112343

郎先生
鑒

數學與戰爭

張孝禮

國防部翻印

數學與戰爭

張孝禮

國防部翻印

弁　言

本文係華西協合大學教務長張孝禮先生所作，載於著名科學雜誌「科學」第二十五期，茲承該校方校長叔軒先生寄贈單印本一冊，閱讀之下，覺含義甚深，彌足珍貴，其結論申述數學對戰爭關係之重要，以及建議如何培植軍事數學家，以策國防之安全，更堪發人猛省；特翻印壹千本，供我袍澤之研讀，更向孝禮叔軒兩先生致謝。

陳　誠

三十六年五月

數學與戰爭

張孝禮

1.引論

"運籌帷幄之中，決勝千里之外，吾不如子房"，係漢高祖贊張良之語。案籌乃籌碼，古人用爲計算之器，蓋謂計算足以決戰爭之勝負。"神機妙算"，乃贊頌軍師之稱。案機即機遇(Chance)，或曰或然率(Probability)，或曰概算，乃數學中之一部門，討論物事發生之或然性者。故凡爲參謀人員者，必須深通或然率論，及計算神妙，方能上選。由以上兩語，可見二千年前古人，早已洞悉數學對於戰爭之應用矣。昔日戰爭只爲平面，今日戰爭已進步而爲立體。昔日兵器不過刀，矛，弓，矢，今日之兵器已進而爲機械化之飛機，大砲，坦克，軍艦。昔日戰爭之應用數學，尙不甚廣，今日戰爭之應用數學，則精深廣博。本文之作，旨在引申斯義，而以實例明之。

2. 數學與彈道學

近世戰爭所恃之利器爲飛機，大砲，坦克，軍艦，然斯數器之致用，無不有賴於射擊，然射擊術之良否，有賴於彈道性狀之知識。譬如射擊目標爲軍艦爲飛機，則必需知砲彈在空中飛行路線，達到目標時之存速與落角。研究此種對象之科學稱爲外彈道學。（至內彈道學，對於戰場之應用較少，茲從略。）而彈道學之工具，卽爲數學。欲知彈道之性狀，必先知其方程式，此方程式必用微積分學方能求之，茲舉例如下：

(a) 設一砲彈，與水平成 α 角而發射，其初速爲 V_0 若不計入空氣之阻力，則其方程式將如何?

今以槍口爲原點，V_x 及 V_y 代表水平及垂直之兩分速度，因此彈所受之惟一加速度爲引力常數 g. 則

$$\frac{dVx}{dt}=o \qquad 及 \qquad \frac{dVy}{dt}=-g$$

積分之得 $\quad Vx=C \qquad Vy=-gt+C^1$

當 $t=o$ 時 $\quad Vx=V_0\cos\alpha \qquad Vy=V_0\sin\alpha$

故 $\quad Vx=V_0\cos\alpha \qquad Vy=-gt+V_0\sin\alpha,$

卽 $\quad \dfrac{dx}{dt}=V_0\cos\alpha \qquad \dfrac{dy}{dt}=-gt+V_0\sin\alpha$

積分之得　　$x=V_0 t\cos a+C\quad y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0 t\sin a+C$

當 $t=o$ 時　　x 及 y 皆爲零，故 C 及 C^1 亦皆爲零。

故　　$x=V_0 t\ \cos\ a,\qquad y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0 t\sin\ a$

由以上兩方程式消去 t，則得此彈道之方程式

$$y=x\ \tan\ a-\frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2 a}$$

此方程式代表一拋物線，以發射點爲原點，而其軸與 y 軸平行。若原點移於此拋物線之頂，則方程式變爲：

$$y=-\frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2 a}$$

由上方程式，若 V_0 爲已知，則可計算一彈之射程及彈道上任何點之存速與落角。

(b) 以上所言，乃假設不計空氣之阻力，然地面非無空氣者，而空氣阻力非計入不可. 如此需用較繁複之演算.

以彈之質量爲 m，而 X,Y 爲水平及垂直分力，則運動之微分方程式爲：

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

分力 X, Y 與攝力之加速度及空氣阻力有關，空氣阻力又依彈之速率而變。今設 V 爲彈在彈道上之速度，則

$$V^2 = Vx^2 + Vy^2$$

設 mR 爲彈所遇之空氣阻力，其方向與彈向相反，因 $\frac{Vx}{V}$ 及 $\frac{Vy}{V}$ 爲彈道之切線之方向餘弦，則阻力之直角分力爲：

$$-mR\frac{Vx}{V}, \qquad -mR\frac{Vy}{V}$$

以 $$F = \frac{R}{V} \cdots\cdots (2)$$

則方程式(1)變爲：

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -FVx = -F\frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -FVy - g = -F\frac{dy}{dt} - g \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3)$$

(c) 前文所言，乃假定地爲平面及引力常數 g 與彈高無關，並常與y軸平行者。但地實係略如球形，攝力直向地心，與其距成平方反比。前項假定，只能應用於短射程，及昔日不精確之射擊，但對於長射程及近世發展之射擊術，非改變不可。攝力必因彈之升高而減小，且其方向常向地心，在彈離y軸後，x軸上常發生一退後分力。

在圖1內，設C爲地心，O爲砲口位置，r_0爲地球半徑，r爲地心與彈位之距。

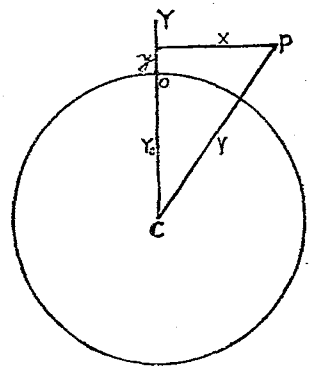


圖 1

因地心攝力與質量成正比，彈m於P點上之總攝力爲$\frac{k^2mE}{r^2}$，此處k^2爲一常數，依所用之單位而定，而E爲地球質量，平行於x及y軸之攝力分力爲：

$$-\frac{k^2mE}{r^2}\,\frac{x}{r},\qquad -\frac{k^2mE}{r^2}\,\frac{r_0+y}{r}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

因$r^2=(r_0+y)^2+x^2$，推得

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{r^3}&=\frac{x}{[(r_0+y)^2+x^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{r_0^3}\left[1-\frac{3y}{r_0}-\frac{3x^2}{2r_0^2}+\frac{6y^2}{r_0^2}\cdots\right]\\ \frac{r_0+y}{r^3}&=\frac{r_0+y}{[(r_0+y)^2+x^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r_0^2}\left[1-\frac{2y}{r_0}-\frac{3x^2}{2r_0^2}+\frac{3y^2}{r_0^2}\cdots\right]\end{aligned}\right\}\cdots(5)$$

因地面上g之値爲$g=\frac{k^2E}{r_0^2}$，則與(3)式相當之方程式爲：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-Fx^1-\frac{gx}{r_0}\left[1-\frac{3y}{r_0}\cdots\cdots\cdots\cdots\right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-Fy^1-g\left[1-\frac{2y}{r_0}-\frac{3x^2}{2r_0^2}+\frac{3y^2}{r_0^2}\cdots\cdots\cdots\right]$$

(d) 以上乃假定地球爲靜止不動者，實際情形，地球之轉動影響於長射程之砲彈者甚巨。不寧唯是，卽日月之攝力對射彈之飛行亦發生影響。惟此種討論需用更高深之數學與繁複之計算，本文因限於通俗，玆不多贅。

3.數學與砲彈之散佈

設砲彈向一鵠的 T 放射，此鵠的與砲身在同一水平面內，雖砲身構造萬分精確，而砲手射擊術亦十分優良，對於計算與描準毫無錯誤，然砲彈亦不能全落於 T 點上，只能落於 T 點附近不同距離之諸點。此種原因，由於不可避免之諸種微末錯誤，有以致之。如砲手之較正微有不全，風速風向之未完全知曉，所用藥量之多少及其溫度之差異，彈體表面之情形及形式之不同，以及砲體連續放射時形狀之改變等，常足以致上項結果之發生。礮術理論。假設礮彈在 T 點附近分佈之差異乃約略依正常律 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$，在彈向線之差異，稱爲"經線差異"。在此方向內，礮彈之分配乃假設以"差異之梯"表之，如表1。

(表 I.)

				←S→				
2%	7%	16%	25%	25%	16%	7%	2 %	彈向
				T				

諸階級之距爲內四分數位半域S,此 S 在礮術內,稱爲在此方向內及在此射程內之"或然誤差"。(參看拙著之數理統計學,第五章,第 2 節,將見此"梯"爲正常律之略圖)。此觀念更可表明之如後,設衆礮彈當墜落時,其速度銳減,無力進入地內而只堆積於地面,由此堆積礮彈之一旁觀之,其形恰如一正常曲線之邱阜,與彈向成直角之線上礮彈之分佈稱爲"緯線差異",亦爲同樣之梯形差異.其諸階間之距爲砲身之"緯線或然誤差",此差通常小於經線或然誤差,此兩梯之聯合成一"差異之矩形",見表II.

(表 II.)

	.50	.32	.14	.04
	1.75	1.12	.49	.14
	4.00	2.56	1.12	.32
T	6.25	4.00	1.75	.50
總數	12.50	8.00	3.50	1.00%

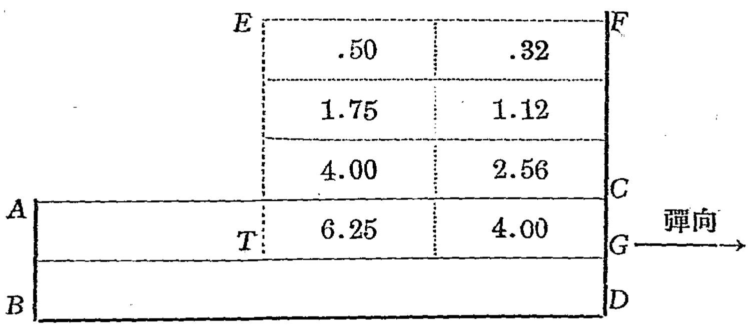
彈 向 →

(T 左旁差異矩形四分之一)

此表代表繞T之諸小矩形內，被擊中之百分數，故彈堆積之邱阜，由其一旁，或由彈向內之一點觀之，皆爲正常曲線形，惟第二曲線，常狹於第一曲線耳，今舉一例於後以明其應用。

設一戰艦，其長度10倍於其寬度，一礮之或然誤差在經線方面者5倍於其在緯線方面者，緯線或然誤差等於此戰艦之寬之半。此船位於射線方向及位於垂直方向。試比較在此兩位置內，船被擊中之數目。

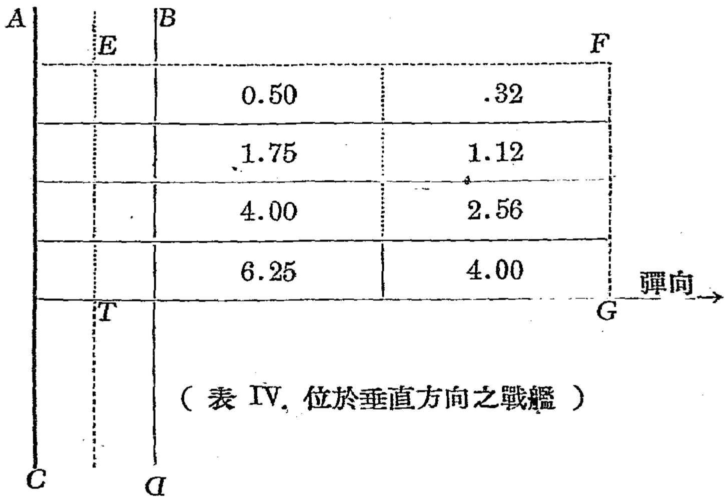
今以一長方形代替此戰艦，



（表　III.　位於射線方向之戰艦）

此爲此艦位於射線方向之表解，實線矩形$ABCD$代表者爲戰艦。虛線$TEFG$代表者爲T左旁差異矩形四分之一之一部份。由上表觀之，可知礮彈之能落於此艦上者，爲(6.25%+4.00%)×

$4=\frac{10.25}{100}\times 4=\frac{41}{100}$。卽每百彈中卽有41彈擊中此艦。今將此艦置於垂直方向如下表:



（表 IV. 位於垂直方向之戰艦）

此爲此艦位於垂直方向之表解，T 爲船之中心，乃擬定之目標。實線$ABCD$爲戰艦。虛線$TEFG$爲T左旁差異矩形四分之一之一部份。由上觀之，可知礮彈之能落於此艦上者，爲 $(6.25\%+4.00\%+1.75\%+0.50\%)\times\frac{1}{5}\times 4=10\%$。卽每百彈中只有10彈能擊中此艦。

由此兩方法觀之，所射擊者爲同一軍艦；目標旣同，其大小亦

同，所射擊之利器亦同，礮手同，描準術亦同。只以射擊之方位各異，前者之效率竟高於後者達四倍以上。此種現象對於戰爭勝負將發生若何影響乎？敵人用百萬萬戰費所收之戰果，若用前法行使之，只需廿五萬萬卽能完成。此對於敵人財政經濟將發生若何影響乎？

4. 數學與極大極小問題

上文言戰果有大小之分。此種大小之量將如何求之乎？此種問題，在數學中稱爲極大極小問題。研究此問題最普通之方法爲微分法與變分法。今舉微分法以言之。設$y=f(x)$爲x之函數。若$f(a)>f(a+h)$及$f(a-h)$則稱$f(a)$爲$f(x)$之一極大值。若$f(a)<f(a+h)$及$f(a-h)$則稱$f(a)$爲$f(x)$之一極小值。由此定義推出$f(x)$有極大或極小值之必需條件爲$\frac{dy}{dx}=f'(x)=0$。若$\frac{d^2y}{dx^2}<0$，則$f(x)$有一極大。若$\frac{d^2y}{dx^2}>0$，則$f(x)$有一極小。任何問題，只需將題意譯成算學符號，準此方法求之，卽能得其極大與極小之值。茲舉一實例以明之。

設一運輸艦，經過水中推進，所消耗之燃料費用與其速度成正比。並當速度每小時爲10英里時，其費用爲\$25.00。其他費用每小時爲\$100。求其最經濟之速度。

設燃料費用爲C，總費用爲y，速度爲V，某距離爲D。

則　$C=kV^3$，此處 k 爲任意常數。…………………………………………(6)

因　當速度爲10英里時，C爲\$25；

故　$25=k10^3$，　$\therefore k=\dfrac{25}{10^3}=\dfrac{1}{40}$。

以 k 值代入(6)式內，則得

$C=\dfrac{1}{40}V^3$即每小時所用之燃料費用。因距離爲D，速度爲V，

故所用之時間爲 $t=\dfrac{D}{V}$。故總用費爲：

$$y=\left(\frac{1}{40}V^3+100\right)\frac{D}{V}=D\left(\frac{V^2}{40}+\frac{100}{V}\right)\cdots\cdots\quad(7)$$

y爲V之函數，D爲任意常數。依上定義，y或有極小值。今由上述方法求之，得

$$\frac{dy}{dV}=K\left(\frac{2V}{40}-\frac{100}{V^2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(8)$$

$$\frac{d^2y}{dV^2}=K\left(\frac{1}{20}+\frac{200}{V^3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(9)$$

設　$$\frac{dy}{dV}=K\left(\frac{V}{20}-\frac{100}{V^2}\right)=0$$

即　$$V^3-2000=0$$

上三次方程式之實根爲$V=\sqrt[3]{2000}=12.60$.

以此值代入(10)式內得

$$\frac{d^2y}{dV^2}=k\left(\frac{1}{20}+\frac{200}{2000}\right)>0。$$

故由上定理，推知當速度每小時爲12.6英里時，此艦之總用費爲一極小值。即用費小而得工作不變。故此速度爲最經濟之速度。今以實例表明之。設某距離爲1260哩。若該艦以此速度每小時12.6哩駛行，則全程共需用爲：

$$y=\$\left[\frac{1}{40}(12.6)^3+100\right]\times\frac{1260}{12.6}=\$(50+100)100\doteq\$15000。$$

若將速度減低一半，則其總用費爲：

$$y=\$\left[\frac{1}{40}(6.3)^3+100\right]\frac{1260}{6.3}=106.25\times200=\$21250。$$

較上速度所費多出$6250。

若將速度增加一倍，則其總用費爲：

$$y=\$\left[\frac{1}{10}(25.2)^3+100\right]\frac{1260}{25.2}=\$(400+100)\times50=\$25000。$$

較最經濟速度，竟多出$10,000。

一次即多消耗一萬元，則萬次多消耗萬萬元。由此以推，如敵人意在速戰速決，運輸只圖速而不計算經濟與否，則敵人在戰事期內，

所過份消耗於運輸者，不知若干萬萬矣。

5. 統計學之應用

前文所言，或然誤差，由何方法得之乎？曰，由多數礮彈，在實證地上，實際射擊，用統計方法得之。先求此諸彈自某任意原點，在射向線內之平均距離。其次求平均離中差，然後以.845乘平均離中差，即得經度或然誤差。由射線一邊之平均距離，用同樣方法可得緯線或然誤差。在兩平均距離之點，稱爲衝擊中心。在前例內，乃假設礮位，所指之向，可使衝擊中心與目標中心相符合。如何方能將衝擊中心，置於目標中心上，乃彈道學中之大問題。此處討論者，只爲衝擊點周圍之差異理論。茲舉例以明之：

由下列六彈，求一礮之經緯或然誤差。此彈向一目標發射，射程爲9000粎。

(1)	9275粎	右20粎
(2)	9410粎	右10粎
(3)	9450粎	左 5粎
(4)	9370粎	右15粎
(5)	9290粎	左10粎
(6)	9360粎	右 5粎

由普通統計方法，在第一列內之平均數爲9359，其平均離中差爲51.16。故在經線方向之或然誤差 S 爲43.23。同法，在第二列內，諸數之平均爲右5.83，平均離中差爲9.16。故在緯線方向之或然誤差 S 爲7.74。同時亦求得衝擊中心，即距礮9359粎，而在射線右5.83粎之點。

上述計算方法，乃根據於“正常律”(Normallaw)$y=ae^{-h^2t^2}$。或名之曰“或然函數”，即前文所稱之“神機”也。此後即以“神機”名之。此處 a 及 h 皆爲正數而 e 乃納氏對數底，即

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots=2.718\cdots\cdots。$$

當 $a=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, h=\frac{1}{\sqrt{2}}$時，並以 x 代 t 則此“神機”之方程式變爲：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

以$y=\varphi(x)$，作成線圖，以y爲縱座標，x爲橫座標，其圖形如下：

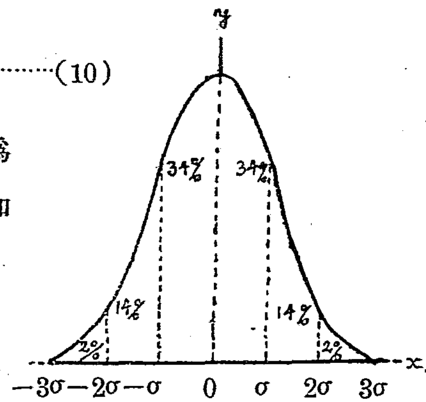


圖 2

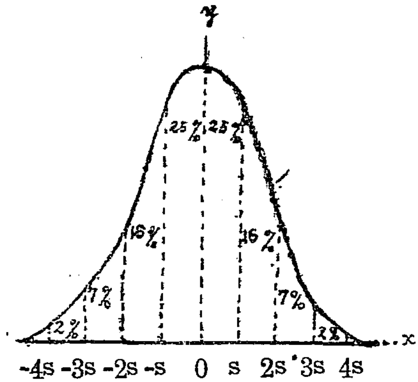


圖 3

(1) 以上圖2,圖3線內之百分數字,乃表示此曲線下面積之分佈。當"標準離中差σ"被選爲組距時,其分佈略如圖 2。當 "或然誤差"S被選爲組距時,其分佈略如圖3。

(2) 在曲線下之面積總和爲1。

(3) 以上圖2,圖3內,表示平均,中數,集中數,偏斜皆爲零。

(4) 由(10)式計算得$u2=1$卽$\sigma=1$故σ可視如x之單位。

(5) 平均離中差$=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}=0.794\sigma$(略近)

(6) 四分數位之半域$S=0.6745\sigma$,略等於平均離中差之0.845倍。

(7)上兩圖內，曲線割過其切線之切點之橫座標皆爲±σ

(8)$h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$稱爲"精確之測度"標準離中差愈小，精確度顯然愈大。

上述"神機"之各種性質，用普通方法證明之，雖甚困難；但若用微積分學證明之，則簡單殊甚。至事物之發生，必遵循"神機"，亦可以微積分學嚴格證明之。故欲研究"神機"之致用，非深通數學不可。

"神機"之應用甚廣，對於礮彈之散佈，不過只其一端耳。他如根據敵人兵源，資源，人力，物力之精確統計數字，亦可推斷敵人之盛衰成敗。或由敵人消耗之統計數字，推斷敵人崩潰之時期，無不賴此"神機"之運用。說部稱昔諸葛孔明能知未來，由"神機"之理論觀之，要非虛語。

6. 戰爭的數學失敗觀

准上所論，同一礮也，同一彈也，同一兵也，因射擊方向之不同，其過多消耗竟達四倍以上。同一運輸艦也，同一距離也，同一載重也，因運輸之速度不同，其過多消耗竟達萬萬以上。故一定戰略，不但有其一定之戰術，且當有一定之輸運方法。若果爲速戰速決，自然

當選擇最速之戰術與最速之運輸方法，至消耗之經濟與否不問也。若果爲長期戰爭，不但戰術不同，射擊方法不同，卽運輸方法亦將不同。必選其消耗極小，而成功極大者爲之。此乃微分學與變分學中之淺顯問題，不待贅言。茲再以徑賽喻之，賽英里所用之速度，决不同於賽百米所用之速度。善競走者，於開始之初，必選擇適宜之速度，涵蓄其精力以爭取最後勝利。今日之事，蓋一英里競賽也，一方竟誤認爲百米賽，而以百米賽之速度出之。初視之似甚勝利，但不知繞場一週之後，速度銳減，二週之後，筋疲力竭，不及三週，顚仆中途，宣告失敗矣。故勇敢善戰爲一事，不認識全盤戰局，必爲失敗之根由，故失敗者不失敗於今日，而失敗於開戰之初，勝利者不勝利於今日，亦勝利於開戰之初。此種結果，以"神機"推斷之，分毫不爽。"神機"星相家又稱之曰"天數"。若天數已盡，崩潰必至，要不過早遲間事，此吾人深信不疑者也。

7. 結論

由徑賽之喻觀之，洞悉全盤戰局者，勝利已操左券，僅未達到决勝之點而已。(未至終點不能稱爲决定勝利)。現在問題，乃應用適當速度，以達此最後勝點，此種適宜速度，將如何求之乎？曰如前文所言，惟數學能之。在初等數學不能者，則高等數學能之。由

軍事所得之精確數字與戰果，以譯成“數學語言”，表成數學符號，書成數學公式，此稱之為軍事數學化。然後用數學方法分析之，推解之，演繹之，將所得結果，復譯為“軍事語言”，直接應用於軍事，此稱之為數學軍事化。前者稱為軍事數學，習之者稱曰軍事數學家。後者稱為數學軍事化，習之者稱為數學軍事家。數學對於戰爭既如此其重要也，將如何培植此種人材乎？茲略舉數種建議於後：

（1）提高普通對於數學之認識。因數學非直接謀生之技能，狹義應用主義者，竟以數學為無用而摒棄之。學校學生竟因此而恨惡之。此種觀念非根本糾正不可。

（2）提高軍事學校內之數學程度。因軍械之進步，今日之射擊術已非昔日之單簡。射程愈長，其彈道之性狀愈形複雜。昔日不計地為球形者，今日必計入之。昔日不計地為自轉者，今日必計入之。凡為礮兵司令，欲知近世彈道性狀，及子彈散佈情況者，非通微積分學，微分方程式，變分學以上之高深數學不可。故軍事學校內如礮科等，非提高數學程度不可。

（3）軍事學校應招收大學數學系畢業生為學員，使其數學知識軍事化。或曰，軍事學校非不招收大學畢業生，惟其不肯應考入伍耳。此種原因，乃由於軍事學校，對於大學畢業生與高中畢業

生同等待遇，有以致之。人孰無自尊心。如能提高待遇，使其有別於高中畢業生，則人必樂爲之。如此直接減少大學畢業生之失業問題，增加抗戰力量。間接卽所以減少反對份子之挺而走險，深望軍事當局熟思籌之。

（4）各軍事機關及參謀本部應多聘素有根底之數學專家，作數學化之軍事研究。此在歐美各國早已行之，吾國亦不可忽視之也。

（5）各大學數學系應加授軍事數學，使學生知數學之應用，對於軍事發生興趣。

（6）各大學數學教授，應自動發起研究“軍事數學”之團體，出其研究心得，貢獻於軍事當局，以盡學人應盡之義務。總之數學爲與軍事極有關係之科學之一門，吾人應亟起直追，努力奮進，願全國數學家共勉之！

國防部印製廠