MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig

53. Band. 1. u. 2. (Doppel)Heft

Ausgegeben am 6. April

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen. Mit Unterstützung der Akademieen der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je etwa 40 Druckbogen. Jährlich 1 Band in 5—6 Heften. gr. 8.

Band I:	**Arithmetik und Algebra**, redigiert von	W. Fr. Meyer in Königsberg.
— II:	**Analysis**	H. Burkhardt in Zürich.
— III:	**Geometrie**	W. Fr. Meyer in Königsberg.
— IV:	**Mechanik**	F. Klein in Göttingen.
— V:	**Physik**	A. Sommerfeld in Aachen.
— VI, 1:	**Geodäsie und Geophysik**	E. Wiechert in Göttingen.
— VI, 2:	**Astronomie**	(Redaktion noch nicht bestimmt.)
— VII:	Schlussband, historische, philosophische und didaktische Fragen behandelnd, sowie Generalregister zu Band I—VI	W. Fr. Meyer in Königsberg.

Bisher erschienen: I, 1. 1898. n. ℳ 3.40; I, 2. 1899. n. ℳ 3.40; I, 3. 1899. n. ℳ 3.80; I, 4. 1899. n. ℳ 4.80; I, 5 u. I, 6 unter der Presse; II, 1. 1899. n. ℳ 4.80; II, 2. [Erscheint im April 1900.]

Bianchi, Luigi, Professor a. d. Universität Pisa, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. [XII u. 659 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 22.60.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Hrsg. von G. Eneström. III. Folge. I. Band. gr. 8. 1900. geh. Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 20.— [Heft 1 erscheint im April 1900.]

von **Braunmühl**, Prof. Dr. **A.**, München, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2 Teile. I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Mit 62 Figuren im Text. [VII u. 260 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 9.—

Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai. Mit Unterstützung der Königl. ungar. Akademie d. Wissenschaften herausg. von F. Schmidt u. P. Stäckel. [XVI u. 208 S.] 4. 1899. Geschmackvoll geb. n. ℳ 16.—

Brückner, Dr. **Max**, Oberlehrer am Gymnasium zu Bautzen, Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte. Mit 7 lithographierten und 5 Lichtdruck-Doppeltafeln, sowie vielen Figuren im Text. [VIII u. 227 S.] 1900. 4. geb. n. ℳ 16.—

Cantor, Hofrat Prof. Dr. **Moritz**, Heidelberg, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 3 Bänden. II. Band. Von 1200—1668. 2. Aufl. Mit 190 in den Text gedruckten Figuren. [XII u. 943 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 26.—

Engel, Dr. **Friedrich**, Prof. a. d. Universität Leipzig, und Dr. **Paul Stäckel**, Prof. a. d. Universität Kiel, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. In 2 Bänden. gr. 8. geh.

I. Band. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Fr. Engel. I. Teil: Die Übersetzung. Mit einem Bildnisse Lobatschefskijs und mit 194 Figuren im Text. II. Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Register. Mit 67 Figuren im Text. [XVI, IV u. 476 S.] 1899. n. ℳ 14.—

II. Band. Wolfgang und Johann Bolyai, geometrische Untersuchungen, herausgegeben von Paul Stäckel. Mit einem Bildnisse Wolfgang Bolyais. (In Vorbereitung.)

Festschrift zu Moritz Cantors 70. Geburtstage. Zugleich 9. Heft d. Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. u. Supplement z. 44. Jahrg. d. Zeitschr. f. Mathem. u. Physik. [VIII u. 657 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 20.—

——— zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Herausg. vom Fest-Comitee. Lex.-8. 1899. geh. n. ℳ 6.—. Enthaltend: **Hilbert, D.**, Grundlagen der Geometrie [92 S.]; **Wiechert, E.**, Grundlagen d. Elektrodynamik [112 S.].

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

Paul Gordan, David Hilbert, Carl Neumann, Max Noether,
Karl VonderMühll, Heinrich Weber

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

53. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Inhalt des dreiundfünfzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

B. G. Teubners Sammlung

von Lehrbüchern auf dem Gebiete der

Mathematischen Wissenschaften

mit Einschlufs ihrer Anwendungen.

Im Teubnerschen Verlage erscheint unter obigem Titel in zwangloser Folge eine längere Reihe von zusammenfassenden Werken über die wichtigsten Abschnitte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen.

Die anerkennende Beurteilung, welche der Plan, sowie die bis jetzt erschienenen Aufsätze der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften gefunden haben, die allseitige Zustimmung, welche den von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veranlafsten und herausgegebenen eingehenden Referaten über einzelne Abschnitte der Mathematik zu teil geworden ist, beweisen, wie sehr gerade jetzt, wo man die Resultate der wissenschaftlichen Arbeit eines Jahrhunderts zu überblicken bemüht ist, sich das Bedürfnis nach zusammenfassenden Darstellungen geltend macht, durch welche die mannichfachen Einzelforschungen auf den verschiedenen Gebieten mathematischen Wissens unter einheitlichen Gesichtspunkten geordnet und einem weiteren Kreise zugänglich gemacht werden.

Die erwähnten Aufsätze der Encyklopädie ebenso wie die Referate in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beabsichtigen im diesem Sinne in knapper, für eine rasche Orientierung bestimmter Form den gegenwärtigen Inhalt einer Disciplin an gesicherten Resultaten zu geben, wie auch durch sorgfältige Litteraturangaben die historische Entwickelung der Methoden darzulegen. Darüber hinaus aber mufs auf eine eingehende, mit Beweisen versehene Darstellung, wie sie zum selbständigen, von umfangreichen Quellenstudien unabhängigen Eindringen in die Disciplin erforderlich ist, auch bei den breiter angelegten Referaten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in welcher hauptsächlich das historische und teilweise auch das kritische Element zur Geltung kommt, verzichtet werden. Eine solche ausführliche Darlegung, die sich mehr in dem Charakter eines auf geschichtlichen und litterarischen Studien gegründeten Lehrbuches bewegt und neben den rein wissenschaftlichen auch pädagogische Interessen berücksichtigt, erscheint aber bei der raschen Entwickelung und dem Umfang des zu einem grofsen Teil nur in Monographien niedergelegten Stoffes durchaus wichtig, zumal, im Vergleiche z. B. mit Frankreich, bei uns in Deutschland die mathematische Litteratur an Lehrbüchern über spezielle Gebiete der mathematischen Forschung nicht allzu reich ist.

Die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner giebt sich der Hoffnung hin, dafs recht zahlreiche Mathematiker, Physiker und Astronomen, Geodäten und Techniker, sowohl des In- als des Auslandes, in deren Forschungsgebieten derartige Arbeiten erwünscht sind, zur Mitarbeiterschaft an dem Unternehmen sich entschliefsen möchten. Besonders nahe liegt die Beteiligung den Herren Mitarbeitern an der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Die umfangreichen litterarischen und speziell fachlichen Studien, welche für die Bearbeitung von Abschnitten der Encyklopädie vorzunehmen waren, konnten in dem notwendig eng begrenzten Rahmen nicht vollständig niedergelegt werden. Hier aber, bei den Werken der gegenwärtigen Sammlung ist die Möglichkeit gegeben, den Stoff freier zu gestalten und die individuelle Auffassung und Richtung des einzelnen Bearbeiters in höherem Mafse zur Geltung zu bringen. Doch ist, wie gesagt, jede Arbeit, die sich dem Plane der Sammlung einfügen läfst, in gleichem Mafse willkommen.

Bisher haben die folgenden Gelehrten ihre geschätzte Mitwirkung zugesagt, während erfreulicherweise stetig neue Anerbieten zur Mitarbeit an der Sammlung einlaufen, worüber in meinen „Mitteilungen" fortlaufend berichtet werden wird:

P. ***Bachmann,*** *niedere Zahlentheorie.*

M. ***Bôcher,*** *über die reellen Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.*

G. ***Brunel,*** *Analysis situs.*

G. ***Castelnuovo*** *und F.* ***Enriques,*** *Theorie der algebraischen Flächen.*

F. ***Dingeldey,*** *Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.*

F. ***Dingeldey,*** *Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.*

F. ***Enriques,*** *Prinzipien der Geometrie.*

J. ***Harkness,*** *elliptische Funktionen.*

G. ***Kohn,*** *rationale Kurven.*

A. ***Krazer,*** *Handbuch der Lehre von den Thetafunktionen.*

R. v. ***Lilienthal,*** *Differentialgeometrie.*

G. ***Loria,*** *spezielle, algebraische und transcendente Kurven der Ebene. Theorie und Geschichte.*

R. ***Mehmke,*** *über graphisches Rechnen und über Rechenmaschinen, sowie über numerisches Rechnen.*

E. ***Netto,*** *Kombinatorik.*

W. F. ***Osgood,*** *allgemeine Funktionentheorie.*

E. ***Pascal,*** *Determinanten. Theorie und Anwendungen.*

S. ***Pincherle,*** *Funktional-Gleichungen und -Operationen.*

A. ***Pringsheim,*** *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. (Elementare Theorie der unendlichen Algorithmen und der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.) Bd. I. Zahlenlehre. Bd. II. Funktionenlehre.*

C. ***Segre,*** *Vorlesungen über algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der mehrdimensionalen Räume.*

D. ***Seliwanoff,*** *Differenzenrechnung.*

M. ***Simon,*** *Elementargeometrie.*

P. ***Stäckel,*** *Differentialgeometrie höherer Mannigfaltigkeiten.*

O. ***Staude,*** *Flächen und Flächensysteme zweiter Ordnung.*

O. ***Stolz*** *und J. A.* ***Gmeiner,*** *theoretische Arithmetik.*

R. ***Sturm,*** *Theorie der geometrischen Verwandtschaften.*
R. ***Sturm,*** *die kubische Raumkurve.*
K. Th. ***Vahlen,*** *Geschichte des Fundamentalsatzes der Algebra.*
K. Th. ***Vahlen,*** *Geschichte des Sturmschen Satzes.*
A. ***Voss,*** *Abbildung und Abwicklung der krummen Flächen.*
E. v. ***Weber,*** *Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung.*
A. ***Wiman,*** *endliche Gruppen linearer Transformationen.*
H. G. ***Zeuthen,*** *die abzählenden Methoden der Geometrie.*

In Aussicht genommen:

W. ***Wirtinger,*** *algebraische Funktionen und ihre Integrale.*
W. ***Wirtinger,*** *partielle Differentialgleichungen.*

☞ Mitteilungen über weitere Bände werden baldigst folgen.

LEIPZIG, Poststraße 3.
März 1900.

B. G. Teubner.

BESTELL-ZETTEL.

Bei der Buchhandlung von .... in ....
bestelle ich hiermit je 1 Exemplar der in

Teubners Sammlung
von Lehrbüchern auf dem Gebiete der
Mathematischen Wissenschaften

erscheinenden Bände; zunächst den soeben erschienenen Band:

von Weber, *Vorlesungen über das Pfaffsche Problem.*
[XI u. 622 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb.

Unterschrift: ....

Ort, Datum, Wohnung: ....

Sophus Lie.

Von

M. Noether in Erlangen.

Die mathematische Wissenschaft betrauert den Verlust eines ihrer führenden Geister: nachdem Lie ein Menschenalter hindurch rastlos gearbeitet, immer höhere und weitere Gebiete umfassend, immer richtunggebend, ist er mitten in energisch kräftigem Schaffen abberufen worden. Unsere Annalen sind an dem Verluste noch unmittelbarer betheiligt: einem Theile der Redaction war Lie persönlich und wissenschaftlich auf's Engste verbunden; die erste Hälfte seiner Schöpfungen ist in ihren Bänden niedergelegt oder zusammengefasst, und unsere Zeitschrift darf sich rühmen, Lie zuerst in seiner Bedeutung erkannt und seine Ideen verbreitet zu haben. Auch die Früchte seiner Einwirkung kommen schon in einer Reihe ihrer Publicationen in hervorragendem Masse zur Erscheinung. Wir entsprechen daher durch einen Nachruf auf Lie an dieser Stelle nicht nur einer wissenschaftlichen Pflicht gegen den grossen Forscher, sondern auch einem persönlichen Anliegen, und glauben diesen beiden Seiten am Besten dadurch gerecht werden zu können, dass wir am Faden seines Lebenslaufes vorzugsweise der Entwicklung der Ideen Lie's in den *ersten* Jahren seines Schaffens nachgehen, jener Zeit, aus welcher sein ganzes Werk zu erklären ist und welche uns zudem dadurch näher liegt, dass er sie theilweise in persönlichem Umgang und in Zusammenarbeit mit F. Klein verbracht hat.*) Ueber die späteren Jahre geben wir nur eine Uebersicht,

*) Die Bearbeitung des mir vorliegenden Materiales übernehme ich an Stelle und mit Unterstützung von Herrn F. Klein, dem jetzt die Zeit zur Darstellung nicht zur Verfügung stand. Von demselben finden sich übrigens allgemeine Besprechungen der Lie'schen Methoden und Ziele in seinen autographirten Vorlesungen (Einleitung in die höhere Geometrie 1892/93 und 1893) und seinem Evanston Colloquium 1893, wie auch in seinem Gutachten über den Lobatschewsky-Preis 1897. Dazu kommen als Material besonders einige handschriftliche Aufzeichnungen, welche aus persönlichen Besprechungen zwischen S. Lie und F. Klein Ostern 1891 und Herbst 1892 niedergelegt sind und welche ursprünglich zu einer Einleitung in eine für die Annalen

welche das weite Gebiet weder nach der historisch-kritischen Seite, noch nach der Seite einer Würdigung der Bedeutung Lie's hin erschöpfen will. Wir können uns um so eher auf die Genesis der Begriffe Lie's beschränken, als es noch verfrüht wäre, die Tragweite seiner Anschauungen heute schon abzustecken, eine spätere vollständige Würdigung aber nicht ausbleiben kann.

Marius Sophus Lie wurde am 17. December 1842 in Nordfjordeid am Eidsfjord als sechstes und jüngstes Kind des dortigen Pastors Johann Herman Lie geboren. Nach sechsjährigem Besuche der Schule von Moss, einer Insel im Kristianiafjord, wohin sein Vater versetzt war, brachte er die Jahre 1857—1859 an der Nissen'schen Privat-Lateinschule von Christiania zu, gleichmässig gut in allen Fächern, so dass er bei seinem Uebertritt an die Universität von Christiania, 1859, ebenso sehr an das Studium der Philologie, als an das der Realfächer dachte. Jedoch beschäftigte sich Lie während seines $6\frac{1}{2}$-jährigen Universitätsstudiums vorzugsweise mit diesen Fächern, mit Naturwissenschaft, mit Astronomie, und hörte mathematische Vorlesungen bei Broch 1860/61, bei Bjerknes, bei Sylow auch über Substitutionentheorie, ohne dass der langsam Reifende damals noch einen tieferen Eindruck in dieser Richtung empfing. Vielmehr verliess er die Hochschule unter einem Drucke, an welchem ebensosehr der Mangel eines klaren Zieles, als eine wenig günstige äussere Lage ihren Antheil hatten. Nach December 1865 bestandenem Realexamen verbrachte Lie einige Zeit mit Privat- und Schulunterricht und versuchte sich auch in gut aufgenommenen Vorträgen über Astronomie, ja dachte daran, sich praktisch dieser Wissenschaft zu widmen. Jetzt erst, im Laufe des Jahres 1868, begann beim Selbststudium sein Interesse für Mechanik und Geometrie; er lernte mehr zufällig die französischen Werke über Mechanik

beabsichtigte Sammlung von Lie'schen, anderwärts publicirten Aufsätzen aus den ersten Jahren dienen sollten. Natürlich wurden auch die häufigen persönlichen und historischen Aeusserungen Lie's in seinen Abhandlungen und Vorreden benutzt, wenn auch die aus späterer Zeit mit grosser Vorsicht aufgenommen werden mussten. Endlich habe ich auch in die Briefe Lie's an Klein, freilich erst für die Zeit seit 1878, und in die an Herrn Engel (seit 1884) Einsicht nehmen dürfen.

Bekannt geworden sind mir ausserdem noch einige biographische Artikel und eine Universitätsrede auf Lie von E. Holst, der Nachruf auf Lie von G. Darboux in den C. R. der Pariser Akademie von 27. Febr. 1899, ein solcher von L. Bianchi in den Rendic. d. R. Acc. dei Lincei vom 9. Sept. d. J. und ein kürzerer von E. Segre in den Atti d. R. Acc. d. Sc. von Turin; endlich in der Sitzung der mathematischen Abtheilung der 71. Versammlung D. Naturf. u. Aerzte vom 18. Sept. d. J. ein mündlicher Nachruf von F. Engel. Eine Liste von Lie's Arbeiten, die aber nur als vorläufige gelten kann, findet sich in G. Loria's Bollett. di Bibl. e St. d. Sc. Mat., Apr.-Juni-Heft; eine genaue Liste wird F. Engel einem im November der Sächs. Ges. d. Wiss. vorzutragenden Nachruf beifügen.

von Duhamel, Jullien, Lamé, die geometrischen von Chasles, sowie Monge's und besonders Poncelet's Anwendungen der Analysis auf Geometrie kennen. Und die letzteren, in Verbindung mit Plücker's analytisch-geometrischen Werken regten endlich die bisher in ihm schlummernden Fähigkeiten plötzlich an und gaben ihm sogleich die Richtungslinie für sein ganzes Denken. Zwar von einer Reihe von Flugblättern, in denen er seine ersten Resultate hinauswarf, insbesondere von einem 1869 der Universität Christiania eingereichten Satz über die *Steiner'sche Fläche* — über den Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf die Kegelschnittschaar der Fläche, der wieder eine Steiner'sche Fläche wird — wissen wir nur aus einer im Band III seines Archivs (1878) enthaltenen, gemischt synthetisch und analytisch gehaltenen Note. Aber gleich mit seiner ersten, der Oeffentlichkeit in geordneter Form übergebenen originalen Arbeit offenbarte sich ihm das Bewusstsein einer ihm innewohnenden mathematischen Productionskraft. Sie trägt schon so sehr Keime seines späteren fruchtbaren Schaffens an sich, dass wir genauer darauf einzugehen haben.

Diese Abhandlung „*Repräsentation des Imaginären der Plangeometrie*" ist in zwei bezw. vom Februar und August 1869 datirten Noten in den „Forhandlinger" der Gesellsch. der Wiss. von Christiania von 1869 in deutscher Sprache veröffentlicht (der erste Theil der ersten Note wegen Schwierigkeiten der Zulassung bei der Ges. der Wiss. ursprünglich schon selbständig, dann auch in Crelle's J. Bd. 70 erschienen). Indem Lie einen imaginären Punkt $X = x + yi$, $Z = z + pi$ der XZ-Ebene im reellen xyz-Raum durch den Punkt (x, y, z) mit dem „Gewicht" p repräsentirt, erhält er für jede imaginäre Curve der XZ-Ebene als Bild eine „gestreifte" Fläche, deren Streifen, Linien grösster Neigung der Fläche, durch $p =$ const. gegeben sind. Hervorzuheben ist schon hierbei die Angabe aller Bewegungen des Raumes, für welche die gestreifte Fäche Bild einer imaginären Curve der XZ-Ebene bleibt; also bereits der für Lie charakteristische *Operationsbegriff*. Weiter aber ordnet Lie jeder der ∞^4 complexen Geraden g der XZ-Ebene eine reelle Raumgerade γ zu, als 0-Streifen $(p = 0)$ der entsprechenden gestreiften Ebene; und zwar werden die zwei Liniencoordinaten von g, in ihre reellen und imaginären Theile zerlegt, gerade die vier Plücker'schen Coordinaten der Raumgeraden γ. Ein zweiter Ausgangspunkt Lie's — die Deutung der zwei Paare Bestimmungsstücke von g als Coordinaten zweier reeller Punkte zweier gegebener reeller Ebenen und die Auffassung von γ als Verbindungslinie dieser beiden Punkte — ist zwar einfacher, liefert aber nicht mehr als der frühere. Lie erhält zu den ∞^3 reellen Punkten P des xyz-Raumes durch $p = 0$ zuerst ∞^3 Imaginär-Punkte der XZ-Ebene, zu diesen dann vermöge einer polaren Beziehung dieser Ebene ∞^3 Imaginär-Gerade g und aus ihnen durch eine Abbildung einen Liniencomplex Γ von ∞^3 reellen Raumgeraden γ. Dabei wird das Entsprechen zwischen den Punkten P und den Geraden γ von Γ ein derart reciprokes, dass auch umgekehrt den Punkten P' von γ Gerade γ' durch P entsprechen, so dass ein zweiter Complex Γ' von Geraden γ' entsteht. Γ und Γ' sind Complexe 2^{ten} Grades, wie sie weiterhin bei Lie als „Reye'sche" oder, nach der späteren Bezeichnung, als „tetraedrale" Complexe erscheinen, nur mit metrisch specialisirtem Tetraeder. Lie verfolgt schon, wie hierbei den Punkten einer beliebigen Geraden des Raumes die Erzeugenden einer Art eines Hyperboloids, denen einer Ebene des Raumes die Sehnen einer Raumcurve 3ter Ordnung entsprechen, er verfolgt die Abbildung von Regelflächen 3ter Ordnung auf Ebenen, von Plücker'schen Complexflächen auf Flächen 2ter Ordnung, überhaupt die gegenseitige Abbildung der beiden Complexe in den Punktraum. Und wenn schon diese Untersuchungen die Vertrautheit mit den Arbeiten von Chasles, theilweise auch von Hamilton, vor Allem aber mit Plücker's damals gerade publicirter Liniengeometrie zeigen, so verrathen sie doch auch eine merkwürdige Selbständigkeit des Autodidakten, vor Allem aber ist das freie Schalten mit der Raumanschauung, die in der Geometrie irgend welche Elemente als die erzeugenden ansieht — so schon von einer Geometrie der Ebene spricht, welche die durch einen Punkt gehenden Kreise als ihre „Geraden" benutzt — der hervortretende Zug. Man erkennt den ächten Geist Plücker's.

Dass die hier gefundene Punkt-Geraden-Transformation eine besondere Art von „Berührungstransformation" ist, sollte für Lie von Wichtigkeit werden.

Für Lie hatte die Arbeit noch den unmittelbaren Erfolg, dass Broch ihm ein Universitätsstipendium und die Möglichkeit zur Fortsetzung seiner Studien im Auslande vermitteln konnte. Er wandte sich für den Winter 1869/70 zunächst nach Berlin, und hier wurde es von einschneidender Bedeutung für seine Entwicklung, dass er sogleich mit F. Klein zusammentraf und in engsten Ideenaustausch trat, der sich bald zu einer Arbeitsgemeinschaft herausbildete. In Klein, der damals schon, in Verwaltung der Erbschaft Plücker's, den zweiten Band von dessen Liniengeometrie herausgegeben, wie auch eine Reihe eigener Forschungen über allgemeine Liniencomplexe 2ten Grades veröffentlicht hatte, fand Lie nicht nur mannigfache Förderung durch den Hinweis auf ihm bisher fremd gebliebene Gebiete, sondern vor Allem das offene Verständniss für seine liniengeometrischen Interessen, in welchem sich seine eigenen bisher noch unfertigen Gedanken klären konnten. Auch in dem Interesse für Transformationen trafen Beide zusammen, wenn auch Klein, mitten in der modern algebraisch-geometrischen, Clebsch'schen Richtung stehend, mehr den projectiven und constructiven, zuordnenden Charakter betonte, Lie aber, von dem engeren Sinne des Projectiven unbeschränkt, mehr den erzeugenden, den allgemeinen Charakter der Transformationen. Der gegenseitige Anschluss wurde für die Beiden um so enger, als sie für ihre schon festgelegte Richtung bei Weierstrass keine weitere Anregung, nur in Kummer's Seminar einige Aufmunterung erhalten konnten. Anfangs beschäftigten sie sich eingehend mit der Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum, die im Sommer 1869 von anderer Seite (dem Referenten) gegeben worden war. Indem Lie zugleich an die Complexstudien seiner ersten Arbeit anschloss und hier, von Klein angeregt, die auftretenden Curven und Flächen anschaulicher erfasste, ergab sich ihm als Frucht eine Note „*Ueber die Reciprocitätsverhältnisse des Reye'schen Complexes*“ (Gött. Nachr. vom 16. Febr. 1870, dat. Jan. 1870), welche aber nicht nur die früher theilweise gelegten Keime weiter entwickelte, sondern auch die ersten Ansätze zu fast allen später zur Entfaltung gekommenen Ideen aus der Verwandtschaftslehre schon deutlich erkennen lässt.

Es handelt sich um den oben genannten Complex, der, specialisirt schon bei Binet und Chasles auftretend, allgemein von Reye als Erzeugniss zweier collinearer räumlicher Systeme 1868 discutirt worden war, hier aber, wovon sein späterer Name, als Gesammtheit der Geraden auftritt, welche die Seitenflächen eines Tetraeders nach constantem Doppelverhältniss schneiden. Bei Lie stellt sich als fundamentale Thatsache die Ableitung seiner *Eigenschaften* aus den *Transformationen* dar, welche der Complex *in sich* erleiden kann: den ∞^3 vertauschbaren Collineationen des Raumes, welche sein Fundamentaltetraeder unverändert lassen — einer continuirlichen Schaar von Transformationen, die eine „endliche“, d. h. von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängige, „Gruppe“ bilden. Das Charakteristische für Lie ist, dass ihm gar nicht mehr der Geradencomplex an sich das geometrische Object der Betrachtung bleibt; vielmehr wendet er seine Transformationen auf irgend ein weiteres Element: eine Raumcurve, eine Fläche, an und erzeugt hierdurch neue Gebilde (Gattungen) von dreifach unendlichen Schaaren von Elementen, die alle als covariante Gebilde zum Complex und Tetraeder bezüglich der Transformationsschaar angesehen werden. Hierin geht Lie über seine beiden ursprünglichen Quellen, Monge's analytische Erzeugungen von Gebilden und die Ortsconstructionen der projectiven Geometrie, weit hinaus, hauptsächlich dadurch, dass er mit Plücker die Willkürlichkeit des Raumelements, auch innerhalb des Geradencomplexes, betont. So theilt er die von Complexgeraden umhüllten Raumcurven in Gattungen, unter denen dann die Punkte des Raumes nur eine specielle bilden, und von denen wieder jede Gattung die andere durch Umhüllung erzeugt; indem drei sich berührende Complexcurven immer zugleich ihre Osculationsebene gemeinsam haben, wird jede dieser Curven durch „Rollen“ von einfach unendlich vielen einer andern Gattung erzeugt. Weiter aber werden Transformationen erörtert, welche jede dieser Gattungen in jede andere überzuführen erlauben, und zwar jede durch *eine* Gattung erzeugte Complexcurve oder -fläche in eine durch irgend eine zweite Gattung erzeugte solche Curve oder Fläche; und es wird schon von den algebraischen Haupttangentencurven dieser Complexflächen gehandelt.

Die hier von Lie angewandten Transformationen sind alle, in noch deutlicherer Weise, als in der Imaginärarbeit, das was er später als „Berührungstransformationen“ bezeichnet hat, und zwar solche von jeder existirenden Art, endliche und sogar „unendliche“ Gruppen, ohne dass freilich diese Gruppenbegriffe selbst, oder auch nur die späteren Lie'schen Begriffe von „vereinigten Flächenelementen“ hier schon *explicit* hervorträten. Wohl zu bemerken ist aber, dass die dem Complexe angehörigen Flächen, im Wesentlichen die tetraedralsymmetrischen Flächen von De la Gournerie (1867), in ihrer mehrfachen Erzeugung als Verallgemeinerung vieler bekannten Flächen, so der Centraflächen, erscheinen und als Transformation der *Minimalflächen* aufgefasst werden können, in die sie durch logarithmische Abbildung übergehen — eine Bemerkung, die Lie sehr bald darauf (Sommer 1870) machte, als er sich mit seiner Geraden-Kugel-Transformation zu beschäftigen anfing, die aber erst 1879 („Weitere Untersuchungen über Minimalflächen“, Archiv IV) ausgeführt wurde [nach einer der Gesellschaft von Christiania den 5. Juli 1870 eingereichten, aber ungedruckt gebliebenen Note; vgl. die Andeutungen im „Résumé“, Forh. 1872]. Auch die Auffassung des Liniencomplexes als eine partielle Differentialgleichung erster und eine solche zweiter Ordnung definirend, der Complexflächen als deren Integralflächen, ist hiernach dem Sommer 1870 zuzuweisen [entgegen einer Bemerkung Lie's in Math. Ann. XXIV, p. 540].

Dieser Sommer 1870, den Lie bis zum Ausbruch des Krieges in Gemeinschaft mit Klein in Paris verlebte, ist überhaupt als die Glanzzeit für seine ersten Conceptionen zu bezeichnen. Zunächst entstanden die gemeinsamen Noten *„Sur une certaine famille de courbes et de surfaces“* (C. R. vom 6. und 13. Juni), welche die in der Note über den Reye'schen Complex noch übersehenen Raumcurven, bezw. Flächen betrachten, die durch eine continuirliche geschlossene Schaar von ∞^1, bezw. ∞^2, der linearen Tetraeder-Transformationen in sich übergehen, die „*W*-Curven und -Flächen“, eine Bezeichnung, die von dem Staudt'schen „Wurf“ abgeleitet ist und den „courbes anharmoniques“, nach dem späteren Ausdrucke Halphen's, entspricht. Die Curven sind die Integralcurven eines Systems gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit linearen Coefficienten, das eben nichts weiter aussagt, als die in der Transformationsschaar enthaltene „infinitesimale“ Transformation. Hier tritt dieser für Lie so wichtig gewordene Begriff zum ersten Male bei ihm auf, abgeleitet aus dem der continuirlich von einem Parameter abhängigen Schaar. Freilich war der Begriff selbst schon lange vorher von Sylvester in der Theorie der linearen Transformationen der Formen, zur Ableitung der die Invarianten definirenden partiellen Differentialgleichungen, eingeführt worden.

Was aber als Fortschritt zu betrachten ist, ist der Hinweis auf gewisse *weitere* Differentialgleichungen, welche durch die Kenntniss der Transformationsschaar und ihrer W-Curven von selbst mitintegrirt werden, derjenigen nämlich, deren Integrale durch die Schaar in ebensolche übergeführt werden; in den Noten freilich nur andeutungsweise, explicit erst in der in diesen Annalen, IV, vom März 1871, publicirten Ausführung über die *ebenen* W-Curven. Man braucht nur, wenn $\eta = \text{const.}$ die Trajectoriencurve der infinitesimalen Transformation ist, η als neue Variable einzuführen, um die Zurückführung auf Quadratur zu erkennen. Indem die Ausführung in Ann. IV so alle fünf Classen von linearen ∞^2-Gruppen der Ebene discutirt, ergeben sich zwar als W-Curven an sich nur bekannte Curven, wie die logarithmische Spirale, aber mit theilweise neuen Eigenschaften, und die bekannten werden allgemeinen Gesichtspunkten eingeordnet. Und dann wird auch ein Grund des Erfolgs der Integrationsmethode erkannt: die Einführung von η ist schon eine Art von Vorausnahme des viel späteren Begriffs der Differentialinvarianten. Uebrigens gehört eine noch directere Verwendung der Hülfs-Differentialgleichung, ohne deren vorgängige Integration, auch einer späteren Zeit an (s. unten, S. 26). Der Lie'sche Gedankengang war der, die ∞^3 Collineationen des Raums mittelst logarithmischer Abbildung durch die ∞^3 Translationen eines zweiten Raums zu ersetzen; und hieraus entstanden die in der genannten ungedruckten Note vom Juli 1870 zuerst auftretenden Translationsflächen.

Leider ist die für die Annalen beabsichtigte Ausführung auch der *räumlichen* Betrachtungen der C. R.-Noten nicht fertig gestellt worden. Aus den noch vorhandenen Bruchstücken von Entwürfen,*) wie aus der zweiten Note selbst, geht hervor, dass der Zusammenhang der Complexe von W-Curven und -Flächen mit den partiellen Differentialgleichungen, insbesondere für Sätze wie der, dass die W-Curven einer W-Fläche Haupttangentencurven auf derselben sind, in Lie's Geist schon völlig entwickelt war, sodass diese Arbeit einen wichtigen Durchgangspunkt zu den sogleich zu besprechenden Entwicklungen, welche in Annalen V zusammengefasst worden sind, bildet. Weiterhin wird in diesen Entwürfen die Ausdehnung

*) Im Besitze des Herrn Klein.

der projectiven und Reciprocitäts-Begriffe vom Endlichen auf Linien- und Flächen*element*, also auch auf das ganze differentielle Gebiet (die spätere Theorie der Berührungstransformationen) schon sehr deutlich; und es tritt der Begriff der infinitesimalen Transformation und der Transformationsgruppe, wenn auch in specieller Form, noch mehr in den Vordergrund, als in der eben angeführten Annalenarbeit, welche die Curvencomplexe selbst, also die erzeugten Gebilde, zum Ausgangspunkt nimmt.

Die hier hervorgehobenen Ideen der gemeinsamen *W*-Noten, mit Ausnahme der letzterwähnten Begriffe, gehören Lie allein an, während die invariantentheoretischen Beziehungen und das auf Specialisirungen des Grundtetraeders Bezügliche auf Klein zurückgeht. Gleichvertraut war beiden das Operiren mit *linearen* Substitutionen; und die Einführung des Begriffes der Abgeschlossenheit der Transformationsschaar, wie des der Vertauschbarkeit, ist auf den Einfluss der Galois'schen Ideen zurückzuführen, die damals im Gebiete der discontinuirlichen Substitutionsgruppen durch das eben erschienene Werk von C. Jordan, und den ein Jahr vorher in diesen Annalen (Bd. I) auf Veranlassung von Clebsch veröffentlichten Commentar verbreitet wurden. Waren ja doch diese Ideen, die auch zu den in der Zahlentheorie gebrauchten Begriffen von linearen Gruppen offene Analogien darboten, schon von Jordan selbst ebenfalls 1869 auf das Gebiet aller Gruppen von Bewegungen des Raums, der continuirlichen wie der discontinuirlichen, angewandt worden (Annali di Mat., ser. 2, II), doch ohne dass hierbei die analytische Seite in Betracht gezogen worden wäre.

Noch nach anderer Richtung sollten die damaligen Untersuchungen der französischen Mathematiker für die beiden Forscher von nachhaltiger Wichtigkeit werden, indem sie zugleich bei Lie eine verwandte Saite berührten. In der von Liouville, Lamé, J. A. Serret, Bonnet überkommenen Tradition bearbeitete man in Paris das Gebiet, welches nach Monge und Poncelet als Application de l'Analyse à la Géometrie bezeichnet werden kann; und zwar war das Interesse vorzugsweise den *Massverhältnissen* der Flächen zugewandt: den Krümmungscurven, den Orthogonalsystemen, etc. Und eine ganz analoge Richtung verfolgte man zugleich von projectiver Seite her, im Kreise der Schüler Chasles's: hier versuchte man, durch Heranziehen des imaginären Kugelkreises auch complicirte Massverhältnisse einem besseren Verständniss und einer allgemeinen Behandlungsweise zugänglich zu machen. Beide Richtungen trafen in den Untersuchungen der „Anallagmatiker" — Laguerre, Moutard, Darboux — zusammen; es war ein Vorgang, der als ein Spiegelbild von Lie's eigener an Monge und die projective Geometrie anschliessender Entwicklung auf diesen sonst schwer zugänglichen Forscher tiefen Eindruck machen musste. Zudem kamen die beiden Freunde gerade mit Darboux sogleich in näheren persönlichen Verkehr.

Zwischen den Entwicklungen der anallagmatischen Richtung, die sich auf eine Art von *Kugel*geometrie bezog, und denen der *Linien*geometrie — z. B. zwischen den von Darboux mündlich mitgetheilten Formeln für das Orthogonalsystem der confocalen Cykliden und den Klein'schen Formeln für die ∞^1 zur nämlichen Kummer'schen Brennfläche gehörigen Complexe zweiten Grads; oder zwischen den Translationseigenschaften der Minimalflächen und Eigenschaften der beim Reye'schen Complex auftretenden Lie'schen Flächen — herrschte eine unverkennbare Analogie. Sollte nicht ein Uebertragungsprincip existiren, welches zwischen beiderlei Betrachtungsweisen vermittelte?

Lie erinnerte sich an seine Beschäftigung mit der Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum, an den hierbei in diesem Raume auftretenden ausgezeichneten Kegelschnitt; ein Schritt weiter: die Verlegung des Kegelschnitts in den Kugelkreis, und die merkwürdige Berührungstransformation, welche die Geraden eines Raumes R_1 in die Kugeln eines Raumes R_2 überführt, und damit, als Umhüllungsgebilde, die Haupttangentencurven der Flächen von R_1 in die Krümmungscurven der Flächen von R_2, stand da!

Es war Anfang Juli, dass Lie diesen entscheidenden Schritt that, von dem er aber erst am 31. October der Pariser Akademie Mittheilung machen konnte (C. R.: „Sur une transformation géométrique"; unter dem 24. October der Ges. von Christiania in der am 9. December erschienenen Note: „Om en Classe geometriske Transformationer"). Zur volleren Würdigung desselben muss man hier noch den Inhalt der ungedruckten Note vom Juli 1870 heranziehen; daselbst soll schon [cf. „Kurzes Résumé etc." in Forh. von 1872, S. 24] der Reye'sche Complex ausdrücklich als partielle Differentialgleichung 2ter Ordnung aufgefasst sein — nämlich als alle Flächen definirend, deren beide Haupttangenten in jedem Punkte harmonisch liegen zu den beiden Erzeugenden des Complexes in ihrer Ebene; wobei denn die zum Complex gehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche den jedem Punkt zugeordneten Complexkegel darstellt, ein singuläres Integral jener Gleichung zweiter Ordnung wird; und ebenso sollen die dem Complex angehörigen reciproken Beziehungen als Berührungstransformationen ihrer Integralflächen betrachtet sein.

In der That hatte Lie sich im Sommer 1870 intensiv mit Monge's Theorie der partiellen Differentialgleichungen befasst: mit dessen Eigenart, einerseits eine Reihe sehr allgemeiner geometrischer Begriffe, wie den der Erzeugung von Flächen durch Umhüllung, weiter auszubilden und die Gesetze dieser Erzeugung durch partielle Differentialgleichungen auszudrücken; andrerseits die Integrationen von solchen Gleichungen auf jene geometrischen Begriffe zurückzuführen. An der Hand dieser Anschauungen kam nun Lie zuerst ein Begriff zur Klarheit, der seiner bisherigen Denkweise mehr unbewusst zu Grunde gelegen: der Gedanke des *Flächenelementes*, des Grösseninbegriffs $\left(x, y, z, p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ als des eigentlichen Elementes der ganzen Theorie. Mit diesem neuen Begriff suchte Lie zuerst in Monge's Ideen, späterhin auch in Cauchy's Integrationsverfahren einzudringen; vor Allem in die Thatsache, dass zur Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$ schon die Integration des bekannten kanonischen Systems von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen 1ter Ordnung zwischen x, y, z, p, q, auf welches jedes Integrationsverfahren zuerst führt, genügt. Die allgemeine Aufgabe stellt sich für Lie dahin, die ∞^4 Flächenelemente, die durch $F = 0$ definirt sind (also zu jedem Punkte des Raums eine Kegelhaube von solchen), entsprechend der Lagrange'schen „vollständigen Lösung" auf ∞^2 Elementvereine von je ∞^2 Elementen zu vertheilen. Wie er etwas später erkannte, brauchen übrigens diese Vereine nicht gerade Flächen zu bilden, sondern deren consecutive Elemente haben nur die Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ zu befriedigen, d. h. müssen in der Art „vereinigt" liegen, dass immer das successive Element durch den Punkt des vorhergehenden geht. Während nun jenes kanonische System für Monge nur ∞^3 Punktkurven als „Charakteristiken" definirt, die je die Richtung der Erzeugenden der Kegelhauben haben, definirt dasselbe System für Lie ∞^3 „charakteristische *Streifen*", nämlich jene Curven, je verbunden mit den ∞^1 Flächenelementen von $F = 0$, die sich an die Linienelemente einer solchen Curve anschmiegen. Diese Auffassung führt Lie dann zur Einsicht: dass, wenn für zwei benachbarte charakteristische Streifen bei *einer* Stelle die entsprechend benachbarten Flächenelemente von $F = 0$ vereinigt liegen, dies längs der Ausdehnung der beiden Streifen überhaupt geschieht. Und von dieser Grundlage aus übersieht er den ganzen Inhalt und Umfang, welche irgend ein Integrationsverfahren von $F = 0$ haben kann: indem man von irgend einem nicht-charakteristischen Streifen — d. h. irgend einer Curve mit $F = 0$ zugehörigen Flächenelementen, bei Cauchy von einer Anfangscurve in $y = 0$ — ausgeht, und von jedem Element desselben den hier auslaufenden charakteristischen Streifen zieht, erhält man immer eine Integralmannigfaltigkeit, und zwar die allgemeinste, wenn man die Ausgangscurve beliebig ändert. Die Integration ist also nur zur Bildung dieser ∞^1 charakteristischen Streifen erforderlich, während die zu Grunde gelegte Ausgangscurve die willkürlichen Elemente mit sich bringt. Insbesondere könnte man auch, mit Jacobi, die von einem festgewählten *Punkte* ausgehenden charakteristischen Streifen zusammenfassen.

Diese Grundauffassung Lie's, welche die Integralausdrücke mit zwei Variabeln auf solche mit nur einer Variabeln zurückführt, die willkürliche Zusammenfassung der Streifen zu Flächen aber als blosses Corollar behandelt, ist, mit den Anwendungen auf die nun zu besprechenden Abbildungen und die weiteren Problemstellungen Lie's, bis jetzt von den Differentialgeometern vielleicht noch zu wenig benutzt worden. Uebrigens ist sie in der angeführten Schlussform auch bei Lie nur nach und nach entstanden, indem noch die Abhandlung in Annalen V (1871) die Integralflächen von $F = 0$ nur als Zusammenfassung von irgend ∞^1 Charakteristikencurven, die eine Curve umhüllen, aufnimmt, für den Begriff des „Streifens" aber noch keinen besonderen Ausdruck hat; ein solcher tritt vielmehr nur erst in einer der Christiania-Gesellschaft im Sept. 1871 überreichten ungedruckten Note und in den später zu besprechenden Noten vom Frühjahr 1872 explicite auf. Auch hat die Betrachtungsweise ihren Vorläufer in dem Lie seit 1871 bekannt gewordenen Werke P. du Bois-Reymond's von 1864,*) in welchem der Begriff des Streifens, unter der Bezeichnung „Integralstreifen", und dessen Bestimmung durch ein Anfangselement, geometrisch entwickelt und benutzt wird, wenn auch nicht so allgemein und umfassend wie bei Lie.

Zunächst verband Lie diese Gedankenrichtung nur mit den Begriffen der Plücker'schen Geradencomplexe. Indem er damit an die Abbildung des linearen im Raume R_1 gelegenen Complexes auf den Punktraum R_2 herangeht, erkennt er, dass sie durch zwei lineo-lineare Gleichungen geleistet wird; dass aber durch solche in den *beiden* Räumen Liniencomplexe entstehen, deren Geraden je den Punkten des andern Raumes zugeordnet sind, und die im Allgemeinen zwei Reye'sche Complexe werden. Ein Complex m^{ten} Grades nun bestimmt ihm ein Integrationsproblem, nämlich in jedem Punkte x, y, z einen Kegel m^{ten} Grades, d. h. ∞^1 Richtungen $dx : dy : dz$ und damit eine Gleichung $f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$, die Gleichung für die Charakteristikenrichtungen einer partiellen Differentialgleichung 1^{ter} Ordnung, welche die Gleichung jenes Kegels in Ebenencoordinaten ist; und deren Integration verlangt, alle Flächen anzugeben, die in jedem ihrer Punkte den bezüglichen Kegel berühren. Die Correspondenz zwischen R_1 und R_2, auf die Lie hier geführt wurde, hat zugleich das Besondere, dass *Complex*-Curvenrichtungen der beiden Räume eindeutig einander zugeordnet werden, und zugleich reciprok, insofern, wenn man zwei sich entsprechende Complexcurven betrachtet, immer irgend eine von beiden als von den Punkten ihres Raumes erzeugt, die andere als von den entsprechenden Complexgeraden umhüllt angesehen werden darf. Von zwei

*) Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln. Erstes Heft. Leipzig 1864.

sich entsprechenden Flächenelementen wird das eine ganz *beliebig*, insofern als, wenn ein Punkt sich auf einer Fläche bewegt, die entsprechende Gerade wieder eine Fläche umhüllt: die Brennfläche der durch sie erzeugten Congruenz.

Lie zögert aber nicht, diese Betrachtungen in ihrer generellen Bedeutung aufzufassen und baut daraus seinen allgemeinsten Begriff einer *Berührungstransformation* auf. Zu den altbekannten Transformationsarten, bei denen *Berührung* eine invariante Beziehung ist: der gewöhnlichen durch *drei* Gleichungen zwischen den Coordinaten vermittelten Punkttransformation, und der mittelst *einer* aequatio directrix von Plücker dargestellten reciproken Punkt-Flächen-Transformation, speciell der dualistischen Verwandtschaft, trat hier eine durch *zwei* lineare Gleichungen vermittelte reciproke Transformation, eine ganz neue Art, mit Eigenschaften der Berührung, der Zurückführbarkeit auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, die alle, wie aus seinem Begriff des Flächenelementes $(xyzpq)$ hervorgeht, erhalten bleiben, wenn man die zwei linearen Gleichungen durch zwei ganz beliebige Gleichungen zwischen zwei Werthsystemen $x_1 y_1 z_1$; $x_2 y_2 z_2$ ersetzt: eine Punkt-Curven-Transformation. Zugleich erkennt Lie, indem er alle Berührungstransformationen zwischen zwei Räumen als durch fünf Gleichungen zwischen $x_1 y_1 z_1 p_1 q_1$ und $x_2 y_2 z_2 p_2 q_2$ gegeben auffasst, aus denen die p, q zu eliminiren sind: dass es keine anderen solche Transformationen geben kann, als die drei eben vom Punktstandpunkt aus charakterisirten Arten.

So grundlegend für Lie's spätere Thätigkeit diese Generalisirungen wurden, so interessant gestaltete sich sogleich die Anwendung auf das speciell-vorliegende Problem. Die Specialisirung ging dahin, dass, statt der allgemeinen tetraedralen Complexe, in R_1 der allgemeine lineare Complex L, in R_2 der „Minimalcomplex“ M, d. h. der Complex der den Kugelkreis schneidenden Geraden, der „Minimalgeraden“ oder Geraden von Länge Null, gesetzt wurde. Nun gehen die Punkte einer beliebigen Geraden von R_1 in die eine Schaar imaginärer Geraden einer Kugel von R_2 über — die freilich, umgekehrt, durch ihre zweite Schaar noch auf eine andere Gerade von R_1 abgebildet wird —, die sich an die Gerade von R_1 anschmiegenden Flächenelemente in die Flächenelemente der Kugel von R_2. Die Geraden irgend eines linearen Complexes von R_1 transformiren sich in die Kugel von R_2, welche eine feste Kugel unter constantem Winkel treffen, senkrecht, wenn jener Complex mit L „involutorisch“ lag; sich schneidende Gerade in sich berührende Kugeln. Die Gesammtheit der projectiven Transformationen des Raumes R_1 geht in die der Kugeltransformationen in R_2 über, von denen solche aller Arten auftreten: die gewöhnlichen Bewegungen, vor Allem die Transformationen durch reciproke

Radien und Paralleltransformationen — also eine auf ihre Fundamente zurückgeführte vollständige Analogie zwischen der *Geraden-* und *Kugelgeometrie*, eine merkwürdige intimste Beziehung zwischen der allgemeinen *projectiven* und zwischen der *metrischen*, auf reciproke Radien gegründeten Geometrie. Es war zugleich die erste, wirkliche Geometrie mit der *Kugel* als Element; geometrisch durch die Unterscheidung der beiden Geradenschaaren der Kugel (Vorzeichen des Radius) äquivalent der späteren Laguerre'schen Auffassung der Semisphären, eine Unterscheidung, welche die darauf folgende Darboux'sche und die spätere Reye'sche Kugelgeometrie nicht treffen.

Dazu gesellte nun Lie noch infinitesimal-geometrische Betrachtungen, die ihm die zu einem Complex von ∞^3 Curven gehörige partielle Differentialgleichung 1ter Ordnung neu interpretirten: dass nämlich irgend eine von solchen Curven umhüllte „Complexcurve" in jedem ihrer Punkte nicht nur in der Richtung einer Erzeugenden des zugehörigen Kegels läuft, sondern auch dessen Tangentenebene zur Schmiegungsebene hat; dass also die Integralflächen in jedem ihrer Punkte von den berührenden Complexcurven osculirt werden und insbesondere, wenn der Complex ein Geradencomplex ist, dessen Geraden zu *Haupttangenten*, ihre charakteristischen Curven zu Haupttangentencurven haben.

Und gleich das erste Ergebniss dieser Anschauungen eröffnete die weitesten Perspectiven und war geeignet, einen kräftigen Anstoss zur Verfolgung dieser Theorien zu geben: eine Abbildung der *Haupttangentencurven* der Flächen von R_1 auf die *Krümmungscurven* der Flächen von R_2. In der That sind, nach einer in Forh. 1882 ausgesprochenen Formulirung, diese beiden Curvenarten als Ort von ∞^1 Flächenelementen anzusehen, unter denen je zwei consecutive einer Geraden, bezw. einer Kugel angehören. So ergaben sich, da die französischen Mathematiker die Krümmungscurven der Cykliden bestimmt hatten (C. R. t. 59), auf der Kummer'schen Fläche 4ter Ordnung und 4ter Classe die Haupttangentencurven als algebraische Curven 16ter Ordnung und Classe: Curven, welche, wie Klein sodann erkannte, mit einem von ihm in Math. Ann. II behandelten, aus der Eigenschaft der Fläche als Singularitätenfläche von ∞^1 Complexen zweiten Grades fliessenden, Curvensystem identisch waren.

Unter den mannigfaltigen Richtungen, nach denen Lie diese Dinge verfolgte — so durch Untersuchung derjenigen partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordnung, deren charakteristische Curven Krümmungscurven sind; ferner, mittelst Betrachtung der Krümmungsmittelpunktsflächen, derjenigen Gleichungen, deren charakteristische Curven geodätische Curven werden; oder auch durch Betrachtung von Liniencomplexen mit infinitesimalen Transformationen in sich, als Erweiterung der früheren W-Theorie — müssen wir noch eine hervorheben: die Aufstellung einer jeweils zugehörigen partiellen

Differentialgleichung *2^ter Ordnung*. Sie tritt auf, wenn man die Flächen sucht, welche an jeder Stelle drei consecutive Punkte mit einer Complexcurve der Gleichung 1^ter Ordnung gemein haben, oder deren Haupttangentencurven harmonisch liegen zu zwei Complexrichtungen; wenn man also die Flächen sucht, welche irgend ∞^1 der Charakteristiken der Gleichung 1^ter Ordnung enthalten. Hierbei erscheinen die bekannten Gleichungen von Monge-Ampère und deren Nachfolgern, mit der Reduction durch eine Berührungstransformation auf eine in den zweiten Differentialquotienten lineare Form, in neuem Lichte; und Lie verfolgt den besonderen Zweck, *alle* derartigen Gleichungen anzugeben, welche ein oder zwei erste allgemeine Integrale haben. Reichste Ausführungen finden sich in Lie's Noten in den Forh. von 1871: „Over en Classe geometriske Transformationer", von denen die beiden ersten Abschnitte, in norwegischer Sprache, Lie 1871 als Doctordissertation und Habilitationsschrift in Christiania gedient haben, während die übrigen Abschnitte, wie fast alle Arbeiten Lie's, in deutscher Sprache geschrieben sind; und in der in diesen Annalen, Bd. V, im Herbst 1871 erschienenen grossen Abhandlung: „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen". Zusammenfassend sind die in diesen Arbeiten zur Geltung gekommenen, beherrschenden Gedanken Lie's: die Zugrundelegung des *Flächenelementes*, der Begriff der *Berührungstransformation*, die Aufstellung *aller* solcher, ohne und mit Wechsel des Raumelements, die Durchdringung der Monge'schen Ideenbildungen mit diesen geometrischen Begriffen, ihre ausgiebige Verwendung für *metrische* Differentialverhältnisse der Flächentheorie und für die Auffassung der *partiellen* Differentialgleichungen.

Lie hatte Anfangs August bei Beginn des Krieges Paris verlassen, um zu Fuss nach Italien zu wandern, wurde aber schon in Fontainebleau irrthümlicherweise als Spion verhaftet und einige Wochen festgehalten. Seine Weiterreise führte ihn dann über Italien und die Schweiz, und auf dem Rückweg nach Christiania traf er nochmals kurz mit Klein zusammen, um eine gemeinsame, in den Berichten der Berliner Akademie vom 15. December 1870 erschienene Note über die oben erwähnten Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche zusammenzustellen. Dass die *gestaltlichen* Betrachtungen derselben, wie auch die Bestimmung der Plücker'schen Zahlen der Curven, Lie *nicht* angehören, ist charakteristisch für die Art seiner geometrischen Denkweise. Sicherlich wird man ihn, der bisher in seinem ganzen Gedankengange und in seinen Darstellungen den freiesten Gebrauch von Raumanschauungen gemacht, der aus solchen Anschauungen heraus die analytischen Forschungen aufgefasst und mit neuen Ideen über Transformationen und differentielles Verhalten der Mannigfaltigkeiten durchsetzt hatte, dessen Bedeutung sogar zum grossen Theile gerade darauf beruht, dass er die ganze Beweglichkeit der projectiv-algebraischen Betrachtungsweisen, welche auch das complexe Gebiet im vollen Umfang in unserem Raum zulassen, ohne Weiteres auf das Differentielle und Transcendente anwendet, in erster Linie nicht als Analytiker, sondern als Geometer zu bezeichnen haben. Aber seine Anschauung bezieht sich eben auch nur auf dieses Verhalten von Gebilden im Unendlich-Kleinen oder begrenzten Gebiete. Das concrete Bild einer Gesammt-Mannigfaltigkeit in ihrer Gestalt, d. h. in ihren endlichen Formenbeziehungen, deren Wechsel bei variabeln Parametern, die Realitätsfragen überhaupt, haben Lie nie interessirt. In jenem Gebiet aber, das in den geometrischen Elementen und Operationen nur eine Versinnlichung, eine Zusammenfassung von ganz abstracten Begriffsbildungen, oft von den complicirtesten, sieht, war Lie Meister. Bezeichnend ist, dass Lie sich von vornherein nie auf das Algebraische beschränkte, sondern nur einen allgemeinen Functions- oder Abhängigkeitsbegriff benutzte, der geometrisch eben mit reinen Mannigfaltigkeitsbegriffen zusammenfiel und dem erst spät einige Merkmale der analytischen Function zugefügt wurden. Aber *einen* Vortheil begrifflich-geometrischer Auffassung analytischer Beziehungen hat Lie wie kein Anderer verwerthet: was in den Methoden der Formelsprache, die je besondere Elemente auszeichnen, oft die verschiedenartigste Darstellung annimmt, fällt, als begrifflich Gleiches, ihm unter einheitlichen Gesichtspunkt — wie sich ihm etwa die vom Standpunkt der Punktcoordinaten so verschiedenartigen Gebilde: Punkt, Curve, Fläche unter dem Grundbegriffe der Flächenelement-Erzeugung zusammenordnen. Seine Raumauffassungen, die er seine „synthetische" Methode zu nennen pflegte, werden in ihm wahrhaft schöpferisch anregend zu neuen Grundbegriffen.

Indess mag hierbei darauf hingewiesen werden, dass Lie, wie es scheint, seine geometrischen Begriffe doch nicht so weit differentiell ausgebildet hat, dass sie auch das Verhalten aller Berührungstransformationen an *speciellen* Stellen, wo sie unbestimmt werden, umfassen, wobei der im allgemeinen geltende Begriff der Invarianz von Berührung seine unmittelbare Bedeutung ändert; und doch ist diese Ausbildung im Anschluss an Plücker möglich und liegt auch im Wesentlichen geleistet vor. Auch das hängt mit dem Umstande zusammen, dass Lie bei seinen Transformationen erst nur einen unbestimmten Functionsbegriff, späterhin einen beschränkten Gültigkeitsbereich, ohne analytische Fortsetzung, im Auge hat.

Der auf allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriffen beruhenden Denkweise, wie sie unter den Geometern seit Ende der sechziger Jahre mehr und mehr Gemeingut geworden ist, ist nun die Richtung zuzuschreiben, welche die Fortbildung von Lie's Ideen über Berührungstransformationen in den beiden folgenden Jahren nimmt: 1871, in Ausgestaltung der Krümmungs- und Orthogonaltheorien der Kugelgeometrie, auf eine *Krümmungstheorie höherer Räume;* von hier aus, 1872, auf ein geometrisches Eindringen in die *Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordnung von mehr als drei Variabeln.*

Die erstere Ausbildung ist in einigen Noten Lie's (in den Gött. Nachr. vom Mai und November 1871, und in der ungedruckt gebliebenen, Sept. 1871 der Akad. von Christiania überreichten), welche analogen Noten von Klein folgen, niedergelegt. Wenn Klein (Gött. Nachr. März 1871) das Dupin'sche Theorem auf Involutionsbeziehungen an Liniencomplexen principiell überträgt, indem er den Plücker'schen Geradenraum als metrischen Punktraum von vier Dimensionen auffasst, so verallgemeinert nun Lie umgekehrt die Krümmungsbeziehungen selbst, deren Element die Kugel ist, auf den Punktraum von n Dimensionen (R_n), und stellt durch die ∞^{n+1} Kugeln desselben und ihre „Involutionsbeziehungen" eine Beziehung zur metrischen Geometrie des R_{n+1} her (gleichsam durch Schnitt der Minimalkegel des R_{n+1} mit einem ebenen R_n), wobei die conformen Transformationen des R_{n+1} in solche Berührungstransformationen des R_n übergehen, welche Krümmungscurven in ebensolche überführen, und zwar in die allgemeinsten dieser Eigenschaft. Die Darboux'sche Methode zur Uebertragung von Orthogonalsystemen (C. R. Aug. 1869) ist hiervon verschieden. Wie jede dieser ersten Arbeiten Lie's einen Ideenfortschritt aufweist, so auch die zwei Göttinger Noten, indem sie nicht nur die Ueberleitung zu der oben genannten Theorie von 1872 bilden, sondern auch, wenn auch noch in schüchterner Weise, zum ersten Male die in den W-Noten concipirten Ideen mit bewusster Betonung in allgemeine *gruppentheoretische* Operationen umsetzen, so wenn Lie aus einer endlichen Zahl infinitesimaler Operationen die endliche Gruppe der früher genannten „linearen Kugeltransformationen" des R_3, mit 15 Parametern, erzeugt.

Eine dritte für die Gött. Nachr. bestimmte Note über den R_n, welche, in Erweiterung der Arbeit in Annalen V, die Integrationsfragen noch schärfer betonen sollte,*) unterblieb, da sich bei Lie um diese Zeit die Ideen zu rasch fortbildeten, als dass er Musse zu ihrer ausführlichen Bearbeitung hätte finden können. Dass alle diese Probleme der metrischen Geometrie nur Specialfälle der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen vorstellen, zu deren Behandlung auch bei generellster Fragestellung seine geometrischen Mittel sehr wohl ausreichen würden: das war die Ueberzeugung, die sich ihm immer mehr aufdrängte. Wenn er bislang mit seinen neuen Vorstellungen nur die Monge'schen Probleme

*) Ein Entwurf von Mai 1872 befindet sich in den Händen des H. Klein.

erfasst hatte, so musste jetzt sein Ziel werden, mit Hülfe der zuletzt gewonnenen geometrischen Begriffserweiterungen der allgemeinen Orthogonalitäts- oder Involutionsbeziehungen, in die Entwicklungen der *Analytiker*, wie Cauchy und Jacobi, über partielle Differentialgleichungen mit $n-1$ unabhängigen Variabeln einzudringen. Und nicht nur dies gelang ihm, sondern er ging sehr bald darüber hinaus zu *neuen allgemeinen Integrationstheorien* vor.

Ein „Kurzes Résumé mehrerer neuen Theorien" v. 30. April 1872 (Forh. v. 3. Mai), aus nur vier Seiten bestehend, und eine noch kürzere Note „Zur Theorie der Differentialprobleme" (Forh. v. 14. Nov. 1872) enthalten schon programmatisch die Lie'schen Ideen *zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordnung:* die Berührungstransformationen haben den Zweck, diese Gleichungen auf ihre einfachsten Formen zurückzuführen; aber *eine* solche Gleichung hat noch keine Invariante, indem sie auf jede andere, wie auf $z=0$, zurückgeführt werden kann; wohl aber zwei Gleichungen $F=0$, $F_1=0$. Für sie ist das Poisson-Jacobi'sche Klammersymbol (FF_1) „charakteristisch", d. h. invariant, da $(FF_1)=0$ — eben die oben (S. 16) besprochene Relation der Orthogonalität oder der „Involution" — die Bedingung ausdrückt, dass die beiden Gleichungen $F=0$, $F_1=0$ „in Involution" sind, d. h. dass sie ein gemeinsames vollständiges Integral mit $n-2$ willkürlichen Constanten besitzen. Und indem Lie den Charakteristikenbegriff von Lagrange und Monge, und insbesondere seinen der „charakteristischen Streifen", auf höhere Räume erweitert, fasst er für $n-1$ unabhängige Variable die ganze Cauchy'sche Methode, die zur Integration von $F=0$ die Angabe aller F_1 verlangt, für welche $(FF_1)=0$ ist, in den Satz zusammen: Berühren sich zwei Integralmannigfaltigkeiten M_{n-1}, von $n-1$ Dimensionen, in einem Punkt, so haben sie einfach unendlich viele Flächenelemente, die einen charakteristischen Streifen bilden, gemeinsam; und — indem man die von den Punkten eines charakteristischen Streifens von F ausgehenden charakteristischen Streifen von F_1 zusammenfasst — sogar zweifach unendlich viele, wenn sie zwei in Involution liegenden partiellen Differentialgleichungen $F=0$, $F_1=0$ angehören.

Schon in einer Note vom 8. Mai (Forh. v. 10. Mai), wie in einer solchen vom 4. Juni (Gött. Nachr. v. 19. Juni), gelangt Lie von hier aus, ohne Hülfe des Poisson-Jacobi'schen Theorems, zu einem neuen Integrationsverfahren. Anknüpfend an diejenigen Integral-M_{n-1} des involutorischen Systems $F=0$, $F_1=0$, welche in der Jacobi'schen Weise aus den durch einen Punkt gehenden Charakteristiken sich zusammensetzen, zeigt Lie begrifflich, dass die aus Verbindung mit $x_{n-1}=\alpha$ und Elimination von $p_{n-1}=\frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}$

folgenden Schnitte der M_{n-1} des ursprünglichen Systems $F=0$, $F_1=0$ ohne Weiteres in die Charakteristiken der durch die Elimination resultirenden *einen* partiellen Differentialgleichung $\varphi=0$ von $n-2$ unabhängigen Variabeln übergehen. Mit anderen Worten: sobald man von den $2n-3$ gewöhnlichen Differentialgleichungen für die charakteristischen Streifen der Gleichung $F=0$ — dem der linearen partiellen Differentialgleichung $(FF_1)=0$ entsprechenden Systeme — ein einziges Integral $F_1=c$ kennt, ist hierdurch schon die ganze Integration der Gleichung $F=0$ mit $n-1$ unabhängigen Variabeln auf die einer Gleichung $\varphi=0$ mit nur $n-2$ solchen reducirt.

Gegenüber Cauchy und Jacobi war hiermit die Ordnung und Anzahl der zur Integration vorzunehmenden Integraloperationen wesentlich erniedrigt. Aber in diesem *Resultate* traf Lie mit A. Mayer genau zusammen (Gött. Nachr. v. 12. Juni 1872); nur dass Letzterer auf scheinbar anderem Wege dazu gelangt war, indem er nämlich die Kenntniss *eines* Integrals jener Gleichung $\varphi=0$ zur Ableitung *eines* gemeinsamen Integrals von $F=0$, $F_1=0$ benutzte. In der That ist — freilich entgegengesetzt der Ansicht Lie's — das der Reduction zu Grunde liegende Princip, Lie's „Schnittmethode", bei beiden Autoren im Wesentlichen dasselbe; schon du Bois-Reymond hatte es (im § 1 des o. c. Werkes und in Cr. J. 70) zur Integration eines integrabeln totalen Differentialausdrucks $dz=\Sigma X_i dx_i$ mittelst *einer* Quadratur verwendet (wie man besser sieht, wenn man, statt $x_{n-1}=\alpha$ zu setzen, mittelst der Substitution $x_{n-2}=\alpha x_{n-1}$ an Stelle von x_{n-2} die Variable α einführt): constanten Werthen der alten Variabeln (hier $x_{n-1}=0$, $x_{n-2}=0$) wird eine unendliche Mannigfaltigkeit von Werthen der neuen Variabeln (hier $x_{n-1}=0$, α beliebig) zugeordnet, wobei denn in der transformirten Gleichung die erste Integrationsconstante von α unabhängig werden muss, also α nur noch die Rolle eines willkürlichen Parameters spielt.

Das analytische Verständniss der Lie'schen Methode, und ihrer Anwendung auf simultane Systeme, war damals der Vermittelung von A. Mayer zu verdanken; und der enge Verkehr mit diesem Forscher, der im Herbst 1872 begann, hat Lie von da an dazu geführt, die bisherige „synthetische", d. h. im Gewand der Mannigfaltigkeitsbegriffe einherschreitende Darstellungsweise seiner Arbeiten selbst immer mehr durch eine analytische zu ersetzen. Aber man sieht es diesen neuen Darstellungen doch an, dass sie eigentlich Uebertragungen aus einer anderen Denkweise sind, Verificationen von Sätzen, die in seiner Vorstellung fertig dastehen; sie bleiben, selbst wenn er seine eigensten, in sich abgeschlossenen Begriffe in Formeln fasst, hinter den klaren analytischen Entwicklungen von Mayer und Anderen zurück. Die begriffliche Auffassung selbst ist für Lie auch späterhin immer das Primäre geblieben; sie ist es, welche Lie, wie in den Untersuchungen über Differentialgleichungen, so auch in seinen späteren Forschungen, in der Gruppentheorie und ihren vielgestaltigen Anwendungen, leitet; und die unmittelbare Zurückführung auf die Grundbegriffe allein ist es, welche ihn in seinen Schlüssen befriedigt. Und wenn schon jeder algebraische Geometer der neueren Schulen die Schwierigkeiten der Umsetzung begrifflicher Systeme in eine zusammenhängende verständliche analytische Sprache kennt, so kommt bei Lie hinzu, dass in seine „synthetischen" Begriffsbildungen manches zu Allgemeine, was noch der Präcisirung bedürftig war, mit unterlief. Es kommt weiter hinzu, dass seinem ganzen Wesen eine geordnete systematische Wiedergabe seiner Gedankenwelt überhaupt nicht entsprechend war, dass er vielmehr stets zu freiem Ergehen in Ausschnitten derselben, wie es kurze Noten gestatteten, zuneigte.

Uebrigens wird auch die scheinbar gewaltige Intuitionskraft, welche uns aus den analytischen Arbeiten Lie's entgegentritt, hier der Zergliederung zugänglich: sie ist nichts anderes, als eine Form des Ausdrucks seines vorgängigen begrifflichen Durchdenkens von einer möglichst umfassenden Grundlage aus; und auf denselben Umstand sind die manchmal gewaltsam erscheinenden späteren Interpretationen früherer Behauptungen zurückzuführen, indem Lie nicht das wirklich Ausgesprochene, sondern seinen, vielleicht nur erst unbestimmt umrissenen früheren Vorstellungsgang im Auge hatte.

Als die wesentliche Errungenschaft dieser Forschungsperiode ist, auch nach Lie's eigener späterer Auffassung, nicht etwa die Förderung des Jacobi'schen Standpunkts, welcher in den formalen Erniedrigungen der Integrationsordnungen den Fortschritt erblickt, zu betrachten, sondern eben die Erweiterung der begrifflichen Auffassung. Niedergelegt ist sie in der denkwürdigen, aus Erlangen den 11. October 1872 datirten Note „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben" (Gött. Nachr. v. 30. October 1872), in Klein's Programm vom November 1872, nach Mittheilungen Lie's, und in Lie's Note „Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen" (Forh. von Frühjahr 1873).

Wenn früher alle Berührungstransformationen im Wesentlichen durch $1, 2, \ldots, n$ Gleichungen zwischen den Variabelnsystemen

$$(z, x_1, \ldots, x_{n-1}), \qquad (z', x'_1, \ldots, x'_{n-1})$$

definirt waren [eine genauere Festlegung dieser Definition hat Lie 1876 in seinem Archiv, Bd. 1, und in Note 2 zu seinem Aufsatze in diesen Annalen, Bd. 11 gegeben], dann durch $2n-1$ umkehrbare Gleichungen zwischen den Variabelnsystemen

$$\left(z,\, x_i,\, p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right), \quad \left(z',\, x'_i,\, p'_i = \frac{\partial z'}{\partial x'_i}\right), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

so jetzt, in correcterer Definition, durch $2n-1$ umkehrbare Gleichungen, welche die $2n-1$ gleichberechtigten Variabeln z', x'_i, p'_i als Functionen der $2n-1$ Variabeln z_i, x_i, p_i derart bestimmen, dass eine Relation $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$ in sich übergeht, d. h. dass eine Gleichung von der Form

$$dz' - \Sigma p'_i dx'_i = \varrho\ (dz - \Sigma p_i dx_i),$$

mit ϱ als irgend einer Function der z, x_i, p_i, existirt. Die Relation $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$ bestimmt die „vereinigte Lage" des „Elements" (z, x_i, p_i) mit dem consecutiven $(z + dz,\ x_i + dx_i,\ p_i + dp_i)$. Aus dem Sinn einer partiellen Differentialgleichung $F(z, x_i, p_i) = 0$: ∞^{2n-2} Elemente zu bestimmen, und dem Sinn einer vollständigen Lösung von $F = 0$: diese Elemente auf alle möglichen Weisen zu ∞^{n-1} „Elementvereinen" von je ∞^{n-1} Elementen zusammenzuordnen — ergiebt sich von vornherein ein voller Ueberblick über die nothwendige Erweiterung des analytischen Apparates, wenn man alle Fälle von Gleichungen $F = 0$, auch die speciellsten, wie etwa die, welche gar keine p_i enthalten, und alle Arten von Lösungen, wenn sich die Elementvereine an Punkte, Curven, Flächen etc. anschmiegen, umfassen will. Insbesondere wird man nicht nur das Verhalten gegenüber *allen* Berührungstransformationen in's Auge zu fassen haben, für welches *eine* partielle Differentialgleichung ja nichts Ausgezeichnetes aufzuweisen hat; sondern z. B. gegenüber den Punkttransformationen $(z x_i)$ im Raume von nur n Dimensionen; und auf dieses specielle Verhalten lässt sich eine Classification gründen, von ihm aus erscheinen die Integrationserleichterungen in speciellen Klassen, so für die in den p_i linearen Gleichungen, in neuem Lichte. Der eigentliche Lie'sche Standpunkt bleibt aber doch die Auffassung der $(z\, x_i\, p_i)$ als Coordinaten der Punkte eines Raums von $2n-1$ Dimensionen, mit der einen Bedingung $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$; und wenn die analytischen Formeln aller Berührungstransformationen auch längst aufgetreten waren, wie in der Legendre'schen und der Ampère'schen Transformation, und vor Allem bei Jacobi in seinen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen, Pfaff'sches Problem und Mechanik (s. Cr. J. II, C. R. t. V), so waren sie doch vor Lie nicht *an sich*, unabhängig von ihrer Anwendung auf diese Aufgaben, explicite betrachtet und als ein nothwendiges Mittel zur Einsicht in die Structur der Integrationsgebilde geometrisch erfasst. Merkwürdig ist dagegen die bald darauf folgende (Forh. vom 14. Nov. 1872) Entdeckung Lie's, dass eine seinem Ideenkreise völlig entsprechende analytische Fragestellung und Formulirung — insbesondere wenn man damit die von Clebsch in seiner Connextheorie eingeschlagene Homogenisirung verbindet — gerade diejenige ist, welche Pfaff schon 1815 in seiner Untersuchung über das Problem, welches seinen Namen trägt, eingeschlagen hat (Abh. der Berliner Akad. von 1814/15): nämlich die allgemeinste Transformation eines kanonischen Ausdrucks $\Sigma X_i\, dx_i$, hier von $dz - \Sigma p_i\, dx_i$, in einen ähnlichen kanonischen Differentialausdruck $\Sigma Y_k\, dy_k$, mittelst Gleichungen (bei Pfaff im Allgemeinen mittelst einer, bei Jacobi (Cr. J. II) mittelst beliebig vieler Gleichungen) zwischen den Variabelnsystemen. Der Gedanke der Möglichkeit der allgemeinen Integration einer Gleichung $\Sigma Y_k\, dy_k = 0$ durch ein *System* von Integralgleichungen war übrigens von Pfaff selbst aus Monge (Hist. de l'Ac. des Sc., 1784) herübergenommen worden. Nachdem Lie diesen Pfaff'schen Standpunkt des Punktraums von $2n - 1$ Dimensionen wiedergefunden hat, stellt er sich auch fortan mit Vorliebe auf denselben und fördert von ihm aus, wie nicht weiter ausgeführt werden möge, später natürlich auch das allgemeinste Pfaff'sche Problem. Bemerkt sei jedoch, dass gerade die Leichtigkeit, mit der Lie, der Aufgabe entsprechend, vom einen zum andern Standpunkt überzugehen vermag, einen für sein Schaffen bezeichnenden Zug bildet.

In allen Untersuchungen Lie's von 1871 und 1872 spielen — indem immer wieder die drei Complexe: der lineare, der Minimal-, der Tetraeder-Complex ihn wechselseitig anregen und insbesondere die Translationsflächen der beiden letzteren herangezogen werden — *Systeme von infinitesimalen Berührungstransformationen*, zunächst nur von paarweise vertauschbaren, und auch schon der Begriff der Invarianz bei solchen Transformationen, eine Rolle. Die hier anknüpfende Entwicklung aber, die Lie zu seiner höchsten und bleibendsten Leistung führen sollte, ist nicht zu verstehen, ohne dass der damaligen Beziehungen zu F. Klein noch näher näher gedacht wird.

Schon frühe hatte Klein in der verwirrenden Mannigfaltigkeit geometrischer Betrachtungsweisen, wie sie bei den reinen Projectivikern, oder bei den nach der metrischen Richtung Neigenden, wie Grassmann, Moebius, Hamilton entgegentraten, nach einem Ordnungsprincip gesucht. Im Winter 1870/71 hatten beide Forscher dann im engsten brieflichen Verkehr gleichzeitig, wie schon oben berührt worden, die metrischen, an die Lie'sche Linien-Kugelgeometrie anknüpfenden Verhältnisse verfolgt. In diese Uebertragung, welche die in Deutschland bisher zurückgesetzte metrische Geometrie der projectiven als gleichwerthig an die Seite stellte, hatte Klein dadurch einen neuen Einblick gewonnen, dass er die projective Liniengeometrie unseres Raumes, mittelst der ihr zu Grunde liegenden quadratischen Gleichung, als metrische Punktgeometrie eines Raums von vier Dimensionen, genauer als Geometrie der „Inversionen" desselben auffasste, und er hatte diese beiden Geometrien wegen der Ueberführbarkeit der beiderlei Transformationsgruppen in einander identificirt. Zu genau derselben Ideenverbindung drängte ihn nun seine erneute Beschäftigung mit der nichteuklidischen Geometrie (Ende 1871): es galt, den Kern des Grundes aufzudecken, nach dem diese Geometrie im Wesentlichen identisch ist mit der metrischen, auf der Cayley'schen absoluten Massbestimmung beruhenden Geometrie und mit der Riemann-Beltrami'schen Geometrie eines Raums von constantem Krümmungsmass; von innenheraus einzusehen, dass und warum diese Geometrien in die projective Behandlungsweise eingeschlossen sind. Die Juni 1872 in einem 1873 in Annalen VI veröffentlichten Aufsatz zuerst, wenn auch noch nicht in der späteren Allgemeinheit, ausgesprochenen Grundgedanken des Erlanger Programms von November 1872, welche die *Gesammtheit* der geometrischen Entwicklungen zu ordnen strebten, waren Lie schon im December 1871 mitgetheilt worden: dass das leitende Princip ausschliesslich im Gruppenbegriff, in der zu adjungirenden *Gruppe* von Transformationen zu suchen ist; dass es nämlich für das Studium einer Mannigfaltigkeit so viele verschiedene Behandlungsweisen gibt, als man continuirliche Gruppen irgend welcher Transformationen construiren kann, und ebensoviele „Invariantentheorien".

Beide Freunde verkehrten im Herbst 1872 zwei Monate lang persönlich mit einander zusammen, im September in Göttingen, im October in Erlangen, nachdem Lie am 1. Juli desselben Jahres zum ausserordentlichen Professor an der Universität Christiania ernannt worden war: eine auf die Urtheile von Clebsch und Cremona hin erfolgte Anerkennung, die übrigens Lie sehr wenig Verpflichtungen, nicht einmal die zu Vorlesungen, auferlegte. Jetzt fand eine erneute gegenseitige Einwirkung statt, unter der einerseits das Programm Klein's, andrerseits die Octobernote Lie's (Gött. Nachr.), sowie einige weitere noch zu besprechende Noten, zur Reife gediehen. Indem die Lie'schen Ideen über Berührungstransformationen und partielle Differentialgleichungen, bei denen nur mit invarianten Gebilden, den Flächenelementen, operirt und Transformationen aller Arten und an jeder Art von Mannigfaltigkeiten betrachtet wurden, Klein ein neues reiches Material darboten, musste sich die Tragweite der Ideen des Programms von selbst erweitern. Auf der anderen Seite war in dem Programm zum ersten Male die centrale Stellung der *Transformationsgruppe* für alle geometrischen Untersuchungen ausgesprochen: dass nicht einmal das *Element*, aus welchem man eine Mannigfaltigkeit erzeugt, deren charakteristische Eigenschaften bestimmt, sondern *einzig* die Gruppe; dass es sich für invariante Eigenschaften immer um Herstelluug von „Körpern" mittelst der Transformationen der Gruppe handelt; dass ihre Zusammensetzung aus Untergruppen die Unterfälle der betrachteten Geometrie festlegt; dass Abbildungen die

Gruppe, also auch die Geometrie, bestehen lassen. Lie, der sich mit den verschiedensten Gruppen beschäftigt hatte, dem aber ihre Bedeutung für Classification zunächst fremd geblieben war, war der Gedanke von vornherein congenial, da er aussprach, was Lie selbst mitvorbereitet, aber noch nicht zur Klarheit herausgearbeitet hatte; und so konnte er auf Lie sogleich derartigen Eindruck machen, dass er mit seinem Denksystem völlig zusammenschmolz.*)

Wenn auch die Interessen der beiden Forscher von da aus nach verschiedenen Richtungen auseinandergingen, bei dem einen zunächst nach der Seite der discontinuirlichen, bei dem anderen nach der der continuirlichen Gruppen, und wenn auch die persönlichen Beziehungen sich hierdurch immer mehr abschwächten: die Idee der Stellung des Gruppenbegriffs blieb der gemeinsame Ausgangspunkt. Die Fragen der invarianten Eigenschaften der partiellen Differentialgleichungen gegenüber der unendlichen Gruppe *aller* Berührungstransformationen traten Lie 1872—1873 entgegen; bald aber gingen ihm diese Gleichungen in der Transformationstheorie selbst völlig auf, aus einem Untersuchungsmittel stiegen die Gruppen zu dem eigentlichen Object der Untersuchung auf, und Lie's That wurde, den *Begriff der continuirlichen Gruppe* auszugestalten und zur Grundlage einer umfassendsten abstracten Theorie zu machen.

Die Einführung der *Gruppenideen* knüpft bei Lie an die Lösungen einer Gleichung

$$\Sigma P_i dX_i = \varrho \Sigma p_i dx_i,$$

wo die P_i, X_i nur von den p_i, x_i abhängen, mittelst der Pfaff'schen Theorie, also wiederum an die Herstellung aller Berührungstransformationen. Indem er die Clebsch-Mayer'sche Theorie des Pfaff'schen Problems verwendet, welche es auf ein vollständiges System linearer partieller Differentialgleichungen zurückführt, gelangt er zu den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Functionen X_i, den Involutionsrelationen

$$(X_i X_k) = 0, \quad \text{wo} \quad (XY) = \sum_j \left(\frac{\partial X}{\partial x_j}\frac{\partial Y}{\partial p_j} - \frac{\partial X}{\partial p_j}\frac{\partial Y}{\partial x_j}\right)$$

aus denen sich die übrigen

$$(P_i P_k) = 0, \quad (X_i P_k) = 0, \quad (X_i P_i) = \varrho$$

von selbst ergeben (Forh. von März 1873; Math. Ann. VIII, 1874).

Der hierdurch angeregte wichtigste Schritt, von dem schon eine kurze Note in Forh. v. 10. Dez. 1872 Mittheilung macht, eingehender aber in der umfassenden Arbeit „Begründung einer Invariantentheorie der Be-

*) Vgl. hierfür Aeusserungen von Lie im „Résumé“ von 30. Apr. 1872, in der Octobernote in den Gött. Nachr. von 1872, in Math. Ann. XIV, S. 541 etc.

rührungstransformationen" in diesen Annalen VIII berichtet wird, war der, dass an Stelle des bei einer partiellen Differentialgleichung $f=0$ auftretenden vollständigen Systems linearer partieller Differentialgleichungen

$$(F_1 f)=0, \cdots, (F_r f)=0$$

in abstracterer Weise nun eine „r-gliedrige Functionengruppe" $F_1, \ldots, F_r$ von $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$ an sich betrachtet wird, von der Eigenschaft, dass alle $(F_i F_k)$ Functionen der F_i sind [in zunächst uneigentlicher Bedeutung des Wortes „Gruppe"]; und diese Functionengruppe soll auf alle Beziehungen hin untersucht werden, die bei beliebiger Berührungstransformation der x, p unveränderlich bleiben. Einer solchen Gruppe gesellt sich immer eine reciproke $(2n-r)$-gliedrige Functionengruppe $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2n-r}$ zu, derart dass $(F_i \Phi_l)$ immer $=0$ ist. Unter den Functionen F_i gibt es eine gewisse Anzahl r' von „ausgezeichneten" Functionen F', für welche gegenüber allen F_i: $(F_i F')=0$ ist, Functionen, welche gleichzeitig in der reciproken Gruppe ausgezeichnet sind, und deren Einführung, an Stelle von r' der Functionen F_i, dazu dient, die Gruppe auf eine kanonische Form zu bringen. Die Erhaltung der Zahlen r und r' wird, von Structureigenschaften abgesehen, die einzige invariante Eigenschaft der Gruppe.

Als blosse Anwendungen dieser Theorie erscheinen die Integrationsvorschriften für die Involutionssysteme $F_i=$ Const., und zwar gestattet sie, von vornherein die in speciellen Fällen möglichen Erniedrigungen der Integrationsordnungen systematisch festzustellen.

Wichtiger ist aber eine weitere — wieder an die Gedanken der W-Curven anschliessende — Auffassung dieser Theorie, wie sie von nun an in den Vordergrund tritt (s. die eben genannte Abh. Ann. VIII, und „Verallgemeinerung und neue Verwerthung der Jacobi'schen Multiplicatortheorie", Forh. 1874). Für eine infinitesimale Punkttransformation

$$\delta x_i = B_i \delta t$$

wird zum ersten Male das *Symbol*

$$Bf \equiv \Sigma B_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

eingeführt, das anzeigt, dass durch sie f in $f+\delta t . Bf$ übergehe. Dass eine lineare partielle Differentialgleichung $Af=0$ eine infinitesimale Transformation vom Symbol Bf gestattet, ist identisch mit der Behauptung, dass aus jeder Lösung f eine weitere Lösung Bf folge. Gestattet ein vollständiges System $A_i f=0$ die infinitesimale Transformation Bf, so kann man auch, zur, freilich speciellen, Einordnung in den oben angeführten Begriff der „Functionengruppe", sagen, dass alle $(A_i B)$, als lineare Functionen der A_i, deren Functionengruppe angehören.

Lie leitet hieraus eine *Rechnung mit infinitesimalen Transformationen* ab, indem er nur noch lineare vollständige Systeme mit *bekannten* infinitesimalen Transformationen betrachtet, und nach seiner Functionengruppentheorie nun die Gleichungen so normirt, dass für das Transformationssystem B_α alle $(B_\alpha B_\beta)$ nur wieder lineare Functionen der B_α werden. Diese Entwicklung nimmt also einen Grundgedanken der *Transformationsgruppentheorie* überhaupt (s. S. 28) schon in starkem Grade vorweg.

Unter den infinitesimalen Punkttransformationen im Raume der x_i, p_i hebt Lie eine besonders wichtige Classe hervor: die der *infinitesimalen homogenen Berührungstransformationen*. Sie haben die Eigenschaft, homogene Functionen hinsichtlich $p_1, \ldots, p_n$ in ebensolche überzuführen, und nehmen die kanonische Form an:

$$\delta x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta t, \quad \delta p_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\delta t,$$

wo die Stammfunction H irgend eine Function der x_i, p_i ist, die nur in den p_i homogen von der ersten Dimension ist; durch sie wird $\frac{\delta}{\delta t}(\Sigma p_i\, dx_i)$ ein vollständiges Differential dU. Wenn $(H\varphi) = 0$ ist, geht irgend ein Integral φ der partiellen Differentialgleichung $H =$ const. durch die H-Transformation in sich über; also auch die Gleichung $H =$ const. selbst durch die φ-Transformation, welche φ als Stammfunction hat. So erkennt man, dass die Aufgabe, eine partielle Differentialgleichung $H =$ const. zu integriren, identisch ist mit der, alle Functionen φ zu finden, für welche $(H\varphi) = 0$ ist, d. h.: alle infinitesimalen kanonischen Transformationen zu finden, durch welche H, also auch das zugehörige System von kanonischen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

in sich übergeht. Die *Theorie der Integration* dieses Systems, oder von $H =$ const., ist daher mit einem Problem der *Transformationstheorie* identisch; z. B. wird das Poisson-Jacobi'sche Theorem zu der selbstverständlichen Behauptung, dass zwei successive infinitesimale Berührungstransformationen wieder eine solche geben.

Man braucht sich nur an die Hamilton'sche Theorie zu erinnern — und Lie stand dieser ganze Zusammenhang von vornherein vor Augen —, um zu sehen, welches Licht von hier aus zunächst auf die *Mechanik* fällt. Das obige System von Differentialgleichungen der Mechanik, welches zugleich die charakteristischen Streifen von $H =$ const. bestimmt, hat ja die Eigenschaft, dass die zugehörigen Bahncurven der (x_i, p_i) eben durch die endliche eingliedrige Gruppe erzeugt werden, welche durch Wiederholung der infinitesimalen Transformation mit der Stammfunction H entsteht. Diese endliche Gruppe zu bestimmen, ist nur ein anderer Ausdruck für die Aufgabe, die Differentialgleichungen des von H abhängigen Problems der Mechanik zu lösen: *und so ist die ganze analytische Mechanik mit einem Schlage der Gruppentheorie eingeordnet.*

So verlangt nach Lie auch die *Störungstheorie* nur die Ueberführung aller kanonischen Differentialgleichungssysteme der obigen Art, aber mit *beliebigem* H, in dieselbe Form; und zwar geschieht dies durch Berührungstransformationen, für die $\Sigma P_i dX_i = c\,\Sigma p_i dx_i + dV$ ist (Archiv II, 1877).

Unter den Sätzen der Mechanik, die durch die Lie'sche Uebertragung evident werden, treten in erster Linie freilich nur die bekannten, auch sonst durch Verschiebungen und Drehungen des Systems zu findenden Integrale auf: diejenigen, welche zugleich rational und ganz, also linear in den p_i sind, die also in der That zu infinitesimalen *Punkt*-Transformationen des Systems in sich Veranlassung geben, so die Flächensätze und die ersten Schwerpunktsintegrale.

Von den zahlreichen Resultaten, welche Lie weiter aus diesen Theorien gezogen hat, erwähnen wir noch die Förderung des Pfaff'schen Problems (For. 1873). Vor Allem aber erwähnen wir den directen Zusammenhang der Lie'schen Theorien mit den Jacobi'schen Betrachtungen über *Multiplicatoren*, der ihn zu Ausdehnungen dieser Betrachtungen führte (Forh. 1874 und diese Annalen, XI); ein Zusammenhang, der ja schon an sich wahrscheinlich ist, indem das Wesen jener Theorien darin besteht, die Differentialgleichungen in ihrer Integrationsordnung zu erniedrigen. In Lie's Gedanken ging sogar die Anwendung der infinitesimalen Transformationen auf die Multiplicatortheorien der Erkenntniss der Integrationserleichterungen voraus [s. Ann. XI.] Ueber die ursprüngliche Theorie von 1870 und 1871 (Math. Ann. IV) hinaus ergiebt sich, dass für eine Differentialgleichung $Y dx - X dy = 0$, welche eine infinitesimale Transformation $\delta x = \xi \delta t$, $\delta y = \eta \delta t$ gestattet, sich ein Integrationsfactor, in der Form $M = \frac{1}{X\eta - Y\xi}$, unmittelbar angeben lässt, so dass auch die Integration der Hülfsgleichung $\eta dx - \xi dy = 0$ wegfällt (s. oben, S. 7). Auch die sogenannte *neue Integrationstheorie* von 1874 (s. Annalen XI, XXV, etc.) beruht, ausser auf der Heranziehung des Pfaff'schen Problems, darauf, dass bei vollständigen Systemen eine *bekannte* infinitesimale Transformation mit der Angabe eines Integrals identisch erscheint, und dass also bekannte Lösungen derselben als neue unabhängige Variable eingeführt werden — „Invarianten" bei infinitesimaler Transformation der Gleichungen. Dies führt zu Reductionen der vollständigen Systeme, von denen jedes Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen abhängt.

Die Anwendung solcher Sätze auf die letzten noch fehlenden Lösungen einer partiellen Differentialgleichung und die Untersuchung der Frage, ob seine Theorien an Einfachheit des Integrationsverfahrens im Jacobi'schen Sinne das Höchstmögliche leisten, bilden den vorläufigen Abschluss der Betrachtungen Lie's in dieser Jacobi'schen Richtung (bes. in Ann. XI, Archiv I und II etc.). Damals (1877) trug sich Lie mit dem Plane eines Werkes über Theorie der Berührungstransformationen und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung; aber erst viel später sollte dieser Gedanke durch die von Herrn Scheffers bearbeitete Vorlesung realisirt werden, in freilich elementarerer Weise, aber nun mit weiter vorgeschrittenen Ideen.

Wenn Lie in seinen früheren Arbeiten mannigfaltige von einer endlichen Zahl von Parametern abhängige, „endliche" Gruppen von Transformationen verwerthet hatte, und wenn alle zuletzt besprochenen Untersuchungen als solche angesehen werden können, die dem Gebiet der Invarianten und der Aequivalenzprobleme von Differentialausdrücken erster Ordnung gegenüber der ganzen unendlichen Gruppe aller Berührungstransformationen, oder doch von Untergruppen derselben, angehören, so war nun die Zeit reif zur Inangriffnahme des *principiellen Problems: zur systematischen Aufstellung aller Gruppen, zur Theorie der Transformationsgruppen.* Dieser hervortretendste Schritt in Lie's Werk, von ihm selbst mit dem von Descartes verglichen (Vorrede zu Bd. III der „Theorie der Transformationsgruppen"), fällt übrigens auch äusserlich mit einem wichtigen Abschnitt in seinem Leben zusammen, indem er sich mit Anna Sophie Birch, der Tochter eines Oberzollbeamten, Weihnachten 1873 verlobte und im Herbst 1874 vermälte. In diesem Winter 1873/74 entstanden die ersten systematischen Begriffsbildungen; und auf der Hochzeitsreise, bei der Lie erst nach Paris gegangen war, um die Beziehungen zu den dortigen Mathematikern zu erneuern und eifrig zu pflegen, sowie um die ersten Vorbereitungen für eine neue Herausgabe von Abel's Werken zu treffen, war es, dass er in Düsseldorf, wo er mit Klein und Mayer zusammen war, unterstützt von Ersterem, October 1874 die erste Aussprache seiner Ideen fand, in einer Note „Ueber Gruppen von Transformationen" (Gött. Nachr. v. 3. December), welche die Fundamente für die Theorie gelegt hat.

Einige Stadien in der Entstehung des Systems lassen sich auch in den Veröffentlichungen Lie's verfolgen; denn in dem eine besonders vollendete Theorie liefernden, mehrfach angeführten Aufsatz in diesen Annalen VIII: „Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen", vom 5. Juli 1874, findet sich, als Schlusszusatz, nachdem eine Gruppe infinitesimaler homogener Berührungstransformationen $H_1, \ldots, H_r$ durch die aus 1873 herrührenden Gleichungen $(H_i H_k) = \sum_s c_{iks} H_s$ definirt worden, nicht nur die Frage „nach den Eigenschaften einer gegebenen solchen Gruppe, die bei homogenen Berührungstransformationen invariant bleiben", angeregt, sondern die Angabe, „dass es eine *begrenzte* Zahl Typen jener Gruppen gäbe; es müsse spätern Arbeiten vorbehalten werden, den präcisen Sinn, die Richtigkeit und Bedeutung dieser Behauptung darzulegen." Diese letztere Fragestellung bezeichnet am Prägnantesten diejenige Entwicklung über das Klein'sche Programm hinaus, welche für Lie charakteristisch ist.

In der December-Note erscheint zum ersten Male die *explicite Definition* einer endlichen r-gliedrigen — d. h. von r continuirlichen Parametern abhängenden — Transformationsgruppe zwischen n Variabeln

$$x_j' = f_j\ (x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r)$$

durch Functionalgleichungen zwischen den f_j; die Ausdehnung der Galois'schen Grundbegriffe der Substitutionsgruppen auf diese Gruppen, vor Allem des Begriffs der „Aehnlichkeit" (Isomorphismus); und es tritt, indem alle ähnlichen, also ineinander transformirbaren, Gruppen als gleichberechtigt betrachtet und in *einen* Typus zusammengefasst werden, die Frage nach der Anzahl der wesentlich verschiedenen Typen auf. Zur Untersuchung der Frage werden — indem noch die Existenz der identischen und paarweise inversen Transformationen innerhalb der Gruppe und ihres Parameterbereichs etwa als Axiom hinzugedacht ist — als erzeugende Operationen der Gruppe die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen derselben

$$\delta x_j = X_{ij}\,\delta t \qquad (i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, n)$$

(mit Symbol $X_i f$) herangezogen und [späterer erster Hauptsatz der Theorie] die Differentialgleichungen aufgestellt, welche die $\frac{\partial f_j}{\partial a_i}$ als lineare Functionen der X_{ij}, und umgekehrt, ausdrücken. Die Grundlage der Untersuchung bilden dann die daraus folgenden Integrabilitätsbedingungen [zweiter Hauptsatz der Theorie]

$$X_i(X_k f) - X_k(X_i f) \equiv (X_i X_k) f = \sum_s c_{iks} X_s f,$$

mit constanten Zahlen c_{iks}: lineare partielle Differentialgleichungen, welchen die X_{ij} als Functionen der x genügen müssen und welche die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen der Gruppe vorstellen. Die weitere Discussion dieser Zahlen c_{iks}, welche die Zusammensetzung der Gruppe bestimmen, und die übrigens nur mit den Gliedern 2^{ter} Ordnung der infinitesimalen Transformationen zusammenhängen, wird hier noch nicht gegeben, sondern nur, unter Annahme speciell normirter $X_i f$, aber unter Ausdehnung der Untersuchung auf *Berührungstransformationen*, die Hauptresultate für $n=1$ und $n=2$; also alle Gruppen der Geraden: als welche nur die 3-gliedrige gebrochene lineare Substitution mit ihren Untergruppen gefunden wird, und alle Gruppen der Ebene: Kreistransformationen, Collineationen etc. Auch die Wichtigkeit dieser Typentheorie mit $n=2$ für die Theorie der Differentialgleichungen zwischen zwei Variabeln, von höherer als 1^{ter} Ordnung, wird erkannt: durch Einordnung einer gegebenen solchen Gleichung in einen der schon bekannten Typen soll eben gefunden werden, ob und welche Gruppe diese Gleichung gestattet, und so kann sie nach der Gruppe *classificirt* werden.

Um sich über seine neue Gruppentheorie und die in Aussicht genommenen Anwendungen eingehender aussprechen zu können, als es in den Forh. der Gesellsch. d. Wiss. von Christiania möglich war, mit der er überdies in Schwierigkeiten gerathen war, gründete Lie im Bunde mit einigen Naturforschern 1876 eine eigene Zeischrift: „Archiv for Mathematik og Naturvidenskab“; und hier finden sich denn die ersten Redactionen seiner Ausführungen, in deutscher Sprache, doch viel weniger lesbar geschrieben, als die in diesen Annalen erschienenen systematischeren Darstellungen. So bildet gerade für die allgemeine Gruppentheorie die in Math. Ann. XVI, Dec. 1879 gegebene Zusammenfassung die einfachste und übersichtlichste *Einleitung* in diese Theorie, und liefert zugleich alle Gruppen der Geraden und der Ebene, während freilich die in den Bänden I—IV des Archivs (1876—1879) enthaltenen fünf Aufsätze einige begriffliche Bildungen besser hervortreten lassen. Nur die 1885 wieder aufgenommene Untersuchung im 10^{ten} Bande des Archivs erreicht in ihrem zweiten, schon mit Hülfe von F. Engel redigirten Theile die Stufe des Annalenaufsatzes.

In ihrer Gesammtheit bieten diese Arbeiten eine Fülle neuer Grundideen zur Gruppenlehre. Die wichtigste ist, dass vermöge der bekannten „Jacobi'schen Identität“, angewandt auf je drei infinitesimale Transformationen der Gruppe, *quadratische Relationen* zwischen den Structurzahlen c_{iks} der Gruppe gebildet werden, und dass [als dritter Hauptsatz und hauptsächliches analytisches Mittel der Behandlung der Gruppentheorie] diese Relationen, verbunden mit den Gleichungen $c_{kis} = -c_{iks}$, auch als *hinreichend* erkannt werden, damit die r als unabhängig vorausgesetzten infinitesimalen Transformationen wirklich eine bestimmte r-gliedrige Gruppe erzeugen. Der Beweis erfolgt erst durch Einordnung der Gruppe unter die früher erwähnten „Functionengruppen“ (Arch. I), allgemeiner aber (Arch. II) durch directe Bildung einer Gruppe von infinitesimalen Transformationen, deren Coefficienten *lineare* Functionen von $r' \leq r$ Parametern sind, welche der gesuchten Gruppe isomorph ist und welche sich übrigens auch zu einer r-gliedrigen linearen Gruppe erweitern lässt. Jenes ist die 1884

(Forh.) noch mit dem besonderen Namen der „adjungirten Gruppe“ bezeichnete Gruppe: die Entwicklung kommt darauf hinaus, dass der Inbegriff aller ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_i B_i f$ einer endlichen Gruppe als lineare Punktmannigfaltigkeit R_{r-1} betrachtet wird, die vermöge aller Transformationen der endlichen Gruppe nur linear — eben durch die adjungirte Gruppe in den Variabeln e — transformirt wird. Dies ist Lie's eigentliche „fundamentale Auffassung“ (s. diese Annalen XXV); und mit ihrer Hülfe erkennt man, da die bei projectiven Transformationen ebener Räume festbleibenden Gebilde bekannt sind, die Structurverhältnisse und Aehnlichkeitskriterien der Gruppen mit gegebenen c_{iks} auf die anschaulichste Weise.

Auf ein weiteres Hülfsmittel dieser Arbeiten möge noch ausdrücklich hingewiesen werden: auf die Eintheilung der infinitesimalen Transformationen in „Ordnungen“, nach der Dimension des niedrigsten Gliedes der in der Umgebung eines beliebig gewählten Punktes gemachten Potenzentwicklung, von der auch das eben berührte Verhalten gegenüber der adjungirten Gruppe abhängt. Hierauf beruht vorzugsweise die kanonische Gestalt jener Transformationen, die Ermittelung der Typen für $n = 2$ — während die Aufstellung aller Typen für unsern Raum, $n = 3$, von Lie damals zwar schon im Wesentlichen geleistet war, aber erst sehr viel später (Bd. III der „Transformationsgruppen“, 1893) mit Hülfe der vereinfachten Methoden dargelegt wurde —; ferner aber die Bestimmung von Curvenschaaren (oder Differentialgleichungen), welche bei gegebenen infinitesimalen Transformationen invariant bleiben. Als allgemeines hierher gehöriges Resultat (Arch. III) sei angeführt, dass für den R_n die allgemeinste lineare Gruppe, nebst einigen ihrer Untergruppen, die einzige Gruppe ist, welche „im Infinitesimalen die grösstmögliche Transitivität hat“, d. h. welche ein jedes durch irgend einen Punkt allgemeiner Lage gehende Element in jedes andere Element dieses Punktes überzuführen erlaubt. Im ganzen kann man sagen, dass in dieser Periode die Erledigung aller Gruppenprobleme immer auf die Integration von gewöhnlichen totalen, unbeschränkt integrabeln Differentialgleichungen hinausläuft.

Während Lie's äussere Verhältnisse an der Universität Christiania sich um diese Zeit zu bessern anfingen, gewährte ihm die Aufnahme seiner abstracten Arbeiten von Seiten der Mathematiker immer weniger Befriedigung. Wie zur Ablenkung wandte er sich um 1877 zu dem Kreise der geometrischen Untersuchungen zurück, der ihn 1870—71 umfangen hatte: *zu den Krümmungsverhältnissen der Flächen*, um nun, neben blossen Rechnungen über Gruppen und neben Redactionen von früheren Arbeiten, besonders aber von der mit Sylow unternommenen und 1881 fertig gestellten Ausgabe von Abel's Werken, einige Jahre lang auch dieses Gebiet mit seinen „synthetischen“ und seinen gruppentheoretischen Ideen zu durchsetzen. Was Lie hier Erholungsarbeit wurde, lag aber doch zu sehr innerhalb seines eigensten Könnens und entsprach zu sehr der Hochschätzung, die er für Anwendungen hegte und die ihm trotz seiner auf's Allgemeinste gehenden Geistesrichtung immer als Richtschnur diente, als dass er nicht wieder zu glänzenden Bereicherungen des Gebiets hätte gelangen sollen. Und zwar war es gerade der Verfolg seiner früheren Betrachtungen über den tetraedralen und den Minimal-Complex, der ihm in der Theorie der *Minimalflächen*, und der *Translationsflächen* überhaupt, die schönsten Resultate brachte.

Wenn man einen Complex von Geraden in's Auge fasst, die eine ebene, im Unendlichen gelegene Curve treffen, erhält man alle Translationen des Raums als der Gruppe angehörig, welche der Complex gestattet; und Lie erzeugt nun aus den Complexcurven Translationsflächen, indem er irgend eine solche Curve derart congruent mit sich verschiebt, dass einer ihrer Punkte ebenfalls eine Complexcurve beschreibt, indem er also eine einfach unendliche Schaar von Translationen, die aber im Allgemeinen keine Gruppe bildet, anwendet. Die Fläche enthält dann zwei ∞^1-Schaaren von Complexcurven, durch jeden Punkt je zwei Curven, deren Richtungen harmonisch sind zu den beiden Haupttangenten der Fläche in diesem Punkt [vgl. oben S. 6, 7, 9, 13]. Die Specialisirung, dass die Haupttangenten senkrecht auf einander stehen, giebt die allgemeinsten Minimalflächen; eine andere Specialisirung, dass die beiden Curvenschaaren nur eine einzige irreductible Schaar bilden, liefert „Doppelflächen“ (nach dem Ausdruck Klein's), auf welchen man nämlich stetig von der einen Seite zur anderen gelangen kann, Flächen, wie sie zuerst Moebius behandelt hat.

Lie's Verdienst ist, mit diesen geometrischen Hülfsmitteln sowohl die alte analytische Theorie von Monge, als auch die Weierstrass'schen Formeln über Minimalflächen, deren Interpretation wesentlich mit der der Monge'schen Gleichungen übereinstimmt (Arch. II), anschaulich aufgefasst zu haben, und zwar indem er sich in keiner Weise mehr auf die reellen Punkte dieser Flächen beschränkt. So betrachtet er hauptsächlich die *projectiven* Verallgemeinerungen der Minimalflächen, sowohl algebraische, als transcendente, von den letzteren die periodischen, d. h. solche, welche eine Translation von endlicher Amplitude in sich zulassen. Für die *algebraischen* Flächen dieser Art kommt hier auch einmal eine Seite zum Vorschein, die Lie sonst wenig entsprach: die *abzählende*, um untere Grenzen für Classen und Ordnungen der Flächen zu gewinnen, und zwar nicht nur im Anschluss an seine Constructionen, sondern auch zwecks Elimination an Reihenentwicklungen in singulären Punkten. So ergeben sich ihm

z. B. alle reellen algebraischen Minimalflächen (Doppelflächen), deren Classe eine Primzahl ist; und überhaupt eine Reihe von Verallgemeinerungen von Sätzen, die kurz vorher von anderer Seite bekannt gemacht waren (vgl., ausser Arch. II—IV und VII, besonders wieder die lesbar geschriebenen Aufsätze in diesen Annalen XIV und XV), sowie synthetisch neue Erzeugungen solcher Flächen (Arch. III etc.). Immer aber bleibt die freie Beherrschung des Imaginären auch in den differentialgeometrischen Betrachtungen, wie sie dem Geometer sonst nur bei algebraischen Gebilden geläufig war, bemerkenswerth. Auch darauf sei kurz hingewiesen, dass Lie in einigen Noten aus späterer Zeit (s. insbes. die Berichte der Sächs. Ges. d. W. von 1896) diesem Gebiete der Translationsflächen, und zwar denen mit mehr als zweifacher Translationserzeugung, oder vielmehr ihrer Verallgemeinerung auf p Dimensionen, die Additionstheoreme der Integrale algebraischer Functionen einordnete, indem diese Theoreme Gruppen von vertauschbaren algebraischen Transformationen, und zwar in der kanonischen Translationsform, liefern. Lie hatte gehofft, auf diese Weise nicht nur eine neue geometrische Anwendung des Abel'schen Theorems, sondern auch für sich einen Weg zur Forschung im Gebiete der Functionentheorie zu gewinnen.

Enger mit den *gruppen*theoretischen Fragen, als specielle Anwendung, hängt die nächste Serie von geometrischen Arbeiten Lie's, von 1879—1881, zusammen. Sie beziehen sich alle auf Flächenclassen, welche Gruppen von infinitesimalen Transformationen einer ihrer Curvenarten, so besonders ihrer geodätischen Curven, in sich gestatten: die in der italienischen und französischen Litteratur gerade vielfach behandelten Flächen constanter, oder constanter mittlerer, Krümmung etc. Immer wird nach der Aufsuchung dieser Flächenclassen selbst, und nach rationellen Integrationsmethoden für die Ermittelung ihrer besonderen Curvenarten gefragt: d. h. nach gewissen Differentialgleichungen 2ter Ordnung und ihren Berührungstransformationen. Eine dahin gehende Abhandlung „Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven" ist 1879 als Universitätsprogramm von Christiania erschienen und in diesen Annalen, XX, im Wesentlichen wiedergegeben; und nach analogen Classificationsprincipien dachte sich Lie etwa auch die Probleme der Mechanik behandelt und in einander verwandelt, wie es ja in neueren Arbeiten, z. B. bezüglich der Kreiselprobleme, schon theilweise verwirklicht worden ist. Eines der hübschesten solcher specieller Resultate ist 1882 in einer Note mitgetheilt (Arch. VII), welche alle Flächen mit infinitesimalen linearen Transformationen in sich bestimmt: dass nämlich Gerade und Kugel die einzigen Gebilde unseres Raumes sind, die bei allen Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen genau ∞^4 verschiedene

Lagen einnehmen — also ein Charakteristikum der Linien- und Kugelgeometrie.

Die Bedeutung dieser Arbeitenreihe ist aber weniger in neuen Resultaten zu suchen, als darin, dass sie Lie wieder in seine Haupt-Gedankenrichtung zurückbrachten, aus der auch jetzt neue und umfassende Ideenbildungen hervorgehen sollten: über *Differentialinvarianten*, oder Differentialgleichungen mit Transformationen in sich, und über *unendliche Gruppen*.

Wie früher berührt, hatte Lie schon in seinen Programmnoten von 1872 (Forh.) und in der Decembernote von 1874 (Gött. Nachr.) Begriffe über Classification von *Differentialgleichungen*, Zurückführung auf Normalformen, und über *Invariantenbildungen* aus den Variabeln und (damals nur) ihren ersten Differentialquotienten gegenüber gewissen Gruppen von Transformationen, insbesondere der aller Berührungstransformationen, theils ausgeführt, theils in unbestimmter Form vorausgefühlt und erst späterhin im Sinne der Differentialinvarianten gedeutet, ohne dass er bis dahin eingehend darauf zurückgekommen wäre. War doch inzwischen die Aufgabe, den Gruppenbegriff an sich auszubilden, beherrschend an ihn herangetreten. Jetzt, bei längerer Beschäftigung mit dem Verhalten geometrischer Differentialausdrücke 2ter Ordnung gegenüber Transformationen, stieg wieder mehr und mehr die Erkenntniss in ihm auf, dass seine Begriffe von invarianten Bildungen noch eine grosse Erweiterung zulassen müssten.*) Inzwischen aber war schon von anderer Seite das Problem mächtig gefördert worden, freilich nur in einem beschränkteren Gebiete: Halphen und Laguerre hatten sich seit 1875, bezw. 1879, der Theorie der Differentialinvarianten zugewandt, so für die endliche *projective* Gruppe der Ebene und — in der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung — für die unendliche Gruppe $x_1 = F(x)$, $y_1 = y\Phi(x)$, mit willkürlichen Functionen $F(x)$, $\Phi(x)$, während vorher nur einzelne solcher Invarianten (Riemann-Schwarz'scher Ausdruck) bekannt waren. Insbesondere hatte Halphen seine Theorie, welche von Früherem nur die W-Curven-Betrachtungen benutzt hatte, schon in einigen grösseren Arbeiten publicirt (1876—1880) und sogar bis zu Fragen der *Systemsbildung* von Differentialinvarianten (im Sinne der rationalen Abhängigkeit) durchgeführt, während freilich seine preisgekrönte wichtigste Arbeit von 1880 erst 1883 erschienen ist.

Es kann kein Zweifel sein, dass Lie hierdurch einen kräftigen Anreiz erhielt: er sah im Sommer 1882, dass sich die Differentialinvarianten überhaupt als Lösungen eines vollständigen Systems bestimmen lassen

*) Vgl. z. B. Lie's Referat von 1880 im Jahrb. über die Fortschr. d. Math. X, S. 260.

(Arch. VII, p. 192, Juni 1882); dass weiter die Hülfsdifferentialgleichungen 1^{ter} Ordnung, welche von der Gruppe allein abhängen, noch specielle Affecte haben, so dass eine gewisse unter denselben auf eine Riccati'sche Gleichung zurückführbar ist (nämlich die einer invarianten Curvenschaar entsprechende, welche ∞^1 Geraden der Ebene in projectiven Punktreihen trifft); und dass sich die Laguerre'sche Classification seiner Gruppentheorie einordnen lasse (Forh. 1882, Nr. 21, 22 von Oct. u. Anfang Nov. 1882). Mit diesen Ueberlegungen reiste Lie (mit Universitätsstipendium) im October 1882, über Leipzig und die Schweiz, nach Paris und hielt dort am 3. November einen Vortrag über seine Integrationstheorien von 1874 (von vollständigen Systemen mit bekannten infinitesimalen Transformationen). Als nun in der Discussion Halphen auf die Beziehungen hinwies, welche diese Begriffe zu seinen eigenen Arbeiten über Differentialinvarianten der allgemeinen projectiven Gruppe und zu Transformation von einer Reihe zugehöriger Gleichungen auf *lineare* Gleichungen niedrigerer Ordnung haben (vgl. Lie in Ann. XXV), schlug dies zündend bei Lie ein: er sprach aus, dass *seine* Principien den Halphen'schen Fall umfassten und die Ausdehnung auf *alle* endlichen Gruppen zuliessen. Noch in Paris berechnete er für alle seine Gruppen der Ebene die zugehörigen Differentialinvarianten und gab die Theorie der Integration jeder daraus durch Nullsetzen entstehenden Differentialgleichung. Der Fortschritt aber, auf den eben Halphen's Bemerkungen Lie hingeleitet haben, ist der, dass nun durch Benutzung der *endlichen* Gleichungen der Gruppe die Hülfsgleichungen im Allgemeinen auf *lineare* homogene Differentialgleichungen zwischen *zwei* Variabeln zurückkommen. Die Entstehung der Differentialinvarianten durch Erweiterung der infinitesimalen Transformationen auch auf die höheren Differentialquotienten, ihre Bildungsweise für *jede* Gruppe, die Zurückführung des Aequivalenzproblems auf diese Formen: überhaupt das ganze Rüstzeug der linearen Invariantentheorie — die, in besonderer Auffassung, wenn man nämlich durch Einführung genügend vieler Variabeln die Gruppe durch eine ähnliche aus linearen Substitutionen ersetzt, übrigens selbst schon einen sehr grossen Theil der allgemeinen Gruppentheorie umfasst — stand sogleich in Ausdehnung auf alle endlichen Gruppen vor seinem geistigen Auge. Schon im December 1882 veröffentlichte Lie im VII. Bande des Archivs ein kurzes Programm dieser Richtung, die Ausführung in den Forh. von 1883 und in den Noten „Classification und Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten", Archiv von 1883 und 84 (abgedruckt in diesen Annalen XXXII, 1888). Alle früheren Probleme, wie Aufsuchung der Gruppe einer gegebenen Gleichung, Transformation auf eine kanonische Form bei bekannter Gruppe, erscheinen jetzt in dem höheren Lichte der Differentialinvarianten und gestalten sich in Folge dessen plastischer und klarer.

Aber nicht nur auf diese principielle Seite der neuen Ansicht ist hier hinzuweisen. Lie selbst hat wiederholt darauf aufmerksam gemacht — und in einer schönen Schilderung der Bedeutung von Galois im „Centenaire de l'École Normale, Paris 1895", in der er sich eingehend über seine eigenen Ziele ausspricht, hat er mit Nachdruck dabei verweilt —, welch' grosse Analogie zwischen seinen Problemen in der Theorie der *Differentialgleichungen* mit denen von Abel und Galois in der Theorie der *algebraischen Gleichungen* bestehe.

In der That ist diese Analogie, soweit sie die Abel'schen Gleichungen betrifft, nicht zu verkennen: den Functionalgleichungen, durch welche bei diesen eine Wurzel an die andere gebunden ist, entsprechen zunächst die vertauschbaren linearen Transformationen, welche die Integrale der Differentialgleichungen in sich überführen, die auf die W-Curven führen (1870); weiterhin aber die Transformationen einer Gruppe, welche überhaupt eine Differentialgleichung gestatten kann. Und auch der Galois'sche Standpunkt, der auf die Erforschung der Gruppe einer Gleichung und ihrer Structur das Lösungsproblem der Gleichung gründet, findet sein Gegenbild in Lie's Standpunkt bei Differentialgleichungen; ja um so stärker, je mehr sich nach und nach ergab, dass besonders die Differentialgleichungen, zwischen deren particulären Lösungen constante Relationen vorhanden sind, oder welche aus particulären Fundamentallösungen auf das allgemeine Integral schliessen lassen, gerade vermöge dieser Eigenschaften besondere Transformationsgruppen (Rationalitätsgruppe, nicht Monodromiegruppe) zulassen, deren Herstellung mit der Bildung der Structur der Integrale identisch ist, und deren Erniedrigung auf Untergruppen durch Adjunction neuer Gleichungen hier, wie dort, die Frage der Lösung einschliesst. So ist nicht zu verwundern, dass Lie selbst diesen Galois'schen Standpunkt immer stärker betonte und sich als den eigentlichen Erben der Galois'schen Ideen betrachtete. Hierbei möge aber nicht vergessen werden, dass, wenn die Analogie mit Lagrange-Abel eine vollständige ist, die zu Galois nicht völlig durchgreift: so giebt es auf Quadratur zurückführbare Differentialgleichungen — wie die der geodätischen Linien eines Ellipsoides und anderer Flächenarten —, für welche keine Gruppeneigenschaft als der massgebende innere Grund der Reduction vorhanden ist, während doch die Galois'sche Theorie auch bei den speciellsten algebraischen Gleichungen durchschlagend bleibt. Lie pflegte solche Gleichungen als „auf ausführbare Operationen führende" oder als „triviale" einfach bei Seite zu setzen.

Auch nach anderer Richtung hin consolidirten sich Lie's Ideen in dieser für sein Schaffen denkwürdigen Zeit, offenbar ebenfalls durch den

Anstoss, den die Halphen-Laguerre'schen Arbeiten ihm gegeben hatten. nach der Seite der *unendlichen* continuirlichen Gruppen und ihrer *Differentialinvarianten*. Während bis dahin auch für Lie [abweichend von dem, was man aus der Vorrede zum III. Bande des Transformationswerks schliessen möchte] der Begriff „Gruppe" nur jede beliebige Gesammtheit von Transformationen bedeutete, von der Art dass je zwei, successive angewandt, wieder eine Transformation der Schaar erzeugen, begrenzt er jetzt (Forh. 1883: „Ueber unendliche continuirliche Gruppen" — d. h. über von willkürlichen Functionen abhängende Gruppen —) zum ersten Male ausdrücklich den Begriff dahin, dass ihre infinitesimalen Transformationen einem System linearer partieller Differentialgleichungen irgend einer Ordnung genügen sollen, äquivalent den „Definitionsgleichungen" einer endlichen Gruppe. Und unter dieser Beschränkung gelingt es ihm, auch für diese umfassenderen Gruppen, die in Lie's Sinne für die Transformationstheorien der Differentialgleichungen eine noch grössere Bedeutung erlangen sollen, als die endlichen Gruppen, eine der Theorie der letzteren völlig ähnliche Theorie aufzubauen, aus der nur das eine Resultat angeführt sei: dass von gewöhnlichen Differentialgleichungen nur diejenigen erster Ordnung, keine von höherer Ordnung, solche Gruppen zulassen. Auch hier haben diese Annalen („Ueber Differentialinvarianten", XXIV, 1884) eine zusammenfassende Redaction der ersten bezüglichen Untersuchungen Lie's gebracht, während seine weiteren Forschungen hauptsächlich in den Schriften der Sächs. Ges. d. Wiss. niedergelegt sind. Wie ausgedehnt das Gebiet ist, möge daraus entnommen werden, dass sich ihm z. B. die ganze Gauss'sche Krümmungstheorie, als Theorie der Differentialinvarianten der unendlichen Gruppe aller Biegungen, d. h. der Punkttransformationen, welche das Längenelement der Fläche unverändert lassen, einordnet und von diesem Gesichtspunkte aus durch Lie behandelt worden ist.

Wir haben Lie's Werk und Leben bis zum Jahre 1884, dem Höhepunkt seiner Entwicklung, verfolgt. Von da an galt es vorzugsweise, das grosse Ideenmaterial zusammenhängend zu verarbeiten und einen dauernden Bau daraus zu errichten, der zugleich Ausblicke nach allen Gebieten der Wissenschaft gewähren könnte, oder auch einzelne Ideen an sich weiter auszubilden. Lie hatte zunächst ein Werk über Transformationsgruppen in Aussicht genommen, das zu gleicher Zeit die Theorie der endlichen und unendlichen continuirlichen Gruppen, nebst ihrer Invariantentheorie, in einem Bande umfassen sollte; aber an eine Inangriffnahme konnte erst gedacht werden, nachdem Herr F. Engel, auf Veranlassung von Klein und Mayer, sich zur Unterstützung bereit gefunden und Lie mit beiden Händen dieses Anerbieten ergriffen hatte. Rasch entstand in dem Dreivierteljahr (Sept.

1884—Sommer 1885), das Engel in Christiania zubrachte, eine grössere Anzahl Capitel des Werkes in erster Anlage. Für den Fortgang aber wurde ein kurz darauf eintretender Umschwung in Lie's äusseren Lebensverhältnissen, seine Uebersiedlung nach Deutschland, von Wichtigkeit: einerseits durch die Förderung, welche der persönliche Umgang mit dem Bearbeiter nun dem Werke gewährte, andrerseits durch den Nachtheil der grossen Verpflichtungen, welche die neue Stellung mit sich brachte.

Lie erhielt eine Berufung an die Universität Leipzig als Nachfolger Klein's und entschloss sich ihr zu folgen. Mit seiner Familie, die sich inzwischen 1877—1884 um zwei Töchter und einen Sohn vergrössert hatte, siedelte er im Frühjahr 1886 über, um über zwölf Jahre seiner Thätigkeit einer deutschen Universität zu widmen. Es konnte nicht fehlen, dass die ungewohnten neuen Verhältnisse und Anforderungen dem Ausländer, der zudem von ausgeprägtester Eigenart, von urwüchsig geradem und offenem Wesen, und Vertreter einer speciellen Richtung war, deren Geltendmachung umfassende neue Unterrichtsorganisationen verlangte, eine Reihe von Schwierigkeiten und Lasten auferlegte, die nur durch grosse Energie und volles Selbstvertrauen zu überwinden waren. Aber diese Eigenschaften waren bei Lie, solange er sich körperlich wohl fühlte, in mächtigem Grade entwickelt, und so gelang es ihm denn, seine Vorlesungscyklen nach und nach immer höher anzulegen und eine Reihe tüchtiger Hörer zu gewinnen, von denen jetzt eine grössere Anzahl, In- und Ausländer, als hervorragende Forscher in der Gruppentheorie oder deren Anwendungen thätig sind. Unterbrochen wurde diese Thätigkeit nur im Jahre 1889—90, als dem scheinbar hünenhaften, unermüdlich schaffenden Manne in Folge von Ueberarbeitung und Schlaflosigkeit, und vielleicht auch durch Anlage, die Nerven den Dienst versagten: er verfiel in eine tiefe Depression, aus der er sich zwar bald zu seiner vollen geistigen Schaffenskraft wieder erhob, von der aber eine Ueberspannung des Selbstgefühls und ein Misstrauen gegen Andere in seinem Gemüthe zurückblieb. Zeugniss von der erneuten Vorlesungsthätigkeit Lie's liefern, ausser den Arbeiten seiner Schule, die von Herrn G. Scheffers seit 1890 herausgegebenen drei Vorlesungswerke, welche zur Einführung in die Lie'sche Theorie der Gruppen überhaupt, der Differentialgleichungen mit infinitesimalen Transformationen und der Geometrie der Berührungstransformationen — leider noch nicht in die Theorie der Differentialinvarianten und in die von Lie immer als Abschluss gedachte allgemeine Integrationstheorie — sehr geeignet sind.

Das grundlegende Werk, die „*Theorie der Transformationsgruppen*“, rückte unter diesen Umständen, und bei den übergrossen Schwierigkeiten, welche, wie sich nach und nach herausstellte, die Systematisirung der

Lie'schen Gedankengänge bot, viel langsamer voran, als in Christiania vorausgesehen war. Es galt zunächst, eine strengere Begründung zu geben, die nun von Lie auf functionentheoretischen Boden gestellt wurde, ohne dass übrigens dabei die Beschränkung der Gültigkeit auf einen endlichen Bereich überwunden wurde; es galt vor Allem, ebenso eine durchgreifende Gestaltung des Ganzen, wie eine Herausarbeitung der Details vorzunehmen, während Lie nur die oft unbehauenen Steine geliefert hatte. Uebrigens sind auch eine Reihe neuerer Lie'scher Ideen in dem Werke verwerthet, so die der „Parametergruppe": der r-gliedrigen Gruppe zwischen den r Parametern der Transformationsgruppe selbst, die durch das associative Gesetz der Operationen geliefert wird und die für die Fragen nach allen zu einer gegebenen Gruppe isomorphen Gruppen eine Rolle spielt — ein auch 1884 (Forh.) von Lie eingeschlagener Gang, der späterhin in dem Grundproblem der Gruppenlehre, der Zusammensetzungstheorie, noch eine grössere Litteratur im Gefolge hatte. So wuchs unter den Händen des hingebungsvollen Bearbeiters das Werk, dessen Zweck ist, die *Grundlagen*, bis zu den Anwendungen hin, darzubieten, nach und nach zu drei starken Bänden heran, erschienen 1888—1893: ein von Anfang bis Ende durchaus originales Werk, das seine Selbständigkeit bis zu dem Masse aufrecht erhält, dass es keinerlei fremden Arbeiten Einfluss auf seine Entwicklungen gestatten will. In seiner sehr abstract gehaltenen Form lässt es übrigens, vielleicht mit Ausnahme des II. Bandes, der von vornherein so angelegt wurde, dass er möglichst für sich verständlich würde, den synthetischen Gang der Lie'schen Ideenbildungen ziemlich zurücktreten. Zu bedauern bleibt, dass weder die Theorie der Differentialinvarianten eingehender berücksichtigt, noch die der unendlichen Gruppen berührt werden konnte, und dass die dahin zielenden Absichten Lie's auf ein weiteres systematisches Werk zu nichte geworden sind.

Aus der Leipziger Zeit ragt unter den *Anwendungen der Gruppentheorie* eine besonders hervor, die übrigens auch ihren Platz im III. Bande des Transformationswerkes gefunden hat: die auf das „Riemann-Helmholtz'sche Raumproblem", d. h. auf die Grundlagen der Geometrie. Früh schon durch Klein und dessen Programm auf den gruppentheoretischen Charakter des Problems, und insbesondere auf die Frage der Bedeutung des Helmholtz'schen „Monodromieaxioms" hingewiesen, wälzte Lie seit 1880 diese Fragen in sich, um zuerst 1886 bei Gelegenheit der Berliner Naturforscherversammlung mit seiner Ansicht hervorzutreten. Helmholtz' Auffassung selbst war, höchst bemerkenswerth für 1868, aber dem grossen Forscher unbewusst, eine gruppentheoretische gewesen, indem sie die Gruppen der ∞^6 Bewegungen des Raumes, welche zu den drei Geometrien führen, gegenüber allen übrigen Gruppen zu charakterisiren sucht, nämlich durch die freie Beweglichkeit (innerhalb eines beschränkten Gebiets, wie Lie hinzufügte) der starren Körper, also durch die Existenz einer Invariante zwischen je zwei Punkten, als der einzig wesentlichen Invariante. Indem Lie nun dieses Problem principiell als Gruppenproblem aufgriff, erkannte er zunächst für unseren Raum die Ueberflüssigkeit desjenigen Theils des Monodromieaxioms, der zur freien Beweglichkeit um eine feste Axe (mit *einem* Grade der Freiheit) noch die Periodicität ausdrücklich postuliren zu müssen glaubte; vor Allem aber gab er, neben einer vollen Lösung des Problems im Helmholtz'schen Sinne, eine zweite noch tiefer gehende, welche nur mit den Begriffen Punkt, Linienelement, Flächenelement operirt, Annahmen über die Transitivität der Bewegungen nur für das Infinitesimale macht, und damit auch die Helmholtz'schen differentiellen Betrachtungen verbesserte. Zu dieser Untersuchungsreihe gehört auch Lie's Forschung über die Gruppen, welche einen quadratischen Differentialausdruck invariant lassen (ibidem), als Beitrag zur Begründung der Riemann'schen Abhandlung.

Der Werth dieser Untersuchungen welche natürlich den Betrachtungen von Riemann, Lipschitz etc. nur parallel laufen, liegt wohl hauptsächlich darin, dass sie erlauben, für jede Stufe der Geometrie das geeignete Axiomensystem auszuwählen; und so haben sie mit Recht 1897 [vgl. das in der Note S. 1 angeführte Gutachten, Annalen Bd. 50] den ersten von der Kasaner Gesellschaft vertheilten Lobatschewsky-Preis erhalten.

Fast noch stolzer als auf sein grosses Gruppenwerk war Lie auf diese Anwendungen, und auf die Anwendungen überhaupt: war ihm doch der Gruppen- und Invarianten-Gedanke nicht nur ein methodischer Gesichtspunkt, von dem aus er das ganze alte Gebiet der Mathematik neu durchdenken wollte, sondern auch das Element, das nach und nach alle mathematische Wissenschaft durchdringen oder einheitlich verbinden sollte. So erfüllte es ihn mit hoher Genugthuung, als in den achtziger Jahren in der Theorie der complexen Zahlensysteme durch Poincaré und durch Lie nahestehende deutsche Mathematiker, und in den functionentheoretischen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen durch französische Mathematiker, der Begriff der continuirlichen Gruppen mit zu Grunde gelegt wurde, und zwar unter Berufung auf ihn selbst. In das erstere Gebiet griff Lie auch ein, indem er gelegentlich („Ueber irreductible Berührungstransformationsgruppen“, Sächs. Ber. von 1889) auf die Existenz irreductibler Zahlensysteme hinwies. Das functionentheoretische Gebiet aber, mit seiner Anwendung von analytischen Fortsetzungen, und noch mehr das algebraische, und besonders das arithmetische mit vorgegebenem Rationalitätsbereich, lag ausserhalb der Sphäre des Lie'schen Schaffens. Sein ganzes Denken, wie sein Wissen, stand weit ab von jener Richtung, welche, durch grosse Forscher gepflegt, als „Präcisionsmathematik“ im Laufe dieses Jahrhunderts allmählich emporgestiegen ist und am Ende desselben fast die allein herrschende zu sein scheint: gerade ihr gegenüber steht Lie da wie rückweisend auf die früheren Classiker der infinitesimalen und projectiven Geometrie, als lebendiges Zeugniss, dass auch deren Gedankengebiet unter dem Einfluss eines naiv-schöpferischen Genies, das beide Geometrien vereint, wieder fruchtbar werden und zu unabsehbaren Neuentwicklungen, neu nach Inhalt und Tragweite, gelangen kann.

Will man den wirklichen Umfang des Lie'schen Schaffens durch ein Wort festlegen, das sowohl seine Transformations- und Invariantenrichtung, als seine geometrischen Untersuchungen einschliesst, so braucht man nur sein eigentliches Ziel: die Integration der Differentialgleichungen, zu nennen.

Und wenn es der Zukunft vorbehalten sein mag, auch in den Lie ferner liegenden Gebieten seine Ideen zur Geltung zu bringen, so ist doch zweifellos, dass diese nicht für sich den Angelpunkt aller Untersuchung, sondern immer nur einen Theil der mathematischen Speculationen umfassen können. Sie werden um so anregender wirken, je mehr wir sie als blosses *Hülfsmittel* der geometrischen und analytischen Forschung zu betrachten lernen werden. Das Transformationswerk Lie's an sich mag nach Fundamentirung und System, nach analytischer Form und nach der kritischen Seite hin, dem Wandel der Zeit und der fortschreitenden Wissenschaft verfallen — und Lie selbst hat seitdem die Systematik des I. Bandes in manchen Punkten überholt (Sächs. Ber. von 1890) —: die ihm tiefer zu Grunde liegenden *begrifflichen* Ideenverbindungen Lie's in ihrer umfassenden Einfachheit und in ihrer Beweglichkeit, die geometrische Erfassung der Transformations- und Invariantentheorien mit ihrer unbeschränkten Freiheit in der Wahl des Raumelements, sie sind es, welche ihre schaffende und ordnende Kraft, ihre problemstellenden und problemlösenden Eigenschaften, ihre „synthetische“ Durchdringung der Wissenschaft, die für jeden ihrem Bereich unterzuordnenden Fall die geeignete analytische Formel aus sich herausbildet, immer bewähren werden. Denn wenn die Kraft von Lie's *Schaffen* aus der ausserordentlichen Concentration seines Denkens, aus der Ausbreitung von einem einzigen Punkte aus hervorgeht, in einem Masse, dass sie als eine auf die Spitze getriebene Einseitigkeit empfunden werden könnte, so beruht die Kraft seines *Einwirkens* eben auf einer mit jener Concentration verbundenen höchsten Abstractions- und Verallgemeinerungsfähigkeit — einer Fähigkeit, die darin den echt mathematischen Geist zeigt, dass ihre wenn auch rein begrifflichen Speculationen unmittelbar in analytisches Gewand gekleidet werden können.

Im Jahre 1898 zog es Lie zurück in sein norwegisches Heimathland, an dessen gewaltiger Natur er, der rüstige Fusswanderer, so oft Körper und Geist erfrischt hatte, und für das sein Herz hochschlug, wie für seine Familie und für seine Wissenschaft. Nachdem für ihn in Christiania wieder eine Universitätsprofessur unter ehrenvollen Bedingungen errichtet worden war, siedelte er im September dahin über. Aber seine körperlichen Kräfte waren gebrochen, und schon um Weihnachten zeigte sich der unvermeidliche Ausgang. Am 18. Februar 1899 erlag Lie einer perniciösen Anämie. Mit ihm schied der originalste und schöpferischste Vertreter der geometrischen Wissenschaft der letzten drei Decennien dieses Jahrhunderts dahin.

Erlangen, September 1899.

Ueber eine Lösung der Aufgabe, jede Primzahl als Function der vorhergehenden Primzahlen durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen.

Von

C. Isenkrahe in Trier.

Den Ausgangspunkt für folgende Ueberlegungen bildet der Satz, dass die Facultät einer Zahl x durch jede beliebige Primzahl a_r so oft dividirt werden kann, als die Summe:

$$S(r, x) = \left[\frac{x}{a_r}\right] + \left[\frac{x}{a_r^2}\right] + \left[\frac{x}{a_r^3}\right] + \cdots$$

Einheiten enthält.*) Bezeichnet man nun die Potenz $a_r^{S(r,x)}$ kurz mit $p(r, x)$ und das Product $p(1, x) . p(2, x) \ldots p(m, x)$ mit $P(m, x)$, so lässt sich die Gleichung aufschreiben:

$$(1) \qquad \frac{x!}{P(m, x)} = 1,$$

welche immer richtig ist, falls im Nenner *alle* Primzahlen berücksichtigt sind, welche auf der Zahlenstrecke von 1 bis x angetroffen werden. Wenn aber sodann die Zahl x von dem Werthe aus, den sie eben hatte, beliebig weit wächst, so muss, damit obige Gleichung richtig bleibt, der Nenner sich ebenso oft um einen weiteren Factor vermehren, als die Zahl x durch eine Primzahl hindurchgeht. Ist dies n mal geschehen, so haben wir für das grösser gewordene x die Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{x!}{P(m, x) . p(m+1, x) . p(m+2, x) \ldots p(m+n, x)} = 1.$$

Dieses Anwachsen der Zahl x soll nun — und das ist die Aufgabe, die wir uns stellen — durch irgend eine noch aufzufindende Function so

---

*) Den Hinweis auf diesen Satz verdanke ich Herrn Julius Braun, welcher in seiner demnächst als Beilage zum Jahresbericht des Fr. W. Gymn. in Trier erscheinenden Abhandlung: „Das Fortschreitungsgesetz der Primzahlen durch eine transcendente Gleichung exakt dargestellt" von demselben Satze ausgeht.

geregelt werden, dass die *Iteration* dieser Function Werthe liefert, welche sich nicht nur stets in der Richtung auf die nächstfolgende Primzahl hin bewegen, sondern nach Erreichung derselben auch automatisch stillstehen. Möge die zu suchende Function $F(m, x)$ heissen, so muss also sein:

$$a_{m+1} = \text{limit } F(m, x).$$

Weil an dem zu erzielenden limes die Zahl x den Werth a_{m+1} erreicht, so geht Gleichung (2) daselbst über in die Form:

$$\frac{x!}{P(m, x) \,.\, p(m+1, x)} = \frac{x!}{P(m, x) \cdot a_{m+1}^{\left[\frac{x}{a_{m+1}}\right]}} = 1,$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{x!}{P(m, x)} = x \quad \text{und} \quad \frac{(x-1)!}{P(m, x)} = 1.$$

Hingegen, so lange sich x noch in dem Zwischenraum zwischen den Primzahlen a_m und a_{m+1} aufhält, ist zufolge Gleichung (1)

$$\frac{x!}{P(m, x)} = 1, \quad \text{also} \quad \frac{(x-1)!}{P(m, x)} = \frac{1}{x}.$$

Aus letzterer Gleichung ergiebt sich aber wiederum einerseits $\frac{P(m, x)}{(x-1)!} = x$, andererseits $\left[\frac{(x-1)!}{P(m, x)}\right] = 0$.

An der Grenze jedoch, wo $x = a_{m+1}$ geworden, da ist sowohl $\frac{P(m, x)}{(x-1)!} = 1$, als auch $\left[\frac{(x-1)!}{P(m, x)}\right] = 1$.

Setzt man daher die gesuchte Function $F(m, x)$ aus drei Gliedern zusammen und schreibt:

$$F(m, x) = \frac{x!}{P(m, x)} + \frac{P(m, x)}{(x-1)!} - \left[\frac{(x-1)!}{P(m, x)}\right],$$

so ist auf dem Wege zwischen a_m und a_{m+1} die Function $F(m, x)$ immer gleich $1 + x$, also wächst das Argument bei der Iteration jedesmal. Sobald hingegen $x = a_{m+1}$ geworden, ist $F(m, x) = x + 1 - 1 = x$, also steht hier die Iteration automatisch still und ist durch keine Wiederholung mehr von der Stelle zu bringen. Hieraus erhellt, dass obige Function $F(m, x)$ genau das leistet, was sie soll.

Noch könnte man die Frage aufwerfen, was denn dann geschehe, wenn der Anfangswerth x_0 für die Iteration schon *zu hoch* gegriffen worden, d. h. wenn $x_0 > a_{m+1}$ ist.

In diesem Falle ist zufolge Gleichung (2):

$$F(m, x_0) = p(m+1, x_0) \ldots p(m+n, x_0) + \frac{x_0}{p(m+1, x_0) \ldots p(m+n, x_0)} - \left[\frac{p(m+1, x_0) \ldots p(m+n, x_0)}{x_0}\right].$$

Wir untersuchen das zweite Glied dieser Function. Während x wächst, treten im Nenner desselben der Reihe nach die Primzahlen a_{m+1}, a_{m+2} etc. als Factoren auf. Da nun aber von Anfang an x_0 schon um 1 grösser als a_{m+1} ist, so kann der erste Factor des Nenners sich gegen den Zähler nicht eher aufheben, als bis $x_0 = 2 \cdot a_{m+1}$ geworden ist. In der Zwischenzeit ist aber schon, weil bekanntlich $a_{m+2} < 2 \cdot a_{m+1}$ ist, im Nenner mindestens *eine* weitere Primzahl hinzugetreten; und so erkennt man, dass der Nenner stets neue Factoren bekommt, ehe die alten sich weggehoben haben. Daraus geht hervor, dass das zweite Glied der Function $F(m, x)$ in dem bezeichneten Falle jedesmal ein Bruch ist. Damit kann aber die Rechnung nicht fortgesetzt werden. Die Iteration hebt sich also, wenn der Anfangswerth zu gross gewählt ist, automatisch aus dem Sattel; in die Irre läuft sie nie.

Wenn man aber von vornherein die Möglichkeit des Eintretens solcher Fälle durch eine bestimmte Angabe über die Anfangswerthe der Iteration ausschliessen will, so kann man schreiben:

$$a_{m+1} = \lim_{x_0 = a_m + 1} F(m, x),$$

und diese Gleichung darf, da sie keinerlei Willkürlichkeit oder Mehrdeutigkeit enthält, als eine vollständige Lösung der gestellten Aufgabe betrachtet werden.

Trier, im März 1899.

Ueber den Stand der Herausgabe von Gauss Werken.

Zweiter Bericht*).

Von

F. Klein in Göttingen.

Im verflossenen Jahre ist die *Herbeischaffung neuen Materials* und die *genaue Durchsicht des Nachlasses, sowie der Gauss-Bibliothek*, soweit gefördert worden, dass diese Punkte als erledigt betrachtet werden können, jedenfalls was die Drucklegung der Bände VII und VIII angeht.

Folgendes neue Material ist uns zugänglich geworden:

I. Durch Ankauf:

1) Ein Vorlesungsheft von Gauss über praktische Astronomie, von Frau Prof. Peters in Königsberg.

2) Zwei Originalbriefe von Gauss (an Sophie Germain und an Rudolf Wagner), aus der Versteigerung der Boncompagni'schen Autographensammlung in Rom.

II. Geschenke:

1) Acht Convolute Akten der Hannöver'schen Landesvermessung (Beobachtungen, Abrisse und Coordinaten) nebst den zugehörigen Originalberichten von Gauss an das Hannöversche Ministerium.

Geschenk der Kgl. preussischen Landesaufnahme des grossen Generalstabes.

2) 21 Briefe von Gauss an Weber, nebst einem Brief von Gauss an Humboldt (auf Weber und erdmagnetische Fragen bezüglich, 1838), sowie eine Reihe mit Notizen.

Geschenk von Prof. Heinrich Weber in Braunschweig.

3) Ein Heft mit Ausarbeitungen von drei Gauss'schen Vorlesungen über die Theorie des Erdmagnetismus, Geodäsie, Methode der kleinsten Quadrate; ferner ein Heft, enthaltend eine Ausarbeitung einer Gauss'schen Vorlesung „Theorie der imaginären Grössen" nebst einer Vorlesung von Stern über bestimmte Integrale.

Beides Geschenke der Directoren des mathematischen Seminars der Universität Halle.

Die Hefte stammen aus dem Nachlasse von E. Heine.

---

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mittheilungen vom Jahre 1899, Heft 1 (Oeffentliche Sitzung vom 29. April 1899). — Vergl. Bericht I in den Geschäftlichen Mittheilungen vom Jahre 1898 (abgedruckt in Bd. 51 der mathematischen Annalen).

4) Copieen der noch vorhandenen Briefe von Gauss an Sophie Germain und einiger anderer Briefe. — Einige Vorarbeiten von Schering für die Drucklegung der weiteren Bände, namentlich zur Theoria motus.
Geschenk von Frau Geheimrath Schering dahier.

5) 242 Briefe Gerling's an Gauss und einige Briefe von Gauss' Kindern an Gerling.
Geschenk der Frau Hofphotograph Rothe in Kassel.

6) Copie eines Briefes von Gauss an Grassmann.
Geschenk von Prof. Engel in Leipzig.

7) Copie zweier Briefe von Gauss an Schumacher und an einen Unbekannten.
Geschenk von Prof. Stäckel in Kiel.

8) Copie eines Briefes von Gauss an Pater Koller.
Geschenk von Prof. Schwab in Kremsmünster.

9) Ein Autograph von Gauss (über Schachspiel).
Geschenk von Frau Prof. Listing in Hannover.

III. Zeitweise überlassen:

1) Tagebuch von Gauss über seine wissenschaftlichen Entdeckungen.
(Von 1796 bis 1800, bez. mit grossen Unterbrechungen bis 1814).
Ferner ein Notizbuch von Gauss und eine Reihe Zettel.
Von Herrn Gauss in Hameln (Enkel von Gauss).

2) Originalmanuscripte zu den Gauss'schen Abhandlungen: „Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae" (1817) und „Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si ejus massa per totam orbitam ... esset dispertita" (1818).
Ferner eine Reihe (nicht von Gauss selbst herrührender) Ausarbeitungen und Rechnungsbeispiele zur Theoria motus.
Von der New-York Public Library.

3) Brief von Gauss an Bohnenberger. Durch Prof. Hammer in Stuttgart.

4) Brief von Gauss an Fechner. Durch die K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.

5) Brief von Gauss an Herger. Durch Prof. Hüfner in Tübingen.

6) Briefe von Gauss an Kestner. Durch Prof. Engel in Leipzig, aus der Universitätsbibliothek daselbst.

7) Brief von Gauss an Scherk. Durch Prof. Study in Greifswald.

8) Copieen zweier Briefe von Gauss an Olbers (Originale in Pulkowa). Durch Dir. Dr. Schilling in Bremen.

9) Ausarbeitung einer Gauss'schen Vorlesung „Geodätischer Calcul" nebst einer Reihe weiterer Notizen. Durch Frau Prof. Listing in Hannover.

19) Copieen von Briefen von Encke an Olbers, Bessel an Repsold und andere. Drei Briefe von Olbers an Argelander. Ausarbeitung einer Gauss'schen Vorlesung über „Theoretische Astronomie".
Aus dem Nachlass von Winnecke, durch Prof. Wislicenus (bez. Frau Winnecke) in Strassburg.

11) Ein Heft „Abhandlungen von C. F. Gauss" (aus dem Nachlass von Wilhelm Weber), im wesentlichen nur bereits Gedrucktes enthaltend. Durch Prof. Jacobj in Göttingen.

Ausserdem haben wir folgende Gaussiana als Geschenk erhalten:

1) Auf Veranlassung der Calvör'schen Buchhandlung in Göttingen, von der technischen Hochschule in Braunschweig, durch Prof. Fricke daselbst:

Eine Reihe von Berichten und Zeitungsnotizen über das Gauss-Denkmal in Braunschweig und das Braunschweig'sche Gauss-Stipendium. (Aus den Jahren 1877 und 1878.)

2) Von Prof. Engel in Leipzig:

Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und einer Biographie des Verfassers. Von Friedrich Engel. Leipzig 1898. (Vgl. Nachwort, S. 475—476).

3) Von Prof. Lindemann in München:

Gedächtnissrede auf Seidel. Aus den Abhandlungen der Münchener Akademie

4) Von Frau Geh. Rath Schering:

Schering's Exemplar von Boncompagni, intorno ad una lettera di Gauss (ad Olbers).

5) Von der Springer'schen Verlagsbuchhandlung in Berlin, bez. dem Herausgeber, Herrn Director Schilling in Bremen:

Die Aushängebogen des in Druck befindlichen Briefwechsels zwischen Gauss und Olbers. Es sind bis jetzt 18 Bogen sowie 9 Bogen des Ergänzungsbandes, welcher die von Prof. Schur bearbeiteten Beobachtungen von Olbers enthält, gedruckt.

Von allem diesem Material ist wissenschaftlich unvergleichlich das interessanteste das oben unter III, 1 angeführte, durch die Vermittelung von Prof. Stäckel uns zugekommene Tagebuch von Gauss. Dasselbe beginnt 1796 mit dem Satze:

„Principia quibus innititur sectio circuli ac divisibilitas ejusdem geometrica in septemdecim partes etc.

Mart. 30. Brunsv."

und giebt nun in chronologischer Reihenfolge bis zum Jahre 1800 eine lange Reihe der merkwürdigsten Notizen, durch welche die einzelnen mathematischen Entdeckungen von Gauss, die in jene Jahre fallen, in genauer Weise datiert werden. Wir nennen hier von 1800:

„Theoriam quantitatum transcendentium

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha xx)(1-\beta xx)}}$$

ad summam universalitatem perduximus.

Brunsv. Mai 6."

„Incrementum ingens hujus theoriae invenire contigit, per quod simul omnia praecedentia nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur. Brunsv. Mai 22."

„Nov. 30. Felix fuit dies quo multitudinem classium formarum binariarum per triplicem methodum assignare largitum est nobis, puta 1) per producta infinita, 2) per aggregatum infinitum, 3) per aggregatum finitum cotangentium seu logarithmorum sinuum. Brunsv."

In den folgenden Jahren wird diese Liste leider nur mit Unterbrechungen weitergeführt, bis sie in den Jahren 1813 und 1814 mit zwei Notizen über biquadratische Reste abbricht, die wir auch noch hierher setzen:

„Fundamentum theoriae residuorum biquadraticorum *generalis*, per septem propemodum annos summa contentione sed semper frustra quaesitum tandem feliciter deteximus eodem die quo filius nobis natus est. 1813 Oct. 23. Gott."

„Subtilissimum hoc est omnium eorum quae unquam perfecimus. Vix itaque operae pretium est, his intermiscere mentionem quarundam simplificationum ad calculum orbitarum parabolicarum pertinentium."

„Observatio per inductionem facta gravissima theoriam residuorum biquadraticorum cum functionibus lemniscaticis elegantissime nectens. Puta si $a+bi$ est numerus primus, $a-1+bi$ per $2+2i$ divisibilis, multitudo omnium solutionum congruentiae $1 = xx + yy + xxyy$ (mod. $a+bi$), inclusis $x=\infty$, $y=\pm i$, $x=\pm i$, $y=\infty$ fit $=(a-1)^2+bb$. 1814 Jul. 9."

Es erübrigt, dass ich über den Fortschritt der redactionellen Arbeiten Einiges hinzufüge. Für den ersten Theil von Bd. VIII liegen die Manuscripte für Arithmetik und Analysis (Fricke), Numerisches Rechnen und Wahrscheinlichkeitsrechnung (Börsch und Krüger) fertig vor, während das Manuscript für Geometrie (Stäckel) fast vollendet ist. Für den zweiten Theil von Bd. VIII ist das Manuscript zur Geodäsie (Börsch und Krüger) zum grossen Theil fertig. Für Band VII (Astronomie, Brendel) konnten bisher nur oberflächliche Vorarbeiten vorgenommen werden. Der Druck von Band VIII hat begonnen und soll jetzt regelmässig weitergeführt werden.

Göttingen, den 29. April 1899.

Ueber die Irreductibilität algebraischer Functionalgleichungen und linearer Differentialgleichungen.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

Eine algebraische Gleichung von der Form

$$(1)\qquad \mathfrak{p}_0(x-\alpha)y^n+\mathfrak{p}_1(x-\alpha)y^{n-1}+\cdots+\mathfrak{p}_{n-1}(x-\alpha)y+\mathfrak{p}_n(x-\alpha)=0,$$

worin die Coefficienten endliche oder unendliche convergente Potenzreihen von $x-\alpha$ bedeuten, für welche $\mathfrak{p}_0(0), \mathfrak{p}_1(0), \ldots \mathfrak{p}_{n-1}(0), \mathfrak{p}_n(0)$ nicht sämmtlich verschwinden, kann stets durch Multiplication mit einer positiven ganzzahligen Potenz von $x-\alpha$ auf die Normalform gebracht werden

$$(2)\qquad \begin{aligned}(x-\alpha)^n\mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^n &+ (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{n-1}+\cdots\\ &\cdots+(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y+\mathfrak{P}_n(x-\alpha)=0,\end{aligned}$$

in welcher $\mathfrak{P}_0, \ldots \mathfrak{P}_n$ wiederum Reihen von demselben Charakter sind, die nicht sämmtlich für $x=\alpha$ den Werth Null annehmen.

Wir werden nun die Gleichung (2) in der Umgebung von $x=\alpha$ irreductibel nennen, wenn sie mit keiner Gleichung niederen Grades

$$(3)\qquad \begin{aligned}(x-\alpha)^\nu\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^\nu &+ (x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{\nu-1}+\cdots\\ &\cdots+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}(x-\alpha)y+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)=0,\end{aligned}$$

deren Coefficienten denselben Charakter haben, in der Umgebung von α eine Lösung gemein hat, so dass, wenn die Gleichung (2) in dem angegebenen Sinne reductibel ist, wie unmittelbar zu erkennen, die in y identische Gleichung bestehen muss

$$(4)\qquad \begin{aligned}(x-\alpha)^n\mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^n &+ (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{n-1}+\cdots\\ &\cdots+(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y+\mathfrak{P}_n(x-\alpha)\\ =\{(x-\alpha)^\nu\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^\nu &+\cdots+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}(x-\alpha)+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)\}\\ \{(x-\alpha)^{n-\nu}\mathfrak{R}_0(x-\alpha)y^{n-\nu} &+\cdots+(x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(x-\alpha)y+\mathfrak{R}_{n-\nu}(x-\alpha)\},\end{aligned}$$

worin die $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_{n-\nu}$ wiederum Reihen von demselben Charakter bedeuten, die für $x=\alpha$ nicht sämmtlich verschwinden.

Zunächst mag mit Rücksicht auf die späteren Resultate für lineare Differentialgleichungen hervorgehoben werden, dass die Substitution

$$y = \frac{z}{(x-\alpha)^{\varrho-1}},$$

wenn ϱ eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, die beiden Gleichungen

$$(x-\alpha)^{n\varrho}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)\,y^n + (x-\alpha)^{(n-1)\varrho}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)\,y^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + (x-\alpha)^{\varrho}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)\,y + \mathfrak{P}_n(x-\alpha) = 0$$

und

$$(x-\alpha)^{n}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)\,y^n + (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)\,y^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + (x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha) + \mathfrak{P}_n(x-\alpha) = 0$$

zugleich irreductibel und reductibel werden lässt, und es soll nunmehr untersucht werden, unter welchen Bedingungen die algebraische Gleichung

$$(5)\qquad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)\,y^n + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)\,y^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)\,y + (x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n(x-\alpha) = 0,$$

in welcher $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \ldots, \mathfrak{P}_n(0)$ sämmtlich von Null verschieden sind, irreductibel ist, wobei wir bemerken wollen, dass wir uns zur Untersuchung einer Methode bedienen, die sich nicht wesentlich von der früher von mir zur Ausdehnung des Eisenstein'schen Satzes benutzten unterscheidet, die aber gerade in dieser Form auf die Feststellung der Irreductibilität linearer Differentialgleichungen übertragbar ist.*)

Da, wenn die Gleichung (5) reductibel ist, eine in y identische Beziehung bestehen muss

---

*) Der erste von Eisenstein herrührende Satz über die Irreductibilität gewisser algebraischer Zahlengleichungen sowie die weiteren von mir durch functionentheoretische Betrachtungen hergeleiteten Sätze lassen sich, wie man aus dem Obigen ohne weitere Schwierigkeiten erkennt, auch auf Gleichungen ausdehnen, deren Coefficienten transcendente Zahlen sind, und es folgt z. B. unmittelbar der Satz, dass eine Gleichung von der Form

$$\varepsilon^{n\varrho+1}g_0(\varepsilon)\,x^n + \varepsilon^{(n-1)\varrho+1}g_1(\varepsilon)\,x^{n-1} + \cdots + \varepsilon^{\varrho+1}g_{n-1}(\varepsilon)\,x + g_n(\varepsilon) = 0,$$

in welcher ϱ eine beliebige positive ganze Zahl, ε eine transcendente Zahl,

$$g_0(\varepsilon),\ g_1(\varepsilon),\ \ldots,\ g_n(\varepsilon)$$

ganze Functionen von ε darstellen, deren Coefficienten algebraische Zahlen sind und $g_0(\varepsilon)$, $g_n(\varepsilon)$ nicht den Factor ε haben, in dem Sinne irreductibel ist, dass sie mit keiner Gleichung niederen Grades, deren Coefficienten ebenfalls ganze Functionen der transcendenten Zahl ε mit algebraischen Coefficienten sind, eine Lösung gemein hat.

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & (x-\alpha)^{n+\mu_0}[\mathfrak{P}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_0'(0)+\cdots]y^n \\
& +(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}[\mathfrak{P}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_1'(0)+\cdots]y^{n-1}+\cdots \\
& \cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}[\mathfrak{P}_{n-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}'(0)+\cdots]y \\
& +(x-\alpha)^{\mu_n}[\mathfrak{P}_n(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_n'(0)+\cdots] \\
= & \{(x-\alpha)^{\nu}[\mathfrak{Q}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_0'(0)+\cdots]y^{\nu} \\
& +(x-\alpha)^{\nu-1}[\mathfrak{Q}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_1'(0)+\cdots]y^{\nu-1}+\cdots \\
& \cdots+(x-\alpha)[\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0)+\cdots]y \\
& +\mathfrak{Q}_{\nu}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu}'(0)+\cdots\} \\
\times & \{(x-\alpha)^{n-\nu}[\mathfrak{R}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_0'(0)+\cdots]y^{n-\nu} \\
& +(x-\alpha)^{n-\nu-1}[\mathfrak{R}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_1'(0)+\cdots]y^{n-\nu-1}+\cdots \\
& \cdots+(x-\alpha)[\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0)+\cdots]y \\
& +\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)+\cdots\},
\end{aligned}
$$

worin

$$\mathfrak{P}_0(0),\ \mathfrak{P}_1(0),\ldots,\ \mathfrak{P}_{n-1}(0),\ \mathfrak{P}_n(0)$$

von Null verschieden, und von den Zahlen $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1}, \mu_n$ mindestens eine gleich Null ist, so wird die Substitution

$$y=\frac{\varkappa}{x-\alpha}$$

die in $\varkappa$ identische Gleichung

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad & (x-\alpha)^{\mu_0}[\mathfrak{P}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_0'(0)+\cdots]\varkappa^n \\
& +(x-\alpha)^{\mu_1}[\mathfrak{P}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_1'(0)+\cdots]\varkappa^{n-1}+\cdots \\
& \cdots+(x-\alpha)^{\mu_{n-1}}[\mathfrak{P}_{n-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}'(0)+\cdots]\varkappa \\
& +(x-\alpha)^{\mu_n}[\mathfrak{P}_n(0)+(x-\alpha)\mathfrak{P}_n'(0)+\cdots] \\
= & \{[\mathfrak{Q}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_0'(0)+\cdots]\varkappa^{\nu} \\
& +[\mathfrak{Q}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_1'(0)+\cdots]\varkappa^{\nu-1}+\cdots \\
& \cdots+[\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0)+\cdots]\varkappa \\
& +\mathfrak{Q}_{\nu}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu}'(0)+\cdots\} \\
\times & \{[\mathfrak{R}_0(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_0'(0)+\cdots]\varkappa^{n-\nu} \\
& +[\mathfrak{R}_1(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_1'(0)+\cdots]\varkappa^{n-\nu-1}+\cdots \\
& \cdots+[\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0)+\cdots]\varkappa \\
& +\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)+(x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)+\cdots\}
\end{aligned}
$$

ergeben.

Sei nun $\mu_n=0$, $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}\geqq 1$, so liefert die Vergleichung der Coefficienten von $(x-\alpha)^0$ auf beiden Seiten der Gleichung die Beziehung

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{Q}_0(0)\varkappa^{\nu}+\mathfrak{Q}_1(0)\varkappa^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)\varkappa+\mathfrak{Q}_{\nu}(0)) \\
\times &(\mathfrak{R}_0(0)\varkappa^{n-\nu}+\mathfrak{R}_1(0)\varkappa^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)\varkappa+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0))=\mathfrak{P}_n(0),
\end{aligned}
$$

woraus sich

$$\mathfrak{Q}_0(0)=\mathfrak{Q}_1(0)=\cdots=\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)=0, \quad \mathfrak{R}_0(0)=\mathfrak{R}_1(0)=\cdots=\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)=0,$$
$$\mathfrak{Q}_\nu(0)\cdot\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)=\mathfrak{P}_n(0),$$

also $\mathfrak{Q}_\nu(0)$ und $\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$ von Null verschieden ergiebt, da $\mathfrak{P}_n(0)$ nicht Null ist; da aber dann der Coefficient von $(x-\alpha)^1$ auf der rechten Seite von (7) lautet

$$\mathfrak{Q}_\nu(0)(\mathfrak{R}_0'(0)x^{n-\nu}+\mathfrak{R}_1'(0)x^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0))$$
$$+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)(\mathfrak{Q}_0'(0)x^\nu+\mathfrak{Q}_1'(0)x^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu'(0)),$$

während der Coefficient auf der linken Seite, wenn $\mu_0=1$ angenommen wird, eine ganze Function n^{ten} Grades von x ist, so ist die Unmöglichkeit des Bestehens der Gleichung (7) nachgewiesen, und damit der Satz hergeleitet,

dass eine algebraische Gleichung der Form

$$(8) \qquad (x-\alpha)^{\varrho n+1}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^n+(x-\alpha)^{\varrho(n-1)+\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{n-1}$$
$$+(x-\alpha)^{\varrho(n-2)+\mu_2}\mathfrak{P}_2(x-\alpha)y^{n-2}+\cdots+(x-\alpha)^{\varrho+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y$$
$$+\mathfrak{P}_n(x-\alpha)=0,$$

in welcher ϱ *eine beliebige positive ganze Zahl,* $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 1$ *und* $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ *von Null verschieden sind, in dem angegebenen Sinne irreductibel ist.*

Sei wiederum $\mu_n=0$, aber $\mu_0=2$, $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1}\geqq 2$, so wird sich durch Vergleichung der Coefficienten von $(x-\alpha)^1$ in der Gleichung (7)

$$\mathfrak{Q}_\nu(0)(\mathfrak{R}_0'(0)x^{n-\nu}+\mathfrak{R}_1'(0)x^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0))$$
$$+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)(\mathfrak{Q}_0'(0)x^\nu+\mathfrak{Q}_1'(0)x^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu'(0))=\mathfrak{P}_n'(0)$$

ergeben; ist nun $n-\nu>\nu$, so folgt $\mathfrak{R}_0'(0)=0$, ist $n-\nu<\nu$, so ist $\mathfrak{Q}_0'(0)=0$, jedenfalls wird der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ auf der rechten Seite von (7)

$$\frac{1}{2}\mathfrak{Q}_\nu(0)(\mathfrak{R}_0''(0)x^{n-\nu}+\mathfrak{R}_1''(0)x^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}''(0))$$
$$+\frac{1}{2}\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)(\mathfrak{Q}_0''(0)x^\nu+\mathfrak{Q}_1''(0)x^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu''(0))$$
$$+(\mathfrak{Q}_0'(0)x^\nu+\mathfrak{Q}_1'(0)x^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu'(0))$$
$$\times(\mathfrak{R}_0'(0)x^{n-\nu}+\mathfrak{R}_1'(0)x^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0))$$

höchstens vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade in x sein, während die linke Seite, da $\mu_0=2$ ist, in dem Coefficienten die Potenz x^n enthält — nur wenn $n-\nu=\nu$, also n eine gerade Zahl ist, kann die Unmöglichkeit der Zerlegung nicht geschlossen werden, und wir finden somit, *dass eine algebraische Gleichung unpaaren Grades von der Form*

$$(9)\qquad (x-\alpha)^{\varrho n+2}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)\,y^n+(x-\alpha)^{\varrho(n-1)+\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)\,y^{n-1}$$
$$+(x-\alpha)^{\varrho(n-2)+\mu_2}\mathfrak{P}_2(x-\alpha)\,y^{n-2}+\cdots+(x-\alpha)^{\varrho+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)\,y$$
$$+\mathfrak{P}_n(x-\alpha)=0,$$

in welcher ϱ *wieder irgend eine positive ganze Zahl,* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1} \geqq 2$ *und* $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ *von Null verschieden sind, in dem angegebenen Sinne irreductibel ist; ist der Grad n jedoch ein paarer, so kann eine Zerlegung nur in zwei Factoren vom* $\frac{n}{2}$*ten* *Grade stattfinden, wenn die Gleichung überhaupt reductibel ist.*

Man sieht, dass man auf diesem Wege eine weitere Reihe von Irreductibilitätscriterien herleiten kann, doch kam es mir hier nur darauf an, die für die linearen Differentialgleichungen anzuwendende Methode vorzubereiten.

Es ergiebt sich zugleich unmittelbar, dass man diese Sätze auch aus den von mir in meiner Arbeit „Ueber den Eisenstein'schen Satz von der Irreductibilität algebraischer Gleichungen"*) angegebenen functionentheoretischen Methoden herleiten kann, da z. B. die Entwicklung der Lösungen der Gleichung (8) in der Umgebung des Punktes α die Form hat

$$y=a_0(x-\alpha)^{\frac{-\varrho n-1}{n}}+a_1(x-\alpha)^{\frac{-\varrho n}{n}}+a_2(x-\alpha)^{\frac{-\varrho n+1}{n}}+\cdots,$$

und man somit durch n-malige Umkreisung des Punktes α zu allen Zweigen der durch die Gleichung (8) in der Umgebung von α definirten Function y gelangen kann.

Im Anschluss an die eben erwähnte auf der Entwicklung der Functionen beruhende Beweisart der Irreductibilität wollen wir noch, bevor wir zur Ausdehnung der früheren Sätze auf die Bestimmung der Form irreductibler Differentialgleichungen übergehen, einige allgemeine Bemerkungen über die Gestalt einer algebraischen Gleichung mit in bestimmten Räumen eindeutigen, endlichen und stetigen Coefficienten hinzufügen, für welche in der Umgebung eines mehrfachen Punktes die Zahl der Cyklen, die Anzahl der Elemente eines jeden Cyklus und die Exponenten der Anfangsglieder der Entwicklung gegeben sind, Untersuchungen, die für den Fall ganzer Functionen als Coefficienten in ihren Resultaten in meiner Arbeit „Ueber die Entwicklungsform der algebraischen Functionen und die Irreductibilität algebraischer Gleichungen"**) veröffentlicht wurden.

---

*) Journal für Mathematik B. 115, H. 1.

**) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, November 1898. Die Begründung der Resultate erscheint im Journal für Mathematik B. 121, H. 4.

Sei die Gleichung

(10) $$f_0(x)y^n + f_1(x)y^{n-1} + \cdots + f_{n-1}(x)y + f_n(x) = 0$$

vorgelegt, deren Coefficienten sämmtlich innerhalb eines von einer geschlossenen Curve c begrenzten einfach zusammenhängenden Raumes T endlich, eindeutig und stetig sind, so kann zunächst durch die Substitution

$$y = \frac{z}{f_0(x)}$$

die Gleichung (10), wenn z wieder durch y ersetzt wird, in die Form

(11) $$y^n + F_1(x)y^{n-1} + F_2(x)y^{n-2} + \cdots + F_{n-1}(x)y + F_n(x) = 0$$

gebracht werden, in welcher y für keinen innerhalb des Raumes T gelegenen Punkt unendlich gross wird, und $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_n(x)$ wieder innerhalb desselben Raumes eindeutig, endlich und stetig sind, sich also bekanntlich, wenn man den Raum T auf dem Einheitskreise in der ξ-Ebene vermöge der eindeutigen Functionen

(12) $$x = \varphi(\xi), \quad \xi = \psi(x)$$

abbildet, innerhalb dieses Raumes in nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $\psi(x)$ fortschreitende Reihen entwickeln lassen.*) Sucht man nun die x-Werthe, welche mehrfache Punkte von y sind, so werden dieselben die Lösungen der durch Elimination von y zwischen (11) und der nach y genommenen Ableitung derselben

(13) $$ny^{n-1} + (n-1)F_1(x)y^{n-2} + \cdots + F_{n-1}(x) = 0$$

erhaltenen Gleichung

(14) $$\Delta(x) = 0$$

sein, worin $\Delta(x)$ die wiederum im Raume T endliche, stetige und eindeutige Discriminante der Gleichung (11) darstellt. Diese Gleichung kann nun eine endliche oder unendliche Anzahl von Lösungen besitzen; im ersteren Falle wird den mehrfachen x-Punkten im T-Raume auch eine endliche Anzahl zugehöriger y-Werthe, von denen die unter einander verschiedenen mit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\varrho$ bezeichnet werden mögen, entsprechen, im letzteren Falle werden die Nullwerthe von $\Delta(x)$ sich in immer wachsender Anzahl gegen einen Punkt auf dem Rande von T zusammendrängen, indem die Nullwerthe von $\Delta(\varphi(\xi))$ im Innern des Einheitskreises in endlichen Distanzen von einander liegen und in immer zunehmender Anzahl sich einem Punkte auf der Peripherie dieses Kreises nähern, da sonst im Innern

*) Für die wirkliche Ausführung wird sich besser die neuerdings von Mittag-Leffler gegebene wesentliche Ausdehnung desjenigen Verfahrens eignen, welches Weierstrass zur Fortsetzung einer Function aus einem Elemente derselben angegeben hat.

dieses Raumes eine wesentliche Discontinuität der nach ganzen positiven Potenzen von $\psi(x)$ fortschreitenden convergenten Entwicklung von $\Delta(x)$ sich ergeben würde. Die verschiedenen der diesen unendlich vielen Lösungen der Discriminante entsprechenden Werthe von y werden sich nach der Grösse ihrer Moduln geordnet in die Folge bringen lassen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$, worin $(\eta_\lambda)_{\lambda=\infty}$ gegen Unendlich zunimmt, da die Discriminante also auch einer der Coefficienten der Gleichung (11) in dem Punkte des Randes von T, gegen den sich die unendlich vielen Nullwerthe der Discriminante zusammendrängen, eine wesentliche Discontinuität besitzt. Ist nun die Zahl der η-Werthe eine endliche ϱ, so kann man eine ganze Function ϱ^{ten} Grades mit constanten Coefficienten

(15) $$z = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_\varrho y^\varrho$$

bestimmen, welche für $y = \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\varrho$ verschwindet, und ebenso lässt sich bekanntlich, wenn mod. $\eta_{\lambda+1} \geqq$ mod. η_λ und $\lim\limits_{\lambda=\infty} \eta_\lambda = \infty$ ist, eine in der ganzen y-Ebene convergente Maclaurin'sche Reihe

(16) $$z = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots$$

herstellen, deren Nullwerthe die sämmtlichen Werthe $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ und keine andern sind. Bildet man nun aus (15) oder (16), indem man für y die innerhalb des Raumes T definirten n Zweige der durch die Gleichung (11) gegebenen Function setzt, die Potenzsummen der zugehörigen Zweige $z_1, z_2, \ldots z_n$ der z-Function, so werden diese sich auch wieder als Lösungen einer Gleichung

(17) $$z^n + \varphi_1(x) z^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(x) z + \varphi_n(x) = 0$$

ergeben, deren Coefficienten innerhalb des T-Raumes eindeutig, endlich, stetig sind, und in welcher allen mehrfachen Punkten x der Gleichung (11) vermöge (15) oder (16) die Nullwerthe von z entsprechen werden, diese selbst also Lösungen der Gleichung $\varphi_n(x) = 0$ sein werden. Für eine Lösung α dieser Gleichung, welche in dem T-Raume liegt und nicht zu den mehrfachen Punkten der Gleichung (11) gehört, werden sich, wie aus (15) oder (16) hervorgeht, die n Zweige der Gleichung (17) nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \alpha$ entwickeln lassen, da die Lösungen der Gleichung (11) um diesen nicht mehrfachen Punkt herum eine solche Entwicklung besitzen; ist jedoch α eine Lösung von $\varphi_n(x) = 0$, welche zu den mehrfachen Punkten von (11) gehört, und sei in dessen Umgebung

$$z = A_0 (x-\alpha)^{\frac{\mu}{\nu}} + A_1 (x-\alpha)^{\frac{\mu+1}{\nu}} + \cdots,$$

worin A_0 von Null verschieden, oder wenn $(x-\alpha)^{\frac{1}{\nu}} = t$ gesetzt wird,

$$z = A_0 t^\mu + A_1 t^{\mu+1} + \cdots,$$

so folgt aus (15) oder (16)

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots - A_0 t^{\mu} - A_1 t^{\mu+1} - \cdots = \Omega(y, t) = 0,$$

und daher, da für $t = 0$ die Nullwerthe $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ der Reihe

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots$$

sämmtlich verschieden waren, und

$$\left(\frac{\partial \Omega(y, t)}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^2 \Omega(y, t)}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \cdots = \left(\frac{\partial^{\mu-1} \Omega(y, t)}{\partial t^{\mu-1}}\right)_{t=0} = 0$$

ist, die Entwicklung der Lösungen der Gleichung (11) in der Form

$$y - \eta_r = B_\mu t^\mu + B_{\mu+1} t^{\mu+1} + \cdots = B_\mu (x-\alpha)^{\frac{\mu}{\nu}} + B_{\mu+1}(x-\alpha)^{\frac{\mu+1}{\nu}} + \cdots,$$

worin B_μ von Null verschieden, und somit y wie z verzweigt.

Es bleibt somit in Hinblick auf die Form der Gleichung (17) nur eine Gleichung

$$y^n + F_1(x) y^{n-1} + F_2(x) y^{n-2} + \cdots + F_{n-1}(x) y + F_n(x) = 0$$

zu untersuchen, in welcher $F_1(x), F_2(x), \ldots F_n(x)$ innerhalb eines Raumes T eindeutige, endliche, stetige Functionen sind, und zwar nur für alle diejenigen Werthe von x, welche Lösungen von $F_n(x) = 0$ sind und zusammenfallende verschwindende Lösungen von y liefern. Dadurch ist aber die Untersuchung genau auf die Frage zurückgeführt, welche ich in meiner oben angeführten Arbeit behandelt habe, und man kann somit aus den analogen Formen der Functionen $F_1(x), F_2(x), \ldots F_n(x)$ in der Umgebung der mehrfachen Punkte, von den dort näher bezeichneten Fällen abgesehen, die Zahl der Cyklen um die Verzweigungspunkte herum, die Anzahl der Elemente eines jeden Cyklus und das erste Entwicklungsglied erkennen, und genau wie dort die Irreductibilitätscriterien in dem Sinne aufstellen, dass eine Gleichung (11) dann irreductibel genannt wird, wenn sie mit keiner Gleichung niedern Grades, deren Coefficienten in demselben Raume T eindeutige, endliche und stetige Functionen sind, eine Lösung gemein hat.

Indem wir nun zu den Irreductibilitätsuntersuchungen für Differentialgleichungen übergehen, werfen wir zunächst die Frage auf, wann eine homogene lineare Differentialgleichung von der Form

$$(18) \quad g_0(x) y^{(n)} + g_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + g_{n-1}(x) y' + g_n(x) y = 0,$$

in welcher $g_0(x), g_1(x), \ldots g_n(x)$ ganze Functionen von x sind, in dem Sinne irreductibel ist, dass sie mit keiner ebensolchen Differentialgleichung niederer Ordnung ein Integral gemein hat, und heben gleich hier aus später ersichtlichen Gründen hervor, dass nicht etwa der dem erweiterten Eisenstein'schen Satze, nach welchem die algebraische Gleichung

$$g_0(x) y^n + (x-\alpha) g_1(x) y^{n-1} + \cdots + (x-\alpha) g_{n-1}(x) y + (x-\alpha) g_n(x) = 0,$$

für welche $g_0(\alpha)$ und $g_n(\alpha)$ von Null verschieden sind, irreductibel ist, analoge Satz für lineare Differentialgleichungen besteht, wie z. B. die Differentialgleichung

$$y'' - x^2 y' - 3xy = 0$$

zeigt, welche das Integral

$$y = xe^{\frac{x^3}{3}}$$

mit der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$xy' - (1+x^3)y = 0$$

gemein hat.

Bezeichnet man mit

$$P = g_0(x)\,y^{(n)} + g_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + g_{n-1}(x)\,y' + g_n(x)\,y$$

einen homogenen linearen Differentialausdruck n^{ter} Ordnung, ferner für dieselbe Function y mit

$$Q = h_0(x)\,y^{(\nu)} + h_1(x)\,y^{(\nu-1)} + \cdots + h_{\nu-1}(x)\,y' + h_\nu(x)\,y$$

einen ebensolchen ν^{ter} Ordnung, worin $\nu < n$ und $g_0(x), \dots g_n(x)$, $h_0(x), \dots h_\nu(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, so ergiebt sich bekanntlich durch successive Differentiation als eine in y und dessen Ableitungen identische Gleichung

$$(19)\quad \begin{aligned} h_0^{n-\nu+1} P = {} & h_0^{n-\nu} g_0 \frac{d^{n-\nu} Q}{dx^{n-\nu}} + h_0^{n-\nu-1} (\varphi_1 g_0 + h_0 g_1) \frac{d^{n-\nu-1} Q}{dx^{n-\nu-1}} \\ & + h_0^{n-\nu-2} (\varphi_2 g_0 + h_0 \psi_1 g_1 + h_0^2 g_2) \frac{d^{n-\nu-2} Q}{dx^{n-\nu-2}} + \cdots \\ & \cdots + h_0 (\varphi_{n-\nu-1} g_0 + h_0 \psi_{n-\nu-2} g_1 + \cdots + h_0^{n-\nu-1} g_{n-\nu-1}) \frac{dQ}{dx} \\ & + (\varphi_{n-\nu} g_0 + h_0 \psi_{n-\nu-1} g_1 + \cdots + h_1^{n-\nu-1} \chi_1 g_{n-\nu-1} + h_0^{n-\nu} g_{n-\nu})\,Q \\ & + k_1 y^{(\nu-1)} + k_2 y^{(\nu-2)} + \cdots + k_\nu y, \end{aligned}$$

in welcher die $\varphi, \psi, \chi, \dots k$ ganze Functionen von x bedeuten. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sämmtliche Integrale von $Q = 0$ auch $P = 0$ befriedigen, wird somit durch die Gleichungen

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_\nu = 0$$

ausgedrückt, und dasselbe müsste stattfinden, wenn $P = 0$ und $Q = 0$ ein Integral gemein haben, welches nicht schon einer linearen Differentialgleichung niederer Ordnung also der ν^{ten} mit Coefficienten, welche ganze Functionen von x sind, genügt, wonach dann auch alle Integrale von $Q = 0$ Integrale der Differentialgleichung $P = 0$ sein werden. Jedenfalls ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung

$$P = g_0 y^{(n)} + g_1 y^{(n-1)} + \cdots + g_{n-1} y' + g_n y = 0 \tag{20}$$

in dem Sinne reductibel ist, dass sie mit einer homogenen linearen Differentialgleichung niederer Ordnung, deren Coefficienten ebenfalls ganze Functionen von x sind, ein Integral gemein hat, die, dass für irgend einen Differentialausdruck

$$Q = h_0 y^{(\nu)} + h_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + h_{\nu-1} y' + h_\nu y, \tag{21}$$

in welchem $h_0, h_1, \ldots h_\nu$ ganze Functionen von x bedeuten und ν irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ darstellt, die identische Beziehung besteht

$$\begin{aligned}
h_0^{n-\nu+1} & [g_0 y^{(n)} + g_1 y^{(n-1)} + \cdots + g_{n-1} y' + g_n y] \\
&= h_0^{n-\nu} g_0 \frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}} [h_0 y^{(\nu)} + h_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + h_\nu y] \\
&+ h_0^{n-\nu-1} \omega_1 \frac{d^{n-\nu-1}}{dx^{n-\nu-1}} [h_0 y^{(\nu)} + h_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + h_\nu y] + \cdots \\
&+ h_0 \omega_{n-\nu-1} \frac{d}{dx} [h_0 y^{(\nu)} + h_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + h_\nu y] \\
&+ \omega_{n-\nu} [h_0 y^{(\nu)} + h_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + h_\nu y],
\end{aligned} \tag{22}$$

in welcher $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-\nu}$ die oben definirten ganzen Functionen von x bedeuten, und dass somit die Differentialgleichung (20) irreductibel ist, wenn eine Gleichung von der Form (22) für kein ν zwischen 1 und $n-1$ und keine Wahl der ganzen Functionen $h_0, h_1, \ldots h_\nu, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-\nu}$ identisch befriedigt werden kann. Aus (22) ergeben sich die Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned}
h_0 g_1 &= g_0[(n-\nu)_1 h_0' + h_1] + \omega_1, \\
h_0^2 g_2 &= h_0 g_0 [(n-\nu)_2 h_0'' + (n-\nu)_1 h_1' + h_2] + \omega_1 [(n-\nu-1)_1 h_0' + h_1] + \omega_2, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h_0^{n-\nu} g_{n-\nu} &= h_0^{n-\nu-1} g_0 [h_0^{(n-\nu)} + (n-\nu)_{n-\nu-1} h_1^{(n-\nu-1)} + \cdots + (n-\nu)_1 h'_{n-\nu-1} + h_{n-\nu}] \\
&+ h_0^{n-\nu-2} \omega_1 [(n-\nu-1)_{n-\nu-1} h_0^{(n-\nu-1)} \\
&\qquad + (n-\nu-1)_{n-\nu-2} h_1^{(n-\nu-2)} + \cdots + h_{n-\nu-1}] \\
&+ \cdots + \omega_{n-\nu-1} [h_0' + h_1] + \omega_{n-\nu}, \\
h_0^{n-\nu+1} g_{n-\nu+1} &= h_0^{n-\nu} g_0 [h_1^{(n-\nu)} + (n-\nu)_1 h_2^{(n-\nu-1)} + \cdots + (n-\nu)_{n-\nu-1} h'_{n-\nu} + h_{n-\nu+1}] \\
&+ h_0^{n-\nu-1} \omega_1 [h_1^{(n-\nu-1)} + (n-\nu-1)_1 h_2^{(n-\nu-2)} + \cdots \\
&\qquad + (n-\nu-1)_{n-\nu-2} h_{n-\nu-1}^{(n-2\nu+1)} + h_{n-\nu}] \\
&+ \cdots + h_0 \omega_{n-\nu-1} [h_1' + h_2] + h_1 \omega_{n-\nu}, \cdots \\
h_0^{n-\nu+1} g_{n-1} &= h_0^{n-\nu} g_0 [h_{\nu-1}^{(n-\nu)} + (n-\nu)_1 h_\nu^{(n-\nu-1)}] \\
&+ h_0^{n-\nu-1} \omega_1 [h_{\nu-1}^{(n-\nu-1)} + (n-\nu-1)_1 h_\nu^{(n-\nu-2)}] \\
&+ \cdots + h_0 \omega_{n-\nu-1} [h'_{\nu-1} + h_\nu] + \omega_{n-\nu} h_{\nu-1}, \\
h_0^{n-\nu+1} g_n &= h_0^{n-\nu} g_0 h_\nu^{(n-\nu)} + h_0^{n-\nu-1} \omega_1 h_\nu^{(n-\nu-1)} + \cdots + h_0 \omega_{n-\nu-1} h_\nu' + \omega_{n-\nu} h_\nu,
\end{aligned}\right. \tag{23}$$

die somit für irreductible Differentialgleichungen der angegebenen Art nicht erfüllbar sein dürfen. Die Benutzung dieser Untersuchungsmethode für die Irreductibilität linearer Differentialgleichungen würde der von Eisenstein zuerst für Zahlengleichungen angewandten Beweisart durch Nachweis von der Unmöglichkeit der Zerlegung in zwei Polynome entsprechen, und ich will dieselbe kurz skizziren, indem ich auf diesem Wege einen speciellen Fall eines später aufzustellenden allgemeinen Satzes beweise. Es soll gezeigt werden,

dass jede lineare Differentialgleichung der Form

$$(x-\alpha)^{3\varrho+1} G_0(x)\, y''' + (x-\alpha)^{3\varrho+1} G_1(x)\, y'' + (x-\alpha)^{\varrho+1} G_2(x) y' + G_3(x)\, y = 0,$$

in welcher $G_0(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$ *beliebige ganze Functionen von* x *darstellen,* $G_0(\alpha)$ *und* $G_3(\alpha)$ *von Null verschieden sind, und* ϱ *ein beliebige positive ganze Zahl bedeutet, in dem angegebenen Sinne irreductibel ist.*

Setzt man nämlich in (23)

$$h_\varkappa(x) = (x-\alpha)^{\lambda_\varkappa} \mathsf{H}_\varkappa(x), \qquad \omega_\varkappa(x) = (x-\alpha)^{\mu_\varkappa} \Omega_\varkappa(x),$$

worin $\mathsf{H}_\varkappa(\alpha)$ und $\Omega_\varkappa(\alpha)$ von Null verschieden sein sollen, so werden, wenn

$$\text{A.} \quad \nu = 2,$$

die Gradzahlen der niedrigsten Potenzen von $x - \alpha$ in den drei sich ergebenden Gleichungen lauten:

1) $\geqq \lambda_0 + 2\varrho + 1,\ 3\varrho + \lambda_0,\ 3\varrho + 1 + \lambda_1,\ \mu_1,$
2) $\geqq 2\lambda_0 + \varrho + 1,\ \lambda_0 + 3\varrho + \lambda_1,\ \lambda_0 + 3\varrho + 1 + \lambda_2,\ \mu_1 + \lambda_1,$
3) $2\lambda_0,\ \lambda_0 + 3\varrho + \lambda_2,\ \mu_1 + \lambda_2.$

Ist nun

$$\text{I.} \quad \lambda_1 \geqq \lambda_0 - \varrho, \quad \lambda_2 \geqq \lambda_0 - 2\varrho,$$

so folgt aus 1) $\mu_1 \geqq \lambda_0 + 2\varrho + 1$, und dies ist nach 3) unmöglich, da die letzten beiden Gradzahlen grösser als $2\lambda_0$ sind; ist

$$\text{II.} \quad \lambda_1 \geqq \lambda_0 - \varrho, \quad \lambda_2 < \lambda_0 - 2\varrho,$$

so liefert 1) wieder $\mu_1 \geqq \lambda_0 + 2\varrho + 1$, und dies ist mit 2) unvereinbar; ist

$$\text{III.} \quad \lambda_1 < \lambda_0 - \varrho, \quad \lambda_2 \geqq \lambda_0 - 2\varrho,$$

so giebt 1) $\mu_1 = 3\varrho + 1 + \lambda_1$, was wiederum 2) widerspricht; und ist

$$\text{IV.} \quad \lambda_1 < \lambda_0 - \varrho, \quad \lambda_2 < \lambda_0 - 2\varrho,$$

so folgt aus 1) $\mu_1 = 3\varrho + 1 + \lambda_1$, und dies steht mit 3) in Widerspruch.

Wenn dagegen

$$\text{B.} \quad \nu = 1.$$

so werden die Gradzahlen der niedrigsten Potenzen von $x - \alpha$ in den drei Gleichungen (23) sein

1) $\geqq \lambda_0 + 2\varrho + 1,\ 3\varrho + \lambda_0,\ 3\varrho + 1 + \lambda_1,\ \mu_1,$

2) $\geqq 2\lambda_0 + \varrho + 1,\ 2\lambda_0 + 3\varrho - 1,\ \lambda_0 + 3\varrho + \lambda_1,\ \mu_1 + \lambda_0 - 1,\ \mu_1 + \lambda_1,\ \mu_2,$

3) $3\lambda_0,\ 2\lambda_0 + 3\varrho - 1 + \lambda_1,\ \lambda_0 + \lambda_1 - 1 + \mu_1,\ \lambda_1 + \mu_2,$

und somit, wenn

$$\text{I.}\quad \lambda_1 \geqq \lambda_0 - \varrho,$$

nach 1) $\mu_1 \geqq 2\varrho + 1 + \lambda_0$, woraus nach 2) $\mu_2 \geqq \varrho + 1 + 2\lambda_0$ folgt, und somit 3) unmöglich; ist

$$\text{II.}\quad \lambda_1 < \lambda_0 - \varrho,$$

so liefert 1) $\mu_1 = 3\varrho + 1 + \lambda_1$, danach vermöge 2) $\mu_2 = 3\varrho + 1 + 2\lambda_1$, und diese beiden Bestimmungen stehen mit 3) in Widerspruch.

Auf demselben Wege lässt sich der Beweis des entsprechenden allgemeinen Satzes von der Irreductibilität einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung auf dem Nachweis von der Unmöglichkeit des Bestehens der Gleichungen (23) basiren und zwar durch Zerlegung der Untersuchung in die Einzelfälle, für welche

$$\lambda_1 \geqq \lambda_0 - \varrho,\ \lambda_2 \geqq \lambda_0 - 2\varrho, \ldots \lambda_\nu \geqq \lambda_0 - \nu\varrho,$$
$$\lambda_1 < \lambda_0 - \varrho,\ \lambda_2 < \lambda_0 - 2\varrho \qquad \lambda_\nu < \lambda_0 - \nu\varrho$$

ist, und durch Vergleichung der Gradzahlen der niedrigsten Potenzen von $x = \alpha$ auf beiden Seiten der Gleichungen; wir wollen jedoch gleich ein anderes, ganz allgemeines Verfahren einschlagen, welches nicht blos diesen Satz von der Irreductibilität solcher linearer homogener Differentialgleichungen, deren Coefficienten ganze Functionen von x sind, begründen lässt, sondern ein Mittel an die Hand giebt, um alle diese Sätze, welche aus der Gestalt der Differentialgleichung, deren Coefficienten beliebige Potenzreihen sind, deren Irreductibilität erkennen lassen, auf weit allgemeinere Classen derselben auszudehnen.

Wie oben jede algebraische Functionalgleichung, deren Coefficienten um $x = \alpha$ herum convergirende Potenzreihen waren, durch Multiplication mit einer passenden ganzzahligen positiven Potenz von $x - \alpha$ auf die Normalform gebracht werden konnte

$$(x-\alpha)^n \mathfrak{P}_0(x-\alpha) y^n + (x-\alpha)^{n-1} \mathfrak{P}_1(x-\alpha) y^{n-1} + \cdots + (x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha) y$$
$$+ \mathfrak{P}_n(x-\alpha) = 0,$$

worin $\mathfrak{P}_0(0),\ \mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ nicht sämmtlich verschwinden, so kann bekanntlich jeder homogenen linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten in der Umgebung von $x = \alpha$ convergirende Taylor'sche Reihen darstellen, durch Multiplication mit einer Potenz von $x - \alpha$ die Gestalt gegeben werden

$$(24)\qquad (x-\alpha)^n\mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^{(n)}+(x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{(n-1)}+\cdots$$
$$+(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y'+\mathfrak{P}_n(x-\alpha)y=0,$$

worin $\mathfrak{P}_0(0)$, $\mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ nicht sämmtlich Null sind.

Soll nun die Irreductibilität einer Differentialgleichung von der Form

$$(25)\qquad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^{(n)}+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{(n-1)}+\cdots$$
$$+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y'+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n(x-\alpha)y=0$$

festgestellt werden, in welcher $\mathfrak{P}_0(0)$, $\mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ sämmtlich von Null verschieden sind, wenn nicht etwa der Coefficient einer Ableitung von y identisch Null ist, und $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_n$ positive ganze Zahlen bedeuten, von denen auf Grund der oben gemachten Annahme, dass in der Gleichung (24) $\mathfrak{P}_0(0)$, $\mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ nicht sämmtlich verschwinden sollten, angenommen werden darf, dass mindestens eine dieser Grössen Null ist, soll die Differentialgleichung (25) also mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung niederer Ordnung

$$(26)\qquad (x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{(\nu-1)}+\cdots$$
$$+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}(x-\alpha)y'+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)\,y=0,$$

deren Coefficienten ebenfalls Taylor'sche Reihen um $x=\alpha$ herum darstellen, für welche $\mathfrak{Q}_0(0)$, $\mathfrak{Q}_1(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu(0)$ nicht sämmtlich verschwinden, ein Integral gemein haben, von welchem wir annehmen dürfen, dass dies nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung noch niederer Ordnung angehört, so wird offenbar nach den früheren Auseinandersetzungen, indem die Zerlegungsform mit einer noch unbestimmten positiven oder negativen ganzzahligen Potenz ε von $x-\alpha$ multiplictrt wird, damit diese wieder die oben angegebene Normalform annimmt, nur die Unmöglichkeit der Existenz der nachfolgenden in $y, y', \ldots y^{(n)}$ identischen Beziehung

)
$$(x-\alpha)^{\varepsilon}\{(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)y^{(n)}+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)y^{(n-1)}+\cdots$$
$$+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)y'+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n(x-\alpha)y\}$$
$$=(x-\alpha)^{n-\nu}\mathfrak{R}_0(x-\alpha)\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{(\nu-1)}+\cdots$$
$$+(x-\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1}(x-\alpha)y'+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)y]$$
$$+(x-\alpha)^{n-\nu-1}\mathfrak{R}_1(x-\alpha)\frac{d^{n-\nu-1}}{dx^{n-\nu-1}}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{(\nu-1)}+\cdots$$
$$+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)y]$$
$$+\;\cdot$$
$$+(x-\alpha)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(x-\alpha)\frac{d}{dx}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{(\nu-1)}+\cdots$$
$$+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)y]$$
$$+\mathfrak{R}_{n-\nu}(x-\alpha)[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)y^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)y^{(\nu-1)}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)y]$$

für jede Wahl von ν und der um α herum convergenten Potenzreihen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ zu erweisen sein, wobei vorausgesetzt werden darf, dass $\mathfrak{Q}_0(0)$, $\mathfrak{Q}_1(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu(0)$ sowohl als auch $\mathfrak{R}_0(0), \mathfrak{R}_1(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$ nicht sämmtlich verschwinden.

Wie wir nun oben zur Ermittlung der entsprechenden Sätze für die Irreductibilität algebraischer Functionalgleichungen in die in y identische Gleichung (6) $y = \frac{\varkappa}{x-\alpha}$ gesetzt haben, soll in die in y und dessen Ableitungen identische Gleichung (27) die Substitution

$$y = (x-\alpha)^\varkappa$$

gemacht werden, worin $\varkappa$ eine willkürliche von x unabhängige Grösse bedeutet, — was im Grunde auf eine genauere Untersuchung der charakteristischen Function von Frobenius hinausläuft — und man erhält somit, wenn zur Abkürzung

$$(28)\quad \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0^{(r)}(0)+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+2)\mathfrak{Q}_1^{(r)}(0)+\cdots \\ +\varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}^{(r)}(0)+\mathfrak{Q}_\nu^{(r)}(0)=r!\,A_r,$$

also

$$(29)\quad [\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\,\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)+\cdots+\varkappa\,\mathfrak{Q}_{\nu-1}(x-\alpha)+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)](x-\alpha)^\varkappa \\ = A_0(x-\alpha)^\varkappa + A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1} + A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2} + \cdots$$

gesetzt wird, die für jeden Werth von $\varkappa$ identisch zu erfüllende Gleichung

$$\begin{aligned}
(30)\quad & \varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\cdots(\varkappa-n+1)(x-\alpha)^{\varkappa+\varepsilon+\mu_0}\mathfrak{P}_0(x-\alpha) \\
& + \varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\cdots(\varkappa-n+2)(x-\alpha)^{\varkappa+\varepsilon+\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)+\cdots \\
& + \varkappa(x-\alpha)^{\varkappa+\varepsilon+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha) + (x-\alpha)^{\varkappa+\varepsilon+\mu_n}\mathfrak{P}_n(x-\alpha) \\
& = (x-\alpha)^{n-\nu}\mathfrak{R}_0(x-\alpha)\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}[A_0(x-\alpha)^\varkappa+A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots] \\
& + (x-\alpha)^{n-\nu-1}\mathfrak{R}_1(x-\alpha)\frac{d^{n-\nu-1}}{dx^{n-\nu-1}}[A_0(x-\alpha)^\varkappa+A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots] \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \mathfrak{R}_{n-\nu}(x-\alpha)[A_0(x-\alpha)^\varkappa+A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots] \\
& = \mathfrak{R}_0(x-\alpha)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)A_0(x-\alpha)^\varkappa \\
& \qquad\qquad +(\varkappa+1)\varkappa\cdots(\varkappa-n+\nu+2)A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1} \\
& \qquad\qquad +(\varkappa+2)\cdots(\varkappa-n+\nu+3)A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots] \\
& + \mathfrak{R}_1(x-\alpha)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)A_0(x-\alpha)^\varkappa \\
& \qquad\qquad\qquad +(\varkappa+1)\cdots(\varkappa-n+\nu+3)A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+\cdots] \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \mathfrak{R}_{n-\nu-1}(x-\alpha)[\varkappa A_0(x-\alpha)^\varkappa+(\varkappa+1)A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+(\varkappa+2)A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots] \\
& + R_{n-\nu}(x-\alpha)[A_0(x-\alpha)^\varkappa+A_1(x-\alpha)^{\varkappa+1}+A_2(x-\alpha)^{\varkappa+2}+\cdots],
\end{aligned}$$

worin mindestens eine der Grössen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_n$ gleich Null ist und $\mathfrak{R}_0(0), \mathfrak{R}_1(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$ nicht sämmtlich verschwinden.

Nun ist aber leicht zu sehen, dass A_0 nicht für jeden Werth von $\varkappa$ identisch Null sein kann, weil in (28) die Coefficienten der Grössen $\mathfrak{Q}_0(0), \mathfrak{Q}_1(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu(0)$, welche der Voraussetzung nach nicht sämmtlich verschwinden sollten, ganze Functionen von $\varkappa$ von fallendem Grade ν bis 0 sind, und da die niedrigste Potenz von $x - \alpha$ auf der rechten Seite der Gleichung (30) die $\varkappa^{\text{te}}$ ist und der Coefficient derselben

$$A_0 \{\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\,\mathfrak{R}_0(0)$$
$$+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\,\mathfrak{R}_1(0)+\cdots$$
$$+\varkappa\,\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)\}$$

lautet, somit nicht identisch verschwinden darf, weil A_0 von Null verschieden, $\mathfrak{R}_0(0), \mathfrak{R}_1(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$ nicht sämmtlich Null waren und die Coefficienten dieser letzteren Grössen wieder ganze Functionen der willkürlichen Grösse $\varkappa$ von fallendem Grade sind, so wird auch die niedrigste Potenz von $x - \alpha$ auf der linken Seite der Gleichung (30) die $\varkappa^{\text{te}}$ sein. Daraus folgt aber dass $\varepsilon = 0$ sein muss; denn wäre ε eine negative ganze Zahl, so würde, da mindestens eine der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ gleich Null angenommen werden durfte, unter der Voraussetzung

$$\mu_{r_1} = \mu_{r_2} = \cdots = \mu_{r_\delta} = 0 \quad (r_1 < r_2 < \cdots < r_\delta)$$

auf der linken Seite der Gleichung (30) der Coefficient von $(x-\alpha)^{\varkappa+\varepsilon}$, worin $\varkappa + \varepsilon < \varkappa$ ist, lauten

$$\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_1+1)\,\mathfrak{P}_{r_1}(0)$$
$$+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_2+1)\,\mathfrak{P}_{r_2}(0)+\cdots$$
$$+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_\delta+1)\,\mathfrak{P}_{r_\delta}(0),$$

und da die Grössen $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ sämmtlich von Null verschieden waren, nicht Null sein können, weil die Coefficienten von $\mathfrak{P}_{r_1}(0), \mathfrak{P}_{r_2}(0), \ldots \mathfrak{P}_{r_\delta}(0)$ wieder ganze Functionen von $\varkappa$ von fallendem Grade sind, was unmöglich, da die niedrigste Potenz von $x - \alpha$ auf der rechten Seite von (30) die $\varkappa^{\text{te}}$ ist; wäre aber ε eine positive ganze Zahl, so würde dies aus dem Grunde nicht angehen, weil dann die linke Seite der Gleichung (30) als niedrigste Potenz von $x - \alpha$ die $\varkappa + 1^{\text{te}}$ lieferte, während die rechte Seite ein nicht verschwindendes Glied mit der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz gab. Es wird somit für eine reductible lineare Differentialgleichung die für jedes $\varkappa$ identische Beziehung bestehen müssen

$$(31)\quad \begin{aligned} &\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+1)(x-\alpha)^{\mu_0}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)\\ &+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+2)(x-\alpha)^{\mu_1}\mathfrak{P}_1(x-\alpha)+\cdots\\ &+\varkappa(x-\alpha)^{\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}(x-\alpha)+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n(x-\alpha)\\ &=\mathfrak{R}_0(x-\alpha)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)A_0\\ &\qquad\qquad+(\varkappa+1)\varkappa\cdots(\varkappa-n+\nu+2)A_1(x-\alpha)\\ &\qquad\qquad+(\varkappa+2)(\varkappa+1)\cdots(\varkappa-n+\nu+3)A_2(x-\alpha)^2+\cdots\\ &+\mathfrak{R}_1(x-\alpha)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)A_0\\ &\qquad\qquad+(\varkappa+1)\varkappa\cdots(\varkappa-n+\nu+3)A_1(x-\alpha)+\cdots]\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(x-\alpha)[\varkappa A_0+(\varkappa+1)A_1(x-\alpha)+(\varkappa+2)A_2(x-\alpha)^2+\cdots]\\ &+\mathfrak{R}_{n-\nu}(x-\alpha)[A_0+A_1(x-\alpha)+A_2(x-\alpha)^2+\cdots], \end{aligned}$$

in welcher ν eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots n-1$, $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_n$ positive ganze Zahlen, Null eingeschlossen und mindestens eine gleich Null, $\mathfrak{P}_0(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ von Null verschieden, $\mathfrak{R}_0(0), \mathfrak{R}_1(0), \ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$, sowie $\mathfrak{Q}_0(0), \mathfrak{Q}_1(0), \ldots \mathfrak{Q}_\nu(0)$ nicht sämmtlich verschwinden, die Grössen A_r durch (28) definirt sind, und wonach, wenn wiederum

$$\mu_{r_1}=\mu_{r_2}=\cdots=\mu_{r_\delta}=0 \quad (r_1<r_2<\cdots<r_\delta),$$

die übrigen μ von Null verschieden sind, durch Identificirung der Coefficienten von $(x-\alpha)$ auf beiden Seiten der Gleichung (31) die Beziehung besteht

$$(32)\quad \begin{aligned} &\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_1+1)\mathfrak{P}_{r_1}(0)+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_2+1)\mathfrak{P}_{r_2}(0)\\ &\qquad+\cdots+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+r_\delta+1)\mathfrak{P}_{r_\delta}(0)\\ &=[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0(0)+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+2)\mathfrak{Q}_1(0)\\ &\qquad\qquad+\cdots+\varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)+\mathfrak{Q}_\nu(0)]\\ &\times[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0(0)+\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_1(0)\\ &\qquad\qquad+\cdots+\varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)], \end{aligned}$$

worin die Coefficienten der linken Seite ganze Functionen von $\varkappa$ sind, die in ihrem Grade fallen und nur, wenn $r_\delta = n$ ist, der Coefficient von $\mathfrak{P}_n(0)$ die Einheit ist.

Zugleich aber folgt aus der Gleichung (27), weil $\varepsilon = 0$ gefunden wurde, dass

$$\mathfrak{R}_0(x-\alpha)\,\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)=(x-\alpha)^{\mu_0}\mathfrak{P}_0(x-\alpha)$$

sein muss, und dass daher, falls die geforderte Zerlegung möglich sein soll, da $\mathfrak{P}_0(0)$ von Null verschieden ist, die Summe der Zahlen, welche die Ordnung des Nullwerdens von $\mathfrak{R}_0(x-\alpha)$ und $\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)$ im Punkte α angeben, gleich μ_0 ist, also für ein ungerades μ_0 nicht gleichzeitig

$$\mathfrak{R}_0(0),\ \mathfrak{R}_0'(0), \ldots \mathfrak{R}_0^{(\varrho-1)}(0) = 0,\ \mathfrak{Q}_0(0) = \mathfrak{Q}_0'(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_0^{(\varrho-1)}(0) = 0$$

und

$$\mathfrak{R}_0^{(\varrho)}(0) \neq 0,\ \mathfrak{Q}_0^{(\varrho)}(0) \neq 0$$

sein können, worauf wir später zurückkommen.

Wir können aber die Irreductibilitätsuntersuchung einer jeden linearen Differentialgleichung (25), in welcher $\mu_n > 0$ ist, auf diejenige einer solchen Differentialgleichung zurückführen, für welche der Coefficient von y den Factor $x - \alpha$ gar nicht besitzt; denn macht man auf (25) die Substitution

$$y = (x-\alpha)^\lambda z,$$

worin λ zunächst willkürlich bleibt, so geht dieselbe, wenn wir von nun an der Kürze halber bei den $\mathfrak{P}$-Functionen die Bezeichnung des Argumentes $x - \alpha$ fortlassen, über in

$$(33)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 z^{(n)} + (n\lambda(x-\alpha)^{\mu_0}\mathfrak{P}_0 + (x-\alpha)^{\mu_1}\mathfrak{P}_1)(x-\alpha)^{n-1}z^{(n-1)} + \cdots$$
$$+ (\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)(x-\alpha)^{\mu_0}\mathfrak{P}_0 + \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)(x-\alpha)^{\mu_1}\mathfrak{P}_1$$
$$+ \cdots + \lambda(x-\alpha)^{\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} + (x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n) z = 0,$$

und sei nun $\mu_n > 0$, $\mu_{r_1} = \mu^{r_2} = \cdots = \mu_{r_\delta} = 0$, worin δ nach dem Früheren mindestens 1 sein muss, so werden alle Posten des Coefficienten von z, die zu den anderen μ Exponenten als diesen δ gehören, durch $x - \alpha$ theilbar sein; verlangt man also, dass der Coefficient von z durch $x - \alpha$ nicht theilbar ist, so muss

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+r_1+1)\mathfrak{P}_{r_1}(0) + \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+r_2+1)\mathfrak{P}_{r_2}(0) + \cdots$$
$$+ \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+r_\delta+1)\mathfrak{P}_{r_\delta}(0)$$

von Null verschieden sein, was, da $\mathfrak{P}_{r_1}(0), \mathfrak{P}_{r_2}(0), \ldots \mathfrak{P}_{r_\delta}(0)$ der Voraussetzung nach nicht gleich Null sind, immer zu erreichen ist, da der Ausdruck wegen des fallenden Grades der einzelnen Posten in λ nicht identisch verschwinden kann, und es geht somit die lineare Differentialgleichung in

$$(34)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 z^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1'}\mathfrak{P}_1' z^{(n-1)} + \cdots$$
$$+ (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}'}\mathfrak{P}_{n-1}' z' + \mathfrak{P}_n' z = 0$$

über, wroin wiederum $\mathfrak{P}_0'(0), \mathfrak{P}_1'(0), \ldots \mathfrak{P}_n'(0)$ von Null verschieden angenommen werden dürfen, und die offenbar mit (25) zugleich irreductibel und reductibel ist. Es mag noch bemerkt werden, dass in der so transformirten Gleichung (34) ausser dem μ_n' noch ein anderes μ' den Werth Null wird annehmen müssen, da, wenn nicht schon $\mu_0' = \mu_0 = 0$ ist, unter der Annahme, dass $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_\sigma > 0$ sind, und $\mu_{\sigma+1} = 0$ ist, wie aus dem obigen Bildungsgesetz hervorgeht, $\mu_{\sigma+1}' = 0$ sein muss, was nicht der Fall zu sein braucht, wenn $\mu_n = 0$ war.

Es handelt sich somit nur um die Irreductibilitätsuntersuchung einer linearen Differentialgleichung der Form

$$(35)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots$$
$$+ (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

worin $\mathfrak{P}_0(0), \mathfrak{P}_1(0), \ldots \mathfrak{P}_n(0)$ von Null verschieden sind, und die Zahlen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ positiv ganz oder auch Null sein können.

Sind nun $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ *von Null verschieden*, so geht die Gleichung (32) in

$$(36)\quad \mathfrak{P}_n(0) = [\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0(0) + \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+2)\mathfrak{Q}_1(0) + \cdots$$
$$+ \varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0) + \mathfrak{Q}_\nu(0)]$$
$$\times[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0(0)$$
$$+ \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_1(0) + \cdots$$
$$+ \varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0) + \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)]$$

über, woraus

$$\mathfrak{Q}_0(0) = \mathfrak{Q}_1(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_{\nu-1}(0) = 0, \quad \mathfrak{R}_0(0) = \mathfrak{R}_1(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0) = 0$$

folgt, und aus

$$\mathfrak{P}_n(0) = \mathfrak{Q}_\nu(0)\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$$

ergiebt sich, dass $\mathfrak{Q}_\nu(0)$ und $\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)$ von Null verschieden sind. Da aber nach (28) $A_0 = \mathfrak{Q}_\nu(0)$ ist, so hat der Coefficient von $(x-\alpha)$ auf der rechten Seite der Gleichung (31) die Form

$$(37)\quad \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0'(0) + \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+2)\mathfrak{Q}_1'(0) + \cdots$$
$$+ \varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0) + \mathfrak{Q}_\nu'(0)]$$
$$+ \mathfrak{Q}_\nu(0)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0'(0) + \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_1'(0)$$
$$+ \cdots + \varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0) + \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)]$$

und ist somit, da ν zwischen 1 und $n-1$ liegt, in Bezug auf $\varkappa$ höchstens vom Grade $n-1$, während der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ lautet

$$(38)\quad \frac{1}{2}\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0''(0) + \varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+2)\mathfrak{Q}_1''(0)$$
$$+ \cdots + \varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}''(0) + \mathfrak{Q}_\nu''(0)]$$
$$+ [\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\nu+1)\mathfrak{Q}_0'(0) + \cdots + \varkappa\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0) + \mathfrak{Q}_\nu'(0)]$$
$$\times[(\varkappa+1)\varkappa\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_0'(0) + \cdots + (\varkappa+1)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0) + \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)]$$
$$+ \frac{1}{2}\mathfrak{Q}_\nu(0)[\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0''(0) + \varkappa(\varkappa-1)\cdots$$
$$\cdots(\varkappa-n+\nu+2)\mathfrak{R}_1''(0) + \cdots + \varkappa\mathfrak{R}_{n-\nu-1}''(0) + \mathfrak{R}_{n-\nu}''(0)],$$

und somit ebenso wie die Coefficienten aller folgenden Potenzen $(x-\alpha)^3$, $(x-\alpha)^4, \ldots$ in Bezug auf $\varkappa$ im Allgemeinen vom n^{ten} Grade.

Ist nun in der Differentialgleichung (35), in welcher $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ positive, von Null verschiedene ganze Zahlen sein sollten, μ_0 die erste dieser Grössen, welche den Werth 1 hat, so wird auf der linken Seite der Gleichung (31) der Coefficient von $(x-\alpha)$, da $\mathfrak{P}_0(0)$ von Null verschieden ist, jedenfalls eine ganze Function n^{ten} Grades von x sein, und daher mit dem Ausdrucke (37) nicht zusammenfallen können, so dass sich zunächst der bereits bekannte*) Satz ergiebt,

dass eine lineare Differentialgleichung der Form

$$(39)\quad (x-\alpha)^{n+1}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 1$ *sind, stets irreductibel ist.*

Nimmt jedoch zuerst μ_1 den Werth 1 an, so dass $\mu_0 \geqq 2$, so wird der Coefficient von $(x-\alpha)$ auf der linken Seite von (31) eine ganze Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf x, und da dieser mit dem Ausdrucke (37) identisch sein muss, so folgt, dass ν nur $=1$ oder $=n-1$ sein kann, und dass somit

die lineare Differentialgleichung

$$(40)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_0 \geqq 2$, $\mu_2, \mu_3, \ldots \mu_{n-1} \geqq 1$ *sind, nur mit einer gleichartigen Differentialgleichung erster oder* $n-1^{\text{ter}}$ *Ordnung die sämmtlichen Integrale der letzteren gemein haben kann.***)

---

*) Floquet, Annales de l'école normale 1879.

**) Um zu zeigen, wie sich daran eine Reihe weiterer Sätze anknüpfen lässt, mag bemerkt werden, dass in den Differentialgleichungen 1^{ter} oder $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(a)\quad \begin{gathered}(x-\alpha)\,\mathfrak{Q}_0 y' + \mathfrak{Q}_1 y = 0,\\ (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{Q}_0 y^{(n-1)} + (x-\alpha)^{n-2}\mathfrak{Q}_1 y^{(n-2)} + \cdots + \mathfrak{Q}_{n-1} y = 0,\end{gathered}$$

deren sämmtliche Integrale der Differentialgleichung (40) genügen sollen, für den Fall dass $\mu_0 = 2$ ist, $\mathfrak{Q}_0'(0)$ von Null verschieden sein muss, da der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ auf der linken Seite der Gleichung (31) vom n^{ten} Grade in Bezug auf x wäre, während derselbe auf der rechten Seite nach dem Ausdrucke (38) für $\mathfrak{Q}_0'(0) = 0$ höchstens den $n-1^{\text{ten}}$ Grad erreichte, und dass die beiden Differentialgleichungen (a), da für die erste derselben $\mathfrak{Q}_0(0) = 0$, für die zweite $\mathfrak{Q}_0(0) = \mathfrak{Q}_1(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_{n-2}(0) = 0$ war, somit die Form annehmen

$$(x-\alpha)^2 Q_0 y' + Q_1 y = 0$$

und

$$(x-\alpha)^n Q_0 y^{(n-1)} + (x-\alpha)^{n-1} Q_1 y^{(n-2)} + \cdots + (x-\alpha)^2 Q_{n-2} y' + Q_{n-1} y = 0,$$

worin $Q_0(0)$ von Null verschieden ist; da $Q_1(0)$ resp. $Q_{n-1}(0)$ nach dem Früheren nicht verschwinden, so stimmt dies wieder, wie es sein muss, mit dem oben aufgestellten Irreductibilitätscriterium überein.

Allgemein folgt,

dass die lineare Differentialgleichung

$$(41)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)}+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)}+\cdots+(x-\alpha)^{n-\delta+1}\mathfrak{P}_\delta y^{(n-\delta)}$$
$$+\cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}y'+\mathfrak{P}_n y=0,$$

in welcher $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{\delta-1} \geqq 2$ *und* $\mu_{\delta+1}, \mu_{\delta+2}, \ldots \mu_{n-1} \geqq 1$ *sind, nur mit einer gleichartigen Differentialgleichung* $1^{ter}, 2^{ter}, \ldots \delta^{ter}$ *oder* $n-1^{ter}, n-2^{ter}, \ldots n-\delta^{ter}$ *Ordnung die sämmtlichen Integrale der letzteren gemein haben kann,*

und weiter ergiebt sich aus (37), dass, wenn

$$\begin{array}{ll}
\nu=1, & \mathfrak{R}_0'(0)=\mathfrak{R}_1'(0)=\cdots=\mathfrak{R}_{\delta-2}'(0)=0,\\
\nu=2, & \mathfrak{R}_0'(0)=\mathfrak{R}_1'(0)=\cdots=\mathfrak{R}_{\delta-3}'(0)=0,\\
\vdots & \\
\nu=\delta-1, & \mathfrak{R}_0'(0)=0,\\
\nu=n-\delta+1, & \mathfrak{Q}_0'(0)=0,\\
\nu=n-\delta+2, & \mathfrak{Q}_0'(0)=\mathfrak{Q}_1'(0)=0,\\
\vdots & \\
\nu=n-1, & \mathfrak{Q}_0'(0)=\mathfrak{Q}_1'(0)=\cdots=\mathfrak{Q}_{\delta-2}'(0)=0
\end{array}$$

sein muss, da der Coefficient von $(x-\alpha)$ auf der linken Seite der Gleichung (31) in Bezug auf x vom $n-\delta^{ten}$ Grade ist, und dass somit, wenn $\mu_0=2$, nach (38) für ν nur die Werthe δ und $n-\delta$, wenn $\mu_0>2$, $\mu_1=2$, für ν nur die Werthe $\delta-1$, δ, $n-\delta$, $n-\delta+1$ u. s. w. übrig bleiben, und somit folgt,

dass, wenn in der Differentialgleichung (41) *von den Zahlen* $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{\delta-1}$, *welche grösser als* 1 *waren, die erste, welche den Werth* 2 *hat,* μ_α *ist, während* $\mu_\delta=1$, $\mu_{\delta+1}, \mu_{\delta+2}, \ldots \mu_{n-1} \geqq 1$ *sind, diese Differentialgleichung nur mit einer gleichartigen* $\delta-\alpha^{ter}$, $\delta-\alpha+1^{ter}, \ldots \delta^{ter}$, $n-\delta^{ter}$, $n-\delta+1^{ter}, \ldots n-\delta+\alpha^{ter}$ *Ordnung die sämmtlichen Integrale der letzteren gemein haben kann,*

woraus wieder die Reihe derjenigen Sätze hergeleitet werden kann, welche dem in der obigen Anmerkung hervorgehobenen entsprechen.

Lassen wir nun die bisher gemachte Annahme fallen, dass von den grösser als Null vorausgesetzten Zahlen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ eine den Werth 1 hat, seien also alle grösser als die Einheit, so wird der Coefficient von $(x-\alpha)$ auf der linken Seite von (31) und daher der Ausdruck (37) von x unabhängig sein. Die sich hierfür ergebenden nothwendigen und hinreichenden Bedingungen sind

$$(42)\quad \begin{array}{l}
\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)\mathfrak{Q}_\nu'(0)+\mathfrak{Q}_\nu(0)\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)=\mathfrak{P}_n'(0),\\
\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0)+\mathfrak{Q}_\nu(0)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0)=0,\ldots,
\end{array}$$

und von diesen Bedingungsgleichungen wird die letzte lauten

$$(42) \qquad \mathfrak{R}_{n-\nu}(0)\,\mathfrak{Q}_0'(0) + \mathfrak{Q}_\nu(0)\,\mathfrak{R}_0'(0) = 0,$$

wenn $\nu = n - \nu$ also n eine grade Zahl ist, während, wenn $\nu \gtrless n - \nu$ ist, durch Nullsetzen des Coefficienten der höchsten Potenz von x entweder $\mathfrak{Q}_0'(0)$ oder $\mathfrak{R}_0'(0) = 0$ folgt. Da aber im letzteren Falle der Ausdruck (38) jedenfalls von nicht höherem als dem $n-1^{\text{ten}}$ Grade in x ist, so wird, wenn die Annahme gemacht wird, dass $\mu_0 = 2$, dass also der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ auf der linken Seite der Gleichung (31) in Bezug auf x vom n^{ten} Grade ist, wiederum die Unmöglichkeit der Zerlegung der gegebenen Differentialgleichung folgen, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die lineare Differentialgleichung

$$(43) \quad (x-\alpha)^{n+2}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 2$ *sind, ist, wenn die Ordnung* n *derselben ungerade, stets irreductibel; ist die Ordnung jedoch gerade, so kann sie nur mit einer gleichartigen linearen Differentialgleichung* $\frac{n}{2}^{\text{ter}}$ *Ordnung die sämmtlichen Integrale der letzteren gemein haben.*

Nimmt jedoch zuerst μ_1 den Werth 2 an, so dass $\mu_0 > 2$, so wird der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ auf der linken Seite von (31) eine ganze Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf x sein, und da dieser wieder mit (38) identisch sein muss, so folgt, dass, wenn $n - \nu > \nu$ oder $n - \nu = \nu + \eta$, wegen $\mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{\eta-1}'(0) = 0$ der Grad des mittleren Summanden von (38) in Bezug auf x der $n-\eta^{\text{te}}$ sein wird, und dass somit entweder $n - \eta = n - 1$ also $\eta = 1$ oder $n - \nu = n - 1$, also $\nu = 1$ sein wird, und ebenso wenn $\nu > n - \nu$ oder $\nu = n - \nu + \eta$ ist, dann $n - \eta = n - 1$ also wieder $\eta = 1$ oder $\nu = n - 1$ ist, somit also nur $\nu = 1, n-1, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$ sein kann, während die Annahme $\nu = n - \nu$ verlangt, dass vermöge (42) $\mathfrak{Q}_0'(0)$ und $\mathfrak{R}_0'(0)$ zugleich Null sind, weil sonst (38) in Bezug auf x vom n^{ten} Grade wäre, und da dann der mittlere Summand vom $n-2^{\text{ten}}$ Grade in x sein würde, so müsste $n - \nu = \nu = n - 1$ oder $\nu = 1$, $n = 2$ sein. Es ergiebt sich somit der Satz,

dass die Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n+1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + (x-\alpha)^{n-2+\mu_2}\mathfrak{P}_2 y^{(n-2)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_n y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_0 > 2$, $\mu_2, \mu_3, \ldots \mu_{n-1} \geqq 2$ *sind, nur mit solchen gleichartigen*

Differentialgleichungen niederer Ordnung alle Integrale der letzteren gemein haben kann, deren Ordnung 1 *oder* $n-1$, *oder auch, wenn* n *eine ungerade Zahl,* $\frac{n-1}{2}$ *oder* $\frac{n+1}{2}$ *ist.*

Sind sämmtliche $\mu > 2$ und ist $\mu_0 = 3$, so müssen die Ausdrücke (37) und (38) von x unabhängig sein, und der Coefficient von $(x-\alpha)^3$ auf der rechten Seite der Gleichung (31), welcher lautet

$$(44)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{3!}\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)[x(x-1)\cdots(x-\nu+1)\mathfrak{Q}_0'''(0)+\cdots+x\mathfrak{Q}_{\nu-1}'''(0)+\mathfrak{Q}_\nu'''(0)]\\ &+\frac{1}{2!}\frac{1}{1!}[x(x-1)\cdots(x-\nu+1)\mathfrak{Q}_0''(0)+\cdots+x\mathfrak{Q}_{\nu-1}''(0)+\mathfrak{Q}_\nu''(0)]\\ &\qquad\times[(x+2)\cdots(x-n+\nu+3)\mathfrak{R}_0'(0)+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)]\\ &+\frac{1}{1!}\frac{1}{2!}[x(x-1)\cdots(x-\nu+1)\mathfrak{Q}_0'(0)+\cdots+x\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0)+\mathfrak{Q}_\nu'(0)]\\ &\qquad\times[(x+1)\cdots(x-n+\nu+2)\mathfrak{R}_0''(0)+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}''(0)]\\ &+\frac{1}{3!}\mathfrak{Q}_\nu(0)[x(x-1)\cdots(x-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0'''(0)+\cdots+x\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'''(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}'''(0)] \end{aligned}$$

der Annahme gemäss, dem Coefficienten auf der linken Seite entsprechend, in Bezug auf x vom n^{ten} Grade sein.

Ist zunächst $n-\nu=\nu$, so wird die Gleichung (37) befriedigt durch Bestehen der Beziehungen (42); die Unabhängigkeit des Ausdruckes (38) von x erfordert aber, da der mittlere Posten vom n^{ten} Grade in Bezug auf x ist, dass $\mathfrak{Q}_0'(0)$ oder $\mathfrak{R}_0'(0)$ verschwinden, und somit wieder nach (42) $\mathfrak{Q}_0'(0)=\mathfrak{R}_0'(0)=0$ ist, so dass der Ausdruck (44) als Coefficient von $(x-\alpha)^3$ auf der rechten Seite der Gleichung (31) in Bezug auf x von niedrigerem Grade als dem n^{ten} wird, was mit der Annahme $\mu_0=3$ nicht zu vereinigen. Es bleiben somit nur die Fälle $\nu > n-\nu$ oder $\nu < n-\nu$ zu erörtern; setzt man $n-\nu=\nu\pm p$, worin $1\leqq p\leqq n-2$, so verlangt (37)

$$\mathfrak{R}_0'(0)=\mathfrak{R}_1'(0)=\cdots=\mathfrak{R}_{p-1}'(0)=0$$

oder

$$\mathfrak{Q}_0'(0)=\mathfrak{Q}_1'(0)=\cdots=\mathfrak{Q}_{p-1}'(0)=0,$$

und das Verschwinden von $\mathfrak{R}_p'(0)$ wird das von $\mathfrak{Q}_0'(0)$, resp. das von $\mathfrak{Q}_p'(0)$ dasjenige von $\mathfrak{R}_0'(0)$ nach sich ziehen, wie aus den den Gleichungen (42) analogen Beziehungen hervorgeht; da aber die Gradzahlen der drei Posten des Ausdruckes (38) in x, wie leicht zu sehen, durch $\frac{n\mp p}{2}$, $n-p$, $\frac{n\pm p}{2}$ dargestellt sind, und dieser Ausdruck ebenfalls in x identisch verschwinden soll, so wird, wenn $n-p > \frac{n+p}{2}$ ist, entweder wenn $\mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{p-1}'(0) = 0$ ist, $\mathfrak{R}_p'(0)$ oder $\mathfrak{Q}_0'(0)$ also nach (42) stets $\mathfrak{Q}_0'(0) = 0$ sein,

oder

wenn $\mathfrak{Q}_0'(0) = \mathfrak{Q}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_{p-1}'(0) = 0$ ist, $\mathfrak{Q}_p'(0)$ oder $\mathfrak{R}_0'(0)$, also stets $\mathfrak{R}_0'(0) = 0$ sein;

ist dagegen $n - p < \frac{n+p}{2}$, so wird nach (38) jedenfalls $\mathfrak{R}_0''(0)$ oder $\mathfrak{Q}_0''(0)$ verschwinden müssen, und wir erhalten somit für $n - p \gtrless \frac{n+p}{2}$ als nothwendig zu erfüllende Bedingungen für das Bestehen der Zerlegungsform der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$\mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{p-1}'(0) = 0, \quad \mathfrak{Q}_0'(0) = 0$ oder $\mathfrak{R}_0''(0) = 0$

oder

$\mathfrak{Q}_0'(0) = \mathfrak{Q}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_{p-1}'(0) = 0, \quad \mathfrak{R}_0'(0) = 0$ oder $\mathfrak{Q}_0'' = 0$.

In allen Fällen würde somit der Grad des Ausdruckes (44) in Bezug auf x gegen die Festsetzung, dass $\mu_0 = 3$ ist, unter n sinken, also die angenommene Zerlegung unmöglich sein, wenn nicht $n - p = \frac{n+p}{2}$ oder $n = 3p$, also n eine durch 3 theilbare Zahl ist, und in diesem Falle ergiebt sich $\nu = \frac{n}{3}$ oder $\nu = \frac{2n}{3}$. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die lineare Differentialgleichung

$$(45)\quad (x-\alpha)^{n+3}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 3$ *sind, ist, wenn die Ordnung derselben eine nicht durch 3 theilbare ganze Zahl ist, stets irreductibel; ist die Ordnungszahl jedoch ein Vielfaches von 3, so kann die Differentialgleichung nur mit einer gleichartigen von der* $\frac{n}{3}^{\text{ten}}$ *oder* $\frac{2n}{3}^{\text{ten}}$ *Ordnung die sämmtlichen Integrale der letzteren gemein haben.*

Sei nun allgemein die Differentialgleichung vorgelegt

$$(46)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_{n-1} \geqq \mu_0$ ist, so werden, wenn dieselbe reductibel ist, auf der rechten Seite der Gleichung (31) die Coefficienten von $(x-\alpha)^1, (x-\alpha)^2, \cdots (x-\alpha)^{\mu_0-1}$ von x unabhängig sein müssen, während der Coefficient von $(x-\alpha)^{\mu_0}$ in Bezug auf x vom n^{ten} Grade sein muss. Bezeichnen wir diese Coefficienten den Gleichungen (37), (38), (44) analog durch

$$(47)\qquad (\mathfrak{Q}_0'(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu'(0)) + (\mathfrak{R}_0'(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)),$$

$$(48)\qquad (\mathfrak{Q}_0''(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu''(0)) + (\mathfrak{Q}_0'(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu'(0))\,(\mathfrak{R}_0'(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)) \\ + (\mathfrak{R}_0''(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}''(0)),$$

$$(49)\qquad (\mathfrak{Q}_0'''(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu'''(0)) + (\mathfrak{Q}_0''(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu''(0))\,(\mathfrak{R}_0'(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)) \\ + (\mathfrak{Q}_0'(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu'(0))\,(\mathfrak{R}_0''(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}''(0)) \\ + (\mathfrak{R}_0'''(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'''(0)),$$

. . . .

$$(50)\qquad (\mathfrak{Q}_0^{(\mu_0-1)}(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu^{(\mu_0-1)}(0)) + (\mathfrak{Q}_0^{(\mu_0-2)}(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu^{(\mu_0-2)}(0))\,(\mathfrak{R}_0'(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)) \\ +\cdots+ (\mathfrak{Q}_0'(0),\ldots \mathfrak{Q}_{n-\nu}'(0))\,(\mathfrak{R}_0^{(\mu_0-2)}(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}^{(\mu_0-2)}(0)) \\ + (\mathfrak{R}_0^{(\mu_0-1)}(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}^{(\mu_0-1)}(0)),$$

worin die $\mathfrak{Q}$-Klammern in Bezug auf x vom ν^{ten} Grade, die $\mathfrak{R}$-Klammern vom $n-\nu^{\text{ten}}$ Grade sind, jedoch sämmtlich linear homogen in Bezug auf die eingeschlossenen Grössen

$$\mathfrak{Q}_0^{(\alpha)}(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu^{(\alpha)}(0),\ \mathfrak{R}_0^{(\alpha)}(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}^{(\alpha)}(0),$$

so werden die Ausdrücke (47)—(50) von x unabhängig sein müssen, während der Ausdruck

$$(51)\qquad (\mathfrak{Q}_0^{(\mu_0)}(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu^{(\mu_0)}(0)) + (\mathfrak{Q}_0^{(\mu_0-1)}(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu^{(\mu_0-1)}(0))\,(\mathfrak{R}_0'(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)) \\ +\cdots+ (\mathfrak{Q}_0'(0),\ldots \mathfrak{Q}_\nu'(0))\,(\mathfrak{R}_0^{(\mu_0-1)}(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}^{(\mu_0-1)}(0)) \\ + (\mathfrak{R}_0^{(\mu_0)}(0),\ldots \mathfrak{R}_{n-\nu}^{(\mu_0)}(0))$$

eine ganze Function n^{ten} und nicht niedrigeren Grades in x sein soll.

Wir behaupten nun, dass n nie grösser sein kann als $\mu_0.\nu$; denn sei $n > \mu_0 . \nu$, so erfordert das in x identische Verschwinden von (47), dass

$$\mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_1'(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{n-2\nu-1}'(0) = 0$$

ist, ebenso wird, weil nunmehr der mittlere Posten des Ausdruckes (48) vom $n-(n-2\nu) = 2\nu^{\text{ten}}$ Grade ist, und (48) wieder in x identisch verschwinden soll,

$$\mathfrak{R}_0''(0) = \mathfrak{R}_1''(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{n-3\nu-1}''(0) = 0$$

sein müssen, ähnlich

$$\mathfrak{R}_0'''(0) = \mathfrak{R}_1'''(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{n-4\nu-1}'''(0) = 0,$$

u. s. w. bis das Nullwerden von (50) die Bedingungen

$$\mathfrak{R}_0^{(\mu_0-1)}(0) = \mathfrak{R}_1^{(\mu_0-1)}(0) = \cdots = \mathfrak{R}_{n-\mu_0\nu-1}^{(\mu_0-1)}(0) = 0$$

nach sich zieht. Daraus geht aber hervor, dass der Ausdruck (51) in Bezug auf x von niedrigerem Grade als dem n^{ten} wird, und wir erhalten den Satz, *dass eine Differentialgleichung von der Form*

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq \mu_0$ *sind, nur mit einer gleichartigen Differentialgleichung, deren Ordnung* $\geqq \frac{n}{\mu_0}$ *ist, alle Integrale der letzteren gemein haben kann.*

Endlich mag noch bemerkt werden, dass, weil, wie oben gezeigt worden, für ein ungerades μ_0 nicht gleichzeitig

$$\mathfrak{R}_0'(0) = \mathfrak{R}_0''(0) = \cdots = \mathfrak{R}_0^{(\varrho-1)}(0) = 0,$$
$$\mathfrak{Q}_0'(0) = \mathfrak{Q}_0''(0) = \cdots = \mathfrak{Q}_0^{(\varrho-1)}(0) = 0,$$
$$R_0^{(\varrho)}(0) \text{ und } \mathfrak{Q}_0^{(\varrho)}(0) \gtrless 0$$

sein kann, wegen der unter der Annahme $n - \nu = \nu$ herrschenden Symmetrie der Gleichungen (47)—(50) in Bezug auf die $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$

eine Differentialgleichung von gerader Ordnung

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq \mu_0$ *und* μ_0 *eine ungerade Zahl ist, nie mit einer gleichartigen Differentialgleichung der* $\frac{n}{2}$ *ten Ordnung alle Integrale der letzteren gemein haben kann.*

Um nun die Anwendung dieser beiden Sätze auf die Reductibilitätsuntersuchung einer linearen Differentialgleichung zu zeigen, werde die Differentialgleichung

$$(52)\quad (x-\alpha)^{n+4}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0$$

vorgelegt. in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 4$ ist, und zunächst bemerkt, dass wegen der Symmetrie der Gleichungen (47), (48), ... in Bezug auf die $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, wenn $n - \nu$ und ν vertauscht werden, nur die Fälle $n - \nu > \nu$ und $n - \nu = \nu$ also $n \geqq 2\nu$ zu untersuchen sind, und somit nach dem vorher ausgesprochenen Satze nur die Annahme $2\nu \leqq n \leqq 4\nu$ zu berücksichtigen ist, wenn die bezeichnete Differentialgleichung reductibel sein soll.

Sei

$$\text{I.}\quad n = 4\nu,$$

so folgt aus dem in x identischen Verschwinden von (47), wenn in den folgenden Gleichungen der Kürze halber die numerischen Coefficienten fortgelassen werden,

$\mathfrak{R}_0'(0) = 0,\ \mathfrak{R}_1'(0) = 0, \ldots \mathfrak{R}_{2\nu-1}'(0) = 0,\quad \mathfrak{Q}_0'(0) + \mathfrak{R}_{2\nu}'(0) = 0, \ldots,$
aus (48)

$$\mathfrak{R}_0''(0), \ldots \mathfrak{R}_{\nu-1}''(0) = 0,\quad \mathfrak{Q}_0''(0) + \mathfrak{Q}_0'(0)\,\mathfrak{R}_{2\nu}'(0) + \mathfrak{R}_\nu''(0) = 0, \ldots$$

wonach wiederum die Gleichung (49) Bedingungsgleichungen von der Form

$$\mathfrak{Q}_0'(0)\,\mathfrak{R}_\nu''(0) + \mathfrak{R}_0'''(0) = 0, \ldots$$

ergiebt, welche die Möglichkeit zulassen, dass der Ausdruck (51) in Bezug auf x vom n^{ten} Grade ist;

$$\text{II.}\quad 3\nu \leqq n < 4\nu,$$

dann ergiebt (47) und (48) die Bedingungen

$$\mathfrak{R}_0'(0) = 0, \ldots \mathfrak{R}_{n-2\nu-1}'(0) = 0,\quad \mathfrak{Q}_0'(0) + \mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) = 0, \ldots$$

$$\mathfrak{R}_0''(0) = 0, \ldots \mathfrak{R}_{n-3\nu-1}''(0) = 0,\quad \mathfrak{Q}_0'(0)\,\mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) + \mathfrak{R}_{n-3\nu}''(0) = 0,$$

während (49) $\mathfrak{Q}_0'(0)\,\mathfrak{R}_{n-3\nu}''(0) = 0$, also

$$\mathfrak{Q}_0'(0) = 0,\ \mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) = 0,\ \mathfrak{R}_{n-3\nu}'' = 0$$

liefert, und somit, da dann der Grad von (51) in Bezug auf x niedriger wird als der n^{te}, dieser Fall für die Möglichkeit der Reductibilität ausgeschlossen.

$$\text{III.}\quad 2\nu < n < 3\nu,$$

dann liefert zunächst (47) die Bedingungen

$$\mathfrak{R}_0'(0) = 0, \ldots \mathfrak{R}_{n-2\nu-1}'(0) = 0,\quad \mathfrak{Q}_0(0) + \mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) = 0;$$

aus (48) folgt dann, je nachdem $3\nu - n$ gerade oder ungerade ist,

$$\mathfrak{Q}_0'(0) = 0,\ \mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) = 0, \ldots \mathfrak{Q}_{\frac{3\nu-n}{2}-1}'(0) = 0,\quad \mathfrak{R}_{\frac{n-\nu}{2}-1}'(0) = 0,$$

$$\mathfrak{Q}_{\frac{3\nu-n}{2}}'(0)\cdot\mathfrak{R}_{\frac{n-\nu}{2}}'(0) + \mathfrak{R}_0''(0) = 0, \ldots$$

oder

$$\mathfrak{Q}_0'(0) = 0,\ \mathfrak{R}_{n-2\nu}'(0) = 0, \ldots \mathfrak{Q}_{\frac{3\nu-n+1}{2}-1}'(0) = 0,\ \mathfrak{R}_{\frac{n-\nu+1}{2}-1}'(0) = 0,$$

und in. beiden Fällen aus (49) $\mathfrak{R}_0''(0) = 0$, was wiederum die Unmöglichkeit der Zerlegung kennzeichnet.

Endlich liefert die Annahme

$$\text{IV.}\quad n = 2\nu$$

nach (47) die Bedingungsgleichungen

$$\mathfrak{Q}_0'(0) + \mathfrak{R}_0'(0) = 0,\quad \mathfrak{Q}_1'(0) + \mathfrak{R}_1'(0) = 0, \ldots$$

und somit nach (48)

$$\mathfrak{Q}_0'(0) = 0,\ \mathfrak{R}_0'(0) = 0, \ldots \mathfrak{Q}_{\frac{\nu}{2}-1}'(0) = 0,\ \mathfrak{R}_{\frac{\nu}{2}-1}'(0) = 0$$

oder

$$\mathfrak{Q}_{\frac{\nu+1}{2}-1}'(0) = 0,\ \mathfrak{R}_{\frac{\nu+1}{2}-1}'(0) = 0,$$

je nachdem ν gerade oder ungerade ist, und danach wäre die Erfüllung der Bedingungen für das Verschwinden des Ausdruckes (49) möglich, ohne dass der Grad von (51) für $\mu_0 = 4$ in Bezug auf $\varkappa$ unter n zu sinken braucht.

Es ergiebt sich somit nach der obigen Bemerkung, dass die für ν gefundenen Werthe auch für $n - \nu$ gelten, der Satz,

dass die Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^{n+4}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 4$ *ist, für ungerade n stets irreductibel ist; wenn die Ordnung der Differentialgleichung jedoch eine gerade, so kann sie, wenn* $n \equiv 0$ mod. 4, *nur mit einer gleichartigen Differentialgleichung von der Ordnung* $\frac{n}{4}, \frac{2n}{4}$ *oder* $\frac{3n}{4}$, *ist jedoch n nur durch* 2 *und nicht durch* 4 *theilbar, nur mit einer Differentialgleichung von der Ordnung* $\frac{n}{2}$ *alle Integrale der letzteren gemein haben.*

Ist nun $\mu_0 = 5$ und $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 5$, so sind nur die Fälle

$$n = 5\nu,\quad 4\nu \leqq n < 5\nu,\quad 3\nu \leqq n < 4\nu,\quad 2\nu \leqq n < 3\nu$$

zu untersuchen, und es ergiebt sich der Satz,

dass die Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^{n+5}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1} \geqq 5$ *sind, stets irreductibel ist, wenn n eine durch* 5 *nicht theilbare Zahl ist; wenn die Ordnungszahl jedoch ein Vielfaches von* 5, *so kann die Differentialgleichung nur mit einer gleichartigen von der* $\frac{n}{5}, \frac{2n}{5}, \frac{3n}{5}, \frac{4n}{5}$*ten Ordnung alle Integrale der letzteren gemein haben.*

Aehnliche Sätze gelten für jeden Werth von μ_0.

Lassen wir die oben gemachte Annahme fallen, dass in der Gleichung (35), auf welche Form die vorgelegte Differentialgleichung stets reducirt werden konnte, die Grössen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ sämmtlich von Null verschieden sind, und nehmen an dass z. B. $\mu_{n-1} = 0$ ist, also die Differentialgleichung die Form hat

$$(53)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{2+\mu_{n-2}}\mathfrak{P}_{n-2} y'' + (x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

so wird die Gleichung (32) in

$$\begin{aligned}x\cdot\mathfrak{P}_{n-1}(0)+\mathfrak{P}_n(0)=[x(x-1)\cdots(n-\nu+1)\mathfrak{Q}_0(0)+x(x-1)\cdot\cdot\\ \cdot\cdot(x-\nu+2)\mathfrak{Q}_1(0)+\cdots+x\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)+\mathfrak{Q}_\nu(0)]\\ \times[x(x-1)\cdots(x-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0(0)+x(x-1)\cdot\cdot\\ \cdot\cdot(x-n+\nu+2)\mathfrak{R}_1(0)+\cdots+x\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0)]\end{aligned}$$

übergehen, woraus sich wiederum

$$\begin{gathered}\mathfrak{Q}_0(0)=\mathfrak{Q}_1(0)=\cdots=\mathfrak{Q}_{\nu-1}(0)=0,\quad \mathfrak{R}_0(0)=\mathfrak{R}_1(0)=\cdots=\mathfrak{R}_{n-\nu-2}(0)=0,\\ \mathfrak{P}_n(0)=\mathfrak{Q}_\nu(0)\mathfrak{R}_{n-\nu}(0),\quad \mathfrak{P}_{n-1}(0)=\mathfrak{Q}_\nu(0)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)\end{gathered}$$

und somit aus (28)

$$A_0=\mathfrak{Q}_\nu(0)$$

ergiebt, oder die entsprechenden durch Vertauschung der $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$. In diesem Falle nimmt der Coefficient von $(x-\alpha)$ auf der rechten Seite der Gleichung (31) nach (28) die Form an

$$\begin{aligned}(54)\quad ((x+1)\mathfrak{R}_{n-\nu-1}(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}(0))\,(x(x-1)\cdots(x-\nu+1)\mathfrak{Q}_0'(0)+\cdots\\ +x\mathfrak{Q}_{\nu-1}'(0)+\mathfrak{Q}_\nu'(0))\\ +\mathfrak{Q}_\nu(0)(x(x-1)\cdots(x-n+\nu+1)\mathfrak{R}_0'(0)+\cdots+x\mathfrak{R}_{n-\nu-1}'(0)+\mathfrak{R}_{n-\nu}'(0)),\end{aligned}$$

und tritt somit an die Stelle von (37), der entsprechende Ausdruck an die Stelle von (38) u. s. w., und ähnliche Betrachtungen wie die oben angestellten werden wieder zu ähnlichen allgemeinen Sätzen über die Irreductibilität linearer Differentialgleichungen und über die Form der Zerlegung reductibler Differentialgleichungen führen.

So ergiebt sich, wenn wieder $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{n-2}$ von Null verschiedene ganze positive Zahlen sind und die erste dieser Grössen, welche den Werth 1 hat, μ_0 ist, da auf der linken Seite der Gleichung (31) der Coefficient von $(x-\alpha)$, weil $\mathfrak{P}_0(0)$ von Null verschieden ist, jedenfalls eine ganze Function n^{ten} Grades von x ist, und da derselbe mit (54) identisch also

$$\nu+1=n \quad \text{oder} \quad n-\nu+1=n$$

sein muss, der Satz:

dass die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^{n+1}\mathfrak{P}_0y^{(n)}+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1y^{(n-1)}+\cdots+(x-\alpha)^{2+\mu_{n-2}}\mathfrak{P}_{n-2}y''\\ +(x-\alpha)\mathfrak{P}_{n-1}y'+\mathfrak{P}_ny=0,\end{aligned}$$

in welcher $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-2}$ von Null verschiedene positive ganze Zahlen bedeuten, wenn dieselbe reductibel ist, nur mit einer gleichartigen Differentialgleichung 1^{ter} oder $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung alle Integrale der letzteren gemein haben kann, und genau entsprechend die Reihe analoger Sätze für den Fall, dass $\mu_0 = 2$ u. s. w. oder dass erst ein späteres μ die Werthe $1, 2, \ldots$ annimmt, und dass endlich mehr als zwei der μ-Grössen den Werth Null haben.

Es mag endlich noch die Verallgemeinerung des oben für die lineare Differentialgleichung (39) ausgesprochenen Satzes hervorgehoben werden, wonach

die lineare Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^{\varrho n+1}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{\varrho(n-1)+\nu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + (x-\alpha)^{\varrho(n-2)+\nu_2}\mathfrak{P}_2 y^{(n-2)} + \cdots$$
$$+ (x-\alpha)^{\varrho+\nu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y' + \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{n-1} \geqq 1$ und ϱ eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, irreductibel ist,

welche Gleichung, wenn

$$\varrho n + 1 = n + \mu_0,\ \varrho(n-1) + \nu_1 = n - 1 + \mu_1, \ldots \varrho + \nu_{n-1} = 1 + \mu_{n-1}$$

oder

$$\mu_0 = n(\varrho-1) + 1,\ \mu_1 = (n-1)(\varrho-1) + \nu_1,\ \ldots\ \mu_{n-1} = \varrho - 1 + \nu_{n-1}$$

gesetzt wird, in die Form gebracht werden kann

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0 y^{(n)} + (x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1 y^{(n-1)} + \cdots + (x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1} y'$$
$$+ \mathfrak{P}_n y = 0,$$

in welcher $\mu_\varkappa = (n-\varkappa)(\varrho-1) + \nu_\varkappa$, $\nu_0 = 1$, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{n-1} \geqq 1$ ist; es möge hier genügen, die Beweisart an dem speciellen Falle $n = 2$, $\varrho = 3$, $\nu_1 = 1$, also $\mu_0 = 5$, $\mu_1 = 3$ auseinanderzusetzen und somit die Irreductibilität der Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^7\mathfrak{P}_0 y'' + (x-\alpha)^4\mathfrak{P}_1 y' + \mathfrak{P}_2 y = 0 \tag{55}$$

nachzuweisen. Da nämlich für den Fall der Reductibilität in der Gleichung (31) $\nu = 1$ ist und die linke Seite der Gleichung (31) die Form annimmt

$$\varkappa(\varkappa-1)(x-\alpha)^5\mathfrak{P}_0(x-\alpha) + \varkappa(x-\alpha)^3\mathfrak{P}_1(x-\alpha) + \mathfrak{P}_2(x-\alpha), \tag{56}$$

so wird sich zunächst wieder durch Vergleichung der Coefficienten von $(x-\alpha)^0$ auf beiden Seiten der Gleichung (31)

$$\mathfrak{P}_2(0) = \mathfrak{Q}_1(0)\cdot\mathfrak{R}_1(0),\quad \mathfrak{Q}_0(0) = 0,\quad \mathfrak{R}_0(0) = 0$$

ergeben. Da aber in (56) der Coefficient von $(x-\alpha)$ von $\varkappa$ frei ist, so werden sich aus (37) die Bedingungen ergeben

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}_1(0)\mathfrak{Q}_0'(0) + \mathfrak{Q}_1(0)\mathfrak{R}_0'(0) = 0,\\ &\mathfrak{R}_1(0)\mathfrak{Q}_1'(0) + \mathfrak{Q}_1(0)\mathfrak{R}_1'(0) = \mathfrak{P}_2'(0), \end{aligned} \tag{57}$$

und da auch der Coefficient von $(x-\alpha)^2$ von $\varkappa$ unabhängig ist, so wird nach (38) $\mathfrak{Q}_0'(0)\cdot\mathfrak{R}_0'(0) = 0$ also nach (57) $\mathfrak{Q}_0'(0) = 0$, $\mathfrak{R}_0'(0) = 0$ und die weiteren Bedingungen

$$(58)\qquad \begin{gathered}\mathfrak{R}_1(0)\mathfrak{Q}_0''(0)+\mathfrak{Q}_1(0)\mathfrak{R}_0''(0)=0,\\ \mathfrak{R}_1(0)\mathfrak{Q}_1''(0)+2\mathfrak{Q}_1'(0)\mathfrak{R}_1'(0)+\mathfrak{Q}_1(0)\mathfrak{R}_1''=\mathfrak{P}_2''(0)\end{gathered}$$

zu erfüllen sein, und es würde zunächst der Forderung genügt werden können, dass der Coefficient (44) von $(x-\alpha)^3$ in $\varkappa$ linear ist, wie es der Ausdruck (56) verlangt. Da aber nun das Glied mit $(x-\alpha)^4$ in (56), also auch der Ausdruck (50)

$$\begin{gathered}(\mathfrak{Q}_0''''(0),\ \mathfrak{Q}_1''''(0))+(\mathfrak{Q}_0'''(0),\ \mathfrak{Q}_1'''(0))\,(\mathfrak{R}_0'(0),\ \mathfrak{R}_1'(0))\\ +(\mathfrak{Q}_0''(0),\ \mathfrak{Q}_1''(0))\,(\mathfrak{R}_0''(0),\ \mathfrak{R}_1''(0))+(\mathfrak{Q}_0'(0),\ \mathfrak{Q}_1'(0))\,(\mathfrak{R}_0'''(0),\ \mathfrak{R}_1'''(0))\\ +(\mathfrak{R}_0''''(0),\ \mathfrak{R}_1''''(0))\end{gathered}$$

linear in $\varkappa$ sein muss, so folgt

$$\mathfrak{Q}_0''(0)\mathfrak{R}_0''(0)=0 \quad \text{oder nach (58)} \quad \mathfrak{Q}_0''(0)=0,\ \mathfrak{R}_0''(0)=0,$$

und es würde somit der Coefficient (51) der Potenz $(x-\alpha)^5$ auf der rechten Seite der Gleichung (31) wegen

$$\mathfrak{R}_0'(0)=\mathfrak{R}_0''(0)=\mathfrak{Q}_0'(0)=\mathfrak{Q}_0''(0)=0$$

in Bezug auf $\varkappa$ vom ersten Grade sein, was der Form von (56) widerspricht, es ist somit (57) irreductibel.

Durch Substitution anderer Functionalausdrücke als $y=(x-\alpha)^\varkappa$ in die identisch zu befriedigende Gleichung (27) können andere Reihen irreductibler Differentialgleichungen ermittelt werden, und es mag hier nur noch einer allgemeinen Zerlegungsform Erwähnung geschehen, die sich aus der für eine reductible Differentialgleichung nothwendig identisch zu befriedigenden Gleichung (27), in welcher, wie nachgewiesen worden, $\varepsilon=0$ ist, durch Substitution von

$$y=e^{\varkappa(x-\alpha)}$$

ergiebt, worin $\varkappa$ eine willkürliche Grösse bedeutet. Setzt man

$$\begin{gathered}(x-\alpha)^\nu\mathfrak{Q}_0(x-\alpha)\varkappa^\nu+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1(x-\alpha)\varkappa^{\nu-1}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu(x-\alpha)\\ =S(\varkappa,\ x-\alpha)\end{gathered}$$

und

$$\begin{gathered}(x-\alpha)^{n-\nu}\mathfrak{R}_0(x-\alpha)\varkappa^{n-\nu}+(x-\alpha)^{n-\nu-1}\mathfrak{R}_1(x-\alpha)\varkappa^{n-\nu-1}+\cdots+\mathfrak{R}_{n-\nu}(x-\alpha)\\ =T(\varkappa,\ x-\alpha),\end{gathered}$$

worin S eine ganze Function ν^{ten}, T eine solche $n-\nu^{\text{ten}}$ Grades in $\varkappa$ ist, so ergiebt sich aus (27)

$$(58)\quad \begin{aligned}&(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0\varkappa^n+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1\varkappa^{n-1}+\cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}\varkappa\\ &\qquad+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n\\ &=S\cdot T+\frac{\partial S}{\partial x}\cdot\frac{\partial T}{\partial\varkappa}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial\varkappa^2}+\cdots+\frac{1}{(n-\nu)!}\frac{\partial^{n-\nu}S}{\partial x^{n-\nu}}\cdot\frac{\partial^{n-\nu}T}{\partial\varkappa^{n-\nu}}\end{aligned}$$

als eine für den Fall der Reductibilität der vorgelegten linearen Differentialgleichung in x und $\varkappa$ nothwendig identisch zu erfüllende Gleichung. Ist aber umgekehrt die Zerlegungsform (58) des in $\varkappa$ ganzen Polynoms n^{ten} Grades identisch erfüllt, so kann diese in die Form gesetzt werden

$$9)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0\varkappa^n+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1\varkappa^{n-1}+\cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}\varkappa+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n$$
$$=(x-\alpha)^{n-\nu}R_0\left[S\varkappa^{n-\nu}+(n-\nu)_1\frac{\partial S}{\partial x}\varkappa^{n-\nu-1}+(n-\nu)_2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\varkappa^{n-\nu-2}+\cdots+\frac{\partial^{n-\nu}S}{\partial x^{n-\nu}}\right]$$
$$+(x-\alpha)^{n-\nu-1}R_1\left[S\varkappa^{n-\nu-1}+(n-\nu-1)_1\frac{\partial S}{\partial x}\varkappa^{n-\nu-2}+(n-\nu-1)_2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\varkappa^{n-\nu-3}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{\partial^{n-\nu-1}S}{\partial x^{n-\nu-1}}\right]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(x-\alpha)R_{n-\nu-1}\left[S\varkappa+\frac{\partial S}{\partial x}\right]+R_{n-\nu}\cdot S$$

oder durch Multiplication dieser Gleichung mit

$$y_1=e^{\varkappa(x-\alpha)}$$

in die Form

$$9)\quad (x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0y_1^{(n)}+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1y_1^{(n-1)}+\cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}y_1'+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_ny_1$$
$$=(x-\alpha)^{n-\nu}R_0\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0y_1^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1y_1^{(\nu-1)}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu y_1]$$
$$+(x-\alpha)^{n-\nu-1}R_1\frac{d^{n-\nu-1}}{dx^{n-\nu-1}}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0y_1^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1y_1^{(\nu-1)}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu y_1]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+R_{n-\nu}[(x-\alpha)^{\nu}\mathfrak{Q}_0y_1^{(\nu)}+(x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1y_1^{(\nu-1)}+\cdots+\mathfrak{Q}_\nu y_1],$$

worin $\varkappa$ eine willkürliche Grösse bedeutet, also y_1 unendlich viele von einander unabhängige Functionen darstellt. Daraus folgt aber, dass die Gleichung (59) eine in y_1 identische sein muss, und dafs somit

die für die Reductibilität der Differentialgleichung

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0y^{(n)}+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1y^{(n-1)}+\cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}y'$$
$$+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_ny=0$$

nothwendige und hinreichende Bedingung durch die in der beliebigen Grösse $\varkappa$ algebraische Zerlegungsform

$$(x-\alpha)^{n+\mu_0}\mathfrak{P}_0\varkappa^n+(x-\alpha)^{n-1+\mu_1}\mathfrak{P}_1\varkappa^{n-1}+\cdots+(x-\alpha)^{1+\mu_{n-1}}\mathfrak{P}_{n-1}\varkappa$$
$$+(x-\alpha)^{\mu_n}\mathfrak{P}_n$$
$$=S\cdot T+\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial\varkappa}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varkappa^2}+\cdots+\frac{1}{(n-\nu)!}\frac{\partial^{n-\nu}S}{\partial x^{n-\nu}}\frac{\partial^{n-\nu}T}{\partial\varkappa^{n-\nu}}$$

gegeben ist, wenn

$$S = (x-\alpha)^\nu \mathfrak{Q}_0 x^\nu + (x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1 x^{\nu-1} + \cdots + \mathfrak{Q}_\nu,$$
$$T = (x-\alpha)^{n-\nu}\mathfrak{R}_0 x^{n-\nu} + (x-\alpha)^{n-\nu-1}\mathfrak{R}_1 x^{n-\nu-1} + \cdots + \mathfrak{R}_{n-\nu}$$

ist, und

$$(x-\alpha)^\nu \mathfrak{Q}_0 y^{(\nu)} + (x-\alpha)^{\nu-1}\mathfrak{Q}_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + \mathfrak{Q}_\nu y = 0$$

die Differentialgleichung darstellt, die ihre sämmtlichen Integrale mit der gegebenen gemeinsam hat.

Heidelberg, den 9. Juli 1899.

Ueber die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung.

Von

Heinrich Liebmann in Leipzig.

§ 1.
Einleitung.

In diesem Paragraphen wollen wir uns mit dem zu behandelnden Problem vertraut machen, indem wir uns an ein ähnliches, bereits gelöstes, erinnern. Gleichzeitig werden wir den in den folgenden Paragarphen entwickelten Gedankengang skizziren.

1. *Der Euclidische Polyedersatz.* Viele mathematische Sätze theilen mit einander das Schicksal, dass ihre Wahrheit schon lange gefunden worden ist, bevor ein strenger Beweis für dieselben gegeben wurde.

Hierhin gehört auch der von Euclid*) aufgestellte Satz:

Zwei Polyeder sind congruent, wenn sie von congruenten ebenen Figuren begrenzt werden.

Einen Beweis dieses Satzes, der übrigens nur für convexe Polyeder gilt, hat Euclid nicht gegeben.

Erst Cauchy**) ist es vielmehr, welcher den Satz scharf formulirt und streng bewiesen hat. In dieser Fassung lautet er dann so:

Ein convexes Polyeder ist vollkommen bestimmt, wenn das Polyedernetz gegeben ist, d. h. die Seitenflächen mit der Angabe der Reihenfolge, in welcher sie aneinander geheftet werden sollen.

Seitdem ist der Satz in viele elementare Lehrbücher übergegangen***).

Der Cauchy'sche Satz gilt übrigens nur für convexe Polyeder. Ueber das Verhalten von nicht convexen Polyedern sind allgemeine Sätze bis jetzt noch nicht aufgestellt und man muss von jedem geschlossenen nicht

---

*) Euclid's Elemente, Buch 11, Definition 10.

**) Cauchy, Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Journal de l'école polytechnique 16, p. 87.

***) Z. B. Rausenberger, Elementargeometrie (Leipzig 1887), § 45, 15 (p. 212).

convexen Polyeder erst untersuchen, ob es in sich beweglich ist oder nicht. (Als Beispiel eines beweglichen Polyeders sei das Bricard'sche*) octaèdre articulé genannt.)

Man kann sich dasselbe leicht construiren, indem man auf einen Papierstreifen in der Weise, wie es Figur 1 zeigt, sechs rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke zeichnet und die Figuren dann ausschneidet und zu einem Polyeder zusammenbiegt, welches dann die Gestalt von Figur 2 hat. Wir erhalten dann ein Polyeder, welches von sechs rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken, nämlich ABC, BCD, CDE, DEF, EFA und FAB und zwei gleichseitigen Dreiecken, nämlich BDF und ACE gebildet wird, und sich deformiren lässt. Dieses Octaeder besitzt übrigens noch andere merkwürdige Eigenschaften: es ist einseitig und trennt den Raum nicht in zwei Theile**). — In neuester Zeit endlich hat man sich auch viel beschäftigt mit der Beweglichkeit von ungeschlossenen Polyedernetzen***).

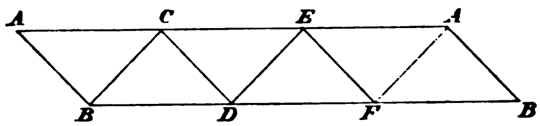


Fig. 1.

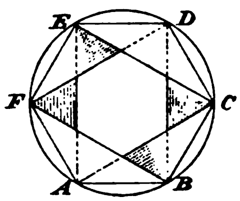


Fig. 2.

2. *Der Minding'sche Satz über Ovaloide.*

Während man bei den Polyedern erst die geschlossenen untersucht und neuerdings erst die ungeschlossenen in Betracht gezogen hat, gilt

---

*) R. Bricard, Sur la théorie de l'octaèdre articulé. Liouville's Journal Ser. V, T. 3 (1894), p. 113 ff.

**) Eine noch einfachere Construction eines beweglichen Polyeders hat Herr Geh. Rath Neumann angegeben: Man construire aus vier Dreiecken eine räumliche Ecke. Aus der nebenstehenden Figur wird man eine solche Ecke erhalten, indem man sie ausschneidet und die Kanten, die mit AB bezeichnet sind, zusammenfügt. Die auf solche Weise erhaltene Figur stelle man so auf, dass die Linien BD und CE horizontal sind, dann denke man sich die Figur an der durch CE gehenden Verticalebene gespiegelt; das auf diese Weise (durch Hinzufügung des Spiegelbildes) entstehende Polyeder besitzt dann die gewünschte Eigenschaft.

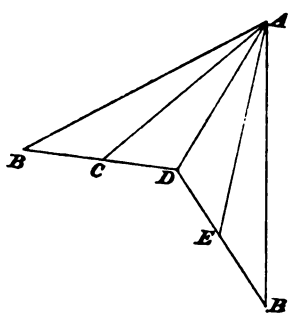


Fig. 3.

***) Pizetti, Sui poliedri deformabili (Rend. delle R. Acad. d. Lincei, 1898, Juli 3). Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahresbericht d. deutschen Mathematiker-Vereinigung VI, 2 (Leipzig 1899) (vergl. besonders p. 61—62).

von den Gebilden, die sich aus ihnen durch Grenzübergang ableiten lassen, den Flächen, gerade das Umgekehrte. Seit Gauss sich zuerst mit der Verbiegung von Flächen beschäftigt hat, hat die Flächentheorie sehr zahlreiche Bearbeiter gefunden und ist zu einer besonderen Disciplin herangewachsen. Man hat namentlich auch die Frage der Deformation, d. h. der Verbiegung ohne Zerrung behandelt*). Doch wurden dabei immer nur einzelne Flächenstücke untersucht, ohne dass man die Berandung berücksichtigte. Es sind dies also Untersuchungen, welche denen über ungeschlossene Polyedernetze entsprechen.

Dagegen ist ein Satz, der dem Cauchy'schen Satz über convexe Polyeder entspricht, zwar schon lange von Minding ausgesprochen worden**), doch fehlt es bis jetzt an einem Beweis. Minding sagt nämlich in einer Arbeit gelegentlich:

Um Missverständnissen vorzubeugen, bemerke ich noch, dass bekanntlich eine in sich geschlossene convexe Fläche als unversehrtes Ganzes unbiegsam ist.

Auch dieser Satz, für den sich in der Litteratur nirgends ein Beweis findet, bedarf erst einer scharfen Formulirung, entsprechend wie sie Cauchy dem Euclidischen gegeben hat.

Statt im allgemeinen von convexen Flächen zu reden, werden wir im speciellen die *analytische Entwickelbarkeit* voraussetzen, d. h. dass die Fläche sich in jedem Punkt bei geeigneter Wahl des rechtwinkligen Coordinatensystems durch die Gleichung darstellen lässt:

$$z = \frac{ax^2 + by^2}{2} + \cdots$$

wo a und b positive (von Null verschiedene) Constanten sind, die natürlich in den verschiedenen Punkten der Fläche verschiedene Werthe haben können. (Wir wollen das Coordinatensystem, bei dem also die z-Axe in der Richtung der inneren Normale, die x- und y-Axe in die Richtungen der Tangenten an die Krümmungslinien fallen, kurzweg das *natürliche Coordinatensystem* der Fläche in dem betreffenden Punkt nennen.)

*Eine solche geschlossene Fläche bezeichnen wir mit dem Namen Ovaloid****).

(Zu den Ovaloiden gehört also die Kugel und das Ellipsoid, ferner jede Fläche, die durch Rotation eines symmetrischen (analytischen) Ovales

*) Vergl. z. B. Stäckel, Ueber Biegungen und conjugirte Systeme, Math. Annalen 49, p. 255—310, wo auch die Litteratur citirt ist.

**) Minding, Ueber die Biegung gewisser Flächen, Crelle's Journal 18 (Berlin 1838), p. 365—368.

***) In viel weiterem Sinne wird der Name „convexe Fläche" oder auch „Eifläche" gebraucht von H. Brunn in seiner Dissertation (München 1887) und von H. Minkowski (Geometrie der Zahlen I, Leipzig 1896, p. 38 ff.).

um seine Symmetrieaxe entsteht, dagegen z. B. nicht der Würfel, sowie eine Fläche, welche durch Rotation eines vom Halbkreis verschiedenen Kreisbogens um seine Sehne entsteht.)

Auf solche Ovaloide also werden wir allein Rücksicht nehmen.

3. *Infinitesimale Verbiegungen.* Auch den Begriff der Verbiegung müssen wir schärfer fassen.

Wir werden nämlich nur infinitesimale Verbiegungen betrachten, wie sie in der Variationsrechnung und bei der Lie'schen Theorie*) gebraucht werden.

Diese Verbiegungen sind gegeben durch die Formeln

$$x_1 = x + \varepsilon\xi, \quad y_1 = y + \varepsilon\eta, \quad z_1 = z + \varepsilon\zeta.$$

Ferner sollen $\xi\eta\zeta$ *analytische Functionen von* x *und* y *sein, die im betrachteten Gebiet endlich bleiben.*

Wir sagen also: $\xi\eta\zeta$ *definiren eine infinitesimale Verbiegung, wenn sie analytische Functionen sind, die die Relation*

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0$$

identisch erfüllen, unter xyz *die Coordinaten des Ovaloides verstanden.* —

Weil nämlich die betrachtete infinitesimale Transformation eine Verbiegung ohne Zerrung ist, so muss

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = d(x + \varepsilon\xi)^2 + d(y + \varepsilon\eta)^2 + d(z + \varepsilon\zeta)^2$$
$$= dx^2 + dy^2 + dz^2$$

sein; d. h.

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0\,^{**}).$$

Auf Grund dieser Definitionen werden wir dann den Satz beweisen:

Ein Ovaloid als geschlossene Fläche gestattet keine infinitesimale Verbiegung ohne Zerrung.

4. *Gültigkeitsbereich des Minding'schen Satzes.* Unser Beweis schliesst die Möglichkeit nicht aus, dass die Fläche eine endliche Verbiegung gestattet, d. h. dass es ein von dem gegebenen Ovaloid gänzlich verschiedenes giebt, welches mit ihm in den kleinsten Theilen congruent ist, sich aber nicht durch eine continuirliche Reihenfolge von Verbiegungen in dasselbe überführen lässt.

Um die Möglichkeit eines solchen Falles zu illustriren, wollen wir uns an ein Problem aus der Variationsrechnung erinnern, wo ähnliche Verhältnisse auftreten.

---

*) S. Lie, Differentialgleichungen mit inf. Transformationen (Leipzig 1891), p. 30.

**) Man vergl. L. Bianchi, Differentialgeometrie, übersetzt von Lukat (Leipzig 1896), p. 287.

Bekanntlich hat Jacobi bewiesen, dass auf den Flächen negativer Krümmung die geodätischen Linien ihrer ganzen Ausdehnung nach kürzeste Linien sind.

Bei diesem Beweis werden indessen die geodätischen Linien nicht mit allen möglichen Verbindungslinien verglichen, sondern nur mit den „unendlich benachbarten“.

Thatsächlich aber kann es auch auf Flächen negativer Krümmung zwischen zwei Punkten verschiedene geodätische Linien geben*) von verschiedener Länge, und unter diesen kann natürlich nicht jede die kürzeste sein. Obwohl also jede geodätische Linie, verglichen mit einer *unendlich benachbarten*, kürzeste ist, braucht sie doch in Wirklichkeit nicht kürzeste zu sein. Analog könnte mit den Ovaloiden der Fall eintreten, dass es zwar kein „unendlich benachbartes“ congruentes Ovaloid giebt, aber doch überhaupt *verschiedene* congruente Ovaloide.

Noch auf eine weitere Einschränkung sei hier hingewiesen. Wir beweisen den Satz nicht für jede geschlossene Fläche, sondern nur für solche von positiver Krümmung, obwohl er jedenfalls noch für sehr viele andere gilt. Ist doch bis jetzt überhaupt noch keine in sich geschlossene zusammenhängende *verbiegbare* Fläche behandelt, die etwa dem Bricard'schen octaèdre articulé entspricht!

5. *Flächen constanter positiver Krümmung.*

Bei den Ovaloiden betrachten wir nur infinitesimale Transformationen. In viel allgemeinerem Umfang können wir aber den Beweis führen bei einem speciellen Ovaloid, der Kugel**).

Wir werden nämlich zeigen, dass die Kugel das einzige Ovaloid constanter Krümmung ist, und dass ein entsprechender Satz in ebenen Räumen von beliebig viel Dimensionen gilt.

Wir ziehen also nicht nur endliche Transformationen in Betracht, sondern wir verallgemeinern den Satz auch für höhere Dimensionen. —

Der für Gebilde constanter Krümmung ausgesprochene Satz deckt sich übrigens mit dem für Ovaloide nur im dreidimensionalen Raum, und auch da, wie wir gesehen haben, nur theilweise.

In der Ebene nämlich lässt sich jede geschlossene Curve verbiegen, während der Kreis die einzige Curve constanter Krümmung ist. Im ebenen Raum von mehr als drei Dimensionen aber, wo wir mit Kronecker***)

---

*) Man vergl. J. Hadamard. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. Liouville's Journal, Ser. V, T. 3, p. 27 ff.

**) Eine Skizzirung des Beweises ist schon früher publicirt. (Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-Phys. Classe, 1899, Heft 1.)

***) Ueber Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln. Berliner Academieberichte 1869, p. 688 ff.

die Krümmung der $n - 1$-dimensionalen Fläche als das reciproke Product der $n - 1$ Hauptkrümmungsradien definiren, lässt sich eine solche Fläche, wenn ihre Krümmung positiv ist, im allgemeinen überhaupt nicht verbiegen*). Dagegen bleibt die Möglichkeit offen, dass es von der Hypersphäre verschiedene geschlossene Flächen constanter Kronecker'scher Krümmung giebt, die ebenfalls in jedem Punkt analytisch sind. Dass dies aber nicht der Fall sein kann, werden wir streng beweisen.

6. *Uebersicht über die folgenden Paragraphen.*

Die zu entwickelnden Unmöglichkeitsbeweise laufen darauf hinaus, aus der Existenz der gedachten Verbiegungen Widersprüche abzuleiten. Es müssten nämlich dann gewisse Hilfsflächen, die ihrer Natur nach im Endlichen verlaufen, sich ins Unendliche erstrecken, worin ein Widerspruch liegt. Wie dies gemeint ist, wird in § 2 genauer entwickelt. § 3 enthält Kriterien für den indefiniten**) Charakter von Formen, welche für die folgenden Untersuchungen nöthig sind. In § 4 behandeln wir dann die Ovaloide und zeigen, dass ihre Verbiegung unmöglich ist. In § 5 wird der allgemeinere Beweis für die Kugel gegeben. Nebenbei ergiebt sich in § 6 zugleich ein Beweis des Satzes, dass die Kugel die einzige geschlossene Fläche constanter positiver mittlerer Krümmung ist. § 6 endlich behandelt die Flächen constanter Krümmung in höheren Räumen.

§ 2.

Flächen, die sich ins Unendliche erstrecken.

Wie schon in Nr. 6 des vorigen Paragraphen erwähnt, werden wir uns der indirecten Beweismethode bedienen. Wir werden nämlich zeigen, dass die infinitesimale Verbiegung eines Ovaloides und ebenso die Existenz eines von der Kugel verschiedenen Ovaloides nothwendig die Existenz von Flächen nach sich ziehen würde (diese Flächen werden in den folgenden Paragraphen unter dem Namen „Verbiegungsfläche“ bez. „Kernfläche“ eingeführt), die wegen ihrer Eigenschaft, im allgemeinen negative Krümmung zu besitzen, sich ins Unendliche erstrecken müssen, die andrerseits aber ganz im Endlichen verlaufen. Inwiefern hierin ein Widerspruch liegt, soll in diesem Paragraphen genauer ausgeführt werden.

1. *Flächen negativer Krümmung ohne singuläre Punkte.*

Eine Fläche negativer Krümmung erstreckt sich, wenn sie keine singulären Punkte hat, ins Unendliche. Diesen einfachen Satz wird man

*) F. Schur, Ueber Räume constanten Krümmungsmasses. Math. Annalen XXVII p. 163 ff. (cf. besonders p. 172: *Ein Raum von n Dimensionen kann in einem ebenen Raum von n — 1 Dimensionen im allgemeinen nicht deformirt werden*).

**) *Indefinit* nennen wir eine Form, welche für reelle Werthe der Variabeln ihr Vorzeichen wechselt.

folgendermassen beweisen: Zunächst ist klar, dass jede Ebene, welche einen Punkt der Fläche enthält, dieselbe in zwei Theile zerlegt. Ist die Ebene nicht Tangentialebene, dann ist diese Eigenschaft klar; ist sie aber Tangentialebene, so schneidet sie die Fläche auch wegen der negativen Krümmung.

Wenn man jetzt durch einen Punkt der Fläche eine Ebene parallel zur x-Ebene legt, so schneidet die Ebene, und auf beiden Seiten befinden sich in endlichem Abstand wieder Punkte der Fläche. Durch je einen dieser Punkte auf jeder Seite der Ebene legt man wieder eine Ebene u. s. w. x kann also kein Maximum haben.

Bliebe nun die Fläche ganz im Endlichen, so müsste x nach dem Satz von Weierstrass, dass eine stetige Function in einem endlichen Gebiet einen oberen Grenzwerth hat und diesen Grenzwerth wirklich erreicht, nothwendig ein Maximum haben; Das kann aber, wie wir eben gesehen haben, nicht eintreten. Die Annahme, dass die Fläche ganz im Endlichen bleibt, ist also falsch; sie muss sich ins Unendliche erstrecken. — Wir wollen hervorheben, dass aus unserem Beweis nur folgt, dass die Fläche sich ins Unendliche erstreckt; nicht etwa dass sie sich in der Richtung der x Axe ins Unendliche erstreckt. (Beispielsweise erstreckt sich die Fläche negativer Krümmung $z^2 + y^2 = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ins Unendliche. Trotzdem ist sie zwischen den Ebenen $x = 1$ und $x = -1$ eingeschlossen.)

2. *Punkte vom Charakter negativer Krümmung.*

Eine Fläche negativer Krümmung kann singuläre Punkte haben, wo überhaupt keine Krümmung existirt, oder auch singuläre Linien dieser Art (man erinnere sich z. B. an die Pseudosphäre und ihre Rückkehrkante). In solchen Punkten wird es im allgemeinen Ebenen geben, welche die Fläche begrenzen*) d. h. den Raum in zwei Theile zerlegen, von denen nur der eine Punkte der Fläche enthält.

Wir machen darauf aufmerksam, dass der Begriff der „begrenzenden Ebene“ viel allgemeiner ist als der Begriff der Tangentialebene. Bei Flächen positiver Krümmung würde jede Tangentialebene (in der Umgebung des Berührungspunktes) als abgrenzende Ebene zu bezeichnen sein. Bei Flächen negativer Krümmung aber, die eine Tangentialebene niemals abgrenzen kann, giebt es sehr wohl begrenzende Ebenen in singulären Punkten!

Dagegen können auch singuläre Punkte vorhanden sein, in denen der Charakter der negativen Krümmung gewahrt bleibt, d. h. welche die Eigenschaft haben, dass jede durch sie gehende Ebene die Fläche in zwei

*) Herr Minkowski bezeichnet eine solche Ebene mit dem Namen *Stützebene*.

Theile zerschneidet. Wie solche Punkte beschaffen sind, wollen wir jetzt genauer auseinandersetzen.

Ist $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ ein Punkt der Fläche, und sind $\xi \eta \zeta$ analytische Functionen, so wird eine Ebene $0 = \alpha(x - \xi_0) + \beta(y - \eta_0) + \gamma(z - \zeta_0)$, die durch den Punkt $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ geht, die Fläche in zwei Theile zerschneiden, wenn der Ausdruck

$$\alpha(\xi - \xi_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(\zeta - \zeta_0)$$

in der Umgebung von $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$ verschiedene Vorzeichen hat, je nach der Wahl von $\xi \eta \zeta$.

Da $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, $\zeta - \zeta_0$ analytische Functionen sind von zwei Parametern (etwa u und v), so genügt es zu zeigen, dass die Glieder niedrigster Ordnung in dem obigen Ausdruck je nach der Wahl der Parameter verschiedenes Vorzeichen haben. Beginnt die Reihenentwicklung mit Gliedern ungerader Ordnung, dann ist dieser Zeichenwechsel selbstverständlich, beginnt sie mit solchen von gerader Ordnung, so muss man zeigen, dass diese Glieder niedrigster Ordnung eine indefinite Form darstellen.

Ist dies aber gezeigt, dann ist damit bewiesen, dass die Ebene in dem Punkt die Fläche schneidet.

Wenn also die Glieder niedrigster Ordnung in

$$\alpha(\xi - \xi_0) + \beta(\eta - \eta_0) + \gamma(\zeta - \zeta_0)$$

und zwar für jedes Werthsystem $\alpha \beta \gamma$ indefinit sind, so schneidet jede Ebene, und die Fläche hat dann in diesem Punkte den Charakter der negativen Krümmung.

3. *Ein Widerspruch.* Wir behaupten nun: Flächen negativer Krümmung, welche nur reguläre Punkte und singuläre Punkte der Art haben, haben, dass in diesen der Charakter der negativen Krümmung erhalten bleibt, welche ausserdem ganz im Endlichen bleiben, giebt es nicht.

Bliebe nämlich die Fläche im Endlichen, so müsste etwa ζ irgendwo ein Maximum haben, was unmöglich ist, weil $\zeta - \zeta_0$ der Annahme nach mit Gliedern beginnt, welche eine indefinite Form darstellen (nicht etwa eine definite oder semidefinite).

Die Fläche müsste sich also ins Unendliche erstrecken, was ein Widerspruch ist. Wenn also aus einem Satz folgt, dass es eine im Endlichen bleibende Fläche negativer Krümmung mit singulärem Punkt giebt, in denen der Charakter der negativen Krümmung nicht aufhört, so ist dies ein Widerspruch, und der Satz, aus dem dies folgt, kann nicht richtig sein.

Auf diesen Widerspruch werden wir in § 5 geführt werden, bei der „Kernfläche“.

4. *Seminegative Krümmung.* Damit eine Fläche sich ins Unendliche erstreckt, ist es zwar hinreichend, aber keineswegs nothwendig, dass sie

in jedem ihrer Punkte den Charakter der negativen Krümmung hat. Es genügt, wenn diese Bedingung in einer einzigen Richtung erfüllt ist, d. h. wenn etwa jede Ebene parallel zur x-Ebene, welche durch einen Punkt der Fläche geht, diese in zwei Theile theilt. Denn dann kann x kein Maximum haben, die Fläche also nicht im Endlichen bleiben.

Die negative Krümmung darf also in einzelnen Punkten aufhören. Dies geschieht z. B., wenn in einem Punkte die Fläche eine Spitze hat, oder auch wenn durch einen Punkt eine Rückkehrkante der Fläche geht. Auch andere Möglichkeiten giebt es. Die Fläche kann vielleicht in einzelnen Punkten *seminegative Krümmung* haben, welche so definirt sein soll: *Wenn alle Ebenen durch einen Punkt der Fläche, welche die Fläche abgrenzen, einen Theil des Büschels bilden, so heisst in diesem Punkt die Krümmung seminegativ**). Beispielsweise würden also die Punkte des grössten Parallelkreises auf der Pseudosphäre oder Rotationstractrix als Punkte seminegativer Krümmung zu bezeichnen sein. —

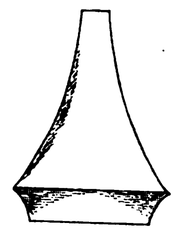


Fig. 4.

Wenn nun eine Fläche, die im übrigen lauter Punkte negativer Krümmung enthält, Punkte seminegativer Krümmung in endlicher Anzahl hat, kann sie nicht im Endlichen bleiben, wie die folgende Betrachtung zeigt:

Man kann dann immer Ebenen finden, welche keine Parallele zu einer Axe eines im Punkte seminegativer Krümmung abtrennenden*) Ebenenbüschels enthalten.

Ja noch mehr! Wir behaupten nämlich:

Eine im Endlichen gelegene Fläche, welche negative Krümmung hat, und unendlich viele, aber isolirte Punkte seminegativer Krümmung, kann nicht existiren.

*Isolirt***) nennen wir die Punkte eines Systems, wenn jeder Punkt die Eigenschaft hat, dass sich in endlicher, wenn auch noch so kleiner Entfernung von einem jeden kein anderer Punkt des Systems befindet.

Wir tragen zum Beweise der Behauptung die Richtungen, durch welche abtrennende Ebenen gehen müssen, im Coordinatenanfang ab. Sie bilden eine abzählbare Menge***).

Nun nehme man eine beliebige andere Richtung, d. h. eine andere

---

*) Ein Ebenenbüschel trennt ab oder begrenzt d. h. natürlich nicht, dass jede Ebene begrenzt, weil sich die Fläche sonst auf eine Gerade reduciren würde, sondern nur, dass sich unter den Ebenen des Büschels eine stetige Menge von abtrennenden Ebenen befindet.

**) Schönflies, Referat über Cantor'sche Mengenlehre (in der Math. Encyklopädie I, p. 185ff., Nr. 11, Allgemeine Definitionen).

***) Isolirte Punkte können nur eine abzählbare Menge bilden.

Linie durch den Coordinatenanfang. Gesetzt nun, es wäre jede Ebene durch diese Richtung eine abtrennende, oder vielmehr parallel einer solchen abtrennenden Ebene, so müsste jede Ebene durch die genannte Gerade eine Gerade enthalten, die parallel ist zur Axe eines abtrennenden Ebenenbüschels. Da diese nur in abzählbarer Menge vorhanden sind, so hätten wir eine Abbildung einer abzählbaren Menge auf ein Continuum (alle Ebenen eines Büschels), was unmöglich ist*).

Demnach giebt es unendlich viele Ebenen, welche nicht abtrennen; man kann unendlich viele Ebenen durch den Coordinatenanfang legen, welche die Eigenschaft haben, dass es parallel zu ihnen eine die Fläche begrenzende Ebene nicht giebt, d. h. die Fläche erstreckt sich ins Unendliche.

Damit ist die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes bewiesen. Wir werden in § 4, wenn wir die „Verbiegungsfläche" behandeln, davon Gebrauch machen.

§ 3.

Kriterien für den indefiniten Charakter einer (geraden) Form.

In Nr. 2 des vorigen Paragraphen wurde bereits erwähnt, dass u. a. sich die Aufgabe stellen wird, zu entscheiden, ob eine vorgelegte (gerade) Form indefinit ist, d. h. ob sie das Zeichen wechselt bei geeigneter Wahl der (reellen) Werthe der Variabeln. Hinreichende Kriterien, welche für die in Betracht kommenden Fälle diese Frage zu entscheiden gestatten, sollen in diesem Paragraphen entwickelt werden. Da diese Kriterien wohl zum Theil neu sind, ausserdem aber ein allgemeineres Interesse besitzen (sie sind ja bekanntlich für die Theorie der Maxima und Minima**) von Functionen von mehreren Variabeln von Bedeutung), so wollen wir sie in etwas allgemeinerer Form beweisen, als streng genommen nothwendig ist. Als Hülfsmittel benützen wir dabei nur den Green'schen Satz, den wir hier nicht nur für höhere Dimensionen brauchen, sondern auch in bequemer Weise so umformen, wie wir ihn dann auf homogene Functionen oder Formen anwenden wollen. — Beiläufig bemerkt, lassen sich die hier entwickelten hinreichenden Kriterien vermuthlich durch einfache Modificationen in nothwendige verwandeln; doch wollen wir hierbei nicht verweilen, weil diese Untersuchung nicht hierher gehört.

---

*) Schönflies, a. a. O. Nr. 2 (p. 186), wo auch die Cantor'schen Arbeiten genau citirt sind.

**) Man vergl. z. B. Genochi-Peano, Differential- und Integralrechnung, übersetzt von Bohlmann und Schepp (Leipzig 1898), p. 183 ff.

1. *Der Green'sche Satz.* Der Green'sche Satz, mit dessen Hülfe man ein Flächenintegral in ein Randintegral verwandeln kann, wird bekanntlich durch die Formel ausgedrückt

$$\int_s \frac{\partial f}{\partial n} ds = \int^{s} \Delta f\, d\sigma.$$

Hier bedeutet $\frac{\partial f}{\partial n}$ den Differentialquotienten nach der äusseren Normale der geschlossenen Curve, über welche das erste Integral zu erstrecken ist, Δf bedeutet den Ausdruck $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ und das Integral auf der rechten Seite ist über das Innere des Flächenstückes zu erstrecken*).

Diesen Satz kann man unmittelbar auf Gebiete von höheren Dimensionen verallgemeinern, und er lautet dann

$$\int^{s} \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma = \int \Delta f\, d\tau,$$

wo n wieder die äussere Normale eines Elementes der $n-1$ dimensionalen geschlossenen Fläche ist, welche den n-dimensionalen Raum begrenzt, über den das Integral zur Rechten erstreckt wird. Das Integral zur Linken ist auszudehnen über die geschlossene Fläche. Ferner ist

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

2. *Eine Differentialrelation.* Wenn f eine homogene Function der n Variabeln

$$x_1\, x_2 \ldots x_n$$

ist, wenn wir ferner die Bezeichnung

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

einführen, so ist

$$r \frac{\partial f}{\partial r} = mf,$$

unter m den Grad der Function verstanden.

Da weiterhin Δf vom Grade $m-2$ ist, so besteht für eine Form vom Grade m die Identität:

$$r \frac{\partial \Delta f}{\partial r} = (m-2)\,\Delta f.$$

3. *Der Green'sche Satz in allgemeinerer Gestalt für homogene Formen mit beliebig vielen Variabeln.* Den Green'schen Satz wollen wir nun auf eine homogene Form $2m^{\text{ter}}$ Ordnung anwenden, wobei wir die eben ent-

*) Die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Green'schen Satzes sind im Folgenden überall erfüllt.

wickelte Differentialrelation brauchen und als Fläche immer eine „Kugel" um den Coordinatenanfang als Mittelpunkt benützen.

Die Differentiation nach der äusseren Normale ist dann also identisch mit der Differentiation nach r.

Es ist dann ferner

$$2mf = r\frac{\partial f}{\partial r},$$

und weiter

$$2m\int f\,d\sigma = R_1\int\frac{\partial f}{\partial r}\,d\sigma = R_1\int\limits_{(R_1)}\Delta f\,d\tau.$$

Hier ist das Flächenintegral erstreckt über die Oberfläche einer Kugel vom Radius R_1, das Raumintegral über ihr Inneres, angedeutet durch die Bezeichnung (R_1).

Dieses Raumintegral formen wir nun noch weiter um.

Es ist nämlich

$$\int\limits_{(R_1)}\Delta f\,d\tau = \int\limits_0^{R_1}dR_2\int\Delta f\,d\sigma = \frac{1}{2m-2}\int\limits_0^{R_1}R_2\,dR_2\int\frac{\partial\Delta f}{\partial r}\,d\sigma,$$

wobei das Flächenintegral wieder über eine Kugel vom Radius R_2 zu erstrecken ist. Dieses Integral kann nun wieder in ein Raumintegral verwandelt werden, so dass man schliesslich erhält:

$$2m(2m-2)\int f\,d\sigma = R_1\int\limits_0^{R_1}R_2\,dR_2\int\limits_{(R_2)}\Delta\Delta f\,d\tau.$$

Wenden wir dieses Verfahren μ-mal an, und bezeichnen wir zur Abkürzung die μ-malige Operation der Bildung von Δ mit $\Delta_\mu f$, so bekommen wir entsprechend

$$2m\cdot(2m-2)\cdots(2m-2\mu+2)\int f\,d\sigma$$

$$= R_1\int\limits_0^{R_1}R_2\,dR_2\int\limits_0^{R_2}R_3\,dR_3\cdots\int\limits_0^{R_{\mu-1}}R_\mu\,dR_\mu\int\limits_{(R_\mu)}\Delta_\mu f\,d\tau.$$

Das Integral zur Linken ist über die Oberfläche der Kugel vom Radius R_1, das Integral $\int\limits_{(R_\mu)}$ über das Innere der Kugel vom Radius R_μ zu erstrecken.

4. *Kriterien für indefinite Formen.* Mit Hülfe des in Nr. 3 bewiesenen Satzes können wir nun sofort zeigen:

Erfüllt eine Form $2m^{ten}$ Grades die Relation

$$\Delta_\mu f = \sigma \quad (\mu \leqq m),$$

so ist sie indefinit (nicht etwa nur semidefinit!).

Dann verschwindet nämlich in der vorigen Formel das Integral auf der rechten Seite, also auch das Integral auf der linken Seite. Hieraus aber folgt, da die Elemente dv immer positiv sind, mit Nothwendigkeit, dass f für verschiedene Punkte verschiedenes Zeichen haben muss, nicht in allen positiv oder in allen negativ sein kann. — Ferner besteht der Satz: Genügt eine Form der Differentialgleichung $\Delta_\mu f = 0$ so ist auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine indefinite Form. Es folgt dies daraus, dass

$$\Delta_\mu \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \Delta_\mu f}{\partial x_i} = 0$$

ist.

Weitere Kriterien erhält man, wenn man bedenkt, dass eine Form ihren (definiten oder indefiniten) Charakter bei linearer Substitution nicht ändert.

Hieraus folgt z. B. der Satz:

Genügt eine binäre Form der Differentialgleichung:

$$\Delta_{a,b} f = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

wo a und b beide positiv sind, so ist sie indefinit.

Durch die Substitution

$$x_1 = x\sqrt{a}, \quad y_1 = y\sqrt{b},$$

verwandelt sich nämlich diese Differentialgleichung in

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^{\,2}} = 0,$$

f also in eine indefinite Function von $x_1 y_1$, d. h. aber, dass f eine definite Function von x, y, also auch von x und y ist.

Weiter ist auch eine Form indefinit, wenn $\Delta_{a.b}\Delta_{a,b} f = 0$ ist u. s. w. — wir werden diese Kriterien für indefinite Formen jetzt brauchen, um zu zeigen, dass in gewissen singulären Punkten der zu construirenden Hülfsflächen der Charakter der negativen Krümmung besteht.

§ 4.

Die Ovaloide.

Um jetzt zuerst die Verbiegung der Ovaloide zu untersuchen, zeigen wir, dass jeder infinitesimalen Verbiegung eine gewisse „Verbiegungsfläche“ sich zuordnen lässt, welche verschiedene, nach § 2, Nr. 3 sich widersprechende Eigenschaften in sich vereinigen müsste. (Eine eingehende Untersuchung der verschiedenen Singularitäten, welche diese Verbiegungsfläche aufweisen kann, lässt sich dabei nicht vermeiden.) Hieraus folgt dann, dass eine solche Verbiegungsfläche, also auch eine infinitesimale Verbiegung des Ovaloides nicht existiren kann.

1. *Die Verbiegungsfläche.* Zu jeder infinitesimalen Verbiegung

$$x_1 = x + \varepsilon\xi, \quad y_1 = y + \varepsilon\eta, \quad z_1 = z + \varepsilon\zeta$$

kann man sich eine gewisse Fläche construiren, welche uns ein Bild der Verbiegung giebt. Diese Fläche, die man erhält, indem man $\xi\eta\zeta$ als rechtwinklige Coordinaten auffasst, wollen wir mit dem Namen „Verbiegungsfläche" bezeichnen. Ein einfaches Beispiel einer solchen Verbiegungsfläche erhalten wir, wenn wir etwa eine infinitesimale Drehung eines Ovaloides (z. B. einer Kugel) um seinen Mittelpunkt betrachten.

Die Verbiegungsfläche ist dann das von der Kugel begrenzte Stück der senkrecht zur Rotationsaxe durch den Kugelmittelpunkt gelegten Ebene*).

Man erkennt dies, wenn man als Rotationsaxe die z-Axe nimmt, wobei dann die Formeln lauten

$$x_1 = x + \varepsilon y, \quad y_1 = y - \varepsilon x, \quad z_1 = z;$$

also

$$\xi = y, \quad \eta = -x, \quad \zeta = 0.$$

Die Verbiegungsfläche ist also hier die xy Ebene ($\zeta = 0$); genauer gesagt, derjenige Theil, für den xy einen reellen Werth von z liefert, d. h. einen reellen Punkt der Kugel.

Diese Verbiegungsfläche nun ist im Endlichen gelegen, da $\xi\eta\zeta$ endlich bleiben nach den in § 1 *Nr.* 4 *genannten Voraussetzungen.* Dazu kommen eine Reihe weiterer Eigenschaften. Wir werden, um dieselben zu untersuchen, auf der Fläche verschiedene Arten von Punkten unterscheiden, nämlich reguläre Punkte, singuläre Punkte vom Charakter negativer Krümmung, und endlich Punkte seminegativer Krümmung. Diese letzte Classe von Punkten ist es, welche der Untersuchung eine besondere Schwierigkeit entgegenstellt**).

2. *Die negative Krümmung einer Verbiegungsfläche.* Hat die Verbiegungsfläche schon in dem einfachen Fall der Drehung eine ziemlich

---

*) Vergl. Bianchi, a. a. O., p. 287, Anmerkung: Man erhält die zu einer Drehung gehörige Verbiegungsfläche, indem man eine Orthogonalprojection des Ovaloides auf eine Ebene senkrecht zur Rotationsaxe vornimmt. Man erhält dann eine doppelt belegte Scheibe, deren Rand die Projection derjenigen Curve des Ovaloids ist, wo die Tangentialebenen der Rotationsaxe parallel sind. Diese Scheibe ist noch um 90° zu drehen.

**) Wir wollen noch erwähnen, dass die Verbiegungsfläche sich selbst durchdringen kann. Die Punkte der Verbiegungsfläche aber sind eindeutig den Punkten des Ovaloides zugeordnet. Und wenn wir im Folgenden von einem bestimmten Punkt $\xi\eta\zeta$ der Verbiegungsfläche reden, so ist damit eben ein Punkt gemeint, der einem bestimmten Punkt des Ovaloides entspricht; mit anderen Worten: es kommt nicht auf die Werthe $\xi\eta\zeta$, sondern auf die Zuordnung an, wie beispielsweise auch bei den Sätzen über Parallelcurven.

complicirte Gestalt (sie ist dann eine doppelt belegte Scheibe, wie oben ausgeführt; man vergleiche auch die nebenstehende Figur), so wird sie im allgemeinen Fall noch complicirter aussehen, sie wird nämlich Spitzen und Kanten besitzen, sie wird in einzelnen Curven sich selbst durchdringen u. s. w.

Eine Eigenschaft können wir aber doch nachweisen, nämlich dass sie in ihren regulären Punkten negative Krümmung hat.

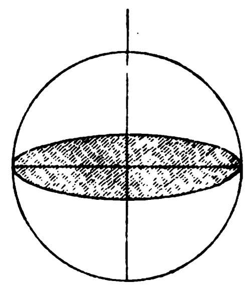


Fig. 5.

Wir wenden, um das zu beweisen, das natürliche Coordinatensystem (§ 1, Nr. 2) an: so dass die Gleichung lautet

$$z = \frac{ax^2 + by^2}{2} + \cdots.$$

Für den Punkt $\xi\eta\zeta$, welcher diesem Punkt entspricht, besteht dann die Relation

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0,$$

welche sich in die folgenden drei Relationen zerlegt:

$$\xi_x + ax\,\zeta_x = 0,$$
$$\eta_y + by\,\zeta_y = 0,$$
$$\xi_y + \eta_x + ax\,\zeta_y + by\,\zeta_y = 0^{*)}.$$

(Die partiellen Differentialquotienten sind hier zur Abkürzung durch den Index bezeichnet.)

Wir wollen annehmen, dass ζ mit quadratischen Gliedern beginnt (die anderen Fälle werden später untersucht) und ξ und η mit linearen Gliedern. Die Constanten, welche noch vor diese Glieder treten, lassen wir fort, weil wir ja die Verbiegungsfläche so verschieben können, dass diese Constanten verschwinden.

Dann ist

$$\xi = \alpha y + \cdots,$$
$$\eta = -\alpha x + \cdots,$$
$$\zeta = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \cdots,$$

wo die quadratische Function indefinit ist. Dieser letztere Umstand ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung:

Die dritte der Relationen kann man auch schreiben

$$\xi_y = -ax\,\zeta_y + \lambda, \quad \eta_x = -by\,\zeta_x - \lambda,$$

(wobei λ von der zweiten Ordnung ist), woraus weiter folgt

---

*) Eigentlich müsste man schreiben $\frac{\partial z}{\partial x}$ statt ax, $\frac{\partial z}{\partial y}$ statt by. Doch werden hier nur diese niedrigsten Glieder gebraucht.

$$\xi_{xy} = -a\zeta_y - ax\zeta_{xy} + \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

$$\eta_{xy} = -b\zeta_x - by\zeta_{xy} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}.$$

Combinirt man dies mit den Werthen

$$\xi_{xy} = -ax\zeta_{xy},$$

$$\eta_{xy} = -by\zeta_{xy},$$

die sich aus den ersten beiden Relationen ergeben, so folgt

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = a\zeta_y, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = -b\zeta_x,$$

und hieraus, wegen

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial x} = 0,$$

weiter:

$$a\frac{\partial^2 \zeta^{(2)}}{\partial y^2} + b\frac{\partial^2 \zeta^{(2)}}{\partial x^2} = 0.$$

Die Relation, welche für die Glieder zweiter Ordnung von ζ besteht (die Glieder höherer Ordnung sind gar nicht mit in Rechnung gezogen worden), lehrt uns nach § 3, Nr. 4, dass ζ indefinit ist, w. z. b. w.

Wenn wir nun weiterhin berücksichtigen, dass für $x = y = 0$ noch

$$\frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta^{(2)}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\alpha^2} a_{11}, \quad \frac{\partial^2 \zeta^{(2)}}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{\alpha^2} a_{12}$$

und

$$\frac{\partial^2 \zeta^{(2)}}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\alpha^2} a_{22}$$

ist, so sehen wir, dass die Krümmung

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2\right)}{\left(1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2\right)^2} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\alpha^4}$$

negativ ist, eben weil die Form $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ indefinit, also $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ ist.

Die Verbiegungsfläche hat also in ihren regulären Punkten negative Krümmung).*

3. *Singuläre Punkte vom Charakter negativer Krümmung auf der Verbiegungsfläche.* Wir untersuchen nun den Fall, wo ζ mit Gliedern mindestens von zweiter, ξ und η mit Gliedern mindestens von dritter

*) Der Satz, dass die Verbiegungsfläche einer Fläche positiver Krümmung selbst im allgemeinen negative Krümmung hat, ist schon bekannt. Vgl. Bianchi a. a. O. p. 30.

Ordnung in x und y beginnen. (Beginnt ζ mit Gliedern von höherer als der zweiten Ordnung, so müssen ξ und η mit Gliedern beginnen, deren Ordnungszahl um eine Einheit grösser ist, als die von ζ.)

Bezeichnen wir nun die Glieder niedrigster Ordnung von ζ mit $\zeta^{(m)}$, die von ξ und η entsprechend mit $\xi^{(m+1)}$ und $\eta^{(m+1)}$, so bestehen genau wie in Nr. 4 die Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi^{(m+1)}}{\partial x} + a x \frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta^{(m+1)}}{\partial y} + b y \frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi^{(m+1)}}{\partial y} + \frac{\partial \eta^{(m+1)}}{\partial x} + a x \frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial y} + b y \frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x} = 0.$$

Hieraus folgt wieder, genau wie oben, dass

$$\text{I)} \quad a \frac{\partial^2 \zeta^{(m)}}{\partial y^2} + b \frac{\partial^2 \zeta^{(m)}}{\partial x^2} = 0$$

ist. Weiter aber folgt noch, dass $\lambda^{(m)}$ die Differentialgleichung erfüllt

$$b \frac{\partial^2 \lambda^{(m)}}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 \lambda^{(m)}}{\partial y^2} = 0.$$

(Weil nämlich

$$\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial x} = a \frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \lambda^{(m)}}{\partial y} = -b \frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x}$$

ist.)

Ferner ist

$$\xi^{(m+1)} = \left(x \frac{\partial \xi^{(m+1)}}{\partial x} + y \frac{\partial \xi^{(m+1)}}{\partial y}\right) \cdot \frac{1}{m+1} = \frac{u}{m+1},$$

wo also

$$u = -a x^2 \frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x} - a x y \frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial y} + \lambda^{(m)} y$$

$$= -\frac{a x}{m} \zeta^{(m)} + \lambda^{(m)} y$$

ist.

Hieraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a}{m} \zeta^{(m)} - \frac{a x}{m} \frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x} + y \frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2 \frac{a}{m} \frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x} - \frac{a x}{m} \frac{\partial^2 \zeta^{(m)}}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \lambda^{(m)}}{\partial x^2}$$

ferner

$$\frac{\partial u}{\partial} = -\frac{a x}{m} \frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial y} + \lambda^{(m)} + y \frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{a x}{m} \frac{\partial^2 \zeta^{(m)}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial y} + y \frac{\partial^2 \lambda^{(m}}{\partial y^2}.$$

Hieraus folgt weiter

$$b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2ab}{m}\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x}+2a\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial y}.$$

Bezeichnen wir noch die Operation

$$b\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

mit $\Delta_{ba}f$, so schreibt sich diese letzte Formel:

$$\Delta_{ba}f=-2a\left(\frac{b}{m}\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x}-\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial y}\right).$$

Weil nun aber

$$\Delta_{ba}\frac{\partial \zeta^{(m)}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Delta_{ba}\zeta^{(m)}=0$$

ist, und ebenso

$$\Delta_{ba}\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial y}=0,$$

so erhalten wir schliesslich

$$\text{II)}\quad \Delta_{ba}\Delta_{ba}\xi^{(m+1)}=0.$$

Eine analoge Rechnung für η, die wir hier nicht durchführen wollen, würde das Resultat liefern:

$$\text{III)}\quad \Delta_{ba}\Delta_{ba}\eta^{(m+1)}=0.$$

Aus den Formeln I), II), III) folgt noch wegen § 3, Nr. 4 der Satz: *Die Functionen $\zeta^{(m)}$ und $\xi^{(m+1)}$, $\eta^{(m+1)}$ sind immer indefinit, ebenso jede lineare Combination*

$$\alpha\xi^{(m+1)}+\beta\eta^{(m+1)}+\gamma\zeta^{(m)}.$$

Ist in dieser Formel $\gamma \neq 0$ und m gerade oder ungerade, so ist der Ausdruck, in dem $\zeta^{(m)}$ das Vorzeichen bestimmt, indefinit.

Ist aber $\gamma=0$, so erfüllt

$$w=\alpha\xi^{(m+1)}+\beta\eta^{(m+1)}$$

immer die Relation

$$\Delta_{ba}\Delta_{ba}w=0,$$

w ist also indefinit, auch wenn die Form gerade ist.

Nach § 2, Nr. 2 können wir also den Satz aussprechen:

Der Charakter der negativen Krümmung hört in den singulären Punkten ($m \geq 2$, ξ und η von der Ordnung $m+1$) *der Verbiegungsfläche eines Ovaloides nicht auf.*

4. *Der Fall, wo ξ, η und ζ linear beginnen.* Untersuchen wir nun den Fall, wo ζ mit linearen Gliedern beginnt, und wo, wie wir zunächst annehmen wollen, auch ξ und η mit linearen Gliedern beginnen.

Die Gleichungen

$$\xi_x + ax\zeta_x = 0,$$
$$\eta_y + by\zeta_y = 0,$$
$$\eta_x + \xi_y + ax\zeta_y + by\zeta_x = 0$$

zeigen dann, dass die Entwickelungen folgendermassen beginnen müssen:

$$\zeta = \beta x - \alpha y + \cdots,$$
$$\xi = \gamma y - \beta\left(\frac{ax^2 + by^2}{2}\right) + \cdots,$$
$$\eta = \alpha\left(\frac{ax^2 + by^2}{2}\right) - \gamma x + \cdots,$$

wo die weitere Reihenentwickelung von ζ mit Gliedern zweiter, die von ξ und η mit Gliedern dritter Ordnung beginnt.

Ferner gilt der Satz:

Ist

$$\zeta = \beta x - \alpha y + \zeta^{(m)} + \cdots,$$
$$\xi = \gamma y - \beta(z^{(2)} + \cdots + z^{(m)}) + \xi^{(m+1)} + \cdots,$$
$$\eta = \gamma x + \alpha(z^{(2)} + \cdots + z^{(m)}) + \eta^{(m+1)} + \cdots{}^{*}),$$

wo die oberen Indices die Ordnung der betreffenden Glieder angeben, so ist

$$\xi_x^{(m+1)} + ax\zeta_x^{(m)} = 0,$$
$$\eta_y^{(m+1)} + by\zeta_y^{(m)} = 0,$$
$$\eta_x^{(m+1)} + \xi_y^{(m+1)} + ax\zeta_y^{(m)} + by\zeta_x^{(m)} = 0.$$

Der Satz ist leicht zu beweisen. Setzen wir nämlich zur Abkürzung

$$\frac{\partial z^{(i)}}{\partial x} = p_{i-1}, \quad \frac{\partial z^{(i)}}{\partial y} = q_{i-1},$$

so lauten die Gleichungen, welche an Stelle der Fundamentalgleichungen $\xi_x + ax\zeta_x = 0$ u. s. w. treten, jetzt folgendermassen:

$$-\beta(p_1 + p_2 + p_{m-1}) + \xi_x^{(m+1)} + (p_1 + \cdots + p_{m-1})\beta + \beta ax\zeta_x^{(m)} = 0,$$
$$\alpha(q_1 + q_2 + \cdots + q_{m-1}) - \alpha(q_1 + q_2 + \cdots + q_{m-1}) - \alpha by\zeta^{(m)} = 0,$$
$$\alpha(p_1 + \cdots + p_{m-1}) - \gamma + \eta_x^{(m+1)} - \beta(q_1 + \cdots + q_{m-1}) + \xi_y^{(m+1)}$$
$$-\alpha(p_1 + \cdots + p_{m-1}) + ax\zeta_y^{(m)} + by\zeta_x^{(m)} = 0.$$

(Hier haben wir nur die Glieder nullter bis m^{ter} Ordnung hingeschrieben.) In diesen Gleichungen hebt sich alles übrige weg, und es bleibt nur

*) In diesen Formeln sind natürlich $z^{(m)}$ die Glieder m^{ter} Ordnung bei der Reihenentwickelung von z verstanden.

$$\xi_{x}^{(m+1)} + ax\zeta_{x}^{(m)} = 0,$$
$$\eta_{y}^{(m+1)} + by\zeta_{y}^{(m)} = 0,$$
$$\xi_{y}^{(m+1)} + \eta_{x}^{(m+1)} + ax\zeta_{y}^{(m)} + b\eta\zeta_{x}^{(m)} = 0.$$

Wir schliessen hieraus, wie in der vorigen Nummer, dass $\zeta^{(m)}$ sowohl wie jede lineare Verbindung $\bar{a}\xi^{(m+1)} + \bar{b}\eta^{(m+1)}$ indefinit ist.

Wie steht es nun in einem solchen Punkt der Verbiegungsfläche mit begrenzenden Ebenen? Da ξ, η und ζ linear beginnen, so giebt es eine Tangentialebene, und nur diese könnte begrenzen.

Es ist dies die Ebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$. Bilden wir aber den Ausdruck $a\xi + b\eta + \gamma\zeta$, so sehen wir, dass er mit den Gliedern

$$\alpha\xi^{(m+1)} + \beta\eta^{(m+1)} + \gamma\zeta^{(m)}$$

beginnt, was immer ein indefiniter Ausdruck ist.

Die Tangentialebene schneidet also; sie ist keine begrenzende Ebene.

5. *Die Punkte seminegativer Krümmung.* Es bleiben noch die Punkte, wo die Entwickelung von ζ mit linearen, die von ξ und η aber mit quadratischen Gliedern beginnt.

Dann ist

$$\zeta = \beta x - \alpha y + \cdots,$$
$$\xi = -\beta\left(\frac{ax^2 + by^2}{2}\right) + \cdots,$$
$$\eta = \alpha\left(\frac{ax^2 + by^2}{2}\right) + \cdots.$$

In diesem Falle giebt es abtrennende Ebenen. Wir haben nämlich dann die Reihenentwickelung:

$$\bar{\alpha}\xi + \bar{\beta}\eta + \gamma\zeta = (\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha})\left(\frac{ax^2 + by^2}{2}\right) + \gamma(\beta x - \alpha y) + \cdots.$$

Dieser Ausdruck ist definit, sobald $\gamma = 0$. Also ein ganzes Büschel von Ebenen, welche die Verbindungsfläche begrenzen (d. h. begrenzen im Infinitesimalen), ist hier vorhanden. Es sind dies alle Ebenen, welche durch den betreffenden Punkt der Verbiegungsfläche hindurchgehen und parallel zur Normale des Ovaloides in dem entsprechenden Punkte sind.

Diese Punkte können entweder isolirt sein, oder aber, sie können eine Curve bilden*).

*) Dass die Punkte seminegativer Krümmung durch analytische Gleichungen bestimmt werden, ist evident; diese Gleichungen lauten:

$$\varphi_1 = \xi_y\eta_x - \eta_y\xi_x = 0,$$
$$\varphi_2 = \eta_y\zeta_x - \zeta_y\eta_x = 0,$$
$$\varphi_3 = \zeta_y\xi_x - \xi_y\zeta_x = 0.$$

Wir suchen reelle Punkte in denen alle drei Gleichungen erfüllt sind. In diesen

Wir wollen beweisen, dass, wenn letzteres der Fall ist, die Verbiegung überhaupt eine Bewegung ist.

Hat die Verbiegungsfläche ein Curve seminegativer Krümmung oder Rückkehrkante, so liegen zwei Möglichkeiten vor, entweder es ist die Verbiegung eine Bewegung. (Die Verbiegungsfläche reducirt sich dann auf eine Scheibe mit Rand und der Rand ist dann eben die Rückkehrkante. $\xi\eta\zeta$ haben dann die Werthe

$$\xi = \gamma y - \beta z, \quad \eta = \alpha z - \gamma x, \quad \zeta = \beta x - \alpha y,$$

wo $\alpha\beta\gamma$ Constanten sind.) Oder die Verbiegung ist keine Bewegung. Wir wollen zeigen, dass dieser zweite Fall ausgeschlossen ist. $\xi\eta\zeta$ erfüllen wie bisher, die Bedingungen:

$$\begin{aligned} &\xi_x + p\,\zeta_x = 0, \\ (1) \qquad &\eta_y + q\,\zeta_y = 0, \\ &\eta_x + \xi_y + p\,\zeta_y + q\,\zeta_x = 0. \end{aligned}$$

Ferner müssen längs der angenommenen Rückkehrkante nach bekannten Sätzen die Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} &\xi_y\eta_x - \eta_y\xi_x = 0, \\ (2) \qquad &\eta_y\zeta_x - \zeta_y\eta_x = 0, \\ &\zeta_y\xi_x - \xi_y\zeta_x = 0. \end{aligned}$$

Nun stellen wir weiter die folgenden Ueberlegungen an: da die Verbiegungsfläche ganz im Endlichen bleibt, muss es einen Punkt derselben geben, für den der Abstand vom Coordinatenanfang ein Maximum ist. In diesem Punkte ist

$$\begin{aligned} (3) \qquad &\xi\xi_x + \eta\eta_x + \zeta\zeta_x = 0, \\ &\xi\xi_y + \eta\eta_y + \zeta\zeta_y = 0. \end{aligned}$$

Dieser Punkt muss ferner auf der Rückkehrkante liegen, da der Maximalabstand nicht bei einem regulären Punkt vorhanden sein kann (wegen der negativen Krümmung). In diesem Punkt der Rückkehrkante sind aber nicht nur die Gleichungen (1) und (3) sondern auch die Gleichungen (2) erfüllt, woraus folgt, dass

$$\xi_x = \eta_y = \zeta_x = \xi_y = \eta_y = \zeta_y = 0$$

ist. Aus diesen Gleichungen aber folgt wiederum, dass die Entwickelung von $\xi\eta\zeta$ mit Gliedern *zweiter Ordnung* beginnen müsste, oder wenn wir

---

Punkten muss $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 0$ sein. Die Curve, längs deren diese Bedingung erfüllt ist, ist analytisch und hat nur ausserwesentliche singuläre Stellen (man vergleiche hierzu die sorgfältigen Untersuchungen in dem neuen Werke von Ch. Meray, Analyse infinitesimale Bd. 2, Paris 1895, p. 147 ff.). *Ihre reellen Punkte sind also, wenn sie keinen continuirlichen Zug ergeben, isolirt.*

ein dem natürlichen Coordinatensystem paralleles Coordinatensystem zu Grunde legen, so folgt nach Nr. 3, es müsste die Reihenentwickelung von ζ mit Gliedern zweiter Ordnung beginnen, die von $\xi\eta$ aber mit Gliedern dritter Ordnung.

Der betreffende Punkt wäre dann also nach Nr. 3 dieses Paragraphen ein solcher, *in welchem es eine abtrennende Ebene überhaupt nicht giebt.* In diesem Punkt könnte also die Fläche unmöglich den grössten Abstand vom Coordinatenanfang haben, während es doch einen solchen Punkt auf der Rückkehrkante geben muss.

Wir schliessen hieraus, dass eine eigentliche Verbiegungsfläche mit Rückkehrkante nicht auftreten kann. Es wird vielmehr, wenn eine Rückkehrkante auftritt, die Verbiegungsfläche nothwendig eine Scheibe mit Rand, die Verbiegung also entsprechend eine Bewegung sein.

Wir entnehmen hieraus den Satz: *Bei einer eigentlichen Verbiegung können nur isolirte Punkte seminegativer Krümmung auftreten, in allen übrigen regulären sowohl wie singulären Punkten hat die Verbiegungsfläche entweder negative Krümmung oder doch den Charakter negativer Krümmung.*

6. *Folgerung für die Ovaloide.* Da die Verbiegungsfläche, welche zu einer wirklichen Verbiegung gehört, Eigenschaften in sich vereinigt, welche nach § 2, Nr. 4 einander widersprechen (sie muss im Endlichen bleiben und sie hat, abgesehen von isolirten Punkten, überall negative Krümmung), so schliessen wir hieraus:

Ein Ovaloid als geschlossene Fläche kann nicht verbogen werden.

Damit ist der Minding'sche Satz, allerdings mit gewissen Einschränkungen, bewiesen*).

§ 5.

Die Kugel als einziges Sphäroid.

Die Untersuchung der infinitesimalen Verbiegung des allgemeinen Ovaloides erforderte ziemlich eingehende Studien. Namentlich bereiteten die Punkte, seminegativer Krümmung gewisse Schwierigkeiten. Viel einfacher gestaltet sich nun alles bei der Kugel. Es liegt dies daran, dass wir hier eine Fläche construiren, die „Kernfläche", bei der, kurz gesagt, der Begriff der Bewegung schon von vornherein eliminirt ist. Auch ist die Eigenschaft der Kernfläche, in jedem Punkte negative Krümmung

*) Z. B. bleibt die Möglichkeit offen, dass es Verbiegungen giebt, bei denen Falten auftreten. Solche Flächen, bei denen Falten sich vorfinden, sind neuerdings durch die schon oben erwähnten Untersuchungen von Finsterwalder in den Vordergrund des Interesses getreten.

zu besitzen, viel einfacher nachzuweisen, als die entsprechende der Verbiegungsfläche*).

1. *Parallelflächen zu Flächen constanten positiven Krümmungsmasses.* Bonnet**) hat zuerst gezeigt, dass sich zu jeder Fläche constanten positiven Krümmungsmasses (wir setzen dasselbe gleich 1) zwei gewisse Parallelflächen constanter mittlerer Krümmung construiren lassen.

Der Satz ist eine leicht zu beweisende Folgerung aus dem Satz, dass, wenn man zu einer Fläche die Parallelfläche construirt, d. h. auf den Normalen gleiche Stücke abträgt, diese Parallelfläche Krümmungsradien hat, welche sich nur um den Betrag des Parallelabstandes von den Radien der gegebenen Fläche unterscheiden.

Trägt man also insbesondere auf der Normale einer Fläche c. Kr. $(=1)$ die Strecke 1 nach aussen ab, so haben die Krümmungsradien dieser Fläche die Werthe

$$R_1 = r_1 + 1,$$
$$R_2 = r_2 + 1,$$

wo $r_1 r_2 = 1$ ist. Die mittlere Krümmung dieser äusseren Parallelfläche ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1 + 1} + \frac{1}{r_2 + 1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1 + r_2 + 2}{r_1 + r_2 + 2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Entsprechend haben wir für die innere Parallelfläche

$$\varrho_1 = r_1 - 1,$$
$$\varrho_2 = r_2 - 1,$$

also

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1 - 1} + \frac{1}{r_2 - 1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1 + r_2 - 2}{2 - r_1 - r_2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

2. *Sphäroid, Kernfläche, Mantelfläche.* Wir wollen nun annehmen, es gäbe ein von der Kugel verschiedenes Ovaloid c. p. K., welches wir kurzweg mit den Namen „Sphäroid" bezeichnen wollen. Zu diesem könnte man dann eine innere Parallelfläche constanter negativer mittlerer Krümmung construiren (die wir mit dem Namen „Kernfläche" bezeichnen) und ebenso eine äussere, die den Namen „Mantelfläche" erhalten möge. Die Kernfläche reducirt sich, wenn das Sphäroid eine Kugel ist, auf den Mittel-

*) Wir wollen an dieser Stelle noch einmal den Charakter der Beweisführung skizziren: Construirt wird eine Hülfsfläche, die, wenn die ursprüngliche Fläche nicht im Endlichen bleibt oder irgend welche Singularitäten aufweist, keine sich widersprechende Eigenschaften hat. Sowie man aber verlangt, dass die ursprüngliche Fläche von Singularitäten frei wird, treten an der Hülfsfläche Eigenschaften auf, die sich widersprechen, ausgenommen in dem Fall, wo die ursprüngliche Fläche eine ganz bestimmte ist (in unserm Fall jetzt die Kugel).

**) Vgl. Bianchi, a. a. O., p. 205.

punkt der Kugel, aus der Mantelfläche wird dann eine Kugel vom Radius 2 (wenn der Radius der gegebenen Kugel gleich 1 ist). —

Wir werden jetzt zeigen, dass die Kernfläche niemals endliche Ausdehnung haben kann, sondern sich immer auf einen Punkt reduciren muss.

3. *Die singulären Punkte der Kernfläche. Da die Kernfläche in ihren regulären Punkten negative Krümmung hat, so giebt es in denselben keine abtrennende Ebene.* Einer besonderen Untersuchung bedürfen dagegen die singulären Punkte N_k, welche den Nabelpunkten N_s des Sphäroides entsprechen. In diesen Punkten verschwinden die Krümmungsradien (wenn $r_1 = r_2 = 1$, so ist $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$), also treten die Singularitäten auf, welche wir genauer besprechen müssen.

In einem Nabelpunkt N_s können wir (da die Reihenentwickelung von z beginnen muss mit

$$1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\Big)$$

das Sphäroid darstellen durch die Formel

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \varphi(x, y),$$

wo $\varphi(x, y)$ eine Potenzreihe ist, welche mit Gliedern von mindestens dritter Ordnung beginnt.

Die Coordinaten der Kernfläche, welche ja die innere Parallelfläche im Abstand 1 ist, werden gegeben durch die Formeln

$$\xi = x + \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\eta = y + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\zeta = z - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Wir wollen sehen, mit welchen Gliedern ξ, η und ζ beginnen, wenn φ mit Gliedern m^{ter} Ordnung beginnt, die wir einfach mit $\varphi_m(x, y)$ bezeichnen.

Es ist allgemein

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{1-x^2-y^2}\right)\left(1-x^2-y^2+\left(-x+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(-y+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2\right).$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck lautet bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\left(1-x^2-y^2+x^2+y^2-2x\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x}-2y\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y}\right).$$

Also wird

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x+\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x}+\cdots}{\sqrt{1-2x\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x}-2y\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots}}=-x+\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x}+\cdots$$

und analog

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-y+\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots,$$

demnach

$$\xi=x-x+\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x}+\cdots=\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x}+\cdots,$$
$$\eta=y-y+\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots=\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots,$$

und für ζ bekommen wir den Ausdruck

$$\zeta=\sqrt{1-x^2-y^2}+\varphi^{(m)}-\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\left(1-2x\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x}-2y\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots\right)^{\frac{1}{2}}},$$
$$=\varphi^{(m)}-x\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x}-y\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y}+\cdots$$
$$=(1-m)\varphi^{(m)}+\cdots.$$

4. *Der indefinite Charakter von* $\varphi^{(m)}$. In der vorigen Nummer ist über die Function $\varphi^{(m)}$ keine bestimmte Voraussetzung gemacht. Es ist aber klar, dass die Function $\varphi^{(m)}$, weil eben das Sphäroid eine Fläche constanten positiven Krümmungsmasses ist, nicht vollkommen willkürlich sein kann. Diese Function wird vielmehr eine bestimmte Differentialgleichung erfüllen, die wir jetzt aufstellen wollen.

Zu dem Ende müssen wir noch berechnen, welche Werthe die drei zweiten Differentialquotienten von z annehmen. Dabei ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - 1}{(\sqrt{1 - x^2 - y^2})^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{(\sqrt{1 - x^2 - y^2})^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - 1}{(\sqrt{1 - x^2 - y^2})^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Die Thatsache nun, dass das Sphäroid constantes positives Krümmungsmass ($= 1$) hat, drückt sich dadurch aus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)^2 = 0$$

ist, d. h.

$$\frac{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}{(1 - x^2 - y^2)^3} + \frac{x^2 - 1}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{y^2 - 1}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$
$$+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{x^2 y^2}{(1 - x^2 - y^2)^3} + \frac{2xy}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2$$
$$- \Biggl(1 + \left\{\frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} - \frac{2x\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right\}$$
$$+ \left\{\frac{y^2}{1 - x^2 - y^2} - \frac{2y\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right\}\Biggr)^2 = 0.$$

Hierin genügen die von φ freien Glieder identisch der Differentialgleichung, weil $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ die Gleichung der Kugel ist; im übrigen lauten die Glieder niedrigster Ordnung:

$$-\frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial y^2}.$$

Es muss also

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial y^2} = 0$$

sein. Hieraus schliessen wir (§ 3, Nr. 4):

Die Function $\varphi^{(m)}$ sowohl, wie ihre partiellen Differentialquotienten sind immer indefinit.

5. *Folgerung für das Sphäroid.* Da $\varphi^{(m)}$ indefinit ist, da ferner

$$\xi = \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x} + \cdots,$$
$$\eta = \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y} + \cdots,$$
$$\zeta = (1 - m)\varphi^{(m)} + \cdots,$$

so schliessen wir nach § 3 weiter, dass auch

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$$

immer, in jedem singulären Punkt und für jedes Werthsystem $\alpha\beta\gamma$ indefinit ist, d. h. (wie in Nr. 5 des vorigen Paragraphen):

Die Ebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$ *schneidet die Kernfläche immer,* oder:

Die Kernfläche verliert in keinem Punkt den Charakter der negativen Krümmung.

Hierin liegt aber, da die Kernfläche ihrer Construction nach ganz im Endlichen verläuft, nach § 2, Nr. 3 ein Widerspruch. Eine Kernfläche von endlicher Ausdehnung ist also unmöglich.

Es folgt also:

Die Kugel ist das einzige Sphäroid).*

§ 6.

Die Minimaleigenschaft der Kugel.

Wie uns die Kernfläche auf den Satz führte, dass die Kugel das einzige Sphäroid ist, so wird sie uns noch weitere Dienste leisten, um einen von Lindelöf in seiner Variationsrechnung angefangenen Beweis des Satzes von der Minimaleigenschaft der Kugel (dass die Kugel bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche hat) nach einer Richtung zu vervollständigen. Lindelöf gelangt nämlich durch Rechnung zu dem Resultat, dass die betreffende Fläche nothwendig constante mittlere positive Krümmung haben muss. Indessen gelingt es ihm nicht, zu beweisen, dass die einzige Fläche, welche diese Eigenschaft besitzt, die Kugel ist. (Wenn dies gezeigt ist, folgt freilich nur, dass ausser der Kugel keine andere Fläche die Minimaleigenschaften haben kann. Dass die Kugel sie wirklich hat, ist damit noch nicht bewiesen.) Dies gelingt aber leicht mit den hier entwickelten Hülfsmitteln, wenn man, wie dies Lindelöf stillschweigend thut, den analytischen Charakter der Fläche voraussetzt.

1. *Mantelfläche und Kernfläche. Unter der Mantelfläche verstehen wir ein Ovaloid constanter mittlerer Krümmung* $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)=1\right)$, *unter der zugehörigen Kernfläche ihre innere Parallelfläche im Abstand* 1. (Wir wollen hervorheben, dass der Begriff „äussere Parallelfläche c. mittlerer Krümmung zum Sphäroid“ und „Mantelfläche“, wie er hier definirt ist, sich keineswegs decken.)

*) Auf ganz anderem Wege ist, wie mir Herr Prof. Hilbert gütigst mitgetheilt hat, Herr Minkowski zu diesem Satz gelangt. Er leitet nämlich durch Grenzübergang aus seinen über convexe Polyeder aufgestellten Sätzen [Gött. Nachr. 1897, p. 198] den allgemeinen Satz ab: Ein Ovaloid ist vollkommen bestimmt, wenn man den zu jeder Normalrichtung gehörigen Werth des Krümmungsmasses kennt. Hieraus folgt dann von selbst der Satz, dass die Kugel das einzige Sphäroid ist.

Die Kernfläche hat im allgemeinen constante negative mittlere Krümmung ($=-1$) und einer besonderen Untersuchung bedürfen auch wieder nur die Punkte N_K, die den Punkten N_M entsprechen, wo

$$r_1 = r_2 = 1,$$

also

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 0$$

ist.

2. *Die singulären Punkte der Kernfläche.* In den Nabelpunkten N_M wird sich die Mantelfläche darstellen lassen durch die Entwickelung:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \psi,$$

wo wieder ψ mit Gliedern m^{ter} Ordnung beginnt $(\psi^{(m)})\,(m > 2)$.

Für ψ bekommen wir aus der Forderung, dass die mittlere Krümmung der Mantelfläche $=1$ sein soll, also

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) - 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right\}$$
$$:\left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} = 1,$$

die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)\left(1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right)\\
&+\left(\frac{y^2 - 1}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)\left(1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right)\\
&-2\left(\frac{-x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\left(\frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\left(\frac{-xy}{(\sqrt{1 - x^2 - y^2})^3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y}\right)\\
&-2\left(1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0.
\end{aligned}$$

Das giebt wieder für $\psi^{(m)}$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial y^2} = 0.$$

Da auch die Reihenentwickelungen für die Coordinaten der Kernfläche in den Punkten N_K wieder mit den Gliedern

$$\xi = \frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x} + \cdots,$$

$$\eta = \frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial y} + \cdots,$$

$$\zeta = (1 - m)\,\psi^{(m)} + \cdots$$

beginnen, so schliessen wir, genau wie im vorigen Paragraphen: Eine Kernfläche von endlicher Ausdehnung kann nicht existiren, d. h.

Die Kugel ist die einzige Mantelfläche.

Damit ist die Lücke in dem Beweis von Lindelöf ausgefüllt*).

§ 7.

Flächen constanten Krümmungsmasses in höheren Räumen.

Der Satz, dass die Kugel das einzige Sphäroid ist, verallgemeinert sich entsprechend für höhere Dimensionen. Als Krümmungsmass definiren wir hier das reciproke Product der $n-1$ Hauptkrümmungsradien.

Wir wollen zunächst zeigen, dass es auch in höheren (ebenen) Räumen einfache von der Kugel (die wir dann als Hypersphäre bezeichnen) verschiedene Flächen c. K. giebt. Sodann werden wir, durch Verallgemeinerung des angewendeten Schlussverfahrens, beweisen, dass die $n-1$ dimensionale Hypersphäre das einzige Hypersphäroid ist, für Räume von n Dimensionen.

1. *Die Rotationsflächen constanten Krümmungsmasses.* Dass es Flächen constanten Krümmungsmasses giebt, welche von der Hypersphäre verschieden sind, folgt daraus, dass diese Flächen durch eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung bestimmt werden. Diese Differentialgleichung muss jedenfalls ausser der reellen Lösung, welche die Hypersphäre des betreffenden Raumes darstellt und $n+2$ Constanten hat (wenn $n+1$ die Dimensionszahl des Raumes ist), noch andere reelle Lösungen haben.

Sie lautet

$$\frac{\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix}}{(1+z_1^2+\cdots+z_n^2)^{\frac{n}{2}+1}} = 1,$$

wo z_i zur Abkürzung für $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ und z_{ik} zur Abkürzung für $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$ gesetzt ist.

Dies sind die Flächen constanter Krümmung im $n+1$-dimensionalen ebenen Raum, wo wir die rechtwinkligen Coordinaten $z, x_1, x_2, \ldots x_n$ eingeführt haben.

*) Wir dürfen uns aber nicht verhehlen, dass der Beweis von H. A. Schwarz (Gesammelte Abhandlungen II, p. 327) für die Minimaleigenschaft viel allgemeiner ist. Des weiteren aber gilt wie oben die Bemerkung, dass man noch viel allgemeinere Voraussetzungen machen müsste. Hat doch Finsterwalder (a. a. O., p. 79 ff.) gezeigt, dass schon ganz einfache Gleichgewichtsprobleme (die sich ja mit Variationsproblemen decken) auf Flächen ohne Tangentialebenen führen.

Ein einfaches Beispiel dieser Flächencategorie würden in erster Linie die Rotationsflächen constanter Krümmung sein, deren Axe die z-Axe ist.

Wir wollen hier wenigstens die Differentialgleichung derselben aufstellen.

Es sei also

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

und wir wollen suchen, ob man allgemein z so bestimmen kann, dass es eine Function von r allein ist. (Im Raum von drei Dimensionen ist das ja möglich.)

Wir setzen $r^2 = u$, und haben dann:

$$z_i = 2\frac{\partial z}{\partial u}x_i, \quad z_{ik} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x_i x_k,$$

$$z_{ii} = 2\frac{\partial z}{\partial u} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot x_i^2.$$

Durch diese Substitution verwandelt sich die Differentialgleichung in

$$\frac{\begin{vmatrix} 2z' + 4z''x_1^2 & 4z''x_1x_2 & \cdots & 4z''x_1x_n \\ 4z''x_2x_1 & 2z' + 4z''x_2^2 & \cdots & 4z''x_2x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 4z''x_nx_1 & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & 2z' + 4z''x_n^2 \end{vmatrix}}{(1 + 4x_1^2z'^2 \cdots + 4x_n^2z'^2)^{\frac{n}{2}+1}} = 1,$$

wo

$$\frac{\partial z}{\partial u} = z', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = z''$$

gesetzt ist.

Entwickelt man die Determinante, so kommt

$$\frac{2^n(z')^n + 2^{n+1}(z')^{n-1}(z'')}{(1 + 4uz'^2)^{\frac{n}{2}+1}} = 1.$$

Alle übrigen Ausdrücke fallen fort, weil jede Potenz $(z')^i(z'')^k$ mit einer Summe von identisch verschwindenden Determinanten multiplicirt im Endresultat erscheint.

Damit haben wir eine Differentialgleichung gewonnen, welche diese Rotationsflächen bestimmt, und es ist klar, dass es, da dieselbe von zweiter Ordnung ist, ausser den Kugeln, welche ihren Mittelpunkt auf der z-Axe haben, und deren Gleichung lautet

$$(z - a)^2 + u = 1$$

(die betreffende Lösung der Differentialgleichung ist

$$z - a = (-1)^n\sqrt{1 - u}\Big)$$

noch andere Rotationsflächen constanten positiven Krümmungsmasses giebt. Denn die Lösung, welche die Kugeln bestimmt, hat nur *eine* Integrationsconstante, während die Differentialgleichung doch von der *zweiten* Ordnung ist.

2. *Die Parallelflächen constanter Krümmung.* Wir wollen hier die innere Parallelfläche construiren und zeigen, dass in einem regulären Punkt derselben jede Ebene schneidet.

Die Krümmungsradien, welche den Hauptkrümmungsradien der Flächen constanter Krümmung entsprechen, sind wieder Hauptkrümmungsradien der inneren Parallelfläche und unterscheiden sich um die Einheit von denen der Fläche constanter Krümmung, also

$$\varrho_1 = r_1 - 1.$$

Hieraus folgt (da nicht alle ϱ_i negativ sein können, es wären sonst alle $r < 1$, was unmöglich ist), dass einige negativ, andere aber positiv sind.

Die innere Parallelfläche, welche durch die Gleichung

$$\zeta = 2\left(\frac{x_1^2}{\varrho_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{\varrho_1}\right) + \cdots$$

dargestellt wird (wenn $\varrho_i = 0$, so fällt das betreffende Glied in dieser Gleichung fort), beginnt also mit Gliedern zweiter Ordnung, welche eine indefinite Form darstellen, weil sie aus einer Summe von Quadraten mit Coefficienten besteht, unter denen sich sowohl positive wie negative befinden. Hieraus folgert man, dass alle Ebenen ausnahmslos, auch die Tangentialebene ($\zeta = 0$), in dem betreffenden Punkt die innere Parallelfläche schneiden.

3. *Die singulären Punkte.* Wir können nun auch leicht zeigen, dass in den Punkten N_k, welche den Nabelpunkten N_s des Hypersphäroides entsprechen, die Kernfläche den Charakter der negativen Krümmung nicht verliert.

Setzen wir nämlich in einem solchen Nabelpunkt (was bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems immer möglich ist):

$$z = \sqrt{1 - \Sigma x_i^2} + \psi,$$

wo ψ mit Gliedern $m(>2)^{\text{ter}}$ Ordnung beginnt, so bekommen wir für die Coordinaten ξ_i, ζ der Kernfläche die Reihenentwickelung:

$$\xi_i = x_i + \frac{-\dfrac{x_i}{\sqrt{1-\Sigma x_i^2}} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + \Sigma\left(\dfrac{-x_k}{\sqrt{1}} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)^2}}$$

also

$$\xi_i = \frac{\partial\psi^{(m)}}{\partial x_i} + \cdots$$

und

$$\zeta = z - \frac{1}{\sqrt{1 + \Sigma \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}} = (1 - m)\,\psi^{(m)}.$$

Ferner aber beginnt die Entwickelung der Gleichung

$$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix} - (1 + \Sigma z_i^2)^{\frac{n}{2}+1} = 0$$

wo für z die Substitution gemacht wird

$$z = \sqrt{1 - \Sigma x_k^2} + \psi$$

mit den Gliedern niedrigster Ordnung

$$(-1)^{m-1}\left(\frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \psi^{(m)}}{\partial x_n^2}\right).$$

Dieser Ausdruck muss also verschwinden. Hieraus folgt, dass $\psi^{(m)}$ und damit auch $\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x_i}$ immer indefinit ist, dass es also in keinem Punkte der Kernfläche eine abgrenzende Ebene giebt. —

Eine Kernfläche endlicher Ausdehnung ist also unmöglich, und hieraus folgt der Satz: *Die Hypersphäre ist das einzige Hypersphäroid.*

Focaleigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten im vierdimensionalen Raum.

Von

J. Sommer in Göttingen.

Einleitung.

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit den confocalen Mannigfaltigkeiten im R_4, welche durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}+\frac{t^2}{\delta-\tau}-1=0,$$

worin τ einen veränderlichen Parameter bedeutet, zusammengefasst sind. Wir beschränken uns also auf Mannigfaltigkeiten mit einem Mittelpunkt, und entwickeln für diese die Focaleigenschaften. Ueber projective Eigenschaften höherer quadratischer Mannigfaltigkeiten sind verschiedene Abhandlungen veröffentlicht worden. Cayley*) hat zuerst die Sätze von den Erzeugenden auf den Flächen 2ten Grades ausgedehnt auf die quadratischen Mannigfaltigkeiten im R_5. Herr Segre**) hat dann das Problem der Mannigfaltigkeiten, welche auf den quadratischen Mannigfaltigkeiten eines R_n gelegen sind, allgemein behandelt und eine Eintheilung der Schnitte von quadratischen Mannigfaltigkeiten, deren Ausartungen etc. gegeben, indem er die Weierstrass'schen Elementartheiler geometrisch deutet. Eine elegante Darstellung der, auf den quadratischen Mannigfaltigkeiten gelegenen, linearen Mannigfaltigkeiten hat Herr Klein***) gewonnen, durch die geometrische Interpretation des Abel'schen Theorems für hyperelliptische Integrale. Wir werden die Beweismethode von Herrn Klein später benützen und können damit umständliche Rechnungen vermeiden. Auch

*) A. Cayley: On the superlines of a quadric surface in a five-dimensional space. 1873. Coll. math. Papers. Bd. IX.

**) C. Segre: Studio sulle quadriche etc. Memorie della R. Accad. di Torino. t. XXXVI, 1885.

***) F. Klein: Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale. Math. Ann. Bd. 28, 1887.

werden wir uns der von Herrn Klein l. c. eingeführten Bezeichnung, wonach ein linearer Raum von n Dimensionen mit R_n und eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen und vom m^{ten} Grad mit $M_n^{(m)}$ bezeichnet wird, stets bedienen.

Enger als an diese Abhandlungen schliesst sich unsere Untersuchung an die Arbeiten von Herrn O. Staude*), über die Focaleigenschaften der Flächen 2^{ter} Ordnung im R_3 an. Herr Staude hat die Focaleigenschaften dieser Flächen von einer Verallgemeinerung des Graves'schen Theorems abgeleitet. J. Cl. Maxwell**) hat die von Herrn Staude gegebenen Fadenconstructionen, soweit sich dieselben auf gebrochene Focaldistanzen beziehen, anticipirt.

Wir werden diese Fadenconstructionen ausdehnen auf die $M_3^{(2)}$ im R_4. Zunächst beschäftigen wir uns in § 1 mit den vier Typen confocaler $M_3^{(2)}$ und den darauf liegenden Flächen 2^{ten} Grades nach einer Methode, welche auch für allgemeine $M_3^{(2)}$ anwendbar bleibt. Die ausgearteten $M_3^{(2)}$, zwischen den eigentlichen Mannigfaltigkeiten stehend, führen auf die Focalflächen § 2. Wir werden auf die Erweiterung der Focalstrahlen im R_3 geführt durch die Aufgabe, eine gebrochene Linie von einem festen Punkt im R_4 über ein Ellipsoid und dessen Focalellipse bis zu einem Brennpunkt derselben so zu ziehen, dass die Gesammtlänge ein Maximum oder Minimum wird. Für die verallgemeinerten Focalstrahlen, wie für die Tangenten an drei $M_3^{(2)}$ von verschiedenen Typen, lassen sich auf directe Weise Abel'sche Differentialgleichungen aufstellen, und insbesondere ist das Linienelement dieser Strahlen in den Differentialen der elliptischen Coordinaten linear ausdrückbar. Zugleich sind wir damit zu den Differentialgleichungen und dem Linienelement der geodätischen Linien***) auf den $M_3^{(2)}$ gelangt. Von Sätzen über geschlossene Linienzüge auf den $M_3^{(2)}$, welche aus geodätischen Linien und Krümmungslinien bestehen, sowie über geodätische Linien, analog denjenigen zwischen den Nabelpunkten auf dem Ellipsoid, leiten wir die Focaleigenschaften der Mittelpunktsflächen 2^{ten} Grades im R_3 ab, indem wir die Ausartungen der $M_3^{(2)}$ studiren. Schliesslich stellen wir unter Benützung analoger Methoden, wie sie Herr Staude zur Berechnung der gebrochenen Focaldistanzen im R_3 angewendet hat, die Fadenconstruction einer quadratischen Mannigfaltigkeit aus drei gegebenen Confocalen, sowie

*) O. Staude: Fadenconstructionen des Ellipsoids. Math. Ann. Bd. 20, 27, 50. — Die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Leipzig, B. G. Teubner, 1896.

**) J. C. Maxwell: On the cyclide. Quarterly Journ. of Pure and Applied Mathematics. Nr. 34, 1867. Scientific Papers II. Bd. — Vgl. ausserdem S. Finsterwalder: Fadenconstructionen des Ellipsoids. Math. Ann. Bd. 25.

***) W. Killing: Die Nichteuklidischen Raumformen. § 9. Leipzig, Teubner 1885. Schläfli, Crelle's J. Bd. 43.

aus den drei Focalflächen auf, und fassen noch die Focaleigenschaften der vier Typen $M_3^{(2)}$ im vierdimensionalen Raum in eine Gleichung zusammen.

Die Anregung zur vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn Professor Dr. Hilbert.

§ 1.

Eigenschaften der confocalen Mannigfaltigkeiten.

Die Mannigfaltigkeiten $M_3^{(2)}$ im linearen Raum von vier Dimensionen, welche durch die Gleichung:

$$\text{(1)} \qquad \frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}+\frac{t^2}{\delta-\tau}-1=0,$$

($\alpha>\beta>\gamma>\delta>0$; τ ist ein veränderlicher Parameter)

gegeben sind, bezeichnet man als ein System confocaler $M_3^{(2)}$ im R_4. Jeder Haupt-R_3 des Coordinatensystems, Coordinaten-R_3, schneidet das System (1) nach confocalen $M_2^{(2)}$; durch einen beliebigen reellen Punkt im R_4 gehen vier von einander verschiedene reelle $M_3^{(2)}$, deren Parameter den Ungleichungen

$$\alpha>\eta>\beta>\nu>\gamma>\mu>\delta>\lambda>-\infty$$

genügen und die elliptischen Coordinaten des Punktes genannt werden. Zwischen den orthogonalen und elliptischen Coordinaten eines Punktes bestehen die Relationen:

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} x^2=-\dfrac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)(\alpha-\eta)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}, & y^2=-\dfrac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)(\beta-\eta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)}, \\ z^2=-\dfrac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)(\gamma-\eta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)}, & t^2=-\dfrac{(\delta-\lambda)(\delta-\mu)(\delta-\nu)(\delta-\eta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}. \end{cases}$$

Sämmtliche Mannigfaltigkeiten des Systems (1) besitzen einen Mittelpunkt im Ursprung des Coordinatensystems und alle enthalten eine ∞^3 Schaar von reellen oder imaginären Geraden R_1, aber keine R_2. Indem wir nun statt τ die vier Parameter $\lambda \ldots \eta$ setzen, von denen jedoch keiner einen Extremwerth annehmen soll, erhalten wir im reellen Gebiet vier Typen wirklicher $M_3^{(2)}$, von denen folgende wichtige Eigenschaften besonders zusammengestellt sind.

a) *Typus* $\tau=\lambda$, wo $\delta>\lambda>-\infty$ ist. Diese $M_3^{(2)}$ werden von den Coordinaten-R_3 in Ellipsoiden geschnitten, wie überhaupt nur im Endlichen verlaufende, geschlossene $M_2^{(2)}$ auf diesem Typus liegen. Der Tangential-R_3 in einem reellen Punkt an die $M_3^{(2)}$ schneidet diese nach einem imaginären Kegel mit reeller Spitze. Die R_2, welche die Mannigfaltigkeit in einem Punkt berühren, haben mit derselben ein imaginäres Geradenpaar mit reellem Schnittpunkt gemeinsam. Alle R_1 dieses Typus

b) *Typus* $\tau = \mu$, wo $\gamma > \mu > \delta$ ist, wird von den Coordinaten-R_3 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ nach einmantligen Hyperboloiden und von $t = 0$ nach einem Ellipsoid geschnitten. Um nun weiter zu ermitteln, welche $M_2^{(2)}$ auf dem Typus möglich sind, kann man folgendermassen verfahren: Die $M_3^{(2)}$:

$$\frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} - \frac{t^2}{\mu - \delta} - 1 = 0,$$

werde geschnitten durch einen beliebigen R_3:

$$mx + ny + pz + qt - 1 = 0,$$

so ist für die im Unendlichen liegenden Punkte dieser Schnittfläche $t = \infty$, wenn wir daher mit t^2 bezw. t die Gleichungen durchdividiren, so erhalten wir für $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, die mit x', y', z' bezeichnet werden mögen, ein ∞^1 System von Werthen, welche den Mantellinien des Asymptotenkegels der Schnittfläche entsprechen. Je nachdem nun die Ebene:

$$mx' + ny' + pz' + q = 0,$$

das Ellipsoid:

$$\frac{x'^2}{\alpha - \mu} + \frac{y'^2}{\beta - \mu} + \frac{z'^2}{\gamma - \mu} - \frac{1}{\mu - \delta} = 0,$$

nach einer reellen Curve schneidet, berührt, oder nicht schneidet, ist dieser Asymptotenkegel reell, enthält nur eine reelle Gerade, oder ist imaginär, also ist die Schnittfläche entweder ein einmantliges oder zweimantliges Hyperboloid, ein elliptisches Paraboloid oder eine geschlossene Fläche, ein Ellipsoid. Ferner hat der Tangential-R_3 in einem reellen Punkt mit der $M_3^{(2)}$ einen reellen Kegel (von zwei Dimensionen) gemeinsam, die R_2 dagegen, welche in einem reellen Punkt berühren, ein reelles oder imaginäres Geradenpaar. Stellen die beiden in x, y, z, t linearen Gleichungen:

$$L = 0, \quad L_1 = 0,$$

einen die $M_3^{(2)}$ im Punkte P berührenden R_2 dar, und ist nicht eine der Gleichungen schon die Gleichung des Tangential-R_3 in diesem Punkt, so kann man stets einen Coefficienten ϱ so bestimmen, dass

$$L + \varrho L_1 = 0$$

den Tangential-R_3 im Berührungspunkt des R_2 repräsentirt, woraus folgt, dass der Tangential-R_2 die $M_3^{(2)}$ nach einem reellen oder imaginären Geradenpaar schneidet, je nachdem einer der beiden R_3

$$L = 0 \quad \text{oder} \quad L_1 = 0$$

die Mannigfaltigkeit nach einem einmantligen Hyperboloid oder einer der andern Flächen schneidet, und dass beide R_3 nach einmantligen Hyperboloiden schneiden, wenn einer derselben nach einem solchen schneidet.

Die R_3 durch einen reellen Punkt der $M_3^{(2)}$ können den Kegel, nach welchem der Tangential-R_3 dieses Punktes schneidet, nach einem reellen Geradenpaar treffen, oder berühren, oder nach einem imaginären Geradenpaar treffen. Dann schneidet der R_3 die $M_3^{(2)}$ resp. nach einem einmantligen Hyperboloid, nach einem Kegel, oder nach einer der andern Flächen.

c) *Typus* $\tau = \nu$, wo $\beta > \nu > \gamma$ ist, wird von den Coordinaten-R_3 $z = 0$, $t = 0$ nach einmantligen Hyperboloiden, durch $x = 0$, $y = 0$ nach zweimantligen Hyperboloiden geschnitten. Durch die gleiche Ueberlegung wie oben findet man weiter, dass auf der $M_3^{(2)}$ ausser diesen Flächen noch parabolische Hyperboloide liegen, dagegen keine elliptischen Paraboloide und keine geschlossenen Flächen. Die Tangentialgebilde verhalten sich ähnlich wie im Fall b); durch jeden Punkt des $M_3^{(2)}$ geht ein reeller Geradenkegel. Schneidet ein R_3 durch einen Punkt der $M_3^{(2)}$ diesen Kegel nach einem reellen Geradenpaar oder einem imaginären, so schneidet er die $M_3^{(2)}$ selbst nach einem einmantligen oder parabolischen Hyperboloid, bezw. nach einem zweimantligen Hyperboloid.

d) *Typus* $\tau = \eta$, $\alpha > \eta > \beta$, repräsentirt Mannigfaltigkeiten, welche nur die x-Axe in reellen, die andern Axen in imaginären Punkten schneidet. Die Coordinaten-R_3 $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ schneiden nach zweimantligen Hyperboloiden, $x = 0$ nach einer imaginären Fläche. Ausser diesen Flächen liegen noch reelle Ellipsoide, elliptische Paraboloide, aber keine einmantligen, oder parabolischen Hyperboloide auf der $M_3^{(2)}$, weil überhaupt keine reellen R_1 auf derselben liegen. Die Tangential-R_3 in reellen Punkten haben nur einen imaginären Kegel mit der Mannigfaltigkeit gemeinsam, die Tangential-R_2 in reellen Punkten schneiden stets nach einem imaginären Geradenpaar.

Die Typen a), d) und b), c) stehen unter einander wieder in engerer Beziehung; wie aus dem Trägheitsgesetz der quadratischen Formen folgt, können sie gegenseitig durch reelle lineare Transformation in einander übergeführt werden*).

Von diesen eigentlichen confocalen Mannigfaltigkeiten beweisen wir nun den Satz:

Satz. Legt man in den Berührungspunkten einer Tangente an drei bestimmte Mannigfaltigkeiten, etwa λ_0, μ_0, ν_0, die Tangential-R_3, welche sich dann in dieser gemeinsamen Tangente schneiden müssen, so bilden je zwei dieser Räume einen rechten Winkel**) mit einander.

*) Nach Herrn F. Klein werden die Typen λ und η als ovale, μ und ν als ringförmige und $\tau > \alpha$ als nulltheilige Mannigfaltigkeiten bezeichnet.

**) Der Winkel, welchen zwei R_3

$$lx + my + nz + pt + r = 0 \quad \text{und} \quad l_1 x + m_1 y + n_1 z + p_1 t + r_1 = 0$$

Zum Beweise dieses Satzes nehmen wir an, dass die gemeinsame Tangente die $M_3^{(2)}$ λ_0 im Punkt (a, b, c, d); μ_0 in (a_1, b_1, c_1, d_1) und ν_0 in (a_2, b_2, c_2, d_2) berührt und stellen die Gleichungen der Tangential-R_3 in diesen drei Punkten auf. Drückt man nun aus, dass die Punkte (a_1, b_1, c_1, d_1) und (a_2, b_2, c_2, d_2) in dem Tangential-R_3 des Punktes (a, b, c, d) liegen, und entsprechend für die anderen Punkte, dann erhalten wir durch die Subtraction je zweier zugeordneter Gleichungen, Ausdrücke vom Werth Null, die zugleich im Zähler der Brüche stehen, welche die cos der Winkel je zweier Tangentialräume angeben. Diese Tangential-R_3 stehen also auf einander senkrecht.

Der Satz gilt auch noch für den Fall, wo die Tangente in dem gemeinsamen Schnittgebilde je zweier $M_3^{(2)}$ des Systems liegt, d. h. die $M_3^{(2)}$, die durch die Gleichung (1) gegeben sind, schneiden sich unter rechten Winkeln, oder bilden ein System orthogonaler Mannigfaltigkeiten des R_4. Man bezeichnet daher analog den Verhältnissen im gewöhnlichen Raum die Schnittgebilde zweier $M_3^{(2)}$ von verschiedenen Typen als Krümmungsgebilde auf den Mannigfaltigkeiten.

Es ändert sich am Beweise des Satzes gar nichts, wenn wir die Forderung der Realität von λ_0, μ_0, ν_0 fallen lassen und für τ einfach drei reelle oder complexe von einander verschiedene Werthe gesetzt denken, d. h. irgend zwei Mannigfaltigkeiten τ_1, τ_2 schneiden sich orthogonal.

Durch die Gleichungen (2) ist gleichzeitig eine Darstellung einer einzelnen $M_3^{(2)}$ gegebenen, wenn man in den Formeln einen der Parameter λ, μ, ν, η constant nimmt, und der Krümmungsgebilde $M_2^{(4)}$, wenn man darin zwei Parameter constant nimmt, sowie der Krümmungslinien, wenn man drei Parameter constant und den vierten veränderlich annimmt; man ersieht aus dieser Darstellung der Krümmungsgebilde, dass diese in Bezug auf die Coordinaten-R_3 symmetrisch sind.

Es bezeichne wieder λ_0 eine bestimmte $M_3^{(2)}$, so gehen durch einen beliebigen Punkt derselben drei verschiedene Krümmungsgebilde $M_2^{(4)}$ (Krümmungsgebilde erster Stufe) und drei sich rechtwinklig schneidende Krümmungslinien (Krümmungsgebilde zweiter Stufe). Allgemein gehen durch jeden beliebigen Punkt im R_4 sechs Krümmungsgebilde erster Stufe und vier Krümmungslinien, von welchen je zwei sich rechtwinklig schneiden.

---

mit einande bilden, sei gegeben durch die Gleichung:

$$\cos\varphi = \frac{ll_1 + mm_1 + nn_1 + pp_1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 + p^2}\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}.$$

§ 2.

Die Focalflächen.

Bisher sind nur diejenigen $M_3^{(2)}$ untersucht worden, deren Parameter nicht mit einem der Grenzwerthe derselben zusammenfallen, es bleiben daher noch die Zwischenformen der verschiedenen Typen, die ausgearteten Räume $M_3^{(2)}$ mit speciellen Parametern übrig. Diese ausgearteten Räume sind die folgenden:

(a, a) $\tau = \lambda = -\infty$ ergiebt den ∞ fernen R_3 im R_4.

Nimmt λ von $-\infty$ an zu, so erhält man die $M_3^{(2)}$ a) des § 1, und mit

(a, b) $\lambda = \delta$ geht die allgemeine Gleichung (1) über in:

$$\frac{x^2}{\alpha-\delta} + \frac{y^2}{\beta-\delta} + \frac{z^2}{\gamma-\delta} + \frac{t^2}{0} - 1 = 0,$$

welche Gleichung nur einen Sinn hat, wenn wir darin $t = 0$ setzen, und den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$, welcher die Grenze von stets positiven Werthen darstellt, als positiv nehmen; die allgemeine $M_3^{(2)}$ des Typus a) geht also in die ausgeartete $M_3^{(2)}$ über, deren Punkte an die Bedingungen geknüpft sind:

$$(3a) \qquad t = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha-\delta} + \frac{y^2}{\beta-\delta} + \frac{z^2}{\gamma-\delta} - 1 \leqq 0,$$

d. h. die $M_3^{(2)}$ $\lambda = \delta$ ist die Gesammtheit der im Innern des Ellipsoids

$$(3) \qquad t = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha-\delta} + \frac{y^2}{\beta-\delta} + \frac{z^2}{\gamma-\delta} - 1 = 0$$

gelegenen Punkte.

Ferner sieht man leicht folgendes:

Die $M_3^{(2)}$ $\mu = \delta$ ist der im R_3 $t = 0$, ausserhalb des Ellipsoids (3) gelegene Raum.

Die sämmtlichen Punkte des Raumes $t = 0$ sind gegeben durch $\left.\begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\} = \delta$.

(b, c) Die $M_3^{(2)}$: $\begin{matrix}\mu = \gamma\\ \nu = \gamma\end{matrix}$ sind die im R_3 $z = 0$ $\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{ausserhalb}\end{matrix}$ des einmantligen Hyperboloids:

$$(4) \qquad z = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha-\gamma} + \frac{y^2}{\beta-\gamma} - \frac{t^2}{\gamma-\delta} - 1 = 0,$$

gelegenen Raumtheile.

(c, d) Die $M_3^{(2)}$: $\begin{matrix}\nu = \beta\\ \eta = \beta\end{matrix}$ sind die im R_3 $y = 0$ $\begin{matrix}\text{ausserhalb}\\ \text{innerhalb}\end{matrix}$ des zweimantligen Hyperboloids:

$$(5) \qquad y = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha-\beta} - \frac{z^2}{\beta-\gamma} - \frac{t^2}{\beta-\delta} - 1 = 0,$$

gelegenen Raumtheile.

(d, d) Die $M_3^{(2)}$ $\eta = \alpha$ ist der gesammte Coordinaten-R_3 $x = 0$, denn alle Punkte dieses Raumes genügen den Bedingungen:

$$(6a) \qquad x = 0, \quad -\frac{y^2}{\alpha-\beta} - \frac{z^2}{\alpha-\gamma} - \frac{t^2}{\alpha-\delta} - 1 < 0.$$

Wir haben also die Coordinaten-R_3 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$, den ∞ fernen R_3, in elliptischen Coordinaten gegeben durch resp.: $\eta = \alpha$; $\left.\begin{matrix}\eta\\ \nu\end{matrix}\right\} = \beta$; $\left.\begin{matrix}\nu\\ \mu\end{matrix}\right\} = \gamma$; $\left.\begin{matrix}\mu\\ \lambda\end{matrix}\right\} = \delta$; $\lambda = -\infty$. Die Flächen (3), (4), (5); zusammen mit der imaginären Fläche

$$(6) \qquad x = 0, \quad \frac{y^2}{\alpha-\beta} + \frac{z^2}{\alpha-\gamma} + \frac{t^2}{\alpha-\delta} + 1 = 0;$$

sind die *Focalflächen* der orthogonalen Mannigfaltigkeiten, die für das folgende sehr von Bedeutung sind, und die wir abkürzend mit resp.

$$E, \quad H_1, \quad H_2$$

bezeichnen. Sie schneiden die x-Axe in reellen Punkten, derart dass Scheitel, innerer und äusserer Brennpunkt der drei Flächen auf dieser Axe sich nur untereinander vertauschen. Die Flächen E und H_1 schneiden sich in vier imaginären Punkten, $(x, y, 0, 0)$; H_1 und H_2 schneiden sich in vier reellen Punkten, ferner E und H_2 in den Nabelpunkten des Ellipsoids; dagegen haben alle drei Flächen keinen Punkt mit einander gemeinsam.

Wie auf den eigentlichen Mannigfaltigkeiten giebt es auch auf den ausgearteten $M_3^{(2)}$ Krümmungsgebilde erster und zweiter Stufe, nämlich die Flächen und Schnittlinien der zu den Focalflächen confocalen Flächen, soweit sie innerhalb der Mannigfaltigkeiten liegen, und zwar gehen durch jeden Punkt drei Krümmungsgebilde jeder Art.

Wir führen noch folgenden, dem Orthogonalitätssatz der eigentlichen $M_3^{(2)}$ entsprechenden Satz, an:

Wenn man eine Gerade zieht, welche die drei Focalflächen schneidet und in diesen Schnittpunkten dann Tangential-R_3 legt an die Focalflächen, so stehen die drei R_3 durch die Gerade und je einen der Tangential-R_3 auf einander senkrecht.

§ 3.

Die Focaldistanzen.

Für die Focaleigenschaften der Mannigfaltigkeiten zweiten Grades ist folgendes Problem von grundlegender Wichtigkeit:

Aufgabe. Im R_4 ist von einem Punkt $P = (x, y, z, t)$ ein Linienzug nach einem Punkt $Q = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ des Ellipsoids:

$$t = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha - \delta} + \frac{y^2}{\beta - \delta} + \frac{z^2}{\gamma - \delta} - 1 = 0,$$

und von Q nach einem Punkt $R = (X, Y)$ der Focalellipse dieses Ellipsoids:

$$t = 0, \quad z = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha - \gamma} + \frac{y^2}{\beta - \gamma} - 1 = 0,$$

weiter von diesem Punkt R nach dem Brennpunkt $x = + d$ dieser Ellipse so zu ziehen, dass der gebrochene Linienzug einem Maximum oder Minimum entspricht. Oder anders ausgesprochen: Der Streckenzug (vom festen Punkt (x, y, z, t) nach dem festen Punkt $(+ d, 0, 0, 0)$):

$$(7) \quad r = \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2 + (z-\mathfrak{z})^2 + t^2} + \sqrt{(\mathfrak{x}-X)^2 + (\mathfrak{y}-Y)^2 + \mathfrak{z}^2} + \sqrt{(X-d)^2 + Y^2},$$

wo für die Unbekannten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und (X, Y) die Nebenbedingungen bestehen:

$$(8) \qquad \frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha - \delta} + \frac{\mathfrak{y}^2}{\beta - \delta} + \frac{\mathfrak{z}^2}{\gamma - \delta} - 1 = 0,$$

$$(9) \qquad \frac{X^2}{\alpha - \gamma} + \frac{Y^2}{\beta - \gamma} - 1 = 0,$$

soll zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden.

Dieses Problem lösen wir in folgender Weise: Zunächst bemerken wir, dass der Linienzug bei Veränderung der Punkte Q und R auf dem Ellipsoid bez. der Focalellipse immer endlich bleibt und sich stetig ändert, die Gesammtlänge muss also kleinste und grösste Werthe auch einmal annehmen. Setzen wir voraus, dass die Strecke $PQRF_0$ einem Extremwerth entspricht, so halten wir einmal den Punkt Q auf dem Ellipsoid fest und lassen R auf der Focalellipse beweglich. Der Linienzug QRF_0 ändert sich dann stetig und nimmt für sich gewisse Extremwerthe an. Damit nun der Ausdruck (7) ein Maximum oder Minimum darstellt, muss auch die Streckensumme QRF_0 einem Maximum oder Minimum entsprechen bei festgehaltenem Punkt Q; d. h. wenn (7) den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so muss auch bei festem $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$,

$$r_1 = \sqrt{(\mathfrak{x}-X)^2+(\mathfrak{y}-Y)^2+\mathfrak{z}^2}+\sqrt{(X-d)^2+Y^2} = \varrho_1+\varrho_2,$$

mit der Nebenbedingung:

$$0 = \frac{X^2}{\alpha-\gamma}+\frac{Y^2}{\beta-\gamma}-1,$$

einen Extremwerth annehmen. Durch dieselbe Ueberlegung zeigt man, dass das Erfülltsein der Bedingungen der Aufgabe nothwendig zur Voraussetzung hat, dass bei festem (X, Y), die Summe

$$r_2 = \sqrt{(\mathfrak{x}-x)^2+(\mathfrak{y}-y)^2+(\mathfrak{z}-z)^2+t^2}+\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+z^2} = \varrho+\varrho_1,$$

mit der Nebenbedingung:

$$0 = \frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha-\delta}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\beta-\delta}+\frac{\mathfrak{z}^2}{\gamma-\delta}-1,$$

einen Grenzwerth annimmt. Es ist also die Aufgabe in zwei Theile zerlegt, welche wir nun behandeln.

Das erste dieser beiden Theilprobleme, nämlich bei festgehaltenem $Q = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ den Punkt $R = (X, Y)$ auf der Focalellipse so bestimmen, dass QRF_0 ein Maximum oder Minimum wird, hat Herr Staude gelöst*). Man lässt zu dieser Bestimmung X und Y variiren auf der Ellipse, und zwar giebt man X, Y solche Zuwächse, dass der Punkt nach der Nebenbedingung sich auf der Tangente im Punkt X, Y bewegt. Wir fällen nun von Q und F_0 Lote auf die Tangente im Punkt R an die Ellipse, die Längen dieser Lote seien resp. h_1 und h, die Projectionen von RQ und RF_0 auf die Tangente ξ_1 und ξ, dann erhält man:

$$r_1 = \sqrt{\xi_1^2+h_1^2}+\sqrt{\xi^2+h^2}.$$

Verändert sich der Punkt R auf der Tangente der Ellipse um Δs, wobei h_1 und h sich nicht ändern, so ist die Variation von r_1:

$$\Delta r_1 = \frac{\xi_1 \Delta s}{\sqrt{\xi_1^2+h_1^2}}+\frac{\xi \Delta s}{\sqrt{\xi^2+h^2}}+ \text{Glieder höherer Ordnung,}$$

und damit r_1 einen Extremwerth annimmt, muss angenommen werden:

$$\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1+h_1^2}}+\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+h^2}} = 0.$$

In dieser Formel bedeuten $\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1+h_1^2}}$ und $\frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2+h^2}}$ die cos der Winkel φ_1 und φ, welche die Geraden RQ und RF_0 mit der Tangente einschliessen, deshalb hat man in anderer Schreibweise:

$$\cos\varphi_1+\cos\varphi = 0.$$

Hierin ist der Satz ausgesprochen, dass für den Fall eines Maximums oder Minimums der Summe $r_1 = QRF_0$, *die beiden Linien RQ und RF_0*

*) Vergl. Staude, Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung, § 16.

mit den beiden entgegengesetzten Richtungen der Tangente im Punkte R gleiche Winkel einschliessen.

Aus diesem Satz folgt sodann in bekannter Weise, dass der Strahl QR nicht nur die Focalellipse sondern auch die Focalhyperbel des Ellipsoids schneiden muss, oder der Strahl QR ist ein von Q ausgehender Focalstrahl.

Den zweiten Theil unserer Aufgabe, bei festgehaltenen Punkten R und P im R_4 einen Punkt Q auf dem Ellipsoid zu bestimmen, dass PQR einen Extremwerth annimmt, lösen wir in ähnlicher Weise, dadurch, dass wir den Punkt Q auf einer *beliebigen* Tangente in Q an das Ellipsoid variiren lassen, wobei wir zu dem Ergebniss kommen:

Satz: *Wenn der Punkt Q auf dem Ellipsoid den Bedingungen des Maximums oder Minimums der Streckensumme PQR entsprechend bestimmt ist, dann schliessen QR und QP mit entgegengesetzten Richtungen jeder beliebigen Tangente in Q gleiche Winkel ein.*

Zur Veranschaulichung dieses Resultates können wir die Aufgabe auf den dreidimensionalen Raum specialisiren, indem wir den Punkt P innerhalb des Ellipsoids annehmen. Dann sagt der Satz aus, dass zwei Linien QR und PQ, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen, mit der Normale des Ellipsoids in Q in einer Ebene liegen und dass ihr Winkel durch die Normale halbirt wird. Da nun der Theil RQ ein Focalstrahl ist, so gilt dies auch für PQ, weil bekanntlich die vier von einem Punkt Q ausgehenden Focalstrahlen in Paaren angeordnet werden können, deren Winkel durch die Normalen der drei confocalen Flächen durch Q, halbirt werden.

Um den Satz, nach dem sich die Lage von QP bestimmt, geometrisch zu deuten, fragen wir nach dem geometrischen Ort der Punkte P im R_4, für welche der Linienzug $PQRF_0$ durch einen festen Punkt Q auf dem Ellipsoid geht.

Sei nun zunächst allgemein:

$$x = pt, \quad y = qt, \quad z = rt,$$

eine feste Gerade im R_4, so suchen wir alle Geraden durch den Coordinatenanfang, welche mit jeder Geraden des R_2: $z = 0$, $t = 0$, denselben Winkel einschliessen wie die feste Gerade.

Der Winkel, welchen die feste Gerade mit der veränderlichen,

$$x = my, \quad z = 0, \quad t = 0,$$

einschliesst, ist gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{mp + q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + 1}\,\sqrt{m^2 + 1}};$$

und ebenso ist der Winkel, den die gesuchten Geraden:

$$x = \alpha t; \quad y = \beta t; \quad z = \gamma t,$$

mit der veränderlichen einschliessen:

$$\cos\varphi_1 = \frac{m\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1}\sqrt{m^2+1}}.$$

Daher erhält man aus der Beziehung:

$$\varphi = \varphi_1,$$

den geometrischen Ort der gesuchten Geraden:

$$\begin{cases} qx - py = 0, \\ (q^2+r^2+1)x^2 - p^2(y^2+z^2+t^2) = 0. \end{cases}$$

Auf unsern speciellen Fall angewendet heisst dies:

Die beiden Geraden QR und QP liegen mit dem Normal-R_2 in Q zu dem Ellipsoid, in einem R_3 und bilden gleiche Winkel mit der Normale.

Wir werden im nächsten Paragraphen im Zusammenhang mit andern Problemen zeigen, dass der Strahl PQ im R_4 ausser dem Ellipsoid noch die beiden zu diesem gehörigen Focalflächen H_1 und H_2 schneidet, wir führen dieses Resultat jedoch hier schon an um das Problem nach der algebraischen Seite soweit möglich hier verfolgen zu können. Zu diesem Zwecke ist es auch erforderlich, neben dem bis jetzt betrachteten Maximum- oder Minimumproblem für die Streckensumme $PQRF_0$, das gleiche Problem für $PQ'R'F_0'$ also einem Linienzug nach dem zweiten Brennpunkt $(-d,0,0,0)$ der Focalellipse zu betrachten, wir finden auch für diesen Fall die Bedingung, dass der Strahl PQ die drei Focalflächen E, H_1 und H_2 schneiden muss. Indem wir dann, mit Verweis auf unsere Gleichung (7):

$$r = \varrho + \varrho_1 + \varrho_2, \tag{7}$$

die Substitution machen:

$$4s = r - \varrho - e \quad \text{oder} \quad 4s = -r' + \varrho' + e,$$

(die gestrichenen Buchstaben gelten bei Benützung des zweiten Brennpunkts) können wir uns der von Herrn Staude, Math. Annalen Bd. 50, § 5 aufgestellten Gleichung für s bedienen, wobei wir zunächst also $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ als constant ansehen. Diese Gleichung ist, wenn $d^2 = \alpha - \beta$, $e^2 = \alpha - \gamma$, $f^2 = \alpha - \delta$ gesetzt ist, die folgende:

$$s^4 - \frac{1}{8}(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2+d^2+e^2)s^2 - \frac{1}{8}de\mathfrak{x}s$$
$$+\frac{1}{256}\{(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2+f^2)^2 - 4e^2\mathfrak{x}^2 - 4f^2\mathfrak{y}^2\} = 0.$$

s enthält die Grösse ϱ, welche von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ abhängig ist. Ferner haben wir neben

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{\alpha-\delta} + \frac{\mathfrak{y}^2}{\beta-\delta} + \frac{\mathfrak{z}^2}{\gamma-\delta} - 1 = 0;$$

aus der weiteren Bedingung für PQ, nämlich die drei Focalflächen zu schneiden, die Gleichungen:

$$\frac{(y\mathfrak{z}-z\mathfrak{y})^2}{\beta-\gamma}+\frac{(\mathfrak{z}x-\mathfrak{x}z)^2}{\alpha-\gamma}-\frac{t^2\mathfrak{z}^2}{\gamma-\delta}-(\mathfrak{z}-z)^2=0$$

und

$$\frac{(x\mathfrak{y}-y\mathfrak{x})^2}{\alpha-\beta}-\frac{(y\mathfrak{z}-z\mathfrak{y})^2}{\beta-\gamma}-\frac{t^2\mathfrak{y}^2}{\beta-\delta}-(\mathfrak{y}-y)^2=0.$$

Wir würden dann eine Gleichung für r, r' allein bekommen, wenn wir die Unbekannten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ aus den vier letzten Gleichungen eliminirten und eine Gleichung aufstellten, die nur noch von r, x, y, z, t mit constanten Grössen abhängt. Diese Elimination stösst aber auf bedeutende Schwierigkeiten und wir werden dieselbe umgehen, indem wir auf Grund der bisherigen Resultate das Problem mit transcendenten Methoden behandeln.

§ 4.

Die Tangentialkegel.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Aufgabe behandeln, verschiedene im R_3 für confocale Flächen geltende Sätze*) zu verallgemeinern.

Es sei wieder das System confocaler $M_3^{(2)}$ gegeben:

$$\frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}+\frac{t^2}{\delta-\tau}-1=0, \tag{1}$$

und ein beliebiger Punkt (a, b, c, d) im R_4. Dann ist der Polar-R_3 dieses Punktes in Bezug auf eine der $M_3^{(2)}$ des Systems:

$$\frac{ax}{\alpha-\tau}+\frac{by}{\beta-\tau}+\frac{cz}{\gamma-\tau}+\frac{dt}{\delta-\tau}-1=0. \tag{8}$$

Nehmen wir in dieser Gleichung τ veränderlich, so erhalten wir als Umhüllung aller R_3 (8) eine Curve vom 4ten Grad. Die Gleichungen (1) und (8) zusammen, stellen den geometrischen Ort der Berührungspunkte der vom Punkt (a, b, c, d) an die $M_3^{(2)}$ mit dem Parameter τ, gelegten Tangenten dar, die sämmtlichen Geraden R_1 durch den Punkt, welche diesen Ort treffen, liegen auf einem Kegel von drei Dimensionen, dessen Gleichung leicht aufzustellen ist. Für drei bestimmte verschiedene Typen $M_3^{(2)}$ des Systems, also für $\tau = \lambda_0, \mu_0, \nu_0$ werden die Gleichungen dieser Tangentialkegel:

---

*) Killing, die Nichteuklidischen Raumformen § 9.

$$(9)\quad \frac{(ay-bx)^2}{(\alpha-\lambda_0)(\beta-\lambda_0)}+\frac{(bz-cy)^2}{(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)}+\frac{(cx-az)^2}{(\alpha-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)}+\frac{(at-dx)^2}{(\alpha-\lambda_0)(\delta-\lambda_0)}$$
$$+\frac{(dy-bt)^2}{(\beta-\lambda_0)(\delta-\lambda_0)}+\frac{(ct-dz)^2}{(\gamma-\lambda_0)(\delta-\lambda_0)}-\frac{(x-a)^2}{\alpha-\lambda_0}-\frac{(y-b)^2}{\beta-\lambda_0}-\frac{(z-c)^2}{\gamma-\lambda_0}$$
$$-\frac{(t-d)^2}{\delta-\lambda_0}=0,$$

sowie die zwei entsprechenden Gleichungen, in denen μ_0 und ν_0 statt λ_0 steht. Diese drei Gleichungen sind in $x-a$, $y-b$, $z-c$, $t-d$ homogen, man kann also mit $t-d$ durchdividiren und erhält dann für die drei Quotienten $\frac{x-a}{t-d}, \cdots$ drei Gleichungen zweiten Grades. Sind ferner die drei Tangentenkegel alle reell, was eintritt, wenn der Punkt (a, b, c, d) ausserhalb der drei Flächen liegt, dann ergeben die drei Gleichungen acht reelle Werthsysteme für die Quotienten. Man sieht dies, indem man die drei Gleichungen als Gleichungen von Flächen zweiten Grades ansieht, die sich gegenseitig durchsetzen. Oder wir erhalten den Satz:

Die drei Tangentialkegel von einem Punkt (a, b, c, d) an die $M_3^{(2)}$ λ_0, μ_0, ν_0 schneiden sich in acht reellen Strahlen, wenn der Punkt (a,b,c,d) ausserhalb der drei Mannigfaltigkeiten liegt.

Von besonderem Interesse sind diejenigen Fälle, in welchen $\lambda_0=\delta$; $\mu_0=\gamma$; $\nu_0=\beta$ gesetzt ist. Wir erhalten dann die Kegel, durch welche die Focalflächen E, H_1 und H_2 von einem beliebigen Punkt aus projicirt werden: die *Focalkegel*.

Die directe Berechnung der Gleichungen dieser Focalkegel lehrt, dass sie aus den Gleichungen (9) abgeleitet werden können, indem wir diese mit resp. $\delta-\lambda_0$, $\gamma-\mu_0$, $\beta-\nu_0$ multipliciren und dann $\lambda_0=\delta$, $\mu_0=\gamma$, $\nu_0=\beta$ setzen. Die gesuchten Gleichungen sind:

Kegel über dem Focalellipsoid:

$$(10)\qquad \frac{(at-dx)^2}{\alpha-\delta}+\frac{(dy-bt)^2}{\beta-\delta}+\frac{(ct-dz)^2}{\gamma-\delta}-(t-d)^2=0;$$

Kegel über dem Focalhyperboloid H_1:

$$(11)\qquad \frac{(bz-cy)^2}{\beta-\gamma}+\frac{(cx-az)^2}{\alpha-\gamma}-\frac{(ct-dz)^2}{\gamma-\delta}-(z-c)^2=0;$$

Kegel über dem Focalhyperboloid H_2:

$$(12)\qquad \frac{(ay-bx)^2}{\alpha-\beta}-\frac{(bz-cy)^2}{\beta-\gamma}-\frac{(dy-bt)^2}{\beta-\delta}-(y-b)^2=0.$$

Diese Gleichungen gelten allgemein für jeden Punkt (a, b, c, d), welcher nicht in einem Coordinaten-R_3 liegt, die drei Kegel sind dann stets reell und schneiden sich in acht reellen Strahlen, die wir Focalstrahlen im R_4 nennen können, wir haben also den

Satz. *Durch jeden reellen Punkt im R_4, der nicht in einem Coordi-ten-R_3 liegt, gehen acht reelle getrennte Focalstrahlen.*

Um die Eigenschaften der Focalkegel besser zu erkennen, wollen wir ·e Gleichung auf ein neues Coordinatensystem durch den Punkt P be-hen. Durch diesen Punkt gehen vier $M_3^{(2)}$ λ, μ, ν, η, welche sich ortho-nal schneiden, ebenso wie die Tangential-R_3 im Punkt P an die $M_3^{(2)}$. ese vier Tangential-R_3 sollen nun die Coordinaten-R_3 des neuen Coordi-tensystems sein, wozu wir noch hinzufügen, um die Lage des Coordi-tensystems eindeutig festzulegen, dass die Coordinatenaxen (die Normalen r $M_3^{(2)}$) im Sinne der wachsenden λ, μ, ν, η positiv genommen werden llen. Die vier Tangential-R_3, oder die neuen Coordinaten-R_3 bezogen f das alte Coordinatensystem sind dann:

3)
$$\begin{cases} \dfrac{a(X-a)}{\alpha-\lambda}+\dfrac{b(Y-b)}{\beta-\lambda}+\dfrac{c(Z-c)}{\gamma-\lambda}+\dfrac{d(T-d)}{\delta-\lambda}=0, \\ \dfrac{a(X-a)}{\alpha-\mu}+\dfrac{b(Y-b)}{\beta-\mu}+\dfrac{c(Z-c)}{\gamma-\mu}+\dfrac{d(T-d)}{\delta-\mu}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Nun sei (x, y, z, t) ein beliebiger Punkt im alten System; $(\xi, \chi, \zeta, \vartheta)$ ne rechtwinkligen Coordinaten im neuen System, also zugleich die itfernungen des Punktes von den Tangential-R_3, so bestehen die Be-hungen:

ła)
$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{l}\left\{\frac{a(x-a)}{\alpha-\lambda}+\frac{b(y-b)}{\beta-\lambda}+\frac{c(z-c)}{\gamma-\lambda}+\frac{d(t-d)}{\delta-\lambda}\right\}, \\ \chi &= -\frac{1}{m}\left\{\frac{a(x-a)}{\alpha-\mu}+\frac{b(y-b)}{\beta-\mu}+\frac{c(z-c)}{\gamma-\mu}+\frac{d(t-d)}{\delta-\mu}\right\}, \\ \zeta &= -\frac{1}{n}\left\{\frac{a(x-a)}{\alpha-\nu}+\frac{b(y-b)}{\beta-\nu}+\frac{c(z-c)}{\gamma-\nu}+\frac{d(t-d)}{\delta-\nu}\right\}, \\ \vartheta &= -\frac{1}{p}\left\{\frac{a(x-a)}{\alpha-\eta}+\frac{b(y-b)}{\beta-\eta}+\frac{c(z-c)}{\gamma-\eta}+\frac{d(t-d)}{\delta-\eta}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l^2 &= \frac{a^2}{(\alpha-\lambda)^2}+\frac{b^2}{(\beta-\lambda)^2}+\frac{c^2}{(\gamma-\lambda)^2}+\frac{d^2}{(\delta-\lambda)^2}, \\ m^2 &= \frac{a^2}{(\alpha-\mu)^2}+\frac{b^2}{(\beta-\mu)^2}+\frac{c^2}{(\gamma-\mu)^2}+\frac{d^2}{(\delta-\mu)^2}, \end{aligned}$$

. gesetzt ist.

Indem man zu den Gleichungen (14a) die Bedingung hinzufügt

$$\xi^2+\chi^2+\zeta^2+\vartheta^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+(t-d)^2,$$

iält man die Beziehungen:

$$a^2\left\{\frac{1}{l^2(\alpha-\lambda)^2}+\frac{1}{m^2(\alpha-\mu)^2}+\frac{1}{n^2(\alpha-\nu)^2}+\frac{1}{p^2(\alpha-\eta)^2}\right\}=1$$

und entsprechend in β, γ, δ, ferner:

$$ab\left\{\frac{1}{l^2(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)}+\frac{1}{m^2(\alpha-\mu)(\beta-\mu)}+\frac{1}{n^2(\alpha-\nu)(\beta-\nu)}+\frac{1}{p^2(\alpha-\eta)(\beta-\eta)}\right\}=0,$$

nebst fünf weiteren entsprechenden Relationen, welche nöthig sind um aus dem Gleichungssystem (14a) die Grössen x, y, z, t in den $\xi, \chi, \zeta, \vartheta$ auszudrücken. Mit ihnen erhält man:

$$(14)\quad \begin{cases} x-a=-a\left\{\dfrac{\xi}{l(\alpha-\lambda)}+\dfrac{\chi}{m(\alpha-\mu)}+\dfrac{\zeta}{n(\alpha-\nu)}+\dfrac{\vartheta}{p(\alpha-\eta)}\right\}, \\ y-b=-b\left\{\dfrac{\xi}{l(\beta-\lambda)}+\dfrac{\chi}{m(\beta-\mu)}+\dfrac{\zeta}{n(\beta-\nu)}+\dfrac{\vartheta}{p(\beta-\eta)}\right\}, \\ z-c=-c\left\{\dfrac{\xi}{l(\gamma-\lambda)}+\dfrac{\chi}{m(\gamma-\mu)}+\dfrac{\zeta}{n(\gamma-\nu)}+\dfrac{\vartheta}{p(\gamma-\eta)}\right\}, \\ t-d=-d\left\{\dfrac{\xi}{l(\delta-\lambda)}+\dfrac{\chi}{m(\delta-\mu)}+\dfrac{\zeta}{n(\delta-\nu)}+\dfrac{\vartheta}{p(\delta-\eta)}\right\}. \end{cases}$$

Tragen wir diese Werthe in die Gleichungen (10), (11), (12) ein, so erhalten wir die Gleichungen der Focalkegel, bezogen auf das neue Coordinatensystem:

$$(15)\quad (\delta-\lambda)(\delta-\mu)(\delta-\nu)(\delta-\eta)\left\{\frac{\xi^2}{\delta-\lambda}+\frac{\chi^2}{\delta-\mu}+\frac{\zeta^2}{\delta-\nu}+\frac{\vartheta^2}{\delta-\eta}\right\}=0,$$

$$(16)\quad (\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)(\gamma-\eta)\left\{\frac{\xi^2}{\gamma-\lambda}+\frac{\chi^2}{\gamma-\mu}+\frac{\zeta^2}{\gamma-\nu}+\frac{\vartheta^2}{\gamma-\eta}\right\}=0,$$

$$(17)\quad (\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)(\beta-\eta)\left\{\frac{\xi^2}{\beta-\lambda}+\frac{\chi^2}{\beta-\mu}+\frac{\zeta^2}{\beta-\nu}+\frac{\vartheta^2}{\beta-\eta}\right\}=0,$$

und in dieser Form zeigen die Gleichungen, dass die drei Focalkegel eines beliebigen Punktes im R_4, der in keinem Coordinaten-R_3 liegt, die Normalen der confocalen $M_3^{(2)}$ dieses Punktes zu Axen haben. Es ist ferner nicht schwer die Definition der confocalen Kegel im R_3 auf den R_4 zu übertragen, und die Eigenschaft der Homofocalität für diese Kegel im R_4 zu erweisen. Insbesondere ersieht man aus den Gleichungen (15)—(17), dass die acht Focalstrahlen des Punktes P reell sind. Die Gleichungen derselben ergeben sich, wie folgt:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi}{\vartheta}=\pm\sqrt{-\dfrac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\delta-\lambda)(\eta-\nu)(\eta-\mu)}{(\beta-\eta)(\gamma-\eta)(\delta-\eta)(\lambda-\nu)(\lambda-\mu)}}, \\ \dfrac{\chi}{\vartheta}=\pm\sqrt{-\dfrac{(\beta-\mu)(\gamma-\mu)(\delta-\mu)(\eta-\nu)(\eta-\lambda)}{(\beta-\eta)(\gamma-\eta)(\delta-\eta)(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}}, \\ \dfrac{\zeta}{\vartheta}=\pm\sqrt{-\dfrac{(\beta-\nu)(\gamma-\nu)(\delta-\nu)(\eta-\lambda)(\eta-\mu)}{(\beta-\eta)(\gamma-\eta)(\delta-\eta)(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}}, \end{cases}$$

weil diese mit Berücksichtigung der acht verschiedenen Vorzeichencombinationen acht von einander verschiedenen Strahlen entsprechen. Aus der Darstellung (14) der Focalstrahlen folgt unmittelbar der Satz:

Satz. *Die acht Focalstrahlen, welche von einem beliebigen Punkt im* R_4 *ausgehen, lassen sich in vierfacher Weise in vier Paaren von Strahlen anordnen, so dass jedes Paar mit einer der vier* $M_3^{(2)}$*-Normalen in einem* R_2 *liegt, und die Winkel dieser Paare durch die Normale halbirt werden.*

Von dem bisher ausgeschlossenen Vorkommniss, dass die Spitze der Kegel in einem Coordinaten-R_3 gelegen ist, wollen wir gleich den noch specielleren Fall betrachten, in dem die Spitze P der Focalkegel auf einer Focalfläche selbst liegt; wir nehmen $d = 0$, der Punkt P soll also auf dem Focalellipsoid liegen. Der Kegel über dem Focalellipsoid besteht aus der Gesammtheit der Strahlen von P nach allen Punkten des Ellipsoids und diese füllen den ganzen linearen Raum $t = 0$ aus. Die beiden andern Focalkegel erhalten wir aus (11) und (12) mit $d = 0$:

$$(19) \qquad \frac{(cx - az)^2}{\alpha - \gamma} + \frac{(bz - cy)^2}{\beta - \gamma} - \frac{c^2t^2}{\gamma - \delta} - (z - c)^2 = 0,$$

$$(20) \qquad \frac{(ay - bx)^2}{\alpha - \beta} - \frac{(bz - cy)^2}{\beta - \gamma} - \frac{b^2t^2}{\beta - \delta} - (y - b)^2 = 0.$$

Auf diese Gleichungen wenden wir wieder eine Coordinatentransformation an, indem wir den Ursprung des neuen Coordinatensystems nach dem Punkt P auf dem Ellipsoid legen und die Veränderliche t ungeändert lassen, es findet dabei nur eine Drehung des Systems x, y, z statt. Nehmen wir die Normale des Ellipsoids und der zum Ellipsoid confocalen Flächen durch P in $t = 0$, als neue Axen, so werden die Gleichungen der Kegel durch ähnliche Transformationsformeln wie in Nr. (14); aber mit $t = \chi$, auf die Form gebracht:

$$(16\text{a}) \qquad (\gamma - \delta)^2(\gamma - \nu)(\gamma - \eta)\left\{\frac{\xi^2}{\gamma - \delta} + \frac{\chi^2}{\gamma - \delta} + \frac{\zeta^2}{\gamma - \nu} + \frac{\vartheta^2}{\gamma - \eta}\right\} = 0,$$

$$(17\text{a}) \qquad (\beta - \delta)^2(\beta - \nu)(\beta - \eta)\left\{\frac{\xi^2}{\beta - \delta} + \frac{\chi^2}{\beta - \delta} + \frac{\zeta^2}{\beta - \nu} + \frac{\vartheta^2}{\beta - \eta}\right\} = 0,$$

also gelten auch für die specielle Lage der Kegelspitze noch die Gleichungen (16) und (17), man braucht darin nur $\lambda = \mu = \delta$ zu setzen. Die Kegel (16a) und (17a), durch welche H_1 und H_2 aus einem Punkt auf C projicirt werden, sind Kegel mit zwei einander gleichen Axen. Auf diesen Kegeln liegen Scharen von Rotationsflächen zweiten Grades, der Kegel (16a) wird durch alle ebenen R_3 nach Flächen zweiten Grades geschnitten, die ins Unendliche gehen. Auf dem Kegel (17a) liegen zwei Scharen von Kugeln, d. h. es giebt zwei verschiedene Scharen R_3, welche diesen Kegel nach Kugeln schneiden. Wird nämlich dieser Kegel:

$$\frac{\xi^2}{\beta-\delta}+\frac{\chi^2}{\beta-\delta}+\frac{\zeta^2}{\beta-\nu}-\frac{\vartheta^2}{\eta-\beta}=0,$$

durch zwei R_3:

$$-\frac{\zeta}{c_1}+\frac{\vartheta}{d_1}-\varrho=0 \text{ und } \frac{\zeta}{c_1}+\frac{\vartheta}{d_1}-\varrho=0,$$

oder zusammengefasst:

$$-\frac{\zeta^2}{c_1{}^2}+\left(\frac{\vartheta}{d_1}-\varrho\right)^2=0$$

geschnitten, so geht durch die Schnittfläche auch die $M_3^{(2)}$:

$$\frac{\xi^2}{\beta-\delta}+\frac{\chi^2}{\beta-\delta}+\frac{\zeta^2}{\beta-\nu}-\frac{\vartheta^2}{\eta-\beta}+\left[-\frac{\zeta^2}{c_1{}^2}+\left(\frac{\vartheta}{d_1}-\varrho\right)^2\right]=0,$$

hindurch, worin wir c_1 und d_1 so bestimmen können, dass diese Gleichung die Form bekommt:

$$\xi^2+\chi^2+\zeta^2+(\vartheta-\varrho_1)^2-r^2=0,$$

und weil diese $M_3^{(2)}$ durch die beiden Scharen von R_3 nach Kugeln geschnitten wird, so gilt dies auch für den Kegel.

Insbesondere hat man noch folgenden *Satz:*

Der geometrische Ort aller Punkte, von welchen aus ein Ellipsoid E durch Kegel projicirt wird, auf denen zwei Scharen von Kugeln liegen, sind die beiden Hyperboloide H_1 und H_2, welche mit E Focalflächen eines confocalen Systems von $M_3^{(2)}$ sind.

Die Gleichungen (16a) und (17a) stellen zusammen eine Fläche von zwei Dimensionen dar, über die wir noch näheres feststellen können. Durch Combination der beiden Gleichungen folgt, dass die Schnittfläche auch in:

$$\frac{\nu-\delta}{(\nu-\gamma)(\beta-\nu)}\zeta^2-\frac{\eta-\delta}{(\eta-\gamma)(\eta-\beta)}\vartheta^2=0$$

liegt, oder da diese Gleichung zerfällt, durch die beiden R_3:

$$(21)\qquad \sqrt{\frac{\nu-\delta}{(\nu-\gamma)(\beta-\nu)}}\,\zeta\mp\sqrt{\frac{\eta-\delta}{(\eta-\gamma)(\eta-\beta)}}\,\vartheta=0$$

oder:

$$C\zeta\mp D\vartheta=0,$$

auf *einer* der Kegelflächen ausgeschnitten wird. Combinirt man die beiden Kegelgleichungen in der Weise, dass man die eine mit einem Factor multiplicirt zu der andern addirt, so kann dieser Factor so bestimmt werden, dass die Gleichung die Form bekommt

$$\xi^2+\chi^2+\zeta^2-k^2\vartheta^2=0$$

was geometrisch bedeutet, dass die Schnittfläche auf einem Rotationskegel liegt. Dieser wird aber durch die Räume

$$\zeta\mp\varkappa\vartheta=0$$

selbst wieder in Rotationskegeln von zwei Dimensionen geschnitten, also zerfällt der Kegel (16a) und (17a) in zwei Rotationskegel.

Satz: Die Focalkegel von einem Punkt P des Focalellipsoids aus über H_1 und H_2 schneiden sich nach zwei Rotationskegeln von zwei Dimensionen, deren Mantellinien mit der Normalen zum Ellipsoid im Punkt P gleiche Winkel bilden.

Aus den Gleichungen (19) und (20) geht hervor, dass unter den Mantellinien der Kegel auch die Focalstrahlen sind, welche vom Punkt P des Ellipsoids ausgehend, dessen Focalcurven in $t = 0$ schneiden. Die Verwendung des Satzes im vorigen Paragraphen ist damit gerechtfertigt.

Für den Fall, wo die Spitze der Focalkegel auf der Fläche H_1 oder H_2 liegt, existiren ähnliche Sätze, die wir aber hier nicht anführen, weil sie für das Folgende nicht nöthig sind. Zum Schlusse führen wir das Resultat an, für den noch specielleren Fall, in dem die Spitze der Focalkegel in einem Nabelpunkt des Ellipsoids liegt, dann wird der Focalkegel über E und H_2 ausarten, die Gleichung des Focalkegels über H_1 wird auf die einfachste Form gebracht:

$$(\gamma-\delta)^2(\gamma-\beta)^2\left\{\frac{\xi^2}{\gamma-\delta}+\frac{\chi^2}{\gamma-\delta}-\frac{\xi^2}{\beta-\gamma}-\frac{\vartheta^2}{\beta-\gamma}\right\}=0,$$

es ist also ein Focalkegel mit zwei Paaren gleicher Axen.

§ 5.

Indicatrix.

Die Focalkegelschnitte eines Systems confocaler Flächen im R_3 haben bekanntlich die Eigenschaft durch die Nabelpunkte der Flächen hindurchzugehen, wir wollen nun für die Focalflächen eine ähnliche Eigenschaft in Beziehung auf die confocalen $M_3^{(2)}$ nachweisen. Zunächst beweisen wir noch folgenden Satz:

Satz. Schneidet man eine Mannigfaltigkeit, z. B.:

$$\frac{x^2}{\alpha-\lambda}+\frac{y^2}{\beta-\lambda}+\frac{z^2}{\gamma-\lambda}+\frac{t^2}{\delta-\lambda}-1=0,$$

durch einen R_3, welcher durch den Mittelpunkt hindurchgeht und der dem Tangential-R_3 in einem Punkt (a, b, c, d) der $M_3^{(2)}$ parallel ist, so sind die Axen der entstehenden Schnittfläche parallel den Tangenten an die drei Krümmungslinien durch den Punkt (a, b, c, d).

Beweis. Wir legen durch den Mittelpunkt ein neues Coordinatensystem, dessen Coordinaten-R_3 parallel sind den Tangential-R_3 an die vier $M_3^{(2)}$ durch den Punkt im R_4, dann bestehen zwischen den neuen Coordinaten und den alten die Relationen:

$$\xi l = \frac{ax}{\alpha - \lambda} + \frac{by}{\beta - \lambda} + \frac{cz}{\gamma - \lambda} + \frac{dt}{\delta - \lambda}, \quad \chi m = \frac{ax}{\alpha - \mu} + \frac{by}{\beta - \mu} + \frac{cz}{\gamma - \mu} + \frac{dt}{\delta - \mu},$$

$$\zeta n = \frac{ax}{\alpha - \nu} + \cdots \qquad , \quad \vartheta p = \frac{ax}{\alpha - \eta} + \cdots \qquad ,$$

und die Umkehrung dieser Formeln führt auf die Gleichungen (14), wenn man darin $x - a$ durch x etc. ersetzt. Mit diesen Formeln wird dann die Gleichung der $M_3^{(2)}$ λ:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} + \frac{t^2}{\delta - \lambda} - 1 \\ = &\frac{a^2}{\alpha - \lambda}\left\{\frac{\xi}{l(\alpha - \lambda)} + \frac{\chi}{m(\alpha - \mu)} + \frac{\zeta}{n(\alpha - \nu)} + \frac{\vartheta}{p(\alpha - \eta)}\right\}^2 \\ + &\frac{b^2}{\beta - \lambda}\left\{\frac{\xi}{l(\beta - \lambda)} + \frac{\chi}{m(\beta - \mu)} + \frac{\zeta}{n(\beta - \nu)} + \frac{\vartheta}{p(\beta - \eta)}\right\}^2 \\ + &\frac{c^2}{\gamma - \lambda}\left\{\frac{\xi}{l(\gamma - \lambda)} + \frac{\chi}{m(\gamma - \mu)} + \frac{\zeta}{n(\gamma - \nu)} + \frac{\vartheta}{p(\gamma - \eta)}\right\}^2 \\ + &\frac{d^2}{\delta - \lambda}\left\{\frac{\xi}{l(\delta - \lambda)} + \frac{\chi}{m(\delta - \mu)} + \frac{\zeta}{n(\delta - \nu)} + \frac{\vartheta}{p(\delta - \eta)}\right\}^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Setzt man in dem Ausdruck rechts $\xi = 0$, so erhält man die Gleichung der Schnittfläche; da die Coefficienten der doppelten Producte $\chi\zeta$, etc. verschwinden vermöge der Bedingungsgleichungen, nach denen a, b, c, d auf den vier $M_3^{(2)}$ λ, μ, ν, η liegen, so bleibt:

$$A\chi^2 + B\zeta^2 + D\vartheta^2 - 1 = 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Es gilt ferner der Satz, dass parallele R_3 die $M_3^{(2)}$ nach ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen schneiden. Definiren wir insbesondere die *Indicatrix* eines Punktes der $M_3^{(2)}$ wie bei Flächen im gewöhnlichen Raum, so gilt der Satz:

Die Axen der Indicatrix sind proportional und parallel den Axen des Diametralschnitts, nach welchem ein R_3 parallel zu der gleichen Tangentialebene die $M_3^{(2)}$ schneidet.

Die Indicatricen sind für die $M_3^{(2)}$ vom Typus λ geschlossene Flächen, Ellipsoide mit drei verschieden langen Axen. In bestimmten Punkten der Mannigfaltigkeit können diese Indicatricen Rotationsellipsoide sein, wir bestimmen die Lage dieser Punkte auf:

$$\frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} + \frac{t^2}{\delta - \lambda} - 1 = 0.$$

Nach dem angeführten Satz verhalten sich die Axen der Indicatrix des Punktes (a, b, c, d) auf der $M_3^{(2)}$ proportional zu den Axen der Fläche:

$$
22)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha-\lambda}+\dfrac{y^2}{\beta-\lambda}+\dfrac{z^2}{\gamma-\lambda}+\dfrac{t^2}{\delta-\lambda}-1=0, \\ \dfrac{ax}{\alpha-\lambda}+\dfrac{by}{\beta-\lambda}+\dfrac{cz}{\gamma-\lambda}+\dfrac{dt}{\delta-\lambda}=0. \end{cases}
$$

Die Längen dieser Axen liegen jedenfalls zwischen $\sqrt{\alpha-\lambda}$ und $\sqrt{\delta-\lambda}$, und wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist, so müssen die gleichen Axen zwischen diesen Extremen liegen, sie können nicht einem derselben gleich werden. In diesem Fall der Rotationsfläche werden die Lagen zweier Axen unbestimmt, oder die Gleichungen (22) können nur eine Rotationsfläche repräsentiren, wenn die Krümmungslinien durch den Punkt (a, b, c, d) unbestimmt werden, was eintritt, wenn derselbe in einem der Coordinatenräume liegt. Weil aber die einander gleich werdenden Axen die Werthe $\sqrt{\alpha-\lambda}$ und $\sqrt{\delta-\lambda}$ nicht annehmen können, so brauchen wir nur die Fälle $c=0$; $d=0$, wo der ebene R_3 also durch die Coordinatenaxe $x=0$, $y=0$, $t=0$; resp. $x=0$, $z=0$, $t=0$ hindurchgeht, zu betrachten. Nehmen wir:

$$
23)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha-\lambda}+\dfrac{y^2}{\beta-\lambda}+\dfrac{z^2}{\gamma-\lambda}+\dfrac{t^2}{\delta-\lambda}-1=0, \\ \dfrac{ax}{\alpha-\lambda}+\dfrac{by}{\beta-\lambda}+\dfrac{dt}{\delta-\lambda}=0, \end{cases}
$$

dann ist die z-Axe eine Hauptaxe der Schnittfläche und die Schnittcurve

$$
23\text{a})\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha-\lambda}+\dfrac{y^2}{\beta-\lambda}+\dfrac{z^2}{\gamma-\lambda}+\dfrac{t^2}{\delta-\lambda}-1=0, \\ \dfrac{ax}{\alpha-\lambda}+\dfrac{by}{\beta-\lambda}+\dfrac{dt}{\delta-\lambda}=0, \\ z=0 \end{cases}
$$

enthält die beiden andern Hauptaxen der Schnittfläche, welche nun nach bekannten Formeln ausgedrückt werden können, weil diese Schnittfigur in einem Coordinatenraum $z=0$ gelegen ist und die Bestimmung der Axen zusammenfällt mit der Berechnung der Axen für einen Diametralschnitt eines Ellipsoids im gewöhnlichen Raum*). Es seien r_1 und r_2 die Längen der Axen der Schnittfigur (23a), so bestimmen sich diese aus der Gleichung:

$$
\frac{\dfrac{a^2}{\alpha-\lambda}}{(\alpha-\lambda)-r^2}+\frac{\dfrac{b^2}{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)-r^2}+\frac{\dfrac{d^2}{\delta-\lambda}}{(\delta-\lambda)-r^2}=0.
$$

Diese Gleichung für die Axen der Ellipse (23a) ergiebt nur dann zwei gleiche Werthe $r_1=r_2$; wenn $b=0$ ist, was ausgeschlossen wurde. Wenn die Fläche (23) eine Rotationsfläche ist, so muss eben eine der

*) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. I. Theil, S. 118 d. 3. Aufl.

Axen der Ellipse (23a) gleich der Länge der z-Axe sein; d. h. wir müssen $r_1^2 = \gamma - \lambda$ nehmen. Indem wir $r^2 = \gamma - \lambda$ in der letzten Gleichung substituiren, gelangen wir zu der Gleichung, der die Punkte (a, b, c, d) genügen müssen, für welche die Indicatrix eine Rotationsfläche ist. Es folgt:

$$c = 0, \quad \frac{a^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\gamma)} + \frac{b^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\gamma)} + \frac{d^2}{(\delta-\lambda)(\delta-\gamma)} = 0,$$

ausserdem genügen die Coordinaten a, b, c, d der Gleichung der $M_3^{(2)}\lambda$, durch deren Combination mit der oben gefundenen Gleichung wir die Bedingung in der Form schreiben können:

$$(24) \qquad c = 0, \quad \frac{a^2}{\alpha-\gamma} + \frac{b^2}{\beta-\gamma} - \frac{d^2}{\gamma-\delta} - 1 = 0;$$

d. h. die Punkte liegen auf einer Focalfläche*). Auf die gleiche Weise finden wir, dass auch die Focalfläche:

$$(25) \qquad b = 0, \quad \frac{a^2}{\alpha-\beta} - \frac{c^2}{\beta-\gamma} - \frac{d^2}{\beta-\delta} - 1 = 0,$$

die $M_3^{(2)}\lambda$ nach Punkten mit specieller Indicatrix schneidet. Dieses Resultat stimmt damit überein, dass die Krümmungslinien in den Punkten der Mannigfaltigkeiten λ, in welchen diese von den Focalflächen geschnitten werden, unbestimmt werden; was ferner sofort für die Schnitte der Focalflächen mit den $M_3^{(2)}$ der andern Typen ähnliche Eigenschaften vermuthen lässt. Die Indicatricen der Punkte, die den Bedingungen (25) oder (24) unterliegen, sind abgeplattete, bezw. verlängerte Rotationsellipsoide, es giebt auf einer *beliebigen* $M_3^{(2)}\lambda$ keinen Punkt, für welchen die Indicatrix eine Kugel ist.

§ 6.

Abel'sche Differentialgleichungen.

Wir gehen nun dazu über das Problem des § 2 zu lösen, indem wir von den gewöhnlichen Coordinaten übergehen zu den elliptischen und die Gleichungen von Geraden, welche die Mannigfaltigkeiten berühren, ferner von geodätischen Linien etc. auf den $M_3^{(2)}$ in diesen neuen Coordinaten ausdrücken. Mit Hilfe der Formeln (2) finden wir zunächst den Ausdruck für das Linienelement:

---

*) Die Linien, nach welchen die Focalfläche (24) und (25) die $M_3^{(2)}$ schneiden, sind selbst wieder Krümmungslinien auf den Focalflächen.

$$(26) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\lambda-\eta)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\delta-\lambda)}d\lambda^2 - \frac{1}{4}\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)(\mu-\eta)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)(\delta-\mu)}d\mu^2$$
$$-\frac{1}{4}\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)(\nu-\eta)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)(\delta-\nu)}d\nu^2 - \frac{1}{4}\frac{(\eta-\lambda)(\eta-\mu)(\eta-\nu)}{(\alpha-\eta)(\beta-\eta)(\gamma-\eta)(\delta-\eta)}d\eta^2.$$

Für das Element $d\mathfrak{s}$ der Krümmungslinie, in welcher sich drei specielle $M_3^{(2)}$ λ_0, μ_0, ν_0 schneiden, erhält man hieraus:

$$(27) \qquad d\mathfrak{s}^2 = -\frac{1}{4}\frac{(\eta-\lambda_0)(\eta-\mu_0)(\eta-\nu_0)}{(\alpha-\eta)(\beta-\eta)(\gamma-\eta)(\delta-\eta)}d\eta^2.$$

Von einem beliebigen Punkt des R_4 gehen an drei $M_3^{(2)}$ λ_0, μ_0, ν_0 drei Kegel 2ten Grades, welche sich, wie früher gezeigt wurde, in acht reellen Tangenten*) an die drei $M_3^{(2)}$ schneiden. Von den Gleichungen (9) ausgehend kann man in bekannter Weise zu den Differentialgleichungen einer solchen Tangente gelangen. Auf einfachere Art, durch eine elegante Schlussweise, leitet Herr Klein**) die Differentialgleichung einer Geraden des Complexes folgendermassen ab:

Die Gesammtheit der Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit den $M_3^{(2)}$ der Gleichung (1) bildet ein algebraisches Gebilde, das doppelt aufgefasst werden kann. Da durch jeden Punkt der Geraden vier $M_3^{(2)}$ gehen, hat man einmal ein vierfach überdecktes algebraisches Gebilde, dessen Verzweigungspunkte, die Schnittpunkte der Geraden mit der Umhüllungs-M_3 des Systems (1) sind; dieses Umhüllungsgebilde ist vom 12ten Grade, also hat man 12 Verzweigungspunkte und berechnet hieraus das Geschlecht des Gebildes zu $p = 3$. Soviel giebt es auch Integrale erster Gattung für das Gebilde; wenn man dieselben mit $\int du^{(1)}$, $\int du^{(2)}$, $\int du^{(3)}$ bezeichnet, und für die vier übereinanderliegenden Ueberdeckungen eines Punktes $(\lambda, \mu, \nu, \eta)$ bildet, so hat man:

$$d\lambda^{(i)} + d\mu^{(i)} + d\nu^{(i)} + d\eta^{(i)} = 0 \quad (\text{für } i = 1, 2, 3).$$

Zweitens nimmt man die beiden Punkte zusammen, in welchen die Gerade von einer $M_3^{(2)}$ geschnitten wird; das algebraische Gebilde ist dann zweifach überdeckt und seine Verzweigungspunkte liegen in den Schnittpunkten der Geraden mit vier Coordinaten-R_3, dem unendlichfernen R_3 sowie den Berührungspunkten der Geraden mit Mannigfaltigkeiten des Systems. Eine beliebige Gerade wird von drei $M_3^{(2)}$ berührt, wie eine Abzählung leicht ergiebt, daher wird die Zahl der Verzweigungspunkte

*) Die Tangenten an die drei Mannigfaltigkeiten bilden einen Complex 8ten Grades.

**) F. Klein, Zur geometr. Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale. Math. Ann. Bd. 28.

des Gebildes $w = 4$ und das Geschlecht wieder $p = 3$. Diese letztere Ueberlegung ergiebt die Form der Integrale erster Gattung, nachdem man festgesetzt hat, dass etwa λ_1, μ_1, ν_1 die von der Geraden berührten $M_3^{(2)}$ sind.

Wir bezeichnen mit Herrn Staude*):

$$
\begin{aligned}
L^2 &= (\lambda_1-\lambda)(\mu_1-\lambda)(\nu_1-\lambda)(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\delta-\lambda),\\
M^2 &= (\lambda_1-\mu)(\mu_1-\mu)(\nu_1-\mu)(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)(\delta-\mu),\\
N^2 &= (\lambda_1-\nu)(\mu_1-\nu)(\nu_1-\nu)(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)(\delta-\nu),\\
H^2 &= (\lambda_1-\eta)(\mu_1-\eta)(\nu_1-\eta)(\alpha-\eta)(\beta-\eta)(\gamma-\eta)(\delta-\eta),
\end{aligned}
$$

dann sind die Integrale erster Gattung in der einfachsten Gestalt:

$$\int_e du' = \sum \pm \int_e \frac{d\lambda}{L}, \quad \int_e du'' = \sum \pm \int_e \frac{\lambda\, d\lambda}{L}, \quad \int_e du''' = \sum \pm \int_e \frac{\lambda^2 d\lambda}{L},$$

womit die Differentialgleichungen der Geraden nun die Form annehmen**):

$$
(28)\qquad \begin{cases}
\pm \dfrac{d\lambda}{L} \pm \dfrac{d\mu}{M} \pm \dfrac{d\nu}{N} + \dfrac{d\eta}{H} = 0,\\[2mm]
\pm \dfrac{\lambda\, d\lambda}{L} \pm \dfrac{\mu\, d\mu}{M} \pm \dfrac{\nu\, d\nu}{N} + \dfrac{\eta\, d\eta}{H} = 0,\\[2mm]
\pm \dfrac{\lambda^2 d\lambda}{L} \pm \dfrac{\mu^2 d\mu}{M} \pm \dfrac{\nu^2 d\nu}{N} + \dfrac{\eta^2 d\eta}{H} = 0,
\end{cases}
$$

dabei ist H mit dem positiven oder negativen Vorzeichen so anzunehmen, dass $\frac{d\eta}{H}$ längs der ganzen Geraden positiv bleibt. Die Gleichungen (28) repräsentiren, wegen der möglichen acht Vorzeichencombinationen acht verschiedene Geraden. Aus (28) leiten wir ein äquivalentes System für die Elemente der Tangente ab:

$$
(28a)\qquad \begin{cases}
\pm (\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\dfrac{d\lambda}{L} + (\eta-\mu)(\eta-\nu)\dfrac{d\eta}{H} = 0,\\[2mm]
\pm (\mu-\lambda)(\mu-\nu)\dfrac{d\mu}{M} + (\eta-\lambda)(\eta-\nu)\dfrac{d\eta}{H} = 0,\\[2mm]
\pm (\nu-\lambda)(\nu-\mu)\dfrac{d\nu}{N} + (\eta-\lambda)(\eta-\mu)\dfrac{d\eta}{H} = 0.
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen verwenden wir nun zur Umformung der Gleichung (25) für das allgemeine Linienelement, um damit das Linienelement der, drei $M_3^{(2)}$ λ_0, μ_0, ν_0, gemeinsamen Tangenten abzuleiten:

$$(29)\qquad 2ds = \pm\frac{d\lambda}{L} \pm \frac{d\mu}{M} \pm \frac{d\nu}{N} + \frac{d\eta}{H},$$

*) O. Staude, Math. Ann. Bd. 20.

**) Vergl. auch Killing, Die Nichteuklidischen Raumformen, § 9. C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. S. 212 und 231.

wo zu setzen ist:

$$(30)\qquad \begin{cases} L = \dfrac{\mathsf{\Lambda}}{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)(\nu_0-\lambda)}, & M = \dfrac{\mathsf{M}}{(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)(\nu_0-\mu)}, \\ N = \dfrac{\mathsf{N}}{(\lambda_0-\nu)(\mu_0-\nu)(\nu_0-\nu)}, & H = \dfrac{\mathsf{H}}{(\lambda_0-\eta)(\mu_0-\eta)(\nu_0-\eta)}. \end{cases}$$

Um diese Formel ohne jede Rechnung zu bekommen betrachten wir die Integrale zweiter Gattung auf dem algebraischen Gebilde. Die Summe der vier Werthe eines Integrals zweiter Gattung Z für die vier übereinanderliegenden Punkte der verschiedenen Blätter ist eine *algebraische* Function der Grenzen. Oder wenn:

$$dZ_\lambda;\ dZ_\mu;\ dZ_\nu;\ dZ_\eta;$$

die vier Werthe des Differentials dZ für die Punkte λ, μ, ν, η sind, so ist:

$$d\varphi = dZ_\lambda + dZ_\mu + dZ_\nu + dZ_\eta,$$

das Differential einer algebraischen Function in λ, μ, ν, η. Die Länge der Tangente zwischen zwei Punkten $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \eta_0)$ und $(\lambda, \mu, \nu, \eta)$ ist andererseits eine algebraische Function von λ, μ, ν, η, welche unendlich wird mit unendlich wachsendem λ, μ, ν, η und zwar in der Ordnung $\lambda^{\frac{1}{2}}$. Das Linienelement ds stellt sich sonach durch eine Summe der vier Differentiale eines Integrals 2ter Gattung für die vier Blätter genommen, dar. Die Form dieses Integrals ist aber bestimmt durch die Bedingung, dass es für $\lambda = \infty$ selbst wie $\lambda^{\frac{1}{2}}$ unendlich wird; denn die zweiblättrige Fläche, in welcher die Punkte zu einem Werth $\tau = \lambda \cdots$, dargestellt sind, ergiebt nun:

$$dZ = \frac{(A + B\tau + C\tau^2 + D\tau^3)\,d\tau}{\sqrt{(\lambda_0-\tau)(\mu_0-\tau)(\nu_0-\tau)(\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)(\delta-\tau)}};$$

womit auch die Form des Linienelementes ds festgelegt ist. In den drei Verzweigungspunkten $\tau = \lambda_0, \mu_0, \nu_0$ d. h. den Berührungspunkten der Geraden mit den drei Mannigfaltigkeiten λ_0, μ_0, ν_0 ist aber das Linienelement reducirt auf die Summe von drei Differentialen, z. B.:

$$ds = dZ_\mu + dZ_\nu + dZ_\eta,$$

das Differential

$$dZ_\lambda$$

giebt für $\lambda = \lambda_0$ keinen Zuwachs, es muss der Factor von $d\lambda$ für $\lambda = \lambda_0$ verschwinden, also ist:

$$A + B\lambda_0 + C\lambda_0^2 + D\lambda_0^3 = 0,$$

wozu noch zwei entsprechende Gleichungen in μ_0 und ν_0 kommen. Daraus folgen aber die Constanten A, B, C, D:

$$A + \cdots + D\tau^3 = D(\lambda_0-\tau)(\mu_0-\tau)(\nu_0-\tau).$$

Geht die Tangente über in die Tangente an die Krümmungslinie $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$, so muss für den Berührungspunkt das Linienelement in die Form der Gleichung (27) übergehen. Damit bestimmt sich die noch übrig gebliebene Constante D zu:

$$D = \frac{1}{2},$$

also wird schliesslich die Formel für ds, wie oben angegeben:

$$2\,ds = \pm \frac{d\lambda}{L} \pm \frac{d\mu}{M} \pm \frac{d\nu}{N} + \frac{d\eta}{H}.$$

Die eben angestellte Betrachtung lässt sich ganz ebenso durchführen im Falle einer allgemeineren Cayley'schen Massbestimmung, durch welche die Entfernung zweier Punkte bestimmt wird als der Logarithmus des Doppelverhältnisses dieser beiden Punkte und zweier weiterer, in welchen die Gerade eine feste $M_3^{(2)}$ $\tau = t$ schneidet. Man hat eine hyperbolische Massbestimmung, wenn die Fläche t reell ist und von der Geraden reell geschnitten wird, also im vorliegenden Falle, wenn t zwischen $-\infty$ und λ_0 liegt; und man hat eine elliptische Massbestimmung, wenn diese Grundfläche imaginär ist. Im ersten Fall ist dann die Länge s_1 eine Function, welche für den reellen Werth $\lambda = t$ logarithmisch unendlich wird, wenn nämlich einer der beiden Punkte auf der Geraden mit einem der Grundpunkte zusammenfällt. s_1 stellt sich somit dar als Summe der vier Werthe eines Integrals dritter Gattung für die übereinanderliegenden Punkte der Fläche; wie im Falle der gewöhnlichen Massbestimmung ergiebt sich die genaue Form der Differentiale:

$$ds_1 = C\left\{\pm \frac{d\lambda}{(\lambda - t)L} \pm \frac{d\mu}{(\mu - t)M} \pm \frac{d\nu}{(\nu - t)N} + \frac{d\eta}{(\eta - t)H}\right\},$$

wobei C eine Constante ist, welche durch irgend einen speciellen Fall bestimmt wird.

Die Formel für das Linienelement benützen wir, um sogleich eine wichtige Bestimmung auszuführen. Wir betrachten einen Punkt:

$$(a, b, c, d) = (\lambda, \mu, \nu, \eta),$$

von dem die acht den Mannigfaltigkeiten λ_0, μ_0, ν_0 gemeinsamen Tangenten ausgehen, deren Elemente $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, $d\eta$ sind. In dem Punkt nehmen wir wieder das neue Axensystem ξ, χ, ζ, ϑ an, dann liefern die Gleichungen (14), indem wir darin $\frac{x-a}{a}, \cdots$ und $\xi, \cdots$ durch $\frac{dx}{x}, \cdots$, bezw. $d\xi, \cdots$ ersetzen, die Formeln:

(31) $\quad 2\,d\xi = l\,d\lambda, \quad 2\,d\chi = m\,d\mu, \quad 2\,d\zeta = n\,d\nu, \quad 2\,d\vartheta = p\,d\eta,$

mit deren Hilfe ds ausgedrückt werden kann in $d\xi, \cdots$. Damit haben wir einen Ausdruck des Linienelementes, aus welchem wir die Winkel A, B, Γ, Δ der Tangenten mit den Axen, d. h. mit den Normalen der vier $M_3^{(2)}$ durch den Punkt bestimmen können. Wir finden:

$$\cos^2 A = \frac{(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)(\nu_0 - \lambda)}{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)(\eta - \lambda)}, \quad \cos^2 B = \frac{(\lambda_0 - \mu)(\mu_0 - \mu)(\nu_0 - \mu)}{(\lambda - \mu)(\nu - \mu)(\eta - \mu)},$$

$$\cos^2 \Gamma = \frac{(\lambda_0 - \nu)(\mu_0 - \nu)(\nu_0 - \nu)}{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)(\eta - \nu)} \quad \cos^2 \Delta = \frac{(\lambda_0 - \eta)(\mu_0 - \eta)(\nu_0 - \eta)}{(\lambda - \eta)(\mu - \eta)(\nu - \eta)}.$$

Für die Tangenten von einem Punkt an drei $M_3^{(2)}$ λ_0, μ_0, ν_0 gilt daher der gleiche Satz wie für die Focalstrahlen; was wir auch folgendermassen aussprechen können:

Der Complex der Tangenten dreier $M_3^{(2)}$ λ_0, μ_0, ν_0 geht durch Spiegelung an beliebigen $M_3^{(2)}$ des confocalen Systems in sich selbst über.

Es ist nöthig der obigen Ableitung der Abel'schen Differentialgleichung eine Bemerkung hinzuzufügen. Diese Ableitung beruht wesentlich darauf, dass man hyperelliptische Integrale erster Gattung erhält, für welche das Abel'sche Theorem gilt. Wenn aber die Geraden speciell Focalstrahlen sind, d. h. Geraden, welche alle drei Focalflächen schneiden, so gehen alle Integrale in algebraische über, worauf schon der Umstand hinweist, dass auf dem zweiblättrigen algebraischen Gebilde, welches wir betrachteten, die drei Verzweigungspunkte in den Berührungspunkten mit den $M_3^{(2)}$ zusammenfallen mit den Verzweigungspunkten in drei Coordinaten-R_3. Doch gelten auch in diesem Ausnahmefall die Resultate, die man erhält, indem man λ_0, μ_0, ν_0 durch δ, γ, β ersetzt, noch fort. Zunächst gilt die Ableitung unverändert, wenn die drei $M_3^{(2)}$ λ_0, μ_0, ν_0 bezw. übergehen in $\delta - \varepsilon_1, \gamma - \varepsilon_2, \beta - \varepsilon_3$; indem wir diese Werthe in unsern Formeln einsetzen, können wir die Ausdrücke unter den Wurzeln nach Potenzen von ε entwickeln, und erhalten so schliesslich für $\varepsilon = 0$ das gewünschte Resultat.

Wir werden die Formeln für die Focalstrahlen noch benützen und schreiben sie deshalb hier besonders her:

Differentialgleichungen des Focalstrahls:

$$(32) \quad \pm \frac{d\lambda}{(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\delta - \lambda)\sqrt{\alpha - \lambda}} \pm \frac{d\mu}{(\mu - \delta)(\gamma - \mu)(\beta - \mu)\sqrt{\alpha - \mu}}$$
$$\pm \frac{d\nu}{(\nu - \delta)(\nu - \gamma)(\beta - \nu)\sqrt{\alpha - \nu}} + \frac{d\eta}{(\eta - \delta)(\eta - \gamma)(\eta - \beta)\sqrt{\alpha - \eta}} = 0.$$

. . . .

Das Linienelement des Focalstrahls:

$$(32a) \qquad 2\,ds = \pm \frac{d\lambda}{\sqrt{\alpha - \lambda}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{\alpha - \mu}} \pm \frac{d\nu}{\sqrt{\alpha - \nu}} + \frac{d\eta}{\sqrt{\alpha - \eta}}.$$

§ 7.

Geodätische Linien.

Hat man im R_3 ein System confocaler Flächen zweiten Grades, so giebt es bekanntlich auf jeder Fläche geodätische Linien, deren Tangenten zugleich Tangenten an eine andere confocale Fläche sind. In analoger Weise hat man im R_4 auf einer der $M_3^{(2)}$ z. B. λ_0 geodätische Linien, deren Tangenten zwei confocale $M_3^{(2)}$ μ_0 und ν_0 berühren*). Diese geodätischen Linien auf λ_0 verlaufen so, dass sie das Krümmungsgebilde erster Stufe berühren. Von jedem Punkt auf λ_0 gehen vier solche geodätische Linien aus. Die Differentialgleichungen derselben leiten sich aus den Gleichungen (28a) ab, indem darin $\lambda = \lambda_0$ gesetzt wird:

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &\pm (\mu-\lambda_0)\frac{d\mu}{\mathsf{M}} \pm (\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}} + (\eta-\lambda_0)\frac{d\eta}{\mathsf{H}} = 0,\\ &\pm \mu(\mu-\lambda_0)\frac{d\mu}{\mathsf{M}} \pm \nu(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}} + \eta(\eta-\lambda_0)\frac{d\eta}{\mathsf{H}} = 0,\end{aligned}\right.$$

wo auch eine der Gleichungen durch eine Combination beider ersetzt werden kann, z. B. kann in der letzten Gleichung $\mu + \lambda_0$ an Stelle von μ etc. treten.

Das Linienelement einer solchen geodätischen Linie ist:

$$(34)\qquad 2\,ds = \pm \frac{d\mu}{M} \pm \frac{d\nu}{N} + \frac{d\eta}{H}.$$

Nachdem diese geodätischen Linien auf λ_0 das Krümmungsgebilde erster Stufe (λ_0, μ_0) oder (λ_0, ν_0) berühren, setzen sie sich auf diesem Krümmungsgebilde selbst fort als geodätische Linien, deren Tangenten ausser dem Krümmungsgebilde noch die Mannigfaltigkeit ν_0 bezw. μ_0 berühren. Von jedem beliebigen Punkt eines Krümmungsgebildes erster Stufe gehen zwei geodätische Linien dieser Art aus, welche die Krümmungslinie $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ berühren. Die Elemente dieser geodätischen Linien sind wieder ebenso definirt, wie die Elemente einer Tangente an die drei confocalen $M_3^{(2)}$, daher können wir die Gleichung der geodätischen Linien auf den Krümmungsgebilden auch aus den Gleichungen (28a) ableiten. Man erhält aus diesen, indem man $d\lambda = 0$, $d\mu = 0$ setzt, für die Linien auf (λ_0, μ_0) die Gleichung:

$$(35)\qquad \pm(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}} + (\eta-\lambda_0)(\eta-\mu_0)\frac{d\eta}{\mathsf{H}} = 0,$$

und für das Linienelement:

$$(36)\qquad 2\,ds = \pm\frac{d\nu}{N} + \frac{d\eta}{H}.$$

*) Killing, Nicht-Euklidische Raumformen, § 9.

Wir weisen besonders darauf hin, dass die geodätischen Linien, welche auf den $M_3^{(2)}$ definirt sind, specieller Art sind. Durch jeden Punkt der Mannigfaltigkeit gehen ∞^2 Curven, unter denen man nach den Principien der Variationsrechnung geodätische Curven definiren kann, unter diesen giebt es eine endliche Anzahl, welche ein Krümmungsgebilde erster Stufe berühren, sich dann auf diesem stetig fortsetzen und eine Krümmungslinie berühren.

Für diese geodätischen Linien nur gelten die aufgestellten Differentialgleichungen, und für sie lässt sich das Linienelement zusammenfassen unter der Form des Linienelementes einer Geraden, welche drei $M_3^{(2)}$ berührt:

$$2\,ds = \pm\frac{d\lambda}{L} \pm \frac{d\mu}{M} \pm \frac{d\nu}{N} + \frac{d\eta}{H}, \tag{37}$$

worin also das Linienelement 1) der gemeinsamen Tangente von λ_0, μ_0, ν_0, 2) der speciellen geodätischen Linien auf λ_0, 3) der geodätischen Linien auf λ_0, μ_0, 4) der Krümmungslinie $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ zusammengefasst ist.

Eine Folge des in § 6 für die gemeinsamen Tangenten von einem Punkt P aus an λ_0, μ_0, ν_0, aufgestellten Satzes ist der folgende:

Satz. Die (oben definirten) vier geodätischen Linien, welche von einem Punkt auf der $M_3^{(2)}$ λ_0 ausgehen, lassen sich auf dreifache Weise in Paaren von Linien anordnen, deren Tangenten durch die Tangenten der Krümmungslinien auf λ_0, durch denselben Punkt, halbirt werden.

Die Gleichungen (28), (28a), (29) etc. sind zunächst wegen der darin enthaltenen Quadratwurzeln noch mehrdeutig. Setzt man aber fest, wie dies in § 6 geschehen ist, dass $\frac{d\eta}{\mathsf{H}}$ längs einer Geraden, die λ_0, μ_0, ν_0 berührt, positiv bleibt (wobei also H das Vorzeichen wechseln muss, so oft $d\eta$ sein Vorzeichen wechselt, beim Durchgang von η durch α oder β), und dass $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, $d\eta$ stets in positiver Durchlaufungsrichtung der Tangente zu nehmen sind, so erhält man für die Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzeln gewisse Regeln. Zunächst bemerkt man, dass die elliptischen Coordinaten der Geraden zwischen gewissen Grenzen variiren, nachdem die drei Werthe λ_0, μ_0, ν_0 festgelegt sind. Es ist:

$$\alpha \geqq \eta \geqq \beta; \quad \beta \geqq \nu_0 \geqq \nu \geqq \gamma; \quad \gamma \geqq \mu_0 \geqq \mu \geqq \delta; \quad \delta \geqq \lambda_0 \geqq \lambda > -\infty.$$

Die positive Richtung auf der Tangente bestimmt man dadurch, dass man die Gerade durch stetige Bewegung mit einer Tangente an die Krümmungslinie $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ zur Deckung bringt, und auf dieser diejenige Richtung, in der η wächst, als positiv annimmt. Dann ist auf der Tangente:

$$
\begin{array}{llllllllll}
d\lambda & \text{positiv zwischen} & \lambda = -\infty & \text{und} & \lambda_0, & \text{negativ zwischen} & \lambda = \lambda_0 & \text{und} & -\infty, \\
d\mu & " & " & \mu = \delta & " & \mu_0, & " & " & \mu = \mu_0 & " & \delta, \\
d\nu & " & " & \nu = \gamma & " & \nu_0, & " & " & \nu = \nu_0 & " & \gamma, \\
d\eta & " & " & \eta = \beta & " & \alpha, & " & " & \eta = \alpha & " & \beta.
\end{array}
$$

Auf der Tangente bilden die Punkte $\lambda = -\infty$, $\lambda = \lambda_0$; $\mu = \delta$, $\mu = \mu_0$; $\nu = \gamma$, $\nu = \nu_0$; $\eta = \beta$, $\eta = \alpha$ acht Verzweigungspunkte, durch welche die Tangente in acht Theile zerlegt wird, für die die Vorzeichen der Quadratwurzeln so festgelegt werden, dass in dem Ausdruck für das Linienelement, unter Berücksichtigung der Vorzeichen von $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, lauter Ausdrücke stehen mit positivem Werth. Z. B. hat man $-\frac{d\lambda}{L}$ zu setzen, wenn die Tangente von λ_0 nach $-\infty$ durchlaufen wird u. s. f. Weiter ergeben sich dann für die Gleichungen (28) und (28a) die Vorzeichen hieraus.

Die für die Vorzeichenbestimmung der Focalstrahlen nöthige Betrachtung werden wir später ausführlich anstellen.

§ 8.

Geschlossene Linienzüge auf den Mannigfaltigkeiten.

Wir nehmen nun eine bestimmte $M_3^{(2)}$ λ_0 um auf derselben die geodätischen Linien, deren Tangenten die $M_3^{(2)}$ μ_0 und ν_0 berühren, zu untersuchen. Durch jeden Punkt der Mannigfaltigkeit λ_0 gehen vier solche geodätische Linien hindurch, welche eine besondere Lage gegen die Krümmungslinien durch denselben Punkt haben, und welche die Krümmungslinie $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ berühren. Jede solche Krümmungslinie auf λ_0 zerfällt in vier reelle geschlossene Züge*), wobei unmittelbar klar ist, dass von den vier geodätischen Linien aus einem Punkt je zwei ein Paar dieser geschlossenen Züge berühren, die einander diametral gegenüberstehen. Es lassen sich daher die vier geodätischen Linien in zwei Paare „zusammengehöriger" Linien trennen. Nimmt man ferner auf einem Zug der Krümmungslinie eine gewisse Richtung als positiv an, so ist damit die Richtung auf dem diametral entgegengesetzten Zug bestimmt und man kann das Paar zusammengehöriger geodätischer Linien in zwei Linien verschiedener „Art" trennen nach der Richtung, in der man von der positiven Richtung des einen Zuges zum andern auf einer solchen geodätischen Linie gelangt.

*) Die Projection der Krümmungslinie in den R_3 $y = 0$ sind vier Stücke, die auf einer Krümmungslinie eines Ellipsoids symmetrisch gelegen sind, auf jedem Zweige liegen zwei Stücke.

Nun denken wir uns auf der $M_3^{(2)}\ \lambda_0$ *eine geschlossene Linie*, zusammengesetzt 1) aus *geodätischen Linien* verschiedener Art, welche zwei diametral gegenüberliegende Züge der Krümmungslinie $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ berühren, und 2) den *Stücken dieser Krümmungslinie* zwischen den beiden Berührungspunkten. Von jedem Punkt $P = (\lambda_0, \mu, \nu, \eta)$ geht *ein* solcher geschlossener Linienzug aus, nachdem das Paar diametraler Züge der tangirten Krümmungslinie, und die Art der geodätischen Linie festgelegt ist, und zwar verläuft der Linienzug zunächst geodätisch auf λ_0, denn auf (λ_0, μ_0) bezw. auch (λ_0, ν_0) fällt mit einem Stück $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ zusammen, kommt wieder auf (λ_0, μ_0) (bezw. auf (λ_0, ν_0), was unbestimmt bleibt), ferner auf λ_0 und geht in derselben Reihenfolge zurück zum Punkt P. Ohne den Verlauf dieses Linienzugs, der gar nicht eindeutig bestimmbar ist, im einzelnen zu kennen, kann man doch die Gesammtlänge desselben bestimmen. Wir haben in dem Linienzug drei stetig in einander übergehende Linien: geodätische Linien auf λ_0, auf (λ_0, μ_0) oder (λ_0, ν_0) und die Krümmungslinie $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$; für welche das Linienelement in derselben Form zusammengefasst ist. Indem man über den Linienzug integrirt, fallen dann bei der Integration diejenigen oberen bezw. unteren Grenzen aus der Summe heraus, welche durch die Punkte, in denen die Linienzüge in einander übergehen, entsprechen. Es variiren die Veränderlichen nur zwischen ihren äusseren Grenzen. Die Veränderliche μ ändert sich zweimal zwischen μ_0 und μ_0 und das ist nur möglich, wenn sie dazwischen je einmal den Werth δ annimmt, also viermal zwischen δ und μ_0 schwankt, ebenso ändert sich ν viermal zwischen γ und ν_0 und endlich, wenn man etwa die Projection des Linienzugs in dem R_3 $t = 0$ sich denkt, so erkennt man, dass η zwischen β und α viermal oscillirt. Beachtet man, dass in dem Integralausdruck für den Linienzug, die einzelnen Posten nur mit ihren positiven Werthen zu nehmen sind, so erhält man für den Bogen S die Formel:

$$(38) \qquad 2S = 4\left|\int_{\delta}^{\mu_0} \frac{d\mu}{M}\right| + 4\left|\int_{\gamma}^{\nu_0} \frac{d\nu}{N}\right| + 4\left|\int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\eta}{H}\right|,$$

darin stehen nur noch bekannte Grenzen, $2S$ setzt sich zusammen aus den Perioden der hyperelliptischen Integrale, also hat man den *Satz:*

Die Länge des angegebenen Linienzuges ist unabhängig vom Ausgangspunkt P, sie ist für alle zwischen den entgegengesetzten Zügen der Krümmungslinien verlaufenden Linien dieselbe.

Indem wir in den bisherigen Entwicklungen verschiedene Specialisirungen einführen, kommen wir zu bemerkenswerthen Folgerungen.

Sei zuerst $\lambda_0 = \delta$, d. h. die allgemeine $M_3^{(2)}\ \lambda_0$ soll ausarten in den Raum innerhalb eines Ellipsoids, indem die $M_3^{(2)}\ \lambda_0$ gegeben ist durch:

$$t = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha - \delta} + \frac{y^2}{\beta - \delta} + \frac{z^2}{\gamma - \delta} - 1 < 0.$$

Die geodätischen Linien, welche von einem Punkt dieser Mannigfaltigkeit ausgehen sind Gerade, und zwar sind diejenigen geodätischen Linien, deren Tangenten die μ_0 und ν_0 berühren, die im R_3 $t = 0$, der zugleich Tangentialraum für $\lambda_0 = \delta$ ist, verlaufenden Tangenten, an die beiden Flächen:

$$(39) \qquad t = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha - \mu_0} + \frac{y^2}{\beta - \mu_0} + \frac{z^2}{\gamma - \mu_0} - 1 = 0,$$

$$(40) \qquad t = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha - \nu_0} + \frac{y^2}{\beta - \nu_0} - \frac{z^2}{\nu_0 - \gamma} - 1 = 0.$$

Das Krümmungsgebilde erster Stufe (λ_0, μ_0) ist die Oberfläche des Ellipsoids (39) und die Krümmungslinie $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ ist die Krümmungslinie, in der sich (39) und (40) schneiden, es besteht also in diesem speciellen Fall die Krümmungslinie nur aus zwei geschlossenen Zügen.

Der auf λ_0 bestimmte Linienzug aus geodätischen Linien und Stücken der Krümmungslinie geht jetzt in einen Linienzug über, den wir von einem Punkt an der Grenze $M_3^{(2)}$ $\lambda_0 = \delta$, also von einem Punkt P der Oberfläche eines Ellipsoides ausgehen lassen können, da eine geodätische Linie auf λ_0 durch irgend einen Punkt P bis zur Grenze $\lambda_0 = \delta$ gehen und von hier wieder in einer Geraden weggehen muss. Der Linienzug nimmt dann folgenden Verlauf:

Von P ausgehend fällt derselbe zunächst zusammen mit einer Tangente an die Flächen (39) und (40) bis zur Berührung mit (39), verläuft dann auf dem Ellipsoid in einer geodätischen Linie, bis er die Krümmungslinie berührt, geht dieser entlang und verläuft dann in einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid μ_0 um von hier über einen geradlinigen Tangentenzug, der das Ellipsoid $\lambda_0 = \delta$ in einem zweiten Punkt P_1 trifft, nach μ_0 zurückzukehren, wo er wieder in einer geodätischen Linie an den zweiten Zweig der Krümmungslinie $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ herankommt, mit diesem eine Strecke weit zusammenfällt, und kommt schliesslich wieder in einer geodätischen Linie auf μ_0 und als geradlinige Tangente nach dem Ausgangspunkt P zurück.

Betrachtet man einen Zug, der von einem andern Punkt P auf $\lambda_0 = \delta$ ausgeht, so ändert sich bei Punkten, die dem ersten Punkt P benachbart sind, nur der von P ausgehende Theil der Linie, die Länge derselben ändert sich dann auch nicht, wenn wir an Stelle der, aus geodätischen Bogen und geradlinigen Tangenten über P_1 zusammengesetzten Verbindung, eine geodätische Linie auf dem Ellipsoid μ_0 zwischen den beiden Zweigen der Krümmungslinie $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ einfügen.

Das Linienèlement dieses Linienzugs ist jetzt vereinfacht das folgende:

$$(41)\quad 2\,ds = \pm\sqrt{\frac{(\mu_0-\mu)(\nu_0-\mu)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}}\,d\mu \pm \sqrt{\frac{(\mu_0-\nu)(\nu_0-\nu)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}}\,d\nu$$
$$\pm\sqrt{\frac{(\mu_0-\eta)(\nu_0-\eta)}{(\alpha-\eta)(\beta-\eta)(\gamma-\eta)}}\,d\eta.$$

Wir sind damit zu dem von Herrn Staude aufgestellten Satz*) über die allgemeine Fadenconstruction eines Ellipsoids aus zwei confocalen Flächen gelangt.

Herr Staude hat a. a. O. die verschiedenen möglichen Lagen des Fadens im R_3 eingehend erörtert, woraus wir durch Analogie auf die möglichen Lagen des Linienzugs auf einer allgemeinen $M_3^{(2)}\ \lambda_0$ schliessen können, indessen verzichten wir hier auf eine genauere Darlegung.

Eine zweite Specialisirung des allgemeinen Satzes soll darin bestehen, dass wir die beiden $M_3^{(2)}\ \mu_0$ und ν_0 für sich, oder zusammen speciell wählen, und zwar wollen wir gleich die weitgehendste Specialisirung annehmen, indem wir $\mu_0 = \gamma$, gleichzeitig $\nu_0 = \beta$ setzen.

Die Krümmungsgebilde erster Stufe auf λ_0 sind dann:

1) (λ_0, μ_0) die beiden Flächenstücke innerhalb der Zweige einer Krümmungslinie auf

$$z = 0,\quad \frac{x^2}{\alpha-\lambda_0} + \frac{y^2}{\beta-\lambda_0} + \frac{t^2}{\delta-\lambda_0} - 1 = 0,$$

wobei die Punkte der Flächenstücke analytisch bestimmt sind durch diese Gleichungen und:

$$\frac{x^2}{\alpha-\gamma} + \frac{y^2}{\beta-\gamma} - \frac{t^2}{\gamma-\delta} - 1 \leqq 0.$$

2) (λ_0, ν_0) die Punkte eines Flächenstücks, gegeben durch die Beziehungen:

$$y = 0,\quad \frac{x^2}{\alpha-\lambda_0} + \frac{z^2}{\gamma-\lambda_0} + \frac{t^2}{\delta-\lambda_0} - 1 = 0,$$

und

$$\frac{x^2}{\alpha-\beta} - \frac{z^2}{\beta-\gamma} - \frac{t^2}{\beta-\delta} - 1 \leqq 0,$$

also ist $(\lambda_0 \nu_0)$ der Inhalt einer Fläche zwischen den Zweigen einer Krümmungslinie, welche die letzten Gleichungen mit einander bestimmen.

Die Krümmungslinie λ_0, $\mu_0 = \gamma$, $\nu_0 = \beta$ ist gebildet durch die Bogen des Hauptschnittes $y = 0$ des Ellipsoids

$$z = 0,\quad \frac{x^2}{\alpha-\lambda_0} + \frac{y^2}{\beta-\lambda_0} + \frac{t^2}{\delta-\lambda_0} - 1 = 0,$$

*) Staude, Math. Annalen Bd. XX, Seite 170.

zwischen den Nabelpunkten dieser Fläche. Die Punkte dieser Bogen genügen den Bedingungen:

$$y=0,\quad z=0,\quad \frac{x^2}{\alpha-\lambda_0}+\frac{t^2}{\delta-\lambda_0}-1=0,\qquad \frac{x^2}{\alpha-\beta}-\frac{t^2}{\beta-\delta}-1<0.$$

Auf der Mannigfaltigkeit λ_0 giebt es dann ein System von Curven, deren Tangenten die beiden Flächen:

$$(42)\qquad z=0,\quad \frac{x^2}{\alpha-\gamma}+\frac{y^2}{\beta-\gamma}-\frac{t^2}{\gamma-\delta}-1=0,$$

$$(43)\qquad y=0,\quad \frac{x^2}{\alpha-\beta}-\frac{z^2}{\beta-\gamma}-\frac{t^2}{\beta-\delta}-1=0;$$

gleichzeitig schneiden; diese Curven reihen sich unter die speciellen geodätischen Linien auf λ_0, deren Tangenten zwei wirkliche Mannigfaltigkeiten μ_0 und ν_0 berühren, ein. Sie sind wie diese ebenfalls geodätische Curven auf λ_0, deren Differentialgleichungen wir aus (33) erhalten, wenn darin statt μ_0, ν_0 die speciellen Werthe substituirt werden, nachdem wir uns von der Zulässigkeit dieser Substitution in § 6 überzeugt haben.

Durch jeden Punkt der λ_0 gehen *vier* geodätische Curven. Nehmen wir aber einen Punkt auf der Schnittlinie von λ_0 mit der Fläche (42), also auf einer Nabellinie der λ_0, so gehen durch diesen Punkt ∞^1 viele Tangenten der Mannigfaltigkeit λ_0, welche die Fläche (43) schneiden, der Ort dieser Geraden ist ein zweidimensionaler Kegel zweiten Grades. Jede Kegelmantellinie ist Tangente an eine von dem Punkt ausgehende geodätische Curve. Wie beim Ellipsoid die von einem Nabelpunkt ausgehenden geodätischen Linien sich im diametral entgegengesetzten Nabelpunkt wieder vereinigen, so treffen sich auch die ∞^1 geodätischen Curven, die von einem Punkt der Nabellinie ausgehen, wieder in einem andern Punkt der Nabellinie*), und wir werden zwei solche Punkte *conjugirte Nabelpunkte* nennen.

Das Linienelement dieser geodätischen Linien ist:

$$\begin{aligned}2\,ds &= \pm\sqrt{\frac{\lambda_0-\mu}{(\alpha-\mu)(\delta-\mu)}}\,d\mu \pm\sqrt{\frac{\lambda_0-\nu}{(\alpha-\nu)(\delta-\nu)}}\,d\nu+\sqrt{\frac{\lambda_0-\eta}{(\alpha-\eta)(\delta-\eta)}}\,d\eta\\ &=\pm\frac{d\mu}{M_1}\pm\frac{d\nu}{N_1}+\frac{d\eta}{H_1}.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir ferner einen Punkt auf der Nabellinie mit seinen elliptischen Coordinaten $\lambda_0, \gamma, \gamma, \eta_1$ und den conjugirten Punkt, in dem sich die geodätischen Linien, welche vom ersten Punkt ausgehen, wieder

*) Der Beweis dieser Behauptung ist elementar und gründet sich auf die Eigenschaft der geodätischen Linien, dass nämlich der R_2 durch zwei ihrer aufeinanderfolgenden Tangenten die Normale der Mannigfaltigkeit enthält. Man hat dann zu zeigen, dass auf ∞^1 Tangenten eines Systems geodätischer Linien, welche sich in einem Punkt auf H_1 treffen, wieder solche mit der gleichen Eigenschaft folgen.

vereinigen, mit $\lambda_0, \gamma, \gamma, \eta_2$, so bekommen wir die Länge der geodätischen Linien zu:

$$2S = \pm 2\int\limits_{\delta}^{\gamma} \frac{d\mu}{M_1} \pm 2\int\limits_{\gamma}^{\beta} \frac{d\nu}{N_1} + \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{H_1}.$$

Die Ableitung gilt auch für die Punkte der zweiten Nabellinie analog, so dass man den Satz*) aufstellen kann:

Die Längen der ∞^1 geodätischen Linien zwischen zwei conjugirten Nabelpunkten sind gleich.

Um nun einen Linienzug zu bekommen, dessen Länge von keinen willkürlichen unbestimmten Grössen, wie oben $2S$ von η_1, η_2, abhängig ist, sondern nur durch Constante gegeben ist, definiren wir einen solchen folgendermassen:

Eine Linie gehe von einem Nabelpunkt des Ellipsoids (λ_0, $z = 0$) aus, verlaufe zunächst auf diesem Ellipsoid geodätisch bis zur Nabellinie der $M_3^{(2)}$ λ_0, von hier aus in einer geodätischen Linie auf λ_0 bis zum conjugirten Nabelpunkt, und schliesslich wieder auf dem Ellipsoid λ_0, $z = 0$ geodätisch zu dem, dem ersten Nabelpunkt diametral gegenüberliegenden.

Die Coordinaten des Ausgangs- und Endpunkts sind ($\lambda_0, \gamma, \beta, \beta$) und wir bekommen die Gesammtlänge für S jetzt zu:

$$2S = \pm 2\int\limits_{\gamma}^{\delta} \frac{d\mu}{M_1} \pm 4\int\limits_{\beta}^{\gamma} \frac{d\nu}{N_1} + 2\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{d\eta}{H},$$

weil nun die unbekannten Coordinaten η_1, η_2 bei der Summation wieder herausfallen.

Die weitere Specialisirung dieser Resultate führt wieder zu bekannten Sätzen.

Wir setzen $\lambda_0 = \delta$, dann haben wir folgende Zusammenstellung: Die Mannigfaltigkeit $\lambda_0 = \delta$ ist der innere Raum des Ellipsoids:

$$t = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha - \delta} + \frac{y^2}{\beta - \delta} + \frac{z^2}{\gamma - \delta} - 1 = 0.$$

Die Nabellinien sind übergegangen in die Focalkegelschnitte dieser Fläche. Die geodätischen Linien sind jetzt einfach die *Geraden*, welche die beiden Focalkegelschnitte schneiden, speciell sind die geodätischen Linien von einem Punkt der Nabellinie aus, übergegangen in die Mantellinien des Kegels**) von dem Punkt auf der einen Focallinie über der andern. Schon

*) Die Enveloppe der geodätischen Linien, welche von einem Punkt der Nabellinie ausgehen besitzt einen konischen Doppelpunkt.

**) Es möge hier auf folgenden Satz hingewiesen werden:

Die Focalkegel von den Punkten der Focalkegelschnitte aus schneiden die confocalen Flächen nach zwei ebenen Curven, deren Ebenen sich für dieselbe Fläche um feste Gerade drehen, wenn die Spitze des Kegels sich auf der Focalcurve bewegt.

in § 3 sind wir darauf geführt worden, die Focalstrahlen als geodätische Linien einer ausgearteten $M_3^{(2)}$ anzusehen, wir haben dort auch gefunden, dass die kürzesten Linien, die zwischen zwei Punkten so gezogen sind, dass sie die Oberfläche des Ellipsoids treffen, Focalstrahlen sind, deren Winkel durch die Normale halbirt wird.

Den ersten Theil unseres *Satzes* können wir jetzt so aussprechen: Werden die Focallinien, die von einem Punkt der Focalellipse ausstrahlen, an dem Ellipsoid reflectirt, so sind die reflectirten Strahlen ebenfalls Focalstrahlen, die sich wieder in einem Punkt der Focalellipse treffen, und alle diese Linien zwischen den conjugirten Focalpunkten sind gleich lang.

Die Specialisirung des zweiten Satzes führt auf einen Linienzug, der von dem einen Brennpunkt der Focalellipse über diese, und zwei Focalstrahlen, die sich auf dem Ellipsoid schneiden, indem ihr Winkel durch die Normale des Ellipsoids halbirt wird, übergeht zum zweiten Brennpunkt der Ellipse, und man sieht, dass wir damit zu der von Herrn Staude angegebenen Fadenconstruction eines Ellipsoids aus seinen Focalcurven gekommen sind.

Anmerkung. Die Lage der conjugirten Focalpunkte kann man noch näher bezeichnen. Der Focalkegel von einem Focalpunkt über der Focalhyperbel etwa, schneidet das Ellipsoid nach einer Ellipse, deren Ebene senkrecht steht zu des Hauptebene des Ellipsoids, in welcher die Focalellipse liegt. Dann liegen die conjugirten Focalpunkte auf einer Hyperbel, welche mit der Schnittellipse in der gleichen Beziehung steht, in der zwei Focalkegelschnitte zu einander stehen.

§ 9.

Das Henrici'sche Theorem über die beweglichen Hyperboloide.

Wir untersuchen die Beziehung, in der das Henrici'sche Theorem zu dem verallgemeinerten Graves'schen Theorem und den allgemeinen Fadenconstructionen der Flächen zweiten Grades steht. Zunächst möge das Henrici'sche Theorem selbst hier angeführt werden.

Zwei Punkte (λ, μ, ν) und (λ_1, μ, ν_1) eines einmantligen Hyperboloids:

$$\frac{x^2}{\alpha-\mu}+\frac{y^2}{\beta-\mu}-\frac{z^2}{\mu-\gamma}-1=0,$$

liegen auf einer Mantellinie, wenn die Gleichung gilt:

$$\text{(A)} \qquad \pm\frac{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\alpha-\nu)(\alpha-\lambda_1)(\alpha-\nu_1)}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \pm \frac{\sqrt{(\beta-\lambda)(\beta-\nu)(\beta-\lambda_1)(\beta-\nu_1)}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}$$
$$\pm\frac{\sqrt{(\gamma-\lambda)(\gamma-\nu)(\gamma-\lambda_1)(\gamma-\nu_1)}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}-1=0.$$

Da diese Relation μ überhaupt nicht enthält, so entsprechen den Punkten (λ, ν) einer Erzeugenden auf μ, die Punkte (λ, ν) einer Erzeugenden auf irgend einer andern Fläche μ_1, und da ferner auch der Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte (λ, μ, ν) und (λ_1, μ, ν_1) auf einer Erzeugenden die specielle Grösse μ nicht enthält, so lassen sich confocale Hyperboloide eindeutig auf einander so beziehen, dass die Erzeugenden sich entsprechen, und dabei die Längen dieser Erzeugenden zwischen je zwei entsprechenden Punkten gleich sind. Oder:

Ein Hyperboloid, dessen Erzeugende beweglich (durch Scharniere) mit einander verbunden sind, lässt sich noch in ein System confocaler Hyperboloide deformiren. Dabei beschreiben die Punkte der Erzeugenden Krümmungslinien auf den Flächen λ und ν.

In § 1 bemerkten wir noch, dass bei allgemeiner Auffassung der Coordinaten λ, μ, ν als complexer Grössen der Satz erhalten bleibt, dass irgend zwei verschiedene Flächen orthogonal sind und sich nach einer Krümmungslinie schneiden. Das System:

$$\begin{aligned}&\pm(\mu-\lambda)\frac{d\lambda}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}\\&+(\mu-\nu)\frac{d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)(\lambda_0-\nu)(\mu_0-\nu)}}=0,\\[1ex]&\pm(\mu-\lambda)\frac{d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}}\\&+(\nu-\lambda)\frac{d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)(\lambda_0-\nu)(\mu_0-\nu)}}=0,\end{aligned}$$

stellt die gemeinsamen Tangenten irgend zweier Flächen λ_0 und μ_0 dar nach dem Abel'schen Theorem. Die gemeinsamen Tangenten sind gleichzeitig Tangenten an Curvenschaaren auf λ_0 und μ_0 (im Falle reeller orthogonaler Flächen der geodätischen Curven), welche die Durchdringungscurve dieser beiden Flächen berühren. Die Differentialgleichungen der Curvenschaar auf der Fläche μ_0 z. B. ist:

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned}&\pm(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}\\&+(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)(\lambda_0-\nu)(\mu_0-\nu)}}=0\end{aligned}$$

und eine analoge Gleichung besteht für die Curven auf λ_0. Die beiden Curvenschaaren unterscheiden sich überhaupt nur durch Constante, und werden durch Flächen derselben Art auf λ_0, μ_0 ausgeschnitten.

Nehmen wir nun die Flächen λ_0, μ_0 als benachbarte Flächen an, indem wir $\lambda_0 = \mu_0 + \varepsilon$ setzen, so dass mit verschwindendem ε die beiden

Flächen zusammenfallen, dann gehen auch die Curvenschaaren in einander über und ihre Differentialgleichung wird:

$$\text{(C)} \qquad \pm \frac{d\lambda}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}} + \frac{d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}} = 0$$

und da dies die Differentialgleichung der zwei Schaaren von Erzeugenden auf den Flächen μ sind, so ist auch der Complex gemeinsamer Tangenten an λ_0 und μ_0 beim Zusammenfallen dieser Flächen in die Erzeugenden der Fläche μ übergegangen.

Das Linienelement der Erzeugenden folgt ebenfalls aus dem Linienelement der Curvenschaaren, unter Berücksichtigung der Gleichung (C) zu:

$$\text{(D)} \qquad ds = \pm \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}} + \frac{\nu\, d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}}$$

und die Gleichungen (C) *und* (D) *enthalten direct das Henrici'sche Theorem.* Während wir aber beim Graves'schen Theorem oder bei den Fadenconstrutionen Wege haben, die sich auf Integrale zwischen den Verzweigungspunkten reduciren, stützt sich das Henrici'sche Theorem darauf, dass die Formel (C) und besonders (D) unabhängig ist von der Grösse μ, d. h. von dem Parameter der Fläche, auf der die Erzeugenden liegen, so dass die Längen der letzteren nur von λ, ν abhängen, und für gleiche Grenzen und verschiedene μ einander gleich sind.

§ 10.

Fadenconstruction der Mannigfaltigkeit λ.

Die Formeln in § 7 reichen aus für die Erweiterung der Sätze über die Fadenconstruction des Ellipsoids aus zwei gegebenen confocalen Flächen, auf Mannigfaltigkeiten im R_4. Es sei wieder eine allgemeine Mannigfaltigkeit λ gegeben und drei beliebig gewählte wirkliche $M_3^{(2)}$: $\lambda_0 > \lambda$, μ_0, ν_0, an welche von jedem beliebigen Punkt auf λ acht getrennte gemeinsame Tangenten gehen. Zwei solche Tangenten, deren Winkel von der Normale der $M_3^{(2)}$ λ halbirt wird, bezeichnen wir als Tangenten derselben Art. Die Reihenfolge, in der die Berührungspunkte der drei $M_3^{(2)}$ auf einer Tangente beim positiven Durchlaufen derselben aufeinanderfolgen, ist verschieden für die einzelnen Punkte der λ. Es giebt aber Gebiete, von welchen aus alle acht Tangenten zuerst λ_0 und dann eine der andern Mannigfaltigkeiten berühren, von andern Punkten aus berührt eine Tangente der einen Art zuerst λ_0, während die der andern Art zuerst eine der beiden Mannigfaltigkeiten μ_0 oder ν_0 berührt etc. Ohne Rücksicht auf diese speciellen Verhältnisse kann man immer eine von einem Punkt P auf λ ausgehende und dahin zurückkehrende geschlossene Linie bestimmen (die Lage eines

Fadens), welche theils aus geradlinigen Stücken, theils aus geodätischen oder Krümmungs-Linien in den $M_3^{(2)}$ λ_0, μ_0, ν_0 besteht. Wenn z. B. die beiden Tangenten einer Art zuerst λ_0 dann μ_0 berühren, so nehmen wir eine Linie, welche von P geradlinig ausgeht, dann auf λ_0, (λ_0, μ_0) geodätisch verläuft bis zur Berührung mit der Krümmungslinie $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$, mit welcher sie eine Strecke weit zusammenfällt, um wieder auf (λ_0, μ_0) dann λ_0, von hier wieder auf $\lambda_0 \mu_0$ geodätisch weiterzugehen bis zu dem, dem ersten Zweig der Krümmungslinie diametral entgegengesetzten, kommt, von dem aus sie wieder nach (λ_0, μ_0), λ_0 und schliesslich nach P zurückkehrt.

Berührt eine Tangente einer Art zuerst λ_0 dann μ_0, die andere zuerst eine der zwei Mannigfaltigkeiten μ_0 oder ν_0, so kann man diesen Theil der Linie an den Mannigfaltigkeiten berührend geradlinig fortsetzen bis zu λ_0, hier in eine geodätische Linie übergehen lassen, welche sich über (λ_0, μ_0) und $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ etc. in die erste Tangente überführen lässt bis nach dem Ausgangspunkt. Man kann die Linie aber auch vom Berührungspunkt der Tangente mit der ersten $M_3^{(2)}$ auf dieser selbst geodätisch weitergehen lassen bis zur Krümmungslinie $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ und von hier aus erst wieder auf λ_0 kommen. Es ist also durch den Punkt P und die drei festen Mannigfaltigkeiten λ_0, μ_0, ν_0 die Lage des Fadens durchaus nicht eindeutig bestimmt, es gilt aber für alle möglichen Specialfälle die Bedingung, dass die einzelnen Stücke stetig in einander übergehen, die Linie sich nicht etwa selbst überschneidet, oder Rückkehrpunkte hat, ferner müssen die geodätischen Stücke so in die Krümmungslinie einmünden, dass der ganze Linienzug in einer Richtung durchlaufen werden kann, welche zugleich die positive Richtung der Krümmungslinie ist.

Wir werden später bei speciellen Mannigfaltigkeiten wieder auf ähnliche Untersuchungen verschiedener Lagen eines Linienzugs einzugehen haben, und können uns deshalb hier mit diesen allgemeinen Festsetzungen begnügen.

Das Linienelement aller vorkommenden Theile der Linie ist:

$$2\,ds = \pm \frac{d\lambda}{L} \pm \frac{d\mu}{M} \pm \frac{d\nu}{N} + \frac{d\eta}{H}$$

und die einzelnen Veränderlichen bewegen sich zwischen folgenden Grenzen:

1) λ nimmt zu von P bis zur Berührung der Tangente mit λ_0, bleibt constant, so lange die Linie auf λ_0 fortgeht, und nimmt dann wieder von λ_0 bis λ in P ab.

2) μ nimmt zunächst den Werth μ_0 an, in den Berührungspunkten der Tangente mit μ_0 und ferner längs ganzer Strecken, die auf μ_0 liegen, zwischen diesen Werthen nimmt μ ebenfalls zweimal den Werth δ an, so dass es also viermal zwischen δ und μ_0 schwankt.

3) Aehnlich wie μ zwischen δ und μ_0, so schwankt ν für den ganzen Linienzug viermal zwischen γ und ν_0.

4) Da der ganze Faden sich in einer Zone zwischen den getrennten Zügen einer Krümmungslinie herumschlingt, so kann man η auf der Krümmungslinie verfolgen, es bewegt sich auf beiden Linien zwischen denselben Grenzen, und es ist leicht einzusehen, dass sich η auf der Krümmungslinie zwischen β und α bewegt, indem diese die Räume $y = 0$, $x = 0$ je zweimal durchsetzt.

Berücksichtigt man noch, dass bei der Integration die einzelnen Terme in dem Linienelement in ihrem absoluten Werth genommen werden müssen, so erhält man für die Gesammtlänge des Fadens, der von einem Punkt P ausgeht:

$$2S = \pm 2 \left| \int_\lambda^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{L} \right| \pm 4 \left| \int_\delta^{\mu_0} \frac{d\mu}{M} \right| + 4 \left| \int_\gamma^{\nu_0} \frac{d\nu}{N} \right| + 4 \left| \int_\beta^{\alpha} \frac{d\eta}{H} \right|;$$

in dieser Summe stehen ausser der einen Grenze λ nur bekannte Grössen, also ist ihr Werth nicht abhängig von dem Anfangspunkt P, er ist für alle Punkte der $M_3^{(2)}$ λ derselbe und unabhängig davon, welche der acht Tangenten man als Ausgangsrichtung genommen hat. Fassen wir das Resultat nochmals zusammen in einem Satz:

Satz. *Spannt man von einem Punkt P einer $M_3^{(2)}$ des Typus λ einen Faden über drei confocale $M_3^{(2)}$ $\lambda_0 > \lambda$, μ_0, ν_0, so dass der Faden den gemeinsamen Tangenten und den geodätischen Linien (specieller Art) auf den Mannigfaltigkeiten oder den Krümmungsgebilden erster und zweiter Stufe folgt, indem die einzelnen Stücke stetig in einander übergehen und nur im Punkt P, wo zwei geradlinige Strecken zusammenstossen, ein Knickpunkt ist, dann ist die Gesammtlänge des Fadens für alle Punkte auf λ die gleiche.*

Dieser Satz ist ganz analog dem von Herrn Staude für das Ellipsoid aufgestellten. Wir können durch Specialisirung der gegebenen $M_3^{(2)}$ verschiedene interessante Details erhalten, aber wir beschränken uns darauf sogleich die weitgehendste Specialisirung vorzunehmen, indem wir $\lambda_0 = \delta$, $\mu_0 = \gamma$, $\nu_0 = \beta$ voraussetzen. Damit werden wir dann zu der Lösung des Problems in § 3 gelangen.

§ 11.

Berechnung der Focaldistanzen.

Die Ersetzung der wirklichen Mannigfaltigkeiten λ_0, μ_0, ν_0 durch die ausgearteten in dem Satze des letzten Paragraphen hat zur Folge, dass der von P ausgehende stetige Linienzug in einen solchen aus einzelnen geraden Linien, welche die Focalflächen bezw. die Focalcurven dieser

Flächen schneiden, d. h. in einen mehrmals gebrochenen Linienzug nach den inneren Brennpunkten $d = \pm\sqrt{\alpha - \beta}$ übergeht. Wir gehen aber sogleich an die directe Bestimmung dieser Focallinien und deren gegenseitigen Beziehungen. Die acht Focalstrahlen im R_4 von einem beliebigen Punkt P aus schneiden die Coordinatenräume resp. die darin liegenden Focalflächen in wechselnder Reihenfolge, deren verschiedene Möglichkeiten wir untersuchen müssen für die Berechnung der Längen der Strahlen zwischen dem Punkt P und etwa dem Focalellipsoid.

Wir bezeichnen die Schnittpunkte eines Focalstrahls mit dem ∞ fernen R_3 mit D, mit $\eta = \alpha$ resp. $x = 0$ mit A, mit dem Focalellipsoid $\begin{matrix}\lambda_0 = \delta \\ \mu_0 = \delta\end{matrix}$ mit E, mit dem einmantligen Focalhyperboloid $\left.\begin{matrix}\mu_0 \\ \nu_0\end{matrix}\right\} = \gamma$ mit H_1 und mit dem zweimantligen Focalhyperboloid $\left.\begin{matrix}\nu_0 \\ \eta_0\end{matrix}\right\} = \beta$ mit H_2. Die Punkte D, E, H_1, H_2, A theilen dann einen Focalstrahl in fünf Abschnitte, in welchen die Veränderlichen λ, μ, ν, η beim Durchlaufen des Strahls in positiver Richtung wachsen oder abnehmen, innerhalb deren also die $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, $d\eta$ positiv oder negativ bleiben. Die Zusammenstellung der diesen Grössen entsprechenden Vorzeichen für einen Abschnitt nennt man nach Herrn Staude seine Charakteristik.

Wenn man die Focalstrahlen auf das Axensystem $\mathfrak{x}$, χ, $\mathfrak{z}$, ϑ bezogen denkt, und $\mathfrak{x}$, bezw. λ, auf den von P ausgehenden Abschnitten als positiv annimmt, so sind die Charakteristiken der Strahlen gegeben durch die Vorzeichen der cos ihrer Neigungswinkel gegen die Axen. Für die Abschnitte der acht Focalstrahlen, in denen P gelegen ist, hat man demnach die Charakteristiken*):

$$f_1 = (++++),\ f_2 = (+++-),\ f_3 = (++-+),\ f_4 = (+-++),$$
$$f_5 = (++--),\ f_6 = (+-+-),\ f_7 = (+--+),\ f_8 = (+---)$$

wo die Vorzeichen in der Reihenfolge λ, μ, ν, η genommen sind.

Betrachten wir andererseits einen beliebigen Focalstrahl, so können darauf die vier im Endlichen gelegenen Punkte in allen möglichen Combinationen auf einander folgen. Da aber von den 24 Combinationen der vier Punkte je zwei zu einander invers sind, so können wir diese zusammen untersuchen. Wir stellen die 24 Möglichkeiten in einer Tabelle zusammen, indem wir zugleich die Charakteristiken der verschiedenen Abschnitte beifügen. Diese Charakteristiken sind leicht zu erhalten, wenn man die Veränderlichkeit der λ, μ, ν, η berücksichtigt und beobachtet, welche dieser Grössen in den einzelnen Punkten ihr Vorzeichen wechseln. Die Pfeile geben die positive Richtung des Strahls an:

*) Vergl. hierzu Staude, Focaleigenschaften etc. § 14 und 15.

$\rightarrow$	$++++$	$+++-$	$++-+$	$+-++$	$-+++$
$D----$	$A---+$	H_2--+-	H_1-+--	$E+---$	$\leftarrow D$
$\rightarrow$	$++-+$	$++--$	$+-+-$	$+--+$	$-+-+$
$D--+-$	$A--++$	H_1-+-+	H_2-++-	$E+-+-$	$\leftarrow D$
$\rightarrow$	$++-+$	$++--$	$+-+-$	$-++-$	$-+-+$
$D--+-$	$A--++$	H_1-+-+	$E+--+$	H_2+-+-	$\leftarrow D$
$\rightarrow$	$+++-$	$++-+$	$++--$	$+-+-$	$-++-$
$D---+$	H_2--+-	$A--++$	H_1-+-+	$E+--+$	$\leftarrow D$
$\rightarrow$	$++-+$	$+-++$	$+-+-$	$-++-$	$-+-+$
$D--+-$	H_1-+--	$A-+-+$	$E+--+$	H_2+-+-	$\leftarrow D$
$\rightarrow$	$++-+$	$+-++$	$+-+-$	$+--+$	$-+-+$
$D--+-$	H_1-+--	$A-+-+$	H_2-++-	$E+-+-$	$\leftarrow D$
$\rightarrow$	$+++-$	$++-+$	$+-++$	$+-+-$	$-++-$
$D---+$	H_2--+-	H_1-+--	$A-+-+$	$E+--+$	$\leftarrow D$
$\rightarrow$	$++--$	$+-+-$	$+--+$	$+---$	$-+--$
$D--++$	H_1-+-+	H_2-++-	$A-+++$	$E+-++$	$\leftarrow D$
$\rightarrow$	$++-+$	$+-++$	$-+++$	$-++-$	$-+-+$
$D--+-$	H_1-+--	$E+---$	$A+--+$	H_2+-+-	$\leftarrow D$
$\rightarrow$	$+++-$	$++-+$	$+-++$	$-+++$	$-++-$
$D---+$	H_2--+-	H_1-+--	$E+---$	$A+--+$	$\leftarrow D$
$\rightarrow$	$++--$	$+-+-$	$+--+$	$-+-+$	$-+--$
$D--++$	H_1-+-+	H_2-++-	$E+-+-$	$A+-++$	$\leftarrow D$
$\rightarrow$	$++--$	$+-+-$	$-++-$	$-+-+$	$-+--$
$D--++$	H_1-+-+	$E+--+$	H_2+-+-	$A+-++$	$\leftarrow D$

Wir suchen nun für die acht Focalstrahlen durch den Punkt P in dieser Tabelle nach den Vorzeichenzusammenstellungen, die mit den aufgefundenen Charakteristiken übereinstimmen, dann erhalten wir jedesmal die verschiedenen möglichen Reihenfolgen der Punkte A, H_1, H_2, E auf den Focalstrahlen, wobei wir den Punkt P im betr. Abschnitt aufführen, nämlich:

1) $f_1 = (++++)$ schneidet: $DPAH_2H_1E$.

2) $f_2 = (+++-)$ „ : APH_2H_1ED; DPH_2AH_1E; DPH_2H_1AE; DPH_2H_1EA.

3) $f_3 = (++-+)$ „ : AH_2PH_1E; $DPAH_1H_2E$; $DPAH_1EH_2$; H_2PAH_1E; DPH_1AEH_2; DPH_1AH_2E; H_2PH_1AE; DPH_1EAH_2; H_2PH_1EA.

4) $f_4 = (+ - + +)$ schneidet: AH_2H_1PED; H_1PAEH_2D; H_1PAH_2E; H_2H_1PAE; $PEAH_2H_1D$; H_1PEAH_2; H_2H_1PEAD; $PAEH_2H_1$; PAH_2EH_1D.

5) $f_5 = (+ + - -)$ „ : APH_1H_2E; APH_1EH_2; H_2APH_1E; PH_1H_2AE; PH_1H_2EA; PH_1EH_2A.

6) $f_6 = (+ - + -)$ „ : AH_1PH_2E; PEH_2H_1A; AH_1PEH_2; PH_2EH_1A; H_2AH_1PE; H_1APEH_2; PH_2EAH_1; H_1APH_2E; PEH_2AH_1; H_2H_1APE; H_1PH_2AE; PH_2AEH_1; H_1PH_2EA; $APEH_2H_1$; H_1PEH_2A; APH_2EH_1.

7) $f_7 = (+ - - +)$ „ : AH_1H_2PE; H_2PEH_1A; PEH_1AH_2; H_2PEAH_1; H_1AH_2PE; $PEAH_1H_2$; H_1H_2PAE; H_2PAEH_1; $PAEH_1H_2$; H_1H_2PEA; AH_2PEH_1.

8) $f_8 = (+ - - -)$ „ : PEH_1H_2A; H_1H_2APE; $APEH_1H_2$; H_2APEH_1.

Damit kann man die Länge der Focalstrahlen von P bis zum Ellipsoid berechnen. Aus dem Linienelement:

$$ds = \pm \frac{d\lambda}{\sqrt{\alpha - \lambda}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{\alpha - \mu}} \pm \frac{d\nu}{\sqrt{\alpha - \nu}} + \frac{d\eta}{\sqrt{\alpha - \eta}}$$

erhält man die Entfernung zweier Punkte, zwischen denen kein Schnittpunkt mit den Focalflächen liegt, oder auch zwischen zwei solchen Schnittpunkten direct durch Integration zwischen den betreffenden Grenzen, und man kann dann weiter die Länge des Focalstrahls aus solchen Theilstrecken zusammensetzen. Jeder der Focalstrahlen schneidet das Focalellipsoid in einem Punkt, dessen Coordinaten ($\lambda_0 = \delta$, $\mu_0 = \delta$, ν_1, η_1) etc. etc. sind, und wobei die ν_1, η_1 die Krümmungslinien auf dem Ellipsoid ergeben, selbst also als elliptische Coordinaten im R_3 anzusehen sind.

Für den ersten Focalstrahl folgt aus den Formeln:

$$\sigma_1 = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \eta} - \sqrt{\alpha - \nu_1} - \sqrt{\alpha - \eta_1}$$

wobei, wie stets, (λ, μ, ν, η) die Coordinaten des Punktes P sind. Für den Focalstrahl müssen wir zwei Fälle unterscheiden nach den verschiedenen möglichen Lagen von P und E, es wird:

α) $\sigma_2 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\eta} - \sqrt{\alpha-\nu_2} + \sqrt{\alpha-\eta_2}$,
oder

β) $\sigma_2 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\eta} - \sqrt{\alpha-\nu_2} - \sqrt{\alpha-\eta_2}$.

Für den dritten Strahl ergeben sich aus der Zusammenstellung drei mögliche Fälle, für welche:

α) $\sigma_3 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} - \sqrt{\alpha-\nu_3} - \sqrt{\alpha-\eta_3}$,
oder

β) $\sigma_3 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\nu_3} - \sqrt{\alpha-\eta_3}$,
oder

γ) $\sigma_3 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} - \sqrt{\alpha-\nu_3} + \sqrt{\alpha-\eta_3}$.

Ferner für den vierten Strahl drei Typen:

α) $\sigma_4 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} - \sqrt{\alpha-\nu_4} - \sqrt{\alpha-\eta_4}$,
oder

β) $\sigma_4 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} - \sqrt{\alpha-\nu_4} + \sqrt{\alpha-\eta_4}$,
oder

γ) $\sigma_4 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\nu_4} - \sqrt{\alpha-\eta_4}$.

Für den fünften Strahl ebenfalls drei Typen:

α) $\sigma_5 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\nu_5} - \sqrt{\alpha-\eta_5}$,
oder

β) $\sigma_5 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\eta} - \sqrt{\alpha-\nu_5} + \sqrt{\alpha-\eta_5}$,
oder

γ) $\sigma_5 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\nu_5} + \sqrt{\alpha-\eta_5}$.

Für den sechsten Strahl hat man wieder drei Typen:

α) $\sigma_6 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\nu_6} - \sqrt{\alpha-\eta_6}$,

und entsprechend wie β) und γ) für den fünften Strahl.

Für den siebenten Strahl hat man zwei Typen:

α) $\sigma_7 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\nu_7} - \sqrt{\alpha-\eta_7}$,

β) $\sigma_7 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\nu_7} + \sqrt{\alpha-\eta_7}$.

Für den achten Strahl ergiebt die Tabelle, dass zwischen T und E nie ein weiterer Punkt liegt, so dass für ihn eben bleibt:

$$\sigma_8 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\nu_8} + \sqrt{\alpha-\eta_8}.$$

Von jedem der Punkte, in welchem einer der Focalstrahlen das Focalellipsoid trifft, gehen je zwei Focalstrahlen nach den beiden Brennpunkten $d = \pm\sqrt{\alpha-\beta}$ des Ellipsoids, und wenn wir die Strahlen nach dem Brennpunkt $d = +\sqrt{\alpha-\beta}$ mit ϱ_1 und ϱ_2, die nach $d = -\sqrt{\alpha-\beta}$ mit ϱ_1' und ϱ_2' bezeichnen, wo $\varrho_1 < \varrho_2$, $\varrho_1' < \varrho_2'$ ist, so haben wir nach bekannten Formeln:

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= \sqrt{\alpha-\delta} - \sqrt{\alpha-\nu_i} - \sqrt{\alpha-\eta_i} + \sqrt{\alpha-\gamma}, \\
\varrho_2 &= \sqrt{\alpha-\delta} + \sqrt{\alpha-\nu_i} + \sqrt{\alpha-\eta_i} + \sqrt{\alpha-\gamma}, \\
\varrho_1' &= \sqrt{\alpha-\delta} - \sqrt{\alpha-\nu_i} + \sqrt{\alpha-\eta_i} + \sqrt{\alpha-\gamma}, \\
\varrho_2' &= \sqrt{\alpha-\delta} + \sqrt{\alpha-\nu_i} - \sqrt{\alpha-\eta_i} + \sqrt{\alpha-\gamma}.
\end{aligned}$$

Diese Formeln zusammen mit den Werthen σ erlauben dann die Gesammtlänge der gebrochenen Linien von P über das Focalellipsoid, dessen Focalellipse nach dem einen oder andern Brennpunkt zu berechnen. Jede dieser gebrochenen Linien entspricht dann einem Maximal- oder Minimalwerth. Aus dem bisherigen ergiebt sich für die erste Focallinie nach dem Brennpunkt $+d$, und für die Focallinie nach $-d$ eindeutig ein Maximum bezw. Minimum zu:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\delta} + \sqrt{\alpha-\gamma}, \\
r_8 &= \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\delta} + \sqrt{\alpha-\gamma}.
\end{aligned}$$

In den andern Fällen, in denen wir auch über den Verlauf der Focalstrahlen im R_4 keine definitive Entscheidung treffen konnten, ist aus den Formeln auch keine solche Entscheidung darüber möglich, ob die Focallinie nach dem Brennpunkt $+d$ oder $-d$ zu führen ist, es ist nur möglich die Gesammtlänge der Focallinie und die Möglichkeiten ihres Verlaufes allgemein anzugeben; in Wirklichkeit ist indessen dieser Verlauf bestimmt.

Es entspricht nun der zweite Focalstrahl einem maximalen Werth der Focallinie nach dem Brennpunkt $+d$ oder $-d$, und es ist die Gesammtlänge:

$$r_2 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\delta} + \sqrt{\alpha-\gamma}.$$

Der 7te Focalstrahl entspricht einem Minimum der Focallinie nach dem Brennpunkt $+d$ oder $-d$ und es ist:

$$r_7 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\delta} + \sqrt{\alpha-\gamma}.$$

Der 3te Focalstrahl entspricht wieder einem Maximum nach dem Brennpunkt $+d$ oder $-d$, und der 6te Focalstrahl einem Minimum der Focallinie nach diesen Punkten:

$$r_3 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\delta} + \sqrt{\alpha-\gamma},$$
$$r_6 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\delta} + \sqrt{\alpha-\gamma}.$$

Der 4te und 5te Focalstrahl können ein Maximum bezw. Minimum der Focallinie nach dem Brennpunkt $+d$, oder aber ein Minimum bezw. Maximum nach dem Punkt $-d$ darstellen. Für alle Fälle ist:

$$r_4 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\delta} + \sqrt{\alpha-\gamma},$$
$$r_5 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\eta} + \sqrt{\alpha-\delta} + \sqrt{\alpha-\gamma}.$$

Zwischen diesen acht Grössen r bestehen eine Anzahl Gleichungen, die man leicht ableiten kann. Wichtig für die Focaleigenschaften der $M_3^{(3)}$ sind vor allem die Relationen:

$$r_1 + r_8 = 2\sqrt{\alpha-\lambda} + 2f + 2e, \quad (\sqrt{\alpha-\delta} = f,\ \sqrt{\alpha-\gamma} = e)$$

oder allgemein:

$$\begin{cases} \dfrac{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8-8e-8f}{8} = \sqrt{\alpha-\lambda}, \\ \dfrac{1}{8}(r_1+r_2+r_3-r_4+r_5-r_6-r_7-r_8) = \sqrt{\alpha-\mu}, \\ \dfrac{1}{8}(r_1+r_2-r_3+r_4-r_5+r_6-r_7-r_8) = \sqrt{\alpha-\nu}, \\ \dfrac{1}{8}(r_1-r_2+r_3+r_4-r_5-r_6+r_7-r_8) = \sqrt{\alpha-\eta}, \end{cases}$$

und diese Formeln enthalten die Focaleigenschaften der vier Typen von Mannigfaltigkeiten mit Mittelpunkt in der allgemeinsten Formulirung.

Hieran reihen wir nun zum Schluss die Zerfällung der Gleichung confocaler Mannigfaltigkeiten, welche vom Standpunkt der Gleichungstheorie von Interesse ist. Nach der bekannten Beziehung zwischen rechtwinkligen und elliptischen Coordinaten ist:

$$(\alpha-\tau)(\beta-\tau)(\gamma-\tau)(\delta-\tau)\left\{\frac{x^2}{\alpha-\tau} + \frac{y^2}{\beta-\tau} + \frac{z^2}{\gamma-\tau} + \frac{t^2}{\delta-\tau} - 1\right\}$$
$$= -(\tau-\lambda)(\tau-\mu)(\tau-\nu)(\tau-\eta),$$

in dieser Gleichung ersetzen wir nun $\alpha-\tau$ durch a^2, indem wir wieder

$$d^2 = \alpha-\beta, \quad e^2 = \alpha-\gamma, \quad f^2 = \alpha-\delta$$

substituiren, wo also jetzt a veränderlich, d, e, f constante Grössen sind, dann geht die Gleichung über in:

$$a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)(a^2-f^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}+\frac{t^2}{a^2-f^2}-1\right\}$$
$$=-(a^2-(\alpha-\lambda))(a^2-(\alpha-\mu))(a^2-(\alpha-\nu))(a^2-(\alpha-\eta)),$$

und indem wir hierin statt $\alpha-\lambda$, $\alpha-\mu$, $\alpha-\nu$, $\alpha-\eta$ die Ausdrücke aus den Längen der Focallinien einsetzen, kommen wir auf eine Gleichung, in der die Focaleigenschaften der sämmtlichen vier Typen von Mannigfaltigkeiten vereinigt ausgesprochen sind:

$$a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)(a^2-f^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}+\frac{t^2}{a^2-f^2}-1\right\}$$
$$=-\left\{a^2-\left(\frac{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8-8e-8f}{8}\right)^2\right\}$$
$$\cdot\left\{a^2-\left(\frac{r_1+r_2+r_3-r_4+r_5-r_6-r_7-r_8}{8}\right)^2\right\}$$
$$\cdot\left\{a^2-\left(\frac{r_1+r_2-r_3+r_4-r_5+r_6-r_7-r_8}{8}\right)^2\right\}$$
$$\cdot\left\{a^2-\left(\frac{r_1-r_2+r_3+r_4-r_5-r_6+r_7-r_8}{8}\right)^2\right\}.$$

Wir fügen den Entwicklungen der Focaleigenschaften noch die Bemerkung hinzu, dass der eingeschlagene Weg, durch den wir zu den Eigenschaften der $M_3^{(2)}$ im R_4 gekommen sind, mit leichten Modificationen die Focaleigenschaften der Mannigfaltigkeiten vom 2ten Grad und beliebig vielen Dimensionen ergiebt. Insbesondere zeigt die letzte Formel in Zusammenhang mit den Zerlegungen, die Herr Staude für die Flächen und Curven 2ten Grades ausgeführt hat, wie die Zerlegung der Formel im R_4 vorgenommen werden muss.

Immer lässt sich auch die Konstruktion aus gebrochenen Focallinien zurückführen auf ein Problem über einen stetigen Zug aus geodätischen Linien auf einer quadratischen Mannigfaltigkeit von einer um 1 höheren Dimension. Wie bei den Flächen 2ten Grades im R_3, der Entfernung zweier conjugirter Focalpunkte über einen *gebrochenen* Linienzug bei dem Problem im R_4 eine geodätische Entfernung zweier conjugirter Nabelpunkte entspricht, so wird im allgemeinen Fall höherer Dimension ein gebrochener Linienzug durch einen mit stetiger Tangente ersetzt. Die gebrochenen Focallinien zwischen zwei Brennpunkten einer $M_n^{(2)}$ sind in weiterer Auffassung geodätische Linien und bilden ein Beispiel für den Fall, dass unendlich viele von einem Punkt ausgehende geodätische Linien sich in einem Punkte treffen, wo dann ja die Längen dieser geodätischen Linien einander gleich sein müssen.

Inhalt.

The figure formed from six points in space of four dimensions.

By

H. W. Richmond, King's College, Cambridge, England.

It was my aim when commencing this sketch to illustrate the fact that a very large proportion of the known properties of certain much studied families of points, both in a plane and in space, (and therefore also of the reciprocal families of lines and planes), are intuitive consequences of the nature of a very simple figure in space of four dimensions, — the figure derived by the simplest operations of geometry from six points chosen at random in such space. The families of lines and points and planes referred to include (1) the fifteen lines which join six points of a curve of the second degree, — Pascal's Hexagram; (2) certain sets of fifteen of the double tangents of a plane curve of the fourth order; (3) fifteen points in space which are nodes of a surface of the fourth order; (4) any fifteen of the nodes or of the singular planes of Kummer's quartic surface; as well as other families less known than these. To extend or even to quote the long list of published properties of these figures was no part of my plan; for the tendency of recent times is, very rightly, to turn in weariness from the apparently interminable successions of elementary theorems which geometry sometimes presents to us. But, on the other hand, to prove that practically all results hitherto established for the simplest and most fully investigated of the above families belong in a wider sense to all, and to refer these results to a common simple cause, appeared to me a legitimate theme. In concluding this note I find myself rather of a mind to enlarge upon the fundamental necessity for the existence of families of points possessed of these properties, as an immediate consequence of the axioms of four-dimensional space, that four points determine a single space of three dimensions and so forth: yet so large a part of this sketch consists of a review of the work of others, — as references given in the text will shew, — that the somewhat illogical method pursued was almost forced upon me. From results already established concerning Pascal's Hexagram, cubic surfaces, and quartic curves, a system of equations is derived, which are seen to apply properly to space of four dimensions, and are so interpreted: the final conclusion reached by this method is that the properties so obtained are fundamental, and might be considered, without reference to coordinates or curved loci, at the outset of descriptive geometry.

§ 1.

On Pascal's Hexagram.

Although Pascal's original theorem — that, when the vertices of a hexagon lie on a curve of the second degree, the intersections of its opposite sides are collinear, — dates from as long ago as 1640, no advance towards the development of the figure now commonly known as Pascal's Hexagram was made till the present century. Brianchon's theorem concerning six tangents of a curve of the second class, obtained by reciprocation in 1806, cannot, according to modern ideas, be ranked as distinct from that of Pascal; the field for nearly all later research was opened by Steiner in 1828, when he pointed out that from the same six points of a conic sixty hexagons may be formed, each of which gives rise to a different Pascal line. During the next fifty years the figure of these sixty lines attracted the attention of Steiner, Plücker, Cayley, Salmon, Kirkman, Hesse, v. Staudt, Grossman, Bauer, Schröter, and others, until finally in 1877 the results of their investigations were summed up and extended by Veronese, (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. 1, series III, pp. 649—703). Inasmuch as Veronese's memoir, (which is prefaced by an excellent historical sketch of the subject, with full references to the works of earlier writers), contains proofs of all previously known theorems as well as of a large number of new and original ones, we shall class together all these properties under the name *Veronese's properties of Pascal's Hexagram.*

The same volume of the *Atti della R. Accad. dei Lincei* contains a second memoir (pp. 854—874) of even greater importance, which throws an entirely new light upon the nature of the figure. Cremona, to whom Veronese had submitted his manuscript, was led on reading it to the discovery that the whole series of theorems established therein follows intuitively from the obvious properties of the lines which lie upon a surface of the third order with a nodal point. On such a surface lie six lines passing through the nodal point, generators of the quadric cone which touches the surface there, and fifteen others, one in the plane of each pair of the foregoing: let the former be denoted by symbols a, b,

c, d, e, f, and the latter by pairs of these symbols $ab, ac, \ldots ef$, in such a way that ab is the line which meets the lines a and b of the former set. If now this system of lines be projected upon a plane, the nodal point being the vertex of projection, the plane of the projected system cuts the lines a, b, c, d, e, f in six points (also called a, b, c, d, e, f) situated on a curve of the second degree; and the projection of the line ab is a line (also called ab) which joins the points a and b: we thus have fifteen lines which join in pairs six points of a conic section, the foundation from which the complete figure of Veronese's memoir is built up.

But the plane figure is in reality far less simple than the three-dimensional. In the former the fact that every two lines intersect causes unnecessary confusion; for it appears upon examination that Veronese's memoir nowhere contains any property concerning the point of intersection of two lines, except when the lines of which they are the projections actually intersect; not only this, but the nature of the three-dimensional figure renders obvious all (or very nearly all) Veronese's results: — thus for example a proposition that three lines are concurrent needs no further proof when it can be pointed out that they are projections of the lines of intersection of three planes: — Cremona's three-dimensional figure in fact contains all that is essential to the proof of Veronese's theorems and is free from what is irrelevant; moreover the vast numbers of lines and points which make up the plane figure are obtained by projecting the intersections of a comparatively small number of planes in space. Cremona's methods are purely geometrical, but the investigation is very easily conducted by help of an extremely simple and symmetrical system of equations; — not those given by Cremona at the end of the memoir to which we have already referred, but a system derivable immediately from the form to which he has elsewhere reduced a non-singular surface of the third order: see *Math. Annalen* XIII, p. 301; or *Salmon-Fiedler*, *Anal. Geom. des Raumes*, p. 403: a full investigation of Veronese's results will be found in the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. XV, p. 207 from which I now quote the following.

Given a surface of the third order, having a nodal point and no further singularity, a unique family of six planes $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots$ $. x_6 = 0$, may be determined, such that the surface is represented by the equation

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0;$$

or

$$\Sigma(x_r^3) = 0; \quad (r = 1, 2, 3, 4, 5, 6);$$

with the following conditions,

$$\Sigma(x_r) \equiv 0; \quad \Sigma(k_r^2 x_r) \equiv 0; \quad \Sigma(k_r) = 0; \quad \Sigma(k_r^3) = 0:$$

the constants $k_1, k_2, \ldots k_6$, are the coordinates of the conical point, and the two identical linear relations which connect the six coordinates x_r of any point are stated explicitly. The six lines a, b, c, d, e, f, which pass through the nodal point are the intersections of the surface with the tangent cone, $\Sigma(k_r x_r^2) = 0$, and need not be further particularized; while each of the fifteen lines, $ab, ac, \ldots ef$, is represented by one of a family of fifteen exactly similar equations of which

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = 0$$

is the type: the lines ab, ac, etc. therefore lie by threes in the fifteen planes $x_1 + x_2 = 0$, according to the following or some equivalent scheme: —

ab, cd, ef in $x_1+x_2=0$	af, bd, ce in $x_2+x_3=0$	ad, bc, ef in $x_3+x_5=0$
$ac, be, df \ldots x_1+x_3=0$	$ae, bc, df \ldots x_2+x_4=0$	$ae, bf, cd \ldots x_3+x_6=0$
$ad, bf, ce \ldots x_1+x_4=0$	$ac, bf, de \ldots x_2+x_5=0$	$af, be, cd \ldots x_4+x_5=0$
$ae, bd, cf \ldots x_1+x_5=0$	$ad, be, cf \ldots x_2+x_6=0$	$ac, bd, ef \ldots x_4+x_6=0$
$af, bc, de \ldots x_1+x_6=0$	$ab, cf, de \ldots x_3+x_4=0$	$ab, ce, df \ldots x_5+x_6=0$

all other possible schemes can be derived from this by suitable interchange either of the symbols a, b, c, d, e, f, or of the suffixes 1, 2, 3, 4, 5, 6; the equations of any one of the fifteen lines can be at once selected. A few of the chief properties of the Hexagram are proved below, the names of the various types of lines and points being in all cases adopted from Veronese's memoir.

(α) If a hexagon be constructed whose vertices are the six points a, b, c, d, e, f, (which lie on a conic) taken in any order, the opposite sides intersect in three points situated in one of sixty Pascal lines. For example, in the case of the hexagon $abefdc$, the three alternate sides ab, ef, dc are projections of lines which lie in the plane $x_1 + x_2 = 0$, and be, fd, ca are projections of lines which lie in $x_1 + x_3 = 0$; therefore the intersections of ab with fd, of be with dc, and of ef with ca, being projections of three points which lie on $-x_1 = x_2 = x_3$, the line of intersection of the two planes, are themselves collinear. The symmetry of our system of equations enables us to infer, by interchanging the suffixes 1, 2, 3, 4, 5, 6, in all possible ways, that there are sixty of these Pascal lines, each the projection of a line such as $-x_1 = x_2 = x_3$.

(β) The Pascal lines meet by threes in sixty Kirkman points, there being a correspondence between each Kirkman point and one particular Pascal line; (the projection of the point $-x_1 = x_4 = x_5 = x_6$ is a Kirkman point, to which the Pascal line given in (α) corresponds).

When three Pascal lines meet in a Kirkman point, their corresponding Kirkman points lie on a Pascal line. These points and lines fall into six figures of ten Pascal lines and ten Kirkman points: each figure consists of the projections of the intersections of five planes such as

$$x_1+x_2=0,\quad x_1+x_3=0,\quad x_1+x_4=0,\quad x_1+x_5=0,\quad x_1+x_6=0,$$

and may be resolved in ten different ways into two perspective triangles with their axis of homology.

(γ) The Pascal lines meet also by threes in twenty Steiner points, which lie by fours on fifteen Steiner-Plücker lines: these are projections of points such as $x_1=x_2=x_3=0$, and of lines such as $x_1=x_2=0$, respectively, the edges and vertices of the figure formed by the six planes $x_1=0$, $x_2=0,\ldots x_6=0$: the figure formed by the Steiner points and Steiner-Plücker lines may therefore be resolved into three perspective triangles with their three concurrent axes of homology in twenty different ways.

(δ) When three Pascal lines meet in a Steiner point, the corresponding Kirkman points lie on one of twenty Cayley-Salmon lines which meet by fours in fifteen Salmon points: projections of $x_4=x_5=x_6$, and of $x_3=x_4=x_5=x_6$ respectively.

(ε) Six lines such as *bc, ca, ab, ef, fd, de,* touch a conic: for they are projections of six lines of which each of the first three meets each of the last three, and which are therefore generators of a quadric surface: in fact $x_1^2+x_4^2+x_5^2=x_2^2+x_3^2+x_6^2$.

The system of equations here used, being unique and absolutely symmetrical in form, gives an immediate answer to all questions of correspondence between the different lines and points, or the number of those of a given type, and all Veronese's results may be verified without difficulty. Upon closer investigation I find that by projecting the complete system of intersections of the two families of planes $x_1\pm x_2=0$, — called by Cremona 'tritangent' planes and Plücker planes respectively, — a figure is obtained which in all except a few unimportant details is coextensive with that developed by Veronese: together with proofs, similar to those just quoted, of practically all his theorems. There is a certain slight advantage gained by applying the name Pascal's Hexagram to the figure so defined: we may do so without injustice to earlier writers: while it seems desirable that the statement which will repeatedly be made in the next section, that a family of lines possesses the properties of Pascal's Hexagram, should carry with it a clear and definite meaning: it is not implied that the list of results shared by these families of lines and the Hexagram cannot be extended.

§ 2.

On plane systems of lines which posses Veronese's properties of the Hexagram.

It will be observed that, in the course of the foregoing verification of Veronese's results, no use whatever is made of the conditions $\Sigma(k_r^2 x_r) \equiv 0$ and $\Sigma(k_r^3) = 0$, which connect the coordinates (x) and the constants (k): it is immaterial whether these conditions are satisfied or not. In order that a family of coplanar lines should possess all the properties established in Veronese's memoir for the fifteen lines which join six points of a conic, all that is necessary is that they should be projections of fifteen lines in space that satisfy the family of equations similar to

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = 0, \\ \text{when} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \equiv 0 \end{cases}$$

or, as Cremona expresses it, fifteen lines which lie by threes in fifteen planes. Now it is clear that the family of lines (1) lie upon

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0,$$

a cubic surface without singularities (see Cremona, *Math. Annalen* XIII, p. 301; Salmon-Fiedler p. 403) and form such a set as is left when from the twenty-seven lines of the surface twelve are omitted which form a *double-six*. (Schläfli, *Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. 2, pp. 55 and 110.) In his memoir Cremona points out that the omission of a double-six from the lines of a cubic surface would furnish an example of such a family of lines, but goes no further, being apparently not aware that some years earlier Geiser had discussed the projections of the lines of a cubic surface in the well known paper, published in Vol. I of *Math. Annalen* p. 129, in which the connexion by this geometrical method between the lines of a surface of the third order and the double tangents of a plane curve of the fourth order was first made known. If a point K be taken, the cone with vertex K which envelopes the cubic surface is touched at two distinct points by every line which lies on the surface, viz. the two points where the line cuts the first polar of K: every plane section of the enveloping cone will therefore have the projections from vertex K of the twenty seven lines of the surface as double tangents. When the position of K is unrestricted, a plane section of the enveloping cone is a curve of the sixth order having six cusps which lie on a conic: to such a curve belong twenty-seven double tangents, from which we may in thirty-six different ways select a set of fifteen possessing all Veronese's properties of Pascal's Hexagram. But the special case when K lies upon the cubic surface is of greater interest: the section of the cone with vertex K which envelopes the surface is then a curve of the fourth order without singularities; twenty-seven of whose double tangents are projections from vertex K of the lines which lie on the cubic surface, the remaining double tangent being the intersection of the tangent plane at K with the plane of the curve: moreover I find that if Schläfli's notation be adopted for the lines of the cubic surface, and that of Hesse for the double tangents of the quartic curve, (see Crelle, Vol. 49, p. 243 and Vol. 68, p. 176; or Salmon, *Higher Plane Curves*), it is legitimate to denote the projections of Schläfli's $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$, $(c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16})$, $(c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26})$, $(c_{34}, c_{35}, c_{36}, c_{45}, c_{46}, c_{56})$, by Hesse's (ag, bg, cg, dg, eg, fg), (ah, bh, ch, dh, eh, fh), (ab, ac, ad, ae, af), (bc, bd, be, bf), (cd, ce, cf, de, df, ef) respectively, the last double tangent being represented by gh. Omitting from the lines of the cubic the double-six composed of the first twelve of these lines, we arrive at a theorem which may be stated in the following somewhat remarkable form:

The fifteen double tangents of a plane curve of the fourth order denoted in Hesse's Algorithm by symbols formed of pairs of the six letters a, b, c, d, e, f, possess all the properties of the Pascal's Hexagram formed by the lines (naturally represented by the same symbols) which join in pairs six points, a, b, c, d, e, f, of a conic section.

For example, in the case of the double tangents of a quartic curve, just as in the Hexagram, the intersections of ab and fd, of be and dc, of ef and ca lie on a line, one of a set of sixty similar Pascal lines, which meet by threes in sixty Kirkman points and with them fall into six figures of ten Pascal lines and ten Kirkman points, each figure being that familiar to us as the projection of the lines and points of intersection of five planes in space: the Pascal lines also meet by three in twenty Steiner points (projections of the vertices of a three-dimensional figure formed by six planes) which lie by fours in fifteen lines, (projections of its edges):... the double tangents bc, ca, ab, ef, fd, de, touch a conic section;... and so on through the whole category of Veronese's propositions. [The names Pascal line, Kirkman point, Steiner point are adopted from the Hexagram for convenience: also the notation of *Salmon's Higher Plane Curves* is slightly altered, the symbols 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 being there used in place of our a, b, c, d, e, f, g, h.]

A very remarkable fact, not however without parallel, comes to light when we seek the distinctive geometrical properties of such a set of fifteen double tangents. The rule of the *bifid* substitution, (due to Cayley and Hesse, and explained in Salmon), makes it clear that if we select any two of the twenty-eight double tangents, (e. g. ag and ah), and the five pairs (bg, bh; cg, ch; dg, dh; eg, eh; fg, fh) whose points of contact lie on a conic with those of the first two, *any* fifteen of the remaining sixteen form such a set. Thus it appears that, whereas in Pascal's Hexagram, or in the case of double tangents of the sextic curve above mentioned, we have to deal with sets of fifteen lines which possess a long series of properties owing to a quite definite cause, we here find the fifteen lines joined by a sixteenth which forms with them an absolutely symmetrical family, any fifteen of whose members possess all the properties of the former sets. Sense of symmetry alone shews the necessity of considering sets of sixteen double tangents of the quartic rather than fifteen; but it will also be seen that, in asserting that the fifteen double tangents ab, ac, ... ef, possess all the properties of the Hexagram, we do not exhaust their properties; these properties in fact deal with only forty-five of their intersections and ignore the remaining sixty, which are of equal importance in the case of the quartic curve, but coalesce by tens in the Hexagram: for instance, it is easy to verify the statement that the intersections of ab with ac, of ad with ae, and of bc with de, are collinear in the case of the quartic curve; the same statement is nugatory in the case of the Hexagram, and is false in the case of the double tangents of the six-cusped sextic curve spoken of above. This matter will be considered more fully hereafter.

The relations between the different families of sixteen double tangents, of which the quartic has sixty-three, and other details, which possibly would repay investigation, must be passed over altogether. In the case of a quartic having a node, the properties of the Hexagram belong to any fifteen of the sixteen double tangents: they must belong also in a modified form to certain sets of lines composed partly of double tangents and partly of tangents from the node.

§ 4.

Extension to space of four dimensions.

As the outcome of the investigations of §§ 1, 2, we may supplement Cremona's theorem, — that all Veronese's properties of the Hexagram follow intuitively from the geometrical nature of any projection of a three-dimensional figure composed of fifteen lines which lie by threes in fifteen planes, — by the statement that 'All Veronese's results are established almost instantaneously by analytical methods in the case of any projection upon a plane of a three-dimensional figure, of which the nucleus is a set of fifteen lines satisfying a family of fifteen equations such as

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = 0, \\ \text{when} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0: \end{cases}$$

and which consists in its entirety of the two families of planes $x_1 \pm x_2 = 0$, and their intersections.' But having thus as it were translated Cremona's geometrical theorem into the language of analysis, we cannot fail to see that it may be at once extended and simplified. For a system of six homogeneous coordinates connected by a single identical linear relation should be interpreted as referring to four-dimensional loci; — dealing of course with *descriptive*, to the exclusion of *metrical*, properties.

[A uniform nomenclature for geometry of four-dimensional space has not yet been agreed upon, certain words, (e. g. *plane* and *surface*), being used by different writers in different senses. I shall here call a flat space of n dimensions an R_n; so that a straight line is the same as an R_1; the term a *plane* will always be used to denote an R_2, and the term a *space* without qualification as to the number of dimensions to denote an R_3. Curved loci of one and two dimensions are called *curves* and *surfaces* respectively, and the name *variety* is here restricted to curved loci of three dimensions: thus, in an R_4, varieties, surfaces and curves are determined respectively by one, two, and three relations among the coordinates of their points. Elementary properties of an R_4, e. g. that in it two planes intersect in a single point, or that three given lines are met by one and only one other line, will be assumed; but references to *Veronese's Fondamenti di Geometria, Padua,* 1891, Part II, Book I; to the memoir by the same author, *Math. Annalen*, XIX, p. 161; and to *Whitehead, Universal Algebra*, *Cambridge,* 1898, Book III, may not be out of place].

Equations (1) then must be interpreted as referring to loci in an R_4; they represent in fact fifteen planes which lie by threes in the fifteen spaces $x_1 + x_2 = 0$. To assume, as we have done hitherto, that the six coordinates (x) are connected by a second identical linear relation which we do not need to specify, is to confine our attention to such parts of the four-dimensional figure as lie in one arbitrary R_3, and is as unscientific as the attempt to realize the nature of a figure in space by discussing its section by a single arbitrary plane: mereover analytical methods bring into very clear prominence the fact that those properties of Cremona's three-dimensional family of fifteen lines of which use has been made, are precisely the properties which it possesses in virtue of being the section by an R_3 of our four-dimensional family of fifteen planes. Again the whole of the four-dimensional figure must be derivable from a set of six spaces $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots x_6 = 0$, whose equations satisfy $\Sigma(x_r) = 0$;

in other words it springs from an extremely simple source, six spaces chosen at random in an R_4: for all these reasons the four-dimensional figure is to be preferred.

Since Cremona proceeds to project his family of fifteen lines upon a plane, we now project the four-dimensional family of planes (1) upon an R_3 by means of lines drawn through an arbitrary vertex, and thus arrive at a three-dimensional family of fifteen planes, every plane section of which is a family of lines such as Cremona obtained, and such as we have discussed in §§ 1 and 2: to this three-dimensional family of planes belong properties analogous to, but at once simpler, more extensive and more fundamental than those of the families of lines considered in §§ 1 and 2; properties which would be obvious to us intuitively if we could picture to ourselves the figure in R_4; and which might without difficulty be established by pure geometrical reasoning; but which may also be obtained almost instantaneously from equations (1). The investigation of these properties may clearly be accomplished wholly by means of straight lines, planes, and spaces, — loci, that is to say, of the first order; but as before it is convenient to consider certain curved loci in connection with them. Thus the planes (1) are a part of the locus

(2) $\qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0, \quad \text{or} \quad \Sigma(x_r^3) = 0,$

an extremely interesting variety of the third, denoted in what follows by V_3, some of whose properties have been briefly stated in a note by Segre (*Atti d. R. Accad. di Scienze di Torino,* XXII, p. 547—557). When we project the planes (1) upon an R_3, we also (following the procedure of Geiser) construct the lines which pass through the vertex of projection and touch V_3; they intersect the R_3 in a surface touched by the projection of each of the planes (1) at each point of a conic section: the degree of this surface as a rule is six, but is reduced by two in the important special case when the vertex of projection lies on V_3; moreover, just as before, the curious fact presents itself that, while for arbitrary positions of the vertex of projection we have to deal with a family of fifteen planes possessed of a certain set of properties, in the special case the fifteen are joined by a sixteenth which forms with them an absolutely symmetrical system such that any fifteen possess all the previous properties. In the special case the surface is that known as Kummer's quartic surface, which has sixteen singular points and sixteen singular tangent planes: a plane section of this surface and its singular planes obviously consists of a quartic curve and sixteen of its double tangents. We now learn that the sixteen form a set such as we noticed in § 2, and further that, — (although the statement that any fifteen of them possess all Veronese's properties of Pascal's Hexagram includes almost all that the investigations of Steiner, Hesse and others established concerning such properties of the double tangents of a plane quartic curve, and much beside), — all these properties of the plane curve are in reality consequences of more fundamental theorems concerning Kummer's surface, — which in their turn depend upon the nature of the four-dimensional figure.

In the next section the foregoing and kindred matters will be considered in the simpler and more convenient shape in which the principle of duality enables us to exhibit them. From six points chosen at random in a space of four dimensions a family of fifteen lines which meet by threes in fifteen points, reciprocals of the planes (1), will be derived: our intuitive conception of the nature of this four-dimensional figure suggests a series of properties of the fifteen points in space where the fifteen points in space where the fifteen lines cut any R_3, and from these we can deduce properties of any family of fifteen points in a plane which are the projections of such a family of fifteen points in space: the plane families of points will prove to be the reciprocals of the families of lines discussed in § 2, and their properties to be identical with the reciprocated form of the long list of theorems gradually worked out by mathematicians in the particular case of Pascal's Hexagram, which form the substance of Veronese's memoir.

The reciprocal of Segre's cubic variety V_3 is a variety of the fourth order V_4, of which the fifteen lines spoken of above are double lines: considering the section of this by an R_3, we see that the three-dimensional family of fifteen points mentioned in the last paragraph are double points of a quartic surface, and form a configuration studied by Kummer and others; see Salmon-Fiedler, p. LVII. Should the section be made by an R_3 which touches V_4, the surface has a sixteenth node, and is again Kummer's quartic surface. In order to arrive at the reciprocated form of Pascal's Hexagram a two-fold limitation of the generality is necessary: we must first see that the section of the four-dimensional figure is made by an R_3 which touches V_4, and then take the point of contact as vertex of projection when we project the fifteeen points on a plane.

§ 4.

The figure formed by six points in an R_4.

[In equations (1) and (2) we have made use of a system of six homogeneous coordinates (x) which were connected by an identical linear relation $\Sigma(x_r) \equiv 0$; clearly therefore, although the coordinates of any known point are determined without ambiguity, yet when we work with

$u_1, u_2, \ldots u_6$, coordinates of spaces, where $\Sigma(u_r x_r) \equiv 0$, each coordinate (u) is liable on account of the relation $\Sigma(x_r) \equiv 0$ to be increased by the same quantity and we can only expect relations among the *differences* of the coordinates (u): (to explain the matter more satisfactorily, we must consider the coordinates (x) as referring to an R_4 which forms a part of an R_5). In what follows we discuss for the most part the figure reciprocal to the foregoing, so that coordinates of spaces (u) are definite and connected by the relation $\Sigma(u_r) \equiv 0$; while coordinates of points (x) may all be increased by the same quantity without affecting the equations in which they occur: it is however allowable to impose a condition $\Sigma(x_r) = 0$ on the coordinates (x) should it seem desirable, and we shall always suppose this done].

Let it be agreed to denote under the title *Hexastigm* the figure composed of six points or *vertices* 1, 2, 3, 4, 5, 6 chosen at random in an R_4; the fifteen lines or *edges* 12, 13, .., joining each two vertices; the twenty planes or *faces* 123, 124, ... and the fifteen spaces 1234, 1235, ... determined by each set of three or four vertices respectively. The face 123 is said to be opposite to the face 456, and the edge 12 to the face 3456; three edges such as 12, 34, 56 will, by a slight extension of the meaning of the term, be described as three opposite edges of the Hexastigm. To the fifteen points of intersection of any edge with the opposite space I give the name *Cross-points* of the Hexastigm, denoting by P_{12} the Cross-point which lies on the edge 12. Since the cross-points P_{12}, P_{34}, P_{56} of three opposite edges lie each in the three spaces 3456, 5612 and 1234, they are collinear; in fact they lie on the unique line which intersects the three apposite edges 12, 34, 56: such a line I call a *Transversal* of the Hexastigm.

Theorem. *The fifteen transversals of a Hexastigm are a family of fifteen lines which meet by threes in fifteen points, the Cross-points of the Hexastigm.*

The point of the edge 12 which with the cross-point P_{12} divides the edge harmonically is denoted by Q_{12} and is called a harmonic point of the Hexastigm. It has been tacitly assumed that no five vertices of the Hexastigm lie in an R_3, (and *à fortiori* that no four are coplanar, no three collinear, and no two coincident); we may therefore take $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ... $u_6 = 0$, to be the equations of the six vertices 1, 2, 3, 4, 5, 6, and $\Sigma(u_r) = 0$ to be the relation connecting them: we then arrive at the following equations for determining the above mentioned points, lines, etc.

Vertex 1; $u_1 = 0$; or $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6$:
Edge 12; $u_1 = u_2 = 0$; or $x_3 = x_4 = x_5 = x_6$:

Face 123; $u_1 = u_2 = u_3 = 0$; or $x_4 = x_5 = x_6$:

Space 1234; $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$; or $x_5 = x_6$:

Cross-point P_{12}; $u_1 + u_2 = 0$; $x_1 = x_2$; $x_3 = x_4 = x_5 = x_6$:

Harmonic point Q_{12}; $u_1 = u_2$; $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x_3 = x_4 = x_5 = x_6$:

Transversal P_{12}, P_{34}, P_{56}; $u_1 + u_2 = u_3 + u_4 = u_5 + u_6 = 0$;

or $x_1 = x_2$; $x_3 = x_4$; $x_5 = x_6$.

Since it has been agreed to impose the condition $\Sigma(x_r) \equiv 0$, the ordinates of the harmonic points Q_{12} are

$$x_1 + x_2 = 0;\ x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0.$$

nsider the parts of the Hexastigm which lie in one of its spaces, for ample the space 1234. As the simplest way of describing the well own three-dimensional figure formed by them, it may be said that der special circumstances the middle points of the edges of the tetradron 1234 are cross-points of the Hexastigm, the infinitely distant points the edges are harmonic points; the centre of the tetrahedron is the ss-point P_{56}, and the centre of each face is the point where it is ersected by the opposite face of the hexastigm: the general case may derived projectively. Thus we see

P_{12}, P_{13}, Q_{23}, are collinear;

Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}, are collinear;

P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41}, P_{56}, Q_{13}, Q_{24}, are coplanar;

P_{12}, P_{13}, P_{14}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{24}, are coplanar;

Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{24}, are coplanar;

d other similar results, which the above equations verify immediately. further appear that ten harmonic points such as Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{15}, $_{3}$, Q_{24}, Q_{25}, Q_{34}, Q_{35}, Q_{45}, lie in an R_3, whose equation reduces, in tue of the relation $\Sigma(x_r) \equiv 0$, to $x_6 = 0$: the harmonic points are erefore the points of intersection, four by four, of six spaces

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots x_6 = 0.$$

it these are polars of the six vertices of the hexastigm with respect to imaginary variety of the second order, $\Sigma(x_r^2) = 0$, or $\Sigma(u_r^2) = 0$; e harmonic point of any edge is therefore the pole of the opposite ace of the hexastigm, and the figure is self-reciprocal with respect to is imaginary quadric variety.

The ten spaces such as

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6$$

form a remarkable family whether looked on as a separate configuration or as a part of the whole figure: each meets nine edges of the hexastigm in their cross-points and the remaining six edges (which lie in two opposite faces of the hexastigm) in their harmonic points; and each contains six transversals of the hexastigm. The reciprocal family of ten points in the figure derived from six arbitrarily chosen spaces $x_r = 0$, are the double points of Segre's cubic variety

$$\Sigma(x_r^3) = 0, \quad \Sigma(x_r) \equiv 0.$$

At present the only means of distinguishing any one transversal from its fellows is to mention the edges met by it: but by adapting yet another well-known result to our purpose we obtain a simple notation for the different transversals, which is in harmony with the notation of §§ 1 and 2. For we can in six distinct ways select a set of five transversals which meet all fifteen edges of the hexastigm, each transversal being a constituent of two such sets: if then the sets be denoted by letters a, b, c, d, e, f a convenient notation for the transversal which belongs to set a and set b is the symbol ab. In the appended table each transversal is given in the new notation, and after it the edges which it meets

ab	12, 34, 56	bc	16, 24, 35	ce	14, 23, 56
ac	13, 25, 46	bd	15, 23, 46	cf	15, 26, 34
ad	14, 26, 35	be	13, 26, 45	de	16, 25, 34
ae	15, 24, 36	bf	14, 25, 36	df	13, 24, 56
af	16, 23, 45	cd	12, 36, 45	ef	12, 35, 46

Two transversals, as for example ab, cd, whose symbols do not contain the same letter, intersect in a cross point of the hexastigm. Let us now consider briefly the properties of the Hexastigm which lead to the properties (α), (β), (γ), (δ), (ϵ) of § 1. As before I apply to each line and plane the name of the discoverer of the corresponding locus in Pascal's Hexagram.

(α) Through each of two cross points P_{12}, P_{13}, pass three transversals, ab, cd, ef and ac, be, df respectively: each of the former intersects one of the latter, (viz. in one of the cross-points P_{45}, P_{56}, P_{46}) and in therefore coplanar with it: hence the three planes which contain respectively the transversals ab and fd, bc and de, ef and ca pass through the Pascal line joining the cross points P_{22} and P_{13}.

(β) Three Pascal lines which join the cross points P_{12}, P_{13}, P_{14}, lie in one of sixty Kirkman planes; and the Pascal lines and Kirkman planes fall into six figures of ten lines and ten planes. To obtain such a figure, we join the cross-points P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, of five concurrent edges of the Hexastigm in all possible ways by lines and planes; or we may equally well derive it from the intersections of spaces which contain four of these cross-points.

(γ) Three Pascal lines P_{12}, P_{13}, P_{23}, lie in one of twenty Steiner planes, identical with the faces of the hexastigm, and the Steiner-Plücker lines in which the Steiner planes intersect by fours are identical with its edges.

(δ) The Kirkman planes lead without difficulty to the Cayley-Salmon lines ($u_4 = u_5 = u_6$) and Salmon planes $u_3 = u_4 = u_5 = u_6$.

(ϵ) Of the six transversals which lie in the space

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 = 0,$$

viz. *ad*, *ac*, *de*, *bc*, *bf*, *cf*, each of the first three intersects each of the second three: they are therefore generators of a quadric surface.

In a discussion of the four-dimensional figure alone it would be unnecessary to mention properties so obvious as these; it is however worth noting that in this four-dimensional figure Cayley-Salmon points and Salmon planes are the polar reciprocals of the Steiner planes and Steiner-Plücker lines with respect to the quadric $\Sigma(x_r^2) = 0$: the connection is lost when we return to three or two dimensions: and again that the spaces mentioned in (ϵ) are in reality of far higher importance than appears above. A discussion of the properties of Segre's cubic variety, or of the no less interesting reciprocal variety of the fourth order

$$\{\Sigma(x_r^2)\}^2 = 4\Sigma(x_r^4); \quad \Sigma(x_r) = 0;$$

does not fall within the scope of this sketch: I hope soon to investigate the matter elsewhere. Such a discussion would shew how it is that the families of fifteen points in space derived from the transversals of a hexastigm by section with an R_3, or the plane families which are the projections of these, present themselves also in connexion with certain curved loci, (and would very probably throw light on the nature of these loci in the case of the quartic surfaces with fifteen or sixteen nodal points). But it is, I think, clear that this, although the historical, is not the best or most scientific way of approaching families of points or lines or planes which possess they properties of the Hexagram. That families of points endowed with these properties exist, both in a plane and in space, is a fact that should be recognized at the outset of descriptive geometry. Just as from the axioms of three-dimensional geometry we deduce the necessity of the existence of homologous triangles from considering the figure formed by five points in space, so here from the axioms of geometry of four dimensions we have considered the nature and properties of a Hexastigm and its transversals in space of four dimensions, and infer that in space of three or two dimensions families of points must exist possessing the long series of properties which we have classed together under the title Veronese's Properties of Pascal's Hexagram.*)

King's College, Cambridge, Feb. 1, 1899.

*) Cf. Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXI, pp. 125—160 (1899).

Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen.

Von

J. Horn in Charlottenburg.

Herr Poincaré hat im 7. Band des American Journal*) eine lineare Differenzengleichung

$$Q_0 u_{n+k} + Q_1 u_{n+k-1} + \cdots + Q_{k-1} u_{n+1} + Q_k u_n = 0$$

betrachtet, deren Coefficienten $Q_0, Q_1, \ldots Q_k$ ganze rationale Functionen von n sind, und $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ untersucht. Mit Rücksicht darauf, dass die Coefficienten der convergenten oder divergenten Potenzreihen, welche lineare Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten befriedigen, solchen linearen Differenzengleichungen (Recursionsformeln) genügen, setze ich die von Herrn Poincaré begonnene Untersuchung fort. Ich gelange zu einer für grosse Werthe von n gültigen asymptotischen Darstellung der Lösungen u_n der Differenzengleichung**) durch unendliche Reihen, welche ähnlich gebildet sind, wie die einer linearen Differentialgleichung formell genügenden Thomé'schen Normalreihen.

Wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeige, lässt sich die vorliegende Untersuchung auf lineare Differentialgleichungen übertragen; mit Rücksicht auf diese Uebertragung ist im Folgenden die Bezeichnung gewählt.

§ 1.

In dem System von Differenzengleichungen

$$\text{A)} \qquad w_\lambda(x+1) = \alpha_\lambda w_\lambda(x) + \sum_\mu Q_{\lambda\mu} w_\mu(x) \qquad (\lambda, \mu = 1, \cdots n)$$

*) Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies (§ 2 und § 6).

**) Die Voraussetzungen, welche in Betreff der Coefficienten der Differenzengleichung gemacht werden, und das Hauptresultat sind im letzten Paragraphen hervorgehoben.

sei x eine positive Zahl, α_λ eine Constante und $Q_{\lambda\mu}$ eine Function von x mit der Eigenschaft

$$\lim_{x=\infty} Q_{\lambda\mu} = 0.$$

Wir betrachten nur Werthe von x, welche aus einem Anfangswerth x_0 durch Addition ganzer positiver Zahlen hervorgehen, so dass wir uns auf ganzzahlige positive Werthe von x beschränken können. Allen übrigen Grössen dürfen complexe Werthe beigelegt werden.

Die absoluten Beträge von $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ sollen von einander und von 0 verschieden sein. Wir nehmen.

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > \cdots > |\alpha_m| > 0$$

an und untersuchen das Verhalten der Quotienten

$$\frac{w_\lambda}{w_1} \quad (\lambda = 2, \cdots m)$$

für grosse Werthe von x.

Aus (A) folgt

$$\frac{w_\lambda(x+1)}{w_\lambda(x)}\,\frac{w_1(x)}{w_1(x+1)} = \frac{\alpha_\lambda + Q_{\lambda\lambda} + \sum\limits_{\mu \gtrless \lambda} Q_{\lambda\mu}\frac{w_\mu}{w_\lambda}}{\alpha_1 + Q_{11} + \sum\limits_{\mu>1} Q_{1\mu}\frac{w_\mu}{w_1}} \qquad (\lambda = 2, \cdots m).$$

Es ist eine von x abhängige positive Grösse δ so vorhanden, dass

$$|Q_{\lambda\mu}| < \delta \qquad (\lambda, \mu = 1, \cdots m)$$

und

$$\lim_{x=\infty} \delta = 0$$

ist. Die positive Grösse σ sei so angenommen, dass

$$\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| < \sigma < 1$$

ist. Wenn man

$$\delta\left(1 + \frac{m-1}{\varepsilon}\right)(1+\sigma) = \sigma|\alpha_1| - |\alpha_2|$$

setzt, ist ε für hinreichend grosse Werthe von x positiv und

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon = 0.$$

Hat man für einen hinreichend grossen Werth von x

$$\left|\frac{w_\mu}{w_\lambda}\right| < \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, \cdots \lambda - 1, \lambda + 1, \cdots m),$$

$$\left|\frac{w_\mu}{w_1}\right| < \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 2, \cdots m),$$

ine der Zahlen $2, \dots m$ bedeutet, so ist

$$\left|\frac{w_\lambda(x+1)}{w_\lambda(x)}\,\frac{w_1(x)}{w_1(x+1)}\right| < \frac{|\alpha_2| + \delta\left(1+\frac{m-1}{\varepsilon}\right)}{|\alpha_1| - \delta\left(1+\frac{m-1}{\varepsilon}\right)},$$

leiner als σ. Wir bezeichnen den grössten der Werthe

$$\left|\frac{w_\lambda}{w_1}\right| \qquad (\lambda = 2, \cdots m)$$

$= M(x)$ und zeigen, dass, wenn

$$\varepsilon < M < \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{M(x+1)}{M(x)} < \sigma$$

uss. (Wir nehmen x so gross, dass $\varepsilon < 1$ ist.) Für einen gewissen von x sei nämlich

$$M = \left|\frac{w_{\lambda'}}{w_1}\right| \geqq \left|\frac{w_{\lambda''}}{w_1}\right| \geqq \left|\frac{w_{\lambda'''}}{w_1}\right| \geqq \cdots.$$

$$M < \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\left|\frac{w_\lambda}{w_1}\right| < \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\lambda = 2, \cdots m);$$

ist

$$\left|\frac{w_1}{w_{\lambda'}}\right| < \frac{1}{\varepsilon}$$

$$M = \left|\frac{w_{\lambda'}}{w_1}\right| > \varepsilon$$

$$\left|\frac{w_\mu}{w_{\lambda'}}\right| \leqq 1 < \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = \lambda'', \lambda''', \cdots)$$

$$|w_{\lambda'}| \geqq |w_{\lambda''}| \geqq |w_{\lambda'''}| \geqq \cdots;$$

also

$$\left|\frac{w_\mu}{w_{\lambda'}}\right| < \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu \gtrless \lambda').$$

diesen Voraussetzungen ist aber

$$\left|\frac{w_{\lambda'}(x+1)}{w_{\lambda'}(x)}\,\frac{w_1(x)}{w_1(x+1)}\right| < \sigma$$

$$\frac{M(x+1)}{M(x)} < \sigma < 1.$$

Demnach nimmt M mit wachsendem x ab und nähert sich für $\lim x = \infty$ der Grenze Null, wenn M stets grösser als ε bleibt. Ist, wenn x einen gewissen Werth überschreitet, stets $M \leqq \varepsilon$, so ist natürlich auch $\lim\limits_{x=\infty} M = 0$. Es könnte auch beliebig grosse Werthe von x geben, für welche $M \leqq \varepsilon$ ist, ohne dass M beständig kleiner als ε bleibt. Aus $M \leqq \varepsilon$ folgt

$$|w_\lambda| < \varepsilon |w_1| \qquad (\lambda = 2, \cdots m);$$

dann ist

$$|w_1(x+1)| \geqq |\alpha_1| |w_1| - \sum_\mu |Q_{1\mu}| |w_\mu|$$

$$> \big(|\alpha_1| - \delta(1 + (m-1)\varepsilon)\big) |w_1|,$$

$$|w_\lambda(x+1)| \leqq |\alpha_\lambda| |w_\lambda| + \sum_\mu |Q_{\lambda\mu}| |w_\mu|$$

$$< \big(\varepsilon |\alpha_2| + \delta(1 + (m-1)\varepsilon)\big) |w_1| \qquad (\lambda = 2, \cdots m),$$

also

$$\left|\frac{w_\lambda(x+1)}{w_1(x+1)}\right| < \varepsilon \, \frac{|\alpha_\lambda| + \big(1 + (m-1)\varepsilon\big)\frac{\delta}{\varepsilon}}{|\alpha_1| - \big(1 + (m-1)\varepsilon\big)\delta} \qquad (\lambda = 2, \cdots m).$$

Da $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\delta}{\varepsilon}$ endlich ist, so ist eine positive Constante h so vorhanden, dass

$$M(x+1) < h\varepsilon$$

ist. Da die Grösse M abnimmt, sobald sie grösser als ε wird, so kann, wenn einmal $M < \varepsilon$ ist, M nie grösser als $h\varepsilon$ werden; daher ist $\lim\limits_{x=\infty} M = 0$.

Wenn also für einen gewissen (hinreichend grossen) Werth von x

$$\left|\frac{w_\lambda}{w_1}\right| < \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\lambda = 2, \cdots m)$$

ist, was für unendlich viele Lösungen des Systems (A) zutrifft, so ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{w_\lambda}{w_1} = 0 \qquad (\lambda = 2, \cdots m).$$

Wir machen nur von der Thatsache Gebrauch, dass das System (A) überhaupt eine Lösung $w_1, \ldots w_m$ von der zuletzt angegebenen Eigenschaft besitzt.

Die Functionen

$$z_\lambda = \frac{w_\lambda}{w_1} \qquad (\lambda = 2, \cdots m)$$

genügen den Differenzengleichungen

$$\text{(B)} \quad \Big(\alpha_1 + Q_{11} + \sum_\mu Q_{1\mu} z_\mu\Big) z_\lambda(x+1) = Q_{\lambda 1} + \alpha_\lambda z_\lambda + \sum_\mu Q_{\lambda\mu} z_\mu$$

$$(\lambda, \mu = 2, \cdots m).$$

· haben soeben gezeigt, dass das System (B) eine Lösung $z_2, \dots z_m$ der Eigenschaft

$$\lim_{x=\infty} z_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 2, \dots m)$$

tzt. Die Function $Q_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, \cdots m)$ werde jetzt für grosse positive rthe von x durch eine Potenzreihe

$$\frac{b_{\lambda\mu}^{(1)}}{x} + \frac{b_{\lambda\mu}^{(2)}}{x^2} + \cdots$$

nptotisch dargestellt; d. h. es ist, wenn n eine beliebige ganze positive l bedeutet,

$$Q_{\lambda\mu} = \frac{b_{\lambda\mu}^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{b_{\lambda\mu}^{(n)}}{x^n} + \frac{\beta_{\lambda\mu}^{(n)}}{x^n}, \qquad \lim_{x=\infty} \beta_{\lambda\mu}^{(n)} = 0.$$

System (B) wird, wenn man die Functionen $Q_{\lambda\mu}$ durch die asympto-hen Reihen ersetzt, durch ein System von Potenzreihen

$$z_\lambda = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \frac{c_{\lambda 2}}{x^2} + \cdots \qquad (\lambda = 2, \cdots m)$$

nell befriedigt. Die durch die Gleichungen

$$z_{\lambda n} = \frac{c_{\lambda n}}{x} + \cdots + \frac{c_{\lambda n}}{x^n},$$

$$z_\lambda = z_{\lambda n} + \frac{\zeta_{\lambda n}}{x^n} \qquad (\lambda = 2, \cdots m)$$

inirten Functionen $\zeta_\lambda = \zeta_{\lambda n}$ $(\lambda = 2, \cdots m)$ genügen den Differenzen-ichungen

$$\Big(\alpha_1 + R_{11} + \sum_\mu R_{1\mu}\zeta_\mu\Big)\zeta_\lambda(x+1) = R_{\lambda 1} + \alpha_\lambda \zeta_\lambda + \sum_\mu R_{\lambda\mu}\zeta_\mu$$
$$(\lambda, \mu = 2, \cdots m).$$

bei ist

$$R_{11} = \Big(Q_{11} + \sum_\mu Q_{1\mu} z_{\mu n}\Big)\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{-n} - \alpha_1\Big(\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{-n} - 1\Big),$$

$$R_{1\mu} = \frac{Q_{1\mu}}{x^n}\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{-n},$$

$$R_{\lambda\mu} = Q_{\lambda\mu} - Q_{1\mu} z_{\lambda n}(x+1),$$

$$R_{\lambda 1} = \frac{1}{x} \times \text{Potenzreihe von } \frac{1}{x}.$$

ı System von dieser Form besitzt aber eine Lösuug $\zeta_2, \dots \zeta_m$ mit der ;enschaft

$$\lim_{x=\infty} \zeta_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 2, \cdots m).$$

Also hat das System (B) eine Lösung

$$z_\lambda = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{c_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\zeta_{\lambda n}}{x^n}, \quad \lim_{x=\infty} \zeta_{\lambda n} = 0 \qquad (\lambda = 2, \cdots m).$$

§ 2.

Die lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung

$$\text{(C)} \qquad y(x+m) + P_1 y(x+m-1) + P_2 y(x+m-2) + \cdots + P_{m-1} y(x+1) + P_m y(x) = 0$$

habe als Coefficienten entweder Potenzreihen von $\frac{1}{x}$

$$P_\lambda = a_\lambda + \frac{a'_\lambda}{x} + \frac{a''_\lambda}{x^2} + \cdots \qquad (\lambda = 1, \cdots m),$$

welche convergiren, wenn $|x|$ hinreichend gross ist, oder Functionen, welche für grosse positive Werthe von x durch divergente Potenzreihen asymptotisch dargestellt werden; in beiden Fällen ist, wenn unter n irgend eine ganze positive Zahl verstanden wird,

$$P_\lambda = a_\lambda + \frac{a'_\lambda}{x} + \cdots + \frac{a_\lambda^{(n)}}{x^n} + \frac{\varkappa_n^{(\lambda)}}{x^n}, \quad \lim_{x=\infty} \varkappa_n^{(\lambda)} = 0.$$

Die Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

habe m Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_m$, deren absolute Beträge von einander und von Null verschieden sind; es sei

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > \cdots > |\alpha_m| > 0.$$

Die durch die Gleichungen

$$y(x) = w_1 + \cdots + w_m,$$
$$y(x+\mu) = \alpha_1^\mu w_1 + \cdots + \alpha_m^\mu w_m \qquad (\mu = 1, \cdots m-1)$$

definirten Functionen $w_1, \ldots w_m$ genügen den Differenzengleichungen

$$w_1(x+1) + \cdots + w_m(x+1) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m,$$
$$\alpha_1 w_1(x+1) + \cdots + \alpha_m w_m(x+1) = \alpha_1^2 w_1 + \cdots + \alpha_m^2 w_m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_1^{m-2} w_1(x+1) + \cdots + \alpha_m^{m-2} w_m(x+1) = \alpha_1^{m-1} w_1 + \cdots + \alpha_m^{m-1} w_m,$$
$$\alpha_1^{m-1} w_1(x+1) + \cdots + \alpha_m^{m-1} w_m(x+1) = -\sum_{\mu=1}^{m} (P_1 \alpha_\mu^{m-1} + \cdots + P_{m-1}\alpha_\mu + P_m) w_\mu$$

oder

$$w_\lambda(x+1) = \sum_\mu P_{\lambda\mu} w_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, \cdots m)$$

wo

$$P_{\lambda\mu} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots 1, & \alpha_\mu, & 1 & \cdots 1 \\ \alpha_1 & \cdots \alpha_{\lambda-1}, & \alpha_\mu^2, & \alpha_{\lambda+1} & \cdots \alpha_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{m-2} & \cdots \alpha_{\lambda-1}^{m-2}, & \alpha_\mu^{m-1}, & \alpha_{\lambda+1}^{m-2} & \cdots \alpha_m^{m-2} \\ \alpha_1^{m-1} & \cdots \alpha_{\lambda-1}^{m-1}, & -P_1\alpha_\mu^{m-1} \cdots - P_m, & \alpha_{\lambda+1}^{m-1} & \cdots \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots 1 \\ \alpha_1 & \cdots \alpha_m \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{m-1} & \cdots \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}}$$

ist. Setzt man

$$P_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu} + Q_{\lambda\mu}, \quad Q_{\lambda\mu} = \frac{b'_{\lambda\mu}}{x} + \frac{b''_{\lambda\mu}}{x^2} + \cdots,$$

so geht $a_{\lambda\mu}$ aus dem Ausdruck für $P_{\lambda\mu}$ hervor, indem man $P_1, \ldots P_m$ durch $a_1, \ldots a_m$ ersetzt. Die Determinante, welche den Zähler von $a_{\lambda\mu}$ $(\lambda \gtrless \mu)$ bildet, verschwindet; denn, wenn man $-a_1\alpha_\mu^{m-1} - \cdots - a_m$ durch α_μ^m ersetzt und den gemeinsamen Factor α_μ aller Elemente der λ^{ten} Colonne vor die Determinante setzt, treten zwei gleiche Colonnen auf. Die Determinante im Zähler von $a_{\lambda\lambda}$ geht bei der gleichen Behandlung in die mit α_λ multiplicirte Nennerdeterminante über. Es ist also

$$a_{\lambda\lambda} = \alpha_\lambda, \quad a_{\lambda\mu} = 0 \quad (\lambda \gtrless \mu).$$

Das System besitzt demnach die Form (A)

$$w_\lambda(x+1) = \alpha_\lambda w_\lambda + \sum_\mu Q_{\lambda\mu} w_\mu \quad (\lambda, \mu = 1, \cdots m),$$

wo

$$Q_{\lambda\mu} = \frac{b'_{\lambda\mu}}{x} + \frac{b''_{\lambda\mu}}{x^2} + \cdots$$

eine convergente oder asymptotische Reihe ist. Durch die Substitution

$$z_\lambda = \frac{w_\lambda}{w_1} \quad (\lambda = 2, \cdots m)$$

erhält man ein System von der Form (B), welches durch die Reihen

$$z_\lambda = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \frac{c_{\lambda 2}}{x^2} + \cdots \quad (\lambda = 2, \cdots m)$$

formell befriedigt wird. Unter n eine feste Zahl verstehend, hat man nach § 1 die Lösung

$$z_\lambda = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{c_{\lambda, n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\zeta_{\lambda, n+1}}{x^{n+1}}, \quad \lim_{x=\infty} \zeta_{\lambda, n+1} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich auf Grund der Gleichung

$$\frac{y(x+1)}{y(x)} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_m z_m}{1 + z_2 + \cdots + z_m}$$

Die Entwicklung

$$\frac{y(x+1)}{y(x)} = \alpha_1 + \frac{K_1}{x} + \cdots + \frac{K_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\varkappa_{n+1}}{x^{n+1}}, \quad \lim_{x=\infty} \varkappa_{n+1} = 0,$$

$$= \alpha_1 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\varrho_1} \left(1 + \frac{L_2}{x^2} + \cdots + \frac{L_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\lambda_{n+1}}{x^{n+1}}\right), \quad \lim_{x=\infty} \lambda_{n+1} = 0,$$

wo

$$\varrho_1 = \frac{K_1}{\alpha_1}$$

ist. Bezeichnet man den reciproken Werth des convergenten unendlichen Productes

$$\prod_x^\infty \left(1 + \frac{L_2}{x^2} + \cdots + \frac{L_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\lambda_{n+1}}{x^{n+1}}\right)$$

mit $\Phi(x)$, so ist

$$y(x) = C \alpha_1^x x^{\varrho_1} \Phi(x),$$

wo C eine Constante darstellt. Setzt man

$$f(x) = -\log\left(1 + \frac{L_2}{x^2} + \cdots + \frac{L_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\lambda_{n+1}}{x^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{M_2}{x^2} + \frac{M_3}{x^3} + \cdots + \frac{M_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\mu_{n+1}}{x^{n+1}}, \quad \lim_{x=\infty} \mu_{n+1} = 0,$$

$$= \frac{R_2}{x(x+1)} + \frac{R_3}{x(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{R_{n+1}}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

$$+ \frac{\varrho_{n+1}}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \quad \lim_{x=\infty} \varrho_{n+1} = 0,$$

so ist

$$\log \Phi(x) = \sum_x^\infty f(x).$$

Wegen

$$\Delta \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+\nu-1)} = -\frac{\nu}{x(x+1)\cdots(x+\nu)} \text{*)}$$

*) Es ist $\Delta F(x) = F(x+1) - F(x)$.

$$\sum_x^\infty \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+\nu)} = \frac{1}{\nu(x+1)\cdots(x+\nu-1)}$$

$$\sum_x^\infty f(x) = \frac{R_2}{2x} + \frac{R_3}{3x(x+1)} + \cdots + \frac{R_{n+1}}{(n+1)\,x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$
$$+ \frac{\bar\varrho_{n+1}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)},$$

$|\bar\varrho_{n+1}|$ höchstens gleich dem durch $n+1$ dividirten grössten Werth , welchen $|\varrho_{n+1}|$ annimmt, wenn die Veränderliche gleich oder grösser x ist; es ist demnach

$$\lim_{x=\infty} \bar\varrho_{n+1} = 0.$$

Man kann wieder schreiben

$$\sum_x^\infty f(x) = \frac{S_1}{x} + \frac{S_2}{x^2} + \cdots + \frac{S_n}{x^n} + \frac{\sigma_n}{x^n}, \quad \lim_{x=\infty} \sigma_n = 0,$$

raus hervorgeht:

$$\Phi(x) = e^{\sum_x^\infty f(x)} = 1 + \frac{C_1}{x} + \cdots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n}, \quad \lim_{x=\infty} \gamma_n = 0.$$

zt man, indem man die oben eingeführte Constante $C = 1$ annimmt,

$$y_1(x) = \alpha_1^x x^{\varrho_1} \Phi(x)$$

schreibt man $C_{1\nu}$ statt C_ν, um die Lösung $y_1(x)$ von anderen Lösungen Differenzengleichung (C) zu unterscheiden, so hat man

$$y_1 = \alpha_1^x x^{\varrho_1}\left(1 + \frac{C_{11}}{x} + \frac{C_{12}}{x^2} + \cdots + \frac{C_{1n}}{x^n} + \frac{\gamma_{1n}}{x^n}\right),$$
$$\lim_{x=\infty} \gamma_{1n} = 0.$$

§ 3.

Wir weisen nach, dass die Differenzengleichung (C) m Lösungen $\ldots y_m$ besitzt, für welche Darstellungen von der Form bestehen:

$$y_\lambda = \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda}\left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n}\right),$$
$$\lim_{x=\infty} \gamma_{\lambda n} = 0 \qquad (\lambda = 2, \cdots m).$$

r eine lineare Differenzengleichung

$$y(x+1) + Py(x) = 0,$$

wo P durch eine Reihe

$$a+\frac{a'}{x}+\frac{a''}{x^2}+\cdots$$

asymptotisch dargestellt wird, ist dieser Satz gültig, wie aus § 2 folgt.*) Wir nehmen an, er gelte für eine Differenzengleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, und zeigen, dass er dann auch für eine Differenzengleichung m^{ter} Ordnung gilt.

Wir verstehen unter y_1 das in § 2 nachgewiesene Integral von (C) und setzen

$$y=y_1\sum_x^{\infty} z(x);$$

dann genügt z der linearen Differenzengleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(D)\qquad z(x+m-1)+Q_1 z(x+m-2)+\cdots+Q_{m-2}z(x+1)+Q_{m-1}z(x)=0.$$

Dabei ist

$$Q_{m-\mu-1}=1+P_1\frac{y_1(x+m-1)}{y_1(x+m)}+\cdots+P_{m-\mu-1}\frac{y_1(x+\mu+1)}{y_1(x+m)}.$$

Wegen

$$\lim_{x=\infty}\frac{y_1(x+\lambda)}{y_1(x)}=\alpha_1^{\lambda}\qquad(\lambda=1,2,3,\cdots)$$

ist

$$b_{m-\mu-1}=\lim_{x=\infty}Q_{m-\mu-1}=1+\frac{a_1}{\alpha_1}+\frac{a_2}{\alpha_1^2}+\cdots+\frac{a_{m-\mu-1}}{\alpha_1^{m-\mu-1}}.$$

Die Gleichung

$$\beta^{m-1}+b_1\beta^{m-2}+\cdots+b_{m-2}\beta+b_{m-1}=0$$

hat die Wurzeln

$$\beta_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_1},\cdots\ \beta_m=\frac{\alpha_m}{\alpha_1},$$

und zwar ist

$$1>|\beta_2|>\cdots>|\beta_m|>0.$$

Da die Gültigkeit des zu beweisenden Satzes für eine Differenzengleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorausgesetzt wird, so hat die Differenzengleichung (D) die $m-1$ Integrale

---

*) Man hat die Lösung

$$y=\alpha^x x^{\varrho}\left(C+\frac{C_1}{x}+\cdots+\frac{C_n}{x^n}+\frac{\gamma_n}{x^n}\right),\qquad \lim_{x=\infty}\gamma_n=0,$$

wo

$$\alpha=-a,\quad \varrho=-\frac{a'}{\alpha}$$

ist, wenn α von Null verschieden ist.

$$z_\lambda = \beta_\lambda^x x^{\sigma_\lambda}\left(D_\lambda + \frac{D_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{D_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\delta_{\lambda n}}{x^n}\right),$$
$$\lim_{x=\infty} \delta_{\lambda n} = 0 \qquad (\lambda = 2, \cdots m).$$

ir betrachten die folgenden $m-1$ Integrale von (C):

$$y_\lambda = y_1 \sum_x^\infty z_\lambda(x) \qquad (\lambda = 2, \cdots m).$$

s

$$\Delta \beta^x x^{\sigma-\nu} = \beta^x x^{\sigma-\nu}\left[\beta\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sigma-\nu} - 1\right]$$
$$= \beta^x x^{\sigma-\nu}\left[\beta - 1 + \beta\,\frac{(\sigma-\nu)_1}{x} + \cdots + \beta\,\frac{(\sigma-\nu)_r}{x^r} + \frac{\tau_{\nu r}}{x^r}\right],$$
$$\lim_{x=\infty} \tau_{\nu r} = 0$$

gt, wenn man

$$\eta_\nu = \sum_x^\infty \beta^x x^{\sigma-\nu}$$

zt,

$$\eta_\nu = \frac{1}{1-\beta}\,\beta^x x^{\sigma-\nu} + \frac{\beta(\sigma-\nu)_1}{1-\beta}\,\eta_{\nu+1} + \cdots$$
$$+ \frac{\beta(\sigma-\nu)_r}{1-\beta}\,\eta_{\nu+r} + \frac{1}{1-\beta}\sum_x^\infty \tau_{\nu r}\,\beta^x x^{\sigma-\nu-r}.$$

rückt man hiernach $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_n$ durch

$$\beta^x x^{\sigma-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \cdots n)$$

nd

$$\sum_x^\infty \tau_{\nu, n-\nu}\,\beta^x x^{\sigma-n} \qquad (\nu = 0, 1, \cdots n)$$

s, so erhält man (unter Weglassung des Index λ)

$$\sum_x^\infty z(x) = D_0\eta_0 + D_1\eta_1 + \cdots + D_n\eta_n + \sum_x^\infty \delta_n \beta^x x^{\sigma-n}$$
$$= \beta^x x^\sigma\left(E_0 + \frac{E_1}{x} + \cdots + \frac{E_n}{x^n}\right) + \sum_x^\infty \tau_n \beta^x x^{\sigma-n},$$

$$\lim_{x=\infty} \tau_n = 0$$

Setzt man

$$\sum_x^\infty \tau_n \beta^x x^{\sigma-n} = \varepsilon_n \beta^x x^{\sigma-n},$$

geht

$$\varepsilon_n = \beta^x x^{-\sigma+n} \sum_x^\infty \tau_n(v)\, \beta^v v^{\sigma-n}$$

durch die Substitution

$$v = x + w$$

über in

$$\varepsilon_n = \sum_0^\infty \tau_n(x+w)\beta^w \left(1+\frac{w}{x}\right)^{\sigma-n}.$$

Ist δ eine beliebig kleine positive Grösse, so ist für $x > x_0$

$$|\tau_n(x)| < \delta,$$

wenn x_0 hinreichend gross genommen wird. Also ist für $x > x_0 > 1$

$$|\varepsilon_n| < \delta \sum_0^\infty |\beta|^w e^{|\sigma-n|\log(1+w)} = \delta s,$$

wo s endlich ist. Es ist demnach

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Wenn man den Index λ wieder einführt, hat man

$$y_\lambda = \alpha_{11}^x x^{\varrho_1}\left(C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \cdots + \frac{C_{1n}}{x^n} + \frac{\gamma_{1n}}{x^n}\right)$$
$$\times \beta_\lambda^x x^{\sigma_\lambda}\left(D_\lambda + \frac{D_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{D_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\delta_{\lambda n}}{x^n}\right)$$

oder

$$y_\lambda = \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda}\left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n}\right),$$
$$\lim_{x=\infty} \gamma_{\lambda n} = 0 \qquad (\lambda = 2, \cdots m).$$

§ 4.

Die Differenzengleichung (C) besitzt m Integrale $y_1, \ldots y_m$ mit der Eigenschaft

$$y_\lambda = (\alpha_\lambda + \delta_\lambda)^x, \quad \lim_{x=\infty} \delta_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 2, \cdots m).$$

Hieraus geht, da die absoluten Beträge von $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ verschieden sind, hervor, dass eine Relation

$$\sum_\lambda c_\lambda y_\lambda = 0$$

mit constanten Coefficienten nicht besteht. Denn aus

$$c_1(\alpha_1 + \delta_1)^x + c_2(\alpha_2 + \delta_2)^x + \cdots = 0$$

wenn man mit $(\alpha_1+\delta_1)^{-x}$ multiplicirt und x unendlich gross werden $c_1=0$ u. s. w.

3isher war n eine zwar zunächst beliebig gewählte, aber dann fest- tene Zahl. Wir wollen jetzt zeigen, dass die Integrale y_λ $(\lambda=1,\cdots m)$ unendliche Reihen von der Form

$$S_\lambda=\alpha_\lambda^x\, x^{\varrho_\lambda}\left(C_\lambda+\frac{C_{\lambda 1}}{x}+\frac{C_{\lambda 2}}{x^2}+\cdots\right) \qquad (\lambda=2,\cdots m)$$

›totisch dargestellt werden. Wir setzen voraus, dass dieser Satz für Differenzengleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bewiesen sei, dass also die ionen z_λ $(\lambda=2,\ldots m)$ asymptotisch dargestellt werden durch un- he Reihen

$$T_\lambda=\beta_\lambda^x x^{\sigma_\lambda}\left(D_\lambda+\frac{D_{\lambda 1}}{x}+\frac{D_{\lambda 2}}{x^2}+\cdots\right) \qquad (\lambda=2,\cdots m).$$

rerstehen unter n' eine beliebige ganze Zahl, welche die zuerst ein- rte Zahl n überschreitet, und bilden mit Benutzung dieser Zahl n' linear unabhängigen Lösungen von (C)

$$y'_\lambda=\alpha_\lambda^x\, x^{\varrho_\lambda}\left(C_\lambda+\frac{C_{\lambda 1}}{x}+\cdots+\frac{C_{\lambda n'}}{x^{n'}}+\frac{\gamma'_{\lambda n'}}{x^{n'}}\right),$$

$$\lim_{x=\infty}\gamma'_{\lambda n'}=0 \qquad (\lambda=1,\cdots m)$$

o, wie früher y_λ $(\lambda=1,\cdots m)$ mit Benutzung der Zahl n gebildet ›. Dabei haben die Grössen $C_1, C_{11},\ldots C_{1n}$ dieselben Werthe wie r, ebenso die Grössen $C_{\lambda 1},\cdots C_{\lambda n}$ $(\lambda=2,\cdots m)$, da die gleiche An- e in Betreff der Grössen $D_\lambda, D_{\lambda 1},\cdots D_{\lambda n}$ $(\lambda=2,\cdots m)$ gemacht Es ist

$$y_\lambda=y'_\lambda+c_{\lambda+1}y'_{\lambda+1}+\cdots+c_m y'_m.$$

ı man für y'_λ den angeschriebenen Ausdruck und

$$y'_\mu=(\alpha_\mu+\delta'_\mu)^x,\quad \lim_{x=\infty}\delta'_\mu=0 \qquad (\mu=\lambda+1,\cdots m)$$

so ist

$$y_\lambda=\alpha_\lambda^x\, x^{\varrho_\lambda}\left(C_\lambda+\frac{C_{\lambda 1}}{x}+\cdots+\frac{C_{\lambda n'}}{x^{n'}}+\frac{\gamma_{\lambda n'}}{x^{n'}}\right)$$
$$+\sum_{\mu=\lambda+1}^{m}c_\mu(\alpha_\mu+\delta'_\mu)^x$$

wenn

$$\gamma_{\lambda n'}=\gamma'_{\lambda n'}+\sum_{\mu=\lambda+1}^{m}\left(\frac{\alpha_\mu+\delta'_\mu}{\alpha_\lambda}\right)^x x^{-\varrho_\lambda+n}$$

zt wird,

$$y_\lambda = \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda}\left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{C_{\lambda n'}}{x^{n'}} + \frac{\gamma_{\lambda n'}}{x^{n'}}\right),$$

$$\lim_{x=\infty} \gamma_{\lambda n'} = 0 \qquad (\lambda = 1, \cdots m)$$

für *jede* Zahl n', w. z. b. w.

§ 5.

In der Differenzengleichung

$$\text{(E)} \qquad y(x+m) + x^k P_1 y(x+m-1) + x^{2k} P_2 y(x+m-2) + \cdots + x^{(m-1)k} P_{m-1} y(x+1) + x^{mk} P_m y(x) = 0$$

sei k eine positive oder negative ganze Zahl (mit Einschluss der Null) und

$$P_\lambda = a_\lambda + \frac{a_\lambda'}{x} + \frac{a_\lambda''}{x^2} + \cdots \qquad (\lambda = 1, \cdots m)$$

eine convergente oder asymptotische Potenzreihe. Die absoluten Beträge der Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ der Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

seien von einander und von Null verschieden:

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > \cdots > |\alpha_m| > 0.$$

Wir bringen die Gleichung (E) auf die Form

$$y(x+m) + (x+m)^k P_1' y(x+m-1) + (x+m)^k (x+m-1)^k P_2' y(x+m-2) + \cdots + (x+m)^k \cdots (x+1)^k P_m' y(x) = 0,$$

wo

$$P_\lambda' = \left(1 + \frac{m}{x}\right)^k \cdots \left(1 + \frac{m-\lambda+1}{x}\right)^k P_\lambda$$

eine Reihe von derselben Beschaffenheit ist wie P_λ. Durch die Substitution

$$y(x) = y'(x) \cdot (\Gamma(x+1))^k$$

erhält man die Differenzengleichung von der Form (C)

$$y'(x+m) + P_1' y'(x+m-1) + \cdots + P_m' y'(x) = 0.$$

Demnach besitzt die Gleichung (E) m linear unabhängige Lösungen $y_1, \ldots y_m$, welche die asymptotischen Gleichungen

$$y_\lambda \sim (\Gamma(x+1))^k \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda'}\left(C_\lambda' + \frac{C_{\lambda 1}'}{x} + \frac{C_{\lambda 2}'}{x^2} + \cdots\right),$$

$$\frac{y_\lambda(x+1)}{y_\lambda(x)} \sim (x+1)^k \left(\alpha_\lambda + \frac{K_{\lambda 1}'}{x} + \frac{K_{\lambda 2}'}{x^2} + \cdots\right)$$

$$(\lambda = 1, \cdots m)$$

ı. Nun ist

$$(x+1)^k = x^k\left(1 + \frac{(k)_1}{x} + \frac{(k)_2}{x^2} + \cdots\right),$$

$$\log\Gamma(x+1) \sim \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \log\sqrt{2\pi}$$

$$+ \frac{B_1}{1\cdot 2\cdot x} - \frac{B_2}{3\cdot 4\cdot x^3} + \cdots,$$

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right),$$

$= \sqrt{2\pi}$ ist. Hiernach ist, wenn man

$$\varrho_\lambda' + \frac{k}{2} = \varrho_\lambda \qquad (\lambda = 1, \cdots m)$$

$$y_\lambda \sim \left(\frac{x}{e}\right)^{kx} \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda}\left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \frac{C_{\lambda 2}}{x^2} + \cdots\right),$$

$$\frac{y_\lambda(x+1)}{y_\lambda(x)} \sim x^k\left(\alpha_\lambda + \frac{K_{\lambda 1}}{x} + \frac{K_{\lambda 2}}{x^2} + \cdots\right) \qquad (\lambda = 1, \cdots m).$$

ı ist noch zu zeigen, dass die Reihen

$$S_\lambda = \left(\frac{x}{e}\right)^{kx} \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda}\left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \frac{C_{\lambda 2}}{x^2} + \cdots\right)$$

ferenzengleichung (E) formell befriedigen. Durch Einsetzen von

$$S = \left(\frac{x}{e}\right)^{kx} \alpha^x x^\varrho \left(C + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots\right)$$

ie linke Seite von (E) über in

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{kx} \alpha^x x^{\varrho+km}\left(G + \frac{G_1}{x} + \frac{G_2}{x^2} + \cdots\right);$$

eichungen $G = 0$, $G_1 = 0$ ergeben bezw. α und ϱ; C bleibt unmt, während $C_1, C_2, \ldots$ aus den Gleichungen $G_2 = 0$, $G_3 = 0, \ldots$ ıet werden.*) Setzt man

---

Man hat

$$\sum_{\lambda=0}^{m} a_{m-\lambda}\alpha^\lambda = 0,$$

$$\varrho\sum_{\lambda=1}^{m} \lambda a_{m-\lambda}\alpha^\lambda + \frac{1}{2}k\sum_{\lambda=1}^{m}\lambda^2 a_{m-\lambda}\alpha^\lambda + \sum_{\lambda=0}^{m} a'_{m-\lambda}\alpha^\lambda = 0,$$

$$(n-1)\,C_{n-1}\sum_{\lambda=1}^{m}\lambda a_{m-\lambda}\alpha^\lambda = \cdots,$$

rechte Seite die Grössen $C_{n-2}, C_{n-3}, \cdots$ enthält.

$$y = y_\lambda = \left(\frac{x}{e}\right)^{kx} \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n}\right),$$

$$\lim_{x=\infty} \gamma_{\lambda n} = 0,$$

so nimmt die linke Seite von (E) die Form an:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{kx} \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda + mk} \left(G_\lambda + \frac{G_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{G_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\chi_{\lambda n}}{x^n}\right),$$

$$\lim_{x=\infty} \chi_{\lambda n} = 0.$$

Die Gleichung (E) schreibt sich demnach

$$G_\lambda + \frac{G_{\lambda 1}}{x} + \cdots + \frac{G_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\chi_{\lambda n}}{x^n} = 0.$$

Wir nehmen an, es sei $G_\lambda = 0$, $G_{\lambda 1} = 0, \cdots G_{\lambda, n-1} = 0$; wenn man die Gleichung mit x^n multiplicirt und x unendlich werden lässt, erhält man $G_{\lambda n} = 0$. Demnach wird die Differenzengleichung (E) durch die Reihe S_λ $(\lambda = 1, \cdots m)$ formell befriedigt.

Unter den am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochenen Voraussetzungen besitzt die Differenzengleichung (E) *m linear unabhängige Lösungen* $y_1, \ldots y_m$, *welche die asymptotischen Gleichungen*

$$y_\lambda \sim S_\lambda \qquad (\lambda = 1, \cdots m)$$

für grosse positive Werthe von x erfüllen, wenn

$$S_\lambda = \left(\frac{x}{e}\right)^{kx} \alpha_\lambda^x x^{\varrho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \frac{C_{\lambda 2}}{x^2} + \cdots\right) \qquad (\lambda = 1, \cdots m)$$

die der Gleichung (E) *formell genügenden Reihen sind.*

Charlottenburg, 18. März 1899.

ɘber die eindeutigen quadratischen Transformationen einer Ebene.

Von

H. E. Timerding in Strassburg i. E.

Die Cremona'schen Transformationen der Ebene stehen in engstem ammenhange mit einer besonderen Art von Connexen, und auf diesen ammenhang beziehen sich eine Reihe von Sätzen, welche Herr Guccia ersten Bande der Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo mitheilt hat.

Nach Clebsch*) wird allgemein ein Connex durch eine algebraische ichung zwischen Punkt- und Liniencoordinaten dargestellt, und zwar man anzunehmen, dass diese Gleichung hinsichtlich beider Coordiensysteme homogen sei. Dann drückt sie eine solche Beziehung ischen den Punkten und geraden Linien der Ebene aus, vermöge deren ler Linie eine Ordnungscurve und jedem Punkte eine Classencurve zuwiesen wird.

Geht nun durch eine Cremona'sche Transformation die gerade Linie:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

er in die Curve n^{ter} Ordnung:

$$u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + u_3\varphi_3(x) = 0,$$

kann man diese letztere Gleichung offenbar auch als die Gleichung es Connexes, und zwar erster Classe ansehen, und dieser Connex ist das innigste mit der Cremona'schen Transformation verknüpft. Wir llen ihn der Einfachheit halber einen Cremona'schen Connex nennen. trachten wir in seiner Gleichung die Punktcoordinaten als constant, so llt dieselbe den transformirten Punkt dar, sehen wir aber die Linienrdinaten als constant an, so giebt sie die Curve, welche aus einer aden Linie durch die Transformation hervorgeht.

*) Man vergleiche für das Folgende, namentlich in Bezug auf die Differenzen der emeinen Theorie von unserem Specialfalle, die Darstellung Herrn Lindemann's einer Herausgabe von Clebsch's Vorlesungen über Geometrie.

Schreiben wir nun die Gleichung (β):

$$(\gamma) \qquad u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0,$$

indem wir setzen:

$$(\delta) \qquad (y_1, y_2, y_3) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)),$$

so kann man aus dieser Beziehung (δ) und der Gleichung (α) die Grössen x eliminiren und gelangt so zu der Gleichung:

$$(\varepsilon) \qquad \psi(u, y) = 0$$

eines neuen Connexes, welcher als der zu dem ersten inverse Connex bezeichnet werden möge. Dann ist die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit die Gleichung (β) einen Cremona'schen Connex darstellt, dass auch dieser inverse Connex von der ersten Classe ist. Er ist dann selbst ein Cremona'scher Connex, und seine Gleichung hat die Form:

$$(\zeta) \qquad u_1 \psi_1(y) + u_2 \psi_2(y) + u_3 \psi_3(y) = 0,$$

indem:

$$(\eta) \qquad (x_1, x_2, x_3) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \psi_3(y))$$

die Auflösung des Systems (δ) repräsentirt, die in diesem Falle rational möglich ist.

Die Curven des durch die Complexgleichung (β) dargestellten Curvennetzes haben eine gewisse Anzahl gemeinsamer vielfacher Punkte, und zwar genügen die Multiplicitäten r_i derselben den Cremona'schen Beziehungen:

$$(\vartheta) \qquad \Sigma r_i^2 = n^2 - 1, \quad \Sigma r_i = 3(n-1).$$

Es giebt $n + 2$ Punkte, die durch die Cremona'sche Transformation ungeändert bleiben und aus der Doppelgleichung:

$$(\iota) \qquad \frac{\varphi_1(x)}{x_1} = \frac{\varphi_2(x)}{x_2} = \frac{\varphi_3(x)}{x_3}$$

zu bestimmen sind. Sie bilden mit den singulären Punkten die Grundpunkte des Connexes.

Die Bedeutung dieser Grundpunkte erhellt, wenn man die Hauptcoincidenz des Cremona'schen Connexes ins Auge fasst, die Gleichung (β) also mit der Gleichung (α) zusammennimmt. Geometrisch ausgedrückt, heisst dies, dass man die Punktgruppen zu betrachten hat, die auf jeder geraden Linie durch ihre entsprechende Curve ausgeschnitten werden. Die Punkte dieser „Hauptgruppen“ lassen sich auch dadurch definiren, dass sie durch die Cremona'sche Transformation aus Punkten derselben geraden Linie, auf der sie liegen, hervorgehen sollen. Durch den inversen Connex wird auf der geraden Linie eine zweite Hauptgruppe bestimmt, und dieser eben entspricht die erste in der Cremona'schen Transformation.

Um die beiden Gleichungen (α) und (β) in eine einzige zusammenzuziehen, kann man in der letzteren entweder setzen:

$$(\varkappa) \qquad (x_1, x_2, x_3) = (u_3 v_2 - u_2 v_3,\ u_1 v_3 - u_3 v_1,\ u_2 v_1 - u_1 v_2)$$

oder:

$$(\lambda) \qquad (u_1, u_2, u_3) = (x_3 z_2 - x_2 z_3,\ x_1 z_3 - x_3 z_1,\ x_2 z_1 - x_1 z_2).$$

Im ersteren Falle werde sie geschrieben:

$$(\mu) \qquad \varphi(u, v) = 0,$$

sie ist dann vom Grade $n+1$ in den u, vom Grade n in den v. Sieht man die letzteren Grössen als variabel an, so stellt sie in Liniencoordinaten die Hauptgruppe der Geraden u dar. Durch die zweite Substitution aber wird die Gleichung (β):

$$(\nu) \qquad U_1 z_1 + U_2 z_2 + U_3 z_3 = 0,$$

indem wir setzen:

$$(o) \quad (U_1, U_2, U_3) = (x_3 \varphi_2(z) - x_2 \varphi_3(z),\ x_1 \varphi_3(z) - x_3 \varphi_1(z),\ x_2 \varphi_1(z) - x_1 \varphi_2(z)).$$

Sie stellt dann für constante x die gerade Linie dar, welche einen Punkt mit seinem entsprechenden verbindet.

Sieht man aber die z als constant und die x als veränderlich an, so stellt dieselbe Gleichung die Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, die von der Hauptgruppe durchlaufen wird, wenn die zugehörige gerade Linie sich um einen festen Punkt dreht. Diese Curven werden als isologische Linien bezeichnet, wir wollen sie einfach die Normalcurven des Connexes nennen. Sie werden von je einem Strahlenbüschel mit dem entsprechenden Büschel von Curven n^{ter} Ordnung erzeugt. Der Scheitel des Strahlenbüschels kann ihr Pol, der letzte Grundpunkt des zugeordneten Curvenbüschels ihr Gegenpol heissen. Sie enthalten alle Grundpunkte in der zugehörigen Multiplicität, die $n+2$ sich selbst entsprechenden Punkte einfach, und schneiden sich ausserdem zu zweien in den n Punkten einer Hauptgruppe. Jede Hauptgruppe bildet mit den Grundpunkten des Connexes zusammen die gemeinsamen Punkte eines Büschels von Normalcurven, und ihre zugehörige gerade Linie schneidet jede derselben ausserdem in ihrem Pole. Jeder Punkt gehört als Punkt einer Hauptgruppe einer einzigen geraden Linie an, und diese berührt in ihm die Normalcurve, von welcher er der Pol ist. Die Tangente in dem Pol einer Normalcurve geht also durch den Punkt, aus welchem der Pol durch die Cremona'sche Transformation hervorgeht.

Bewegt sich nun ein Punkt auf einer festen geraden Linie, so umhüllt die veränderliche gerade Linie, auf der er zu einer Hauptgruppe gehört, eine Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Classe $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die feste gerade

Linie in allen n Punkten ihrer Hauptgruppe berührt. Die Gleichung dieser Curve findet man, indem man die Gleichung:

$$(\mu') \qquad \psi(u, v) = 0$$

bildet, welche der Gleichung (μ) für die umgekehrte Transformation (η) entspricht, und in ihr nicht die u, sondern die v als fest und die u als veränderlich ansieht. Die Tangenten der durch die Gleichung (μ) selbst dargestellten Curve hingegen erhält man, indem man die Punkte der festen geraden Linie mit den Punkten verbindet, in die sie durch die Cremona'sche Transformation übergehen. Durch diese geht die gerade Linie in eine Curve n^{ter} Ordnung über, die auf sie eindeutig bezogen ist, und die Verbindungslinien homologer Punkte auf beiden Linien umhüllen dann jene Curve $n + 1^{\text{ter}}$ Classe. Denn wenn wir aus den Gleichungen (α) und (β) zusammen mit:

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$$

die Grössen x eliminiren, so resultirt eben die Gleichung (μ).

Auch die Normalcurven lassen sich auf eine einfache Art aus der umgekehrten Transformation finden, nämlich als Ort der Punkte, deren Verbindungslinien mit ihren entsprechenden Punkten durch einen festen Punkt, eben den Pol der Normalcurve, gehen, und so gelangte schon Cremona zu ihnen.

Die Cremona'sche Transformation lässt sich mit ihrer Umkehrung durch eine einzige Gleichung repräsentiren, wenn wir die Gleichung der Curve, in welche durch sie irgend eine gerade Linie übergeführt wird, in Liniencoordinaten aufstellen. Wir mögen so erhalten:

$$(\pi) \qquad \Theta(u, v) = 0.$$

Diese Gleichung ist sowohl hinsichtlich der u wie der v vom Grade $2(n-1)$. Sie stellt nicht bloss für constante u die Curve dar, in welche die Linie mit den Coordinaten u durch die vorgelegte Transformation übergeht, sondern auch für constante v die Curve, in welche die Linie v durch die umgekehrte Transformation verwandelt wird. In der That müssen die Tangenten dieser Curve durch die vorgelegte Transformation selbst in solche Curven übergehen, welche die Linie v berühren.

Lassen wir die u mit den v zusammenfallen, so erhalten wir eine Gleichung:

$$(\varrho) \qquad \Theta(u) = 0$$

vom Grade $4(n-1)$, die eine Curve von ebensolcher Classe darstellt, und diese Curve wird von allen den geraden Linien umhüllt, in deren Hauptgruppen zwei Punkte zusammenfallen, die also von ihren entsprechenden Curven berührt werden, und zwar bleibt es gleichgültig, ob man von der rgelegten Transformation oder ihrer Umkehrung ausgeht. Die Curve möge s die Hauptcurve bezeichnet werden. Von ihr ist jede gerade Linie, e ihre entsprechende Curve osculirt, eine Wendetangente, und jede Linie, e ihre entsprechende Curve doppelt berührt, eine Doppeltangente. Sie sitzt so $(18n-3\varrho-27)$ Wendetangenten und $4\{2n(n-6)+(\varrho+13)\}$ ppeltangenten, wenn ϱ die Anzahl der Fundamentalpunkte bezeichnet. uccia, l. c.)

Die Hauptcurve wird, als Curve der Ordnung $(6n+\varrho-3)$, von den len derjenigen Normalcurven erfüllt, die ausser den Fundamentalpunkten ch einen Doppelpunkt haben. Ihre Tangente finden wir dann jedesmal der Verbindungslinie des Pols mit dem Doppelpunkte der zugehörigen rmalcurve. Durch jeden r-fachen Fundamentalpunkt geht die Hauptrve $(r+1)$ mal und durch die $n+2$ sich selbst entsprechenden Punkte ppelt hindurch. Ausserdem aber besitzt sie

$$n(17n+6\varrho-63)+\frac{1}{2}\varrho(\varrho-7)+46$$

ppelpunkte. So oft nämlich eine Normalcurve ausserhalb der Fundantalpunkte noch zwei weitere Doppelpunkte erhält, wird ihr Pol ein ppelpunkt der Hauptcurve, und die Doppelpunktstangenten sind die rbindungslinien dieses Pols mit den beiden Doppelpunkten der Normalrve. Zu jedem der $n+\varrho+2$ Grundpunkte des Connexes gehört eine ormalcurve, welche ihn zum Pol hat. Diese geht durch ihn ebensooft indurch wie die Hauptcurve und berührt von derselben in ihm alle Aeste. $4(n-1)$ Normalcurven haben einen Rückkehrpunkt. Ihr Pol ist immer uch ein Rückkehrpunkt der Hauptcurve, und zwar geht die Rückkehrangente der letzteren durch den Rückkehrpunkt der Normalcurve.

Die Punktgleichung der Hauptcurve erhält man, indem man aus den drei Gleichungen:

$$(\sigma)\qquad z_1\frac{\partial U_1}{\partial x_i}+z_2\frac{\partial U_2}{\partial x_i}+z_3\frac{\partial U_3}{\partial x_i}=0,\qquad i=1,2,3,$$

die Grössen x eliminirt. Eliminirt man aber die z, so stellt die resultirende Gleichung die Jacobi'sche Curve des Netzes der Normalcurven dar, nämlich die Curve $3n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche von den Doppelpunkten der einen solchen besitzenden Normalcurven erfüllt wird. Diese Curve ist auf die Hauptcurve eindeutig bezogen, indem je zwei zusammengehörige Punkte Doppelpunkt und Pol derselben Normalcurve sind. Sie geht durch jeden r-fachen Fundamentalpunkt $(3r-1)$-fach und durch die $n+2$ sich selbst entsprechenden Punkte doppelt hindurch. Ausser diesen Punkten schneidet sie jede Normalcurve in $4(n-1)$ Punkten, die Tangenten in diesen Punkten gehen alle durch den Pol der Normalcurve und sind gleichzeitig Tangenten der Hauptcurve.

Besonders wichtig sind die Anwendungen, die sich von diesen allgemeinen Betrachtungen auf den speciellen Fall der quadratischen Transformationen machen lassen. Sie führen dann zu der Behandlung dieser Verwandtschaften, die bereits im Jahre 1873 durch Wilhelm Godt in seiner Inaugural-Dissertation*) angedeutet ist und deren hauptsächliche Bedeutung in ihrem engen Zusammenhange mit den Aronhold'schen Untersuchungen über die Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung besteht. Sie führen auf einfache und natürliche Weise zu den Formeln und Sätzen, die Aronhold seiner Theorie zu Grunde legt, und es mag deshalb vielleicht nicht überflüssig sein, noch einmal auf den Gegenstand zurückzukommen, um ihn, vornehmlich in seinem analytischen Charakter, organisch zu entwickeln und in einzelnen Punkten zu ergänzen.

1.

Als quadratisch bezeichnet man in der Ebene jede Punkttransformation, durch welche alle geraden Linien in Kegelschnitte transformirt werden. Soll die Punkttransformation eindeutig sein, so müssen alle diese Kegelschnitte durch drei feste Punkte, die Grundpunkte der Transformation, gehen. Das Dreieck dieser Grundpunkte werde zum Grunddreieck eines Systems homogener Punktcoordinaten gewählt, über dessen Einheitspunkt dann noch zu verfügen bleibt. Ausserdem nehmen wir drei lineare Functionen der Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3 an:

$$(1) \qquad \begin{cases} X_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3, \\ X_2 = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3, \\ X_3 = \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3. \end{cases}$$

Diese Functionen bestimmen ein zweites Dreieck, das Nebendreieck, für dessen Seiten sie einzeln gleich Null werden. Sie sind aber ihrerseits durch dieses Dreieck keineswegs vollständig bestimmt, sondern wir können einen Punkt noch beliebig annehmen, für den sie alle drei einander gleich werden sollen. Dann sind sie aber bis auf einen gemeinsamen, constanten Factor, und vollständig bestimmt, wenn wir noch die Bedingung hinzufügen, dass die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

der Einheit gleich sein soll.

Wir bestimmen nun die quadratische Transformation durch die folgende

*) Ueber den Connex erster Ordnung und zweiter Classe, besonders § 11.

Beziehung zwischen den Coordinaten x_1, x_2, x_3 des ursprünglichen Punktes und denen y_1, y_2, y_3 des transformirten Punktes:

$$(2) \qquad (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{X_1}, \frac{1}{X_2}, \frac{1}{X_3}\right).$$

Diese Gleichungen ergeben nach x_1, x_2, x_3 aufgelöst:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 = (a_{11} y_2 y_3 + a_{12} y_3 y_1 + a_{13} y_1 y_2) \\ : (a_{21} y_2 y_3 + a_{22} y_3 y_1 + a_{23} y_1 y_2) \\ : (a_{31} y_2 y_3 + a_{32} y_3 y_1 + a_{33} y_1 y_2), \end{aligned}$$

wo die a_{ik} die Minoren der Determinante Δ bezeichnen. Hieraus ist unmittelbar zu ersehen, dass jeder homogenen, linearen Relation zwischen den ursprünglichen Coordinaten x_1, x_2, x_3 die Gleichung eines Kegelschnittes entspricht, der dem Grunddreieck umschrieben ist.

Die Ecken des Nebendreiecks haben die Coordinaten

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}), \ (a_{12}, a_{22}, a_{32}), \ (a_{13}, a_{23}, a_{33}).$$

Geraden Linien, die durch einen dieser Punkte gehen, entsprechen wieder gerade Linien, die durch eine Ecke des Grunddreiecks gehen. Die Ecken beider Dreiecke sind so paarweise einander zugeordnet. Die Ecken des Nebendreiecks sind als singuläre Punkte der Transformation anzusehen. Denn ihnen correspondiren nicht bestimmte Punkte, sondern jedesmal alle Punkte einer Seite des Grunddreiecks. Setzen wir nämlich beispielsweise in der Proportion (3) $y_1 = 0$, so ergiebt sie $x_1 : x_2 : x_3 = a_{11} : a_{21} : a_{31}$.

Die Grössen X_1, X_2, X_3 lassen sich als Coordinaten, bezogen auf das Nebendreieck, ansehen. Setzen wir daher in (2):

$$(4) \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + a_{13} Y_3, \\ y_2 = a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2 + a_{23} Y_3, \\ y_3 = a_{31} Y_1 + a_{32} Y_2 + a_{33} Y_3, \end{cases}$$

so erhalten wir die Darstellung derselben Transformation in Coordinaten, die sich auf das Nebendreieck beziehen. Lösen wir dann aber die Gleichungen nach Y_1, Y_2, Y_3 auf, so ergiebt sich:

$$(5) \qquad \begin{aligned} Y_1 : Y_2 : Y_3 = (\alpha_{11} X_2 X_3 + \alpha_{21} X_3 X_1 + \alpha_{31} X_1 X_2) \\ : (\alpha_{12} X_2 X_3 + \alpha_{22} X_3 X_1 + \alpha_{32} X_1 X_2) \\ : (\alpha_{13} X_2 X_3 + \alpha_{23} X_3 X_1 + \alpha_{33} X_1 X_2). \end{aligned}$$

So zeigt sich, dass alle Kegelschnitte, die dem Nebendreieck umschrieben sind, in gerade Linien transformirt werden. Damit haben wir aber die Umkehrung der ursprünglichen Transformation gefunden. Bei dieser Umkehrung tritt also das Nebendreieck an die Stelle des Grunddreiecks.

In der ursprünglichen Transformation, wie ihrer Umkehrung, entsprechen vier Punkte sich selbst, deren Coordinaten aus der Doppelgleichung zu bestimmen sind

(6) $$x_1 X_1 = x_2 X_2 = x_3 X_3.$$

Sie mögen die Hauptpunkte der Transformation heissen. Zusammen mit den Grundpunkten reichen sie zur Festlegung der Verwandtschaft gerade aus. Statt aus der Doppelgleichung (6) kann man sie auch als die gemeinsamen Punkte der drei Kegelschnitte bestimmen:

$$x_2 X_2 - x_3 X_3 = 0,$$
$$x_3 X_3 - x_1 X_1 = 0,$$
$$x_1 X_1 - x_2 X_2 = 0,$$

die einem Büschel angehören und die vier Hauptpunkte mit je einem Grundpunkte verbinden.

2.

Wie aus diesen Betrachtungen hervorgeht, wird eine eindeutige quadratische Transformation analytisch durch zwei Systeme homogener Coordinaten festgelegt, also durch zwei Dreiecke mit gewissen Einheitspunkten oder, nach der Moebius'schen Auffassung, durch zwei Massendreiecke. Jedes dieser Massendreiecke begründet aber für sich eine *involutorische* quadratische Transformation. Es frägt sich nun, welche Bedeutung diese beiden besonderen Transformationen für unsere allgemeine Verwandtschaft haben.

Setzen wir in den Gleichungen (2):

(7) $$(Y_1, Y_2, Y_3) = \left(\frac{1}{Y_1'}, \frac{1}{Y_2'}, \frac{1}{Y_3'}\right),$$

so finden wir:

(8) $$(Y_1', Y_2', Y_3') = (X_1, X_2, X_3).$$

So wird aber eine Collineation dargestellt. Es lässt sich also aus dieser Collineation, die wir mit C bezeichnen wollen, und der involutorischen Transformation, I, die sich auf das Grunddreieck bezieht, die allgemeine quadratische Verwandtschaft Q zusammensetzen. Symbolisch ist

(a) $$Q = CI.$$

Für die Umkehrungen der quadratischen Transformation Q und der Collineation C folgt aus dieser Gleichung

$$Q^{-1} = IC^{-1}.$$

Setzen wir nun aber weiter:

(7*) $$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{x_1'}, \frac{1}{x_2'}, \frac{1}{x_3'}\right),$$

den also die involutorische Transformation I sowohl auf die ursprüng-
en wie auf die durch die allgemeine quadratische Transformation Q
vandelten Punkte an, so gelangen wir zu der neuen, ebenfalls allge-
nen quadratischen Transformation Q_1, in welche die ursprüngliche Q
ch I übergeführt wird. Sie ist durch die symbolische Gleichung

$$Q_1 = IQI$$

hrt, aus der

$$Q_1 = IC$$

für die Umkehrung

$$Q_1^{-1} = C^{-1}I$$

t, und stellt sich analytisch in der Form dar:

$$(x_1', x_2', x_3') = \left(\frac{1}{Y_1'}, \frac{1}{Y_2'}, \frac{1}{Y_3'}\right),$$

m wir setzen:

$$\left\{\begin{array}{l} Y_1' = a_{11}y_1' + a_{12}y_2' + a_{13}y_3', \\ Y_2' = a_{21}y_1' + a_{22}y_2' + a_{23}y_3', \\ Y_3' = a_{31}y_1' + a_{32}y_2' + a_{33}y_3', \end{array}\right.$$

r in der Form:

$$\begin{aligned} y_1' : y_2' : y_3' = &(\alpha_{11}x_2'x_3' + \alpha_{21}x_3'x_1' + \alpha_{31}x_1'x_2') \\ &: (\alpha_{12}x_2'x_3' + \alpha_{22}x_3'x_1' + \alpha_{32}x_1'x_2') \\ &: (\alpha_{13}x_2'x_3' + \alpha_{23}x_3'x_1' + \alpha_{33}x_1'x_2'). \end{aligned}$$

se Proportion hat genau die Form (5). Nur ist das Nebendreieck ch das Grunddreieck ersetzt, an die Stelle dieses letzteren tritt dann neues Dreieck, das wir das zweite Nebendreieck nennen wollen. hrend durch die Collineation C das erste Nebendreieck in das Grund-eck übergeführt wird, die Dreiecke immer mit ihrem Einheitspunkte r den zugehörigen Massen zusammengenommen, geht durch dieselbe lineation das Grunddreieck seinerseits in das zweite Nebendreieck über.

Bezeichnen wir nun mit J die involutorische quadratische Trans-nation, die sich auf das Nebendreieck bezieht, so ist

$$J = CIC^{-1}$$

l sonach umgekehrt

$$I = C^{-1}JC,$$

l es ergiebt sich weiter

$$Q = JC, \quad Q^{-1} = C^{-1}J.$$

Transformation Q wird durch J übergeführt in

$$Q_2 = JQJ \quad \text{oder} \quad Q_2 = CJ,$$

und die umgekehrte Transformation Q^{-1} wird durch J in die Umkehrung von Q_2 übergeführt, nämlich in

$$(\text{j}) \qquad Q_2^{-1} = JQ^{-1}J \quad \text{oder} \quad Q_2^{-1} = JC^{-1}.$$

Analytisch wird die Transformation Q_2 und ihre Umkehrung in der Form dargestellt:

$$(12) \qquad \begin{aligned} X_1' : X_2' : X_3' = (&a_{11} Y_2' Y_3' + a_{12} Y_3' Y_1' + a_{13} Y_1' Y_2') \\ :(&a_{21} Y_2' Y_3' + a_{22} Y_3' Y_1' + a_{23} Y_1' Y_2') \\ :(&a_{31} Y_2' Y_3' + a_{32} Y_3' Y_1' + a_{33} Y_1' Y_2'). \end{aligned}$$

Dies ist wieder die Proportion (3), nur dass sich jetzt die Coordinaten auf das Nebendreieck beziehen.

3.

Zu einer neuen und fruchtbaren Auffassung der quadratischen Transformationen gelangen wir, wenn wir sie nicht sowohl als eine Punktverwandtschaft ansehen, wie als eine Beziehung zwischen den geraden Linien der Ebene und den Kegelschnitten, in welche dieselben transformirt werden. Wir gelangen dann erst mittelbar zu der eindeutigen Zuordnung der Punkte, indem wir eine gerade Linie sich um einen Punkt drehen lassen und dem Drehpunkte den vierten Grundpunkt des entsprechenden Kegelschnittbüschels zuweisen.

Dieses Kegelschnittbüschel ist auf das zugehörige Strahlenbüschel projectiv bezogen, und beide erzeugen mit einander eine Curve dritter Ordnung, die nothwendig durch die drei Grundpunkte der Transformation und ihre vier Hauptpunkte hindurchgeht. Diese Curve ist so durch den Scheitel des Strahlenbüschels, der natürlich auf ihr liegt, eindeutig bestimmt. Dieser Punkt möge ihr Pol heissen. Den vierten Grundpunkt des Kegelschnittbüschels, der ebenfalls auf ihr liegt, wollen wir ihren Gegenpol nennen.

Durch je zwei zugeordnete Punkte geht eine einzige solche Curve, die wir der Kürze halber als eine Normalcurve der quadratischen Transformation bezeichnen wollen. Umgekehrt enthält jede Normalcurve nur ein Paar von Punkten, von denen der eine in den anderen durch die quadratische Transformation übergeht, und diese beiden Punkte bilden ihren Pol und Gegenpol.

Jede gerade Linie wird von ihrem entsprechenden Kegelschnitte in einem Paar von Punkten geschnitten, das sonach der geraden Linie in eindeutiger Weise zugeordnet ist, von dem aber auch jeder Punkt durch den anderen eindeutig bestimmt wird. Wir wollen die beiden Punkte als verbundene Punkte bezeichnen. Dreht sich dann eine gerade Linie um einen Punkt, so durchläuft das zugehörige Paar verbundener Punkte die

›rmalcurve, deren Pol der Drehpunkt ist, und gleichzeitig liegt es stets .t dem Gegenpol der Normalcurve und den Grundpunkten auf einem ›gelschnitte.

Durch zwei verbundene Punkte gehen unendlich viele Normalcurven, ꞉ beiden Punkte bilden mit den drei Grundpunkten und den vier Hauptınkten alle neun gemeinsamen Punkte eines Büschels von Curven dritter ·dnung. Alle diese werden von der Verbindungslinie der beiden ver-.ndenen Punkte ausserdem in ihrem Pol geschnitten. Zwei von ihnen ꞉rden von dieser Verbindungslinie in je einem der beiden verbundenen ınkte berührt und haben ihn zum Pol. Der Kegelschnitt durch die ·undpunkte und die beiden verbundenen Punkte schneidet jede Normalırve des Büschels ausserdem in ihrem Gegenpol. Speciell haben zwei ırven je einen der verbundenen Punkte zum Gegenpol und werden in m von jenem Kegelschnitte berührt.

4.

Eine gerade Linie kann insbesondere von ihrem entsprechenden Kegelhnitte berührt werden. In dem Berührungspunkte vereinigen sich dann rei verbundene Punkte und die gerade Linie wird in ihm von unend-:h vielen Normalcurven berührt. Unter diesen ist eine, welche in dem ınkte keine eigentliche Berührung mit der geraden Linie hat, aber durch n doppelt hindurchgeht. In dem Punkte, in welchem die gerade Linie ›n dieser Curve ausserdem noch geschnitten wird, nämlich dem Pol dieser tzteren, wird sie von einer unendlich benachbarten geraden Linie geoffen, welche die gleiche Eigenschaft hat, von ihrem entsprechenden egelschnitte berührt zu werden, wie man folgendermassen erkennt.

Von dem Pol irgend einer Normalcurve gehen an diese noch vier, ıderswo berührende Tangenten. Von denselben fallen, wenn die Normalırve einen Doppelpunkt hat, zwei in die Verbindungslinie mit dem oppelpunkte zusammen. Diese Tangenten sind aber Linien, die von rem entsprechenden Kegelschnitte berührt werden. Die Curve, die diese nien umhüllen, ist demnach von der vierten Classe, und dieselbe Curve, e „Hauptcurve“ der Transformation, wird, als Punktort aufgefasst, von ›n Polen der rationalen Normalcurven gebildet.

Die Punkte, in welchen jene Linien von ihren entsprechenden Kegelhnitten berührt werden, bilden die Curve sechster Ordnung, welche die oppelpunkte der rationalen Normalcurven erfüllen. Diese Curve, die ıcobi'sche Curve des Netzes der Normalcurven, möge die Ordnungscurve ꞉r Transformation heissen. Sie geht durch die drei Grundpunkte und e vier Hauptpunkte doppelt hindurch und hat keine weiteren singulären ınkte.

Jede Normalcurve schneidet sie ausser den Grund- und Hauptpunkten noch in vier Punkten; die Tangenten der Normalcurve in diesen vier Punkten sind gleichzeitig Tangenten der Hauptcurve und treffen sich alle vier in dem Pol der Normalcurve. Jene vier Schnittpunkte mit der Ordnungscurve liegen demnach auf einem Kegelschnitte, welcher die Normalcurve in ihrem Pole berührt und durch den je zwei verbundene Punkte auf ihr harmonisch getrennt werden.

Die Hauptcurve ist auf die Ordnungscurve Punkt für Punkt eindeutig bezogen, derart dass die Tangente in einem ihrer Punkte durch den zugehörigen Punkt der Ordnungscurve geht und dort von ihrem entsprechenden Kegelschnitte berührt wird. Dieselbe Beziehung kann man aber auch so herstellen, dass man dem Pol einer jeden rationalen Normalcurve, als Punkt der Hauptcurve, den Doppelpunkt der Normalcurve, als Punkt der Ordnungscurve, zuweist. Die Verbindungslinie beider Punkte berührt in dem Pol die Hauptcurve.

Unter den rationalen Normalcurven sind insbesondere vierundzwanzig, welche einen Rückkehrpunkt besitzen. Die Pole derselben sind Rückkehrpunkte der Hauptcurve und die Rückkehrtangente findet man jedesmal, indem man den Rückkehrpunkt der Hauptcurve mit dem Rückkehrpunkte der zugehörigen Normalcurve verbindet.

Besonders zu beachten sind auch die sieben Normalcurven, die durch einen Grundpunkt oder Hauptpunkt doppelt hindurchgehen. Diese entsprechen den sieben Fällen, in denen der Scheitel eines Strahlenbüschels in einen Grundpunkt des zugehörigen Kegelschnittbüschels rückt. Sie haben ihren Doppelpunkt gleichzeitig zum Pol, und derselbe bildet mit irgend einem Curvenpunkte zusammen ein Paar verbundener Punkte. Er ist gleichzeitig ein Doppelpunkt der Hauptcurve und der Ordnungscurve, und zwar legen sich alle drei Curven in diesem Doppelpunkte mit beiden Aesten an einander an, so dass die Doppelpunktstangenten ihnen allen gemeinsam sind.

Es kommt einundzwanzigmal vor, dass eine Normalcurve in eine gerade Linie und einen Kegelschnitt zerfällt. Die gerade Linie verbindet dann zwei aus der Gruppe von sieben Punkten, die aus den Grundpunkten und Hauptpunkten besteht, während der Kegelschnitt allemal durch die fünf übrigen dieser Punkte geht. Der Pol dieser zerfallenden Normalcurven liegt jedesmal auf dem Kegelschnitt, ihr Gegenpol auf der geraden Linie. Verbindet man zweimal zwei unter den sieben Punkten durch gerade Linien und mit den noch übrigen drei Punkten durch Kegelschnitte, und dann den vierten Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte mit dem Schnittpunkte der beiden Geraden, so trifft diese Linie jeden der beiden Kegelschnitte ausserdem in dem zugehörigen Pole.

Mit Rücksicht auf die quadratische Transformation lassen sich die :fallenden Normalcurven so kennzeichnen: Es kommt einundzwanzigmal r, dass ein Strahlenbüschel zu dem ihm entsprechenden Kegelschnitt-schel perspectiv ist, indem beide zu derselben geraden Punktreihe per-ectiv sind, und mit einander die gerade Linie, die diese Punktreihe igt, und ausserdem einen Kegelschnitt erzeugen. Die gerade Linie thält dann immer zwei von den Grund- und Hauptpunkten, und der gelschnitt die anderen fünf. Die einundzwanzig Scheitel dieser Strahlen-schel wollen wir die Nebenpunkte der quadratischen Transformation nnen, sie sind Doppelpunkte der Hauptcurve, und zwar gehen die ngenten in diesen Doppelpunkten immer durch die beiden Punkte, in nen sich Gerade und Kegelschnitt der zugehörigen, zerfallenden Normal-rve schneiden.

5.

Die gerade Linie:

3) $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

ht durch die quadratische Transformation in den Kegelschnitt über:

4) $$U_1 x_2 x_3 + U_2 x_3 x_1 + U_3 x_1 x_2 = 0,$$

dem wir setzen:

15) $$\begin{cases} U_1 = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + a_{31} u_3, \\ U_2 = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + a_{32} u_3, \\ U_3 = a_{13} u_1 + a_{23} u_2 + a_{33} u_3. \end{cases}$$

Wollen wir nun die beiden Punkte, in denen die gerade Linie von ihrem entsprechenden Kegelschnitte getroffen wird, in Liniencoordinaten v_1, v_2, v_3 darstellen, so haben wir in der Gleichung des Kegelschnittes einzusetzen:

$$(x_1, x_2, x_3) = (u_3 v_2 - u_2 v_3,\ u_1 v_3 - u_3 v_1,\ u_2 v_1 - u_1 v_2),$$

dann geht sie in die folgende Form über:

(16) $$\begin{cases} \quad U_1 (u_2 v_1 - u_1 v_2)(u_3 v_1 - u_1 v_3) \\ + U_2 (u_3 v_2 - u_2 v_3)(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ + U_3 (u_1 v_3 - u_3 v_1)(u_2 v_3 - u_3 v_2) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung stellt in der That, da für $(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3)$ die Function auf ihrer linken Seite sammt den partiellen Ableitungen verschwindet, ein Punktepaar der geraden Linie (13) dar. Sie lässt sich, ausgerechnet, auf die Gestalt bringen:

$$u_1 U_1 \frac{v_1^2}{u_1^2} + (u_1 U_1 - u_2 U_2 - u_3 U_3) \frac{v_2 v_3}{u_2 u_3}$$
$$+ u_2 U_2 \frac{v_2^2}{u_2^2} + (u_2 U_2 - u_3 U_3 - u_1 U_1) \frac{v_3 v_1}{u_3 u_1}$$
$$+ u_3 U_3 \frac{v_3^2}{u_3^2} + (u_3 U_3 - u_1 U_1 - u_2 U_2) \frac{v_1 v_2}{u_1 u_2} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird das Quadrat einer linearen Function, wenn:

$$u_1 U_1 - u_2 U_2 - u_3 U_3 = 2\sqrt{u_2 U_2 \cdot u_3 U_3},$$
$$u_2 U_2 - u_3 U_3 - u_1 U_1 = 2\sqrt{u_3 U_3 \cdot u_1 U_1},$$
$$u_3 U_3 - u_1 U_1 - u_2 U_2 = 2\sqrt{u_1 U_1 \cdot u_2 U_2}.$$

Diese drei Bedingungen sind aber der einen äquivalent:

$$(17) \qquad \sqrt{u_1 U_1} + \sqrt{u_2 U_2} + \sqrt{u_3 U_3} = 0.$$

Wenn die Coordinaten einer geraden Linie dieser Gleichung genügen, so wird sie von ihrem entsprechenden Kegelschnitte berührt und die Coordinaten des Berührungspunktes sind:

$$(18) \qquad (x_1, x_2, x_3) = \left(\sqrt{\frac{U_1}{u_1}},\ \sqrt{\frac{U_2}{u_2}},\ \sqrt{\frac{U_3}{u_3}}\right).$$

6.

Um nun die Gleichung der Normalcurve zu finden, die zu einem bestimmten Punkte als Pol gehört, hat man nicht, wie es das nächstliegende wäre, von Coordinaten auszugehen, die sich auf das Grunddreieck beziehen, sondern von solchen, denen das Nebendreieck zu Grunde liegt. Seien in diesem Systeme Z_1, Z_2, Z_3 die Coordinaten des gegebenen Poles, dann ist:

$$\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3 = 0$$

die Bedingung dafür, dass die gerade Linie:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$$

durch diesen Pol geht. Die Gleichung des der geraden Linie entsprechenden Kegelschnittes ist aber:

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 = 0,$$

wenn die Grössen Y durch die Beziehung (5) bestimmt werden. Hieraus ergiebt sich die Gleichung der Normalcurve zunächst in der Form:

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun setzen wir aber für die X die Werthe

$$\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}$$

, oder da es auf die Bezeichnung der Veränderlichen ja nicht an-
mmt, machen wir:

$$(Y_1, Y_2, Y_3) = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right),$$

erhalten wir die Gleichung der Normalcurve:

$$) \quad Z_1 x_1 (x_2 X_2 - x_3 X_3) + Z_2 x_2 (x_3 X_3 - x_1 X_1) + Z_3 x_3 (x_1 X_1 - x_2 X_2) = 0$$

der Form, wie sie Aronhold (l. c. pag. 508), nur in der reciproken stalt, benutzt. Aus dieser Form geht sofort hervor, dass die Normal- rve die drei Grundpunkte und vier Hauptpunkte enthält.

Die drei zerfallenden Curven:

$$1) \quad \begin{cases} U_1 \equiv x_1 (x_2 X_2 - x_3 X_3) = 0, \\ U_2 \equiv x_2 (x_3 X_3 - x_1 X_1) = 0, \\ U_3 \equiv x_3 (x_1 X_1 - x_2 X_2) = 0 \end{cases}$$

hen wir als die Grundcurven des Netzes der Normalcurven an. Be- chten wir U_1, U_2, U_3 als die Coordinaten der Punkte in einer neuen ene η, so steht diese in einer ein-zweideutigen Beziehung zu der sprünglichen Ebene ε, so dass ihren geraden Linien in dieser die rmalcurven entsprechen. Die Grössen U genügen den beiden Gleichungen:

$$2) \quad \begin{cases} U_1 x_2 x_3 + U_2 x_3 x_1 + U_3 x_1 x_2 = 0, \\ U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0, \end{cases}$$

s denen sie selbst sich eindeutig, die x aber zweideutig berechnen sen.

Setzen wir in die letztere Gleichung für die X ihre Ausdrücke in n x ein, so wird sie:

$$2^*) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

r:

$$3) \quad \begin{cases} u_1 = \alpha_{11} U_1 + \alpha_{12} U_2 + \alpha_{13} U_3, \\ u_2 = \alpha_{21} U_1 + \alpha_{22} U_2 + \alpha_{23} U_3, \\ u_3 = \alpha_{31} U_1 + \alpha_{32} U_2 + \alpha_{33} U_3. \end{cases}$$

nau das gleiche System von Substitutionsgleichungen geht aber aus 5) durch Auflösung hervor. Die in Rede stehende Verwandtschaft rd sonach hergestellt, indem man die geraden Linien der ursprüng- hen Ebene ε den Punkten der Ebene η reciprok entsprechen lässt und esen Punkten gleichzeitig die Punktepaare der Ebene ε zuweist, in denen jedesmal die zugehörige gerade Linie von dem ihr in der quadratischen Transformation entsprechenden Kegelschnitte getroffen wird.

Der Ordnungscurve in der Ebene ε ist in der Ebene η eine Curve vierter Ordnung:

$$\sqrt{u_1 U_1} + \sqrt{u_2 U_2} + \sqrt{u_3 U_3} = 0 \tag{24}$$

Punkt für Punkt eindeutig zugeordnet. Diese Linie trennt diejenigen Punkte, denen reelle Punktepaare in der Ebene ε entsprechen, von denen, zu welchen imaginäre Punktepaare gehören.

Genügen die Coordinaten eines Punktes in der Ebene ε noch einer linearen Gleichung:

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0,$$

so ergiebt sich aus dieser und (22*):

$$(x_1, x_2, x_3) = (u_3 v_2 - u_2 v_3,\ u_1 v_3 - u_3 v_1,\ u_2 v_1 - u_1 v_2).$$

Setzen wir aber diese Werthe in die erste der Gleichungen (22) ein, so geht sie genau in die Form (16) über, indem wir jetzt die v als constant und die u als veränderlich anzusehen haben. In der Ebene ε stellt die Gleichung unter dieser Voraussetzung die Curve dritter Classe dar, welche die Verbindungslinien der Punkte auf der Geraden v und ihrer verbundenen Punkte umhüllen und die von v selbst doppelt berührt wird. In der Ebene η aber stellt die Gleichung die rationale Curve dritter Ordnung dar, welche der Linie v in der ein-zweideutigen Verwandtschaft entspricht. Diese Curve geht durch den der Linie v reciprok zugeordneten Punkt doppelt hindurch und berührt die Grundcurve vierter Ordnung in den sechs Punkten, die den Schnittpunkten der geraden Linie v mit der Ordnungscurve entsprechen. Indem man also die v als Liniencoordinaten in ε und die u als Punktcoordinaten in η ansieht, kann sonach die Gleichung (16), die, in der reciproken Gestalt, bei Frobenius (Crelle's Journal, Band 99, Seite 284 ff.) eine grosse Rolle spielt, als der Ausdruck der ein-zweideutigen Verwandtschaft gelten. Geht man in reciproker Weise von Liniencoordinaten Z oder z in η und Punktcoordinaten X oder x in ε aus, so wird die Verwandtschaft ebenso durch die Aronhold'sche Gleichung (20) dargestellt. Im Uebrigen ist sie schon so ausführlich behandelt worden, dass es nicht angebracht ist, näher darauf einzugehen. Man vergleiche insbesondere Clebsch in Band 3 der Math. Annalen, Seite 53 bis 60, de Paolis in den Atti della R. Accademia dei Lincei vom Jahre 1878 und Noether in den Abhandlungen der kgl. bayerischen Academie 1889.

7.

Die Gleichung der Hauptcurve in Liniencoordinaten haben wir oben bereits ermittelt. Sie lautet:

$$\sqrt{u_1 U_1} + \sqrt{u_2 U_2} + \sqrt{u_3 U_3} = 0. \tag{17}$$

Die Gleichung der Ordnungscurve in Punktcoordinaten finden wir, da sie die Jacobi'sche Curve des Netzes der Normalcurven ist, indem wir die Functionaldeterminante τ der drei Functionen

$$\begin{cases} U_1 = x_1(x_2 X_2 - x_3 X_3), \\ U_2 = x_2(x_3 X_3 - x_1 X_1), \\ U_3 = x_3(x_1 X_1 - x_2 X_2) \end{cases}$$

gleich Null setzen. Wir haben zunächst:

$$= \begin{vmatrix} (\alpha_{12}x_2-\alpha_{13}x_3)x_1+x_2X_2-x_3X_3, & (\alpha_{22}x_2-\alpha_{23}x_3)x_1+x_1X_2, & (\alpha_{32}x_2-\alpha_{33}x_3)x_1-x_1X_3 \\ (\alpha_{13}x_3-\alpha_{11}x_1)x_2-x_2X_1, & (\alpha_{23}x_3-\alpha_{21}x_1)x_2+x_3X_3-x_1X_1, & (\alpha_{33}x_3-\alpha_{31}x_1)x_2+x_2X_3 \\ (\alpha_{11}x_1-\alpha_{12}x_2)x_3+x_3X_1, & (\alpha_{21}x_1-\alpha_{22}x_2)x_3-x_3X_2, & (\alpha_{31}x_1-\alpha_{32}x_2)x_3+x_1X_1-x_2X_2 \end{vmatrix}$$

und erhalten weiter durch Ausrechnung:

$$\begin{aligned} T = \; & x_2x_3(x_2X_2-x_3X_3)(a_{11}x_2x_3+a_{12}x_3x_1+a_{13}x_1x_2) \\ & + x_3x_1(x_3X_3-x_1X_1)(a_{21}x_2x_3+a_{22}x_3x_1+a_{23}x_1x_2) \\ & + x_1x_2(x_1X_1-x_2X_2)(a_{31}x_2x_3+a_{32}x_3x_1+a_{33}x_1x_2) \\ & + x_1(x_1X_1-x_2X_2-x_3X_3)(\alpha_{11}U_1+\alpha_{12}U_2+\alpha_{13}U_3) \\ & + x_2(x_2X_2-x_3X_3-x_1X_1)(\alpha_{21}U_1+\alpha_{22}U_2+\alpha_{23}U_3) \\ & + x_3(x_3X_3-x_1X_1-x_2X_2)(\alpha_{31}U_1+\alpha_{32}U_2+\alpha_{33}U_3). \end{aligned} \tag{25}$$

8.

Die 21 Nebenpunkte zerfallen in drei Gattungen, jenachdem die zugehörige gerade Linie zwei Grundpunkte, oder einen Grundpunkt mit einem Hauptpunkt, oder zwei Hauptpunkte mit einander verbindet.

Die Nebenpunkte der ersten Gattung sind die Ecken des Nebendreiecks. Ist die quadratische Transformation nicht durch Grund- und Nebendreieck, sondern, wie wir annehmen wollen, durch die Grund- und Hauptpunkte gegeben, so sind die Coordinaten dieser drei Nebenpunkte noch zu berechnen. Seien nun

$$a_1^{(i)},\ a_2^{(i)},\ a_3^{(i)}, \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

die Coordinaten der vier Hauptpunkte, auf das Grunddreieck bezoge

$$A_1^{(i)},\ A_2^{(i)},\ A_3^{(i)}, \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

ihre Coordinaten, auf das Nebendreieck bezogen, so können wir der Doppelgleichung (6) annehmen, es sei allgemein:

$$a_k^{(i)} A_k^{(i)} = 1. \tag{26}$$

Sind dann u_1, u_2, u_3 Liniencoordinaten, die sich auf das Hauptd und U_1, U_2, U_3 solche, die sich auf das Nebendreieck beziehen, so k wir ferner die Identitäten ansetzen:

$$a_1^{(i)} u_1 + a_2^{(i)} u_2 + a_3^{(i)} u_3 = \varrho (A_1^{(i)} U_1 + A_2^{(i)} U_2 + A_3^{(i)} U_3)$$

oder, indem wir $\varrho = -1$ machen:*)

$$a_1^{(i)} u_1 + a_2^{(i)} u_2 + a_3^{(i)} u_3 + A_1^{(i)} U_1 + A_2^{(i)} U_2 + A_3^{(i)} U_3 = 0, \qquad i = 0, \tag{27}$$

von denen eine eine Folge der übrigen sein muss. Denken wir uns Gleichungen dann nach U_1, U_2, U_3 aufgelöst, so sind

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0 \tag{28}$$

die Gleichungen der drei Nebenpunkte erster Gattung.

Die Gleichungen der zwölf Nebenpunkte zweiter Gattung sind:

$$\left\{\begin{aligned} A_1^{(i)} U_1^{(i)} + a_2^{(i)} u_2^{(i)} + a_3^{(i)} u_3^{(i)} &= 0, \\ a_1^{(i)} u_1^{(i)} + A_2^{(i)} U_2^{(i)} + a_3^{(i)} u_3^{(i)} &= 0, \\ a_1^{(i)} u_1^{(i)} + a_2^{(i)} u_2^{(i)} + A_3^{(i)} U_3^{(i)} &= 0, \end{aligned}\right. \qquad i = 0, 1, 2, 3. \tag{29}$$

Die auf das Grunddreieck bezogenen Coordinaten der sechs Nebenp dritter Gattung ergeben sich wie folgt:

$$\left(\frac{1}{a_2^{(i)} a_3^{(i)} - a_2^{(j)} a_3^{(j)}},\ \frac{1}{a_3^{(i)} a_1^{(i)} - a_3^{(j)} a_1^{(j)}},\ \frac{1}{a_1^{(i)} a_2^{(i)} - a_1^{(j)} a_2^{(j)}}\right). \tag{30}$$

Bilden i, j, k, l allemal eine Permutation der Indices 0, 1, 2, 3, s man die sechs Identitäten:

$$\begin{aligned} & (a_2^{(i)} a_3^{(i)} - a_2^{(j)} a_3^{(j)}) (A_2^{(k)} A_3^{(l)} - A_3^{(k)} A_2^{(l)}) \\ + & (a_3^{(i)} a_1^{(i)} - a_3^{(j)} a_1^{(j)}) (A_3^{(k)} A_1^{(l)} - A_1^{(k)} A_3^{(l)}) \\ + & (a_1^{(i)} a_2^{(i)} - a_1^{(j)} a_2^{(j)}) (A_1^{(k)} A_2^{(l)} - A_2^{(k)} A_1^{(l)}) = 0, \end{aligned} \tag{31}$$

von denen drei eine Folge der übrigen sein müssen. Dieselben dr aus, dass jeder dieser sechs Nebenpunkte auf dem Kegelschnitte der jedesmal die beiden nicht zu dem Nebenpunkte gehörenden E punkte mit den drei Grundpunkten verbindet.

---

*) Man vergleiche das Vorlesungsfragment von Riemann in seinen gesam Werken, ferner H. Weber, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht Cayley in Crelle's Journal, Band 94.

9.

Es ist beachtenswerth, dass mit jeder quadratischen Punkttransformation in einfacher Weise eine quadratische Linientransformation verknüpft ist.

Geht nämlich durch eine quadratische Punkttransformation die gerade Linie:

(13) $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

über in den Kegelschnitt:

(14) $$U_1 x_2 x_3 + U_2 x_3 x_1 + U_3 x_1 x_2 = 0,$$

wo:

(15) $$\begin{cases} U_1 = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + a_{31} u_3, \\ U_2 = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + a_{32} u_3, \\ U_3 = a_{13} u_1 + a_{23} u_2 + a_{33} u_3, \end{cases}$$

so hat man zu beachten, dass dem Kegelschnitte, sofern er zusammen mit dem ihm einbeschriebenen Hauptdreieck betrachtet wird, eine bestimmte gerade Linie zugeordnet ist, nämlich die folgende:

(32) $$\frac{x_1}{U_1} + \frac{x_2}{U_2} + \frac{x_3}{U_3} = 0.$$

Diese Linie trifft jede Seite des Hauptdreiecks in demselben Punkte, in dem sie die in der gegenüberliegenden Ecke an den Kegelschnitt gelegte Tangente schneidet.

Diese Linie ist nun eindeutig der ursprünglich gegebenen zugewiesen, und zwischen den Coordinaten beider besteht die Beziehung:

(33) $$(v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{1}{U_1}, \frac{1}{U_2}, \frac{1}{U_3}\right),$$

indem wir mit v_1, v_2, v_3 die Coordinaten der transformirten Linie und mit U_1, U_2, U_3 die oben angegebenen linearen Functionen der ursprünglichen Coordinaten bezeichnen.

Die Analogie dieser Linientransformation mit der erstbetrachteten Punkttransformation liegt auf der Hand. Man hat in den Formeln nur die Punktcoordinaten durch Liniencoordinaten, oder umgekehrt, und die Coefficienten durch die adjungirten Minoren zu ersetzen, um von der einen zur anderen überzugehen. Haupt- und Nebendreieck sind für beide dieselben. Ebenso wie die Punkttransformation vier Hauptpunkte hat, besitzt die Linientransformation vier Hauptlinien, die durch sie ungeändert bleiben und aus der Doppelgleichung zu bestimmen sind:

(34) $$u_1 U_1 = u_2 U_2 = u_3 U_3.$$

Durch die Linientransformation ist jedem Punkte ein Kegelschnitt zugeordnet, dessen Tangenten den Strahlen des Punktes entsprechen. Dieser Kegelschnitt ist dem Hauptdreieck immer einbeschrieben. Verbindet man seine Berührungspunkte mit den Seiten und den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks, so schneiden sich diese drei Verbindungslinien in dem Punkte, der dem gegebenen Punkte in der zugehörigen Punktverwandtschaft zugeordnet ist. So gelangt man von der Linientransformation wieder zu der Punkttransformation zurück.

Die Punkte, die bei der Linientransformation auf ihrem zugehörigen Kegelschnitte liegen, erfüllen eine Curve vierter Ordnung, die Hauptcurve der Transformation, deren Gleichung lautet:

$$\sqrt{x_1 X_1} + \sqrt{x_2 X_2} + \sqrt{x_3 X_3} = 0. \tag{35}$$

Von ihren 28 Doppeltangenten werden 7 durch die Grund- und Hauptlinien der Transformation gebildet. Die 21 übrigen bezeichnen wir als Nebenlinien der Verwandtschaft. Drei von ihnen sind die Seiten des Nebendreiecks und berühren jede mit der entsprechenden Seite des Grunddreiecks und den vier Hauptlinien denselben Kegelschnitt. Diese nennen wir Nebenlinien erster Gattung. Die zwölf Nebenlinien zweiter Gattung berühren mit je drei Hauptlinien und zwei Grundlinien zusammen denselben Kegelschnitt, und die sechs Nebenlinien dritter Gattung endlich je einen Kegelschnitt, der dem Grunddreieck einbeschrieben ist und je zwei Hauptlinien berührt, während er gleichzeitig in der oben angegebenen Weise zu dem Schnittpunkte der beiden anderen Hauptlinien gehört.

10.

Mit der quadratischen Punkttransformation und der zugehörigen Linientransformation ist in gewisser Weise ein Netz und eine Scharschar von Kegelschnitten verbunden.

Die drei Paare homologer Seiten des Grund- und Nebendreiecks bestimmen nämlich als drei zerfallende Linien zweiter Ordnung ein Netz von Kegelschnitten, und ebenso die drei Paare homologer Ecken als singuläre Curven zweiter Classe eine Scharschar von Kegelschnitten. Zu dem Kegelschnittnetz gehört das Büschel der Kegelschnitte, die durch die Hauptpunkte der Punktverwandtschaft gehen, und zu der Scharschar die Schar der Kegelschnitte, welche die Hauptlinien der zugeordneten Linienverwandtschaft berühren.

Der Scharschar gehören ferner die sechs Nebenpunkte dritter Gattung der Punkttransformation zu Paaren als singuläre Curven an, und dem Kegelschnittnetz die sechs entsprechenden Nebenlinien der Linientransformation paarweise als zerfallende Curven. Die sechs Schnittpunkte der sechs Linienpaare, die so zu dem Netz gehören und aus Haupt- und Nebenlinien der quadratischen Linientransformation bestehen, liegen auf einem Kegelschnitte, und analog umhüllen die Verbindungslinien der entsprechenden Punktepaare der Scharschar einen anderen Kegelschnitt.

Die Hauptcurve vierter Ordnung der Linienverwandtschaft wird von einem quadratischen Kegelschnittbüschel in dem Netze umhüllt, und die Hauptcurve vierter Classe der Punktverwandtschaft von einer quadratischen Kegelschnittschar* in der Scharschar.

Das Netz sowohl wie die Scharschar besitzt eine Jacobi'sche Curve, die von den Schnittpunkten der Linienpaare erfüllt oder den Verbindungslinien der Punktepaare umhüllt wird, und eine Hermite'sche Curve, die von den Linienpaaren umhüllt oder von den Punktepaaren erfüllt wird. Für die Gleichung der Jacobi'schen Curve des Netzes finden wir nach Aronhold die folgenden beiden Formen:

$$(36)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}\dfrac{x_2x_3}{X_2X_3}+\alpha_{22}\dfrac{x_3x_1}{X_3X_1}+\alpha_{33}\dfrac{x_1x_2}{X_1X_2}+1=0,\\[2mm] a_{11}\dfrac{X_2X_3}{x_2x_3}+a_{22}\dfrac{X_3X_1}{x_3x_1}+a_{33}\dfrac{X_1X_2}{x_1x_2}+1=0,\end{cases}$$

und für die Gleichung der Hermite'schen Curve:

$$(37)\qquad \begin{cases} a_{11}\dfrac{u_1}{U_1}+a_{22}\dfrac{u_2}{U_2}+a_{33}\dfrac{u_3}{U_3}=1,\\[2mm] \alpha_{11}\dfrac{U_1}{u_1}+\alpha_{22}\dfrac{U_2}{u_2}+\alpha_{33}\dfrac{U_3}{u_3}=1.\end{cases}$$

Die Gleichung der Jacobi'schen Curve der Scharschar nimmt die folgenden Gestalten an:

$$(38)\qquad \begin{cases} a_{11}\dfrac{u_2u_3}{U_2U_3}+a_{22}\dfrac{u_3u_1}{U_3U_1}+a_{33}\dfrac{u_1u_2}{U_1U_2}+1=0,\\[2mm] \alpha_{11}\dfrac{U_2U_3}{u_2u_3}+\alpha_{22}\dfrac{U_3U_1}{u_3u_1}+\alpha_{33}\dfrac{U_1U_2}{u_1u_2}+1=0,\end{cases}$$

und die Gleichung der Hermite'schen Curve:

$$(39)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}\dfrac{x_1}{X_1}+\alpha_{22}\dfrac{x_2}{X_2}+\alpha_{33}\dfrac{x_3}{X_3}=1,\\[2mm] a_{11}\dfrac{X_1}{x_1}+a_{22}\dfrac{X_2}{x_2}+a_{33}\dfrac{X_3}{x_3}=1.\end{cases}$$

Von der Jacobi'schen Curve dritter Ordnung des Netzes sind sofort neun Punkte bekannt, die sie vollständig bestimmen. Nämlich die Paare entsprechender Seiten des Grund- und Nebendreiecks schneiden

Von der Jacobi'schen Curve dritter Classe der Scharschar sind sofort neun Tangenten bekannt, die sie vollständig bestimmen. Nämlich die Verbindungslinien der Paare entsprechender Ecken des Grund- und sich in drei Punkten, und die Nebenlinien dritter Gattung der Linientransformation paarweise in drei weiteren Punkten, die alle auf der Curve liegen. Ferner aber geht dieselbe durch die Diagonalpunkte des von den Hauptpunkten der Punkttransformation gebildeten Vierecks hindurch.

Nebendreiecks wie der Paare von Nebenpunkten dritter Gattung der Punkttransformation bilden je drei Tangenten dieser Curve. Ferner aber berührt dieselbe die Diagonalen des von den Hauptlinien der Linientransformation gebildeten Vierseits.

Aus den zwölf Nebenpunkten zweiter Gattung der Punktverwandtschaft lassen sich weiter in bestimmter Weise drei Vierecke bilden, deren Diagonalpunkte auf dieser Curve dritter Ordnung liegen.

Aus den zwölf Nebenlinien zweiter Gattung der Linienverwandtschaft lassen sich weiter in bestimmter Weise drei Vierseite bilden, deren Diagonalen diese Curve dritter Classe berühren.

Die Hermite'sche Curve dritter Classe des Netzes berührt die Seiten des Grund- und Nebendreiecks und ausserdem die Verbindungslinien homologer Ecken beider Dreiecke, ferner die sechs Nebenlinien dritter Gattung der Linientransformation und die sechs Seiten des von den Hauptpunkten der Punkttransformation gebildeten Vierecks.

Die Hermite'sche Curve dritter Ordnung der Scharschar ist dem Grund- und Nebendreieck umschrieben und geht ausserdem durch die Schnittpunkte entsprechender Seiten der beiden Dreiecke, sie enthält ferner die sechs Nebenpunkte dritter Gattung der Punkttransformation und die sechs Ecken des von den Hauptlinien der Linientransformation gebildeten Vierseits.

11.

Die beiden Kegelschnitte, welche einer beliebigen geraden Linie in einer quadratischen Transformation und ihrer Umkehrung entsprechen, sind durch ihre Beziehung auf diese Linie auch eindeutig auf einander bezogen und die Verbindungslinien homologer Punkte auf ihnen umhüllen eine rationale Curve vierter Classe, die sie beide vierfach berührt*). Die Ecken des Grund- und Nebendreieckes sind einander paarweise als entsprechende Punkte auf den Kegelschnitten zugeordnet, und die Curve vierter Classe berührt also immer die Verbindungslinien homologer Ecken des Grund- und Nebendreiecks.

*) Vgl. Hirst, Quarterly Journal 1881, und auch Schröter in Crelle's Journal, Band 54.

Die sämmtlichen Paare entsprechender Punkte auf beiden Kegelschnitten gehen aber nicht bloss durch die zweimal angewandte quadratische Transformation, Q^2, sondern auch durch eine Collineation aus einander hervor. In der That wird die Curve:

$$U_1 y_2 y_3 + U_2 y_3 y_1 + U_3 y_1 y_2 = 0$$

in die Curve:

$$u_1 X_2 X_3 + u_2 X_3 X_1 + u_3 X_1 X_2 = 0$$

durch die Collineation transformirt, die sich darstellt wie folgt:

$$(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{U_1}{u_1} X_1, \frac{U_2}{u_2} X_2, \frac{U_3}{u_3} X_3\right).$$

Die Grundlinien dieser Collineation, die durch sie ungeändert bleiben, sind die Doppeltangenten der Curve vierter Classe.

Zu allgemeinen Curven vierter Ordnung führt die quadratische Transformation auf folgende Weise. Ein beliebiges Strahlenbüschel geht durch die directe und die inverse Transformation in zwei Kegelschnittbüschel über, die projectiv auf einander bezogen sind und eine Curve vierter Ordnung erzeugen*). Die Punkte dieser Curve haben die Eigenschaft, dass immer ihre beiden zugehörigen Punkte, in die sie durch die vorgelegte Transformation und ihre Umkehrung übergehen, auf einem Strahle des Strahlenbüschels liegen.

Nehmen wir an, das Strahlenbüschel sei durch die Gleichung gegeben:

$$(u_1 + \lambda v_1) x_1 + (u_2 + \lambda v_2) x_2 + (u_3 + \lambda v_3) x_3 = 0$$

oder:

$$(U_1 + \lambda V_1) X_1 + (U_2 + \lambda V_2) X_2 + (U_3 + \lambda V_3) X_3 = 0,$$

so wird die Curve vierter Ordnung durch die Gleichung dargestellt werden:

$$\begin{vmatrix} \frac{U_1}{x_1} + \frac{U_2}{x_2} + \frac{U_3}{x_3}, & \frac{u_1}{x_1} + \frac{u_2}{x_2} + \frac{u_3}{x_3} \\ \frac{V_1}{x_1} + \frac{V_2}{x_2} + \frac{V_3}{x_3}, & \frac{v_1}{x_1} + \frac{v_2}{x_2} + \frac{v_3}{x_3} \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgerechnet, indem wir mit z_1, z_2, z_3 die Coordinaten des Büschelscheitels bezeichnen:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a_{31} z_2 - a_{21} z_3}{x_1} + \frac{a_{32} z_2 - a_{22} z_3}{x_2} + \frac{a_{33} z_2 - a_{23} z_3}{x_3}\right) \frac{1}{X_1} \\ + &\left(\frac{a_{11} z_3 - a_{31} z_1}{x_1} + \frac{a_{12} z_3 - a_{32} z_1}{x_2} + \frac{a_{13} z_3 - a_{33} z_1}{x_3}\right) \frac{1}{X_2} \\ + &\left(\frac{a_{21} z_1 - a_{11} z_2}{x_1} + \frac{a_{22} z_1 - a_{12} z_2}{x_2} + \frac{a_{23} z_1 - a_{13} z_2}{x_3}\right) \frac{1}{X_3} = 0. \end{aligned}$$

---

*) Hirst, Guccia, a. d. a. O.

Eine ganz andere Form der Curvengleichung erhalten wir auf die folgende Art, die deutlich die Analogie dieser Curven mit den Normalcurven erkennen lässt.

Fragen wir zunächst nach den Hauptpunkten zweiten Ranges, nämlich nach den Punkten, welche durch die Wiederholung der quadratischen Transformation in sich übergehen. Von solchen Punkten giebt es ein einziges Paar. Die Punkte derselben werden durch die quadratische Transformation, und damit auch durch ihre Umkehrung, in einander transformirt, sie entsprechen sich gegenseitig in involutorischer Weise. Setzen wir:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_{11}x_2x_3 + a_{12}x_3x_1 + a_{13}x_1x_2, & \Xi_1 &= \alpha_{11}X_2X_3 + \alpha_{21}X_3X_1 + \alpha_{31}X_1X_2,\\
\xi_2 &= a_{21}x_2x_3 + a_{22}x_3x_1 + a_{23}x_1x_2, & \Xi_2 &= \alpha_{12}X_2X_3 + \alpha_{22}X_3X_1 + \alpha_{32}X_1X_2,\\
\xi_3 &= a_{31}x_2x_3 + a_{32}x_3x_1 + a_{33}x_1x_2, & \Xi_3 &= \alpha_{13}X_2X_3 + \alpha_{23}X_3X_1 + \alpha_{33}X_1X_2,
\end{aligned}$$

so genügen die Coordinaten dieses involutorischen Punktepaares der Beziehung:

$$\left(\frac{1}{X_1}, \frac{1}{X_2}, \frac{1}{X_3}\right) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

oder der Doppelgleichung:

$$X_1\xi_1 = X_2\xi_2 = X_3\xi_3,$$

ebenso aber auch der Doppelgleichung:

$$x_1\Xi_1 = x_2\Xi_2 = x_3\Xi_3.$$

Die erste Doppelgleichung ist offenbar befriedigt, wenn zwei der x verschwinden, weil dann alle ξ gleich Null sind, und ebenso für die Coordinaten der Hauptpunkte, weil für diese:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

wird. Die drei Curven dritter Ordnung:

$$X_2\xi_2 - X_3\xi_3 = 0, \quad X_3\xi_3 - X_1\xi_1 = 0, \quad X_1\xi_1 - X_2\xi_2 = 0,$$

welche einem Büschel angehören, gehen sonach durch die drei Grundpunkte und vier Hauptpunkte, sind also Normalcurven, und haben ausserdem die Punkte des involutorischen Paares mit einander gemein. Diese beiden Punkte bilden sonach gleichzeitig ein Paar verbundener Punkte.

Analog gehen die drei Curven dritter Ordnung:

$$x_2\Xi_2 - x_3\Xi_3 = 0, \quad x_3\Xi_3 - x_1\Xi_1 = 0, \quad x_1\Xi_1 - x_2\Xi_2 = 0$$

durch die Ecken des Nebendreiecks, die vier Hauptpunkte und die beiden involutorischen Punkte hindurch.

Wir wollen nun die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte zu bestimmen suchen, welche einem gegebenen Punkte in der vorgelegten ısformation und ihrer Umkehrung zugeordnet sind. Wir erhalten die chung dieser Linie, wenn x_1, x_2, x_3 die Coordinaten des gegebenen ktes sind, zunächst in der Form:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} \end{vmatrix} = 0,$$

r ausgerechnet:

$$z_1 X_1(X_2\xi_2 - X_3\xi_3) + z_2 X_2(X_3\xi_3 - X_1\xi_1) + z_3 X_3(X_1\xi_1 - X_2\xi_2) = 0.$$

›llen wir sie statt auf das Grunddreieck auf das Nebendreieck beziehen, nimmt sie die Gestalt an:

$$Z_1 x_1(x_2\Xi_2 - x_3\Xi_3) + Z_2 x_2(x_3\Xi_3 - x_1\Xi_1) + Z_3 x_3(x_1\Xi_1 - x_2\Xi_2) = 0.$$

ıen wir hierin nun die Z nicht als veränderlich, sondern als constant l die x als variabel an, so stellt diese Gleichung unmittelbar die gehte Curve dar, nämlich den Ort der Punkte, deren beiden zugehörigen nkte mit einem festen Punkte Z auf einer geraden Linie liegen.

Die Aehnlichkeit der Gleichung mit der Aronhold'schen (20) springt die Augen. Wir können diese Curven in der That als Normalcurven eiten Ranges bezeichnen. Sie gehen alle durch die sechs Ecken des und- und Nebendreiecks und durch die sechs Hauptpunkte ersten und eiten Ranges hindurch und das Netz, das sie bilden, ist durch diese ölf Grundpunkte zweiten Ranges vollkommen bestimmt. Jede einzelne ı ihnen enthält aber ausserdem die beiden Punkte, die zu dem Punkte gehören und die man wieder als Pol und Gegenpol der Normalcurve zeichnen kann. Durch jeden von ihnen ist dieselbe vollständig bestimmt.

Die Seiten des Grund- und Nebendreiecks bilden zusammen mit je er Curve dritter Ordnung sechs zerfallende Normalcurven. Diese Curven tter Ordnung sind dieselben, die oben zur Bestimmung des involutorischen nktepaares benutzt wurden.

Setzen wir in den Gleichungen der Normalcurven:

$$(z_1, z_2, z_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

ɜr:

$$(Z_1, Z_2, Z_3) = (X_1\ X_2, X_3),$$

erhalten wir für den Ort eines Punktes, der mit seinen beiden zugeigen Punkten auf einer geraden Linie liegt, die beiden Gleichungsformen:

$$X_1 x_1(X_2\xi_2 - X_3\xi_3) + X_2 x_2(X_3\xi_3 - X_1\xi_1) + X_3 x_3(X_1\xi_1 - X_2\xi_2) = 0$$

ɪr:

$$X_1 x_1(x_2\Xi_2 - x_3\Xi_3) + X_2 x_2(x_3\Xi_3 - x_1\Xi_1) + X_3 x_3(x_1\Xi_1 - x_2\Xi_2) = 0.$$

Dies ist eine Curve fünfter Ordnung (cf. Hirst l. c.), die durch die vier Hauptpunkte doppelt, durch die Ecken des Grund- und Nebendreiecks hingegen, sowie durch die beiden involutorischen Punkte einfach hindurchgeht.

12.

Die Normalcurven zweiten Ranges stehen in Zusammenhang mit einer ein-vierdeutigen Verwandtschaft zwischen den Punkten und Linien der Ebene. Jeder geraden Linie sind nämlich die vier Punkte zuzuweisen, in denen sich ihre beiden zugehörigen Kegelschnitte treffen. Solche vier Punkte bilden mit den zwölf Grundpunkten zweiten Ranges immer die gemeinsamen Punkte eines Büschels von Normalcurven, und zwar schneiden die beiden zusammengehörenden Kegelschnitte, auf denen sie liegen, aus jeder Curve des Büschels den Pol oder Gegenpol heraus. Durch jeden Punkt geht aber andererseits nur ein Paar von Kegelschnitten, die derselben geraden Linie entsprechen, und diese letztere ist dann die dem Punkte zugeordnete Linie. Bewegt sich ein Punkt auf einer geraden Linie, so umhüllt seine zugehörige Linie eine rationale Curve vierter Classe, und dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so erfüllen die zugehörigen Punkte eine Curve vierter Ordnung, nämlich eine der eben betrachteten Normalcurven. Die Verwandtschaft ist also nach beiden Seiten vom vierten Grade, sie lässt sich am einfachsten durch die zwei Gleichungen darstellen:

$$U_1 x_2 x_3 + U_2 x_3 x_1 + U_3 x_1 x_2 = 0,$$
$$u_1 X_2 X_3 + u_2 X_3 X_1 + u_3 X_1 X_2 = 0.$$

Sieht man die Liniencoordinaten u oder U als Punktcoordinaten für eine zweite Ebene η an, so ist diese auf die erste Ebene ε reciprok bezogen, und die Punkte beider Ebenen stehen gleichzeitig in einer ein-vierdeutigen Beziehung. Um diese Beziehung vollkommen eindeutig zu machen, hat man der Ebene η vier Blätter zu geben. Man schneide ferner die Theile aus, denen keine reellen Punkte in der ersten Ebene entsprechen, und hefte die übrig bleibenden Stücke paarweise längs der Randlinien zusammen. Die Heftungslinie oder Uebergangscurve ist dann eine Curve der zwölften Ordnung, und ihr ist in der ersten Ebene ε, Punkt für Punkt eindeutig, eine Curve neunter Ordnung zugewiesen, nämlich die Jacobi'sche Curve des Netzes der Normalcurven.

Diese Jacobi'sche Curve geht durch die zwölf Grundpunkte zweiten Ranges doppelt hindurch. Jeder ihrer Punkte ist Doppelpunkt einer Normalcurve, und in ihm berühren sich gleichzeitig zwei zusammengehörige Kegelschnitte, die derselben geraden Linie entsprechen. Dieser geraden Linie ist der correspondirende Punkt auf der Uebergangscurve der vierittrigen Fläche reciprok zugeordnet. Jede Normalcurve schneidet die cobi'sche Curve ausser den Grundpunkten noch in zwölf Punkten. Auf der erblättrigen Fläche entspricht der Normalcurve eine scheinbare gerade nie, und deren zwölf Schnittpunkten mit der Uebergangscurve sind jene öölf Punkte auf der Jacobi'schen Curve zugeordnet. Jeder geraden Linie r Ebene ε ist auf der vierblättrigen Fläche eine rationale Curve vierter dnung zugewiesen, welche die Uebergangscurve in neun Punkten berührt.

Der Uebergangscurve entspricht in der Ebene ε als ihr reciprokes bilde eine Curve zwölfter Classe. Dieselbe wird von den Linien umillt, deren zugehörige Kegelschnitte sich berühren. Sie besitzt 27 Wendeagenten und ebensooft osculiren sich zwei homologe Kegelschnitte der iden Netze, sie besitzt ferner 12 Doppeltangenten und ebensooft kommt vor, dass zwei homologe Kegelschnitte sich doppelt berühren.

Ueber die Anwendung eines functionentheoretischen Principes auf gewisse bestimmte Integrale.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

Wenn die Function $f(x)$ in jedem endlichen Intervalle der positiven Zahlenaxe integrirbar ist und für unendlich grosse positive Werthe von x stärker Null wird als jede endliche Potenz von $\frac{1}{x}$, so stellt das Integral

$$J(s) = \int_0^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx$$

eine holomorphe Function der complexen Variabeln s vor in demjenigen Bereiche der s-Ebene, in welchem der reelle Theil von s positiv ist*). Macht man die weitere Voraussetzung, dass $f(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelbar ist, so ergiebt sich durch bekannte Methoden**), dass dann das Integral $J(s)$ einen Zweig einer in der ganzen Ebene eindeutigen analytischen Function darstellt, die nur für $s = 0$ und für negative ganzzahlige Werthe von s unstetig von der ersten Ordnung werden kann. (Des Näheren bleibt die Function an der Stelle $s = -n$ stetig nach Subtraction von $\frac{c_n}{s+n}$, wo c_n den Coefficienten von x^n in der Entwickelung von $f(x)$ bezeichnet.)

---

*) In jedem Bereiche, in welchem der reelle Theil von s oberhalb einer endlichen positiven Zahl bleibt, ist nämlich $J(s)$ die gleichmässige Grenze des Integrales $\int_\varepsilon^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx$, wo ε eine positive nach Null convergirende Grösse bezeichnet. Dieses Integral ist aber eine ganze (transcendente) Function von s, da dasselbe in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelbar ist.

**) Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. (Werke, Leipzig 1892.) — Hermite, Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce. (Crelle's Journal, Bd. 90, pag. 332.)

Dies vorausgeschickt, betrachte ich das Integral

$$(1) \qquad J = \int_0^\infty \left(\frac{f_1(x)}{x^{n_1+1}} + \frac{f_2(x)}{x^{n_2+1}} + \cdots + \frac{f_r(x)}{x^{n_r+1}} \right) dx.$$

Hier sollen die Functionen $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_r(x)$ die oben von $f(x)$ vorausgesetzten Eigenschaften haben; ferner bedeuten $n_1, n_2, \cdots, n_r$ nicht-negative ganze Zahlen; endlich soll, was für die Endlichkeit von J nothwendig ist, die integrirte Function für $x = 0$ endlich bleiben. Das Integral J kann angesehen werden als der Werth der Function

$$(2) \qquad J(s) = \int_0^\infty \left(\frac{f_1(x)}{x^{n_1+1}} + \frac{f_2(x)}{x^{n_2+1}} + \cdots + \frac{f_r(x)}{x^{n_r+1}} \right) x^{s-1} dx$$

an der Stelle $s = 1$.

Setzt man nun, unter k eine der Zahlen $1, 2, \cdots, r$ verstanden,

$$(3) \qquad J_k(s) = \int_0^\infty f_k(x)\, x^{s-1}\, dx,$$

so ist offenbar für einen Werth von s, dessen reeller Theil grösser als jede der Zahlen $n_1, n_2, \cdots, n_r$ ist,

$$(4) \quad J(s) = J_1(s - n_1 - 1) + J_2(s - n_2 - 1) + \cdots + J_r(s - n_r - 1).$$

Diese Gleichung gilt aber nach einem fundamentalen Princip der Functionentheorie für jeden beliebigen Werth von s, wenn man unter den Zeichen $J(s)$, $J_k(s)$ nicht mehr die Integralwerthe, sondern die durch dieselben definirten analytischen Functionen versteht. Demnach kann der Integralwerth $J = J(1)$ aufgefasst werden als das constante Glied in der Entwickelung der rechten Seite von (4) nach aufsteigenden Potenzen von $s - 1$, oder, was dasselbe ist, als constantes Glied in der Entwickelung der Function der Veränderlichen h

$$(5) \qquad J_1(-n_1 + h) + J_2(-n_2 + h) + \cdots + J_r(-n_r + h)$$

nach aufsteigenden Potenzen von h. Die Coefficienten der höheren Potenzen von h in dieser Entwickelung ergeben, beiläufig bemerkt, offenbar die Werthe der Integrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{f_1(x)}{x^{n_1+1}} + \frac{f_2(x)}{x^{n_2+1}} + \cdots + \frac{f_r(x)}{x^{n_r+1}} \right) (\lg x)^n\, dx.$$

Als ein einfaches Beispiel für die vorstehende Betrachtung bietet sich das Integral dar:

$$(6)\qquad J=\int\limits_0^\infty\left(\frac{Ae^{-ax}}{x^{n+1}}+\frac{Be^{-bx}}{x^{m+1}}+\cdots\right)dx,$$

in welchem $a, b, \cdots$ Constante mit positiven reellen Theilen bezeichnen und die Constanten $A, B, \cdots$ der Bedingung gemäss zu wählen sind, dass die integrirte Function für $x=0$ endlich bleibt.

Diese letztere Bedingung ist, wie man leicht erkennt, gleichwerthig mit der andern, dass die ganze Function der Variabeln u

$$g(u)=A\frac{(u-a)^n}{n!}+B\frac{(u-b)^m}{m!}+\cdots$$

identisch verschwinden muss*).

Unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\int\limits_0^\infty\frac{e^{-ax}}{x^{n+1}}x^{s-1}dx=\frac{\Gamma(s-n-1)}{a^{s-n-1}}=\frac{a^{n-(s-1)}}{(s-1)(s-2)\cdots(s-n-1)}\cdot\Gamma(s)$$

ergiebt sich im vorliegenden Falle für die Function (5) der Ausdruck

$$(7)\qquad \Gamma(1+h)\left[\frac{(-1)^n}{n!}Aa^n\cdot\frac{a^{-h}}{h(1-h)\left(1-\frac{h}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{h}{n}\right)}\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^m}{m!}Bb^m\cdot\frac{b^{-h}}{h(1-h)\left(1-\frac{h}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{h}{m}\right)}+\cdots\right],$$

und man darf hier bei der Bestimmung des constanten Gliedes in der Entwickelung nach Potenzen von h von dem Factor $\Gamma(1+h)$ absehen, da derselbe für $h=0$ den Werth 1 erhält. Man liest daher aus (7) unmittelbar den folgenden Werth des Integrales (6) ab:

$$(8)\quad \int\limits_0^\infty\left(\frac{Ae^{-ax}}{x^{n+1}}+\frac{Be^{-bx}}{x^{m+1}}+\cdots\right)dx=\frac{A(-a)^n}{n!}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\lg a\right]$$
$$+\frac{B(-b)^m}{m!}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\lg b\right]+\cdots$$

*) Bezeichnet $\varphi(x)$ eine Laurent'sche Entwickelung, so ist das Verschwinden des Coefficienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $e^{ux}\varphi(x)$ nothwendig und hinreichend für das Fehlen der Potenzen mit negativen Exponenten in $\varphi(x)$. Die im Text angegebene Function $g(u)$ ist der Coefficient von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $e^{ux}\left(\frac{Ae^{-ax}}{x^{n+1}}+\frac{Be^{-bx}}{x^{m+1}}+\cdots\right)$.

bei ist für den Fall $n=0$ die dann sinnlose Summe $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ ch Null zu ersetzen.

Das Integral (6) ist von Herrn C. Jordan in Bd. II seines Cours nalyse (pag. 169 der zweiten Auflage) auf andere Weise behandelt rden; die vollständige Ausführung der von Herrn Jordan dort andeuteten Rechnung ergiebt natürlich ebenfalls die in der Gleichung (8) sgedrückte Werthbestimmung des Integrals.

Da die Potenzentwickelung des Ausdruckes (5) erst herstellbar ist, enn die analytischen Fortsetzungen der Functionen (3) bekannt sind, wird es nicht unangebracht sein, einige allgemeine Bemerkungen über e Fortsetzung des Integrales

$$J(s)=\int_0^\infty f(x)\,x^{s-1}\,dx \tag{)}$$

nzuzufügen. Ausser den eingangs erwähnten Methoden stehen noch die lgenden weiteren zur Herstellung der analytischen Fortsetzung von $J(s)$ r Verfügung:

Erstens: Man entwickele $e^x f(x)$ nach aufsteigenden Potenzen von x,

$$e^x f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots.$$

ann ist

$$\begin{aligned}J(s)-\Gamma(s)[c_0+c_1s+c_2s(s+1)+\cdots+c_ns(s+1)\cdots(s+n-1)]&\\=\int_0^\infty[f(x)-e^{-x}(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n)]\,x^{s-1}\,dx.&\end{aligned} \tag{0}$$

a der Factor von x^{s-1} unter dem Integral an der Stelle $x=0$ von r $(n+1)^{\text{sten}}$ Ordnung verschwindet, so ist die Function $J(s)$ durch die orstehende Gleichung für alle Werthe von s definirt, deren reeller Theil ber $-n-1$ liegt.

Zweitens: Man verstehe unter $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ beliebig gewählte elle positive Constante; dann ist offenbar

$$\begin{aligned}J(s)\left[\frac{A_0}{a_0^s}+\frac{A_1}{a_1^s}+\cdots+\frac{A_n}{a_n^s}\right]&\\=\int_0^\infty[A_0f(a_0x)+A_1f(a_1x)+\cdots+A_nf(a_nx)]\,x^{s-1}\,dx,&\end{aligned} \tag{11}$$

obei $A_0, A_1, \cdots, A_n$ zunächst irgend welche constante Werthe bedeuten. Wählt man nun diese so, dass die Entwickelung von

$$A_0f(a_0x)+A_1f(a_1x)+\cdots+A_nf(a_nx)$$

an der Stelle $x = 0$ mit der Potenz x^n beginnt, so stellt die Gleichung (11) die Function $J(s)$ für alle Werthe von s dar, deren reeller Theil über $-n$ liegt. Dabei ist bemerkenswerth, dass die Werthe von $A_0, A_1, \cdots, A_n$ unabhängig von $f(x)$ gewählt werden können; denn die Einschränkung, welcher die Wahl dieser Constanten unterliegt, kann dahin ausgesprochen werden, dass der Factor von $J(s)$ in der Gleichung (11) für $s = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$ verschwinden muss.

Drittens: Für den Fall, dass die Function $f(x)$ unbeschränkt differentiirbar ist und überdies die Ableitungen von $f(x)$ dieselben eingangs erwähnten Eigenschaften wie $f(x)$ besitzen, führt die partielle Integration des Integrales (9) auf die Gleichung

$$(12) \qquad J(s) = \frac{(-1)^n}{s(s+1)\cdots(s+n-1)} \int_0^\infty f^{(n)}(x)\, x^{n+s-1}\, dx,$$

durch welche die Fortsetzung von $J(s)$ in demselben Umfange, wie durch die Gleichung (11) gegeben wird.

Diese verschiedenen Methoden zur analytischen Fortsetzung von $J(s)$ können auch mit einander combinirt werden und sie gestatten für besondere Functionen $f(x)$ noch mannigfaltige Modificationen.

Zürich, den 31. October 1899.

Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. B.

Wenn eine Gruppe einer endlichen Anzahl von linearen Substitutionen rliegt, so hat, da ja die Gruppe nur aus einer endlichen Anzahl von Sub-itutionen besteht, auch die Gesammtheit von charakteristischen Gleichungen, elche zu sämmtlichen Substitutionen der Gruppe gehören, nur eine endliche nzahl von unter einander verschiedenen Wurzeln. Man kann nun allgemein ruppen von linearen Substitutionen von nicht verschwindender Determi-nante betrachten, bei denen die Gesammtheit charakteristischer Gleichungen, elche zu den Substitutionen der Gruppe gehören, nur eine endliche Anzahl rschiedener Wurzeln besitzen. Derartige Gruppen will ich mir gestatten, *ruppen vom Typus einer endlichen Gruppe* zu nennen. Eine Gruppe G m Typus einer endlichen Gruppe ist also auf folgende Art definirt: enn $\mathfrak{A}: z_i' = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} z_k$, $i = 1, 2, \ldots n$, irgend eine in G enthaltene Sub-itution ist, so soll die Gesammtheit von charakteristischen Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} -a_{11}+\varrho & -a_{12} & \cdots -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22}+\varrho & \cdots -a_{2n} \\ \vdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots -a_{nn}+\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

e man erhält, indem man für $\mathfrak{A}$ jede Substitution, welche in G ent-lten ist, setzt, nur eine endliche Anzahl verschiedener Wurzeln ϱ sitzen; von diesen Wurzeln soll, da die Determinante jeder Substitution von Null verschieden ist, keine verschwinden.

Ueber Gruppen vom Typus einer endlichen Gruppe wollen wir im lgenden einige Sätze herleiten und vorzüglich charakteristische Kenn-ichen angeben, durch welche die endlichen Gruppen innerhalb dieser lgemeineren Gruppengattung und daher auch unter allen Gruppen linearer

Substitutionen ausgezeichnet erscheinen. Von den hergeleiteten Sätzen hebe ich hier nur den für die *Gruppentheorie fundamentalen Satz*, der meines Wissens noch nicht bewiesen wurde, hervor: **Existirt für eine Gruppe linearer Substitutionen, welche wenigstens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, besitzt, eine endliche Zahl p, dass alle Substitutionen der Gruppe von p^{ter} oder niederer Ordnung sind, so ist die Gruppe endlich. Oder mit anderen Worten: Eine jede nicht endliche Gruppe linearer Substitutionen, welche wenigstens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, besitzt, enthält stets mindestens eine Substitution, die nicht nach einer p-maligen oder niedrigeren Anzahl von Wiederholungen, wobei p eine ganz beliebig vorgegebene ganze positive Zahl sein kann, die identische Substitution ergiebt.**

§ 1.

Die charakteristische Gleichung einer jeden linearen Substitution, welche einer Gruppe G vom Typus einer endlichen Gruppe angehört, besitzt nur Einheitswurzeln.

Der Beweis ist folgender: Gehört die Substitution $\mathfrak{A}$ der Gruppe G an, so gehört auch $\mathfrak{A}^\lambda$, wobei λ alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen kann, ebenfalls der Gruppe G an. Sind $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die n Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Substitution $\mathfrak{A}$, so hat die charakteristische Gleichung von $\mathfrak{A}^\lambda$ die Wurzeln $\varrho_1^\lambda, \varrho_2^\lambda, \ldots, \varrho_n^\lambda$. Nehmen wir nun an, eine der Wurzeln, etwa ϱ_i, sei keine Einheitswurzel, so werden die Grössen: $\varrho_i, \varrho_i^2, \varrho_i^3, \ldots, \varrho_i^\lambda, \ldots$ alle verschieden sein; dies aber darf nicht eintreten, da ja die charakteristischen Gleichungen für die Substitutionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3, \ldots \mathfrak{A}^\lambda, \ldots$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Wurzeln haben dürfen. Mithin muss ϱ_i eine Einheitswurzel sein. Der etwa noch mögliche Fall, dass $\varrho_i = 0$ wird, ist dadurch ausgeschlossen, dass unsere Gruppe keine Substitution von verschwindender Determinante besitzen soll.

Nach Herleitung dieses Satzes über die charakteristische Gleichung wollen wir gewisse Eigenschaften der Gruppen vom Typus einer endlichen Gruppe betrachten; hierbei stützen wir uns zunächst auf diejenigen Untersuchungen, welche Herr H. Maschke*) kürzlich publicirt hat.

Bildet man in einer Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe für jede Substitution der Gruppe die Diagonalsumme, so erhält man nur eine endliche Anzahl verschiedener Zahlen; die Diagonalsumme ist ferner cyklotomisch.

*) H. Maschke, Ueber den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen. Math. Annalen, Bd. 50, p. 492.

Sei $\mathfrak{A}$ irgend eine Substitution der Gruppe, so ist die charakteristische Gleichung von $\mathfrak{A}$:

$$\varrho^n - \varrho^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + \cdots = 0.$$

Der Coefficient von $-\varrho^{n-1}$ ist gleich der Summe der Wurzeln der charakteristischen Gleichung; da für diese Wurzeln wegen des Charakters der Gruppe nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Werthen auftreten dürfen, so kann bei allen Substitutionen einer Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe auch das Aggregat: $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, das wir mit Herrn Maschke die Diagonalsumme der Substitution $\mathfrak{A}$ nennen, nur Werthe, die einer begrenzten Anzahl von Grössen entnommen sind, annehmen; für jede Substitution $\mathfrak{A}$ der Gruppe wird also:

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \omega,$$

wo ω nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Werthen anzunehmen fähig ist. Da ferner nach dem zuerst bewiesenen Satz die Wurzeln der charakteristischen Gleichung Einheitswurzeln sind, so ist

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

cyklotomisch, d. h. rational durch Einheitswurzeln ausdrückbar.

Für das Folgende nehme ich *ausnahmslos an, die Gruppe G vom Typus einer endlichen Gruppe besitze wenigstens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter von einander verschiedene Wurzeln hat.* Ich transformire dann G so, dass irgend eine der Substitutionen, deren charakteristische Gleichung lauter von einander verschiedene Wurzeln hat, in der kanonischen Form:

$$z_1' = \gamma_1 z_1,\ z_2' = \gamma_2 z_2,\ \ldots\ z_n' = \gamma_n z_n,$$

erscheint; hierbei sind die γ sämmtlich verschiedene Grössen. *Die auf diese Art transformirte Gruppe heisse G'.*

Mittels derselben Gleichungen, welche Herr Maschke a. a. O. zur Herleitung seiner Sätze II und III verwendet, kann man dann beweisen:

a) Die Diagonalterme von G' sind auf eine endliche Anzahl verschiedener Werthe beschränkt. Anders ausgedrückt: Enthält G' auch etwa unendlich viele Substitutionen, so liefert die Betrachtung der Diagonalterme von sämmtlichen in G' enthaltenen Substitutionen doch nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Zahlen. Die Diagonalterme sind ferner cyklotomisch.

b) Das Product von irgend zwei in derselben oder in irgend zwei verschiedenen Substitutionen von G' auftretenden Coefficienten, welche symmetrische Plätze einnehmen, $a_{\lambda\mu}$ und $b_{\mu\lambda}$, ist auf eine endliche Anzahl verschiedener Werthe beschränkt. Mit anderen Worten: Enthält G' auch etwa unendlichviele Substitutionen, so liefert die Betrachtung sämmtlicher

Grössen $a_{\lambda\mu} \,.\, b_{\mu\lambda}$, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dieselben oder irgend zwei verschiedene Substitutionen bezeichnen und λ wie μ die Werthe $1, 2, 3, \ldots n$ annehmen, doch nur eine endliche Anzahl verschiedener Grössen. Ferner ist das Product $a_{\lambda\mu} \,.\, b_{\mu\lambda}$ cyklotomisch.

Ebenso wie Herr Maschke sage ich, wenn ein eine bestimmte Stelle (i, k) einnehmender Coefficient in jeder Substitution von G' Null ist, dieser Coefficient ist *durchgehend Null.* Für die Herleitung des folgenden Theorems mache ich die Annahme, die Gruppe G' enthalte keine durchgehenden Nullen. Unter dieser Voraussetzung kann man stets $n-1$ Substitutionen:

$$\mathfrak{A}^{(2)} = (a_{ik}^{(2)}),\ \mathfrak{A}^{(3)} = (a_{ik}^{(3)}), \ldots \mathfrak{A}^{(n)} = (a_{ik}^{(n)})$$

so auswählen, dass keiner der folgenden Coefficienten:

$$a_{12}^{(2)},\ a_{13}^{(3)}, \ldots a_{1k}^{(k)}, \ldots a_{1n}^{(n)}$$

Null wird. Die ausgewählten Substitutionen brauchen nicht nothwendig von einander verschieden zu sein. Nach dem Satze b) ist jede der Grössen $a_{1k}^{(k)} \,.\, b_{k1}$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe anzunehmen fähig; da die $n-1$ Grössen $a_{1k}^{(k)}$, wo $k = 2, 3, \ldots n$, von Null verschieden und fest gewählt sind, so folgt b_{k1}, wo b_{k1} einer ganz beliebigen Substitution angehören kann und $k = 2, 3, \ldots n$, darf nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen. Mittelst der von Herrn Maschke benützten Gleichungen (8) kann man weiter schliessen, dass $a_{\lambda\mu} \,.\, b_{\mu 1}$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen darf. In Folge der über die Gruppe G' gemachten Voraussetzungen kann man stets eine Substitution $\mathfrak{B}$ finden, dass für gegebenes μ der Coefficient $b_{\mu 1}$ von Null verschieden ist; hieraus folgt: $a_{\lambda\mu}$, wobei $a_{\lambda\mu}$ irgend einer beliebigen Substitution der Gruppe angehören kann, darf nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Werthen annehmen; daher kann G' nur eine endliche Anzahl verschiedener Substitutionen besitzen und muss folglich eine endliche Gruppe sein.

Hiermit ist ein die endlichen Gruppen auszeichnendes Merkmal gewonnen.

Ist von einer Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, welche mindestens eine Substitution besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, bekannt, sie hat, nachdem man die Gruppe so transformirt hat, dass irgend eine der Substitutionen, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, in der kanonischen Form erscheint, keinen Coefficient, der durchgehend in allen Substitutionen der Gruppe Null ist, so ist die Gruppe eine endliche Gruppe.

Mit anderen Worten:

Eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, welche keine endliche *e ist, besitzt entweder keine einzige Substitution, deren charakteristische ng lauter verschiedene Wurzeln hat, oder besitzt sie wenigstens eine ution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln ist, wenn man die Gruppe so transformirt, dass irgend eine ganz e derjenigen Substitutionen, deren charakteristische Gleichung lauter dene Wurzeln hat, in der kanonischen Form erscheint, nothwendig ens ein Coefficient in allen Substitutionen der Gruppe durchgehend Null.*

§ 2.

'ie bisher behalte ich die Annahme bei, unsere Gruppe G vom Typus ndlichen Gruppe habe mindestens eine Substitution, deren charakte-e Gleichung lauter verschiedene Wurzeln besitzt. Wir transformiren G so, dass irgend eine der Substitutionen, deren charakteristische ng lauter verschiedene Wurzeln hat, in der kanonischen Form nt; durch passende Vertauschung der Variablen kann man diejenige in welcher die grösste Anzahl Coefficienten durchgehend in jeder ution der Gruppe Nullen sind, zur ersten machen und alle durch-en Nullen dieser Zeile an das Ende der Zeile schaffen; hierbei ch jetzt voraus, dass in der Gruppe Coefficienten existiren, die ehend in allen Substitutionen der Gruppe Null sind. In Folge Annahme ist wegen des letzten Satzes überhaupt die Möglichkeit, ie Gruppe nicht endlich sei, zugelassen. Die auf diese Art trans-e Gruppe sei mit G_1' bezeichnet. Für diese Gruppe G_1' gilt der on Herrn Valentiner:*) Sind in den Substitutionen von G_1' die letzten Coefficienten der ersten Zeile durchgehend Null, so sind lle $n-r$ letzten Coefficienten der r ersten Zeilen durchgehend Jede Substitution von G_1' ist mithin durch die folgende Matrix n:

$$\begin{array}{llll|llll}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & a_{r+1,r+2} & \dots & a_{r+1,n} \\
a_{r+2,1} & a_{r+2,2} & \dots & a_{r+2,r} & a_{r+2,r+1} & a_{r+2,r+2} & \dots & a_{r+2,n} \\
\vdots & & & & \vdots & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} & a_{n,r+1} & a_{n,r+2} & \dots & a_{nn}
\end{array}$$

Vgl. Maschke a. a. O. p. 496. Die Arbeit des Herrn Valentiner ist mir leider ugänglich. [Nachschrift vom 27. December 1899. Der benützte Hilfssatz ist ien von Herrn Maschke (Math. Annalen, Bd. 52, p. 366) erweitert worden.]

Betrachten wir die linearen Transformationen der r ersten Variablen für sich, so bilden diese eine Gruppe von r Variablen; diese Gruppe ist ebenfalls vom Typus einer endlichen Gruppe und enthält in Folge des Charakters von G_1' eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, in der kanonischen Form. Ferner sollte $n-r$ die grösste Anzahl Coefficienten, welche in einer Zeile durchgehend Null sind, angeben; daher kann keiner der Coefficienten $a_{\lambda\mu}$, wo $\begin{pmatrix}\lambda=1,2,\ldots r\\ \mu=1,2,\ldots r\end{pmatrix}$ ist, durchgehend in allen Substitutionen Null sein. Folglich sind wegen des zuletzt bewiesenen Satzes die Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ $\begin{pmatrix}\lambda=1,2,\ldots r\\ \mu=1,2,\ldots r\end{pmatrix}$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe anzunehmen im Stande, und mithin ist die Gruppe in den r Variablen $z_1, z_2, \ldots z_r$, wenn man die mehrfach, ja unendlich oft genau identisch auftretenden Substitutionen nur einfach zählt, eine *endliche Gruppe*.

Zu der endlichen Gruppe in den r Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_r$ gehört nach dem von Herrn Moore und mir gleichzeitig gefundenen Satz*) wie zu jeder endlichen Gruppe eine definite Hermite'sche Form in r Variablen, welche durch sämmtliche Substitutionen der endlichen Gruppe in sich übergeführt wird. Diese definite Hermite'sche Form ist, da die Gruppe in r Variablen eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, in kanonischer Form besitzt, vom Typus:

$$\mu_1 z_1 \bar{z}_1 + \mu_2 z_2 \bar{z}_2 + \cdots + \mu_r z_r \bar{z}_r,$$

wobei $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r$ reelle Grössen von demselben Vorzeichen sind und $\bar{z}_i$ conjugirt imaginär zu z_i, $i=1, 2, 3, \ldots n$, ist. Diese definite Hermite'sche Form, welche ich mit H_1 bezeichnen will, kann auch als Invariante unserer ganzen Gruppe G_1' in den n Variablen $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ angesehen werden; es fehlen dann nur in H_1 die Variablen $z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots z_n$. H_1, als Hermite'sche Form der n Variablen $z_1, z_2, \ldots z_n$ aufgefasst, ist vom Range r und nimmt, wenn $z_1, z_2, \ldots z_n$ und $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots \bar{z}_n$ conjugirt complexe Werthe beigelegt erhalten, nur Werthe eines einzigen Vorzeichens oder den Werth Null an. Falls $r < n$ ist, wie es hier eintrifft, da nach Definition $1 \leqq r \leqq n-1$ ist, so sei eine derartige Hermite'sche Form *eine semidefinite Hermite'sche Form* genannt. Eine semidefinite Hermite'sche Form ist eine Hermite'sche Form von verschwindender Determinante, welche für conjugirt imaginäre Werthe der entsprechenden Variabeln nur Werthe eines und desselben Vorzeichens oder den Werth Null annimmt. Man kann eine semidefinite Hermite'sche Form auch auf folgende gleich-

*) Vgl. Alf. Loewy, Ueber bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variablen. Math. Annalen Bd. 50, p. 561.

werthige Art definiren: sie wird Null, ohne dass man alle Variabelen Null zu setzen braucht, im übrigen aber nimmt sie nur Werthe eines einzigen Vorzeichens an, wenn man die entsprechenden Variabelen durch conjugirt imaginäre Grössen ersetzt.

Es sei G irgend eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, die nicht endlich ist, und ferner wenigstens eine Substitution besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat; die Gruppe G ist dann stets in die Form einer Gruppe von der Gestalt G_1' transformirbar; G_1' führt eine semidefinite Hermite'sche Form in sich über; mithin muss G eine zu dieser semidefiniten Hermite'schen Form äquivalente, also ebenfalls eine semidefinite Hermite'sche Form in sich transformiren.

Zu jeder Gruppe G vom Typus einer endlichen Gruppe, die nicht selbst endlich ist, und die wenigstens eine Substitution besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, gehört eine semidefinite Hermite'sche Form, welche bei allen Substitutionen der Gruppe invariant bleibt.

Ich wende mich jetzt zum Beweise des folgenden Satzes:

Führt eine Gruppe G vom Typus einer endlichen Gruppe, die wenigstens eine Substitution besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, irgend eine Hermite'sche Form vom Range s und von keinem höheren Range in sich über, so kann man aus der Gruppe, wenn man sie so transformirt hat, dass eine beliebige Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, in der kanonischen Form erscheint, eine endliche Gruppe von genau s und nicht mehr Variablen absondern.

Wir transformiren die vorgelegte Gruppe so, dass sie nach der Transformation die Gestalt G_1' annimmt; dies ist stets möglich, ausser wenn etwa schon die Gruppe G selbst endlich ist; dann aber giebt es ja eine definite Hermite'sche Form, welche bei allen Substitutionen der Gruppe invariant bleibt, und unser Satz ist evident, so dass dieser Fall ausgeschlossen werden kann. Jede Substitution der Gruppe ist nach der Transformation durch folgende Matrix gegeben:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & \\
a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \ldots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & a_{r+1,r+2} & \ldots & a_{r+1,n} \\
a_{r+2,1} & a_{r+2,2} & \ldots & a_{r+2,r} & a_{r+2,r+1} & a_{r+2,r+2} & \ldots & a_{r+2,n} \\
\vdots & & & & \vdots & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr} & a_{n\,r+1} & a_{n\,r+2} & \ldots & a_{nn}
\end{array}$$

G_1' transformirt zunächst die semidefinite Hermite'sche Form:

$$\mu_1 z_1 \bar{z}_1 + \mu_2 z_2 \bar{z}_2 + \cdots + \mu_r z_r \bar{z}_r$$

in sich; dann aber führt G_1' ebenso wie die ursprüngliche Gruppe G, aus welcher G_1' durch Transformation erhalten wurde, wegen unserer Voraussetzung eine Hermite'sche Form vom Range s in sich über, diese Hermite'sche Form, welche bei den Substitutionen von G_1' invariant bleibt, sei mit H_s bezeichnet. H_s muss sicher die Variablen $z_1, z_2, \ldots z_r$ enthalten, denn sonst könnte man eine invariante Hermite'sche Form von höherem Range bilden; ferner enthält H_s, da G_1' eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, in kanonischer Form besitzt, nur die Producte $z_i \bar{z}_i$. H_s wird also die Form:

$$\lambda_1 z_1 \bar{z}_1 + \lambda_2 z_2 \bar{z}_2 + \cdots + \lambda_s z_s \bar{z}_s$$

haben, wenn wir die Variablen in G_1' geeignet bezeichnen. Die angegebene Hermite'sche Form bleibt bei allen Substitutionen von G_1' invariant; daher muss die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} z_k \sum_{k=1}^{k=n} \bar{a}_{ik} \bar{z}_k = \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i z_i \bar{z}_i$$

identisch für jedes z gültig sein. Hieraus ergiebt sich ein System von n^2 in den ns auftretenden Grössen a_{ik} und $\bar{a}_{ik}$ linearen Gleichungen. Betrachtet man die n Gleichungen:

$$\lambda_1 \bar{a}_{1k} a_{1i} + \lambda_2 \bar{a}_{2k} a_{2i} + \cdots + \lambda_s \bar{a}_{sk} a_{si} = 0, \quad i = 1; 2, 3, \ldots n,$$

wobei k eine der Zahlen $s+1,\ s+2, \ldots n$ ist, so folgt, da nicht alle Determinanten s^{ten} Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \ldots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \ldots & a_{s2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \ldots & a_{sn} \end{vmatrix}$$

verschwinden können, weil sonst die Substitution $\mathfrak{A}$ eine verschwindende Determinante hätte, dass

$$\bar{a}_{1k} = \bar{a}_{2k} = \cdots + \bar{a}_{sk} = 0$$

wird; für

$$k = s+1,\ s+2, \ldots n.$$

Man kann dann analog, wie es Herr Maschke a. a. O. p. 497 thut, weiter schliessen, dass $a_{ik} = 0$ wird; hierbei hat i die Werthe

$$r+1,\ r+2, \ldots s \quad \text{und} \quad k = 1, 2, \ldots r.$$

Jede Substitution von G_1' ist mithin durch folgende Matrix dargestellt:

$$\begin{array}{lll|ll|ll}
a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1r} & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2r} & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
a_{r1} & a_{r2} & \ldots a_{rr} & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\
\hline
0 & 0 & \ldots 0 & a_{r+1,r+1} & \ldots a_{r+1,s} & 0 & \ldots 0 \\
0 & 0 & \ldots 0 & a_{r+2,r+1} & \ldots a_{r+2,s} & 0 & \ldots 0 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
0 & 0 & \ldots 0 & a_{s,r+1} & \ldots a_{s,s} & 0 & \ldots 0 \\
\hline
a_{s+1,1} & a_{s+1,2} & \ldots a_{s+1,r} & a_{s+1,r+1} & \ldots a_{s+2,s} & a_{s+1,s+1} & \ldots a_{s+1,n} \\
a_{s+2,1} & a_{s+2,2} & \ldots a_{s+2,r} & a_{s+2,r+1} & \ldots a_{s+2,s} & a_{s+2,s+1} & \ldots a_{s+2,n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nr} & a_{nr+1} & \ldots a_{ns} & a_{ns+1} & \ldots a_{nn}
\end{array}$$

'ariablen $z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots z_s$ bilden jetzt für sich eine Gruppe vom einer endlichen Gruppe, wendet man auf diese Gruppe dasselbe ıren an, so sieht man, entweder bilden die $z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots z_s$ selbst ıicht zerfallende endliche Gruppe oder zerlegen sich in mehrere he Gruppen von geringerer Variablenzahl. In Folge dessen bilden ariablen $z_1, z_2, \ldots, z_s$, eine endliche Gruppe in s Variablen, wenn ıur die unter einander verschiedenen Substitutionen beibehält und ·hrfach auftretenden nur einmal rechnet. Zu dieser endlichen Gruppe ı s Variablen $z_1, z_2, \ldots z_s$, welche wir mit Z_1 (erste zugeordnete e) bezeichnen wollen, gehört wie zu jeder endlichen Gruppe auch lefinite Hermite'sche Form, welche durch die Substitutionen der e Z_1 in sich transformirt wird; diese Hermite'sche Form kann als Invariante der ganzen Gruppe G_1' in n Variablen angesehen ı, sie ist dann, falls $s < n$ ist, eine semidefinite Hermite'sche Form Range s; ist $s = n$, so ist die vorgelegte Gruppe in n Variablen ı und wir haben eine definite Hermite'sche Form als Invariante. ·bt auch in G_1' keine endliche Gruppe mit einer grösseren Anzahl Variablen; denn sonst könnte man eine invariante Hermite'sche von höherem als dem s^{ten} Range finden; dies aber widerspricht der ssetzung.

Vir haben somit das folgende Resultat gewonnen:

'u jeder Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, welche wenigstens ıbstitution besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene ln hat, gehört eine Hermite'sche Form, die thatsächlich existirt und durch sämmtliche Substitutionen der Gruppe in sich transformirt

wird. Nothwendig und hinreichend, damit die Gruppe endlich sei, ist, dass es wenigstens eine invariante Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante giebt; zu jeder endlichen Gruppe gehört dann auch stets eine invariante definite Hermite'sche Form. Nothwendig und hinreichend, dass die Gruppe nicht endlich sei, ist, dass sie nur Hermite'sche Formen von verschwindender Determinante in sich überführt; zu jeder Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, die nicht endlich ist, gehört auch stets eine semidefinite Hermite'sche Form, welche bei allen Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt. Diejenige Rangzahl, welche im Maximum bei den invarianten semidefiniten Hermite'schen Formen auftritt, kann von der Rangzahl keiner beliebigen bei der Gruppe invarianten Hermite'schen Form übertroffen werden.

Das voraufgegangene Theorem wirft, wie ich noch hervorheben möchte, auch Licht auf einen von Herrn Fuchs in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie*) veröffentlichten Satz und zeigt, dass *nicht* jede Gruppe linearer Substitutionen, bei welcher die charakteristischen Gleichungen nur für Wurzeln vom absoluten Betrage 1 verschwinden, auch wenn die Gruppe wenigstens eine Substitution enthält, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, eine Hermite'sche Form von *nicht verschwindender Determinante* in sich transformirt.

§ 3.

Die Gruppe G möge genau dieselben Bedingungen wie im § 2 erfüllen; dann kann man wieder G in die isomorphe Gruppe G_1' transformiren. Irgend eine Substitution $\mathfrak{A}$ von G_1' wird, wenn G eine Hermite'sche Form vom Range s und keinem höheren Range in sich transformirt und man die Variablen in G_1' geeignet bezeichnet, von der Form:

$$\begin{aligned}
z_1' &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \cdots + a_{1s} z_s,\\
z_2' &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + \cdots + a_{2s} z_s,\\
&\vdots\\
z_s' &= a_{s1} z_1 + a_{s1} z_2 + \cdots + a_{ss} z_s,\\
z_{s+1}' &= a_{s+1,1} z_1 + a_{s+1,2} z_2 + \cdots + a_{s+1,s} z_s + a_{s+1,s+1} z_{s+1} + \cdots + a_{s+1,n} z_n,\\
&\vdots\\
z_n' &= a_{n1} z_1 + a_{n2} z_2 + \cdots + a_{n,s} z_s + a_{n,s+1} z_{s+1} + \cdots + a_{nn} z_n.
\end{aligned}$$

*) L. Fuchs, Ueber eine Classe linearer homogener Differentialgleichungen. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1896, p. 759. Der von Herrn Fuchs ausgesprochene Satz ist sogar noch allgemeiner als für Wurzeln vom absoluten Betrage 1 gehalten. Satz III bei Herrn Fuchs, in welchem das Nichtverschwinden der Determinante vorausgesetzt werden muss, kann mithin auch nicht als Umkehrung des

Einige der angeschriebenen Coefficienten können eventuell auch noch Null werden.

Wie wir schon sahen, kann man aus G_1' eine endliche Gruppe absondern, indem man die Substitutionen der ersten s Variablen für sich gesondert betrachtet und hierbei jede mehrfach genau in derselben Weise auftretende Substitution nur einfach zählt. Die so entstandene endliche Gruppe nannten wir Z_1 (die erste zugeordnete Gruppe). Irgend einer Substitution $\mathfrak{A}$ von G_1' entspricht eindeutig eine und nur eine ganz bestimmte Substitution von $\mathfrak{Z}_1$, die mit $\mathfrak{a}_1$ bezeichnet werde. Die Substitution $\mathfrak{a}_1$ aus $\mathfrak{Z}_1$, welche $\mathfrak{A}$ aus G_1' entspricht, lautet:

$$\begin{aligned} z_1'' &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \cdots + a_{1s} z_s, \\ &\vdots \\ z_s'' &= a_{s1} z_1 + a_{s2} z_2 + \cdots + a_{ss} z_s. \end{aligned}$$

Entspricht einer Substitution $\mathfrak{A}$ von G_1' die Substitution $\mathfrak{a}_1$ von Z_1 und einer Substitution $\mathfrak{B}$ von G_1' die Substitution $\mathfrak{b}_1$ von Z_1, so entspricht der aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ componirten Substitution $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ die Substitution $\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_1$ von Z_1.

Wir ordnen jetzt einer jeden Substitution $\mathfrak{A}$ von G_1' eine Substitution in $n-s$ Variablen zu; die der Substitution $\mathfrak{A}$ zugeordnete Substitution sei mit $\mathfrak{A}_{[1]}$ bezeichnet und möge auf die folgende Art aus $\mathfrak{A}$ hergeleitet sein:

$$\begin{aligned} \zeta_{s+1} &= a_{s+1,s+1}\, z_{s+1} + a_{s+1,s+2}\, z_{s+2} + \cdots + a_{s+1,n}\, z_n, \\ \zeta_{s+2} &= a_{s+2,s+1}\, z_{s+1} + a_{s+2,s+2}\, z_{s+2} + \cdots + a_{s+2,n}\, z_n, \\ &\vdots \\ \zeta_n &= a_{n,s+1}\, z_{s+1} + a_{n,s+2}\, z_{s+2} + \cdots + a_{n,n}\, z_n. \end{aligned}$$

Wenn $\mathfrak{A}_{[1]}$ der Substitution $\mathfrak{A}$ aus G_1' und $\mathfrak{B}_{[1]}$ der Substitution $\mathfrak{B}$ aus G_1' zugeordnet sind, so entspricht der aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ componirten Substitution $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ die Substitution $\mathfrak{A}_{[1]}\cdot\mathfrak{B}_{[1]}$. Betrachtet man die Gesammtheit von Substitutionen in den $n-s$ Variablen, welche auf diese Art allen Substitutionen von G_1' zugeordnet sind, so bilden diese neuen Substitutionen mithin auch eine Gruppe, welche wir mit $G_{[1]}$ bezeichnen wollen. Entsprechen der Substitution $\mathfrak{A}$ von G_1' die Substitutionen $\mathfrak{A}_{[1]}$ von $G_{[1]}$ und $\mathfrak{a}_1$ von Z_1, so ist die charakteristische Gleichung von $\mathfrak{A}$ das Product der charakteristischen Gleichungen von $\mathfrak{A}_{[1]}$ und $\mathfrak{a}_1$. Hieraus

---

Satzes I von Herrn Fuchs angesehen werden (a. a. O. p. 763). Aus dem von Herrn Fuchs aufgestellten Satz kann daher auch nicht das Theorem hergeleitet werden, dass jede endliche Gruppe eine Hermite'sche Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt. (Vgl. hierzu das schon p. 230 in der Anmerkung gegebene Citat.)

folgt, dass $G_{[1]}$ auch eine Gruppe vom Typus einer endlichen Grup
Da G_1' eine Substitution, deren charakteristische Gleichung laute
schiedene Wurzeln hat, in kanonischer Form enthält, so erschei
dieser Substitution zugeordnete Transformation von $G_{[1]}$ auch in kano
Form, und die zugehörige charakteristische Gleichung besitzt eb
lauter verschiedene Wurzeln. Mithin wird nach dem pag. 228 bewi
Satz entweder $G_{[1]}$ eine endliche Gruppe sein müssen oder jede S
tution von $G_{[1]}$ wird, wenn man annimmt, dass die Variablen von
an in geeigneter Weise bezeichnet wurden, von der Form:

$$
\begin{aligned}
\zeta_{s+1} &= a_{s+1,s+1} z_{s+1} + \cdots + a_{s+1,s+s_1} z_{s+s_1}, \\
\zeta_{s+2} &= a_{s+2,s+1} z_{s+1} + \cdots + a_{s+2,s+s_1} z_{s+s_1}, \\
&\vdots \\
\zeta_{s+s_1} &= a_{s+s_1,s+1} z_{s+1} + \cdots + a_{s+s_1,s+s_1} z_{s+s_1}, \\
\zeta_{s+s_1+1} &= a_{s+s_1+1,s+1} z_{s+1} + \cdots + a_{s+s_1+1,s+s_1} z_{s+s_1} + a_{s+s_1+1,s+s_1+1} z_{s+s} \\
&\qquad + \cdots + a_{s+s_1} \\
&\vdots \\
\zeta_n &= a_{n,s+1} z_{s+1} + \cdots + a_{n,s+s_1} z_{s+s_1} + a_{n,s+s_1+1} z_{s+s_1+1} + \cdots +
\end{aligned}
$$

Betrachtet man die Substitutionen in den s_1 ersten Variablen ges
für sich und zählt hierbei die genau in gleicher Form auftretende
stitutionen nur einfach, so bilden die Substitutionen in den ers
Variablen für sich eine endliche Gruppe. Aus dem Obigen ersieh
dass in allen Substitutionen von G_1' alle Coefficienten $a_{s+t,s+s_1+}$
welchen t_1 und t den Ungleichungen $s_1 \geqq t \geqq 1$ und $n - s - s_1 \geqq$
genügen, verschwinden.

Jeder Substitution $\mathfrak{A}$ von G_1' kann man jetzt eine Substitut
s_1 Variablen, die mit $\mathfrak{a}_2$ bezeichnet sei, auf folgende Art zuordnen:

$$
\begin{aligned}
z''_{s+1} &= a_{s+1,s+1} z_{s+1} + a_{s+1,s+2} z_{s+2} + \cdots + a_{s+1,s+s_1} z_{s+s_1}, \\
z''_{s+2} &= a_{s+2,s+1} z_{s+1} + a_{s+2,s+2} z_{s+2} + \cdots + a_{s+2,s+s_1} z_{s+s_1}, \\
&\vdots \\
z''_{s+s_1} &= a_{s+s_1,s+1} z_{s+1} + a_{s+s_1,s+2} z_{s+2} + \cdots + a_{s+s_1,s+s_1} z_{s+s_1}.
\end{aligned}
$$

Diese Substitutionen bilden, wie schon gesagt, eine endliche G
Diese endliche Gruppe wollen wir mit Z_2 (zweite zugeordnete e
Gruppe zu G_1') bezeichnen. Entspricht einer Substitution $\mathfrak{A}$ aus
Substitution $\mathfrak{a}_2$ von Z_2 und einer Substitution $\mathfrak{B}$ aus G_1' die Subst
$\mathfrak{b}_2$ aus Z_2, so entspricht der aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ componirten Substitutio
die aus $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2$ componirte Substitution $\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_2$ von Z_2. Das ange
Schlussverfahren kann nun genau ebenso weiter fortgesetzt werden
gewinnt hierdurch folgendes Resultat:

Ist G irgend eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, welche wenigstens eine Substitution besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, so wird, wenn man die Gruppe so transformirt, dass irgend eine der Substitutionen, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, in der kanonischen Form erscheint, bei geeigneter Bezeichnung der Variablen jede Substitution der isomorphen Gruppe G_1' von der Form:

$$\begin{aligned}
z_1' &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \cdots + a_{1s} z_s, \\
z_2' &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + \cdots + a_{2s} z_s, \\
&\vdots \\
z_s' &= a_{s1} z_1 + a_{s2} z_2 + \cdots + a_{ss} z_s, \\
z_{s+1}' &= a_{s+1,1} z_1 + a_{s+1,2} z_2 + \cdots + a_{s+1,s} z_s + a_{s+1,s+1} z_{s+1} + \\
&\qquad + \cdots + a_{s+1,s+s_1} z_{s+s_1} \\
z_{s+2}' &= a_{s+2,1} z_1 + a_{s+2,2} z_2 + \cdots + a_{s+2,s} z_s + a_{s+2,s+1} z_{s+1} + \\
&\qquad + \cdots + a_{s+s,s+s_1} z_{s+s_1}, \\
&\vdots \\
z_{s+s_1}' &= a_{s+s_1,1} z_1 + a_{s+s_1,2} z_2 + \cdots + a_{s+s_1,s} z_s + a_{s+s_1,s+1} z_{s+1} + \\
&\qquad + \cdots + a_{s+s_1,s+s_1} z_{s+s_1}, \\
z_{s+s_1+1}' &= a_{s+s_1+1,1} z_1 + \cdots + a_{s+s_1+1,s} z_s + a_{s+s_1+1,s+1} z_{s+1} + \cdots \\
&\quad + a_{s+s_1+1,s+s_1} z_{s+s_1} + a_{s+s_1+1,s+s_1+1} z_{s+s_1+1} + \cdots + a_{s+s_1+1,s+s_1+s_2} z_{s+s_1+s_2}, \\
z_{s+s_1+2}' &= a_{s+s_1+2,1} z_1 + \cdots + a_{s+s_1+2,s} z_s + a_{s+s_1+2,s+1} z_{s+1} + \cdots \\
&\quad + a_{s+s_1+2,s+s_1} z_{s+s_1} + a_{s+s_1+2,s+s_1+1} z_{s+s_1+1} + \cdots + a_{s+s_1+2,s+s_1+s_2} z_{s+s_1+s_2}, \\
&\vdots \\
z_{s+s_1+s_2}' &= a_{s+s_1+s_2,1} z_1 + \cdots + a_{s+s_1+s_2,s} z_s + a_{s+s_1+s_2,s+1} z_{s+1} + \cdots \\
&\quad + a_{s+s_1+s_2,s+s_1} z_{s+s_1} + a_{s+s_1+s_2,s+s_1+1} z_{s+s_1+1} + \cdots + a_{s+s_1+s_2,s+s_1+s_2} z_{s+s_1+s_2}, \\
&\vdots \\
z_{n-s_i}' &= a_{n-s_i,1} z_1 + a_{n-s_i,2} z_2 + \cdots + a_{n-s_i,n-s_i} z_{n-s_i}, \\
z_{n-s_i+1}' &= a_{n-s_i+1,1} z_1 + a_{n-s_i+1,2} z_2 + \cdots + a_{n-s_i+1,n-s_i} z_{n-s_i} + \\
&\qquad + a_{n-s_i+1,n-s_i+1} z_{n-s_i+1} + \cdots + a_{n-s_i+1,n} z_n, \\
z_{n-s_i+2}' &= a_{n-s_i+2,1} z_1 + a_{n-s_i+2,2} z_2 + \cdots + a_{n-s_i+2,n-s_i} z_{n-s_i} + \\
&\qquad + a_{n-s_i+2,n-s_i+1} z_{n-s_i+1} + \cdots + a_{n-s_i+2,n} z_n, \\
&\vdots \\
z_n' &= a_{n,1} z_1 + a_{n,2} z_2 + \cdots + a_{n,n-s_i} z_{n-s_i} + a_{n,n-s_i+1} z_{n-s_i+1} + \cdots + a_{n,n} z_n, \\
&\qquad (n = s + s_1 + s_2 + \cdots + s_i.)
\end{aligned}$$

Zu jeder Substitution $\mathfrak{A}$ von G_1' gehört eindeutig ein Complex von Sub-

stitutionen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots \mathfrak{a}_{i+1}$ *in* $s, s_1, s_2, \ldots s_i$ *Variablen. Die* $\mathfrak{A}$ *entsprechende Substitution* $\mathfrak{a}_1$ *ist:*

$$\begin{aligned}
z_1'' &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \cdots + a_{1s} z_s,\\
z_2'' &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + \cdots + a_{2s} z_s,\\
&\vdots\\
z_s'' &= a_{s1} z_1 + a_{s2} z_2 + \cdots + a_{ss} z_s.
\end{aligned}$$

Die Gesammtheit von Substitutionen $\mathfrak{a}_1$, *welche zu allen Substitutionen* $\mathfrak{A}$ *von* G_1' *gehören, bilden, wenn man hierbei die wiederholt in derselben Weise auftretenden Substitutionen nur einfach zählt, eine endliche Gruppe* Z_1 *in* s *Variablen.*

Die $\mathfrak{A}$ *entsprechende Substitution* $\mathfrak{a}_2$ *ist:*

$$\begin{aligned}
z''_{s+1} &= a_{s+1,s+1}\, z_{s+1} + a_{s+1,s+2}\, z_{s+2} + \cdots + a_{s+1,s+s_1}\, z_{s+s_1},\\
z''_{s+2} &= a_{s+2,s+1}\, z_{s+1} + a_{s+2,s+2}\, z_{s+2} + \cdots + a_{s+2,s+s_1}\, z_{s+s_1},\\
&\vdots\\
z''_{s+s_1} &= a_{s+s_1,s+1}\, z_{s+1} + a_{s+s_1,s+2}\, z_{s+2} + \cdots + a_{s+s_1,s+s_1}\, z_{s+s_1}.
\end{aligned}$$

Die Gesammtheit von Substitutionen $\mathfrak{a}_2$, *welche zu sämmtlichen Substitutionen* $\mathfrak{A}$ *von* G_1' *gehören, bilden, wenn man hierbei die mehrfach in genau identischer Weise auftretenden Substitutionen nur einfach zählt, eine endliche Gruppe* Z_2 *in* s_1 *Variablen.*

Die $\mathfrak{A}$ *entsprechende Substitution* $\mathfrak{a}_3$ *ist:*

$$\begin{aligned}
z''_{s+s_1+1} &= a_{s+s_1+1,s+s_1+1}\, z_{s+s_1+1} + \cdots + a_{s+s_1+1,s+s_1+s_2}\, z_{s+s_1+s_2},\\
z''_{s+s_1+2} &= a_{s+s_1+2,s+s_1+1}\, z_{s+s_1+1} + \cdots + a_{s+s_1+2,s+s_1+s_2}\, z_{s+s_1+s_2},\\
&\vdots\\
z''_{s+s_1+s_2} &= a_{s+s_1+s_2,s+s_1+1}\, z_{s+s_1+1} + \cdots + a_{s+s_1+s_2,s+s_1+s_2}\, z_{s+s_1+s_2}.
\end{aligned}$$

Die Gesammtheit von Substitutionen $\mathfrak{a}_3$, *welche zu sämmtlichen Substitutionen* $\mathfrak{A}$ *von* G_1' *gehören, bilden, wenn man hierbei die mehrfach in genau identischer Weise auftretenden Substitutionen nur einfach zählt, eine endliche Gruppe* Z_3 *in* s_2 *Variablen. Auf diese Art geht es weiter.*

Die $\mathfrak{A}$ *entsprechende Substitution* $\mathfrak{a}_{i+1}$ *schliesslich ist:*

$$\begin{aligned}
z''_{n-s_i+1} &= a_{n-s_i+1,n-s_i+1}\, z_{n-s_i+1} + \cdots + a_{n-s_i+1,n}\, z_n,\\
z''_{n-s_i+2} &= a_{n-s_i+2,n-s_i+1}\, z_{n-s_i+1} + \cdots + a_{n-s_i+2,n}\, z_n,\\
&\vdots\\
z''_n &= a_{n,n-s_i+1}\, z_{n-s_i+1} + \cdots + a_{n,n}\, z_n.
\end{aligned}$$

Die Gesammtheit von Substitutionen $\mathfrak{a}_{i+1}$ *erzeugen eine endliche Gruppe* Z_{i+1} *in* s_i *Variablen.*

Zu G_1' gehören mithin $i+1$ endliche Gruppen $Z_1, Z_2, \ldots Z_{i+1}$.

Der obige Satz gestattet die Bildung von Gruppen vom Typus endlicher Gruppen von n Variabeln vorzunehmen, falls man endliche Gruppen von einer geringeren Variablenzahl bilden kann.

§ 4.

Wie wir oben sahen, entspricht einer Substitution $\mathfrak{A}$ von G_1' ein Complex von Substitutionen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{i+1}$. Lassen wir $\mathfrak{A}$ alle unendlichvielen Substitutionen von G_1' durchlaufen, so kann hierbei jede der zugeordneten Substitutionen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{i+1}$ welche ja Substitutionen aus endlichen Gruppen sind, nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen; denn eine endliche Gruppe enthält nur eine endliche Anzahl von unter einander verschiedenen Substitutionen. Da G_1' als Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, die nicht endlich ist, unendlichviele verschiedene Substitutionen enthält, so müssen unendlichvielen verschiedenen Substitutionen von G_1' ein- und derselbe Complex von Substitutionen aus den endlichen Gruppen $Z_1, Z_2, \ldots Z_{i+1}$ zugeordnet sein.

Es möge also den unendlichvielen Substitutionen $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \ldots$, welche G_1' angehören und die alle verschieden von einander seien, ein- und derselbe Complex von Substitutionen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots \mathfrak{c}_{i+1}$ entsprechen. $\mathfrak{c}_k (k=1,2,3,\ldots i+1)$ ist also die aus der endlichen Gruppe Z_k entnommene Substitution von s_{k-1} Variablen, welche den Substitutionen $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \ldots$ von G_1' eindeutig entspricht. Da die Gruppen $Z_1, Z_2, \ldots Z_{i+1}$ endliche Gruppen sind, so kann man eine endliche Zahl λ finden, dass jede der Substitutionen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots \mathfrak{c}_{i+1}$ nach λ maliger Wiederholung die identische Substitution liefert. Betrachten wir jetzt die Substitution $\mathfrak{C}^\lambda$, so entsprechen dieser die Substitutionen $\mathfrak{c}_1^\lambda, \mathfrak{c}_2^\lambda, \ldots \mathfrak{c}_{i+1}^\lambda$, d. h. die identische Subtitution, welche in den Gruppen $Z_1, Z_2, \ldots Z_{i+1}$ enthalten ist. Ferner bilden wir uns die unendlichvielen Substitutionen $\mathfrak{C}^\lambda, \mathfrak{C}^{\lambda-1}\mathfrak{C}', \mathfrak{C}^{\lambda-1}\mathfrak{C}'', \mathfrak{C}^{\lambda-1}\mathfrak{C}''', \ldots$; allen diesen entspricht die identische Substitution, welche in $Z_1, Z_2, \ldots Z_{i+1}$ enthalten ist. Da den unendlichvielen Substitutionen $\mathfrak{C}^\lambda, \mathfrak{C}^{\lambda-1}\mathfrak{C}', \mathfrak{C}^{\lambda-1}\mathfrak{C}'', \ldots$ die identische Substitution von $Z_1, Z_2, \ldots Z_{i+1}$ entspricht, so folgt, alle jene Substitutionen sind durch quadratische Matrices gegeben, in welchen die Diagonalelemente sämmtlich 1 und alle rechts von der Diagonale stehenden Elemente Null sind. Die Substitutionen $\mathfrak{C}^\lambda, \mathfrak{C}^{\lambda-1}\mathfrak{C}', \mathfrak{C}^{\lambda-1}\mathfrak{C}'', \ldots$ müssen alle verschieden sein, denn sonst wären auch die Substitutionen $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \ldots$ nicht verschieden, mithin sind die Substitutionen $\mathfrak{C}^\lambda, \mathfrak{C}^{\lambda-1}\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}^{\lambda-1}\mathfrak{C}'', \ldots$ bis etwa auf eine Substitution sämmtlich auch von der identischen Substitution verschieden. Greifen wir irgend eine der Substitutionen $\mathfrak{C}^\lambda, \mathfrak{C}^{\lambda-1}\mathfrak{C}', \mathfrak{C}^{\lambda-1}\mathfrak{C}'', \ldots$ nach Willkür heraus, nur soll die gewählte Substitution von der Identität verschieden sein, so wird diese Substitution von der Form:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1, \\ z_2' &= \tau_{21} z_1 + z_2, \\ z_3' &= \tau_{31} z_1 + \tau_{32} z_2 + z_3, \\ &\vdots \\ z_n' &= \tau_{n1} z_1 + \tau_{n2} z_2 + \tau_{n3} z_3 + \cdots + z_n. \end{aligned}$$

Hierbei können, da die Substitution nicht die identische ist, nicht alle τ Null sein. Da nicht alle τ verschwinden dürfen, so folgt, die charakteristische Gleichung der hingeschriebenen Substitution hat jedenfalls wenigstens einen nicht einfachen Elementartheiler, der für die Wurzel $+1$ verschwindet.

Ist G irgend eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, die nicht selbst endlich ist und wenigstens eine Substitution besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, so ist G in G_1' transformirbar und die Substitutionen von G sind denen von G_1' ähnlich. In Folge dessen besitzen die charakteristischen Gleichungen der Substitutionen von G dieselben Elementartheiler wie diejenigen der entsprechenden Substitutionen von G_1'. Mithin enthält auch G Substitutionen, deren charakteristische Gleichungen nicht lauter einfache Elementartheiler haben. Wir gewinnen also folgenden Satz:

Jede Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, die nicht endlich ist, und welche wenigstens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, enthält, besitzt Substitutionen, deren charakteristische Gleichungen nicht lauter einfache Elementartheiler aufweisen.

Damit eine Gruppe linearer Substitutionen endlich sei, ist bekanntlich nothwendig*), dass die charakteristischen Gleichungen der Substitutionen der Gruppe nur einfache Elementartheiler, welche für Einheitswurzeln verschwinden, besitzt; diese Bedingung ist für die Endlichkeit der Gruppe nicht hinreichend, wie das folgende Beispiel lehrt. Wir betrachten die Gruppe linearer Substitutionen von einer Variablen, welche von allen Transformationen: $x' = \varepsilon x$, wobei ε alle Einheitswurzeln durchlaufen soll, gebildet wird. Da es unendlichviele verschiedene Einheitswurzeln giebt, so besteht die Gruppe aus unendlichvielen Substitutionen, sie ist also nicht endlich; trotzdem erfüllt die Gruppe die oben als nothwendig für die Endlichkeit einer Gruppe angegebenen Bedingungen; denn die charakteristische Gleichung jeder Substitution ist $\varrho - \varepsilon$, wo ε eine Einheitswurzel ist.

*) Vgl. Frobenius, Crelle's Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 84, p. 16 sowie C. Jordan, ebenda, Bd. 84, p. 112.

Eine hinreichende Bedingung für die Endlichkeit einer Gruppe wird hingegen, wie sich aus dem Voraufgegangenen ergiebt, durch den folgenden Satz angegeben:

Haben die charakteristischen Gleichungen der Substitutionen einer Gruppe nur einfache Elementartheiler und verschwinden die Elementartheiler nur für eine endliche Anzahl unter einander verschiedener Einheitswurzeln, so ist die Gruppe, wenn man weiss, sie enthält wenigstens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, eine endliche Gruppe.

In dem zuletzt ausgesprochenen Theorem kann man, wenn man den ersten Satz des § 1 beachtet, auch statt *„Einheitswurzeln“* *„Grössen, von denen keine Null ist“* setzen.

Man kann auch folgenden Satz formuliren:

Die charakteristischen Gleichungen der Substitutionen einer jeden nicht endlichen Gruppe linearer Substitutionen von nicht verschwindender Determinante, welche wenigstens eine Substitution besitzt, für welche die charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, verschwinden entweder für eine unendliche Anzahl von untereinander verschiedenen Grössen oder die Gruppe enthält Substitutionen, deren charakteristische Gleichungen nicht lauter einfache Elementartheiler besitzen.

§ 5.

Wenn eine Gruppe endlich ist, so kann man stets eine endliche ganze positive Zahl p finden, dass alle Substitutionen der Gruppe nach einer p maligen oder geringeren Anzahl von Wiederholungen die identische Substitution ergeben.

Wir wollen jetzt annehmen, es sei eine Gruppe linearer Subtitutionen vorgelegt und es existire eine endliche positive ganze Zahl p, dass alle Substitutionen der Gruppe von p^{ter} oder niedrigerer Ordnung sind. In diesem Fall hat die charakteristische Gleichung jeder Substitution der Gruppe nur einfache Elementartheiler und diese verschwinden für Einheitswurzeln. Die Anzahl der Wurzeln, welche zu allen charakteristischen Gleichungen der sämmtlichen Substitutionen gehören, ist eine endliche, denn alle diese Wurzeln sind unter den Wurzeln der p Gleichungen $\varrho = 1$, $\varrho^2 = 1, \ldots \varrho^p = 1$ enthalten. Wir haben also eine Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe vor uns. Wir können nach § 4 daher folgendes Resultat angeben:

Kann man eine endliche positive ganze Zahl p finden, dass alle Substitutionen einer Gruppe, welche wenigstens eine Substitution besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, von p^{ter} oder niedrigerer Ordnung sind, so ist die Gruppe endlich.

Mithin gilt für unendliche Gruppen der folgende Satz:

Für eine Gruppe von unendlichvielen Substitutionen, welche wenigstens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, enthält, existirt niemals eine endliche positive ganze Zahl p, dass alle Substitutionen der Gruppe von p^{ter} oder niedrigerer Ordnung sind.

Mit anderen Worten:

Hat man eine Gruppe von unendlichvielen Substitutionen, welche wenigstens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, enthält, so kann man, wie gross auch immer man sich eine beliebige positive ganze Zahl p wählen mag, Substitutionen der Gruppe finden, die nicht nach einer p maligen oder geringeren Anzahl von Wiederholungen die identische Substitution ergeben, sondern von höherer als p^{ter} Ordnung sind.

Freiburg i. B., im December 1898.

Ein Beitrag zur Differenzenrechnung und zur Zahlentheorie.

Von

E. Busche in Bergedorf.

Die Formel (I), die ich im Folgenden mittheile, ist eine Verallgemeinerung einer von Abel in seiner Abhandlung über die Binomialreihe aufgestellten identischen Gleichung, von der z. B. Kronecker in seinen Vorlesungen über Integrale öfters Gebrauch macht, und die Herr Markoff in seinem Buche über Differenzenrechnung*) auf Seite 101 ff. als den Satz von der partiellen Summation ausführlicher behandelt und benutzt. Meine Verallgemeinerung lässt erkennen, dass auch die Transformationsformel von Dirichlet (Ges. Werke, Bd. II, S. 101), in der die Function $[x]$ auftritt, durch die die grösste in x enthaltene ganze Zahl angegeben wird, als eine Folgerung aus der verallgemeinerten Abel'schen Identität angesehen werden kann. Von der allgemeinen Formel mache ich eine Anwendung auf die Entwicklung einer endlichen Summe in eine Reihe von Gliedern, die von den Differenzen der in der Summe auftretenden Function abhängen. Die Entwicklungscoefficienten, die ursprünglich durch wiederholte Summation definirt werden, erweisen sich als eine Reihe von Zahlen, die die Binomialcoefficienten als besonderen Fall enthalten und eine grosse Analogie mit diesen Zahlen besitzen.

Auf die Zahlentheorie beziehen sich meine Betrachtungen nur insofern, als die Function $[x]$ in ihnen die wesentlichste Rolle spielt. Es ist aber wohl nicht zweifelhaft, dass die genauere Untersuchung der Eigenschaften dieser Function auch für die eigentliche Zahlentheorie, bei der die Theilbarkeit einer Zahl durch eine andere — oder eine Erweiterung dieses Begriffes — das Wesentliche ist, von beträchtlichem Nutzen sein dürfte. Das zeigen z. B. die bekannten Dirichlet'schen Abhandlungen über asymptotische Gesetze in der Zahlentheorie und neuerdings die Erfolge, die Herr Minkowski in der „Geometrie der Zahlen"**) seiner

*) Deutsch von Friesendorff und Prümm (Leipzig 1896).

**) Leipzig 1896 (erste Lieferung).

weitgehenden Verallgemeinerung des Begriffes der grössten ganzen Zahl verdankt. Die Anzahl der in einem Minkowski'schen nirgends concaven Körper enthaltenen Gitterpunkte ist ja offenbar eine Verallgemeinerung der Function $[x]$.

§ 1.

Auf einer geraden Linie, deren Punkte die reellen Zahlen darstellen, möge durch die Zahlen α und $\beta > \alpha$ ein endliches Intervall abgegrenzt sein. Innerhalb des Intervalles (α excl., β incl.) liegen die Zahlen

$$a_{\nu_a+1} \gtreqless a_{\nu_a+2} \cdots \gtreqless a_{n_a}; \quad b_{\nu_b+1} \gtreqless b_{\nu_b+2} \cdots \gtreqless b_{n_b}; \quad c_{\nu_c+1} \gtreqless c_{\nu_c+2} \cdots \gtreqless c_{n_c}; \cdots$$

Bezeichnet man dann mit $a_x(b)$ den (positiven oder negativen) Index der Zahl b, die der Bedingung

$$b_{a_x(b)} \gtreqless a_x < b_{a_x(b)+1}$$

genügt, während $b_y(a)'$ den Index der Zahl a angiebt, für die

$$a_{b_y(a)'} < b_y \gtreqless a_{b_y(a)'+1}$$

ist, so besteht die folgende Identität, in der f_a, f_b, f_c ganz beliebige eindeutige Functionen sind,

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{x=\nu_a+1}^{n_a} f_b(a_x(b)) \cdot f_c(a_x(c)) \cdot (f_a(x) - f_a(x-1)) \\ &+ \sum_{y=\nu_b+1}^{n_b} f_a(b_y(a)') \cdot f_c(b_y(c)) \cdot (f_b(y) - f_b(y-1)) \\ &+ \sum_{z=\nu_c+1}^{n_c} f_a(c_z(a)') \cdot f_b(c_z(b)') \cdot (f_c(z) - f_c(z-1)) \\ &= f_a(n_a) \cdot f_b(n_b) \cdot f_c(n_c) - f_a(\nu_a) \cdot f_b(\nu_b) \cdot f_c(\nu_c). \end{aligned}$$

Die Formel ist der Kürze wegen nur für drei Punktsysteme a, b, c geschrieben; man sieht aber sofort, wie die allgemeine Formel lauten würde.

Der Strich an den Ausdrücken $b_y(a)'$ etc. hat den Zweck, darauf hinzuweisen, dass, wenn eine Zahl b mit einer Zahl a zusammenfällt, die Zahl b als vor der Zahl a liegend angesehen werden soll; ebenso wird unter derselben Voraussetzung eine Zahl c als vor einer Zahl a oder b liegend betrachtet. Von zwei zusammenfallenden Punkten desselben Systems werde der mit dem kleineren Index als vor dem anderen liegend angenommen. Nach diesen Festsetzungen braucht der Fall des Zusammenliegens von Zahlen bei dem Beweise, zu dem ich jetzt komme, nicht besonders behandelt zu werden. Der eigentliche Grund für das Bestehen

: Formel ist natürlich der, dass von den Gliedern der links stehenden mmen sich je zwei gegenseitig wegheben, bis auf die beiden Glieder, ı auf der rechten Seite angegeben sind. Es ist aber leichter als auf sem directen Wege sich durch vollständige Induction von der Richtigit der Formel zu überzeugen. Angenommen, sie wäre für ein Intervall $\ldots\beta$ mit einer gewissen Anzahl von Punkten $a, b, c, \ldots$ schon bewiesen d es würde darauf das Intervall über β hinaus so erweitert, dass noch ı Punkt c_{n_c+1}, der einem der schon vorhandenen (drei) Punktsysteme gehört, hinzukommt, so ändert sich nur die von $\nu_c + 1$ bis n_c erstreckte amme um das neu hinzutretende Glied

$$f_a(n_a) \cdot f_b(n_b)\,(f_c(n_c+1) - f_c(n_c)).$$

's ist nämlich, weil auf c_{n_c+1} kein Punkt a und b mehr folgt,

$$c_{n_c+1}(a)' = n_a, \quad c_{n_c+1}(b)' = n_b.$$

er negative Bestandtheil des neuen Gliedes hebt sich gegen das vor der eränderung übrig bleibende Glied $f_a(n_a) \cdot f_b(n_b) \cdot f_c(n_c)$ weg, und der sitive Bestandtheil $f_a(n_a)\, f_b(n_b)\, f_c(n_c+1)$ bleibt übrig. Das ist aber rade das positive Glied, das nach der Erweiterung des Intervalles auf r rechten Seite stehen muss, wenn die Formel ihre Gültigkeit belten soll.

Wenn dagegen die Verlängerung des Intervalles zur Folge hat, dass ı Punkt $d_{\nu_d+1} = d_{n_d}$ in das Intervall eintritt, der einem vorher in dem ervall nicht vertreten gewesenen Punktsystem angehört, so muss jetzt ıe neue beliebige Function f_d hinzugenommen werden, und alle schon rhandenen (drei) Summen nehmen in jedes ihrer Glieder den Factor $\nu_d)$ auf, da z. B. $a_x(d) = \nu_d$ ist für jedes in Betracht kommende x, so ss diese schon vorhandenen Summen nun zusammen gleich

$$f_a(n_a) \cdot f_b(n_b) \cdot f_c(n_c) \cdot f_d(\nu_d) - f_a(\nu_a) \cdot f_b(\nu_b) \cdot f_c(\nu_c) \cdot f_d(\nu_d)$$

ıd. Ausserdem aber kommt jetzt eine neue (vierte) Summe hinzu, die s dem einen Gliede

$$f_a(n_a) \cdot f_b(n_b) \cdot f_c(n_c) \cdot (f_d(n_d) - f_d(\nu_d))$$

steht, denn es ist $d_{n_d}(a)' = n_a$ u. s. w. und $\nu_d = n_d - 1$. Die ganze ıke Seite ist also gleich

$$f_a(n_a) \cdot f_b(n_b) \cdot f_c(n_c) \cdot f_d(n_d) - f_a(\nu_a) \cdot f_b(\nu_b) \cdot f_c(\nu_c) \cdot f_d(\nu_d),$$

ıs mit der nach der Veränderung des Intervalles sich ergebenden rechten ite übereinstimmt.

Da nun für ein Intervall mit nur zwei Punkten $a_{\nu_a+1} = a_{n_a}$ und $_{\nu_b+1} = b_{n_b}$ die Formel offenbar gilt, so ist sie damit allgemein bewiesen.

§ 2.

Die nächstliegende Anwendung der Formel (1) bezieht sich auf eine Verallgemeinerung der bekannten Formel über die Function $[x]$, auf die Gauss seinen dritten Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes gegründet hat. Die Zahlen a, b, c mögen die zu ganzzahligen Argumentwerthen gehörenden Werthe von in dem auf die Functionswerthe sich beziehenden Intervall $\alpha \dots \beta$ beständig wachsenden eindeutigen Functionen $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sein. Dann ist ν_a definirt durch die Bedingungen

$$a(\nu_a) \overline{\gtrless} \alpha < a(\nu_a + 1)$$

oder

$$\nu_a = [A(\alpha)],$$

wenn hier, wie immer im Folgenden, durch den grossen Buchstaben die inverse Function der mit dem entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichneten Function angegeben wird. Weil $a(x)$ kein zwischen α und β liegendes Maximum oder Minimum hat, so ist $A(y)$ ebenfalls in dem auf die Argumentwerthe sich beziehenden Intervall $\alpha \dots \beta$ eindeutig definirt. Ebenso wie ν_a findet man

$$\nu_b = [B(\alpha)], \quad \nu_c = [C(\alpha)], \quad n_a = [A(\beta)] \text{ u. s. w.}$$

Ferner ist $a_x(b)$, d. h. der Index derjenigen Zahl $b_y = b(y)$, die $\overline{\gtrless} a_x = a(x)$ ist, bestimmt durch

$$b(y) \overline{\gtrless} a(x) < b(y+1)$$

oder

$$y = a_x(b) = [B(a(x))] \quad \text{oder kürzer} \quad = [Ba(x)].$$

Dagegen ist $b_y(a)'$ bestimmt durch

$$a(x) < b(y) \overline{\gtrless} a(x+1),$$

denn ein etwa mit $b_y = b(y)$ zusammenfallender Punkt a_{x+1} sollte als auf b_y folgend betrachtet werden, so dass nicht der mit b_y zusammenfallende Punkt a_{x+1}, sondern der vorhergehende den zu bestimmenden Index $b_y(a)'$ besitzt. Ein Zusammenfallen mehrerer Punkte a_x mit einander, das noch weitere Festsetzungen erforderlich machen würde, kann nach den Voraussetzungen über die Functionen $a(x)$ etc. nicht vorkommen. Aus den angegebenen Beziehungen folgt

$$x = b_y(a)' = [Ab(y)]',$$

wo also durch den Strich angedeutet wird, dass wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer eine ganze Zahl ist, nicht diese, sondern die nächst kleinere ganze Zahl für x zu setzen ist. Die Beachtung des Unterschiedes zwischen gestrichelten und ungestrichelten eckigen Klammern ist für das Folgende, und zwar nicht bloss wegen der dadurch bewirkten ausnahms-

›sen Gültigkeit der Formeln, sondern auch aus anderen Gründen, wie nan sehen wird, von der grössten Wichtigkeit.

Setzt man die gefundenen Werthe für ν_a etc., für $a_x(b)$, $b_y(a)'$ und lie analogen für $a_x(c)$, $c_x(a)'$ etc. in die Gleichung (I) ein, so erhält man:

$$
\text{(II)}\quad \sum_{x=[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]} f_b([Ba(x)])\cdot f_c([Ca(x)])\cdot(f_a(x)-f_a(x-1))
$$
$$
+\sum_{y=[B(\alpha)]+1}^{[B(\beta)]} f_a([Ab(y)]')\cdot f_c([Cb(y)])\cdot(f_b(y)-f_b(y-1))
$$
$$
+\sum_{z=[C(\alpha)]+1}^{[C(\beta)]} f_a([Ac(z)]')\cdot f_b([Bc(z)]')\cdot(f_c(z)-f_c(z-1))
$$
$$
=f_a([A(\beta)])\cdot f_b([B(\beta)])\cdot f_c([C(\beta)])-f_a([A(\alpha)])\cdot f_b([B(\alpha)])\cdot f_c([C(\alpha)]).
$$

Die Formel gilt natürlich auch für mehr als drei Functionen. Setzt man

$$
f_c(x)=1,\quad f_a(x)=x,\quad f_b(x)=x,\quad a(x)=px:q,
$$

also $A(y)=qy:p$, ferner $b(x)=B(x)=x$, $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}p$, wo p und q ungerade theilerfremde Zahlen sind, so erhält man die schon erwähnte Gauss'sche Gleichung

$$
\sum_{x=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{px}{q}\right]+\sum_{y=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{qy}{p}\right]'=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2},
$$

wo der Strich an der zweiten Klammer auch fehlen darf, weil unter den angegebenen Bedingungen keine Ganzzahligkeit der eingeschlossenen Grösse eintreten kann.

Für $a(x)=x$, $b(x)=x$, $f_c(x)=1$, $[\alpha]=\nu$, $[\beta]=n$ ergiebt sich

$$
\sum_{x=\nu+1}^{n} f_b(x)\cdot(f_a(x)-f_a(x-1))+\sum_{y=\nu+1}^{n} f_a(y-1)\cdot(f_b(y)-f_b(y-1))
$$
$$
=f_a(n)\cdot f_b(n)-f_a(\nu)\cdot f_b(\nu),
$$

eine Gleichung, die abgesehen von der Bezeichnung mit der Abel'schen Identität übereinstimmt. Ich will es unterlassen, weitere Specialisirungen der allgemeinen Formel anzugeben; die meisten der bekannteren Gleichungen, in denen die Function $[x]$ auftritt, sind als besondere Fälle in (II) enthalten.

§ 3.

Um die Dirichlet'sche Transformationsformel aus der Formel (I) abzuleiten, betrachte man eine für die Argumentwerthe zwischen λ und $\mu>\lambda$ beständig abnehmende Function $a(x)$, deren Functionswerthe für die ganzzahligen Argumentwerthe zwischen λ und μ die Zahlen a_x sind. Die Punkte b_y seien die ganzen Zahlen. Auf den Anfangswerth $\alpha = a(\mu)$ des Intervalles folgt dann als erste Zahl a_x der zu $[\mu]$ gehörige Functionswerth $a([\mu])$, dann kommt $a([\mu]-1)$ u. s. w. und zuletzt $a([\lambda]+1)$ vor dem Endpunkt $\beta = a(\lambda)$ des Intervalles, während $a([\lambda]) \geqq a(\lambda)$ nicht mehr dem Intervall $\alpha \dots \beta$ angehört. Setzt man also

$$a_x = a([\lambda] + [\mu] + 1 - x),$$

so erhält man für $x = [\lambda]+1, [\lambda]+2, \cdots [\mu]$ die in Betracht kommenden Punkte a_x, und es ist

$$a_x(b) = [a([\lambda] + [\mu] + 1 - x)].$$

Da $b_y = y$ ist, so bestimmt sich $x = b_y(a)'$ durch die Bedingungen

$$a([\lambda] + [\mu] + 1 - x) < y \leqq a([\lambda] + [\mu] + 1 - x - 1),$$

aus denen

$$[\lambda] + [\mu] + 1 - x > A(y) \geqq [\lambda] + [\mu] + 1 - x - 1,$$

$$x - 1 < [\lambda] + [\mu] - A(y) \leqq x,$$

$$x - 1 = [[\lambda] + [\mu] - A(y)]',$$

$$b_y(a)' = x = [[\lambda] + [\mu] - A(y)]' + 1 = [\lambda] + [\mu] - [A(y)]$$

folgt. Es gilt nämlich, wenn N eine ganze, γ eine beliebige Zahl ist, immer die Gleichung

$$[N - \gamma]' = N - [\gamma] - 1,$$

auch wenn γ ganzzahlig ist, während — beiläufig bemerkt — die Gleichung

$$[N - \gamma] = N - [\gamma] - 1$$

nur dann richtig ist, wenn γ nicht ganzzahlig ist.

Setzt man die für $a_x(b)$ und $b_y(a)'$ gefundenen Werthe in (I) ein und nimmt $f_c = 1$ an, so folgt

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} f_b([a([\lambda] + [\mu] + 1 - x)]) \cdot (f_a(x) - f_a(x-1)) \\ &+ \sum_{y=[a(\mu)]+1}^{[a(\lambda)]} f_a([\lambda] + [\mu] - [A(y)]) \cdot (f_b(y) - f_b(y-1)) \\ &= f_a([\mu]) \cdot f_b([a(\lambda)]) - f_a([\lambda]) \cdot f_b([a(\mu)]).\end{aligned}$$

Die kleinste in dem Intervall $\alpha \dots \beta$ liegende ganze Zahl $b_y = y$ ist nämlich $[a(\mu)] + 1$, da für den Fall eines ganzzahligen $a(\mu) = [a(\mu)]$ diese Zahl mit dem Anfangspunkt α zusammenfällt, der nicht mit zum Intervall gerechnet wird; die Zahl $[a(\lambda)]$ dagegen gehört als letzte Zahl b_y jedenfalls mit zum Intervall. Für den Fall eines ganzzahligen λ, für auch $a(\lambda)$ ganzzahlig ist, steht das nicht im Widerspruch damit, dass $\lambda]$) nicht mit zu den Punkten a_x des Intervalles gerechnet wird, da von zwei zusammenfallenden Punkten a_x und b_y der letztere als vor n ersteren liegend betrachtet wird.

Die allgemeinere Gleichung (1) führt nun zu der Dirichlet'schen rmel dadurch, dass $f_b(x) = x$ gesetzt wird und ferner in der ersten mme statt des Summationsbuchstabens x eingeführt wird $[\lambda]+[\mu]+1-x$, durch sich die Reihenfolge der Summenglieder umkehrt. Dadurch erlt man

$$
\begin{aligned}
) \quad & \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} [a(x)] \cdot (f_a([\lambda]+[\mu]+1-x) - f_a([\lambda]+[\mu]-x)) \\
& + \sum_{y=[a(\mu)]+1}^{[a(\lambda)]} f_a([\lambda]+[\mu]-[A(y)]) = f_a([\mu]) \cdot [a(\lambda)] - f_a([\lambda]) \cdot [a(\mu)].
\end{aligned}
$$

m werde

$$f_a([\lambda]+[\mu]+1-x) - f_a([\lambda]+[\mu]-x) = \varphi(x)$$

setzt. Dann ist

$$f_a(x) = \underset{z_0+1}{\overset{x}{\mathrm{S}}} \varphi([\lambda]+[\mu]+1-z),$$

durch $\underset{z_0+1}{\overset{x}{\mathrm{S}}}$ eine über z von z_0+1 bis x erstreckte Summation anzeigt wird. Bei diesem Summationszeichen soll auch später der Sumtionsbuchstabe immer z sein; z_0 ist eine beliebige ganze Zahl, die iner ist als jede der vorkommenden oberen Grenzen, bei Dirichlet sie gleich Null. Setzt man den Werth von $f_a(x)$ in (2) ein, so folgt

$$
\begin{aligned}
) \quad & \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} [a(x)]\, \varphi(x) + \sum_{y=[a(\mu)]+1}^{[a(\lambda)]} \underset{z_0+1}{\overset{[\lambda]+[\mu]-[A(y)]}{\mathrm{S}}} \varphi([\lambda]+[\mu]+1-z) \\
& = \underset{z_0+1}{\overset{[\mu]}{\mathrm{S}}} \varphi([\lambda]+[\mu]+1-z) \cdot [a(\lambda)] - \underset{z_0+1}{\overset{[\lambda]}{\mathrm{S}}} \varphi([\lambda]+[\mu]+1-z) \cdot [a(\mu)].
\end{aligned}
$$

ist

$$
\begin{aligned}
\underset{-1}{\overset{]}{\mathrm{S}}} \varphi([\lambda]+[\mu]+1-z) &= \varphi([\lambda]+[\mu]-z_0) + \varphi([\lambda]+[\mu]-z_0-1) + \\
& \qquad \cdots + \varphi([\lambda]+1) \\
&= \underset{z_1+1}{\overset{[\lambda]+[\mu]-z_0}{\mathrm{S}}} \varphi(z) - \underset{z_1+1}{\overset{[\lambda]}{\mathrm{S}}} \varphi(z),
\end{aligned}
$$

o z_1 wieder eine beliebige, aber genügend kleine ganze Zahl ist. Ebenso ndet man

$$\mathop{\mathrm{S}}_{z_0+1}^{[\lambda]} \varphi([\lambda]+[\mu]+1-z) = \mathop{\mathrm{S}}_{z_1+1}^{[\lambda]+[\mu]-z_0} \varphi(z) - \mathop{\mathrm{S}}_{z_1+1}^{[\mu]} \varphi(z)$$

und

$$\mathop{\mathrm{S}}_{z_0+1}^{[\lambda]+[\mu]-[A(y)]} \varphi([\lambda]+[\mu]+1-z) = \mathop{\mathrm{S}}_{z_1+1}^{[\lambda]+[\mu]-z_0} \varphi(z) - \mathop{\mathrm{S}}_{z_1+1}^{[A(y)]} \varphi(z).$$

Setzt man diese drei Ausdrücke in (3) ein, so erhält man nach leichten Vereinfachungen

$$\sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} [a(x)]\,\varphi(x) = [a(\mu)]\cdot \mathop{\mathrm{S}}_{z_1+1}^{[\mu]} \varphi(z) - [a(\lambda)]\cdot \mathop{\mathrm{S}}_{z_1+1}^{[\lambda]} \varphi(z) + \sum_{y=[a(\mu)]+1}^{[a(\lambda)]} \mathop{\mathrm{S}}_{z_1+1}^{[A(y)]} \varphi(z).$$

Das ist mit etwas anderer Bezeichnung die Dirichlet'sche Transformationsformel*).

§ 4.

Wenn $g(x)$ eine für die Argumentwerthe von λ bis μ stetig wachsende eindeutige Function ist, so hat man nach (II)

$$(1)\qquad \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} f([g(x)]) + \sum_{y=[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]} [G(y)]'\cdot f^{(1)}(y) = [\mu]\cdot f([g(\mu)]) - [\lambda]\cdot f([g(\lambda)]),$$

indem man $f_a(x)=x$, $f_b(x)=f(x)$, $f_c(x)=1$, $a(x)=g(x)$, $b(x)=x$, $A(\alpha)=G(\alpha)=\lambda$, $A(\beta)=G(\beta)=\mu$, also $B(\alpha)=\alpha=g(\lambda)$, $B(\beta)=\beta=g(\mu)$ setzt; $f^{(1)}(y)$ bezeichnet die erste Differenz $f(y)-f(y-1)$ der Function $f(y)$. Es ist allerdings üblich, unter der ersten Differenz $\Delta f(y)$ für ein beliebiges Increment h den Ausdruck $\Delta f(y)=f(y+h)-f(y)$ zu verstehen, so dass für $h=-1$

$$f^{(1)}(y) = -\Delta f(y)$$

ist, diese unwesentliche Abweichung der hier benutzten Definition der Differenz von der gewöhnlichen scheint aber für die Formeln, die ich aufstelle, zweckmässig zu sein. Die erste Differenz von $f^{(1)}(y)$, nämlich $f^{(1)}(y)-f^{(1)}(y-1)$ wird mit $f^{(2)}(y)$ bezeichnet u. s. w.

Nach (II) ist ferner

$$(2)\qquad \sum_{x=[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]} f^{(1)}(x)\cdot[G(x)]' + \sum_{y=[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]} \mathop{\mathrm{S}^{(1)}}_{z_0+1}^{y-1} [G(z)]'\cdot f^{(2)}(y)$$
$$= \mathop{\mathrm{S}^{(1)}}_{z_0+1}^{[g(\mu)]} [G(z)]'\cdot f^{(1)}([g(\mu)] - \mathop{\mathrm{S}^{(1)}}_{z_0+1}^{[g(\lambda)]} [G(z)]'\cdot f^{(1)}([g(\lambda)]),$$

*) Vergl. Bachmann: Analytische Zahlentheorie, Leipzig 1894. S. 405.

m $f_b(x) = f^{(1)}(x)$, $a(x) = x$, $b(x) = x$, also $[Ab(y)]' = y - 1$ ge-
; wird. Damit $[G(x)]'$ die erste Differenz $f_a(x) - f_a(x-1)$ einer
ction $f_a(x)$ sei, ist

$$f_a(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{z_0+1}^{x}{}^{(1)}[G(z)]'$$

etzen, wo der an das Summenzeichen gesetzte Index, der hier noch e Bedeutung hat, mit Rücksicht auf das Folgende hinzugefügt worden Für z_0 ist eine ganze Zahl zu nehmen, die nicht grösser ist als)], die aber natürlich so gewählt werden muss, dass $G(z)$ für jedes $z_0 + 1$ beginnende in Betracht kommende Intervall eindeutig und definirt bleibt. Setzt man fest, dass das Zeichen

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\gamma}^{\delta}{}^{(r)}[G(z)]'$$

beliebigem Index r die Null bedeute, wenn die obere Grenze kleiner lie untere ist, so gilt die Gleichung (2) auch noch für $z_0 = [g(\lambda)]$, lann $f_a(x)$ für jeden in Betracht kommenden Werth von x so definirt dass die erste Differenz gleich $[G(z)]'$ ist.

Jetzt betrachte man wieder die zweite Summe in (2) als die erste ıme einer nach (II) zu bildenden Gleichung, wodurch man

$$\sum_{x=[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]} f^{(2)}(x) \cdot \mathop{\mathrm{S}}_{z_0+1}^{x-1}{}^{(1)}[G(z)]' + \sum_{y=[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]} \mathop{\mathrm{S}}_{z_0+1}^{y-2}{}^{(2)}[G(z)]' \cdot f^{(3)}(y)$$
$$= \mathop{\mathrm{S}}_{z_0+1}^{[g(\mu)]-1}{}^{(2)}[G(z)]' \cdot f^{(2)}([g(\mu)]) - \mathop{\mathrm{S}}_{z_0+1}^{[g(\lambda)]-1}{}^{(2)}[G(z)]' \cdot f^{(2)}([g(\lambda)])$$

lt, indem man bedenkt, dass, wenn

$$\mathop{\mathrm{S}}_{z_0+1}^{x-1}{}^{(1)}[G(z)]'$$

erste Differenz einer Function $f_a(x)$ sein soll,

$$= \mathop{\mathrm{S}}_{t=z_0+1}^{t=x-1} \mathop{\mathrm{S}}_{z_0+1}^{t} [G(z)]' = [G(z_0+1)]' + [G(z_0+1)]' + [G(z_0+2)]'$$
$$+ [G(z_0+1)]' + [G(z_0+2)]' + [G(z_0+3)]' + \cdots$$
$$+ [G(z_0+1)]' + [G(z_0+2)]' + \cdots + [G(x-1)]'$$

zt werden darf. Diese Doppelsumme bezeichne ich kurz mit

$$f_a(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{z_0+1}^{x-1}{}^{(2)}[G(z)]'.$$

Wegen des Striches an $[Ab(y)]'$ in (II) ist jetzt, weil $Ab(y)$ hier wieder gleich y ist,

$$f_a([Ab(y)]') = f_a(y-1) = \mathop{\mathrm{S}^{(2)}}_{z_0+1}^{y-2}[G(z)]'.$$

Setzt man diese Betrachtungsweise fort, so erhält man ferner

$$(4)\qquad \sum_{x=[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]} f^{(3)}(x)\cdot \mathop{\mathrm{S}^{(2)}}_{z_0+1}^{x-2}[G(z)]' + \sum_{y=[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]} \mathop{\mathrm{S}^{(3)}}_{z_0+1}^{y-3}[G(z)]'\cdot f^{(4)}(y)$$
$$= \mathop{\mathrm{S}^{(3)}}_{z_0+1}^{[g(\mu)]-2}[G(z)]'\cdot f^{(3)}([g(\mu)]) - \mathop{\mathrm{S}^{(3)}}_{z_0+1}^{[g(\lambda)]-2}[G(z)]'\cdot f^{(3)}([g(\lambda)]) \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Reihe von Gleichungen bricht entweder dadurch ab, dass die Differenzen der Function $f(x)$ von einer bestimmten an alle verschwinden, was bekanntlich dann eintritt, wenn $f(x)$ eine ganze algebraische Function ist, oder dadurch, dass in einer Gleichung die Summen $\mathrm{S}^{(r)}$ deshalb alle verschwinden, weil die obere Grenze die untere übertrifft. Die Gleichung, die derjenigen, bei der dies zuerst eintritt, vorangeht, ist noch richtig, denn ihre linke Seite besteht aus dem einzigen Gliede

$$f^{(r+1)}([g(\mu)])\cdot \mathop{\mathrm{S}^{(r)}}_{z_0+1}^{z_0+1}[G(z)]' = f^{(r+1)}([g(\mu)])\cdot[G(z_0+1)]'$$

und ebenso gross ist der auf der rechten Seite, weil $[g(\lambda)]<[g(\mu)]$ vorausgesetzt werden darf, allein übrig gebliebene Minuend

$$\mathop{\mathrm{S}^{(r+1)}}_{z_0+1}^{z_0+1}[G(z)]'\cdot f^{(r+1)}([g(\mu)]),$$

da auch

$$\mathop{\mathrm{S}^{(r+1)}}_{z_0+1}^{z_0+1}[G(z)]' = [G(z_0+1)]'$$

ist.

Addirt man die Gleichungen (1), (2), . . ., nachdem man die mit geraden Nummern bezeichneten mit -1 multiplicirt hat, so ergiebt sich

$$(\mathrm{III})\qquad \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} f([g(x)]) = [\mu]\cdot f([g(\mu)]) - \mathop{\mathrm{S}^{(1)}}_{z_0+1}^{[g(\mu)]}[G(z)]'\cdot f^{(1)}([g(\mu)])$$
$$+ \mathop{\mathrm{S}^{(2)}}_{z_0+1}^{[g(\mu)]-1}[G(z)]'\cdot f^{(2)}([g(\mu)]) - \cdots - [\lambda]\cdot f([g(\lambda)])$$
$$+ \mathop{\mathrm{S}^{(1)}}_{z_0+1}^{[g(\lambda)]}[G(z)]'\cdot f^{(1)}([g(\lambda)]) - \mathop{\mathrm{S}^{(2)}}_{z_0+1}^{[g(\lambda)]-1}[G(z)]'\cdot f^{(2)}([g(\lambda)]) \cdots\cdot$$

ie beiden rechts stehenden Summen sind soweit fortzusetzen, bis alle lgenden Glieder aus dem einen oder dem anderen der beiden angegebenen ründe verschwinden.

Die Formel vereinfacht sich, wenn man $z_0 = [g(\lambda)]$ setzt. Sie geht durch über in

$$\text{IIa)}\quad \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} f([g(x)]) = [\mu]\cdot f([g(\mu)]) - [\lambda]\cdot f([g(\lambda)]) - \mathop{\mathrm{S}^{(1)}}_{[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]} [G(z)]'\cdot f^{(1)}([g(\mu)])$$
$$+ \mathop{\mathrm{S}^{(2)}}_{[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]-1} [G(z)]'\cdot f^{(2)}([g(\mu)]) \cdots .$$

Das Charakteristische der Formeln (III) und (IIIa) besteht darin, ss rechts nur die extremen Werthe $[g(\lambda)]$ und $[g(\mu)]$ der Function $(x)]$ als Argumente der Function $f(x)$ und ihrer Differenzen auftreten, dass die Abhängigkeit der zu berechnenden Summe von $g(x)$ im esentlichen auf die Coefficienten, mit denen die Differenzen multiplicirt nd, übertragen worden ist. Auch wenn die Reihe der Differenzen nicht bricht, kann auf diese Weise, weil die Argumente der von $f(x)$ abhängigen ctoren rechts ein einfacheres Gesetz befolgen als das durch die Function $g(x)$ angegebene, unter Umständen eine vortheilhafte Umformung der rgelegten Summe vorgenommen werden. Man setze z. B. $f(x) = \cos\frac{2\pi x}{n}$, $x) = x^2$, $\lambda = 0$, $\mu = n$, wodurch man eine bemerkenswerthe Umformung der Gauss'schen Summe erhält. Für die numerische Berechnung von mmen ist die Entwicklung offenbar hauptsächlich dann von Vortheil, enn mehrere Summen für dieselbe Function $g(x)$ und dieselben Grenzen bilden sind, aber für verschiedene Functionen $f(x)$.

Die Gleichung (IIIa), mit der ich mich im Folgenden allein weiter schäftigen werde, würde natürlich nur von geringem Interesse sein, enn die Coefficienten $\mathrm{S}^{(\nu)}$ wirklich ihrer Definition nach als mehrfache ummen berechnet werden müssten. Es werden jedoch in den folgenden aragraphen verschiedene Methoden angegeben werden, die Coefficienten uf anderem Wege zu bestimmen.

§ 5.

Setzt man in (IIIa) $g(x) = x$, $\lambda = 0$, μ gleich einer ganzen positiven ahl n, so geht die Gleichung über in

$$\sum_{x=1}^{n} f(x) = n\cdot f(n) - \binom{n}{2}\cdot f^{(1)}(n) + \binom{n}{3}\cdot f^{(2)}(n) \cdots ,$$

da nach einer bekannten Eigenschaft der Binomialcoefficienten

$$\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{n}{}^{(1)}(z-1)=\frac{n\cdot(n-1)}{2}=\binom{n}{2},$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{n-1}{}^{(2)}(z-1)=\mathop{\mathrm{S}}_{s=1}^{n-1}\mathop{\mathrm{S}}_{t=1}^{s}(t-1)=\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{n-1}\binom{z}{2}=\binom{n}{3},$$

und allgemein

$$\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{n-r+1}{}^{(r)}(z-1)=\binom{n}{r+1}$$

ist.

Für $f(x)=\frac{1}{x}$ ist, wie man leicht findet,

$$f^{(r)}(x)=\frac{(-1)^r}{r+1}\cdot\binom{x}{r+1}^{-1},$$

nach (IIIa) ist mithin

$$\sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]}\frac{1}{[g(x)]}=[\mu]\cdot\frac{1}{[g(\mu)]}-[\lambda]\cdot\frac{1}{[g(\lambda)]}$$
$$+\sum_{r=1}^{[g(\mu)]+[g(\lambda)]}\mathop{\mathrm{S}}_{[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]-r+1}{}^{(r)}[G(z)]'\cdot\frac{1}{r+1}\cdot\binom{[g(\mu)]}{r+1}^{-1},$$

und für $\lambda=1$, $\mu=n$, $g(x)=x$ ergiebt sich

$$\sum_{2}^{n}\frac{1}{x}=1-1+\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r+1}\cdot\frac{1}{r+1}\cdot\binom{n}{r+1}^{-1}=\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r+1},$$

was als eine Verification der Formel (IIIa) angesehen werden möge. Für $f(x)=x$, $g(x)=px:q$, $\lambda=0$, $\mu=\frac{1}{2}q$ geht (IIIa) in die öfters erwähnte Gauss'sche Gleichung über.

Da die Binomialcoefficienten sich als besonderen Fall der Coefficienten $\mathrm{S}^{(r)}$ erwiesen haben, so ist es angezeigt, zu untersuchen, ob die allgemeinen Coefficienten ähnliche Eigenschaften wie die Binomialcoefficienten besitzen. Zu diesem Zwecke möge der Kürze wegen

$$\big[G([g(\lambda)]+n)\big]'=B_{0,n},$$

(1) $$\sum_{x=1}^{n}B_{0,x}=B_{1,n},\ \sum_{x=1}^{n}B_{1,x}=B_{2,n},\cdots\sum_{x=1}^{n}B_{m-1,x}=B_{m,n}$$

gesetzt werden, so dass

$$\mathop{\mathrm{S}}_{[g(\lambda)]+1}^{[g(\lambda)]+n}{}^{(m)}[G(z)]'=B_{m,n}$$

sbesondere ein in (IIIa) vorkommender Coefficient

$$\mathop{\mathrm{S}^{(r)}}_{[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]-r+1} [G(z)]' = B_{r,\nu-r+1}$$

dem von nun an die Differenz $[g(\mu)] - [g(\lambda)]$ mit ν bezeichnet

ır Berechnung der zu untersuchenden Coefficienten dient dann das

$$\begin{array}{llllllll}
B_{0,1} & B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} & \cdots B_{\nu-2,1} & B_{\nu-1,1} & \underline{B_{\nu,1}}, \\
B_{0,2} & B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} & \cdots B_{\nu-2,2} & \underline{B_{\nu-1,2}}, & \\
B_{0,3} & B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} & \cdots \underline{B_{\nu-2,3}}, & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & \\
B_{0,\nu-2} & B_{1,\nu-2} & B_{2,\nu-2} & \underline{B_{3,\nu-2}}, & & & \\
B_{0,\nu-1} & B_{1,\nu-1} & \underline{B_{2,\nu-1}}, & & & & \\
B_{0,\nu} & \underline{B_{1,\nu}}. & & & & &
\end{array}$$

terstrichenen B sind die Entwicklungscoefficienten. Es besteht die ing

$$B_{m-1,n} + B_{m,n-1} = B_{m,n},$$

$$B_{m,n-1} = \sum_{x=1}^{n-1} B_{m-1,x},$$

$$B_{m,n} = \sum_{x=1}^{n} B_{m-1,x}$$

für $g(x) = x$, d. h. für $B_{0,n} = n - 1$ erhält man die Binomialenten, und zwar ist

$$B_{m,n} = \binom{m+n-1}{m+1},$$

s in diesem Falle die Gleichung (2) in die Fundamentaleigenschaft nomialcoefficienten

$$\binom{m+n-2}{m} + \binom{m+n-2}{m+1} = \binom{m+n-1}{m+1}$$

ht, die Definitionsgleichung (1) von $B_{m,n}$ dagegen in die bekannte l

$$\sum_{x=1}^{n} \binom{m+x-2}{m} = \binom{m+n-1}{m+1},$$

in beiden Gleichungen ist, um die gewöhnliche Form zu erhalten, für $m+n-1$ ein neuer Buchstabe zu nehmen.

Vermöge der Gleichung (2) kann man bei constant bleibendem $[g(\lambda)]$ die Coefficienten $B_{r,\nu-r+1}$ der Formel (IIIa) berechnen, wenn $[g(\mu)]$ und also auch ν um 1 zunimmt, falls sie für die obere Grenze $[g(\mu)]$ schon bekannt sind; nur

$$B_{0,\nu+1} = \left[G([g(\mu)]+1)\right]'$$

ist besonders zu bestimmen und

$$B_{\nu+1,1} = B_{r,1} = B_{0,1} = \left[G([g(\lambda)]+1)\right]'$$

zu setzen.

Es ist jedoch wünschenswerth, auch directe Methoden zur Bestimmung der Coefficienten $B_{r,\nu-r+1}$ zu besitzen. Dazu führt am einfachsten die Gleichung (IIIa) selbst, indem man sie auf die Function $f(x) = h^x$ anwendet, wo h eine beliebige endliche reelle Zahl ist. Die r^{te} Differenz dieser Function ist

$$f^{(r)}(x) = h^{x-r}(h-1)^r,$$

so dass die Gleichung besteht

$$(3) \qquad \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} h^{[g(x)]} = [\mu]\cdot h^{[g(\mu)]} - [\lambda]\cdot h^{[g(\lambda)]} + \sum_{r=1}^{\nu} (-1)_r \cdot B_{r,\nu-r+1}\cdot h^{[g(\mu)]-r}\cdot(h-1)^r.$$

Bevor aber diese Gleichung zur Bestimmung von $B_{r,\nu-r+1}$ benutzt wird, möge sie dazu dienen, zwei Sätze über diese Coefficienten herzuleiten, die wieder ihre Analogie mit den Binomialcoefficienten zeigen. Setzt man nämlich $h = \frac{1}{2}$, so wird

$$h^{[g(\mu)]-r}\cdot(h-1)^r = (-1)^r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{[g(\mu)]},$$

und wenn man (3) mit $2^{[g(\mu)]}$ multiplicirt, bekommt man

$$(\text{IV}) \qquad [\mu] + \sum_{r=1}^{\nu} B_{r,\nu-r+1} = [\lambda]\cdot 2^{\nu} + \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} 2^{[g(\mu)]-[g(x)]}.$$

Setzt man $g(x) = x$, $\lambda = 0$, $\mu = n$ und addirt auf beiden Seiten 1, so erhält man hieraus, da jetzt

$$B_{r,\nu-r+1} = B_{r,n-r+1} = \binom{n}{r+1}$$

ist,

$$1+n+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r+1}=1+\sum_{x=1}^{n}2^{n-x}.$$

s ist die bekannte Gleichung

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}=2^{n}.$$

Da ferner h in (3) eine willkürliche Zahl ist, so müssen gleich hohe tenzen von h auf beiden Seiten denselben Coefficienten haben. Die chste vorkommende Potenz von h ist die $[g(\mu)]^{\text{te}}$. Sie hat rechts den ctor

$$[\mu]+\sum_{r=1}^{\nu}(-1)^{r}B_{r,\nu-r+1}.$$

f der linken Seite mögen die letzten $r+1$ Glieder diesen höchsten ponenten $[g(\mu)]$ haben, d. h. es möge sein

$$g([\mu]-r)\overline{\gtrless}[g(\mu)]>g([\mu]-r-1).$$

raus folgt

$$\begin{aligned}
[\mu]-r &\;\overline{\gtrless}\; G([g(\mu)])>[\mu]-r-1,\\
r &\;\overline{\lessgtr}\; -G([g(\mu)])+[\mu]<r+1,\\
r &= [[\mu]-G([g(\mu)])]=[\mu]-[G([g(\mu)])]'-1,\\
r+1 &= [\mu]-[G([g(\mu)])]'.
\end{aligned}$$

eser letzte Ausdruck ist der Coefficient von $h^{[g(\mu)]}$ auf der linken Seite, dass also

)

$$[G([g(\mu)])]'+\sum_{r=1}^{\nu}(-1)^{r}B_{r,\nu-r+1}=0$$

· $[G([g(\mu)])]'$ ist die Zahl $B_{0,\nu}$. Auch diese Gleichung hat ihr be- nntes aus

$$(1-1)^{n}=0$$

gendes Analogon in der Theorie der Binomialcoefficienten; es ist zu chten, dass für $g(x)=x$ und $\mu=n$ die eckige Klammer gleich $n-1$ wird.

§ 6.

Der Umstand, dass in der Gleichung (3) des § 5 gleich hohe Potenzen h auf beiden Seiten denselben Coefficienten haben, führt auch zur stimmung der $B_{r,\nu-r+1}$, und zwar kann man dabei auf zwei verschie- en Wegen zum Ziele kommen. Zuerst möge angenommen werden, s $g(x)$ eine langsam wachsende Function sei, so dass links immer eine gewisse Anzahl von Gliedern denselben Exponenten haben. Das Resultat, zu dem man so kommt, gilt aber auch für den Fall, dass $g(x)$ rasch zunimmt, so dass links gar nicht alle ganzen Zahlen zwischen $[g([\lambda]+1)]$ und $[g(\mu)]$ als Exponenten auftreten. Die Annahme wird nur gemacht, um den Wortlaut der Herleitung abzukürzen.

Die niedrigste Potenz, die rechts vorkommt, ist die $[g(\lambda)]^{\text{te}}$; sie hat den Factor $B_{\nu,1} - [\lambda]$. Links mögen die r ersten Glieder den Exponenten $[g(\lambda)]$ haben, d. h. es sei

$$g([\lambda]+r) < [g(\lambda)] + 1 \overline{\overline{<}} g([\lambda]+r+1),$$
$$[\lambda] + r < G([g(\lambda)]+1) \overline{\overline{<}} [\lambda] + r + 1,$$
$$r = [G([g(\lambda)]+1) - [\lambda]]' = [G([g(\lambda)]+1)]' - [\lambda].$$

Daraus folgt

$$B_{\nu,1} = [G([g(\lambda)]+1)]' = B_{0,1},$$

wie das übrigens die Definition von $B_{\nu,1}$ auch unmittelbar ergiebt.

Ganz ebenso findet man, dass die Anzahl der links stehenden Glieder, deren Exponenten kleiner als $[g(\lambda)]+2$ sind, gleich

$$[G([g(\lambda)]+2)]' - [\lambda]$$

ist, es haben also

$$[G([g(\lambda)]+2)]' - [G([g(\lambda)]+1)]' = B_{0,2} - B_{0,1}$$

Glieder den Exponenten $[g(\lambda)]+1$. Rechts wird der Factor von $h^{[g(\lambda)]+1}$ angegeben durch

$$B_{\nu-1,2} - B_{\nu,1} \cdot \binom{\nu}{\nu-1},$$

da nur das letzte Glied des nach Potenzen von h entwickelten vorletzten Summanden der über r erstreckten Summe und das vorletzte Glied des letzten Summanden die angegebene Potenz von h enthalten. Es ist mithin

$$B_{\nu-1,2} - B_{\nu,1}\binom{\nu}{\nu-1} = B_{0,2} - B_{0,1}$$

oder, da $B_{\nu,1} = B_{0,1}$ ist,

$$B_{\nu-1,2} = B_{0,2} + B_{0,1} \cdot \binom{\nu-1}{\nu-2}.$$

Ebenso findet man ferner als Factoren von $h^{[g(\lambda)]+2}$

$$B_{\nu-2,3} - B_{\nu-1,2}\binom{\nu-1}{\nu-2} + B_{\nu,1}\binom{\nu}{\nu-2} = B_{0,3} - B_{0,2},$$

woraus

$$B_{\nu-2,3} = B_{0,3} + B_{0,2}\binom{\nu-2}{\nu-3} + B_{0,1}\binom{\nu-1}{\nu-3}$$

folgt. Nach dieser Induction ist

$$B_{\nu-x,x+1} = B_{0,x+1} + B_{0,x}\binom{\nu-x}{\nu-x-1} + B_{0,x-1}\binom{\nu-x+1}{\nu-x-1}$$
$$+ \cdots + B_{0,1}\binom{\nu-1}{\nu-x-1}$$

h

$$B_{r,\nu-r+1} = B_{0,\nu-r+1} + B_{0,\nu-r}\binom{r}{r-1} + B_{0,\nu-r-1}\binom{r+1}{r-1}$$
$$+ \cdots + B_{0,1}\binom{\nu-1}{r-1}.$$

genommen, diese Gleichung wäre richtig für die Indices $\nu, \nu-1, \ldots r$. dann zu zeigen, dass sie auch für $B_{r-1,\nu-r+2}$ richtig bleibt. Als der $([g(\mu)]-r+1)^{\text{ten}}$ Potenz von h hat man

$$B_{r-1,\nu-r+2} - B_{r,\nu-r+1}\binom{r}{r-1} + B_{r+1,\nu-r}\binom{r+1}{r-1}$$
$$\pm \cdots \pm B_{\nu,1}\cdot\binom{\nu}{r-1} = B_{0,\nu-r+2} - B_{0,\nu-r+1}.$$

folgt, wenn man die schon bekannten Werthe von $B_{r,\nu-r+1}$ etc.

$$B_{r-1,\nu-r+2} = B_{0,\nu-r+2} - B_{0,\nu-r+1}$$
$$_{-r+1} + B_{0,\nu-r}\binom{r}{r-1} + B_{0,\nu-r-1}\binom{r+1}{r-1} + \cdots + B_{0,1}\binom{\nu-1}{r-1}\Big\}\binom{r}{r-1}$$
$$-\Big\{B_{0,\nu-r} + B_{0,\nu-r-1}\binom{r+1}{r} + \cdots + B_{0,1}\binom{\nu-1}{r}\Big\}\binom{r+1}{r-1}$$
$$+\Big\{B_{0,\nu-r-1} + \cdots + B_{0,1}\binom{\nu-1}{r+1}\Big\}\binom{r+2}{r-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm B_{0,1}\cdot\binom{\nu-1}{\nu-1}\binom{\nu}{r-1}.$$

hat also den Coefficienten

$$\binom{r}{r-1} - \binom{r+x}{r}\binom{r+1}{r-1} + \binom{r+x}{r+1}\binom{r+2}{r-1} \pm \cdots \pm \binom{r+x}{r+x}\binom{r+x+1}{r-1}$$

$$\binom{r}{1} - \binom{r+x}{x}\binom{r+1}{2} + \binom{r+x}{x-1}\binom{r+2}{3} \pm \cdots \pm \binom{r+x}{0}\binom{r+x+1}{x+2}$$
$$\frac{(r+x)(r+x-1)\cdots(r+1)\cdot r}{(x+2)!}\Big\{\binom{x+2}{1}r - \binom{x+2}{2}(r+1) + \binom{x+2}{3}(r+2)$$
$$\pm \cdots \pm \binom{x+2}{x+2}(r+x+1)\Big\}.$$

Die in der Klammer stehende Summe lässt sich zerlegen in

$$\left\{\binom{x+2}{1}-\binom{x+2}{2}+\binom{x+2}{3}\pm\cdots\pm\binom{x+2}{x+2}\right\}(r-1)=r-1$$

und

$$\binom{x+2}{1}1-\binom{x+2}{2}2+\binom{x+2}{3}\cdot 3\pm\cdots\pm\binom{x+2}{x+2}\cdot(x+2)=0.\text{*)}$$

Der Coefficient von $B_{0,\nu-r-x}$, $x \gtreqless 0$ ist also gleich

$$\binom{r+x}{x+2}=\binom{r+x}{r-2},$$

und da $B_{0,\nu-r+1}$ den Factor $-1+\binom{r}{r-1}=\binom{r-1}{r-2}$ und $B_{0,\nu-r+2}$ den Factor 1 hat, so ist das durch Induction gefundene Gesetz bewiesen. Es ist

$$B_{r,\nu-r+1}=\sum_{x=-1}^{\nu-r-1}B_{0,\nu-r-x}\binom{r+x}{r-1}$$

oder

$$\text{(VI)}\qquad \underset{[g(\lambda)]+1}{\overset{[g(\mu)]-r+1}{\mathrm{S}^{(r)}}}[G(z)]'=\sum_{y=[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]}[G(y)]'\cdot\binom{[g(\mu)]-y}{r-1}.$$

Dass die letztere Summe, in der die Reihenfolge der Glieder die umgekehrte ist wie in der vorhergehenden, mit dieser übereinstimmt, sieht man sofort ein, wenn man bedenkt, dass

$$\nu=[g(\mu)]-[g(\lambda)]$$

ist, und dass $B_{0,n}=[G([g(\lambda)]+n)]'$ ist; sie hat nur $\nu-r+1$ von Null verschiedene Glieder, weil bei den höheren Gliedern der Binomialcoefficient verschwindet.

§ 7.

Bei der zweiten Methode, aus der Gleichung (3) des § 5 einen Ausdruck für $B_{r,\nu-r+1}$ abzuleiten, ist es zweckmässig, sich so auszudrücken, als ob $g(x)$ eine rasch wachsende Function wäre, so dass

---

*) Die Gleichung

$$\sum_{z=1}^{m}(-1)^z\binom{m}{z}z=0,\quad m>1$$

folgt sofort aus dem Umstande, dass in der m^{ten} Differenz von x^n, $n>m$, nämlich

$$x^n-\binom{m}{1}(x-1)^n+\binom{m}{2}(x-2)^n\pm\cdots\pm(x-m)^n,$$

wenn sie nach fallenden Potenzen von x geordnet wird, die Factoren der m höchsten Potenzen von x, insbesondere der von x^{n-1}, verschwinden.

$$[g(\lambda)] < [g([\lambda]+1)] < [g([\lambda]+2)] < \cdots < [g([\mu])] < [g(\mu)]$$

. Nach dieser Voraussetzung kommt die niedrigste Potenz von h, die n Exponenten $[g(\lambda)]$ hat, links nicht vor, rechts aber mit dem Factor

$$-[\lambda] + B_{\nu,1},$$

r also gleich Null sein muss, so dass

$$B_{\nu,1} = [\lambda]$$

t. Wenn nun auch $[g(\lambda)] + 1 < [g([\lambda]+1)]$ ist, so ist ferner

$$B_{\nu-1,2} - B_{\nu,1}\cdot\binom{\nu}{\nu-1} = 0,$$

so

$$B_{\nu-1,2} = [\lambda]\cdot\binom{\nu}{\nu-1}.$$

t auch noch $[g(\lambda)] + 2 < [g([\lambda]+1)]$, so ist

$$B_{\nu-2,3} - B_{\nu-1,2}\cdot\binom{\nu-1}{\nu-2} + B_{\nu,1}\cdot\binom{\nu}{\nu-2} = 0$$

d

$$B_{\nu-2,3} = [\lambda]\cdot\left(\binom{\nu}{\nu-1}\binom{\nu-1}{\nu-2} - \binom{\nu}{\nu-2}\right) = [\lambda]\cdot\binom{\nu}{\nu-2}.$$

raus schliesst man, dass, wenn $[g(\lambda)] + r < [g([\lambda]+1)]$ ist,

$$B_{\nu-r,r+1} = [\lambda]\cdot\binom{\nu}{\nu-r}$$

in werde, und bestätigt dies folgendermassen durch vollständige Induction. ist, wenn $[g(\lambda)] + r + 1 < [g([\lambda]+1)]$ ist,

$$)\qquad B_{\nu-r-1,r+2} - B_{\nu-r,r+1}\binom{\nu-r}{\nu-r-1} + B_{\nu-r+1,r}\binom{\nu-r+1}{\nu-r-1}$$
$$\pm\cdots\pm B_{\nu,1}\cdot\binom{\nu}{\nu-r-1} = 0,$$

so wenn man die Werthe für die als bekannt vorausgesetzten

$$B_{\nu,1},\ \ldots\ B_{\nu-r,r+1}$$

setzt,

$$B_{\nu-r-1,r+2} = [\lambda]\cdot\left\{\binom{\nu}{\nu-r}\binom{\nu-r}{\nu-r-1} - \binom{\nu}{\nu-r+1}\binom{\nu-r+1}{\nu-r-1}\right.$$
$$\left.\pm\cdots\pm\binom{\nu}{\nu}\binom{\nu}{\nu-r-1}\right\}.$$

r zweite Factor rechts lässt sich so schreiben:

$$\binom{\nu}{r}\binom{\nu-r}{1} - \binom{\nu}{r-1}\binom{\nu-r+1}{2} \pm\cdots\pm\binom{\nu}{0}\binom{\nu}{r+1}.$$

n ist

$$\binom{\nu}{r-x}\cdot\binom{\nu-r+x}{x+1}=\frac{\nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-r+x+1)}{(r-x)!}\cdot\frac{(\nu-r+x)\cdots(\nu-r)}{(x+1)!}$$

$$=\frac{\nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-r)}{(r+1)!}\cdot\frac{(r+1)!}{(r-x)!\,(x+1)!}$$

$$=\binom{\nu}{r+1}\cdot\binom{r+1}{x+1}.$$

Also ist

$$B_{\nu-r-1,\,r+2}=[\lambda]\cdot\binom{\nu}{r+1}\cdot\left\{\binom{r+1}{1}-\binom{r+1}{2}\pm\cdots\pm\binom{r+1}{r+1}\right\}$$

$$=[\lambda]\cdot\binom{\nu}{r+1}=[\lambda]\cdot\binom{\nu}{\nu-r-1}.$$

Das für $B_{\nu-r,r+1}$ gefundene Gesetz ist damit bestätigt, vorausgesetzt dass $[g(\lambda)]+r<[g([\lambda]+1)]$ ist.

Wenn nun

$$[g(\lambda)]+p=[g([\lambda]+1)]$$

ist, während noch

$$[g(\lambda)]+p-1<[g([\lambda]+1)]$$

ist, so ist zwar noch wie vorher

$$B_{\nu-p+1,\,p}=[\lambda]\cdot\binom{\nu}{\nu-p+1},$$

aber weil die der Gleichung (1) entsprechende Gleichung bei der Bestimmung des folgenden Coefficienten nicht 0, sondern 1 als rechte Seite hat, so findet man

$$B_{\nu-p,\,p+1}=[\lambda]\cdot\binom{\nu}{\nu-p}+1=[\lambda]\cdot\binom{\nu}{\nu-p}+\binom{\nu-p}{\nu-p}.$$

Die Zahl p bestimmt sich durch die Gleichung

$$p=[g([\lambda]+1)]-[g(\lambda)].$$

Falls nun auch $[g(\lambda)]+p+1<[g([\lambda]+2)]$ ist, so hat jetzt die zur Berechnung von $B_{\nu-p-1,p+2}$ aufzustellende Gleichung als rechte Seite wieder Null und man findet ebenso wie vorher

$$B_{\nu-p-1,\,p+2}=[\lambda]\cdot\binom{\nu}{\nu-p-1}+\binom{\nu-p}{\nu-p-1}$$

und ferner, wenn für $q'>p$ auch $[g(\lambda)]+q'<[g([\lambda]+2)]$ ist,

$$B_{\nu-q',\,q'+1}=[\lambda]\cdot\binom{\nu}{\nu-q'}+\binom{\nu-p}{\nu-q'}.$$

st endlich

$$[g(\lambda) + q = [g([\lambda] + 2)],$$

) ist wieder

$$B_{\nu-q,q+1} = [\lambda] \cdot \binom{\nu}{\nu - q} + \binom{\nu - p}{\nu - q} + \binom{\nu - q}{\nu - q},$$

obei

$$q = [g([\lambda] + 2)] - [g(\lambda)]$$

t, und wenn für $t > q$ noch $[g(\lambda)] + t < [g([\lambda] + 3]$ ist, hat man

$$B_{\nu-t,t+1} = [\lambda] \cdot \binom{\nu}{\nu - t} + \binom{\nu - p}{\nu - t} + \binom{\nu - q}{\nu - t}.$$

iese Gleichung kann man, da

$$\nu - p = [g(\mu)] - [g([\lambda] + 1)], \quad \nu - q = [g(\mu)] - [g([\lambda] + 2)]$$

, wenn noch $\nu - t = r$ gesetzt wird, auch in folgender Weise schreiben:

$$B_{r,\nu-r+1} = [\lambda] \cdot \binom{[g(\mu)] - [g(\lambda)]}{r} + \binom{[g(\mu)] - [g([\lambda] + 1)]}{r}$$

$$+ \binom{[g(\mu)] - [g([\lambda] + 2)]}{r}$$

er

$$\text{II)}\quad B_{r,\nu-r+1} = [\lambda] \cdot \binom{[g(\mu)] - [g(\lambda)]}{r} + \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} \binom{[g(\mu)] - [g(x)]}{r},$$

nn weil nach Voraussetzung

$$[g(\lambda)] + t < [g([\lambda] + 3)]$$

er

$$t < [g([\lambda] + 3)] - [g(\lambda)],$$

;

$$r = \nu - t > [g(\mu)] - [g([\lambda] + 3)]$$

d die Glieder der Summe in (VII) verschwinden bei der besonderen nahme über t oder r, die bis jetzt fest gehalten wurde, alle vom dritten - Die Gleichung (VII) gilt aber offenbar auch für einen beliebigen erth von r, da man die angegebene Schlussweise in derselben Art weiter rtsetzen kann. Für $r = 1$ gilt die Schlussweise deshalb, weil man bei r Bestimmung von $B_{1,\nu}$ die Coefficienten der $([g(\mu)] - 1)^{\text{ten}}$ Potenz von vergleicht, so dass das rechts stehende Glied $[\mu] \cdot h^{[g(\mu)]}$ keine Abänderung s Verfahrens bedingt. Für $r > \nu$ liefert (VII) ebenso wie (VI) und wie e ursprüngliche Definition der Cofficienten $B_{r,\nu-r+1}$ den Werth Null.

Aus (VI) und (VII) folgt die Gleichung

$$\text{(VIII)}\qquad [\lambda]\cdot\binom{[g(\mu)]-[g(\lambda)]}{r}+\sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]}\binom{[g(\mu)]-[g(x)]}{r}$$
$$=\sum_{y=[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]}[G(y)]'\cdot\binom{[g(\mu)]-y}{r-1}.$$

Von ihr ist die Gauss'sche Gleichung wieder ein Specialfall, der sich ergiebt, wenn man $g(x)=px:q$, $\lambda=0$, $\mu=\frac{1}{2}q$, $r=1$ setzt.

Um die Formeln (VI), (VII), (VIII) noch an einem anderen Beispiel zu prüfen, möge $g(x)=\sqrt[3]{x}$, also $G(x)=x^3$, $\lambda=-7,19$, $[\lambda]=-8$, $\mu=26,73$, $[\mu]=26$ gesetzt werden, woraus $g(\lambda)=-1,93$, $[g(\lambda)]=-2$, $g(\mu)=2,99$, $[g(\mu)]=2$ folgt. Zur directen Berechnung der $B_{r,\nu-r+1}$ dient folgende Tabelle, in der die erste Verticalreihe die Werthe von $[G(y)]'$ für $y=[g(\lambda)]+1$ bis $[g(\mu)]$, also für $y=-1$ bis $y=2$ enthält:

−2	−2	−2	−2	−2
−1	−3	−5	−7	
0	−3	−8		
7	4			

Dabei ist natürlich zu beachten, dass z. B. $[(-1)^3]'=-2$, $[2^3]'=7$ ist. Für $r=2$ erhält man nach (VI)

$$B_{2,3}=-2\cdot\binom{2+1}{1}-1\cdot\binom{2-0}{1}+0\cdot\binom{2-1}{1}=-6-2=-8$$

und nach (VII)

$$B_{2,3}=-8\cdot\binom{2+2}{2}+\sum_{-7}^{26}\binom{2-[\sqrt[3]{x}]}{2}$$

$$=-8\cdot\binom{2+2}{2}+6\cdot\binom{2+2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}=-48+36+3+1=-8,$$

wie vorher, und wie es die Tabelle bestätigt.

§ 8.

Es möge nun noch eine Berechnungsart der Zahlen

$$B_{r,\nu-r+1}=\mathfrak{S}^{(r)}{}_{[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]-r+1}[G(z)]'$$

angegeben werden, die zwar für die wirkliche Ausrechnung nicht practisch

die aber die Analogie dieser Zahlen mit den Binomialcoefficienten
der deutlich hervortreten lässt. Dazu setze man in (IIIa) $f(x) = x^m$.
Differenzen dieser Function sind: $f^{(1)}(x) = 1$ für $m = 1$;
$(x) = 2x - 1$, $f^{(2)}(x) = 2$ für $m = 2$; $f^{(1)}(x) = 3x^2 - 3x + 1$,
$(x) = 6x - 6$, $f^{(3)}(x) = 6$ für $m = 3$ u. s. w. Setzt man dann

$$\sum_{[\lambda]+1}^{[\mu]} [g(x)]^k = s_k,$$

ist nach (IIIa)

$$s_1 = [\mu] \cdot [g(\mu)] - [\lambda] \cdot [g(\lambda)] - B_{1,\nu},$$

so

$$B_{1,\nu} = [\mu] \cdot [g(\mu)] - [\lambda] \cdot [g(\lambda)] - s_1.$$

rner ist

$$s_2 = [\mu] \cdot [g(\mu)]^2 - [\lambda] \cdot [g(\lambda)]^2 - B_{1,\nu}(2[g(\mu)] - 1) + 2 \cdot B_{2,\nu-1},$$

so

$$B_{2,\nu-1} = \frac{1}{2} \cdot ([\mu] \cdot [g(\mu)]^2 - 2[\lambda] \cdot [g(\mu)][g(\lambda)] + [\lambda] \cdot [g(\lambda)]^2 - 2s_1[g(\mu)]$$
$$+ s_2 - [\mu][g(\mu)] + [\lambda][g(\lambda)] + s_1)$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{symb} ([g(\mu)] - s_1)([g(\mu)] - s_1 - 1) = \operatorname{symb} \binom{[g(\mu)] - s_1}{2}.$$

e Symbolik besteht darin, dass nach dem Ausmultipliciren s_1^k durch s_k
ersetzen und an Stelle einer von s_1 freien k^{ten} Potenz von $[g(\mu)]$ zu
zen ist

$$\{[g(\mu)] - [g(\lambda)]\}^k,$$

das erste Glied dieser Potenz nach ihrer Entwicklung mit $[\mu]$, alle
rigen mit $[\lambda]$ zu multipliciren sind. Diese letztere Vorschrift kann man
ch so ausdrücken, dass die nicht mit einer Potenz von s_1 multiplicirte
tenz $[g(\mu)]^k$ zu ersetzen ist durch

$$[\lambda] \cdot ([g(\mu)] - [g(\lambda)])^k + ([\mu] - [\lambda])[g(\mu)]^k.$$

Man bestätigt noch leicht durch eine allerdings schon nicht mehr
nz kurze Rechnung, dass

$$B_{3,\nu-2} = \operatorname{symb} \binom{[g(\mu)] - s_1}{3}$$

t, und da auch $B_{1,\nu}$ in der Form

$$B_{1,\nu} = \operatorname{symb} \binom{[g(\mu)] - s_1}{1}$$

geschrieben werden kann, so schliesst man hieraus, dass allgemein

$$\text{(IX)} \qquad B_{r,\nu-r+1} = \text{symb}\binom{[g(\mu)] - s_1}{r}$$

sein werde. Es scheint jedoch nicht ganz leicht zu sein, auf directem Wege durch vollständige Induction die Richtigkeit dieser Formel zu bestätigen, da man hierzu das Gesetz kennen muss, das die Coefficienten von x in der k^{ten} Differenz von x^m befolgen. Es ist nun zwar möglich, ein solches Gesetz anzugeben, dieses ist aber, wenigstens in der mir bekannten Form, so complicirt, dass der directe Weg nur schwer gangbar erscheint. Man kann aber auf einem Umwege zum Ziele kommen. Ich habe nämlich im III. Bande der Mittheilungen der math. Gesellsch. in Hamburg (Heft 9, S. 379) nachgewiesen, dass für $\lambda = 0$, $\mu = n$, $g(x) = x$, d. h. wenn

$$B_{r,\nu-r+1} = \binom{n}{r+1}$$

ist, die Gleichung (IX) wirklich besteht. Es ist

$$\binom{n}{r+1} = \text{symb}\binom{n - s_1}{r},$$

wo $s_1{}^k$ durch

$$s_k = \sum_{x=1}^{n} x^k$$

zu ersetzen und jedes von s_1 freie Glied mit n zu multipliciren ist. Da nun aber die Zahlenfactoren, mit denen man die Glieder des entwickelten Ausdruckes für $B_{r,\nu-r+1}$ im allgemeinen Falle zu multipliciren hat, genau dieselben sind, wie in dem besonderen Falle $g(x) = x$, weil sie nur von den in den Differenzen von x^n vorkommenden Coefficienten, aber nicht von $g(x)$ abhängen, so gilt die Formel (IX) jedenfalls, wenn $[\lambda] = 0$ ist. Es ist

$$B_{r,\nu-r+1} = \mathop{\mathsf{S}^{(r)}}_{[g(\lambda)]+1}^{[g(\mu)]-r+1} [G(z)]' = \text{symb}\binom{[g(\mu)] - s_1}{r}, \quad \text{wenn} \quad 0 \overline{\gtrless} \lambda < 1;$$

dabei ist $s_1{}^k$ zu ersetzen durch

$$s_k = \sum_{x=1}^{[\mu]} [g(x)]^k$$

und jedes von s_1 freie Glied, das immer eine Potenz von $[g(\mu)]$ enthalten wird, ist mit $[\mu]$ zu multipliciren.

Dass die Formel (IX) allgemein gilt, auch wenn $[\lambda]$ von Null verschieden ist, will ich der Uebersichtlichkeit wegen nur durch den Schluss on 4 auf 5 erläutern; man sieht aber ohne Weiteres ein, dass in genau derselben Weise der Schluss von n auf $n+1$ zu machen ist. Durch eine geschweifte Klammer möge, wie oben, eine Potenz angedeutet werden, deren Glieder nach der Entwicklung in gewisser Weise zu modificiren sind, z. B.

$$\{[g(\mu)]-s_1\}^2 \quad = \{[g(\mu)]-[g(\lambda)]\}^2 - 2[g(\mu)]\cdot s_1 + s_2,$$
$$\{[g(\mu)]-[g(\lambda)]\}^2 = [\mu]\cdot[g(\mu)]^2 - 2[\lambda]\cdot[g(\mu)]\cdot[g(\lambda)] + [\lambda]\cdot[g(\lambda)]^2.$$

Die Klammer hat also, wenn s_1 darin vorkommt, eine andere Bedeutung als wenn $[g(\lambda)]$ darin auftritt, was aber nicht zu Irrthümern führen kann.

Es möge nun also schon bewiesen sein, dass

$$\begin{aligned}
24B_{4,\nu-3} &= \{[g(\mu)]-s_1\}^4 - 6\{[g(\mu)]-s_1\}^3 + 11\{[g(\mu)]-s_1\}^2 - 6\{[g(\mu)]-s_1\},\\
6B_{3,\nu-2} &= \{[g(\mu)]-s_1\}^3 - 3\{[g(\mu)]-s_1\}^2 + 2\{[g(\mu)]-s_1\},\\
2B_{2,\nu-1} &= \{[g(\mu)]-s_1\}^2 - \{[g(\mu)]-s_1\},\\
B_{1,\nu} &= \{[g(\mu)]-s_1\}
\end{aligned}$$

ist. Zur Berechnung von $B_{5,\nu-4}$ dient dann nach (IIIa) die Gleichung

$$(2)\quad \begin{aligned} 120\cdot B_{5,\nu-4} = &-s_5 + [\mu]\cdot[g(\mu)]^5 - [\lambda]\,[g(\lambda)]^5 - B_{1,\nu}\cdot f^{(1)}([g(\mu)])\\ &+ B_{2,\nu-1}\cdot f^{(2)}([g(\mu)]) - B_{3,\nu-2}\cdot f^{(3)}([g(\mu)]) + B_{4,\nu-3} f^{(4)}([g(\mu)]).\end{aligned}$$

Wenn nun $[\lambda]$ gleich Null ist, so gelten die Gleichungen (1) ebenfalls, nur dass jetzt statt $[g(\mu)]^k$, wenn diese Potenz nicht mit s_1 multiplicirt ist, nicht die symbolische Potenz $\{[g(\mu)]-[g(\lambda)]\}^k$ zu setzen ist, sondern einfach $[\mu]\cdot[g(\mu)]^k$. In diesem Falle ist nun bekannt, dass die Coefficienten in den Differenzen $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ u. s. w. so beschaffen sind, dass z. B. das erste Glied von $120B_{5,\nu-4}$ nach Einsetzung der Werthe von $B_{1,\nu}$ u. s. w., wenn man wieder nach fallenden symbolischen Potenzen ordnet, die Form

$$\{[g(\mu)]-s_1\}^5$$

annehmen wird. Setzt man jetzt $[\lambda] \gtrless 0$ voraus und denkt sich in (1) alle von s_1 freien Glieder abgetrennt von den übrigen, so bilden diese für sich ein Schema, das genau so aussieht wie das von den rechten Seiten von (1) gebildete, nur dass an die Stelle von s_1 überall $[g(\lambda)]$ tritt. Dieselbe Beschaffenheit der Coefficienten, die aus dem ursprünglichen Schema unter Hinzunahme von $-s_5+[\mu]\,[g(\mu)]^5$ den Ausdruck

$$\{[g(\mu)]-s_1\}^5$$

bilden liess, muss aber auch bewirken, dass unter Hinzunahme von

$$-[\lambda]\,[g(\lambda)]^5 + [\mu]\cdot[g(\mu)]^5$$

aus dem abgetrennten Schema als erstes Glied von $120 B_{5,\nu-4}$ die symbolische Potenz

$$\{[g(\mu)] - [g(\lambda)]\}^5$$

zum Vorschein kommt. Und ebenso wie bei $[\lambda] = 0$ als zweites Glied von $120 B_{5,\nu-4}$ sich

$$-10\{[g(\mu)] - s_1\}^4$$

ergiebt, so muss aus den von s_1 freien Gliedern für den Fall, dass $[\lambda] \gtrless 0$ ist, das Glied

$$-10\{[g(\mu)] - [g(\lambda)]\}^4$$

gefunden werden, u. s. w. Die Glieder, die s_1 enthalten und die also einfach mit nicht symbolischen Potenzen von $[g(\mu)]$ multiplicirt sind, verhalten sich im Falle $[\lambda] \gtrless 0$ genau so wie im Falle $[\lambda] = 0$. Sie liefern also mit den schon gefundenen von s_1 freien Gliedern die rechte Seite von (2) so, wie die Gleichung (IX) es verlangt.

Ein besonderer Fall der Gleichung (IX) ist wieder die Gauss'sche Gleichung. Auf das Zahlenbeispiel des § 7 angewandt liefert die Formel z. B.

$$B_{4,1} = \text{symb}\binom{[g(\mu)] - s_1}{4}$$

also

$$\begin{aligned}
24 B_{4,1} = \quad & [\lambda]\cdot([g(\mu)] - [g(\lambda)])^4 + ([\mu] - [\lambda])[g(\mu)]^4 - 4s_1[g(\mu)]^3 \\
& \qquad + 6s_2[g(\mu)]^2 - 4s_3[g(\mu)] + s_4 \\
& - 6[\lambda]\cdot([g(\mu)] - [g(\lambda)])^3 - 6([\mu] - [\lambda])[g(\mu)]^3 + 18s_1[g(\mu)]^2 \\
& \qquad - 18s_2[g(\mu)] + 6s_3 \\
& + 11[\lambda]\cdot([g(\mu)] - [g(\lambda)])^2 + 11([\mu] - [\lambda])[g(\mu)]^2 - 22s_1[g(\mu)] + 11s_2 \\
& - 6[\lambda]\cdot([g(\mu)] - [g(\lambda)]) - 6([\mu] - [\lambda])[g(\mu)] + 6s_1.
\end{aligned}$$

Setzt man in diesen Ausdruck, der keinerlei Symbolik mehr enthält, die angegebenen Zahlenwerthe ein, so erhält man, da

$$s_1 = \sum_{-7}^{26} [\sqrt[3]{x}] = 32, \quad s_2 = 108, \quad s_3 = 110, \quad s_4 = 408$$

ist, als Summe der positiven Glieder 12648, als Summe der negativen Glieder -12696, also $B_{4,1} = -2$, wie es die directe Berechnung auch ergeben hat.

§ 9.

Zum Schluss sollen die Hauptformeln auch für den Fall einer abnehmenden Function $g(x)$ angegeben werden. Man findet für diesen Fall unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung aus der Gleichung (1) des § 3

$$1)\quad \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} f([g([\lambda]+[\mu]+1-x)])+\sum_{y=[g(\mu)]+1}^{[g(\lambda)]}([\lambda]+[\mu]-[G(y)])\cdot(f(y)-f(y-1))$$
$$=[\mu]\cdot f([g(\lambda)])-[\lambda]\cdot f([g(\mu)]),$$

ndem $f_b(x)=f(x)$, $f_a(x)=x$, $a(x)=g(x)$ gesetzt wird. Nun ist

$$\sum_{y=[g(\mu)]+1}^{[g(\lambda)]}([\lambda]+[\mu]-[G(y)])\cdot(f(y)-f(y-1))$$
$$=-\sum_{x=[g(\mu)]+1}^{[g(\lambda)]}[G(y)]\cdot f^{(1)}(y)+([\lambda]+[\mu])\cdot(f[g(\lambda)])-f([g(\mu)]),$$

so dass man, wenn man in der ersten Summe von (1) noch die Reihenfolge der Glieder umkehrt, erhält

$$\sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} f([g(x)])-\sum_{y=[g(\mu)]+1}^{[g(\lambda)]}[G(y)]\cdot f^{(1)}(y)=[\mu]\cdot f([g(\mu)])-[\lambda]\cdot f([g(\lambda)]).$$

Nach (II) ist ferner

$$\sum_{x=[g(\mu)]+1}^{[g(\lambda)]} f^{(1)}(x)\cdot[G(y)]+\sum_{y=[g(\mu)]+1}^{[g(\lambda)]}\ \mathop{\mathrm{S}^{(1)}}_{z_0+1}^{y-1}[G(z)]\cdot f^{(2)}(y)$$
$$=\mathop{\mathrm{S}^{(1)}}_{z_0+1}^{[g(\lambda)]}[G(z)]\cdot f^{(1)}([g(\lambda)])-\mathop{\mathrm{S}^{(1)}}_{z_0+1}^{[g(\mu)]}[G(z)]\cdot f^{(1)}([g(\mu)]);$$

denn die Function $a(x)$ in (II) ist hier die wachsende Function $a(x)=x$. Von hier an ist die Betrachtung genau dieselbe wie in § 4 bei der Herleitung von (III), und man erhält schliesslich die Formel

$$(\mathrm{III}')\qquad \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} f([g(x)])=[\mu]\cdot f([g(\mu)])+\mathop{\mathrm{S}^{(1)}}_{z_0+1}^{[g(\lambda)]}[G(z)]f^{(1)}([g(\lambda)])$$
$$-\mathop{\mathrm{S}^{(2)}}_{z_0+1}^{[g(\lambda)]-1}[G(z)]\cdot f^{(2)}([g(\lambda)])\cdots$$
$$-[\lambda]\cdot f([g(\lambda)])-\mathop{\mathrm{S}^{(1)}}_{z_0+1}^{[g(\mu)]}[G(z)]\cdot f^{(1)}([g(\mu)])$$
$$+\mathop{\mathrm{S}^{(2)}}_{z_0+1}^{[g(\mu)]-1}[G(z)]\cdot f^{(2)}([g(\mu)])\cdots$$

und wenn $z_0=[g(\mu)]$ gesetzt wird,

$$(\mathrm{III'a})\qquad \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} f([g(x)]) = [\mu]\cdot f([g(\mu)]) - [\lambda]\cdot f([g(\lambda)])$$
$$+ \mathop{\mathfrak{S}^{(1)}}_{[g(\mu)]+1}^{[g(\lambda)]} [G(z)]\cdot f^{(1)}([g(\lambda)]) - \mathop{\mathfrak{S}^{(2)}}_{[g(\mu)]+1}^{[g(\lambda)]-1} [G(z)]\cdot f^{(2)}([g(\lambda)]) \cdots.$$

Es ist zu beachten, dass hier der Strich an $[G(z)]$ fehlt, und dass das Glied, in dem die erste Differenz auftritt, das positive Vorzeichen hat.

Setzt man

$$\mathop{\mathfrak{S}^{(r)}}_{[g(\mu)]+1}^{[g(\lambda)]} [G(z)] = C_{r,\nu-r+1},$$

wo $\nu = [g(\lambda)] - [g(\mu)]$ ist, so kann man in derselben Weise wie bei einer wachsenden Function $g(x)$ zeigen, dass folgende Gleichungen bestehen:

$$(\mathrm{IV'})\qquad [\lambda] + \sum_{r=1}^{\nu} C_{r,\nu-r+1} = [\mu]\cdot 2^{[g(\lambda)]-[g(\mu)]} - \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} 2^{[g(\lambda)]-[g(x)]},$$

$$(\mathrm{V'})\qquad [G([g(\lambda)])] + \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^r C_{r,\nu-r+1} = 0,$$

$$(\mathrm{VI'})\qquad C_{r,\nu-r+1} = \sum_{y=[g(\mu)]+1}^{[g(\lambda)]} [G(y)]\cdot \binom{[g(\lambda)]-y}{r-1},$$

$$(\mathrm{VII'})\qquad C_{r,\nu-r+1} = [\mu]\cdot\binom{[g(\lambda)]-[g(\mu)]}{r} - \sum_{x=[\lambda]+1}^{[\mu]} \binom{[g(\lambda)]-[g(x)]}{r}.$$

Für die der Gleichung (IX) entsprechende Gleichung gilt jetzt die auf einer Eigenschaft der Binomialcoefficienten beruhende Herleitung nicht, da die Binomialcoefficienten durch die Annahme $g(x) = x$, also mittelst einer wachsenden Function aus den Coefficienten B hervorgehen. Man kann sich aber wegen der genauen Analogie der Gleichung (III'a) mit der Gleichung (IIIa) leicht davon überzeugen, dass jetzt die Gleichung besteht

$$(\mathrm{IX'})\qquad C_{r,\nu-r+1} = -\operatorname{symb}\binom{[g(\lambda)]-s_1}{r},$$

wo die Bedeutung von s_1 dieselbe ist wie früher, und wo auch für s_k wieder s_k gesetzt werden muss; statt einer von s_1 freien Potenz von $[g(\lambda)]$ ist aber jetzt zu setzen

$$-[\mu]\cdot([g(\lambda)]-[g(\mu)])^k + ([\mu]-[\lambda])\,[g(\lambda)]^k.$$

Man kann, um das negative Zeichen rechts zu vermeiden, auch schreiben

$$C_{r,\nu-r+1} = \operatorname{symb}\binom{[g(\lambda)]+s_1}{r},$$

n eine von s_1 freie Potenz von $[g(\lambda)]$ zu ersetzen ist durch

$$[\mu]\cdot([g(\lambda)]-[g(\mu)])^k-([\mu]-[\lambda])\,[g(\lambda)]^k$$

usserdem die Potenzen von s_1 mit geradem Exponenten $2k$ nicht $_k$, sondern mit $-s_{2k}$ zu vertauschen sind.

---

achträgliche Bemerkung. Im Compte Rendu vom 4. Dec. 1899 ch in der Notiz „Généralisation d'une formule de Gauss" eine Formel ben und ohne Induction bewiesen, die allgemeiner ist als die ung (I), und daraus eine Verallgemeinerung der Formel (II) abt.

Précis d'une théorie élémentaire des déterminants cubiques d'ordre infini.

Par

Tito Cazzaniga à Pavia.

Index.

Préface.

J'ai déjà étudiés les déterminants quadratiques d'ordre infini dans quelques mémoires qui ont parues dans les: *Annali di Mat.* 1897—99. Nombreux résultats parmi ceux que j'ai donnés dans ces travaux sont directement reportables aux déterminants cubiques d'ordre infini. Dans ce champ d'ailleurs il n'y a pas de littérature mathématique; c'est pourquoi je vais remplir cette lacune, désignant en peu de mots quelques propriétés générales, et quelques règles *(criterium)* de convergence valables pour ces déterminants.

Il faut cependant remarquer, qu'il ne s'agit pas dans ma Mémoire d'aller rechercher des propriétés nouvelles, mais, en général, de verifier si certaines propriétés se conservent, se transforment, ou cessent d'avoir lieu, lorsque on passe à la limite; les méthodes cependant sont toujours les mêmes.

Voilà la raison qui me conseille de donner peu de démonstrations dans cette mémoire.

§ I.
Définitions.

1. Prénons à considérer un groupe triplement infini de quantités ılles ou imaginaires:

$$[a_{ilk}] \qquad (i, k, l = -\infty, \cdots 0, \cdots + \infty).$$

:ons maintenant un système d'axes rectangulairs dans l'espace, et plaçons chaque point, dont les coordonnées sont i, k, l la quantité a_{ikl}.

On obtient par ce procès un *tableau* à trois dimensions que nous pellerons une *matrice cubique d'ordre infini.*

2. Soit la matrice cubique:

$$[a_{i,k,l}], \qquad (i, k, l = -n \cdots 0 \cdots + m)$$

e définit trois déterminants cubiques que l'on obtient par la loi bien nnue.

Nous désignerons ces déterminants par le symbole:

$$D_{m,n}^{(r)} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

le nombre r représent le système d'indices qui démeure fixe.

Maintenant si les valeurs du déterminant:

$$D_{m,n}^{(r)} = [a_{i,k,l}]^{(r)} \qquad (i, k, l = -n \cdots 0 \cdots + m)$$

ur des valeur de m et n qui vont croître au de là de toute limite nvergent vers une limite déterminée (dans le sens le plus générale), tte limite sera designée par:

$$D^{(r)} = [a_{i,k,l}]^{(r)} \quad (i, k, l = -\infty \cdots 0 \cdots + \infty)$$

; l'on dira que le $r^{\text{ième}}$ déterminant cubique, défini par la matrice 1) est nvergent, et a $D^{(r)}$ pour sa valeur. Si la limite est infinie le déterminant t *divergent,* s'il n'existe pas de limite, le déterminant est *indéterminé.*

3. Le *criterium* ordinaire qui sert pour reconnaître s'il existe une mite nous donne la règle:

Le déterminant $D^{(r)}$ est convergent si à toute quantité positive σ prise aussi tite que l'on voudra, on peut faire correspondre un entier positif N, tel e à toute couple des nombres entiers $m, n > N$, et à toute valeur des nombres tiers p et q l'on ait:

$$\left| D_{m+p,n+q}^{(r)} - D_{m,n}^{(r)} \right| < \sigma.$$

Si cette relation est vérifiée nous poserons:

$$m = n \qquad D_{m,n}^{(r)} = D_m^{(r)} \qquad D^{(r)} = \lim D_m^{(r)}.$$

4. Dans un déterminant cubique infini, on appellera *élément-origine* ément $a_{0,0,0}$, Les éléments $a_{r,r,r}$ sont appelés éléments *principaux,* et

la diagonale qui les contient s'appelle diagonale *principale*, comme d'ordinaire. De plus tout ce que nous avons dit s'étend naturellement aux déterminants particuliers dont les couches se prolongent à l'infini comme les quadrants du plane, c'est à dire les déterminants de la forme:

$$D^r = [a_{i,k,l}] \qquad [i,k,l = 1,2\cdots\infty]$$

§ II.

Propriétés générales.

Supposons *a priori* qu'un certain déterminant cubique infini:

$$D^{(r)} = [a_{i,k,l}] \qquad (i,k,l = -\infty\cdots+\infty)$$

soit convergent. Tout déterminant $D^{(r)}$ qui converge jouit de quelques propriétés que nous allons exposer. Les démonstrations sont analogues à celles que nous avons donné pour les determinants quadratiques; nous en donnerons cependant quelques unes.

1. *La valeur d'un déterminant cubique convergent ne change pas lorsqu'on prend comme origine un élément-diagonal arbitraire.*

Désignons par $\bar{D}^{(r)}$ le déterminant qu'on obtient de $D^{(r)}$ lorsqu'on choisi comme origine l'élément $a_{\lambda,\lambda,\lambda}$. Sa convergence est évidente.

En effet on a:

$$|D^{(r)}_{m+p,n+q} - D^{(r)}_{m,n}| < \sigma$$

où σ est arbitrairement petit et m, n sont plus grands qu'un certain nombre entier N que nous avons déja défini. Posons $N > \lambda$ et:

$$m - \lambda = m_1, \quad n + \lambda = n_1,$$

notre rélation devient:

$$|\bar{D}^{(r)}_{m_1+p,n_1+q} - \bar{D}^{(r)}_{m_1 n_1}| < \sigma$$

ce qui démontre la convergence de $\bar{D}^{(r)}$.

Maintenant si l'on suppose $m = n$, on peut considérer la valeur $D^{(r)}$ comme valeur limite du déterminant:

$$D^{(r)}_{m,n} = D^{(r)}_m,$$

ou comme valeur limite du déterminant:

$$D^{(r)}_{m-\lambda,n+\lambda} = \bar{D}^{(r)}_m.$$

Mais dans la même façon dont la suite:

$$D^{(r)}_1,\ D^{(r)}_2, \ldots D^{(r)}_m \ldots$$

sert à déterminer $D^{(r)}$, la suite:

$$\bar{D}^{(r)}_1,\ \bar{D}^{(r)}_2, \ldots \bar{D}^{(r)}_m \ldots$$

rt à déterminer comme sa limite, la valeur $\overline{D}^{(r)}$, et puisque cette limite ; unique, il va résulter:

$$D^{(r)} = \overline{D}^{(r)} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

2. *Dans un cubique convergent on ne peut pas échanger les couches* *m système avec celles d'un autre.*

En effet par cet échangement on transforme le déterminant $D^{(r)}$ dans autre $D^{(r_1)}$ qui est déterminé par la même matrice. $D^{(r_1)}$ en général, a e valeur divers de $D^{(r)}$ et en particulier il pourrait aussi être divergent.

3. *Dans un cubique convergent échangeant entre elles deux couche rallèles qui ne correspondent pas au groupe fixe des indices, le déterminant nge de signe. Si les couches appartiennent au groupe fixe le déterminant change pas.*

Il s'en suivent d'ici les conséquences ordinaires.

4. *Si dans une cubique convergent on va multiplier tous les éléments ne couche par un nombre déterminé K, le déterminant reste multiplié r K.*

5. *Tout déterminant cubique, convergent, de la forme:*

$$D^{(r)} = [a_{i,k,l}] \qquad (i, k, l = -\infty \cdots + \infty)$$

ut être transformé dans un déterminant de la forme:

$$D^{(r)} = [a_{i,k,l}] \qquad (i, k, l = 1, 2, \cdots \infty).$$

Nous pourons par conséquence borner notre étude à cette dernière asse de déterminants, en supposant toujours que la transformation dont ous parlons, soit déja exécutée. Cette transformation, en substance, obtient en appliquant à propos la propriété caractéristique pour les deter-inants convergents défini par nous, à savoir: En échangeant entre elles s couches parallèles d'un déterminant cubique, de façon à laisser sur diagonale principale les éléments diagonaux, la valeur du déterminant e change pas.

§ III.

Règles de convergence.

Étendons les règles de convergence qui valent pour les déterminants uadratiques.

1. On appellera *normale* une matrice cubique infini lorsque en posant:

$$a_{i,k,l} = a'_{i,k,l}, \qquad a_{i,i,i} = 1 + a'_{i,i,i},$$

série triplement infinie des éléments que ne sont pas diagonaux

$$S = \sum_i{}' \sum_k{}' \sum_l{}' a'_{i,k,l}$$

et le produit simplement infini des éléments diagonaux:

$$P = \prod_i (1 + a'_{i,i,i})$$

sont absolument convergents. Nous avons tout de suite:

Les trois déterminants qui sont définis par une matrice cubique normale, sont convergents.

Il faut étendre d'abord la méthode de la *clef algébrique* pour la construction des déterminants cubiques d'ordre fini. Il suffit remarquer à ce propos que tout déterminant cubique:

$$D_m^{(r)} = [a_{i,k,l}] \qquad (i, k, l = 1, 2 \cdots m)$$

peut être engendré par le produit:

$$P_m = \prod_{i=1}^{m} \left(1 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} a'_{i,k,l}\right)$$

(ou bien par les deux produits analogues qu'on obtient en échangeant respect. i avec k, i avec l), lorsqu'on développe ce produit en affectant à propos ses termes par les coéfficients 1, 0, -1.

Désignons maintenant par $\overline{P}_m$ la valeur que prend P_m, lorsqu'on va remplacer les $a'_{i,k,l}$ par leur valeur absolue. Alors la limite $\overline{P} = \lim \overline{P}_m$ est finie, en vertu des conditions à lesquelles nous avons assujetties les $a'_{i,k,l}$. Par conséquence à toute valeur positive δ, et à tout entier m plus grand qu'un certain entier m', corresponde une rélation:

$$\overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m < \delta .$$

D'ailleurs si l'on va construire les expressions:

$$D_{m+p}^{(r)}; \quad \overline{P}_{m+p},$$
$$D_m^{(r)}; \quad \overline{P}_m,$$

on peut tout de suite remarquer que les premières se transforment dans les autres en remplaçant dans celles-là $a'_{i,k,l}$ par zéro lorsque une, au moins, parmi les quantités i, k, l est plus grande que m. Mais les termes qui s'annullent en $\overline{P}_{m+p}$ sont donnés par $\overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m$, et ceux qui s'annullent en $\overline{D}_{m+p}$ sont donnés par $D_{m+p}^{(r)} - D_m^{(r)}$. De plus dans la première difference se présentent tous les termes de la seconde avec le signe positif; on a donc:

$$\overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m > \left| D_{m+p}^{(r)} - D_m^{(r)} \right| \therefore \left| D_{m+p}^{(r)} - D_m^{(r)} \right| < \delta \quad \text{c. q. f. d.}$$

Cette démonstration ne dépend pas de l'indice $r = 1, 2, 3$.

Il résulte aussi:

Un cubique normal reste convergent, si l'on remplace les éléments d'une *sche par une double infinité de nombres qui, en valeur absolue, ne peuvent rpasser un nombre positif a.*

On démontre ce théorème comme son analogue dans les déterminants adratiques.

2. Dorénavant nous supposerons en général que i soit l'indice qui partient au système fixe; c'est à dire nous posons $r = 1$, et supprimons indice supérieur dans les symboles $D^{(r)}$.

On dira alors que le déterminant cubique

$$\Delta = [\bar{a}_{i,k,l}] \qquad (i, k, l = 1, 2 \cdots \infty)$$

t *normaloïde* lorsqu'on pourra déterminer deux suites de nombres:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots; \qquad y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, \ldots$$

ls que le déterminant cubique D construit par les éléments:

$$a_{i,k,l} = \frac{x_l y_k}{x_i y_i} \bar{a}_{i,k,l}$$

oit normal à son tour.*)

Tout normaloïde Δ est convergent et égal en valeur au déterminant ormal D qui lui corrisponde.

La démonstration résulte tout de suite en remarquant que:

$$\Delta_m = D_m \therefore |\Delta_{m+p} - \Delta_m| = |D_{m+p} - D_m|.$$

n a aussi:

Si dans le normaloïde cubique Δ, on va remplacer les éléments:

$$\bar{a}_{i,k,l} \qquad (k, l = 1, 2 \cdots \infty)$$

ar des nombres $\bar{\mu}_{kl}$ $(k, l = 1,2 \cdots \infty)$ tels qué à toute valeur entière positive le k, l, les quantités:

$$\mu_{kl} = \frac{x_k y_l}{x_i y_i} \bar{\mu}_{ikl}$$

oient plus petites qu'un nombre positif a, alors le déterminant Δ' qui résulte ar cette substitution est convergent, et sa valeur coïncide avec la valeur du éterminant D', que l'on déduit du normal:

$$D = [a_{ikl}] \qquad (i, k, l = 1, 2 \cdots \infty)$$

ar le remplacement des nombres μ_{kl} aux éléments a_{ikl} $(k, l = 1, 2 \cdots \infty)$.

En effet nous avons:

$$\Delta'_m = D'_m$$

par suite de l'inégalité:

$$|D'_{m+p} - D'_m| < \delta,$$

déduit:

$$|\Delta'_{m+p} - \Delta'_m| < \delta,$$

qui va prouver la convergence de Δ'.

*) On peut généraliser cette définition en manière tout à fait analogue à celle t je parle dans ma Mémoire: *Appunti sulla molt. dei normaloidi.* Ann. d. Mat. 1899.

La dernière partie du théorème est evident.

3. *Considérons un groupe triplement infini de nombre:*

$$a_{ikl} \qquad (i, k, l = 1, 2 \cdots \infty)$$

et supposons qu'on puisse déterminer quatre quantité A, r, s, t de façon que pour toute valeur entière et positive de i, k, l, on ait:

$$|a_{ikl}| \leq \frac{A}{r^i s^k t^l}.$$

Alors si l'on a:

$$|rst| = \gamma^2 > 1$$

les trois déterminants infinis $\vartheta^{(r)}$ $(r = 1, 2, 3)$ construits par les nombres a_{ikl}, sont convergents à zero.

Posons en effet:

$$\vartheta_m^{(1)} = \sum_{(\alpha)} \sum_{(\beta)} \pm a_{1\alpha_1\beta_1} a_{2\alpha_2\beta_2} \cdots a_{m\alpha_m\beta_m}$$

dont les $\underset{(\alpha)}{\Sigma}, \underset{(\beta)}{\Sigma}$ sont étendus à toute combinaison:

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m; \quad \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m$$

qu'on peut former par les indices:

$$1, 2, 3, \ldots m,$$

et tout de même ecrivons les formules qui donnent $\vartheta_m^{(2)}, \vartheta_m^{(3)}$.

En changeant de signe aux termes négatif et remplaçant chaque élément $a_{i,k,l}$ par sa valeur maximum on obtient:

$$\vartheta_m^{(r)} \leq (m!)^2 \frac{A^m}{(rst)^{\frac{1}{2}m(m+1)}} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

et aussi, remplaçant $m!$ par m^m:

$$\vartheta_m^{(r)} \leq \left| \frac{A m^2}{\gamma^{m+1}} \right|^m.$$

C'est évident que lorsqu'on va écrire:

$$\vartheta_{m+p}^{(r)} \leq \left| \frac{A m^2}{\gamma^{m+1}} \right| \left| \frac{A(m+p)}{\gamma^{2m+p+1}} \right|$$

et l'on va soustraire les deux membres à gauche, et sommer les deux membres à droite des précedentes inegalités, on peut en tout cas déterminer par chaque nombre σ, petit comme l'on vaudra, un entier m' tel que par un p quelconque et $m > m'$, on ait:

$$\left| \vartheta_{m+p}^{(r)} - \vartheta_m^{(r)} \right| < \sigma.$$

C'est à dire: le déterminant $\vartheta^{(r)}$ est convergent.

On a aussi aisément:

$$\vartheta^{(r)} = \lim \vartheta_m^{(r)} = 0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

vec plus de précision nous pouvons dire que:

$$\lim \sqrt[m]{\vartheta_m^{(r)}} = 0.$$

e théorème plus général:

Si dans le déterminant $\vartheta^{(r)}$ on va remplacer les éléments de la couche ^{m} *par une suite de quantités μ_{kl} tels que:*

$$\mu_{kl} \leq |\sqrt{kl}|^{n\sqrt{kl}}$$

ar toute valeur positive entière de k, l, le déterminant $\vartheta'^{(r)}$ qu'en résulte st aussi convergent à zéro, a une démonstration analogue à celle des éterminants quadratiques infinis.

§ IV.

Déterminants mineurs d'un cubique infini.

1. Considérons trois couches α, β, γ orthogonales entr'elles et remlaçons par zéro tout élément qui appartient à ces couches, excepté $a_{\alpha,\beta,\gamma}$ ù nous poserons l'unité.

Le déterminant qu'on va obtenir est un mineur infini de *1^er^ ordre* e D qu'on désigne par:

$$\begin{pmatrix} & \alpha & \\ \beta & | & \gamma \end{pmatrix}_D$$

corréspondant en ce cas au système fixe des indices. En général si on père sur $3r$ couches:

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r;\quad \beta_1\beta_2\ldots\beta_r;\quad \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r$$

n obtient le mineur:

$$\begin{pmatrix} & \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r & \\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_r & | & \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r \end{pmatrix}_D$$

'ordre r. Ici les éléments qui sont remplacés par l'unité sont:

$$a_{\alpha_s\beta_s\gamma_s}. \qquad (s = 1, 2, \ldots r).$$

Les *complémentairs* de ces mineurs sont les déterminants finis contitués par les éléments qui se trouvent sur les intersections des couches onsidérées.

2. On a en particulier pour les déterminants normaux:

a) *Tout mineur d'un déterminant normal est aussi normal.*

b) *Le déterminant mineur qu'on déduit du déterminant:*

$$\begin{pmatrix} & \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r & \\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_r & | & \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r \end{pmatrix}_D$$

échangeant entr'eux p indices β, et q indices γ respectivement, est égal même mineur multiplié par $(-1)^{p+q}$.

En arrangeant arbitrairement les α, le mineur ne change pas sa valeur.

c) *Si l'on va supprimer dans un normal r couches* α_i, *r couches* β_i, *r couches* γ_i $(i = 1, 2, \ldots r)$, *le normal qui en résulte diffère du mineur que nous venons de considérer par un facteur* $(-1)^{(\beta_1-\gamma_1)+(\beta_2-\gamma_2)+\cdots}$.

d) *Le mineur:*

$$\begin{pmatrix} & 1, 2, \ldots m & \\ 1, 2, \ldots m & | & 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}_D$$

tend à l'unité lorsque m croit au de là de toute limite.

Les démonstrations sont tout à fait analogues à celles que j'ai données pour les déterminants quadratiques.

3. *Tout mineur d'ordre quelconque r, d'un déterminant normaloïde est aussi normaloïde.*

C'est évident. D'ailleurs si l'on va considérer le normaloïde $\Delta^{(r)}$, et l'on représente par $D^{(r)}$ le déterminant normal qui lui correspond, entre les mineurs de $\Delta^{(r)}$ et de $D^{(r)}$ subsiste toujours la rélation:

$$\begin{pmatrix} & \alpha_1 \ldots \alpha_r & \\ \beta_1 \ldots \beta_r & | & \gamma_1 \ldots \gamma_r \end{pmatrix}_{\Delta^{(r)}} = \begin{pmatrix} & \alpha_1 \ldots \alpha_r & \\ \beta_1 \ldots \beta_r & | & \gamma_1 \ldots \gamma_r \end{pmatrix}_{D^{(r)}} \frac{x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_r}\, y_{\alpha_1} \cdots y_{\alpha_r}}{x_{\beta_1} \cdots x_{\beta_r}\, y_{\gamma_1} \cdots y_{\gamma_r}}.$$

Cette propriété nous permet de déclarer tout de suite que les théorèmes que nous venons d'exposer sur les mineurs des déterminants normaux, s'étendent avec quelques petites modifications à ceux des normaloïdes.

4. *Les mineurs d'une déterminant* $\vartheta^{(r)}$ *défini au* § III, 3, *sont du même type, ou du type* $\vartheta'^{(r)}$. *Ils convergent cependant à zéro.*

A ce propos c'est bien de remarquer que lorsque on va considérer ces déterminants en toute leur généralité, il est bien difficile d'établir à leur égard des propriétés qui servent à la construction de leurs développements. C'est pourquoi nous allons poser ici quelque limitations.

Si $A_{i,k,l}^{(m)}$ représente les mineurs de premier ordre d'un déterminant particulier $\vartheta^{(r)}$, il peut se faire que les quantités;

$$\alpha_{i,k,l}^{(m)} = \frac{A_{i,k,l}^{(m)}}{\vartheta_m}$$

convergent à des limites $\alpha_{i,k,l}$ lorsque m devient infini. Nous admettrons:

a) Tout rapport $\alpha_{i,k,l}^{(m)}$ converge à une limite fini $\alpha_{i,k,l}$ lorsque m croit à l'infini.

b) À l'indice fixe i on peut faire correspondre un entier M_i de façon que pour tout nombre $m \geq M_i$, les différences:

$$|\alpha_{i,k,l} - \alpha_{i,k,l}^{m}| \qquad \begin{cases} k = 1, 2, \ldots m \\ l = 1, 2, \ldots m \end{cases}$$

sont tous plus petites qu'un certain nombre positif σ, arbitrairement petit et choisi *à priori*.

c) Parmi les nombres r, s, t, qui satisfont l'inégalité:

$$|rst| > 1$$

s deux seconds, s, t sont plus grands que l'unité.

L'utilité de ces limitations se présentera plus tard.

§ V.

Développements.

En général il n'est pas possible que de donner le développement d'un léterminant cubique infini, partant de la seule hypothèse que ce déter- ninant soit convergent. Les diverses espèces de déterminants infinis sont léveloppables en général par des méthodes qui dépendent seulement de a loi de construction de leurs éléments.

Cependant nous étudierons à part les développements propres aux trois spèces de déterminants cubiques jusqu'ici considérées.

1. Soit:

$$D = [a_{i,k,l}] \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots m)$$

n déterminant normal, D_m son mineur fini d'ordre m, H_m le déterminant u'on va déduire de D_m en supprimant l'unité dans l'élément $(1 + a'_{mmm})$ le sa diagonale principale. On peut écrire identiquement:

$$D_m = D_{m-1} + H_m,$$

t parfois de la rélation:

$$D_m = D_1 + (D_2 - D_1) + \cdots + (D_m - D_{m-1}),$$

n découle:

$$D_m = D_1 + H_2 + H_3 + \cdots + H_m.$$

lais si l'on fait croitre m au de là de toute limite il en résulte encore:

$$) \qquad D = D_1 + H_2 + H_3 + \cdots + H_m + \cdots.$$

ette série converge absolument. Il suffit a cet effet d'écrire:

$$\overline{\Pi}_h = \prod_{i=1}^{h} \left\{ 1 + \sum_{k=0}^{h} \sum_{l=1}^{h} |a'_{i,k,l}| \right\},$$

de comparer la série a) avec la série:

$$\overline{P} = \overline{\Pi}_1 + (\overline{\Pi}_2 - \overline{\Pi}_1) + \cdots + (\overline{\Pi}_m - \overline{\Pi}_{m-6}) + \cdots$$

quelle a tous ses termes positifs et plus grands que les terme du même ng en a).

De ce développement s'ensuivent bientôt les autres:

b) $$D = \sum a_{1\alpha_1\beta_1} a_{2\alpha_2\beta_2} \cdots a_{m\alpha_m\gamma_m} \cdots (-1)^{\Sigma(\alpha_m - \beta_m)},$$

c) $$D = \sum_k \sum_l \left(k \overset{i}{|} l\right) a_{i,k,l},$$

et aussi la règle de Laplace etc. etc.

Avec des expression tout à fait semblable aux développements a), b), c) on peut représenter les déterminants convergents dont nous avons parlé à la fin du § III, 1.

2. Aussi un déterminant normaloïde peut être développé suivant les séries a), b), c). Cela résulte tout de suite en rappellant les rélations très simples qui lient les mineurs infinis d'un normaloïde avec les mineurs homologues du normal qui lui correspond.

3. Pour les déterminants du type $\vartheta^{(r)}$ le développement c) n'a pas de sens, car tout mineur $A_{i,k,l}$ converge a zéro. Nous le pouvons substituer au moyen du théorème suivant:

S'il existent les quantités $\alpha_{i,k,l}$ et si les conditions a), b), c) *du précédent § sont satisfaites, on obtient:*

$$\sum_k \sum_l \alpha_{ikl} a_{ikl} = 1.$$

En admettant les même limitations on a aussi:

A toute terne de nombre ϱ, σ, τ, tels que:

$$|r\varrho| > 1; \quad |s\sigma| > 1; \quad |t\tau| > 1$$

on peut faire correspondre une infinité de nombres positifs et finis B de façon que:

$$|\alpha_{i,k,l}| \leq \frac{B}{\varrho^i \sigma^k \tau^l}$$

excepté, au plus, un nombre fini d'éléments par chaque couche.

4. Nous allons enfin remarquer que par tout déterminant Δ, dont les éléments d'une couche i satisfont à la seule limitation d'être finis, et qui admet le développement c), est valable le théorème suivant:

Si dans le déterminant Δ on va substituer aux éléments de la couche i, des suite finies ou infinies de nombres:

$$\mu_{kl} = \sum_h \mu_{hkl} \qquad (k, l = 1, 2 \cdots \infty)$$

tels qu'à toute valeurs des indices on ait:

$$|\mu_{kl}| < \mu,$$

étant μ une constante finie et positive, alors le déterminant Δ va se décomposer dans une somme, ou dans une séries de déterminants convergents.

§ VI.

Règles de multiplication.

Avec le but de n'entrer pas en particularité en égard aux déterminants inis d'espèce supérieur, nous nous bornerons à démontrer que les règles linaires de la multiplication subsistent avec des limitations convenables squ'on va multiplier un cubique normal, normaloïde ou de la forme $\vartheta^{(r)}$, r un déterminant quadratique du même type. Il faut cependant remarquer e nos considérations servirons à indiquer comme, avec une convenable tension de la définition des déterminants *normaux*, *normaloïdes* etc. aux terminants d'espèce supérieur, on pourra construire une famille de terminants tels que le produit de deux déterminants de la même famille spèce p, donnera un déterminant d'espèce $p+1$ et qui appartient à la nille de ses facteurs.

1. A cet effet démontrons avant tout:

a) *Le déterminant produit de deux normaux quadratiques est un normal bique.*

Soient:

$$A=[a_{ik}];\quad B=[b_{ik}] \qquad (i,k=1,2,\cdots\infty)$$

ux déterminants normaux, et définissons le cubique:

$$C=[c_{ikl}] \qquad (i,k,l=1,2,\cdots\infty)$$

posant:

$$c_{ikl}=a_{ik}\cdot b_{il}.$$

déterminant C est normal. En effet en conservant les notations:

$$\begin{aligned} a_{ik} &= a'_{ik}, & a_{ii} &= 1+a'_{ii}, \\ b_{ik} &= b'_{ik}, & b_{ii} &= 1+b'_{ii}, \\ c_{ikl} &= c'_{ikl}, & c_{iii} &= 1+c'_{iii} \end{aligned}$$

ous avons:

$$\sum_{i,k,l} c'_{ikl}=\sum_{i,k} a'_{ik}+\sum_{i,l} b'_{il}+\sum_{i,k,l} a'_{il} b'_{kl},$$

$$\sum_{i} c'_{iii}=\sum_{i} a'_{ii}+\sum_{i} b'_{ii}+\sum_{i} a'_{ik} b'_{il}.$$

'ailleurs, des conditions que A, B sont normaux découle que les séries droite dans les identités précédentes convergent absolument, et par nséquence convergent abs. aussi les séries que nous avons construites ır les c_{ikl}. C'est bien notre assertion.

Le déterminant C est en valeur égal à A, B. En effet, si A_m, B_m, C_m nt les déterminants finis d'ordre m que nous avons déja définis, la théorie émentaire des déterminants cubiques nous donne:

$$C_m=A_m\cdot B_m.$$

D'ailleurs pour un ε arbitraire et un n plus grand qu'un certain entier n', on a aussi:

$$|A-A_n|<\varepsilon,\quad |B-B_n|<\varepsilon,\quad |C-C_n|<\varepsilon$$

et par conséquence:

$$|AB-A_nB_n|<\varepsilon\cdot M$$

où M est un nombre fini. Il s'ensuit aussitôt:

$$|AB-C|<\varepsilon(M+1)\;\therefore\; AB=C. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On peut conclure comme dans la théorie ordinaire, qu'il est toujours possible de représenter un cubique normal comme le produit de deux déterminants quadratiques, *symboliques*, dont les éléments ne sont pas des quantités, mais représentent des quantités lorsqu'ils se trouvent en convenables combinaisons entr'eux.

b) Pour les normaloïdes nous avons: *Si:*

$$\mathsf{A}=[\bar{a}_{ik}],\quad \mathsf{B}=[\bar{b}_{ik}] \qquad (i,k=1,2,\cdots\infty)$$

sont deux déterminants normaloïdes tels qu'en posant:

$$a_{ik}=\frac{x_i}{x_k}\bar{a}_{ik};\qquad b_{ik}=\frac{y_i}{y_k}\bar{b}_{ik}$$

les déterminants:

$$A=[a_{ik}],\qquad B=[b_{ik}] \qquad (i,k=1,2,\ldots\infty)$$

sont les deux normaux correspondants, on a que le déterminant:

$$\Gamma=[\bar{a}_{ik}\cdot\bar{b}_{il}]=[\bar{c}_{ikl}] \qquad (i,k,l=1,2,\cdots\infty)$$

est un normaloïde cubique égal au produit $\mathsf{A}\cdot\mathsf{B}$.

En effet:

$$\bar{c}_{ikl}=\bar{a}_{ik}\bar{b}_{il}=\frac{x_k y_l}{x_i y_i}a_{ik}b_{il}=\frac{x_k y_l}{x_i y_i}c_{ikl}$$

ou c_{ikl} est l'élément d'un cubique C, produit des déterminants A, B. Il s'ensuit que Γ est normaloïde. Mais nous avons de plus:

$$A=\mathsf{A},\quad B=\mathsf{B},\quad C=\Gamma$$

donc on a:

$$\Gamma=\mathsf{A}\cdot\mathsf{B}.$$

c) *Si l'on a deux déterminants du type* ϑ:

$$A=[a_{ik}],\quad |a_{ik}|<\frac{M}{r^i s^k},\quad |rs|>1,$$

$$B=[b_{ik}],\quad |b_{ik}|<\frac{N}{\varrho^i\sigma^k},\quad |\varrho\sigma|>1$$

et l'on va construire le cubique:

$$C=[c_{ikl}]=[a_{ik}b_{il}]$$

le déterminant C *est du même type* ϑ *que* A *et* B.

à cet effet:

$$|r\varrho| = R, \qquad MN = P.$$

le suite:

$$c_{ikl} = a_{ikl}\, b_{ikl} \leq \frac{MN}{(r\varrho)^i s^k \sigma^l} = \frac{P}{R^i s^k \sigma^l}$$

$$|Rs\sigma| > 1.$$

ıant C est donc égal à zéro et nous pouvons le considérer, par ›omme le produit de A par B.

intenant nous allons étudier les trois cas analogues lorsqu'il ultiplier un déterminant quadratique par un cubique:

nt:

$$A = [a_{ik}]; \qquad B = [b_{ikl}]$$

inants normaux. Le cubique:

$$C = [c_{ikl}]$$

$$c_{ikl} = \sum_h a_{lh}\, b_{ikh}$$

que normal tel que $C = A \cdot B$.

ì dire que dans notre cas est valable la règle ordinaire du ln effet (en conservant les notations introduites) nous avons:

$$c'_{ikl} = \qquad b'_{ikl} + \sum_h a_{lh} b_{jkh},$$

$$c'_{iii} = a'_{ii} + b'_{iii} + \sum_h a_{ih} b_{iih}.$$

ue les séries:

$$\sum_{i,k} |a_{ik}|; \qquad \sum_{i,k,l} |b_{ikl}|,$$

rgents, aussi la série quadruple:

$$\sum_{h,i,k,l} |a_{lh}\, b_{ikh}|,$$

les deux séries:

$$\sum_i |c'_{iii}|, \qquad \sum_{i,k,l} |c_{ikl}|$$

rgents. Il en découle que C est un cubique normal.

ı maintenant:

$$\gamma_{ikl} = \sum_{h=1}^{m} a_{lh}\, b_{ikh},$$

$$\begin{aligned} A_m &= [a_{ik}]\,; & B_m &= [b_{ikl}], \\ C_m &= [c_{ikl}]; & C_m^{(m)} &= [\gamma_{ikl}] \end{aligned} \qquad (i, k, l = 1, 2, \cdots m)$$

Nous avons alors:

$$C_m^{(m)} = A_m B_m,$$

$$A = A_m + \alpha, \qquad B = B_m + \beta, \qquad C = C_m + \gamma$$

étant α, β, γ des quantités qui s'annullent pour $\lim m = \infty$.

D'ailleurs en posant:

$$r_{ikl} = c_{ikl} - \gamma_{ikl} = \sum_{h=m+1}^{\infty} a_{lh} b_{ikh}$$

est possible que de décomposer le déterminant C_m en $m+1$ déterminants du même ordre, et en déduire la rélation:

$$| C_m - C_m^{(m)} | < \sigma$$

où σ est arbitrairement petit et fixé *a priori*, et m est convenablement grand. Le raisonnement est analogue à celui employé dans les déterminants quadratiques.

En effet en C_m, substituons $r_{ikl} + \gamma_{ikl}$ au lieu de c_{ikl}. Alors C_m résulte égal à une somme de déterminants en nombre de $m+1$, dont le premier est $C_m^{(m)}$, construit par les éléments γ_{ikl}, le second est déduit de $C_m^{(m)}$ en substituant dans sa dernière couche (i), r_{ikl} au lieu de γ_{ikl}, le troisième se déduit de $C_m^{(m)}$ en substituant dans la dernière couche (i), c_{ikl}, et dans l'avant-dernière, r_{ikl} au lieu des éléments γ_{ikl} etc. etc.; enfin le $(m+1)^{\text{ième}}$ déterminant est formé par les éléments c_{ikl}, excepté la première couche (correspondant à l'indice i) qui est formée par les r_{ikl}.

Il en découle que la différence $C_m - C_m^{(m)}$ peut se représenter par la somme de m déterminants dont une couche, et une seulement, est constituée par les quantités r_{ikl}. En développant ces déterminants on doit remarquer que les mineurs, coefficients des quantités r_{ikl}, par m quelconque, sont toujours finis, et plus petit que le produit:

$$\bar{P} = \prod_i \left\{ 1 + \sum_{kl} | c_{ikl} | \right\}.$$

On a donc:

$$| C_m - C_m^{(m)} | \leq \bar{P} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} r_{ikl} \leq \bar{P} \sum_{h=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} a_{lh} b_{ikh}$$

et puisque la série:

$$\sum_{h,i,k,l} | a_{lh} b_{ikh} |$$

est convergente, la différence $C_m - C_m^{m}$, en augmentant m au de là de toute limite peut dévenir aussi petite qu'on veut.

En faisant usage maintenant des inégalités:

$$|AB - A_m B_m| < |\alpha B_m + \beta A_m + \alpha\beta| < \delta(Q+\delta),$$
$$|C - C_m| < \delta; \quad |C_m - C_m^{(m)}| < \delta$$

où δ est arbitrairement, et m convenablement choisi, on obtient tout de suite:

$$|C - AB| < \delta(Q+\delta+2) \therefore C = A \cdot B. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

b) La règle précédente n'est pas toujours valable, lorsqu'il s'agit de multiplier un normaloïde cubique par un quadratique du même type. Comme dans le cas analogue du produit entre normaloïdes quadratiques (lorsqu'on veut obtenir un déterminant aussi quadratique) il faut que soient remplie des conditions particulières. Nous allons mentionner un cas, qui n'est pas le plus général.

Soit:

$$B = [b_{ikl}]$$

un normaloïde cubique, et:

(2) $$y_1, y_2, y_3, \dots y_r \dots,$$

(3) $$z_1, z_2, z_3, \dots z_r \dots$$

deux suites de nombre tels que le déterminant:

$$B' = \left[\frac{y_k z_l}{y_i z_i} b_{ikl}\right]$$

soit normal. De plus, indiquons par:

$$A = [a_{ik}]$$

un normaloïde quadratique et:

(1) $$x_1, x_2, x_3, \dots x_r \dots$$

la suite de façon que:

$$A' = \left[\frac{x_i}{x_k} a_{ik}\right]$$

soit normal. Nous avons alors:

Si $x_i = z_i$ $(i = 1, 2, \cdots \infty)$, le déterminant:

$$C = \left[\sum_h b_{ikh} a_{lh}\right] = [c_{ikl}]$$

est aussi normaloïde; les suites de nombres qui le rendent normal sont données par les (2) et (3), et en valeur C égale le produit des déterminants A, B.

Des résultats analogues s'obtiendrons si était:

$$x_i = y_i. \qquad (i = 1, 2 \cdots \infty)$$

La démonstration est presque évidente.

---

*) Voir: Cazzaniga. Appunti sulla molt. dei normaloidi *Ann. di Mat.* 1899.

c) Considérons enfin deux déterminants ϑ:

$$A=[a_{ik}],\quad |a_{ik}|\leq \frac{M}{r^i s^k},\qquad |rs|>1,$$

$$B=[b_{ikl}],\quad |b_{ikl}|\leq \frac{N}{\varrho^i\sigma^k\tau^l},\quad |\varrho\sigma\tau|>1$$

et le déterminant:

$$C=\Big[\sum_h b_{ikh}\,a_{lh}\Big]=[c_{ikl}].$$

Si les deux inégalités:

(1) $$|s\tau|>1,\qquad |\varrho r\sigma|>1$$

sont remplies, le déterminant C est du type ϑ, égal à zéro, et ses nombres caractéristiques sont donnés par

$$\varrho,\ r,\ \sigma.$$

En effet en posant:

$$P=\frac{MN}{s\tau-1}$$

nous avons:

$$c_{ikl}=\sum_h b_{ikh}\,a_{lh}\leq \sum_h \frac{M}{\varrho^i\sigma^k\tau^h}\cdot\frac{N}{r^l s^h}\leq\frac{P}{\varrho^i\sigma^k r^l}.$$

Les autres cas, où se trouvent verifiées des inégalités analogues aux (1) ne diffèrent en substance du précédent.

Ainsi dans ses lignes principales nous avons esquissé la théorie des convergents cubiques. C'est superflu maintenant que d'en traiter les détails. Seulement les applications probables peuvent utilement conseiller des recherches complémentaires et des règles plus étendues de convergence.

Göttingen, 17. Avril 1898.

INHALT.

Seite

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizugebende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst genauer Zeichnung, den Manuscripten beilegen zu wollen. **Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.**

Die Redaction.

☞ Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer**, Leipzig, Königsstr. 1, II.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig.**

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig

53. Band. 3. Heft.

Ausgegeben am 10. Juli

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen.*)

Von

ALFRED PRINGSHEIM in München.

In einer früher publicirten Arbeit über *„Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen"* **) habe ich einige Hauptsätze über die Grenzwerthe *zweifach unendlicher Zahlenfolgen* zusammengestellt, soweit sie mir für den damaligen Zweck erforderlich schienen. Nun scheint mir aber die, meines Wissens, in der Literatur sonst nicht ausdrücklich behandelte Theorie dieser Zahlenfolgen eine weit über die erwähnte specielle Anwendung hinausreichende, principielle Bedeutung zu besitzen und darf insbesondere für die gesammte Lehre von den Functionen mehrerer Variablen als fundamental gelten: bildet doch die Zurückführung sogenannter *stetiger* Grenzübergänge auf Grenzwerthe *abzählbarer* Zahlenmengen eine der wesentlichsten Grundlagen für die moderne Verschärfung functionentheoretischer Definitionen und Beweise. Aus diesem Grunde dürfte vielleicht die folgende ausführlichere Darstellung gewisser Grenzwerth-Eigenschaften der zweifach-unendlichen Zahlenfolgen einiges Interesse beanspruchen, zumal dieselbe verschiedene nicht unerhebliche Verallgemeinerungen und Vervollständigungen der früher mitgetheilten Hauptsätze enthält. Auch möchte ich auf die hierbei sich ergebende methodisch consequente und

---

*) Der folgende Aufsatz ist im wesentlichen einem Abschnitte meiner für den Druck bestimmten Vorlesungen über unendliche Reihen und analytische Functionen entnommen. Da es mir in Folge von Berufsgeschäften und anderen nothwendigen Arbeiten bisher nicht möglich war, das betreffende Buch druckfertig zu machen, und ich andererseits von Herrn F. London erfahren habe, dass er, durch meine unten citirte Arbeit über *Doppelreihen* angeregt, eine Abhandlung über den vorliegenden Gegenstand bei der Redaction der Mathematischen Annalen eingereicht habe, so bin ich der letzteren zu Danke verpflichtet, dass sie auch mir Gelegenheit giebt, die folgenden, in der Hauptsache aus dem Jahre 1896 stammenden Untersuchungen an dieser Stelle zu veröffentlichen. Im übrigen möchte ich nur noch ausdrücklich hervorheben, dass die Arbeit des Herrn London, trotz ihres Zusammenhanges mit meinem oben erwähnten *früheren* Aufsatze, völlig *unabhängig* von den *hier* mitgetheilten *allgemeineren* Untersuchungen entstanden ist.

**) Münch. Sitz.-Ber. Bd. 27 (1897), p. 101.

didaktisch äusserst zweckmässige*) Einführungsart der *gleichmässigen* und *ungleichmässigen Convergenz* einigen Werth legen. Der fragliche Fundamental-Begriff erscheint hier thatsächlich in seiner einfachsten *Grundform*, und der Zusammenhang, in welchem er auftritt, führt zugleich zu einer, soviel ich weiss, bisher nicht bemerkten nützlichen *Erweiterung*, die sich auch für gewisse functionentheoretische Untersuchungen als fruchtbar erweisen dürfte. Auf Grund dieses *erweiterten* Begriffes lassen sich insbesondere die *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die *Existenz* von $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ bei vorausgesetzter Existenz von $\lim\limits_{\nu=\infty}\overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ oder $\lim\limits_{\mu=\infty}\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$**) in vollkommen präciser Weise formuliren.

§ 1.

Grenzwerthe convergenter und eigentlich divergenter Doppelfolgen. — Monotone Doppelfolgen.

1. Als *Doppelfolge* werde im folgenden jede zweifach unendliche Folge *reeller* Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ bezeichnet. Wir denken uns dieselbe allemal in der Form des Schema's;

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_0^{(0)}\ a_1^{(0)} \cdots a_\mu^{(0)} \cdots \\ a_0^{(1)}\ a_1^{(1)} \cdots a_\mu^{(1)} \cdots \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ a_0^{(\nu)}\ a_1^{(\nu)} \cdots a_\mu^{(\nu)} \cdots \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \end{array}\right.$$

angeordnet; dabei markirt also der *obere* Index ν die *Zeile*, der *untere* Index μ die *Colonne*, welcher der Term $a_\mu^{(\nu)}$ angehört. Wir sagen, die *Doppelfolge* $a_\mu^{(\nu)}$ sei *convergent* und besitze für $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$ (ausführlicher: wenn μ, ν *unabhängig* von einander und *gleichzeitig* ins Unendliche wachsen) den *endlichen Grenzwerth* A, in Zeichen:

$$(2) \qquad \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A,$$

wenn zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen n_1, n_2 existiren, sodass:

$$(2\text{a}) \qquad \left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \mu \geqq n_1,\ \nu \geqq n_2.\text{***})$$

*) Mit Hülfe sehr einfacher Zahlen-Schemata (vgl. § 3, Beisp. 1) und 3)) kann man diesen, bei der sonst üblichen Einführungsart dem *Anfänger* meist äusserst schwierig erscheinenden und dennoch, nach meinem Dafürhalten, selbst in *Elementar*-Vorlesungen kaum mehr zu entbehrenden Begriff, förmlich *ad oculos* demonstriren.

**) Ueber den Sinn dieser Bezeichnungsweise vgl. p. 302, Fussnote.

***) Ich gebe der Formulirung: $\left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| \leqq \varepsilon$ vor der zumeist üblichen: $\left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| < \varepsilon$ den Vorzug, weil sie bei der Willkürlichkeit von ε schliesslich genau

Diese Bedingung lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch durch die folgende ersetzen:

(2b) $$|a_\mu^{(\nu)} - A| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n.$$

Denn die letztere ist einerseits als specieller Fall in (2a) enthalten, nämlich wenn $n_1 = n_2$; andererseits kann man, wenn $n_1 \gtrless n_2$, die Bedingung (2a) in (2b) überführen, indem es freisteht, die *kleinere* der beiden Zahlen n_1, n_2 durch die grössere zu ersetzen.

Die Doppelfolge heisst *eigentlich divergent*, ihr *Grenzwerth* $+\infty$ bezw.: $-\infty$, in Zeichen:

(3) $$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bezw.:} \quad = -\infty,$$

wenn zu jedem (beliebig grossen) $G > 0$ zwei natürliche Zahlen n_1, n_2 existiren, sodass

(3a) $$a_\mu^{(\nu)} > G \text{ bezw. } < -G \quad \text{für:} \quad \mu \geqq n_1,\ \nu \geqq n_2.$$

Dabei ist es wiederum gestattet, diese Bedingung durch die folgende zu ersetzen:

(3b) $$a_\mu^{(\nu)} > G \text{ bezw. } < -G \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n.$$

Die beiden durch Gl. (2) und (3) charakterisirten Fälle der *Convergenz* und *eigentlichen Divergenz* sollen gelegentlich auch durch den Ausdruck zusammengefasst werden, dass der *Limes der Doppelfolge* oder auch der *Doppel-Limes* $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *existire.*

2. Die *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die *Convergenz* der Doppelfolge kann auch so formulirt werden, dass sie nur die $a_\mu^{(\nu)}$, nicht aber den betreffenden Grenzwerth A enthält. Man kann ihr jede der folgenden drei Formen geben, welche trotz ihrer äusseren Verschiedenheit dieselbe Tragweite besitzen:

(4a) $$\left|a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \begin{cases}\mu \geqq n_1 & \varrho = 0, 1, 2, \cdots\\ \nu \geqq n_2 & \sigma = 0, 1, 2, \cdots\end{cases}$$

(4b) $$\left|a_{\nu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\nu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \begin{cases}\nu \geqq n & \varrho = 0, 1, 2, \cdots\\ & \sigma = 0, 1, 2, \cdots\end{cases}$$

(4c) $$\left|a_\mu^{(\nu)} - a_n^{(n)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n.$$

Man erkennt zunächst, dass (4b) und (4c) durch successive Specialisirung aus (4a) hervorgehen. Es genügt daher, nachzuweisen, dass für die *Con-*

dieselbe Tragweite besitzt, wie diese letztere, während andererseits ihre (aus irgendwelchen Voraussetzungen zu folgernde) *Existenz* gewöhnlich etwas *kürzer* erwiesen werden kann, als diejenige von: $\left|a_\mu^{(\nu)} - A\right| < \varepsilon$.

vergenz der Doppelfolge (4a) eine *nothwendige*, (4c) eine *hinreichende* Bedingung darstellt.

Ist nun zunächst die Folge *convergent*, A ihr Grenzwerth, so kann man nach (2a) n_1, n_2 so fixiren, dass:

$$\left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \mu \geqq n_1, \; \nu \geqq n_2$$

und somit auch:

$$\left| a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - A \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \begin{cases} \mu \geqq n_1 & \varrho = 0, 1, 2, \cdots \\ \nu \geqq n_2 & \sigma = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

sodass durch Combination dieser beiden Ungleichungen unmittelbar die Bedingung (4a) (und somit auch (4b), (4c)) als *nothwendig* für die *Convergenz* resultirt.

Besteht andererseits die Bedingung (4c), so kann man zunächst m so fixiren, dass:

$$\left| a_\mu^{(\nu)} - a_m^{(m)} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix}\right\} \geqq m, \tag{5}$$

und man hat daher speciell für $\mu = \nu$:

$$\left| a_\nu^{(\nu)} - a_m^{(m)} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq m. \tag{6}$$

Die letztere Ungleichung besagt aber, dass die *einfach unendliche* Folge $\left(a_\nu^{(\nu)}\right)$ *convergent* und somit eine *bestimmte Zahl*

$$A = \lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}$$

existirt. Man kann daher ein n so fixiren, dass:

$$\left| a_\nu^{(\nu)} - A \right| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \tag{7}$$

wobei es von vornherein freisteht $n \geqq m$ anzunehmen. Sodann wird aber

$$a_\mu^{(\nu)} - A = a_\mu^{(\nu)} - a_m^{(m)} + \left(a_m^{(m)} - a_n^{(n)}\right) + \left(a_n^{(n)} - A\right),$$

also:

$$\left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| \leqq \left| a_\mu^{(\nu)} - a_m^{(m)} \right| + \left| a_n^{(n)} - a_m^{(m)} \right| + \left| a_n^{(n)} - A \right|,$$

d. h. schliesslich mit Benützung von Ungl. (5), (6), (7):

$$\left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix}\right\} \geqq n,$$

woraus nach (2b) die *Convergenz* der Doppelfolge gegen den Grenzwerth $A \left(= \lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}\right)$ resultirt.

3. Die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ heisst *monoton* und zwar *niemals ab-* bezw. *niemals zunehmend*, wenn *durchweg:*

$$a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0 \quad \text{bezw.} \quad a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \leqq 0 \tag{8}$$

$= 0, 1, 2, \cdots, \sigma = 0, 1, 2, \cdots)$. Für solche Doppelfolgen gilt zunächst Satz:

Bleiben die $\left|a_\mu^{(\nu)}\right|$ *unter einer Zahl* g, *so ist die monotone Doppelfolge* $\left|a_\mu^{(\nu)}\right|$ *allemal* **convergent.**

Beweis*). Es sei etwa die fragliche Folge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ eine *niemals abnehmende*, sodass also die *erste* der Ungleichungen (8) als gültig vorausgesetzt wird. Angenommen nun, die Folge sei *nicht convergent*, so müsste t Rücksicht auf die Convergenzbedingung (4a), *wie gross* auch μ, ν genommen werden, zu dem Term $a_\mu^{(\nu)}$ ein anderer $a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)}$ existiren, sodass

$$\left|a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)}\right| = a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} > \varepsilon,$$

o ε eine möglicherweise sehr kleine, aber *bestimmte* positive Zahl bedeutet. an könnte darnach aus der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ eine *unbegrenzt fortsetzbare* olge von Termen:

$$a_m^{(n)},\ a_{m+\varrho_1}^{(n+\sigma_1)}, \cdots a_{m+\varrho_\varkappa}^{(n+\sigma_\varkappa)}, \cdots$$

rausheben, sodass:

$$\begin{aligned} a_{m+\varrho_1}^{(n+\sigma_1)} &- a_m^{(n)} && > \varepsilon, \\ a_{m+\varrho_2}^{(n+\sigma_2)} &- a_{m+\varrho_1}^{(n+\sigma_1)} && > \varepsilon, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+\varrho_\varkappa}^{(n+\sigma_\varkappa)} &- a_{m+\varrho_{\varkappa-1}}^{(n+\sigma_{\varkappa-1})} && > \varepsilon \end{aligned}$$

d daher für *jedes noch so grosse n:*

$$a_{m+\varrho_\varkappa}^{(n+\sigma_\varkappa)} - a_m^{(n)} > \varkappa\varepsilon \text{ d. h. } a_{m+\varrho_\varkappa}^{(n+\sigma_\varkappa)} > a_m^{(n)} + \varkappa\varepsilon,$$

s der Voraussetzung $\left|a_\mu^{(\nu)}\right| < g$ widersprechen wird. Somit muss die mals abnehmende* Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ unter der gemachten Voraussetzung *vergiren.*

Das analoge Resultat ergiebt sich sodann ohne weiteres für eine *mals zunehmende* Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$, wenn man beachtet, dass in diesem lle die Doppelfolge $\left(-a_\mu^{(\nu)}\right)$ eine *niemals abnehmende* und

$$\lim_{\mu,\nu=\infty}\left(-a_\mu^{(\nu)}\right) = -\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$$

4. Bleiben die $\left|a_\mu^{(\nu)}\right|$ einer monotonen Doppelfolge *nicht* unter einer ten Grenze, giebt es also, *wie gross* man auch $G > 0$ annehmen möge, ts Terme $a_\mu^{(\nu)}$, für welche $\left|a_\mu^{(\nu)}\right| > G$, so existiren nur die folgenden iden Möglichkeiten:

*) Vgl. auch p. 301, Fussnote.

Entweder die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ ist eine ***niemals abnehmende***. Dann müssen die $a_\mu^{(\nu)}$, wenn ihr absoluter Betrag schliesslich jedes beliebige G übersteigen soll, für hinlänglich grosse μ, ν durchweg *positiv* werden, sodass also nicht nur $\left|a_\mu^{(\nu)}\right| > G$, sondern $a_\mu^{(\nu)} > G$ wird, d. h. man hat in diesem Falle:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

Oder die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ ist eine ***niemals zunehmende***. Dann bilden wiederum die Terme $-a_\mu^{(\nu)}$ eine *niemals abnehmende* Folge, für welche $\left|-a_\mu^{(\nu)}\right|$ beliebig gross wird. Man hat daher zunächst:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} \left(-a_\mu^{(\nu)}\right) = +\infty$$

und daher schliesslich:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty. -$$

Da hiernach für *monotone* Doppelfolgen $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ als *endlich* oder *unendlich gross* stets *existirt* und somit auch durch $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}$ ersetzt werden kann, so gilt auch der folgende Satz:

Eine monotone Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ ist entweder convergent oder eigentlich divergent; sie convergirt oder divergirt, je nachdem $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}$ endlich oder unendlich ausfällt und man hat: $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}$.

§ 2.

Uneigentlich divergente Doppelfolgen. — Unterer und oberer Limes (Unbestimmtheitsgrenzen) der Doppelfolge.

1. Jede Doppelfolge, welche *weder convergirt, noch eigentlich divergirt*, soll als *uneigentlich divergent* bezeichnet werden. Zur genaueren Charakterisirung des Verhaltens, welches den Termen $a_\mu^{(\nu)}$ einer solchen Doppelfolge für $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$ zukommt, stellen wir die folgende Betrachtung an:

Es sei $a_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ das allgemeine Glied einer *beliebigen* (d. h. eventuell auch convergenten oder eigentlich divergenten) Doppelfolge. Die Gesammtheit der in dieser Doppelfolge enthaltenen Terme werde (mit Rücksicht auf das *Anfangs*glied $a_0^{(0)}$) mit $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_0^0$ bezeichnet; und analog bezeichne $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_m^n$ die Gesammtheit derjenigen Terme, che nach Weglassung der ersten m Colonnen und n Zeilen übrig ben, also:

$$\begin{array}{llll} a_m^{(n)} & a_{m+1}^{(n)} \cdots & a_{m+\varrho}^{(n)} & \cdots \\ a_m^{(n+1)} & a_{m+1}^{(n+1)} \cdots & a_{m+\varrho}^{(n+1)} & \cdots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^{(n+\sigma)} & a_{m+1}^{(n+\sigma)} \cdots & a_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} & \cdots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

se Terme $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_m^n$ besitzen allemal eine *untere* Grenze $\underline{A}_m^{(n)}$ und eine re Grenze $\overline{A}_m^{(n)}$, wo $\underline{A}_m^{(n)}$, $\overline{A}_m^{(n)}$ entweder *bestimmte Zahlen* vorstellen oder h $\underline{A}_m^{(n)} = -\infty$, $\overline{A}_m^{(n)} = +\infty$ sein kann. Dabei hat man offenbar stets:

$$\underline{A}_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} \geqq \underline{A}_m^{(n)}, \quad \overline{A}_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} \leqq \overline{A}_m^{(n)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 0, 1, 2, \cdots \\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix}$$

)
$$\underline{A}_m^{(n)} \leqq \overline{A}_m^{(n)}.$$

n den beiden einfachen Zahlenfolgen:

1a)
$$\underline{A}_0^{(0)}, \underline{A}_1^{(1)}, \cdots \underline{A}_\nu^{(\nu)}, \cdots$$

1b)
$$\overline{A}_0^{(0)}, \overline{A}_1^{(1)}, \cdots \overline{A}_\nu^{(\nu)}, \cdots$$

t also die erste *niemals abnehmend*, die zweite *niemals zunehmend.* Dabei nn der besondere Fall eintreten, dass die Folge (11a) aus lauter Termen $-\infty$ besteht*), sodass also auch $\lim\limits_{\nu=\infty} \underline{A}_\nu^{(\nu)} = -\infty$. In jedem anderen alle muss die Folge (11a) als *niemals abnehmend convergiren* oder *nach* $-\infty$ *divergiren.* Man kann also schliesslich setzen:

12a)
$$\lim_{\nu=\infty} \underline{A}_\nu^{(\nu)} = \underline{A},$$

o $\underline{A}$ *eine bestimmte Zahl* oder *ein* ∞ *mit bestimmtem Vorzeichen* vorstellt.

Analog kann die Folge (11b) aus lauter Termen $+\infty$ bestehen, in elchem Falle dann auch $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{A}_\nu^{(\nu)} = +\infty$ wird. Andernfalls muss sie s *niemals zunehmend convergiren* oder *nach* $-\infty$ *divergiren*, und man it schliesslich

2b)
$$\lim_{\nu=\infty} \overline{A}_\nu^{(\nu)} = \overline{A},$$

---

*) Dieser Fall tritt ein, wenn die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ nach $-\infty$ divergirt, oder n zum mindesten zu jedem noch so grossen G und n immer negative Terme vorhanden sind, die numerisch über G liegen, während zugleich $\mu > n$, $\nu > n$.

wo wiederum $\bar{A}$ ***eine bestimmte Zahl*** oder ∞ ***mit bestimmtem Vorzeichen*** vorstellt. Zugleich folgt aus Ungl. (10), dass allemal:

$$(13) \qquad \underline{A} \leqq \bar{A}.$$

Diese beiden für das Verhalten der $a_\mu^{(\nu)}$ bei $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$ als *charakteristisch* sich erweisenden Zahlen $\underline{A}$, $\bar{A}$ sollen die ***Haupt-Limites*** (Unbestimmtheitsgrenzen) *der Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ oder kürzer schlechthin die *Doppel-Limites* der $a_\mu^{(\nu)}$ für $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$ heissen, speciell $\underline{A}$ der *untere*, $\bar{A}$ der *obere Doppel-Limes* in Zeichen:

$$(14) \qquad \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{A}, \qquad \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{A}.$$

Man bemerke zunächst noch, dass diese Zahlen $\underline{A}$, $\bar{A}$ auch zu Stande kommen, wenn man statt der *einfachen* Folgen (11a), (11b) die *Doppelfolgen* $\left(\underline{A}_\mu^{(\nu)}\right)$, $\left(\bar{A}_\mu^{(\nu)}\right)$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots; \ \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ in Betracht zieht. Denn da diese letzteren nach Ungl. (5) *monoton* sind, so erkennt man unmittelbar mit Hülfe des Schluss-Satzes in § 1, dass*):

$$(15) \qquad \lim_{\mu,\nu=\infty} \underline{A}_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \underline{A}_\nu^{(\nu)}, \qquad \lim_{\mu,\nu=\infty} \bar{A}_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \bar{A}_\nu^{(\nu)}.$$

Ferner sei noch hervorgehoben, dass wegen der *Monotonie* der Doppelfolgen $\left(\underline{A}_\mu^{(\nu)}\right)$, $\left(\bar{A}_\mu^{(\nu)}\right)$ die Zahl $\underline{A}$ statt als $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} \underline{A}_\mu^{(\nu)}$ auch als *obere Grenze* der $\underline{A}_\mu^{(\nu)}$ und analog $\bar{A}$ als *untere Grenze* der $\bar{A}_\mu^{(\nu)}$ definirt werden kann.

2. Es mögen nun zunächst $\underline{A}$ und $\bar{A}$ als *endlich* vorausgesetzt werden. Auf Grund der Definitionsgleichungen (12a), (12b) muss sich dann zu jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein n so fixiren lassen, dass:

$$(16) \quad \underline{A} - \varepsilon \leqq \underline{A}_\nu^{(\nu)} \leqq \underline{A} + \varepsilon, \qquad \bar{A} - \varepsilon \leqq \bar{A}_\nu^{(\nu)} \leqq \bar{A} + \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n.$$

*) Es thut der Anwendbarkeit jenes Satzes keinen Eintrag, dass unter den $\underline{A}_\mu^{(\nu)}$ bezw. $\bar{A}_\mu^{(\nu)}$ beliebig oft der Term $-\infty$ bezw. $+\infty$ vorkommen kann, während in § 1 die $a_\mu^{(\nu)}$ durchweg als *bestimmte Zahlen* anzusehen sind. Betrachtet man z. B. die Folge der $\underline{A}_\mu^{(\nu)}$, so ist die Möglichkeit $\underline{A}_m^{(n)} = +\infty$ (wegen der Bedeutung von $\underline{A}_m^{(n)}$ als *untere* Grenze der für *jedes endliche* (μ, ν) als *endlich* zu denkenden Terme $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_m^n$) definitiv *ausgeschlossen*. Ist nun aber etwa $\underline{A}_0^{(0)} = -\infty$, so kann entweder nur der im Texte hervorgehobene Fall eintreten, dass *alle* $\underline{A}_\nu^{(\nu)} = -\infty$ und folglich wegen der *Monotonie* der $\underline{A}_\mu^{(\nu)}$ auch *alle* $\underline{A}_\mu^{(\nu)} = -\infty$, sodass also schliesslich:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} \underline{A}_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \underline{A}_\nu^{(\nu)} = -\infty.$$

Oder: Es giebt einmal ein *endliches* $\underline{A}_n^{(n)}$. Dann besteht aber die Doppelfolge $\left[\underline{A}_\mu^{(\nu)}\right]_n^n$ aus lauter *endlichen* Termen und gestattet somit ohne weiteres die Anwendung des fraglichen Satzes. Das analoge gilt bezüglich der $\bar{A}_\mu^{(\nu)}$.

Da nun andererseits wegen der Bedeutung der Zahlen $\underline{A}_\nu^{(\nu)}$, $\bar{A}_\nu^{(\nu)}$:

$$(17)\qquad \underline{A}_n^{(n)} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{A}_{(n)}^{(n)} \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n,$$

so folgt zunächst, wenn man in Ungl. (16) $\nu = n$ setzt, mit Berücksichtigung von (17):

$$(18)\qquad \underline{A} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{A} + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n.$$

Diese Ungleichung enthält *die erste Haupteigenschaft* der Limites $\underline{A}$, $\bar{A}$, nämlich:

(I) *Bei beliebig klein vorgeschriebenem* $\varepsilon > 0$ *und hinlänglich grossem* n *gehören alle Terme der Doppelfolge* $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_n^n$ *dem Zahlenintervalle* $\left(\underline{A} - \varepsilon,\ \bar{A} + \varepsilon\right)$ *an.*

Des weiteren folgt aus der Bedeutung von $\underline{A}_\nu^{(\nu)}$ als *untere Grenze* der mit $a_\nu^{(\nu)}$ beginnenden Doppelfolge, dass *mindestens ein* Term $a_\varrho^{(\sigma)}$ vorhanden sein muss, sodass:

$$(19)\qquad \underline{A}_\nu^{(\nu)} - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{A}_\nu^{(\nu)} \leqq a_\varrho^{(\sigma)} < \underline{A}_\nu^{(\nu)} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{wo:} \quad \left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} \geqq \nu.$$

Da man andererseits nach Ungl. (16) ν von vornherein so gross annehmen kann, dass:

$$(20)\qquad \underline{A} - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \underline{A}_\nu^{(\nu)} \leqq \underline{A} + \frac{\varepsilon}{2}$$

so ergiebt sich das Bestehen der Ungleichungen:

$$(21)\qquad \underline{A} - \varepsilon < a_\varrho^{(\sigma)} < \underline{A} + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} \geqq \nu$$

in dem folgenden Sinne: Wird $\varepsilon > 0$ *beliebig klein*, ν *beliebig gross vorgeschrieben*, so existirt allemal *mindestens ein* Term $a_\varrho^{(\sigma)}$, welcher den Bedingungen (21) genügt.

Nun bedeute ε_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ eine unbegrenzte Folge positiver Zahlen mit dem Grenzwerthe $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0$, und es sei $a_{m_0}^{(n_0)}$ *irgend ein bestimmter* (auf Grund von (21) *sicher vorhandener*) Term, welcher der Bedingung genügt:

$$\underline{A} - \varepsilon_0 < a_{m_0}^{(n_0)} < \underline{A} + \varepsilon_0.$$

Wird alsdann die ganze Zahl $r_0 > m_0$ und $> n_0$ angenommen, so resultirt aus (21) die Existenz eines Terms $a_{m_1}^{(n_1)}$ von der Beschaffenheit, dass:

$$\underline{A} - \varepsilon_1 < a_{m_1}^{(n_1)} < \underline{A} + \varepsilon_1, \quad \text{wo:} \quad \left.\begin{matrix}m_1\\ n_1\end{matrix}\right\} \geqq r_0, \quad \text{also:} \quad \left\{\begin{matrix}m_1 > m_0,\\ n_1 > n_0.\end{matrix}\right.$$

Daraus folgt in analoger Weise:

$$\underline{A} - \varepsilon_2 < a_{m_2}^{(n_2)} < \underline{A} + \varepsilon_2, \quad \text{wo:} \begin{cases} m_2 > m_1, \\ n_2 > n_1, \end{cases}$$

und bei Fortsetzung dieser Schlussweise:

$$(21) \qquad \underline{A} - \varepsilon_\nu < a_{m_\nu}^{(n_\nu)} < \underline{A} + \varepsilon_\nu, \quad \text{wo:} \begin{cases} m_\nu > m_{\nu-1} \\ n_\nu > n_{\nu-1} \end{cases} (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Da vollkommen analoge Beziehungen sich auch für $\bar{A}$ ergeben, so kann man als *zweite Haupteigenschaft* von $\underline{A}$, $\bar{A}$ im Anschlusse an Ungl. (21), (22) folgendes aussprechen:

(II) *Zu jedem beliebig klein vorgeschriebenem* $\varepsilon > 0$ *giebt es unendlich viele, jede beliebig gross vorgeschriebene Zahl übersteigende Zahlenpaare* (μ, ν), *sodass:*

$$(23) \qquad \underline{A} - \varepsilon < a_\mu^{(\nu)} < \underline{A} + \varepsilon \quad \textit{bezw.} \quad \bar{A} - \varepsilon < a_\mu^{(\nu)} < \bar{A} + \varepsilon.$$

Insbesondere existiren zu jeder positiven, nach 0 *convergirenden Zahlenfolge* (ε_ν) *monoton in's Unendliche wachsende Folgen natürlicher Zahlen* m_ν, n_ν *bezw.* p_ν, q_ν, *sodass:*

$$(24) \qquad \underline{A} - \varepsilon_\nu < a_{m_\nu}^{(n_\nu)} < \underline{A} + \varepsilon_\nu \quad \textit{bezw.} \quad \bar{A} - \varepsilon_\nu < a_{p_\nu}^{(q_\nu)} < \bar{A} + \varepsilon_\nu.$$

3. Es soll jetzt der Fall betrachtet werden, dass $\underline{\lim}_{\mu, \nu = \infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{A}$ *endlich*, dagegen $\overline{\lim}_{\mu, \nu = \infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$. Alle auf die Zahl $\underline{A}$ bezüglichen Ergebnisse bleiben alsdann unverändert, während an die Stelle der Ungleichung (18) nunmehr die folgende tritt:

$$(25) \qquad \underline{A} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} < +\infty \quad \text{für:} \left.\begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix}\right\} \geqq n,$$

d. h.:

(Ia) *Bei beliebig klein vorgeschriebenem* $\varepsilon > 0$ *und hinlänglich gross gewähltem* n *gehören alle Terme der Doppelfolge* $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_n^n$ *dem Intervalle* $(\underline{A} - \varepsilon, \infty)$ *an.*

Andererseits erheischt die Annahme $\overline{\lim}_{\mu, \nu = \infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$, d. h. schliesslich $\lim_{\nu = \infty} \bar{A}_\nu^{(\nu)} = \infty$, wie in Nr. 1 bemerkt wurde, dass geradezu

$$\bar{A}_\nu^{(\nu)} = \infty \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Aus der Bedeutung von $\bar{A}_\nu^{(\nu)}$ als *oberer Grenze* der mit $a_\nu^{(\nu)}$ beginnenden Doppelfolge ergiebt sich dann aber: wird G und ν *beliebig gross vorgeschrieben*, so giebt es stets Terme $a_\varrho^{(\sigma)}$, sodass:

$$(26) \qquad a_\varrho^{(\sigma)} > G \text{ und zugleich:} \left.\begin{matrix} \varrho \\ \sigma \end{matrix}\right\} > \nu.$$

Bedeutet nun G_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ eine Folge positiver Zahlen mit dem Grenzwerthe $+\infty$, so hat man zunächst für irgend ein bestimmtes Zahlenpaar p_0, q_0:

$$a_{p_0}^{(q_0)} > G_0,$$

und sodann, wenn $r_0 \geqq p_0$ und $\geqq q_0$ angenommen wird, auf Grund von Ungl. (26):

$$a_{p_1}^{(q_1)} > G_1, \quad \text{wo:} \quad \left.\begin{matrix} p_1 \\ q_1 \end{matrix}\right\} > r_0, \quad \text{also auch:} \quad \left\{\begin{matrix} p_1 > p_0, \\ q_1 > q_0. \end{matrix}\right.$$

In dieser Weise weiter fortschliessend gelangt man zu einer Beziehung von der Form:

$$(27) \qquad a_{p_\nu}^{(q_\nu)} > G_\nu, \quad \text{wo:} \quad \left\{\begin{matrix} p_\nu > p_{\nu-1} \\ q_\nu > q_{\nu-1} \end{matrix}\right. \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Somit tritt hier an die Stelle der Haupteigenschaft (II), soweit sie sich auf $\overline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ bezieht, die folgende (s. Ungl. (26), (27)):

(IIa) *Zu jedem beliebig gross vorgeschriebenem $G > 0$ giebt es unendlich viele, jede beliebig gross vorgeschriebene Zahl übersteigende Zahlenpaare (μ, ν), sodass:*

$$(28) \qquad a_\mu^{(\nu)} > G.$$

Insbesondere existiren zu jeder positiven, nach $+\infty$ divergirenden Zahlenfolge (G_ν) monoton in's Unendliche wachsende Folgen natürlicher Zahlen p_ν, q_ν, sodass:

$$(29) \qquad a_{p_\nu}^{(q_\nu)} > G_\nu.$$

Es ist ohne weiteres klar, wie dieses Resultat für den Fall:

$$\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = -\infty, \quad \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \bar{A} \quad (\textit{endlich}) \quad \text{oder} \quad = +\infty,$$

zu modificiren ist.

4. Ist $\underline{A} = \bar{A}$ *endlich*, so geht Ungl. (18), wenn man A für $\underline{A}$ und $\bar{A}$ schreibt, in die folgende über:

$$A - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq A + \varepsilon \quad \text{d. h.} \quad \left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix}\right\} \geqq n,$$

welche mit der *Convergenz*-Bedingung (2a) zusammenfällt. Die Doppelfolge *convergirt* also in diesem Falle gegen den Grenzwerth A, d. h. man hat:

$$(30) \qquad \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

Diese letztere Beziehung gilt auch noch, wenn $+\infty$ oder $-\infty$ an die Stelle der endlichen Zahl A tritt. Ist nämlich

$$\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \underline{A}_\nu^{(\nu)} = +\infty$$

(in welchem Falle dann nach Ungl. (13) *eo ipso* auch $\overline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$),
so kann man zu beliebig grossem G ein n so fixiren, dass:

$$\underline{A}_n^{(n)} > G$$

und somit, da $\underline{A}_n^{(n)}$ die *untere Grenze* der Terme $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_n^n$:

$$a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{für:} \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n$$

d. h. (s. Ungl. (3b)): Die Doppelfolge *divergirt* nach $+\infty$.

Das entsprechende ergiebt sich dann im Falle $\overline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}} a_\mu^{(\nu)} = -\infty$.

Die *convergenten* und *eigentlich divergenten* Doppelfolgen sind also durch die Beziehung:

(31a) $$\underline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}} a_\mu^{(\nu)}$$

die *uneigentlich divergenten* durch:

(31b) $$\underline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}} a_\mu^{(\nu)} < \overline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}} a_\mu^{(\nu)}$$

charakterisirt.

5. Man kann den vorstehenden Resultaten noch eine andere, vielleicht anschaulichere Fassung geben. Es bedeute m_ν, n_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ je eine Folge natürlicher *monoton* in's Unendliche wachsender Zahlen. Alsdann soll die aus der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *herausgehobene einfache* Folge

$$\left(a_{m_\nu}^{n_\nu}\right) \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

eine *ächte Theilfolge* der ersteren heissen*). Dies vorausgeschickt lässt sich der Inhalt der in Nr. 2 und 3 entwickelten Beziehungen auch folgendermassen aussprechen:

---

*) Z. B. $\left(a_\nu^{(\nu)}\right)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ = Folge der in der *Haupt-Diagonale* enthaltenen Glieder: $\left(a_{\nu+q}^{(\nu)}\right)$, $\left(a_\nu^{(\nu+q)}\right)$ = jede zur Haupt-Diagonale *parallele* Folge. Ferner die beliebigen „*geradlinigen*" Folgen: $\left(a_{p\nu+q}^{(\nu)}\right)$, $\left(a_\nu^{(p\nu+q)}\right)$, die „*parabolischen*" Folgen: $\left(a_{p\nu^2+q}^{(\nu)}\right)$, $\left(a_\nu^{(p\nu^2+q)}\right)$, etc. Die Bedeutung dieser letzteren Terminologie leuchtet ohne weiteres ein, wenn man sich in dem Schema (1) jeden einzelnen Term $a_\mu^{(\nu)}$ genau in dem *Punkte* mit den rechtwinkligen Coordinaten $(\mu, -\nu)$ concentrirt denkt. Bedeutet dann $\varphi(\nu)$ irgend eine ganzzahlige Function von ν, so enthalten die Folgen: $\left(a_{\varphi(\nu)}^{(\nu)}\right)$, $\left(a_\nu^{(\varphi(\nu))}\right)$ alle diejenigen Terme, deren zugeordnete Punkte („*Gitterpunkte*") von der Curve

$$x = \varphi(-y) \quad \text{bezw.} \quad y = -\varphi(x)$$

getroffen werden.

Ist $\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{A}$, $\overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{A}$ (*wo* $\underline{A}$, $\bar{A}$ *endlich oder* ∞ *mit bestimmtem Vorzeichen*), *so existiren ächte Theilfolgen mit den Grenzwerthen* $\underline{A}$ *und* $\bar{A}$ (s. Ungl. (24), (29)); *dagegen giebt es keine ächte Theilfolge, welche einen kleineren Grenzwerth als* $\underline{A}$ *oder einen grösseren als* $\bar{A}$ *besitzt* (s. Ungl. (18), (25)).

ner folgt für den Fall $\underline{A} = \bar{A}$:

Ist die Doppelfolge convergent oder eigentlich divergent, so gilt das entsprechende von jeder Theilfolge, bei welcher beide Indices in's Unendliche wachsen (s. Ungl. (2a), (4a) und (3a)), *insbesondere also von jeder ächten Theilfolge.*

ıgekehrt:

Weiss man nur, dass jede ächte Theilfolge convergirt bezw. eigentlich divergirt, so gilt das entsprechende von der Doppelfolge selbst).*

›nn nämlich die ächten Theilfolgen *convergiren*, so kann nach dem ısgesprochenen Satze die Doppelfolge zunächst *nicht eigentlich* *n* . Sie kann aber auch nicht *uneigentlich divergiren*, d. h. *ver-* e Limites $\underline{A}$, $\bar{A}$ besitzen. Denn alsdann könnte man zunächst aus ›pelfolge zwei ächte Theilfolgen mit den Limites $\underline{A}$ und $\bar{A}$ heraus- ınd aus diesen durch Vereinigung passend ausgewälter Glieder eine *lich divergente ächte Theilfolge* (mit den Limites $\underline{A}$, $\bar{A}$) bilden, was raussetzung widerspricht. Somit muss in diesem Falle die Doppel- *nvergiren.*

s analoge gilt für den Fall, dass die ächten Theilfolgen *eigentlich* *n.*

§ 3.

,imites und iterirten Limites der Zeilen und Colonnen. — leichmässige Convergenz, Divergenz, Begrenztheit und Unbegrenztheit der Zeilen (Colonnen).

Wesentlich verschieden von den *ächten Theilfolgen*, als dem ein- Typus von Theilfolgen, bei welchen *beide* Indices schliesslich in's che wachsen, sind diejenigen Theilfolgen, bei denen nur der *eine* iese Eigenschaft besitzt und als deren einfachster Typus die *Zeilen*

$$a_0^{(\nu)} \; a_1^{(\nu)} \cdots a_\mu^{(\nu)} \cdots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

onnen:

$$a_\mu^{(0)} \; a_\mu^{(1)} \cdots a_\mu^{(\nu)} \cdots \qquad (\mu = 0, 1, 2, \cdots)$$

*) Hieraus könnte man auch ohne weiteres die *Convergenz* bezw. *eigentliche* r jeder *monotonen Doppelfolge* erschliessen.

des Schema's (1) erscheinen. Man bemerkt zunächst, dass das Verhalten einer *beliebigen endlichen Anzahl* von *Zeilen* und *Colonnen* auf die in § 1, 2 näher entwickelten *Limites der Doppelfolge* keinerlei Einfluss übt. Denn die zur Charakterisirung dieser *Limites* dienenden Ungleichungen (2b), (3b), (18), (21), (25), (26) verlangen ja gewisse Eigenschaften lediglich von denjenigen $a_\mu^{(\nu)}$, bei denen *beide* Indices gewisse Grenzen überschreiten. Um im übrigen die Beziehungen zwischen den *Limites* der *Zeilen* (*Colonnen*) und denjenigen der *Doppelfolge* des genaueren festzustellen (s. § 4), schicken wir zunächst die folgenden Betrachtungen voraus. *Dabei gilt alles, was bezüglich der Zeilen gesagt wird, mutatis mutandis auch für die Colonnen.*

Die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ jeder einzelnen Zeile (also ν beliebig, aber constant; $\mu = 0, 1, 2, \cdots$) besitzen stets einen *unteren* und einen *oberen* Limes:

$$(32) \qquad \begin{cases} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)} \quad \text{bezw.} \quad = \pm\infty, \\ \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)} \quad \text{bezw.} \quad = \pm\infty, \end{cases} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

welche beiden eventuell auch zusammenfallen können. Im letzteren Falle „*existirt*“ $\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, in Zeichen*):

$$(33) \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)} \quad \text{bezw.} \quad = \pm\infty,$$

und die betreffende Zeile ist *convergent* bezw. *eigentlich divergent*.

Bildet man sodann die beiden Folgen:

$$(34) \qquad \begin{cases} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(0)}, \ \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(1)}, \cdots \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \cdots \\ \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(0)}, \ \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(1)}, \cdots \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \cdots \end{cases}$$

(in denen eventuell auch beliebig viele Terme $+\infty$, $-\infty$ vorkommen können), so gehört zu jeder derselben wiederum ein *unterer* und ein *oberer Limes*, in Zeichen:

$$(35) \qquad \underline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \quad \overline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \quad \underline{\lim}_{\nu=\infty} \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \quad \overline{\lim}_{\nu=\infty} \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Die beiden *äusseren* dieser vier (eventuell auch sämmtlich oder theilweise unter einander gleichen) Zahlen will ich als den *iterirten unteren* bezw. *oberen Zeilen-Limes* bezeichnen. Aus der unmittelbar einleuchtenden Beziehung:

$$(36) \qquad \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \leq \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

*) Die Bezeichnung $\overline{\underline{\lim}}$ soll generell die Bedeutung haben, dass es in der betreffenden Formel freisteht, $\underline{\lim}$ oder $\overline{\lim}$ zu wählen.

folgt sodann:

$$(37)\quad \begin{cases} \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)}, \\ \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} \leqq \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)}\ ^{*)}. \end{cases}$$

Sind also jene beiden *äusseren* Limites einander *gleich*, so *fallen* auch die beiden *mittleren* mit ihnen *zusammen*, d. h. in diesem Falle *existirt* ein eindeutig bestimmter

$$\lim_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} \quad \text{(als *endlich* bezw. } +\infty \text{ oder } -\infty),$$

der dann als *iterirter Zeilen-Limes* schlechthin bezeichnet werden möge.

2. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass man den *iterirten unteren* bezw. *oberen Zeilen-Limes* allemal auch durch *einfache Limites* und zwar durch *Grenzwerthe ächter Theilfolgen* ersetzen kann**). Es gilt nämlich der Satz:

Man kann aus der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *stets ächte Theilfolgen* $\left(a_{m_\nu}^{(n_\nu)}\right)$, $\left(a_{p_\nu}^{(q_\nu)}\right)$ *so herausheben, dass:*

$$(38)\qquad \lim_{\nu=\infty} a_{m_\nu}^{(n_\nu)} = \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)}, \quad \lim_{\nu=\infty} a_{p_\nu}^{(q_\nu)} = \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)}.$$

Beim *Beweise* dieses Satzes haben wir drei Fälle zu unterscheiden, je

---

*) Dagegen kann sehr wohl:

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} > \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)}$$

ausfallen. Beispiel:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^\mu + 2\left(1+(-1)^\nu\right),$$

also:

$$a_\mu^{(2\nu)} = (-1)^\mu + 4,$$

$$a_\mu^{(2\nu+1)} = (-1)^\mu,$$

und daher:

$$\underline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(2\nu)} = 3, \qquad \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(2\nu)} = 5,$$

$$\underline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(2\nu+1)} = -1, \qquad \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(2\nu+1)} = 1.$$

Daraus folgt weiter:

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = 3,$$

$$\underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = 1,$$

d. h. in der That:

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} > \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)}.$$

**) Anders ausgedrückt: Man kann jeden *successiven* Grenzübergang auch durch einen *speciellen simultanen* ersetzen.

nachdem die in Frage kommenden Limites *endlich* oder *unendlich* mit n
näher zu specificirendem Vorzeichen ausfallen.

Fall I. Es sei zunächst:

(39) $$\underline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a} \quad \text{(wo } \underline{a} \text{ eine bestimmte Zahl).}$$

Aus der Folge:

(40) $$\underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(0)}, \quad \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(1)}, \cdots \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \cdots$$

muss sich dann eine unbegrenzte Folge *endlicher* Terme*)

$$\underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(n_\nu)} = \underline{a}^{(n_\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2 \cdots)$$

mit dem *Grenzwerthe* a herausheben lassen, also:

(41) $$\lim_{\nu=\infty} \underline{a}^{(n_\nu)} = a \quad \text{d. h.} \quad = \underline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Da $\underline{a}^{(n_\nu)}$ den *unteren Limes* der Terme $a_\mu^{(n_\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$ d. h.
$(n_\nu + 1)^{\text{ten}}$ Zeile vorstellt, so muss es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu je
einzelnen n_ν *unendlich viele* Terme $a_{\mu_\nu}^{(n_\nu)}$ geben, sodass:

(42) $$\underline{a}^{(n_\nu)} - \varepsilon \leqq a_{\mu_\nu}^{(n_\nu)} \leqq \underline{a}^{(n_\nu)} + \varepsilon \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Nimmt man also eine Folge positiver ε_ν mit den Grenzwerthe $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu$
so existirt zunächst eine *erste* Zahl m_0, sodass:

$$\underline{a}^{(n_0)} - \varepsilon_0 \leqq a_{m_0}^{(n_0)} \leqq \underline{a}^{(n_0)} + \varepsilon_0;$$

sodann eine *erste* Zahl m_1, welche gleichzeitig den *beiden* Bedingu
genügt:

$$m_1 > m_0 \quad \text{und:} \quad \underline{a}^{(n_1)} - \varepsilon_1 \leqq a_{m_1}^{(n_1)} \leqq \underline{a}^{(n_1)} + \varepsilon_1.$$

So fortfahrend erhält man eine *ächte Theilfolge* $\left(a_{m_\nu}^{(n_\nu)}\right)$ von der Beschaf
heit, dass:

(43) $$\underline{a}^{(n_\nu)} - \varepsilon_\nu \leqq a_{m_\nu}^{(n_\nu)} \leqq \underline{a}^{(n_\nu)} + \varepsilon_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

und man findet somit, da $\lim\limits_{\nu=\infty} \underline{a}^{(n_\nu)}$ nach Gl. (41) *existirt:*

(44) $$\lim_{\nu=\infty} a_{m_\nu}^{(n_\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \underline{a}^{(n_\nu)} \quad \text{d. h} \quad = \underline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

---

*) Die Voraussetzung (39) schliesst keineswegs aus, dass unter den Terme

$$\underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

der Werth $-\infty$ in *endlicher* Anzahl und der Werth $+\infty$ sogar *unendlich* of
kommt.

og ergiebt sich:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{p_\nu}^{(q_\nu)} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}, \quad \text{wenn:} \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \bar{a} \text{ (d. h. endlich)},$$

infachsten, wenn man beachtet, dass $(-\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)})$ den entsprechenden *en* Limes für die aus den Termen $(-a_\mu^{(\nu)})$ gebildete Doppelfolge ellt.

Fall II. Es sei jetzt:

$$\underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = -\infty.$$

mt man eine Folge positiver Zahlen G_ν mit dem Grenzwerthe $G_\nu = +\infty$, so muss sich auf Grund der Voraussetzung (46) aus Folge (40) eine unbegrenzte Folge von Termen $\underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(n_\nu)}$ so heraus- n lassen*), dass:

$$\underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(n_\nu)} < -G_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

der Bedeutung von $\underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(n_\nu)}$ folgt dann weiter, dass zu jedem einzelnen *nendlich viele* Terme $a_{\mu_\nu}^{(n_\nu)}$ existiren müssen, sodass:

$$a_{\mu_\nu}^{(n_\nu)} < -G_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

kann daher ganz analog wie im Falle I zu $n_0, n_1, n_2, \cdots$ eine *ende* Folge natürlicher Zahlen $m_0, m_1, m_2, \cdots$ so auswählen, dass:

$$a_{m_\nu}^{(n_\nu)} < -G_\nu \qquad (m_\nu > m_{\nu-1},\ n_\nu > n_{\nu-1})$$

somit schliesslich:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{m_\nu}^{(n_\nu)} = -\infty \ \text{ d. h. } \underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}.$$

sprechend ergiebt sich:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{p_\nu}^{(q_\nu)} = +\infty, \quad \text{wenn:} \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

Fall III. Ist:

$$\underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bezw.} \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = -\infty,$$

olgt aus (37), dass auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bezw.} \quad \underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = -\infty.$$

---

*) Diese Terme $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(n_\nu)}$ können dabei für jedes einzelne ν *endlich* oder auch ntlich bezw. theilweise $= -\infty$ sein.

Damit ist aber dieser Fall ohne weiteres auf Fall II zurückgeführt und der oben ausgesprochene Satz jetzt vollständig bewiesen.

3. Es erscheint für das folgende zweckmässig, in Bezug auf die successive Annäherung der Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ an die betreffenden Zeilen-Limites $\overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ gewisse Unterscheidungen zu treffen und die verschiedenen Möglichkeiten durch geeignete Bezeichnungen zu charakterisiren.

Fasst man zunächst den einfachsten Fall in's Auge, dass jede Zeile *convergirt*, also etwa:

$$(54) \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

so besagt diese Voraussetzung lediglich folgendes: zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ und für jedes einzelne ν existiren Zahlen m_ν und somit speciell eine *kleinste* Zahl m_ν', sodass:

$$(55) \qquad \left|a_\mu^{(\nu)} - a^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon, \quad \text{wenn:} \quad \mu \geqq m_\nu' \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Dabei werden diese Zahlen m_ν' (ausser mit ε) im allgemeinen mit ν veränderlich sein, und es erscheint insbesondere nicht ausgeschlossen, dass sie (sämmtlich oder theilweise) zugleich mit ν *über alle Grenzen wachsen*. Ebenso können auch die $|a^{(\nu)}|$ zugleich mit ν sämmtlich oder theilweise in's Unendliche wachsen. Wir sagen in jedem dieser beiden Fälle, die *Zeilen* seien *ungleichmässig convergent*.

Existirt dagegen für die Zahlen m_ν' ein *bestimmtes endliches Maximum* m und bleiben die $\left|a^{(\nu)}\right|$ unter einer endlichen Schranke g, so kann man die Bedingung (55) durch die folgende ersetzen:

$$(56) \qquad \left|a_\mu^{(\nu)} - a^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon, \quad \text{wenn:} \quad \mu \geqq m \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

wobei jetzt m eine (nur noch von ε abhängende) für alle ν *unveränderliche* Zahl bedeutet und $|a^{(\nu)}| < g$ bleibt. In diesem Falle heissen die *Zeilen gleichmässig convergent*.

Sind *alle Zeilen eigentlich divergent*, also:

$$(57) \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bezw.} \quad = -\infty \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

so besagt dies wiederum nur folgendes: zu jedem (beliebig grossen) $G > 0$ und für jedes einzelne ν existiren Zahlen m_ν und speciell eine *kleinste* Zahl m_ν', sodass:

$$(58) \quad a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{bezw.} \quad < -G, \quad \text{wenn} \quad \mu \geqq m_\nu' \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Haben alsdann die m_ν' ein *bestimmtes endliches Maximum* m, sodass die Bedingung (58) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(59) \quad a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{bezw.} \quad < -G, \quad \text{wenn} \quad \mu \geqq m \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

mögen die *Zeilen* als *gleichmässig divergent* bezeichnet werden; dagegen *ungleichmässig divergent*, wenn ein solches Maximum *nicht* vorhanden sodass also die m_ν' gleichzeitig mit ν sämmtlich oder theilweise *in's ndliche wachsen.*

Beispiele. 1) Die Zeilen der Folge $\left[\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\right]_1^1$ sind *gleichmässig convent.* Denn man hat:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}, \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\nu},$$

:

$$a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu}.$$

rd also $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, darauf m so fixirt, dass $\leqq \varepsilon$, so wird:

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \frac{1}{\mu} \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \ \mu \geqq m \quad \text{und} \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots$$

2) Die Zeilen der Folge $[\mu+\nu]_0^0$ sind *gleichmässig divergent.* Denn n hat:

$$a_\mu^{(\nu)} = \mu + \nu, \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \qquad a_\mu^{(\nu)} \geqq \mu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

rd also $G > 0$ beliebig gross vorgeschrieben, sodann $m > G$ anommen, so hat man:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq m > G \quad \text{für} \quad \mu \geqq m \quad \text{und} \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

3) Die Zeilen der Folge $\left[\frac{(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2}\right]_0^0$ sind *ungleichmässig convergent.* Aus:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2}, \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 1$$

olgt nämlich:

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right| = 1 - \frac{(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}.$$

ersteht man unter n eine *beliebig grosse* natürliche Zahl und setzt $\nu = n$ h. betrachtet man eine *Zeile* von *beliebig hohem Range*, so wird:

$$\left|a_n^{(n)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(n)}\right| = 1.$$

s ist somit nicht möglich, die fragliche Differenz durch Fixirung einer dlichen Maximalgrenze $\mu = m$ für *alle* ν numerisch unter ein beliebig leines $\varepsilon > 0$ herabzudrücken. Das Wesen dieser *ungleichmässigen Convergenz* tritt noch anschaulicher hervor, wenn man sich die Glieder der etreffenden Doppelfolge in Form des Schema's (1) angeschrieben denkt:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \frac{1^2}{1+1^2} & \frac{2^2}{1+2^2} & \frac{3^2}{1+3^2} & \cdots & \frac{\mu^2}{1+\mu^2} & \cdots \\
\frac{1^2}{1+1^2} & 0 & \frac{1^2}{1+1^2} & \frac{2^2}{1+2^2} & \cdots & \frac{(\mu-1)^2}{1+(\mu-1)^2} & \cdots \\
\frac{2^2}{1+2^2} & \frac{1^2}{1+1^2} & 0 & \frac{1^2}{1+1^2} & \cdots & \frac{(\mu-2)^2}{1+(\mu-2)^2} & \cdots \\
\frac{3^2}{1+3^2} & \frac{2^2}{1+2^2} & \frac{1^2}{1+1^2} & 0 & \cdots & \frac{(\mu-3)^2}{1+(\mu-3)^2} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Man erkennt, dass die Terme jeder einzelnen Zeile schliesslich beständig *wachsend* der Grenze 1 zustreben. Aber dieses *Zunehmen* der Glieder beginnt erst jedesmal *rechts* von dem *Diagonalgliede*, welches in *jeder* Zeile den Werth 0 hat: die successive Annäherung der Glieder an den Grenzwerth 1 wird mit jeder Zeile *um eine Stelle weiter hinausgeschoben*.

4) Auch die Zeilen der Folge $\left[\frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}\right]_1^1$ sind *ungleichmässig convergent*. Man hat hier:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2} = \frac{1}{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\nu}{\mu}}, \quad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

also:

$$\left| a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \right| = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}$$

und daher für jedes noch so grosse n:

$$\left| a_n^{(n)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(n)} \right| = \frac{1}{2}.$$

Die Terme jeder einzelnen Zeile convergiren hier schliesslich beständig *abnehmend* gegen 0; aber das *Abnehmen* der Glieder beginnt wieder jedesmal erst *rechts* von dem *Diagonalgliede*, welches durchweg den Werth $\frac{1}{2}$ besitzt. Bedeutet ferner p eine beliebige natürliche Zahl, so hat man:

$$a_{p\nu}^{(\nu)} = \frac{p}{1+p^2}$$

d. h. das Glied $\frac{p}{1+p^2}$, welches für $\nu = 1$, d. h. in der *ersten* Zeile an der p^{ten} Stelle steht, steht in der n^{ten} Zeile erst an der pn^{ten} Stelle: es findet also mit jeder neuen Zeile zugleich auch eine *Verlangsamung* der Gliederabnahme statt.

5) Als *ungleichmässig convergent* haben ferner die Zeilen der Folge: $\left[\nu + \frac{1}{\mu}\right]_1^1$ zu gelten. Zwar hat man hier:

$$a_\mu^{(\nu)} = \nu + \frac{1}{\mu}, \quad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \nu$$

:

$$a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu}$$

daher genau, wie bei dem Beispiele 1):

$$\left| a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \right| \leqq \frac{1}{m} \leqq \varepsilon$$

$\mu \geqq m \geqq \frac{1}{\varepsilon}$ und $\nu = 1, 2, 3, \cdots$.

Dagegen ist hier die Bedingung *nicht* erfüllt, dass die $|a^{(\nu)}|$ unter ɜr endlichen Schranke bleiben, denn man hat:

$$\lim_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \nu = +\infty.$$

6) Die Zeilen der Folge $[(\mu - \nu)^2]_0^0$ sind *ungleichmässig divergent.* ɑn hat:

$$a_\mu^{(\nu)} = (\mu - \nu)^2, \quad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

ird $G > 0$ beliebig vorgeschrieben, so lässt sich *kein* m so fixiren, ss:

$$a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

enn man hat, wie gross auch n angenommen werden möge:

$$a_n^{(n)} = 0\,^*).$$

4. Die im vorstehenden eingeführten Begriffe der *gleichmässigen* eilen-Convergenz und -Divergenz gestatten noch eine für das folgende ltzliche Verallgemeinerung.

Es werde zunächst angenommen, dass die *Limites der Zeilen*, zum indesten nach Ausschluss einer endlichen Anzahl, numerisch *unter einer* *ten Schranke* bleiben (eine Annahme, die offenbar diejenige der *Zeilen-nvergenz* gegen *endlich* bleibende Limites als speciellen Fall enthält), etwa:

0) $\quad \underline{\lim}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)}, \quad \overline{\lim}\, a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)}, \quad$ wo: $\left.\begin{matrix} |\underline{a}^{(\nu)}| \\ |\bar{a}^{(\nu)}| \end{matrix}\right\} < g$ für: $\nu \geqq n$.

lsdann existirt zu jedem $\varepsilon > 0$ und für jedes einzelne $\nu \geqq n$ eine kleinste ahl m_ν', sodass:

1) $\quad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad$ für: $\mu \geqq m_\nu', \quad \nu \geqq n$.

---

*) Da die angeführten Beispiele, ausser Nr. 5, in Bezug auf die beiden Indices , ν völlig symmetrisch gebaut sind, so können sie auch dazu dienen, um die in ede stehenden Convergenz- und Divergenz-Eigenschaften der *Zeilen* auch für die *lonnen* zu exemplificiren. An Stelle von Beispiel 5) hätte man dann lediglich $\left[\cdot + \frac{1}{\nu} \right]_1^1$ zu substituiren.

Haben dann wiederum die m_ν' *ein endliches Maximum* m, sodass also die Bedingung (61) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(62)\quad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für:}\quad \mu \geqq m,\quad \nu \geqq n \left(\begin{Bmatrix} |\underline{a}^{(\nu)}| \\ |\bar{a}^{(\nu)}| \end{Bmatrix} < g\right),$$

so sollen die Zeilen für $\nu \geqq n$ *gleichmässig begrenzt* heissen; dagegen *ungleichmässig begrenzt*, wenn eine solche Zahl m *nicht* existirt oder wenn die $|\underline{a}^{(\nu)}|$ und $|\bar{a}^{(\nu)}|$ *nicht* unter einer endlichen Schranke bleiben. Da die Bedingung (62) im Falle $\underline{a}^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)}$ mit derjenigen für die *gleichmässige Convergenz* der Zeilen bei $\nu \geqq n$ zusammenfällt (s. Ungl. (56)), so erscheint also diese letztere als specieller Fall der *gleichmässigen Begrenzung.*

Bestehen die fraglichen Bedingungen nur für *einen* der beiden Limites, d. h. hat man nur:

$$(63)\quad \begin{cases} \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{für:}\quad \mu \geqq m,\quad \nu \geqq n \quad (|\underline{a}^{(\nu)}| < g) \\ \textit{oder:}\ \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \geqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{für:}\quad \mu \geqq m,\quad \nu \geqq n \quad (|\bar{a}^{(\nu)}| < g), \end{cases}$$

so soll die *Begrenzung* der Zeilen eine *einseitig gleichmässige* heissen.

Bleiben die $|\underline{a}^{(\nu)}|$, $|\bar{a}^{(\nu)}|$ für $\nu \geqq n$ *nicht* unter einer endlichen Schranke (woraus das analoge für die $|a_\mu^{(\nu)}|$ bei gleichzeitig unbegrenzt wachsendem μ, ν folgt), so soll speciell der Fall $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty$ bezw. $-\infty$ betrachtet werden. Auf Grund dieser Voraussetzung existirt zunächst zu jedem (beliebig grossen) $G > 0$ eine kleinste natürliche Zahl n, sodass:*)

$$(64)\quad \begin{cases} \underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} > G, \quad \text{also auch:}\quad \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{für:}\quad \nu \geqq n, \\ \text{bezw.}\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} > -G, \quad \text{also auch:}\quad \underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} < -G \quad \text{für:}\quad \nu \geqq n. \end{cases}$$

Daraus folgt wiederum nur soviel, dass für jedes einzelne $\nu \geqq n$ eine kleinste Zahl m_ν' existirt, sodass:

$$(65)\quad a_\mu^{(\nu)} > G \ \text{bezw.} \ < -G \quad \text{für:}\quad \mu \geqq m_\nu',\quad \nu \geqq n.$$

Ist alsdann für die m_ν' ein endliches Maximum m vorhanden, sodass also:

$$(66)\quad a_\mu^{(\nu)} > G \ \text{bezw.} \ < -G \quad \text{für:}\quad \mu \geqq m,\quad \nu \geqq n,$$

so sollen die Zeilen der Doppelfolge als *gleichmässig unbegrenzt***) be-

---

*) Dabei wird n im allgemeinen mit G *veränderlich* sein (nämlich mit wachsenden Werthen von G gleichfalls zunehmen). Dies wäre nur dann *nicht* der Fall, wenn von einer bestimmten Zeile ab, etwa für $\nu \geqq n'$, durchweg:

$$\underline{\lim}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}\, a_\mu^{\nu} = +\infty \quad \text{bezw.} \quad = -\infty.$$

Dann genügt nämlich die Annahme $n = n'$ bei jedem beliebigen G.

**) Der Ausdruck bezieht sich wesentlich auf die *Gesammtheit* der Zeilen. Jede einzelne Zeile kann dabei immerhin *begrenzt* (d. h. mit endlichen Limites versehen), sogar *convergent* sein (s. Beispiel 9)).

zeichnet werden. Die Vergleichung der Bedingung (66) mit der für *gleichmässige Divergenz* geltenden Bedingung (58) zeigt wiederum, dass diese letztere Eigenschaft einen speciellen Fall der soeben definirten darstellt.

Beispiele. 7) Die Zeilen der Folge $\left[(-1)^{\mu+\nu}\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\right]_1^1$ sind *gleichmässig begrenzt*. Man hat:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}\right), \quad \text{also:} \quad \underline{a}^{(\nu)} = \varliminf_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu},$$
$$\bar{a}^{(\nu)} = \varlimsup_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\frac{1}{\nu}.$$

Da nun:

$$-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

so folgt:

$$\underline{a}_\nu - \frac{1}{\mu} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}_\nu + \frac{1}{\mu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

und daher:

$$\underline{a}_\nu - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}_\nu + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m \geqq \frac{1}{\varepsilon}, \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots.$$

8) Die Zeilen der Folge $\left[(-1)^{\mu+\nu}\frac{2+(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2}\right]_0^0$ sind *ungleichmässig begrenzt*. Man hat:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\frac{2+(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2}, \quad \text{also:} \quad \underline{a}^{(\nu)} = \varliminf_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -1,$$
$$\bar{a}^{(\nu)} = \varlimsup_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +1.$$

Andererseits wird, für jedes noch so grosse n:

$$a_n^{(n)} = 2, \quad a_{n\pm 1}^{(n)} = -\frac{3}{2},$$

d. h. für jede Zeile von beliebig hohem Range n liegen das $n \pm 1^{\text{te}}$ und n^{te} Glied *ausserhalb* des Intervalles $(\underline{a}^{(n)} - \varepsilon, \bar{a}^{(n)} + \varepsilon) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

9) Die Zeilen der Folge $\left[\nu + \frac{1}{\mu}\right]_1^1$, welche oben (Beispiel 5)) als *ungleichmässig convergent* erkannt wurden, sind andererseits *gleichmässig unbegrenzt*. Denn man hat

$$a_\mu^{(\nu)} = \nu + \frac{1}{\mu} > \nu.$$

Wird also $n \geqq G$ angenommen, so folgt:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq n > G \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \quad \mu \geqq 1.$$

10) *Gleichmässig unbegrenzt* sind auch die Zeilen der Folge $[\nu + (1+(-1)^\mu)\,\mu]_0^0$. Man hat hier:

$$a_\mu^{(\nu)} = \nu, \qquad \text{wenn } \mu \textit{ gerade},$$
$$a_\mu^{(\nu)} = \nu + 2\mu, \quad \text{wenn } \mu \textit{ ungerade}$$

und daher:

$$\underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \nu, \quad \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty;$$

im übrigen für $n > G$:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq n > G \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \quad \mu \geqq 0.$$

11) Setzt man:

$$a_\mu^{(\nu)} = \lim_{p=\infty} \frac{\mu^{p-1} - \nu^{p-1}}{\mu^p + \nu^p} \cdot \mu\nu \; (\mu = 1, 2, 3, \cdots; \; \nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

so folgt:

$$a_\mu^{(\nu)} \begin{cases} = \lim\limits_{p=\infty} \dfrac{1 - \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{p-1}}{1 + \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^p} \cdot \nu = \nu, & \text{wenn:} \quad \mu > \nu, \\[2ex] = \lim\limits_{p=\infty} \dfrac{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{p-1} - 1}{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^p + 1} \cdot \mu = -\mu, & \text{wenn:} \quad \mu < \nu. \\[2ex] \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot = 0, & \text{wenn:} \quad \mu = \nu. \end{cases}$$

Folglich wird:

$$\underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \nu,$$

d. h. die Zeilen sind *convergent*, aber *ungleichmässig*, weil der Grenzwerth ν schliesslich in's Unendliche wächst, übrigens aber auch darum, weil (für jedes noch so grosse n) $a_n^{(n)} = 0$, $a_{n-\lambda}^{(n)} = -(n-\lambda)$. Aus diesem letzteren Grunde sind dann aber die Zeilen auch *nicht einmal gleichmässig unbegrenzt.**)

§ 4.

Beziehungen zwischen den iterirten Limites der Zeilen (Colonnen) und den Limites der Doppelfolge.

1. Mit Hülfe der im vorigen Paragraphen eingeführten Unterscheidungen lassen sich die Beziehungen zwischen den *iterirten* (Zeilen- bezw. Colonnen-) *Limites* und den in §§ 1, 2 betrachteten *Doppel-Limites* in sehr allgemeiner Weise feststellen. Zunächst ergiebt sich der folgende Satz:

(I) *Der iterirte untere bezw. obere Limes ist niemals kleiner bezw. grösser, als der entsprechende Doppel-Limes, d. h. man hat stets:*

*) Die Beispiele 7), 8), 11) gelten wiederum auch unmittelbar für die entsprechenden Erscheinungen bezüglich der *Colonnen;* die Beispiele 9), 10) nach Vertauschung von μ und ν.

$$)\qquad \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \left\{ \begin{array}{l} \leqq \underline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\nu=\infty} \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \\ \leqq \underline{\lim}_{\mu=\infty} \underline{\lim}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\mu=\infty} \overline{\lim}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \end{array} \right\} \leqq \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Beweis. Nach dem Satze in Nr. 2 des vorigen Paragraphen kann **n jeden** der betreffenden iterirten Limites durch den Limes einer *ächten* *eilfolge* ersetzen. Nach § 2, Nr. 5 existirt aber *keine* ächte Theilfolge, **en** Grenzwerth $< \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ oder $> \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$: somit ist der fragliche **tz bewiesen.** —

Fasst man insbesondere den Fall in's Auge, dass $\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, **resultirt** aus (I) unmittelbar der folgende Specialsatz*):

(Ia) ***Man hat stets:***

$$3)\qquad \left. \begin{array}{l} \lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \\ \lim_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \end{array} \right\} = \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

sobald der letztere Grenzwerth existirt.

Ist die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *monoton*, so gilt das gleiche von den **eilen**- und Colonnen-Folgen. In diesem Falle *existiren* also auch $\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, **m** $a_\mu^{(\nu)}$, sodass für eine *monotone* Doppelfolge *unter allen Umständen* die **eziehung** besteht:

$$9)\qquad \lim_{\nu=\infty} \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty} \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}. \text{—}$$

Aus (68) folgt des weiteren, dass die *Existenz* von $\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ eine *hin-eichende* Bedingung für die Beziehung:

$$70)\qquad \lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$$

nd diese letztere somit umgekehrt eine *nothwendige* Bedingung für die *Existenz* **on** $\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ bildet. Daraus ergiebt sich insbesondere, dass $\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ sicher *icht* existirt, wenn die beiden Grenzwerthe (70) *verschieden* ausfallen.

Beispiele: $\left[\frac{\mu}{\mu+\nu}\right]_1^1$, $\left[2^{-\frac{\nu}{\mu}}\right]_1^1$, $\left[\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^\nu\right]_1^1\Big)$.

Andererseits erscheint die *Existenz* von $\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *keineswegs* als *noth-endig* für das Bestehen der Beziehung (70) (s. § 3, Beisp. 3), 4), 5), 6), 0), 11)), diese letztere also *nicht* als *hinreichend* für die *Existenz* von

---

*) Vgl. Münch. Sitz.-Ber. a. a. O. p. 105; desgl. Bd. 28 (1898), p. 63.

$\lim\limits_{\lambda,\nu=\infty} a_\lambda^{(\nu)}$. Neben den eben citirten Beispielen möchte ich als besonders lehrreich noch das folgende anführen:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^\mu \cdot \frac{\mu^2\nu^2}{\mu^3+\nu^6} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \cdots; \ \nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Man hat hier zunächst:

$$\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0, \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0,$$

also auch:

$$\lim_{\nu=\infty}\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0, \qquad \lim_{\mu=\infty}\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{\nu^2}{1+\nu^3} = 0,$$

und sogar allgemein, für jedes ganzzahlige $p \geqq 1$, $q \geqq 0$:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{p\nu+q}^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} (-1)^{p\nu+q} \cdot \frac{(p\nu+q)^2\nu^2}{(p\nu+q)^3+\nu^6} = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(p\nu+q)} = \lim_{\nu=\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{\nu^2(p\nu+q)^2}{\nu^3+(p\nu+q)^6} = 0.$$

Die Folge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ hat also die Eigenschaft, dass nicht nur die *iterirten Limites* und der Grenzwerth der *Hauptdiagonale* den Werth 0 haben, sondern dass *alle* in ihr enthaltenen *„geradlinigen“* *) Theilfolgen *gegen 0 convergiren.* Nichts destoweniger hat man:

$$a_{\nu^2}^{(\nu)} = (-1)^{\nu^2} \cdot \frac{1}{2}\nu$$

also:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{\nu^2}^{(\nu)} = \pm\infty, \text{ jenachdem } \nu \textit{ gerade} \text{ oder } \textit{ungerade},$$

und daher:

$$\underline{\lim_{\mu,\nu=\infty}} a_\mu^{(\nu)} = -\infty, \qquad \overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}} a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

2. Ebenso wenig wie das Bestehen der Beziehung (70) die *Existenz* von $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ und somit (nach Satz I a) das *Zusammenfallen* der *iterirten Limites* mit dem *Doppel-Limes* verbürgt, brauchen allgemein der *iterirte untere* und *obere Limes* mit dem *unteren* bezw. *oberen Doppel-Limes* zusammenzufallen. Man bemerke zunächst, dass ein solches Zusammenfallen auf Grund der Beziehung (67) allemal dann stattfindet, wenn der *iterirte untere Limes* den Werth $-\infty$, der *obere* den Werth $+\infty$ hat. Im übrigen

*) Vgl. p. 300, Fussn. 1.

giebt sich für das Zusammenfallen der betreffenden Limites zunächst folgende *hinreichende* Bedingung:

> (II) *Sind die Zeilen (Colonnen) der Doppelfolge nach eventuellem Ausschlusse einer endlichen Anzahl* **gleichmässig** *begrenzt oder unbegrenzt, im Falle* $\overline{\lim}\,\overline{\lim}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty$ *oder* $\underline{\lim}\,\underline{\lim}\, a_\mu^{(\nu)} = -\infty$ *wenigstens* **einseitig gleichmässig** *begrenzt, so ist:*

$$(71)\quad \left\{\begin{array}{ll} \underline{\lim}_{\nu=\infty}\, \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}, & \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, \overline{\lim}_{\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}, \\ \Big(\text{bezw. } \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, \underline{\lim}_{\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}, & \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, \overline{\lim}_{\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}\Big). \end{array}\right.$$

Beweis. Fall I. Sind die Zeilen zum mindesten für $\nu \geqq n'$ *gleichmässig begrenzt*, und setzt man:

$$(72)\qquad \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)}, \qquad \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)},$$

liegen (s. § 3, Nr. 4) die $\underline{a}^{(\nu)}$, $\bar{a}^{(\nu)}$ für $\nu \geqq n'$ innerhalb endlicher Schranken und zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich m so fixiren, dass:

$$(73)\qquad \underline{a}^{(\nu)} - \frac{\varepsilon}{3} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n'.$$

Wird sodann gesetzt:

$$(74)\qquad \underline{\lim}_{\nu=\infty}\, \underline{a}^{(\nu)} = \underline{a}, \qquad \overline{\lim}_{\nu=\infty}\, \bar{a}^{(\nu)} = \bar{a},$$

so kann man ein $n \geqq n'$ so annehmen, dass:

$$(75)\qquad \underline{a} - \frac{\varepsilon}{3} \leqq \underline{a}^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} \leqq \bar{a} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für: } \nu \geqq n,$$

sodass sich durch Combination von (73) und (75) ergiebt:

$$(76)\qquad \underline{a} - \frac{2\varepsilon}{3} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a} + \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n.$$

Da hiernach die $a_\mu^{(\nu)}$ für $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$ innerhalb endlicher Schranken bleiben, so hat man:

$$(77)\qquad \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{A}, \qquad \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \bar{A},$$

wo $\underline{A}$, $\bar{A}$ bestimmte Zahlen vorstellen. Wegen der Bedeutung dieser Zahlen $\underline{A}$, $\bar{A}$ (s. § 2, Ungl. 24) giebt es alsdann *ächte Theilfolgen* $\left(a_{m_\nu}^{(n_\nu)}\right)$, $\left(a_{p_\nu}^{(q_\nu)}\right)$, sodass:

$$(78)\qquad a_{m_\nu}^{(n_\nu)} \leqq \underline{A} + \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \bar{A} - \frac{\varepsilon}{3} \leqq a_{p_\nu}^{(q_\nu)}.$$

Da es hierbei freisteht, von vornherein $m_\nu \geqq m$, $n_\nu \geqq n$ anzunehmen, andererseits die Ungleichungen (76) bestehen bleiben, wenn man die beliebigen μ, ν durch die specielleren m_ν, n_ν bezw. p_ν, q_ν ersetzt, so resultiren aus der Verbindung von (76) und (78) die folgenden Beziehungen:

$$\underline{a} - \frac{2\varepsilon}{3} \leqq \underline{A} + \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \bar{A} - \frac{\varepsilon}{3} \leqq \bar{a} + \frac{2\varepsilon}{3},$$

anders geschrieben:

(79) $$\underline{a} \leqq \underline{A} + \varepsilon, \qquad \bar{a} \geqq \bar{A} - \varepsilon,$$

d. h., da ε jede *noch so kleine* positive Zahl vorstellen kann:

(80) $$\underline{a} \leqq \underline{A}, \qquad \bar{a} \geqq \bar{A}$$

und, da die Möglichkeit $\underline{a} < \underline{A}$, $\bar{a} > \bar{A}$ durch Satz I (Ungl. (67 ... nitiv ausgeschlossen erscheint, schliesslich:

(81) $$\underline{a} = \underline{A}, \qquad \bar{a} = \bar{A},$$

d. h.

(82) $$\underline{\lim}_{\nu=\infty}\, \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}, \qquad \overline{\lim}_{\nu=\infty}\, \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}. —$$

Fall II. Es seien jetzt die Zeilen für $\nu \geqq n'$ *gleichmässig unb*... also (s. Ungl. (66)) etwa:

(83) $$a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n \geqq n'.$$

Daraus ergiebt sich zunächst, dass auch:

$$\underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n,$$

und daher:

(84) $$\underline{\lim}_{\nu=\infty}\, \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \quad \text{also } a \textit{ fortiori} \text{ auch:} \quad \overline{\lim}_{\nu=\infty}\, \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = +$$

Sodann folgt aber aus Ungl. (67) oder auch unmittelbar aus de... gleichung der Bedingung (83) mit derjenigen für die *eigentliche Di*... *der Doppelfolge* (§ 1, Ungl. (3a))*), dass auch:

(85) $$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty,$$

sodass also schliesslich:

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty}\, \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty,$$

---

*) Die analytische Formulirung derjenigen Eigenschaft, welche hier als ... *mässige Unbegrenztheit*" der Zeilen bezeichnet wird, ist in Wahrheit mit d... wendigen und hinreichenden Bedingung für die *eigentliche Divergenz* der ... folge *identisch*.

der einfacher geschrieben:

86a) $$\lim_{\nu=\infty} \overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

nalog ergiebt sich im Falle:

$$a_\mu^{(\nu)} < -G \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n \geqq n',$$

ss:

5b) $$\lim_{\nu=\infty} \overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty.$$

Fall III. Es sei:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \quad \text{dagegen} \quad \underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}} \equiv \lim_{\nu=\infty} \underline{a}^{(\nu)} = \underline{a} \quad \text{(endlich)}$$

l die Zeilen für $\nu \geqq n'$ in Bezug auf die $\underline{a}^{(\nu)}$ *gleichmässig begrenzt*, ass also:

) $$\underline{a}^{(\nu)} - \frac{\varepsilon}{3} < a_\mu^{(\nu)} \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n'.$$

dann lässt sich wiederum ein $n \geqq n'$ so fixiren, dass:

l) $$\underline{a} - \frac{\varepsilon}{3} \leqq \underline{a}^{(\nu)} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n,$$

lass also:

9) $$\underline{a} - \frac{2\varepsilon}{3} \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n.$$

s sodann: $\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \underline{\lim}_{\nu=\infty}\, \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ d. h. $\leqq \underline{a}$ und andererseits für *alle* $^{\nu)}$ bei $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$ nach Ungl. (89) $a_\mu^{(\nu)} \geqq \underline{a} - \frac{2\varepsilon}{3}$, so ist:

0) $$\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{A}$$

ne bestimmte endliche Zahl.

Es existirt daher wiederum eine *ächte Theilfolge* $\left(a_{m_\nu}^{(n_\nu)}\right)$, sodass . § 2, Ungl. (24)):

1) $$a_{m_\nu}^{(n_\nu)} \leqq \underline{A} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

raus folgt aber in Verbindung mit Ungl. (89), dass:

2) $$\underline{a} - \frac{2\varepsilon}{3} \leqq \underline{A} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{d. h.} \quad \underline{a} \leqq \underline{A} + \varepsilon$$

d schliesslich, genau wie im Falle I:

3a) $$\underline{a} = \underline{A} \quad \text{d. h.} \quad \underline{\lim}_{\nu=\infty}\, \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Ueberdies ergiebt sich aus der Voraussetzung: $\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty$ a Grund von Ungl. (67), dass auch:

$$\text{(93b)} \qquad \overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \text{ also: } = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

Das analoge gilt sodann im Falle: $\underline{\lim}_{\nu=\infty}\,\underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = -\infty$, $\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} =$ i

Da sich die vorstehenden Betrachtungen ohne weiteres auch auf *Colonnen* übertragen lassen, so erscheint hiermit der oben ausgesproc Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

3. Nimmt man im Falle I des vorigen Satzes $\underline{\lim}_{\nu=\infty}\,\underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}$ $\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ als *zusammenfallend* an, so gewinnt man unmittelbar folgenden Specialsatz:

(IIa) *Sind die Zeilen der Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *nach eventu Ausschlusse einer endlichen Anzahl* ***gleichmässig*** *begr und* ***existirt:***

$$\lim_{\nu=\infty}\,\overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = a\ ^{*)},$$

so convergirt *die Doppelfolge und man hat:*

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a.$$

Zugleich gestattet der Fall (II) des obigen Satzes die folg Formulirung:

(IIb) *Sind die Zeilen der Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *nach eventu Ausschlusse einer endlichen Anzahl* ***gleichmässig unbegr*** *so ist nicht nur:*

$$\lim_{\nu=\infty}\,\overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bezw.} \quad = -\infty,$$

sondern die Doppelfolge selbst ist ***eigentlich divergent,*** s *also:*

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bezw.} \quad = -\infty.$$

Das analoge gilt wiederum bezüglich der *Colonnen.*

Die Sätze (IIa), (IIb) zeigen insbesondere, dass für die *Conv* bezw. *eigentliche Divergenz* der Doppelfolge die *Convergenz* bezw. *eige*

---

*) Dass in diesem Falle $\lim_{\nu=\infty}\,\overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}$ stets eine *endliche Zahl* a ist, fol mittelbar aus der Voraussetzung der *gleichmässigen Begrenzung:* denn diese erh dass $\underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}$, $\overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ zum mindesten für $\nu \geqq m$ zwischen zwei endlichen Sch bleiben (s. § 3, Nr. 4).

Divergenz keiner einzigen Zeile (Colonne) erforderlich ist. (Beispiel einer *convergenten* Doppelfolge mit durchweg *oscillirenden* Zeilen s. § 3, Nr. 4, Beisp. 7); eigentlich *divergente* Folge mit durchweg *convergenten* Zeilen: ebendas. Beisp. 9); eigentlich *divergente* Folge, deren Zeilen *innerhalb endlicher Grenzen oscilliren:* $[(2+(-1)^{\mu})\nu]_0^0$; eigentlich *divergente* Folge, deren Zeilen einen *endlichen unteren* und *unendlichen oberen Limes* besitzen: a. a. O. Beisp. 10)).

3. Ich will nun untersuchen, in wieweit die in Satz (II), (IIa), (IIb) angegebenen, für das Zusammenfallen der *iterirten* und der entsprechenden *Doppel*-Limites *hinreichenden* Bedingungen sich zugleich auch als *nothwendige* erweisen, d. h. in wieweit die betreffenden Sätze *umkehrbar* sind.

Dass dies für den *allgemeinen* Satz (II) *nicht* der Fall ist, sodass man also aus den Beziehungen:

$$\underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}, \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim}\ a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}$$

nicht auf die *gleichmässige* Begrenztheit oder Unbegrenztheit der Zeilen schliessen darf, zeigt die folgende Ueberlegung. Es sei $\left(b_\mu^{(\nu)}\right)$ eine Folge mit *gleichmässig begrenzten* Zeilen und:

$$(94)\quad \underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ b_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ b_\mu^{(\nu)} = \underline{b}, \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\ b_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ b_\mu^{(\nu)} = \bar{b}, \quad \underline{b} < \bar{b}.$$

Bedeutet sodann $\left(c_\mu^{(\nu)}\right)$ eine Folge mit *ungleichmässig begrenzten* Zeilen, für welche:

$$(95)\qquad \underline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ c_\mu^{(\nu)} = \underline{c} \leq \underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ c_\mu^{(\nu)}, \quad \overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ c_\mu^{(\nu)} = \bar{c} \geq \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\ c_\mu^{(\nu)},$$

$$(96)\qquad \underline{b} < \underline{c} \leq \bar{c} < \bar{b},$$

so bilde man aus den Termen der beiden Doppelfolgen $\left(b_\mu^{(\nu)}\right)$, $\left(c_\mu^{(\nu)}\right)$ eine einzige $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ indem man setzt:

$$(97)\qquad a_\mu^{(2\nu)} = b_\mu^{(\nu)}, \quad a_\mu^{(2\nu+1)} = c_\mu^{(\nu)} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots, \ \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

(d. h. die Zeilen der Folge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ bestehen abwechselnd aus den Zeilen der beiden Folgen $\left(b_\mu^{(\nu)}\right)$, $\left(c_\mu^{(\nu)}\right)$. Alsdann hat man offenbar:

$$(98)\quad \underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \underline{b}, \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \bar{b},$$

obschon die Zeilen der Folge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *nicht mehr gleichmässig* begrenzt sind.

In analoger Weise kann man aus einer Folge mit *einseitig gleichmässig begrenzten* oder *gleichmässig unbegrenzten* Zeilen durch Einschaltung der Zeilen einer anderen Folge eine solche bilden, welche jene Eigenschaft nicht mehr besitzt, während die in Frage kommenden Limites unv ändert bleiben.

Hiergegen lassen sich die *speciellen* Sätze (IIa), (IIb) in folgen Weise umkehren:

(IIIa) *Existirt* $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *als endliche Zahl* A, *in weld Falle dann (nach Satz* (Ia) *auch:*

$$\lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty} \cdot \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A,$$

so sind die Zeilen und Colonnen mit eventuellem Aussc einer endlichen Anzahl gleichmässig begrenzt.

Beweis. Aus der Voraussetzung $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A$ folgt zunächst, zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen m, n' fixirt werden können,

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq A + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n'. \tag{99}$$

Da sodann auch:

$$\lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A$$

so erkennt man, dass die $\underline{\lim}\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, $\overline{\lim}\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ zum mindesten von e bestimmten Index ν ab *endliche* Zahlen sein müssen, etwa:

$$\underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)}, \quad \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)}, \tag{100}$$

und dass sodann:

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \left\{ \begin{matrix} \underline{a}^{(\nu)} \\ \bar{a}^{(\nu)} \end{matrix} \right\} \leqq A + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{etwa für:} \quad \nu \geqq n''. \tag{101}$$

Man hat also insbesondere:

$$\underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq A - \frac{\varepsilon}{2}, \quad A + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n'' \tag{102}$$

und daher, wenn m eine Zahl bedeutet, die nicht kleiner als n' un durch Verbindung der Ungleichungen (102) und (99):

$$\underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n \tag{103}$$

d. h. die *Zeilen* der Doppelfolge sind *gleichmässig begrenzt.* Das an gilt dann wiederum für die Colonnen. —

(IIIb) *Besteht eine der drei Beziehungen:*

$$\lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \quad \lim_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \quad \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \cdot$$

(bezw. $= -\infty$), *in welchem Falle (nach Satz* (I) *und* (Ia) *allemal auch die beiden anderen erfüllt sind, so sin*

Zeilen und Colonnen mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl gleichmässig unbegrenzt.

Dieser letztere Satz bedarf keines weiteren Beweises. Da man näm-, wie schon in seiner Fassung enthalten, allemal von vornherein $a_\mu^{(\nu)} = +\infty$ bezw. $-\infty$ annehmen kann, so besteht die *Divergenz-ingung* (3a) (s. § 1), welche mit der Eigenschaft der *„gleichmässigen egrenztheit“* identisch ist (vgl. Fussn. 1), p. 316).

Durch Zusammenfassung der Sätze (IIa), (IIIa) bezw. (IIb), (IIIb) Berücksichtigung von (Ia) gewinnt man schliesslich noch die folgen- allgemeinsten Sätze dieser Art:

(IVa) *Für die Convergenz der Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *ist nothwendig und hinreichend, dass die Zeilen oder Colonnen mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl gleichmässig begrenzt sind und dass* $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *bezw.* $\lim\limits_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *existirt. Ist diese Bedingung für die Zeilen und* $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *erfüllt, so besteht sie auch für die Colonnen und* $\lim\limits_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, *vice versa, und man hat dann allemal:*

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

(IVb) *Für die eigentliche Divergenz der Doppelfolge ist nothwendig und hinreichend, dass die Zeilen oder Colonnen mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl gleichmässig unbegrenzt sind. Ist diese Bedingung für die Zeilen erfüllt, so besteht sie auch für die Colonnen, vice versa, und man hat dann allemal:*

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} = \lim_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} . \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \textit{bezw.} \quad = -\infty.$$

München, December 1896 und Juni 1899.

Ueber Doppelfolgen und Doppelreihen.

Von

Franz London in Breslau.

Einleitung.

Eine Folge einfacher Zahlenfolgen:

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)},\ a_1^{(0)},\ a_2^{(0)},\cdots \\ a_0^{(1)},\ a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\cdots \\ a_0^{(2)},\ a_1^{(2)},\ a_2^{(2)},\cdots \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \end{array}$$

bezeichnen wir als eine zweifach unendliche Zahlenfolge oder kurz als „*Doppelfolge*" und denken ihre Elemente stets in der oben angegebenen Weise in Zeilen und Colonnen angeordnet. Die Doppelfolgen bilden die Grundlage für die Theorie der Doppelreihen, Doppelproducte u. s. w., sowie wichtiger Eigenschaften der Functionen zweier Variabeln, und es ist ihr Studium deshalb wichtig, weil sie das Charakteristische der bei diesen Gebilden in Frage kommenden Verhältnisse besonders deutlich hervortreten lassen*). Ausser von Herrn Pringsheim, welcher im ersten Paragraphen seiner Arbeit über die unendlichen Doppelreihen**) einige grundlegende Eigenschaften der Doppelfolgen herleitet, sind die Doppelfolgen meines Wissens nicht zum Gegenstande eines directen Studiums gemacht worden. Die nachfolgenden Untersuchungen sollen sich daher mit den Eigenschaften der Doppelfolgen und ihrer Anwendungen auf die Doppelreihen beschäftigen, und zwar sollen besonders die in einer Doppelfolge enthaltenen einfachen Folgen betrachtet werden d. h. diejenigen einfachen Folgen, deren Elemente $a_\mu^{(\nu)}$ der Doppelfolge angehören und deren Indices μ, ν unabhängig von einander ins Unendliche wachsen. Im § 1 werden

---

*) cf. Encyklopädie der mathem. Wissenschaftnn Bd. I, A 3 (Art. 20, p. 76, 77).

**) A. Pringsheim: Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen, Sitzungsberichte der math. phys. Classe der k. bayer. Akademie der Wiss. Bd. 27, Heft I, p. 101—152, 1897.

zunächst die Begriffe der unteren und oberen Unbestimmtheitsgrenzen auf die Doppelfolgen übertragen und gezeigt, dass zur Convergenz der Doppelfolgen — d. h. zur Existenz eines Grenzwerthes derselben — die Convergenz *aller* in ihr enthaltener einfacher Folgen nothwendig und hinreichend ist, so dass diese Eigenschaft auch als Definition der Convergenz einer Doppelfolge zu Grunde gelegt werden kann. Sodann wird untersucht, wie beschaffen die Diagonalfolge $a_0^{(0)}, a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, \cdots$ und die zu ihr parallelen Folgen (§ 2) und weiterhin, wie beschaffen die Zeilen (Colonnen) (§ 3) sein müssen, damit die aus ihnen zusammengesetzte Doppelfolge convergent ist, wobei sich der Begriff der gleichmässigen Convergenz von fundamentaler Bedeutung erweist. Im § 4 wird betrachtet, wie beschaffen eine Doppelfolge mit den Elementen $a_\mu^{(\nu)}$ sein muss, damit die beiden successiven Grenzübergänge:

$$\lim_{\nu=\infty} \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \quad \Big(\text{resp.} \lim_{\mu=\infty} \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\Big)$$

ausführbar sind, wobei sich ergiebt, dass zwar nicht sämmtliche in der Doppelfolge enthaltenen einfachen Folgen, wie es zur Convergenz der Doppelfolge erforderlich ist, zu convergiren brauchen, wohl aber die sämmtlichen in einem gewissen *Theil* der Doppelfolge verlaufenden einfachen Folgen. Dadurch werden wir zu einem erweiterten Convergenzbegriff „der horizontalen (resp. verticalen) Convergenz der Doppelfolge" geführt, welcher auch gestattet, die Beschaffenheit der Doppelfolge zu charakterisiren, für den Fall der Vertauschbarkeit der beiden obigen Grenzübergänge, welche durch die Gleichung:

$$\lim_{\nu=\infty} \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty} \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$$

ausgedrückt ist. Im letzten Paragraphen werden die für die Doppelfolgen erlangten Resultate auf die Doppelreihen übertragen und dadurch Eigenschaften dieser letzteren erschlossen. Es wird eine Classe von Anordnungen der Doppelreihe in eine einfache Reihe angegeben, deren Convergenz für die (bedingte) Convergenz der Doppelreihe nothwendig und hinreichend ist; sodann wird untersucht, wie beschaffen die Zeilen (Colonnen) einer Doppelreihe sein müssen, damit diese convergent ist, und schliesslich werden die Doppelreihen $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)}$ betrachtet, bei denen die beiden successiven Summationen: $\sum_0^{\infty}{}_\nu \sum_0^{\infty}{}_\mu u_\mu^{(\nu)}$ ausführbar sind, sowie diejenigen, bei welchen die Reihenfolge dieser Summationen vertauschbar ist, wobei ein tieferer Einblick in die Natur derselben erhalten wird.

§ 1.

Die in einer Doppelfolge enthaltenen einfachen Zahlenfolge

1) Sei eine zweifach unendliche Folge reeller Zahlen

$$a_\mu^{(\nu)} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

gegeben. Eine solche Folge nennen wir (in Analogie mit den Bezeichn „Doppelreihe, Doppelproduct"*) *eine Doppelfolge* und bezeichnen sie

$$\left\{\begin{matrix} a_0^{(0)} & a_1^{(0)} & a_2^{(0)} & \cdots & a_\mu^{(0)} & \cdots \\ a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \cdots & a_\mu^{(1)} & \cdots \\ a_0^{(2)} & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \cdots & a_\mu^{(2)} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{(\nu)} & a_1^{(\nu)} & a_2^{(\nu)} & \cdots & a_\mu^{(\nu)} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right\} \quad \text{oder} \quad \left\{a_\mu^{(\nu)}\right\}_{(\mu,\nu=0,1,2,\cdots)}.$$

Wir wollen durchgehends voraussetzen, dass die Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ der D folge sämmtlich ihrem absoluten Betrage nach unter einer besti Zahl G sich befinden $\left(\left|a_\mu^{(\nu)}\right| < G \; (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)\right)$ und desha Doppelfolge als *„eine begrenzte Doppelfolge"* bezeichnen. Dann exi eine *obere Grenze* O und eine *untere Grenze* U für die Doppelfolge dass keine Zahl der Doppelfolge kleiner ist als U und grösser ist dass aber in jedem (wenn auch noch so kleinen) O resp. U umschl den Intervalle Zahlen der Folge sich befinden.

Existirt eine Zahl a derart, dass sich jeder positiven Zahl ganze positive Zahlen m, n so zuordnen lassen, dass:

$$\left.\begin{matrix} \text{für } \mu \geqq m, \; \nu \geqq n \\ \left|a - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \end{matrix}\right\}$$

wird, dann heisst a *der Grenzwerth der Doppelfolge;* eine Doppe welche einen Grenzwerth besitzt, heisst *convergent.* Die Operati untersuchen, ob die Doppelfolge $\left\{a_\mu^{(\nu)}\right\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ einen werth besitzt, wird bezeichnet durch das Operationszeichen:

$$\operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

welches gleichzeitig, im Fall diese Operation ausführbar ist, al Grenzwerth a existirt, wie üblich, diesen Grenzwerth darstellt:

$$\operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a.$$

---

*) Cf. z. B. Stolz, Allgemeine Arithmetik Bd. I, p. 149 ff.

Zur Existenz von $\operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ ist *nothwendig und hinreichend**), dass zu jeder positiven Zahl ε' zwei ganze positive Zahlen m', n' zugeordnet werden können, derart dass:

$$\left|a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon' \quad \text{für} \quad \mu \geqq m', \; \nu \geqq n'; \; \varrho, \sigma = 0, 1, 2, \cdots.$$

2) *Monotone Doppelfolgen**). *Sei* $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ eine begrenzte, nie abnehmende, monotone Doppelfolge, d. h.

$$(0) \qquad a_\mu^{(\nu)} \geqq a_m^{(n)} \quad \text{für} \quad \mu \geqq m, \; \nu \geqq n.$$

Dann gilt der Satz: *Jede begrenzte nie abnehmende Doppelfolge besitzt ihre obere Grenze O als Grenzwerth.* Ist O die obere Grenze der begrenzten, nie abnehmenden Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$, so ist:

$$(1) \qquad a_\mu^{(\nu)} \leqq O \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots);$$

ist ferner ε eine beliebige positive Zahl, so existiren stets zwischen $O - \varepsilon$ und O Zahlen der Folge; ist $a_m^{(n)}$ eine solche Zahl, so ist:

$$(2) \qquad O - \varepsilon \leqq a_m^{(n)} \leqq O.$$

Nun ist nach (0) und (1):

$$(3) \qquad a_m^{(n)} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq O \quad \text{für} \quad \mu \geqq m, \; \nu \geqq n.$$

Also ist nach (2) und (3):

$$(4) \qquad O - \varepsilon \leqq a_m^{(n)} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq O,$$

$$0 \leqq O - a_\mu^{(\nu)} \leqq \varepsilon \quad \text{oder} \quad \left|O - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu \geqq m, \; \nu \geqq n$$

d. h.:

$$\operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = O. —$$

Ganz analog beweist man:

Jede begrenzte, nie zunehmende Doppelfolge hat ihre untere Grenze U als Grenzwerth. Hieraus ergiebt sich der bekannte Satz*):

Jede begrenzte monotone Doppelfolge ist convergent.

3) *Die Unbestimmtheitsgrenzen einer Doppelfolge.* Gegeben sei die begrenzte Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$; wir bezeichnen für die Partialfolge: $\{a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)}\} \underset{(\mu,\, \nu \text{ constant})}{(\varrho, \sigma = 0, 1, 2, \cdots)}$ die obere Grenze durch $o_\mu^{(\nu)}$, die untere durch $u_\mu^{(\nu)}$; dann erhalten wir zwei neue begrenzte Doppelfolgen:

$$\{u_\mu^{(\nu)}\} \quad \text{und} \quad \{o_\mu^{(\nu)}\} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

*) Cf. Pringsheim: Doppelreihen § 1, Münchener Sitzungsberichte Bd. 37, 1897.

welche wir als *die untere und obere Grenzfolge der Doppelfolge*

$$\{a_\mu^{(\nu)}\} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

bezeichnen. Die untere Grenzfolge $\{u_\mu^{(\nu)}\}$ ist nie abnehmend, die obere Grenzfolge $\{o_\mu^{(\nu)}\}$ ist nie zunehmend, mithin sind die Doppelfolgen $\{u_\mu^{(\nu)}\}$ und $\{o_\mu^{(\nu)}\}$ nach dem Satze im vorigen Artikel *convergent*. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty} u_\mu^{(\nu)} &= \operatorname*{\underline{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\,{}^{*)} = u\\ \operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty} o_\mu^{(\nu)} &= \operatorname*{\overline{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \quad = o\end{aligned}\right\}$$

und nennen u und o *die untere und obere Unbestimmtheitsgrenze der Doppelfolge*. Somit gilt: *Die Unbestimmtheitsgrenzen einer begrenzten Doppelfolge* $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ *sind die Grenzwerthe der zu* $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ *gehörigen unteren und oberen Grenzfolge.*

4) *Unter einer in der Doppelfolge* $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ *enthaltenen einfachen Folge verstehen wir eine einfache Folge von Zahlen* $a_\mu^{(\nu)}$, *welche der Doppelfolge angehören, und deren Indices unabhängig von einander über alle Grenzen wachsen.* Wir bezeichnen eine solche in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ enthaltene einfache Folge demnach durch:

$$\left\{a_{\mu_0}^{(\nu_0)},\ a_{\mu_1}^{(\nu_1)},\ a_{\mu_2}^{(\nu_2)},\ \cdots\right\} = \left\{a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}\right\}_{(\varrho=0,1,2,\cdots)},$$

wobei:

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots \quad \text{und} \quad \nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots$$

zwei Folgen ganzer positiver Zahlen mit $\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} \mu_\varrho = \infty$, $\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} \nu_\varrho = \infty$ bedeuten.

In Bezug auf die in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ enthaltenen einfachen Folgen besitzen die beiden Unbestimmtheitsgrenzen hervorragende Eigenschaften. Sei $\left\{a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}\right\}$ $(\varrho = 0, 1, 2, \cdots)$ eine beliebige in der Doppelfolge $\underset{(\mu,\nu)}{\{a_\mu^{(\nu)}\}}$ enthaltene einfache Folge und seien mit $o_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}$, $u_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}$ die obere und untere Grenze der Partialfolge: $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu \geqq \mu_\varrho,\ \nu \geqq \nu_\varrho)$ bezeichnet, dann ist:

$$o_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \geqq a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \geqq u_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \quad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots),$$

---

*) Die Bezeichnung der oberen und unteren Unbestimmtheitsgrenze durch $\overline{\text{Lim}}$, $\underline{\text{Lim}}$ rührt von Herrn Pringsheim her cf. Sitz.-Ber. der Münchener Akademie Bd. 28 (1898), p. 59 ff. Vergl. auch Encyklopädie der math. Wissenschaften Bd. I, A 3 (Artikel 15).

o ist:

$$\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} o_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \geqq \overline{\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty}}\, a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \geqq \underline{\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty}}\, a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \geqq \operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} u_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)},$$

bei

$$\overline{\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty}}\, a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}, \quad \underline{\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty}}\, a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}$$

obere und untere Unbestimmtheitsgrenze der einfachen Zahlenfolge

$$\left\{a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}\right\} \quad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots)$$

leuten. Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} o_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} &= \operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty} o_\mu^{(\nu)} = \overline{\operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = o \\ \operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} u_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} &= \operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty} u_\mu^{(\nu)} = \underline{\operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = u \end{aligned}\right\},$$

o ist:

$$o \geqq \overline{\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty}}\, a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \geqq \underline{\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty}}\, a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \geqq u \quad \text{d. h.}$$

ie Unbestimmtheitsgrenzen einer jeden in einer begrenzten Doppelfolge entltenen einfachen Folge liegen zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen der oppelfolge. Alle in einer Doppelfolge enthaltenen einfachen Folgen sind ithin so beschaffen, dass ihre unteren Unbestimmtheitsgrenzen nicht einer als die untere Unbestimmtheitsgrenze der Doppelfolge, ihre oberen nbestimmtheitsgrenzen nicht grösser als die obere Unbestimmtheitsgrenze r Doppelfolge sind. Es gilt aber weiter, dass in der Doppelfolge entltene einfache Folgen existiren, deren Unbestimmtheitsgrenzen genau eich den Unbestimmtheitsgrenzen u und o der Doppelfolge sind, so dass und o *Minimum* und *Maximum* der Unbestimmtheitsgrenzen der sämmtchen in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltenen einfachen Folgen sind. In der That, sei

$$\left\{a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}\right\} \quad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots)$$

ne in der Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ enthaltene einfache Folge, d seien $u_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}$, $o_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}$ die untere und obere Grenze der Partialfolge

$$\{a_\mu^{(\nu)}\} \quad (\mu \geqq \mu_\varrho, \ \nu \geqq \nu_\varrho),$$

deutet dann $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ eine Folge positiver Zahlen, für welche $\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} \varepsilon_\varrho = 0$, dann existiren in der Partialfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu \geqq \mu_\varrho, \ \nu \geqq \nu_\varrho)$ ihlen, welche sich von $u_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}$ um weniger als ε_ϱ unterscheiden, und andere ihlen, welche sich von $o_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}$ um weniger als ε_ϱ unterscheiden; sei u_ϱ eine hl der ersten, o_ϱ eine Zahl der zweiten Art, so ist also:

$$\left.\begin{array}{l} u_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \leqq u_\varrho \leqq u_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} + \varepsilon_\varrho \\ o_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} - \varepsilon_\varrho \leqq o_\varrho \leqq o_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \end{array}\right\}.$$

Also ist, da $\lim\limits_{\varrho=0} \varepsilon_\varrho = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\varrho=\infty} u_\varrho = \lim\limits_{\varrho=\infty} u_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = u \\ \lim\limits_{\varrho=\infty} o_\varrho = \lim\limits_{\varrho=\infty} o_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = o \end{array}\right\}.$$

Mithin hat die Folge

$$u_0,\ o_0,\ u_1,\ o_1,\ u_2,\ o_2,\ \cdots$$

u zur unteren, o zur oberen Unbestimmtheitsgrenze, so dass damit in der That eine in der Doppelfolge enthaltene einfache Folge hergestellt ist, deren Unbestimmtheitsgrenzen mit denen der Doppelfolge zusammenfallen. Also gilt:

Die sämmtlichen in einer begrenzten Doppelfolge enthaltenen einfachen Folgen sind so beschaffen, dass ihre Unbestimmtheitsgrenzen zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen der Doppelfolge enthalten sind, so zwar, dass die obere Unbestimmtheitsgrenze der Doppelfolge das Maximum der oberen Unbestimmtheitsgrenzen der einfachen Folgen, die untere Unbestimmtheitsgrenze der Doppelfolge das Minimum der unteren Unbestimmtheitsgrenzen der einfachen Folgen ist. Es giebt stets einfache in der Doppelfolge enthaltene Folgen, deren Unbestimmtheitsgrenzen dieses Maximum und Minimum wirklich erreichen. Es giebt daher auch einfache Folgen, welche o und u als Grenzwerth besitzen. Nennen wir — in Analogie mit der bei einfachen Folgen üblichen Bezeichnungsweise — das von den Unbestimmtheitsgrenzen der Doppelfolge begrenzte Intervall (u, o) *„das Oscillationsintervall der Doppelfolge“*, und nennen wir ein Intervall (u', o') in einem andern Intervall (u, o) enthalten, wenn:

$$u \leqq u' \leqq o' \leqq o,$$

dann kann man die letzten Sätze folgendermassen aussprechen:

Ist eine einfache Folge in einer begrenzten Doppelfolge enthalten, so ist auch ihr Oscillationsintervall in dem der Doppelfolge enthalten.

In jeder begrenzten Doppelfolge sind einfache Folgen enthalten, deren Oscillationsintervall mit dem der Doppelfolge zusammenfällt.

Ist die Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ keine begrenzte, enthält sie jedoch eine begrenzte Partialfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $\begin{pmatrix}\mu \geqq m \\ \nu \geqq n\end{pmatrix}$, so dass also $|a_\mu^{(\nu)}| \leqq G$ $\begin{pmatrix}\mu \geqq m \\ \nu \geqq n\end{pmatrix}$, dann zeigt die Doppelfolge hinsichtlich ihrer Unbestimmtheitsgrenzen dasselbe Verhalten, wie im vorigen Falle, sie besitzt falls ein begrenztes Oscillationsintervall, wie man in analoger Weise · Berücksichtigung selbstverständlicher Modificationen beweist. Auch esem Falle wollen wir die Doppelfolge als eine „begrenzte" bezeichnen. zt aber die Doppelfolge keine einzige begrenzte Partialfolge, dann ist das Oscillationsintervall unbegrenzt, indem dieselben Eventualitäten ten, wie bei einfachen Zahlenfolgen, worauf wir daher hier nicht : eingehen wollen.

5) Fassen wir insbesondere den Fall ins Auge, dass die beiden Unnmtheitsgrenzen einer begrenzten Doppelfolge einander gleich werden,

$$\underline{\operatorname{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\operatorname{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a.$$

esem Falle ist die Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ converund:

$$\operatorname{Lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a.$$

er That bedeuten wieder $u_\mu^{(\nu)}$, $o_\mu^{(\nu)}$ die untere und obere Grenze der alfolge $\{a_{\mu'}^{(\nu')}\}$ $\begin{pmatrix}\mu' \geqq \mu\\ \nu' \geqq \nu\end{pmatrix}$, so ist:

$$\operatorname{Lim}_{\mu,\nu=\infty} u_\mu^{(\nu)} = \operatorname{Lim}_{\mu,\nu=\infty} o_\mu^{(\nu)} = a.$$

in lassen sich jeder positiven Zahl ε zwei ganze positive Zahlen m, n t zuordnen, dass

$$a - \varepsilon \leqq u_\mu^{(\nu)} \leqq o_\mu^{(\nu)} \leqq a + \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu \geqq m, \ \nu \geqq n;$$

un:

$$u_\mu^{(\nu)} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq o_\mu^{(\nu)},$$

t für

$$\mu \geqq m, \ \nu \geqq n$$

$$a - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq a + \varepsilon$$

:

$$\left|a - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{Lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a.$$

Ist umgekehrt $\operatorname{Lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a$, *so ist auch*

$$\underline{\operatorname{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\operatorname{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a.$$

ı es existirt dann (cf. art. 4) eine einfache in der Doppelfolge entne Folge: $\{a_{\mu_0}^{(\nu_0)}, a_{\mu_1}^{(\nu_1)}, a_{\mu_2}^{(\nu_2)}, \cdots\}$, für welche:

$$\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty} a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = \underline{\operatorname{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Andererseits ist, wegen $\operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a$, bei beliebigem positiven ε:

$$\left| a - a_\mu^{(\nu)} \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu \geqq m, \; \nu \geqq n,$$

und somit auch:

$$\left| a - a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu_\varrho \geqq m, \; \nu_\varrho \geqq n,$$

also ist:

(2) $$\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = a,$$

mithin folgt aus (1) und (2):

$$\operatorname*{\underline{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a;$$

in derselben Weise ergiebt sich:

$$\operatorname*{\overline{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a.$$

Mithin ist der Satz bewiesen:

Eine Doppelfolge convergirt dann und nur dann, wenn ihre Unbestimmtheitsgrenzen einander gleich werden. Hieraus ergiebt sich der für das Folgende wichtige Satz:

Eine Doppelfolge convergirt dann und nur dann, wenn sämmtliche in ihr enthaltenen einfachen Folgen convergiren.

Beweis. Ist die Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ convergent, so ist

$$\operatorname*{\underline{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \operatorname*{\overline{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)};$$

da die Unbestimmtheitsgrenzen sämmtlicher in der Doppelfolge enthaltenen einfachen Folgen zwischen $\operatorname*{\underline{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ und $\operatorname*{\overline{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ sich befinden (cf. Art. 4), so müssen dieselben einander gleich sein; also convergiren alle einfachen Folgen und zwar zum Grenzwerth $\operatorname*{Lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$. — Convergiren andererseits alle in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ enthaltenen einfachen Folgen, so können sie nur zu demselben Grenzwerth convergiren; denn sind $a_1, a_2, a_3, \cdots$ und $b_1, b_2, b_3, \cdots$ zwei in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltene einfache Folgen, und wäre $\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} a_\varrho \mp \operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} b_\varrho$, so würde die in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltene einfache Folge: $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$ die von einander verschiedenen Unbestimmtheitsgrenzen

$$\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} a_\varrho \mp \operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} b_\varrho$$

besitzen, also — gegen die Voraussetzung — nicht convergiren, mithin ist:

$$\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} a_\varrho = \operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} b_\varrho.$$

folgt: *Convergiren alle in* $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ *enthaltenen einfachen Folgen, so con- ren sie auch sämmtlich zu demselben Grenzwerth.* Nun giebt es rt. 4) in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltene einfache Folgen, welche zum Grenzwerth $a_\mu^{(\nu)}$, und andere, welche zum Grenzwerth $\overline{\operatorname{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ convergiren, mithin da gemäss unserer Annahme sämmtliche einfachen Folgen zu dem- n Grenzwerth convergiren:

$$\underline{\operatorname{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\operatorname{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

ist die Doppelfolge convergent, und damit der oben ausgesprochene bewiesen.

Anmerkung: Ist die Doppelfolge *monoton*, so genügt bereits zu ihrer ergenz die Convergenz *einer einzigen* in ihr enthaltenen einfachen Folge.

6) Wir nennen eine in der Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ ltene einfache Folge:

$$\{a_{\mu_1}^{(\nu_1)},\ a_{\mu_2}^{(\nu_2)},\ a_{\mu_3}^{(\nu_3)}, \cdots\}$$

„steigende Folge", wenn:

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \mu_3 \leqq \cdots \quad \text{und} \quad \nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3 \leqq \cdots.$$

wollen zeigen, dass es zur Convergenz der Doppelfolge bereits ausreicht, alle in ihr enthaltenen, steigenden Folgen convergiren. Zu diesem cke beweisen wir den allgemeineren Satz: *In jeder begrenzten Doppelfolge steigende Folgen enthalten, deren Unbestimmtheitsgrenzen mit denen der pelfolge übereinstimmen.* Wir wollen in der That für die Doppelfolge $\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ eine solche steigende Folge construiren. Sei ler mit $o_\mu^{(\nu)}$ die obere, mit $u_\mu^{(\nu)}$ die untere Grenze der Partialfolge $\}$ $\binom{\mu' \geqq \mu}{\nu' \geqq \nu}$ bezeichnet; sei ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$ eine Folge positiver len, für welche $\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty} \varepsilon_\varrho = 0$. Ist $a_{m_1}^{(n_1)}$ ein beliebiges Glied der Doppel- , so existiren sicher Zahlen in der Partialfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $\binom{\mu \geqq m_1}{\nu \geqq n_1}$, he sich von $o_{m_1}^{(n_1)}$ um weniger als ε_1 unterscheiden; ist $a_{\mu_1}^{(\nu_1)}$ eine solche , so ist:

$$0 \leqq o_{m_1}^{(n_1)} - a_{\mu_1}^{(\nu_1)} \leqq \varepsilon_1, \quad \text{wo} \quad \mu_1 \geqq m_1,\ \nu_1 \geqq n_1.$$

Ist $m_2 > \mu_1$, $n_2 > \nu_1$, so existiren in der Partialfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $\binom{\mu \geqq m_2}{\nu \geqq n_2}$ er Zahlen, welche sich von $u_{m_2}^{(n_2)}$ um weniger als ε_2 unterscheiden; ist eine solche, so ist:

$$0 \leqq a_{\mu_2}^{(\nu_2)} - u_{m_2}^{(n_2)} \leqq \varepsilon_2, \quad \text{wo} \quad \mu_2 \geqq m_2, \quad \nu_2 \geqq n_2.$$

Ist $m_3 > \mu_2$, $n_3 > \nu_2$, so existiren in der Partialfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\} \begin{pmatrix}\mu \geqq m_3\\ \nu \geqq n_3\end{pmatrix}$ sicher Zahlen, welche sich von $o_{m_3}^{(n_3)}$ um weniger als ε_3 unterscheiden, ist $a_{\mu_3}^{(\nu_3)}$ eine solche, so ist:

$$(3) \qquad 0 \leqq o_{m_3}^{(n_3)} - a_{\mu_3}^{(\nu_3)} \leqq \varepsilon_3, \quad \text{wo} \quad \mu_3 \geqq m_3, \quad \nu_3 \geqq n_3.$$

Ist $m_4 > \mu_3$, $n_4 > \nu_3$, so giebt es in der Partialfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\} \begin{pmatrix}\mu \geqq m_4\\ \nu \geqq n_4\end{pmatrix}$ sicher Zahlen, welche sich von $u_{m_4}^{(n_4)}$ um weniger als ε_4 unterscheiden, ist $a_{\mu_4}^{(\nu_4)}$ eine solche, so ist:

$$(4) \qquad o \leqq a_{\mu_4}^{(\nu_4)} - u_{m_4}^{(n_4)} \leqq \varepsilon_4, \quad \text{wo} \quad \mu_4 \geqq m_4, \ \nu_4 \geqq n_4.$$

So fahren wir fort und gelangen auf diesem Wege zu einer in

$$\{a_\mu^{(\nu)}\} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

enthaltenen Folge:

$$\{a_{\mu_1}^{(\nu_1)}, a_{\mu_2}^{(\nu_2)}, a_{\mu_3}^{(\nu_3)}, \cdots\},$$

für welche $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \cdots$ und $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$, welche also eine steigende Folge ist. Die Glieder:

$$a_{\mu_1}^{(\nu_1)}, a_{\mu_3}^{(\nu_3)}, a_{\mu_5}^{(\nu_5)}, \cdots$$

convergiren zum Grenzwerth $\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} o_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = \overline{\operatorname*{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$. Die Glieder:

$$a_{\mu_2}^{(\nu_2)}, a_{\mu_4}^{(\nu_4)}, a_{\mu_6}^{(\nu_6)}, \cdots$$

convergiren zum Grenzwerth $\operatorname*{Lim}_{\varrho=\infty} u_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = \underline{\operatorname*{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$. Mithin besitzt die steigende in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltene Folge $\{a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}\}$ dieselben Unbestimmtheitsgrenzen, wie die Doppelfolge, womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Nun lässt sich unmittelbar zeigen, dass eine Doppelfolge convergirt, wenn alle in ihr enthaltenen steigenden Folgen convergiren. Denn ist dies für die Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ der Fall, so ist dieselbe offenbar eine begrenzte, und es existirt in ihr eine steigende Folge $\{a_{\mu_1}^{(\nu_1)}, a_{\mu_2}^{(\nu_2)}, \cdots\}$, welche dieselben Unbestimmtheitsgrenzen, wie die Doppelfolge hat. Dann ist also:

$$\underline{\operatorname*{Lim}}_{\varrho=\infty} a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = \underline{\operatorname*{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \quad \text{und} \quad \overline{\operatorname*{Lim}}_{\varrho=\infty} a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = \overline{\operatorname*{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

und da $\{a_{\mu_1}^{(\nu_1)}, a_{\mu_2}^{(\nu_2)}, \cdots\}$, wie jede steigende Folge von $\{a_\mu^{(\nu)}\}$, der Voraussetzung nach convergirt, so ist:

$$\underline{\operatorname{Lim}}_{\varrho=\infty} a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = \overline{\operatorname{Lim}}_{\varrho=\infty} a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}$$

st auch:

$$\underline{\operatorname{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\operatorname{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$$

lie Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ ist convergent, also gilt: *Eine Doppelfolge ist und nur dann convergent, wenn die sämmtlichen in ihr enthaltenen len Folgen convergent sind.*

§ 2.

Die Diagonalfolge und die zu ihr parallelen Folgen.

achdem wir zunächst die Gesammtheit der in einer Doppelfolge enen einfachen Folgen betrachtet haben, wollen wir nunmehr eine ers wichtige Classe solcher Folgen — nämlich die Diagonalfolge e zu ihr parallelen Folgen — behandeln und untersuchen, wie be- n diese Folgen sein müssen, damit die Doppelfolge convergirt. Sei n die Doppelfolge:

$$\left\{\begin{matrix} a_0^{(0)} & a_1^{(0)} & a_2^{(0)} & a_3^{(0)} \cdots \\ a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \cdots \\ a_0^{(2)} & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \cdots \\ a_0^{(3)} & a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \end{matrix}\right\} = \{a_\mu^{(\nu)}\} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

agonalglieder $a_\mu^{(\mu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$ bilden die in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltene ein- Folge:

$$\{a_0^{(0)}, a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, \cdots\} = \{a_\mu^{(\mu)}\} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \cdots).$$

en betrachten wir die Folgen, welche in dem Schema $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ zu dieser ıalfolge parallel sind, und die man aus dieser enthält, indem man ler die oberen oder unteren Indices um resp. 1, 2, 3, ... Einheiten . Die in Rede stehenden Folgen bilden somit die beiden Systeme

$$\left.\begin{matrix} \{a_0^{(1)}, & a_1^{(2)} & , a_2^{(3)} & , \cdots\} = \{a_\mu^{(\mu+1)}\} \\ \{a_0^{(2)}, & a_1^{(3)} & , a_2^{(4)} & , \cdots\} = \{a_\mu^{(\mu+2)}\} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \{a_0^{(\varrho)}, & a_1^{(1+\varrho)}, & a_2^{(2+\varrho)}, & \cdots\} = \{a_\mu^{(\mu+\varrho)}\} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{matrix}\right\} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \cdots)$$

veitens:

$$\left.\begin{array}{l}\{a_1^{(0)},\ a_2^{(1)}\ ,\ a_3^{(2)}\ ,\cdots\} = \{a_{\nu+1}^{(\nu)}\} \\ \{a_2^{(0)},\ a_3^{(1)}\ ,\ a_4^{(2)}\ ,\cdots\} = \{a_{\nu+2}^{(\nu)}\} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \{a_\varrho^{(0)},\ a_{1+\varrho}^{(1)},\ a_{2+\varrho}^{(2)},\cdots\} = \{a_{\nu+\varrho}^{(\nu)}\}\end{array}\right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Damit die Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ convergire, ist zunächst nothwendig, dass, wie alle in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltenen Folgen, auch unsere Folgen:

$$\{a_0^{(\varrho)},\ a_1^{(1+\varrho)},\ a_2^{(2+\varrho)}, \cdots\},\ \{a_\varrho^{(0)},\ a_{1+\varrho}^{(1)},\ a_{2+\varrho}^{(2)}, \cdots\} \quad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots)$$

convergiren und denselben Grenzwerth a besitzen. Diese Bedingung ist jedoch für die Convergenz der Doppelfolge nicht ausreichend, sondern es muss dazu die Convergenz aller Folgen unseres Systems zum Grenzwerth a *eine „gleichmässige“* sein. Dabei versteht man — in der üblichen Weise — *unter gleichmässiger Convergenz der Folgen eines Systems zum Grenzwerth a,* dass bei *sämmtlichen* Folgen die Glieder sich *von ein und derselben Stelle an* von a höchstens um die — beliebig kleine — Grösse ε unterscheiden. In unserem Falle wird das betrachtete System von Zahlenfolgen:

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l}\{a_0^{(\varrho)},\ a_1^{(1+\varrho)},\ a_2^{(2+\varrho)}, \cdots\} \\ \{a_\varrho^{(0)},\ a_{1+\varrho}^{(1)}\ ,\ a_{2+\varrho}^{(2)}\ , \cdots\}\end{array}\right\} \\ (\varrho = 0, 1, 2, \cdots)$$

gleichmässig zum Grenzwerth a convergiren, wenn zu jeder beliebigen positiven Zahl ε ein Index m zugeordnet werden kann, derart dass:

$$(2) \qquad \left|a - a_\mu^{(\mu+\varrho)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu \geqq m$$

$$(3) \qquad \left|a - a_{\nu+\varrho}^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq m$$

$$(\varrho = 0, 1, 2, \cdots)$$

und diese Ungleichungen für *alle* Werthe $\varrho = 0, 1, 2, \cdots$ *durch dasselbe m* erfüllt werden. Alsdann unterscheiden sich bei *sämmtlichen* Folgen unseres Systems die Elemente vom m^{ten} an von a höchstens um ε.

Ist nun die Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ convergent, so lässt sich jeder positiven Zahl ε ein Index m zuordnen, so dass:

$$(4) \qquad \left|a - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu \geqq m,\ \nu \geqq m.$$

Setzen wir hierin $\nu = \mu + \varrho$ $(\varrho = 0, 1, 2, \cdots)$, so folgt:

$$\left|a - a_\mu^{(\mu+\varrho)}\right| \leqq \varepsilon, \quad \text{für} \quad \mu \geqq m,\ \mu + \varrho \geqq m;$$

da

$$\mu + \varrho \geqq \mu \geqq m,$$

so gilt also diese Ungleichung für alle $\mu \geqq m$. Setzen wir ferner in (4): $\mu = \nu + \varrho$ $(\varrho = 0, 1, 2, \cdots)$, so folgt:

$$\left| a - a_{(\nu+\varrho)}^{(\nu)} \right| \leqq \varepsilon, \quad \text{für} \quad \nu \geqq m,\ \nu + \varrho \geqq m,$$

also — da $\nu + \varrho \geqq \nu$ — für $\nu \geqq m$.

Somit sind die Ungleichungen (2), (3) erfüllt, die Convergenz der Folgen (1) zum Grenzwerth a ist somit eine *gleichmässige*.

Convergiren andererseits die Folgen (1) zum Grenzwerth a gleichmässig, so gelten die Formeln (2), (3). Setzen wir in (2) $\mu + \varrho = \nu \geqq \mu$, in (3) $\nu + \varrho = \mu \geqq \nu$, so ist:

$$\left| a - a_{\mu}^{(\nu)} \right| \leqq \varepsilon, \quad \text{für} \quad \mu \geqq m,\ \nu \geqq \mu,$$

resp.

$$\left| a - a_{\mu}^{(\nu)} \right| \leqq \varepsilon, \quad \text{für} \quad \nu \geqq m,\ \nu \leqq \mu.$$

Mithin ist:

$$\left| a - a_{\mu}^{(\nu)} \right| \leqq \varepsilon, \quad \text{für} \quad \mu \geqq m,\ \nu \geqq m,$$

also ist nach (4) die Doppelfolge convergent. Damit ist bewiesen:

Wenn in einer Doppelfolge die Diagonalfolge und die zu ihr parallelen Folgen zu ein und demselben Grenzwerth „gleichmässig“ convergiren, so convergirt auch die Doppelfolge zu diesem Grenzwerth und umgekehrt.

Anmerkung: Ein analoger Satz gilt für jedes System „paralleler“, in der Doppelfolge enthaltenen Folgen, welches *alle* Elemente der Doppelfolge enthält, und wird in ähnlicher Weise erwiesen.

§ 3.

Die verticalen und horizontalen Folgen einer Doppelfolge.

1) Ebenso, wie durch das im vorigen Paragraphen betrachtete System der zur Diagonalfolge parallelen Folgen, ist eine Doppelfolge

$$\{a_{\mu}^{(\nu)}\} \quad (\mu, \nu, = 0, 1, 2, \cdots)$$

eindeutig bestimmt durch das System *der horizontalen Folgen* oder *Zeilen*

$$\{a_0^{(\nu)},\ a_1^{(\nu)},\ a_2^{(\nu)}, \cdots\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

und in gleicher Weise durch das System *der verticalen Folgen* oder *Colonnen*

$$\{a_{\mu}^{(0)},\ a_{\mu}^{(1)},\ a_{\mu}^{(2)}, \cdots\} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Wir wollen untersuchen, wie beschaffen jedes dieser Systeme sein muss, damit die Doppelfolge $\{a_{\mu}^{(\nu)}\}$ convergirt. Wir wollen zuvörderst die Beschaffenheit des Systems der Zeilen betrachten, welcher die des Systems der Colonnen analog ist.

Zunächst wissen wir*), *dass, falls die Doppelfolge* $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ *zum Grenzwerth a convergirt, die von den unteren und oberen Unbestimmtheitsgrenzen der Zeilen gebildeten Folgen ebenfalls zum Grenzwerth a convergiren müssen,* dass also:

$$\lim_{\nu=\infty}\varliminf_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty}\varlimsup_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a,$$

oder falls:

$$\varliminf_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)},\quad \varlimsup_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{a}^{(\nu)}:$$

$$\lim_{\nu=\infty} \underline{a}^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \overline{a}^{(\nu)} = a.$$

Diese Beschaffenheit der horizontalen Folgen ist für die Convergenz der Doppelfolge wohl erforderlich, aber dazu *nicht ausreichend,* wie die von Herrn Pringsheim l. c. p. 107, 108 angeführten Beispiele zeigen; so sind z. B. in der Doppelfolge:

$$\left\{a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}\right\} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

die sämmtlichen Zeilen convergent $\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)} = 0\right)$, und ebenso auch die Folge der Zeilengrenzwerthe $\left(\lim_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = 0\right)$, trotzdem ist die Doppelfolge nicht convergent. Wir fragen daher weiter, *welche weiteren Eigenschaften das System der Zeilen besitzen muss, damit die Doppelfolge convergirt;* oder *wie ein System einfacher Folgen gewählt werden muss, damit es als System der Zeilen einer convergenten Doppelfolge fungiren kann.*

Wir wissen**), dass die Zeilen einer convergenten Doppelfolge durchaus nicht nothwendiger Weise convergent zu sein brauchen; wir wollen jedoch zunächst den wichtigen Specialfall untersuchen, wie beschaffen ein System *convergenter* Folgen sein muss, um als System der Zeilen einer convergenten Doppelfolge zu fungiren. Sei also gegeben das System convergenter Folgen:

$$(1) \qquad \{a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \cdots a_\mu^{(\nu)}, \cdots\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

wobei $\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)}$, und sei vorausgesetzt: $\lim_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = a$, dann zeigen wir, dass zur Convergenz der Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ noch erforderlich, aber auch ausreichend ist, dass die Folgen zu ihren Grenzwerthen *„gleichmässig"* convergiren. Wir zeigen zunächst, dass falls die

*) cf. Pringsheim: Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen, Münchener Sitzungsber. (1897) p. 105 ff.

**) Ebenda: p. 104.

ppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ convergirt und alle Zeilen convergiren, dass dann die nvergenz des Systems der Zeilen eine gleichmässige sein muss.

Sei $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a$ und $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)}$, so dass auch*):

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty}\operatorname*{Lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = a$$

. Nun ist:

$$) \quad \left|a^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}\right| = \left|(a - a_\mu^{(\nu)}) - (a - a^{(\nu)})\right| \leqq \left|a - a_\mu^{(\nu)}\right| + \left|a - a^{(\nu)}\right|;$$

ner lassen sich wegen $\operatorname*{Lim}\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a$, $\operatorname*{Lim}\limits_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = a$ jeder (noch so einen) positiven Zahl ε zwei Indices m, n zuordnen derart, dass

$$\left|a - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n;$$

$$\left|a - a^{(\nu)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad \nu \geqq n.$$

ithin ist wegen (2):

$$\left|a^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n.$$

ithin sind zunächst diejenigen Zeilen $\{a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \cdots\}$, für welche $= n, n+1, n+2, \cdots$ ist, so beschaffen, dass sich ihre Glieder vom an *sämmtlich* höchstens um ε von ihren Grenzwerthen $a^{(\nu)}$ unterheiden, d. h. dieses System von Folgen convergirt *gleichmässig*, mithin ich das *ganze* System der Zeilen, da dasselbe aus jenem durch Hinzugung einer endlichen Anzahl von Folgen entsteht. Wenn also die oppelfolge convergirt und ihre Zeilen (Colonnen) ebenfalls convergiren, muss die Convergenz dieses Systems der Zeilen eine gleichmässige sein.

Sei anderseits das System der Zeilen *gleichmässig* convergent und nvergire auch die von den Zeilengrenzwerthen gebildete Folge, dann ssen sich jeder (beliebig kleinen) positiven Zahl ε zwei Zahlen m, n zuordnen, dass:

$$\left|a^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad \mu \geqq m$$

i *sämmtlichen* Werthen $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, und

$$\left|a - a^{(\nu)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad \nu \geqq n.$$

nun:

$$\left|a - a_\mu^{(\nu)}\right| = \left|\left(a - a^{(\nu)}\right) + \left(a^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}\right)\right| \leqq \left|a - a^{(\nu)}\right| + \left|a^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}\right|,$$

folgt:

---

*) cf. Pringsheim, l. c. p. 106.

$$|a - a_\mu^{(\nu)}| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu > m, \ \nu \geqq n,$$

d. h.

$$\operatorname*{Lim}_{\mu, \nu = \infty} a_\mu^{(\nu)} = a.$$

Also ist die Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ convergent.

Wir erkennen somit, dass die Convergenz der Zeilen (Colonnen), sowie die Convergenz der Folge der Zeilen- (Colonnen-) Grenzwerthe allein nicht zur Convergenz der Doppelfolge ausreicht, sondern, dass dazu nothwendig, aber auch ausreichend ist die *Gleichmässigkeit* der Convergenz des Systems der Zeilen (Colonnen). Mithin gilt:

Ein System convergenter Folgen ist dann und nur dann das System der Zeilen einer convergenten Doppelfolge, wenn erstens die Folge der Grenzwerthe dieser Folgen convergirt, und zweitens die Convergenz der Folgen dieses Systems eine gleichmässige ist. Oder:

Eine Doppelfolge mit convergenten Zeilen (Colonnen) ist dann und nur dann convergent, wenn die Convergenz der Zeilen (Colonnen) eine gleichmässige ist und auch die von den Zeilen- (Colonnen-) Grenzwerthen gebildete Folge convergirt.

2) Wir untersuchen nunmehr den Fall, dass die horizontalen (verticalen) Folgen einer Doppelfolge nicht mehr convergiren, und fragen, wie dieselben beschaffen sein müssen, damit die Doppelfolge convergent ist. Es seien also die Zeilen:

$$(1) \qquad \{a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \cdots\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

nicht convergent, dann oscilliren sie zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen:

$$\underline{\operatorname*{Lim}}_{\mu = \infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)}, \quad \overline{\operatorname*{Lim}}_{\mu = \infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)}, \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Soll die Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$, welche das System (1) als Zeilen hat, convergiren, so dürfen wir $\underline{a}^{(\nu)}$, $\bar{a}^{(\nu)}$ endlich voraussetzen, da nur eine endliche Anzahl von Zeilen ein unendliches Unbestimmtheitsintervall besitzen kann, und es dann ausreicht, die durch Fortlassung dieser Zeilen entstehende Doppelfolge zu betrachten. Die Elemente einer jeden Zeile $\{a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \cdots\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ nähern sich unbegrenzt dem von den Unbestimmtheitsgrenzen $\underline{a}^{(\nu)}$ und $\bar{a}^{(\nu)}$ begrenzten „Oscillationsintervall“ $(\underline{a}^{(\nu)}, \bar{a}^{(\nu)})$, derart, dass jeder positiven Zahl ε_ν eine Stelle m_ν so zugeordnet werden kann, dass:

$$\underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon_\nu < a_\mu^{(\nu)} \leq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon_\nu \quad (\mu \geq m_\nu; \ \nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Ist nun die Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ *convergent*, so ist dazu zunächst erforderlich*), dass:

---

*) cf. Pringsheim, l. c. p. 105.

$$\lim_{\nu=\infty} \underline{a}^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \bar{a}^{(\nu)} = \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a.$$

se Beschaffenheit der Zeilen ist aber für die Convergenz der Doppel-ge noch nicht ausreichend, sondern dazu ist erst hinreichend — in alogie mit dem im vorigen Artikel betrachteten Specialfalle — dass sserdem noch die sämmtlichen Zeilen ihren Oscillationsintervallen sich *eichmässig*" annähern, das soll heissen, dass jeder (beliebig kleinen) sitiven Zahl ε ein Index m zugeordnet werden kann, derart dass *für es einzelne ν*:

$$\underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu \geqq m,$$

ss also in jeder einzelnen Zeile vom m^{ten} Gliede ab die Glieder sich hstens im Abstand ε von dem zugehörigen Oscillationsintervall befinden. n so beschaffenes System von Folgen nennen wir „gleichmässig cillirend".

Beweis: Wenn das System (1) der Zeilen *gleichmässig oscillirt*, so bei beliebigem positiven ε:

) $\underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon$ für $\mu \geqq m$ und *für jedes* $\nu = 0, 1, 2, \cdots$.

enn ferner die Folgen $\{\underline{a}^{(0)}, \underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \cdots\}$, $\{\bar{a}^{(0)}, \bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \cdots\}$ sich mselben Grenzwerth a annähern, so ist, falls $a - \underline{a}^{(\nu)} = \underline{\varepsilon}_\nu$, $a - \bar{a}^{(\nu)} = \bar{\varepsilon}_\nu$ setzt wird:

) $\underline{a}^{(\nu)} = a + \underline{\varepsilon}_\nu$, $\bar{a}^{(\nu)} = a + \bar{\varepsilon}_\nu$, wo $\lim_{\nu=\infty} \underline{\varepsilon}_\nu = 0$, $\lim_{\nu=\infty} \bar{\varepsilon}_\nu = 0$.

Setzen wir die Werthe von $\underline{a}^{(\nu)}$, $\bar{a}^{(\nu)}$ aus (3) in (2) ein, so wird:

) $$a + \underline{\varepsilon}_\nu - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq a + \bar{\varepsilon}_\nu + \varepsilon,$$

er:

$\underline{\varepsilon}_\nu - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} - a \leqq \bar{\varepsilon}_\nu + \varepsilon$ für $\mu \geqq m$ und *für jedes* $\nu = 0, 1, 2, \cdots$.

Ist nun η eine (beliebig kleine) positive Zahl, so bestimmen wir — s wegen $\lim_{\nu=\infty} \underline{\varepsilon}_\nu = 0$, $\lim_{\nu=\infty} \bar{\varepsilon}_\nu = 0$ möglich ist — n so, dass:

$$|\underline{\varepsilon}_\nu| \leqq \frac{\eta}{2}, \quad |\bar{\varepsilon}_\nu| \leqq \frac{\eta}{2} \quad \text{für} \quad \nu \geqq n,$$

wählen auch die beliebige positive Zahl $\varepsilon \leqq \frac{\eta}{2}$, dann wird aus (5):

$$-\eta \leqq a_\mu^{(\nu)} - a \leqq \eta$$

r:

$$\left|a - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \eta \quad \text{für} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n;$$

.:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a,$$

Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ ist convergent.

Ganz analog zeigt man, dass auch umgekehrt, falls $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ convergirt, die Annäherung der Zeilen an ihr Oscillationsintervall eine gleichmässige sein muss. Mithin ergiebt sich:

Ein System von Zahlenfolgen ist dann und nur dann das System der Zeilen (Colonnen) einer convergenten Doppelfolge, wenn erstens das System gleichmässig oscillirt, und zweitens die aus den Unbestimmtheitsgrenzen gebildeten Folgen zu demselben Grenzwerth convergiren. Oder:

Eine Doppelfolge ist dann und nur dann convergent, wenn das System der Zeilen gleichmässig oscillirt und die aus den Unbestimmtheitsgrenzen der Zeilen gebildeten Folgen zu demselben Grenzwerth — der auch der Grenzwerth der Doppelfolge ist — convergiren. Hieraus ergiebt sich unmittelbar:

Wenn in einer Doppelfolge die Zeilen gleichmässig oscilliren und die aus ihren Unbestimmtheitsgrenzen gebildeten Folgen nach demselben Grenzwerth convergiren, dann haben die Colonnen die nämliche Beschaffenheit.

Die Erscheinung des gleichmässigen Oscillirens erkennt man deutlich an dem von Herrn Pringsheim (l. c. p. 104) angegebenen Beispiel der convergenten Doppelfolge:

$$\left\{a_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right)\right\} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \cdots);$$

hier ist:

$$\underline{\operatorname{Lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu}; \qquad \overline{\operatorname{Lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)} = \frac{1}{\nu}.$$

Ist ε eine beliebige positive Zahl und wählen wir: $m > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{m} < \varepsilon$, so ist:

$$-\frac{1}{\nu} - \varepsilon < (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu} + \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu \geqq m$$
$$\text{und } \textit{für jedes} \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots,$$

also ist die Annäherung der Zeilen an ihr Oscillationsintervall $\left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$ *eine gleichmässige.*

Da $\operatorname{Lim}_{\nu=\infty} \underline{a}^{(\nu)} = \operatorname{Lim}_{\nu=\infty} \bar{a}^{(\nu)} = 0$, so ist auch die zweite Voraussetzung unseres Satzes erfüllt.

3) Wir betrachten schliesslich noch folgenden Satz:

Wenn in einer Doppelfolge die Zeilen und Colonnen convergiren und eins von diesen beiden Systemen „gleichmässig" convergirt, so convergirt auch die Doppelfolge und somit auch die Folgen der Zeilen- und Colonnen-Grenzwerthe.

Beweis: Ist das System der Zeilen gleichmässig convergent und t $\operatorname*{Lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)}$, so lässt sich der beliebigen positiven Zahl δ ein idex m zuordnen, derart dass:

1) $\left|a^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \delta$ für $\mu \geqq m$ und *für jeden Werth* von $\nu = 0, 1, 2, \cdots$.

a die Colonnen convergiren, so ist insbesondere: $\left\{a_m^{(0)}, a_m^{(1)}, a_m^{(2)}, \cdots\right\}$ onvergent, und daher existirt ein Index n derart, dass:

2) $$\left|a_m^{(\nu)} - a_m^{(\nu+\varrho)}\right| \leqq \delta \quad \text{für} \quad \nu \geqq n, \;\; \varrho = 0, 1, 2, \cdots.$$

erner folgt aus (1) für $\mu = m$:

3) $$\left|a^{(\nu)} - a_m^{(\nu)}\right| \leqq \delta;$$

enso ergiebt sich aus (1) für $\mu = m$, $\nu = \nu + \varrho$, wo $\varrho = 0, 1, 2, \cdots$:

4) $$\left|a^{(\nu+\varrho)} - a_m^{(\nu+\varrho)}\right| \leqq \delta.$$

lso folgt aus (2), (3), (4):

$$\left|a^{(\nu+\varrho)} - a^{(\nu)}\right| \leqq 3\delta \quad \text{für} \quad \nu \geqq n, \;\; \varrho = 0, 1, 2, \cdots.$$

Ist nun ε eine beliebige positive Zahl und wählen wir die beliebig nehmbare positive Zahl $\delta \leqq \frac{\varepsilon}{3}$, so ist:

$$\left|a^{(\nu+\varrho)} - a^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n, \;\; \varrho = 0, 1, 2, \cdots,$$

h. die Folge der Zeilen-Grenzwerthe: $\{a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots\}$ ist convergent, lglich ist, da die Zeilen gleichmässig convergiren, auch die Doppellge nach dem im Artikel (1) dieses Paragraphen bewiesenen Satze nvergent. —

Wir fügen noch folgende Sätze hinzu, deren Beweise wir, da sie f ähnlichen Principien, wie die früheren, beruhen, unterdrücken:

Wenn in einer Doppelfolge das System der Zeilen gleichmässig congirt und auch nur eine in der Doppelfolge enthaltene einfache Folge, elche aus jeder Zeile ein Glied enthält, convergirt, so ist die Doppelfolge nvergent.

Wenn in einer Doppelfolge das System der Zeilen gleichmässig congirt, so fallen die Unbestimmtheitsgrenzen der Doppelfolge mit den Unstimmtheitsgrenzen der Folge der Zeilengrenzwerthe zusammen. Es ist lso dann:

$$\underline{\operatorname*{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{\operatorname*{Lim}}_{\nu=\infty} \operatorname*{Lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \qquad \overline{\operatorname*{Lim}}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\operatorname*{Lim}}_{\nu=\infty} \operatorname*{Lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

st im Besonderen die Folge der Zeilengrenzwerthe convergent, so ist demach auch die Doppelfolge convergent, wie oben direct bewiesen wurde.

§ 4.

Horizontale, verticale und laterale Convergenz einer Doppelfolge.

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, dass eine Doppelfolge *mit convergenten Zeilen* dann und nur dann convergirt, wenn erstens die Convergenz des Systems der Zeilen eine gleichmässige ist, und wenn zweitens die Zeilengrenzwerthe eine convergente Folge bilden. Lassen wir die Forderung der Gleichmässigkeit der Convergenz fallen und setzen wir nur voraus, dass die Folge der Zeilen-Grenzwerthe convergirt, so wird die Doppelfolge nicht mehr convergent sein, und es werden mithin auch *nicht alle* in ihr enthaltenen einfachen Folgen convergiren, trotzdem wird der Doppelfolge unter den gemachten Voraussetzungen eine wichtige Eigenschaft inne wohnen, die wir nunmehr entwickeln wollen. Wir wollen daher jetzt die Beschaffenheit einer Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$, für welche die beiden successiven Grenzübergänge $\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty}\operatorname*{Lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ ausführbar sind, untersuchen und betrachten also:

1) *Doppelfolgen mit convergenten Zeilen, bei denen auch die Folge der Zeilen-Grenzwerthe convergirt.* Sei $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ eine gegebene Doppelfolge und seien:

$$\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)}, \quad \lim_{\nu=\infty}\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = a$$

endlich und bestimmt.

Die Convergenz des Systems der Zeilen setzen wir als *nicht gleichmässig* voraus, so dass weder $\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ existirt, noch sämmtliche in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltene, einfache Folgen convergiren. Trotzdem lässt sich eine bestimmte Classe einfacher, in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltener Folgen angeben, welche sämmtlich zum Grenzwerth a convergiren. Sei: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ eine Folge positiver Zahlen, für welche $\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0$, dann werden die Glieder der ersten Zeile: $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \cdots$ von einer bestimmten Stelle $a_{m_0}^{(0)}$ an sich von ihrem Grenzwerth $a^{(0)}$ um weniger als ε_0 unterscheiden, so dass:

$$\left|a^{(0)} - a_\mu^{(0)}\right| \leqq \varepsilon_0 \quad \text{für} \quad \mu \geqq m_0.$$

Ebenso wird für die Glieder der zweiten Zeile $a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \cdots$ eine bestimmte Stelle $a_{m_1}^{(1)}$ existiren, so dass:

$$\left|a^{(1)} - a_\mu^{(1)}\right| \leqq \varepsilon_1 \quad \text{für} \quad \mu \geqq m_1.$$

Allgemein wird für die beliebige Zeile:

$$a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \cdots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

ein Index m_ν existiren, so dass:

$$(1) \qquad \left|a^{(\nu)} - a^{(\nu)}_\mu\right| \leq \varepsilon_\nu \quad \text{für} \quad \mu \geq m_\nu.$$

Auf diese Weise erhalten wir eine einfache, in $\{a^{(\nu)}_\mu\}$ enthaltene Folge:

$$\{a^{(0)}_{m_0},\ a^{(1)}_{m_1},\ a^{(2)}_{m_2},\ \cdots\} = \{a^{(\nu)}_{m_\nu}\} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

welche offenbar zum Grenzwerth a convergirt, da aus (1) für $\mu = m_\nu$ folgt:

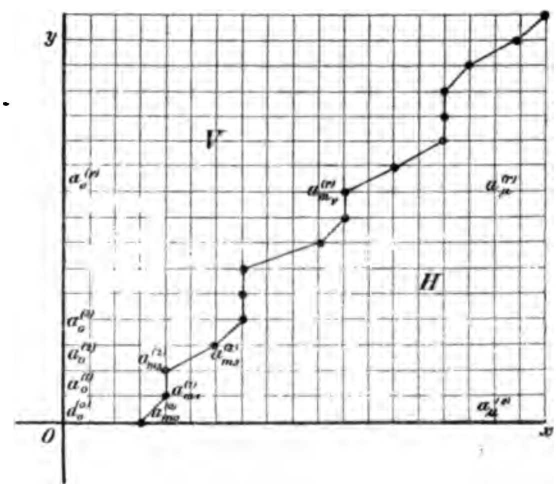
$$\left|a^{(\nu)} - a^{(\nu)}_{\mu_\nu}\right| < \varepsilon_\nu \quad \text{und also wegen} \quad \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = a, \quad \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0 \quad \text{auch:}$$

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a^{(\nu)}_{m_\nu} = a.$$

2) Durch diese einfache, in der Doppelfolge enthaltene Folge

$$\{a^{(\nu)}_{m_\nu}\} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

zerfallen die Elemente der Doppelfolge in zwei Classen, wie man am anschaulichsten mittels einer geometrischen Darstellung der Zahlen $a^{(\nu)}_\mu$ der Doppelfolge durch Punkte einer Ebene erkennt. Stellen wir nämlich das Element $a^{(\nu)}_\mu$ durch denjenigen Punkt einer Ebene dar, welcher in Bezug auf ein fest gegebenes rechtwinkliges Coordinatensystem $(O;\ x,\ y)$ die Coordinaten $x = \mu$, $y = \nu$ besitzt, so werden die Zahlen $a^{(\nu)}_\mu$ der Doppelfolge dargestellt durch die Gesammtheit der Punkte mit positiven ganzzahligen Coordinaten; diese bilden die Eckpunkte eines Punktgitters, welches



den von der positiven x- und y-Axe begrenzten Quadranten überspannt, und sollen als „Gitterpunkte" bezeichnet werden. Die Punkte, welche den Zahlen einer Zeile:

$$\{a^{(\nu)}_0,\ a^{(\nu)}_1,\ a^{(\nu)}_2,\ \cdots\} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

entsprechen, befinden sich auf der Parallele zur x-Axe, welche durch den Gitterpunkt $x = 0$, $y = \nu$ hindurchgeht; ebenso befinden sich die Punkte, welche die Zahlen einer Colonne

$$\{a_\mu^{(0)}, a_\mu^{(1)}, a_\mu^{(2)}, \cdots\} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \cdots)$$

darstellen, auf der Parallelen zur y-Axe, welche durch den Punkt $x = \mu$, $y = 0$ hindurchgeht. Die Punkte, welche die Elemente unserer in der Doppelfolge enthaltenen einfachen Folge

$$\{a_{m_\nu}^{(\nu)}\} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

darstellen, geben, successive mit einander verbunden, einen *gebrochenen Linienzug*, welcher die geometrische Darstellung der einfachen Folge $\{a_{m_\nu}^{(\nu)}\}$ ist; die Punkte desselben besitzen zwei Coordinaten, welche schliesslich beide über alle Grenzen wachsen, so dass sich der gebrochene Linienzug in horizontaler, wie verticaler Richtung ins Unendliche erstreckt. Ein solcher Linienzug theilt den von der positiven x- und y-Axe begrenzten Quadranten in zwei Theile H *und* V, von denen der eine H von dem Linienzug $\{a_{m_\nu}^{(\nu)}\}$ und der horizontalen Axe Ox, der andere V von dem Linienzug $\{a_{m_\nu}^{(\nu)}\}$ und der verticalen Axe Oy begrenzt wird. In den Theil H tritt von einer bestimmten Stelle an jede Zeile ein und verbleibt in demselben, während für den Teil V das analoge bezüglich der Colonnen gilt. Wir bezeichnen die Gesammtheit der Elemente der Doppelfolge, deren Punkte sich in H befinden $\{$die Elemente $a_{m_\nu}^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ eingeschlossen$\}$ als *den horizontalen Theil* der Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$, während wir die Gesammtheit der Elemente, welche sich in V befinden (die Elemente $a_{m_\nu}^{(\nu)}$ ausgeschlossen) als *den verticalen Theil* der Doppelfolge bezeichnen. Somit wird durch jede solche in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltene einfache Folge $\{a_{m_\nu}^{(\nu)}\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ eine Theilung der Folge in einen horizontalen Theil H und einen verticalen Theil V hergestellt, die wir arithmetisch dadurch definiren, dass die Gesammtheit der Elemente $a_\mu^{(\nu)}$, für welche $\mu \geqq m_\nu$ ist, den Theil H ausmachen, und die Gesammtheit der Elemente $a_\mu^{(\nu)}$, für welche $\mu < m_\nu$, den Theil V ausmachen. Wir können somit

$$\text{den Theil } H \text{ durch } \{a_\mu^{(\nu)}\} \begin{pmatrix} \mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots \\ \mu \geqq m_\nu \end{pmatrix},$$

$$\text{den Theil } V \text{ durch } \{a_\mu^{(\nu)}\} \begin{pmatrix} \mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots \\ \mu < m_\nu \end{pmatrix}$$

bezeichnen. Für die in H enthaltenen Zahlen gilt infolge (1):

$$\left|a^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon_\nu \quad \begin{pmatrix} \mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots \\ \mu \geqq m_\nu \end{pmatrix};$$

demnach ist:

$$\left|\frac{a^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}}{\varepsilon_\nu}\right| \leqq 1,$$

also, wenn wir setzen:

(2) $$\frac{a^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)}}{\varepsilon_\nu} = \vartheta_\mu^{(\nu)}, \qquad \left|\vartheta_\mu^{(\nu)}\right| \leqq 1,$$

(3) $$a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)} - \vartheta_\mu^{(\nu)} \varepsilon_\nu \quad \text{für} \quad \mu \geqq m_\nu; \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots;$$

in dieser Form lassen sich alle in H enthaltenen Zahlen darstellen.

3) Diese Theilung der Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ in die beiden Theile H und V mittels der einfachen Folge $\{a_{m_\nu}^{(\nu)}\}$ ist deshalb so wichtig, weil wir erkennen werden, dass diejenigen in der Doppelfolge enthaltenen, einfachen Folgen, deren Elemente entweder von Anfang oder von einer bestimmten Stelle an dem horizontalen Theil H angehören, *sämmtlich* zum Grenzwerth $a = \operatorname{Lim}_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = \operatorname{Lim}_{\nu=\infty} \operatorname{Lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ convergiren, unter der von uns gemachten Voraussetzung, dass $\operatorname{Lim}_{\nu=\infty} a^{(\nu)}$ existirt. Geometrisch ausgedrückt heisst das, dass alle diejenigen Zahlenfolgen, deren gebrochene Linienzüge in unserm Gittersystem von Anfang oder von einer bestimmten Stelle an ganz dem Theile H angehören, zu demselben Grenzwerth a convergiren.

Wir wollen von einer einfachen Folge, welche von Anfang oder von einer bestimmten Stelle an ganz einem der Theile H oder V angehört, sagen „sie *verlaufe* in dem betreffenden Theile". Wir wollen also zeigen, dass alle in H verlaufenden, in der Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltenen Folgen zum Grenzwerth a convergiren, wofern $\operatorname{Lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)}$, $\operatorname{Lim}_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = a$ ist. In der That ist $\{a_{\mu_0}^{(\nu_0)}, a_{\mu_1}^{(\nu_1)}, a_{\mu_2}^{(\nu_2)}, \cdots\}$ eine in der Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltene Folge, welche in H verläuft, so wird ein Index r existiren, so dass für $\varrho \geqq r$: $a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}$ dem Theile H angehört; dann ist wegen (3):

$$a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = a^{(\nu_\varrho)} - \vartheta_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} \cdot \varepsilon_{\nu_\varrho} \quad \text{für} \quad \varrho \geqq r, \quad \text{wobei} \quad \left|\vartheta_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}\right| \leqq 1.$$

Nun ist:

$$\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty} a^{(\nu_\varrho)} = \operatorname{Lim}_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = a,$$
$$\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty} \varepsilon_{\nu_\varrho} = \operatorname{Lim}_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0,$$

da $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots$ eine Folge positiver ganzer Zahlen mit $\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty} \nu_\varrho = \infty$ ist. Mithin ist:

$$\lim_{\varrho=\infty} a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = \lim_{\varrho=\infty}\left(a^{(\nu_\varrho)} - \vartheta_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}\cdot\varepsilon_{\nu_\varrho}\right) = \lim_{\varrho=\infty} a^{(\nu_\varrho)} - \lim_{\varrho=\infty} \vartheta_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}\,\varepsilon_{\nu_\varrho} = a,$$

da auch $\lim\limits_{\varrho=\infty} \vartheta_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}\,\varepsilon_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)} = 0$ wegen $\left|\vartheta_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}\right| \leq 1$, womit die Behauptung erwiesen ist.

Die Doppelfolge besitzt somit die Eigenschaft, dass alle in ihr enthaltenen einfachen Folgen, welche in dem horizontalen Theile H verlaufen, zum Grenzwerth a convergiren, während die nicht in H verlaufenden Folgen nicht sämmtlich convergent sind. Obwohl also die Doppelfolge selbst nicht convergirt, und also nicht *alle* in ihr enthaltenen einfachen Folgen convergiren, so sind doch wenigstens die im Theile H verlaufenden Folgen sämmtlich convergent. Eine Doppelfolge, welche diese Eigenschaft besitzt, wollen wir als *„horizontal convergent“* bezeichnen. Wir stellen also die Definition auf: *Eine Doppelfolge heisst „horizontal convergent“, wenn sich dieselbe durch eine in ihr enthaltene einfache Folge in einen horizontalen Theil H und einen verticalen Theil V derart zerlegen lässt, dass sämmtliche in der Doppelfolge enthaltenen und in H verlaufenden einfachen Folgen convergiren* *). Alsdann convergiren alle diese in H verlaufenden Folgen auch nothwendigerweise zu *demselben* Grenzwerth a, da, falls zwei derselben zu verschiedenen Grenzwerthen convergirten, jede sich aus ihnen zusammensetzende Folge in H verliefe und nicht convergent wäre; wir sagen deshalb, dass die Doppelfolge *„zum Grenzwerth a horizontal convergirt“*. Eine in dem früheren Sinne convergente Doppelfolge, bei der also sämmtliche einfachen Folgen convergiren, nennen wir nunmehr *„total convergent“* oder schlechthin *„convergent“*. Der Begriff der horizontalen Convergenz einer Doppelfolge ist ein weiterer als der der totalen Convergenz, indem jede total convergente Doppelfolge auch horizontal convergirt, aber nicht umgekehrt. Ganz analog kann man den Begriff der *„verticalen Convergenz“* definiren, bei welcher die sämmtlichen in einem verticalen Theile V verlaufenden Folgen convergent sind.

4) Unter Benutzung dieser Begriffe der horizontalen und verticalen Convergenz können wir nunmehr den Satz aussprechen:

Wenn in einer Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ mit convergenten Zeilen (Colonnen) die von den Grenzwerthen der Zeilen (Colonnen) gebildete Folge convergirt, also $\lim\limits_{\nu=\infty}\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *existirt, so ist die Doppelfolge horizontal (vertical) convergent.*

Ist andererseits eine Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ mit convergenten Zeilen zum Grenzwerth a horizontal convergent, so convergirt auch die Folge der

*) Wie man in analoger Weise, wie in § 1. 6 erkennt, reicht bereits die Convergenz aller *steigender* in H verlaufender Folgen zur horizontalen Convergenz der Doppelfolge hin.

Zeilen-Grenzwerthe zum Grenzwerth a. Denn alsdann existirt erstens, infolge der horizontalen Convergenz, eine einfache Folge:

$$\left\{a_{n_0}^{(0)},\ a_{n_1}^{(1)},\ a_{n_2}^{(2)},\ \cdots\right\},$$

welche die Doppelfolge in einen horizontalen Theil H_n und einen verticalen Theil V_n zerlegt, derart dass alle in H_n verlaufenden einfachen Folgen zum Grenzwerth a convergiren. Zweitens lässt sich eine einfache Folge:

$$\left\{a_{m_0}^{(0)},\ a_{m_1}^{(1)},\ a_{m_2}^{(2)},\ \cdots\right\}$$

construiren, welche dieselben Eigenschaften hat, wie die oben Art. 1, 2 hergestellte und ebenso bezeichnete Folge, da bei deren Herstellung von der Existenz von $\lim\limits_{\nu=\infty} a^{(\nu)}$ kein Gebrauch gemacht wurde. Es zerlegt daher — genau wie a. a. O. — $\left\{a_{m_0}^{(0)},\ a_{m_1}^{(1)},\ a_{m_2}^{(2)},\ \cdots\right\}$ die Doppelfolge in einen horizontalen Theil H_m und einen verticalen Theil V_m, so dass für alle in H_m befindlichen Elemente $a_\mu^{(\nu)}\begin{pmatrix}\mu,\nu=0,1,2,\cdots\\ \mu\geqq m_\nu\end{pmatrix}$ die Art. 2 abgeleitete Darstellung:

$$(3)\qquad a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)} - \vartheta_\mu^{(\nu)}\,\varepsilon_\nu \begin{pmatrix}\mu,\nu=0,1,2,\cdots\\ \mu\geqq m_\nu\end{pmatrix}$$

gilt, wobei

$$a^{(\nu)} = \operatorname*{Lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)},\qquad \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty}\varepsilon_\nu = 0,\qquad \left|\vartheta_\mu^{(\nu)}\right| \leqq 1.$$

Ist nun:

$$\mu_\nu > m_\nu,\ n_\nu \quad\text{für}\quad \nu = 0, 1, 2, \cdots,$$

so ist:

$$\left\{a_{\mu_0}^{(0)},\ a_{\mu_1}^{(1)},\ a_{\mu_2}^{(2)},\ \cdots\right\}$$

eine sowohl in H_m, wie in H_n verlaufende Folge, und es ist:

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a_{\mu_\nu}^{(\nu)} = a,\quad\text{weil}\quad \left\{a_{\mu_\nu}^{(\nu)}\right\}_{(\nu=0,1,2,\cdots)}$$

in H_n verläuft und die Doppelfolge zum Grenzwerth a horizontal convergirt;

$$a_{\mu_\nu}^{(\nu)} = a^{(\nu)} - \vartheta_{\mu_\nu}^{(\nu)}\,\varepsilon_\nu,\quad\text{weil}\quad \left\{a_{\mu_\nu}^{(\nu)}\right\}_{(\nu=0,1,2,\cdots)}$$

in H_m verläuft.

Also ist:

$$a^{(\nu)} = a_{\mu_\nu}^{(\nu)} + \vartheta_{\mu_\nu}^{(\nu)}\,\varepsilon_\nu,$$

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a_{\mu_\nu}^{(\nu)} + \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \vartheta_{\mu_\nu}^{(\nu)}\,\varepsilon_\nu = a,$$

weil $\operatorname*{Lim}\limits_{\nu=\infty} \vartheta_{\mu_\nu}^{(\nu)}\,\varepsilon_\nu = 0$ wegen $\left|\vartheta_{\mu_\nu}^{(\nu)}\right| \leqq 1$, $\operatorname*{Lim}\limits_{\nu=\infty}\varepsilon_\nu = 0$.

Also gilt: *Ist eine Doppelfolge mit convergenten Zeilen (Colonnen) zum Grenzwerth a horizontal (vertical) convergent, so convergirt auch die* *von den Grenzwerthen der Zeilen (Colonnen) gebildete Folge zum Grenzwerth a.*

5) Ist eine Doppelfolge horizontal (vertical) convergent, so braucht keine einzige Zeile (Colonne) convergent zu sein, da dies nicht einmal bei totaler Convergenz der Doppelfolge der Fall zu sein braucht*). Nichtsdestoweniger hat die horizontale (verticale) Convergenz der Doppelfolge eine wichtige Eigenschaft ihrer Zeilen (Colonnen) zur Folge. Es gilt nämlich der die vorigen Sätze als Specialfälle enthaltende Satz: *Wenn eine Doppelfolge zum Grenzwerth a horizontal (vertical) convergirt, so convergiren die beiden von den oberen und unteren Unbestimmtheitsgrenzen der Zeilen (Colonnen) gebildeten Folgen zum Grenzwerth a, d. h. es ist:*

$$\text{(4)}\quad \mathop{\mathrm{Lim}}_{\nu=\infty}\,\mathop{\underline{\mathrm{Lim}}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \mathop{\mathrm{Lim}}_{\nu=\infty}\,\mathop{\overline{\mathrm{Lim}}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a \left(\text{rsp. } \mathop{\mathrm{Lim}}_{\mu=\infty}\,\mathop{\underline{\mathrm{Lim}}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \mathop{\mathrm{Lim}}_{\mu=\infty}\,\mathop{\overline{\mathrm{Lim}}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a\right)$$

und umgekehrt, findet (4) *statt, so convergirt die Doppelfolge horizontal zum Grenzwerth a.*

Beweis: *Erstens* sei die Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ zum Grenzwerth a horizontal convergent. Aus jeder Zeile:

$$\{a_0^{(\nu)},\ a_1^{(\nu)},\ a_2^{(\nu)}, \cdots\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

lässt sich dann eine Folge: $\{\underline{a}_0^{(\nu)}, \underline{a}_1^{(\nu)}, \underline{a}_2^{(\nu)}, \cdots\}$ herausheben, welche die untere Unbestimmtheitsgrenze $\mathop{\underline{\mathrm{Lim}}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)}$ als Grenzwerth hat, so dass: $\mathop{\mathrm{Lim}}_{\mu=\infty} \underline{a}_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)}$ für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$. Das System der so definirten einfachen Folgen bildet eine Doppelfolge:

$$\{\underline{a}_\mu^{(\nu)}\} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

deren sämmtliche Zahlen in der ursprünglichen Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthalten sind, und welche ebenfalls zum Grenzwerth a horizontal convergirt; denn dieselbe Zerlegung, welche $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ in zwei Theile H, V zerlegt, so dass alle in H verlaufenden Folgen zum Grenzwerth a convergiren, leistet das nämliche auch für die Doppelfolge $\{\underline{a}_\mu^{(\nu)}\}$ In dieser Doppelfolge $\{\underline{a}_\mu^{(\nu)}\}$ sind die Zeilen convergent und zwar zu den Grenzwerthen $\underline{a}^{(\nu)}$, also ist, da auch $\{\underline{a}_\mu^{(\nu)}\}$ zum Grenzwerth a horizontal convergirt, nach dem im vorigen Artikel bewiesenen Satze, auch die von den Zeilen-Grenzwerthen $\underline{a}^{(\nu)}$ gebildete Folge zum Grenzwerth a convergent:

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{\nu=\infty} \underline{a}^{(\nu)} = a \quad \text{oder:} \quad \mathop{\mathrm{Lim}}_{\nu=\infty}\,\mathop{\underline{\mathrm{Lim}}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a.$$

*) cf. Pringsheim: Unendliche Doppelreihen, l. c. p. 104.

Genau ebenso erkennt man, dass auch:

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \bar{a}^{(\nu)} = \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \overline{\operatorname*{Lim}_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = a,$$

so dass die erste Hälfte unseres Satzes bewiesen ist.

Zweitens sei $\lim\limits_{\nu=\infty} \bar{a}^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu=\infty} \underline{a}^{(\nu)} = a$; wir beweisen, dass dann $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ zum Grenzwerth a horizontal convergirt. In jeder Zeile:

$$\{a_0^{(\nu)},\ a_1^{(\nu)},\ a_2^{(\nu)}, \cdots\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

lässt sich eine Stelle $a_{m_\nu}^{(\nu)}$ angeben derart, dass von dieser Stelle $a_{m_\nu}^{(\nu)}$ an sich die Zahlen der betreffenden Zeile von ihrem Oscillationsintervall $(\underline{a}^{(\nu)}, \bar{a}^{(\nu)})$ in der beliebig kleinen Entfernung ε_ν befinden, so dass also:

$$\underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon_\nu \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon_\nu \quad \text{für} \quad \mu \geqq m_\nu \ (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \quad \text{wobei} \quad \varepsilon_\nu > 0.$$

Dann wird:

$$a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon_\nu + \vartheta_\mu^{(\nu)} \left(\bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon_\nu - (\underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon_\nu)\right),$$

oder:

$$(5) \quad a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon_\nu + \vartheta_\mu^{(\nu)} (\bar{a}^{(\nu)} - \underline{a}^{(\nu)} + 2\varepsilon_\nu) \ \text{für} \ \mu \geqq m_\nu; \ \mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots,$$

wobei $\vartheta_\mu^{(\nu)}$ eine Zahl, für welche $|\vartheta_\mu^{(\nu)}| \leqq 1$ ist, bedeutet.

Wählen wir nun die beliebigen positiven Zahlen ε_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ so, dass $\operatorname{Lim} \varepsilon_\nu = 0$, dann stellen die oben definirten Zahlen:

$$a_{m_0}^{(0)},\ a_{m_1}^{(1)},\ a_{m_2}^{(2)}, \cdots$$

eine einfache Folge dar, welche die Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ derart in einen horizontalen Theil H und einen verticalen Theil V theilt, dass für die in H befindlichen Zahlen $a_\mu^{(\nu)} \begin{pmatrix} \mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots \\ \mu \geqq m_\nu \end{pmatrix}$ die Darstellung (5) gilt.

Betrachten wir nun eine einfache, in H verlaufende Folge, so werden die Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ derselben von der Stelle an, wo sie den Theil H nicht mehr verlassen, die Darstellung (5) zulassen; und da der Index ν, wenn wir in diesen einfachen Folgen unbegrenzt fortschreiten, über alle Grenzen wächst, so convergirt diese einfache Folge zu dem Grenzwerth:

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \left(\underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon_\nu + \vartheta_\mu^{(\nu)} (\bar{a}^{(\nu)} - \underline{a}^{(\nu)} + 2\varepsilon_\nu)\right).$$

Da wir nun:

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \underline{a}^{(\nu)} = \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \bar{a}^{(\nu)} = a$$

voraussetzen, da ferner

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0, \qquad |\vartheta_\mu^{(\nu)}| \leqq 1$$

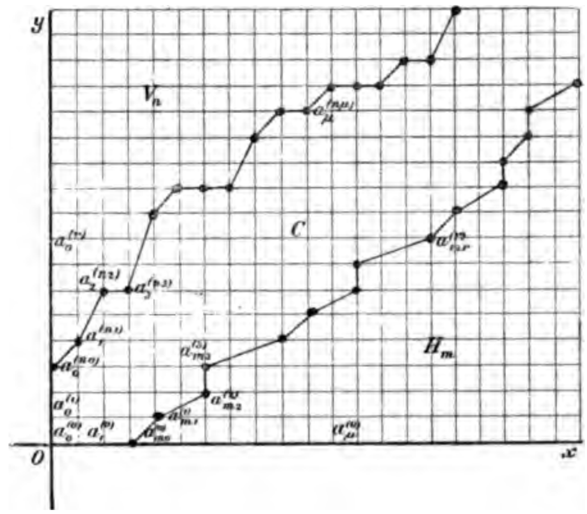
angenommen ist, so ist der in Rede stehende Grenzwerth gleich a. Mithin convergirt jede in H verlaufende einfache Folge zum Grenzwerth a, d. h. die Doppelfolge ist zum Grenzwerth a horizontal convergent, womit also auch die zweite Hälfte unseres Satzes bewiesen ist. — Wir erkannten früher (§ 3, Art. 2), dass die Bedingung:

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \underline{a}^{(\nu)} = \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \bar{a}^{(\nu)} = a$$

in Verbindung mit dem „gleichmässigen" Oscilliren der Zeilen die totale Convergenz der Doppelfolge nach sich zieht; die vorangehenden Betrachtungen lehren nunmehr, dass die Bedingung $\operatorname{Lim} \underline{a}^{(\nu)} = \operatorname{Lim} \bar{a}^{(\nu)} = a$ *allein* nur die horizontale Convergenz der Doppelfolge bewirkt, dass diese Bedingung jedoch für die horizontale Convergenz nicht nur hinreichend, sondern auch nothwendig ist.

6) *Die laterale Convergenz einer Doppelfolge und die Vertauschbarkeit zweier Grenzübergänge.* Wenn eine Doppelfolge sowohl horizontal, als auch vertical convergirt und zwar beide Male zu demselben Grenzwerth a, so nennen wir die Doppelfolge *„zum Grenzwerth a lateral convergent"*, da in diesem Falle die sämmtlichen „seitlichen" oder „lateralen" Folgen, welche entweder in einem gewissen horizontalen Theil oder in einem gewissen verticalen Theil der Doppelfolge verlaufen, zu demselben Grenzwerth convergiren. Denn da alsdann die Doppelfolge zum Grenzwerth a horizontal convergirt, so existirt eine einfache Folge: $\{a_{m_0}^{(0)}, a_{m_1}^{(1)}, a_{m_2}^{(2)}, \cdots\}$, welche die Doppelfolge in zwei Theile H_m, V_m theilt, derart dass alle in H_m verlaufenden einfachen Folgen zum Grenzwerth a convergiren, wohingegen in V_m einfache Folgen verlaufen, welche nicht nach a convergiren. Da ferner die Doppelfolge zum Grenzwerth a vertical convergirt, so existirt eine einfache Folge: $\{a_0^{(n_0)}, a_1^{(n_1)}, a_2^{(n_2)}, \cdots\}$, welche die Doppelfolge in zwei Theile H_n und V_n theilt, derart, dass alle in V_n verlaufenden einfachen Folgen nach a convergiren, während nicht alle in H_n verlaufenden Folgen nach a convergiren. Somit zerfällt die Doppelfolge in drei Theile, den horizontalen Theil H_m, den verticalen Theil V_n und einen centralen Theil C, welcher aus den nicht in H_m und V_n enthaltenen Elementen besteht. Ein solcher centraler Theil C muss in der That existiren, da wir die Doppelfolge nicht total convergent voraussetzen, und daher einfache Folgen existiren, die nicht nach a convergiren und also weder in H_m noch in V_n verlaufen. Alle in den beiden seitlichen Theilen H_m, V_n verlaufenden einfachen Folgen convergiren zu demselben Grenzwerth a, während die in dem centralen Theil C verlaufenden Folgen nicht sämmtlich nach a convergiren. Wir haben somit in dem Begriff der lateralen Convergenz einer Doppelfolge einen engeren Begriff,

als in dem der verticalen oder horizontalen Convergenz, einen weiteren, als in dem der totalen Convergenz, da zu den horizontal rsp. vertical convergenten Doppelfolgen auch alle lateral convergenten Doppelfolgen und zu diesen auch alle total convergenten Doppelfolgen gehören, aber nicht umgekehrt. Im Falle der totalen Convergenz convergiren *sämmtliche*



einfache Folgen der Doppelfolge, im Falle der lateralen Convergenz *nur die lateralen* (— sowohl in H_m, wie in V_n verlaufenden —) Folgen zu demselben Grenzwerth. Aus dem Satze im vorigen Artikel ergibt sich nun unmittelbar, dass die laterale Convergenz eine wichtige Eigenschaft der Zeilen und Colonnen nach sich zieht, denn es gilt der

Satz: *Wenn die Doppelfolge zum Grenzwerth a lateral convergirt, so ist:*

$$(6)\qquad \lim_{\nu=\infty}\,\underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty}\,\overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a = \lim_{\mu=\infty}\,\underline{\lim}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty}\,\overline{\lim}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

d. h. die aus den Unbestimmtheitsgrenzen der Zeilen und Colonnen gebildeten Folgen convergiren sämmtlich zum Grenzwerth a; und umgekehrt, finden die Gleichungen (1) *statt, so ist die Doppelfolge zum Grenzwerth a lateral convergent.*

Dies folgt unmittelbar aus dem Satze in Art. 5, da die Doppelfolge in unserem Falle sowohl horizontal, als vertical zum Grenzwerth a convergirt.

Sind im Besonderen die Zeilen und Colonnen convergent, so ist:

$$(7)\qquad \begin{cases} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \\ \underline{\lim}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \end{cases}$$

und es folgt aus (6) falls die Doppelfolge lateral convergirt:

(8) $$\lim_{\nu=\infty}\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty}\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$$

und umgekehrt. Es gilt somit: *Wenn eine Doppelfolge mit convergenten Zeilen und Colonnen lateral convergirt, so ist:*

$$\lim_{\nu=\infty}\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty}\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

die beiden Grenzübergänge sind also vertauschbar; und umgekehrt, wenn die beiden Grenzübergänge vertauschbar sind, also (8) *gilt, wobei implicite die Convergenz der Zeilen und Colonnen vorausgesetzt ist, so ist die Doppelfolge lateral convergent.*

Oder kürzer:

Es ist dann und nur dann $\lim\limits_{\mu=\infty}\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu=\infty}\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, *wenn die Doppelfolge* $\{a_\mu^{(\nu)}\}_{(\mu,\nu=0,1,2,\cdots)}$ *lateral convergirt und sämmtliche Zeilen und Colonnen convergiren.*

Ist im Besonderen eine Doppelfolge mit convergenten Zeilen und Colonnen total convergent, so gilt (8), *die Grenzprocesse sind vertauschbar**).

Da die Doppelfolge nach § 3. 3 total convergent ist, wenn die Zeilen und Colonnen convergiren und die Convergenz einer dieser beiden Systeme „gleichmässig" ist, so gilt:

Convergiren in einer Doppelfolge alle Zeilen und Colonnen und ist eines von diesen beiden Systemen gleichmässig convergent, so sind die beiden Grenzprocesse $\lim\limits_{\nu=\infty}\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *vertauschbar, es gilt:*

$$\lim_{\nu=\infty}\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty}\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Um zu untersuchen, ob bei den beiden aufeinander folgenden Grenzübergängen $\lim\limits_{\nu=\infty}\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ die Reihenfolge vertauschbar ist, hat man sich zuvörderst zu überzeugen, ob in der Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ die Zeilen und Colonnen convergiren; sodann wird man zunächst nachsehen, ob in der Doppelfolge $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ *alle* einfachen Folgen convergiren, also die Doppelfolge „total convergent" ist, was mit der „gleichmässigen" Convergenz der Zeilen identisch ist. Ist dies aber nicht der Fall, ist also das System der Zeilen *ungleichmässig convergent*, so wird man untersuchen, ob wenigstens alle in einem gewissen horizontalen Theile und in einem gewissen verticalen Theile verlaufenden lateralen Folgen zu demselben Grenzwerth convergiren, ob also die Doppelfolge lateral convergirt; wenn dies der Fall ist, und

*) cf. Pringsheim: Unendliche Doppelreihen, l. c. p. 105.

nur in diesem Falle, ist die Vertauschung der beiden Grenzübergänge $\lim\limits_{\nu=\infty}\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ zulässig.

7) *Beispiele lateral convergenter Doppelfolgen.*

a) Sei $a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$*), dann haben wir die Doppelfolge:

$$\left\{\frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}\right\} = \left\{\begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{17} & \frac{1}{26} & \cdots & \frac{1}{1+\mu^2} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{17} & \cdots & \frac{1}{1+(\mu-1)^2} & \cdots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \cdots & \frac{1}{1+(\mu-2)^2} & \cdots \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{1+(\mu-3)^2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right\}.$$
$$(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

Wir untersuchen die in $\left\{\frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}\right\}$ enthaltenen einfachen Folgen hinsichtlich ihrer Convergenz. Die Diagonalfolge und die zu ihr parallelen Folgen:

$$\left\{\begin{array}{r} \left\{a_\nu^{(\nu)}\right\} = \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \cdots \\ \left\{a_{\nu+1}^{(\nu)}\right\} = \left\{a_\mu^{(\mu+1)}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots \\ \left\{a_{\nu+2}^{(\nu)}\right\} = \left\{a_\mu^{(\mu+2)}\right\} = \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$

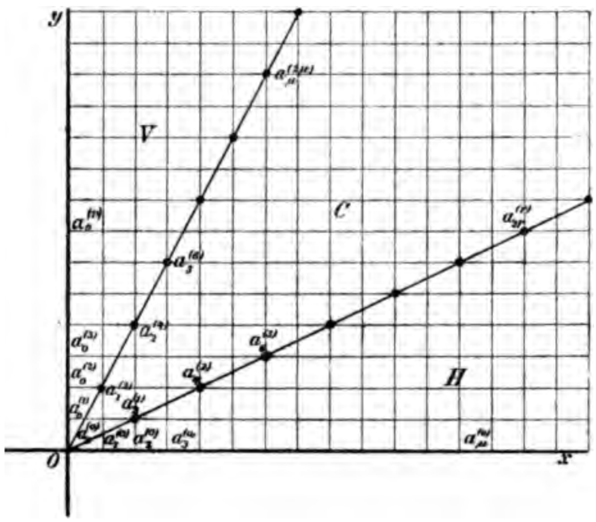
convergiren rsp. zu den Grenzwerthen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \cdots$, sie convergiren also nicht sämmtlich zu demselben Grenzwerth, die Doppelfolge $\left\{\frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}\right\}$ ist also nicht total convergent. Eine einfache Folge, deren Glieder aus zwei dieser parallelen Folgen abwechselnd genommen werden, oscillirt. Wir fragen, ob die Doppelfolge wenigstens lateral convergirt. Wir betrachten die einfache Folge:

$$\left\{a_0^{(0)}, a_2^{(1)}, a_4^{(2)}, a_6^{(3)}, \cdots\right\} = \left\{a_{2\nu}^{(\nu)}\right\} = \left\{\frac{1}{1+(2\nu-\nu)^2}\right\}$$
$$= \left\{\frac{1}{1+\nu^2}\right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots);$$

es ist $\operatorname*{Lim}\limits_{\nu=\infty} a_{2\nu}^{(\nu)} = \operatorname*{Lim}\limits_{\nu=\infty} \frac{1}{1+\nu^2} = 0$. Denken wir uns die Zahlen der Doppelfolge $\left\{a_\mu^{(\nu)}\right\}$ wieder durch die Punkte unseres Gittersystems dargestellt,

*) cf. Pringsheim, l. c. p. 107.

d. h. durch die Punkte der Ebene, deren rechtwinklige Coordinaten $x = \mu, y = \nu$ ganzzahlige positive Werthe haben, so sind die Punkte der einfachen Folge $\{a_0^{(0)}, a_2^{(1)}, a_4^{(2)}, \cdots\} = \{a_{2\nu}^{\nu}\}$ die Gitterpunkte, welche auf der Geraden: $x = 2y$ liegen. Diese Gerade theilt den von der positiven x- und y-Axe



eingeschlossenen Quadranten in zwei Theile, der von der Geraden und der horizontalen Axe Ox begrenzte Theil sei mit H bezeichnet. Alle in H verlaufenden Folgen haben*), wenn k_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ beliebige positive ganze Zahlen bedeuten, die Gestalt:

$$\{a_{2\nu+k_\nu}^{(\nu)}\} = \left\{\frac{1}{1+(2\nu+k_\nu-\nu)^2}\right\} = \left\{\frac{1}{1+(\nu+k_\nu)^2}\right\} \text{ für } \nu = \nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots,$$

wobei $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots$ positive ganze Zahlen mit $\lim\limits_{\varrho=\infty} \nu_\varrho = \infty$ bedeuten.

Diese Folgen convergiren sämmtlich zu dem Grenzwerth:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{1+(\nu+k_\nu)^2} = 0.$$

Also ist unsere Doppelfolge zum Grenzwerth 0 horizontal convergent,

Analoges Verhalten zeigt die Doppelfolge hinsichtlich der verticalen Convergenz, da μ und ν völlig symmetrisch auftreten. Denn auch die einfache Folge:

$$\{a_\mu^{(2\mu)}\} = \left\{\frac{1}{1+(\mu-2\mu)^2}\right\} = \left\{\frac{1}{1+\mu^2}\right\} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots)$$

convergirt zum Grenzwerth 0, und ebenso alle einfachen Folgen, welche in dem von dieser Folge und der verticalen Axe Oy begrenzten Theile

---

*) ev. erst von einer bestimmten Stelle an.

V verlaufen; die Punkte dieser einfachen Folge sind die Gitterpunkte, welche sich auf der Geraden $y = 2x$ befinden. Mithin ist die Doppelfolge $\left\{\frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}\right\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ lateral convergent, und da die Zeilen und Colonnen convergiren, so convergiren auch die von den Grenzwerthen der Zeilen und Colonnen gebildeten Folgen und zwar zu demselben Grenzwerth, die Grenzübergänge sind vertauschbar:

$$\lim_{\nu=\infty} \lim_{\mu=\infty} \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2} = \lim_{\mu=\infty} \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2},$$

was direct unmittelbar erkennbar ist. Die in den Theilen H und V der Doppelfolge verlaufenden einfachen Folgen convergiren sämmtlich zum Grenzwerth 0, wohingegen die in dem zwischen V und H befindlichen Theil C verlaufenden einfachen Folgen theils zu den verschiedensten Grenzwerthen, theils gar nicht convergiren.

b) Setzen wir*):

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2} = \frac{1}{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\nu}{\mu}} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

so erhalten wir die Doppelfolge:

$$\left\{\frac{1}{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\nu}{\mu}}\right\} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Die Diagonalfolge:

$$\left\{a_\nu^{(\nu)}\right\} = \left\{\frac{1}{1+1}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

convergirt zum Grenzwerth: $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)} = \frac{1}{2}\cdot$ Die zur Diagonalfolge parallelen Folgen:

$$\left\{a_{\nu+k}^{(\nu)}\right\} = \left\{\frac{1}{\frac{\nu+k}{\nu}+\frac{\nu}{\nu+k}}\right\} = \left\{\frac{1}{1+\frac{k}{\nu}+\frac{1}{1+\frac{k}{\nu}}}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),\ k \text{ positiv und ganz},$$

convergiren zum Grenzwerth:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{\nu+k}^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{1+\frac{k}{\nu}+\frac{1}{1+\frac{k}{\nu}}} = \frac{1}{2}\cdot$$

Diese einfachen Folgen werden dargestellt durch die Gitterpunkte, welche auf den gegen die x-Axe unter 45^0 geneigten Geraden:

---

*) cf. Pringsheim, l. c. p. 108.

$$x = y \pm k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

sich befinden. Betrachten wir die einfachen Folgen:

$$\left\{a^{(\nu)}_{p\nu+q}\right\} = \left\{\frac{1}{\left(p+\frac{q}{\nu}\right)+\frac{1}{p+\frac{q}{\nu}}}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

worin p und q positive ganze Zahlen bedeuten.

Jede solche Folge wird dargestellt durch die Folge der Gitterpunkte, welche sich auf der Geraden: $x = py + q$ befinden, und convergirt zum Grenzwerth:

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a^{(\nu)}_{p\nu+q} = \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \frac{1}{\left(p+\frac{q}{\nu}\right)+\frac{1}{p+\frac{q}{\nu}}} = \frac{1}{p+\frac{1}{p}} = \frac{p}{p^2+1}.$$

Demnach convergiren die sämmtlichen Folgen $\left\{a^{(\nu)}_{p\nu+q}\right\}$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$, welche man erhält, indem man p, q alle möglichen positiven ganzzahligen Werthe giebt, je nach dem Werthe von p zu den verschiedensten Grenzwerthen. Die Doppelfolge $\left\{\frac{1}{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\nu}{\mu}}\right\}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, \cdots)$ ist somit nicht total convergent. Betrachten wir die in der Doppelfolge enthaltene einfache Folge:

$$\left\{a^{(\nu)}_{\nu^2}\right\} = \left\{\frac{1}{\frac{\nu^2}{\nu}+\frac{\nu}{\nu^2}}\right\} = \left\{\frac{1}{\nu+\frac{1}{\nu}}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots);$$

dieselbe convergirt zum Grenzwerth:

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \frac{1}{\nu+\frac{1}{\nu}} = 0.$$

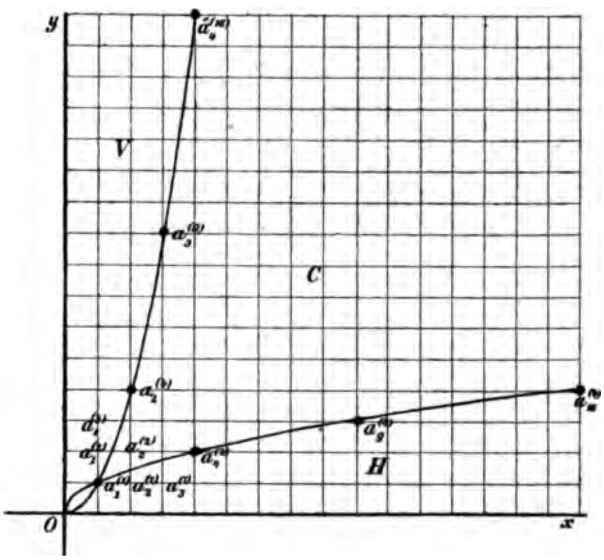
Diese Folge wird dargestellt durch die Gitterpunkte, welche auf der Parabel $x = y^2$ liegen. Diese Parabel theilt den positiven Quadranten in 2 Theile, von denen der von der Parabel und der horizontalen Axe Ox begrenzte mit H bezeichnet sei. Alle in H verlaufenden einfachen Folgen convergiren zum Grenzwerth 0. Denn die Glieder einer jeden solchen Folge werden von der Stelle an, wo sie den Theil H nicht mehr verlassen, die Gestalt haben:

$$a^{(\nu)}_{\nu^2+k_\nu} = \frac{1}{\frac{\nu^2+k_\nu}{\nu}+\frac{\nu}{\nu^2+k_\nu}} = \frac{1}{\nu+\frac{k_\nu}{\nu}+\frac{1}{\nu+\frac{k_\nu}{\nu}}},$$

wobei k_ν eine positive ganze Zahl bedeutet, und ν eine Folge positiver, ganzer, über alle Grenzen wachsender Zahlen durchläuft. Jede solche Folge convergirt somit zum Grenzwerth:

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \frac{1}{\nu + \frac{k_\nu}{\nu} + \frac{1}{\nu + \frac{k_\nu}{\nu}}} = 0.$$

Die Doppelfolge convergirt somit horizontal zum Grenzwerth 0. Da μ, ν symmetrisch auftreten, convergirt die Doppelfolge auch vertical zum Grenzwerth 0; alle in dem von der Parabel $y = x^2$ und der verticalen Axe Oy begrenzten Theile V verlaufenden Folgen convergiren ebenfalls zum Grenzwerth 0. Die Doppelfolge ist also zum Grenzwerth 0 lateral convergent; die in den lateralen Theilen H und V verlaufenden Folgen



convergiren alle zum Grenzwerth 0; die in dem zwischen V und H befindlichen centralen Theil C verlaufenden Folgen convergiren zu den verschiedensten Grenzwerthen oder convergiren überhaupt nicht. Da auch die Zeilen und Colonnen convergiren, so convergiren auch die von den Grenzwerthen der Zeilen und Colonnen gebildeten Folgen zum Grenzwerth Null und es ist:

$$\lim_{\nu=\infty} \lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\frac{\mu}{\nu} + \frac{\nu}{\mu}} = \lim_{\mu=\infty} \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\frac{\mu}{\nu} + \frac{\nu}{\mu}} = 0,$$

was bei directer Betrachtung unmittelbar erkennbar ist.

c) Wir betrachten die allgemeinere Doppelfolge:

$$\left\{\frac{\mu^3+\nu^3+\mu^2\nu^2}{\mu\nu^3+\mu^3\nu}\right\} \quad (\mu,\nu=1,2,3,\cdots).$$

Hier ist:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu^3+\nu^3+\mu^2\nu^2}{\mu\nu^3+\mu^3\nu} = \frac{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^3\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\frac{\mu}{\nu}}{1+\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\frac{\nu}{\mu}}{1+\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2}$$

$$(\mu,\nu=1,2,3,\cdots).$$

Bei dieser Folge convergiren nicht mehr, wie in den beiden ersten Beispielen, alle Zeilen und Colonnen nach demselben Grenzwerth, sondern es ist:

$$\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)} = \frac{1}{\nu}, \quad \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a_\mu = \frac{1}{\mu};$$

also ist:

$$\lim_{\nu=\infty}\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty}\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0.$$

Eine einfache in $\{a_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltene Folge:

$$\{a_{\mu_0}^{(\nu_0)},\ a_{\mu_1}^{(\nu_1)},\ a_{\mu_2}^{(\nu_2)},\ \cdots\},$$

wo

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\cdots;\quad \nu_0,\ \nu_1,\ \nu_2,\cdots$$

positive ganze, über alle Grenzen wachsende Zahlen bedeuten, bei welcher das Indexverhältniss: $\frac{\mu_\varrho}{\nu_\varrho}$ $(\varrho=0,1,2,\cdots)$ einen bestimmten endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerth: $\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty}\frac{\mu_\varrho}{\nu_\varrho}$ besitzt, convergirt zum Grenzwerth:

$$\frac{\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty}\frac{\mu_\varrho}{\nu_\varrho}}{1+\left(\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty}\frac{\mu_\varrho}{\nu_\varrho}\right)^2} = \frac{\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty}\frac{\nu_\varrho}{\mu_\varrho}}{1+\left(\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty}\frac{\nu_\varrho}{\mu_\varrho}\right)^2}.$$

Diese einfachen Folgen convergiren also, je nach dem Werth von $\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty}\frac{\nu_\varrho}{\mu_\varrho}$, nach verschiedenen Grenzwerthen, die Doppelfolge ist also nicht total convergent. Die einfachen Folgen $\left\{a_{\mu_\varrho}^{(\nu_\varrho)}\right\}$ $(\varrho=0,1,2,\cdots)$ jedoch, für welche $\operatorname{Lim}_{\varrho=\infty}\frac{\mu_\varrho}{\nu_\varrho}=0,\ \infty$ ist, convergiren zum Grenzwerth Null. Insbesondere ist also:

$$\operatorname{Lim}_{\nu=\infty} a_{\nu^2}^{(\nu)} = 0, \quad \operatorname{Lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\mu^2)} = 0;$$

die zugehörigen Folgen $\{a_{\nu^2}^{(\nu)}\}$, $\{a_\mu^{(\mu^2)}\}$ werden durch die Gitterpunkte der Parabeln: $x=y^2$, $y=x^2$ dargestellt. Bezeichnen wir den von der Parabel

$x = y^2$ und der horizontalen Axe Ox begrenzten Theil der Doppelfolge mit H, den von der Parabel $y = x^2$ und der verticalen Axe Oy begrenzten Theil mit V, so werden, wie im vorigen Beispiel, alle in den Theilen V und H verlaufenden einfachen Folgen zum Grenzwerth 0 convergiren, während die in dem centralen Theile C verlaufenden Folgen zu den verschiedensten Grenzwerthen oder gar nicht convergiren. Die Doppelfolge ist also zum Grenzwerth 0 lateral convergent; da auch ihre Zeilen und Colonnen convergiren, so ist:

$$\lim_{\mu=\infty} \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0,$$

wie wir oben bereits direct erkannten. —

§ 5.

Anwendung auf die Theorie der unendlichen Doppelreihen.

1) Da die Theorie der Doppelreihen auf der Theorie der Doppelfolgen basirt, so führen auch die vorangehenden Betrachtungen auf Eigenschaften der Doppelreihen.

Eine Doppelfolge $\{u_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$, deren Glieder man successive durch Summation „an einander zu reihen" beabsichtigt, nennt man eine *unendliche Doppelreihe*. Wir setzen:

$$\left.\begin{array}{l} u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + \cdots + u_\mu^{(0)} \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \cdots + u_\mu^{(1)} \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + u_2^{(\nu)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)} \end{array}\right\} = S_\mu^{(\nu)}$$

und nennen die mit $\{u_\mu^{(\nu)}\}$ gegebene Doppelfolge $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ die *Doppelfolge der Partialsummen* der Doppelreihe. Wenn die Doppelfolge der Partialsummen $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ einer Doppelreihe zum Grenzwerth:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = s$$

convergirt, so nennen wir s *die Summe der Doppelreihe* und bezeichnen dies durch die Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{l} \qquad s = \lim S_\mu^{(\nu)} = \\ u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \cdots + u_\mu^{(0)} + \cdots \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \cdots + u_\mu^{(1)} + \cdots \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)} + \cdots \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right\} = \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}.$$

Eine Doppelreihe, welche eine Summe besitzt, heisst *convergent* — passender würde man eine solche Reihe als „summirbar" bezeichnen —. Bekanntlich kann man die sämmtlichen Glieder einer Doppelreihe so anordnen, dass dieselben eine einfache Reihe bilden*) Dabei ist entweder jedes Glied der einfachen Reihe mit einem Gliede der Doppelreihe identisch und umgekehrt, oder — und dieser Fall sei ausdrücklich inbegriffen — jedes Glied der einfachen Reihe ist eine Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern der Doppelreihe; aus einer Anordnung der ersten Art gehen alle übrigen durch Umordnung und eventuelle gruppenweise Zusammenfassung hervor. Alle die so entstehenden einfachen Reihen bezeichnen wir als *„die aus der Doppelreihe hervorgehenden einfachen Reihen"*. Alsdann gilt:

*Wenn alle aus der Doppelreihe hervorgehenden einfachen Reihen convergiren, so muss die Doppelreihe absolut, oder was damit identisch ist, unbedingt convergiren***), *und umgekehrt, wenn die Doppelreihe absolut convergirt, so convergiren sämmtliche aus ihr hervorgehenden einfachen Reihen.* Daraus folgt, dass, falls die Doppelreihe nur bedingt oder schlechthin convergirt, nicht sämmtliche aus ihr hervorgehenden einfachen Reihen convergiren können. Es bietet sich daher hier die Frage dar, aus der Gesammtheit der aus einer Doppelreihe hervorgehenden einfachen Reihen eine solche Menge herauszuheben, deren Convergenz für die (bedingte) Convergenz der Doppelreihe nothwendig und hinreichend ist.

2) Zu diesem Zwecke betrachten wir die folgende Classe aus der Doppelreihe hervorgehender einfacher Reihen. Das System der Elemente, welche sich in den $(\mu+1)$ ersten Colonnen und den $(\nu+1)$ ersten Zeilen befinden, also das System:

$$\left\{\begin{matrix} u_0^{(0)}, & u_1^{(0)}, & u_2^{(0)}, & \cdots, & u_\mu^{(0)} \\ u_0^{(1)}, & u_1^{(1)}, & u_2^{(1)}, & \cdots, & u_\mu^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_0^{(\nu)}, & u_1^{(\nu)}, & u_2^{(\nu)}, & \cdots, & u_\mu^{(\nu)} \end{matrix}\right\},$$

welches durch das letzte Glied $u_\mu^{(\nu)}$ eindeutig bestimmt ist, bezeichnen wir als „das rechteckige System" oder als „das Reckteck $\boxed{u_\mu^{(\nu)}}$". Dies festgestellt, bilden wir folgende aus der Doppelreihe hervorgehende einfache Reihe; das erste Glied ist die Summe der im Rechteck $\boxed{u_{\mu_1}^{(\nu_1)}}$ auftretenden Elemente, also:

---

*) Ueber die einfachste Art einer solchen Anordnung cf. Pringsheim: Unendliche Doppelreihen l. c. p. 135, 136; vgl. auch J. Tannery: Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Paris 1886, p. 57 ff.

**) cf. Pringsheim l. c. § 4.

$$\sum_{0}^{\nu_1}{}_{\nu} \sum_{0}^{\mu_1}{}_{\mu} u_{\mu}^{(\nu)} = S_{\mu_1}^{(\nu_1)}.$$

das zweite Glied ist die Summe derjenigen im Rechteck $\boxed{u_{\mu_2}^{(\nu_2)}}$ $\begin{pmatrix} \mu_2 \geqq \mu_1 \\ \nu_2 \geqq \nu_1 \end{pmatrix}$ auftretenden Elemente, welche im ersten Gliede nicht enthalten sind, dasselbe ist also:

$$\sum_{0}^{\nu_2}{}_{\nu} \sum_{0}^{\mu_2}{}_{\mu} u_{\mu}^{(\nu)} - \sum_{0}^{\nu_1}{}_{\nu} \sum_{0}^{\mu_1}{}_{\mu} u_{\mu}^{(\nu)} = S_{\mu_2}^{(\nu_2)} - S_{\mu_1}^{(\nu_1)}.$$

Analog ist das dritte Glied die Summe derjenigen im Rechteck $\boxed{u_{\mu_3}^{(\nu_3)}}$ $\begin{pmatrix} \mu_3 \geqq \mu_2 \\ \nu_3 \geqq \nu_2 \end{pmatrix}$ auftretenden Elemente, welche in den früheren Gliedern nicht enthalten sind, dasselbe ist also:

$$\sum_{0}^{\nu_3}{}_{\nu} \sum_{0}^{\mu_3}{}_{\mu} u_{\mu}^{(\nu)} - \sum_{0}^{\nu_2}{}_{\nu} \sum_{0}^{\mu_2}{}_{\mu} u_{\mu}^{(\nu)} = S_{\mu_3}^{(\nu_3)} - S_{\mu_2}^{(\nu_2)},$$

u. s. w. Auf diesem Wege gelangt man zu der aus der Doppelreihe hervorgehenden einfachen Reihe:

$$S_{\mu_1}^{(\nu_1)} + \left(S_{\mu_2}^{(\nu_2)} - S_{\mu_1}^{(\nu_1)}\right) + \left(S_{\mu_3}^{(\nu_3)} - S_{\mu_2}^{(\nu_2)}\right) + \left(S_{\mu_4}^{(\nu_4)} - S_{\mu_3}^{(\nu_3)}\right) + \cdots,$$

wobei

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \mu_3 \leqq \cdots,$$
$$\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3 \leqq \cdots,$$

in welche successive alle Glieder der Doppelreihe eintreten, und welche $S_{\mu_1}^{(\nu_1)}, S_{\mu_2}^{(\nu_2)}, S_{\mu_3}^{(\nu_3)}, \cdots$ als Partialsummen besitzt. Die Partialsummen

$$S_{\mu_1}^{(\nu_1)}, S_{\mu_2}^{(\nu_2)}, S_{\mu_3}^{(\nu_3)}, \cdots$$

einer solchen einfachen Reihe bilden eine in der Doppelfolge

$$\{S_{\mu}^{(\nu)}\} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

enthaltene einfache, steigende Folge und umgekehrt bildet jede in der Doppelfolge $\{S_{\mu}^{(\nu)}\}$ enthaltene, steigende Folge die Folge der Partialsummen für eine einfache Reihe der gekennzeichneten Art. Eine derartige Reihe wird also erhalten, wenn man eine beliebige steigende Folge

$$u_{\mu_1}^{(\nu_1)}, u_{\mu_2}^{(\nu_2)}, u_{\mu_3}^{(\nu_3)}, \cdots \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \mu_3 \leqq \cdots \\ \nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3 \leqq \cdots \end{pmatrix}$$

zu Grunde legt, dann die Summe der Elemente des Rechtecks $\boxed{u_{\mu_1}^{(\nu_1)}}$ bildet, hierzu die Summe der noch nicht summirten Elemente des Rechtecks $\boxed{u_{\mu_2}^{(\nu_2)}}$ fügt, hierzu die Summe der noch nicht summirten Elemente des Rechtecks $\boxed{u_{\mu_3}^{(\nu_3)}}$ addirt und so zu immer grösseren Rechtecken des Systems $\{u_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$, von denen jedes die früheren enthält, fortschreitet. In Folge dieser Entstehung wollen wir jede auf die geschilderte Weise aus der Doppelreihe hervorgehende einfache Reihe als *„eine aus der Doppelreihe mittels ‚Rechteckanordnung' hervorgehende einfache Reihe"* oder kurz als *„eine Rechteckanordnung der Doppelreihe"* bezeichnen. Die Rechteckanordnungen bilden somit eine wohl definirte Classe von aus der Doppelreihe hervorgehenden einfachen Reihen, die dadurch charakterisirt sind, dass ihre Partialsummen eine einfache, steigende Folge der Doppelfolge $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ bilden. Jedes in einer Rechteckanordnung auftretende Rechteck ist durch die der Ecke $u_0^{(0)}$ gegenüberliegende Ecke $u_\mu^{(\nu)}$ vollkommen gekennzeichnet, wir können daher jede Rechteckanordnung durch die steigende Folge dieser Ecken, also durch $\{u_{\mu_1}^{(\nu_1)}, u_{\mu_2}^{(\nu_2)}, u_{\mu_3}^{(\nu_3)}, \cdots\}$ in eindeutiger Weise bezeichnen.

Denken wir uns die Glieder $u_\mu^{(\nu)}$ der Doppelreihe geometrisch repräsentirt durch die Gitterpunkte im positiven Quadranten, so wird jede Rechteckanordnung $\{u_{\mu_1}^{(\nu_1)}, u_{\mu_2}^{(\nu_2)}, u_{\mu_3}^{(\nu_3)}, \cdots\}$ dargestellt durch eine Folge auf einander folgender Rechtecke, von denen jedes das vorhergehende umschliesst, und die sämmtlich die Ecke $u_0^{(0)}$ gemeinsam und die Seiten parallel zu den Axen haben. Die Summe der Elemente, welche den im Innern und auf dem Rande der einzelnen Rechtecke enthaltenen Punkten entsprechen, soweit sie nicht in den früheren Rechtecken enthalten sind, bilden die Glieder der betreffenden Rechteckanordnung; man erkennt dabei, wie schliesslich jedes Glied der Doppelreihe in die Rechteckanordnung eintritt.

3) Es gilt nun der Satz: *Zur Convergenz einer Doppelreihe ist nothwendig und hinreichend, dass sämmtliche aus ihr mittels Rechteckanordnung hervorgehenden einfachen Reihen convergiren.* Dies ergiebt sich unmittelbar aus dem § 1, 6) bewiesenen Satze, dass eine Doppelfolge dann und nur dann convergirt, wenn alle in ihr enthaltenen steigenden Folgen convergiren. Denn convergirt die Doppelreihe: $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$, so convergirt auch die Doppelfolge $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ ihrer Partialsummen, dann convergiren sämmtliche in $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltenen, steigenden Folgen, und da diese die Partialsummen der mittels Rechteckanordnung aus $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ hervorgehenden Reihen bilden,

so sind nothwendig auch diese letzteren convergent. Und umgekehrt: Convergiren alle Rechteckanordnungen der Doppelreihe, so convergiren alle in $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ enthaltenen steigenden Folgen, und somit auch $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ und daher auch die Doppelreihe. — Hieraus ergiebt sich, dass, während zur unbedingten Convergenz von $\sum^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ die Convergenz *sämmtlicher* aus $\sum^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ hervorgehender einfacher Reihen erforderlich ist, zur bedingten Convergenz nur die Convergenz aller mittels Rechteckanordnung aus $\sum^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ hervorgehenden Reihen erforderlich ist. Die Rechteckanordnungen bilden somit die gesuchte Classe der aus $\sum^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ hervorgehenden, einfachen Reihen, deren Convergenz zur Convergenz der Doppelreihe nothwendig und hinreichend ist.

4) Wir sahen im § 2, dass zur Convergenz einer Doppelfolge $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ nothwendig und hinreichend ist, dass die Diagonalfolge:

$$\{S_0^{(0)},\ S_1^{(1)},\ S_2^{(2)}, \cdots\} \tag{1}$$

und die zu ihr parallelen Folgen:

$$\{S_\varrho^{(0)},\ S_{\varrho+1}^{(1)},\ S_{\varrho+2}^{(2)}, \cdots\}, \tag{2}$$

$$\{S_0^{(\varrho)},\ S_1^{(\varrho+1)},\ S_2^{(\varrho+2)}, \cdots\}; \quad \varrho = 1, 2, 3, \cdots \tag{3}$$

zu demselben Grenzwerth *gleichmässig* convergiren. Ist nun $\sum_0^{\infty}{}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ eine Doppelreihe, und $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ die Doppelfolge ihrer Partialsummen, so ist demnach zur Convergenz der Doppelreihe nothwendig und hinreichend, dass diejenigen mittels Rechteckanordnung aus der Doppelreihe hervorgehenden einfachen Reihen, welche die steigenden Folgen (1), (2), (3) zu Partialsummen haben, zu derselben Summe gleichmässig convergiren.

Der Diagonalfolge (1) entspricht die Rechteckanordnung:

$$\left\{\begin{array}{l|l|l|l|l}
\quad u_0^{(0)} & + u_1^{(0)} & + u_2^{(0)} & + u_3^{(0)} & + \cdots \\
+ u_0^{(1)} & + u_1^{(1)} & + u_2^{(1)} & + u_3^{(1)} & + \cdots \\
+ u_0^{(2)} & + u_1^{(2)} & + u_2^{(2)} & + u_3^{(2)} & + \cdots \\
+ u_0^{(3)} & + u_1^{(3)} & + u_2^{(3)} & + u_3^{(3)} & + \cdots \\
+ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot
\end{array}\right. \tag{1'}$$

wobei die Summe der durch $\lrcorner$ zusammengefassten Elemente ein Glied der Reihe bildet. Den zur Diagonalfolge parallelen Folgen (2) entsprechen die Rechteckanordnungen:

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{lllllll}
a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_\varrho^{(0)} & + a_{\varrho+1}^{(0)} & + a_{\varrho+2}^{(0)} & + a_{\varrho+3}^{(0)} & + \cdots \\
+ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \cdots + a_\varrho^{(1)} & + a_{\varrho+1}^{(1)} & + a_{\varrho+2}^{(1)} & + a_{\varrho+3}^{(1)} & + \cdots \\
+ a_0^{(2)} + a_1^{(2)} + \cdots + a_\varrho^{(2)} & + a_{\varrho+1}^{(2)} & + a_{\varrho+2}^{(2)} & + a_{\varrho+3}^{(2)} & + \cdots \\
+ a_0^{(3)} + a_1^{(3)} + \cdots + a_\varrho^{(3)} & + a_{\varrho+1}^{(3)} & + a_{\varrho+2}^{(3)} & + a_{\varrho+3}^{(3)} & + \cdots \\
+ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \right.$$

$$(\varrho = 1, 2, 3, \cdots).$$

Analog bildet man die den Folgen (3) entsprechenden Reckteckanordnungen:

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{llll}
a_0^{(0)} & + a_1^{(0)} & + a_2^{(0)} & + \cdots \\
+ a_0^{(1)} & + a_1^{(1)} & + a_2^{(1)} & + \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
+ a_0^{(\varrho)} & + a_1^{(\varrho)} & + a_2^{(\varrho)} & + \cdots \\
+ a_0^{(\varrho+1)} & + a_1^{(\varrho+1)} & + a_2^{(\varrho+1)} & + \cdots \\
+ a_0^{(\varrho+2)} & + a_1^{(\varrho+2)} & + a_2^{(\varrho+2)} & + \cdots \\
+ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \right. \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots).$$

Diese Rechteckanordnungen (1'), (2'), (3'), welche ganz besonders einfache und specielle Anordnungen der Doppelreihe in eine einfache Reihe repräsentiren, und welche eine abzählbare Menge bilden, wollen wir als *die regulären Rechteckanordnungen* der Doppelreihe bezeichnen.

Dann können wir den Satz aussprechen:

Zur Convergenz einer Doppelreihe ist nothwendig und hinreichend, dass ihre regulären Rechteckanordnungen (1'), (2'), (3') *zu demselben Grenzwerth gleichmässig convergiren.*

5) Wir untersuchen nunmehr, wie beschaffen ein System convergenter Reihen:

$$u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + u_2^{(\nu)} + \cdots = \sum_0^\infty {}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

sein muss, damit die Doppelreihe $\sum_0^\infty {}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$, welche dieses System zu Zeilen (Colonnen) hat, convergirt. Zunächst ergiebt sich, wie Herr Pringsheim*)

*) Pringsheim, Unendliche Doppelreihen, l. c. p. 117.

gezeigt hat, dass zur Convergenz der Doppelreihe nothwendig ist, dass die von den Zeilen-Summen gebildete Reihe:

$$\sum_0^\infty {}^\mu u_\mu^{(0)} + \sum_0^\infty {}^\mu u_\mu^{(1)} + \sum_0^\infty {}^\mu u_\mu^{(2)} + \cdots = \sum_0^\infty {}^\nu \left(\sum_0^\infty {}^\mu u_\mu^{(\nu)} \right)$$

convergent sein muss. Diese Bedingung ist aber für die Convergenz der Doppelreihe noch nicht ausreichend; denn, wie die Resultate des § 3, 1 zeigen, müssen ausserdem noch die durch successive Summation der Zeilen gebildeten Reihen:

$$\sum {}^\mu u_\mu^{(0)}, \quad \sum {}^\mu \left(u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)}\right), \quad \sum {}^\mu \left(u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)}\right), \cdots$$
$$\sum {}^\mu \left(u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)}\right), \cdots$$

zu ihren Summen *„gleichmässig“* convergiren. Es gilt nämlich der Satz:

Ein System convergenter Reihen ist dann und nur dann das System der Zeilen einer convergenten Doppelreihe, wenn erstens die von den Summen der Reihen gebildete Reihe convergirt, und wenn zweitens die aus den Reihen des Systems durch successive Summation gebildeten Reihen zu ihren Summen „gleichmässig“ convergiren.

Beweis: Die Doppelreihe $\sum_0^\infty {}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ convergirt dann und nur dann wenn die Doppelfolge der Partialsummen:

$$\{S_\mu^{(\nu)}\} = \left\{ \sum_0^\nu {}^n \sum_0^\mu {}^m u_m^{(n)} \right\} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

convergirt. Diese Doppelfolge der Partialsummen $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ besitzt convergente Zeilen, da:

$$\sum_0^\infty {}^\mu u_\mu^{(0)} + \sum_0^\infty {}^\mu u_\mu^{(1)} + \cdots + \sum_0^\infty {}^\mu u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty {}^\mu \left(u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)}\right)$$
$$= \operatorname*{Lim}_{\mu=\infty} \sum_0^\mu {}^m \left(u_m^{(0)} + u_m^{(1)} + \cdots + u_m^{(\nu)}\right)$$
$$= \operatorname*{Lim}_{\mu=\infty} \sum_0^\mu {}^m \sum_0^\nu {}^n u_m^{(n)} = \operatorname*{Lim}_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S^{(\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

wegen der vorausgesetzten Convergenz von $\sum_0^\infty {}^\mu u_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ endlich und bestimmt ist.

Die Doppelfolge $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ convergirt mithin nach § 3, (1) dann und nur dann, wenn erstens:

$$\lim_{\nu=\infty} S^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \sum_0^\infty{}^{\mu} \left(u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)}\right)$$

$$= \sum_0^\infty{}^{\mu} u_\mu^{(0)} + \sum_0^\infty{}^{\mu} u_\mu^{(1)} + \sum_0^\infty{}^{\mu} u_\mu^{(2)} + \cdots$$

endlich und bestimmt ist, d. h. wenn in der Doppelreihe $\sum^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ die Reihe der Zeilensummen convergirt; und wenn zweitens die Zeilen von $\{S_\mu^{(\nu)}\}$:

$$S_0^{(\nu)},\ S_1^{(\nu)},\ S_2^{(\nu)}, \cdots \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

zu ihren Grenzwerthen *„gleichmässig"* convergiren. Dazu muss zu jedem noch so kleinen positiven ε ein Index m sich zuordnen lassen, so dass für *jedes* $\nu = 0, 1, 2, \cdots$:

$$\left|S^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad \mu \geqq m,$$

oder:

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\mu} \left(u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)} + \cdots + u_\mu^{(\nu)}\right) - \sum_0^\mu{}^{\varrho} \left(u_\varrho^{(0)} + u_\varrho^{(1)} + \cdots + u_\varrho^{(\nu)}\right)\right| \leqq \varepsilon \text{ für } \mu \geqq m$$

und für *jedes* $\nu = 0, 1, 2, \cdots$; d. h. die durch successive Summation der Zeilen gebildeten Reihen:

$$\sum{}^{\mu} u_\mu^{(0)},\quad \sum{}^{\mu} \left(u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)}\right),\quad \sum{}^{\mu} \left(u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)}\right), \cdots$$

sind so beschaffen, dass bei *jeder* von ihnen ihre Partialsummen von der m^{ten} an sich von der Reihensumme um weniger als die beliebige positive Zahl ε unterscheiden, d. h. sie convergiren zu ihren Summen gleichmässig; damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Aus dem Satze in § 3, 3 ergiebt sich in derselben Weise:

*Wenn in einer Doppelreihe alle Zeilen und Colonnen convergiren und die dann ebenfalls stattfindende Convergenz der durch successive Summation der Zeilen (Colonnen) gebildeten Reihen eine gleichmässige ist, so ist die Doppelreihe convergent, und es ist alsdann:**)

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \left(\sum_0^\infty{}^{\mu} u_\mu^{(\nu)}\right) = \sum_0^\infty{}^{\mu} \left(\sum_0^\infty{}^{\nu} u_\mu^{(\nu)}\right) = \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$$

d. h. die Reihenfolge der beiden Summationen ist vertauschbar.

*) Cf. Pringsheim, l. c. p. 118.

Anmerkung. Zur Convergenz der Doppelreihe $\sum_0^{\infty}{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ ist, abgesehen von der Convergenz der Zeilen und der Zeilensummen, die gleichmässige Convergenz der durch successive Summation der Zeilen gebildeten Reihen wirklich erforderlich; die gleichmässige Convergenz des Systems der Zeilen *allein* reicht dazu nicht aus, dies lehrt das Beispiel der Doppelreihe:

$$\sum_0^{\infty}{}^{\mu,\nu} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!}\left(\frac{2^{\nu+1}-1}{2^{\nu+1}}\,\pi\right)^{2\mu+1}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\pi\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\pi\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\pi\right)^7 \pm \cdots \\ + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{3!}\left(\frac{3}{4}\pi\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{3}{4}\pi\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{3}{4}\pi\right)^7 \pm \cdots \\ + \frac{7}{8}\pi - \frac{1}{3!}\left(\frac{7}{8}\pi\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{7}{8}\pi\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{7}{8}\pi\right)^7 \pm \cdots \\ + \frac{15}{16}\pi - \frac{1}{3!}\left(\frac{15}{16}\pi\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{15}{16}\pi\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{15}{16}\pi\right)^7 \pm \cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}.$$

Hier convergiren die Zeilen zu den Werthen:

$$\sum_0^{\infty}{}^{\mu} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!}\left(\frac{2^{\nu+1}-1}{2^{\nu+1}}\,\pi\right)^{2\mu+1} = \sin\frac{2^{\nu+1}-1}{2^{\nu+1}}\,\pi \quad (\nu=0,1,2,\cdots).$$

Die Reihe der Zeilensummen:

$$\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3}{4}\pi + \sin\frac{7}{8}\pi + \sin\frac{15}{16}\pi + \cdots + \sin\frac{2^{\nu+1}-1}{2^{\nu+1}}\,\pi + \cdots$$

ist ebenfalls convergent, da ihre Glieder kleiner sind, als die entsprechenden Glieder der convergenten Reihe:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} + \cdots + \frac{\pi}{2^{\nu+1}} + \cdots = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = \pi.$$

Die Convergenz des Systems der Zeilen ist sogar eine *gleichmässige*, da die Zeilen gleich der Potenzreihe:

$$\sum_0^{\infty}{}^{\mu} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!}\, x^{2\mu+1} = \sin x$$

genommen für die zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π gelegenen Werthe:

$$x = \frac{2^{\nu+1}-1}{2^{\nu+1}}\,\pi \quad (\nu=0,1,2,\cdots)$$

sind, und diese Potenzreihe für alle reellen Werthe von x, die sich in einem endlichen Intervall befinden, gleichmässig convergirt. Trotzdem divergirt die Doppelreihe, da jede ihrer Colonnen eigentlich divergirt.*) Die *gleichmässige* Convergenz der Zeilen reicht also — in Verbindung mit der Convergenz der Zeilensummen — für die Convergenz der Doppelreihe *nicht* aus, sondern dazu ist erst die gleichmässige Convergenz der durch successive Summation der Zeilen gebildeten Reihen hinreichend und auch nothwendig.

6) In Analogie mit den Festsetzungen von § 4, 2) verstehen wir bei einer Doppelreihe $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ *unter einem horizontalen Theil H des Systems* $\{u_\mu^{(\nu)}\}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ die Gesammtheit derjenigen Elemente $u_\mu^{(\nu)}$, welche sich in den von der horizontalen Anfangsfolge $\{u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \cdots\}$ und einer einfachen Folge $\{u_{m_0}^{(0)}, u_{m_1}^{(1)}, u_{m_2}^{(2)}, \cdots\}$ begrenzten Theil befinden, d. h. *die Gesammtheit der Elemente:* $u_{m_\nu+\mu}^{(\nu)}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$. In analoger Weise definirt man einen verticalen Theil V des Systems $\{u_\mu^{(\nu)}\}$.

Wir konnten die sämmtlichen Glieder $u_\mu^{(\nu)}$ der Doppelreihe in eine einfache Reihe zusammenfassen (cf. Art. 2) mittels einer Rechteckanordnung, welche durch die steigende Folge

$$\{u_{\mu_1}^{(\nu_1)}, u_{\mu_2}^{(\nu_2)}, u_{\mu_3}^{(\nu_3)}, \cdots\} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \mu_3 \leqq \cdots \\ \nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3 \leqq \cdots \end{pmatrix}$$

der der Ecke $u_0^{(0)}$ gegenüberliegenden Ecken der einzelnen Rechtecke eindeutig charakterisirt war. Von einer Rechteckanordnung $\{u_{\mu_1}^{(\nu_1)}, u_{\mu_2}^{(\nu_2)}, \cdots\}$ sagen wir, dass sie in einem horizontalen (verticalen) Theile $H(V)$ des Systems $\{u_\mu^{(\nu)}\}$ *verläuft,* wenn die Elemente $u_{\mu_1}^{(\nu_1)}, u_{\mu_2}^{(\nu_2)}, \cdots$ von einer bestimmten Stelle an dem Theile $H(V)$ sämmtlich angehören. Dies festgesetzt definiren wir:

Eine Doppelreihe $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ *heisst „horizontalconvergent", wenn die zugehörige Doppelfolge der Partialsummen* $\{s_\mu^{(\nu)}\}$ *„horizontal convergirt"* (cf. § 4, 3). Eine in dem früheren Sinne convergente Doppelreihe nennen wir nunmehr „total convergent" oder schlechthin convergent. Demnach wird eine Doppelreihe horizontal convergiren, wenn sie zwar nicht bei jeder Rechteckanordnung convergirt, wenn sie jedoch bei allen Rechteckanordnungen, welche in einem horizontalen Theile des Systems $\{u_\mu^{(\nu)}\}$ ver-

*) Cf. Pringsheim, l. c. p. 116.

laufen, convergirt und dieselbe Summe liefert. Die Bezeichnung horizontale *Convergenz* ist demnach insofern gerechtfertigt, als die Doppelreihe immerhin noch bei unendlich vielen, wohl definirten Rechteckanordnungen summirbar ist, und als Summe stets dieselbe Zahl liefert, nämlich den Grenzwerth s zu welchem die Doppelfolge der Partialsummen $\{S_\mu^{(\nu)}\}$ horizontal convergirt. Diese Zahl s bezeichnen wir deshalb als *die Summe* der horizontal convergenten Doppelreihe.

Die horizontale Convergenz einer Doppelreihe bildet somit einen weiteren Convergenzbegriff, als die totale Convergenz einer Doppelreihe, da bei dieser die Doppelreihe bei *sämmtlichen Rechteck*anordnungen zu derselben Summe convergirt, ebenso wie die letztere einen weiteren Begriff bildet, als die absolute oder unbedingte Convergenz einer Doppelreihe, bei welcher die Doppelreihe bei *jeder* Anordnung ihrer sämmtlichen Glieder in eine einfache Reihe zu derselben Summe convergiren muss.

In völlig analoger Weise hat man die *verticale* Convergenz einer Doppelreihe zu definiren. Eine Doppelreihe nennen wir schliesslich *„lateral convergent"*, wenn die Doppelfolge ihrer Partialsummen „lateral convergirt" (cf. § 7, 6). Eine lateral convergente Doppelreihe ist sowohl horizontal, als vertical convergent und besitzt beide Male dieselbe Summe; eine solche wird demnach zwar nicht bei jeder Rechteckanordnung convergiren, wohl aber bei einer bestimmten Classe von Rechteckanordnungen. Es existirt nämlich ein horizontaler Theil H und ein verticaler Theil V des Systems $\{u_\mu^{(\nu)}\}$ derart, dass alle in H und V verlaufenden Rechteckanordnungen convergiren und dieselbe Summe liefern, wohingegen die in dem zwischen H und V befindlichen centralen Theil des Systems $\{u_\mu^{(\nu)}\}$ verlaufenden Rechteckanordnungen nicht sämmtlich convergent sind.

Die in § 4, Art. 4, 6 für Doppelfolgen erhaltenen Resultate ergeben nun unmittelbar die folgenden Sätze über die Reihen der Zeilen- und Colonnen-Summen einer Doppelreihe.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der Reihe der Zeilen-(Colonnen-)Summen einer Doppelreihe mit convergenten Zeilen (Colonnen) besteht in der horizontalen (verticalen) Convergenz der Doppelreihe. Lassen sich also die Glieder $u_\mu^{(\nu)}$ einer Doppelreihe durch zwei successive Summationen:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \left(\sum_0^\infty{}_\mu u_\mu^{(\nu)} \right)$$

summiren, so giebt es stets auch unendlich viele Anordnungen der Doppelreihe in eine convergente einfache Reihe, welche alle zu demselben Summenwerth führen.

Diese Anordnungen sind „Rechteckanordnungen", welche in einem gewissen horizontalen Theil des Systems $\{u_\mu^{(\nu)}\}$ verlaufen, und umgekehrt. Ebenso ergiebt sich:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in einer Doppelreihe mit convergenten Zeilen und Colonnen die Reihen der Zeilen-Summen und Colonnen-Summen convergiren und dieselbe Summe liefern, besteht in der lateralen Convergenz der Doppelreihe.

Demnach lässt sich in der iterirten Summe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \left(\sum_0^\infty{}_\mu u_\mu^{(\nu)}\right)$$

die Reihenfolge der Summationen dann und nur dann vertauschen, d. h. es ist:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \left(\sum_0^\infty{}_\mu u_\mu^{(\nu)}\right) = \sum_0^\infty{}_\mu \left(\sum_0^\infty{}_\nu u_\mu^{(\nu)}\right),$$

wenn die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$ *lateral* convergirt, wobei die Convergenz aller ihrer Zeilen $\left(\sum_0^\infty{}_\mu u_\mu^{(\nu)}\right)$ und Colonnen $\left(\sum_0^\infty{}_\nu u_\mu^{(\nu)}\right)$ implicite vorausgesetzt ist.

Breslau, Mai 1899.

Ueber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe.

Von

R. Dedekind in Braunschweig.

In der vierten Auflage von Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie (die im Folgenden mit D. citirt werden soll) habe ich gelegentlich (in den Anmerkungen auf S. 499, 510, 556) die Dualgruppe erwähnt, die aus drei beliebigen Moduln durch fortgesetzte Bildung der gemeinsamen grössten Theiler und kleinsten Vielfachen erzeugt wird und im Allgemeinen aus 28 verschiedenen Moduln besteht. Da die Gesetze dieser Gruppe sich auf ganz andere Gebiete übertragen lassen und oft eine nützliche Hülfe gewähren, so sollen dieselben im Folgenden dargestellt werden; daran schliessen sich verschiedene Untersuchungen über allgemeinere Dualgruppen.*)

§ 1.

Allgemeine Eigenschaften der Dualgruppen.

Bezeichnet man (wie in D. § 169) mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ den grössten gemeinsamen Theiler (oder die Summe), mit $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ das kleinste gemeinsame Vielfache (oder den Durchschnitt) der beiden *Moduln* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, so gilt für jede einzelne dieser beiden Operationen $\pm$ zunächst das commutative und associative Gesetz

$$(1) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a},$$

$$(2) \qquad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) - \mathfrak{c} = \mathfrak{a} - (\mathfrak{b} - \mathfrak{c})$$

mit den bekannten Folgerungen, die sich auf eine beliebige endliche Anzahl von Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \cdots$ beziehen (D. § 2).

Die beiden Operationen $\pm$ sind ferner durch die beiden Gesetze

$$(3) \qquad \mathfrak{a} + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a} - (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$$

---

*) Vergl. § 4 meines Aufsatzes Ueber Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Theiler in der Festschrift unserer Technischen Hochschule für die Naturforscher-Versammlung 1897.

mit einander verbunden, und hieraus folgt ohne Zuziehung von (1), (2) auch

(4) $$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} - \mathfrak{a} = \mathfrak{a};$$

bezeichnet man nämlich die erste und zweite Hälfte einer Doppelgleichung (n) resp. mit (n') und (n''), so ergiebt sich (4′), wenn man $\mathfrak{b}$ in (3′) durch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ersetzt, mit Rücksicht auf (3″), und ebenso ergiebt sich (4″), wenn man $\mathfrak{b}$ in (3″) durch $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ ersetzt und (3′) beachtet.

Wenn zwei Operationen $\pm$ aus je zwei Elementen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ eines (endlichen oder unendlichen) Systems $\mathfrak{G}$ zwei Elemente $\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}$ desselben Systems $\mathfrak{G}$ erzeugen und zugleich den Gesetzen (1), (2), (3) genügen, so soll $\mathfrak{G}$ in Bezug auf dieses Operationspaar $\pm$ eine *Dualgruppe* heissen, wie auch sonst diese Elemente beschaffen sein mögen. Die Gesammtheit aller Moduln ist daher eine Dualgruppe bezüglich der beiden Operationen, welche in der Bildung des grössten gemeinsamen Theilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen bestehen*). Zunächst betrachten wir aber einige Eigenschaften, welche *jeder* Dualgruppe $\mathfrak{G}$ zukommen.

Zufolge (4) bildet jedes Element $\mathfrak{a}$ einer Dualgruppe $\mathfrak{G}$ für sich allein eine Dualgruppe.

Für zwei beliebige Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ergiebt sich aus (2) und (4), wenn man $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ resp. durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ersetzt,

(5) $$\mathfrak{a} + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} - (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} - \mathfrak{b};$$

ersetzt man ferner $\mathfrak{c}$ in (2′) durch $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$, in (2″) durch $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$, so folgt mit Rücksicht auf (3) auch

(6) $$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \quad (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} - \mathfrak{b};$$

mithin bilden die vier Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$ gewiss eine Dualgruppe, und es fragt sich nur, wie viele von ihnen *verschieden* sind.

Nimmt man an, es sei $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$, also auch $\mathfrak{a} + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$, so folgt aus (5′) und (3′) auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, und da die Annahme symmetrisch in Bezug auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist, so folgt ebenso $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$; und umgekehrt, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist, so sind alle vier Elemente identisch mit einander.

Machen wir jetzt die (allgemeinere) Annahme, es sei $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ identisch mit einem der beiden Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, also z. B. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, so folgt aus (3″) durch Vertauschung von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$, und umgekehrt, wenn Letzteres der Fall ist, so ergiebt sich aus (3′) auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. Da dieser Fall sehr häufig auftritt, so übertragen wir die in der Modultheorie übliche Ausdrucks- und Bezeichnungsweise (D. § 169) auf alle Dualgruppen $\mathfrak{G}$

*) Andere Beispiele von Dualgruppen findet man in der oben erwähnten Schrift (1897). Vergl. den Schluss (§ 8) der gegenwärtigen Abhandlung.

und sagen*): das Element $\mathfrak{b}$ ist *theilbar* durch das Element $\mathfrak{a}$, zugleich heisst $\mathfrak{b}$ ein *Vielfaches* von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{a}$ ein *Theiler* von $\mathfrak{b}$; diese Theilbarkeit wird durch $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$ bezeichnet, und es ist daher jede der vier Aussagen

$$(7) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{a}$$

gleichbedeutend mit jeder der drei übrigen; zwei solche Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ bilden für sich allein eine Dualgruppe. Es ist zweckmässig, hierbei den Fall $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ nicht auszuschliessen; wenn aber $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ verschieden sind, so soll $\mathfrak{b}$ ein *echtes* Vielfaches von $\mathfrak{a}$ und zugleich $\mathfrak{a}$ ein *echter* Theiler von $\mathfrak{b}$ heissen.

Ist endlich keines der beiden Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ durch das andere theilbar, so besteht die durch sie erzeugte Dualgruppe aus vier verschiedenen Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$.

Für die durch (7) charakterisirte Theilbarkeit von $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}$ ergeben sich durch alleinige Anwendung der Grundgesetze (1), (2), (3) die folgenden Sätze, deren Beweise der Leser leicht finden wird.

I. Immer ist $\mathfrak{a} < \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}$.

II. Aus $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

III. Aus $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$, was kurz in $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ zusammengefasst wird, folgt $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$.

IV. Immer ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} < \mathfrak{a} - \mathfrak{c}$, also auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} < \mathfrak{a} - \mathfrak{c}$.

V. Aus $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}' < \mathfrak{b}'$ folgt $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}' < \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}' < \mathfrak{b} - \mathfrak{b}'$.

VI. Aus $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}' < \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}' < \mathfrak{b}$, d. h. jedes gemeinsame Vielfache $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ ist theilbar durch $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'$, und aus $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}'$ folgt $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$, d. h. jeder gemeinsame Theiler $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ ist Theiler von $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$. Wegen der Analogie mit der Zahlen- und Modultheorie heisst daher $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'$ das *kleinste* gemeinsame Vielfache von $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$, und $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ heisst der *grösste* gemeinsame Theiler von $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$. Diese Ausdrucksweise dehnen wir auch auf mehr als zwei Elemente aus, und durch wiederholte Anwendung des Vorhergehenden ergiebt sich der Satz: ist jedes der Elemente $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'', \mathfrak{a}''' \cdots$ ein Theiler von jedem der Elemente $\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'', \mathfrak{b}''' \cdots$, so ist

$$\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}'' - \mathfrak{a}''' - \cdots < \mathfrak{b}' + \mathfrak{b}'' + \mathfrak{b}''' + \cdots,$$

d. h. das kleinste gemeinsame Vielfache der Elemente $\mathfrak{a}$ ist ein Theiler des grössten gemeinsamen Theilers der Elemente $\mathfrak{b}$.

---

*) Für besondere Dualgruppen $\mathfrak{G}$, deren Elemente schon eine bestimmte Bedeutung haben, kann diese Ausdrucksweise höchst unpassend erscheinen; man wird dann ganz andere, dem Gegenstande entsprechende Namen und Zeichen wählen, wodurch das Wesen der Gesetze offenbar nicht geändert wird.

VII. Ist $\mathfrak{d}$ ein Theiler von $\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{d} < \mathfrak{m}$, und $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Element, so ist

$$(\mathfrak{p} + \mathfrak{m}) - \mathfrak{d} < (\mathfrak{p} - \mathfrak{d}) + \mathfrak{m};$$

denn jedes der beiden Elemente $\mathfrak{p} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{d}$ ist ein Theiler von jedem der beiden Elemente $\mathfrak{p} - \mathfrak{d}$, $\mathfrak{m}$.

§ 2.

Die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe $\mathfrak{D}$.

Hier ist nun der Ort, um eine besondere Eigenschaft der *Moduln* und der aus ihnen durch die Operationen $\pm$ erzeugten Dualgruppen hervorzuheben, durch welche die letzteren sich vor anderen Dualgruppen von allgemeinerem Charakter auszeichnen. In der Modultheorie gilt nämlich an Stelle des letzten Satzes VII der bei weitem schärfere Satz (D. § 169, S. 498):

VIII. Ist der Modul $\mathfrak{d}$ ein Theiler des Moduls $\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{d} < \mathfrak{m}$, und $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Modul, so ist

$$(\mathfrak{p} + \mathfrak{m}) - \mathfrak{d} = (\mathfrak{p} - \mathfrak{d}) + \mathfrak{m}.$$

Aber dieses *Modulgesetz* ist, wie ich in § 4 meines in der Einleitung citirten Aufsatzes bewiesen habe*), schlechterdings nicht ableitbar aus den Grundgesetzen (1), (2), (3) und bildet daher eine für die Modultheorie wesentliche *Ergänzung* derselben. Wir formen dieses Gesetz zunächst in folgender Weise um. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *drei beliebige Moduln*, und ersetzt man $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{m}$ resp. durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} - \mathfrak{c}$, so ist die Bedingung $\mathfrak{d} < \mathfrak{m}$ erfüllt, und es ergiebt sich

$$(\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} - \mathfrak{c})) - (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} - (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})) + (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}), \tag{8}$$

und umgekehrt folgt hieraus wieder das Modulgesetz VIII, wenn man $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ resp. durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{m}$ ersetzt und die Annahme $\mathfrak{d} < \mathfrak{m}$ hinzufügt.

Hierauf wenden wir uns zu dem in der Ueberschrift bezeichneten Gegenstande, nämlich zur Beschreibung der aus drei beliebigen *Moduln* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ durch die Operationen $\pm$ erzeugten Dualgruppe $\mathfrak{D}$. Dieselbe ist endlich und besteht aus 28 Moduln, die im Allgemeinen von einander verschieden sind. Vier von diesen Moduln sind symmetrisch aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gebildet und sollen gemeinsam mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet, aber durch Accente und Indices von einander unterschieden werden, deren Bedeutung später einleuchten wird:

$$\mathfrak{d}''' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{d}_4 = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - \mathfrak{c}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{d}' = (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) - (\mathfrak{c} + \mathfrak{a}) - (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}), \quad \mathfrak{d}_1 = (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) + (\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}). \tag{10}$$

Die übrigen 24 Moduln haben die Eigenschaft, durch alle Vertauschungen

*) Vergl. den Beweis des Satzes IX in § 6 des gegenwärtigen Aufsatzes.

von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nur drei verschiedene Formen anzunehmen, und diejenigen acht Moduln, welche (wie z. B. $\mathfrak{a}$ selbst) durch Vertauschung von $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{c}$ nicht geändert werden, sollen gemeinsam mit $\mathfrak{a}$ und zugehörigen Accenten und Indices bezeichnet werden, woraus die Bedeutung der mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bezeichneten 16 Moduln von selbst erhellt. Da die drei Moduln $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ durch sich selbst erklärt sind, so bleiben nur die folgenden 21 Definitionen:

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{a}''' = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, & \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{b} - \mathfrak{c} \\ \mathfrak{b}''' = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}_3 = \mathfrak{c} - \mathfrak{a} \\ \mathfrak{c}''' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}_3 = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \end{array}\right\},$$

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{a}'' = (\mathfrak{c}+\mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}), & \mathfrak{a}_2 = (\mathfrak{c}-\mathfrak{a}) + (\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \\ \mathfrak{b}'' = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) - (\mathfrak{b}+\mathfrak{c}), & \mathfrak{b}_2 = (\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) + (\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) \\ \mathfrak{c}'' = (\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) - (\mathfrak{c}+\mathfrak{a}), & \mathfrak{c}_2 = (\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) + (\mathfrak{c}-\mathfrak{a}) \end{array}\right\},$$

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b}-\mathfrak{c}), & \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} - (\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) \\ \mathfrak{b}' = \mathfrak{b} + (\mathfrak{c}-\mathfrak{a}), & \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} - (\mathfrak{c}+\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{c}' = \mathfrak{c} + (\mathfrak{a}-\mathfrak{b}), & \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c} - (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \end{array}\right\},$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{a}_0 = (\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})) - (\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}-(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})) + (\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) \\ \mathfrak{b}_0 = (\mathfrak{b}+(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})) - (\mathfrak{c}+\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}-(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})) + (\mathfrak{c}-\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{c}_0 = (\mathfrak{c}+(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})) - (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c}-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})) + (\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \end{array}\right\}.$$

Hier sind überall, wie schon in (9) und (10), die beiden Formen neben einander gestellt, welche durch Vertauschung der beiden Operationen $\pm$ aus einander hervorgehen, und hiermit ist immer eine Vertauschung eines oberen Accentes mit dem entsprechenden unteren Index verbunden; die Doppeldefinitionen (14) beruhen auf dem oben hervorgehobenen Modulgesetz (8).

Wir haben nun zu zeigen, dass der Complex $\mathfrak{D}$ dieser 28 Moduln wirklich eine Dualgruppe ist, dass also, wenn $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ irgend zwei dieser Moduln bedeuten, auch die beiden Moduln $\mathfrak{m} \pm \mathfrak{n}$ in $\mathfrak{D}$ enthalten sind. Zufolge (4) brauchen wir nur solche Paare zu betrachten, die aus zwei verschiedenen*) Moduln $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ bestehen, und deren Anzahl $= 14 \cdot 27 = 378$ ist. Es ist zweckmässig, zunächst diejenigen 261 Paare auszusondern, in welchen der eine Modul, z. B. $\mathfrak{m}$ durch den anderen $\mathfrak{n}$ theilbar ist, so dass $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} - \mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ wird, was wir wieder durch $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ bezeichnen. Des Raumes wegen begnügen wir uns, von diesen 261 Theilbarkeiten nur die 48 *ursprünglichen*, d. h. diejenigen aufzuschreiben,

*) Weiter unten wird durch ein Beispiel bewiesen, dass die 28 Moduln wirklich alle von einander verschieden sein *können*, und der Kürze halber nennen wir sie auch hier *verschieden*, obgleich sie z. B. in dem Falle $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ alle $= \mathfrak{a}$ sind.

aus welchen die übrigen 213 nach dem obigen Satze III in § 1 sich ableiten lassen:

$$(15)\qquad \mathfrak{d}''' < \mathfrak{a}''', \mathfrak{b}''', \mathfrak{c}''';\qquad \mathfrak{d}_4 > \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_3,$$

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} \mathfrak{a}''' < \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}'' & ; & \mathfrak{a}_3 > \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{b}''' < \mathfrak{c}'', \mathfrak{a}'' & ; & \mathfrak{b}_3 > \mathfrak{c}_2, \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{c}''' < \mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'' & ; & \mathfrak{c}_3 > \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2 \end{array}\right\},$$

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} \mathfrak{a}'' < \mathfrak{d}', \mathfrak{a}' & ; & \mathfrak{a}_2 > \mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{b}'' < \mathfrak{d}', \mathfrak{b}' & ; & \mathfrak{b}_2 > \mathfrak{d}_1, \mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{c}'' < \mathfrak{d}', \mathfrak{c}' & ; & \mathfrak{c}_2 > \mathfrak{d}_1, \mathfrak{c}_1 \end{array}\right\},$$

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} \mathfrak{d}' < \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0 & ; & \mathfrak{d}_1 > \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0 \\ \mathfrak{a}' < \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_0 & ; & \mathfrak{a}_1 > \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_0 \\ \mathfrak{b}' < \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_0 & ; & \mathfrak{b}_1 > \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_0 \\ \mathfrak{c}' < \mathfrak{c}, \mathfrak{c}_0 & ; & \mathfrak{c}_1 > \mathfrak{c}, \mathfrak{c}_0 \end{array}\right\}.$$

Die Theilbarkeiten (15) folgen unmittelbar aus der Vergleichung von (9) mit (11), ebenso ergiebt sich (16) aus (11) und (12). Von den Theilbarkeiten (17) folgen die auf $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{d}_1$ bezüglichen aus dem Vergleich von (10) mit (12), die übrigen aus (12) und (13) nach dem Satze VI in § 1. Von den Theilbarkeiten (18) fliessen die auf $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bezüglichen unmittelbar aus (13); da ferner $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}' - (\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{b}-\mathfrak{c})$ ist, so folgt z. B. $\mathfrak{a}' < \mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a}_1$; da endlich $\mathfrak{d}' = \mathfrak{a}'' - (\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ und $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_2 + (\mathfrak{b}-\mathfrak{c})$, zufolge (17) aber auch $\mathfrak{a}'' < \mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}_2 > \mathfrak{a}_1$ ist, so ergiebt sich $\mathfrak{d}' < \mathfrak{a}_0 < \mathfrak{d}_1$, womit (18) vollständig bewiesen ist.

Fügt man zu diesen ursprünglichen Theilbarkeiten noch diejenigen hinzu, welche aus ihnen nach Satz III in § 1 ableitbar sind, und bezeichnet man mit $\varphi(\mathfrak{m})$ die Anzahl aller so erhaltenen Theiler $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{m}$, welche von $\mathfrak{m}$ und von einander verschieden sind, so ergiebt sich successive

$$\begin{array}{llll} \varphi(\mathfrak{d}''') = 0, & \varphi(\mathfrak{a}''') = 1, & \varphi(\mathfrak{a}'') = 3, & \varphi(\mathfrak{d}') = 7, \\ \varphi(\mathfrak{a}') = 4, & \varphi(\mathfrak{a}) = 5, & \varphi(\mathfrak{a}_0) = 9, & \varphi(\mathfrak{d}_1) = 14, \\ \varphi(\mathfrak{a}_1) = 11, & \varphi(\mathfrak{a}_2) = 17, & \varphi(\mathfrak{a}_3) = 21, & \varphi(\mathfrak{d}_4) = 27; \end{array}$$

rechnet man noch die entsprechenden Anzahlen für die mit $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bezeichneten Moduln hinzu, so wird die Summe aller $\varphi(\mathfrak{m}) = 261$, und dies ist also die Anzahl aller auf diesem Wege gewonnenen Theilbarkeiten $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$. Dass hiermit auch *alle* Theilbarkeiten innerhalb der allgemeinen Gruppe $\mathfrak{D}$ erschöpft sind, ergiebt sich zugleich aus dem Folgenden.

Wir wenden uns jetzt zu den übrigen Paaren $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$, um die entsprechenden Moduln $\mathfrak{m} \pm \mathfrak{n}$ anzugeben; des Raumes und des leichteren Ueberblicks wegen begnügen wir uns, nur 29 solche Paare zu betrachten, aus denen die übrigen durch Vertauschungen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ hervorgehen; unter diesen 29 dualistischen Formelpaaren sind 19 Repräsentanten von je 3, und 10 Repräsentanten von je 6 Formelpaaren, woraus sich ihre Gesammtanzahl $= 3 \cdot 19 + 6 \cdot 10 = 117$ ergiebt.

$$\tag{19} \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{a} + \mathfrak{a}''' = \mathfrak{d}'''', & \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{d}_4 \\ \mathfrak{a}' + \mathfrak{a}''' = \mathfrak{d}'''', & \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{d}_4 \\ \mathfrak{a}'' + \mathfrak{a}''' = \mathfrak{d}'''', & \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{d}_4 \\ \mathfrak{b}''' + \mathfrak{a}''' = \mathfrak{d}'''', & \mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{d}_4 \end{array}\right\},$$

$$\tag{20} \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a}''', & \mathfrak{b} - \mathfrak{c} = \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b} + \mathfrak{c}' = \mathfrak{a}''', & \mathfrak{b} - \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}' = \mathfrak{a}''', & \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b} + \mathfrak{c}'' = \mathfrak{a}''', & \mathfrak{b} - \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}'' = \mathfrak{a}''', & \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}'' + \mathfrak{c}'' = \mathfrak{a}''', & \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{a}_3 \end{array}\right\},$$

$$\tag{21} \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{a} + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}'', & \mathfrak{a} - \mathfrak{b}' = \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}'', & \mathfrak{a} - \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}'', & \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}' = \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}'', & \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{d}' = \mathfrak{a}'', & \mathfrak{a} - \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{a}' + \mathfrak{d}' = \mathfrak{a}'', & \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_2 \end{array}\right\},$$

$$\tag{22} \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{d}', & \mathfrak{a}' - \mathfrak{b}' = \mathfrak{d}_1 \\ \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{d}', & \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{b}' = \mathfrak{d}_1 \\ \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{d}', & \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{d}_1 \end{array}\right\},$$

$$\tag{23} \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{a} + \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}', & \mathfrak{a} - \mathfrak{a}''' = \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}', & \mathfrak{a} - \mathfrak{b}'' = \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}', & \mathfrak{a} - \mathfrak{d}' = \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}', & \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1 \end{array}\right\},$$

$$\tag{24} \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_0, & \mathfrak{a}' - \mathfrak{a}''' = \mathfrak{a}_0 \\ \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_0, & \mathfrak{a}' - \mathfrak{b}'' = \mathfrak{a}_0 \\ \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_0, & \mathfrak{a}' - \mathfrak{d}' = \mathfrak{a}_0 \end{array}\right\},$$

$$\tag{25} \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{d}_1, & \mathfrak{a}'' - \mathfrak{a}''' = \mathfrak{d}' \\ \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{d}_1, & \mathfrak{a}'' - \mathfrak{b}'' = \mathfrak{d}' \end{array}\right\},$$

$$\tag{26} \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{c}_3 = \mathfrak{a}_2, \qquad \mathfrak{b}''' - \mathfrak{c}''' = \mathfrak{a}''.$$

Der Beweis dieser 29 Doppelsätze, welche hier in acht Gruppen (19) bis (26) getheilt sind, ist nun keineswegs so mühselig, wie man auf den ersten Blick befürchten könnte. Zunächst ergiebt sich aus dem dualistischen Charakter der Grundgesetze (1), (2), (3) und des specifischen Modulgesetzes VIII oder (8), sowie aus der entsprechenden Bezeichnung durch obere Accente und untere Indices in den Definitionen (9) bis (14), dass von jedem Doppelsatze nur der erste, auf die Operation $+$ bezügliche Theil bewiesen zu werden braucht, weil hieraus durch gänzliche Vertauschung von $+$ mit $-$ der zweite Theil von selbst hervorgeht. Sodann überzeugt man sich leicht, dass von den in einer Gruppe vereinigten Sätzen immer nur der *erste* $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{p}$ besonders zu beweisen ist, weil die übrigen die gemeinsame Form $\mathfrak{m}'+\mathfrak{n}'=\mathfrak{p}$ haben, wo $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ zufolge der schon bewiesenen Theilbarkeiten (15) bis (18) den Bedingungen $\mathfrak{m}>\mathfrak{m}'>\mathfrak{p}$, $\mathfrak{n}>\mathfrak{n}'>\mathfrak{p}$ genügen, woraus nach den Sätzen V und III in § 1 wirklich $\mathfrak{m}'+\mathfrak{n}'=\mathfrak{p}$ folgt. Hiernach erledigt sich unser Beweis durch die folgenden Betrachtungen.

Der erste Satz in der Gruppe (19′) folgt unmittelbar aus den Definitionen (9′) und (11′) von $\mathfrak{d}''''$ und $\mathfrak{a}'''$.

Die ersten Sätze in den fünf Gruppen (20′), (23′), (24′), (25′), (26′) erscheinen nur als Wiederholungen der Definitionen (11′), (13′), (14″), (10″), (12″), wenn man die Definitionen (11″), (13″), (12″) beachtet.

Stützt man sich hierauf, so ergeben sich endlich auch die ersten Sätze in den beiden Gruppen (21′), (22′) auf folgende Weise aus dem unter der Voraussetzung $\mathfrak{d}<\mathfrak{m}$ geltenden Modulgesetze VIII

$$(\mathfrak{p}-\mathfrak{d})+\mathfrak{m}=(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})-\mathfrak{d}.$$

Setzt man nämlich $\mathfrak{p}=\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}=\mathfrak{c}+\mathfrak{a}=\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{m}=\mathfrak{a}$, so ist die Voraussetzung $\mathfrak{d}<\mathfrak{m}$ erfüllt, und zufolge der schon bewiesenen Sätze (23″), (26″) wird $\mathfrak{p}-\mathfrak{d}=\mathfrak{b}-\mathfrak{b}'''=\mathfrak{b}_1$, also $(\mathfrak{p}-\mathfrak{d})+\mathfrak{m}=\mathfrak{b}_1+\mathfrak{a}$, ferner $\mathfrak{p}+\mathfrak{m}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}=\mathfrak{c}'''$, $(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})-\mathfrak{d}=\mathfrak{c}'''-\mathfrak{b}'''=\mathfrak{a}''$, wodurch (21′) bewiesen ist. Setzt man aber $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}=\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{m}=\mathfrak{b}-(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})=\mathfrak{b}_1$, so ist zufolge IV in § 1 die Voraussetzung $\mathfrak{d}<\mathfrak{m}$ erfüllt, und zufolge der schon bewiesenen Sätze (23″), (21′), (25″) wird $\mathfrak{p}-\mathfrak{d}=\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'''=\mathfrak{a}_1$, also $(\mathfrak{p}-\mathfrak{d})+\mathfrak{m}=\mathfrak{a}_1+\mathfrak{b}_1$, ferner $\mathfrak{p}+\mathfrak{m}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}_1=\mathfrak{a}''$, $(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})-\mathfrak{d}=\mathfrak{a}''-\mathfrak{a}'''=\mathfrak{d}'$, wodurch auch (22′) bewiesen ist.

Hiermit ist der vollständige Beweis erbracht, dass je zwei Moduln $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ unseres Systems $\mathfrak{D}$ immer zwei in demselben Systeme enthaltene Moduln $\mathfrak{m}\pm\mathfrak{n}$ erzeugen; mithin bilden diese 28 Moduln wirklich eine *Dualgruppe* $\mathfrak{D}$. Die Gesammtheit aller Erzeugnisse $\mathfrak{m}\pm\mathfrak{n}$ ist in der beigefügten *Tabelle* (S. 380, 381) dargestellt, zu deren Erläuterung ich nur Folgendes bemerke. Je nachdem das Kreuzungsfeld der Zeile $\mathfrak{m}$ mit der Spalte $\mathfrak{n}$ in die rechte obere oder in die linke untere Hälfte fällt, enthält dasselbe den Modul $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ oder den Modul $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$, und um die Trennung zwischen diesen beiden Hälften für das Auge recht deutlich zu machen, sind die den Fällen $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}=\mathfrak{m}\pm\mathfrak{n}$ entsprechenden Diagonalfelder leer gelassen; die durch stärkere Linien bewirkte Theilung der Tabelle in Rechtecke von verschiedener Grösse entspricht der später (in § 5) zu betrachtenden Eintheilung aller 28 Moduln in neun verschiedene *Stufen*.

Aber nun könnte die Frage aufgeworfen werden, ob nicht in der Natur der Moduln gewisse, bis jetzt verborgen gebliebene Eigenschaften liegen, vermöge deren einige, äusserlich zwar verschieden gebildete Moduln dieser Gruppe $\mathfrak{D}$ doch immer mit einander identisch sein müssen. Dass diese Frage zu *verneinen* ist, dass also diese 28 Moduln im Allgemeinen wirklich von einander verschieden sind, ergiebt sich aus dem folgenden *Beispiel von zweigliedrigen Moduln* (D. § 168, S. 494). Es seien a, b, c, d vier natürliche Zahlen, alle >1 und so beschaffen, dass je zwei der drei Zahlen a, b, c relative Primzahlen sind, und dass d relative Primzahl zu dem Product $(b-c)(c-a)(a-b)$ ist (die kleinsten Zahlen dieser Art sind $a=2$, $b=3$, $c=d=5$); bedeutet ferner ω eine irrationale Zahl, und setzt man

$$\mathfrak{a}=[ad,\ 1+bc\omega],\quad \mathfrak{b}=[bd,\ 1+ca\omega],\quad \mathfrak{c}=[cd,\ 1+ab\omega],$$

so wird:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}''''&=[1,\ \omega], & \mathfrak{d}_4&=abcd[1,\ \omega],\\
\mathfrak{d}'&=[1,\ abc\omega], & \mathfrak{d}_1&=d[1,\ abc\omega],\\
\mathfrak{a}'''&=[1,\ a\omega], & \mathfrak{a}_3&=bcd[1,\ a\omega],\\
\mathfrak{a}''&=[1,\ bc\omega], & \mathfrak{a}_2&=ad[1,\ bc\omega],\\
\mathfrak{a}'&=[d,\ 1+bc\omega], & \mathfrak{a}_1&=a[d,\ 1+bc\omega],
\end{aligned}$$
$$\mathfrak{a}_0=[d,\ a+abc\omega],$$

woraus die übrigen 14 Moduln durch Vertauschungen von a, b, c hervorgehen. Der allgemeine Satz, aus welchem diese Bestimmungen folgen, und auf den ich bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen werde, lautet: Sind p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 sechs (ganze oder gebrochene) rationale Zahlen, von denen wir p, p_2, q, q_2 als positiv voraussetzen wollen, und setzt man

$$\mathfrak{p}=[p,\ p_1+p_2\omega],\qquad \mathfrak{q}=[q,\ q_1+q_2\omega],$$

so wird

$$\mathfrak{p}+\mathfrak{q}=[d,\ d_1+d_2\omega],\qquad \mathfrak{p}-\mathfrak{q}=[m,\ m_1+m_2\omega],$$

wo die sechs Zahlen d, d_1, d_2, m, m_1, m_2, von denen man d, d_2, m, m_2 positiv wählen kann, durch folgende Regeln bestimmt werden:

Tabelle der grössten gemeinsamen Theiler (+) und der von 28 Moduln, welche durch drei

	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
$\mathfrak{d}''''$		$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$
$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$		$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$
$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{c}''$		$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{b}'''$
$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{a}''$		$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{d}''''$
$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$		$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$
$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{d}'$		$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{a}'''$
$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$		$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{c}''$
$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$		$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{c}''$
$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$		$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$
$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{d}_1$		$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{a}'''$
$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$		$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{c}'$
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$		$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$
$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_3$		$\mathfrak{a}'''$
$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{a}_3$	
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{b}_2$	[illegible]
$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{c}_2$
$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_1$
$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_2$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{b}_3$
$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{a}_3$
$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{c}_1$
$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{b}_3$
$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{a}_3$
$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{c}_2$
$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$
$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{b}_3$
$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{d}_4$
$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$
—	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$

kleinsten gemeinsamen Vielfachen (—) in der Dualgruppe beliebige Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ erzeugt wird.

$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$+$
$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$
$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$
$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$
$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$
$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$
$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$
$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$
$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$
$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$
$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}'$
$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$
$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$
$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$
$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$
$\mathfrak{d}_1$		$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$
$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$		$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$
$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$		$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$		$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$
$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_3$		$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$
$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{a}_3$		$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$
$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{b}_3$		$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$
$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{c}_3$		$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$
$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{a}_3$		$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$
$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$		$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$
$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{d}_4$		$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$
$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$		$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$
$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$		$\mathfrak{d}_4$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{d}_4$	

$$[d_2] = [p_2, q_2], \qquad [dd_2] = [pp_2, pq_2, qp_2, qq_2, p_1q_2 - q_1p_2],$$
$$\frac{p_2}{d_2}d_1 \equiv p_1, \qquad \frac{q_2}{d_2}d_1 \equiv q_1 \pmod{d}$$

und

$$\left[\frac{1}{m}\right] = \left[\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right], \qquad dd_2 mm_2 = pp_2 qq_2,$$
$$\frac{m}{p}m_1 \equiv Ap_1, \qquad \frac{m}{q}m_1 \equiv Bq_1 \pmod{m},$$

wo

$$A = (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = \frac{qq_2}{dd_2} = \frac{mm_2}{pp_2}, \qquad B = (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \frac{pp_2}{dd_2} = \frac{mm_2}{qq_2}.$$

Den Beweis dieses Satzes unterdrücke ich der Kürze halber, und ebenso überlasse ich es dem Leser, die Verschiedenheit der obigen 28 Moduln zu bestätigen, wobei es offenbar nur darauf ankommt zu zeigen, dass in den Theilbarkeiten (15) bis (18) nirgends eine Identität auftritt, dass sie also *echte* Theilbarkeiten sind (D. § 169, S. 496).

§ 3.

Das Symbol $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ in der Dualgruppe $\mathfrak{D}$.

Ist die Anzahl der nach dem Modul $\mathfrak{n}$ incongruenten Zahlen des Moduls $\mathfrak{m}$ endlich, so wird sie durch das Symbol $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ bezeichnet, während im entgegengesetzten Falle $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = 0$ gesetzt wird (D. § 171, S. 509—510). Zufolge dieser Bedeutung des Symbols gelten für je zwei Moduln $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ zunächst die beiden Sätze

$$(27) \qquad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}, \mathfrak{n}),$$
$$(28) \qquad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = (\mathfrak{m}, \mathfrak{m} - \mathfrak{n}),$$

die wir jetzt auf unsere, durch drei beliebige Moduln $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ erzeugte Dualgruppe $\mathfrak{D}$ anwenden wollen. Hierbei wählen wir für $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ immer das *letzte* Modulpaar, welches in den Sätzen (19) bis (26) des § 2 auftritt. Auf diese Weise ergiebt sich aus (19) und (26), wenn man $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ zweckmässig vertauscht,

$$(\mathfrak{d}'''', \mathfrak{a}''') = (\mathfrak{b}''', \mathfrak{a}''') = (\mathfrak{b}''', \mathfrak{c}''),$$
$$(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{d}_4) = (\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3) = (\mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_3),$$

hierauf aus (20) und (25)

$$(\mathfrak{b}''', \mathfrak{c}'') = (\mathfrak{a}'', \mathfrak{c}'') = (\mathfrak{a}'', \mathfrak{d}'),$$
$$(\mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_3) = (\mathfrak{c}_2, \mathfrak{a}_2) = (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}_2),$$

hierauf aus (21) und (24)

$$(\mathfrak{a}'', \mathfrak{d}') = (\mathfrak{a}', \mathfrak{d}') = (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_0),$$
$$(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}_2) = (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}_1) = (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1),$$

endlich aus (23)

$$(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1),$$
$$(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1) = (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}).$$

Wendet man auf diese Kette von Gleichungen alle Vertauschungen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ an, so ergiebt sich, dass man sechs Zahlen a', b', c', a_1, b_1, c_1 in folgender Weise durch je sechs Gleichungen definiren kann:

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} a' = (\mathfrak{d}'''', \mathfrak{a}''') = (\mathfrak{b}''', \mathfrak{c}'') = (\mathfrak{c}''', \mathfrak{b}'') = (\mathfrak{a}'', \mathfrak{d}') = (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1) \\ b' = (\mathfrak{d}'''', \mathfrak{b}''') = (\mathfrak{c}''', \mathfrak{a}'') = (\mathfrak{a}''', \mathfrak{c}'') = (\mathfrak{b}'', \mathfrak{d}') = (\mathfrak{b}', \mathfrak{b}_0) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1) \\ c' = (\mathfrak{d}'''', \mathfrak{c}''') = (\mathfrak{a}''', \mathfrak{b}'') = (\mathfrak{b}''', \mathfrak{a}'') = (\mathfrak{c}'', \mathfrak{d}') = (\mathfrak{c}', \mathfrak{c}_0) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1) \end{array}\right\},$$

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 = (\mathfrak{a}_3, \mathfrak{d}_4) = (\mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_3) = (\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_3) = (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}_2) = (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1) = (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}) \\ b_1 = (\mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_4) = (\mathfrak{a}_2, \mathfrak{c}_3) = (\mathfrak{c}_2, \mathfrak{a}_3) = (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{b}_2) = (\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{b}', \mathfrak{b}) \\ c_1 = (\mathfrak{c}_3, \mathfrak{d}_4) = (\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_3) = (\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_3) = (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{c}_2) = (\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1) = (\mathfrak{c}', \mathfrak{c}) \end{array}\right\}.$$

In ganz ähnlicher Weise folgt aus (21) und (24)

$$(\mathfrak{a}'', \mathfrak{a}') = (\mathfrak{d}', \mathfrak{a}') = (\mathfrak{d}', \mathfrak{a}_0),$$
$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{d}_1),$$

und aus (22)

$$(\mathfrak{d}', \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{b}_0, \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{b}_0, \mathfrak{d}_1),$$
$$(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0) = (\mathfrak{d}', \mathfrak{b}_0),$$

und wenn man in diesen Gleichungen alle Vertauschungen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ vornimmt, so ergiebt sich, dass man eine siebente Zahl d definiren kann durch die zwölf Gleichungen

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} d = (\mathfrak{a}'', \mathfrak{a}') = (\mathfrak{b}'', \mathfrak{b}') = (\mathfrak{c}'', \mathfrak{c}') = (\mathfrak{d}', \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{d}', \mathfrak{b}_0) = (\mathfrak{d}', \mathfrak{c}_0) \\ \quad = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) = (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2) = (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{b}_0, \mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{c}_0, \mathfrak{d}_1) \end{array}\right\}.$$

Offenbar enthalten die Gleichungen (29), (30), (31) alle diejenigen 48 Symbole $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, in welchen die Moduln $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ eine der 48 in (15) bis (18) aufgestellten *ursprünglichen* Theilbarkeiten $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ darbieten.

Die sämmtlichen in unserer Dualgruppe $\mathfrak{D}$ auftretenden Symbole $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, deren Anzahl $= 28 \cdot 28 = 784$ ist, zerfallen nun in drei Classen, je nachdem die Theilbarkeit $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ oder keine solche Theilbarkeit besteht. Aus der Definition des Symbols folgt unmittelbar (D. S. 510), dass alle 289 Symbole der ersten Classe, zu denen wir auch die 28 Symbole $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ rechnen, $= 1$ sind*). Die 234 Symbole der dritten Classe lassen

*) Stützt man sich nicht auf die Definition des Symbols, sondern nur auf die beiden Sätze (27), (28), so ergiebt sich zwar, dass alle Symbole der ersten Classe denselben Werth haben; dass aber dieser Werth $= 1$ ist, folgt erst aus dem dritten Satze (32), wenn man ausserdem noch die Voraussetzung hinzufügt, dass das Symbol $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ nicht für alle Modulpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ verschwindet. Aehnliches gilt für das in den Göttinger Nachrichten (1895. Heft 2) erklärte Modulsymbol $(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$. — Vergl. § 8 des gegenwärtigen Aufsatzes.

sich vermöge der Sätze (27), (28) auf zwei Arten durch Symbole der zweiten Classe ausdrücken. Unter den 261 Symbolen dieser zweiten Classe befinden sich zunächst die 48 Symbole (29), (30), (31), deren Werthe wir durch die sieben Zahlen $d, a', b', c', a_1, b_1, c_1$ bezeichnet haben, und die übrigen 213 Symbole, in welchen die Theilbarkeit $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ keine ursprüngliche, sondern eine abgeleitete ist, lassen sich als Producte dieser Zahlen darstellen; hierzu reichen aber die beiden Sätze (27), (28) nicht aus, sondern dies geht aus einem dritten Satze (D. S. 510) hervor, welcher darin besteht, dass aus $\mathfrak{p} < \mathfrak{q} < \mathfrak{r}$ stets

$$(32) \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{r}) = (\mathfrak{p}, \mathfrak{q})(\mathfrak{q}, \mathfrak{r})$$

folgt.

Wir begnügen uns, das hiernach einzuschlagende Verfahren an denjenigen Symbolen $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ der dritten Classe durchzuführen, in denen $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ mit zwei der drei Moduln $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ übereinstimmen. Aus (27) und (11') folgt zunächst

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}''', \mathfrak{c});$$

nach (16'), (17'), (18') ist aber

$$\mathfrak{a}''' < \mathfrak{c}'' < \mathfrak{c}' < \mathfrak{c},$$

mithin ergiebt sich durch zweimalige Anwendung von (32)

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}''', \mathfrak{c}'')(\mathfrak{c}'', \mathfrak{c}')(\mathfrak{c}', \mathfrak{c});$$

vertauscht man hierin $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ mit einander und drückt man die Factoren rechter Hand durch die kürzeren Zeichen in (29), (30), (31) aus, so erhält man

$$(33) \qquad \left\{\begin{array}{ll} (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = b'dc_1, & (\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = c'db_1 \\ (\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = c'da_1, & (\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) = a'dc_1 \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = a'db_1, & (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = b'da_1 \end{array}\right\}.$$

Zu *demselben* Resultate gelangt man aber auch, wenn man den Satz (28) statt (27) anwendet; man erhält zunächst $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_3)$, und da $\mathfrak{b} < \mathfrak{b}_1 < \mathfrak{b}_2 < \mathfrak{a}_3$ ist, so folgt

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1)(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_3),$$

was mit (33') identisch ist. Auch in allen anderen Beispielen würde sich zeigen, dass die verschiedenen Wege, welche man zur Darstellung eines Symbols $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ durch die sieben Zahlen $d, a', b', c', a_1, b_1, c_1$ einschlagen kann, immer zu identischen Resultaten führen, dass also keine Relationen zwischen diesen Zahlen bestehen; doch wollen wir auf den Beweis dieser Behauptung hier nicht eingehen.

Aus den Darstellungen (33), welchen man auch die Form

$$(34)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b},\mathfrak{b}''')(\mathfrak{c}'',\mathfrak{c}), & (\mathfrak{c},\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c},\mathfrak{c}''')(\mathfrak{b}'',\mathfrak{b}) \\ (\mathfrak{c},\mathfrak{a}) = (\mathfrak{c},\mathfrak{c}''')(\mathfrak{a}'',\mathfrak{a}), & (\mathfrak{a},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{a}''')(\mathfrak{c}'',\mathfrak{c}) \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{a}''')(\mathfrak{b}'',\mathfrak{b}), & (\mathfrak{b},\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b},\mathfrak{b}''')(\mathfrak{a}'',\mathfrak{a}) \end{array}\right\}$$

oder die Form

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2)(\mathfrak{c}_3,\mathfrak{c}), & (\mathfrak{c},\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c},\mathfrak{c}_2)(\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}) \\ (\mathfrak{c},\mathfrak{a}) = (\mathfrak{c},\mathfrak{c}_2)(\mathfrak{a}_3,\mathfrak{a}), & (\mathfrak{a},\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{a}_2)(\mathfrak{c}_3,\mathfrak{c}) \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a},\mathfrak{a}_2)(\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}), & (\mathfrak{b},\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2)(\mathfrak{a}_3,\mathfrak{a}) \end{array}\right\}$$

geben kann, fliesst auch der Satz

$$(36)\qquad (\mathfrak{b},\mathfrak{c})(\mathfrak{c},\mathfrak{a})(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c},\mathfrak{b})(\mathfrak{a},\mathfrak{c})(\mathfrak{b},\mathfrak{a}),$$

welchen ich zuerst in der *zweiten* Auflage von Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie erwähnt habe (Anmerkung auf S. 490). Daselbst findet sich auch (in etwas abweichender Ausdrucksweise) die folgende Bemerkung. Nennt man zwei Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *verwandt*, wenn $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$ von Null verschieden sind (im Sinne von D. § 171, S. 509), so sind je zwei mit $\mathfrak{a}$ verwandte Moduln $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ auch mit einander verwandt. Dies ergiebt sich unmittelbar daraus, dass alle Factoren, welche in den vorstehenden Ausdrücken (33) oder (34) oder (35) von $(\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{c},\mathfrak{b})$ auftreten, auch Factoren von mindestens einem der vier Symbole $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c},\mathfrak{a})$ sind. Man kann daher alle Moduln in *Familien* eintheilen, indem man je zwei Moduln in dieselbe oder in verschiedene Familien aufnimmt, je nachdem sie mit einander verwandt sind oder nicht; jede Familie ist durch jeden in ihr enthaltenen Modul als Repräsentanten vollständig bestimmt. —

§ 4.

Idealgruppen.

In § 2 ist gezeigt, dass die 28 Moduln, aus denen unsere Dualgruppe $\mathfrak{D}$ besteht, im Allgemeinen von einander verschieden sind; wir wollen jetzt einen besonders bemerkenswerthen Fall anführen, in welchem die Anzahl der verschiedenen Moduln erheblich geringer ist. Dies tritt immer dann ein, wenn die drei erzeugenden Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und folglich auch die übrigen Moduln der Gruppe $\mathfrak{D}$ *Ideale* (oder auch Idealbrüche) eines endlichen Körpers Ω sind, weil dann sehr einfache Beziehungen zwischen den beiden durch $\pm$ bezeichneten Operationen und der *Multiplication* der Moduln bestehen (D. § 178); alle Moduln der Gruppe, von denen höchstens 18 verschieden sein können, lassen sich, wie man leicht findet, in folgender Weise durch $\mathfrak{d}''''$ und sechs vollständig bestimmte Ideale $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}_1$ ausdrücken:

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} = \mathfrak{q}'\mathfrak{r}'\mathfrak{p}_1\mathfrak{d}'''', & \mathfrak{b} = \mathfrak{r}'\mathfrak{p}'\mathfrak{q}_1\mathfrak{d}'''', & \mathfrak{c} = \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{r}_1\mathfrak{d}'''' \\ \mathfrak{a}''' = \mathfrak{p}'\mathfrak{d}'''', & \mathfrak{b}''' = \mathfrak{q}'\mathfrak{d}'''', & \mathfrak{c}''' = \mathfrak{r}'\mathfrak{d}'''' \\ \mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}' = \mathfrak{q}'\mathfrak{r}'\mathfrak{d}'''', & \mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}' = \mathfrak{r}'\mathfrak{p}'\mathfrak{d}'''', & \mathfrak{c}'' = \mathfrak{c}' = \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{d}'''' \\ \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{d}' = \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{c}_0 = \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'\mathfrak{d}''''} \\ \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{d}_1, & \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{q}_1\mathfrak{d}_1, & \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{r}_1\mathfrak{d}_1 \\ \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1\mathfrak{d}_1, & \mathfrak{b}_3 = \mathfrak{r}_1\mathfrak{p}_1\mathfrak{d}_1, & \mathfrak{c}_3 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{d}_1 \\ \multicolumn{3}{c}{\mathfrak{d}_4 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1\mathfrak{d}_1} \end{array}\right\};$$

jedes der drei Paare von Producten

$$\mathfrak{q}'\mathfrak{r}_1 \text{ und } \mathfrak{r}'\mathfrak{q}_1, \quad \mathfrak{r}'\mathfrak{p}_1 \text{ und } \mathfrak{p}'\mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{p}'\mathfrak{q}_1 \text{ und } \mathfrak{q}'\mathfrak{p}_1$$

besteht aus zwei relativen Primidealen, und wenn N die Norm im Körper Ω bedeutet, so gehen die Gleichungen (29), (30), (31) in

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{ccc} a' = N(\mathfrak{p}'), & b' = N(\mathfrak{q}'), & c' = N(\mathfrak{r}') \\ a_1 = N(\mathfrak{p}_1), & b_1 = N(\mathfrak{q}_1), & c_1 = N(\mathfrak{r}_1) \\ \multicolumn{3}{c}{d = 1} \end{array}\right\}$$

über.

Wir wollen die drei in diesem Falle auftretenden Specialgesetze*) $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}_1$, d. h. die Gesetze

$$(39)\quad (\mathfrak{c}+\mathfrak{a})-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{c}-\mathfrak{a})+(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}-(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}),$$

$$(40)\quad (\mathfrak{b}+\mathfrak{c})-(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}-\mathfrak{c})+(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})+(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})$$

noch etwas näher betrachten und beweisen, dass, wenn in irgend einer Dualgruppe $\mathfrak{J}$ ausser den Grundgesetzen (1), (2), (3) noch eins dieser Specialgesetze allgemein gilt, gewiss auch das Modulgesetz VIII und die beiden anderen Gesetze gelten. In der That folgt VIII (unter der Voraussetzung $\mathfrak{d} < \mathfrak{m}$) aus (39') oder (39'') oder (40), wenn man $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ resp. durch $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{m}$ ersetzt; mithin gelten in $\mathfrak{J}$ auch alle Sätze (19) bis (26). Nimmt man nun an, es gelte das erste Specialgesetz $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}'$, also auch $\mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}'$, so folgt daraus das zweite $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1$ und das dritte $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}'$, weil zufolge (21''), (23''), (22''), (25'') resp. $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}''$, $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}' - \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}' = \mathfrak{a}'' - \mathfrak{b}''$ ist. Ebenso folgt umgekehrt das erste Gesetz aus dem zweiten, weil $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}_1$,

*) Sie entsprechen in gewisser Weise dem Operationsgebiet, das in Schröder's *Algebra der Logik* (Bd. 1, S. 291) als der *identische Calcul* bezeichnet wird, im Gegensatze zu dem *logischen Calcul*, dem unsere allgemeinen Dualgruppen entsprechen.

$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}_2$, und aus dem dritten, weil $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a} + \mathfrak{d}'$, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{d}_1$ ist. Hiermit ist unsere Behauptung offenbar erwiesen, und wir können jedes der drei äquivalenten Gesetze (39), (40) als das *Idealgesetz* bezeichnen; jede Dualgruppe $\mathfrak{J}$ vom Idealtypus ist auch eine Gruppe vom Modultypus, während umgekehrt, wie aus dem Beispiele der zweigliedrigen Moduln in § 2 erhellt, durchaus nicht jede Gruppe vom Modultypus auch den Idealtypus besitzt. —

§ 5.

Das Kettengesetz in der Dualgruppe $\mathfrak{D}$.

Die nun folgenden Betrachtungen sind dazu bestimmt, das Wesen des Modulgesetzes VIII noch tiefer zu ergründen und dessen Folgen für alle Dualgruppen $\mathfrak{M}$ vom Modultypus zu entwickeln, durch welche diese sich unter den allgemeinen Dualgruppen $\mathfrak{G}$ auszeichnen. Hierzu führen wir die folgenden, für *jede* Dualgruppe $\mathfrak{G}$ gültigen Benennungen ein. Ein Element $\mathfrak{d}$ soll in $\mathfrak{G}$ ein *nächster Theiler**) des Elementes $\mathfrak{m}$ heissen, wenn erstens $\mathfrak{d} < \mathfrak{m}$, zweitens $\mathfrak{d}$ verschieden von $\mathfrak{m}$, also ein *echter* Theiler von $\mathfrak{m}$ ist, und wenn es drittens in *dieser* Gruppe $\mathfrak{G}$ ausser $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{m}$ kein Element giebt, das ein Theiler von $\mathfrak{m}$ und zugleich ein Vielfaches von $\mathfrak{d}$ ist; zugleich soll $\mathfrak{m}$ ein *nächstes Vielfaches* von $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{G}$ heissen. Nach dieser Erklärung ist es also, wie wir hervorheben müssen, sehr wohl möglich, dass ein Element $\mathfrak{d}$, welches in $\mathfrak{G}$ ein nächster Theiler des Elementes $\mathfrak{m}$ ist, in einer grösseren Dualgruppe $\mathfrak{H}$, welche ausser den Elementen von $\mathfrak{G}$ noch andere Elemente enthält, zwar immer ein echter, aber doch kein nächster Theiler von $\mathfrak{m}$ ist; so lange es sich aber nur um die Elemente einer einzigen bestimmten Gruppe $\mathfrak{G}$ handelt, wollen wir unbedenklich den Zusatz „in $\mathfrak{G}$“ fortlassen.

Nehmen wir als Beispiel unsere aus drei beliebigen Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ erzeugte Gruppe $\mathfrak{D}$ und setzen wir voraus, dass alle 28 Moduln dieser Gruppe *verschieden* sind, so leuchtet ein, dass in den 48 ursprünglichen Theilbarkeiten (15) bis (18) sich alle und nur solche Paare von Moduln $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{m}$ finden, von denen der eine $\mathfrak{d}$ ein nächster Theiler des anderen $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{D}$ ist. Die vier Moduln $\mathfrak{d}''''$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_4$ bilden aber für sich eine Dualgruppe $\mathfrak{C}$, und jeder von ihnen ist in $\mathfrak{C}$, aber nicht in $\mathfrak{D}$, ein nächster Theiler des folgenden. Ebenso bilden die vier Moduln $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{a}_3$ für sich eine Gruppe $\mathfrak{A}$, und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sind in $\mathfrak{A}$, aber nicht in $\mathfrak{D}$, nächste Vielfache von $\mathfrak{a}'''$ und nächste Theiler von $\mathfrak{a}_3$.

---

*) Vergl. D. § 171, S. 511, wo in der Anmerkung diese Benennung für die aus *allen Moduln* bestehende Dualgruppe eingeführt ist.

Unter einer *Kette* der Dualgruppe $\mathfrak{G}$ wollen wir eine endliche Folge von mindestens zwei Elementen in $\mathfrak{G}$ verstehen, deren jedes ein nächster Theiler des nächstfolgenden Elementes ist; diese Elemente sollen die *Glieder* der Kette, und das erste und letzte Glied sollen resp. der *Anfang* und das *Ende* der Kette heissen; die um eins verminderte Anzahl der Glieder nennen wir die *Länge* der Kette. Wenn zwei Ketten denselben Anfang und dasselbe Ende haben, so mögen sie *äquivalent* heissen, und wenn alle Glieder einer Kette $\mathfrak{H}$ auch Glieder einer Kette $\mathfrak{K}$ sind, so nennen wir $\mathfrak{H}$ eine *Theilkette* von $\mathfrak{K}$.

Nehmen wir als Beispiel wieder unsere aus 28 verschiedenen Moduln bestehende Gruppe $\mathfrak{D}$, so leuchtet ein, dass alle in ihr vorhandenen Ketten sich ebenfalls aus den Theilbarkeiten (15) bis (18) ergeben müssen. Wir wollen nur einige von ihnen betrachten. Es giebt zwei verschiedene äquivalente Ketten

$$\mathfrak{d}''''\,\mathfrak{b}'''\,\mathfrak{a}''\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{d}''''\,\mathfrak{c}'''\,\mathfrak{a}''\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a},$$

welche vom Anfang $\mathfrak{d}''''$ zum Ende $\mathfrak{a}$ führen, während acht verschiedene äquivalente Ketten

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{d}''''\,\mathfrak{b}'''\,\mathfrak{a}''\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_0, & \mathfrak{d}''''\,\mathfrak{c}'''\,\mathfrak{a}''\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}_0, \\
\mathfrak{d}''''\,\mathfrak{b}'''\,\mathfrak{a}''\,\mathfrak{d}'\,\mathfrak{a}_0, & \mathfrak{d}''''\,\mathfrak{c}'''\,\mathfrak{a}''\,\mathfrak{d}'\,\mathfrak{a}_0, \\
\mathfrak{d}''''\,\mathfrak{c}'''\,\mathfrak{b}''\,\mathfrak{d}'\,\mathfrak{a}_0, & \mathfrak{d}''''\,\mathfrak{a}'''\,\mathfrak{b}''\,\mathfrak{d}'\,\mathfrak{a}_0, \\
\mathfrak{d}''''\,\mathfrak{a}'''\,\mathfrak{c}''\,\mathfrak{d}'\,\mathfrak{a}_0, & \mathfrak{d}''''\,\mathfrak{b}'''\,\mathfrak{c}''\,\mathfrak{d}'\,\mathfrak{a}_0
\end{array}$$

den Anfang $\mathfrak{d}''''$ und das Ende $\mathfrak{a}_0$ haben. Man überzeugt sich ferner leicht, dass jede von $\mathfrak{d}''''$ nach $\mathfrak{d}_4$ führende Kette einen und nur einen der sechs Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ als Glied enthalten muss, und aus der Symmetrie der Gruppe $\mathfrak{D}$ folgt, dass die Anzahl aller dieser verschiedenen äquivalenten Ketten $= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 8^2 = 204$ ist; in diesen Ketten sind alle anderen als Theilketten enthalten.

Die wichtigste Erscheinung in dieser Modulgruppe $\mathfrak{D}$ besteht aber darin, dass *je zwei äquivalente Ketten auch dieselbe Gliederanzahl, also auch dieselbe Länge besitzen.* Um dieses *Kettengesetz* in $\mathfrak{D}$ thatsächlich nachzuweisen, vertheilen wir die 28 Moduln in neun verschiedenen *Stufen* S_n, wo n die ganzen Zahlen von -4 bis $+4$ durchläuft, und zwar soll bestehen die Stufe

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{llll}
S_{-4} \text{ aus } \mathfrak{d}'''', & & S_4 \text{ aus } \mathfrak{d}_4 & \\
S_{-3} \;\;\text{„}\;\; \mathfrak{a}''',\ \mathfrak{b}''',\ \mathfrak{c}''', & & S_3 \;\;\text{„}\;\; \mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{c}_3 & \\
S_{-2} \;\;\text{„}\;\; \mathfrak{a}'',\ \mathfrak{b}'',\ \mathfrak{c}'', & & S_2 \;\;\text{„}\;\; \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_2 & \\
S_{-1} \;\;\text{„}\;\; \mathfrak{d}',\ \mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}', & & S_1 \;\;\text{„}\;\; \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1 & \\
 & S_0 \text{ aus } \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{b}_0,\ \mathfrak{c}_0 & &
\end{array}\right\}.$$

Betrachtet man nun zwei beliebige aufeinander folgende Stufen S_{n-1} und S_n, so lehrt ein Blick auf die Theilbarkeiten (15) bis (18), *dass die nächsten Vielfachen eines beliebigen Elementes der Stufe S_{n-1} sämmtlich in der Stufe S_n enthalten sind*, woraus von selbst folgt, *dass auch die nächsten Theiler eines beliebigen Elementes der Stufe S_n sämmtlich der Stufe S_{n-1} angehören.* Hat man sich hiervon überzeugt, so leuchtet die Wahrheit des obigen Kettengesetzes unmittelbar ein; denn, wenn der Anfang einer Kette in der Stufe S_m, ihr Ende in der Stufe S_{m+n} liegt, so ist offenbar ihre *Länge* $= n$.

§ 6.

Beziehung zwischen dem Modul- und dem Kettengesetz.

Durch die Wahl der Bezeichnung in der Gruppe $\mathfrak{D}$ von 28 Moduln erscheint das eben besprochene Kettengesetz so selbstverständlich, dass man versucht sein könnte zu glauben, es müsse in *jeder* Dualgruppe herrschen. Um dieser Meinung sogleich entgegenzutreten, stellen wir folgenden Satz auf:

IX. Wenn in einer Dualgruppe $\mathfrak{H}$ das Modulgesetz VIII nicht allgemein gilt, so ist in $\mathfrak{H}$ eine aus fünf verschiedenen Elementen bestehende Dualgruppe $\mathfrak{G}$ enthalten, in welcher weder das Modulgesetz noch das Kettengesetz gilt.

Beweis. Wir wollen zunächst den auch sonst nützlichen Satz beweisen, dass drei Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ einer beliebigen Dualgruppe $\mathfrak{H}$, welche eine Theilbarkeit

$$\mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} - \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

darbieten, im Allgemeinen eine aus *neun* Elementen bestehende Dualgruppe $\mathfrak{H}'$ erzeugen; dieselbe enthält ausser $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ noch sechs Elemente, die wir wie in (11) und (13) durch

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{a} - \mathfrak{c}, & \mathfrak{c}''' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \\
\mathfrak{b}''' = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}, & \mathfrak{c}_3 = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}, \\
\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} - (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}), & \mathfrak{c}' = \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})
\end{array}$$

definiren. Zunächst ergeben sich die folgenden 11 *ursprünglichen* Theilbarkeiten

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{c}''' < \mathfrak{b}\,,\ \mathfrak{b}'''; & \mathfrak{b}_3 > \mathfrak{c}\,,\ \mathfrak{c}_3, \\
\mathfrak{b} < \mathfrak{b}_1 \quad ; & \mathfrak{c} > \mathfrak{c}', \\
\mathfrak{b}''' < \mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{b}_1; & \mathfrak{c}_3 > \mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{c}', \\
\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{c}' \quad ; & \mathfrak{c}' > \mathfrak{b}_1,
\end{array}$$

deren letzte mit dem Satze VII in § 1 übereinstimmt, wenn dort die Elemente $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{m}$ resp. durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ersetzt werden; die übrigen folgen mit Rücksicht auf $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ unmittelbar aus den Definitionen. Es giebt nur sechs Paare von Elementen, welche keine Theilbarkeit darbieten; die beiden Paare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ erzeugen durch die Operationen $\pm$ die oben definirten Elemente $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$, $\mathfrak{c}_3$; für die übrigen vier Paare ergiebt sich aus den Definitionen:

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{b}''' = \mathfrak{c}''', \qquad \mathfrak{c} - \mathfrak{c}_3 = \mathfrak{b}_3,$$

$$\mathfrak{b} - \mathfrak{b}''' = \mathfrak{b}_1, \qquad \mathfrak{c} + \mathfrak{c}_3 = \mathfrak{c}',$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{c}' = \mathfrak{b}''', \qquad \mathfrak{a} - \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}_3, \tag{42}$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}''', \qquad \mathfrak{a} - \mathfrak{c}' = \mathfrak{c}_3 \tag{43}$$

und zwar folgen die Sätze (43) aus den Sätzen (42) mit Rücksicht auf $\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}''' < \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_3 > \mathfrak{c}'$.

Hiermit ist bewiesen, dass die neun Elemente

$$\mathfrak{c}''', \mathfrak{b}, \mathfrak{b}''', \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_3$$

wirklich eine in $\mathfrak{H}$ enthaltene Dualgruppe $\mathfrak{H}'$ bilden, und wir wollen ihre Constitution, weil sie für manche Untersuchungen wichtig ist, in der folgenden Tabelle darstellen.

	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}_3$	$+$
$\mathfrak{c}'''$		$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$
$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$		$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$
$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}_1$		$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$
$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$		$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{c}_3$		$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$
$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}_3$		$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$
$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$		$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$
$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}_3$		$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$		$\mathfrak{b}_3$
$-$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}_3$	

Das Durchschnittsfeld der Zeile $\mathfrak{m}$ und der Spalte $\mathfrak{n}$ enthält das Element $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{m} - \mathfrak{n}$, je nachdem dieses Feld der rechten oberen oder der linken unteren Hälfte der Tabelle angehört; die Diagonalfelder, welche den Fällen $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} = \mathfrak{m} \pm \mathfrak{n}$ entsprechen, sind zur Erleichterung des Ueberblicks leer gelassen.

Wenn in der Dualgruppe $\mathfrak{H}$ das Modulgesetz VIII herrscht, so ist $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}'$, und die durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ erzeugte Dualgruppe $\mathfrak{H}'$ besteht also aus höchstens *acht* Elementen. Dasselbe ergiebt sich aus der Constitution der oben betrachteten Gruppe $\mathfrak{D}$ von 28 Moduln; denn aus der jetzigen Annahme $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ folgen leicht die 20 Identitäten

$$\mathfrak{c}'' = \mathfrak{c}' = \mathfrak{d}' = \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{c}_0 = \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2,$$
$$\mathfrak{a}''' = \mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}' = \mathfrak{b}; \qquad \mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{a}_3,$$
$$\mathfrak{b}''' = \mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}'; \qquad \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{c}_3,$$
$$\mathfrak{d}'''' = \mathfrak{c}'''; \qquad \mathfrak{b}_3 = \mathfrak{d}_4.$$

Wenn aber, wie wir im Folgenden annehmen wollen, in der Dualgruppe $\mathfrak{H}$ das Modulgesetzt VIII *nicht* allgemein gilt, so dürfen wir voraussetzen, die obigen drei Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ seien mit Berücksichtigung der Bedingung $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{H}$ so ausgewählt, dass $\mathfrak{b}_1$ *verschieden von* $\mathfrak{c}'$, also $\mathfrak{b}_1$ ein *echter* Theiler von $\mathfrak{c}'$ ist. Wir wollen nun zeigen, dass in diesem Falle die fünf Elemente

$$\mathfrak{b}''', \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}_3,$$

welche zufolge der mittleren 25 Felder der obigen Tabelle offenbar für sich eine Dualgruppe $\mathfrak{G}$ bilden*), gewiss von einander *verschieden* sind;

---

*) Denn je zwei Elemente $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{G}$ erzeugen zwei in $\mathfrak{G}$ enthaltene Elemente $\mathfrak{m} \pm \mathfrak{n}$, und ausserdem gelten die Grundgesetze (1), (2), (3) für alle Elemente der Dualgruppe $\mathfrak{H}$, also auch für alle Elemente von $\mathfrak{G}$. Dieser Schluss beruht also auf der *Hypothese*, dass wirklich eine Dualgruppe $\mathfrak{H}$ existirt, in welcher das Modulgesetz nicht allgemein gilt, und es bleibt daher immer noch zweifelhaft, ob diese Hypothese unseres durchaus richtigen Satzes IX an sich zulässig ist, weil sie vielleicht den Grundgesetzen (1), (2), (3) einer jeden Dualgruppe widersprechen könnte. Dieser Zweifel, welcher für den allgemeinen Begriff der Dualgruppe von Bedeutung ist, wird nur dadurch beseitigt, dass für das System $\mathfrak{G}$, in welchem die Zeichen $\pm$ durch die obige Tabelle und die Annahme der Gesetze (1) und (4) vollständig erklärt sind, auch die Gesetze (2) und (3) als identisch erfüllt nachgewiesen werden. Dies ist in § 4 meiner in der Einleitung citirten Schrift (1897) wirklich geschehen; in der That geht die erste der beiden dort auf S. 14 angeführten Dualgruppen in unsere Gruppe $\mathfrak{G}$ über, wenn man α, β, γ, ϑ, ε resp. durch $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}_3$ ersetzt. Der auf S. 17 daselbst gegebene Beweis besteht aber nicht in der unmittelbaren Verification aller Identitäten (2) und (3), sondern er beruht auf einer allgemeinen Transformation der Grundgesetze (1), (2), (3) in eine ganz andere Gestalt, in welcher die Operationen $\pm$ selbst gar nicht mehr auftreten. Ich bemerke hierbei, dass für *endliche* Dualgruppen $\mathfrak{A}$ die dortige Eigenschaft VI auf S. 15 durch die folgende einfachere ersetzt werden kann: Für je zwei Dinge α, β in $\mathfrak{A}$ giebt es mindestens ein Ding μ_2 in $\mathfrak{A}$ von der Art, dass α, β beide in dem System μ_2' enthalten sind.

hierbei stützen wir uns auf die Identitäten (42), (43) und auf die schon vorher aufgestellten Theilbarkeiten

$$(44) \qquad \mathfrak{b}''' < \mathfrak{a} < \mathfrak{c}_3,$$

$$(45) \qquad \mathfrak{b}''' < \mathfrak{b}_1 < \mathfrak{c}' < \mathfrak{c}_3$$

und behaupten zunächst, dass

$$(46) \qquad \text{weder} \quad \mathfrak{b}_1 < \mathfrak{a} \quad \text{noch} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{c}'$$

sein kann. Wäre nämlich $\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{a}$, so würde aus (43′), (42″), (43″), (42′) der Reihe nach $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{c}' < \mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}' = \mathfrak{b}'''$, also auch $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}'$ folgen, und zu demselben Widerspruch mit unserer Voraussetzung würde die Annahme $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}'$ führen, weil hieraus nach (43″), (42′), (43′), (42″) sich $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}_3$ ergeben würde. Da ferner $\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{c}'$ ist, so folgt aus (46) offenbar, dass keins der beiden Elemente $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}'$ ein Theiler oder ein Vielfaches von $\mathfrak{a}$ sein kann, und hieraus ergiebt sich weiter, dass in (44) und (45) nur *echte* Theilbarkeiten auftreten; wäre nämlich $\mathfrak{b}''' = \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}_3$, so würde aus (45) entsprechend $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}'$ oder $\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{a}$ folgen, und wäre $\mathfrak{b}''' = \mathfrak{b}_1$ oder $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}_3$, so würde aus (44) entsprechend $\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}'$ folgen, was Alles im Widerspruch mit (46) steht. Wir schliessen hieraus, dass alle fünf Elemente der Dualgruppe $\mathfrak{G}$ wirklich von einander verschieden sind, weil auch jede der beiden Annahmen $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1$ oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}'$ durch (46) verboten ist.

In dieser Dualgruppe $\mathfrak{G}$ gilt das *Modulgesetz* VIII *nicht*, denn sonst müsste, weil $\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{c}'$ ist, auch $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}_1) + \mathfrak{c}' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}') - \mathfrak{b}_1$ sein, während doch aus (42) folgt, dass

$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}_1) + \mathfrak{c}' = \mathfrak{c}_3 + \mathfrak{c}' = \mathfrak{c}' \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}') - \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}''' - \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_1$$

ist. Wir behaupten endlich, dass die drei Elemente $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}_3$ in (44) und ebenso die vier Elemente $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}_3$ in (45) eine *Kette* in $\mathfrak{G}$ bilden; wäre nämlich $\mathfrak{b}'''$ kein *nächster* Theiler von $\mathfrak{a}$, oder $\mathfrak{c}_3$ kein *nächstes* Vielfaches von $\mathfrak{a}$, so müsste mindestens eins der beiden anderen Elemente $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}'$ ein Theiler oder ein Vielfaches von $\mathfrak{a}$ sein, was, wie schon erwähnt, zufolge (46) unmöglich ist, und aus demselben Grunde folgt offenbar, dass auch die vier Elemente in (45) eine Kette bilden. Da nun beide Ketten denselben Anfang $\mathfrak{b}'''$ und dasselbe Ende $\mathfrak{c}_3$, aber verschiedene Länge besitzen, so gilt in der Gruppe $\mathfrak{G}$ auch das *Kettengesetz nicht*.

Den hiermit bewiesenen Satz IX können wir offenbar auch so aussprechen:

X. Wenn in einer Dualgruppe $\mathfrak{H}$ und in allen ihren Theilgruppen das Kettengesetz gilt, so gilt in ihr auch das Modulgesetz.

Hierzu ist Folgendes wohl zu bemerken. Man könnte es vielleicht für erlaubt halten, die strenge Prämisse dieses Satzes dahin abzuschwächen dass die Gültigkeit des Kettengesetzes nur für die Gruppe $\mathfrak{H}$ selbst vorausgesetzt wird; von dieser irrigen Meinung wird man aber sogleich zurückkommen, wenn man sich erinnert, dass die Definitionen eines nächsten Theilers und einer Kette in $\mathfrak{H}$ sich wesentlich auf die Betrachtung aller Elemente von $\mathfrak{H}$ und nur dieser Elemente stützen (§ 5). Man kann sich in der That leicht überzeugen, dass das Kettengesetz in einer Dualgruppe $\mathfrak{H}$ gültig und doch in einer Theilgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ ungültig sein kann. Das einfachste Beispiel dieser Erscheinung erhält man, wenn man zu den fünf verschiedenen Elementen $\mathfrak{m} = \mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}_3$, aus denen die eben betrachtete Dualgruppe $\mathfrak{G}$ besteht, noch ein von ihnen verschiedenes sechstes Element $\mathfrak{n}$ hinzufügt und für dasselbe die Operationen $\pm$ gemäss (4) und (1) durch $\mathfrak{n} \pm \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} \pm \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \pm \mathfrak{m}$, und zwar im Einzelnen durch

$$\mathfrak{n}+\mathfrak{b}'''=\mathfrak{b}''', \quad \mathfrak{n}+\mathfrak{b}_1=\mathfrak{b}''', \quad \mathfrak{n}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{n}+\mathfrak{c}'=\mathfrak{b}''', \quad \mathfrak{n}+\mathfrak{c}_3=\mathfrak{n},$$
$$\mathfrak{n}-\mathfrak{b}'''=\mathfrak{n}\,, \quad \mathfrak{n}-\mathfrak{b}_1=\mathfrak{c}_3\,, \quad \mathfrak{n}-\mathfrak{a}=\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}-\mathfrak{c}'=\mathfrak{c}_3\,, \quad \mathfrak{n}-\mathfrak{c}_3=\mathfrak{c}_3,$$

definirt. Die genaue Prüfung (vergl. die letzte Anmerkung) ergiebt dann, dass diese sechs Elemente wirklich eine Dualgruppe $\mathfrak{H}$ bilden, und dass in derselben das Kettengesetz gilt, weil das einzige Paar äquivalenter verschiedener Ketten aus den beiden Ketten $\mathfrak{b}'''\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{c}_3$ und $\mathfrak{b}'''\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}_3$ besteht, welche dieselbe Länge 3 besitzen. —

Nennen wir jede Dualgruppe $\mathfrak{M}$, in welcher das Modulgesetz VIII allgemein gilt, eine *Modulgruppe*, auch wenn ihre Elemente keine Moduln sind, so wollen wir nun umgekehrt zeigen, dass in jeder solchen Gruppe auch das Kettengesetz gilt. Dies geschieht durch die folgende Reihe von Sätzen.

XI. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei beliebige Elemente einer Modulgruppe $\mathfrak{M}$, so besteht zwischen der Gruppe aller derjenigen Elemente $\mathfrak{b}'$ in $\mathfrak{M}$, welche den Bedingungen

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} < \mathfrak{b}' < \mathfrak{b} \tag{47}$$

genügen, und der Gruppe aller derjenigen Elemente $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{M}$, welche den Bedingungen

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \tag{48}$$

genügen, eine gegenseitige eindeutige Correspondenz, welche durch jede der beiden, wechselseitig aus einander folgenden Beziehungen

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}', \tag{49}$$
$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}_1 \tag{50}$$

ausgedrückt wird (D. § 169, S. 499, Anmerkung).

Beweis. Unsere Behauptung besteht darin, dass aus (47) und (49) sich (48) und (50) ergiebt, und umgekehrt. Aus (47) folgt zunächst

$\mathfrak{a} - (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) < \mathfrak{a} - \mathfrak{b}' < \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$, was zufolge (3) und (49) mit (48) übereinstimmt; und da $\mathfrak{b}' < \mathfrak{b}$ ist, so folgt nach dem Modulgesetz VIII auch $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) - \mathfrak{b}' = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}') + \mathfrak{b}$, was nach (47) und (49) mit (50) übereinstimmt. Umgekehrt folgt aus (48) und (50) zunächst $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} < \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b} < (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + \mathfrak{b}$, also (47), und da $\mathfrak{a} < \mathfrak{a}_1$ ist, so folgt nach dem Modulgesetz auch $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + \mathfrak{a}_1 = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}) - \mathfrak{a}$, was zufolge (48) und (50) mit (49) übereinstimmt, w. z. b. w.

XII. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Elemente einer Modulgruppe $\mathfrak{M}$, und ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$, und umgekehrt.

Beweis. Ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein nächster, also auch ein echter Theiler von $\mathfrak{b}$, so folgt zunächst, dass $\mathfrak{a}$ auch ein echter Theiler von $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ ist, weil aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ folgen würde; genügt nun ein in $\mathfrak{M}$ enthaltenes Element $\mathfrak{a}_1$ den Bedingungen (48), so gehört auch das entsprechende Element $\mathfrak{b}'$ in (50) der Gruppe $\mathfrak{M}$ an, und da zugleich (47) und (49) gilt, so ist *entweder* $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{a}_1 = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) - \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, *oder* $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$; mithin ist wirklich $\mathfrak{a}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$. Umgekehrt, wenn Letzteres der Fall, also $\mathfrak{a}$ auch ein echter Theiler von $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ ist, so folgt zunächst, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ auch ein echter Theiler von $\mathfrak{b}$ ist, weil aus $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ folgen würde; genügt nun ein in $\mathfrak{M}$ enthaltenes Element $\mathfrak{b}'$ den Bedingungen (47), so gehört auch das durch (49) definirte Element $\mathfrak{a}_1$ der Gruppe $\mathfrak{M}$ an, und da zugleich (48) und (50) gilt, so ist *entweder* $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, *oder* $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{b}' = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$; mithin ist wirklich $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{b}$, w. z. b. w.

XIII. Ist $\mathfrak{d}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{m}$ in der Modulgruppe $\mathfrak{M}$, und $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Element in $\mathfrak{M}$, so ist *entweder* $\mathfrak{p} + \mathfrak{d} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p} - \mathfrak{d}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{p} - \mathfrak{m}$, *oder* es ist $\mathfrak{p} - \mathfrak{d} = \mathfrak{p} - \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p} + \mathfrak{d}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{p} + \mathfrak{m}$.

Beweis. Aus der Annahme $\mathfrak{d} < \mathfrak{m}$ folgt nach dem Modulgesetz VIII, dass man ein Element $\mathfrak{q}$ in der doppelten Form

$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{p} + \mathfrak{m}) - \mathfrak{d} = (\mathfrak{p} - \mathfrak{d}) + \mathfrak{m}$$

definiren kann; dasselbe ist offenbar in $\mathfrak{M}$ enthalten und genügt den Bedingungen $\mathfrak{d} < \mathfrak{q} < \mathfrak{m}$, mithin muss, weil $\mathfrak{d}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{m}$ ist, einer und nur einer der beiden Fälle $\mathfrak{q} = \mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ eintreten. Im *ersten* Falle ist $\mathfrak{d} = (\mathfrak{p} - \mathfrak{d}) + \mathfrak{m}$, und da $\mathfrak{p} + (\mathfrak{p} - \mathfrak{d}) = \mathfrak{p}$ ist, so folgt hieraus $\mathfrak{p} + \mathfrak{d} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m}$; setzt man nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} - \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}$, so wird $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{p} - \mathfrak{d} - \mathfrak{m} = \mathfrak{p} - \mathfrak{m}$; es ist daher $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{b}$, also nach dem vorigen Satze auch $\mathfrak{p} - \mathfrak{d}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{p} - \mathfrak{m}$. Im *zweiten* Falle ist $\mathfrak{m} = (\mathfrak{p} + \mathfrak{m}) - \mathfrak{d}$, und da $\mathfrak{p} - (\mathfrak{p} + \mathfrak{m}) = \mathfrak{p}$ ist, so folgt $\mathfrak{p} - \mathfrak{m} = \mathfrak{p} - \mathfrak{d}$; setzt man jetzt $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m}$, so wird $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m} + \mathfrak{d} = \mathfrak{p} + \mathfrak{d}$, $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{m}$; es ist daher $\mathfrak{a}$ ein uächster Theiler von $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$, also nach dem vorigen Satze auch $\mathfrak{p} + \mathfrak{d}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{p} + \mathfrak{m}$, w. z. b. w.

XIV. Wenn ein Element $\mathfrak{d}$ einer Modulgruppe $\mathfrak{M}$ zwei verschiedene nächste Vielfache $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ besitzt, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$, und $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ ist ein nächstes Vielfaches von $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{b}$. Besitzt ein Element $\mathfrak{m}$ zwei verschiedene nächste Theiler $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{m}$, und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ist ein nächster Theiler von $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{b}$.

Beweis. Zufolge der *ersten* Annahme ist $\mathfrak{d}$ ein gemeinsamer Theiler von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, also auch ein Theiler vou $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, mithin

$$\mathfrak{d} < \mathfrak{a} + \mathfrak{b} < \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{d} < \mathfrak{a} + \mathfrak{b} < \mathfrak{b};$$

wäre nun $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ verschieden von $\mathfrak{d}$, so müsste, weil $\mathfrak{d}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{b}$ ist, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ und zugleich $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$, also auch $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ sein, was unserer Annahme widerspricht; mithin ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, woraus nach XII folgt, dass $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ nächste Theiler von $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ sind. Zufolge der *zweiten* Annahme ist $\mathfrak{m}$ ein gemeinsames Vielfaches von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, also auch ein Vielfaches von $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$, mithin

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{a} - \mathfrak{b} < \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{b} < \mathfrak{a} - \mathfrak{b} < \mathfrak{m};$$

wäre nun $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ verschieden von $\mathfrak{m}$, so müsste, weil $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nächste Theiler von $\mathfrak{m}$ sind, $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ sein, was unserer Annahme widerspricht; mithin ist $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{m}$ ein nächstes Vielfaches von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, woraus nach XII folgt, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ ist, w. z. b. w.

Um alle wesentlich verschiedenen Beispiele zu diesem Satze zu finden, welche unsere obige Gruppe $\mathfrak{D}$ von 28 verschiedenen Moduln darbietet, braucht man nur die *letzten* Sätze in (19) bis (26) mit den Theilbarkeiten in (15) bis (18) zu vergleichen; so erhält man

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{a}''' + \mathfrak{b}''' = \mathfrak{d}'''', & \mathfrak{a}''' - \mathfrak{b}''' = \mathfrak{c}'', \\
\mathfrak{a}'' + \mathfrak{b}'' = \mathfrak{c}''', & \mathfrak{a}'' - \mathfrak{b}'' = \mathfrak{d}', \\
\mathfrak{a}' + \mathfrak{d}' = \mathfrak{a}'', & \mathfrak{a}' - \mathfrak{d}' = \mathfrak{a}_0, \\
\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{d}', & \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{d}_1, \\
\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}', & \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1, \\
\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_0, & \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_2, \\
\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{d}_1, & \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{c}_3, \\
\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{b}_3 = \mathfrak{c}_2, & \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{b}_3 = \mathfrak{d}_4.
\end{array}$$

Wir wollen ferner bemerken, dass die im *ersten* Theile des Satzes aufgestellte Behauptung $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ offenbar für *jede* Dualgruppe gilt, während die auf $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ bezügliche Behauptung wesentlich auf der Voraussetzung des Modulgesetzes beruht; betrachten wir z. B. die Dualgruppe $\mathfrak{G}$, welche wir bei dem Beweise des Satzes IX gebildet haben, so sind die beiden Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$ nächste Vielfache von $\mathfrak{b}''' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}_1$, aber nur $\mathfrak{a}$, nicht $\mathfrak{b}_1$, ist ein nächster Theiler von $\mathfrak{c}_3 = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}_1$. Ebenso gilt im *zweiten* Theile nur die Behauptung $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{m}$ allgemein für *jede* Dualgruppe, während die auf $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bezügliche wieder auf dem Modulgesetz beruht.

XV. Wenn in der Modulgruppe $\mathfrak{M}$ eine Kette $\mathfrak{K}$ aus den $n + 1$ Gliedern

(51) $$\mathfrak{k}_0\, \mathfrak{k}_1\, \mathfrak{k}_2 \cdots \mathfrak{k}_{n-1}\, \mathfrak{k}_n$$

besteht, und wenn ein Element $\mathfrak{p}$ der Gruppe $\mathfrak{M}$ den Bedingungen

(52) $$\mathfrak{k}_0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{k}_n$$

genügt, so giebt es in $\mathfrak{M}$ mindestens eine mit $\mathfrak{K}$ äquivalente Kette $\mathfrak{P}$, in welcher das Glied $\mathfrak{p}$ auftritt.

Beweis. Durchläuft $\mathfrak{k}$ alle Elemente der Kette $\mathfrak{K}$, und bildet man alle Elemente $\mathfrak{p} \pm \mathfrak{k}$, so erhält man zufolge (52) die beiden Reihen

(53) $$\mathfrak{p} + \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0,\ \mathfrak{p} + \mathfrak{k}_1 \cdots \mathfrak{p} + \mathfrak{k}_{n-1},\ \mathfrak{p} + \mathfrak{k}_n = \mathfrak{p},$$

(54) $$\mathfrak{p} - \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{p},\ \mathfrak{p} - \mathfrak{k}_1 \cdots \mathfrak{p} - \mathfrak{k}_{n-1},\ \mathfrak{p} - \mathfrak{k}_n = \mathfrak{k}_n.$$

Sieht man die zweite als eine Fortsetzung der ersten an, so entsteht eine Gesammtreihe $\mathfrak{P}'$, in welcher offenbar jedes Element ein Theiler des folgenden ist. Sind zwei solche auf einander folgende Elemente *verschieden*, so folgt aus dem Satze XIII, dass das erste ein *nächster* Theiler des folgenden ist; behält man daher von mehreren *gleichen* auf einander folgenden Elementen immer nur eins bei, so entsteht aus $\mathfrak{P}'$ eine *Kette* $\mathfrak{P}$, deren Anfang $= \mathfrak{k}_0$, deren Ende $= \mathfrak{k}_n$ ist, und in welcher das Glied $\mathfrak{p}$ auftritt, w. z. b. w.

Zusatz. Diese Kette $\mathfrak{P}$ hat *dieselbe Länge* n wie $\mathfrak{K}$. Um dies zu beweisen, vertheilen wir die n Indices $0, 1, 2 \cdots (n-1)$ in zwei getrennte Classen, deren erste alle diejenigen p Indices r enthält, für welche $\mathfrak{p} + \mathfrak{k}_r$ verschieden von $\mathfrak{p} + \mathfrak{k}_{r+1}$ wird, während die zweite Classe aus allen übrigen q Indices s besteht, für welche also $\mathfrak{p} + \mathfrak{k}_s = \mathfrak{p} + \mathfrak{k}_{s+1}$ ist; dann ist $p + q = n$, und offenbar ist $p + 1$ die Anzahl aller verschiedenen, in der Reihe (53) enthaltenen Elemente. Aus dem Satze XIII (welcher bei dem vorhergehenden Beweise von XV nur theilweise benutzt ist) folgt aber, dass gleichzeitig $\mathfrak{p} - \mathfrak{k}_r = \mathfrak{p} - \mathfrak{k}_{r+1}$, und dass $\mathfrak{p} - \mathfrak{k}_s$ verschieden von $\mathfrak{p} - \mathfrak{k}_{s+1}$ ist; mithin ist $q + 1$ die Anzahl aller verschiedenen, in der Reihe (54) enthaltenen Elemente. Da ferner $\mathfrak{p}$ das einzige Element ist, welches in beiden Reihen zugleich auftritt, so ist die Anzahl aller in der Kette $\mathfrak{P}$ enthaltenen Elemente $= (p+1) + (q+1) - 1 = n + 1$, w. z. b. w.

Bezeichnet man die auf einander folgenden Elemente dieser Kette $\mathfrak{P}$ mit

$$\mathfrak{p}_0\ \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{n-1}\ \mathfrak{p}_n,$$

so ist $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{k}_n$, und zugleich leuchtet aus der Bedeutung von p ein, dass $\mathfrak{p}_p = \mathfrak{p}$ ist.

Um diese durch ein Element $\mathfrak{p}$ bewirkte Transformation einer Kette $\mathfrak{K}$ in eine äquivalente Kette $\mathfrak{P}$ durch Beispiele zu erläutern, kehren wir zu der oben behandelten, aus 28 verschiedenen Moduln bestehenden Gruppe $\mathfrak{D}$ zurück und betrachten die aus neun Elementen

$$\mathfrak{d}''''\cdot\mathfrak{b}'''\ \mathfrak{a}''\ \mathfrak{a}'\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{b}_3\ \mathfrak{d}_4$$

bestehende Kette $\mathfrak{K}$ von der Länge acht. Wählen wir $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}'$, so bestehen die beiden Reihen (53), (54) aus den Elementen

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathfrak{d}'''' & \mathfrak{b}''' & \mathfrak{b}''' & \mathfrak{b}''' & \mathfrak{b}''' & \mathfrak{c}'' & \mathfrak{c}' & \mathfrak{c}' & \mathfrak{c}' \\ \mathfrak{c}' & \mathfrak{c}' & \mathfrak{c}_0 & \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{d}_4 \end{array}$$

und die Kette $\mathfrak{P}$ wird

$$\mathfrak{d}''''\ \mathfrak{b}'''\ \mathfrak{c}''\ \mathfrak{c}'\ \mathfrak{c}_0\ \mathfrak{d}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{b}_3\ \mathfrak{d}_4;$$

zugleich ist $p = 3$, $q = 5$. Wählen wir aber $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ und dieselbe Kette $\mathfrak{K}$, so bestehen die beiden Reihen (53), (54) aus den Elementen

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathfrak{d}'''' & \mathfrak{d}'''' & \mathfrak{c}''' & \mathfrak{c}''' & \mathfrak{c}''' & \mathfrak{b}'' & \mathfrak{b}' & \mathfrak{b}' & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{b} & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{d}_4 & \mathfrak{d}_4 \end{array}$$

und die Kette $\mathfrak{P}$ wird

$$\mathfrak{d}''''\ \mathfrak{c}'''\ \mathfrak{b}''\ \mathfrak{b}'\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{c}_3\ \mathfrak{d}_4;$$

zugleich ist $p = q = 4$.

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen XIV und XV ergiebt sich nun leicht das *Kettengesetz*, d. h. der Satz

XVI. In jeder Modulgruppe $\mathfrak{M}$ haben je zwei äquivalente Ketten dieselbe Länge.

Beweis. Um die Methode der vollständigen Induction anzuwenden, sprechen wir den zu beweisenden Satz so aus: Wenn eine Kette $\mathfrak{K}$ der Modulgruppe $\mathfrak{M}$ die Länge m hat, so hat jede mit $\mathfrak{K}$ äquivalente Kette $\mathfrak{H}$ dieselbe Länge m. Die Wahrheit dieses Satzes für den Fall $m = 1$ ergiebt sich daraus, dass eine Kette $\mathfrak{K}$ von der Länge 1 nur mit sich selbst äquivalent ist; besteht nämlich $\mathfrak{K}$ aus den beiden Elementen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a}$ ein nächster Theiler $\mathfrak{b}$, und da jedes Element $\mathfrak{h}$ einer Kette $\mathfrak{K}$ ein Vielfaches von ihrem Anfang und zugleich ein Theiler von ihrem Ende ist, so muss, wenn $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{K}$ äquivalent ist, $\mathfrak{a} < \mathfrak{h} < \mathfrak{b}$, mithin $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}$ sein, woraus die Identität von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ folgt. Nach dem Wesen der Inductionsmethode machen wir nun die *Hypothese*, dass, wenn n eine bestimmte natürliche Zahl bedeutet, unser Satz schon für jede Kette $\mathfrak{K}$ bewiesen sei, deren Länge $m = n$ ist, und haben zu zeigen, dass er dann gewiss auch für jede Kette $\mathfrak{K}$ gelten muss, deren Länge $m = n + 1$ ist. Es sei also $\mathfrak{K}$ eine aus den Gliedern

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2 \cdots \mathfrak{k}_{n-1}\,\mathfrak{k}_n\,\mathfrak{b}$$

bestehende Kette von der Länge $n + 1$, und irgend eine mit $\mathfrak{K}$ äquivalente Kette $\mathfrak{H}$ möge aus den $e + 2$ Gliedern

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{h}_1\,\mathfrak{h}_2 \cdots \mathfrak{h}_{e-1}\,\mathfrak{h}_e\,\mathfrak{b}$$

bestehen; wir sollen beweisen, dass $e = n$ ist. Unterdrücken wir in beiden Ketten $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{H}$ den gemeinsamen Anfang $\mathfrak{a}$, so entsteht aus $\mathfrak{K}$ eine Theilkette $\mathfrak{K}_1$ von der Länge n, deren Anfang und Ende resp. die Elemente $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{b}$ sind, und ebenso entspringt aus $\mathfrak{H}$ eine Theilkette $\mathfrak{H}_1$ von der Länge e, deren Anfang und Ende resp. die Elemente $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{b}$ sind. Falls nun $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{h}_1$ ist, so sind diese beiden Ketten $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{H}_1$ äquivalent, und da die Länge der ersteren $= n$ ist, so muss nach unserer Hypothese auch $\mathfrak{H}_1$ dieselbe Länge haben, woraus wirklich $e = n$ folgt. Im entgegengesetzten Falle, wenn die beiden Elemente $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{h}_1$ *verschieden* sind, schliessen wir aus dem Satze XIV, dass sie als nächste Vielfache desselben Elementes $\mathfrak{a}$ auch *nächste* Theiler desselben Elementes $\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{h}_1$ sind, das wir mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen wollen. Da $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{h}_1$ auch Theiler desselben Elementes $\mathfrak{b}$ sind, so genügt $\mathfrak{p}$ offenbar den Bedingungen $\mathfrak{k}_1 < \mathfrak{p} < \mathfrak{b}$, und folglich giebt es nach dem Satze XV eine mit $\mathfrak{K}_1$ äquivalente Kette $\mathfrak{P}$, in welcher $\mathfrak{p}$ als Glied auftritt, und welche nach unserer Hypothese dieselbe Länge n besitzen muss wie $\mathfrak{K}_1$ (das Letztere würde auch aus dem *Zusatze* zu XV folgen, den wir aber bei diesem Beweise nicht zu benutzen brauchen). Da ferner, wie schon bemerkt, $\mathfrak{k}_1$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{p}$ ist, so muss in dieser Kette $\mathfrak{P}$ das Glied $\mathfrak{p}$ unmittelbar auf $\mathfrak{k}_1$ folgen; die Kette $\mathfrak{P}$ hat daher die Form

$$\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{p} \cdots \mathfrak{b}.$$

Nun ist, wie oben bemerkt, auch $\mathfrak{h}_1$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{p}$; ersetzen wir daher den Anfang $\mathfrak{k}_1$ der Kette $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{h}_1$, so entsteht abermals eine *Kette*

$$\mathfrak{h}_1\,\mathfrak{p} \cdots \mathfrak{b},$$

welche dieselbe Länge n besitzt wie $\mathfrak{P}$ und mit der Kette $\mathfrak{H}_1$ äquivalent ist; nach unserer Hypothese muss daher die Länge e dieser Kette $\mathfrak{H}_1$ ebenfalls $= n$ sein, w. z. b. w.

§ 7.

Stufen in endlichen Modulgruppen.

Nachdem durch die Sätze X und XVI die Beziehung zwischen dem Modulgesetze und dem Kettengesetze nachgewiesen ist, fügen wir noch einige Bemerkungen über *endliche Modulgruppen* hinzu, deren Beweise der

Leser leicht finden wird. Unter den Elementen $\mathfrak{m}$ einer solchen Gruppe $\mathfrak{M}$ giebt es offenbar ein und nur ein Element $\mathfrak{p}$, welches ein Theiler von allen $\mathfrak{m}$, und ebenso giebt es ein und nur ein Element $\mathfrak{q}$, welches ein Vielfaches von allen $\mathfrak{m}$ ist. Wenn $\mathfrak{m}$ verschieden von $\mathfrak{q}$ ist, so giebt es in $\mathfrak{M}$ mindestens ein nächstes Vielfaches von $\mathfrak{m}$, und wenn $\mathfrak{m}$ verschieden von $\mathfrak{p}$ ist, so giebt es in $\mathfrak{M}$ mindestens einen nächsten Theiler von $\mathfrak{m}$. Wenn ferner $\mathfrak{a}$ ein echter Theiler von $\mathfrak{b}$ ist, so giebt es immer mindestens eine Kette, deren Anfang $\mathfrak{a}$, und deren Ende $\mathfrak{b}$ ist. Hierauf können wir alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{M}$ in eine Reihe getrennter, auf einander folgender *Stufen* S eintheilen; die unterste oder niedrigste Stufe soll aus dem einzigen Element $\mathfrak{p}$ bestehen, und diese Stufe wollen wir mit S_p bezeichnen, wo p eine beliebig gewählte ganze rationale Zahl ist; wenn ferner $\mathfrak{m}$ ein von $\mathfrak{p}$ verschiedenes Element, also ein echtes Vielfaches von $\mathfrak{p}$ ist, und wenn h die gemeinsame Länge aller Ketten bedeutet, deren Anfang $\mathfrak{p}$ und deren Ende $\mathfrak{m}$ ist, so nennen wir die Summe $m = p + h$ die *Stufenzahl* von $\mathfrak{m}$ und nehmen $\mathfrak{m}$ in die Stufe S_m auf; ebenso nennen wir p die Stufenzahl des Elementes $\mathfrak{p}$; ist k die Länge aller von $\mathfrak{p}$ nach $\mathfrak{q}$ führenden Ketten, und $q = p + k$, so besteht die oberste oder höchste Stufe S_q offenbar aus dem einzigen Elemente $\mathfrak{q}$, und $k + 1$ ist die Anzahl aller verschiedenen Stufen. Ist $\mathfrak{m}$ ein Element der Stufe S_m, und $m < q$, so finden sich alle nächsten Vielfachen von $\mathfrak{m}$ in der Stufe S_{m+1}, und wenn $m > p$ ist, so finden sich alle nächsten Theiler von $\mathfrak{m}$ in der Stufe S_{m-1}. Bezeichnet man die Stufenzahl m des Elementes $\mathfrak{m}$ allgemein mit $s(\mathfrak{m})$, so gilt für je zwei Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ der Satz

$$s(\mathfrak{a}) + s(\mathfrak{b}) = s(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) + s(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}), \tag{55}$$

dessen Beweis wir ausführen wollen. Falls eins der beiden Elemente, z. B. $\mathfrak{a}$ ein Theiler des andern $\mathfrak{b}$ ist, so leuchtet der Satz von selbst ein, weil dann $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ ist. Wenn aber keins der beiden Elemente durch das andere theilbar, also $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein echter Theiler von $\mathfrak{b}$ ist, so giebt es mindestens eine von $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{b}$ führende Kette $\mathfrak{N}$, und wenn n ihre Länge bedeutet, so ist offenbar $s(\mathfrak{b}) = s(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) + n$; da nun jedes Element $\mathfrak{b}'$ dieser Kette den Bedingungen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} < \mathfrak{b}' < \mathfrak{b}$ genügt, so ist immer $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$; sind daher $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{m}$ irgend zwei auf einander folgende Glieder dieser Kette, so ist auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{m}$, woraus nach Satz XIII folgt, dass $\mathfrak{a} - \mathfrak{d}$ ein nächster Theiler von $\mathfrak{a} - \mathfrak{m}$ ist; mithin bilden die $n + 1$ Elemente $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}'$ eine Kette, deren Anfang $\mathfrak{a} - (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$, und deren Ende $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ ist; hieraus folgt offenbar, dass $s(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = s(\mathfrak{a}) + n$ ist, und wenn man hiermit das obige Resultat $s(\mathfrak{b}) = s(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) + n$ verbindet, so ergiebt sich der zu beweisende Satz (55), dessen Zusammenhang mit dem Satze XI einleuchtet.

Alles dies bestätigt sich an dem *früher* behandelten Beispiele der aus 28 verschiedenen Moduln bestehenden Gruppe $\mathfrak{T}$: hier ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{d}''''$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{d}_4$, $k = 8$, und da wir in (41) die Zahl $p = -4$ gewählt haben, so ist $q = +4$. Doch muss man nicht glauben, dass die *Symmetrie*, welche hier in dem Bau von je zwei, gleichweit vom Anfang und Ende entfernten Stufen $S_{\pm m}$ auftritt, eine allgemeine Eigenschaft aller Modulgruppen $\mathfrak{M}$ ist. Es bilden z. B. die in dieser Gruppe enthaltenen fünf Elemente $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{d}_4$ für sich eine Modulgruppe mit vier Stufen S', von denen

$$
\begin{array}{lll}
S_1' & \text{aus} & \mathfrak{d}_1, \\
S_2' & \text{„} & \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_2, \\
S_3' & \text{„} & \mathfrak{a}_3, \\
S_4' & \text{„} & \mathfrak{d}_4
\end{array}
$$

besteht; die vier ersten Elemente bilden für sich eine symmetrische Modulgruppe mit den drei Stufen S_1', S_2', S_3' aber diese Symmetrie wird durch das Hinzutreten des fünften Elementes $\mathfrak{d}_4$ gestört.

§ 8.

Beziehung zwischen dem Modulgesetz und dem Symbol $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$.

Wir wollen nun noch den Zusammenhang besprechen, welcher zwischen dem Modulgesetz VIII und den Symbolgesetzen (27), (28), (32) besteht. Wir haben die letzteren schon in § 3 durch die Bemerkung vervollständigt, dass nach der Bedeutung, welche das Symbol $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ in der Modultheorie besitzt, aus der Theilbarkeit $\mathfrak{m} > \mathfrak{d}$ immer $(\mathfrak{m}, \mathfrak{d}) = 1$ folgt; wir fügen jetzt noch hinzu, dass zufolge derselben Bedeutung auch umgekehrt aus $(\mathfrak{m}, \mathfrak{d}) = 1$ immer die Theilbarkeit $\mathfrak{m} > \mathfrak{d}$ folgt, dass also die beiden Aussagen

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{d}) = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{m} > \mathfrak{d} \tag{56}$$

völlig *gleichbedeutend* sind (D. § 171, S. 510).

Nehmen wir nun an, in irgend einer Dualgruppe $\mathfrak{H}$ entspreche je zwei Elementen $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ ein mit $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ bezeichneter und zwar von Null verschiedener Zahlwerth, und dieses Symbol gehorche den Gesetzen (27), (28) (32) und (56), so wollen wir beweisen, *dass in dieser Dualgruppe $\mathfrak{H}$ auch das Modulgesetz* VIII *herrscht*. In der That, wählen wir aus $\mathfrak{H}$ drei Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aus, welche der Bedingung $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ genügen, so erzeugen dieselben, wie aus dem Beweise des Satzes IX in § 6 hervorgeht, eine aus höchstens neun Elementen bestehende Dualgruppe $\mathfrak{H}'$, und wenn wir die dortigen Identitäten (42), (43) mit den Symbolgesetzen (27), (28) combiniren, so ergiebt sich

$$(\mathfrak{b}''', \mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a} - \mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{c}_3),$$
$$(\mathfrak{b}''', \mathfrak{c}') = (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}', \mathfrak{c}') = (\mathfrak{a}, \mathfrak{c}') = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a} - \mathfrak{c}') = (\mathfrak{a}, \mathfrak{c}_3)$$

also

$$(\mathfrak{b}''', \mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{b}''', \mathfrak{c}');$$

da ferner nach (45) auch $\mathfrak{b}''' < \mathfrak{b}_1 < \mathfrak{c}'$ ist, so folgt aus dem Symbolgesetz (32)

$$(\mathfrak{b}''', \mathfrak{c}') = (\mathfrak{b}''', \mathfrak{b}_1)(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}'),$$

also auch

$$(\mathfrak{b}''', \mathfrak{b}_1)(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}') = (\mathfrak{b}''', \mathfrak{b}_1),$$

und da nach unserer Annahme die Zahl $(\mathfrak{b}''', \mathfrak{b}_1)$ von Null verschieden ist, so ergiebt sich $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}') = 1$, was nach (56) gleichbedeutend mit $\mathfrak{b}_1 > \mathfrak{c}'$ ist; da endlich auch $\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{c}'$ ist, so folgt $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}'$, also ist in der Dualgruppe $\mathfrak{H}$ die Identität

$$\mathfrak{b} - (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{c} + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$$

eine nothwendige Folge der Annahme $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$. Dies ist aber nichts Anderes als das Modulgesetz VIII, welches mithin in jeder Dualgruppe $\mathfrak{H}$ herrschen muss, für welche die obigen Voraussetzungen gelten. —

Nachdem dieser Zusammenhang erkannt ist, liegt es nahe, eine besonders wichtige Classe von Dualgruppen $\mathfrak{H}$ zu betrachten, in welchen die genannten Symbolgesetze wenigstens theilweise erfüllt sind, ich meine die Dualgruppen $\mathfrak{H}$, deren Elemente die sämmtlichen Theilgruppen einer gewöhnlichen endlichen *Galois'schen Gruppe* $\mathfrak{g}$ sind. Die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ einer solchen Gruppe $\mathfrak{g}$ reproduciren sich bekanntlich durch eine Operation, welche in der Regel wie eine Multiplication bezeichnet wird und dem associativen Gesetz $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ gehorcht; ausserdem wird vorausgesetzt, dass sowohl aus $\alpha\gamma = \beta\gamma$, wie aus $\gamma\alpha = \gamma\beta$ immer $\alpha = \beta$ folgt. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ irgend welche Complexe von Elementen in $\mathfrak{g}$, und bezeichnet man allgemein mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ den Complex aller in der Form $\alpha\beta$ enthaltenen Elemente, wo α, β resp. alle Elemente in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ durchlaufen, so ist $\mathfrak{a}$ dann und nur dann eine *Gruppe*, ein *Theiler* von $\mathfrak{g}$, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ ist. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei solche Theilgruppen von $\mathfrak{g}$, so ist ihr grösster gemeinsamer Theiler oder ihr Durchschnitt (d. h. der Inbegriff aller ihnen gemeinsamen Elemente) wieder eine *Gruppe*, die wir hier, um mit unserer bisherigen Ausdrucksweise im Einklang zu bleiben, durch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bezeichnen wollen; aus demselben Grunde soll das Zeichen $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ diejenige *Gruppe* bedeuten, welche durch fortgesetzte Multiplication aus allen Elementen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ erzeugt wird*) und das kleinste gemeinsame Vielfache von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ heisst; sie ist der Durchschnitt aller derjenigen Theilgruppen von $\mathfrak{g}$, welche (wie z. B. $\mathfrak{g}$

*) Es ist also $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a} \cdots = \mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a} \cdots$, wenn diese Producte hinreichend weit fortgesetzt werden.

selbst) gemeinsame *Vielfache* von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sind, d. h. welche sowohl $\mathfrak{a}$ als $\mathfrak{b}$ zum Theiler haben. Offenbar genügen diese beiden Operationen $\pm$ den Grundgesetzen (1), (2), (3), mithin ist der Inbegriff $\mathfrak{H}$ aller in $\mathfrak{g}$ als Theiler enthaltenen Gruppen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}\cdots$ eine *Dualgruppe* im Sinne von § 1, auf welche wir auch die Bedeutung der Theilbarkeitszeichen $<$ und $>$ übertragen wollen.

Hierzu tritt nun Folgendes. Ist die Gruppe $\mathfrak{a}$ ein Theiler von $\mathfrak{g}$, und sind β, γ irgend zwei Elemente in $\mathfrak{g}$, so sind die beiden Complexe $\mathfrak{a}\beta$, $\mathfrak{a}\gamma$ entweder vollständig identisch, oder sie haben kein einziges gemeinsames Element, und wenn $\mathfrak{b}$ ebenfalls eine Theilgruppe von $\mathfrak{g}$ bedeutet, so wollen wir durch das *Gruppen-Symbol* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ die Anzahl aller von einander verschiedenen Complexe $\mathfrak{a}\beta$ bezeichnen, die allen Elementen β der Gruppe $\mathfrak{b}$ entsprechen, und aus welchen offenbar der Complex $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ besteht*). Man überzeugt sich nun leicht, dass für dieses Gruppensymbol, welches immer eine natürliche, also von Null verschiedene Zahl ist, die *drei* Gesetze (27), (32) und (56) gelten, während man dasselbe von dem *vierten* Symbolgesetze (28) nicht allgemein behaupten kann. Offenbar sind nämlich alle Elemente des Complexes $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ in der Gruppe $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ enthalten, aber im Allgemeinen wird die letztere noch *andere* Elemente enthalten, und da der Complex $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ schon aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ verschiedenen Complexen $\mathfrak{a}\beta$ besteht, so wird im Allgemeinen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}-\mathfrak{b})$ *grösser als* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sein; der Fall $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}-\mathfrak{b})$ tritt daher immer und nur dann ein, wenn der Complex $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ eine *Gruppe*, also $=\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ ist, und das charakteristische Merkmal hierfür besteht in der Identität $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$. Wenn also je zwei Theiler $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ der Gruppe $\mathfrak{g}$ in diesem Sinne *permutabel* sind, so gelten in der Dualgruppe $\mathfrak{H}$ alle vier Symbolgesetze (27), (28), (32), (56), und hieraus folgt nach der vorhergehenden Betrachtung, dass in $\mathfrak{H}$ das Modulgesetz VIII, also auch das Kettengesetz herrscht.**)

Dies bestätigt sich leicht auf folgende Weise. Da nach der jetzigen Voraussetzung immer $\mathfrak{a}-\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ist, so nimmt das aus der Annahme $\mathfrak{d} < \mathfrak{m}$ zu beweisende Gesetz VIII die Gestalt $(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})\mathfrak{d} = \mathfrak{p}\mathfrak{d}+\mathfrak{m}$ an. Nun steht jedes Element des Durchschnittes $\mathfrak{p}\mathfrak{d}+\mathfrak{m}$ unter der doppelten Form $\pi\delta = \mu$, wo π, δ, μ resp. Elemente der Gruppen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{m}$ bedeuten, und da $\mathfrak{d}$ nach Voraussetzung ein Theiler von $\mathfrak{m}$, also δ auch Element von $\mathfrak{m}$ ist, so gilt dasselbe bekanntlich auch von π; mithin ist π in dem Durchschnitte $\mathfrak{p}+\mathfrak{m}$, also μ in der Gruppe $(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})\mathfrak{d}$ enthalten; folglich ist die Gruppe $\mathfrak{p}\mathfrak{d}+\mathfrak{m}$ ein Theiler der Gruppe $(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})\mathfrak{d}$, und

*) Vergl. § 9 meiner Abhandlung: Ueber die Anzahl der Idealclassen in reinen cubischen Zahlkörpern (Crelle's Journal Bd. 121, S. 77).

**) Doch lehrt schon das Beispiel der Gruppe $\mathfrak{g}$, welche aus den sechs Vertauschungen von drei Dingen besteht, dass dieser Satz nicht umgekehrt werden darf.

da nach dem Satze VII umgekehrt $(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})\mathfrak{d}$ gewiss ein Theiler von $\mathfrak{p}\mathfrak{d}+\mathfrak{m}$ ist, so sind beide Gruppen mit einander identisch, w. z. b. w. Offenbar stimmt dieser Beweis mutatis mutandis vollständig mit dem Beweise des entsprechenden Satzes in der Modultheorie überein (D. § 169, S. 498—499).

Zu den Gruppen $\mathfrak{g}$, deren sämmtliche Theiler $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ diese Eigenschaft $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ besitzen, gehören augenscheinlich alle Abel'schen Gruppen, ferner diejenigen, welche ich Hamilton'sche Gruppen genannt habe*), ausserdem aber noch unendlich viele andere, von denen ich hier nur die beiden einfachsten Beispiele anführen will. Benutzt man die bekannte Bezeichnung der cyklischen Vertauschungen von beliebigen verschiedenen Dingen 0, 1, 2, 3 · · ·, so wird die erste Gruppe $\mathfrak{g}$ vom Grade 16 erzeugt durch die Elemente achten und zweiten Grades

$$\alpha = (01234567), \quad \beta = (04)\,(26),$$

welche der Bedingung $\beta\alpha = \alpha^5\beta$ genügen. Ebenso wird die zweite Gruppe $\mathfrak{g}$ vom Grade 27 erzeugt durch die Elemente neunten und dritten Grades

$$\alpha = (012345678), \quad \beta = (174)\,(258),$$

welche der Bedingung $\beta\alpha = \alpha^4\beta$ genügen. Die allgemeine Theorie aller dieser Gruppen mit permutabelen Theilern werde ich in einem besonderen Aufsatze behandeln.

Braunschweig, den 8. Januar 1900.

*) Mathematische Annalen Bd. 48, S. 548.

Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck.

Von

M. Dehn in Göttingen.

Inhalt.

Einleitung.

Die Grundlage der folgenden Untersuchungen bildet die Abhandlung von Herrn Professor Hilbert über die Grundlagen der Geometrie.*) In dieser wird ein System von Axiomen aufgestellt, das in fünf Gruppen zerfällt. Die erste Gruppe enthält die Axiome der Verknüpfung — z. B.: Zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a. Die zweite Gruppe fasst die Axiome der Anordnung zusammen — z. B.: Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A. Die dritte Gruppe besteht aus dem bekannten Axiom der Parallelen (dem Euklidischen Axiom); die vierte Gruppe enthält die Axiome der Congruenz und die fünfte endlich das *„Archimedische“ Axiom.* Das letztere lautet:

Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B; man construire dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$, so dass A_1 zwischen A und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und A_3, ferner A_3 zwischen A_2 und A_4 u. s. w. liegt und überdies die Strecken

$$AA_1,\; A_1A_2,\; A_2A_3,\; A_3A_4, \ldots$$

einander gleich sind; dann giebt es in der Reihe der Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ stets einen solchen Punkt A_n, so dass B zwischen A und A_n liegt.

In der Festschrift wird überall der Grundsatz befolgt, „eine jede sich darbietende Frage in der Weise zu erörtern, dass zugleich geprüft wird, ob ihre Beantwortung auf einem vorgeschriebenen Wege mit gewissen eingeschränkten Hilfsmitteln möglich oder nicht möglich ist.“**) In einer Prüfung dieser Natur besteht die vorliegende Arbeit.

Bekanntlich hat Legendre bei seinen Forschungen über den Beweis des Parallelenaxioms zwei wichtige Sätze aufgestellt:

1) *In einem Dreieck kann die Summe der drei Winkel niemals grösser als zwei Rechte sein.*

2) *Wenn in irgend einem Dreieck die Summe der drei Winkel gleich zwei Rechten ist, so ist sie es in jedem Dreieck.*

Beim Beweise dieser Sätze hat Legendre wesentlich das oben angeführte Archimedische Axiom benutzt. Nun gelingt es — Euklid hat dies allerdings nicht gethan —, ohne das Archimedische Axiom eine Geometrie aufzubauen, und es erhebt sich so die wichtige Frage: *Gelten in einer solchen Geometrie nothwendig die Legendre'schen Sätze?* oder in anderen Worten: *Kann man die Legendre'schen Sätze ohne irgend ein Stetigkeitspostulat beweisen, d. h. ohne vom Archimedischen Axiom Gebrauch zu machen?* Es besteht, wie wir im Folgenden zeigen wollen, in dieser Be-

*) Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals. Leipzig 1899.

**) S. Festschrift, S. 89.

ziehung ein merkwürdiger Unterschied zwischen den beiden Theoremen: Während das *zweite* sich auf Grund der ersten, zweiten und vierten Axiomgruppe (die dritte Gruppe, das Euklidische Axiom, dürfen wir selbstverständlich nicht benutzen) *beweisen lässt,* ist dasselbe für das *erste unmöglich.* Um nun den Beweis für diese Behauptung zu erbringen, müssen wir eine neue Nicht-Euklidische Geometrie aufstellen, welche wir als eine *„Nicht-Legendre'sche“ Geometrie* bezeichnen wollen.

Capitel I.

Coordinatensystem und Streckenrechnung.

§ 1.

Ideale Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen).

Durch die Axiome der Verknüpfung ist zwar gesagt, dass sich zwei verschiedene Geraden nur in *einem* Punkte schneiden können, aber dass sie sich, wenn sie in einer Ebene liegen, immer schneiden, vermögen wir nicht zu versichern. Im Gegentheil, wir können aus dem Satz vom Aussenwinkel sofort folgern, dass durch jeden Punkt B ausserhalb einer Geraden a mindestens *eine* Gerade b geht, welche a nicht schneidet. Andrerseits können wir aber die Ebene der beiden Geraden auf eine andere so von einem Punkte aus projiciren, dass die Projectionen jener beiden sich in der zweiten Ebene *„wirklich“* schneiden. Demzufolge sagt man: Die beiden Geraden a und b bestimmen einen *„idealen“ Punkt* in ihrer Ebene und eine dritte Gerade geht durch diesen Punkt hindurch, wenn sie in der Projection durch den entsprechenden „wirklichen“ Punkt hindurchgeht. Ebenso kann man *ideale Gerade* als Schnitt zweier sich „wirklich“ nicht schneidenden Ebenen einführen, oder auch als Verknüpfung zweier idealer Punkte, die nicht auf ein und derselben wirklichen Geraden liegen. Endlich kann man auf entsprechende Weise *ideale* Ebenen definiren. Wie bei Pasch, Vorlesungen über Geometrie §§ 5, 6, 7, 8 gezeigt ist, erfüllen die Elemente der so erweiterten Geometrie alle Axiome der Verknüpfung.

Nicht ganz so unmittelbar können wir dasselbe von den Axiomen der Anordnung aussagen. Denn es leuchtet ein, dass der Begriff „zwischen“, kurz ausgedrückt, nicht invariant gegenüber dem Projiciren ist. Man kann sich deshalb von einer gewissen Willkür in den Festsetzungen unmöglich frei machen, die dazu da sind, auch den „Zwischen“-Axiomen Geltung zu verschaffen. Am Einfachsten verfährt man folgendermassen*): Wir nehmen auf jeder Geraden einen idealen Punkt als *„Normalpunkt“* an und

*) S. Pasch, l. c. § 9.

sagen: A liegt „zwischen" B und C, wenn das Punktepaar A und der Normalpunkt das Punktepaar B, C trennt. Eine eindeutige Definition des Begriffes „*Trennen*" ist aber auf Grund der vorhergehenden Einführung idealer Elemente leicht zu bewerkstelligen. Denn dieser Begriff ist, wie man sich leicht überzeugt, invariant gegenüber dem Projiciren. Die Normalpunkte in ihrer Gesammtheit nimmt man als die Punkte einer idealen Ebene, *der Normalebene*, an. In jeder anderen Ebene liegen demgemäss sämmtliche Normalpunkte auf einer idealen Geraden, der *Normalgeraden*. In Folge dieser Festsetzungen *gelten die Axiome der Anordnung für sämmtliche ideale und wirkliche Elemente mit Ausnahme der Elemente der Normalebene.*

Dann können wir aber für unsere erweiterte Geometrie den *Satz von Desargues über perspective Dreiecke* beweisen, den wir, weil alle Geraden in unserer Geometrie sich schneiden, folgendermassen formuliren können:

Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in einer Ebene so liegen, dass je zwei entsprechende Seiten AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, BC und und $B'C'$ sich in drei Punkten E, D, F einer Geraden schneiden, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken AA', BB', CC' in einem Punkte und umgekehrt.

Und zwar gilt dieser Satz für alle Elemente jeder Ebene ohne Ausnahme, einschliesslich der „Normalelemente". Denn angenommen, es fielen Punkte wegen der Lage der Ausgangsfigur oder der Lage der beim Beweise benutzten Hülfselemente, oder eine Gerade fiele mit einer Normalgeraden, eine Ebene mit der Normalebene zusammen, so würden wir eine andere passende ideale Ebene als Normalebene annehmen und dann für die specielle Lage der Elemente der Figur den Satz beweisen. Dann ist der Satz aber auch richtig, wenn wir eine ganz beliebige andere Normalebene wählen.

Denn ein reiner Schnittpunktsatz gilt natürlich unabhängig davon, welche specielle Festsetzungen wir für die Anordnung der Punkte im Raume treffen.

Eine andere Einführung idealer Elemente giebt Schur, Ann. 39, auf Grund des Satzes von der Eindeutigkeit der Construction des vierten harmonischen Punktes. Zum Schluss sei bemerkt, dass man das Problem vielleicht am einfachsten mittels einer dritten Methode lösen kann, die sich durchaus an die Untersuchung in der Festschrift § 24 anschliesst. Dort wird mit Hülfe der ebenen Axiome der ersten und zweiten Gruppe und des Desargues'schen Satzes eine Streckenrechnung aufgestellt. Freilich wird dabei aus Gründen der Vereinfachung das Parallelenaxiom benutzt, was wir bei unseren Ueberlegungen natürlich stets vermeiden müssen. Aber dieser Uebelstand ist sicherlich keine Nothwendigkeit. Mit Hülfe der Streckenrechnung wird dann bewiesen, dass die Gleichung der Geraden eine lineare Gleichung in den Coordinaten ist. Dadurch ergiebt sich dann leicht, dass die oben entwickelte Erweiterung der Geometrie möglich ist und dass im Speciellen der Desargues'sche Satz auch für die erweiterte Geometrie gültig ist.

§ 2.

Pol und Polare.

Im Folgenden nehmen wir an, dass die *ebenen Congruenzaxiome* für die „wirklichen" Punkte und Geraden erfüllt sind, und beweisen in dem erweiterten Gebiet von Punkten und Geraden der Ebene drei Hülfssätze.

1) Hülfssatz: *Alle Senkrechten auf einer Geraden m schneiden sich in einem (idealen) Punkte* (s. Fig. 1).

Beweis: Wir errichten auf m in A und B die Lote l_1 und l_2 und ziehen durch einen beliebigen Punkt C auf AB eine Gerade l_3, so dass l_1, l_2 und l_3 durch denselben Punkt gehen. Dann ziehen wir durch einen Punkt D zwei Gerade g und g_1, so dass sie die Geraden l_1, l_2, l_3 in den Punkten E, F, G respective E_1, F_1, G_1 schneiden und dass der Winkel EDE_1 von m halbirt wird. Die Construction soll so ausgeführt sein, dass die Punkte A, B, C, D, E, F, G, E_1, F_1 und G_1 wirkliche Punkte sind. Angenommen F und F_1 lägen respective zwischen E und G, E_1 und G_1, so verbinden wir F mit G_1 und E_1, F_1 mit E und G. Dann müssen sich FE_1 und F_1E, FG_1 und F_1G in wirklichen Punkten, etwa O_1 und O_2, schneiden. Da nun nach Construction l_1, l_2, l_3 durch einen Punkt gehen, so sind die Dreiecke EF_1G und E_1FG_1 perspectiv und D, O_1 und O_2 liegen auf einer Geraden. Nun ergiebt sich aus der Congruenz der Dreiecke DEF_1 und DE_1F, dass die Dreiecke DEO_1 und DE_1O_1 congruent und demnach auch die Winkel EDO_1 und O_1DE_1 congruent sind, dass also die Geraden DO_1O_2 und m zusammenfallen. Daraus ergiebt sich nun durch einfache Congruenzbetrachtungen, dass auch l_3 auf m senkrecht steht. — Wie der Beweis sich modificirt, wenn F nicht zwischen E und G liegt, ist klar.

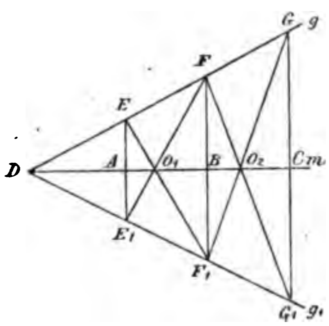


Fig. 1.

Wir wollen in Zukunft den Punkt, durch den alle Senkrechten auf m gehen, *den Pol der Geraden* m nennen.

2) Hülfssatz: *Die Pole zu sämmtlichen Geraden durch einen eigentlichen Punkt O liegen auf einer (idealen) Geraden, und jeder Punkt dieser Geraden ist ein Pol zu einer Geraden durch O* (s. Fig. 2).

Beweis: Wir ziehen durch O drei Geraden m_1, m_2 und m_3, fällen von einem wirklichen Punkt C' auf m_1 und m_2 Lote, deren Fusspunkte A' und B' sein mögen. Dann ziehen wir eine solche Gerade senkrecht zu m_3 in D, dass sie $A'O$ und $B'O$ in zwei Punkten A und B schneidet, welche zwischen A' und O resp. zwischen B' und O liegen. Die in A und B auf m_1 und m_2 errichteten Lote müssen sich, wie man sofort einsieht, in einem wirklichen Punkte C schneiden. Wir verlängern dann OB über O hinaus um sich selbst bis B_1, ebenso AO bis A_1, CO bis C_1, endlich DO bis zum Schnitt mit B_1A_1 in D_1. Dann ist, wie man durch wiederholte Anwendung der Congruenzsätze leicht beweist, Winkel C_1B_1O congruent Winkel C_1A_1O, Winkel A_1D_1O congruent einem rechten Winkel. Nun sind aber die Dreiecke $C_1B_1A_1$ und CBA perspectiv. Folglich liegen die Schnittpunkte von C_1A_1 mit CA, von C_1B_1 mit CB, von A_1B_1 mit AB, das heisst die Pole der drei Geraden m_1, m_2 und m_3 auf einer Geraden. Da nun die Pole dreier beliebiger Geraden durch O auf einer Geraden liegen, liegen offenbar die Pole aller Geraden durch O auf einer Geraden, die wir die Polare zu O nennen. — Sei umgekehrt P ein Punkt der Polaren, so ziehen wir durch einen beliebigen wirklichen Punkt P' eine Gerade, die durch P geht und fällen von O aus ein Lot auf die Gerade PP'. Dann ist der Pol dieser letzteren Geraden der Punkt P. Somit ist unser zweiter Hülfssatz vollkommen erwiesen.

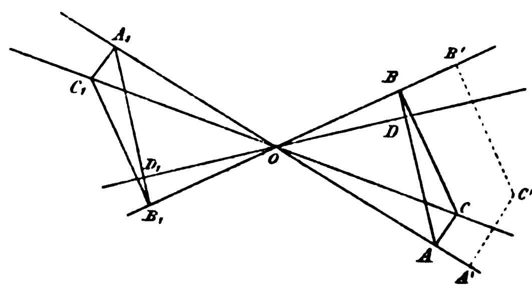


Fig. 2.

3) Hülfssatz *über die Mittelsenkrechte.*

Derselbe schliesst sich an die vorhergehenden Sätze seinem Inhalte nach vollkommen an, und wir werden ihn später an einer Stelle gebrauchen. Er lautet:

Errichtet man auf der Mitte M einer Strecke AB das Lot l und zieht durch die Endpunkte A und B zwei Geraden a und b, die sich in einem wirklichen oder idealen Punkte auf l schneiden, so bilden die Geraden a und b mit der Geraden AB gleiche Winkel, und die Lote auf l schneiden congruente Strecken auf a und b ab (s. Fig. 3).

Der Beweis wird am besten indirect geführt:

Nehmen wir an, die von A und B ausgehenden Halbstrahlen a_1 und b_1 der Geraden a und b lägen auf einer Seite der Geraden AB und der

Winkel (kleiner als zwei R) zwischen a_1 und dem Halbstrahl AB sei nicht congruent dem Winkel (kleiner als zwei R) zwischen b_1 und dem Halbstrahl BA; dann ziehen wir durch B eine Gerade b' so, dass ihr von B ausgehender, auf derselben Seite der Geraden AB liegender Halbstrahl b_1' denselben Winkel (kleiner als zwei R) mit dem Halbstrahl BA einschliesst, wie a_1 mit dem Halbstrahl AB. Wir verlängern AB über A und B hinaus um congruente Strecken bis C und D und verbinden die Punkte C und D mit zwei wirklichen Punkten E und F auf l. Die Gerade a möge CE in G, CF in H schneiden, die Gerade b' DE in J, DF in K. Die Punkte $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, M$ sind nach Voraussetzung oder Construction wirkliche Punkte, so dass wir die Congruenzsätze anwenden können. Aus diesen folgt, dass die Geraden JG und HK auf der Geraden l senkrecht stehen.

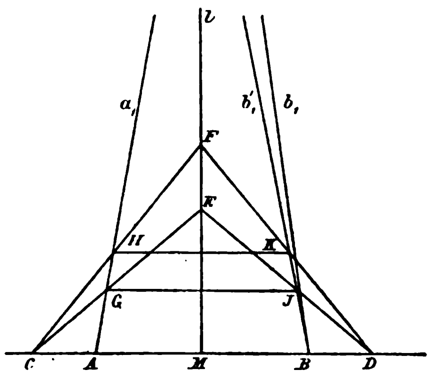


Fig. 3.

Also schneiden sich JG und HK auf der Geraden CD (siehe Hülfssatz 1). Auf der letzteren schneiden sich aber nach Construction auch die beiden anderen entsprechenden Seitenpaare der Dreiecke GEJ und HFK, nämlich GE und HF, JE und KF. Folglich sind diese Dreiecke perspectiv und die Verbindungslinien entsprechender Ecken gehen durch einen Punkt. Es schneiden sich demgemäss die beiden Geraden HG (oder a) und KJ (oder b') auf FE (oder l). Folglich fällt b' mit b zusammen und der erste Theil unserer Behauptung ist erwiesen: $\sphericalangle GAB$ ist congruent $\sphericalangle ABJ$. Dass aber dann die Lote auf l congruente Strecken auf a und b abschneiden, folgt sofort aus den Congruenzsätzen. Somit ist unser Hülfssatz vollkommen bewiesen.

§ 3.

Einführung einer Pseudogeometrie.

1. Einführung von Pseudoparallelen.

Auf Grund der vorhergehenden Sätze wollen wir die Elemente unserer Geometrie in der Ebene in ein System von Punkten und Geraden so einordnen und den Elementen dieses Systems solche Eigenschaften beilegen, dass für sie sämmtliche ebene Axiome der Verknüpfung, Anordnung und Congruenz erfüllt sind, ausserdem aber auch das Euklidische Axiom der Parallelen erfüllt ist. Dieses System von geometrischen Elementen wollen wir *Pseudogeometrie* nennen.

Sei O ein willkürlicher wirklicher Punkt unserer Ebene und t die Polare des Punktes O (siehe § 2).

Definitionen: Wirkliche Punkte im Sinne unserer Pseudogeometrie sind alle wirklichen und idealen Punkte der zu Grunde gelegten Geometrie mit Ausnahme der Punkte auf t.

Wirkliche Geraden im Sinne unserer Pseudogeometrie sind alle wirklichen und idealen Geraden der zu Grunde gelegten Geometrie mit Ausnahme der Geraden t.

Sind A, B, C drei Punkte auf einer Geraden a, so liegt B zwischen A und C im Sinne unserer Pseudogeometrie, wenn B zwischen A und C im Sinne der zu Grunde gelegten Geometrie liegt, wofern wir die Gerade t als Normalgerade gewählt haben (siehe § 1).

Satz: *Die wirklichen Punkte und Geraden unserer Pseudogeometrie erfüllen sämmtliche Axiome der Anordnung und Verknüpfung und das Euklidische Axiom.*

Denn durch einen Punkt A ausserhalb einer Geraden a lässt sich eine und nur eine Gerade a' ziehen, die a in keinem wirklichen Punkte unserer Pseudogeometrie schneidet, nämlich diejenige Gerade a', die sich mit a auf der Geraden t schneidet.

Demgemäss geben wir folgende Definition:

Zwei Geraden a und a', welche sich auf der Geraden t schneiden, nennen wir *pseudoparallel*. In Zeichen: $a \parallel a'$.

Ferner beweisen wir folgenden *allgemeinen Schnittpunktssatz:*

Hat man eine Gerade g und zwei Punkte A_1 und B_1 ausserhalb derselben, so möge die Gerade A_1B_1 die Gerade g in dem Punkte Y schneiden. Wir verbinden A_1 und B_1 mit einem Punkte X_1 auf g, schneiden die Geraden A_1X_1 und B_1X_1 mit einer beliebigen Geraden durch Y in A_2 und B_2, verbinden A_2 und B_2 mit einem beliebigen Punkte X_2 auf g, und schneiden A_2X_2 und B_2X_2 mit einer beliebigen Geraden durch Y in A_3 und B_3 u. s. w., so erhalten wir eine beliebige Anzahl von Punktepaaren:

$$\begin{cases} A_1\, A_2 \ldots A_n, \\ B_1\, B_2 \ldots B_n. \end{cases}$$

Dann wird behauptet, dass sich die Geraden A_iA_k und B_iB_k auf g schneiden, wo A_i und B_i, A_k und B_k zwei verschiedene ganz beliebige von jenen Punktepaaren sind (s. Fig. 4).

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Geraden A_1A_3 und B_1B_3 sich in einem Punkte X_1' auf g schneiden. Die Dreiecke $A_1B_1X_1$ und $A_3B_3X_2$ sind perspectiv, denn entsprechende Seitenpaare der Dreiecke schneiden sich in den Punkten A_2, B_2 uud Y auf der Geraden A_2B_2. Folglich gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken A_1A_3, B_1B_3 und X_1X_3 durch einen Punkt X_1' auf g, was wir zeigen wollten.

Dann ergiebt sich der ganze Satz sehr leicht. Indem wir nämlich jetzt unsere Betrachtungen anwenden auf die Reihe von Punktepaaren:

$$A_1 A_3 \ldots A_n,$$
$$B_1 B_3 \ldots B_n,$$

die wegen des eben Bewiesenen genau dieselben Eigenschaften hat wie die alte Reihe, können wir zeigen, dass A_1A_4 und B_1B_4 sich auf g schneiden, und durch Fortsetzung des Schlussverfahrens zeigen wir, dass

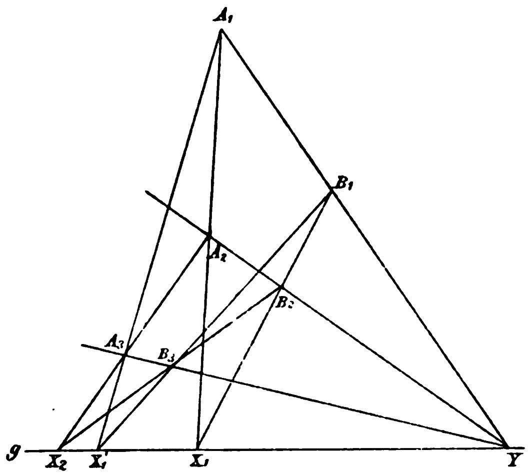


Fig. 4.

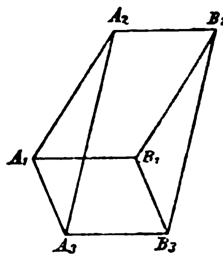


Fig. 5.

die Geraden A_1A_k und B_1B_k sich auf g schneiden. Genau in derselben Weise folgern wir für jedes beliebige Paar von Verbindungsgeraden A_iA_k und B_iB_k, dass sie sich auf g schneiden.

Nennen wir Pseudoparallelogramm ein solches Viereck, dessen Seiten paarweise pseudoparallel sind, und nehmen wir als Gerade g im vorhergehenden Satze die Polare zu O, t, so können wir folgenden Satz aussprechen (s. Fig. 5):

Construirt man über der Strecke A_1B_1 ein Pseudoparallelogramm $A_1B_1A_2B_2$, über der Strecke A_2B_2 ein neues Pseudoparallelogramm $A_2B_2A_3B_3$ und gelangt durch Fortsetzung dieses Verfahrens zu einer Reihe von Punktepaaren

$$A_1 A_2 \ldots A_n,$$
$$B_1 B_2 \ldots B_n,$$

so sind die Geraden $A_i A_k$ und $B_i B_k$ pseudoparallel, wo A_i und B_i, A_k und B_k zwei beliebige dieser Punktepaare sind. — Wenn zwei Punktepaare so durch Pseudoparallelogrammconstruction aus einander hervorgehen, wie A_i und B_i aus A_1 und B_1, dann wollen wir sagen, die Strecke $A_i B_i$ geht aus der Strecke $A_1 B_1$ durch *Pseudoparallelverschiebung* hervor. Folgendes ist unmittelbar klar: Wenn $A_i B_i$ aus $A_1 B_1$ durch *Pseudoparallelverschiebung* hervorgeht, dann geht auch $A_1 B_1$ aus $A_i B_i$ durch Pseudoparallelverschiebung hervor. Wir können deshalb auch sagen: Zwei solche Strecken entstehen aus *einander* durch Pseudoparallelverschiebung.

2. Pseudocongruenz von Strecken.

Definition: Zwei Strecken AB und $A'B'$ wollen wir als *pseudocongruent* betrachten (in Zeichen $AB \approxeq A'B'$), wenn entweder diese Strecken durch Pseudoparallelverschiebung aus einander entstehen oder aus ihnen durch Pseudoparallelverschiebung zwei Strecken OE und OF so hervorgehen, dass die Gerade EF durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels EOF geht.

Der Punkt O hat die im Anfang dieses Paragraphen definirte Bedeutung.

Satz:*) *Seien A und B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a', so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen und nur einen Punkt B' finden, sodass AB (oder BA) der Strecke $A'B'$ pseudocongruent ist. Jede Strecke ist sich selbst pseudocongruent.*

Beweis: Da wir leicht die Strecke AB aus sich selbst durch Pseudoparallelverschiebung hervorgehen lassen können, ist jede Strecke AB sich selbst pseudocongruent. Im Uebrigen wollen wir den Satz in zwei Schritten beweisen.

a) Zunächst wollen wir annehmen, dass a und a' entweder identisch oder pseudoparallel sind. Wir wenden auf die Strecke AB irgend eine Pseudoparallelverschiebung an und gelangen so zu einem Punktepaare $A_n B_n$, das nicht auf der Geraden a' liegt, verbinden A_n mit A' und ziehen durch B_n eine Pseudoparallele zu $A_n A'$, die a' in B_1' schneidet. B_1' muss ein wirklicher Punkt im Sinne unserer Pseudogeometrie sein, denn sonst müsste die Gerade $B_1' B_n$ der Geraden a' pseudoparallel sein, was nicht möglich ist, da $B_1' B_n \,\|\, A' A_n$ ist

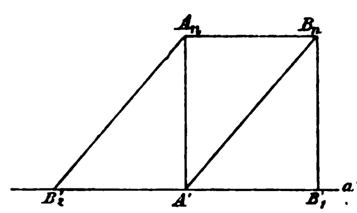


Fig. 6.

*) Vgl. Festschrift § 6, erstes Congruenzaxiom.

und deshalb auch $A'A_n \wr\!\wr a'$ sein müsste, was nicht der Fall ist. Denn $A'A_n$ und a' haben einen im Sinne unserer Pseudogeometrie wirklichen Punkt A' gemeinsam. Verbinden wir weiter A' mit B_n und ziehen durch A_n zu $A'B_n$ eine Pseudoparallele, so schneidet diese a' in einem Punkte B_2', der auch ein wirklicher Punkt unserer Pseudogeometrie ist. Da für solche Punkte aber die Axiome der Reihenfolge sämmtlich erfüllt sind (s. § 3, 1), so ergiebt sich leicht, dass B_1' auf einer anderen Seite der Geraden a' von A' liegt als B_2'. Weil nun auch nach Definition die Strecken $B_1'A'$ und $B_2'A'$ der Strecke AB pseudocongruent sind, so haben wir den ersten Theil unseres Satzes bewiesen. Aber es frägt sich noch, ob wir nicht durch einen anderen Constructionsmodus zu anderen Punkten B_1' und B_2' hätten kommen können, ob also dem zweiten Theil der Behauptung Genüge geleistet wird. Wir wollen deshalb auf die Strecke AB eine beliebige andere Pseudoparallelverschiebung anwenden und annehmen, wir gelangten so zu einer anderen Strecke $A'B_3'$ auf a'. Heisst die Reihe einander entsprechender Punktepaare

$$A\,\bar{A}_1\,\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n\,A',$$
$$B\,\bar{B}_1\,\bar{B}_2\ldots\bar{B}_n\,B_3',$$

so betrachten wir die Reihe der entsprechenden Punktepaare

$$A'\;A_n\,A_{n-1}\ldots A_1\,A\,\bar{A}_1\ldots\bar{A}_n,$$
$$B_1'\,B_n\,B_{n-1}\ldots B_1\,B\,\bar{\bar{B}}_1\ldots\bar{B}_n.$$

Es ergiebt sich*), dass $\bar{A}_n A'$ und $\bar{B}_n B_1'$ pseudoparallel sind und also B_3' mit B_1' zusammenfällt, da durch einen Punkt $\bar{B}_n$ nur eine Pseudoparallele zu einer Geraden $\bar{A}_n A'$ geht. — Heisst die Reihe der entsprechenden Punktepaare bei der zweiten Constructionsweise aber

$$A\,\bar{A}_1\ldots\bar{A}_n\,B_3',$$
$$B\,\bar{B}_1\ldots\bar{B}_n\,A',$$

so betrachten wir die Reihe der entsprechenden Punktepaare

$$B_2'\,A_n\ldots A_1\,A\,\bar{A}_1\ldots A_n,$$
$$A'\;B_n\ldots B_1\,B\,\bar{B}_1\ldots\bar{B}_n$$

und folgern ebenso wie vorher, dass B_3' mit B_2' zusammenfallen muss. Somit ist unter der anfänglich gemachten Voraussetzung unser Satz vollkommen erwiesen.

b) Jetzt nehmen wir an, dass a und a' nicht identisch oder pseudoparallel sind. Wir ziehen durch O die Pseudoparallelen b und b' zu a und a'.

---

*) S. § 3, 1 den speciellen Fall des allgemeinen Schnittpunktsatzes.

Die Strecke AB übertragen wir durch Pseudoparallelverschiebung auf die Strecke OE_1 auf b. Sei X ein Punkt auf b', so ziehen wir durch E_1 und den Pol der Halbirungslinie des Winkels E_1OX eine Gerade, die OX in einem wirklichen Punkt F unserer Pseudogeometrie schneidet. Denn wäre $E_1F \parallel OF$, dann müsste OF durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels E_1OF gehen, also in O auf besagter Halbirungslinie senkrecht stehen und der Winkel E_1OF gleich zwei Rechten sein, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Die Strecke OF übertragen wir durch Pseudoparallelverschiebung, wie vorhin gezeigt ist, auf zwei Strecken $A'B_1'$ und $A'B_2'$ auf a', wobei A' zwischen B_1' und B_2' liegt. Dann sind nach Definition die Strecken $A'B_1'$ und $A'B_2'$ der Strecke AB pseudocongruent, und der erste Theil unserer Behauptung ist auch für diesen Fall erwiesen. Da die Pseudoparallelverschiebung der Strecke OF nach $A'B_1'$ und $A'B_2'$ gemäss Theil a) unseres Beweises vollkommen eindeutig ist, so kann es nur die Modification eines anderen Theiles unserer Abtragungsconstruction bewirken, dass wir zu anderen Punkten B' kommen. Durch die Pseudoparallelverschiebung der Strecke AB auf die Gerade b gelangen wir ausser zu dem Punkt E_1 noch zu dem Punkte E_2, so zwar, dass O zwischen E_1 und E_2 liegt; und jeder der beiden Halbstrahlen OE_1 und OE_2 bildet mit der Geraden b' zwei Winkel, liefert also auch zwei Constructionen eines Punktes F. Wir kommen also im Ganzen zu vier Punkten F. Wir wollen beweisen, dass je zwei zusammenfallen: wir behalten noch zwei Punkte F_1 und F_2 übrig. Schliesslich zeigen wir, dass die Strecken OF_1 und OF_2 durch Pseudoparallelverschiebung auseinander hervorgehen. Daraus folgt endlich gemäss des speciellen Falles unseres allgemeinen Schnittpunktsatzes § 3, 1, dass wir durch Pseudoparallelverschiebung der Strecken OF_1 und OF_2 und deshalb auch bei einer beliebigen Abtragung der Strecke AB auf a' vom Punkte A' aus stets zu denselben Punkten B_1' und B_2' kommen müssen.

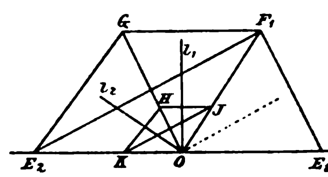


Fig. 7.

Nach Voraussetzung geht (s. Fig. 7) die Strecke E_2O aus der Strecke E_1O durch Pseudoparallelverschiebung hervor. Wenn wir also durch O eine Pseudoparallele zu E_1F_1, durch F_1 eine Pseudoparallele zu OE_1 ziehen und dann den Schnittpunkt G der beiden Pseudoparallelen mit E_2 verbinden, so muss nach dem oftmals erwähnten Schnittpunktsatze GE_2 pseudoparallel F_1O sein.

Wir errichten in O auf OE_1 und OF_1 die Lote l_1 und l_2. Dann fällen wir von einem passend gewählten wirklichen Punkt H von OG Lote auf l_1 und l_2, die OF_1 und OE_2 in den wirklichen Punkten J respective K schneiden. Dann ist leicht zu zeigen, dass OG die Halbirungslinie des Winkels $E_2 O F_1$ ist und dass KJ auf OG senkrecht steht, also durch den Pol dieser Geraden geht. Nun sind aber die Dreiecke GF_1E_2 und HJK perspectiv, denn die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken gehen durch O. Da je zwei Seiten paarweise pseudoparallel sind, sich also auf der Geraden t schneiden, so müssen auch die dritten Seiten E_2F_1 und KJ pseudoparallel sein, und E_2F_1 geht durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels E_2OF_1, weil dasselbe für die Gerade KJ der Fall ist. Wir kommen also gemäss unserer Abmachungen über pseudocongruente Streckenabtragung von E_2 zu demselben Punkte F_1 auf dem einen Halbstrahl der Geraden b' wie von E_1. Durch eine beliebige Abtragungsconstruction der Strecke AB auf b' kommen wir also im Ganzen zu zwei Punkten F_1 und F_2, so dass OF_1 und $OF_2 \approxeq AB$ sind und O zwischen F_1 und F_2 liegt.

Ferner ziehen wir (s. Fig. 8) durch E_1 und O Pseudoparallelen zu F_1O bezw. F_1E_1. Den Schnittpunkt L dieser beiden Hülfsgeraden verbinden wir mit F_2. Wir errichten in O die Lote auf OE_1 und OF_1, l_1 und l_2, und fällen von einem passend gewählten Punkte M der Geraden OL die Lote auf l_1 und l_2, die OF_2 in N, OE_1 in P schneiden, wo M, N, P wirkliche Punkte sind. Dann ergiebt sich ebenso wie früher, dass OL die Halbirungslinie des Winkels E_1OF_2 ist und PN auf OL senkrecht steht, also durch den Pol von OL geht. Die Dreiecke E_1LF_2 und PMN sind perspectiv; da aber zwei Seitenpaare: E_1L und PM, E_1F_2 und PN nach Construction oder Voraussetzung sich auf der Geraden t schneiden, ist dasselbe für das dritte Seitenpaar der Fall. Deshalb sind LF_2 und MN pseudoparallel und endlich auch LF_2 und OE_1 pseudoparallel. Die Strecken F_1O und F_2O gehen also durch Pseudoparallelverschiebung aus einander hervor, was wir zeigen wollten.

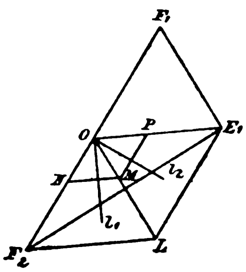


Fig. 8.

Satz*). *Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ pseudocongruent ist, dann ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ pseudocongruent.*

In Zeichen: Wenn

$$AB \approxeq A'B',$$

und

$$AB \approxeq A''B''$$

ist, dann ist auch

$$A'B' \approxeq A''B''.$$

*) Vgl. Festschrift § 6, zweites Congruenzaxiom.

Da es klar ist, dass, wenn zwei Strecken $A'B'$ und $A''B''$ aus einer dritten durch Pseudoparallelverschiebung hervorgehen, dann auch $A'B'$ und $A''B''$ aus einander durch Pseudoparallelverschiebung entstehen, so brauchen wir nur noch Folgendes nachzuweisen:

Haben wir drei Gerade durch den Punkt O (s. Fig. 9) und auf denselben respective die Punkte A, B, C und geht die Gerade AB durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels AOB, die Gerade AC durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels AOC, dann geht auch BC durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels BOC.

Tragen wir auf OA, OB und OC wirklich congruente Strecken OA', OB' und OC' ab, dann gehen, wie leicht zu zeigen, die Geraden $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ respective durch die Pole der Halbirungslinien der Winkel AOB, BOC und AOC. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind perspectiv, denn ihre Ecken liegen auf drei Geraden durch O. Folglich schneiden sich die entsprechenden Seitenpaare auf einer Geraden. Da sich nun AB und $A'B'$, AC und $A'C'$ nach Voraussetzung und Construction auf der Polaren zu O schneiden, so müssen sich auch BC und $B'C'$ auf der Polaren schneiden. Nun ist der Schnittpunkt von $B'C'$ mit der Polaren zu O der Pol der Halbirungslinie des Winkels $B'OC'$, folglich geht auch BC, wie behauptet, durch den Pol der besagten Halbirungslinie.

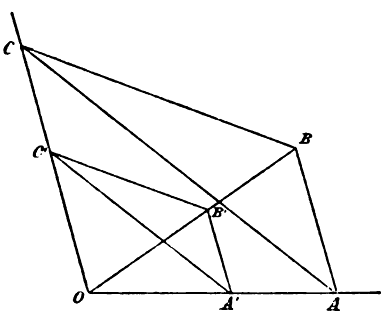


Fig. 9.

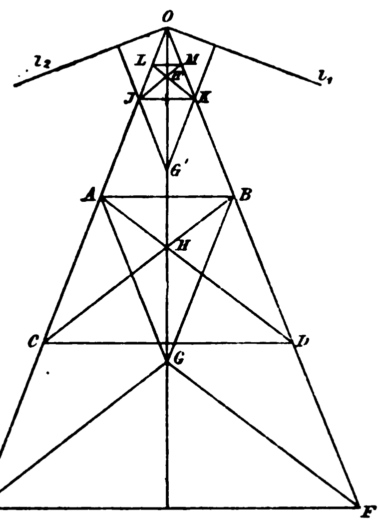


Fig. 10.

Satz*): *Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken ohne gemein-*

*) Vgl. Festschrift § 6, drittes Congruenzaxiom.

same Punkte auf derselben oder einer anderen Geraden a'; wenn dann $AB \approxeq A'B'$ und $BC \approxeq B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \approxeq A'C'$.

Wieder können wir uns, wie leicht ersichtlich, auf den Beweis des Satzes beschränken, wenn es sich um pseudocongruente Abtragung auf verschiedenen Geraden durch O handelt (s. Fig. 10).

Voraussetzung:

$$OD \approxeq OC,$$
$$DF \approxeq CE.$$

Behauptung:

$$OF \approxeq OE.$$

Wir übertragen durch pseudoparallele Verschiebung DF und CE auf Strecken mit dem einen gemeinsamen Endpunkt O und mit A und B als anderen Endpunkten, wo A und B auf den Halbstrahlen OC und OD liegen. Wir ziehen durch B zu OA und durch A zu OB Pseudoparallelen, die sich in G schneiden, verbinden G mit E und F, A mit D, B mit C. Dann sind nach Voraussetzung und Construction AD und GF, BC und GE, DC und BA pseudoparallel. Die letzteren beiden Geraden gehen durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels AOB. Durch eine ähnliche Hülfsconstruction (sie ist in der Figur angedeutet) wie in den vorigen Beweisen, in der als Hülfspunkte nur wirkliche Punkte vorkommen, beweisen*) wir, dass G und H auf der Halbirungslinie des Winkels AOB liegen. Dann sind aber die Dreiecke HAB und GEF perspectiv, und da sich die Seitenpaare FG und AH, EG und BH auf der Geraden t schneiden, so müssen sich auch AB und EF auf t schneiden, sind also pseudoparallel. BA geht durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels AOB. Dasselbe gilt also auch für EF. Folglich ist $FO \approxeq EO$, was zu beweisen war.

3. Pseudocongruenz von Winkeln.

Definition: Den Begriff „Winkel" unserer Pseudogeometrie definiren wir genau so wie in der zu Grunde gelegten Geometrie, nur dass natürlich der Scheitel und die Schenkel irgend welche wirkliche Punkte respective Geraden im Sinne unserer Pseudogeometrie sein können.

Durch den Scheitel A eines Winkels BAC (s. Fig. 11) ziehen wir eine beliebige Gerade AD, durch D zwei Halbstrahlen DF und DE pseudoparallel zu AB und AC, so zwar, dass, wenn die Gerade AD die Halbstrahlen AB und AC trennt, dieselbe auch die Halbstrahlen DE

---

*) Man beachte die Perspectivität 1) der Dreiecke ABG und JKG', 2) der Dreiecke mit den Seiten CB, BM, MJ resp. DA, AL, LK und daraus folgend die Perspectivität der Dreiecke CHD und $JH'K$. (Vorausgesetzt ist: $JG' \parallel AG$, $KG' \parallel BG$, $MJ \parallel BC$, $LK \parallel AD$, $LM \parallel AB$.)

und DF trennt und umgekehrt. Ferner ziehen wir durch D eine Gerade DG und fahren in derselben Weise fort und gelangen schliesslich zu einem Winkel YXZ. Dann wollen wir sagen $\sphericalangle YXZ$ geht aus $\sphericalangle BAC$ durch *Pseudoparallelverschiebung* hervor.

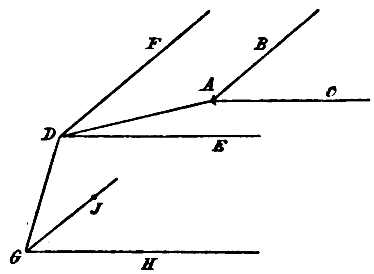


Fig. 11.

Dann ist Folgendes unmittelbar klar: Wenn $\sphericalangle YXZ$ aus $\sphericalangle BAC$ durch Pseudoparallelverschiebung hervorgeht, dann geht auch $\sphericalangle BAC$ aus $\sphericalangle YXZ$ durch Pseudoparallelverschiebung hervor. Wir können deshalb sagen: zwei solche Winkel entstehen aus *einander* durch Pseudoparallelverschiebung.

Definition: *Zwei Winkel ABC und $A'B'C'$ wollen wir als pseudocongruent* betrachten (in Zeichen: $\sphericalangle ABC \fallingdotseq \sphericalangle A'B'C'$), wenn entweder diese Winkel durch Pseudoparallelverschiebung aus einander entstehen oder aus ihnen zwei Winkel EOF und GOH mit dem gemeinsamen Scheitelpunkt O durch Pseudoparallelverschiebung hervorgehen, die congruent sind im Sinne der zu Grunde gelegten Geometrie.

Dann gelten, wie leicht ersichtlich, folgende Sätze*):

Es sei ein Winkel $\sphericalangle BAC$ und eine Gerade a', sowie eine bestimmte Seite von a' gegeben. Es bedeute B' einen Punkt der Geraden a', dann giebt es einen und nur einen Halbstrahl $C'A'$, wo A' ein Punkt von a' ist, so dass der Winkel BAC (oder CAB) pseudocongruent dem Winkel $B'A'C'$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $B'A'C'$ auf der gegebenen Seite von a' liegen. — Jeder Winkel ist sich selbst pseudocongruent.

Wenn ein Winkel BAC sowohl dem Winkel $B'A'C'$ als auch dem Winkel $B''A''C''$ pseudocongruent ist, so ist auch der Winkel $B'A'C'$ dem Winkel $B''A''C''$ pseudocongruent.

4. Der erste Pseudocongruenzsatz.

Definition: *Zwei Dreiecke* heissen *pseudocongruent,* wenn ihre respectiven Seiten und Winkel pseudocongruent sind.

Satz**): *Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel beziehungsweise pseudocongruent, dann sind auch die übrigen Stücke in den beiden Dreiecken beziehungsweise pseudocongruent.*

Den Beweis zerlegen wir in zwei Theile.

---

*) S. Festschrift § 6, viertes und fünftes Congruenzaxiom.

**) S. Festschrift § 6, sechstes Congruenzaxiom und § 7, Satz 10.

a) Es sei uns ein Dreieck ABC (s. Fig. 12) und ein beliebiger Punkt A' gegeben. Wir verbinden A mit A' und ziehen durch A' zu AB und AC Pseudoparallelen, die die Pseudoparallelen zu AA' durch B und C in B' resp. in C' schneiden. Dann sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspectiv, denn AA', BB', CC' gehen durch einen Punkt. Da aber AB und $A'B'$, AC und $A'C'$ pseudoparallel sind, so sind auch BC und $B'C'$ pseudoparallel. Daraus folgt aber, dass die Seiten und Winkel im Dreieck $A'B'C'$ den Seiten und Winkeln im Dreieck ABC entsprechend pseudocongruent sind. Also: Man kann zu jedem Dreieck ein pseudocongruentes finden, dessen eine Ecke mit einem beliebig vorgegebenen Punkte zusammenfällt.

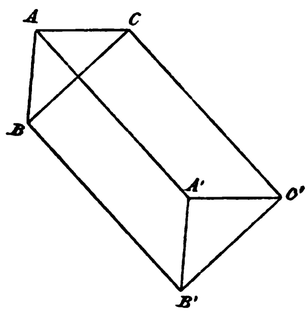


Fig. 12.

b) Angenommen in zwei Dreiecken wären zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel beziehungsweise pseudocongruent, dann ersetzen wir sie nach a) so durch pseudocongruente Dreiecke, dass die Scheitel der pseudocongruenten Winkel in den Punkt O zusammenfallen. Diese beiden Dreiecke (s. Fig. 13) mögen die Ecken O, A_1, B_1 und O, A_2, B_2 haben, dann ist nach Voraussetzung

$$OA_1 \approxeq OA_2, \qquad OB_1 \approxeq OB_2,$$
$$\sphericalangle B_1OA_1 \approxeq \sphericalangle B_2OA_2.$$

Wir nehmen an, dass B_1O und B_2O von A_1O und A_2O nicht getrennt werden. Haben wir unseren Satz für diesen Fall bewiesen, so ist der andere Fall, wo B_1O und B_2O von A_1O und A_2O getrennt werden, auch erledigt. Wir können das Dreieck A_1OB_1 in ein anderes $A_1'OB_1'$ pseudocongruent überführen, das so liegt, dass die entsprechenden Seitenpaare sich nicht trennen; dann werden auch A_2O und B_2O nicht von $A_1'O$ und $B_1'O$ getrennt, und wir können beweisen, dass $A_1'OB_1'$ und A_2OB_2, folglich auch A_1OB_1 und A_2OB_2 pseudocongruente Dreiecke sind. Denn nach früheren Sätzen gilt der Satz: Sind

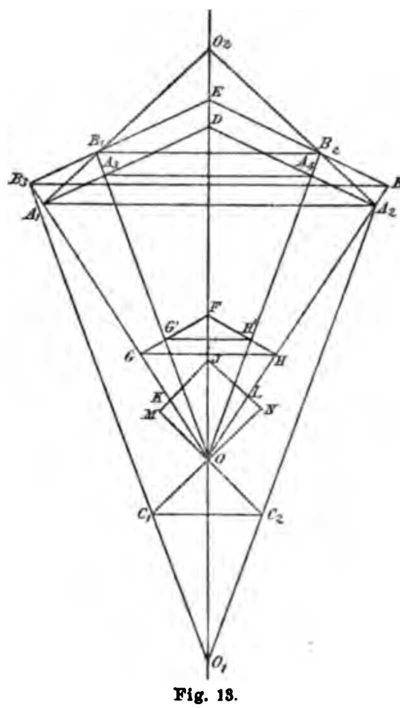


Fig. 13.

zwei Dreiecke einem und demselben dritten Dreieck pseudocongruent, dann sind sie auch einander pseudocongruent.

Bei jener Annahme ziehen wir durch A_1 zu B_1O, durch A_2 zu B_2O, durch O zu A_1B_1 und A_2B_2 Pseudoparallelen, die sich respective in C_1 und C_2 schneiden. A_1 verbinden wir mit A_2, B_1 mit B_2 und bringen A_1B_1 und A_2B_2 zum Schnitt in O_2, C_1A_1 und C_2A_2 in O_1. A_1A_2 ist nun pseudoparallel B_1B_2, denn diese beiden Geraden gehen nach Voraussetzung durch den Pol der gemeinsamen Halbirungslinie der Winkel B_1OB_2 und A_1OA_2. Folglich sind die Dreiecke $A_1O_1A_2$ und B_1OB_2 perspectiv, denn ihre Seiten schneiden sich auf der Geraden t, und O, O_1 und O_2 liegen auf einer Geraden. Dann sind aber auch die Dreiecke $O_2A_1A_2$ und OC_1C_2 perspectiv und C_1C_2, A_1A_2 und B_1B_2 sind pseudoparallel. Wir wollen nun zeigen, dass die Gerade OO_1O_2 durch die Pole der drei zuletzt genannten Geraden geht, d. h. mit der gemeinsamen Halbirungslinie der Winkel A_1OA_2 und B_1OB_2 zusammenfällt; ausserdem aber auch, dass OO_1O_2 den Winkel C_1OC_2 halbirt.

Wir tragen die Strecke OB_1 bis B_3 auf der Geraden OA_1, die Strecke OB_2 bis B_4 auf OA_2, die Strecke OA_1 auf OB_1 bis A_3, die Strecke OA_2 auf OB_2 bis A_4 pseudocongruent ab. Dann sind A_3A_4, B_3B_4, B_1B_2 und A_1A_2, — B_1B_3 und A_1A_3, — B_2B_4 und A_2A_4 pseudoparallel. Bringen wir A_1A_3 und A_2A_4 zum Schnitt in D, B_1B_3 und B_2B_4 zum Schnitt in E, so sind die Dreiecke A_3DA_4 und B_1EB_2 perspectiv. Folglich liegen E, D und O auf einer Geraden. Andrerseits sind die Dreiecke $A_1B_1A_3$ und $A_2B_2A_4$ perspectiv, denn ihre entsprechenden Ecken liegen auf pseudoparallelen Geraden. Folglich liegen O, O_2 und D auf einer Geraden, also auch die fünf Punkte O, O_1, O_2, D, E. Haben wir nun ein Dreieck FGH, dessen Ecken G und H auf A_1O und A_2O (oder auf B_1O und B_2O) liegen und dessen Seiten den Geraden A_1A_3, A_2A_4 und A_1A_2 respective pseudoparallel sind, dann liegt die Dreiecksecke F auf der Geraden DEO nach dem Desargues'schen Satz, und unser Zweck ist erreicht, wenn wir zeigen können, dass FO die bewusste Halbirungslinie ist. Es ist nun klar, dass, wenn nicht gerade Ausnahmefälle eintreten, man immer ein Dreieck mit den *wirklichen* Punkten F, G, H als Eckpunkten finden kann, das diesen Bedingungen genügt. Ausnahmelagen der beiden der Untersuchung zu Grunde liegenden Dreiecke können wir so behandeln, dass wir das eine der Dreiecke erst in ein beliebiges anderes pseudocongruent überführen und dieses dann unserer Betrachtung zu Grunde legen. Haben wir aber ein solches Dreieck FGH, so ist es leicht zu zeigen, dafs FO die Halbirungslinie des Winkels GOH ist. (Man beachte (s. Fig. 13), dass $OG \equiv OH \equiv OG' \equiv OH'$ ist, denn nach Construction stehen GH und $G'H'$ senkrecht auf der gemeinsamen Halbirungslinie der Winkel A_1OA_2 und B_1OB_2).

Folglich geht $C_1 C_2$ durch den Pol von $O_1 O O_2$. Ferner wählen wir einen passenden, wirklichen Punkt J auf $O_2 O$ und ziehen durch J Pseudoparallelen zu $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, die OA_1 und OA_2 in den wirklichen Punkten K resp. L schneiden mögen. Dann folgt aus dem Desargues'schen Satze, dass KL pseudoparallel zu $A_1 A_2$ ist und also senkrecht auf OO_2 steht. Weil nun OO_2 die Halbirungslinie des Winkels $A_1 O A_2$ ist, so folgt sofort, dass Winkel KJO congruent Winkel LJO ist. Fällen wir von O aus Lote auf JK und JL mit den respectiven Fusspunkten M und N, so stehen OM und ON nach Voraussetzung auf OC_1 resp. OC_2 senkrecht. Nun sind die Dreiecke MJO und NJO congruent; folglich ist nach dem Vorhergehenden der Winkel $C_1 O O_1$ congruent dem Winkel $C_2 O O_1$. Also ist nach unserer Definition der Pseudocongruenz $C_1 O$ pseudocongruent $C_2 O$ und auch $A_1 B_1$ pseudocongruent $A_2 B_2$. Da $\sphericalangle A_1 O C_1 \equiv \sphericalangle A_2 O C_2$ ist, so folgt aus unseren Definitionen über Pseudocongruenz von Winkeln, dass $\sphericalangle O A_1 B_1 \approx \sphericalangle O A_2 B_2$ ist. Ebenso zeigen wir endlich, dass die Winkel $A_1 B_1 O$ und $A_2 B_2 O$ pseudocongruent sind. Damit haben wir den ersten Pseudocongruenzsatz vollkommen erwiesen.

Man wird sich nun leicht überzeugen, dass jedem der Congruenzaxiome (s. Festschrift § 6) einer der im Vorhergehenden bewiesenen Sätze über Pseudocongruenz entspricht; deshalb können wir zusammenfassend folgenden Satz aussprechen:

Die Elemente unserer Pseudogeometrie mit Ausnahme der Elemente der Geraden t erfüllen alle Axiome der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie einschliesslich des Parallelenaxioms, und die Gerade t spielt die Rolle der „idealen" oder „unendlich fernen" Geraden.

§ 4.

Einführung der Streckenrechnung.

Da nun unsere Sätze niemals abhängig sind von den Gebilden, auf die sie mittels unserer geometrischen Sprache bezogen werden, sondern nur von den Axiomen, das heisst von den Eigenschaften, die wir von den Gebilden postuliren, so ist alles, was man in der gewöhnlichen Geometrie bewiesen hat und beweisen kann, auch erfüllt für unsere Pseudogeometrie. Hiervon wollen wir im Folgenden den weitgehendsten Gebrauch machen.

Zum Beispiel können wir sofort den Satz aussprechen:

Die Winkelsumme in irgend einem Dreieck ist pseudocongruent zwei Rechten.

Dann aber wollen wir sogleich die *Streckenrechnung* einführen, wie sie von D. Hilbert in seiner Festschrift Kap. III angegeben ist. Diese ermöglicht die Lehre von den Proportionen zu begründen und eine Art analytischer Geometrie zu construieren, ohne von dem Archimedischen Axiom Gebrauch zu machen, das wir ja bei unseren ganzen Untersuchungen ausschliessen wollten.

Wie leicht sich jetzt vieles gestaltet, werden wir sofort an dem Beweise folgender Sätze erkennen:

1) *Die drei Höhen in einem Dreieck schneiden sich auch in der Nicht-Euklidischen Geometrie in einem Punkte.*

Beweis: Legen wir den Punkt O in eine Dreiecksecke, so sind sämmtliche Lote entweder senkrecht auf Geraden durch O oder sie sind selbst Geraden durch O. Folglich sind sie auch Lote in unserer Pseudogeometrie. Dann müssen sie sich aber in einem Punkte schneiden, was zu beweisen war.

2) *Der Pascal'sche Satz vom Sechseck im Winkelraum.*

Derselbe kann, wie in der Festschrift gezeigt ist, auf Grund der Streckenrechnung nachgewiesen werden. Da er aber ein reiner Schnittpunktsatz ist, so gilt er unmittelbar auch in unserer Geometrie. Damit haben wir einen *Beweis des Pascal'schen Satzes auf Grund der Axiome der Gruppen I, II und der ebenen Axiome der Gruppe IV**) gewonnen.

Mittels des Pascal'schen Satzes können wir aber die *projective Geometrie* begründen, deren Sätze wir fernerhin häufig gebrauchen werden.

Ferner schreiben wir in Zukunft oftmals statt congruent: *gleich* ($=$), statt pseudocongruent: *pseudogleich* ($\approx$) und definiren in bekannter**) Weise, was wir darunter zu verstehen haben, wenn wir von einer Strecke a sagen, sie sei *kleiner als* b ($a < b$), *pseudokleiner als* b ($a \prec b$) *oder grösser als* b ($a > b$), *pseudogrösser als* b ($a \succ b$).

Das Hauptresultat unserer bisherigen Untersuchungen können wir folgendermassen aussprechen:

Alle reinen Schnittpunktsätze, die man auf Grund der Axiomgruppen I, II, III, IV beweisen kann, folgen auch bereits auf Grund der Axiomgruppen I, II, IV, d. h. ohne Parallelenaxiom.

---

*) Der specielle Pascal'sche Satz, bei dem die Pascalgerade die „unendlich ferne" Gerade ist, wird übrigens gerade zum Aufbau der Streckenrechnung in der Festschrift benutzt. Der allgemeine Fall desselben wird jedoch am einfachsten mittels der Streckenrechnung abgeleitet. — Einen Beweis des Pascal'schen Satzes mittels sämmtlicher Axiome der Gruppen I, II, IV giebt Schur, Math. Ann. Bd. 51.

**) s. Festschrift: Cap. III; § 15.

Capitel II.

Congruenz und Projectivität.

§ 5.

Fundamentalsatz.

Definition: Ordnen wir jedem wirklichen Punkte $A, B, C, \ldots$ einer Geraden g einen wirklichen Punkt $A_1, B_1, C_1, \ldots$ derselben Geraden g so zu, dass die Strecke zwischen zwei beliebigen wirklichen Punkten congruent der Strecke zwischen den entsprechenden Punkten ist, so nennen wir die *Punktreihen congruent*.

Es ergiebt sich leicht, dass zwei congruente Punktreihen entweder durch congruente Verschiebung aus einander hervorgehen, oder durch eine Spiegelung an einem beliebigen wirklichen Punkt der Geraden g zusammen mit einer congruenten Verschiebung. (Die Ausdrücke Spiegelung und congruente Verschiebung sind in dem üblichen Sinne zu verstehen.)

Dann sprechen wir folgenden für die Beziehungen zwischen Congruenz und Projectivität fundamentalen Satz aus:

Sind $A, B, C, \ldots$ und $A_1, B_1, C_1, \ldots$ congruente Punktreihen auf g, so gehen sie durch wiederholte Projection aus einander hervor (so sind sie „projectiv").

Die Spiegelung an einem Punkte S (s. Fig. 14) von g kann durch zwei Projectionen vermittelt werden. Wir errichten in S ein Lot XSY (s. Figur) und projiciren die Punktreihe $A, B, \ldots$ vom Pol der Halbirungslinie des Winkels XSW auf die Gerade XSY; die entstehende Punktreihe $\bar{A}, \bar{B}, \ldots$ projiciren wir vom Pol der Halbirungslinie des Winkels XSZ wieder auf g. Die so entstehende Punktreihe $A', B', \ldots$ ist dann das Spiegelbild der Punktreihe $A, B, \ldots$ am Punkt S, was wir zeigen wollten. Deshalb können wir unseren Beweis auf solche Punktreihen beschränken, die durch congruente Verschiebung, etwa um die Strecke v, aus einander hervorgehen.

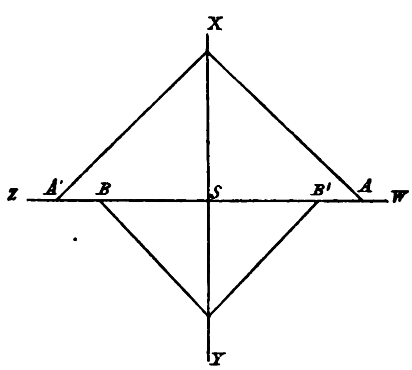


Fig. 14.

Seien (s. Fig. 15, S. 24) A und O wirkliche Punkte auf der Geraden g und AO grösser als die Verschiebungsstrecke v. Dann ziehen wir durch O eine zweite Gerade g_1 und tragen auf dem Halbstrahl von g_1, der mit

OA einen spitzen Winkel bildet, eine OA congruente Strecke bis A_3 ab. Ferner tragen wir die Verschiebungsstrecke v von O bis P ab, wo P zwischen O und A_3 auf OA_3 liegt. Wir verbinden dann den Punkt A mit P, errichten in der Mitte M von PA eine Senkrechte, die OA_3 in dem wirklichen oder idealen Punkt O_1 schneidet und verbinden A mit O_1 durch die Gerade g_2. Wir behaupten jetzt: Projiciren wir die Punktreihe $A, B, C, \ldots$ von g vom Pol der Halbirungslinie des Winkels A_3OA auf g_1 und erhalten so die Punkte $A_3, B_3, C_3, \ldots$, projiciren diese vom Pol von MO_1 auf g_2 und erhalten die Punktreihe $A_2, B_2, C_2, \ldots$, projiciren endlich diese vom Pol der Halbirungslinie eines der Winkel (g_2, g), so erhalten wir eine von den beiden Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ mit der verlangten Verschiebungsstrecke v, je nach der Seite, nach der verschoben werden soll. Es ist nämlich nach dem früher (§ 2) bewiesenen Hülfssatz über die

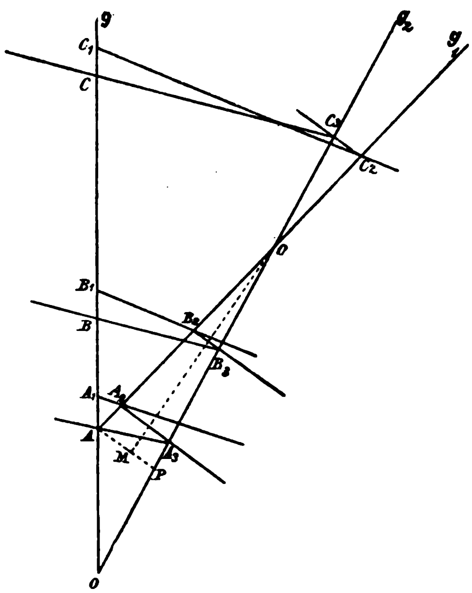


Fig. 15.

Mittelsenkrechte AA_1 congruent AA_2 congruent PA_3 congruent (nach Construction) der Strecke v, um die jeder Punkt von g verschoben werden sollte. Andrerseits ist AB congruent A_3B_3 congruent A_2B_2 congruent A_1B_1, und weil dasselbe für die Punkte C, D etc. gilt, sind die Punktreihen $A, B, \ldots$ und $A_1, B_1, \ldots$ congruent. Andrerseits entstehen sie aber aus einander durch mehrfache Projection, womit unser Satz erwiesen ist.

Daraus folgt sofort, dass congruente Punktreihen auf zwei beliebigen, verschiedenen Geraden projectiv sind. Denn man kann nach früher Gesagtem jede Gerade auf jede sie schneidende congruent projiciren. Dabei haben wir folgende Definition von congruenten Punktreihen auf verschiedenen Geraden vorausgesetzt:

Die Punktreihen $A_1, B_1, \ldots$ auf der Geraden a_1 und $A_2, B_2, \ldots$ auf der Geraden a_2 sind congruent, wenn:

$$A_1B_1 \equiv A_2B_2, \quad A_1C_1 \equiv A_2C_2, \quad B_1C_1 \equiv B_2C_2, \cdots$$

ist.

§ 6.

Beziehung zwischen Congruenz und Pseudocongruenz.

Da auf Grund der Lehre von den Proportionen leicht der Satz von der Erhaltung des Doppelverhältnisses bei Projection bewiesen werden kann, so folgt aus dem Satz des vorigen Paragraphen, dass zwei congruente Punktquadrupel, je auf einer Geraden gelegen, entsprechend pseudogleiche Doppelverhältnisse bilden. Diese Thatsache wollen wir zum Beweise des folgenden Satzes verwenden:

Seien A und A_1 (s. Fig. 16) *wirkliche Punkte auf der Geraden n durch O und OA (oder a) der Strecke AA_1 (oder a_1) congruent, ferner B*

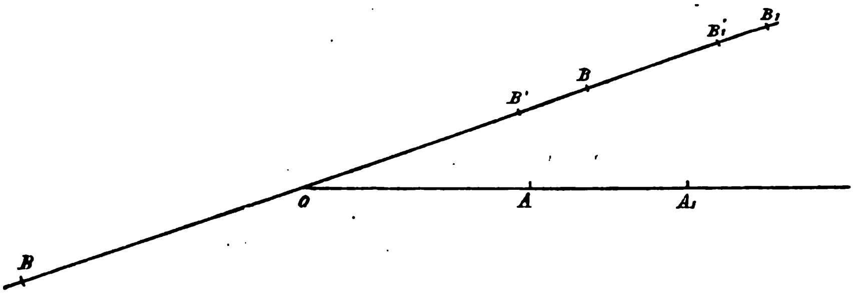


Fig. 16.

und B_1 zwei beliebige andere Punkte auf derselben oder einer anderen Geraden m durch O und OB (oder b) congruent BB_1 (oder b_1), dann behaupten wir:

Ist

$$a \overset{>}{\underset{<}{\approx}} a_1,$$

dann ist bezüglich auch

$$b \overset{>}{\underset{<}{\approx}} b_1.$$

Da wir wissen, dass von O aus abgetragene, congruente Strecken, zugleich pseudocongruent sind, so können wir ersichtlich unsere Betrachtungen auf eine Gerade m durch O beschränken. Wir beweisen zunächst folgenden Hülfssatz:

Sind B, B_1, B', B_1' wirkliche Punkte auf einer Geraden m durch O und ist BB_1 (oder b_1) $\equiv B'B_1'$ (oder b') $\equiv OB$ (oder b), und liegen B und B_1, B' und B_1' je auf derselben Seite von O auf m, dann wird behauptet:

Ist

$$b \overset{>}{\underset{<}{\approx}} b_1,$$

dann ist bezüglich auch:

$$b \mathrel{\substack{>\\ \approx\\ <}} b'.$$

Aus dem oben erwähnten Grunde können wir annehmen, dass B' auf der Seite BO von m liegt.

Sei ferner $O\bar{B}$ congruent und pseudocongruent OB, dann sind

$$(\bar{B},\ O,\ B,\ B') \quad \text{und} \quad (O,\ B,\ B_1,\ B_1')$$

congruente Punktquadrupel, deshalb ist:

$$\frac{\bar{B}O \cdot B'B}{\bar{B}B \cdot B'O} \approx \frac{OB \cdot B_1'B_1}{OB_1 \cdot B_1'B}$$

oder:

$$B_1'B \approx 2B'O \frac{OB \cdot BB_1}{B'O \cdot (2OB - OB_1) + OB_1 OB}.$$

Aus

$$OB \mathrel{\substack{>\\ \approx\\ <}} BB_1$$

folgt dann:

$$B_1'B \mathrel{\substack{<\\ \approx\\ >}} 2B'O \frac{OB \cdot BB_1}{OB_1 \cdot OB},$$

$$B_1'B \mathrel{\substack{<\\ \approx\\ >}} B'O.$$

Daraus folgt aber sofort:

$$b \mathrel{\substack{>\\ \approx\\ <}} b',$$

was bewiesen werden sollte. Indirect folgt dann, dass, wenn

$$b \mathrel{\substack{>\\ \approx\\ <}} b'$$

ist, auch

$$b \mathrel{\substack{>\\ \approx\\ <}} b_1$$

ist.

Wählen wir nun, um den Hauptsatz zu beweisen, als Punkt B' den Endpunkt der von O auf OB nach derselben Seite wie b abgetragenen Strecke a. Dann ist BB_1' congruent der Strecke a. Wenn nun:

$$a \mathrel{\substack{>\\ \approx\\ <}} a_1$$

ist (s. Figur 16), dann muss nach dem eben Bewiesenen auch

$$a \mathrel{\substack{>\\ \approx\\ <}} a'$$

sein, wenn wir mit a' die Strecke BB_1' bezeichnen. Daraus folgt aber wiederum, dass

$$b \underset{<}{\overset{>}{\approx}} b'$$

und deshalb auch

$$b \underset{<}{\overset{>}{\approx}} b_1$$

ist, womit unser Satz bewiesen ist.

Wir wollen noch einen zweiten sehr einfachen Beweis für diesen Satz angeben, einen Beweis, der uns zu einigen interessanten und wichtigen Resultaten führt.

Wir fragen uns nämlich nach den *Doppelpunkten gleichlaufender, congruenter Punktreihen* auf derselben Geraden.

Den Coordinatenanfangspunkt O legen wir auf diejenige Gerade m, die wir behandeln wollen. Dann tragen wir von O aus nach beiden Seiten auf m eine Strecke a bis A resp. $\bar{A}$ ab, von A aus eine weitere a congruente Strecke a_1 bis A_1. Ordnen wir den Punkten $\bar{A}OA$ entsprechend die Punkte OAA_1 zu, so haben wir dadurch zwei congruente gleichlaufende Punktreihen bestimmt. Wir wissen nun, dass das Doppelverhältniss eines Punktquadrupels der einen Reihe pseudogleich dem entsprechenden Doppelverhältniss des entsprechenden Punktquadrupels der anderen Reihe sein muss. Folglich muss die Coordinate x eines eventuellen Doppelpunktes folgende Bedingung erfüllen, welche aber auch die einzige ist:

$$\frac{x-a}{x+a} \approx \frac{a_1 x}{a(x+a+a_1)}$$

oder:

$$x^2 \approx \frac{a^2(a+a_1)}{a-a_1}.$$

Wir wollen auf die Existenzfrage der Doppelpunkte nicht weiter eingehen, beweisen aber folgenden wichtigen Satz:

Die Coordinaten der Doppelpunkte aller Paare von congruenten, gleichlaufenden Punktreihen auf derselben Geraden erfüllen ein und dieselbe Pseudogleichung.

Ist also b irgend eine von O aus bis B abgetragene Strecke, BB oder b_1 congruent OB, dann muss:

$$\frac{a^2(a+a_1)}{a-a_1} \approx \frac{b^2(b+b_1)}{b-b_1}$$

sein, damit unsere Behauptung richtig ist. Wir nehmen der Einfachheit wegen an, B und B_1 lägen auf derselben Seite von O auf m wie A und A_1. Seien $\overline{B}$ und A' Punkte auf der Geraden m derart, dass $O\overline{B}$ con-

Fig. 17.

gruent und pseudocongruent OB und BA' oder a' congruent OA ist und B zwischen O und A' liegt (s. Fig. 17). Dann sind

$$(\overline{B},\ O,\ A,\ B) \quad \text{und} \quad (O,\ B,\ A',\ B_1),$$

ferner

$$(\overline{A},\ O,\ A,\ B) \quad \text{und} \quad (O,\ A,\ A_1,\ A')$$

congruente Punktquadrupel. Daraus ergeben sich folgende beiden Relationen:

$$\frac{b-a}{2a} \approx \frac{b(b_1-a')}{a'(b_1+b)},$$

$$\frac{b-a}{b+a} \approx \frac{a(b+a'-a_1-a)}{a_1(a'+b)}.$$

Durch Elimination von a' aus diesen Pseudogleichungen ergiebt sich eine Beziehung zwischen a, a_1, b und b_1, welche man nach einer leichten Umrechnung als identisch mit der oben verlangten Relation:

$$\frac{a^2(a+a_1)}{a-a_1} \approx \frac{b^2(b+b_1)}{b-b_1}$$

erkennt, womit unser Satz bewiesen ist. Aus dieser einfachen Beziehung aber folgt sofort der Hauptsatz dieses Paragraphen, von dem wir einen zweiten Beweis geben wollten. Denn es ergiebt sich aus der angeführten Pseudogleichung Folgendes:

Ist $a \succ a_1$, so ist die linke Seite der Gleichung positiv, also muss auch die rechte Seite positiv und $b \succ b_1$ sein. Ebenso folgt aus

$$a \prec a_1:$$
$$b \prec b_1$$

und endlich aus

$$a \approx a_1:$$
$$b \approx b_1,$$

womit unser Ziel erreicht ist.

§ 7.

Der zweite Legendre'sche Satz.

Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz führt unmittelbar auf folgende fundamentale Thatsachen:

Ist in irgend einem Dreieck die Winkelsumme kleiner als zwei rechte Winkel, so ist in jedem Dreieck die Winkelsumme kleiner als zwei rechte Winkel.

Ist in irgend einem Dreieck die Winkelsumme gleich zwei rechten Winkeln, so ist sie in jedem Dreieck gleich zwei rechten Winkeln.

Ist in irgend einem Dreieck die Winkelsumme grösser als zwei rechte Winkel, so ist sie in jedem Dreieck grösser als zwei rechte Winkel.

Der mittlere dieser drei Sätze ist nichts anders als der bekannte zweite Legendre'sche Satz, der jedoch von Legendre nur mit Hülfe der Stetigkeit (also Benutzung des Archimedischen Axioms) bewiesen worden ist.

Beweis: Wir betrachten ein beliebiges Dreieck und fällen von einer Ecke desselben auf die gegenüberliegende Seite das Lot. Wir sehen sofort, dass die Winkelsumme im Dreieck kleiner, gleich oder grösser als zwei rechte Winkel ist, jenachdem einer dieser Fälle für die beiden rechtwinkligen Teildreiecke gleichzeitig eintritt. Wir können unsere Betrachtungen also auf rechtwinklige Dreiecke beschränken.

Durch congruente Uebertragung können wir es als erreicht annehmen, dass der Scheitel des rechten Winkels im betrachteten Dreieck in den Coordinatenanfangspunkt fällt. Die anderen Ecken mögen A und B sein. Wir wollen zeigen, dass je nachdem die erste, zweite oder dritte „Hypothese" des Satzes im vorigen Paragraphen eintritt, die Winkelsumme in dem Dreieck OAB kleiner, gleich oder grösser als zwei rechte Winkel ist; damit ist dann gleichzeitig gezeigt, dass jedes beliebige andere Dreieck gleichzeitig eine Winkelsumme kleiner, gleich oder grösser als zwei R hat.

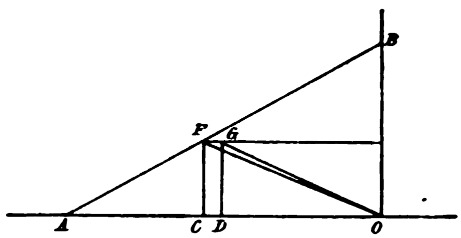


Fig. 18.

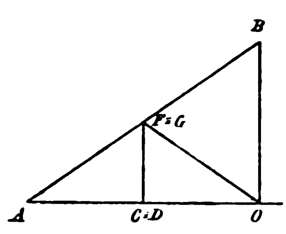


Fig. 19.

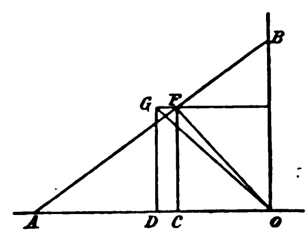


Fig. 20.

Dazu brauchen wir (s. Fig. 18, 19, 20) nur zu beweisen, dass jeder der beiden Winkel OAB und OBA dadurch, dass man ihn in O congruent anträgt, pseudokleiner (bez. pseudogleich, bez. pseudogrösser) geworden (bez. geblieben) ist, je nach der als zutreffend angenommenen Hypothese. Denn die Winkelsumme im Dreieck OAB ist, wie wir wissen, pseudocongruent zwei rechten Winkeln und für Winkel mit dem Scheitel in O ist Congruenz und Pseudocongruenz dasselbe.

Zu diesem Zwecke halbiren wir OA in C und tragen CA von O bis D pseudocongruent ab, dann liegt nach unserer Annahme D zwischen O und C (bez. fällt nach unserer Annahme D mit C zusammen, bez. liegt nach unserer Annahme C zwischen O und D). Ferner errichten wir in C ein Lot und verbinden den Schnittpunkt F des Lotes mit AB mit O, ebenso errichten wir in D ein Lot und schneiden es mit dem Lote von F auf OB in G. Dann ist $DG \approxeq CF$. Das Dreieck ACF ist congruent dem Dreieck OCF, folglich der Winkel OAB congruent dem Winkel DOF; und das Dreieck ACF pseudocongruent dem Dreieck GOD, folglich der Winkel OAF pseudocongruent dem Winkel DOG und $\sphericalangle DOF \left\{\begin{matrix} < \\ \approxeq \\ > \end{matrix}\right\} \sphericalangle DOG$. Folglich ist der Winkel OAB, indem wir ihn congruent in den Winkel AOF überführten $\left\{\begin{matrix}\text{pseudokleiner geworden} \\ \text{pseudogleich geblieben} \\ \text{pseudogrösser geworden}\end{matrix}\right\}$, was zu beweisen war. Dasselbe folgt für den Winkel OBA. Folglich ist, je nachdem wir unsere Hypothese wählen, die Winkelsumme in allen Dreiecken $\lesseqgtr 2R$, was wir im Anfang behauptet hatten.

Capitel III.

Beziehungen zwischen den Hypothesen über die Winkelsumme im Dreieck und den Hypothesen über Parallelen.

§ 8.

Die Nicht-Legendre'sche Geometrie.

Der sogenannte „erste Legendre'sche Satz" sagt, wie im Eingang erwähnt, aus, dass die Winkelsumme in einem Dreieck niemals grösser als zwei Rechte sein kann. Man überzeugt sich leicht, dass mit den bisher angewandten Methoden der Beweis dieses Satzes nicht gelingen kann. Es liegt deshalb nahe zu untersuchen, ob es überhaupt möglich ist, denselben ohne Zuhülfenahme des Archimedischen Axioms zu beweisen. Wäre es unmöglich, so würde das bedeuten, dass die drei verschiedenen *Hypothesen über Existenz und Anzahl der Geraden* durch einen Punkt, welche eine Gerade nicht schneiden, *sich nicht decken* mit *den* drei verschiedenen *Hypothesen über die Grösse der Winkelsumme im Dreieck.* Bekanntlich folgt unter Zuhülfenahme der Stetigkeit, dass die Winkelsumme in einem Dreieck grösser, gleich oder kleiner als zwei R ist, je nachdem es zu einer Geraden durch einen Punkt keine, eine oder unendlich viele Parallelen giebt, d. h. die einen drei verschiedenen Hypothesen decken sich mit den anderen drei verschiedenen Hypothesen in jeder Archimedischen Geometrie. Zunächst wollen wir nachweisen, dass es eine Geometrie giebt, in der durch jeden Punkt zu jeder Geraden unendliche viele Parallelen möglich sind und dennoch die Winkelsumme grösser als $2R$ ist. Damit ist dann die Unbeweisbarkeit des ersten Legendre'schen Satzes bewiesen und gezeigt, dass die *Hypothese des stumpfen Winkels,* wie sie Saccheri nennt, *sich nicht deckt mit der Hypothese der Endlichkeit der Geraden.* Weiterhin wollen wir dann noch einige Sätze beweisen, die den Zusammenhang zwischen den beiden Gruppen von Hypothesen klar machen sollen.

Dem Folgenden wollen wir durchgängig den Bereich complexer Zahlen $\Omega(t)$ zu Grunde legen, der in der Festschrift § 12 eingeführt ist, um eine *„Nicht-Archimedische“ Geometrie* aufzubauen. Wir wollen dies in Kürze hier wiederholen: $\Omega(t)$ ist zunächst der Bereich aller derjenigen algebraischen Functionen von t, die aus t durch die vier Rechnungsoperationen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division und durch die fünfte Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ hervorgehen, wo ω irgend eine Function ist, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist. Wir sehen dann die Functionen des Bereiches $\Omega(t)$ als eine Art complexer Zahlen an; für diese sind offenbar die gewöhnlichen Rechnungsregeln sämmtlich gültig. Ferner möge, wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen dieses complexen Zahlensystems sind, die Zahl a grösser oder kleiner ($a > b$, $a < b$) heissen, je nachdem die Differenz $c = a - b$ als Function von t für genügend grosse positive Werte von t stets positiv oder stets negativ ausfällt. Durch diese Festsetzung wird erreicht, dass die gewöhnlichen Gesetze, welche die Bezeichnungen „grösser“ und „kleiner“ betreffen, auch bei diesen complexen Zahlen erfüllt sind.

Aus diesen Zahlen bauen wir eine ebene Geometrie auf: Wir denken uns ein System von zwei Zahlen des Bereiches $\Omega(t)$ als einen Punkt und die Verhältnisse von irgend drei Zahlen $(u : v : w)$ aus Ω, falls u und v nicht beide null sind, als eine Gerade. Ferner möge das Bestehen der Gleichung:

$$ux + vy + w = 0$$

ausdrücken, dass der Punkt (x, y) auf der Geraden $u : v : w$ liegt. Treffen wir sodann die entsprechenden Festsetzungen über die Anordnung der

Elemente und über Abtragen von Strecken und Winkeln, wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie, so entsteht eine Geometrie, in der sämmtliche Axiome mit alleiniger Ausnahme des Archimedischen Axioms erfüllt sind.

In dieser „Nicht-Archimedischen" Ebene construiren wir uns zunächst eine gewöhnliche „elliptische" oder „Riemannsche" Geometrie. Dies kann, wie bekannt, folgendermassen geschehen:

Wir legen die Gleichung eines nulltheiligen Kegelschnittes, etwa:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

zu Grunde. Punkte und Gerade sind Punkte und Gerade der zu Grunde gelegten Geometrie einschliesslich der „unendlich fernen" Geraden und ihrer Punkte. Zwei Figuren in unserer Geometrie sind congruent, wenn sie durch eine reelle lineare Transformation aus einander hervorgehen, die die zu Grunde gelegte quadratische Gleichung in sich überführt. In dieser Geometrie gelten alle Axiome ausser dem Euklidischen und Archimedischen Axiom; wir müssen dann allerdings an den Axiomen der Anordnung entsprechende Modificationen anbringen. Doch mit diesen wollen wir uns nicht aufhalten, da sie für unsere Zwecke gar nicht in Betracht kommen.

In dieser elliptischen Geometrie grenzen wir ein Gebiet ab, in dem wir als Punkte unserer neuen Geometrie nur diejenigen Punkte bezeichnen, deren Coordinaten x, y folgenden Bedingungen genügen:

$$\frac{+n}{t} > \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} > \frac{-n}{t},$$

wo n eine beliebige ganze rationale Zahl ist. Die Geraden unserer Geometrie seien die Geraden der elliptischen Geometrie, soweit die Coordinaten der Punkte auf denselben die oben aufgestellten Bedingungen erfüllen. Die Strecken- und Winkelabtragung definiren wir ebenso wie in der elliptischen Geometrie, so dass, wenn in dieser zwei Strecken oder Winkel congruent sind, sie auch in unserer congruent sind. Nun müssen wir aber noch zeigen, dass wir durch Strecken- und Winkelabtragung nicht aus unserem Gebiete herauskommen können. Das soll folgendermassen geschehen:

Wir tragen eine beliebige Strecke c auf der x-Axe vom Anfangspunkt O bis P ab und von P aus eine c congruente Strecke c_1 bis Q. Wir untersuchen, ob Q noch zu unserem Gebiete gehört. Nach Definition ist, wenn i formell für $\sqrt{-1}$ gesetzt ist:

$$\frac{(i-(c+c_1)\,(i+c))}{(i-c)\,(i+(c+c_1))} = \frac{i-c}{i+c},$$

denn congruente Strecken auf derselben Geraden bilden mit den „Schnittpunkten" der Geraden mit dem Fundamentalkegelschnitt gleiche Doppelverhältnisse.

Daraus folgt:

$$c + c_1 = \frac{2c}{1 - c^2},$$

und da nun c nach Definition grösser als $\frac{-n}{t}$ und kleiner als $\frac{+n}{t}$ ist, so folgt:

$$\frac{\frac{-2n}{t}}{1 - \left(\frac{n}{t}\right)^2} < c + c_1 < \frac{\frac{+2n}{t}}{1 - \left(\frac{n}{t}\right)^2}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{nt}{t^2 - n^2} < \frac{2n}{t},$$

denn hieraus folgt:

$$2n^2 < t^2,$$

was ja sicher richtig ist.

Folglich ist:

$$\frac{-4n}{t} < c + c_1 < \frac{+4n}{t}.$$

Q liegt also noch innerhalb unseres Gebietes. Dann aber kommen wir auch aus unserem Gebiete nicht heraus, wenn wir irgend eine innerhalb unseres Gebietes auf einer Geraden durch O gelegene Strecke von irgend einem Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden durch O abtragen, wie man sich sofort überzeugen wird. Denn die Geraden durch O gehen im Sinne unserer Geometrie congruent in einander über durch Drehung um O, und diese Drehung führt Punkte unseres Gebietes in eben solche über. Eine Drehung wird nämlich vermittelt durch die Transformationsgleichungen:

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, y,$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, y.$$

Vorausgesetzt ist, dass:

$$\frac{-n}{t} < \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} < \frac{+n}{t}$$

ist. Dann ist:

$$-\frac{n}{t}-\frac{n}{t}<\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}<\frac{n}{t}+\frac{n}{t}$$

oder

$$-\frac{2n}{t}<\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}+\frac{2n}{t},$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Zweitens tragen wir die beliebige Strecke $OP=c$ von einem Punkte der x-Axe mit den Coordinaten $(d, 0)$ auf einer zur x-Axe senkrechten Geraden ab. Wir wollen sehen, ob der andere Endpunkt der Strecke noch innerhalb unseres Gebietes liegt. Dieser Endpunkt habe die Coordinaten d, e. Dann folgt vermöge unserer Definition der Congruenz, dass:

$$\frac{i-c}{i+c}=\frac{i\sqrt{1+d^2}-e}{i\sqrt{1+d^2}+e}$$

und

$$e=c\sqrt{1+d^2}$$

ist. Nun ist:

$$-\frac{n}{t}<\begin{Bmatrix} d \\ c \end{Bmatrix}<+\frac{n}{t}$$

und

$$\sqrt{1+\left(\frac{n}{t}\right)^2}<2.$$

Folglich ist:

$$-\frac{2n}{t}<e<+\frac{2n}{t}.$$

Also liegt auch der andere Endpunkt von e in unserem Gebiete. Da $e>c$ ist, wie aus obigen Formeln hervorgeht, so folgt unmittelbar, dass man auch durch die umgekehrte Abtragung nicht aus unserem Gebiete herauskommen kann. — Haben wir jetzt eine beliebige Strecke AB auf der Graden a und wollen diese vom Punkte A' auf der beliebigen Geraden a' unseres Gebietes abtragen, so fällen wir von O auf a und a' Lote, die diese Geraden in C resp. D schneiden. C und D müssen augenscheinlich Punkte unseres Gebietes sein, wenn a und a' Geraden unseres Gebietes sind. Dann ergiebt sich auf Grund der vorher bewiesenen Möglichkeit von zwei bestimmten Arten des congruenten Abtragens, dass wir auch die Strecke AB auf der Geraden a' vom Punkte A' aus nach beiden Seiten hin abtragen können, ohne aus dem eingeschränkten Gebiet der Nicht-Archimedischen Ebene herauszukommen.

Dass wir durch Winkelabtragen nicht aus unserem Gebiete heraus kommen, ist klar. Wir sind also berechtigt folgenden Satz auszusprechen:

Die im Vorhergehenden eingeführte Geometrie erfüllt sämmtliche Axiome mit Ausnahme des Euklidischen und Archimedischen Axioms.

Das bei dem Aufbau dieser Geometrie benutzte Nicht-Archimedische Coordinatensystem entspricht durchaus dem in unseren früheren Betrachtungen benutzten Systeme der Pseudogeometrie. Nun haben wir gesehen, dass, wenn wir die Strecke $OP = c$ von P aus congruent abtragen bis Q, $PQ = c_1$ sich durch c folgendermassen ausdrückt:

$$c_1 = c\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}\right) > c.$$

Dieselbe Beziehung hätten wir früher folgendermassen ausgedrückt:

$$c_1 \approx c\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}\right) \succ c.$$

Aber wir haben bewiesen, dass, wenn in einer Geometrie c_1 pseudogrösser ist als c, die Winkelsumme in jedem Dreieck grösser als zwei Rechte ist.

Folglich haben wir eine Geometrie construirt, die allen Axiomen I, II, IV Genüge leistet, in der ferner durch jeden Punkt zu jeder Geraden unendlich viele Parallelen möglich sind, in der aber nichtsdestoweniger die Winkelsumme in jedem Dreieck grösser als zwei rechte Winkel ist.

Das Archimedische Axiom gilt dann natürlich nicht.

Damit ist die Unbeweisbarkeit des I. Legendre'schen Satzes ohne Zuhülfenahme des Archimedischen Axioms nachgewiesen. Die zu diesem Beweise benutzte Hülfsgeometrie können wir deshalb *„Nicht-Legendre'sche“ Geometrie* nennen, was wir schon in der Einleitung erwähnt hatten.

§ 9.

Die Semi-Euklidische Geometrie.

Wir wollen nun noch, wie schon oben gesagt, den Zusammenhang zwischen den Hypothesen über die Winkelsumme im Dreieck und über Anzahl und Existenz von Parallelen etwas eingehender prüfen. Dazu construiren wir uns zunächst in der im vorigen Paragraphen gebrauchten „Nicht-Archimedischen“ Ebene eine zweite Geometrie. Die Punkte derselben seien diejenigen Punkte, deren Coordinaten die Bedingungen erfüllen:

$$-n < \left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} < +n,$$

wo n eine beliebige ganze rationale positive Zahl bedeutet. Die Geraden unserer Geometrie seien die Geraden der zu Grunde gelegten Geometrie, soweit die Coordinaten der Punkte auf denselben die oben aufgestellte Bedingung erfüllen. Die Strecken- und Winkelabtragung definiren wir ebenso wie in der zu Grunde gelegten Euklidischen Geometrie, sodass, wenn in dieser zwei Strecken oder Winkel congruent sind, sie auch in unserer congruent sind. Ebenso wie in der vorhin construirten Geometrie ist es wieder unsere Aufgabe nachzuweisen, dass wir durch Strecken- und Winkelabtragung niemals aus unserem Punktgebiet herauskönnen. Zunächst ist klar, dass die Transformation

$$x' = x + a,$$
$$y' = y + b,$$

welche die Parallelverschiebung von Strecken und Winkeln vermittelt, nicht Punkte unseres Gebietes in Punkte, die demselben nicht angehören, überführt. Denn nach Definition ist

$$-n < \begin{Bmatrix} x \\ y \\ a \\ b \end{Bmatrix} < +n.$$

Folglich ist

$$-2n < \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} < +2n,$$

was unserer Behauptung entspricht.

Um sämmtliche Abtragungsoperationen vollführen zu können, haben wir noch eine Drehung um den Coordinatenanfangspunkt O hinzuzunehmen. Diese wird vermittelt durch die Transformationsgleichungen:

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y,$$
$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y.$$

Ist nun:

$$-n < \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} < +n,$$

dann ist:

$$-n-n < \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} < n+n,$$

$$-2n < \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} < +2n,$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

In dieser so construirten Geometrie gelten demgemäss sämmtliche Axiome der Gruppen I, II, IV. Ferner haben aber auch sämmtliche Sätze der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie, soweit sie mit einem „beschränkten" Raumstück zu thun haben, in derselben Gültigkeit. Die Winkelsumme ist in jedem Dreieck gleich zwei rechten Winkeln, es giebt Rechtecke und ähnliche nicht congruente Dreiecke.

Aber durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden giebt es mehr als *eine* jene nicht schneidende Gerade: Das Parallelenaxiom gilt nicht. Verbinde ich zum Beispiel den Punkt $(t, 0)$ mit dem Punkte $(0, 1)$, so gehört diese Gerade zu unserem Gebiet, denn sie verbindet zwei Punkte desselben: die Punkte $(0, 1)$ und $\left(1, \frac{t-1}{t}\right)$. Diese Gerade schneidet aber die Coordinatenaxe $y = 0$ nicht in einem Punkte unseres Gebietes; ebensowenig aber die Gerade durch $(-t, 0)$ und $(0, 1)$, die von der ersten verschieden ist.

Das Resultat ist also:

Es giebt Nicht-Archimedische Geometrien, in denen das Parallelenaxiom nicht gültig ist und dennoch die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich zwei rechten Winkeln ist.

Eine solche Geometrie wollen wir „*Semi-Euklidisch*“ nennen.

Es ergiebt sich also, dass keiner der Sätze: die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte; die Abstandscurve ist eine Gerade etc., mit dem Parallelenaxiom als äquivalent angesehen werden kann, und dass Euklid mit der Aufstellung des Parallelenaxioms gerade das Richtige traf.

§ 10.

Der Legendre'sche Satz in der elliptischen Geometrie.

Zum Schlusse wollen wir noch kurz in diesem Zusammenhange die „*elliptische*“ *Geometrie* behandeln. In derselben wird vorausgesetzt, dass sich alle Geraden wirklich schneiden. Damit diese Annahme den Axiomen nicht widerspricht, müssen wir einige leicht einzuführende Aenderungen an den Axiomen der Gruppe II — den Axiomen der Anordnung — machen. Nichts hindert aber auch in einer solchen Geometrie die oftmals gebrauchte Pseudogeometrie einzuführen und auch den allgemeinen Satz des § 6 abzuleiten. Betrachten wir eine Gerade durch den Punkt O und sei J ihr unendlich ferner Punkt. Dann kann ich auf OJ einen Punkt J_1 so finden, dass $OJ_1 \equiv J_1J$ ist, denn J ist ein wirklicher Punkt in der elliptischen Geometrie. Ferner sei $OJ_2 \equiv J_2J_1$. Wenn nun OJ_2 nicht pseudokleiner als J_2J_1 wäre, so müsste auch OJ_1 pseudogrösser sein als J_1J gemäss des Satzes im § 6, was natürlich nicht der Fall ist. Dann ist aber nach demselben Satz eine jede Strecke OA pseudokleiner als die von A nach derselben Seite OA congruent abgetragene Strecke AA_1. Daraus folgt aber nach dem Satze des § 7, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck grösser als zwei rechte Winkel ist. Wir haben also das Resultat:

Giebt es in einer Geometrie keine Parallelen und gelten in derselben alle Axiome der Gruppen I, IV und die entsprechend modificirten der Gruppe II, dann ist die Winkelsumme stets grösser als zwei rechte Winkel.

Dieser Satz spricht die höchst überraschende Thatsache aus, dass das Analogon des ersten Legendre'schen Satzes für den Fall der Nichtexistenz von Parallelen (ohne Voraussetzung der Stetigkeit) gilt.

Die verschiedenen, so gewonnenen Einzelresultate ordnen wir am Besten in folgendes Schema ein:

Die Winkelsumme im Dreieck ist:	Durch einen Punkt giebt es zu einer Geraden:		
	keine Parallele	eine Parallele	unendlich viele Parallelen.
$> 2R$	Elliptische Geometrie	(Unmöglich)	Nicht-Legendre'sche Geometrie
$= 2R$	(Unmöglich)	Euklidische Geometrie	Semi-Euklidische Geometrie
$< 2R$	(Unmöglich)	(Unmöglich)	Hyperbolische Geometrie.

Zum Schlusse erfülle ich die angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Hilbert, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, und der während der Ausführung mich stets mit förderndem Rath unterstützt hat, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Einige Sätze über regelmässige Punktgruppen.*)

Von

K. Rohn in Dresden.

Bei der Untersuchung der Krystallstructur, d. h. des Aufbaues eines Krystalls aus einzelnen gleichartigen Molekeln, geht man von der Annahme aus, dass sich die Anordnung der Molekel im Krystall nur unter der gegenseitigen Einwirkung derselben auf einander vollzieht. Diese Wechselwirkung zwischen den Molekeln wird ihre räumliche Vertheilung bestimmen, und da alle Molekel gleichartig sind, wird jede einzelne im Bereich ihrer Wirkungssphäre die gleiche Anordnung der Nachbarmolekel veranlassen. Hierbei ist es offenbar gestattet von der äusseren Begrenzung des Krystalls als etwas Zufälligem ganz abzusehen; in der That würde durch ein Weiterwachsen desselben jeder Punkt der Oberfläche zu einem inneren Punkte werden. Ferner wird man jede Molekel durch einen Punkt ersetzen können, sobald es nur auf ihre Gruppirung ankommt, und zwar um so mehr, als ihre Eigenart sich schon in der Lagerung der sie umgebenden Molekel ausspricht: Auf diese Weise gelangt man dazu die Krystallstructur durch eine regelmässige Punktgruppe zu repräsentiren und diese wie folgt zu definiren. *Eine regelmässige Punktgruppe von unbegrenzter Ausdehnung besitzt eine derartige Anordnung ihrer Punkte im Raume, dass jeder einzelne von der Gesammtheit der übrigen in gleicher Weise umlagert ist.* Wir wollen uns nun klar zu machen suchen, in welcher Weise solche regelmässige Punktgruppen gewonnen werden können.

Sind P und P_1 irgend zwei Punkte der Gruppe, so muss nach der Definition die Configuration der Nachbarpunkte von P die gleiche sein, wie diejenige der zu P_1 benachbarten Punkte; die beiden Configurationen müssen demnach entweder congruent oder symmetrisch sein. Wir haben also zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle sind die Configurationen

*) Schoenflies, Krystallsysteme und Krystallstructur (Teubner. Leipzig 1891) S. 627 u. ff. — Rohn, Krystallstructur und regelmässige Punktgruppen; Berichte der Leipziger Ges. der Wiss., 4. Dec. 1899.

für alle Punkte der Gruppe unter einander congruent, im zweiten sind sie dagegen theilweise congruent und theilweise symmetrisch. In diesem letzteren Falle wird die ganze Punktgruppe sich in zwei Theilgruppen spalten lassen, so dass jeder Theil für sich nur solche Punkte enthält, bei denen die Configurationen der Nachbarpunkte congruente Formen aufweisen.

Haben wir es mit einer Punktgruppe der ersten Art zu thun und nur solche brauchen wir füglich für unsere Zwecke zu betrachten, so können wir zunächst durch eine Parallelverschiebung P in die Lage P_1 überführen, und darauf durch eine geeignete Drehung um P_1 die Configuration der Nachbarpunkte von P mit derjenigen von P_1 zur Deckung bringen. Diese combinirte Bewegung bringt natürlich auch die gesammte Punktgruppe mit sich selbst zur Deckung; eine solche Bewegung kann aber stets durch eine einzige Schraubenbewegung ersetzt werden. Es giebt also unendlich viele Schraubenbewegungen, die eine regelmässige Punktgruppe mit sich selbst zur Deckung bringen; dabei kann die Schraubung so eingerichtet werden, dass P in einen beliebigen andern Punkt der Gruppe übergeht. Alle diese Schraubungen, welche die Punktgruppe in sich überführen, müssen eine Gruppe im Sinne der Gruppentheorie bilden; denn durch Combination solcher Schraubungen ergiebt sich wieder eine Schraubung von gleicher Eigenschaft. Indem man die Gesammtheit der Schraubungen nach und nach auf den Punkt P anwendet, erhält man alle Punkte der Gruppe, und man sagt, die Gruppe der Schraubungen erzeugt die regelmässige Punktgruppe. Eine solche allgemeine Gruppe von Schraubungen soll weiterhin stets mit Γ und die durch sie aus P erzeugte Punktgruppe stets mit Π bezeichnet werden. Seien nun $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ irgend zwei Schraubungen der Gruppe Γ, so kann man mit ihrer Hilfe durch Combination und Iteration eine Gruppe Γ' bilden, deren Schraubungen von der Form $\mathfrak{A}^{\varkappa}\mathfrak{B}^{\lambda}\mathfrak{A}^{\mu}\mathfrak{B}^{\nu}\cdots$ sind, und die aus P eine regelmässige Punktgruppe Π' erzeugen. Es fragt sich nun, in welchem Zusammenhang stehen Γ' und Γ. Jedenfalls ist Γ' eine Untergruppe von Γ, oder beide sind identisch.

Erinnern wir uns jetzt daran, dass die regelmässige Punktgruppe Π die gegenseitige Lagerung der Molekel eines Krystalls repräsentiren soll, und dass in Folge dessen die Abstände benachbarter Punkte der Gruppe zwar sehr klein sein können, aber sicher oberhalb einer bestimmten, von Null verschiedenen, endlichen Grenze bleiben müssen. Wir haben also hier nur *regelmässige Punktgruppen mit endlichen Abständen zwischen den Nachbarpunkten* zu betrachten.

Jeder Punkt P_i von Π, der nicht zugleich der Gruppe Π' angehört, wird einem bestimmten Punkte $P'_{\varkappa}$ von Π' am nächsten liegen, und wir wollen sagen: P_i gehört der Umgebung von $P'_\varkappa$ an. In gleicher Weise wird jeder Punkt von Π der Umgebung eines Punktes von Π' zugetheilt werden können, falls er nicht zu Π' gehört. Sollte im speciellen Falle P_i von mehreren Punkten P'_k, P'_l, P'_m der Gruppe Π' gleiche Abstände besitzen, so kann man ein einfaches Mittel anwenden, um ihn gleichwohl der Umgebung eines bestimmten Punktes von Π' zuzutheilen. Man ziehe durch den ursprünglichen Punkt P einen Strahl, der dann durch die einzelnen Schraubungen der Gruppe Γ' in Strahlen durch die einzelnen Punkte von Π' übergeht, und man rechne P_i der Umgebung desjenigen unter den Punkten P'_k, P'_l, P'_m zu, dessen Strahl von P_i den geringsten Abstand hat. Offenbar gehören der Umgebung eines jeden Punktes von Π' gleich viele Punkte von Π an; diese Zahl muss endlich sein und wir wollen sie mit $(n-1)$ bezeichnen. Grenzt man nämlich um den Punkt P herum einen räumlichen Bereich ab, der alle Punkte einschliesst, die näher, oder ebenso nahe bei P liegen, als bei irgend einem anderen Punkte von Π', so besitzt dieser Bereich endliche Dimensionen und kann somit nur eine endliche Anzahl von Punkten der Gruppe Π enthalten. *Man kann demnach die Punktgruppe Π erzeugen, indem man auf P und die $(n-1)$ Punkte in seiner Umgebung alle Schraubungen der Gruppe Γ' anwendet.* Die Gruppe Π zerfällt in n Theilgruppen, von denen jede für sich bei den Schraubungen von Γ' ungeändert bleibt.

Hieraus können wir aber den weiteren Satz erschliessen: *Jede Schraubung der Gruppe Γ tritt in irgend einer Potenz auch in der Untergruppe Γ' auf.* Denn eine Schraubung $\mathfrak{R}$ von Γ und ihre Potenzen erzeugen aus P eine unendliche Reihe von Punkten, die äquidistant auf einer Schraubenlinie liegen. Da diese sich auf die vorher erwähnten n Theilgruppen vertheilen, so muss von den n Punkten, die aus P durch die Schraubungen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^3, \cdots, \mathfrak{R}^n$ hervorgehen, mindestens einer der gleichen Theilgruppe angehören wie P. Somit giebt es eine Potenz von $\mathfrak{R}$, deren Exponent $\leqq n$ ist, die auch der Gruppe Γ' als Schraubung angehört.

Das bisher Gesagte mag genügen, um die Vorstellungen über regelmässige Punktgruppen mit endlichen Abständen zu präcisiren. Wir werden nun weiterhin den fundamentalen Satz beweisen, *dass eine Gruppe Γ nur dann eine regelmässige Punktgruppe mit endlichen Abständen erzeugt, falls zu allen ihren Schraubungen nur solche Winkel gehören, die modulo 2π mit einem der vier Winkel $\pm\frac{\pi}{3}$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3}$ oder π congruent sind.* Der Beweis, den wir unabhängig von den vorausgehenden Betrachtungen führen werden, stützt sich auf die Untersuchung congruenter Schraubenaxen in der Gruppe Γ.

Sei $\mathfrak{A}$ irgend eine Schraubung von Γ, seien ferner a ihre Axe,

α ihr Winkel und A ihre Translationsstrecke. Dann wollen wir alle Geraden, die aus a durch die verschiedenen Schraubungen von Γ hervorgehen, zusammenfassen und als ein System *congruenter* Axen bezeichnen. Jede von ihnen ist Schraubenaxe für eine zu $\mathfrak{A}$ gleich grosse oder congruente Schraubung von der Form $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{R}$, wo $\mathfrak{R}$ eine beliebige Schraubung von Γ ist. Es sind nun hier zwei verschiedene Möglichkeiten in Erwägung zu ziehen. Erstens das System congruenter Axen enthält zwei parallele, und zweitens es giebt in demselben keine parallele Axen. Beide Fälle sollen einzeln für sich ihre Erledigung finden, und zwar der Fall paralleler Axen als der weit einfachere zuerst.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ congruente Schraubungen mit den parallelen Axen a und a_1 respective, so bilden wir die Gruppe Γ', deren Schraubungen sich nur aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ durch Combination und Iteration zusammensetzen. Diese Gruppe Γ' enthält nur Schraubungen, deren Axen zu a und a_1 parallel laufen, und Translationen, deren Richtungen zu a normal sind. Das erstere versteht sich unmittelbar; das letztere folgt daraus, dass je zwei congruente Schraubungen mit parallelen Axen hinter einander, aber in entgegengesetztem Schraubungssinne angewendet, eine solche Translation ergeben. Die Gruppe Γ' lässt sich geradezu aus der Schraubung $\mathfrak{A}$ und der Translation $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}_1$ erzeugen. Ist $\mathfrak{T}$ die kleinste zu Γ' gehörige Translation, deren Richtung zu a normal sein muss, so wähle man die Translationen: $\mathfrak{A}^{-\mu}\mathfrak{T}\mathfrak{A}^{\mu}$, wo $\mu = 0, 1, 2, 3, \cdots$ ist, die der Richtung und Grösse nach durch die Strecken $t_0, t_1, t_2, t_3, \cdots$ dargestellt sein mögen. Da α der Schraubungswinkel von $\mathfrak{A}$ ist, so schliessen die Strecken t_0 und t_μ, entsprechend den Translationen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{A}^{-\mu}\mathfrak{T}\mathfrak{A}^{\mu}$, den Winkel $\mu\alpha$ mit einander ein. Dann stellt $\mathfrak{T}^{\pm 1}\mathfrak{A}^{-\mu}\mathfrak{T}\mathfrak{A}^{\mu} = \mathfrak{T}'$ eine Translation dar, deren Strecke t' nach Grösse und Richtung die Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks mit den Schenkeln t_0 und t_μ ist, während der von ihnen eingeschlossene Winkel congruent zu $\pm\mu\alpha$ modulo π ist. Nach der Annahme soll aber $t' \geqq t_0$ sein, daher muss der kleinste, durch $(\pm\mu\alpha\pm k\pi)$ dargestellte, positive Winkel grösser oder gleich $\frac{\pi}{3}$ sein, und zwar für jeden ganzzahligen Werth von μ. Dass bedingt für α einen der vier Werthe $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ und π. Damit ist für den Fall, dass das System congruenter Axen zwei Parallelen enthält, bewiesen, dass der kleinste zu den Axen gehörige Schraubungswinkel den sechsten, vierten, dritten oder zweiten Theil von 2π bildet.

Zum Beweis des Satzes im Falle der vorher erwähnten zweiten Möglichkeit müssen wir etwas weiter ausholen. Wiederum bildet das System der zu a congruenten Schraubenaxen den Ausgangspunkt, die hier nach der Annahme alle verschiedene Richtungen aufweisen. Wir führen nun um jede Axe des Systems die beiden zu $\mathfrak{A}^{\mu}$ und $\mathfrak{A}^{-\mu}$ congruenten Schraubungen aus, wobei μ einen bestimmten ganzzahligen Werth hat, und fragen uns, ob es unter denselben mehrere giebt, welche die Axe a in die nämliche neue Axe, etwa a_1, überführen. Selbstverständlich ist a_1 zu a der Definition gemäss congruent. Die hier betrachteten Schraubungen haben die Form $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{A}^{\pm\mu}\mathfrak{R}$, wo $\mathfrak{R}$ eine beliebige Schraubung von Γ ist, und es möge $\mathfrak{A}'$ mit der Axe a' eine von ihnen sein, die a in a_1 verschraubt. Bestimmt man nun ein Dreikant, dessen Kanten k, k_1 und k' respective zu a, a_1 und a' parallel laufen, so schliessen k und k_1 mit k' gleiche Winkel ein, da a und a_1 gegen a' gleich geneigt sind. Zugleich muss eine Rotation um k' von der Winkelgrösse $\pm\mu\alpha$ die Kante k in die Lage k_1 überführen. Denn die Schraubung $\mathfrak{A}'$ kann in eine Rotation um a' von dem Winkel $\pm\mu\alpha$ und eine darauf folgende Translation zerlegt werden; die erstere verwandelt a in eine Parallele zu k_1, die letztere aber verschiebt diese parallel mit sich selbst nach a_1. Das Dreikant k, k_1, k' ist also gleichschenkelig und besitzt an der Kante k' einen Winkel, der zu $\pm\mu\alpha$ modulo 2π congruent ist. Es kann nun im Ganzen höchstens vier gleichschenkelige Dreikante mit der Basisfläche kk_1 und dem Winkel $(\pm\mu\alpha\mp 2\lambda\pi)$ an der gegenüberliegenden Kante k' geben; dabei ist die ganze Zahl λ so zu wählen, dass dieser Winkel zwischen 0 und $+\pi$ liegt. k und k_1 schliessen nämlich zwei verschiedene Winkel ein, und jeder kann als Basisfläche für zwei zu ihm symmetrisch liegende Dreikante dieser Art dienen. Freilich ist beim gleichschenkeligen Dreikant der Winkel der Basisfläche kleiner oder allenfalls gleich dem Winkel an der gegenüberliegenden Kante. Es existiren also in Wirklichkeit vier, zwei oder gar kein Dreikant von der verlangten Art, je nachdem von den Winkeln, die k und k_1 einschliessen, beide, einer oder keiner kleiner als der kleinste positive Winkel von der Form $(\pm\mu\alpha\mp 2\lambda\pi)$ ist. Unter der Voraussetzung, dass dieser Winkel an der Kante k' ein spitzer ist, sind von den genannten Dreikanten höchstens zwei reell; denn von den zwei Winkeln, die k und k_1 mit einander bilden, kann nur einer ein spitzer sein. Es giebt demnach auch unter den zu $\mathfrak{A}^{\pm\mu}$ congruenten Schraubungen bei der Voraussetzung $\pm\mu\alpha < \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π) höchstens zwei, welche die Axe a in die nämliche Axe a_1 verwandeln und deren Axen nicht parallel*) sind. Der Fall aber, dass zwei congruente Schraubungen mit parallelen Axen auftreten, ist bereits oben erledigt.

---

*) Congruente Schraubungen mit parallelen Axen, die a in a_1 überführen, kann es aber im Allgemeinen auch nicht geben. Wären nämlich $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ solche Schraubungen, so müsste $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''^{-1}$ die Axe a ungeändert lassen. Bei entgegengesetztem Schraubungssinne von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ bedeutet diese zusammengesetzte Schraubung aber

Jetzt wählen wir auf a einen festen Punkt O und legen um diesen als Mittelpunkt eine Kugel K mit dem Radius R, der beliebig gross sein kann und so gewählt sein mag, dass er mindestens eine der zu a congruenten Axen berührt. Die Gruppe Γ erzeugt aus O eine regelmässige Punktgruppe; im Innern der Kugel K und auf ihrer Oberfläche liegt eine endliche Anzahl von Punkten dieser Gruppe, da die Abstände der Nachbarpunkte endlich sind. Alle Punkte der Gruppe liegen auf a und den zu a congruenten Axen. Sie bilden auf a und ebenso auf jeder dazu congruenten Axe eine oder mehrere Reihen äquidistanter Punkte mit dem gleichen Intervall A. Eine dieser Reihen auf a geht aus O durch die Schraubung $\mathfrak{A}^{\pm 1}$ und ihre Wiederholungen hervor und wir können dabei annehmen, dass $\mathfrak{A}$ die kleinste Schraubung der Gruppe um die Axe a ist.

Der Punkt O kann nun ersichtlich von vornherein so auf a angenommen werden, dass er nicht zugleich noch auf einer zweiten zu a congruenten Axe liegt. Das wäre ja nur dann nicht ausführbar, wenn es unendlich viele congruente Axen gäbe, welche die Axe a in dem nämlichen Intervall von der Länge A schnitten. In diesem Falle könnte man aber auf jeder schneidenden Axe vom Schnittpunkte aus die Strecke A nach beiden Seiten hin auftragen; jede dieser Strecken müsste mindestens einen Gruppenpunkt tragen, und es gäbe unendlich viele Gruppenpunkte, die man alle mit einer Kugel vom Durchmesser $3A$ umschliessen könnte, was ja der Definition der Gruppe widerspricht.

Obgleich die Sache für den weiteren Beweis von keinem Belang ist, mag doch kurz gezeigt werden, dass auf der Axe a neben der Reihe von Gruppenpunkten, die aus O durch die Potenzen von $\mathfrak{A}$ hervorgehen, nur noch *eine* weitere Reihe liegen kann, die ebenso aus einem Gruppenpunkte O' durch Potenzen von $\mathfrak{A}$ erzeugt wird. Denn es muss eine Bewegung der Gruppe Γ geben, die O in O' und zugleich a in sich selbst überführt, da es durch O und also auch durch O' nur die eine Axe a giebt. Das kann nun eine Schraubung von a sein; sie ist alsdann eine Potenz der kleinsten Schraubung $\mathfrak{A}$ um a, und somit ist O' ein Punkt der ersten Reihe. Es kann aber auch eine Umklappung um eine Gerade sein, die in einem Punkte von a auf a senkrecht steht. Zwei derartige Umklappungen bestimmen indess eine Schraubung um a, und da diese wieder eine Potenz von $\mathfrak{A}$ sein muss, so führen die verschiedenen, möglichen Umklappungen den Punkt O in die einzelnen Punkte der aus O' abgeleiteten Reihe äquidistanter Punkte über.

---

eine Schraubung um eine zu a' parallele Axe; diese müsste mit a zusammenfallen, also a zu a' parallel sein. Bei gleichem Schraubungssinne wäre die zusammengesetzte Bewegung eine Translation in einer zu a' senkrechten Richtung, es müsste a die Richtung der Translation besitzen, also a normal zu a' sein.

Die Zahl aller zu a congruenten Axen, deren Abstand von O kleiner oder gleich R ist, die also die Kugel K schneiden oder berühren, muss endlich sein, und wir bezeichnen sie mit N, wobei a selbst mit eingerechnet sein soll. Eine Kugel K_1 mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $(R+A)$ schneidet nämlich auf jeder von diesen Axen eine Strecke ab, die grösser als $2A$ ist, also mindestens zwei Gruppenpunkte trägt. Da aber K_1 nur eine endliche Zahl von Gruppenpunkten einschliesst und durch jeden nur eine zu a congruente Axe geht, so muss jene Zahl N endlich sein.

Ist der zu $\mathfrak{A}$ gehörige Schraubungswinkel α kein rationaler Theil von 2π, so lässt sich immer eine ganze Zahl μ so angeben, dass der Winkel $\pm\mu\alpha < \frac{\pi}{3}$ (mod. 2π) wird; und zwar genügt für μ offenbar schon einer der fünf Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4, 5. Die Schraubung $\mathfrak{A}^{\pm\mu}$ kann man zerlegen in eine Rotation vom Winkel $\alpha_0 < \frac{\pi}{3}$, wo $\alpha_0 = \pm\mu\alpha \mp 2\lambda\pi$ ist, und in eine Translation von der Grösse μA. Nun sei a_i eine zu a congruente Axe und r_i ihr Abstand von O; ferner seien $\mathfrak{A}_i^{\pm\mu}$ die zu $\mathfrak{A}^{\pm\mu}$ congruenten Schraubungen um a_i. Sie verwandeln O in zwei Punkte O_k und O_l, und es bestimmt sich $OO_k = OO_l$ als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $2r_i \sin\frac{\alpha_0}{2}$ und μA. Es ist also: $OO_k = \sqrt{\varrho^2 r_i^2 + \mu^2 A^2}$, oder auch $OO_k < \varrho r_i + \frac{\mu^2 A^2}{2\varrho r_i}$, wo:

$$\varrho = 2\sin\frac{\alpha_0}{2} < 1$$

ist. Die beiden Schraubungen $\mathfrak{A}_i^{\pm\mu}$ verwandeln zugleich die Axe a in die dazu congruenten Axen a_k und a_l; diese gehen durch O_k resp. O_l und ihre Abstände von O sind ebenfalls $< \varrho r_i + \frac{\mu^2 A^2}{2\varrho r_i}$. Führen wir in gleicher Weise um jede der $(N-1)$ Axen, die von O einen Abstand $\leqq R$ besitzen, zwei zu $\mathfrak{A}^{\pm\mu}$ congruente Schraubungen aus, so geht bei jeder derartigen Schraubung a in eine congruente Axe über, deren Abstand von O jedenfalls $< \varrho R + \frac{\mu^2 A^2}{2\varrho R}$ sein wird. Die $2(N-1)$ so definirten Schraubungen brauchen aber die Axe a nicht in lauter verschiedene, neue Axen zu transformiren; indess kann hierbei nach dem früher Gesagten jede neue Axe höchstens zwei Mal erhalten werden. Somit ergeben die geschilderten Operationen (inclusive a) mindestens N zu a congruente Axen der Gruppe Γ, deren Abstände von O sicher $< \varrho R + \frac{\mu^2 A^2}{2\varrho R}$ sind. Liegt ϱ zwischen den Grenzen: $1 - \frac{1}{n-1} < \varrho \leqq 1 - \frac{1}{n}$, so wird dieser

Ausdruck $< R - \frac{R}{n} + \frac{\mu^2(n-1)}{2(n-2)} \frac{A^2}{R}$, und für $\frac{\mu^2(n-1)}{2(n-2)} < m$, wird er auch $< R - \frac{R}{n} + m\frac{A^2}{R}$. Nimmt man also $R > A\sqrt{mn}$, so gäbe es N zu a congruente Axen der Gruppe, deren Abstände von O sämmtlich $< R$ wären; das widerspricht aber der ursprünglich gemachten Voraussetzung, dass mindestens eine der N Axen die Kugel K berühre. Daher ist unsere Annahme, dass α kein rationaler Theil von 2π sei, unzulässig, und es muss weiter $\alpha \geqq \frac{\pi}{3}$ sein (was für α einen der Werthe $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}$ und π bedingt). Derartige Schraubungen liefern unter ihren Potenzen reine Translationen, und somit muss die Gruppe Γ wieder parallele, zu a congruente Axen aufweisen. In Folge dessen kann die Schraubung $\mathfrak{A}$ nur einen der vier Winkel $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ oder π besitzen, wie wir bereits oben gesehen haben. Unser Satz ist hiermit auch für die zweite Annahme bewiesen.

Aus unseren Untersuchungen erhellt auch noch der folgende Satz: *Die Gruppe Γ von Schraubungen, welche eine regelmässige Punktgruppe mit endlichen Abständen erzeugt, hat die Eigenschaft, dass zwischen je zwei ihrer Schraubungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ identische Relationen von der Form: $\mathfrak{A}^{\varkappa}\mathfrak{B}^{\lambda}\mathfrak{A}^{\mu}\mathfrak{B}^{\nu}\cdots = 1$ bestehen.* Denn sind $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ irgend zwei Translationen, die sich aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammensetzen lassen, und es giebt ja unendlich viele derartige Translationen, so stellt $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1^{-1}\mathfrak{T}_2^{-1} = 1$ eine Relation von jener Form dar. Es soll nun im Folgenden noch ein directer Beweis dieses Satzes erbracht werden, der von den vorausgehenden Ueberlegungen keinen Gebrauch macht.

Wir legen dieser Beweisführung nur die Gruppe Γ' von Schraubungen, die sich aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufbauen, zu Grunde. Die Axen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien a resp. b, ihre Schraubungswinkel α resp. β und die zugehörigen Translationsstrecken A resp. B. Nun wählen wir einen Punkt P so, dass seine Abstände von den Axen a und b möglichst klein sind; durch Anwendung der Schraubungen von Γ' ergeben sich aus P alle Punkte einer regelmässigen Gruppe. Insbesondere bezeichnen wir mit P_1 und P_2 die Punkte, in die P durch die Schraubungen $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ übergeht, und setzen ihre Abstände $PP_1 = \delta$ und $PP_2 = \delta'$, wobei wir $\delta > \delta'$ annehmen dürfen. Der kleinste Abstand zweier benachbarter Punkte unserer Gruppe sei d, und wir legen um alle Gruppenpunkte als Mittelpunkte kleine Kugeln mit den Radien $\frac{d}{2}$. Alle diese Kugeln schliessen sich gegenseitig aus.

Nun bestimmen wir die Zahl aller Schraubungen, die aus n Einzelschraubungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammengesetzt sind. An erster Stelle kann jede der vier Schraubungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{-1}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^{-1}$ stehen. An zweiter Stelle hat man nur noch die Wahl unter dreien von diesen Schraubungen, da die Schraubung ausgeschlossen ist, welche der an erster Stelle stehenden entgegengesetzt ist. Ebenso lässt jede weitere Stelle noch eine dreifache Wahl zu, denn es ist immer nur die zu der voranstehenden entgegengesetzte Schraubung ausgeschlossen. Die Zahl aller aus n Factoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sich aufbauenden Schraubungen ist somit: $4 \cdot 3^{n-1}$, und die Zahl aller sich aus n oder weniger Factoren aufbauenden Schraubungen wird: $2(3^n - 1)$.

Alle Punkte der regelmässigen, durch Γ' erzeugten Punktgruppe, die aus P durch diese Schraubungen hervorgehen, liegen in einer Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius $n\delta$. Denn es führt von P aus zu jedem der genannten Punkte eine gebrochene Linie, die aus n oder weniger Gliedern von der Länge δ oder δ' besteht. Hiervon überzeugen wir uns in folgender Weise, indem wir die Kette $\mathfrak{A}^\varkappa \mathfrak{B}^\lambda \mathfrak{A}^\mu \mathfrak{B}^\nu \mathfrak{A}^\varrho \mathfrak{B}^\sigma$ von Schraubungen näher untersuchen. Die erste Schraubung $\mathfrak{A}^\varkappa$ führe P in die Lage Q_1 über; die zweite Schraubung $\mathfrak{B}^\lambda$ verwandele P und Q_1 in Q_2 und R_2; die dritte $\mathfrak{A}^\mu$ mache in analoger Weise aus P, Q_2, R_2 die Punkte Q_3, R_3, S_3 und ebenso die vierte $\mathfrak{B}^\nu$ *aus* P, Q_3, R_3, S_3 die neuen Punkte Q_4, R_4, S_4, T_4. Ferner führe $\mathfrak{A}^\varrho$ die Punkte P, Q_4, R_4, S_4, T_4 in Q_5, R_5, S_5, T_5, U_5 und $\mathfrak{B}^\sigma$ die Punkte P, Q_5, R_5, S_5, T_5, U_5 in Q_6, R_6, S_6, T_6, U_6, V_6 über. Der Schraubenbogen PQ_1, der durch die Schraubung $\mathfrak{A}^\varkappa$ erzeugt wird, besteht aus $\varkappa$ congruenten Bogenstücken, von denen PP_1 das erste ist. Diese Bogen wollen wir durch die zugehörigen Sehnen von der Länge δ ersetzen, so dass P mit Q_1 durch eine $\varkappa$-gliederige gebrochene Linie verbunden wird. Da PQ_1 durch die folgenden Schraubungen der Reihe nach in Q_2R_2, R_3S_3, S_4T_4, T_5U_5 und U_6V_6 übergeht, so sind auch U_6 und V_6 durch eine $\varkappa$-gliederige gebrochene Linie verbunden, die zu der erst genannten congruent ist. Ganz ebenso kann man von P nach Q_2 eine gebrochene Linie von λ Gliedern von der Länge δ' ziehen, indem man den durch die Schraubung B^λ erzeugten Schraubenbogen PQ_2 in λ congruente Theile zerlegt und jeden durch die zugehörige Sehne ersetzt. Durch die weiteren Schraubungen wird dann diese gebrochene Linie PQ_2 in eine dazu congruente Linie zwischen T_6 und U_6 verwandelt. In gleicher Weise ergeben sich zwischen P und Q_3, sowie zwischen S_6 und T_6 congruente gebrochene Linien von μ Gliedern von der Länge δ, u. s. w. Schliesslich erhält man eine gebrochene Linie, die sich von P über Q_6, R_6, S_6, T_6, U_6 nach V_6 hinzieht, ihre einzelnen Theile PQ_6, Q_6R_6, R_6S_6, S_6T_6, T_6U_6 und U_6V_6 bestehen respective aus σ, ϱ, ν, μ, λ und $\varkappa$ Gliedern von der Länge δ' oder δ.

Wollte man nun annehmen, dass je zwei Schraubungen, die sich in verschiedener Weise aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammensetzen, auch selbst von einander verschieden wären, so würde eine Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius $n\delta$ mehr als $2(3^n-1)$ Punkte der regelmässigen Punktgruppe und eine Kugel mit dem Radius $\left(n\delta+\frac{d}{2}\right)$ mehr als $2(3^n-1)$ kleine Kugeln vom Radius $\frac{d}{2}$ enthalten. Der Gesammtinhalt aller dieser kleinen Kugeln wäre dann $> \frac{\pi}{3}(3^n-1)\,d^3$, während die sie einschliessende Kugel den Inhalt $\frac{4\pi}{3}\left(n\delta+\frac{d}{2}\right)^3$ besitzt; folglich müsste dieser Werth grösser als jener sein. Das liefert die Ungleichung: $(3^n-1)<4n^3\left(\frac{\delta}{d}+\frac{1}{2n}\right)^3$, welche für jeden Werth von n Geltung haben müsste. Es hat aber $\frac{\delta}{d}$ einen bestimmten endlichen Werth, und somit bleibt $4\left(\frac{\delta}{d}+\frac{1}{2n}\right)^3$ unter einer bestimmten ganzen Zahl g, so dass man erhält: $3^n \leqq gn^3$. Da jedoch $3^n : n^3$ für wachsendes n über jede Grenze hinaus wächst, ist unsere Ungleichung nicht erfüllt, und wir erkennen, dass wir von einer falschen Annahme ausgegangen sind. Es wird also immer mehrere Combinationen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ geben müssen, welche die nämliche Schraubung darstellen, und hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit des behaupteten Satzes.

Ueber die Zerlegbarkeit der Function $x^n - a$ in einem beliebigen Körper.

Von

E. Wendt in Elsfleth a. d. Weser.

Im 2. Hefte des 19. Bandes der „Acta mathematica“ hat Herr **Vahlen** folgenden Satz bewiesen: „Alle im Bereiche der rationalen Zahlen reduciblen Binome erhält man aus den beiden

$$z^m - 1 \quad \text{und} \quad z^4 + 4$$

durch die Substitution $z \left\| \frac{z^n}{c}, \right.$ wo c eine rationale Zahl ist“.

Im Folgenden will ich den Ausdruck $x^n - a$ auf seine Zerlegbarkeit hin unter Zugrundelegung eines beliebigen Rationalitätsbereichs untersuchen.

1.

Es sei ξ eine Wurzel der Gleichung

$$\xi^n - a = 0 \tag{1}$$

und ε eine primitive Wurzel der Gleichung

$$\varepsilon^n = 1.$$

Der zu Grunde gelegte Körper, dem a natürlich angehören muss, heisse K. Die übrigen Wurzeln der Gleichung (1) haben die Gestalt

$$\xi\varepsilon,\ \xi\varepsilon^2,\ \cdots,\ \xi\varepsilon^{n-1}.$$

Der irreducible Factor von $x^n - a$, der für $x = \xi\varepsilon$ verschwindet, sei

$$f(x) = (x - \xi\varepsilon^{k_1})(x - \xi\varepsilon^{k_2}) \cdots (x - \xi\varepsilon^{k_\varrho}); \quad (k_1 = 1); \quad (\varrho < n). \tag{2}$$

Das von x freie Glied dieses Productes muss eine in K rationale Zahl sein, also

$$\xi^\varrho \cdot \varepsilon^{k_1 + k_2 + \cdots + k_\varrho} = \xi^\varrho \cdot \varepsilon^{\Sigma k} = a_\varrho. \tag{3}$$

Bezeichnet man dann den grössten gemeinsamen Theiler von ϱ und n mit d, setzt also

$$\varrho = d\varrho_1; \quad n = dn_1; \qquad (n_1 > 1)$$

wobei ϱ_1 und n_1 theilerfremd sind, so lassen sich zwei ganze rationale Zahlen ϱ' und n' finden, derart, dass die Gleichung besteht

$$\varrho\varrho' + nn' = d.$$

Erhebt man die Seiten der Gleichung (3) auf die ϱ'^{te} Potenz, die der Gleichung (1) auf die n'^{te} Potenz und multiplicirt dann die entstehenden Gleichungen, so ergiebt sich

$$(4) \qquad \xi^d \cdot \varepsilon^{\varrho' \Sigma k} = a^{n'} \cdot a_\varrho^{\varrho'} = b,$$

wo b rational in K ist, und durch Erheben auf die n_1^{te} Potenz

$$(5) \qquad a \cdot \varepsilon^{n_1 \varrho' \Sigma k} = b^{n_1}.$$

Nunmehr bilde man die Coefficienten der Glieder $x^{\varrho-\sigma}$ und x^σ der Function $f(x)$. Dann hat man

$$(6) \qquad \xi^\sigma L_\sigma = a_\sigma; \quad \xi^{\varrho-\sigma} \varepsilon^{\Sigma k} L'_\sigma = a_{\varrho-\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, \varrho - 1),$$

wobei a_σ und $a_{\varrho-\sigma}$ rational in K sind, ferner

$$(6\text{a}) \qquad L_\sigma = \varepsilon^{l_{1,\sigma}} + \varepsilon^{l_{2,\sigma}} + \cdots; \quad L'_\sigma = \varepsilon^{-l_{1,\sigma}} + \varepsilon^{-l_{2,\sigma}} + \cdots$$

ist und $l_{1,\sigma}; l_{2,\sigma}; \cdots$ alle möglichen Summen von je σ verschiedenen Zahlen $k_1, k_2, \cdots, k_\varrho$ bedeuten.

Unter den Grössen $a_\sigma (\sigma = 1, 2, \cdots, \varrho - 1)$ seien

$$a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}, \cdots$$

die von Null verschiedenen; dann verschwinden also auch nicht die rationalen Functionen $L_{\sigma_1}, L_{\sigma_2}, \cdots$ von ε. Den grössten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ und der Zahl d kann man für die weitere Untersuchung gleich 1 annehmen. Denn wird derselbe mit δ bezeichnet, so hat der irreducible Factor $f(x)$ von $x^n - a$ die Gestalt

$$x^\varrho + a_\delta x^{\varrho-\delta} + a_{2\delta} x^{\varrho - 2\delta} + \cdots + a_{\varrho-\delta} x^\delta + a_\varrho,$$

ist also eine blosse Function von x^δ; mithin muss $x^{\frac{n}{\delta}} - a$ den irreduciblen Factor

$$x^{\frac{\varrho}{\delta}} + a_\delta x^{\frac{\varrho}{\delta}-1} + a_{2\delta} x^{\frac{\varrho}{\delta}-2} + \cdots + a_{\varrho-\delta} x + a_\varrho$$

besitzen. Unter der die Allgemeinheit nicht beschränkenden Annahme $\delta = 1$ lassen sich ganze rationale Zahlen $\sigma_1', \sigma_2', \cdots, d'$ finden, derart dass

$$\sigma_1\sigma_1' + \sigma_2\sigma_2' + \cdots + dd' = 1$$

ist. Aus den Gleichungen (4), (5) und (6) ergiebt sich zunächst

$$\xi^{\sigma_1} = a_{\sigma_1} \cdot L_{\sigma_1}^{-1}; \quad \xi^{\sigma_2} = a_{\sigma_2} \cdot L_{\sigma_2}^{-1}; \cdots; \xi^d = b\varepsilon^{-\varrho' \Sigma k}.$$

Durch Erheben der Seiten dieser Gleichungen bzhw. auf die $\sigma_1'^{\text{te}}, \sigma_2'^{\text{te}}, \cdots, d'^{\text{te}}$ Potenz und Multiplication der dadurch entstehenden Gleichungen folgt:

$$\xi = a_{\sigma_1}^{\sigma_1'} \cdot a_{\sigma_2}^{\sigma_2'} \cdots b^{d'} \cdot L_{\sigma_1}^{-\sigma_1'} \cdot L_{\sigma_2}^{-\sigma_2'} \cdots \varepsilon^{-\varrho' d' \Sigma k},$$

also

$$\xi = A \cdot g(\varepsilon) \tag{7}$$

und

$$a = \xi^n = A^n \cdot g(\varepsilon)^n, \tag{8}$$

wobei A rational in K ist und

$$g(\varepsilon) = L_{\sigma_1}^{-\sigma_1'} \cdot L_{\sigma_2}^{-\sigma_2'} \cdot \cdot \cdot \varepsilon^{-\varrho' \vartheta' \Sigma k} \tag{9}$$

eine rationale Function von ε darstellt, deren Coefficienten dem natürlichen Bereiche, der mit P bezeichnet werden möge, angehören.

Wenn also $x^n - a$ reducibel sein soll, muss a dargestellt werden können als ein Product der n^{ten} Potenz einer in K rationalen Zahl und der n^{ten} Potenz einer rationalen Function von ε, deren Coefficienten in P rational sind. Umgekehrt, wenn diese Darstellung möglich ist, so gilt eine Gleichung von der Form der Gleichung (7), und da ε im Körper P einer Gleichung genügt, deren Grad nur $\varphi(n)$ ist, so sind auch $g(\varepsilon)$ und damit ξ in K Wurzeln einer Gleichung vom Grade $\varphi(n)$, also ist der Ausdruck $x^n - a$ reducibel. Somit ist folgender Satz bewiesen.

Ein Ausdruck von der Form $x^m - a$ ist dann und nur dann reducibel in einem Körper K, wenn sich a als Product der n^{ten} Potenz einer in K rationalen Zahl und der n^{ten} Potenz einer rationalen Function von ε, deren Coefficienten dem natürlichen Bereiche entstammen, darstellen lässt, wobei n ein Theiler von m ist und ε eine primitive n^{te} Einheitswurzel bedeutet.

2.

Diesem Resultat will ich zunächst für den Fall eine andere Form geben, dass in K keine wirkliche ganze rationale Function von ε, deren Coefficienten dem natürlichen Bereiche P angehören, rational ist.

Durch Multiplication der Gleichungen unter (6) ergiebt sich mit Hülfe von (3)

$$L_\sigma L_\sigma' = \frac{a_\sigma a_{\varrho-\sigma}}{a_\varrho} = B_\sigma, \tag{10}$$

wo B_σ eine in K rationale Zahl bedeutet. Zufolge der Gleichung (8) gehört $g(\varepsilon)^n$ zum Bereiche K; diese Grösse muss daher gemäss der über den Körper gemachten Voraussetzung eine natürliche Zahl sein. Bezeichnet man sie mit C und erwägt, dass L_σ' aus L_σ entsteht, wenn man $+i$ durch $-i$ ersetzt, so folgt mit Hülfe der Gleichung (9):

$$[(L_{\sigma_1} \cdot L_{\sigma_1}')^{-\sigma_1} \cdot (L_{\sigma_2} \cdot L_{\sigma_2}')^{-\sigma_2'} \cdot \cdot \cdot]^n = C^2,$$

also nach (10)

$$(B_{\sigma_1}^{-\sigma_1'} \cdot B_{\sigma_2}^{-\sigma_2'} \cdot \cdot \cdot)^n = C^2,$$

oder

$$C^2 = B^n,$$

wo B eine in K rationale Zahl bedeutet.

Ist n ungerade, so würde folgen, dass C und somit auch a die n^{te} Potenz einer in K rationalen Zahl wäre, und dann ist $x^n - a$ sicher reducibel. Ist n gerade, so ergiebt sich

$$C = \pm B^{\frac{n}{2}} \quad \text{und} \quad a = \pm (A^2 \cdot B)^{\frac{n}{2}} = \pm D^{\frac{n}{2}},$$

wo D rational in K ist. Enthält n irgend eine ungerade Zahl als Divisor oder gilt das positive Zeichen, so ist $x^n - a$ thatsächlich reducibel. Es erübrigt daher nur noch den Fall

$$a = -D^{\frac{n}{2}}; \quad n = 2^\nu,$$

also die Function

$$x^n + D^{\frac{n}{2}} = x^{2^\nu} + D^{2^{\nu-1}}$$

zu betrachten.

Aus der Gleichung $\xi^n = -D^{\frac{n}{2}}$ folgt zunächst $\xi^2 = D \cdot \eta$, wo η eine primitive n^{te} Einheitswurzel bedeutet. Man kann sich nun ξ so gewählt denken, dass $\eta = \varepsilon$ ist, also

$$\xi^2 = D \cdot \varepsilon. \tag{11}$$

Hierzu kommen noch die Gleichungen:

$$\xi(\varepsilon^{k_1} + \varepsilon^{k_2} + \cdots + \varepsilon^{k_\varrho}) = a_1; \quad \xi^2(\varepsilon^{l_{1,2}} + \varepsilon^{l_{2,2}} + \cdots) = a_2. \tag{12}$$

Durch Quadriren der beiden Seiten der ersteren dieser Gleichungen erhält man mit Benutzung der letzteren und der Gleichung (11)

$$\varepsilon(\varepsilon^{2k_1} + \varepsilon^{2k_2} + \cdots + \varepsilon^{2k_\varrho}) = \frac{a_1^2 - 2a_2}{D}. \tag{13}$$

Da aber im vorliegenden Falle ε eine Wurzel der irreduciblen Gleichung $\varepsilon^{\frac{n}{2}} + 1 = 0$ und $\varrho \geqq 2$ ist, so kann diese Gleichung infolge der dem Körper K auferlegten Einschränkung nur bestehen, falls $a_1^2 = 2a_2$ ist. Ferner folgt aus der zweiten der Gleichungen (12)

$$\varepsilon(\varepsilon^{l_{1,2}} + \varepsilon^{l_{2,2}} + \cdots) = \frac{a_2}{D}. \tag{14}$$

Für $\varrho > 2$ kann diese Gleichung, weil dann die Klammer eine gerade Anzahl von Gliedern enthält, nur bestehen, wenn a_2 und somit a_1 verschwindet, und zu dem Ende muss der Ausdruck $L_1 = \varepsilon^{k_1} + \cdots + \varepsilon^{k_\varrho}$ gleich Null sein, folglich muss sich die Function $f(x)$, da die Glieder von L_1 wegen der Irreducibilität der Gleichung $\varepsilon^{\frac{n}{2}} + 1 = 0$ paarweise verschwinden müssen, als ein Product von der Form

$$\prod_{\sigma=1}^{\frac{\varrho}{2}}(x+\varepsilon^{k_\sigma}\xi)(x-\varepsilon^{k_\sigma}\xi)=\prod_{\sigma=1}^{\frac{\varrho}{2}}(x^2-\varepsilon^{2k_\sigma}\xi^2)$$

darstellen, wäre also eine blosse Function von x^2, die $f_1(x^2)$ heisse. Wenn aber $x^n+D^{\frac{n}{2}}$ den irreduciblen Factor $f(x)=f_1(x^2)$ besitzen soll, muss $x^{\frac{n}{2}}+D^{\frac{n}{2}}$, $(n=2^\nu)$ durch $f_1(x)$ theilbar sein. Da aber $x^{\frac{n}{2}}+D^{\frac{n}{2}}$ irreducibel ist, so folgt rückwärts, dass $\varrho=2$ sein muss. Dann aber lautet Gleichung (14)

$$\varepsilon\cdot\varepsilon^{k_1+k_2}=\frac{a_2}{D},$$

und da ausserdem $k_1=1$ und $\varepsilon^{2k_1}+\varepsilon^{2k_2}=0$, also $2k_2=\frac{n}{2}+2$ ist, so folgt $\varepsilon^{\frac{n}{4}+3}=\frac{a_2}{D}=\pm 1$, also $D=\pm a_2=\pm\frac{a_1^2}{2}$ und $n=4$. Setzt man demnach $a_1=2y$, so erhält man die Gleichung

$$x^4+4y^4=(x^2-2yx+2y^2)\cdot(x^2+2yx+2y^2). \tag{15}$$

Demzufolge gilt der Satz:

Die Function x^n-a ist in einem Körper K, dem keine wirkliche ganze rationale Function von ε mit natürlichen Zahlencoefficienten angehört, nur in folgenden beiden Fällen reducibel:

1) wenn a die r^{te} Potenz einer in K enthaltenen Zahl ist, wo r in n aufgeht;

2) wenn n und a die Form haben $n=4\delta$, $a=4y^4$, wo δ eine ganze rationale Zahl bedeutet und y rational in K ist; und zwar sind die beiden Factoren der Function

$$x^{4\delta}+4y^4=(x^{2\delta}-2yx^\delta+2y^2)(x^{2\delta}+2yx^\delta+2y^2)$$

irreducibel in K.

Die Richtigkeit der letzten Behauptung ergiebt sich folgendermassen. Angenommen, der eine der Factoren wäre reducibel, er hätte den irreduciblen Factor $f(x)=x^\varrho+a_1x^{\varrho-1}+\cdots+a_{\varrho-1}x+a_\varrho$, dann kann man annehmen, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor der Indices $1,2,3,\cdots,\varrho$ der nichtverschwindenden Coefficienten gleich 1 sei (denn andernfalls würde folgen, dass ein Ausdruck von der Form $x^{2\delta'}\mp 2yx^{\delta'}+2y^2$, wo δ' ein Theiler von δ bedeutet, reducibel wäre, und dann würde man diesen zu untersuchen haben), und die in den Absätzen 1) und 2) befolgte Schlussweise kann angewendet werden. Diese führt, da $n=4\delta$ gerade ist, entweder zu der Forderung $a=-D^{\frac{n}{2}}$, d. h. $-4y^4=-D^{2\delta}$ oder zu der Forderung $\varrho=2$, in jedem Falle also müsste $n=4$ sein, d. h. es müsste $x^2\mp 2xy+2y^2$ reducibel sein, und das ist nicht der Fall.

3.

Ich wende mich nun dem Falle zu, wo wirkliche rationale Functionen von ε mit natürlichen Zahlencoefficienten Grössen des Bereichs sind.

Wird zunächst der Fall in's Auge gefasst, dass keine imaginäre n^{te} Einheitswurzel selbst zum Bereiche gehört, so fordert die Gleichung (5), dass

$$\varepsilon^{n_1 \varrho' \Sigma k} = \pm 1, \quad \text{also} \quad a = \pm b^{n_1}$$

ist. Gilt das positive Zeichen oder enthält n_1 eine ungerade Zahl als Factor, so ist $x^n - a$ thatsächlich reducibel. Andernfalls muss $n_1 \varrho' \Sigma k$ ein Vielfaches von $\frac{n}{2}$, aber nicht von n sein, d. h. d muss gerade und daher n durch 4 theilbar sein.

Bis zu demselben Punkte will ich nun zunächst die Untersuchung für den Fall führen, dass eine imaginäre n^{te} Einheitswurzel zum Bereiche gehört. Es sei $\eta = \varepsilon^t$ die niedrigste Potenz von ε, welche in K rational ist; t muss dann éin Divisor von n sein.

Es wäre nun möglich, dass die irreducible Gleichung $f(x) = 0$, welcher ξ genügt, auch durch einen Werth $\xi \cdot \zeta$ befriedigt wird, wo ζ eine in K rationale n^{te} Einheitswurzel bedeutet. Wenn aber $f(\xi \cdot \zeta) = 0$ ist, so muss wegen der Irreducibilität von $f(x)$ auch $f(\xi \cdot \zeta^2) = 0$; $f(\xi \cdot \zeta^3) = 0; \cdots; f(\xi \cdot \zeta^{\tau-1}) = 0$ sein, wo $\zeta^\tau = 1$ sei. Ist ferner ξ_1 eine von den bisher erwähnten Wurzeln verschiedene, so müssen auch $\xi_1 \cdot \zeta$; $\xi_1 \cdot \zeta^2; \cdots; \xi_1 \cdot \zeta^{\tau-1}$ Wurzeln sein. Folglich enthält $f(x)$ lauter Factoren von der Form

$$(x - \xi)(x - \xi\zeta)(x - \xi\zeta^2) \cdots (x - \xi\zeta^{\tau-1}) = x^\tau - \xi^\tau,$$

ist also eine blosse Function von x^τ, welche $f'(x^\tau)$ heisse. Wenn demnach $x^n - a$ den irreduciblen Factor $f(x) = f'(x^\tau)$ enthält, so muss $x^{\frac{n}{\tau}} - a$ den irreduciblen Factor $f'(x)$ enthalten. Daher kann man, ohne dass die Untersuchung an Allgemeinheit verliert, $\tau = 1$ annehmen.

Dieselbe Ueberlegung kann man in Bezug auf alle irreduciblen Factoren $f(x)$ anstellen. Man wird auf diese Weise zu einer Function $x^n - a$ geführt, von der kein irreducibler Factor für zwei durch einander rational ausdrückbare Grössen verschwindet. Es ist dann möglich, dass überhaupt keine zwei Wurzeln der Gleichung $\xi^n - a = 0$ rational von einander abhängig sind. Dann kommt man zu dem in diesem Absatz zuerst behandelten Falle zurück.

Andernfalls zerlegt sich $x^n - a$ in t' Factoren von der Form

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x - \xi\varepsilon^{k_1})(x - \xi\varepsilon^{k_2}) \cdots, \\
f_1(x) &= (x - \xi\varepsilon^{k_1}\eta)(x - \xi\varepsilon^{k_2}\eta) \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_{t'-1}(x) &= (x - \xi\varepsilon^{k_1}\eta^{t'-1})(x - \xi\varepsilon^{k_2}\eta^{t'-1}) \cdots,
\end{aligned}$$

wo jeder Factor aus t Linearfactoren besteht und wo $t \cdot t' = n$ und $\eta = \varepsilon^{t'}$ wieder die niedrigste in K enthaltene Potenz von ε bedeute. Es folgt $\xi^t \cdot \varepsilon^{k_1 + k_2 + \cdots} = \alpha$, wo α in K rational ist. Die Zahlen $k_1, k_2, \cdots$ stimmen, von der Reihenfolge abgesehen, modulo t mit den Zahlen $0, 1, 2, \cdots, t-1$ überein, daher ist ihre Summe $\equiv \frac{t}{2}$, resp. $0 \pmod{t}$, je nachdem t gerade oder ungerade ist. Durch Erheben der Seiten obiger Gleichung auf die t'^{te} Potenz ergibt sich infolgedessen

$$\pm a = \alpha^{t'}.$$

In weitere Erörterung ist also auch hier bloss noch der Fall zu ziehen, dass t' eine Potenz von 2 ist und dass das Minuszeichen gilt, dass also auch t gerade und n durch 4 theilbar ist.

Gehört $i = \varepsilon^{\frac{n}{4}}$ zum Bereiche K, so ist $x^n - a$, falls a die Form $-b^s$ hat, reducibel, weil dann $a = \left(b^{\frac{s}{2}} \cdot i\right)^2$ ist. Gehört aber i nicht zum Bereiche, so muss ε^{-1} Wurzel derselben in K irreduciblen Gleichung sein, welcher ε genügt, weil $(\varepsilon, \varepsilon^{-1})$ die einzige Transposition unter den primitiven n^{ten} Einheitswurzeln ist, welche $i = \varepsilon^{\frac{n}{4}}$ nicht unverändert lässt.

Nach dem im Abschnitt 1. bewiesenen Hauptsatze muss a, falls $x^n - a$ reducibel sein soll, in die Form $A^n g(\varepsilon)^n$ gebracht werden können. Es genügt also $g(\varepsilon)$ einer Gleichung $g(\varepsilon)^n = C$, wo C in K rational ist. Da ε^{-1} Wurzel derselben irreduciblen Gleichung ist, welcher ε genügt, so folgt $g(\varepsilon^{-1})^n = C$. Und sonach lässt sich wie im Abschnitt 2. weiter schliessen, dass a die Form $\pm D^{\frac{n}{2}}$ haben muss. Da die Function $x^n \mp D^{\frac{n}{2}}$ in K reducibel ist, welchen Werth auch n haben möge, weil eine rationale Function von ε zum Bereiche gehört, so ist folgender Satz bewiesen:

In einem Körper K, zu welchem eine rationale Function von ε mit natürlichen Zahlencoefficienten gehört, in dem also ε einer Gleichung von niederem als dem $\varphi(n)^{\text{ten}}$ Grade genügt, ist die Function $x^n - a$ nur in folgenden beiden Fällen reducibel:

1) *wenn a die s^{te} Potenz einer in K rationalen Zahl ist, wo s ein Theiler von n ist;*

2) *wenn $n = 2^\nu$ und $a = -D^{\frac{n}{2}}$ ist, wo D dem Bereiche K angehört.*

Beweis des Lindemann'schen Satzes über die Exponentialfunction.

Von

Th. Vahlen in Königsberg i. Pr.

Aus einem an K. Hensel gerichteten Briefe.

Durch nähere Betrachtung des Hilbert'schen Beweises des Lindemann'schen Satzes bin ich zu einem rein arithmetisch-algebraischen Beweise desselben Satzes gelangt, welcher nur die elementarsten Hilfsmittel verwendet und sich von dem Gordan'schen Beweise durch Fernbleiben jeder Symbolik unterscheidet.

Gestatten Sie, dass ich Ihnen denselben in Kürze darlege.

Sind α, β, γ, u. s. w. ν conjugirte ganze algebraische Zahlen der Ordnung ν, p eine Primzahl, so reducirt sich die ganze rationale Zahl:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \cdots) =$$
$$\sum (-1)^{h+i+k+\cdots} \binom{p}{h} \binom{p}{i} \binom{p}{k} \cdots \frac{[(\nu+1)p-h-i-k-\cdots 1]!}{(p-1)!} \alpha^h \beta^i \gamma^k \cdots$$
$$(h, i, k, \cdots = 0, 1, \cdots p)$$

modulo p auf ihr höchstes Glied $(-1)^{\nu p}(\alpha\beta\gamma\cdots)^p$; sie ist also für hinreichend grosse p congruent $f(0)$ (mod. p), wenn $f(x) = x^\nu + \cdots = 0$ die Gleichung ist, welcher $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ genügen.

Entwickelt man: $e^\alpha F(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$ nach Potenzen von $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$, so ergiebt sich die Summe der Glieder von geringerer Ordnung als νp, mit Benutzung der bekannten Relationen:

$$\binom{q}{h} - \binom{p}{1}\binom{q-1}{h-1} + \binom{p}{2}\binom{q-2}{h-2} - \cdots = \binom{q-p}{h}$$

gleich:

$$G(\alpha; \beta, \gamma, \cdots) =$$
$$\sum_{\substack{k,\cdots=0,1,\cdots,p \\ +i+k+\cdots<\nu p}} (-1)^{i+k+\cdots} \binom{p}{i}\binom{p}{k} \cdots \binom{\nu p - i - \cdots - 1}{h} \cdot \frac{((\nu+1)p-h-i-\cdots-1)!}{(p-1)!} \alpha^h \beta^i \cdots$$

Die Coefficienten von $G(\alpha; \beta, \gamma, \cdots)$ sind wegen:

$$(\nu+1)p - h - i - k - \cdots - 1 \geqq p$$

sämmtlich durch p theilbar.

Die Glieder, für deren Ordnung:

$$\nu p \leqq h + i + k + \cdots < (\nu+1)p$$

ist, erhalten zufolge derselben Relationen verschwindende Coefficienten.

Die noch übrigen Glieder, deren Ordnung

$$h + i + k + \cdots \geqq (\nu+1)p$$

ist, erhalten gebrochene Coefficienten. Die Summe dieser Glieder bekommt durch Anwendung der Relationen:

$$\frac{1}{h(h-1)\cdots(q+1)} - \frac{\binom{p}{1}}{(h-1)(h-2)\cdots(q)} + \frac{\binom{p}{2}}{(h-2)(h-3)\cdots(q-1)} - \cdots$$
$$\cdots = (-1)^p \frac{(h-q)(h-q+1)\cdots(h-q+p-1)}{h(h-1)\cdots(q-p+1)}$$

die Form:

$$R(\alpha; \beta, \gamma, \cdots) =$$
$$(-1)^p \sum_{\substack{i,k,\cdots=0,1,\cdots,p \\ h+i+k+\cdots \geqq (\nu+1)p}} (-1)^{i+k+\cdots} \binom{p}{i}\binom{p}{k}\cdots \frac{(h+i+\cdots-(\nu+1)p+1)\cdots(h+i+\cdots-\nu p)}{h(h-1)\cdots(\nu p-i-k-\cdots)\cdot(p-1)!}\alpha^h\beta^i\cdots$$

Es ist leicht zu zeigen, dass bei wachsendem p die Grösse R beliebig klein wird. Ist μ der grösste der Werthe $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$, $\cdots$, so wird zunächst:

$$|R| < \sum_{\substack{i,k,\cdots=0,1,\cdots,p \\ \sigma=0,1,2,\cdots}} \frac{\binom{p}{i}\binom{p}{k}\cdots(\sigma+1)\cdots(\sigma+p)}{[(\nu+1)p+\sigma-i-k-\cdots]\cdots[\nu p-i-k-\cdots]\cdot(p-1)!}\mu^{(\nu+1)p+\sigma},$$

wo, vermittelst

$$h + i + k + \cdots = (\nu+1)p + \sigma,$$

statt h der neue Summationsbuchstabe σ eingeführt worden ist. Durch Zusammenfassung derjenigen Glieder, in denen $i + k + \cdots = \tau$ ist, erhält man:

$$|R| < \sum_{\substack{\tau=0,1,\cdots,(\nu-1)p \\ \sigma=0,1,2,\cdots}} \frac{(\sigma+1)\cdots(\sigma+p)\binom{(\nu-1)\cdot p}{\tau}}{((\nu+1)p+\sigma-\tau)\cdots(\nu p-\tau)(p-1)!}\mu^{(\nu+1)p+\sigma}.$$

Diese Ungleichung muss umsomehr stattfinden, wenn man darin $\binom{(\nu-1)p}{\tau}$

durch $\sum\limits_{\tau=0,1,\cdots(\nu-1)p} \binom{(\nu-1)p}{\tau} = 2^{(\nu-1)p}$ ersetzt. Vergrössert man ferner die rechte Seite indem man durchgehends $\tau = (\nu-1)p$, und dann Eins für

$$\frac{(\sigma+p)\,(\sigma+p-1)\cdots(\sigma+1)}{(\sigma+2p)\,(\sigma+2p-1)\cdots(\sigma+p+1)}$$

setzt, so kommt;

$$|R| < [(\nu-1)p+1] \sum \frac{(2^{\nu-1}\mu^{\nu+1})^p \mu^\sigma}{(\sigma+p)!}.$$

Ersetzt man noch $(p+\sigma)!$ durch $\sigma!p!$, so erhält man:

$$|R| < \frac{(\nu-1)p+1}{p} \cdot \frac{(2^{\nu-1}\mu^{\nu+1})^p}{(p-1)!} \cdot e^\mu$$

oder schliesslich

$$|R| < \varkappa \cdot \frac{K^{p-1}}{(p-1)!},$$

wo $\varkappa$ und K feste positive Grössen sind.

Sei nun $a = \sum e^\alpha - \sum e^{\alpha'}$ die Gleichung, deren Unmöglichkeit zu beweisen ist. Hier bezieht sich die erste Summe auf die ganzen algebraischen Zahlen, die der Gleichung $f(x) = x^m + \cdots = 0$, die zweite auf die ganzen algebraischen Zahlen, die der Gleichung $g(x) = x^n + \cdots = 0$ genügen. Das Vorkommen einer ganzen rationalen Zahl a wird eventuell durch Multiplication der Gleichung mit $\sum e^{-\alpha}$ erreicht. Multiplicirt man nunmehr die Gleichung

$$a = \sum e^\alpha - \sum e^{\alpha'}$$

mit $F(\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \alpha', \beta', \gamma', \cdots)$ und betrachtet dieselbe als Congruenz für die beliebig grosse Primzahl p als Modul, so bekommt man links $a f(0)\, g(0)$, rechts ist jede der beiden Summen

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \cdots} G(\alpha; \beta, \gamma, \cdots, \alpha', \beta', \gamma', \cdots),$$

$$\sum_{\alpha', \beta', \gamma', \cdots} G(\alpha'; \beta', \gamma', \cdots, \alpha, \beta, \gamma, \cdots)$$

eine symmetrische Function sowohl der $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$, als auch der $\alpha', \beta', \gamma', \cdots$, also eine durch p theilbare ganze rationale Zahl. Die Reste, welche verbleiben, sind zusammengenommen absolut kleiner als $\lambda \cdot \frac{\Lambda^{p-1}}{(p-1)!}$, wo λ, Λ feste positive Grössen sind. Damit ist die Unmöglichkeit bewiesen.

Uebrigens kann man dem Lindemann'schen Satze folgende besondere Fassung geben:

Die Summe $\sum_x e^x$, bezogen auf alle Wurzeln x einer ganzzahligen Gleichung:

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0,$$

jede in ihrer richtigen Vielfachheit genommen, ist eine charakteristische Invariante der Gleichung, für jede Gleichung von anderem Werthe, so dass durch die eine Zahl $\sum e^x$ die sämmtlichen Coefficienten der Gleichung bestimmt sind.

Königsberg i. Pr., September 1899.

Zweite Note über analytische Functionen mehrerer Veränderlichen.

Von

W. F. Osgood in Cambridge (Mass.).

1. In einer früheren Note*) habe ich den Satz ausgesprochen und bewiesen, den ich hier als Satz A bezeichnen will:

Satz A. *Es möge $F(x, y)$ eine Function der unabhängigen Veränderlichen x, y sein, die für jedes Werthepaar (x, y) des Bereiches (T): $|x| < R$, $|y| < S$ eindeutig erklärt und, wie folgt, beschaffen ist:*

a) *für jeden festen im Kreise $|x| = R$ (resp. $|y| = S$) gelegenen Werth von x (resp. y) soll $F(x, y)$ eine im Kreise $|y| = S$ (resp. $|x| = R$) analytische Function von y (resp. x) sein;*

b) *$F(x, y)$ soll im Bereich (T) endlich bleiben; d. h. es soll*

$$|F(x, y)| < G$$

bleiben, wo G eine von x, y unabhängige positive Grösse bedeutet und das Werthepaar (x, y) im Bereich (T) beliebig angenommen wird. Dann ist $F(x, y)$ eine analytische Function der unabhängigen Veränderlichen x, y [im Bereiche (T)].

Ferner habe ich die Frage aufgeworfen, ob die Bedingung b) nicht gänzlich überflüssig sei.**) Wenn es mir auch nicht gelungen ist, diese Frage zu erledigen, so glaube ich doch, dass durch folgenden Satz ein werthvoller Einblick in das Wesen derselben gewährt wird.

Satz B. *Es möge (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt des Bereiches (T) sein,***) während bezüglich der Function $F(x, y)$ bloss die Voraussetzungen* a) *gelten sollen. Dann existirt eine analytische Function $\mathfrak{F}(x, y)$, deren*

---

*) Math Ann. Bd. 52, S. 462—464.

**) In der Fussnote (p. 462) habe ich mich ja ungenau ausgedrückt. Selbstverständlich wird die Bedingung b) nicht stets von selbst erfüllt sein. Es handelt sich bloss darum, ob der Satz noch besteht, wenn dieselbe unterbleibt.

***) An Stelle der dem Bereich (T) zu Grunde liegenden Kreise kann man offenbar sowohl hier als auch in Satz A beliebige andere zweidimensionale Continua der x- und y-Ebene setzen.

Definitionsbereich entweder den Punkt (x_0, y_0) *selbst enthält oder doch wenigstens in jede Umgebung dieses Punktes dringt. Im letzteren Fall kommt* $F(x, y)$ *einem beliebig vorgegebenen Werthe in jeder Umgebung des Punktes* (x_0, y_0) *beliebig nahe. Die in Betracht kommenden Theile des Definitionsbereiches von* $\mathfrak{F}(x, y)$ *bilden ein in* (T) *gelegenes Continuum.*)*

In jeder Umgebung des Punktes y_0 *(resp.* x_0*) liegt ein zweidimensionales Continuum, das mit einem beliebigen innerhalb des Kreises* $|x| = R$ *(resp.* $|y| = S$*) gelegenen Kreise einen Bereich* (t) *bildet, welcher innerhalb des Definitionsbereiches von* $\mathfrak{F}(x, y)$ *liegt.*

2. Der Beweis stützt sich auf einen Satz der Mengenlehre: *In einem Kreise* C *mögen eine Reihe von Punktmengen* $P_1, P_2, \cdots$ *vorgelegt sein, welche folgenden Bedingungen genügen:*

1) *die Punkte von* P_i *sind sämmtlich in* P_{i+1} *enthalten;*

2) *in keinem zweidimensionalen Continuum sind die Punkte von* P_i *überall dicht.*

Ferner möge mit

$$P = \lim_{i=\infty} P_i$$

die Menge der Punkte bezeichnet sein, die überhaupt an den Mengen P *betheiligt sind. Dann kann kein Theil von* P *ein zweidimensionales Continuum bilden.*

Den entsprechenden Satz für den eindimensionalen Fall, wo also an Stelle des Kreises C ein Stück einer Geraden tritt u. s. w., habe ich unter der Einschränkung bewiesen, dass die Punktmenge P_i ihre Ableitung stets enthält.**) Diese Forderung ist aber unwesentlich. Denn, sei $\bar{P}_i$ die Menge, die dadurch entsteht, dass man zu P_i alle noch fehlenden Häufungspunkte von P_i hinzufügt. Dann wird $\bar{P}_i$ auch in keinem Intervall überall dicht sein. Da nun nach dem soeben citirten Satze die Punktmenge

$$\bar{P} = \lim_{i=\infty} \bar{P}_i$$

kein Continuum aufzuweisen vermag, so wird dasselbe von der Theilmenge P erst recht gelten. Der Satz lässt sich aber auch durch die Methode der Einschachtelung der Intervalle direct beweisen. Man nehme nämlich an, es gehörten zur Menge P alle Punkte x des Intervalls (a, b). Dann kann man ein Intervall (α_1, β_1), wo $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$ ist, so bestimmen, dass dasselbe keinen Punkt von P_1 enthält. Alsdann kann man ein neues

*) Das Wort *Continuum* gebrauche ich durchweg im Weierstrass'schen, nicht im Cantor'schen Sinne; Weierstrass, Berl. Monatsber., Aug. 1880, § 1.

**) Am. Journ. of Math. Bd. 19 (1897), S. 173.

Intervall (α_2, β_2), wo $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1$ ist, so bestimmen, dass dasselbe keinen Punkt von P_2 enthält. Das Verfahren wird fortgesetzt. Es ergiebt sich so eine Reihe von Grössen α_n, die bei wachsendem n gegen einen Grenzwerth α convergiren, wo nun $a < \alpha < b$ ist. Der Punkt α gehört aber keiner Menge P_i und somit auch der Menge P nicht an. In diesem Widerspruch besteht der Beweis des Satzes. — Der Ausdehnung beider Beweise auf ein zweidimensionales Continuum stehen keine Schwierigkeiten im Wege.

3. *Beweis des Satzes* B. Es genügt offenbar den Beweis nur für den Punkt $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ zu führen. Den Bereich $|y| \leqq \delta$, wo $0 < \delta < S$ ist, bezeichne man mit C. Einem beliebigen festen Punkt $y = y'$ von C entspricht eine Function $F(x, y')$, die im Bereiche $|x| \leqq R_1 < R$ stetig ist und deren absoluter Betrag somit einen grössten Werth $M(y')$ besitzt. Es mögen mit P_i $(i = 1, 2, \cdots)$ die Punkte von C bezeichnet sein, in denen

$$M(y) \leqq i$$

ist. Dann müssen nach dem Satz von Nr. 2 für einen bestimmten Werth N von i die Punkte von P_N in einem zweidimensionalen in C enthaltenen Continuum D überall dicht sein, ja, sie füllen D sogar ganz aus. Denn, legt man x', wo $|x'| \leqq R_1$ ist, einen festen Werth bei, so ist $|F(x', y)|$ eine stetige Function von y in D, deren Werth in jeder Umgebung eines beliebigen Punktes von D die Grösse N nicht überschreitet. Damit ist bewiesen, dass

$$|F(x, y)| \leqq N,$$

wenn $|x| \leqq R_1$ ist und y in D liegt.

Sei y_0 ein beliebiger Punkt von D. Dann bilden die Werthe von $F(x, y)$ im Bereich $|x| < R_1$, $|y - y_0| < h$, bei passender Wahl von h, nach Satz A eine analytische Function, deren Definitionsbereich mindestens denjenigen Bereich, wo $|x| < R_1$, y ein beliebiger Punkt von D ist, umfasst.

Liegt in C noch ein zweiter von D getrennter Bereich D', so wird man von neuem zu einer analytischen Function geführt. Diese beiden Functionen sind ein und dieselbe analytische Function. In der That geht bei Vertauschung von x und y aus den obigen Betrachtungen hervor, dass in einem Bereich, wo $|y| < S_1 < S$ — hier genügt es $S_1 = \delta$ zu setzen, — und x ein Punkt eines im Kreise $|x| = R_1$ gelegenen Bereiches $\overline{D}$ ist, die Werthe von $F(x, y)$ wiederum eine analytische Function bestimmen. Dieser Bereich greift über Theile von beiden der in Betracht kommenden Bereiche, woraus denn die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

Es erübrigt nur noch zu zeigen, dass, falls es einen Punkt (x_0, y_0) von (T) giebt, in dem $F(x, y)$ nicht analytisch ist, die Function in jeder Umgebung dieses Punktes einen beliebigen Werth A beliebig nahe kommt. Wäre dem nämlich nicht so, so würde die Function

$$[F(x, y) - A]^{-1}$$

in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) den Bedingungen des Satzes A genügen. Sie wäre somit in diesem Punkte analytisch und von Null verschieden, woraus sich dann ergeben würde, dass auch $F(x, y)$ dort analytisch wäre.

4. Das Ergebniss dieser Note lässt sich im wesentlichen, wie folgt, aussprechen: Genügt $F(x, y)$ bloss den Bedingungen a) von Satz A, so giebt es in jeder Umgebung eines beliebigen Punktes (x_0, y_0) von (T) einen Punkt (x_1, y_1), in dem $F(x, y)$ analytisch ist, und zwar umfasst der Definitionsbereich dieser Function mindestens den Bereich $|x - x_1| < h$, $|y - y_1| < S_1 - |y_0|$ (resp. $|y - y_1| < h$, $|x - x_1| < R_1 - |x_0|$), wo h eine passend gewählte positive Grösse bedeutet. Die Frage: *Giebt es in* (T) *einen Punkt* (x_0, y_0), *in dem* $F(x, y)$ *nicht analytisch zu sein braucht?* wird also dann und nur dann zu verneinen sein, wenn folgender Satz richtig ist. *Es möge* $\Phi(x, y)$ *eine Function sein, die den Bedingungen* a) *von Satz* A *genügt und ausserdem im Bereich* $|x| < R$, $|y| < k < S$ *eine analytische Function der beiden unabhängigen Veränderlichen* x, y *ist. Dann ist* $\Phi(x, y)$ *auch im ganzen Bereich* (T) *analytisch.* — Ist dies nun der Fall?

Göttingen, Januar 1900.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in deutlicher präciser Zeichnung dem Manuscripte beifügen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer**, Leipzig, Königsstr. 1, II.

Hierzu Beilagen von **Oswald Weigel's Antiquarium** in **Leipzig** und von **B. G. Teubner** in **Leipzig**.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig

53. Band. 4. Heft.

Ausgegeben am 9. August.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Ueber die Vollwerthigkeit und die Stetigkeit analytischer Ausdrücke.

Von

E. B. Christoffel †.*)

1.

Sei f ein analytischer Ausdruck mit n Variabeln

$$((x)) \quad x_1\, x_2 \cdots x_n.$$

Wir setzen ein für alle mal fest,

A. Dass $x_1\, x_2 \cdots x_n$ nur reelle Zahlen im gewöhnlichen Sinne (ganze, positive oder negative, rationale, irrationale) bedeuten sollen, mit Ausschluss complexer Werthe und namentlich anderer Begriffe welche, der Zählkunst fremd, in übertragenem Sinne Zahlen genannt werden, um damit auszudrücken, dass sie ihre massgebenden Eigenschaften mit den Zahlen gemein haben.

B. Ebenso lassen wir das Functionszeichen

$$f \quad \text{oder} \quad f(x_1\, x_2 \cdots x_n) \quad \text{oder} \quad f((x))$$

nur soweit zu, als es ebenfalls eine Werthbestimmung leistet.

Diese beiden Einschränkungen sind nicht ganz unabhängig von einander. Um zu ermitteln, wie weit sie mit einander bestehen können, muss für jeden analytischen Ausdruck f die Frage beantwortet werden:

C. Unter welchen Bedingungen der Ausdruck f eine in diesem Sinne zulässige Bedeutung hat, d. h. unter welchen Bedingungen für ein ohne Unbestimmtheit zu gebendes Argumentensystem

$$((x))^0 \quad \text{oder} \quad x_1^0\, x_2^0 \cdots x_n^0$$

auch der Ausdruck f einen von jeder Unbestimmtheit freien Zahlenwerth ergiebt.

*) Die vorliegende Arbeit hat E. B. Christoffel im Januar der Redaktion der Annalen zur Veröffentlichung übergeben. Die schon damals für seine Gesundheit gehegten ernsten Besorgnisse haben sich leider nur zu bald erfüllt. E. B. Christoffel ist am 15. März seinem Leiden erlegen. Eine druckfertige Abhandlung, die sich in seinem Nachlasse vorfand wird demnächst in diesen Annalen erscheinen. Dem Wirken Christoffels wird in unseren Blättern ein Nekrolog gewidmet werden.

Die Redaktion der Annalen.

2.

Zur Beantwortung dieser Frage muss die Rechnung, welche den Werth von f liefern soll, falls er existirt, auf ihren Erfolg geprüft werden.

Diese Rechnung ist als eine *rein numerische* zu denken; ihr Gang ist bestimmt durch den Ausdruck von f mit sinngemässer Berücksichtigung solcher Umstände, welche erst bei der Umsetzung der in f vorgelegten *Buchstabenrechnung* in die hier zu prüfende *numerische Rechnung* hervortreten.

Das betrifft den arithmetischen Charakter der Argumente $(\!(x^0)\!)$, welcher auf die Einrichtung der numerischen Rechnung den grössten Einfluss hat, während die Buchstabenrechnung auf ihn keine Rücksicht nimmt, und mit allen Zahlen wie mit vollendeten operirt. Es scheiden sich dabei zwei Fälle von einander.

Den ersten Fall bilden solche Argumente, mit deren exacten Werthen die *im Ausdruck f* geforderten Operationen ohne Weiteres ausgeführt werden können; ich werde sie *numerisch verwendbare* nennen, und vorübergehend durch $(\!(x')\!)$ bezeichnen.

Den zweiten Fall bilden diejenigen Argumente, welche *in die numerische Rechnung* nur durch numerisch verwendbare Annäherungswerthe von stufenweise und unbegrenzt steigender Genauigkeit eingeführt werden können, sie mögen Argumente zweiter Art heissen und vorübergehend durch $(\!(x'')\!)$ bezeichnet werden.

Aus jedem dieser beiden Hauptfälle entspringen für die Auswerthung von f zwei andere, je nachdem f ein sogenannter endlicher oder ein unendlicher Ausdruck ist, was im Ganzen vier Classen von Algorithmen ergiebt.

Dass die Einführung der Argumentwerthe $(\!(x'')\!)$, so wie der zweite Hauptfall sie verlangt, im Buchstabenausdrucke f nicht vorgesehen ist, kann kein Grund sein, die Prüfung der beiden, diesem Hauptfalle entsprechenden numerischen Algorithmen in irgend einer Form abzulehnen.

3.

Wir gehen weiter. Abgesehen von den beiden Fällen, die beim Ausdrucke f zu unterscheiden sind, können wir die beiden Hauptfälle auch so ausdrücken, dass im ersten die Argumente $(\!(x')\!)$ direct einzusetzen, im zweiten die Argumente $(\!(x'')\!)$ durch Annäherungen einzuführen sind. Man erkennt jetzt, dass hier eine unvollständige Abzählung vorliegt; denn während das sogenannte Einsetzen der Argumente sich auf die Classe $(\!(x')\!)$ beschränkt, ist das Annäherungsverfahren nicht bloss bei der Classe $(\!(x'')\!)$, sondern bei beiden Classen anwendbar. Soll die zur Beantwortung von C. geforderte Prüfung alle Algorithmen umfassen, welche zur Auswerthung von f dienen können, so muss ein dritter Hauptfall hinzugenommen werden, nämlich die Anwendung des Annäherungsverfahrens auch bei den Argumenten erster Classe $((x'))$.

Beide Fälle vereinigen sich zu einem einzigen in der Weise, dass der zweite Hauptfall nicht auf die Argumente $((x''))$ beschränkt bleibt, sondern auf alle Argumente $((x))$ ohne Unterschied ausgedehnt wird.

So erkennen wir, dass zur vollständigen Beantwortung der Frage C.

1) Der Erfolg des Annäherungsverfahrens für alle Argumente $((x))$ ohne Ausnahme zu prüfen ist, aber

2) für die Classe $((x'))$ der numerisch verwendbaren Argumente noch ein zweites Auswerthungsverfahren besteht und auf seinen Erfolg zu prüfen ist, nämlich das sogenannte Einsetzen der Argumente.

4.

Die Algorithmen, welche für die numerische Auswerthung von f zur Verfügung stehen, und aus deren Prüfung die Beantwortung der Frage C. hervorgehen muss, zerfallen demnach in folgende vier Classen:

1. Das vorgelegte Argumentensystem $((x^0))$ ist ein numerisch verwendbares, und direct einzuführen; f ist
   a) ein endlicher,
   b) ein unendlicher Ausdruck.
2. Das Argumentensystem $((x^0))$ ist von beliebiger Art, und soll durch numerisch verwendbare Annäherungen von stufenweise unbegrenzt steigender Genauigkeit eingeführt werden; f ist
   a) ein endlicher,
   b) ein unendlicher Ausdruck.

5.

Ich werde nun vor allen Dingen versuchen, diese vier Algorithmen und namentlich die Art, wie sie fortschreiten, durch Rechnungsschemata vorstellig zu machen. Dazu gehören folgende Bezeichnungen.

1) *Endliche und unendliche Ausdrücke.* Der Ausdruck f heisst ein endlicher oder unendlicher, je nachdem die Anzahl der von ihm geforderten Operationen mit den Argumenten $((x))$ eine endliche ist oder nie abbricht. Was unter einer solchen Operation zu verstehen ist, wird durch den Ausdruck f an die Hand gegeben, kann aber unter Umständen auch vom Ermessen des Rechners abhängen. In diese Frage mischt sich die zweite nach der Reihenfolge der Operationen; auch sie kann vorgeschrieben oder der Wahl des Rechners überlassen sein. Irgend eine Entscheidung über diese Doppelfrage muss vor Beginn der Rechnung getroffen sein.

Dies so verstanden bezeichnen wir allgemein durch

$$f_{'''}((x))$$

einen endlichen Ausdruck mit den Argumenten $(\!(x)\!)$, welcher die Ausführung der ersten m Operationen vorschreibt. Das giebt, je nachdem die Rechnung mit der 1^{ten}, $2^{\text{ten}} \cdots m^{\text{ten}} \cdots$ Operation abgebrochen wird, die Folge endlicher Ausdrücke

$$(\!(f)\!) \qquad f_1 f_2 \cdots f_m \cdots$$

und f ist ein endlicher oder ein unendlicher Ausdruck, jenachdem diese Folge abbricht oder sich ohne Ende fortsetzt.

2) *Bezeichnungen für stufenweise Annäherungen von unbegrenzt zunehmender Genauigkeit.* Die unbegrenzte Annäherung an eine reelle Zahl x kann erreicht werden durch wachsende Zahlen, oder durch abnehmende, oder endlich durch Abwechslung zwischen Zahlen der einen oder der andern Art.

So kann man z. B. für $x = 2$ als wachsende Annäherungen benutzen 1,9; 1,99; 1,999; $\cdots$ und als abnehmende 2,1; 2,01; 2,001; $\cdots$.

Für das Argument x_μ^0 sei

$$x_\mu^{(1)}\ x_\mu^{(2)} \cdots x_\mu^{(p)}\ x_\mu^{(p+1)} \cdots$$

irgend eine derartige Folge von immer genauern, aber zugleich numerisch verwendbaren Annäherungswerthen, und diese Bezeichnung gelte für $\mu = 1, 2, \cdots n$. Dann ist

$$(\!(X)\!) = x_1^{(\lambda)}, x_2^{(\mu)}, x_3^{(\nu)}, \cdots x_n^{(\varrho)}$$

der allgemeine Ausdruck für ein numerisch verwendbares Annäherungssystem an $(\!(x^0)\!)$, und seine Genauigkeit steigt unbegrenzt, wenn man jeden der Indices $\lambda, \mu, \nu, \ldots \varrho$ für sich nach irgend einem Gesetze unbegrenzt wachsen lässt.

Eine unendliche Folge numerisch verwendbarer und sich immer genauer an $(\!(x^0)\!)$ anschliessender Argumentensysteme werde durch

$$\|X\| \qquad (\!(X')\!)\,(\!(X'')\!) \cdots (\!(X)\!)\,(\!(X_1)\!)\,(\!(X_2)\!) \cdots$$

bezeichnet, was für die erste Uebersicht ausreicht. Dass es solcher Folgen soviele giebt als man will, kommt erst später in Betracht.

6.

Bei diesen Bezeichnungen ergiebt sich folgende Uebersicht über den Verlauf der vier Grundalgorithmen.

I. Das Argumentensystem $(\!(x^0)\!)$ ist ein numerisch verwendbares, und in den Ausdruck f direct einzuführen.

a. Ist f ein endlicher Ausdruck, so ist

$$f(\!(x^0)\!)$$

auszurechnen.

b. Ist f ein unendlicher Ausdruck, so sind Anfang und Fortsetzung der Rechnung durch die Folge

$$f_1((x^0)),\ f_2((x^0)),\cdots f_m((x^0))\cdots$$

ausgedrückt, aber diese bricht nicht ab.

II. Das Argumentensystem $((x^0))$ ist ein beliebiges, und soll durch die unendliche Folge von Annäherungswerthen

$$\|X\| \qquad ((X'))\,((X''))\cdots((X))\,((X_1))\,((X_2))\cdots$$

eingeführt werden.

a. Ist f ein endlicher Ausdruck, so ist die Rechnung nach folgendem Schema fortzusetzen

$$f((X')),\ f((X'')),\cdots f((X)),\ f((X_1)),\ f((X_2)),\cdots$$

was nicht abbricht.

b. Ist f ein unendlicher Ausdruck, so ist die Fortsetzung der Rechnung eine zweifach unendliche:

$$\begin{array}{llll}
f_1((X')) & f_2((X')) & \cdots f_m((X')) & \cdots \\
f_1((X'')) & f_2((X'')) & \cdots f_m((X'')) & \cdots \\
\text{—} & \text{—} & \quad\text{—} & \\
f_1((X)) & f_2((X)) & \cdots f_m((X)) & \cdots \\
f_1((X_1)) & f_2((X_1)) & \cdots f_m((X_1)) & \cdots \\
\text{—} & \text{—} & \quad\text{—} &
\end{array}$$

In diesem letzten Falle bildet jede Zeile einen besondern Fall von I. b, jede Spalte einen besondern Fall von II. a, so dass diese beiden unendlichen Rechnungen sich zu einer neuen, von jenen durchaus verschiedenen verbinden.

7.

Für die Beantwortung der Frage C. scheidet der Fall I. a. aus; die Möglichkeit, in diesem Falle den Ausdruck $f((x^0))$ so, wie er sich darbietet, numerisch exact auszurechnen, ist Postulat unserer Untersuchung, und dasselbe überträgt sich auf jedes einzelne Glied der unendlichen Folgen von Ausdrücken, auf welche die Untersuchung in den drei folgenden Fällen zu richten ist.

8.

Diese drei Fälle aber fordern unendliche Rechnungen, jeder eine andere. Das sind also Rechnungen die, so wie sie verlangt sind, wohl angefangen, aber nie zu Ende gebracht werden können, und deren Erfolg von ihrer *Convergenz* abhängt.

Die zu I. b. gehörige Convergenzfrage ist die bekannte und, meines Wissens, bisher allein zugelassene: sie betrifft *die Convergenz eines unend-*

lichen Ausdruckes f bei festen Werthen seiner Argumente $((x))$. Als geeignetes Beispiel verweise ich auf Dirichlet's Theorie der Fourier'schen Entwicklungen.

Der Nachweis der Convergenz von f in diesem Sinne reicht nicht aus zur Entscheidung derjenigen Fragen, welche an Stelle fester Argumente $((x))$ die unbegrenzte Annäherung an dieselben voraussetzen.

Die beiden hierauf bezüglichen Convergenzfragen zu II. a. und II. b. sind von tieferer Anlage; ihre Untersuchung erweist sich als der gerade Weg zur Einsicht in eine massgebende allgemeine Eigenschaft eines analytischen Ausdruckes, und zu Kriterien für den Ort und die Beschaffenheit seiner Singularitäten.

Dass die Convergenz eines unendlichen Ausdruckes f bei festen Argumenten $((x))$ nicht ausreicht um zu beweisen, dass diesem Ausdruck für *jedes* Argumentensystem im Convergenzgebiete ein völlig bestimmter Werth zukommt, ist erst in der neuern Zeit erkannt worden. Dieser wichtige Fortschritt in den Grundlagen der Analysis hat sich an die Erscheinungen geknüpft, welche eine Fourier'sche Reihe $f(x)$ an einer Sprungstelle x^0 der in diese Reihe entwickelten Function $\varphi(x)$ darbietet, wenn man versucht, die von Dirichlet für das Argument x^0 selbst geleistete Summation der Reihe $f(x)$ (obiger Fall I. b) durch einseitige unbegrenzte Annäherung an x^0 zu bewirken. Man hat dann einen besondern Fall von II. b., und zwar einen solchen, *wo dieser Algorithmus divergirt, während der Algorithmus* I. b. *sich* (unter den zu ihm gehörigen Voraussetzungen) *als convergent erweist.*

Die scharfsinnigen Mathematiker, deren Aufmerksamkeit wir diese folgenreichen Aufklärungen verdanken, sind von diesen aus zu andern Fragen übergegangen, welche hier nicht zu erörtern sind.

9.

Eine unendliche Rechnung ist convergent, wenn sie zu einem geeigneten, aber ausführbaren Anfange A durch weitere Fortsetzung nur noch Schwankungen S von beliebig, aber ohne Unbestimmtheit vorzuschreibender Kleinheit: Mod. $S < \varepsilon$, *liefert.*

Ist eine unendliche Rechnung convergent, so ist demnach ihr Ergebniss ein völlig bestimmtes, dem man durch eine ausführbare Rechnung beliebig nahe kommen kann.

Unendliche Rechnungen, welche nicht convergiren, ohne Unterschied in eine einzige Classe (der divergenten Rechnungen) zu zählen, kann misslich werden. (Man vergl. die interessante Abhandlung von P. Dubois-Reymond über die trigonometrischen Reihen in den Abhandlungen der Münchener Ak. II. Cl., XII. Bd., I. Abth.). Im Uebrigen kann man von einer solchen Rechnung aussagen dass, wie weit sie auch fortgesetzt werden mag, immer noch Schwankungen übrig bleiben, welche verhindern, dass die Rechnung „zu stehenden Resultaten“ führt. Dass Ergebniss der ins Unbestimmte fortgesetzten Rechnung ist also selber unbestimmt, wozu auch das Unendlichwerden gehört.

10.

Der Algorithmus I. b. setzt voraus, dass $f(\!(x)\!)$ ein unendlicher Ausdruck ist, welcher für ein System $x_1^0 x_2^0 \cdots x_n^0$ numerisch verwendbarer Argumente ausgewerthet werden soll, und zwar soll dies durch directes Einsetzen der Argumente geschehen.

Diese Rechnung kommt darauf hinaus, dass die endlichen Ausdrücke

(I. b.) $$f_1(\!(x^0)\!),\ f_2(\!(x^0)\!), \cdots f_m(\!(x^0)\!), \cdots$$

einer nach dem andern ausgerechnet werden, was man anfangen, aber nicht zu Ende führen kann.

Als ausführbar hat $f_m(\!(x^0)\!)$ zu gelten, so lange m ohne Unbestimmtheit gegeben ist. Zu diesem ausführbaren Anfange der Rechnung liefert die weitere Fortsetzung Schwankungen, deren allgemeiner Ausdruck

$$S = f_p(\!(x^0)\!) - f_m(\!(x^0)\!) \quad (\text{für } p > m)$$

ist.

Ich will nun ein für allemal festsetzen, dass im Folgenden unter

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\cdots$$

nur Zahlen verstanden werden sollen, welche unter allen Umständen *von Null verschieden, positiv und ohne Unbestimmtheit zu geben sind.*

Die Convergenz von $f(\!(x^0)\!)$ fordert, dass, wie klein auch ε sein mag, für ein geeignetes m und jedes $p > m$ der Mod. $S < \varepsilon$ wird, und dann kann man ε gewissermassen als ein Mass für die Genauigkeit von $f_m(\!(x^0)\!)$ benutzen.

Soll die Rechnung I. b. convergiren, so ist dafür erforderlich und hinreichend, dass sich für jedes noch so kleine ε aus den Ungleichheiten

(ε_1) $$\text{Mod.}\,|f_p(\!(x^0)\!) - f_m(\!(x^0)\!)| < \varepsilon, \quad m < p$$

für m wenigstens ein von jeder Unbestimmtheit freier Werth ergiebt, und dann ist

$$f_m(\!(x^0)\!)$$

ein ausführbarer numerischer Ausdruck, welcher den verlangten Werth von f bis auf eine Correction vom Genauigkeitsmasse ε ergiebt.

Unter diesen Bedingungen hat also der, mit den Argumenten $(\!(x^0)\!)$ formirte Ausdruck f einen völlig bestimmten Werth.

Ist C das Gesammtgebiet, in welchem diese Bedingungen, wenn auch nicht überall mit demselben Werthe von m, erfüllt sind, so heisst C *das Convergenzgebiet* von f. Innerhalb dieses Gebietes C ist die Convergenz von f durch die Ungleichheiten (ε) nur dargethan für die numerisch verwendbaren Argumente $(\!(x^0)\!)$ innerhalb C.

11.

Dies vorausgeschickt, stellen wir aus Nr. 6 nochmals die beiden Hauptfälle einander gegenüber, um unsere Aufgabe für den noch rückständigen Hauptfall vollständig und genau aufstellen zu können.

Das erste Hauptverfahren kommt bei allen Argumenten $(\!(x^0)\!)$ ohne Ausnahme zur Anwendung: es besteht darin, dass die Argumente $(\!(x^0)\!)$ zur Auswerthung von f nicht selber in diesen Ausdruck eingeführt werden, sondern statt ihrer eine unendliche Folge numerisch verwendbarer Annäherungswerthe von unbegrenzt steigender Genauigkeit benutzt werden soll.

Solcher Folgen giebt es unendlich viele. Wir stellen die

Aufgabe I, *die Bedingungen zu ermitteln, damit der so begründete Algorithmus für jede Folge von Annäherungswerthen convergirt, und jede Folge zum nämlichen Grenzwerth für f führt. Diesen werden wir durch G bezeichnen.*

Das zweite Hauptverfahren findet nur statt, wenn die Argumente $(\!(x^0)\!)$ numerisch verwendbar sind, und besteht darin, dass diese Argumente zur Auswerthung von f selber in diesen Ausdruck eingesetzt werden. Was hierüber im Allgemeinen zu sagen ist, ist im Vorangehenden erledigt.

Auf die numerisch verwendbaren Argumente sind also beide Hauptverfahren zur Auswerthung von f anwendbar, es folgt aber keineswegs, dass sie auch beide denselben Werth für f ergeben.

Mit Rücksicht hierauf werden wir unbedingt daran festhalten:

Zusatz I. 1) *dem Ausdrucke f für bestimmte Argumente* $(\!(x^0)\!)$ *nur dann einen Werth zuzuschreiben, wenn das erste Hauptverfahren einen solchen ergiebt, und*

2) *diesen als den Werth von f für jene Argumente zu erklären,* und dies namentlich auch in solchen Fällen, wo auch das zweite Hauptverfahren statt hat, aber für f einen andern Werth ergiebt wie das erste.

Wie das zusammenhängt (hebbare Unstetigkeiten), und dass die vorstehende Festsetzung dem, was in der Analysis üblich ist, genau entspricht, wird sich aus den Bedingungen ergeben, unter denen das erste Hauptverfahren den in vorstehender Aufgabe I. geforderten Erfolg hat.

12.

Auch beim ersten Hauptverfahren scheiden sich die beiden Fälle, je nachdem

a. f ein endlicher oder

b. f ein unendlicher Ausdruck ist.

Wir erledigen zunächst, was beiden Fällen gemeinsam ist, und knüpfen an die Bezeichnungen und Voraussetzungen der Nr. 6 an.

In der Argumentenfolge $\|X\|$ wird $(\!(X)\!)$ so gewählt, dass $f(\!(X)\!)$ im Falle a., $f_m(\!(X)\!)$ im Falle b. einen ausführbaren Anfang der Rechnung vorstellt. Zu letzterem gehört, dass m einen endlichen, von jeder Unbestimmtheit freien Werth hat; auf $(\!(X)\!)$ kommen wir später zurück.

Schreitet die Rechnung nach dieser linearen Argumentenfolge $\|X\|$ fort, so erhalten wir als Ausdruck für sämmtliche Schwankungen, welche zu diesem Anfangsergebniss kommen können,

$$\text{im Falle a:}\quad S = f(\!(X_\mu)\!) - f(X) \quad \text{für} \quad \mu \geqq 1,$$

$$\text{„ „ b:}\quad S = f_p(\!(X_\mu)\!) - f_m(\!(X)\!) \quad \text{für} \quad \mu \geqq 0,\ p \geqq m.$$

Dabei darf nicht aus dem Auge gelassen werden, dass die Werthe von f, f_p, f_m *durch das zweite Hauptverfahren* zu ermitteln sind, so wie dass zwar bei wachsendem μ sich $\lim (\!(X_\mu)\!) = (\!(x^0)\!)$ ergiebt, *aber das Argument* $(\!(x^0)\!)$ *selbst in diesen Ungleichheiten nicht vorkommt.*

Wird die Untersuchung auf diese specielle Folge $\|X\|$ von Annäherungswerthen beschränkt, so müssen für ein beliebig kleines ε sämmtliche Mod. $S < \varepsilon$ werden, und zwar durch geeignete Wahl von $(\!(X)\!)$ allein im Falle a, von $(\!(X)\!)$ und m im Falle b.

Aber unsere Aufgabe I fordert dies für jede Folge $\|X\|$ von Annäherungswerthen. Um dies zum Ausdruck zu bringen, verfahren wir wie folgt.

Für jede Variable $x_\mu\,(\mu = 1, 2 \cdots n)$ wird ein, den Werth x_μ^0 enthaltendes Schwankungsgebiet ΔE_μ eingeführt und

1) x_μ auf die numerisch verwendbaren Werthe innerhalb ΔE_μ beschränkt.

2) ΔE_μ wird durch die Ungleichheit

$$x_\mu^0 - \alpha_\mu < x_\mu < x_\mu^0 + \beta_\mu$$

gegeben, wo α_μ, β_μ positiv, mindestens nicht negativ sind.

3) Die Grösse des Spielraums für x_μ oder seine Maximalschwankung ist dann

$$\alpha_\mu + \beta_\mu = \Delta x_\mu.$$

Wenn es sich um f oder um das vollständige Argumentensystem $(\!(x)\!)$ handelt, werde ich diese n Schwankungsgebiete ΔE_1, $\Delta E_2 \cdots \Delta E_n$ zusammen als ein einziges auffassen, und dieses ΔE nennen.

Zu den vorstehenden Festsetzungen bezüglich ΔE gehört nun noch eine, welche davon herrührt, dass ΔE ein Argumentensystem $(\!(X)\!)$ enthalten muss, für welches $f(\!(X)\!)$ oder $f_m(\!(x)\!)$ einen ausführbaren Anfang der Rechnung bildet. Da aber die Ausführbarkeit dieser Rechnung mit steigender Annäherung von $(\!(X)\!) = (\!(x^0)\!)$ eine zunehmende Verzögerung erfährt (man denke sich x_μ^0, x_μ durch Decimalbrüche ausgedrückt), so kommt die verlangte Eigenschaft den Argumenten $(\!(X)\!)$ nur zu, so lange sie von den vorgelegten $(\!(x^0)\!)$ nicht bloss unendlich wenig verschieden sind.

Demnach müssen die Schwankungsgebiete $\Delta E_1 \cdots \Delta E_n$ so eingerichtet werden, dass sie ausser beliebig genauen Annäherungen an $x_1^0 x_2^0 \cdots x_n^0$ auch solche enthalten, die von ihnen nicht bloss unendlich wenig verschieden, und ausserdem numerisch verwendbar sind. Um dem zu genügen, muss noch festgesetzt werden

4) dass die Maximalschwankungen $\Delta x_1, \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$, wenn auch noch so klein, aber ohne jede Unbestimmtheit angenommen werden müssen.

Ist diese Bedingung für die Abgrenzungen von ΔE erfüllt, so folgt, dass es wirklich in ΔE numerisch verwendbare Argumente $(\!(X)\!)$ von solcher Beschaffenheit giebt, dass $f(\!(X)\!)$ im Falle a., $f_m(\!(X)\!)$ im Falle b. einen ausführbaren Anfang der Rechnung bildet.

Für unsere Aufgabe I. bedürfen wir zu diesen Anfangsergebnissen die zugehörigen Schwankungen bei beliebiger Fortsetzung der Rechnung. In obigen Ausdrücken für S sind also für $(\!(X_\mu)\!)$, d. i. für $(\!(X_1)\!)$, $(\!(X_2)\!) \cdots$ *alle in ΔE enthaltenen Argumentensysteme, mit einziger Ausnahme von $(\!(x^0)\!)$ selbst, einzuführen, soweit sie zu den numerisch verwendbaren gehören.* Wir bezeichnen sie durch

$$(\!(x')\!),\ (\!(x'')\!), \cdots$$

und erhalten, als allgemeinen Ausdruck für alle Schwankungen, welche

1) im Falle a. zum Anfangsergebniss $f(\!(X)\!)$ kommen können,
$$S' = f(\!(x')\!) - f(\!(X)\!),$$
oder auch
$$S'' = f(\!(x'')\!) - f(\!(X)\!),$$
was
$$S = f(\!(x')\!) - f(x'') = S' - S''$$
giebt.

2) Im Falle b. zum Anfangsergebniss $f_m(\!(X)\!)$ die Schwankungen:
$$S' = f_p(\!(x')\!) - f_m(\!(X)\!) \quad \text{für} \quad p \overset{=}{>} n,$$
oder
$$S'' = f_q(\!(x'')\!) - f_m(\!(X)\!) \quad \text{für} \quad q \overset{=}{>} n,$$
was
$$S = f_p(\!(x')\!) - f_q(\!(x'')\!) = S' - S'' \quad \text{für} \quad p \overset{=}{>} m,\ q \overset{=}{>} n$$
giebt.

In beiden Fällen soll, mit den nöthigen Zusätzen, Mod. $S' < \varepsilon$ oder, was dasselbe ist, Mod. $S'' < \varepsilon$ werden. Es ist also unerlässlich, dass Mod. $S < 2\varepsilon$ wird. Aber das reicht auch aus. Denn wenn Mod. $S < 2\varepsilon$ ist, so ist für den Mod. S ein höchster Werth sichergestellt, da S nicht unendlich werden kann, und dieser höchste Werth des Mod. S kann mit ε nach Belieben verkleinert werden. Das überträgt sich auf seine übrigen Werthe, zu denen Mod. S' und Mod. S'' gehören. Ersetzen wir 2ε durch ε', so folgt:

Für die Aufgabe I ist erforderlich und ausreichend, dass für alle in ΔE enthaltenen, von $(\!(x^0)\!)$ verschiedenen und numerisch verwendbaren Argumente $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ der

$$\text{Mod. } S < \varepsilon'$$

wird, wo im Falle a.: $S = f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!)$,

„ „ b,: $S = f_p(\!(x')\!) - f_q(\!(x'')\!)$ und $p \overline{\gtrless} m$, $q \overline{\gtrless} m$

ist; und zwar muss sich das für ein beliebig klein gegebenes ε' erreichen lassen, ohne dass eine der Schwankungen $\Delta x_1\, \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$ unendlich klein wird, wozu im Falle b. noch kommt, dass die Zahl m eine endliche sein muss.

13.

Sei f ein endlicher Ausdruck. (Fall a.)

A. Für die Aufgabe I ist erforderlich und hinreichend dass, *nach Ausscheidung des Punktes $(\!(x^0)\!)$ selbst*, die Maximalschwankung von f in ΔE:

$$\text{(a)} \qquad \text{Mod. } |f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!)| < \varepsilon'$$

wird, und zwar für ein beliebig klein gegebenes ε', und ohne dass eine der Maximalschwankungen $\Delta x_1\, \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$ unter jede Grenze sinkt. Dabei sind $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ beschränkt auf die numerisch verwendbaren Argumente innerhalb ΔE (mit Ausschluss von $(\!(x^0)\!)$), und bezüglich der Werthe von f ist vorausgesetzt, dass sie nach dem zweiten Hauptverfahren berechnet sind.

Sei

$$G(\!(x^0)\!)$$

der Werth, welchen alsdann das erste Hauptverfahren für f zum Punkte $(\!(x^0)\!)$ ergiebt.

In dem besondern Falle, wo auch $(\!(x^0)\!)$ zu den numerisch verwendbaren Argumenten gehört, liefert das zweite Hauptverfahren ebenfalls einen Werth für f, welcher durch

$$f(\!(x^0)\!)$$

zu bezeichnen ist. In den Ungleichheiten (a) kommt er nicht vor.

Um auch diesen Fall zu erledigen, nehme ich an Stelle dieses ausgeschlossenen Punktes $(\!(x^0)\!)$ einen andern, etwa $(\!(x')\!)$. Dann dürfen in (a) für $(\!(x'')\!)$ alle Annäherungsfolgen genommen werden, welche in $(\!(x')\!)$ auslaufen; es folgt, dass für $(\!(x')\!)$ an Stelle von $(\!(x^0)\!)$ ebenfalls die in der Aufgabe I geforderte Convergenz stattfindet. Sei $G(\!(x')\!)$ der Werth, den das erste Hauptverfahren ergiebt, mithin $G(\!(x')\!) = \lim f(\!(x'')\!)$, während $f(\!(x')\!)$ durch das zweite Verfahren gewonnen wird. Wir erhalten

$$(\mathrm{a}') \qquad \text{Mod.}\, |f(\!(x')\!) - G(\!(x')\!)| < \varepsilon',$$

also $f(\!(x')\!) - G(\!(x')\!) = 0$, weil andernfalls sein Modul nicht mit ε' nach Belieben verkleinert werden könnte. Dass dies nicht folgt, wenn man an Stelle der, die Ungleichheit (a) befriedigenden Zahl $f(\!(x')\!)$ eine andere nimmt, springt in die Augen. Auf $(\!(x^0)\!)$ übertragen, heisst dies:

B. In dem besondern Falle, wo auch $(\!(x^0)\!)$ zu den numerisch verwendbaren Argumenten gehört, liefern beide Hauptverfahren zum Punkte $(\!(x^0)\!)$ stets und nur dann denselben Werth

$$G(\!(x^0)\!) = f(\!(x^0)\!),$$

wenn die Ungleichheit (a) auch noch nach Hinzuziehung des Punktes $(\!(x^0)\!)$ erfüllt bleibt.

Nun sei $(\!(y')\!)$ ein beliebiges Argument innerhalb ΔE. Ist es ein numerisch verwendbares, so ist $f(y') = G(y')$, auf alle Fälle aber ist $\lim f(\!(x')\!) = G(\!(y')\!)$, wenn $(\!(x')\!)$ eine Annäherungsfolge durchlaufend, gegen $(\!(y')\!)$ convergirt. Dann also kann durch Annäherung von $(\!(x')\!)$ an $(\!(y')\!)$ erreicht werden, dass $f(\!(x')\!) - G(\!(y')\!)$ numerisch unter alle Grenzen sinkt. Dabei bleibt die Ungleichheit (a) bestehen, da $f(\!(x')\!)$ nur solche Werthe durchläuft, wie sie in (a) vorausgesetzt werden, und der Uebergang zu $G(\!(y')\!)$ am Maximalmodul nichts ändert. Gehören ebenso $(\!(y'')\!)$ und $G(\!(y'')\!)$ als Grenzen zu $(\!(x')\!)$ und $f(\!(x'')\!)$, so geht (a) über in

$$(\mathrm{a}'') \qquad \text{Mod}\, |G(\!(y')\!) - G(\!(y'')\!)| < \varepsilon',$$

und dies gilt für alle Argumente $(\!(y')\!)$, $(\!(y'')\!)$ innerhalb ΔE.

C. Unter den Voraussetzungen des Satzes A erklären wir $G(\!(x^0)\!)$ als den Werth von f im Punkte $(\!(x^0)\!)$, gleichviel ob für diesen Punkt auch das zweite Hauptverfahren statthat, und namentlich auch, wenn dieses für f einen von $G(\!(x^0)\!)$ verschiedenen Werth ergeben sollte. In Folge dessen dehnt sich die Ungleichheit

$$(\mathrm{a}) \qquad \text{Mod.}\, |f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!)| < \varepsilon'$$

von den numerisch verwendbaren Argumenten aus auf alle Argumente $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ innerhalb ΔE,

wie aus (a″) folgt, wenn man $(\!(y')\!)$, $(\!(y'')\!)$ durch $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ ersetzt und nun benutzt, dass G der Werth von f ist.

D. Das überträgt sich auf alle Theile ΔE eines Grössengebietes E, wenn die Bedingungen des Satzes A in jedem Theile ΔE von E erfüllt sind, und der Werth von f für jeden Punkt $((x^0))$ von E nach vorstehendem Princip, also stets durch das erste Hauptverfahren bestimmt wird (Nr. 11, Zus. II). Sind aber diese Bedingungen verletzt in irgend einem Punkte (oder einer Linie u. s. w.) von E, so ist das ein *singulärer* Punkt (oder eine singuläre Linie u. s. w.) von f.

E. Wenn ein endlicher Ausdruck f in jedem Punkte $((x^0))$ eines Grössengebietes E einen völlig bestimmten Werth besitzt, und dieser Werth sich aus den Nachbarwerthen von f durch das erste Hauptverfahren ergiebt, so werde ich f als *vollwerthig in* E bezeichnen.

F. Für die Vollwerthigkeit eines endlichen Ausdruckes f in einem Gebiete E ist eine Eigenschaft dieses Ausdruckes erforderlich und hinreichend, welche darin besteht, dass für jeden Theil ΔE von E der grösste Schwankungsmodul von f, also seine Maximalschwankung, unter eine beliebig kleine Grenze ε sinkt, wenn die Maximalschwankungen seiner Argumente unter völlig bestimmte, von Null verschiedene und aus ε zu berechnende Grenzen gebracht werden.

14.

Die Stetigkeit analytischer Ausdrücke. Dass diese Eigenschaft von f mit der *Stetigkeit* von f in Beziehung steht, braucht nicht erst gesagt zu werden.

Sie bedarf aber eines Namens, da sie — zunächst bei den endlichen Ausdrücken — das Kriterium für die Convergenz des Annäherungsalgorithmus IIa im Sinne der Aufgabe I enthält, mithin jedesmal erwähnt werden muss, wo es sich um diese Convergenz oder die auf die Vollwerthigkeit von f bezüglichen Folgerungen aus ihr handelt.

Von der *Continuität* Cauchy's, als einer Beziehung zwischen den *gleichzeitigen* Aenderungen der Variabeln $x_1\, x_2 \cdots x_n$ und des Ausdruckes f ist diese Eigenschaft durchaus verschieden: als Continuität von f wird sie demnach nicht bezeichnet werden dürfen.

Aber sie selbst, nämlich ihr im Vorstehenden nachgewiesenes Kriterium leistet — wenigstens vorläufig für die endlichen Ausdrücke f — genau das, wofür man sich auf die Stetigkeit von f zu berufen gewöhnt hatte, wobei der Irrthum nur darin bestand, dass man glaubte es reiche aus, als Stetigkeit von f seine Continuität nachzuweisen, während es richtig gewesen wäre *zu untersuchen, was man für den angegebenen Zweck unter dem Worte Stetigkeit verstehen müsse.*

Diese Untersuchung ist im Vorangehenden für die endlichen Ausdrücke f geleistet, und ich bezeichne die bezügliche Eigenschaft (F) von f als seine Stetigkeit, da in sprachlicher Beziehung nichts vorliegt, was zur bisher üblichen, irreleitenden Auslegung dieses Wortes nöthigen könnte.

G. Ich nenne allgemein einen Ausdruck f mit den Variabeln $x_1\, x_2 \cdots x_n$, oder auch eine Function dieser Variabeln stetig in einem $\left|\begin{array}{c}\text{Punkte } (\!(x^0)\!) \\ \text{Gebiete } E\end{array}\right|$, wenn für jedes $\left|\begin{array}{c}(\!(x^0)\!) \text{ einschliessende} \\ \text{in } E \text{ enthaltene}\end{array}\right|$ engere Grössengebiet ΔE 1) f keiner unendlichen Schwankung unterliegt und 2) seine Maximalschwankung unter eine beliebige Grenze ε gebracht werden kann, indem man die Maximalschwankungen der Variabeln in ΔE unter Grenzen bringt, die alle von Null verschieden sind und sich aus ε ohne Unbestimmtheit ergeben.

Diese Definition der Stetigkeit für die einfachern Fälle $n = 1, 2, 3$ habe ich meinen Vorlesungen über Functionentheorie und, seit mehr als 30 Jahren, meinen Vorlesungen über bestimmte Integration zu Grunde gelegt. Ich bin zu derselben ursprünglich veranlasst worden durch eine empfindliche Lücke in der überkommenen Begründung des bestimmten Integrals als Grenzwerth einer Summe, welche von der oben erwähnten ungenügenden Vorstellung vom Wesen der Stetigkeit herrührte.

In seinen *Vorlesungen über die einfachen und vielfachen Integrale* (Seite 28) hat Herr Kronecker eine andere Definition der Stetigkeit gegeben, deren wesentlicher Unterschied von der vorstehenden darauf beruht, dass sie (für $n = 2$) den zu $(\!(x^0)\!)$ gehörigen Werth $f(\!(x^0)\!)$ (an der angegebenen Stelle $f(x, y)$) voraussetzt, während es sich hier um die Frage nach seiner Existenz handelt. Dass die obige Definition der Stetigkeit diesem grossen Mathematiker nicht unbekannt gewesen ist, er sie aber abgelehnt hat, scheint aus einer andern Stelle des erwähnten Werkes hervorzugehen (Seite 6, Zeile 14—11 v. u.).

Im Uebrigen findet sich obige Definition der Stetigkeit auch schon bei P. Dubois-Reymond, ich erinnere mich aber nicht, dass er angegeben hätte, was ihn zu derselben nöthigte.

H. Ist ein endlicher Ausdruck f mit den Variabeln $x_1\, x_2 \cdots x_n$ stetig in einem Punkte $(\!(x^0)\!)$, so hat er in diesem Punkte einen völlig bestimmten Werth, und kann demselben durch numerisch ausführbare Annäherungsrechnungen nach Belieben genähert werden.

Ist f stetig in allen Punkten oder allen Theilen ΔE eines Grössengebietes E, so gilt dieser Satz von jedem Punkte dieses Gebietes, und F heisst vollwerthig in E.

Enthält E eine Stelle (Punkt, Linie, ...) wo die Stetigkeit von f aussetzt, so bezeichnet man diese als eine singuläre Stelle von f.

Wir schliessen an die Untersuchung des Falles II. a., in welcher bereits der Kernpunkt der hier vorliegenden allgemeinen Frage vollständig zur Erörterung gekommen ist, zwei Beispiele nebst einer Bemerkung über das Wesen der numerisch verwendbaren Argumente.

15.

Zunächst zwei Beispiele einfachster Art. Ich nehme $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, setze $x + iy = z$ bei geometrischer Repräsentation von x, y, z, und nehme für f die Ausdrücke z^p, $\frac{1}{z-a}$, wo p eine positive ganze Zahl, a eine Constante ist.

Unter ΔE verstehe ich ein Stück der Zahlenebene, welches den Punkt z^0 enthält, und bezeichne durch z', z'' beliebige Werthe von z innerhalb ΔE.

1. Für $f = z^p$ wird der Ausdruck für seine Schwankungen innerhalb ΔE:

$$S = z'^p - z''^p = (z' - z'') \,|\, z'^{p-1} + z'^{p-2} z'' + \cdots + z''^{p-1} \,|.$$

Um den Punkt $z = 0$ lege ich ein Kreisgebiet

$$E. \qquad \text{Mod. } z < \varrho,$$

welches ΔE enthält. Dann ist für jede Lage von ΔE innerhalb E

$$\text{Mod.}\, |\, z'^{p-1} + z'^{p-2} z'' + \cdots + z''^{p-1} \,| < p \cdot \varrho^{p-1}.$$

Ist ferner $\Delta \zeta$ die grösste Sehne von ΔE, so ist

$$\text{Mod. } (z' - z'') \leqq \Delta \zeta,$$

und für die Maximalschwankung von f innerhalb ΔE folgt:

$$\text{Mod. } S < p \varrho^{p-1} \Delta \zeta.$$

Soll diese $< \varepsilon$ werden, so muss

$$\Delta \zeta < \frac{\varepsilon}{p \cdot \varrho^{p-1}}$$

genommen werden, und das genügt allen Bedingungen, so lange es nicht unendlich klein, d. h. so lange ϱ nicht unendlich gross wird.

Der Ausdruck z^p ist stetig und vollwerthig, so lange der Mod. z nicht alle ohne Unbestimmtheit angebbaren Grenzen überschreitet.

2. Für $f = \frac{1}{z-a}$ wird

$$S = \frac{1}{z'-a} - \frac{1}{z''-a} = \frac{z''-z'}{z'-a \cdot z''-a}, \qquad \text{Mod.}\, S = \frac{\text{Mod.}\,(z''-z')}{r'r''},$$

wenn r', r'' die Entfernungen von a bis z', z'' sind.

Enthält nun 1) ΔE den Punkt $z = a$, so gehört es zu den Voraussetzungen unserer Untersuchung, dass z', z'' dem Werthe a beliebig nahe kommen können. Bei der Annäherung von z'' an a wächst der Mod. S über alle Grenzen, f ist nicht stetig im Punkte a. Wenn dagegen 2) a ausserhalb ΔE liegt, so können r', r'' nicht unter jede Grenze sinken, und wenn $\Delta\zeta$ die vorige Bedeutung hat, so ergibt sich für die Maximalschwankung von f in ΔE

$$\text{Mod.}\, S < \frac{\Delta\zeta}{r'r''}$$

bei möglichst kleinen Werthen von r' und r'', woraus die Stetigkeit und Vollwerthigkeit von f ausserhalb a folgt. Als numerisch verwendbar hat im ersten Beispiel jede rationale Zahl $z = R_1 + iR_2$, im zweiten jede Zahl von der Form $z = a + R_1 + iR_2$ zu gelten. Dies zeigt zur Genüge, dass die numerische Verwendbarkeit der Argumente zwar von ihrem arithmetischen Charakter abhängt, aber dieser Charakter sich nach der Beschaffenheit von f richtet.

3. Es ist noch ein Fall zu erwähnen, in welchem scheinbar weder das erste noch das zweite Hauptverfahren anwendbar ist. Dieser Fall kann wirklich vorkommen, nämlich wenn der Ausdruck f ausser den n Variabeln $x_1 \cdots x_n$ noch Irrationalzahlen $j_{n+1} \cdots j_p$ so enthält, dass es für $x_1 \cdots x_n$ überhaupt gar keine numerisch verwendbaren Werthe gibt.

Die Ausnahme ist nur eine scheinbare, denn die Auswerthung von f für einen Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ ist ohnehin nicht anders möglich, als dass auch $j_{n+1} \cdots j_p$ durch Annäherungswerthe eingeführt werden. Dies kommt darauf hinaus, dass in f an Stelle von $j_{n+1} \cdots j_p$ zunächst Variable $x_{n+1} \cdots x_p$ eingeführt werden, wodurch $f(x_1 \cdots x_n)$ in $f(x_1 \cdots x_p)$ übergehe, und dann die Auswerthung von f für den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0\; j_{n+1} \cdots j_p$ eintritt, wozu *nur* das erste Hauptverfahren dienen kann, weil $j_{n+1} \cdots j_p$ irrational sind, aber numerisch verwendbare Argumente, nämlich die rationalen Zahlen, zur Verfügung stehen.

Dass man ebenso, von allereinfachsten Beispielen abgesehen, in jedem Falle verfährt, wo f Irrationalzahlen enthält, versteht sich von selbst.

16.

Die unendlichen Ausdrücke f. In Nr. 12 ist alles vorbereitet, was auf diesen Fall Bezug hat. Die Aufgabe I (Nr. 11) fordert

(S) dass für $S = f_p((x')) - f_q((x''))$ und $p \geqq m$, $q \geqq m$ der

$$\text{Mod.}\, S < \varepsilon'$$

wird, für alle in $\Delta\varepsilon$ enthaltenen, von $((x^0))$ verschiedenen und numerisch verwendbaren Argumente $((x'))$, $((x''))$, und zwar muss sich dies für jedes beliebig klein gegebene ε' erreichen lassen, ohne dass m, die untere Grenze von p und von q, unendlich gross, oder eine der Schwankungen $\Delta x_1 \cdots \Delta x_n$ unendlich klein wird. Alle hier vorkommenden Werthe von f_p, f_q sind nach dem zweiten Hauptverfahren zu berechnen.

Wir beginnen mit zwei besonderen Fällen, und nehmen zuerst $((x'')) = ((x'))$ und für q die gemeinsame untere Grenze von p und von q, nämlich die Zahl m. Das giebt

$$S = f_p((x')) - f_m((x')) \quad \text{und} \quad \text{Mod.}\, S < \varepsilon'$$

für den grössten Mod. S, mithin für alle Moduln S.

Das ist gefordert für $p \geqq m$ und alle numerisch verwendbaren Argumente $((x'))$ innerhalb $\Delta\varepsilon$, mit Ausnahme von $((x^0))$, nebst dem Zusatze bezüglich m und $\Delta x_1 \cdots \Delta x_n$. Es ist die Bedingung für die Convergenz des unendlichen Ausdruckes $f((x'))$ *bei festem Argumente* $((x'))$, was dem Falle I.b. entspricht, aber mit einem Zusatze, welcher sich auf die verschiedenen Argumente bezieht, welche für $((x'))$ sollen zugelassen werden. Der Zusatz besteht darin, dass Mod. $S < \varepsilon'$ gefordert ist für alle Argumente $((x'))$, und zwar zum nämlichen ε' und zur nämlichen unteren Grenze m von p und von q.

In Folge dessen erweist sich, für ein und dasselbe m, $f_m((x'))$ als ausführbares Anfangsergebniss der Rechnung zu jedem $((x'))$ innerhalb $\Delta\varepsilon$, mit Ausnahme von $((x^0))$, und ein und dasselbe ε' als Mass der Genauigkeit für die hinzutretenden Correctionen (Schwankungen):

(α) Der gegenwärtige besondere Fall sagt also aus, dass innerhalb $\Delta\varepsilon$ der unendliche Ausdruck f nicht nur für jedes feste, von $((x^0))$ verschiedene, numerisch verwendbare Argument $((x'))$ convergiren muss, sondern dass er für alle diese Argumente $((x'))$ gleichmässig convergiren muss. Und das Criterium für die gleichmässige Convergenz von f bei festen Argumenten $((x'))$ innerhalb $\Delta\varepsilon$ besteht darin dass, wenn die Ungleichheit

$$\text{Mod.}\, |f_p((x')) - f_m((x'))| < \varepsilon'$$

für jedes $p \geqq m$ gefordert wird, man ihr für alle diese Argumente $((x'))$ durch das nämliche m genügen kann, und zwar, ohne dass von den Schwankungen $\Delta x_1 \cdots \Delta x_n$ irgend eine unendlich klein wird.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so convergiren $f_p(\!(x')\!)$ bei wachsendem p, $f_q(\!(x'')\!)$ bei wachsendem q gegen feste Grenzen, die aus dem zweiten Hauptverfahren entspringenden Werthe $f(\!(x')\!)$, $f(\!(x'')\!)$ von f zu den von $(\!(x^0)\!)$ verschiedenen, numerisch verwendbaren Argumenten $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$. Die Ungleichheit (S) geht dabei über in

$$\text{Mod.}\,|f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!)| < \varepsilon',$$

das ist dieselbe Ungleichheit, und mit denselben Zusätzen, welche der Untersuchung über die endlichen Ausdrücke f zu Grunde liegt (Nr. 13. A.), und demnach auch zu denselben Folgerungen führt. Wir werden sie weiter unten auf anderm Wege wiederfinden.

Ein zweiter besonderer Fall ist der, wo $q = p$ genommen wird, was

$$S = f_p(\!(x')\!) - f_p(\!(x'')\!)$$

und Mod. $S < \varepsilon'$ giebt für $p \overline{\overline{>}} m$ und alle numerisch verwendbaren Argumente $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ innerhalb $\Delta\varepsilon$, mit Ausnahme von $(\!(x^0)\!)$. Das ist ein besonderer Fall zu II. a. und sagt aus, dass f_p bis auf den Punkt $(\!(x^0)\!)$ innerhalb $\Delta\varepsilon$ stetig sein muss, und zwar für $p \overline{\overline{>}} m$.

(β) Unsere gegenwärtige Aufgabe fordert auch, dass bei der in (α) festgestellten Bedeutung von m die sämmtlichen Ausdrücke

$$f_m f_{m+1} \cdots f_p \cdots$$

innerhalb $\Delta\varepsilon$ mit Ausschluss des Punktes $(\!(x^0)\!)$ stetig sein müssen.

Diese Bedingungen (α) und (β) sind demnach für unsere Aufgabe unerlässlich, sie reichen aber auch aus. In der That ist der allgemeine Ausdruck von S:

$$S = f_p(\!(x')\!) - f_q(\!(x'')\!)$$
$$= |f_p(\!(x')\!) - f_p(\!(x'')\!)| + |f_p(\!(x'')\!) - f_m(\!(x'')\!)| - |f_q(\!(x'')\!) - f_m(\!(x'')\!)|,$$

und das giebt, unter Voraussetzung von (α) und (β)

$$\text{Mod.}\, S < 3\varepsilon'.$$

Wenn das nun auch nicht $< \varepsilon'$ ist, wie ursprünglich (in (S)) verlangt wurde, so beweist es doch, dass ein Maximalwerth des Mod. S existirt, und dieser unter den Bedingungen (α) (β) nach Belieben verkleinert werden kann, was der wahre Sinn der Ungleichheit (S) ist.

Aber die Bedingungen (α) und (β) sind nicht unabhängig von einander, sondern wenn (α) erfüllt ist, kann (β), und wenn (β) erfüllt ist, kann (α) durch eine viel einfachere Bedingung ersetzt werden.

Sei die Bedingung (β) *erfüllt.* Wir nehmen für $(\!(X)\!)$ ein von $(\!(x^0)\!)$ verschiedenes, numerisch verwendbares Argument innerhalb $\Delta\varepsilon$, und zerlegen S wie folgt:

$$S = f_p((x')) - f_q(x'')$$
$$= |f_p((x')) - f_p((X))| - |f_q((x'')) - f_q((X))| + |f_p((X)) - f_q((X))|$$

oder

$$S=\sigma+\tau,\ \text{für}\ \sigma=f_p((X))-f_q((X)),\ \tau=|f_p((x'))-f_p((X))|-|f_q((x''))-f_q((X))|.$$

Werden p, q auf die Werthe $\overline{\gtrless}\, m$ beschränkt, so folgt aus (β), dass Mod. $\tau < 2\varepsilon'$ ist, das giebt Mod. $S < 2\varepsilon' +$ Mod. σ, Mod. $\sigma < 2\varepsilon' +$ Mod. S. Unsere Aufgabe (S) fordert Mod. $S < \varepsilon'$, also Mod. $\sigma < 3\varepsilon'$. Und wenn umgekehrt Mod. $\sigma < 3\varepsilon'$ ist, so wird Mod. $S < 5\varepsilon'$. Das ist nicht die ursprüngliche Ungleichheit Mod. $S < \varepsilon'$, aber sie sagt dasselbe aus, nämlich dass ein höchster Werth des Mod. S existirt, und dieser unter den gegenwärtigen Voraussetzungen nach Belieben verkleinert werden kann, was sich auf seine übrigen Werthe überträgt. Aber die hiernach nothwendige und ausreichende Bedingung Mod. $\sigma < 3\varepsilon'$ fordert nur die Convergenz des unendlichen Ausdruckes f für das feste Argument $((x))$, und dieses mit (β) zusammen bildet hiernach ebenso wie (α) mit (β) zusammen ein System von Bedingungen, welche für die Aufgabe (S) nothwendig sind und ausreichen. Wir heben für's Erste nur folgendes Resultat heraus:

(γ) Wir schliessen den Punkt $((x^0))$ von $\Delta\varepsilon$ aus. Sind dann (β)

$$f_m f_{n+1} \cdots f_p \cdots$$

stetig innerhalb $\Delta\varepsilon$, und ist f selbst convergent für irgend ein numerisch verwendbares, festes Argument $((x))$ innerhalb $\Delta\varepsilon$, so ist es innerhalb $\Delta\varepsilon$ bei festen Argumenten gleichmässig convergent,

und allen Bedingungen der Aufgabe (S) ist genügt.

Nun sei umgekehrt die Bedingung (α) *erfüllt.* Wenn der unendliche Ausdruck f *für ein festes Argument* $((x))$ convergirt, so heisst dies, dass 1) in der unendlichen Folge $f_1 f_2 \cdots f_p \cdots$ die spätern Glieder sich, ihrem Werthe nach, immer weniger von dem, *durch die Convergenz nachgewiesenen* Werthe von f zum Argumente $((x))$ unterscheiden, und dass 2) dieser Werth von f dem zweiten Hauptverfahren entspringt, da sein Argument nicht durch Annäherungen einzuführen ist. Man könnte versucht sein, dies dadurch zur Anschauung zu bringen, dass man diese Folge ohne Rücksicht darauf, *dass sie kein Ende hat*, gleichwohl mit f als Schlussglied schreibt: $f_1 f_2 \cdots f_p \cdots f$.

Aus (α) erhalten wir nun, unter $((x'))$, $((x''))$ feste, numerisch verwendbare Argumente innerhalb $\Delta\varepsilon$, mit Ausschluss von $((x^0))$ verstanden,

$$\text{Mod.}\,|f_p((x')) - f_m((x'))| < \varepsilon', \qquad \text{Mod.}\,|f_q((x'')) - f_m((x''))| < \varepsilon',$$
$$\text{Mod.}\,|f((x')) - f_m((x'))| < \varepsilon', \qquad \text{Mod.}\,|f((x'')) - f_m((x''))| < \varepsilon'.$$

Sodann ist

$$S = f_p((x')) - f_q((x'')) = |f_p((x')) - f_m((x'))| - |f_q((x'')) - f_m((x''))|$$
$$- |f((x')) - f_m((x'))| + |f((x'')) - f_m((x''))| + \sigma$$

für

$$\sigma = f((x')) - f((x'')),$$

und wenn wir das, was rechts zu σ kommt, durch τ bezeichnen, $S = \sigma + \tau$, $\sigma = S - \tau$.

Für $p \overline{\geqq} m$, $q \overline{\geqq} m$ folgt aus dem Vorangehenden Mod. $\tau < 4\varepsilon'$, also Mod. $\sigma < 4\varepsilon' +$ Mod. S, Mod. $S < 4\varepsilon' +$ Mod. σ. Wenn nun, wie verlangt, Mod. $S < \varepsilon'$ ist, so gibt das Mod. $\sigma < 5\varepsilon'$; und wenn umgekehrt dies erreicht ist, so wird Mod. $S < 9\varepsilon'$; es gibt dann einen höchsten Werth des Mod. S, und er so wie alle übrigen können mit Einhaltung aller Bedingungen unserer Aufgabe nach Belieben verkleinert werden, was einzig und allein gefordert ist.

Ist (α) erfüllt, so reicht es für die Aufgabe (S) aus, dass

$$\text{Mod. } \sigma = \text{Mod.}\, |f((x')) - f((x''))| < 5\varepsilon'$$

wird, d. h. dass, auf numerisch verwendbare Argumente mit Ausschluss von $((x^0))$ beschränkt, f innerhalb $\Delta\varepsilon$ stetig ist.

(δ) Der unendliche Ausdruck f werde auf die numerisch verwendbaren Argumente innerhalb $\Delta\varepsilon$, mit Ausnahme von $((x^0))$ beschränkt. Ist alsdann f innerhalb $\Delta\varepsilon$ bei festen Argumenten gleichmässig convergent, und ausserdem stetig, so sind die Ausdrücke $f_m f_{m+1} \cdots f_p \cdots$ ebenfalls stetig innerhalb $\Delta\varepsilon$,

und allen Bedingungen der Aufgabe (S) ist genügt.

Dazu kommt noch ein Zusatz. Im Ausdrucke für S nehme man $q = p$, so dass S übergeht in

$$\sigma_p = f_p((x')) - f_p((x'')).$$

Wird das Zeichen τ zur Abkürzung beibehalten, so folgt

$\sigma_p = \sigma + \tau$, $\sigma = \sigma_p - \tau$, Mod. $\sigma_p < 4\varepsilon' +$ Mod. σ, Mod. $\sigma < 4\varepsilon' +$ Mod. σ_p.

Die Verkleinerung des einen der beiden Moduln Mod. σ, Mod. σ_p, zieht also die Verkleinerung des andern nach sich und ist umgekehrt durch sie bedingt: immerhin unter der Voraussetzung, dass die Bedingung (α) erfüllt ist.

(ε) Ist die Bedingung (α) erfüllt, d. h. f innerhalb $\Delta\varepsilon$ bis auf den Punkt $((x^0))$ gleichmässig convergent, so ist für die Stetigkeit von f und sämmtlicher Ausdrücke $f_m f_{m+1} \cdots f_p \cdots$ im gleichen Umfange erforderlich und hinreichend, dass irgend einer von diesen endlichen Ausdrücken f_p dort stetig ist.

Bei massgebenden Ausdrücken f der Analysis, namentlich den Potenzreihen innerhalb ihres Convergenzgebietes für feste Argumente, ist diese letzte Bedingung identisch erfüllt; für solche Ausdrücke folgt dann aus (γ), dass ihre Convergenz die locale gleichmässige Convergenz nach sich zieht. Einen Anhaltspunkt für die Annahme, dass nicht bloss für ausgewählte Ausdrucksformen f, sondern allgemein, aus ihrer *gleichmässigen Convergenz bei festen Argumenten* ihre Stetigkeit folge, habe ich in der hier vorgelegten Darstellung nicht finden können.

Wir haben folgende Resultate:

A. Auch einem unendlichen Ausdrucke f schreiben wir für ein gegebenes Argument $(\!(x^0)\!)$ nur dann einen Werth zu, wenn das erste Hauptverfahren für diesen Punkt convergirt und bei jeder Anordnung zum nämlichen Grenzwerthe führt (Nr. 11, Aufgabe I. und Zusatz II.). Diesen erklären wir als den Werth von f zum Punkte $(\!(x^0)\!)$ und bezeichnen ihn durch

$$G(\!(x^0)\!).$$

B. Damit die Convergenz des ersten Hauptverfahrens in dieser Weise statthabe, ist erforderlich und hinreichend, dass in einem den Punkt $(\!(x^0)\!)$ enthaltenden Schwankungsgebiete $\Delta\varepsilon$, abgesehen von diesem Punkte selbst, eine der drei Doppelbedingungen erfüllt ist:

entweder (α) und (β),
oder (γ),
oder (δ),

und zwar, ohne dass von den Schwankungen $\Delta x_1 \cdots \Delta x_n$ irgend eine unendliche klein wird.

Für die unendlichen Ausdrücke f liegen jetzt, wenn auch aus andern Gründen, im Wesentlichen dieselben Verhältnisse vor, wie oben (Nr. 13. 14) für die endlichen. Die Eigenschaft, in $\Delta\varepsilon$ für jedes numerisch verwendbare Argument $(\!(x')\!)$ (abgesehen von $(\!(x^0)\!)$) seinen völlig bestimmten Werth $f(\!(x')\!)$ zu besitzen, der nach dem zweiten Hauptverfahren zu berechnen ist, besitzen die endlichen Ausdrücke f selbstverständlich, die unendlichen wegen der geforderten Convergenz bei festen Argumenten. Die Eigenschaft der Stetigkeit ist ebenfalls übereinstimmend, nämlich für die gleichen Argumente $(\!(x')\!)$ gefordert. In Folge dessen wiederholen sich alle Schlüsse, die wir bei den endlichen Ausdrücken aus diesen beiden Eigenschaften und der Convergenz des ersten Hauptverfahrens gezogen haben.

C. Soweit die Bedingung (δ) der Convergenz und der Stetigkeit von f für die numerisch verwendbaren Argumente $(\!(x)\!)$ erfüllt ist, liefern beide Hauptverfahren zu diesen Argumenten für f denselben Werth

$$G(\!(x)\!) = f(\!(x)\!).$$

Dies gilt auch für den Punkt $(\!(x^0)\!)$: für die Existenz von $G(\!(x^0)\!)$ ist weder die Convergenz noch die Stetigkeit von f *in* diesem Punkte erforderlich; wohl aber bedarf es der Convergenz von f, wenn das zweite Hauptverfahren anwendbar sein und einen Werth $f(\!(x^0)\!)$ von f ergeben, und dazu der Stetigkeit, wenn er $= G(\!(x^0)\!)$ sein soll.

D. Wo f, auf die numerisch verwendbaren Argumente beschränkt, bei festen Argumenten gleichmässig convergirt und zugleich stetig ist, ist es stetig für alle Argumente ohne Ausnahme und für alle $= G$. Besteht zwar die Convergenz, aber nicht zugleich die Stetigkeit von f auch noch im Punkte $(\!(x^0)\!)$, so wird die Stetigkeit von f auch in diesem Punkte hergestellt, wenn man $f(\!(x^0)\!)$ als seinen Werth verwirft und durch den von ihm verschiedenen Werth $G(\!(x^0)\!)$ ersetzt.

Diese Unstetigkeit von f erweist sich demnach als Beispiel einer hebbaren Unstetigkeit im Sinne Riemann's, und sie wird gehoben, indem man auch für das Argument $(\!(x^0)\!)$ den vom zweiten Hauptverfahren gelieferten Werth von f durch $G(\!(x^0)\!)$ ersetzt, d. h. *die Auswerthung von f ausschliesslich auf das erste Hauptverfahren gründet.*

E. Sind die Bedingungen des Satzes B. nicht erfüllt, so ist das Annäherungsverfahren IIb. nicht convergent im Sinne der Aufgabe I., und bei der Annäherung seiner Argumente an $(\!(x^0)\!)$ convergirt f nicht gegen eine feste Grenze, mindestens nicht stets gegen dieselbe Grenze.

Damit ist nicht ausgeschlossen, dass unter geeigneten Umständen das zweite Hauptverfahren zu diesem Punkte einen völlig bestimmten Werth für f ergibt.

Hierhin gehört das bereits in Nr. 8 erwähnte Beispiel, welches die Fourier'schen Reihen liefern, wenn die in eine solche Reihe f entwickelte Function φ für das Argument x^0 eine Discontinuität besitzt.

F. Sind die Bedingungen des Satzes B. erfüllt in allen Theilen eines Gebietes E, so hat f auf Grund des Uebereinkommens A. in jedem Punkte $(\!(x^0)\!)$ von E einen völlig bestimmten Werth, dem es sich bei jeder unbegrenzten Annäherung seiner Argumente an diesen Punkt ohne Ende nähert; f heisst *vollwerthig* innerhalb E, seine Stetigkeit umfasst alle Argumente in E ohne Ausnahme, und zu numerisch verwendbaren Argumenten liefert das zweite Hauptverfahren stets denselben Werth für f wie das erste.

G. Enthält E eine Stelle (Punkt, Linie, ...), in welcher die Bedingungen des Satzes B. ganz oder zum Theil aussetzen, so bezeichnet man diese als eine singuläre Stelle von f.

Statt, wie in B., zu fordern dass, bei festen Argumenten, f in jedem hinlänglich kleinen Theile ΔE von E gleichmässig convergiren soll, kann man bündiger verlangen dass, immer bei festen Argumenten, innerhalb E unendliche Schwankungen in der Convergenz von f ausgeschlossen sein sollen. Bei der Prüfung der Frage, ob oder in wie weit das der Fall ist, wird man aber auf das in (α) zu Grunde gelegte Kriterium für die locale gleichmässige Convergenz von f bei festen Argumenten zurückgreifen müssen.

17.

Ich stelle nun aus dem Vorangehenden die Hauptpunkte zusammen welche auf die Vollwerthigkeit von f Bezug haben.

An der Spitze steht die Frage, unter welchen Bedingungen ein Ausdruck f für gegebene Argumente $((x^0))$ einen einzigen, von jeder Unbestimmtheit freien Werth hat, dazu kommt die zweite Frage, unter welcher Bedingung f diese Eigenschaft in allen Punkten $((x))$ eines Grössengebietes E besitzt.

Die Beantwortung der ersten Frage wirft sich auf die numerische Auswerthung von f für die vorgeschriebenen Argumente $((x^0))$. Für diese stehen zwei Wege zur Verfügung.

Das erste Hauptverfahren setzt voraus, dass in den Ausdruck f, behufs Ausrechnung desselben, nicht die vorgeschriebenen Argumente $((x^0))$ selbst eingeführt werden, sondern an ihrer Stelle numerisch verwendbare Annäherungswerthe, aber diese in unbegrenzter Folge und mit unbegrenzt steigender Genauigkeit.

Unsere *Aufgabe* besteht für diesen Fall darin, *zu ermitteln, unter welchen Bedingungen dieser unendliche Algorithmus convergirt und bei jeder Anordnung zum nämlichen Grenzwerthe G für f führt. Ist ein solcher vorhanden, so wird G als Werth von f im gegebenen Punkte $((x^0))$ erklärt.*

Geschieht dem in einem Gebiete E allenthalben Genüge, so heisst f, auf Grund dieser Bestimmung seiner Werthe, *vollwerthig in E.*

Das zweite Hauptverfahren ist beschränkt auf numerisch verwendbare Argumente $((x^0))$; es setzt voraus, dass behufs Auswerthung von f, die vorgeschriebenen Argumente selber in diesen Ausdruck eingesetzt werden, wodurch $f = f((x))$ in den rein numerischen Ausdruck $f((x^0))$ übergeht.

Ist f ein endlicher Ausdruck, so liegt dieses zweite Hauptverfahren auch dem ersten zu Grunde, und es ist Postulat unserer Untersuchung, dass nicht bloss die Ausrechnung von $f((x^0))$ für numerisch verwendbare Argumente $((x^0))$ im Allgemeinen durchgeführt werden kann, sondern auch die Hülfsmittel vorhanden sind um zu ermitteln, für welche Argumente die numerische Rechnung an Singularitäten des Ausdruckes f scheitert.

Ist f ein unendlicher Ausdruck, so hängt die Frage, ob $f((x^0))$ einen bestimmten Werth vorstellt, ab von der Convergenz des Ausdruckes f bei festen Argumenten. Im Falle der Convergenz kann $f((x^0))$ je nach Umständen $= G$ oder aber auch von G verschieden sein. Im letztern Falle wird nicht $f((x^0))$, sondern G als Werth von f zum Punkte $((x^0))$ angenommen.

Dies so festgestellt, fanden wir folgendes:

Soll beim ersten Hauptverfahren der von unserer Aufgabe geforderte Grenzwerth G existiren, also f nach Uebereinkunft in $((x^0))$ diesen völlig bestimmten Werth haben, so muss

1) f, falls dies ein unendlicher Ausdruck ist, in einem den Punkt $((x^0))$ enthaltenden, hinlänglich kleinen Schwankungsgebiete ΔE stetig sein und, bei festen Argumenten, gleichmässig convergiren, beides, ohne dass eine der Schwankungen $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ unendlich klein wird.

2) Wenn dagegen f ein endlicher Ausdruck ist, so reicht seine Stetigkeit in ΔE aus.

3) Soll f vollwerthig sein in E, so müssen diese Bedingungen erfüllt sein in jedem Theile ΔE von E, und dann liefert das zweite Hauptverfahren, wo es anwendbar ist, stets denselben Werth für f wie das erste.

4) Sind diese Bedingungen in E. im Allgemeinen erfüllt, aber so, dass sie an einzelnen Stellen (Punkte, Linien, ...) alle oder zum Theil aussetzen, so bezeichnet man diese als singuläre Stellen von f, und es ist nur ausgeschlossen, dass f an einer solchen beim ersten Hauptverfahren einen einzigen, völlig bestimmten Werth erlangt.

5) Das erste Hauptverfahren führt also seiner Natur nach auf den *Begriff der Singularitäten von f und ihre Kriterien*, während das zweite, auf gleiche Allgemeinheit beschränkt, nur zur Prüfung der *Convergenz bei festen Argumenten* Anlass gibt, was dann zum Begriff *des Convergenzgebietes G und seiner Grenzen*, aber nicht auf den Begriff der Singularitäten führt.

Es versteht sich, dass dies sich sofort ändern kann, wenn man von dieser Untersuchung, welche alle Ausdrücke f umfassen soll, aufsteigt zur Untersuchung völlig charakterisirter Ausdrucksformen f.

18.

Die Singularitäten von f. Die Criterien dafür sind folgende:

1. Ist f ein endlicher Ausdruck, so findet eine Singularität statt, wo f nicht stetig ist.
2. Ist f ein unendlicher Ausdruck, so findet eine Singularität statt, wo

entweder f nicht stetig ist,
oder f in einem abnehmenden Schwankungsgebiete ΔE nicht bei festen Argumenten gleichmässig convergirt,
oder wo beide Eigenschaften aussetzen.

Damit muss die allgemeine Untersuchung abbrechen; der Versuch, vollständig nachzuweisen, worin nun die so localisirten Singularitäten bestehen können, dürfte wohl völlig aussichtslos sein.

Wir stehen hier derjenigen Classe von Eigenthümlichkeiten analytischer Ausdrücke gegenüber, welche in einem berühmten Werke (Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen, Vorrede) als unbekannte Möglichkeiten bezeichnet sind. In jedem gegebenen Falle wird, wie in der Lehre von den Functionen einer einzigen, complexen Variablen, das Studium der wirklich möglichen Singularitäten von f zu den Hauptaufgaben der Theorie von f gehören.

19.

Die Umformung eines analytischen Ausdruckes. Sei der Ausdruck f durch eine einwandsfreie Rechnung in einen andern Ausdruck G umgeformt worden. *Es fragt sich, in welchem Umfange und aus welchen Gründen hieraus auf die Gleichheit beider Ausdrücke, also auf die Gleichung*

$$G = f$$

geschlossen werden darf.

Bei unserer Beschränkung der Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_n$ auf wirkliche Zahlenwerthe, und der analytischen Ausdrücke auf diejenigen Fälle, wo sie wirkliche Werthsbestimmungen leisten, springt in die Augen, dass nach der Gleichheit zwischen f und G nur gefragt werden kann, soweit sie beide zugleich den Charakter einer Werthsbestimmung besitzen, also z. B. wenn einer von beiden Ausdrücken ein unendlicher ist, sicher nicht ausserhalb seines Convergenzgebietes C bei festen Argumenten.

Aber dies reicht zur vollständigen Begründung der Gleichung $G = f$ nicht aus: denn durch die Umformungsrechnung allein, ohne Hinzuziehung anderer Beweisgründe, ist der Nachweis der Gleichheit zwischen f und G beschränkt auf diejenigen Argumente $(\!(x)\!)$, mit deren Zahlenwerthen die zur Umformung von f erforderliche Buchstabenrechnung numerisch exact ausgeführt werden kann, das sind die (bei f) numerisch verwendbaren Argumente. Setzen wir

$$f - G = h,$$

so ist also für diese Argumente die Gleichung $h = 0$ gesichert, zunächst aber auch nur für sie allein.

Nach der Gleichheit oder Ungleichheit zwischen f und G für die übrigen Argumente kann nur gefragt werden in einem solchen Grössengebiete, in welchem auch zu diesen übrigen Argumenten Werthe von f und G sicher gestellt sind, also *in demjenigen Gebiete $\mathfrak{E}$, in welchem f und G zugleich die Eigenschaft der Vollwerthigkeit besitzen*, wozu unbedingt die Stetigkeit beider in $\mathfrak{E}$ gehört.

Dann aber ist in jedem hinlänglich kleinen Theile $\Delta\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{E}$

$$\text{Mod.}\,|f(\!(x')\!) - f(\!(x'')\!)| < \varepsilon', \qquad \text{Mod.}\,|G(\!(x')\!) - G(\!(x'')\!)| < \varepsilon'',$$

für alle Argumente $(\!(x')\!)$, $(\!(x'')\!)$ innerhalb $\Delta\mathfrak{E}$ ohne Ausnahme. Daraus folgt

$$\text{Mod.}\,|h(\!(x')\!) - h(\!(x'')\!)| < \varepsilon' + \varepsilon'',$$

und wenn wir nun für $(\!(x'')\!)$ ein bei f numerisch verwendbares Argument nehmen, was $h(\!(x'')\!) = 0$ gibt, für alle übrigen Argumente $(\!(x')\!)$ innerhalb $\Delta\mathfrak{E}$: Mod. $h(\!(x')\!) < \varepsilon' + \varepsilon''$. Daraus aber folgt $h(\!(x')\!) = 0$. Denn wäre das nicht der Fall, so müsste es in $\Delta\mathfrak{E}$ Argumente $(\!(x')\!)$ geben, für welche der Mod. $h(\!(x')\!)$ über einer von Null verschiedenen und, wenn auch kleinen, aber ohne Unbestimmtheit angebbaren Grenze liegt, und h wäre nicht stetig, da seine Schwankungen innerhalb $\Delta\mathfrak{E}$ durch Verkleinerung von $\Delta\mathfrak{E}$ nicht *nach Belieben* verkleinert werden könnten. Also ist auch $h(\!(x')\!) = 0$, also $h = 0$ in jedem Theile von $\mathfrak{E}$:

> Die Umformung eines analytischen Ausdruckes in einen andern ist gültig in demjenigen Gebiete $\mathfrak{E}$, in welchem beide Ausdrücke vollwerthig sind.

Wo aber einer von beiden Ausdrücken, oder der eine und der andere zugleich, einen singulären Punkt hat, versagen die Schlüsse, welche zu $h(\!(x')\!) = 0$ führten.

Da jede Rechnung, welche im Ausdrucke f mit den Buchstaben $x_1 x_2 \cdots x_n$ ausgeführt wird, auf eine Umformung hinauskommt, so können wir auch den folgenden Satz aussprechen:

> Wo ein analytischer Ausdruck f vollwerthig ist, ist die Buchstabenrechnung mit seinen Argumenten numerisch gültig ohne Beschränkung auf besondere Categorien derselben, d. h. dort rechnet man mit seinen Argumenten wie mit vollendeten Zahlen.

Ohne den Nachweis der gleichzeitigen Vollwerthigkeit von f und G entbehrt der Schluss ($h(\!(x')\!) = 0$) auf die Gleichheit beider der ausreichenden Begründung. Es müsste denn sein, dass man die Aufgabe der Analysis dahin abänderte, dass analytische Ausdrücke nicht als Werthsbestimmungen zu gelten haben.

Zum Verzicht auf die numerische Verwendbarkeit der Analysis wird man sich wohl nicht entschliessen. Soll sie aber zu den Anwendungen *berechtigen*, welche man in dieser Beziehung von ihr erwartet, so darf sie nicht ausschliesslich auf Umformungen begründet werden, da auch bei diesen nur eine Stetigkeitsuntersuchung den Ausschlag für die Gültigkeit der Umformung geben kann, wofern für f und G zugleich der Charakter als Werthsbestimmungen *gesichert* bleiben soll.

Strassburg, 25. Januar 1900.

Inhalt.

Ueber lineare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen.

Von

Gino Fano in Messina.

Herr Fuchs hat sich in einigen Arbeiten*) die Aufgabe vorgelegt, die Natur der Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zu untersuchen, wenn zwischen den Integralen eines Fundamentalsystems derselben algebraische homogene Relationen höheren als ersten Grades mit constanten Coefficienten bestehen. Und für Differentialgleichungen 3^{ter} Ordnung hat er diese Aufgabe auch vollständig gelöst. Insbesondere ergab sich zugleich ein enger Zusammenhang zwischen den Differentialgleichungen, welche die obige Eigenschaft besitzen, und denjenigen, welche algebraisch integrirbar sind.

Dieselbe Frage hat sich in neuerer Zeit wichtiger als je erwiesen, insofern deren Zusammenhang mit weiteren der Theorie der linearen Differentialgleichungen zugehörigen Begriffen immer mehr zu Tage getreten ist. Ganz besonders sind in dieser Hinsicht die Begriffe der Invarianten und der sogen. Rationalitätsgruppe oder Transformationsgruppe einer linearen Differentialgleichung zu nennen. — Nachdem nämlich Ludw. Schlesinger in seiner Berliner Dissertation**) das obige Problem für lineare Differentialgleichungen 4^{ter} Ordnung nach derselben Fuchs'schen Methode behandelt hatte, haben andrerseits Lipm. Schlesinger, M. Meyer, G. Wallenberg, u. A. in den bezüglichen Untersuchungen die Invarianten der vorgelegten Differentialgleichung herangezogen. Der Begriff der „Rationalitätsgruppe" dieser Differentialgleichung sollte kurz nachher gestatten, das Integrationsproblem der Differentialgleichung von einem neuen und mehr massgebenden Gesichtspunkte aus zu beherrschen, etwa wie es bei der Auflösung einer algebraischen Glei-

---

*) Sitzungsber. der Berliner Acad., 8. Juni 1882; sowie auch die Abhandlung: *Ueber lineare homogene Differentialgleichungen* . . .; Acta Math., I, 1883; S. 321—62.

**) Berlin 1887.

chung mit der zugehörigen „Galois'schen Gruppe“ der Fall ist. — Und ehe dies noch vollständig zu Stande kam, hatte bereits Lie in den beiden Arbeiten: *Ueber gewöhnliche lineare Differentialgleichungen* (Christ. Forhandl., 1885) und: *Die linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen* (Leipz. Ber., 1891, S. 253—70) das Integrationsproblem einer linearen homogenen Differentialgleichung, für welche man eine Anzahl von Relationen:

$$f_x(x\,y_1\,y_2\cdots y_n) = 0 \qquad x = 1, 2, \cdots$$

zwischen x und n linear unabhängigen particulären Lösungen kennt, einer eingehenden Discussion unterworfen. Dabei hatte sich als Hauptresultat ergeben, dass in einem solchen Problem in erster Linie eine gruppentheoretische Aufgabe vorlag*).

Durch Herrn Klein im Jahre 1894 veranlasst, die obige Frage selbst aufzunehmen und mich in dieselbe geometrisch hineinzudenken**), erkannte ich sofort, dass sich eine einfache Verbindung zwischen den genannten Untersuchungen der Herren Fuchs, Schlesinger, Wallenberg, und denjenigen über *algebraische Mannigfaltigkeiten mit unendlich vielen projectiven Transformationen in sich* herstellen liess, wobei der Gruppencharakter des vorliegenden Problems unmittelbar hervortritt***). Darauf beziehen sich eine Reihe kurzer Mittheilungen, welche in den „Rendiconti della R. Accademia dei Lincei“ (1. sem. 1895) erschienen sind, sowie auch andere in den „Atti della R. Acc. di Torino“, in den gen. „Rendiconti“ und in den „Rendiconti dell' Istituto Lombardo“ d. J. Da-

*) Deuten wir mit Lie die Grössen x und $y_1, y_2, \cdots, y_n$ sowie auch deren Differentialquotienten bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung inclusive als nicht-homogene Punktcoordinaten in einem R_{n^2+1}, so lässt sich das Problem darauf reduciren, die ∞^p Integralcurven der Differentialgleichung zu bestimmen, die auf einer gewissen M_{p+1} des R_{n^2+1} liegen, wo M_{p+1} eine bekannte lineare p-gliedrige Gruppe gestattet. Und dieses lässt sich weiter auf das Lie'sche Normalproblem zurückführen, eine vorgelegte lineare partielle Differentialgleichung 1^{ter} Ordnung in $p+1$ Veränderlichen zu integriren, welche eine bekannte p-gliedrige Gruppe gestattet: die auf M_{p+1} liegenden Integralcurven sind nämlich die Charakteristiken dieser partiellen Differentialgleichung.

Weitere Ausführungen, sowie auch Bemerkungen über den Fall einer algebraischen Integralcurve, finden sich in der Arbeit: *Zur allgemeinen Transformationstheorie* (Leipz. Ber., 1896, S. 390—412).

**) Es sei mir daher an dieser Stelle erlaubt, Herrn Klein für die mir gegebene Anregung nochmals und verbindlichst zu danken.

***) Das System der zwischen den Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ bestehenden algebraischen Relationen kann nämlich im Raume R_{n-1} der homogenen Coordinaten y_i durch eine „algebraische Mannigfaltigkeit“ gedeutet werden. Andrerseits lässt sich die Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung als Collineationsgruppe dieses R_{n-1} deuten: *diese Collineationsgruppe muss* (wie sich später ergeben wird) *jene Mannigfaltigkeit in sich überführen.*

durch gelang es mir, in der Aufzählung und Untersuchung der verschiedenen überhaupt möglichen Fälle bis zu einem viel weiteren Punkte vorzudringen, als das vorher durch rein analytische Betrachtungen geschehen war.

Die vorliegende Abhandlung soll nun eine systematische Darstellung dieser (mit Hülfe geometrischer Betrachtungen durchgeführten) Untersuchungen enthalten. Nach den „einleitenden Bemerkungen" des 1. Capitels kommt im 2. Capitel der geometrische Gesichtspunkt zur allgemeinen Discussion. Im 3. Capitel wird ganz besonders der gruppentheoretische Charakter des vorliegenden Problems hervorgehoben, und zugleich auch gezeigt, wie Letzteres noch verallgemeinert werden kann, indem man dessen Gruppencharakter beibehält, dagegen aber von dem dafür unwesentlichen Umstande des Bestehens algebraischer Gleichungen zwischen den Fundamentallösungen absieht. Dieses verallgemeinerte Problem kann auf das frühere in durchaus einfacher Weise zurückgeführt werden; und dadurch erscheint zugleich letzteres, von gruppentheoretischem Standpunkte aus, als eine Art „Normalform" des neuaufgestellten allgemeineren Problems. — Capitel 4 enthält die Untersuchung der linearen homogenen Differentialgleichungen 3^{ter} Ordnung mit einer algebraischen Relation zwischen den Fundamentallösungen: *es ergibt sich dabei, dass diese Differentialgleichungen sämmtlich durch algebraische Operationen und Quadraturen integrirbar sind, falls die obige algebraische Relation höheren als zweiten Grades ist. Ist Letztere dagegen vom zweiten Grade (mit nicht verschwindender Discriminante), und ist folglich die entsprechende „Integralcurve"*) ein Kegelschnitt, so muss die vorgelegte Differentialgleichung, durch Wegschaffen ihres zweiten Gliedes in der üblichen Weise, die einfache Gestalt:*

$$y''' + 4sy' + 2s'y = 0$$

annehmen, und wird dann durch die Quadrate der sämmtlichen Lösungen der linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung $u'' + su = 0$ befriedigt.

Capitel 5 und 6 bringen bezw. zwei verschiedene Verallgemeinerungen des letztgenannten Falles; nämlich die beiden Fälle einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, deren „Integralcurve" entweder *eine rationale Normalcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des Raumes R_{n-1} ist,* oder einfach *auf einer $n-2$-dimensionalen Mannigfaltigkeit 2^{ten} Grades liegt**).* Der erste Fall gestattet eine höchst einfache, für einen beliebigen Werth von n gültige Behandlung; im zweiten Falle ist das aber nicht möglich, und

*) Man vgl. die in Nr. 7 gegebene Definition der „Integralcurve" einer linearen Differentialgleichung (höherer als 2^{ter} Ordnung).

**) Dieser zweite Fall ist, von analytischem Standpunkte aus, derjenige, in welchem die Fundamentallösungen eine einzige homogene quadratische Gleichung erfüllen.

die bisherigen Untersuchungen beziehen sich ja auch nur auf die Werthe $n \leq 6$.

Um so schwieriger, und selbst unmöglich erscheint daher die Aufzählung der *sämmtlichen* Fälle, die für ein allgemeines n auftreten können. Das grösste Interesse concentrirt sich folglich auf einige derselben, und zwar einerseits *auf die kleineren Werthe von* n ($n \leq 5$), andrerseits aber auch auf diejenigen Fälle, in welchen die „Integralcurve" *entweder algebraisch ist, oder doch auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit von einer kleinen Anzahl* (≤ 3) *von Dimensionen liegt* (d. h. in welchen die zwischen den Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ bestehenden Gleichungen aus der $n-1$-fachen Mannigfaltigkeit $y_1 : y_2 : \cdots : y_n$ eine höchstens dreidimensionale Mannigfaltigkeit, welche die „Integralcurve" enthält, absondern). Die bezüglichen Resultate sollen in den beiden letzten Capiteln Platz finden, und werden sich grösstentheils aus denjenigen der Cap. 5 und 6 ohne Weiteres ableiten lassen.

An dieser Stelle sei es uns noch gestattet, die darunter befindlichen Hauptresultate in kurzen Worten zusammenzufassen. Ueber lineare Differentialgleichungen 3ter Ordnung wurde bereits oben berichtet. Für $n = 4$ ergiebt sich:

Die linearen Differentialgleichungen 4ter Ordnung, deren Fundamentallösungen irgend welchen algebraischen Relationen mit constanten Coefficienten genügen, und welche nicht durch algebraische Operationen und Quadraturen integrirbar sind, lassen sich durch eine Transformation der abhängigen Variablen $y = \varrho \bar{y}$ (wo ϱ eine rational bekannte logarithmische Ableitung besitzt) *auf eine der folgenden Formen bringen* (in welchen wir, der Kürze halber, statt $\bar{y}$ nochmals y schreiben):

1. *Die lineare Differentialgleichung:*

$$y^{IV} + 10sy'' + 10s'y' + (3s'' + 9s^2)\, y = 0,$$

welche durch die 3ten Potenzen der Lösungen der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung $u'' + su = 0$ *befriedigt wird.* In diesem Falle kann man auf unendlich viele Weisen vier Fundamentallösungen y_1, y_2, y_3, y_4 bestimmen, welche die Gleichungen

$$\left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix} \right\| = 0$$

erfüllen; die entsprechende Integralcurve ist offenbar eine Raumcurve 3ter Ordnung (und umgekehrt).

2. *Lineare Differentialgleichungen, welche in die vorangehende Form, d. h. in die Differentialgleichung:*

$$z^{IV} + 10sz'' + 10s'z' + (3s'' + 9s'')\, z = 0$$

durch eine Transformation $z = \alpha y + \beta y' + \gamma y''$ *übergehen* (wobei die Bestimmung von α, β, γ die Auflösung einer Gleichung 3^{ten} Grades erfordert), und deren geeignete Fundamentallösungen y_1, y_2, y_3, y_4 die Gleichung 4^{ten} Grades:

$$4(y_2^2 - y_1 y_3)(y_3^2 - y_2 y_4) - (y_1 y_4 - y_2 y_3)^2$$
$$\equiv 6 y_1 y_2 y_3 y_4 - 4 y_2^3 y_4 - 4 y_1 y_3^3 - y_1^2 y_4^2 + 3 y_2^2 y_3^2 = 0$$

der abwickelbaren Fläche der Tangenten obiger Raumcurve erfüllen.

3. *Die lineare Differentialgleichung*

$$y^{IV} - \frac{r'-s'}{r-s} y''' + 2(r+s) y'' + \left\{3(r'+s') - 2(r+s)\frac{r'-s'}{r-s}\right\} y'$$
$$- \left\{\frac{r'^2 - s'^2}{r-s} - (r-s)^2 - (r''+s'')\right\} y = 0,$$

welche durch die Producte der Lösungen der beiden linearen Differentialgleichungen 2^{ter} *Ordnung* $u'' + ru = 0$, $v'' + sv = 0$ *befriedigt wird.* Dieselbe ist die (bis auf eine Transformation $y = \varrho \bar{y}$) charakteristische Form einer linearen Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung, deren Fundamentallösungen *einer quadratischen Gleichung von nicht verschwindender Discriminante* Genüge leisten.

4. *Die lineare Differentialgleichung*

$$(y' + ry)(y''' + 4sy' + 2s'y) = 0,$$

d. h.

$$y^{IV} + ry''' + 4sy'' + (6s' + 4rs) y' + 2(s'' + rs') y = 0,$$

welche durch die Quadrate der Lösungen von $u'' + su = 0$ *befriedigt wird,* und deren Fundamentallösungen eine quadratische Gleichung von verschwindender Discriminante erfüllen.

In allen diesen Fällen lässt sich offenbar die Integration der vorgelegten Differentialgleichung, von algebraischen Operationen und Quadraturen abgesehen, auf diejenige einer einzigen oder auch von zwei linearen Differentialgleichungen 2^{ter} *Ordnung* (oder Riccati'schen Gleichungen) *zurückführen.*

Für den Fall $n = 5$ verweisen wir auf die in Nr. 31 enthaltene Aufzählung. Doch wollen wir an dieser Stelle das Eine hervorheben: *Die Integration einer linearen Differentialgleichung* 5^{ter} *Ordnung mit irgend welchen algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen erfordert nur algebraische Operationen, Quadraturen, oder auch die Integration von höchstens zwei linearen Differentialgleichungen* 2^{ter} *Ordnung,* den einzigen Fall ausgenommen, in welchem fünf beliebige Fundamentallösungen nur *eine quadratische Gleichung von nicht verschwindender Discriminante* erfüllen. In diesem Falle lässt sich die vorgelegte Differentialgleichung durch eine Transformation

$$y = az + bz'$$

aus einer Differentialgleichung der folgenden Gestalt:

$$z^{V} + 2pz''' + 3p'z'' + (3p'' + p^2 - 4q)z' + (p''' + pp' - 2q')z = 0$$

ableiten, wobei die Bestimmung von p, q, a, b nur das Ausziehen einer Quadratwurzel und eine Quadratur erfordert. Letztere Differentialgleichung ist die sogen. „Associirte“ oder genauer die „zweite Associirte“ der linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung:

$$u^{IV} + pu'' + p'u' + qu = 0;$$

d. h. sie wird durch sämmtliche Functionen $u_1 u_2' - u_1' u_2$ befriedigt, falls u_1, u_2 beliebige Lösungen der letztgenannten Differentialgleichung bedeuten. Es kommt folglich Alles darauf an, diese Differentialgleichung 4ter Ordnung zu integriren.

Für lineare Differentialgleichungen, deren Integralcurve auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit von einer kleinen Anzahl (≤ 3) von Dimensionen liegt, ergiebt sich:

A. *Lineare Differentialgleichungen mit algebraischer Integralcurve* [d. h. deren Fundamentallösungen gewissen algebraischen Gleichungen mit constanten Coefficienten genügen, deren Gesammtheit eine *Curve* (eindimensionales Gebilde) des Raumes R_{n-1} darstellt].

Derartige Differentialgleichungen sind stets durch algebraische Operationen und Quadraturen integrirbar, den einzigen Fall ausgenommen, in welchem die Integralcurve eine rationale Normalcurve $(n-1)^{ter}$ Ordnung ist, und folglich n geeignete Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ die Gleichungen

$$\left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{matrix} \right\| = 0$$

erfüllen. *In diesem Falle wird die vorgelegte Differentialgleichung durch die $(n-1)^{ten}$ Potenzen der sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung (mit rational bekannten Coefficienten) befriedigt.* Bringen wir letztere auf die Form:

$$u'' + su = 0$$

und setzen:

$$B_0 = y, \qquad B_1 = y',$$

$$B_k = B'_{k-1} + (k-1)(n-k+1)s\,B_{k-2}, \qquad (k = 2, 3, \cdots, n),$$

wobei B_k die Ableitungen von y bis zur k^{ten} Ordnung inclusive enthält, so lautet die Differentialgleichung für $y = u^{n-1}$ einfach:

$$B_n = 0$$

oder auch, ausführlich geschrieben:

$$y^{(n)}+\binom{n+1}{3}sy^{(n-2)}+2\binom{n+1}{4}s'y^{(n-3)}+3\binom{n+1}{5}\left(s''+\frac{5n+7}{9}s^2\right)y^{(n-4)}$$
$$+4\binom{n+1}{6}\left(s'''+\frac{5n+7}{8}ss'\right)y^{(n-5)}+\cdots=0.$$

B. *Lineare Differentialgleichungen deren Integralcurve auf einer algebraischen Fläche liegt*).* Ist eine solche Differentialgleichung nicht durch algebraische Operationen und Quadraturen integrirbar, so muss einer der folgenden Fälle stattfinden:

I. *Die vorgelegte Differentialgleichung ist reducibel und wird durch die sämmtlichen Lösungen einer gewissen Anzahl* $\frac{n}{k}$ *von linearen Differentialgleichungen* k^{ter} *Ordnung befriedigt.*

Letztere lassen sich zugleich durch Transformationen:

$$z=\alpha_{k0}y+\alpha_{k1}y'+\cdots+\alpha_{k,k-2}y^{(k-2)},\qquad \left(k=1,2,\cdots,\frac{n}{k}\right)$$

auf Andere reduciren, welche durch die $(k-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der Lösungen ebenso vieler linearer Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung befriedigt werden. Und zwar kann man die α durch algebraische Operationen und Quadraturen in der Art bestimmen, dass nach Integration einer einzigen dieser Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung auch die Lösungen der anderen rational bekannt werden.

II. *Es lassen sich gewisse rationale Functionen* $z_k=\varphi_k(y_1y_2\cdots y_n)$ *der Fundamentallösungen* y_i *bestimmen, welche ein Fundamentalsystem einer neuen linearen Differentialgleichung mit rational bekannten Coefficienten bilden, und zwar:*

1. entweder *einer linearen Differentialgleichung* 3^{ter} *Ordnung;*

2. oder *einer linearen Differentialgleichung* 4^{ter} *Ordnung mit einer quadratischen Relation von nicht verschwindender Discriminante zwischen den Fundamentallösungen* z_k; letztere wird sich daher, wie bereits erwähnt wurde, durch eine Transformation $z=\varphi\bar{z}$ auf folgende Form bringen lassen:

$$\bar{z}^{IV}-\frac{r'-s'}{r-s}\bar{z}'''-2(r+s)\bar{z}''+\left\{3(r'+s')-2(r+s)\frac{r'-s'}{r-s}\right\}\bar{z}'$$
$$-\left\{\frac{r'^2-s'^2}{r-s}-(r-s)^2-(r''+s'')\right\}\bar{z}=0;$$

*) Unter einer „Fläche" soll hier stets eine „zweifach ausgedehnte" oder „zweidimensionale" Mannigfaltigkeit verstanden werden. Die obige Ausdrucksweise bedeutet folglich, dass die zwischen den Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ bestehenden algebraischen Gleichungen aus der Gesammtmannigfaltigkeit $y_1:y_2:\cdots:y_n$ eine zweifach ausgedehnte absondern müssen.

3. oder endlich *einer linearen Differentialgleichung irgend einer Ordnung $m+2$, welche, ebenfalls durch eine Transformation $z = \varrho \bar{z}$, folgende Gestalt annehmen kann:*

$$(\bar{z}' + r\bar{z})\left(\bar{z}^{(m+1)} + \binom{m+2}{3} s\bar{z}^{(m-1)} + 2\binom{m+2}{4} s'\bar{z}^{(m-2)} + \cdots\right) = 0,$$

wobei die letzte Klammer die bei A. angegebene Form (für $n = m+1$) besitzt. Die z_k kann man in diesem Falle derartig auswählen, dass die Gleichungen:

$$\left\|\begin{matrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_m \\ z_2 & z_3 & \cdots & z_{m+1} \end{matrix}\right\| = 0$$

identisch erfüllt sind.

Die Gleichungen $z_k = \varphi_k(y_1 y_2 \cdots y_n)$ sind ausserdem, falls man die zwischen den y_i und zwischen den z_k bestehenden algebraischen Relationen berücksichtigt, auch nach den z_k eindeutig auflösbar. — Die Integration der vorgelegten linearen Differentialgleichung ist folglich auf diejenige einer dieser drei letzten Differentialgleichungen zurückgeführt (d. h. auf eine lineare Differentialgleichung 3ter Ordnung, oder auch auf eine oder zwei lineare Differentialgleichungen 2ter Ordnung).

C. *Lineare Differentialgleichungen, deren Integralcurve auf einer algebraischen 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit liegt.* Hierüber verweisen wir einfach auf die in Nr. 34 u. 35 angegebenen Resultate. Wir heben nur das Eine hervor, dass die Integration einer derartigen linearen Differentialgleichung, von algebraischen Operationen und Quadraturen abgesehen, nur auf einen der folgenden Fälle hinauskommen kann:

1. *Integration einer linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung;*

2. *„ „ „ „ 3ter „ , und eventuell auch einer von der 2ten Ordnung;*

3. *Integration von höchstens drei linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung.*

Capitel 1.

Einleitende Bemerkungen.

1. Ehe wir zur eigentlichen Behandlung unseres Problems übergehen, sollen in diesem Capitel die beiden Begriffe der *„Invarianten“* und der *„Rationalitätsgruppe“* einer linearen Differentialgleichung kurz besprochen werden.

Begriffe über *Invariantenbildungen* aus den Variabeln und (damals nur) ihren ersten Differentialquotienten gegenüber gewissen Gruppen von Transformationen sind, obgleich noch in ziemlich unbestimmter Form, schon in älteren Arbeiten von Lie zu finden*). Die allgemeine Theorie der Differentialinvarianten entstand allerdings viel später; aber speciell für lineare homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, d. h. für die unendliche Gruppe:

$$(1) \qquad x = \varphi(\xi), \qquad y = z \cdot \lambda(x)$$

mit willkürlichen Functionen φ und λ, wurden die Differentialinvarianten bereits durch Laguerre und Halphen untersucht.

Laguerre betrachtete im Jahre 1879**) die ersten „relativen Invarianten", die sich bis auf eine Potenz von $\frac{dx}{d\xi}$ als Factor reproduciren***): der Exponent dieser Potenz heisst der *Index* der Invariante. Seine hauptsächlich auf lineare Differentialgleichungen 3^{ter} Ordnung bezüglichen Untersuchungen wurden durch Brioschi†) auf Differentialgleichungen 4^{ter} Ordnung übertragen.

Halphen nahm in seiner umfangreichen 1881 preisgekrönten Arbeit: *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables*††) die gen. Untersuchungen wieder auf, und setzte dieselben in Verbindung mit den schon vorher†††) von ihm untersuchten *projectiven* Differentialinvarianten der Curven und Flächen. Zwei durch eine Transformation (1) in einander übergehende lineare Differentialgleichungen haben nämlich dieselbe, bis auf eine projective Transformation definirte Integralcurve (vgl. Nr. 7), und die invarianten Eigenschaften einer Differentialgleichung gegenüber der Gruppe von Transformationen (1) lassen sich folglich als projectiv-invariante Eigenschaften der betreffenden Integralcurve deuten.

---

*) Christiania Forhandl., 1872; Göttinger Nachr., Dec. 1874.

**) Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc.; t. 88, S. 116 u. 224; 1879. In der zweiten Mittheilung wird bereits hervorgehoben, dass für eine lineare Differentialgleichung 3^{ter} Ordnung das Verschwinden einer gewissen Invariante mit dem Bestehen einer quadratischen Relation mit constanten Coefficienten zwischen den Fundamentallösungen gleichbedeutend ist, und dass eine derartige Differentialgleichung stets mit $z''' = 0$ „äquivalent" ist.

***) Diesem Gedanken war auch Cockle im Jahre 1868 mit seinen „criticoids" sehr nahe gekommen (Educ. Times, IX, S. 105—12; vgl. auch: Quarterly Journal XIV, 1870, S. 340—53).

†) *„Extrait d'une lettre à M. Laguerre";* Bull. de la soc. Math. de France, t. VII, 1879; S. 105.

††) Mém. des Sav. Etrang., vol. 28, 1883—84. Die Invarianten einer linearen Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung hat Halphen auch in einer weiteren Abhandlung (Acta Math. III, 1883; S. 321—80) eingehend untersucht.

†††) Compt. Rend., t, 81, 1875; S. 1053; Liouv. Journ., ser. III, vol. 2, 1876; vgl. insbes. S. 386; sowie auch die: *Thèse sur les invariants différentiels des courbes gauches* (Paris, 1878).

Forsyth*) und Brioschi**) machten sich ganz besonders um die formale Seite der Theorie der Differentialinvarianten, d. h. um die Berechnung letzterer, verdient. Sie benutzten eine Normalform der Differentialgleichung, welche durch Integration einer Hülfsgleichung 2^{ter} Ordnung und eine Quadratur zu erhalten ist, und berechneten für dieselbe die $n-2$ sog. „linearen" Invarianten. Und zuletzt gab noch Stäckel***) der ganzen Theorie eine feste Basis, indem er zeigte, dass die Transformationen (1) die einzigen Transformationen der beiden Veränderlichen x, y sind, welche eine lineare homogene Differentialgleichung höherer als erster Ordnung:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0, \qquad (n > 1)$$

in eine ebensolche:

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n z}{d\xi^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{d\xi^{n-1}} + \cdots + q_n z = 0$$

überführen. — Ist nun die Ordnungszahl $n > 2$, so kann die vorgelegte Differentialgleichung (A) durch eine Transformation (1) nicht in jede Differentialgleichung (B) übergeführt werden, sondern es müssen, falls eine solche Ueberführung möglich ist, zwischen den Coefficienten der beiden Differentialgleichungen gewisse Beziehungen bestehen. Diese Beziehungen lassen sich in der Form darstellen, dass gewisse aus den Coefficienten von (A) und deren Ableitungen gebildete Ausdrücke mit denselben Ausdrücken, gebildet aus den Coefficienten von (B), übereinstimmen: solche Ausdrücke nennt man eben *absolute* (*Differential-*) *Invarianten* der vorgelegten Differentialgleichung. Findet dagegen diese Uebereinstimmung nur bis auf eine Potenz der Grösse $\varphi'(\xi) = \frac{dx}{d\xi}$ (oder ihrer Inversen $\frac{d\xi}{dx} = \psi'(x)$) statt, so nennen wir den Ausdruck (wie bereits oben erwähnt wurde) eine *relative* (*Differential-*) *Invariante*. — Unter letzteren sind die sogen. *„linearen Invarianten"* a_ν von Forsyth einbegriffen†), und die Gleichungen:

$$a_\nu(x) = \chi^\nu \cdot a_\nu(\xi), \qquad (\nu = 3, 4, \cdots, n)$$

(wo χ eine unbestimmte Function bedeutet) liefern die nothwendigen und im Allgemeinen auch hinreichenden Bedingungen dafür, dass die

*) Phil. Trans., vol. 179 (1888), S. 377—489.

**) Acta Math., vol. 14 (1889), S. 233—248.

***) Crelle's Journ., t. 111 (1893), S. 290—302.

†) A. a. O., S. 392 u. ff.

Differentialgleichungen (A) und (B) durch eine Transformation (1) in einander übergehen*). Die beiden Differentialgleichungen heissen dann „äquivalent"**).

Die Arbeiten Halphen's übten auf Lie einen kräftigen Anreiz***), in Folge dessen Letzterer sich verpflichtet fühlte zu zeigen, dass er das Gebiet der Differentialinvarianten schon längst durch seine Theorie der Differentialgleichungen mit Transformationen in sich beherrschte, und dass seine Theorien eine viel grössere Tragweite hatten als die speciellen von Halphen. Bereits Ende 1882 reiste er nach Paris, wo er mit Halphen zusammentraf; und in kurzer Zeit stand in seinem Geiste das ganze Rüstzeug der Invariantentheorie einer beliebigen endlichen Gruppe entworfen da. Insbesondere ergab sich dabei die allgemeinste Fassung des Begriffes der *Differentialinvarianten* einer Classe von (gegenüber einer Gruppe) äquivalenten Differentialgleichungen oder Differentialsystemen; sowie auch die Bestimmung derselben durch ausführbare Operationen, bezw. durch Integration vollständiger Systeme, jenachdem man die Definitionsgleichungen der endlichen Operationen der Gruppe, oder bloss ihre infinitesimalen Transformationen kennt. Ein kurzes Programm in dieser Richtung veröffentlichte Lie schon im December 1882 (Norweg. Archiv, Bd. VII); ausführlich sind seine Untersuchungen in den „Forhandlinger" der Ges. d. Wiss. zu Christiania von 1882—83, im Norweg. Archiv, 1883—84 (die Abhandlung: *Classification und Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen* ... ist auch in den Math. Ann., Bd. 32, abgedruckt worden), sowie endlich, betreffend die Aufstellung der Differentialinvarianten einer gegebenen Gruppe, in der Abhandlung: *Ueber Differentialinvarianten* in den Math. Annalen, Bd. 24, S. 537 ff., enthalten.

2. Diese allgemeine Lie'sche Theorie umfasst die sämmtlichen früheren Untersuchungen über Invarianten linearer homogener Differentialgleichungen. Wir brauchen darauf nicht näher einzugehen, sondern es kommt uns bloss

---

*) Ludw. Schlesinger: *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Bd. II (Leipzig, 1897), S. 191. Dabei wird insbesondere auch der Fall berücksichtigt, dass in den beiden Differentialgleichungen (A) und (B) die Coefficienten der zweiten Glieder verschwinden ($p_1 = q_1 = 0$). In diesem Falle wird die erforderliche Transformation (1) durch die Function χ bereits eindeutig bestimmt.

**) Appell hat auch die Frage behandelt, welche Differentialgleichungen bei (nicht identischen) Transformationen der Gestalt (1) in sich selbst übergehen (Acta Math., Bd. 15, 1891; S. 281 u. ff.). Dabei ergab sich, dass derartige Differentialgleichungen sich stets auf Gleichungen mit constanten Coefficienten zurückführen lassen.

***) Noether: „*Sophus Lie*", Math. Ann. Bd. 53, S. 33 ff.

darauf an, ein Paar Punkte, betreffend die Differentialinvarianten, hervorzuheben.

Wie bereits erwähnt wurde, haben Lipm. Schlesinger*) und M. Meyer**) dasselbe Problem, welches Fuchs und Ludwig Schlesinger schon vorher für lineare Differentialgleichungen 3ter und 4ter Ordnung behandelt hatten, wieder aufgenommen und unter stricter Benutzung der Differentialinvarianten nochmals gelöst. Derselben Methode schloss sich auch Herr Wallenberg***) an, indem er lineare Differentialgleichungen von beliebiger Ordnung n untersuchte, deren Fundamentallösungen $n-2$ homogene Relationen höheren als ersten Grades erfüllen†). Uebrigens bestand auch die Untersuchungsmethode des Herrn Fuchs im wesentlichen darin, dass mit der gegebenen Differentialgleichung eine zweite zusammengestellt wurde, deren Fundamentallösungen dieselben Quotienten lieferten, wie gewisse Fundamentallösungen der ersten Differentialgleichung; die beiden Differentialgleichungen hingen daher auch durch eine Transformation (1) zusammen.

Es hat sich nun ergeben, dass das Bestehen von gewissen algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen einer linearen Differentialgleichung mit dem Verschwinden gewisser Invarianten derselben gleichbedeutend ist. So verschwinden beispw. die sämmtlichen „linearen Invarianten“ von Forsyth dann und nur dann, wenn n derartige Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ existiren, für welche alle zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{n-1} \\ y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_n \end{Vmatrix}$$

identisch verschwinden. *Aus obiger Behauptung erweist sich daher als selbstverständlich, dass die durch Herrn Fuchs aufgestellte Frage über lineare Differentialgleichungen mit der Theorie der Differentialinvarianten der linearen Differentialgleichungen ganz eng zusammenhängen muss.*

3. Ein weiterer Punkt, den wir ebenfalls an dieser Stelle hervorheben wollen, ist folgender: *Das Bestehen von algebraischen Relationen mit*

*) Inauguraldiss., Kiel 1888 (gedr. in Berlin).

**) Inauguraldiss., Berlin 1893.

***) Crelle's Journal, Bd. 113 (1893); S. 1—41.

†) Genauer ausgedrückt soll durch diese Gleichungen aus der $n-1$-fachen Mannigfaltigkeit der Werthsysteme von $y_1 : y_2 : \cdots : y_n$ eine algebraische einfache Mannigfaltigkeit abgesondert werden. Dazu sind bekanntlich $n-2$ Gleichungen jedenfalls nothwendig, aber nicht immer hinreichend; nach einem Satze von Kronecker (*Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, Crelle's Journal, Bd. 92, 1881, S. 1—122) reichen im allgemeinsten Falle erst n Gleichungen zum angegebenen Zweck aus.

constanten Coefficienten zwischen den Fundamentallösungen einer linearen Differentialgleichung ist eine in Bezug auf die Transformationen (1) *invariante Eigenschaft derselben.* In der That wird eine jede homogene Beziehung zwischen den Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ einer linearen Differentialgleichung (A) zugleich auch durch die entsprechenden Integrale $z_1, z_2, \cdots z_n$ der aus (A) durch die Transformation $y = \lambda(x) \cdot z$ hervorgehenden Differentialgleichung befriedigt. Und beschränken wir uns auf die Betrachtung homogener Relationen mit constanten Coefficienten, so bleiben solche Relationen auch bestehen, wenn wir eine neue unabhängige Variabele $\xi = \psi(x)$ einführen, und folglich auch wenn wir auf (A) irgend eine Transformation (1) ausüben.

Wir werden folglich im Laufe unserer Untersuchung an Stelle einer jeden vorgelegten linearen Differentialgleichung (A) irgend eine ihrer Aequivalenten einführen dürfen; insbesondere diejenige die aus (A) durch die Transformation $y = z \cdot e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$ entsteht, und in welcher bekanntlich das zweite (die Ableitung $z^{(n-1)}$ enthaltende) Glied zum Wegfall kommt. Dieselbe wird gewöhnlich als *„canonische Form"* bezeichnet, und hat die charakteristische Eigenschaft, dass die Determinante eines jeden Fundamentalsystems derselben gleich einer *Constanten* ist*).

4. Der Begriff der *„Rationalitätsgruppe"* oder (nach Ludw. Schlesinger) *„Transformationsgruppe"* einer linearen Differentialgleichung stammt aus Untersuchungen der Herren Picard und Vessiot**).

Für jede vorgelegte lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A) lässt sich nämlich eine algebraische Gruppe G linearer Transformationen von n Veränderlichen angeben, welche die im folgenden Doppelsatze ausgesprochene Eigenschaft besitzt, und folglich der „Galois'schen Gruppe" einer algebraischen Gleichung analog ist:

1) Jede rationale Differentialfunction der Elemente $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (A), welche gleich einer rationalen Function der unabhängigen Variablen x, der Coefficienten p_i und ihrer Ableitungen ist (d. h., als Function von x, dem durch die gen. Coefficienten definirten Rationalitätsbereiche angehört), bleibt als Function von x ungeändert, wenn man auf die y_i eine beliebige Transformation der Gruppe G anwendet; — und umgekehrt:

*) Ludw. Schlesinger: a. a. O., Bd. I, S. 288, Bd. II, S. 147—48.

**) Picard: Compt. Rend. de l'Ac. de Sc., t. 96 (1883); t. 119 (1894); t. 121 (1895); Ann. de la Fac. de Sc. de Toulouse, t. 1 (1887); „Traité d'Analyse" vol. III, chap. 17 (1896). Vessiot: *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires;* Ann. de l'Ec. Norm. Sup., t. 9 (1892), S. 231. Man vergl. auch Schlesinger: a. a. O., Bd. II (1897), S. 71. — Die Bezeichnung „Rationalitätsgruppe" ist von Herrn Klein eingeführt worden.

2) Jede rationale Differentialfunction der y_i, welche als Function von x bei allen Transformationen von G ungeändert bleibt, ist rational bekannt (d. h. gleich einer rationalen Function von x, den Coefficienten von (A), und ihren Ableitungen).

Diese Gruppe G wollen wir als *„Rationalitätsgruppe"* der vorgelegten linearen Differentialgleichung bezeichnen. Noch allgemeiner aber können wir von der Rationalitätsgruppe derselben *unter Zugrundelegung irgend eines Rationalitätsbereiches* sprechen*), d. h. indem wir irgend welche Functionen von x, deren Ableitungen, und die rationalen Verbindungen aus x, diesen Functionen und ihren Ableitungen als bekannt ansehen, auch ohne dass diese Functionen in den Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung explicite aufzutreten brauchen. Wird aber keine besondere Festsetzung getroffen, so soll in unserer Untersuchung der zu Grunde gelegte Rationalitätsbereich stets derjenige sein, welcher durch die Coefficienten p_i der vorgelegten Differentialgleichung definirt wird.

Aus dem Picard-Vessiot'schen Doppelsatze folgt insbesondere, dass, wenn die Elemente $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems der vorgelegten Differentialgleichung und ihre Ableitungen gewisse algebraische Relationen mit dem zu Grunde gelegten Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten:

$$f_\varkappa(y, y', \cdots y^{(n-1)}, x) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots)$$

erfüllen, diese Gleichungen erhalten bleiben müssen, falls man auf die y_i irgend eine Operation der Rationalitätsgruppe G anwendet**). Es ist nämlich eine jede der $f_\varkappa$, als Function von x, rational bekannt, daher auch invariant, und folglich nach wie vor identisch Null.

Für die *allgemeine* lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung definiren die Coefficienten p_i denjenigen Rationalitätsbereich, bei dessen Zugrundelegung die *„allgemeine lineare Gruppe in p Veränderlichen"* als Rationalitätsgruppe erscheint. — Nehmen wir aber an, dass zwischen den Fundamentallösungen y_i und eventuell auch deren Ableitungen eine gewisse Anzahl algebraischer Gleichungen mit rational bekannten, insbesondere mit constanten Coefficienten bestehe (was nur für *specielle* Differentialgleichungen zutreffen kann), so müssen wir diese algebraischen Gleichungen gewissermassen als „dem ursprünglichen Rationalitätsbereiche adjungirt" ansehen; und es wird dadurch eine entsprechende Reduction der Rationalitätsgruppe auf diejenige umfassendste Untergruppe G der allgemeinen linearen Gruppe bewirkt, bei welcher das System der vorgelegten Gleichungen und

---

*) Schlesinger: a. a. O., Bd. II, S. 74.

**) Schlesinger: a. a. O., Bd. II, S. 77, 94.

derjenigen, die sich aus denselben durch Differentiation ergeben*), (wie bereits oben behauptet wurde) invariant ist. Bei jeder Operation von G muss nämlich eine jede Gleichung dieses Systems erhalten bleiben, und folglich in eine Gleichung übergehen, welche ebenfalls dem System angehört, oder eine Folge desselben ist. Insbesondere muss das auch für die Gesammtheit derjenigen (diesem System angehörigen) Gleichungen geschehen — falls solche überhaupt vorhanden sind —, in welchen nur die Lösungen y_i (und keine ihrer Ableitungen) auftreten.

Die Existenz eines bestimmten Systems algebraischer Gleichungen mit constanten Coefficienten zwischen den Fundamentallösungen y_i bedingt daher einen gewissen Gruppencharakter der Differentialgleichung (A); insofern sämmtliche Operationen ihrer Rationalitätsgruppe jenes System von Gleichungen in sich überführen müssen.

Es erhellt nun, in welcher Weise der Begriff der Rationalitätsgruppe in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen hineingreift. Und wir erkennen zugleich, dass dieselbe hier auftretende Reduction der Rationalitätsgruppe auch dann stattfinden würde, wenn eine oder mehrere algebraische Formen $f(y)$ mit constanten Coefficienten, anstatt, als Functionen von x, identisch zu verschwinden, nur gleich rational bekannten (oder auch multiplicativen) Functionen von x wären. Auf diesen Umstand werden wir im 3. Capitel näher eingehen.

5. Die einer linearen Differentialgleichung zugehörige Rationalitätsgruppe bestimmt in gewissem Sinne das bei derselben anzuwendende Integrationsverfahren, und spielt in dieser Theorie eine ganz ähnliche Rolle wie die Galois'sche Gruppe einer algebraischen Gleichung bei der Auflösung derselben.

Die Integration einer linearen Differentialgleichung (A) ist bekanntlich als vollzogen anzusehen, sobald die Elemente $y_1, y_2, \cdots y_n$ eines Fundamentalsystems derselben rational bekannt sind, d. h. wenn derjenige Rationalitätsbereich bekannt ist, bei dessen Zugrundelegung die Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung nur die identische Transformation enthält. *Es wird also wesentlich darauf ankommen, den Rationalitätsbereich so zu erweitern, dass die Rationalitätsgruppe der Differentialgleichung sich reducirt.*

---

*) Unter diesen wird jedenfalls nur eine endliche Anzahl von *unabhängigen* Gleichungen zu finden sein, da die Ableitungen der y_i höherer als n^{ter} Ordnung durch die vorgelegte Differentialgleichung (A) entfernt werden können, und die Uebrigen auch nur in endlicher Anzahl sind.

Der Hauptsatz, von welchem eine derartige Reduction abhängt, lautet folgendermassen*): *Durch Integration der Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit rational bekannten Coefficienten, der eine rationale Differentialfunction der Lösungen* $y_1, y_2, \cdots y_n$ *Genüge leistet, reducirt sich die Rationalitätsgruppe der vorgelegten linearen Differentialgleichung auf ihre umfassendste invariante* (oder *ausgezeichnete*) *Untergruppe, bei welcher jene Differentialfunction ungeändert bleibt.*

Auf Grund dieses Satzes können wir übersehen, in welcher Weise die Structur der Rationalitätsgruppe G einer linearen Differentialgleichung (A) das bei derselben einzuschlagende Integrationsverfahren bestimmt. — Haben wir eine sogen. „*Normalzerlegung*" von G ausgeführt, d. h. eine Reihe von successiven Untergruppen:

$$G_0 \equiv G,\ G_1,\ G_2, \cdots G_{m-1},\ G_m \equiv 1$$

bestimmt, deren jede *umfassendste invariante Untergruppe* der vorangehenden ist (d. h. in keiner anderen invarianten Untergruppe derselben enthalten ist), und bezeichnen wir ferner mit h_n $(n = 0, 1, 2, \cdots m-1)$ die Anzahl der in G_n auftretetenden Parameter, und mit Γ_n eine algebraische Untergruppe von G_n, welche G_{n+1} enthält und überdies von der grösstmöglichen Anzahl k_n von Parametern abhängt, so wird dadurch die Integration von (A) auf die successive Lösung von m algebraischen (im Allgemeinen aber nicht linearen) Differentialgleichungen der Ordnungen $h_n - k_n$ zurückgeführt: diejenigen, welchen bezw. ebensoviele den Gruppen Γ_n zugehörigen Differentialfunctionen Genüge leisten**). Die Ordnungszahlen $h_n - k_n$ sind auch, nach einem Vessiot'schen Satze***), von ihrer Reihenfolge abgesehen, für alle überhaupt möglichen Normalzerlegungen von G stets dieselben.

Dabei haben wir stillschweigend vorausgesetzt, die Gruppe G sei *continuirlich*, d. h. aus infinitesimalen Transformationen erzeugt. Ist sie dagegen eine (algebraische) *gemischte Gruppe*, und besteht folglich aus einer endlichen Anzahl ν von continuirlichen Transformationsschaaren, so dürfen wir als Gruppe G_1 ihre umfassendste continuirliche Untergruppe auswählen; dann genügt irgend eine charakteristische Differentialinvariante von G_1 einer algebraischen Gleichung ν^{ten} Grades mit rational bekannten Coefficienten, und durch Adjunction der Wurzeln dieser Gleichung reducirt sich die Rationalitätsgruppe G auf G_1 (d. h. auf eine continuirliche Gruppe).

---

*) Vessiot, a. a. O., S. 235, 241; Schlesinger, a. a. O., Bd. II, S. 82.

**) Die Coefficienten dieser einzelnen Differentialgleichungen werden aber erst dann rational bekannt, wenn die vorangehenden integrirt sind.

***) Vessiot, a. a. O., S. 338—39, 203ff.; Schlesinger, a. a. O., S. 83.

Durch Adjunction der Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rational bekannten Coefficienten kann man stets bewirken, dass die Rationalitätsgruppe einer vorgelegten linearen Differentialgleichung eine continuirliche sei.

Dabei ist auch keineswegs ausgeschlossen, dass die continuirliche Gruppe G_1 nur die identische Transformation enthalte, und folglich G aus einer endlichen Anzahl (ν) von Operationen bestehe: in diesem Falle ist die Integration von (A) durch die Auflösung obiger algebraischen Gleichung bereits vollzogen, d. h. (A) selbst ist *„algebraisch integrirbar“* *) (und umgekehrt).

Lineare Differentialgleichungen mit endlicher Rationalitätsgruppe sind algebraisch integrirbar, und umgekehrt.

Aus der Integrationstheorie der linearen Differentialgleichungen, welche aus dem Picard-Vessiot'schen Doppelsatze zu folgern ist, entnehmen wir auch folgenden Fundamentalsatz, der auf Vessiot zurückgeht **):

Damit eine lineare homogene Differentialgleichung durch eine Reihe von linearen homogenen Differentialgleichungen 1^{ter} *Ordnung* (und folglich auch *durch Quadraturen* ***)) *integrirbar sei, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre Rationalitätsgruppe eine (durch infinitesimale Transformation erzeugte) „integrable“ Gruppe ist.*

---

*) Unter einer „algebraisch integrirbaren“ Differentialgleichung verstehen wir keineswegs eine Differentialgleichung, deren Lösungen „algebraische Functionen der unabhängig Variablen x“ sind; sondern eine, deren Lösungen sich durch Auflösung algebraischer Gleichungen mit dem gegebenen Rationalitätsbereiche angehörigen Coefficienten ergeben. — Die Frage nach den algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung hängt folglich mit derjenigen nach den *endlichen Gruppen linearer Transformationen von n Veränderlichen* ganz eng zusammen: „Jeder endlichen (discontinuirlichen) Gruppe linearer Transformationen entspricht eine ganze Classe algebraisch integrirbarer linearer Differentialgleichungen“ (Klein: *Einleitung in die höhere Geometrie*, II; autogr. Vorl., Göttingen 1893, S. 361). Für $n = 2$ giebt es keine anderen derartigen Gruppen, als die wohlbekannten Fälle der „regulären Körper“. Für $n > 3$ hat C. Jordan (Crelle's Journal, Bd. 84; Atti della R. Acc. di Napoli, VIII, 1879—80) einen allgemeinen Ansatz aufgestellt, und dadurch den Fall dreier homogener Veränderlichen eingehend untersucht, und denjenigen von vier Veränderlichen zugleich auch begonnen. Doch übersah er für $n = 3$ die einfachen G_{168} und G_{360} von Collineationen in der Ebene, deren erstere durch Klein aus der Transformation 7^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen abgeleitet (Erlang. Ber. 1878; Math. Ann. 14) und die zweite erst durch Valentiner (Kjöb. Skr 1889) aufgestellt wurde.

**) Vessiot: a. a. O., S. 241, Schlesinger: a. a. O., Nr. 156, S. 87 ff.

***) So pflegt man zu sagen, und so sagt beispielsweise auch Vessiot. Eigentlich aber ist, damit die allgemeine Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung 1^{ter} Ordnung rational bekannt wird, die Adjunction des Integrals aus einer rational bekannten Function nicht genügend, sondern auch diejenige der entsprechenden Exponentialfunction, d. h. der Summe einer unendlichen Reihe, deren Glieder aus jenem Integral rational zusammengesetzt sind, erforderlich.

Als „integrabel“ bezeichnet Lie*) eine r-gliedrige continuirliche Gruppe G_r, welche eine Reihe von Untergruppen $G_{r-1}, G_{r-2}, \cdots G_1$ von stets um eine Einheit abnehmender Anzahl von Parametern enthält, deren jede invariante Untergruppe der vorangehenden ist. Eine integrable Gruppe linearer Transformationen von n Veränderlichen enthält höchstens $\frac{n \cdot \overline{n+1}}{2}$ Parameter, und ist durch eine ebenfalls lineare Transformation mit der Gruppe:

$$\begin{aligned}
\bar{y}_1 &= a_{11} y_1, \\
\bar{y}_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2, \\
\bar{y}_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\bar{y}_n &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + a_{n3} y_3 + \cdots + a_{nn} y_n
\end{aligned}$$

(welche die $\frac{n \cdot \overline{n+1}}{2}$ Parameter a_{ik} enthält) oder mit einer Untergruppe derselben ähnlich**).

Auf Grund dieses letzten Satzes besitzt jede lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit integrabler Rationalitätsgruppe ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$, für welches die rationalen Differentialfunctionen:

$$\frac{d}{dx}\log y_1, \quad \frac{d}{dx}\log D(y_1\, y_2), \quad \frac{d}{dx}\log D(y_1\, y_2\, y_3), \cdots$$

in Bezug auf die Rationalitätsgruppe ungeändert bleiben, und folglich rational bekannte Functionen von x sind. Wir ersehen auch daraus, wie sich in diesem Falle die Integration durch successive Quadraturen vollziehen lässt***). Ist nämlich $\frac{d}{dx}\log y$ gleich der rational bekannten Function $f(x)$, so folgt daraus zunächst:

$$y_1 = e^{\int f(x)\,dx}.$$

Setzen wir dann

$$z_i = \frac{d}{dx}\,\frac{y_{i+1}}{y_1} \qquad (i = 1, 2, \cdots n-1),$$

so ergiebt sich:

$$D(y_1\, y_2 \cdots y_k) = y_1^k \cdot D(z_1\, z_2 \cdots z_{k-1}).$$

Es wird folglich $\frac{d}{dx}\log z_1$ rational bekannt sein, und z_1 wird sich durch eine, y_2 durch zwei weitere Quadraturen bestimmen lassen, u. s. w.

*) *Theorie der Transformationsgruppen;* Bd. I, S. 265; Bd. III, S. 679—81. Den *Begriff* einer integrablen Gruppe führte aber Lie bereits 1874 ein (Christiania Forhandl.).

**) Lie: a. a. O., Bd. I, S. 589.

***) Schlesinger: a. a. O., S. 89—90.

Der Begriff einer „integrablen continuirlichen Gruppe" kann gewissermassen als das Analogon desjenigen einer „auflösbaren endlichen Gruppe" in der Galois'schen Theorie gelten. Der Fall der durch Quadraturen integrirbaren linearen Differentialgleichung würde dann demjenigen der durch Wurzelgrössen auflösbaren algebraischen Gleichungen entsprechen. Und da die algemeine lineare Gruppe in n Veränderlichen für $n > 1$ nicht integrabel ist, so ergiebt sich (als Analogon des Ruffini-Abel'schen Satzes über die Unauflösbarkeit durch Wurzelzeichen der algebraischen Gleichung n^{ten} Grades für $n > 4$):

*Die allgemeine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist für $n > 1$ nicht durch Quadraturen integrirbar.**).

6. Es empfiehlt sich noch an dieser Stelle etwas über den Begriff der „Irreducibilität" einer linearen Differentialgleichung zu sagen; ein Begriff, welcher zuerst durch Herrn Frobenius**) eingeführt wurde, aber in mehrfacher Weise aufgefasst werden kann***). Wir wollen die Definition dahin einschränken, dass wir eine lineare Differentialgleichung als „*irreducibel in Bezug auf irgend einen Rationalitätsbereich*" bezeichnen, wenn sie mit keiner anderen ebenfalls linearen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten diesem Rationalitätsbereiche angehören, gemeinsame Lösungen hat. Ist der betreffende Rationalitätsbereich einfach durch die Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung definirt, so werden wir Letztere schlechthin als „*irreducibel*" (ohne weitere Angabe) bezeichnen.

Ist eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung reducibel, so lässt sich mindestens eine lineare Differentialgleichung niedrigerer Ordnung h und mit rational bekannten Coefficienten construiren, welche ihre *sämmtlichen* Lösungen mit der gegebenen Differentialgleichung gemeinsam hat†). Zur Bestimmung der übrigen Lösungen letzterer Differentialgleichung — worunter $n - h$ unabhängige enthalten sind — ist noch die Integration einer linearen Differentialgleichung $(n - h)^{\text{ter}}$ Ordnung mit ebenfalls rational bekannten Coefficienten, zugleich mit einer gewissen Anzahl von Quadraturen, erforderlich.

Die Irreducibilität einer linearen Differentialgleichuug (in dem hier

---

*) Vessiot: a. a. O. S. 243; Schlesinger, a. a. O., S. 90. Selbstverständlich kann in diesem Falle auch nicht von Integration durch algebraische Operationen *und* Quadraturen die Rede sein.

**) Crelle's Journal, Bd. 76, 80.

***) Man vergl. hierüber Beke: *Die Irreductibilität der linearen homogenen Differentialgleichungen;* Math. Ann. Bd. 45, 1894.

†) Schlesinger: a. a. O., Bd. I, S. 85.

festgelegten Sinne) ist mit der Beschaffenheit ihrer Rationalitätsgruppe eng verbunden*). *Damit eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung reducibel sei, und folglich durch die sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung h^{ter} Ordnung ($h < n$) mit rational bekannten Coefficienten befriedigt werde, ist nothwendig und hinreichend, dass eine h-dimensionale Mannigfaltigkeit ihrer Lösungen $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_h y_h$ bei allen Operationen ihrer Rationalitätsgruppe invariant sei***). Diese Lösungen genügen dann eben der gen. linearen Differentialgleichung h^{ter} Ordnung.

Die „$(n-h)^{te}$ associirte"***) der vorgelegten Differentialgleichung gestattet in diesem Falle die Lösung $D(y_1 y_2 \cdots y_h)$, deren logarithmische Ableitung eine rational bekannte Function ist. Dadurch kann man eben, bei *rationalen* Coefficienten, durch eine endliche Anzahl von Schritten wirklich entscheiden, ob eine beliebig vorgelegte lineare Differentialgleichung reducibel ist oder nicht, und zugleich auch im ersten Falle diejenigen irreduciblen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten aufstellen, deren sämmtliche Lösungen der gegebenen Differentialgleichung Genüge leisten†). *Die Aufstellung dieser Differentialgleichungen soll auch in unserer Untersuchung als eine „ausführbare Operation" angesehen werden.*

Deuten wir, wie wir es im folgenden Capitel ausführlicher thun werden, die linearen Substitutionen der n Grössen y_i als Collineationen eines Raumes R_{n-1}, so dürfen wir auch sagen, *dass eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung dann und nur dann irreducibel ist, wenn ihre Rationalitätsgruppe durch eine Collineationsgruppe des Raumes R_{n-1} gedeutet wird, bei welcher keine lineare Mannigfaltigkeit niedrigerer Dimension invariant ist.*

Eine durch Quadraturen integrirbare lineare Differentialgleichung (höherer als 1^{ter} Ordnung) ist offenbar reducibel: eine Lösung derselben genügt nämlich stets einer linearen homogenen Differentialgleichung 1^{ter} Ordnung mit rational bekannten Coefficienten. Und ihre Rationalitätsgruppe wird durch eine projective Gruppe des R_{n-1} gedeutet, bei welcher mindestens ein Punkt, eine durch diesen Punkt gehende gerade Linie, eine Ebene durch diese gerade Linie, u. s. w. invariant sind.

*) Halten wir dagegen an der functionentheoretischen Definition der Irreducibilität fest, die Herr Frobenius gegeben hat, so tritt an Stelle der Rationalitätsgruppe die „Monodromiegruppe" (vgl. Nr. 7) auf. Den bez. Satz hat Herr Jordan aufgestellt (Bull. de la Soc. Math. de France, t. 2, S. 102ff.), und zwar als von der Rationalitätsgruppe überhaupt noch nicht die Rede war.

**) Beke: a. a. O., S. 279—80.

***) Schlesinger: a. a. O., Bd. II, S. 127.

†) Beke, a. a. O., S. 281ff.; Schlesinger, a. a. O. Bd. II, Nr. 176.

Capitel 2.

Einführung geometrischer Betrachtungen.

7. In seiner Preisarbeit von 1881 hat Halphen vorgeschlagen, irgend ein System von Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung als homogene Punktcoordinaten — beispw. projective Coordinaten — in einem Raume R_{n-1} geometrisch zu deuten. Dazu bemerkte er noch (S. 115), dass für $n > 4$ „si l'image géométrique fait défaut, l'objet ne subsiste pas moins"; um so weniger ist das heutzutage eine Schwierigkeit, nach so vielfacher Entwickelung der mehrdimensionalen Geometrie: wir dürfen ja selbst nicht von einem „Mangel an geometrischer Vorstellung" sprechen, falls wir nur ein geeignetes Gebilde als Raumelement einführen.

Lassen wir dabei die unabhängige Variable x beliebige (oder eventuell auch auf irgend ein Gebiet eingeschränkte) complexe Werthe annehmen, so beschreibt der entsprechende Punkt (y) eine *„Curve"* (d. h. ein eindimensionales Gebilde) des Raumes R_{n-1}, die Halphen als *„Courbe attachée"* der vorgelegten linearen Differentialgleichung bezeichnete, und wir kurz *„Integralcurve"* derselben nennen werden. Diese Curve kann in keiner ebenen Mannigfaltigkeit niedrigerer Dimension als R_{n-1} enthalten sein, da zwischen den y_i keine lineare homogene Beziehung mit constanten Coefficienten bestehen kann. Sie besitzt offenbar invarianten Charakter gegenüber allen Transformationen:

$$x = \varphi(\xi), \qquad y = \lambda(x) \cdot z,$$

welche die vorgelegte Differentialgleichung in eine „äquivalente" überführen, und kann folglich als Integralcurve einer ganzen Classe von einander äquivalenten Differentialgleichungen angesehen werden. Andrerseits besitzt eine jede lineare Differentialgleichung, ihren verschiedenen Fundamentalsystemen entsprechend, unendlich viele Integralcurven, welche auseinander durch projective Transformationen hervorgehen.

In Nr. 6 haben wir bereits den Begriff der „associirten Differentialgleichungen" gestreift. Als „$(n-h)^{\text{te}}$ associirte" einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $(1 \leq h < n)$ bezeichnen wir diejenige ganz bestimmte lineare Differentialgleichung $\binom{n}{h}^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die Determinanten $D(y_1\, y_2 \cdots y_h)$ von je h unabhängigen Lösungen der ersteren befriedigt wird*). Benutzen wir folglich die Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$

*) Der Begriff der associirten Differentialgleichung geht auf Forsyth zurück (Phil. Trans., 179, S. 420ff.). Man vergl. auch Craig: *A treatise on linear differential equations;* New-York 1889; Schlesinger, a. a. O., Bd. II, S. 125ff.

einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zur Construction einer entsprechenden Integralcurve, so dürfen wir offenbar die $\binom{n}{h}$ Lösungen $D(y_{q_1} y_{q_2} \cdots y_{q_h})$ ihrer $(n-h)^{\text{ten}}$ associirten Differentialgleichung (unter $q_1 q_2 \cdots q_h$ eine beliebige Combination von je h der Zahlen $1, 2, \cdots n$ verstanden) als Coordinaten in einem wohlbekannten Systeme eines veränderlichen „Osculations-R_{h-1}" jener Integralcurve deuten. Insbesondere ergeben die Lösungen der ersten Associirten der vorgelegten Differentialgleichung die Coordinaten der „Osculations-R_{n-2}" dieser Integralcurve; dieselben sind (bis auf das Vorzeichen) nichts anderes als die in der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{Vmatrix}$$

enthaltenen Determinanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, und fallen folglich auch, bis auf den gemeinsamen Factor $e^{-\int p_1 dx}$, mit ebensovielen linear unabhängigen Lösungen der zur vorgelegten „adjungirten Differentialgleichung" zusammen.

Anmerkung. Beschreibt x auf der complexen Ebene irgend einen geschlossenen Umlauf, so gehen die Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$, allgemein zu reden, in andere $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots \bar{y}_n$ über, welche mit ersteren durch eine lineare Substitution:

$$\text{(S)} \qquad \bar{y}_i = \sum_k a_{ik} y_k$$

mit constanten Coefficienten a_{ik} und nicht verschwindender Determinante $|a_{ik}|$ zusammenhängen. Die Gesammtheit der linearen Substitutionen (S), die allen überhaupt möglichen Umläufen von x entsprechen, bildet offenbar eine (endliche oder unendliche) *discontinuirliche* Gruppe, welche nach einer von Herrn Klein vorgeschlagenen Benennung als „*Monodromiegruppe*" der vorgelegten Differentialgleichung bezeichnet wird*). — Im Raume R_{n-1} der homogenen Coordinaten y_i stellen derartige Substitutionen gewisse projective Transformationen dar, bei welchen jeder Punkt der betrachteten Integralcurve in eine Reihe getrennter Punkte derselben übergeht. *Wir haben es daher mit einer discontinuirlichen Gruppe von Collineationen des Raumes R_{n-1} zu thun, welche die Integralcurve der vorgelegten Differentialgleichung in sich überführen.*

*) Schlesinger: a. a. O.; Bd. II, S. 102. Diese Gruppe ist stets *abzählbar*, wenn sich das von den regulären Stellen der Functionen $y_i(x)$ in der x-Ebene gebildete Continuum durch eine abzählbare Menge von Querschnitten in ein einfach zusammenhängendes Gebiet verwandeln lässt (Schlesinger, a. a. O., Bd. II, S. 10).

Solche Curven könnte man, nach Klein's Vorschlag, als „projectiv-periodisch" bezeichnen, insofern eben, den geschlossenen Umläufen von x entsprechend, jedes Gebiet (Stück?) der Curve in ein projectiv-äquivalentes übergeht. Insbesondere könnte man sich ganz leicht „additiv-periodische" oder auch „multiplicativ-periodische" Curven denken. — Diese projectiv-periodischen Curven können wir gewissermassen als eine Verallgemeinerung der algebraischen Curven ansehen (und auf solche reduciren sie sich eben, falls die vorgelegte Differentialgleichung, oder irgend eine ihrer äquivalenten, algebraische Integrale besitzt). Es wurden ja sogar über die Integrale der Lösungen y_i ($\int y_i\,dx$) — welche den Abel'schen Integralen im Falle einer algebraischen Integralcurve entsprechen — gewisse Untersuchungen aufgestellt. Abel selbst (Oeuvres, t. II, p. 54—65) hat darüber einen Satz gegeben, welcher demjenigen über Vertauschung von Argument und Parameter bei Abel'schen Integralen 3ter Gattung entspricht. Jacobi (Crelle's Journal, t. 32) gab dem Abel'schen Beweise eine leichter übersichtliche Form, und weitere Aenderungen führten auch Fuchs (ibid., t. 76) und Frobenius (ibid., t. 78) ein. Herr Fuchs hat auch die durch Inversion dieser Integrale entstehenden Functionen untersucht (Crelle's Journal, t. 89; Berliner Ber., 1892). Und zuletzt hat noch, auf Klein's Veranlassung, S. Kempinski die Integrale $\int y_i dx$ weiter verfolgt (Krakauer Ber., XXV, S. 264 u. ff., 1893).

Es ist aber keineswegs meine Absicht auf diese functionentheoretischen Untersuchungen näher einzugehen. Es kam hier bloss darauf an, den Begriff der „Integralcurve" einzuführen, obgleich auch letzterer, wie sich bei dem in Nr. 10 zu besprechenden allgemeineren Problem ergeben wird, in unserer Untersuchung keine wesentliche Rolle spielt.

8. Wir wollen nun annehmen, dass die Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ der vorgelegten linearen Differentialgleichung (A) eine gewisse Anzahl algebraischer Gleichungen mit constanten Coefficienten erfüllen:

$$f_\varkappa(y_1\, y_2 \cdots y_n) = 0. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots k) \tag{1}$$

Durch diese Gleichungen wird im Raume R_{n-1} eine gewisse h-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit V_h ($h \geq n - 1 - k$) dargestellt, in welcher die Integralcurve γ der vorgelegten Differentialgleichung enthalten sein muss. Ist insbesondere $h = 1$, so wird durch die Gleichungen (1) eine *algebraische Curve* dargestellt, und γ fällt dann mit letzterer oder auch mit einem (analytisch trennbaren) Theil derselben zusammen; sie ist folglich auch algebraisch.

Genügen die y_i keiner algebraischen Gleichung, die nicht eine Folge des Systems (1) ist, (und das dürfen und wollen wir auch stets annehmen), so geht letzteres, wie in Nr. 4 bereits bemerkt wurde, bei jeder Operation der zur vorgelegten Differentialgleichung (A) zugehörigen Rationalitätsgruppe in sich selbst über. Und indem wir uns diese Operationen durch Collineationen des Raumes R_{n-1} gedeutet denken, ergiebt sich sofort:

1. *dass die Mannigfaltigkeit V_h, allgemein zu reden, eine gewisse (algebraische) Gruppe projectiver Transformationen gestatten wird;*

2. *dass die Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung, als Collineationsgruppe des R_{n-1} gedeutet, in dieser die Mannigfaltigkeit V_h in sich selbst überführenden projectiven Gruppe enthalten sein muss.*

Es erhellt nun, welcher Zusammenhang zwischen den folgenden beiden Fragen besteht: *Untersuchung der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen* — und *Bestimmung der algebraischen Mannigfaltigkeiten des Raumes R_{n-1}, welche eine Gruppe von projectiven Transformationen zulassen.* Jede lineare Differentialgleichung, welche die angegebene Eigenschaft besitzt, führt, allgemein zu reden, auf die Betrachtung algebraischer Mannigfaltigkeit mit projectiven Transformationen in sich; und jede Curve, welche auf *einer* algebraischen Mannigfaltigkeit der letztgenannten Art liegt, kann als Integralcurve einer Classe von einander äquivalenten Differentialgleichungen angesehen werden, deren Fundamentallösungen ein bestimmtes System algebraischer Gleichungen mit constanten Coefficienten (nämlich die Gleichungen der betrachteten Mannigfaltigkeit) erfüllen, und deren Rationalitätsgruppen in der projectiven Gruppe dieser Mannigfaltigkeit enthalten sind. Insbesondere wird die anfangs über lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung aufgestellte Frage auf die beiden folgenden Probleme zurückgeführt:

1. Bestimmung der algebraischen Mannigfaltigkeiten eines Raumes R_{n-1}, welche irgend eine Gruppe projectiver Transformationen gestatten;

2. Bestimmung der Zusammensetzungen, insbesondere von Normalzerlegungen, dieser projectiven Gruppen (um das Integrationsverfahren der entsprechenden Differentialgleichungen zu übersehen).

9. Wir wollen hier einige Bemerkungen einschalten, welche die weitere Untersuchung erleichtern werden.

I. *Ueber den Isomorphismus zwischen linearen und projectiven Gruppen.* Die linearen Transformationen von n Veränderlichen lassen sich bekanntlich als projective Transformationen, und zwar als Collineationen, des Raumes R_{n-1} geometrisch deuten: doch ist die allgemeine lineare Gruppe in n Veränderlichen mit der projectiven Gesammtgruppe des R_{n-1} keineswegs *holoedrisch isomorph**), insofern erstere n^2, letztere $n^2 - 1$ Parameter enthält. Vielmehr ist die Sache so, dass jede Collineation des R_{n-1} durch eine ∞^1-Schaar von linearen Substitutionen der homogenen projectiven

*) Lie: *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. I, Cap. 17, S. 292.

Punktcoordinaten (insbesondere die identische Transformation durch die eingliedrige Gruppe $\bar{y}_i = ty_i$) analytisch dargestellt wird. Ein holoedrischer Isomorphismus (im Lie'schen Sinne) tritt aber ein, wenn wir an Stelle der allgemeinen linearen Gruppe die *specielle* oder *unimodulare* lineare Gruppe in n Veränderlichen*) einführen, welche der identischen Transformation in R_{n-1} nur die endliche Gruppe $\bar{y}_i = \varepsilon y_i$, unter ε eine n^{te} Einheitswurzel verstanden, zuordnet.

Die Rationalitätsgruppe einer beliebig vorgelegten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$\text{(A)} \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0$$

besteht im Allgemeinen nicht aus lauter unimodularen Substitutionen; *es ist das aber der Fall, wenn der Coefficient* p_1 *des zweiten Gliedes verschwindet, oder auch nur gleich der logarithmischen Ableitung einer rational bekannten Function ist***). Und das können wir stets durch eine geeignete Transformation $y = \varrho \bar{y}$ erreichen: insbesondere gehen wir durch die Substitution $y = z \cdot e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$ zur sogen. „canonischen Form" über, in welcher der Coefficient von $z^{(n-1)}$ geradezu verschwindet. *Durch Adjunction der Exponentialgrösse* $e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$ *reducirt sich folglich die Rationalitätsgruppe der linearen Differentialgleichung* (A) *auf eine unimodulare Untergruppe.*

Ist dieselbe r-gliedrig, so wird sie durch eine ebenfalls r-gliedrige projective Gruppe des Raumes R_{n-1} gedeutet; und das wird oft kein unbedeutender Vortheil sein. Doch wird dadurch nicht behauptet, dass die ∞^r Operationen dieser beiden Gruppen einander ein-eindeutig entsprechen; das wird, allgemein zu reden, nicht der Fall sein, und auch nicht immer sich herstellen lassen, da es nicht immer möglich ist, die Operationen einer projectiven Gruppe des R_{n-1} auf diejenigen einer linearen Gruppe in n Veränderlichen ein-eindeutig zu beziehen.

II. *Beschränkung auf den Fall continuirlicher nicht-integrabler Gruppen.* — Gestattet die durch Gleichungen (1) dargestellte Mannigfaltigkeit V_h nur eine *discontinuirliche*, und folglich auch *endliche****) Gruppe projectiver Transformationen, so ist die Rationalitätsgruppe der, vom zweiten Gliede befreiten, entsprechenden Differentialgleichung (A) ebenfalls endlich; ihre Integration wird daher nur *algebraische Operationen* erfordern. *Und die*

---

*) Bestehend aus sämmtlichen linearen Substitutionen $\bar{y}_i = \sum_k a_{ik} y_k$, deren Determinante $|a_{ik}| = 1$ ist.

**) Schlesinger: a. a. O., Bd. II, S. 148.

***) Da die Gesammtgruppe der projectiven Transformationen der Mannigfaltigkeit V_h in sich offenbar algebraisch ist, so ist sie nothwendigerweise, falls discontinuirlich, zugleich auch endlich.

Integration von (A) *wird, von letzteren abgesehen, nur die in der Exponential-grösse* $e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$ *enthaltene Quadratur verlangen.*

Bilden andrerseits die sämmtlichen projectiven Transformationen, welche die Mannigfaltigkeit V_k in sich überführen, eine Gruppe, deren umfassendste (eventuell mit ihr selbst zusammenfallende) continuirliche Untergruppe *integrabel* ist, so ist das auch mit der grössten continuirlichen Untergruppe aus der Rationalitätsgruppe von (A) der Fall. *Die Differentialgleichung* (A) *ist folglich durch algebraische Operationen und Quadraturen integrirbar.* Und zwar ist die Auflösung von *höchstens einer* algebraischen Gleichung mit rational bekannten Coefficienten erforderlich, um die Rationalitätsgruppe auf eine continuirliche und integrable Gruppe zu reduciren; und weiter noch, zur vollständigen Integration, eine gewisse Anzahl von Quadraturen, wie das bereits in Nr. 5 angezeigt wurde.

Sehen wir nun die Auflösung algebraischer Gleichungen mit rational bekannten Coefficienten, sowie auch die Quadraturen rational bekannter Differentiale und den Uebergang zu den entsprechenden Exponentialfunctionen als „ausführbare Operationen" an, so concentrirt sich das Interesse der aufgestellten Frage auf diejenigen Fälle, in welchen die durch Gleichungen (1) dargestellte algebraische Mannigfaltigkeit V_k *eine continuirliche nicht-integrable Gruppe projectiver Transformationen zulässt.* Auf diesen einzigen Fall dürfen wir daher unsere künftigen Untersuchungen beschränken. — Als charakteristische Eigenschaft der nichtintegrablen Gruppen hat sich ergeben*), dass dieselben stets eine dreigliedrige einfache Untergruppe**) enthalten. Und die dreigliedrigen einfachen projectiven Gruppen eines beliebigen Raumes sind heutzutage auch sämmtlich bekannt***).

III. *Ueber algebraische Mannigfaltigkeiten mit unendlich vielen projectiven Transformationen in sich.* — Klein und Lie haben bereits seit 1870†) die Frage nach den sogenannten *W*-Curven, d. h. Curven mit einer continuirlichen Schaar von projectiven Transformationen in sich, aufgenommen, und für ebene Curven und Raumcurven vollständig gelöst. Von modernem Standpunkte aus dürfen wir sagen dass dieselben nichts anderes als die *Bahncurven* eingliedriger projectiver Gruppen sind. — Sind

*) Engel: *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie* II; Leipziger Ber., 1887. Man vergl. auch Lie: *Theorie der Transformationsgruppen;* Bd. III, S. 757.

**) D. h. eine Gruppe, welche mit der projectiven Gesammtgruppe eines einförmigen Gebildes gleich zusammengesetzt (holoedrisch isomorph) ist.

***) Dieses Resultat verdanken wir Herrn Study. Vgl. Lie, a. a. O., S. 785, sowie auch diese Abh., Nr. 15.

†) Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc., t. 70 (1870). Vgl. auch den Aufsatz: *Ueber diejenigen ebenen Curven . . .;* Math. Ann. Bd. 4 (1871).

diese Curven algebraisch, so sind sie zugleich auch rational (d. h. vom Geschlecht Null); da algebraische Curven irgend eines Geschlechtes $p > 1$ nur eine endliche Anzahl birationaler (d. h. algebraischer und eindeutiger) Transformationen zulassen*); und die ∞^1-Gruppe der birationalen Transformationen einer elliptischen Curve auch nur eine endliche Anzahl von Collineationen enthalten kann**). Wir brauchen auch kaum daran zu erinnern, dass man die rationalen Curven m^{ter} Ordnung eines beliebigen Raumes R_{n-1} $(m > n - 1)$ durch Projectionen der möglichst gekrümmten Normalcurven derselben Ordnung eines R_m erhalten kann. Letztere (d. h. die Normalcurven) gestatten eine dreigliedrige einfache projective Gruppe; die übrigen höchstens eine eingliedrige***).

Von Flächen mit ∞^2 vertauschbaren projectiven Transformationen in sich ist bereits in der erwähnten Klein-Lie'schen Mittheilung aus dem Jahre 1870 die Rede. Im Jahre 1882 stellte sich Lie die Aufgabe (Norw. Archiv Bd. VII, S. 179—93), die Flächen mit mindestens drei unabhängigen infinitesimalen linearen Transformationen zu bestimmen; doch wurde dabei die Cayley'sche Linienfläche 3^{ter} Ordnung übersehen (vgl. Christ. Forhandl., 1884, Nr. 9). Und im Jahre 1893 erreichten die Untersuchungen über Flächen mit einer continuirlichen Schaar projectiver Transformationen, einerseits durch Lie†), andrerseits durch Herrn Enriques††), einen gewissen Umfang. Kurz nachher gelang es mir†††), mit Einschränkung auf algebraische Flächen, auch den (von Herrn Enriques ausgeschlossenen) Fall der Collineationen mit zusammenfallenden Doppelpunkten zu berücksichtigen, und zugleich auch Flächen höherer Räume in Betracht zu ziehen. Insbesondere ergab sich dabei:

1. dass jede algebraische Fläche mit unendlich vielen projectiven Transformationen in sich ein-eindeutig auf eine Regelfläche abgebildet werden kann;

2. dass diejenigen algebraischen Flächen, welche eine transitive*†)

---

*) Schwarz: Crelle's Journal, Bd. 87 (1879); Klein: in einem Briefe an Herrn Poincaré (man vgl. eine Arbeit des Letzteren in den Acta Math., Bd. 7, 1884; S. 16); Noether: Math. Ann., Bd. 20, 21 (1882—83).

**) Segre: Math. Ann., Bd. 27, S. 297; Klein: Abhandl. der K. Sächs. Ges. d. Wiss., Bd. 13 (1885); Klein-Fricke: *Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen*. Bd. II, S. 242.

***) Man vgl. Loria: Giornale di Matem., t. 26 (1888), sowie auch Arbeiten von Cayley, Cremona, Bertini, ...

†) *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, S. 190 ff.

††) Atti del R. Ist. Veneto, ser. 7ª, t. IV, V (1893—94).

†††) Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1895.

*†) D. h. eine Gruppe, bei welcher zwei Punkte allgemeiner Lage der vorgelegten Fläche stets in einander übergehen können.

Gruppe projectiver Transformationen zulassen, zugleich auch *rational* (d. h. ein-eindeutig auf die Ebene abbildbar) sind. Diese Fläche kann man auch entweder auf die Ebene, oder auf eine nicht ausgeartete Fläche 2^{ten} Grades, oder endlich auf eine rationale normale Kegelfläche m^{ter} Ordnung eines Raumes R_{m+1} in der Art abbilden, dass der vorgelegten projectiven Gruppe eine ebenfalls projective Gruppe auf dieser zweiten Fläche entspricht. Seine analytischen Untersuchungen hat ausserdem Lie in dem Aufsatze: *Bestimmung aller Flächen*... (Leipz. Ber., 1895) weiter verfolgt; insbesondere wird dort die Bestimmung aller Flächen, die bloss eine zweigliedrige projective Gruppe gestatten, vollständig ausgeführt. Die bez. Resultate kommen aber hier nicht zur Anwendung.

Ueber Mannigfaltigkeiten von einer grösseren Anzahl von Dimensionen, welche projective nicht-integrable Gruppen zulassen, habe ich auch seit 1896 gewisse Untersuchungen angestellt*). Es ergab sich dabei ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen diesen Untersuchungen und der gewöhnlichen Invariantentheorie der binären Formen. Unter den genannten Mannigfaltigkeiten habe ich diejenigen, welche einem vierdimensionalen Raume angehören, einzeln angegeben. In einer weiteren Abhandlung**) habe ich für den Raum R_4 auch die dreidimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeiten bestimmt, welche eine projective, integrable, transitive, mindestens viergliedrige Gruppe gestatten.

Capitel 3.

Ueber eine verallgemeinerte, rein gruppentheoretische Auffassung des vorgelegten Problems.

10. Wir haben gesehen, dass das Bestehen von algebraischen Relationen mit constanten Coefficienten zwischen den Fundamentallösungen einer linearen Differentialgleichung einen gewissen Gruppencharakter letzterer bedingt; ihre Rationalitätsgruppe darf nämlich nur solche lineare Transformationen enthalten, welche das System jener Gleichungen in sich überführen und folglich als projective Transformationen gedeutet werden können, bei denen die durch obige Gleichungen dargestellte algebraische Mannigfaltigkeit invariant ist.

Wir haben es daher mit linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung zu thun, deren Rationalitätsgruppen, als projective Gruppen des R_{n-1} gedeutet, eine diesem Raume angehörige invariante Mannigfaltigkeit V_h zulassen.

Erscheint nun dieser als der eigentliche Kern des ganzen Problems, so entsteht die Frage, ob wir nicht etwa denselben an die Spitze setzen

*) Mem. della R. Acc. di Torino, ser. 2ª, t. 46 (1895–96).

**) Atti del R. Ist. Veneto, ser. 7ª, t. VII (1896).

und als Ausgangspunkt nehmen könnten, indem wir uns die Aufgabe stellen, *alle diejenigen linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung zu untersuchen, deren Rationalitätsgruppen, als projective Gruppen des R_{n-1} gedeutet, irgend welche algebraische Mannigfaltigkeiten in sich überführen.*

Es ist dies ein viel allgemeineres Problem als dasjenige, welches wir von Hause aus uns vorgelegt hatten; doch lässt sich die neue Frage in durchaus einfacher Weise auf die vorangehende (und bereits durch Herrn Fuchs aufgestellte) zurückführen. — Wir wollen nämlich annehmen, dass die Rationalitätsgruppe der linearen Differentialgleichung:

$$\text{(A)} \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p^n y = 0$$

aus linearen Transformationen besteht, welche ein gewisses System algebraischer Gleichungen mit constanten Coefficienten:

$$\text{(1)} \qquad f_\varkappa(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n) = 0 \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots k$$

in sich überführen, doch ohne dass diese Gleichungen identisch erfüllt zu sein brauchen, falls man an Stelle der unbestimmten Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ ein geeignetes Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Differentialgleichung (A) einführt. Anders ausgesprochen: es soll über die Integralcurve γ von (A) keine Festsetzung getroffen, sondern nur die Invariantivität (gegenüber der Rationalitätsgruppe) der durch die Gleichungen (1) dargestellten Mannigfaltigkeit verlangt werden.

Wir betrachten nun die Reihe der successiven Osculationsräume $R_1, R_2 \cdots$ (Tangente, Osculationsebene, u. s. w.) von γ, und nehmen an, dass die Osculations-R_l allgemeiner Lage die invariante Mannigfaltigkeit V_h je in einer endlichen Anzahl von Punkten treffen (was jedenfalls für irgend einen Werth $l < n - h - 1$ geschehen wird). Offenbar sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes eines Osculations-R_l von γ in der Form:

$$\text{(2)} \qquad \eta_i = \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_i' + \alpha_2 y_i'' + \cdots + \alpha_l y_i^{(l)} \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

darstellbar, wo y_i die Coordinaten des zu γ gehörigen Osculationspunktes, $y_i', y_i'', \cdots$ die successiven Ableitungen von $y_i(x)$ bedeuten. Führen wir nun diese Ausdrücke an Stelle der η_i in die Gleichungen (1) ein, so ergiebt sich ein System algebraischer Gleichungen in den homogenen Unbekannten $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_l$, welches, nach der gemachten Voraussetzung, eine endliche Anzahl von Lösungen besitzen muss. Die Coefficienten dieser Gleichungen sind offenbar Polarformen der einzelnen $f_\varkappa$ (in Bezug auf $y', y'', \cdots$), und folglich rationale Differentialfunctionen der y_i; und das System dieser Gleichungen wird (zugleich mit dem System (1)) bei jeder Operation der Rationalitätsgruppe von (A) in sich selbst übergehen. Eliminiren wir nun die Unbekannten $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ bis auf *zwei* derselben, d. h. bis auf deren Verhältniss, so wird sich für letzteres *eine* algebraische Gleichung ergeben, welche ebenfalls in Bezug auf die obigen Transformationen invariant sein wird; und deren Coefficientenverhältnisse einerseits invariante Functionen von x, andrerseits aber immer noch rationale Differentialfunctionen der y_i sind, und folglich rational bekannte Functionen von x sein werden.

Nach Auflösung dieser einen algebraischen Gleichung werden sich die gegenseitigen Verhältnisse der sämmtlichen α, allgemein zu reden, durch rationale Operationen bestimmen lassen.

Die Verhältnisse von je zweien der Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_l$ lassen sich daher durch Auflösung einer algebraischen Gleichung mit rational bekannten Coefficienten und durch rationale Operationen in der Art bestimmen, dass die durch die Gleichungen (2) *definirten Functionen $\eta_i(x)$ die k Gleichungen* (1) *identisch erfüllen.* Ueber den noch unbestimmt bleibenden gemeinsamen Factor der α darf man dabei nach Belieben verfügen.

Diese Functionen $\eta_i(x)$ sind offenbar Lösungen einer neuen linearen Differentialgleichung, welche, nach Bestimmung der α, durch blosse Differentiationen und Eliminationen sich berechnen lässt. Dieselbe ist auch n^{ter} Ordnung (folglich mit (A) cogredient, und hat dann die $\eta_i(x)$ als Fundamentallösungen), falls (A) selbst mit der linearen Differentialgleichung:

$$(3) \qquad \alpha_0 y + \alpha_1 y' + \alpha_2 y'' + \cdots + \alpha_l y^{(l)} = 0$$

keine gemeinsamen Lösungen hat*). Und das wird insbesondere dann zutreffen, wenn (A), nach Adjunction der α zu dem früheren Rationalitätsbereiche, irreducibel ist. Nach Integration dieser neuen Differentialgleichung werden sich offenbar die y_i durch $n-1$-malige Differentiation der Gleichungen (2) und darauf folgende Eliminationen rational berechnen lassen. — Ist dagegen die Differentialgleichung in η niedriger als n^{ter} Ordnung (was eben dann zutrifft, wenn (A) mit (3) gemeinsame Lösungen hat), so bedeutet ihre Integration nur einen Schritt in derjenigen von (A); und es erübrigt dann noch diejenigen Lösungen y zu bestimmen, welche den beiden Differentialgleichungen (A) und (3) gemeinsam sind.

Ein höchst einfaches Beispiel dieser Reduction liefert der Fall einer *einzigen* in Bezug auf die Rationalitätsgruppe von (A) invarianten Gleichung m^{ten} Grades:

$$f(\eta) \equiv f(\eta_1\, \eta_2 \cdots \eta_n) = 0.$$

Wir brauchen dann bloss (da $h = n - 2$, folglich $l = 1$ ist)

$$\eta_i = \alpha y_i + \beta y_i'$$

zu setzen, und in die obige Gleichung einzuführen. Wir erhalten:

$$\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} f_p \binom{y}{y'} \alpha^{m-p} \beta^p = 0,$$

*) Man vgl. beispielsweise Schlesinger, a. a. O., Bd. II, S. 114.

unter $f_p\binom{y}{y'}$ die p^{te} Polarform von y' in Bezug auf $f(y)$ verstanden. Dieselbe ist offenbar, nach Division durch $f(y)\cdot\beta^m$, eine algebraische Gleichung m^{ten} Grades mit rational bekannten Coefficienten und der einzigen Unbekannten $\frac{\alpha}{\beta}\cdot$ Bestimmen wir α und β in der Weise, dass ihr Verhältniss dieser Gleichung genüge leistet, und führen auf die vorgelegte Differentialgleichung die Transformation $\eta = \alpha y + \beta y'$ aus, so erhalten wir für η eine lineare Differentialgleichung, allgemein zu reden auch n^{ter} Ordnung, deren Fundamentallösungen η_i die Gleichung $f(\eta) = 0$ erfüllen. Und durch die η_i und deren Ableitungen lassen sich auch die y_i rational berechnen.

Als Wichtigstes in unserer Untersuchung erscheint folglich die Existenz eines in Bezug auf die Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung invarianten Systems von Gleichungen $f_n(\eta) = 0$ (d. h., falls man die Rationalitätsgruppe als projective Gruppe des R_{n-1} deutet, einer in Bezug auf letztere invarianten algebraischen Mannigfaltigkeit). Ob aber die Gleichungen $f_n(\eta) = 0$ auch erfüllt werden, falls man an Stelle der η_i ein geeignetes System von Fundamentallösungen y_i der vorgelegten Differentialgleichung einführt (d. h. ob die durch jene Gleichungen dargestellte Mannigfaltigkeit V_h eine geeignete Integralcurve dieser Differentialgleichung enthält) oder nicht, das ist bloss etwas Unwesentliches. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so können wir nämlich, durch Adjunction der Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rational bekannten Coefficienten, stets auf einen Fall zurückkommen, in welchem dieselbe Bedingung erfüllt ist.

Dieser letzte Fall, d. h. die Aufgabe, die wir im Anfang uns vorgelegt hatten, erscheint folglich als eine Art „Normalform" der allgemeineren, die wir in diesem Capitel neu aufgenommen haben. Diese allgemeinere Form lässt ganz klar einsehen, dass es sich hier um eine Anwendung der Picard-Vessiot'schen Integrationstheorie handelt: *Unter den projectiven Gruppen des Raumes R_{n-1} greifen wir diejenigen heraus, welche durch die Existenz einer diesem Raume angehörigen invarianten algebraischen Mannigfaltigkeit charakterisirt sind; und untersuchen diejenigen linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, deren Rationalitätsgruppen als derartige projective Gruppen gedeutet werden.* — Die obige Auseinandersetzung gestattet uns aber das neuere Problem bloss in seiner „Normalform" aufzunehmen, d. h. uns auf das frühere zu beschränken. Die materielle Durchführung der angedeuteten Reduction auf die Normalform kann offenbar nur für jeden einzelnen Fall angegeben werden: ausser dem bereits berücksichtigten Falle einer einzigen Gleichung $f(\eta) = 0$ wird ein weiterer höchst wichtiger Fall in Nr. 14 behandelt werden.

Capitel 4.

Ueber lineare homogene Differentialgleichungen 3ter Ordnung mit einer quadratischen Relation zwischen den Fundamentallösungen.

11. Eine lineare homogene Differentialgleichung 3ter Ordnung

$$y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0 \tag{A}$$

hat als Integralcurve eine ebene Curve. Besteht zwischen den Fundamentallösungen y_1, y_2, y_3 eine homogene algebraische Relation mit constanten Coefficienten (und höheren als ersten Grades):

$$f(y_1 y_2 y_3) = 0,$$

so fällt die Integralcurve mit der durch diese Gleichung dargestellten algebraischen Curve, oder, falls letztere reducibel ist, mit einem (irreduciblen) Theil derselben zusammen: sie ist also auch algebraisch.

Nun sind — abgesehen von den geraden Linien — die Curven 2ter Ordnung (d. h. die Kegelschnitte) die einzigen ebenen Linien $f = 0$, welche eine continuirliche nicht-integrable (und zwar eine dreigliedrige einfache) projective Gruppe gestatten. Wir schliessen daher, nach Nr. 9, II:

Besteht zwischen den Fundamentallösungen einer linearen Differentialgleichung 3ter Ordnung eine homogene algebraische Relation mit constanten Coefficienten und höheren als zweiten Grades, so ist die vorgelegte Differentialgleichung durch algebraische Operationen und Quadraturen integrirbar.

Es erübrigt folglich, als einziger interessanter Fall, derjenige einer *quadratischen Relation* (deren Discriminante wir als nicht verschwindend voraussetzen dürfen, da sonst die vorgelegte Gleichung sich in zwei lineare spalten würde). Wir können dann die Fundamentallösungen y_1, y_2, y_3 stets in der Art wählen, dass diese Relation folgende einfache Gestalt annimmt:

$$y_2^2 - y_1 y_3 = 0.$$

Dieselbe ist bekanntlich in Bezug auf die linearen Transformationen:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= a^2 y_1 + 2ab \qquad y_2 + b^2 y_3, \\ \bar{y}_2 &= ac y_1 + (ad + bc) y_2 + bd y_3, \\ \bar{y}_3 &= c^2 y_1 + 2cd \qquad y_2 + d^2 y_3 \end{aligned}$$

mit den Parametern a, b, c, d invariant; und mit dieser viergliedrigen Gruppe (welche als dreigliedrige einfache projective Gruppe der Ebene gedeutet werden kann) wird im allgemeinsten Falle die Rationalitätsgruppe von (A) zusammenfallen.

Ist aber in der vorgelegten linearen Differentialgleichung der Coefficient p des zweiten Gliedes gleich der logarithmischen Ableitung einer rational bekannten Function, so besteht ihre Rationalitätsgruppe (vgl. Nr. 9, I) aus lauter *unimodularen* Substitutionen, d. h. die Determinante $(ad-bc)^3$ dieser Substitutionen ist stets $=1$, und $ad-bc$ folglich gleich einer dritten Einheitswurzel (was im Allgemeinen eine gemischte Gruppe ergeben wird). Und ist zugleich auch $\frac{1}{3}p_1$ gleich der logarithmischen Ableitung einer rational bekannten Function — was beispielsw. bei verschwindendem p_1 der Fall ist — so ist (wie sich weiter unten ergeben wird) $ad-bc=1$, und die Rationalitätsgruppe folglich eine *continuirliche, dreigliedrige, einfache.*

Nun enthält eine derartige Gruppe ∞^1 zweigliedrige (gleichberechtigte) Untergruppen, deren einzige gemeinsame Operation die identische Transformation ist; und diese bildet zugleich auch die einzige invariante Untergruppe der obigen dreigliedrigen Gruppe. — Die Rationalitätsgruppe der vom zweiten Gliede befreiten linearen Differentialgleichung:

$$(\bar{\mathrm{A}}) \qquad y''' + \bar{p}_2 y' + \bar{p}_3 y = 0$$

muss sich folglich, nach der allgemeinen Theorie, durch Integration einer Differentialgleichung 1ter Ordnung (und zwar einer sogen. „Riccati'schen Gleichung") auf die identische Transformation reduciren, d. h. ihre Integration wird dadurch vollzogen sein. Und wir schliessen: *Die Integration der linearen Differentialgleichung* (A) *mit einer quadratischen Relation zwischen den Fundamentallösungen erfordert im allgemeinsten Falle die Adjunction der Exponentialgrösse* $e^{-\frac{1}{3}\int p_1 dx}$ *und die Integration einer Riccati'schen Differentialgleichung.*

Die dazu nothwendigen Rechnungen hat Vessiot in seiner Abhandlung (S. 274 ff.) vollständig durchgeführt, und zwar auch für den allgemeineren Fall, in welchem die quadratische Form $y_2^2 - y_1 y_3$ als Function von x bloss rational bekannt ist, und nicht geradezu verschwindet (wobei, nach Nr. 10, noch die Adjunction der Quadratwurzel aus einer rational bekannten Function erforderlich wird*)). — Wir wollen uns aber auf den Fall $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$ beschränken, und zugleich auch Vessiot's Auseinandersetzung nicht genau folgen. Wir behaupten dagegen zuvörderst:

Die lineare Differentialgleichung (A) *mit einer quadratischen Relation zwischen den Fundamentallösungen wird durch die Quadrate der sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit rational bekannten Coefficienten befriedigt***).

---

*) Es liegt hier nämlich eine einzige invariante Gleichung $f(\eta) = 0$ zweiten Grades vor.

**) Diesen Satz hat bereits Herr Fuchs in seinen genannten Arbeiten aufgestellt.

Setzen wir nämlich $y_1 = \lambda_1^2$, $y_2 = \lambda_1 \lambda_2$, so folgt $y_3 = \lambda_2^2$. Unsere Transformationsgleichungen lassen sich dann auch folgendermassen schreiben:

$$\bar{\lambda}_1^2 = (a\lambda_1 + b\lambda_2)^2,$$
$$\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 = (a\lambda_1 + b\lambda_2)(c\lambda_1 + d\lambda_2),$$
$$\bar{\lambda}_2^2 = (c\lambda_1 + d\lambda_2)^2.$$

Wählen wir nun für λ_1 irgend eine der beiden Bestimmungen, die sich aus der Gleichung $y_1 = \lambda_1^2$ ergeben, so können wir stets die Vorzeichen der Parameter in der Art festlegen, dass die beiden Functionen λ_1, λ_2 bei jeder Operation der betrachteten Rationalitätsgruppe die entsprechende binäre Substitution:

$$\bar{\lambda}_1 = a\lambda_1 + b\lambda_2,$$
$$\bar{\lambda}_2 = c\lambda_1 + d\lambda_2$$

erleiden. Dieselben genügen folglich einer linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung:

(1) $$\lambda'' + r_1 \lambda' + r_2 \lambda = 0,$$

deren Coefficienten:

$$r_1 = \frac{(\lambda_2'' \lambda_2)}{(\lambda_1 \lambda_2')}, \qquad r_2 = \frac{(\lambda_1' \lambda_2'')}{(\lambda_1 \lambda_2')}$$

sich leicht als rationale Differentialfunctionen der y_i ausdrücken lassen*), und zugleich auch, als Functionen von x, bei sämmtlichen Operationen der Rationalitätsgruppe von (A), d. h. bei binären Substitutionen der λ_1, λ_2, ungeändert bleiben: sie sind daher rational bekannte Functionen. Und das Quadrat der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (1) lautet:

$$(C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2)^2 = C_1^2 y_1 + 2C_1C_2 y_2 + C_2^2 y_3$$

und genügt folglich der Differentialgleichung (A). Damit ist der obige Satz bewiesen.

Setzen wir nun $y = \lambda^2$, wo λ die allgemeine Lösung von (1) bezeichnet, so ergiebt sich für y die lineare homogene Differentialgleichung 3ter Ordnung:

(2) $$y''' + 3r_1 y'' + (4r_2 + r_1' + 2r_1^2)y' + (2r_2' + 4r_1 r_2)y = 0$$

und die vorgelegte Differentialgleichung (A) muss folglich in dem hier untersuchten Falle diese Gestalt haben. Daraus sind die Coefficienten r_1

*) Sie lassen sich nämlich durch $\frac{\lambda_1'}{\lambda_1}, \frac{\lambda_2'}{\lambda_2}, \frac{\lambda_1''}{\lambda_1}, \frac{\lambda_2''}{\lambda_2}$ ausdrücken; die beiden ersten dieser Grössen sind bezw. $= \frac{y_1'}{2y_1}$ und $\frac{y_3'}{2y_3}$, und daraus ergeben sich sofort auch die anderen.

und r_2 von (1) sofort rational zu berechnen. Durch Wegschaffen ihres zweiten Gliedes erhält (2) die höchst einfache Form:

$$(2') \qquad y''' + 4sy' + 2s'y = 0,$$

welche durch die Quadrate der Lösungen von $\lambda'' + s\lambda = 0$ befriedigt wird*). Dabei sei noch bemerkt, dass, wie bereits oben erwähnt wurde, die Rationalitätsgruppe von (A) dann und nur dann aus lauter Transformationen besteht, für welche $ad - bc = 1$ ist, wenn die Rationalitätsgruppe von (1) eine unimodulare ist, d. h. eben wenn $r_1 = \frac{p_1}{3}$ die logarithmische Ableitung einer rational bekannten Function ist.

Wird umgekehrt eine lineare Differentialgleichung 3ter Ordnung durch die Quadrate der sämmtlichen Lösungen $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$ einer linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung befriedigt, und hat sie folglich die Gestalt (2), so gestattet sie auf unendlich viele Weisen drei linear unabhängige Lösungen $y_1 = \lambda_1^2$, $y_2 = \lambda_1\lambda_2$, $y_3 = \lambda_2^2$, welche die quadratische Gleichung $y_2^2 - y_1y_3 = 0$ erfüllen.

Wir schliessen daher: *Jede lineare Differentialgleichung 3ter Ordnung, deren Fundamentallösungen einer algebraischen Gleichung mit constanten Coefficienten genügen, ist durch algebraische Operationen und Quadraturen integrirbar, den einzigen Fall einer quadratischen Gleichung von nicht verschwindender Determinante ausgenommen. In diesem Falle wird die vorgelegte Differentialgleichung durch die Quadrate der sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit rational bekannten Coefficienten befriedigt; und zu ihrer Integration ist bloss diejenige dieser letzten Differentialgleichung erforderlich* (welche ihrerseits bekanntlich auf eine Riccati'sche Gleichung, eine Quadratur, und eine Quadratwurzel zurückgeführt werden kann).

Haben wir nämlich aus (A) die Differentialgleichung (1) berechnet, so können wir $\frac{\lambda'}{\lambda} = \mu$ setzen. Es ergiebt sich dann für μ die Riccati'sche Gleichung:

$$(3) \qquad \mu' = -(\mu^2 + r_1\mu + r_2)$$

d. h. die Differentialgleichung 1ter Ordnung, von welcher bereits oben die Rede war. Nach Integration derselben, und falls wir zugleich auch die Function $e^{-\int r_1 dx} = e^{-\frac{1}{3}\int p_1 dx}$ dem Rationalitätsbereiche adjungiren, muss sich die Rationalitätsgruppe von (1) auf die umfassendste lineare Gruppe in λ_1, λ_2 reduciren, für welche die beiden Differentialfunctionen $\mu = \frac{\lambda'}{\lambda}$ **)

*) Diese ist zugleich auch die allgemeinste lineare Differentialgleichung 3ter Ordnung, welche mit ihrer Adjungirten zusammenfällt.

**) Unter λ eine *beliebige* Lösung der Differentialgleichung (1) verstanden, da die Riccati'sche Gleichung (3) als vollständig integrirt vorausgesetzt wird.

und $e^{-\int r_1 dx} = \lambda_1 \lambda_2' - \lambda_1' \lambda_2$ zugleich invariant sind. Nun sind Letztere charakteristische Differentialfunctionen bezw. der beiden Gruppen:

$$\begin{array}{l} \bar{\lambda}_1 = k\lambda_1 \\ \bar{\lambda}_2 = k\lambda_2 \end{array} \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l} \bar{\lambda}_1 = a\lambda_1 + b\lambda_2 \\ \bar{\lambda}_2 = c\lambda_1 + d\lambda_2 \end{array}\right\} ad - bc = 1,$$

welche die endliche Gruppe

$$\bar{\lambda}_1 = \pm \lambda_1, \qquad \bar{\lambda}_2 = \pm \lambda_2$$

als gemeinsame Untergruppe haben. Die Integration von (1) wird folglich noch das Ausziehen einer Quadratwurzel verlangen — *welche allerdings für die Integration von* (A), *wo es sich nur um die Grössen* λ_1^2, $\lambda_1 \lambda_2$, λ_2^2 *handelt, keineswegs nöthwendig sein wird.*

Bezeichnen wir in der That mit μ_1, μ_2 irgend zwei Lösungen von (3), so wird (1) zwei Lösungen λ_1, λ_2 gestatten, für welche:

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1'}{\lambda_1}, \qquad \mu_2 = \frac{\lambda_2'}{\lambda_2};$$

und die in λ_1, λ_2 noch unbestimmten constanten Factoren können wir in der Weise bestimmen, dass zugleich auch:

$$\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_1' \lambda_2 = e^{-\int r_1 dx}, \qquad \frac{\lambda_1' + \lambda_2'}{\lambda_1 + \lambda_2} = \mu$$

wird, unter μ eine beliebige dritte Lösung von (3) verstanden. Wir erhalten dann (Vessiot, S. 261):

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\mu - \mu_2}{\mu - \mu_1 \cdot \mu_1 - \mu_2}}, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{\mu - \mu_1}{\mu - \mu_2 \cdot \mu_2 - \mu_1}}.$$

12. Der Begriff eines Kegelschnittes, als ebener Curve, kann in zweierlei Art auf einen beliebigen Raum R_{n-1} übertragen werden. Einerseits können wir an dem Curvenbegriff festhalten, und haben dann als entsprechendes Gebilde im R_{n-1} die rationale möglichst gekrümmte Normalcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche ebenfalls eine dreigliedrige einfache Collineationsgruppe zulässt. — Andrerseits aber können wir den analytischen Begriff der „einzigen Gleichung zweiten Grades zwischen den y_i" festhalten, und kommen dadurch zum Falle der in einer „$n-2$-dimensionalen Mannigfaltigkeit 2^{ter} Ordnung" enthaltenen Integralcurve. — Verschwindet die Discriminante der betr. Gleichung 2^{ten} Grades nicht, so ist diese Mannigfaltigkeit „nicht ausgeartet", d. h. kein Kegel (oder auch: sie besitzt keine „Doppelpunkte"). Lassen wir aber, allgemeiner, auch das Verschwinden der Discriminante zu, und zugleich auch ihrer Unterdeterminanten bis zur $(h+1)^{\text{ten}}$ Ordnung $(h>2)$ inclusive, so hat die betreffende Mannigfaltigkeit einen R_{n-h-1} von lauter Doppelpunkten, und kann durch Projection einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades eines R_{h-1} aus diesem R_{n-h-1} erhalten werden. Man bezeichnet sie dann als R_{n-h-1}-Kegel, oder auch Kegel $(n-h)^{\text{ter}}$ Art.

Eine nicht ausgeartete Mannigfaltigkeit 2^{ten} Grades des R_{n-1} gestattet eine $\frac{n \cdot \overline{n-1}}{2}$-gliedrige Collineationsgruppe*). Im Falle eines R_{n-h-1}-Kegel erhöht sich die Anzahl der bez. Parameter um $\frac{\overline{n-h} \cdot \overline{n-h+1}}{2}$ Einheiten.

In den beiden nächstfolgenden Capiteln wollen wir bezw. die beiden Fälle untersuchen, in welchen die Integralcurve einer linearen Differentialgleichung höherer als 3^{ter} Ordnung entweder eine rationale Normalcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des R_{n-1} ist, oder aber einfach auf einer Mannigfaltigkeit 2^{ten} Grades V_{n-2}^2 liegt.

Capitel 5.

Ueber lineare homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit rationaler normaler Integralcurve.

13. Es sei eine lineare Differentialgleichung von beliebiger Ordnung n vorgelegt:

$$\text{(A)} \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0,$$

deren Integralcurve γ eine rationale Normalcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Analytisch kommt dies bekanntlich darauf hinaus, dass n derartige Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ existiren müssen, für welche die sämmtlichen zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{n-1} \\ y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

verschwinden: das Nullsetzen der einzelnen Determinanten liefert die Gleichungen ebensovieler linear unabhängiger Mannigfaltigkeiten 2^{ten} Grades, welche die Integralcurve γ enthalten**).

Setzen wir $y_1 = \lambda_1^{n-1}$ (wobei für λ_1 irgend eine der $n-1$ sich daraus ergebenden Bestimmungen auszuwählen ist) und $y_2 = \lambda_1^{n-2}\lambda_2$, folglich auch allgemein $y_i = \lambda_1^{n-i}\lambda_2^{i-1}$, so lassen sich die linearen Transformationen

*) Vgl. Segre: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni;* Mem. della R. Acc. di Torino, ser. 2^a, t. 34 (1884); § 2.

**) Und jede durch γ gehende Mannigfaltigkeit 2^{ten} Grades gehört dem $\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1\right]$-fachen Linearsystem, welches durch die obigen Mannigfaltigkeiten erzeugt wird, an.

der y_i, welche die Curve γ in sich überführen, in folgender Weise kurz darstellen:

$$\bar{y}_i \equiv \bar{\lambda}_1^{n-i}\,\bar{\lambda}_2^{i-1} = (a\lambda_1 + b\lambda_2)^{n-i}(c\lambda_1 + d\lambda_2)^{i-1}.$$

Die daraus entstehende viergliedrige Gruppe mit den Parametern a, b, c, d (falls man auf der rechten Seite die einzelnen Producte $\lambda_1^{n-k}\lambda_2^{k-1}$ durch y_k ersetzt) wird folglich im allgemeinsten Falle mit der Rationalitätsgruppe von (A) zusammenfallen, oder jedenfalls letztere als Untergruppe enthalten. Und durch Wegschaffen des zweiten Gliedes von (A) wird sich diese Rationalitätsgruppe auf eine unimodulare Untergruppe — allgemein zu reden, auf die dreigliedrige einfache Gruppe $ad - bc = 1$ — reduciren. Wir kommen dadurch, wie bereits in Nr. 11, zum Resultat, dass zur Integration von (A) eine Quadratur, die Integration einer Riccati'schen Gleichung, und eventuell (nämlich, falls n eine gerade Zahl ist) auch das Ausziehen einer Quadratwurzel erforderlich sind.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir auch hier an die Spitze folgenden Fundamentalsatz stellen, welcher aus demjenigen von Nr. 11 durch eine leicht übersichtliche Verallgemeinerung entsteht:

Die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (A), *deren Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ die quadratischen Gleichungen:*

$$\left\Vert \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{n-1} \\ y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_n \end{matrix} \right\Vert = 0^{*)}$$

*identisch erfüllen, wird durch die $(n-1)^{ten}$ Potenzen der sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung mit rational bekannten Coefficienten befriedigt***).

Wir können nämlich die Parameter a, b, c, d der obigen Transformationsgleichungen, welche nur bis auf eine $(n-1)^{te}$ Einheitswurzel als gemeinsamer Factor bestimmt sind, stets in der Art festlegen, dass die beiden Functionen λ_1, λ_2 die binäre Substitution:

$$\bar{\lambda}_1 = a\lambda_1 + b\lambda_2,$$
$$\bar{\lambda}_2 = c\lambda_1 + d\lambda_2$$

erfahren; und daraus folgt, wie in Nr. 11, dass sie Lösungen einer und derselben linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung:

(1) $$\lambda'' + r_1\lambda' + r_2\lambda = 0$$

*) Unter dieser Schreibweise verstehen wir, dass die sämmtlichen zweireihigen Determinanten (allgemeiner diejenigen der grösstmöglichen Ordnung) der obigen Matrix verschwinden müssen.

**) Dieser Satz wurde zuerst durch Herrn G. Wallenberg gegeben (*Anwendungen der Theorie der Differentialinvarianten…;* Crelle's Journal, Bd. 113 (1893): p. 14—15).

mit rational bekannten Coefficienten r_1, r_2 sind; während andrerseits (A) durch die sämmtlichen Functionen:

$$(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2)^{n-1} \equiv c_1^{n-1}y_1 + nc_1^{n-2}c_2y_2 + \cdots + c_2^{n-1}y_n,$$

d. h. durch die $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der Lösungen von (1) befriedigt wird. Die Integration von (A) ist folglich auf diejenige von (1) zurückgeführt: d. h., wie bereits gezeigt wurde, auf eine Quadratur, eine Riccati'sche Gleichung und eine Quadratwurzel (welche übrigens, bei ungeradem n, für die Integration von (A) unwesentlich ist).

Bringen wir die Differentialgleichung (1) durch die Transformation $\lambda = \bar{\lambda}\cdot e^{-\frac{1}{2}\int r_1 dx}$ auf die canonische Form:

$$(1') \qquad \bar{\lambda}'' + s\bar{\lambda} = 0,$$

so ergiebt sich für $\bar{y} = \bar{\lambda}^{n-1}$ die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$(\bar{\text{A}}) \qquad \bar{y}^{(n)} + \binom{n+1}{3} s\,\bar{y}^{(n-2)} + 2\binom{n+1}{4} s'\,\bar{y}^{(n-3)}$$
$$+ 3\binom{n+1}{5}\left\{s'' + \frac{5n+7}{9}s^2\right\}\bar{y}^{(n-4)}$$
$$+ 4\binom{n+1}{6}\left\{s''' + \frac{5n+7}{8}ss'\right\}\bar{y}^{(n-5)} + \cdots = 0\,^{*}),$$

und diese wird offenbar mit (A) „äquivalent" sein, da die allgemeine Lösung y von $(\text{A}) = \lambda^{n-1} = \bar{y}\cdot e^{-\frac{n-1}{2}\int r_1 dx}$ ist. Wir sehen zugleich dass die Differentialgleichung $(\bar{\text{A}})$ bereits die canonische Form besitzt, und folgern daraus, dass die obige Transformation $y = \bar{y}\cdot e^{-\frac{n-1}{2}\int r_1 dx}$ mit der anderen $y = \bar{y}\cdot e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$ zusammenfallen (und folglich $p_1 = \frac{n\cdot\overline{n-1}}{2}r_1$ sein) muss.

Die vorgelegte lineare Differentialgleichung (A) *muss in diesem Falle, durch Wegschaffen ihres zweiten Gliedes in der üblichen Weise, die Gestalt* $(\bar{\text{A}})$ *annehmen.*

Setzen wir:

$$B_0 = \bar{y}, \qquad B_1 = \bar{y}',$$
$$B_k = B'_{k-1} + (k-1)(n-k+1)\,sB_{k-2}, \qquad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

so lässt sich die Differentialgleichung $(\bar{\text{A}})$ in der abgekürzten Form $B_n = 0$ schreiben. In der That ergiebt sich aus $\bar{y} = \bar{\lambda}^{n-1}$ durch successive Ableitungen und Berücksichtigung von (1'):

---

*) Schlesinger, a. a. O., Bd. II, S. 203. Dabei ist aber $p_2 = \frac{n+1}{3}s$.

$$B_0 \equiv \bar{y} \ = \bar{\lambda}^{n-1},$$
$$B_1 \equiv \bar{y}' = (n-1)\,\bar{\lambda}^{n-2}\,\bar{\lambda}',$$
$$B_2 \equiv \bar{y}'' + (n-1)\,s\bar{y} = (n-1)\,(n-2)\,\bar{\lambda}^{n-3}\,\bar{\lambda}'^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_k \equiv (n-1)\,(n-2)\cdots(n-k)\,\bar{\lambda}^{n-k-1}\,\bar{\lambda}'^k, \qquad (k<n).$$

Und diese letzte Gleichung lässt sich durch vollständige Induction beweisen, da durch nochmalige Ableitung (falls $k < n-1$ ist):

$$B_k' = (n-1)\cdots(n-k-1)\,\bar{\lambda}^{n-k-2}\,\bar{\lambda}'^{k+1} - (n-1)\cdots(n-k)\,ks\,\bar{\lambda}^{n-k}\,\bar{\lambda}'^{k-1}$$

d. h.

$$B_{k+1} \equiv B_k' + k(n-k)\,s\,B_{k-1} = (n-1)\cdots(n-k-1)\,\bar{\lambda}^{n-k-2}\,\bar{\lambda}'^{k+1},$$

daraus folgt (dagegen, für $k = n-1$, $B_n = 0$).

Ludw. Schlesinger hat in seinem mehrmals erwähnten „Handbuch" (Bd. II, S. 197—98) auch gezeigt, dass durch Anwendung auf $(\bar{\mathrm{A}})$ der Transformation:

$$\bar{y} = \bar{\lambda}^{n-1}\cdot z, \qquad \xi(x) = \int \frac{dx}{\bar{\lambda}^2},$$

wo $\bar{\lambda}$ immer noch der Differentialgleichung (1′) genügt, eine neue lineare Differentialgleichung in z, ξ von derselben Gestalt entsteht, in welcher zugleich auch das Glied mit der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ableitung der abhängigen Variablen z fehlt. Es muss folglich das neue $s = 0$ sein, und die entsprechende Differentialgleichung reducirt sich auf die höchst einfache Form $\frac{d^n z}{d\xi^n} = 0$. Ihre Fundamentallösungen $1, z, z^2, \cdots, z^{n-1}$ genügen offenbar den obigen quadratischen Gleichungen.

Da die Coefficienten p_i dieser Differentialgleichung alle gleich Null sind, so folgt weiter noch dass für dieselbe, sowie auch für $(\bar{\mathrm{A}})$ und (A), *die sämmtlichen Differentialinvarianten ebenfalls verschwinden.*

Wir können dies alles in einem Satze zusammenfassen, indem wir sagen: *Die folgenden vier Eigenschaften einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung* $(n \geq 3)$:

1. *Ein System von Fundamentallösungen* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *zu haben, welche die Gleichungen* 2^{ten} *Grades*
$$\left\|\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{n-1} \\ y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_n \end{matrix}\right\| = 0$$
erfüllen;

2. *Eine rationale Normalcurve* $(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung als Integralcurve zu haben;*

3. *Dass ihre sämmtlichen Invarianten verschwinden* (wozu auch das Verschwinden der „linearen Invarianten" hinreichend ist);

4. *Mit der linearen Differentialgleichung* $\frac{d^n z}{d\xi^n} = 0$ *durch eine Transformation* $y = \varrho z$, $x = \varphi(\xi)$ *äquivalent zu sein;*

sind alle gleichbedeutend.

14. In Folge der in Nr. 10 enthaltenen allgemeinen Bemerkung lässt sich die Integration einer jeden linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

(B) $$z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \cdots + q_n z = 0,$$

deren Rationalitätsgruppe als *dreigliedrige projective Gruppe des* R_{n-1} *mit invarianter Normalcurve* γ^{n-1} gedeutet werden kann, durch Auflösung einer algebraischen Gleichung, auf diejenige einer Differentialgleichung von der Gestalt von (A) im vorigen Nr. 13 — und folglich auch einer linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung — reduciren.

Das dazu erforderliche Verfahren, welches bereits Herr Marotte auf die beiden Fälle $n = 3$ und $n = 4$ *), und ich selbst auf den Fall $n = 5$ **) angewendet haben, wollen wir hier für ein beliebiges n vorlegen.

Wir setzen, nach der allgemeinen Regel von Nr. 10 (da hier $l = n - 2$ ist):

$$y = \alpha_0 z + \alpha_1 z' + \cdots + \alpha_{n-2} z^{(n-2)};$$

und stellen uns die Aufgabe, die α als Functionen der unabhängigen Variablen x in der Art zu bestimmen, dass die für y sich ergebende lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ***) die Gestalt der Differentialgleichung (A) des vorigen Nr. 13 habe; d. h. dass n Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ derselben die Gleichungen:

$$\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{n-1} \\ y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_n \end{Vmatrix} = 0$$

identisch erfüllen.

Zu dem Zwecke führen wir in diese $\binom{n-1}{2}$ Gleichungen die n Ausdrücke:

$$y_i = \alpha_0 z_i + \alpha_1 z_i' + \cdots + \alpha_{n-2} z_i^{(n-2)}$$

---

*) *Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes;* Ann. de la Fac. d. Sc. de Toulouse, XII (1898); S. 69 ff., 84 ff.

**) *Sulle equazioni differenziali lineari del 5° ordine le cui curve integrali sono contenute in una varietà algebrica;* Rend. del R. Ist. Lomb., ser. 2ª, XXXII (1899): Nr. 4.

***) Diese Differentialgleichung wird jedenfalls n^{ter} (und nicht niedrigerer) Ordnung sein, da die Rationalitätsgruppe von (B) — oder eventuell ihre umfassendste continuirliche Untergruppe — keine ebenen Mannigfaltigkeiten niedrigerer Dimension innerhalb R_{n-1} fest lässt.

ein und eliminiren daraus $n - 3$ der Grössen α durch einen sogen. „dialytischen Process", d. h. indem wir diese Grössen, ihre Quadrate und ihre Producte zu je zweien, deren Gesammtzahl gleich

$$(n-3)+(n-3)+\binom{n-3}{2}=\binom{n-1}{2}-1$$

ist, als unabhängige, linear auftretende Veränderliche ansehen. Wir erhalten dadurch, für das Verhältniss der beiden übrigen α, eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades*), deren Coefficientenverhältnisse invariante rationale Differentialfunctionen der Fundamentallösungen $z_1, z_2, \cdots, z_n$ von (B), und folglich rational bekannte Functionen von x sind. — Diese Coefficienten sind nämlich Determinanten oder Summen von Determinanten $\binom{n-1}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Elemente, falls wir der Kürze halber

$$\vartheta_{ik}(z)=\begin{vmatrix} z_i & z_k \\ z_{i+1} & z_{k+1}\end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

setzen, die allgemeine Gestalt $\vartheta_{ik}^{(p)}(z^{(q)})$ haben, wobei die beiden Zahlen i, k, bezw. p, q, für die sämmtlichen Elemente einer und derselben Horizontalreihe, bezw. einer und derselben Verticalreihe, stets dieselben sind. Nun erleiden diese $\binom{n-1}{2}$ Functionen $\vartheta_{ik}(z)$, bei einer jeden Collineation des Raumes R_{n-1}, welche die Curve γ^{n-1} in sich überführt, auch eine lineare Substitution mit constanten Coefficienten (da durch lineare Verbindung der Gleichungen $\vartheta_{ik}(z)=0$ das ganze Linearsystem der durch γ^{n-1} gehenden quadratischen Mannigfaltigkeiten erzeugt wird); und in derselben Weise werden auch die Functionen $\vartheta_{ik}^{(p)}(z^{(q)})$ (für feste p, q) unter einander transformirt. Die obigen Determinanten und deren Summen ändern sich daher bloss um einen und denselben constanten Factor (den Modul der letztgenannten linearen Substitution), und ihre Verhältnisse bleiben folglich ungeändert.

Adjungiren wir nun dem früheren Rationalitätsbereiche die Wurzeln dieser Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, so lassen sich die übrigen Verhältnisse der Grössen α durch rationale Operationen bestimmen (falls nur die beiden ersten α nicht — was immer zu vermeiden ist — in specieller Weise unter den $n-1$ ausgewählt worden sind). Verfügt man dann noch ganz beliebig über den bisher unbestimmten gemeinsamen Factor der α selber, so wird sich durch blosse Differentiationen und Eliminationen die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ergeben, welcher die allgemeinste Function:

---

*) Entsprechend den $n-1$ Schnittpunkten der Curve γ^{n-1} mit einem jeden Osculations-R_{n-2} der Integralcurve von (B).

$$y = \alpha_0 z + \alpha_1 z' + \cdots + \alpha_{n-2} z^{(n-2)}$$

Genüge leistet; und diese wird eben die Gestalt der Differentialgleichung (A) von Nr. 13 haben, d. h. durch die $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der Lösungen einer linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung befriedigt werden. — Nach Integration dieser neuen für y erhaltenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, wird sich die allgemeinste Lösung z von (B) in der Gestalt:

$$z = \beta_0 y + \beta_1 y' + \cdots + \beta_{n-1} y^{(n-1)}$$

ergeben, wo die Functionen β dem durch Adjunction der α erweiterten Rationalitätsbereiche angehören. Und bezeichnen wir mit λ die allgemeine Lösung der obigen linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung (so dass an Stelle von y jede Potenz λ^{n-1} gesetzt werden kann) so genügen der vorgelegten Differentialgleichung (B) die sämmtlichen Functionen:

$$z = r_1 \lambda^{n-1} + r_2 \lambda^{n-2} \lambda' + \cdots + r_n \lambda'^{n-1},$$

wo die r ganz bestimmte Functionen sind, welche ebenfalls dem durch die α erweiterten Rationalitätsbereiche angehören.

Anmerkung. Führen wir insbesondere die Voraussetzung ein, dass die Integralcurve der vorgelegten Differentialgleichung (B) derjenigen Mannigfaltigkeit V_{k+1} angehört, welche durch die sämmtlichen Osculations-R_k der invarianten Curve γ^{n-1} erzeugt wird, und bezeichnen mit $\varrho_i(x)$ die (bis auf einen gemeinsamen Factor bestimmten) Coordinaten des entsprechenden Osculationspunktes, so müssen die $\varrho_i(x)$ auch einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von derselben Gestalt als (A) in Nr. 13 Genüge leisten; und aus dieser wird sich zugleich (B) durch eine Transformation:

$$z = \varepsilon_0 \varrho + \varepsilon_1 \varrho' + \cdots + \varepsilon_k \varrho^{(k)}$$

ergeben müssen*). Es lässt sich aber *a priori* nicht einsehen, in welcher Beziehung die Coefficienten der für ϱ sich ergebenden Differentialgleichung, sowie auch die Functionen ε, zum früheren Rationalitätsbereiche stehen.

15. Die projective Gruppe einer rationalen Normalcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist die einzige projective dreigliedrige nicht-integrable Gruppe des R_{n-1}, bei welcher keine ebene Punktmannigfaltigkeit niedrigerer Dimension

*) Von diesem Standpunkte aus hat Goursat (Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc., t. 100 (1884), S. 233) den Fall $n = 4$, $k = 1$ untersucht, und zugleich auch, für ein beliebiges n, den Fall $k = n - 3$ in's Auge gefasst (d. h. den Fall einer einzigen Gleichung zwischen den z_i, deren linke Seite mit der Discriminante einer binären Form $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zusammenfällt). Eine ganz verschiedene Behandlung des Falles $n = 4$, $k = 1$ (welche auf höhere Werthe von n nicht übertragbar zu sein scheint) hat Ludw. Schlesinger gegeben (Diss. Berlin, S. 30 ff.; *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Bd. II, S. 240 ff.).

invariant bleibt. Sehen wir aber von dieser Beschränkung ab, so erweist sich auch eine ganze Reihe anderer Fälle als möglich. Es lässt sich zeigen, dass bei jeder dreigliedrigen, nicht-integrablen (und folglich einfachen) projectiven Gruppe eines R_{n-1} gewisse zu einander windschiefe ebene Mannigfaltigkeiten $E_{q_1}, E_{q_2}, \cdots, E_{q_k}$ invariant bleiben, welche so beschaffen sind, dass die Summe $\sum_h (q_h + 1)$ ihrer Stufenzahlen $= n$ ist, und innerhalb einer jeden von ihnen keine ebene Mannigfaltigkeit niedrigerer Dimension, dagegen aber, falls $q_h > 1$ ist, eine rationale Normalcurve q_h^{ter} Ordnung fest bleibt*). Umgekehrt können diese sämmtlichen Fälle, welche den verschiedenen Weisen entsprechen, die Zahl n als Summe von ganzen positiven Zahlen darzustellen, alle auch wirklich auftreten. Eine derartige dreigliedrige projective Gruppe kann man durch folgende Gleichungen darstellen:

$$\bar{y}_{hi} = (a\lambda_1 + b\lambda_2)^{q_h - i}(c\lambda_1 + d\lambda_2)^i, \qquad \begin{cases} h = 1, 2, \cdots, k \\ i = 0, 1, 2, \cdots, q_h \end{cases}$$

wobei auf der rechten Seite die einzelnen Producte $\lambda_1^{q_h - m}\lambda_2^m$ durch y_{hm} zu ersetzen sind, und die Parameter a, b, c, d die Gleichung $ad - bc = 1$ identisch erfüllen**).

Das Integrationsverfahren einer linearen Differentialgleichung, deren Rationalitätsgruppe durch eine derartige projective Gruppe gedeutet oder allgemeiner auch durch die Gleichungen:

$$\bar{y}_{hi} = \varrho_h(a\lambda_1 + b\lambda_2)^{q_h - i}(c\lambda_1 + d\lambda_2)^i$$

dargestellt wird, unter $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_k, a, b, c, d$ ebensoviele Parameter (mit der Bedingung $ad - bc = 1$) verstanden, lässt sich nun auch ganz leicht übersehen***).

Eine derartige Differentialgleichung ist nämlich *reducibel*, da ihre Rationalitätsgruppe, innerhalb R_{n-1}, eine gewisse Anzahl von ebenen Mannigfaltigkeiten niedrigerer Dimension fest lässt. Und zwar genügen die q_h unabhängigen Lösungen $y_{h0}, y_{h1}, \cdots, y_{h\cdot q_h}$ $(h = 1, 2, \cdots, k)$ je für sich einer linearen Differentialgleichung $(q_h + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit

*) Lie: *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, S. 785. Dieser Satz stammt aber, wie bereits erwähnt wurde, aus Untersuchungen von Study.

**) Man vgl. hierüber meine Abhandl.: *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè* (Mem. della R. Acc. di Torino, ser. 2ª, t. 46; 1895—96).

***) Da, nach einem bereits erwähnten Engel'schen Satze, jede nicht-integrable Gruppe mindestens eine dreigliedrige einfache Untergruppe enthält, und folglich die dreigliedrigen einfachen Gruppen in der Zusammensetzung aller nicht-integrablen Gruppen eine höchstwichtige Rolle spielen, so schien es mir der Mühe werth, über obigen Fall ein Paar Worte zu sagen.

rational bekannten Coefficienten. — Aus den obigen Transformationsgleichungen (welche, für ein constantes h, die projective Gruppe eines Raumes R_{q_h} mit invarianter Normalcurve γ^{q_h} darstellen) erkennen wir auch sofort, dass eine jede dieser k linearen Differentialgleichungen (falls $q_h \geq 2$ ist) die Beschaffenheit der Differentialgleichung (B) von Nr. 14 haben muss, und ihre Integration folglich (durch Auflösung einer algebraischen Gleichung q_h^{ten} Grades) auf diejenige einer linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung zurückgeführt werden kann — das Gesammtproblem daher vermuthlich auf die Integration von k linearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung. — Aus der allgemeinen Theorie folgt aber andrerseits dass, nach Integration einer einzigen dieser Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung, diejenige der übrigen nur je eine Quadratur erfordern kann (da die Rationalitätsgruppe auf eine Untergruppe mit den blossen Parametern ϱ_h herabsinkt). Und in der That, denken wir uns diese Differentialgleichungen von den bez. zweiten Gliedern befreit — wodurch die Rationalitätsgruppe auf ihre Untergruppe $\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_k = 1$ herabsinkt —; bezeichnen ferner mit λ_1, λ_2 bezw. μ_1, μ_2 „cogrediente" Fundamentalsysteme von irgend zwei jener Differentialgleichungen und setzen:

$$\mu_1 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_1',$$
$$\mu_2 = \alpha\lambda_2 + \beta\lambda_2',$$

woraus sich:

$$\alpha = \frac{\mu_1\lambda_2' - \mu_2\lambda_1'}{\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1'}, \qquad \beta = \frac{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}{\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1'}$$

ergiebt, so erscheinen α, β als rationale Differentialfunctionen der λ, μ, welche in Bezug auf die reducirte Rationalitätsgruppe invariant, und folglich (in dem betreffenden Rationalitätsbereiche) rational bekannte Functionen sind. Die beiden Differentialgleichungen gehen daher auseinander durch die Transformation $\mu = \alpha\lambda + \beta\lambda'$ (mit rational bekannten α, β) hervor*).

Capitel 6.

Ueber lineare homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit *einer* quadratischen Relation zwischen den Fundamentallösungen.

16. Wir wollen jetzt annehmen, es bestehe zwischen den Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

(A) $$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0$$

*) Man vgl. das Beispiel $n = 5$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$ in Nr. 5 meines Aufsatzes: *Sulle equazioni differenziali lineari del 5° ordine*... (Rend. del. R. Ist. Lomb., ser. II, t. XXXII, 1899).

eine homogene quadratische Relation mit constanten Coefficienten:

$$f(y_1 y_2 \cdots y_n) = 0,$$

welche bei allen Operationen der Rationalitätsgruppe von (A) in sich übergeht. Und das wird jedenfalls der Fall sein, wenn die y_i keiner anderen quadratischen Gleichung Genüge leisten.

Nach den allgemeinen Erörterungen von Nr. 10 brauchen wir kaum daran zu erinnern, dass, falls die quadratische Form $f(y)$, als Function von x, auch nicht geradezu verschwinden sollte, sondern nur rational bekannt wäre — oder auch nur eine rational bekannte logarithmische Ableitung hätte —, die einfache Anwendung auf (A) einer Transformation:

$$z = \alpha y + \beta y',$$

wobei α, β die quadratische Gleichung:

$$f(y) \cdot \alpha^2 + 2f\binom{y}{y_1} \cdot \alpha\beta + f(y') \cdot \beta^2 = 0$$

mit rational bekannten Coefficientenverhältnissen erfüllen, das vorgelegte Integrationsproblem auf dasjenige der Integration einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in z mit der Relation $f(z_1 z_2 \cdots z_n) = 0$ zwischen den Fundamentallösungen z_i reduciren würde.

Und ferner bemerken wir noch, dass wir unsere Aufmerksamkeit auf den Fall einer quadratischen Gleichung *von nicht verschwindender Discriminante* beschränken dürfen. Verschwindet nämlich die Discriminante von f zugleich mit ihren Unterdeterminanten bis zur $(h+1)^{\text{ten}}$ Ordnung inclusive $(2 < h < n)$ — nicht aber mit allen denjenigen h^{ter} Ordnung —, so stellt die Gleichung $f = 0$ einen R_{n-h-1}-Kegel (od. Kegel $(n-h)^{\text{ter}}$ Art) dar, welcher aus lauter Räumen R_{n-h} durch einen und denselben R_{n-h-1} besteht. In diesem Falle lässt sich bekanntlich die Gleichung $f = 0$ durch eine lineare Substitution der y_i — d. h. durch geeignete Auswahl eines zweiten Fundamentalsystems $z_1, z_2, \cdots, z_n$ — in eine andere $\varphi(z) = 0$ überführen, welche nur h der Grössen z_i, beispw. $z_1, z_2, \cdots, z_h$ enthält, und in Bezug auf dieselben eine nicht verschwindende Discriminante besitzt. Bei jeder Operation der Rationalitätsgruppe von (A) bleibt dann, zugleich mit der Gleichung $\varphi(z) = 0$, auch die lineare Mannigfaltigkeit der Lösungen $C_1 z_1 + C_2 z_2 + \cdots + C_h z_h$ invariant, und es folgt daraus dass (A) reducibel ist und *dass die Functionen* $z_1, z_2, \cdots, z_h$ *Fundamentallösungen einer linearen Differentialgleichung* h^{ter} *Ordnung mit rational bekannten Coefficienten sind und zugleich auch die quadratische Relation* $\varphi(z) = 0$ *von nicht verschwindender Discriminante erfüllen.*

Die Bestimmung der weiteren $n - h$ unabhängigen Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung (A) erfordert dann noch die Integration einer linearen Differentialgleichung $(n-h)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rational bekannten Coefficienten und eine gewisse Anzahl von Quadraturen. Für $h = n - 1$ bleibt eine einzige Fundamentallösung übrig, welche durch blosse Quadraturen herzustellen ist.

Verschwindet daher die Discriminante von f, so ist die vorgelegte Aufgabe auf die entsprechende für einen kleineren Werth h von n und eine quadratische Relation $\varphi = 0$ von nicht verschwindender Discriminante, und auf die Integration einer möglichst allgemeinen linearen Differentialgleichung $(n-h)^{ter}$ Ordnung nebst einer gewissen Anzahl von Quadraturen zurückgeführt. Wir dürfen folglich die Discriminante von f als nicht verschwindend voraussetzen.

Für diesen Fall lässt sich aber keine allgemeine (d. h. für ein beliebiges n gültige) Integrationstheorie aufstellen, wie wir es im Falle der rationalen normalen Integralcurve gethan haben. Sehen wir von dem Falle $n = 3$ ab, welcher bereits durch Herrn Fuchs behandelt und hier in Nr. 11 besprochen wurde, so hat den Fall $n = 4$ zuerst Goursat*) eingehend untersucht; und die beiden folgenden $n = 5$ und $n = 6$, für welche nur eine kurze Andeutung in einer Mittheilung Halphen's an die Pariser Academie**) vorlag, habe ich neulich mit Hülfe liniengeometrischer Betrachtungen ausführlich behandelt***). Das alles soll in diesem Capitel Platz finden. Für $n > 6$ werde ich mich auf ein Paar allgemeine Bemerkungen beschränken dürfen.

Von rein gruppentheoretischen Betrachtungen ausgehend, hat auch Lie in seiner Arbeit: *Die linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen* (Leipz. Ber., 1891; S. 267) Goursat's Resultat für den Fall $n = 4$ und Halphen's Behauptungen für die beiden Fälle $n = 5$ und $n = 6$ bis auf einen kleinen Unterschied bestätigt. Er hat aber zugleich noch ausgesprochen dass, für $n = 6$, Halphen *das Problem nicht auf seine einfachste Form zurückgeführt hatte*, insofern letzterer zugleich mit einer linearen Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung auch eine *überflüssige* lineare Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung brauchte. Die Richtigkeit dieser Lieschen Behauptung wird sich in Nr. 26 ergeben.

Anmerkung. Was in dieser Nr. für den Fall einer in einem Kegel 2^{ten} Grades und $(n-2)^{ter}$ Dimension enthaltenen Integralcurve gesagt wurde, lässt sich unmittelbar auf jeden anderen $n-2$-dimensionalen Kegel (sowie auch auf einen Kegel niedrigerer Dimension) des R_{n-1} übertragen. *Ein $n-2$-dimensionaler R_{n-h-1}-Kegel des R_{n-1} lässt sich*

*) Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc., t. 97 (1883), S. 31; Bull. de la Soc. Math. de Fr., t. 11 (1882—83).

**) Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc., t. 101 (1885), S. 663.

***) *Sulle equazioni differenziali lineari del 5° e del 6° ordine* .... (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 34, 1898—99).

immer durch eine Gleichung darstellen, welche nur h der n homogenen Punktcoordinaten enthält. Ist die Integralcurve einer linearen Differentialgleichung (A) in einem solchen (bei ihrer Rationalitätsgruppe invarianten) Kegel enthalten, so ist (A) reducibel, und ihre Integration lässt sich auf diejenige:

1. einer linearen Differentialgleichung h^{ter} Ordnung mit einer algebraischen Relation (die Gleichung des obigen Kegels) zwischen den Fundamentallösungen;

2. einer möglichst allgemeinen linearen Differentialgleichung $(n-h)^{\text{ter}}$ Ordnung;

und endlich noch auf eine gewisse Anzahl von Quadraturen zurückführen. Dass die beiden letztgenannten Differentialgleichungen rational bekannte Coefficienten haben, braucht kaum erwähnt zu werden.

Im Falle eines Kegels niedrigerer Dimension wird es sich, an Stelle einer einzigen Gleichung, um ein invariantes Gleichungssystem zwischen den $h < n$ obigen Variabeln handeln.

Der Fall $n = 4$.

17. Wir bezeichnen mit y_1, y_2, y_3, y_4 vier unabhängige Lösungen einer linearen Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung:

$$\text{(A)} \qquad y^{IV} + p_1 y''' + p_2 y'' + p_3 y' + p_4 y = 0,$$

welche einer (einzigen, und folglich in Bezug auf die Rationalitätsgruppe von (A) invarianten) quadratischen Gleichung $f(y) = 0$ von nicht verschwindender Discriminante genügen. Diese Lösungen können wir stets in der Art auswählen, dass die genannte Relation die einfache Gestalt:

$$y_1 y_2 - y_3 y_4 = 0$$

annimmt. — Diese Gleichung stellt eine nicht ausgeartete Fläche 2^{ten} Grades des dreidimensionalen Raumes dar, welche bekanntlich eine 6-gliedrige projective Gruppe G gestattet*); und zwar ist letztere eine gemischte Gruppe, welche aus zwei continuirlichen Schaaren besteht, deren eine die beiden Systeme von Erzeugenden auf der Fläche fest lässt, während die andere dieselben unter einander vertauscht. Die erste Schaar ist zugleich die umfassendste invariante (und continuirliche) Untergruppe G_1 von G. Und als umfassendste Untergruppen von G_1 ergeben sich zwei dreigliedrige einfache Gruppen, welche dadurch gekennzeichnet sind, dass sie die sämmtlichen Erzeugenden je eines der beiden Systeme auf der vorgelegten Fläche in Ruhe lassen. Bezeichnen wir irgend eine dieser beiden Gruppen mit G_2, so ist:

$$G, \; G_1, \; G_2, \; 1$$

*) Lie: *Theorie der Transformationsgruppen*, III. Bd., Cap. 9, Satz 5.

eine „Normalzerlegung" von G. Die Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung (A) wird sich daher, im allgemeinsten Falle zunächst durch eine Quadratur auf eine unimodulare, in Lie'schem Sinne mit G isomorphe Untergruppe reduciren. Die Reduction auf G_1 wird dann bloss das Ausziehen einer Quadratwurzel verlangen. Und da G_1 und G_2 ∞^1 bezw. 5-gliedrige (G_2 enthaltende) und 2-gliedrige Untergruppen enthalten, so wird die Integration von (A) noch diejenige von zwei Differentialgleichungen 1[ter] Ordnung, und zwar Riccati'schen Gleichungen, erfordern; und dazu noch das Ausziehen von zwei weiteren Quadratwurzeln, dem Umstande entsprechend, dass in den Transformationsgleichungen der Gruppe G_1 zwei verschiedene Vorzeichen geändert werden können, ohne dass die dargestellte projective Transformation sich ändert*).

Wir gehen nun dazu über zu zeigen, wie sich dies alles ausführen lässt**); dabei wird, der Bequemlichkeit wegen, die obige Quadratur als letzte auftreten. — Auf der Fläche $y_1 y_2 - y_3 y_4 = 0$ sind die beiden geraden Linien $y_1 = y_3 = 0$ und $y_1 = y_4 = 0$ Erzeugende verschiedener Systeme; und zwar kann man die ∞^1 Erzeugenden dieser einzelnen Systeme bezw. durch die Ebenenbüschel $y_1 = \eta y_4$ und $y_1 = \zeta y_3$ ausschneiden. Nun kann auf der genannten Fläche die allgemeinste projective Umformung „erster Art" (d. h. der continuirlichen Gruppe G_1) dadurch bestimmt werden, dass man innerhalb eines jeden der beiden Systeme von Erzeugenden in allgemeinster Art eine projective Transformation angiebt. Dabei werden die beiden Parameter η und ζ (die wir

---

*) Ist die invariante Fläche 2[ten] Grades durch die Gleichung $y_1 y_2 - y_3 y_4 = 0$ dargestellt, so lauten die Gleichungen der 6-gliedrigen continuirlichen Gruppe G_1 folgendermassen:

$$\begin{aligned}
\bar{y}_1 &= \alpha(ay_1 + by_4) + \beta(ay_3 + by_2),\\
\bar{y}_2 &= \gamma(cy_1 + dy_4) + \delta(cy_3 + dy_2),\\
\bar{y}_3 &= \gamma(ay_1 + by_4) + \delta(ay_3 + by_2),\\
\bar{y}_4 &= \alpha(cy_1 + dy_4) + \beta(cy_3 + dy_2)
\end{aligned}$$

mit den Bedingungen $ad - bc = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$; wobei eben zu bemerken ist, dass einer jeden Transformation der projectiven Gruppe G_1 *vier* verschiedene Werthsysteme der Parameter $a, b, \ldots$ entsprechen: der identischen Transformation insbesondere die Werthe $a = d = \pm 1$, $\alpha = \delta = \pm 1$, $b = c = \beta = \gamma = 0$. Und die Gleichungen der dreigliedrigen invarianten Untergruppen G_2 lauten bezw.

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{y}_1 = ay_1 + by_4, & \bar{y}_3 = ay_3 + by_2 \\ \bar{y}_4 = cy_1 + dy_4, & \bar{y}_2 = cy_3 + dy_2 \end{array}\right\}, \qquad ad - bc = 1,$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{y}_1 = \alpha y_1 + \beta y_3, & \bar{y}_4 = \alpha y_4 + \beta y_2 \\ \bar{y}_3 = \gamma y_1 + \delta y_3, & \bar{y}_2 = \gamma y_4 + \delta y_2 \end{array}\right\}, \qquad \alpha\delta - \beta\delta = 1.$$

**) Man vgl. die bereits erwähnten Arbeiten Goursat's, sowie auch Schlesinger's Dissertation, S. 26 ff., und „Handbuch", S. 234 ff.; Fano: Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1. Sem. 1895, S. 298.

als projective Coordinaten innerhalb der beiden Regelschaaren auffassen können), als Functionen $\frac{y_1(x)}{y_4(x)}$ bezw. $\frac{y_1(x)}{y_3(x)}$ der unabhängigen Variablen x, je eine lineare (gebrochene) Substitution erleiden, d. h. bezw. in:

$$\bar{\eta} = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \qquad (ad - bc = \alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

übergehen. Dagegen werden bei einer Transformation 2ter Art (d. h. welche die beiden Regelschaaren vertauscht) $\bar{\eta}$ und $\bar{\zeta}$ sich ebenfalls linear durch ζ, bezw. durch η ausdrücken.

Führen wir nun die sogen. *„Schwarz'schen Differentialparameter"* (od. *„Ableitungen"*) ein:

$$(1) \qquad [\eta] = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{\eta''}{\eta'} - \frac{1}{4}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2, \qquad [\zeta] = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{\zeta''}{\zeta'} - \frac{1}{4}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2,$$

so erscheinen $[\eta]$ und $[\zeta]$ als rationale Differentialfunctionen der y_i, welche, als Functionen von x, bei allen Operationen der Rationalitätsgruppe von (A) — welche eben als projective Umformungen der Fläche $y_1y_2 - y_3y_4 = 0$ gedeutet werden können — entweder ungeändert bleiben, oder unter einander vertauscht werden. Setzen wir folglich:

$$[\eta] = r(x), \qquad [\zeta] = s(x),$$

so werden die Summe $r(x) + s(x)$ und das Product $r(x) \cdot s(x)$ rational bekannte Functionen von x sein; und $r(x)$ und $s(x)$ werden sich durch eine Gleichung 2ten Grades mit rational bekannten Coefficienten bestimmen lassen, d. h. sie werden nach Adjunction der Quadratwurzel aus einer Function des früheren Rationalitätsbereiches ebenfalls rational bekannt sein.

Setzen wir weiter:

$$u_1 = \eta\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad u_2 = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$v_1 = \zeta\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad v_2 = \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

so sind bekanntlich u_1, u_2 bezw. v_1, v_2 Fundamentallösungen der beiden linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung:

$$(2) \qquad u'' + r(x) \cdot u = 0, \qquad v'' + s(x) \cdot v = 0.$$

Nun werden durch Adjunction der obigen Quadratwurzel die Transformationen 2ter Art bei Seite geworfen, und die Rationalitätsgruppe von (A) auf ihre umfassendste continuirliche Untergruppe reducirt. Jetzt kommt es darauf an, die beiden Differentialgleichungen 2ter Ordnung (2) zu integriren; und dabei wissen wir, dass, falls wir $\frac{u'}{u} = \lambda$, $\frac{v'}{v} = \mu$ setzen, diese Integrationen bezw. mit denjenigen der beiden Riccati'schen Gleichungen:

$$(3) \qquad \lambda' = -\lambda^2 - r(x), \qquad \mu' = -\mu^2 - s(x),$$

nebst je einer Quadratwurzel gleichbedeutend sind: das macht im Ganzen zwei Riccati'sche Gleichungen und zwei Quadratwurzeln, wie wir bereits vorher behauptet hatten. — Ist dies alles ausgeführt, so reducirt sich die Rationalitätsgruppe von (A) auf eine Gruppe, welche die sämmtlichen Erzeugenden und folglich auch die sämmtlichen Punkte der vorgelegten Fläche in Ruhe lässt, d. h. auf die eingliedrige Gruppe $\bar{y}_i = ky_i$ (unter k eine Constante verstanden), deren Operationen, projectiv gedeutet, sämmtlich die Identität darstellen.

Setzen wir nun:

$$y_1 = \lambda u_1 v_1,$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen $\eta = \frac{y_1}{y_4} = \frac{u_1}{u_2}$ und $\zeta = \frac{y_1}{y_3} = \frac{v_1}{v_2}$ sofort:

$$y_4 = \lambda u_2 v_1, \qquad y_3 = \lambda u_1 v_2$$

und, da $y_1 y_2 = y_3 y_4$ sein muss:

$$y_2 = \lambda u_2 v_2.$$

Bilden wir daher die lineare Differentialgleichung 4ter Ordnung, welcher alle Producte $z = uv$ der Lösungen der beiden Differentialgleichungen (2) Genüge leisten, und welche folgendermassen lautet:

$$(4) \quad z^{IV} - \frac{r'-s'}{r-s} z''' + 2(r+s)z'' + \left\{3(r'+s') - 2(r+s)\frac{r'-s'}{r-s}\right\} z' - \left\{\frac{r'^2-s'^2}{r-s} - (r-s)^2 - (r''+s'')\right\} z = 0,$$

so muss dieselbe offenbar aus (A) durch die Transformation $y = \lambda z$ hervorgehen. Die Coefficienten dieser letzten Differentialgleichung gehören alle demselben Rationalitätsbereiche an, welcher durch die Coefficienten von (A) definirt war; wir erkennen dies einerseits aus dem Umstande, dass zugleich mit $r+s$ auch $(r-s)^2$, und folglich $\frac{r'-s'}{r-s}$ von Hause aus rational bekannt waren; anderseits aber auch daraus, dass bei jeder Operation der Rationalitätsgruppe von (A) die Functionen u_1, u_2, und ebenso v_1, v_2, eine binäre Substitution erfahren, oder auch u_1, u_2 in lineare Functionen von v_1, v_2 übergehen und umgekehrt, und folglich die vier Fundamentallösungen $u_i v_k$ von (4) eine quaternäre Substitution erfahren. Die Function λ muss daher eine rational bekannte logarithmische Ableitung besitzen, und zwar ist*):

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{1}{4}\left\{p_1 + \frac{r'-s'}{r-s}\right\};$$

und die Bestimmung von λ selbst wird eben die noch übrig bleibende Quadratur erfordern.

Wir schliessen nun: *Besteht zwischen den Fundamentallösungen einer linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung eine (einzige) quadratische Relation*

*) Man vgl. beisp. Schlesinger's „Handbuch": Bd. II, S. 145.

mit constanten Coefficienten und nicht verschwindender Discriminante, so ist diese Differentialgleichung durch eine Transformation $y = \lambda z$, wo λ eine rational bekannte logarithmische Ableitung besitzt, in die Form (4) *überführbar* (*und umgekehrt*). Die wirkliche Berechnung von (4) kann aber nur durch diejenige von r und s, als Werthe der rationalen Differentialfunctionen $[\eta]$ und $[\xi]$, geschehen.

18. Trotz der allgemeinen Bemerkungen von Nr. 16 möchten wir einen Augenblick bei dem Fall verweilen, in welchem zwischen den vier Fundamentallösungen y_i derselben Differentialgleichung (A) eine quadratische Relation von verschwindender Discriminante besteht*). Die lineare Differentialgleichung (A) ist dann reducibel, und wird durch die sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung 3ter Ordnung mit rational bekannten Coefficienten befriedigt, während andrerseits die allgemeine Lösung letzterer (nach Nr. 11) als binäre Form zweiten Grades der Fundamentallösungen einer linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung darstellbar ist. Dieser Satz ist auch umkehrbar; und die allgemeinste lineare Differentialgleichung 4ter Ordnung, welche diese Eigenschaft besitzt, wird sich durch eine Transformation $y = \varrho z$ (wo ϱ eine rational bekannte logarithmische Ableitung hat) auf die Form:

$$(z' + rz)(z''' + 4sz' + 2s'z) = 0 \text{**}),$$

d. h.

$$z^{IV} + rz''' + 4sz'' + (6s' + 4rs)z' + (2s'' + 2rs')z = 0 \tag{1}$$

bringen lassen. Dieses Resultat lässt sich auch unter demjenigen der vorigen Nr. (den Fall einer quadratischen Relation von nicht verschwindender Discriminante betreffend) mitbegreifen, indem wir die dabei auftretenden zwei linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung (2) als zusammenfallend ansehen und an Stelle der Producte uv ihrer Lösungen die Quadrate der Lösungen der einzigen übriggebliebenen einführen***). Es entspricht dies offenbar dem geometrischen Umstande, dass, wenn eine gewöhnliche Fläche 2ten Grades sich auf einen Kegel reducirt, ihre beiden Systeme von Erzeugenden zur Deckung kommen.

---

*) Doch in der Art, dass nicht auch die sämmtlichen Unterdeterminanten 3ter Ordnung derselben zugleich verschwinden; sonst würde sich die quadratische Relation in zwei lineare spalten.

**) Diese Klammern sind hier als Symbole von Operationen anzusehen, deren erstere auf das Resultat der zweiten auszuführen ist.

***) Lassen wir in der Gleichung (4) der vorigen Nr. die Function r mit s zusammenfallen, doch in der Weise dass $\frac{r'-s'}{r-s}$ gleich einer ganz bestimmten Function wird, die wir mit $-r$ bezeichnen, so identificirt sich eben die gen. Gleichung mit Gleichung (1) dieser Nr.

Eine eingehende Untersuchung dieser beiden Fälle findet sich in Halphen's Abhandlung: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du 4ième ordre**). U. a. wird dort gezeigt, dass jede lineare Differentialgleichung mit einer (einzigen) quadratischen Relation zwischen den Fundamentallösungen durch eine Substitution:

$$y = \lambda z, \qquad x = \varphi(\xi)$$

(d. h. wenn auch über die unabhängige Variabele in geeigneter Weise verfügt wird) auf die Form:

$$\frac{d^4 z}{d\xi^4} + 4g\frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2\frac{dg}{d\xi}\cdot\frac{dz}{d\xi} + \left(c^2 + 2\frac{d^2 g}{d\xi^2}\right)z = 0$$

gebracht werden kann, wo g eine Function der neuen unabhängigen Variablen ξ und c eine Constante bedeutet. Diese Gleichung wird durch die Producte uv der Lösungen der beiden linearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \left(g + \frac{1}{2}c\right)u = 0, \qquad \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \left(g - \frac{1}{2}c\right)v = 0$$

befriedigt. Insbesondere verschwindet die Constante c dann und nur dann, wenn die obige quadratische Relation eine ebenfalls verschwindende Discriminante besitzt; und die beiden letzten Differentialgleichungen sind dann eben identisch.

Halphen hat auch, mit Hülfe der bez. Invarianten, die nothwendige und hinreichende Bedingung aufgestellt, damit eine lineare Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung eine quadratische Relation zwischen den Fundamentallösungen gestatte. Wir gehen aber nicht näher darauf ein.

Die Fälle $n = 5$ und $n = 6$.

19. Besteht zwischen den Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung eine quadratische Relation mit constanten Coefficienten:

$$f(y_1 y_2 \cdots y_n) = 0;$$

so kann es vorkommen, dass dieselbe noch erhalten bleibt, falls man an Stelle der y_i ihre Ableitungen einer und derselben Ordnung k (bis zu einem gewissen Werthe von k) einführt; d. h. dass auch sämmtliche Gleichungen:

$$f(y_1^{(k)} y_2^{(k)} \cdots y_n^{(k)}) = 0$$

für $0 \leq k < s$ erfüllt sind. Ist zugleich $f(y_1^{(s)} y_2^{(s)} \cdots y_n^{(s)}) \neq 0$, so sagen wir: *die vorgelegte lineare Differentialgleichung habe in Bezug auf die quadratische Form f den Rang s***).

*) Acta Math., Bd. III (1883), S. 321—380: man vgl. insbes. S. 344 ff.

**) Halphen: *Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires*. (Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc., t. 101 (1885), S. 665).

Geometrisch heisst dies einfach, dass die quadratische Mannigfaltigkeit $f = 0$ zugleich mit der Integralcurve der vorgelegten Differentialgleichung auch deren Tangenten, Osculationsebenen u. s. w., bis zu den Osculations-R_{s-1} inclusive (und nicht weiter) enthält.

Der Rang s einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in Bezug auf eine quadratische Form f kann den Werth $\frac{n-1}{2}$ nicht übersteigen. — Es genügt das für den Fall einer Form f von nicht verschwindender Discriminante zu zeigen, da andernfalls f durch lineare Transformation in eine Form mit einer kleineren Anzahl n' von Veränderlichen und einer (in Bezug auf dieselben) nicht verschwindenden Discriminante überführbar ist; während die vorgelegte Differentialgleichung zugleich durch die sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung n'^{ter} Ordnung befriedigt wird, welche in Bezug auf die transformirte Form noch denselben Rang s besitzt. Ist dann $s \leq \frac{n'-1}{2}$, so ist auch *a fortiori* $s \leq \frac{n-1}{2}$. — Nun enthält eine nicht ausgeartete quadratische Mannigfaltigkeit $f = 0$ des Raumes R_{n-1} keine ebene Mannigfaltigkeiten höherer als $\left(\frac{n-2}{2}\right)^{\text{ter}}$ Dimension*); enthält sie folglich die Osculations-R_{s-1} irgend einer Curve, so ist jedenfalls $s \leq \frac{n}{2}$. Ist insbesondere n eine gerade Zahl, so bilden die auf $f = 0$ liegenden Räume $R_{\frac{n-2}{2}}$ zwei getrennte Systeme; und zwar schneiden sich zwei $R_{\frac{n-2}{2}}$ eines und desselben Systems stets in einem $R_{\frac{n-2}{2}-h}$, wo h ebenfalls eine gerade Zahl ist**). Sollen darunter die Osculations-$R_{\frac{n-2}{2}}$ irgend einer Curve enthalten sein, so müssen dieselben aus Continuitätsgründen einem und demselben Systeme angehören; anderseits aber müssen sich je zwei aufeinanderfolgende von ihnen in einem Osculations-$R_{\frac{n-4}{2}}$ der betreffenden Curve schneiden, was nun als unmöglich erscheint***).

Der grösstmögliche Werth $s = \frac{n-1}{2}$ wird in der That auch erreicht, und zwar (wie sich in Nr. 28 ergeben wird) bei linearen Differential-

*) Man vgl. die bereits erwähnte Arbeit Segre's: *Studio sulle quadriche...*, § 3.

**) Ebenda, § 4.

***) Diese etwas unvollständige Begründung kann durch das Inbetrachtziehen der Osculations-R_s unserer Integralcurve ersetzt werden. Letztere müssen nämlich die Mannigfaltigkeit $f = 0$ in den zweifach gewählten entsprechenden Osculations-R_{s-1} schneiden, und das ist eben für $s = \frac{n}{2}$ nicht möglich. Ein indirecter Beweis ist auch aus einem in Nr. 28 auszusprechendem Satze zu folgern.

gleichungen von ungerader Ordnung, welche mit den bez. „Adjungirten“ zusammenfallen.

Für $n = 4$ ist nun $s \leq 1$; die Tangenten einer beliebigen Raumcurve können nämlich auf keiner Fläche 2ten Grades liegen. Dagegen ist für $n = 5$ und $n = 6$, $s \leq 2$; und wir werden daher zwei Fälle unterscheiden müssen, je nachdem zugleich mit der Integralcurve der vorgelegten linearen Differentialgleichung auch ihre Tangenten auf der gegebenen Mannigfaltigkeit zweiten Grades liegen, oder nicht. Bei dieser Untersuchung kommen liniengeometrische Betrachtungen ganz besonders zu Hülfe, und dieselben gestatten zugleich die beiden Fälle $s = 1$ und $s = 2$ von diesem neuen Standpunkte aus in ganz einfacher Weise geometrisch zu charakterisiren.

Die Gesammtheit der ∞^4 geraden Linien des dreidimensionalen Raumes erscheint bekanntlich, bei Zugrundelegung der allgemeinen projectiven Gruppe (die dualistischen Umformungen einbegriffen), als eine (ebenfalls projectiv zu behandelnde) nicht ausgeartete quadratische Mannigfaltigkeit des R_5 *); und jeder nicht specielle lineare Complex kann als Schnitt derselben mit einem R_4 allgemeiner Lage, und folglich als eine ebenfalls nicht ausgeartete quadratische Mannigfaltigkeit dieses R_4 aufgefasst werden. *Wir können daher die Integralcurve einer jeden linearen Differentialgleichung 5ter oder 6ter Ordnung mit einer* (in Bezug auf deren Rationalitätsgruppe invarianten) *quadratischen Relation von nicht verschwindender Discriminante zwischen den Fundamentallösungen als eine* ∞^1*-Geradenschaar, d. h. als eine Regelfläche des Raumes* R_3 *auffassen;* und diese Regelfläche wird im Falle $n = 5$ in einem (einzigen) nicht speciellen linearen Complexe enthalten sein **).

Sind nun die Tangenten der Integralcurve in der betreffenden Mannigfaltigkeit 2ten Grades enthalten, so müssen die Grössen $y_i + \lambda y_i'$ für jeden Werth von λ die Gleichung $f = 0$ erfüllen, d. h. als Coordinaten einer geraden Linie gedeutet werden können. Diese ∞^1 geraden Linien bilden dann einen Strahlenbüschel, welcher die beiden aufeinander folgenden Erzeugenden (y) und $(y + dy)$ der Integral-Regelfläche enthält; letztere müssen folglich sich treffen, d. h. die Integral-Regelschaar ist eine *developpable* oder *abwickelbare Fläche* (und umgekehrt). Wir schliessen daher: *Lineare Differentialgleichungen 5ter und 6ter Ordnung mit einer quadratischen Relation* $f = 0$ *von nicht verschwindender Discriminante zwischen den*

*) Klein: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* (Math. Ann., Bd. 5, 1872).

**) Diese Regelfläche wird, der Monodromiegruppe der vorgelegten Differentialgleichung entsprechend, bei einer gewissen discontinuirlichen Gruppe von projectiven (d. h. collinearen und eventuell auch dualistischen) Umformungen in sich übergehen.

Fundamentallösungen und vom Range $s = 2$ *in Bezug auf die Form* f, *haben abwickelbare Flächen als Integral-Regelflächen, und umgekehrt.*

Wir gehen nun dazu über, diese beiden Fälle $s = 2$ und $s = 1$ nach einander zu behandeln; indem wir dabei noch bemerken, dass die Rationalitätsgruppen der betreffenden Differentialgleichungen jetzt, allgemein zu reden, als „einfache" (bezw, 10- und 15-gliedrige, je nachdem $n = 5$ oder $n = 6$ ist) projective Gruppen des R_4 oder R_5 gedeutet werden*), und das vorgelegte Problem folglich zwar in interessanter Weise *umgestaltet* werden kann, keineswegs aber auf eine Reihe von einfacheren (etwa wie es für $n = 4$ der Fall war) zurückführbar ist**). Diesen Umstand werden wir in Nr. 27 nochmals hervorheben.

20. Es sei nun eine lineare Differentialgleichung 5^{ter} oder 6^{ter} Ordnung vorgelegt:

$$\text{(A)} \qquad z^{(n)} + p_1 z^{(n-1)} + p_2 z^{(n-2)} + \cdots + p_n z = 0 \qquad (n = 5, 6),$$

von welcher wir voraussetzen, dass irgend ein System von Fundamentallösungen *eine* quadratische Relation von nicht verschwindender Discriminante erfüllen, und dass dieselbe Relation noch erhalten bleibt, falls man an Stelle dieser Lösungen ihre ersten Ableitungen nach der unabhängigen Variablen x einführt. Wir können dann stets *sechs* derartige (für $n = 6$ unabhängige, und für $n = 5$ durch *eine* lineare Gleichung $\sum_i a_i z_i = 0$ verbundene) Lösungen $z_1, z_2, \cdots, z_6$ einführen, dass die betreffenden quadratischen Relationen folgende Gestalt annehmen:

$$f(z) \equiv z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_6 = 0,$$
$$f(z') \equiv z_1' z_2' + z_3' z_4' + z_5' z_6' = 0.$$

Wir denken uns zugleich im Raume R_3 irgend ein System von homogenen projectiven Punkt- und Ebenencoordinaten (y_h, u_k) eingeführt; und die geraden Linien dieses Raumes wollen wir in der üblichen Weise durch die 6 homogenen Coordinaten:

$$\text{(1)} \quad \begin{array}{lll} r_1 = (y_1 \bar{y}_2) = (u_3 \bar{u}_4); & r_3 = (y_1 \bar{y}_3) = (u_4 \bar{u}_2); & r_5 = (y_1 \bar{y}_4) = (u_2 \bar{u}_3), \\ r_2 = (y_3 \bar{y}_4) = (u_1 \bar{u}_2); & r_4 = (y_4 \bar{y}_2) = (u_1 \bar{u}_3); & r_6 = (y_2 \bar{y}_3) = (u_1 \bar{u}_4) \end{array}$$

bestimmen, unter (y) und $(\bar{y})$, bezw. (u) und $(\bar{u})$ irgend zwei der geraden Linie angehörige Punkte oder Ebenen verstanden. Die r_i erfüllen dann

*) Lie: *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. I, S. 560; Bd. II, S. 460; Bd. III, S. 357.

**) Die Auseinandersetzungen der folgenden Nr. bis Nr. 26 inclusive sind, in etwas verschiedener Anordnung, auch in meinem bereits erwähnten Aufsatze: *Sulle equazioni differenziali lineari del 5° e del 6° ordine* .... (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 34, 1898—99) zu finden.

bekanntlich die Gleichung $f(r) = 0$; und wir können folglich die Lösuugen $z_i(x)$ der Differentialgleichung (A) als derartige Coordinaten deuten, wodurch wir eben die Integral-Regelfläche R von (A) construiren werden; und zwar wird letztere in diesem Falle eine abwickelbare Fläche sein.

Bezeichnen wir nun durch (y) und (u) bezw. irgend einen Punkt der Rückkehrcurve von R und die entsprechende Osculationsebene dieser Rückkehrcurve, welche zugleich Tangentenebene von R ist, so können wir diese beiden Elemente bezw. als Schnittpunkt und Ebene der beiden (gleichzeitig veränderlichen) geraden Linien (z) und (z') ansehen. Die betreffenden Coordinaten y_h und u_k sind dann, je für sich, bis auf einen (von x abhängigen) gemeinsamen Factor bestimmt; und es ergibt sich durch einfache Rechnungen, dass wir:

$$y_1 = \frac{z_1' z_2 + z_3' z_4 + z_5' z_6}{[z_2 z_4' z_6'']^{\frac{1}{2}}}, \qquad y_2 = \frac{[z_4 z_6']}{[z_2 z_4' z_6'']^{-\frac{1}{2}}}, \qquad y_3 = \frac{[z_6 z_2']}{[z_2 z_4' z_6'']^{-\frac{1}{2}}},$$

$$y_4 = \frac{[z_2 z_4']}{[z_2 z_4' z_6'']^{-\frac{1}{2}}},$$

$$u_1 = \frac{z_1 z_2' + z_3 z_4' + z_5 z_6'}{[z_1 z_3' z_5'']^{-\frac{1}{2}}}, \qquad u_2 = \frac{[z_3 z_5']}{[z_1 z_3' z_5'']}, \qquad u_3 = \frac{[z_5 z_1']}{[z_1 z_3' z_5'']},$$

$$u_4 = \frac{[z_1 z_3']}{[z_1 z_3' z_5'']}$$

setzen dürfen. Es folgt dann:

$$z_i = (y_h y_l') = (u_k u_m'), \tag{1'}$$

wo die Indices i, h, l, k, m wie in den Gleichungen (1) zu gruppiren sind.

Wir fragen nun, wie sich die Functionen $y_h(x)$, $u_k(x)$ bei den Operationen der Rationalitätsgruppe von (A) verhalten.

Eine solche Operation — welche analytisch auf eine lineare Substitution der z_i hinauskommt, bei welcher die Gleichung $f(z) = 0$ und eventuell auch $\sum a_i z_i = 0$ in sich übergehen*) — kann stets als eine projective (collineare oder dualistische) Transformation des Raumes R_3 gedeutet werden, welche die abwickelbare Regelfläche R in eine ebensolche $\bar{R}$ überführt**). Die Rückkehrcurve γ und das System Γ der ∞^1 Tangentenebenen von R gehen zugleich auch in die entsprechenden auf $\bar{R}$ bezüglichen Gebilde $\bar{\gamma}$ und $\bar{\Gamma}$ über, falls die Transformation eine colli-

*) Die Rationalitätsgruppe von (A) besteht nämlich im allgemeinsten Falle, für $n = 6$, aus den ∞^{16} linearen Substitutionen der z_i, welche die Gleichung $f(z) = 0$ in sich überführen; für $n = 5$ haben wir es mit einer 11-gliedrigen Gruppe zu thun, welche durch die Gesammtheit der linearen Substitutionen der z_i dargestellt werden kann, bei denen die beiden Gleichungen $f(z) = 0$ und $\Sigma a_i z_i = 0$ je in sich übergehen.

**) Für $n = 5$ bleibt bei dieser projectiven Transformation der lineare Complex $\Sigma a_i z_i = 0$ invariant; letzterer enthält folglich auch die Regelfläche $\bar{R}$.

neare ist; dagegen bezw. in $\bar{\Gamma}$ und $\bar{\gamma}$ bei einer dualistischen Umformung. Es müssen sich daher die Coordinaten $\bar{y}_k(x)$ eines veränderlichen Punktes von $\bar{\gamma}$, bis auf einen gemeinsamen Factor, linear und mit constanten Coefficienten durch die $y_k(x)$ oder durch die $u_k(x)$ ausdrücken, d. h. es müssen Gleichungen:

$$\sigma \bar{y}_k = \sum_l a_{kl} y_l \quad \text{oder} \quad \sigma \bar{y}_k = \sum_l a_{kl} u_l$$

und folglich auch:

$$\tau \bar{u}_k = \sum_l A_{kl} u_l \quad \text{oder} \quad \tau \bar{u}_k = \sum_l A_{kl} y_l$$

bestehen (wo die A_{kl} wohlbekannte Unterdeterminanten der nicht verschwindenden Determinante $|a_{kl}|$ bezeichnen). Dabei ist noch zu bemerken, dass die Factoren σ, τ nothwendigerweise Constanten sind, da in Folge von (1') die z_i die „associirte" Substitution*) der vorangehenden erleiden, und letztere nach Voraussetzung constante Coefficienten hat.

Die Determinanten 4ter Ordnung einer jeden der beiden Matrices:

$$\begin{vmatrix} y_1^{IV} & y_1''' & y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2^{IV} & y_2''' & y_2'' & y_2' & y_2 \\ y_3^{IV} & y_3''' & y_3'' & y_3' & y_3 \\ y_4^{IV} & y_4''' & y_4'' & y_4' & y_4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} u_1^{IV} & u_1''' & u_1'' & u_1' & u_1 \\ u_2^{IV} & u_2''' & u_2'' & u_2' & u_2 \\ u_3^{IV} & u_3''' & u_3'' & u_3' & u_3 \\ u_4^{IV} & u_4''' & u_4'' & u_4' & u_4 \end{vmatrix}$$

sind folglich *rationale* Differentialfunctionen der z_i (insofern die einzigen irrationalen Ausdrücke $[z_2 z_4' z_6'']^{-\frac{1}{2}}$ und $[z_1 z_3' z_5'']^{-\frac{1}{2}}$ nur mit geradem Exponenten auftreten), deren Verhältnisse, als Functionen von x, bei allen denjenigen Operationen der Rationalitätsgruppe von (A) ungeändert bleiben, welche Collineationen des Raumes R_3 darstellen; dagegen werden bei den übrigen Operationen derselben Gruppe, welche dualistische Umformungen darstellen, die entsprechenden Determinantenverhältnisse der beiden Matrices unter einander vertauscht. Bezeichnen wir folglich mit Y_i, U_i die beiden Determinanten, die sich bezw. aus letzteren durch Absonderung der $(i+1)^{\text{ten}}$ Verticalreihen ergeben, so werden die Summen $\frac{Y_i}{Y_0} + \frac{U_i}{U_0}$ und Producte $\frac{Y_i}{Y_0} \cdot \frac{U_i}{U_0}$ rational bekannte Functionen von x sein; und die Verhältnisse $\frac{Y_i}{Y_0}$, $\frac{U_i}{U_0}$ selber werden sich, nach Adjunction der Quadratwurzel aus einer (einzigen) rational bekannten Function, in ebenfalls rationaler Form ergeben. — Durch Adjunction dieser Quadratwurzel reducirt sich offenbar die Rationalitätsgruppe von (A) auf eine continuirliche Gruppe, welche in R_3 als blosse Collineationsgruppe ge-

*) Man vgl. beispw. Schlesinger's „Handbuch", Bd. II, S. 130.

deutet wird. Wir erkennen aber zugleich dass diese Quadratwurzel für $n=5$ *nicht* auftreten wird (d. h. es werden auch die obigen Determinantenverhältnisse von vornherein rational bekannt sein), da wir es in diesem Falle mit projectiven Transformationen zu thun haben, welche einen nicht speciellen linearen Complex in sich überführen; und letztere ergeben für das System der bez. ∞^3 Complexgeraden bereits an sich eine continuirliche Gruppe*).

Setzen wir nun $\frac{Y_i}{Y_0} = q_i^{(1)}$, $\frac{U_i}{U_0} = q_i^{(2)}$, so dürfen wir schliessen:

Die Functionen $y_k(x)$ und $u_k(x)$ sind bezw. Fundamentallösungen von zwei linearen Differentialgleichungen 4^{ter} Ordnung:

$$(2) \qquad \begin{aligned} y^{IV} + q_1^{(1)} y''' + q_2^{(1)} y'' + q_3^{(1)} y' + q_4^{(1)} y = 0, \\ u^{IV} + q_1^{(2)} u''' + q_2^{(2)} y'' + q_3^{(2)} u' + q_4^{(2)} u = 0, \end{aligned}$$

deren Coefficienten im Falle $n=5$ rational bekannt sind, und im Falle $n=6$ erst nach Adjunction der Quadratwurzel aus einer rational bekannten Function sich in ebenfalls rationaler Form ergeben.

21. Wir knüpfen hier noch folgende Bemerkungen an:

I. *Aus den Gleichungen* (1') *ergiebt sich sofort, dass die beiden linearen Differentialgleichungen* (2) *die vorgelegte Differentialgleichung* (A) *zur gemeinsamen „zweiten associirten" haben.* Diese Bemerkung wird uns in den Stand setzen, bei gegebener Differentialgleichung (A) die beiden Gleichungen (2) sofort hinzuschreiben (und das wird eben in Nr. 23, 24 geschehen).

II. Da die Functionen $u_k(x)$ als Coordinaten der Osculationsebene an die durch den Punkt (y) beschriebenen Curve γ gedeutet werden können, so folgt weiter, *dass die Lösungen einer jeden der beiden Differentialgleichungen* (2) *sich von denjenigen der „Adjungirten" oder auch der „ersten Associirten" der anderen nur um einen* (*von x abhängigen*) *gemeinsamen Factor unterscheiden können.*

III. Im Falle $n=6$ folgt bereits aus dem Gesagten, dass die Coefficienten $q_i^{(1)}$, $q_i^{(2)}$ der beiden Differentialgleichungen (2) sich nur im Vorzeichen der in denselben auftretenden Quadratwurzel unterscheiden.

Im Falle $n=5$ sind aber die beiden Differentialgleichungen (2) *durchaus identisch.* In diesem Falle gehen nämlich bei der Polarität in Bezug

---

*) Die dualistischen Umformungen, die einen nicht speciellen linearen Complex in sich überführen, ergeben sich nämlich als Producte der Collineationen, die letzteren fest lassen, mit der Polarität in Bezug auf denselben. Da nun diese Polarität eine jede der ∞^3 Complexgeraden in sich überführt, so wird die Gesammtheit derselben durch die obigen dualistischen Umformungen in derselben Weise wie durch die gen. Collineationen transformirt.

auf den linearen Complex $\sum a_i z_i = 0$ (in welchem die abwickelbare Regelfläche R enthalten ist) die Punkte (y) der Rückkehrcurve γ von R in die entsprechenden Osculationsebenen über, und umgekehrt. Die Coordinaten $u_k(x)$ sind folglich, bis auf einen (eventuell auch von x abhängigen) gemeinsamen Factor, gleich linearen Functionen der $y_h(x)$ mit constanten Coefficienten; d. h., bis auf den genannten Factor, zugleich auch Lösungen der ersten der beiden Differentialgleichungen (2). Und da, nach Bemerkung I, die beiden Gleichungen (2) dieselbe zweite associirte, nämlich (A), besitzen, so kann jener Factor die unabhängige Variable x *nicht* enthalten, und die beiden Differentialgleichungen (2) sind folglich in diesem Falle identisch.

Das Hauptresultat unserer Untersuchung lässt sich nun in folgenden Worten zusammenfassen:

Die linearen Differentialgleichungen 5ter und 6ter Ordnung, deren Fundamentallösungen eine quadratische Relation $f = 0$ mit constanten Coefficienten und nicht verschwindender Determinante erfüllen und deren Rang in Bezug auf die Form f gleich zwei ist, sind sämmtlich „zweite associirte“ von linearen Differentialgleichungen 4ter Ordnung. Und zwar sind sie, für $n = 5$, zweite associirte je einer einzigen Differentialgleichung 4ter Ordnung, mit rational bekannten Coefficienten; für $n = 6$ dagegen von je zwei Differentialgleichungen, deren Coefficienten sich auch rational bis auf eine einzige Quadratwurzel ergeben (und sich von einander um das Vorzeichen dieser Quadratwurzel unterscheiden).

Dieser Satz ist auch umkehrbar, da die zweite Associirte einer linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung:

$$y^{IV} + q_1 y''' + q_2 y'' + q_3 y' + q_4 y = 0,$$

mit den Fundamentallösungen y_1, y_2, y_3, y_4, die sechs Lösungen:

$$z_i = (y_h y_l')$$

(die Indices wie in den Gleichungen (1) gruppirt) besitzt, welche offenbar die beiden Gleichungen:

$$z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_6 = 0,$$
$$z_1' z_2' + z_3' z_4' + z_5' z_6' = 0$$

erfüllen. Diese zweite Associirte ist im allgemeinsten Falle von der 6ten Ordnung (und hat die 6 Grössen z_i als Fundamentallösungen); sie reducirt sich aber auf die 5te Ordnung, wenn die z_i einer linearen Gleichung mit constanten Coefficienten genügen, d. h. eben wenn die Tangenten der Integralcurve der vorgelegten Differentialgleichung 4ter Ordnung einem (nothwendigerweise nicht speciellen) linearen Complexe angehören. Halphen hat in einer bereits erwähnten Abhandlung*) gezeigt, dass die Bedingung dafür durch das Verschwinden einer einfachen Invariante (nämlich der Invariante a_3 von Forsyth) gegeben wird, und dass die vorgelegte Differentialgleichung 4ter Ordnung dann, bis auf einen allen Lösungen gemeinsamen Factor, mit ihrer Adjungirten zusammenfällt.

22. Zur wirklichen Berechnung der Differentialgleichungen (2), falls (A) gegeben ist, empfiehlt es sich, über den in den y_k enthaltenen willkürlichen Factor in etwas verschiedener Weise zu verfügen, als das in Nr. 20 geschehen ist. Wir wollen nämlich diesen (von x abhängigen) Factor in der Art bestimmen, dass die Determinante

$$D(y_1 y_2 y_3 y_4) = [y_1 y_2' y_3'' y_4''']$$

gleich einer Constante, beispw. $= 1$ wird. In der entsprechenden Differentialgleichung 4ter Ordnung (2) wird dann das zweite (die Ableitung y''' enthaltende) Glied wegfallen; und diese Differentialgleichung wird die einfache Form:

$$(2') \qquad y^{IV} + 6q_2 y'' + 4q_3 y' + q_4 y = 0$$

annehmen, deren Adjungirte (und 1te Associirte) folgendermassen lautet:

$$(2'') \qquad u^{IV} + 6q_2 u'' + 4(3q_2' - q_3)u' + (q_4 - 4q_3' + 6q_2'')u = 0.$$

Als 2te Associirte der linearen Differentialgleichung (2′) und zugleich auch von (2″)**) ergiebt sich, falls $2q_3 - 3q_2' \neq 0$, die lineare Differentialgleichung 6ter Ordnung:

$$(\mathrm{M}) \qquad Z' - \frac{2q_3' - 3q_2''}{2q_3 - 3q_2'} Z - 2(2q_3 - 3q_2')(z''' + 6q_2 z' + 4q_3 z) = 0$$

wo, der Kürze halber:

$$Z = (z''' + 6q_2 z' + 4q_3 z)'' + 6q_2(z''' + 6q_2 z' + 4q_3 z) - 4q_4 z' - 2q_4' z$$

gesetzt worden ist. Ist dagegen $2q_3 - 3q_2' = 0$, so ergiebt sich die lineare Differentialgleichung 5ter Ordnung:

$$(\mathrm{N}) \qquad Z = 0.$$

*) Acta Math., Bd. III (1883); S. 321—80.

**) Dies folgt aus directer Rechnung, sowie auch aus folgender Bemerkung. Als Fundamentallösungen von (2″) können wir die den Elementen y_h''' von $D(y_1 y_2 y_3 y_4)$ zugehörigen Unterdeterminanten Y_{h3} auswählen. Da nun offenbar $Y_{h3}' = -Y_{h2}$ (d. h. gleich der negativ genommenen Unterdeterminante von y_h'') und zugleich $D = 1$ ist, so werden die zweireihigen Determinanten

$$Y_{h3} Y_{k3}' - Y_{h3}' Y_{k3} = Y_{h2} Y_{k3} - Y_{h3} Y_{k2}$$

bezw. $= (y_l y_m')$ sein, unter $hklm$ irgend eine gerade Permutation der vier Indices 1, 2, 3, 4 verstanden.

In diesem Falle sind die beiden Differentialgleichungen (2') und (2'') offenbar unter einander identisch, und haben zugleich auch die Gestalt

$$(2''') \qquad y^{IV} + 6q_2 y'' + 6q_2' y' + q_4 y = 0.$$

Haben wir nun über die y_k in obiger Weise verfügt, so werden die sechs Determinanten $(y_k y_l')$ die vorgelegte Differentialgleichung (A), allgemein zu reden, *nicht* befriedigen; doch werden sie ebensovielen (für $n = 6$ unabhängigen) Lösungen z_i derselben proportional sein. Setzen wir daher:

$$z_i = \varrho (y_k y_l')$$

(die Indices wie in den Gleichungen (1) von Nr. 20 vertheilt), so ergiebt sich:

$$z_i' = \varrho'(y_k y_l') + \varrho (y_k y_l''),$$
$$z_i'' = \varrho''(y_k y_l') + 2\varrho'(y_k y_l'') + \varrho^2 \{(y_k y_l''') + (y_k' y_l'')\}$$

und folglich:

$$f(z'') \equiv z_1'' z_2'' + z_3'' z_4'' + z_5'' z_6'' = \varrho^2 \cdot D(y_1 y_2 y_3 y_4) = \varrho^2.$$

Nun ist die linke Seite $f(z'')$ dieser Gleichung eine in Bezug auf die Rationalitätsgruppe von (A) *multiplicative* rationale Differentialfunction der z_i; ihre logarithmische Ableitung $2f\binom{z''}{z'''} : f(z'') = \frac{2\varrho'}{\varrho}$ wird folglich gleich einer rational bekannten Function von x sein*). Und wenn wir auf (A) die Transformation $z = \varrho \bar{z}$ anwenden (wo $\frac{\varrho'}{\varrho}$ ebenfalls rational bekannt ist), so wird offenbar die hervorgehende Differentialgleichung:

$$(\mathrm{A}') \qquad z^{(n)} + \bar{p}_1 z^{(n-1)} + \bar{p}_2 z^{(n-2)} + \cdots + \bar{p}_n z = 0 \quad (n = 5, 6)$$

(in welcher wir, der Kürze halber, nochmals z an Stelle von $\bar{z}$ schreiben) die sämmtlichen Lösungen $(y_k y_l')$ gestatten, d. h., je nachdem $n = 5$ oder $n = 6$ ist, die Gestalt (M) oder (N) haben.

Wir sagen daher: *Die vorgelegte Differentialgleichung* (A) *lässt sich durch eine Transformation $z = \varrho \bar{z}$, bei welcher ϱ eine rational bekannte logarithmische Ableitung besitzt, auf eine der beiden Formen* (M) *und* (N) *bringen.* Dadurch ist die Gestalt von (A) vollständig bestimmt; und die Coefficienten der entsprechenden Differentialgleichung (M) oder (N) werden auch stets dem gegebenen Rationalitätsbereiche angehören.

23. Schreiben wir die Differentialgleichung (N) ausführlich, so ergiebt sich:

$$z^V + 12q_2 z''' + (12q_2' + 4q_3) z'' + (6q_2'' + 8q_3' + 36q_2^2 - 4q_4) z'$$
$$+ (4q_3'' + 24q_2 q_3 - 2q_4') z = 0,$$

*) Diese Function kann man, durch mehrmalige Differentiation der Gleichungen $f(z) = 0$ und $f(z') = 0$ und darauf folgende Elimination der Ableitungen von z höherer als 5^{ter} Ordnung, durch die Coefficienten p_i von (A) wirklich ausdrücken.

oder auch, falls wir die Relation $2q_3 - 3q_2' = 0$ berücksichtigen:

$$\text{(N')} \qquad z^V + 12q_2z''' + 18q_2'z'' + (18q_2''+36q_2^2-4q_4)z' + (6q_2'''+36q_2q_2'-2q_4')z = 0.$$

Da hier kein Glied mit der Ableitung z^{IV} auftritt, *so ist in diesem Falle* (d. h. für $n = 5$) *die obige Transformation* $z = \varrho\bar{z}$ *mit derjenigen* $\left(z = \bar{z}\cdot e^{-\frac{1}{5}\int p_1 dx}\right)$ *identisch, welche das zweite Glied von* (A) *zum Wegfall bringt.*

Vergleichen wir nun letztere Gleichung mit (A'), so ergiebt sich sofort:

$$\text{(3)} \qquad q_2 = \frac{1}{12}\bar{p}_2, \quad q_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\bar{p}_2'' + \frac{1}{4}\bar{p}_2^2 - \bar{p}_4\right)$$

und weiter noch die beiden Bedingungsgleichungen (zugleich mit $\bar{p}_1 = 0$):

$$\bar{p}_3 = \frac{3}{2}\bar{p}_2', \quad \bar{p}_5 = \frac{1}{2}\left(\bar{p}_4' - \frac{1}{2}\bar{p}_2'''\right),$$

welche mit dem Verschwinden der beiden Invarianten a_3 und a_5 der Differentialgleichung (N') — d. h. ihrer beiden linearen Invarianten von ungeradem Index — gleichbedeutend sind. Letztere muss folglich, nach einem von Brioschi aufgestellten Satze*), mit ihrer Adjungirten zusammenfallen (was sich auch durch einfache Rechnung bestätigen lässt).

Wir schliessen daher: *Eine lineare Differentialgleichung 5ter Ordnung, welche in Bezug auf eine bei ihrer Rationalitätsgruppe invariante quadratische Form von nicht verschwindender Discriminante den Rang zwei besitzt, muss sich durch Wegschaffen ihres zweiten Gliedes auf die Form* (N') *reduciren.* Und die Gleichungen (3) setzen uns in den Stand, die lineare Differentialgleichung 4ter Ordnung (2'''), welche (N') als zweite Associirte hat, sofort hinzuschreiben. Die Integration von (A) ist folglich in diesem Falle, von einer Quadratur abgesehen, auf diejenige einer Differentialgleichung (2''') — d. h. einer speciellen linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung — zurückgeführt.

Wir bemerken zugleich an dieser Stelle, *dass die Differentialgleichung* (N') *die allgemeinste lineare Differentialgleichung 5ter Ordnung ist, welche mit ihrer Adjungirten zusammenfällt.*

24. Anderseits lautet die Differentialgleichung (M), ausführlich geschrieben, folgendermassen:

---

*) Acta Math., Bd. 14 (1890—91), S. 237.

$$
(\mathrm{M}')\qquad
\begin{aligned}
&z^{VI}-\frac{2q_3'-3q_2''}{2q_3-3q_2'}\,z^{V}+12q_2 z^{IV}+\left(30q_2'-12q_2\,\frac{2q_3'-3q_2''}{2q_3-3q_2'}\right)z'''\\
&\quad+\left[18q_2''+12q_3'+36q_2^2-4q_4-\frac{2q_3'-3q_2''}{2q_3-3q_2'}\,(12q_2'+4q_3)\right]z''\\
&\quad+\Big[6q_2'''+12q_3''+108q_2q_2'-6q_4'\\
&\qquad\qquad-\frac{2q_3'-3q_2''}{2q_3-3q_2'}\,(6q_2''+8q_3'+36q_2^2-4q_4)\Big]z'\\
&\quad+\Big[4q_3'''+24q_2q_3'+48q_2'q_3-16q_3^2-2q_4''\\
&\qquad\qquad-\frac{2q_3'-3q_2''}{2q_3-3q_2'}\,(4q_3''-24q_2q_3-2q_4')\Big]z=0
\end{aligned}
$$

und diese ist zugleich (wie bereits erwähnt wurde) zweite Associirte von (2′) und (2″). Setzen wir folglich die Coefficienten der einzelnen Ableitungen $z^V, z^{IV}, \cdots$ bezw. gleich den Coefficienten $\bar p_1, \bar p_2, \cdots$ von (A′) (im Falle $n=6$), so werden wir ein System von Gleichungen bekommen, aus welchen die q_i sich berechnen lassen. Und zwar werden sich für letztere, den beiden Gleichungen (2′) und (2″) entsprechend, zwei verschiedene Werthsysteme ergeben müssen.

Die Coefficienten der Ableitungen z^{IV} ergeben zunächst:

$$q_2=\frac{1}{12}\bar p_2.$$

und diejenigen von z^V:

$$\frac{2q_3'-3q_2''}{2q_3-3q_2'}=-\bar p_1 \quad \text{d. h.} \quad 2q_3-3q_2'=e^{-\int \bar p_1\,dx}.$$

Nun besteht die Rationalitätsgruppe von (A′) aus linearen Transformationen der Fundamentallösungen $z_i=(y_h y_l')$, welche die rationale Differentialfunction $f(z'')$, deren Werth jetzt $=1$ ist, invariant lassen, und welche folglich die Determinante ± 1 haben (und zwar, wie sich leicht erkennen lässt, $+1$ oder -1, je nachdem die betreffende Substitution als eine collineare oder dualistische Umformung gedeutet werden kann*)). Es folgt daraus, dass die Determinante $D(z_1 z_2 \cdots z_6)=e^{-\int \bar p_1 dx}$ in Bezug auf die genannte Rationalitätsgruppe bis auf das Vorzeichen invariant ist; und ihr Quadrat wird daher gleich einerrational bekannten Function $\varphi(x)$ sein. Anders ausgesprochen, ist, zugleich mit $\bar p_1$, auch $\varphi=e^{-2\int \bar p_1 dx}$ rational bekannt; d. h. $\bar p_1$ *ist die logarithmische Ableitung der Quadratwurzel aus der rational bekannten Function* $\frac{1}{\varphi}$.

---

*) Aus Continuitätsgründen genügt es, die Richtigkeit der obigen Behauptung an je einem Beispiele zu prüfen; und als derartige Beispiele können wir einerseits die identische Transformation, anderseits die einfache Vertauschung von z_1 und z_2 (ohne die übrigen z_i zu ändern) nehmen. Letztere entspricht nämlich der Polarität in Bezug auf den linearen Complex $z_1-z_2=0$.

Es wird folglich:

$$2q_3 - 3q_2' = e^{-\int \bar{p}_1 dx} = \sqrt{\varphi}$$

sein, unter φ eine rational bekannte Function verstanden, welche sich leicht berechnen lässt*), und übrigens auch durch $\bar{p}_1$ bis auf einen constanten Factor bereits bestimmt wird.

Hieraus folgt weiter:

$$q_3 = \frac{1}{2}(3q_2' + \sqrt{\varphi}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{p}_2'}{4} + \sqrt{\varphi}\right)$$

und wir bekommen in der That für q_3, dem doppelten Vorzeichen der Quadratwurzel entsprechend, zwei verschiedene Werthe $q_3^{(1)}$, $q_3^{(2)}$, welche (wie Gleichung (2″) erfordert) durch die Relation:

$$q_3^{(2)} = q_3^{(1)} - \sqrt{\varphi} = 3q_2' - q_3^{(1)}$$

zusammenhängen. — Das Gleichsetzen der Coefficienten von z''' liefert nur die Bedingungsgleichung:

$$\bar{p}_3 = \frac{5}{2}\bar{p}_2' + \bar{p}_1\bar{p}_2,$$

welche die $\bar{p}_i$ (für $n = 6$) identisch erfüllen müssen, falls (A′) zweite Associirte einer Differentialgleichung (2′) ist.

Die Coefficienten von z'' ergeben ferner:

$$\bar{p}_4 = 18q_2'' + 12q_3' + 36q_2^2 - 4q_4 + \bar{p}_1(12q_2' + 4q_3)$$

und folglich:

$$q_4 = \frac{3}{4}\bar{p}_2'' + \frac{1}{16}\bar{p}_2^2 + \bar{p}_1\left(\frac{3}{8}\bar{p}_2' - \sqrt{\varphi}\right) - \frac{1}{4}p_4$$

d. h. nochmals zwei Werthe $q_4^{(1)}$, $q_4^{(2)}$ für welche:

$$q_4^{(2)} = q_4^{(1)} + 2\bar{p}_1\sqrt{\varphi} = q_4^{(1)} + 2\bar{p}_1(2q_3^{(1)} - 3q_2') = q_4^{(1)} - 4q_3^{(1)\prime} + 6q_2''$$

ist, wie nach Gleichungen (2′) und (2″) erforderlich.

Führen wir endlich diese Ausdrücke von q_3 und q_4 in die Coefficienten von z' und z in (M′) ein, und setzen letztere bezw. gleich $\bar{p}_5$ und $\bar{p}_6$, so erhalten wir zwei neue Bedingungsgleichungen, deren erstere folgendermassen lautet:

$$\bar{p}_5 = \bar{p}_1\bar{p}_4 - \frac{3}{2}\bar{p}_4' - \frac{5}{2}\bar{p}_2''' - \frac{9}{4}(\bar{p}_1\bar{p}_2')' - \frac{3}{2}\bar{p}_1(\bar{p}_2'' + \bar{p}_1\bar{p}_2');$$

während die zweite folgende Gestalt erhalten kann:

---

*) Man erhält nämlich φ, bis auf das Vorzeichen, als Product der beiden Determinanten $D(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6)$ und $D(z_2 z_1 z_4 z_3 z_6 z_5)$; und folglich, durch Multiplication nach Horizontalreihen, als Determinante 6ter Ordnung, deren Elemente rational bekannte Polarformen $2f\binom{z^{(m)}}{z^{(n)}}$ sind.

$$\varphi = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}\bar{p}_2'^2 - \bar{p}_2^{IV} - \frac{3}{4}(\bar{p}_1\bar{p}_2')'' + \frac{1}{2}\bar{p}_4'' - \bar{p}_1\left[\bar{p}_2''' + \frac{3}{4}(\bar{p}_1\bar{p}_2')' - \frac{1}{2}\bar{p}_4'\right] - \bar{p}_6\right\}$$

wodurch die Function φ ohne irgend welche Rechnungen bereits eindeutig bestimmt wird.

Wir schliesen daher: *Ist die Differentialgleichung* (A) $(n = 6)$ *mit den Bedingungen* $f(z) = f(z') = 0$ *vorgelegt, so brauchen wir nur die rational bekannte Function* $\frac{2\varrho'}{\varrho} = \frac{d}{dx}\log f(z'')$ *zu berechnen, und die Transformation* $z = \varrho\bar{z}$ *auszuführen, um die entsprechenden Differentialgleichungen* (2') *und* (2'') *hinzuschreiben.* Die Integration von (A) wird dadurch auf eine Quadratur, eine Quadratwurzel $(\sqrt{\varphi})$, und auf die Integration einer möglichst allgemeinen linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung ohne zweites Glied zurückgeführt (offenbar könnten wir auch sagen: auf eine Quadratwurzel und eine möglichst allgemeine lineare Differentialgleichung 4ter Ordnung).

25. Wir kommen jetzt zu dem allgemeinen Falle, in welchem die (für $n = 5$ durch die lineare Gleichung $\Sigma a_i z_i = 0$ verknüpften) Lösungen z_i der Differentialgleichung (A) zwar immer die Gleichung

$$f(z) = z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_6 = 0$$

erfüllen; dagegen aber:

$$f(z') = z_1' z_2' + z_3' z_4' + z_5' z_6' \neq 0$$

und die Integralregelfläche von (A) folglich nicht abwickelbar ist.

Wir zeigen zunächst, wie dieser Fall, für $n = 5$, sich auf den vorangehenden $f(z') = 0$ reduciren lässt.

Nach einem bekannten Lie'schen Satze*) ist auf jeder in einem linearen Complex enthaltenen und nicht abwickelbaren Regelfläche R eine asymptotische Curve s vorhanden, deren Tangenten obigem Complexe angehören, und geradezu dessen Durchschnitt mit der Congruenz der dreipunktigen Tangenten (oder Haupttangenten) von R bilden. Diese asymptotische Linie s trifft jede Erzeugende von R in zwei Punkten, welche nur für die sogen. (getrennt liegenden) „singulären Erzeugenden" zusammenfallen**). Die abwickelbare Fläche der Tangenten von s wollen wir mit S bezeichnen.

---

*) *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe* ...; Math. Annalen, Bd. 5 (1872), S. 179.

**) D. h., falls $f(z')$ für den entsprechenden Werth von x verschwindet. Es kann nämlich $f(z')$, als Function von x, obgleich nicht identisch verschwindend, doch immer für einzelne getrennte Werthe von x verschwinden.

Es wäre nun die Frage, ob wir durch eine einfache Transformation von der vorgelegten Differentialgleichung (A) *zu einer anderen* (B) *übergehen können, deren Integralregelfläche mit S zusammenfällt.* Es wird sich dann (B), durch Wegschaffen ihres zweiten Gliedes, auf die Form (N') von Nr. 23 reduciren müssen.

Die beiden Haupttangenten (ζ) von R, welche die Erzeugende (z) allgemeiner Lage treffen und dem linearen Complexe $\Sigma a_i z_i = 0$ (folglich auch der abwickelbaren Fläche S) angehören, werden durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(1) \qquad f\binom{z}{\zeta} = 0, \quad f\binom{z'}{\zeta} = 0, \quad f\binom{z''}{\zeta} = 0, \\ \Sigma a_i \zeta_i = 0, \quad f(\zeta) = 0;$$

und hieraus ergeben sich für die Verhältnisse der ζ_i zwei Werthsysteme, welche bei nicht singulären Erzeugenden (z) auch nicht zusammenfallen. Dass die in dieser Weise bis auf einen (von x abhängigen) gemeinsamen Factor bestimmten ζ_i zugleich auch die Gleichung $f(\zeta') = 0$ identisch erfüllen, folgt bereits aus dem erwähnten Lie'schen Satze, und kann übrigens auch durch analytische Betrachtungen bewiesen werden*). — Ueber diesen noch unbestimmten Factor der ζ_i dürfen wir ganz beliebig verfügen. Insbesondere empfiehlt es sich zu bemerken, dass bei jeder Operation der Rationalitätsgruppe von (A) die z_i und die ζ_i (welche ebenfalls Coordinaten einer geraden Linie sind) lineare Substitutionen mit einander proportionalen Coefficienten erfahren: und wir können sie folglich geradezu *cogredient* werden lassen, indem wir beispielsweise die (in Bezug auf die ζ_i nicht homogene) Bedingungsgleichung

$$f\binom{z'''}{\zeta} = f(z')$$

aufstellen. Die ζ_i werden sich dadurch als rationale Differentialfunctionen der z_i bestimmen lassen, in Bezug auf denjenigen Rationalitätsbereich, welcher aus dem früheren durch Adjunction der Quadratwurzel aus der (rational bekannten) Discriminante des Systems (1) entsteht.

Anderseits aber gestattet die identische Gleichung $\sum_i a_i \zeta_i = 0$, eine der ζ_i, beispielsweise ζ_6, zu eliminiren, und die Gesammtheit der linearen Transformationen, welche die ζ_i bei der Rationalitätsgruppe von (A) erfahren, als eine lineare Gruppe in den *fünf* Veränderlichen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_5$ darzustellen. Bilden wir dann die Matrix:

*) Man vgl. beispielsw. Voss: *Zur Theorie der windschiefen Flächen.* Math. Ann., Bd. 8, 1875, S. 78—79).

$$\begin{vmatrix} \zeta_1^{V} & \zeta_1^{IV} & \zeta_1''' & \zeta_1'' & \zeta_1' & \zeta_1 \\ \zeta_2^{V} & \zeta_2^{IV} & \zeta_2''' & \zeta_2'' & \zeta_2' & \zeta_2 \\ \zeta_3^{V} & \zeta_3^{IV} & \zeta_3''' & \zeta_3'' & \zeta_3' & \zeta_3 \\ \zeta_4^{V} & \zeta_4^{IV} & \zeta_4''' & \zeta_4'' & \zeta_4' & \zeta_4 \\ \zeta_5^{V} & \zeta_5^{IV} & \zeta_5''' & \zeta_5'' & \zeta_5' & \zeta_5 \end{vmatrix},$$

so sind die Verhältnisse der betreffenden Determinanten 5ter Ordnung rationale Differentialfunctionen der z_i, welche, als Functionen von x, bei allen Operationen der Rationalitätsgruppe von (A) ungeändert bleiben; sie werden daher, nach Adjunction der bereits genannten Quadratwurzel, rational bekannte Functionen von x sein. Die Functionen $\zeta_i(x)$ (ζ_6 einbegriffen) sind folglich Lösungen einer und derselben linearen Differentialgleichung 5ter Ordnung (B), deren Coefficienten, bei gegebener Differentialgleichung (A), nach Adjunction einer geeigneten Quadratwurzel sich rational bestimmen lassen. Diese Differentialgleichung hat offenbar die abwickelbare Fläche S als Integralregelfläche, und es ist folglich (wie bereits erwähnt wurde) $f(\zeta) = f(\zeta') = 0$. Das Problem der Integration einer derartigen Differentialgleichung ist bereits in Nr. 20—23 behandelt worden.

Bezeichnen wir nun mit $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ die beiden Erzeugenden von S, welche eine und dieselbe Erzeugende (z) allgemeiner Lage von R treffen, so gehört (z) offenbar den beiden Strahlbüscheln an, welche $\zeta^{(1)}$ und $\zeta^{(2)}$ je mit der nächstfolgenden (unendlich benachbarten) Erzeugenden von S bestimmen; zwischen den Coordinaten z_i, $\zeta_i^{(1)}$, $\zeta_i^{(2)}$ müssen daher Gleichungen folgender Gestalt bestehen:

$$z_i = a_1\zeta_i^{(1)} + b_1\zeta_i^{(1)\prime} = a_2\zeta_i^{(2)} + b_2\zeta_i^{(2)\prime} \qquad (i = 1, 2, \cdots 6)$$

unter a_1, b_1, a_2, b_2 geeignete Functionen von x verstanden. — Nun sind, in Bezug auf eine jede Operation der Rationalitätsgruppe von (A), die Functionen $\zeta_i^{(1)}$ und $\zeta_i^{(2)}$ mit den z_i, folglich auch mit einander, und mit den Ableitungen $\zeta_i^{(1)\prime}$ und $\zeta_i^{(2)\prime}$ cogredient; und es folgt daraus, dass bei den genannten Operationen nicht nur die geraden Linien $\zeta^{(1)}$ und $\zeta^{(2)}$ bezw. in die entsprechenden $\bar{\zeta}^{(1)}$ und $\bar{\zeta}^{(2)}$ übergehen, sondern auch eine jede gerade Linie $\zeta^{(1)} + k\zeta^{(1)\prime}$ oder $\zeta^{(2)} + k\zeta^{(2)\prime}$ bezw. in $\bar{\zeta}^{(1)} + k\bar{\zeta}^{(1)\prime}$ oder $\bar{\zeta}^{(2)} + k\bar{\zeta}^{(2)\prime}$ übergeht. Die beiden Functionen $\frac{b_1}{a_1}$ und $\frac{b_2}{a_2}$, welche bezw. die beiden Doppelverhältnisse

$$[\zeta^{(1)}, \zeta^{(1)\prime}, \zeta^{(1)} + \zeta^{(1)\prime}, z] \quad \text{und} \quad [\zeta^{(2)}, \zeta^{(2)\prime}, \zeta^{(2)} + \zeta^{(2)\prime}, z]$$

angeben, werden folglich, als Functionen von x, in Bezug auf die obigen Operationen invariant sein. Anderseits aber lassen sie sich aus den letztgeschriebenen Gleichungen als rationale Differentialfunctionen der z_i, $\zeta_i^{(1)}$, $\zeta_i^{(2)}$ und folglich auch der z_i allein bestimmen: sie sind daher rational bekannte Functionen.

Wollen wir endlich auch die Bestimmung von a, b vollziehen; d. h. den in den z_i noch unbekannten Factor berechnen, so brauchen wir bloss die Differentialgleichung (A), welcher die z_i genügen müssen, und die Relation $f\binom{z'''}{\zeta} = f(z')$ zu berücksichtigen. Diese Bestimmung lässt sich dadurch auch rational ausführen.

Wir schliessen daher: *Die linearen Differentialgleichungen 5^{ter} Ordnung $G(z) = 0$ mit einer quadratischen Relation $f = 0$ von nicht verschwindender Discriminante zwischen den Fundamentallösungen ergeben sich sämmtlich aus denjenigen Differentialgleichungen $H(\zeta) = 0$, welche in Bezug auf die quadratische Form f den Rang zwei besitzen, durch Transformationen $z = a\zeta + b\zeta'$.* Ist die Differentialgleichung $G(z) = 0$ beliebig vorgelegt, so lässt sich die entsprechende Gleichung $H(\zeta) = 0$, nach Adjunction der Quadratwurzel aus einer rational bekannten Function, durch rationale Operationen berechnen; und die Functionen a, b gehören ebenfalls dem so erweiterten Rationalitätsbereiche an.

Wir brauchen kaum daran zu erinnern, dass die Differentialgleichung $H(\zeta) = 0$, falls man ihr zweites Glied wegschafft, sich auf die Form (N') reduciren muss. Will man $G(z) = 0$ direct aus einer Differentialgleichung (N') durch eine Substitution $z = a\zeta + b\zeta'$ ableiten, so erfordert die Bestimmung von a und b auch eine Quadratur.

26. Wir müssen zuletzt noch den Fall einer linearen Differentialgleichung 6^{ter} Ordnung:

$$\text{(A)} \qquad z^{VI} + p_1 z^V + p_2 z^{IV} + \cdots + p_6 z = 0$$

berücksichtigen, deren Fundamentallösungen $z_1, z_2, \cdots z_6$ die quadratische Gleichung:

$$f(z) \equiv z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_6 = 0$$

erfüllen, während aber zugleich $f(z') \neq 0$ ist: die entsprechende Integralregelfläche R ist dann keine developpable Fläche, und auch nicht in einem linearen Complexe enthalten.

Nach einer kurzen Andeutung in der mehrmals erwähnten Mittheilung an die Pariser Akademie*) scheint Halphen sich die Behandlung der vorliegenden Frage in der Weise gedacht zu haben, dass zuerst durch Integration einer linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung die asymptotischen Linien der Regelfläche R bestimmt werden**), und dann durch

*) Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc. t. 101 (1885); S. 664—66.

**) Diese lineare Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung ist bekanntlich auch auf eine Riccati'sche Gleichung nebst einer Quadratur und einer Quadratwurzel zurückführbar. Die entsprechende Riccati'sche Gleichung hat, für ein allgemeines System von Liniencoordinaten, Herr Voss ausgerechnet (*Ueber die Haupttangentencurven der*

Integration der linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung, deren Integralcurve mit einer der letztgenannten Linien zusammenfiel, das vorgelegte Problem zum Abschluss gebracht werde. Wir finden es aber einfacher, an Stelle der asymptotischen Linien, die *Curve vierpunktiger Berührungen* auf R in Betracht zu ziehen.*)

Auf jeder Erzeugenden (z) allgemeiner Lage sind bekanntlich zwei (eventuell auch zusammenfallende) Punkte vorhanden, in welchen die Haupttangenten der Regelfläche R mit letzterer eine vierpunktige Berührung haben (d. h. vier aufeinanderfolgende Erzeugende treffen). Diese beiden Punkte werden nur dann unbestimmt, wenn diese vier Erzeugende einer und derselben Fläche 2ten Grades angehören, was offenbar nur bei specieller Lage von (z) zutreffen kann (falls R selbst keine Fläche 2ten Grades ist).

Die Coordinaten ζ_i einer Tangente vierpunktiger Berührung von R lassen sich, als Functionen der z_i und ihrer Ableitungen (und folglich auch der unabhängigen Variablen x), bis auf einen gemeinsamen Factor, durch folgende Gleichungen bestimmen:

$$(1) \qquad f\binom{z}{\zeta}=0,\quad f\binom{z'}{\zeta}=0,\quad f\binom{z''}{\zeta}=0,\quad f\binom{z'''}{\zeta}=0,$$
$$f(\zeta)\equiv\zeta_1\zeta_2+\zeta_3\zeta_4+\zeta_5\zeta_6=0.$$

Führen wir dazu noch die Hülfsvariabele:

$$\varrho=-f\binom{z^{IV}}{\zeta}:f\binom{z^{V}}{\zeta}$$

ein, und bezeichnen mit Z_i die dem Elemente $\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)^V$ der Determinante $D(z_1 z_2\cdots z_6)$ zugehörige Unterdeterminante, so dürfen wir setzen:

$$\zeta_i=Z_i+\varrho Z_i';$$

und es ergiebt sich zugleich, dass ϱ der Gleichung 2ten Grades:

$$(2) \qquad \varrho^2 f(Z')+2\varrho f\binom{Z}{Z'}+f(Z)=0$$

genügt, deren Coefficientenverhältnisse rationale Differentialfunctionen der z_i sind, welche in Bezug auf die Rationalitätsgruppe von (A) ungeändert bleiben: dieselben sind folglich rational bekannte Functionen von x. Adjungiren wir nun dem früheren Rationalitätsbereiche die Quadratwurzel

---

windschiefen Flächen; Math. Ann., Bd. 12, 1877; S 491 ff.); und für dieselbe hat er Coefficienten gefunden, deren logarithmische Ableitungen in unserem Falle rational bekannte Functionen sein würden.

*) Dabei wird sich zugleich ergeben, dass Halphen's lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung *überflüssig* ist, wie schon längst Lie aus gruppentheoretischen Gründen behauptet hat (vgl. Nr. 16).

aus der (rational bekannten) Discriminante der Gleichung (2) — d. h. des Gleichungssystems (1) —, so wird auch ϱ rational bekannt sein, und die ζ_i werden dadurch rationale Differentialfunctionen der z_i.

Die Erzeugende (z) und die vierpunktige Tangente (ζ) bestimmen nun je einen Punkt (y) und eine Ebene (u), deren Coordinaten bis auf gemeinsame Factoren leicht zu berechnen sind. Sind die Indices $1, 2, \cdots 6$ auf die Fundamentallösungen $z_1, z_2, \cdots z_6$ von (A) in der Weise vertheilt, dass nicht geradezu $\frac{z_2}{\zeta_2} = \frac{z_4}{\zeta_4} = \frac{z_6}{\zeta_6}$ $\left(\text{oder bezw. } \frac{z_1}{\zeta_1} = \frac{z_3}{\zeta_3} = \frac{z_5}{\zeta_5}\right)$ ist, so dürfen wir setzen:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{\zeta_1 z_2 + \zeta_3 z_4 + \zeta_5 z_6}{[z_2 Z_4 Z_6']^{-\frac{1}{2}}}, \quad y_2 = \frac{[z_4 \zeta_6]}{[z_2 Z_4 Z_6']^{-\frac{1}{2}}}, \quad y_3 = \frac{[z_6 \zeta_2]}{[z_2 Z_4 Z_6']^{-\frac{1}{2}}},\\
y_4 &= \frac{[z_2 \zeta_4]}{[z_2 Z_4 Z_6']^{-\frac{1}{2}}},\\
u_1 &= \frac{z_1 \zeta_2 + z_3 \zeta_4 + z_5 \zeta_6}{[z_1 Z_3 Z_5']^{-\frac{1}{2}}}, \quad u_2 = -\frac{[z_3 \zeta_5]}{[z_1 Z_3 Z_5']^{-\frac{1}{2}}}, \quad u_3 = \frac{[z_5 \zeta_1]}{[z_1 Z_3 Z_5']^{-\frac{1}{2}}},\\
u_4 &= \frac{[z_1 \zeta_3]}{[z_1 Z_3 Z_5']^{-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Und bezeichnen wir endlich mit ϱ_1, ϱ_2 die beiden Wurzeln der Gleichung (2), mit $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ die entsprechenden vierpunktigen Tangenten von R, welche eine und dieselbe Erzeugende (z) allgemeiner Lage treffen, mit $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$, bezw. $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ die beiden Punkte, bezw. die beiden Ebenen $z\zeta^{(1)}$ und $z\zeta^{(2)}$, so sind (falls $\varrho_1 \neq \varrho_2$ ist) die zweireihigen Determinanten $\left(y_k^{(1)} y_l^{(2)}\right)$ und $\left(u_k^{(1)} u_m^{(2)}\right)$, welche in einer gewissen Reihenfolge den z_i proportional sein müssen, geradezu gleich den mit der Differenz $\varrho_2 - \varrho_1$ multiplicirten z_i.

Wir fragen nun wie sich die y_h und u_k, als Functionen von x, bei den Operationen der Rationalitätsgruppe von (A) verhalten.

Auf R bilden die Punkte (y) die „Curve vierpunktiger Berührungen" γ, während die Ebenen (u) die längst dieser Curve ihr umgeschriebene Developpable Γ erzeugen. Die Beziehung dieser beiden Gebilde γ und Γ zu R ist eine projective; und zwar gehen bei collinearen Transformationen, die R in eine neue Regelfläche $\bar{R}$ überführen, γ und Γ in die entsprechenden auf $\bar{R}$ bezüglichen Gebilde $\bar{\gamma}$ und $\bar{\Gamma}$ über; dagegen bei dualistischen Umformungen bezw. in $\bar{\Gamma}$ und $\bar{\gamma}$. Bei jeder Operation der Rationalitätsgruppe von A müssen folglich, wie es bereits in Nr. 20 der Fall war, irgend welche Gleichungen:

$$\sigma \bar{y}_h = \sum_i a_{hi} y_i \quad \text{oder} \quad \sigma \bar{y}_h = \sum_i a_{hi} u_i$$

und zugleich:

$$\tau \bar{u}_k = \sum_i A_{ki} u_i \quad \text{oder} \quad \tau \bar{u}_k = \sum_i A_{ki} y_i$$

mit constanten a und A bestehen. Und wir erkennen auch sofort dass die Factoren σ und τ ebenfalls Constanten sind, insofern (falls $\varrho_1 \neq \varrho_2$ ist) die der Vorangehenden „associirte“ lineare Substitution, wegen der Relationen:

$$(\varrho_2 - \varrho_1)\, z_i = \left(y_h^{(1)} y_l^{(2)}\right) = \left(u_k^{(1)} u_m^{(2)}\right),$$

mit derjenigen der z_i zusammenfällt, und folglich constante Coefficienten hat. (Für den Fall $\varrho_1 = \varrho_2$ folgt dann dasselbe aus Continuitätsgründen.)

Hieraus ergiebt sich, wie aus Nr. 20, dass die Functionen y_h und u_k bezw. Fundamentallösungen von zwei linearen Differentialgleichungen 4ter Ordnung sind, deren Coefficienten, allgemein zu reden, erst nach Adjunction einer zweiten Quadratwurzel aus einer rational bekannten Function auch rational bekannt werden (und sich von einander um das Vorzeichen der neuen Quadratwurzel unterscheiden). Wir können sie auch als Lösungen einer einzigen linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung:

$$(4) \qquad y^{IV} + q_1 y''' + q_2 y'' + q_3 y' + q_4 y = 0$$

ansehen, deren Coefficienten aus x, den Coefficienten p_i von (A), deren Ableitungen, und den beiden adjungirten Quadratwurzeln rational zusammengesetzt sind. Innerhalb eines hinreichend kleinen Gebietes des früheren Rationalitätsbereiches hat jede Lösung y (den doppelten Vorzeichen der beiden Quadratwurzeln entsprechend) *vier* allgemein zu reden verschiedene Bestimmungen; und die analytisch fortgesetzten Bestimmungen irgend eines Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3, y_4 liefern die Coordinaten der beiden Punkte (y) und der beiden Ebenen (u), welche der Erzeugenden (z) einer geeigneten Integralregelfläche von (A) angehören.

Bilden wir nun, falls $\varrho_1 \neq \varrho_1$ ist, aus zwei zweckmässig ausgewählten dieser Bestimmungsweisen die sechs Determinanten $\left(y_h^{(1)} y_l^{(2)}\right)$, und dividiren dieselben durch $\varrho_1 - \varrho_2$, so erhalten wir ebensoviele unabhängige Lösungen von (A); und es sind folglich, nach Integration von (4), auch die Lösungen von (A) rational bekannt.

Verschwindet aber die Discriminante der Gleichung (2), als Function von x, identisch*), so ist uns augenblicklich für jede Erzeugende (z) von R nur ein Strahlenbüschel (yu), welchem sie angehört, bekannt. Diesem

*) In diesem Falle reduciren sich die vier Bestimmungsweisen eines jeden Fundamentalsystems von (4) auf *zwei;* und dieselben liefern bezw. die Coordinaten des *einzigen* Punktes (y) vierpunktiger Berührung auf (z), und diejenigen der entsprechenden Tangentenebene (u) an R.

Strahlenbüschel gehören zugleich die beiden geraden Linien, deren Coordinaten bezw. den zweireihigen Determinanten:

$$\xi_i = (y_k y_l') \quad \text{und} \quad \eta_i = (u_k u_m'),$$

gleich sind; und deren erstere die Tangente von γ im Punkte (y), die zweite dagegen die durch (y) gehende Erzeugende der Developpablen Γ ist. Da dieselben offenbar in Bezug auf R conjugirte Tangenten sind, so müssen Relationen folgender Gestalt bestehen:

$$z_i = \varphi(\xi_i + \chi\eta_i), \qquad \zeta_i = \psi(\xi_i - \chi\eta_i),$$

unter φ, ψ, χ irgend welche Functionen von x verstanden.

Die Gleichungen (1) — welche noch erhalten bleiben, falls man die ζ_i oder auch die z_i mit einem und demselben (eventuell auch von x abhängigen) Factor multiplicirt — und das Verschwinden der Discriminante von (2) gestatten uns, die Function χ sofort zu bestimmen. — Die drei ersten der Gleichungen (1), sowie auch die letzte, sind für die obigen Werthe der z_i und ζ_i identisch erfüllt (wie sich auch aus einfachen geometrischen Betrachtungen ergiebt*)). Dagegen erhalten wir aus der vierten, von den Factoren φ und ψ abgesehen:

$$(\xi_1 - \chi\eta_1)(\xi_2''' + \chi\eta_2''' + 3\chi'\eta_2'' + 3\chi''\eta_2' + \chi'''\eta_2) + \cdots = 0.$$

Berücksichtigen wir dabei noch die identischen Gleichungen:

$$f\binom{\xi^{(p)}}{\xi^{(q)}} = 0, \quad f\binom{\eta^{(p)}}{\eta^{(q)}} = 0 \qquad p + q \leq 3$$

$$f\binom{\xi}{\eta} = 0, \quad f\binom{\xi}{\eta'} = 0,$$

deren letztere daraus folgt, dass der Strahlenbüschel $(\eta + k\eta')$ zugleich mit der geraden Linie (ξ) in der Ebene (u) liegt — obgleich sein Mittelpunkt keineswegs mit (y) zusammenfällt —, so nimmt die letztgeschriebene Gleichung folgende Gestalt an:

$$\chi\left\{f\binom{\xi}{\eta'''} - f\binom{\xi'''}{\eta}\right\} - 3\chi' f\binom{\xi}{\eta''} = 0;$$

und hieraus lässt sich $\frac{\chi'}{\chi}$ als Quotient von Polarformen von f mit zwei Reihen von je cogredienten Variabeln, und folglich als rational bekannte Function von x bestimmen.

---

*) Nämlich daraus, dass die durch die gerade Linie $(\xi + \chi\eta)$ erzeugte Regelfläche — was für eine Function χ auch sein mag — stets die (uns bekannten) geraden Linien (ξ) und (η) als conjugirte Tangenten, und folglich die geraden Linien $(\xi - \chi\eta)$ als Haupttangenten hat.

Anderseits kann die Discriminante der Gleichung (2) — d. h. des Gleichungssystems (1) — als Determinante 4^{ter} Ordnung folgendermassen geschrieben werden:

$$\left| f\begin{pmatrix} z^{(p)} \\ z^{(q)} \end{pmatrix} \right| \qquad p, q = 0, 1, 2, 3.$$

Durch Nullsetzen derselben, Einführung der Grössen $\xi_i + \chi\eta_i$ an Stelle der z_i, und Elimination der sämmtlichen Ableitungen von χ vermittelst des rational bekannten Werthes von $\frac{\chi'}{\chi}$, ergiebt sich für χ eine algebraische Gleichung 4^{ten} Grades, welche noch den Factor χ^2 enthält, und folglich auf den 2^{ten} Grad herabsinkt. Die Bestimmung von χ erfordert daher bloss das Ausziehen einer Quadratwurzel. (Es sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, dass in diesem Falle die Auflösung der Gleichung (2) keine Quadratwurzel erfordert.)

Die in dieser Weise bestimmten Grössen $\xi_i + \chi\eta_i$ können sich von ebensovielen unabhängigen Lösungen z_i der Differentialgleichung (A) nur um einen und denselben Factor φ unterscheiden. Bilden wir daher die lineare Differentialgleichung 6^{ter} Ordnung, welcher die $\xi_i + \chi\eta_i$ Genüge leisten:

$$\bar{z}^{VI} + \bar{p}_1 \bar{z}^{V} + \cdots = 0,$$

so muss dieselbe durch die Transformation $\bar{z} = \frac{z}{\varphi}$ in (A) übergehen, und es ist folglich:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\bar{p}_1 - p_1}{6}.$$

Führen wir endlich die Producte $\varphi(\xi_i + \chi\eta_i)$ an Stelle der z_i in irgend eine der Gleichungen (3) ein (wobei die ξ_i auch als Functionen der z_i, nämlich $= Z_i + \varrho Z_i'$, anzusehen sind), und eliminiren die sämmtlichen Ableitungen von φ durch die letztgeschriebene Gleichung und die anderen, die sich daraus ergeben, so lässt sich φ selbst daraus in rationaler Form herstellen.

Wir sagen daher: *Die Integration einer linearen Differentialgleichung 6^{ter} Ordnung mit einer (einzigen) quadratischen Gleichung von nicht verschwindender Discriminante zwischen den Fundamentallösungen lässt sich auf zwei successive Quadratwurzeln und auf die Integration einer möglichst allgemeinen linearen Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung reduciren.*

Allgemeine Bemerkungen, die Fälle $n > 6$ betreffend.

27. Ueber lineare Differentialgleichungen höherer als 6^{ter} Ordnung mit einer quadratischen Relation zwischen den Fundamentallösungen sind bisher keine Untersuchungen aufgestellt worden. Wir dürfen uns daher auf ein Paar allgemeiner Bemerkungen beschränken.

I. Lie hat seit 1885 den Satz aufgestellt*), *dass die continuirliche projective Gruppe einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit* 2^{ten} *Grades im Raume von* $n-1$ *Dimensionen für* $n>4$ *stets einfach ist.* Es folgt daraus, dass die Integration der allgemeinsten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einer quadratischen Relation von nicht verschwindender Discriminante zwischen den Fundamentallösungen, falls $n>4$ ist, nachdem man durch Wegschaffen ihres zweiten Gliedes, und eventuell auch (bei geradem n) durch Adjunction der Quadratwurzel aus einer rational bekannten Function, ihre Rationalitätsgruppe auf eine *unimodulare continuirliche Gruppe* reducirt hat, welche mit der obigen projectiven Gruppe des R_{n-1} holoedrisch isomorph und folglich einfach sein wird, stets ein *irreducibles Problem* ist (d. h. ein Problem welches nicht durch eine Reihe einfacherer gelöst werden kann**)) Das Problem kann gewissermassen umgestaltet werden, und das haben wir eben für $n=5$ und $n=6$ oben gesehen: die Integration einer beliebigen linearen Differentialgleichung ist nämlich mit derjenigen irgend einer ihrer Associirten gleichbedeutend. — Dagegen liess sich für $n=4$ das vorgelegte Problem auf die Integration von *zwei* linearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung reduciren (d. h. es fand eine eigentliche Zerlegung in einfachere Probleme statt).

II. Für $n>6$ enthält die grösste continuirliche projective Gruppe G_N $\left(N=\frac{n(n-1)}{2}\right)$ einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit 2^{ten} Grades im R_{n-1} keine Untergruppen mit mehr als $N-(n-2)$ Parametern***). Und bis auf eine für $n=8$ auftretende Ausnahme sind ihre sämmtlichen Untergruppen von der angegebenen grösstmöglichen Anzahl von Parametern mit einander gleichberechtigt und dadurch gekennzeichnet, dass bei jeder von ihnen ein gewisser Punkt der Mannigfaltigkeit (und zugleich auch der bez. Tangenten-R_{n-2}) in Ruhe bleibt. Für $n=8$ sind dagegen in der Gesammtgruppe G_{28} auch Untergruppen G_{22} enthalten, bei welchen je ein auf der Mannigfaltigkeit befindlicher R_3 invariant ist.

*) Archiv for Math., Bd. 10, S. 413 (1885); *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, S. 357.

**) Durch Integration der Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit rational bekannten Coefficienten, welcher irgend eine rationale Differentialfunction der Fundamentallösungen Genüge leistet, reducirt sich nämlich die Rationalitätsgruppe der vorgelegten linearen Differentialgleichung auf eine invariante Untergruppe (man vgl. beispielsw. Schlesinger's „Handbuch", Bd. II, S. 82); und letztere kann im vorliegenden Falle nur die identische Transformation (oder höchstens eine endliche Anzahl von Transformationen $\bar{y}_i=\varepsilon y_i$) enthalten, d. h es müssen, nach Integration jener Hülfsgleichung, auch die Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung (oder mindestens gewisse Potenzen derselben) rational bekannt sein.

***) Werner: Dissert. Leipzig, 1889; Math. Ann., Bd. 35, S. 113—60; Lie: *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, S. 809.

Wir sagen daher: *Die Integration der allgemeinsten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einer quadratischen Relation von nicht verschwindender Discriminante zwischen den Fundamentallösungen kann für $n > 6$ auf keine auch nicht lineare Differentialgleichung niedrigerer als $(n-2)^{ter}$ Ordnung zurückgeführt werden.**) Ist Y eine lineare Function der Fundamentallösungen, welche $= 0$ gesetzt einen Tangenten-R_{n-2} der invarianten Mannigfaltigkeit darstellt, so bekommt man eine derartige Differentialgleichung $(n-2)^{ter}$ Ordnung durch Einführung von $\frac{Y'}{Y}$ als neue unbekannte Function.

Dieser Satz gilt auch für $n = 5$. Dagegen kann im Falle $n = 6$ das vorliegende Problem, durch successive Adjunction zweier Quadratwurzeln aus rational bekannten Functionen, auf die Integration einer linearen Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung, und folglich durch eine Quadratur noch auf eine nicht lineare Differentialgleichung 3^{ter}, d. h. $(n-3)^{ter}$ Ordnung zurückgeführt werden. Dies hat seinen Grund darin, dass eine nicht ausgeartete M_4^2 des R^5 ∞^3 ebene Mannigfaltigkeiten R_2 enthält.

28. Es wird vielleicht nicht unnütz sein, an dieser Stelle noch den folgenden Satz mitzutheilen, welcher auch auf lineare Differentialgleichungen mit einer quadratischen Relation von nicht verschwindender Discriminante zwischen den Fundamentallösungen anwendbar ist, falls man deren Rationalitätsgruppe auf eine unimodulare reducirt:

Besteht die Rationalitätsgruppe einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$\text{(A)} \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0$$

aus lauter Transformationen, die eine quadratische Form

$$f \equiv \Sigma c_{ik} y_i y_k \qquad [c_{ik} = c_{ki}]$$

von nicht verschwindender Discriminante in sich überführen, so kann die vorgelegte Differentialgleichung (A) *durch eine Transformation:*

$$z = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)},$$

wo die a_i rational bekannte Functionen sind, in ihre Adjungirte:

$$\text{(B)} \qquad z^{(n)} - (p_1 z)^{(n-1)} + (p_2 z)^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n p_n z = 0$$

übergeführt werden. Anders ausgesprochen, *sie gehört mit ihrer Adjungirten „zur selben Art“***).

Bezeichnen wir nämlich mit $y_1, y_2, \cdots y_n$ irgend ein System von

*) Vgl. auch Lie: „*Die linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen*“ (Leipz. Ber., 1891; S. 268).

**) Man vgl. Schlesinger's „Handbuch“ Bd. II, S. 120, 124.

Fundamentallösungen der Differentialgleichung (A), und mit $u_1, u_2, \cdots u_n$ das zu demselben „adjungirte" Fundamentalsystem von (B), so ergiebt sich bekanntlich*), dass, falls man auf die y_i irgend eine lineare Substitution:

(1) $$\bar{y}_i = \sum_k \lambda_{ik} y_k$$

von nicht verschwindender Determinante $|\lambda_{ik}| = \Lambda$ ausübt, die u_i die sogenannte „adjungirte" oder „reciproke" Substitution:

(2) $$\bar{u}_i = \sum_k \Lambda_{ik} u_k$$

erfahren, wobei $\Lambda_{ik} = \frac{1}{\Lambda} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_{ik}}$ gesetzt wurde. Anderseits aber ist es auch bekannt, dass, falls die Substitution (1) die obige quadratische Form f in sich transformirt (und ihre Determinante folglich $= \pm 1$ ist), die durch die Gleichungen:

(3) $$\xi_i = \sum_k c_{ik} y_k$$

definirten Grössen ξ_i ebenfalls die zu (1) reciproke Substitution:

(2') $$\bar{\xi}_i = \sum_k \Lambda_{ik} \xi_k$$

erfahren. Und das dürfen wir auch mit anderen Worten dahin aussprechen, *dass die lineare Substitution* (1) *durch die Substitution* (3) *in* (2'), *d. h. in* (2) *transformirt wird.*

Bezeichnen wir nun mit $z_1, z_2, \cdots z_n$ dasjenige neue Fundamentalsystem von (B), welches mit $u_1, u_2, \cdots u_n$ durch die Gleichungen:

$$u_i = \sum_k c_{ik} z_k$$

zusammenhängt, so folgt daraus dass bei jeder Operation (1), welche der Rationalitätsgruppe von (A) angehört, und folglich die Form f in sich überführt, die Functionen z_i die lineare Substitution:

$$\bar{z}_i = \sum_k \lambda_{ik} z_k,$$

d. h. ebenfalls die Substitution (1) erfahren**), und folglich mit den y_i cogredient sind. — Setzen wir daher:

$$z_i = a_0 y_i + a_1 y_i' + \cdots + a_{n-1} y_i^{(n-1)} \quad (i = 1, 2, \cdots n);$$

*) Schlesinger: a. a. O., Bd. I, S. 62—65.

**) Diese Substitution muss nämlich die Transformirte von (2) durch die Inverse von (3), d. h. eben (1) sein.

und berechnen aus diesen Gleichungen die a_k (deren Coefficientendeterminante $= D(y_1 y_2 \cdots y_n)$ ist, und folglich nicht identisch verschwindet), so ergiebt sich:

$$a_k = D_k : D(y_1 y_2 \cdots y_n),$$

unter D_k diejenige Determinante verstanden, welche aus $D(y_1 y_2 \cdots y_n)$ durch Einführung der z_i an Stelle der Ableitungen $y_i^{(k)}$ entsteht. Die a_k erscheinen somit als rationale Differentialgleichungen der y_i (insofern das eben mit den u_i und z_i der Fall ist), welche bei allen denjenigen linearen Substitutionen der y_i ungeändert bleiben, in Bezug auf welche die z_i mit den y_i cogredient sind; und das geschieht eben bei sämmtlichen Operationen der Rationalitätsgruppe von (A). Die a_k sind folglich rational bekannte Functionen von x, und die Differentialgleichung (A) wird durch die Transformation:

$$z = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}$$

in ihre Adjungirte (B) übergehen, *q. e. d.* — Dass durch eine derartige Transformation auch (B) in (A) übergeführt werden kann, braucht kaum erwähnt zu werden.

Dieser Satz gilt auch allgemein für alle diejenigen linearen Differentialgleichungen, deren Rationalitätsgruppe eine *bilineare* Form von nicht verschwindender Discriminante in sich überführen. Und in dieser allgemeineren Fassung ist er auch umkehrbar; nämlich: „Gehört eine lineare Differentialgleichung mit ihrer Adjungirten zur selben Art, so besteht ihre Rationalitätsgruppe aus lauter Transformationen, welche eine bilineare Form von nicht verschwindender Determinante in sich überführen.“ Diese bilineare Form kann insbesondere auch eine symmetrische sein*).

Dem letztausgesprochenen Satze lässt sich noch der folgende (und genauere) hinzufügen — auf dessen Beweis wir an dieser Stelle nicht näher eingehen, indem bloss auf meinen eben erwähnten Aufsatz verwiesen sei:

Besteht die Rationalitätsgruppe einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung aus lauter Transformationen, die eine quadratische Form f von nicht verschwindender Discriminante in sich überführen, und bezeichnen wir mit s (≥ 0) den Rang dieser Differentialgleichung in Bezug auf die Form f, so kann diese Differentialgleichung durch die Transformation:

$$z = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-2s-1} y^{(n-2s-1)},$$

*) Man vgl. hierüber meinen Aufsatz: *Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. XXXIV, 1899).

wo die a_k rational bekannte Functionen sind, deren letztere nicht identisch verschwindet, in ihre Adjungirte übergeführt werden).*

Aus diesem Satze erkennen wir wiederum, dass $s \leq \frac{n-1}{2}$ sein muss. Und erreicht s, für ein ungerades n, seinen grösstmöglichen Werth $s = \frac{n-1}{2}$, so muss die vergelegte Differentialgleichung, bis auf einen allen Lösungen gemeinsamen Factor, mit ihrer Adjungirten zusammenfallen. Insbesondere müssen diese beiden Differentialgleichungen geradezu dieselben Lösungen besitzen, falls man die Coefficienten ihrer zweiten Glieder zum Verschwinden bringt. Und das haben wir eben für $n = 3$, $s = 1$ (Nr. 11) und für $n = 5$, $s = 2$ (Nr. 23) gesehen.

Für $s = \frac{n-1}{2}$ ist dieser Satz auch umkehrbar: *Damit eine lineare Differentialgleichung von ungerader Ordnung n mit ihrer Adjungirten (bis auf einen allen Lösungen gemeinsamen Factor) zusammenfalle, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre Fundamentallösungen $y_1, y_2, \cdots y_n$ sowie auch die sämmtlichen Ableitungen $y_1^{(h)}, y_2^{(h)}, \cdots y_n^{(h)}$ derselben für $h < \frac{n-1}{2}$, eine und dieselbe quadratische Gleichung mit constanten Coefficienten und nicht verschwindendender Discriminante erfüllen* (und dass diese Gleichung zugleich in Bezug auf ihre Rationalitätsgruppe invariant ist).

Die Integralcurven derartiger Differentialgleichungen haben folglich die in R_{n-1} charakteristische Eigenschaft, zugleich mit ihren Osculations-$R_{\frac{n-3}{2}}$ auf einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit 2ten Grades zu liegen, oder auch, was damit gleichbedeutend ist, *in jedem Punkte den zugehörigen Tangenten-R_{n-2} dieser quadratischen Mannigfaltigkeit als Osculations-R_{n-2} zu haben**).* Wir dürfen sie daher als *„asymptotische Linien"* der quadratischen Mannigfaltigkeit bezeichnen; und als solche wurden sie bereits durch Herrn Borel untersucht***). Dabei hat sich insbesondere ergeben,

---

*) Diesen Satz hat bereits Halphen ausgesprochen (Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc., t. 101, 1885; S. 666), doch ohne zu bemerken, dass, falls die Discriminante von f verschwindet, eine gewisse Aenderung erforderlich ist.

**) Zu diesen Curven gehören insbesondere (in Bezug auf eine ganz bestimmte sie enthaltende quadratische Mannigfaltigkeit) die rationalen Normalcurven von *gerader* Ordnung. Die lineare Differentialgleichung ($\bar{A}$) von Nr. 13 ist folglich, für ein ungerades n, mit ihrer Adjungirten identisch.

***) *Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles* (Ann. de l'Éc. Norm. Sup., t. 9, 1892; S. 72 ff.). Man vgl. auch Darboux: *Théorie générale des surfaces*; Livr. IV, Chap. V. — Für ein gerades n giebt es dagegen auf einer nicht ausgearteten M_{n-2}^2 keine anderen asymptotischen Linien — d. h. derartige Linien, dass jeder R_{n-2} durch $n-1$ aufeinander folgende Punkte derselben die dass die allgemeinen Gleichungen einer solchen Curve eine gewisse Anzahl willkürlicher Functionen enthalten; übrigens aber ohne irgend welche Integration herzustellen sind. Wollen wir unter diesen Curven diejenigen aussuchen, welche Integralcurven einer *vorgelegten* linearen Differentialgleichung sind, so erhalten wir daraus ein System von Differentialgleichungen für die obigen (jetzt nicht mehr willkürlichen) Functionen, dessen Integration mit derjenigen der vorgelegten linearen Differentialgleichung äquivalent sein wird.

Lassen wir endlich auch *das Verschwinden der Discriminante von f* zu, und zugleich auch ihrer sämmtlichen Unterdeterminanten bis zur $(h+1)^{\text{ten}}$ Ordnung inclusive $(2<h<n)$, so ist die vorgelegte Differentialgleichung reducibel, und wird durch die sämmtlichen Lösungen einer Differentialgleichung h^{ter} Ordnung mit rational bekannten Coefficienten befriedigt. *Bezeichnen wir dann immer noch mit s den Rang der vorgelegten Differentialgleichung in Bezug auf die Form f, so kann die derselben adjungirte Differentialgleichung durch eine Transformation:*

$$z = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-2s-1} y^{(n-2s-1)}$$

mit rational bekannten Coefficienten in die obige lineare Differentialgleichung h^{ter} Ordnung übergeführt werden)*

Capitel 7.

Specielle Resultate über lineare homogene Differentialgleichungen 3^{ter}, 4^{ter} und 5^{ter} Ordnung mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen.

Lineare Differentialgleichungen 3^{ter} Ordnung.

29. Den Fall einer linearen Differentialgleichung 3^{ter} Ordnung mit einer algebraischen Relation zwischen den Fundamentallösungen (und mehr als eine solche kann auch nicht vorhanden sein) haben wir in Nr. 11 bereits vollständig besprochen. Dabei hat sich Folgendes ergeben:

Mannigfaltigkeit M^2_{n-2} an der betreffenden Stelle berührt — als diejenigen, welche in einem dieser Mannigfaltigkeit angehörigen $R_{\frac{n-2}{2}}$ enthalten sind (beispielsw. für $n=4$ die Erzeugenden der vorgelegten Fläche 2^{ten} Grades). — Und für lineare Differentialgleichungen von gerader Ordnung n, welche mit ihren Adjungirten zusammenfallen, tritt an Stelle einer quadratischen, d. h. einer *bilinearen symmetrischen* Form, eine *bilineare alternirende* (invariante) Form auf: an Stelle einer quadratischen Mannigfaltigkeit M^2_{n-2} also ein nicht ausgearteter linearer Complex.

*) Man vgl. meinen Aufsatz: *Osservazioni sopra alcune equazioni differenziali lineari* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1° Sem. 1899).

Besteht zwischen den Fundamentallösungen y_1, y_2, y_3 *einer linearen Differentialgleichung 3ter Ordnung eine algebraische Relation höheren als 1ten Grades mit constanten Coefficienten;*

so ist die vorgelegte Differentialgleichung immer durch algebraische Operationen und Quadraturen (und zwar höchstens zwei Quadraturen) *integrirbar, falls die obige Relation auch höheren als 2ten Grades ist.*

Ist letztere dagegen 2ten Grades (mit nicht verschwindender Discriminante), *so wird die vorgelegte Differentialgleichung durch die Quadrate der sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit rational bekannten Coefficienten befriedigt;* und zugleich muss sie, vom 2ten Gliede befreit, folgende Gestalt annehmen:

$$y''' + 4sy' + 2s'y = 0,$$

welche ihrerseits durch die Quadrate der Lösungen von $u'' + su = 0$ befriedigt wird.

Lineare Differentialgleichungen 4ter Ordnung.

30. Für $n = 4$ muss die Integralcurve, falls zwischen den Fundamentallösungen algebraische Relationen bestehen, entweder *selbst algebraisch* sein, oder auf *einer algebraischen Fläche* liegen.

Beschränken wir uns auf diejenigen Differentialgleichungen, welche nicht durch algebraische Operationen und Quadraturen integrirbar sind, so erweist sich bekanntlich als *einziger Fall algebraischer Integralcurve* der folgende:

Die Integralcurve ist eine gewöhnliche Raumcurve 3ter Ordnung, und es bestehen folglich zwischen vier geeigneten Fundamentallösungen y_1, y_2, y_3, y_4 die Gleichungen $\left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix} \right\| = 0$. *Die entsprechende Differentialgleichung, vom 2ten Gliede befreit, lautet folgendermassen:*

$$y^{IV} + 10sy'' + 10s'y' + (3s'' + 9s^2)y = 0$$

und wird durch die 3ten Potenzen der sämmtlichen Lösungen der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung $u'' + su = 0$ *befriedigt.*

Anderseits giebt es im Raume R_3 *dreierlei Flächen,* welche eine nicht-integrable projective Gruppe gestatten, nämlich:*)

1) Die developpable Fläche der Tangenten einer Raumcurve 3ter Ordnung, welche eine dreigliedrige einfache projective Gruppe zulässt. Ihre Gleichung lautet (in einem geeigneten Coordinatensysteme) folgendermassen:

$$4(y_2^2 - y_1y_3)(y_3^2 - y_2y_4) - (y_1y_4 - y_2y_3)^2 = 6y_1y_2y_3y_4 - 4y_2^3y_4 - 4y_1y_3^3 - y_1^2y_4^2 + 3y_2^2y_3^2 = 0;$$

*) Dies folgt unmittelbar aus den in Nr. 9, III erwähnten Untersuchungen von Lie und Enriques.

2) Die nicht ausgeartete Fläche 2^{ten} Grades, mit ∞^6 projectiven Transformationen in sich;

3) Die Kegelfläche 2^{ten} Grades, mit ∞^7 projectiven Transformationen in sich.

Liegt die Integralcurve einer linearen Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung auf einer Fläche 1) oder wird auch, allgemeiner, die dieser Differentialgleichung zugehörige Rationalitätsgruppe durch die dreigliedrige projective Gruppe einer cubischen Raumcurve gedeutet — so gehört diese Differentialgleichung zu der in Nr. 14 untersuchten Classe: sie kann folglich durch eine Transformation $z = \alpha y + \beta y' + \gamma y''$ (wo die Bestimmung von α, β, γ nur die Auflösung einer Gleichung 3^{ten} Grades und rationale Operationen erfordert) auf den obigen Fall einer algebraischen Integralcurve zurückgeführt werden.

Liegt dagegen die Integralcurve auf einer Fläche 2) oder 3), so haben wir bezw. die in Nr. 17 und 18 untersuchten Fälle vor uns, und die entsprechende Differentialgleichung kann folglich durch eine Transformation $y = \varrho \bar{y}$ (wo $\frac{\varrho'}{\varrho}$ rational bekannt ist) bezw. auf die beiden folgenden Formen gebracht werden:

$$(2) \quad \bar{y}^{IV} - \frac{r'-s'}{r-s}\bar{y}''' + 2(r+s)\bar{y}'' + \left\{3(r'+s') - 2(r+s)\frac{r'-s'}{r-s}\right\}\bar{y}' - \left\{\frac{r'^2-s'^2}{r-s} - (r-s)^2 - (r''+s'')\right\}\bar{y} = 0,$$

$$(3) \qquad \bar{y}^{IV} + r\bar{y}''' + 4s\bar{y}'' + (6s'+4rs)\bar{y}' + 2(s''+rs')\bar{y} = 0,$$

deren erstere durch die Producte der Lösungen von $u'' + ru = 0$, $v'' + sv = 0$, die zweite dagegen durch die Quadrate der Lösungen von $u'' + su = 0$ befriedigt wird.

Lineare Differentialgleichungen 5^{ter} Ordnung.

31. Die linearen Differentialgleichungen 5^{ter} Ordnung mit *einer* algebraischen Relation zwischen den Fundamentallösungen habe ich vor kurzem in meinem Aufsatze: *Sulle equazioni differenziali lineari del 5^0 ordine*...*) untersucht. Und für diejenigen, welche eine grössere Anzahl derartiger Relationen gestatten, und deren Integralcurve folglich entweder algebraisch ist, oder auf *einer* algebraischen Fläche liegt, habe ich auch an derselben Stelle kurze Andeutungen gegeben.

Wir beschränken uns hier auf diejenigen Fälle, in welchen die vorgelegte Differentialgleichung *nicht* durch algebraische Operationen und

*) Rend. del. R. Ist. Lomb., ser. 2ª, t. 32; 1899.

Quadraturen integrirbar ist. Darunter ist *ein einziger Fall algebraischer Integralcurve* einbegriffen, nämlich:

Die Integralcurve ist eine rationale Normalcurve 4^ter Ordnung, und es bestehen folglich zwischen fünf geeigneten Fundamentallösungen die Gleichungen $\left\|\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{matrix}\right\| = 0$. *Die entsprechende Differentialgleichung muss, vom 2^ten Gliede befreit, folgende Gestalt annehmen:*

$$y^V + 20sy''' + 30s'y'' + (18s'' + 64s^2)y' + (4s''' + 64ss')y = 0$$

und wird dann durch die 4^ten Potenzen der Lösungen der linearen Differentialgleichung $u'' + su = 0$ *befriedigt.*

Wir betrachten nun, zweitens, *die algebraischen Flächen und Mannigfaltigkeiten V_3 des Raumes R_4, welche nur eine 3-gliedrige einfache projective Gruppe gestatten.* Liegt die Integralcurve einer linearen Differentialgleichung 5^ter Ordnung auf *einer* derselben, so muss die zugehörige Rationalitätsgruppe (falls sie nicht-integrabel ist) durch die derselben entsprechende dreigliedrige projective Gruppe gedeutet werden; und *die Integration der vorgelegten Differentialgleichung wird,* von algebraischen Operationen und Quadraturen abgesehen, *nur die Integration einer linearen Differentialgleichung 2^ter Ordnung, oder auch einer Riccati'schen Gleichung verlangen.* — Nur müssen wir hier dreierlei Arten projectiver G_3 des R_4 in Betracht ziehen*), nämlich:

1) *Dreigliedrige Gruppe mit invarianter rationaler C^4.* In Bezug auf dieselbe sind folgende Mannigfaltigkeiten invariant:

a) Dreidimensionale Mannigfaltigkeit 3^ter Ordnung der Doppelsecanten der C^4, deren Gleichung folgende Gestalt annehmen kann:

$$j \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ y_3 & y_4 & y_5 \end{vmatrix} \equiv y_1y_3y_5 + 2y_2y_3y_4 - y_1y_4^2 - y_2^2y_5 - y_3^3 = 0;$$

b) Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten 6^ter Ordnung:

$$j^2 - k(y_1y_5 - 4y_2y_4 + 3y_3^2) = 0,$$

wobei j die obige Form 3^ten Grades, k einen endlichen und nicht verschwindenden Parameter bedeutet. Insbesondere ergiebt sich für $k = \frac{1}{27}$ die Mannigfaltigkeit der Osculationsebenen der invarianten C^4;

*) Es giebt allerdings in R_4 noch andere nicht-integrable projective G_3; doch sind bei derselben nur Mannigfaltigkeiten invariant, welche noch weitere projective Transformationen zulassen. Man vgl. hierüber meine Abhandlung: *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè* (Mem. della R. Acc. di Torino, ser. II, t. 46; 1895—96).

c) Die Fläche 6^{ter} Ordnung:

$$j = y_1 y_3 - 4 y_2 y_4 + 3 y_3^2 = 0,$$

welche die sämmtlichen Tangenten der invarianten C^4 enthält;

d) Die Fläche 4^{ter} Ordnung welche die Schnittpunkte aller Paaren von Osculationsebenen der C^4 enthält (und folglich „Doppelfläche“ für die V_3^6 dieser Osculationsebenen ist).

Liegt die Integralcurve auf irgend einer dieser Mannigfaltigkeiten, so gehört die entsprechende Differentialgleichung zu der in Nr. 14 untersuchten Classe: *sie kann folglich durch eine Transformation*

$$z = \alpha y + \beta y' + \gamma y'' + \delta y'''$$

(wo die Bestimmung der α, β, γ, δ nur die Auflösung einer Gleichung 4^{ten} Grades und rationale Operationen erfordert) *auf den obigen Fall einer algebraischen Integralcurve zurückgeführt werden;*

2) *Dreigliedrige Gruppe mit einer invarianten C^3 und einem* (dem R_3 derselben nicht angehörigen) *invarianten Punkte.* In Bezug auf dieselbe sind in R_4 die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten 4^{ter} Ordnung:

$$6 y_1 y_2 y_3 y_4 - 4 y_1 y_3^3 - 4 y_2^3 y_4 - y_1^2 y_4^2 + 3 y_2^2 y_3^2 - k y_5^4 = 0$$

invariant, welche, falls $k \neq 0, \infty$ ist, auch keine anderen Collineationen zulassen. Liegt die Integralcurve auf einer derartigen Mannigfaltigkeit, so ist die entsprechende Differentialgleichung (nach Nr. 15) *reducibel*, und zwar gestattet sie die sämmtlichen Lösungen von zwei linearen Differentialgleichungen bezw. 1^{ter} und 4^{ter} Ordnung mit rational bekannten Coefficienten:

$$y' + p y = 0,$$
$$y^{IV} + q_1 y''' + q_2 y'' + q_3 y' + q_4 y = 0,$$

deren letztere durch eine Transformation $z = \alpha y + \beta y' + \gamma y''$ und darauf folgendes Wegschaffen des 2^{ten} Gliedes auf die wohlbekannte Form von Nr. 30:

$$z^{IV} + 10 s z'' + 10 s' z' + (3 s'' + 9 s^2) z = 0$$

gebracht werden kann;

3) *Dreigliedrige Gruppe mit invarianter gerader Linie und invariantem Kegelschnitte in windschiefer Lage.* Bei derselben sind folgende Mannigfaltigkeiten 6^{ter} Ordnung invariant:

$$(y_2^2 - y_1 y_3)^3 - k (y_1 y_5^2 - 2 y_2 y_4 y_5 + y_3 y_4^2)^2 = 0,$$

welche zugleich für $k \neq 0, \infty$ auch keine weiteren Collineationen gestatten. Diesem Falle entsprechend, finden wir nochmals (nach Nr. 15) *reducible Differentialgleichungen;* und zwar solche, welche die sämmtlichen Lösungen von zwei linearen Differentialgleichungen bezw. 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung mit rational bekannten Coefficienten gestatten:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0,$$
$$y''' + q_1 y'' + q_2 y' + q_3 y = 0.$$

Dabei ist noch zu bemerken, dass die zweite dieser Differentialgleichungen durch eine Transformation $z = \alpha y + \beta y' + \gamma y''$ (deren Coefficienten sich durch eine Quadratur bestimmen lassen) in diejenige übergehen muss, welche durch die Quadrate der Lösungen der ersteren befriedigt wird*).

Wir kommen endlich zu den algebraischen Mannigfaltigkeiten des Raumes R_4, welche eine nicht-integrable und mehr als dreigliedrige projective Gruppe gestatten. Dieselben sind:

1) Der *zweidimensionale Kegel 3ter Ordnung* und der *dreidimensionale Kegel 4ter Ordnung***), welche durch Projection bezw. einer rationalen Normalcurve 3ter Ordnung (des R_3) und der developpablen Fläche ihrer Tangenten entstehen. Dieselben gestatten eine 8-gliedrige projective Gruppe G_8 (mit invarianter integrabler G_5).

Liegt die Integralcurve einer linearen Differentialgleichung 5ter Ordnung auf einem dieser beiden Kegel, so ist diese Differentialgleichung auch reducibel; und zwar gestattet sie die sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung mit rational bekannten Coefficienten, kann also folgende Gestalt annehmen:

$$(y' + py)(y^{IV} + q_1 y''' + q_2 y'' + q_3 y' + q_4 y) = 0,$$

wo die Differentialgleichung 4ter Ordnung $y^{IV} + q_1 y''' + \cdots = 0$ von derselben Beschaffenheit als im obigen Falle 2) ist, oder insbesondere auch selbst, vom 2ten Gliede befreit, die Gestalt $y^{IV} + 10 s y'' + \cdots = 0$ annimmt***). Die Integration der vorgelegten Differentialgleichung erfordert daher nur diejenige einer linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung, eine gewisse Anzahl von Quadraturen, und, allgemein zu reden, auch die Auflösung einer Gleichung 3ten Grades;

2) *Die dreidimensionale Mannigfaltigkeit 3ter Ordnung und 3ter Classe mit Doppelebene* ($y_4 = y_5 = 0$):

$$y_1 y_5^2 - 2 y_2 y_4 y_5 + y_3 y_4^2 = 0$$

und die Regelfläche 3ter Ordnung mit geradliniger Leitlinie:

$$y_1 y_3 - y_2^2 = y_1 y_5^2 - 2 y_2 y_4 y_5 + y_3 y_4^2 = 0 \dagger),$$

*) Man vgl. darüber meinen Aufsatz in den „Rendiconti dell' Istitituto Lombardo", s. II, t. 32 (1899); Nr. 5.

**) Dieser dreidimensionale Kegel wird durch die allgemeine Gleichung des obigen Falles 2) dargestellt, falls man in derselben $k = 0$ setzt.

***) Das geschieht offenbar, falls die Integralcurve auf dem obigen zweidimensionalen Kegel 3ter Ordnung liegt.

†) Diese Regelfläche bildet, zweifach gezählt, den vollständigen Durchschnitt der beiden Mannigfaltigkeiten bezw. 2ten und 3ten Grades, welche durch die obigen Gleichungen dargestellt werden.

welche einander dualistisch entsprechen und eine 6-gliedrige Collineationsgruppe G_6 (mit invarianter integrabler G_3) gestatten.

Diesem Falle entsprechend finden wir auch *reducible* Differentialgleichungen; und zwar Differentialgleichungen, welche die sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung bezw. 2ter und 3ter Ordnung mit rational bekannten Coefficienten gestatten und folglich bezw. die hier angegebenen Gestalten annehmen müssen:

$$(y''' + q_1 y'' + q_2 y' + q_3 y)(y'' + p_1 y' + p_2 y) = 0,$$
$$(y'' + p_1 y' + p_2 y)(y''' + q_1 y'' + q_2 y' + q_3 y) = 0.$$

Dabei bemerken wir noch dass die beiden linearen Differentialgleichungen:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0,$$
$$y''' + q_1 y'' + q_2 y' + q_3 y = 0$$

unter einander stets in derselben Beziehung stehen müssen, wie im obigen Falle 3)*). Hier auch kommt es, von algebraischen Operationen und Quadraturen abgesehen, nur darauf an, eine lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung zu integriren;

3) *Die Mannigfaltigkeiten 2ten Grades*, und zwar:
   a) die nicht ausgearteten Mannigfaltigkeiten, mit ∞^{10} projectiven Transformationen in sich;
   b) die Kegel erster Art, mit ∞^{11} projectiven Transformationen in sich;
   c) die Kegel zweiter Art, mit ∞^{13} projectiven Transformationen in sich.

Besteht nun zwischen den Fundamentallösungen einer linearen Differentialgleichung 5ter Ordnung eine (in lineare Factoren nicht zerfallende) quadratische Relation mit constanten Coefficienten, so findet, den obigen Fällen *a*), *b*), *c*) entsprechend, folgendes statt:

a) Die vorgelegte Differentialgleichung lässt sich durch eine Transformation $z = ay + by'$, wo die Bestimmung von a, b eine Quadratwurzel und eine Quadratur erfordert, in die zweite Associirte der linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung;

$$y^{IV} + py'' + p'y' + qy = 0$$

---

*) Man vgl. hierüber meinen erwähnten Aufsatz in den „Rendiconti dell' Istituto Lombardo" d. J., Nr. 6. In allen bisher betrachteten Fällen (denjenigen der algebraischen Integralcurve ausgeschlossen) bleibt das gefundene Resultat offenbar auch dann gültig, falls wir nur voraussetzen, dass die Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung durch die betreffende projective Gruppe des R_4 gedeutet wird.

überführen, und ihre Integration ist demnach auf diejenige dieser letzten Differentialgleichung zurückgeführt;

b) Die vorgelegte Differentialgleichung kann (nach Nr. 16, 17) durch eine Transformation $y = \varrho z$ $\left(\text{wo } \frac{\varrho'}{\varrho} \text{ rational bekannt ist}\right)$ auf folgende Gestalt gebracht werden:

$$\{z' + pz\}\left\{z^{IV} - \frac{r'-s'}{r-s} z''' + 2(r+s)z'' + \left[3(r'+s') - 2(r+s)\frac{r'-s'}{r-s}\right]z' \right.$$
$$\left. - \left[\frac{r'^2 - s'^2}{r-s} - (r-s)^2 - (r''+s'')\right]z\right\} = 0,$$

und ihre Integration erfordert daher (von Quadraturen abgesehen) nur diejenige der beiden linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung $u'' + ru = 0$, $v'' + sv = 0$, wobei r, s durch eine Gleichung 2ten Grades bestimmt werden;

c) Die vorgelegte Differentialgleichung kann (nach Nr. 16, 11) durch eine Transformation $y = \varrho z$ folgende Gestalt annehmen:

$$(z'' + pz' + qz)(z''' + 4sz' + 2s'z) = 0$$

und ihre Integration erfordert dann (von Quadraturen abgesehen) nur diejenige der beiden linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung

$$z'' + pz' + qz = 0, \quad u'' + su = 0.$$

Aus dieser Auseinandersetzung folgt offenbar das zusammenfassende Resultat, welches in der Einleitung ausgesprochen wurde.

Capitel 8.

Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, deren Integralcurve in einer algebraischen Mannigfaltigkeit von gegebener Anzahl (≤ 3) von Dimensionen enthalten ist.

Lineare Differentialgleichungen mit algebraischer Integralcurve*).

32. In Nr. 9, III ist bereits erwähnt worden, dass die rationalen Normalcurven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung die einzigen Curven eines R_{n-1} sind, welche eine nicht-integrable (und zwar eine 3-gliedrige einfache) projective Gruppe gestatten. Wir dürfen daher folgenden Satz aussprechen:

Eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit algebraischer Integralcurve ist stets durch algebraische Operationen und Quadraturen integrirbar, den einzigen Fall ausgenommen, in welchem diese Curve eine rationale Normalcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. In diesem Falle wird die vorgelegte

*) Wallenberg: Crelle's Journal, t. 113, S. 1—41; Fano: Rend. della R. Acc. dei Lincei. 1. sem. 1895, S. 18—26, 51—57.

Differentialgleichung (nach Nr. 13) durch die $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung mit rational bekannten Coefficienten befriedigt, und ihre Integration ist folglich auf diejenige dieser letzten Differentialgleichung zurückgeführt. Bringt man ihr zweites Glied zum Wegfall, so muss die hervorgehende Differentialgleichung folgender Gestalt sein:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & y^{(n)}+\binom{n+1}{3}s y^{(n-2)}+2\binom{n+1}{4}s' y^{(n-3)} \\
& +3\binom{n+1}{5}\left\{s''+\frac{5n+7}{9}s^2\right\}y^{(n-4)} \\
& +4\binom{n+1}{6}\left\{s'''+\frac{5n+7}{8}ss'\right\}y^{(n-5)}+\cdots=0,
\end{aligned}
$$

und es genügen ihr dann die $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der Lösungen der Differentialgleichung $u''+su=0$.

Erinnern wir uns endlich noch daran:

a) dass die rationalen Curven die einzigen algebraischen Curven sind, welche unendlich viele projective Transformationen gestatten können; und dass diejenigen unter ihnen, welche nicht „normal" sind (d. h. einem Raume niedrigerer Dimension als ihre Ordnung angehören), sämmtlich als Projectionen von rationalen Normalcurven derselben Ordnung erhalten werden können;

b) dass eine lineare Differentialgleichung mit unimodularer Rationalitätsgruppe, deren Integralcurve algebraisch ist und nur eine endliche Anzahl projectiver Transformationen zulässt, zugleich auch eine endliche Rationalitätsgruppe haben muss*), und folglich algebraisch integrirbar ist;

so dürfen wir auch sagen: *Eine vom zweiten Gliede befreite lineare Differentialgleichung mit algebraischer Integralcurve muss:*

1) *entweder algebraisch integrirbar sein;*

2) *oder die Form* (1) *haben;*

3) *oder auch können ihre sämmtlichen Lösungen einer reduciblen linearen Differentialgleichung der Gestalt* (1) *und höherer Ordnung genügen**);* doch muss in diesem Falle die Function s eine solche sein, dass die lineare Differentialgleichung $u''+su=0$ sich durch eine Quadratur integriren lässt (da ihre Rationalitätsgruppe bloss eingliedrig sein wird).

*) Diese Rationalitätsgruppe muss nämlich das System der zwischen den Fundamentallösungen bestehenden algebraischen Gleichungen (wodurch eben die algebraische Integralcurve dargestellt wird) in sich überführen; und letzteres gestattet nach Voraussetzung nur eine endliche Anzahl von linearen Transformationen.

**) Diese Differentialgleichung höherer Ordnung würde nämlich eine rationale normale Integralcurve haben; und die Integralcurve der vorgelegten Differentialgleichung würde in diesem Falle eine geeignete Projection der vorangehenden sein.

Lineare Differentialgleichungen, deren Integralcurve in *einer* algebraischen Fläche enthalten ist.

33. Aus der Theorie der algebraischen Flächen mit unendlich vielen projectiven Transformationen in sich entnehmen wir folgende Sätze:

„Gestattet eine algebraische Fläche eine *continuirliche, nicht-integrable, intransitive* Gruppe projectiver Transformationen, so ist letztere geradezu eine *dreigliedrige, einfache* Gruppe; und die vorgelegte Fläche ist dann auf eine Regelfläche mit einem invarianten Büschel von Leitlinien ein-eindeutig abbildbar". *)

„Gestattet eine algebraische Fläche eine *continuirliche, transitive* Gruppe projectiver Transformationen, so ist sie *rational* (d. h. auf die Ebene abbildbar); und zwar kann man sie entweder auf die Ebene, oder auf eine nicht ausgeartete Fläche 2[ten] Grades, oder endlich auf eine rationale normale Kegelfläche Γ^m irgend eines Raumes R_{m+1} derartig abbilden, dass die vorgelegte Gruppe projectiver Transformationen in eine ebenfalls projective Gruppe auf dieser neuen Fläche übergeht". **)

Aus dem ersten Satze folgt sofort:

Liegt die Integralcurve einer linearen Differentialgleichung auf **einer** *algebraischen Fläche, welche keine transitive Gruppe projectiver Transformationen gestattet, so erfordert ihre Integration nur algebraische Operationen und Quadraturen, oder höchstens die Integration einer linearen Differentialgleichung 2[ter] Ordnung* (oder auch *einer Riccati'schen Gleichung*). Ist eine derartige Integration erforderlich, so gehört die vorgelegte Differentialgleichung zu der in Nr. 15 untersuchten Classe (da ihre Rationalitätsgruppe als dreigliedrige einfache projective Gruppe mit mehreren invarianten Curven gedeutet wird); sie ist folglich reducibel und es lässt sich leicht einsehen, dass sie geradezu die Lösungen einer gewissen Anzahl $\frac{n}{k}$ von linearen Differentialgleichungen einer und derselben Ordnung k gestattet. — Die obige Fläche enthält nämlich einen Büschel invarianter (rationaler, normaler) Curven; sind dieselben $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so müssen

---

*) Fano: *Sulle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque, che definiscono curve contenute in superficie algebriche* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1. sem. 1895, S. 329).

**) Enriques: *I gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano; Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières del piano* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1. sem. 1893, S. 468 ff.; 532 ff.). Fano: *Sulle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque* . . . (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1. sem. 1895; S. 325).

mindenstens zwei der in Nr. 15 betrachteten Zahlen $q_k = k - 1$ sein*). Andrerseits aber muss die Gesammtheit der diesen Zahlen $q_k = k - 1$ entsprechenden invarianten Räume $R_{q_k} \equiv R_{k-1}$ in keinem Raume niedrigerer Dimension als R_{n-1} enthalten sein (da dies sonst auch für obige Fläche geschehen würde); es müssen folglich die *sämmtlichen* Zahlen $q_k = k - 1$ sein.

Wir kommen jetzt zum zweiten und interessanteren Falle, dass die Integralcurve der vorgelegten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung auf *einer* algebraischen Fläche φ des Raumes R_{n-1} liegt, welche eine transitive Collineationsgruppe gestattet**). Mit $y_1, y_2, \cdots, y_n$ bezeichnen wir die homogenen Coordinaten eines beliebigen Punktes der Fläche φ und insbesondere auch der Integralcurve der vorgelegten Differentialgleichung (wobei wir dann die y_i als Fundamentallösungen letzterer ansehen). — In Folge des zweiten der obigen Sätze lassen sich nun gewisse rationale Functionen (mit constanten Coefficienten):

$$(1) \qquad z_h = f_h(y_1 y_2 \cdots y_n) \qquad \begin{cases} h = 1, 2, 3, \cdots, k, \\ k = 3, 4 \text{ od. } m + 2 \end{cases}$$

aufstellen, welche folgenden Bedingungen genügen:

1. Sie erfüllen, falls $k = 4$ ist, eine in lineare Factoren nicht zerfallende quadratische Gleichung (mit constanten Coefficienten); und, falls $k = m + 2$ ist $(m > 2)$, eine gewisse Anzahl von Gleichungen, welche auf das Verschwinden aller zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_m \\ z_2 & z_3 & z_4 & \cdots & z_{m+1} \end{vmatrix}$$

zurückgeführt werden können. Damit meinen wir gerade, dass diese Gleichungen in Bezug auf die durch die Gleichungen der Fläche φ verknüpften Grössen y_i *identisch* bestehen sollen;

2. Ertheilt man den Grössen z_h beliebige, (für $k > 3$) den letztgenannten Gleichungen genügende Werthe, so werden die Gleichungen (1) durch die Coordinaten je *eines* Punktes (y) der Fläche φ befriedigt;

3. Bei allen linearen Substitutionen der y_i, welche die Fläche φ in sich überführen, erfahren die z_h eine ebenfalls lineare Substitution mit constanten Coefficienten, welche das System der zwischen ihnen eventuell bestehenden Gleichungen auch in sich überführt;

*) Dies ist nämlich nothwendige und hinreichende Bedingung, damit unendlich viele invariante Curven $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorhanden seien. Man vgl. meine Abhand. *Sulle varietà algebriche* . . . . (Mem. della R. Acc. di Torino, S. II, t. 46, 1895—96), § 4.

**) Vgl. meinen vorhin erwähnten Aufsatz: *Sulle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque* . . ., S. 325 ff.

und dies alles ist nur die unmittelbare analytische Uebersetzung des oben ausgesprochenen Satzes.

Denken wir uns nun die y_i als (geeignet ausgewählte) Fundamentallösungen der vorgelegten linearen Differentialgleichung und die

$$z_k = f_k(y_1 y_2 \cdots y_n)$$

folglich als rationale (Differential-) Functionen dieser Lösungen, so sind offenbar die in der Matrix:

$$\begin{vmatrix} f_1^{(k)}(y) & f_1^{(k-1)}(y) & \cdots & f_1'(y) & f_1(y) \\ f_2^{(k)}(y) & f_2^{(k-1)}(y) & \cdots & f_2'(y) & f_2(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_k^{(k)}(y) & f_k^{(k-1)}(y) & \cdots & f_k'(y) & f_k(y) \end{vmatrix}$$

enthaltenen Determinanten k^{ter} Ordnung rationale Differentialfunctionen der y_i, welche bei allen linearen Substitutionen der y_i, die die Fläche φ in sich überführen — und darunter sind eben die sämmtlichen Operationen der Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung einbegriffen —, sich bis auf einen und denselben constanten Factor reproduciren: ihre Verhältnisse sind folglich rational bekannte Functionen. Wir sagen daher:

Die k Functionen $f_k(y_1 y_2 \cdots y_n)$ sind Fundamentallösungen einer linearen Differentialgleichung k^{ter} Ordnung mit rational bekannten Coefficienten.

Ist $k = 3$, so ergibt sich eine lineare Differentialgleichung 3^{ter} Ordnung:

$$z''' + q_1 z'' + q_2 z' + q_3 z = 0$$

möglichst allgemeiner Gestalt.

Ist $k = 4$, so ergibt sich eine lineare Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung mit *einer* quadratischen Relation zwischen den Fundamentallösungen z_1, z_2, z_3, z_4. Die Discriminante dieser Relation dürfen wir als nicht verschwindend voraussetzen, da wir den Fall einer verschwindenden Discriminante auf $k = m + 2$ (für $m = 2$) werfen können*). Die entsprechende Differentialgleichung wird daher, durch eine Transformation $z = \varrho \bar z$, wo ϱ eine rational bekannte logarithmische Ableitung besitzt, folgende Gestalt annehmen können:

$$\bar z^{IV} - \frac{r'-s'}{r-s}\bar z''' + 2(r+s)\bar z'' + \left\{3(r'+s') - 2(r+s)\frac{r'-s'}{r-s}\right\}\bar z'$$
$$- \left\{\frac{r'^2-s'^2}{r-s} - (r-s)^2 - (r''-s'')\right\}\bar z = 0$$

*) Die einzige übrigbleibende Gleichung $z_1 z_3 - z_2^2 = 0$ stellt nämlich im Raume R_3 eine Kegelfläche 2^{ten} Grades dar.

und wird dann bekanntlich durch die Producte der Lösungen der beiden Differentialgleichungen $u'' + ru = 0$, $v'' + sv = 0$ befriedigt.

Im 3^{ten} Falle $(k = m + 2)$ bekommen wir endlich eine reducible Differentialgleichung $(m+2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die m^{ten} Potenzen der Lösungen einer linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung mit rational bekannten Coefficienten befriedigt wird. Dieselbe kann durch eine Transformation $z = \varrho \bar{z}$ $\left(\text{mit rational bekanntem } \frac{\varrho'}{\varrho}\right)$ auf folgende Form gebracht werden:

$$\{\bar{z}' + r\bar{z}\} \left\{ \bar{z}^{(m+1)} + \binom{m+2}{3} s \bar{z}^{(m-1)} + 2\binom{m+2}{4} s' \bar{z}^{(m-2)} \right.$$
$$\left. + 3\binom{m+2}{5}\left(s'' + \frac{5m+12}{9} s^2\right) \bar{z}^{(m-3)} + \cdots \right\} = 0.$$

Nehmen wir nun an, dass die für z erhaltene lineare Differentialgleichung integrirt sei, so lassen sich aus den Gleichungen $z_k = f_k(y_1 y_2 \cdots y_n)$, nach den gemachten Voraussetzungen (und falls man die zwischen den y_i und zwischen den z_k bestehenden Gleichungen berücksichtigt), die y_i algebraisch und eindeutig, folglich auch rational berechnen. *Die Integration der vorgelegten linearen Differentialgleichung ist daher auf diejenige von einer der drei letztgeschriebenen Differentialgleichungen zurückgeführt;* und zwar in dem Sinne, dass die Lösungen ersterer, oder eventuell einer Transformirten derselben in $\bar{y} = \sigma y$ $\left(\text{mit rational bekanntem } \frac{\sigma'}{\sigma}\right)$, rationale Functionen der Lösungen irgend einer dieser letzten drei Differentialgleichungen sind. — Die Bestimmung der zur Transformation erforderlichen Functionen $f_k(y_1 y_2 \cdots y_n)$ gehört eigentlich nicht unserer Theorie an, sondern vielmehr derjenigen der Linearsysteme von algebraischen Curven in der Ebene und auf den rationalen Flächen; allerdings muss sie für jeden einzelnen Fall besonders ausgeführt werden.

Wir schliessen mit folgendem zusammenfassenden Satze:

Bestehen zwischen den Fundamentallösungen einer linearen Differentialgleichung von beliebiger Ordnung n irgend welche algebraische Relationen mit constanten Coefficienten, doch in der Art dass dieselben aus dem Gesammtraume $R_{n-1}(y_1 : y_2 : \cdots : y_n)$ *eine höchstens zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit absondern, so erfordert die Integration der vorgelegten Differentialgleichung, von algebraischen Operationen und Quadraturen abgesehen, höchstens die Integration:*

entweder von einer oder zwei linearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung (od. Riccati'schen Gleichungen);

oder auch einer einzigen linearen Differentialgleichung 3^{ter} Ordnung.

Lineare Differentialgleichungen, deren Integralcurve in *einer* dreidimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeit enthalten ist.

34. Ich habe neuerdings gezeigt*), dass jede dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeit, welche eine transitive Gruppe projectiver Transformationen zulässt, *rational* (d. h. ein-eindeutig auf den Raum R_3 abbildbar) ist.

Es würde daher keine Schwierigkeit darbieten, auch für derartige Mannigfaltigkeiten einen ähnlichen Satz aufzustellen, wie den 2ten Satz von Nr. 33 in Bezug auf algebraische Flächen. — Wir brauchen nur von der bereits vollzogenen Aufzählung der verschiedenen „Typen" von continuirlichen Gruppen von Cremona-Transformationen des Raumes R_3**) auszugehen (insofern eine jede projective Gruppe auf einer rationalen V_3, bei Abbildung letzterer auf R_3, in eine Cremona'sche Gruppe übergeht), für eine jede dieser typischen Gruppen irgendein (ein für allemal bestimmtes) invariantes, einfaches***), mindestens ∞^3-Linearsystem von Flächen auszusuchen, und letzteres in der üblichen Weise durch eine Mannigfaltigkeit V_3 darzustellen†). Dadurch werden wir eine endliche Anzahl typischer V_3 erhalten††); und jede V_3, die eine transitive Collineationsgruppe zulässt, wird sich auf eine dieser letzteren in der Weise abbilden lassen, dass die betrachteten projectiven Transformationen in ebenfalls projective übergehen.

Dies alles ist auch in meiner Abhandlung: *I gruppi di Jonquières generalizzati*†††) wesentlich enthalten, obgleich der hier erforderliche Satz in dieser Form dort nicht ausdrücklich auftritt.

Dieser Satz findet auf lineare Differentialgleichungen, deren Integralcurven in *einer* algebraischen V_3 mit transitiver Collineationsgruppe in

*) Vgl. meinen Aufsatz: *Un teorema sulle varietà algebriche a tre dimensioni con infinite trasformazioni proiettive in sè* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1. sem. 1899).

**) Enriques-Fano: *I gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio* (Ann. di Matem., s. II, t. 26; 1897); Fano: *I gruppi di Jonquières generalizzati* (Mem. della R. Acc. di Torino, s. II, t. 48; 1897—98).

***) Ein Linearsystem von Gebilden wird als „einfach" bezeichnet, wenn diejenigen ihm zugehörigen Mannigfaltigkeiten, welche einen Punkt allgemeiner Lage enthalten, zugleich auch durch keinen anderen mit ersterem veränderlichen Punkt gehen.

†) D. h. eine V_3 zu construiren, welche auf R_3 in der Weise abgebildet werden kann, dass ihren ebenen (2-dimensionalen) Durchschnitten die Flächen des obigen Linearsystems entsprechen.

††) Doch werden dieselben eine ziemlich grössere Anzahl bilden, als im Falle algebraischer Flächen: nämlich 15 anstatt 3.

†††) Mem. della R. Acc. di Torino, s. II, t. 48; 1897—98.

sich enthalten sind, eine ganz ähnliche Anwendung, wie wir es in Nr. 33 für Integralcurven, die auf einer algebraischen Fläche liegen, gesehen haben. Ohne auf Beweise einzugehen, wollen wir uns darauf beschränken, folgendes leicht ersichtliches Resultat anzugeben:

Jede lineare Differentialgleichung, deren Integralcurve in einer algebraischen V_3, die eine transitive Collineationsgruppe zulässt, enthalten ist, kann durch eine rationale (und eindeutig umkehrbare) Transformation $z_h = f_h(y_1 y_2 \cdots y_n)$ in eine ebenfalls lineare Differentialgleichung einer der nächstfolgenden Gattungen übergeführt werden):*

1. *Lineare Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung;*
2. *Lineare Differentialgleichung 5^{ter} Ordnung mit einer quadratischen Relation von nicht verschwindender Discriminante zwischen den Fundamentallösungen;*
3. *Lineare Differentialgleichung 6^{ter} Ordnung, welche durch die Producte der Lösungen von zwei ebenfalls linearen Differentialgleichungen bezw. 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung befriedigt wird;*
4. *Lineare Differentialgleichung 8^{ter} Ordnung, welcher die Producte der Lösungen von drei linearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung Genüge leisten;*
5. *Lineare Differentialgleichung $(2m+2)^{ter}$ Ordnung, welcher die Producte der Lösungen von zwei linearen Differentialgleichungen bezw. 2^{ter} und $(m+1)^{ter}$ Ordnung Genüge leisten — wobei noch zu bemerken ist, dass letztere durch die $(m-1)^{ten}$ Potenzen der Lösungen einer anderen linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung befriedigt werden muss;*
6. *Reducible lineare Differentialgleichungen irgend einer Ordnung k, welche die sämmtlichen Lösungen einer linearen Differentialgleichung $(k-1)^{ter}$ Ordnung gestatten — wobei hinzuzufügen ist, dass die Integralcurve letzterer auf einer algebraischen Fläche mit transitiver Collineationsgruppe liegen muss.* Das führt noch auf drei verschiedene Fälle, gemäss den Entwickelungen von Nr. 33;
7. *Lineare Differentialgleichungen $(m+2)^{ter}$ Ordnung, welche die Gestalt:*

$$(z'' + pz' + qz)\left(z^{(m)} + \binom{m+1}{3} s z^{(m-2)} + \cdots\right) = 0$$

*) In dieser Aufzählung habe ich für 1—5 dieselben Nummern behalten, mit welchen in meinem Aufsatze: *Le trasformazioni infinitesime dei gruppi cremoniani tipici dello spazio* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1. sem. 1898) die infinitesimalen Transformationen der entsprechenden Cremona'schen Gruppen des R_3 bezeichnet wurden. Der jetzige Fall 6 entspricht den Gruppen [6], [7], [8] der genannten Aufzählung; und die Fälle 7—9, 10—11 u. 12 entsprechen bezw. den Gruppen [9]—[11], [13]—[14] u. [15]—[16]. Die Gruppe [12] ist in R_3 intransitiv und findet hier folglich keine Anwendung.

haben, oder auch mit einer solchen äquivalent sind: dabei ist die zweite Klammer mit der linken Seite der in Nr. 13 auftretenden Differentialgleichung $(\bar{\mathrm{A}})$ identisch;

8. *Lineare Differentialgleichungen $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die sämmtlichen Lösungen von zwei ebenfalls linearen Differentialgleichungen bezw. m^{ter} und n^{ter} Ordnung von der in Nr. 13 untersuchten Classe gestatten;*

9. *Lineare Differentialgleichungen irgend einer Ordnung $m\binom{n+1}{2}+2$ von ziemlich complicirter Gestalt,* deren Integration aber bloss diejenige einer linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung und eine gewisse Anzahl von Quadraturen erfordert;

10. *Lineare Differentialgleichungen 8^{ter} Ordnung, welche, vom 2^{ten} Gliede befreit, eine achtgliedrige, mit der projectiven Gruppe der Ebene gleichzusammengesetzte Rationalitätsgruppe besitzen.* — Die Integration dieser Differentialgleichung erfordert bloss diejenige einer linearen Differentialgleichung 3^{ter} Ordnung; vermuthlich wird sie durch die Producte der Lösungen letzterer und ihrer Adjungirten befriedigt (worunter eben *acht* linear unabhängige vorhanden sind);

11. *Lineare Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung mit den Relationen:*

$$\left\|\begin{matrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{m-2} \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_{m-1} \\ y_3 & y_4 & \cdots & y_m \end{matrix}\right\| = 0$$

zwischen den Fundamentallösungen, welche zu der in Nr. 14 untersuchten Classe gehören;

12. *Lineare Differentialgleichungen 6^{ter} und 12^{ter} Ordnung mit gewissen quadratischen Gleichungen zwischen den Fundamentallösungen* (Enriques-Fano, a. a. O., §§ 26—27), welche ebenfalls zu der in Nr. 14 untersuchten Classe gehören.

35. Ist eine algebraische V_3 bei einer continuirlichen projectiven Gruppe G_k invariant, welche in Bezug auf sie *intransitiv* ist, so kann man leicht zeigen, dass einer der folgenden Fälle auftreten muss:

1. Die Gruppe G_k ist integrabel;

2. Die Gruppe G_k ist nicht-integrabel, enthält aber eine invariante und integrable Untergruppe G_{k-3} (insbesondere kann sie, für $k=3$, dreigliedrig und einfach sein);

3. Es ist $k=6$, und die Gruppe G_k mit der umfassendsten continuirlichen projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche 2^{ten} Grades gleichzusammengetzt;

4. **Es ist $k = 8$ und G_k mit der projectiven Gruppe der Ebene holoedrisch isomorph.**

Es folgt daraus, dass die Integration einer linearen Differentialgleichung, deren Integralcurve in *einer* derartigen V_3 enthalten ist, je nach den 4 verschiedenen Fällen, entweder nur algebraische Operationen und Quadraturen erfordern wird, oder auch die Integration von einer oder zwei Riccati'schen Gleichungen, oder endlich einer nicht linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung, welche durch eine lineare Differentialgleichung 3ter Ordnung ersetzt werden kann.

Fassen wir Alles, was wir in diesem Capitel gesagt haben, zusammen, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Ist die Integralcurve einer linearen Differentialgleichung in einer algebraischen Mannigfaltigkeit von $k \leq 3$ Dimensionen enthalten — d. h. bestehen zwischen ihren Fundamentallösungen algebraische Relationen, welche eine höchstens dreidimensionale Mannigfaltigkeit darstellen —, so erfordert die Integration dieser Differentialgleichung, von algebraischen Operationen und Quadraturen abgesehen, nur die Integration:

1. *einer linearen Differentialgleichung 4ter Ordnung;*

2. *oder einer linearen Differentialgleichung 3ter Ordnung und eventuell auch einer von der 2ten Ordnung;*

3. *oder endlich von höchstens drei linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung* (oder *Riccati'schen Gleichungen*).

Colognola ai Colli bei Verona, Ende Juli 1899.

Inhaltsverzeichniss.

Capitel 1.

Einleitende Bemerkungen.

Capitel 2.

Capitel 3.

Capitel 4.

Capitel 5.

Capitel 6.

Ueber lineare homogene Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit einer quadratischen Relation zwischen den Fundamentallösungen.

Der Staudt-Clausen'sche Satz.

Von

J. C. Kluyver in Leiden.

Der von Herrn K. Schwering in den Annalen Bd. 52, pag. 171 gegebene Beweis des obigen Satzes veranlaſst mich zur Mittheilung des nachstehenden Beweises.

Aus der Definitionsgleichung der Bernoulli'schen Zahlen

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}-1=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}x^{2n}$$

liest man sofort ab

$$(-1)^n B_n = D^{2n}_{x=0}\frac{xe^x}{1-e^x}=D^{2n}_{x=0}\frac{e^x}{1-e^x}\log\left[1-(1-e^x)\right]$$

$$=-D^{2n}_{x=0}\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{1}{h}e^x(1-e^x)^{h-1},$$

oder auch, da man offenbar hat

$$D^{\alpha}_{x=0}e^x(1-e^x)^{\beta}=0,\qquad (\alpha<\beta).$$

$$(-1)^{n+1}B_n=\sum_{h=1}^{h=2n+1}\frac{1}{h}D^{2n}_{x=0}e^x(1-e^x)^{h-1}.$$

Zur Bestimmung der gebrochenen Bestandtheile, die rechts auftreten, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

I. *h ist theilbar*, etwa gleich $a\times b$. Mit Ausnahme des Falles $h=4$ ist $a+b\leqq h-1$, folglich sind in

$$D^{2n}_{x=0}e^x(1-e^x)^{h-1}=D^{2n}_{x=0}(1-e^x)^a\times(1-e^x)^b\times e^x(1-e^x)^{h-1-a-b}$$

alle Exponenten positiv. Nach Ausführung der Differentiation und Nullsetzen des x verschwinden alle Glieder, in welchen nicht beide Factoren $(1-e^x)^a$ und $(1-e^x)^b$ differentiirt worden sind. Die übrigen Glieder aber enthalten sämmtlich den Factor $a\times b$, mithin ist

$$\frac{1}{h}D^{2n}_{x=0}e^x(1-e^x)^{h-1}$$

ganzzahlig. Der Fall $h = 4$ liefert keine wirkliche Ausnahme, denn man hat

$$D^{2n}_{x=0}\, e^x(1-e^x)^3 = 1 - 3 \cdot 2^{2n} + 3 \cdot 3^{2n} - 4^{2n} \equiv 0. \quad (\text{mod. } 4)$$

II. *h ist eine Primzahl.* Wir setzen

$$2n = k(h-1) + \alpha. \qquad (0 \leqq \alpha < h-1)$$

Aus den beiden Gleichungen

$$D^{2n}_{x=0}\, e^x(1-e^x)^{h-1} = 1^{2n} - (h-1)_1 2^{2n} + (h-1)_2 3^{2n} - \cdots + h^{2n},$$

$$D^{\alpha}_{x=0}\, e^x(1-e^x)^{h-1} = 0 = 1^{\alpha} - (h-1)_1 2^{\alpha} + (h-1)_2 3^{\alpha} - \cdots + h^{\alpha}$$

ergiebt sich durch Subtraction

$$D^{2n}_{x=0}\, e^x(1-e^x)^{h-1} = -(h-1)_1 2^{\alpha}[2^{k(h-1)}-1] + (h-1)_2 3^{\alpha}[3^{k(h-1)}-1] + \cdots + h^{\alpha}[h^{k(h-1)}-1].$$

Wenn nun $\alpha > 0$ ist, so ist dem Fermat'schen Satze zufolge die rechte Seite durch h theilbar, für $\alpha = 0$ aber giebt das letzte Glied einen Rest, man findet in diesem Falle

$$D^{2n}_{x=0}\, e^x(1-e^x)^{h-1} \equiv -1. \quad (\text{mod. } h)$$

Hieraus schliesst man, dass nur diejenigen Glieder des Ausdrucks für $(-1)^{n+1} B_n$ gebrochene Bestandtheile $\left(\text{von der Form } -\frac{1}{h}\right)$ liefern, für welche h eine Primzahl und $h-1$ ein Theiler von $2n$ ist (der Fall $h = 2$ eingerechnet), und daher

$$B_n = \text{ganze Zahl} + (-1)^n \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots\right],$$

wo h_i Primzahl und $2n$ durch $h_i - 1$ theilbar ist.

Ueber Lösungen des Dirichlet'schen Problems, welche durch eine Combination der Methoden von Neumann und Schwarz gefunden werden.

Von

ARTHUR KORN in München.

§ 1.

Es sei ω eine stetig gekrümmte*), geschlossene Oberfläche, es sei ferner f eine Function der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf derselben, welche mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist; wir bilden successive die Functionen der Stelle (xyz) des Innen- resp. Aussenraumes von ω (die Neumann'sche Reihe):

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{W}_0 = 0, \\ \mathfrak{W}_1 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\omega f\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ \mathfrak{W}_j = +\frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega (\mathfrak{W}_{j-1,a} + \mathfrak{W}_{j-1,i})\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ \qquad\qquad (j = 2, 3, \cdots), \end{cases}$$

in denen ν die *innere* Normale von $d\omega$, r die Entfernung und Richtung

$$d\omega(\xi\eta\zeta) \longrightarrow (xyz)$$

vorstellt, während die

$$\mathfrak{W}_{ji} \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}_{ja} \qquad (j = 1, 2, 3, \cdots)$$

die Randwerthe der Integrale $\mathfrak{W}_j$ an der inneren resp. äusseren Seite

*) Wir wollen den Ausdruck „stetig gekrümmt" stets in dem Sinne gebrauchen, dass die Richtungscosinusse der Normalen der Fläche

$$\cos(\nu x),\ \cos(\nu y),\ \cos(\nu z)$$

eindeutige und stetige Functionen der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf der Fläche sind und endliche erste Ableitungen haben.

von ω an der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ repräsentiren, dann lässt sich *in aller Strenge* zeigen, dass die Functionen $\mathfrak{W}_j$ den Bedingungen genügen:

$$\text{(2)} \qquad \text{abs. } \mathfrak{W}_j \leqq \mathsf{A} \cdot \Lambda^j, \qquad (j = 1, 2, \cdots)$$

wo A eine endliche Constante, Λ einen echten Bruch darstellt, falls

a) die Fläche ω in Bezug auf einen inneren Punkt O convex ist (d. h. falls sich ein Punkt O innerhalb ω angeben lässt, durch den keine Tangentialebene zu ω gelegt werden kann),

b) die ersten Ableitungen des Integrales:

$$\int_\omega f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

in ganzer Erstreckung des Innenraumes, und in ganzer Erstreckung des Aussenraumes eindeutig und stetig sind und die Gleichheit der normalen Ableitungen zu beiden Seiten der Fläche gesichert ist.

Die Bedingung b) ist im besonderen erfüllt, wenn

b_1) auch die zweiten Ableitungen von f auf ω endlich oder wenigstens die ersten Ableitungen von f auf ω regulär*) sind,

oder:

b_2) eine Potentialfunction**) F eines von ω und einer ω beliebig nahen, geschlossenen, ganz innerhalb (ganz ausserhalb) ω verlaufenden Fläche ω_i (ω_a) begrenzten Raumes existirt, welche an der Fläche ω die Randwerthe f besitzt.

Setzt man:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} W_{ja} = \mathfrak{W}_{j+1} + \mathfrak{W}_j & \text{im Aussenraume,} \\ & (j = 0, 1, 2, \cdots) \\ W_{ji} = \mathfrak{W}_{j+1} - \mathfrak{W}_j & \text{im Innenraume,} \\ & (j = 0, 1, 2, \cdots), \end{cases}$$

so folgt in bekannter Weise mit Hilfe von (2), dass die Functionen:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} U_a = \frac{1}{2} \sum_0^\infty{}^j\, W_{ja} & \text{des Aussenraumes,} \\ U_i = \frac{1}{2} \sum_0^\infty{}^j\, (-1)^{j+1} W_{ji} & \text{des Innenraumes} \end{cases}$$

*) Wir nennen eine Function Φ der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf ω regulär, wenn für zwei beliebige Punkte $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ und $(\xi_2\eta_2\zeta_2)$ derselben in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs. } (\Phi_2 - \Phi_1) \overline{\overline{<}}\, a \cdot r_{12}^{1-\lambda},$$

wo a eine endliche Constante, λ einen echten Bruch vorstellt.

**) Der Begriff der Potentialfunction schliesst die Eindeutigkeit und Stetigkeit der ersten Ableitungen in ganzer Erstreckung des betreffenden Gebietes ein. Vgl. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, Ferd. Dümmler's Verlagsbuchh. Berlin 1899, S. 180—181.

das Dirichlet'sche Problem für den Innen- und Aussenraum von ω bei den Randwerthen

$$f \text{ resp. } f + \text{const.}$$

lösen (Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels); es lässt sich ferner mit Hilfe eines von Liaponnoff*) gegebenen Beweises zeigen, dass bei den obigen Voraussetzungen U_i resp. U_a wirkliche Potentialfunctionen des Innen- resp. Aussenraumes sind, d. h. dass auch die ersten Ableitungen von U_i (U_a) in ganzer Erstreckung des Innenraumes (Aussenraumes) von ω eindeutig und stetig sind.

Da sich jeder genügend kleine Theil jeder stetig gekrümmten Fläche als Theil einer Fläche auffassen lässt, welche in Bezug auf einen inneren Punkt convex ist und sich die Neumann'sche Methode auch für abtheilungsweise stetige Randwerthe f unter Bedingungen beweisen lässt, wie sie zur Anwendung der Schwarz'schen Methoden des alternirenden Verfahrens nothwendig und hinreichend sind, so gelingt es durch Combination der Methoden von Neumann und Schwarz das Dirichlet'sche Problem für den Innen- und Aussenraum einer *beliebigen* geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω zu lösen, unter den folgenden sehr allgemeinen Bedingungen für die Randwerthe f:

c_1) Es existirt eine Function F eines von ω und einer ω beliebig nahen, geschlossenen, ganz innerhalb (ganz ausserhalb) ω verlaufenden Fläche ω_i (ω_a) begrenzten Raumes, die in demselben mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist, endliche zweite Ableitungen hat (an Stelle der Endlichkeit der zweiten Ableitungen genügt auch bereits die Regularität der ersten Ableitungen) und an der Fläche ω die Randwerthe f besitzt;

oder:

c_2) Es existirt eine Potentialfunction F des von ω und ω_i (ω_a) begrenzten Raumes, welche an der Fläche ω die Randwerthe f besitzt.

Den Beweis, dass man unter diesen Bedingungen die Lösung des Dirichlet'schen Problems durch Combination der Methoden von Schwarz und Neumann wirklich finden kann, habe ich in meinem Lehrbuche der Potentialtheorie (Theil IV) ausführlich gegeben, den Beweis indessen dafür, dass die so gewonnenen Lösungen auch wirkliche Potentialfunctionen des Innenraumes (Aussenraumes) darstellen, dass also auch ihre ersten Ableitungen in ganzer Erstreckung des Innenraumes (Aussenraumes) eindeutig und stetig sind, habe ich dort nur angedeutet (ib. S. 341—344), und dieser Beweis soll nun im folgenden in aller Strenge geliefert werden.

*) Liapounoff, sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet (Journ. de mathém. 1898). A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie S. 332—340.

§ 2.

Der Beweis schliesst sich eng an die Beweismethode von Liapounoff an, und wir werden auch hier von folgenden Hilfssätzen Gebrauch machen.

Ia) Ist $\varkappa$ eine auf dem stetig gekrümmten Flächenstücke ω eindeutige und stetige Function, so genügen die Werthe des Integrales:

$$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

auf der Fläche selbst:

$$W_\omega = \frac{1}{2}(W_a + W_i)$$

für zwei beliebige Punkte $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ und $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12} der Bedingung:

$$\text{(5)} \qquad \text{abs.}\,[W_\omega(\xi_2 \eta_2 \zeta_2) - W_\omega(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)] \overline{\gtrless} a \cdot \text{abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12}^{1-\lambda},$$

wo abs. Max. $\varkappa$ den absolut grössten Werth von $\varkappa$ auf ω, a eine endliche Constante und λ einen echten Bruch vorstellt. Weder a und λ, noch die obere Grenze, unter der r_{12} liegen muss, hängen dabei von der Function $\varkappa$ ab, sie sind lediglich der Fläche ω zugehörige Coustanten*).

Ib) Ist H eine auf dem stetig gekrümmten Flächenstücke ω eindeutige und stetige Function, so genügen die normalen Ableitungen des Integrales:

$$V = \int_\omega H \frac{d\omega}{r}$$

auf der Fläche selbst:

$$\left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_\omega = \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_a + \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_i\right]$$

für zwei beliebige Punkte $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ und $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12} der Bedingung:

$$\text{(6)} \qquad \text{abs.}\left[\left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_\omega (\xi_2 \eta_2 \zeta_2) - \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_\omega (\xi_1 \eta_1 \zeta_1)\right] \overline{\gtrless} a \cdot \text{abs. Max. } H \cdot r_{12}^{1-\lambda},$$

wo abs. Max. H den absolut grössten Werth von H auf ω, a eine endliche Constante und λ einen echten Bruch vorstellt. Weder a und λ, noch die obere Grenze, unter der r_{12} liegen muss, hängen dabei von der Function H ab, sie sind lediglich der Fläche ω zugehörige Constanten*).

IIa) Genügt auf der geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω die Function $\varkappa$ für zwei beliebige Punkte $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ und $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ in genügend kleiner Entfernung r_{12} der Bedingung:

*) Lehrbuch der Potentialtheorie S. 389.

$$(7) \qquad \text{abs.}\,(\varkappa_2 - \varkappa_1) \overline{\overline{<}}\, a \cdot r_{12}^{1-\lambda}, \qquad \begin{pmatrix} a \text{ endlich,} \\ \lambda \text{ echter Bruch} \end{pmatrix}$$

so ist bei genügend kleiner Entfernung $\mathfrak{r}$ des variablen Punktes $(x\,y\,z)$ von ω:

$$(8) \qquad \text{abs.}\, \frac{\partial}{\partial h} \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \overline{\overline{<}} \frac{c_1 \text{ abs. Max } \varkappa + c_2 \cdot a}{\mathfrak{r}^{\lambda'}},$$

wo h eine beliebige Richtung, λ' einen echten Bruch vorstellt, während c_1 und c_2 zwei endliche Constanten repräsentiren, die von der Function $\varkappa$ ganz unabhängig sind*).

IIb) Genügt auf der geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω die Function H für zwei beliebige Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ in genügend kleiner Entfernung r_{12} der Bedingung:

$$(9) \qquad \text{abs.}\,(H_2 - H_1) \overline{\overline{<}}\, a \cdot r_{12}^{1-\lambda}, \qquad \begin{pmatrix} a \text{ endlich,} \\ \lambda \text{ echter Bruch} \end{pmatrix},$$

so ist für einen Punkt $(x\,y\,z)$ der Normalen ν_0 in irgend einem Punkte $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$ der Fläche bei genügend kleiner Entfernung $\mathfrak{r}$ von $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$:

$$(10) \qquad \text{abs.}\, \frac{\partial^2}{\partial h\, \partial \nu_0} \int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r} \overline{\overline{<}} \frac{c_1 \text{ abs. Max. } H + c_2 \cdot a}{\mathfrak{r}^{\lambda'}},$$

wo h eine beliebige Richtung, λ' einen echten Bruch vorstellt, während c_1 und c_2 zwei endliche Constanten repräsentiren, die von der Function H ganz unabhängig sind*).

Bemerkung*) zu IIa) und IIb). Ist in IIa) und IIb) ω nicht gegeschlossen, sondern ein von der Curve σ begrenztes, stetig gekrümmtes Flächenstück, so kommt in den Formeln (8) und (10) rechts noch ein Glied:

$$\frac{c_3 \text{ abs. Max. } \varkappa}{P} \quad \text{resp.} \quad \frac{c_3 \text{ abs. Max. } H}{P}$$

hinzu, wobei c_3 eine der Fläche zugehörige Constante, P die kürzeste Entfernung des variabeln Punktes $(x\,y\,z)$ von der Randcurve σ vorstellt.

§ 3.

Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über und betrachten die unter den auf S. 595 gegebenen Bedingungen durch Combination der Methoden von Neumann und Schwarz construirbare Lösung U_i des

*) Lehrbuch der Potentialtheorie S. 390—391; aus den Beweisen daselbst ergiebt sich auch leicht die hier hinzugefügte Bemerkung für nicht geschlossene Flächen.

Dirichlet'schen Problems für den Innenraum*) einer *beliebigen* geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, und zwar in der Nähe eines Punktes $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ der Fläche.

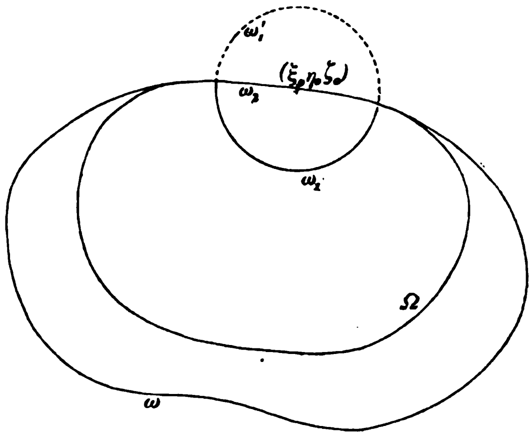


Fig. 1.

Wir construiren um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ als Centrum eine Kugel mit einem genügend kleinen Radius, so dass das innerhalb der Kugel gelegene Stück ω_2 der Fläche ω als Theil einer gegen einen inneren Punkt convexen Fläche Ω aufgefasst werden kann, der im übrigen noch ein endliches Stück der Fläche ω über ω_2 hinaus angehören möge; den innerhalb ω gelegenen Theil der Kugelfläche bezeichnen wir mit ω_1, den Theil ausserhalb mit ω_1'. Da wir die Werthe von U_i an den Flächenstücken ω_1 und ω_2 kennen, können wir bei diesen gegebenen Randwerthen das Dirichlet'sche Problem für den von ω_1 und ω_2 begrenzten Raum mit Hülfe der Schwarz'schen Methode des alternirenden Verfahrens durch Combination der Kugelfläche mit der Fläche Ω lösen**), und diese Lösung muss mit der Function U_i identisch sein.

Die auf diesem Wege construirbare, mit U_i identische Function setzt sich dann aus einer Lösung des Dirichlet'schen Problemes für den Innenraum der Kugel und einer Lösung des Dirichlet'schen Problems für den Innenraum der Fläche Ω additiv zusammen, die beide mit Hilfe der Neumann'schen Methode construirbar sind. Bezeichnen wir die erstere mit u', so sind die Randwerthe der zweiten (u) an der Fläche Ω:

$$(11)\quad \begin{cases} f - u' \text{ an der Fläche } \omega_2, \\ f \text{ an dem der Fläche } \Omega \text{ über } \omega_2 \text{ hinaus angehörenden Theile von } \omega, \\ \text{eine beliebige endliche Constante an dem übrigbleibenden Theile} \\ \qquad \text{von } \Omega. \end{cases}$$

In $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$, als in einem innerhalb der Kugel gelegenen Punkte, sind die Ableitungen von u' eindeutig und stetig; zum Beweise dafür, dass $\frac{\partial U_i}{\partial \nu}$

*) Die Untersuchung für die Lösung des äusseren Problemes ist genau analog.

**) Lehrbuch der Potentialtheorie S. 319, Zusatz zu Xb); die Randwerthe U_i erfüllen in der That die Bedingungen dieses Satzes.

in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ eindeutig und stetig ist, haben wir zu zeigen, dass die Lösung u des Dirichlet'schen Problems für den Innenraum von Ω bei den Randwerthen (11) in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ eindeutige und stetige normale Ableitungen hat.

Dieselbe ist aus den Randwerthen (11) mit Hilfe der Neumann'schen Methode construirbar, und wir bilden daher die der Fläche Ω und den Randwerthen (11) zugehörigen Functionen $\mathfrak{W}_j$ (somit auch W_{ji} und W_{ja}) der Neumann'schen Reihe. Wir construiren ferner um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ als Centrum eine Kugel mit einem Radius R_j $(< R)$, nennen ω_{j1} den innerhalb Ω gelegenen Theil der Kugel (R_j) und ω_{j2} den innerhalb der Kugel gelegenen Theil von Ω (Fig. 2).

Dann ist:

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega-\omega_{j2}+\omega_{j1}} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu'}\,\frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega-\omega_{j2}+\omega_{j1}} \mathfrak{W}_{ji}\,\frac{\cos(r\nu')}{r^2}\,d\omega$$

für jeden Punkt (xyz) im Innenraume von $\omega_{j1}\,\omega_{j2}$, wenn wir mit ν' die innere Normale des von ω_{j1} und $\Omega-\omega_{j2}$ begrenzten Gebietes bezeichnen, oder:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-\omega_{j2}} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu'}\,\frac{d\omega}{r} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_{j1}} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu'}\,\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-\omega_{j2}+\omega_{j1}} \mathfrak{W}_{ji}\,\frac{\cos(r\nu')}{r^2}\,d\omega$$

(im Innenraume von $\omega_{j1}\,\omega_{j2}$),

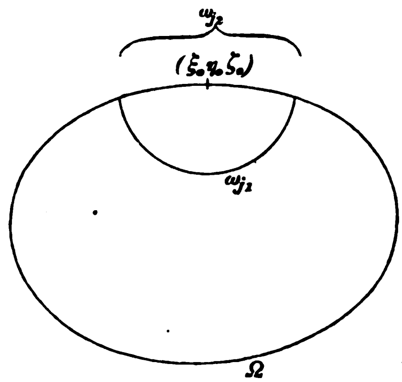


Fig. 2.

so dass $(j = 1, 2, \cdots)$:

$$(12a) \quad W_{ji} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\,\frac{d\omega}{r}\text{*)},$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_{j1}+\omega_{j2}} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\,\frac{d\omega}{r}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{\Omega-\omega_{j2}} \mathfrak{W}_{ji}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega - \int\limits_{\omega_{j1}} \mathfrak{W}_{ji}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right],$$

(im Innenraume von $\omega_{j1}\,\omega_{j2}$),

wenn wir jetzt mit ν die innere Normale von ω und die in den Innenraum von $\omega_{j1}\,\omega_{j2}$ hineingehenden Normalen von ω_{j1} und ω_{j2} bezeichnen.

Analog ist $(j = 1, 2, \cdots)$:

*) Lehrbuch der Potentialtheorie S. 252.

$$(12\text{b}) \qquad W_{ja} \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_{j1}+\omega_{j2}} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{\Omega-\omega_{j2}} \mathfrak{W}_{ji}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega - \int\limits_{\omega_{j1}} \mathfrak{W}_{ji}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right]$$

(im Aussenraume von Ω),

und es folgt aus (12a) und (12b) ($j = 1, 2, \cdots$):

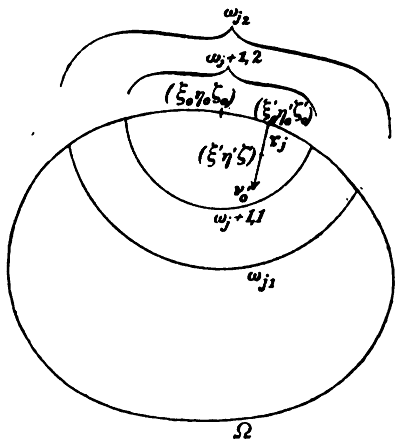


Fig. 3.

$$(13)\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{W}_{j+1}}{\partial \nu_0'} &\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0'} + \frac{\partial W_{ja}}{\partial \nu_0'}\right)^{*)},\\ &= +\frac{1}{4\pi}\left[\left|\frac{\partial}{\partial \nu_0'}\int\limits_{\omega_{j1}+\omega_{j2}} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r}\right|_i\right.\\ &\qquad \left. + \left|\frac{\partial}{\partial \nu_0'}\int\limits_{\omega_{j1}+\omega_{j2}} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r}\right|_a\right]\\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \nu_0'}\left[\int\limits_{\Omega-\omega_{j2}} \mathfrak{W}_{ji}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right.\\ &\qquad \left. - \int\limits_{\omega_{j1}} \mathfrak{W}_{ji}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right] \end{aligned}\right.$$

für irgend einen Punkt $(\xi_0'\eta_0'\zeta_0')$ des Flächenstückes ω_{j2}.

Wir construiren schliesslich noch um $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ als Centrum eine Kugel mit dem Radius R_{j+1} ($< R_j$) und bezeichnen den innerhalb der Fläche Ω gelegenen Theil der Kugelfläche (R_{j+1}) mit $\omega_{j+1,1}$, den innerhalb der Kugelfläche gelegenen Theil von Ω mit $\omega_{j+1,2}$, dann gilt die Formel (12a) für jeden Punkt (xyz) im Innenraume von $\omega_{j+1,1}\,\omega_{j+1,2}$ und die Formel (13) für jeden Punkt $(\xi_0'\eta_0'\zeta_0')$ der Fläche $\omega_{j+1,2}$.

§ 4.

Es folgt aus (2) und den Hilfssätzen (Ia) und (IIa), falls wir R und somit auch alle R_j kleiner annehmen als eine genügend kleine Länge:

$$\text{abs.}\,\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu} \overline{\underline{<}} \frac{c\Lambda^{j-1}}{\mathfrak{r}^{\lambda}}, \qquad (j = 2, 3, \cdots)$$

für irgend einen Punkt des von $\omega_{j1}\,\omega_{j2}$ begrenzten Raumes mit der kleinsten Entfernung $\mathfrak{r}$ von Ω, wobei c eine endliche, lediglich von der Fläche Ω abhängige Constante ist, λ und Λ echte Brüche vorstellen.

*) Lehrbuch der Potentialtheorie S. 254.

Wir wollen mit Hilfe dieser Ungleichung die Formel:

$$(14) \qquad \int\limits_{\omega_{j1}} \text{abs.}\, \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\, d\omega \mathrel{\overline{\overline{<}}} C \cdot \Lambda^{j-1}, \qquad (j = 2, 3, \cdots)$$

beweisen, wo C wieder eine endliche Constante vorstellt. Wir theilen hierzu ω_{j1} in zwei Theile, einen Theil I, für den:

$$\mathfrak{r} \mathrel{\overline{\overline{>}}} P,$$

wo:

$$P = a \cdot R_j^{1+\lambda'}, \qquad \begin{pmatrix} a \text{ endlich} \\ \lambda' \text{ echter Bruch} \end{pmatrix},$$

und einen Theil II, für den

$$\mathfrak{r} \mathrel{\overline{\overline{<}}} P,$$

dann ist der von I herrührende Theil des in (14) links stehenden Integrales

$$< \text{endl. Const.}\, \frac{R_j^2}{P^\lambda}\, \Lambda^{j-1} < A \cdot \Lambda^{j-1}, \qquad (A \text{ endlich});$$

der von II herrührende Theil

$$< \text{endl. Const.}\; \Lambda^{j-1} \int\limits_{\mathrm{II}} \frac{d\omega}{\varrho^\lambda \sin^\lambda \Theta},$$

wo ϱ die kürzeste Entfernung des Elementes $d\omega$ von der Randcurve der Fläche ω_{j1} und Θ den kleinsten Winkel vorstellt, den ω_{j1} und ω_{j2} mit einander bilden, somit

$$< B \cdot \Lambda^{j-1}, \qquad (B \text{ endlich}),$$

und damit ist die Formel (14) bewiesen.

Wir bezeichnen nun mit A_j den absolut grössten Werth von $\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}$ an ω_{j2}, also mit A_{j+1} den absolut grössten Werth von $\frac{\partial \mathfrak{W}_{j+1}}{\partial \nu}$ an $\omega_{j+1,2}$, dann folgt aus (13) $(j = 2, 3, \cdots)$:

$$(15) \qquad A_{j+1} \mathrel{\overline{\overline{<}}} \bar{a} \cdot A_j + \bar{b} \cdot \frac{\Lambda^{j-1}}{(R_j - R_{j+1})^3}, \qquad \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} \text{endlich} \Big);$$

denn der von ω_{j2} herrührende Theil der ersten und zweiten Zeile rechts ist seinem absoluten Werthe nach:

$$\mathrel{\overline{\overline{<}}} \text{endl. Const.}\; A_j,$$

der von ω_{j1} herrührende Theil der ersten und zweiten Zeile nach (14):

$$\mathrel{\overline{\overline{<}}} \text{endl. Const.}\, \frac{\Lambda^{j-1}}{(R_j - R_{j+1})^2},$$

der absolute Werth der dritten und vierten Zeile nach (2):

$$\overline{\overline{<}} \text{ endl. Const. } \frac{\Lambda^j}{(R_j - R_{j+1})^3}.$$

Damit ist die Formel (15) bewiesen.

Es folgt weiter aus (13) für zwei beliebige Punkte $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ und $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ des Flächenstückes $\omega_{j+1,2}$ in genügend kleiner Entfernung r_{12} $(j = 2, 3, \cdots)$:

$$(16) \qquad \text{abs.} \left[\left| \frac{\partial \mathfrak{W}_{j+1}}{\partial \nu} \right|_2 - \left| \frac{\partial \mathfrak{W}_{j+1}}{\partial \nu} \right|_1 \right] \overline{\overline{<}} \left\{ \bar{\alpha} A_j + \bar{\beta} \cdot \frac{\Lambda^{j-1}}{(R_j - R_{j+1})^4} \right\} r_{12}^{1-\lambda},$$

wo $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ endliche Constanten, λ einen echten Bruch vorstellt, denn diese Differenz ist für den von ω_{j2} herrührenden Theil der ersten und zweiten Zeile rechts in (13):

$$< \mathsf{A} \cdot A_j \cdot r_{12}^{1-\lambda}, \qquad (\mathsf{A} \text{ endlich, } \lambda \text{ echter Bruch})$$

nach Hilfssatz Ib), für den von ω_{j1} herrührenden Theil der ersten und zweiten Zeile rechts in (13):

$$< \mathsf{B} \cdot \frac{\Lambda^{j-1} \cdot r_{12}}{(R_j - R_{j+1})^3}, \qquad (\mathsf{B} \text{ endlich})$$

unter Berücksichtigung von (14); endlich für die dritte und vierte Zeile rechts in (13):

$$< \Gamma \cdot \frac{\Lambda^j \cdot r_{12}}{(R_j - R_{j+1})^4}, \qquad (\Gamma \text{ endlich})$$

unter Berücksichtigung von (2); damit ist die Formel (16) bewiesen.

§ 5.

Wir denken uns jetzt auf der Normalen ν_0' in $(\xi_0' \eta_0' \zeta_0')$ einen Punkt $(\xi' \eta' \zeta')$ in der Entfernung $\mathfrak{r}_j$ $(< R_{j+1})$ von $(\xi_0' \eta_0' \zeta_0')$, dann ist identisch:

$$(17) \qquad \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0'} = \left| \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0'} \right|_{(\xi' \eta' \zeta')} - \int_0^{\mathfrak{r}_j} \left| \frac{\partial^2 W_{ji}}{\partial \nu_0'^2} \right|_{(\xi' \eta' \zeta')} d\mathfrak{r}_j;$$

wir verstehen dabei unter $\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0'}$, wenn wir diesen Ausdruck ohne weiteren Zusatz gebrauchen, den Werth der normalen Ableitung von W_{ji} an der Stelle $(\xi_0' \eta_0' \zeta_0')$.

Nun ist nach Hilfssatz IIa) $(j = 3, 4, \cdots)$:

$$(18) \qquad \text{abs.} \left| \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0'} \right|_{(\xi' \eta' \zeta')} \overline{\overline{<}} \frac{\mathsf{A}'}{\mathfrak{r}_j} \Lambda^{j-2}, \qquad (\mathsf{A}' \text{ endlich})$$

unter Berücksichtigung von (3) und (2).

Ferner folgt aus (12a) ($j=3, 4, \cdots$):

$$\text{(19)}\qquad \text{abs.}\left|\frac{\partial^2 W_{ji}}{\partial \nu_0'^2}\right|_{(\xi'\eta'\zeta')} \overline{\gtrless} \frac{1}{\mathfrak{r}_j^{\lambda'}}(\alpha\cdot A_{j-1}+\beta\cdot\Lambda^{j-2})\frac{1}{(R_j-R_{j+1})^4}$$

(α und β endlich),

wenn wir jedes:

$$R_j - R_{j+1} < R_{j-1} - R_j$$

annehmen; denn der von ω_{j2} herrührende Beitrag des ersten Integrales rechts in (12a) zu $\left|\frac{\partial^2 W_{ji}}{\partial \nu_0'^2}\right|_{(\xi'\eta'\zeta')}$ ist nach Hilfssatz IIb) und (15), (16):

$$< \frac{1}{\mathfrak{r}_j^{\lambda'}}\left\{c_1\left[\bar{a}\cdot A_{j-1}+\bar{b}\cdot\frac{\Lambda^{j-2}}{(R_{j-1}-R_j)^3}\right]\right.$$
$$\left. + c_2\left[\bar{\alpha}\cdot A_{j-1}+\bar{\beta}\cdot\frac{\Lambda^{j-2}}{(R_{j-1}-R_j)^4}\right]\right\}$$
$$+\frac{c_3}{R_j-R_{j+1}}\left[\bar{a}\cdot A_{j-1}+\bar{b}\cdot\frac{\Lambda^{j-2}}{(R_{j-1}-R_j)^3}\right]^{*)};$$

der von ω_{j1} herrührende Beitrag des ersten Integrales rechts in (12a):

$$<\gamma\cdot\frac{\Lambda^{j-1}}{(R_j-R_{j+1})^3},\qquad (\gamma \text{ endlich})$$

unter Berücksichtigung von (14); der von der zweiten Zeile rechts in (12a) herrührende Beitrag:

$$<\gamma'\cdot\frac{\Lambda^{j}}{(R_j-R_{j+1})^4},\qquad (\gamma' \text{ endlich})$$

unter Berücksichtigung von (2); damit ist die Formel (19) bewiesen. Es folgt aus derselben ($j=3, 4, \cdots$) ($\alpha'\beta'$ endlich):

$$\text{(20)}\qquad \text{abs.}\int_0^{\mathfrak{r}_j}\left|\frac{\partial^2 W_{ji}}{\partial \nu_0'^2}\right|_{(\xi'\eta'\zeta')} d\mathfrak{r}_j \overline{\gtrless} (\alpha' A_{j-1}+\beta'\Lambda^{j-2})\frac{\mathfrak{r}_j^{1-\lambda'}}{(R_j-R_{j+1})^4},$$

und wenn wir von dieser Formel und der Formel (18) Gebrauch machen, aus (17) ($j=3, 4, \cdots$) an der Fläche $\omega_{j+1,2}$:

$$\text{(21a)}\qquad \text{abs.}\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0'} \overline{\gtrless} \frac{\mathsf{A}'}{\mathfrak{r}_j}\Lambda^{j-2} + (\alpha' A_{j-1}+\beta'\Lambda^{j-2})\frac{\mathfrak{r}_j^{1-\lambda'}}{(R_j-R_{j+1})^4},$$

---

*) Diese dritte Zeile $\left(\frac{c_3 A_j}{R_j-R_{j-1}}\right)$ kommt nach der Bemerkung zu Hilfssatz IIa) und IIb) hinzu, da ω_{j2} ungeschlossen ist.

analog:

$$\text{(21b)}\qquad \text{abs.}\,\frac{\partial W_{ja}}{\partial v_0'} \leqq \frac{\Lambda'}{\mathfrak{r}_j}\Lambda^{j-2} + (\alpha' A_{j-1} + \beta' \Lambda^{j-2})\frac{\mathfrak{r}_j^{1-\lambda'}}{(R_j - R_{j+1})^4},$$

somit auch*):

$$\text{(22)}\qquad A_{j+1} \leqq \frac{\Lambda'}{\mathfrak{r}_j}\Lambda^{j-2} + (\alpha' A_{j-1} + \beta' \Lambda^{j-2})\frac{\mathfrak{r}_j^{1-\lambda'}}{(R_j - R_{j+1})^4}.$$

Wir setzen nun:

$$\text{(23)}\qquad \mathfrak{r}_j = \bar{\gamma}\cdot\Lambda^{\frac{j-2}{2-\lambda'}},\qquad (\bar{\gamma}\ \text{endlich})$$

und

$$\text{(24)}\qquad \Lambda^{\frac{1-\lambda'}{2-\lambda'}} = \bar{\Lambda},$$

so dass $\bar{\Lambda}$ wiederum einen echten Bruch vorstellt, dann können wir (22) so schreiben ($j = 3, 4, \cdots$):

$$\text{(25)}\qquad A_{j+1} \leqq (\bar{a} + \bar{b} A_{j-1})\frac{\bar{\Lambda}^{j-2}}{(R_j - R_{j+1})^4},\qquad \left(\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{b}\end{matrix}\right\}\ \text{endlich}\Bigg).$$

Wir setzen schliesslich ($j = 2, 3, 4, \cdots$):

$$\text{(26)}\qquad R_{j+1} = l \cdot R_j,$$

wo l einen echten Bruch vorstellt und wählen l so, dass:

$$\text{(27)}\qquad \Lambda' = \frac{\bar{\Lambda}}{l^4} < 1^{**}),$$

dann folgt aus (25) ($j = 3, 4, \cdots$):

$$\text{(28)}\qquad A_{j+1} \leqq (a + b A_{j-1})\Lambda'^{j},\qquad \left(\begin{matrix}a, b\ \text{endlich}\\ \Lambda'\ \text{echter Bruch}\end{matrix}\right).$$

Wir können bei geeigneter Wahl von a und b die Ungleichung (28) auch für $j = 1$ und $j = 2$ ansetzen, da $A_0 = 0$ und $A_1 A_2$ endliche Grössen sind. Mit Hilfe dieser Ungleichung lässt sich nun leicht die Eindeutigkeit und Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial v}$ in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ beweisen.

---

*) Es ist (Lehrbuch der Potentialtheorie S. 254):

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_{j+1}}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{ja}}{\partial v} + \frac{\partial W_{ji}}{\partial v}\right).$$

**) So dass:

$$1 > l > \sqrt[4]{\bar{\Lambda}}.$$

§ 6.

Um die beiden Fälle, dass j eine gerade und dass j eine ungerade Zahl ist, nebeneinander zu behandeln, theilen wir die Ungleichung (28) in die die zwei Ungleichungen:

$$(29)\qquad \begin{cases} A_{2j+1} \overline{\gtrless} (a + b A_{2j-1}) \Lambda''^{j}, & (j = 1, 2, \cdots) \\ A_{2j+2} \overline{\gtrless} (a + b A_{2j} \quad) \Lambda''^{j}, & (j = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

wenn wir:

$$(30)\qquad \Lambda'' = \Lambda'^{2}$$

setzen. Die rechten Seiten in (29) können dadurch, dass wir A_{2j-1} resp. A_{2j} hinzuaddiren, nur vergrössert werden, und wir können dann die Ungleichungen (29) so schreiben:

$$A_{2j+1} + \frac{a}{b} \overline{\gtrless} \left(A_{2j-1} + \frac{a}{b}\right)(1 + b\Lambda''^{j}), \quad (j = 1, 2, \cdots),$$
$$A_{2j+2} + \frac{a}{b} \overline{\gtrless} \left(A_{2j} \quad + \frac{a}{b}\right)(1 + b\Lambda''^{j}), \quad (j = 0, 1, 2, \cdots);$$

es folgt somit:

$$(31)\qquad \begin{cases} A_{2j+1} + \frac{a}{b} \overline{\gtrless} \left(A_1 + \frac{a}{b}\right)(1 + b\Lambda'')(1 + b\Lambda''^{2}) \cdots (1 + b\Lambda''^{j}), \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \cdots) \\ A_{2j+2} + \frac{a}{b} \overline{\gtrless} \left(A_0 + \frac{a}{b}\right)(1 + b)(1 + b\Lambda'')(1 + b\Lambda''^{2}) \cdots (1 + b\Lambda''^{j}), \\ \qquad\qquad (j = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

Das Product:

$$(32)\qquad Q_n = (1 + b\Lambda'')(1 + b\Lambda''^{2}) \cdots (1 + b\Lambda''^{n})$$

convergirt mit wachsendem n zu einem bestimmten endlichen Grenzwerth, da Λ'' ein echter Bruch ist; nach (31) bleiben daher alle A_{2j+1} und A_{2j+2} unterhalb einer bestimmten endlichen Grenze, und es folgt aus (28)

$$(33)\qquad A_j \overline{\gtrless} c \cdot \Lambda'^{j-1}, \qquad j = 1, 2, \cdots$$

wo c eine endliche Constante, Λ' einen echten Bruch vorstellt, somit im besonderen an der Stelle $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$:

$$(34)\qquad \begin{cases} \text{abs.}\ \dfrac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu} \overline{\gtrless} c \cdot \Lambda'^{j-1}, & (j = 1, 2, \cdots), \\ \left.\begin{array}{l} \text{abs.}\ \dfrac{\partial W_{ji}}{\partial \nu} \overline{\gtrless} c \cdot \Lambda'^{j-1}, \\ \text{abs.}\ \dfrac{\partial W_{ja}}{\partial \nu} \overline{\gtrless} c \cdot \Lambda'^{j-1}. \end{array}\right\} & (j = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

Wenn wir die Kugeln (R_j) nicht um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ als Centrum, sondern um irgend einen anderen Punkt von ω_2 (in endlicher Entfernung von der

Randcurve) als Centrum geschlagen hätten, so wären wir auch für diesen Punkt zu den Formeln (34) gelangt, so dass dieselben also jedenfalls in einem endlichen Gebiete um den Punkt $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$ gelten. Die Formeln (34) beweisen somit sowohl die Convergenz der Reihen

$$H = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial \nu} + \frac{\partial \mathfrak{W}_3}{\partial \nu} - \cdots\right), \tag{35}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{0i}}{\partial \nu} - \frac{\partial W_{1i}}{\partial \nu} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial \nu} - \cdots\right), \tag{36}$$

als auch die Eindeutigkeit und Stetigkeit von H und $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ in einem endlichen Bereiche um $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$. Damit ist zunächst die Eindeutigkeit und Stetigkeit von $\frac{\partial U_i}{\partial \nu}$ in $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$, und da dieser Punkt beliebig gewählt war, an der ganzen Fläche ω bewiesen.

§ 7.

Es bleibt übrig, zu beweisen, dass auch alle ersten Ableitungen in ganzer Erstreckung des Innenraumes von ω eindeutig und stetig sind. Wir construiren hierzu um $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$ als Centrum eine Kugel mit dem Radius P, klein genug, dass der im Innern der Kugel (P) gelegene Theil Ω_2 der Fläche Ω ganz dem Gebiete angehört, in dem die Ungleichungen (34) gelten, und nennen den im Innern von Ω gelegenen Theil der Kugel Ω_1. Dann folgt in derselben Weise, wie wir die Formeln (12a) und (13) gebildet haben $(j = 1, 2, \cdots)$:

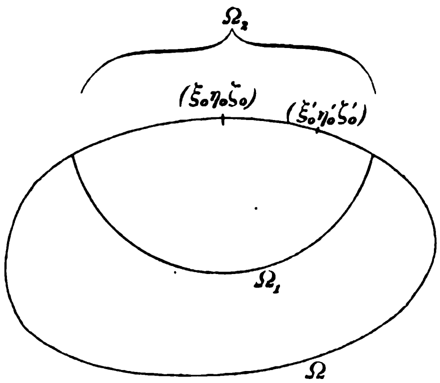


Fig. 4.

$$W_{ji} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_1+\Omega_2}\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{\Omega-\Omega_2}\mathfrak{W}_{ji}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega - \int\limits_{\Omega_1}\mathfrak{W}_{ji}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right], \tag{37}$$

(im Innenraum von $\Omega_1\,\Omega_2$)

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{W}_{j+1}}{\partial \nu_0'} &= \frac{1}{4\pi}\left[\left|\frac{\partial}{\partial \nu_0'}\int\limits_{\Omega_1+\Omega_2}\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r}\right|_i + \left|\frac{\partial}{\partial \nu_0'}\int\limits_{\Omega_1+\Omega_2}\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r}\right|_a\right]\\ &+ \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \nu_0'}\left[\int\limits_{\Omega-\Omega_2}\mathfrak{W}_{ji}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega - \int\limits_{\Omega_1}\mathfrak{W}_{ji}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right]\end{aligned}\right. \tag{38}$$

(für jeden Punkt $(\xi_0'\,\eta_0'\,\zeta_0')$ von Ω_2).

Die Formel (38) beweist uns zusammen mit (34) und der in derselben Weise, wie (14), abzuleitenden Formel:

$$(39) \qquad \int\limits_{\Omega_1} \text{abs.}\, \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\, d\omega \mathrel{\overline{\gtrless}} C \cdot \Lambda^{j-1}, \qquad (j = 1, 2, 3 \cdots),$$

dass für zwei beliebige Punkte $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ und $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ der Fläche Ω_2 in genügend kleiner Entfernung r_{12} und in endlicher Entfernung von der Randcurve:

$$\text{abs.} \sum_1^{\infty} {}^{j} (-1)^j \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{j+1}}{\partial \nu} (\xi_2 \eta_2 \zeta_2) - \frac{\partial \mathfrak{W}_{j+1}}{\partial \nu} (\xi_1 \eta_1 \zeta_1) \right) \mathrel{\overline{\gtrless}} \mathsf{A} \cdot r_{12}^{1-\lambda},$$

wo A eine endliche Constante, λ einen echten Bruch vorstellt, unter Berücksichtigung des Hilfssatzes Ib). Da bei unseren Bedingungen die Ableitungen von $W_{0i}\, W_{1i}$ stetig sind, so ergiebt uns die Formel (37), wenn wir dieselbe unter Zugrundelegung eines etwas kleineren Radius P bilden, dass die ersten Ableitungen der Function:

$$u = -\frac{1}{2} (W_{0i} - W_{1i} + W_{2i} - \cdots)$$

in einem endlichen Raumgebiet um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ eindeutig und stetig sind*); gleiches gilt daher auch für die ersten Ableitungen von U_i; da der Punkt $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ beliebig gewählt war, so ist damit in aller Strenge bewiesen, dass bei den von uns zu Grunde gelegten Bedingungen U_i eine wirkliche Potentialfunction des Innenraumes von ω ist. Für U_a ist alles analog.

§ 8.

Wir können das folgende Resultat unserer Untersuchungen aussprechen:

Die Combination der Methoden von Neumann und Schwarz liefert uns für den Innen- und Aussenraum einer beliebigen geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω Lösungen des Dirichlet'schen Problems und zwar wirkliche Potentialfunctionen des Innen- und Aussenraumes bei folgenden Bedingungen A) oder B) für die Randwerthe f:

A) *Es existirt eine Function F eines von ω und einer ω beliebig nahen geschlossenen ganz innerhalb (ganz ausserhalb) ω verlaufenden Fläche $\omega_i\,(\omega_a)$*

---

*) Wir machen dabei von dem folgenden Satze, Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie (Stuttg. 1882), Lehrbuch der Potentialtheorie S. 392, Gebrauch: Die ersten Ableitungen des Flächenpotentiales eines stetig gekrümmten Flächenstückes:

$$\int \mathsf{H}\, \frac{d\omega}{r},$$

in dem H eine auf dem Flächenstücke reguläre Function darstellt, sind, so lange man auf ein und derselben Seite der Fläche bleibt, in der Umgebung jedes von der Randcurve durch endliche Entfernungen getrennten Punktes der Fläche eindeutig und stetig.

begrenzten Raumes, die in demselben mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist, endliche zweite Ableitungen hat (an Stelle der Endlichkeit der zweiten Ableitungen genügt auch bereits die Regularität der ersten Ableitungen) und an der Fläche ω die Randwerthe f besitzt.

B) *Es existirt eine Potentialfunction F des von ω und $\omega_i(\omega_a)$ begrenzten Raumes, welche an der Fläche ω die Randwerthe f besitzt.*

Man kann die Bedingungen B) mit Hilfe der Bedingungen A) noch weiter verallgemeinern:

Verallgemeinerung von B). *Es existirt eine Function F der Stelle des von ω und $\omega_i(\omega_a)$ begrenzten Raumes τ, welche an der Fläche ω die Randwerthe f und alle Eigenschaften einer Potentialfunction besitzt, mit der Ausnahme, dass der Ausdruck:*

$$\Delta F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

in dem gegebenen Raumgebiete nicht $= 0$, *sondern eine eindeutige und stetige Function der Stelle ist, welche die Bedingung:*

$$\Delta \int_\tau \Delta F \frac{d\tau}{r} = -4\pi \Delta F, \quad (\textit{in dem Raume } \tau)$$

*erfüllt**).

Setzen wir nämlich:

$$F = \Phi - \frac{1}{4\pi}\int_\tau \Delta F \frac{d\tau}{r}, \tag{40}$$

so genügen die Randwerthe von Φ der Bedingung B), die Randwerthe von

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\tau \Delta F \frac{d\tau}{r}$$

der Bedingung A), und wir können die gesuchten Lösungen des Dirichlet'schen Problems als Summe zweier Potentialfunctionen finden. Diese Verallgemeinerung bringt die Combination der Methoden von Neumann und Schwarz auf dieselbe Allgemeinheit, wie die Balayage-Methode von Poincaré, sie leistet aber noch mehr als diese, indem sie bei den obigen Bedingungen auch auf den Beweis der Stetigkeit der ersten Ableitungen der Lösungen führt.

---

*) Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die ersten Ableitungen von ΔF in dem Raume τ endlich sind, oder auch, wenn nur ΔF in dem Raume τ regulär ist. (Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie, Stuttg. 1882.)

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer**, Leipzig, Königsstr. 1, II.

Hierzu Beilagen von **Johann Ambrosius Barth in Leipzig** und **B. G. Teubner in Leipzig.**

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

[redacted]