 b, 故以 s 表 S 之長爲 xb, §212.

前已假定，以 s 表 S 之長爲 a

則 $$xb = a.$$

故 $$x = a/b.$$

連續變數. 吾人最熟直覺之一爲連續運動。 214



設 P 點沿 OAB 線自 A 繼續運動至 B; 且令 a, x 及 b 各表 OA, OP 及 OB 之長，O 爲原點。

按 §209 之假定，線段 AB 包含 a 及 b 間之各數之一點，自然當 P 自 A 向 B 運動時必經過之，故 P 自 A 至 B 連續運動時，x 自 a 值增至 b 值經過中間一切諸值，或曰 x 連續運動自 A 以至 B.

若給出 x 之變動當然確屬重要，其諸值中之任何已知一數實無隨後相鄰之值，設以 x 作數學的考論，當以下列之規定爲滿意: (1) x 可於 a 及 b 間取每個予值，及 (2) 設 p 及 q 表此值中之任意兩個，而 $p<q$，則 x 取 p 值在取 q 值之前，設屬於該值諸性質中只有第一項則可增稱 x 爲連續變數。

比. 令 M 及 N 表任意二同類量，若 M 及 N 同表 215
線段，如 §§ 81, 130, 207 ···· 等內所定之線長之各數，茲稱之爲以 N 所表 M 之度數 (*measure*), 或稱 M 與 N 之比 (*ratio*).

故 §§212, 213,····各節之定理可以綫長應用於任意同類量之度數或比。於特例

216 設以同單位所表 M 及 N 之度數各爲 a 及 b, 則 M 與 N 之比爲 a/b.

V 虛數及複素數

純虛數

217 實數組不含負數之偶次根；因一切實數之偶次方羃均爲正，故實數組不含 -1 之平方根。

遇此困難，故創一種新符號組稱爲虛數 (*imaginary*) 或複素數(*Complex numbers*).

218 此新符號之最簡單者爲 i, 稱爲虛數單位. 用此單位及實數 a, 構成符號 ai, 此數亦可視如實數組中依其係數 a 之順序而排列者, 茲得一新連續數之序數組, 稱爲純虛數。

展開實數組如前，可先作成虛數之完全基度

$\cdots\cdots -3i, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \cdots\cdots,$

然後用分數係數以推廣虛數於稠密組，最後用無理係數導虛數於連續組。

$2i$ 不過爲此新數中之一名稱，其僅有之性質爲於新序數組中有一定位而已，然於乘法可知 $2i$ 尚能表示 $2\times i$ 或 $i\times 2$ 之積，各純虛數 ai 均同此理。

於特例 $0\cdot i$ 等於 0, 故於 $0i$ 可書作 0.

注意此 0 爲實數組及純虛數組唯一之公有數。

茲於此新數創造加法及乘法之演算，此法可以下式定之：

1. $ai+bi=(a+b)i$.　　2. $a\cdot bi=bi\cdot a=abi$

3. $ai\cdot bi=-ab$.

如3,二純虛數 ai 及 bi 之積爲實數 $-ab$, 乃乘其 ai 及 bi 之係數之積而變其結果之符號以得者。

茲定乘方法如§136, 即 $(ai)^2=ai\cdot ai$.

純虛數組包含實數組內一切負數之平方根，即 220

$$\sqrt{-1}=i \quad 及 \quad \sqrt{-a^2}=ai.$$

因得　$i^2=i\cdot i=1i\cdot 1i=-1$.　§219, 3

故 i 爲 -1 之平方根，§138. 茲以 $\sqrt{-1}$ 表此根，而得 $i=\sqrt{-1}$.

同法，$-i$ 亦爲 -1 之平方根表以 $-\sqrt{-1}$.

同理，因 $(ai)^2=ai\cdot ai=-a^2$. 故得 $ai=\sqrt{-a^2}$.

複素數

爲擬確知一數組包含負數之較高偶次根遂創複素數， 221
此數形如 $a+bi$ 乃以＋號連結實數 a,與純虛數 bi 而構成者，此種亦常稱爲虛數。

複素數加法已如上定．記式 $a+bi$ 可視爲簡單符號，且符號＋應僅視爲此符號之一部。

因 $a=a+0i$ 及 $bi=0+bi$, 故實數及純虛數均含於 222
複素數中。

複素數可視爲下述二排列中之元：(1)凡具等值 b 之 223
一切 $a+bi$ 數在同一列按其 a 值之順序自左而右排成橫列；

(2)凡具等值 a 之一切 $a+bi$ 數在同一行按其 b 值之順序自下而上排成縱行。故可假設任一複素數，乃於此"二度序數排列"中由其位置而定者。

後面 §238 將述此排列於 a,b 一切諸值之圖解法。茲表 a 及 b 之整數值者如下：

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots \\
\cdots & -2+2i & -1+2i & 2i & 1+2i & 2+2i & \cdots \\
\cdots & -2+i & -1+i & i & 1+i & 2+i & \cdots \\
\cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \\
\cdots & -2-i & -1-i & -i & 1-i & 2-i & \cdots \\
\cdots & -2-2i & -1-2i & -2i & 1-2i & 2-2i & \cdots \\
\cdots & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots
\end{array}$$

此排列亦可釋爲以諸列(或行)爲元之序數組，§17，而其每列則爲範式 $a+bi$ 之符號之序數組。

224 **等式定義**。設二複素數在上述二度序數組中據同一位置，則稱爲相等。如

225 設 $a+bi=c+di$，則 $a=c$ 及 $b=d$；逆之亦眞。於特例，設 $a+bi=0$，則 $a=0$ 及 $b=0$；及其逆。

二不等複素數，如 $2+3i$ 及 $3+i$ 不能謂其一數小於或大於——即先於或後於——他數，因複素數不能作成一簡單序數組故也。

226 **加，減，乘之定義**。二複素數 $a+bi, c+di$ 之和，差，與積爲由下列方程作成之第二種各項之複素數，

1. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

2. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

3. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

按 1 及 2,加與減爲反演算，於 1 之特例，

$(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=a+bi$; 即由定義1.$a+bi$ 爲 a 及 bi 之和。

此諸定義與交換，結合，分配諸律亦能相合，實則，化合此諸定律於上述定義而得者也，如

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=(a+bi)c+(a+bi)di\\&=ac+bi\cdot c+a\cdot di+bi\cdot di\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i,\text{因 } i^2=-1.\end{aligned}$$

系。 設一因子爲零則其積爲零。 227

因 $(a+bi)(0+0i)=(a\cdot 0-b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 0)i=0$.

除法。 茲定 $c+di$ 除 $a+bi$ 之商爲以 $c+di$ 乘之而仍得 $a+bi$ 之複素數，設 $c+di$ 不爲 0, 則其商僅有一數，即下列方程右邊之複素數。 228

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

若 $c+di$ 爲 o, 則無定商存在。

因上式右邊與 $c+di$ 之積爲 $a+bi$, 讀者可用 § 226 極易證明之。

茲發現此數即爲其商如次:

設有以 $c+di$ 乘之而得 $a+bi$ 之一數存在，命之爲 $x+yi$.

則 $\qquad (x+yi)(c+di)=a+bi.$ (1)

或 $\qquad (cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi.$ (2)

故 $\qquad cx-dy=a$ 及 $dx+cy=b.$ (3) § 225

解此二方程式之 x, y, 得

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2},\text{但 } c^2+d^2=0 \text{ 除外} \quad (4)$$

且因 (4) 爲僅能滿足 (3) 之 x, y 值之二方程，故相當數 $x+yi$ 爲以 $c+di$ 乘之而得 $a+bi$ 之僅有數。

由 (4) 設 $c^2+d^2=0$，按商之定義當然知其無意義，然設 $c^2+d^2=0$ 則必 $c=0$ 及 $d=0$，否則一正數等於 0 矣，且若 $c=0$ 及 $d=0$，其除數 $c+di$ 爲 0.

229 **交換，結合，及分配定律．** 上面規定之演算，當然包含與諸實數之相當計算。下面示其仍合於交換，結合，及分配定律。

則 $$(a+a'i)(b+b'i)=ab-a'b'+(ab'+a'b)i, \qquad (1)$$

$$(b+b'i)(a+a'i)=ba-b'a'+(b'a+ba')i. \qquad (2)$$

然(1)及(2)之右邊相等，由 § 177.

故 $$(a+a'i)(b+b'i)=(b+b'i)(a+a'i).$$

其餘定律亦可以同法成立。

230 **相等法則．** 令 a, b, c 表任意複素數。

1．設 $a=b$，則 $a+c=b+c$.

2．設 $a+c=b+c$，則 $a=b$.

3．設 $a=b$，則 $ac=bc$.

4．設 $ac=bc$，則 $a=b$．但 $c=0$ 除外。

1．令 $\mathrm{a}=a+a'i$，$\mathrm{b}=b+b'i$，及 $\mathrm{c}=c+c'i$.

設 $$a+a'i=b+b'i.$$

則 $$a=b \text{ 及 } a'=b'. \qquad \text{§ 225}$$

且 $$a+c=b+c \text{ 及 } a'+c'=b'+c'. \qquad \text{§ 178}$$

故 $$(a+c)+(a'+c')i=(b+c)+(b'+c')i. \qquad \text{§ 225}$$

則 $$\mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{c}. \qquad \text{§ 226}$$

2．設 $$\mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{c}.$$

則得 $$\mathrm{a}+\mathrm{c}+(-\mathrm{c})=\mathrm{b}+\mathrm{c}+(-\mathrm{c}). \qquad \text{由 1}$$

故 $$\mathrm{a}=\mathrm{b}. \qquad \text{§ 226}$$

3 及 4．此二法則之證各與 1 及 2 同。

系. 設其積爲零，則其因子之一必爲零. 231

由 § 230, 4 用 § 76 之理即得.

複素數之絶對值. 正實數 $\sqrt{a^2+b^2}$ 稱爲 $a+bi$ 之 232
絶對值或數值，以 $|a+bi|$ 表之. 即由定義.

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

如，$|2+i|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

設 $b=0$,此數值之定義化爲前章，已述之實數絶對值，§ 63, 於此定義之幾何解釋參看 § 239.

故二複素數稱第一數之絶對值小於，等於，或大於第 233
二數，視其第一數絶對值小於，等於，或大於第二者而定.

如 $2+3i$ 之數值大於 $3+i$.

因 $|2+3i|=\sqrt{13}$ 及 $|3+i|=\sqrt{10}$, 而 $\sqrt{13}>\sqrt{10}$.

定理1. 二複素數之積之絶對值等於其絶對值之積.

令此二數爲 $\mathrm{a}=a+a'i$ 及 $\mathrm{b}=b+b'i$. 234

因 $\mathrm{ab}=ab-a'b'+(ab'+a'b)i$. §226

得 $|\mathrm{ab}|=\sqrt{(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2}$ §232

若完成此項計算，則得

$$(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2=(a^2+a'^2)(b^2+b'^2).$$

故 $\sqrt{(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2}=\sqrt{a^2+a'^2}\cdot\sqrt{b^2+b'^2}$. §186

即 $|\mathrm{ab}|=|\mathrm{a}|\cdot|\mathrm{b}|$.

定理2. 二複素數之和之絶對值不能超過其各絶對 235
值之和.

用 §234 之記法.

假定 $\sqrt{a^2+a'^2}+\sqrt{b^2+b'^2}\geqq\sqrt{(a+b)^2+(a'+b')^2}$ (1)

必因 $a^2+a'^2+b^2+b'^2+2\sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)}$

$\geqq a^2+b^2+a'^2+b'^2+2(ab+a'b')$ §184

∴必因 $\sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)}\geqq ab+a'b'$ §178

∴必因 $a^2b^2+a'^2b'^2+a^2b'^2+a'^2b^2$

$\geqq a^2b^2+a'^2b'^2+2aba'b'$ §184

∴必因 $a^2b'^2+a'^2b^2\geqq 2aba'b'$ §178

∴必因 $(ab'-a'b)^2\geqq 0.$ (2) §178

但(2)常眞，因各實數之平方爲正(或0)故也，故(1)常眞——定理2因以證明。

如，$|2+i|=\sqrt{5}$ 及 $|1+3i|=\sqrt{10}$.

但 $|(2+i)+(1+3i)|=5$，而 $5<\sqrt{5}+\sqrt{10}$.

236 **羃及根.** 1. $a+bi$ 之 n 次羃書作 $(a+bi)^n$，意即各數均爲 $a+bi$ 之 n 個因數之積。由§226,3可知其積仍爲複素積如 $c+di$ 者。

可由§185而證明指數定律仍可適用於複素數之方羃。

2. 設 $(a+bi)^n=c+di$，則稱 $a+bi$ 爲 $a+di$ 之一 n 次根，且以 $\sqrt[n]{c+di}$ 表之。

兹附帶證明每 n 個已知複素數均有 n 個 n 次根：換言之，即虛數組中有 n 個不同之數，其 n 次羃均等於 $c+di$.

如 $(1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2})^2=1/2+2i/2-1/2=i$,

如 $1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}$ 數爲 i 之平方根，故爲 -1 之四次根，-1 之其他三根爲

$-1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2}$.

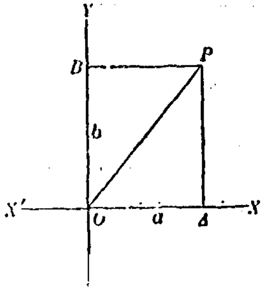
237 **總結論.** 關於數組似無須再行擴充，因如§§226, 236所示，虛數組已能應付一切四種基本演算與開方之需要，且常用數以實作他種演算時，則虛數在數學中有相當位置，——如140節求數之對數之演算，即其一例，——此種計算許用無窮級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 其諸項均爲複素數者；且設級數有一總和，其和亦爲複素數。

複素數之幾何表示法

複素數可以平面上諸點繪出之，其點稱爲相當數之圖形。 238

取任意二直線 $X'OX$, $Y'OY$ 互相直交於 O; 且用定單位線段以度線長。

1. 茲於 $X'OX$ 上與以 s 所表自 O 之距離爲 $|a|$ 者之一點 A 表各實數 a, § 209. 取 A 於 O 之右或左，視 a 之爲正或負而定。



2. 次於 $Y'OY$ 上與 O 之距離爲 $|b|$ 者之一點 B 表各純虛數 bi, 取 B 於 O 之上或下視 b 之爲正或負而定。

3. 茲以下述作法所得之 P 點表各複素數 $a+bi$. 先求 a 及 bi 之圖形 A 及 B, 如 1 及 2. 然後過 A 及 B 作線各平行於 $Y'OY$ 及 $X'OX$, 二線相交之 P 點即 $a+bi$ 之圖形。

茲稱 $X'OX$ 爲實數軸及 $Y'OY$ 爲純虛數軸。

由此法可導複素數組與平面內諸點之集團成一一對應之關係，第二節，茲更得複素數組之二度序數之完全表示法。 § 223.

觀此可知凡有同一虛數部分之諸數之圖形，必在 $X'OX$ 之同一平行線上，且有同一實數部分之圖形，必在 $Y'OY$ 之同一平行線上。

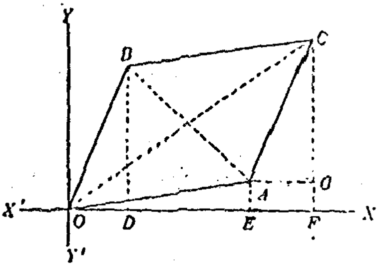
任意複素數之絕對值爲其圖形與原點之距離。 239

如上節 OA 及 AP 之長各爲 a 及 b, 故 OP 之長爲

$$\sqrt{a^2+b^2} \text{ 或 } |a+bi|, \qquad \S 232.$$

二複素數 $\mathrm{a}=a+a'i$, $\mathrm{b}=b+b'i$ 之和及積之圖形可求得如下; 240

已知 A 及 B 各爲 a 及 b 之圖形，連 OA 及 OB 且畫全平行四邊形 $OACB$. 則 C 爲 a+b 之圖形。



作垂線 BD, AE, CF, AG, 則 a, a', b, b' 各爲 OE, EA, OD, DB 之長，而 ODB 及 AGC 爲相合三角形。

今 $OF=OE+EF=OE+OD=a+b$ 於其長。

$FC=FG+GC=EA+DB=a'+b'$, 於其長。

故 C 爲 $a+b+(a'+b')i$ 或 a+b 之圖形， §226, 1.

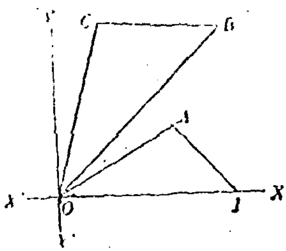
設 O,A,B 爲一直線（且常時）可作 AC 等於 OB 之長且在其同方向而得 C.

因 $OC\leqq OA+AC$, 即 $\leqq OA+OB$, 因得 $|a+b|\leqq|a|+|b|$.

差數 a−b 之圖形即和數 a+(−b) 之圖形。

已知 a 及 b 之圖形爲 A 及 B, 且命 I 表 1 之圖形，連 OA, OB, IA, 在 OB 上作三角形 OBC 相似於 OIA. 設命 OB 繞 O 旋轉至 OX, 則 OC 落於 OA 上，則 C 爲 a 之圖形。

此法將於後來證明之，且自此導出作商及方冪之圖形諸法。設 $b=i$, 則 OC 爲以 OA 繞 O 逆時針方向轉 90°.



241 各複素數之恆等關係可移用幾何定理解釋之，故虛數可表實際事物之關係。

如 (a+b)/2=a+(b−a)/2 表示平行四邊形之對角線互被平分；因 (a+b)/2 及 a+(b−a)/2 之圖形爲第一圖內 OC 及 AB 之中點， §240.

第二編　代　數

I　基本演算

用文字表數

常數與變數. 代數學中常用文字表任意數，如公 242
式 $ab=ba$，字母 a 及 b 表任意二數，此公式意爲：以任何第二數乘任何第一數之積等於以其第一數乘第二數.

於若干代數討論中，記如 $x+b$ 之 b 及 x 二文字間若予以不同意義更覺便利.

第一. 茲視其一字 b 含有任意指定之特別值首先規定之，然後保留於一切討論之中，茲稱此文字爲已知字或已知數或常數 (*Constant*).

第二. 換言之，凡討論中，視其他文字 x 可予以任意可能之值，且可自任一值變至任一他值，茲稱此文字爲變數 (*Variable*).

未知文字. 但文字亦可用以表示正擬求算其值之特 243
別數，茲稱此文字爲未知字或未知數.

惟不能如常數或變數而予未知字以任意之值.

如，於方程 $2x-5=0$，x 爲未知字其值頗易求得爲5/2 於 $2x-5$ 式可予 x 以任意值，然於方程式 $2x-5=0$ 則除 5/2 外不能予 x 以他值.

244 **文字之選擇.** 選擇文字之必要限制爲一字不能同時代表二數。

通常以前諸字母表已知數或常數。如 a, b, c；而以末後諸字母表未知數或變數如 x, y, z.

於純字母之外有時加以小撇或附碼如 a', a'', a''' 讀作"a 第一""a 第二""a 第三"；而 a_0, a_1, a_2, 讀作"a 附零""a 附 1"，"a 附 2".

245 **文字計算.** 設以文字 a, b, c 表諸數，則用算術演之。只能表其結合之結果；如加 b 於 a 意僅爲代數式 $a+b$ 故稱爲 a 及 b 之和，同法，以 b 乘 a 之積爲 ab 式。

故上述之文字式表諸數，可以算術方法演之，但於此種計算不能得其各式眞值之直接用途，因不知其值故也。今只能以適當之演算符號結合各式，然後以不影響其值的算法而化簡其結果之形，形之若何無關重要。

於 §68 已知一切變化可作成和及積之形而不影響其值。玆總述於下之公式。

1. $a+b=b+a$.　　2. $a+(b+c)=(a+b)+c$.

3. $ab=ba$.　4. $a(bc)=(ab)c$,　5. $a(b+c)=ab+ac$.

故可謂公式 1 至 5 頗爲需要，或用以結合文字式之和與乘之定義甚爲應用，同此諸式之算術的演算，皆爲眞確，

如，加 $2x+3y$ 及 $4x+5y$ 意僅謂代數式 $2x+3y+(4x+5y)$ 用公式 1 至 5，加其所設數化為極簡之形，於是得

$$2x+3y+(4x+5y)=2x+3y+4x+5y \qquad \text{由 2}$$
$$=2x+(3y+4x)+5y=2x+(4x+3y)+5y \qquad \text{由 2 及 1}$$
$$=2x+4x+3y+5y=(2x+4x)+(3y+5y) \qquad \text{由 2}$$
$$=(2+4)x+(3+5)y=6x+8y, \text{即所求之和,} \qquad \text{由 3 及 5}$$

演算之基本法則

依上節所述，可視加，減，乘，除，乘方，及開方為以下列法則及公式而規定於代數學者，茲稱之為演算之基本法則。 246

此公式中——於本書第一編所創造之各類諸數——文字 a, b, c 恆表定數，及相等符號 $=$，意謂"示與……數相同"。

加法. 加 b 於 a 之結果為代數式 $a+b$，茲稱此式為 a 及 b 之和，此式必有一值，即於 a 及 b 之任何予值而僅有一值，於特例，$a+0=0+a=a$. 247

加法為交換及結合演算；即適合於 §§ 34, 35 之二定律。 248

$$a+b=b+a, \qquad a+(b+c)=(a+b)+c.$$

下面之相等法則為和之眞實根據，§ 39. 249

設 $a=b$, 則 $a+c=b+c$.

設 $a+c=b+c$, 則 $a=b$.*

減法. 減為加之逆，§ 55，已知任意數 a 及 b，必有一數；且僅有一數可加 b 而得 a 者，茲稱此數為自 a 減 b 所得之餘數，而以代數式 $a-b$ 表之，故由定義. 250

* 後面將知設 C 為無限，則此法不適用。

$$(a-b)+b=a.$$

於特例，可以 $-b$ 表 $0-b$.

251 **乘法.** 以 b 乘 a 之結果爲 ab 式，稱 ab 爲以 b 乘 a 之積. 此式於 a 及 b 之任何予數必有一值, 且僅有一值.

於特例，$a\cdot 0=0\cdot a=0$, 無論 a 爲任何定值.

若 b 爲正整數，$ab=a+a+\cdots\cdot$ 至 b 項.

252 乘法爲交換及結合之演算，且關於加法爲分配演算；即合於 45－47 節之三定律.

$$ab=ba,\quad a(bc)=(ab)c,\quad a(b+c)=ab+ac.$$

253 下面之相等法則爲積之眞實根據，§§75, 76:

設 $a=b$, 則 $ac=bc$,

設 $ac=bc$, 則 $a=b$, 但 $c=0$ 除外*.

設 $ac=0$, 則 $a=0$, 或 $c=0$.

254 **除法.** 除爲乘之逆，§124 已知任意二數 a 及 b，除 b 爲 0 外，必有一數，且僅有一數以 b 乘之而得 a 者. 茲稱此數爲以 b 除 a 所得之商而以代數式 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 表之，故由定義

$$\left(\frac{a}{b}\right)b=a,\quad \text{但 } b=0 \text{ 除外.}$$

255 **乘方.** 乘方爲重複乘法之一種，以 a^n 表 $a\cdot a\cdots$ 至 n 因子之連乘積，而稱之爲 a 之 n 次羃 (nth power).

*俟後將知設 C 爲無限，此法不適用.

於符號 a^n，稱 n 爲指數 (*exponent*)，而 a 爲其底 (*base*)。

乘方或增冪合於下之三定律，稱爲指數定律，§185: 256

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,　$(a^m)^n = a^{mn}$,　$(ab)^n = a^n b^n$.

下面相等法則爲方冪之眞實根據，§184. 257

設　$a=b$，　則　$a^n=b^n$.

設　$a^2=b^2$，　則　$a=b$，　或　$a=-b$.

此第二法則及特別式之一般法則詳於後編。

開方. 開方爲乘方之逆算之一種，§§138, 140. 已知 258
任意正數 a，必有一正數，且僅有一正數其 n 次冪等於 a 者。
茲稱此數爲 a 之 n 次主根，而以 $\sqrt[n]{a}$ 表之。
設 $n=2$，則以 $\sqrt{a}$ 表之。故由定義

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

然此正數 $\sqrt[n]{a}$，並非 n 次冪等於 a 者之僅有數，俟後將知其 n 次冪等於 a 者固有 n 個不同之數；且不僅設 a 爲正始爲眞確，而 a 爲任何他種之數亦眞。

設 a 爲正及 n 爲奇，則 $-a$ 之 n 次主根爲 $-\sqrt[n]{a}$.

上法之通理. 茲稱上述之相等諸法爲不確定法 259
則；可稱其餘爲結合法則 (*rules of Combination*)。

注意一切結合法則及相等法則於和爲可逆的，但相等法則於積及方冪則不完全可逆。

如，分配定律 $a(b+c)=ab+ac$，此即結合法則之一；茲可以 $ab+ac$ 代 $a(b+c)$. 或逆之，以 $a(b+c)$ 代 $ab+ac$，

復次，設 $a=b$, 常可斷定 $a+c=b+c$, 且逆之，設 $a+c=b+c$, 則 $a=b$.

又設 $a=b$, 常可斷定 $ac=bc$, 然其逆，設 $ac=bc$, 尙須知 c 不爲 0 始能斷定 $a=b$.

自 $a=b$ 常能得 $a^2=b^2$, 但自 $a^2=b^2$, 則能得 $a=b$ 或 $a=-b$.

260 **不等法則.** 公式 $a \neq b$ 意爲"a 不等於 b".

二已知不等實數 a 及 b 必有一數之值較大而他數之值較小 §62.

設 a 較大而 b 較小，寫作

$$a>b \text{ 或 } b<a.$$

於特例，$a>0$ 或 $a<0$, 視 a 爲正或負而定。

261 於任意已知實數 a, b, c 由 §§178, 184 得下列法則：

1\. 設 $a=b$ 及 $b=c$, 則 $a=c$.
　設 $a=b$ 及 $b<c$, 則 $a<c$.
　設 $a<b$ 及 $b<c$, 則 $a<c$.

2\. 依　　$a <, =,$ 或 $> b$.
　推知　$a+c <, =,$ 或 $> b+c$.
及　　$ac <, =,$ 或 $> bc$, 設 $c>0$;
但　　$ac >, =,$ 或 $< bc$, 設 $c<0$.

3\. 設 a 及 b 爲正。
依　　$a <, =,$ 或 $> b$.
推知　$a^n <, =,$ 或 $> b^n$.
及　　$\sqrt[n]{a} <, =,$ 或 $> \sqrt[n]{b}$.

如前所指示。2 及 3 下之法則只含＝號者亦適用於虛數。設 $a=b$ 及 $b=c$, 則 $a=c$ 此法於虛數亦眞；故可稱爲相等總則。

代數符號之擴充

除前諸節所釋之符號外，代數學中常用下之符號. 262

1. 各種總括符號. 如前用之符號( ), 及〔 〕, { }, 用以總括代數式，而視如簡單符號者.

2. 複號 ±, 讀作"加或減"及 ∓ 讀作"減或加". 如 $a \pm b \mp c$. 意為 $a+b-c$ 或 $a-b+c$, 其上層符號須連帶讀出，下層符號亦然.

3. 符號 ∴ 表「故」或「所以」.

4. 符號····表類推或等等.

5. 又, ∵ 因為; ≯ 不大於; ≮ 不小於; ≷ 大於或小於.

代 數 式

聯合文字，或文字與數所構成之式用以作上述之演算 263 者稱為代數式 (*algebraic expression*).

註. 含於式中之演算次數，如 $1+x+x^2$, 為有定，設 264 能繼續無窮如 $1+x+x^2,\cdots\cdots$, 則為無定. 玆僅研究其定式.

通常代數式依其變數（或未知數）文字在式中情形而 265 分類如下:

設表除數之式不含變數文字則稱此代數式為整式 (*in-* 266 *tegral*) 設含之，則稱為分式 (*fractional*).

如設 x 及 y 為變數文字 a, b, c, 為常數.

則 ax^2+bx+c 及 $\dfrac{y}{b}+\sqrt{x}$ 為整式,

但 $y+\dfrac{1}{x}$ 及 $\dfrac{2+x}{1-x}$ 為分式.

267　設含變數文字之一式無根號則稱爲有理式，有根號則稱爲無理式，如 $a+\sqrt{b}x$ 爲有理式，但 $\sqrt{y}+\sqrt{y-x}$ 爲無理式。

268　**註。**　1．應用此諸名稱於一式，須假定該式已化爲最簡之形。如 $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ 爲有理式，因能化爲有理式 $x+y$ 故也。

2．整式，分式，等等名稱僅指其形式而言，若用之於該式之眞數值，則整式未必均爲整數，分式未必皆爲分數，餘類推。如 $x+2$ 有理整式若 x 表一整數則該式表一整數，然設 x 表各分數，則該式表一分數，於 x 之各無理數值，則表一無理數。

269　設以若干部分及 + 或 − 諸符號連合而成一代數式 A，此諸部分連帶其前之符號稱爲 A 之諸項 (*terms*)．

如下式

$$a+a^2c-(b+c)+[d+e]-\{f+g\}+\overline{h+i}+\left.\begin{matrix}j\\+k\end{matrix}\right|-\frac{l+m}{n+p}$$

之諸項爲 $a, a^2c, -(b+c)$ 等等，其諸項本身含有多於一項者均以括弧或其他括號括之，262 節，1．

270　依整式之項數而稱爲獨項式 (*monomials*)，二項式 (*binomials*)，三項式 (*trinomials*)，及總稱多項式 (*polynomials*)．

271　與任意獨項式中相乘之常數因子稱爲變數因子之積之係數 (*Coefficient*)．

如 $4ab^2x^3y^4$，$4ab^2$ 爲 x^3y^4 之係數。

且應稱任意因子爲其餘因子之積之係數。

各獨項式係數應書於前，設係數爲 1，則可不書，如，1 爲 x^2y 之係數。

同類項 (*like terms*) 爲僅其係數不同之諸項。 272

如 $-2x^2y$ 及 bx^2y 爲同類項。

獨項式之次數 (*degree*) 爲其項內變數之指數之和。 273

如設變數爲 x 及 y，則 $4ab^2x^3y^4$ 之次數爲 7；ax^3 之次數爲 3，b 之次數爲零 (閱 595 節)。

多項式之次數爲其最高次項之次數；且任意整式之次 274
數爲可化成最簡多項式之次數。

如 $ax^3+bx^2y+cy^3+dx^2+ey+f$ 之次數爲三；而 $(x-1)(x-2)$ 之次數爲二。

多項式之諸項若按其次數之順序升冪或降冪排之最爲 275
便利，設有幾項同次則按其一變數之次數順序而排列之。

注意，274 節中多項式即依順序而排列者。

諸項次數相同之多項式稱爲齊次式 (*homogeneous*)。 276

如 $5x^3-2x^2y+4xy^2+y^3$ 爲齊次式。

一變數之多項式。 含一變數(如 x)之有理整式 277
尤爲特別重要。其在代數中之任務亦如整數之於算術也。確能知其具有若干性質類似於整數者，此類常能化爲 x 之多項式，即下列諸式之一：

$$a_0x+a_1,\quad a_0x^2+a_1x+a_2,\quad a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,\cdots,$$

或成下式之形：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

式中 n 表此式之次數及虛線處表示作成 $n+1$ 項之全部所需之諸項。

係數 $a_0, a_1, \cdots$,表任何種類之常數，於特例，除 a_0 外均可爲 0,則此多項式稱爲不全式。

注意。各項內 a 之附碼與 x 之指數之和爲此多項式之次數。

如於 $5x^6-x^3+2x^2+x-3$, 其 $n=6, a_0=5, a_1=0, a_2=0, a_3=-1, a_4=2, a_5=1, a_6=-3$.

278 **函數**。凡含一或多變數之代數式如 $x+2$ 或 x^2+y,其本身亦爲變數。茲稱 $x+2$ 爲 x 之函數 (*function*)，因其值依 x 而變，於 x 之每一值相當於 $x+2$ 之一定值。

同理稱 x^2+y 爲 x 及 y 之函數，總之可稱各代數式爲其所含諸變數之函數。

279 按前所規定 x, x 及 y 等等之整式，分式，有理式或無理式之名稱，可稱爲 x, x 及 y 等等之整函數，分函數，有理函數，或無理函數。

280 x 之已知函數常以符號 $f(x)$ 表之，讀作"x 之函數"而以 $f(0)$, $f(1)$. $f(b)$ 表函數適合於 $x=0, 1, b$, 時之值。

如，設 $f(x)=x+2$, 則 $f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(b)=b+2$, 總之 $f(x)$ 表示含 x 之任何已知式 $f(b)$ 表以代入式內 x 而得之結果。

若於 x 之二個以上之函數，可用 $f(x)$ 表其一，其他則用相似符號如 $F(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ 表之。

由同法，可以符號 $f(x, y)$ 二表變數 x 及 y 之函數，餘類推。

習 題 I

1. $x^2yz^3+2x^5y^4z^6+3x^7y^2z^8$ 各關於 x,y 及 z 之次數若何? 關於 y 同 z 若何? 連同 x, y, z 若何?

2. $(x+1)(2x^2+3)(x^4-7)$ 之次數若何?

3. 已知 $3x^7+x^6-4x^4+x^3-12$; 則 277 節記法內之 $n, a_0, a_1, \cdots$ 之值若何?

4. 設 $f(x)=2x^3-x^2+3$, 求 $f(0), f(-1), f(3), f(8)$.

5. 設 $f(x)=(x^2-3x+2)/(2x+5)$, 求 $f(0), f(-2), f(6)$.

6. 設 $f(x)=x+\sqrt{x}+3$, 求 $f(1), f(4), f(5)$.

7. 設 $f(x)=2x+3$, 則 $f(x-2)$ 為何? $f(x^2+1)$ 為何?

8. 設 $f(x,y)=x^3+x-y+8$, 求下各值:
$f(0,0), f(1,0), f(0,1), f(-2,-3), f(1,1)$.

恒等方程式或恒等式

設 A 表與 B 極同之式, 或可用 247—258 節之演算方 281
法而化成 B 之一式, 則稱 A 恒等於 B.

記法 $A\equiv B$ 意謂 "A 恒等於 B".

如 $x(x+2)+4$ 恒等於 $x^2+2(x+2)$.

因 $x(x+2)+4\equiv(x^2+2x)+4$

$$\equiv x^2+(2x+4)\equiv x^2+2(x+2). \quad §§248, 252.$$

茲稱 $A\equiv B$ 為恒等方程 (*identical equation*) 或恒等式 (*identity*). 故

恒等式 $A\equiv B$ 者, 為第一式 A 能以演算法則變換成 282
B 之謂也.

於特例, 恒等式如 283

$$3-8+2\equiv4+7-14$$

式中無文字, 稱為數目恒等式.

下面定理含於282節，然極有用。

284　**定理．** 設含 x 之二多項式恆等，則其相當係數相等，即

設 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n$，

則　$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\cdots\cdots,a_n=b_n$

若諸係數不等，則二多項式亦不等，而第一式不能以演算方法化爲第二式也。

如，設 $ax^2+3x-3\equiv2x^2+bx+c$，則 $a=2$，$b=3$ $c=-3$．

設係數 $a_0,a_1,\cdots\cdots,b_0,b_1,\cdots\cdots$ 表不含 x 之代數式，則自恆等式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots$ 而得 $a_0\equiv b_0,a_1\equiv b_1,\cdots\cdots$，換言之，即此諸代數式可以其相當係數表之 a_0 及 b_0．等等均爲恆等。

285　上述定理亦適用於具常數係數之一個以上變數之方羃之積構成諸項之二恆等多項式。

如，設 $a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+\cdots\cdots$

$$\equiv a'+b'x+c'y+d'x^2+e'xy+f'y^2+\cdots\cdots$$

則 $a=a',b=b',c=c',d=d',e=e',f=f',\cdots\cdots$．

286　**恆等式之性質．** 於代數演算可常用下之定理：

定理1． 設 $A\equiv B$ 則 $B\equiv A$．

因可選 A 於 B，爲可逆的，此僅含259節之速合法則，然其逆處置即選 B 於 A．

如，茲可用逆算法施於281節之例。

因　$x^2+2(x+2)\equiv x^2+(2x+4)$

$\equiv(x^2+2x)+4\equiv x(x+2)+4$，§§248, 252,

定理2． 設 $A\equiv C$ 及 $B\equiv C$，則 $A\equiv B$．

因 $B\equiv C$，而得 $C\equiv B$．　　由定理1

因 $A\equiv C$ 及 $C\equiv B$，故 $A\equiv B$．

如，因　$x(x+2)+4\equiv x^2+2x+4$,　§§248, 252

及　$x^2+2(x+2)\equiv x^2+2x+4$,　§§248, 252

故得　$x(x+2)+4\equiv x^2+2(x+2)$.

定理3. 以同式加，減，乘，除一恒等式之兩邊仍得恒等式。

此定理自 249, 253, 257, 等節之相等法則得之。

如，設 $A\equiv B$, 則 $A+C\equiv B+C$, 餘類推。

證恒等式。 若證 A 及 B 二已知式成 $A\equiv B$, 勿須實際變 A 成 B. 287

如 286 節 2 所示，若能化 A 及 B 均成 C 式足矣。

下之定理具備其他有用方法。

設自一假定恒等式 $A\equiv B$, 能用可逆的演算而導出已知恒等式 $C\equiv D$, 則假定恒等式 $A\equiv B$ 爲眞。 288

因此演預算可逆的，故能自 $C\equiv D$ 導出 $A\equiv B$, 因 $C\equiv D$ 爲眞，$A\equiv B$ 亦眞。

例。求證 $a+b-b$ 恒等於 a.

假定　$a+b-b\equiv a$.　(1)

則得　$[(a+b)-b]+b\equiv a+b$.　(2) §249

然 (2) 已知爲恒等式，§250 等，而 (1) 至 (2) 之步驟爲可逆的，故 (1) 爲眞。

若自 $A\equiv B$ 算至 $C\equiv D$ 非爲可逆則斷定 $A\equiv B$ 甚爲不妥。

玆可解釋如下：

設假定 $x\equiv -x$.　(1)

因得　$x^2\equiv(-x)^2$　(2)

其 (2) 爲眞，但不能因此而證得 (1) 爲眞，因 (1) 至 (2) 之步驟非可逆者也，259 節。

實則 (1) 根本錯誤。

289 **恒等式與方程式。** 恒等式為式之原始關係，比其值尤為重要，同時

設 A 及 B 均為定式，且 $A\equiv B$，則於其式內諸文字之一切值 A 及 B 恒有等值。

因自假定可由法則 $a+b=b+a$ 之應用定數而變 A 成 B，餘類推。但無論 a 及 b 之值若何，$a+b$ 及 $b+a$ 恒有等值，餘類推。

逆之，設 A 及 B 於 A 及 B 內諸項之一切值，均有等值，則 $A\equiv B$，此理俟後證之。

於諸定式常可以等值符號 $=$，以代恒等符號 $\equiv$，如 $A\equiv B$，寫作 $A=B$ 後面均如此通用。符號 $=$ 之用途慎與325節所述者有別。

命題之轉換

290 假定一命題如下

設 A，則 B，　　(1)

或表全其意：設某事 A 為真，則他事 B 亦真。

如，設一圖為正方形，則該圖亦為矩形。

設 $x=1$，則 $x-1=0$。

291 則若交換假定 A 及 (1) 之推斷 B，而得逆命題

設 B，則 A。　　(2)

如上命題之逆為：

設一圖為矩形，則該圖為正方形。

設 $x-1=0$，則 $x=1$。

292 如上第一例所述，一真確命題之逆往往不真。

* 若一命題設 A 及 B，則 C，含二假定，則有二逆：即，設 C 及 B，則 A，又設 A 及 C，則 B，同理，設有三假定，則有三逆：餘做此。

但於真確命題之逆：自假定 A 以可逆的演算導出推斷 293
B，而設 A 則 B，常爲眞確；則反其演算即可自 B 而導出 A，換言之，可證設 B 則 A。

用可逆的演算，由其逆題以證該命題之方法，代數學中常用之，此法之說明已示於 288 節。

若一命題：設 A 則 B 爲眞，則稱 A 爲 B 之滿足條件 294
(*sufficient condition*) 而 B 爲 A 之必需條件 (*necessary condition*)。

如，命題 設 $x=1$，則 $(x-1)(x-2)=0$ 爲眞，則 $x=1$ 爲 $(x-1)(x-2)=0$ 之滿足條件及 $(x-1)(x-2)=0$ 爲 $x=1$ 之必需條件。

若命題，設 A 則 B，及其逆設 B 則 A 均爲眞確，則稱 295
A 爲 B 之滿足及必要條件；餘類推。

如 (1) 設 $x=1$ 則 $x-1=0$，及 (2) 設 $x-1=0$，則 $x=1$ 同時爲眞，則 $x=1$ 爲 $x-1=0$ 之滿足及必要條件；餘倣此。

II 基 本 演 算

加 與 減

和及差． 令 A 及 B 表任意二代數式，其 A 及 B 之 296
和及自 A 減 B 所得之差，即謂能由 247 至 258 節之演算方法而化 $A+B$ 及 $A-B$ 式成極簡之形。

幾個有用公式． 下面公式於演算極爲有用，即： 297

1. $a+b-c=a-c+b$. 2. $a-(b+c)=a-b-c$.

3. $a+(b-c)=a+b-c$. 4. $a-(b-c)=a-b+c$.

5. $a(b-c)=ab-ac$.

上諸公式視爲交換，結合，及分配諸律對於減法之推廣．

可用249節之法則證1及2．

設以同式加於某二式結果相等，則該二式相等．

1．　$a+b-c=a-c+b$．

因加 c 於兩邊結果均爲 $a+b$．

則 $[(a+b)-c]+c=a+b$，　§250

及　$(a-c)+b+c=(a-c)+c+b=a+b$．§§248,250

2．　$a-(b+c)=a-b-c$．

因兩邊各加 $b+c$ 結果爲 a．

則 $[a-(b+c)]+(b+c)$

$=a$，　§250

及　$a-b-c+(b+c)=a-b-c+c+b$

$=a-b+b=a$．　§§248,250

茲證3，4，5，如下：

因　$b=(b-c)+c$．　§250

而得　3．　$a+b-c=a+[(b-c)+c]-c$

$=a+(b-c)+c-c$　§248

$=a+(b-c)$．　由1及§250

4．　$a-b+c=a-[(b-c)+c]+c$

$=a-(b-c)-c+c$　由2

$=a-(b-c)$．　§250

5．　$ab-ac=a[(b-c)+c]-ac$

$=a(b-c)+ac-ac$　§252

$=a(b-c)$．　由1及§250

由248節及公式1－4可知連續數項之加與減可以任何順序演之．

如，$a-b+c-d+e=a+c-b-d+e,$ 由 1

$=a+c-(b+d)+e=a+c+e-(b+d),$ 由 2 及 1

$=a+c+e-b-d.$ 由 2

符號規則. 此符號規則爲上述公式 3, 4, 5 之特類. 298

1. $a+(-c)=a-c.$ 2. $a-(-c)=a+c.$

3. $a(-c)=-ac.$ 4. $(-a)(-c)=ac.$

於 297 節 3, 4, 5 各令 $b=0$ 即得 1, 2, 3.

4 證如下:

$(-a)(-c)=(-a)(0-c)=(-a)0-(-a)c$ §297, 5

$=0-(-ac)=ac,$ 由 2 及 3

括號規則. 由 248 節及 297 節 2, 3, 4, 諸公式得下 299 之重要法則:

括號前面爲＋號者可以撤去括弧，括弧前號爲－號者亦可撤去，但其內之各項均須變號.

括弧能以可逆的演算導出相當法則.

如，$a+b-c-d+e=a+b-(c+d-e).$

欲化簡重複括號之式，應連用上法於多層括號.

如，$a-\{b-(c-(d-e))\}=a-b+(c-(d-e))$

$=a-b+c-(d-e)$

$=a-b+c-d+e.$

此諸括號當然可以任意順序撤去之；但自最外之項起始（如上例）可避免任一符號多於一次之變更.

300　**整式加減法.**　由248, 252, 297節之公式而得次法:

加(或減)二同類項，加(或減)其係數，且附書其公文字於此結果.

加二個或數個多項式接連書其所有諸項同其原來符號，然後合併其同類項而化簡之.

若自他式減一多項式，則變其所減式內各項符號而加之.

例1.　加 $4ab^2$ 及 $-5ab^2$; 又自 $4ab^2$ 減 $-5ab^2$

因得 $4ab^2+(-5ab^2)=(4-5)ab^2=-ab^2$;　§ 248

及 $4ab^2-(-5ab^2)=[4-(-5)]ab^2=9ab^2$.　§ 297, 5

例2.　加 $x^3+ax^2y+2ab^3$ 及 bx^2y-5ab^3.

因 $x^3+ax^2y+2ab^3+(bx^2y-5ab^3)$

$=x^3+ax^2y+2ab^3+bx^2y-5ab^3$　§ 299

$=x^3+ax^2y+bx^2y+2ab^3-5ab^3$　§ 248

$=x^3+(a+b)x^2y-3ab^3$.　§ § 252, 297, 5

例3.　自 $a^3+a^2b+b^3$ 減 $2a^2b-ab^2+b^3$

因 $a^3+a^2b+b^3-(2a^2b-ab^2+b^3)$

$=a^3+a^2b+b^3-2a^2b+ab^2-b^3$　§ 299

$=a^3-a^2b+ab^2$.　§ § 252, 297

設所加(或減)之多項式中有同類項，則列此諸項於同行然後逐行而加(或減)之.

例4.　加 $a^4+a^3b-2a^2b^2-b^4$ 及 $ab^3+3a^2b^2-a^3b$，且自其和減 $5a^2b^2-ab^3$

茲演之如右

$$\begin{array}{rrrrr}
a^4 & +a^3b & -2a^2b^2 & & -b^4 \\
 & -a^3b & +3a^2b^2 & +ab^3 & \\
 & & -5a^2b^2 & +ab^3 & \\
\hline
a^4 & & -4a^2b^2 & +2ab^3 & -b^4
\end{array}$$

習題 II

1. 加 $4ax^2y$, $-6ax^2y$, $5bx^2y$, 及 $-3bx^2y$.
2. 加 $7a^2+2a-b^2$, $3a+b^2-2a^2$, 及 $b^2-4a-4a^2$.
3. 加 $3x^2-5x+6$, x^2+2x-8, 及 $-4x^2+3x-7$.
4. 加 $4a^3+a^2b-5b^3$, $\frac{5}{3}a^3-6ab^2-a^2b$, $\frac{1}{3}a^3+10b^3$, 及 $6b^3-15ab^2-4a^2b-10a^3$.
5. 自 $3a+b-c$ 減 $4a-2b+6c$.
6. 自 x^3+6x^2+5 減 $2x^2-5x+7$.
7. 問以何式加於 a^3+5a^2b 而得 a^3+b^3?
8. 自 $x^3+y^3-6x+5y$ 減 $-2x^2-6x+7y-8$ 及 x^3+2x^2-5y+9 之和。
9. 化簡 $-(a+b)+\{-a-(2a-b)\}-6(a-4b)$.
10. 化簡 $6x-\{4x+[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]-8\}$.
11. 化簡 $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$.
12. 自 $z-[3x+(y+5z)]$ 減 $x-(3y+2z)$.
13. 問加 x^2+8x+5 於何式而得 x^3-7?
14. 問加 x^4-9x^2+3y 於何式而得 y^2+x-7?

乘法

積. 二代數式 A 及 B 之積意爲以演算法則能化 AB 301
式爲極簡之形。化法之重要原理爲:

1. 交換，結合，及分配定律。
2. 指數定律 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.
3. 符號規則。

$a(-b)=(-a)b=-ab$; $(-a)(-b)=ab$.

整式乘積法. 1.求二獨項式之積，即以其數字因 302
子之積乘其文字因子之積，加同文字之羃之指數以簡其結果。

視其二獨項式爲同號或異號而予其結果以 + 號或 − 號。

2. 以獨項式或多項式乘多項式求積，即以乘數之各項乘被乘數之各項，且加其所得之積。

第一法由交換及結合定律及指數定律而得，第二法由分配定律而得；如

$$(a+b+c)(m+n)=(a+b+c)m+(a+b+c)n$$
$$=am+bm+cm+an+bn+cn.$$

第一法亦可應用於二個以上獨項式之積，設均爲一號之獨項式之個數爲奇，其積之號爲一，爲偶，其積爲＋。

二個以上之多項式之積可複用第二法即得。

例1. 求 $-4a^2b^2x^3$， $2bx^4$，及 $-3a^3x$ 之積。

今 $-4a^2b^2x^3\cdot 2bx^4\cdot -3a^3x=24a^2b^2x^3bx^4a^3x$
$$=24a^5b^3x^8.$$

例2. 求 $a-2b$ 及 $ab-b^2+a^2$ 之積。

爲簡便計，按 a 之降冪排列此二因數，且擇其最簡因子作乘數，則得

$$(a^2+ab-b^2)(a-2b)=a^3+a^2b-ab^2-2a^2b-2ab^2$$
$$+2b^3=a^3-a^2b-3ab^2+2b^3.$$

303 關於任何文字(或幾個文字之組)其積之次數爲諸因子內關於此文字(或幾個文字之組)之次數之和。

此由 302 節 1,而得之。實際上在任何積內之最高次項爲各因子內諸最高次項之積。

如，x^2+1 及 x^3-1 之次數各爲二及三，而其積 $(x^2+1)(x^3-1)$ 或 $x^5+x^3-x^2-1$ 之次數爲五。

設二因子爲齊次式，276節，其積爲齊次式。 304

設各因子之諸項爲同次數，則以第一因子內一項乘他因子之各項之積均爲同次。故其和爲一齊次多項。

演算之排列． 設二因數均爲 a 或其他單純文字之多項式，或二因數均爲二文字之齊次函數，則如下例之排列演算最爲便利。 305

例1． 以 $x-3+x^2$ 乘 $2x^3-x^2+5$．

$$\begin{array}{rrrrrr}
2x^3 & -x^2 & & +5 & & \\
x^2 & +x & -3 & & & \\
\hline
2x^5 & -x^4 & & +5x^2 & & \\
 & 2x^4 & -x^3 & & +5x & \\
 & & -6x^3 & +3x^2 & & -15 \\
\hline
2x^5 & +x^4 & -7x^3 & +8x^2 & +5x & -15
\end{array}$$

茲按 x 降冪(或升冪)列二因數，且置乘數於被乘數之下。

然後書"部分乘積"於數列，相當於乘數之數項，其同類項，即同次項置於同行，末後逐行加其同類項。

例2． 以 $2y+x$ 乘 x^2-y^2+2xy

$$\begin{array}{rrrr}
x^2 & +2xy & -y^2 & \\
x & +2y & & \\
\hline
x^3 & +2x^2y & -xy^2 & \\
 & 2x^2y & +4xy^2 & -2y^3 \\
\hline
x^3 & +4x^2y & +3xy^2 & -2y^3
\end{array}$$

此例二因數均爲 x 及 y 之齊次函數。

茲按 x 之降冪，亦即 y 之升冪列二因數，然後演算如例1．

分離係數法． 於305節例之演算，所列諸項之位置定能表示 x 某次冪之所在。爲實用而縮減計算可略去 x 而僅書其係數，於演算具有數字係數之已知多項式更爲便利。 306

設其多項式爲不完全的，必須以係數0表各闕項。

例以 x^3+3x^2-2 乘 x^3-3x^2+2

$$\begin{array}{r}
1-3+0+2\\
\underline{1+3+0-2}\\
1-3+0+2\\
3-9+0+\ 6\\
\underline{-2+\ 6-0-4}\\
1+0-9+0+12-0-4
\end{array}$$

茲列其算式如 305 節，但僅書其例之係數，以 0 係表其闕項。相當於乘數 0 項之部分乘積略去。

於末後結果嵌入 x 之適當方冪——由 x^6 始，因諸因數之次數之和爲六——即得所求之積 $x^6-9x^4+12x^2-4$.

其積之次數六，亦可由結果 $1+0-9+0+12-0-4$ 之項數七得之，277 節。

上法稱爲分離係數法 (*detached coefficients*) 此法不但應用於單獨文字之多項式，——均按該字之降羃或升羃排列者——且能應用於二文字之齊次式，因按其一字之降羃排列二多項式，同時亦削他字之升羃排列，故任一係數之位置即可表其相當二文字合組之某次羃之所在。

307　**由分離係數法導出之公式**，茲以下例說明。

例1．證下之恆等式爲眞。

$$(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=a^5-b^5.$$

$$\begin{array}{r}
1+1+1+1+1\\
\underline{1-1}\\
1+1+1+1+1\\
\underline{-1-1-1-1-1}\\
1+0+0+0+0-1
\end{array}$$

茲以分離係數法乘其等號左邊式，則其所得之積之係數按 a 之降羃且 b 之升羃而排列者。

即知其積之次數爲五，且亦可由其結果項數六而知之，故其積爲

$$a^5+0\cdot a^4b+0\cdot a^3b^2+0\cdot a^2b^3+0\cdot ab^4-b^5,\quad 或\ a^5-b^5.$$

例2．證下列恆等式爲眞

$$(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3. \tag{1}$$

$$(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)=a^4-b^4. \tag{2}$$

準前法如例 1. 得

$$\begin{array}{l} 1-1+1\ (1) \\ \underline{1+1\qquad\quad} \\ 1-1+1 \\ \underline{\quad 1-1+1} \\ 1+0+0+1,\ \text{即}\ a^3+b^3. \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1-1+1-1\ (2) \\ \underline{1+1\qquad\qquad\quad} \\ 1-1+1-1 \\ \underline{\quad 1-1+1-1} \\ 1+0+0+0-1,\ \text{即}\ a^4-b^4. \end{array}$$

由上例所釋之法可證下列恆等式爲真，前述諸題不過爲其特例而已，即：

於 n 之各正整數得 308

$$(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdot ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b)=a^n-b^n.$$

於 n 之各正奇數，得 309

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdot-ab^{n-2}+b^{n-1})(a+b)=a^n+b^n.$$

且於 n 之各正偶數，得 310

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdot+ab^{n-2}-b^{n-1})(a+b)=a^n-b^n.$$

二項式之諸羃. 用速乘法可計算 $a+b$ 之累次諸羃，因其乘數之係數恆爲 1 + 1，只須記其每次所乘之部分積及其和足矣，因得 311

(1) $1+1$ 即 $a+b$.

(2) $\begin{array}{r}\underline{1+1}\\1+2+1\end{array}$ 即 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

(3) $\begin{array}{r}\underline{1+2+1}\\1+3+3+1\end{array}$ 即 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$.

(4) $\begin{array}{r}\underline{1+3+3+1}\\1+4+6+4+1\end{array}$ 即 $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$=(a+b)^4$.

注意. 各次乘算，其第二部分積之係數即將其第一部分積之係數向右移一位. 加此二部分積之係數而得其鄰方

冪之係數，故僅應用下法：

312 由已知之任一方冪之諸係數各加其前一係數；其和即鄰次方冪之相當係數。

鄰次方冪之一切係數，除首末均爲1外，皆可由此法得之。

如，(4) 之係數相當於 (3) 之 3, 3, 1 者爲 3+1 或 4, 3+3 或 6, 1+3 或 4.

應用此法於 (4), 即得 4+1 或 5, 6+4 或 10, 4+6 或 10, 1+4 或 5.

故

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

$a+b$ 之任意乘數方冪之係數當然可複用此法而得之。

例，試連續求 $(a+b)^6$, $(a+b)^7$, $(a+b)^8$

313 **一次二項因子之積.** 學者當習觀察法以求此數之積，今，

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab. \qquad (1)$$

$$(a_0x+a_1)(b_0x+b_1)=a_0b_0x^2+(a_0b_1+a_1b_0)x+a_1b_1. \qquad (2)$$

於乘積 (1) x 之係數爲 a 及 b 之和而末項爲其積。

於乘積 (2) 其首末一係數爲其因數之首二係數及末二係數積，而中項係數爲“十字乘積” a_0b_1 及 a_1b_0 之和。

例1. 求 $(x+5)(x-8)$ 之積。

$$(x+5)(x-8)=x^2+(5-8)x-40=x^2-3x-40.$$

例2. 求 $(x+3y)(x+10y)$ 之積。

$$(x+3y)(x+10y)=x^2+(3+10)xy+30y^2=x^2+13xy+30y^2.$$

例3. 求 $(2x+3)(4x+7)$ 之積。

$(2x+3)(4x+7)=2\cdot 4x^2+(2\cdot 7+3\cdot 4)x+3\cdot 7=8x^2+26x+21$.

例4. 用上諸法，求下面各積：

$(x-10)(x-15)$，$(3a+4b)(5a-6b)$，$(7x-y)(5x-3y)$.

任意兩個 x 多項式之積. 314

$$(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)(b_0x^2+b_1x+b_2)$$
$$=a_0b_0x^5+(a_0b_1+a_1b_0)x^4+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^3$$
$$+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^2+(a_2b_2+a_3b_1)x+a_3b_2.$$

此積亦為 x 之多項式其次數為各因子之次數之和，而其各項係數可由此法得之，a_h 表 a_0, a_1, a_2, a_3 中之一數及 b_k 表 b_0, b_1, b_2 中之一數；求積之次數與該項 x 之次數之差，然後加其 $h+k$ 等於此差者之一切 $a_h b_k$ 之積。

如求 x^2 之係數，先求其差 $5-2$ 或 3，然後加 a_1b_2, a_2b_1, a_3b_0，即 $h+k=3$ 者之一切 $a_h b_k$ 之積。

此法應用於 x 之任意二多項式 $a_0x^m+\cdots+a_m$ 及 $b_0x^n+\cdots+b_n$ 之積。

設諸因子有真數係數，且可求其積之任一特項之係數。

例1. 於下列積中求 x^{100} 之次數：

$(a_0x^{75}+a_1x^{74}+\cdots+a_{74}x+a_{75})(b_0x^{60}+b_1x^{59}+\cdots+b_{59}x+b_{60})$.

此積之次數為 $75+60$ 或 135，及 $135-100=35$.

故 x^{100} 之係數為 $a_0b_{35}+a_1b_{34}+\cdots+a_{34}b_1+a_{35}b_0$.

同法得 x^{35} 之係數為 $a_{40}b_{60}+a_{41}b_{59}+\cdots+a_{74}b_{26}+a_{75}b_{25}$.

例2. 求次積中 x^3 之係數。

$(3x^4-2x^3+x^2-8x+7)(2x^3+5x^2+6x-3)$.

所求係數為 $(-2)(-3)+1\cdot 6+(-8)5+7\cdot 2$ 或 -14.

例3. 於例1之積求 x^{110} 及 x^{23} 之係數。

例4. 於例2之積求 x^5, x^3, x^4, x^2, 及 x 之各係數。

315 **由巳知恒等式求積。** 下面公式或等式極爲重要且須熟記:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \quad (1)$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \quad (2)$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \quad (3)$$

於上式外尚可增以308, 309, 310, 之公式及下之公式, §311 節:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \quad (4)$$

故文字 a 及 b 可以任何代數式代之, 隨用此諸公式求極多式之積之極簡結果, 觀下例即明。

例1. 求積 $(3x-5y)^2$.

$(3x-5y)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2=9x^2-30xy+25y^2$. 由 (2).

例2. 求積 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=[(x^2+y^2)+xy][(x^2+y^2)-xy]$$
$$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=x^4+x^2y^2+y^4.$$

由 (3), (1).

例3. 下之演算指示步驟:

$$(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)$$
$$=[x+(y+z)][x-(y+z)]\cdot[x+(y-z)][x-(y-z)].$$
$$=[x^2-(y+z)^2]\cdot[x^2-(y-z)^2]$$
$$=[(x^2-y^2-z^2)-2yz]\cdot[(x^2-y^2-z^2)+2yz]$$
$$=[x^2-(y^2+z^2)]^2-4y^2z^2$$
$$=x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2+z^2)^2-4y^2z^2$$
$$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2.$$

觀此特例可由 (1) 及 (4) 以導出求任何多項式之平方及立方之法：

如

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2\,ab+2\,ac+2\,bc.$$
$$(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3\,a^2b+3\,b^2a+3\,b^2c+3\,c^2b+3\,c^2a$$
$$+3\,a^2c+6\,abc.$$

總前諸結果得定理：

任意多項式之平方等於其所有諸項之平方和加其各二 316
項之積之二倍。

例1. 求積 $(a-b+2\,c-3\,d)^2$.

例2. 求積 $(1+2\,x+3\,x^2)^2$.

例3. 求積 $(x^3-x^2y+xy^2-y^3)^2$.

獨項積之方羃. 由任意代數式 A 之 n 次羃可用 317
演算方法化 A^n 式爲極簡之形。

由指數定律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 及 $(ab)^n=a^nb^n$ 導出下法：

累乘獨項 A 至 n 次羃即累乘其數値係數至 n 次方，且 318
以 n 乘各文字因子之指數。

設 A 之符號爲 $-$，則其結果視 n 之爲偶或奇而得 $+$ 號或 $-$ 號。

如 $$(-2\,ax^2y^7)^4=(-2)^4a^4x^8y^{28}=16\,a^4x^8y^{28}.$$

此即複用定律 $(ab)^n=a^nb^n$ 得

$$(-2\,ax^2y^7)^4=(-2)^4a^4(x^2)^4(y^7)^4,$$

且複用定律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 得

$$(-2)^4a^4(x^2)^4(y^7)^4=16\,a^4x^8y^{28}.$$

習題 III

於此諸題應以極捷算法乘之，於特別者，能由分離係數法更爲便利；且用§315之恆等式。

1. 以 $3x^5-2x^4-x^3+7x^2-6x+5$ 乘 $2x^2-3x+1$.
2. 以 $5x^3-3ax^2+2a^2x+a^3$ 乘 $3x^2-ax-2a^2$.
3. 以 $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$ 乘 $x+y$.
4. 以 $3x^3-2x^2+7$ 乘 $2x^3-3x+5$.
5. 由視察以 $7x-2y$ 乘 $4x-5y$.
6. 以 $a^2-ax+bx-x^2$ 乘 $b+x$.
7. 以 $x^4-2x+5x^2-x^3$ 乘 $3+x^2-x$.
8. 以 $2x^n-3x^{n-2}+5x^{n-3}$ 乘 $x^{n-2}-x^{n-3}$.
9. 以 $a^2-ab+3b^2$ 乘 $a^2+ab-3b^2$.
10. 以 $x+3y-2z$ 乘 $x-3y+2z$.
11. 以 $x^2+xy+y^2+x-y+1$ 乘 $x-y-1$.
12. 以 $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab$ 乘 $a+b-c$.
13. 以 $3x-2y+5$ 乘 $x-4y+6$.
14. 以 $x+7y-3z$ 乘 $2x+y-8z$.
15. 求 $(b+x)(b-x)(b^2+x^2)$ 之積.
16. 求 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.
17. 求 $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$.
18. 試作 x^2+x+1 之前四羃係數表.
19. 試作 $a+b$ 之1至10次連續方羃之係數表.
20. 求 $(4x-3y)^2$ 及 $(4x-3y)^3$.
21. 求 $(x+2y+3z-4u)^2$.
22. 求 $(x+2y+3z)^3$; 及 $(x+2y-3z)^3$.
23. 以 $(a+2b)^2$ 乘 $(x-2b)^2$.
24. 於次積內求 x^{28} 及 x^{15} 之係數:

$(a_0x^{27}+a_1x^{26}+\cdots\cdots+a_{26}x+a_{27})(b_0x^{19}+b_1x^{18}+\cdots\cdots+b_{18}x+b_{19})$.

25. 於$(2x^6-3x^5+4x^4-7x^3+2x-5)(3x^5-x^4+2x^3+3x-8)$之積中，求$x^6$,$x^8$及$x^4$之係數。

26. 證明下列之恆等式。

1. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(y+z)(z+x)(x+y)$.
2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.
3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.
4. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc$.

27. 化简下列各冪：

$(2a^2x^3y^7)^5$, $(-x^5y^8z^9)^7$, $(a^2b^mc^3)^{2n}$, $(a^mb^nc^{2n})^n$.

28. 化简下列各乘積：

$(-ab^2c^3)(a^3b)^2(-ac^3)^5$, $(-2x^2y^4)^3(ax^5y^{11})^2$.

除　法

商。 令 A 及 B 表任意二代數式但 B 不等於0. 以 B 除 A 之商意即可用演算法化分數 A/B 爲極簡之形。 319

公式。 欲作此種化法下之公式特別有用。 320

1. $$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}.$$

2. $$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},\ \text{設 } m>n;\ \frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}},\ \text{設 } n>m.$$

3. $$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},\ \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b},\ \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

4. $$\frac{a+b}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}.$$

可用 253 之法證 1,3 及 4

設第三式(非 0)與二式之積相等則此二式相等。

因以 bc 乘 1 式各邊之積爲 ac.

即 $\frac{ac}{bc}bc=ac$; 及 $\frac{a}{b}bc=\frac{a}{b}b\cdot c=ac$. §§ 254, 252.

復次，以 b 乘 3 之第一方程各邊均爲 $-a$，且 $-b$ 乘第二及第三方程之各邊則各爲 a 及 $-a$.

即 $\frac{-a}{b}b=-a$; $\left(-\frac{a}{b}\right)b=-\frac{a}{b}b=-a$. §§ 298, 254.

末後以 d 乘 4 之兩邊爲 $a+b$.

即 $\frac{a+b}{d}d=a+b$; $\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}\right)d=\frac{a}{d}d+\frac{b}{d}d=a+b$. §§ 254, 252.

公式 2 爲公式 1 之特例。

如設 $m>n$, $a^m=a^{m-n}\cdot a^n$. § 256

故 $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{m-n}a^n}{a^n}=a^{m-n}.$$ 由 1

321 **化簡 A/B 法.** 公式 1,2 及 3 示以下面方法化簡 A/B.

1. 消去分子分母之公因數。

2. 設分子分母含有同文字(或式)之不同羃之因子。可由其高方羃之指數減去低方羃之指數而消去其低方羃，

3. 依分子分母之爲同號或異號而予其商以 + 或 − 號。

如 $\frac{bca^5}{ca^2}=ba^{5-2}=ba^3$, 及 $\frac{a^2}{-a^7}=-\frac{1}{a^{7-2}}=-\frac{1}{a^5}$.

322 **獨項除法.** 由除法定義及 320 節，4 導出次法。

1. 以一獨項式除一獨項式，即書被除數於除數之上所成之分數，且化簡之。

2. 以一獨項式除多項式，即以除數除被除數各項，且加其所得諸商。

如，$-8a^3b^2c\div 6ab^6d=\dfrac{-8a^3b^2c}{6ab^6d}=-\dfrac{4a^2c}{3b^4d}$，消其公因子 $2ab^2$ 且應用符號規則。

復次，$(ax^3-4a^2x^2)\div ax=\dfrac{ax^3}{ax}-\dfrac{4a^2x^2}{ax}=x^2-4ax$.

若 d 與 a 及 b 無公因子，則化其商 $(a+b)/d$ 較 $a/d+b/d$ 爲尤簡之形。

以多項式除多項式之法。 設 A 及 B 爲有公因子之二多項式，其商爲消去其公因子之 A/B 式。 323

如 $A=x^2-y^2$，$B=x^2+2xy+y^2$ 其商爲 $(x-y)/(x+y)$

因 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\dfrac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}=\dfrac{x-y}{x+y}$.

第五章將示求二多項式公共因子法，該法稱爲長除法。

複式。 注意 $a\div b\times c$ 意即 $\dfrac{a}{b}c$，若 $a\div bc$ 同於 $a\div(b\times c)$ 意爲 a/bc. 324

本章所謂複式即以陸續乘除所表之一數，於特例求

$$a\times(b\times c\div d)=a\times b\times c\div d, \qquad (1)$$

$$a\div(b\times c\div d)=a\div b\div c\times d, \qquad (2)$$

設撤消(1)之括弧其括弧內之 $\times$ 及 $\div$ 號不變，但(2)之各號 $\times$ 變爲 $\div$ 而 $\div$ 變爲 $\times$.

習題 IV

1. 以 $10ab^2c^2$ 除 $15a^3bc^2$.
2. 以 $-100ax^7z^9$ 除 $75x^2y^4z^{10}$.
3. 以 $28x^my^{m+n}$ 除 $-35x^{2m}y^n$.
4. 以 $-18\{a(b^2c)^2\}^3$ 除 $-54\{(ab^2)^2c\}^5$.
5. 以 x^2-y^2 除 x^2y-xy^2.
6. 以 $(x-y)(x^2-xy+y^2)$ 除 $(x^3-y^3)(x^3+y^3)$.
7. 化簡 $\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{(b-a)(c-b)^2(a-c)^3}$.
8. 化簡 $\dfrac{30a^2b^3c^4-25a^3b^2c^5+20a^4b^4c^7}{-5ab^2c^3}$.
9. 化簡 $\dfrac{3(x-y)^4-2(x-y)^3+5(x-y)^2}{(y-x)^2}$.
10. 化簡 $4a^7\times(3ab^3c^2)^2\div(abc)^2\div 6bc$.
11. 化簡次式(1)由括號所表之順序演算，(2)先撤去其括弧而後算之。

$$a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}.$$

12. 以何式乘 $2a(x^2y^3)^2$ 得 $-4a^2(x^3y^2)^2$?

III. 一元之一次方程式

條件方程式

325 $3x-4$ 及 $x+6$ 二式並非恆等式，281 節，故此二式之值於 x 之所有諸值不等，設問"於 x 之何值始致此二式之值相同？"則先假定二式相同，而記此一命題為：

$$3x-4=x+6.$$

由此構成之式稱為條件方程式(*Conditional equation*)，因其記述以此"未知文字"而滿足之條件也。此種目的即

限用x能滿足此條件之值，當 $3x-4$ 及 $x+6$ 之值相同時此值為眞，且僅此值為眞耳。

同理 $x+y=0$ 為二未知文字 x 及 y 之方程式，總之，

設 A 及 B 式非恆等式，則 $A=B$ 為條件方程式。此方程 326
式意為："假定 A 及 B 有等值"且限制 A 及 B 內之未知文字僅有令此假定為眞之值。

以方程 $A=B$ 而限定其值之文字，稱為方程之未知字(*unknown letters*)。

因此知凡方程式，意均為"條件方程。"

設方程式內文字只有未知文字，如 x, y, z,稱之為數字 327
方程(*numerical equation*)；若尚有已知文字，如 a, b, c, 者則稱為文字方程式(*literal equation*)。

如，$2x-3y=5$ 為數字方程，而 $ax+by=c$ 為文字方程，文字方程不限制其已知文字之值。

設 A 及 B 關於其未知文字均為有理整式，則 $A=B$ 稱 328
為有理整方程式，設 A 或 B 為無理式或分式，其方程亦稱為無理方程或分數方程。

於此類中僅就其未知文字之為無理式或分式而言，不計其眞數及已知文字之形。如 $\sqrt{2}x+y/b=c$ 為有理整方程式。

有理整方程式化為極簡後，§340,其最高次項之次數 329
稱為該方程式之次數。

如 $ax^2+bx+c=0$ 之次數為二；$x^3z^2+y^4=b$ 之次數為五，凡次數均由諸未知文字而定，且只就此類文字而定之。

330 一次方程式常稱爲最簡方程式；其二次，三次，四次者各稱爲二次方程，三次方程，四次方程。

331 含一未知數 x 之方程式限 x 之值有一定個數，稱滿足此方程式之 x 值爲方程之解答或根，故

332 含 x 之方程之根爲眞數或已知文字式，設以之代入 x 能令此方程成恆等式。

如，1 及 -2 爲方程 $x^2+x=2$ 之根；因 $1^2+1\equiv 2$ 及 $(-2)^2+(-2)\equiv 2$ 故也。

復次，$a-b$ 爲 $x+b=a$ 之根，因 $(a-b)+b\equiv a$.

333 註1. 方程亦可無根；因其能述無一數可滿足之條件。

如，無定數可滿足方程 $x+2=x+3$.

2. 凡含 x 且有根之各方程，x 僅爲其諸根之一或其他之符號；實則方程式僅爲以各根代入 x 而得幾個實在恆等式之假想恆等的代替式。

如，$x^2+x=2$ 僅爲二恆等式 $1^2+1=2$ 及 $(-2)^2+(-2)=2$ 之代替式。

解方程式法

334 解一未知文字之方程即求其所有諸根，或證其無根。

上之理由及演算詳於下例。

例1. 解方程 $3x-4=x+6$.

先假定 x 必有一值令此方程爲眞，其理如次：

設 $3x-4=x+6$, (1)

則 $3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4)$, (2) § 249

或 $2x=10$, (3) § 300

故 $x=5$. (4) § 253

故設 $3x-4=x+6$, 則 $x=5$. (a)

前證之命題(*a*)意謂若(1)常眞，須 $x=5$，或能充(1)之根之唯一數爲5；然非謂5爲(1)之根，此後半句命題爲

$$設\quad x=5,\ 則\ 3x-4=x+6. \qquad (b)$$

而(*b*)與(*a*)不同，蓋其倒語也。

以5代入(1)內 x 可證5爲(1)之根；因可得眞確恆等式 $3\cdot5-4\equiv5+6$ 故也。

但除非核驗演算之精度此層並不需要，因凡一眞確命題均能以可逆之演算證明之，故常可斷定其逆爲眞，§ 293，而(*a*)式即可爲例，因若由(4)而導出(1)以補足此逆算層次則得其完全逆算，如

$$\begin{array}{lll}
設 & x=5, & (4)\\
則 & 2x=10, & (3)\ §\ 253\\
或 & 3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4). & (2)\ §\ 300\\
故 & 3x-4=x+6. & (1)\ §\ 249
\end{array}$$

故以可逆演算證命題(*a*)已同時證明其逆命題(*b*)，即不但證明除5外無他數可爲(1)之根，且已證5本數爲(1)之根。

例2.　解方程　$x^2=9$.

$$\begin{array}{lllll}
設 & x^2=9. & & & (1)\\
則 & x=3, & (2)\quad 或 & x=-3, & (3)\ §\ 257
\end{array}$$

故(1)除3及 -3 外無他根。

但3除 -3 均爲(1)之根，因自(1)導出之方程(2)及(3)之每個所演之步驟爲可逆故也。如，自(2)且自(3)可得(1)，257節。

上例釋明下之普通原則。

求含 x 之方程之根，應先假設此方程爲恆等然後由演 335

算法則自該式以求形如 $x=c$ 之諸方程。

由上法導出之諸 x 諸方程 $x=c$ 之一當 x 有一 c 值其演算爲可逆的，即可斷定 c 爲一根；設補全其逆算層次，即知其演算爲可逆的。

336　用演算法自一方程導出之 x 某值並未證其爲根，此須記憶之要則，須逆算之以證實此推斷。

如，自　$x-2=0,$　(1)

因得　$(x-2)(x-3)=0,$　(2)　§ 253

故　$x=2$, 或 $x=3$.　(3)　§ 253

然不應書此矛盾推斷 3 爲(1)之根，因若 $x=3$ 則不能逆其演算，即不能以 $x-3$ 除 (2) 之兩邊，因此除數 $x-3$ 爲 0 故也。

換言之，若 $x=2$ 則能逆算，因 $x-3$ 非 0 而爲 -1；於是 2 爲 (1) 之根。

變換定理

337　由上述之理可於方程之演算法之任何正當應用視爲合理之變換；且設此種變換爲可逆的，可知其方程之根不變，故得下定理：

338　**定理1.**　下面方程之變換法，其根恆保持不變，即

1. 分用 § 259 之結合法則於各邊。
2. 加有定值之任意式於兩邊，或自兩邊減之。
3. 以同一常數(非 0)乘或除其兩邊。

因含此變換法之諸算法爲可逆故也。259 節。

茲述 2 及 3 之證如下；

設 A 及 B 表含 x 之二式，則方程 $A=B$ 之根，爲以之代入 A 及 B 中 x 能令 $A=B$ 之諸數，§ 332.

然於致 $A\equiv B$ 之 x 任一值及定數 C 必能令 $A+C\equiv B+C$，逆之亦然，§ 249；故 $A=B$ 之根與 $A+C=B+C$ 者相同。

復次，設 c 表非 0 之任意常數，於致 $A\equiv B$ 之 x 任一值必能令 $cA\equiv cB$，逆之亦然，253 節；故 $A=B$ 之根與 $cA=cB$ 之根相同。

如 § 334 第一題，方程

$$3x-4=x+6, \qquad (1)$$

$$3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4), \qquad (2)$$

$$2x=10, \qquad (3)$$

$$x=5. \qquad (4)$$

均有此同根 5.

式(2)用變換法 2 自(1)導來，(3)式用變換法 1 自(2)導來，及(4)式用變換法 3 自(3)得之。

系． 下面方程之變換法，其根恆保持不變，即：

1. 遷某項自一邊至他邊而變其號。
2. 消簡兩邊之諸項。
3. 變兩邊所有諸項之號。

因 3 等於以 -1 乘兩邊，而 1 及 2 等於自方程兩邊減該欲變之項。

如，設自兩邊 $\quad x-a+b=\quad c+b$

減 $\quad -a+b=-a+b \qquad (1)$

得 $\quad x\quad=\quad c+a \qquad (2)$

此減算之效力爲消去 (1) 兩邊之 b 且自左邊遷 $-a$ 於右而變其號。

用 §§ 338, 339 諸變換法，於 x 之有理整方程，不變其根，可化標準式。 340

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

方程凡能化爲此形者即能規定其次數。§329，多於一個未知文字之有理整方程，亦可以同法化之。

如，$x^2+3x+5=x^2-4x+7$ 可化爲 $7x-2=0$ 故其次數爲一，非二也。

341 **定理2.** 設 A, B, 及 C 爲整式，則方程

$$AC=BC,$$

與下二方程有同根：

$$A=B \quad 及 \quad C=0.$$

因 x 能令 $AC\equiv BC$ 之任一值必能致 $A\equiv B$ 或 $C\equiv 0$；及其逆，x 之任一值能令 $A\equiv B$ 或 $C\equiv 0$ 必能致 $AC\equiv BC$，§§251，253.

此證明中假定 A, B, C 代入 x 之值均有定值，如上設 A, B, C 爲整式則此假定常眞；若 A, B, C，爲分式，則不常眞。

於特例，若 A 及 C 爲整式，則方程 $AC=0$ 之根同於二方程 $A=0$ 及 $C=0$ 之諸根。

如，方程 $x^2=3x$ 之根同於二方程 $x=3$ 及 $x=0$ 之根，即3與0.

同理 $(x-1)(x-2)=0$ 之根，同於二方程 $x-1=0$ 及 $x-2=0$ 之根，即1與2.

342 故同以整函數 C 乘定方程之兩邊所生之影響爲增入外根，即方程 $C=0$ 之根，反之，於整方程式 $AC=BC$ 之兩邊消去相同整因子 C，必失去一根或數根，即 $C=0$ 之根。

他如於分數方程，若以其分母諸因子之最低公倍乘其兩邊常無外根增入。

如，設方程爲 $1/x=1/(2x-1)$，而以 $x(2x-1)$ 乘其兩邊得 $2x-1=x$，其根爲1，若1非爲 $x(2x-1)=0$ 之根，則並無他根增入。

系。 整方程 $A^2=B^2$ 之根等於二方程 $A=B$ 及 $A=-B$ 之諸根。 343

因 $A^2=B^2$ 與 $A^2-B^2=0$ 有同根，§339，且因 $A^2-B^2\equiv(A-B)(A+B)$，故方程 $A^2-B^2=0$ 與二方程 $A-B=0$ 及 $A+B=0$ 有等根， §341，故與二方程 $A=B$ 及 $A=-B$ 有等根， 339.

如，方程 $(2x-1)^2=(x-2)^2$ 之根與二方程 $2x-1=x-2$ 及 $2x-1=-(x-2)$ 有等根，即 -1 與 1.

故方程 $A=B$ 兩邊同時平方之影響為增入外根，即方程 $A=-B$ 之根，反之，自 $A^2=B^2$ 化成簡單方程 $A=B$ 之影響為失去某根，即方程 $A=-B$ 之根。 344

因 $A^n-B^n\equiv(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+B^{n-1})$ 345
§308. 由 §343 之理，知 $A^n=B^n$ 之根為 $A=B$ 並 $A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+B^{n-1}=0$ 之根。

如，因 $x^3-1\equiv(x-1)(x^2+x+1)$，方程 $x^3=1$ 與方程 $x=1$ 及 $x^2+x+1=0$ 有同根。

338 至 345 節所釋諸定理，適用於多於一個未知文字之方程，設有文字根，則以文字解答代入之，視 §355. 346

如，由 §339，方程 $x+2y-3=0$ 與方程 $x=-2y+3$ 有等根，即 x, y 能滿足 (1) 之各組值亦必滿足 (2)，逆之亦然。

等根方程。 設二個或多個方程有同根(或解答)稱之為等根方程。 347

如 §338 方程 $A=B$ 及 $A+C=B+C$ 為等根者，復次 §341，方程 $AC=BC$ 對於 $A=B$ 及 $C=0$ 為等根者。

但 $x^2=9(1)$ 及 $x=3(2)$ 雖均有根 3，非為等根，因(1)尚有 -3 一根，而 (2) 則無之。

簡單方程之解法

348 由§§338, 339之變換定理則能導出下面含一未知文字x之簡單方程之解法。

欲解含x之簡單方程，先化為$ax=b$之形，再

1. 設$a\neq 0$，此方程有獨根b/a.

2. 設$a=0$，而$b\neq 0$則此方程無根。

3. 設$a=0$及$b=0$，此方程為一恆等式。

設方程有分數係數，通常先以諸分數之最小公倍，乘其兩邊各項，此計算稱為清理分數方程。

然後遷其未知項於左邊及已知項於右邊，且合併其各邊之同類項而化此方程為$ax=b$之形，若擬驗其結果可代之於已知方程之x.

例　　解$\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{x}{6}-(4-x)$.

以最小公倍6乘其兩邊，清理其分數。

則　　$4x-3(x-2)=x-6(4-x)$.

或　　$4x-3x+6=x-24+6x$.

遷項且合併，　$-6x=-30$.

故　　$x=5$.

驗算：　$\dfrac{2\cdot 5}{3}-\dfrac{5-2}{2}=\dfrac{5}{6}-(4-5)$.

例2. 解$mx+n=px+q$.

遷項且合併，$(m-p)x=q-n$.

設$m\neq p$，此方程有獨根$(q-n)/(m-p)$.

設$m=p$，而$q\neq n$，則無根。

設$m=p$，及$q=n$，則為恆等式，於x之各值均能滿足之。

例3. 解 $(x+a)(x+b)=(x-a)^2$.

展之 $x^2+(a+b)x+ab=x^2+2ax+a^2$.

消去 x^2, 遷移且合併諸項。

則 $(3a+b)x=a^2-ab$,

故 $$x=\frac{a^2-ab}{3a+b}.$$

方程之根有時能以觀察得之，設爲簡單方程能知其並 349
無他根，然後完全解之。

例。解 $(x-a)^2-(x-b)^2=(a-b)^2$.

此當然爲一簡單方程，設 $x=b$ 即化之爲恒等式 $(b-a)^2=(a-b)^2$，故其根爲 b.

設 A 及 B 表 x 之一次整式，則方程爲 $AB=0$ 形者之 350
根可解二簡單方程 $A=0$ 及 $B=0$ 而得之。§341，同理，設 A, B, C 均爲一次式，則 $ABC=0$, $AC=BC$, 及 $A^2=B^2$ 之根，可解§§341, 343 所示簡單方程而得之。

例1. 解 $(x-2)(x+3)(2x-5)(3x+2)=0$.

此方程與下列四方程爲同根，§347.

$$x-2=0,\quad x+3=0,\quad 2x-5=0,\quad 3x+2=0.$$

故其根爲 $2, -3, 5/2, -2/3$.

例2. 解 $4x^2-5x=3x^2+7x$.

此方程與下列二方程爲同根:

$$x=0 \text{ 及 } 4x-5=3x+7.$$

故其根爲 0 及 12.

習　題　V

解下列方程。

1. $15-(7-5x)=2x+(5-3x)$.
2. $x(x+3)-4x(x-5)=3x(5-x)-16$.
3. $(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)=0$.

4. $x=1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}$.

5. $x-2[x-3(x+1)-5]=3\{2x-[x-8(x-4)]\}-2$.

6. $2\{3[4(5x-1)-8]-20\}-7=1$.

7. $\frac{1}{2}\{\frac{1}{3}[\frac{1}{4}(\frac{1}{5}x-1)-6]+4\}=1$.

8. $3-\frac{5-2x}{5}=4-\frac{4-7x}{10}+\frac{x+2}{2}$.

9. $\frac{3x-1}{3}+3=-\frac{x-4}{6}+\frac{3x+5}{4}-2\frac{1}{4}$.

10. $\frac{5x-.4}{.3}+\frac{1.3x-.05}{2}=\frac{13.95-8x}{1.2}$.

11. $3cx-5a+b-2c=6b-(a+3bx+2c)$.

12. $(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)+(a-b)(c-x)=1-x$.

13. $\frac{x+1}{a+1}+\frac{x}{a}=2$，由觀察。

14. $\frac{x+1}{a+b}+\frac{x-1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}$.

15. $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)x=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2x$.

16. $(2x-1)(3x-1)(4x+1)(5x+2)=0$.

17. $(x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9)$.

18. $(x+2)^3-(x-2)^3=32x+16$.

19. $[(a+b)x-c]^2=[(a-b)x+c]^2$.

20. $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0$.

應用問題

351 **解應用題**。下列問題為由已知關係以求某未知數之值，此所求數，與已知數間相互關係稱為問題之條件。

各式中常以文字 x 表未知數之一，則已知條件能以含 x 諸式表其餘未知數而連結此諸式構成簡單方程，即以代

數符號作問題之記錄，因解之以求 x. 設問題有幾個解答，必爲所求 x 之值，連同其他未知數之相當值。

然有時所得 x 值並非問題之解答。因此問題可於未知數之性質上加以限制，如限爲整數，而譯此問題之記述於 x 之方程則未表此限制也。 352

故已求得之方程中 x，在承認爲此題之解答前，須注意其結果是否爲所求種類之一數，設非其類，則斷定此題爲不能解。

例1. 有二位數其數字之和爲 12. 設逆其數字之順序則得一數爲原數之 4/7，其數爲何？

此題有四未知數即十位數，個位數，該數之值，及逆其數字之數之值；然此四數均可以其個位數或十位數表之。

如令 $x=$ 十位數。

則 $12-x=$ 個位數，

$10x+(12-x)=$ 所求數之值，

$10(12-x)+x=$ 逆其數字順序之數值。

由此題之其餘條件，得

$$10(12-x)+x=\tfrac{4}{7}[10x+(12-x)]. \qquad (1)$$

解之，得 $x=8$. 此根爲小於 10 之整數，可爲此題之答，因此，$12-x$ 或 4 亦眞，故所求數爲 84.

注意，若此題略加更改即不能解，如設逆其數字之順序得兩倍該數之值，以代 (1)，得方程

$$10(12-x)+x=2[10x+(12-x)]. \qquad (2)$$

解(2),得 $x=32/9$, 爲一分數不能作此問題之答。

353 設用問題以計量,如時間等,注意用代數文字述題意時,並非表量之本體,僅爲已知單位之度數而已。尤須慎記以文字表已知或未知同類量之度數時須用同一單位。

例1. 一池有進水管 A,三小時可以流滿,及一放水管 B,3小時又四十分可以放盡,設兩管齊開開幾時後可注滿此空池?

令 x 表所求時間之數。

則 $1/x$ 爲 A 及 B 同開一小時流入之水量。

但 A 獨開一小時注入量爲 $1/3$.

且 B 獨開一小時洩出量爲 $1/3\frac{2}{3}$ 或 $3/11$ (指池內全水量而言)。

故 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{3}{11}, \text{或 } \frac{2}{33}.$$

故得 $x=33/2$ 小時,或16小時30分。

例2. 一水手在河內以15分鐘逆流划行2哩;若於順流則10分足矣,問流速若何?又其在靜水中划行速度若何?

令 $x=$ 每分鐘水流之哩數。

水手逆流之划速爲每分鐘 $2/15$ 哩,於靜水中爲 $2/15+x$ 哩。

水手順流之划速爲每分鐘 $2/10$ 或 $1/5$ 哩,於靜水中爲 $1/5-x$.

故 $$\frac{2}{15}+x=\frac{1}{5}-x.$$

因得 $$x=\frac{1}{30}\text{ (每分鐘哩數)}.$$

及 $$\frac{2}{15}+x=\frac{1}{6}\text{ (每分鐘哩數)}.$$

例3. 在二點三點之間,何時分針與時針指反對方向?

令 $x=$ 二點後所求時間之分數。

因分針自 XII 起而行 x 分之距離。

時針在分針前 10 分之 II 處起程，但其速度僅為分針 1/12.

故分針在 XII 後之距離為 x 分，而時針在 XII 後之距離為 $10+x/12$ 分。

然由此問題之條件，於所求時間，分針應在時針之前相距 30 分。

故　$$x=\left(10+\frac{x}{12}\right)+30.$$

解之，　$$x=43\tfrac{7}{11}\text{分}.$$

故在二點後 $43\frac{7}{11}$ 分，或三點前 $16\frac{4}{11}$ 分二針指反對方向。

於問題之記述中有時以文字 a, b, c 表已知數，所得 x 之 354
值為 a, b, c 所表之式，此式為此諸字（非他種字）組成之定值，僅表此問題之許可解答者，下面問題之討論，如郵差問題，即說明此目的。

例。　二郵差 A 及 B 沿同路各以每時 m 及 n 哩之速度同向而行。起程時 B 在 A 前 d 哩，問二人何時相遇？

令 $x=$ 至彼等相遇所行之小時數。

則 A 行 mx 哩，及 B 行 nx 哩；且因 B 在 A 前 d 哩，

得　$$mx=nx+d. \tag{1}$$

$$(m-n)x=d, \tag{2}$$

故　$$x=\frac{d}{m-n}\text{小時。} \tag{3}$$

1.　設 A 追及 B, x 之值須為正；且因假設 d, m, n 皆表正數，故必須 $m>n$. 此適合於設 A 欲追及 B, 其行必速於 B 之當然事實。

2.　若設 $m<n$, x 得一負值，茲可解釋其意為 A 及 B 曾在 $a/(n-m)$ 小時以前相遇。

3. 設 $m=n$, 則無適當解釋, 因自 (1) 導至 (3), 含有以 $m-n$ 或 0 為除數之演算, 但可至(1)導至(3)設 m 及 n 有些微之差, 此意關係非小, 設於(3)內以 m 為變數, 雖常大於 n 但繼續漸近而等於 n, 則分數 $d/(m-n)$ 亦成變數繼續增大而至無限, § 510. 此諸理論合於下述事實, A 之速度超過於 B 者漸小, 則 A 追及 B 所需之時間漸長, 設其速度, 等於 B 之速度, 則 A 永不能追及 B 也.

習 題 VI

1. 有二位數, 其數字和為 14, 若易數字之序, 則較原數增 18. 問原數為何?

2. 何數除 156, 其商為 11, 餘數為 2?

3. 有二數, 其差為 298, 若以小數除大數, 商及餘數皆為 12. 二數為何?

4. 有二位數, 其十位數字為個位數字之二倍, 如十位數字加 1, 個位數字加 5. 則為先倒其次序再自十位數字減 1, 個位數字減 5 之數之三倍, 問該數為何?

5. 某數減 2 且以 4 乘其差, 其結果與二倍某數加某數減之半相等, 某數為何?

6. 父現年為子之四倍, 20年後, 父年為子年之二倍, 問父子現年各若干, 又若干年後, 父年為子年之三倍?

7. 一小池以第一管注水, 3 小時可滿, 以第二管洩水 2 小時可盡, 以第三管洩水, 4 小時可盡, 設池中滿盛清水, 而三管齊開, 問須若干時後池水方能洩盡?

8. A 與 B 同作一工程 10 日可成，但 7 日後，A 因病休工，B 於 5 日內單獨完成，問每人獨作，各須幾日？

9. 時鐘之二針，於八時至九時間，何時成同一方向？何時成相反方向？

10. 錶之二針，當四時後何時成直角？

11. 有一不正確之時鐘，於時針與分針連續相疊合時須間隔 66 分鐘，問時鐘錯誤幾何（每小時若干秒）？

12. A, B, C, D 四人分洋 1300 元，B 爲 A 之 $\frac{2}{3}$, C 爲 B 之 $\frac{2}{3}$, D 爲 C 之 $\frac{2}{3}$, 問各得洋若干？

13. 某富翁將其財產 $\frac{1}{2}$ 及 1000 元給長子；餘數 $\frac{1}{2}$ 及 1000 元與次子；又以其餘之 $\frac{1}{2}$ 及 1000 元與三子仍餘 3500 元，問全產總數若干？

14. 若加二呎於正方形之各邊上，則面積加大 100 方呎，問原正方形之面積如何？

15. 某旗竿之高不知；但知升旗之繩結於竿頂者，較竿長 2 呎，且繩之末端可達距離竿足 18 呎之點，求竿高。

16. 袋中有各種銀幣若干，設一元者之個數爲半元者之二倍，一角者之三倍，如銀之總數爲 11.50, 問三種銀幣各若干枚？

17. 某人存欵 5000 元，利率一部爲 6% 一部爲 4%，其存欵全部之平均利率爲 $5\frac{1}{2}$%，問此人於二種利率之下，各存銀若干？

18. 有每磅價洋 20 分及 30 分之咖啡二種，問以何種比例混合之，始成每磅價洋 26 分？

19. 有銀與銅之合金一磅，含銀二份，銅三份，問須再加銅若干，始得三成銀，七成銅之合金？

20. 設於一磅之某液體內，加入某量之水，則此液體中含酒精 30 %；如加二倍某量之水，則含酒精 20%，求每次加水若干及酒精在原液體中之百分比。

21. 火車一列速率每小時 45 哩，於晨 10 時自 P 城開向 J 城，另一列，速率每小時 50 哩，於晨 10 時 30 分自 J 城開向 P 城，設二城距離 90 哩，二車何時相遇，且相遇處距離 J 城若干哩？

22. 設二車起始開行之時間仍如上題所述，且相遇於 J 城及 P 城間之中點，如慢車之速率爲快車之 $\frac{4}{5}$，問二車之速率爲何，又於何時相遇？

23. 有兎爲狐所逐，二者相距爲 50 兎步，設兎行 5 步時狐行 4 步，但狐行二步之距離適當兎之三步，問兎再行若干步，即爲狐追及？

24. 金十九兩，置於水中重十八兩，銀十兩置於水中重九兩，今有二者之合金，於空氣中重 387 兩，於水中重 351 兩，問含金銀各若干。

25. 某旅客起程，每日用其囊中金之 $\frac{1}{2}$ 又 2 元，至第三日，其金告罄，問此人共帶洋若干？

26. 設角錐體之底爲一正方形，其四面各三角形高線之長與底邊之長相等，若底邊與高各增 3 吋，則角錐體之面積增 117 方吋，問角錐體之面積爲何？

27. 有二位數，其二數字之和爲 a，如變換數字之次序，則該數增 b，問此數爲何？試證此答數僅適於 $9a \geqq b$ 及 $9a+b$ 與 $9a-b$ 適被 18 除盡者。

28. 設 A, B 二人之現年爲 a 與 b，問能否，且何時 A 年適爲 B 年之 c 倍？

討論結果中 a, b, c 之諸值，如 354 節。

IV. 聯立一次方程組

聯立方程

含二文字 x 及 y 之一條件方程可以此文字之無限對值 355
滿足之。茲稱其各對之值爲方程之解答。多於二未知文字之一方程亦然。

如，方程 $2x+y=3$ (1) 設予 x 以任意值而 $3-2x$ 之值相當於 y. 於 (1) 內代任一數 b 於 x 且代 $3-2b$ 於 y, 則得一眞實恒等式 $2b+(3-2b)\equiv 3$.

如，$x=0, y=3; x=1, y=1; x=2, y=-1; \cdots$ 均爲 (1) 之解答。

註. 於研究中設有二未知文字 x, y, 則方程 $x=2$ 意 356
謂 x 值恒爲 2. 而 y 有任何之值；換言之，方程 $x=2$ 有無限多個解答，同此，凡定諸未知文字之一字之方程均有無限解答。

故擬求能否有一對 x 及 y 之值同時適合於二已知方程 357
中之 x 及 y. 此對之值通常可以存在。

如兩方程 $2x+y=3$ 及 $4x+3y=5$ 則 $x=2$ 及 $y=-1$ 均能適合；因 $2\cdot 2+(-1)\equiv 3$, 及 $4\cdot 2+3(-1)\equiv 5$.

聯立方程. 設各未知文字於諸方程內代表同數，則 358
此含定數未知文字之兩個或多個方程稱爲聯立方程 (*simultaneous, equations*).

如，方程 $2x+y=3$ (1) 及 $4x+3y=5$ (2)，x 於 (1) 於 (2) 均表同數，且 y 亦然，則 (1) 及 (2) 為聯立方程。

諸方程中之各式未必全含各未知文字，如 $x=2$, $y=3$ 亦可組成一對聯立方程。

359 尋常聯立方程之個數只許等於或少於未知數之個數。

如兩方程 $x=2$ 及 $x=3$ 不得為聯立方程，因不能同時為不同之兩數故也。

360 未知數一組解答能合於聯立方程組者稱為該組之解答。

如 $x=2$, $y=-1$ 為 $2x+y=3$, $4x+3y=5$ 之解答。

361 解聯立方程組即求其解答或證明其無解答。

362 解法之理由與 §§ 334, 335 所述相似。

如 x 及 y 之方程先假定確有一對解答適合之，在此假定內而計算之恆等式法則皆可適用，用法則之幫助則可將方程變為一對(或數對) $x=a$, $y=b$ 之形，如此所得之 $x=a$, $y=b$ 設用逆算步驟仍導回原方程式，即可斷定 a, b 為其解答之一，因此演算為可逆故也。

上面所含之唯一新原則如下：

363 **代替原則．** 設由諸已知方程確能以同組數值適合之假定，而得一對 A, B 式之值，則可以其一式代入方程中之任何其他同文字。

例。解 $$2x+y=12. \qquad (1)$$
$$y=8. \qquad (2)$$

由假定 x 及 y 均適合於兩方程，在(2)內，y 之值爲 8，故在(1)內 y 之值亦爲 8，以 8 代 y 於 (1)，則得

$$2x+8=12 \qquad (3)$$

是以 $$x=2. \qquad (4)$$

所以若 (1)，(2)有解答，其解必爲 $x=2, y=8$.

反之 $x=2, y=8$ 爲(1)，(2)之解答，故自(1)，(2)至(4)，(2)之演算爲可逆者。

如由 (4) 得 (3)，且由 (3)，(2) 而得 (1).

註1. 替代原則實爲等式法則之步驟，§§249, 253, 257，及等式之尋常法則：若 $a=b$，$b=c$ 則 $a=c$，§261. 364

茲證明替代無誤如下：

若 $y=8$，則 $y+2x=8+2x$，或 $2x+8=2x+y$，§249.

又若 $2x+8=2x+y$ 及 $2x+y=12$，則 $2x+8=12$ §261.

註2. 自然此原則只用於眞正聯立方程。 365

如自 $x=2$ 及 $x=3$，則不能書成悖謬，結果 $2=3$，因 $x=2, x=3$ 非眞正聯立方程故也。

變換定理

觀察上述，凡一對方程演算法則之任意正確應用可視爲此對方程之合法變換；且設其變換爲可逆者，則可斷定此對解答不變。 366

故下諸定語，能適用於任何多個未知文字之方程。

定理1. 設分別應用 338, 339 節之變換，則方程之一對解答不變。 367

因用此變換法每個方程之解答不變。

如一對方程 $3x-2y=1$ 及 $y-2x=5$ 與 $3x-2y=1$ 及 $y=5+2x$ 之解答相同。

363 **定理2.** 一對方程。

$$y=X,\quad f(x,y)=0$$

之解答與 $y=X, f(x,X)=0$ 之解答相同。

此處 X 表 x 之任一式(或常數), $f(x,y)$ 表 x 及 y 之任一式, $f(x,X)$ 表以 X 代 y 於 $f(x,y)$ 之結果, § 280.

此定理僅爲替代原則之特例。

如一對方程 $y=x+2$ 及 $3x-2y=1$ 之解答與 $y=x+2$ 及 $3x-2(x+2)=1$ 之解答相同。

369 **定理3.** 一對方程

$$A=B,\qquad C=D.$$

之解答與 $A+C=B+D$, $C=D$ 之解答相同。

因 $A=B$, $C=D$ 之解答與 $A+C=B+C$, $C=D$ 之解答相同, §338, 及 $A+C=B+C$, $C=D$ 之解答與 $A+C=B+D$, $C=D$ 之解答相同, § 363.

如 $x+y=5$ 及 $x-y=1$ 之解答與 $x+y+(x-y)=5+1$ 及 $x-y=1$ 之解答相同。

故亦與 $2x=6$ 及 $x-y=1$ 之解答相同。

370 **推論.** 由 § 369 之定理可知以常數(非 0)乘各已知方程兩端其解答不變, 故

若 K 及 L 表任何常數(非 0), 則一對方程 $A=B$, $C=D$ 之解答同於二方程 $KA\pm LC=KB\pm LD$, $C=D$ 之解答。

定理4.　設 A, B 及 C 均爲整式，則二方程 $AB=0$, $C=0$ 之解答與 $A=0$, $C=0$ 及 $B=0$, $C=0$ 二對解答相同。

因 $AB=0$ 之解答同於 $A=0$ 及 $B=0$ 之解答，　§ 341.

故 $AB=0$, $C=0$ 之解答同於 $A=0$, $C=0$ 及 $B=0$, $C=0$ 共有之解答。

如 $xy=0$ 及 $x+y=2$ 之解答。

則　$x=0$ 及 $x+y=2$,

　　$y=0$ 及 $x+y=2$

共有之解答。

同組.　兩組聯立方程之解答相同者謂之同組。 372

如一對方程 $x+2y=5$, $2x+y=4$ 與一對方程 $3x+y=5$, $4x+3y=10$ 之解答同爲 1, 2 是爲同組。

又一對 $xy=0$, $x+y=2$, 與兩組 $x=0$, $x+y=2$ 及 $y=0$, $x+y=2$ 爲二同組。

消去法．一對簡單方程之解法.

消去法.　自一對方程消去一未知數 x 即由此二方程導出一不含 x 之新方程。 373

玆進而說明自含 x, y 之二方程消去 x 或 y 之最常用之法，且由此結果導出方程之解法。

代替法.　(*method of substitution*) 此法根據於 368 節定理。 374

例，解：

$$x+3y=3, \tag{1}$$

$$3x+5y=1. \tag{2}$$

解(1)之 x 以 y 值表之，

$$x=3-3y. \tag{3}$$

於(2)以 $3-3y$ 代 x,

$$3(3-3y)+5y=1. \tag{4}$$

解(4)，

$$y=2. \tag{5}$$

在(3)內以 2 代 y,

$$x=-3. \tag{6}$$

故(1)(2)之解答只有一組，即 $x=-3, y=2$.

因按§§367, 368, 各對方程(1),(2);(3),(2);(3),(4);(3),(5);(6),(5);之解答相同，而(5),(6)之解答為 $x=-3$, $y=2$.

由§362直接可得同一結果，因(1),(2)演至(5),(6)為可逆故也。

證實　$-3+3\cdot2\equiv3$, (1)　$3(-3)+5\cdot2\equiv1$. (2)

此處之(4)由代替法消去 x 而得。

由代替法自一對方程消去一未知數 x，須自一方程解 x 以他文字之式表之，然後在另一方程內以此式代 x.

375　下例釋此法之特式稱為比較消去法(*elimination by comparision*).

例。解：　$x+5y=7$.　(1)

$x+6y=8$.　(2)

在(1),(2)內解 x 以 y 值表之。

$x=7-5y$, (3)　$x=8-6y$,　(4)

兩式皆為 x 之值故相等，$7-5y=8-6y$.　(5)

解(5),　$y=1$.　(6)

在(3)內，以1代 y,　$x=2$　(7)

故(1),(2)之解答為 $x=2, y=1$.

376　**加減法。**　此法根據§§369, 370之定理。

例。解：　$2x-6y=7$.　(1)

$3x+4y=4$.　(2)

以3乘(1)　$6x-18y=21$.　(3)

以2乘(2)　$6x+8y=8$.　(4)

自(3)減(4)　$-26y=13$.　(5)

故　$y=-\frac{1}{2}$.　(6)

在(1)內以 $-\frac{1}{2}$ 代 y, $2x-6(-\frac{1}{2})=7$.　(7)

$x=2$.　(8)

故(1),(2)之解答，為 $x=2, y=-\frac{1}{2}$.

因按§367, 368, 370, 各對方程(1), (2); (1), (5); (1), (6); (7), (6); (8), (6); 之解答相同，而(8), (6)之解答爲 $x=2$, $y=-\frac{1}{2}$.

證實. $2\cdot2-6(-\frac{1}{2})\equiv7$, (1) $3\cdot2+4(-\frac{1}{2})\equiv4$. (2)

此處用減法消去 x.

自(1), (2)亦可用加法直接消去 y 值如下:

以2乘(1), $4x-12y=14$. (9)

以3乘(2), $\underline{9x+12y=12}$. (10)

加(9)與(10), $13x\qquad=26$. (11)

與以前相同, $x\qquad=2$. (12)

自一次一對方程用加減法消去一文字如 x, 須用數乘方程使 x 之係數相等，用減法或加法須視 x 之係數有同號或異號。

特例. 設 $A=0$, $B=0$ 爲表 x, y 之一對一次方程， 377
前數節§§374, 376已證明 $A=0$, $B=0$ 有一對解答且只有一對解答，除非消去 x 時，亦將 y 消去，此僅能於下類中見之。

1. 若 A 與 B 之關係爲 $A\equiv kB$, 此處 k 爲常數，則方程 $A=0$, $B=0$ 稱爲相依方程。

既然 $A=kB$, 顯然 $B=0$ 之解答亦爲 $A=0$ 之解答，反之亦然，故 $A=0$, $B=0$ 有無限解答。

如 $A=2x+6y-10=0$ (1), $B=x+3y-5=0$ (2).

此處 $A\equiv2B$ 故 $A=0$, $B=0$ 爲相依方程，若以2乘(2)相減，則 x, y 同時消去。

2. 若 $A\equiv kB+l$, 此處 k 與 l 表常數，l 非0, 則 $A=0$ 與 $B=0$ 爲不合理。

於此類，$A=0$ 與 $B=0$ 無解答；因能令 $B\equiv0$ 之 x, y 各值可致 $A\equiv l$ 而非 $A\equiv0$.

設 $A=2x+6y-9=0(3)$, $B=x+3y-5=0$. (4)

此處 $A\equiv2B+1$, 故 $A=0$ 與 $B=0$ 爲不合理，若自(3), (4)消去 x 同時亦消去 y.

378 **解題公式.** 一對 x, y 之一次方程式均可化爲下式：

$$ax+by=c, \quad (1) \qquad a'x+b'y=c', \quad (2)$$

此處 a, b, c, a', b', c', 表已知數或式按 § 377,(1),(2)有一對解答，只有一對解答，但 $a'=ka$ 及 $b'=kb$, 即 $ab'-a'b=k(ab-ab)=0$ 時除外.

用 § 376 之代替法分別消去 x, y 則可得其解答，其結果爲$(ab'-a'b)x=b'c-bc'$(3)，$(ab'-a'b)y=ac'-a'c$(4).

若 $ab'-a'b\neq0$,(1)(2) 之解答爲

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}, \qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}. \qquad (5)$$

此公式若寫爲下式則更易記憶.

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{-1}{ab'-a'b}. \qquad (6)$$

上面(1), (2) 方程，設 $ab'-a'b\neq0$ 固不能預知其有(1), (2)一解答，其意僅證明(1), (2) 若有解答必爲(5)也.

習題 VII

解以下各對方程之 x, y:—

1. $\begin{cases} x+y=62, \\ x-y=12. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 6x-5y=25, \\ 4x-3y=19. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 45x-13y=161, \\ 18x+11y=32. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x-3=7-x. \\ 8x-3y-61=0. \end{cases}$
5. $\begin{cases} 12x=9-10y, \\ 8y=7-9x. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2y-3x=0, \\ 5x-3y-2=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x/.3+5y=3\frac{1}{2}, \\ 5x+3y=1.65. \end{cases}$　8. $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10, \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} (x+2)(y+1)=(x-5)(y-1), \\ x(4+y)=-y(8-x). \end{cases}$

10. $\begin{cases} ax+by=a^2+2a+b^2, \\ bx+ay=a^2+2b+b^2. \end{cases}$　11. $\begin{cases} ax+by=c, \\ px=qy. \end{cases}$

12. $\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2), \\ (a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2). \end{cases}$　13. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y-x}{2}=5, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{9}=7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{4}-\dfrac{x+2y-5}{6}=\dfrac{y-3}{4}-\dfrac{y+2x-5}{6}, \\ 5x-2y+6=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{c}, \\ \dfrac{x}{a'}-\dfrac{y}{b'}=\dfrac{1}{c'}. \end{cases}$　16. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1+x. \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1+y. \end{cases}$

17. 證明下方程爲不合理:

$$1\tfrac{1}{2}x-2\tfrac{1}{2}y=10,\ 6x-10y=15.$$

18. 在習題15內試决定a, b, c, a', b', c'之値如何始致方程爲(1)不合理(2)相依。

非一次之一對方程其解答可按兩一次方程之解法而得者

關於x及y之非一次之二方程，可視爲關於x, y之某 279
二函數之一次方程，於是以此二函數作未知數而解之，自此結果常能導出x及y之値。

例1. 解 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{3y}=1,\ \dfrac{9}{x}+\dfrac{10}{y}=5.$

各方程爲$1/x$, 及$1/y$之一次方程，求解$1/x, 1/y$得$1/x=1/3$, $1/y=1/5$故$x=3, y=5$.

例2.　解 $3x+\frac{y}{x}=6,\quad 7x-\frac{2y}{x}=1$.

解 x 及 y/x 得 $x=1$ 及 $y/x=3$, 故 $x=1, y=3$.

380　已知一對方程可化爲 $AB=0$, $A'B'=0$ 之形, A, B, A', B', 表 x, y 之一次整式，則按 § 371 之定理其諸解答可由四對一次方程 $A=0, A'=0$; $A=0, B'=0$; $B=0, A'=0$; $B=0, B'=0$, 得之。

例解。
$$x^2-2xy=0, \tag{1}$$
$$(x+y-1)(2x+y-3)=0. \tag{2}$$

此對方程與下四對等值:
$$x=0,\qquad x+y-1=0, \tag{3}$$
$$x=0,\qquad 2x+y-3=0, \tag{4}$$
$$x-2y=0,\qquad x+y-1=0, \tag{5}$$
$$x-2y=0,\qquad 2x+y-3=0, \tag{6}$$

解此四對 (3), (4), (5), (6) 得 (1), (2) 之解答爲 $x, y=0, 1; 0, 3; 2/3, 1/3; 6/5, 3/5$.

381　總之，若 $ABC\cdots\cdots$ 及 $A'B'C'\cdots\cdots$ 表 x, y 之 m 個及 n 個一次整式因子之積，則二方程 $ABC\cdots\cdots=0$, $A'B'C'\cdots=0$ 之所有解答，可由第一積之各因子及第二積之各因子均使等於 0 每種各取一式配合而成之 mn 對之一次方程解而得之。

若諸對一次方程無相依及不合理者，則可得 mn 個解答，即已知方程之解答數目爲其次數之積。

習　題　VIII

解以下各對方程：—

1.　$\frac{7}{2x}+\frac{1}{3y}=0,\qquad \frac{3}{x}+\frac{14}{y}+3=0.$

2.　$10x+\frac{6}{y}=5,\qquad 15x+\frac{10}{y}=8.$

3. $\frac{y}{x}=\frac{2(3-y)}{x}+\frac{3}{2}$, $\frac{y+3}{x}=\frac{3y-5}{x}+1$.

4. $xy=0$, $(x+2y-1)(3x-y+2)=0$.

5. $xy-y=0$, $3x-8y+5=0$.

6. $x(x-y)(x+y)=0$, $x+2y-5=0$.

7. $(x-1)(y-2)=0$, $(x-2)(y-3)=0$.

8. $y^2=(x-1)^2$, $2x+3y-7=0$.

9. $(2x+y)^2=(x-3y+5)^2$, $(x+y)^2=1$.

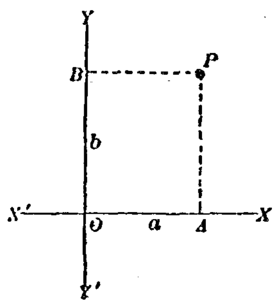
10. $(x-5y+8)(x+3y+5)=0$, $(2x+y+5)(5x+2y-14)=0$.

兩變數之一次方程之圖象

一對 x 及 y 值之圖象. 一對變數 x, y 之值最好用平面上一點表之。 332

在平面選兩直交直線 $X'OX$, 及 $Y'OY$ 爲軸, 其交點 O 稱爲原點; 且選適宜單位以度線長。

若已知一對值爲 $x=a$, $y=b$ 則作圖如下:



在 $X'OX$ 上按 a 之正或負向右或左截一線段 OA, 其長爲 $|a|$, 即 a 之數值。

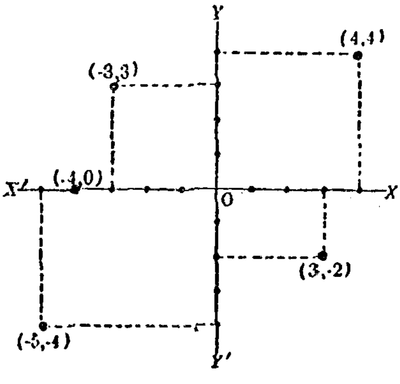
同樣在 $Y'OY$ 上按 b 之正或負向上或下截一線段 OB, 其長爲 $|b|$.

過 A 與 B 作線各平行於 $Y'OY$, 及 $X'OX$. 則其交點 P 爲二對值 $x=a$, $y=b$ 之點或圖

象。爲便利計以記號(a, b)表二對值$x=a$, $y=b$及其圖象P.

等於線段OA或BP之一數a稱爲P之橫坐標；等於線段OB或AP之一數b稱爲P之縱坐標：總稱橫坐標縱坐標爲P之坐標。

且稱$X'OX$爲x軸或橫軸，$Y'OY$爲y軸或縱軸。觀此法，可導x, y之各對值與平面上諸點成一一對應§2；即有一對值(a, b)則有一點P, 反之每一點P必能量P至各軸$Y'OY$, $X'OX$之距離予以適當符號而得一對數值(a,b), 於特數$(0,0)$之圖象爲原點，$(a,0)$爲X軸上一點，$(0,b)$爲y軸上一點。



例：描諸對值$(4,4)$,$(-3,3)$,$(-4,0)$,$(-5,-4)$,$(3,-2)$.

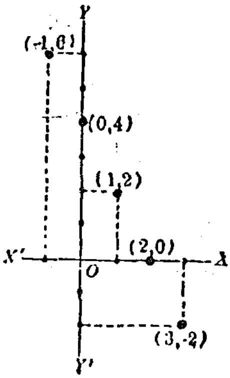
按上述之法繪出各對數值之圖象如左圖。

須特別注意圖象之位置與其坐標符號關係。

383 **含x, y之方程之圖象。** 含x及y之一已知方程有無限實數解答，通常含此一切解答之圖象爲一定曲線，且線內無此解答外之其他諸點，茲稱此曲線爲該方程之圖象。

然一方程之圖象可含多於一個之曲線，注意直線亦含於曲線之中。

定理。 含一變數或兩變數 x, y 之各一次方程其圖象為一直線。 384



因此凡一次方程常稱為直線方程。

學者可任選特殊一次方程繪其若干解答，上定理自易證實。

如取方程 $y=-2x+4$.

設 $x=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$

得 $y=4, 2, 0, -2, \cdots\cdots$

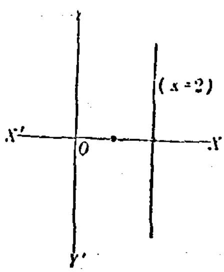
描諸對值 $(0, 4), (1, 2), (2, 0), (3, -2)\cdots$ 如右圖知其圖象在同一直線上。

茲證明上定理如下：

1. 當方程為 $x=a$ 或 $y=b$ 之形。

例。求 $x=2$ 之圖象。

在此方程內無論 y 為何值而 x 之值永為 2 § 356，故其



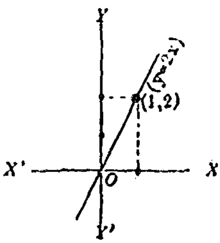
圖象平行於 y 軸，在 y 軸右邊之距離為 2，此線含橫坐標為 2 之一切點，且只此諸點，尋常 $x=a$ 之圖象，自然平行於 y 軸至軸之距離為 $|a|$，在 y 軸之右或左按為正或負，又 $y=b$ 之圖象平行於 x 軸，至 x 軸之距離為 $|b|$，在 x 軸之上或下按 b 為正或負而定。

特例 $y=0$ 之圖象為 x 軸，$x=0$ 之圖象為 y 軸。

2. 設方程爲 $y=mx$ 之形者。

例。求 $y=2x$ 之圖象。

其圖象爲經過原點 $(0,0)$ 點 $(1,2)$ 之直線；因此線各點之縱坐標二倍其橫坐標，且僅此類諸點，總之，$y=mx$ 之圖象爲一直線，此直線經過原點及點 $(1,m)$.

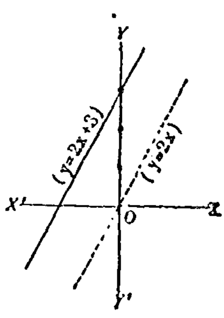


3. 設方程爲 $y=mx+c$ 之形者。

例，求 $y=2x+3$ 之圖象。

顯然此方程之圖象之各點可由 $y=2x$ 圖象之各點之縱坐標，各增 3 而得，即直線。$y=2x$ 平行向上移至交 y 軸爲 3 之處。

總之，$y=mx+c$ 爲一直線，平行於 $y=mx$ 之圖象過 y 軸之點與原點距離爲 $|c|$，在原點之上或下按 c 爲正或負而定。



385 **求作直線.** 因任意兩點可定一直線故可求任意方程 $ax+by+c=0$ 之圖象，如下例。

例，描 $3x+y-6=0$ 之圖象。

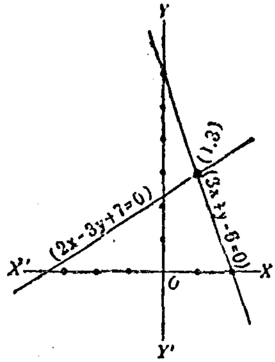
先設 $y=0$，則 $x=2$，再設 $x=0$，則 $y=6$.

故只描此兩點 $(2,0)$ 及 $(0,6)$ 且經過此兩點作一直線即得方程之圖象，此兩點爲圖象與兩軸之交點（觀 § 386 之圖）。

此法不適用於形如 $x=a$, $y=b$, $y=mx$. 之方程，其繪法已詳 § 384 之 1 及 2.

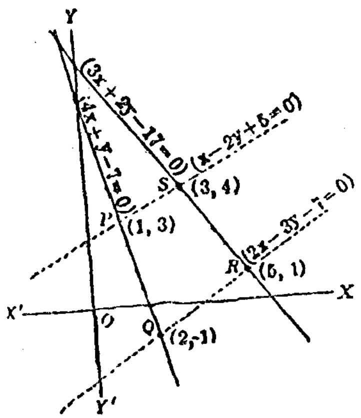
一對聯立一次方程之圖解． 表兩方程圖象之 386
二直線，有一交點；此點且只有此點爲兩方程之解答之圖象。

如 $2x+3y-7=0$ (1)，及 $3x+y-6=0$ (2) 之解答爲 $x=1$ $y=3$. 如圖表明 (1) 及 (2) 之圖象交於點 (1, 3).



若兩已知方程爲不合理者， 387
§377, 2, 則其圖象無公共點，即爲兩平行線；若已知方程爲相依者，§377, 1, 則其圖象之一切點完全密合，即爲兩重合線。

如，方程，$y=2x$，及 $y=2x+3$ 爲不合理者，其圖象爲兩平行線，§384, 3. 又 $y=2x$ 及 $3y=6x$ 爲相依方程，其圖象爲同一直線。



因 $AB=0$ 之解答爲 $A=0, B=0$ 之解答， 388
故方程 $AB=0$ 之圖象爲 $A=0, B=0$ 共有之圖象，§§341, 346.

例．求下列方程之圖象：

$$(4x+y-7)(3x+2y-17)=0, \qquad (1)$$
$$(x-2y+5)(2x-3y-7)=0, \qquad (2)$$

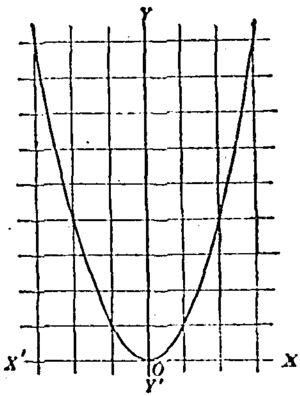
及其解答之圖象。

(1) 之圖象含 $4x+y-7=0$ 及 $3x+2y-17=0$ 之圖象，各以直線 PQ 及 RS 表之。

(2) 之圖象含 $x-2y+5=0$ 及 $2x-3y-7=0$ 之圖象，各以直線 PS 及 QR 表之。

PQ 及 RS 交 PS 及 QR 於 P,Q,R,S 諸點，即 (1) 及 (2) 之解答之圖象爲 $(1,3)$, $(2,-1)$, $(5,1)$, $(3,4)$.

339 **X 及 Y 之高次方程之圖象**，求方程之若干解答，而繪出之，然後過此諸點作一曲線，所用解答務使極相接近，則所得曲線與其眞確圖象相差甚微。



作此種曲線最好用方格紙，如左圖。

例. 求方程 $y=x^2$ 之圖象。

設 $x=0, 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots$

得 $y=0, 1, 4, 9, 16, \cdots\cdots\cdots$

又設 $x=-1, -2, -3, -4, \cdots$

得 $y=1, 4, 9, 16, \cdots\cdots$

取正方形之一邊作長之單位，描出諸相當點 $(0,0)(1,1)(2,4)\cdots\cdots,(-1,1)(-2,4)\cdots\cdots$，過諸點作勻滑曲線，此圖象除 $x=1$, $x=-1$ 間之部分外其餘諸點足能表其大概性質。

此曲線全在 x 軸之上，向上伸展無限，且關於 y 軸爲對稱，相當於 $x=a$ 及 $x=-a$ 而 y 有同值。

設 $\qquad x=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \cdots\cdots$

得 $\qquad y=\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots$

繪出其一或二相當點，則得接近 x 軸部分之圖象。

習題 IX

1. 描以下 x 及 y 之各對值:
$(0,0), (5,0), (0,-7), (6,2), (-7,-1), (-4,3), (5,-9)$.

2. 求以下各方程之圖象:
$x=0,\ y=0,\ 2y+7=0,\ 3y+x=0,\ x+y+5=0.$
$7x+3y-18=0,\ 3x-4y=24.$

3. 求以下之圖象:
$xy=0,\ (x+y-3)(x-2y)=0,\ x^2-1=0,$
$x^2=4y^2,\ x^2+y^2=0.$

4. 以圖解法求以下各對方程之解答，並以代數解法驗之。

(1) $\begin{cases} x+y-3=0, \\ x-2y=0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3y+2x+19=0. \\ 2y-3x+4=0. \end{cases}$

5. 同法解以下各對方程:

(1) $\begin{cases} (x-4y+6)(x+3y+6)=0, \\ (3x+2y-10)(2x-y+5)=0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (y-x-2)x=0, \\ (y-x+2)y=0. \end{cases}$

6. 求下兩方程之圖象:
$y=-(x+1)^2,\qquad y=x^3.$

含多未知數之聯立一次方程組

含 n 個未知數之 n 個方程之解法. 一對方 390
程含三未知數必有無限解答。

如，二方程 $x=2z,\ y=z+1$ 有無限解答；設予未知數 z 以任何值 b，而以 $2b$ 及 $b+1$ 二值予 x 及 y，則二方程均能滿足。

但含三未知文字之三個一次方程組通常有一解答，且 391
只有一組解答。其解法詳於下例。

例。解下方程式組:

$$3x-2y+4z=13, \tag{1}$$
$$2x+5y-3z=-9, \tag{2}$$
$$6x+3y+2z=7. \tag{3}$$

在兩方程內消去 z. 如:

以 3 乘 (1),	$9x-6y+12z=39$	(4)
以 4 乘 (2),	$8x+20y-12z=-36$	(5)
相加	$17x+14y\quad=3$	(6)
又 (1) 爲	$3x-2y+4z=13$	(7)
以 2 乘 (3),	$12x+6y+4z=14$	(8)
自 (8) 減 (7),	$9x+8y\quad=1$	(9)

在方程 (6), (9) 內消去 y, 如:

以 4 乘 (6),	$68x+56y\quad=12$	(10)
以 7 乘 (9),	$63x+56y\quad=7$	(11)
自 (10) 減 (11),	$5x\quad=5$	(12)

故 $x=1$.

以 $x=1$ 代入 (9) 得 $y=-1$.

以 $x=1, y=-1$ 代入 (1), 得 $z=2$.

故 (1), (2), (3) 若有解答必爲 $x=1, y=-1, z=2$, § 362, 但自 (1), (2), (3) 導出 $x=1, y=-1, z=2$ 時之演算爲可逆者, 確可逐步逆算頗易返原, 故 $x=1, y=-1, z=2$ 爲 (1) (2), (3) 之解答.

且可證 $x=1, y=-1, z=2$ 爲 (1) (2) (3) 之解答如下:

按 § 368, 顯然 $x=1, y=-1, z=2$ 爲 (12), (9), (1) 之解答, 故只證明 (12), (9), (1) 與 (1), (2), (3) 之解答相同可矣.

將 (1), (2), (3) 之已知數移於左端, 則爲

$$A=0, (1) \quad B=0, (2) \quad C=0. (3)$$

則由導出 (9), (12) 之法可表 (1), (9), (12) 方程如下:

$A=0$, (1) $\quad -A+2C=0$, (9) $\quad 19A+16B-14C=0$, (12)

凡能致 $A\equiv0, B\equiv0, C\equiv0$ 之 x, y, z 任一組之值必能致

$$A\equiv0,\ -A+2C\equiv0,\ 19A+16B-14C\equiv0.$$

反之, 若 $A\equiv0, -A+2C\equiv0$, 則 $C\equiv0$, 又若 $19A+16B-14C=0$, 則 $B\equiv0$.

故 (1), (2), (3) 與 (1), (9), (12) 有同一之解答.

即, $x=1, y=-1, z=2$.

由此觀之，自含三未知文字 x, y, z 之三方程組可得含 392
二文字 x, y 之二方程，然後由此組得含一文字之一次方程。

總之，設自含 n 個未知文字之 n 個一次方程起始演算 $n-1$ 步，必達含一文字 x 形如 $ax-b=0$ 之一次方程。

除 $a=0$ 外，此組有一解答，且只一解答，其中 x 之值爲 b/a 而其他未知文字之值可逐次以已知值代入諸方程而得之。此理常可證明如上例。

自另方面言之，若 $a=0, b=0$，則此組通常有無限解答。若 $a=0, b\neq 0$ 則無解答。俟 §394 內證明之。

在行列式章內將示解聯立一次方程式組之極省力法， 393
然於某種方程亦可以特別法則節省勞力。

例。解
$$x+y+z=8, \tag{1}$$
$$x+y+u=12, \tag{2}$$
$$x+z+u=14, \tag{3}$$
$$y+z+u=14. \tag{4}$$

加 (1), (2), (3), (4), $3x+3y+3z+3u=48$.

故
$$x+y+z+u=16. \tag{5}$$

自 (5) 減各方程 (1), (2), (3), (4) 得 $x=2, y=2, z=4, u=8$.

特類。 設 $A=0, B=0, C=0$ 表 x, y, z 之一次方程組， 394
如 §392，令 $ax-b=0$ 表已消去 y, z 之方程。

1. 若 $a=0, b=0$，則得函數 A, B, C 之一可由他二函數表之，如：$A\equiv kB+lC$，此處 k 與 l 爲常數。故稱方程 $A=0, B=0, C=0$ 爲相依。

由恆等式 $A=kB+lC$ 可得 $B=0$, $C=0$ 之各解答亦爲 $A=0$ 之解答，故若 $B=0$ 及 $C=0$ 爲合理者，§377, 2, 則三方程 $A=0$, $B=0$, $C=0$ 必有無限解答。

如方程組 $A=3x-2y+4z-13=0$, (1)

$B=2x+5y-3z+9=0$, (2)

$C=7x+8y-2z+5=0$. (3)

由 (1) 與 (2) 內消去 z.

$3A+4B\equiv 17x+14y-3=0$. (4)

在 (1) 與 (3) 內消去 z.

$A+2C\equiv 17x+14y-3=0$. (5)

在 (4) 與 (5) 內消去 y.

$$2A+4B-2C\equiv 0\cdot x-0=0.$$

此處之結果方程 $ax-b=0$ 爲 $0\cdot x-0=0$, 又於導算時 A, B, C 以恆等式 $2A+4B-2C\equiv 0$, 或 $C=A+2B$ 結合之。

觀察 (1), (2), (3) 以 2 乘 B 加 A 即得 C.

故方程組 (1), (2), (3) 有無限解答。

2. 若 $a=0$, $b=0$ 可求得函數 A, B, C 之一以他二函數表之。如：

$$A\equiv kB+lC+m.$$

此處 k, l, m. 爲常數而 m 非 0, 則方程 $A=0$, $B=0$, $C=0$ 爲不合理。

由恆等式 $A=kB+lC+m$ 可知 $A=0$, $B=0$, $C=0$ 無解答。因 x, y, z 之任何值能使 $B\equiv 0$, $C\equiv 0$ 者均使 $A\equiv m$ 非 $A\equiv 0$ 故也。

如方程組：

$A=3x-2y+4z-13=0$, (1)

$B=2x+5y-3z+9=0$, (2)

$C=7x+8y-2z+6=0$. (3)

如上消去 z 及 y 則得

$$2A+4B-2C\equiv 0\cdot x-2=0.$$

故結果方程 $ax-b=0$ 為 $0\cdot x-2=0$，且 A, B, C 以恒等式 $C\equiv A+2B+1$ 結合之，觀察 (1), (2), (3) 便知其屬於此數。

故方程組 (1), (2), (3)，無解答。

普通一次方程組．由上討論可得結論如下： 395

m 個一次方程組含 n 個未知文字，若 $m=n$ 則有一組解答。若 $m<n$ 則有無限解答。若 $m>n$ 則無解答。

此法則之例外如 §§377, 391 所述以恒等關係結合之兩個或多個方程。

於特例，含兩未知文字之三個一次方程組 $A=0$, $B=0$, $C=0$，設 A, B, C 以恒等式 $A\equiv kB+lC$ 結合之，且 $B=0$, $C=0$ 為合理者則有一組解答。

如方程組 $x-y=1$ (1), $x+y=7$ (2), $3x-y=10$ (3) 無解答；因 (1)(2) 之解答 $x=4, y=3$ 不適合於 (3)。

又方程組 $x-y=1$ (1), $x+y=7$ (2), $3x-y=9$ (4) 有一解答，因 $x=4, y=3$ 為 (1) (2) 之解答且適合於 (4)。但詳察其 $3x-y-9\equiv 2(x-y-1)+(x+y-7)$。

設學者畫出 (1), (2), (4) 之圖象則必相交於一公點。

習 題 X

解以下方程組：

1. $\begin{cases} x+y=11, \\ y+z=13, \\ z+x=12. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=4, \\ x+3y+7z=13. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y-3z=3, \\ 3x-5y+7z=19, \\ 5x-8y-11z=-13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x-2y=-33, \\ x+y-7z=13, \\ x+3y=-10, \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y-4z=11, \\ 2x-3y=0, \\ y-4z=0. \end{cases}$　6. $\begin{cases} 3x-5=2(x-2), \\ (x+1)(y-1)=(x+2) \\ \quad (y-2)+5, \\ 2x+3y+z=6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{6}{z}=9, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}=5, \\ \dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{z}=4. \end{cases}$　8. $\begin{cases} y+z+u=4, \\ x+z+u=3, \\ x+y+u=1, \\ x+y+z=10. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x-3z+u=9, \\ 5y+z-4u=17, \\ 3y+u=12, \\ x+2y+3u=8. \end{cases}$　10. $\begin{cases} cx+by=l, \\ by+az=m, \\ az+cx=n. \end{cases}$

11. $\begin{cases} lx=my=nz, \\ ax+by+cz=d. \end{cases}$　12. $\begin{cases} 2x=3y=6z, \\ (x+2y+z-16) \\ \quad (3x-2y+20)=0. \end{cases}$

證下方程組爲相依并求各組方程結合之恆等式。

13. $\begin{cases} x-y=3, \\ y-z=-5, \\ z-x=2. \end{cases}$　14. $\begin{cases} 3x-8y+7z=10, \\ 2x+5y-3z=12, \\ 16x+9y-z=80. \end{cases}$

應用問題

396　次諸問題可用兩個或多個未知文字 $x, y, \cdots\cdots$ 之聯立一次方程之法解之，應用文字若干當視題之情形而定。選題中之幾個未知數（非全部）以文字 $x, y, \cdots\cdots$ 代之，其餘未知數則以此文字組成之式表之，將知由問題之條件結合 $x, y, \cdots\cdots$ 所得之獨立且合理之方程之個數適與 $x, y, \cdots\cdots$ 之字數相等，設文字少於方程之個數則此問題無解答；設多於方程則有無限解答。§395.

注意於 §352 內問題性質之限制亦可適用於此處未知數。

例1. 三數字組成之數，第二數字等於第一第三之和，第二第三之和爲 8, 設第一第三互換，則此數增加 99, 求此數。

設 $x=$ 百位數, $y=$ 十位數, $z=$ 個位數，則此數爲 $100x+10y+z$.

但依問題之條件，得

$$x+z=y, \tag{1}$$

$$y+z=8, \tag{2}$$

$$100z+10y+x=100x+10y+z+99. \tag{3}$$

解 (1), (2), (3), 得 $x=2$, $y=5$, $z=3$.

故所求數爲 253.

例2. 一旅客行路一段休息30分，以後按原速之 $\frac{7}{8}$ 繼續進行，共計 6 時，行至距離20哩而達目的地，若以原速多行四哩再休息如前，則行程只須 $5\frac{6}{7}$ 時，問原速如何？起身處至休息處多遠？

設 $x=$ 每時原速之哩數； $y=$ 起身處至休息處之哩數，

以 x, y 之值表 (1) 實在行程所需時數，及 (2) 假定行程所用之時數，則得

$$\frac{y}{x}+\frac{1}{2}+\frac{20-y}{\frac{7x}{8}}=6, \tag{1}$$

$$\frac{y+4}{x}+\frac{1}{2}+\frac{16-y}{\frac{7x}{8}}=5\frac{6}{7}. \tag{2}$$

解 (1) 及 (2) 之 $\frac{y}{x}$, 及 $\frac{1}{x}$ 得 $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$.

故 $x=4$, $y=6$.

例3. 兩瓶 A 與 B 各盛酒與水之混合液，若自 A 內取

3 份自 B 內取 2 份另成一混合液含酒 40 %；若自 A 內取 1 份，自 B 內取 2 份則所成之混合液含酒 32 %，問 A 與 B，各含酒之百分率如何？

設 x 及 y 表 A 及 B 所含酒之百分率，
依題意得。

$$\frac{3x}{5}+\frac{2y}{5}=\frac{40}{100}.\ (1)\qquad \frac{x}{3}+\frac{2y}{3}=\frac{32}{100}.\ (2)$$

解 (1)，(2) 得 $x=\frac{52}{100}$ 或 52%，$y=\frac{22}{100}$ 或 22%.

習　題　XI

1. 3 數之和為 20，(1)，若第一加第二之 2 倍再加第三之 3 倍等於 44，(2)若 2 倍第一第二之和再加第三之 4 倍等於 −14，求各數。

2. 三數之和為 51，若第一數除以第二數得商 2 倘餘 5；若第二數除以第三數得商 3 倘餘 2，求各數。

3. 兩數字組成一數，（1）2 倍第一數字加 3 倍第二數字等於 37；(2）若兩數字換位則此數減 9，求此數。

4. A 負債 \$ 5000，B 負債 \$ 3000，A 之銀除還債外尚有 B 之$\frac{3}{5}$. B 除 100 圓未還除債還清外尚有 A 之 $\frac{1}{2}$，問原各有銀若干？

5. A, B, C 三人之財產如下：A 與 B 共有 p 元，B 與 C 共有 q 元，C 與 A 共有 r 元，問 p, q, r 必須滿足何種條件方能許可？

6. 本金若干單利行息 2 年得本利和 \$ 2556.05．4 年得本利和 \$ 2767.10 問本金利率各若干？

7. 一人放款若干一部分利率照借券面值之 4%，一部分為借券上 110 之 5% 其投資收入為 \$ 650. 若一部分為借券上 80 之 4%，及一部分為借券上 110 之 5%，則其收入多 100 元，問此人投資若干？

8. 一矩形之長寬各增 6 吋，則為原形之 $\frac{3}{2}$，而較原形大84方吋，求原形面積。

9. A 贈 B 銀使 B 銀增一倍；然後 B 贈 A 銀使 A 之餘銀增一倍；最後 A 又贈 B 銀使 B 之餘銀增一倍。則 A 有銀 \$16, B 有銀 \$24, 問 A, B 原各有銀若干?

10. 一工程 A 與 B 作之需 $5\frac{1}{4}$ 日完成；A 與 C 作之需 $4\frac{4}{5}$ 日完成。三人作 2 日後 A 他往，B, C 以 $1\frac{8}{17}$ 日完成之，問 A, B, C 各獨作若干日，方能完成此工程?

11. 兩點沿 150 呎長圓周，依定速度移動，若反向移動 5 秒相遇；若同向移動 26 秒相遇，問兩點速度若干?

12. 兩列貨車各長為 240 碼及 200 碼，若自初遇反向而行歷 20 秒而彼此錯開，若同向而行則快者於 $3\frac{3}{4}$ 分追過慢者，問各車之速度為何?

13. 兩輪船 A 與 B 往來於兩城 C 與 D 之間，此兩城相距 200 哩，A 輪自 C 城起程較 B 晚 1 時，而 2 時後即追及 B，及至 D 城停 4 時返回，遇 B 於距 D 城 10 哩之處，問 A 與 B 之速度為何?

14. 半哩賽跑 A 勝 B 20 碼，勝 C 30 碼，問 B 能勝 C 若干碼?

15. A 與 B 兩次作 440 碼之賽跑，第一次 A 讓 B 先行 20 碼尚勝 B 二秒，第二次 A 讓 B 先行四秒，尚勝 B 6 碼，問 A 與 B 之速度為何?

16. 兩旅客共有行李 500 磅，超過應帶之重量，一客付 \$1.25 一客付 \$1.75，若此行李歸一客則付 \$4，問每人准帶行李若干?

17. 三種混合金屬 A, B, C 按重量計，A 含 5 份金，2 份銀，1 份鉛，B 含 2 份金 5 份銀 1 份鉛，C 含 3 份銀，1 份銀，4 份鉛，欲得 9 盎斯混合金屬，而含金銀鉛之量相等，問在 A, B, C 內各取若干盎斯?

18. 兩混合金屬 A 與 B 各含銀與銅，一種混合金屬含 A 5 份，B 3 份，則有 52% 之銀；一種含 A 5 份，B 11 份則有 42% 之銀，求 A 與 B 各含銀之百分率。

19．一射者距目標 500 碼，射出後 $2\frac{3}{8}$ 秒聞子彈擊標之聲，一觀者離目標 600 碼距射者 210 碼，聞槍聲後 $2\frac{1}{10}$ 秒方聞子彈擊目標之聲，設聲速與彈速爲常數，求聲與彈之速度。

20．一池由兩管 A 及 B 注水，由第三管 C 洩水，若池滿時，三管齊開，則 3 時水盡；只開 A 及 C 則 1 時流盡；只 B 及 C 則 45 分流盡。設每分鐘 A 較 B 多流入 100 加崙求池之容量及每分鐘各管之流速。

以不定係數釋明之問題

397 茲討論關於代數本身之一二簡單問題。

問變數之特別函數能否變成另一式之函數，設能之，其係數爲何？

下例釋明研究此數問題之法。

例。一式 x^2+4x+6 可否化爲 $(x+1)$ 之二次式，如能，其係數爲何？

問題內之式可寫爲 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$，此處 a, b, c 皆表常數。

設擬定之化法爲可能，則得

$$x^2+4x+6 \equiv a(x+1)^2+b(x+1)+c. \tag{1}$$

或 $$x^2+4x+6 \equiv ax^2+(2a+b)x+(a+b+c). \tag{2}$$

按 § 284，(1) 既爲恆等式，x 之同次項之係數必等，則 $a=1$, $2a+b=4$, $a+b+c=6$; 解 a, b, c 得 $a=1$, $b=2$, $c=3$.

故 $$x^2+4x+6 \equiv (x+1)^2+2(x+1+)3.$$

注意令已知式等於所求式，但其不定係數，於是知此假設恆等爲眞，則其係數必適合於若干條件方程，解此方程則可得各係數之值。

下面爲上述之普通問題。 393

說明條件並發問題如下：特式之任何函數，適合於一定之條件能否存在，如能存在，其係數爲何？

爲解此問題茲作成含不定係數之式。此等係數即爲問題中之未知數，由已知條件可得一方程組，若方程組有一解答，則得一函數適合於已知條件；若無解答，則所求函數不能存在；若有無限解答，則問題爲不定式，即有無限個函數，適合於已知條件，茲所論者限於定式函數，§264.

例。求 x 之二次式，設 $x=1$ 及 $x=3$ 時此式爲 0，$x=4$ 時則此式爲 6。

問題內之式當爲 ax^2+bx+c，按問題之條件應爲 $a+b+c=0$，$9a+3b+c=0$，$16a+4b+c=6$。

解 a, b, c，得 $a=2$，$b=-8$，$c=6$。

故所求之式爲 $2x^2-8x+6$。

若求一一次式適合於上之條件則無解答，若求一三次式，適合於上之條件，則有無限解答。

上節所述之法稱不定係數法，爲研究代數學之主要方法，俟後常用之。 399

習題 XII

1．以 $x-2$ 之多項式表 $3x^3-x^2+2x-5$.

2．以 $2x+3$ 之多項式表 $4x^2+8x+7$.

3．在 $f(x)=ax^2+bx+c$ 內 $f(-1)=11, f(1)=-5, f(5)=6$, 求此式。

4．在 $f(x)=ax^3-bx^2+cx+d$ 內，$f(0)=5, f(-1)=1, f(1)=9, f(2)=31$, 求此式。

5．在 $f(x,y)=ax+by+c$ 內，$f(0,0)=4, f(4,4)=0, f(1,0)=6$, 求此式。

6．一次方程 $ax+by+1=0$ 之兩解答爲 $x=3, y=1$ 及 $x=4, y=-1$ 求此方程。

7．一次方程 $ax+by+c=0$ 之三解答爲 $x=3$ $y=1$; $x=4, y=-1$; $x=1, y=1$; 此方程能否求得?

8．求某一次方程，其圖象爲經過點$(2,3)(-4,5)$之直線。

9．$3x+y+c=0$ 之圖象經過點 $(-2,3)$, 求 c 之值。

10．求兩一次方程$ax+by+1=0$ (1), $a'x+b'y+1=0$ (2), 設$x=2, y=3$ 均滿足 (1), (2); $x=7, y=5$ 能滿足 (1) 又$x=3, y=7$ 能滿足 (2).

11．求方程 $x^3+bx^2+cx+d=0$, 其根爲 $-2, 1$ 及 3.

12．求方程 $x^2+bxy+cx+dy=0$ 其解答爲 $x=1, y=0$; $x=2, y=1$; $x=-2, y=1$.

13．化 $3x+2y-3$ 式爲 $a(x+y-1)+b(2x-y+2)+c(x+2y-3)$之形，式中 a, b, c 爲常數。

V　長除法

通　法

初步討論. 在 § 319 內規定以 B 除 A 之商爲分式 400
A/B 可以計算法則化爲極簡之形。

茲示按上規定求商之通法，設 A 及 B 爲同文字 x 之多項式，且 A 之次數不小於 B 者。

1. B 爲 A 之因子，必能化 A 爲下式

$$A \equiv QB, \tag{1}$$

此處 Q 爲 x 之整函數。

則得
$$\frac{A}{B} \equiv Q,$$

即，以 B 除 A 之商爲整函數 Q；則稱 A 能被 B 除盡。

如，$A=x^3+4x^2-2x-5$ 及 $B=x^2+3x-5$，則得 $x^3+4x^2-2x-5=(x+1)(x^2+3x-5)$ 爲與 (1) 同形之恆等式，其 Q 爲 $x+1$.

故
$$\frac{A}{B}=\frac{x^3+4x^2-2x-5}{x^2+3x-5}=x+1.$$

2. 然 B 常非 A 之因子，故不能化 A 爲 QB 之形，但按 § 401 可化爲下式：

$$A \equiv QB+R, \tag{2}$$

此處 Q 及 R 均爲 x 之整函數，且 R 之次數小於 B 者。

故得
$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B},$$

即以B除A之商爲一整函數Q及一分式$\frac{R}{B}$之和，而分式之分子之次數小於分母之次數。

Q稱爲商之整式部分R稱爲除式。

如，$A=x^3+2x^2+3x+3$及$B=x^2+2x+2$，即能化A爲式(2)，書作

$x^3+2x^2+3x+3=x(x^2+2x+2)+(x+3)$.

此處Q爲x及R爲$x+3$其方次低於B.

故 $$\frac{A}{B}=\frac{x^3+2x^2+3x+3}{x^2+2x+2}=x+\frac{x+3}{x^2+2x+2}.$$

401 **長除法.** 茲示如何化A爲$QB+R$之形，此處R之次數小於B，亦可爲0，普通用以演算者稱爲"長除法"，茲以下例解明之.

設$A=2x^4+3x^3+4x^2+x-2$及$B=x^2-x+1$.

此處B之次數爲二，且此題即求一整函數Q，致令自A減去QB而得之R爲一次式或0；若函數Q已求得，則有

$$A-QB\equiv R,\quad 故\ A\equiv QB+R.$$

因A之次數爲四，且R之次數不能大於一，且當A減QB時而A之前三項必消去，茲擬定下法以求Q.

$$\begin{array}{rrl|l}
 & A= & 2x^4+3x^3+4x^2+x-2 & x^2-x+1=B \\
 & 2x^2B= & 2x^4-2x^3+2x^2 & 2x^2+5x+7=Q \\
 & A-2x^2B= & 5x^3+2x^2+x-2 & (1) \\
 & 5xB= & 5x^3-5x^2+5x & \\
 & A-(2x^2+5x)B= & 7x^2-4x-2 & (2) \\
 & 7B= & 7x^2-7x+7 & \\
 & A-(2x^2+5x+7)B= & 3x-9=R & (3)
\end{array}$$

顯然欲消去 A 之首項，須以一式乘 B 使其積之首項與 A 之首項相同，自 A 內減之，此題若簡之積爲 $2x^2B$，此處乘數 $2x^2$ 係用 B 之首項 x^2 除 A 之首項 $2x^4$ 得來。

如上自 A 減去 $2x^2B$ 得

$$A-2x^2B=5x^3+2x^2+x-2. \qquad (1)$$

欲消去餘式 (1) 之首項，即消去 A 之第二項，仍用上法。以 x^2 除 $5x^3$ 之商爲 $5x$；再以 $5x$ 乘 B 而減之則得

$$A-(2x^2+5x)B=7x^2-4x-2. \qquad (2)$$

最後欲消去餘式 (2) 之首項，即消去 A 之第三項，以 x^2 除 $7x^2$ 之商數 7，乘 B，再減之。其結果爲

$$A-(2x^2+5x+7)B=3x-9. \qquad (3)$$

餘式 (3) 爲一次式，係由 A 減 $(2x^2+5x+7)B$ 得來。

故求得之多項式 Q 及 R 爲

$$Q=2x^2+5x+7 \text{ 及 } R=3x-9.$$

寫爲恆等式 (3) 即

$$A=(2x^2+5x+7)B+(3x-9).$$

茲得 A 成爲 $QB+R$ 式，此處 R 之次數小於 B 之次數。

故設 A 與 B 爲已知則得求 Q 及 R 之法如下：

按 x 之降冪排列 A 與 B.

以 B 之首項除 A 之首項，其商爲 Q 之第一項。

以 Q 之第一項乘 B，自 A 減其積。

對於所得之餘式，仍以同法進行，即以B之首項除餘式首項，等等。

繼續進行以至餘式之次數小於B之方次爲止，於是得Q之一切項，而最末餘式必爲$A-QB$或R.

尋常按上法列其演算，以後可用分離係數法演算，如乘法然。

例1. 已知$A=2x^5-6x^4+7x^3+8x^2-19x+20$及$B=x^2-3x+4$；求$Q$與$R$.

$$\begin{array}{l|l}
2-6+7+8-19+20 & 1-3+4 \\ \cline{2-2}
\underline{2-6+8} & 2+0-1+5 \\
\quad -1+8-19 & \\
\quad \underline{-1+3-\ \ 4} & \text{故 } Q=2x^3-x+5 \\
\qquad 5-15+20 & \text{及 } R=0. \\
\qquad \underline{5-15+20} &
\end{array}$$

注意，$-1+8-19+20$代替第一餘式；上邊僅寫其一部分$-1-8-19$，餘部下次減時再用之。Q之第二項爲0，因A之首二項第一次減去。

例2. 已知$A=x^4+2x^3+3x^2+2x+4$，$B=x^2+2x$求Q及R.

402 **此法之註述。** 1. 於此長除法各中間餘數認爲新被除數；且設R_1表任一餘數Q_1爲前所得之Q之一部，及Q_2爲Q之其餘一部，則得

$$A\equiv Q_1B+R_1 \text{ 及 } R_1\equiv Q_2B+R.$$

2. 求Q及R之演算非僅以B除A而已，且含欲化A爲$A\equiv QB+R$之形時之乘法及減法之原始演算。以B除A，法本難明，及自恒等式，$A\equiv QB+R$以至恒等式$A/B\equiv Q+R/B$，則瞭如指掌矣。

通常求 Q 及 R 之演算稱爲"除法"；若 R 雖不爲 0 亦稱 Q 爲"商"，以代"商之整式部份"，但"以 B 除 A"非如 § 254 之意義，求一式乘 B 而得 A 者，係先求一式乘 B，自 A 減之得一餘式，其方次低於 B，再求此餘式爲何，比較 § 87.

3. 整式 A 化爲整式 $QB+R$ 之演算中，無論 x 爲何值均可，即 x 之一切値均使 A 與 $QB+R$ 之値相等，即 x 之値使 B 等於 0 時而 A 與 $QB+R$ 之値仍相等，惟 $B=0$ 時則 $\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$ 無意義。

如 $A=x^2+x+1$ 及 $B=x-1$，

按 § 401，得 $x^2+x+1=(x+2)(x-1)+3$.　　(1)

故　$$\frac{x^2+x+1}{x-1}=x+2+\frac{3}{x-1}.\qquad(2)$$

此處 $x=1$ 時，$B=0$，在(1)及(2)內以 1 代 x 得 $3=3$，當然無誤，但 $\frac{3}{0}=3+\frac{3}{0}$ 便無意義。

4. 將 A 化爲 $QB+R$ 只有一法，即只有一對整式 Q 及 R 可以存在(R 之方次小於 B)致令 $A\equiv QB+R$.

因若有另一對 Q' 及 R'，則得

$$QB+R\equiv Q'B+R'，故(Q-Q')B\equiv R'-R.$$

但此不可能，因 $R'-R$ 之方次低於 B，而 $(Q-Q')B$ 則大於 B.

被除數或除數乘以常數之影響.　玆用下定理說明之。 403

1. 若以任一常數 c 乘被除數，則商及餘數亦增 c 倍。

因 $A\equiv QB+R$，故 $cA=cQ\cdot B+cR$.

2. 若以 c 乘除數，且以 c 除其商，而除數不變。

因 $A\equiv QB+R$，則 $A\equiv \frac{Q}{c}.cB+R$

3. 若以 c 乘被除數及除數，且以 c 乘其餘數，而商不變。

因 $A\equiv QB+R$，則 $cA\equiv Q.\ cB+cR$.

4. 設於長除法之任一步中而以 c 乘其中間餘數或除數，則其最後餘數，設有變動，僅有 c 倍之差。

此理自 1 與 2,及 § 402, 1 得來。

學者應用諸特例驗證上諸定理。

如，先以 $B=2x-1$，再以 $B=4x-2$ 除 $A=4x^2+6x+1$ 可驗證第二定理。

$$\begin{array}{l|l} 4+6+1 & 2-1 \\ \cline{2-2} \underline{4-2} & 2+4 \\ \quad 8+1 & \\ \quad \underline{8-4} & \therefore Q=2x+4, \\ \qquad 5 & \quad R=5. \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 4+6+1 & 4-2 \\ \cline{2-2} \underline{4-2} & 1+2 \\ \quad 8+1 & \\ \quad \underline{8-4} & \therefore Q=x+2, \\ \qquad 5 & \quad R=5. \end{array}$$

404 **用不定係數演除法。** 設 A 及 B 爲已知，亦可求 Q 及 R 如次：

例1. 以 $B=x^2-x+1$ 除 $A=2x^4+3x^3+4x^2+x-2$.

因 A 之方次爲四，而 B 之方次爲2，可知 Q 之方次爲二，R 之方次最高爲一。

故設 $Q=c_0x^2+c_1x+c_2$ 及 $R=d_0x+d_1$.

茲求係數 c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, 之値，必令其

$$2x^4+3x^3+4x^2+x-2\equiv(c_0x^2+c_1x+c_2)(x^2-x+1)+d_0x+d_1$$

$$\equiv c_0x^4+\left.\begin{matrix}-c_0\\+c_1\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}c_0\\-c_1\\+c_2\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}c_1\\-c_2\\+d_0\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}c_2\\+d_1\end{matrix}\right| \qquad (1)$$

但使 (1) 爲恆等式，故由 § 284，得

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 2,\\
-c_0+c_1 &= 3, \therefore c_1 = 3+c_0 = 3+2 = 5.\\
c_0-c_1+c_2 &= 4, \therefore c_2 = 4-c_0+c_1 = 4-2+5 = 7.\\
c_1-c_2+d_0 &= 1, \therefore d_0 = 1-c_1+c_2 = 1-5+7 = 3.\\
c_2+d_1 &= -2, \therefore d_1 = -2-c_2 = -2-7 = -9.
\end{aligned}
$$

故 $Q=2x^2+5x+7$ 及 $R=3x-9$ 與 § 401 相同。

例2．以 $2x^2+x-2$ 除 $6x^5+13x^4-12x^3-11x^2+11x-2$．

整除法． 設 A 與 B 表係數爲文字之 x 之多項式，又設 B 之方次爲 m，因 B 能整除 A，其餘式 R 必恆爲 0，所求 R 之諸係數，必皆爲 0，因 R 之方次爲 $m-1$ 故有 m 個係數，§ 277，此諸係數當然爲 A 與 B 之係數之函數，故 405

欲以 m 次多項式 B 整除一多項式 A，則 A 與 B 之係數，必適合於 m 個條件。

茲以下列解明之：

例1．x^2+ax+1 能整除 x^3+3x^2+bx+2 問 a 與 b 之值如何？

解

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2+bx \qquad\qquad +2 & x^2+ax+1 \\
\underline{x^3+ax^2+x \qquad\qquad\qquad} & \overline{x+(3-a)} \\
(3-a)x^2+(b-1)x \quad +2 & \\
\underline{(3-a)x^2+(3a-a^2)x+(3-a)} & \\
\quad (b-1-3a+a^2)x+(a-1) &
\end{array}
$$

故 a 與 b 必適合兩條件

$b-1-3a+a^2=0,\quad a-1=0$；因得 $a=1$ 及 $b=3$．

例2．設 x^2+x-6 能整除 $2x^3+3x^2+lx+m$，定 l 及 m 之值。

被除數及除數按 x 之升羃排列者． 設 A 與 B 表被除數及除數，按 x 之升羃排列之，又設 A 之首項，其方次不小於 B 之首項，按 § 401 之法，消去首數項，可得 406

以 B 所表之整式 A, 若 B 能整除 A, 則與降冪排列者結果相同；但若 B 不能整除 A, 則其結果全異。觀下例自明。

$$\begin{array}{l|l} 1+3x+3x^2+x^3 & 1+x \\ \cline{2-2} \underline{1+\ \ x} & 1+2x+x^2 \\ \quad 2x+3x^2 & \\ \quad \underline{2x+2x^2} & \\ \qquad\quad x^2+x^3 & \\ \qquad\quad \underline{x^2+x^3} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array} \qquad (1) \qquad\qquad \begin{array}{l|l} 1-2x+\ \ x^2 & 1+x \\ \cline{2-2} \underline{1+\ \ x} & 1-3x+4x^2 \\ \ -3x+\ \ x^2 & \\ \ \underline{-3x-3x^2} & \\ \qquad\ 4x^2 & \\ \qquad\ \underline{4x^2+4x^3} & \\ \qquad\qquad -4x^3 & \end{array} \qquad (2)$$

自 §401 之理由，可得

$$1+3x+3x^2+x^3=(1+2x+x^2)(1+x) \tag{1}$$

$$1-2x+x^2 \qquad =(1-3x+4x^2)(1+x)-4x^3. \tag{2}$$

結果(1)與按 x 之降冪排列相除所得者相同，由 §402, 4, 可知整除必有同形如上例。

但結果 (2) 與按 x 之降冪排列相除所得者完全不同，於是得

$$x^2-2x+1=(x-3)(x+1)+4. \tag{3}$$

(2)與(3)爲恆等式，然化 x^2-2x+1 爲 $x+1$ 之兩不同式。以 $x+1$ 除 x^2-2x+1 之商亦不同，即；

$$\frac{1-2x+x^2}{1+x}=1-3x+4x^2-\frac{4x^3}{1+x},$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x+1}= \qquad x-3 \quad +\frac{4}{x+1}.$$

407　觀此可知按升冪排列，除整除法外，各餘式之首項方次，逐漸增加無止境，以需要步驟可得一若干項之多項式，作商之整式部分，而其方次可爲任意之高，故

若 A 與 B 表 x 之升羃多項式，而 B 不能整除 A，且 A 之首項方次不小於 B，則以 B 除 A 之商可化爲下式

$$\frac{A}{B}\equiv Q'+\frac{R'}{B},$$

此處 Q' 及 R' 爲 x 之升羃多項式，Q' 之末項之方次爲任意之高，而 R' 之首項之方次亦然。

若 Q' 之項數爲 n，稱爲以 B 除 A 之商至 n 項，R' 爲其相當餘式。

若 x 之值甚小(詳後)，則取 n 爲足用之大可使 $\frac{R'}{B}$ 之值爲任意之小，即可求得多項式 Q' 其值與 $\frac{A}{B}$ 相差爲任何小，在此計算中，多項式 Q' 有時稱爲分式 $\frac{A}{B}$ 之近似整式。

如 $1-x$ 除 1 至 n 項，則得

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x};$$

設 x 爲小於 1 之任何值，可選得 n，使

$1+x+\cdots\cdots+x^{n-1}$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 之差爲任意之小；如 $x=\frac{1}{3}$ 則 $\frac{x^3}{1-x}=\frac{1}{18}$，故 $1+x+x^2$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 同差 $\frac{1}{18}$。同理 $1+x+x^2+x^3$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 只差 $\frac{1}{54}$；餘類推。

用不定係數法求商至 n 項。 茲以下例解明之： 408

例　求商 $\dfrac{3-x}{1-x+2x^2}$ 至 4 項。

設 $$\frac{3-x}{1-x+2x^2}\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\quad(1)$$

以 $1-x+2x^2$ 乘兩端，並集項，

$$\begin{array}{rl|l|l|l} 3-x\equiv a_0+ & a_1 & x+\ a_2 & x^2+\ a_3 & x^3+\cdots \\ & -a_0 & -\ a_1 & -\ a_2 & \\ & & +2a_0 & +2a_1 & \end{array} \qquad (1)$$

但(2)爲恆等式，準 § 284，得

$$a_0=3,$$

$$a_1-a_0=-1, \qquad \therefore \quad a_1=-1+a_0=2.$$

$$a_2-a_1+2a_0=0, \qquad \therefore \quad a_2=a_1-2a_0=-4.$$

$$a_3-a_2+2a_1=0, \qquad \therefore \quad a_3=a_2-2a_1=-8.$$

故 $(3-x)/(1-x+2x^2)=3+2x-4x^2-8x^3+\cdots\cdots.$

例2. 求 $\dfrac{2+x+3x^2}{1+x-x^2}$ 至五項。

409 **含數變值之多項式.** 設 A 與 B 爲兩多項式各含數個變值，A 之各文字之方次不小於 B，則有時 B 可以除盡 A，換言之即 $\dfrac{A}{B}\equiv$ 整函數 Q 有時可以存在，茲可看出設欲求 Q，先同按某一變數之方次排列 A 與 B，然後用 § 401 之法，是否可能。

例1. 以 $x+y+z$，除 $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

$$\begin{array}{l|l} x^3-3yz\cdot x+(y^3+z^3) & x+(y+z) \\ \cline{2-2} \underline{x^3+(y+z)x^2} & x^2-(y+z)x+(y^2-yz+z^2) \\ \quad -(y+z)x^2-3yz\cdot x & \\ \quad \underline{-(y+z)x^2-(y+z)^2x} & \\ \qquad\quad (y^2-yz+z^2)x+(y^3+z^3) & \\ \qquad\quad \underline{(y^2-yz+z^2)x+(y^3+z^3)} & \end{array}$$

故 $(x^3+y^3+z^3-3xyz)/(x+y+z)=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$

例2. 以 $x+y+4$，除 $2x^2+5xy+3y^2+7x+11y-4$.

若 B 不能除 A，則得 $\dfrac{A}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$ 之式，此處 Q 及 R 爲關於排列文字之整式，而文字 R 之方次小於 B，但文字

排列之選擇不同則所得式之形狀亦異。

例，以 $2x+y$ 除 $4x^2+6xy+y^2$.

(1)以 x 爲所排文字，得

$$\begin{array}{l|l}
4x^2+6xy+\ \ y^2 & 2x+y \\
\underline{4x^2+2xy\qquad\ \ } & \overline{2x+2y} \\
\qquad 4xy+\ \ y^2 & \\
\qquad \underline{4xy+2y^2} & \\
\qquad\qquad -\ y^2 &
\end{array}$$

故

$$\frac{4x^2+6xy+y^2}{2x+y}=2x+2y-\frac{y^2}{2x+y}$$

(2)選 y 爲所排之文字，得

$$\begin{array}{l|l}
y^2+6yx+4x^2 & y+2x \\
\underline{y^2+2yx\qquad\ \ } & \overline{y+4x} \\
\qquad 4yx+4x^2 & \\
\qquad \underline{4yx+8x^2} & \\
\qquad\quad -4x^2 &
\end{array}$$

故

$$\frac{y^2+6yx+4x^2}{y+2x}=y+4x-\frac{4x^2}{y+2x}.$$

習　題　XIII

1．以 §401 之方法與分離係數法，計 $6x^4-7x^3-3x^2+24x-20$ 被除於 $3x^2+x-6$ 之商。

2．以 x^2+2x-7 除 $3x^4-2x^3-32x^2+66x-35$.

3．以 x^2-2x+4 除 $2x^5-5x^4+13x^3-15x^2+22x$.

4．以 x^3-x+5 除 $4x^7-3x^5+19x^4+2x^3+4x^2-4x+7$.

5．以 §404 之不定係數法，求 x^3-3x+2 除 $2x^5-3x^4+x-5$ 之商。

6．以 x^3-3x+2 除 $2x^5-3x^4+x^2-5$.

7．設 $A=3x^3-5x^2-7x+12$ 及 $B=3x^2+x-5$ 化 A 爲 $A\equiv QB+R$ 式，式中 R 之次數低於 B，且將 A/B 之相當式書出。

8．設 $x^4+ax^3+x^2+bx+1$ 可被 x^2-2x+1 除盡，試定 a 與 b 之值。

9．a 與 b 爲何值，則 $\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+ax+b}{x^2+3x+5}$ 可化爲整式。

10．$x^6+x^5+x^3+x+1+2(x^4+x^2)$ 被除於 x^2+x+1.

11．$2x^2+5xy-3y^2-5x+13y-12$ 被除於 $x+3y-4$.

12．$2a^2-b^2-6c^2-ab+ac+5bc$ 被除於 $2a+b-3c$.

13．$a^2(b+c)+b^2(c+a)-c^2(a+b)+abc$ 被除於 $ab+bc+ca$.

14．$x^4+(a-3)x^3+(4-a)x^2-2ax+8a$ 被除於 x^2-3x+4.

15．用分離係數法，以 $2x-3y$ 除 $8x^3-27y^3$.

16．同上，以 $x-y$ 除 $x^4-4xy^3+3y^4$.

17．同上，以 $2a^2-ab+b^2$ 除 $6a^5+a^4b-a^3b^2+11a^2b^3-5ab^4+4b^5$.

18．被除數為 $2x^3+xy^2+y^3$，除數為 $2x+y$，求 Q 及 R，先選 x 為"排列字"；次選 y 為"排列字"。

19．設被除數為 $1-3x+5x^2$，除數為 $1+x+3x^2$，均按 x 之升冪排列，求商至第三項及除數。

20．設被除數為 $1+x+3x^2$，除數為 $1-3x+5x^2$，同上題法求 Q 及 R.

21．以不定係數法，§408，求 $\frac{1}{1-2x}$ 之商至四位。

22．且求 $(2+3x+4x^2)/(1-x+2x^2)$ 之商至四位。

對於除法及餘數定理

410　**簡除法。**　若除式為 $x-b$，即一次二項式，其首項係數為1，茲示一作長除法（§401）之捷便法則。

茲設 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 被除於 $x-b$ 之結果。

$$\begin{array}{l|l}
a_0x^3+a_1x^2\quad+a_2x+a_3 & x-b \\
\cline{2-2}
\underline{a_0x^3-a_0bx^2} & a_0x^2+(a_0b+a_1)x+(a_0b^2+a_1b+a_2) \\
(a_0b+a_1)x^2+a_2x & \\
\underline{(a_0b+a_1)x^2-(a_0b^2+a_1b)x} & \\
\qquad(a_0b^2+a_1b+a_2)x+a_3 & \\
\qquad\underline{(a_0b^2+a_1b+a_2)x-(a_0b^3+a_1b^2+a_2b)} & \\
\qquad\qquad a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=R &
\end{array}$$

其 Q 及 R 之係數爲

a_0,　a_0b+a_1,　$a_0b^2+a_1b+a_2$,　$a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3$.

注意，首項係數爲被除式之首項係數，其餘係數可按下法得之：

已得之係數乘以 b，再加被除式之次一係數。

如　　$a_0b^2+a_1b+a_2=(a_0b+a_1)b+a_2$,

及　　$a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=(a_0b^2+a_1b+a_2)b+a_3$.

無論被除數爲任何方次，此法皆能適用，因除數之首項係數爲 1，故 Q 之新係數，必與已得除式之首項係數相同，是以 Q 之前係數乘以 b，再加被除式之新係數即得 Q 之後一係數，同理 Q 之末項係數乘以 b，再加被除式之末項係數即得 R.

故除式爲 $x-b$，被除式爲 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 之形 411
者，可求 Q 及 R 如下，此處之 $c_0, c_1, \cdots c_{n-1}$ 表 Q 之係數。

$$\begin{array}{cccccc|l} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & b \\ \hline & c_0b & c_1b & \cdots & c_{n-2}b & c_{n-1}b & \\ \hline c_0 & c_1 & c_2 & & c_{n-1} & R. & \end{array}$$

先按其固有次序書被除式之係數，而寫 b 於其右。

在 a_0 下書 c_0，可知 c_0 與 a_0 相等。

以 b 乘 c_0 寫其積 c_0b 於 a_1 下，相加得 c_1.

同法，以 b 乘 c_1 寫其積 c_1b 於 a_2 下，相加得 c_2.

依此進行，即遞次乘而加之，以至 $a_0, a_1, \cdots a_n$ 用盡為止。

例． $3x^4-5x^3-4x^2+3x-2$ 被除於 $x-2$.

得

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -5 & -4 & +3 & -2 & \underline{2} \\ & 6 & 2 & -4 & -2 & \\ \hline 3 & 1 & -2 & -1, & -4 & \end{array}$$

故 $Q=3x^3+x^2-2x-1$ 及 $R=-4$.

此法名曰簡除法(*synthetic division*)，每遇除式為 $x-b$ 之形者，學者須用此法以資熟練。

412 **此法之詮述．** 1.施綜合除法時，若被除數為不完全多項式必須以 0 係數表其 x 之缺幂。

2． 因 $x+b=x-(-b)$，故以 $x+b$ 施綜合除法時，只以 $-b$ 代 b 足矣。

例1． 以 $x+1$ 除 x^4-1.

題中 $x+1=x-(-1)$，以 $x-(-1)$除之，得

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +0 & +0 & +0 & -1 & \underline{-1} \\ & -1 & +1 & -1 & +1 & \\ \hline 1 & -1 & +1 & -1, & 0 & \end{array}$$

故 $Q=x^3-x^2+x-1$ 及 $R=0$.

3． 若以二項式 $\alpha x-\beta$ 除之，則可書為 $\alpha\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

以 $\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ 施簡除法，并以 Q 及 R 表其所得之商及除式，則相當於 $\alpha x-\beta$ 之商及除式必為 $\frac{Q}{\alpha}$ 及 R, § 403, 2.

例2． $3x^3-11x^2+18x-3$ 被除於 $3x-2$.

題中 $3x-2=3(x-\frac{2}{3})$，以 $x-\frac{2}{3}$ 除之，得

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -11 & +18 & -3 & \underline{2/3} \\ & 2 & -6 & 8 & \\ \hline 3 & -9 & 12, & 5 & \end{array}$$

故所求之商爲$\frac{3x^2-9x+12}{3}$，或x^2-3x+4而除式爲5.

例3.　$5x^5-x^3+x+2$被除於$x-3$.

例4.　$x^3+6x^2+11x+6$被除於$x+3$.

例5.　$2x^3-3x^2+8x-12$被除於$2x-3$.

餘數定理.　設以$x-b$除一含x之多項式，則其餘數等於以b代x於被除數之結果；如設$f(x)$表被除數，則$f(b)$表其餘數. 413

此定理之說明已詳於§410；因$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$被除於$x-b$其餘式爲$a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3$. 總之，$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$被除於$x-b$其餘式必爲$a_0b^n+a_1b^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$，或$f(b)$.

此定理亦可用下法證明之：

設$f(x)$爲被除式，$x-b$爲除式，Q爲商，R爲餘式，則，§401

$$f(x)\equiv\phi(x)(x-b)+R.$$

式中R之方次小於$x-b$，即不含x，故對於x之一切值，均有同值.

無論x爲何值，此恒等式之兩端之值相同，於特數，設$x=b$時，兩端仍常相等，故

$$f(b)\equiv\phi(b)(b-b)+R.$$

但$b-b=0$；且$\phi(x)$爲整式，$\phi(b)$爲有定值之式

故$\phi(b)(b-b)=0$是以

$$f(b)=R.$$

適用下例於兩事，一表明餘數定理爲眞確，一表明設b及$f(x)$之係數爲已知眞數，普通求$f(b)$之值之最簡法爲以$x-b$除$f(x)$施綜合除法所得餘式即$f(b)$. 414

例1.　若 $x=4$ 間 $f(x)=5x^4-12x^3-20x^2-43x+6$ 之值爲何?

1.　用直接代入法得

$f(4)=5\cdot4^4-12\cdot4^3-20\cdot4^2-43\cdot4+6=1280-768$ $-320-172+6=26$.

2.　用簡除法得

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5 & -12 & -20 & -43 & +6 & \underline{4} \\
 & 20 & 32 & 48 & 20 & \\
\hline
5 & 8 & 12 & 5, & 26 & =f(4).
\end{array}
$$

例2.　設 $f(x)=3x^4-x^3+5x^2-8x+4$, 用綜合除法求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(4)$, $f(-2/3)$.

415　**推論1.**　若 $x=b$ 時 $f(x)$ 爲 0; 則 $x-b$ 必能除盡 $f(x)$ 其逆定理亦眞。

按 § 413, 因 $f(b)$ 爲 $x-b$ 除 $f(x)$ 之餘式，故餘式爲 0 時，即可除盡。

如 $x=1$ 時，$f(x)=x^3-3x^2+2$, 即 $f(1)=1-3+2=0$. 故 $x-1$ 能除盡 $f(x)$, 可用除法驗證之。

又 $f(x)=x^n-b^n$ 可被 $x-b$ 除盡，因 $f(b)=b^n-b^n=0$ 故也。

例1.　若 $x-2$ 能除盡 x^3+3x^2-m, 問 m 之值爲何?

解　　$2^3+3\cdot2^2-m=0$, 或 $m=20$.

例2.　若 n 爲奇數，則 $x+b$ 能除盡 x^n+b^n, 但 n 爲偶數則不能除盡，試證之。

416　**推論2.**　含兩個或多個變數之整函數，設其中兩變數 x 及 y 相等時爲零，則兩變數之差 $x-y$, 能除盡此函數。

因此函數可化爲係數含他變數之 x 之多項式，由題設 $x=y$ 時，函數爲零，故 $x-y$ 可以除盡之，§ 415.

如 $x=y$ 時 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ 爲零，因以 y 代 x, 得 $y^2(y-z)+y^2(z-y)+z^2(y-y)\equiv0$.

故 $x-y$ 能除盡 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$，茲用除法驗證如下：

$$
\begin{array}{l|l}
(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+(y^2z-z^2y) & x-y \\
\underline{(y-z)x^2-(y^2-yz)x} & \overline{(y-z)x-(yz-z^2)} \\
\quad -(yz-z^2)x+(y^2z-z^2y) & \\
\quad \underline{-(yz-z^2)x+(y^2z-z^2y)} &
\end{array}
$$

例。證明 $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ 可被 $x-y$, $y-z$ 及 $z-x$ 除盡。

定理。 若 $x=a$ 及 $x=b$ 時，多項式 $f(x)$ 爲零，則 $f(x)$ 可被 $(x-a)(x-b)$ 除盡，依題意 $f(a)=0$ 故 $f(x)$ 可被 $x-a$ 除盡，§415，設其商爲 $\phi_1(x)$，得 417

$$f(x)=(x-a)\phi_1(x)，此處\ \phi_1(x)\ 爲整式。\qquad (1)$$

在 (1) 內設 $x=b$，得

$$f(b)=(b-a)\phi_1(b). \qquad (2)$$

但依題意 $f(b)=0$，而 $b-a\neq 0$.

又因兩因子之積爲零至少必有一因子爲零，§253，故由 (2) $\phi_1(b)=0$.

但 $\phi_1(b)=0$，則 $\phi_1(x)$ 可被 $x-b$ 除盡 §415，設其商爲 $\phi_2(x)$，則得

$$\phi_1(x)\equiv(x-b)\phi_2(x)，此處\ \phi_2(x)\ 爲整式。\qquad (3)$$

代入 (1) 得

$$f(x)\equiv(x-a)(x-b)\cdot\phi_2(x), \qquad (4)$$

即已證明 $f(x)$ 可被 $(x-a)(x-b)$ 除盡。

總此，可證明下之普通定理。

若 $x=a, b, c, \ldots$ 致 $f(x)$ 爲零，則 $f(x)$ 可被 $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots$ 除盡。 418

如 $x=1$ 及 $=-1$ 時 $2x^3+3x^2-2x-3$ 爲零，即 $2+3-2-3=0$ 及 $-2+3+2-3=0$.

故 $2x^3+3x^2-2x-3$ 可被 $(x-1)(x+1)$ 或 x^2-1 除盡，可用除法驗證之。

例1. 一二次式 $f(x)$, $x=2$ 及 $x=3$ 時 $f(x)=0$, $x=4$ 時 $f(x)=6$, 求 $f(x)$.

因 $f(x)$ 爲二次式且可被 $(x-2)(x-3)$ 除盡 §417, 故 $f(x)=a_0(x-2)(x-3)$, 此處 a_0 爲常數。

又因 $f(4)=6$ 故 $6=a_0(4-2)(4-3)$ 則 $a_0=3$.

故 $f(x)=3(x-2)(x-3)=3x^2-15x+18$.

例2. 一三次式 $f(x)$, $x=2$ 及 $x=3$ 時 $f(x)=0$; $x=1$ 時 $f(x)=6$; $x=4$ 時, $f(x)=18$; 求 $f(x)$.

理由如前。$f(x)=(a_0x+a_1)(x-2)(x-3)$ 此處 a_0, a_1 爲常數。

又因 $f(1)=6$ 及 $f(4)=18$, 故得

$$6=(a_0+a_1)(1-2)(1-3), \text{ 或 } a_0+a_1=3, \qquad (1)$$

$$18=(4a_0+a_1)(4-2)(4-3), \text{ 或 } 4a_0+a_1=9, \qquad (2)$$

解 (1) 及 (2), 得 $a_0=2$, $a_1=1$.

故 $f(x)=(2x+1)(x-2)(x-3)=2x^3-9x^2+7x+6$.

419 **定理.** 多項式 $f(x)$ 之方次爲 n, x 之值能使 $f(x)$ 爲零者, 不能多於 n 個。

假如使 $f(x)$ 爲零之 x 之值多於 n 個, 則有形如 $(x-a)$ 多於 n 個之因子之積可以除盡 $f(x)$, §481, 當然爲不可能, 因其積之方次超過 n 也。

420 **定理.** 若多項式 $f(x)$ 之方次不多於 n, 而能使 $f(x)$ 爲零之 x 之值多於 n 個, 則 $f(x)$ 之係數必皆爲 0.

因設其係數不皆爲 0, 則 x 之值, 能致 $f(x)$ 爲零者, 不能多於 n 個, §419.

此多項式稱爲恆等於 0.

421 **定理.** 設二 n 次多項式 $f(x)$ 及 $\phi(x)$, 於多於 n 個之 x 值, 能有等值, 則其相當係數必等。

設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$

及 $\phi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n$.

又設 $\psi(x)=f(x)-\phi(x)$

$$=(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots\cdots+(a_n-b_n).$$

$\psi(x)$ 爲0，則 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 相同，依題意，有多於 n 個之 x 値能使其相同。

故多項式 $\psi(x)=(a_0-b_0)x^n+\cdots\cdots+(a_n-b_n)$，之方次不多於 n，而多於 n 個之 x 値能使之爲零，故其所有係數皆爲0.

故 $a_0-b_0=0, a_1-b_1=0, \cdots\cdots, a_n-b_n=0$.

即 $a_0=b_0,\quad a_1=b_1\cdots\cdots,\quad a_n=b_n$,

亦即 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之相當係數相等。

如 $x=2, 4, 6$ 時 $f(x)=2x^2+bx+5$ 及 $\phi(x)=ax^2+3x+c$ 之値相等，則得 $a=2, b=3$ 及 $c=5$.

習　題　XIV

1．以綜合法計 $x^4-3x^3-x^2-11x-4$ 被除於 $x-4$ 之商。

2．$5x^5-6x^4-8x^3+7x^2+6x+3$ 被 $x-3$ 除。

3．$3x^4+x^2-1$ 被 $x+2$ 除。

4．$3x^3+16x^2-13x-6$ 被 $3x+1$ 除。

5．$3x^3-6x^2+x+2$ 被 $3x-1$ 除。

6．$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$ 被 $x-a$ 除。

7．$2x^4-x^3y-7x^2y^2+7xy^3-10y^4$ 被 $x-2y$ 除。

8．設 $f(x)=2x^3-5x+3$，以§414之法求 $f(1)$，$f(2)$，$f(5)$，$f(-1)$，$f(-3)$，$f(-6)$.

9．用除數定理定 m 之値，令其 $x^3+mx^2-20x+6$ 被 $x-3$ 除盡。

10．以上題之法，定 l 及 m 令其 $2x^3-x^2+lx+m$ 被 $(x+2)(x-4)$ 除盡。

11. 以§416之法，指示$3bm+am-2an-6bn$能被$m-2n$除盡，亦能被$a+3b$除盡。

12. 以§§416, 417之法，示$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$能被$(a-b)(b-c)(c-a)$除盡。

13. 求x之三次整函數，當$x=1, 4, -2$時則函數爲零，$x=2$時函數爲-16.

14. 求x之三次整函數，當$x=2, 3$時函數爲零，$x=0$時函數爲6，$x=1$時，函數爲12.

15. 試證$2x^3-ax+1$與x^3+5x+2，於x之四值不能有相同值。

以他多項式表一多項式

422　設A及B表x之兩多項式，A之方次高於B.

以B除A設其商爲Q，餘式爲R，則

$$A\equiv QB+R. \tag{1}$$

若Q之方次不小於B，則Q再以B除之，設其商爲Q_1，餘式爲R_1，則

$$Q\equiv Q_1B+R_1. \tag{2}$$

同樣若Q_1之方次不小於B，則Q_1再以B除之，設其商爲Q_2，餘式爲R_2，則

$$Q_1\equiv Q_2B+R_2. \tag{3}$$

設Q_2之方次小於B. 則得

$$\begin{aligned} A&\equiv QB+R & (1)\\ &\equiv\{Q_1B+R_1\}B+R & (2)\\ &\equiv\{(Q_2B+R_2)B+R_1\}B+R & (3)\\ &\equiv Q_2B^3+R_2B^2+R_1B+R, \end{aligned}$$

此處所有係數Q_2, R_2, R_1, R之方次均小於B.

總之，任一多項式 A，其方次高於 B，按上述之法進行，以至得一商，其方次小於 B 爲止，則得

$$A\equiv Q_{r-1}B^r+R_{r-1}B^{r-1}+\cdots+R_1B+R$$

此處 $R,R_1,\cdots,R_{r-1},Q_{r-1}$ 表各累次餘式，及最末之商，其方次均小於 B.

例。 化 $x^5-4x^4+3x^3-x^2+x+4$ 爲 x^2+x+1 之多項式，其係數之方次，均小於 2.

用係數除法，排列計算如下：

$$\begin{array}{l|l|l}
1-4+3-1+1+4 & 1+1+1 & \\
\underline{1+1+1} & 1-5+7-3 & 1+1+1 \\
-5+2-1 & \underline{1+1+1} & 1-6 \qquad \therefore Q_1=x-6 \\
\underline{-5-5-5} & -6+6-3 & \\
\quad 7+4+1 & \underline{-6-6-6} & \\
\quad \underline{7+7+7} & \quad 12+3 \qquad \therefore R_1=12x+3 & \\
\quad -3-6+4 & & \\
\quad \underline{-3-3-3} & & \\
\qquad -3+7 \quad \therefore R=-3x+7. & &
\end{array}$$

故 $\qquad x^5-4x^4+3x^3-x^2+x+4.$

$\equiv(x-6)(x^2+x+1)^2+(12x+3)(x^2+x+1)-(3x-7)$.

於特例，此法能使 x 之任一多項式，變爲具常數係數之 $x-b$ 之多項式，其方次與原式相同。 423

例；變 $2x^3-x^2+4x-5$ 爲 $x-2$ 之多項式。

茲用綜合法逐次計算如下：

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & -1 & +4 & -5 & \underline{2} \\
 & \underline{4} & \underline{6} & \underline{20} & \\
2 & +3 & +10 & 15 & \therefore R=15 \\
 & \underline{4} & \underline{14} & & \\
2 & +7 & 24 & & \therefore R_1=24 \\
 & \underline{4} & & & \\
2, & 11 & & & \therefore R_2=11 \text{ 及 } Q_2=2.
\end{array}$$

$\therefore 2x^3-x^2+4x-5\equiv 2(x-2)^3+11(x-2)^2+24(x-2)+15.$

習　題　XV

1. 用§422之法，以 x^2+1 表 x^4+x^3-1.

2. 用 $2x^2+1$ 表 $4x^4+2x^3+4x^2+x+6$.

3. 以 x^3-x^2+x+3 表 $2x^7-3x^6+2x^5+5x^4-x^2+6$.

4. 以 x^2+xy+y^2 表 $x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5$.

5. 用§423之方法，以 $x-3$ 表 $2x^3-8x^2+x+6$.

6. 以 $x+2$ 表 $x^5+3x^4-6x^3+2x^2-3x+7$.

7. 以 $x+3$ 表 x^3+9x^2+27x.

8. 以 $x+1$ 表 x^3+3x^2+x-1.

VI 有理整式之因子

導　言

424　**因子.** 設 A 表含一變數或數變數之有理函數，凡含此諸變數而能除盡 A 者之任一有理整函數稱爲 A 之因子.

故一函數 F 爲 A 之因子，其足够及必須之條件爲

1. F 關於 A 中之變數爲有理整函數.
2. A 可化爲 $A\equiv GF$ 之形，此處 G 亦爲整式.

例1. 因 $2x^2-2xy=2x(x-y)$,故 x 及 $x-y$ 均爲 $2x^2-2xy$ 之因子.

例2. 因 $3x^2-2y^2=(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y)(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)$, 故 $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y$ 及 $\sqrt{3}x-\sqrt{2}y$ 均爲 $3x^2-2y^2$ 之因子.

例3. 雖 $x-y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$，但 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 及 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 不得稱爲 $x-y$ 之因子，因其俱非 x 及 y 之有理函數也.

註1. 因子之係數不必爲整數(或式)，或有理數(或 425
式)，換言之，可爲任何種類之數或式，如例2內因子之係數爲無理數。

因 $x^2-y=(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$ 故 x^2-y 於 x 及 y 爲不可分解；但獨於 x 爲可分解，其因子爲 $x+\sqrt{y}$ 及 $x-\sqrt{y}$. 含形於一個文字之多項式亦然。

註2. 除有整數係數之函數單獨處理外，普通不計其
"數目因子"，如已知整函數 A 之因子範圍內不計例1中之 426
2; 因無須求整函數係數之爲整數者，蓋任一獨數(或常數)因子可謂其能除盡 A 云。

同理，F 爲 A 之因子，而 c 爲任一常數(非0). 則 cF 亦爲 A 之因子，但應視 F 與 cF 爲 A 之同性因子，而 A 之因子範圍中只含其一個。

如例1之因子，可稱爲 $2x$ 及 $x-y$ 或 $-2x$ 及 $y-x$.

定理. 若 F 爲 B 之因子，而 B 爲 A 之因子則 F 亦 427
爲 A 之因子。

按§424, 　　A 與 B 可分解爲下式：

$$A\equiv GB,\quad B\equiv HF,$$

此處 G 與 H 爲整式。

故 $$A\equiv G.\ HF\equiv GH\cdot F,$$

則 F 爲 A 之因子，§424.

素式，複式. 一整數除自身(或常數)外無他因子， 428
此式稱曰素式，含他因子者謂之複式，

如 $x+y^2$ 及 $x-2y$ 爲素式，但 x^2-y^2 爲複式。

一 n 次之複函數 A, 爲不少於二不多於 n 個之素函數 B, 429
C, ... 之積。此諸素函數稱爲 A 之素因子。

430 茲假定：

1. 任一已知函數 A 只有一組素因子。

2. A 之一切他因子，爲此等素因子之積。

3. 此等素因子之二個或多個可相等，但 A 只能以其不同素因子之冪之積的唯一方法表之。

此定理中，2 及 3 爲 1 之推論，其証見§§484, 485於 A 之一變值函數，且可證明其一般情形。

如 $x^3y^3-2x^2y^4=xxyyy(x-2y)$，而 $x^3y^3-2x^2y^4$ 之素因子爲 $x, x, y, y, y, x-2y$. 其他因子如 x^2, xy 等等爲各素因子之積，其不同之素因子爲 $x, y, x-2y$ 且只有一法表各因子之冪之積即 $x^2y^3(x-2y)$.

431 **因子分解法。** 分解已知函數 A，完全析之爲素因子即化 A 爲 $A\equiv B\cdot C\cdot D\cdot\cdots$ 之形，此處 $B, C, D, \cdots$ 表素函數。

但於起始不必稔知其素因子，可先析 A 爲其兩因子 F 與 G 之積，再分解 F 及 G，依此進行以至盡成素因子爲止，上法第一步稱爲“析 A 之因子”。

因子分解法爲乘法之逆。乘法含兩重要步驟；(1) 分配律之幾種應用，即以 $ac+bc$ 代 $(a+b)c$ 等；(2) 於所得結果內，合併同類項，逆此步驟，即 (1) 分開適已合併之項——遇因子難分解時——及 (2) 用分配律以 $(a+b)c$ 代 $ac+bc$ 等。

各種複式未必全能分解，如 $x^5+ax^3+bx^2+cx+d$ 可證明爲複式，且可證明次式之因子不能以代數方法求之，即在可能範圍方適用於各種代數演算。

含一公因子之多項式

一式之各項均含獨項或多項式之公共因子，則可以分配律之簡單應用分解之，即 432

$$ab+ac+ad+\cdots\cdots=a(b+c+d+\cdots\cdots).$$

例1. 分解 $2a^2c+2abc+4ac^2-6acd$.

各項皆有因子 $2ac$，劈出之，得

$$2a^2c+2abc+4ac^2-6acd=2ac(a+b+2c-3d).$$

例2. 分解 $a(c-d)+b(d-c)$.

各項皆有因子 $c-d$ 劈出之，得

$$a(c-d)+b(d-c)=a(c-d)-b(c-d)$$
$$=(a-b)(c-d).$$

即將此種因子劈出而置於外方。

有若干式非如上述之形，必須結合各項而化之方有公共因子。 433

例1. 分解 $ac+bd+ad+bc$.

結合 ac 及 ad，又結合 bc 及 bd，得 $a(c+d)+b(c+d)$ 為一含公共因子 $c+d$ 之二項式。

故 $ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d)$.

由此觀之，結合各部之項數，必須相等。

例2. 分解 $a^2+ab-bd-ad+ac-cd$.

此式或為含三項之兩組，或為含兩項之三組，其中四項含 a，如 $a^2, ab, -ad, ac$；餘兩項含 d，如 $-bd$ 及 $-cd$，欲得各組之項數相同，須 $-ad$ 與 d 項結合之，得

$$a^2+ab+ac-ad-bd-cd=a(a+b+c)-d(a+b+c)$$
$$=(a-d)(a+b+c).$$

習題 XVI

分解以下各式之因子：

1. $6x^4y^3z^2-12x^2y^4z+8x^3y^3$.
2. $2n^2+(n-3)n$.
3. $ab-a+b-1$.
4. $mx-nx-mn+n^2$.
5. $3xy-2x-12y+8$.
6. $10xy+5y^2+6x+3y$.
7. $x^3y^2-x^2y^3+2x^2y-2xy^2$.
8. $x^4+x^3+x^2+x$.
9. $ac+bd-(bc+ad)$.
10. $a^2c-abd-abc+a^2d$.
11. $ad+ce+bd+ae+cd+bc$.
12. $a^2+cd-ab-bd+ac+ad$.

用已知恆等式求因子

434 於第二章內曾導出幾種特式乘積，如 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 設已知函數 A，能化爲此積之形，則能即刻書出因子。下節說明此類因子分解法。

435 **全完三項平方式** 凡呈 $a^2\pm2ab+b^2$ 之形者爲完全三項平方式，此等式可用下列公式解其因子：

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2,$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)=(a-b)^2.$$

注意完全三項平方式內（正當排列），中項爲兩外項平方根之積之2倍，則其相同之二因子，爲以其中項符號連結兩外項之主要平方根而得之。

開完全平方之方根，即求此兩等因子之一。

例1. 分解 $9x^2-12xy+4y^2$ 之因子。

此爲完全平方，因 $12xy=2\sqrt{9x^2}\cdot\sqrt{4y^2}$.

又因 $\sqrt{9x^2}=3x$, $\sqrt{4y^2}=2y$, 其中項之符號爲－，故得 $9x^2-12xy+4y^2=(3x-2y)(3x-2y)=(3x-2y)^2$.

例2.　分解 $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ 之因子。

用集項法化此式爲三項平方式。

$$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=(a+b+c)^2.$$

例3.　分解以下諸式之因子：

1.　$x^2+14x+49$.　　2.　$9-6a+a^2$.

3.　$9x^2y^2+30xy+25$.　　4.　$x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9$.

5.　$64a^8-48a^4+9$.　　6.　$a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.

平方差。 凡屬此形，或可化爲此形之代數式，皆可 433
用下列公式分解之：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

如
$$x^2-y^2-z^2+2yz=x^2-(y^2-2yz+z^2).$$
$$=x^2-(y-z)^2$$
$$=(x+y-z)(x-y+z).$$

次法於化三項式成平方差時甚爲有用；即先加一適宜之量於其中之一項使成一完全平方，然後再減此量。

如
$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy).$$

例．分解以下諸式之因子。

1.　x^4-y^6.　　2.　$6a^3-6ab^2$.

3.　$12a^3x^3-75axy^2$.　　4.　$25x^{2n}-49x^{2m}$.

5.　$36x^4-1$.　　6.　$x^4-3x^2y^2+y^4$.

平方和。 若用虛數單位 $i=\sqrt{-1}$，§§218, 220，則 437
平方和 a^2+b^2 可化爲平方差，然後用§436之法分解之，其因子爲虛數。

因　$i^2=-1$，故 $b^2=-(-b^2)=-(ib)^2$.

故　$a^2+b^2=a^2-(ib)^2=(a+ib)(a-ib)$.

由§§219, 220, 已知 i 仍依普通演算法則，於應用時只須記憶 $i^2=-1$.

438　**任兩同羃之和及差.** 在§§308,309,310內已證明

第一. n 為奇或為偶.

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).\quad(1)$$

第二. n 為偶數.

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}).\quad(2)$$

第三, n 為奇數.

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}).\quad(3)$$

故得下定理:

1. $a-b$ 永可除盡 a^n-b^n.
2. 若 n 為偶數, $a+b$ 可除盡 a^n-b^n.
3. 若 n 為奇數, $a+b$ 可除盡 a^n+b^n.
4. 各商皆含下列諸項.

$$a^{n-1}\quad a^{n-2}b\ldots ab^{n-2}\quad b^{n-1}$$

設 $a-b$ 為除數則均以＋號連結之，設 $a+b$ 為除數則－＋相間.

如, 1. $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

2. $x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$.

3. $8a^3+27b^3c^3=(2a)^3+(3bc)^3$

$$=(2a+3bc)[(2a)^2-(2a)(3bc)+(3bc)^2]$$

$$=(2a+3bc)(4a^2-6abc+9b^2c^2).$$

例. 分解以下諸式之因子:

1. $64x^3-125y^3$.　2. $27x^3+1$.　3. $16x^4-81y^4$.

439　**n 非素數時.** 下定理可為§438 (1)(2)(3) 及§436之直接推斷.

1. 若 n 為任一整數 p 之倍數，則 a^p-b^p 可除盡 a^n-b^n.

如， $x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3$

$$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4).$$

2. 若 n 爲任意整數 p 之偶倍數則 a^p+b^p 除盡 a^n-b^n.

如， $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$

$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3).$$

3. 若 n 爲任意整數 p 之奇倍數，則 a^p+b^p 可除盡 a^n+b^n，n 或奇或偶。

如， $x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3$

$$=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4).$$

4. 若 n 爲 2 之羃，運用 §436 之法則可解 a^n+b^n 爲二次之諸因子。

如， $x^8+y^8=x^8+2x^4y^4+y^8-2x^4y^4$

$$=(x^4+y^4)^2-2x^4y^4$$

$$=(x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2)(x^4+y^4-\sqrt{2}x^2y^2).$$

$$x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2=x^4+2x^2y^2+y^4-(2-\sqrt{2})x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2)^2-(2-\sqrt{2})x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy)(x^2+y^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy),$$

餘類推。

用 §444 之法，上面各二次因子，均可化爲一次因子，(虛數)，若 n 爲 2 之羃，則 a^n+b^n 恆可全部分解之。

若 n 非素數，最好先將 a^n+b^n 或 a^n-b^n 分爲兩因子，使其方次愈相近愈妙，則由此所得因子中至少有一個恆可再行分解。

如 x^6-y^6 先分解爲兩因子，再繼續分解之，得

$$x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

例。分解以下諸式之因子：

1．x^4+y^4．　　2．x^8-y^8．　　3．x^9+y^9．

440　§§438, 439, 之定理亦適用 $a^m \pm b^n$ 之式，而 m 及 n 爲同數 p 之倍數。

如　$x^6-y^{15}=(x^2)^3-(y^5)^3$

$=(x^2-y^5)(x^4+x^2y^5+y^{10})$．

習　題　XVII

試分解下列各式之因子，至不能分解時爲止，但不得導入無理數或虛數之係數。

1．$4x^3y-20x^2y^2+25xy^3$．　2．$28tx^2-63ty^2$．

3．$x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$．

4．$(7a^2+2b^2)^2-(2a^2+7b^2)^2$．

5．$(7x^2+4x-3)^2-(x^2+4x+3)^2$．

6．$4(1-b^2-ab)-a^2$．

7．x^4+x^2+1．　　8．$a^4-6a^2b^2+b^4$．

9．a^4+4a^2+16．　　10．$9x^4+15x^2y^2+16y^4$．

11．$4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$．

12．$576x^6y^3-9y^{15}$．　13．x^9-y^9．　14．$x^{12}-y^{12}$．

15．$x^{10}+y^{10}$．　　16．x^5-32．　17．x^7+y^{14}．

集項分解法

441　x 之多項式，常可集爲若干組，每組含一公共因子 F，則此公共因子 F 爲全式之因子，與§433比較之。

例1．分解 x^3+3x^2-2x-6 之因子。

末兩係數爲首二係數之等倍數，故得

$x^3+3x^2-2x-6=x^2(x+3)-2(x+3)$

$=(x^2-2)(x+3)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3)$．

例2.　分解　x^3+2x^2+2x+1.

集同係數之項，得

$$\begin{aligned}x^3+2x^2+2x+1&=x^3+1+2x(x+1)\\&=(x^2-x+1)(x+1)+2x(x+1)\\&=(x^2-x+1+2x)(x+1)\\&=(x^2+x+1)(x+1).\end{aligned}$$

有時先分其已知諸項中之一項爲兩項然後始能分解。

例3.　分解 x^3+4x^2+5x+6 之因子。

$$\begin{aligned}x^3+4x^2+5x+6&=x^3+3x^2+x^2+3x+2x+6\\&=x^2(x+3)+x(x+3)+2(x+3)\\&=(x^2+x+2)(x+3).\end{aligned}$$

茲再設一例。

例4.　分解 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ 之因子。

$$\begin{aligned}x^4+2x^3+3x^2+2x+1&=x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1,\\&=(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1\\&=(x^2+x+1)^2.\end{aligned}$$

習　　題　　XVIII

分解下列各式之因數。

1. x^4-x^3+x-1.
2. $x^5-x^3-8x^2+8$.
3. x^4-2x^3+2x-1.
4. $x^3-7x^2-4x+28$.
5. $x^6-x^4y^2-x^2y^4+y^6$.
6. x^3+2x^2+3x+2.
7. $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1$.
8. $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$.

二次式之分因法

二次式 x^2+px+q 觀察分解法。 若 p 及 q 爲整 442
數觀察分解有時可能。

因　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

設能求兩數 a 與 b，可致 $a+b=p$ 及 $ab=q$，則得 x^2+px+q 之因子。

此兩數恆可存在，但未必爲有理數，§ 441，若爲有理整數 § 454，則可由觀察求得之；如下列。

例1. 分解 $x^2+13x+42$ 之因子。

求兩整數 a 及 b，其積爲 42，其和爲 13，因 ab 及 $a+b$ 均爲正；故 a 及 b 必皆爲正，兩整數其積爲 42 者爲 1 與 42；2 與 21；14 與 3，7 及 6，其中求一對之和爲 13 者即 7 與 6.

故 $\quad x^2+13x+42=(x+7)(x+6).$

例2. 分解 $x^2-13x+22$ 之因子。

此式 a 與 b 均負；因其積爲正，其和爲負，故仍用前法，試算一對負數其積爲 22 者，即 -11 與 -2，因 $-11-2=-13$.

故 $\quad x^2-13x+22=(x-11)(x-2).$

例3. 分解 $x^2-9x-22$ 之因子。

此處 ab 爲負故 a 與 b 之符號相反；且因 $a+b$ 爲負，故負數之值較大；因 $-22=-22\times1=-11\times2$；試算如前，得 $a=-11$，及 $b=2$，因 $-11+2=-9$.

故 $\quad x^2-9x-22=(x-11)(x+2).$

例4. 分解以下諸式：

1. x^2+3x+2. 2. $x^2-16x+15$. 3. $x^2-4x-12$.
4. x^2+x-30. 5. $x^2+20x+96$. 6. $x^2-21x+80$.

443 **二次式 ax^2+bx+c 之觀察分解法.** 若 a, b 及 c 爲整數，有時可以觀察分解之。

用 a 乘除之，可化 ax^2+bx+c 爲 $[(ax)^2+b(ax)+ac]/a$，則括號內之式，可用上法解其因子，即求兩整數，其積爲 ac，其和爲 b 者。

例1. 分解 $2x^2+7x+3$ 之因子。

$$2x^2+7x+3=\frac{(2x)^2+7(2x)+6}{2}$$

$$=\frac{(2x+6)(2x+1)}{2}=(x+3)(2x+1).$$

例2. 分解 $abx^2+(a^2+b^2)x+ab$ 之因子。

令 $$abx^2+(a^2+b^2)x+ab=\frac{(abx)^2+(a^2+b^2)\cdot abx+a^2b^2}{ab}$$
$$=\frac{(abx+a^2)(abx+b^2)}{ab}$$
$$=(bx+a)(ax+b).$$

例3. 分解 $16x^2+72x-63$ 之因子。

在此種題內，不必再以16乘除之，因
$$16x^2+72x-63=(4x)^2+18(4x)-63$$
$$=(4x+21)(4x-3).$$

例4. 分解以下諸式之因子。

1. $6x^2-13x+6$.　　2. $5x^2+14x-3$.

3. $14x^2+x-3$.　　4. $18x^2+21x+5$.

5. $49x^2+105x+44$.　　6. $abx^2-(ac-b^2)x-bc$.

用配方法分解二次式 x^2+px+q 或 ax^2+bx+c 之因子。上法僅用於特別二次式下法可解一般二次式。 444

因 $$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

故加 $\frac{p^2}{4}$（即 x 之半係數之平方）於 x^2+px，可使之爲一完全平方。此法謂之 x^2+px 之配方。

1. 因加減 $\frac{p^2}{4}$ 於 x^2+px+q，其值不變，但此法能變此式爲兩平方差，再用§436之法解之。如，

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right).\ (1)$$

2. $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$

故其因子，可在 (1) 內以 $\frac{b}{a}$ 代 p，以 $\frac{c}{a}$ 代 q 得之，化簡其結果得

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right). \quad (2)$$

例1. 分解 x^2-6x+2 之因子。

$$\begin{aligned} x^2-6x+2&=x^2-6x+3^2-3^2+2\\ &=(x-3)^2-7\\ &=(x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7}). \end{aligned}$$

例2. 分解 $x^2+8x+20$ 之因子。

$$\begin{aligned} x^2+8x+20&=x^2+8x+4^2-4^2+20\\ &=(x+4)^2+4\\ &=(x+4)^2-4i^2\\ &=(x+4+2i)(x+4-2i). \end{aligned}$$

上式先得兩平方和，$(x+4)^2+4$，然後以 $-4i^2$ 代 4 變其和爲差，§ 437. 此兩因子爲虛數。

例3. 分解 $3x^2-5x+1$ 之因子。

$$\begin{aligned} 3x^2-5x+1&=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right]\\ &=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\right]\\ &=3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right]\\ &=3\left(x-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right). \end{aligned}$$

例4. 分解以下諸式之因子。

1. $x^2+10x+23.$　　2. $x^2-10x+24.$

3. $x^2-12x+45.$　　4. $x^2+x+1.$

5. $2x^2+3x+2.$　　6. $x^2-4ax-4b^2+8ab.$

兩變數之齊次二次函數. §§442－444之法適 445
用於下之二次式.

$$ax^2+bxy+cy^2.$$

例1. 分解 $x^2-8xy+14y^2$.

$$\begin{aligned}x^2-8xy+14y^2&=x^2-8xy+16y^2-2y^2\\&=(x-4y)^2-2y^2\\&=(x-(4+\sqrt{2})y)(x-(4-\sqrt{2})y).\end{aligned}$$

例2. 分解以下諸式:

1. $x^2+5xy+4y^2$. 2. x^2-xy+y^2.

兩變數之非齊次二次函數. 此種函數普通多 446
爲素式, 但下例爲複式, 可分解之.

例1. 分解 $A=x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$ 之因子.

若 A 爲複式, 必爲兩一次多項式之積, 且其二次項 $x^2+2xy-8y^2$, 必爲該多項式中諸一次項之積.

用觀察求得 $x^2+2xy-8y^2=(x+4y)(x-2y)$.

故若 A 爲複式必有兩數 l 及 m 適合下式:

$$\begin{aligned}&x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3\\&\equiv(x+4y+l)(x-2y+m)\\&\equiv x^2+2xy-8y^2+(l+m)x+(4m-2l)y+lm.\qquad(1)\end{aligned}$$

但 (1) 爲恆等式, 故由 §285, 得

$l+m=2$ (2), $-2l+4m=14$ (3), $lm=-3$ (4).

由 (2) 及 (3) 得 $l=-1$, $m=3$, 此等值適合於 (4), 因 $-1\cdot3=-3$.

故 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x+4y-1)(x-2y+3)$.

註. 此例示諸複式有何特殊結構, 若僅變 A 之末項 -3 爲任何他數, 則 A 變爲素式; 因 $l=-1$, $m=3$ 必不適合 (4) 也.

此法亦適用於含三個變數之齊次二次函數.

如，分解 $x^2+2xy-8y^2+2xz+14yz-3z^2$，之因子。

設 $x^2+2xy-8y^2+2xz+14yz-3z^2\equiv(x+4y+lz)(x-2y+mz)$.

按上法解之，得 $l=-1, m=3$.

例2. 分解 $2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2$ 之因子。

例3 證明 $x^2-y^2+2x+y-1$ 為素數。

447 **n 次多項式.** 前已證明各二次多項式 $a_0x^2+a_1x+a_2$，為一次兩因子之積，實則 x 之任何次多項式，亦為諸一次因子之積，但無求此因子之通法存在而已；換言之。

定理. 各 x 之 n 次多項式，

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

為 n 個一次因子之積；即 n 個二項式，$x-\beta_1, x-\beta_2, \cdots, x-\beta_n$，能致

$$f(x)\equiv a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)\text{者。}$$

此定理之證明詳後。

448 **推論.** 兩變數 x 及 y 之 n 次齊次式，為 n 個 x 及 y 之一次同次式之積。

如齊次式 $a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3$，…以 x/y 代 x 而導之為 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 之形，然後以 y^3 乘其結果。

但由 § 447，$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3\equiv a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)$，設以 $\dfrac{x}{y}$ 代 x 於此恆等式內，再以 y^3 分乘兩端各因子，得

$$a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3\equiv a_0(x-\beta_1y)(x-\beta_2y)(x-\beta_3y).$$

習題 XIX

分解以下諸式之因子：

1. $x^2-14x+48$.　　2. $x^2-21x-120$.
3. $5x^2-53x-22$.　　4. $16x^2+64x+63$.
5. $54x^2-21x+2$.　　6. $12x^2+20xy-8y^2$.

7. x^4-13x^2+36. 8. $x^3y-3x^2y^2-18xy^3$.

9. x^2-3x+3. 10. $3x^2+2x-3$.

11. $x^2-4xy-2y^2$. 12. $x^2-6ax-9b^2-18ab$.

13. $abx^2-(a^2+b^2)x-(a^2-b^2)$.

14. $x^2+bd+dx+bx+cx^2+cdx$.

15. $x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$.

16. $x^2+3xy+2y^2+3zx+5yz+2z^2$.

餘式定理及綜合除法之應用

用餘式定理求因子. 設 $f(x)$ 表 x 之多項式， 449
按餘式定理，§415, 設 b 表能致 $f(b)=0$ 之一數，則 $x-b$ 爲 $f(x)$ 之一因子，有時用觀察法即可求得此數 b.

例. 分解 $f(x)=x^3-5x+4$ 之因子.

$$\begin{array}{r|l} 1+0-5+4 & \underline{1} \\ \underline{\quad 1\ \ 1-4} & \\ 1\ \ 1-4,\ 0 & \end{array}$$

因 $f(1)=1-5+4=0$, 故 $x-1$ 爲 $f(x)$ 之因子. 以 $x-1$ 除 $f(x)$ 得商 x^2+x-4.

故 $f(x)=(x-1)(x^2+x-4)$.

註. 如上例，察知 $f(x)$ 之係數之代數和爲 0, 則 $x-1$ 爲 $f(x)$ 之因子.

整係數多項式. 設欲求具整數係數之多項式 $f(x)$ 450
之因子，通常先求具整數係數之若干一次因子，此等因子常可用下之原則求得，§§451, 452.

一多項式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 具整數係數， 451
可有一因子如 $x-b$ 之形，而 b 爲整數，則 b 必爲 $f(x)$ 之常數項 a_n 之因子.

如令 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, 若 $x-b$ 爲 $f(x)$ 之因子，則得，§415.

$$f(b)=a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3\equiv 0.$$

故 $$(a_0b^2+a_1b+a_2)b\equiv -a_3.$$

因 $a_0b^2+a_1b+a_2$ 爲整數，故 b 爲 a_3 之因子.

故所有諸因子 $x-b$ 可用下例求之。

例。　分解 $f(x)=3x^5-3x^4-13x^3-11x^2-10x-6$.

常數項 -6 之因子為 $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$, 若 $x-b$ 為 $f(x)$ 之因子，則 b 必為此等值之一，茲用綜合除法試之如下：

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
3 & -3 & -13 & -11 & -10 & -6 & \underline{-1} \\
 & -3 & +6 & +7 & +4 & +6 & \\ \hline
3 & -6 & -7 & -4 & -6, & 0 & \underline{-1} \\
 & -3 & +9 & -2 & +6 & & \\ \hline
3 & -9 & +2 & -6, & 0 & & \underline{3} \\
 & 9 & 0 & +6 & & & \\ \hline
3 & 0 & 2, & 0 & & &
\end{array}$$

因 $f(1)\neq0$, 則 $x-1$ 非其一因子，故以 $x-(-1)$ 試除之，因恰除盡，得商 $Q_1=3x^4-6x^3-7x^2-4x-6$, 商除式為0. 故 $x+1$ 為 $f(x)$ 之因子而 Q_1 為其餘因子之積。

次分解 Q_1 之因子，仍可證明能以 $x+1$ 除盡，得商 $Q_2=3x^3-9x^2+2x-6$.

Q_2 之常數項仍為 -6, 繼讀以 $x+1,\ x-2,\ x+2$ 試除之，但各除式皆非0, 故此等數無一為其因子，但以 $x-3$ 試除之，恰好除盡，得商 $Q_3=3x^2+2$. 故

$$f(x)=(x+1)^2(x-3)(3x^2+2).$$

452　具整數係數之多項式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 可有一形如 $\alpha x-\beta$ 之因子，此處 α 及 β 表無公因數之二整數，且 α 須為 a_0 之因子，而 β 須為 a_n 之因子，此定理含於451節之內。

設　　　$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$.

若 $\alpha x-\beta$ 或 $\alpha(x-\beta/\alpha)$ 為 $f(x)$ 之一因子，由§415, 則得

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=a_0\frac{\beta^3}{\alpha^3}+a_1\frac{\beta^2}{\alpha^2}+a_2\frac{\beta}{\alpha}+a_3\equiv0,$$

故　　　$$a_0\beta^3+a_1\beta^2\alpha+a_2\beta\alpha^2+a_3\alpha^3\equiv0. \tag{1}$$

由(1)得　　　$$a_0\beta^3\equiv-(a_1\beta^2+a_2\beta\alpha+a_3\alpha^2)\alpha. \tag{2}$$

因 $a_1\beta^2+a_2\beta\alpha+a_3\alpha^2$ 為整數，故 α 為 $a_0\beta^3$ 之因子，但 α 與 β^3 無公共因子，§492, 2, 故 α 為 a_0 之因子，§492, 1.

又自(1)　$$(a_0\beta^2+a_1\beta\alpha+a_2\alpha^2)\beta\equiv-a_3\alpha^3, \tag{3}$$

理由同前，故得 β 為 a_3 之因子，

故此等因子 $\alpha x-\beta$ 可如下例求得之：

例． 分解 $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$.

若 $\alpha x-\beta$ 爲 $f(x)$ 之因子，則 α 之值必爲 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ 之一，而 β 之值必爲 $\pm1, \pm2$ 之一，故 β/α 之值，必爲 $\pm1, \pm2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{6}$ 之一．

以 β/α 之各值試求 $\alpha x-\beta$ 須用綜合除法，以 $x-\beta/\alpha$ 試除 $f(x)$，若恰好除盡，以 Q 表其商，則 $\alpha x-\beta$ 爲 $f(x)$ 之因子，Q/α 爲其餘因子之積，§412, 3．

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6 & +5 & +3 & -3 & -2 & \underline{-1/2} \\
 & -3 & -1 & -1 & 2 & \\
\hline
6 & +2 & +2 & -4, & 0 & \\
3 & +1 & +1 & -2 & & \underline{2/3} \\
 & 2 & +2 & +2 & & \\
\hline
3 & +3 & +3, & 0 & & \\
1 & +1 & +1 & & &
\end{array}$$

以 $x-1, x+1, x-2, x+2$, 試除之，無一能除盡 $f(x)$ 者．但以 $x+\frac{1}{2}$ 除之得商 $Q_1=6x^3+2x^2+2x-4$, 故 $2x+1$ 爲 $f(x)$ 之一因子，其餘因子之積爲 $Q_1/2=3x^3+x^2+x-2$.

次再分解 $Q_1/2$ 之因子．若 $\alpha x-\beta$ 爲一因子，β/α 之值必爲 $\pm1, \pm2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$，但已知 $x-1, x+1, x-2, x+2$ 非其因子，因非 $f(x)$ 之因子也，以 $x-\frac{1}{3}, x+\frac{1}{3}$ 試之，皆不能除盡 $Q_1/2$. 但以 $x-\frac{2}{3}$ 除之，得商 $Q_2=3x^2+3x+3$. 故 $3x-2$ 爲 $Q_1/2$ 之因子，其餘因子之積爲 $Q_2/3=x^2+x+1$. 故

$$f(x)=(2x+1)(3x-2)(x^2+x+1).$$

註． 以 $x-b$ 或 $x-\beta/\alpha$ 試除之前，不能除盡者常顯而易知． 453

如，以 $x-2$ 試除 $5x^3-4x^2+x+8$, 顯然不能除盡；因

$$\begin{array}{rrrr|l}
5 & -4 & +1 & +8 & \underline{2} \\
 & 10 & & & \\
\hline
5 & 6 & & &
\end{array}$$

除數 2 致 Q 之次一係數爲 6, 未用之係數爲 1 及 8, 皆正，故 Q 及 R 之其餘係數，必皆爲正，即 R 不爲 0,

$$\begin{array}{rrrr|l}
3 & +1 & +1 & -2 & \underline{1/3} \\
 & 1 & & & \\
\hline
3 & 2 & & &
\end{array}$$

同樣以 $x-\frac{1}{3}$ 試除 $3x^3+x^2+x-2$ 亦顯然不能除盡，因續行演算均得分數，即 $2\cdot\frac{1}{3}$, 或 $\frac{2}{3}$, 故致令 Q 及 R 之其餘係數，均爲分數，而 R 不爲 0.

454　由 §452 可知多項式 $f(x)=x^n+\cdots+a_n$ 其首係數爲1，其他係數皆爲整數，設以有理分數代 x，則 $f(x)$ 不爲0.

因　$f(\beta/\alpha)=0$，則 $\alpha x-\beta$ 可除盡 $f(x)$，故 α 必爲1之因子即 $\alpha=\pm 1$.

455　**多項式因子分解及解方程.**　由 §360 可知分解多項式成諸一次因子之問題與解方程 $f(x)=0$ 之性質相同。

例1. 解 $f(x)=2x^4+x^3-17x^2-16x+12=0$.

按 452，得 $f(x)=(2x-1)(x+2)^2(x-3)$.

故方程 $f(x)=0$ 與下四方程爲等值。

$$2x-1=0,\ x+2=0,\ x+2=0,\ x-3=0.$$

故 $f(x)=0$ 之根爲 $1/2, -2, -2$, 及 3.

例2. 解　$x^3+3x^2=10x+24$.

移項，　$x^3+3x^2-10x-24=0$.

分爲因子，$(x+2)(x-3)(x+4)=0$.

故所求之根爲 $-2, 3$ 及 -4.

習　題　XX

分解下列各式:

1. x^3-7x+6.　　2. $x^3+6x^2+11x+6$.

3. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.　　4. x^4-2x^2+3x-2.

5. $6x^3-13x^2-14x-3$.　　6. $2x^3-5x^2y-2xy^2+2y^3$.

7. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5$.　　8. $4x^6-41x^4+46x^2-9$.

9. $6x^5+19x^4+22x^3+23x^2+16x+4$.

10. $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4$.

解下列各方程式:

11. $x^2-4x-12=0$.　　12. $6x^2-7x+2=0$.

13. $x^2-5x=14$.　　14. $x^2+6x=2$.

15. $x^3-9x^2+26x=24$.　　16. $x^4+2x^3-4x^2-2x+3=0$.

17. $x^3-1=0$.　　18. $10x^3-9x^2-3x+2=0$.

習　題　XXI

用前章所述之法，分解以下諸式之因子，分解工作至可能限度爲止不許引入無理數或虛數係數。

1. $6xy+15x-4y-10$.
2. $a^2bc-ac^2d-ab^2d+bcd^2$.
3. $a^3(a-b)+b^3(b-a)$.
4. a^5-81ab^4.
5. $a^4b-a^2b^3+a^3b^2-ab^4$.
6. $3abx^2-6axy+bxy-2y^2$.
7. $3x^6-192y^6$.
8. $(x^2+x)^3-8$.
9. $64x^6y^3-y^{15}$.
10. $x^2-(a-b)x-ab$.
11. $x^{2n}-3x^n-18$.
12. $x-x^2+42$.
13. $3x^4+3x^3-24x-24$.
14. $x^5-9x^3+8x^2-72$.
15. $2xc-a^2+x^2-2ab+c^2-b^2$.
16. $x^2(x^2-20)+64$.
17. $a^2-2ab+b^2-5a+5b+6$.
18. $x^4-10x^2y^2+9y^4$.
19. $6x^2-7xy-5y^2-4x-2y$.
20. $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$.
21. $4(xz+uy)^2-(x^2-y^2+z^2-u^2)^2$.
22. $14x^2+19x-3$.
23. $1+19y-66y^2$.
24. $xy^3+55x^2y^2+204x^3y$.
25. $a^4-18a^2b^2c^2+81b^4c^4$.
26. $(x^2-7x)^2+6x^2-42x$.
27. $8(x+y)^3-27(x-y)^3$.
28. $(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$.
29. $x^2+a^2-bx-ab+2ax$.
30. $x^5-y^5-(x-y)^5$.
31. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$.
32. b^4+b^2+1.
33. $2x^2+7xy+3y^2+9x+2y-5$.
34. a^4+4.
35. $x^2-xy-2y^2+4xz-5yz+3z^2$.
36. $4a^4+3a^2b^2+9b^4$.
37. $x^2-8ax-40ab-25b^2$.
38. x^8+x^4+1.
39. $(x^2+2x-1)^2-(x^2-2x+1)^2$
40. $(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.
41. $x^3-ax^2-b^2x+ab^2$.
42. $x^4+bx^3-a^3x-a^3b$.
43. $a^2-9b^2+12bc-4c^2$.
44. $8a^3+12a^2+6a+1$.
45. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.
46. $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.
47. $4x^5+4x^4-37x^3-37x^2+9x+9$.
48. x^4-4x+3.
49. $x^2+5ax+6a^2-ab-b^2$.
50. $15x^3+29x^2-8x-12$.
51. $abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc$.
52. $2x^3-ax^2-5a^2x-2a^3$.

53．$(a-b)x^2+2ax+(a+b)$．　54．$x^{15}-y^{15}$．

55．$x^4-6x^3+7x^2+6x-8$．　56．$4x^3-3x-1$．

57．$3x^5-10x^4-8x^3-3x^2+10x+8$．

58．$5x^4+24x^3-15x^2-118x+24$．

59．$a^2bc+ac^2+acd-abd-cd-d^2$．

60．$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$．

Ⅷ 最高公因子及最低公倍

最高公因子

456 **最高公因子．** 設 $A, B, \cdots$ 表一變數或多變數如 x 或 x 及 y 之有理整函數．

若 $A, B\cdots$ 無公因子，則稱爲互素數，若有若干公因子，必有一次數最高者，謂之爲最高公因子（$H.C.F.$）

如，x^2+y^2 及 $x+y$，爲互素數．

但 $4xyz^5$，$8xz^4$，及 $4x^2yz^3$ 有公因子 x, z, z^2, z^3, xz, xz^2 xz^3．

而其最高公因子爲 xz^3．

457 **註．** 1．此處不計數值之公因子．

2．諸函數之最高公因子爲 1 者，謂之互素式．

3．A 及 B 之最高公因子之值，與 A 及 B 之整數值之最大公約數無關，如 $(2x+1)x$ 及 $(x-1)x$ 之最高公因子爲 x，但當 $x=4$，$(2x+1)x$ 及 $(x-1)x$ 之值爲 36 及 12 則最大公約數不爲 4 而爲 12 矣．

458 **定理1．** $A, B, \cdots$ 之最高公因子爲 $A, B, \cdots$ 各函數中不同之公共素因子，各取其最低次冪之乘積．

設各函數 $A, B, \cdots$ 均以其不同素因子之冪之積表之，且如 § 430．假定於各函數間僅有此種一式存在，則此定理之眞確頗爲明顯．

如 xyz^5, xz^4 及 x^2yz^3 之不同公素因子爲 x 及 z,此各函數中 x 及 z 之最低冪爲 x 及 z^3 故其最高公因子爲 xz^3.

若一已知函數可用多種方法以其諸素因子表之者，則上定理所述演算，可表函數 $A, B, \cdots$ 爲數種相當形式，而最高公因子，亦可多於一個。

定理之應用. 一已知函數，如能完全分爲因子者，可用 §458 之定理，其最高公因子可立即求得。 459

例1. 求 $x^5y^2-6x^4y^3+9x^3y^4$ 及 $x^4y-9x^2y^3$ 之 $H.C.F.$

$$x^5y^2-6x^4y^3+9x^3y^4=x^3y^2(x-3y)^2.$$

及 $$x^4y-9x^2y^3=x^2y(x-3y)(x+3y).$$

故 $H.C.F.$ 爲 $x^2y(x-3y)$.

例2. 求下列諸式之 $H.C.F.$

1. $2x^4y^2z^5$, $3x^5y^3z$, $4x^3y^4$.
2. x^2-y^2, $x^2+2xy+y^2$ 及 x^3+y^3.
3. x^2-x-6, x^2+6x+8, 及 x^2+5x+6.
4. $x^3-6x^2+11x-6$ 及 $2x^3-9x^2+7x+6$.

設函數 $A, B, \cdots$ 中之一之素因子爲已知，則其他函數之諸因子，可用除法或餘式定理得之，然後用 §458 得其 $H.C.F.$ 460

例1. 求 $f(x)=x^2-3x+2$ 及 $\phi(x)=x^4-3x^3+5x^2-8x+5$ 之 $H.C.F.$

由觀察得 $f(x)=(x-1)(x-2)$. 以 $x=1$ 及 $x=2$ 代入 $\phi(x)$ 試驗之，得 $\phi(1)=0$, 但 $\phi(2)\neq 0$, 故所求之 $H.C.F$ 爲 $x-1$.

例2. 求 $f(x)=x^2+4x+4$ 及 $\phi(x)=x^4+5x^3+9x^2+8x+4$ 之 $H.C.F.$

因 $f(x)=(x+2)^2$, 故必須觀察 $x+2$ 是否爲 $\phi(x)$ 之

一因子，抑 $(x+2)^2$ 爲其一因子，以 $x+2$ 除 $\phi(x)$（綜合除法）得 $Q_1=x^3+3x^2+3x+2$ 及 $R_1=0$；再以 $(x+2)$ 除 Q_1 得 $Q_2=x^2+x+1$ 及 $R_2=0$，故 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之 $H.C.F.$ 爲 $(x+2)^2$.

例3. 求下列諸式之 $H.C.F.$

1. x^2+x-6 及 $2x^3+7x^2+4x+3$.
2. x^2+5x+6 及 $x^4+6x^3+13x^2+16x+12$.
3. $(x-1)^2(x-3)^3(3x+1)^2$ 及 $x^4-5x^3+x^2+21x-18$.

461　**定理2.** 令 A, B 表二已知整函數，M 及 N 表他二整函數，或常數，則 A 與 B 各公因子爲 $MA+NB$ 之一因子。

設 P 爲 A 與 B 之公因子。

則　　$A\equiv GF$ 及 $B\equiv HF$,

式中　　G 與 H 爲整式。

故　$MA+NB\equiv M\cdot GF+N\cdot HF\equiv(MG+NH)F$,

$MG+NH$ 必爲整式，

故 F 爲 $MA+NB$ 之一因子，§424.

462　**此定理之應用.** 若 x 之兩多項式，方次相同，用此定理求其 $H.C.F.$ 甚爲簡捷，因可化爲低次簡單多項式而分解之。

例1. 求 $A=x^2+2x-4$ 及 $B=x^2+x-3$ 之 $H.C.F.$

由 A 減 B，得 $A-B=x-1$.

按§461，A 與 B 之唯一公因子爲 $x-1$，但當 $x=1$ 時 A 不爲零，知 $x-1$ 非 A 之因子，故 A 與 B 爲互素式。

例2. 求 $A=2x^3-3x^2-3x+2$ 及 $B=3x^3-2x^2-7x-2$ 之 $H.C.F.$

1. 先以數乘 A 與 B 使其首項相同，即以 3 乘 A 以 2 乘 B，由 $3A$ 減 $2B$，得

$3A-2B=-5x^2+5x+10=-5(x^2-x-2)=-5(x+1)(x-2)$.

故 A 與 B 之公因子，只能爲 $x+1$ 及 $x-2$.

按除式定理知皆為 A 與 B 之因子，故 A 與 B 之 $H.C.F.$ 為 $(x+1)(x-2)$.

2. 或 A 與 B 相加，得

$$A+B=5x^3-5x^2-10x=5x(x^2-x-2)=5x(x+1)(x-2).$$

x 不為 A 或 B 之因式十分顯明，故只試驗 $x+1$ 與 $x-2$ 即可。

例3. 求下列諸式之 $H.C.F.$

1. $x^4-x^3+3x^2-4x-12$ 及 $x^4-x^3+2x^2+3x-22$.

2. $6x^3+25x^2+5x+4$ 及 $4x^3+15x^2-2x+8$.

定理3. 設四個整函數，$A.B.Q.R$ 有 $A\equiv QB+R$ 之關係，則 A 與 B 之公因子，即為 B 與 R 之公因子。 463

今 $$A\equiv QB+R, \qquad (1)$$

故 $$A-QB\equiv R. \qquad (2)$$

由 §461 定理 (2)，A 與 B 之任一公因子，必為 R 之一因子，故為 B 與 R 之公因子。

反言之，按 §461 之定理 (1)，B 及 R 之任一公因子，必為 A 之一因子，故為 A 及 B 之公因子。

故 A 與 B 之公因子，即為 B 及 R 之公因子。

求 x 之二多項式之 $H.C.F.$ 之通法。 若以 x 之多項式，除他一多項式而其被除式，商式，及除式可以恒等式 $A\equiv QB+R$ 連結之，故自 §463 得 464

被除式及除式之公因子，恒為除式及餘式之公因子。

任二 x 之多項式之 $H.C.F.$ 用此方法皆能求得，此法與算術上求兩整數之最大公約法相似，此法詳述於下，設 A 與 B 表已知多項式，設其次數不同則 A 表其高次式，

法則. 以 B 除 A 其商爲 q 其餘式爲 R_1.

再以 R_1 除 B, q_1 爲其商, R_2 爲其餘式.

更以 R_2 除 R_1, 依此繼續演算, 以新餘式除前餘式, 至餘數變爲常數爲止.

若最後所得餘式不爲零, 則 A 與 B 無公因子, 若爲零, 則最後之餘式, 即爲 A 與 B 之 $H.C.F.$

爲令其演算次數有定起見, 設最後餘式爲 R_3, 設 (1) $R_3=c$ 而 c 爲一常數不爲零, 或 (2) $R_3=0$ 則得

(1) $A\equiv qB+R_1$ 或 (2) $A\equiv qB+R_1$

$B\equiv q_1R_1+R_2$ $\qquad B\equiv q_1R_1+R_2$

$R_1\equiv q_2R_2+c$ $\qquad R_1\equiv q_2R_2$.

(1) A 與 B 無公因子.

由 § 463 恆等式 (1) 而知 A 與 B 及 B 與 R_1 之公因子相同, B 與 R_1 及 R_1 與 R_2 相同, R_1 與 R_2 及 R_2 與 c 相同.

故各對函數 A 與 B, B 與 R_1, R_1 與 R_2, R_2 及 c 之公因子皆同.

但因 c 爲常數 (不爲零), R 與 c 無公因子, 故 A 與 B 無公因子.

(2) R_2 爲 A 與 B 之公因子.

因 $R_1\equiv q_2R_2$, 而 R_2 之任一因子, 即 R_1 與 R_2 之公因子, R_2 即爲公因子之最高次者.

但因 R_1 與 R_2 及 A 與 B 之公因子相同, R_1 與 R_2 之最高公因子, 亦即 A 與 B 之最高公因子, 故 R_2 爲 A 與 B 之最高公因子.

例1. 求 x^2+x+1 及 x^3+x^2+2x+3 之最高公因子。

書除式於被除式之左，則得

$$
\begin{array}{rrrl}
B=x^2+x+1 & \big| \; x^3+x^2+2x+3 & \underline{\,x\,}=q & \\
& \underline{x^3+x^2+x} & & \\
R_1= & x+3 & \big| \; x^2+x+1 & \underline{x-2}=q_1 \\
& & \underline{x^2+3x} & \\
& & -2x+1 & \\
& & \underline{-2x-6} & \\
& R_2= & 7 &
\end{array}
$$

因最後除式 R_2 不為零，故 x^2+x+1 及 x^3+x^2+2x+3 無公共因子。

例2. 求 x^3+x^2+2x+2 及 x^3+2x^2+3x+2 之 $H.C.F.$

照例1之算草排列，得

$$
\begin{array}{rrrrl}
B=x^3+x^2+2x+2 & \big| \; x^3+2x^2+3x+2 & \underline{\,1\,} & & \\
& \underline{x^3+x^2+2x+2} & & & \\
R_1= & x^2+x & \big| \; x^3+x^2+2x+2 & \underline{\,x\,} & \\
& & \underline{x^3+x^2} & & \\
& R_2= & 2x+2 & \big| \; x^2+x & \underline{x/2} \\
& & & \underline{x^2+x} & \\
& & R_3= & 0 &
\end{array}
$$

此例能以 R_2 除盡，而 R_3 為 0. 故棄去 R_2 之因子 2, 得 $H.C.F.=x+1$.

此處為首次之實際證明——對於一變值之函數——若兩整函數有若干公因子必有其最高公因子；因在 §463, 465 內，（§458 未曾假定）已知一整函數以其素因子表之，只有一種方法。 466

觀 §465 之證明可知。 467

1. 在 $A, B, R_1, R_2\cdots$ 諸式內，每兩連續函數之 $H.C.F.$ 與 A 及 B 者相同。

2. A 與 B 之每一公因子即為 A 與 B 之 $H.C.F$ 之一除數。

此法之要略。 A 與 B 之某一素因子若能直接看出，可先抽出此素因子，然後再求其除式之 $H.C.F$，以所得之結 468

果與第一步分解之各素因子相乘，即爲A與B之$H.C.F.$ §458.

照此法可求$A, B, R_1, R_2, \cdots$內之任二連續函數之$H.C.F.$因每兩函數之$H.C.F.$與A與B之$H.C.F.$相同，§467.

如$A=x^4+x^3+2x^2+2x$及$B=x^4+2x^3+3x^2+2x$,顯然x爲其公因子抽出之，得x^3+x^2+2x+2及x^3+2x^2+3x+2此二式之，$H.C.F.$爲$x+1$（閱§465例2），$\therefore A$與B之$H.C.F.$爲$x(x+1)$.

又因x在例2中爲R_1之因子，而非B之因子，故x非R_1及B之最高公因子，且非A及B之最高公因子，故取$x+1$之因子而乘x,因之而減省施除之步驟。

2. 在任何除法中可以數目因子乘或除其除數或被除數或任一中間除數；所受影響僅及於鄰次除數之數目因子，如§403所述；然與其$H.C.F.$無關。若已知係數爲有理數，此法可避免分數係數。

3. 用分離係數法更爲便利。

例1. 求$A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$及$B=2x^3+5x^2-x-1$之$H.C.F.$

以2乘A且用分離係數法，得

2+5−1−1 | 2+6+ 4+ 6+2 | 1
2+5− 1− 1
1+ 5+ 7+2
2
2+10+14+4 | 1
2+ 5− 1−1
5) 5+15+5
1+ 3+1 | 2+5 −1 −1 | 2 −1
2+6+2
−1−3−1
−1−3−1

故A與B之爲$H.C.F.$爲

x^2+3x+1.

此種演算可簡排列如下：

$$
\begin{array}{r|r|l}
2+5-1-1 & 2+6+\ 4+\ 6+2 & 1+1 \\
\underline{2+6+2\quad} & \underline{2+5-\ 1-\ 1\quad} & \\
-1-3-1 & 1+\ 5+\ 7+2 & \\
\underline{-1-3-1} & 2+10+14+4 & \\
 & \underline{2+\ 5-\ 1-1} & \\
 & 5+15+5 & \\
 & 1+\ 3+1 & 2-1
\end{array}
$$

例2. 求下題之 $H.C.F.$

$2x^4+3x^3+4x^2+2x+1$ 與 $2x^4-x^3+2x^2+1$.

定理. 設 A 與 B 之係數為有理數，其 $H.C.F.$ 之係數亦為有理數；若 A 與 B 之係數為實數，其 $H.C.F.$ 亦為實數. 469

因 A 與 B 之 $H.C.F.$ 可由 § 465 之法求得，故其係數即為 A 與 B 係數之有理結合數，若 A 與 B 之係數為有理數，其 $H.C.F.$ 之係數亦為有理數，若為實數其係數亦為實數.

此定理有若干重要推斷，後面述其一二，用之以求 $H.C.F.$ 常能節省勞力.

例. 求 x^2-2 及 x^3+x^2-5x+6, 之 $H.C.F.$

此二多項式為互素式，或其 $H.C.F.$ 為 x^2-2；因 x^2-2 之因子為 $x+\sqrt{2}$ 與 $x-\sqrt{2}$, 有無理係數，故無 $H.C.F.$

然試驗而知 x^2-2 不能整除 x^3+x^2-5x+6, 故為互素式.

多於兩個 x 之多項式之 $H.C.F.$ 可按下法求之. 470

先求兩多項式之 $H.C.F.$ 再求此 $H.C.F.$ 與第三多項式之 $H.C.F.$ 餘類推，最後所得之 $H.C.F.$ 即為所求之結果.

如，設 D_1 為 A 與 B 之 $H.C.F.$, D_2 為 D_1 與 C 之 $H.C.F.$ 則 D_2 即為 $A, B,$ 與 C 之 $H.C.F.$

因 (1) D_2 爲 D_1 與 C 之因子; D_1 爲 A 與 B 之因子, 由 § 427, 故 D_2 爲 A, B, 與 C 之一因子.

(2) A, B 與 C 之任一公因子, 即爲 D_1 與 C 之一公因子, 按 § 467, 亦爲 D_2 之一因子. 故 D_2 爲 A, B, 與 C 之最高公因子.

由 § 458 可得同樣之推斷.

例. 求 $A=x^4+x^3-x^2+x-2$, $B=2x^4+5x^3-2x^2-7x+2$. 及 $C=3x^4-x^3-x^2-2$ 之 $H.C.F.$

由 § 465 得 A 與 B 之 $H.C.F.$ 爲 $D_1=x^2+x-2$; 及 D_1 與 C 之 $H.C.F.$ 爲 $x-1$.

故 A, B 與 C 之 $H.C.F$ 爲 $x-1$.

471 **含多變值之多項式之** $H.C.F.$ 求含多變值之二多項式之 $H.C.F.$ 其一般問題較爲複雜. 然由 § 465 之法, 則兩變值 x 及 y 之齊次函數之兩個多項式之 $H.C.F.$ 即可求得.

習 題 XXII

求下列諸式之 $H.C.F.$

1. $10x^3y^2z^5$, $4x^5yz^3$, $6x^4y^3z^5$, 與 $8x^4y^4z^4u$.
2. $(a+b)^2(a-b)$, $(a+b)(a-b)^2$, 與 a^3b-ab^3.
3. y^4+y^2+1 與 y^2-y+1.
4. a^2-1, a^2+2a+1, 與 a^3+1.
5. x^3-1 與 x^3+ax^2-ax-1.
6. x^4-y^4, x^6+y^6, 與 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
7. x^2+5x+6, x^2+x-2, 與 $x^2-14x-32$.
8. $(x-1)(x-2)$ 與 $5x^4-15x^3+8x^2+6x-4$.
9. x^3-1 與 x^3-4x^2-4x-5.
10. $(x^2-1)^2(x+1)^2$ 與 $(x^3+5x^2+7x+3)(x^2-6x-7)$.
11. $(x-1)^2(x-2)^2$ 與 $(x^2-3x+2)(2x^3-5x^2+5x-6)$.
12. $2x^3-3x^2-11x+6$ 與 $4x^3+3x^2-9x+2$.
13. x^3-2x^2-2x-3 與 $2x^3+x^2+x-1$.

14. $3x^3+2x^2-19x+6$ 與 $2x^3+x^2-13x+6$.
15. $x^4-x^3-3x^2+x+2$ 與 $2x^4+3x^3-x^2-3x-1$.
16. $3x^3-13x^2+23x-21$ 與 $6x^3+x^2-44x+21$.
17. $3x^3+8x^2-4x-15$ 與 $6x^4+10x^3-3x^2-2x+5$.
18. $6x^5+7x^4-9x^3-7x^2+3x$ 與 $6x^5+7x^4+3x^3+7x^2-3x$.
19. $6x^4-3x^3+7x^2+x-3$ 與 $2x^4+3x^3+7x^2+3x+9$.
20. $6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1$ 與 $4x^4+2x^3-18x^2+3x-5$.
21. $x^5-x^3-4x^2-3x-2$ 與 $5x^4-3x^2-8x-3$.
22. $3x^3-x^2-12x+4$, x^3-2x^2-5x+6, 與 $7x^3+19x^2+8x-4$.
23. $x^3+ax^2-3x-3a$, x^3-x^2-3x+3, 與 x^3+x^2-3x-3.
24. $7x^4y-6x^3y^2-18x^2y^3+4xy^4$ 與 $14x^3y-19x^2y^2-32xy^3+28y^4$.
25. $x(x-1)(x^3+4x^2+4x+3)$ 與 $(x-1)(x+3)(12x^3+x^2+x-1)$.
26. $4x^3-8x^2-3x+9$ 與 $(2x^2-x-3)(2x^2-7x+6)$.

最低公倍式

最低公倍式. 兩個以上之整函數 $A, B, \cdots\cdots$ 之公倍式則為 $A, B, \cdots\cdots$ 各函數能除盡之一整函數. 472

在各公倍式中必有次數最低之一式, 茲稱之為 $A, B, \cdots$ 之最低公倍 (L.C.M.).

定理. 兩個以上之整函數 $A, B, \cdots\cdots$ 之 L.C.M. 為 $A, B, \cdots\cdots$ 之一切不同素因子各取其原具最高冪者之積. 473

此定理由下述事實得之: $A, B, \cdots\cdots$ 之公倍式必含各函數 $A, B, \cdots\cdots$ 之每個素因子, 至少亦須其函數內所有者; 故本定理內述及其一切此種因子. 而其最低公倍, 即 L.C.M., 為除此種因子外不含其他因子者.

本章略去數目因子如前，且設整函數，僅能用一種方法以各不同之素因子之冪之積表之。

474 **用觀察法求** $L.C.M.$ 設能分解 $A, B, \cdots$ 成諸素因子，即可應用上述定理得其 $L.C.M.$

例1. 求 $3x^5y^2z$, xy^4z^3 與 $2x^2yz^6$ 之 $L.C.M.$

在此例中各函數之不同素因子之最高冪者爲 x^5, y^4, z^6.

故其 $L.C.M.$ 爲 $x^5y^4z^6$.

例2. 求 $x^2y^2-4xy^2+4y^2$ 及 x^2y-4y 之 $L.C.M.$

今 $x^2y^2-4xy^2+4y^2=y^2(x-2)^2$ 及 $x^2y-4y=y(x-2)(x+2)$.

故所求之 $L.C.M.$ 爲 $y^2(x-2)^2(x+2)$.

475 **定理2.** 兩整函數 A 與 B 之 $L.C.M.$ 等於兩函數之積，以其 $H.C.F.$ 除之。

設 D 爲 A 與 B 之 $H.C.F.$ 且令 A_1 及 B_1 表以 D 除 A 及 B 所得之商。

$$A\equiv A_1D \text{ 及 } B\equiv B_1D$$

再設 M 表 A 與 B 之 $L.C.M.$ 得

$$M\equiv A_1B_1D\equiv AB/D.$$

A 與 B 之公倍式，顯然必含有(1) A 與 B 之所有公素因子之積如 D; (2) A 之不屬於 B 之一切素因子之積，即 A_1; (3) B 之不屬於 A 之一切素因子之積，即 B_1: 而其最低公倍式除此三項因子外，並無其他因子。

476 **推論。** 整函數 A 與 B 之積等於其 $L.C.M.$ 與 $H.C.F.$ 之積。

477 **求 x 之兩多項式之** $L.C.M.$ **之通法。** 由§§465, 475兩 x 之多項式 A 與 B 之 $L.C.M.$ 恆可由下法得之。

以 A 與 B 之 $H.C.F.$ 除 A, 且以 B 乘其商即得 A 與 B 之 $L.C.M.$

可知此法與以 A 及 B 之 $H.C.F.$ 除 A 之商乘 B 其結果無異。

例　求 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 $2x^3+5x^2-x-1$ 之 $L.C.M.$

由　§465, 得 $H.C.F.=x^2+3x+1$.

又　$(2x^3+5x^2-x-1)/(x^2+3x+1)=2x-1$.

故其 $L.C.M.$ 爲 $(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1)$.

兩個以上 x 之多項式之 $L.C.M.$ 此類問題可由下法得之。 478

先求兩多項式之 $L.C.M.$ 次求所得結果與第三多項式之 $L.C.M.$ 依此進行，最後求得之結果爲所求之 $L.C.M.$

此法由下述事實得之：於演算之各步，等於以最後 $L.C.M.$ 中尚未計及之鄰次函數之素因子乘前次所得之 $L.C.M.$

例　求 $A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1, B=2x^3+5x^2-x-1$, 及 $C=2x^3-3x^2+2x-3$ 之 $L.C.M.$

因在 §477 例中已得 A 及 B 之 $L.C.M.$ 爲

$$M_1=(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1).$$

再求 M_1 與 C 之 $L.C.M.$

由除法可知 $2x-1$ 與 C 爲互素式，由 §465, 得 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 C 之 $H.C.F.$ 爲 x^2+1.

又　$C/(x^2+1)=2x-3$.

故 M_1 與 C 之 $L.C.M.$ 亦即 A, B, C 之 $L.C.M.$ 爲

$$M=(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1)(2x-3).$$

注意求 M_1 與 C 之 $H.C.F.$ 時可將 M_1 之因子乘爲一式。

習　題　XXIII

求下列諸式之 $L.C.M.$

1.　$3x-1$, $9x^2-1$ 與 $9x^2+1$.

2.　$(a+b)(a^5-b^5)$ 與 $(a-b)(a^5+b^5)$,

3. a^3+a^2+a, a^5-a^3, 與 a^4-a^3.
4. $(x^3-y^3)(x-y)^3, (x^4-y^4)(x-y)^2$, 與 $(x^2-y^2)^2$.
5. x^2-3x+2, x^2-5x+6, 與 x^2-4x+3.
6. $x^2-(y+z)^2, y^2-(z+x)^2$, 與 $z^2-(x+y)^2$.
7. $2x^2+3xy-9y^2, 3x^2+8xy-3y^2$, 與 $6x^2-11xy+3y^2$.
8. x^3+x^2+x+1 與 x^3-x^2+x-1.
9. $2a^2x+2x^2y+3y^2x+3a^2y$ 與 $(2x^2-3a^2)y+(2a^2-3y^2)x$.
10. $8x^3-18xy^2, 8x^3+8x^2y-6xy^2$, 與 $8x^2-2xy-15y^2$.
11. x^3+y^3, x^3-y^3, 與 $x^4+x^2y^2+y^4$.
12. $x^6-1, 3x^3-5x^2-3x+5$, 與 x^4-1.
13. $8x^3+27, 16x^4+36x^2+81$, 與 $6x^2+5x-6$.
14. $x^2-4a^2, x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3$, 與 $x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3$.
15. $x^2+2x, x^2+bx+2x+2b$, 與 $x^3+ax^2-b^2x-ab^2$.
16. $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)$ 與 $(x^2+5x+6)(2x^2-3x-5)$.
17. $(x^3-8)(27x^3+1)$ 與 $(2x^3+5x^2+10x+4)(x^3-x^2-x-2)$.
18. $x^3-6x^2+11x-6, 2x^3-7x^2+7x-2$, 與 $2x^3+x^2-13x+6$.
19. $x^4+5x^2+4x+5, 2x^4-x^3+10x^2+4x+5$ 與 $2x^4+x^3+7x^2+3x+3$.
20. $2x^4-x^3+2x^2+3x-2, 2x^4+3x^3-4x^2+13x-6$, 與 $x^4+3x^3+x^2+5x+6$.

一變值函數之素因子，及不可約之因子.

下之定理 A 與 B 表 x 之多項式。

479　**基本定理.** 若 A 與 B 互素，M 與 N 表二整函數，可得次之關係：

$$MA+NB\equiv 1.$$

用 § 465 法於 A 及 B（展轉相除）得最後餘式一常數 C，不爲零。

如§465，設C爲第三除式，且用該節所釋之記法，得

1. $A\equiv qB+R_1$，故 4. $R_1\equiv A-qB$，

2. $B\equiv q_1R_1+R_2$， 5. $R_2\equiv B-q_1R_1$.

3. $R_1\equiv q_2R_2+c$， 6. $c\equiv R_1-q_2R_2$.

以(5)內R_2之值代入(6)，合併R_1與B諸項，再以(4)內R_1之值代入結果式內，集A與B諸項。得

$$
\begin{aligned}
c &\equiv R_1-q_2R_2.\\
&\equiv(1+q_1q_2)R_1-q_2B\\
&\equiv(1+q_1q_2)A-(q+q_2+qq_1q_2)B.
\end{aligned}
$$

以c除上之恆等式兩端，因c爲常數，故$(1+q_1q_2)/c$及$(q+q_2+qq_1q_2)/c$爲整式函數而書作M及N.得

$$1\equiv MA+NB.$$

式中M及N爲整式函數恰如定理所云。

設其常數除數c，較第三次施除早得或晚得，而此定理亦可以同法證明之。

逆定理。 設$MA+NB\equiv 1$則A與B爲互素。 480

因A與B若有公因子必爲$MA+NB$之一因子，如§461，今爲1之因子，故無之。

下列諸定理爲已證明之基本定理之主要推論。

定理1. 若A與B互素，而B可除盡AC之積，則B可除盡C. 481

因A與B爲互素，由§479可得M與N，致令

$$MA+NB\equiv 1.$$

故

$$M\cdot AC+NC\cdot B\equiv C.$$

但B爲AC與B之一因子，故亦爲C之因子，如§461.

定理2. 若A各與B,C爲互素，則其與BC之積亦爲互素。 482

因 A 與 B 為互素，按 § 479 可得 M 與 N 如下:

$$MA+NB\equiv 1.$$

故 $$MC\cdot A+N\cdot BC\equiv C.$$

若 A 與 BC 有一公因子，按 § 461，其公因子必含 C 內，但此不可能，因 A 與 C 為互素。

483 **推論**. 若 A 與 B, C, D 均為互素，則 A 與 B, C, D ....之積亦為互素。

如前所證 A 與 BC 為互素之方法證之。

因 A 與 BC 為互素，且亦與 D 為互素，故與 $B\ C\ D$ 等之積為互素。

484 **定理3**. 一複函數有一組且僅有一組素因子。

設 P 表已知函數而 n 表其次數。

若 P 為複函數必有因子 A. 如 A 亦為複式必有因子 B 繼續分解最後過一素函數; 此連續函數 $P, A, B, \ldots$ 之次數由定數 n 起逐次降低，但不能低於 1 次。

設 F 表此素函數，此為 P 之素因子之一，由 § 427 可知 $P=FM$，而 M 為整式。

同理，如 M 為複函數，一素函數 F' 亦可由 $M=F'M'$ 而存在，故 $P=FF'M'$ 而 M' 為一整式，繼續進行，則可斷定必有若干素函數存在，而其數不能過 n.

$$P\equiv F\cdot F'\cdot F''\ldots$$

故 P 至少有一組素因子。

進而言之則 P 僅有此組之因子。設

$$P\equiv FF'F''\equiv G\cdot G'\cdot G''\ldots.$$

此處 G,G',G'' 亦表素因子。

故 G 與 $F,F',F'',\ldots$ 一切函數非為互素，若為互素，則其積 P 為互素，由 § 483，然彼固為 P 之因子也。

若 G 與 F 不為互素，則 G 與 F 有一公因子，然 G 與 F 皆為素函數，兩素函數除其自身外無含 x 之公因子，故 G 與 F 至多只有數值因子之差，如 c，而得 $G\equiv cF$，

以 G 之值代入恆等式，$FF'F''\cdots=GG'G''\cdots$，以 F 除其兩端，得

$$F'F''\equiv cG'G''\cdots,$$

只複述前理即知 G' 與函數 $F'F''\cdots$ 之一因子至多僅有一數值倍數之異。

依此進行，則可斷定函數組 $GG'G''\cdots$ 與函數組 $FF'F''\cdots$ 至多僅有一數值因子之異，或僅其排列之次序不同。

推論. 一複函數以其諸不同素因子之冪之積表之只有一法。 485

在恆等式 $P\equiv FF'F''\cdots$ 內之一切等因子，當然可以其適當方冪表之。

不可約之因子. 具有理係數之整函數之不可約因子，通常指其具有理係數之最低次因子而言。 486

如 $(x-1)(x^2-2)$ 之素因子為 $x-1, x-\sqrt{2}, x+\sqrt{2}$，其不可約之因子為 $x-1$ 與 x^2-2.

由上已證明之定理及 §469 之定理而得 487

凡具有理係數之可約整函數，僅可以其諸相異之不可約之因子之積表之。

關 於 數 論

類似於上節已證明之定理，尚有幾個定理適用於整數。 488

以字母 a, b, 等表正或負之整數（非零），凡能除盡 a 之任意整數即稱為 a 之因數。

一整數除其本身與 1 外，無其他因數者謂之素數。 489

490　兩整數 a, b, 除 1 外無公因數者謂之 a 與 b 爲互素數.

491　**定理.** 若 a 與 b 爲互素數，常可求具下列關係之二整數 m 與 n:

$$ma+nb=1.$$

因 a 與 b 爲互素數，若用普通方法求其最大公約，最後除數必爲 1, 由 § 179 可得此定理.

設　$a=325$,　$b=116$ 應用此法求其 $G.C.D.$, 得

116|325|2
　　232
$r_1=$ 93|116|1　即 $325=2\cdot116+93$, 或 $93=325-2\cdot116$ (1)
　　　93
$r_2=$ 23|93|4　$116=1\cdot93+23$, 或 $23=116-1\cdot93$ (2)
　　　92
$r_3=$ 1　　$93=4\cdot23+1$, 或 $1=93-4\cdot23$ (3)

先以 (2) 內 23 之值代入 (3) 式，次以 (1) 內 93 之值代入 (3) 式得

$$\begin{aligned}1&=93-4\cdot23\\&=5\cdot93-4\cdot116\\&=5\cdot325-14\cdot116,\end{aligned}$$

故　　$5\cdot325+(-14)\cdot116=1.$

上式所得之兩整數 $m=5$ 及 $n=-14$ 故

$$m\cdot325+n\cdot116=1,$$

其餘各互素數同此.

例. 若 $223m+125n=1$ 求整數 m 與 n.

492　**推論.** 由此基本定理可導出整數定理類似於 §§ 481–485 內以同一理由自整式函數所導出者，於特別數可證:

1. 若 a 與 b 爲互素數，ac 可以 b 除盡，則 c 定可以 b 除盡.

2. 若 a 與 b 及 c 爲互素數，則 a 與 bc 之積亦爲互素數.

3. 複數僅能以其諸不同素因數之羃之積之一種結合情形表之.

Ⅷ 有理分式

分式之化簡

分式．設 A 與 B 表任意二代數式，而 B 不為 0，以 B 除 A 其商以 A/B 式表之，稱為分式，A 謂之分子，B 謂之分母，A 與 B 為分式之項． 493

若 A 與 B 均為有理式，A/B 謂之有理分式． 494

若 A 與 B 均為整式，A/B 謂之純分式，若 A 與 B 均為分式則 A/B 謂之繁分式． 495

一純分式可為真分式或假分式，依其分子之次數小於或不小於分母之次數而定． 496

如，$\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ 及 $\dfrac{2x^2-3}{x^3+1}$ 為真分式，$\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ 及 $\dfrac{x^3-3}{x^2+1}$ 為假分式．

一變值之假分式，可化為一整式與一真分式之和，§400，其和謂之帶分式． 497

如，$\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}=2-\dfrac{1}{x^2+1}$，$\dfrac{x^3-3}{x^2+1}=x-\dfrac{x+3}{x^2+1}$．

分式之變形． 此法根據下定理而得，§320，1． 498

以同式（非 0）乘除一分式之分母與分子其值不變．

於必要時，可同時變其分子及分母之符號，此等於以 -1 乘其分母及分子，若只變其因子中之一符號，即等於變該分式本身之符號．§320，3．

若一分式之母子爲兩多項式，則變其母子之符號即變其所有各項之符號。

如 $\frac{a+b-c}{a-b+c}=\frac{c-a-b}{b-c-a}=-\frac{c-a-b}{a-b+c}=-\frac{a+b-c}{b-c-a}$.

一分式之分母，分子，或同以因子之積表者；則變其偶數因子之符號而分式不變。若變其奇數因子之符號等於變其分式之符號。

如 $\frac{(a-b)(c-d)}{(e-f)(g-h)}=\frac{(b-a)(c-d)}{(e-f)(h-g)}=-\frac{(b-a)(d-c)}{(f-e)(g-h)}$.

499 **分式之化簡.** 化簡一分式，即消去其分母分子之公因子。分式形式因此改變，但與其值無關 § 498.

化簡後所得之分式，謂之最簡式或不可約式。

因 VII 章之方法可知其有無公因子，先求獨項因子，與其他易爲求得之公因子，或用除式定理可得之公因子；若用此法失敗，可由 § 465 之通法求之。

下例解釋明此法：

例1. $(ace-ade)/(bde-cbe)$.

得 $\frac{ace-ade}{bde-cbe}=\frac{ae(c-d)}{be(d-c)}=-\frac{a(c-d)}{b(c-d)}=-\frac{a}{b}$.

例2. 化簡 $(x^3+x^2+x+6)/(x^2+3x+2)$.

由試驗得分母之因子爲 $x+1$, 與 $x+2$, 故分母子若有公因子，必有上兩因式之一，用簡便除法試之，知 $x-1$ 不能除盡分子，而 $x+2$ 可以除盡，其商爲 x^2-x+3.

故 $\frac{x^3+x^2+x+6}{x^2+3x+2}=\frac{x^2-x+3}{x+1}$.

例3. 化簡 $(x^3+7x+10)/(x^3+5x+6)$.

以分子減分母得

$$x^3+7x+10-(x^3+5x+6)=2(x+2).$$

若分子與分母有公因子即爲 $x+2$ § 461. 但 $x=-2$ 時分子不爲零，故由 § 415, 知原分式即爲最簡。

例4. 化簡 $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

上式之可能公因子僅爲 $(a-b)$,$(b-c)$ 及 $(c-a)$, 以 $a=b$ 代入分子，得 $b^2(b-c)+b^2(c-b)$或0. 按 § 417, 知分子可以 $a-b$ 除盡，同法求得 $b-c$ 及 $c-a$ 可除盡分子。

故分子恰爲分母除盡，此兩式具 a, b, c 之同次數，即三次，故其商必爲一常數；若視爲 a 之多項式排列之，則在兩式中有 a^2 項爲 $a^2(b-c)$ 及 $-a^2(b-c)$, 此常數當爲 -1, 故已知分式等於 -1.

例5. 化簡 $(2x^3+13x^2-6x+7)/(2x^4+5x^3+8x^2-2x+5)$.

按 § 465 法，得分母子之 $H.C.F.$ 爲 $2x^2-x+1$. 以 $2x^2-x+1$ 同除分母分子，得

$$\frac{2x^3+13x^2-6x+7}{2x^4+5x^3+8x^2-2x+5}=\frac{x+7}{x^2+3x+5}.$$

習　題　XXIV

化下列諸分式爲最簡式:

1. $\dfrac{x^5y^3-4x^3y^5}{x^3y^2-2x^2y^3}$.
2. $\dfrac{(x^6-y^6)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^4-y^4)}$.
3. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+2x-63}$.
4. $\dfrac{3x^2-8x-3}{3x^2+7x+2}$.
5. $\dfrac{3x^2-18bx+27b^2}{2x^2-18b^2}$.
6. $\dfrac{5x^2+6ax+a^2}{5x^2+2ax-3a^2}$.
7. $\dfrac{(x^2-25)(x^2-8x+15)}{(x^2-9)(x^2-7x+10)}$.
8. $\dfrac{15x^2-46x+35}{10x^2-29x+21}$.

9. $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}$.　　10. $\dfrac{x^2-y^2+z^2+2xz}{x^2+y^2-z^2+2xy}$.

11. $\dfrac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{1-x^2}$.　　12. $\dfrac{2mx-my-12nx+6ny}{6mx-3my-2nx+ny}$.

13. $\dfrac{2x^3+7x^2-7x-12}{2x^3+3x^2-14x-15}$.　　14. $\dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{2x^3-13x^2+17x+12}$.

15. $\dfrac{x^4+x^3+5x^2+4x+4}{2x^4+2x^3+14x^2+12x+12}$.

16. $\dfrac{x^3-2x^2-x-6}{x^4+3x^3+8x^2+8x+8}$.

17. $\dfrac{(x^2+c^2)^2-4b^2x^2}{x^4+4bx^3+4b^2x^2-c^4}$.

18. $\dfrac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

分式之演算

500　**最低公分母.**　加減分式，須先化諸分式爲有公分母之等值分式。

已知諸分母之最低公倍式，即爲其最低公分母（$L.C.M.$）.

例如；求　$\dfrac{a}{bc}$，$\dfrac{b}{ca}$，$\dfrac{c}{ab}$之最低公分母。

諸分母之 $L.C.M.$ 爲 abc.

欲變$\dfrac{a}{bc}$之分母爲 abc 且與原分式等值須以 a 乘$\dfrac{a}{bc}$之兩項。

同法須以 b 乘$\dfrac{b}{ca}$之兩項及以 c 乘$\dfrac{c}{ab}$之兩項。

如，　$\dfrac{a}{bc}=\dfrac{a^2}{abc}$，$\dfrac{b}{ca}=\dfrac{b^2}{abc}$，$\dfrac{c}{ab}=\dfrac{c^2}{abc}$.

501　化兩個或多於二個之分式爲有最低公分母之等值分式。先求已知分母之最低公倍式。

次以最低公分母代各分式之分母，再以分母所增之新因子乘其分子即得。

加法與減法，　有公分母之分式之加減法已述於 502

§320, 4, 之公式。

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a+b-c}{d}.$$

故求兩個或兩個以上分數之代數和，

必要時化諸分母成最低公分母。

以原符號連接通分後之分式之新分子，求諸分子之代數和書於公分母上，最後化簡所得之結果。

用此法則演算整式與分式加減時，可視整式如分母為1之分式。

除一分式之分母正含他分母之因子外，化已知分式成最簡式為最善。

選擇一式為最低公分母時，應特別慎重，普通誤認 $a-b$ 與 $b-a$ 不同，實則僅差一符號，但均可認為最低公分母。

通常合併此類二已知分式較為便利。

例1.　化簡　$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}$.

最低公分母為 a^2-b^2 得

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a-b+a+b-2b}{a^2-b^2}=\frac{2a-2b}{a^2-b^2}=\frac{2}{a+b}.$$

注意諸分式和之分母，若化為最簡式時，可為其最低公分母之因子。

例2. 化簡 $x-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x^3-3x+1}{x^2-1}$.

因第一分母為 1，第二分母為 $-(x-1)$，故其最低公分母為 x^2-1，得

$$x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}=\frac{x^3-x}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$$
$$=\frac{x^3-x+x+1-x^3+3x-1}{x^2-1}=\frac{3x}{x^2-1}.$$

例3. 化簡 $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}$.

此例選擇每兩個分別加減較為方便。

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-(x-2)}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4}.$$
$$\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}=2\frac{x-1-(x+1)}{x^2-1}=-\frac{4}{x^2-1}.$$
$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-1}=4\frac{x^2-1-(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{12}{x^4-5x^2+4}.$$

例4. 化簡 $\dfrac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}$.

由§415之餘式定理，得知 $x-1$ 為第一分式兩項之公因子但不為第二分式分母之因子，在第一分式兩項內消去 $x-1$ 得 $(x+1)/(x^3+x^2+2x)$.

由§465，得 x^3+x^2+2x 及 $2x^3+x^2+3x-2$ 之 $H.C.F.$ 為 x^2+x+2；且 $x^3+x^2+2x=(x^2+x+2)x$，$2x^3+x^2+3x-2=(2x-1)(x^2+x+2)$.

未化簡公分母之前，應審察 $2x-1$，是否亦為分子 $2x^2+3x-2$ 之一因子。茲知確為其因子，消去之，化第二分式為 $(x+2)/(x^2+x+2)$.

故
$$\frac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}$$
$$=\frac{x+1}{x(x^2+x+2)}+\frac{x+2}{x^2+x+2}$$
$$=\frac{x+1+x^2+2x}{x^3+x^2+2x}=\frac{x^2+3x+1}{x^3+x^2+2x}.$$

503 **乘法.** 用下定理可求兩個，或兩個以上分式之積。

兩個或兩個以上分式之積，爲以已知分式分子之積爲分子，及以已知分式分母之積爲分母之一分式。

如，
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

因各端以 b, d 乘之爲 ac (閱 § 253).

如 $\frac{ac}{bd}bd=ac$;及$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot bd=\frac{a}{b}b\cdot\frac{c}{d}d=ac$. §§ 252, 254.

以一整式乘一分式即以此整式乘其分子。

於實際演算時其諸分子及諸分母相乘之前應將 ac/bd 化爲最簡式。

例1. 求 $(x^3-1)/(x^3+1)$乘以$(x+1)/(x-1)$ 之積。

$$\frac{x^3-1}{x^3+1}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x^3-1)(x+1)}{(x^3+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

例2. 求 $1-(x-2)/(x^2+x-2)$乘以$(x+2)/x$ 之積。

$$\left(1-\frac{x-2}{x^2+x-2}\right)\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{x^2}{x^2+x-2}\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{x}{x-1}.$$

乘方. 由 § 503 得法則: 504

分式自乘至已知方冪，則分子及分母均自乘至該冪。

如
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

因 $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots$至 n 個因子 $=\frac{a\cdot a\cdot\text{至}n\text{個因子}}{b\cdot b\cdot\text{至}n\text{個因子}}=\frac{a^n}{b^n}$.

例 求 $-ab^2c^3/efg^4$之立方。

$$\left(-\frac{ab^2c^3}{efg^4}\right)^3=-\frac{a^3b^6c^9}{e^3f^3g^{12}}.$$

除法. 顛倒一分式 a/b, 即互換其分子與分母，所得分數 b/a 謂之 a/b 之倒式 (或反商)。 505

以一分式除他分式，即以除式之倒式乘被除式。

如 $$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

因兩端以 c/d 乘之均為 a/b（閱 §253）.

如 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$；及 $\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}$. §§252, 254, 503.

於特例，以一整式除一分式，即等於以該整式乘其分母。

例1. 以 $(x^4+x^2y^2+y^4)/(x^4-y^4)$ 除 $(x^2-xy+y^2)/(x^2-y^2)$.

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\div\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4-y^4}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^4-y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$$
$$=\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

例2. 以 x^2+6x+8 除 $(x^2+5x+6)/(x+1)$

$$\frac{x^2+5x+6}{x+1}\div(x^2+6x+8)=\frac{x^2+5x+6}{(x+1)(x^2+6x+8)}$$
$$=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+4)}=\frac{x+3}{x^2+5x+4}.$$

506 **有理總式．繁分式及連分式．** 前面已證二分式之和，差，積及商仍為分式，故由 §267 而知凡各有理整式均能化為有理分式之形。

因無一般法則以化已知有理式為最簡之形，應避免一切不需要之步驟，注意特別機會，化分式為最低項，直至所約式不含有共同因子為止，而無須乘其多項式。

507 如前所稱，§495，設 A 或 B 有一或均為分式，則分式 A/B 稱為繁分式 (*complex*).

化簡一繁分式 A/B，有時用 § 503 之法，先以 B 除 A，有時先以 A 與 B 之諸分母之 L.C.M. 乘 A 與 B. 但在用上兩法之前，最好先分別化簡 A 與 B.

例1.　化簡 $\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)\Big/\left(\frac{a-b}{a+b}+1\right)$.

$$\frac{\frac{a+b}{a-b}+1}{\frac{a-b}{a+b}+1}=\frac{\frac{a+b+a-b}{a-b}}{\frac{a-b+a+b}{a+b}}=\frac{\frac{2a}{a-b}}{\frac{2a}{a+b}}$$

$$=\frac{2a}{a-b}\cdot\frac{a+b}{2a}=\frac{a+b}{a-b}.$$

由上例可知若一繁分數之兩項爲簡單分數時，可消去其兩項之分子或分母之公因子，如上式第三步可消去 $2a$.

例2.　化簡 $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)\Big/\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$.

此題可照例 1 化簡，但以 $(a+b)(a-b)$ 先乘其兩項較爲簡便，得

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{a(a-b)+b(a+b)}=\frac{a^2+ab-ba+b^2}{a^2-ab+ba+b^2}=1.$$

例3.　化簡 $$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}$$

由下而上演算，得

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}=\cfrac{a}{b+\cfrac{cf}{df+e}}=\frac{a(df+e)}{b(df+e)+cf}=\frac{adf+ae}{bdf+be+cf}.$$

如例 3 之繁分式謂之連分式 (*continued fraction*).

習　題　XXV

化簡下列諸式:

1. $\frac{1}{2a-3b}+\frac{1}{2a+3b}-\frac{6b}{4a^2-9b^2}$.

2. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^3+1}$.

3. $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-4x+3}$.

4. $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+2}{(2-x)(x-3)}+\frac{x+3}{(3-x)(1-x)}$.

5. $\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}+\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}$.

6. $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

7. $\frac{yz(x+a)}{(x-y)(x-z)}+\frac{zx(y+a)}{(y-z)(y-x)}+\frac{xy(z+a)}{(z-x)(z-y)}$.

8. $x+\frac{1}{3-2x}-\frac{8x^4-33x}{8x^3-27}-\frac{2x+6}{4x^2+6x+9}$.

9. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$
$\left(xy+\frac{1}{xy}\right)$

10. $\frac{(a+b)^3-c^3}{a+b-c}+\frac{(b+c)^3-a^3}{b+c-a}+\frac{(c+a)^3-b^3}{c+a-b}$.

11. $\frac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+6}-\frac{3x^2-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$.

12. $\frac{1}{x^4-4x^2-x+2}+\frac{1}{2x^4-3x^3-5x^2+7x-2}$
$+\frac{1}{2x^4+3x^3-2x^2-2x+1}$.

13. $\left(a^4-\frac{1}{a^4}\right)\div\left(a-\frac{1}{a}\right)$.　　14. $\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)(a^4+a^3)$.

15. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\div\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}$.

16. $\frac{1}{x}-\left\{1-\left[\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)}\right)\right]\right\}$

17. $\dfrac{ax+x^2}{2b-cx}\cdot\dfrac{2bx^2-cx^3}{(a+x)^2}$.

18. $(x^2-y^2-z^2+2yz)\div\dfrac{x-y+z}{x-y-z}$.

19. $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$.

20. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}}\div\dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+z}}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}}$.

21. $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}\div\dfrac{\dfrac{1}{a^4}-\dfrac{1}{b^4}}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2}$.

22. $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$.

23. $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$.

不　定　式

極限. 設連續取變數 x 之 1/2, 3/4, 7/8, 15/16 等等值而無止境，顯然 x 漸近於值 1，於此種情形 $1-x$ 之差，最後變為且損減至小於任何可名言之正小數，則 x 稱為歷經數串 1/2, 3/4, 7/8, 15/16,‥‥而漸近於 1 為極限。 508

總之，設 x 表歷經已知一串無窮數值之變數，且設有一數 a 能致令差數 $a-x$ 最後損減而化為絕對值小於可名言之正值，則稱 x 漸近於數 a 為極限。

表 x 漸近於其極限 a，書為 $x\doteq a$，或 $x=lim\ a$.

須注意此處「變數」一字，較 § 242 之內更加以限制之意義。

變數有無極限全視其經過之數串如何，如歷經數串 1, 2, 1, 2,‥‥則變數不漸近於限。

變值及極限之討論已見於§§187－205，學者可復讀參考，至少亦須讀一部分。

509　**極限定理．** 在§203內已證明設變數x及y漸近於極限，則其和，差，積，商，亦漸近於極限．

$$lim(x+y)=lim\,x+lim\,y.$$

$$lim(x-y)=lim\,x-lim\,y.$$

$$lim\,xy\quad=lim\,x\cdot lim\,y.$$

$$lim\frac{x}{y}\quad=\frac{lim\,x}{lim\,y},$$ 但$lim\,y=0$除外．

由此等定理，可知若$F(x)$表x之任意已知有理函數，設$x=a$時，以$F(a)$表其值，則x漸近於a為極限時，則$F(x)$漸近於$F(a)$為極限，即

$$\lim_{x \doteq a} F(x)=F(a),$$

此處$\lim\limits_{x \doteq a} F(x)$讀為$x$漸近於$a$時$F(a)$之極限．

如　$$\lim_{x \doteq a}(2x^2-3x+1)=2a^2-3a+1.$$

510　**無限．** 若x經歷無窮之數串$1, 2, 3, 4, \cdots$顯然最後變為大於任何指定之大數．

一變數x最後絕對值變為大於任何指定之大數，則稱為漸近於無限．

於"無限"一字以∞表之．而表x漸近於無限以$x \doteq \infty$或$lim\,x=\infty$表之．

511　**註．** 須注意無限符號∞非表定數，關於各數間計算之法則不適用，下文將示此解釋．

「x 漸近於無限」一語，即「一變值最後變爲大於任何可指定之各大數」之簡稱。

有時爲簡便計寫作 $lim\,x=\infty$，此 lim 一字當然不含 § 508 節所示之定值意義。

定理. 已知分子爲常數而分母爲變數之任意分式. 512
若分母漸近於 0 爲極限，則分式漸近於無限；若分母漸近於無限，則分式漸近於 0 爲極限。

茲討論分式 $1/x$.

若 x 漸近於 0 而歷經數串 1, ·1, ·01, ·001, · · ·, 則 $1/x$ 必歷經數串 1, 10, 100, 1000,· · · ·, 而漸近於∞.

若 x 歷經數串 1, 10, 100, 1000,· · ·, 而漸近於∞, 則 $1/x$ 必歷經數串 1, ·1, ·01, ·001,· · · ·, 而漸近於 0 爲極限。

餘可類推。

不定式. 有理分式 $f(x)/\phi(x)$ 除 $\phi(x)=0$ 外，於 513
x 之任意予值必有一定值，但若 $\phi(x)=0$ 時，則分式變爲 $0/0$ 或 $a/0$, 便無算術意義 § 103. 然爲便利計使 $0/0$ 及 $a/0$ 各表一種意義。

分式0/0. 設 $x=1$ 時，則分式 $(x^2-1)/(x-1)$ 成 $0/0$ 514
之形。

除 $x=1$ 時，則能以 $x-1$ 除 x^2-1, 得

$(x^2-1)/(x-1)=x+1$.

無論 x 與 1 之差爲任何小，此式均爲真確；若不即予 x 以 1 之實值，而令其漸近於 1 爲極限，則得：

$$lim(x^2-1)/(x-1)=lim(x+1)=2.$$

若按計算法則，$x=1$ 時，則 $(x^2-1)/(x-1)$ 便無意義，此處證明，當 x 漸近於 1 爲極限時，此分式漸近於定極限 2.

由 § 509 已知 $F(a)=\lim_{x\doteq a}F(x)$ 而 $F(x)$ 表一有理函數則 $F(a)$ 有一意義，在演算法上為便利計以 $\lim_{x\doteq a}F(x)$ 代 $F(a)$. 換言之，公式 $F(a)=\lim_{x\doteq a}F(x)$ 爲 $F(a)$ 之定義。

故 $x=1$ 時 $(x^2-1)/(x-1)$ 之值爲 2,即無論 x 爲何值,1 亦在其內 $(x^2-1)/(1-x)=x+1$.

同理，　各分式如 $(x-a)f(x)/(x-a)\phi(x)$者，此處 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 爲整式而 $\phi(x)$ 不能以 $x-a$ 除盡，玆當 $x=a$ 時，定 $f(x)/\phi(x)$ 之值，得

$$\frac{(x-a)\,f(x)}{(x-a)\,\phi(x)}=\frac{f(x)}{\phi(x)}$$

於 x 之一切值(a 亦在其內)，上式均爲眞確。

515　**分式** $a/0$.　設 $x=0$ 時，則分式 $1/x$ 成 $1/0$ 之形。

因不能以 0 除 1，然能以與 0 相差極微之 x 值除 1. 從知 § 512 所示，設令 x 漸近於 0 爲極限，則 $1/x$ 漸近於 ∞.

故定 $1/0$ 或 $a/0$ $(a\neq 0)$ 之值爲 ∞，寫爲

$$\frac{a}{0}=\infty.$$

同理於各分式之形如

$$f(x)/(x-a)\,\phi(x)\text{者。}$$

此處 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 均爲整式，且 $x-a$ 不能除盡 $f(x)$，當 $x=a$ 時，則定此分式之值爲 ∞；即 x 漸近於 a 爲極限時，此分式常漸近於 ∞，

分式之值之判定. 由§§514, 515可得形如 516
$f(x)/\phi(x)$之簡單分式之下述判定.

1. 設$f(x)/\phi(x)$爲最簡式,若於x之諸值分子$f(x)$爲0,則分式之值爲0;若於x之諸值分母$\phi(x)$之值爲0,則分式之值成∞,於x之他諸定值,則此分式有一不同於0及∞之值.

2. 設$f(x)$及$\phi(x)$有一公因子$x-a$,$f(x)$含此因子m次及$\phi(x)$含此因子n次,設$x=a$時;若$m>n$,則$f(x)/\phi(x)$爲0;若$m<n$則成∞,若$m=n$則有一不同於0及∞之值.

如$x=2$時,則得

$$\frac{x-2}{x+1}=0,\ \frac{x+1}{x-2}=\infty,\ \frac{(x-2)^3}{x(x-2)}=0,\ \frac{(x-2)}{x(x-2)^2}=\infty$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{1}{2}.$$

分式 ∞/∞. 設x無限增加即當$x\doteq\infty$時,則 517
$f(x)/\phi(x)$之值漸近於何類極限,此頗重要極應知之.

茲討論下例.

由§512,已知當$x\doteq\infty$時,$1/x, 1/x^2, \cdots\doteq 0$.

故$x\doteq\infty$時,
$$\frac{x^2-x+3}{2x^2+x-4}=\frac{1-1/x+3/x^2}{2+1/x-4/x^2}\doteq 1/2, \quad (1)$$
$$\frac{x+2}{x^2+x+5}=\frac{1+2/x}{x+1+5/x}\doteq 0, \quad (2)$$
$$\frac{x^2+x-7}{2x+3}=\frac{x+1-7/x}{2+3/x}\doteq\infty. \quad (3)$$

總之,$x\doteq\infty$時,分式

$$(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m)/(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n)$$

漸近於極限a_0/b_0,設分子分母之次數相同如(1);漸近於極限0,設分母之次數較大,如(2);漸近於極限∞,設分子之次數較大,如(3).

且於此各類均稱爲"當$x=\infty$時此分式可有之值"，即分式本身設由變數假定則成不定式∞/∞之形。

518 **$0\cdot\infty$及$\infty-\infty$式.** 於x之特別值能使x之有理函數爲不定式$0\cdot\infty$或$\infty-\infty$，但此等式可化爲$0/0$, $a/0$, ∞/∞之一。

1. 如$x=1$時，則$(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}$爲$0\cdot\infty$，但$x\neq1$時，則得$(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，故

$$\lim_{x\doteq a}\left[(x^2-1)\cdot\frac{1}{x-1}\right]=\lim_{x\doteq 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\doteq 1}(x+1)=2.$$

故$x=1$時，定此式之值爲2.

2. 又$x=0$時，則$\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x(x+2)}$爲$\infty-\infty$之形。

但$x\neq0$時，則得$\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x(x+2)}=\dfrac{x}{x(x+2)}$，故

$$\lim_{x\doteq 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(x+2)}\right]=\lim_{x\doteq 0}\frac{x}{x(x+2)}=\lim_{x\doteq 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}.$$

故$x=0$時定此式之值爲$\frac{1}{2}$.

519 **總結論.** 設一變值之已知函數$F(x)$，若$x=a$時此函數爲不定式，應處置如下：

先化此式爲最簡式，當x漸近於a爲限時，求其值漸近於何種極限。

稱此極限爲此函數當$x=a$時之值.

520 **註.** 此法限於單變數之函數，如$F(x)$，因此方法所得定數之結果爲：$\lim\limits_{x\doteq a}F(x)$之值獨依$a$之值，而不依$x$漸近於$a$之值；用於多於一變數之函數便不真確。

如 x 及 y 爲不相關之兩變值，當 $x=0$ 及 $y=0$ 時試討論 x/y.

$x\doteq 0$, $y\doteq 0$ 時 x/y 所漸近之極限視 x 及 y 所歷之數串而定。

例如各變值經過下之數串，漸近於 0 爲極限:

$1/2, 1/3, 1/4, \cdots$ (1); $1/2^2, 1/3^2, 1/4^2, \cdots$ (2).

若 x 經過(1), y 經過(2), 則 x/y 必經過數串 $2,3,4,\cdots$ 而漸近於 ∞，然設 x 經過(2), y 經過(1), 則 x/y 必經過數串 $1/2, 1/3, 1/4, \cdots$ 而漸近於 0.

故設 x 及 y 爲不相關之兩變數, 當 $x=0$, $y=0$時, 稱 x/y 爲絕對不定式，餘可類推。

關於算法中之無限. 若取字母之無限值加入計 521
算內，必須說明 § § 249, 251, 253, 之法則如下:

1.　$a\cdot 0=0$,　　而 $a=\infty$ 除外。

2.　若 $ac=bc$,　　則 $a=b$, 而 $c=0$ 或 ∞ 除外。

3.　若 $a+c=b+c$,　　則 $a=b$, 而 $c=\infty$ 除外。

用此法則解方程時須注意例外, 如討論乘積 $\frac{1}{x^2-1}\cdot x-1$ 當 $x=1$ 時, 第二因子 $x-1$ 爲 0; 但第一因子 $1/(x^2-1)$ 爲 ∞，其積不得爲 0, 實則此積爲 $\frac{1}{2}$, § 518.

方程之無限根. 茲以實際工作以代討論，如方程 522
$x+2=x+3$ 及他一次方程可化爲 $0\cdot x=b$ 者，前謂之無根今可稱其根爲 ∞.

設 a 可爲任何小之數，但非 0, 則 $ax=b$ 之根爲 b/a. 若 b 爲常數而非 0, 取 a 漸近於 0 爲極限，則 b/a 必漸近於 ∞，§ 512, 換言之，當 $ax=b$ 漸近於 $0x=b$ 時，其根 b/a 漸近於值 ∞ 按 § 515 之實際解釋，可稱 $ax=b$ 設有 $0x=b$ 之形時，則有根 ∞.

注意若以 $x+2=x+3$ 爲根是 ∞ 之眞正方程，則生出悖謬之推斷 $2=3$. 若 $x=\infty$ 則不能謂自其兩邊同減 x 而得眞正方程，因 ∞ 非數，不能依演算規則故也，§ 521, 3.

523 **聯立方程之無限解答.** 同理，§ 377, 2, § 394, 2, 所述之不合理方程，以前謂之無解答，玆有時稱其有無限解答；因此等方程用消去法可得一個一次方程如 $0x=b$ 之形。由 § 522 知其根爲 ∞.

如，一對不合理方程 $y-x=0$ (1), $y-x=1$ (2), 其解答爲無限。

注意 (1), (2) 當 $m \doteq 1$ 時，可爲下列二式之極限式。

$$y-mx=0 \ (3), y-x=1 \ (2).$$

(3), (2) 之解答爲

$$x=1/(m-1), y=m/(m-1).$$

當 $m \doteq 1$ 時，$1/(m-1)$ 及 $m/(m-1)$ 均漸近於無限。

用圖解法，§ § 386, 387, 亦可示同一事實，因 $m \doteq 1$ 時 (3) 之圖象漸平行於 (1) 之圖象，此二圖象在此平面內無限遠處相交。

習 題 XXVI

求定下諸式之適當值：

1. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$, 當 $x=2$ 時。 2. $\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-2x+1}$, 當 $x=1$ 時。

3. $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$, 當 $x=1$ 時。 4. $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-(a+b)x+ab}$, 當 $x=a$ 時

5. $\dfrac{(3x+1)(x+2)^2}{(x^2-4)(x^2+3x+2)}$, 當 $x=-2$ 時；

6. $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$, 當 $x=1$ 時。

7. $\dfrac{3x^2-x+5}{2x^2+6x-7}$, $\dfrac{x^2+1}{x}$, $\dfrac{3x}{x^2+1}$, $\dfrac{(2x^2+1)(x^3-5)}{(x^4+1)(x-6)}$,
當 $x=\infty$ 時。

8. $\dfrac{x-1}{x^2-9}-\dfrac{x-2}{x(x-3)}$, 當 $x=3$ 時。

9. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x(x-1)}$, 當 $x=1$ 時。

10. $\dfrac{x^2+\dfrac{x+1}{x-2}}{x^2+\dfrac{x-1}{x-2}}$, 當 $x=2$ 時。 11. $\dfrac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{3x+1}{x^2-1}}$, 當 $x=\propto$ 時。

分　式　方　程

分式方程之解法. 任意已知分式方程，可以其 524
諸分式分母之最低公倍 D 乘其兩邊，而變分式爲整式，此法謂之去分母。

由 §§341, 342, 可知自此整式方程可導出已知方程之根，且如有任何另外之根，必爲方程 $D=0$ 之根，可迅速察出而棄捨之。

例1. 解 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x+13}{x(x-1)}=0.$ (1)

去分母，以 $D=x(x-1)$ 乘之。

得 $3(x-1)+6x-(x+13)=0.$ (2)

解 (2), $x=2.$ (3)

因 2 非 $D=x(x-1)=0$ 之根，故爲 (1) 之根，且 (1) 只有此根。

例2. 解 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x+5}{x(x-1)}=0.$ (1)

去分母，$3(x-1)+6x-(x\dotplus 5)=0.$ (2)

解 (2), $x=1.$ (3)

因 1 爲 $D=x(x-1)=0$ 之根，故非 (1) 之根。實則 $x=1$ 時則 (1) 之左端爲 $3+\frac{6}{0}-\frac{6}{0}$ 之形；按 §518 可得其值爲 8 而非 0.

故 (1) 無根。

玆總結上法爲下法則：

525 欲解分式方程，以分式之最低公分母 D 乘之以去其分母。

解所得之整式方程。

以方程之根長設代入 D 致 D 爲 0 者除外——爲已知方程之根。

526 **註**。玆再立此法則如下：

移已知方程之各項於一端而集合之，其結果以 $N/D=0$ 表之；去分母後則得一整式方程 $N=0$.

1. 設 N/D 爲最簡式，則 $N/D=0$ 及 $N=0$ 之根相同；因最簡分式爲 0 只其分子爲 0 故也，§516。

如在 §524 例 1 內，

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+13}{x(x-1)}=\frac{8(x-2)}{x(x-1)}=\frac{N}{D}.$$

此處 N/D 爲最簡式，$N/D=0$ 之根與 $N=0$ 之根相同，即 2.

2. 若 N/D 非最簡式，$N=D$ 之根未必爲 $N/D=0$ 之根，而爲 N 與 D 之公因子之根。

如在 §524 例 2 內，

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+5}{x(x-1)}=\frac{8(x-1)}{x(x-1)}=\frac{N}{D}.$$

此處 N/D 不爲最簡式，而 $N=0$ 之根 1，非 $N/D=0$ 之根：因 $x=1$ 時 $N/D=8$, §514.

顯然 1 爲普通式而 2 爲例外。

玆討論方程 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+a}{x(x-1)}=0.$

此處 $N/D=(8x-(a+3))/x(x-1)$，除 $a=5$ 或 -3 外此爲最簡式。

3. 上文所述並非謂不能以 $N=0$ 之根滿足已知方程，蓋謂亦可以 $D=0$ 之根而滿足之也。

茲討論方程 $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x(x-1)}=0$.

此處 $N/D=(x-1)^2/x(x-1)$，按 §516，$x=1$ 時，則分式爲 0. 但察知 $N=(x-1)^2=0$ 有兩個根 1，其次數多於 $D=x(x-1)=0$ 所有之此根。

用 §525 法則，須注意選取最低公分母時，不可引入另外因子。 527

在方程內任何分式須先化爲最簡式，但他分母內亦含此因子者不消亦可。

有時未去分母之前，先集分式之各項，或化爲帶分式。

例1. 解 $\frac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}-\frac{x^2}{6x-2x^2}=\frac{11}{5}$.

此處第一分式之各項有公因子 $x-5$ 第二有公因子 x. 消去此等公因子，得

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{x}{6-2x}=\frac{11}{5}，\text{或}\frac{x-1}{x-3}+\frac{x}{2(x-3)}=\frac{11}{5}.$$

去分母，　$10x-10+5x=22x-66$.

解之，　$x=8$.

例2. 解 $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+6}{x+7}=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+5}{x+6}$.

化各分式爲帶分式且簡之。

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}.$$

遷項，使各端之二項連以減號。

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}.$$

各端分別集項。

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x^2+13x+42}.$$

去分母， $x^2+13x+42=x^2+5x+6.$

解之， $x=-9/2.$

此已知方程，可先去分母而解之，但費力多矣。

528 **聯立分式方程。**解聯立分式方程之通法，須先去各方程之分母，再解所得之整方程組，如此所得之解答——但使分母為零者除外——即為原方程之解答，§371.

但方程為 §379 所述之式，或能化成此式者，應用彼節所述之法解之。

例1. 解下對方程之 x, y,

$$\frac{x-1}{y-2}-\frac{x-3}{y-4}=0,\ \frac{1}{xy-2x}+\frac{1}{4y-2y^2}-\frac{2}{xy}=0.$$

去分母並化簡之，得

$$x-y+1=0,\ x+2y-8=0.$$

解之， $x=2,\ y=3.$

因 $x=2, y=3$ 時各分母皆非 0，故 $x=2, y=3$ 為已知方程之解答。

例2. 解下方程組之 x, y, z.

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6},\ \frac{xz}{y+z}=-\frac{3}{2},\ 2(z+x)+xz=0.$$

此諸方程可化為下式，§379，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{2}{3},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}.$$

解。求 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$，得 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}, \frac{1}{y}=\frac{1}{3}, \frac{1}{z}=-1.$

故所求之解答為 $x=2, y=3, z=-1.$

習　題　XXVII

解下列方程之 x:

1. $\dfrac{6x-1}{3x+2}-\dfrac{4x-7}{2x-5}=0.$

2. $\dfrac{6x}{5x-1}+\dfrac{8}{3-15x}=\dfrac{1}{6}.$

3. $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{4}{x^2-6x+8}.$

4. $\dfrac{3}{2x+3}+\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{8}{2x^2-7x-15}=0.$

5. $\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}+\dfrac{2}{(x-3)(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+1)}=0.$

6. $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+4x-5}+\dfrac{3}{x^2+6x+5}=0.$

7. $\dfrac{x+1}{3x+1}+\dfrac{2x}{5-6x}=\dfrac{5}{5+9x-18x^2}.$

8. $\dfrac{x+a}{b(x+b)}+\dfrac{x+b}{a(x+a)}=\dfrac{a+b}{ab}.$

9. $\dfrac{x^3+1}{x+1}-\dfrac{x^3-1}{x-1}=20.$

10. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4}+\dfrac{x-1}{x^2+3x-4}=0.$

11. $\dfrac{x-8}{x-3}-\dfrac{x-9}{x-4}=\dfrac{x+7}{x+8}-\dfrac{x+2}{x+3}.$

12. $\dfrac{x+7}{x+6}+\dfrac{x+9}{x+8}=\dfrac{x+10}{x+9}+\dfrac{x+6}{x+5}.$

13. $\dfrac{x^3+2}{x-2}-\dfrac{x^3-2}{x+2}-\dfrac{15}{x^2-4}=4x.$

14. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}+\dfrac{3x^2+x}{1-x^4}=0.$

15. $\dfrac{3}{x^3-8}+\dfrac{2x+5}{2x^2+4x+8}-\dfrac{1}{x-2}=0.$

16. $\dfrac{ax+c}{x-p}+\dfrac{bx+d}{x-q}=a+b.$

17. $\dfrac{x^2+7x-8}{x-1}+\dfrac{x^2+x+3}{x+2}+\dfrac{2x^2-x+7}{x+3}=4x.$

18. $\dfrac{x^2-ax+2bx-2ab}{x-a}+\dfrac{b^2-x^2}{x-2b}+\dfrac{3c^2}{x-2c}=0.$

19. $\dfrac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)}+\dfrac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=3.$

20. $\dfrac{3x+2}{x^2+x}-\dfrac{x-5}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x^2-x}=0.$

21. $\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x+6}{x^2-4}=0.$

解下方程之 x, y 或 x, y, z.

22. $\begin{cases}\dfrac{3x+y-1}{x-y+2}=\dfrac{6}{7},\\ \dfrac{x+9}{y+4}=\dfrac{x+3}{y+3}.\end{cases}$

23. $\begin{cases}\dfrac{y-2}{x-3}+\dfrac{x-y}{x^2-9}=\dfrac{y-4}{x+3},\\ \dfrac{2}{x^2-2x}+\dfrac{3}{xy-2y}+\dfrac{9}{xy}=0.\end{cases}$

24. $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=a,\\ \dfrac{yz}{y+z}=b,\\ \dfrac{zx}{z+x}=c.\end{cases}$

25. $\begin{cases}\dfrac{2}{x+2y}+2y+2z=3,\\ \dfrac{y+z}{2}-\dfrac{5}{z-3x}=\dfrac{7}{2},\\ \dfrac{4}{z-3x}-\dfrac{2}{x+2y}=-1.\end{cases}$

分 項 分 式

529 由 §506 可知一變值 x 之各有理函數，可化為整函數，或眞分式，或整函數與眞分式之和。

為某種應用目的，乃施更進一步之化法，設眞分式 A/B 為已知，茲求數個極簡分式而以 A/B 為其和者，此法詳於次諸定理，其字母 A, B, P, Q 等，表 x 之有理整函數，

定理1. 二眞分式 A/B 與 C/D 之和及差仍爲眞分式。 530

因 $$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}.$$

因 A 之方次低於 B，故 AD 之方次低於 BD.

且 C 之方次低於 D，故 BC 之方次低於 BD.

故 $AD\pm BC$ 之方次低於 BD.

定理2. 命 I 及 I' 表整函數，A/B 及 A'/B' 表眞分式。 531

若 $I+A/B\equiv I'+A'/B'$ 則 $I\equiv I'$ 及 $A/B\equiv A'/B'$.

因按題意，$I-I'\equiv A'/B'-A/B$.

但 $I-I'$ 表整式（或 0），又按 § 530 $A'/B'-A/B$ 表眞分式（或 0）.

又因一整函數不能恒等於一眞分式，故得

$$I-I'\equiv 0 \text{ 及 } A'/B'-A/B\equiv 0,$$

或 $$I\equiv I' \text{ 及 } A/B\equiv A'/B'.$$

定理3. 設 A/PQ 表眞分式，其分母已分爲兩互素因子 P 及 Q 者。 532

此分式可化爲兩眞分式 B/P 及 C/Q 之和。

因 Q 與 P 爲互素式，按 § 479 可求得兩整式 M 及 N，致令

$$1\equiv MQ+NP, \text{故 } A\equiv AMQ+ANP.$$

故 $$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{AMQ+ANP}{PQ}\equiv\frac{AM}{P}+\frac{AN}{Q}. \qquad (1)$$

若 AM/P 及 AN/Q 爲眞分式，則此定理已證明矣。

若 AM/P 及 AN/Q 非眞分式，則各化爲整式及眞分式之和，表其結果如下：

$$\frac{AM}{P} \equiv I + \frac{B}{P} \text{ 及 } \frac{AN}{Q} \equiv K + \frac{C}{Q}. \tag{2}$$

以此諸式代入於 (1) 內之 AM/P 及 AN/Q，得

$$\frac{A}{PQ} \equiv \frac{B}{P} + \frac{C}{Q} + I + K. \tag{3}$$

但 A/PQ，B/P，及 C/Q 爲眞分式，由 (3) 準 §§530, 531 可知 $I+K\equiv 0$，故

$$\frac{A}{PQ} \equiv \frac{B}{P} + \frac{C}{Q},$$

即上定理已證明矣。

533 **註.** 分式 A/PQ 只能化爲此一和式 $B/P+C/Q$.

設 $$\frac{A}{PQ} \equiv \frac{B}{P} + \frac{C}{Q} \equiv \frac{B'}{P} + \frac{C'}{Q}. \tag{1}$$

此處 B'/P 及 C'/Q 亦表眞分式。

則 $$\frac{B-B'}{P} \equiv \frac{C'-C}{Q}, \text{ 故 } \frac{(B-B')Q}{P} \equiv C'-C. \tag{2}$$

但除 $B-B'\equiv 0$ 及 $C'-C\equiv 0$ 外，則 (2) 爲不可能；否則 (2) 內可以 P 除盡 $(B-B')Q$，但此爲不可能，因 Q 與 P 爲互素式且 $B-B'$ 之方次小於 P，§481.

534. **分項分式.** 上得之分式 B/P 及 C/Q 稱爲 A/PQ 之分項分式。

化已知分式 A/PQ 爲分項分式 B/P 及 C/Q，勿須如 §532 所示逐步推證之；可應用 §397 之不定係數法，如下例。

例1. 化 $(2x^2+1)/(x^3-1)$ 爲兩分項分式之和。

此爲眞分式，其分母爲兩互素因子 $(x-1)$ 及 x^2+x+1 之積。

故 $(2x^2+1)/(x^3-1)$ 等於分母各爲 $x-1$ 及 x^2+x+1 之二眞分式之和，§532，其第一分式之分子爲常數，第二分式之分子之方次最高爲1．故得

$$\frac{2x^2+1}{x^3-1}\equiv\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}. \tag{1}$$

此處 a, b, 及 c 表常數．

欲求 a, b, c 先去其分母．

得 $2x^2+1\equiv a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)$,

或 $2x^2+1\equiv(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)$. (2)

因 (2) 爲恆等式，x 之同冪之係數必等，§284．

故 $a+b=2,\ a-b+c=0,\ a-c=1,$ (3)

解(3), $a=1, b=1, c=0$.

故 $$\frac{2x^2+1}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2+x+1}.$$

例2．化 $(5x+4)/(x^4+x^3+x^2-x)$ 爲兩分項分式之和．

關於分項分式之普通定理． 由§532之定理可得下之結論． 535

1．設 A/PQR 爲眞分式，其分母之三個因子 P, Q, R 爲互素式，此分式可化爲下式之和．

$$\frac{A}{PQR}\equiv\frac{B}{P}+\frac{D}{Q}+\frac{E}{R}$$

此處 B/P, D/Q 及 E/R 表眞分式．

因 P 與 QR 爲互素式，§482，故 A/PQR 爲兩眞分式 $B/P+C/QR$ 之和，§532；又 Q 與 R 爲互素式．故 C/QR 爲兩眞分式 $D/Q+E/R$ 之和，§532．

同理設分母爲任意個數之互素因子，上法仍爲眞確．

3．設眞分式 A/PQ^3 其 P 與 Q 爲互素式，按§532可化爲和式

$$\frac{A}{PQ^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q^3}.$$

因 Q, Q, Q 非互素式，故 §532 之定理不適用於 C/Q^3.

但 C 之方次低於 Q^3, 故由 §422, 可化 C 爲 Q 之多項式成下列之形:

$$C \equiv C_1Q^2 + C_2Q + C_3,$$

此處 C_1, C_2, 及 C_3 之方次均低於 Q.

以 Q^3 除此恆等式兩端，得

$$\frac{C}{Q^3} \equiv \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2}{Q^2} + \frac{C_3}{Q^3}.$$

故已知分式可化爲下和:

$$\frac{A}{PQ^3} \equiv \frac{B}{P} + \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2}{Q^2} + \frac{C_3}{Q^3},$$

此處 B 之方次低於 P, 及 C_1, C_2, C_3 之方次低於 Q.

凡分母內之因子 (如 Q) 次數多於一者均同此理。

故得下定理:

設已知眞分式之分母已劈成因子——有一次者有多次者——各因子皆爲互素式。

此分式可化爲一組眞分式之和，且只有此和。其中(1)各一次因子 P, 必有一單分式 B/P, (2) 於各次因子 Q, 必有 r 個分式 $C_1/Q + C_2/Q^2 + \cdots + C_r/Q_r$, 此處 C_1, C_2, C_3 之方次均低於 Q.

536 **最簡分項分式。** 具實數係數之 x 各多項式可化爲範式因式 $x-a$ 及二次因子 x^2+px+q 之積，此處 a, p, q 均爲實數，但 x^2+px+q 之因子有虛數係數。

進而言之，由 §§469, 532 可知設眞分式之分子及所劈分母之因子，均有實數係數，則求得之分項分式之分子，亦必有實數係數，故由 §534 得:

凡分子及分母有實數係數之各眞分式等於一定個數分項分式之和，關於分母之因子爲 $x-a$ 及 x^2+px+q 者如下。

1. 各因子 $x-a$ 爲一次者，必有一分子 $A/(x-a)$，此處 A 爲一實常數。

2. 各因子 $x-a$ 有 r 次者，必有下述 r 個分式。

$$A_1/(x-a)+A_2/(x-a)^2+\cdots\cdots+A_r/(x-a)^r,$$

此處 $A_1, A_2\cdots\cdots A_r$ 均爲實數。

3. 各因子 x^2+px+q 爲一次者必有一分式 $(Dx+E)/(x^2+px+q)$，此處 D 及 E 均爲實常數。

4. 各因子 x^2+px+q 爲 r 次者，必有下述 r 個分式。

$$(D_1x+E_1)/(x^2+px+q)+\cdots+(D_rx+E_r)/(x^2+px+q)^r.$$

此處 $D_1, E_1, D_2, E_2, \cdots D_r, E_r$ 均爲實常數。

此處所述之分式通常稱爲已知分式之最簡分項分式。最好以不定係數法求之。

例1. 化 $\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 爲最簡分項分式。

由 § 536, 得 $\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\equiv\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$ (1)

此處 A, B, C 爲常數。

去 (1) 之諸分母，得

$x^2+x-3\equiv A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)+C(x-1)(x-2)$. (2)

按 x 之方冪集 (2) 之右端諸項且令兩端之 x 之同次冪之係數相等，即可求得 A, B, C；但 A, B, C 爲常數，用下法求之較簡且得同一結果。

在(2)內令 $x=1$, 則得 $-1=A(-1)(-2)$, $\therefore A=-1/2$;

次令 $x=2$, 則得　$3=B(-1)\cdot 1$　$\therefore B=-3$;

又令 $x=3$, 則得　$9=C\cdot 2\cdot 1$,　$\therefore C=9/2$.

故 $\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=-\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{9}{2(x-3)}$.

例2. 化 $\dfrac{x+1}{x(x-1)^3}$ 爲最簡分項分式。

由 § 536, 得 $\dfrac{x+1}{x(x-1)^3}\equiv\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{(x-1)^3}$,

故　$x+1\equiv A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$.　(1)

在(1)內令 $x=0$, 則得 $1=A(-1)^3$.　$\therefore A=-1$;

次令 $x=1$, 則得 $2=D$.　$\therefore D=2$.

以 A, 及 D 之值代入 (1), 以所得 $-(x-1)^3$ 及 $2x$ 移於左端而化簡之，得

$$x^3-3x^2+2x\equiv Bx(x-1)^2+Cx(x-1). \qquad (2)$$

以 $x(x-1)$ 除兩端，得

$$x-2\equiv B(x-1)+C. \qquad (3)$$

在 (3) 內，命 x 之同冪之係數相等，則得

$1=B$ 及 $-2=-B+C$,　$\therefore B=1$ 及 $C=-1$.

故　$\dfrac{x+1}{x(x-1)^3}=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)^3}$.

或按 x 之冪排列 (1), 則得

$x+1\equiv(A+B)x^3-(3A+2B-C)x^2+(3A+B-C+D)x-A$.

命 x 之同冪相等，則得

$A+B=0$, $3A+2B-C=0$, $3A+B-C+D=1$, $-A=1$.

由此諸方程，得數如前。

$$A=-1,\ B=1,\ C=-1,\ D=2.$$

例3. 化 $\dfrac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}$ 爲最簡分項分式。

x^2-x+1 之因子爲虛數，故由 § 536, 得

$$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}\equiv\frac{Ax+B}{(x^2-x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{E}{x-3},$$

此處 A, B, C, D, E 均爲常數。

去分母。

$$5x^2-4x+16\equiv(Ax+B)(x-3)$$
$$+(Cx+D)(x^2-x+1)(x-3)+E(x^2-x+1)^2. (1)$$

按 x 之冪排列 (1)，命同冪之係數爲相等則可求得 A, B, C, D, E；但按下法求之較簡。

於(1)令 $x=3$ 則得 $49=49E$, $\therefore E=1$,

以 E 之值代入 (1)，將所得之項 $(x^2-x+1)^2$ 移於左端而化簡之，並以 $x-3$ 除兩端，則得

$$-(x^3+x^2+x+5)\equiv Ax+B+(Cx+D)(x^2-x+1). \quad (2)$$

次以 x^2-x+1 除兩端，則得

$$-x-2-\frac{2x+3}{x^2-x+1}\equiv\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+Cx+D. \quad (3)$$

按 § 531, (3) 內兩邊之整式部分相等分式部分亦相等

即　$-x-2\equiv Cx+D$,　故 $C=-1, D=-2$,

又　$-2x-3\equiv Ax+B$,　故 $A=-2, B=-3$.

故 $$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}=-\frac{2x+3}{(x^2-x+1)^2}-\frac{x+2}{x^2-x+1}+\frac{1}{x-3}.$$

設已知分式之分母爲 $(x-a)^r$ 者，最好先表分子爲 $x-a$ 之冪之多項式，§ 423. 同理設分母爲 $(x^2+px+q)^r$ 之形，而 x^2+px+q 之因子爲虛數者；亦可表分子爲 x^2+qx+p 之冪之多項式。 538

例　化 $\dfrac{x^4+x^3-8x^2+6x-32}{(x-2)^5}$ 爲最簡分項分式。

由 § 423, 則得

$$x^4+x^3-8x^2+6x-32=(x-2)^4+9(x-2)^3+22(x-2)^2$$
$$+18(x-2)-28.$$

以 $(x-2)^5$ 除兩端，則得

$$\frac{x^4+x^3-8x^2+6x-32}{(x-2)^5}=\frac{1}{x-2}+\frac{9}{(x-2)^2}+\frac{22}{(x-2)^3}+\frac{18}{(x-2)^4}$$
$$-\frac{28}{(x-2)^5}.$$

設已知非眞分式，可先化爲整式與眞分式之和然後再化爲分項分式。 539

例． 用此法將 $\dfrac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}$ 化爲分項分式．

令 $$\frac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}=x+2+\frac{7x-11}{x^2-4x-5}$$

$$=x+2+\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)};$$

用前法得

$$\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)}=\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x-5}.$$

習 題 XXVIII

化以下諸式爲分項分式，其分母須有實數係數．

1. $\dfrac{2x+11}{(x-2)(x+3)}$.　　2. $\dfrac{6x-1}{(2x+1)(3x-1)}$.

3. $\dfrac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.　　4. $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$.

5. $\dfrac{x^2+2}{1+x^3}$.　　6. $\dfrac{8x+2}{x-x^3}$.

7. $\dfrac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$.　　8. $\dfrac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}$.

9. $\dfrac{x-1}{2x^3-5x^2-12x}$.　　10. $\dfrac{6}{2x^4-x^2-1}$.

11. $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-5}{(x+3)^5}$.　　12. $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

13. $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}$.　　14. $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x^2+1)}$.

15. $\dfrac{2x^5-x+1}{(x^2+x+1)^3}$.　　16. $\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}$.

17. $\dfrac{3x^2-x+2}{(x^2+2)(x^2-x-2)}$.　　18. $\dfrac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

19. $\dfrac{2x^2-3x-2}{x(x-1)^2(x+3)^3}$.　　20. $\dfrac{x^3+x+3}{x^4+x^2+1}$,

IX　對稱函數

絕對對稱及輪轉對稱

絕對對稱.　於 $x^2+y^2+z^2$ 式中，若將 x,y,z 任二 540
字互換，則與原式恆等，如 $y^2+x^2+z^2$，或 $z^2+y^2+x^2$ 恆等於 $x^2+y^2+z^2$，爲欲表明此關係玆謂 $x^2+y^2+z^2$ 關於 x,y,z 爲對稱式 (*symmetric*).

總之，凡一定組文字之函數，設互換其各二文字仍化爲與原函數恆等之函數，則稱原函數關於此諸文字爲對稱.

對稱式之他例，如

$(xy+xz+yz)/(x+y)(x+z)(y+z)$ 關於 x,y,z 爲對稱.

$a+b+c$ 及 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 關於 a,b,c 爲對稱.

換言之，$x+y-z$ 不爲對稱，因 y 與 z 互換則與原式不等故也.

$2x^2y$ 及 $3y^2z$ 關於 x,y,z 稱爲同形式，因其任二變數 541
互換，則此式變爲彼式，例如 x^2y 及 y^2z 中互換 x,y,z 任兩變數，則 x^2y 變爲 y^2z，餘類推.

定數文字如 x,y,z 之整函數關於該字母爲對稱其勝任 542
及必須條件爲各同形式之諸項有同係數.

設含某種形式之一項之對稱函數，亦必含此形之一切諸項：即能以諸文字各種可能的互換自問題內之一項而導出之諸項.

如，　設 $ax^2+by^2+cz^2$ 如爲對稱，必須 $a=b=c$.

又，　設 x,y,z，之對稱式中含有 x^2y 項，則必含有 $x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$，諸項.

543 此定理可表已知定組文字及已知方次之對稱函數之總形。

如 a, b 表常數，則關於 x, y, z, u 之一次對稱式為 $a(x+y+z+u)+b$.

又關於 x, y, z 之最普通之一次，二次及三次齊次對稱函數為：

1. $a(x+y+z)$. 2. $a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+xz+yz)$.

3. $a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+cxyz$.

544 **對稱式之表示法.** 記法 $\sum x^2$ 意即與 x^2 之諸形之諸項之和；

設 x, y, z, 為所用字母，則 $\sum x^2=x^2+y^2+z^2$, 同理 $\sum x^2y=x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$; 餘類推。

任一對稱函數，可由其各形諸項擇取一項，且書符號 $\sum$ 於其和之前以表示之。

如：

$\sum(2x-x^3y^2)=2x+2y+2z-x^3y^2-y^3x^2-x^3z^2-z^3x^2-y^3z^2-z^3y^2$.

545 設欲書出對稱函數之全部，最好依定法而排列之，下例示排列整式對稱函數之簡便法。

設所用之字母為 a, b, c, d, 而其規定次序當然即 a, b, c, d, 之次序。

於是書 $\sum ab$ 及 $\sum abc$ 如下。

$\sum ab=ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $\sum abc=abc+abd+acd+bcd$.

注意各項字母，皆按通常之次序。

擬寫全 $\sum ab$ 應輪流取 a, b, c, 每一字母而書其各鄰次字母於其後。$\sum abc$ 之諸項可由 $\sum ab$ 之同法導出之。

設 $m\neq n$ 茲列 $\sum a^m b^n$ 之各項如下：

$\sum a^2b^3=a^2b^3+b^2a^3+a^2c^3+c^2a^3+\cdots+c^2d^3+d^2c^3$.

注意其指數之次序常為一定，故在指數次序之中可書 $\sum ab$ 之第一項之 ab 為 ab 及 ba 兩種次序，餘類推。

同法可寫

$$\sum a^2b^3c^4 = a^2b^3c^4 + a^2c^3b^4 + b^2c^3a^4 + b^2a^3c^4 + c^2a^3b^4 + c^2b^3a^4$$

+（同法推得 $\sum abc$ 之其餘各項）.

對稱之一般定理. 自對稱之定義，§ 540，可知 546
對稱函數，以計算法則變更其形後仍為對稱函數。於特例，二對稱函數之和，差，積，及商仍為對稱。

由此定理可直接用代數處理而不必實際計算即可得已知對稱函數結合之結果，只須計算結果各範式之項。

例1. 求 $(\sum a)^2 = (a+b+c+\cdots)^2$.

所求結果當然為二次齊次對稱函數，含二範式 a^2 及 $2ab$.

故　$(\sum a)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab$.

例2. 求 $\sum x^2 \cdot \sum x = (x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$.

此積顯然為 x^3 及 x^2y 兩範式之和。

故　$$\sum x^2 \cdot \sum x = \sum x^3 + \sum x^2y = x^3+y^3+z^3 + x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y.$$

例3. 求 $(\sum x)^3 = (x+y+z)^3$.

所求結果為關於 x, y, z, 之三次齊次對稱式，故得(§ 543)

$(x+y+z)^3 = a(x^3+y^3+z^3) + b(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + cxyz$.

擬求常數 a, b, c 之值故予 x, y, z 以三組之任意值而生含 a, b, c 之方程，且解之。

如　設 $x=1, y=0, z=0$, 得 $1=a$.　(1)

又　設 $x=1, y=1, z=0$, 得 $8=2a+2b$.　(2)

終　設 $x=1, y=1\ z=1$, 得 $27=3a+6b+c$.　(3)

解 (1), (2), (3), 得 $a=1, b=3, c=6$.

$$\therefore\quad (\sum x)^3 = \sum x^3 + 3\sum x^2y + 6\sum xyz.$$

547 **輪換式.** 在 $x^2y+y^2z+z^2x$ 式中設以 x 換 y, y 換 z, z 換 x 得 $y^2z+z^2x+x^2y$ 與原式恒等，爲表此關係茲稱 $x^2y+y^2z+z^2x$ 爲關於文字 x,y,z. 按 x,y,z 之次序之輪換式(*cyclo-symmetry*).

總之，凡有定數文字按已知次序排列之式，設以第二字代第一字，第三代第二，等等，以第一代第末字，仍與原式恒等則原式稱爲輪換式.

548 如 $x^2y+y^2z+z^2x$ 以上法輪換之，則變第一項爲第二項，第二項爲第三項，第三項爲第一項，而與原式相同，此謂之輪換排列，常見之輪換式以輪換排列法計算有極大便利.

549 顯然各對稱函數，皆爲輪換式，但各輪換式. 不全爲對稱.

如 $x^2y+y^2z+z^2x$ 雖爲輪轉式而非對稱.

設 x 及 y 互換其值遂變，若換令其對稱須加 $y^2x+z^2y+x^2z$ 數項.

550 如上例所示，一輪換函數通常不含已知範式之所有諸項，但其所含之數項必有同係數.

551 **定理.** 任二輪換函數之和，差，積，商仍爲輪換函數.

此理可由輪換式定義得之.

例. 求 $(x^2y+y^2z+z^2x)(x+y+z)$ 之積.

顯然此積爲輪換式而非對稱式，因其含 x^3y, x^2y^2, x^2yz, 項各一次且只含此種範式之諸項.

故其積爲

$$x^3y+y^3z+z^3x+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2yz+y^2zx+z^2xy.$$

習　題　XXIX

1. 在 $x^4-2y^4+z^4+4(x^3-y^3)(y^3-z^3)(x^2+z^2)$ 中關於何字母爲對稱?

2. 寫出下列之 a, b, c 之對稱函數。

$\sum a^2b^2$, $\sum a^3b^4$, $\sum a^2/b$, $\sum a^2b^3c^5$, $\sum a^2b^2c^4$,

$\sum (a+b)c$,　$\sum (a+b^2)c^3$,　$\sum (a+2b+3c)$.

3. 試證 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 關於 a, b, c 爲輪換而非對稱; 及

$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ 爲其對稱式。

4. $(a-b)^2(b-c)^2(c-d)^2(d-a)^2$ 關於 a, b, c, d 爲對稱乎?

5. 排下列各組爲輪換式:

$y^2-x^2, z^2-y^2, x^2-z^2$; $a^2bc, abd^2, ac^2d, b^2cd$;

$(a-c)(b-a), (a-c)(c-b), (a-b)(b-c)$;

6. 寫出下列各輪換式，其第一項爲:

ab^3c^2, $a(b-c)$, $(b+2c)(a+d)$, $a^2/(a-b)(a-c)$.

7. 證明下列恆等式爲眞。

$\sum a^3 \cdot \sum a = \sum a^4 + \sum a^3 b$; $\sum ab \cdot \sum a = \sum a^2 b + 3\sum abc$.

對稱及輪換函數之分因法

用除式定理及上述之原則，可用簡捷之法以分解複雜 552
之對稱或輪換式之因子。

例1; 分解 $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ 之因子。

令 $y=z$ 則原式 $=x^3(z-z)+z^3(z-x)+z^3(x-z)\equiv 0$.

故可以 $y-z$ 除盡原式, § 416; 同理。$z-x, x-y$ 亦可除盡原式，故可以 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 除盡原式。

因原式及 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 各爲四次及三次之輪換齊次函數，故商必爲一次齊次且輪轉式如 $k(x+y+z)$ 之形，而 k 表一常數，故

$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)\equiv k(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$ (1)

擬求 k，予 x,y,z 以任一組值但勿使 k 之係數爲 0.

如設 $x=2, y=1, z=0$，得 $6=-6k$，或 $k=-1$.

或按 x 之多項式排列 (1) 使兩端 x 之同冪係數相等，即可得 k，如 x^3 在左端爲 $x^3(y-z)$，而在右端則爲 $-kx^3(y-z)$，因得 $k=-1$ 如前，故

$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.

例2. 分解 $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ 之因子.

設 $x=-y$ 則此函數爲零.

$$(-y+y+z)^5+y^5-y^5-z^5\equiv 0.$$

故原式可以 $x+y$ 除盡；同理可以 $(y+z)$ 及 $(z+x)$ 除盡，亦可被 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 除盡.

因此除式及被除式，各爲五次及三次之齊次對稱式，故其商必爲 $k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)$ 之形，§543.

故　　$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

$\equiv(x+y)(y+z)(z+x)\{k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)\}$.

設　$x=1, y=1, z=0$，　得　$15=2k+l$.

設　$x=2, y=1, z=0$，　得　$35=5k+2l$.

解 k 及 l 求得 $k=5, l=5$，故

$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

$=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$.

例3. 分解次式之因子.

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3.$$

設 $x=0$ 則

$$(y+z)^3-(y+z)^3-(z-y)^3-(y-z)^3\equiv 0.$$

故 x 可除盡原式；同理 y 及 z 可除盡原式；故 xyz 亦可除盡原式，因除式及被除式俱爲三次故商爲常數 k，故

$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$

$\equiv kxyz$.

設　$x=1, y=1, z=1$，求得 $k=24$. 故

$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3=24xyz$.

上述法則有時用於化簡輪換分式。 553

例。化簡

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

此式關於 a, b, c 爲輪換式。

最低公分母爲 $(b-c)(c-a)(a-b)$.

以此 $(b-c)(c-a)(a-b)$. 公分母通其各分式得第一分子爲 $-a^3(b-c)$,輪換之，得第二及第三之分子爲 $-b^3(c-a)$ 及 $-c^3(a-b)$，加此三分子且分解其結果；§552, 例1，得 $(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$.

故已知式化爲 $a+b+c$.

習　題　XXX

分解下列之簡式之因子。

1. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.
2. $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$.
3. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$.
4. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$.
5. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$.
6. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.
7. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.
8. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$.
9. $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.
10. $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$.
11. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$.
12. $x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$.

化簡下列諸分式。

13. $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$.

14. $\dfrac{x+a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{x+c}{(c-a)(c-b)}$.

15. $\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

16. $\dfrac{(b+c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c+a)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(a+b)^2}{(c-a)(c-b)}$.

17. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)}$

$$+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$$

X. 二項式定理

551 **連乘積之構成.** 求

$$(a+b+c+d)(e+f+g)(h+k)$$

之積，可以 $e+f+g$ 之每項乘 $a+b+c+d$ 之各項，再以 $h+k$ 之每項乘其所得各乘積，最後加其乘得之諸結果，即得。

故從三因子中各選一項相乘即得積之一項，且設以所有可能方法，從已知三因子內各取一項相乘，即可得乘積之所有項。

如，從首因子取 b，次因子取 g，第三因子取 k，則得乘積之 bgk，餘類推。

因從 $a+b+c+d$ 內選取一項可有四法；$e+f+g$ 內選取一項，可有三法，$h+k$ 內選取一項可有二法；故完全乘積之項數爲 $4\cdot3\cdot2$ 或 24. 總之：

任何若干多項式之積，爲盡可能方法於每當因子內各取一項相乘，所得諸積之和。

又設第一因子有 m 項，第二因子有 n 項，第三因子有 p 項等等，則其完全乘積之項數——在同類項合併之前，（設能合併）爲 $mnp\cdots$.

此定理予乘積正確性以有用之核驗，可用於已合併同 555
類項之乘積，設其諸項具同號且無數字係數者諸項之和，則某項係數即示其有若干未合併之項數。

故由本定理，$(a+b+c)(a+b+c)$ 之積必有 $3\cdot 3$ 或 9 項，此 9 項皆同號，但前已知 $(a+b+c)(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$，此表 $1+1+1+2+2+2$ 或 9 項未合併之乘積。

同理，$(a+b)(a+b)(a+b)$ 之積有 $2\cdot 2\cdot 2$ 或 8 項，但化簡後為 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，此表 $1+3+3+1$ 或 8 項未合併項之乘積。

用上章方法計算對稱函數時，此定理須牢記於心， 556
例如 249 頁習題 7 已知，$\sum ab\cdot\sum a=\sum a^2b+3\sum abc$.
設其僅含 a, b, c 三字，核驗此公式。

$\sum ab$ 有三項，$\sum a$ 有三項，$\sum a^2b$ 有 6 項，$\sum abc$ 有 1 項；而 $3\cdot 3=6+3\cdot 1$.

一次二項之因子積. §554 之定理能以觀察法 557
求得任何多個形如 $x+b$ 之因子之積，如

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$$
$$=x^3+(b_1+b_2+b_3)x^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)x+b_1b_2b_3.$$

因從各因子內取 x，得 x^3.

盡可能方法，從二因子取 x，他一因子取 b 得 b_1x^2, b_2x^2, b_3x^2. 諸項。

盡可能方法從一因子取 x，他二因子取 b 得 $b_1b_2x, b_1b_3x, b_2b_3x$. 諸項。

於所有三因子內取 b 得 $b_1b_2b_3$ 項。

注意如公式所示乘積併項後，x^2 之係數為 b_1, b_2, b_3 三字母之和，x 之係數為三字母中每兩個之積之和，最後項

爲所有三字母之積。

因 $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 自身關於 b_1, b_2, b_3, 對稱，故諸係數爲對稱函數。

又因 $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 關於 b_1, b_2, b_3. 對稱，故先由每範式求出一項，如 $x^3, b_1x^2, a_1b_2x, b_1b_2b_3$, 再寫出每種範式之所有項，即可求得此連乘積。

558 由同理可證明其一般之公式。

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)\cdots(x+b_n)$$
$$=x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\cdots+B_n,$$

式
$$B_1=\sum b_1 \quad =b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n,$$
$$B_2=\sum b_1b_2 \quad =b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_2b_3+\cdots+b_{n-1}b_n,$$
$$B_3=\sum b_1b_2b_3=b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+\cdots+b_{n-2}b_{n-1}b_n,$$
$$B_n= \quad b_1b_2b_3\cdots b_n;$$

即，B_1, B_n 爲所有字母 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 之和及積，其間之係數爲：B_2 爲字母中每兩個之積之和；B_3 爲每三個之積之和，餘類推。

例如，盡可能方法，每次從三因子內取 b,餘因子內取 x, 則得 $b_1b_2b_3x^{n-3}, b_1b_2b_4x^{n-3}, \cdots$ 諸項，且其和爲 B_3x^{n-3}

由上知係數

$$B_1, B_2, \cdots, B_n$$

爲字母之 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 之對稱函數。

559 同法得

$$(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\cdots(x-b_n)$$
$$=x^n-B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^nB_n,$$ 此處

$B_1, B_2, \cdots B_n$之意義與 §558同，且連各項之符號一十相間，

末項 $(-1)^n B_n$ 之符號，設 n 為偶時為正，為奇時為負。

此公式之得來，僅由於變§558公式內所有字母 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 之符號，因凡偶數個 b 乘積之諸項構成之各種 B 式不變，而於奇數個 b 乘積之各種 B 式則僅變其符號。

例．用§§557－559方法，求以下各積．

1．$(x+1)(x+2)(x+3)$．　2．$(x+2)(x-3)(x+4)$．

3．$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$．

4．$(x-y)(x+2y)(x-3y)(x+4y)$．

$\sum b_1$, $\sum b_1b_2, \cdots$ **諸和之項數**．令 $n_1, n_2, \cdots$ 表 $\sum b_1$, 560
$\sum b_1b_2, \cdots$ 內各和之項數．

1．因 $\sum b_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, 顯然 $n_1 = n$.

2．設 n 字母 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 中之每個，以其他 $n-1$ 個字母輪乘之，則得 $n(n-1)$ 個乘積，但此 $n(n-1)$ 個乘積項等於 $\sum b_1b_2$ 諸項中每項複計一次，故 $\sum b_1b_2$ 之項數 n_2 為 $n(n-1)/2$, 或

$$n_2 = n_1 \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

由是得

$b_1b_2, b_1b_3, \cdots, b_1b_n;\ b_2b_1, b_2b_3, \cdots, b_2b_n; \cdots; b_nb_1, b_nb_2, \cdots, b_nb_{n-1}$.

此乘積每組 $n-1$ 個共有 n 組，故全數為 $n(n-1)$.

但乘積 b_1b_2 發見兩次，即一為 b_1b_2, 一為 b_2b_1; 餘類推。

3．又設以 $n-2$ 字母中之每個乘 $\sum b_1b_2$ 之 n_2 項不含該字母之各項則共得 $n_2(n-2)$ 個乘積，但此 $n_2(n-2)$ 個乘積為 $\sum b_1b_2b_3$ 中諸項每項發現三次，故 $\sum b_1b_2b_3$ 內之項數 n_3 為 $n_2(n-2)/3$, 或

$$n_3 = n_2 \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

故得

$$b_1b_2b_3,\ b_1b_2b_4,\cdots,b_1b_2b_n;\ b_1b_3b_2,\ b_1b_3b_4,\cdots,b_1b_3b_n;$$
$$\cdots;b_{n-1}b_nb_1,\ b_{n-1}b_nb_2,\cdots,b_{n-1}b_nb_{n-2}.$$

此乘積共有 n_2 組，每組有 $n-2$ 個積，故共有 $n_2(n-2)$ 個乘積。

但乘積 $b_1b_2b_3$ 發現三次，即由三種形式 $b_1b_2\cdot b_3$, $b_1b_3\cdot b_2$, $b_2b_3\cdot b_1$ 同樣 $\sum b_1b_2b_3$ 內之每項亦皆發現三次，於三種方法中每法均得一此三字母之乘積，即以餘一字母乘二字母之積是也。

4.　由同理可証

$$n_4=n_3\frac{n-3}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4},$$

總之，

$$n_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\text{至 } r \text{ 因子}}{1\cdot2\cdot3\cdots r}.$$

如，四字母 b_1,b_2,b_3,b_4，每次取一，二，三，四相乘之積之個數爲

$$n_1=4,\ n_2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6,\ n_3=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4,\ n_4=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1.$$

561　**二項式定理**，　設於 § 558 之公式，即

$(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n)=x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\cdots+B_n$，內以同字母 b 易其 n 不同字母 $b_1,b_2,\cdots b_n$，且以 a 易 x 則左方變爲 $(a+b)^n$.

又因 B_1 內之 n 項式皆變爲 b, B_2 內之 n_2 項皆變爲 b^2，餘類推，故由 § 560，得

$$B_1=nb,\ B_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot2}b^2,\ B_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}b^3,\cdots.$$

故此公式變化如下：

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots,$$

式內，

1. 右方之項數爲$n+1$.

2. a之指數逐項減一，而b之指數逐項增一，各項內指數之和皆爲n.

3. 首項係數爲1,第二項係數爲n,以外各項係數，可用下法求得：

以任一項內a之指數，乘該項之係數，再以b之指數加1除之結果即爲次一項之係數。

此公式即所謂二項式定理，右式稱爲$(a+b)^n$由此定理所得之展開式。

例如，

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}ab^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}b^3$$
$$=a_3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

因$a+b$關於a, b對稱，故由§542可知，展開式內同 562
形之諸項——即含a^n及b^n, $a^{n-1}b$及ab^{n-1}, 等等——必有相同係數，但此爲首項及末項，第二項及倒數第二項；總之即距展開式兩端等距之各二項。

故末項爲b^n倒數第二項爲nab^{n-1}, 餘類推，因項數爲$n+1$, 故n爲偶數時有一中項，n爲奇數時有二中項；如有二中項，則二項爲同形且有同係數，由上可知中項前後項之係數必同但次序相反。

亦可知係數漸大，至中項後漸小，故中項之係數爲最 563
大。

此亦合§561,3之法則，因中項前各項內a指數較b之指數逐項增一而於中項後之各項內則少一也。

564　變前公式內 b 之符號且化簡，得

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\cdots.$$

其中含 b 奇次冪之項爲負，偶次冪之項爲正。

例。求 $(2x-y^3)^6$ 之展開式。

以 $2x$ 代 a, y^3 代 b, 代入公式，又知末三係數依相反順序同於首三係數，故得

$$(2x-y^3)^6=(2x)^6-6(2x)^5y^3+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(2x)^4(y^3)^2-\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}(2x)^3(y^3)^3+\cdots$$
$$=(2x)^6-6(2x)^5y^3+15(2x)^4(y^3)^2-20(2x)^3(y^3)^3$$
$$+15(2x)^2(y^3)^4-6(2x)(y^3)^5+(y^3)^6$$
$$=64x^6-192x^5y^3+240x^4y^6-160x^3y^9+60x^2y^{12}-12xy^{15}+y^{18}.$$

565　**普通項.** 由 §561 知 $(a+b)^n$ 之展開式內之第 $(r+1)$ 項爲　$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots 至\ r\ 因子}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}a^{n-r}b^r$.

如 r 爲奇數時冠以負號即爲 $(a-b)^n$ 之展開式內之第 $(r+1)$ 項。

例1. 求 $(x-y)^{16}$ 之展開式內第八項。

於此 $n=16$ 及 $r+1=8$, $r=7$, 故所求項爲

$$-\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^9y^7=-11440x^9y^7.$$

例2. $(x^3+1/x)^{12}$ 之展開式內有無含 x^{20} 之項？如有，求此項。

使 $r+1$ 表項數，於是因 $n=12$, $a=x^3$, 及 $b=1/x$, 故必得

$$a^{n-r}b^r=(x^3)^{12-r}/x^r=x^{36-4r}=x^{20}.$$

設 $36-4r=20$，或 $r=4$，則能滿足此條件。
故第五項含 x^{20} 代入公式得此項為

$$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{20}=495x^{20}$$

習 題 XXXI

用二項式定理展開下列諸式：

1．$(3x+2y)^3$． 2．$(a-b)^8$． 3．$(1+2x^2)^7$．
4．$(2+1/x)^4$． 5．$(x-3/x)^6$． 6．$(x/y-y/x)^5$．
7．$(1-x+2x^2)^4$． 8．$(a^2+ax-x^2)^2$．

9．求 $(1+x/2)^{11}$ 內之第六項。
10．求 $(3a-4b)^{12}$ 內之第八項。
11．求 $(a^2-2bc)^{10}$ 內之中項。
12．求 $(1-x)^9$ 內之二中項，
13．求 $(1+x)^8$ 內 x^5 之係數。
14．求 $(3-2x)^7$ 內 x^4 之係數。
15．$(1-x^2)^6$ 內 x^8 之係數，
16．求 $(1+2x)^9+(1-2x)^{11}$ 內 x^3 之係數。
17．求 $(x+1/x)^{12}$ 內之常數項，
18．求 $(2x-1/x)^{15}$ 內 x^7 之係數。
19．用觀察法求 $(x+2y)(x-3y)(x-5y)$．
20．用觀察法求 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$．
21．乘積 $(a+b+c+d)(f+g+h)(k+l)(m+n+p+q)$ 內之項數如何？
22．設展開下列四字 a, b, c, d 之對稱函數其係數之和若何？

1．$(1+x^2+x^3+x^4)^3$．
2．$(1+2x+x^2)^2(1+x+2x^3)^2$．

23．求下各積之係數和：

1．$\sum a^2\cdot\sum a$． 2．$\sum a^3\cdot\sum abc$． 3．$\sum ab\cdot\sum abc$．

24．試証 $(a+b)^n$ 之展開中其係數之和為 2^n．
25．試證 $(a-b)^n$ 之展開中其正係數之和之數值等於其負係數之和。

XI　開　方

566　**完全方冪.** 已知一有理函數 P. 此函數 P 能爲完全 n 次方；換言之有第二函數 Q 存在，能致 $P=Q^n$. 設其如此，則有理式 Q 爲 P 之 n 次根。

茲設此問題：已知一有理函數 P, 求定 P 是否爲完全 n 次方，設其然，求其 n 次根 Q, 假定 n 表已知正整數。

567　**獨項式之根.**　使 P 表已化爲最簡形之獨項式。設 P 爲完全 n 次方，則 P 之 n 次根之一可用下法求得：

以 n 除 P 內各字母之指數，再乘以 P 之數字係數之 n 次主根。

此可由 § 318 之乘方法則推知。

例如，$(a^kb^l/c^m)^n=a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$. 故 a^kb^l/c^m 爲 $a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$ 之 n 次根，§ 566, 且由以 n 除 $a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$ 之指數得來。

568　如是求得之根，稱爲 P 之 n 次主根（參照 § 258）. 當述及 P 之 n 次根或用符號 $\sqrt[n]{P}$ 時，皆指此根。

例1.　求 $-8a^3b^6/27x^3y^9$ 之立方根。

今
$$\sqrt[3]{\frac{-8a^3b^6}{27x^3y^9}}=-\frac{2ab^2}{3xy^3}.$$

例2.　求以下各根。

1. $\sqrt{\dfrac{64a^4b^6}{100c^8d^{12}}}$.　2. $\sqrt[4]{81x^4y^8z^{12}}$.　3. $\sqrt[5]{\dfrac{32x^{10}y^{20}}{a^5z^{25}}}$

569　**多項式之根.**　注意下例。

例1.　求 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 是否完全平方，設是，求其平方根。

設其爲完全平方，顯然必有一平方根形如 $2x^2+px+q$ 者，其 p 及 q 爲常數，由是必得

$$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9\equiv(2x^2+px+q)^2$$
$$\equiv 4x^4+4px^3+(p^2+4q)x^2+2pqx+q^2,$$

依 § 284, p 及 q 須適合諸方程式:

$4p=-4$ (1), $p^2+4q=13$ (2), $2pq=-6$ (3), $q^2=9$ (4).

從 (1) 及 (2) 得 $p=-1$, $q=3$, 且因 $2(-1)3=-6$, 及 $3^2=9$ 此 p 及 q 之值適合 (3) 及 (4).

故 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 爲完全平方，其平方根爲 $2x^2-x+3$.

例2. 求 $x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$. 之立方根。

設其爲完全立方，則必有形如 x^2+px+q 之立方根。由是得:

$$x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27\equiv(x^2+px+q)^3$$
$$\equiv x^6+3px^5+3(p^2+q)x^4+(p^3+6pq)x^3$$
$$+3(p^2q+q^2)x^2+3pq^2x+q^3,$$

由 § 284 知 p 及 q 須適合六方程式:

$3p=6$ (1), $3(p^2+p)=21$ (2), ... $q^3=27$ (6).

從 (1) 及 (2) 得 $p=2$, $q=3$ 且可試出此二值適合其餘 (3)....(6) 各方程式。

故 $x^6+6x^5+\cdots\cdots+54x+27$ 爲完全立方，而其立方根爲 x^2+2x+3

用上例所示方法，永能決定一已知 x 之多項式是否爲完全 n 次方，設其是，且能求出其 n 次根。

令此多項式爲 $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$. 設此爲完全 n 次方，則次數 m 必爲 n 之倍數，如是 $m=kn$, k 爲整數，且必有一 n 次根如 $\alpha x^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_k$ 之形，其 α 表 a_0 之 n 次主根，及 $A_1,\cdots,A_k$ 爲未知常數。茲稱此根爲 n 次主根。

求定 $a_0x^m+\cdots+a_m$ 是否含有此根；設其存在，求此根。

使 $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m\equiv(\alpha x^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_k)^n$,

變右方爲x之多項式，於是令其與左方同次羃之係數相等，由是得$A_1, A_2, \cdots, A_k$之nk個方程式，首k方程式得$A_1, A_2, \cdots A_k$之一組值，且設$a_0x^m+\cdots+a_m$爲完全n次方，則該組諸值必適合其餘方程式。

例3. 求$8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1$之立方根。

570 **多項式之平方根.** 設一多項式爲完全平方，則其平方根亦可用下法求得。

如前節，使P表依降羃排列x之偶次多項式。

假定P爲完全平方，$a, b, c, \cdots$表其平方根內依x降羃排列之諸項，於是$P\equiv(a+b+c+\cdots)^2$.

問題爲已知P求$a, b, c, \cdots$

無論$a, b, c, \cdots$之值爲何，必有次之關係

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b,$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2=a^2+(2a+b)b&+[2(a+b)+c]c\\&+[2(a+b+c)+d]d,\end{aligned}$$

餘類推，左方每加一新字母，右邊卽增一新項組，即加新字母於二倍原字母之和，再以新字母乘其結果而構成之一組。

故由假設$P\equiv(a+b+c+\cdots)^2$，得

$$\begin{aligned}P\equiv a^2+(2a+b)b&+[2(a+b)+c]c\\&+[2(a+b+c)+d]d+\cdots,\end{aligned}$$

右方各組首項，即 $a^2, 2ab, 2ac, 2ad, \cdots$，其 x 之次數皆高於其後之任一項。

從此恒等式可如下法求得 $a, b, c, \cdots$.

1. 顯然 a 爲 P 首項之平方根。
2. 從 P 減 a^2，則餘式 R_1 之首項必爲 $2ab$，以 $2a$ 除之可得 b.
3. 已得 b，從 R_1 減去 $(2a+b)b$，則餘式 R_2 之首項必爲 $2ac$，以 $2a$ 除之可得 c.
4. 繼續進行至餘式之次數低於 a 而止。

如假定 P 爲完全平方，最後餘式必爲零，而其平方根爲 $a+b+c+\cdots$.

設最後餘式不爲零，則 P 非完全平方，但可變 P 爲下列之形。

$$P \equiv (a+b+c+\cdots)^2+R,$$

即爲一完全平方與一整函數之和，此函數之次數低於 a.

排列上述演算如下例較爲簡便。

例。求 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 之平方根。

$$\begin{array}{rl|l}
 & P=4x^4-4x^3+13x^2-6x+9 & \underline{2x^2-x+3=a+b+c} \\
 & a^2=4x^4 & \\
2a+b=4x^2-x & \multicolumn{2}{|l}{-4x^3+13x^2-6x+9=R_1=P-a^2} \\
 & \multicolumn{2}{|l}{\underline{-4x^3+x^2}=(2a+b)b} \\
2(a+b)+c=4x^2-2x+3 & \multicolumn{2}{|l}{12x^2-6x+9=R_2=P-(a+b)^2} \\
 & \multicolumn{2}{|l}{\underline{12x^2-6x+9}=[2(a+b)+c]c} \\
 & \multicolumn{2}{l}{\qquad 0 \qquad =R=P-(a+b+c)^2}
\end{array}$$

因最後餘式爲零，故 P 爲完全平方，其平方根爲 $2x^2-x+3$ 比較 § 569，例 1.

由上可知已得各新餘式 $R_1, R_2, \cdots$ 則以 $2a$ 除其首項，即得根之次項，於餘式之左寫已得根之二倍加根之新項，

以根之新項乘此和，且從餘式減之，於是得次新餘式。

例。 求 $25x^4-40x^3+46x^2-24x+9$ 之平方根。

571　此法亦可用於含多於一字母之多次式 P，P 須爲完全平方，先依一字母之降冪排列 P 式，於是如 § 570 方法進行，當然 x 表所排列之字母。

572　**近似平方根。** 此法亦可用於依 x 升冪排列之多項式。惟 $a, b, c, \cdots$ 亦須依升冪排列。且連續餘式之次數遞增，故如 § 570, 4, 設 P 非完全平方而有一常數項，則可變其形爲

$$P\equiv(a+b+c+\cdots)^2+R',$$

即一完全平方與 R' 多項式之和，R' 之最低次項可爲任意之高次。

因 x 之小值，由實施此種演算至充分地步，能使 R' 之值爲選定之小量，故於此情形下稱 $a+b, a+b+c, \cdots$ 爲 P 之二項，三項，等等近似平方根。

求此漸近似根，用 § 569 之方法更爲敏捷。

例1. 求 $1+x$ 之平方根至四項。

由 § 569, 寫　　$\sqrt{1+x}\equiv1+px+qx^2+rx^3+\cdots$.

平方之，$1+x\equiv1+2px+(p^2+2q)x^2+2(pq+r)x^3+\cdots$

由 § 284,　$2p=1$,　$p^2+2q=0$,　　$pq+r=0$,

解之　　　$p=1/2$,　　$q=-1/8$,　　$r=1/16$.

因之所求結果爲 $1+x/2-x^2/8+x^3/16$.

學者試用 §§ 570, 571 之法核驗之。

例2. 求 $4-x+x^2$ 之平方根至三項。

數目之平方根. 從 § 570 之公式，亦可導出求數 573
目平方根之常用法.

例. 求 53361 之平方根.

令 a 表一有効數字之最大整數，其平方僅能含於53361之內者，此有効數字爲根之首一數字，其餘數字暫均爲 0. 茲求 a 如次.

切記 a 末每有一零，a^2 之末名即有二零，從右而左，每兩位分爲一節，如 5'33'61.

每有一節 a 後即有一零，除一節 5 得根之首數字 2. 因 2 爲平方小於 5 之最大整數，故 $a=200$.

已得 a 後，進行方法與求多項式之平方根時完全相同. 其方法如左下方所示，b 表根之第二數字乘 10，而 c 爲個位數字，右方所示爲普通實用之縮簡演算法.

$$\begin{array}{rr|l}
 & & a+b+c \\
 & 5'33'61 & 200+30+1 \\
 & 4\ 00\ 00 & =a^2 \\
2a=400 & 1\ 33\ 61 & =R_1 \\
2a+b=430 & 1\ 29\ 00 & =(2a+b)b \\
2(a+b)=460 & 4\ 61 & =R_2 \\
2(a+b)+c=461 & 4\ 61 & =[2(a+b)+c]c \\
 & 0 & =R
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr|l}
 & 5'33'61 & 231 \\
 & 4 & \\
43 & 1\ 33 & \\
 & 1\ 29 & \\
461 & 4\ 61 & \\
 & 4\ 61 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

先減去 a^2，再以 $2a$ 除餘式 R_1 得有効數字 b，復從 R_1，減 $(2a+b)b$ 得 R_2，最後以 $2(a+b)$ 除 R_2 得 c.

完成全部之最簡方法，如右方所示，爲取消數尾之零，而每次只寫下一段. 旣得新餘式後，於其左方寫已得部分根之二倍爲試除數，以試除數除餘式得根之次一數字，且以此數字附書試除數後成完全除數. 再以根之新數字，乘完全除數，減之得新餘式，如在演算之任何階段所得之數過大，即適述之積大於被減之餘數，則再試以較小之數字，

574　**數目之近似平方根．** 適述方法亦能求得非完全平方數之近似根．

例．求 7.342 之平方根至小數三位．

```
      7.34'20'00|2.709
      4
  47 |3 34
     |3 29
5409 |5 20 00
     |4 86 81
        33 19
```

故 $\sqrt{7.342}=2.709\cdots$

顯然根之每一小數位，此數內即相當有二小數位，故從小數點起向右分數之小數部分每兩位爲一段，其整數部分依 § 573，即從小數點起向左分段．

注意奇小數位之小數不能爲完全平方．

575　**多項式之立方根．** 設 P 爲一完全立方，則求多項式 P 之立方根之特殊方法，亦類似於前述之求平方根者．

令 P 表 x 之多項式，其次數爲 3 之倍數，且依 x 之降冪排列．

假定 P 爲完全立方，$a, b, c, \cdots\cdots$ 爲其立方根依 x 降冪排列之諸項，由是 $P\equiv(a+b+c\cdots)^3$.

此問題爲已知 P，求 $a, b, c, \cdots$.

玆不論 $a, b, c, \cdots$ 之值爲何，必得

$$(a+b)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b,$$

$$(a+b+c)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$$
$$+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c,$$

餘類推，左方每加一新字母，右方加一新項組，此新項組爲 3 倍原有字母和之平方，加 3 倍原字母之和乘新字母，加新字母之平方，再以新字母乘此結果而得．

故由假設，$P\equiv(a+b+c+\cdots)^3$，得

$$P\equiv a^3+(3a^2+3ab+b^2)b+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c+\cdots\cdots,$$

右方每組之首項即 a^3, $3a^2b$, $3a^2c$, 其 x 之次數皆高於其後之諸項。

由此恆等式可求得 $a, b, c, \cdots\cdots$ 如下

1. 顯然 a 為 P 首項之立方根。

2. 從 P 減去 a^3，其餘式 R_1 之首項必為 $3a^2b$，故可以 $3a^2$ 除此項得 b.

3. 已得 b，構成 $(3a^2+3ab+b^2)b$ 且自 R_1 減之。其餘式 R_2 之首項必等於 $3a^2c$. 可以 $3a^2$ 除此項而得 c.

4. 繼續此演算至餘式之次數低於 a^2 而止。

設最後餘式為零，則如所假定 P 為完全立方，且其根為 $a+b+c+\cdots\cdots$.

設最後餘式不為零，則 P 非完全立方，但可變形為

$$P\equiv(a+b+c+\cdots\cdots)^3+R,$$

R 之次數低於 a^2.

排列此演算如下較為便利：

例。　求　$x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$. 之立方根。

$$\begin{array}{r|l}
 & \underline{x^2+2x+3} \\
3a^2=3x^4 & x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 \\
 & \underline{x^6} \\
3(x^2)^2=3x^4 & 6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27=R_1 \\
3x^2\cdot 2x+(2x)^2=6x^3+4x^2 & \\
\underline{3x^4+6x^3+4x^2} & \underline{6x^5+12x^4+8x^3} \\
3(x^2+2x)^2=3x^4+12x^3+12x^2 & 9x^4+36x^3+63x^2+54x+27=R_2 \\
3(x^2+2x)3+3^2=\qquad 9x^2+18x+9 & \\
\underline{3x^4+12x^3+21x^2+18x+9} & \underline{9x^4+36x^3+63x^2+54x+27} \\
 & \qquad\qquad 0 \qquad\qquad =R
\end{array}$$

因最後餘式為零，故 $x^6+6x^5+\cdots+54x+27$ 為完全立方，其立方根為 x^2+2x+3，參考 § 569，例2.

察知當每新餘數 $R_1, R_2, \cdots$ 被求得時，以 $3a^2$ 除其首項則得根之次一項，於是在餘式之左方寫 3 倍已得部分根之平方，3 倍已得部分根乘根之新項及新項平方之和，以新項乘此和從餘式減之而得次一餘式。

576 此法亦可用於含多於一字母之完全立方之多項式，(參照 § 571).

此法亦可用於依 x 升冪排列，且不缺常數項之多項式，設此多項式非完全平方，可由是求得其近似立方根（比較 § 572).

577 **數目之立方根.** 可用 § 575 之公式以求數目之立方根。

例. 求 12487168 之立方根。

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & \quad a\ +\ b+c \\
 & N=12'487'168 & 200+30+2=232 \\
 & 8\ 000\ 000 & \\
\hline
3a^2=120000 & 4\ 487\ 168 & =R_1=N-a^3 \\
3ab=\ \ 18000 & & \\
b^2=\ \ \ \ \ 900 & & \\
\hline
138900 & 4\ 167\ 000 & =(3a^2+3ab+b^2)b \\
\hline
3(a+b)^2=158700 & 320\ 168 & =R_2=N-(a+b)^3 \\
3(a+b)c=\ \ \ 1380 & & \\
c^2=\ \ \ \ \ \ 4 & & \\
\hline
160084 & 320\ 168 & =[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c \\
\hline
 & 0 & =R=N-(a+b+c)^3.
\end{array}
$$

為欲求 N 內一有效數字之最大立方數 a，先由右向左分 N 之每三數字為一段（設 N 內有小數部分則從小數點向右分段），如 12′487′168，其 168 及 487 每段相當 a 後之一零，

除一段 12 得根之首數字 2, 2 爲 12 內之最大整數立方根，故 $a=200$.

其餘演算，上已完全指出。

綜知根之每新數字之求得，爲以 3 倍已得根之平方，除適得除數：如，以 $3a^2$ 除 R_1 得有效數字 b, 以 $3(a+b)^2$ 除 R_2, 得 c, 設由是求得之數字過大，則試以較小之數字。

此法亦可如求平方根之方法化簡之。

非完全立方數之近似立方根，亦可用此法求得，（參照 § 574).

多項式之高次根. 完全四次方之多項式之四次 578
根可由求其平方根之平方根而得. 同理，完全六次方之多項式之六次根，可由求其平方根之立方根而得之。

求任何次根，亦可如 § § 570, 575 創立特殊方法。

但 § 569 之一般方法反不必需，實則所以指示求平方根及立方根之特殊方法，如 § § 570, 575 所釋者，僅由於歷史之興趣及其與求數目之平方根及立方根問題之關係而已。

習　　題　　XXXI

化簡下式:

1. $\sqrt[3]{\dfrac{27x^6y^{15}}{125a^9z^{12}}}$.　　　　2. $\sqrt{\dfrac{529\,a^4b^6}{625\,c^2d^8}}$.

3. $\sqrt[6]{(x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4)^3}$.

用 § 569 或 § 570 求法求下諸式之平方根:

4. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.

5. $x^2-2x^4+6x^3-6x+x^6+9$.

6. $4x^6+12x^5y+9x^4y^2-4x^3y^3-6x^2y^4+y^6$.

7. $4x^2-20x+13+30/x+9/x^2$.

8. $49-84x-34x^2+60x^3+25x^4$.

9. $x^8+2x^7-x^6-x^4-6x^3+5x^2-4x+4$.

10. $(x^2+1)^2-4x(x^2-1)$.

11. $4x^4+9x^2y^2-12x^3y+16x^2-24xy+16$.

12. $x^2/y^2+y^2/x^2+2+2x^2+2y^2+x^2y^2$.

求下列各平方根之近似值至第四項。

13. $1-2x$. 14. $4-x+3x^2$.

以 § 569 或 § 575 之法，求下列各式之立方根。

15. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$.

16. $27x^{12}+27x^{10}-18x^8-17x^6+6x^4+3x^2-1$.

17. $8x^6-36ax^5+90a^2x^4-135a^3x^3+135a^4x^2-81a^5x+27a^6$.

18. $x^3/y^3+y^3/x^3+3x^2/y^2+3y^2/x^2+6x/y+6y/x+7$.

19. 求 $1-x+x^2$ 式之立方根之近似值第三項:

20. 以 § 569 或 § 578 之法，求 $x^8-4x^7+10x^6-16x^5+19x^4-16x^3+10x^2-4x+1$ 式之四次根。

21. 以 § 569 之法，求 $x^{10}+5x^9+15x^8+30x^7+45x^6+51x^5+45x^4+30x^3+15x^2+5x+1$ 之五次根。

22. 若使 $x^4+6x^3+11x^2+ax+b$ 爲一完全平方，則 a, b, 當爲何值?

求下列各數之平方根:

23. 27889. 24. 2313.61. 25. 583.2225.

26. 4149369. 27. .00320356. 28. 9.024016.

求下列各數之近似平方根至第三位小數，

29. 2. 30. 55.5. 31. 234.561.

求下列各數之立方根，

32, 1860867, 33. 167284.151. 34. 1036.433728.

XII 無理函數根式與分數指數

根式之化法

根. 此後字母 $a, b, \cdots$ 表正數或假定具有正數值之 579
文字式.

又 $\sqrt[n]{a}$ 表 a 之 n 次主根，即其 n 次方爲 a 之正數；換言之，由公式 $(\sqrt[n]{a})^n=a$ 所定之正數.

再，n 爲奇數時，$\sqrt[n]{-a}$ 表 $-a$ 之 n 次主根，即 $-\sqrt[n]{a}$.

後之"根"字皆指主根而言.

註. 此爲根字用法之限制也，因凡 n 次冪等於 a 之 580
任何數皆爲 a 之一 n 次根；且此種根通常有 n 個，嗣後證明之.

如，因 $2^2=4$ 及 $(-2)^2=4$, 故 2 及 -2 皆爲 4 之平方根，吾人表主根 2 以 $\sqrt{4}$, 他一根 -2 以 $-\sqrt{4}$.

當 n 爲奇數，a 爲實數時，a 之 n 次根中，一爲與 a 同號之實數，其餘則爲虛數.

當 n 爲偶數 a 爲正數時，a 之 n 次根中之二根爲絕對值相同而符號相反之實數，餘爲虛數.

當 n 爲偶數，而 a 爲負數時，a 之所有 n 次根皆爲虛數.

於高等數學中 $\sqrt[n]{a}$ 通常表 a 之任何 n 次根，非如此處之僅表主根也.

根式. 形如 $\sqrt[n]{a}$ 或 $b\sqrt[n]{a}$ 之任何式稱爲根式；n 稱爲 581
根指數，a 爲根底數，b 爲根式之係數.

當 a, b 皆爲，有理數或有理式時，$b\sqrt[n]{a}$ 稱爲簡根式.

如 $5\sqrt[3]{4}$ 爲簡根式，因其根指數 3, 根底數 4, 及係數 5 皆爲實數也.

582 **根式演算之公式．** 根式計算法則，基於下列公式，式內 m, n, p 表正整數．

$$1.\quad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

$$2.\quad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.\qquad 3.\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$4.\quad (\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.\qquad 5.\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

注意．由公式 1，設根式之根指數與根底指數同乘正整數，或消去其中之任何公因子，根式之值不變；如 $\sqrt[9]{a^6}=\sqrt[3]{a^2}$．此法則與分數化簡法相似甚爲顯然．

以上公式之證明可用定義 $(\sqrt[n]{a})^n=a$，指數定理 $(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^n=a^nb^n$ 及 §261, 3, 之等式法則．

設二正數之任何同次羃相等，則該二數亦相等．

由是

1．$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$，因其 n 次方相等，

因 $(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}$；及 $(\sqrt[n]{a^m})^{n\cdot p}=(a^m)^p=a^{mp}$．

2．$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$，因其 n 次方相等．

因 $(\sqrt[n]{ab})^n=ab$；及 $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab$．

3．$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$，因其 n 次方相等，

因 $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n=\frac{a}{b}$；及 $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$．

4．$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$，因其 n 次方相等．

因 $(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$，及 $[(\sqrt[n]{a})^m]^n=[(\sqrt[n]{a})^n]^m=a^m$，

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, 因其 mn 次方相等。

因 $(\sqrt[mn]{a})^{mn}=a$; 及 $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{m\cdot n}=(\sqrt[n]{a})^{n}=a$.

下例示諸公式之應用。

1. $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$.

2. $\sqrt{8ab^3}=\sqrt{4b^2}\cdot\sqrt{2ab}=2b\sqrt{2ab}$.

3. $\sqrt[3]{\dfrac{3c}{d^3c^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3c}}{\sqrt[3]{d^3c^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3c}}{dc^2}$.

4. $\sqrt[5]{\sqrt{32x^{15}y^5}}=\sqrt[10]{32x^{15}y^5}=\sqrt{2x^3y}$.

5. $(\sqrt[3]{2xy^2})^2=\sqrt[3]{(2xy^2)^2}=\sqrt[3]{4x^2y^4}=y\sqrt[3]{4x^2y}$.

根式之化簡. 設根式之根底能化為最簡整式，則 583
此根式之形稱為最簡。故得下之化簡根式法，亦即上述公式之直接推論。

1. 設根底之指數與根指數有公因子，消去其公因子。

如， $\sqrt[9]{27x^3y^6}=\sqrt[9]{(3xy^2)^3}=\sqrt[3]{3xy^2}$.

2. 設根底任一因子之指數能被根指數除盡，除該指數以根指數而移此因子於根號之外。

如， $\sqrt[4]{16x^7y^9}=\sqrt[4]{2^4x^4x^3y^8y}=2xy^2\sqrt[4]{x^3y}$.

3. 設根底數為分式，以適當之最簡式乘其分子，分母使能移分母於根號之外。

如， $\sqrt[3]{\dfrac{xy}{2z^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4xyz}{8z^3}}=\dfrac{1}{2z}\sqrt[3]{4xyz}$.

相似根式. 諸根式化為最簡後，設僅有係數不同 584
則稱為相似根式。

如， $\sqrt{4x^3y}$ 及 $\sqrt{81x^5y^3}$ 相似；因其最簡形 $2x\sqrt{xy}$ 及 $9x^2y\sqrt{xy}$, 僅有係數之異也。

585 **移根式係數入根號內.** 因 $b\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b^n a}$,故根式係數可乘其指數以根指數而移入根號之內。

習題 XXXIII

化次各根式為最簡之形:

1. $\sqrt{18}$.　2. $\sqrt{588}$.　3. $\sqrt[3]{-27^2}$.　4. $\sqrt[9]{-1000}$.

5. $\sqrt{3/2}$.　6. $\sqrt[3]{3/2}$.　7. $\sqrt[3]{3/4}$.　8. $\sqrt[5]{3/16}$.

9. $\sqrt[5]{25a^5b^{10}c^{15}d^6}$.　10. $\sqrt[6]{128a^2b^4c^8}$.

11. $\sqrt[12]{8x^6y^9z^{15}}$.　12. $\sqrt[3n]{25a^2b^4c^6}$.

13. $\sqrt[3n]{a^nb^{2n}c^{3n}}$.　14. $\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{3n+2}c^{4n}}$.

15. $\sqrt{x^2y^2-x^2z^2}$.　16. $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}$.

17. $\sqrt[3]{x^6-x^3y^3}$.　18. $\sqrt[4]{a^4b^4-2a^3b^5+a^2b^6}$.

19. $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{32ab^2}}$.　20. $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$.

21. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{9(x+1)^2}}$.　22. $\sqrt[3]{1-\dfrac{a^3}{b^3}}$.

23. $\sqrt[3]{\dfrac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}}$.　24. $\sqrt{\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{2ax}{b^2}+\dfrac{1}{b}}$.

移次各係數於根號內。

25. $3a\sqrt{3a}$.　26. $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$.　27. $3ax\sqrt[4]{1/27a^3x^3}$.

試証次之各組根式為相似。

28. $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, 與 $\sqrt{1/8}$.　29. $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{192}$, 與 $\sqrt[3]{8/9}$.

30. $\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)}$ 與 $\sqrt{x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4}$.

根式之運算

586 **加法及減法.** 得下法則:

化二或二個以上根式之代數和為最簡式，先化簡各根式，然後加其係數以合併其相似項。

例．加 $\sqrt{16a^2b}$, $-\sqrt{9a^2b}$, $3\sqrt{2}$, 及 $-2\sqrt{1/2}$.

今 $\sqrt{16a^2b}-\sqrt{9a^2b}+3\sqrt{2}-2\sqrt{1/2}$.

$$=4a\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{2}-\sqrt{2}=a\sqrt{b}+2\sqrt{2}.$$

注意二不相似根式之和，不能化為一根式。

如，$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 不能 $=\sqrt{x+y}$，x 或 y 為零者除外；因平方之，得 $x+y+2\sqrt{xy}=x+y$.

$\therefore\ 2\sqrt{xy}=0$，$\therefore\ xy=0$．$\therefore$ 必 $x=0$ 或 $y=0$.

變諸根式為同根指數． 由公式 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$ 永 587
能變二或二以上之根式，為同根指數之同值根式，其最低公指數，即已知諸根指數之最小公倍數。

例．　變 $\sqrt[6]{a^5}$ 及 $\sqrt[8]{b^3}$ 為最低同指根數。

根指數 6 與 8 之最小公倍數為 24，故 $\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[24]{a^{20}}$ 及 $\sqrt[8]{b^3}=\sqrt[24]{b^9}$.

根式之比較． 欲比較諸已知根式之大小，須先變 588
之為同根指數。

例1．　比較 $\sqrt[15]{16}$, $\sqrt[10]{6}$, 及 $\sqrt[6]{3}$.

根指數之最小公倍數為 30；又

$\sqrt[15]{16}=\sqrt[30]{16^2}=\sqrt[30]{256}$；$\sqrt[10]{6}=\sqrt[30]{6^3}=\sqrt[30]{216}$；$\sqrt[6]{3}=\sqrt[30]{3^5}$ $=\sqrt[30]{243}$.

由是，因 $256>243>216$，故 $\sqrt[15]{16}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[10]{6}$.

例2．　比較 $2\sqrt{3}$ 及 $\sqrt[3]{41}$.

移第一根式之係數於根號內，§585 然後變二根式為同根指數 6，得

$2\sqrt{3}=\sqrt{12}=\sqrt[6]{12^3}=\sqrt[6]{1728}$；$\sqrt[3]{41}=\sqrt[6]{41^2}=\sqrt[6]{1681}$.

由是，因 $1728>1681$，故 $2\sqrt{3}>\sqrt[3]{41}$.

乘法及除法． 從公式． 589

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ \text{及}\ \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}.$$

推出以下法則：

以他一根式乘或除一根式，必需時，先變之爲最小同指根數之根式，然後分別求係數及根底數之積或商。

例1.　以 $2\sqrt[3]{x^2y^2}$ 乘 $4\sqrt{xy}$.

$4\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt[3]{x^2y^2}=8\sqrt[6]{x^3y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^4}=8\sqrt[6]{x^7y^7}=8xy\sqrt[6]{xy}$.

例2.　除 $6\sqrt{xy}$ 以 $2\sqrt[4]{xy}$.

$6\sqrt{xy}/2\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{x^2y^2}/\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{xy}$.

590　**乘方.**　從公式;

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}\text{ 及 }\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

導出下法;

求形如 $\sqrt[n]{a^q}$ 之根式之 m 次方，先消去 m 及其根指數之公因子，再以 m 之其餘因子乘根底指數。

例.　求 $2\sqrt[6]{xy^2}$ 之 9 次方.

$(2\sqrt[6]{xy^2})^9=2^9(\sqrt[6]{xy^2})^9=128(\sqrt{xy^2})^3=128\sqrt{x^3y^6}$
$=128xy^3\sqrt{x}$.

591　**開方.**　從公式.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\text{ 及 }\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$$

導出下法.

求形如 $\sqrt[n]{a^q}$ 之根式之 m 次根，先消去 m 及根底指數可有之公因子，再以 n 之其餘因數乘數式之根指數。

例1.　求 $\sqrt[5]{x^2y^4}$ 之六次根.

$$\sqrt[6]{\sqrt[5]{x^2y^4}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{xy^2}}=\sqrt[15]{xy^2}.$$

例2.　求 $45a\sqrt{b}$ 之立方根.

$\sqrt[3]{54a\sqrt{b}}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2a\sqrt{b}}=3\sqrt[3]{\sqrt{4a^2b}}=3\sqrt[6]{4a^2b}$.

簡單多項根式． 僅含單純根式之任意式亦稱爲 592
簡單根式，如 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 即爲簡單根式，設其不含以根式爲分母之分式，則稱之爲整式。

由適宜法則，簡整根式之和，差，積，乘方能變爲簡根式之代數和，於 §607 內將示於商亦眞，但通常一簡根式之根如 $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$，不能變之爲簡根式。

例1．以 $2\sqrt{3}-\sqrt{10}$．乘 $3\sqrt{6}+2\sqrt{5}$

$$(3\sqrt{6}+2\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{10})=6\sqrt{18}+4\sqrt{15}-3\sqrt{60}$$
$$-2\sqrt{50}=8\sqrt{2}-2\sqrt{15}.$$

例2．平方 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$．

$$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2=2+2\sqrt{2}\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}=2+4\sqrt[6]{2}+2\sqrt[3]{2}.$$

習　題　XXXIV

化下諸式成最低公根指數。

1．$\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[10]{3}$, 及 $\sqrt[15]{3}$．　2．$\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{2a^3b^2}$, 及 $\sqrt[6]{7b^5}$．

比較下式。

3．$3\sqrt{2}$ 及 $2\sqrt[3]{3}$．　4．$\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, 及 $\sqrt[4]{5}$．

化次各式成最簡形之簡根式。

5．$\sqrt{35}\div\sqrt{7/5}$．　6．$10\div\sqrt{5}$．　7．$4\div\sqrt[3]{2}$．

8．$\sqrt[4]{6}\cdot\sqrt[4]{10}\cdot\sqrt{15}$．　9．$\sqrt[3]{60}\cdot\sqrt[3]{90}\cdot\sqrt[3]{15}$．

10．$2\sqrt{3}\div3\sqrt{2}$．　11．$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$．

12．$\sqrt[6]{3}\div\sqrt[4]{5}$．　13．$2\sqrt{35}\cdot\sqrt{65}\div\sqrt{91}$．

14．$\sqrt{a^3b^5c^7}\cdot\sqrt[3]{a^2b^4c^8}$．　15．$\sqrt[3n]{a}\cdot\sqrt[3n]{a}$．

16．$\sqrt{a^3b^3}\div\sqrt[6]{a^5b^5}$．　17．$\sqrt[3]{a^2bc^2}\cdot\sqrt[3]{ab^2c^4}$．

18. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a}$.　　19. $\sqrt[6]{a/b}\div\sqrt[9]{a/b}$.

20. $\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{ab^5}\div(\sqrt[10]{a^7b^9}\cdot\sqrt[15]{a^{12}b^{14}})$.

21. $(\sqrt{12})^3$.　　22. $(\sqrt[3]{a^2})^6$.　　23. $(2\sqrt[4]{xy^2z^3})^8$.

24. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}$.　　25. $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$.　　26. $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^3b^6/c^9}}$.

27. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}$.　　28. $\sqrt[4]{2\sqrt{2}}$.　　29. $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$.

30. $\sqrt[4]{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}$.　　31. $\sqrt[2m]{\sqrt[n]{a^n}}$.　　32. $(\sqrt[2p]{\sqrt[2n]{a}})^{mnp}$.

化簡次各根式至可能步驟，

33. $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{147}$.

34. $\sqrt{125}+\sqrt{175}-\sqrt{28}+\sqrt{1/20}$.

35. $\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{1/2}$.

36. $\sqrt{a/bc}+\sqrt{b/ca}+\sqrt{c/ab}$.

37. $\sqrt{50}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}$.

38. $\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt{a^2c}-\sqrt{b^2c}$.

39. $\sqrt{ax^3+6ax^2+9ax}-\sqrt{ax^3-4a^2x^2+4a^3x}$.

40. $(x+y)\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}-(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2-y^2}}$.

41. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}$.

42. $(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{14})\div\sqrt{2}$.

43. $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{15})$.

44. $\sqrt[4]{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{5-2\sqrt{2}}$.

45. $(1+\sqrt{3})^3$.　　46. $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)$.

分指數及負指數

593　於若干演算中，利用分指數計算根式，甚為省力。

以前附於a^n之意義，為僅設n表正整數，演算此種式之法則，即

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,　2. $(a^m)^n=a^{mn}$,　3. $(ab)^n=a^nb^n$,

於代數中為最簡，於是問題生焉：設n非為正整數，能否亦得a^n之有用意義，依然適於此等法則？

定義 $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$. 取 $a^{\frac{1}{2}}$ 爲例，設其可能，茲求此符號適合於法則 1, 2, 3 之意義。 594

若能適合於法則 1, 必得

$$(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a,$$

則 $a^{\frac{1}{2}}$ 意必爲 $\sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$.

取二意義中之較便者，而定 $a^{\frac{1}{2}}$ 爲 $\sqrt{a}$.

由是求得充分滿足設適合 $a^{\frac{1}{2}}$ 之意義之條件之一。

同理定 $a^{\frac{1}{3}}$ 之意義同於 $\sqrt[3]{a}$, $a^{\frac{2}{3}}$ 同於 $\sqrt[3]{a^2}$,

總之，$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ 即同於 a^p 之 q 次主根。

注意，因　$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[qm]{a^{pm}}=a^{\frac{pm}{qm}}$，故當 p/q 易以同值分數時，$a^{\frac{p}{q}}$ 之值不變。

如　$a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{6}{9}}$ 又; $a^2=a^{\frac{4}{2}}=a^{\frac{6}{3}}$.

定義 $a^0=1$. 如，適合於法則 1, 必。 595

$$a^0a^m=a^{0+m}=a^m,$$

故　$$a^0=a^m/a^m=1.$$

因是定 a^0 之意義同於 1.

定義 $a^{-s}=1/a^s$. 求後令其適合法則 1, 必，§ 595 596

$$a^{-s}\cdot a^s=a^{-s+s}=a^0=1,$$

故　$$a^{-s}=1/a^s$$

如，由定義，$a^{-3}=1/a^3$, $a^{-\frac{5}{6}}=1/a^{\frac{5}{6}}=1/\sqrt[6]{a^5}$.

茲已引証定 a^{-s} 爲 $1/a^s$ 矣。

餘待証者爲由是得之 $a^{\frac{p}{q}}$, a^0 及 a^{-s} 之意義完全適合於指數諸法則。

定理 1. 指數律 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 適用於 m, n 之一切有理值。 597

使 p, q, r, s 表任何正整數，於是

1. 設 $m=p/q$ 及 $n=r/s$，由 § 582 得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

2. 設 $m=-p/q, n=-r/s$，由 1 式得

$$a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}=a^{-\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

3. 設 $m=p/q, n=-r/s$，及 $p/q>r/s$ 時，得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}/\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}/\sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps-qr}}=a^{\frac{ps-qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

4. 設 $m=p/q, n=-r/s$ 及 $p/q<r/s$ 時，由 3 式得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}=a^{\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

598 **定理2.** 定律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 適用於 m 及 n 之任何有理值。

因使 m 表任何有理數，於是

1. 設 n 為正整數時，由 § 597 得

$$(a^m)^n=a^m\cdot a^m\cdots\text{至 } n \text{ 因子}=a^{m+m+\cdots\text{至 n 項}}=a^{mn}.$$

2. 設 $n=p/q$，p 及 q 為正整數時，由 1 式，得

$$(a^m)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(a^m)^p}=\sqrt[q]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{q}}=a^{m\cdot\frac{p}{q}}.$$

3. 設 $n=-s$，s 為任何正有整數時，由式 1, 2 得

$$(a^m)^{-s}=\frac{1}{(a^m)^s}=\frac{1}{a^{ms}}=a^{-ms}=a^{m(-s)}.$$

定理1. 定律$(ab)^n=a^nb^n$適用於n之一切有理值. 599

1. 使$n=p/q$, p及q表正數，於是

$$(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^p}=\sqrt[q]{a^p}\sqrt[q]{b^p}=a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}.$$

2. 使$n=-s$, s表任何正有理數，整數或分數，於是由式1.

$$(ab)^{-s}=\frac{1}{(ab)^s}=\frac{1}{a^sb^s}=a^{-s}b^{-s}.$$

應用. 下例解釋分指數及負指數之用途，設用此符號，常能減少根式演算之繁雜. 600

例1. 化簡$\sqrt{a/\sqrt[3]{a}}$.

$$\sqrt{a/\sqrt[3]{a}}=(aa^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}.$$

例2. 化簡$\sqrt[4]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}$.

$$\sqrt[4]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}$$

$$=a^{\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{a^5b^3}.$$

例3. 展開$(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})^3$

今

$$(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})^3=(x^{\frac{2}{3}})^3+3(x^{\frac{2}{3}})^2y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}(y^{-\frac{2}{3}})^2+(y^{-\frac{2}{3}})^3$$

$$=x^2+3x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+y^{-2}.$$

例4. 以$x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$除$x-y$.

如§401排列此算法，得

$$\begin{array}{l|l}
x-y & x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \\ \hline
x+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} & x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}} \\ \hline
-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y & \\
-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y & \\ \hline
\end{array}$$

故其商爲

$x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$

習 題 XXXV

試不用根式符號表下式至可能之簡。

1. $\sqrt[12]{a^8}$. 2. $\sqrt[4]{c^{\frac{4}{3}}}$. 3. $a^{\frac{8}{5}}/\sqrt[3]{a^{\frac{8}{5}}}$.

4. $b\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[6]{b^5}$.

不以負指數或分指數表之。

5. $a^{\frac{14}{21}}$. 6. $c^{-1.5}$. 7. $(d^{\frac{2}{3}})^{-6}$.

8. $(c^{-8\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{4}}$.

試用正指數且不用根號表之。

9. $a^{-1}/b^{-3}c^{-2}$. 10. $x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{y^{-3}}$.

11. $(1/\sqrt{x^{-5}})^{-4}$. 12. $x^{-2}\sqrt[4]{y^{-3}}/y^{-2}\sqrt{x^{-3}}$.

試不用分母而以最簡式表之。

13. $\frac{a}{bc}-\frac{b^{-1}}{c^{-2}}-\frac{a^{-1}(b^{-1}+c^{-1})}{a^{-2}(b+c)}+\frac{b+c}{b^{-1}+c^{-1}}$.

化次各式成最簡指數之形。

14. $(3\frac{1}{8})^{\frac{8}{3}}$. 15. $81^{\frac{3}{4}}$. 16. $(-27)^{\frac{2}{3}}$.

17. $8^{-\frac{5}{3}}$. 18. $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{5}{6}}$. 19. $a^{\frac{2}{5}}a^{-\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{15}}$.

20. $(a^{\frac{8}{3}}b)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}$. 21. $ab^{-2}/a^{-3}b$. 22. $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{9}}$.

23. $(a^{-1}b^{-2}c^{3})^{-2}$. 24. $(-32a^{10})^{\frac{3}{5}}$. 25. $(-a^{6}b^{-9})^{-\frac{2}{3}}$.

26. $b^{-\frac{1}{3}}\sqrt[12]{b^{-5}}\div b^{-1}\sqrt{b^{-1}}$. 27. $(a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{bc^{5}})^{\frac{2}{3}}$.

28. $(8a^{-15}/\sqrt{125a^{3}})^{-\frac{2}{3}}$. 29. $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}(bc^{-1})^{-2}}$.

30. $\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt[4]{a^{3}}}$. 31. $\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}}\Big/\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{-7}}\cdot\sqrt[3]{a}}$.

32. $[(x^{x})^{x}]^{x}$. 33. $(x^{x^2+xy}y^{y^2+xy})^{\frac{xy}{x+y}}$.

34. $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})/(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})$.

35. 以 $x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$ 乘 $x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$.

36. 以 $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}$ 除 a^2-b^3.

37. 展開 $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}})^4$.　　38. 化簡 $((e^x+e^{-x})^2-4)^{\frac{1}{2}}$.

39. 求 $x^2+4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+4xy+6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+12y^2+9x^{-1}y^3$ 之平方根.

40. 求 $x^3+3x^2+6x+7+6x^{-1}+3x^{-2}+x^{-3}$ 之立方根.

負指數及分指數之二項式定理

設於 § 561 二項展開式內

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdot$$

假定 n 為分數或負值則右方必為一無終或無窮級數; 601
因係數 n, $n(n-1)/2$, $\cdots$ 無一能為零者.

由此可示知設 $b<a$, 當 m 無限增大時, 則此級數首 m 項之和漸近 $(a+b)^n$ 之值如其限; 換言之, 取此級數充分之若干項, 可得一近似 $(a+b)^n$ 之結果, 且隨吾人需要而至適近之值.

此即謂之二項式定理設 n 為分數或負數及 $b<a$ 時, 適用於 $(a+b)^n$.

例1. 展開 $(8+x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$ 至四項.

於公式內使 $n=1/3$, $a=8$, $b=x^{-\frac{1}{2}}$; 得

$$(8+x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}+\tfrac{1}{3}\cdot 8^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2}8^{-\frac{5}{3}}(x^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{2\cdot 3}8^{-\frac{8}{3}}(x^{-\frac{1}{2}})^3+\cdots$$

$$=2+\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{12}-\frac{x^{-1}}{288}+\frac{5x^{-\frac{3}{2}}}{20736}\cdots.$$

例2. 求 $1/(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}})^2$ 或 $(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}})^{-2}$ 之展開式內之第六

項，於 § 565，第 $r+1$ 項之公式內，使 $n=-2, a=a^{\frac{1}{2}}, b=x^{\frac{2}{3}}$ $r=5$，得

$$\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(a^{\frac{1}{2}})^{-2-5}(x^{\frac{2}{3}})^5=-6a^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{10}{3}}.$$

例3. 展開 $\sqrt{1+x}$ 至四項。

因 $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$，得 $n=\frac{1}{2}, a=1, b=x$.

故 $$\sqrt{1+x}=1+\tfrac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}x^3+\cdots$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\cdots.$$

此結果與 § 572 例1. 所得者相同。

例4. 求 $\sqrt{10}$ 之近似值。

$$\sqrt{10}=(3^2+1)^{\frac{1}{2}}=3(1+\tfrac{1}{9})^{\frac{1}{2}},$$

$$3(1+\tfrac{1}{9})^{\frac{1}{2}}=3\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=3+\frac{1}{6}-\frac{1}{216}+\frac{1}{3888}+\cdots$$

$$=3+.16666-.00462+.00025+\cdots$$

$$=3.1623$$

習　題　XXXVI

展開下式至四項。

1. $(1+x)^{\frac{1}{3}}$.　2. $(a^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$.　3. $\sqrt[3]{(27-2x)^2}$.

4. $(a^m+x)^{\frac{1}{n}}$.　5. $(a^{-1}-b^{-\frac{1}{2}})^{-4}$.

6. $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{-6}$.　7. $\dfrac{1}{2+3x}$.

8. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}$.　9. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+3\sqrt{x}}}\right)^3$.

10. 求 $(1+x)^{-3}$ 內之第十項。

11. 求 $(x^{-2}-2y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}$ 內之第七項。

12. 求 $(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$ 內所含 $x^{\frac{9}{2}}$ 之項。

13. 求 $x^{-\frac{3}{2}}(2+x^{-\frac{1}{6}})^{-3}$ 內所含 x^{-2} 之項。

14. 用 § 601 例 4 內所釋之法，求次式之近似值。

1. $\sqrt{99}$. 2. $\sqrt[3]{62}$. 3. $\sqrt[5]{31}$.

有理化因子

有理化因子. 設二已知根式之積爲有理式，則一式稱爲他式之有理化因子。 602

例如，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$，故 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 爲 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 之有理化因子，反之亦然。

任何含簡根式之一有限式，可證明其僅有一有理化因子。下節即從事說明此一般之定理。

二次根函數之有理化因子. 關於 $\sqrt{x}$ 之各有理整式能變爲 $A+B\sqrt{x}$ 之形，A,B 爲關於 x 之有理整式；且 $A+B\sqrt{x}$ 必有只易 $\sqrt{x}$ 之符號得來之關於 x 之有理化因子 $A-B\sqrt{x}$. 603

例如，$2(\sqrt{x})^4+3x(\sqrt{x})^3$ 可寫爲 $2x^2+3x^2\sqrt{x}$. 故此式有有理化因子爲 $2x^2-3x^2\sqrt{x}$.

複述上法可得關於任何若干個平方根 $\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z},\cdots\cdots$ 之有理整式之有理化因子，因設以關於 $\sqrt{x}$ 之有理化因子，乘已知式，再以關於 $\sqrt{y}$ 之有理化因子乘其積，餘類推，可得一完全有理之結果。

例。求 $1+\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{xy}$ 之有理化因子。

$$1+\sqrt{y}+\sqrt{x}(1+2\sqrt{y}). \qquad (1)$$

乘 (1) 以
$$1+\sqrt{y}-\sqrt{x}(1+2\sqrt{y}). \qquad (2)$$

得
$$(1+\sqrt{y})^2-x(1+2\sqrt{y})^2,$$

或
$$1-x+y-4xy+2\sqrt{y}(1-2x). \qquad (3)$$

乘 (3) 以
$$1-x+y-4xy-2\sqrt{y}(1-2x). \qquad (4)$$

得
$$(1-x+y-4xy)^2-4y(1-2x)^2. \qquad (5)$$

由是因 (5) 爲完全有理，故 (2) 及 (4) 之積爲 (1) 之有理化因子。

604 **二項根式之有理化因子.** 形為 $\sqrt[p]{a}\pm\sqrt[q]{b}$ 之式之有理化因子可由下例得之.

例. 求 $\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}$ 之有理化因子.

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}=(a^2)^{\frac{1}{6}}+(b^3)^{\frac{1}{6}}. \qquad (1)$$

但由 § 438, $(a^2)^{\frac{1}{6}}+(b^3)^{\frac{1}{6}}$ 適可除盡有理式 a^2-b^3, 其商為 $(a^2)^{\frac{5}{6}}-(a^2)^{\frac{4}{6}}(b^3)^{\frac{1}{6}}+\cdots\cdots-(b^3)^{\frac{5}{6}}$. (2)

故 (2) 為 (1) 之有理化因子.

605 **化分數之分母為有理.** 形為 A/B 之無理式, 設 B 僅含簡根式者, 可由以 B 之有理化因子同乘 A 及 B 使之變為具有理化分母之同值分式.

例. 有理化 $1/\sqrt[4]{a^3}$.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a}=\sqrt[4]{a}/a.$$

例2. 有理化 $\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}$. 之分母.

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2})^2}{(\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2})(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2})}$$

$$=\frac{x^2+\sqrt{x^4-a^4}}{a^2}.$$

606 計算含根式數字分式之近似值, 須先有理化其分母由是可避免甚多不必需之計算.

例. 求 $(1+\sqrt{8})/(3-\sqrt{2})$ 之近以值, 至第三位正確小數.

$$\frac{1+\sqrt{8}}{3-\sqrt{2}}=\frac{(1+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=1+\sqrt{2}=2.414\cdots.$$

根式之除法。 以一根式除他一根式，可先寫其商為分式之形，再有理化此分式之分母。 607

例。以 $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 除 $4+2\sqrt{5}$.

$$\frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{(4+2\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{(-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=1-\sqrt{2}+\sqrt{5}.$$

一般結果。 從§592及§607可知任一含簡根式之式僅能變為簡根式之代數和。 608

習 題 XXXVII

求次式之有理化因子。

1. $\sqrt[7]{a^5}$. 2. $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b^3}$. 3. $x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}$.

4. $\sqrt{a}+\sqrt{bc}$. 5. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

6. $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$. 7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}-\sqrt{u}$.

8. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1$. 9. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$.

10. $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b^2}$. 11. $x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}$. 12. $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{2}{3}}$.

13. $1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$. 14. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1$. 15. $3-\sqrt{5}$.

16. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$. 17. $1+\sqrt[4]{2}$.

18. $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$. 19. $\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}$.

化次各式為具有理數或有理式分母之分數。

20. $\dfrac{1}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}}$. 21. $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$. 22. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{3}}$.

23. $\dfrac{1}{b+\sqrt{b^2-a^2}}$. 24. $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$.

25. $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. 26. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

27. $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}}$.　　28. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$.

求次式之近似值至第三位正確小數，

29. $\dfrac{5}{\sqrt{125}}$.　　30. $\dfrac{2+\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$.　　31. $\dfrac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

無理方程式

600　**解無理方程式．** 解無理方程式之一般方法如下述之法則：

一．有理化此方程式．

二．解所得之有理式．

三．於已知方程式內核驗所得諸解答，棄去不適合者．

因，使 $P=0$ 表已知方程，且 $PR=0$ 表以 P 之有理化因子 R 乘已知方程兩邊而得之方程式，由 § 341，$PR=0$ 之根爲 $P=0$ 及 $R=0$ 連合之根，試核驗之於已知方程式，可發現其中何者爲 $P=0$ 之根．

例．解 $x-7-\sqrt{x-5}=0$，

以有理化因子 $x-7+\sqrt{x-5}$ 乘兩邊．

得　$(x-7)^2-(x-5)=0$．

或化簡之，$x^2-15x+54=0$．

由 § 455，解之，$x=9$ 或 6．

以 9 代 x 入 $x-7-\sqrt{x-5}=0$，得 $9-7-\sqrt{9-5}=0$，果屬真確，故 9 爲一根．

但代入 6 得 $6-7-\sqrt{6-5}=0$，則謬誤矣，故 6 非其根．

但察知 6 爲使有理因子等於 0 得來之方程式 $x-7+\sqrt{x-5}=0$ 之一根：因 $6-7+\sqrt{6-5}=0$ 爲真故也．

含根式 $\sqrt[n]{A}$ 之方程式，可由集合含 $\sqrt[n]{A}$ 之項於一方，除項於他方，再兩方自乘至 n 次羃，則關於此根式化為有理，複施此種演算可將僅含二次根之方程式完全有理化，由 § 345 知此方法同於 § 609 內所述者，但較為簡單。 610

例1．解 $\sqrt[3]{\sqrt{x}+a}=\sqrt{b}$.

立方兩邊，　$\sqrt{x}+a=b^{\frac{3}{2}}$.

移項且平方，　$x=(b^{\frac{3}{2}}-a)^2$.

代入已知方程式知其確為一根。

例2．解 $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}=9$.

移項，　$\sqrt{x-4}=9-\sqrt{x+5}$.

平方，　$x-4=81-18\sqrt{x+5}+x+5$.

化簡，　$\sqrt{x+5}=5$.

平方，　$x+5=25$.

解之，　$x=20$.

以 20 代 x 於已知式，得 $\sqrt{25}+\sqrt{16}=9$，為真，故 20 為一根。

註． 1．由例 1 內，察知有理化一方程式，僅須有理化其含未知數之項無須去其他根式之根號。 611

2．亦可知無理方程式可以無根。

例如，方程式 $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}=9$ 即無根，因試解之不過僅重複例 2 計算而仍得 $x=20$；而 $\sqrt{25}-\sqrt{16}=9$ 為不合理也。

3．有理化形如 $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=0$（或 $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+E=0$）之方程式之簡單方法可寫為

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=-\sqrt{C}-\sqrt{D}\text{（或 }\sqrt{A}+\sqrt{B}=-\sqrt{C}-E\text{）}$$

再平方兩邊，結果方程式僅含二根式，此可如例 2 而有理化之。

612 **聯立無理方程式.** 解此種方程式組，先有理化各方程式，再解所得有理式組，復於已知方程式內核驗所得諸值。

但設諸方程式爲 § 379 內所述之形式，則可用是處所述解法解之。

例1. 解 $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+5}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, (1)

$$x+2y=17. \qquad (2)$$

平方 (1) $x-5+y+5+2\sqrt{xy+5x-5y-25}=x+y+2\sqrt{xy}$,

或 $$\sqrt{xy+5x-5y-25}=\sqrt{xy}. \qquad (3)$$

平方 (3),且化簡，$x-y=5$. (4)

解 (4), (2), $x=9,\ y=4$. (5)

代 $x=9,\ y=4$ 於 (1),得 $\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{9}+\sqrt{4}$,果爲真；故 $x=9,\ y=4$ 爲 (1), (2) 之解答。

例2. 解 $\sqrt{x+6}+2/\sqrt{y}=4$, (1)

$$2\sqrt{x+6}+6/\sqrt{y}=9. \qquad (2)$$

解，求 $\sqrt{x+6}$ 及 $1/\sqrt{y}$,得 $\sqrt{x+6}=3,\ 1/\sqrt{y}=1/2$. (3)

從 (3) 得 $x=3,\ y=4$,此爲 (1), (2) 之解答。

習 題 XXXVIII

解下列方程之 x.

1. $x^{\frac{1}{2}}=4$. 2. $x^{-\frac{1}{2}}=3$. 3. $x^{\frac{2}{3}}=8$.

4. $(\sqrt{2x-1})^{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$. 5. $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=2$.

6. $\sqrt{ax}+\sqrt{bx}+\sqrt{cx}=d$. 7. $\sqrt{4x^2+x+10}=2x+1$.

8. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+11}=7$.

9. $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}-\sqrt{9x+10}=0$.

10. $\sqrt{x+1}+\dfrac{x-6}{\sqrt{x+2}}=0$.

11. $\sqrt{x^2+ax-1}-\sqrt{x^2-ax-1}=2$.

12. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}$.

13. $\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}}=2$.

14. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0$.

解下列中之 x, y.

15. $\begin{cases}\sqrt{x+17}+\sqrt{y-2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{y+6},\\ \sqrt{y-x}=\sqrt{3-x}+\sqrt{y-3}.\end{cases}$

16. $\begin{cases}3\sqrt{x-2y}-\sqrt{x+y-4}=3,\\ \sqrt{x-2y}+2\sqrt{x+y-4}=8.\end{cases}$

17. 試証 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d}=0$. 可化爲一次有理方程。

18. 試證 $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}-\sqrt{ex+f}=0$. 設 $\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{e}=0$ 則能化爲一次有理方程.

二次不盡根

不盡根. 數字根式如 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt[3]{5}$, 其根底爲有理而根式之本身爲無理者稱爲不盡根，依根指數之爲 2, 4, …, 稱之爲二次不盡根、三次不盡根，等等。 613

定理1. 二不相似二次不盡根之積仍爲二次不盡根， 614

設不盡根能變爲最簡形時，其根式因子爲 $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$. $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ 之積爲 $\sqrt{ab}$, 除 ab 爲完全平方外，此仍爲不盡根。

但 ab 不能爲完全平方，因由假設 a 及 b 爲不含平方數因子之二整數。且至少 a 之因子中之一不同於 b 內之任一因子。

例如， $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$, $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$.

定理2. 二不等二次不盡根之和或差仍爲無理數。 615

當不盡根爲相似時，此亦甚爲顯然。

故使 $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ 表二相似不盡根。

設其可能，　$\sqrt{a}+\sqrt{b}=c.$　(1)

c 爲有理數。

平方 (1) 之兩方且移項，

$$2\sqrt{ab}=c^2-a-b. \qquad (2)$$

此爲不可能。因由§614 知 $2\sqrt{ab}$ 爲無理，同時 c^2-a-b 爲有理數也。

616　**定理** 3.　設 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$，$\sqrt{b}$ 及 $\sqrt{d}$ 爲不盡根，

則　$a=c,\ b=d.$

因由假設　$\sqrt{b}-\sqrt{d}=c-a.$

但除　$\sqrt{b}-\sqrt{d}=0$ 及 $c-a=0$ 外此爲不可能。因由§615 知 $\sqrt{b}-\sqrt{d}$ 爲無理式不能等於有理式 $c-a$ 也。

故　$b=d,\ c=a.$

617　**二項不盡根之平方根。**　已知

$$(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2=x+y\pm2\sqrt{xy}.$$

故設 $a+2\sqrt{b}$ 表已知二項不盡根，且能求出二正有理數 x 及 y，致令

$$x+y=a,\ xy=b \text{ 者，}$$

則 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 爲 $a+2\sqrt{b}$ 之平方根，$\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 爲 $a-2\sqrt{b}$ 之平方根，且此二根均爲二項不盡根。

設此數 x, y 存在，則可由觀察求得之。

例1.　求 $37-20\sqrt{3}$ 之平方根。

變之爲 $a-2\sqrt{b}$ 之形式，$37-20\sqrt{3}=37-2\sqrt{300}.$

但　$300=25\cdot12;\ 37=25+12.$

故　$\sqrt{37-2\sqrt{300}}=\sqrt{25}-\sqrt{12}=5-2\sqrt{3}.$

例2.　求 $13/12+\sqrt{5/6}$ 之平方根。

$$\frac{13}{12}+\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{13}{12}+\frac{\sqrt{30}}{6}=\frac{13+2\sqrt{30}}{12}.$$

因$30=10\cdot3$及$13=10+3$,得$\sqrt{13+2\sqrt{30}}=\sqrt{10}+\sqrt{3}$.

故 $$\sqrt{\frac{13+2\sqrt{30}}{12}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{120}+\sqrt{36}}{12}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

註. 玆得求x及y之公式如下: 618

由假設 $$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a+2\sqrt{b}},\qquad(1)$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{a-2\sqrt{b}}.\qquad(2)$$

以 (2)乘(1), $x-y=\sqrt{a^2-4b}$. (3)

然 $x+y=a$. (4)

解 (3),(4), $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

可知此值僅當a^2-4b爲完全平方時爲有理,故於此情形下僅$a+2\sqrt{b}$之平方根爲二項不盡根,

習　題　XXXIX

求次之平方根;

1. $9+\sqrt{56}$.
2. $20+2\sqrt{96}$.
3. $32-2\sqrt{175}$.
4. $1+\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.
5. $7-3\sqrt{5}$.
6. $8\sqrt{2}+2\sqrt{30}$.
7. $2(a+\sqrt{a^2-b^2})$.
8. $b-2\sqrt{ab-a^2}$.

化簡次式.

9. $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.
10. $\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$.

虛數與複數

複數. 因負數之偶次方皆爲正數,故無負數之偶次根之爲實數者,若有之此種根稱爲虛數. 619

虛數之定義及其結合所用之算法,已見於§§217－228,學者可與此合併讀之.

依定義;

1. 符號$i=\sqrt{-1}$稱爲虛數之單位.

2．形如 ai 之符號其 a 爲實數者，稱爲純虛數。

3．形如 $a+bi$ 之符號其 a 及 b 爲實數者，稱爲複數。

4．二複數僅當其實數部分及其虛數部分各相等時而相等，由是

設　　$a+bi=c+di$，則 $a=c, b=d$．

5．二複數之和，差，積，或商，仍爲複數，（特殊情時爲實數或純虛數）可用通常演算法則及關係式 $i^2=-1$ 而得之，此於任何正整次冪之複數皆真；因由定義 $(a+bi)^n=(a+bi)(a+bi)\cdots$ 至 n 因子而知之。

例1．　加 $5+3i$ 與 $2-4i$．

$$5+3i+(2-4i)=(5+2)+(3-4)i=7-i.$$

例2．　從 $3+2i$ 減 $6+2i$．

$$3+2i-(6+2i)=(3-6)+(2-2)i=-3.$$

例3．　以 $1+4i$ 乘 $2+3i$．

$$(2+3i)(1+4i)=2+3i+8i+12i^2$$
$$=2+3i+8i-12=-10+11i.$$

例4．　展開 $(1+i)^2$．

$$(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i.$$

例5．　求能適合方程中 x, y 之實數值。

$$(x+yi)i-2+4i=(x-yi)(1+i).$$

整理之，得，$-(y+2)+(x+4)i=(x+y)+(x-y)i$．

令實數及虛數部分相等，§619, 4,

$$-(y+2)=x+y \text{ 及 } x+4=x-y,$$

解之。　　$x=6, y=-4$．

於 §§238－241 內曾示以顯表複數之法，稱爲其圖象，及由二次複數之圖象求得二數之和與積之圖象之法則，學

者試用此於例 1, 3, 4.

共軛虛數. 二複數如 $a+bi$ 及 $a-bi$, 僅實虛二部連 620
結之符號不同者, 稱爲共軛虛數.

二共軛虛數之積爲正實數. 621

例如, $(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$.

故分數 $(a+bi)/(c+di)$ 可以分母之共軛數乘分子分 622
母, 變之爲複數之形.

例. 以 $2-4i$ 除 $5+7i$.

$$\frac{5+7i}{2-4i}=\frac{(5+7i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}$$

$$=\frac{-18+34i}{20}=-\frac{9}{10}+\frac{17}{10}i.$$

i 之冪. 從方程式 $i^2=-1$ 知 i 之偶次冪爲 -1 或 623
1, i 之奇次冪爲 i 或 $-i$.

如, $i^3=i^2\cdot i=-i$; $i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=1$; 餘類推.

設 n 爲任何已知數, 求 i^n 之值, 先以 4 除 n, 然後依照餘數之爲 0, 1, 2, 3, 得 i^n 之值之爲 $1, i, -1, -i$.

由是 $i^{24}=(i^4)^6=1$; $i^{25}=i^{24}\cdot i=i$. 餘類推.

負數之偶次根. -4 有 $2i$ 及 $-2i$ 二平方根; 因 624
$(2i)^2=2^2i^2=-4$, 及 $(-2i)^2=(-2)^2i^2=-4$. 吾人選 $2i$ 爲主平方根, 且書作 $\sqrt{-4}=2i$, $-\sqrt{-4}=-2i$.

同理任何已知負數 $-a$ 之主平方根爲 $\sqrt{a}i$, 即 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$.

從此主平方根之定義, 知設 $-a$ 及 $-b$ 爲任何二負數, 則 625

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}.$$

因

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{a}i\cdot\sqrt{b}i=i^2\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}.$$

故

由是，二負數 $-a,-b$ 之主平方根之積亦爲其積 ab 之平方根之一，如於實數，則非此積之主平方根。

設以虛數演算須切記法則 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 之增訂，計算前先易符號 $\sqrt{-a}$ 爲 $\sqrt{a}\,i$ 可避免混亂與錯誤。

例1. 化簡 $\sqrt{-2}\cdot(\sqrt{-3})^5\cdot(\sqrt{-5})^7$.

$$\begin{aligned}\sqrt{-2}\cdot(\sqrt{-3})^5\cdot(\sqrt{-5})^7&=\sqrt{2}\,i\cdot(\sqrt{3}i)^5(\sqrt{5}\,i)^7\\&=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3})^5\cdot(\sqrt{5})^7 i^{13}\\&=125\sqrt{30}\,i.\end{aligned}$$

例2. 以 $1+\sqrt{-1}$，乘 $2+\sqrt{-9}$.

$$(2+\sqrt{-9})(1+\sqrt{-1})=(2+3i)(1+i)=-1+5i.$$

626 負數之高級偶次根爲複數，此將於以後證明之。

因 $(1+i)^4=1+4i+6i^2+4i^3+i^4=1+4i-6-4i+1=-4$.

故 -4 之四次根之一爲 $1+i$.

627 **複數之平方根.** 此後將更證明複數之一切根爲複數，茲求其平方根如下：

因 $(\sqrt{x}\pm i\sqrt{y})^2=x-y\pm 2i\sqrt{xy}$.

故設 $a+bi$ 表已知複數，b 爲正數，必能求得二正數 x 及 y，致令

$$x-y=a,\ (1),\ 及\ 2\sqrt{xy}=b,\ 者，(2)$$

則 $\sqrt{x}+i\sqrt{y}$ 爲 $a+bi$ 之平方根，$\sqrt{x}-i\sqrt{y}$ 爲 $a-bi$ 之平方根。

可求得 x,y 二數如下：

由假設 $$\sqrt{x}+i\sqrt{y}=\sqrt{a+bi}, \tag{3}$$

$$\sqrt{x}-i\sqrt{y}=\sqrt{a-bi}. \tag{4}$$

以 (4) 乘 (3) $$x+y=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{5}$$

但由 (1), $$x-y=a. \qquad (6)$$

故解 (5) 及 (6), $$x=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

$$y=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

因 $\sqrt{a^2+b^2}>a$, 故上二值皆為正數。

例。求 $-1+4\sqrt{5}\,i$ 之平方根。

於此 $a=-1$ 及 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+(4\sqrt{5})^2}=9$.

故 $x=(-1+9)/2=4$ 及 $y=(1+9)/2=5$.

由是 $\sqrt{-1+4\sqrt{5}i}=2+\sqrt{5}\,i$.

習　題　XL

化簡下式。

1. $\sqrt{-49}$.　2. $\sqrt{-18}$.　3. $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-12}$.

4. $\sqrt{-2^2}$.　5. $(\sqrt{-2})^2$.　6. i^{12}.

7. i^{-7}.　8. i^{15}.

9. $\sqrt{x-y}$, $\sqrt{y-x}$.　10. $(2+\sqrt{-3})(1+\sqrt{-2})$.

11. $(\sqrt{-2})^7(\sqrt{-3})^9$.　12. $(1+2i)^3+(1-2i)^3$.

13. $\dfrac{a}{\sqrt{-a^2}}-\dfrac{b}{i\sqrt{b^2}}$.　14. $\dfrac{4+6i}{1+i}+\dfrac{4-6i}{1-i}$.

15. $(\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i})^2$.　16. $(1+i^3)/(1+i)$.

17. $\dfrac{a+bi}{a-bi}$.　18. $\dfrac{9+3\sqrt{2}\,i}{(3+\sqrt{2}\,i)(1+\sqrt{2}\,i)}$.

19. 以 $1+\sqrt{-3}$ 除 4.

20. 求 -16 之四次根。

21. 求證 $(-1+\sqrt{3}\,i)/2$ 為 1 之立方根。

22. 求適合下列方程 x 及 y 之實值。

$$3+2i+x(i-1)+2yi=(3i+1)(x+y).$$

求次之平方根。

24. $5+12i$.　25. $2i$.　26. $4ab+2(a^2-b^2)i$.

XIII. 二次方程式

682 **方程式之通式.** 含一未知數 x 之各二次方程式，可變形為：

$$ax^2+bx+c=0.$$

a, b, c 表已知數。

設遇 $b=0$，此方程式稱為純二次方程；設 $b\neq 0$，則稱為混構二次方程式。

620 **觀察求根法.** 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根為 x 之特值，由此值能使多項式 ax^2+bx+c 為零，§332，此根之個數有二。

設已知 ax^2+bx+c 之因子，則亦知 $ax^2+bx+c=0$ 之根。

因此根為致 ax^2+bx+c 之因子為零之 x 之值，§§253, 311．設二因子為 $x-\alpha$ 及 $x-\beta$，則其二根為 α 及 β.

例1． 解方程式 $x^2+x-6=0$.

$$x^2+x-6=(x+3)(x-2).$$

因子 $x+3$ 於 $x=-3$ 時為零，$x-2$ 於 $x=2$ 時為零，故二根為 -3 及 2.

例2． 解 $abx^2-(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)=0$.

用§413法析因，$[ax-(a+b)][bx-(a-b)]=0$.

故二根為 $(a+b)/a$ 及 $(a-b)/b$.

於特例，因 $x^2-q=(x-\sqrt{q})(x+\sqrt{q})$，故純二次方程式 $x^2-q=0$ 之根為 $\sqrt{q}$ 及 $-\sqrt{q}$.

又因 $ax^2+bx=(ax+b)x$，故形為 $ax^2+bx=0$ 之二次方程式之根為 $-b/a$ 及 0.

如，$4x^2=9$ 之根為 $3/2$ 及 $-3/2$；$2x^2-x=0$ 之根為 0 及 $1/2$；$5x^2=0$ 之根為 0 及 0.

630 反之，設根為已知數如 α 及 β，求此方程式，可求 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 之積，再令此積等於 0.

如，根為 -2 及 $1/3$ 之二次方程式為 $(x+2)(x-1/3)=0$ 或 $3x^2+5x-2=0$.

例1．解以下二次方程式。

1．$x^2+2x-8=0$．　　2．$2x^2-7x+3=0$．

3．$(2x-2)(x-2)=x^2+2$．

4．$(x-1)(x-3)=(2x-1)^2$．

例2．求二次方程式設其根爲

1．$-2/3, -3/2$．　　2．$a, -a$．　　3．$1/4, 0$．

根之一般公式。 ax^2+bx+c 恆可分解因子；因如 631
§444 內所示。

$$ax^2+bx+c$$
$$=a\left[x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right].$$

由是，因 $ax^2+bx+c=0,$　　(1)

之根，即致 ax^2+bx+c 之因子爲零之 x 之值，故二根爲

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 及 } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

或通常寫爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

公式(2)必須切記，因可由此僅用代入法，以求得任何二次方程式之根，設此二次方程已變爲(1)式之形。

例．解　$4x+105x=81$．

變之如式(1)，　$4x^2+105x-81=0$．

於此　$a=4, b=105, c=-81$．

故　$x=\dfrac{-105\pm\sqrt{105^2+4\cdot4\cdot81}}{8}$，即 $\frac{3}{4}$ 或 -27．

設 b 爲偶整數，a 及 c 亦爲整數時，則以用 632
公式　$x=\dfrac{-b/2\pm\sqrt{(b/2)^2-ac}}{a}$，　(3)

更爲便利，此由以2除(2)之分子分母得來，

例。解 $3x^2+56x-220=0$.

於此 $b/2=28$, 代入 (3), 得

$$x=\frac{-28\pm\sqrt{28^2+3.220}}{3},\ \text{即}\ \frac{10}{3}\ \text{或}\ -22.$$

633 任何已知二次式，亦可如下例直接用配方法解之，但此法含不必要之計算，故除非忘記 §631 之公式時，不用此法。

例。解 $3x^2-6x+2=0$.

移已知項且以 x^2 之係數除之。

$$x^2-2x=-2/3.$$

配左邊爲完全平方。

$$x-2x+1=1/3.$$

開兩邊之平方根。

$$x-1=\pm\sqrt{3}/3,\quad x=(3\pm\sqrt{3})/3.$$

634 上法能以之求當消去分母後爲一二次方程式之任何分方程式，參考 §§524—527.

例1. 解 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}$.

消分母，且化簡 $2x^2+10x+11=0$.

解之， $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$.

因二値皆不致方程內之任一分母爲零，故二値皆爲已知方程式之根。

例2. 解 $\dfrac{x+3}{x^2-1}+\dfrac{x-3}{x^2-x}+\dfrac{x+2}{x^2+x}=0$.

乘以最低公分母，消去分母且化簡之，得

$3x^2+2x-5=0$, 由是 $x=1$ 或 $-5/3$.

但 $x=1$ 時首二分母爲零，故 1 不能爲已知方程式之根， $-5/3$ 而爲此方程僅有之根。

習　題　XLI

解下列方程式:

1. $x^2+2x=35$.　　2. $4x^2-4x=3$.

3. $x^2=10x-18$.　　4. $9x^2+6x+5=0$.

5. $2x^2+3x-4=0$.　　6. $(2x-3)^2=8x$.

7. $x^2+9x-252=0$.　　8. $12x^2+56x-255=0$.

9. $8x^2-82x+207=0$.　　10. $15x^2-86x-64=0$.

11. $x^2-3x-1+\sqrt{3}=0$.　　12. $x^2-(6+i)x+8+2i=0$.

13. $(x-2)^2(x-7)=(x+2)(x-3)(x-6)$.

14. $\dfrac{2x}{x+3}+\dfrac{x+2}{2x}=2$.　　15. $\dfrac{x+1}{x}+1=\dfrac{x}{x-1}$.

16. $\dfrac{3}{2(x^2-1)}+\dfrac{x}{4x+4}=\dfrac{3}{8}$.

17. $\dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{1}{4x-2}-\dfrac{2x}{1-4x^2}=\dfrac{7}{8}$.

18. $\dfrac{2x-1}{x-2}+\dfrac{3x+1}{x-3}=\dfrac{5x-14}{x-4}$.

19. $\dfrac{x+1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{1}{2x}=0$.

20. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{4-x}=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{3-x}$.

21. $\dfrac{x+3}{4(x+2)(3x-1)}+\dfrac{2x+1}{3(3x-1)(x+1)}-\dfrac{17x+7}{6(x+1)(x+2)}=0$.

22. $\dfrac{x+7}{2x^2-7x+3}+\dfrac{x}{x^2-2x-3}+\dfrac{x+3}{2x^2+x-1}=0$.

23. $3x^2+(9a-1)x-3a=0$.　　24. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$.

25. $c^2x^2+c(a-b)x-ab=0$.　　26. $x^2-4ax+4a^2-b^2=0$

27. $x^2-6acx+a^2(9c^2-4b^2)=0$.

28. $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$.

29. $1/(x-a)+1/(x-b)+1/(x-c)=0$.

30. $\dfrac{(x-a)^2-(x-b)^2}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=0$.

習題 XLII

1. 求二連續數，其積為 506.

2. 求二連續數，其平方之和為 481.

3. 求二連續數，其立方之差為 91.

4. 求三連續數，其兩兩相乘之積之和為 587.

5. 由下列條件求一二位數：其二數字之積為 48. 又設此二數易位，則此數少 18.

6. 某分數之分子較分母多 2， 又此分數較其倒數多 24/35； 求此分數.

7. 某牛販以1260元購牛若干頭，途間失其四；其餘以每頭超過買價10圓售出，共獲利 260 元，問此人原購牛若干頭?

8. 某人售貨得銀48元，而其所得之百分數恰為該貨原值（以銀元計）之半，問該物原值若干?

9. 若有銀 4000 元以複利儲蓄二年， 本利共得 4410 元，其利息為年複利，問利率為何?

10. 一人承繼遺產銀 25,000 元， 以百分之幾以為遺產稅，又以較遺產稅率多百分之一之百分率為世襲地產稅率，如是此人承繼所得僅 22800 元其遺產稅率如何?

11. 某人於某種折扣下，以銀4500元購價50之股票若干張，於溢價三倍其折扣時，除 10 張外，售銀 5850 元，問此人共購股票若干張?

12. 一貨車之後輪圓周較前輪圓周長 8 吋當行路一哩時，後輪較前輪少轉88週，求各輪圓周之長度.

13. 一正方形周圍鑲以邊，邊之寬度較正方形一邊長度之四分之一少 1 吋；其面積（以平方吋計）較正方形四邊之長度（以吋計）多 64，求正方形面積及所鑲四邊之面積.

14. 由切去邊長爲2之正方形之各角成一正八邊形，問此正八邊形之邊長若干？

15. 某酒商自一滿裝63器之酒桶中取酒若干，復以水注滿，後又取與前次同量之酒，而桶中僅餘28器之純酒，問此人每次取若干器？

16. 某人乘A火車旅行50哩，休息5分鐘後，乘B火車而回，其速率較A車每小時快5哩，全程共用$2\frac{1}{2}$時；二車之速率爲何？

17. 某步行者於一定時間內行6哩，若其速率每小時增2哩則所須時間少1/2小時，求時間及速率。

18. 某步行者在某速率下行12哩，後又以每小時較前多行1/2哩之速度行6哩，若此人以後者之速率行全程，則所須時間少20分，問此人行18哩共須時若干？

19. 從成直角二路之交點A, B二人同時起程，A以每時3哩之速率向一路前進，B以每小時4哩之速率向另一路前進，經過若干時後，二人始相距爲30哩？

20. A與B所行之路如上述，其速度爲每小時2及3哩。且A先B2小時起行，問B行若干時後，二人始相距10哩？

21. 設一物體自高a呎之處垂直擲上，其初速爲每秒b呎，於t秒鐘後，其高爲$h=a+bt-16t^2$；當物體垂直拋下時，其對應之公式爲$h=a-bt-16t^2$.

(1) 若一物體自地面，以每秒32呎之初速垂直向上擲去，當其高7呎時，須時若干？高16呎時。又此物能否達17呎之高度？

(2) 一物體自高64呎之處垂直拋下，其初速爲每秒48呎，何時能達高36呎之處？

(3) 若一物體自高36呎之處擲下，何時能達地面？

XIV. 二次方程式之討論　極大值與極小值

635　**根之性質，判別式.**　使 α 及 β 為 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，則由 §631，

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

根號下 b^2-4ac 稱為 $ax^2+bx+c=0$ 之判別式。

設係數 a, b, c 為實數，則二根 α 及 β 之性質可由判別式之符號指出，即

1. 設 b^2-4ac 為正，二根為實且相異。
2. 設 b^2-4ac 為0，二根為實且相等。
3. 設 b^2-4ac 為負，二根為共軛虛數。

亦可看出

1. 於 $b^2-4ac=0$ 時，ax^2+bx+c 為完全平方。
2. 設 a 為正，c 為負，則二根必為實根，因由是 b^2-4ac 為正數也。
3. 設 a, b, c 為有理，則當且僅當 b^2-4ac 為完全平方時，二根皆為有理。

例1.　指明 $x^2-6x+10=0$ 之二根為虛根。

因 $b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot1\cdot10=-4$，故知其二根為虛根。

例2.　m 為何值，$mx^2+3x+2=0$ 之根始相等。

必 $3^2-4m\cdot2=0$，即 $m=9/8$.

例3.　設為可能，試分析 $y^2+xy-2x^2+11x+y-12$ 之因子。

依 y 之方冪排列多項式，且使之等於0，得

$$y^2+(x+1)y-(2x^2-11x+12)=0.$$

解之，　$$y=\frac{-(x+1)\pm\sqrt{9x^2-42x+49}}{2},$$

即　　$y=x-4$，或 $y=-2x+3$.

故由§631,

$$y^2+xy-2x^2+11x+y-12=(y-x+4)(y+2x-3).$$

注意,僅於 $9x^2-42x+49$ 之判別式為完全平方時始能分解因子。

根及係數之關係. 設 α 及 β 表 $ax^2+bx+c=0$ 之二根,由§631, 636

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)(x-\beta).$$

以 a 除方程式之兩方,並算出右方之積,得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\equiv x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta.$$

因此為恆等式,故兩邊 x 同次冪之係數必等,§264,即

$$\alpha+\beta=-b/a \text{ 及 } \alpha\beta=c/a.$$

此式亦可以§631內 α 及 β 值之相加及相乘證明之,由是因 α,β 為 $x^2+bx/a+c/a=0$ 之根,得定理如下:

形如 $x^2+px+q=0$ 之任何二次方程式內,x 變號之係數等於二根之和,常數項等於二根之積。

如二次方程式 $6x^2+x=2$, 即 $x^2+x/6-1/3=0$ 其二根之和為 $-1/6$, 二根之積為 $-1/3$.

例1. 解 $9x^2-10x+1=0$.

因 $9-10+1=0$, 故其一根顯然為 1. 又因二根之積為 $1/9$, 則知他一根為 $1/9\div1$ 或 $1/9$.

例2. 求其根為三倍 $3x^2+8x+5=0$ 之根之方程式。

以 α 及 β 表 $3x^2+8x+5=0$ 之根。

於是 $\alpha+\beta=-8/3$ 及 $\alpha\beta=5/3$.

故所求之方程式為

$$x^2-(3\alpha+3\beta)x+3\alpha\cdot3\beta$$

$$\equiv x^2-3(\alpha+\beta)x+9\alpha\beta\equiv x^2+8x+15=0.$$

根之對稱函數. $\alpha+\beta$ 及 $\alpha\beta$ 二式為 α 及 β 二根之對稱函數,§540. 所有其他 α 及 β 之有理對稱函數,皆可以此二函數之有理式表之。 637

因之亦可以此方程式之係數之有理式表之。

因任何此種函數皆可變爲整式對稱函數或二此種函數之商之形式，設整式對稱函數含形如 $k\alpha^p\beta^{p+q}$ 之項，則必含 $k\alpha^{p+q}\beta^p$ 之項，§542，故必含 $k\alpha^p\beta^p(\alpha^q+\beta^q)$。

但 $\alpha^p\beta^p=(\alpha\beta)^p$，且由連用二項式定理可指出 $\alpha^q+\beta^q$ 能以 $\alpha+\beta$ 及 $\alpha\beta$ 之方冪表之。

如，因 $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$，得 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$。

同法得 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$。

例。 $x^2+px+q=0$ 之根爲 α 及 β；試以 p 及 q 表 $1/\alpha+1/\beta$ 及 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$。

$$1/\alpha+1/\beta=(\alpha+\beta)/\alpha\beta=-p/q,$$

$$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]=q(p^2-2q).$$

633 **無限大根。** 設 $ax^2+bx+c=0$ 之係數不爲常數而爲變數；於是設 a 漸近於 0 爲極限，則二根之一必漸近於 ∞；又設 a, b（除 c 外）皆漸近於 0，則二根皆漸近於 ∞。

因根之公式爲

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

以 $-b-\sqrt{b^2-4ac}$ 乘 α 分數之兩項，$-b+\sqrt{b^2-4ac}$ 乘 β 分數之兩項，得

$$\alpha=-\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}},\ \beta=-\frac{2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

由 §§203, 205，設 $a\doteq0$，則 $\sqrt{b^2-4ac}\doteq b$。

故　　設 $a\doteq0$，則 $\alpha\doteq-c/b$，$\beta\doteq\infty$，

又　　設 $a\doteq0$ 及 $b\doteq0$，則 $\alpha\doteq\infty$，$\beta\doteq\infty$。

此結論通常述之如次，§519：

設 $ax^2+bx+c=0$ 之係數 a 爲零，則其一根漸成無限大，設 a 及 b（但非 c）爲零，則二根均漸成無限大。

極大值與極小值. 使 y 爲 x 之函數, §278, 可知 639
當 x 增大時, y 亦增大至某定值 m, 然後漸次減小; 或 y 減小至某定值 m' 然後漸次增大, 茲稱 m 爲 y 之極大值, m' 爲其極小值.

如, $y=(x-1)^2-4$, 當 $x=1$ 時, 有一極小值 -4. 因設 x 從小於 1 之值漸增時, $(x-1)^2$ 漸次減小至 0, 然後又漸次增大.

同理 $y=4-(x-1)^2$ 於 $x=1$ 時有一極大值 4.

任一實數係數之二次三項式 ax^2+bx+c 有一極大值或 640
極小值, 可如下例求得之.

例1. 求 $y=x^2+6x-7$ 之極大值或極小值.

由配方法, $x^2+6x-7=(x+3)^2-16$.

故於 $x=-3$ 時, y 有一極小值 -16.

例2. 分已知線爲兩段, 使其所成矩形之面積爲最大.

使已知線之長爲 $2a$, x 及 $2a-x$ 爲所分二線段之長, y 爲其所成矩形之面積.

於是 $y=x(2a-x)=2ax-x^2=a^2-(a-x)^2$.

故於 $x=a$ 時 y 有一極大值, 即當平分已知線時, 此矩形變爲面積爲 a^2 之正方形.

二次三項式或較複雜之函數, 其極大及極小值亦可用 641
下法求得之.

例. 求 $y=(4x^2-2)/(4x-3)$ 之極大值與極小值.

去分母, 求 x, 得

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-3y+2}}{2}=\frac{y\pm\sqrt{(y-1)(y-2)}}{2}.$$

由假設, x 限於實數值, 故 y 僅能取根底 $(y-1)(y-2)$ 爲正數 (或 0) 時之值, 即 1 及小於 1, 與 2 及大於 2 之值.

由此知 1 爲 y 之極大值, 2 爲 y 之極小值.

因知當y增大至1時，x之值即$(y-\sqrt{y^2-3y+2})/2$及$(y+\sqrt{y^2-3y+2})/2$增大及減小至1/2.故反之當x漸大經1/2時y先增大至1，後又減小。

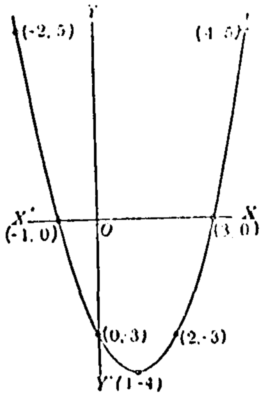
642 **二次三項式之變法。** 已知$y=ax^2+bx+c$，a爲正數，由配方，得

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

故於$x=-b/2a$時，y有一極小值$(4ac-b^2)/4a$.

當x從$-\infty$增大至$+\infty$時，y先從$+\infty$減小至$(4ac-b^2)/4a$，於是復漸增大至$+\infty$.

例如，使 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$.



當x從$-\infty$增至$+\infty$時，先由∞減至-4，於是復由-4增至∞.

又於$x^2-2x-3=0$，即$x=-1$或3時，$y=0$.

及x之值在-1以前y爲正數，以後y爲負數；直至$x=3$後始復爲正數。

當

$x=\cdots-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots$時，得

$y=\cdots12,5,0,-3,-4,-3,0,5,12,\cdots\cdots$

如§389，畫此諸對值，且過諸點作一曲線可得$y=x^2-2x-3$之圖象。

注意y之零值相當曲線及x軸之交點，及y之極小值相當於曲線最低之一點，此亦爲曲線之轉向點。

習題 XLIII

1. 問m之值若何始令$(m+2)x^2-2mx+1=0$之二根相等？

2. 當$m=-1$時$(m^2+m)x^2+2mx-2=0$之根若何？又當$m=0$時若何？

3. 設可能，試分解 $3x^2+5xy-2y^2-5x+4y-2$ 之因子。

4. 問 m 之值若何 $x^2-y^2+mx+5y-6$ 之因子始爲可析？

5. $x^2+px+q=0$ 之根爲 α 及 β，求以 p 及 q 表 $(\alpha-\beta)^2$，$\alpha^4+\beta^4$，及 $\alpha/\beta+\beta/\alpha$.

6. $2x^2-3x+4=0$ 之根爲 α 及 β，求 $\alpha/\beta^2+\beta/\alpha^2$ 及 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ 之值。

7. $x^2+x+2=0$ 之根爲 α 及 β，求根爲 $-\alpha, -\beta$；$1/\alpha, 1/\beta$；$2\alpha, 3\beta$；$\alpha+1, \beta+1$ 之方程式。

8. 求次式之極大值與極小值。

1. x^2-8x+3.　　2. $2x^2-x+4$.

3. $1+4x-x^2$.　　4. $x/(x^2+1)$.

5. $1/x+1/(1-x)$.　　6. $(x+1)/(2x^2-1)$.

9. 求接於已知圓內之最大矩形；且求有最大周界之矩形。

10. 在船內之一人與岸上極近點相距 2 哩，欲以可能速度至岸上距該極近點 6 哩之一點，設其每時能划 4 哩及每時能步行 5 哩，彼當向何點划行？

11. 設以每秒48呎之始速自地面向上直拋一物能達高若何？又何時方能達此高點？參看303頁，例 21.

XV. 可用二次方程式解出之高次方程式

可分解因式之方程式. 已知一整數方程式 $A=0$. 643
設能分解 A 爲諸一次或二次之因子，則使每因子等於零而解之，則可求 $A=0$ 之所有根，因設 $A\equiv BC\cdots$，於是 $A=0$ 同於 $B=0, C=0, \cdots$ 之結合式，見 § 341.

例1. 解　　$x^4+x^2+1=0$.

由 § 436，$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

故$x^4+x^2+1=0$同值於二方程

$$x^2+x+1=0 \text{ 及 } x^2-x+1=0.$$

解二式，得$x=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$或$\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

例2. 解 $x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$.

用§451法分解因式，得

$$x^4-x^3-5x^2-7x+12=(x-1)(x-3)(x^2+3x+4).$$

故$x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$，同值於三方程

$$x-1=0,\ x-3=0,\ \text{及}\ x^2+3x+4=0,$$

其根為 $1, 3,$ 及$(-3\pm i\sqrt{7})/2$.

例3. 解下列方程式。

1. $6x^3-11x^2+8x-2=0$.
2. $x^4-5x^3+x^2+11x+4=0$.

以$au^2+bu+c=0$為範式之方程式．u表x之某函數．設已知$au^2+bu+c=0$解之求u之二根為α及β，則此方程與二方程式$u=\alpha$及$u=\beta$等值，因由§631，

$$au^2+bu+c\equiv a(u-\alpha)(u-\beta).$$

故解$au^2+bu+c=0$求x，只解方程$u=\alpha$及$u=\beta$，求x可矣。

例1. 解$3x^4+10x^2-8=0$.

解之求x^2，　$x^2=2/3$ 或 -4.

故　$x=\pm\sqrt{6}/3$ 或 $\pm 2i$.

例2. 解$x^{\frac{2}{3}}+3-10x^{-\frac{2}{3}}=0$.

同乘以$x^{\frac{2}{3}}$，$x^{\frac{4}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-10=0$.

解之求$x^{\frac{2}{3}}$，　$x^{\frac{2}{3}}=2$ 或 -5.

故　$x=\pm2\sqrt{2}$ 或 $\pm5i\sqrt{5}$.

例3. 解$(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=6$.

此方程式可變為

$$(x^2+3x)^2+9(x^2+3x)+14=0.$$

解之求x^2+3x，得二方程式

$$x^2+3x=-2,\ \text{及}\ x^2+3x=-7,$$

其根為 $-1, -2,$ 及$(-3\pm i\sqrt{19})/2$.

例4.　解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

由其第一項與第四項相乘，及第二項與第三項相乘，此方程式之形式變為

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120,$$

此可以例3之方法解之。

例5.　解 $x^4+10x^3+31x^2+30x+5=0$.

完全首二項之平方，得

$$(x^2+5x)^2+6(x^2+5x)+5=0.$$

解之　求 x^2+5x，得二方程式

$$x^2+5x=-5 \text{ 及 } x^2+5x=-1.$$

其根為 $(-5\pm\sqrt{5})/2$ 及 $(-5\pm\sqrt{21})/2$.

例6.　解 $8\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}+3\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}-11=0$.

第二分式為第一分式之倒數，以第一分式乘方程式兩邊，得

$$8\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)^2-11\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)+3=0.$$

解之　求 $(x^2+2x)/(x^2-1)$，得二方程式

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1}=1 \text{ 及 } \frac{x^2+2x}{x^2-1}=\frac{3}{8},$$

其根為　$-1/2$ 及 $-3, -1/5$.

因未消去任一分母，故所得 x 之值，皆為已知方程式之根。

例7.　解下列方程式：

1.　$3x^4-29x^2+18=0$.　　2.　$x^4-6x^3+8x^2+3x=2$.

3.　$(x-a)(x+2a)(x-3a)(x+4a)=24a^4$.

4.　$(4x^2+2x)/(x^2+6)+(x^2+6)/(2x^2+x)-3=0$

倒數方程式。　此為當以 $1/x$ 代 x 並消去分母而不變之方程式。設按 x 之降冪排列此種方程之各項，則其第一及第末項之係數相等，第二項及倒數第二項之係數亦等，餘類推；或此種每對之係數絕對值相同而符號相反。 615

例如，　$2x^4+3x^3+4x^2+3x+2=0$

及　$x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-1=0$

即爲倒數方程式。

四次倒數方程式可變爲二次方程之形式並可解之如下:

例1. 解 $2x^4-3x^3+4x^2-3x+2=0$.

合併同係數項並以 x^2 除之，則原方程式變爲

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

因 $x^2+1/x^2=(x+1/x)^2-2$，故此方程式又可變爲

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

解之 求 $x+1/x$，得二方程式

$$x+\frac{1}{x}=0 \text{ 及 } x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2},$$

其根爲 $i, -i$, 及 $(3\pm i\sqrt{7})/4$.

任一奇次倒數方程式皆有 1 或 -1 之根；又設提出 $x+1$ 及 $x-1$ 之因子，則降低之方程式，仍爲倒數方程式，故三次及五次倒數方程亦可用二次方程式解之。

例2. 解 $2x^3-3x^2-3x+2=0$.

遷項合併 $2(x^3+1)-3(x^2+x)=0$.

因二項皆可以 $x+1$ 除盡，故上方程式同於二方程式

$$x+1=0 \text{ 及 } 2x^2-5x+2=0,$$

其根爲 -1, 及 $2, 1/2$.

例3. 解 $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$.

集項　$(x^5-1)-5x(x^3-1)+9x^2(x-1)=0$.

除以 $x-1$，則此方程式同於

$$x-1=0 \text{ 及 } x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0,$$

其根爲 1, 及 $(1\pm i\sqrt{3})/2$, $(3\pm\sqrt{5})/2$.

例4.　解以下方程式。

1. $x^3-2x^2+2x-1=0$.　2. $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$.

3. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

二項方程式，　此為形似 $x^n+a=0$ 之方程式，當 x^n+a 能析為一次或二次之因子時，則可照已述方法解之。 646

例1.　解 $x^3-1=0$.

因 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$，故方程式 $x^3-1=0$ 同値於二方程式

$$x-1=0 \text{ 及 } x^2+x+1=0,$$

其根為　　$x=1$ 或 $(-1\pm i\sqrt{3})/2$.

例2　解 $x^5-32=0$.

由使 $x=\sqrt[5]{32y}=2y$ 從 $x^5-32=0$ 得 $y^5-1=0$

由§§438, 643，知 $x^5-1=0$ 同値於二方程式

$$y-1=0 \text{ 及 } y^4+y^3+y^2+y+1=0.$$

解之，　$y=1,\ (-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/4,$

或　$(-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/4.$

故　$x=2y=2,\ (-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/2,$

或　$(-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/2.$

用此法可變任何二項方程式 $x^n\pm a=0$ 為倒數方程式之形式 $y^n\pm1=0$.

例3.　解以下方程式。

1. $x^3+8=0$.　2. $x^4+1=0$.　3. $x^6+1=0$.

以上諸例說明定理：任何數皆有 n 個 n 次根，如1之立方根為適合方程式 $x^3=1$ 之任何數；並由例1，得此三數為1；$(-1+i\sqrt{3})/2$ 及 $(-1-i\sqrt{3})/2$. 647

無理方程式，　通常解無理方程式，均先使其有理化，§609. 但以下將指出某種方程式可以較簡方法解之，無論所用何法皆須注意於求得未知數之値為已知方程式之根以前，必須加以驗算。 648

例1.　解 $\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0$.

遷項，　　　　$\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6}$.

自乘並化簡，　$\sqrt{(2x-3)(3x-5)}=1$.

自乘並化簡，　　$6x^2-19x+14=0$.

解之，　　　　　　　　$x=2$ 或 $7/6$.

於已知方程式內驗算此 x 之值，知 2 爲其一根而 7/6 則否。

亦可用 § 603 方法使已知有理化，由是發現 $-4(6x^2-19x+14)$ 恆等於

$$(\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5})(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x-6}-\sqrt{3x-5}).$$
$$(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5})(\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}-\sqrt{3x-5}).$$

x 僅有二值能使 $6x^2-19x+14$ 等於零，右邊之第一因子，因此值中之2而化零；第二因子因他一值 7/6 而化零．故 x 無可使第三第四因子化零之值。

例2.　解 $\sqrt{4x+3}+\sqrt{12x+1}=\sqrt{24x+10}$.

僅含一種根式之方程式可以此根式爲未知數，依二次方程式解之，然後再解此根式．

例3.　解 $2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}-5=0$.

須注意根號外 x 之諸項二倍根號下 x 之項，茲寫原方程式爲

$$2(x^2-3x-1)-5\sqrt{x^2-3x-1}-3=0.$$

解之求 $\sqrt{x^2-3x-1}$，得二方程式

$\sqrt{x^2-3x-1}=3$，及 $\sqrt{x^2-3x-1}=-1/2$.

第二方程式必須摒棄，因由 § 579 之規定知形似 $\sqrt{a}$ 之根式不能有負值也。

平方第一方程式，得

$$x^2-3x-1=9.$$

其根爲　　　5 或 -2，

於已知方程式內核算 5 及 -2，知二者皆爲其根。

例4.　解 $2x^2-14x-3\sqrt{x^2-7x+10}+18=0$.

有時可化方程式之兩邊爲完全平方，或一邊爲完全平方，他一邊爲常數。

例5．解 $4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9$.

此方程式可寫爲

$$3x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}+x^2=9.$$

左邊爲一完全平方，兩邊開方，得二方程式

$$\sqrt{3x^2+x}+x=3,\ 及\ \sqrt{3x^2+x}+x=-3.$$

解之　$x=1,\ -9/2$ 或 $(5\pm\sqrt{97})/4$.

核算結果知僅 1 及 $-9/2$ 爲已知方程式之根。

有時各項經適當之集合後，可有一無理公因子。

例6．解 $\sqrt{x^2-7ax+10a^2}-\sqrt{x^2+ax-6a^2}=x-2a$.

式內首兩項及 $x-2a$ 皆含 $\sqrt{x-2a}$ 之因子。

提出此因子，知此方程式同於

$$\sqrt{x-2a}=0\ 及\ \sqrt{x-5a}-\sqrt{x+3a}=\sqrt{x-2a}.$$

解二方程式得　$x=2a,\ -10a/3$, 或 $6a$.

由核算而知僅 $2a$ 及 $-10a/3$ 爲已知方程式之根。

例7．解 $\sqrt{3x^2-5x-12}-\sqrt{2x^2-11x+15}=x-3$.

設方程式之一項或多項爲具無理分母之分數，常以先有理化其分母爲佳。

例8．解 $(\sqrt{x}+\sqrt{x-3})/(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})=2x-5$.

有理化左邊之分母並化簡之，得

$$\sqrt{x^2-3x}=2x-6.$$

解之　$x=3$ 或 4.

由核算知 3 及 4 皆爲已知方程式之根。

例9．解 $(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})/(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})=x-3$.

習　題　XLIV

解下列方程：

1. $4x^4-17x^2+18=0$.　　2. $3x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{3}{4}}=7$.
3. $(x^2-4)(x^2-9)=7x^2$.
4. $(2x^2-x-3)(3x^2+x-2)^2=0$
5. $x^4+x^3+x^2+3x-6=0$.
6. $x^4-2x^3+x^2+2x-2=0$.
7. $(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0$.
8. $x^4-12x^3+33x^2+18x-28=0$.
9. $4x^4+4x^3-x^2-x-2=0$.
10. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$.
11. $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$.
12. $x^5-11x^4+63x^3-36x^2+11x-1=0$.
13. $x^5-243=0$.　　14. $(2x-1)^3=1$.
15. $(1+x)^3=(1-x)^3$.　　16. $(x-2)^4-81=0$.
17. $(a+x)^3+(b+x)^3=(a+b+2x)^3$.
18. $(a-x)^4-(b-x)^4=(a-b)(a+b-2x)$.
19. $\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3\dfrac{4x^2+6x-1}{x^2+3x+1}-2=0$.
20. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}$.
21. $3x^2-2x-5\sqrt{3x^2-2x+3}+9=0$.
22. $4x^2-2x-1=\sqrt{2x^2-x}$.
23. $\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{5-2x}$.
24. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=0$.
25. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}-x=\sqrt{\dfrac{6}{x}}$.　　26. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.
27. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+3x}=0$.　　28. $\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt{x}+6\sqrt[4]{x}=0$.
29. $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}-3\sqrt{\dfrac{x-2}{2x-5}}+2=0$.
30. $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=x-3$.
31. $\sqrt{5x^2-6x+1}-\sqrt{5x^2+9x-2}=5x-1$.

32. $\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x}}+3=0.$　　33. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=2.$

34. $(x+a)^{\frac{1}{3}}+(x+b)^{\frac{1}{3}}+(x+c)^{\frac{1}{3}}=0.$

35. $x(x-1)(x-2)(x-3)=6\cdot5\cdot4\cdot3.$

36. $(x+a)^3+4(x+a)\sqrt{x}=a^3-4a\sqrt{x}.$

37. $\sqrt[3]{1+\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x^2-1}}=6.$

XVI. 可用二次方程式解出之聯立方程式

含 x 及 y 之一對方程式，一爲一次，一爲二次.

一對聯立方程之形如 649

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$
$$\phi(x,y)=a'x+b'y+c'=0$$

者可如下例解之.

例. 解 $y^2-x^2+2x+2y+4=0,$ (1)

$$2x-y-7=0. \quad (2)$$

從 (2)，$y=2x-7.$ (3)

以 (3) 代入 (1)，$3x^2-22x+39=0.$ (4)

解 (4)，$x=13/3$ 或 $3.$ (5)

代入 (3)，$y=5/3$ 或 $-1.$ (6)

(1), (2) 之解答爲下各對之值

$$x=13/3,\ y=5/3;\ x=3,\ y=-1. \quad (7)$$

因由 § § 368, 371, 以下各對方程式同值：

(1), (2) 與 (4), (2); (4), (2) 與 (5), (2); (5), (2) 與 (7).

(7) 之解答可表示爲 13/3, 5/3; 3, −1. 注意必須取 x 及 y 之相當值爲一對.

通常此二聯立方程式有兩個定數解答，然設 $\phi(x,y)$ 內一次項 $a'x+b'y$ 爲 $f(x,y)$ 內二次項 $ax^2+bxy+cy^2$ 之因子，而 $\phi(x,y)$ 本身不爲 $f(x,y)$ 之因子，則僅有一個 650

有限解答，或無解答。設 $\phi(x,y)$ 爲 $f(x,y)$ 之因式，則有無窮個解答。

例1. 解 $y^2-x^2+2x+2y+4=0,$ (1)

$$y-mx=0.\qquad(2)$$

消去 y, $(m^2-1)x^2+2(m+1)x+4=0.$ (3)

設 (3) $m^2-1\neq0$, 則 (3) 有二定根；故 (1) 及 (2) 有二定數解答。

但設 $y-mx$ 爲 y^2-x^2 之因式，則 $m=\pm1$, 於是 $m^2-1=0$ 而 (3) 不能有二定根。

如，設 $m=1$, 則 (3) 化爲 $x+1=0$, 僅有一定根，他一根爲無限大，§ 638, 設 $m=-1$, 則 (3) 化爲 $4=0$, 二根皆爲無限大，§ 638.

故設 (2) 爲 $y-x=0$ 之形式，則 (1), (2) 聯立，僅有一個定根，他一根爲無限大，設 (2) 爲 $y+x=0$ 之形式，則 (1), (2) 聯立，無一定解答，二解答皆爲無限大。

例2. 解 $y^2-x^2+2x+2y=0,$ (1)

$$y+x=0.\qquad(2)$$

消去 y, $x^2-x^2+2x-2x=0.$ (3)

但 (3) 爲恆等式，能適合於 x 之任何值。

故 $x=a, y=-a$ 之每對值皆爲 (1) 及 (2) 之解答。

此結果之理由，因 $y+x$ 爲 $y^2-x^2+2x+2y$ 之因子故也。

651 當 A, B, C 爲整函數時，則二方程式 $AB=0, C=0$, 與兩對方程式 $A=0, C=0$ 及 $B=0, C=0$ 爲同值，§ 371. 用此原則及 § 649 能使吾人解二整方程式 $f(x,y)=0, \phi(x,y)=0$, 設 $f(x,y)$ 可析爲一次或二次因子，$\phi(x,y)$ 可析爲一次因子。

例。解 $x^3+xy^2-5x=0,$ (1)

$$(2x-y)(x+y-1)=0.\qquad(2)$$

此對方程式與以下四對方程式同值。

$$x=0,\ 2x-y=0,\qquad(3)$$

$$x=0,\ x+y-1=0,\qquad(4)$$

$$x^2+y^2-5=0,\ 2x-y=0,\qquad(5)$$

$$x^2+y^2-5=0,\ x+y-1=0.\qquad(6)$$

解 (3), (4), (5), (6) 諸對，得 (1), (2) 之解答；0, 0; 0, 1; 1, 2; $-1, -2$; $2, -1$; $-1, 2$.

x, y 之二整方程式，僅當其或其同值二方程式可變爲 §§, 649, 651 所示形式之一時，始可用二次方程式解出。 652

故一對二次方程式 $y^2-x+1=0$ 及 $y=x^2$ 不能用二次方程式解出，因解此對方程式無較消去 y 再簡之方法。而消 y 後所得四次方程式 $x^4-x+1=0$ 又不能以二次方程式解之也。

上節釋明下面重要定理之真實性： 653

一爲 m 次，一爲 n 次之二整方程式 $f(x, y)=0, \phi(x, y)=0$ 共有 mn 個解答。

例如，$x^3+xy^2-5x=0$ 及 $(2x-y)(x+y-1)=0$ 二方程式共有 $3 \cdot 2$ 或 6 個解答，§ 651, 及 § 381.

但尚須補述者，則如 $f(x, y)$ 及 $\phi(x, y)$ 之最高次項，非 $f(x, y)$ 及 $\phi(x, y)$ 之全體有公因子則其定數解答少於 mn 個，因 $f(x, y)$ 及 $\phi(x, y)$ 之最高次項之每一公因子至少使解答中之一爲無限數，如此公因式又爲次高次項所公有，則至少又有二無限解答；餘類推。設 $\phi(x, y)$ 及 $f(x, y)$ 之本身有一公因子，則有無限個解答。 654

例如，$x^3-xy^2+xy-y^2-y=0$ (1) 及 $x^2-y^2-1=0$ (2) 不能有三個以上之有限解答，因其共有 $3 \cdot 2$ 或 6 組解答。而 $x+y$ 爲 (1), (2) 內最高次項，即 x^3-xy^2 及 x^2-y^2 之公因子，故其中至少有一爲無限數；又 $x-y$ 爲最高次項及次高次項，即 x^3-xy^2, x^2-y^2 及 $xy-y^2$, $0(x-y)$ 之公因子，故至少尚有他二解答爲無限數。

習題 XLV

解以下各組方程：

1. $\begin{cases} 7x^2-6xy=8, \\ 2x-3y=5. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} xy=1, \\ 3x-5y=2. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2+x=4y^2, \\ 3x+6y=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x^2-3xy-y^2-4x-8y+3=0, \\ 3x-y-8=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+5y^2-8x-7y=0, \\ x+3y=0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x^2-xy-3y=0, \\ 7x-6y-4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2-1=0, \\ x+y=0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x+3y=37; \\ 1/x+1/y=14/45. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 1/y-3/x=1, \\ 7/xy-1/y^2=12. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x^2+xy+2=0, \\ (3x+y)(2x+y-1)=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+y^2-8=0, \\ (x+1)^2=(y-1)^2. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x^2-xy-2y^2+y=0, \\ (x-2y)(x+y-3)=0. \end{cases}$

13．求定使 $y^2+4x+4=0$, $y=mx$ 二方程之解答相等之定 m 之值。

14．試定 m 及 c 能致下列方程之根為無限大之值。

$$x^2+xy-2y^2+x=0,\ y=mx+c.$$

15．用§650，例2之法，試證 $2x-y+4$ 為 $2x^2+xy-y^2+10x+y+12$ 之因子。

16．試證二方程 $xy=1$, $xy+x+y=0$ 無兩個以上之定數解答；及二方程 $x^2y+xy=1$, $x^2y+y^2=2$ 無四個以上之定數解答。

可用因子分解法，加法，或減法解出之聯立方程式

655　當二方程關於 x, y 之二函數為一次時．

可先用§§374－376之方法解之求二函數之值。

例1．解
$$2x^2-3y^2=-68, \quad (1)$$
$$3x^2+y^2=111. \quad (2)$$

求 x^2, y^2，得 $x^2=25, y^2=36$.

$\therefore\ x=\pm 5,\ y=\pm 6.$

由§§367—372，(1)，(2) 二方程與 $x=5, y=6$; $x=-5, y=6$; $x=5, y=-6$; $x=-5, y=-6$，四對方程式同値。

故 (1)，(2) 之解答爲 5, 6; −5, 6; 5, −6; −5, −6.

例2. 解以下各對方程式。

1. $\begin{cases} ax^2+by^2=a, \\ bx^2-ay^2=b. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} 3x^2-1/y^2=2, \\ 5x^2+3/y^2=120. \end{cases}$

當方程式之一可以分解因式時. 當已知方程之形式爲 656

$$ax^2+bxy+cy^2=0.$$

時，此當爲可能，總之，即當其可變爲

$$au^2+bu+c=0$$

之形式時式中 u 表 x, y 之函數。

例1. 解 $x^2+y^2+x-11y-2=0,$ (1)

$x^2-5xy+6y^2=0.$ (2)

分解 (2) 之因式，得

$x=2y,$ (3)

或 $x=3y.$ (4)

解 (1)，(3) 及 (1)，(4)，得所有 (1)，(2) 之解答，即 4, 2; −2/5, −1/5; 3, 1; −3/5, −1/5.

例2. 解 $2x^2+4xy+2y^2+3x+3y-2=0,$ (1)

$3x^2-32y^2+5=0.$ (2)

(1) 可寫爲 $2(x+y)^2+3(x+y)-2=0.$

解之，$x+y=1/2,$ (3)

或 $x+y=-2,$ (4)

解 (2)，(3) 及 (2)，(4)，得所有 (1)，(2) 之解答，即 1, −1/2; 3/29, 23/58; −3, 1; −41/29, −17/29.

例3. 解以下各對方程式。

1. $\begin{cases} x^2+xy-6=0, \\ x^2-5x+6=0. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{26}{5}, \\ y^2-2x^2=1. \end{cases}$

657 **當由已知方程式之相加或相減能得一可分解因式之方程式時.** 設二已知方程均呈 $ax^2+bxy+cy^2=d$ 之形式則恆可能.

例1. 解 $6x^2-xy-2y^2=56.$ (1)

$5x^2-xy-y^2=49.$ (2)

結合 (1), (2) 以消去常數項

以7乘(1), $42x^2-7xy-14y^2=392,$ (3)

以8乘(2), $40x^2-8xy-8y^2=392,$ (4)

從(3)減(4), $2x^2+xy-6y^2=0.$ (5)

解(5)求 x, $x=3y/2,$ (6)

或 $x=-2y.$ (7)

解 (2), (6) 及 (2), (7) 得 (1), (2) 之所有解答; 即 $\pm3\sqrt{35}/10, \pm\sqrt{35}/5; \pm2\sqrt{21}/3, \mp\sqrt{21}/3.$

一般言之當已知方程式爲二次且由相加或相減能消去 (1)所有二次項; (2)二次項以外之諸項; (3)所有含 x (或 y) 之項; 或(4)所有不含 x(或 y)之項時, 蓋常能得一可分解因子之方程式.

例2. 解 $2x^2+4xy-2x-y+2=0,$ (1)

$3x^2+6xy-x+3y=0,$ (2)

於此以3乘(1), 2乘(2)且相減, 可消去所有二次之項; 得 $4x+9y-6=0.$ (3)

解 (2), (3), 得 $-3, 2; -2, 14/9$, 此爲 (1), (2) 所有之解答. 參看§654.

例3. 解 $x^2-3xy+2y^2+4x+3y-1=0,$ (1)

$2x^2-6xy+y^2+8x+2y-3=0.$ (2)

於此以2乘(1)減(2)可消去所有含 x 之項, 得

$3y^2+4y+1=0.$ (3)

解 (1) 及 (3) 得所有 (1), (2) 之四解答 $1/3, -1/3; -16/3, -1/3; (-7\pm\sqrt{57})/2, -1.$

玆再觀察下例。

例4. 解 $x^2+2xy+2y^2+3x=0,$ (1)

$xy+y^2+3y+1=0.$ (2)

(2) 乘以 2 加 (1), 得

$(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0.$ (3)

解 (3), $x+2y=-1,$ (4)

或 $x+2y=-2.$ (5)

解 (2), (4) 及 (2), (5), 得 (1), (2) 之所有解答, 即:
$-3\pm2\sqrt{2}, 1\mp\sqrt{2}; -3\pm\sqrt{5}, (1\mp\sqrt{5})/2.$

例5. 解下各對方程式。

1. $\begin{cases}2x^2+xy+5y=0,\\ x^2+y^2+10y=0.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x^2+y^2-13=0.\\ xy+y-x=-1.\end{cases}$

當由消去 x 或 y 後所得之方程能分解因式時： 658 任何一對二次方程可用下法消去 x 或 y. 由是所得, 通常爲四次方程式, 不能以二次方程解之, 但設能分解爲一次及二次之因子, 則能解其因子以求已知二方程之解答。

例1. 解 $10x^2+5y^2-27x-4y+5=0;$ (1)

$x^2+y^2-3x-y=0.$ (2)

5 乘 (2), 自 (1) 減之, 消去 y^2, 得

$5x^2-12x+y+5=0$, 或 $y=-5x^2+12x-5,$ (3)

(3) 代入 (2),

$5x^4-24x^3-40x^2-27x+6=0.$ (4)

由 § 451, 分解因式,

$(x-1)(x-2)(5x^2-9x+3)=0.$ (5)

解 (5), § 643, $x=1, 2, (9\pm\sqrt{21})/10.$ (6)

(6) 代入 (3), $y=2, -1, (7\pm3\sqrt{21})/10.$ (7)

(6), (7) 之各對相當值即 (1), (2) 之解答。

例2. 解 $x^2-3xy+2y^2+3x-3y=0,$

$2x^2+xy-y^2+x-2y+3=0,$

習題 XLVI

解下列各對方程.

1. $\begin{cases} x^2+3y^2=31, \\ 7x^2-2y^2=10. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 36/x^2+1/y^2=18, \\ 1/y^2-4/x^2=8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y^2+xy+6=0, \\ y^2-y-2=0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x^2+y^2-3x+2y-39=0, \\ 3x^2-17xy+10y^2=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y^2-x^2-5=0, \\ 4x^2+4xy+y^2+4x+2y=3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+5xy-2x+3y+1=0, \\ 3x^2+15xy-7x+8y+4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2-15xy-3y^2+2x+9y=98, \\ 5xy+y^2-3y=-21. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x^2+3xy-4y^2=25, \\ 15x^2+24xy-31y^2=200. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x(x+3y)=18, \\ x^2-5y^2=4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2-3xy+3y^2=x^2y^2, \\ 7x^2-10xy+4y^2=12x^2y^2. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=38, \\ x^2-xy+y^2=14. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21(x-y), \\ xy=20. \end{cases}$ 13. $\begin{cases} x^2+y-8=0, \\ y^2+15x-46=0. \end{cases}$

可用除法解出之方程式對

659 解一方程式對，有時用乘或除結合之尤便，但須注意不可引入另外解答，或失去原有解答（參看§§362, 342).

660 設已知二方程式形爲 $AB=CD$ (1), $B=D$ (2), 其 A, B, C, D 爲 x, y 之整函數者；則可於 (1) 內以 D 易 B, 得二方程式 $AD=CD$, $B=D$, 此顯然與兩對方程式 $A=C$, $B=D$ 及 $D=0$, $B=0$ 同值。以 (2) 之兩邊除 (1) 之相當邊得二方程 $A=C$, $B=D$, 但僅解方程式 $A=C$, $B=D$, 必失去 (1),

(2) 中幾個解答，當然 B 或 D 爲常數時除外，因如是則 $B=0$ 及 $D=0$ 並無解答也。

例1. 解 $$x^4+x^2y^2+y^4=21, \quad (1)$$
$$x^2+xy+y^2=7. \quad (2)$$

(1) 除以 (2)， $$x^2-xy+y^2=3. \quad (3)$$

解 (2), (3) 得所有 (1), (2) 之定數解答，即：2, 1; −2, −1; 1, 2; −1, −2. § 654.

例2. 解 $$x^3-y^3=-3(x+1)y, \quad (1)$$
$$x^2+xy+y^2=x+1. \quad (2)$$

以 (2) 除 (1)， $$x-y=-3y. \quad (3)$$

(1), (2) 二方程與 (2), (3) 及 $x^2+xy+y^2=0$ (4), $x+1=0$ (5) 二對有相同解答。而(2), (3) 及 (4), (5)之解答爲 2, −1; −2/3, 1/3; −1, $(1\pm i\sqrt{3})/2$.

例3. 解 $$(x+y)^2=x, \quad (1)$$
$$x^2-y^2=-6y. \quad (2)$$

(1) 除以 (2), $$(x+y)/(x-y)=-x/6y, \quad (3)$$

消去分母， $$x^2+5xy+6y^2=0. \quad (4)$$

(2), (4) 一對有四解答 0, 0; 0, 0; 4, −2; 9/4, −3/4.

由 (1), (2) 導至 (4) 之程序，當 x, y 之值爲 4, −2 或 9/4, −3/4, 時爲可逆的，但爲 0, 0 則非可逆；此計算僅證明4, −2, 及 9/4, −3/4 爲 (1), (2) 之解答，§ 362.

由觀察知 0, 0, 顯然爲 (1), (2) 之解答，但僅爲一個，蓋在此 (2), (4) 對中無兩個也。由此事實知 (1), (2) 僅有三個有限解答，§ 654. 亦可知：以 $y=tx$ (5) 代入 (1), (2) 得 $(1+t)^2x^2=x$ $(1')$ $(1-t^2)x^2=-6tx$ $(2')$. 由 (5) $(1')$, $(2')$ 得 $x=0$, $y=0$ 一次，且僅只一次。

習題 XLVII

1. $\begin{cases} x^3-y^3=63, \\ x-y=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=98, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=931 \\ x^2+xy+y^2=49. \end{cases}$

4. $\begin{cases} (x+y)(x^2-2y^2)=-70, \\ (x-y)(x^2-2y^2)=14. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x+y)^2(x-y)=3xy+6y, \\ x^2-y^2=x+2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=6x, \\ x^2-y^2=-5y. \end{cases}$

對稱方程式對

661　x, y 之一對方程式設 x, y 互易而仍保持不變則稱爲對稱方程式對。如以下 (a), (b), 即爲對稱方程式對。

$$(a)\ \begin{cases}2x^2+2y^2+3x+3y=0,\\ x^2y^2+xy+1=0.\end{cases}\qquad (b)\ \begin{cases}x^2=2x+3y,\\ y^2=2y+3x.\end{cases}$$

對稱方程式有二範式，類似 (a) 者 x, y 互易後各方程式不變，類似 (b) 者 x, y 互易後二方程式易位。

662　**屬於第一範式之對稱方程式對.**　其最簡單者爲 $x+y=a$, 及 $xy=b$, 此可如 §649 解之，但次例爲更較對稱之方法。

例. 解	$x+y=5.$	(1)
	$xy=6.$	(2)
平方(1)	$x^2+2xy+y^2=25.$	(3)
以 4 乘 (2),	$4xy=24.$	(4)
從 (3) 減 (4)	$x^2-2xy+y^2=1.$	(5)
故	$x-y=1,$	(6)
或	$x-y=-1.$	(7)

從 (1), (6), $x=3, y=2$; 從 (1), (7) $x=2, y=3$.

663　設已知爲更繁複之對稱方程式對，可變各方程式含 $x+y$ 及 xy 之方程式, §637, 再解之以求此函數；或於已知方程式內, 使 $x=u+v$, $y=u-v$, 再解之以求 u 及 v; 因從 $x=u+v$, $y=u-v$ 得 $u=(x+y)/2$, $v=(x-y)/2$, 故第二法於解 $x+y$ 及 $x-y$ 之方程式同一重要。

例1. 解	$2x^2+5xy+2y^2+x+y+1=0,$	(1)
	$x^2+4xy+y^2+12x+12y+10=0.$	(2)

於 (1) 及 (2) 內以 $(x+y)^2-2xy$ 代 x^2+y^2

集項， $2(x+y)^2+xy+(x+y)+1=0,$ (3)

$(x+y)^2+2xy+12(x+y)+10=0.$ (4)

消去 xy, $3(x+y)^2-19(x+y)-8=0.$ (5)

解之， $x+y=4,$ (6)

或 $x+y=-2/3,$ (7)

由是，從 3, $xy=-37,$ (8)

或 $xy=-11/9.$ (9)

解 (6), (8) 及 (7), (9) 兩對求 x, y, 得

$$x, y=2\pm\sqrt{41}, 2\mp\sqrt{41}; (-1\pm2\sqrt{3})/3, (-1\mp2\sqrt{3})/3.$$

例2. 解 $x^4+y^4=97,$ (1)

$x+y=5.$ (2)

於 (1) 及 (2) 內使 $x=u+v, y=u-v.$

得 $(u+v)^4+(u-v)^4=97,$ (3)

及 $2u=5.$ (4)

消去 u, $16v^4+600v^2-151=0.$ (5)

解之， $v=\pm1/2$ 或 $\pm i\sqrt{151}/2,$ (6)

以 $u=5/2$ (4) 及 v 之四値 (6) 代入公式 $x=u+v$, $y=u-v$, 得

$$x, y=2, 3; 3, 2; (5\pm i\sqrt{151})/2, (5\mp i\sqrt{151})/2.$$

設 $x=\alpha, y=\beta$ 爲對稱方程對之一解答，則 $x=\beta, y=\alpha$ 顯然爲其另一解答，除 $\alpha=\beta$ 外，此二解答不同．但 $x+y$ 及 xy 由 $y=\beta, x=\alpha$, 及 $x=\beta, y=\alpha$ 所得之値相同，其與 $x-y$ 之相當値即 $\alpha-\beta$ 及 $\beta-\alpha$ 則僅爲符號不同。

故從對稱方程對求出之，xy 或 $x+y$ 之絕對値必小於 x 或 y 之値．即如例1,用消去法從對稱方程對所得 xy 或 $x+y$ 之方程式之次數小於用同法求 x 或 y 之方程之次數，因設 c 爲 $x-y$ 之方程式之一根，則 $-c$ 亦必爲其另一根，故此方程式僅含 $x-y$ 之偶次羃，如例 2, 或僅奇次羃而無常數項。

664 注意：上法用於 x 及 $-y$ 或其他某對 x, y 函數之對稱方程式對，如 $x^4+y^4=a, x-y=b$ 可寫爲 $x^4+(-y)^4=a$, $x+(-y)=b$.

665 **屬於第二種範式之對稱方程式對．** 此種方程式對有時可如下法解之．

例．解
$$x^3=7x+3y, \qquad (1)$$
$$y^3=7y+3x, \qquad (2)$$

(1),(2) 相加 $x^3+y^3=10(x+y)$. (3)

從 (1) 減 (2) $x^3-y^3=4(x-y)$. (4)

由 §341, (3) 同値於二方程式
$$x+y=0, \qquad (5)$$
及
$$x^2-xy+y^2=10. \qquad (6)$$

同理 (4) 同値於二方程式
$$x-y=0, \qquad (7)$$
及
$$x^2+xy+y^2=4, \qquad (8)$$

解 (5), (7); (5), (8); (6), (7); (6), (8), 得 0, 0; 2, -2; -2, 2; $\pm\sqrt{10}$, $\pm\sqrt{10}$; $(1\pm\sqrt{13})/2$, $(1\mp\sqrt{13})/2$; $(-\pm\sqrt{13})/2$, $(-1\mp\sqrt{13})/2$.

習 題 XLVIII

解以下各方程式對．

1. $\begin{cases} x+y=5, \\ xy+36=0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2+y^2=200, \\ x+y=12. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2+y^2=293, \\ xy=34. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2+y^2=85, \\ x-y=7. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x^3+y^3=513, \\ x+y=9. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x^3+y^3=468, \\ x^2y+xy^2=420. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 27x^3+64y^3 \\ =65, \\ 3x+4y=5. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ x-y=2. \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^5+y^5=32, \\ x+y=2. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x+y=1/2, \\ 56\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+113=0. \end{cases}$
11. $\begin{cases} xy+x+y+19=0, \\ x^2y+xy^2+20=0. \end{cases}$
12. $\begin{cases} x^4+y^4-(x^2+y^2)=72, \\ x^2+x^2y^2+y^2=19. \end{cases}$
13. $\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ 1/x+1/y=3/10. \end{cases}$
14. $\begin{cases} x^2+3xy+y^2+2x+2y=8, \\ 2x^2+2y^2+3x+3y=14. \end{cases}$
15. $\begin{cases} x^3=5y, \\ y^3=5x. \end{cases}$

含兩個以上未知數之方程式

含三未知數之三個方程式當其一爲二次方程式及其他爲二一次方程式時，可用二次方程式解之；又能化爲一個或多個等值方程式組，令其一含一二次方程及其他均爲一次之方程式組，亦可由此法解之．含四未知數之四方程之組，亦可用此同法，餘類推。

設 A, B, C 爲 x, y, z 之 m, n, p 次整函數，且無公因子存於任二者之中，則此方程式 $A=0, B=0, C=0$ 有 mnp 個解答。但解答中之幾個可爲無限大。

例1．解
$$z^2-xy-7=0, \quad (1)$$
$$x+y+z=0, \quad (2)$$
$$3x-2y+2z+2=0. \quad (3)$$

解(2)，(3)求 x, y，以 z 表之，
$$x=-(4z+2)/5, \quad (4)$$
$$y=(-z+2)/5. \quad (5)$$

代入(1)，並化簡之，
$$7z^2+2z-57=0, \quad (6)$$

解(6)， $z=-3$ 或 $19/7$.

由是，從(4)，(5)，$x, y, z=2, 1, -3$; $-\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{19}{7}$.

例2．解
$$xy=6, \quad (1)$$
$$yz=12 \quad (2)$$
$$zx=8 \quad (3)$$

以(1)除(2) $z/x=2$ 或 $z=2x$ (4)

以(4)代入(3)，$x^2=4$，故 $x=\pm 2$. (5)

從(5)，(4)，(1)得 $x, y, z=2, 3, 4; -2, -3, -4$.

習題 XLIX

解下列各組方程。

1. $\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=2. \\ x^2-yz=19. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(y+z)=12, \\ y(z+x)=6, \\ z(x+y)=10. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (y+b)(z+c)=a^2, \\ (z+c)(x+a)=b^2, \\ (x+a)(y+b)=c^2. \end{cases}$

習 題 L

用本章之任何方法解以下各方程式組。

1. $\begin{cases} 7x^2-6xy=8, \\ 2x-3y=5. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=1. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-y=a, \\ xy=(b^2-a^2)/4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{y^2}=a^2+b^2, \\ x^2+y^2=0. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{x}=1, \\ \dfrac{7}{xy}-\dfrac{1}{y^2}=12. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x+y=a+b, \\ \dfrac{a}{x+b}+\dfrac{b}{y+a}=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{1001}{125}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{5}. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=5, \\ \dfrac{ab}{xy}=2. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{17}{4}xy, \\ x-y=\dfrac{3}{4}xy. \end{cases}$

10. $a(x+y)=b(x-y)=xy.$

11. $40xy=21(x^2-y^2)=210(x+y).$

12. $\begin{cases} 4x^2-25y^2=0, \\ 2x^2-10y^2-3y=4. \end{cases}$ 13. $\begin{cases} x^2+3xy-9y^2=9, \\ x^2-13xy+21y^2=-9. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-7y^2-29=0, \\ x^2-6xy+9y^2-2x+6y=3. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x/y+y/x=65/28, \\ 2(x^2+y^2)+(x-y)=34. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2y=a, \\ xy^2=b, \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x^2y+xy^2=a, \\ x^2y-xy^2=b. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x=a(x^2+y^2), \\ y=b(x^2+y^2). \end{cases}$

19. $\begin{cases} (x+y)/(x-y)=5/3, \\ (2x+3y)(3x-2y)=110a^2. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 3(x^3-y^3)=13xy, \\ x-y=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^4+y^4=a^4, \\ x+y=a. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 21(x+y)=10xy, \\ x+y+x^2+y^2=68. \end{cases}$

23. $x^2+y^2=xy=x+y.$ 24. $x^2-xy+y^2=3a^2=x^2-y^2.$

25. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=21, \\ x+\sqrt{xy}+y=7. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 4x^2-3y^2=12(x-y), \\ xy=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2+y^2=x+y+20, \\ xy+10=2(x+y). \end{cases}$ 28. $\begin{cases} x^2+4x-3y=0, \\ y^2+10x-9y=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 28(x^5+y^5)=61(x^3+y^3), \\ x+y=2. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} xy-x/y=a, \\ xy-y/x=1/a. \end{cases}$

31. $\begin{cases}(x+1)^3+(y-2)^3=19,\\ x+y=2.\end{cases}$ 32. $\begin{cases}x^2+y=8/3,\\ x+y^2=34/9.\end{cases}$

33. $\begin{cases}y^2-xy-yz=3,\\ x+4y+z=14,\\ x-y+2z=0.\end{cases}$ 34. $\begin{cases}x+y+z+u=0,\\ 3x+z+u=0,\\ 3y+2z=0,\\ x^2+y^2+zu=5.\end{cases}$

35. $\begin{cases}(y+z)(x+y+z)=10,\\ (z+x)(x+y+z)=20,\\ (x+y)(x+y+z)=20.\end{cases}$ 36. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ xy+yz+zx=-1.\\ 2x+y-2z=-3.\end{cases}$

習題 LI

1. 兩數之立方之差爲 218,其差之立方爲 8;求各數。
2. 二數和之平方較其乘積多 63,又其立方之差爲189;問二數爲何?
3. 一分數，分母分子之和爲 11;又此分數以另一分數其分子與分母較原分數多 3 與 4 者乘之，其積爲2/3 求此分數。
4. 分 37 爲三部其乘積爲 1440, 又其中二者之乘積較三倍第三者多 12;求此三部。
5. 長方形之對角線長13呎;若每邊較原長度增 2 呎，則其面積較原來增38方呎；各邊之長度爲何?
6. 直角三角形之周邊長36吋，又其面積爲54方吋;求各邊之長。
7. 直角三角形之弦較其垂直之二邊一長 3 吋，一長24吋，求各邊之長度。
8. 由下列已知條件，求一室之長寬高：此室地板之面積爲一 224 方呎之長方形，又其二面牆之面積爲 126 及 144 方呎。
9. 一長方形周圍鑲以寬 5 吋之邊，長方形之面積爲168 方吋，周圍所鑲邊之面積共 360 方吋，求長方形之長及寬。

10．A 以 135 元購煤較 B 多得 3 噸，又 A 購 4 噸較 B 購 5 噸少 7 元，求每人每噸購價若干？

11．本金若干在某種利率下以單利儲蓄一年，本利之和共 128.4元，若本金增 100 元，利率增 $1\frac{1}{2}$ 倍，則二年後之本利和為 1456 元，問本金若干？ 利率若干？

12．某人遺洋 60,000 元分與子孫七人，其子共得全部之 $\frac{1}{3}$，每人較孫所得多 2000 元，問子若干人，孫若干人，各得洋若干？

13．某舟子於其平常速率下，順流划行15哩，較其回程少 5 小時，若此人加倍其速率，順流划行之時間較逆流僅少一小時，問於靜水中其平常速率如何，又水流速率如何？

14．A,B,C 三人能於 1 小時20分作一工程，若獨立為之，則 C 所須時間 2 倍於 A，而較 B 多 2 小時，問每人單獨工作此工程各須時若干？

15．A 與 B 二物沿周長20呎之圓周於同一方向作等速運動，A 轉一周較 B 少 2 秒，又 A 於 B 每分鐘相遇一次；問二物之速率為何？

16．二直線相遇一直角，0 點，A,B 二點向 0 做等速運動，A 現距28吋，B 距 9 吋；2 秒後，A 與 B 相距 13 吋，又 3 秒相距 5 吋，問 A 與 B 運動時之速率為何？

17．A,B,C 三人同時出發行某路程，A 每時行 $4\frac{1}{2}$ 哩，且較 B 先二時行完，B 每時較 C 多行 1 哩，且較 C 少用三時行完此路程，問此路程為何？

18．二信差 A,B 於同時從 P 及 Q 相向出發，當相遇時 A 較 B 多行12哩，相遇後 A 仍用前速度向 Q 進行，用 $4\frac{2}{3}$ 時然後到達，同時 B 於 $7\frac{5}{7}$ 時後至 P. 問 P,Q 間之距離為何？

含 x, y 二次方程之圖象

此種圖象之例. 任何已知 x, y 之二次方程之圖象，可用下例方法求得。 667

例 求 $y^2=4x$ 之圖象。 (1)

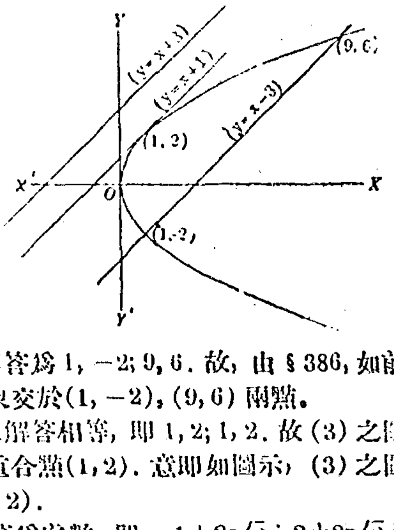
解 y， $y=\pm 2\sqrt{x}$. (2)

從 (2)，知 x 為負數時，y 為虛數；x 為 0 時，y 亦為 0；x 為正數時，y 有絕對值同而符號相反之二實值，故原式之圖象完全在 y- 軸之右，經過原點且關於 x- 軸對稱。

當 $x=0,\ 1/4,\ 1/2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots$

得 $y=0,\ \pm 1,\ \pm\sqrt{2},\ \pm 2,\ \pm 2\sqrt{2},\ \pm 2\sqrt{3},\ \pm 4,\cdots\cdots$

下圖為先繪解答 $(0,0),(\frac{1}{4},1),(\frac{1}{4},-1)\cdots\cdots$ 諸點，過諸點作一曲線即得所求圖象之一部，參看 § 389，此曲線與 y- 軸相切。



此曲線名為抛物線，含一"無窮支"向右伸展至無限遠。

例 2. $y^2=4x$ (1)之圖象與 $y=x-3$ (2)，$y=x+1$(3)，$y=x+3$ (4) 之圖象相遇於何點？

1. (1)，(2) 之解答為 1，-2；9，6. 故，由 § 386，如前圖所示 (1)，(2) 之圖象交於$(1,-2)$，$(9,6)$ 兩點。

2. (1)，(3) 之二解答相等，即 1，2；1，2. 故 (3) 之圖象遇 (1) 之圖象於二重合點$(1,2)$. 意即如圖示，(3) 之圖象切 (1) 之圖象於$(1,2)$.

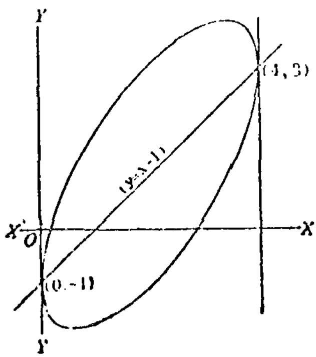
3. (1)，(4) 之解答為虛數，即 $-1\pm 2\sqrt{2}i,\ 2\pm 2\sqrt{2}i$. 故如圖所示，(1)，(4) 之圖形不相交。

例3.　求 $y^2-2xy+2x^2-6x+2y+1=0$ (1) 之圖象.

解　求 y,　　$y=x-1\pm\sqrt{4x-x^2}$.　　(2)

當根底 $4x-x^2$ 或 $x(4-x)$ 為正(或0), 即當 x 之值在 0 與 4 之間 (或為 0 或 4) 時, (2) 內 y 之值為實數, 故(1)之圖象在 $x=0$ 及 $x=4$ 二直線之間.

$x=0$ 及 $x=4$ 時, (2) 內 y 之二值相等, 即 $x=0$ 時為 $-1, -1$, $x=4$ 時為 3, 3. 意謂(1)之圖象切直線 $x=0$ 於$(0,-1)$, 切直線 $x=4$ 於$(4,3)$. 參看例2, 2. 因當 $4x-x^2$ 為零時 (2) 內 y 之二值相同, 故直線 $y=x-1$ 過二切點.



因 x 在 0 與 4 間之任一值代入(2)式, 皆與 y 以不同之二實數值, 即 $x-1$ 加或減 $\sqrt{4x-x^2}$. 故 x 之值中之任一值在 (1) 之圖象內皆有兩點, 各點可由先畫 $y=x-1$ 之直線, 再由 x 之值增減 $\sqrt{4x-x^2}$ 以增減其縱坐標極易得其各點.

例如, 當	$x=0$,	1,	2,	3,	4,
得直線之	$y=-1$,	0,	1,	2,	3,
(1) 圖象之	$y=-1$,	$\pm\sqrt{3}$,	1 ± 2,	$2\pm\sqrt{3}$,	3,

由此諸點所成之圖象為橢圓形之曲線, 此即名為橢圓.

解 (1) 求 x, 且應用 § 641 之方法, 可知此曲線之最高點及最低點為$(2+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$ 及 $(2-\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$.

例4.　求 $y^2-x^2+2x+2y+4=0$ (1) 之圖象.

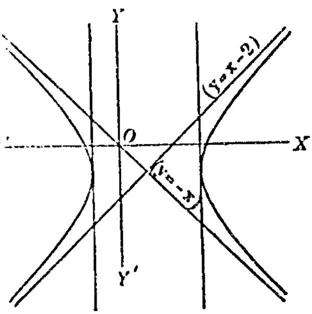
解之求 y, 且析其結果內之根底為因子.

$$y=-1\pm\sqrt{(x+1)(x-3)}.\qquad(2)$$

當 $x=-1$, 或 3 時, 根底 $(x+1)(x-3)$ 為零, 且 (2) 內 y 之值皆相等, 即: $-1, -1$.

意即 (1) 之圖象切 $x=-1$ 之直線於 $(-1,-1)$ 點，$x=3$ 之直線於 $(3,-1)$ 點，$y=-1$ 之直線爲過兩切點之直線。

當 $x<-1$ 或 $x>3$ 時，根底 $(x+1)(x-3)$ 爲正數．x 於此值中之任一值，皆與 y 以不同之二實值，亦即 (1) 圖象內之兩點。求此諸點，可先書 $y=-1$ 之直線，再於其常數縱坐標 -1，加或減 $\sqrt{(x+1)(x-3)}$ 之值。



故如圖所示，(1) 之圖象含二無限支，一切於直線 $x=-1$，向左伸展無限，一切於直線 $x=3$，向右伸展無限。

此曲線名爲雙曲線。

二直線名爲漸近線，雙曲線之無限支有與之相切之趨向，且謂之於無限遠處相切。二直線爲 $y=x-2$ 及 $y=-x$ 之圖象，可如下法求得，參看 §650，例1．

由 (1) 及方程 $y=mx+c$ 消去 y，　(3)

得　$(m^2-1)x^2+2(mc+m+1)x+(c^2+2c+4)=0$．(4)

設　$m^2-1=0$ 及 $mc+m+1=0$，

即設　$m=1,\ c=-2$，或 $m=-1,\ c=0$，

則 (4) 之二根皆爲無限大，§638，

故設 (3) 爲

$$y=x-2\ (3')\ 或\ y=-x\ (3'')$$

之形式，則 (1)，(3) 之解答皆爲無限大。

由是 $(3')$ 及 $(3'')$ 之圖象皆過 (1) 之圖象於二無限遠之重合點。

例5．求 $y^2-4xy+3x^2+6x-2y=0$ (1) 之圖象。

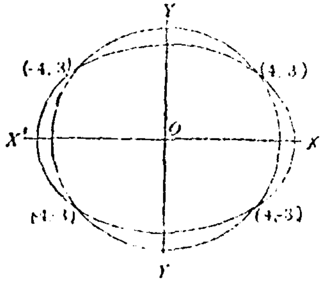
解 y，得　$y=2x+1\pm\sqrt{x^2-2x+1}$．　(2)

即　$y=3x$，或 $y=x+2$．

故 (1) 之圖象含二直線 $y=3x$ 及 $y=x+2$．

除根底爲零即 $x-1=0$ 外，(2) 內 y 有不同之二實值，

但當 $x-1=0$ 時，y 爲二等值即 3, 3. 故 $x-1=0$ 之直線過 (1) 之圖象於二重合點 (1, 3). 當然不能謂爲直線 $x-1=0$ 切 (1) 之圖象於 (1, 3). 此可解爲直線 $x-1=0$ 與構成 (1) 圖之二直線 $y=3x$ 及 $y=x+2$ 之交點相重合。



求下二方程之圖象及其交點，

例6. $x^2+y^2=25$,　(1)

$x^2/16+y^2/9=2$.　(2)

(1) 之圖象爲以原點 O 爲心，以 5 爲半徑之圓，(2) 之圖象爲橢圓。

二曲線相交於 (4, 3), (−4, 3), (−4, −3), (4, −3) 四點，此四點即 (1), (2) 解答之圖象。

例7. 求下二方程之圖象及其交點。

$$xy-3y-2=0. \tag{1}$$

$$xy+2y+3=0. \tag{2}$$

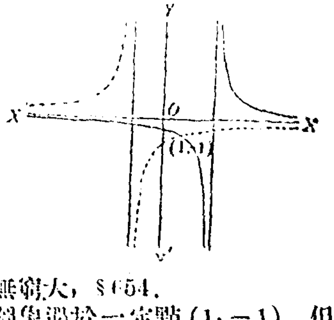
從 (1) 得　　$y=2/(x-3)$.　(3)

於此 x 之每實值，y 有一相當實值即得圖象之一點，

當　$x=-\infty, -1, 0, 1, 2, 2\frac{3}{4}, 3, 3\frac{1}{4}, 4, \infty$,

得　$y=0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1, -2, -8, \pm\infty, 8, 2, 0$.

畫諸解答，得以實線表兩無窮支之雙曲線，其漸近線爲 $y=0$ (如例 4 求得), 及 $x-3=0$ (因當 $x=3$ 時，$y=\infty$).



同法求得 (2) 之圖象爲虛線所示之雙曲線，其漸近線爲 $y=0$ 及 $x+2=0$.

(1), (2) 二方程之解答，僅 $x=1, y=-1$ 之一解答爲有限數，餘三解答爲無窮大，§ 654.

二雙曲線即 (1), (2) 之圖象過於一定點 (1, −1). 但

因其有一公共漸近線 $y=0$，故認其在 $(\infty, 0)$ 有二無限遠之重合交點；又因其有二平行漸近線 $x-3=0$ 及 $x+2=0$，故認其在 $(0, \infty)$ 有一無限遠之交點。

各種圖象通論. 總論前例所得結果，得以下結論。 663

假定具實數係數，含 x, y 之任何二次方程，如

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0. \tag{1}$$

設 b 不為 0，解之求 y，得

$$by=-(hx+f)\pm\sqrt{R}, \tag{2}$$

式內 $R=(h^2-ab)x^2+2(hf-bg)x+(f^2-bc)$，

從 (2) 由 x 每一能令 R 為正之值，可得 y 之二實值，相當於 y 之每二值，可自下列直線而得此圖象之二點。

$$by=-(hx+f).$$

再由 x 之值計算 $\sqrt{R}/b$ 以增減其縱坐標。參看 § 667，例 1, 3, 4.

此圖象之形按 R 之因式之性質而定。

1. 當 $(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)=0$ 時。

於此 R 為完全平方，§ 635，(1) 之左邊可析為一次因式，§ 635，例 3. 設因式之係數為實數，則 (1) 之圖象為二直線。§ 667，例 5.

2. 當 $(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)>0$ 時，

此類除 $h^2-ab=0$ 外，根底 R 可化為 $R=(h^2-ab)(x-\alpha)(x-\beta)$ (3)，α 及 β 為實數，且 $\alpha<\beta$，§ 635，

設 $h^2-ab<0$，則當且僅當 x 之值在 α 及 β 之間，(3) 之積爲正，故(1)之圖象爲介於所切二直線 $x-\alpha=0$ 及 $x-\beta=0$ 間之閉曲線，因知其必爲橢圓或圓。參看 §667，例 3.

設 $h^2-ab>0$，則(3)之積僅當 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$ 爲正，此圖象含兩無窮支，一切於直線 $x-\alpha=0$，向左伸展，一切於直線 $x-\beta=0$ 向右伸展。因知此爲一雙曲線。§667，例 4.

設 $h^2-ab=0$，則 $R=2(hf-bg)x+(f^2-bc)$，式內 $hf-bg\neq0$，且僅當 $x>-(f^2-bc)/2(hf-bg)$ 時此式爲正，故此圖象有一無窮支，完全位於其所切直線 $2(hf-bg)x+(f^2-bc)=0$ 之一邊，因知此爲一拋物線，§667，例 1.

3. 當 $(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)<0$ 時。

此類 $R=0$ 之二根爲共軛虛數，§635，且設其爲 $\lambda+\mu i$ 及 $\lambda-\mu i$，則 R 可化爲 $R=(h^2-ab)((x-\lambda)^2+\mu^2)$，(4).

設 $h^2-ab>0$，則(4)之積於 x 之所有值皆爲正，故(1)之圖象含二無窮支，位於直線 $by=-(hx+f)$ 之兩旁。因知此爲雙曲線，即 $y^2-x^2=1$.

設 $h^2-ab<0$，則(4)之積於 x 之所有值皆爲負，故(1)之圖象完全爲虛，即 $x^2+y^2+1=0$.

以上所論皆假定 $b\neq0$. 但設 $b=0$ 而 $a\neq0$，且解(1)求 x 以代 y，則得相似之結論，設 $a=0$，及 $b=0$，則(1)之圖象爲一雙曲線，如 §667，例 7，或爲二直線，一平行於 x-軸，一平行於 y-軸。

習題 LII

求下列方程之圖象。

1. $y^2=-8x$.　2. $x^2+y^2=9$.　3. $(y-x)^2=x$.

4. $x^2+2xy+2y^2=8$.　5. $y^2-4xy+3x^2+4x=0$.

6. $y^2-2xy+1=0$.　7. $y^2-2xy-1=0$.

8. $2x^2+3y^2-4x+6y=0$.　9. $y^2-x^2-3x+y-2=0$.

10. $2x^2+4xy+4y^2+x+4y-5=0$.

11. $4x^2-12xy+9y^2+3x-6y=0$.

求下列各對方程及其交點之圖象。

12. $\begin{cases} xy=1, \\ 3x-5y=2. \end{cases}$　13. $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ x^2-xy+x=0. \end{cases}$　14. $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ y^2=2x. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y^2-xy-2x^2-2x-2y-2=0, \\ y^2-xy-2x^2+2=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} (x-2y)(x+y)+x-3y=0, \\ (x-2y)(x-y)+2x-6y=0. \end{cases}$

17. 求 $x^2+y^2-6x-2y+1=0$ 及與 x 及 y 軸交點之圖象。

18. 試證 $(x-y)^2-2(x+y)+1=0$ 切於 x 及 y 軸。

19. 試證直線 $y=3x+5$ 切 $16x^2+y^2-16=0$ 之圖象於 $(-3/5, 16/5)$ 點。

20. 問 m 為何值方令直線 $y=mx+3$ 切於 $x^2+2y^2=6$ 之圖象?

21. 問 c 為何值方令直線 $7x-4y+c=0$ 切於 $3x^2-y^2+x=0$ 之圖象?

22. 求證直線 $y=0$ 及 $x-2y+1=0$ 為 $xy-2y^2+y+6=0$ 之圖象之漸近線。

23. 求 $2x^2+3xy-2y^2+x+2y+2=0$ 之圖象之漸近線。

24. 問 λ 為何值，$x^2+\lambda xy+y^2=x$ 之圖象為橢圓? 拋物線? 雙曲線?

XVII. 不等式

669 **簡單不等式.** 絕對不等式爲類似 $x^2+y^2+1>0$ 之不等式，此於其所含字母之一切值皆能成立；條件不等式爲類似 $x-1>0$ 之不等式，此不能於其所含字母之一切值皆能成立，反之須加以某種限制.

670 不等式計算之原則已見於§261，由此原則知將某項由一邊移至他邊而變其符號；或以相同之正數乘不等式之兩邊；不等式之符號 $>$ 或 $<$ 依然不變. 但設兩邊同乘以負數，則符號 $>$ 變爲 $<$；$<$ 變爲 $>$.

例1. 求證 $a^2+b^2>2ab$.

已知 $(a-b)^2>0$.

即 $a^2-2ab+b^2>0$.

故 $a^2+b^2>2ab$.

例2. 求證 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

已知 $a^2+b^2>2ab,\ b^2+c^2>2bc,\ c^2+a^2>2ca$.

加三不等式之相當項，且除以 2，得 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

例3. 解不等式 $3x+5>x+11$，即求 x 值之限制.

移項，$2x>6$,

$x>3$.

例4. 解 $x^2-2x-3<0$,

析因式，$(x+1)(x-3)<0$,

欲滿足此式，二因子必一正一負. 故必 $x>-1$ 而 <3，即 $-1<x<3$.

671 **聯立不等式.** 一個或多個形如

$$ax+by+c>0$$

之不等式組，由於以下之考量，可用簡單之圖解法解求變數 x 及 y.

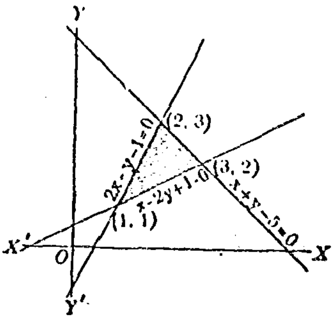
先繪 $ax+by+c=0$ 圖象之直線，§ 385, 則在此直線之一側所有圖象中諸對 x, y 之值必致 $ax+by+c>0$; 且在此直線之他側所有圖象中諸對之值必致 $ax+by+c<0$.

例如，使 (x_1, y_1) 為 $y-(mx+c)=0$ 圖象上之一點，則 $y_1-(mx_1+c)\equiv 0$. 又設 $y_2<y_1$, 則 (x_1, y_2) 點在直線下，得 $y_2-(mx_1+c)<0$; 又設 $y_3>y_1$, 則 (x_1, y_3) 在線上，得 $y_3-(mx_1+c)>0$.

例. 解聯立不等式

$k_1=x-2y+1<0$, $k_2=x+y-5<0$, $k_3=2x-y-1>0$.

先求 $k_1=0$, $k_2=0$, $k_3=0$ 諸圖象，如下圖.



不等式 $k_2<0$ 適合於位在直線 $k_2=0$ 與原點同側之圖象內 x, y 之數對值；因設 $x=0$, $y=0$, 得 $k_2=-5$, 則 <0. 同法可知不等式 $k_1<0$ 及 $k_3>0$ 均適合於圖象位在直線 $k_1=0$, $k_3=0$, 與原點異側諸對 x, y 之值.

因知已知不等式

$k_1<0, k_2<0, k_3>0$, 適合於圖象在此三線構成之三角形內諸對 x, y 之值.

習　題　LIII

設下列 a, b, c 諸字母表不等之正數.

1. 證 $a/b+b/a>2$.
2. 證 $(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$.
3. 證 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.
4. 證 $a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c>6abc$.

5. 證 $a^3+b^3+c^3>3abc$.

6. 解 $x+7>3x/2-8$.

7. 解 $2x^2+4x>x^2+6x+8$.

8. 解 $(x+1)(x-3)(x-6)>0$.

9. 解 $y-x-2<0$, $x-3<0$, $x+1>0$ 用圖象法。

10. 再以上法解 $y-x>0$, $y-\frac{1}{2}x<0$.

11. 再解 $x+y+3>0$, $y-2x-4<0$, $y+2x+4>0$.

12. 求證 $x^2+2x+5>0$ 於 x 之一切值皆真。

13. 用圖象法解 $x^2+y^2-1<0$, $y^2-4x<0$.

XVIII. 一次不定方程

672 **含二變數之單方程.** 已知形如

$$ax+by=c$$

之任一方程式內 a, b, c 爲整數，且 a, b 無公因數. 今求表所有適合此方程之 x, y 諸整數值之式，且此諸對值須爲正數。

673 **定理1.** 所有上述種類之方程 $ax+by+c=0$ 皆有整數解答。

因 a, b 互爲素數，故用 §491 所述方法，可求正或負之二整數 p 及 q，能致 $ap+bq=1$，且由是 $a(pc)+b(qc)=c$，茲已證明 $x=pc$, $y=qc$ 爲 $ax+by=c$ 解答之一。

674 **定理2.** 設 $x=x_0$, $y=y_0$ 爲方程 $ax+by=c$ 整數解答之一，則其所有整數解答可用公式

$$x=x_0+bt,\ y=y_0-at$$

求得. t 假定爲所有正整數。

第一，$x=x_0+bt$, $y=y_0-at$ 永爲 $ax+by=c$ (1) 之一解。

因代入 (1), $a(x_0+bt)+b(y_0-at)=c$,

或，化簡，$$ax_0+by_0=c,$$

由假設 $x=x_0$, $y=y_0$ 旣爲 (1) 之一解答。

第二，(1) 之每個整數解答，皆由 $x=x_0+bt$, $y=y_0-at$ 得之。

因設 $x=x_1$, $y=y_1$, 表任一第二解答。

於是 $$ax_1+by_1=c \text{ 及 } ax_0+by_0=c,$$

相減，$$b(y_1-y_0)=-a(x_1-x_0). \tag{2}$$

從 (2) 知 b 爲整數 a 及 x_1-x_0 相乘積之因數。由是，因 b 與 a 互爲素數，故 b 必含於 x_1-x_0 內，即爲 x_1-x_0 之因數，§ 492, 設稱其商爲 t', 於是得

$$x_1-x_0=bt' \text{ 或 } x_1=x_0+bt'. \tag{3}$$

(3) 代入 (2) 且化簡，又得

$$y_1=y_0-at'. \tag{4}$$

675 從 §§ 673, 674, 知上述種類之任何方程 $ax+by=c$ 有無窮個整數解答。設 a, b 之符號相反亦有無窮個正數解答；但若 a, b 同號，則僅有有限正數解答或無正數解答。

例如，$2x+3y=18$ 之一解答爲 $x=3, y=4$.

故一般解答爲 $x=3+3t$, $y=4-2t$.

正數解答相當於 $t=-1, 0, 1, 2$ 者即 $x, y=0, 6; 3, 4; 6, 2; 9, 0$.

976 § 674 節之定理令人由一特別解答即可寫出此方程之一般解答。一特別解答常可由心算求得，如 $10x+3y=12$, 其解答之一爲 $x=0, y=4$. 一特殊解答永可照 § 673 方法求得，亦可由下列所示方法求之。

例求 $7x+19y=213$ 之整數解答。 (1)

解之，求係數較小之變數 x, 且約之，得

$$x=\frac{213-19y}{7}=30-2y+\frac{3-5y}{7}. \tag{2}$$

因設 x 爲整數，同時 y 亦爲整數，必 $(3-5y)/7$ 爲整數。稱此整數爲 u，則 $(3-5y)/7=u$.

於是 $$5y+7u=3. \tag{3}$$

如 (1) 處理 (3)，得

$$y=\frac{3-7u}{5}=-u+\frac{3-2u}{5}. \tag{4}$$

$(3-2u)/5$ 必爲整數，今使之等於 v.

於是 $$2u+5v=3. \tag{5}$$

如以處理 (1) 及 (3) 者處理 (5)，得

$$u=\frac{3-5v}{2}=1-2v+\frac{1-v}{2}. \tag{6}$$

當 $v=1$ 時，分數項$(1-v)/2$ 爲零而 u 得整數 -1，

代 $u=-1$ 入 (4)，得 $y=2$.

代 $y=2$ 入 (2)，得 $x=25$.

故 (1) 之一般解答爲

$$x=25+19t,\ y=2-7t.$$

相當 $t=-1$，及 $t=0$，有二正數解答，即：$x, y=6, 9; 25, 2$.

觀察 (2)，(4)，(6) 分數項內 y, u, v 之係數適爲求已知係數 7 及19之最大公約數時之連續除數，因 7 及19無公因數，故最後得除數或係數以此法解 a, b 無公因數之任何方程 $ax+by=c$ 皆爲正確，故此法永遠能得此方程之一解。

但實用時甚少需要上示演算之全部。如已得 (4) 即可看出 $u=-1$，能使$(3-2u)/5$ 爲整數，由是得 $y=2$，且由 (2) 得 $x=25$.

677 注意具整係數之方程 $ax+by=c$，設 a, b 有公因數 d，則除 d 亦爲 c 之因數外，不能有整數解答。因設 x, y 爲整數，d 爲 $ax+by$ 之因數亦必爲 c 之因數。如 $4x+6y=7$ 即無整數解答。

聯立方程. 含三變數之二整係數聯立方程，其整 678
數解答可用下例所示方法求得。

例. 求下二方程之整數解答

$$3x+6y-2z=22, \qquad (1)$$

$$5x+8y-6z=28. \qquad (2)$$

先消去 z, 且化簡之，

得 $$2x+5y=19, \qquad (3)$$

再如 § 676, 求 (3) 之一般解答。

得 $$x=7+5t,\ y=1-2t. \qquad (4)$$

再代 (4) 於 (1), 且化簡之。

得 $$2z-3t=5. \qquad (5)$$

再求 (5) 之一般解答。

得 $$z=1-3u,\ t=-1-2u. \qquad (6)$$

u 表任何整數。

最後以 $t=-1-2u$ 代入 (4) 且化簡。

得 $$x=2-10u,\ y=3+4u,\ z=1-3u. \qquad (7)$$

為所求之一般解答，有相當 $u=0$ 之解答為正，即 $x=2,\ y=3,\ z=1$.

注意設含二變數之導來方程之一無整數解，則已知式亦無整數解答 § 677.

可以同法解含四變數之三已知方程，餘類推。

含兩個以上變數之單方程. 下例釋明求含兩 679
個以上變數之整係數單方程之整數解答之公式之法。

例. 求下方程之整數解。

$$5x+8y+19z=50. \qquad (1)$$

解之求 x, $$x=10-y-3z-\frac{3y+4z}{5}. \qquad (2)$$

$(3y+4z)/5$ 必為整數，使之等於 u,

於是　　$3y+4z=5u.$　　(3)

解之求 y,　　$y=u-z+\dfrac{2u-z}{3}.$　　(4)

$(2u-z)/3$ 必爲整數，使之等於 v.

於是　　$z=2u-3v.$　　(5)

代 (5) 於 (4),　　$y=-u+4v.$　　(6)

代 (5) 及 (6) 入 (2),

$$x=10-6u+5v. \qquad (7)$$

公式 (5), (6), (7) 構成所求之一般解答，其中 u, v 可爲任何整數。

以 $u=2, v=1$ 代入式 (5), (6), (7), 得 (1) 之一正解答，即 $x=3, y=2, z=1$.

習題 LIV

求下列之一般整數解答；且求其正整數解答。

1. $6x-17y=18.$　　2. $43x-12y=158.$

3. $16x+39y=1.$　　4. $72x+23y=845.$

5. $49x-27y=28.$　　6. $47x-97y=501.$

7. $\begin{cases}2x+5y-8z=27,\\3x+2y+z=11.\end{cases}$　　8. $\begin{cases}5x+2y=42,\\3y-7z=2.\end{cases}$

9. $4x+3y=2z+3.$　　10. $2x+3y+4z=17.$

11. 求方程 $3x+7y=1043$ 之正整數解答之個數。

12. 化分數 11/35 爲分母成 5 及 7 之二正分數之和。

13. 一人購牛犢每頭 \$7, 又購羊羔每隻 \$6, 共用 \$110, 問每種各購若干?

14. 分 23 爲三部令其第一部分之三倍，第二部分之二倍，及第三部分之五倍之和爲 79.

15. 求以 5, 7, 9 除之而得餘數 4, 6, 8 者之最小數。

16. 分等長之二竿各爲 250 及 253 等分，設置二竿令其各端取齊，則某二分劃極近?

XIX. 比與比例．因變

比與比例

比． 算術及代數學中常擴充 § 215 比字之用途於數 680
目；設 a, b 表任二數，則定 a 與 b 之比為商數 a/b．（比較 § 216）．

a 與 b 之比以 a/b 或 $a:b$ 表之．

在比式 $a:b$ 內，a 稱為前項，b 稱為後項．

比之性質． 因比，如 $a:b$，為分數，故其性質即分 681
數之性質，由此

設以同數乘或除比之兩項，則比之值不變．

如 $a:b=ma:mb=a/n:b/n$．

另一方面，設比之兩項自乘至同次冪或加以同數，除 $a=b$ 外，則 $a:b$ 之值必變．

設 a, b 及 m 為正數，則 $a:b$ 之值如 $a<b$，於 a, b 同加以 m 後增大，如 $a>b$，於同加 m 後減小．

因 $$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)},$$

而 $m(b-a)/b(b+m)$ 之為正或負全視 $a<b$ 或 $a>b$ 而定．

比例． 設二比 $a:b$ 及 $c:d$ 相等，則四數 a, b, c, d 稱 682
為成比例．

此比例可寫為

$a/b=c/d$，或 $a:b=c:d$，或 $a:b::c:d$．

讀作"a 比 b 等於 c 比 d"．

比例 $a:b=c:d$ 內，稱 a 及 d 為外項，b 及 c 為內項，又稱 d 為 a, b 及 c 之第四比例項．

683 **定理。** 任何比例，兩外項之積等於兩內項之積；即

設 $a:b=c:d$，則 $ad=bc$.

因從 $a/b=c/d$，僅消去分母，即得 $ad=bc$.

例。某比例之第一，二，及四項爲 $1/2$, -3, 及 5; 求第三項。

設 第三項爲 x, $1/2:-3=x:5$.

由是 $5\cdot 1/2=-3\cdot x$

解之求 x, $x=-5/6$.

684 **反之。** 設第一對數之積等於第二對數之積，則以任一對數爲外項，他一對數爲內項，無論依何次序排列，此四數均成比例。

因，使 $ad=bc$.

兩邊除以 bd，得 $a/b=c/d$. 故

$a:b=c:d$ (1) 及 $c:d=a:b$. (2)

同法次第以 cd, ab, 及 ac, 除 $ad=bc$ 之兩邊，得

$a:c=b:d$ (3) 及 $b:d=a:c$, (4)

$d:b=c.a$ (5) 及 $c:a=d:b$, (6)

$d:c=b:a$ (7) 及 $b:a=d:c$ (8)

685 **比例項之易位。** 從 §§ 683, 684 知設 a, b, c, d 爲 (1)—(8) 之任一種排列成比例，則依他種次序排列亦成比例。

1. 任何比例比之兩項可以互換。

如，設 $a:b=c:d$，則 $b:a=d:c$

2. 任何比例之兩內項或兩外項可以互換。

如，設 $a:b=c:d$，則 $a:c=b:d$.

1及2之變形各稱爲逆理(*inversion*)及互理(*alternation*).

比例之其他變形. 636

設知 $a:b=c:d$, 可斷定

1. $a+b:b=c+d:d$.　　2. $a-b:b=c-d:d$.

3. $a+b:a-b=c+d:c-d$.

4. $ma:mb=nc:nd$.　　5. $ma:nb=mc:nd$.

6. $a^n:b^n=c^n:d^n$.

由1之外項相乘，及內項相乘得 $ad+bd=bc+bd$. 即 $ad=bc$, 因 $a:b=c:d$, 故此爲眞. 由是1亦必眞. 2−6爲眞之証明可依同法行之.

變 $a:b=c:d$ 爲1, 2, 3之變形各稱爲合理(*composition*), 分理(*division*), 及合分理(*composition and division*).

例. 解 $x^2+2x+3:x^2-2x-3=2x^2+x-1:2x^2-x+1$.

由3, $\quad 2x^2:2(2x+3)=4x^2:2(x-1)$.

故 $\quad x^2=0, \qquad (1)$

由4, 5, $\quad 1:2x+3=2:x-1. \qquad (2)$

解(1)及(2) $\quad x=0, 0$, 或 $-7/3$.

定理. 連續等比之任一前項比其後項等於諸前項之和比諸後項之和. 637

如，設 $\quad a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$,

則 $\quad a_1:b_1=a_1+a_2+a_3:b_1+b_2+b_3$.

因設等比之公値爲 r, 則得

$$a_1/b_1=r,\ a_2/b_2=r,\ a_3/b_3=r.$$

由是 $\quad a_1=rb_1,\ a_2=rb_2,\ a_3=rb_3,$

相加 $\quad a_1+a_2+a_3=r(b_1+b_2+b_3)$.

故 $\quad \dfrac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=r=\dfrac{a_1}{b_1}$.

例1. 設 $x:(b-c)yz=y:(c-a)zx=z:(a-b)xy$,

則 $x^2+y^2+z^2=0$.

因乘第一比各項以 x, 第二比各項以 y, 第三比各項以 z, 於是應用以上定理, 得

$$\frac{x^2}{(b-c)xyz}=\frac{y^2}{(c-a)xyz}=\frac{z^2}{(a-b)xyz}=\frac{x^2+y^2+z^2}{0},$$

顯然必須 $x^2+y^2+z^2=0$.

上例方法於解複雜之比例問題時甚爲有用。

例2. 求証設 $a:b=x:y$,

則 $a^3+2b^3:ab^2=x^3+2y^3:xy^2$.

使 $a/b=x/y=r$, 由是 $a=rb$ 及 $x=ry$.

於是 $(a^3+2b^3)/ab^2=(r^3b^3+2b^3)/rb^3=(r^3+2)/r$,

$(x^3+2y^3)/xy^2=(r^3y^3+2y^3)/ry^3=(r^3+2)/r$.

688 **連比例。** 設 $a:b=b:c=c:d=\cdots$ 則謂 $a, b, c, d, \cdots\cdots$ 諸數成連比例。

設 a, b, c 三數成連比例, 則 $a:b=b:c$, 則 b 稱爲 a, c 之比例中項, c 稱爲 a, b 之第三比例項。

設 a, b, c 成連比例, 則 $b^2=ac$.

因 $a:b=b:c$, 故 $b^2=ac$, § 683.

習題 LV

1. 求 15, 24 及 20 之第四比例項; 15 及 24 之第三比例項; $5a^3b^2$ 及 $20ab^2$ 之比例中項; $\sqrt{12}$ 及 $\sqrt{75}$ 之比例中項.

2. 設 $3x-2y=x-5y$, 求 $x:y$; 及 $x+y:x-y$.

3. 設 $2x^2-5xy-3y^2=0$, 求 $x:y$ 及 $y:x$.

4. 設 $ax+by+cz=0$ 及 $a'x+b'y+c'z=0$,

則 $x:y:z=bc'-b'c:ca'-c'a:ab'-a'b$.

5. 設 $a:b=c:d$, 則 $ab+cd$ 爲 a^2+c^2 及 b^2+d^2 之比例中項。

6. 設 $(a^2+b^2)cd=(c^2+d^2)ab$, 則得 $a:b=c:d$ 或 $a:b=d:c$.

7. 設　$a:b=c:d$, 則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}:\sqrt{a+b}$
$=\sqrt{c}+\sqrt{d}:\sqrt{c+d}$.

8. 設　$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, 則 $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=3\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}$.

9. 設　$a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n; l_1, l_2, \cdots, l_n$ 諸數均爲正，則比值 $l_1a_1+l_2a_2+\cdots+l_na_n:l_1b_1+l_2b_2+\cdots+l_nb_n$ 爲在 $a_1:b_1, a_2:b_2, \cdots, a_n:b_n$ 諸比之極大及極小之中間值。

10. 設　$a-b:k=b-c:l=c-a:m$, 且 a, b, c 不等，則$k+l+m=0$.

11. 設　$x:mz-ny=y:nx-lz=z:ly-mx$, 則 $lx+my+nz=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=0$.

12. 設　$a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$, 則此諸比各等於 $(l_1a_1^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n)^{\frac{1}{n}}:(l_1b_1^n+l_2b_2^n+l_3b_3^n)^{\frac{1}{n}}$.

13. 試用 §686 解次列方程。

(1) $\frac{x^2+ax-a}{x^2-ax+a}=\frac{2x^2+a}{2x^2-a}$.

(2) $\frac{2x^3-3x^2+2x+2}{2x^3-3x^2-2x-2}=\frac{3x^3-x^2+10x-26}{3x^3-x^2-10x+26}$.

14. 試以 2:3:5 之比分 520 爲三部分。

15. 以兩種車厘酒 (*sherry*) 注入 A 及 B 二桶，A 內以 3:5 之比，B 內以 3:7，問自二桶各取若干始能兌成一種含 6 加侖他種含12加侖之混合液?

因　　變

一自變數。 設二變數 x 及 y, 無論其值如何變換其比常爲一定，則謂 y 依 x 而正變，或 x 及 y 依比例而變。 689

當 $y/x=c$, 或 $y=cx$, 式內 c 表一常數時，則簡稱之爲 y 因 x 而正變。

記法 $y\propto x$, 意爲"y 因 x 正變"。

設已知 y 因 x 正變，則可寫作 $y=cx$; 又設已知 x, y 之一對相當值則可得 c, 於是得 x 及 y 之關係方程式，由是可 690

算出相當 x 任何已知值之 y 值。

例。設 y 因 x 而正變，及 $x=2$ 時 $y=12$，求 $x=20$ 時 y 爲何值？

因 $$y=cx$$

且由假設，$y=12$，及 $x=2$ 適合此方程式。

故 $$12=c\cdot 2，即\ c=6.$$

由是 $$y=6x$$

故當 $x=20$ 時，得 $y=6\cdot 20=120$.

691 y 有時不依 x 之自身正變而因 x 之某函數而正變，例如因 x^2，或 $x+1$. 設 $1/x$. 設 y 因 $1/x$ 而正變，則稱 y 因 x 而反變。

例。設已知 y 爲一常數及因 x 而反變之一項之和；且當 $x=-1$ 時 $y=1$，$x=1$ 時 $y=5$，求 x 及 y 之關係方程式。

由假設，$x=a+b/x$，a 及 b 爲常數。

因此方程式可以 $x=-1, y=1$，及 $x=1, y=5$ 適合之。

故得 $$1=a-b\ 及\ 5=a+b.$$

由是 $a=3$，$b=2$，而所求方程式爲 $y=3+2/x$.

692 **一個以上之自變數。** 使 x 及 y 表各自獨立之二變數，設第三變數 z 因 xy 之積而正變，即 $z=cxy$，則謂 z 因 x 及 y 而合變；又設 z 因 x/y 之商而正變，即 $z=c\cdot x/y$，則謂 z 因 x 正變而因 y 反變。

如，矩形之面積因底及高之長而合變；及其高因面積正變而因底反變。

693 **定理。** 設 x 爲常數時 z 因 y 而變，及 y 爲常數時 z 因 x 而變，則當 x 及 y 俱變時，z 因 xy 乘積而變。

因任選 x 及 y 之三對值如，$x_1\ y_1$; $x_2,\ y_2$; $x_1\ y_2$; 且使 z_1, z_2; z_3 表 z 之相當值，由是

$$x_1,\ y_1,\ z_1, \qquad (1)$$
$$x_1,\ y_2,\ z_3, \qquad (2)$$
$$x_2,\ y_2,\ z_2 \qquad (3)$$

為三變數之相當值。

於是因 (1), (2) 內 x 之值相同，且由定義不論 x 為任何已知值，z 皆因 y 而變，得 § 689.

$$z_1/y_1=z_3/y_2. \qquad (4)$$

同理 y_2 為 (2) 及 (3) 所公有，得

$$z_3/x_1=z_2/x_2. \qquad (5)$$

(4), (5) 之相當邊相乘。

$$z_1/x_1y_1=z_2/x_2y_2. \qquad (6)$$

由是 z 及 xy 之諸相當值成比例；即 z 因 xy 而正變，§ 689.

習題 LVI

1. 設 y 因 x 正變，及 $x=5$ 時 $y=-2$，問 $x=7$ 時 y 之值為何？

2. 設 y 因 x^2 反變，及 $x=2$ 時 $y=1$，則 x 為何值時 $y=3$？

3. 已知 y 為一常數與因 x^2 正變之一項之和；又 $x=1$ 時 $y=1$，$x=2$ 時 $y=0$，求 x，y 之關係方程式。

4. 設 y 因 x^2 正變，因 z^3 反變，及 $x=-1$ 及 $z=2$ 時 $y=1$，問當 $x=3$ 及 $z=-1$ 時 y 之值為何？

5. 設 y 因 x 正變，指明 x^2-y^2 因 xy 正變。

6. 設 y 之平方因 z 之立方正變，z 因 x 反變，指明 xy 因 x 之平方反變。

7. 三人四星期之工資為 \$108，問五人幾星期可得工資 \$135？

8. 圓盤之容積因其厚與面半徑合變。二金屬圓盤之厚為 3 及 2，其半徑為 24 及 36，如鎔之合為一盤，則其半徑為 48，其厚為何？

9. 一高為 a 之正圓錐體被截於平行其底之平面，設截面積為錐底之半，問錐頂至截面之距離為何？當平面二等分此錐體時，其距錐頂之距離為何？

XX. 等 差 級 數

694 **等差級數.** 此種級數由於連續諸數得名，而此連續數爲於已知數 a，複加已知數 d. 即此類任何一串皆可寫爲

$$a,\ a+d,\ a+2d, \cdots a+(n-1)d. \qquad \text{(I)}$$

因 d 爲 (1) 內任何二連續項間之差，故名爲等差級數之公差。

如，2, 5, 8, 11 爲一等差級數，其內 $d=3$，又 2, -1, -4, -7 爲一等差級數，其內 $d=-3$.

695 **第 n 項.** 因 (1) 內每項 d 之係數皆較項數少 1 故其公項或第 m 項爲 $a+(m-1)d$；且設項之全數爲 n，稱其末項爲 l，則得公式

$$l=a+(n-1)d. \qquad \text{(II)}$$

例. 設某等差級數之第七項爲 15，第十項爲 21；求首項 a 及公差 d；又設其項數爲 20，求 l.

$$a+6d=15, \quad a+9d=21.$$

解之求 a 及 d，$a=3$, $d=2$,

故 $$l=3+19.2=41.$$

696 **和.** 顯然 (1) 之逆數第二項可寫爲 $l-d$，其前一項，$l-2d, \cdots$，首項 $l-(n-1)d$.

由是設 S 表 (I) 內諸項之和，得

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+[a+(n-1)d],$$

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+[l-(n-1)d].$$

加二式之相當項，得 $2S=n(a+l)$．由是

$$S=\frac{n}{2}(a+l). \qquad \text{(III)}$$

例．求等差級數六項之和，設其首項為 5，公差為 4．

因 $n=6$，得　　$l=5+5\cdot4=25$．

故　　$S=\frac{6}{2}(5+25)=90$．

應用．於等差級數內，設已知 a, l, d, n, S 中之任三數．697
則可由公式 (II) 及 (III) 求得其他二數．已知數之惟一限制為必須使 n 為正整數．

例．已知 $d=1/2$, $l=3/2$, $S=-15/2$；求 a 及 n．

代入 (II), (III)，　$$\frac{3}{2}=a+\frac{n-1}{2}, \qquad (1)$$

$$-\frac{15}{2}=\frac{n}{2}\left(a+\frac{3}{2}\right) \qquad (2)$$

消去 a，　$n^2-7n-30=0$．　(3)

解 (2)，　　$n=10$ 或 -3．

$n=-3$ 之值為不可用．代 $n=10$ 於 (1)，得 $a=-3$．
故 $n=10$, $a=-3$，及此等差級數為 $-3, -2\frac{1}{2}, -2, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}$．

等差中項．設三數成一等差級數，則中間數稱為他 698
數之等差中項．

任二數 a 及 b 之等差中項為二數之和之半．

因設 x 為 a, b 之等差中項，於是數串 a, x, b 為等差級數．

由是　　$x-a=b-x$，

故　　$x=(a+b)/2$．

任何等差級數之中間各項 皆可稱爲首項及末項之等差中項，且永遠能插入任何數個中項於二已知數 a 及 b 之間。

例。於 3 及 5 間插入四個等差中項。

此即求一等差級數之中間項，設此級數之 $a=3, l=5$, 及 $n=4+2$, 或 6.

代 $l=5, a=3, n=6$, 入 (II), 得

$$5=3+5d, \text{ 由是 } d=2/5.$$

故所求中項爲 $3\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5}, 4\frac{1}{5}, 4\frac{3}{5}$.

習 題 LVII

1. 求 $3, 6, 9, \cdots$; 及 $-3, -1\frac{1}{2}, 0, \cdots$ 之第十二項及首二十項之和。

2. 求 $1, 2, 3, \cdots$; $1, 3, 5, \cdots$; $2, 4, 6, \cdots$; 之首 n 項和之公式。

3. 求形爲 $6r+1$ 之首 n 數之和，r 表 0 或正整數。

4. 求十項等差級數，設其第五項爲 1, 第八項爲 2.

5. 於 -1 及 2 間插入五等差中項。

6. 已知 $n=16, a=0, d=4/3$; 求 l 及 S.

7. 已知 $n=7, l=-7, d=-5/3$; 求 a 及 S.

8. 已知 $n=12, a=-5/3, l=31\frac{1}{3}$; 求 d 及 S.

9. 已知 $a=2, l=-23\frac{1}{2}, S=-559$; 求 n 及 d.

10. 已知 $n=7, a=3/7, S=45$; 求 d 及 l.

11. 已知 $a=4, d=1/5, l=9\frac{2}{5}$; 求 n 及 S.

12. 已知 $n=9, d=-4, S=135$; 求 a 及 l.

13. 已知 $n=10, l=-2, S=115$; 求 a 及 d.

14. 已知 $d=5, l=-47, S=-357$; 求 n 及 a.

15. 已知 $a=-10, d=7, S=20$; 求 n 及 l.

16. 指明設 a^2, b^2, c^2 爲等差級數，則 $1/(b+c), 1/(c+a), 1/(a+b)$ 亦爲等差級數。

17. 設 n 爲奇數，指明任何連續之和能被 n 除盡。

18. 求一等差級數。設其首項爲 1,及首三項之和爲次四項和之半。

19. 三數成等差級數，其和爲 15,其平方和爲 83,求次三數。

20. 求爲 9 之倍數之三數之所有正整數之和。

21. 許某人每年儲蓄 $130,每年之末此欵照年利率4％單利存放問11年底此人存欵之總數爲何?

22. A, B, 二人由相距 72 哩之處同時相向出發，設 A 每時之速度爲 4 哩，B 於第一時行 2 哩，第二時行 $2\frac{1}{2}$，哩第三時行 3 哩，類推，問二人於何時相遇?

XXI. 等 比 級 數

等比級數。 此種級數於已知數 a, 重複乘以已知數 699
r 得來，即此類之任一數串，可寫爲

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots ar^{n-1}. \qquad (\mathrm{I})$$

r 稱爲等比級數（I）之公比，且依 r 絕對值大於或小於 1,稱此級數爲增級數或損級數。

如 1, 2, 4, 8, 及 1, −2, 4, −8 爲升級數, 其 $r=2$ 及 -2; 1, 1/2, 1/4, 1/8 爲降級數，其 $r=1/2$.

第 n 項。 因 (I) 內各項 r 之指數皆較其項數少 1, 故 700
首項爲 a, 公比爲 r 之 n 項等比級數，其末項之公式爲

$$l=ar^{n-1}. \qquad (\mathrm{II})$$

701　**和.** 使 S 表等比級數 (1) 之和.

由是　$S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$.

及　　$rS=\quad ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n$

從第一式減第二式，得 $(1-r)S=a-ar^n$. 故

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}. \tag{III}$$

此公式用於升級數時，寫為下式較便.

$$S=a(r^n-1)/(r-1).$$

從 (II) 得 $rl=ar^n$. 由是 (III) 亦可寫為:

$S=(a-rl)/(1-r)$,或 $S=(rl-a)/(r-1)$.

例. 求等比級數 $2,-4,8,-16,\cdots$ 至八項之 l 及 S.

於此　　$a=2, r=-2$ 及 $n=8$.

由是，從 (II), $l=2(-2)^7=-256$,

及由 (III),　　$S=2\dfrac{1-(-2)^8}{1-(-2)}=-\dfrac{510}{3}$.

702　**應用.** 設已知等比級數內 a, l, r, n, S 五數中之任三數，則由公式 (II) 及 (III) 可決定其他二數，且除已知數為 a, n, S 或 l, n, S 外，確可由已述方法求此二數。設未知數之一為 n,則 n 須由心算求之，若已知數之許可值業已假定，則此永為可能，因 n 必為一正整數故也.

例1. 已知 $r=3, n=6, S=728$; 求 a 及 l.

以已知值代入 (II) 及 (III), 得

$l=a\cdot 3^5=243a$, 及 $728=a\dfrac{3^6-1}{3-1}=364a$.

解二式，得 $a=2, l=486$.

例2. 已知 $a=6, n=5, l=2/27$; 求 r 及 S.

由 (II), $2/27=6r^4$, 由是 $r^4=1/81$, 或 $r=\pm 1/3$.

於是, 設由 (III), $r=1/3$, 則 $S=6\dfrac{1-(1/3)^5}{1-1/3}=\dfrac{242}{27}$,

又設 $r=-1/3$, 則 $S=6\dfrac{1-(-1/3)^5}{1-(-1/3)}=\dfrac{122}{27}$.

故有 $a=6, n=5$, 及 $l=2/27$ 之二等比級數。

例3. 已知 $a=-3, l=-46875, S=-39063$, 求 r 及 n.

代入公式 $S=(a-rl)/(1-r)$, §701, 得

$$-39063=\frac{-3+46875r}{1-r}, \text{由是,} \quad r=-5.$$

故, 由 (II), 得 $-46875=-3(-5)^{n-1}$, 或 $(-5)^{n-1}=15625$.

但由析 15626 之因數得 $15625=5^6=(-5)^6$

故 $$n-1=6, \text{則 } n=7.$$

例4. 已知 $a=3, n=5, S=93$; 求 r 及 l.

由 (III), $93=3\dfrac{1-r^5}{1-r}=3(1+r+r^2+r^3+r^4)$.

故 $$r^4+r^3+r^2+r-30=0.$$

由是此問題含有解四次方程之手續; 就一般言之, 已知 a, n, S 求 r, 必解 $n-1$ 次方程式。但於特殊情形時可由 §455 之方法求得 r 之一值。

等比中項. 設三數成等比級數, 則中數稱為他二數之等比中項。 703

任何二數 a 及 b 之等比中項為其積之平方根。

因設 x 為 a b 之等比中項, 則 a, x, b 數串為一等比級數。

由是 $$x/a=b/x, \therefore x=\pm\sqrt{ab}.$$

任何等比級數之所有中間項, 皆可稱為首項及末項之等比中項。

於二已知數 a 及 b 間，可插入任意數個等比中項，如下例．

例．於 18 及 2/27 間插入四個等比中項．

此為求一等比級數之中間項，此級數之 $a=18$，$l=2/27$，及 $n=4+2=6$．

將已知值代入 (II)，得

$$2/27=18r^5，由是\ r=1/3.$$

故所求中項為 6, 2, 2/3, 2/9．

704　**無窮降等比級數．**形如

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots \qquad (1)$$

之無窮連續式，稱為無窮等比級數．

由公式 (III)，其首 n 項之和為 $a(1-r^n)/(1-r)$，

設 r 之絕對值小於 1，則當 n 無限增大時，r^n 漸近於 0 為其極限，§724，由是 $a(1-r^n)/(1-r)$ 漸近於 $a/(1-r)$ 為其極限，此極限稱為無窮級數 (1) 之和，故設以 S 表級數 (1) 之和，得

$$S=\frac{a}{1-r}. \qquad (2)$$

例1．求 $1+1/2+1/4+1/8+\cdots$ 之和．

於此　　$a=1，r=1/2.$

故　　$S=1/(1-1/2)=2.$

例2．求循環小數 $\cdot 72323\cdots$ 之值．

循環部分可寫為 $\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\cdots$，又從 (2)，此無窮級數之和為 $\frac{\cdot 023}{1-\cdot 01}$ 或 $\frac{23}{990}$，加不循環節 ·7，得已知小數之值為 $\frac{358}{495}$．

習　題　LVIII

1．求等比級數 2, −6, 18, ··· 之第五及首五項之和．

2．求等比級數 4, 6, 9, ··· 之第四項及首四項之和．

3. 求下無窮等比級數之和：

$12-6+3-\cdots$; $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots$; $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots$.

4. 求下循環小數之值：

$\cdot 341341\cdots$, $\cdot 0567272\cdots$, $8\cdot 45164516\cdots$.

5. 已知 $a=-.03$, $r=10$, $n=6$; 求 l 及 S:

6. 已知 $n=7$, $a=48$, $l=3/4$; 求 r 及 S.

7. 已知 $a=1/16$, $r=2$, $l=8$, 求 n 及 S.

8 已知 $n=5$, $r=-3$, $l=81$; 求 a 及 S.

9. 已知 $a=54$, $r=1/3$, $S=80\frac{2}{3}$; 求 n 及 l.

10. 已知 $n=4$, $a=-3$, $S=-468$; 求 r 及 l.

11. 已知 $a=-9/16$, $l=-16/9$, $S=-781/144$; 求 n 及 r.

12. 已知 $n=6$, $r=-2/3$, $S=665/216$; 求 a 及 l.

13. 已知 $r=3/2$, $l=30\frac{3}{8}$, $S=83\frac{1}{8}$; 求 n 及 a.

14. 已知 $n=4$, $l=54/25$, $S=544/25$; 求 a 及 r.

15. 已知 $n=5$, $l=48$, $S=93$; 求 a 及 r.

16. 求 a^3/b 及 b^3/a 之正等比中項。

17. 於 5 及 405 間插入三等比中項。

18. 等比級數之第三項爲 3, 第六項爲 $-81/8$, 求第七項。

19. 求四項之等比級數，設其首末二項之和爲 133, 中二項之和爲 70.

20. 求成等比級數之三數設其和爲 7, 其平方和爲 91.

21. 和爲36之三數成等差級數，設於各項分加 1, 4, 43 則成等比級數，求三數。

22. 設有四數，首三數成等差級數，末三數成等比級數；第一與第四之和爲 16, 第二與第三之和爲 8, 求四數。

23. 設彈性球從 15 呎之高處下落，且每次反躍其所從落高之 2/3, 求其在靜止前反躍之高。

XXII. 調和級數

705 **調和級數.** 此為其倒數成一等差級數之一種級數，即此類之任何數串皆可寫為

$1/a, 1/(a+d), 1/(a+2d), \cdots, 1/(a+(n-1)d)$.

如 $1, 1/2, 1/3, 1/4$ 及 $3/2, 3/4, 3/6, 3/8$ 為調和級數。

例。設 a, b, c 成調和級數，求證 $a:c=a-b:b-c$.

因 $1/a, 1/b, 1/c$ 為等差級數，由是

$$1/b-1/a=1/c-1/b.$$

故 $c(a-b)=a(b-c)$, 即 $a:c=a-b:b-c$.

706 求調和級數之任一特項，可先求相當等差級數內同位置之特項，再顛倒之即得。

例。求調和級數 $3/5, 3/7, 3/9, \cdots$ 之第十項。

由 § 695, 其相當等差級數 $5/3, 7/3, 9/3 \cdots\cdots$ 之第十項為 $23/3$, 故 $3/5, 3/7, 3/9, \cdots\cdots$ 之第十項為 $3/23$.

707 **調和中項.** 設三數成調和級數則中間數稱為他二數之調和中項，又任何調和級數之所有中間項可稱為兩端項之調和中項。

例1. 求 a, b 之調和中項。

設其中項為 x, 於是 $1/a, 1/x, 1/b$ 為等差級數。

由是 $1/x-1/a=1/b-1/x$, 或 $2/x=1/a+1/b$.

故 $$x=2ab/(a+b).$$

例2. 求證 a, b 二數之等比中項，亦為其等差中項及調和中項之等比中項。

使 A, G 及 H 表 a, b 之等差，等比，及調和中項。

於是　　$A=\frac{a+b}{2},\ G=\sqrt{ab},\ H=\frac{2ab}{a+b}.$

故　　$AH=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2.$

例3．求證 a 及 b 爲正時，$A>G>H$.

因　　$A-H=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}.$

由是，因 $(a-b)^2/2(a+b)$ 爲正，故 $A>H$.

又由例 2 知 G 爲 A 及 H 之中間値，故得 $A>G>H$.

習　題　LIX

1．爲調和級數 3/5, 3/7, 1/3 續二項，

2．求 3/4 及 5 之調和中項。

3．於 10 及 15 間插入四調和中項，

4．某調和級數之第二及第四項爲 4/5 及 -4．求第三項。

5．二數之等差中項爲 4，調和中項爲 15/4，求二數。

6．二數之等比中項爲 4，調和中項爲 16/5，求二數。

7．設 a, b, c 成調和級數，指出 $a/(b+c)$, $b/(c+a)$, $c/(a+b)$ 亦爲調和級數。

8．三數成調和級數，指出設從他二項各減中項之半，則其結果成等比級數。

9．指出設 x 爲 a, b 間之調和中項，則

$$1/(x-a)+1/(x-b)=1/a+1/b.$$

10．三角形 ABC 頂角 C 之平分線遇底邊 AB 於 D，又 C 外角之平分線遇 AB 之引長線於 E，指出 AD, AB, AE 成調和級數。

11．P 爲圓外一點，此圓之心爲 O，又由 P 作切線切圓於 T 及 T'．設線 PO 遇圓於 A 及 B，遇 TT' 於 C；指出 PC 爲 PA 及 PB 之調和中項。

XXIII 逐差法高次等差級數插入法

高次等差級數

708　**各次逐差.** 設於已知數串之每項減去其前項，則成一新數串，此數串稱爲已知數串之一次逐差；設以同法處理新數串，則得已知數串之二次逐差，餘類推.

如，設已知數串爲 $1^3, 2^3, 3^3, \cdots\cdots$，於是得

已知數串	$1, 8, 27, 64, 125, 216, \cdots\cdots.$
一次逐差	$7, 19, 37, 61, 91, \cdots\cdots,$
二次逐差	$12, 18, 24, 30, \cdots\cdots,$
三次逐差	$6, 6, 6, \cdots\cdots,$

其四次及以後所有逐差皆等於 0.

709　**r 次等差級數.** 此種數串，其第 r 次逐差皆相等，且此後之逐差爲 0.

如，$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \cdots$ 爲一三次等差級數，因如上所示，其三次逐差皆等也.

通常等差級數，§ 694，皆爲一次，其一次逐差爲公差 d,

710　**r 次等差級數之第 n 項.** 已知任一 r 次之等差級數

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots\cdots, \tag{1}$$

使 $d_1, d_2, d_3, \cdots\cdots d_r$ 表連續各次逐差之首項，於是得以 $a_1, d_1, d_2, \cdots\cdots d_r$ 及 n 表 a_n 之公式.

(1) 之一次逐差爲

$$a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, \cdots\cdots, a_{n+1}-a_n, \cdots\cdots \tag{2}$$

(2) 之首項爲 d_1，又因 (2) 之一次逐差爲 (1) 之二次逐差，餘推類，故 (2) 之一次，二次，$\cdots$ 逐差之首項爲 d_2, d_3, $\cdots$；

故當已得(1)內任一特項之式時，即能用此法導出(2)內相當項之式：

以 $d_1, d_2, d_3, \cdots\cdots$，易 $a_1, d_1, d_2, \cdots\cdots$. (3)

因 $d_1 = a_2 - a_1$，故得 $a_2 = a_1 + d_1$.

以求 a_2 之公式始，可算出 $a_3, a_4, \cdots\cdots$ 如下：

$$
\begin{array}{ll}
\text{因} & a_2 = a_1 + d_1 \\
\text{故，由 (3)，} & \underline{a_3 - a_2 = \quad d_1 + d_2} \\
\text{相加，} & a_3 = a_1 + 2d_1 + d_2 \\
\text{由 (3)，} & \underline{a_4 - a_3 = \quad d_1 + 2d_2 + d_3}. \\
\text{相加，} & a_4 = a_1 + 3d_1 + 3d_2 + d_3
\end{array}
$$

推至無窮，此演算適與 §311 所示求 $a+b$ 之累次冪之係數相同，故得公式

$$
a_n = a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2 + \cdots + \frac{(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}d_r. \quad \text{(I)}
$$

例．　用此公式求 $1^3, 2^3, \cdots\cdots$ 之第十五項．

於此，§ 708, $a_1 = 1$, $d_1 = 7$, $d_2 = 12$, $d_3 = d_r = 6$.

故 $a_{15} = 1 + 14\cdot 7 + \dfrac{14\cdot 13}{2}\cdot 12 + \dfrac{14\cdot 13\cdot 12}{2\cdot 3}\cdot 6 = 3375$.

r 次等差級數首 n 項之和． 使 S_n 表此和，及此數串爲 711

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, a_{n+1}, \quad (1)$$

又 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 之意義與 § 710 同，

或以 (1) 爲一次逐差之數串，則

$0, a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \cdots, a_1+a_2+\cdots+a_n \cdots.$ (2)

於是 S_n 爲(2)之第 $n+1$ 項，且因(2)爲 $n+1$ 次之等差級數，其首項爲0，各逐差之首項爲 $a_1, d_1, d_2, \cdots d_r$，故由(I)得

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d_1 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots(r+1)}d_r. \quad \text{(II)}$$

例。求 $1^3, 2^3, 3^3$ 首15項之和。

於此，§ 708, $n=15, a_1=1, d_1=7, d_2=12, d_3=d_4=6.$

故 $S_{15} = 15 + \frac{15\cdot 14}{2}\cdot 7 + \frac{15\cdot 14\cdot 13}{2\cdot 3}\cdot 12 + \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot 6$

$= 14400.$

712 **彈積。** 1. 求堆成三角錐體彈積所用之層數。

其頂層所用之彈數爲1，下一層爲 $1+2$，再下一層爲 $1+2+3$，餘類推。

由是，設共有 n 層，則彈之總數爲數列 1, 3, 6, 10, 15, $\cdots\cdots n$ 項之和。

其一次逐差爲 2, 3, 4, 5, $\cdots\cdots$ 二次逐差爲 1, 1, 1, $\cdots\cdots$ 故 1, 3, 6, $\cdots$ 爲二次等差級數，其內 $a_1=1, d_1=2, d_2=1$.

因是由(II), $S_n = n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

故十二層彈積之彈數爲 $20\cdot 21\cdot 22/6 = 1540$ 粒。

2. 求底爲正方形之角錐體彈積數。

如前計算各層彈數得數串，$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots\cdots$ 其一次逐差爲 3, 5, 7, $\cdots\cdots$，二次逐差爲 2, 2, $\cdots$，故 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots\cdots$ 爲二次等差級數，其內 $a_1=1, d_1=3, d_2=2$.

故由 (II) $S_n=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 3+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2$

$$=\frac{n(n+)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

如，當 $n=20$，此彈積含 $20\cdot 21\cdot 41/6=2870$ 粒。

3. 設底爲矩形，其頂層爲 P，彈之一行，求彈積之彈數。計算各層彈數得數串 $p, 2(p+1), 3(p+2), 4(p+3), \cdots$.

其一次逐差爲 $p+2, p+4, p+6, \cdots$，二次逐差爲 $2, 2, \cdots$.

故 $p, 2(p+1), 3(p+2), \cdots$ 爲二次等差級數，其內 $a_1=p$，$d_1=p+2$，$d_2=2$.

故由(II)，$S_n=np+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(p+2)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2$

$$=\frac{n(n+1)(3p+2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

故，設 $n=20$，$p=5$，則彈數爲 $20\cdot 21\cdot 53/6=3710$ 粒。

關於等差級數之定理. 觀察 r 次等差級數第 n 項之公式，§710，(I)，可知設求出所示之積且依 n 之降冪排列其結果，則變之爲 713

$$a_n=b_0n^r+b_1n^{r-1}+\cdots\cdots+b_r,$$

式內係數 $b_0, b_1, \cdots b_r$ 不含有 n。

故當 $r=2$ 時，得

$$a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2$$

$$=\frac{d_2}{2}n^2+\left(d_1-\frac{3}{2}d_2\right)n+(a_1-d_1+d_2).$$

由是，任何 r 次等差級數之諸項爲某多項式 $b_0n^r+b_1n^{r-1}+\cdots\cdots+b_r$ 當 $n=1, 2, 3, \cdots$ 時之值，此多項式關於 n 之次數爲 r，茲指明其逆定理如下。

714　**定理．** 設 $\phi(x)$ 表任一 r 次有理整函數，如

$$\phi(x)=b_0x^r+b_1x^{r-1}+\cdots+b_r,$$

則由陸續使 $\phi(x)$ 內之 $x=1,2,3,\cdots$ 所得數串 $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\phi(3)$, $\cdots$, 爲一 r 次之等差級數．

於此，已知數串爲

$$\phi(1),\ \phi(2),\ \phi(3),\ \phi(4),\cdots. \qquad (1)$$

求証其 r 次之逐差皆等．

顯然(1)之一次逐差，即

$$\phi(2)-\phi(1),\ \phi(3)-\phi(2),\ \phi(4)-\phi(3),\cdots, \qquad (2)$$

爲 $x=1,2,3,\cdots$ 時 $\phi(x+1)-\phi(x)$ 之諸值．

但 $\phi(x+1)-\phi(x)$ 可變爲 x 之多項式，名此多項式爲 $\phi_1(x)$，其次數爲 $r-1$．

由二項式定理得

$$\phi(x+1)-\phi(x)=b_0(x+1)^r+b_1(x+1)^{r-1}+\cdots$$
$$-(b_0x^r+b_1x^{r-1}+\cdots)=b_0x^r+rb_0x^{r-1}+\cdots$$
$$b_1x^{r-1}+\cdots-(b_0x^r+b_1x^{r-1}+\cdots)=rb_0x^{r-1}+\cdots.$$

同法，設寫作

$$\phi_1(x+1)-\phi_1(x)=\phi_2(x),\ \phi_2(x+1)-\phi_2(x)=\phi_3(x),$$

餘類推，則在 $x=1,2,3,\cdots$ 時 $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$, $\cdots$, $\phi_r(x)$ 之值爲(1)之二次，三次$\cdots r$ 次之逐差．

但 $\phi_r(x)$ 爲常數，故(1)之 r 次逐差相等．因 $\phi_2(x)$ 之次數爲 $(r-1)-1$ 或 $r-2$; $\phi_3(x)$ 之次數爲 $r-3$; 最後 $\phi_r(x)$ 之次數爲 $r-r$ 或 0．

例如，設 $\phi(x)=2x^3-x+1$，得

$$\phi_1(x)=2(x+1)^3-(x+1)+1-(2x^3-x+1)$$
$$=6x^2+6x+1.$$
$$\phi_2(x)=6(x+1)^2+6(x+1)+1-(6x^2+6x+1)$$
$$=12x+12,$$
$$\phi_3(x)=12(x+1)+12-(12x+12)=12.$$

故 $x=1, 2, 3, \cdots$ 時，$6x^2+6x+1$, $12x+12$, 12 之值為 $2x^3-x+1$ 相當值之一次，二次，三次逐差，且三次之逐差相等，皆為 12.

由是，使 $x=1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$，得

$$2x^3-x+1=2, 15, 52, 125, 246, \cdots\cdots, \tag{1}$$

$$6x^2+6x+1=13, 37, 73, 121, 181, \cdots\cdots, \tag{2}$$

$$12x+12=24, 36, 48, 60, 72, \cdots\cdots, \tag{3}$$

$$12=12, 12, 12, 12, 12, \cdots\cdots, \tag{4}$$

由比較知 (1), (2), (3), (4), 確為 (1) 之一，二，三次逐差。

推論1. 連續整數之 r 次冪構成 r 次之等差級數。 715

因 $1^r, 2^r, 3^r, \cdots$ 為 $x=1, 2, 3, \cdots$ 時，r 次有理整函數 $\phi(x)=x^r$ 之值。

推論2 r 次及 s 次二等差級數相當項之積成一$(r+s)$ 次之等差級數。 716

因 r 次之有理整函數，乘以 s 次有理整函數之積為一$(r+s)$ 次之有理整函數。

習　題　LX

1. 求數串 $1, 2, 4, 7, \cdots$ 之第二十項及首二十項之和。

2. 求數串 $3, 8, 15, 24, 35, \cdots$ 之第八項及首八項之和。

3. 定以下各等差級數之次數。

(1) $3, 0, -1, 0, 3, \cdots$,　　(2) $10, 38, 88, 166, 278, 430, \cdots$.

(3) $285, 204, 140, 91, 55, \cdots$,　(4) $2, 20, 90, 272, 650, 1332, \cdots$.

並求(1)之第十八項，(2)之第二十項，(3)之第十二項，(4)之第十項。

4. $1\cdot2\cdot3, 2\cdot3\cdot4, 3\cdot4\cdot5, \cdots$ 之次數為何？其第 n 項為何？其首 n 項之和為何？

$1\cdot4\cdot2^2, 2\cdot6\cdot3^2, 3\cdot8\cdot4^2, \cdots$ 之次數及其第 n 項為何？

5. 求十四層三角形彈積之彈積，其最下層有彈若干？

6. 設從十五層之正方形彈積移去六層，問餘彈若干？

7. 求十二層矩形彈積之彈數，設其頂層之彈數爲 5.

8. 設三角形彈積底層之彈數爲253，求彈積之彈數.

9. 三角形彈積之彈數爲同層數正方形彈積彈數之 4/7，求各彈積之彈數.

10. 求矩形彈積之彈數，設其頂層之彈數爲 9，底層爲 240.

11. 指出 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

12. 指出 $1^4+2^4+\cdots+n^4=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(2n^2+3n-1)$.

13. 級數之次數及首 n 項之和爲何？設其第 n 項爲 n^2-n+1？爲 $n(n+1)(n+2)/6$？

14. 設寫出 $d=1,2,3,\cdots$ 之諸一次等差級數，於是求各級數一，二，三，四，$\cdots\cdots$項之和，則得名爲三角數，四角數，五角數，之數串.

$1,3,6,10\cdots;\ 1,4,9,16,\cdots;\ 1,5,12,22,\cdots;\cdots\cdots.$

指明此數串 k 次之第 n 項及首 n 項和各爲

$n(kn-k+2)/2$ 及 $n(n+1)(kn-k+3)/6$.

15. 指明任何次等差級數於各項加較低次等差級數之相當項後不變其次數.

16. 證明：設於 n 次多項式 $f(x)$ 內，代 x 以任一次等差級數之連續項，則得一 n 次之等差級數；一般言之，設代 x 以任何 r 次等差級數之連續項，得一 rn 次之等差級數.

插入法

插入法． 設已知 y 依 x 而定，即相當 x 在 a, b 間 717
之每一值，y 皆有一限定值．且設相當於 x 之某值而 y 之值確爲已知，於是用插入法，可由 x 在 a, b 間之諸已知值導出 y 之諸相當值．

設不知以 x 表 y 之通式，或雖知而過於繁雜，常以用此法求 y 之特值爲便．

此法簡述如下：使 y 等於 x 所表之最簡整多項式，而從此方程內使 x 爲已知值，以導出 y 之諸值．當然由此求得之值通常僅爲近似正確而已．

不定係數法． 可如下例施算． 718

例．已知 $x=2, 3, 4, 5$ 時 $y=5, 4, -7, -34$, 求 $x=5/2$ 時 y 之值．

因此 x 之最簡多項式內之 x, 可取 4 已知值，故通常爲三次，假定

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3.$$

於是求係數 b_0, b_1, b_2, b_3 之值如下．

因 $x=2$ 時　$y=5$,　$5=b_0+2b_1+4b_2+8b_3$.

因 $x=3$ 時　$y=4$,　$4=b_0+3b_1+9b_2+27b_3$.

因 $x=4$ 時　$y=-7$,　$-7=b_0+4b_1+16b_2+64b_3$.

因 $x=5$ 時　$y=-34$,　$-34=b_0+5b_1+25b_2+125b_3$.

解四方程式得：$b_0=1, b_1=-2, b_2=4, b_3=-1$.

故　$y=1-2x+4x^2-x^3$.

由是，$x=5/2$ 時，$y=1-5+25-125/8=43/8$.

總之，設 y 之 $r+1$ 個値爲已知，即 y 相當 $x=x_1, x_2, \cdots\cdots x_{r+1}$ 之各値爲 $y=y_1, y_2 y_{r+1}$ 並假定

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots+b_rx^r, \qquad (1)$$

用上法求 $b_0, b_1, \cdots\cdots, b_r$ 於是以(1)爲公式而用之計算 y 當 x 爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_{r+1}$ 之中間値時之値。

719 **逐差法。** 當 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{r+1}$ 爲連續整數時，則 §718 公式(1)可變爲

$$y=y_1+(x-x_1)d_1+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_r)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}d_r, \qquad (2)$$

$d_1, d_2, \cdots d_r$ 表 $y_1, y_2, \cdots y_{r+1}$ 之累次差級數之首項。

因 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_{r+1}$ 爲連續整數，故 $b_0+b_1x+\cdots+b_rx^r$ 之相當値，即 $y_1, y_2, \cdots\cdots y_{r+1}$ 成一 r 次之等差級數，§714. 故 $y_1, y_2, \cdots\cdots$ 亦可由以 $n=1, 2, \cdots\cdots$ 代入 §710, 公式(1)求得之，即

$$y=y_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{(n-1)\cdots\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}d_r.$$

但於此公式內使 $n=1,2,3,\cdots\cdots$ 所得之結果，恆同於在(2)內使 $x=x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots=x_1, x_1+1, x_1+2, \cdots\cdots$

由(2)之右邊與 §718, (1) 之右邊有 $r+1$ 個 x 之値相等，但二者皆爲 r 次，故二者恆等，§421.

如 §718 內，由 $x=2, 3, 4, 5$, 使 $y=5, 4, -7, -34$. 得

$y_1, y_2, y_3, y_4=5, 4, -7, -34.$	
一逐次差	$-1, -11, -27$
二逐次差	$-10, -16,$
三逐次差	$-6.$

以 $x_1=2, x_2=3, x_3=4, y_1=5, d_1=-1, d_2=-10, d_3=-6$, 代入(2)，得 $y=5-(x-2)-5(x-2)(x-3)-(x-2)(x-3)(x-4)$, 又可變爲 $y=1-2x+4x^2-x^3$, 如 §718.

例。已知 $\sqrt[3]{30}=3.1072$, $\sqrt[3]{31}=3.1414$, $\sqrt[3]{32}=3.1748$, 及 $\sqrt[3]{33}=3.2075$; 求 $\sqrt[3]{31.6}$.

$y_1, y_2, y_3, y_4=3\cdot1072, 3\cdot1414, 3\cdot1748, .32075$.

一次逐差 .0342, .0334, .0327

二次逐差 $-.0008, -.0007$,

三次逐差 .0001

以 $x_1=30, x_2=31, x_3=32, y_1=3\cdot1072, d_1=.0342, d_2=-.0008, d_3=.0001$, 及 $x=31.6$, 代入 (2),得

$$3.1072+(1.6)(.0342)+\frac{(1.6)(.6)}{2}(-.0008)$$

$$+\frac{(1.6)(.6)(-.4)}{2\cdot3}(-.0001)=3.1072$$

$$+.05472-.000384+.0000064=3.1615+.$$

拉格蘭給氏公式. §718 公式(1)亦可變為次之形式，此為拉格蘭給氏所發明: 720

$$y=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{r+1})}$$

$$+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{r+1})}$$

$$+\cdots+y_{r+1}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_r)}{(x_{r+1}-x_1)(x_{r+1}-x_2)\cdots(x_{r+1}-x_r)} \qquad (3)$$

因(3)之右邊為 x 之 r 次整函數，且其當 $x=x_1, x_2, \cdots x_{r+1}$ 時之值為 $y_1, y_2, \cdots y_{r+1}$, 故使 $x=x_1$, 除首項外各項均為零而首項變為 y_1, 故由 §421, (3)之右邊及 §718(1)之右邊因 $r+1$ 個 x 之值相當，故二者恆等。

故如 §718, 因 $x=2, 3, 4, 5$, 使 $y=5, 4, -7, -34$, 代入(3)得

$$y=5\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)}$$

$$-4\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-2)(3-4)(3-5)}-7\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)}$$

$$-34\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)},$$

如 §718 可變之為 $y=1-2x+4x^2-x^3$.

習題 LXI

1. 已知 $x=-3, -2, -1, 0$ 時 $y=-20, 6, 0, 4$；求當 $x=-5/2$ 及 $-1/2$ 時 y 之值。

2. 已知 $f(4)=10, f(6)=-12, f(7)=-20, f(8)=-18$；求 $f(x)$ 且計算 $f(12)$ 之值。

3. 已知 $25^2=625, 26^2=676, 27^2=729$；用逐差法求 $26\cdot54^2$ 之值。

4. 已知 $2^3=8, 3^3=27, 4^3=64, 5^3=125$；用逐差法求 $4\cdot8^3$ 之值。

5. 已知 $1/22=.04546, 1/23=.04348, 1/24=.04167$，及 $1/25=.04$；用逐差法求 $1/23.6$ 之值。

6. 已知 $\sqrt{432}=20\cdot7846$，$\sqrt{433}=20.8087$，$\sqrt{434}=20\cdot8327$，$\sqrt{435}=20.8566$，$\sqrt{436}=20.8806$；用逐差法求 $\sqrt{435.7}$ 之值。

7. 用拉格蘭給氏公式求三次多項式之值，設其於 $x=-2, 0, 4, 5$ 時之值爲 $5, 3, -2, -4$。

XXIV. 對數

指數之初步定理

721 **定理1.** 設 a 表任何大於 1 之實數，p, q 表正整數，則 $a^{\frac{p}{q}}>1$.

因 $a>1$ $\therefore a^p>1$，$\therefore \sqrt[q]{a^p}>1$，$\therefore a^{\frac{p}{q}}>1$，§ 261.

722 **定理2.** 設 a 表任何大於 1 之實數，r 及 s 爲任何有理數且 $r>s$，則 $a^r>a^s$.

因 $r-s>0$，$\therefore a^{r-s}>1$ $\therefore a^{r-s}\cdot a^s>a^s$，$\therefore a^r>a^s$，§§ 721, 261,

723 **定理3.** 設 $a>1$，n 爲整數，則 $\lim\limits_{n=\infty} a^n=\infty$.

因 $a>1$，故可寫作 $a=1+d$，d 爲正數。

於是 $a^n=(1+d)^n$，又因 $(1+d)^n>1+nd$，§ 561，得 $a^n>1+nd$，

由是，因 $\lim\limits_{n\doteq\infty}(1+nd)=\infty$，得 $\lim\limits_{n\doteq\infty} a^n=\infty$.

定理4. 設 $0<a<1$, n 爲整數，則 $\lim_{n\doteq\infty} a^n=0$. 724

因 $a<1$, 使 $a=1/b$, $b>1$.

於是 $\lim_{n\doteq\infty} a^n=1/\lim_{n\doteq\infty} b^n=0$, § 512. 因 $\lim_{n\doteq\infty} b^n=\infty$ 也，§ 723.

定理5. 設 n 爲整數，則 $\lim_{n\doteq\infty} \sqrt[n]{a}=\lim_{n\doteq\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$. 725

1. 當 $a>1$, 則 $a^{\frac{1}{n}}>1$, § 721, 如是使 $a^{\frac{1}{n}}=1+d_n$, d_n 爲依 n 而變之正數.

於是 $a=(1+d_n)^n$, $\therefore a>1+nd_n$, $\therefore d_n<(a-1)/n$.

由是，因 $\lim_{n\doteq\infty}(a-1)/n=0$, § 512, 得 $\lim_{n\doteq\infty} d_n=0$.

故 $\lim_{n\doteq\infty} x^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\doteq\infty}(1+d_n)=1$.

2. 當 $o<a<1$, 因 $a<1$, 使 $a=1/b$, $b>1$.

因 $\lim_{n\doteq\infty} b^{\frac{1}{n}}=1$,則 $\lim_{n=\infty} a^{\frac{1}{n}}=1/\lim_{n\doteq\infty} b^{\frac{1}{n}}=1$, 由1

定理6. 設 b 爲有理數，x 爲經有理數漸近於 b 之變數，於是 $\lim_{x\doteq b} a^x=a^b$. 726

1. 此定理於 x 之極限爲 0 時爲眞.

因於此情形之下可選一變數 n, 此變數僅取整數值，且如此永遠可使 $-1/n<x<1/n$, 又當 $x\doteq 0$ 時，$n=\infty$.

於是 a^x 將永處於 $a^{\frac{1}{n}}$ 及 $a^{-\frac{1}{n}}$ 之間, § 722, 且因 $\lim_{n\doteq\infty} a^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\doteq\infty} a^{-\frac{1}{n}}=1$, § 725, 得 $\lim_{x\doteq 0} a^x=1=a^0$.

2. 此定理當 $b\neq 0$ 時爲眞.

因 $a^x=a^b\cdot a^{x-b}$, 得 $\lim_{x\doteq b} a^x=a^b\lim_{x\doteq b} a^{x-b}=a^b$, 由 1.

定理7. 設 b 爲無理數，x 爲經過有理數漸近於 b 變數 727

於是當 $x' \doteq b$，時 a^x 漸近一極限，且此極限值與 x 漸近於 b 時所取之值之無關。

與 $a<1$ 或 $a>1$ 之理由同，但先假定 $a>1$，以建立此觀念。

x 漸近於 b 如其限時，所經過有理值之數串可有無限個，於其中選某一數串，且當 x 經過此數串時，以 x' 表 x。於是 $x' \doteq b$，變數 $a^{x'}$ 總識增大，§722，但仍為有限數，例如小於 a^c，設 c 表大於 b 之任何有理數，故 $a^{x'}$ 漸近一極限，§192，稱此極限為 L。

求證設 x 經過 x' 所經過外之另一有理數串時，a^x 將漸近同一極限 L，但 $a^x=a^{x'}\cdot a^{x-x'}$，由是 $a^x=lim\,a^x\cdot lim\,a^{x-x'}=L$，因 $lim\,a^{x-x'}=1$ 也，§726．

728　**無理指數．**　玆用符號 a^b 表當 x 經過任一有理數串漸近於 b 時 a^x 漸近之極限，故當 b 為無理時，以 a^b 表 $\lim\limits_{x\doteq b} a^x$．

729　如是假定 a^x 之意義，則當 x 為無理數時，可即刻證明當 x 經一無理數串漸近於 b 時，$\lim\limits_{x\doteq b}$

因使 x', x, x'' 表漸近乎 b 之三變數 x' 及 x'' 經過有理數串 x 經過無理數串，且 $x'<x<x''$，於是由 §§726，727 知 a^x 在 $a^{x'}$ 及 $a^{x''}$ 之間，且因 $\lim\limits_{x'\doteq b} a^{x'}=\lim\limits_{x''\doteq b} a^{x''}=a^b$，故 $\lim\limits_{x\doteq b} a^x=a^b$．

730　**定理3．**　指數定律於無理指數亦眞。

因使 b, c 表無理數 x, y 表漸近於 b, c 之變數，設 x 及 y 僅取有理值。

1．　$a^b\cdot a^c=a^{b+c}$．

因 $a^x a^y=a^{x+y}$，得 $lim\,a^x a^y=lim\,a^{x+y}$．

但 $lim\,a^x a^y=lim\,a^x\cdot lim\,a^y=a^b a^c$，　§§203，728．

又　$lim\,a^{x+y}=a^{lim(x+y)}=a^{b+c}$，　§§203，728．

2. $(a^b)^c=a^{bc}$

因　　$(a^x)^y=a^{xy}$.

故　　$\lim\limits_{x\doteq b}(a^x)^y=\lim\limits_{x\doteq b}a^{xy}$, 或 $(a^b)^y=a^{by}$　　§ 728

故　　$\lim\limits_{x\doteq c}(a^b)^y=\lim\limits_{y\doteq c}a^{by}$, 或$(a^b)^c=a^{bc}$　　§ § 728, 729.

3. $(ab)^c=a^cb^c$.

因　　$(ab)^y=a^yb^y$.

故　　$\lim a^y b^y=\lim a^y\cdot\lim b^y$.　　§ 203.

即　　$(ab)^c=a^cb^c$.　　§ 728

對數，對數之通性，

對數. 取 1 外之任一正數 a 爲底，則知 a 之各實 731
數羃如 a^μ，表一有限正數，如 m 次節內示其逆算即每一正數 m 均可以 a^μ 之形表之，但 μ 爲實數.

設$a^\mu=m$，則稱 μ 爲 m 以 a 爲底之對數，且以符號 $log_a m$ 732
表之，故 m 之 a 底對數爲 a 自乘至等於 m 時其羃之指數，即 $a^{\log_a m}=m$.

如，$3^4=81$，$\therefore 4=log_3 81$；$2^{-3}=1/8$，$\therefore -3=log_2 1/8$.

因 $a^0=1$，故得 $log_a 1=0$；又因 $a^1=a$，得 $log_a a=1$.　733

當 $a>1$，則由 $a^\mu=m$，§ 722，而知如數 m 有任何增大，734
其對數 μ 亦必有相當增大；又設 m 大於 1，則對數 μ 爲正，設 m 在 1 與 0 間，則對數 μ 爲負.

又，當 $a>1$ 時，由 § 723，得　735

$$\lim_{\mu\doteq\infty}a^\mu=\infty,\text{ 及 }\lim_{\mu\doteq\infty}a^{-\mu}=\lim_{\mu\doteq\infty}1/a^\mu=0.$$

故曰設 $a>1$，則 $log_a\infty=\infty$，$log_a 0=-\infty$；

736 **定理1.** 以任何數爲底之積之對數，爲諸因數以同數爲底之對數之和。

因使 $m=a^{\mu}$, 即 $\mu=\log_a m$,

又 $n=a^{\nu}$, 即 $\nu=\log_a n$.

於是 $mn=a^{\mu}a^{\nu}=a^{\mu+\nu}$

亦即 $\log_a mn=\mu+\nu=\log_a m+\log_a n$.

737 **定理2.** 商之對數爲被除數之對數減除數之對數。

因設 $m=a^{\mu}$, $n=a^{\nu}$,

則 $m/n=a^{\mu}/a^{\nu}=a^{\mu-\nu}$,

即, $\log_a m/n=\mu-\nu=\log_a m-\log_a n$.

738 **定理3.** 一數任何冪之對數等於該數之對數以其冪之指數乘之。

因設 $m=a^{\mu}$,

則得 $m^r=(a^{\mu})^r=a^{r\mu}$,

即, $\log m^r=r\mu=r\log_a m$.

739 **定理4.** 一數任何次根之對數爲該數之對數以其根之指數除之。

因設 $m=a^{\mu}$

則得 $\sqrt[s]{m}=\sqrt[s]{a^{\mu}}=a^{\frac{\mu}{s}}$

亦即 $\log_a\sqrt[s]{m}=\mu/s=(\log_a m)/s$.

740 對數之實用即利用其於§§736－739所證得之性質。數目以10爲底對數已算出且表列之，設利用此表，則積之値可由加法，商由減法，冪由乘法，根由除法求得之。

如 $\log\dfrac{\sqrt[7]{5}\,\sqrt[8]{6}}{3^{25}}=\log\sqrt[7]{5}+\log\sqrt[8]{6}-\log 3^{25}$ §§736, 737

$=(\log 5)/7+(\log 6)/8-25\log 3$. §§738, 739

由是求 $\sqrt[7]{5}\,\sqrt[8]{6}/3^{25}$ 之值僅需尋出表內所示 $log\,5$, $log\,6$, $log\,3$ 之值，再計算 $(log\,5)/7+(log\,6)/8-25\,log\,3$ 之值，最後再由表內尋得以此值爲對數之一數。

習　題　LXII

1．求 $log_2 4$, $log_4 2$, $log_{\sqrt{2}} 8$, $log_5 625$, $log_3 729$, $log_{10}\cdot 001$, $log_2 1/64$, $log_2\cdot 125$, $log_a \sqrt[3]{a^{-2}}$, $log_8 128$, $log_a a^3$.

2．設 $log_{10}2=\cdot 3010$ 及 $log_{10}3=\cdot 4771$, 求 12, 9/2, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$ 以10爲底之對數。

3．以 $log_a 2$, $log_a 3$ 及 $log_a 5$ 表 $log_a 600^{\frac{1}{6}}$.

4．以 $log_a b$, $log_a c$, $log_a d$ 表下式以 a 爲底之對數

(1) $b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{2}}/d$　　(2) $\sqrt[8]{a^{-2}\sqrt{b^6}}\div\sqrt{b^3\sqrt{a^{-3}}}$.

5．求証 $log_3 \sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\cdot 9^{-\frac{2}{3}}}}=31/18$.

6．求證 $log_a\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=2log_a(x+\sqrt{x^2-1})$.

常用對數

常用對數之計算。　爲數目計算之目的吾人採用 741
以10爲底之對數，此稱常用對數，由是 $log\,m$ 即表 $log_{10}m$.

因 $10^0=1$, $\therefore log1=0$; $10^1=10$, $\therefore log10=1$; $10^2=100$, 742
$\therefore log100=2,\cdots$ 又 $10^{-1}=.1$, $\therefore log.1=-1$; $10^{-2}=.01$, $\therefore log.01=-2,\cdots$.

故其常用對數爲整數者，如下表：

數$\cdots .001, .01, .1, 1, 10, 100, 1000,\cdots$,

其對數$\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\cdots$.

視此表內諸數成一公比爲10之等比級數，其對數則成等差爲1之等差級數。

表內僅爲其常用對數爲有理者之有理數，所有10之分 743
數方冪皆爲無理，但今將指出任一正數皆有一常用對數，且對數之值可正確算至預計之小數位數。

設開10之平方根，再以其結果開方求其平方根，類推，繼續每演算至第五位小數，

則得表如下:

$10^{\frac{1}{2}}=3.16228$, $10^{\frac{1}{32}}=1.07461$, $10^{\frac{1}{512}}=1.00451$

$10^{\frac{1}{4}}=1.77828$, $10^{\frac{1}{64}}=1.03663$, $10^{\frac{1}{1024}}=1.00225$

$10^{\frac{1}{8}}=1.33352$, $10^{\frac{1}{128}}=1.01815$, $10^{\frac{1}{2048}}=1.00112$,

$10^{\frac{1}{16}}=1.15478$, $10^{\frac{1}{256}}=1.00904$, $10^{\frac{1}{4096}}=1.00056$.

如是進行所得結果漸近於1如其限,(比較§725),左邊指數1/2,1/4,··· 爲右邊相當數之對數.

741 利用此表可計算1與10間任何數之對數如下例.

例. 求4·26之常用對數.

以表內較小數3·16228除4·26

其商爲1·34719. 故4·26=3·16228×1.34719.

以表內次一小數1·33352除1·34719.

其商爲1·0102. 故4·26=3·16228×1·33352×1·0102.

如是繼續永除最後商以表內一較小數.

設q_n表第n次施除時之商,則用此法必得4·26之形爲表內n數及q_n之積之式,其結果爲

$$4.26=3\cdot16228\times1\cdot33352\times1\cdot00904\times\cdots\times q_n$$

$$=10^{\frac{1}{2}}\cdot10^{\frac{1}{8}}\cdot10^{\frac{1}{256}}\cdots q_n=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}\text{至}n\text{項}}q_n$$

當n增大時,指數1/2+1/8+1/256+···至n項亦增大. 但永小於1,因其爲和等1之無限級數1/2+1/4+1/8+····之一部也,§704,例1. 故其漸近一極限,此極限爲小於一之某數,茲以1/2+1/8+1/256+····表此極限.

又,當n漸次穩大時,q_n漸近於1如其限,因每商皆在用以得到之新除數及1之間,且如是繼續進行,則此除數漸近於1如其限.

$$\text{故}\quad 4\cdot26=\lim_{x\doteq\infty}10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}+\cdots\text{至}n\text{項}}$$

$$q_n=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}+\cdots}$$

由是$\log 4\cdot26=1/2+1/8+1/256+\cdots=\cdot6294\cdots$

從1與10間諸數之常用對數，由加一正數或負數可求 745
出所有其他正數之常用對數。

例。求 42·6 及 ·426 之常用對數。

1.　　$42\cdot6=10\times4\cdot26.$

故　　$\log 42\cdot6=\log 10+\log 4\cdot26$

$$=1+\log 4\cdot26=1\cdot6294.$$

2.　　$\cdot426=4\cdot26/10=10^{-1}\times4\cdot26$

$$\log\cdot426=\log 10^{-1}+\log 4\cdot26$$

$$=-1+\log 4\cdot26=\bar{1}.6294.$$

同法，$\log 426=2.6294$, $\log\cdot0426=\bar{2}\cdot6294$, 餘類推，即與 4·26 同數字列之任何數之對數可由加正數或負數於 $\log 4\cdot26$ 求得之。

指標及尾數. 上例所示對數，其小數部分稱為尾 746
數，整數部分稱為指標。

如，$\log 42\cdot6=1\cdot6294$ 及 $\log\cdot426=\bar{1}\cdot6294$ 各有同尾數 ·6294 及指標 1 與 -1.

如 §745 內所示，設 n 為正整數或小數，則 $\log n$ 之尾 747
數僅依 n 之數字列，而定其指標則視小數點之位置而定。

設 n 在 1 與 10 之間即僅有一整數位，則 $\log n$ 之指標 748
為 0, §744. 設 n 之小數點右移一位，即 n 乘以 10, 則加 1 於 $\log n$ 之指標 0. 同理，設小數點右移兩位則加 2 於 $\log n$ 之指標 0,餘類推。故得法則：

設 $n>1$, 則 $\log n$ 之指標較 n 之整數部分之位數數少1.

如，$\log 426000=5.6294$, $\log 42600000=7.6294$, 類推。

749 同理，設整數部分僅有一位之數 n，其小數點左移 p 位，即乘 n 以 10^{-p}，則加 $-p$ 於 $\log n$ 之指標 0，如 $\log \cdot 426 = -1 + \log 4.26 = \bar{1}\cdot 6294$，$\log \cdot 0426 = \bar{2}\cdot 6294$，餘類推，§745.

實用時寫負指標 $\bar{1}, \bar{2} \cdots$ 為 $9-10, 8-10 \cdots\cdots$ 較為便利，並置正數 9, 8 於尾數前而置 -10 於尾數後，故寫 $\bar{1}.6294$ 為 $9\cdot 6294-10$，於是得法則：

設 $n<1$，則 $\log n$ 之指標為負數，求法為寫 9 與 n 之小數點後零之個數之差於尾數之前，寫 -10 於尾數之後。

如，$\log \cdot 00426 = 7\cdot 6294-10$，$\log \cdot 000000426 = 3.6294 -10$.

設小數點後之零數多於 9 而少於 19，於是從 19 減之，寫其差於尾數前，而寫 -20 於尾數後，餘類推。

例。已知 $\log 2 = \cdot 3010$，求 2^{25} 所含之位數。

750 **對數表**。 *pp.* 384, 385 之表包括所有三位數之四位小數對數，且依數字排列之而略去尾數前之小數點。

由此表亦可藉下面原則以求得所有多於三位之數之尾數：

設一數增減以較該數甚小之量，則其對數之變化與該數之變化成近似比例。

借助此表求得之數，如在四位以上則不可靠，欲更為正確須用多於四位小數之對數表。

學者如用五位，六位或七位之對數表必更感便利。

從表求已知數之對數． 求法如下例： 751

例1．求 ·00589 之對數．

於圖冠以 n 之行內尋 58，於是沿 58 之列向右至冠以 9 之一行處，得 7701，此即為所求之尾數（其前有一小數點）其指標為 7－10，§749，故

$$log\cdot00589=7\cdot7701-10.$$

例2．求 8 及 46 之對數．

其對數之尾數各與 800 及 460 同，故如例 1 求之，得

$$log8=\cdot9031,\quad log\,46=1\cdot6628.$$

例3．　求 4673 之對數．

其尾數同於 log 467.3，故必在 log 467 之尾數與 log 468 之尾數之間．

檢表得 log 467 之尾數＝6693，log 468 之尾數＝6702，二尾數之差為 9．由是設 467 加 1，則於 log 467 之尾數加 9，故加·3 於 467，則加 9 的$\frac{3}{10}$，或 3（近似數）於 log 467 之尾數．

$$\text{故 } log\,467\cdot3 \text{ 之尾數 }=6693+3=6696,\text{ 由是}$$

$$log\cdot4673=\dot{9}\cdot6696-10.$$

注意未寫指標前，略去隸屬於尾數之小數點．

例　所示求位數多於三位之數之對數之方法；可述之如下．

從表求得相當前三位數之尾數 m，及 m 與其次之較大尾數之差 d．

以數之餘留部分冠以小數點乘 d，加其積（如小數部分為 .5 或大於 .5 則進 1）之整數部分於 m．

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

752 **已知其對數求某數.** 僅反轉上節所示方法即可.

例1. 求其對數爲 5.9552－10 之數.

於表內標以90之列與標以 2 之行得已知尾數 9552, 故所求之數字列爲 902.

又因其指標爲 5－10, 故次數爲小數點後 9－5, 或 4 個零後之小數; §749. 故所求數爲: .0000902.

例2. 求其對數爲 7.5520 之數.

查表知已知尾數 5520 在相當 356 及 357 之尾數 5514 及 5527 之間, 此較小尾數 5514 與較大尾數 5527 之差爲 13, 與已知尾數 5520 之差爲 6.

由是設尾數 5514 增 13, 則 356 增 1. 設尾數 5514 增 6, 則 356 必增 1 之 6/13, 或 .5 (近似值).

故所求數字列爲 3565, 又由指標法則, §748, 知所求數爲 35650000.

由是得求相當表內所無之求數之數字之法則如下:

從表求較小尾數 m 之相當三位數, 及 m 與較大尾數之差 d.

從已知尾數減去 m, 並以 d 除其餘數以其商附於已得三位數之後.

753 **餘對數.** 一數之餘對數, 爲該數倒數之對數, 以符號 $colog$ 表之.

因 $colog\,m = log\,1/m = log\,1 - log\,m = -log\,m$ §§733, 77, 故求某數之餘對數僅變其對數之符號即得, 但爲便於查表, 必使所有對數之小數部分爲正數, 故處置如下.

例1. 求 $colog\ 89.2$

已知 $\qquad log\ 1 = 10 \qquad -10$

及 $\qquad log\ 89.2 = \underline{1.9504}$

故 $\qquad colog\ 89.2 = 8.0196-10$

例2. 求 $colog\ .929$.

已知 $\qquad log\ 1 = 10 \qquad -10$

及 $\qquad log\ .929 = \underline{9.9680-10}$

故 $\qquad colog\ .929 = \ \ .0320$

故由某數之對數求其餘對數法爲從其對數之指標起，除最後數字由10減去外，餘皆從9減去則得某數之餘對數，於得數之尾附以－10與否，全視對數之尾原無或附有－10而定。用此法可於表內直接求得不過三位之數之餘對數。

對數計算法. 下例指示借助對數可以簡捷求得數 753
之積，商，羃，及方根之近似值(比較§740).

例1. 求 $\quad .0325 \times .6425 \times 5.26$ 之值.

$log(.0325 \times .6425 \times 5.26) = log\ .0325 + log\ .6425 + log\ 5.26.$

但 $\qquad log\ .0325 = 8.5119-10$

$\qquad log\ .6425 = 9.8079-10$

$\qquad log\ 5.26 = \underline{\ \ .7210}$

故積之對數 $\qquad = 19.0408-20 = 9.0408-10.$

由是得積爲.1099.

例2. 求 $46.72/.0998$ 之值.

$log\ (46.72/.0998) = log\ 46.72 - log\ .0998.$

$\qquad log\ 46.72 = 11.6695-10$

$\qquad log\ .0998 = \underline{8.9991-10}$

故商之對數 $\qquad = 2.6704$

由是商爲 468.2.

寫 $\log 46.72$ 即 1.6695 爲 $11.6695-10$，爲使其正數部分大於所減之對數 $8.9991-10$.

例3. 求 $295\times.05631\div806$ 之值。

$\log(295\times.05631\div806)=\log 295+\log .05631+\operatorname{colog} 806.$

$$
\begin{array}{lrl}
\text{但} & \log 295= & 2.4698 \\
\text{但} & \log .05631= & 8.7506-10 \\
 & \operatorname{colog} 806= & \underline{7.0937-10}
\end{array}
$$

故所求數之對數 $=18.3141-20=8.3141-10.$

由是所求數爲 $\cdot02061$.

例4. 求 $\cdot7929$ 之六次方。

$$\log(.7929)^6=6\times\log .7929.$$

$$
\begin{array}{lrl}
\text{但} & \log .7929= & 9.8992-10 \\
 & & \underline{\qquad\qquad 6}
\end{array}
$$

故 $\log(.7929)^6=59.3952-60=9.3952-10$

由是 $(.7929)^6=.2484.$

例5. 求 $\cdot00898$ 之七次根。

$$\log\sqrt[7]{.00898}=(\log .00898)\div7.$$

$$
\begin{array}{lrl}
 & \log .00898= & 7.9533-10 \\
\text{但} & & 7)\overline{67.9533-70} \\
 & \log\sqrt[7]{.00898}= & 9.7076-10
\end{array}
$$

故 $\sqrt[7]{.00898}=.510.$

注意如以某數除負對數時，須加10之倍數於對數之正數及負數部分，以使其負數部分除得之商爲－10.

又因所有10之實數羃皆爲正，故負數無以10爲底之實對數。如求含負因數之式之值，可用對數先求得此式之絕對值，再冠之以適當之符號。

如，設已知式爲 $456\times(-85\cdot96)$，則先由對數求得 456×85.96 之值，再冠以負號。

習　題　LXIII

用對數求下列各數之近似值。

1. $79\times470\times.982$.　　2. $(-9503)\times(-.0086578)$.

3. 1375600×8799000.　　4. $.0356\times(-.00049)$.

5. $\dfrac{8075}{364.9}$.　　6. $\dfrac{.00542}{.04708}$.　　7. $\dfrac{24617}{-.00054}$.

8. $\dfrac{.643\times7095}{67\times9\times.462}$.　　9. $\dfrac{9097\times5.4086}{-225\times593\times.8665}$.

10. $(2.388)^5$.　　11. $(.57)^{-4}$.　　12. $(19/11)^9$.

13. $(1.014)^{25}$.　　14. $\sqrt{67.54}$.　　15. $\sqrt[3]{-.30892}$.

16. $8^{\frac{5}{4}}$.　　17. $(.001)^{\frac{2}{3}}$.　　18. $(29\frac{9}{11})^{\frac{1}{2}}$.

19. $\sqrt{\frac{5}{6}}\times\sqrt[3]{\frac{79}{45}}$.　　20. $\sqrt{.1}\div(.009)^{\frac{3}{5}}$.　　21. $(.00068)^{-\frac{5}{4}}$.

22. $(6\frac{1}{3})^{3.4}$.　　23. $(-9306)^{\frac{3}{7}}$.　　24. $(.0057)^{2.5}$.

25. $(5648)^{\frac{1}{2}}\times(-.94)^{\frac{1}{3}}$.　　26. $28927^3\div(.8)^{\frac{2}{5}}$.

27. $\dfrac{\sqrt[7]{.0476}\times\sqrt[5]{222}}{\sqrt[3]{6059\times.0088}}$.　　28. $\dfrac{\sqrt[5]{943\times7298}}{\sqrt[6]{.00006\times.99}}$.

29. $\sqrt{\dfrac{854\times\sqrt[3]{.042}}{7.9856\times\sqrt[4]{.0005}}}$.　　30. $\sqrt[3]{\dfrac{7^{\frac{1}{2}}\times92^{\frac{1}{3}}\times(.01)^{\frac{1}{5}}}{(.00026)^3\times5968^{\frac{1}{7}}}}$.

常用對數之應用

以10外他數爲底之對數.　借助以下定理能從 755
某數以10爲底之對數，推出某數以1外任何正數爲底之對數。

某數 m 以不同數 a 及 b 爲底之對數，其關係公式爲

$$\log_b m=\log_a m/\log_a b.$$

因使　　$m=a^u$，則 $u=\log_a m$，

　　　　$b=a^v$，則 $v=\log_a b$.

則因　　$a^v=b$，得 $a=b^{\frac{1}{v}}$，

由是　$m=a^{\mu}=(b^{\frac{1}{\nu}})^{\mu}=b^{\frac{\mu}{\nu}}$,

亦即，$log_b m=\frac{\mu}{\nu}=log_a m/log_a b$.

例。求.586以7爲底之對數.

$$log_7 .586=\frac{log_{10}.586}{log_{10}7}=\frac{9.7679-10}{.8451}=-\frac{.2321}{.8451}$$

$=-.2746$.

先化 9.7679－10 爲負數 －.2321，再用對數施行最後除法。

756 當 $m=a$ 時，公式變 $log_b a=1/log_a b$.

757 10以外可作任何實用之唯一底，爲無理數 e，其漸近值爲2.718.以此爲底之對數稱爲自然對數，此將於他處討論之。

758 **指數及對數方程式。** 方程式之未知數如爲指數或對數式，有時可解之如下：

例1. 解方程式 $13^{2x+5}=14^{x+7}$.

兩邊取對數，$(2x+5)log\,13=(x+7)log\,14$.

解之，$x=\frac{7\,log\,14-5\,log\,13}{2\,log\,13-\,log\,14}=\frac{2.4532}{1.0817}=2.268$.

例2. 解方程式 $log\sqrt{x-21}+\frac{1}{2}log x=1$.

由§§736,739.此方程式可變爲

$$log\sqrt{x(x-21)}=1=log\,10,$$

故　$x^2-21\,x=100$,

解之　$x=25$ 或 -4.

例3. 解方程式 $x^{2\,log\,x}=10\,x$.

取對數　$2(log x)^2=log x+1$.

解之求 $log x$,　$log x=1$ 或 $-1/2$

故　$x=10$ 或 $-1/\sqrt{10}$.

759 **複利。** 設以 P 元照複利存銀行 n 年，利息按年利率計算，其每元每年之利息爲 r.

於是第一年末之本利和爲 $P+Pr$ 或 $P(1+r)$，二年末爲

$P(1+r)\cdot(1+r)$ 或 $P(1+r)^2$，餘類推，故設 A 表第 n 年末之本利和，則得

$$A=P(1+r)^n.$$

設半年爲一期，$A=P(1+r/2)^{2n}$；設三月爲一期 $A=P(1+r/4)^{4n}$；餘類推。

P 稱 A 之現値，設 A，n 及 r 已知，則可用公式 $P=A(1+r)^{-n}$ 求得 P.

例1. 求 \$ 2500，時期十八年，複利率 4% 之本利和。

因　$\log A=\log 2500+18\log 1.04=3.7039.$

故　$A=\$\,5057$，近似値。

例2. 設於連續十年內每年初付保險費 \$ 120，如照年利率 4% 複利計算，問第十年末保險費之總値爲何?

所求値爲 $120[1.04+(1.04)^2+\cdots+(1.04)^{10}]$，

由 § 701，即　$120\times1.04\times\dfrac{(1.04)^{10}-1}{1.04-1}.$

由對數，$(1.04)^{10}=1.479.$

故所求數値爲 $120\times1.04\times.479\div.04$；由對數計算得近似値 \$ 1494.

年金。 依固定期間，如每年一次，付給之款稱爲年金，玆求於每年支取一次，由本年起支取 n 年之年金 A 元之現値，設一元一年之利息爲 r. 760

第一次應付年金之現値爲 $A(1+r)^{-1}$，第二次之現値爲 $A(1+r)^{-2}$，餘類推。

故全數年金之現値爲，§ 701.

$$A\left[\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+r)^n}\right]=\frac{A}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

設年金永續不斷，即 $n=\infty$，則 $(1+r)^n=\infty$，而現値之公式變爲 A/r.

例，求每年支付一次，繼續20年之年金1000元之現值，設其每年每元之利息為 r.

現值 P, 為 $\dfrac{1000}{.03}\left[1-\dfrac{1}{(1.03)^{20}}\right]$.

由對數，求得 $(1.03)^{20}=1.803$.

故　$P=\dfrac{1000}{.03}\left[1-\dfrac{1}{1.803}\right]=\dfrac{1000\times.803}{.03\times1.803}=\$\,14845$, 漸近值。

習　題　LXIV

1．求 $\log_5 555, \log_7 .0463, \log_{100} 17$ 之值。

2．解以下指數方程式。

$(1)\ 3^x=729.$　$(2)\ a^{x^2+2}=a^{3x}.$　$(3)\ 213^x=516^{-x+4}.$

3．解以下對數方程式。

$(1)\ \log x+\log(x+3)=1.$　$(2)\ \log x^2+\log x=2.$

$(3)\ \log(1-2x)^3-\log(3-x)^3=6.$　$(4)\ x^{\log x}=2.$

4．求本金 \$ 7500, 複年利率 5%, 一年一期，三十五年之本利和。

5．求本金 \$ 5500 複利率 3%, 半年一期，二十年之本利和。

6．指明複利 5% 之本利和，十五年超過其本金之二倍，九十五年超過其本金之百倍。

7．問照複利率 4%, 存款若干元始能於十五年得 \$ 1250 元之本利和?

8．某人每年存儲蓄銀行 \$ 200, 每年利息為金數之 $3\frac{1}{2}$%, 求第二十五年末此人應得之總數。

9．每年 \$ 1200 元，繼續三十年之年金，設年利 4%, 問其現值若干? 又設為永續年金則其現值若干?

10．設 c 表直三角形之斜邊，a, b 表其他兩邊，$b=\sqrt{(c+a)(c-a)}$. 如已知 $c=586.4$, $a=312.2$, 用對數求 b 及此三角形之面積。

11. 設 a, b, c 表三角形各邊之長，$s=(a+b+c)/2$，三角形之面積爲 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$．設已知 $a=416.8$, $b=424$, $c=25.68$，求三角形之面積。

12. 試由公式 $S=4\pi r^2$, $V=4\pi r^3/3$，及 $\pi=3.1416$．求一徑長 23.6 之球體之面積及體積。

XXV. 排列及組合

排列及組合之定義. 設使給出 n 個字母，如 a, 761
$b, c, \cdots, k$，用以表任何類之一羣物體。

此羣字母中之任 r 個，若不論其次序，名爲 n 字母中每次取 r 個之組合。或簡言之 n 字母中 r 之組合。

其組合之數目，用符號 C_r^n 表之。

例如，四字母 a, b, c, d，中 2 之組合爲

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd.$$

共有六種組合法，即 $C_2^4=6$

但若按一定次序由 n 個字母取 r 個排列之，則名爲 n 字母中 r 之排例。

其排列之數目用符號 P_r^n 表之。

例如，四字母 a, b, c, d 中 2 之排列爲

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd,$$

$$ba, ca, da, cb, db, dc.$$

共有十二種排列即 $P_2^4=12$.

由上觀之，顯然 ab, ba 在組合中相同，在排列中異。

以上所述爲假定排列及組合中字母 $a, b, \cdots, k$ 爲各不相同，且一字母不許重用。本章內除非有特殊之述明外，皆在此假定之下。

762 **基本定理.** 在 § 554 中，已經運用以下之理論：

設一事有 m 個作法，又設其已完成後另一事有 n 個作法，則此二種事件合成一起，共有 mn 個作法。

其理由：因爲在第一件之每種作法，在全體即可變成 n 種作法，在第一件之 m 種作法，在全體即可便成 mn 種作法。

一般言之，設第一件有 m 個作法，第二件有 n 個作法，第三件有 p 個作法，等等，則合成一起，共有 $m \cdot n \cdot p \cdots$ 個作法。

例. 問由數字 $1, 2, 3 \cdots 9$ 可作成若干含三不同數字之數？

可取九數字之任一個佔第一位，其餘八個字母中之任一個佔第二位，取定第二位後，其餘七字母之任一個佔第三位，故所求作法數目可有 $9 \cdot 8 \cdot 7$ 或 504 個。

763 **n 不同字母次取 r 個之排列之數.** 由前例題之理論，可證明 P_r^n 可由下公式求得之

$$P_r^n = n(n-1)(n-2) \cdots \text{至第 } r \text{ 個因子式。}$$

因爲 n 個字母每次取 r 個之排例，可取 n 字母中之任一個佔第一位，其餘 $n-1$ 個字母之任一個佔第二位，取定第二位後，其餘 $n-2$ 個字母之任一個可佔第三位，餘類推。

故由§762知選第一，第二，第三，····以至第r字母所有選法之全數，換言之即n字母每次取r個之排列之數共為$n(n-1)(n-2)\cdots\cdot$至第r個因子式。

如，字母a, b, c, d, e，每次取一個，取二個，取三個取四個，取五個之排列數目為 $P_1^5=5, P_2^5=5\cdot4, P_3^5=5\cdot4\cdot3,$ $P_4^5=5\cdot4\cdot3\cdot2, P_5^5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1.$

顯然在乘積$n(n-1)(n-2)\cdots\cdot$中之第r個因子式為$n-(r-1)$或$n-r+1$故公式(1)可寫成

$$P_r^n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdot(n-r+1). \tag{2}$$

設$r=n$，則因子$n-r+1$為$n-n+1$，或1，而$P_n^n=n(n-1)\cdots\cdot2\cdot1$，或$1.2\cdots\cdot(n-1)n$，連續乘積$1\cdot2\cdots\cdot n$名為$n$之階乘以符號$n!$或$\underline{|n}$表之，所以$n$個字母每次全取共有之排列法，以後式表之。

$$P_n^n=n! \tag{3}$$

其無意義之符號$0!$指定其值為一，此將於§775說明其理由。

例1. 以不同顏色之四旗作信號，用一旗或幾旗上下排列為之，問有若干個不同之作法?

因作一信號每次可用旗1, 2, 3或4個排列之，故其作之數目為$P_1^4+P_2^4+P_3^4+P_4^4$，或64.

例2. *Fancies*中之字母每次取全數所成排列之數。

(1) 字首字尾用子音字母有若干排列法?

此字第一位字母之變化，可有4法，末位可有3法，中間可有$5!$法，故所求之作法為$4\cdot3\cdot5!$或1440個。

(1) 在偶數位用母音字母，有若干個排列法?

母音字母列在偶數位可有$3!$作法，子音列在奇數位，則有$4!$作法，因每一次子音字母之排列，可與每一次母音子母之排列相交換，故所求之排列法為$3!\ 4!$或144個。

(3) 設 e 不許列在字母之中間，問有若干個排列法？

顯然 e 列在字之中間有 $6!$ 個排列法，其餘字母，可用可能之排列法排列之，故 e 不許在中間，共有之排列法為 $7!-6!$ 或 4320 種。

例3. 求証 $P^8_6 = 4\cdot P^7_7$，及 $P^{16}_3 = 2\cdot P^8_4$。

例4. 設 $P^{2n}_4 = 127\,P^{2n}_3$，求 n。

例5. 一鐵路共分二十站，問鐵路局須預備若干種車票？

例6. 用字母 a, e, i, o, u, y 排列之，問取全數有若干排列法，三字母 a, e, i 不許離開，有若干排列法？

例7. 有英文字 *numerical* 每次取五字母排列之，其奇數位用子音字母，問有若干排列法？

例8. 求証用基數 $0, 1, 2 \cdots, 9$ 可作 $P^{10}_4 - P^9_3$ 個不同數字之四位數。

例9. 用基數 3, 4, 5, 7, 8 作數，每數中之字母皆無相同者，問可全作若干個數？

例10. 設七童子列成一排有一童子軍不許站在排之任一端，問共有若干個排列法？

764 **圓周排列法。** n 個不同之字母圍一圓周或一閉曲線排列之，其不同排列法為 $(n-1)!$

因若用全字母，圍此曲線之同方向變動相同之位置，其 n 字母之相關位置仍不變。

故此 n 字母，其不同次序之變化，可設想一字母為固定，其餘 $n-1$ 字母可有 $(n-1)!$ 種之排列，§763 (3)。

例如，八人圍圓桌而坐，可有 $7!$ 或 5040 種不同之坐法。

例1. 求証 n 個不同之字母每次取 r 個，其不同之圓排列法為 P^n_r/r。

例2. 設有一圓環，若按其直徑旋轉 $180°$ 之角度又回原處，求證 n 個不同顏色之珠以線穿之可得 $(n-1)!/2$ 個各異之頸環。

例3. 四男四女圍圓桌相間而坐，問共有若干不同之坐法。

重複排列法. 設 n 不同字母可以重複用之，每次取 r 個可有 n^r 個排列法。 765

因作此類之排列可選取 n 字母中任一字母列在第一位，又因可以重複用之，n 字母中之任一字母可列在第二位。其餘以此類推，故由 § 762 共可作之排列法為 $n \cdot n \cdot n \cdots$ 至 r 個因子或 n^r.

例如　用基數 $1, 2, 3 \cdots 9$ 可作 9^3 或 729 個之三位數。

例1. 問用 1, 2, 3, 5, 7 可作一位，二位，三位之數若干？

例2. 三獎品獎與七童子，問每童子可得各種獎品之機會為若干？

非完全相異之 n 字母，每次全取之排列法. 766 今討論字母 a, a, a, b, c (1) 有三字母相同，且取全數排列之，可有若干個不同之排列法？

此種排列法，可與不相同之字母 a, a', a'', b, c (2) 之相當排列法比較之，設取 (1) 內之一種排列 $abaca$ 各 a 交換，而其排列法仍不變，但取 (2) 內相當之一種排列，即 $aba'ca''$, $aba''ca'$, $a'ba''ca$, $a'baca''$, $a''baca'$, $a''ba'ca$. 故 (1) 內每一種排列即與 (2) 內之 $3!$ 種排列相當 (2) 之排列法共為 $5!$, § 763 (3)；故 (1) 之排列法共為 $5! \div 3!$.

由上推之，則知 n 字母中，其中一種有 p 個相同，另一個有 q 相同‧‧‧‧其共有之排列數以下公式表之：

$$N=\frac{n!}{p!q!\cdots}.$$

例1. 英字 *independence* 之字母可有若干不同之排列法。

在此字之 12 字母中 4 個 e, 3 個 n, 2 個 d.

故所求之結果爲 $12!/4!\cdot 3!\cdot 2!$ 或 1,663,200.

例2. 英字 *Antioch*, 交換其字母，但不變母音字母或子音字母之相關位置，問有若干排列法？

由上已知之證明顯知所求之排列法相同，故所求之排列法爲 $7!/3!\cdot 4!$, 或35.

例3. 問下列五變數 x, y, z, u, v, 所成之對稱方程式即 $\sum x^3y^2z$, $\sum x^3y^2z^2$ $\sum x^3yzu$, 及 $\sum x^3y^3z^2u^2$ 各有若干項？

使指數 3, 2, 1 之位置爲固定，則 $\sum x^3y^2z$ 所有之項數當爲 x, y, z, u, v 中三個之排列法，故爲 P_3^5 或 60.

設應用同法於 $\sum x^3y^2z^2$, 則知 $x^3y^2z^2$ 必發現二次，一次爲 $x^3y^2z^2$ 一次爲 $x^3z^2y^2$ 兩者仍爲相同。同理，則知各項數發現二次，故 $\sum x^3y^2z^2$ 之項數爲 $P_3^5/2$ 或 30.

同理 $\sum x^3yzu$ 有 $P_4^5/3!$ 或 20 項， $\sum x^3y^3z^2u^2$ 有 $P_4^5/2!2!$ 或 30 項。

例4. 五個便士六個五分錢及四個角子分配與十五個童子使各得一種，問有若干分配法？

例5. 在一某城市中，有南北大街十，東西大街五；問一人由此城西南角行至東北角，取最短之路程，問有若干個走法？

n 個不同字母，每次取 r 個之組合數。 組 767
合法之數 C_r^n，可用下式求之：

$$C_r^n = P_r^n \div r! = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}. \qquad (1)$$

因爲若將取 r 個所得之組合內之每一組合，依其可能次序排列變化之，則得 r 個之排列。

但因每一組合，相當 $r!$ 個排列，§763(3) 所有之組合 C_r^n，必相當 $r! \times C_r^n$ 個排列。

故 $r! \times C_r^n = P_r^n$.　　　　則 $C_r^n = P_r^n \div r!$.

例如，字母 a, b, c, d 每次取一個，二個，三個，四個，五個之組合數目各爲

$C_1^5 = \frac{5}{1}$，　$C_2^5 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}$，　$C_3^5 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}$，　$C_4^5 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$，
$C_5^5 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$.

C_r^n 爲用二項定理展開 $(a+b)^n$ 之第 $(r+1)$ 項，§565，在 §560 仍用公式 (1) 之另一証明法証明之。

設在上所得之 C_r^n 式分子，分母各以 $(n-r)!$ 乘之， 768
則得公式

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

由公式 (2) 則知 n 字母取 r 個之組合數目與取 $(n-r)$ 769
之組合數目相同。

因 $C_{n-r}^n = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_r^n$.

此亦可由事實證明，因每種事件選取 r 個，必遺留 $(n-r)$ 個。

例如，$C_{12}^{14} = C_2^{14} = 14\cdot 13/1\cdot 2 = 91$. 以此法求之，比直接應用 (1) 較爲敏速。

例1. 平面內有十五點，無三點在一直線者，求連各點可作若干個三角形？

頃知所作三角形之數目與每次取三個點之組合數目相同，故三角形之數為 C_3^{15} 即 $15\cdot14\cdot13/1\cdot2\cdot3$ 或 455.

例2. 由十人中選三辦事員 (1) 每次有指定人 A？(2) 每次無 A，問各有若干法？

(1) 其餘二辦事員，可由其餘 9 人中選之，為 C_2^9，即 $9\cdot8/1\cdot2$，或36 法。

(2) 全辦事員可由其餘 9 人中選之為 C_3^9，即 $9\cdot8\cdot7/1\cdot2\cdot3$ 或 84 法。

例3. 用母音字母 a, e, i, o 及子音字母 b, c, d, f, g，作成文字，每字取二母音三子音，問有若干個取法？

取母音字母可有 C_2^4 法，取子音字母可有 C_3^5 法，每一母音字母之選取，可與子音字母配合成一字而全排列有 5! 個法，故所求之結果為 $C_2^4\cdot C_3^5\cdot5!$ 或 7200 法。

例4. 三人 A, B, C，等分十八本書；問有若干個分法？

A 得書可有 C_6^{18} 法，B 有 C_6^{12} 法，C 有 C_6^6 或 1 法，故由 § 762 所求之結果為 $C_6^{18}\cdot C_6^{12}\cdot C_6^6$ 或 $18!/(6!)^3$。

將十八本書分成相等之三組，求有若干法，必須用剛才所求得之3!除此結果，則得 $18!/(6!)^3\,3!$；因三組內與次序無關也。

例5. 問 *mathematical* 之字母每次取 4 可成若干個不同組合及排列？

因字母不完全相異，故單應用公式 C_r^n 及 P_r^n 不能得所求之結果。

字母為 $a, a, a; m, m; t, t; h, e, i, c, l,$

故可分類且計算，其可能之選取法及排列法如下；

1. 對於有三字母相同之討論。
3 個 a 可與他七字母輪流配合，均得 7 個選取法及 $7\cdot 4!/3!$ 或28個排列法。

2. 對於有二對兩個相同字母之討論。
有如彼之 3 選取法及 $3\cdot 4!/2!\cdot 2!$ 或 18 排列法。

3. 對於有兩同字母兩異字母之討論。
有 $3\cdot C_2^7$ 或 63 如彼之選取法及 $63\cdot 4!/2!$ 或 756 排列法。

4. 對於四個相異字母之討論。
有 C_4^8 或 70 如彼之選取法及 $70\cdot 4!$ 或 1680 排列法，故所有之選取法爲 $7+3+63+70$ 或 143 所有之排列法爲 $28+18+756+1680$ 或 2482.

例6. 試求 C_{15}^{17}, C_8^{10} 及 C_{19}^{23}之值。

例7. 設 $C_8^n=C_7^n$ 求 n.

例8. 設 $2C_4^n=5.\ C_2^n$ 求 n.

例9. 有十二點，無四點在一平面者，問可定若干個平面？

例10. 由十二人中選出五人開會，問有若干個選法，若每次必選 A，有若干個選法？每次皆不選 A 有若干個選法？

例11. 由前題若每次必須選出指定之人 A 及 B 有若干選法，每次必選出二人中之任一人有若干選法，每次任一人亦不得選出，有若干選法？

例12. 由二十個共和黨員及十八個民主黨員，選舉辦事員，每次由共和黨選四人，民主黨選三人，問有若干個選法？

例13. 用五個母音字母十四個子音字母排列成字，每字有三母音四子音，問有若干個作法？

例14. 問52張撲克均分於四賭徒 A,B,C,D. 有若干分法？若分相等之四堆有若干分法？

例15. 問用數字 2, 3, 4, 2, 5, 2, 3, 6, 7, 可作若干個五位數？

770　**全數組合法.** 設在公式 $(a+b)^n$ 內 §561 使 $a=b=1$ 且由兩端減1則得

$$C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n-1.$$

故由 n 個不同之事物每次取一個，二個…n 個亦即由 n 個事件，每次取一個或多個之全數組合法爲 2^n-1.

此定理又可證明如下：每取一事件，必居二者之一，或被選取或被遺留故 n 事件之全數組合法爲 $2\cdot2\cdots$ 至 n 個因子，即 2^n, §762 故捨去所有事件之被遺留者，則如前所得爲 2^n-1.

例1. 以價值一角，二角五分，半圓及一圓之銀幣各一枚：任意加之付款，問能付若干宗不同之款數?

例2. 由上述理由證明 $p+q+\cdots$ 事件中每次取一個或多個之方法爲 $(p+1)(q+1)\cdots-1$, 此處 p 爲一類事件 q 爲另一同類事件其餘以此類推.

例3. 以價值一角之銀幣二枚，二角五分者五枚，半圓者四枚，任意加之付款，問能付若干宗不同之款數?

771　**C_r^n之最大值.** 在 C_r^n 之展開式內，亦即$n(n-1)\cdots(n-r+1)/r!$ 分子中 r 個因子減少，同時分母中之因子必增大故 n 之值若已知，則 C_r^n 之值將爲最大，當 r 之值爲下式值之左近時.

$$(n-r+1)/r<1.$$

由此可知設 n 爲偶數，$r=n/2$, C_r^n 之值爲最大，設 n 爲奇數 $r=(n-1)/2$ 或 $r=(n+1)/2$, 時C_r^n之值爲最大，若等此二數其 C_r^n 之值相同.

例. C_r^{12} 及 C_r^{15} 之最大值各爲何?

重複組合法. 今研討由四基數 1, 2, 3, 4 內每次選 772
取三個，設許重複用之，應有若干之選法?

例如此種選法可取 111, 112, 124 順次證明基數中，有三個相同或二個相同或無一個相同者之各種情形.

設在 111, 112 及 124 之各基數上，順次加以 0, 1, 2 則得 123, 124 及 136,此三數乃基數 1, 2, 3, 4, 5, 6 每次取三個之組合而無重複基數者稍加考慮，即可證知設取一種選擇法如 111, 112, 124之全除，亦即每一數中後之基數，其數值不小於前者，然後在每一種所選之數之基數上加 0, 1, 2,則得 $4+(3-1)$ 或 6 個基數 1, 2, 3, 4, 5, 6 每次取三個而無重複基數之一種組合且僅得一種: 後者組合之數目爲 C_3^6; 即 C_3^6 所求之數目也.

同理可推廣至 n 數字 $1, 2, \cdots, n$ 每次取 n 個數字而得重複之組合，且因此數字與任何類之 n 個不同事件道理相同，故得定理:

n 個不同事件每次取 r 個而許重複之組合數目與 $n+r-1$ 個事件每次取 r 個不許重複之組合數目，即 C_r^{n+r-1} 或 $n(n+1)\cdots(n+r-1)/r!$ 相同.

例1. 投四骰子，問可得若干種之不同投法?

因骰子之各面爲 1, 2, 3, 4, 5, 6,投後所得之結果，可有四個相同，三個相同，二個相同或四個各異，故可能投法之數目爲 1, 2, 3, 4, 5, 6,每次取四個而許重複之組合數目，即 C_4^{6+3}, 或 126.

例2. 問三變數，x, y, z 作成 r 次方之齊次多項式共有若干項?

顯然項之數目與 x, y, z 所成之 r 次乘積之數目相同；故其數目爲 $C_r^{3+r-1}=C_r^{r+2}=C_2^{r+2}=(r+1)(r+2)/2$.

773　**組合公式相當代數之恆等式．**下之關係式頗有趣味而且重要．

$$C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}. \qquad (1)$$

因 n 字母每次取 r 個之組合法可分二類——一類含有指定字母如 a，而一類不含此字母，設作所餘 $n-1$ 字母取 $r-1$ 之組合，然後再加 a 於各個組合內，則得第一種組合法；其數目為 C_{r-1}^{n-1}；第二類組合法則為其餘 $n-1$ 字母取 r 之組合；故其數目為 C_r^{n-1}.

$$C_r^{m+n} = C_r^m + C_{r-1}^m \cdot C_1^n + C_{r-2}^m \cdot C_2^n + \cdots$$
$$+ C_1^m \cdot C_{r-1}^n + C_r^n. \qquad (2)$$

因取 $m+n$ 字母且分為二羣，一羣為 m 個字母，一羣為 n 個字母，設如下分之，則得 $m+n$ 個字母，每次取 r 個組合法，則得共有之數目為

(a) m 字母羣內每次取 r 個之組合法，此種組合法之數目為 C_r^m.

(b) 包含 m 羣中之 $r-1$ 個字母及 n 羣中之一個字母之組合法，因選取此 $r-1$ 字母有 C_{r-1}^m 法，選此一字母有 C_1^n 法，故此類之組合數目為 $C_{r-1}^m \cdot C_1^n$.

(c) 包含 m 羣中之 $r-2$ 個字母及 n 羣中之 2 個字母之組合法，因選取此 $r-2$ 字母有 C_{r-2}^m 法，選取此 2 字母有 C_2^n 法，故此類之組合數目為 $C_{r-2}^m \cdot C_2^n$. 其餘以此類推，以至 r 羣中每次取 r 個之組合數為 C_r^n.

例如 $C_3^9 = 84$ 及 $C_3^5 + C_2^5 C_1^4 + C_1^5 C_2^4 + C_3^4 = 10 + 40 + 30 + 4 = 84$.

774　設在 (1) 及 (2) 內以 m, n, r 之關係式替代其許多符號 C，§ 767 (1)，則得 m, n, r 之關係式．

前所証明者僅能證明 m, n, r 為正整數時其公式為合理，但實際將 m 與 n 深切討論之，其公式為代數恒等式，對所有此等字母之值皆為眞確，此可用代數之數化證明之。

例如，在 (1) 內則得：

$$C^{n-1}_{r}+C^{n-1}_{r-1}=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots r}$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}\cdot\left[1+\frac{n-r}{r}\right]$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}=C^{n}_{r}.$$

但此不必須再加變化證明，其公式確為恒等式；是故當表成 m, n, r 之項時，(2) 之每端成為 m 及 n 之整數方程式，其方次為 r，此兩方程式必恒等，因不然，可與 m 以特殊之值則得僅含 m 之方程式而對此 r 以上之各 n 值不能相等矣；§421，但前已證明 n 無論為何整數值時其式必相等。

習　題　LXV

1．設由 P 至 Q 有三路相通，由 Q 至 R 有二路，由 R 至 S 有四路，問一人由 P 至 S 有若干方法可走？

2．問有若干法可使五人坐於六椅上？

3．設有八賽跑員，競賽半英哩問有若干法，可得第一第二第三？

4．由十舟子中排選四人為一班問有若干選法，若此舟子全列於船上，有若干排列法？

5．由一百兵士中派三人為步哨問有若干個派法？

6．五棍球之九人隊，欲決勝負其規定為每一九人隊遇其他之九人隊三次問有若干個結果？

7．將基數 1, 2, 1, 3, 2, 1, 5 全取排列之，問有若干排列法？

8．有字 *factoring* 每次取其全數排列之 (1) 若首位為一母音字母末位為一子音字母，有若干排列法？ (2) 各首位不許用 *f* 若干排列法？ (3) 首三位皆為母音字母有若干排列法？

9．如前題所述各母音字母永久保持其 *a*, *o*, *i* 次序，問有若干排列法？各子音字母永久保持其次序 *f*, *c*, *t*, *r*, *n*, *g* 有若干排列法？若此二種字母永久全保持其上列之次序有若干排列法？

10．用字 *resident* 之字母作五字母之排列，其第一位，第三位，第五位，全用母音字母，問有若干排列法？

11．由十五人排選一棍球九人隊，其中六人限定在外球場，九人限定在內球場，問有若干選法？

12．由數字 1, 2, 3, 8, 9, 10 中選其二數字其和為偶數問有若干個選法？

13．問用基數 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 作一位，二位，三位之數；(1) 設基數不能重複用之，(2) 設其可以重複用之，問可作若干個數？

14．用基數，1, 2, 3, 4, 5, 6 作五位不同數字之奇數，問有若干個作法？

15．在 3000 及 8000 之間不要有重複數字之數有若干個奇位數？有若干個被 5 除絕之數？

16．一人設宴間請五友中之一人或數人之方法共有若干？

17．有梨十五枚分與三童子，一得六枚，一得五枚，一得四枚；問共有若干分配法？

18．六正號五負號書於一行問共有若干書法？

19．問用數字 1, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 4, 5, 3, 6, 7，可作若干個四位數？

20．由十五本法文書及十二本德文書內，排選八本法文書及七本德文書列於書架上，問有若干選法？

21. 由全套十三張牌內選取五張每次必須取 *King* 或 *Queen* 或此兩種全取，問有若干取法？

22. 由五美人六英人中選擇四人 (1) 僅一英人 (2) 最少一英人，問各有若干選法？

23. 有十平行線與他十二平行線相交，作成平行四邊形，問可得若干？

24. 一平面內有 n 個點，除有 m 點在一直線外，無三點在一直線者，求証連各點可得直線 $C_2^n - C_2^m + 1$.

25. 用五粒珠六顆紅寶石．五顆鑽石，穿成臂鐲；問有若干穿法？

26. 十人圍圓桌而坐，每桌五人，問有若干坐法？

27. 五男六女打網球，每邊有一男一女；問有若干分配法？

28. 十五人選舉五候補公務員，問有若干選法？若此十五票平分有此五候補者有若干分法？

29. 一船有舟子八人打槳，一人在船首，二人在船尾，問有若干排列法？

30. 由十八人挑選棍球九人隊，其中十人限定在內球場，五人限定在外球場三人不加限制，問可選若干隊？

31. 有六不同之字母，每次取其全數而排列之，其中有二字母固定不變，求證其排列數爲 $6! - 2 \cdot 5! + 4!$.

32. 有字母 p, q, r, s, t, v 每次取四字母組合之，設能重複用之，問有若干組合法？

33. 擲五個骰子，問其落法共有若干？

34. 設有十個變數作成對稱方程式之 $\sum x^4y^3z^2u$, $\sum x^2y^2z^2u$, $\sum x^3y^3z^2u^2v$; 問各式之項數爲若干？

35. 求證在四變數之 n 次完全齊次方程式之項數爲 $(n+1)(n+2)(n+3)/3!$。

XXVI. 多項式定理

775 **多項式定理.** 設 $a+b+\cdots+k$ 表任一多項式，n 爲一正整數，則

$$(a+b+\cdots+k)^n=\sum\frac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\kappa!}a^\alpha b^\beta\cdots k^\kappa,$$

此式右端之和爲一族 $\alpha,\beta,\cdots,\kappa$ 之値所成之一項其 $\alpha,\beta\cdots\kappa$ 一値由 $0,1,2,\cdots,n$ 內選取之，但限定 $\alpha+\beta+\cdots+\kappa=n$，故知 $\alpha=0$ 時 $\alpha!$ 可以 1 代替之其他如 $\beta,\cdots,k$ 亦皆然.

因 $(a+b+\cdots+k)^n$ 表一連次之乘積，

$$(a+b+\cdots+k)(a+b+\cdots+k)\cdots\text{至 } n \text{ 個因子.}$$

由實際相乘，若不集合同類項每項之積，必爲此形式：第一括弧內之一項，乘第二括弧內之一項，再乘第三括弧內之一項等等.

但因由各括弧內所選之字母必爲 $a,b,\cdots,k$ 中之任一字母，其乘積之項數必爲 $a,b,\cdots k$ 內取 n 個之重複排列法，設 $\alpha,\beta,\cdots,n$ 表 $0,1,\cdots,n$ 之特殊值其和爲 n，則所有之乘積有 α 個因子 a β 個因子 $b\cdots n$ 個因子 k 與字母中有一種爲 α 個相同者，另一種爲 β 個相同者之排列是相同意義，即 $n!/\alpha!\beta!\cdots k^\kappa!$ §766 且因每一項乘積，等於 $a^\alpha b^\beta\cdots k^\kappa$ 故其和爲 $\dfrac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\kappa!}a^\alpha b^\beta\cdots k^\kappa$,

二項式定理，爲此定理之特殊情形.

例如：展開 $(a+b+c+d+e)^4$ 其項之形狀爲 $abcd$, a^2bc a^2b^2, a^3b, a^4 五種，其係數順次爲 $4!/1!1!1!1!$ 或 24; $4!/2!,1!\ 1!$ 或 12; $4!/2!2!$ 或 6; $4!/3!1!$ 或 4; $4!/4!$ 或 1，故集合其同類項則

$$(a+b+c+d+e)^4=\sum a^4+4\sum a^3b+6\sum a^2b^2$$
$$+12\sum a^2bc+24\sum abcd,$$

例．試求 $(2+3x+4x^2)^8$ 之展開式內 x^5 之係數．

此展開式內，其各項之普通形狀爲 $\frac{8!}{\alpha!\beta!\gamma!}2^\alpha 3^\beta 4^\gamma x^{\beta+2\gamma}$ 式中 $\alpha+\beta+\gamma=8$ (1)，而所求之項其關係爲 $\beta+2\gamma=5$ (2)，而 (1) 及 (2) 所有之正整數或 0 之解答爲 $\alpha,\beta,\gamma=3,5,0;\ 4,3,1;\ 5,1,2$ 故所求之係數爲

$$\frac{8!}{3!5!}2^3\cdot 3^5\cdot+\frac{8!}{4!3!}2^4\cdot 3^3\cdot 4+\frac{8!}{5!2!}2^5\cdot 3\cdot 4^2\cdot \text{ 或 } 850,752.$$

習　題　LXVI

1．試求 $(a+b+c+d)^3$ 之展開式且集合其同類項．

2．試求 $(a+b+c+d)^5$ 之展開式且集合其同類項．

3．試求 $(a+b+c+d)^{12}$ 之展開式內 $a^5b^4c^2d$, $a^4b^4c^4$ 及 $a^5b^5c^2$ 之係數．

4．試求 $(a-b+c-d)^{10}$ 之展開式內 $ab^2c^3d^4$ 之係數．

5．試求 $(a+3b+2c)^8$ 之展開式內 a^4b^3c 之係數．

6．試求 $(1+x+x^2+x^3)^{10}$ 之展開式內 x^6 之係數．

7．試求 $(1-x+3x^2)^9$ 之展開式內 x^7 之係數．

XXVII. 機　遇　法

簡　單　事　件

機遇法．爲考慮將來的結果，如加以實驗，就有一 776
種發生的機會而此種機會之必然成功或必然失敗，必發生在有同等可能性之有限數目的方法中，所云同等可能性的方法者，即不能謂此種方法勝於彼種方法之意也，投骰子於盤其各點之變化即此一例，因骰子之六面必有一面轉在上面，但不能投此面，比諸他面轉在上面之機會爲易．

所有此種成功及失敗之同等可能性方法名爲關於此事件之可能機會，亦即有若干方法，在此方法中爲有利；及有若干方法，在此方法中爲不利情形也。

故曰：

某事之機遇爲其有利之機會，比其有利無利之全體機會。

故設 m 代表可能機會，a 代表有利機會之數目，p 代表機遇，由定義則

$$p=a/m$$

例如，投骰子於盤，其每面轉在上面之順勢爲 1/6；因 $m=6$ 而 $a=1$.

又，一袋內有五球，三白二黑，從袋中任取一球，其取白球之機會爲 3/5.

777 **推論1.** 設一事物一定成功，彼之機遇爲 1，設彼一定失敗，彼之機遇爲 0，在其他任何情形下，其機遇爲一正純分數。

因設一事物一定成功，則無失敗之方法矣，故 $a=m$ 且 $a/m=1$. 設此事物一定失敗，則無成功之方法矣，故 $a=0$ 且 $a/m=0$. 在其他情形下，a 大於 0 而小於 m，是以 a/m 爲一正純分數。

778 **推論2.** 設一事件之成功機遇爲 p，其不成功之機遇必爲 $1-p$，因一事物其 m 可能機會之 a 個爲有利，則其除 $m-a$ 個爲不利機會，故此事物，不成功機遇爲 $(m-a)/m=1-a/m=1-p$.

779 **優勝率.** 設一事物，其有利機會之數目爲 a，而不利機會之數目爲 b，當 $a>b$ 則云優勝率爲 a 比 b 有利於此事物，當 $b>a$ 則云優勝率爲 b 比 a 不利於此事物；當 $a=b$，

則云優勝率爲勝負相等，在第一情況下此事物之機遇，即 $a/(a+b)$ 大於 $1/2$；在第二情況下，則小於 $1/2$，在第三情況下等於 $1/2$.

例如。設袋中有五球三白二黑，任取一球，有利於白球之優勝率爲 3 比 2，而 3 比 2 爲不利於黑球之優勝率。

希望.　設 p 代表某人得一宗款子 M 之機會，則積 780
Mp 名爲關此款子 M 之希望價値。

例如。設一賭徒投一顆骰子之五點贏得 \$12. 則其希望價値爲 \$12 $\times 1/6$ 或 \$2.

機遇法之例題.　按 §776 機遇之定義對於同等可 781
能性機會之判定必須注意；由下例題即可知其需要。

例1. 設兩銅元同時投出，其結果成二正面之機會爲何？成二反面之機會爲何？一正一反之機會爲何？

其理由爲：共有三個可能機會，第一種情形爲一機會，第二種爲一機會，第三種爲一機會，故每一結果之機遇爲 $1/3$.

但此結果誤矣，因同等可能機會非三乃四；蓋以設此二銅元順次爲 A 及 B，此同等可能機會爲：A 正面，B 正面；A 反面，B 反面；A 正面，B 反面；A 反面 B 正面，而此機會中，有一機會爲二個全正，有一機會爲二個全反，有二機會爲一正一反，則此結果之機遇順次爲 $1/4$；$1/4$，$2/4$.

例2. 投二骰子間成八點之機遇若何？

同等可能性之機會之數目爲 $6\cdot 6$ 或 36，因一顆骰子之任一面與他顆骰子任一面相配而能成八點者爲 2，6 或 3，5 或 4，4. 但 2，6 有二種配法，即骰子 A 之 2 與骰子 B 之 6 相配，

或 B 之 2 與 A 之 6 相配，同理，3, 5 亦有二種配法，但 4, 4 僅有一種配法，故有五個成功機會。故機遇為 5/36.

例3. 投三顆骰子，問成八點且至少每次有一顆骰子為五點之機遇若何？

同等可能機會之數目為 $6\cdot6\cdot6$ 或 216.

而成八點時其各面之點必為 1, 1, 6 或 1, 2, 5 或 1, 3, 4. 但成 1, 1, 6 者有 $3!/2!$ 或 3 法，§766，因 1, 1, 6 可在三顆骰子之任一上面故也。

同理 1, 2, 5 及 1, 3, 4 每種皆有 $3!$ 或 6 法，故有 $3+6+6$ 或 15 成功之機會是以所求之機遇為 15/216 或 5/72.

例4. 一瓶中盛有六白球，四紅球及二黑球。

(1) 設每次取四球，問取白球之機遇若何？

取出四球，全為白球之機會，為六球每次取四球之組合，即 C_4^6；同理，因瓶中共有十二球，所有可能性機會之數目為 C_4^{12}；故其機會為 C_4^6/C_4^{12} 或 1/33.

(2) 設每次取六球，且限取三白球二紅球一黑球，問其機遇若何？

三白球選取之機會為 C_3^6，二紅球選取之機會為 C_2^4，一黑球選取之機會為 C_1^2.故所求之選取機會為 $C_3^6\ C_2^4\ C_1^2$，而所有可能性之機會為 C_6^{12}，故其機遇為 $C_3^6\cdot C_2^4\cdot C_1^2/C_6^{12}$ 或 20/77.

例5. 從十三張不同之撲克內任取三張。

(1) 問每次無皇上 *King* 無皇后 *Queen* 之機遇若何？

除去皇上及皇后只餘十一張，故任取三張不含皇上及皇后之撲克為 C_3^{11} 組，是以所求之機遇為 C_3^{11}/C_3^{13} 或 15/26.

(2) 問每次取皇上或皇后或全取之機遇若何？

在 (1) 內成功之機遇即為此題失敗之機遇，故所求之機遇為 $1-15/26$ 或 11/26 §778.

(3) 每次取皇上及皇后問其機遇若何？

若每次由不含皇上及皇后之十一張牌內任取一張與一張皇上及一張皇后相配，則得取三張，每次全含皇上及皇后之組，故所求之機遇為 $11/C_3^{13}$ 或 1/26.

機遇法之數種意義. 1. §776所云之機遇分數, 782 為 a/m, 而其事件在簡單試驗中或少次試驗中, 實在結果與此分數相差遠甚; 但真正之結果, 乃指在無限次之過程中, 此事件屢屢發生試驗所得者.

例如, 設一人投骰子許多次, 若為百次, 其由經驗中必發現所投之次數愈多, 而得五點之次數與總投次數之比與1/6相離愈近.

2. 又有數種重要事件一歲數之延續即其一種. 而§776之定義不能應用, 蓋以其述出若干同等可能之方法, 而此事件在此方法中發生或不發生為不可能也; 但在過去極多次考驗之過程中, 此種事件之屢屢發生, 亦可規定之; 設如可能, 吾人亦名此分數為此類事件之機遇; 在投骰子如1/6即指屢次相投之機會之數; 在將來極多次之試驗過程中, 乃有理由可以希望發生者.

例如, 由調查戶口所得之報告, 在1880年, 年為六十歲之人每100,000人中, 至1890年仍活於世者有2/3, 則題每人現在為六十歲, 十年後仍活於世之機遇為2/3.

3. 但又有用分數 a/m 表事件在簡單試驗中發生之希望強度, 有利情形數目, 與可能情形之數目之比愈大, 或云在已往經驗中同性質事件發生之次數愈多, 則此特殊事件, 在所討論之簡單試驗中發生之強度愈大.

由此吾人可討論將來任何事件之機遇。例如，在二足球員 A 及 B 之比賽足球以前，已聽知對 A 得勝之優勝率為 3 比 2，或 A 勝之機遇為 $3/5$；A 勝之希望與一瓶中盛有五球，其中二個為白者，任取一球所得白球之希望，二者相同也。

習　題　LXVII

1. 有一事之機遇為 $3/8$；問其優勝率對此事利或不利及此優勝率為何？又問此事不發生之機遇為何？

2. A 某與人比賽勝負，其有利之優勝率為 10 比 9，問其得勝之機遇為何？又失敗之機遇為何？

3. A 某將得 \$60，其有利之優勝率為 5 比 3，問其希望為何？

4. 法國哲學家 *D'Alembert* 云：預測將來之結果，必有二個可能之機會，一為發生機會，一為不發生機會，故每事之機遇為 $1/2$，且機遇之定義無意義矣，問其答案究應如何？

5. 一瓶內盛有十六個球，其中七為白球，六為黑球三為紅球，

(1) 設每次任取一白球或一紅球或一黑球，其機遇各若何？

(2) 設每次取二球全為黑球，或一白一紅，問其機遇各為何？

(3) 設每次取三球，全為紅球或全不取紅球，或一白一黑一紅，問其機遇若何？

(4) 設每次取四球，只一個為白球或只二個為白球，問其機遇各若何！

(5) 每次若取十球，且限取五白球三黑球二紅球，問其機遇若何？

6. 每次若取得同點之機遇為何？投三骰子得同點之機遇為何？

7. 投二骰子得七點之機遇為何？求證此點機遇最大。

8. 投一骰子最少得幺點之機遇爲何？得幺點且僅得幺點之機遇爲何？

9. 由一字 *factor* 及 *banter* 任取一字母，問由此一字取同字母之機遇爲何？

10. 一盒中盛有九張票，其號碼爲 1,2···9；設任取二張，問其號碼之乘積爲偶數之機遇爲何？爲奇數之機遇爲何？

11. 由上盒中每次取五張票試求 (1) 每次必須取 1, 2 及 3, (2) 每次在 1, 2 及 3 中，只許取一張，(3) 此三號碼之票全不取之機遇各爲何？

12. 設由25張撲克內，每次取四張，其爲幺點 *ace* 皇上 *King*, 皇后 *Queen* 及僕役 *Knave* 之機遇爲何？全爲幺點，全爲皇上，全爲皇后，全爲僕役之機遇爲何？

13. 鬥 *whist* 牌者之一手中，有四張獎牌 *trump* 及他種不同之三張牌，問其機遇爲何？

14. 投三骰子，問成五點之機遇爲何？小於五點之機遇爲何？

15. 設八人圍一圓桌而坐，問二個指定人，必須坐在一起之機遇爲何？

複雜事件，相斥事件

獨立事件. 一種事物或一種以上之事物，其一種之發生或不發生與其餘事件之發生無關者，名爲獨立事件反之，則名爲相關事件。 783

例如，由一袋中取球，一球取二次；設第一次取後，仍放回袋中，則爲獨立，設第一次取後不放回袋中，則爲仍關。

定理 1. 一組獨立事物全體發生之機遇，爲單個事物發生機遇之乘積。 784

因設二個此類事物發生之機遇順次爲 a_1/m_1 及 a_2/m_2,

有同等可能性之有利及無利機會，對於第一事物之數目為 m_1，對於第二事物為 m_2，又因此等事物為獨立，而 m_1 中之任一機會可與 m_2 中之任一機會發生；故對於全體有同等可能性之有利及無利機會之數目為 $m_1 m_2$，同理全體事物之有利機會之數目為 $a_1 a_2$，故全體事物發生之機遇為 $\frac{a_1a_2}{m_1m_2}$，即 $\frac{a_1}{m_1}\cdot\frac{a_2}{m_2}$，如定理所要證明者。

二個以上事物之證明亦相同。

此證明僅適用於 §776 所述之一類事物中，但按 §782 所述之理由，可適用於任何將來事物，如下習題 2 便是此例。

例如，投一骰子連續得二次幺點之機遇為 1/6×1/6，或 1/36.

又一袋中盛有五白球，四黑球，每次取一球，第一次取後，仍放回袋中，則白球連得二次之機遇為 5/9 × 5/9 或 25/81.

785 **定理2.** 設第一事物之機遇為 p_1，且設第一事物發生後，第二事物之機遇為 p_2，若按此次序全體發生之機遇為 p_1p_2，二個以上之事物亦然。

此定理與定理1證法相同，定理1顯然包括此定理中。

例如，一袋中盛有五白球四黑球，在取第一白球後，再取第二白球之機遇為 4/8；故當第一白球連續取第二白球之機遇為 5/9×4/8，或 5/18.

例1. 一骰子連投三次，問得幺點最少一次之機遇為何？

除每一次相投不得幺點外，至少可得幺點一次，在單投一骰子之失敗機遇為 5/6；在三骰子全投失敗之機遇為 5/6 × 5/6 × 5/6 或 125/216. 故最少得幺點之機遇為 1 − 125/216 或 91/216.

例2.　某一問題，A 解決之機遇爲 3/4，B 解決之機遇爲 2/3. 設 A 及 B 共同用個人之思想解決之，問此問題被解決之機遇爲何?

除 A 及 B 全失敗外，此問題必可解決; A 失敗之機遇爲 1/4，B 失敗之機遇爲 1/3; 故 A 及 B 全失敗之機遇爲 $1/4\times 1/3$ 或 1/12. 是以被解決之機遇爲 11/12.

例3.　有二錢袋，一袋中盛有五銀元及一個金元，他袋中盛有三個銀幣; 設由第一袋中取出四元，放在第二袋中; 然後再由第二袋中取出五元，放在第一袋中，問此金元在第二袋中之機遇爲何? 在第一袋中之機遇爲何?

此金元由第一袋取出，放在第二袋中之機遇爲 C^5_3/C^6_4 或 2/3，§781，習題 5. 而其仍留在第二袋中之機遇爲 $6/C^7_5$ 或 2/7. 故在兩次交取後，其在第二袋中之機遇爲 $2/3\times 2/7$ 或 4/21，其在第一袋中之機遇爲 $1-4/21$ 或 17/21.

例4.　設八個錢同時投出，至少有一錢爲正面之機遇爲何?

例5.　A, B, C, D 四人以槍打禽. 設 A 平均每打兩個即得一個，B 每三個得 2 個，C 每五個得四個，D 每七個得五個，若同時全打一禽，彼等得此一禽之機遇爲何?

例6.　一瓶盛有五個白球及四紅球，第二瓶盛有六白球二黑球，由 A 取一白球放在 B 中，又由 B 中取一白球，問其機遇爲何?

例7.　A 將活到五年後之機遇爲 3/4; B 爲 5/6. 問 A 及 B 全活到五年後之機遇爲何? A 活 B 死之機遇爲何? A 死 B 活之機遇爲何? 全死之機遇爲何?

相斥事件.　設二事件或二以上之事件，在第一時內只能一個發生者，其關係謂之互斥. 786

例如，投一骰子; 么點與二點不能同時而得，此即謂之相斥事件.

787　**定理 3.** 一組相斥事件之彼此一一發生之機遇爲簡單事件發生機遇之和。

因爲考察兩相斥事件 A 及 B.

關於此種事件之可能機會有三種（全爲相斥）(1) A 發生 B 不發生；(2) A 不發生 B 發生；(3) A B 都不發生。

設此三種所有同等可能之機遇順次爲 l, m, 及 n, 則

(a) 非 A 則 B 之發生機遇有 $\dfrac{l+m}{l+m+n}$.

因共有 $l+m+n$ 個可能機會，而 $l+m$ 爲有利機會。

(b) 單 A 發生之機遇爲 $\dfrac{l}{l+(m+n)}$.

因除 B 不發生外，A 永不會發生；而 A 發生 B 不發生之機遇，即全爲 A 發生之機遇；且 A 不發生 B 發生或 A 及 B 全不發生之 $m+n$ 機遇，即全爲 A 不發生之機遇。

(c) 同理單 B 發生之機遇爲 $\dfrac{m}{m+(l+n)}$.

但 $$\frac{l+m}{l+m+n}=\frac{l}{l+(m+n)}+\frac{m}{m+(l+n)}.$$

故非 A 及 B 發生之機遇爲單 A 或單 B 發生之機遇之和，對於以上事件之証明與此相同。

例如，設由一盛有四白球五黑球七紅球之袋中，任取一球，則取白球之機遇爲 1/4, 取黑球之機遇爲 5/16, 或白或黑之機遇爲 1/4＋5/16 或 9/16. 此種結果自然由 §776 機遇之定義，亦可直接求之，實則彼定義，可視作定理 3 之特殊情形。

應注意者，此理切勿用在非相斥事件上。

例如，§785 之習題 2, 如問試求解決一問題，設 A 及 B 全想作之，A 之成功機遇爲 3/4, 而 B 爲 2/3, 則不能得所求之結果爲 3/4 與 2/3 相加，因 A 成功之機會與 B 成功

之機會之兩件事不爲相斥也。此問題被解決中之相斥事件爲：A成功B失敗；A失敗B成功，A成功B成功，由§784此種情形之機遇各爲$3/4\times1/3$或$3/12$，$1/4\times2/3$或$2/12$，$3/4\times2/3$或$6/12$；此三機遇之和，或$11/12$，即爲此問題被解決之機遇。

例1．一瓶A盛有十球，其中三個爲白球，第二瓶B盛有十二球，其中四個爲白球。設任由此二瓶中挑取一球，問此球爲白球之機遇爲何？

今先求下列相斥事件之一之機遇，設

(1) 由A中任取一白球，(2) 由B任取一白球。

選取A瓶之機會爲$1/2$，而由A中取一白球之機遇爲$3/10$，故(1)之機遇爲$1/2\times3/10$或$3/20$．同理(2)之機遇爲$1/2\times4/12$，或$1/6$．是以所求之機遇爲$3/20+1/6$，或$19/60$．

例2．一錢袋中盛有一元錢五枚，及半圓錢七枚。一人可由此袋中任取二枚，問其希望價值爲何？

當此人得二枚一元錢之希望價值爲$\$2\times C_2^5/C_2^{12}=\$2\times5/33=\$.30$；得二枚半圓之希望價值爲$\$1\times C_2^7/C_2^{12}=\$1\times7/22=\$.32$；得一枚一圓及一枚半圓之希望價值爲$\$1.50\times5.7/C_2^{12}=\$1.50\times35/66=\$.80$．

故其總希望價值爲$\$.30+\$.32+\$.80$或$\$1.42$．

例3．一袋中盛有三白球及二黑球，二人A及B，每次交換取一球，設A先開始取之，問每人第一次取得白球之機遇爲何？

在第一次A取得白球之機遇爲$3/5$．

A失敗後B取得之機遇爲$2/5\times3/4$或$3/10$．因當B取時，此袋中仍有四球，其中三個爲白者。

A失敗B又失敗後，而A取得之機遇爲$2/5\times1/4\times3/3$或$1/10$，蓋當A取時，袋中仍有三球爲白者。

故A之所有機遇爲$3/5+1/10$或$7/10$，而B爲$3/10$，

例4. 如習題3之所述，設每次取出後：即又送回原袋內，問 A 及 B 之有希望機遇若何?

第一次，A 的機遇為 $3/5$, B 的機遇為 $2/5\times 3/5$, 或 $6/25$; 而其後幾次之機遇亦相同。

故彼等所有之機遇為比 $3/5:6/25$ 或 $5:2$, 即 A 之所有機遇為 $5/7$, B 為 $2/7$.

例5. 一屋內列有三桌，各桌上放有書籍，一為九本一為十本，一為十一本，有六本書為余所最喜悅者。其中二本在第一桌上，三本在第二桌上，一本在第三桌上。設一友與余每次由各桌上任挑一本，問挑得余所喜歡之書之機遇為何?

例6. 一馬主加入二馬，作某距離之賽馬比賽，而此二馬之得勝機會各為 $1/2$, $1/3$. 問此馬主獲頭馬之機遇為何?

例7. A 及 B 交替投二骰子誰先得對骰者為獲勝。設 A 先投，問二人之有希望機遇各為何?

788 **簡單事件之重複考驗.** 下列諸定理為研討一連續之經驗過程中，一定之事件將發生一定之次數之機遇問題也，而簡單考驗之發生機遇假定早已知之。

789 **定理4.** 設一事件在簡單考驗中之機遇為 p, 則其在 n 次考驗之過程中，恰發生 r 次之機遇為 $C_r^n p^r q^{n-r}$, 此處 $q=1-p$.

因其發生，在特殊 r 組考驗中，而其失敗在其餘之 $n-r$ 考驗中，設 $q=1-p$, 則其機遇為 $p^r(1-p)^{n-r}$ 或 p^rq^{n-r} §784.

但因共有 n 個考驗，則選取此特殊 r 個考驗方法有 C_r^n 個，自然此諸方法為相斥事件。

故所求之機遇為 $C_r^n p^r q^{n-r}$ §787.

例如，投一骰子，在投五次中恰得二次么點之機遇，或云同時投五骰子其二個且僅二個骰子為么點之機遇為 $C_2^5\cdot(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3$, 或 $625/3888$.

試考 $C_r^n p^r q^{n-r}$ 乃用二項定理展開 $(p+q)^n$ 含有 p^r 之項；因 $C_r^n = C_{n-r}^n$.

定理5.　一事件在 n 次考驗過程中至少將發生 r 次之機遇爲在 $(p-q)^n$ 之展開式中前 $n-r+1$ 項之和；即 790

$$p^n + C_1^n p^{n-1}q + C_2^n p^{n-2}q^2 + \cdots + C_{n-r}^n p^r q^{n-r}.$$

因設此事件恰發生 r 次，或恰發生比 r 大之任何數次，則此事件至少發生 r 次，而各項 $p^n, C_1^n p^{n-1}q, \cdots, C_{n-r}^n p^r q^{n-r}$ 順次代表此事件恰發生 $n, n-1, \cdots, r$ 各次之機遇故也，§789.

例如，投一顆骰子，在五次中至少得么點二次之機遇爲 $(\frac{1}{6})^5 + 5(\frac{1}{6})^4\frac{5}{6} + 10(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^2 + 10(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3$, $\frac{763}{3888}$.

例 .　二人 A 及 B 共作一遊戲，而 A 之技術爲 B 之二倍，問每五次中 A 勝三次之機遇爲何？

在一簡單玩法中 A 之獲勝機遇爲 2/3，失敗機遇爲 1/3. 故五次中勝三次之機遇爲 $(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^5$ 中前三項之和，即 $(\frac{2}{3})^5 + 5(\frac{2}{3})^4\frac{1}{3} + 10(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^2$，或 64/81.

例2.　在例 1 之條件下，A 在 B 勝二次前勝三次之機遇爲何？

所求之機遇，爲在前四次玩鬥中 A 至少勝三次；故此機遇爲 $(\frac{2}{3})^4 + 4(\frac{2}{3})^3\frac{1}{3}$，或 $\frac{16}{27}$.

廣而言之，A 在 B 勝 n 次前勝 m 次之機遇，與前 $m+n-1$ 次玩鬥中至少勝 m 次之機遇相同。

例3.　有十銅錢同時投出，恰有六枚成正面之機遇爲何？至少六枚成正面之機遇爲何？

例4.　設有四顆骰子同時投出，問恰得三個么點之機遇爲何？至少二么點之機遇爲何？

例5.　在習題 1 之條件下，A 在五次玩鬥中至少勝四次之機遇爲何？

例6.　在同條件下問 A 在 B 勝一次前勝四次之機遇爲何？

習題 LXVIII

1. 一袋中盛有三白球，五黑球及七紅球，每次任取一球，當即放回袋中。問 (1) 先得一白球繼得一紅球，再繼得一黑球之機遇爲何？(2) 得一白一紅一黑而不論次序之機遇爲何？

2. 由袋中連續取三球，但不放回原袋中，問前次得一白球之機遇爲何？

3. 一袋中盛有各種錢幣，計五角者五枚，一元者四枚及五元者三枚，一人允於袋中任取二枚，問其希望價值爲何？

4. 某門鎖着之機會爲 $\frac{1}{2}$. 八枚鑰匙中有一枚能開此門，設由此鑰匙中任取三個以開此門能開此口之機遇爲何？

5. 有三獨立事件，其機遇順次爲 $\frac{1}{2}$, 2/3, 及 3/4. 問在一事件能發生之機遇爲何？僅能有一事件發生之機遇爲何？僅能有二事件發生之機遇爲何？三事件全發生之機遇爲何？

6. 投二骰子，不利於成七點或十一點之優勝率各爲何？

7. 投三顆骰子，不利於成十點之優勝率爲何？又問利於成五以上之點之優勝率爲何？

8. 一匣中盛十一張票，其號碼爲 $1, 2, 3 \cdots, 11$，由此匣中任取三張，問其號碼之和爲12之機遇爲何？其和爲奇數之機遇爲何？

9. 有二賭徒 A 及 B 任投二骰子，設成七點 A 獲勝，設成十點 B 獲勝；在他情況下平均分之，試比較其機遇。

10. 上二賭徒規定，設 A 在 B 投得七點前投得六點則 A 勝，設 B 在 A 投得六點前投點七點則 B 勝，A 開始投，以後交換投之，試比較其機遇。

11. 三賭徒 A, B 及 C 放四白球八黑球於一袋中。且規定誰先取得一白球者爲得勝，設按次序 A, B, C 任取一球；當取後不准放回時，其各人之有希望機遇爲何？准放回時，其機遇爲何？

12. 在一百張彩票中，設有 \$100 之獎品五件，\$50 之獎品十件，\$5 之獎品二十件。問一張彩票之價值為何？

13. A 袋內盛五球，其中有一為白者，B 袋內盛六球，無一為白者，設由 A 任取三球放在 B 中，然後再由 B 任取三球放在 A 中。問此白球在 A 中之機遇為何？

14. 一袋 A 內盛有 m 個球，其中有 a 個為白球；另一袋 B 盛有 n 個球，其中有 b 個為白球。問任意由二袋中取一球，得白球之機遇與其將所有之球放在一袋中後任取一球之機遇相同。

15. 某城中在十日內死去五人，但此十日中有一月一日。問在一月一日不發生死人之機遇為何？

16. 設平均年在六十歲之三人中，必有二人可以活至七十歲。問現為六十歲者共五人，至少將有三人可再活十年之機遇為何？

17. 一童子平均五問題能解答三題，設在每次考試中共有八題，解答五題即可及格，問其及格之機遇為何？

18. 設一人投二顆骰子，第一次得七點即獲利一元，第二次投得七點亦獲利一元，如此進行，直到投得七點為止，問其希望價值為何？

19. A 與 B 同打網球，平均每四場 A 即勝三場。問 A 以六比三勝 B 之機遇為何？若抵消者不論 A 全勝 B 之機遇為何？

20. 在前題之條件下，若 B 以四比二敗於 B 之機遇為何？

21. 二賭徒，A 及 B 鬥一賭，每人各賭 \$32，得三點為獲勝，但當 A 得二點及 B 得一點時，則即完場。問二人如何分此 \$64 之款？

XXVIII. 算學歸納法

791　**數學歸納法。** 在以後數章內有許多之公式，可用所謂算學歸納法證明而成立，此法可舉下例說明之：

例。求證前 n 個奇數之和爲 n^2.

令所證明者爲：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2. \tag{1}$$

用試驗則知 n 爲 1 或 2 而 (1) 爲眞。

令假定 n 爲特殊值 k 時，此公式爲眞。則

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 \tag{2}$$

(2)之兩端各加次一奇數項，即 $2(k+1)-1$ 或 $2k+1$，再以 $(k+1)^2$ 代 k^2+2k+1，則得：

$$1+3+5+\cdots+(2k+1)=(k+1)^2. \tag{3}$$

但以 $k+1$ 代 n 於 (1) 內亦得 (3)，故知 n 爲特殊之值 k 時而 (1) 爲眞，若 n 爲 $k+1$ 時，此公式仍爲眞也。

但已知 k 爲特殊值 1 時 (1) 爲眞，故當 $n=1+1$ 或 2 時，仍爲眞。$n=2+1$ 或 3 時亦爲眞。以此類推，至 n 到題所與之數時，亦莫不眞也。

概而言之，設有一公式內，令所含之 $n=1$ 時，試驗其爲眞，然後假定 $n=k$ 時其公式爲眞。若能証明 $n=k+1$ 時亦爲眞，則 n 等任何正整數時亦皆眞矣。其理由爲：因 $n=1$，其式爲眞，$n=1+1$ 或 2 時亦爲眞，故 $n=2+1$ 或 3 時，以至等於所有之 n 之正整數值時，亦莫不爲眞。此方法亦可用下之二項定理之證法證明之。

因 n 爲較小之數值時，可用實際乘法得

$$(a+b)^n=a^n+C_1^n a^{n-1}b+C_2^n a^{n-2}b^2+\cdots+C_r^n a^{n-r}b^r+\cdots \tag{4}$$

以 $a+b$ 乘 (1) 之兩端，由 § 773, 1, 則得:

$$\begin{array}{rl|l|l|l}
(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+C_1^n & a^nb+C_2^n & a^{n-1}b^2\cdots+C_r^n & a^{n-r+1}b^r+\cdots \\
+1 & +C_1^n & +C_{r-1}^n &
\end{array}$$

$$=a^{n+1}+C_1^{n+1}a^nb+C_2^{n+1}a^{n-1}b^2+\cdots$$

$$+C_r^{n+1}a^{(n+1)-r}b^r+\cdots \qquad (2)$$

但 (2) 與 (1) 與以 $n+1$ 代 n 所得結果相同。

故設 (1) 當 $n=k$ 時假定爲眞，證明 $n=k+1$ 時亦爲眞。但已知 (2) 當 $n=1$ 時爲眞，故當 $n=1+1$ 或 2 時亦爲眞；當 $n=2+1$ 或 3 時亦爲眞，以下類推。

因公式 $C_r^n+C_{r-1}^n=C_r^{n+1}$ 可獨立証明之，§ 774, 故此處二項式定理之証明，與彼無關。

習　題　LXIX

試以算術歸納法，證明下列諸公式，§ § 701, 712.

1. $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=a(1-r^n)/(1-r)$.
2. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$.
3. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=n^2(n+1)^2/4$.
4. $1+3+6+\cdots+n(n+1)/2!=n(n+1)(n+2)/3!$.

XXIX. 方 程 論

基本定理　　有理根

普通 n 次方程之二標準式。　任何有理整數方程，含有一未知數如 x 且爲 n 次，必可化成下列之標準式: 592

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0. \qquad (1)$$

當係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 爲已知數時，(1) 名爲數目方程，但當其係數爲不定數時，名爲 n 次普通方程。

最後係數 a_n，常名曰絕對項。

方程 (1) 之完全或不完全者，按 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 無一個或有幾個爲 0 而定也。在完全方程內其項數爲 $n+1$.

當係數 $a_0\, a_1, \cdots a_n$ 爲實數時，則可假定首項 a_0 爲正，其爲有理數時，可假定其無公因子。

以 a_0 除 (1) 之兩端，則化成第二標準式。

$$x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n=0, \tag{2}$$

在此式內第一項之係數爲 1, $b_1=a_1/a_0$, 等等，在許多情形之下，用 (2) 較爲便利。

在此章內，用 $f(x)=0$ 表方程 (1) 或 (2).

793 **方程之根.** 方程 $f(x)=0$ 之根，爲以 x 之值代入多項式 $f(x)$ 內爲零者 §§332, 333. 有時爲便利計，名此方程之根，爲此多項式之根。

794 由根之定義，則知當 a_n 爲 0 時，$f(x)=0$ 根必爲 0; 又方程 $f(x)=0$ 所有之係數爲正，則此方程無正根。且 $f(x)=0$ 爲完全方程時，若其係數爲正負相間，則此方程無負根。

例如，$2x^3+x^2+1=0$ 無正根，因當 x 爲正時，此多次式不能爲 0; $2x^3-x^2+3x-1=0$ 不能有負根，因當 x 爲負數時，此多項式 $2x^3-x^2+3x-1$ 不能爲零故也。

795 **定理1.** 設 b 爲 $f(x)=0$ 之一根，則 $f(x)$ 必恰可爲 $x-b$ 所除絕；逆言之，設 $f(x)$ 恰爲 $x-b$ 除絕，則 b 爲 $f(x)=0$ 之一根。

因按 § 413, $f(x)$ 被 $x-b$ 除絕之餘式爲 $f(b)$. 但當 b 爲 $f(x)=0$ 之根時 $f(b)$ 爲 0, § 793, 故 $f(x)$ 恰爲 $x-b$ 除絕；逆言之，當 $f(x)$ 爲 $x-b$ 除絕時，此餘式 $f(b)$ 必爲 0, 故 b 爲 $f(x)=0$ 之根。

例。求證 3 爲 $f(x)=x^3-2x^2-9=0$ 之根。

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & +0 & -9 & \underline{3} \\ & 3 & 3 & 9 & \\ \hline 1 & 1 & 3, & 0=f(3) & \end{array}$$

以 $x-3$ 除 x^3-2x^2-9, § 411, 則得餘式 $f(b)$ 爲 0, 故 3 爲 $f(x)=0$ 之根，

設 b 爲 $f(x)=0$ 之一根，$f(x)$ 必恰可爲 $x-b$ 除絕，得商 $\phi(x)$，則得： 796

$$f(x)=(x-b)\,\phi(x).$$

故 $f(x)=0$ 之其他各根，仍爲以 x 之值代入多次式 $\phi(x)$ 內爲零者。換言之，則爲低次方程 $\phi(x)=0$ 之根，§ 341.

例。求解方程 $x^3-3x^2+5x-3=0$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & +5 & -3 & \underline{1} \\ & 1 & -2 & +3 & \\ \hline 1 & -2 & +3, & 0 & \end{array}$$

用試驗則知 1 爲一根，以 $x-1$ 除 x^3-3x^2+5x-3 則得方程 $x^2-2x+3=0$，此二次方程之根，按 § 631 求之爲 $1\pm i\sqrt{2}$，故知方程之根爲 $1, 1+i\sqrt{2}$, 及 $1-i\sqrt{2}$.

現在先假定有理整數方程 $f(x)=0$ 至少有一根，此定理以後將證明。由 § 795 及此處之假定，則得下之定理，普通名爲代數學之基本定理。 797

定理2. 凡 n 次方程如： 798

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

有 n 根且僅有 n 根。

按 § 797, 必有一 x 值代入 $f(x)$ 爲零，設此值爲 β_1，則 $f(x)$ 必恰可爲 $x-\beta_1$ 除絕，§ 795, 則商式第一項必爲 a_0x^{n-1}. 故

$$f(x)=(x-\beta_1)(a_0x^{n-1}+\cdots). \tag{1}$$

同理，x 又有一值假設為 β_2，能使 $a_0x^{n-1}+\cdots$ 為零，則得 $a_0x^{n-1}+\cdots=(x-\beta_2)(a_0x^{n-2}+\cdots)$．是故由 (1)

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(a_0x^{n-2}+\cdots). \quad (2)$$

連續求之則得如此繼續進行，除 n 次後則得：

$$f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n). \qquad (3)$$

由證明則知一次之 n 個因子必存在，即 $x-\beta_1, x-\beta_2, \cdots x-\beta_n$，而 $f(x)$ 為其相乘之積；則按 §419, $f(x)$ 除此而外無復有因數矣。

但在乘積內有一因數為零時其乘積必為零，且只有一因數為零時其乘積必為零。

由此則知在(3)內，當 $x=\beta_1$，或 $\beta_2\cdots$ 或 β_n，且只有 x 等於此數時 $f(x)$ 為零，故由 §793，此 n 數 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ 為方程 $f(x)=0$ 之諸根，且除此以外無復有根。

799　由此定理，則知解方程 $f(x)=0$ 與分多項式 $f(x)$ 之因子，其問題相同。

又知若已知方程之根時求作此方程可以 x 減此各數相乘等於 0 即得。

例．已知方程之根為 2, 1/2, －1, 0, 求作此方程。

此方程為 $(x-2)(x-1/2)(x+1)(x-0)=0$

或 $2x^4-3x^3-3x^2+2x=0$.

800　**重根．**　方程之根 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ 有時兩個或多個可相等；若其一根或數根等於 β，則名 β 為重根，且按等於 β 之根數為二個三個…或 r 個，則名 β 為二重根三重根或 r 重根。一單根可視作其個數 r 為 1 之一根，顯然由 §798 得下定理

β 為 $f(x)=0$ 之 r 重根之條件為 $f(x)$ 可被 $(x-\beta)^r$ 除絕，而不能為 $(x-\beta)^{r+1}$ 除絕者。

是故凡 n 次之方程必有 n 個根，其所謂 r 重根者，乃其相同根有 r 個，由此自然知凡 n 次之方程有 n 個不同之根，爲不眞矣。

例如，$x^3-3x^2+3x-1=0$ 爲三次方程，但因 $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$ 其各根皆爲 1.

數目方程之求根法. 設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}$ 801
$+\cdots+a_n=0$ 表一方程，其係數爲整數，且設 b 表一整數，及表以約簡之有理分數 b/c，由 §§ 451, 795，設 b 爲 $f(x)=0$ 之一根，則 b 必爲 a_n 之一因數；又由 §§ 452, 795，設 b/c 爲其一根，則 b 必爲 a_n 之一因數，c 爲 a_0 之一因數，是故在特殊情形下，設 $a_0=1$，除 $c=\pm1$ 外，亦即除 b/c 表此整數 $\pm b$ 外，b/c 不能爲其一根，故下定理可成立，§ 454：

凡係數皆爲整數之方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 不能含有有理分數根。

由上定理可知有理係數方程之有理根，可用試驗求之，此試驗可以簡單除法作之。 802

例。試求方程

$$3x^5-8x^4+x^2+12x+4=0.$$

其可能之有理根爲 ±1，±2，±4，$\pm1/3$，$\pm2/3$，$\pm4/3$.

$$\begin{array}{cccccc|l}
3 & -8 & +0 & +1 & +12 & +4 & 2 \\
 & 6 & -4 & -8 & -14 & -4 & \\ \hline
3 & -2 & -4 & -7 & -2, & 0 & 2 \\
 & 6 & 8 & 8 & 2 & & \\ \hline
3 & 4 & 4 & 1, & 0 & & -1/3 \\
 & -1 & -1 & -1 & & & \\ \hline
3 & 3 & 3, & 0 & & &
\end{array}$$

由試驗則知非一根. 試驗 2 則知爲一根而得新方程爲 $3x^4-2x^3-4x^2-7x-2=0$. 又知 2 又爲新方程之根，而得第二方程 $3x^3+4x^2+4x+1=0$. 此方程無正根，因其各項皆爲正也 § 794。

試驗 -1 則知非其根。試驗 $-1/3$ 則知爲其一根，而得第三新方程 $x^2+x+1=0$.

是以原方程之有理根爲 $2, 2, -1/3$. 其他二根，解 $x^2+x+1=0$ 得 $(-1\pm i\sqrt{3})/2$.

803 設對 § 453 之注意熟嫺時，則關於試驗之計算可以減少，又若一數非原方程之根，則亦非新方程之根，§ 796. 且得下定理:

設 b 爲正數，且以 $x-b$ 除 $f(x)$ 所得新方程之係數皆爲正時，則 $f(x)=0$ 不能含有比 b 再大之根，設 b 爲負數且新方程之係數爲正負相間，則 $f(x)=0$ 不能含有比 b 再小之代數根。

因由簡便除法，則知在此兩種情形之下，b 之數值增加，其所除得之結果，第一次係數以後之係數之數值亦增加，且不改變其符號，故最後之係數即餘式，不能爲 0.

例1. 求證 $2x^3+3x^2-4x+5=0$ 無比 1 再大之根。

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & +3 & -4 & +5 & 1 \\ & 2 & 5 & 1 & \\ \hline 2 & +5 & +1, & 6 & \end{array}$$

以 $x-1$ 除之，僅得正係數，故無比 1 再大之根。

設以 $x-2$ 除之，則得係數較大之結果且全爲正。即 $2+7+10, 25$.

例2. 求證 $3x^3+4x^2-3x+1=0$ 無比 -2 再小之根。

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & +4 & -3 & +1 & -2 \\ & -6 & +4 & -2 & \\ \hline 3 & -2 & +1, & -1 & \end{array}$$

以 $x+2$ 除之，則得係數爲正負相間，故無比 -2 再小之根。

設以 x_1+3 除之，則得與前同符號之係數，但按數值論比前爲大，即 $3-5+12, -35$.

804 無論何數，若其代數值比 $f(x)=0$ 之根皆大者，則此

數名爲此等根之優限。無論何數，其代數值比 $f(x)=0$ 之根皆爲小者，則此數名爲此等根之劣限。

例如，如前所證明者 1 爲 $2x^3+3x^2-4x+5=0$ 諸根中之優限，而 -2 爲 $3x^3+4x^2-3x+1=0$ 諸根之劣限。

習題 LXX

1．求作方程，已知其根爲

(1) $a, -b, a+b$.　　(2) $3, 4, 1/2, -1/3, 0$.

2．求證 -3 爲方程

$x^4+8x^3+18x^2-27=0$ 之重根。

3．求證 1 及 1/2 爲方程

$4x^5-23x^3+33x^2-17x+3=0$ 之二重根。

4．試用 §803 之方法求 $x^5-5x^4-5x^3+4x^2-7x-250=0$ 中諸實根之優限與劣限。

5．求證 $2x^4-3x^3+4x^2-10x-3=0$ 無有理根。

下列各方程中，有含一個有理根者，有含多個有理根者，試解之：

6．$x^3-x^2-14x+24=0$.　7．$x^3-2x^2-25x+50=0$.

8．$3x^3-2x^2+2x+1=0$.　9．$2x^4+7x^3-2x^2-x=0$.

10．$x^4+4x^3+8x^2+8x+3=0$.

11．$2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=0$.

12．$3x^4+11x^3+9x^2+11x+6=0$.

13．$x^5-9x^4+2x^3+71x^2+81x+70=0$.

14．$2x^5-8x^4+7x^3+5x^2-8x+4=0$.

15．$x^5+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0$.

16．$12x^4-32x^3+13x^2+8x-4=0$.

17．$x^5-7x^4+10x^3+18x^2-27x-27=0$.

18．$2x^4-17x^3+25x^2+74x-120=0$.

19. $4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=0$.

20. $x^5+8x^4+3x^3-80x^2-52x+240=0$.

21. $2x^5+11x^4+23x^3+25x^2+16x+4=0$.

22. $6x^4-89x^3+359x^2-254x+48=0$.

23. $10x^4+41x^3+46x^2+20x+3=0$.

24. $36x^4-108x^3+107x^2-43x+6=0$.

25. $12x^5+20x^4+29x^3+77x^2+69x+18=0$.

26. $2x^6+7x^5+8x^4+7x^3+2x^2-14x-12=0$.

27. $2x^6+11x^5+24x^4+22x^3-8x^2-33x-18=0$.

28. $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4=0$.

根及係數之關係

805. **根及係數之關係.** 設一方程之根為 $\beta_1, \beta_2, \cdots,$ β_n, 當其化成第二標準式時 § 792 (2), 則 § 798, (3) 之恆等式變成:

$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+b_3x^{n-3}+\cdots+b_n$$
$$=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)\cdots(x-\beta_n).$$

作右端之乘積, 而按 x 之多項式排列之, § 559. 然後等其兩端 x 之同次項之係數, § 284. 於是得以下係數 $b_1, b_2,$ $\cdots b_n$ 及根 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 之關係.

$$-b_1=\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_n, \qquad (1)$$

$$b_2=\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\cdots+\beta_2\beta_3+\cdots+\beta_{n-1}\beta_n, \qquad (2)$$

$$-b_3=\beta_1\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_2\beta_4+\cdots+\beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n, \qquad (3)$$

$$(-1)^n b_n=\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_n, \qquad (n)$$

(2), (3)$\cdots$之右端代表每二根, 每三根等等相乘積之和, 其

右端前之符號為正或為負，按右端每項根之數為偶為奇而定，故有下定理：

定理． 凡方程可化為 806

$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n=0,$$

其第二項之係數為 b_1，若變其符號即等於其諸根之和；其絕對項 b_n 之符號變或不變，按 n 為奇為偶而定，其值等於諸根之積．其中間項之係數 b 之符號，或變或不變，按其 r 為奇為偶而定，而其值等於每 r 個根相乘之積之和．

在未應用此定理前，若方程之第一項之係數非 1 時，先以此係數除其各項．設此方程不完全時，應知所缺項之係數為 0．

例如，不必解方程 $3x^3-6x+2=0$ 可得下列諸根 β_1,β_2,β_3 之關係．為用此定理，先化方程為 $x^3+0x^2-2x+2/3=0$．

故 $\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$, $\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3=-2$, $\beta_1\beta_2\beta_3=-2/3$．

設某方程內除一個根外，其除之根皆為已知，則此一根，807 可由 $-b$ 減去其已知根之和即得；若 n 為奇數時須變其符號，或用已知根之積除 b_n 亦可得之．

例． $2x^3+3x^2-23x-12=0$ 之二根為 3 及 -4．問其餘之一根為何？

他一根為 $-3/2-[3+(-4)]=-1/2$; 或 $6\div3(-4)=-1/2$．

當其根間，已知其幾種關係，其係數間之相當關係亦 808 必存在，欲求此關係，可應用 § 806 之定理．

例1.　試求 $x^3+px^2+qx+r=0$ 內諸根成幾何級數之條件。

設諸根爲 $\alpha/\beta, \alpha, \alpha\beta$, 則得

$$\frac{\alpha}{\beta}+\alpha+\alpha\beta=-p, \frac{\alpha^2}{\beta}+\alpha^2+\alpha^2\beta=q, \frac{\alpha}{\beta}\cdot\alpha\cdot\alpha\beta=-r.$$

第三方程可化爲 $\alpha^3=-r$, 故 $\alpha=\sqrt[3]{-r}$.

以第一除第二方程，且以 $\alpha=\sqrt[3]{-r}$ 代於結果中而化簡之，則得 $q^3-p^3r=0$.

例2.　試解方程 $x^3+8x^2+5x-50=0$, 已知其有二根相等。

設諸根爲 α, α, β，則得

$$2\alpha+\beta=-8, \alpha^2+2\alpha\beta=5, \alpha^2\beta=50.$$

由第一第二方程解 α, β 得 $\alpha=-5, \beta=2$, 及 $\alpha=-1/3$, $\beta=-22/3$.

$\alpha=-5, \beta=2$ 適合方程 $\alpha^2\beta=50$, 但 $\alpha=-1/3, \beta=-22/3$ 不適合此方程。

是以所求之根爲 $-5, -5, 2$.

809　**根之對稱函數。**　以諸根所表之若干式以係數代入皆相等者, §805, 名此若干式爲諸根之對稱函數，§540. 在 §808 已證明所有其他諸根之有理對稱函數，全可表成此若干式之有理式，故可表爲原方程之係數之有理式。

例1.　試求方程 $2x^3-3x^2-4x-5=0$ 各根平方之和。

設各根爲 α, β, γ, 則得

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(3/2)^2+4=6\tfrac{1}{4}.$$

例2.　設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之諸根爲 α, β, γ. 問諸根爲 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ 之方程爲何?

設 p', q', r', 表所求方程之係數，則得

$$-p'=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=q,$$
$$q'=\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta+\alpha\beta\cdot\beta\gamma$$
$$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=(-r)(-p)=rp,$$
$$-r'=\beta\gamma\cdot\gamma\alpha\cdot\alpha\beta=(\alpha\beta\gamma)^2=r^2.$$

故所求之方程爲 $x^3-qx^2+prx-r^2=0$.

習題 LXXI

1. $2x^3-7x^2+10x-6=0$ 之二根為 $1\pm i$; 試求其第三根.

2. 下列各方程之根成幾何級數, 試求之.

(1) $8x^3-14x^2-21x+27=0$.

(2) $x^3+x^2+3x+27=0$.

3. 下列各方程之根成算術級數; 試求之.

(1) $x^3+6x^2+7x-2=0$.

(2) $x^3-9x^2+23x-15=0$.

4. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之一根等於他一根之負數, 求證 $pq=r$.

5. 試求 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之一根為他一根之倒數之條件.

6. 試解 $x^4+4x^3+10x^2+12x+9=0$, 已知其有二根相等.

7. 試解方程 $14x^3-13x^2-18x+9=0$, 已知其諸根成調和級數.

8. 試解方程 $x^4-x^3-56x^2+36x+720=0$, 已知有二根其比為2:3, 而其餘二根之差為1.

9. 設 α, β, γ 為 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之諸根, 試求新方程, 設其根為

(1) $-\alpha, -\beta, -\gamma$.　　(2) $k\alpha, k\beta, k\gamma$.

(3) $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$.　　(4) $\alpha+k, \beta+k, \gamma+k$.

(5) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.　　(6) $-1/\alpha^2, -1/\beta^2, -1/\gamma^2$.

10. 設 α, β, γ 為 $2x^3+x^2-4x+1=0$ 之諸根, 試求下列諸式之値.

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

(3) $1/\beta\gamma+1/\gamma\alpha+1/\alpha\beta$.

(4) $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+\beta\gamma^2+\gamma\beta^2+\gamma^2\alpha+\alpha^2\gamma$.

11. 設 α, β, γ, 為 $x^3-2x^2+x-3=0$ 之諸根, 試求下列諸式之値.

(1) $\alpha/\beta\gamma+\beta/\gamma\alpha+\gamma/\alpha\beta$.　　(2) $\alpha\beta/\gamma+\beta\gamma/\alpha+\gamma\alpha/\beta$

(3) $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

(4) $(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)$

(5) $\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+\beta\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$

方程之形化

810　**數種重要之形化.**　有時知新方程之根，與原方程之根之關係，爲便利計，常將原方程變成新方程，普通最常用之形化如下：將原方程 $f(x)=0$ 變成新方程，其根爲原方程 $f(x)=0$ 諸根之負數.

變方程 $f(x)=0$ 爲他一方程，而其根爲 $f(x)=0$ 之諸根而符號改變，

811　所求之方程爲 $f(-y)=0$，因代 x 以任一數，如 β，於 $f(x)$ 內所得之結果與代 y 以 $-\beta$ 於 $f(-y)$ 內之結果相同，故設當 $x=\beta$ 時，$f(x)$ 爲零，當 $y=-\beta$ 時，$f(-y)$ 亦將爲零；即設 β 爲 $f(x)=0$ 之根，$-\beta$ 即爲 $f(-y)=0$ 之根.

是以凡 $f(x)=0$ 之根，變其符號即爲 $f(-y)=0$ 之根；且 $f(-y)=0$，除此諸根外無復有他根，因 $f(x)=0$ 與 $f(-y)=0$ 之次數相同.

設原方程爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0,$$

而所求之方程即爲

$$a_0(-y)^n+a_1(-y)^{n-1}+a_2(-y)^{n-2}+\cdots+a_n=0,$$

化簡則得

$$a_0y^n-a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}-\cdots+(-1)^na_n=0.$$

故新方程可由原方程得之；若 n 爲偶數時，變其奇次項之符號即得，若 n 爲奇次時變其偶次項（絕對項亦包括在內）之符號即得.

新方程內之未知數字 y 可用 x 代之，$f(-y)=0$ 以 $f(-x)=0$ 代之.

例。試變 $4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=0$ 各根之符號。

改變偶次項之符號，即得

$$4x^5-9x^3-6x^2-13x-6=0.$$

實則，原方程之根爲 $1/2, 3/2, -2, \pm i$；新方程之根爲 $-1/2, -3/2, 2\mp i$.

試變方程 $f(x)=0$ 爲他一方程，而其根爲 $f(x)=0$ 諸根之 k 倍。 812

所求之方程爲 $f(y/k)=0$. 因當 $x=\beta$ 時，$f(x)$ 爲零，當 $y/k=\beta$ 時，$f(y/k)$ 亦將爲零，即當 $y=k\beta$ 時，$f(y/k)$ 爲零。（與 § 811 比較之）。

設已知方程爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0,$$

所求之方程，將爲

$$a_0\left(\frac{y}{k}\right)^n+a_1\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{y}{k}\right)^{n-2}+\cdots+a_n=0,$$

化簡則得

$$a_0y^n+ka_1y^{n-1}+k^2a_2y^{n-2}+\cdots+k^na_n=0.$$

故所求之方程可以 k 乘其第二項，以 k^2 乘其第三項，等等得之。設有缺項亦當計算在內。

當 $k=-1$，則此形化，即 § 811 之形化也。

例。試以 2 乘 $x^4+2x^3-x+3=0$ 之諸根，又以 2 除之。

所求第一新方程爲 $x^4+4x^3-8x+48=0$，又因以 2 除各根與以 $\frac{1}{2}$ 乘各根相同。故第二方程爲

$$x^4+x^3-x/8+3/16=0, \text{ 或 } 16x^4+16x^3-2x+3=0.$$

下之例題，將證明所討論方程形化法之一重要應用。 813

例。試將方程 $36x^3+18x^2+2x+9=0$ 變成他一方程，其首項之係數爲 1，而其他各係數皆爲整數。

以36除之，則得

$$x^3+x^2/2+x/18+1/4=0. \tag{1}$$

以 k 乘各根，則得

$$x^3+kx^2/2+k^2x/18+k^3/4=0. \qquad (2)$$

用試驗則知能消去各係數分母時 k 之最小值為6．以 6 代 k 於 (2),則得 $x^3+3x^2+2x+54=0,$ (3)

此即所求之方程。(3)之各根以 6 除之，即原方程(1)之各根。

814 求變已知方程 $f(x)=0$ 為一新方程而其諸根為 $f(x)=0$ 諸根之倒數。

所求之方程為 $f(1/y)=0$. 因當 $x=\beta$ 時，$f(x)$為零，當 $1/y=\beta$ 時，即當 $y=1/\beta$ 時，$f(1/y)=0$亦將為零。

設已知方程為

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

所得之方程將為

$$a_0/y^n+a_1/y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}/y+a_n=0,$$

化簡則得

$$a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_1y+a_0=0.$$

故所求之方程可僅倒換已知方程各係數即得。

例。試作 $2x^4-x^2-3x+4=0$ 倒數根之方程。

倒換其係數，則得 $4x^4-3x^3-x^2+2=0$.

815 方程如 $2x^3+3x^2-3x-2=0$, 作此種形化之後，亦即倒換其係數，而此方程仍不變其形狀者，名曰相反方程，§645. 設 β 為此等方程之一根，$1/\beta$ 亦必為其一根。故此等方程之次數若為偶數時，則其一半根必為他一半根之倒數。當其為奇數時，除一根外，其他根之關係亦與上相同；但在此情形之下，必有一根與其自已互為倒數，即一根為 1 或

爲 -1，例如，$2x^3+3x^2-3x-2=0$ 之一根爲 1，其他諸根爲 -2 及 $-1/2$.

由此種形化，則得一定理，即當一方程之係數爲變數者，且首項係數爲零，則其一根必變爲無限大；當前二項係數爲零，則其二根必變爲無限大；其下以此類推。 816

例1. 求證當 m 漸變爲零時 $mx^3+3x^2-2x+1=0$ 之一根變爲無限大。

應用 § 814 於 $mx^3+3x^2-2x+1=0,$ (1)

則得 $x^3-2x^2+3x+m=0.$ (2)

設(2)之各根爲 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$，則(1)之各根必爲 $1/\beta_1, 1/\beta_2, 1/\beta_3$.

按 § 806，$\beta_1\beta_2\beta_3=-m$，是以設 m 漸近於 0 而以 0 爲其極限則 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 必有一根漸近於 0，而以 0 爲極限，設此根爲 β_1，則(1)之相當根，即 $1/\beta_1$，必漸近於 ∞，§ 512.

例2. 求證當 m 漸變爲零時，$mx^3+m^2x^2+x+1=0$ 之二根必漸變爲無限大。

應用 § 814 於 $mx^3+m^2x^2+x+1=0,$ (1)

則得 $x^3+x^2+m^2x+m=0.$ (2)

設(2)之諸根爲 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$；(1)之諸根必爲 $1/\beta_1, 1/\beta_2, 1/\beta_3$.

又 $\beta_1\beta_2\beta_3=-m,\ \beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3=m^2.$ (3)

由(3)知設 m 漸近於 0，三根 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 中之二根亦必漸近於 0，設此二根爲 β_1, β_2，則(1)之相當根，即 $1/\beta_1, 1/\beta_2$，必亦漸近於 ∞.

求變一已知方程 $f(x)=0$ 爲一方程，而其各根爲 $f(x)=0$，中各根減一常數 k. 817

所求之方程爲 $f(y+k)=0$，因設當 $x=\beta$ 時，$f(x)$ 等於零，當 $y+k=\beta$ 時，即當 $y=\beta-k$ 時，$f(y+k)$ 將等於零。

設已知方程爲

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

所求之方程將爲

$$f(y+k)=a_0(y+k)^n+a_1(y+k)^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

各項用二項式定理展開之，且集合其同類項，則化成

$$\phi(y)=c_0y^n+c_1y^{n-1}+\cdots+c_{n-1}y+c_n=0,$$

式中 $c_0=a_0$, $c_1=nka_0+a_1$ 等等。

由 $f(x)$ 求 $\phi(y)$ 之此等方法，頗爲繁雜，當 $f(x)$ 之係數至少爲已知有理數時，下之方法較簡速。

設 $x=y+k$, 則 $y=x-k$, 而得

$$f(x)=f(y+k)=\phi(y)=\phi(x-k),$$

則

$$c_0(x-k)^n+\cdots+c_{n-1}(x-k)+c_n\equiv a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

設此恆等式之兩端除以 $x-k$, 設其商式又以 $x-k$ 除之，如此繼續進行，則第一端連續所得之餘式，即 c_n, c_{n-1}, $\cdots$, 將與第二端所得之餘式相同。故由 $f(x)$ 得 $\phi(y)$ 如下，以 $x-k$ 除 $f(x)$, 其所得之商式再以 $x-k$ 除之，如此繼續進行，此連續所得之餘式，將爲 c_n, c_{n-1}, $\cdots c_1$, 而最後所得之商式將爲 c_0 (與 § 423 比較之)。此種除法可以簡便除法行之。

例1. 求作一方程其各根較 $2x^3-7x^2-3x+1=0$ 之諸根少 4.

第一步。 以 $y+4$ 代 x, 則得

$$2x^3-7x^2-3x+1=2(y+4)^3-7(y+4)^2-3(y+4)+1$$
$$=2y^3+17y^2+37y+5.$$

第二步。 如 § 423 排列其計算式，則得

$$\begin{array}{rrrrl}
2 & -7 & -3 & +1 & \underline{|4} \\
 & 8 & 4 & 4 & \\ \hline
2 & +1 & +1, & 5 & \therefore c_3=5. \\
 & +8 & 36 & & \\ \hline
2 & 9, & 37 & & \therefore c_2=37. \\
 & 8 & & & \\ \hline
2, & 17 & & & \therefore c_1=17 \text{ 及 } c_0=2.
\end{array}$$

故所求之方程爲

$$2y^3+17y^2+37y+5=0.$$

例2. 求作一方程其諸根較 $x^3+4x^2+x+3=0$ 之諸根增加 4.

加 4 於根以由根減 -4 結果相同，故所求之方程可以 $y-4$ 代 x 而得，或以 -4 用簡便除法相除得之．其結果皆爲 $y^3-8y^2+17y-1=0$.

用 §817 之助，則可變一方程爲他一方程，使其消去未知數之指定次項. 818

例1. 求變方程 $x^3-3x^2+5x+6=0$ 爲他一方程令其消去未知數之二次方項.

以 $x=y+k$ 代之，則得 $y^3+(3k-3)y^2+\cdots$. 故缺二次方次必須 $3k-3=0$, 則 $k=1$. 由 $x^3-3x^2+5x+6=0$ 之諸根減去1, 則得 $x^3+2x+9=0$.

例2. 求變方程 $x^3-5x^2+8x-1=0$ 爲他一方程令其消去未知數之一次項.

以 $x=y+k$ 代入之，則得

$$y^3+(3k-5)y^2+(3k^2-10k+8)y+\cdots=0.$$

故 $3k^2-10k+8=0$, 則 $k=2$ 或 $4/3$.

由 $x^3-5x^2+8x-1=0$ 之諸根中減 2, 則得

$$x^3+x^2+3=0.$$

設由 $f(x)=0$ 諸根中減 k, 得一新方程 $\phi(x)=0$ 而其各項皆爲正，則 k 爲 $f(x)=0$ 之諸正根之優限，§804. 因在此情形之下，$\phi(x)=0$ 無正根，§794, 是以 $f(x)=0$ 之任何正根當減 k 後，可變爲負，故其比爲小. 819

用簡便除法，由觀察試驗，可求得 k 之最小整數值，使 $\phi(x)=0$ 之各項悉爲正，在許多之題，如此作法，較爲省力.

求 $f(x)=0$ 負根之劣限可用求 $f(-x)=0$ 諸根之優限求之，因設 k 爲 $f(-x)=0$ 諸根之優限，則 $-k$ 必爲 $f(x)=0$ 諸根之劣限，§811.

例. 試求方程 $f(x)=x^4-6x^3+14x^2+48x-121=0$ 諸根之優限及劣限.

以觀察試驗知 $k=1$ 或 $k=2$ 皆不能作一各項全為正之新方程 $\phi(x)=0$, 但 $k=3$ 則得之. 實則, 設使 $f(x)=0$ 之諸根減小 3, 則得 $\phi(x)=x^4+6x^3+14x^2+78x+68=0$. 故 3 為 $f(x)=0$ 諸根之優限.

方程 $f(-x)=0$ 為 $x^4+6x^3+14x^2-48x-121=0$, 用觀察試驗, 則知 3 為此新方程諸根之優限. 故 -3 為 $f(x)=0$ 諸負根之劣限.

820 **普通之有理形化.** 設由 $f(x)=0$ 及 $y=-x$ 消去 x, 則得 $f(-y)=0$. 在 §811 已證明 $f(-y)=0$ 之 y 與 $f(x)=0$ 中之 x 之關係為 $y=-x$. 此為普通定理之一證明, 即設由 $f(x)=0$ 及任一方程如有理方程 $y=\phi(x)$ 消去 x, 則將得一方程 $F(y)=0$, 其根與 $f(x)=0$ 之根之關係為 $y=\phi(x)$, 是故若 $f(x)=0$ 之根為 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ 則 $F(y)=0$ 之諸根必為 $\phi(\beta_1), \phi(\beta_2), \cdots \phi(\beta_n)$. §§812, 814, 817 之形化即此定理進一步之證明. 在第一形化內, 方程 $y=\phi(x)$ 為 $y=kx$. 在第二形化內為 $y=1/x$, 在第三為 $y=x-k$. 設 $y=\phi(x)$ 能為解成之 y 函數時, 則消 x 更為敏速.

例1. 設求一方程為 $x^3+px^2+qx+r=0$ 諸根之平方.

按此題關係式 $y=\phi(x)$ 為 $y=x^2$.

由 $y=x^2$ 能成 y 之函數, 則得 $x=\pm\sqrt{y}$. 以 $\pm\sqrt{y}$ 代 x 替入原方程內且化成有理數. 則得

$$y^3+(2q-p^2)y^2+(q^2-2pr)y-r^2=0.$$

例2. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之諸根為 α, β, γ, 試求一新方程, 其根為 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$.

第一將 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ 之每一根, 表成已知根 α, β, γ 之一根及已知係數 p, q, r, 之一係數之式, 表此式頗為易易, 因 $-r=\alpha\beta\gamma$, 則得

$\beta\gamma=\alpha\beta\gamma/\alpha=-r/\alpha$, $\gamma\alpha=\alpha\beta\gamma/\beta=-r/\beta$, $\alpha\beta=\alpha\beta\gamma/\gamma=-r/\gamma$.

故所求方程每一根 y, 與原方程之相當根 x 之關係為 $y=-r/x$.

將 $y=-r/x$ 解成 y 之函數，則得 $x=-r/y$.

以 $-r/y$ 代 x 替入 $x^3+px^2+qy+r=0$ 內且化簡之，則得 $y^3-qy^2+pry-r^2=0$，此即所求之方程。

習　題　LXXII

1．試變 $x^7+3x^4-2x^2+6x+7=0$ 諸根之符號。

2．試以 -2 乘 $2x^4+x^3-4x^2-6x+8=0$ 之各根。又以 3 除其各根。

3．試求 $5x^6-x^4+3x^3+9x+10=0$ 諸根之倒數根方程。

4．由 $2x^5+x^4-3x^2+6=0$ 之諸根中減 2．又加 1 於其各根。

5．試變方程 $x^4-x^3/3+x^2/4+x/25-1/48=0$ 為他一方程，使其各係數為整數，且第一項係數為 1．

6．試變方程 $3x^4-36x^3+x-7=0$ 為他一方程使缺 x^3 項。

7．試變下列各方程為他相當方程令缺 x 項。

(1) $x^3+6x^2+9x+10=0$.　(2) $x^3-x^2-x-3=0$.

8．設 $x^4+x^3-x+2=0$ 之諸根為 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$，試求一新方程其諸根為 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$.

9．設 $x^4+3x^3+2x^2-1=0$ 之諸根為 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$，試求一新方程其諸根為 $\beta+\gamma+\delta, \alpha+\gamma+\delta, \alpha+\beta+\delta, \alpha+\beta+\gamma$.

10．設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之諸根為 α, β, γ，試求一新方程，其根為

(1) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}, \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}, \dfrac{\gamma\alpha}{\beta}$.　(2) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}, \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}, \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

11．設 $x^3+2x^2+3x+4=0$ 之諸根為 α, β, γ．試求一新方程其根為

(1) $\beta^2+\gamma^2, \gamma^2+\alpha^2, \alpha^2+\beta^2$.

(2) $\alpha(\beta+\gamma), \beta(\gamma+\alpha), \gamma(\alpha+\beta)$.

(3) $\beta\gamma+\dfrac{1}{\alpha}, \gamma\alpha+\dfrac{1}{\beta}, \alpha\beta+\dfrac{1}{\gamma}$.

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}, \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}, \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$.

(5) $\alpha\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right), \beta\left(\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}\right), \gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$.

12. 試求下列方程之實數根之優限及劣限.

(1) $x^4+3x^3-13x^2-6x+28=0$.

(2) $2x^5-120x^2-38x+27=0$.

(3) $x^4-29x^2+50x+12=0$.

(4) $2x^5-26x^3+60x^2-92=0$.

(5) $x^4-14x^3+44x^2+28x-92=0$.

(6) $3x^6-35x^3+77x^2-50x-110=0$.

複根，德迦斯氏之符號規矩

821　**定理.** 使 $f(x)=0$ 表一實數係數方程，設其含有複根．則必爲兩個；即設 $a+ib$ 爲一根，$a-ib$ 亦必爲一根．

因設 $a+ib$ 爲 $f(x)=0$ 之一根，則 $f(x)$ 必可爲 $x-(a+ib)$ 除絕，§795；且能証明 $f(x)$ 又爲 $x-(a-ib)$ 所除絕，則 $a-ib$ 爲其一根或能証明 $f(x)$ 可爲 $[x-(a+ib)][x-(a-ib)]$ 之積所除絕，其理相同．

此乘積之係數爲有理數，因之 $i^2=-1$.

$$[x-(a+ib)][a-(a-ib)]=(x-a)^2+b^2$$
$$=x^2-2ax+(a^2+b^2).$$

因多項式 $f(x)$ 與 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 有一公因子 $x-(a+ib)$，且其有一最高公因子，此最高公因子或爲 $x-(a+ib)$ 或爲 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$．但其不能爲 $x-(a+ib)$，因其含有複係數，而二實係數之多項式之最高公公因子，其係數必須皆爲實數，§469．故 $f(x)$ 及 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 之最高公因子爲 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$；換言之，$f(x)$ 必可爲 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 所除絕，如前所証明者．

例．$2x^3+5x^2+46x-87=0$ 之一根爲 $-2+5i$，試解此方程．

因 $-x+5i$ 爲其一根，$-2-5i$ 亦必爲其一根，但諸根之和爲 $-5/2$，§806．故第三根爲

$$-5/2-(-2+5i-2-5i)=3/2.$$

推論1. 凡實係數之多項式 $f(x)$ 必為一次或二次實數因子之積。 822

因 $f(x)=0$ 有一實根 c, 必有一相當實數因子 $x-c$ §795; 有一對複數根 $a+ib, a-ib$, 必有一相當實數因子 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$, §821.

推論2. 與 $f(x)=0$ 之複根相當之 $f(x)$ 之因子之乘積, 必為 x 之函數; 且 x 為實數值時, 此等因子皆為整。 823

因其各因子乘積可表為 $(x-a)^2+b^2$ 之形式 §821. 凡此種因子皆為平方之和: 故 x 為任何實數值其皆為正。

推論3. 凡實係數之奇次方程至少有一實根。 824

因設此方程有複根, 其複根之數, 必為偶數, §821; 而其共有之數 (實根與複根) 為奇數, §798. 故至少一根必為實根。

例如, 實係數之三次方程之根或為實根, 或一實根及二複根。

依 §821 之理由可証明設 $a+\sqrt{b}$ 為一實係數方程之根, $a-\sqrt{b}$ 亦必為其一根; 應注意者, a 及 b 皆為有理數, 但 $\sqrt{b}$ 為無理數。 825

簡約方程. 設 $\phi(x)=0$ 為有理實係數方程, 設 $\phi(x)$ 不含有理實係數之因子; (與 §486 比較之), 名此方程為簡約方程。 826

例如, $x^2-2=0$ 及 $x^2+x+1=0$ 為簡約方程; 但 $x^2-4=0$ 非簡約方程。

定理. 設 $f(x)=0$ 表任一有理實係數方程, 且設 $\phi(x)=0$ 表以同次或低次之簡約方程。 827

設 $\phi(x)=0$ 有一根爲 $f(x)=0$ 之根，則 $\phi(x)=0$ 之諸根，皆爲 $f(x)=0$ 之根。

此可以 §821 之理由証明之。因設 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 有一公共根 c，$f(x)$ 及 $\phi(x)$ 必有一公因子 $x-c$，§795；故其最高公因子或爲 $x-c$，或爲 $\phi(x)$ 之數因子，（內含有 $x-c$）或爲 $\phi(x)$。

但按假設 $\phi(x)=0$ 爲一簡約方程，$\phi(x)$ 必爲 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之有理實係數之最高公因子，§469.

故 $\phi(x)$ 爲 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之最高公因子；換言之，$f(x)$ 恰可爲 $\phi(x)$ 所除絕。

是以 $f(x)$ 可表成形式 $f(x)=Q\phi(x)$；式中 Q 爲整數，且由此恆等式則知當 $\phi(x)$ 爲零時，$f(x)$ 亦爲零；換言之，凡 $\phi(x)=0$ 之根，必爲 $f(x)=0$ 之根。

828　**同號及異號.** 在任一實係數多項式 $f(x)$ 或方程 $f(x)=0$ 內，其一項與其下一項之符號相同者謂之同號，相異者謂之異號。

例如，在 $x^6-x^4-x^3+2x^2+3x-1=0$ 內，在 $-x^3$ 及 $3x$ 之間爲同號，在 $-x^4$，$2x^2$ 及 -1 之間爲異號。

829　**定理.** 設 b 爲整數且 $f(x)$ 之係數皆爲實數；若 $f(x)$ 恰可被 $x-b$ 所除絕，則商式 $\phi(x)$ 至少比 $f(x)$ 少一異號。

因 b 爲正數，由 §411 簡便除法之規矩，當 $f(x)$ 爲 $x-b$ 除絕時，除去 $f(x)$ 之第一負號外，商式之係數皆爲正，設以後一係數變爲負數或爲零，除去 $f(x)$ 第二正號外，而其係數仍然繼續爲負，其下以此類推，故除上所述 $f(x)$ 之同次或首次之符號有變化，$\phi(x)$ 不能有異號；但

按假設 $\phi(x)$ 可為 $x-b$ 所除絕；$\phi(x)$ 之最末符號與 $f(x)$ 最末符號必相反，是以 $\phi(x)$ 必缺 $f(x)$ 內最末之異號。

1	+1	−2	−10	−1	+12	−4	2
	2	+6	+8	−4	−10	+4	
1	+3	+4	−2	−5	+2,	0	

例如，$f(x)=x^6+x^5-2x^4-10x^3-x^2+12x-4$ 恰為 $x-2$ 所除絕，其商式為 $\phi(x)=x^5+3x^4+4x^3-2x^2-5x+2$. $f(x)$ 之前二異號重見於 $\phi(x)$ 內，但第三異號消去不見。

1	−1	+1	−7	+2	2
	2	+2	+6	−2	
1	+1	+3	−1,	0	

又，$f(x)=x^4-x^3+x^2-7x+2$ 恰為 $x-2$ 所除絕，其商式為 $\phi(x)=x^3+x^2+3x-1$. 在此題內 $f(x)$ 之四異號僅有一號重見於 $\phi(x)$ 內；且得一証明，即若 $f(x)$ 中間之異號，不再見於 $\phi(x)$ 內者，必為一對或數對。

定理。(德迦斯氏符號之規則)。 任何方程 $f(x)=0$ 根之數目，不能多於其異號，其負根之數目不能多於 $f(-x)=0$ 之異號。 830

1. 因設 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$ 表 $f(x)=0$ 之正根。

設以 $x-\beta_1$ 除 $f(x)$，其所得之商，再以 $x-\beta_2$ 除之，繼續如此進行，則所得之最後商式 $\phi(x)$，其異號至少比 $f(x)$ 少 r 個，§829. 因 $\phi(x)$ 之異號，不能比無異號再少，故 $f(x)$ 至少必有 r 個異號；即至少其異號與 $f(x)=0$ 所有之正根數相等。

2. $f(x)=0$ 之負根變為 $f(-x)=0$ 之正根，§811. 且如上所述，$f(-x)=0$ 之正根不能比其異號為多；是以 $f(x)=0$ 之負根，不能比 $f(-x)=0$ 之異號為多。

例如，方程 $f(x)=x^6-x^5-x^3+x-1=0$ 不能有三個以上之正根，一個以上之負根。因 $f(x)=0$ 有三異號，而 $f(-x)=0$；即 $x^6+x^5+x^3-x-1=0$ 有一異號。

831 **推論.** 凡完全之方程，其負根之數目，不能比其同號為多.

因設 $f(x)=0$ 為一完全方程，其同號與 $f(-x)=0$ 之異號一一相當；且在 $f(x)=0$ 內，每二連續同數號，在 $f(-x)=0$ 內，必變成一異號，§811.

例如，設 $f(x)=0$, $x^5+x^4-6x^3-8x^2-7x+1=0$, (1)

則 $f(-x)=0$, $x^5-x^4-6x^3+8x^2-7x-1=0$. (2)

在 (1) 內其項 $x^4, -8x^2, -7x$ 有同號而在 (2) 之相當項，即 $-x^4, 8x^2, -7x$, 則有異號.

因 (1) 有二異號三同號，$f(x)=0$ 不能有二個以上之正根，三個以上之負根.

832 **複根之檢查.** 在一不完全方程內，用代邁斯之符號規矩，可以証明複根之存在.

設 $f(x)=0$ 為一 n 次方程，且無零根，又設 v 及 v' 順次表 $f(x)=0$ 及 $f(-x)=0$ 異號之數目；則方程 $f(x)=0$ 至少必有 $n-(v+v')$ 個複根.

因 $f(x)=0$ 不能有 v 以上之正根，亦不能有 v' 以上之負根，§830, 故其不能有 $v+v'$ 以上之實根；則 n 根內之其餘各根必為複根.

此定理不能知完全方程之複根，因在此種方程內 $v+v'$ 之和等於 n 也.

例. 求証 $x^5+x^2+1=0$ 有四複根.

在此題內 $f(x)=0$ 為 $x^5+x^2+1=0$, $f(-x)=0$ 為 $x^5-x^2-1=0$.

$n-(v+v')=5-(0+1)=4$, 故其複根數目不能比 4 少，但因其有五根，其一根為實根，且 $x^5+x^2+1=0$ 之次數為奇數，§824, 故不能有四以上複根，故 $x^5+x^2+1=0$ 恰有四複根.

習題 LXXIII

1．已知 $2x^4-x^3+5x^2+13x+5=0$ 之一根為 $1-2i$，試解此方程。

2．已知 $2x^4-11x^3+17x^2-10x+2=0$ 之根為 $2+\sqrt{2}$，試解此方程。

3．有方程其係數為有理數，其二根為 $-5+2i$ 及 $-1+\sqrt{5}$；求作此最低次方程。

4．有一簡約方程，其一根為 $\sqrt{2}+i$．試作之。

5．試用代迦斯氏的符號規矩，§832，討論下題諸根之性質。

(1) $x^4+1=0$.　　(2) $x^4-x^2-1=0$.

(3) $x^4+2x^3+x^2+x+1=0$.　　(4) $x^4-2x^3+x^2-x+1=0$.

(5) $x^7+x^5+x^3-x+1=0$.　　(6) $x^7+x^4-x^2-1=0$.

(7) $x^5-4x^2+3=0$.　　(8) $x^{3n}-x^{2n}+x^n+x+1=0$.

6．求証在一全為實根之完全方程內，其異號與其正根之數目，同其同號與其負根之數目同．

7．試求 $x^5-3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0$ 之諸根皆為實數，且說明若干為正若干為負。

8．試用代迦斯氏之符號規矩，証明 $x^{2n}+1=0$ 無實根，用此規矩討論 $x^{2n+1}+1=0$? $x^{2n}-1=0$? $x^{2n+1}-1=0$ 之根之性質如何?

9．求証若一方程之方冪僅含 x 之偶次項其係數為正，不能有一正根或一負根。

10．求証一方程若僅含 x 之奇次項其係數為正，除 0 以外，不含實根。

11．設 p 及 q 為正，求証方程 $x^3+px+q=0$ 僅有一實根，且此根為負。

12．求証不完全方程除如 $x^4-3x^2+1=0$ 其缺項為一項兩項之間為異號外，設無零根，其必有二個以上之複根。

13．求証任一實係數之方程 $f(x)=0$ 在其非連續二不同符號之間，必有奇數個異號，在其非連續相同之間，必有偶數個異號或無異號。

14．求証實係數之方程內，相當其負根及複根之因子之積其末項常為正，且此積若有異號，其異號之數必為偶數。

15．求証當異號之數超過正根之數時，其差必為偶數。

16．求証 $x^4+x^3-x^2+x-1=0$ 有一或三個正根及一個負根。

17．求証凡偶次方程，若其絕對項為負至少有一正根及一負根。

無理根之位置

833 **定理 1．** 設 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之符號相反，在 a 及 b 間 $f(x)=0$ 必有一根。

此定理可用下例題証明之。至於普通証明步驟以後將述明之。

例。求証 $f(x)=x^3-3x+1=0$ 在 1 及 2 之間有一根。

$f(1)=-1$ 之符號為負，$f(2)$ 之符號為正。

以 $x=1.1, 1.2, 1.3, \cdots\cdots$ 繼續計算 $f(x)$ 之值，則在 1 及 2 之間得有十位小數之二連續數 1.5 及 1.6，以此二數代 x 計算 $f(x)$ 之數與 $x=1$ 及 $x=2$ 所計算之數其符號順次相同；因 $f(1.5)=-.125$ 為負，$f(1.6)=.296$ 為正。

用同法在 1.5 及 1.6 之間得有百位數之二連續數 1.53 及 1.54，此二數代 x 計算 $f(x)$ 之數與 $x=1$ 及 $x=2$ 所計算之數其符號順次相同；因 $f(1.53)=-.008423$ 為負，$f(1.54)=.032264$ 為正。

此法繼續進行，則得二無窮之數串：

(a) 1, 1.5, 1.53, 1.532, $\cdots$ (b) 2, 1.6, 1.54, 1.533 $\cdots$，此二數串漸近於同一極限，§§ 192, 193 設此二數之極限為 c；則 c 為 $f(x)=0$ 之一根，即 $f(c)=0$.

按 § 509 設 x 按任一數串 (a) 或 (b) 而變 $f(x)$ 必漸近於 $f(c)$ 而以 $f(c)$ 為其限，但因 x 按數串 (a) 而變，$f(x)$ 永為負，故其極限 c 不能為正；又因 x 按數串 (b) 而變，$f(x)$ 永為正，故其極限 c 不能為負。故 $f(c)$ 為零。

定理2. 設 a 及 b 皆非 $f(x)=0$ 之根，且 $f(x)=0$ 之奇數個根位於 a 及 b 之間，則 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號；但若無根或偶數個根位在 a 及 b 之間，則 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相同之符號。 834

逆定理. 設 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號，則 a 及 b 之間必有奇數個根；但若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相同之符號，則 a 及 b 之間或無根或有偶數個根。

設 $a<b$，$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \cdots \beta_r$ 爲 $f(x)=0$ 在 a 及 b 間所有之諸根，則 $f(x)$ 必恰可爲 $(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_r)$ 所除絕，§418，且設所除得之商爲 $\phi(x)$，則得

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_r)\,\phi(x). \qquad (1)$$

先以 a 代入 (1) 次以 b 代入之，以第二之結果除第一之結果，則得

$$\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{a-\beta_1}{b-\beta_1}\cdot\frac{a-\beta_2}{b-\beta_2}\cdots\frac{a-\beta_r}{b-\beta_r}\cdot\frac{\phi(a)}{\phi(b)}. \qquad (2)$$

在乘積 (2) 內，因子 $\phi(a)/\phi(b)$ 爲正，因 $\phi(a)$ 及 $\phi(b)$ 之符號相同，因不然按 § 833，在 a 及 b 之間，必有 $\phi(x)=0$ 內之一根，而按 (1) $f(x)=0$ 於 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$ 之外又添一根。

換言之，此 r 個因子 $(a-\beta_1)/(b-\beta_1)\cdots$ 之任一因子爲負，因此 r 個根 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_r$ 之任一根大於 a 而小於 b 也。

是故當 r 爲奇數時，$f(a)/f(b)$ 爲負，亦即 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號；但當 r 爲偶或爲零時，$f(a)/f(b)$ 爲正，亦即 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相同之符號。

逆言之，當 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號時，則 $f(a)/f(b)$ 爲負，由(2)則知 r 必爲奇數：且當 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相同之符號時，知 r 必爲偶數或爲零。

835　　須注意者，前定理 § § 833, 834 之証明，對於凡方程 $f(x)=0$ 必有一根之假設毫無用處，再用此理時，其 r 次之重複，可以 r 個不同之根計算之。

由 § 834 則知 x 由 a 變到 b 時，其經過 a 及 b 間 $f(x)=0$ 之每一單根或奇數重根時，$f(x)$ 必變其符號，且 $f(x)$ 除此變號外；不能再有變更。

例如，設 $f(x)=(x-2)(x-3)^2(x-4)^3$，x 由 1 變到 5，$f(x)$ 之符號在 $x=1$ 及 $x=2$ 間爲正，在 $x=2$ 及 $x=4$ 之間爲負，在 $x=4$ 及 $x=5$ 之間不爲正。

836　　**無理根之位置.**　由 § 833 定理之輔助，常能判定數目方程在二連續整數之間，其分數根及無理根之所在。

例：試求 $f(x)=x^4-6x^3+x^2+12x-6=0$ 諸根之位置。

由 § 830 代迦斯氏之符號規矩，此方程不能有三個以上之正根，一個以上之負根。

若求其正根之位置時，繼續計算 $f(0), f(1), f(2)\cdots$ 以至用 § 833 將其三根得之，或至 x 爲其根之優限之値。§ 803.

例：用簡便除法，如 § 414，則得 $f(0)=-6, f(1)=2, f(2)=-10, f(3)=-42, f(4)=-70, f(5)=-46, f(6)=102$.

故由 § 833，則知一根在 0 及 1 之間，他一根在 1 及 2 之間，第三根在 5 及 6 之間，且在上二數之間不能有一以上之根；因此方程僅有三個正根故也。

同法求負根之位置，則得 $f(0)=-6, f(-1)=-10, f(-2)=38$，故負根位於 -1 及 -2 之間。

在連續二整數之間，若有二根或二以上之根，自然不能僅爲以 x 之整數値代入 $f(x)$，將其個個檢查而得，此種情形將在 § 844 及 § 864 中討論之，彼處之方法恰能定出在一對已知數之間，有若干個根。

習　題　LXXIV

試求下列各方程實根之位置。

1. $2x^3-3x^2-9x+8=0$.　　2. $x^3+x^2-4x-2=0$.

3. $x^3-3x^2-2x+5=0$.　　4. $2x^3+3x^2-10x-15=0$.

5. $x^3-4x^2-4x+12=0$.　　6. $x^3+13x^2+54x+71=0$.

7. $x^3+5x+19=0$.　　8. $x^4-95=0$.

9. $x^4-8x^3+14x^2+4x-8=0$.

10. $x^4+5x^3+x^2-13x-7=0$.

11. $x^4-11x^3+32x^2-4x-46=0$.

12. $x^5+2x^4-16x^3-24x^2+48x+32=0$.

13. 設 x 之數值為最大時，$f(x)$ 之符號為其最高次項之符號，求証：

(1) 設 n 為偶數，b_n 為負，凡實係數之方程式 $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$ 至少有一正根一負根。

(2) 方程 $k^2(x-b)(x-c)+l^2(x-c)(x-a)$

$$+m^2(x-a)(x-b)-x(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

之四根順次位於 $-\infty$ 及 a, a 及 b, b 及 c, c 及 ∞ 之間，式中 a, b, c, k, l, m 為實數且 $a<b<c$.

14. 設 $a\geqq 3$，求証凡形狀如 $x^3+(x-1)(ax-1)=0$ 之方程在 0 及 1 之間必有二根，即一在 $1/a$ 及 $1-1/a$ 之間，一在 $1-1/a$ 及 1 之間。

15. 設 $a\geqq 5$，求証 $x^4+(x-1)(2x-1)(ax-1)=0$ 之諸根在 0 及 $1/a$, $1/a$ 及 $1-2/a$, $1-2/a$ 及 1 之間。

無理根之計算

赫諾爾氏法，正根.　有許多方法可以計算數目 837
方程之無理根之近似值。而方法中之最簡易者發明於英人數學家赫諾爾氏。其方法最好以例題解釋之。

例．試求 $f(x)=2x^3+x^2-15x-59=0$ 之正根．

1．用 §836 之方法，則知所求之根在 3 及 4 之間，故以小數位表之，其將為 $3.\beta\gamma\delta\cdots$，之形狀，而 $\beta,\gamma,\delta\cdots$ 表其小數之數字．

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & +1 & -15 & -59 & \underline{3} \\
 & \underline{6} & \underline{21} & \underline{18} & \\
 & 7 & 6 & -41 & \\
 & \underline{6} & \underline{39} & & \\
 & 13 & 45 & & \\
 & \underline{6} & & & \\
 & 19 & & &
\end{array}
$$

2．使 $f(x)=0$ (1)之根減小 3，則得新方程．

$\phi(x)=2x^3+19x^2+45x-41=0$ (2)其必有根 $.\beta\gamma\delta\cdots$ 位於 0 及 1 之間．以 $x=.1,.2,.3,\cdots$ 代入 $\phi(x)$ 中試驗之，則得 $\phi(.6)$ 為－，及 $\phi(.7)$ 為＋．故(2)之根位於 .6 及 .7 之間，亦即 β 為 6，(1) 之根取 1 位小數時為 3.6．

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & +19 & +45 & -41 & \underline{.6} \\
 & \underline{1.2} & \underline{12.12} & \underline{34.272} & \\
 & 20.2 & 57.12 & -6.728 & \\
 & \underline{1.2} & \underline{12.84} & & \\
 & 21.4 & 69.96 & & \\
 & \underline{1.2} & & & \\
 & 22.6 & & &
\end{array}
$$

3．使(2)之根減小 .6，則得

$\psi(x)=2x^3+22.6x^2+69.96x-6.728=0$．(3)

其必有根 $.0\gamma\delta\cdots$ 位于 0 及 .1 之間．

以 $x=.01,\ .02,\cdots$ 代入 $\psi(x)$ 中試驗之，則得 $\psi(.09)$ 為－，及 $\psi(.1)$ 為＋．故此根位於 .09 及 .1 之間；亦即 γ 為 9，(1) 之根若取二位小數時為 3.69．

4．使 (3) 之根減小 .09，如此繼續進行．

838 在此例題，此種演算較用下節之方法為簡便，在題內應注意者，第一第二新方程 (2) 及 (3) 之絕對項，即 -41 及 -6.728 為同號，但其符號還必須相同，因 $-41=\phi(0)$ 及 $-6.728=\phi(.6)$．若 $\phi(0)$ 及 $\phi(.6)$ 有相反之符號，則 $\phi(x)=0$ 之根必位於 0 及 .6 之間，§833，而 .6 將非根之第一數字矣，以後之各新方程與此相同，是以此法可推廣用之．

當一已知方程，僅有一根，其整數部為 α 時，若其演算無誤；則計算此根所得之新方程之絕對項其符號必相同．

在此例題用代替法，可求得各新方程之根第一數字，亦即原方程之根各位小數也。每一新方程之第一數字，普通可僅用 x 之係數除其絕對項，變符號即得，此方法名為試驗除法。 839

例如，在此題內之第二新方程為：

$$\psi(x)=2x^3+22.6x^2+69.96x-6.728=0. \qquad (3)$$

此方程已知有一根 c 比 .1 為小；c 之平方及高次方其數值比 c 必小，例如 $(.09)^2$ 為 .0081．故 c 為已知，代入(3)內，其所得之恆等式

$2c^3+22.6c^2+69.96c-6.728=0$ 之首二項之數值比末二項小的多多。

故 c 之第一位數與方程

$69.96x-6.728=0$ 之根大概不差，此方程內去(3)之 x^3 及 x^2 項而得。

但解(3′)，得 $x=6.728/69.96=.09+$，亦即(3)之根之第一數字為 9.

此法不能正確求得第一新方程之根之第一數字，但此法至少可以指出數字之所在，且應用代替法，可以減少試驗之次數，第二新方程之根之第一數，有時用此法亦不能正確求得，但在此情形之下，若作出次一新方程，其錯誤自易考查而得，因設其數字太大，在其次一新方程內，其對項之符號將要改變，§ 838；設其太小，則此方程根之第一數字顯然太大。

若作第一新方程以後之諸新方程時，欲避免小數發現於新方程內；可以在未作次一新方程之前，以10乘此新方程之根，§ 812，此種作法，可加一個零於此方程第二項係數之後二個零於第三項係數之後等即得，然後可視作根之數字在次一新方程內為整數。 840

例如，在 § 837 例題內，第一新方程爲

$$2x^3+19x^2+45x-41=0, \tag{2}$$

且知其有此種形狀 .6+ 之一根。

以10乘(2)之根，則得

$$2x^3+190x^2+4500x-41000=0, \tag{2'}$$

彼有一形狀如 6+ 之根。

使 (2′)之根減小 6,（此計算係與上所已知之計算之各小數位不同）；則得

$$2x^3+226x^2+6996x-6728=0, \tag{3'}$$

其諸根大

$$2x^3+22.6x^2+69.96x-6.728=0. \tag{3}$$

內諸根之10倍。

此試驗除法求出(3′)之根爲 .9+，故 .09+ 爲 (3) 之根。

841 求計算 $2x^3+x^2-15x-59=0$ 之根至第三位小數，其計算之排列式如下：

2	+1	−15	−59	3.693
	6	21	18	
	7	6	−41	
	6	39		
	13	45		
	6			
2	+190	+4500	−41000	6
	12	1212	34272	
	202	5712	−6728	
	12	1284		$\frac{6728}{6996}=.9+$
	214	6996		
	12			
2	+2260	+699600	−6728000	9
	18	20502	6480918	
	2278	720102	−247082	
	18	20664		
	2296	740766		
	18			$\frac{247082}{740766}=.3+$
	2314			

應注意者，此處用試驗除法所得之數字皆應為十分之一，如 .9, .3 以 −672 替代第二新方程之末一係數 −6728，於是得 672/6996 = .09 為次二數字，如此計算所得之根必須以 3.609 代替 3.69; 故作次一新方程之前必須以 100 乘第二新方程之根；亦即加二個零於第二係數後，加四零於第三，加六零於第四。

此方法可以繼續作之，以致無窮，但用下列之減法， 842
得較長之數頗為容易；且在求得根之幾位小數後，極可能求得所求之數。

在上已知之計算內之末一新方程為：

$$2x^3+2314x^2+740766x-247082=0. \qquad (4)$$

以10倍(4)之各根可以 $x/10$ 代 x 於 (4) 內，§ 812，於是得

$$.002x^3+23.14x^2+74076.6x-247082=0. \qquad (4')$$

因係數之小數部，影響於根之數字太少，可以省去不顧，但當其小數為 .5 或為大於 .5 之數，可加 1 於其相當之整數部，則得二次式

$$23x^2+74077x-247082=0 \qquad (4'')$$

則可繼續作此計算如下：

23	+74077	−247088	.003332
	69	222438	
	74146	− 24644	
	69		
$\cancel{23}$	$+7422\cancel{5}$	− 24644	
		22266	
	$742\cancel{2}$	− 2378	
		2226	
	$74\cancel{2}$	− 152	
		148	
		− 4	

即使 (4″) 之各數減小 3，而得新方程 $23x^2+74215x-24644=0$ (5)；用試驗除法得根之次一數字仍為3·在作次新

方程前，仍如前法將(5)化成簡單方程 $7422v-24644=0$. 其根之次二數字，即 3, 2, 僅用 7422 除 24644 得之，其用遞減法除法不必加零於被除數之末，去除數之末一數字即可。

843 **負根.** 求 $f(x)=0$ 之負無理根，可先求 $f(-x)=0$ 之相當正根，變其符號即得。

例: 試求 $f(x)=x^3+x^2-10x+9=0$ 之負根。

$f(-x)=0$ 為 $x^3-x^2-10x-9=0$ 用郝諾爾氏法求得其正近似根為 4.03293. 故 $f(x)=0$ 之負近似根為 -4.03293.

844 **近似等根.** 設一已知方程有二根位於二整數之間，可如例題求之。

例。設 $f(x)=x^3+x^2-10x+9=0$ 有正根，試求之。

$f(0)=9, f(1)=1, f(2)=1, f(3)=15$, 由此演計，則知為其根之優限， § 803, 故由 § 831, 則知在 0 及 1 或 1 及 2, 或 2 及 3 之間，無正根或二正根。但 $f(1)$ 及 $f(2)$ 相差比 $f(0)$ 及 $f(3)$ 之相差為小而非零，故設有根存在，則其 1 及 2 之間希望比其在 0 及 1 或 2 及 3 之間為多。

故使 $f(x)=0$ 之根減小 1, 則得

$$\phi(x)=x^3+4x^2-5x+1=0.$$

設 $f(x)=0$ 在 1 及 2 之間有二根，則此方程在 0 及 1 之間即有二根。

以 $x=.1, .2, .3, \cdots$ 代入 $\phi(x)$ 計算之，則得 $\phi(.2)$ 為 + 及 $\phi(.3)$ 為 −，為 $\phi(.7)$ 為 −，$\phi(.8)$ 為 +。故 $\phi(x)=0$ 有一根在 .2 及 .3 之間，他一根在 .7 及 .8 之間. 用郝諾爾氏法求得此二根之近似值為 .25560 及 .77733

故 $f(x)=0$ 有二正根 1.2556 及 1.77733.

845 **求大根之位置法.** 設有方程 $f(x)=0$ 其根大於 10, 可用下法求其整數部之數字。

欲求第一位數字，可應用 § 833，以 $x=10, 20\cdots$，代入 $f(x)$ 計算其值；若需要時，亦可以 $x=100, 200, \cdots$ 等等代入計算之，例如，設求得 $f(400)$ 及 $f(500)$ 之符號相反，則 400 及 500 之間必有根，其第一數字必為 4. 若求其餘之數字亦如求小數作連續新方程。例如，有一新方程，其根在 400 及 500 之間，可使根減小 400，則得一新方程 $\phi(x)=0$，其根在 0 及 100 之間，設求得此根在 70 及 80 之間，則根之第二數字必為 7. 使 $\phi(x)=0$ 中之根減小 70，又得一方程 $\psi(x)=0$ 其根在 0 及 10 之間，設求得此根在 8 及 9 之間，則已証明 $f(x)=0$ 之根之整數部必為 478.

解數目方程法， 設欲求一已知係數為有理數數目方程 $f(x)=0$ 之實根，最好先用 § 802 之方法，求得其有理根，此法將得一低次方程 $\phi(x)=0$，設有實根必為無理數，可用 § § 833, 844, 845 之方法，求根之位置之所在，然後再用郝諾爾氏法求其近似值。 816

應知者，分數根之分母只含因子 2 及 5 時，亦可用郝諾爾氏法求其眞正值，其他因子時可求得近似值。

習　題　LXXV

試計算下列諸根，至第六位小數。

1. $x^3+x-3=0$；在 1 及 2 間之一根。
2. $x^3+2x-20=0$；在 2 及 3 間之一根。
3. $x^3+6x^2+10x-2=0$；在 0 及 1 間之一根。
4. $3x^3+5x-40=0$；在 2 及 3 間之一根。
5. $x^3+10x^2+8x-120=0$；在 2 及 3 間之一根。

6. $2x^3-x^2-9x+1=0$;在 -1 及 -2 間之一根.

7. $x^3+x^2-5x-1=0$;在 1 及 2 間之一根.

8. $x^3-2x^2-23x+70=0$;在 -5 及 -6 間之一根.

9. $x^4-10x^2-4x+8=0$;在 3 及 4 間之一根.

10. $x^4+6x^3+12x^2-11x-41=0$;在 -2 及 -3 間之一根.

11. $x^3-3x^2-4x+13=0$;在 2 及 3 間之一根.

試求下列各方程所有之根至第三位小數.

12. $x^3-3x^2-4x+10=0$.　　13. $x^3+x^2-2x-1=0$

14. $x^3-3x+1=0$.　　15. $x^4+5x^3+x^2-13x-7=0$.

16. 試用郝諾爾氏法對於方程 $x^3-17=0$,計算 $\sqrt[3]{17}$ 至第四位小數.

17. 試用同法計算 $2\sqrt[3]{3}$ 及 $\sqrt[3]{87}$ 至第三位小數.

18. 試用 § 845 及郝諾爾氏法之輔助,求 $x^3+x^2-2500=0$ 之實根至第二位小數.

19. 試用 § 844 求 $x^3+5x^2-6x+1=0$ 之根之位置.

20. 試求 $3x^5+x^4-14x^3-x^2+9x-2=0$ 之諸根.

太勒爾氏定理　重根

847 **導來式.** 獨項式,如 ax^n,以 x 之指數 n 乘之,再使其指數減 1,則得 nax^{n-1}. 名爲 ax^n 之導來式,或更詳細言之,關於 x 之導來式.在特殊之項如常數 a,即 ax^0,其導來式爲 0.

一多項式 $f(x)$ 其各項之導來式之和名爲 $f(x)$ 之導來式,或詳言之,$f(x)$ 之第一導來式,以 $f'(x)$ 表之.

$f'(x)$ 之導來式名爲 $f(x)$ 之第二導來式,以 $f''(x)$ 表之,以下類推.

顯知凡 n 次多項式必有 n 個導來式,其最末一導來式 $f^{(n)}(x)$ 爲一常數.

例如設　$f(x)=3x^4-8x^3+4x^2-x+4$,

則　$f'(x)=12x^3-24x^2+8x-1$,

$f''(x)=36x^2-48x+8$,

$f'''(x)=72x-48$,

$f''''(x)=72$.

以下之導來式全為 0.

應注意者 $f(x)$ 之第二第三，... 導來式為 $f'(x)$ 之第一第二，... 導來式。

太勒氏定理. 設在 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 848
內以 $x+h$ 代 x, 則得

$$f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\cdots+a_n.$$

用二項式定理展開 $(x+h)^n$, $(x+h)^{n-1}$ 等等, 集其項可化成一 h 之多項式，其結果為

$$\left(f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^n(x)\frac{h^n}{n!},\right) \quad (I)$$

式中, $f'(x)$, $f''(x)$, ... 為 $f(x)$ 之連續導來式。

此恆等式名太勒氏定理。

因以二項式定理，§ 561, 展開 $(x+h)^m$ 而以常數 a 乘之，則為

$$a(x+h)^m=ax^m+max^{m-1}h+m(m-1)ax^{m-2}\cdot\frac{h^2}{2!}$$
$$+m(m-1)(m-2)ax^{m-3}\cdot\frac{h^3}{3!}+\cdots,$$

其各係數

$$max^{m-1},\ m(m-1)ax^{m-2},\ m(m-1)(m-2)ax^{m-3},\ldots,$$

後者為前者之導來式。

是故設展開

$$f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\cdots+a_n$$

之各項而排列之作成此式，即許多展開式之首一項之和為

$f(x)$；第二項之和爲 h 乘首項導來式之和，或 $f'(x)h$；第三項之和爲 $h^2/2!$ 乘第二項之導來式之和或 $f''(x)h^2/2!$；以下類推，以式表之爲：

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}.$$

例如，設 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a^3$，

則 $f(x+h)=a_0(x+h)^3+a_1(x+h)^2+a_2(x+h)+a_3$

$$\begin{array}{r|r|r|l} =\quad a_0x^3 & +3a_0x^2 & h+6a_0x & \dfrac{h^2}{2!}+6a_0\dfrac{h^3}{3!} \\ +a_1x^2 & +\ 2a_1x & +\ 2a_1 & \\ +\ a_2x & +\qquad a_2 & & \\ +\ a_3 & & & \end{array}$$

$$=f(x)+f'(x)h+f''(x)h^2/2!+f'''(x)h^3/3!.$$

849 因 $x=a+(x-a)$，則 $f(x)=f[a+(x-a)]$. 故僅用 a 代 x，此 $x-a$ 代 h 於恆等式 (1) 內，可得以 $(x-a)$ 之羃表 $f(x)$ §423，其結果爲：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$
$$+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}. \quad \text{(II)}$$

例. 試求以 $x-1$ 之羃表 x^3-1 之式.

因 $f(x)=x^3-1, f'(x)=3x^2, f''(x)=6x, f'''(x)=6$.

故 $f(1)=0, f'(1)=3, f''(1)/2=3, f'''(1)/3!=1$.

是以 $x^3-1=3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$.

850 **重根.** $f'(x)$ 之第一，第二，$\cdots$導來式爲 $f(x)$ 之第二第三，$\cdots$導來式，故由 §849，以 $x-a$ 表多項式 $f(x)$ 及其第一導來式 $f'(x)$ 爲

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2!+\cdots, \quad (1)$$
$$f'(x)=f'(a)+f''(a)(x-a)+f'''(a)(x-a)^2/2!+\cdots. \quad (2)$$

設 $f(x)$ 爲以 $x-a$ 所除絕，但不能以 $(x-a)^2$ 所除絕，由 (1) 則得 $f(a)=0$ 而 $f'(a)\neq 0$，故由 (2) 則知不能以 $x-a$

除絕。又設 $f(x)$ 爲以 $(x-a)^2$ 所除絕，但不能以 $(x-a)^3$ 所除絕；由 (1) 則知 $f(a)=f'(a)=0$ 而 $f''(a)\neq 0$，故由 (2) 則知 $f'(x)$ 可被 $(x-a)$ 除絕，而不能被 $(x-a)^2$ 除絕，概言之，設 $f(x)$ 爲 $(x-a)^r$ 所除絕，而不爲 $(x-a)^{r+1}$ 所除絕，由 (1) 則知 $f(a)=f'(a)=\cdots f^{(r-1)}(a)=0$ 而 $f^{(r)}(a)\neq 0$，故由 (2) 則知 $f'(x)$ 爲 $(x-a)^{r-1}$ 所除絕，但不能爲 $(x-a)^r$ 除絕。

故由 §800，則有下之定理。

定理. $f(x)=0$ 之一次根，不能爲 $f'(x)=0$ 之根；$f(x)=0$ 之二次根爲 $f'(x)=0$ 之一次根，概言之，$f(x)=0$，r 次重根爲 $f'(x)=0$ 之 $r-1$ 次重根。 851

例如，$f(x)=x^3-x^2-8x+12=0$ 之根爲 $2, 2, -3$ 而 $f'(x)=3x^2-2x-8=0$ 之根爲 2，$-4/3$.

是故若 $f(x)=0$ 有重根，欲求之可用下法，以 §465 方法，先求出 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之最高公因子，設 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 互爲質式，則 $f(x)=0$ 僅有一次根，但設 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 有一最高公因子 $\phi(x)$，則凡 $\phi(x)=0$ 之一次根，皆爲 $f(x)=0$ 之二次重根，$\phi(x)$ 之二次根，爲 $f(x)$ 之三次重根，以下類推；因由 §850，設 $\phi(x)$ 爲 $(x-a)^r$ 除絕，則 $f'(x)$ 爲 $(x-a)^r$ 除絕，$f(x)$ 爲 $(x-a)^{r+1}$ 除絕。 852

應注意者設商式 $f(x)/\phi(x)$ 爲 $F(x)$，則 $F(x)=0$ 之根卽爲 $f(x)=0$ 之根，皆爲一次根。

例. 方程式

$f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$. 是否有重根，試求之。

因 $f'(x)=5x^4-4x^3-15x^2+2x+8$；按 §465 方法，求得 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之最高公因子爲 $\phi(x)=x^3-3x-2$.

$\phi(x)=0$ 之根可按 §802 求之爲 $-1, -1, -2$.

故 $f(x)=0$ 有三重根爲 -1，二重根爲 2，亦即其諸根爲 $-1, -1, -1, 2, 2$.

應注意者　$f(x)=(x+1)^3(x-2)^2$,

則　　$f'(x)=(x+1)^2(x-2)(5x-4)$,

及　　$F(x)=f(x)/\phi(x)=(x+1)(x-2)$.

853　應加入者，設任二方程 $f(x)=0$ 及 $\psi(x)=0$ 有公共根，可以求 $f(x)$ 及 $\psi(x)$ 之最高公因數法求之。

例。試解 $f(x)=x^4-x^3-3x^2+4x-4=0$ 已知其一根與其他一根符號相反。

顯知此二根爲 $f(x)=0$ 及方程 $f(-x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4=0$ 之公共根，故可用 $f(x)$ 及 $f(-x)$ 之最高公因子法求之。

由 §465 此最高公因子爲 x^2-4. 故其根爲 2, −2, 以 x^2-4 除 $f(x)$ 得 $x^2-x+1=0$, 解之得 $f(x)=0$ 之他二根爲 $(1\pm i\sqrt{3})/2$.

習　題　LXXVI

1. 試求 $2x^5-4x^4+x^2-20x$ 之第一第二，・・・導來式。

2. 已知 $f(x)=x^4-2x^3+1$, 試以太勒爾氏定理求 $f(x+h)$ 之式。

3. 試用公式 §849 (II) 表 (1) x^3+x^2+1 爲 $x+1$ 之綦式，表 (2) x^5-32 爲 $x-2$ 之綦式，表 (3) $(x^3+1)/(x^2+1)$ 爲 $x-1$ 之綦式。

4. 下列之方程含有重根，試解之。

(1) $x^3-3x-2=0$.　　(2) $9x^3+12x^2-11x+2=0$.

(3) $4x^4+12x^2+9=0$.　　(4) $x^4-4x^3+8x+4=0$.

(5) $2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0$.

(6) $x^5-x^3-4x^2-3x-2=0$.

(7) $x^4-2x^3-x^2-4x+12=0$.

(8) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$.

(9) $3x^5-2x^4+6x^3-4x^2+3x-2=0$.

5. 求証 $x^n-a^n=0$ 不能有一重根。

6. 設方程 $x^3-12x+a=0$ 有一二次重根，試求 a.

7. 試定 a 及 b 之值使 $3x^3+ax^2+x+b=0$ 有三次重根，且求此根之數值。

8．求證 $x^4+qx^2+S=0$ 不能有一三次重根。

9．試求 $x^5-px^2+r=0$ 有一二次重根之條件。

10．設 $f(x)$ 恰可爲 $f'(x)$ 所除絕；問 $f(x)$ 之形狀爲何？

11．方程 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$ 及 $x^4+x^3-x-1=0$ 有相同之根，解此二方程。

12．設方程 $x^3-20x-16=0$ 有一根爲 $x^3-x^2-3x-1=0$ 一根之二倍；試解此二方程。

13．求證設一有理係數之三次方程有一重根，則此根必爲有理數。

14．求證設一有理係數之四次方程，有一重根，除 $f(x)$ 爲完全平方外，此根必爲有理數。

15．求證設 a 爲一 r 次方程 $f(x)=0$ 之一根，則其亦爲 $f'(x)=0, f''(x)=0, \cdots f^{(r-1)}(x)=0$ 之一根。

有理整函數之異號

定理．令 $f(x)$ 表一多項式按 x 之升羃排列之，且以 854
b 表其第一項係數之數值，以 g 表其最大數值之係數，無論 x 爲小於 $b/(b+g)$ 之任何數值，$f(x)$ 之第一項之數值，必大於其餘各項之和。

第一，設 $f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$，$b=|b_0|$，且令 x' 表 x 之數值。

則 $b_1x+b_2x^2+\cdots$ 之數值必小於（或等於）$gx'+gx'^2+\cdots$ 或 $g(x'+x'^2+\cdots)$ 之數值，§235，是故當 $x'<1$ 時，則其數值小於 $gx'/(1-x')$，§704.

但當 $x'<b/(b+g)$ 時，$gx'/(1-x')$ 小於 b.

第二，設 $f(x)=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$，$b=|b_1|$ 則知 $|b_2x+b_3x^2+\cdots|<|b_1|$ 時，即當 $x'<b/(b+g)$ 時，$|b_2x^2+b_3x^3+\cdots|<|b_1x|$ 等等。

例．設 $f(x)=5x+3x^2-9x^4$ 當 $x'<5/(5+9)$ 時，即 $x'<5/14$ 時，$|3x^2-9x^4|<|5x|$.

855　**定理.** 設 $f(x)$ 表一多項式按 x 之降冪排列之，且以 a 表其第一項係數之數值，以 g 表其最大係數之數值之係數，無論 x 為大於 $(a+g)/a$ 任何數，$f(x)$ 之第一項之數值必大於其餘各項之和。

因設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，$a=|a_0|$，且以 x' 表 x 之數值。

則 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=x^n(a_0+a_1/x+\cdots+a_n/x^n)$.
當 $|a_0|>|a_1/x+\cdots+a_n/x^n|$ 時，$|a_0x^n|>|a_1x^{n-1}+\cdots+a_n|$.
但由 §854，當 $1/x'<a/(a+g)$ 時，即當 $x'>(a+g)/a$ 時，$|a_0|>|a_1/x+\cdots+a_n/x^n|$.

例如，設 $f(x)=3x^3+x^2-7x+2$，則當 $x'>(3+7)/3$ 時，即當 $x'>10/3$ 時，$|3x^3|>|x^2-7x+2|$.

由此定理，顯知 $(a+g)/a$ 大於方程 $f(x)=0$ 之任何根之絕對值，或數值，其根或為實數或為複數。

856　**定理.** 設 a 為 $f(x)=0$ 之一根，則當 x 略小於 a 時，$f(x)$ 及 $f'(x)$ 正異號，且當 x 略大於 a 時 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 正同號。

因以 $x-a$ 之冪表 $f(x)$ 及 $f'(x)$. §849，然後以第二式除第一式，當 a 為一次根時，則 $f(a)=0$. $f'(a)\neq 0$，其結果可化成

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=(x-a)\frac{f'(a)+f''(a)(x-a)/2!+\cdots}{f'(a)+f''(a)(x-a)+\cdots}.$$

右端分數之分子及分母為 $x-a$ 之多項式，故對於 $x-a$ 之足够小而適合於 §854 所需要之數值時，其分子分母之符號與其公共第一項 $f'(a)$ 之符號相同，而分數之符號將為正，故 $f(x)/f'(x)$ 之符號將由 $x-a$ 決定之，且為負為正

按 $x<a$ 或 $x>a$ 而定，但當 $f(x)/f'(x)$ 爲負時，$f(x)$ 及 $f'(x)$ 有相反之符號；當 $f(x)/f'(x)$ 爲正時，$f(x)$ 及 $f'(x)$ 有相同之符號。

當 a 爲 r 次重根時，則得 §850,

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=(x-a)\frac{f^{(r)}(a)/r!+\text{含有}(x-a)\text{之若干項}}{f^{(r)}(a)/(r-1)!+\text{含有}(x-a)\text{之若干項}}$$

由此與 a 爲一次根時同理得下定理。

儒萊氏定理。 在 $f(x)=0$ 連續二根之間常有 $f'(x)=0$ 之一根。 857

因設 β_1 及 β_2 爲 $f(x)=0$ 之二根，令 c 表略大於 β_1 之數，d 表略小於 β_2 之數，則 $\beta_1<c<d<\beta_2$.

則 $f'(c)$ 與 $f(c)$ 之符號相同，§856, $f(c)$ 與 $f(d)$ 之符號相同，§834；但 $f(d)$ 與 $f'(d)$ 之符號不同，§856. 故 $f'(c)$ 及 $f'(d)$ 有相反之符號，故 $f'(x)=0$ 之一根位於 c 及 d 之間，即位於 β_1 及 β_2 之間，§833.

例如，設 $f(x)=x^2-3x+2=0$, 則 $f'(x)=0$ 爲 $2x-3=0$. $f(x)=0$ 之根爲 1 及 2, $f'(x)=0$ 之根爲 3/2, 而 3/2 則在 1 及 2 之間。

例。 求証 $f(x)=x^3+x^2-10x+9=0$ 有二根在 1 及 2 之間，(與 §844 例題比較之)。

因 $f(1)=1$ 及 $f(2)=1$,在 1 及 2 之間有二根或無根，設有二根，則 $f'(x)=0$ 在 1 及 2 之間亦必有一根，且此根必位於 $f(x)=0$ 之二根之間。

但 $f'(x)=3x^2+2x-10=0$ 在 1 及 2 有一根，因 $f'(1)=-5$ 及 $f'(2)=6$. 解之，則得其近似根 1.5. 又 $f(1.5)=-.375$ 爲負，因 $f(1)$ 及 $f(2)$ 皆爲正，故 $f(x)=0$ 在 1 及 2 之間爲二根，即一在 1 及 1.5 之間，一在 1.5 及 2 之間。

定理。 若變數 x 漸次增大，經過數值 a, 設 $f'(a)>0$, 858
則 $f(x)$ 之數值亦增大，設 $f'(a)<0$, 則 $f(x)$ 之數值減小。

設 $f'(a)=0$ 但 $f''(a)\neq0$, 當 $f''(a)<0$, $f(a)$ 爲 $f(x)$ 之最大值，當 $f''(a)>0$ 時 $f(a)$ 爲其最小值。

因由 §849 則

$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2!+\cdots.$

第二端為 $x-a$ 之多項式，對於 x 所有之數值，其使 $x-a$ 之數值足够小，且適合 §854 之所需要，則第一項之符號，將管全式之符號；故第一項之符號將管 $f(x)-f(a)$ 之符號。

x 之值如此限定後，則

1. 設 $f'(a)>0$，則 $f'(a)(x-a)$ 及 $f(x)-f(a)$ 與 $(x-a)$ 有相同之符號。

故當 x 經過 a 時，$x-a$ 由負變到正，$f(x)-f(a)$ 亦作相同之變化：即 $f(x)$ 增加由小於 $f(a)$ 之值至大於 $f(a)$ 之值。

2. 設 $f'(a)<0$，$f'(a)(x-a)$ 及 $(x-a)$ 有相反之符號，故如 1 之理由，知當 x 經過 $f(x)$，a 為遞次減小。

3. 設 $f'(a)=0$，$f''(a)\neq 0$，$f(x)-f(a)$ 之符號與 $f''(a)(x-a)^2/2$ 之符號相同，故與 $f''(a)$ 之符號相同；因 $x<a$ 或 $x>a$，$(x-a)^2$ 為正也，故 $f''(a)<0$ 時，當 x 恰在 a 前及恰在 a 後，皆為 $f(x)<f(a)$；故由此証明 $f(a)$ 為 $f(x)$ 之最大值，§639.

同法當 $f''(a)>0$ 時，$f(a)$ 為 $f(x)$ 之最小值。

進而言之，設 $f''(a)=0$，但 $f'''(a)\neq 0$，$f(a)$ 不為 $f(x)$ 之最大值或最小值（參考 §859 例題 2），推而廣之當 $x=a$ 時，設由第一至第 r 之諸導來式皆為零，但第 $(r+1)$ 導來式非零，當 r 為奇數，$f(a)$ 為其最大值或最小值，當 r 為偶數，則 $f(a)$ 不為最大值及最小值也。

例．當 x 漸增，且經過數值 2，$f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ 遞增乎抑遞減乎？且求 $f(x)$ 之最大值及最小值。

因 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，故 $f'(2)=-3$ 為負．故 $f(x)$ 按 x 經過 2 而遞減。

當 $x=1$ 及 $x=3$ 時，$f'(x)=0$. 又 $f''(x)=6x-12$, 故 $f''(1)=-6$ 爲負，及 $f''(3)=6$ 爲正，是以 $f(1)=3$ 爲 $f(x)$ 之最大值，$f(3)=-1$ 爲其最小值．

$f(x)$之異號．今研討當 x 連續變化，§214，由 $-\infty$ 859
變到 $+\infty$，而實係數多項式 $f(x)$ 之數值如何變化。

例1．討論 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ 之變號。

$f(x)=0$ 之根爲 $-1,1,2$，而 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$.

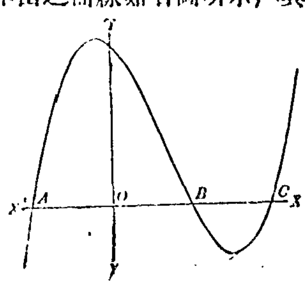
故當 $x=-\infty$ 時，$f(x)=-\infty$；當 x 在 $-\infty$ 及 -1 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=-1$ 時，$f(x)=0$；當 x 在 -1 及 1 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=1$，$f(x)=0$；當 x 在 1 及 2 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=2$，$f(x)=0$；當 x 在 2 及 ∞ 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=\infty$，$f(x)=\infty$.

$f'(x)=3x^2-4x-1=0$ 之根爲 $(2\pm\sqrt{7})/3$，或近似值 $-.2$ 及 1.5. 當 $x<(2-\sqrt{7})/3$ 及當 $x>(2+\sqrt{7})/3$ 時 $f'(x)$ 爲正；但當 x 在 $(2-\sqrt{7})/3$ 及 $(2+\sqrt{7})/3$ 之間時，$f'(x)$ 爲負。

故，由 §858，$f(x)$ 視 x 之變化由 $-\infty$ 至 $(2-\sqrt{7})/3$ 而連續增加視 x 之變化由 $(2-\sqrt{7})/3$ 至 $(2+\sqrt{7})/3$ 而連續減小。又視 x 之變化由 $(2+\sqrt{7})/3$ 至 ∞ 而連續增加。

由此 §639，則知當 $x=(2-\sqrt{7})/3$ 時，$f(x)$ 爲最大值，當 $x=(2+\sqrt{7})/3$ 時，$f(x)$ 爲最小值，此與 §858 相同，因當 $x=(2-\sqrt{7})/3$，$f''(x)=6x-4$ 爲負，當 $x=(2+\sqrt{7})/3$ 其爲正也。

設使 $y=f(x)$，再用 §389 之方法，作此方程之圖形，$f(x)$之異號可立刻看出，如此作出之曲線如右圖所示，其曲線與 x 軸所交之點 A,B,C，爲 $f(x)=0$ 之根 $-1,1,2$，在 x軸上之曲線部份相當於$f(x)$之正數值，其下部相當$f(x)$之負數值，在曲線 A 及 B 間之最高點，相當$f(x)$之最大值，其在 B 及 C 間之最低點相當$f(x)$之最小值，



視 x 由 $-\infty$ 變到 ∞，曲線之相當點由在 x 軸下方無窮遠處，向右上方變至經過 A 到最大點，然後向下經過 B 至最小點，更向上經過 C 至 x 軸上方無窮遠。

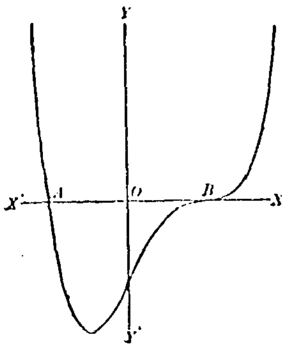
設漸次增大 $f(x)$ 之絕對項，$y=f(x)$ 之圖形，必一直向上移動，點 B 及 C 首先漸近而至密合於切點，最後則消滅不見，$f(x)=0$ 之相當根先變成等根，終變成複根。

例2. 討論 $f(x)=x^4-2x^3+2x-1$ 之異號。

$f(x)=0$ 之根為 $-1,1,1,1$，且 $f(x)=(x+1)(x-1)^3$。

故當 $x=\pm\infty$，$f(x)=\infty$；當 $x=\pm 1$，$f(x)=0$；當 $x<-1$ 及 $x>1$ 時，$f(x)$ 為正；當 x 在 -1 及 1 之間，$f(x)$ 為負。

因 $f'(x)=4x^3-6x^2+2=2(2x+1)(x-1)^2$，而 $f'(x)=0$ 之根為 $-1/2, 1, 1$，當 $x<-1/2$，$f'(x)$ 為負；當 x 在 $-1/2$ 及 1 之間及當 $x>1$，$f'(x)$ 為正，故 §858，$f(x)$ 視 x 之變化由 $-\infty$ 至 $-1/2$，而漸次減小，視 x 變化由 $-1/2$ 至 1，及由 1 至 ∞ 而漸次增加。



故當 $x=-1/2$ 時，$f(x)$ 為最小值，但當 $x=1$ 時，$f(x)$ 無最大值亦無最小值。

此處與 §858 相同，因 $f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$ 及 $f'''(x)=24x-12$；故當 $x=-1/2$ 時，$f''(x)$ 為正；但當 $x=1$ 時，$f''(x)=0$，$f'''(x)\neq 0$.

$y=f(x)$ 之圖形，如左邊曲線，其曲線截 x 軸之點 A 相當 $f(x)=0$ 之根 -1，其曲線切 x 軸，且過 x 軸之點 B 相當 $f(x)=0$，三次重根 1.

曲線之最低點，則相當 $f(x)$ 之最小值，而其坐標為 $-1/2$, $-27/16$.

860 概括言之，如此類例題，設 $f(x)$ 為奇次，其第一項係數為正，當 x 變化由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 時，$f(x)$ 由 $-\infty$ 漸增至第一最大值，然後漸減至第一最小值，如此增減，最後由

最小值漸增至 $+\infty$. 然而在某種情形之下，無極大值亦屬可能，因方程 $f'(x)=0$ 爲偶數次，可無實數根也：$y=f(x)$ 之圖形，由 x 軸下無限遠擴張至 x 軸上之無限遠處，交 x 軸之次數爲奇數而最少爲一次。

換言之，$f(x)$ 爲偶次，$f(x)$ 先由 $+\infty$ 漸減第一最小值，而最後由最末最小值漸增至 $+\infty$，在此情形之下，$y=f(x)$ 之圖形，全然不必須經過 x 軸，設其經過 x 軸，其必經過偶數次。

在許多情形下，用 § 389 之方法，可得極準確之圖形，即給 x 以若干之值，計算出 y 之相當值，作 x, y 之坐標，經過各點以平滑之曲線連之即得，由此曲線可以粗知此圖形在何處經過 x 軸，在何處爲最大及最小值，但欲得精確之交點，必須解方程 $f(x)=0$；欲得精確之極大點及極小點之所在，必須解 $f'(x)=0$，$f(x)=0$ 之每一重根即相當圖形與 x 軸之切點。設重根之次數爲奇，此圖形亦經過此點。

習　題　LXXVII

1. 試討論 $f(x)=(x+1)(x-2)^2=x^3-3x^2+4$ 之異號，問此方程是否有極大及極小值，試求之；並作 $y=f(x)$ 之圖形。

2. 試討論下列各函數，如上題所討論者。

(1) $2x^2-x+1$.　　(2) $(x+1)(x-2)(2x-1)$.

(3) $x^3-12x+14$.　　(4) x^3-5x^2+3x+9.

(5) x^3-3x^2+5.　　(6) $(x+1)^2(x-2)^2$.

(7) $(x^2+x+1)(x+2)$.　　(8) $x(x-1)(x+2)(x+3)$.

3. 試連 $x=-1,-1/2,0,1/2,1,\cdots,4$ 各點，作下列分數方程之圖形。

(1) $y=\dfrac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}$. (2) $y=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)(x-3)}$.

石突姆氏之定理

861 **石突姆氏函數.** 設 $f(x)=0$ 爲任一方程且無重根，又令 $f_1(x)$ 爲 $f(x)$ 之第一導來式。

以 $f_1(x)$ 除 $f(x)$，命其商式爲 q_1 其餘式變符號後命爲 $f_2(x)$.

又以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$ 命其商式爲 q_2，其餘式變符號後命爲 $f_3(x)$.

以下繼續進行，求 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 之最高公因數亦如普通之方法，不過僅有下之限制：每一餘式之符號必改變，且除此以外，再無他種符號變化。

因 $f(x)=0$ 無重根，故 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 無公因數，§ 851，最後將得一餘式爲常數但非0，§ 465，變此餘式之符號命爲 f_m.

此函數串

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\cdots,f_m,$$

爲已知多項式第一導來式變符號後之各餘式總名之爲石突姆氏函數串。

862 **石突姆氏函數間之關係.** 此等函數，由定義可以下之恆等式表之。

$$f(x)\equiv q_1f_1(x)-f_2(x), \tag{1}$$
$$f_1(x)\equiv q_2f_2(x)-f_3(x), \tag{2}$$
$$f_2(x)\equiv q_3f_3(x)-f_4(x), \tag{3}$$

$$f_{m-2}(x)\equiv q_{m-1}f_{m-1}(x)-f_m. \tag{m-1}$$

由此等方程而有下之結論：

1. 對於 x 之同數值，其兩連續函數不能同時等於零。

例如，設當 $x=c$, $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 同時為零，由(2)則知 $f_3(x)$ 亦為零；故由(3) $f_4(x)$ 亦為零；而最後 f_m 亦等於 0，但此與假設不合。

2. 當 x 為一定數值時，中間函數 $f_1(x), f_2(x) \cdots\cdots$, $f_{m-1}(x)$ 有一為零，則其前後相隣二函數有相反之符號。

例如，設　　$f_2(c)=0$,

則由(2)知　　$f_1(c)=-f_3(c)$.

石突姆氏定理. 設 a 及 b 為任二實數而非 $f(x)=0$ 之根。 833

在 $f(a), f_1(a), f_2(a)\cdots, f_m$ 內異號之數，

及 $f(b), f_1(b), f_2(b)\cdots, f_m$ 內異號之數之差數為 $f(x)=0$ 在 a 及 b 間之根數.

為便利計，設 $a<b$, x 由 a 漸變而至 b, § 214.

當 x 由 a 變至 b, 常數 f_m 之符號，絲毫不變；而其變者僅為其餘函數之符號，故在

$$f(x), f_1(x), f_2(x)\cdots, f_m,$$

當 x 經過方程 $f(x)=0, f_1(x)=0$ 等之根變時，符號或有變更 § 835. 但

1. 除第一數 $f(x)$ 外，任變一函數之符號而此串內之異號不增多亦不減少。

例如，設 c 為 $f_2(x)=0$ 之一根，而 $f_2(x)$ 視 x 經過 c 由正變到負。

因 c 為 $f_2(x)=0$ 之一根，故不能再為 $f_1(x)=0$ 或 $f_3(x)=0$ 之根，§ 862. 設取一極小之正數 h 可使 $f_1(x)=0$ 或 $f_3(x)=0$ 之根在 $c-h$ 及 c 之間或 $+c$ 及 $c+h$ 之間，不能有根，當 x 變化由 $c-h$ 變至 $c+h$，函數 $f_1(x)$ 或 $f_3(x)$ 將不變更其符號，§ 835.

但當 $x=c$，$f_1(x)$ 及 $f_3(x)$ 有相反之符號，§ 862，設 $f_1(c)$ 為正，則 $f_3(c)$ 為負，而對於 x 在 $c-h$ 及 $c+h$ 數值之間，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ 之符號有下列之次序。

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$x=c-h$	$+$	$+$	$-$
$x=c$	$+$	0	$-$
$x=c+h$	$+$	$-$	$-$

故對於 x 所有之值，此三函數

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$$

有一異號，故 $f_2(x)$ 之符號變化，至少在此串之一部分，僅能影響異號之位置。

且在此串 $f_3(x)$ 以後之部分，當 x 經過 c，異號之數亦不變更，因當 x 經過 c，$f_3(x)$ 以後之函數無變其符號者，或者有之，則 $f_2(x)$ 亦變一次，而其唯一之影響亦不過將異號之位置變動而已。

2. x 由 a 變到 b，每經過 $f(x)=0$ 之一根，則此串必失一異號。

因設 c 為 $f(x)=0$ 之一根。

對於 x 較 c 略小之值，函數 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 有相反之符號，§ 856. 對於 x 較 c 略大之值，函數 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 有相同之符號。

換言之，當 x 恰近 c 之前，在 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 之間此列有一異號，且當 x 經過 c 後則此異號即失去。

故石突姆氏函數串，當 x 由 a 變到 b，概不增加異號；但 x 每經過 $f(x)=0$ 之一根，其異號即失去一個，且僅失去一個。

故在 $f(a)$，$f_1(a), f_2(a), \cdots, f_m$ 內

及在 $f(b)$．$f_1(b), f_2(b), \cdots, f_m$ 內

其異號數目之差，即 x 經過 $f(x)=0$ 在 a 及 b 間之根所失之異號之數，換言之，即所要証明之根之數目。

設應用 § 861 之方法，於有重根之方程 $f(x)=0$ 上則得一函數串 $f(x), f_1(x)\cdots, f_m(x)$，(1) 其最後項爲其所有項之最高公因子，§ 465，以 $f_m(x)$ 除 (1) 之各項則 γ 得一個數串 $\phi(x)$，$\phi_1(x)\cdots, 1$，(2) 如前所証明，仍有石突姆氏定理所有之性質，故 $\phi(x)=0$ 在 a 及 b 間異根之數目，等於在 $\phi(a)\phi_1(a)\cdots, 1$ 及在 $\phi(b)$，$\phi_1(b), \cdots, 1$，異號相差之數目，且此差數，等於在 $f(a), f_1(a)\cdots f_m(a)$ 及在 $f(b), f_1(b)\cdots f_m(b)$ 之異號相差之數目；因以 $f_m(a)$ 及 $f_m(b)$ 順次乘 $\phi(a)\cdots 1$，及 $\phi(b)\cdots, 1$ 不影響其異號也。

石突姆氏定理之應用． 石突姆氏定理可用以 864
求出數目方程有若干個不同之實根。又可用以求出在任何連續整數之間有此種根若干個，故對於根位置問題皆可用以解決之，但此法用以求根位置之所在頗爲繁雜，故當 § 836 之方法不能解決時方用之。

例1．試求 $x^3+3x^2-4x+1=0$ 之根之位置。

因 $f(x)=x^3+3x^2-4x+1$ 且 $f_1(x)=3x^2+6x-4$．

若排列其除函數如 § 468, 3 之計算式，則得

$3+6-4$	$1+3-4+1$	$1+1$	故
$6+12-8$	$3+9-12+3$		$f(x)=x^3+3x^2-4x+1,$
$6-3$	$3+6-4$		$f_1(x)=3x^2+6x-4,$
$15-8$	$3-8+3$		$f_2(x)=2x-1,$
$30-16$	$3+6-4$		$f_3=1.$
$30-15$	$-14+7$		
-1	$\therefore f_2=2-1$	$3+15$	
$\therefore f_3=1$			

應注意者，式中所得之 $f_2(x)$ 及 f_3，非 § 861 之 $f_2(x)$ 及 f_3，乃皆以正常數乘後所得者。

應當用簡便除法以 $f_2(x)=2(x-.5)$ 除 $f_1(x)$ 以減少計算之麻繁，其最好為最後除法內用簡便除法。

1. 當 x 之數值為很大時，多項式之符號與其最高次數項之符號同， § 855. 故得下表。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	，三異號。
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	，二異號。
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	，無異號。

故 $f(x)=0$ 有一負號及二正號。

2. 若求正根之位置， 可以 $x=0, 1\cdots$ 代入之， 則得

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	，二異號。
$x=1$	$+$	$+$	$+$	$+$	，無異號。

故此二正根位於 0 及 1 之間。

因僅有一負根，欲知其位置，可用 § 836 之方法求之，於是得此根在 -4 及 -5 之間。

例2. 問 $f(x)=2x^3-x^2-2x+2=0$ 有若干實根？

如例1. 求得 $f_1(x)=3x^2-x-1$ 及 $f_2(x)=13x-17$.

因 $f_2(x)=13(x-17/13)$，以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$ 之餘式為 $f_1(17/13)$. 但 $17/13>1$，故當 $x>1$，$f_1(x)$為正，故$f_1(17/23)$為正，而 f_3 為負。

因 $x=-\infty$ 時 $f(x)$, $f_1(x)$ $f_2(x)$, $f_3(x)$ 之符號為 $-$, $+-$, $-$，而 $x=\infty$ 時，其為 $+$, $+$, $+$, $-$. 故 $f(x)=0$僅有一實根。

在 § 863 之證明內所作之最後函數 f_m 其特有性質，爲其符號永久不變。故當求 $f(x)=0$ 在 a 及 b 間根之數目而計算 $f(x)=0$ 之石突姆氏函數時，若求到函數 $f_p(x)$，其在 a 及 b 間 x 所有之值代入後皆爲同號者，即不需要計算以後之函數矣。因在 § 863 之證明內，知所求根之數目爲 $f(a)\cdots f_p(a)$，及 $f(b)\cdots f_p(b)$ 所有變號數目之差也。

3. 問 $f(x)=x^3+x^2+x+1=0$ 有若干個實根？

$f_1(x)=3x^2+2x+1$，且 $2^2<4.3$．故其對於 x 所有之數值皆爲正，§§ 635, 823．故不必計算 $f_2(x)$ 與 f_3．

對於 $x=-\infty$，$f(x)$，$f_1(x)$ 所有之符號爲 $-$，$+$；對於 $x=\infty$ 則爲 $+$，$+$．故 $f(x)=0$ 有一實根。

習 題 LXXVIII

試用石突姆氏定理，求下列各方程諸實根之位置。

1. $x^3-6x^2+5x+13=0$.　2. $x^3-4x^2-10x+41=0$.

3. $x^3+5x+2=0$.　4. $x^3+3x^2+8x+8=0$.

5. $x^3-x^2-15x+28=0$.　6. $x^4-4x^3-5x^2+18x+20=0$.

7. $2x^4-3x^2+3x-1=0$.　8. $x^4-8x^3+19x^2-12x+2=0$.

9. $x^4-12x^2+12x-3=0$.　10. $x^4+2x^3-6x^2-8x+9=0$.

試用石突姆氏定理，求下列各方程實根之數目。

11. $4x^3-2x-5=0$.　12. $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

13. $x^5+1=0$.　14. $x^4-6x^3+x^2+14x-14=0$.

15. 設 $f(x)=0$ 爲無重根之 n 次方程，求證 $f(x)=0$ 所有之根爲實數之條件爲在石突姆氏函數串 $f(x)$，$f_1(x)$，$\cdots f_m$ 內有 $n+1$ 項，而此諸函數之第一項有相同之符號。

16. 試用習題15之定理，求證三次方程 $x^3+px+q=0$ 之諸根皆爲實數且不等條件，爲 $4p^3+27q^2$ 是負數。

諸根之對稱函數

865 **定理1.** 設 $f(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$ 之諸根爲 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 故 $f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)$,

則 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x-\beta_1}+\dfrac{f(x)}{x-\beta_2}+\cdots+\dfrac{f(x)}{x-\beta_n}$.

例如，設 $n=3$，則

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3). \tag{1}$$

以 $x+h$ 代 x 替入 (1) 內，則得

$$f(x+h)=[(x-\beta_1)+h][(x-\beta_2)+h][(x-\beta_3)+h] \tag{2}$$

可化 (2) 之每端爲 h 之多項式，第一端以太勒兒氏定理化之，§ 848，第二端用連續相乘法，如在 § 558 之所示。

因 (2) 爲恆等式，在所得之兩多次式內，h 之同次項係數必須相等，§ 284.

但因 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots$，§ 848，在第一多項式內 h 之係數爲 $f'(x)$. 在第二多項式內爲 $(x-\beta_2)(x-\beta_3)+(x-\beta_3)(x-\beta_1)+(x-\beta_1)(x-\beta_2)$

$$\text{故 } f'(x)=(x-\beta_2)(x-\beta_3)+(x-\beta_3)(x-\beta_1)+(x-\beta_1)(x-\beta_2)$$
$$=\frac{f(x)}{x-\beta_1}+\frac{f(x)}{x-\beta_2}+\frac{f(x)}{x-\beta_3}, \tag{3}$$

因 $(x-\beta_2)(x-\beta_3)=f(x)/(x-\beta_1)$，等等。

此理由亦可推至任一 n 次方程上。在普通情况下，在 (2) 之第二端有 n 個因子，且當此端化成 h 之多項式時，h 之係數爲二項式 $x-\beta_1, x-\beta_2\cdots x-\beta_n$ 每次取 $n-1$ 之積之和，§ 558. 若乘積缺因子 $x-\beta_1$ 者，可寫作 $f(x)/(x-\beta_1)$，以下類推。

例如，設 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$,

則　　$f'(x)=3x^2-12x+11$

及　　$(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)+(x-1)(x-2)=3x^2-12x+11$.

定理 2. 方程 $f(x)=0$ 所有根之同次冪之和，可以其係數之有理式表之。 863

例如，設方程爲

$$f(x)=x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0. \tag{1}$$

設 α, β, γ 表 (1) 之根且命 $s_1\ s_2 \cdots, s_r$ 之意義爲

$S_1=\alpha+\beta+\gamma,\ s_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \cdots,\ s_r=\alpha^r+\beta^r+\gamma^r$.

可證明 $s_1, s_2, \cdots$ 能以係數 b_1, b_2, b_3 之有理式表之。

1. 用前定理，§ 865，則得

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-\alpha}+\frac{f(x)}{x-\beta}+\frac{f(x)}{x-\gamma}. \tag{2}$$

因 $f(x)$ 可爲 $x-\alpha, x-\beta$ 及 $x-\gamma$ 所除絕，在 (2) 每一分數代表一 x 之多項式，此式可用 § 410 規則求之；應用此規則，然後加其結果，則得

$$\begin{aligned}
f(x)/(x-\alpha)&=x^2+(\alpha+b_1)x+(\alpha^2+b_1\alpha+b_2)\\
f(x)/(x-\beta)&=x^2+(\beta+b_1)x+(\beta^2+b_1\beta+b_2)\\
f(x)/(x-\gamma)&=x^2+(\gamma+b_1)x+(\gamma^2+b_1\gamma+b_2)\\
\hline
f'(x)&=3x^2+(s_1+3b_1)x+(s_2+b_1s_1+3b_2)
\end{aligned} \tag{3}$$

但按定義，§ 847，又得

$$f'(x)=3x^2+2b_1x+b_2. \tag{4}$$

在(3)及(4)內使 x 之同次冪項之係數相等，而解 $s_1\ s_2$, 則得

$$s_1+3b_1=2b_1,\quad \therefore s_1=-b_1, \tag{5}$$

$$s_2+b_1s_1+3b_2=b_2,\quad \therefore s_2=b_1^2-2b_2. \tag{6}$$

2. 由前所得 s_1 及 s_2 之數值，可用以順次求得 $s_3\, s_4 \cdots$ 之值如下:

因 α, β, γ, 爲 (1) 之根，則得

$$\alpha^3+b_1\alpha^2+b_2\alpha+b_3=0, \tag{7}$$

$$\beta^3+b_1\beta^2+b_2\beta+b_3=0, \tag{8}$$

$$\gamma^3+b_1\gamma^2+b_2\gamma+b_3=0, \tag{9}$$

如此恒等式，則得

$$s_3+b_1s_2+b_2s_1+3b_3=0, \tag{10}$$

可得 s_3 用 $b_1\ b_2\ b_3$, s_1, s_2 之有理式表之，故由 (5), (6) s_3 可用 $b_1\ b_2\ b_3$ 之有理式表之，

又以 α, β, γ, 順次乘恒等式 (7), (8), (9) 相加其結果，則得

$$s_4+b_1s_3+b_2s_2+b_3s_1=0, \tag{11}$$

用 (5) (6) (10) 協助，可得 s_4 以 $b_1\ b_2\ b_3$ 之有理式表之。

同法，設順次以 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ 及 $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ 等乘 (7) (8) (9) 而各加其結果，則得恒等式

$$s_5+b_1s_4+b_2s_3+b_3s_2=0,\ s_6+b_1s_5+b_2s_4+b_3s_3=0, \cdots,$$

亦可解得以 $b_1\ b_2\ b_3$ 之有理式表 $s_5, s_6 \cdots\cdots$ 之式。

同理此定理可以證明任一 n 次方程 $f(x)=0$.

例1. 設 α, β, γ 表 $x^3-2x^2+4x+2=0$ 之根，試求

$$\sum 1/\alpha=1/\alpha+1/\beta+1/\gamma,\ \sum 1/\alpha^2=1/\alpha^2+1/\beta^2+1/\gamma^2,$$

$$\sum 1/\alpha^3=1/\alpha^3+1/\beta^3+1/\gamma^3.$$

應用形化法 $x=1/y$, 而以 y^3 之係數除新方程，則得 $y^3+2y^2-y+1/2=0$.

對於此題，用代替法將 $b_1=2$, $b_2=-1$, $b_3=1/2$ 代入公式 (5), (6), (10) 內，則得 $s_1=-2$ $s_2=6$, $s_3=-31/2$.

是以 § 814, $\sum 1/\alpha=-2$, $\sum 1/\alpha^2=6$, $\sum 1/\alpha^3=-31/2$.

例2. 已知方程為 $f(x)=x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4=0$, 求證

$s_1+4b_1=3b_1$, $s_2+b_1s_1+4b_2=2b_2$, $s_3+b_1s_2+b_2s_1+4b_3=b_3$,

$s_4+b_1s_3+b_2s_2+b_3s_1+4b_4=0$,

$s_5+b_1s_4+b_2s_3+b_3s_2+b_4s_1=0$,

且再求出以 b_1,b_2,b_3,b_4 表 s_1,s_2,s_3,s_4 之式。

前之各公式, 又證明 $s_1,s_2,s_3\cdots$ 為方程各係數之整函數, 設當第一項係數為 1 時, 如在(1)內所示者。 867

定理 2. 凡方程 $f(x)=0$ 之根之有理對稱函數可以其係數之有理式表之。 868

設 $f(x)=0$ 之根為 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots v$.

凡 $\alpha,\beta,\cdots,v$ 之有理對稱函數, 可以此種形狀 $\sum\alpha^p$, $\sum\alpha^p\beta^q$, $\sum\alpha^q\beta^q\gamma^r$, 等等之有理函數式表之, §544. 故定理之必需證明者, 為對於此若干形狀函數之關係。在 §866 內, 已知 $\sum\alpha^p=s_p$, 將證明 $\sum\alpha^p\beta^q$ 等等亦可以 s_p 等形狀之有理函數式表之。

1. $\sum\alpha^p\beta^q=\alpha^p\beta^q+\beta^p\alpha^q+\cdots$. 之形式

乘積 $\quad(\alpha^p+\beta^p+\cdots)(\alpha^q+\beta^q+\cdots)\qquad(1)$

為 $\qquad\alpha^{p+q}+\beta^{p+q}+\cdots.\qquad(2)$

$\qquad\alpha\beta^q+\beta^p\alpha^p+\cdots.\qquad(3)$

之兩對稱結之和。

但 (1) 及 (2) 為係數之有理函數式, §866. 故 (3), 或 $\sum\alpha^p\beta^q$ 可以由 (1) 減 (2) 得之, 亦為同類之函數。

因 (1) 為 s_ps_q 及 (2) 為 s_{p+q}, 則得公式

$$\sum\alpha^p\beta^q=s_ps_q-s_{p+q}.\qquad(4)$$

當 $p=q$, (3) 之各項為對對相等, 而(3)變成 $2\sum\alpha^p\beta^p$. 於是得 $2\sum\alpha^p\beta^p=s_p^2-s_{2p}$.

2. $\sum\alpha^p\beta^q\gamma^r=\alpha^p\beta^q\gamma^r+\beta^p\alpha^q\gamma^r+\cdots$之形式。

乘積 $(\alpha^p\beta^q+\beta^p\alpha^q+\cdots)(\alpha^r+\beta^r+\gamma^r+\cdots)$ (5)

爲 $$\alpha^{p+r}\beta^q+\beta^{p+r}\alpha^q+\cdots,\tag{6}$$

$$\alpha^p\beta^{q+r}+\beta^p\alpha^{q+r}+\cdots,\tag{7}$$

$$\alpha^p\beta^q\gamma^r+\beta^p\alpha^q\gamma^r+\cdots.\tag{8}$$

三對稱羣之和。

但已知(5),(6),及(7)爲係數之有理函數。故(8),或$\sum\alpha^p\beta^q\gamma^r$,可由(5)減去(6)及(7)之和得之,亦爲此類之函數:

當$p=q$時,(8)變爲$2\sum\alpha^p\beta^p\gamma^r$;當$p=q=r$時,則變爲$6\sum\alpha^p\beta^p\gamma^p$.

3. $\sum\alpha^p\beta^q\gamma^r\delta^u$之形式,等等。

頗易証知,重複引用1及2之方法,可作出若干之有理係數函數,首先可用$\alpha^u+\beta^u+\gamma^u+\cdots$乘$\sum\alpha^p\beta^q\gamma^r$作之。

例。求證

$\sum\alpha^p\beta^q\gamma^r=s_ps_qs_r+2s_{p+q+r}-s_{p+q}s_r-s_{q+r}s_p-s_{r+p}s_q$.

習 題 LXXIX

1. 求在方程$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$中以a_0,a_1,a_2,a_3表s_3及s_4之值。

2. 設α,β,γ表$x^3+px^2+qx+r=0$之諸根,求以p,q,r表$\sum 1/\alpha^2$, $\sum 1/\alpha^3$,及$\sum\alpha\beta^2$之值。

3. 求作一方程其諸根爲$x^3-2x^2+3x-1=0$諸根之立方。

4. 設α,β,γ表方程$x^3-x^2+3x+4=0$之諸根,試用§§866 867之方法,求下列之諸根對稱函數之值。

(1) s_1,s_2,s_3,s_4 (2) $\sum\alpha^3\beta^2$. (3) $\sum\alpha^3\beta\gamma$.

(4) $\sum\alpha^3\beta^2\gamma$. (5) $\sum 1/\alpha^4$. (6) $\sum\alpha^2\beta^2/\gamma$.

XXX 普通三次及四次方程

代數之解答. 在前章內，已知凡數字方程之實根 869
常可求出，且能擴其方法以至應用於複根上，但對文字方程此法即不能應用；欲解此方程必須求以係數表根之式.

設當方程之根可用代數之演算即加減乘除乘方開方，而以係數表之者，則名此方程可有代數之解答.

在 §631 已證明普通二次方程，有此代數之解答. 今將證明者，即普通三次及四次方程亦有此解答，但四次以上之高次方程則不能解之.

一之立方根. 在 §646 已知 $x^3=1$ 有三根，$1,(-1$ 870
$+i\sqrt{3})/2,(-1-i\sqrt{3})/2$. 故此數爲一之立方根，第三根爲第二根之平方. 故設以 ω 表第二根，則第三根可以 ω^2 表之，因 $x^3-1=0$ 缺 x^2 次，§805，是以 $1+\omega+\omega^2=0$.

同理凡數 a 皆有三根，即方程 $x^3=a$ 之三根，設一根爲 $\sqrt[3]{a}$，則他二根將爲 $\omega\sqrt[3]{a}$, $\omega^2\sqrt[3]{a}$.

普通三次方程，喀當公式. 用 §818 之方法， 871
凡三次方程皆可化成下之形式

$$x^3+px+q=0, \qquad (1)$$

式中缺 x^2 項.

在 (1) 內令　　$x=y+z.$　　(2)

則得　$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+p(y+z)+q=0,$

或　　$y^3+z^3+(3yz+p)(y+z)+q=0.$　　(3)

變數 y 及 z 有一簡單之關係 (3)，則其間之第二種關係爲

設　　$3yz+p=0,$　　(4)

於是由 (3)，　$y^3+z^3+q=0$　　(5)

由 (5)，　　$y^3+z^3=-q,$　　(6)

又由 (4)，　　$y^3z^3=-p^3/27.$　　(7)

由是，§ 636，y^3 及 z^3 爲下二次方程之根

$$u^2+qu-p^3/27=0.\qquad(8)$$

解 (8) 而以 A 及 B 順次表二根之式，則得

$$y^3=A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ z^3=B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.\qquad(9)$$

方程 (9) 表 y 之三値及 z 之三値，即 § 870，

$$y=\sqrt[3]{A},\ \omega\sqrt[3]{A},\ \omega^2\sqrt[3]{A},\qquad(10)$$

$$z=\sqrt[3]{B},\ \omega\sqrt[3]{B},\ \omega^2\sqrt[3]{B}.\qquad(11)$$

但由 (4)，$yz=-p/3$，且在 (10)，(11)，內 y, z 之各對値適合於此條件者爲：

$$y, z=\sqrt[3]{A},\ \sqrt[3]{B};\ \omega\sqrt[3]{A},\ \omega^2\sqrt[3]{B};\ \omega^2\sqrt[3]{A},\ \omega\sqrt[3]{B}.$$

將此各對値代入 (2) 內，則得 (1) 之三根，即

$$x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ x_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B},$$

式中 $A=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}},\ B=-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}.$　　(12)

例1. 試解 $x^3-6x^2+6x-2=0$.

由§818則知用式 $x=y+2$ 代入原方程中則變原方程為 $y^3+py+q=0$ 之形式。因得

$$y^3-6y-6=0.$$

此方程之根，用 $p=-6, q=-6$ 代於上公式，得

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4}\omega+\sqrt[3]{2}\omega^2,\ \sqrt[3]{4}\omega^2+\sqrt[3]{2}\omega.$$

故原方程之根為

$$2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2},\ 2+\sqrt[3]{4}\omega+\sqrt[3]{2}\omega^2,\ 2+\sqrt[3]{4}\omega^2+\sqrt[3]{2}\omega.$$

例2. 試解方程 $x^3+3x^2+6x+5=0$.

解答之討論。 當 p 及 q 為實數時，根之性質依 $q^2/4$ 872
$+p^3/27$ 之值而變化如下：

1. 設 $q^2/4+p^3/27>0$, 一根為實數兩根為虛數。

因在此情形下 A 及 B 皆為實數。故 x_1 為實數，x_2 及 x_3 為共軛虛數，§870.

2. 設 $q^2/4+p^3/27=0$, 三根皆為實數且二根相等。

因在此情形下 $A=B=-q/2$, 故 $x_1=-2\sqrt[3]{q/2}$, 且 $x_2=x_3=-(\omega+\omega^2)\sqrt[3]{q/2}=\sqrt[3]{q/2}$, 因由§870 $\omega+\omega^2=-1$.

3. 設 $q^2/4+p^3/27<0$, 三根皆為實根而不相等。

此可以司突姆氏定理證明之（參考477頁習題16）.

但當 $q^2/4+p^3/27<0$, A 及 B 皆為複數，且雖 x_1, x_2, x_3 之諸式表實數，但不能用代數形化法化成實數式，此名為三次方程之叵析式（參攷§885）.

此式 $q^2/4+p^3/27$ 名為三次方程 $x^3+px+q=0$, 之判別 873
式，因其等於零，為其二根相等之條件，（與§635, 比較之）.

874　**普通四次方程，范萊瑞氏解法，**　用§818之方法，則知凡四次方程可化成下之形式：

$$x^4+ax^2+bx+c=0. \tag{1}$$

加減 $x^2u+u^2/4$，則(1)之第一端可變成二平方之差，式中 u 爲常數其值可求而得之，於是得

$$x^4+x^2u+u^2/4-x^2u-u^2/4+ax^2+bx+c=0,$$

或 $$(x^2+u/2)^2-\{(u-a)x^2-bx+(u^2/4-c)\}=0. \tag{2}$$

使第二項成完全平方，則得

$$b^2=4(u-a)(u^2/4-c).$$

或 $$u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)=0. \tag{3}$$

令 u_1 表 u 之三次方程之一根。以 u_1 代 u 於(2)內，則第二項爲 $\sqrt{u_1-a}\,x-b/2\sqrt{u_1-a}$ 之平方，而(2)變成等值之兩個二次方程

$$x^2+\sqrt{u_1-a}\,x+\left(\frac{u_1}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0. \tag{4}$$

$$x^2-\sqrt{u_1-a}\,x+\left(\frac{u_1}{2}+\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0. \tag{5}$$

解(4)及(5)則可得(1)之諸根。

例1.　解：　$x^4+x^2+4x-3=0.$

$a=1, b=4, c=-3$，則三次方程(3)爲

$$u^3-u^2+12u-28=0.$$

此三次方程之根爲2，使 $u_1=2$ 代入(4)(5)內，則得 $x^2+x-1=0$ 及 $x^2-x+3=0$.

解此二次方程，則得 $x=(-1\pm\sqrt{5})/2, (1\pm i\sqrt{11})/2.$

例2.　試解方程 $x^4-4x^3+x^2+4x+1=0.$

因三次方程(3)有三根，在(4)及(5)內每根皆可以取作 u_1，則上之方法似乎可得 x 共爲3.4，或12值，但已

知方程（1）僅能有三根，且不難證明 u_1 之選擇不能影響(4), (5) 共有之四根值，不過在 (4), (5) 內所含之根略有改變而已。

倒數方程。 用觀察可知一已知之倒數方程內，§ 815, 875
含有一根爲 1 或 −1，設其含有此根立可求出一降格而不含此根之方程 $\phi(x)=0$. 由 § 815 則知此方程 $\phi(x)=0$ 必爲下之形式

$$a_0x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\cdots+a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0=0, \qquad (1)$$

即其次數爲偶數，且 $\phi(x)$ 之首尾每相對之二係數必相等。

設用式 $z=x+1/x$ 代入方程 $\phi(x)=0$ 內，則 $\phi(x)=0$ 可變成一 z 之方程，其次數爲 $\phi(x)=0$ 次數之半；由此則知若 $\phi(x)=0$ 之次數不大於八次，用 § 631, 871, 874 之協助，可求得其根。

以 x^m 除 (1) 且合併其各項，則得

$$a_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+a_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\cdots+a_m=0. \qquad (2)$$

但計算其括弧內之項，則得

$$x^{p+1}+\frac{1}{x^{p+1}}=\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right); \qquad (3)$$

設 $z=x+1/x$, 且在 (3) 內使 $p=1,2,3\cdots$, 則得

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2,\quad x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2,\cdots. \qquad (4)$$

即對 x^p+1/x^p 可以得一 z 之 p 次式。代此若干之式於(2)內，則得一 z 之 m 次方程如前證明者，（與 §645 比較之）.

例1. 試解 $2x^8-x^7-12x^6+14x^5-14x^3+12x^2+x-2=0$.

此爲一倒數方程含根 1 及 -1.

去其因子 x^2-1,

$$2x^6-x^5-10x^4+13x^3-10x^2-x+2=0.$$

以 x^3 除之，

$$2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+13=0.$$

故由 (4) 得

$$2(z^3-3z)-(z^2-2)-10z+13=0,$$

或 $$2z^3-z^2-16z+15=0.$$

解之 $$z=1,-3, \text{或 } 5/2.$$

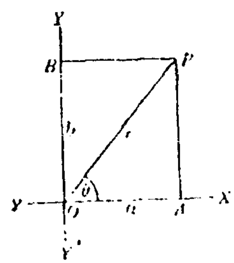
故 $$x+1/x=1,-3, \text{或 } 5/2,$$

所以 $$x=(1\pm i\sqrt{3})/2,\ (-3\pm\sqrt{5})/2,\ 2, \text{或 } 1/2.$$

例2. 試解 $x^6-x^5+x^4+x^2-x+1=0$.

876 凡二項方程 $x^n+a=0$ 皆可用替代式 $x=\sqrt[n]{a}\,y$ 之助，化成倒數方程之形狀。其代入後之結果爲 $y^n+1=0$.（與 §646，例 2 比較之）

877 **用絕對值及角幅表複數.** 在左圖內 P 爲複數 $a+bi$ 之坐標，作法與 §238 相同。



OP 之長爲 $\sqrt{a^2+b^2}$，名爲 $a+bi$ 之絕對値，§239. 以 r 表之。

設 θ 表角 XOP 之弧度即此角在以 O 爲圓心，作單位圓 θ 所對之弧之長也。名爲 $a+bi$ 之方位角.

名比 b/r 爲 θ 之正弦，寫作 $b/r=\sin\theta$.

名比 a/r 爲 θ 之餘弦，寫作 $a/r=\cos\theta$.

故得　$a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta,$

所以　$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

當 $\theta=0$ 時，則 $b=0$ 及 $a=r$. 故 $\sin 0=0$ 及 $\cos 0=1$.

360°之弧度爲 2π，此爲單位圓圓周之長，故點 P 以 r,θ 表之與以 $r,\theta+2\pi$; $r,\theta-2\pi$ 表示法相同。故普通以 $r,\theta+2m\pi$ 表之；m 表任一整數。故 $a+bi$ 之普通角幅值爲 $\theta+2m\pi$. 878

定理． 二複數之積之絕對值，等於其絕對值之積，而其角幅，爲各角幅之和。 879

因　$$r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$
$$=rr'[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')$$
$$+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')]$$
$$=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')],$$

因在三角學上已證知

$$\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'.$$
$$\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'.$$

在 §240 內之作圖即根據此定理。

推論1． 以 §879 之重複應用，則得 880

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot r'(\cos\theta'+i\sin\theta')\cdot r''(\cos\theta''+i\sin\theta'')$$
$$=rr'r''\cdots[\cos(\theta+\theta'+\theta''+\cdots)$$
$$+i\sin(\theta+\theta'+\theta''+\cdots)].$$

推論2． 在 §880 內，使 $r=r'=r''=\cdots$，及 $\theta=\theta'=\theta''=\cdots$，則得下之公式，名爲底茅爾氏定理。 881

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

882　**推論3.**　對於商式則有下之公式

$$\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r'(\cos\theta'+i\sin\theta')}=\frac{r}{r'}[\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')].$$

因 $\frac{r}{r'}[\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')].r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta). \qquad \S 879$$

883　**推論4.**　一複數之 n 個 n 次根爲

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

k 爲 $0, 1, 2, \cdots (n-1)$ 之 n 個數值。

因 $\left[r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]^n$

$$=r(\cos(\theta+2k\pi)+i(\sin\theta+2k\pi))=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

884　**二項方程.**　$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 個 n 次根爲方程 $x^n-r(\cos\theta+i\sin\theta)=0$ 之 n 個根，故在特殊情形之下，當 r 爲實數，θ 爲 0，方程 $x^n-r=0$ 之 n 根爲

$$\sqrt[n]{r}\,(\cos 2k\pi/n+i\sin 2k\pi/n),\ k=0, 1, \cdots, n-1.$$

例如，方程 $x^3-1=0$ 之諸根爲

$$\cos 0+i\sin 0, \cos 2\pi/3+i\sin 2\pi/3, \cos 4\pi/3+i\sin 4\pi/3.$$

即等於

$$1, (-1+i\sqrt{3})/2, (-1-i\sqrt{3})/2.$$

885　**三次方程爲叵析式時之三角解答.**　三次方程 $x^3+px+q=0$，其爲叵析式時，§872, 3，而 A 及 B 爲共軛複數。因在此情形下 $q^2/4+p^3/27$ 爲負，則得

$$A=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}, B=-\frac{q}{2}-i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}.$$

故 A 及 B 若表成絕對值及角幅式時，§877，則爲下式

$$A=r(\cos\theta+i\sin\theta),\ B=r(\cos\theta-i\sin\theta), \qquad (1)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} r&=\left(\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{且}\quad \cos\theta&=\frac{-q/2}{r}=-\frac{q}{2}\left(-\frac{27}{p^3}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

當 p 及 q 爲已知時，則用餘弦表之協助，可由 $\cos\theta$ 之值求出 θ 之值。

在表 $x^3+px+q=0$ § 871，(12)，諸根之公式內，A 及 B 以式（1）代入 ω 及 ω^2 之式，如在 § 884 所述者亦代入之。若化簡其結果爲

$$x_1=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3},\ x_2=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3},\ x_3=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}$$

且 r 及 θ 可由 (2) 知之，此公式可以餘弦表之協助計算根之數值。

例。試解 $x^3-x+1/3=0$.

式中 $q^2/4+p^3/27=-1/108$，故爲叵析式。代入公式(2)且化簡之，則得

$$r=1/\sqrt{27},\ \cos\theta=-\sqrt{3}/2,\ \text{故}\ \theta=150^\circ$$

故用對數表及餘弦表，則得

$$x_1=\frac{2}{\sqrt[6]{27}}\cos 50^\circ=.7422;\ x_2=\frac{2}{\sqrt[6]{27}}\cos 170^\circ=-1.1371,$$

$$x_3=\frac{2}{\sqrt[6]{27}}\cos 290^\circ=.3949.$$

習　題　LXXX

用 § § 871 及 874 之方法解方程 1—10.

1. $x^3-9x-28=0$.　　2. $x^3-9x^2+9x-8=0$.
3. $x^3-3x-4=0$.　　4. $4x^3-7x-6=0$.
5. $x^3+3x^2+9x-1=0$.　　6. $3x^3-9x^2+14x+7=0$.
7. $x^4+x^2+6x+1=0$.　　8. $x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$.
9. $x^4+12x+5=0$.　　10. $x^4+8x^3+12x^2-11x+2=0$.
11. 解 $3x^6-2x^5+6x^4-2x^3+6x^2-2x+3=0$.

12．試解 $2x^8-9x^7+18x^6-30x^5+32x^4-30x^3+18x^2-9x+2=0$.

13．試解 $6x^7-x^6+2x^5-7x^4-7x^3+2x^2-x+6=0$.

14．試用 § 875, 求 z 之三次方程而 $x^7-1=0$ 之解答可用此方程求得者.

15．試求 $x^3+3ax^2+3bx+c=0$ 之所有根為實數之條件.

16．試以三角函數式表 $x^5-1=0$ 及 $x^6+1=0$ 之根.

17．試解下之叵析三次方程

(1) $x^3-3x-1=0$.　　(2) $x^3-6x-4=0$.

18．求一直徑為 $3\sqrt{3}$ 之球，內切一底為正方形之直積柱體；設此柱體之體積為 27, 問其高為何?

19．一直角圓柱體之體積為 50π, 而其面積為 $105\pi/2$. 試求其底之半徑及其高.

20．一直圓錐之高為 6, 而其底之半徑為 4. 有一圓柱內切於此錐，而其體積為錐體積之九分之四；試求此圓柱之高.

XXXI. 行列式及消去法

行列式之定義

886 **僭逆奇次及偶次排列.** 當討論一組物件，如字母或數目，其為幾種排列時，可先定其排列之特殊次序為標準次序；設在標準次序內，一物件在他一物件之前，今若在其後幾間隔，則謂之有幾次僭逆. 此排列為奇為偶，按照僭逆次數為奇為偶(或 0)而定.

例如，設物件在標準次序內為 1, 2, 3, 4, 5, 則45312有八次僭逆 43, 41, 42, 53, 51, 52, 31, 32. 故 45312 為一偶次排列.

定理. 在一排列內設有二物件相交換，其僭逆之次 837
數皆以奇數增加或減少.

因設相鄰之二物件相交換，其增加減少之僭逆次數皆為一，例如比較 $ApqB$ (1) 及 $AqpB$ (2)，式中 A 及 B 指物羣之物件；一在相交換物件 p 及 q 之前，一在其後，在 (1) 及(2)內皆是 A, p 及 q 在 B 之前，故在 (1) 及 (2) 之僭逆次數之差，不外乎此：設 pq 為一次僭逆，qp 則為一次僭逆，而 (2) 比 (1) 多一次僭逆.

但任二物件之交換，可看作相鄰二物件以奇數交換之而得，例如由 $pabq$ 可用相鄰二字目以五次交換而得，第一先令 p 與其後邊之字母交換之，順次得 $apbq$, $abpq$, $abqp$,然後再令 q 與其前邊字母交換之，而得 $aqbp$, $qabp$. 在第二次交換比第一次交換少一步，因當 q 開始時，在其交換之方向已遷移一步，故在 p 及 q 之間有 μ 個字母，在第一次交換時一定有 $\mu+1$ 步，在第二次有 μ 步，而 $(\mu+1)+\mu$ 或 $2\mu+1$, 恆為奇數.

是以相隣二物件每一次交換，其僭逆之次數以 1 或 -1 變之，而數為 1 或 -1 之奇數個之和必為奇數，故此定理已證明矣.

例如，設在 21457368 (1) 內，若交換 4 及 6, 則得 21657348 (2), 則知 (1) 有五次僭逆，(2) 有八次，而 $8-5$ 為奇數.

n 物件每次取全數而排列之，其排列法共為 $n!$, § 763, 883
一半為奇數，一半為偶數，因由一排列法可以由二物之重

複交換求出其餘之排列法。其排列法交替爲奇數爲偶數，反之亦同，§887. 因 $n!$ 爲一偶數，故一半排列法爲奇數，一半爲偶數。

889　有時用一組字母，右下方標一數字者如 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ $b_1\ b_2, \cdots$ 等等。選擇此類記號字母之任一組其所有之字母及其下標皆不同，並以特殊次序排列之，然後求其字母僭逆次數，及其下標僭逆次數之和。設此和爲偶數，則當此記號作任何他種次序排列時，其必須爲偶數。設此和爲奇數，其必爲奇數。因當任二字母交換時，其字母及下標之僭逆次數皆以奇數變之，§887，故其易和以偶數變之。

在特殊情形之下，當字母在標準次序時，其下標之僭逆次數及當下標在標準次序時，其字母之僭逆次序，或皆爲奇數或皆爲偶數。

例如，在 $a_2b_3c_1$ 內，其下標之僭逆次數爲 2；在 $c_1a_2b_3$ 內，其字母之僭逆次數爲 2；在 $b_3a_2c_1$ 內，其字母僭逆之數及下標僭逆次數之和爲 4.

890　**行列式之定義．** 有 $2^2, 3^2$ 或 n^2 個數目列爲正方形如

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{matrix}$$

等等，字母表列，下標表行字母下標不同者，即表不同之數。

其各數名爲此種排列之元。

用此排列中之元，作所有之乘積，其作法爲自每行及每列取一元且僅取一元爲因子相乘而得。

在每一乘積內排列其因子使其列記號(字母)爲標準次序，然後計算行記號(下標)之僭逆次數，此數爲偶(或0)，乘積之前加一正號，若此數爲奇，其前加一負號。

所有之正號乘積與負號乘積之代數和，名爲此排列之行列式，且以直線加於其兩邊表之。

例如，
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

及
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

在 § 889 已述及，凡一乘積先將其行記號作爲標準次 891
序排列之，其前應爲正號，應爲負號，按照列記號之僭逆次數爲偶爲奇而定。

或將其因子隨意書之，其乘積前爲正號或爲負號，按照列記號之僭逆次數及行記號之僭逆次數之和爲偶爲奇而定。

例如，乘積 $a_3b_2c_1$ 按第一法，則其前爲負號，按下標之標準次序書之，則得 $c_1b_2a_3$；且因字母 c,b,a, 有三次逆僭，故按第二法，則亦必爲負號；設其乘積寫爲 $b_2c_1a_3$，其字母有二次僭逆，下標有一次僭逆，其和 $2+1$ 爲奇數。故按第三法，則其乘積亦爲負號。

所作之行列式，其列或行之數，名爲此行列式之次數。 892

893 前所述之各乘積與其前應有之符號，爲名此行列式之項。

894 凡曰展開行列式即將各項直行寫之之意。

895 諸元 $a_1, b_2, c_3 \cdots$ 之對角線，名爲主對角線，而乘積 $a_1b_2c_3$ 名爲行列式之主項。

其主項以直線表之，例如，$|a_1b_2c_3\cdots|$，常用以表此行列式。

896 n 次行列式之項數爲 $n!$，且項數之一半爲正號，一半爲負號。

因保持其字母爲標準次序，可作 n 個下標之 $n!$ 種排列法，§763，此 $n!$ 種排列法即行列式中所有之各項，§890 又，此 $n!$ 個排列法中之一半爲偶，一半爲奇，§888。

例如，$n=3$ 則有 $3!$ 或 6 項 $n=4$ 則有 $4!$ 或 24.

897 **他種記號.** 要知字母及下標僅爲行及列次序之記號而已。有一種記號，足能用之滿足此目的。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例如，行列式之各元常以一字母及二下標表之，如 a_{23}，其第一下標指列，其第二下標指行。此記號 a_{23} 讀"a 二三"，餘類推。

898 **三次行列式之展開法則.** 求三正項在可能之

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

變換內，輪流取第一列之元作爲一因數，按對角線之方向取他因子，例如：

$$a_1b_2c_3,\ a_2b_3c_1,\ a_3b_1c_2.$$

作三負項。其方法相同，不過其方向則按他一對角線之方向取之，例如：

$$-a_1b_3c_2,\ -a_2b_1c_3,\ -a_3b_2c_1.$$

如，$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 5(-1)(-1)+3(-3)2+2(-1)4 \\ &\quad -5(-3)4-3(-1)(-1)-2(-1)2=40. \end{aligned}$

此法則不能應用到三次以上之行列式。例如，四次行列式，用此法則不過僅得二十四項中之八項。

習題 LXXXI

試展開下列之行列式。

1. $\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & p & s \\ r & s & p \end{vmatrix}$.　　2. $\begin{vmatrix} 1 & x & a \\ 1 & y & b \\ 1 & z & c \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} p & -q & r \\ q & p & -s \\ -r & s & p \end{vmatrix}$　　4. $\begin{vmatrix} 0 & -q & -r \\ q & 0 & -s \\ r & s & 0 \end{vmatrix}$.

試求下列行列式之值：

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.　6. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.　7. $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

試用行列式之展開法，証明下列諸關係。

8. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$.

10. 展開行列式 $|a_1\ b_2\ c_3\ b_4|$ 且集合其含因子 (1) c_3d_4, (2) a_1d_4, (3) $a_2b_3d_1$, (4) a_1, (5) c_3 之諸項。

11. 在行列式 $|a_1b_2c_3d_4e_5|$ 之展開式內，求下列各項之符號。

$a_2b_4c_3d_1e_5$.　　$a_4b_2c_1d_5e_3$.　　$a_5b_4c_3d_2e_1$.

$c_1d_2a_3e_5b_5$,　　$c_1b_2e_3a_4d_5$,　　$d_3a_2e_4b_1c_5$.

行列式之性質

899 **定理1.** 設在行列式內，列變爲行，行變爲列，而不改變其相關次序，則此行列式之值不變。

例如，
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}(1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}(2).$$

因在行列式 (1) 之展開式內每項，如 $a_2b_3c_1$，含有 (1) 內不同行列之一元且僅一元。故其必含有 (2) 內不同行列之一元且僅一元，是以除符號外，其必爲 (2) 之一項。又 (1) 內之各項與 (2) 內各項之符號同；因若將各項之因子按字母之次序排列之爲 a, b, c, 在 (1) 及 (2) 內其符號得按下標之僭逆次數規定之，在(1)內用 § 890 之法則，在(2)內用 § 891 之法則。逆言之，在 (2) 之展開式內之每一項必爲 (1) 之展開式內之項。

900 故凡行列式關於列之定理必有一關於行之相當定理。

901 **定理2.** 設一行列式之一列或一行之各元皆爲 0；則此行列式之值爲 0.

因在行列式內每一項必含有此列或此行內之一因子，§ 890, 故爲零。

902 **定理3.** 設一行列式之二列（或行）相交換，則此行列式僅變其符號。

例如，
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}(1) = -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}(2).$$

因 (1) 內之任一項之因子，其次序按 (1) 內列之次序排之，若交換第一及最末因子即可換成 (2) 內之一項，其列因子次序按 (2) 內列之次序排列之，反之亦然，但此種交換，將使此項下標之僭逆次數以奇數增加或減少，§ 887，且因在 (1) 及 (2) 下標之標準次序爲123，故其項之符號必改變。

例如；$a_2b_3c_1$ 爲(1)內之一項，而 $-c_1b_3a_2$ 爲(2)內之相當項。因在 $a_2b_3c_1$ 內其下標之僭逆次數爲 2，而在 $c_1b_3a_2$ 內其下標之僭逆次數爲 1 也。

例。 試用展開行列式 (1) 及 (2) 証明前之定理。

推論． 設一行列式，有二列(或行)相等，則此行列式必爲零。 903

因令 D 表此行列式之值，相同二列相交換，其值仍爲 D 不變：但由 § 902 得使 D 變爲 $-D$.

故 $D=-D$，即 $2D=0$ 或 $D=0$.

例如，$\begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix}=abf+aec+dbc-aec-abf-dbc=0.$

定理4． 設一列(或行)之各元皆以同數，如 k 乘之，則等於此行列式以 k 乘之。 903

因以 k 乘一列之各元，則此行列式之各項必須加一因子 k，§ 890，

計算行列式，常應用此定理化簡之。

例如，

$$\begin{vmatrix} -6 & 8 & 2 \\ 15 & -20 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot5\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot5\cdot3\cdot4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=480.$$

905 **推論.** 設二行(或列)之相當元成比例，此行列式必爲零.

例如 $\begin{vmatrix} ra & a & d \\ rb & b & e \\ rc & c & f \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = r\cdot 0 = 0.$ §§ 903, 904

906 **定理5.** 設一行(或列)之各元爲二項式，則此行列式可表成二行列式之和，其式如下:

$$\begin{vmatrix} a_1+a' & a_2 & a_3 \\ b_1+b' & b_2 & b_3 \\ c_1+c' & c_2 & c_3 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}_{(2)} + \begin{vmatrix} a' & a_2 & a_3 \\ b' & b_2 & b_3 \\ c' & c_3 & c_3 \end{vmatrix}_{(3)}.$$

因(1)之每項爲(2)及(3)相當項之和.

例如，$(a_1+a')b_2c_3 = a_1b_2c_3 + a'b_2b_3$.

應注意者 a', b', c' 任一數可爲零.

任一行列式若其各元爲多次式時，可重複應用此理，化成單元之行列式之和.

例. 試將行列式 $\begin{vmatrix} a_1+a'_1 & a_2+a'_2 & a_3+a'_3 \\ b_1+b'_1 & b_2+b'_2 & b_3+b'_3 \\ c_1+c'_1 & c_2+c'_2 & c_3+c'_3 \end{vmatrix}$ 化成八行列式之和.

907 **定理6.** 設行列式中之任一行(或列)之各元加他任一行(或列)之相當元之同倍數，如 k，則此行列式之値不變.

例如，用 § 905, 906 之定理，則得

$$\begin{vmatrix} a_1+ka_3 & a_2 & a_3 \\ b_1+kb_3 & b_2 & b_3 \\ c_1+kc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_3 & a_2 & a_3 \\ kb_3 & b_2 & b_3 \\ kc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

在他種情形下亦相同.

由此定理則知設行列式之一列，可由其餘各列之倍數相加而得，則此行列式爲零.

例如，$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 5 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$ 因 $4,7,7=2(5,-4,2)+3(-2,5,1)$，

定理7. 設一行列式，其各元爲變數如 x 之有理整函數，當 $x=a$，此行列式爲零時，則此行列式必可爲 $x-a$ 所除盡。 908

因展開此行列式，可化成一 x 之多項式，且當 $x=a$ 時，此多項式若爲零，其必爲 $x-a$ 所除盡，§415.

行列式之各因子，常應用此定理求之。

例　求證　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$.

由　§903，則知設 $a=b$，或 $b=c$ 或 $c=a$ 此行列式必爲零。故其可爲 $a-b$，$b-c$ 及 $c-a$ 所除盡，§416，是以可爲 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 之積所除盡。但此積與此行列式關於 a,b,c 皆爲相同之次數三，故至多二式相差一常數。

此行列式之一項爲 bc^2，且 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 之相當項爲 bc^2．故其常數爲1，而此行列式等於 $(a-b)(b-c)(c-a)$．

習　題　LXXXII

1、　試計算下之行列式。

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix}$.　(2) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$.　(2) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$.

2.　求證：$\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

3.　試用§907定理之幫助，證明下各行列式之值爲0，

(1) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}$.　(2) $\begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & p+s \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix}$.　(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

4. 求證：$\begin{vmatrix}1 & p & p^3\\ 1 & q & q^3\\ 1 & r & r^3\end{vmatrix}=(p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r)$.

5. 求證：$\begin{vmatrix}(b+c)^2 & ab & ac\\ ab & (c+a)^2 & bc\\ ac & bc & (a+b)^2\end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3$.

子式，行列式之乘法

909　**子式.** 在任一行列式Δ內，可去其特殊元e之一列及一行，其餘之各元若不變其相關位置，而作一新行列式，此新行列式名爲元e之餘子式而以Δ_e表之.

例如，在$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$ c_1之子式爲$\Delta c_1=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}$.

910　**定理.** 展開任一行子式Δ，其含a_1之諸項之和爲$a_1\Delta_{a_1}$.

例如，在$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4\end{vmatrix}$(1) 內其含$a_1$之各項之和爲$\begin{vmatrix}b_2 & b_3 & b_4\\ c_2 & c_3 & c_4\\ d_2 & d_3 & d_4\end{vmatrix}$(2)

因先不論符號，而Δ內含a_1之每一項爲由Δ之其餘之行列內不重複取之再乘a_1而得；換言之，即以Δ_{a_1}之一項乘a_1而得。又Δ之各項之符號與Δ_{a_1}各項之符號相同，蓋以書a_1於後項之前，而不影響其下標之僭逆次數，例如，(1)之$-a_1b_4c_3d_2$項，可以a_1乘(2)之$-b_4c_3d_2$項而得。逆言之，a_1與Δ_{a_1}之每項相乘，必爲Δ之一項。

推論． 設 c 表 Δ 之第 i 列第 k 行之一元，則 Δ 內含 c 之各項之和爲 $(-1)^{i+k}c\Delta_c$. 911

因可移 c 在主元之位置上而不變 c 所佔之列及行以外各元相關位置，即，先使 c 所佔之列與其前列輪流交換，然後使 c 所佔之行與其前行輪流交換．在實行此種列及行之繼續交換，不過僅變其行列式之符號 $(i-1)+(k-1)$ 或 $i+k-2$ 次而已，§ 902．故設 Δ' 表最後所得之行列式，則

$$\Delta'=(-1)^{i+k-2}\Delta=(-1)^{i+k}\Delta.$$

由 § 910，則知在 Δ' 內，所有含 c 之項之和爲 $c\Delta_c'$．故在 Δ 內此和數爲 $(-1)^{i+k}c\Delta_c$．因在 Δ 內 c 之子式與在 Δ' 內之子式相同．

例如，求 $\Delta=|a_1\,b_2\,c_3\,d_4|$ 內元 d_3 之位置爲 $i=4, k=3$，可使移到首位如下所示：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}(1) = -\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}(2) = -\begin{vmatrix} d_3 & d_1 & d_2 & d_4 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_4 \\ b_3 & b_1 & b_2 & b_4 \\ c_3 & c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}(3).$$

使 (1) 之第四列與第三第二第一各列輪流交換，則得 (2)，前邊加一負號，因列之交換次數爲 3 即 $i-1$ 爲 3 也．

然後使 (2) 之第三行與第二第一各行輪流交換，而得 (3)，其前之符號仍如 (2)；因行之交換次數爲 2 即 $k-1$ 爲 2 也．

在 (1) 內其 d_3 之子式與在 (3) 內之子式相同．故 (1) 內所有含 d_3 之各項之和爲 $-d_3\cdot|a_1b_2c_4|$.

定理． 一行列式可化成一列或一行之各元乘其餘子式之積之和，其各項之符號爲正負交替或負正交替． 912

例如，有四次行列爲 $\Delta=|a_1b_2c_3d_4|$ 則

$$\Delta=a_1\Delta_{a_1}-a_2\Delta_{a_2}+a_3\Delta_{a_3}-a_4\Delta_{a_4}.$$

因在Δ之展開式內，每項必含諸元 a_1,a_2,a_3,a_4 之一元且僅一元，且由 §910, 911 所有含 a 之諸項之和爲 $a_1\Delta_{a_1}$，所有含 a_2 之諸項之和爲一 $-a_2\ \Delta_{a_2}$ 等等。

同理，

$$\begin{aligned}\Delta&=-b_1\Delta_{b_1}+b_2\Delta_{b_2}-b_3\Delta_{b_3}+b_4\Delta_{b_4},\\&=a_1\Delta_{a_1}-b_1\Delta_{b_1}+c_1\Delta_{c_1}-d_1\Delta_{d_1},\text{等等}\end{aligned}$$

913 **因子式．** 有時將前述之Δ之展開式表成下式頗爲便利．

$$\begin{aligned}\Delta&=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4\\&=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+b_4B_4,\end{aligned}$$

等等，式中 $A_1=\Delta_{a_1}$, $A_2=-\Delta_{a_2}$, 餘類推，則名$A_1,A_2\cdots$爲 $a_1,a_2\cdots$之因子式：

例如，在

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\text{內}a_1,a_2,a_3\text{之因子式爲}\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}.$$

914 凡和數如 $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+b_4A_4$ 其由一列之元乘他一列之相當元之因子式而得，結果爲零．

因 $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+b_4A_4$ 表一行列式其末三行與$\Delta=|a_1b_2c_3d_4|$ 之末三列相同．但其第一列爲 b_1,b_2,b_3,b_4．因此行列式之第一及第二列含有 b_1,b_2,b_3,b_4，故爲零，§903．普通任何行列式此定理皆真．

行列式之加大. 任一行列式皆可化成一較高次數 915
之行列式. 因由 § 912, 則得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{等等.}$$

行列式之計算. 凡數目行列式其値皆可由 § 912 916
定理之助, 及 § 898 之規則求之.

例如,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -18 + 87 = 69.$$

但普通計算數目行列式之値, 用下法較爲省事. 917

由 §§ 904, 907, 910, 則知

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} (1) = \frac{1}{a_1^{n-1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots \\ b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ c_1 & a_1c_2 & a_1c_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} (2)$$

$$= \frac{1}{a_1^{n-2}} \begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & \cdots \\ a_1c_2 - a_2c_1 & a_1c_3 - a_3c_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} (3)$$

(1) 表一 n 次之行列式. (1) 之每行, 除第一行外, 皆乘以 a_1, 則得 (2) 以 a_2 乘 (2) 之第一行由第二行減之, 以 x_3 乘第一行由第三行減之, 繼續進行, 則所得之行列式

之第一列爲 $a_1, 0, 0, \cdots$ 故此行列式等於 a_1 乘其子式而成 $(n-1)$ 次之行列式 (3).

應注意者 (3) 之每一元，爲以 a_1 乘 (1) 內 a_1 之子式之各相當元，再由此結果減去 (1) 內第一列及第一行之相當元之積而得。

例如，用前之方法二次變化，則得

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^2}\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -6 & 6 & -4 \\ -10 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 10 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -15 & 3 \\ -17 & 11 \end{vmatrix} = -38,$$

因　$2\cdot1-2(-2)=6,\ 2\cdot3-(-1)(-2)=4$ 等等。

當首一元爲零時可用在 § 911 所與之方法，使他一元移至首位。

例．試用前所與之各方法，計算下行列式之值。

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

918　**行列式之乘法．** 同次二行列式 Δ 及 Δ' 之積，可成一第三行列式 Δ''，其求法如下：

以 Δ' 內之第 k 列之各元，乘 Δ 內第 i 列之各相當元，如此所得之積之和，則爲 Δ'' 之第 i 列及第 k 行之各元。

例如　$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1p_1+a_2p_2 & a_1q_1+a_2q_2 \\ b_1p_1+b_2p_2 & b_1q_1+b_2q_2 \end{vmatrix}$.

因按 § 906，第三行列式爲：

$\begin{vmatrix} a_1p_1 & a_1q_1 \\ b_1p_1 & b_1q_1 \end{vmatrix}$, (1)　$\begin{vmatrix} a_1p_1 & a_2q_2 \\ b_1p_1 & b_2q_2 \end{vmatrix}$, (2)　$\begin{vmatrix} a_2p_2 & a_1q_1 \\ b_2p_2 & b_1q_1 \end{vmatrix}$, (3)　$\begin{vmatrix} a_2p_2 & a_2q_2 \\ b_2p_2 & b_2q_2 \end{vmatrix}$. (4) 之和。

但(1)及(4)爲零，因其各行成比例，§ 905. 且以 § § 902, 904 之助，化簡(2)及(3)，再相加之，則得

$$p_1q_2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + p_2q_1\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = (p_1q_2 - p_2q_1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

又
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 & a_1q_1 + a_2q_2 + a_3q_3 & a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 \\ b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 & b_1q_1 + b_2q_2 + b_3q_3 & c_1r_1 + b_2r_2 + b_3r_3 \\ b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 & c_1q_1 + c_2q_2 + c_3q_3 & c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3 \end{vmatrix}.$$

可將第三行列式解成諸行列式之和，其各行爲單元，如前所證明之法証明之，可分成二十七個單元行列式，但其中有二十一個有二行或三行成比例，故爲零，其餘之六個行列式中每一個等於 $|a_1b_2c_3|$ 之一項，乘行列式 $|p_1q_2r_3|$ 而得，故其合爲 $|a_1b_2c_3| \cdot |p_1q_2r_3|$.

此証明頗易推廣至一般之情形，上所知之法則，亦可推廣至不同次數之行列式之積，僅將其較低次之行列式加一行一列 § 915, 使其次數相同即可。

習題 LXXXIII

試計算下列之行列式

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 9 \\ 7 & 5 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$3.\begin{vmatrix}3 & 2 & 5 & 10\\ 6 & 0 & 4 & 0\\ 9 & 6 & 1 & 30\\ 12 & 4 & 8 & 20\end{vmatrix}.\qquad 4.\begin{vmatrix}6 & -4 & 10 & 28\\ 18 & 6 & -30 & 21\\ 12 & 24 & 40 & 28\\ 9 & -2 & 20 & 14\end{vmatrix}.$$

試表下列之積爲一行列式：

$$5.\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b & -a & 0\\ -a & 0 & b\\ 0 & b & -a\end{vmatrix}.\qquad 6.\begin{vmatrix}p & 0 & r\\ p & q & 0\\ 0 & q & r\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a & 0 & c\\ a & b & 0\\ 0 & b & c\end{vmatrix}.$$

$$7.\begin{vmatrix}a & -a & a & a\\ -b & b & b & b\\ c & c & -c & c\\ d & d & d & -d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}.\qquad 8.\begin{vmatrix}l & m & n\\ m & n & l\\ n & l & m\end{vmatrix}^2.$$

9.　求證　$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}^3.$

10.　求當一行列式內主對角線兩邊之各元皆爲零時，則此行列式等於其主項。

消去法　直線方程

919　**聯立方程之解法.**　解下聯立方程之 x_1, x_2, x_3.

$$\left.\begin{array}{l}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=k\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=l\\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=m\end{array}\right\}\qquad(1)$$

令 Δ 表 $|a_1\,b_2\,c_3|$，將(1)內 x_1, x_2, x_3 之係數排成行列式如 § 913，令 $A_1, A_2, \cdots$ 表在 Δ 內 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 之因子式。

若欲消去 x_2，及 x_3，可以 A_1 乘第一方程，以 B_1 乘第二方程，以 C_1 乘第三方程，再加之，則得

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|}a_1A_1 & x_1+a_2A_1 & x_2+a_3A_1 & x_3=kA_1\\ b_1B_1 & \quad+b_2B_1 & \quad+b_3B_1 & \quad+lB_1\\ c_1C_1 & \quad+c_2C_1 & \quad+c_3C_1 & \quad+mC_1\end{array}\right..$$

但在此方程內 x_2 及 x_3 之係數爲 0, § 914; x_1 之係數爲 Δ，§ 913; 而第二端表一行列式由 Δ 之第一行換以 k, l, m，而得。故此方程可寫作

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} k & a_2 & a_3 \\ l & b_2 & b_3 \\ m & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

同理，以 A_2, B_2, C_2，順次乘原方程而相加之，可得一方程僅含 x_2，以 A_3, B_3, C_3 順次乘之而相加又可得一僅含 x_3 之方程故所求之方程爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & k & a_3 \\ b_1 & l & b_3 \\ c_1 & m & c_3 \end{vmatrix} (3), \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k \\ b_1 & b_2 & l \\ c_1 & c_2 & m \end{vmatrix} (4).$$

故設 $\Delta \neq 0$，則所求之解答爲

$$x_1 = \frac{|k\ b_2\ c_3|}{|a_1\ b_2\ c_3|}, \quad x_2 = \frac{|a_1\ l\ c_3|}{|a_1\ b_2\ c_3|}, \quad x_3 = \frac{|a_1\ b_2\ m|}{|a_1\ b_2\ c_3|},$$

亦即，每一未知字母 x_1, x_2, x_3 之值，可表成一分數，其分母爲 Δ，其分子亦爲一行列式，而與 Δ 僅相差者，爲所求之未知字母之係數以已知項代之。

同理，可以証明 n 個未知字母之 n 個直線方程，亦爲真確。

例。　求解

$$2x - 3y + z = 4,$$
$$x + y - z = 2,$$
$$4x - y + 3z = 1.$$

則得

$$x = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{26}{20} = \frac{13}{10}.$$

同法，可求得 $y = -21/20$，$z = -35/20 = -7/4$.

設 Δ 爲 0 且行列式 $|k\,b_2\,c_3|$，$|a_1\ l\ c_3|$，$|a_1\,b_2\,m|$ 有一式 920 不爲 0，由 (2),(3),(4) 則知原方程(1)有無限解答（與 § 394 比較之）。

設 Δ 及行列式 $|k\, b_2\, c_3|$, $|a_1\, l\, c_3|$ $|a_1\, b_2\, m|$ 皆爲零, 則方程(2),(3),(4)內 x_1, x_2, x_3 之諸值爲不定，在此種情形下，原方程(1)非獨立方程，由 § 394, 則知(2),(3),(4)可由(1)得來，除非所有之子式 A_1 A_2, ··· 爲零, 且設所有之子式爲零，可立刻証知此三方程 (1) 僅差一常數因子，而每一方程之解答爲他二方程式之解答。

此理可推至一般之 n 個未知數之 n 個方程。

921 **直線之齊次方程.** 當 $k=l=m=0$ 時，則 § 919 之方程(1), 可化成一 x_1, x_2, x_3, 之聯立齊次方程，即

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0 \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0 \end{array}\right\}, \tag{1}$$

且 § 919 內之方程 (2), (3), (4) 變爲

$$\Delta x_1=0,\ \Delta x_2=0,\ \Delta x_3=0. \tag{2}$$

顯然方程 (1) 有一組解答 $x_1=x_2=x_3=0$, 且由 (2) 知除 $\Delta=0$ 外，此爲惟一之解答。

但設 $\Delta=0$, 方程 (1) 可以

$$x_1=rA_1,\ x_2=rA_2,\ x_3=rA_3, \tag{3}$$

適合之，式中 r 表一任何之常數, 因將此數代入(1)而化簡之，則得

$$a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=0,\ b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0,$$
$$c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0,$$

且此三式皆爲真確恆等式，第一恆等式，因爲 $\Delta=0$, 他二恆等式可由 § 914 知之, 其相同之事實, 可証明如下: 設解方程 (1) 之第二及第三式內之 x_1 及 x_2 以 x_3 表之，則得 $x_1/A_1=x_2/A_2=x_3/A_3$, 或設以 r 表此等比之值則 $x_1=rA_1$,

$x_2=rA_2, x_3=rA_3$. 且如適所証明者，設 $\Delta=0$, 此値亦可適合方程 (1) 內之第一式。

由此第二証明，則知當 $\Delta=0$ 時，

$$x_1:x_2:x_3=A_1:A_2:A_3=B_1:B_2:B_3=C_1:C_2:C_3,$$

亦即，在 Δ 之各列之相當之元子式成比例，假定此子式不等於零。

由三個 x, y 之非齊次聯立方程 922

$$\left.\begin{aligned} a_1x+a_2y+a_3&=0\\ b_1x+b_2y+b_3&=0\\ c_1x+c_2y+c_3&=0\end{aligned}\right\},\qquad (1')$$

以 $x=x_1/x_3, y=x_2/x_3$ 代入之且化簡分數，可以求出 §921 之齊次聯立方程 (1)，故 $\Delta=0$, 方程 $(1')$ 爲有公共根之條件。

習　題　LXXXIV

試以行列式解下列之聯立方程。

1. $\begin{cases}2x+3y-5z=3,\\ x-2y+z=0,\\ 3x+y+3z=7.\end{cases}$　2. $\begin{cases}2x+4y-3z=3,\\ 3x-8y+6z=1,\\ 8x-2y-9z=4.\end{cases}$

3. $\begin{cases}ax+by+cz=d,\\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2,\\ a^3x+b^3y+c^3z=d^3.\end{cases}$　4. $\begin{cases}2x-4y+3z+4t=-3,\\ 3x-2y+6z+5t=-1,\\ 5x+8y+9z+3t=9,\\ x-10y-3z-7t=2.\end{cases}$

求証下列之聯立方程爲相依，且求其比 $x:y:z$.

5. $\begin{cases}x+2y-z=0,\\ 3x-y+4z=0,\\ 4x+y+3z=0.\end{cases}$　6. $\begin{cases}a_1x+b_1y+(ka_1+lb_1)z=0,\\ a_2x+b_2y+(ka_2+lb_2)z=0,\\ a_3x+b_3y+(ka_3+lb_3)z=0.\end{cases}$

7. 問 λ 爲何値，則下之方程爲相依？

$$\begin{aligned}4x+3y+z&=\lambda x,\\ 3x-4y+7z&=\lambda y,\\ x+7y-6z&=\lambda z.\end{aligned}$$

結式

923 **結式.** 二方程 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式，即指 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之係數之整函數，若此函數爲零，爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 有一公共根之必須及勝任條件.

例如，$a_0x^2+a_1x+a_2=0$ (1) 及 $x-b=0$ (2) 之結式爲 $a_0b^2+a_1b+a_2$; 因當 $a_0b^2+a_1b+a_2=0$ 時方程(1)及(2)有一公共根 b.

924 任二方程 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式，可用下之消去 x 而得，此法爲薛爾威斯泰氏所發明者. 爲便利計:

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0, \tag{1}$$

$$\phi(x)=b_0x^2+b_1x+b_2=0. \tag{2}$$

以 x 及 1 順次乘 (1), 以 x^2, x 及 1 順次乘 (2), 則得

$$\begin{aligned}
a^0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x \qquad &=0,\\
a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 &=0,\\
b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2 \qquad &=0,\\
b_0x^3+b_1x^2+b_2x &=0,\\
b_0x^2+b_1x+b_2 &=0.
\end{aligned}$$

此方程可視作五個量 $x^4, x^3, x^2, x, 1,$ 之五個齊次之直線聯立方程，故由 §921 有一公共根，則

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

故 (3) 爲 (1) 及 (2) 有一公共根之必須條件，其又爲一勝任條件，因於 D 之第五行加上 $x^4, x^3, x^2, x,$ 順次乘前

四行之結果，則變 D 爲一同效行列式，§907，其第五行之各元爲 $xf(x)$, $f(x)$, $x^2\phi(x)$, $x\phi(x)$, $\phi(x)$. 故設 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ 表第五行各元之因子式；則得，§913，

$$D=(\mu_1x+\mu_2)f(x)+(\mu_3x^2+\mu_4x+\mu_5)\phi(x)\equiv 0.$$

由此恆等式，則知 $f(x)$ 之每一因子 $x-\beta$ 必爲$(\mu_3x^2+\mu_4x+\mu_5)\phi(x)$ 之因子，且因 $f(x)$ 爲三次式，而 $\mu_3x^2+\mu_4x+\mu_5$ 僅爲二次式，故至少 $f(x)$ 之因子，$x-\beta$，必爲 $\phi(x)$ 之一因子，換言之，$f(x)=0$之一根，必爲 $\phi(x)=0$之一根，§795.

此處假定，子式 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ 不皆爲零。設 D之各元全爲零，則可証明 $f(x)=0$及 $\phi(x)=0$ 有一以上之公共根。

925 設 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5$, 表 D 內任一列各元之因子式，由 §921 則知當 $D=0$ 時，

$$x^4:x^3:x^2:x:1=\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4:\lambda_5,$$

故 $x=\lambda_1/\lambda_2=\lambda_2/\lambda_3=\cdots=\lambda_4/\lambda_5$, 故當$f(x)=0$及 $\phi(x)=0$ 有一公共根時，此根之値爲 λ_1/λ_2.

926 在普通情形之下，當 $f(x)=0$及 $\phi(x)=0$ 之方次順次爲 m 及 n時，則結式 D將爲一$(m+n)$ 次之行列式，其首 n列爲 $f(x)$ 之係數及零，而其餘 m 列，爲 $\phi(x)$之係數及零，如 §924(3) 排列之。故在 D之各項內，$f(x)$之係數，按 $\phi(x)$ 之方次而發生，反之亦然。

例．試用前証明之方法，証明方程 $x^2+3x+2=0$有一公共根，並求之。

因　$D=\begin{vmatrix}1&3&2\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1+2-3=0.$　　故有一公共根。

在 D之第一列內 1 及 3 之因子式之値，爲 1 及 -1, 故其公共根爲 $1:-1$, 即 -1.

927　用前法，則凡一對代數方程如形式 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$. 其未知字母 x, y 之任一字母皆可消去，

例：求解 $$x^2-2y^2-x=0. \quad (1)$$
$$2x^2-5y^2+3y=0. \quad (2)$$

可視作(1)及(2)爲 x 之二次方程，(1)之係數爲 $1, -1, -2y^2$，而(2)之係數爲 $2, 0, -5y^2+3y$.

故消去 x 之結果爲：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2y^2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2y^2 \\ 2 & 0 & -5y^2+3y & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5y^2+3y \end{vmatrix}=0, \quad (3)$$

展開且化簡之，則得

$$y^4-6y^3-y^2+6y=0. \quad (4)$$

解(4)則得 $y=0, 1, -1, 6$.

由 § 924，則知當 y 爲此值中之任一值時(1)及，(2) x 之同值代入，皆能適合，且實則當 $y=0$ 時，(1)及(2)變爲 $x^2-x=0$, $2x^2=0$, 而有一公共根 $x=0$；當 $y=1$ 時，(1)及(2)變成 $x^2-x-2=0$, $x^2-1=0$, 其有一公共根，$x=-1$，蓋以 x^2-x-2 及 $x^2-1=0$ 有公共因子 $x+1$ 也，§ 853；餘類推。於是得(1)及(2)之解答爲 $x, y=0,0; -1, 1; 2, -1; 9, 6$. 此 x 之值亦可由 y 之值，應用 § 925 求之（與 § 926 例題較之）。

此例題証明此事實，即設由 $f(x,y)=0$ 及 $\phi(x,y)=0$ 消去 x 所得之結果爲 $R(y)=0$, 且 $R(y)=0$ 之一根爲 β, 此相當 x 之一値或數値，可用 $f(x,\beta)$ 及 $\phi(x,\beta)$ 之最高公因子求之。普通當 x 僅有一値相當 $y=\beta$ 時，此種最高公因子常爲一次式，但其可爲高次式，然後有一以上之 x 値，與 $y=\beta$ 相當。

928　**結式之性質**．設有一對方程爲

$$f(x)=x^m+\cdots+a_m=0, \phi(x)=x^n+\cdots+b_n=0.$$

令 α_i 表 $f(x)=0$ 之一根，β_k 表 $\phi(x)=0$ 之一根，則有 mn 個不同形狀 $\alpha_i-\beta_k$ 之根。令 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 表其乘積.

顯然 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)=0$ 爲 α_i 根中之一根，與 β_i 根中之一根相等之必須及勝任條件，又因 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 爲根 α_i 及根 β_k 之對稱整函數，故其爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之係數之有理整函數，§§ 867, 868. 是以設 $R(f,\phi)$ 表 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式，§ 923，則得

$$R(f,\phi)=\Pi(\alpha_i-\beta_k).$$

此乘積 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 可寫作

$$\begin{array}{l}(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\cdots(\alpha_1-\beta_n),\\(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\cdots(\alpha_2-\beta_n),\\\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\(\alpha_m-\beta_1)(\alpha_m-\beta_2)\cdots(\alpha_m-\beta_n).\end{array}$$

但因 $\phi(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)$，在第一列內因子之乘積爲 $\phi(\alpha_1)$，第二列內，爲 $\phi(\alpha_2)$，等等。故

$$\Pi(\alpha_i-\beta_k)=\phi(\alpha_1)\cdot\phi(\alpha_2)\cdots\phi(\alpha_m).$$

又，因 $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$，在第一行內因子之乘積爲 $(-1)^m f(\beta_1)$，在第二行內爲 $(-1)^m f(\beta_2)$，等等，故

$$\Pi(\alpha_i-\beta_k)=(-1)^{mn}f(\beta_1)\cdots f(\beta_2)\cdots\cdots f(\beta_n).$$

當原方程爲下之形式時，

$$f(x)=a_0x^m+\cdots+a_m=0,\quad \phi(x)=b_0x^n+\cdots+b_n=0,$$

即當其第一項係數非 1 時，在第一項列內因子之乘積爲 $\phi(\alpha_1)/b_0$，等等；在第一行內因子之乘積爲 $(-1)^m f(\beta_1)/a_0$，等等，故在此情形下，若使 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 成 $f(x)=0$ 及

$\phi(x)=0$ 係數之一整函數時，則必須以 $a_0^n b_0^m$ 乘之，故

$$R(f,\phi)=a_0^n b_0^m \Pi(\alpha_i-\beta_k)$$

$$=a_0^n \phi(\alpha_1)\cdot\phi(\alpha_2)\cdots\phi(\alpha_m)$$

$$=(-1)^{mn} b_0^m f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\cdots f(\beta_n).$$

929 在一對方程 $f(x)=0$, $\phi(x)=0$ 之結式內，$f(x)=0$ 之係數之次數之參入與 $\phi(x)=0$ 之方次同，反之亦然。

因乘積 $\phi(\alpha_1)\phi(\alpha_2)\phi(\alpha_3)\cdots\phi(\alpha_m)$ 爲 m 個因子而每一因子含 $\phi(x)=0$ 之係數爲一次方，且乘積 $f(\beta_1).f(\beta_2)\cdots f(\beta^n)$ 爲 n 個因子，而每一因子，含 $f(x)=0$ 之係數爲一次方故也。

是以又得一證明，即在 §§924.926 所述之行列式 D 爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式，即 $D=R(f,\phi)$.

930 在 $R(f,\phi)$ 之每一項內，$f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之係數之下標之和爲 mn.

因由 §812，設 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之每一係數，用 r 之若干次冪乘之，其 r 之次數等於其項之下標，則得二方程

$$f_1(x)=a_0x^m+ra_1x^{m-1}+r^2a_2x^{m-2}+\cdots+r^ma_m=0,$$

$$\phi_1(x)=b_0x^n+rb_1x^{n-1}+r^2b_2x^{n-2}+\cdots+r^nb_n=0,$$

其根爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 根之 r 倍。

$R(f_1\phi_1)$ 之每一項，將等於 $R(f,\phi)$ 之相當項乘以 r 若干次冪，其 r 次之指數等於 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 在此項內下標之和，設能証明在每一項內此指數爲 mn，則此定理即証明完全，但因在乘積 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 內，有 mn 個因子。

$$R(f_1,\phi_1)=a_0^n b_0^m \Pi(r\alpha_i-r\beta_k)=r^{mn}\cdot R(f,\phi).$$

判別式。 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n=0$ 判別式爲 $f(x)$ 係 931
數之整函數，若其等於零，則爲 $f(x)=0$ 有重根之必須條件及勝任條件，(與§§635, 873比較之)。

設以 D 表 $f(x)=$ 之判別式，則

$$D=R(f,f')/a_0.$$

因由§851，當且僅當 $f(x)=0$ 及 $f'(x)=0$ 有一有限公共根時，$f(x)=0$ 有一有限之重根。但由§928，$f(x)=0$ 及 $f'(x)=0$ 有一公共根之條件爲 $R(f,f')=0$. 但 a_0 爲 $R(f,f')$ 之一因子，因爲可以表 $R(f,f')$ 成§924之行列式形狀而証明之。故當 $a_0=0$ 時 $R(f',f')=0$，但在此處，$f(x)=0$ 及 $f'(x)=0$ 之公共根爲 ∞，§816. ∞ 不爲

因除 a_0 及 a_1 全等零外，∞ 不爲 $f(x)=0$ 之重根，故 $D=R(f,f')/a_0$。

例如，因

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0,\ D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 2a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix}\div a_0=-(a_1^2-4a_0a_2).$$

$f(x)=0$ 之判別式，等於 $f(x)=0$ 之二根之差之平方乘以第一次係數 a_0 之一定方次之積。 932

例如，設 $f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)$，　(1)

則§865，$f'(x)=a_0\{(x-\beta_2)(x-\beta_3)+(x-\beta_3)(x-\beta_1)$
$+(x-\beta_1)(x-\beta_2)\}$　(2)

由§928，$R(f,f')=a_0^3f'(\beta_1)f'(\beta_2)f'(\beta_3)$.　(3)

但由(2)，$f'(\beta_1)=a_0(\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)$，等等　(4)

以(4)代入且化簡之則得

$$R(f,f')=-a_0^5(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_2-\beta_3)^2(\beta_3-\beta_1)^2,$$

$$D=-a_0^4(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_2-\beta_3)^2(\beta_3-\beta_1)^2.\qquad(5)$$

一對含二未知字母之方程之解答數。 應注 933
意者，設在方程 $f(x,y)=0$ 內，作替代 $x=x_1/x_3$, $=x_2/x_3$，且化簡分數，則可化 $f(x,y)=0$ 爲同一方次 x_1,x_2,x_3 之齊次方

程，例如，$x^3+xy+y+1=0$，變為 $x_1^3+x_1x_2x_3+x_2x_3^2+x_3^3=0$.

又應注意者，一個 x_2, x_3 之 n 次齊次方程，若其不能以 x_3 所除絕，則可定比 x_2/x_3 之 n 個值，例如，由 $x_2^2-3x_2x_3+2x_3^2=0$，可得 $x_2/x_3=1$ 或 2.

934 設 $f(x,y)=0$ 及 $\phi(x,y)=0$

表二方程其方次順次為 m 及 n，設其含有 x^m 及 x^n 項，則以替代式 $x=x_1/x_3$ $y,=x_2/x_3$ 代入化簡分數，且集其同項，則可化其為

$$F(x_1,x_2,x_3)=a_0x_1^m+a_1x_1^{m-1}+\cdots+a_m=0, \quad (1)$$

$$\Phi(x_1,x_2,x_3)=b_0x_1^n+b_1x_1^{n-1}+\cdots+b_n=0, \quad (2)$$

而各係數 $a_0, a_1, \cdots b_0, b_1, \cdots$ 表一 x_2, x_3 之齊次函數，其方次等於其下標，故 (1) 及 (2) 關於 x_1 之結式 R，為 x_2, x_3 之 mn 齊次函數，§930.

由 §928, (1) 及 (2) 為 x_1 之同數值適合之必須條件及勝任條件為

$$R=0. \quad (3)$$

設 R 不能為 x_3 所除絕，則 $R=0$ 必可為 x_2/x_3 或 y 之 mn 個有限值所適合，§933. 設 β 表此等值中之一值，則方程 $f(x,\beta)=0$ 及 $\phi(x,\beta)=0$ 有公共根，且設此根為 α，則 $x=\alpha$, $y=\beta$ 為 $f(x,y)$, $\phi(x,y)=0$ 之解答，(與 §927 比較之). 又可証明對於 $R=0$ 之單根，必相當 $f(x,y)=0$, $\phi(xy)=0$ 之一單解答；且對於 $R=0$ 之 r 次重根，必相當 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 之 r 個解答，或全相異，或幾個相等，故

$f(x,y)=0, \phi(x,y)=0$ 有 mn 個有限解答。

設 R 為 x_3^μ 所除絕，則 $R=0$ 僅可為 x_2/x_3 或 y 之 $mn-\mu$ 有限值適合，故 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 僅有 $mn-\mu$ 個有限解答，但因 $x=x_1/x_3$ 且 $y=x_2/x_3$ 當 $x_3=0$ 時，x 及 y 之任一數為無限大，或全為無限大，故可設 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 有 μ 個無限大解答，

設原方程 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 缺 x^m 及 x 項，則可用形狀 $y=y'+cx$ 替代變原方節為一同次之方程而含此項，用所證明之方法，可知含 x, y' 之新方程得有 mn 個解答，但設 $x=\alpha$, $y'=\beta$ 為此解答中之一解答，則 $x=\alpha$, $y=\beta+cx$ 即為 $f(x,y)=0, \phi(x,y)=0$ 之一解答，故 $f(x,y)=0, \phi(x,y)=0$ 亦有 mn 個解答。

在前之討論內，假定 R 不恆等於零，設 R 恆等於零，則 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 有一公共因子，而 $f(xy)=0$, $\phi(x,y)=0$ 有無限多之解答。

故有下之定理:

設 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 之次數順次為 m 及 n 且無公共因子，則方程 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 有 mn 個解答.

習題 LXXXV

1． 試用 §§ 924, 925 之方法證明方程 $6x^2+5x-6=0$ 及 $2x^3+x^2-9x-9=0$ 有一公共根，並求之。

2． 試作 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ 及 $b_0x^2+b_1x+b_2=0$ 之結式。

3． 試求 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 及 $x^3=1$ 之結式。

4． 試用 § 931 之方法求方程

(1) $x^3+px+q=0$.　　(2) $ax^3+bx^2+c=0$.

之判別式。

5． 試用 § 931 之助，證明 $x^3+x^2-8x-12=0$ 有一二重根，併求之。

6． 試用 § 927 之方法。解下列之方程

$$x^2-3xy+2y^2-16x-28y=0,$$
$$x^2-xy-2y^2-5x-5y=0,$$

XXXII 無限級數之收歛

收歛之定義

935 **無限級數.** 設 $u_1, u_2, \cdots, u_n \cdots$ 表任一已知無限數串, § 187, 則式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

名為無限級數, (與 § 704 比較之):

$u_1+u_2\cdots$ 可寫作, $\sum u_n$, 讀為"u_n 至無限之和".

當所有之項 $u_1 u_2 \cdots$ 為實餘時, 則級數 $\sum u_n$ 名為實級數, 當所有之項為正時, 則名為正級數, 以後所研究者皆以實級數為限.

凡級數常以公式之方法表其第 n 項 u_n.

例如, 設 $u_n=\sqrt{n}/(n+1)$, 則此級數為 $\sqrt{1}/2+\sqrt{2}/3+\sqrt{3}/4+\cdots$.

有時此種公式常表之以前三項或前四項, 例如, 在 $1/2+1\cdot3/2\cdot4+1\cdot3\cdot5/2\cdot4\cdot6+\cdots$ 則得 $u_n=1\cdot3\cdots(2n-1)/2\cdot4\cdots2n$.

936 **收歛及發散.** 設以 S_n 表級數 $u_1+u_2+\cdots$ 之首 n 項之和, 則 $S_1=u_1$, $S_2=u_1+u_2$, 第 n 項則為 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.

按 n 之增加, S_n 得漸次之值 $u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \cdots$ 且其必含下列性質之一, 即

S_n 漸近於一有限數而以此數為極限.

或　S_n 漸近於無限大.

或　S_n 為不定數.

在第一條件之下, 此級數 $u_1+u_2+\cdots$ 名為收歛, 而 $\lim S_n$ 名為和, 在第二及第三條件之下, 此級數名為發散.

當 $u_1+u_2+\cdots$ 為收歛時, 則可以 S 表其和, $\lim S_n$ 寫

作$S=u_1+u_2+\cdots$，此不過視作對有限數 S 之他一種表法而已！

例如，一幾何級數 $1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots$ 名爲收斂級數，而其極限爲1；因此級數按 n 之增加，S_n 可繼續得數值，$1/2, 3/4, 7/8, 15/16,\cdots$，且由 § 704 之證明，漸近於1，而以1爲極限，應注意者，凡收斂級數，$\lim u_n=0$.

此級數 $1+1+1+\cdots$ 爲發散級數，因 S_n 之值順次爲 $1, 2, 3,\cdots$，故漸近於 ∞.

此級數 $1-1+1-1\cdots$ 爲發散級數，因 S_n 之值順次爲 $1, 0, 1, 0,\cdots$，故其極限不定，故有下之定義：

一無限級數當其首 n 項之和視 n 之無限增加而漸近一 937
有限值，名爲收斂，否則爲發散。

一收斂級數首 n 項之和之極限名爲級數之和。

此處之"和"字，有新意義，以前之"和"指有限數繼續相加之結果，此處則指此結果之極限，故不必假定此有限和之特殊性質，即交換律及接合律亦應用於此無限和之內。(參考 §§ 941, 961).

至於規定一已知級數爲收斂，爲發散，其有限數項略 938
去不計，亦無關係。

因項數之和必爲一有限定值。

設 $u_1+u_2+\cdots$ (1)爲一收斂級數，其和爲 S，而 c 任爲 939
一有限數，則 $cu_1+cu_2+\cdots$ (2)爲一收斂級數，其和爲 cS.
但設(1)爲發散級數，(2)亦爲發散級數。

因設(1)之首 n 項之和爲 S_n，則(2)之首 n 項之和爲 cS_n 而 $\lim S_n=cS$.

設一收斂級數，將其項合併之而不變其原初之次序， 940
則此級數之和不變。

例如，設已知級數為 $u_1+u_2+\cdots$，而 $g_1, g_2\cdots$ 表其首二項之和，及其次四項之和，等等，則級數 $g_1+g_2+\cdots\cdots$ 與 $u_1+u_2+\cdots$ 有相同之和。

因設 u_n 表 g_m 羣之末一項，則

$$g_1+g_2+\cdots+g_m=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

故此方程之兩端視 m 及 n 之無限增加，而漸近一相同之極限。

同理，可證明發散正級數當其項合併仍為發散級數。

941　故收歛級數可隨意加添括弧，又除如下列去括弧而變成發散級數外，亦可任意去括號。

收歛級數，$1/2+1/4+1/8+\cdots$，§ 936，可寫作 $(1\frac{1}{2}-1)+(1\frac{1}{4}-1)+(1\frac{1}{8}-1)+\cdots$ 但其括弧不能任意除去，因除去後 $1\frac{1}{2}-1+1\frac{1}{4}-1+1\frac{1}{8}-1+\cdots$ 為發散級數也。

942　有時用去括弧而能求一級數之和。

例如，$1/1\cdot2+1/2\cdot3+1/3\cdot4+\cdots$ 之和為 2.

因　$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

故　$$S=lim\,S_n=lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

例：試求一級數之和，其第 n 項 u_n 為 $1/n(n+2)$.

943　**n 項後之剩餘．** 設級數 $u_1+u_2+\cdots(1)$ 為收歛級數，其第 n 項以後之部分，為 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots(2)$，亦得為收歛，§ 938，令 R_n 表 (2) 之和，則名為 (1) 之 n 項後之剩餘。

顯然　　　　$$lim\,R_n=0,$$

正級數

定理1. 設一正級數 $u_1+u_2+\cdots$ 視 n 之增加，S_n 常比一有限數 c 為小，則此級數為收斂級數。 944

因此級數為正，S_n 視 n 之增加，S_n 亦繼續增加，但其常比 c 為小，故由 § 192，則知其漸近一極限，故 § 937，此級數為一收斂級數，

定理2. 設 $u_1+u_2+\cdots$(1)表一正級數，且令 $a_1+a_2+\cdots$(2)表一正級數且已知為收斂級數，則級數(1)有下情形之一者，則為收斂級數。 945

1. 當(1)之每項比(2)之相當數為小。

2. 當(1)之每項與(2)之每項之比小於一有限數 c.

3. 當在(1)內其後項與其前一項之比，小於(2)之相當之比。

1. 因設 S_n 表 $u_1+u_2+\cdots$ 首 n 次之和，且令 A 表級數 $a_1+a_2+\cdots$ 之和，設 $u_1<a_1$, $u_2<a_2\cdots$ 則知 $S_n<A$，故 $u_1+u_2+\cdots$ 為一收斂級數，§ 944.

2. 因設 $\dfrac{u_1}{a_1}<c$, $\dfrac{u_2}{a_2}<c,\cdots$ 故 $u_1<ca_1$, $u_2<ca_2,\cdots$

但因 $ca_1+ca_2+\cdots$ 為收斂級數，§ 939，故由 1，則知級數 $u_1+u_2+\cdots$ 為收斂級數。

3. 因設

$$\frac{u_2}{u_1}<\frac{a_2}{a_1},\quad \frac{u_3}{u_2}<\frac{a_3}{a_2},\quad \frac{u_4}{u_3}<\frac{a_4}{a_3},\cdots,$$

則

$$\frac{u_2}{a_2}<\frac{u_1}{a_1},\quad \frac{u_3}{a_3}<\frac{u_2}{a_2},\quad \frac{u_4}{a_4}<\frac{u_3}{a_3},\cdots.$$

由此不等式，則知 u_2/a_2, $u_3/a_3,\cdots$ 之各比皆比有限數 u_1/a_1 為小，故由(2)則知 $u_1+u_2+\cdots$ 為收斂級數。

設(1)及(2)僅其有限項數而適合關係 1,2,3, 之任一關

係則由 § 938, 可得相同之結論。

例，試用三方法 1, 2, 3, 比較

$$1+1/2+1/2\cdot3+1/2\cdot3\cdot4+\cdots \qquad (1)$$

與收斂幾何級數

$$1+1/2+1/2\cdot2+1/2\cdot2\cdot2+\cdots \qquad (2)$$

證明其為收斂級數。

第一法 (1) 在第二項以後之每項比 (2) 之相當項為小，故由 1 知 (1) 為收斂級數。

第二法 (1) 之各項對於 (2) 之相當項之比即 1, 1, 2/3, 2·2/3·4···, 為有限，故由 2 知 (1) 為收斂級數。

第三法，(1) 之各項對於其前一項之比，即 1/2, 1/3, 1/4, ···, 比 (2) 之相當比，即 1/2, 1/2, 1/2··· 為小，故由 3 知 (1) 為收斂級數。

946 **定理** 3. 設 $u_1+u_2+\cdots$ (1) 表一已知正級數，且令 $b_1+b_2+\cdots$ (2) 表一已知正收斂級數，則級數有下列情形之一者即為發散級數。

1. 當 (1) 之每項大於 (2) 之相當項。
2. 當 (1) 之每項與 (2) 之相當項之比，大於一正數 c.
3. 在 (1) 內每項與其前一項之比大於在 (2) 內相當之比。

此定理之證法，與 § 945 相同，學者自己證明之可也。

947 **比較級數**. 前節比較之實際應用 §§ 945, 946, 顯然依賴一已知級數為收斂為發散，此比較級數之最重要者，為幾何級數 $a+ar+ar^2+\cdots$, 已在 § 704 證明，當 $r<1$ 時，為收斂級數，當 $r\geqq1$ 時為發散級數，其他最有用之比較級數為下之級數，

948 級數 $1+1/2^p+1/3^p+\cdots+1/n^p+\cdots$ 當 $p>1$ 時，為收斂級數，當 $p\leqq1$ 時，為發散級數。

1. $p>1$ 由 $1/2^p$ 起，使二項合併之。

由 $1/4^p$ 起，使四項合併之，由 $1/8^p$ 起使八項合併之，餘類推，則得一等級數，§ 940.

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots.$$

顯然(1)之首項以後每一項小於級數

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots, \quad (2)$$

之相當項，即小於

$$1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\cdots,\text{或}\ 1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^{p-1})^2}+\cdots. \quad (3)$$

之相當項。

但因 $p>1$，故 $1/2^{p-1}<1$，而幾何級數(3)為收斂，故(1)為收斂級數，§ 945, 1.

2. $p=1$ 至 $1/4$ 為止前二項合併之，至 $1/8$ 為止，前四項合併之，至 $1/16$ 為止，前八項合併之，等等，則得

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots. \quad (4)$$

顯然(4)之第二項以後每一項大於級數

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots, \quad (5)$$

之相當項，即大於

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots,\text{或}\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots, \quad (6)$$

之相當項。

但(6)為發散級數，故(4)為發散級數，§ 946, 1.

3. $p<1$ 在此情形下，級數 $1+1/2^p+1/3^p+\cdots$ 為發散級數，因其各項大於級數 $1+1/2+1/3+\cdots$，之相當項，在 § 946, 1. 已證明其為發散級數。

前定理之應用。 下之例題將顯示 §§ 945, 946 各定理之有用， 949

例1. 求證 $1/1\cdot2+1/2\cdot3+1/3\cdot4+\cdots$，爲收斂級數。

此級數爲收斂，因其第一項以後之各項，小於收斂級數 $1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdots$，之相當項，§ 945, 1.

例2. 求證 $1+1/3+1/5+1/7+\cdots$，爲發散級數。

此級數之各項與發散級數 $1+1/2+\frac{1}{3}+1/4+\cdots$，相當項之比，即 $1, 2/3, 3/5, 4/7\cdots$，$n/(2n-1)$ 皆大於 $1/2$. 故 $1+1/3+1/5+\cdots$ 爲發散級數，§ 946, 2.

例3. 級數 $u_n=(2n+1)/(n^3+n)$ 爲收斂抑爲發散？

因 $$u_n=\frac{2n+1}{n^3+n}=\frac{n}{n^3}\cdot\frac{2+1/n}{1+1/n^2}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{2+1/n}{1+1/n^2}.$$

故 u_n 與 $1/n^2$ 之比爲 $(2+1/n)/(1+1/n^2)$，對於 n 之所有值其皆爲有限，且視 n 之增大，漸近一有限極限 2，但 $1/n^2$ 爲收斂級數 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots$，之第 n 項，故此級數爲收斂級數，§ 945, 2.

950 例題 3 所用之方法，可證明：設 u_n 爲形狀 $u_n=f(n)/\phi(n)$ 而 $f(n)$ 及 $\phi(n)$ 表 n 之整函數，當 $\phi(n)$ 之次數高於 $f(n)$ 之次數在 1 以上時，此級數爲收斂級數，否則爲發散級數。

例1. 求證下之級數爲有斂級數。

(1) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots$.

(2) $\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{3\cdot4\cdot5}+\frac{6}{4\cdot5\cdot6}+\cdots$.

(3) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\cdots$.

例2. 求證下之級數爲發散級數。

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$.

(2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots$.

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$.

(4) $\frac{2}{1+2\sqrt{2}}+\frac{3}{1+3\sqrt{3}}+\frac{4}{1+4\sqrt{4}}+\cdots$.

例3. 有級數其 u_n 項爲下列各值,試書出其前四項,並定何者爲收斂級數,何者爲發散級數。

(1) $u_n=\dfrac{2n-1}{(n+1)(n+2)}$.　　(2) $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.

(3) $u_n=\dfrac{n^2-(n-1)^2}{n^3+(n+1)^3}$.

定理4. 有正級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots$,設其每項與其前 951
一項之比小于比1爲小之數 r,則此級數爲收斂級數。

因在 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ (1) 內每項與其前一項之比,小於幾何級數 $u_1+u_1r+u_1r^2+\cdots$ (2) 之相當之比,因在 (1) 內,其比常小於 r,而在(2)內,則等於 r,但 (2) 爲收斂級數,因 $r<1$. 故由 § 915, 3. 知(1)爲收斂級數。

設上所述之比等於1或大於1,則爲收斂級數;因在此情形下,$lim\, u_n\neq 0$.

推論. 設視 n 之增大,而比 u_{n+1}/u_n 漸近一定極限 λ,當 $\lambda<1$ 時此級數爲收斂,當 $\lambda>1$ 時,此級數爲發散。 952

1、 因設 $\lambda<1$,取任一數 r 使 $\lambda<r<1$.

則,因 $lim(u_{n+1}/u_n)=\lambda$ 在 n 之一定值後,得常爲 $u_{n+1}/u_n-\lambda<r-\lambda$, § 189, 故 $u_{n+1}/u_n<r$. 是以此級數爲收斂級數, §§ 938, 951.

2. 設 $\lambda>1$,在 n 之一定值以後;得常爲 $u_{n+1}/u_n>1$. 故此級數爲發散級數, § 951.

當 $u_{n+1}/u_n>1$ 且 $lim(u_{n+1}/u_n)=1$ 時,此級數爲發散;但當 $u_{n+1}/u_n<1$ 且 $lim(u_{n+1}/u_n)=1$ 時,由 § 951 之定理,則知不能得結論。

例1. 求證 $\dfrac{3}{5}+\dfrac{3\cdot5}{5\cdot10}+\dfrac{3\cdot5\cdot7}{5\cdot10\cdot15}+\cdots$ 爲收斂級數。

此級數之第 n 項爲 $3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)/5\cdot10\cdot15\cdots5n$. 且此項與其前一項之比爲 $(2n+1)/5n$.

但因 $(2n+1)/5n=2/5+1/5n$, $lim(2n+1)/5n=2/5$ 且 <1. 故此級數爲收斂級數。

例2. 設 x 爲正,問何時 $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+2x^2}+\dfrac{1}{1+3x^3}\cdots$ 爲收斂級數?

因 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1+nx^n}{1+(n+1)x^{n+1}}=\frac{x^n+1/n}{x^{n+1}(1+1/n)+1/n}$.

故 $$lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{x}.$$

是以當 $1/x<1$，即 $x>1$ 時，此級數爲收斂級數。

例3. 求證 $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\cdots$ 爲收斂級數。

例4. 求證 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\cdots$ 爲收斂級數，

例5. 若 x 爲正數，問何時 $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$ 爲收斂級數？

例6. 若 x 爲正數，問何時 $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}$ 爲收斂級數？

953 $lim\,(u_{n+1}/u_n)=1$ **之級數**。此類之級數其比 u_{n+1}/u_n 可化成下式

$$u_{n+1}/u_n=1/(1+\alpha_n/n),$$

式中 $lim\,(\alpha/n)=0$. 將證明者，設視 n 之增大，α_n 因之變化，最後保持其比 1 爲大之數；此級數爲收斂級數；但其變化保持其比 1 爲小之數，則此級數爲發散級數。

1. 因假定 n 在一定值 k 後，則 $\alpha_n>1+\alpha$ 而 α 爲一正數。

則 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n/n}<\frac{1}{1+(1+\alpha)/n}$ 當 $n \geqq k$ 時但此不等式可化爲下式。

$$u_{n+1}<\frac{1}{\alpha}(nu_n-(n+1)u_{n+1}),\text{ 當 } n\geqq k. \quad (1)$$

在 (1) 內順次令 $n=k, k+1\cdots, k+l-1$ 且加此諸不等式則得

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+l}<\frac{1}{\alpha}(ku_k-(k+l)u_{k+l}) \quad (2)$$

由 (2) 則知視 l 之增大，此正級數 $u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots$ 之首 l 項之和，常保持其小於定數，ku_k/α, 而此證明此級

數爲收歛數，§944，故此全級數 $u_1+u_2+\cdots\cdot$ 爲收歛級數，§938.

2. 假定當 $n>k$ 時，可得 $\alpha_n<1$.

則當 $n>k$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n/n}>\frac{1}{1+1/n}$

但 $1/(1+1/n)$ 爲發散級數 $1+1/2+1/3+\cdots$ 之相當項之比；因 $1/(n+1)\div 1/n=1/(1+1/n)$.

故此已知級數 $u_1+u_2+\cdots$ 爲收歛級數，§946, 3.

設 α_n 永比1爲大，且漸近于1而以1爲其極限，則前之比較即不能定此級數是否爲收歛或發散，但在此情形之下，可化成 $\alpha_n=1+\beta/n$ 而 $lim\ \beta_n/n=0$，且設 β_n 永比一定數 b 爲小時，此級數即發散。

因 $\beta_n<b$，則得

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n/n}=\frac{1}{1+1/n+\beta_n/n^2}>\frac{1}{1+1/n+b/n^2}.$$

但 $1/(1+1/n+b/n^2)$ 輪流比發散級數 $1/(1-b)+1/(2-b)+1/(3-b)+\cdots$ 之相當項爲大。

因 $$\frac{1}{(n+1)-b}\div\frac{1}{n-b}=\frac{n-b}{(n-b)+1}=\frac{1}{1+1/(n-b)}$$
$$<\frac{1}{1+1/n+b/n^2},$$

且 $$\frac{1}{n-b}=\frac{1}{n}\frac{1}{1-b/n}=\frac{1}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{b^2}{n^3}+\cdots$$

故原級數 $u_1+u_2+\cdots$ 爲發散級數，§946, 3.

由前之討論，則知凡一級數若 u_{n+1}/u_n 可化成下式 954

$$u_{n+1}/u_n=(n^p+an^{p-1}+\cdots)/(n^p+a'n^{p-1}+\cdots)$$

當 $a'-a>1$ 時，爲收歛級數，當 $a'-a\leqq 1$ 時爲發散級數，因以此分數之分子除其分母，則得

$$\frac{u_{n+1}}{n^p}=\frac{n^p+an^{p-1}+\cdots}{n^p+a'n^{p-1}+\cdots}=\frac{1}{1+(a'-a)/n+\beta/n^2},$$

而 β_n 爲有限值。

例：求證"雙曲線幾何級數"

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\cdots$$

當 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 時，爲收歛級數，當 $\gamma-\alpha-\beta\leqq 0$ 時，爲發散級數。

習題 LXXXVI

試定下列級數何者收斂，何者發散。

1. $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots$.　　2. $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot2}{1\cdot3}+\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot3\cdot5}+\cdots$.

3. $\frac{2}{2\cdot3}+\frac{4}{3\cdot4}+\frac{6}{4\cdot5}+\cdots$.　　4. $\frac{2}{3}+2\left(\frac{2}{3}\right)^2+3\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots$.

5. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$.　　6. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+2}+\cdots$.

7. $\frac{2}{4}+\frac{2\cdot4}{4\cdot7}+\frac{2\cdot4\cdot6}{4\cdot7\cdot10}+\cdots+\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+1)}+\cdots$.

8. $\frac{2}{4}+\frac{2\cdot3}{4\cdot5}+\frac{2\cdot3\cdot4}{4\cdot5\cdot6}+\cdots+\frac{2\cdot3\cdot4\cdots(n+1)}{4\cdot5\cdot6\cdots(n+3)}+\cdots$.

9. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}+\cdots$.

設級數之 u_n 項爲下列各值，試書其前四項，併證明何者者爲斂，何者爲發散。

10. $u_n=\frac{n+1}{n(n+2)}$.　　11. $u_n=\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^3}+1}$.

12. $u_n=\sqrt{n^2+1}-n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

有級數其 u_{n-1}/u_n 爲下列之值試定何者爲收斂何者爲發散。

13. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+3}{2n}$.　　14. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3n^3-2n^2}{3n^3+n^2+1}$.

問 x 爲何正數值下級數爲收斂級數？

15. $1+\frac{3}{5}x+\frac{3\cdot6}{5\cdot8}x^2+\frac{3\cdot6\cdot9}{5\cdot8\cdot11}x^3+\cdots$.

16. $\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^3}+\frac{x^3}{1+x^4}+\cdots$.

17. 求證當 a 爲正時，$\frac{a}{1}+\frac{a(a+1)}{1\cdot2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot2\cdot3}$ $+\cdots$ 爲發散級數。

18. 設 r 爲正且小於1，對於 n 之所有值皆爲 $\sqrt[n]{u_n}<r$，試將 $u_1+u_2+\cdots$ 與收斂級數 $r+r^2+r^3+\cdots$ 比較之，而証明其爲收斂級數。

正負項組成之級數

收歛級數之普通比較法． 按 §937 之定義，任 955
何類之無限級數 $u_1+u_2+\cdots$，設視 n 之無限增大，而 S_n 漸近一定極限，則此級數爲收歛級數．

但由，§§195, 197 當 n 漸次增大，S_n 將得一數串，S_1 $S_2, S_3, \cdots$，設此數串對一已知任何小之正數 δ 可求一相當項 S_n，而此項與其以後任何項數值之差，皆比 δ 爲小，則 S_n 必漸近一極限，否則 S_n 即不能有一極限，§198.

因 $$S_k=u_1+\cdots+u_k,$$

且 $$S_{k+p}=u_1+\cdots+u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{k+p},$$

則 $$S_{k+p}-S_k=u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+p}.$$

故得下之普通收歛比較法：

設任何無限級數 $u_1+u_2+\cdots$ 對於一已知任何小之正數 δ．可得一項 u_k 而 u_k 以後任意若干項之和，其數值皆比 δ 爲小，換言之，則 p 爲任何值而

$$|u_{k+1}+u_{k+2}\cdots+u_{k+p}|<\delta$$

設此級數不含此性質，則爲發散級數．

故在特殊情形下，一級數 $u_1+u_2+\cdots$ 除 $lim\ u_n=0$ 外，不能爲收歛級數，但單此一條件，對於收歛尚不勝任，故必須 $lim(u_n+u_{n+1})=0$; $lim(u_n+u_{n+1}+u_{n+2})=0$ 等等。

例如，$1+1/2+1/3+\cdots$ 雖然 $lim\ u_n=lim\ 1/n=0$ 但爲發散級數。

因此在級數內，其 $1/k$ 項以後 k 個之和，常比 $1/2$ 爲大。例如。

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}>\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}+\cdots \text{ 至 } k \text{ 項，} \quad \text{即}> \frac{1}{2k}\cdot k \text{ 或 } \frac{1}{2}.$$

故 k 不能使 $u_{k+1}+\cdots+u_{k+k}$ 比任何能名之數爲小，而此級數爲發散級數，（與 §948,2 比較之）．

956 **推論 1.** 凡級數爲正項與負項所組合而成，設其相當正級數爲收斂級數，則此級數爲收斂級數。

因設 $u_1+u_2+\cdots$(1) 爲此已知級數，且令 $u_1'+u_2'+\cdots$(2) 爲將其負號全改變之相同級數，則

$$|u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+p}|\leqq u'_{k+1}+u'_{k+2}+\cdots+u'_{k+p}.$$

故設取 k 爲足够大則能使

$$u'_{k+1}+\cdots+u'_{k+p}<\delta,$$

則 $|u_{k+1}+\cdots+u_{k+p}|$，亦必小於 δ 設 (2) 爲收斂級數，則此級數亦爲收斂 §955.

957 前之證明亦能證明凡複數所成之級數 $u_1+u_2+\cdots$ 設 $u_1,u_2\cdots$ §232. 其各項之絕對值之級數，即級數爲收斂數 $|u_1+u_2|+\cdots$ 爲收斂，則此級數爲收斂級數。

例如，$i/1+i^2/2^2+i^3/3^2+\cdots$ 爲收斂級數，因 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots$ 爲收斂級數。

958 **推論 2.** 凡正負項相間之級數，若其每項比前一項之數值爲小，且其第 n 項之極限爲 0，則此級數爲收斂級數。

因設此級數爲 $a_1-a_2+a_3-\cdots$，而 $a_1a_2\cdots$，爲正，由 §955 之符號則得

$$|u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+p}|=|a_{k+1}-a_{k+2}+\cdots+(-1)^{p-1}a_{k+p}|.$$

可寫作 $a_{k+1}-a_{k+2}+\cdots+(-1)^{p-1}a_{k+p}$ (1)

亦爲 $(a_{k+1}-a_{k+2})+(a_{k+3}-a_{k+4})+\cdots$ (2)

及 $a_{k+1}-(a_{k+2}-a_{k+3})-\cdots\cdots$ (3)

因 $a_{k+1}>a_{k+2}>a_{k+3}$，而在 (2) 及 (3) 內括弧內之各式皆爲正，故由 (2) 則知 (1) 爲正。

且由 (3) 知 (1) 之代數值比 a_{k+1} 爲小，是以由(2) 及 (3) 知 (1) 之數值比 a_{k+1} 爲小。

但因 $lim\, a_n=0$，則可取 k 之數值使 $a_{k+1}<\delta$ 故 $a_1-a_2+a_3-\cdots$ 爲收斂數，§955.

絕對收斂級數及條件收斂級數. 一收斂實數級數，設其負號全改變，而仍爲收斂者，則此級數爲絕對收斂級數，當此符號改變後，而成發散級數者，則此級數爲發散級數。 959

例如，$1-1/2+1/4-1/8+\cdots$ 爲絕對收斂級數，因級數 $1+1/2+1/4+1/8+\cdots$ 爲收斂級數。

但 $1-1/2+1/3-1/4+\cdots$，由 §958 則知爲收斂級數，但因 $1+1/2+1/3+1/4+\cdots$，爲發散級數，故其爲條件收斂級數。

定理. 在一絕對收斂級數內，其諸正項自成一收斂級數，而其諸負項亦自成一收斂級數，且設此兩級數之和順次爲 P 及 $-N$，則此全級數之和爲 $P-N$. 960

但在條件收斂級數內其諸正項所成之級數，及諸負項所成之級數，全爲發散級數。

因令 $u_1+u_2+\cdots$ 爲一收斂級數，其含有無限之正項及負項。

設此級數之 n 項有 p 項爲正，q 項爲負，設 S_n 表此 n 項之和，即 P_p 表此 P 式項之和，$-N_q$ 表此負 q 項之和，則得 $S_n=P_p-N_q$.

當 n 無限增大時，p 及 q 亦隨之增加至無限，且因 S_n 得漸近定極限 S，則必生有下列之任一情形，即或(1) P_p 及 N_q 全漸近一定極限，名爲 P 及 N，或 (2) P_p 及 N_q 全漸近無限大。

在第一情形下，$lim\,S_n=lim(P_p-N_q)=limP_p-limN_q$，§203 即 $S=P-N$. 此級數爲絕對收斂級數，實則在變其負項之符號後，此級數爲 $P+N$.

在第二情形下，此級數爲條件收斂級數，因設 S'_n 表此級數前 n 項之和，而此級數由變其負項所得，則 $limS'_n=lim(P_p+N_q)=\infty$.

961 **推論.** 條件收歛級數，可排列之使此級數之和等於一任何指定可能實數值.

因如前所證者，一條件收歛級數，其諸正項及諸負項可自成一發散級數，其第 n 項之極限爲 0.

故例如，指定一正數 c，則若不改變其正項之相關次序，或負項之相關次序，作 S_n 爲前諸負項之和，使其繼續相加以至比 c 爲大，然後再加諸負項使其和比 c 爲小繼續如此進行，則 S_n 之極限得視 n 之無限增大而等於 c.

故加法之交換律對於條件收歛級數不能用之.

習題 LXXXVII

1. 試判別下列級數何者收歛何者發散.

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\cdots.$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\cdots.$

(3) $\frac{3}{3}-\frac{3\cdot5}{3\cdot6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{3\cdot6\cdot9}-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{3\cdot6\cdot9\cdot12}+\cdots.$

2. 問 x 爲何實數值下之級數收歛爲何實數值下之級數發散?

(1) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-3x}+\cdots+\frac{1}{1+(-1)^n nx}+\cdots.$

(2) $\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+2x^4}+\frac{x^5}{1+3x^6}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{1+nx^{2n}}+\cdots.$

3. 設 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 爲一絕對收歛級數，且 a_1, a_2, a_3 表任一數串之數值，皆比一定數 c 爲小，求用 §956 之方法，證明此級數 $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\cdots$ 亦爲收歛級數.

4. 設 S 表在 §958 內此數級數之和，求證 $a_1, a_1-a_2, a_1-a_2+a_3\cdots$，之和爲交替大於及小於 S.

羃級數之收斂

羃級數. 此級數皆爲 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+$ 962
$\cdots$(1)之形式，而 x 爲變數，但 $a_0,a_1\cdots$ 爲常數，x 及 a_0,a_1
$\cdots\cdots$ 之值可爲實數或複數。

但由 §957,設正級數 $|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|$
$+\cdots$(2)爲收斂級數，則級數(1)之爲收斂級數，當(2)爲收斂級數時，則名(1)爲絕對收斂級數，(與 §959 比較之)。

(1) 爲收斂或爲發散全視 x 之值而定，故下之定理頗爲重要。

定理1. 設當 $x=b$ 時，$a_0+a_1x\cdots$ 之各項之數值皆 963
比定正數 c 爲小，當 $|x|<|b|$ 時，此級數爲絕對收斂級數。

因對 n 之諸值，$|a_nb^n|<c$

則對 n 之諸值 $|a_nx^n|=|a_nb^n|\cdot\left|\dfrac{x}{b}\right|^n<c\left|\dfrac{x}{b}\right|^n$

故 $|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots$(1)之每項比
$c+c\left|\dfrac{x}{b}\right|+c\left|\dfrac{x}{b}\right|^2+\cdots$(2) 之相當項爲小。

但 (2) 爲一幾何級數，當 $|x/b|<1$ 即當 $|x|<|b|$ 時，爲收斂，且當(2)爲收斂時，(1)亦爲收斂，§945, 1.

例如，$1+2x+x^2+2x^3+\cdots$ 當 $|x|<1$ 時爲收斂級數。

推論1. 設 $a_0++a_1x+\cdots$ 當 $x=b$ 時，爲收斂級 964
數，當 $|x|<|b|$ 時，則其爲絕對收斂級數。

此可立刻由 §963 證明之，因 $a_0+a_1x+\cdots$ 當 $x=b$ 時，爲收斂級數，故當 $x=b$ 時，其所有之項皆爲定值。

推論2. 設 $a_0+a_1x+\cdots$ 當 $x=b$ 時，爲發散級數， 965
當 $|x|>|b|$ 時，此級數亦爲發散級數。

因$a_0+a_1x+\cdots$對於x之數值大於b時爲收斂，對於$x=b$時，亦爲收斂，§964.

966 **收斂之極數．** 由§§964, 965, 則知設在$a_0+a_1x+\cdots$內，對於x所有之正數爲收斂級數屬於第一類，對於x所有之正數爲發散級數指定屬於第二類在A_1內之每一數，將比在A_2內之任何數爲小，故由§159, 則知或在A_1有一最大數或在A_2內有一最小數，名此數爲λ. 則此數爲$a_0+a_1x+\cdots$收斂之極限，當$|x|<\lambda$時，此級數爲絕對收斂級數，當$|x|>\lambda$時，則爲發散級數．

例如，在$x+x^2/2+x^3/3+\cdots$ (1) 及$x+x^2/2^2+x^3/3^2+\cdots$ (2) 內，其收斂之極限λ爲1. 應注意者，當$x=\lambda=1$時，(1)爲發散，(2)爲收斂，且能作一級數，而$\lambda=0$; 例如級數$x+2!\,x^2+3!\,x^3+\cdots$.

收斂之極限最普通稱作收斂圓半徑，因設以平面之點標諸複數，如在§238之所示者，且作一圓，其圓心在原點，而其半徑爲λ, 此級數$a_0+a_1x+\cdots$對於x在圓內所有之值爲收斂，在圓外之值爲發散，§239.

967 **定理2.** 在$a_0+a_1x+\cdots$內，其比$|a_n/a_{n+1}|$漸近一定極限μ, 則μ爲收斂之極限．

因，由§952, 此級數$|a_0|+|a_1x|+\cdots$當

$lim\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|<1$, 即$|x|<lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$時，爲收斂級數．

同理，當$|x|>lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$時，$|a_0|+|a_1x|+\cdots$爲發散級數．

例1. 試求此級數

$$1+\frac{3}{5}x+\frac{3\cdot5}{5\cdot10}x^2+\cdots+\frac{3\cdot5\cdots(2n+1)}{5\cdot10\cdots5n}x^n+\cdots.$$

爲收斂級數，

因 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{5(n+1)}{2n+3}=\frac{5+5/n}{2+3/n}$, 則 $\frac{5+5/n}{2+3/n}=\frac{5}{2}$.

例2. 試求級數

$\cdots+2^3x^{-3}+2^2x^{-2}+2x^{-1}+1+x/3+x^2/3^2+x^3/3^3+\cdots$.

之收斂極限。

因 $1+x/3+x^2/3^2+\cdots$ 為一x之幾何冪級數，此級數當$|x|<3$時，為收斂級數，因$a_n/a_{n+1}=3$.

換言之，$2x^{-1}+2^2x^{-2}+2^3x^{-3}+\cdots$為$x^{-1}$或$1/x$之幾何等比級數，當$|x^{-1}|<1/2$時，即當$|x|>2$時，其為收斂級數。

故此已知級數，當$2<|x|<3$時為收斂級數。

例3. 問x為何實數值，此級數

$x/(1+x)+2x^2/(1+x)^2+3x^3/(1+x)^3+\cdots$得為收斂數?

此為$x/(1+x)$之等比級數，當$|x/(1+x)|<1$時，此級數為收斂級數，因$a_n/a_{n+1}=lim\ n/(n+1)=1$.

但對x任何之正值，$|x/(1+x)|<1$，對x任何之負值則大於$-1/2$. 故當$x>-1/2$時，此級為收斂級數。

二項式級數，指數級數及對數級數. 前定 968
理可應用於下三特殊重要冪級數。

1. 指數級數，§990，即

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

對x任何一有限值，皆為收斂級數。

因 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{n!}\div\frac{1}{(n+1)!}=n+1.$$

故 $$lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=lim\ (n+1)=\infty,\text{ 即 }\mu=\infty.$$

2. 對數級數，§992，即

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

當$|x|<1$時為收斂級數，當$|x|>1$時，為發散級數。

因 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\frac{1}{n}\div\frac{1}{n+1}=-\frac{n+1}{n}.$$

故 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=-lim\frac{n+1}{n}=-lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=-1,\text{ 即 }\mu=1.$$

當$x=1$時，為收斂級數，§958，當$x=-1$時，為發散級數，§948.

3. 二項式級數，即

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots,$$

式中 m 非正整數，當 $|x|<1$ 時，此級數爲收斂，當 $|x|>1$ 時此級數爲發散。

因 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$$
$$\div\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots(n+1)}=\frac{n+1}{m-n}.$$

故 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=lim\frac{n+1}{m-n}=-lim\frac{1+1/n}{1-m/n}=-1,\text{ 即 }\mu=1.$$

當 $x=1$ 時，設 $m>-1$，則此級數收斂，設 $m\leqq -1$ 時爲發散，(參考 §1001，例 2).

當 $x=-1$ 時，設 $m>0$ 則此級數收斂，當 $m<0$ 則爲發散。

因當 $x=-1$ 時，使 $m=-a$，則可化此級數爲

$$1+a+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots.$$

顯然由一定項所有項之符號相同，故 §954 之比較法，可以應用，§956.

但因 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a+n-1}{n}=\frac{n+(a-1)}{n}.$$

故，§954，設 $m>0$，$-(a-1)>1$，即設 $-a>0$，或因 $-a=m$，則此級數爲收斂，但設 $-(a-1)<1$ 即設 $m<0$，此級數爲發散。

習題 LXXXVIII

試求下列級數之極限值

1. $1+mx+m^2x^2/2!+m^3x^3/3!+\cdots$.
2. $3(2x)^2+3(2x)^3+2(2x)^4+3(2x)^5+\cdots$.
3. $mx+\dfrac{m(m-2)}{2!}x^2+\dfrac{m(m-2)(m-4)}{3!}x^3+\cdots$.

問 x 爲何實數值，下列級數將爲收斂數?

4. $\dfrac{3x}{x+4}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3x}{x+4}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3x}{x+4}\right)^3+\cdots$.
5. $\dfrac{x}{x^2+1}+\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3+\cdots$.
6. $\cdots(3x)^{-3}+(3x)^{-2}+(3x)^{-1}+1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\cdots$

XXXIII 無限級數之演算

初等定理

當一已知冪級數 $a_0+a_1x+\cdots$ 爲收斂級數，其和爲 x 之定函數，可以 $f(x)$ 表之，寫作 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots$. 當寫作 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots$ 時，須假定 $a_0+a_1x+\cdots$ 有一大於 0 之收斂極限 λ, 且 $|x|<\lambda$. 969

定理1. 已知 $\phi(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots$, 且當 x 爲一正值 b 時，$\phi(x)$ 之各項數值皆小於一定之正數 c. 970

設 δ 爲一取定之任何小之正數，則當 $|x|<b\delta/(c+\delta)$ 時，$|\phi(x)|<\delta$.

因如 § 963 之證明，當 $|x|<b$ 時，

$$|\phi(x)|<c\left|\frac{x}{b}\right|+c\left|\frac{x}{b}\right|^2+\cdots,$$

故 $$<c\left|\frac{x}{b}\right|\frac{1}{1-|x/b|}, \text{即} <\frac{c|x|}{b-|x|}. \qquad \S 704$$

是以 當 $$\frac{c|x|}{b-|x|}<\delta, \quad |\phi(x)|<\delta.$$

即當 $$|x|<\frac{b\delta}{c+\delta}, \qquad |\phi(x)|<\delta.$$

推論. 設 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots$, $\lim\limits_{x\doteq 0} f(x)=a_0=f(0)$. 971

因如前證明，$\lim\limits_{x\doteq 0}(a_1x+a_2x^2+\cdots)=0$, § 200.

定理2. 設級數 $a_0+a_1x+\cdots$ 之 x 使其爲收斂時之任何值代入爲零，則 $a_0=0$, $a_1=0\cdots$ 972

因是 $x=0$ 則立刻求得 $a_0=0$.

故 $$a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=0 \qquad (1)$$

而 x 之值爲使此級數爲收斂級數者。

設x≠0，以x除(1)之全式

則得 $$a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots=0 \qquad (2)$$

而x之值除$x=0$外，皆爲使此級數爲收斂級數者，但由此得$a_1=0$；因$a_1\neq 0$則可選x如此之小，(但不爲0)使$|a_2x+a_3x^2+\cdots|<|a_1|$，§970，而$x$如此所取之值不能適合(3)如適所証明者。

故 $a_1=0$. 同理可以証明$a_2=0,a_3=0$，等等。

對於 $a+bx^{\frac{1}{2}}+cx+dx^{\frac{3}{2}}+\cdots$，此定理亦爲眞確，即對任何級數，其$x$之指數爲正，且彼此互不相同，此定理皆爲眞確；恰所証明之理由，亦可應用此等定理。

前邊對於使 $a_0+a_1x+\cdots$ 爲收歛之各x值，代入此級數內，此級數爲零，其假設比在證明內所需要之假設爲多，由上已証明之理由，証得設$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\cdots$表一無窮之數串，且 $lim\beta_n=0$，且設$a_0+a_1x+\cdots$ 當$x=\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_3,\cdots$ 時爲零，則$a_0=0$，$a_1=0,\cdots$. 在特殊情形之下，$\beta_1,\beta_2,\cdots$，可全爲有理數。

973 **定理3.** 設$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$而$x$之值能使此等級數爲收斂級數，則$x$之同次冪之係數必等值即$a_0=b_0,a_1=b_1,a_2=b_2$，等等。

由此已知方程之兩端，減去第二級數，則由§974，得

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots=0$$

x之值爲使此已知級數收歛者。

故，§972 $a_0-b_0=0,a_1-b_1=0,a_2-b_2=0,\cdots$,

則 $$a_0=b_0,a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots.$$

此定理名爲不定係數定理，故知一已知之x函數，表成一如上形式之x冪級數(與§421比較之)。

冪數之演算

因有許多之x方程，可僅用冪級數表之，故此種級數之計算法則，頗爲重要，於是下之定理，關係甚切，§§974，976，彼將擴充於普通之無窮級數上。

定理1. 設級數$u_1+u_2+\cdots$及$v_1+v_2+\cdots$爲收斂級數，且其和各爲S及T，則級數$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots\cdots$亦爲收斂級數，而和爲$S+T$. 974

因 §203, $lim[(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)]$

$$=lim(u_1+u_2+\cdots+u_n)+lim(v_1+v_2+\cdots+v_n)$$

$$=S+T.$$

若加兩無窮級數之相當有限項，應用上之定理，亦爲眞確，故得一法則，即數個以x之冪級數所表之函數相加，等於其相當項相加，即x之同次項相加。 975

例如，設

$$f(x)=1+x+x^2+\cdots\text{與}\phi(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots,$$

當此已知二級數收斂時，即當$|x|<1$時

則 $$f(x)+\phi(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

設有無限個級數，其和各爲$S, T, \cdots$，若加此等級數之相當項，即當級數$S+T+\cdots$爲收斂時，普通常爲一發散級數，但在下之定理情形中，用此方法所得之級數爲收斂級數，且其和爲$S+T+\cdots$.

定理2. 設$U_1+U_2+\cdots$表一收斂級數，其每項爲一絕對收斂級數之和，即 976

$$U_1=u_1^{(1)}+u_2^{(1)}+\cdots(1),\quad U_2=u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+\cdots(2),\cdots$$

又設 $U_1', U_2', \cdots$ 表諸級數之和，其諸級數爲由(1)及(2)之各項，順次換成其絕對值得之，即

$$U_1' = |u_1^{(1)}| + |u_2^{(1)}| + \cdots,\ U_2' = |u_1^{(2)}| + |u_2^{(2)}| + \cdots.$$

等等。

設此級數 $U_1' + U_2' + \cdots$ 爲收斂級數，則加 (1)(2)$\cdots$ 之相當項所得之若干級數，即級數，$u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots, u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots$，等等，亦爲收斂級數，且令其和以 $V_1, V_2, \cdots$ 表之，則得

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots.$$

因以 $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \cdots$，表諸級數 (1),(2)$\cdots n$ 項以後之各餘式，§ 943，而

$$U_1 = u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \cdots + u_n^{(1)} + R_n^{(1)},$$
$$U_2 = u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_n^{(2)} + R_n^{(2)},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad.$$
$$U_k = u_1^{(k)} + u_2^{(k)} + \cdots + u_n^{(k)} + R_n^{(k)},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad.$$

每一行級數 $u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots, u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots$ 等等，爲收歛級數，因其各項比收歛級數 $U_1' + U_2' + \cdots$ 之相當項爲小，§945, 1. 令此等級數之和，以 $V_1, V_2, \cdots V_n, R_n$ 表之。

設加此 $n+1$ 個行級數之相當項，則得原來級數 $U_1 + U_2 + \cdots$. 因 n 爲有限數，故得，§ 975，

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_k + \cdots = V_1 + V_2 + \cdots + V_n + R_n.$$

故証明此定理，僅証明當 n 爲無限增加時，$\lim R_n = 0$ 即可矣。

但在 $R_n^{(1)} + R_n^{(2)} + \cdots$ 內，設其 k 項以後之和以 $S_n^{(k)}$ 表之，則得 $R_n = R_n^{(1)} + R_n^{(2)} + \cdots + R_n^{(k)} + S_n^{(k)}$.

設以 δ 表任一正數，無論其如何之小；因 $R_n^{(1)} + R_n^{(2)} + \cdots (a)$ 之每項，其數值小於 $U_1' + U_2' + \cdots (b)$ 之相當項，其在 a 內，k 項以後之餘式，其數值小於在 (b) 內之相當餘式。

但因 (b) 爲收斂級數，則可選 k 之值使後一餘式小於 $\delta/2$. 故無論 n 之值爲何，可取 k，其數值爲 $S_n^{(k)} < \delta/2$.

但又因每一列級數 $u_1^{(1)}+u_2^{(1)}+\cdots$, $u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+\cdots$, 爲收斂級數，視 n 之增加，則 k 個餘式 $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \cdots R_n^{(k)}$, 其數值最後變至保持其比 $\delta/2k$ 爲小，故此等餘式之和，即 $R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots+R_n^{(k)}$，將變至保持其比 $(\delta/2k)k$ 或 $\delta/2$ 爲小。

故視 n 之增加，$R_n=R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots+R_n^{(k)}+S_n^{(k)}$ 之數值，將最後變至保持其比 $\delta/2+\delta/2$ 或 δ 爲小。

故 $\lim R_n=0$, § 200; 是以

$$U_1+U_2+U_3+\cdots=V_1+V_2+V_3+\cdots,$$

如前所証明者。

凡級數 $U_1+U_2+\cdots$ 其每項亦自成一無窮級數，名爲二重無窮級數。

例如，設級數

$$x/(1+x)-x^2/(1+x)^2+x^3/(1+x)^3-\cdots \qquad (1)$$

對於 x 大於 $-1/2$ 所有之實值，(對於 x 爲複根其實數部分大於 $-1/2$ 者亦然)爲收斂級數，若將(1)變成 $-x$ 之冪級數，即變成一級數，其對於 x 除 0 所有任何值，皆爲收斂，問其是否可能?

當 $|x|<1$ 時，(1)之各項爲一冪級數之和，而此級數可由二項定理得之，§988. 例如

$$\left.\begin{array}{lllll}
x/(1+x) & = & x(1+x)^{-1} & = & x-x^2+x^3-x^4+\cdots,\\
-x^2/(1+x)^2 & = & -x^2(1+x)^{-2} & = & -x^2+2x^3-3x^4+\cdots,\\
x^3/(1+x)^3 & = & x^3(1+x)^{-3} & = & x^3-2x^4+\cdots,\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right\} \quad (2)$$

第一級數之各項以其絕對值代之，則得 $|x|+|x^2|+|x^3|+\cdots$，其和爲 $|x|/(1-|x|)$.

其餘各級數，亦以同法作之，則得若干之級數，其和為加 $|x^2|/(1-|x|)^2$, $|x^3|/(1-|x|)^3$, 等等。

故定理級數 $U_1'+U_2'+U_3'+\cdots$ 在此處為

$|x|/(1-|x|)+|x^2|/(1-|x|)^2+|x^3|/(1-|x|)^3+\cdots$,

當 $|x|<1/2$ 時，其為收斂級數。

故當 $|x|<1/2$ 時，由加級數(2)之相當項所得之纍級數，則 $x-2x^2+4x^3-8x^4+\cdots$, 為收斂級數，且等於此已知級數(1)，即當 $|x|<1/2$ 時，則得

$$x/(1+x)-x^2/(1+x)^2+x^3/(1+x)^3-\cdots$$
$$=x-2x^2+4x^3-8x^4+\cdots.$$

977　**絕對收斂級數可應用交換律．** 今將証明一絕對收斂級數之各項可以任意排列而不變此級數之和。

1．可排列其各項成一另外之單簡無窮級數。

因設 $u_1+u_2+\cdots$ 表任一絕對收斂級數，且設 $u_1'+u_2'+\cdots$ 表新排列之同一級數。又令 S_n 表(1)內首 n 項之和，S_m' 表(2)內首 m 項之和。

取定 n 之值，則選 m 之值使(1)之首 n 項包含在(2)之首 m 項內；且最後取 p 使(2)之首 m 項，包括在(1)之首 $n+p$ 項內。

則 S'_m-S_n 之各項全在 $S_{n+p}-S_n$ 內，即在和 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$ 內。

故　$|S'_m-S_n|\leqq|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|$.

但因(1)為絕對收斂，$lim(|u_{n+1}|+\cdots+|u_{n+p}|)=0$.

故　$lim|S'_m-S_n|=0$ 即 $limS'_m=limS_n$.

2．可將此級數分成任何（有限或無限）之級數，其每一級數各項次序如與原級數同，因應用§§974, 976中諸定理之一，可由此一族級數返回作成原來之級數。

例如，設取級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 下標為奇數之各項作一級數下標為偶數之各項，另作一級數則由§974，得

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots$$
$$=(u_1+u_3+u_5+\cdots)+(u_2+u_4+u_6+\cdots)$$

或排列 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 之各項如下:

u_1
u_2+u_3
$u_4+u_5+u_6$
$u_7+u_8+u_9+u_{10}$
$\cdots\cdots$

在此種組織內有無限數之行，每行成一無限級數。

$u_1+u_2+u_3+\cdots$ 之和，等於加列所組成之各項之和，§940 且由列所組成之和，等於由行所成之和，§976.

故 $u_1+u_2+u_3+\cdots=(u_1+u_2+u_4+\cdots)+(u_3+u_5+\cdots)+\cdots.$

且同理在各種情形之下亦然。

3. 合併1及2可得

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

所有之可能排列。

冪級數之乘積。 設函數 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 當 $|x|<\lambda$ 時，為 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots(1)$，及 $\phi(x)=b_0+b_1x+\cdots(2)$，其乘積 $f(x)\phi(x)$，當 $|x|<\lambda$ 時，可由(1)及(2)用普通乘法規矩求之，(與§314比較之) 978

例如，

$$\begin{array}{rlllll}
f(x)= & a_0 & +a_1x & +a_2x^2 & +a_3x^3 & +\cdots \quad (1)\\
\phi(x)= & b_0 & +b_1x & +b_2x^2 & +b_3x^3 & +\cdots \quad (2)\\
\hline
f(x)\cdot\phi(x)= & a_0b_0 & +a_1b_0\,|\,x & +a_2b_0\,|\,x^2 & +a_3b_0\,|\,x^3 & +\cdots \quad (3)\\
 & & +a_0b_1 & +a_1b_1 & +a_2b_1 & \\
 & & & +a_0b_2 & +a_1b_2 & \\
 & & & & +a_0b_3 &
\end{array}$$

因當 $|x|<\lambda$ 時，(1)及(2)為收斂，則939,

$f(x)\ \phi(x)=f(x)b_0+f(x)b_1x+f(x)b_2x^2+\cdots.$

此與在§976中所述者為一同類級數，因當 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之各項，以其絕對值代入後永保持其收斂性，故可加 $f(x)b_0=a_0b_0+a_1b_0x+\cdots$，$f(x)b_1x=0+a_0b_1x+\cdots$，等等之相當項，其結果為級數(3).

例， 試表 $(1+x+x^2+\cdots)(1+2x+3x^2+\cdots)$ 成一冪級數。

冪級數之形化。 設當 $(y)<\lambda$ 時，冪級數 $a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots(1)$ 為一收斂級數。 979

又設 y 可以 x 表之而成一冪級數 $y=b_0+b_1x+\cdots(2)$，而 $|b_0|<\lambda$.

由(2)自乘之數次則得諸式 $y, y^2, y^3, \cdots$ 爲 x 之冪級數，當(2)爲收斂時，亦爲收斂．故在(1)之各項 $a_1y, a_2y^2, \cdots$ 內，代入此諸式，則得形式爲 $a_0+a_1(b_0+b_1x+\cdots)+a_2(b_0^2+2b_0b_1x+\cdots)+\cdots$(3)之一級數，且當其 x 之同次項集合後，變成一 x 之冪級數，其形式爲

$$(a_0\cdots+a_1b_0+\cdots)+(a_1b_1+2a_2b_0b_1+\cdots)x+\cdots(4).$$

此最後之級數，對於 x 爲關係 $|b_0|+|b_1x|+\cdots<\lambda$ 之所有値爲收斂級數，且其和與(1)相同。

因在此情形下二重無窮級數(3)適合§976之條件，級數 $U_1'+U_1'+\cdots$ 爲 $|a_0|+|a_1|(|b_0|+|b_1x|\cdots)+\cdots$，其當 $|b_0|+|b_1x|+\cdots<\lambda$ 時，由假設爲收斂級數。

980 **冪級數之商。** 一分數其分子及分母爲冪級數，如

$$(a_0+a_1x+\cdots)/(b_0+b_1x+\cdots),$$

可化成一冪級數，對於 x 之所有値，其値使 $a_0+a_1x+\cdots$ 爲收斂，且使 $|b_1x|+|b_2x^2|+\cdots<|b_0|$ 時，此冪級數爲收斂。

因設 $$y=b_1x+b_2x^2+\cdots \qquad (1)$$

則 $$\frac{1}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}=\frac{1}{b_0+y}=\frac{1}{b_0}\cdot\frac{1}{1+y/b_0}$$
$$=\frac{1}{b_0}\left(1-\frac{y}{b_0}+\frac{y^2}{b_0^2}-\cdots\right), \qquad (2)$$

因由假設及§232，$|y| \leqq |b_1x|+|b_2x^2|+\cdots<|b_0|$.

在(2)內，以 y 之値(1)代入，然後應用§979，則變(2)成一 x 之冪級數，當

$|b_1x|+|b_2x^2|+\cdots<|b_0|$ 時爲收斂級數。

以 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$，乘此冪級數，§978.

此結果亦爲一 x 之冪級數，且對於 x 之所有値，其値使 $a_0+a_1x+\cdots$ 爲收斂級數，且使 $|b_1x|+|b_2x^2|+\cdots<|b_0|$ 時，此冪級數必爲收斂。

用§406所述消去首項之方法，或用§408不定係數之方法，商級數可求至任何所要之項數。

例． 試展開$(1+2x+2^2x^2+\cdots)/(1+x+x^2+\cdots)$至四項。

用係數除法，則得

$$\begin{array}{l|l} 1+2+4+8+\cdots & 1+1+1+1+\cdots \\ \underline{1+1+1+1+\cdots} & 1+1+2+4+\cdots \\ \quad 1+3+7+\cdots & \\ \quad \underline{1+1+1+\cdots} & \\ \qquad 2+6+\cdots & \\ \qquad \underline{2+2+\cdots} & \\ \qquad\quad 4+\cdots & \end{array}$$

故此商級數為

$$1+x+2x^2+4x^3+\cdots$$

當$|x|<1/2$時，其必收斂。

當分子及分母之無窮級數代以x之多項式時，此分數為形式$(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)/(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$，其商級數，對於$x$之數值，此方程$b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n=0$．之根之數值為小之所有值，此級數為收斂級數，由下之第一例題可以顯知之．第二例題証明當$b_0=0$時其商式之形式，第三例題，証明一表此分數為$1/x$之冪級數之方法。 931

例1． 試求展開$(3x+8)/(x^2+5x+6)$所成之級數之收斂極限。

由分項分式分法，§537，則得

$$\frac{3x+8}{x^2+5x+6}=\frac{3x+8}{(x+2)(x+3)}=\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3}.$$

但當$|x|<2$時，

$$\frac{2}{x+2}=\frac{1}{1+x/2}=\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}-\cdots$$

且當$|x|<3$時，

$$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+x/3}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{3}-\frac{x}{3^2}+\frac{x^2}{3^3}-\cdots$$

故當$|x|<2$時，

$$\frac{3x+8}{x^2+5x+6}=\frac{4}{3}-\frac{11x}{18}+\frac{31x^2}{108}-\cdots$$

例2．試以 x 之升冪展開 $(1-x)/(x^2+4x^3)$．

$$\frac{1-x}{x^2+4x^3}=\frac{1}{x^2}\frac{1-x}{1+4x}=\frac{1}{x^2}(1-5x+20x^2-80x^3+\cdots)$$

$$=x^{-2}-5x^{-1}+20-80x+\cdots.$$

例3．試展開 $(2x^2+x-3)/(x^3+2x+4)$ 爲 $1/x$ 之式．

$$\frac{2x^2+x-3}{x^3+2x+4}=\frac{1}{x}\cdot\frac{2+1/x-3/x^2}{1+2/x+4/x^3}=\frac{1}{x}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\cdots.$$

982　**反級數** 由方程以 x 表 y 之式 $y=a_1x+a_2x^2+\cdots$ 可引出他一以 y 表 x 之式 $x=b_1y+b_2y^2+\cdots$．此所求之級數名爲已知級數 $a_1x+a_2x^2+\cdots$ 之反級數，應注意者，此級數缺常數項 a_0，且 $a_1\neq0$．可證知者，設 $a_1x+a_2x^2+\cdots$ 有大於 0 之斂級極限，則其反級數 $b_1y+b_2y^2+\cdots$ 亦有一大於 0 之收斂極限．

例．求級數 $y=x+2x^2+3x^3+\cdots$ 之反級數．

設　　$x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\cdots$．　　(1)

用§978之方法，由此已知方程計算 $y^2,y^3\cdots$ 之值，且代此結果於(1)內，則得

$$x=b_1x+\left.\begin{array}{l}2b_1\\+\ b_2\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}3b_1\\+4b_2\\+\ b_3\end{array}\right|x^3+\cdots\qquad(2)$$

等其係數，$1=b_1,0=2b_1+b_2,0=3b_1+4b_2+b_3,\cdots$

故　　$b_1=1,b_2=-2,b_3=5,\cdots$

是以　　$x=y-2y^2+5y^3+\cdots$．　　(3)

用同法，由形式 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 或 $y-a_0=a_1x+a_2x^2+\cdots$ 之方程，可求出形式爲 $x=b(y-a_0)+b_2(y-a_0)^2+\cdots$ 之另一方程，且由形式爲 $y=a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ 之方程，可求出形式爲 $x=b_1y^{\frac{1}{2}}+b_2y+b_3y^{\frac{3}{2}}+\cdots$ 之另外二方程．

983　**代數函數之展開式．**一形式爲 $f(x,y)=0$ 之代數方程其缺常數項，且當 $x=0$ 時 $y=0$．故設 $f(x,y)=0$，解之

得以 x 表 y 之式，其解答之一個或若干個必定當 x 爲零時亦於零。且可証明此等式可展成一 x 之升冪級數，且有一大于 0 之收斂極限，在普通情形下，此等級數可用証明下列例題之方法，得到任意所求之項數。

例1. 方程 $y^2+y-2x=0$ 缺常數項，試求當 $x=0$ 時，y 之值爲零之展開式。

當 $x=0$ 時，方程

$$y^2+y-2x=0. \tag{1}$$

變爲 $y^2+y=0$, 因此方程有一根且僅有一根爲 0, 故當 x 爲零時，(1) 之解答，即 x 之函數，y 有一且僅有一爲零。

設當此解答展開成一 x 之升次冪級數時，其首項爲 ax^μ，則

$$y=ax^\mu+. \tag{2}$$

代 (2) 於 (1) 內，則得

$$a^2x^{2\mu}+\cdots+ax^\mu+\cdots-2x=0. \tag{3}$$

因由假設(3)爲恒等式，其同次項之係數之和爲 0, 故最小最低次項有二項之和爲零，因 μ 爲正，此二項必爲 ax^μ 及 $-2x$; 故 $\mu=1$ 及 $a-2=0$, 或 $a=2$.

故假設

$$y=2x+bx^2+cx^3+\cdots. \tag{2'}$$

代 (2′)於(1)內，則得$(4+b)x^2+(4b+c)x^3+\cdots=0$.

故 $4+b=0$, $4b+c=0$, $\cdots$, 是以 $b=-4$, $c=16$, $\cdots$.

因此所求之解答，爲 $y=2x-4x^2+16x^3+\cdots$

例2. 試求以 x 之次表 y 之展開式，適合 $y^3-xy+x^2=0$, 且當 $x=0$ 時 y 爲 0.

當 $x=0$ 時，方程

$$y^3-xy+x^2=0 \tag{1}$$

變爲 $y^3=0$, 其三根皆爲 0,故可希望求得三個此類所求之展開式。

設 ax^μ 表在一展開式內之首項，則

$$y=ax^\mu+\cdots \tag{2}$$

代 (2) 於 (1) 內，則得

$$a^3x^{3\mu}+\cdots-ax^{\mu+1}+\cdots+x^2=0. \tag{3}$$

按例 1 之理由，則知最少指數 3μ, $\mu+1$ 及 2,有二相等者，且比 (3)內 μ 之任一他係數爲小，$3\mu=\mu+1$, 則求得 $\mu=1/2$. 此爲 μ 之可能值。

因設當$\mu=1/2$時，3μ及$\mu+1$皆小於2.

設令$\mu+1=2$則求得$\mu=1$，此亦爲μ之可能値，因當$u=1$時，$u+1$及2皆小於$3u$.

設令$3\mu=2$，則求得$\mu=2/3$，但此μ値不可能，因當$\mu=2/3$時，3μ及2大于$\mu+1$也。

故μ之値必爲1或1/2二者之一。

當$\mu=1$時，(3)變爲$a^3x^3\cdots-ax^2+\cdots+x^2=0$由此則得$-a+1=0$或$a=1$.

當$\mu=1/2$時，(3)變爲$a^3x^{\frac{3}{2}}+\cdots-ax^{\frac{3}{2}}+\cdots+x^2=0$由此則得$a^3-a=0$，或因$a\neq0$則$a=\pm1$.

故可假定所求之解答爲$y=x+bx^2+cx^3+\cdots$，$y=x^{\frac{1}{2}}+bx+cx^{\frac{3}{2}}+,\cdots$，$y=-x^{\frac{1}{2}}+bx+cx^{\frac{3}{2}}+\cdots$.

且代此y式於(1)內，且如例1定出各係數，則得

$$y=x+x^2+3x^3+\cdots,\ y=x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}-\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8}+\cdots,$$

$$y=-x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}+\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8}+\cdots.$$

在此方法內，假定設所求之展開式其項爲$ax^{\frac{p}{q}}$，此展開式將爲$x^{\frac{p}{q}}$之羃級數。在特殊情形下，則不眞確，此法不能用，但下之法甚爲普通，如例題內，已求得一展開式之首項爲ax^{μ}，使$y=x^{\mu}(a+v)$代入已知方程內，則其變爲v及x之方程，由此方程求得以x表v之展開式，等等*。

例如，在2內，使$y=x^{\frac{1}{2}}(1+v)$代入

$$y^3-xy+x^2=0 \qquad (1)$$

化簡，則得

$$v^3+3v^2+2v+x^{\frac{1}{2}}=0; \qquad (2)$$

故　$v=-x^{\frac{1}{2}}/2+\cdots$，是以$y=x^{\frac{1}{2}}(-x^{\frac{1}{2}}/2+\cdots)=x^{\frac{1}{2}}-x/2+\cdots$. 欲求次一項，代$v=x^{\frac{1}{2}}(-1/2+v')$於(2)內，餘類推。

---

*關於此節方法較完全之討論及關於牛頓氏之平行四邊形之用法，可參看 *Chrystal's Algebra* II, *pp*, 349-371；又 *Frost's Curve Tracing* 及 *Johnson's Curve Tracing*,

太勒兒氏定理. 設當 $|x|<\lambda$ 時，$f(x)=a_0+a_1x$ 984
$+a_2x^2+\cdots$，以 $x+h$ 代 x，則得

$$f(x+h)=a_0+a_1(x+h)+a_2(x+h)^2+\cdots.$$

由 § 976 則知當 $|x|+|h|<\lambda$ 時，用二項定理，展開 $(a+h)^2, (a+h)^3, \cdots$ 可變此級數成一 h 之冪級數，然後再集合 h 之同次項，由在 § 848 內所用之方法，可證明此結果為

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\cdot\frac{h^n}{n!}+\cdots,$$

而 $f'(x), f''(x), \cdots$ 表此級數之和，其各項為已知級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 各項之第一，第二 $\cdots$ 導來式，即

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots,$$
$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots,$$

設在前恆等式內，以 a 代 x，以 $x-a$ 代 h，而 $|a|+|x-a|$ 985
$<\lambda$，則得以 $x-a$ 表 $f(x)$ 之展開式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+\cdots.$$

由此最後展開式及 § 971，則知設當 $|x|<\lambda$ 時，$f(x)=a_0$ 986
$+a_1x+\cdots$，且設 $|a|<\lambda$，則

$$\lim_{x \doteq a} f(x)=f(a).$$

習題 LXXXIX

1. 求証 $(1+x+x^2+\cdots)^2=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$.
2. 求証 $(1+x+x^2+\cdots)^3=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$.
3. 求証 $(1+x^2+x^4+\cdots)/(1+x+x^2+\cdots)=1-x+x^2\cdots$.
4. 假定 $(1-x+2x^2)^{\frac{1}{2}}=1+a_1x+a_2x^2+\cdots$，平方此已知方程及應用 § 973，求 a_1, a_2, a_3, a_4.

5. 試用同法，求下展開式之首四項。

(1) $(8-3x)^{\frac{1}{3}}$.　　(2) $(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}$.

6. 試用§980內例題之方法，展開下之分數式爲 x 之降冪排列而至第四項。

(1) $\dfrac{2+x-3x^2+5x^3}{1+2x+3x^2}$.　　(2) $\dfrac{x+5x^2-x^3}{1-x+x^2-x^3}$.

7. 試用不定係數之方法，展開下之分數式爲 x 之降冪排列而至第四項。

(1) $\dfrac{2x^2+x^3}{1+x+x^2}$.　　(2) $\dfrac{x+5x^4}{x^3+2x^4+3x^5}$.

8. 試用981例1之方法，展開下各分數至第五項，並示出展開式之收斂極限。

(1) $\dfrac{9x-22}{(x^2-4)(x-3)}$.　　(2) $\dfrac{5x+6}{(2x+3)(x+1)^2}$.

9. 試展開下列各分數爲 x 之降冪排列至第四項，問 x 爲何值，第一展開式爲收斂級數?

(1) $\dfrac{2x+3}{2x^2+x-15}$.　　(2) $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$.

10. 試求下列級數之反級數至第四位：

(1) $y=x+x^2+x^3+x^4\cdots$.　(2) $y=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$.

11. 試由 $y=1+x+x^2/2+x^3/3+\cdots$ 求出一以 $y-1$ 表 x 之級數式至四項。

12. 試由 $y=x^2+3x^3$ 求出一以 $y^{\frac{1}{2}}$ 表 x 之級數至第四項。

13. 試用§983之方法，求以 x 表 y 值之展開式之首三項，適合下列之方程。且當 $x=0$ 時其爲零。

(1) $x^2+y^2+y-3x=0$.　　(2) $x^3+y^3-xy=0$.

14. 試用§976定理之助，証明

$$\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}$$
$$+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\cdots$$

XXXIV. 二項式級數指數級數及對數級數

二項式級數.　當 m 爲一正整數時， 987

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots \tag{1}$$

爲一有限級數，且其和爲 $(1+x)^m$.

當 m 不爲一正整數時，(1) 爲一無窮級數，但當 $|x|<1$ 時，其得收斂，即有一和數，§ 968. 將要証明者，爲設 m 爲任何有理數，其和爲 $(1+x)^m$.

級數(1)爲一 x 及 m 之函數，但因將討論 m 之關係，故以 $\phi(m)$ 表之。

爲便利起見，令 m_r 表在 (1) x^r 之係數，使 $m_r=m(m-1)\cdots(m-r+1)/r!$。

則設 m 及 n 表任二數，則得

$$\phi(m)=1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots. \tag{2}$$

$$\phi(n)=1+n_1x+n_2x^2+n_3x^3+\cdots. \tag{3}$$

$$\phi(m+n)=1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+\cdots \tag{4}$$

$\phi(m)\cdot\phi(n)=\phi(m+n)$ 可証明爲確。

因當 $|x|<1$ 時，而(2)及(3)爲收斂級數，則得

$$\phi(m)\cdot\phi(n)=1+\left.\begin{array}{l}m_1\\+n_1\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{l}m_2\\+m_1n_1\\+n_2\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}m_3\\+m_2n_1\\+m_1n_2\\+n_3\end{array}\right|x^3+\cdots. \tag{5}$$

但在 §§ 773, 774 內，証得

$$m_1+n_1=(m+n)_1,\ m_2+m_1n_1+n_2=(m+n)_2,\cdots,$$

$$m_r+m_{r-1}n_1+\cdots+m_1n_{r-1}+n_r=(m+n)_r.$$

故 $\phi(m)\cdot\phi(n)$

$$=1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+(m+n)_3x^3+\cdots$$

$$=\phi(m+n). \tag{6}$$

重復應用 (6)，則得

$$\phi(m)\cdot\phi(n)\phi(p)=\phi(m+n)\cdot\phi(p)=\phi(m+n+p),$$

等等。對於 $\phi(m)$, $\phi(n)$, $\phi(p)$, $\phi(q)\cdots$, 有限數之因子皆可應用。

今將証明對於指數 m 爲任何有理值之二項定理，即

988 **定理.** 設 m 爲任何有理數，此級數

$$\phi(m)=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots,$$

當 $|x|<1$ 時，其和爲 $(1+x)^m$.

第一注意者，當 $m=0$, 此級數爲1, 且當 $m=1$ 時，此級數爲 $1+x$.

$$故\ \phi(0)=1\ 及\ \phi(1)=1+x. \qquad (1)$$

1. 設 m 爲一正整數。

$$\begin{aligned}則\qquad \phi(m)&=\phi(1+1+\cdots至\ m\ 項)\\&=\phi(1)\cdot\phi(1)\cdots至\ m\ 個因子\\&=\{\phi(1)\}^m=(1+x)^m, 由\ (1). \qquad (2)\end{aligned}$$

彼証明對於正整指數之定理。

2. 設 m 爲任一正有理分數 p/q.

$$\begin{aligned}則\qquad [\phi(p/q)]^q&=\phi(p/q)\cdot\phi(p/q)\cdots至\ q\ 因子\\&=\phi(p/q+p/q+\cdots至\ q\ 項)\\&=\phi(p)=(1+x)^p, 由(2).\end{aligned}$$

$$故\qquad \phi(p/q)=(1+x)^{\frac{p}{q}} \qquad (3)$$

因由方程 $\{\phi(p/q)\}^q=(1+x)^p$ 及 §986, 則知對於 $|x|<1$ 所有之 x 值，$\phi(p/q)$ 之所有值必爲 $(1+x)^p$ 之相同之 q 次值之相當值。

又此根必爲主 q 次根，則 $(1+x)^{\frac{p}{q}}$；因此爲當 $x=0$ 時，$\phi(p/q)$ 有同值之 $(1+x)^p$, q 次根之惟一根。

3. 設 m 爲任一負有理數 $s-$.

因 $\phi(-s)\cdot\phi(s)=\phi(-s+s)=\phi(0)=1$, 由 (1)

則 $\phi(-s)=1/\phi(s)=1/(1+x)^s$ 由 (3)

$$=(1+x)^{-s}, \qquad (4)$$

故証明對於任何有理分數之定理。

上之証明亦不難推廣至無理指數值。

例。 試展開 $(1+2x+3x^2)^{\frac{1}{3}}$ 爲 x 之降冪。

則得 $(1+2x+3x^2)^{\frac{1}{3}}=(1+(2x+3x^2))^{\frac{1}{3}}$

$$=1+\tfrac{1}{3}\cdot(2x+3x^2)+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2}(2x+3x^2)^2$$

$$+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{2\cdot3}(2x+3x^2)^3+\cdots$$

$$=1+\frac{2x}{3}+\frac{5x^2}{9}-\frac{68x^3}{81}\cdots$$

當 $2|x|+3|x^2|<1$ 時，此展開式爲收斂。

故 $9|x^2|+6|x|+1<4$ 時，

故 $3|x|+1<2$ 時，

故 $|x|<1/3$ 時。

推論。 設 m 爲有理數，且 $|x|<|a|$，則得 989

$$(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}a^{m-2}x^2+\cdots$$

因 $(a+x)^m=a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$

$$=a^m\left[1+m\frac{x}{a}+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}\frac{x^2}{a^2}+\cdots\right] \qquad (1)$$

$$=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}a^{m-2}x^2+\cdots, \qquad (2)$$

設 $|x/a|<1$，或 $|x|<|a|$，則式中(1)爲收斂，故(2)爲收斂。

990 **指數級數。** 已証明此級數

$$1+x/1+x^2/2!+x^3/3!+\cdots+x^n/n!+\cdots \qquad (1)$$

對於 x 所有之有限值爲收歛級數， § 968.

設當 $x=1$ 時，以 e 表其和，則

$$e=1+1+1/2!+1/3!+\cdots=2.71828\cdots.$$

將要証明者爲對於 x 任何實數值，(1)之和爲 e^x.

因令 $f(x)$ 表 (1) 之和，則

$$f(x)=1+x/1+x^2/2!+x^3/3!+\cdots+x^n/n!+\cdots,$$

$$f(y)=1+y/1+y^2/2!+y^3/3!+\cdots+y^n/n!+\cdots,$$

則由無窮級數相乘之規則， § 978,

$$f(x)\cdot f(y)=1+(x+y)+\left(\frac{x^2}{2!}+xy+\frac{y^2}{2!}\right)$$

$$+\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x}{1}\cdot\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}\right)+\cdots$$

$$=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+\cdots$$

$$=f(x+y).$$

由此結果，又得

$$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)=f(x+y)\cdot f(z)=f(x+y+z),$$

故 $f(0)=1$ 及 $f(1)=e$ 可如在 § 988 內，連續詳細証明，

1、 當 x 爲一正整數 m 時。

$$f(m)=[f(1)]^m=e^m.$$

2、 當 x 爲一正整數 p/q 時，

$$f(p/q)=\sqrt[q]{[f(1)]^p}=\sqrt[q]{e^p}=e^{\frac{p}{q}}.$$

3、 當 x 爲一負有理數 $-s$ 時，

$$f(-s)=1/f(s)=1/e^s=e^{-s}$$

故當 x 爲有理數時，則得 $f(x)=e^x$，即

$$e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots+x^n/n!+\cdots. \qquad (2)$$

又 (2) 對于 x 指數爲無理數時，亦爲眞，因設 b 表任一已知無理數，且使 x 經過一有理數串漸近於 b，而以 b 爲極限，對於 x 所有之有理數值，則 $f(x)=e^x$ 故，$\lim\limits_{x \doteq b} f(x)=\lim\limits_{x \doteq b} e^x$。

但 $\lim\limits_{x \doteq b} f(x)=f(b)$，§ 986，且 $\lim\limits_{x \doteq b} e^x=e^b$，§ 728，故 $f(b)=e^b$，即 $1+b+b^2/2!+\cdots=e^b$.

當 x 爲複數，(2) 之第二端亦爲一收斂級數，即有一和，故對於指數 x 爲複數值時，(2) 可用以定 e^x 之值。例如，由定義

$$e^i=1+i+i^2/2!+i^3/3!+\cdots+i^n/n!+\cdots.$$

a^x 之級數。　設 a 表任一正數，而 x 表任一實數，991

因 $a=e^{\log_e a}$，§ 732，則得 $a^x=e^{x\log_e a}$，§ 730，

故以 $x\,log_e\,a$ 代 x 于此級數內；§ 990，(2)，則得

$$a^x=1+x\,log_e a+x^2(log_e a)^2/2!+\cdots+x^n(log_e a)^n/n!+\cdots.$$

如在 § 968，1，可証明，此級數對於 x 所有之有限值爲收斂。

對數級數。　設在前所得之 a^x 之級數內，以 $1+x$ 代 a，以 y 代 x，則得 992

$$(1+x)^y=1+log_e(1+x)\cdot y+[log_e(1+x)]^2y^2/2!+\cdots \quad (1)$$

但由二項式定理，§ 988，當 $|x|<1$ 時，

$$(1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots. \quad (2)$$

相乘之後，集合各項，則可變(2)爲一 y 之級數。

在此級數內，y 之係數爲

$$+\frac{(-1)x^2}{1\cdot 2}+\frac{(-1)(-2)x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots，或\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots.$$

使其與(1)內 y 之係數等置之，設 $|x|<1$，則得

$$log_e(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+\cdots. \tag{3}$$

此級數名爲對數級數. 在 § 968 內，已証明，當 $|x|<1$ 時，此級數爲收斂級數。

在前証明內，假定級數(2)在其已變爲 y 之級數後，永等於 $(1+x)^y$. 但由 § 976，當 $|x|<1$ 時，亦可得之。因設 x' 及 y' 順次表 $|x|$ 及 $|y|$，此級數 $U_1'+U_2'+\cdots$，§976 相當(2)，爲

$$1+y'x'+\frac{y'(y'+1)}{1\cdot2}x'^2+\frac{y'(y'+1)(y'+2)}{1\cdot2\cdot3}x'^3+\cdots,$$

且此級數當 $x'<1$ 時爲收斂，其和爲 $(1-x')^{-y'}$，§ 988.

因已証明僅當指數之值爲有理數時，二項式定理爲真確，其應注意者，當 y 限值爲有理數值時，由(1)及(2)可得(3)(參考 § 972 最末之注意)。

例。 求証 $\lim\limits_{n\doteq\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

因 $log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=n\,log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\cdots\right)$

$$=1-\frac{1}{2n}+\cdots.$$

故 $\lim\limits_{n\doteq\infty} log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$，所以 $\lim\limits_{n\doteq\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^1=e$.

因 $lim\, u=lim\, e^{log_e u}=e^{lim(log_e u)}$，§ § 726–729, 731.

993 **自然對數之計算.** 凡數其對於底數爲 e 之對數，名爲自然對數其表可計算如下：

$$\text{因 } log_e(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+\cdots, \tag{1}$$

$$\text{故 } log_e(1-x)=-x-x^2/2-x^3/3-x^4/4-\cdots. \tag{2}$$

由(1)減(2)因

$$log_e(1+x)-log_e(1-x)=log_e\frac{1+x}{1-x},$$

則得 $$log_e\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right). \tag{3}$$

在(3)內，使 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$，則 $x=\frac{1}{2n+1}$。

故得

$$log_e\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots,\right),$$

或 $log_e(n+1)$

$$=log_e n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right).\quad(4)$$

在(4)內使 $n=1$,

$log_e 2=2(1/3+1/3^4+1/5\cdot 3^5+\cdots)=.6931\cdots.$

在(4)內使 $n=2$,

$log_e 3=log_e 2+2(1/5+1/3\cdot 5^3+\cdots)=1.0986\cdots,$

餘類推，以至 n 之任何整數值。

模數。 由§755, $log_a n=log_e n/log_e a$, 故數對於底 994
數為 a 之對數，可以 $1/log_e a$ 乘其自然對數而得。故名 $1/log_e a$ 或其等值，§756, $log_a e$ 日底數為 a 之對數族之模數。狹言之，在常用對數族之模數為 $log_{10}e=.43429\cdots$。

習　題　XC

1. 試計算 $log_e 4$ 及 $log_e 5$ 至第四位小數。
2. 求証 $e^{-1}=2/3!+4/5!+6/7!+\cdots$.
3. 試用乘法，証明
$$\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)=1.$$
4. 求証 $(e^{ix}+e^{-ix})/2=1-x^2/2!+x^4/4!-x^6/6!+\cdots$
5. 求証 $(e^{ix}-e^{-ix})/2i=x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+\cdots$
6. 試用二項式定理，証明 $(1-x)^{-n}$ 展開式之第 $(r+1)$ 項為 $\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}x^r$.
7. 試在 $(8+x)^{\frac{2}{3}}$ 之展開式內，求含 x^4 之項。
8. 試在 $(1-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ 之展開式內，求含 x^3 之項。

9. 問x為何值，而$(9-4x^2)^{\frac{1}{2}}$及$(12+x+x^2)^{\frac{2}{3}}$其在x降冪展開式內為收斂。

10. 試展開$(1-x+2x^3)^{\frac{3}{4}}$為x之式至含x^4之項為止。

11. 試求$(8+3x)^{\frac{2}{3}}(9-2x)^{-\frac{1}{2}}$為$x$之展開式內之前三項問$x$為何值，此展開式將為收斂?

12. 試求下列級數之極限值。

(1) $\lim\limits_{n\doteq\infty}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{3x}$. (2) $\lim\limits_{n\doteq 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-(1+4x)^{\frac{1}{4}}}$.

13. 求證$\lim\limits_{n\doteq\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{nx}=e^x$.

14. 求證$\lim\limits_{n\doteq 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e^2$.

15. 試展開$\log_e(1+x+x^2)$至含x^4之項。問x為何值，此展開式為收斂?

16. 求證 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{m-n}{n}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m-n}{n}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{m-n}{n}\right)^3-\cdots$.

17. 求證$\dfrac{n^2}{n^2-1}=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{2n^4}+\dfrac{1}{3n^6}+\cdots$.

18. 求證

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n-1)^3}+\cdots=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots.$$

XXXV. 循環級數

995 **循環級數.** 凡級數$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$其每$r+1$個連續係數之關係為一恆等式

$$a_n+p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}+\cdots+p_ra_{n-r}=0,$$

式中$p_1, p_2, \cdots, p_r$為對於n之所有值之常數，此級數名為r次之循環級數。而此恆等式名為此級數之關係式。

例如，在$1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n+1)x^n+\cdots$. (1)
內，其每三連續係數之關係以式

$$a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0; \tag{2}$$

表之，因

$5-2\cdot3+1=0, 7-2\cdot5+3=0, 2n+1-2(2n-1)+2n-3=0.$

故(1)爲二次之循環級數，其關係式爲(2).

幾何級數爲一次之循環級數。

凡爲眞分數之展開式所得之冪級數，其分母爲 r 次，則此級數必爲 r 次之循環級數。 996

例如，設

$$\frac{2+x}{1+2x+3x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \quad (1)$$

則
$$2+x=a_0+\left.\begin{matrix}a_1\\+2a_0\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}a_2\\+2a_1\\+3a_0\end{matrix}\right|x^2+\cdots+\left.\begin{matrix}a_n\\+2a_{n-1}\\+3a_{n-2}\end{matrix}\right|x^n+\cdots$$

是以　$a_0=2,\ a_1+2a_0=1,\ a_2+2a_1+3a_0=0,$

故普通爲　$a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}=0.$　(2)

故(1)爲二次之循環級數，其關係式爲(2).

設一冪級數之前幾項爲已知，則常能求得關係式，而能爲此數項所適合，由此關係式之助，則可繼續按其循環級數，求至所求之項數。 997

例。　已知 $1+4x+7x^2+10x^3+13x^4+\cdots$，試求一關係式而爲此數項所適合，且再求其次二項。

因 $1+4x+7x^2+\cdots$ 非一幾何級數，先試經二次關係式 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$.

設所有之諸已知項適合此關係式，則必

$7+4p+q=0,\ 10+7p+4q=0,\ 13+10p+7q=0.$

解首二方程，則 $p=-2,\ q=1.$

而此數值適合第三方程，因 $13-10\cdot2+7=0.$

故所求之關係式爲 $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0.$

故可求得所求之係數 a_5a_6 如下：

$a_5-2\cdot13+10=0,\ \therefore a_5=16;\ a_6-2\cdot16+13=0,\ \therefore a_6=19.$

設此已知之各項爲 $1+4x+7x^2+10x^3+14x^4$，則其必不適合形式如 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$ 之關係式，但可假定第六項爲 ax^5 且求一三次之關係式 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$，而此式必能爲此六項所適合，即解此方程之 p,q,r，

$10+7p+4q+r=0,\qquad 14+10p+7q+4r=0,$

$a+14p+10q+7r=0.$

由此例，則知普通當 $2r$ 項爲已知，此級數可有一法求其餘之項爲一 r 次之循環級數。當 $2r+1$ 項爲已知，則可有無限之法求其餘之項爲一 $r+1$ 次之循環級數。

998 **循環羃級數之母函數.** 凡一 r 次之循環羃級數，爲一分母爲 r 次之眞分數之展開式，(與 § 996 比較之). 此分數名爲此級數之母函數，當此級數爲收斂級數時，則此母函數爲此級數之和。

例如，設 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ (1)

爲一二次之循環級數，其關係式爲

$$a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0. \tag{2}$$

使 $S_n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$

$$\begin{aligned}
\therefore px\,S_n&=\quad pa_0x+pa_1x^2+\cdots+pa_{n-2}x^{n-1}+pa_{n-1}x^n\\
\therefore qx^2S_n&=\quad qa_0x^2+\cdots+qa_{n-3}x^{n-1}+qa_{n-2}x^n+qa_{n-1}x^{n+1}\\
\hline
\therefore(1+px+qx^2)S_n&=a_0+(a_1+pa_0)x\quad+(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n\quad+qa_{n-1}x^{n+1},
\end{aligned}$$

其右端之其餘諸項悉消去，因 (2) 故也。

當 (1) 爲收斂時，視 n 之增加，S_n 將漸近於 S 即 (1) 之和，亦即極限，且 x^n 將漸近於 0.

故 $(1+px+qx^2)S=a_0+(a_1+pa_0)x$,

即 $$S=\frac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}. \tag{3}$$

999 **循環羃級數之公項.** 當母函數爲已知時，可用下題之証明方法，得此公項。

例. 試求關係式爲 $a_n-a_{n-1}-2a_{n-2}=0$ 及其首二項爲 $5+4x$ 之循環級數之母函數及其公項。

因 $p=-1, q=-2, a_0=5, a_1=4$.

故由 § 998, (3), $S=\dfrac{5-x}{1-x-2x^2}=\dfrac{5-x}{(1+x)(1-2x)}$. (1)

將(1)分爲分項分式，§537，

$$\frac{5-x}{(1+x)(1-2x)}=\frac{2}{1+x}+\frac{3}{1-2x}=2(1+x)^{-1}+3(1-2x)^{-1}.$$

但設$|x|<1, 2(1+x)^{-1}=2[1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots]$.

且設$|x|<1/2$,

$$3(1-2x)^{-1}=3[1+2x+4x^2+\cdots+2^n x^n+\cdots].$$

故公項爲　$[(-1)^n 2+3\cdot 2^n]x^n$.

習　題　XCI

1.　設三次循環級數之首三項爲 $2-3x+5x^2$ 而其關係式爲 $a_n+2a_{n-1}-a_{n-2}+3a_{n-3}=0$, 試求其第四及第五項.

2.　試求下列各式之關係式及二次項.

(1) $1+3x+2x^2-x^3-3x^4+\cdots$.

(2) $2-5x+4x^2+7x^3-26x^4+\cdots$.

(3) $1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-21x^5+\cdots$.

3.　試求下列各式之母函數及其公項.

(1) $2+x+5x^2+7x^3+17x^4+\cdots$.

(2) $3+7x+17x^2+43x^3+113x^4+\cdots$.

4.　求証在一三次之循環級數 $a_0+a_1x+\cdots$內，若其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$, 其母函數爲

$$\frac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2}{1+px+qx^2-rx^3}.$$

5.　試用前公式之協助求級數

$$1+2x+11x^2+24x^3+85x^4+238x^5+\cdots$$

之母函數及公項.

6.　求証 $a+(a+d)x+(a+2d)x^2+(a+3d)x^3+\cdots$ 爲一二次之循環級數，且求其母函數.

7.　求証 $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots$ 爲一三次之循環級數，其母函數爲 $(1+x)/(1-x)^3$.

8.　求証 $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+4\cdot 5x^3+\cdots$ 爲一三次之循環級數，設其爲收斂級數時，試求其和.

XXXVI. 無窮連續乘積

1000　**無窮連續乘積．** 此名稱之意義，可以下式

$$\Pi(1+a_r)=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_r)\cdots,$$

表之，而其因子之數目爲無限多。

此等乘積，爲收斂或發散，視 n 之增大；$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 漸近或不漸近一定極限而定。

1001　**定理．** 設所有之數 a_r 爲正，此無窮項之乘積 $\Pi(1+a_r)$ 爲收斂或發散，按無窮級數 Σa_r 爲收斂或發散而定。

第一，假定 Σa_r 爲收斂級數而其和爲 S.

則當 x 爲正時，因 $1+x<e^x$ § 990,

而得　$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)<e^{a_1}\cdot e^{a_2}\cdots e^{a_n}$,

即　　$<e^{a_1+a_2+\cdots+a_n}<e^S$.

故視 n 之增加，$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 亦增加，但永比定數 e^S 爲小。其漸近一極限，§ 192. 即 $\Pi(1+a_r)$ 爲收斂。

第二，假定 Σa_r 爲發散級數。

在此情形下，$lim(a_1+a_2+\cdots a_n)=\infty$.

但 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

故　$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=\infty$,

即 $\Pi(1+a_r)$ 爲發散。

例如，　$\Pi(1+1/n^p)$，當 $p>1$ 時，爲收斂．當 $p\leqq 1$ 時，爲發散。

例1．設 Σa_r 爲一發散正級數，其各項皆比 1 爲小，求証 $\Pi(1-a_r)=0$.

因　$a_r<1$ 且 $1-a_r^2<1$，則 $1-a_r<1/(1+a_r)$

故　$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)<1/(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$.

且　　$lim(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=\infty$.

是以　$\Pi(1-a_r)=lim(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)=0$,

例2. 求証當 $x=1$ 時，$m+1>0$ 此二項式級數，§ 987，為收歛；但 $m+1<0$ 為發散。

當 $x=1$ 時：此二項級數變為

$$1+m+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdots n}+\cdots(1)$$

在此級數　　(2)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{m-n+1}{n}=-1+\frac{m+1}{n}.$$

故設 $m+1<0$，則得 $|u_{n+1}/u_n|>1$，而(1)為收歛級數，§ 951.

但設 $m+1>0$ 在數項後，此級數為 § 958 內同類之級數，故收歛。

但設 r 表大於 $m+1$ 之第一整數，由 (2) 則得當 $n>r$ 時，u_{n+1}/u_n 為負，而其數值小於 1，故 (1) 在 u_r 項後，其各項正負相間且其數值漸減小，故設 $lim\, u_n=0$，(1) 為收歛級數。

但 $u_{n+1}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}.$

$$=(-1)^n\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right),$$

由例1，則知視 n 之增大，右之乘積漸近於 0 而以 0 為極限。

習 題 XCII

1. 求証 $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{17}{16}\cdots$ 及 $\frac{5}{4}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{26}{25}\cdots$ 為收歛。

2. 問 x 為何值，下列無窮連續乘積為收歛？

(1) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{n^2}\right)=\left(1+\frac{x}{1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{x^3}{3^2}\right)\cdots.$

(2) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{n!}\right)=\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x^3}{3!}\right)\cdots.$

(3) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)=\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\left(1+\frac{x^3}{27}\right)\cdots.$

3. 求証 $lim\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}=\infty$ 或 0 按 $a>b$ 或 $a<b$ 而定。

XXXVII. 連分數

1002　**連分數.**　此名之意義，可以式

$a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cdots}}$　表之，普通寫作 $a+\frac{b}{c+}\frac{d}{e+}\cdots$

將來討論者，僅爲簡單連分數。其形式爲 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots$ 式中 a_1 爲正整數，或 0，且 $a_2, a_3, \cdots$ 爲諸正整數。

此諸數 $a_1, a_2, \cdots$ 名爲此連分數之第一第二…偏分商。

按此等商爲有限值或無限值，此分數爲有限或無限。

1003　**有限分數.**　須知凡有限簡單連分數，有一正有理值。因其可化爲簡單分數也。

例如，$2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4}=2+\frac{4}{13}=\frac{30}{13}$；$\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4}=\frac{13}{30}$.

反言之，凡正有理數可變成一有限簡單連分數，看下例頗爲明瞭。

例.　試變 67/29 爲一連分數。

應用求二整數 67 及 29 之最大公因數法，則得

$$
\begin{array}{l}
29)67(2=a_1\\
\quad\underline{58}\\
\quad\ 9)29(3=a_2\\
\qquad\underline{27}\\
\qquad\ 2)9(4=a_3\\
\qquad\quad\underline{8}\\
\qquad\quad 1)2(2=a_4\\
\qquad\qquad\underline{2}\\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$\therefore \frac{67}{29}=2+\frac{9}{29}=2+\frac{1}{29/9}. \quad (1)$$

$$\therefore \frac{29}{9}=3+\frac{2}{9}=3+\frac{1}{9/2}. \quad (2)$$

$$\therefore \frac{9}{2}=4+\frac{1}{2}. \quad (3)$$

代(2)於(1)內，代(3)於此結果內，則得

$$\frac{67}{29}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}，$$ 即所求之連分數。

因 29/67=1÷67/29，則又得

$$\frac{29}{67}=\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}.$$

近值. 此分數$\frac{a_1}{1}$, $a_1+\frac{1}{a_2}$, $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}$, …，名爲分 1004
數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\dots$之第一次第二次第三次近值。

當 a_1 爲 0 時，其第一次近值寫作$\frac{0}{1}$.

定理1. 每一單次近值，必小於次一近值，每一雙 1005
次近值，必大於次一近值。

此可由事實知之，即當分母增大時，其分數必減小。

例如，

1. $a_1<a_1+\cdots$.

2. $a_1+\frac{1}{a_2}>a_1+\frac{1}{a_2+}\cdots$，因$\frac{1}{a_2}>\frac{1}{a_2+}\cdots$.

3. $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}<a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}$因$a_2+\frac{1}{a_3}>a_2+\frac{1}{a_3+}\cdots$；

由 2, 等等。

近值之化簡. 化簡$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\dots$之第一次第 1006
二次第三次諸近值，爲一簡單分數，則得

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_1a_2+1}{a_2},\ \frac{a_1a_2a_3+a_1+a_3}{a_2a_3+1},\ \cdots \qquad (1)$$

設 $p_1, p_2, p_3\cdots$ 表此諸近值之諸分子，而 q_1, q_2, q_3 表，其諸分母，則前之化簡，得

$$p_1=a_1,\ p_2=a_1a_2+1,\ p_3=a_1a_2a_3+a_1+a_3, \qquad (2)$$

$$q_1=1,\quad q_2=a_2,\qquad q_3=a_2a_3+1,\cdots. \qquad (3)$$

因 $a_1, a_2, a_3,\cdots$ 爲正整數，設已知分數爲無限，由 (2) (3) 則知視 n 之增加，p_n 及 q_n 繼續亦增加，而近於 ∞.

由觀測 (2) 及 (3)，則得

$$p_3=a_3p_2+p_1 \text{ 及 } q_3=a_3q_2+q_1. \qquad (4)$$

此爲下定理之證明。

1007 **定理2.** 任一近值之分子及分母，與前二近值分子分母之關係，以公式

$p_n=a_nP_{n-1}+p_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$ 表之。

因假設此公式已證明對於其 k 次近值爲眞確，即

$$p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2},\quad q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2}, \qquad (1)$$

$$\frac{p_k}{q_k}=\frac{a_kp_{k-1}+p_{k-2}}{a_kq_{k-1}+q_{k-2}}. \qquad (2)$$

則 $(k+1)$ 次近值，可僅以 a_k+1/a_{k+1} 代 a_k 由 k, 次近值求之 § 1004. 因 $p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1}, q_{k-2}$, 不含 a_k 故由 (2) 則得

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{(a_k+1/a_{k+1})p_{k-1}+p_{k-2}}{(a_k+1/a_{k+1})q_{k-1}+q_{k-2}}$$

$$=\frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1}+p_{k-2})+p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1}+q_{k-2})+q_{k-1}}=\frac{a_{k+1}p_k+p_{k-1}}{a_{k+1}q_k+q_{k-1}},\ \text{由}(1);$$

即 $$p_{k+1}=a_{k+1}p_k+p_{k-1},\quad q_{k+1}=a_{k+1}q_k+q_{k-1}.$$

已證明設此公式 $p_n=a_n p_{n-1}+p_{n-2}, q_n=a_n q_{n-1}+q_{n-2}$ 對於指定次近值爲眞確，其對次一近值亦爲眞確，但已證明

其對于三次近值爲眞確，故其對於四次近值爲眞確。同理對於五次亦眞確：等等。即三次以後之各近值全爲眞確。（與§791比較之）。

例．　試計算$3+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5}$之近值。

因$3=3/1$且$3+1/2=7/2$，故得$p_1=3$，$p_2=7$，$q_1=1$，$q_2=2$．

故　$p_3=3\cdot7+3=24$，$p_4=4\cdot24+7=103$，$p_5=5\cdot103+24=539$，

而　$q_3=3\cdot2+1=7$，$q_4=4\cdot7+2=30$，$q_5=5\cdot30+7=157$．

是以諸近值爲　$\frac{3}{1}$，$\frac{7}{2}$，$\frac{24}{7}$，$\frac{103}{30}$，$\frac{539}{157}$．

定理3．　凡二連續近值之分子及分母，其關係以公式　　$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$表之。　1008

當$n=2$時，此公式眞確．因由§1006，知$p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1a_2=1=(-1)^2$．

又當$n=k$時，可証明此公式爲眞確，當$n=k+1$時，亦爲眞確。

因$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_k-p_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1})$
$=-(p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k)$．　　§1007

故設　$p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^k$，

則　$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(-1)^{k+1}$．

因此公式對於$n=2$時爲眞確，是以對於$n=2+1$或3亦眞確，故對於$n=3+1$或4等等以至對於n之任何正整數皆爲眞確也．

推論1．　凡近值p_n/q_n爲不可約之分數。　1009

因設p_n及q_n有一公因子，由此關係$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$知此因子爲$(-1)^n$之除數，此爲不可能。

1010　**推論2.**　二近值之差，可表如下之公式。

1. $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}$.　2. $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_np_{n-2}}$.

第一公式爲關係 $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(+1)^n$ 略變之得結果。

第二公式由此事實，§§ 1007, 1008 得之。

$$\begin{aligned}p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n&=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-2}-p_{n-2}\\&\quad(a_nq_{n-1}+q_{n-2})\\&=a_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})\\&=(-1)^{n-1}a_n.\end{aligned}$$

§ 1005 之定理，可由此公式化出之。

1011　**定理4.**　凡一無限簡單連分數，視 n 之無限增加其 n 次近值，漸近一定極限。

因由 § 1005，此奇次近值 p_1/q_1, p_3/q_3, ⋯ 作一無限之增值數串，其每一項比此定數 p_2/q_2 爲小，故由 § 192，一變數經過此數串而變化，其速次增大，漸近一數 λ 且以此數爲極限。

同理，一變數經過一偶次近值之數串 p_2/q_2, p_4/q_4, ⋯ 將速次減小，漸近一數 μ，而以此數爲極限。

但 $\mu=\lambda$，因 $\mu-\lambda=\lim_{m\doteq\infty}\left[\frac{p_{2m}}{q_{2m}}-\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}\right]$

$$=\lim_{m\doteq\infty}\frac{(-1)^{2m}}{q_{2m}q_{m-1}}=0.$$

故變數經過此近值之完全數串 p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3, ⋯ 將漸近 λ 而以 λ 爲極限。

1012　無限簡單連分數值，乃指此數 $\lim_{n\doteq\infty}(p_n/q_n)$．由 § 1003，知此數常爲無理數。

有限分數之數值，爲其最末近值之數值，§ 1004。

在下諸定理之叙述中，§§ 1013, § 1014,應知者，乃爲當此分數有限時，凡言"近值"乃謂除去最末近值之其他任一近值。

推論1. 凡一簡單連分數之近值，必在每二連續近值之間。 1013

推論2. 一連分數之數值與其 n 次近值之差，必小於 $1/q_nq_{n+1}$ 而大於 a_{n+2}/q_nq_{n+2}. 1014

因令 λ 表此分數之值，且假定 n 爲奇數。

則知 $\quad \dfrac{p_n}{q_n}<\dfrac{p_{n+2}}{q_{n+2}}<\lambda<\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. §§ 1005, 1013

故 $\quad \lambda-\dfrac{p_n}{q_n}<\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\dfrac{p_n}{q_n},\quad \therefore <\dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$, § 1010, 1

且 $\quad \lambda-\dfrac{p_n}{q_n}>\dfrac{p_{n+2}}{q_{n+2}}-\dfrac{p_n}{q_n},\quad \therefore >\dfrac{a_{n+2}}{q_nq_{n+2}}$. § 1010, 2

顯然 $1/q_nq_{n+1}<1/q^2_n$ 且用關係式 $q_{n+2}=a_{n+2}q_{n+1}+q_n$, § 1007, 可立刻証明 $a_{n+2}/q_nq_{n+2}\geqq 1/q_n(q_n+q_{n+1})$. 故 λ 與 p_n/q_n 之差小於 $1/q^2_n$ 而大於 $1/q_n(q_n+q_{n+1})$.

推論3. 每一近值與此分數之值比其前任一前近值爲相近。 1015

因由 § 1014, 設 λ 表此分數之值，而 λ 及 p_n/q_n 之差，其數值小於 $1/q_nq_{n+1}$. 同時 λ 與 p_{n-1}/q_{n-1} 之差其數值大於 $a_{n+1}/q_{n-1}q_{n+1}$; 且 $1/q_nq_{n+1}<a_{n+1}/q_{n-1}q_{n+1}$, 因 $q_{n-1}<a_{n+1}q_n$, 故也，§ 1006.

推論4. 近值 p_n/q_n 與其分數之值比任一他分母不超越 q_n 之有理分數爲相近。 1016

因設 a/b 爲對於其分數之值比 p_n/q_n 爲相似之值。則

由 § 1015, 又必比 p_{n-1}/q_{n-1} 爲相近。故由 § 1013, 必在 p_n/q_n 及 p_{n-1}/q_{n-1} 之間。

爲便利計，假定 n 爲偶數。

則知 $$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{a}{b}<\frac{p_n}{q_n}.$$

故 $$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}>\frac{a}{b}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}};$$

即 $$\frac{1}{q_nq_{n-1}}>\frac{aq_{n-1}-bp_{n-1}}{bq_{n-1}},$$

或 $$b>q_n(aq_{n-1}-bp_{n-1}).$$

但 $aq_{n-1}-bp_{n-1}$ 爲正數，因 $a/b>p_{n-1}/q_{n-1}$. 故 $b>q_n$; 即設 a/b 爲對於其連分數之值比 p_n/q_n 爲相近之值。

其分母 b 必比 q_n 爲大。

1017 **循環分數**. 在一無限連分數內，設一簡單偏商或連續偏商等繼續發現，名爲循環分數但此等分數名爲純分數或混分數，按照其開端，即爲此循環偏商與否而定。

一循環分數之值可如下求之。

例1. 試求 $\dot{2}+\frac{\dot{1}}{3}+\cdots=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 之值。此爲週期數 $2+\frac{1}{3}$ 之純循環分數. 故設以 x 表其值，則

$$x=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{x},\ \therefore x=\frac{7x+2}{3x+1},\ \therefore 3x^2-6x-2=0,$$

$$\therefore x=\frac{3+\sqrt{15}}{3}.$$

例2. 試求 $4+\frac{1}{5}+\frac{\dot{1}}{2}+\frac{\dot{1}}{3}+\cdots$ 之值。

此爲週期數 $2+1/3$ 之混循環分數，故以 x 表此循環部份 $\dot{2}+\frac{\dot{1}}{3}+\cdots$ 之值，而 y 表此全分數之值，則由例1.

$$y=4+\frac{1}{5}+\frac{1}{x}=\frac{21x+4}{5x+1}=\frac{21(3+\sqrt{15})/3+4}{5(3+\sqrt{15})/3+1}=\frac{75+21\sqrt{15}}{18+5\sqrt{15}}.$$

普通，設以 x 表週期數為 $a_1+\cdots\frac{1}{+a_k}$ 之純循環分數之值，則§ 1007，

$$x=a_1+\cdots\ \frac{1}{+a_k}+\frac{1}{+x}=\frac{p_kx+p_{k-1}}{q_kx+q_{k-1}}.$$

故　$q_kx^2+(q_{k-1}-p_k)x-p_{k-1}=0.$

因此二次方程之絕對項 $-p_{k-1}$ 為負，故其有一且僅有一正根，而此根為表此分數之值。

又設以 y 此混循環分數

$$a_1+\cdots\ \frac{1}{+a_r}+\frac{\dot{1}}{a_{r+1}}+\cdots+\frac{\dot{1}}{a_{r+k}}+\cdots \text{之值.}$$

則如上求其循環部分之值 x，由 § 1007，則為

$$y=a_1+\cdots\ \frac{1}{+a_r}+\frac{1}{x}=\frac{p_rx+p_{r-1}}{q_rx+q_{r-1}}.$$

無理數變為連分數法。 凡正無理數，皆為無限 1018
簡單定連分數之數值，而此連分數可由下法得至任何所求之偏商。

設以 b 表題中之數，第一先求比 b 小之最大整數 a_1，則 $b=a_1+1/b_1$，式中 b_1 為比 1 大之無理數。次求比 b_1 為小之最大整數 a_2，則 $b_1=a_2+1/b_2$，式中 b_2 為比 1 大之無理數，斷續如此進行，則

$$b=a_1+\frac{1}{b_1}=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\cdots=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots$$

可証明者乃當 b 為一二次方程之不盡根，則如此所得之連分數，必為一循環分數。

例．試變$\sqrt{11}$為一連分數．

比$\sqrt{11}$小之最大整數為 3，且由 § 603．

$$\sqrt{11}=3+(\sqrt{11}-3)=3+\frac{2}{\sqrt{11}+3}=3+\frac{1}{(\sqrt{11}+3)/2}. \tag{1}$$

比$(\sqrt{11}+3)/2$小之最大整數為 3．且

$$\frac{\sqrt{11}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{11}-3}{2}=3+\frac{2}{2(\sqrt{11}+3)}=$$

$$3+\frac{1}{\sqrt{11}+3} \tag{2}$$

比$\sqrt{11}+3$小之最大整數為 6，且

$$\sqrt{11}+3=6+(\sqrt{11}-3)=6+\frac{2}{\sqrt{11}+3}=6+\frac{1}{(\sqrt{11}+3)/2} \tag{3}$$

在 (3) 內最末之分數與在 (1) 內之最末分數相同．故由 (3) 以後將為 (2)，(3) 之無限重複發生，即偏商 3 與 6 將循環見之．是以代(2)於(1)內，代(3)於結果內，等等得

$$\sqrt{11}=3+\frac{1}{3+}\frac{1}{6+}\cdots$$

1019　一已知無理數僅可以一簡單連分數表之．由此事實，知二無限簡單連分數，除去其相當偏商可以相當外，而此二分數不能相等．

因設 $a+x=c+y$，式中 a 及 c 表正整數而 x 與 y 表小於 1 之正數，於是 $a=c$，因否則由 $a-c=y-x$ 知一不為 0 之整數，其數值小於 1．

故，設 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots=c_1+\frac{1}{c_2+}\frac{1}{c_3+}\cdots$，式中 $a_1, a_2, a_3, \cdots, c_1, c_2, c_3, \cdots$ 表諸正整數，則得 $a_1=c_1$，$\therefore \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots=\frac{1}{c_2+}\frac{1}{c_3+}\cdots$，$\therefore a_2+\frac{1}{a_3+}\cdots$ $=c_2+\frac{1}{c_3+}\cdots$，$\therefore a_2=c_2$，等等．

1020　設計算一連分數知其等於一無理數 b 而至第 n 次偏商，則可求其 n 次近值 p_n/q_n．而此有理分數 p_n/q_n 將逼近 b 而其差誤比 $1/q_n^2$ 為小，§ 1014．又 p_n/q_n 將為 b 之比分母不超越 q_n 之任一他有理分數為相近值．

例如，$\sqrt{11}=3+\frac{1}{3+}\frac{1}{6+}\frac{1}{3+}\cdots$之前四近值為$\frac{3}{1}$，$\frac{10}{3}$，$\frac{63}{19}$，$\frac{199}{60}$，而$\frac{199}{60}$表$\sqrt{11}$其差誤小於$\frac{1}{60^2}$.

一次不定方程之解答. 已知一形式為 $ax+by=c$ 之方程，式中 a, b, c 為整數，且 a 及 b 無公因子，§ 672. 設變 a/b 為一連分數，則此分數之最末近值將為其自己 a/b，且設最末第二近值為 p/q，則得 $aq-bp=\pm1$，§ 1008. 常能求得 x 及 y 之一對值，而適合 $ax+by=c$. 此法以下列題証明之。 1021

例。試求 $205x+93y=7$ 之整數解答。

如在 § 1003 之例，求得$\frac{205}{93}=2+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{8+}\frac{1}{2}$.

如在 § 1007 之例，求得諸近值為$\frac{2}{1}$，$\frac{9}{4}$，$\frac{11}{5}$，$\frac{97}{44}$，$\frac{205}{93}$，

故　　　$205\cdot44-93\cdot97=-1$，

或以 -7 乘之，$205(-44\cdot7)+93(97\cdot7)=7$.

是以 $x=-308$，$y=679$ 為 $205x+93y=7$ 之一解答。

普通解答為 $x=-308+93t$，$y=679-205t$，§ 674.

同理，可証明 $205x-93y=7$ 有解答為 $x=-308$，$y=-679$.

習　題　XCIII.

試計算下列各題之諸近值：

1. $3+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5}$.　　2. $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{10+}\frac{1}{12}$.

試變下各數為連分數，求計算末三題至第四次近值，若使此值等於此分數之值，其差誤若何。

3. $\frac{10}{12}$.　　4. $\frac{457}{56}$.　　5. $\frac{142}{513}$.　　6. 3.54.

7. .1457.　　8. $\frac{233}{177}$.　　9. $\frac{421}{972}$.　　10. $\frac{23456}{31827}$.

試變下各數爲循環連分數，且求計算前四題之第五近值，及其相當差誤。

11．$\sqrt{17}$．　12．$\sqrt{26}$．　13．$\sqrt{6}$．　14．$\sqrt{38}$．

15．$\sqrt{105}$．　16．$1/\sqrt{23}$．　17．$\sqrt{19}$．　18．$\sqrt{71}$．

19．$3\sqrt{3}$．　20．$(\sqrt{10}-2)/2$．

21．$(\sqrt{2}+1)/(\sqrt{2}-1)$．

試求下列各循環分數之値。

22．$\frac{\dot{1}}{1+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{3+}\cdots$．　23．$\frac{\dot{1}}{2+}\frac{1}{1+}\frac{\dot{1}}{3+}\cdots$．

24．$3+\frac{1}{4+}\frac{\dot{1}}{5+}\frac{\dot{1}}{2+}\cdots$．　25．$2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{\dot{1}}{5+}\cdots$．

26．$\frac{1}{2+}\frac{1}{7+}\frac{\dot{1}}{1+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{1+}\cdots$．

27．求証　$\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2a+}\frac{1}{2a+}\cdots$．

28．求証　$\sqrt{a^2+2}=a+\frac{1}{a+}\frac{1}{2a+}\frac{1}{a+}\frac{1}{2a+}\cdots$

29．求証　$\frac{\dot{1}}{a+}\frac{1}{b+}\frac{\dot{1}}{c+}\cdots$

$$=\frac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}.$$

30．試變 $x^2+x-1=0$ 之正根爲一連分數。

31．求証　$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}+\frac{2}{q_2q_3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$．

32．求証　$\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots=\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\frac{1}{q_3q_4}-\cdots$．

33．一有理分數，其分母比 1000 爲小，且其値近於一正方形與其邊之比，問此分數爲何？且計算使此分數等於此比之値，其差誤爲何。

34．試求一最簡單分數，等於 $\pi=3.14159265\cdots$ 而其差誤比 .000001 爲小．

35．試計算 $e=2.71828\cdots$ 之第六次近値，若使此値等於 e，求計算其差誤。

36．試求 $127x-214y=6$ 之一整數解。

37．試求 $235x+412y=10$ 之一整數解。

38．試求 $517x-323y=31$ 之一普通整數解，

XXXVIII　連續函數之性質

一變數之函數

函數. 設變數 y 依變數 x 而變，則與 x 一值，必可得 y 之相當一定值或一組值，則名 y 爲 x 之函數. 1022

當云 y 爲 x 之函數時，且寫成 $y=f(x)$，則指爲一値函數；換言之，與 x 一值，y 僅有相當之一值，且 x 爲 a 值時，y 之相當值，將以 $f(a)$ 表之.

設當 y 等於 x 之一代數式，如 $y=x^2+1$ 顯然 y 爲 x 之函數，但 y 表爲 x 之函數之關係可爲一關係，不能以方程表之，例如，y 爲 x 之函數設對於 x 所有之有理值 y 爲 1，對於 x 所有之他有理值 y 值爲 -1，則 y 即爲 x 之函數，但在 y 及 x 間之關係不能以方程表之.

甚至當 x 之特殊例外值時，y 及 x 其關係式不能規定 y 之值，則仍名 y 爲 x 之函數，§1024.

有時 y 爲 x 之函數，僅限於 x 之一組值，或僅限於 x 在一定極限間之諸值，例如，方程 $y=x+2x^2+3x^3+\cdots$ 設 x 之諸值其數值比一爲小始能定 y 之值.

函數之連續性. 設 $f(x)$ 表一 x 之已知函數，當 $x=a$ 時，設 $f(x)$ 有一定值，且設 $\lim\limits_{x\doteq a} f(x)=f(a)$，則名 $f(x)$ 連續於 a. 1023

在相反之條件下，名 $f(x)$ 非連續於 a，$\lim\limits_{x\doteq a} f(x)=f(a)$ 意指當 x 漸近於 a 而以 a 爲極限時，即無論 x 變化，經過何種數串而漸近於 a，以 a 爲極限時，$f(x)$ 將漸近於 $f(a)$，而以 $f(a)$ 爲極限.

設函數 y 表以方程 $y=f(x)$，有時當 $x=a$ 時，$f(x)$ 爲不定形，§§513, 518. 雖設方程 $y=f(x)$ 當 $x=a$ 時，y 之值 1024

不能定，但設$\lim\limits_{x \doteq a} f(x)$有一定有限値，則此値即爲$f(a)$之値，§ 519，而$f(x)$即爲連續於$a$．設$\lim\limits_{x \doteq a} f(x)=\infty$，則$f(a)$之値爲$\infty$，§ 515；則$f(x)$即爲在$a$不連續，最後，設$\lim\limits_{x \doteq a} f(x)$爲不定，無論以何種理由亦不能與$f(a)$一單簡之値，顯然$\lim\limits_{x \doteq a} f(x)=f(a)$不能規定一値．

在此情形下，$f(x)$亦爲不連續於a．

1．例如，凡有理函數$f(x)$除去此函數中間分數之分母爲零外，此函數爲連續函數一．

例．設此函數爲$f(x)=(x-1)/(x^2-1)$．

此函數除當$x^2-1=0$時，即$x=1$或-1時，此函數爲連續函數，因設a不爲1或-1，$f(a)=(a-1)/(a^2-1)$有一定，而$\lim\limits_{x \doteq a} f(x)=f(a)$，§ 509．

當$x=1$時，此式$(x-1)/(x^2-1)$爲不定形$0/0$．但$\lim\limits_{x \doteq 1} f(x)=\lim\limits_{x \doteq 1}[(x-1)/(x^2-1)]=\lim\limits_{x \doteq 1}[1/(x+1)]=1/2$，且以$f(1)$表$1/2$之値，當$x=1$時，此函數爲連續函數．

當$x=-1$時，$f(x)$爲非連續函數；因$\lim\limits_{x \doteq -1} f(x)=\infty$．

2．討論下之函數：

$$f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}+3}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{1+3/2^{\frac{1}{x}}}{1+1/2^{\frac{1}{x}}}=\frac{1/2^{-\frac{1}{x}}+3}{1/2^{-\frac{1}{x}}+1}.$$

$f(0)$爲一不定形∞/∞，§ 517．

但將$f(x)$寫作第二式，然後使x經過諸正値漸近於0，則得$\lim 2^{\frac{1}{x}}=\infty$，故$\lim f(x)=1$．

若將$f(x)$寫作第三式，然後使x經過諸負値，漸近於0，則得$2^{-\frac{1}{x}}=\infty$．故$\lim f(x)=3$．

最後設使x經過正負相間之諸値，而連近於0，$f(x)$將不能漸近於一極限．

故$f(x)$在0爲非連續函數．對於$\lim\limits_{x \doteq 0} f(x)=f(0)$，$f(0)$不能有一定値．

1025 由 § 1023，連續之定義可立知，§ 189．

$f(x)$ 在 a 爲連續函數之勝任條件及必須條件，爲 $f(a)$ 有一定有限值，且對於可指定之每一正值 δ，可求一相當之正數 ϵ 而

當 $|x-a|<\epsilon$ 時，$|f(x)-f(a)|<\delta$.

是以在 x 值之左近，如 a，$f(x)$ 爲連續函數，若 x 之值變化甚小，$f(x)$ 值之變化亦甚小，若 x 之值變化，變至十足之微小時，可使 $f(x)$ 之變化，其相當值，亦如吾意所思之小，在 x 之値間，而使 $f(x)$ 非連續者則 $f(x)$ 即無如上之情形，可參考 § 1024 之例即知。

定理1. 設函數 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 在 a 時皆爲連續函數， 1026
$f(x)\pm\phi(x)$ 及 $f(x)\phi(x)$ 亦皆爲連續函數，除 $\phi(a)=0$ 外，$f(x)/\phi(x)$ 亦爲連續函數。

設 $f(x)$ 在 a 爲連續函數，$\sqrt[n]{f(x)}$ 在 a 亦爲連續函數。

此由在 a 之連續定義，§ 1023 及 §§203－205 之定理，可立得之，因 $lim(f(x)+\phi(x))=lim f(x)+lim\,\phi(x)$，餘類推。

實數函數. 在此函數內 x 將表一實變數，即 x 係 1027
取實數值，而 $f(x)$ 將表一 x 之實數函數，即當 x 爲實數時，$f(x)$ 亦有一實數。

數限. 以直線上之點表實數，§§ 134, 209 爲便利 1028
計，有下名詞之規定。

在 a 及 b 中間所有之實數羣，而 a 及 b 亦包括在內，名之曰數限 a, b，而以符號 (a,b) 表之。

又應知者，設 $a<b$ 而名 a 及 b 爲數限 (a,b) 之左端及

右端，又設 $c=(a+b)/2$，則名 (a,b) 被 c 分爲二等數限，(a,c) 及 (c,b)；餘類推。

例如，$(1,7)$ 被 4 分爲二等數限 $(1,4)$，$(4,7)$；且被 3 及 5 分爲三等數限，$(1,3)$，$(3,5)$，$(5,7)$．

1029　設在數限 (a,b) 之內，x 爲任何值，函數 $f(x)$ 皆爲連續函數時，則此函數名在數限 (a,b) 之連續函數。

1030　**定理2**．設 $f(x)$ 在數限 (a,b) 爲連續函數，且 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號，則在 (a,b)，之間，必有一數 x_0，使 $f(x_0)=0$.

爲便利計，假定 $f(a)$ 爲＋，$f(b)$ 爲－．分 (a,b) 爲任意等分之數限，假定爲二等數限 (a,c) 及 (c,b)．

設 $f(c)=0$，則定理即証明，而 c 即爲 x_0，但設 $f(c)\neq 0$ 則在數限 (a,c) 或 (c,b) 之一數限內，$f(x)$ 必爲 0，而 $f(x)$ 在左端＋，在其右端爲－，例如，設 $f(c)$ 爲－，在 (a,c) 內亦爲－，且設 $f(c)$ 爲＋，在 (c,b)，內亦爲＋．爲便利計名此數限爲 (a_1,b_1)．則 $f(a_1)$ 爲＋，$f(b_1)$ 爲－．

討論數限 (a_1,b_1)，亦如討論 (a,b)，如此進行，以至無窮，或最後求至在一數限之一端，$f(x)=0$．則此數即爲 x_0，或得一無限之數限串。

$(a,b),(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n),\cdots,$

而　$f(a),f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n),\cdots$ 爲＋

及　$f(b),f(b_1),f(b_2),\cdots,f(b_n),\cdots$ 爲－．

由 §§192，193，視 n 之漸次增大．a_n 及 b_n 漸近一相同之數，而以此數爲極限，因 a_n 永比 b 爲小，而永不減少，且 b_n 永比 a 爲大而不增加，故 $lim(b_n-a_n)=lim(b-a)/2^n=0$。

名此極限爲 x_0，則 $f(x_0)=0$．

因 $f(x)$ 在 x_0 為連續函數，$\lim f(a_n)=\lim f(b_n)=f(x_0)$.

但因 $f(a_n)$ 常為正，其極限 $f(x_0)$ 不能為負，且因 $f(b_n)$ 常為負，其極限 $f(x_0)$ 不能為正。

故 $f(x_0)$ 為 0.

例如，設 $f(x)=1-x^2/2!+x^4/4!-x^6/6!+\cdots$，可立證明 $f(1)$ 為正，而 $f(2)$ 為負。故 $f(x)$ 對於 x 在 1 及 2 間之値必為零。

此定理之較簡單証明，在 §§833, 836 將述之。

極大値及極小値，優限及劣限. 今討論 1031
下之無限數羣:

$2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}, \cdots (A), 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8}, \cdots (B)$.

在 A 內有一最大數，即 2，但無最小數；而在 (B) 內有一最小數，即 2，但無最大數。

換言之，在 (A) 中無最小數，而在比在 (A) 中諸數皆小之諸數必有一最大者，即 1. 同理，在比在 (B) 中諸數皆小之諸數必有一最小者，即3.

此理對於所有有限數之無限數羣，即位於二已知定數 a 及 b 間之數，悉為眞確。換言之，

定理3. 設 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots (A)$ 表任一有限數之無 1032
限數羣，則

1. 或在 (A) 內之諸不同數中，必有一最大者，或在比 (A) 內諸數較大之諸數中，必有一最小者。

2. 或在 A 內之諸不同數中，必有一最小者，或在比 (A) 內諸數較小之諸數中，必有一最大者。

欲証明 1，比在 (A) 內較大之諸數分為一組，名為 R_2，其他諸實數 (A) 內之數亦包括之，分為一組名曰 R_1. 因在 R_1 內之每一數，比在 R_2 內之每一數為小，則在 R_1 內必有，

一最大數，或在 R_2 內有一最小數，§159.——則指在(A)內不同數中之最大數，或爲比 (A) 內諸數較大之諸數中之最小數。

以同理可以証明 2。

1033 設在一羣不同之數中，其最大者，名爲此羣之極大數；其最小者，名爲此羣之極小數。

設在數羣中有一極大數則其優限即爲此極大數，否則必爲在比此數羣中各數爲大之諸數中之最小數。

設在一數羣中有一極小數則其劣限即爲此極小數，否則必爲在比此數羣中各數爲小之諸數中之最大數。

有一數羣，如 $1, 2, 3, 4, \cdots$ 且其含有比任何能名之數爲大，則名此羣有優限 ∞. 同理，一數羣，如 $-1, -2, -3 -4, \cdots$ 則名爲有劣限 $-\infty$.

顯然，設一數羣中有一有限之優限 λ，或 λ 爲其極大數，或可在此羣中，求得與 λ 之差爲任何能名之小。

1034 "$f(x)$ 在 (a, b) 內之諸值" 將指相當於 x 在 (a, b) 內，$f(x)$ 之諸值，且設此數羣有一極大值，或一極小值，則將名其爲在 (a, b) 內，$f(x)$ 之絕對極大值，或絕對極小值，在 §639內，所述之極大值及極小值不一定有絕對極大值或絕對極小值。

1035 **定理4.** 設 $f(x)$ 在數限 (a, b) 內爲連續函數，其在 (a,b) 內，必有一絕對極大值，及一絕對極小值。

因 $f(x)$ 在 (a, b) 之諸值爲有限數，§1023，其必有一有限之優限及劣限，順次名此限爲 λ 及 μ.

必須証明者，爲在 (a,b) 內必有一數 x_0，使 $f(x_0)=\lambda$，且有一數 x_1，使 $f(x_1)=\mu$.

此二定理之証明，實際相同，今僅証明第一定理。

分(a,b)爲任意相等之諸數限，假定分爲二等數限，顯然至少在此二半數限中之一數限，λ將爲$f(x)$之優限，爲便利計，設此半數限爲(a_1,b_1).

討論(a_1,b_1)仍與前之討論(a,b)同，如此繼續進行，以至無限。

如此得一無窮之數限串，

$(a,b),(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n),\cdots$，在每一數限中，$\lambda$爲$f(x)$之優限。

視n之漸次增大，a_n及b_n漸近一同數，而以此數爲極限，(參考1030).

設名此極限爲x_0，則$f(x_0)=\lambda$.

因不然，$f(x_0)$及λ表二常數，其差必爲一常數，設爲α而非0，則

$$\lambda-f(x_0)=\alpha \tag{1}$$

因$f(x)$在x_0爲連續函數，則能使此數限(a_n,b_n)爲如此之小，其將對於x在(a_n,b_n)之任何數皆爲，§1025，

$$|f(x)-f(x_0)|<\alpha/2 \tag{2}$$

且因λ爲在(a_n,b_n)內，$f(x)$諸値之優限，則取x在(a_n,b_n)及(2)內爲，§1033，

$$\lambda-f(x)<\alpha/2 \tag{3}$$

但由(2)及(3)，可知

$$\lambda-f(x_0)<\alpha \tag{4}$$

因(4)與(1)矛盾，故(1)不能成立：即$\lambda-f(x_0)=0$. 或$\lambda=f(x_0)$，即爲所欲証明者。

1036　**推論.** 設 $f(x)$ 在數限 (a,b) 內爲一連續函數，則其在 (a,b) 之任何值，皆在此數限內之極小值及極大值之間.

因設 c 表題中之值，且函數 $f(x)-c$ 爲在 (a,b) 間之連續函數，§1026.

設 $f(x_0)$ 及 $f(x_1)$ 表 $f(x)$ 在 (a,b) 間之極大值及極小值，則 $f(x_0)-c$ 爲 +，而 $f(x_1)-c$ 爲 −.

故由 §1030，知在 x_0 及 x_1 間必有一數，設爲 x_2，而 $f(x_2)-c=0$，或 $f(x_2)=c$，此即所証明者.

1037　**函數之躍幅.** $f(x)$ 在 (a,b) 間之躍幅，即指 $f(x)$ 在 (a,b) 間之優限與劣限之差而言.

1038　**定理5.** 設 $f(x)$ 在 (a,b) 爲一連續函數，設指定一任何小之正數 α，則必能分 (a,b) 爲一定數相等之數限，而在每一此數限內，$f(x)$ 之躍幅小於 α.

因分 (a,b) 爲任何數相等之限數，設分爲二相等數限，每一數限又分爲二相等數限等等，如此最後所得之數限之每一數限內，$f(x)$ 之躍幅必小於 α.

因不然，則至少在 (a,b) 之半數限內，$f(x)$ 之躍幅，不比 α 爲小；如此可連續求得每半數限之半，等等，以至無限，限內 $f(x)$ 之躍幅，皆爲不小於 α.

設此無窮之數值串爲

$$(a,b),\ (a_1,b_1),\ (a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n),\cdots,$$

且如在 §1030 內，令 $lim\ a_n = lim\ b_n = x_0$.

因 $f(x)$ 在 (a,b) 內皆爲連續函數必有一絕對極大值及一絕對極小值，在數限 (a,b)，(a_1,b_1)，$\cdots$，(a_n,b_n)，$\cdots$ 內，§1035.

設 $f(\alpha_n)$ 表 $f(x)$ 在 (a_n,b_n) 內之絕對極大值，及 $f(\beta_n)$ 表其絕對極小值.

則由假設　　$f(\alpha_n)-f(\beta_n)\geqq\alpha$,

故　　$\lim f(\alpha_n)-\lim f(\beta_n)\geqq\alpha$.

但此爲可能，因 α_n 及 β_n 皆在 (a_n, b_n) 內，且 $\lim a_n=\lim b_n=x_0$, 故得 $\lim \alpha_n=\lim \beta_n=x_0$.

因 $f(x)$ 在 x_0 爲連續函數，故 $\lim f(\alpha_n)=\lim f(\beta_n)$, 即，$\lim f(\alpha_n)-\lim f(\beta_n)=0$, ∴ 不 $\geqq\alpha$.

二獨立變數之函數

二變數之函數. 當與 x 及 y 一對值時必得 u 之一個或一組值，則名變數 u 爲變數 x 及 y 之函數。 1039

以後所討論者，爲與 x 及 y 之一對值，僅得 u 之一相當值。

記號 $u=f(x,y)$ 指 u 爲 x 及 y 之函數，而 $f(a,b)$ 則指當 $x=a$ 及 $y=b$ 時，u 之相當值也。

例如，設 $u=f(x,y)=x^2-2y+1$, 則 u 爲 x 及 y 之函數，當 $x=1, y=2$ 時，則得 $u=f(1,2)=1-4+1=-2$.

在 §1022 末之註解，在此處準可應用。

此等函數之連續性. 設 $f(x,y)$ 表 x 及 y 之函數. 設 $f(a,b)$ 有一定有限值，且設當 x 及 y 順次使其漸近於 a 及 b 而以 a 及 b 爲極限時，$f(x,y)$ 常漸近於 $f(a,b)$, 而以 $f(a,b)$ 爲極限，則名 $f(x,y)$ 在 a, b, 即當 $x=a$, $y=b$ 時爲連續函數。 1040

反之，則名 $f(x,y)$ 在 a, b, 即當 $x=a$, $y=b$ 時，爲非連續函數。

1041 由此定義及 §189, 可立刻知 $f(x,y)$ 在 a, b 爲連續函數之必須條件及勝任條件爲 $f(a,b)$ 有一定有限值，且對於各指定之一正數 δ, 必能求得一相當之正數 ϵ, 使

當 $|x-a|<\epsilon$ 及 $|y-b|<\epsilon$ 時，$|f(x,y)-f(a,b)|<\delta$.

1042 **定理1.** 設 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 在 a,b 皆爲連續函數，$f(x,y)\pm\phi(x,y)$ 及 $f(x,y)\cdot\phi(x,y)$ 皆爲連續函數，除 $\phi(a,b)=0$ 外，$f(x,y)/\phi(x,y)$ 亦爲連續函數。

設 $f(x,y)$ 在 a,b 爲連續函數，$\sqrt[n]{f(x,y)}$ 在 a,b 亦爲連續函數。

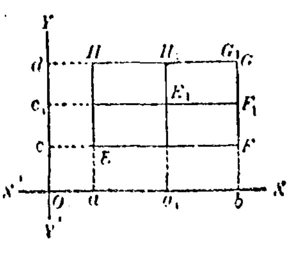
由 § 1040 及 §§ 203—205 上定理可立刻証明。

1043 **數域.** 此處應知者，x 及 y 表二實變數，而 $f(x,y)$ 則表此二變數之實函數。(與 § 1027 比較之)

如在 § 382 之証明，x 及 y 爲任一對值，可用一平面上諸點表之，顯然，用此法作方程 $x=a, x=b, y=c, y=d$，§ 384 之直線，以此線所成之長方形內，包括 x,y 爲 $a\leqq x\leqq b, c\leqq y\leqq d$ 所有之各對值，則名此長方形爲 x,y 各對值所成之數羣之數域 $(a,b;c,d,)$.

1044 設 $f(x,y)$ 在數域 $(a,b;c,d)$，內，對於 x,y 之任一對值爲連續，則名 $f(x,y)$ 爲在此數域內之連續函數。

1045 **定理2.** 設 $f(x,y)$ 在數域 $(a,b;c,d)$ 內爲連續，則其在此數域內，必有一極大值及一極小值，因 $f(x,y)$ 在此已知數域內爲連續函數，則其在此數域內必有一有限優限及劣限，§§ 1032, 1040. 名此二限爲 λ 及 μ.



則必須証明者，爲在 $(a,b;c,d)$ 內；有一對值 x_0, y_0 使 $f(x_0,y_0)=\lambda$；且以同理將証明必有一對值 x_1, y_1 使 $f(x_1 y_1)=\mu$.

因作此長方形 $EFGH$ 以其表數域 $(a,b;c,d)$，§ 1043. 則"$f(x,y)$ 在 $EFGH$ 內之值",

即指 $f(x,y)$ 在 $(a,b;c,d)$ 內，對 x,y 所有各對值之諸相當值。

分 $EFGH$ 爲四相等長方形，如圖所示者，顯然 λ 至少在此四長方形之一內爲 $f(x,y)$ 諸値之優限，名此長方形爲 $E_1F_1G_1H_1$.

討論長方形 $E_1F_1G_1H_1$ 亦如前之討論 $EFGH$，連續進行，以至無窮，則得一無限之長方式串，

$$EFGH,\ E_1F_1G_1H_1, \cdots, E_nF_nG_nH_n, \cdots, \qquad (1)$$

在每一長方形內，λ 爲 $f(x,y)$ 諸值之優限。

設 a_n 表 E_n 之橫坐標，且 c_n 爲其縱坐標。如在 §1030 之証明，當 n 增至無限時，a_n 及 c_n 漸近一定限。

設 $\lim a_n = x_0$ 且 $\lim c_n = y_0$，則 $f(x_0,y_0)=\lambda$.

因不然令 $$\lambda - f(x_0,y_0) = \alpha. \qquad (2)$$

因 $f(x,y)$ 在 x_0, y_0 爲連續函數，則可選擇 $E_nF_nG_nH_n$ 使 x,y 之各對值在此長方形內爲，§1041，

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \alpha/2. \qquad (3)$$

且因 λ 爲 $f(x,y)$ 諸値在 $E_nF_nG_nH_n$ 內之優限，則可在 $E_nF_nG_nH_n$ 及在 (3) 內取 x,y 之値爲

$$\lambda - f(x,y) < \alpha/2. \qquad (4)$$

由 (3) 及 (4) 則得

$$\lambda - f(x_0,y_0) < \alpha. \qquad (5)$$

但 (5) 與 (2) 爲矛盾。故 (2) 不合理，是以，$f(x_0,y_0) = \lambda$；此即所要証明者。

代數之基本定理

今要証明者凡一有理整數方程，必有一根，§797. 將証明之如下:

1046 **定理.** 已知 $\phi(z)=1+bz^m+cz^{m+1}+\cdots+kz^n$，式中 $b,c,\cdots,k$ 表諸常數，或為有理數，或為複數，而 z 表一複變數：則常可選擇 z 之值，使 $|\phi(z)|<1$.

設令以絕對值及角幅表 z 及 b 之式，877，為

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),b=|b|\cdot(\cos\beta-i\sin\beta).$$

則 $bz^m=\rho^m|b|\cdot[\cos(m\theta+\beta)+i\sin(m\theta+\beta)]$. §§879, 881

第一令為 $$m\theta+\beta=\pi. \tag{1}$$

因 $\cos\pi=-1$ 及 $\sin\pi=0$. §§877, 878

則 $bz^m=\rho^m|b|\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=-\rho^m|b|$,

次令 ρ 為，§854,

$$|c|\rho^{m+1}+\cdots+|k|\rho^n<|b|\rho^m<1. \tag{2}$$

設 z_0 表 z 之值，而相當於如上選擇之 θ 及 ρ 之值，則 $|\phi(z_0)|<1$.

但因 $\phi(z_0)=(1-\rho^m|b|)+cz_0^{m+1}+\cdots+kz_0^n$,

則，§235，由 (2)

$$|\phi(z_0)|\leqq 1-\rho^m|b|+|c|\rho^{m+1}+\cdots+|k|\rho^n, \therefore <1,$$

1047 **推論.** 已知函數為 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$; 設當 $z=b$ 時 $f(z)$ 不為零，則可常得選擇 z 之值，使 $|f(z)|<|f(b)|$.

因在 $f(z)$ 內，使 $z=b+h$，且以太勒兒氏定理展開之，§848. 則可知導來式 $f'(z),f''(z)$ 等等之一部份當 $z=b$ 時

爲零；但其不能全爲零，因 $f^{(n)}(z)=n!a_0$. 令 $f^{m}(z)$ 表不能爲零之第一導來式。

則 $f(b+h)=f(b)+f^{m}(b)\dfrac{h^m}{m!}+\cdots+f^{(n)}(b)\dfrac{h^n}{n!}$.

故 $\dfrac{f(b+h)}{f(b)}=1+\dfrac{f^{m}(b)}{f(b)}\cdot\dfrac{h^m}{m!}+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(b)}{f(b)}\cdot\dfrac{h^n}{n!}$.

則最後方程之第二端，如爲在 §1046 所述形式之 h 多項式，故能選擇 h 之值，使 $|f(b+h)/f(b)|<1$，是以 $|f(b+h)|<|f(b)|$.

定理． 已知 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$；必有一 z 值，使 $f(z)$ 爲零。 1048

因在 $f(z)$ 中，使 $z=x+iy$，式中 x 及 y 爲實數，且用二項定理展開 $a_0(x+iy)^n, a_1(x+iy)^{n-1},\cdots$，在其結果內集合其實數項及其虛數項，則可化 $f(z)$ 爲 $f(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$ 之式，式中 $\phi(x,y)$ 及 $\psi(x,y)$ 所成之實數多項式，故得，§232,

$$|f(z)|=[\phi(x,y)^2+\psi(x,y)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

由 §855，則可求得一正數，如 c，設 $f(z)=0$ 有根，則其諸根之數值，皆比 c 爲小；且設 $c'=c/\sqrt{2}$，顯然 $|z|$ 或 $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$，對於 x, y 爲 $-c'<x<c'$, $-c'<y<c'$ 之諸值，比 c 爲小。

但在此數域 $(-c', c'; -c', c')$ 內，$[\phi(x,y)^2+\psi(x,y)^2]^{\frac{1}{2}}$ 爲 x 及 y 之連續函數，§1042. 故其在此數域內，設當 $x=x_0$, $y=y_0$ 時有一極小值，§1045.

設 $z_0=x_0+iy_0$，則 $|f(z_0)|=[\phi(x_0,y_0)^2+\psi(x_0,y_0)^2]^{\frac{1}{2}}=0$.

因 $|f(z_0)|$ 爲 $|f(z)|$ 之極小值，不能使 $|f(z)|<|f(z_0)|$. 故 $|f(z_0)|=0$，因不然，則 §1047，能選得 z，使 $|f(z)|<|f(z_0)|$.

故當 $z=z_0$ 時，$|f(z)|$ 及 $f(z)$ 爲零；即 z_0 爲方程 $f(z)=0$ 之一根。

答　　案

I. 第 89 頁

1．七，四，八，十，十一。　　2．七。

3．$n=7, a_0=3, a_1=1, a_2=0, a_3=-4, a_4=1, a_5=a_6=0, a_7=-12$.

4．$f(0)=3, f(-1)=0, f(3)=48, f(8)=963$.

5．$f(0)=2/5, f(-2)=12, f(6)=20/17$.

6．$f(1)=5, f(4)=9, f(5)=8+\sqrt{5}$.

7．$f(x-2)=2x-1, f(x^2+1)=2x^2+5$.

8．$f(0,0)=8, f(1,0)=10, f(0,1)=7, f(1,1)=9, f(-2,-3)=1$.

II. 第 97 頁

1．$2x^2y(b-a)$.　　2．a^2+a+b^2.

3．-9.　　4．$-4a^3-4a^2b-21ab^2+11b^3$.

5．$-a+3b-7c$.　　6．x^3+4x^2+5x-2.　　7．b^3-5a^2b.

8．y^3+3y-1.　　9．$-10a+24b$.　　10．$8x+11$.

11．$-5a+5b+9c$.　　12．$2y-4x-2z$.　　13．$x^3-x^2-8x-12$.

14．$-x^4+9x^2+y^2+x-3y-7$.

§316．第 105 頁

1．$a^2+b^2+4c^2+9d^2-2ab+4ac-6ad-4bc+6bd-12cd$.

2．$1+4x+10x^2+12x^3+9x^4$.

3．$x^6-2x^5y+3x^4y^2-4x^3y^3+3x^2y^4-2xy^5+y^6$.

III. 第 106 頁

1．$6x^7-13x^6+7x^5+15x^4-34x^3+35x^2-21x+5$.

2．$15x^5-14x^4a-x^3a^2+7x^2a^3-5xa^4+2a^5$.

3．x^6-y^6.　　4．$6x^6-4x^5-9x^4+35x^3-10x^2-21x+35$.

5．$28x^2-43xy+10y^2$.　　6．$a^2b+(a^2-ab+b^2)x-ax^2-x^3$.

7．$x^6-2x^5+9x^4-10x^3+17x^2-6x$.

8．$2x^{2n-2}-2x^{2n-3}-3x^{2n-4}+8x^{2n-5}-5x^{2n-6}$.

9．$a^4-a^2b^2+6ab^3-9b^4$.　　10．$x^2-9y^2-4z^2+12yz$.

11．$x^3-y^3-3xy-1$.　　12．$a^3+b^3-c^3+3abc$

13. $3x^2-14xy+8y^2+23x-32y+30$.

14. $2x^2+7y^2+24z^2+15xy-59yz-14zx$. 15. b^4-x^4.

16. x^8+x^4+1 17. $2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$.

18. $1+1+1, 1+2+3+2+1, 1+3+6+7+6+3+1,$
$1+4+10+16+19+16+10+4+1$.

19. $1+5+10+10+5+1$
$1+6+15+20+15+6+1$
$1+7+21+35+35+21+7+1$
$1+8+28+56+70+56+28+8+1$
$1+9+36+84+126+126+84+36+9+1$
$1+10+45+120+210+252+210+120+45+10+1$.

20. $16x^2-24xy+9y^2, 64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$.

21. $x^2+4y^2+9z^2+16u^2+4xy+6xz-8xu+12yz-16yu-24zu$.

22. $x^3+8y^3+27z^3+6x^2y+12xy^2+9x^2z+27xz^2+36y^2z+54yz^2$
$+36xyz, x^3+8y^3-27z^3+6x^2y+12xy^2-9x^2z+27xz^2-36y^2z$
$+54yz^2-36xyz$.

23. $a^4-8a^2b^2+16b^4$.

24. $a_0b_{17}+a_1b_{16}+\cdots+a_{17}b_0, a_{12}b_{19}+a_{13}b_{18}+\cdots+a_{27}b_4$.

25. $-4, -14, -55$.

27. $32a^{10}x^{15}y^{35}, -x^{35}y^{56}z^{63}, a^{4n}b^{2mn}c^{6n}, a^{3n}b^{n^2}c^{2n^2}$.

28. $a^{12}b^4c^{12}, -8a^2x^{15}y^{34}$.

IV. 第 110 頁

1. $3a^2/2b$. 2. $-3y^4z/4ax^5$. 3. $-5x^m/4y^m$.

4. $3a^7b^5/c$. 5. $xy/(x+y)$. 6. $(x^2+xy+y^2)(x+y)$.

7. $(a-b)(b-c)(c-a)$. 8. $-6abc+5a^2c^2-4a^3b^2c^4$.

9. $3(x-y)^2-2(x-y)+5$. 10. $6a^7b^3c$.

11. a^3. 12. $-2ax^2/y^2$.

V. 第 119 頁

1. $-1/2$. 2. -2. 3. $-5/2$. 4. 16.

5. 6. 6. 1. 7. 5. 8. $-13/4$.

9. $-39/5$. 10. $779/1439$. 11. $(4a+5b)/3(b+c)$.

12. 1. 13. a. 14. $(a+b)/a$.

15. $(m-n)/(m+n)$. 16. $1/2, 1/3, -1/4, -2/5$. 17. $0, 1, 14$.

18. $0, 8/3$. 19. $c/b, 0$. 20. $1, 1, 2$.

VI. 第 124 頁

1. 68. 2. 14. 3. 26 與 324.

4. 84. 5. 5. 6. 40 與 10; 5 年.

7. 2 時及 24 分. 8. A 25 日; B, $16\frac{2}{3}$ 日

9．8時43$\frac{7}{11}$分成同一方向，8時10$\frac{10}{11}$分成相反方向。

10．5$\frac{5}{11}$分。 11．每時錯30秒。

12．A, \$540; B, \$360; C, \$240; D, \$160． 13．\$42,000．

14．576方呎。 15．80呎。

16．一元者5個，半元者10個，一角者15個。

17．\$3750在6%, \$1250在4%． 18．比2:3．

19．一磅之$\frac{1}{3}$．

20．第一次1器，第二次2器，原液體爲60%酒精。

21．相遇時在11時12$\frac{12}{19}$分，距J城35$\frac{15}{19}$哩。

22．其速每時爲60及36哩，在11時15分相遇。

23．250． 24．金57兩，銀330兩， 25．\$28． 26．75方吋。

27．單位數字爲$(9a+b)/18$，十位數字爲$(9a-b)/18$．

28．至現時爲$(bc-a)/(1-c)$年。

VII．第 131 頁

1．$x=37, y=25$． 2．$x=10, y=7$． 3．$x=3, y=-2$．

4．$x=5, y=-7$． 5．$x=1/3, y=1/2$． 6．$x=4, y=6$．

7．$x=-3/20, y=4/5$． 8．$x=5/2, y=1$． 9．$x=-2, y=1$．

10．$x=(a^2+b^2)/(a+b)+2, y=(a^2+b^2)/(a+b)$．

11．$x=cq/(aq+bp), y=cp/(aq+bp)$．

12．$x=a+b, y=a-b$． 13．$x=10, y=8$． 14．$x=-1, y=1/2$．

15．$x=(bc'+b'c)aa'/(ab'+a'b)cc', y=(ac'-a'c)bb'/(ab'+a'b)cc'$．

16．$x=y=ab/(a+b-ab)$．

VIII．第 136 頁

1．$x=48, y=-32/7$． 2．$x=1/5, y=2$．

3．$x=2, y=3$． 4．$x, y=0, 1/2; 0, 2; 1, 0; -2/3, 0$．

5．$x, y=1, 1; -5/3, 0$． 6．$x, y=0, 5/2; 5/3, 5/3; -5, 5$．

7．$x, y=1, 3; 2, 2$． 8．$x, y=2, 1; -4, 5$．

9．$x, y=-1/3, 4/3; -3, 2; -3/5, 8/5; -7/5, 2/5$．

10．$x, y=-3, 1; 2, 2; -2, -1; 4, -3$．

X．第 147 頁

1．$x=5, y=6, z=7$． 2．$x=1, y=-3, z=3$．

3．$x=5, y=2, z=2$． 4．$x=-7, y=-1, z=-3$．

5．$x=33/5, y=22/5, z=11/10$． 6．$x=1, y=-1, z=7$．

7．$x=1/8, y=1/7, z=1$． 8．$x=2, y=3, z=5, u=-4$．

9．$x=0, y=4, z=-3, u=0$．

10．$x=\dfrac{l-m+n}{2c}, y=\dfrac{l+m-n}{2b}, z=\dfrac{-l+m+n}{2a}$．

11. $x=\dfrac{mnd}{amn+bnl+clm}$, $y=\dfrac{nld}{amn+bnl+clm}$, $z=\dfrac{lmd}{amn+bnl+clm}$.

12. $x=-12, y=-8, z=-4$.

13. $(x-y-3)+(y-z+5)+(z-x-2)\equiv 0$.

14. $2(3x-8y+7z-10)+5(2x+5y-3z-12)-(16x+9y-z-80)\equiv 0$.

XI. 第 150 頁

1. 5, 6, 及 9.　2. 33, 14, 及 4.　3. 87.　4. A, \$4600; B, \$600.
5. A, $(p-q+r)/2$; B, $(p+q-r)/2$; C, $(-p+q+r)/2$.
6. \$2345, $4\frac{1}{2}$%.　7. \$15,500.　8. 12方吋.
9. A, \$27; B, \$13.　10. A, 12 日; B, 9 日; C, 8 日.
11. 每秒18及12 呎.　12. 每時 20 及 16 哩.
13. 每時 $A's$, 15 哩; $B's$, 10 哩.　14. $10\frac{10}{43}$ 碼.
15. 每秒 $A's$, $7\frac{17}{26}$ 碼; $B's$, 7 碼.　16. 100 磅.
17. A, 1/3; B, 11/3; C, 5.　18. A, 64%; B, 32%.
19. 音速度每秒 1100 呎，彈速度 $1447\frac{7}{10}$ 呎.
20. 瓶之容積 18,000 器，每分鐘經過 A300 器, B 200 器, C 600 器.

XII. 第 154 頁

1. $3(x-2)^3+17(x-2)^2+34(x-2)+19$.
2. $(2x+3)^2-2(2x+3)+4$.　3. $f(x)=43x^2/24-8x+29/24$.
4. $f(x)=3x^3+x+5$.　5. $f(x,y)=2x-3y+4$.
6. $2x+y-7=0$.　7. 無.　8. $x+3y-11=0$.
9. $c=3$.　10. $2x-5y+11=0$, $4x-y-5=0$.
11. $x^3-2x^2-5x+6=0$.　12. $x^2+xy-x-4y=0$.
13. $3x+2y-3\equiv-(x+y-1)+(2x-y+2)+2(x+2y-3)$.

§401. 第 158 頁

2. $Q=x^2+3$, $R=-4x+4$.

§404. 第 161 頁

2. $Q=3x^3+5x^2-11x/2+9/4$, $R=-9x/4+5/2$.

§405. 第 161 頁

2. $l=-11$, $m=-6$.

§408. 第 164 頁

2. $2-x+6x^2-7x^3+13x^4$.

§409. 第 164 頁

2. $2x+3y-1$.

XIII. 第 165 頁

1. $Q=2x^2-3x+4$, $R=2x+4$.　　2. $Q=3x^2-8x+5$, $R=0$.

3. $Q=2x^3-x^2+3x-5$, $R=20$.

4. $Q=4x^4+x^2-x+3$, $R=-2x^2+4x-8$.

5. $Q=2x+3$, $R=6x-11$.

6. $Q=2x^2-3x+6$, $R=-12x^2+24x-17$.

7. $3x^3-5x^2-7x+12\equiv(x-2)(3x^2+x-5)+2$.

8. $a=-3/2$, $b=-3/2$.　　9. $a=-2$, $b=5$.

10. $Q=x^4+x^2+1$, $R=0$.　　11. $Q=2x-y+3$, $R=0$.

12. $Q=a-b+2c$, $R=0$.　　13. $Q=a+b-c$, $R=0$.

14. $Q=x^2+ax+2a$, $R=0$.　　15. $Q=4x^2+6xy+9y^2$, $R=0$.

16. $Q=x^3+x^2y+xy^2-3y^3$, $R=0$.

17. $Q=3a^3+2a^2b-ab^2+4b^3$, $R=0$.

18. $Q=x^2-yx/2+3y^2/4$, $R=y^3/4$; $Q'=y^2-xy+2x^2$, $R'=-2x^3$.

19. $Q=1-4x+6x^2$, $R=6x^3-18x^4$.

20. $Q=1+4x+10x^2$, $R=10x^3-50x^4$.

21. $1+2x+4x^2+8x^3$.　　22. $2+5x+5x^2-5x^3$.

§412. 第 169 頁

3. $Q=5x^4+15x^3+44x^2+132x+397$, $R=1193$.

4. $Q=x^2+3x+2$, $R=0$.　　5. $Q=x^2+4$, $R=0$.

§414. 第 170 頁

2. $f(2)=48$, $f(-2)=96$, $f(4)=756$, $f(-2/3)=112/9$.

XIV. 第 173 頁

1. $Q=x^3+x^2+3x+1$, $R=0$.

2. $Q=5x^4+9x^3+19x^2+64x+198$, $R=597$.

3. $Q=3x^3-6x^2+13x-26$, $R=51$.

4. $Q=x^2+5x-6$, $R=0$.　　5. $Q=x^2-5x/3-2/9$, $R=16/9$.

6. $Q=x^2-(b+c)x+bc$, $R=0$.　　7. $Q=2x^3+3x^2y-xy^2+5y^3$, $R=0$.

8. $f(1)=0$, $f(2)=9$, $f(5)=228$, $f(-1)=6$, $f(-3)=-36$, $f(-6)=-399$.

9. $m=3$.　　10. $l=-22$, $m=-24$.　　13. $2x^3-6x^2-12x+16$.

14. $5x^3-24x^2+25x+6$.

XV. 第 176 頁

1. $(x^2+1)^2+(x-2)(x^2+1)-x$. 2. $(2x^2+1)^2+x(2x^2+1)+5$.
3. $(2x+1)(x^3-x^2+x+3)^2-(2x^2+8x)(x^3-x^2+x+3)+(6x^2-3)$.
4. $(x-2y)(x^2+xy+y^2)^2+(2x+3y)y^2(x^2+xy+y^2)-2xy^4$.
5. $2(x-3)^3+10(x-3)^2+7(x-3)-9$.
6. $(x+2)^5-7(x+2)^4+10(x+2)^3+30(x+2)^2-99(x+2)+85$.
7. $(x+3)^3-27$ 8. $(x+1)^3-2(x+1)$.

XVI. 第 180 頁

1. $2x^2y^3(3x^2z^2-6yz+4)$. 2. $3n(n-1)$. 3. $(a+1)(b-1)$.
4. $(m-n)(x-n)$. 5. $(3y-2)(x-4)$. 6. $(2x+y)(5y+3)$.
7. $xy(x-y)(xy+2)$. 8. $x(x+1)(x^2+1)$. 9. $(a-b)(c-d)$.
10. $a(c+d)(a-b)$. 11. $(d+c)(a+b+c)$. 12. $(a+d)(a-b+c)$.

§435. 第 181 頁 習題 3

1. $(x+7)^2$. 2. $(3-a)^2$. 3. $(3xy+5)^2$.
4. $(x-2y+3)^2$. 5. $(8a^4-3)^2$. 6. $(a-b+c)^2$.

§436. 第 181 頁

1. $(x^2+y^3)(x^2-y^3)$. 2. $6a(a+b)(a-b)$.
3. $3ax(2ax+5y)(2ax-5y)$. 4. $(5x^n+7x^m)(5x^n-7x^m)$.
5. $(6x^2+1)(\sqrt{6}x+1)(\sqrt{6}x-1)$. 6. $(x^2+xy-y^2)(x^2-xy-y^2)$.

§438. 第 182 頁

1. $(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$. 2. $(3x+1)(9x^2-3x+1)$.
3. $(4x^2+9y^2)(2x+3y)(2x-3y)$.

§439. 第 181 頁

1. $(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)(x^2-\sqrt{2}xy+y^2)$.
2. $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.
3. $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$.

XVII. 第 184 頁

1. $xy(2x-5y)^2$. 2. $7a(2x+3y)(2x-3y)$.
3. $(x-2y+3z)^2$. 4. $45(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$.
5. $48x(x+1)^2(x-1)$. 6. $(2+a+2b)(2-a-2b)$.
7. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. 8. $(a^2+2ab-b^2)(a^2-2ab-b^2)$.
9. $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$. 10. $(3x^2+3xy+4y^2)(3x^2-3xy+4y^2)$.

11. $(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$.

12. $9y^3(2x+y^2)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)(4x^2-2xy+y^4)$.

13. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$.

14. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.

15. $(x^2+y^2)(x^8-x^6y^2+x^4y^4-x^2y^6+y^8)$.

16. $(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$.

17. $(x+y^2)(x^6-x^5y^2+x^4y^4-x^3y^6+x^2y^8-xy^{10}+y^{12})$.

XVIII. 第 185 頁

1. $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)$.　2. $(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+2x+4)$.

3. $(x+1)(x-1)^3$.　4. $(x+2)(x-2)(x-7)$.

5. $(x+y)^2(x-y)^2(x^2+y^2)$.　6. $(x+1)(x^2+x+2)$.

7. $(x+1)(x^4+x^3+2x^2+x+1)$.　8. $(x^2+2x+3)^2$.

§442. 第 186 頁 習題 4

1. $(x+1)(x+2)$.　2. $(x-1)(x-15)$.　3. $(x+2)(x-6)$.

4. $(x+6)(x-5)$.　5. $(x+8)(x+12)$.　6. $(x-5)(x-16)$.

§443. 第 187 頁 習題 4

1. $(3x-2)(2x-3)$.　2. $(x+3)(5x-1)$.　3. $(2x+1)(7x-3)$.

4. $(3x+1)(6x+5)$.　5. $(7x+4)(7x+11)$.

6. $abx^2-(ac-b^2)x-bc=(ax+b)(bx-c)$.

§444. 第 188 頁 習題 4

1. $(x+5+\sqrt{2})(x+5-\sqrt{2})$.　2. $(x-4)(x-6)$.

3. $(x-6+3i)(x-6-3i)$.　4. $[x+(1+\sqrt{3}i)/2][x+(1-\sqrt{3}i)/2]$.

5. $2[x+(3+\sqrt{7}i)/4][x+(3-\sqrt{7}i)/4]$.　6. $(x-2b)(x-4a+2b)$.

§445. 第 189 頁 習題 2

1. $(x+y)(x+4y)$.

2. $\left(x-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}y\right)$.

§446. 第 190 頁

2. $(2x-y+z)(x-3y+2z)$.

XIX. 第 190 頁

1. $(x-6)(x-8)$. 2. $[x-(21+\sqrt{921})/2][x-(21-\sqrt{921})/2]$.
3. $(x-11)(5x+2)$. 4. $(4x+7)(4x+9)$.
5. $(6x-1)(9x-2)$. 6. $4(x+2y)(3x-y)$.
7. $(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)$. 8. $xy(x+3y)(x-6y)$.
9. $[x-(3+\sqrt{3}i)/2][x-(3-\sqrt{3}i)/2]$.
10. $3[x+(1+\sqrt{10})/3][x+(1-\sqrt{10})/3]$.
11. $[x-(2+\sqrt{6})y][x-(2-\sqrt{6})y]$. 12. $(x+3b)(x-6a-3b)$.
13. $(ax+a-b)(bx-a-b)$. 14. $[(1+c)x+b][x+d]$.
15. $(x-3y-1)(x-5y+3)$. 16. $(x+y+2z)(x+2y+z)$.

XX. 第 194 頁

1. $(x-1)(x-2)(x+3)$. 2. $(x+1)(x+2)(x+3)$.
3. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. 4. $(x-1)(x+2)(x^2-x+1)$.
5. $(x-3)(2x+1)(3x+1)$.
6. $[x-(1+\sqrt{3})y][x-(1-\sqrt{3})y](2x-y)$. 7. $(x-1)^3(2x+5)$.
8. $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)(2x+1)(2x-1)$.
9. $(x+2)(2x+1)(3x+2)(x^2+1)$.
10. $(x+1)(x-1)(x-2)(5x-2)(x^2+x+1)$.
11. $x=-2, 6$. 12. $x=1/2, 2/3$. 13. $x=7, -2$.
14. $x=-3\pm\sqrt{11}$. 15. $x=2, 3, 4$. 16. $x=1, 1, -1, -3$.
17. $x=1, (-1\pm\sqrt{3}i)/2$. 18. $x=1, 2/5, -1/2$.

XXI. 第 195 頁

1. $(3x-2)(2y+5)$. 2. $(ac-bd)(ab-cd)$.
3. $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$. 4. $a(a+3b)(a-3b)(a^2+9b^2)$.
5. $ab(a-b)(a+b)^2$. 6. $(3ax+y)(bx-2y)$.
7. $3(x+2y)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$.
8. $(x-1)(x+2)(x^4+2x^3+3x^2+2x+4)$.
9. $y^3(2x+y^2)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)(4x^2-2xy^2+y^4)$.
10. $(x-a)(x+b)$. 11. $(x^n+3)(x^n-6)$.
12. $-(x+6)(x-7)$. 13. $3(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$.
14. $(x+2)(x+3)(x-3)(x^2+2x+4)$. 15. $(x+a+b+c)(x-a-b+c)$.
16. $(x+2)(x+4)(x-2)(x-4)$. 17. $(a-b-2)(a-b-3)$.
18. $(x+y)(x+3y)(x-y)(x-3y)$. 19. $(2x+y)(3x-5y-2)$.
20. $(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$.
21. $(-x+y+z+u)(x-y+z+u)(x+y-z+u)(x+y+z-u)$.
22. $(2x+3)(7x-1)$. 23. $(1+22y)(1-3y)$.
24. $xy(y+4x)(y+51x)$. 25. $(a+3bc)^2(a-3bc)^2$.

26. $x(x-1)(x-6)(x-7)$.

27. $(5y-x)(7y^2-10xy+19x^2)$.

28. $(x+y)(x-y)^3$.

29. $(x+a)(x+a-b)$.

30. $5xy(x-y)(x^2-xy+y^2)$.

31. $(x+1)^2(x-1)^3$.

32. $(b^2+b+1)(b^2-b+1)$.

33. $(2x+y-1)(x+3y+5)$.

34. $(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$.

35. $(x+y+3z)(x-2y+z)$.

36. $(2a^2+3ab+3b^2)(2a^2-3ab+3b^2)$.

37. $(x+5b)(x-8a-5b)$.

38. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

39. $4x^2(2x-1)$.

40. $(a+b)(a-b)(x+y)(x-y)$.

41. $(x-a)(x+b)(x-b)$.

42. $(x-a)(x+b)(x^2+ax+a^2)$.

43. $(a+3b-2c)(a-3b+2c)$.

44. $(2a+1)^3$.

45. $(x^2-x+1)^2$.

46. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

47. $(x+1)(x+3)(x-3)(2x+1)(2x-1)$.

48. $(x-1)^2(x^2+2x+3)$.

49. $(x+3a+b)(x+2a-b)$.

50. $(x+2)(3x-2)(5x+3)$.

51. $(cx+ab)(abx+c)$.

52. $(x+a)(x-2a)(2x+a)$.

53. $(x+1)[(a-b)x+(a+b)]$.

54. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
$(x^8-x^7y+x^5y^3-x^4y^4+x^3y^5-xy^7+y^8)$.

55. $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$.

56. $(x-1)(2x+1)^2$.

57. $(x-1)(x-4)(3x+2)(x^2+x+1)$.

58. $(x-2)(x+3)(x+4)(5x-1)$.

59. $(ab+c+d)(ac-d)$.

60. $(x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(-x-y+z)$.

§459. 第 197 頁　習題2

1. x^3y^2.　2. $x+y$.　3. $x+2$.　4. $(x-2)(x-3)$.

§460. 第 198 頁　習題3

1. $x+3$.　2. $(x+2)(x+3)$.　3. $(x-1)(x-3)^2$.

§462. 第 199 頁　習題3

1. $x-2$.　2. $x+4$.

§468. 第 203 頁

2. $2x^2+x+1$.

XXII. 第 204 頁

1. x^3yz^3.　2. $(a+b)(a-b)$.　3. y^2-y+1.

4. $a+1$.　5. $x-1$.　6. x^2+y^2.

7. $x+2$.　8. $(x-1)(x-2)$.　9. x^2+x+1.

10. $(x+1)^3$. 11. $(x-1)(x-2)^2$. 12. $x+2$.
13. x^2+x+1. 14. x^2+x-6. 15. x^3+x^2-x-1.
16. $3x-7$. 17. $3x+5$. 18. $x(6x^2+7x-3)$.
19. $2x^2-x+3$. 20. $2x^3-4x^2+x-1$. 21. x^2+x+1.
22. $x+2$. 23. x^2-3. 24. $y(x-2y)$.
25. $(x-1)(x+3)$. 26. $(2x-3)^2(x+1)$.

XXIII. 第 207 頁

1. $(9x^2+1)(9x^2-1)$. 2. $(a^5+b^5)(a^5-b^5)$.
3. $a^3(a+1)(a^3-1)$. 4. $(x-y)^4(x+y)^2(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)$.
5. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
6. $(x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(-x-y+z)$.
7. $(2x-3y)(x+3y)(3x-y)$. 8. $(x+1)(x-1)(x^2+1)$.
9. $(a^2+xy)(2x+3y)(2x-3y)$.
10. $x(2x+3y)(2x-3y)(2x-y)(4x+5y)$. 11. $(x^3+y^3)(x^3-y^3)$.
12. $(x^2-1)(x^4+x^2+1)(3x-5)(x^2+1)$.
13. $(2x+3)(4x^2-6x+9)(4x^2+6x+9)(3x-2)$.
14. $(x^2+4a^2)(x+2a)(x-2a)$. 15. $x(x+2)(x+b)(x-b)(x+a)$.
16. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(2x-5)$.
17. $(x-2)(x^2+2x+4)(3x+1)(9x^2-3x+1)(2x+1)(x^2+x+1)$.
18. $(x-1)(x-2)(x-3)(x+3)(2x-1)$.
19. $(2x^4-x^3+10x^2+4x+5)(x^2+x+1)(x^2+3)$.
20. $(2x^4+3x^3-4x^2+13x-6)(x+1)^2$.

§491. 第 212 頁

習題. $m=5$, $n=-14$.

XXIV. 第 215 頁

1. $xy(x+2y)$. 2. $\frac{x^3+xy+y^3}{x^2+y^2}$. 3. $\frac{x+3}{x+9}$.
4. $\frac{x-3}{x+2}$. 5. $\frac{3(x-3b)}{2(x+3b)}$. 6. $\frac{5x+a}{5x-3a}$.
7. $\frac{(x+5)(x-5)}{(x+3)(x-2)}$. 8. $\frac{3x-5}{2x-3}$. 9. $\frac{1}{x^2-y^2}$.
10. $\frac{x-y+z}{x+y-z}$. 11. $1-y^2$. 12. $\frac{m-6n}{3m-n}$.
13. $\frac{2x^2+5x-12}{2x^2+x-15}$. 14. $\frac{x-1}{2x+1}$. 15. $\frac{x^2+4}{2(x^2+6)}$.
16. $\frac{x-3}{x^2+2x+4}$. 17. $\frac{x^2-2bx+c^2}{x^2+2bx-c^2}$. 18. 3

XXV. 第 222 頁

1. $\frac{2}{2a+3b}$.　2. $\frac{x^3-x^2+2x-1}{(x^3+1)(x-1)}$.　3. $\frac{3}{(x-1)(x-3)}$.

4. $\frac{3x^2-11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.　5. $\frac{2x(b^2-c^2)}{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}$.　6. 0.

7. a.　8. $-\frac{8x^2+6x-9}{8x^3-27}$.　9. 4.

10. $3a^2+3b^2+3c^2+4ab+4ac+4bc$.　11. $\frac{7}{x^2-x-3}$.

12. $\frac{2}{x^4-4x^2-x+2}$.　13. $\frac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3}$.　14. a^3+1.

15. $\frac{x+1}{x-1}$.　16. $\frac{2x-3}{x(x+1)}$.　17. $\frac{x^3}{x+a}$.

18. $x^2-y^2+z^2-2xz$.　19. $\frac{4ab}{(a-b)^2}$.　20. $\frac{-x+y+z}{x-y+z}$.

21. $-\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}$.　22. $\frac{x^2-3x+1}{x^2-4x+1}$.　23. $\frac{x^4+3x^2+1}{x^3+2x}$.

XXVI. 第 230 頁

1. 1/2.　2. -3.　3. ∞.　4. 0.
5. $-5/4$.　6. ∞.　7. $3/2, \infty, 0, 2$.　8. $-1/9$.
9. ∞.　10. 3.　11. 2/3.

XXVII. 第 235 頁

1. $x=1$.　2. $x=15/31$.　3. $x=6$.
4. $x=4$.　5. $x=5/6$.　6. $x=-5/3$.
7. $x=0$.　8. $x=-(a+b)$.　9. $x=-10$.
10. $x=-2$.　11. $x=-2/3$.　12. $x=-7$.
13. $x=3/4$.　14. $x=3$.　15. $x=-4$.

16. $x=\frac{cq+dp+(a+b)pq}{c+d+ap+bq}$.　17. $x=-71/33$.

18. $x=2bc/(b+c)$.　19. $x=(a+b+c)/3$.　20. $x=-5$.
21. 無根.　22. $x=3, y=-2$.　23. $x=1, y=3$.

24. $x=\frac{2abc}{ab+bc-ca}, y=\frac{2abc}{-ab+bc+ca}, z=\frac{2abc}{ab-bc+ca}$.

25. $x=2, y=-2, z=4$.

§ 534. 第 239 頁

2. $-\frac{4}{x}+\frac{4x^2+4x+9}{x^3+x^2+x-1}$.

XXVIII. 第 244 頁

1. $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+3}$.　　2. $\frac{8}{5(2x+1)}+\frac{3}{5(3x-1)}$.

3. $-\frac{2}{x+1}+\frac{8}{x+2}-\frac{6}{x+3}$.　　4. $-\frac{1}{x-1}+\frac{11}{2(x-2)}-\frac{9}{x-3}+\frac{9}{2(x-4)}$.

5. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}$.　　6. $\frac{2}{x}+\frac{3}{1+x}+\frac{5}{1-x}$.

7. $x+2+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}$.　　8. $\frac{2}{x-2}+\frac{11}{(x-2)^2}+\frac{20}{(x-2)^3}+\frac{13}{(x-2)^4}$.

9. $\frac{1}{12x}+\frac{3}{44(x-4)}-\frac{10}{33(2x+3)}$.　　10. $-\frac{4}{2x^2+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$.

11. $\frac{2}{(x+3)^2}-\frac{21}{(x+3)^3}+\frac{76}{(x+3)^4}-\frac{98}{(x+3)^5}$.　　12. $\frac{x}{x^2+1}-\frac{x-1}{x^2+2}$.

13. $\frac{3}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x-3)}+\frac{13}{(x-3)^2}$.　　14. $\frac{1}{x-2}-\frac{x-1}{x^2+1}$.

15. $\frac{2x-4}{x^2+x+1}+\frac{2x+6}{(x^2+x+1)^2}-\frac{3x+1}{(x^2+x+1)^3}$.

16. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.　　17. $\frac{1}{x^2+2}+\frac{2}{3(x-2)}-\frac{2}{3(x+1)}$.

18. $\frac{a^2+pa+q}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{x-a}+\frac{b^2+pb+q}{(b-a)(b-c)}\cdot\frac{1}{x-b}+\frac{c^2+pc+q}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{x-c}$.

19. $-\frac{2}{27x}+\frac{25}{256(x-1)}-\frac{3}{64(x-1)^2}-\frac{163}{6912(x+3)}-\frac{35}{288(x+3)^2}$
$-\frac{25}{48(x+3)^3}$.　　20. $\frac{4x+3}{2(x^2+x+1)}-\frac{2x-3}{2(x^2-x+1)}$.

XXIX. 第 249 頁

1. x 及 z.
2. $\sum a^2b^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.
$\sum a^3b^4=a^3b^4+b^3a^4+b^3c^4+c^3b^4+c^3a^4+a^3c^4$.
$\sum a^2/b=a^2/b+b^2/a+b^2/c+c^2/b+c^2/a+a^2/c$.
$\sum a^2b^3c^5=a^2b^3c^5+a^2c^3b^5+b^2c^3a^5+b^2a^3c^5+c^2a^3b^5+c^2b^3a^5$.
$\sum a^2b^2c^4=a^2b^2c^4+a^2c^2b^4+b^2c^2a^4$.
$\sum(a+b)c=(a+b)c+(b+c)a+(c+a)b$.
$\sum(a+b^2)c^3=(a+b^2)c^3+(b+a^2)c^3+(b+c^2)a^3+(c+b^2)^3$
$+(c+a^2)b^3+(a+c^2)b^3$.
$\sum(a+2b+3c)=(a+2b+3c)+(a+2c+3b)+(b+2c+3a)$
$+(b+2a+3c)+(c+2a+3b)+(c+2b+3a)$.
4. 無.
5. $y^2-x^2,\ x^2-z^2,\ z^2-y^2$; $a^2bc,\ b^2cd,\ c^2da,\ d^2ab$; $(a-c)(b-a)$,
$(b-a)(c-b),(c-b)(a-c)$.

6. $ab^3c^2+bc^3d^2+cd^3a^2+da^3b^2$, $a(b-c)+b(c-d)+c(d-a)+d(a-b)$,
$(b+2c)(a+d)+(c+2d)(b+a)+(d+2a)(c+b)+(a+2b)(d+c)$,
$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-d)}+\frac{c^2}{(c-d)(c-a)}+\frac{d^2}{(d-a)(d-b)}$.

XXX. 第 251 頁

1. $-(x-y)(y-z)(z-x)$.
2. $-(x-y)(y-z)(z-x)$.
3. $3(x-y)(y-z)(z-x)$.
4. $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.
5. $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$.
6. $-(x+y)(y+z)(z+x)(x-y)(y-z)(z-x)$.
7. $3(x+y)(y+z)(z+x)$.
8. $5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.
9. $80xyz(x^2+y^2+z^2)$.
10. $-2(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.
11. $(x+y)(y+z)(z+x)$.
12. $-(x-y)(y-z)(z-x)(x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y+xyz)$.
13. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$. 14. 0. 15. 0. 16. 1. 17. $\frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

XXXI. 第 259 頁

1. $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$.
2. $a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$.
3. $1+14x^2+84x^4+280x^6+560x^8+672x^{10}+448x^{12}+128x^{14}$.
4. $16+\frac{32}{x}+\frac{24}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4}$.
5. $x^6-18x^4+135x^2-540+\frac{1215}{x^2}-\frac{1458}{x^4}+\frac{729}{x^6}$.
6. $\frac{x^5}{y^5}-5\frac{x^3}{y^3}+10\frac{x}{y}-10\frac{y}{x}+5\frac{y^3}{x^3}-\frac{y^5}{x^5}$.
7. $1-4x+14x^2-28x^3+49x^4-56x^5+56x^6-32x^7+16x^8$.
8. $a^6+3a^5x-5a^3x^3+3ax^5-x^6$.
9. $231x^5/16$.
10. $-3153199104a^5b^7$.
11. $-8064a^{10}b^5c^5$.
12. $126x^4$, $-126x^5$.
13. 56.
14. 15120.
15. 15.
16. -648.
17. 924.
18. 2, 795, 520.
19. $x^3-6x^2y-xy^2+30y^3$.
20. $x^4-4x^3-19x^2+46x+120$
21. 96.
22. 64, 400.
23. 16, 16, 24.

§ 568. 第 260 頁

1. $\frac{8a^2b^3}{5c^4d^5}$.
2. $3xy^2z^3$.
3. $\frac{2x^2y^6}{az^5}$.

§ 569. 第 262 頁

3. $2x^2-x+1$.

§570. 第 264 頁

$5x^2-4x+3.$

§572. 第 264 頁

2. $2-\frac{x}{4}+\frac{15x^2}{64}.$

XXXII. 第 269 頁

1. $-\frac{3x^2y^5}{5a^3z^4}.$　　2. $\frac{23a^2b^3}{25cd^4}.$　　3. $xy(x-y).$
4. $x^2-x+1.$　　5. $x^3-x+3.$　　6. $2x^3+3x^2y-y^3.$
7. $2x-5-3/x.$　　8. $7-6x-5x^2.$　　9. $x^4+x^3-x^2+x-2.$
10. $x^2-2x-1.$　　11. $2x^2-3xy+4.$　　12. $\frac{x}{y}+xy+\frac{y}{x}.$
13. $1-x-x^2/2-x^3/2.$　　14. $2-x/4+47x^2/64+47x^3/512.$
15. $x^2+x+1.$　　16. $3x^4+x^2-1.$　　17. $2x^2-3ax+3a^2.$
18. $\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}.$　　19. $1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2.$　　20. $x^2-x+1.$
21. $x^2+x+1.$　　22. $a=6, b=1.$　　23. 167.　　24. 48.1.
25. 24.15.　　26. 2037.　　27. .0566.　　28. 3.001.　　29. 1.414.
30. 7.449.　　31. 15.315.　　32. 123.　　33. 55.1.　　34. 10.12.

XXXIII. 第 274 頁

1. $3\sqrt{2}.$　　2. $14\sqrt{3}.$　　3. $-9.$
4. $-\sqrt[3]{10}.$　　5. $\sqrt{6}/2.$　　6. $\sqrt[3]{12}/2.$
7. $\sqrt[3]{6}/2.$　　8. $\sqrt[5]{6}/2.$　　9. $ab^2c^3d\sqrt[3]{25d}.$
10. $2c\sqrt[6]{2a^2b^4c^2}.$　　11. $z\sqrt[4]{2x^2y^3z}.$　　12. $\sqrt[12]{5ab^2c^3}.$
13. $\sqrt[3]{ab^2c^3}.$　　14. $a^2b^3c^4\sqrt[12]{ab^2}.$　　15. $x\sqrt{y^2-z^2}.$
16. $(x+y)\sqrt{(x-y)}.$　　17. $x\sqrt[3]{x^3-y^3}.$　　18. $b\sqrt{a(a-b)}.$
19. $\frac{1}{4ab}\sqrt[3]{2a^2b(a^3+b^3)}.$　　20. $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}.$
21. $\frac{1}{3(x+1)}\sqrt[3]{3(x^3+1)}.$　　22. $\sqrt[3]{b^3-a^3}/b.$
23. $\frac{c}{a^nb^{n+1}}\sqrt[n]{bc^n}.$　　24. $\frac{ax-b}{b^2}\sqrt{b}.$　　25. $\sqrt{27a^3}.$
26. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$　　27. $\sqrt[4]{3ax}.$　　28. $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \sqrt{2}/4.$
29. 易 $\sqrt[6]{192}$ 以 $\sqrt[3]{192}$. 則三式變爲 $2\sqrt[3]{3}$. $4\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt[3]{3}/3$.
30. $(x-y)\sqrt{x^2+xy+y^2}, xy\sqrt{x^2+xy+y^2}.$

XXXIV. 第 277 頁

1. $\sqrt[10]{243}, \sqrt[10]{27}, \sqrt[10]{9}$.　　2. $\sqrt[12]{a^8}, \sqrt[12]{8a^9b^6}, \sqrt[12]{49b^{10}}$

3. $3\sqrt{2}=\sqrt[6]{5832}, 2\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{576}$. $\therefore 3\sqrt{2}>2\sqrt[3]{3}$.

4. $\sqrt{3}=\sqrt[12]{729}, \sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{256}, \sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{125}$. $\therefore \sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}$.

5. 5.　6. $2\sqrt{5}$.　7. $2\sqrt[3]{4}$.　8. 30.

9. $30\sqrt[3]{3}$.　10. $\sqrt{6}/3$.　11. $2\sqrt[12]{2}$.　12. $\sqrt[12]{17578125}/5$.

13. 10.　14. $a^2b^3c^6\sqrt[6]{ab^5c}$.　15. $\sqrt[60]{a^5}$.　16. $\sqrt[3]{a^2b^2}$.

17. abc^2.　18. $\sqrt[60]{a^{211}}$.　19. $\sqrt[18]{ab^{17}}/b$.　20. $\frac{1}{ab}\sqrt[3]{b^2}$.

21. $24\sqrt{3}$.　22. a^4.　23. $64xy^3z^4\sqrt{xz}$.　24. $\sqrt[6]{a}$.

25. $\sqrt{2}$.　26. $\sqrt[15]{ab^2c^7}/c$.　27. $\sqrt[3]{4}$.　28. $\sqrt[4]{8}$.

29. $\sqrt[3]{4}$.　30. $\sqrt[12]{32}$.　31. $\sqrt[30]{a}$.　32. $\sqrt[4]{a^3}$.

33. $10\sqrt{3}$.　34. $\frac{51}{10}\sqrt{5}+3\sqrt{7}$.　35. $\frac{5}{2}\sqrt[3]{4}$.

36. $\frac{a+b+c}{abc}\sqrt{abc}$.　37. $\frac{7}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$.　38. 0.

39. $(3+2a)\sqrt{ax}$.　40. $\frac{1}{x^2-y^2}\sqrt{x^2-y^2}$.　41. $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+6$.

42. $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.　43. $7\sqrt{3}+4\sqrt{10}$.　44. $\sqrt{17}$.

45. $10+6\sqrt{3}$.　46. $a+\sqrt{a}+1$.

XXXV. 第 282 頁

1. $a^{\frac{2}{3}}$.　2. $c^{\frac{2}{3}}$.　3. $a^{\frac{6}{5}}$.　4. $b^{\frac{10}{6}}$.

5. $\sqrt[3]{a^2}$.　6. $\frac{1}{c^2}\sqrt{c}$.　7. $\frac{1}{d^4}$.　8. $\sqrt{c}$.

9. $\frac{b^3c^2}{a}$.　10. $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{8}{2}}}$.　11. $\frac{1}{x^{10}}$.　12. $\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$.

13. $bc-c^2b^{-1}$.　14 $125\cdot 2^{\frac{1}{2}}/32$.　15. 27.　16. 9.

17. $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{256}$.　18. $a^{\frac{9}{4}}$.　19. 1.　20. $(ab)^{\frac{5}{4}}$.

21. a^4b^{-3}.　22. $a^{\frac{1}{6}}$.　23. $a^2b^4c^{-6}$.　24. $-8a^6$.

25. b^6a^{-4}.　26. $b^{\frac{3}{4}}$.　27. $a^{-1}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}$.　28. $5a^{11}/4$.

29. $a^{\frac{1}{3}}b^{-1}c$.　30. $a^{-\frac{1}{12}}$.　31. a^2.　32. x^{3}.

33. $x^{\lambda^2}y^{y\lambda^2}$.　34. $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$.　35. $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$.

36. $a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{2}}+ab+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{3}}b^{2}+b^{\frac{5}{2}}$.

37. $x^{2}-4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}+6xy^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}+yz$.

38. $e^{x}-e^{-x}$.　39. $x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$.　40. $x+1+x^{-1}$.

XXXVI. 第 284 頁

1. $1+\frac{x}{3}-\frac{x^{2}}{9}+\frac{5x^{3}}{81}$.　2. $a^{-\frac{1}{2}}-\frac{a^{-1}x^{-\frac{2}{3}}}{2}+\frac{3a^{-\frac{5}{2}}x^{-\frac{4}{3}}}{8}-\frac{5a^{-\frac{7}{3}}x^{-2}}{16}$.

3. $9-\frac{4x}{3^{2}}-\frac{4x^{2}}{3^{6}}-\frac{32x^{3}}{3^{11}}$.

4. $a+\frac{1}{m}a^{1-m}x+\frac{1-m}{m^{2}2!}a^{1-2m}x^{2}+\frac{(1-m)(1-2m)}{m^{3}3!}a^{1-3m}x^{3}$.

5. $a^{4}+4a^{5}b^{-\frac{1}{2}}+10a^{6}b^{-1}+20a^{7}b^{-\frac{3}{2}}$.

6. $x^{-3}-6x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{1}{3}}+21x^{-4}y^{\frac{2}{3}}-56x^{-\frac{9}{2}}y$.

7. $\frac{1}{2}-\frac{3x}{4}+\frac{9x^{2}}{8}-\frac{27x^{3}}{16}$.　8. $1-\frac{2x}{5}+\frac{7x^{2}}{25}-\frac{28x^{3}}{125}$.

9. $1-\frac{9x^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{135x}{8}-\frac{945x^{\frac{3}{2}}}{16}$.　10. $-55x^{3}$.

11. $\frac{-663}{2^{10}}x^{\frac{21}{2}}y^{2}$.　12. $-\frac{19\cdot 23\cdot 31\cdot 33}{2^{25}}x^{\frac{9}{2}}$.

13. $-\frac{5}{2^{5}}x^{-2}$.　14. 1. 9.9498. 2. 3.9578. 3. 1.9873.

XXXVII. 第 287 頁

1. $a^{\frac{2}{7}}$.　2. $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$.　3. $x^{\frac{1}{2}}$.　4. $\sqrt{a}-\sqrt{bc}$.

5. $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(x+y-z-2\sqrt{xy})$.

6. $(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}-\sqrt{zx})(xy+yz-zx-2y\sqrt{xz})$.

7. $[\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{u}][x+y-u-z-2(\sqrt{xy}-\sqrt{uz})]$.
$[x^{2}+y^{2}+z^{2}+u^{2}-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu-8\sqrt{xyzu}]$.

8. $(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$.　9. $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

10. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}$.　11. $(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$.

12. $(x^{8})^{\frac{11}{12}}-(x^{8})^{\frac{10}{12}}(y^{8})^{\frac{1}{12}}+(x^{8})^{\frac{9}{12}}(y^{8})^{\frac{2}{12}}-\cdots+(y^{8})^{\frac{11}{12}}$.

13. $(1-xy^{\frac{1}{3}})(1+xy^{\frac{2}{3}}+x^{2}y^{\frac{4}{3}})$.　14. $(x^{\frac{1}{3}}-1)$.

15. $3+\sqrt{5}$.　16. $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}$.　17. $(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$.

18. $(1-\sqrt[3]{3})$.　19. $\sqrt[3]{3^2}(1-\sqrt[3]{2})$.　20. $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b^3}}{ab}$.

21. $\dfrac{a^2+2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}$.　22. $\dfrac{3-\sqrt{6}}{15}$.　23. $\dfrac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}$.

24. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$.　25. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.　26. $\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$.

27. $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})}{2}$.　28. $\dfrac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3^2}+1)}{4}$.

29. .447.　30. 2.756.　31. 1.732.

XXXVIII. 第 290 頁

1. 256.　2. $1/9$.　3. $\pm16\sqrt{2}$.　4. 14.　5. 1.

6. $\left(\dfrac{d}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)^2$.　7. 3.　8. 5.　9. -1.

10. $34/15$.　11. 2.　12. 2.　13. 6.　14. $5/4$.

15. $\begin{cases} x=-1,\ y=3, \\ x=3,\ y=(73-16\sqrt{10})/9. \end{cases}$　16. $x=10,\ y=3$.

XXXIX. 第 293 頁

1. $\sqrt{7}+\sqrt{2}$.　2. $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.　3. $5-\sqrt{7}$.

4. $(\sqrt{10}+\sqrt{15})/5$.　5. $(3\sqrt{2}-\sqrt{10})/2$.　6. $\sqrt[4]{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

7. $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$.　8. $\sqrt{a}-\sqrt{b-a}$.　9. $1+\sqrt{2}$.　10. $1+2\sqrt{3}$.

XL. 第 297 頁

1. $7i$.　2. $3\sqrt{2}i$.　3. $-4\sqrt{6}$.　4. $2i$.　5. -2.

6. 1.　7. i.　8. $-i$.　9. $(x-y)i$.

10. $2-\sqrt{6}+(2\sqrt{2}+\sqrt{3})i$.　11. $648\sqrt{6}$.　12. -22.　13. 0.

14. 10.　15. 16.　16. $-i$.　17. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$.

18. $1-\sqrt{2}i$.　19. $1-\sqrt{3}i$.　20. $\sqrt{2}(1+i)$.　23. $x=5/3,\ y=-4/3$.

24. $3+2i$.　25. $1+i$.　26. $(a+b)+(a-b)i$.

§630. 第 299 頁　習題 1, 2

1. $2, -4$.　2. $3, 1/2$.　3. $0, 5$.　4. $\pm\sqrt{6}/3$.

1. $6x^2+13x+6=0$　2. $x^2-a^2=0$.　3. $4x^2-x=0$.

XLI. 第 301 頁

1. $5, -7$.　2. $3/2, -1/2$.　3. $5\pm\sqrt{7}$.

4. $(-1\pm2i)/3$.　5. $(-3\pm\sqrt{41})/4$.　6. $9/2, 1/2$.

7. $12, -21$.　8. $17/6, -15/2$.　9. $23/4, 9/2$.

10. $32/5, -2/3$.　11. $1+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$.　12. $2, 4+i$.

13．4, 4． 14．2, 2． 15．$(1\pm\sqrt{5})/2$．
16．3, −5． 17．3/2． 18．5, 16/7．
19．1/2． 20．5, 5/2． 21．1, −58/91．
22．−2, 1/4． 23．1/3, −3a． 24．$a+b, a-b$．
25．$b/c, -a/c$． 26．$2a+b, 2a-b$． 27．$a(3c\pm 2b)$．
28．$\dfrac{a+b}{a-b}, \dfrac{a-b}{a+b}$． 29．$\dfrac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}$．
30．$\dfrac{a^2+b^2}{2a}, \dfrac{a^2+b^2}{2b}$

XLII．第 302 頁

1．22, 23． 2．15, 16． 3．5, 6．
4．13, 14, 15． 5．86． 6．7/5．
7．42． 8．\$40． 9．5%．
10．4%． 11．100． 12．6, $6\frac{2}{3}$ 呎．
13．144, 112 方吋． 14．$2(\sqrt{2}-1)$． 15．21 器．
16．每時 40, 45 哩． 17．$1\frac{1}{2}$時，每時 4 哩． 18．4 時 20 分．
19．6． 20．2 時
21．(1) 1/4 秒；1 秒；無．(2) 1/2 秒．(3) 3/2 秒．

XLIII．第 308 頁

1．2 與 −1． 2．∞, −2/3; ∞, ∞． 3．$(x+2y-2)(3x-y+1)$．
4．±1． 5．$p^2-4q, p^4-4p^2q+2q^2, (p^2-2q)/q$． 6．−45/32, −7/2．
7．$x^2-x+2=0, 2x^2+x+1=0, x^2+2x+8=0, x^2-x+2=0$．
8． 1．極小值＝−13． 2．極小值＝31/8． 3．極大值＝5．
4．極小值＝−1/2, 極大值＝1/2． 5．極大值＝4．
6．極大值＝$-(2+\sqrt{2})/4$, 極小值＝$-(2-\sqrt{2})/4$．
9．正方形．
10．向距最近點 $2\frac{2}{3}$ 哩之點．
11．36 呎，3/2 秒．

§643．第 310 頁 習題 3

1．$1/2, (2\pm i\sqrt{2})/3$． 2．$-1, 4, 1\pm\sqrt{2}$．

§644．第 311 頁 習題 7

1．$\pm 3, \pm\sqrt{6}/3$． 2．$(3\pm\sqrt{5})/2, (3\pm\sqrt{17})/2$．
3．$0, -a, -a(1\pm\sqrt{57})/2$． 4．$-3, 2, -(1\pm\sqrt{19})/3$．

§645．第 3.3 頁 習題 4

1．$1, (1\pm i\sqrt{3})/2$． 2．$(3\pm\sqrt{5})/2, (1\pm i\sqrt{3})/2$．
3．$-1, (1\pm i\sqrt{3})/2, (-1\pm i\sqrt{3})/2$．

§ 646. 第 313 頁 習題 3

1. $-2, 1\pm i\sqrt{3}$.　　2. $\sqrt{2}(1\pm i)/2, -\sqrt{2}(1\pm i)/2$.

3. $\pm i, (\sqrt{3}\pm i)/2, (-\sqrt{3}\pm i)/2$.

§ 648. 第 314, 315 頁

2. $1/4, -3/4$.　　4. $1, 6$.　　7. $3, 7$.　　9. $(6+\sqrt{6})/3$.

XLIV. 第 316 頁

1. $\pm 3/2; \pm\sqrt{2}$.　　2. $7\sqrt[3]{63}/9$.
3. $\pm 2, \pm 3\sqrt{2}$.　　4. $-1, -1, -1, 2/3, 2/3, 3/2$.
5. $1, -2, \pm\sqrt{3}i$.　　6. $1, -1, 1\pm i$.
7. $1, -1, 5/3, -1/3$.　　8. $7, -1, 3\pm\sqrt{5}$.
9. $(-1\pm\sqrt{17})/4, (-1\pm\sqrt{7}i)/4$.　　10. $1, 1, \pm i$.
11. $\pm i, (-1\pm i\sqrt{3})/2$.　　12. $1, 2\pm\sqrt{3}, 3\pm 2\sqrt{2}$.
13. $3, 3(-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}})/4, 3(-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}})/4$.
14. $1, (1\pm i\sqrt{3})/4$.　　15. $0, \pm\sqrt{3}i$.
16. $5, -1, 2\pm 3i$.　　17. $-a, -b, -(a+b)/2$.
18. $(a+b)/2, [a+b\pm\sqrt{2-(a-b)^2 9}]/2$.
19. $0, -9/5, -(15\pm\sqrt{401})/22$.　　20. $\pm a, \pm 1/a$.
21. $1, -1/3, (1\pm\sqrt{19})/3$.
22. $1, -1/2$.　　23. $2, 3$.　　24. $3, -2$.　　25. $3/2$.
26. $16/25$.　　27. $1, -3$.　　28. $0, 16, 81$.　　29. 3.
30. $(6+\sqrt{6})/3$.　　31. $1/5$.　　32. $4/5$.　　33. 1.
34. $\dfrac{27abc-(a+b+c)^3}{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$.　　35. $6, -3, (3\pm i\sqrt{71})/2$.
36. $0, -2a$.　　37. $\pm\sqrt{182}/14, \pm 3\sqrt{7}/7$.

XLV. 第 320 頁

1. $2/3, -11/9; -4, -13/3$.　　2. $-1, -1; 5/3, 3/5$.
3. $1/15, 2/15$; 一不定數解答。　　4. $3, 1; -1/15, -41/5$.
5. $0, 0; 51/14, -17/14$.　　6. $1, 1/2; 12/5, 32/15$.
7. 無定數解答。　　8. $5, 9; 333/28, 185/42$.
9. $1, 1/4; -12/13, -4/9$.　　10. $1, -3; -1, 3; -1, 3; 2, -3$.
11. $2, -2; -2, 2; -1\pm\sqrt{3}, 1\pm\sqrt{3}$.　　12. $0, 0; 15/8, 9/8$;二無限解答。
13. $m=1$或-1.
14. $m=1, c=1/3; m=-1/2, c=-1/3$.
15. $(2x-y+4)(x+y+3)$.

§ 655. 第 321 頁 習題 2

1. $1, 0; -1, 0$.　　2. $3, 1/5; 3, -1/5; -3, 1/5; -3, -1/5$.

§656. 第 321 頁 習題 3

1. 2, 1; 3, −1; 二無限解答。

2. $3i\sqrt{14}/14, i\sqrt{14}/7; 3i\sqrt{14}/14, -i\sqrt{14}/7;$
$-3i\sqrt{14}/14, i\sqrt{14}/7; -3i\sqrt{14}/14, -i\sqrt{14}/7.$

§657. 第 323 頁 習題 5

1. 0, 0; 0, 0; 5, −5; −3, −9.

2. $-2, 3; -3, 2; (3\pm\sqrt{17})/2, (-3\pm\sqrt{17})/2.$

§658. 第 323 頁 習題 2

1, 2; −1, 1; $(1\pm i\sqrt{23})/4, (1\pm i\sqrt{23})/4.$

XLVI. 第 324 頁

1. 2, 3; 2, −3; −2, 3; −2, −3.
2. 2, 1/3; 2, −1/3; −2, 1/3; −2, −1/3.
3. 7, −1; −5, 2; 二無限解答。
4. $-5, -1; 15/2, 3/2; 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}.$
5. $2, -3; -2/3, 7/3; (-6\pm 2\sqrt{6})/3, (3\mp 4\sqrt{6})/3.$
6. 1, 0; −1, 2; 二無限解答。
7. $5, -1; 5, -21; -7, 19\pm 2\sqrt{85}.$
8. $5, 5; -5, -5; \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i; -\sqrt{5}i, \sqrt{5}i.$
9. $3, 1; -3, -1; 3\sqrt{5}i, -7\sqrt{5}i/5; -3\sqrt{5}i, 7\sqrt{5}i/5.$
10. $1, 1/2; -1, -1/2; \sqrt{91}/5, \sqrt{91}/16; -\sqrt{91}/5, -\sqrt{91}/16;$ 0, 0; 0, 0; 0, 0; 0, 0; 八無限解答。
11. $3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}; -3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}; -2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}.$
12. $5, 4; -4, -5; 10\pm 2\sqrt{30}, -10\pm 2\sqrt{30}.$
13. $2, 4; 3, -1; (-5\pm\sqrt{13})/2, (-3\pm 5\sqrt{13})/2.$

XLVII. 第 325 頁

1. 4, 1; −1, −4; 一無限解答。
2. 125, −27; −27, 125; 一無限解答。
3. 5, 3; −5, −3; 3, 5; −3, −5; 四無限解答。
4. $2, 3; -1+\sqrt{3}i, 3(-1+\sqrt{3}i)/2; -1-\sqrt{3}i, -3(1+\sqrt{3}i)/2;$ 六無限解答。
5. $-2, 2; -2, -2; (2\pm 2\sqrt{7})/3, (1\pm\sqrt{7})/3;$ 二無限解答。
6. 0, 0; 6, 9; 50/21, −20/21; 一無限解答。

XLVIII. 第 328 頁

1. 9, −4; −4, 9.
2. 14, −2; −2, 14.
3. 17, 2; −17, −2; 2, 17; −2, −17.
4. 9, 2; −2, −9.
5. 8, 1; 1, 8; 一無限解答。
6. $7, 5; 5, 7; 7\omega, 5\omega; 5\omega, 7\omega; 7\omega^2, 5\omega^2; 5\omega^2, 7\omega^2,$
式內 $\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2$; 三無限解答。

7. $4/3, 1/4; 1/3, 1$; 一無限解答.
8. $3, 1; -1, -3; 1\pm i\sqrt{10}, -1\pm i\sqrt{10}$.
9. $2, 0; 0, 2; 1\pm i\sqrt{3}, 1\mp i\sqrt{3}$; 一無限解答.
10. $4, -7/2; -7/2, 4$.
11. $5, -4; -4, 5; -10+3\sqrt{11}, -10-3\sqrt{11}; -10-3\sqrt{11}, -10+3\sqrt{11}$; 二無限解答.
12. $3, 1; 1, 3; -3, -1; -1, -3; \pm\sqrt{5}\,i, \pm\sqrt{6}\,i; \pm\sqrt{6}\,i, \pm\sqrt{5}\,i$.
13. $2, -5; -5, 2; (3\pm\sqrt{31}\,i)/2, (3\mp\sqrt{31}\,i)/2$.
14. $0, 2; 2, 0; (-23\pm\sqrt{389})/12, (-23\mp\sqrt{389})/12$.
15. $0, 0; \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{5}; \pm\sqrt{5}\,i, \mp\sqrt{5}\,i; \pm\sqrt{10}(1+i)/2, \mp\sqrt{10}(1-i)/2; \pm\sqrt{10}(1-i)/2, \mp\sqrt{10}(1+i)/2$.

XLIX. 第 329 頁

1. $4, -1, 3; -2, 5, -3$.
2. $4, 1, 2; -4, -1, -2$.
3. $-(a^2\pm bc)/a, -(b^2\pm ca)/b, -(c^2\pm ab)/c$.

L. 第 330 頁

1. $2/3, -11/9; -4, -13/3$.
2. $4, 3; -3, -4$.
3. $(b+a)/2, (b-a)/2; (a-b)/2, -(a+b)/2$.
4. $\sqrt{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}}, \pm\sqrt{\dfrac{b-a}{a^2+b^2}}; -\sqrt{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}}, \pm\sqrt{\dfrac{b-a}{a^2+b^2}}$.
5. $1, 1/4; -12/13, -4/9$.
6. $a, b; 2a-b, 2b-a$.
7. $5, 1/2; 1/2, 5$.
8. $a, b/2; -a, -b/2; a/2, b; -a/2, -b$.
9. $4, 1; -1, -4; 0, 0; 0, 0$.
10. $\dfrac{2ab}{b-a}, \dfrac{2ab}{b+a}; 0, 0$.
11. $3, -7; 35/2, 15/2; 0, 0; 0, 0$.
12. $5, 2; -5, 2; 2, -4/5; -2, -4/5$.
13. $3, 1; -3, -1; 6, 3; -6, -3$.
14. $6, 1; -27, -10; (7\pm3\sqrt{65})/2, (3\pm\sqrt{65})/2$.
15. $7/2, 2; -2, -7/2; 136/65, 238/65; -238/65, -136/65$.
16. $\alpha, \beta; \alpha\omega, \beta\omega; \alpha\omega^2, \beta\omega^2$;　$\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{b}, \beta=\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{a}$,

　及 $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2$; 六無限解答.
17. $\alpha, \beta; \alpha\omega, \beta\omega; \alpha\omega^2, \beta\omega^2$;　$\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{4(a^2-b^2)^2}}{2(a-b)}, \beta=\dfrac{\sqrt[3]{4(a^2-b^2)^2}}{2(a+b)}$,

　及 $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2$; 六無限解答.

18. $a/(a^2+b^2)$, $b/(a^2+b^2)$; 0, 0; 二無限解答。
19. $4a, a; -4a, -a$.
20. 3/2, 1/2; −1/2, −3/2; 一無限解答。
21. $a, 0; 0, a; a(1\pm\sqrt{7}i)/2, a(1\mp\sqrt{7}i)/2$.
22. $7, 3; 3, 7; (-17\pm\sqrt{646})/5, (-17\mp\sqrt{646})/5$.
23. $(3\pm\sqrt{3}i)/2, (3\mp\sqrt{3}i)/2; 0, 0; 0, 0$.
24. $\pm a\sqrt{3}, 0; 2a, a; -2a, -a$.
25. 1, 4; 4, 1; 一無限解答。
26. 3, 0; 0, 4; 0, 0; 0, 0.
27. $5, 0; 0, 5; \sqrt{10}, -\sqrt{10}; -\sqrt{10}, \sqrt{10}$.
28. 2, 4; −9, 15; −1, −1; 0, 0.
29. $3/2, 1/2; 1/2, 3/2; 1\pm i\sqrt{1155}/35, 1\mp i\sqrt{1155}/35$.
30. $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}, \sqrt{a^2+1}; \frac{-\sqrt{a^2+1}}{a}, -\sqrt{a^2+1}$.
31. 2, 0; −3, 5; 一無限解答。
32. $1, 5/3; 2, -4/3; (-9\pm\sqrt{21})/6, (-1\pm3\sqrt{21})/6$.
33. 1, 3, 1; 149/5, −1/5, −15.
34. 1, 2, −3, 0; −1, −2, 3, 0.
35. 3, 1, 1; −3, −1, −1.
36. $1, -1, 2; -14/13, 23/13, 17/13; (-29\pm3\sqrt{105})/26, (-11\mp 2\sqrt{105})/13, (-1\pm\sqrt{105})/26$.

LI. 第 331 頁

1. 7 及 5.
2. 6 及 3.
3. 5/6.
4. 8, 9, 及 20.
5. 12 及 5 呎.
6. 15, 9, 及 12 吋.
7. 39, 36, 及 15 吋.
8. 16, 14, 9 呎.
9. 14 及 12 吋.
10. A, \$4.50; B, \$5.
11. \$1200, 4%.
12. 二子每人得 \$10,000; 五孫每人得 \$8000.
13. 每時 4 及 2 哩。
14. A, 3 時; B, 4 時; C, 6 時。
15. 每秒 A, 24 吋; B, 20 吋。
16. 每秒 A, 8 吋; B, 2 吋。
17. 18 哩。
18. 96 哩。

LII. 第 339 頁

17. 過 x 軸於 $3\pm\sqrt{8}, 0$, 切 y 軸於 0, 1.
20. $m=\pm1$.
21. $c=1$ 或 4/3.
23. $y=2x+1$, $x+2y=0$.
24. $|\lambda|=2$ 時爲拋物線, $|\lambda|<2$ 時爲橢圓, $|\lambda|>2$ 時爲雙曲線。

LIII. 第 341 頁

6. $x<30$.　　7. $x<-2$ 或 >4.　　8. $-1<x<3$, 或 $x>6$.

LIV. 第 346 頁

1. $x=20-17t, y=6-6t$. 相當 $t=0, -1, -2, \cdots$ 之解答爲正。
2. $x=2-12t, y=-6-43t$. 相當 $t=-1, -2, \cdots$ 之解答爲正。
3. $x=-17+39t, y=7-16t$. 無正數解答。
4. $x=-2+23t, y=43-72t$. 無正數解答。
5. $x=16-27t, y=28-49t$. 相當 $t=0, -1, -2, \cdots$ 之解答爲正。
6. $x=54-97t, y=21-47t$. 相當 $t=0, -1, -2, -3, \cdots$ 之解答爲正。
7. $x=2+21t, y=3-26t, z=-1-11t$. 無正數解答。
8. $x=10-11t, y=-4+35t, z=-2+15t$. 無正數解答。
9. $x=u, y=2v+1, z=2u+3v$. 相當 v, u 正値之解答爲正。
10. $x=7-3u-2v, y=1+2u, z=v$. 其正數解答爲 7, 1, 0; 5, 1, 1; 3, 1, 2; 1, 1, 3; 4, 3, 0; 2, 3, 1; 0, 3, 2; 1, 5, 0.
11. 五十正數解答。　　12. $\frac{41}{35}=\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$.
13. 2 牛，16 羊；或 8 牛，9 羊，或 14 牛，2 羊。
14. 15, 2, 6; 12, 4, 7; 9, 6, 8; 3, 10, 10.　　15. 314.
16. 從他一端數之第 167 及 169 分點量之。

LV. 第 350 頁

1. 32; 192/5; $10\,a^2b^2$; $\sqrt{30}$.　　2. $-3:2$; $1:5$.
3. $x:y=-1:2$ 或 $3:1$. $y:x=-2:1$ 或 $1:3$.
13. (1) 0, 0, 3/2. (2) 0, 0, 5, 8/7.
14. 104, 156, 260.　　15. 8 器從 A, 10 器從 B.

LVI. 第 353 頁

1. $-14/5$.　　2. $\pm 2\sqrt{3}/3$.　　3. $x^2+3y-4=0$.　　4. -72.

7. 3.　　8. 15/8.　　9. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a\sqrt[3]{4}}{2}$.

LVII. 第 356 頁

1. 60, 630; $25\frac{1}{2}$, 225. 2. $n(n+1)/2$; n^2; $n(n+1)$.
3. $n(3n-2)$. 4. $-1/3, 0, 1/3, 2/3, 1, 4/3, 5/3, 2, 7/3, 8/3$.
5. $-1/2, 0, 1/2, 1, 3/2$. 6. $l=20$, $S=160$. 7. $a=3$, $S=-14$.
8. $d=3$, $S=178$. 9. $n=52$, $d=-1/2$. 10. $d=2$, $l=12\frac{8}{7}$.
11. $n=28$, $S=187\frac{3}{5}$. 12. $a=31$, $l=-1$. 13. $a=25$, $d=-3$.
14. $n=6$, $a=-72$. 15. $n=5$, $l=18$.
18. $1, 1\frac{1}{6}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{5}{6}, 2, \cdots$. 19. 3, 5, 7. 20. 55, 350.
21. $81716. 22. 9時後遇於二出發點間之中點.

LVIII. 第 360 頁

1. 162, 122. 2. $13\frac{1}{2}$, $32\frac{1}{4}$. 3. 8; 2/3; 25/12.
4. $\frac{341}{999}$, $\frac{78}{1375}$, $8\frac{4516}{9999}$. 5. $l=-3000$, $S=-3333.33$.
6. $r=1/2$, $S=95\frac{1}{4}$. 7. $n=8$, $S=255/16$. 8. $a=1$, $S=61$.
9. $n=5$, $l=2/3$. 10. $r=5$, $l=-375$. 11. $n=5$, $r=4/3$.
12. $a=45/8$, $l=-20/27$. 13. $n=6$, $a=4$. 14. $a=10$, $r=3/5$.
15. $a=3$, $r=2$. 16. ab. 17. 15, 45, 135.
18. 3/16. 19. 8, 20, 50, 125. 20. 1, −3, 9.
21. 3, 12, 21 或 63, 12 −39. 22. −2, 2, 6, 18. 23. 75 呎.

LIX. 第 363 頁

1. 3/11, 3/13. 2. 30/23. 3. 75/7, 150/13, 75/6, 150/11.
4. 2. 5. 3 及 5. 6. 2 及 8.

LX. 第 369 頁

1. 191 與 1350. 2. 6560 與 180, 360.
3. (1) 二次；第十八項爲 224.
(2) 三次；第二十項爲 10, 118.
(3) 三次；第十二項爲 −1.
(4) 四次；第十項爲 10, 100.
4. 三次；第 n 項爲 $n(n+1)(n+2)$. 首 n 項之和爲 $n(n+1)(n+2)(n+3)/4$.
四次；n 次項爲 $2n(n+1)^3$.
5. 560, 105. 6. 1149. 7. 962.
8. 2024. 9. 220, 385. 10. 1274.
13. 二次；首 n 項之和爲 $n(n^2+2)/3$.
三次；首 n 項之和爲 $n(n+1)(n+2)(n+3)/4$.

LXI. 第 374 頁

1. $y=4+23x+26x^2+7x^3$; 當 $x=-5/2$ 時, $y=-3/8$;
 $x=-1/2$, $y=-15/8$.
2. $f(x)=-90+73x-16x^2+x^3$; $f(12)=210$.
3. 704.3716. 4. 110.592. 5. .04237. 6. 20.8734.
7. $(2520-806x-9x^2-13x^3)/840$.

LXII. 第 378 頁

1. 2, 1/2, 6, 4, 6, −3, −6, −3, −2/3, 7/3, 3/2.
2. 1.0791, .6532, .1505, .2594. 3. $(3\log_a 2+\log_a 3+2\log_a 5)6$.
4. (1) $\frac{2}{3}\log_a b-\frac{1}{2}\log_a c-\frac{1}{4}\log_a d$. (2) $\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\log_a b$.

LXIII. 第 389 頁

以下答案爲從 *pp*. 384, 385 之四位表及其後之法則求得者。

1. 36,460.	2. 82.28.	3. 1.210×10^{13}.
4. -1.744×10^{-5}.	5. 22.13.	6. .1151.
7. -4.558×10^{7}.	8. 16.38.	9. −.4255.
10. 77.	11. 9.472.	12. 137.
13. 1.413.	14. 8.218.	15. −.676.
16. 13.46.	17. .01.	18. 5.461.
19. 1.101.	20. 5.34.	21. 9108.
22. 632.8.	23. −50.22.	24. 2.453×10^{-6}.
25. −73.6.	26. 2.647×10^{13}.	27. .5381.
28. 96.56.	29. 15.77.	30. 2.652×10^{5}.

LXIV. 第 392 頁

391 頁之公式於求半年一期，三月一期，類推之，本利和爲 $A=P(1+r/2)^{2n}$, $A=P(1+r/4)^{4n}$, 餘類推。

1. 3.925, −1.578, .8361.
2. (1) $x=6$. (2) $x=1$ 或 2. (3) $x=2.152$.
3. (1) $x=2, -5$. (2) $x=4.642$. (3) $x=3.051$. (4) $x=3.637$.
4. \$41,410. 5. \$10,010. 7. \$694.80. 8. \$8030.
9. \$20,730, \$30,000. 10. $b=496.4$, 面積=77,500.
11. 5179. 12. 表面積, 6998; 體積, 55050.

§ 763. 第 396 頁

4. 65.	5. 380.	6. 144.
7. 1800.	9. 325.	10. 3600.

§764. 第 397 頁

3. 141.

§765. 第 397 頁

1. 5, 25, 125.　　2. 343.

§766. 第 398 頁

4. 630, 630.　　5. 715.

§769. 第 401 頁

6. 136, 252, 8855.　7. 15.　8. 8.　9. 220.

10. 792, 330, 462.　11. 120, 420, 252.　12. 3, 953, 520.

13. 10010.7!.　14. $52!/(13!)^4, 52!/(13!)^4\cdot 4!$.　15. 2250.

§770. 第 402 頁

1. 15.　　3. 41.

§771. 第 402 頁

$C_6^{12}=924,\ C_7^{15}=6435.$

LXV. 第 405 頁

1. 24.　2. 720.　3. 336.　4. 210, 5040.　5. 161, 700.

6. 30.　7. 420.　8. (1) 90, 720. (2) 322, 560, (3) 4320.

9. 60, 480, 504, 84.　10. 60.　11. 1680.

12. 6.　13. (1) 399. (2) 259.　14. 360.

15. 1232, 224.　16. 31.　17. 3, 783, 780.

18. 462.　19. 1416.　20. 5096520·15!.

21. 825.　22. (1) 60. (2) 325.　23. 2970.

25. 63, 063. 26. 145, 152. 27. 300.

28. $5^{15}, 15!/(3!)^5$.　29. 5760.　30. 37, 740.

32. 126.　33. 252.　34. 5040, 840, 7560.

LXVI. 第 409 頁

1. $\sum a^3+3\sum a^2b+6\sum abc$.

2. $\sum a^5+5\sum a^4b+10\sum a^3b^2+20\sum a^3bc+30\sum a^2b^2c+60\sum a^2bcd$.

3. 83160, 34, 650, 16, 632.　4. 12, 600.　5. 15, 120.

6. 4455.　7. 26, 396.

LXVII. 第 414 頁

1. 5 比 3 相反。5/8.　　2. 10/19, 9/19.　　3. \$37.50.
5. (1) 7/16, 3/8, 3/16. (2) 1/8, 7/40. (3) 1/560, 143/280, 9/40.
(4) 21/65, 27/65. (5) 45/286.
6. 1/6, 4/9.　　7. 1/6.　　8. 11/36, 5/18.
9. 1/12.　　10. 13/18, 5/18.　　11. 5/42, 5/14, 1/21.
12. 256/270725, 4/270725.　　13. $10(143)^4 13!\,39!/52!$
14. 1/36, 1/54.　　15. 2/7.

§785. 第 417 頁

4. 255/256.　5. 104/105.　6. 35/81.　7. 5/8, 1/8, 5/24, 1/24.

§787. 第 420 頁

5. 607/2970.　　6. 5/6.　　7. 6/11, 5/11.

§790. 第 421 頁

3. 105/512, 193/512.　4. 5/324, 7/432.　5. 112/243.　6. 16/81.

LXVIII. 第 422 頁

1. (1) 7/225. (2) 14/75.　　2. 66/455.　　3. \$3.53.
4. 11/16.　　5. 1/24, 1/4, 11/24, 1/4.　　6. 7 比 2.
7. 7 比 1, 103 比 5.　　8. 7/165, 16/33.　　9. 13 比 11.
10. 30 比 31.　　11. 7/15, 53/165, 7/33; 9/19, 6/19, 4/19.
12. \$11.　　13. 3/5.　　14. 無。
15. 59049/100000.　　16. 64/81.　　17. $191\cdot 3^5/5^7$.
18. \$1.　　19. 5103/32768, 1012581/1048576.
20. 81/128.　　21. \$48, \$16.

LXX. 第 431 頁

1. (1) $x^3-2ax^2+(a^2-ab-b^2)x+a^2b+ab^2=0$.
(2) $6x^5-43x^4+78x^3-5x^2-12x=0$.
4. 6 及 −2.　　6. 2, 3, −4.
7. 2, 5, −5.　　8. $-1/3, (1\pm\sqrt{3}i)/2$.
9. $0, 1/2, -2\pm\sqrt{3}$.　　10. $-1, -1, -1\pm\sqrt{2}i$.
11. 1, −1, −2, −3/2.　　12. $-3, -2/3, \pm i$.
13. $-2, 5, 7, (-1\pm\sqrt{3}i)/2$.　　14. $-1, 2, 2, (1\pm i)/2$.
15. −1, 2, 3, −3, −4.　　16. 2, 1/2, −1/2, 2/3.

17. $-1, -1, 3, 3, 3$.
18. $-2, 4, 5, 3/2$.
19. $-2, 1/2, 3/2, \pm i$.
20. $2, 2, -3, -4, -5$.
21. $-2, -2, -1/2, (-1\pm\sqrt{3}i)/2$.
22. $6, 8, 1/2, 1/3$.
23. $-1/2, -3/5, (-3\pm\sqrt{5})/2$.
24. $1/2, 1/3, 2/3, 3/2$.
25. $-1/2, -2/3, -3/2, (1\pm\sqrt{11}i)/2$.
26 $1, -1, -2, -3/2, \pm\sqrt{2}i$.
27. $1, -1, -2, -3/2, -1\pm\sqrt{2}i$.
28. $1, -1, 2, 2/5, (-1\pm\sqrt{3}i)/2$.

LXXI. 第 435 頁

1. $3/2$.
2. (1) $1, -3/2, 9/4$. (2) $1+2\sqrt{2}i, -3, 1-2\sqrt{2}i$.
3. (1) $-2-\sqrt{5}, -2, -2+\sqrt{5}$. (2) $1, 3, 5$.
5. $r^2-rp+q-1=0$.
6. $-1\pm\sqrt{2}i, -1\pm\sqrt{2}i$.
7. $-1, 3/2, 3/7$.
8. $-4, -6, 6, 5$.
9. (1) $x^3-px^2+qx-r=0$.
(2) $x^3+kpx^2+k^2qx+k^3r=0$.
(3) $rx^3+qx^2+px+1=0$.
(4) $x^3+(p-3k)x^2+(q-2kp+3k^2)x+(r-kq+pk^2-k^3)=0$.
(5) $x^3+(2q-p^2)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0$.
(6) $r^2x^3+(q^2-2pr)x^2-(2q-p^2)x+1=0$.
10. (1) $17/4$. (2) $-37/8$. (3) 1. (4) $5/2$.
11. (1) $2/3$. (2) $-11/3$. (3) -1. (4) -31. (5) $-7/3$.

LXXII. 第 443 頁

1. $x^7-3x^4+2x^2+6x-7=0$.
2. (1) $x^4-x^3-8x^2+24x+64=0$.
(2) $162x^4+27x^3-36x^2-18x+8=0$.
3. $10x^6+9x^5+3x^3-x^2+5=0$.
4. (1) $2x^5+21x^4+88x^3+181x^2+180x+74=0$.
(2) $2x^5-9x^4+16x^3-17x^2+12x+2=0$.
5. $x^4-10x^3+225x^2+1080x-16,875=0$.
6. $3x^4-162x^2-647x-733=0$.
7. (1) $x^3-3x^2+10=0$, 或 $x^3+3x^2+6=0$.
(2) $x^3+2x^2-4=0$, 或 $27x^3-54x^2-76=0$.
8. $x^4-x^3+6x^2-x+4=0$.
9. $x^4+9x^3+29x^2+39x+17=0$.
10. (1) $rx^3+(q^2-2pr)x^2+r(p^2-2q)x+r^2=0$.
(2) $(r-pq)x^3+(p^3-2pq+3r)x^2+(3r-pq)x+r=0$.
11. (1) $x^3+4x^2-3x+2=0$. (2) $x^3-6x^2+17x-8=0$.
(3) $4x^3-9x^2+18x-27=0$. (4) $8x^3+16x^2+9x+2=0$.
(5) $16x^3+24x^2+27x-8=0$.
12. (1) 2 與 -6. (2) 4 與 -1. (3) 4 與 -7.
(4) 2 與 -5. (5) 9 與 -2. (6) 2 與 -1,

LXXIII. 第 449 頁

1. $-1, -1/2, 1\pm 2i$.

2. $1, 1/2, 2\pm\sqrt{2}$.

3. $x^4+12x^3+44x^2+18x-116=0$.

4. $x^4-2x^2+9=0$.

5. (1) 四虛根。

(2) 至少有二虛根。實根不能多一，負實根亦不能多於一。

(3) 無正根。

(4) 無負根。

(5) 至少四虛根，正實根不能多於二，負實根不能多於一。

(6) 至少四虛根。實根正者不能多於一，負者不能多於二。

(7) 至少二虛根。實根正者不能多於二，負者不能多於一。

(8) n 為奇數時，至少有 $3n-3$ 虛根，實根正者不能多於二，負者不能多於一。

n 為偶數時，至少有 $3n-6$ 虛根。實根正者不能多於二，負者不能多於三。

7. 二正三負。

8. $x^{2n+1}+1=0$ 有一負根，及 $2n$ 虛根；$x^{2n}-1=0$ 至少有 $2n-2$ 虛根；正負根皆不能多於一；$x^{2n+1}-1=0$ 有一正根及 $2n$ 虛根。

LXXIV. 第 453 頁

1. 在 0 與 1, 2 與 3, −1 與 −2 之間。
2. 在 1 與 2, 0 與 −1, −2 與 −3 之間。
3. 在 1 與 2, 3 與 4, −1 與 −2 之間。
4. 在 2 與 3, −1 與 −2, −2 與 −3 之間。
5. 在 1 與 2, 4 與 5, −1 與 −2 之間。
6. 在 −2 與 −3, −4 與 −5, −6 與 −7 之間。
7. 在 −2 與 −3 之間。
8. 在 3 與 4, −3 與 −4 之間。
9. 在 0 與 1, 2 與 3, 5 與 6, 0 與 −1 之間。
10. 在 1 與 2, 0 與 −1, −1 與 −2, −4 與 −5 之間。
11. 在 1 與 2, 4 與 5, 5 與 6, 0 與 −1 之間。
12. 在 1 與 2, 3 與 4, 0 與 −1, −2 與 −3, −3 與 −4 之間。

LXXV. 第 459 頁

1. 1.213411. 2. 2.469545. 3. .179989.
4. 2.137811. 5. 2.768345. 6. −1.945341.
7. 1.903211. 8. −5.134578. 9. 3.236067.
10. −2.157451. 11. 2.356895 及 2.692021.
12. 1.602,3.292, 及 −1.895. 13. 1.246, −.445, 及 −1.802.
14. .347,1.532, 及 −1.879. 15. 1.558, −.578, −1.904, −4.075.
16. 2.5712. 17. 2.884 及 3.054. 18. 13.24.
19. 二根在 0 與 1 之間，一根在 0 與 −1 之間。
20. 2/3, −1, .254, 1.860, −2.1i4.

LXXVI. 第 464 頁

1. $10x^4-16x^3+2x-20,\ 40x^3-48x^2+2,\ 120x^2-96x,\ 240x-96,\ 240.$
2. $(x^4-2x^3+1)+2(2x^3-3x^2)h+6(x^2-x)h^2+2(2x-1)h^3+h^4.$
3. (1) $3-6(x+1)+7(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4.$
   (2) $80(x-2)+80(x-2)^2+40(x-2)^3+10(x-2)^4+(x-2)^5.$
   (3) $\dfrac{2+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3}{2+2(x-1)+(x-1)^2}.$
4. (1) $-1, -1, 2.$ (2) $1/3, 1/3, -2.$
   (3) $\pm\sqrt{6}\,i/2, \pm\sqrt{6}\,i/2.$ (4) $1\pm\sqrt{3}, 1\pm\sqrt{3}.$
   (5) $3, 3, \pm\sqrt{2}\,i/2.$ (6) $(-1\pm\sqrt{3}\,i)/2, (-1\pm\sqrt{3}\,i)/2, 2.$
   (7) $2, 2, -1\pm\sqrt{2}\,i.$ (8) $1, 1, 1, -1, -1.$
   (9) $\pm i, \pm i, 2/3.$
6. $a=\pm 16.$
7. $a=3, b=1/9, x=-1/3$; 或 $a=-3, b=-1/9, x=1/3.$
9. $108p^5=3125r^3.$ 10. $(ax+b)^n.$
11. $(-1\pm\sqrt{3}\,i)/2, \pm i; (-1\pm\sqrt{3}\,i)/2, \pm 1.$
12. $2\pm 2\sqrt{2}, -4; 1\pm\sqrt{2}, -1.$

LXXVII. 第 471 頁

1. 極大值相當 $x=0$ 爲 4; 極小值相當 $x=2$ 爲 0.
2. (1) $x=1/4$ 時爲極大。
   (2) $x=(1-\sqrt{3})/2$ 時爲極大, $x=(1+\sqrt{3})/2$ 時爲極小。
   (3) $x=-2$ 時爲極大, $x=2$ 時爲極小。
   (4) $x=1/3$ 時爲極大, $x=3$ 時爲極小。
   (5) $x=0$ 時爲極大, $x=2$ 時爲極小。
   (6) $x=1/2$ 時爲極大, $x=-1$ 或 2 時爲極小。
   (7) 無極大亦無極小。
   (8) $x=-1$ 時爲極大, $x=-(2\pm\sqrt{10})/2$ 時爲極小。

LXXVIII. 第 477 頁

1. 二在 3 與 4 之間，一在 -1 與 -2 之間。
2. 二在 3 與 4 之間，一在 -3 與 -4 之間。
3. 一在 0 與 -1 之間，二為虛根。
4. 一在 -1 與 -2 之間，二為虛根。
5. 二在 2 與 3 之間，一在 -4 與 -5 之間。
6. 二在 3 與 4 之間，二在 -1 與 -2 之間。
7. 一在 0 與 1 之間，一在 -1 與 -2 之間，二為虛根。
8. 二在 0 與 1 之間，二在 3 與 4 之間。
9. 二在 0 與 1 之間，一在 2 與 3 之間，一在 -3 與 -4 之間。
10. 一在 0 與 1 之間，一在 1 與 2 之間，二在 -2 與 -3 之間。
11. 一實根。
12. 無實根。
13. n 為偶數時無虛根；n 為奇數時有一定根。
14. 二實根。

LXXIX. 第 482 頁

1. $s_3=-(a_1^3-3a_0a_1a_2+3a_0^2a_3)/a_0^3$.
   $s_4=\quad(a_1^4-4a_0a_1^2a_2+4a_0^2a_1a_3+2a_0^2a_2^2)/a_0^4$.
2. $\sum 1/\alpha^2=(p^2-2q)/r^2$. $\sum 1/\alpha^3=(p^3-3pq+3r)/r^3$. $\sum\alpha\beta^2=3r-pq$.
3. $x^3+7x^2+12x-1=0$.
4. (1) $s_1=1, s_2=-5, s_3=20, s_4=-9$.
   (2) 29. (3) 20. (4) -60. (5) $-9/256$. (6) $-111/4$.

§ 871. 第 485 頁

2. $-1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}, -1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}, -1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$,
   $A=(-1+\sqrt{5})/2$ 及 $B=(-1-\sqrt{5})/2$.

§ 874. 第 486 頁

2. $(1\pm\sqrt{5})/2, (3\pm\sqrt{13})/2$.

§ 875. 第 488 頁

2. $(1\pm\sqrt{3}i)/2, \sqrt{2}(1\pm i)/2, \sqrt{2}(-1\pm i)/2$.

LXXX．第 491 頁

1．$4, -2 \pm i\sqrt{3}$.　　2．$8, (1 \pm i\sqrt{3})/2$.

3．$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}, \omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}, \omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{A}$,
　　$A=2+\sqrt{3}, B=2-\sqrt{3}$.

4．$A=3/4+\sqrt{1887}/72$, $B=3/4-\sqrt{1887}/72$.

5．$-1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}, -1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}, -1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$,
　　$A=4+2\sqrt{6}, B=4-2\sqrt{6}$.

6．$1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}, 1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}, 1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$,
　　$A=-5/2+5\sqrt{749}/54, B=-5/2-5\sqrt{749}/54$.

7．$(-\sqrt{3}\pm\sqrt{4\sqrt{3}-5})/2, (\sqrt{3}\pm i\sqrt{5+4\sqrt{3}})/2$.

8．$(1\pm\sqrt{5})/2, (3\pm\sqrt{13})/2$.　　9．$-1\pm\sqrt{2}, 1\pm 2i$.

10．$(-5\pm\sqrt{33})/2, (-3\pm\sqrt{13})/2$.

11．$(1\pm\sqrt{3}i)/2, (-1\pm\sqrt{3}i)/2, (1\pm 2\sqrt{2}i)/3$.

12．$\pm i, (1\pm\sqrt{3}i)/2, (3\pm\sqrt{5})/2, (1\pm\sqrt{15}i)/4$.

13．$1, 1, -1, (-1\pm\sqrt{15}i)/4, (-1\pm\sqrt{35}i)/6$.

14．$z^3+z^2-2z-1=0$.

15．$(2a^2-3ab+c)^2/4+(b-a^2)^3 \gtreqless 0$.

16．$\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}, k=0,\cdots,4; \cos\frac{(2k+1)\pi}{6}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{6}$,
　　$k=0,\cdots,5$.

17．(1) $2\cos 20^\circ, 2\cos 140^\circ, 2\cos 260^\circ$.
　　(2) $2\sqrt{2}\cos 15^\circ, 2\sqrt{2}\cos 135^\circ, 2\sqrt{2}\cos 255^\circ$.

18．3.

19．底半徑爲 $2\frac{1}{4}$，高爲 8.

20．就本題[illegible]可謂無解答，因解之求高時，非實得一負數也．但可証明內接一正圓錐體之最大圓柱體之體積爲該圓錐體體積之4/9．使學生証明題設圓錐體之最大圓柱體之高爲 2.

LXXXI．第 497 頁

1．$p^3-p(q^2+r^2+s^2)+2qrs$.　　2．$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$.

3．$p(p^2+q^2+r^2+s^2)$.　　4．0.　　5．18.　　6．74.　　7．-30.

10．(1) $a_1b_2c_3d_4-a_2b_1c_3d_4$.　(2) $a_1b_2c_3d_4-a_1b_3c_2d_4$.　(3) $-a_2b_3c_4d_1$.
　　(4) $a_1b_2c_3d_4+a_1b_3c_4d_2+a_1b_4c_2d_3-a_1b_4c_3d_2-a_1b_3c_2d_4-a_1b_2c_4d_3$.
　　(5) $a_1b_2c_3d_4+a_2b_4c_3d_1+a_4b_1c_3d_2-a_4b_2c_3d_1-a_2b_1c_3d_4-a_1b_4c_3d_2$.

11．$a_2b_4c_3d_1e_5, -a_4b_2c_1d_5e_3, a_5b_4c_3d_2e_1, -c_1d_2a_3e_4b_5, -c_1b_2e_3a_4d_5$,
　　$-d_3a_2c_4b_1e_5$.

LXXXII. 第 501 頁

1. (1)$-22,680$. (2)0. (3)$4abcdef$.

LXXXIII. 第 507 頁

1. 0.　　2. -4.　　3. 0.　　4. $-357,840$.

5. $\begin{vmatrix} 0 & bc-a^2 & b^2-ac \\ b^2-ac & 0 & bc-a^2 \\ bc-a^2 & b^2-ac & 0 \end{vmatrix}$.　　6. $\begin{vmatrix} ap+cr & ap & cr \\ ap & ap+bq & bq \\ cr & bq & bq+cr \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a & -a & a^2+ab & ac+ad \\ -b & b & ab+b^2 & bc+bd \\ c & c & -ac+bc & -c^2+cd \\ d & d & ad-bd & cd-d^2 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} l^2+m^2+n^2 & lm+mn+nl & ln+ml+nm \\ ml+nm+ln & m^2+n^2+l^2 & mn+nl+lm \\ nl+lm+mn & nm+ln+ml & n^2+l^2+m^2 \end{vmatrix}$.

10. 本題應謂"求証當主對角線有一邊之各元皆爲零時，此行列式化爲其主項。

LXXXIV. 第 511 頁

1. $x=10/7, y=1, z=4/7$.　　2. $x=1, y=1/2, z=1/3$.

3. $x=\dfrac{d(d-b)(d-c)}{a(a-b)(a-c)}, y=\dfrac{d(d-c)(d-a)}{b(b-c)(b-a)}, z=\dfrac{d(d-a)(d-b)}{c(c-a)(c-b)}$.

4. $x=1, y=1/2, z=1/3, t=-1$.　　5. $x:y:z=-1:1:1$.

6. $x:y:z=h:l:-1$, 若 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

7. $\lambda=0$或$-3\pm 2\sqrt{21}$.

LXXXV. 第519 頁

1. 公根爲$-3/2$.

2. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

3. $(a+d)^3+b^3+c^3-3bc(a+d)$.

4. (1)$4p^3+27q^2$. (2)$c(4b^3+27a^2c)$.

5. 重根爲-2.

6. $x, y=0, 0; 3, -1; -2, 2;$ 及一無限解答。

§950. 第 527 頁。習題 3

(1)$\frac{1}{2\cdot3}+\frac{3}{3\cdot4}+\frac{5}{4\cdot5}+\frac{7}{5\cdot6}+\cdots$；放散級數。

(2)$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{10}+\frac{2}{17}+\cdots$；收歛級數。

(3)$\frac{1}{9}+\frac{3}{35}+\frac{5}{91}+\frac{7}{189}+\cdots$；收歛級數。

§952. 第 528 頁

5. $x<1$. 6. $x>1$.

LXXXVI. 第 530 頁

1. 收歛級數。 2. 收歛級數。 3. 放散級數。
4. 收歛級數。 5. 放散級數。 6. 放散級數。
7. 收歛級數。 8. 收歛級數。 9. 放散級數。

10. $\frac{2}{1\cdot3}+\frac{3}{2\cdot4}+\frac{4}{3\cdot5}+\frac{5}{4\cdot6}$; 放散級數。

11. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{28}}+\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{65}}$; 放散級數。

12. $(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{10}-3)+(\sqrt{17}-4)$；放散級數。

13. 收歛級數。 14. 放散級數。

15. 當 $x<1$ 時。 16. 當 $x<1$ 時。

LXXXVII. 第 534 頁

1. (1) 收歛級數。 (2) 放散級數。 (3) 收歛級數。

2. (1) 除 $x=0, 1, -1/2, 1/3, \cdots, (-1)^{n-1}/n$, 外，於 x 之所有實值皆爲收歛級數。

(2) x 小於 1 時爲收歛級數他爲放散級數。

3. 必云"設級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 爲絕對收歛級數等"。

LXXXVIII. 第 538 頁

1. ∞. 2. $1/2$. 3. $1/2$.

4. 當 $x=-1$ 及 x 之值在 -1 與 2 之間時。

5. 於 x 之所有值。

6. 於 x 大於 $1/3$ 而小於 $1/2$ 之所有值。

LXXXIX. 第 551 頁

4. $a_1=-1/2,\ a_2=7/8,\ a_3=7/16,\ a_4=-21/64$.
5. (1)$2-x/4-x^2/32-5x^3/768$. (2)$1+3x/2-9x^2/8-13x^3/16$.
6. (1)$2-3x-3x^2+20x^3+\cdots$. (2)$x+6x^2+4x^3-x^4+\cdots$.
7. (1)$3x^2-2x^3-x^4+3x^5+\cdots$. (2)$x^{-2}-2x^{-1}+1+9x+\cdots$.
8. (1)$-11/6+5x/36-89x^2/216+35x^3/1296-761x^4/7776+\cdots$.

$|x|<2$ 時之近値。

(2)$2-11x/3+16x^2/9-173x^3/27+616x^4/81+\cdots$; $|x|<1$ 時之近値。

9. (1)$x^{-1}+x^{-2}+7x^{-3}+4x^{-4}+\cdots$, $|x|>3$ 時之近値。
   (2)$1-x^{-1}+x^{-4}-x^{-6}+\cdots$.
10. (1)$x=y-y^2+y^3-y^4+\cdots$. (2)$x=y+y^2/2+y^3/6+y^4/24+\cdots$.
11. $x=(y-1)-(y-1)^2/2+(y-1)^3/6-(y-1)^4/24+\cdots$.
12. $x=y^{\frac{1}{2}}-3y/2+45y^{\frac{3}{2}}/8-27y^2+\cdots$.
13. (1)$y=3x-10x^2+60x^3+\cdots$.
    (2)$y=x^2+x^5+3x^8+\cdots$. $y=x^{\frac{1}{2}}-x^3/2-3x^{\frac{5}{2}}/8+\cdots$.
    $y=-x^{\frac{1}{2}}-x^2/2+3x^{\frac{7}{2}}/8+$.

XC. 第 559 頁

1. $\log_e 4=1.3862$. $\log_e 5=1.6093$. 7. $-7x^4/3^5\cdot 2^{10}$.
8. $231x^3/2^{10}$.
9. 第一級數當 $|x|<3/2$, 第二級數當 $|x|<3$.
10. $1-3x/4+45x^2/32+43x^3/128-333x^4/2048$.
11. $4/3+13x/27+53x^2/1296$; $|x|<8/3$ 時爲收斂級數。
12. (1)$4/3$. (2)∞.
15. $x+x^2/2-2x^3/3+x^4/4\cdots$; $|x|<(\sqrt{5}-1)/2$ 時爲收斂級數。

XCI. 第 563 頁

1. $-19x^3+52x^4$.
2. (1) 關係式爲 $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}=0$; 二個項爲 $-2x^5+x^6$.
   (2) 關係式爲 $a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}=0$; 二個項爲 $31x^5+16x^6$.
   (3) 關係式爲 $a_n+3a_{n-1}+3a_{n-2}+a_{n-3}=0$; 二個項爲 $28x^6-36x^7$.
3. (1) 母函數爲 $(2-x)/(1-x-2x^2)$; 通項爲 $[2^n+(-1)^n]x^n$.
   (2) 母函數爲 $(3-8x)/(1-5x+6x^2)$; 通項爲 $(2^{n+1}+3^n)x^n$.
5. 母函數爲$(1+x+4x^2)/(1-x-5x^2-3x^3)$; 通項爲$[3^n+(-1)^n n]x^n$.
6. 母函數爲 $[a-(a-d)x]/(1-2x+x^2)$.
8. 和爲 $2/(1-3x+3x^2-x^3)$.

XCII. 第 565 頁

(1) $x<1$. (2) $x<\infty$. (3) $x<3$.

XCIII. 第 575 頁

1. $\frac{3}{1}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{93}{29}$.　　2. $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{41}{72}$, $\frac{496}{871}$.

3. $\frac{1}{1+}\frac{1}{5}$.　　4. $8+\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$.　　5. $\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4}$.

6. $3+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3}$.　　7. $\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{3+}\frac{1}{9+}\frac{1}{7}$.

8. $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{6+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}$; 第四近值爲 $\frac{104}{79}$; 誤差 $<\frac{1}{79^2}$.

(確實誤差爲 1/79.177.)

9. $\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\frac{1}{6}$; 第四近值爲 $\frac{13}{30}$; 誤差 $<\frac{1}{30^2}$.

10. $\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{19+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5}$; 第四近值爲 $\frac{3}{4}$; 誤差 $<1/4\cdot 19$.

11. $4+\frac{1}{8+}\frac{1}{8+}\cdots$; 第五近值爲 $\frac{17684}{4289}$; 誤差 $<\frac{1}{4289^2}$.

12. $5+\frac{1}{10+}\frac{1}{10+}\cdots$; 第五近值爲 $\frac{52525}{10301}$; 誤差 $<\frac{1}{10301^2}$.

13. $2+\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\cdots$; 第五近值爲 $\frac{218}{89}$; 誤差 $<\frac{1}{89^2}$.

14. $6+\frac{1}{6+}\frac{1}{12+}\cdots$; 第五近值爲 $\frac{33294}{5401}$; 誤差 $<\frac{1}{5401^2}$.

15. $10+\frac{1}{4+}\frac{1}{20+}\cdots$.　　16. $\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{8+}\cdots$

17. $4+\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{8+}\cdots$.

18. $8+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{16+}\cdots$.

19. $5+\frac{1}{5+}\frac{1}{10+}\cdots$.　　20. $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\cdots$.　　21. $5+\frac{1}{1+}\frac{1}{4}+\cdots$

22. $(\sqrt{37}-4)/3$.　　23. $(\sqrt{37}-5)/3$.　　24. $\frac{3\sqrt{35}+50}{\sqrt{35}+15}$.

25. $\frac{\sqrt{1806}+36}{34}$.　　26. $\frac{20+\sqrt{10}}{43+2\sqrt{10}}$.　　30. $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots$.

33. 577/408; 誤差 $<1/408^2$.　　34. 355/113.

35. 87/32; 誤差 $<1/32^2$.　　36. $x=546, y=324$.

37, $x=1350, y=-770$,　　38, $x=155+323t, y=248+517t$.

漢譯范氏大代數學

全一冊實價　洋宣精裝二元八角
　　　　　　報紙精裝三元

譯者　李士奇　高佩玉
　　　王俊奎　王喬南

發行者　北平科學社

社址　北平地安門內
　　　油漆作十二號

電話　東局2993

中華民國二十三年八月初版

中華民國二十四年一月三版