龜岳　新名重內編輯

卷之下

# 受驗豫備 代數理論問答

大阪　欽英堂藏版

## 例言

此書ハ代數學中緊要ナル理論ヲ撰ヒ初學者ノ辨[illegible][illegible]最モ簡易ニ理論的問答數條ヲ編輯ス[illegible]大家ノ用ニ供スルニアラス勉メテ初學者ノ會得シ易キヲ專要ニ高尚ニ涉ランヲ厭ヒ可及的論旨ノ程度ヲ低クシ鄙言俗辭ヲ顧ス只理義貫徹ヲ主ト[illegible]者ナ[illegible]之ヲ小册ニシテ尽ス能ハス其補欠ト猶高尚ナル[illegible]不日編纂スルアラントス看者夫之レヲ諒セヨ

編者識

# 目次



# 受驗豫備 代數學理論的問答下卷

新名重內編輯



## 第五章 兩同式及代用法

兩同式トハ何ソヤ

兩同式トハ代數式ガ互ニ相等シク他ノ字母ヲ交ヘサル同一ノ式ナリ之ヲ等式トモ云フ

例ヘハ $a+2b-c=2b-c+a$ 或ハ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 等ノ如シ

代用法トハ何ソヤ

代數式ノ字母ヲ任何數字或ハ他ノ字母ニ變換スルモノナリ

例ヘハ $x^2-xy+y^2$ ヲ $x=3, y=2$, 或ハ $x=a, y=2b$, ニ換レハ $3^2-3\times2+2^2=9-6+4=7$, 或ハ $a^2-2ab+4b^2$ 等ノ如シ

●両同式ニ於ル同指數ヲ有ツ同字母ノ係數ハ互ニ等シ此證如何

例ヘハ $A_1x^3+A_2x^2+A_3x=B_1x^3+B_2x^2+B_3x$ トセハ

$(A_1x^3+A_2x^2+A_3x)-(B_1x^3+B_2x^2+B_3x)=0$ ナリ此同指數同字母ノ係數ヲ括レハ

$(A_1-B_1)x^3+(A_2-B_2)x^2+(A_3-B_3)x=0$ 此係數 $(A_1-B_1)$, $(A_2-B_2)$, $(A_3-B_3)$ 何レモ零ナラサルヘカラス依テ $A_1=B_1$, $A_2=B_2$, $A_3=B_3$ ナルヿ明カナリ

故ニ同指數ノ同字母ノ係數ハ必ラス相等シキヿヲ證明ス

●$2a^2+3ab+b^2$ ノ式ニ於テ $a=2$, $b=1$ ナレハ此値ハ十五個ナリ此證如何

此 $2a^2+3ab+b^2$ ヲ數ニ換レハ $2\times2^2+3\times2\times1+1^2=8+6+1=15$ ナリ

●$a^3+a^2b-ab^2+b^3$ ノ式ノ $a=3$, $b=-2$. トスレハ此値ハ $-11$ ナリ之レ證セヨ

此式ノ字母ヲ數ニ換レハ $3^3+3^2(-2)-3(-2)^2+(-2)^3=27-18-12-8=-11$ ナリ

依テ之レヲ證ス

●$(a-b)^2$ ト $(b-a)^2$ ハ之レ兩同式ナリ之レ證明セハ

此兩式ノ根數ハ a ト b ノ任何數量ニ隨ヒ其數値相等シキ正量ト負量ナリ然ルニ各自乘ナレハ其積ハ正負ヲ論セス只ニ正量ナリ依テ兩式相等シキヿ明カナリ

又 $(a-b)^2=(b-a)^2$ 兩式ヲ自乘積ニ表セハ $a^2-2ab+b^2=b^2-2ba+a^2$ 之レ兩同式ナルヿ明カナリ

●$(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-a)$ 如此幾數ナルモ順次ニ其差ヲ採リ之レヲ相加スレハ其結果ハ必ラス零ナリ之レヲ證明セヨ

$(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-a)=a-b+b-c+c-d+d-a=0$ 如此順次ノ差ハ必ラス正負ヲ表ハシ互ニ消滅スレハ之レ零ナルヿ明カナリ

●$(x+y)^2$ ヲ $Ax^2+Bx+c$ トシ $A=c=1$, ナレハ $B=2$ ナルヲ證セヨ

$(x+y)^2=Ax^2+Bxy+cy^2$ 此 $y$ ヲ $0$ トスレハ $(x+0)^2=Ax^2+Bx.0+c.0^2$ ナリ

故ニ $x^2=Ax^2$ 依テ $A=1$ ナリ又 $(0+y)^2=A.0^2+By.0+cy^2$ ∴ $y=1$ ナリ

∴ $(x+y)=Ax^2+Bx+c$ ニテ $A=c=1$ ナレハ $y=1$ ナラサルヲ得ス依テ

$(x+1)^2=x^2+Bx+1$ ナリ之レ $x$ ノ如何ナルニ拘ラス $B=2$ ナルヿヲ證ス

例ヘハ $x=3$ トスレハ $(3+1)^2=3^2+B\times3+1$ 即チ $16=9+B\times2+1=10+B2$

∴ $6=B\times3$ 故ニ $2=B$ ナルガ如シ

● $x^3+2x^2+x+1$ 此式中ノ $x$ ヲ $y-1$ ニ代用スレハ $y^3-y^2+1$ ナルヿヲ證セヨ

$$\left.\begin{array}{llrrrr}
x^3 \cdots\cdots & (y-1)^3 \cdots\cdots & y^3 & -3y^2 & +3y & -1 \\
2x^2 \cdots\cdots & 2(y-1)^2 \cdots\cdots & & 2y^2 & -4y & +2 \\
x \cdots\cdots & (y-1) \cdots\cdots & & & y & -1 \\
1 \cdots\cdots & 1 \cdots\cdots & & & & 1 \\
\hline
 & & y^3 & -y^2 & & +1
\end{array}\right\}$$

依テ之レヲ證ス

● $x^3+3x^2+3x$ ノ式中 $x$ ヲ $a-1$ ニ代用スレハ $a^2+a+1$ ノ倍數ナリ此證ヲ示セ



$$\left.\begin{array}{llrrrr}
x^3 \cdots\cdots & (a-1)^3 \cdots\cdots & a^3 & -3a^2 & +3a & -1 \\
3x^2 \cdots\cdots & 3(a-1)^2 \cdots\cdots & & 3a^2 & -6a & +3 \\
3x \cdots\cdots & 3(a-1) \cdots\cdots & & & 3a & -3 \\
\hline
 & & a^3 & & & -1
\end{array}\right\}$$

此代用シタル結果ハ $a^3-1$ ナリ之レ除法公式第三ノ理ニ據テ $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$ ナリ依テ之レヲ證ス

● $x^4-2x^2y^2+y^4$ 此式零ナレハ $x=y$ ナラサルヲ得ス之レヲ證明セヨ

三公式第二ニ據レハ $x^4-2x^2y^2+y^4=(x^2-y^2)^2$ ナリ依テ $(x^2-y^2)$ ガ零ナラサルヲ得ス之レガ零ヲ示スヘキモノハ $x$ ト $y$ トガ同量ニアリ故ニ $(x=y)$ ナルヿ之レ之レヲ證明ス

● $(x^2-y^2)(a^2-b^2)=(xa\pm yb)^2-(xb\pm ay)^2$ 之レヲ證セヨ

$(x^2-y^2)(a^2-b^2)=x^2a^2-x^2b^2-a^2y^2+y^2b^2$ ナリ

$(xa\pm yb)^2-(xb\pm ay)^2=x^2a^2\pm2xayb+y^2b^2-x^2b^2\mp2xbay-a^2y^2$ 類減スレハ

$x^2a^2+y^2b^2-x^2b^2-a^2y^2$ ナリ此結果両々相等シ依テ之レヲ證明ス

此證明法ハ兩式ノ結果ヲ求メ之レヲ對照シテ兩同式ヲ證明スレモ倘一歩進ンテ證明スル法アリ之レ一式ヲ變化シテ他ノ一式ニ密合セシムル之レナリ

$(x^2-y)(a^2-b^2)=x^2a^2-x^2b^2-a^2y^2+y^2b^2$ 之レニ $2xyab$ ヲ補數スレハ

$x^2a^2\pm 2xyab+y^2b^2-x^2b^2\mp 2xyab-ay^2$ ナリ三公式ニ據テ之レヲ化スレハ

$(xa\pm yb)^2-(xb\pm ay)^2$ ナリ依テ之レヲ證明ス

●$(x+a+b+c)^5-(x-a-b-c)^5=Ax^4S+Bx^2S^3+CS^4$ 上式ノ$S=a+b+c$ナレハ

$A=10,\ B=20,\ c=2$ ナルヿヲ證セヨ

$$\left.\begin{array}{l}(x+s)^5=x^5+5x^4s+10x^3s^2+10x^2s^3+5xs^4+s^5\\ -(x-s)^5=-x^5+5x^4s-10x^3s^2+10x^2s^3-5xs^4+s^5\end{array}\right\}=10xs+20x^2s^3+2s^5$$

∴ $A=10\ B=20,\ C=2.$ ナルヿヲ證ス

●$A(x-7)(x-5)+B(x-5)(x-3)+c(x-3)(x-7)=2x-30$ ナリセハ $A=-3,\ B=-2,\ c=5.$ ナリ此A、B、C、如何ニシテ指定スヘキヤ之レヲ詳明セヨ

之レ三項ノ内二項ヲ消滅セシメ一項ヲ存スレハ其一ツヲ求メ得ルヿ容易ナリ故ニ$x$ヲ任意ニ假定シテ二項ヲ消滅セシムルニアリ先ツ$x$ヲ3トシテ式中ニ代入スレハ

$A(3-7)(3-5)+B(3-5)(3-3)+c(3-3)(3-7)=A(-4)(-2)=2\times3-30$ ニテ

即チ $8A=-24$ ∴ $A=-3$ ナリ

同理ニ依テ$x$ヲ7ニ代用スレハ $8B=-16$ ∴ $B=-2.$ ニテ

又$x$ヲ5ニ代用スレハ $-4C=-20$ ∴ $C=5.$ ヲ得ル之レ所要ノ値ナリ

## 第六章　因子分括

●因子分括トハ何ソヤ

因子分括トハ二ツ或ハ衆因子ノ積ニ相當スル代數式ノ其因子ヲ發見シ之レヲ括リ以テ其因子連乘ノ形勢ニ作ルノ法ナリ

●二項或ハ衆項ノ各ニ通因子アルモノハ其通因子ヲ省キ各項ヲ一体ニ總括シ其括弧ニ省ク所ノ通因子ヲ乘スルモ其値ノ變セサル理由ヲ示セ

一列ニ通因子ヲ有スル衆項ハ之レ或衆項ノ和ニ其通因子ヲ乘シタルモノト見做スヿヲ得ル如何トナレハ或衆項ノ和ニ或因子ヲ乘スレハ其積ノ各項ハ通シテ其乘シタル因子ヲ有テルモノナレハナリ

例ヘハ $(A+B-C)a=Aa+Ba-Ca$ ナルガ如シ

故ニ通因子ヲ有スル衆項ハ其通因子ヲ括弧外ニ置キ衆項ヲ通因子ニテ除シタル商ヲ括弧內ニ置クヿヲ得ル之レニ依テ其値ノ變セサルヲ證ス

例ヘハ $ab+ac=a(b+c)$, 又 $abx-acx+adx=ax(b-c+d)$ ノ如シ

又 $x(a-b)+y(a-b)$ ハ $(a-b)$ ガ通因子ナリ故ニ $(x+y)(a-b)$ ガ如シ

●分括法ヲ施スヘキ注目ハ何レニアルヤ

分括法ノ注目ハ通因子ヲ發見スルニアリ

之レ通因子ヲ有スル諸項ハ恒ニ其通因子ヲ括弧外ニ出シテ之レヲ括弧ニ總括スルヿヲ得レハナリ括弧ノ作爲ハ一回ニ止ラス再三施スヿヲ得ル

例ヘハ $x^2+2xy-3xy-6y^2$ ノ如キハ $x(x+2y)-3y(x+2y)$ ナリ又此括弧ハ両量ノ通因子ナリ依テ再ヒ之レヲ括レハ $(x-3y)(x+2y)$ ナリ

又一法アリ分括ヲナシ得ル諸項ハ必ラス積ニ相當スルモノナレハ乘法公式或ハ除法公式ニ據テ其因子ヲ發見スルヿ容易ナルモノアリ之レ分括ノ簡法ナリ

●三項式ガ若シ二項式ノ相乘積ナレハ其一項ハ必ラス二項ノ結合ナリ其理由ヲ證セヨ

二項式ニ二項式ヲ乗スレハ其積ハ必ラス四項ニテ顯ル例ヘハ $(a\pm b)(c\pm d) = ac\pm bc\pm ad+bd$ ナリ若シ此内ニ類項アルトキハ之レヲ結合シテ三項トナルナリ $(a\pm b)(a\pm c)=a^2\pm ab\pm bc+c^2=a^2\pm b(a\pm c)+c^2$ 又 $(a\pm b)(2a\pm 3b)=2a^2\pm 2ab\pm 3ab+3b^2=2a^2\pm 5ab+3b^2$ ナルガ如シ

故ニ三項ノ内一項ハ二數ノ結合ナルコトヲ證明ス

● $Ax^2\pm Bxy+cy^2$ ハ二項式相乘ナレハBハ必ラス二數ノ結合ナリ之レヲ證セヨ

積中ニ類項ヲ生スルモノハ平方ヲ有スル項ニアラス之レ相乘ノ項ニアリ依テBハ $x$ ト $y$ トノ相乘ナレハ之レ二數ノ結合ナルヲ證ス

倘之レヲ證明スレハ積中ニ平方ノ項アルモノハ因子ニ必ラス類項アリ故ニ之レヲ $x$ ト $y$ トニ假定シテ相乘スレハ $(x\pm y)(2x\pm 3y)=2x^2\pm 2xy\pm 3xy+3y^2$ ナリ之レ括レハ $2x^2\pm(2+3)xy+3y^2$ ナリ依テ結合ノ項ハ相乘ノ



項ナルコトヲ證ス

● $x^2\pm Bx+C$ 之レ二因子ノ積ナレハ $C=ab$, $B=a\pm b$ ナルコトヲ證セヨ

首項 $x^2$ ハ両因子首項ノ相乘ニテ尾項Cハ両因子末項ノ相乘ニテ中項ノ $Bx$ ハ両因子首末両項ノ斜乘ノ和ナリ故ニ因子ノ各項ヲ考ヘテ假定ス

$(x\pm a)(x\pm b)$ トシテ此積ヲ顯セハ $x^2\pm xa\pm xb+ab=x^2\pm(a\pm b)x+ab.$

依テ $C=ab$ ナレハ $B=a\pm b$ ナルコトヲ證ス

● $x^2+8x+15=(x+5)(x+3)$ ナルコトヲ證セヨ

前題ニ依テ末項ハ二數ノ相乘ニテ中項ノ8ハ二數ノ結合ナリ末項ヲ二數ニ自約シテ此結合ガ中項ノ係數ニ適合スルヲ要ス故ニ $15=3\times 5$, $3+5=8$ 之レ中項ニ適合セリ依テ中項ヲ分離スレハ $x^2+3x+5x+15$ 之レヲ分括スレハ $x(x+3)+5(x+3)$ 又之レヲ分括スレハ $(x+5)(x-3)$ ヲ得ル

依テ之レヲ證ス

● $x^2-4x-21=(x-7)(x+3)$ ナリ之レヲ證セヨ

前題ノ理ニ依テ末項ヲ二數ニ分離スレハ $21=3\times7$, 之ヲ結合スレハ

$3+7,=10$

此中項ノ係數4ニシテ10ナラス依テ$7-3=4$ナリ故ニ$3x$ヲ補數スレハ

$x^2-4x-3x+3x-21=x^2-7x+3x-21$ 之レヲ分括スレハ $x(x-7)+3(x-7)=(x+3)(x-7)$

ナリ依テ之レヲ證ス

● 前題ノ理ニ據テ $x^2+8x-105$, $10x^2+7x+1$, $x^4-x^2y^2-2y^4$, $6x^2+11xy+3y^2$

$5+12x-9x^2$. 此五題分括セヨ

第壹題 $x^2+8x-105$ / $+7x$ / $-7x$　$7)\overline{105}$ $15$　$15-7=8$ 故ニ $7x$ ノ補數ナリ

$\therefore x(x-7)+15(x-7)=(x+15)(x-7)$ ナリ

第貳題 $10x^2+\cancel{7x}+1$ / $+5x$ / $+2x$　$2)\overline{10}$ $5$　$2+5=7$ 依テ $x$ ノ段數ヲ2ト5ニ分ツ

$\therefore 5x(2x+1)+(2x+1)=(5x+1)(2x+1)$ ナリ

第三題 $x^4-x^2y^2-2y^4$ / $-x^2y^2$ / $+x^2y^2$　$2)\overline{2}$ $1$　$\{(2+1)-1\}\div2=1$ 補數段數ナリ

$\therefore x^2(x^2-2y^2)+y^2(x^2-2y^2)=(x^2+y^2)(x^2-2y^2)$ ナリ

第四題

此式ノ如キハ首末兩項倶ニ係數ヲ有セリ然レモ此係數ハ因子ノ係數ヨリ生シタルモノナレハ此兩々ノ係數ヲ自約シテ中項ノ係數ニ適合セシムルニアリ

之レヲ自約スレハ $6=2,3,1.$ $3=3,1.$ ナリ依テ因子ノ係數ハ之レ首項ハ$6,3,2,1.$末項ハ$3,1.$ノ他ニアラス此兩數ヲ組合シ別ニ係數ヲ作リテ

$6x^2+11xy+3y^2$ 試スヘシ首ヲ3末ヲ1トシテ係數ヲ作レハ

$+2xy$ / $+9xy$　$2\times3,$　$2\times1;$ $3\times3,$　$3\times1$　$\therefore$ $\begin{matrix}6&2\\9&3\end{matrix}$ 此係數本式ニ適合ス

$\therefore 2x(3x+y)+3y(3x+y)=(2x+3y)(3x+y)$ ナリ

第五題 $\left\{\begin{array}{l} 5+\left[\begin{array}{l}12x-9x^2\\ +3x\end{array}\right.\\ \quad -3x \end{array}\right.$ $1)\dfrac{5}{5}$ $3)\dfrac{9}{3}$ 首$=5$ 末$=3$ $\left.\begin{array}{ll} 5 & 3\\ 15 & 9\end{array}\right\}$

$\therefore\ (5-3x)+3x(5-3x)=(1+3x)(5-3x)$ ナリ

●$x^3+6x^2+11x+6=(x+3)(x^2+3x+2x)=(x+3)(x+2)(x+1)$ヲ證セヨ

此式最高次ハ$x$三乘ナリ依テ二項ト三項トノ兩因子ト假定シ先ツ首末兩項ノ係數ヲ自約シテ因子ノ係數ヲ探索スレハ首一末六三二一ノ內ナリ故ニ首一末三ノ二項トスレハ

$$\left.\begin{array}{llll} x^3+\cancel{6x^2}+\cancel{11x}+6 & 1 & 3 & \\ \quad +3x^2+9x & & 3 & 9 \\ \quad\quad +3x^2+2x & & 2 & 6 \end{array}\right\}$$

此係數本數ニ適合セリ依テ本數ノ係數ヲ之レニ應シテ分離シ以テ之レヲ分括ス

$x^2(x+3)+3x(x+3)+2(x+3)=(x^2+3x+2)(x+3)$ナリ又三項ヲ分括スレハ

$(x+3)(x^2+2x+x+2)=(x+3)\{x(x+2)+(x+2)\}=(x+3)(x+2)(x+1)$ナルヿヲ證ス

此係數ノ探索法ハ二項ニ限ラス三項四項ニモ施スヿヲ得ルモノナリ

●分括法ハ積ヲ二因子ニ還原スルモノナレハ積ノ類次ヲ結合セス二因子ノ相乘ノ儘ナレハ分括スルヿ容易ナリ依テ積ヲ二因子ノ相乘ニ整ル法方ヲ示セ

積ノ最高次ヲ採リ之レヲ昇降冪ニ排列スレハ其加欠自ラ顯ル之レ積ヲ整ル法方ナリ

例ヘハ$x^2+2xy+y^2$ナルハ$x^2, xy, y^2$ナリ$\therefore\ x^2+xy+xy+y^2$ナリ

$x^2-y^2$ナルハ$x^2, xy, y^2$ナリ$\therefore\ x^2+xy-xy-y^2$ナリ

$x^3+y^3$ナルハ$x^3, x^2y, xy^2, y^3$ $\therefore\ x^3+x^2y-x^2y+xy^2-xy^2+y^3$ナリ

此法ニ據テ$x^3-18x+27$ヲ分括スレハ

$$\begin{array}{l} x^3+3x^2-\cancel{18x}+27 \\ \quad -3x^2-9x \\ \quad\quad -9x \end{array}$$

$x^3$, $3x^2$, $9x$, $27$. 此排列數ト本數トヲ對照シテ各項ヲ整ヘ以テ分括ス

∴ $x^2(x-3)+3x(x-3)-9(x-3)=(x^2+3x-9)(x-3)$ ナリ

又 $2x^3-5x^2y-9y^3$ ヲ分括スルニハ

先ツ $x$ ト $y$ ヲ上中ヨリ三乗冪ニ排列ス然ルニ係數ハ三乗數ニ適合セス依テ首末両項ヲ自約シテ因子ノ係數ヲ前題ノ如ク探索シテ本數ト適合セシム

$$\begin{array}{l} 2x^3-6x^2y+3xy^2-9y^3 \\ \quad +x^2y \quad -3xy^2 \end{array}$$

$$2\overline{)\,2\,}\ 1 \qquad 3\overline{)\,9\,}\ 3 \qquad \begin{array}{cc} 首 & 末 \\ 1 & 3 \end{array} \quad \left.\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{array}\right\}$$ 之レ本數ニ合フ

∴ $x(2x^2+xy+3y^2)-3y(2x+xy+3y^2)=(x-3y)(2x+xy+3y)$ ナリ

● $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$ ヲ乗法三公式ヲ應用シテ證セヨ

此式ノ中項ノ係數二段ナレハ二乗冪ナルヘシ依テ $x^2y^2$ ヲ補數スレハ

$x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$ 之レ二乗冪ノ差ナリ依テ三公式第三ヲ應用スレハ $\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ ナリ

● 分括法ニ於テ三公式ヲ應用スルニハ二乗冪ヲ發見スルヿ緊要ナリ

$x^2+6x$ ヲ二乗冪トナラシメンニハ $+9$ ヲ補セサルヲ得ス之レ如何シテ知ルヘキヤ

二項式ノ平方積ハ三項ニテ其首項ハ因子ノ首項ノ平方ニテ中項ハ因子ノ首末両項ノ相乗二倍ニテ末項ハ因子末項ノ平方積ナリ故ニ中項ヲ首項ノ平方根二倍ニテ除スレハ因子ノ末項ナリ依テ此除商ノ平方ヲ首末両項ニ結合スレハ此三項ハ二乗冪ナルヿ明カナリ依テ此式ニ於テハ $6x \div 2x=3$ ニテ $3^2=9$ 之レ補數ナリ

$x^2+6x=x^2+6x+9-9=(x+3)^2-9$ ナルガ如シ

● 上題ヲ應用シテ $x^2+8x+15$, 及 $x^2+2x-3$ ヲ分括セヨ

$8x \div 2x=4$ ∴ $x^2+8x+16-16+15=(x+4)^2-1=\{(x+4)+1\}\{(x+4)-1\}=(x+5)(x+3)$ ナリ

$2x+2x=1$ ∴ $x^2+2x+1-1-3=(x+1)^2-4=[(x+1)+2][(x+1)-2]=(x+3)(x-1)$ナリ

# 第七章　最高公因子、最低公倍數、分數

●最高公因子トハ何ソヤ

二量或ハ二量以上ノ衆量ヲ何レモ整除ナシ得ル量ヲ公因子ト云其最モ次數ノ高キモノヲ最高公因子ト云フ之レ或量ヲ他ノ量ニテ整除ナシ得レハ此或量ニハ其他ノ量ヲ因子ニ有ツ依テ衆量通シテ整除ナシ得ル量ハ之レ公因子ナリ

●衆量ヲ一々分括シテ衆量通シテ同一ノ因子ヲ表セハ此同一ノ因子ガ最高公因子ナリ之レヲ辨明セヨ

凡テ量ハ因子ノ連乘ニテ成立セシモノナリ依テ量ハ其体ニ含ム因子ニテ整除ナシ得ルヿ明カナリ故ニ各量ニ通スル所ノ因子ヲ採リテ各量ヲ除スレハ整除ナシ得ルハ勿論ナリ依テ此衆量ニ通スル因子ハ最高公因子ナルモノナリ

●AヲBニテ除シ其餘數ヲRトシRトBトノ公因子ハAトBトノ公因子ナリ之レヲ證セヨ

B) A (Q

BQ

R

$A=BQ+R$ナリ故ニR及Bヲ除シ得ルモノハ$(BQ+R)$ヲモ除シ得ヘシ$(BQ+R)$ガAナレハ$(BQ+R)$ヲ除シ得レハAヲモ除シ得ルヿ明カナリ依テR・Bノ公因子ハA・Bノ公因子ナルヿヲ證明ス

●二量ノ最高公因子ヲ求ムルニ高次ノ量ヲ低次ノ量ニテ除シ其殘量ニテ法ヲ除シ漸々如此連除シテ除シ尽シタル最後ノ法量ガ之レ兩量ノ最高公因子ナリ此證如何

前題ニ於テ殘量ト低次ノ量トノ公因子ハ高次ノ量トモ公因子ナルヿヲ證セリ此理ヲ推テ連除シテ除シ尽シタル最後ノ法量ハ必ラス最前二量ノ公因子ナルヿ明カナルヘシ故ニ漸々連除シテ除シ尽シ

タル法量ハ二量ノ最高公因子ナルヿヲ證ス

●一量ニテ他ノ一量ヲ整除ナシ得レハ此一量ハ此両量ノ最高公因子ナリ之レ如何

甲量ヲ乙量ニテ整除スルヿヲ得レハ此甲量ハ乙量ト他ノ量トノ相乘ナリ依テ甲量ハ乙量ト倚他量ニテ整除スルヲ得レ圧乙量ハ自己ノ他ハ倚他量ニテ整除スルヲ得ス故ニ此両量ノ最高公因子ハ乙量ナラサルヲ得ス依テ之レヲ證ス

●最高公因子ヲ有スル二量ニ一々他ノ量ヲ乘スルモ其乘量ガ同シカラサルハ其最高公因子ヲ變スルヿナシ之レヲ證明セヨ

両量ヲAトBトシ此最高公因子ヲGトスレハ $A=aG$, $B=bG$ ナリ乘量ヲ$m$及$n$トスレハ $Am=amG$, $Bn=bnG$ ナリGハ公因子ニテ $am$ト$bn$トハ公因子ヲ有セス故ニ$Am$ト$Bn$トノ公因子ハGノ他ナシ依テ他量ヲ乘スルモ最高公因子ニ變更ナキヲ證ス

●最高公因子ヲ有スル二量ノ其一量ニ他量ヲ乘スルモ又他量ヲ以テ除スルモ其最高公因子ハ變更スルヿナシ之レヲ證明セヨ

両量ヲA及B最高公因子ヲGトシ $A=aG$, $B=bG$.トスレハ $Am=amG$ ニテ $B=bG$ ナリ此最高公因子ハGニテ$am$ト$b$トニ公因子ナシ又 $A\div m=aG\div m$ ニテ $a\div m$.ト$b$トニモ公因子ナシ依テ公因子ヲ有スル二量ノ内一量ニ他量ヲ乘スルモ最高公因子ノ變更スルヿナキヲ證ス

●最低公倍數トハ何ソヤ

二量若シクハ衆量ノ何レヲ以テ除スルモ整除ナシ得ル量ヲ公倍數ト云其次數ノ最モ低キモノヲ最低公倍數ト云フ之レ或量ヲ他ノ量ニテ整除ナシ得レハ此或量ハ其他ノ量ノ倍數ナリ故ニ一量ヲ衆量ノ何レニテモ整除ナシ得レハ此一量ハ其衆量ニ通スル倍數ナリ依

ヲ之レヲ公倍數ト云

● 衆量ノ最低公倍數ハ衆量ニ於テ各ニ含ム所ノ因子ノ最高次ナルヲ連乘スルモノニ均シ之レヲ證明セヨ

各量ニ含ム所ノ因子ノ最高次ヲ連乘スルモノハ其各量ニ有ツ因子ヲ皆含有ス依テ之レ各量ノ倍數ナリ之レヲ最高次ノ因子ヲ有ツ量ニテ除スレハ其因子ハ消滅シテ商ニ有ズルヿナシ故ニ此各量ニ含ム因子ノ最高次ノ連乘ガ最低ノ公倍數ナルヿ明カナリ

例ヘハ $a^2b$, $ab^2c$, $bc^2$. トスレハ此各量ニ含ム因子ノ最高次ナルモノハ $a^2$, $b^2$, $c^2$. ナリ此連乘 $a^2b^2c^2$ ナレハ各量ニテ除シタル商ハ $bc^2$, $ac$, $a^2b$. ナリ

又 $(a-b)(a+b)$, $(a-b)^2$, $(a+b)$. ナル最高次因子ハ $(a-b)^2$, $(a+b)^2$. ニテ此連乘ハ $(a-b)^2(a+b)^2$ ナリ此各商ハ $(a-b)(a+b)$, $(a+b)^2$, $(a-b)^2$. ナリ之レ最高次ノ因子ハ消滅シテ其商ニ有スルヿナク最低ノ商ナリ依テ之レヲ證明ス



● 最高公因子ヲ有スル二量ノ最低公倍數ハ最高公因子ヲ以テ除シタル商ノ相乘ニ最高公因子ヲ乘シタル積ニ均シ此證如何

最低公倍數ハ各量ニ於テ含ム所ノ因子ノ最高次ヲ連乘スルモノナレハ兩量同一ノ因子ハ其一因子ヲ採リ連乘スルモノナレハ其最高公因子ト他ノ因子ヲ連乘スルニアリ此他ノ因子ハ各量ヲ最高公因子ニテ除シタル商ナレハ之レ題言ヲ證明ス

例ヘハ $aG$, $bG$. トスレハ此最低公倍數ハ $G$, $a$, $b$. ノ連乘ニテ $abG$. ナルガ如シ

● 最高公因子ヲ有スル二量ノ最低公倍數ハ兩量ノ相乘ヲ最高公因子ニテ除シタル商ニ均シ之レ證明セヨ

最低公倍數ハ各量ニ於テ含ム所ノ因子ノ最高次ノ連乘ナリ然ルニ

兩量ヲ相乘スレハ其最高公因子兩量ニ含有スルニ依テ二ツヲ有テリ故ニ其一ツニテ除セサルヲ得ス依テ題言ヲ證明ス

例ヘハ aG, bG. トスレハ此最低公倍數ハ abG ナリ然ルニ兩量ヲ相乘スレハ aGbG ナリ依テ之レヲ G ニテ除スレハ $abG^2 \div G = abG$ ナルガ如シ

● $x^2+ax+b$, $x^2+a'x+b'$. ノ二量ニ於ル最低公因子ハ $x+c$ トスルナラハ此最低公倍數ハ $x^3+(a+a'-c)x^2+(aa'-c^2)x+(a-c)(a'-c)c$ ナルヿヲ證セヨ

先ツ $x^2+ax+b$ 及 $x^2+a'x+b'$ ヲ $x+c$ ニテ除スレハ第一量ノ商ハ $x+a-c$ ト殘量 $-ac+b+c^2$ 第二量ノ商ハ $x+a'-c$ ト殘量 $-a'c+b+c^2$ ヲ得ル然ルニ $x+c$ ハ二量ノ最高公因子ナリ最高公因子ニテ各量ヲ除スレハ殘量ノ有ヘキ理由ナシ依テ此殘量ハ空數ナルヿ明カナリ故ニ最低公倍數ハ $(x+a-c)(x+a'-c)(x+c)$ ナルヿ明白ナリ之レヲ連乘シテ $x$ ノ降冪ニ排列スレハ $x^3+(a+a'-c)x^2+(aa'-c^2)x+(a-c)(a'-c)c$ ナリ依テ之レヲ證ス

●分數トハ何ソヤ

或量ヲ他ノ量ニ除スル算法ヲ示スモノナリ其除スル量ヲ分母ト云除セラルヽ量ヲ分子ト云其表ハシタル分數ハ此量ヲ彼量ニテ除シタル商ナリ

●分數ノ分子ニ他ノ量ヲ乘スルハ其分數ノ値ヲ倍ス此理由如何

分數ハ分母ニテ分子ヲ除シタルモノニテ分數ノ最低値ハ分母ニテ一個ヲ除シタルモノナリ此最低價ニ分子ヲ乘シタルガ分數ナレハ分子ハ分數ノ乘量ナリ依テ乘量ニ他ノ量ヲ乘スルハ卽チ分數ノ値ヲ倍スルヿ明カナリ

例ヘハ $\frac{b}{a}=\frac{1}{a}\times b$ ∴ $\frac{b\times m}{a}=\frac{1}{a}\times bm=\frac{b}{a}\times m$ ナルガ如シ

●分數ノ分母子ニ各同量ヲ乘スレハ其値變更ナシ其理由ヲ示セ

分數ノ分子ハ乘量ニテ分母ハ除量ナリ故ニ分母子ニ同量ヲ乘スル

ハ其乘除ヲ同フスルモノニテ其乘除互ニ消滅シテ其値變更ナキコ明カナリ

例ヘハ $\frac{b}{a}$ トスレハ $\frac{b\times m}{a\times m}=\frac{b}{a}\times\frac{m}{m}=\frac{b}{a}\times1=\frac{b}{a}$ ナルガ如シ

●分數ノ分母子ニ通因子ヲ有スルモノハ其通因子ヲ消去スル理由如何

分數ノ分母ハ除量ニテ分子ハ乘量ナリ依テ分母子ニ同因子アルハ其同因子ニテ乘除シタルニ同シ同量ノ乘除ハ其値變更ナシ故ニ此通因子ヲ消去スルモ値變セサルコ明カナリ

例ヘハ $\frac{bm}{am}=\frac{b}{a}\times\frac{m}{m}=\frac{b}{a}\times1=\frac{b}{a}$ ナルガ如シ

●$\frac{m-n}{a-b}$ ナルハ $\frac{n-m}{b-a}$ ナルニ等シ之レヲ證明セヨ

分母子ニ各同量ヲ乘スルハ其値變セス依テ $\frac{(m-n)\times(-1)}{(a-b)\times(-1)}=\frac{-m+n}{-a+b}=\frac{n-m}{b-a}$ ナリ依テ之レヲ證ス

●分數ヲ分數ニテ除スルハ法ノ分數ヲ轉倒シテ實ノ分數ニ乘スル理由ヲ證明セヨ

除法定理ニ依テ實法ニ同量ヲ乘スルハ其商變スルコナシ法ノ分數ヲ一個トナルヘキ分數ヲ兩々ノ分數ニ乘シ以テ之レヲ證スルコ左ノ如シ

$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}$ 之レニ $\frac{c}{d}$ ヲ乘ス $\frac{bc}{ad}\div\frac{dc}{cd}=\frac{bc}{ad}\div1=\frac{bc}{ad}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$ ノ如シ

●$\frac{(a^3-b^3)(a^3+b^3)}{a^4+a^2b^2+b^4}=(a^2-b^2)$ ナルコヲ證明セヨ

$\frac{(a^3-b^3)(a^3+b^3)}{a^4+a^2b^2+b^4}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}=(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ ナリ依テ之レヲ證明ス

●$\frac{p}{(a-b)(b-c)}+\frac{q}{(b-c)(c-a)}+\frac{p}{(c-a)(c-b)}=\frac{p-q+p}{(a-b)(b-c)}$ ヲ證セヨ

符號ヲ反轉セシムルニハ $-1$ ヲ乘スルニアリ又分母子倶ニ同量ヲ乘スレハ其値變セス

故ニ $\frac{p}{(a-b)(b-c)}+\frac{q(-1)}{(b-c)(c-a)(-1)}+\frac{p(-1)(-1)}{(c-a)(c-b)(-1)(-1)}=\frac{p-q+p}{(a-b)(b-c)}$ ナルヲ

證ス

● $A=mn+(x-a)n'$ ナレハ $\frac{A}{(x-a)n}=\frac{m}{x-a}+\frac{n'}{n}$ ナルヲ證セヨ

$\frac{A}{(x-a)n}$ ナルAヲ $mx+(x-a)n'$ ニ代用スレハ $\frac{mn+(x-a)n'}{(x-a)n}$ 之レ同分母ニ式ノ結合ナリ依テ之レヲ分離スレハ $\frac{mn}{(x-a)n}+\frac{(x-a)n'}{(x-a)n}$ ナリ此分母子通有ノ同量ヲ消去スレハ $\frac{m}{(x-a)}+\frac{n'}{n}$ ナリ依テ之レヲ證ス

## ○第八章　一次方程式

● **方程式トハ何ソヤ**

方程式トハ兩量ノ適等ヲ顯ハス所ノ代數式ナリ卽チ此式ハ彼式ニ等シト云フヲ相等號ニテ連結シ以テ一式ニ作爲シタル式ナリ又相等號ヨリ左ニアル諸項ヲ前節ト云右ニアル諸項ヲ後節ト云フ

● **方程式中ニ未知量ト已知量アリ之レ如何**

未知量トハ特別ニ命シタル量ニテ未タ其實値ヲ知ラサルモノ已知量トハ既ニ其實値ヲ知ル所ノモノナリ

● **方程式ニ一元二元或ハ多元ノ名稱アリ此元數ハ何ヲ以テ計フルヤ**

方程式ノ元ハ未知量ナリ一式中ニ一種ノ未知量ヲ有スルモノヲ一元方程式ト云二種ノ未知量ヲ有スルヲ二元三種ヲ有スルハ三元次第如此二元以上ヲ總稱シテ多元方程式ト云フ

● **方程式ニ一次二次高次ノ名稱アリ此次數ハ何ヲ以テ計フルヤ**

方程式ノ次數ハ未知量ノ方乘ナリ然レ圧一項中二種ノ未知量アレハ此二未知量ノ方乘ノ次數ヲ合シタルモ方程式ノ次數ナリ此方程式ノ次數ハ一式中ノ諸項ニ於テ未知量ノ最高次數ヲ採ル

例ヘハ $x+3=15$, $ax+b^2=ab$ 等ハ $x$ ガ未知量ナルニ依テ一元一次方程式ナリ又 $x^2-2x=35$, $ax^2+bx=2ab$. ハ一元二次方程式ナリ又

$x^2+xy=8$, $xy+ax=by$ モ二元二次方程式ナリ

●方程式ノ根或ハ商トハ何ゾヤ

方程式ノ狀勢ニ適合スル所ノ未知量ノ値ナリ此根ヲ方程式ノ未知量ニ代入スレハ両節同一ノ量ヲ顯シ其適當ヲ表示スヘキモノナリ

●方程式ハ如何ナル要用ヲナスヘキモノナルヤ之レヲ說明セヨ

未知量ノ値ヲ求メンカ為メニ巳知量ト互ノ關係ニ隨ヒ方程式ヲ組立ルモノナリ然レハ其未知量ノ値ヲ求メ得ルヿ容易ナリ依テ未知量ノ値ヲ求ムルニ必用ナルモノナリ

●方程式ニ於テ前節ヨリ後節ニ或ハ後節ヨリ前節ニ轉項スレハ其符號反轉ス其證明如何

等シキ量ニ同量ヲ加或ハ減スルモ其結果等シキハ之レ公理ナリ依ヲ其轉項セシムヘキ同量ノモノヽ符號相反シタルヲ両節ニ加入スレハ其量此節ニ於テ消滅シ彼ノ節ニ於テ表ハル之レ此量ハ加入セシ量ナルニ依テ其符號相反セリ

例ヘハ $x+a=b$ 此前節ノ a ヲ後節ニ轉項セシムルニハ $x+a-a=b-a$ ノ如シ即チ $x=b-a$ ナリ依テ方程式ノ諸項ヲ轉項スレハ其符號相反スルヿヲ證ス



●方程式ノ分母ヲ消去スルニハ各項ノ分母ノ最低公倍數ヲ乘ス其理由如何

定理ニ依テ方程式ノ全体ニ如何ナル量ヲ乘スルモ適等ヲ失フヿナシ又諸量ノ最低公倍數ハ其諸量ヲ悉ク因子ニ有ツ依テ此最低公倍數ヲ方程式ノ全体ニ乘スレハ適等ハ失セス且各項ノ分母ハ其公倍數ノ因子同量アレハ必ラス消滅スルヿ明カナリ

例ヘハ $\frac{x}{b}+\frac{5}{2(a-b)}=b$ ∴ $\frac{6x(a-b)}{6}+\frac{5\times6(a-b)}{2(a-b)}=6b(a-b)$ 之レヲ約スレハ

$x(a-b)+15=6b(a-b)$ ナルガ如シ

●一元一次方程式ハ如何ナル順次ノ演算ニテ其結果ニ至ルヘキヤ

第一分數アレハ其分母ヲ消去セシム第二前節ニ未知量ヲ後節ニ已知量ヲ聚ム第三未知量ノ係數ニテ除ス之レニテ結果ヲ得ル

●一元一次方程式ノ根ハ只一商ニテ他ニ變數アルヿナシ之レヲ證明セヨ

先ツ方程式ヲ $ax=b$ トスレハ $ax-b=0$ ∴ $a\left(x-\frac{b}{a}\right)=0$ 此 $a$ ガ零ナレハ此方程式ハ全ク消滅ス依テ $a$ ハ決シテ零ナラス然ルニ此式ヲ $a$ ニテ除スレハ即チ $x-\frac{b}{a}=0$ ニテ $x=\frac{b}{a}$ ナリ此他 $x$ ノ値ヲ求ムルヲ得ス

若シ $x$ ノ値ガ二ツアルトシテ一ヲ $p$ 他ノ一ヲ $p'$ トシ前ノ方程式ニ代用スルナラハ $ap=b$, $ap'=b$. ナリ此両式ヨリ一ノ方程式ヲ作レハ $ap=ap'$ ナリ之レヲ轉項スレハ $ap-ap'=0$ ∴ $a(p-p')=0$ ナリ此式ヲ $a$ ニテ除スルトキハ $p-p'=0$ ナリ之レヲ轉項スレハ $p=p'$ ニテ $p$ ト $p'$ トハ相等シキヲ示セリ依テ $n$ ノ價ニツアラス只一ツナルヿ明カナリ由テ之レヲ證ス

●方程式ノ通因子ヲ消去シテ其殘量適等ヲ失フモノアリ然ルトキハ其消去シタル因子ガ零ト適等ヲナス其理由ノ如何ヲ示セ

凡テ方程式ハ兩節等シキモノナレハ其兩節ヲ同量ニテ除或ハ乘スルモ適等ヲ失セサルハ之レ公理ナリ然ルニ $5(x-2)+6=3x$ ナル方程式ハ $5(x-2)=3x-b$ ニテ $5(x-2)=3(x-2)$ ナリ之レ $(x-2)$ ガ兩節ノ通因子ヲ爲セリ依テ此通因子ヲ消去スレハ $5=3$ 此量之レ適等ナラス依テ消去セシ $x-2=0$ ハ必ラス適等ナリ此方程式ノ根ハ $x=2$ ナルヿヲ知ル

然𪜈 $5(x-2)=3(x-2)$ ヲ轉項シテ $5(x-2)-3(x-2)=0$ トシテ倘之レヲ分括

スレハ$(5-3)(x-2)=0$ナリ$\therefore 2(x-2)=0$此兩節ヲ各二分スレハ$x-2=0$之レ此量ハ正當ノ方程式ナリ

之レヲ以テ考レハ通因子ヲ有スル方程式ハ他ノ量ヲ以テ倍シラレタルモノナルヘシ其倍セル量ガ適等量ニアラサレハ殘量或ハ消去量ノ其一ハ適等量ニテ他ノ一ハ適等量ニアラス若シ倍セル量ガ適等量ナレハ其兩々何レモ適等量ナルヿ明カナリ

●一ツノ方程式ニ二ツノ未知量ヲ有スルハ其根定限ナラス之レ不定ナリ之レヲ證セヨ

一方程式ニ一未知量ヲ有スルハ其根ヲ求メ得ルヿ容易ナリ

今$ax+by-c=0$ナル方程式ニ於テ任何$y$ヲ設ケ$y=M$トシテ代入スレハ$ax+bM-c=0$即チ$ax=c-bM$ニテ$x=\frac{c-bW}{a}$ナリ

之レ$y$ハ任何量ニテ一定ノ量ニアラス之レ定限ナシ又$x$ハ$y$ノ値ノ定マルニ隨ヒ定マルモノナレハ$y$ガ定限ナケレハ隨テ$x$モ定限ナシ故ニ一方程式ニ二未知量ヲ有スルハ其根一定ナラス數多ノ變數ヲ生シテ不定ナルヿヲ證ス

●通同方程式トハ何ソヤ

二ツ或ハ二ツ以上ノ方程式其根ヲ通シテ同根ナルモノ之レナリ

例ヘハ$3x+2y=21$, $7x-5y=20$. 此二式ノ根ヲ$x=5$, $y=3$. トシテ代入スレハ$3\times5+2\times3=15+6=21$, $7\times5-5\times3=35-15=20$. 之レ兩式俱ニ適合セリ如此一根衆式ニ適フ所ノモノヲ通同方程式ト云フ

●二未知量ヲ有スル方程式ノ一定ノ根ヲ求ルハ二方程式ヲ要ス其理由如何

二未知量ヲ有ツ方程式ガ只一式ナレハ此根ハ不定ナリ之レ一式ヨリ同時ニ二根ヲ求メ得サレハ其一ヲ假定セサルヲ得ス之レ假定ハ

随意ナレハ一定量ニアラサレハナリ二未知量二式ナレハ一式一根ヲ求メ得レハ二式ヨリ二根ヲ求メ得ルヿ明カナリ

例ヘハ $ax+by-c=0$……(1) $a'x+b'y-c=0$……(2) 各式 $x$ ヲ求ム $x=\frac{c-by}{a}$, $x=\frac{c'-b'y}{a'}$ 兩量同項ナルカ故ニ $\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'}$ ナリ依テ $a'(c-by)=a(c'-b'y)$ ニテ $a'c-a'by=ac'-ab'y$ ナリ之レヲ轉項スレハ $ab'y-a'by=ac'-a'c$……$y(ab'-a'b)=ac'-a'c$ ∴ $y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$ ナリ此 $y$ ヲ(1)或ハ(2)ニ代入スレハ $x$ ノ値ヲ得ル如此二未知量ヲ有スル根ヲ求ルニハ必ス二方程式ヲ要スルヿ明カナリ此理ニ據テ $n$ 個ノ未知量ヲ有スレハ $n$ 個ノ方程式ヲ要スルヿ勿論ナリ

● $n$ 個ノ未知量ヲ有スル $n$ 個ノ方程式ニ依テ未知量ヲ消去スルヿ $(n-1)$ ニ至レハ一未知量ヲ有スル只一式ヲ得ヘシ之レ如何

二未知量ヲ有スル二式ニテ一未知量ヲ一回消去スレハ只一未知量ヲ有スル一式トナル

三未知量ヲ有スル三式ニテ一未知量ヲ一回消去スレハ二未知量ヲ有スル二式トナル次ニ又一未知量ヲ消去スレハ一未知量ヲ有スル只一式トナル之レ二ツナレハ一回三ツナレハ二回如此其未知量ノ數ヨリ一少キ回數ニ至リテ只一未知量ノ一式ヲ得レハ $n$ 個ノ未知量 $n$ 個ノ方程式ノ消去 $(n-1)$ ニ至レハ只一未知量ノ一式トナルヿ明カナリ

## 第九章　極數、根數、虚量

● 無窮大及無窮小トハ何ソヤ

數ニ大小ノ兩極アリ凡テノ數ハ此兩極ノ中間ニ包容スル所ノ限界ナリ

無窮大トハ數ノ極大ニシテ數漸々増加スルヿ無窮ナレハ之レ無量ニシテ遂ニ大極ニ至ル大極トハ其數無量大ヒニテ視ルヿモ採ルヿ

テ得ヘカラスニ至レルモノナリ
無窮小トハ數ノ極小ニテ數漸々減少スルヿ無窮ナレハ之レ無量ニ
シテ遂ニ小極ニ至ル小極トハ其數無量小ニシテ視ルヿモ採ルヿヲ
得ヘカラサルニ至レルモノナリ
故ニ無窮大及無窮小ハ名アリテ實ナク之レ空虚ナリ然レ𪜈論理ニ
於テハ其關係大ヒナルモノナリ之レヲ示ス符號無窮大ハ∞無窮小
ハ0ヲ以テス

● $\frac{A}{0}=\infty$, $\frac{A}{\infty}=0$, $\frac{0}{A}=0$, $\frac{0}{0}=$不定 ナルヲ證明セヨ

分數ノ値ハ分母子ノ値ニ由テ增減スルモノナリ
第一　分子ハ不易ナルモ分母ガ漸々小ニ至レハ其分數ノ値ハ必ラス漸々大ナラサルヲ得ス依テ分子Aハ一定不易ニテ分子ハ無窮小ナレハ此値ハ無窮ノ大ナルヿ明カナリ



第二　分子ハ一定不易ナルモ分母ガ漸々大ヒニ至レハ其分數ノ値ハ漸々小ナラサルヲ得ス依テ分子ハ一定不易ニテ分母ガ無窮大ナレハ此値ハ無窮小ナルヿ明カナリ
第三　分母ハ不易ナルモ分子ガ漸々小ニ至レハ此分數ノ値ハ小ナラサルヘカラス依テ分母Aハ一定不易ナルモ分子ガ無窮小ナレハ此値ハ無窮小ナルヿ明カナリ
第四　分母子相倶ニ漸々減少スレハ其値變スルヿ一定不易ナリ然ルニ分母子ノ如何ニ拘ラス漸々小ニ至リ極ニ達スレハ皆無窮小ナリ依テ分母子互ニ無窮小ナルモノハ其起リシ所ノ如何ヲ知ル能ハス依テ此値ハ不定ナラサルヘカラス依テ各ヲ證明ス

● 指數ノ增減ハ如何ニ由テ生スルヤ
之レ乘除ニ由テ生スルモノナリ同量ノ累乘ノ回數ナレハ同量ヲ乘

スレハ指數增加シ同量ニテ除スレハ其指數減少ス

例ヘハ $a^3 \times a^2 = aaaaa = a^{3+2} = a^5$, $a^3 \div a^2 = aaa \div aa = a^{3-2} = a$ ノ如シ

● 指數ニ於ル負數ハ如何ニ由テ生スルヤ

指數ニ負數ヲ生スルハ實量ノ指數ヨリ法量ノ指數ノ高キニ起ルモノナリ依テ指數ガ負數ナレハ此量ニテ一個ヲ除シタルモノナリ

例ヘハ $a^2 \div a^5 = aa \div aaaaa = a^{2-5} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ ナリ

● 分數ニ於ル字母ヲ分母ヨリ分子ニ或ハ分子ヨリ分母ニ轉項スレハ其指數ノ符號相反ス之レ其理由ヲ擧ケヨ

負ノ指數ヲ有スル量ハ其量ニテ一個ヲ除シタルモノナリ之レ分數ニ於ル其位置ノ反對ヲ示スニ同シ故ニ分數ニ於テ字母ノ位置ヲ轉スルモ其指數ノ符號ヲ反スレハ其量ノ位置反對ヲ示セハ其値ニ變更ナキカ故ナリ

例ヘハ $\frac{az^2}{x^2y^{-3}} = ax^{-2}y^3z^2$, $\frac{a^{-1}y^2}{x^{-3}b} = \frac{x^3y^2}{ab}$ 等ノ如ク變スルモ値變セス

● $a^m a^n = a^{m+n}$ ニテ $(a^m)^n = a^{mn}$ ナルヿヲ證明セヨ

$a^m a^n = (aaa \cdots a$ ノ $m$ 項$)(aaa \cdots\cdots a$ ノ $n$ 項$)$ ナリ之レ指數ハ連乘數ノ和ナリ依テ其連乘ノ數ハ $m$ ト $n$ ナレハ其和ハ $(m+n)$ ナリ $\therefore a^m a^n = a^{m+n}$ ナルヿ明カナリ

$(a^m)^n = a^m a^m a^m \cdots\cdots a^m$ 項ナリ依テ $a^m$ ヲ $n$ 程聚ムルモノナレハ其指數ハ $m$ ノ $n$ 倍ナルヿヲ知ル故ニ $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$ ナルヿヲ證明ス

之レニ依テ同量ノ相乘ハ其指數ヲ結合スルモノニテ方乘ハ指數ヲ相乘スルモノナリ

● 根數トハ何ソヤ

根數トハ方乘冪ヲ還原スル即チ開方ノ次數ナリ其開方ノ記號ヲ根數號ト云テ√ヲ用ユ開方ハ二乘冪ノ還原ヨリ起ルモノナレハ二乘

根ハ$\sqrt{\ }$三乗根ハ$\sqrt[3]{\ }$四乗根ハ$\sqrt[4]{\ }$ナリ之レヲ分數ニ記スルアリ即チ
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$　$\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$　$\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$等ノ如シ

● 指數ト根數トノ關係ヲ示セ

指數ハ累乗ノ次數即チ方乗トハ相乗ニテ増加ス根數ハ方乗ノ還原ニテ其關係ハ互ニ相反セリ依テ指數ノ分數ニ於テハ根數ハ分母ニテ指數ハ分子ナリ故ニ根數ト指數トハ互ニ消去スルヿヲ得ル此指數ノ分數ヲ分指數ト云

例ヘハ $\sqrt{(x^6)}=x^3$, 即チ $\sqrt{(x^6)}=x^{\frac{6}{2}}=x^{\frac{3}{1}}=x^3$ ノ如シ

● 負量ハ偶次ニ開方スルヿヲ得ス其理由如何

正負ニ拘ラス量ヲ偶乗スレハ其積ハ必ラス正量ニテ負量ハ偶乗冪ノ積ニアラス然ルニ開方ハ方乗冪ノ還原ナレハ偶次ノ方乗冪ニアラサル負量ヲ還原スルノ理由ナシ故ニ負量ヲ偶次ニ開方スルヿヲ得サルヲ證ス

● $\sqrt{(a^{2n}b^{3n})}=a^nb^n\sqrt{b^n}$ ナルヿヲ證セヨ

二乗根ハ二乗冪ノ還原ナリ $a^na^n=a^{2n}=(a^n)^2$ ナリ $b^{3n}=b^{2n}b^n$ ナリ
故ニ $\sqrt{(a^{2n}b^{3n})}=\sqrt{(a^na^nb^nb^nb^n)}=\sqrt{(a^nb^n)^2b^n}=a^nb^n\sqrt{b^n}$ ナルヲ證ス

● $\sqrt[n]{(a^{3n}b^2c^{mn})}=a^3c^m\sqrt[n]{b^2}$ ナルヲ證セヨ

之レ$n$乗ノ還原ナリ然ルニ $a^{3n}=(a^3)^n$ ニテ $c^{nm}=(c^m)^n$ ナリ故ニ
$\sqrt[n]{(a^{3n}b^2c^{nm})}=\sqrt[n]{(a^3)^n(c^m)^nb^2}=a^3c^m\sqrt[n]{b^2}$ ナルヿヲ證ス

● $(-a)^{2n\pm1}$ 此$a$ガ正量ナレハ數ニ拘ラス決シテ平方ニ開クヲ得ス此理如何

此$a$ガ正量ナレハ此括弧內ハ變更スルヿナク之レ負量ナリ又$n$ノ奇偶ニ拘ラス$n$ノ二倍ハ恒ニ偶數ナリ偶數ニ一個ヲ加ヘ或ハ減スルトキハ之レ奇數ナリ故ニ此量ハ負量ノ奇乗冪ニテ負量ナルヿ明カ

ナリ依テ負量ヲ偶次ニ開方スル理ナシ之レ平方ハ偶乗ナレハ此負量ヲ平方ニ開クヘキ理由ナキヲ證ス

● $a^3\times\sqrt{a\times a^{-5}\times a^{\frac{3}{2}}}=1$ ナルコヲ證セヨ

量ノ指數ハ其量ヲ指數程累乗スルモノナリ依テ同量ヲ相乗スルハ其累乗數ヲ増加スルモノナレハ此指數ヲ結合スルニアリ依テ之レヲ證スルコ左ノ如シ

故ニ $a^3\times\sqrt{a\times a^{-5}\times a^{\frac{3}{2}}}=a^3\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{2}}a^{-5}=a^{3+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-5}=a^0=1$

● $\sqrt{18}+\sqrt{50}+\sqrt{32}=12\sqrt{2}$ ナルコヲ證セヨ

各數何レモ分割シテ因子ヲ顯シ其因子二乘ヲ有スルモノハ平方ニ開ク然シテ各項通因子ヲ有セハ之レヲ括リテ單箇式トナスコヲ得ル依テ之レヲ證スルコ左ノ如シ

$\sqrt{9\times2}+\sqrt{25\times2}+\sqrt{16\times2}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}+4\sqrt{2}=(3+5+4)\sqrt{2}=12\sqrt{2}.$

● 虚量トハ何ソヤ

虚量トハ負量ガ偶次ノ開方根ヲ有スルモノナリ最モ單純ノ虚量ハ $\sqrt[2n\pm1]{-1}$ ナリ

● $\sqrt{(-a^2)}$ ハ虚量ナリ然レモ a ハ虚量ニアラス實數ナリトセハ如何ナル關係ニ由テ斯ナル虚量ヲ表示セシヤ其理由ヲ示シ且其結果ヲ擧ケヨ

a ガ實數ナレハ $(+a)^2=+a^2$, $(-a)^2=+a^2$ a ノ正負ニ拘ラス $a^2$ ハ必ラス正量ナリ然ルニ單純虚量ハ $\sqrt{(-1)}$ ニテ即チ根數號内ノ一個ナリ之レヲ他量ニ乘スレハ其一個ハ隱蔽スルモ其積ハ虚量ヲ示ス故ニ $\sqrt{(-a^2)}=\sqrt{a^2\times(-1)}$ ナルヘシ依テ $a^2$ ハ實量ナルコ明カナリ之レヲ平方ニ開ケハ其結果ハ $\pm a\sqrt{(-1)}$ ナリ以テ此理由ヲ證明ス

## 第拾章　二次方程式及不等式

● 二次方程式トハ何ソヤ

二次方程式トハ未知量ノ二乘ヲ含有スル所ノ整方程式ナリ整方程式トハ分數ヲ有セサル方程式ナリ

●二次方程式ニハ必ラス二ツノ根アリ之レヲ證明セヨ

代數記法ニ因レハ $ax^2+bx+c=0$ ナリ依テ $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ ハ原式ト必ラス同値ナリ然ルニ此後節零ナルカ故ニ $x-\alpha=0$, $x-\beta=0$ ∴ $x=\alpha$, $\beta$ ナリ

倘別ニ解スレハ二次式ハ $x^2-(a+b)x+ab=0$ ナリ依テ $(x-a)(x-b)=0$ ナリ故ニ $x-a=0$, $x-b=0$ ナリ ∴ $x=a$, $x=b$. ノ二根ナルヿヲ證明ス

●一元二次方程式ノ根8及2ナルハ其方程式ノ形勢如何ニアルヤ

二ツノ根ニ據レハ $x=8$. $x=2$. ナレハ此方程式ハ $x-8=0$, $x-2=0$ ナリ此二式ヲ相乘スレハ $(x-8)(x-2)=0$ ニテ即チ $x^2-10x+16=0$ ナリ依テ此二根ヲ得ルハ此方程式ニアルヿヲ證ス

●二次方程式ノ兩節ヲ平方ニ開ケハ後節ハ必ラス複號(±)ヲ附スル理由如何

開平方ハ二乘冪ノ還原ナリ然ルニ其積量ハ正ナルハ其根ノ正量ナルモ負量ナルモ其積恒ニ正量ナレハ其根ノ正負ヲ知ルヲ得ス依テ平方ニ開ケハ必ラス複號ヲ附セサルヘカラス之レ其理由ナリ

●不等式トハ何ソヤ

不等式トハ此量ハ彼量ヨリ大ナリ或ハ此量ハ彼量ヨリ小ナルヲ表ハス代數式ナリ之レヲ表示スル符號ヲ不等號<ヲ用ユ例ヘハ $a>b$ ハaガ大 $a<b$ bカ大ナリ

●不等量ノ兩節ニ同量ヲ相俱ニ加減或ハ乘除スルモ其比變セス然ルニ符號ヲ變換スレハ其比相反ス此理由如何ヲ示セ

公理ニ由テ等シカラサル量ニ各同量ヲ加或ハ減スレハ其和或ハ差ハ不等ナリ前ニ大ヒナルカ後モ大ヒナリ同理ニ依テ乘除モ又同シ

然ルニ符號ヲ變スレハ其反對ヲ示スヲ論スレハ正量ハ目的ニ向ヒ正當ナレハ零ヨリ大ヒナリ負量ハ之レニ反スレハ零ヨリ小ナリ例ヘハ $1>0$, ニテ $0>-1$ $\therefore 0-1>-1-1$ 即チ $-1>-2$ 故ニ $1<2$ ニテ $-1>-2$ ナリ依テ符號ヲ反スレハ其比相反スルヿヲ證明ス

● $x^2=11\pm6\sqrt{2}$ 此 $x$ ノ値ヲ發見セヨ且其單箇ナル法方ヲ示セ

此 $x$ ノ値ヲ求ムルハ後節ヲ平方ニ開クニアリ此後節ノ平方數ナルヤ否ヤヲ撿察スル單箇法ヲ論スレハ先ツ二數ノ平方數ハ必ラス三數ナラサルヲ得ス故ニ一項ハ二數ノ和ナルヘシ二項ノ根數ヲ $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ トスレハ $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=a\pm2\sqrt{ab}+b=(a+b)\pm2\sqrt{ab}$. 之レヲ察スレハ $11=a+b$, $6\sqrt{2}=2\sqrt{ab}$ ニ相當スレハ之レ平方數ナルヿ明カナリ依テ $6\sqrt{2}$ ヲ二分スレハ $\sqrt{ab}$ ナリ故ニ之レヲ二因子ニ分割シ此平方ノ和カ $11$ ニ密合スレハ此數平方數ナルヿ勿論ナリ $6\sqrt{2}\div2=3\sqrt{2}$ 之レヲ二因子ニ分割スレハ $3, \sqrt{2}$. 此平方ヲ合スレハ $3^2+(\sqrt{2})^2=9+2=11$ ナリ即チ密合セリ之レニ依テ $11=a+b$, $3=\sqrt{a}$, $\sqrt{2}=\sqrt{b}$ ナリ $\therefore x^2=11\pm6\sqrt{2}=(3\pm\sqrt{2})^2$ ニテ $x=\pm(3\pm\sqrt{2})$ ナルヿ明カナリ

代數學理論的問答下卷終

明治廿四年十二月十日印刷竣切
同　廿四年十二月十三日出版御屆

上卷一冊定價五錢
下卷一冊定價五錢

版權所有

發行者　大阪市南區順慶町四丁目百七十九番屋敷　此村庄助
著作者　大阪市西區土佐堀裏町四十四番屋敷　新名重内
印刷者　大阪市西區靱下通一丁目四十八番屋敷　瀨戶清次郎

# 弘通書肆

東京日本橋通一丁目　北畠茂兵衛
仝　所　大倉書店
仝　日本橋區新大阪町　小林喜右衛門
仝　京橋區南傳馬町二丁目　目黒支店
仝　日本橋區若松町　榊原友吉
仝　仝區大傳馬町二丁目　長島恭三郎
仝　仝區本町四丁目　杉本七百丸
仝　神田區今川小路　金刺源次
京都　御幸町姉小路　藤井孫兵衛
仝　寺町通二條　梅原支店
仝　三條通寺町　山中勘二郎
仝　寺町綾小路　川勝徳二郎

大阪安堂寺町四丁目　田中太右衛門
同　所　青木嵩山堂
同　心齋橋筋一丁目　松村九兵衛
同　北久太郎町四丁目　柳原喜兵衛
同　安土町四丁目　鹿田靜七
同　備後町四丁目　此村彦助
同　所　吉岡平助
同　所　梅原龜七
同　瓦町四丁目　須田重助
同　淡路町四丁目　中村庄兵衛
同　京町堀三丁目　吉東次武
同　四丁目　平野藤七

# 弘通書肆

神戸相生橋　熊谷久榮堂
大和國高田　松村善藏
大和國櫻井東口　木村ハル
大和國帯解　藤田書店
尾州名古屋本町　片野東四郎
仝　仝　仝所　川瀬代助
仝　仝　鉄砲町　三輪文次郎
仝　仝　仝所　梶田勘助
仝　仝　門前町　淺見鉦太郎
遠州濱松　谷島屋源三郎
仝　掛川　三原屋甚助
仝　見附　明治舍
江州長濱　中村藤平
仝　彦根　廣田七二郎
美濃大垣　岡安慶助
越後三條　樋口書舗
作州津山堺町　仁科照文堂
仝　元魚町　牧山書店
仝　京町　寶田房二郎
備前岡山西大寺町　武內彌三郎
仝　大辻增五郎
雲州松江大橋　園山喜三右衛門
仝　天神町　川岡清助
伯州米子尾高町　今井兼文
信州松本　水琴堂
甲府柳町　柳正堂
信州長野　西澤喜太郎

---

播州姫路米田町　本莊輔二
仝　明石中町　藥師寺卯一郎
紀州湯淺山家町　岩崎種之助
仝　和歌山　平井文助
阿波德島通町三丁目　阪井萬吉
仝　仝　所　松浦書店
仝　仝　通町二丁目　世渡谷盈藏
仝　仝　西新町五丁目　黑崎精二
仝　仝　新町橋詰　黑崎源助
仝　仝　仝　鉄崎瑞章堂
仝　仝　大道一丁目　井關久米吉
讃岐高松常盤橋　開文舍
仝　丸龜町　岡田千吉
仝　仝　宮脇開益堂
仝　琴平內町　箸方儀三郎
仝　丸龜富屋町　盛田保藏
仝　仝　米屋町　松竹堂
仝　大內郡白鳥　廣瀬榮吉
仝　小豆島　山本向進舍
長門豐浦郡阿川村　山本艮藏
筑前博多中島町　積善舘支店
仝　仝　林斧介
仝　仝　糀屋町　貝海德三郎
肥前長崎引地町　鶴野常藏
仝　唐津刀町　勝木松太郎
肥後熊本新三丁目　長崎次郎
薩摩鹿兒島中町　吉田[illegible]兵[illegible]