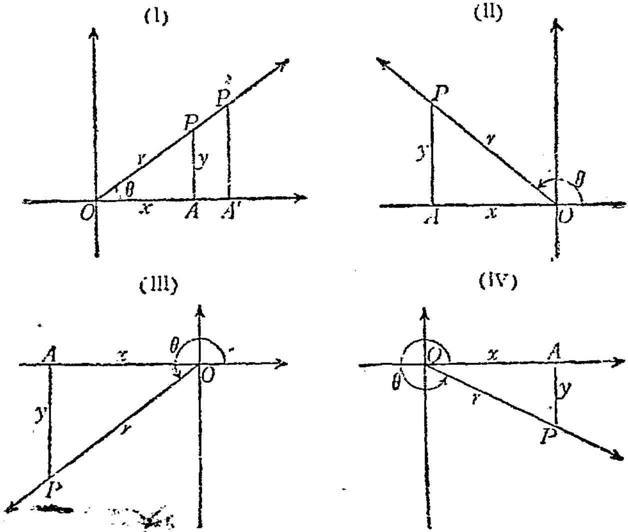
第一章　三角函數

一. 定義　在 θ 角之終邊上（如一角終邊在某象限內，即稱為在該象限內之角）任取一點 P，設 P 點之縱坐標為 $AP=y$，橫坐標為 $OA=x$，距離 $OP=r$，（其值常為正）．則三線段間有下六比．即 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ 及其逆數 $\frac{r}{y}$, $\frac{r}{x}$, $\frac{x}{y}$.



如 θ 角不變，吾人可證各比之比值不因 P 點之位置而
蓋如於 θ 角之終邊上，另取 P' 點，設其縱坐標爲 $A'P'$，
爲 OA'，距離爲 OP'

則 $$\triangle POA \backsim \triangle P'OA'$$

$$\therefore \frac{PA}{P'A'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{OP}{OP'}.$$

是故各比之比值，不因 P 點之位置而變動也。

又如 θ 角變動，吾人可證各比之比值隨之而變，準
各比乃 θ 角之函數也。

吾人稱 $\frac{y}{r}$ 爲 θ 角之正弦(sine)，記以 $\sin\theta$，$\frac{x}{r}$ 爲 θ
弦(cosine)，記以 $\cos\theta$，$\frac{y}{x}$ 爲 θ 角之正切(tangent)，記
或 $\operatorname{tg}\theta$，$\frac{r}{y}$ 爲 θ 角之餘割(cosecant)，記以 $\csc\theta$ 或 $\operatorname{cosec}\theta$
θ 角之正割(secant)，記以 $\sec\theta$，$\frac{x}{y}$ 爲 θ 角之餘切(cotan
記以 $\cot\theta$ 或 $\operatorname{ctn}\theta$。

【註】

1. 如 θ 角在第一象限內，則 $\triangle POA$ 爲直角三角形，而

$$\sin\theta=\frac{AP}{OP}=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}},\qquad \csc\theta=\frac{OP}{AP}=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}},$$

$$\cos\theta=\frac{OA}{\ }=\text{隣邊}\qquad \ldots=\frac{OP}{\ }\ \text{斜邊}$$

$$\tan\theta=\frac{AP}{OA}=\frac{對邊}{隣邊},\qquad \cot\theta=\frac{OA}{AP}=\frac{隣邊}{對邊}.$$

乃銳角三角函數之定義.

2. 除此六函數外，尚有 vers $\theta=1-\cos\theta$，covers $\theta=1-\sin\theta$. 前者為 versine 之簡寫，譯名為正矢；後者為 coversine 之簡寫，譯名為餘矢。但此二函數，今已不常用.

二. 基本關係.

1. 逆數關係

$$\sin\theta\csc\theta=1,$$

$$\cos\theta\sec\theta=1,$$

$$\tan\theta\cot\theta=1.$$

2. 商數關係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

以上二關係由定義卽可證明.

3. 平方關係

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta,$$

$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta.$$

因 $(距離)^2=(縱坐標)^2+(橫坐標)^2$. 故.

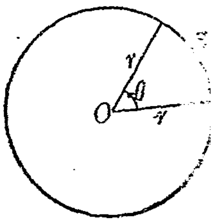
【註】: 吾人如知逆數三關係，商數任一關係及平方任一關係，即可推其他諸關係.

4. 餘角函數關係　銳角任一函數，等於其餘角之餘函數. 按銳角三角函數定義即可證明.

三. 量角法.　度量角之單位有二種.

1. 角度制.　將圓周分為 360 等分，每段弧所對之圓心角稱為 1 度. 每度更分為 60 分，每分又分為 60 秒.

2. 弧度制.　一角之弧度，即以其為圓心角時，所截取之對弧 S 與圓半徑 r 之比值. 即 $\theta=\frac{S}{r}$. 故在 $S=r$ 時，$\theta=1$ 弧度，而為弧度制之單位.



3. 換算公式.　因 $\frac{C}{r}=2\pi$，故取 $\frac{1}{4}C$ 弧，(C 為圓周)，其所對之圓心角為直角而等於 90°. 因而

$$\text{直角}=90^\circ=\frac{S}{r}=\frac{1}{4}\times\frac{C}{r}=\frac{\pi}{2}\text{弧度}.$$

由此得換算公式為:

$$1\text{弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}=57.2957^{\circ+}=57^\circ17'45''$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}=\frac{3.1416}{180}\text{弧度}=0.01745^{+}\text{弧度}.$$

0.01745329.

例一. $-420^\circ\times\frac{\pi}{180^\circ}=-\frac{7\pi}{3}$ 弧度.

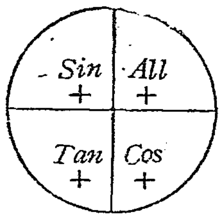
例二. $\frac{3\pi+2}{5}$ 弧度 $=\frac{3\pi+2}{5}\times\frac{180^\circ}{\pi}=108^\circ+\frac{72^\circ}{\pi}$

$=108^\circ+\frac{72^\circ}{3.1416}=108^\circ+22.92^\circ$

$=130.92^\circ$.

四. 各象限內函數值之號.

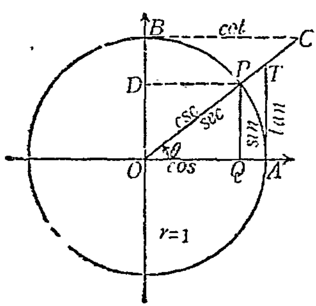
由定義可得右表.



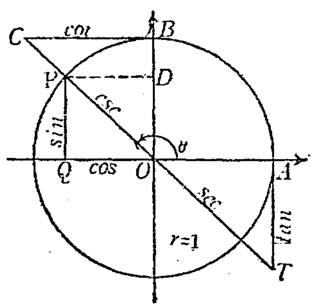
餘切,正割,餘割因各與正切,餘弦,正弦同號,故不討論,以下倣此.

五. 三角函數之線值表示法.

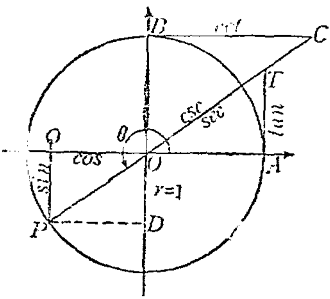
θ 角在第一象限



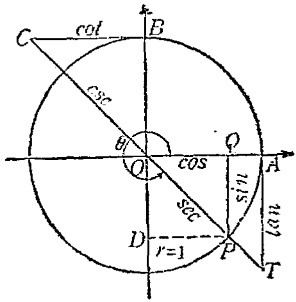
θ 角在第二象限



θ 角在第三象限



θ 角在第四象限



在上列各圖中，以 O 為圓心，作單位圓與 x 軸交於 A 點，與 y 軸交於 B 點，與 θ 角之終邊交於 P 點。作 $PQ\perp OA$，$PD\perp OB$，由 A 點與 B 點作圓之切線交 OP 之延線於 T 點與 C 點。則得

$$\sin\theta=\frac{QP}{OP}=QP,\qquad \cos\theta=\frac{OQ}{OP}=OQ,$$

$$\because\quad \triangle OQP\backsim\triangle OAT,\qquad 且\quad OA=1.$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{QP}{OQ}=\frac{AT}{OA}=AT,\qquad \sec\theta=\frac{OP}{OQ}=\frac{OT}{OA}=OT,$$

$$\because\quad \triangle OQP\backsim\triangle CBO,\qquad 且\quad OB=1.$$

$$\therefore\quad \cot\theta=\frac{OQ}{QP}=\frac{BC}{OB}=BC,\qquad \csc\theta=\frac{OP}{QP}=\frac{OC}{OB}=OC.$$

【註】：

1. 表正割與餘割之線段，如含有點 P 者為正，不含有點 P 者為負。

2. $\text{vers}\,\theta=1-\cos\theta=OA-OQ=QA$，$\text{covers}\,\theta=1-\sin\theta=OB-QP$ $=OB-OD=BD$。昔日所謂八線即指此也。

六. 特別角三角函數. 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

1. 0°, 90°. 按上節,吾人易知當 $\theta=0°$ 時, $QP=0$,

$OQ=OA=1$, $AT=0$, $BC=\infty$, $OT=OA=1$, $OC=\infty$.

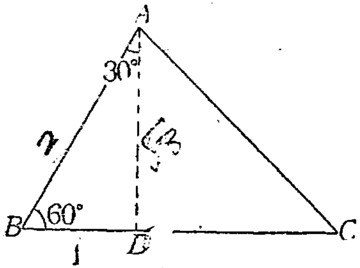
故得

$\sin 0°=0=\cos 90°$, $\cos 0°=1=\sin 90°$,

$\tan 0°=0=\cot 90°$, $\cot 0°=\infty=\tan 90°$,

$\sec 0°=1=\csc 90°$, $\csc 0°=\infty=\sec 90°$.

2. 30°, 60°.



作等邊三角形 ABC, 使各邊長爲 2 單位. 更作 $AD\perp BC$,

知 $\angle ABD=60°$,

$\angle BAD=30°$,

$AB=2, BD=1$,

$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}$

$=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

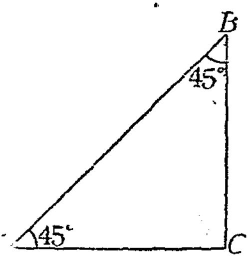
故得

$$\sin 30°=\frac{BD}{AB}=\frac{1}{2}=\cos 60°,$$

$$\cos 30°=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60°,$$

$$\tan 30°=\frac{BD}{AD}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\cot 60°.$$

3. 45°



作等腰直角三角形 ABC，使

$$AC=BC=1$$

而 $$AB=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},$$

$$\angle ABC=\angle CAB=45°.$$

$$\therefore\quad \sin 45°=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\cos 45°,$$

$$\tan 45°=\frac{BC}{AC}=1=\cot 45°.$$

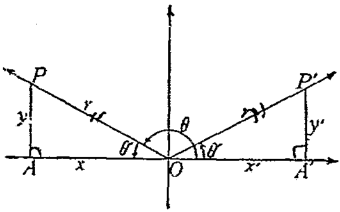
為便於記憶起見，茲列表如下.

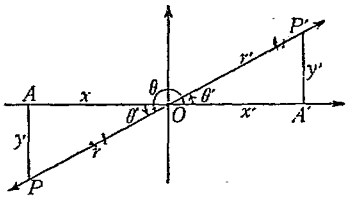
	0°		30°		45°		60°		90°
sin	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1
cos	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0
tan	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	↗	1	↗	$\sqrt{3}$	↗	∞
cot	∞	↘	$\sqrt{3}$	↘	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	↘	0
sec	1	↗	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	↗	$\sqrt{2}$	↗	2	↗	∞
csc	∞	↘	2	↘	$\sqrt{2}$	↘	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	↘	1

七. 化各象限內角爲銳角同函數之公式.

1. 定理 任何角之三角函數與其相關角(設 $\theta<360°$, 如定他一銳角 θ' 使 $\theta\pm\theta'$ 爲 $180°$ 或 $360°$, 則 θ' 稱爲 θ 之相關角)之同函數, 二者之絕對值相等.

[證]:





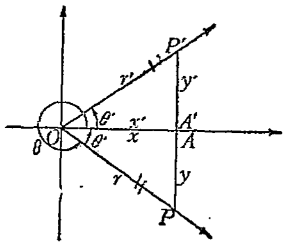
取 $OP'=OP$,

則 $\triangle OAP\cong\triangle OA'P'$,

∴ $|x|=|x'|$,

$|y|=|y'|$

$r=r'$



故得證明.

2. 公式.

第二象限

$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta,$$

$$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta,$$

$$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$$

第　三　象　限

$$\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta,$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta,$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta,$$

第　四　象　限

$$\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta,$$

$$\cos(360^\circ-\theta)=\quad\cos\theta,$$

$$\tan(360^\circ-\theta)=-\tan\theta.$$

八．化各象限內角爲銳角餘函數之公式.

第　二　象　限

$$\sin(90^\circ+\theta)=\quad\cos\theta,$$

$$\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta,$$

$$\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta.$$

第　三　象　限

$$\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta,$$

$$\cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta,$$

$$\tan(270^\circ-\theta)=\quad\cot\theta.$$

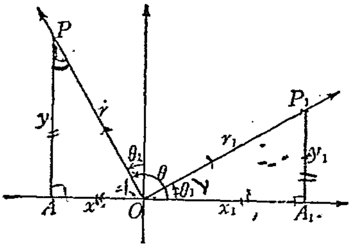
第　四　象　限

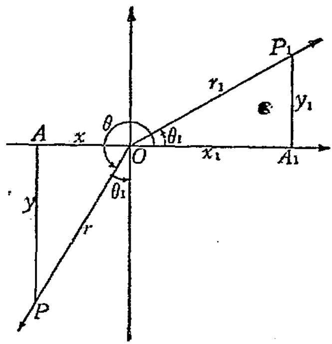
$$\sin(270^\circ+\theta)=-\cos\theta,$$

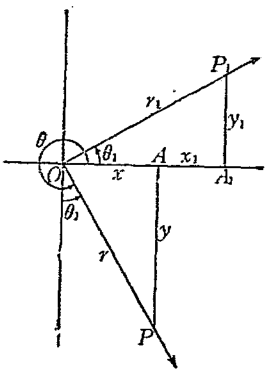
$$\cos(270^\circ+\theta)=\quad\sin\theta,$$

$$\tan(270^\circ+\theta)=-\cot\theta.$$

[證]:







取 $OP_1=OP$,

$\because$ $\angle OPA=\angle P_1OA_1=\theta_1$

$\therefore$ $\triangle OPA\cong\triangle P_1OA_1$,

$\therefore$ $|x|=|y_1|$,

$|y|=|x_1|$,

$r=r_1$.

故得證明.

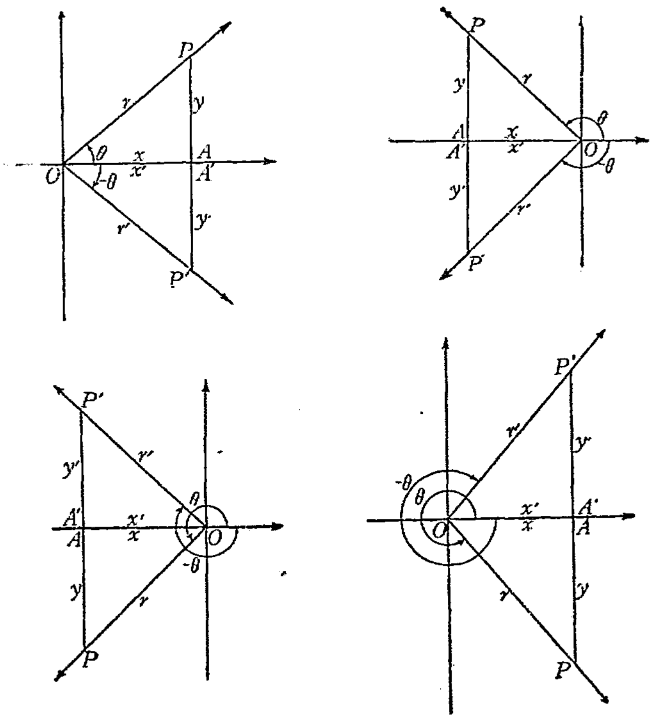
九. 負角函數.

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta.$$

$$\cos(-\theta)=\quad\cos\theta,$$

$$\tan(-\theta)=-\tan\theta,$$

[證]:



取 $OP'=OP$, 則 $\triangle OPA \cong \triangle OP'A$.

$\therefore$ $x=x'$, $y=-y'$, $r=r'$ 故得證明.

【註】: 普通規定，與時針旋轉相反的方向為正角，相同的方向為負角.

十. 三角函數之週期性. 如函數 $f(\theta)$，不論 θ 值如何，關

係式 $f(\theta+p)=f(\theta)$ 恆成立者(式中 p 為一常數)則 $f(\theta)$ 稱為週期函數. 又如 p 為合此關係式之最小正值,則稱為函數之週期.

吾人由三角函數之變跡

	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty \mid -\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$
cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
sec	1	↗	$+\infty \mid -\infty$	↗	-1	↘	$-\infty \mid +\infty$	↘	1
tan	0	↗	$+\infty \mid -\infty$	↗	0	↗	$+\infty \mid -\infty$	↗	0
cot	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty \mid +\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

可知如 θ 角增至 2π 後,其正餘弦及正餘割皆周而復始,故其週期為 2π. θ 但角增至 π 後,其正餘切即周而復始,故其週期為 π. 然則三角函數乃一週期函數明矣.

例. 試求下列諸式之值.

1. $$\frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ+A)}+\frac{\tan(90^\circ+A)}{\cot A}+\frac{\cos A\cos 0^\circ}{\sin(90^\circ+A)}$$

$$=\frac{-\sin A}{-\sin A}+\frac{-\cot A}{\cot A}+\frac{\cos A}{\cos A}$$

$$=1-1+1=1.$$

2.　$\sin 210^\circ + \tan(-135^\circ) + \cos(-420^\circ)$

$$= -\sin 30^\circ + \tan 45^\circ + \cos 60^\circ$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0.$$　(南開大，25年度).

3.　$\cos 180^\circ \tan(-45^\circ) + \sin 150^\circ \sec 210^\circ$

$$= \tan 45^\circ + \frac{\sin 30^\circ}{-\cos 30^\circ} = \tan 45^\circ - \tan 30^\circ$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

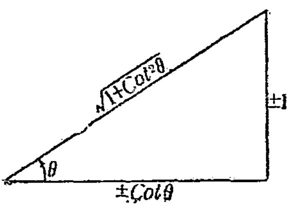
十一．已知一函數值，求同角他函數值．　已知一角函數值及此角所在之象限(或另一函數值之號)，則可求出他五函數值．舉例如下：

例一．求以 $\cot\theta$ 表其餘五函數之值．

［解］：　因　$\cot\theta = \frac{+\cot\theta}{+1} = \frac{-\cot\theta}{-1} = \frac{\text{橫坐標}}{\text{縱坐標}}$.

$$\text{距離} = \sqrt{(\text{橫坐標})^2 + (\text{縱坐標})^2} = \sqrt{1+\cot^2\theta}.$$

此關係可用一直角三角形之三邊表示卽



故得　$\sin\theta = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$,

$$\cos\theta = \frac{\pm\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}},$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\pm\cot\theta},$$

$$\tan\theta = \frac{\pm 1}{\pm \cot\theta} = \frac{1}{\cot\theta}.$$

例二. 設 x 爲大於 $180°$ 小於 $270°$ 之一角，若已知 $\tan x = \frac{3}{4}$ 求 $\sin x$, $\cos x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 之值(清華大, 23 年度).

[解]: 按題意知 x 角在第三象限內.

故 $$\tan x = \frac{3}{4} = \frac{-3}{-4}.$$

因知 P 點之坐標爲 $(-3, -4)$.

且 $$OP = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

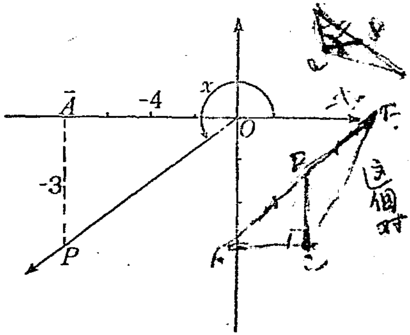
$$\therefore \quad \sin x = -\frac{3}{5},$$

$$\cos x = -\frac{4}{5},$$

$$\cot x = \frac{4}{3},$$

$$\sec x = -\frac{5}{4},$$

$$\csc x = -\frac{5}{3}.$$



習 題 一

1. 自 $\triangle ABC$ 之頂點 C 作中線 CD，如 $DC \perp AC$，試證

$$\tan(180° - \angle ACB) = 2\tan A.$$

2. 順次將直線 AD 三等分於 B,C。以 BC 為直徑之圓周上一任意點 P。設 $\angle APB=\theta$, $\angle CPD=\theta'$。試證 $\tan\theta\ \tan\theta'=\frac{1}{4}$.

3. 自矩形 $ABCD$ 之頂點向對角線 BD 作垂線，其垂足為 E。更作 $EF\perp BC$, $EG\perp CD$，且設 $EF=p$, $EG=q$, $BD=c$，試證 $p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$.

4. 自定圓 O 外一定點 P 引任意割線 PAB，試證

$$\tan\frac{AOP}{2}\tan\frac{BOP}{2}\text{ 為定值.}$$

5. 求 $\sin 60^\circ\cos 150^\circ-\cos 225^\circ\sin 315^\circ+\tan 300^\circ\sec 180^\circ$ 之值.（金大，金女大，30 年度）.

答: $\frac{4\sqrt{3}-5}{4}$.

6. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=a$，試以 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 為根．作一一元二次方程式.

答: $2x^2-2ax+a^2-1=0$.

7. 試求 $3-2\cos\theta+\cos^2\theta$ 之極小值.

答: 2.

8. [illegible] $c\theta=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 方能成立?

答. $x=0$.

9. 試證[illegible] A 角在第一第三兩象限內，則 $\tan A+\cot A\geq 2$,

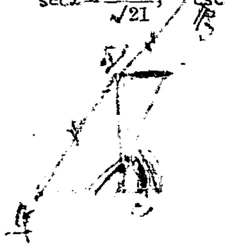
如 A 角在第二第四兩象限內，則如何？

答：　$\tan A+\cot A\leq -2$.

✓10．已知 $\sin x=\dfrac{2}{5}$ 及 $\tan x$ 爲正數，試求其他三角函數之值．(武大，川大，東北大聯考，31年度)．

答：　$\cos x=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$，　$\tan x=\dfrac{2}{\sqrt{21}}$，　$\cot x=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$，

$\sec x=\dfrac{5}{\sqrt{21}}$，　$\csc x=\dfrac{5}{2}$.



第二章　三角恆等式

一. 兩角之和差公式.

1. 兩角和之正餘弦.

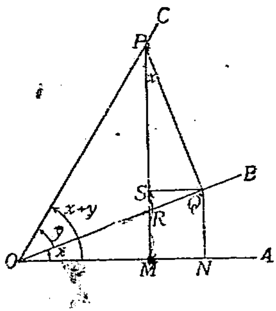
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \tag{1}$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \tag{2}$$

〔證〕: (A)(i)設　$x<90°$,　$y<90°$,　$x+y<90°$.

作　$\angle AOB=x$,　$\angle BOC=y$,

$\therefore$　$\angle AOC=x+y$.



在 OC 上任取一點 P, 作 $PM\perp OA$,

$PQ\perp OB, QN\perp OA, QS\perp MP$.

則　$\angle QPS=90°-\angle PRQ$

$$=90°-\angle ORM=x.$$

$$\sin(x+y)=\frac{PM}{OP}=\frac{MS+SP}{OP}=\frac{QN+SP}{OP}=\frac{QN}{OP}+\frac{SP}{OP}$$

$$=\frac{QN}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{SP}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

$$\cos(x+y)=\frac{OM}{OP}=\frac{ON-MN}{OP}=\frac{ON-QS}{OP}$$

$$=\frac{ON}{OP}-\frac{QS}{OP}=\frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}-\frac{QS}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

$$=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

(ii) 設 $x<90^\circ$, $y<90^\circ$, $x+y>90^\circ$, 同理可證之.

(B) x,y 爲任意角(正負與大小皆不論),此二公式仍成立.今示明其理如下:

(i) 設 x 爲第二象限內之正角, y 爲第四象限內之正角,試證公式(2)成立.

[證]: 令 $x=180^\circ-x'$, $y=360^\circ-y'$, $(x'<90^\circ, y'<90^\circ)$

則 $$\cos(x+y)=\cos[540^\circ-(x'+y')]$$

$$=\cos[180^\circ-(x'+y')]$$

$$=-\cos(x'+y')$$

$$=-\cos x'\cos y'+\sin x'\sin y'.$$

但因 $x'=180^\circ-x$, $y'=360^\circ-y$.

$$\therefore\ \cos(x+y)=-\cos(180^\circ-x)\cos(360^\circ-y)$$

$$+\sin(180^\circ-x)\sin(360^\circ-y)$$

$$=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

(ii) 設 x 爲第一象限內之正角, y 爲第三象限內之負角,試證公式(1)成立.

[證]: 令 $y=-(180^\circ-y')$, $y'<90^\circ$.

則 $$\sin(x+y)=\sin[-180^\circ+(x+y')]$$

$$=-\sin[180^\circ-(x+y')]$$

$$=-\sin(x+y')$$

$$=-\sin x\cos y'-\cos x\sin y',$$

但因 $$y'=180^\circ+y.$$

$$\therefore\quad \sin(x+y)=-\sin x\cos(180^\circ+y)-\cos x\sin(180^\circ+y)$$

$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

餘同理可證.

2. 兩角差之正餘弦.

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y \tag{3}$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y \tag{4}$$

[證]: (1), (2)中令 $y=-y$ 代入得

$$\sin(x-y)=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)$$

$$=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos(-y)-\sin x\sin(-y)$$

$$=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

3. 兩角和差之正弦或餘弦之積.

$$\sin(x+y)\sin(x-y)=\sin^2x-\sin^2y$$

$$=\cos^2y-\cos^2x.$$

$$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2x-\sin^2y$$

$$=\cos^2y-\sin^2x.$$

[證]:

$\sin(x+y)\sin(x-y)$

$=(\sin x\cos y+\cos x\sin y)(\sin x\cos y-\cos x\sin y)$

$=\sin^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\sin^2 y$

$=\sin^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\sin^2 x)\sin^2 y$

$=\sin^2 x-\sin^2 y$

$=\cos^2 y-\cos^2 x.$

$\cos(x+y)\cos(x-y)$

$=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$

$=\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y$

$=\cos^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\cos^2 x)\sin^2 y$

$=\cos^2 x-\sin^2 y$

$=\cos^2 y-\sin^2 x.$

例一. 化簡 $\sin^2 B+\sin^2(A-B)+2\sin B\sin(A-B)\cos A.$

[解]: 原式 $=\sin^2 B+\sin(A-B)[\sin(A-B)+2\cos A\sin B]$

$=\sin^2 B+\sin(A-B)\sin(A+B)$

$=\sin^2 B+(\sin^2 A-\sin^2 B)=\sin^2 A$

例二. 如 $A+B+C=\pi$, 試證

$$\begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 B & \cot B & 1 \\ \sin^2 C & \cot C & 1 \end{vmatrix}=0.$$ (武大, 21年度).

[解]:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 B & \cot B & 1 \\ \sin^2 C & \cot C & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 B & \cot B & 1 \\ \sin^2 B-\sin^2 C & \cot B-\cot C & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \leftarrow \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 A-\sin^2 B & \cot A-\cot B & 0 \\ \sin^2 B-\sin^2 C & \cot B-\cot C & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin^2 A-\sin^2 B & \dfrac{\cos A}{\sin A}-\dfrac{\cos B}{\sin B} \\ \sin^2 B-\sin^2 C & \dfrac{\cos B}{\sin B}-\dfrac{\cos C}{\sin C} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin(A+B)\sin(A-B) & \dfrac{-\sin(A-B)}{\sin A\sin B} \\ \sin(B+C)\sin(B-C) & \dfrac{-\sin(B-C)}{\sin B\sin C} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\sin(A-B)\sin(B-C)}{\sin A\sin B\sin C} \begin{vmatrix} \sin(A+B) & \sin C \\ \sin(B+C) & \sin A \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\sin(A-B)\sin(B-C)}{\sin A\sin B\sin C} \begin{vmatrix} \sin C & \sin C \\ \sin A & \sin A \end{vmatrix} = 0.$$

4. 兩角和之正餘切.

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y} \tag{5}$$

$$\cot(x+y)=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x} \tag{6}$$

[證]:

$$\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\dfrac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}$$

$$=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}.$$

$$\cot(x+y)=\frac{1}{\tan(x+y)}=\frac{1-\tan x\tan y}{\tan x+\tan y}$$

$$=\frac{1-\dfrac{1}{\cot x\cot y}}{\dfrac{1}{\cot x}+\dfrac{1}{\cot y}}=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x}.$$

5. 兩角差之正餘切.

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}. \tag{7}$$

$$\cot(x-y)=\frac{\cot x\cot y+1}{\cot y-\cot x} \tag{8}$$

[證]: (5), (6)中令 $y=-y$ 代入得

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x+\tan(-y)}{1-\tan x\tan(-y)}$$

$$=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}.$$

$$\cot(x-y)=\frac{\cot x\cot(-y)-1}{\cot(-y)+\cot x}$$

$$=\frac{\cot x\cot y+1}{\cot y-\cot x}.$$

[註]:

$\sin(x+y+z)$

$=\sin x\cos y\cos z+\cos x\sin y\cos z+\cos x\cos y\sin z-\sin x\sin y\sin z.$

$\cos(x+y+z)$

$=\cos x\cos y\cos z-\sin x\sin y\cos z-\sin x\cos y\sin z-\cos x\sin y\sin z.$

$\tan(x+y+z)$

$=\dfrac{\tan x+\tan y+\tan z-\tan x\tan y\tan z}{1-\tan y\tan z-\tan z\tan x-\tan x\tan y}.$

例一. 試利用和差公式化簡

$\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B).$

[解]

$$\because\ \frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}=\frac{\sin B\cos C-\cos B\sin C}{\sin B\sin C}$$

$$=\cot C-\cot B.$$

$\therefore$ 原式 $=\sin A\sin B\sin C(\cot C-\cot B+\cot A$

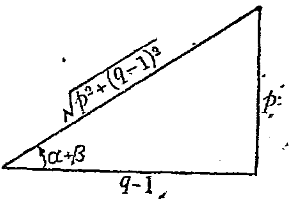
$$-\cot C+\cot B-\cot A)=0.$$

例二. 已知 $\tan\alpha$ 及 $\tan\beta$ 爲方程式 $x^2+px+q=0$ 之根，試以 p, q 表下式

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta).$$

[解]: $\because$ $\tan\alpha+\tan\beta=-p,\ \tan\alpha\tan\beta=q,$

$$\therefore\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{-p}{1-q}=\frac{p}{q-1}.$$



$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{p}{\sqrt{p^2+(q-1)^2}},$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{q-1}{\sqrt{p^2+(q-1)^2}}.$$

$$\therefore\quad 原式=\frac{p^2}{p^2+(q-1)^2}+\frac{p^2(q-1)}{p^2+(q-1)^2}+\frac{q(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}$$

$$=\frac{q[p^2+(q-1)^2]}{p^2+(q-1)^2}=q.$$

二. 倍角公式.

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$

$$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$$

$$=1-2\sin^2x$$

$$=2\cos^2x-1,$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

[證]: 上節公式(1), (3), (5)中令 $y=x$ 卽得.

又 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$$=1-\sin^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$$

$$=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x-1.$$

推言之,

$$\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x$$

$$=\sin x(1-2\sin^2 x)+2\sin x(1-\sin^2 x)$$

$$=3\sin x-4\sin^3 x.$$

同理可證

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,$$

$$\tan 3x=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}.$$

例一. 設 $\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$, 試計算下式之值.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos C & \cos B & 1 \\ \cos C & 1 & \cos A & 1 \\ \cos B & \cos A & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ (浙大, 24年度).

[解]: $\because \quad \cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2},$

$$\therefore \quad \cos A = \cos B = \cos C = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}.$$

$$原式 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{7}{9} & \frac{7}{9} & 1 \\ \frac{7}{9} & 1 & \frac{7}{9} & 1 \\ \frac{7}{9} & \frac{7}{9} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{2}{9} & 0 & -\frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & 0 & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{16}{729}.$$

例二. 分解 $\begin{vmatrix} 1 & \tan x & \tan 2x \\ 1 & \tan y & \tan 2y \\ 1 & \tan z & \tan 2z \end{vmatrix}$ 爲其素因式之連乘積.

[解]: 令 $\tan x = a$, $\tan y = b$, $\tan z = c$ 則

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} 1 & a & \dfrac{2a}{1-a^2} \\ 1 & b & \dfrac{2b}{1-b^2} \\ 1 & c & \dfrac{2c}{1-c^2} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}\begin{vmatrix} 1-a^2 & a(1-a^2) & a \\ 1-b^2 & b(1-b^2) & b \\ 1-c^2 & c(1-c^2) & c \end{vmatrix}$$

↑ ×(−1)

$$=\frac{2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}\begin{vmatrix} 1-a^2 & -a^3 & a \\ 1-b^2 & -b^3 & b \\ 1-c^2 & -c^3 & c \end{vmatrix}$$

但 $$\begin{vmatrix} 1-a^2 & -a^3 & a \\ 1-b^2 & -b^3 & b \\ 1-c^2 & -c^3 & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -a^3 & a \\ 1 & -b^3 & b \\ 1 & -c^3 & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -a^2 & -a^3 & a \\ -b^2 & -b^3 & b \\ -c^2 & -c^3 & c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}+abc\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)+abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c+abc).$$

$$原式=\frac{2(\tan x-\tan y)(\tan y-\tan z)(\tan z-\tan x)(\tan x+\tan y+\tan z+\tan x\tan y\tan z)}{(1-\tan^2 x)(1-\tan^2 y)(1-\tan^2 z)}.$$

三．半角公式．

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$

$$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},$$

$$=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

〔證〕：　$\because\quad \cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2},$

$$\therefore\quad 2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x,$$

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}. \qquad (1)$$

又　$\because\quad \cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1,$

$$\therefore \quad 2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x,$$

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \tag{2}$$

$\frac{(1)}{(2)}$,

$$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \tag{3}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}. \tag{4}$$

$$\text{又} \quad =\pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}. \tag{5}$$

【註】: (1), (2), (3)前之符號,須由 $\frac{x}{2}$ 角所在象限而決定. (4), (5)兩式中僅取根式爲正號,因 $1+\cos x$, $1-\cos x$ 決不能爲負,且如 x 角在第一第二兩象限內,則 $\frac{x}{2}$ 在第一象限內;如 x 角在第三第四兩象限內,則 $\frac{x}{2}$ 在第二象限內. 而 $\tan\frac{x}{2}$ 恆與 $\sin x$ 同號故也.

四. 化和爲積之公式.

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

[證]:

由 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ (1)

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ (2)

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ (3)

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ (4)

(1)+(3), $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$,

(1)−(3), $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$,

(2)+(4), $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$,

(2)−(4), $\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$.

令 $A+B=x$, $A-B=y$ 卽 $A=\frac{x+y}{2}$, $B=\frac{x-y}{2}$ 代入卽得.

例一. 試求 $\frac{\cos 70^\circ+\cos 50^\circ}{\sin 70^\circ+\sin 50^\circ}$ 之值.(南開大,25 年度).

[解]:

$$原式=\frac{2\cos 60^\circ\cos 10^\circ}{2\sin 60^\circ\cos 10^\circ}=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

例二. 求證 $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$ (交大, 25 年度).

[解]:

$$\text{左端}=\sin 20^\circ\left[-\frac{1}{2}(\cos 120^\circ-\cos 40^\circ)\right]\sin 60^\circ$$

$$=\sin 20^\circ\left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\cos 40^\circ\right)\right]\sin 60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 20^\circ+\cos 40^\circ\sin 20^\circ\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}\sin 20^\circ+\frac{1}{2}(\sin 60^\circ-\sin 20^\circ)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{16}.$$

例三. 求 $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ 之值.

[解]: $$\text{原式}=\cos 20^\circ\left[\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 40^\circ)\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\cos 40^\circ\cos 20^\circ$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 20^\circ+\frac{1}{4}(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\cos 60^\circ=\frac{1}{8}.$$

[又解]: 令 $p=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$,

兩端同乘以 $2^3\sin 20^\circ$ 得

$$(2^3\sin 20^\circ)p=2^3\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$$
$$=2^2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$$
$$=2\sin 80^\circ\cos 80^\circ$$
$$=\sin 160^\circ=\sin(180^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ.$$

但 $\sin 20^\circ\neq 0$, 故 $8p=1$, $p=\frac{1}{8}$.

例四. 設 m 及 n 爲已知之二數，試由下列二關係

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin(A+B)}=m,\quad \frac{\cos A-\cos B}{\sin(A-B)}=n.$$

求出 $\sin\frac{A+B}{2}$, $\cos\frac{A+B}{2}$, $\tan\frac{A+B}{2}$, $\sin\frac{A-B}{2}$, $\cos\frac{A-B}{2}$, $\tan\frac{A-B}{2}$ 之值. (中大，20年度).

[解]: 原二式可化爲

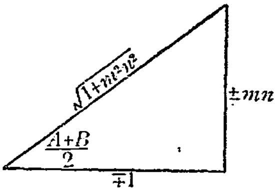
$$\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}=m,\quad \frac{-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=n,$$

卽

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=m. \tag{1}$$

$$\frac{-\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=n. \qquad (2)$$

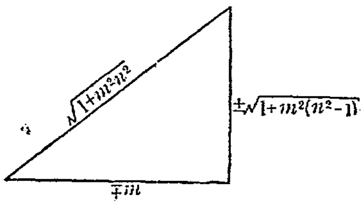
(1)(2), $$\tan\frac{A+B}{2}=-mn,$$



$$\therefore\quad \cos\frac{A+B}{2}=\frac{\mp 1}{\sqrt{1+m^2n^2}},$$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\pm mn}{\sqrt{1+m^2n^2}}.$$

再由(1), $$\cos\frac{A-B}{2}=m\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\mp m}{\sqrt{1+m^2n^2}}.$$



$$\therefore\quad \sin\frac{A-B}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+m^2(n^2-1)}{1+m^2n^2}},$$

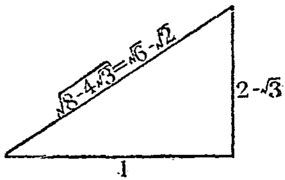
$$\tan\frac{A-B}{2}=-\frac{\sqrt{1+m^2(n^2-1)}}{m}.$$

五. [illegible]角函數.

1．15°，　75°.

$$\tan 15^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

$=\cot 75^\circ$（中大，23年度）.



$$\therefore\quad \sin 15^\circ=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos 75^\circ.$$

$$\cos 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sin 75^\circ.$$

2．18°，　72°.

令 $\theta=18^\circ$，则

$$2\theta=36^\circ,\quad 3\theta=54^\circ.$$

$$\therefore\quad 2\theta=90^\circ-3\theta$$

而　$\sin 2\theta=\sin(90^\circ-3\theta)=\cos 3\theta$

$$2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$$

$$\because\quad \theta=18^\circ,\quad \cos 18^\circ\neq 0,$$

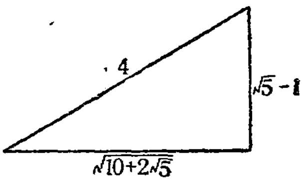
$$\therefore\quad 2\sin\theta=4\cos^2\theta-3,$$

$$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0.$$

解得
$$\sin\theta=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}.$$

但 $\sin 18^\circ$ 應為正值，故

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos 72^\circ.$$



$$\therefore\quad \cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=\sin 72^\circ,$$

$$\tan 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}-1)(5-\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{25-5}$$

$$=\frac{\sqrt{(3\sqrt{5}-5)^2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{20}$$

$$=\frac{\sqrt{20(7-3\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}{20}$$

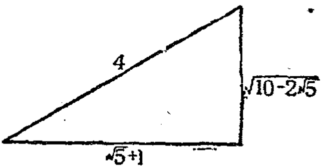
$$=\frac{4\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}}{20}$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}=\cot 72^\circ.$$

3．36°，　54°.

$$\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=1-2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)$$

$$=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\sin 54^\circ.$$



$$\therefore\quad \sin 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\cos 54^\circ$$

$$\tan 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\cot 54^\circ.$$

六. 三角恆等式之證法.

1．自繁雜之一端逐步化至簡易之一端.

例一. 試證 $\frac{\tan x+\sec x-1}{\tan x-\sec x+1}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$ (武大, 25 年度).

[解]: 左端 $=\frac{\tan x+\sec x-(\sec^2 x-\tan^2 x)}{\tan x-\sec x+1}$

$$=\frac{\tan x+\sec x+(\tan^2 x-\sec^2 x)}{\tan x-\sec x+1}$$

$$=\frac{(\tan x+\sec x)(\tan x-\sec x+1)}{\tan x-\sec x+1}$$

$$=\tan x+\sec x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}=\text{右端}.$$

例二. 證 $\csc^4 x-\sec^4 x=16\cot 2x\csc^3 2x$(浙大, 24年度).

[解]: 左端 $=(\csc^2 x+\sec^2 x)(\csc^2 x-\sec^2 x)$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\times\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos 2x}{\sin^4 x\cos^4 x}=\frac{16\cos 2x}{\sin^4 2x}=\text{右端}.$$

例三. 求證 $\sin 5\alpha-5\sin 3\alpha+10\sin\alpha=16\sin^5\alpha$(交大, 22年度).

[解]: $\because\quad \sin 5\alpha+\sin\alpha=2\sin 3\alpha\cos 2\alpha$

$$=2(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)(1-2\sin^2\alpha)$$

$$=6\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$$

$\therefore\quad \sin 5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$

$\therefore$ 左端 $=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha-5(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)$
$+10\sin\alpha=$ 右端.

例四. 求[illegible] $\frac{[illegible]\mathrm{n}^2(45^\circ-A)}{[illegible]\mathrm{n}^2(45^\circ-A)}=\sin 2A$(北大, 25年度).

[解]: 令 $\theta=45^\circ-A$.

$$左端=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$=\cos 2\theta=\cos(90^\circ-2A)=\sin 2A.$$

6

例五. 試證 $\dfrac{\cos 3A}{\cos A}-\dfrac{\cos 6A}{\cos 2A}+\dfrac{\cos 9A}{\cos 3A}-\dfrac{\cos 18A}{\cos 6A}$

$$=2(\cos 2A-\cos 4A+\cos 6A-\cos 12A).$$

[解]:

$$\because\quad \frac{\cos 3A}{\cos A}=\frac{\cos(2A+A)}{\cos A}=\frac{\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A}{\cos A}$$

$$=\cos 2A-2\sin^2 A=\cos 2A+\cos 2A-1$$

$$=2\cos 2A-1.$$

$$\therefore\quad 左端=2\cos 2A-1-2\cos 4A+1+2\cos 6A$$

$$-1-2\cos 12A+1=右端.$$

例六. 試證

$$\sec A+\sec(120^\circ+A)+\sec(240^\circ+A)=3\sec 3A.$$

[解]:

$$左端=\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\cos(60^\circ-A)}-\frac{1}{\cos(60^\circ+A)}$$

$$=\frac{\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)-\cos(60^\circ+A)\cos A-\cos A\cos(60^\circ-A)}{\cos A\cos(60^\circ-A)\cos(60^\circ+A)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 2A)-\cos A[\cos(60^\circ+A)+\cos(60^\circ-A)]}{\cos A[\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 2A)]}$$

$$=\frac{-\frac{3}{4}+\cos^2 A-\cos A\times 2\cos 60^\circ\cos A}{\cos A[-\frac{3}{4}+\cos^2 A]}$$

$$=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{4\cos^3 A-3\cos A}{4}}=-\frac{3}{\cos 3A}=-3\sec 3A.$$

例七. 試證 $\tan\frac{A}{2}=\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}$.

[解]:

左端 $=\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}$.

例八.

試證 $\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{vmatrix}=\sin\theta.$

[解]:

左端 $=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\begin{vmatrix}\sin^2\theta\cos\phi & \cos^2\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi\\ \sin^2\theta\sin\phi & \cos^2\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0\end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\begin{vmatrix}\sin^2\theta\cos\phi & \cos\phi & -\sin\theta\sin\phi\\ \sin^2\theta\sin\phi & \sin\phi & \sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\cos\theta & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi\\ \sin\phi & \sin\theta\cos\phi\end{vmatrix}=\sin\theta\begin{vmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{vmatrix}=\sin\theta.$$

例九.

試證 $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta=\tan\theta+\cot\theta$.

[解]: 右端 $=(\tan\theta+\cot\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=$ 左端.

例十. 證 $\tan 11°15'+2\tan 22°30'+4\tan 45°=\cot 11°15'$ (唐山,24年度).

[解]:

$$\because\quad \cot\frac{\theta}{2}-\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}=2\cot\theta$$

$$\therefore\quad (\cot 11°15'-\tan 11°15')-2\tan 22°30'-4\tan 45°$$

$$=(2\cot 22°30'-2\tan 22°30')-4\tan 45°$$

$$=4\cot 45°-4\tan 45°=0.$$

(2) 求證式中兩端,如能皆證明與另一式恆等,則原式必為恆等式.

例一. 試證 $(\csc A+\cot A)\operatorname{covers} A-(\sec A+\tan A)\operatorname{vers} A$

$$=(\csc A-\sec A)(2-\operatorname{vers} A\operatorname{covers} A).$$

[解]:

$$左端=\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)(1-\sin A)-\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)(1-\cos A)$$

$$=\frac{(1+\cos A)(1-\sin A)}{\sin A}-\frac{(1+\sin A)(1-\cos A)}{\cos A}$$

$$=\frac{\cos A(1+\cos A-\sin A-\sin A\cos A)-\sin A(1+\sin A-\cos A-\cos A\sin A)}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\cos A+\cos^2 A-\cos A\sin A-\sin A\cos^2 A-\sin A-\sin^2 A+\sin A\cos A+\sin^2 A\cos A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{(\cos^2 A-\sin^2 A)+(\cos A-\sin A)-\sin A\cos A(\cos A-\sin A)}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A+1-\sin A\cos A)}{\sin A\cos A}$$

$$右端=\left(\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\cos A}\right)[2-(1-\cos A)(1-\sin A)]$$

$$=\frac{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A+1-\sin A\cos A)}{\sin A\cos A}$$

$\therefore$ 左端=右端.

例二. 試證 $\dfrac{2(\cos A-\sin A)}{1+\sin A+\cos A}=\dfrac{\cos A}{1+\sin A}-\dfrac{\sin A}{1+\cos A}$.

[解]:

$$\text{左端}=\frac{2(\cos A-\sin A)(1-\sin A-\cos A)}{[1+(\sin A+\cos A)][1-(\sin A+\cos A)]}$$

$$=\frac{-2(\sin A-\cos A)(1-\sin A-\cos A)}{1-(\sin^2 A+\cos^2 A)-2\sin A\cos A}$$

$$=\frac{(\sin A-\cos A)(1-\sin A-\cos A)}{\sin A\cos A}$$

$$\text{右端}=\frac{\cos A(1-\sin A)}{1-\sin^2 A}-\frac{\sin A(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}$$

$$=\frac{1-\sin A}{\cos A}-\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin A(1-\sin A)-\cos A(1-\cos A)}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\sin A-\sin^2 A-\cos A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{(\sin A-\cos A)(1-\sin A-\cos A)}{\sin A\cos A}$$

∴ 左端=右端.

[又解]:

$$\text{左端}=\frac{2(\cos A-\sin A)}{1+\sin A+\cos A}\times\frac{1+\sin A+\cos A}{1+\sin A+\cos A}$$

$$=\frac{2(\cos A+\cos^2 A-\sin A-\sin^2 A)}{2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)}$$

$$=\frac{\cos A(1+\cos A)-\sin A(1+\sin A)}{(1+\sin A)(1+\cos A)}=\text{右端}.$$

七. 特殊關係角之恆等式.

例一. 如 $A+B+C=180^\circ$

試證 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$(重大,25年度).

[解]: 左端 $=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$

$$=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

$$=-2\sin C[\cos(A+B)-\cos(A-B)]$$

$$=-2\sin C(-2\sin A\sin B)=\text{右端}.$$

【註]: 令 $2A=180^\circ-A'$, $2B=180^\circ-B'$, $2C=180^\circ-C'$

則條件式 $A+B+C=180^\circ$ 變為 $A'+B'+C'=180^\circ$ 結果化為

$$\sin A'+\sin B'+\sin C'=4\cos\frac{A'}{2}\cos\frac{B'}{2}\cos\frac{C'}{2}.$$

例二. 如 $A+B+C=180^\circ$ 試證

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

[解]: 左端 $=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=1-2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=1-2\sin\frac{C}{2}\left(-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)=\text{右端}.$$

【註】: 令 $A=180°-2A'$, $B=180°-2B'$, $C=180°-2C'$ 則條件式 $A+B+C=180°$ 變爲 $A'+B'+C'=180°$ 結果化爲

$$\cos 2A'+\cos 2B'+\cos 2C'=-1-4\cos A'\cos B'\cos C'.$$

例三. 如 $A+B+C=180°$ 試證

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

(重大,川大,25年度).

[解]:

$$\because\quad \tan A=\tan[180°-(B+C)]=-\tan(B+C),$$

即
$$\tan A=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C},$$

$$\therefore\quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

【註】: 令 $2A=180°-A'$, $2B=180°-B'$, $2C=180°-C'$ 則條件式 $A+B+C=180°$ 變爲 $A'+B'+C'=180°$ 結果化爲

$$\cot\frac{A'}{2}+\cot\frac{B'}{2}+\cot\frac{C'}{2}=\cot\frac{A'}{2}\cot\frac{B'}{2}\cot\frac{C'}{2},$$

例四. 如 $A+B+C=180°$ 試證

$$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$$

[解]:

$$\because \quad \cot A=\cot[180^\circ-(B+C)]=-\cot(B+C)$$

即 $$\cot A=-\frac{\cot B\cot C-1}{\cot C+\cot B},$$

$$\therefore \quad \cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$$

【註】:

1. 令 $2A=180^\circ-A'$, $2B=180^\circ-B'$, $2C=180^\circ-C'$

則條件式 $A+B+C=180^\circ$ 變爲 $A'+B'+C'=180^\circ$ 結果化爲

$$\tan\frac{B'}{2}\tan\frac{C'}{2}+\tan\frac{C'}{2}\tan\frac{A'}{2}+\tan\frac{A'}{2}\tan\frac{B'}{2}=1.$$

2. 如以 $\tan A\ \tan B\ \tan C$ 除上例之兩端卽得

$$\cot B\cot C+\cot A\cot B+\cot C\cot A=1.$$

3. 又因 $\frac{\cot B+\cot C}{\tan B+\tan C}=\cot B\cot C.$

故得 $$\frac{\cot B+\cot C}{\tan B+\tan C}+\frac{\cot C+\cot A}{\tan C+\tan A}+\frac{\cot A+\cot B}{\tan A+\tan B}=1.$$

例五. 如 $A+B+C=180^\circ$ 試證

$$\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}=\frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{2\cos A\cos B\cos C}.$$

$$\text{左端}=\frac{\tan A\tan B\tan C}{16\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\frac{\sin C}{\cos C}}{16\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{16\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\cos A\cos B\cos C}=\text{右端.}$$

例六. 如 $A+B+C=180^\circ$ 試證

$$\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C+2\cos 2A\cos 2B\cos 2C=2.$$

[解]:

$\because$ $\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C$

$$=\frac{1-\cos 4A}{2}+\frac{1-\cos 4B}{2}+\frac{1-\cos 4C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[3-(\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C)]$$

且 $\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C=-1+4\cos 2A\cos 2B\cos 2C,$

$\therefore$ $\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C$

$$=\frac{1}{2}[3-(-1+4\cos 2A\cos 2B\cos 2C)]$$

$=2-2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$ 故得證明.

【註】: 如 $A+B+C=180^\circ$ 則

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C.$$

令 $2A=360^\circ-4A'$, $2B=360^\circ-4B'$, $2C=360^\circ-4C'$

條件式變爲 $A'+B'+C'=180^\circ$,結果化爲

$$\cos 4A'+\cos 4B'+\cos 4C'=-1+4\cos 2A'\cos 2B'\cos 2C'.$$

(八) 等式之推演.

例一. 若 $\dfrac{\cos^4 x}{\cos^2 y}+\dfrac{\sin^4 x}{\sin^2 y}=1$, 則$\dfrac{\cos^4 y}{\cos^2 x}+\dfrac{\sin^4 y}{\sin^2 x}=1$ 試證之.(武大,24年度).

[解]: $$\frac{\cos^4 x}{\cos^2 y}+\frac{\sin^4 x}{\sin^2 y}=1,$$

去分母,

$$\cos^4 x\sin^2 y+\sin^4 x\cos^2 y-\cos^2 y\sin^2 y=0,$$

$$(1-\sin^2 x)\cos^2 x\sin^2 y+(1-\cos^2 x)\sin^2 x\cos^2 y$$
$$-\cos^2 y\sin^2 y=0,$$

$$\cos^2 x\sin^2 y+\sin^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 y+\cos^2 y)$$
$$-\cos^2 y\sin^2 y=0,$$

$$\cos^2 x(\sin^2 y-\sin^2 x)-\cos^2 y(\sin^2 y-\sin^2 x)=0,$$

$$(\cos^2 x-\cos^2 y)(\sin^2 y-\sin^2 x)=0.$$

$$\therefore\quad \cos^2 x=\cos^2 y,\quad \sin^2 y=\sin^2 x$$

故 $$\frac{\cos^4 y}{\cos^2 x}+\frac{\sin^4 y}{\sin^2 x}=\cos^2 y+\sin^2 y=1.$$

例二. 如 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$ 試證

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha.$$

[解]:
$$\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta),$$

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}=\frac{1}{m},$$

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}=\frac{1+m}{1-m},$$

$$\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}=\frac{1+m}{1-m}$$

$$\therefore\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha.$$

例三. 設 $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ 爲等差級數,試證

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2},\ \tan\frac{\gamma+\alpha}{2},\ \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

亦爲等差級數.

[解]: $\because$ $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ 爲 A. P.

$$\therefore\quad \sin\beta-\sin\alpha=\sin\gamma-\sin\beta.$$

亦卽
$$\sin\alpha-\sin\beta=\sin\beta-\sin\gamma,$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right),$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\right).$$

兩端同除以 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$ 得

$$\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}-\tan\frac{\beta+\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}-\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

故得證明.

習　題　二

1. 兩圓相切，其半徑各為 a 及 b，設兩圓公切線之交角為 θ，試證

$$\sin\theta=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$ (兵工，30 年度).

2. 設 α, β 為相異之銳角，且均能滿足方程式

$$a\cos 2\theta+b\sin 2\theta=c,$$ 試證

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\frac{a^2+ac+b^2}{a^2+b^2}$$ (東北大，33 年度).

3. 求 $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ 之極大值 (國立師範學院，32 年度).

4. 設 $x+y=A$，求 $\sin x\sin y$ 之極大與極小值。

答: 極大值 $=\sin^2\frac{A}{2}$，極小值 $=0$.

5. 設 A, B, C 爲任意三角形之三角，求證

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}.$$ (復旦大，33 年度)。

6. 化簡 $\cos^2 A+\cos^2(A+B)-2\cos A\cos B\cos(A+B)$。

答: $\sin^2 B$.

7. 已知 A, B, C 爲定角及

$$D=\begin{vmatrix}\cos(\theta+A) & \cos(\theta+B) & \cos(\theta+C)\\ \sin(\theta+A) & \sin(\theta+B) & \sin(\theta+C)\\ \sin(B-C) & \sin(C-A) & \sin(A-B)\end{vmatrix}$$

(1) 化簡 D。

(2) 說明 D 之值對於 θ 爲任何角時，恆爲定值而小於 0。(復旦大，36 年度)。

8. 用算學歸納法證明

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx=\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}.$$

(北大，24 年度)。

9. 在 $\triangle ABC$ 中 $\sin A\sin B\sin C=p$ 及 $\cos A\cos B\cos C=q$ 求證 $\tan A$，$\tan B$ 及 $\tan C$ 爲

$qx^3-px^2+(1+q)x-p=0$ 之三根.(復旦大,33年度).

10. 求下列行列式之值

$$\begin{vmatrix} \sin 40^\circ+\sin 80^\circ & \sin 20^\circ & \sin 20^\circ \\ \sin 40^\circ & \sin 80^\circ+\sin 20^\circ & \sin 40^\circ \\ \sin 20^\circ & \sin 80^\circ & \sin 20^\circ+\sin 40^\circ \end{vmatrix}$$

(交大,34年度).

答: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. 證 $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$

$$=4\sin\theta\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\gamma).$$

$\theta=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$(交大,26年度).

12. 求證 $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin(\theta-\beta)}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}$

$+\frac{\sin(\theta-\gamma)}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=0$.(北大,25年度).

13. 求證 $\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)=2\tan 2A$.(東北大,32年度).

14. 求證 $\sec^2\frac{A}{2}\sec A\frac{\cot^2\frac{A}{2}-\cot^2\frac{3A}{2}}{1+\cot^2\frac{3A}{2}}=8$. (光華大, 30 年度).

15. 證明 $\frac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A}=\tan 4A$. (同濟大, 31 年度).

16. 試證 $\cos(x+y+z)+\cos(x+y-z)+\cos(x-y+z)$

$$+\cos(-x+y+z)=4\cos x\cos y\cos z.$$

(武大, 川大, 東北大聯考, 31 年度).

17. 已與行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

求證 (i) $\Delta=\sin(b-c)+\sin(c-a)+\sin(a-b)$,

(ii) $\Delta=-4\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{a-b}{2}$;

(復旦大, 32 年度).

18. 求證 $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

(復旦大, 33 年度).

19. 試證如一三角形之三角 A, B 及 C 合乎

$$\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$$

之關係則為直角三角形.(東北大,33年度).

20. 若 $A+B+C=\pi$, 求證

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tan A & \tan B & \tan C \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \end{vmatrix}=0.$$ (中大,32年度).

21. 如 $A+B+C=180^\circ$, 試證

$$\frac{\tan A}{\tan B}+\frac{\tan B}{\tan C}+\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan A}{\tan C}+\frac{\tan B}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}$$

$$=\sec A\sec B\sec C-2.$$

22. 設 $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ 試證下式.

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C+\sec A\sec B\sec C.$$

(武大,34年度)

23. 如 $\left(\frac{\tan\alpha}{\sin\theta}-\frac{\tan\beta}{\tan\theta}\right)^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$ 試證

$$\cos\theta=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}.$$

24. 如 $\cos(\beta-\alpha)$, $\cos\beta$, $\cos(\beta+\alpha)$成調和級數,試證

$$\cos\beta=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

25. 若 $\cos A+\cos B+\cos C+\cos A\cos B\cos C=0$,

求證 $\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C\pm 2\csc A\csc B\csc C=1$.

8

第三章　三角形之性質

一. 三大定律. a, b, c 各表 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 之對應邊, 下相同.

1. 正弦定律　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

[證]:　(i) 設三角皆爲銳角, 作

$CD \perp AB$,

則　$h=b\sin A=a\sin B$

$\therefore\quad \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$.

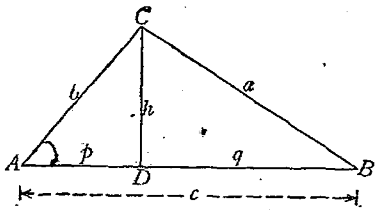


圖 (i)

同理卽得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

(ii) 設 $\angle BAC>90°$, 作 $CD \perp AB$, 其垂足 D 在 BA 之延線上.

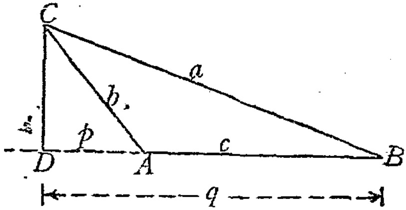


圖 (ii)

則 $$h=a\sin B=b\sin(180^\circ-A)$$

即 $$a\sin B=b\sin A,$$

故結果仍與上相同.

2. 餘弦定律 $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

[證]: 在$\triangle ACD$內, $h^2=b^2-p^2$.

在$\triangle BCD$內, $h^2=a^2-q^2$.

$$\therefore\quad b^2-p^2=a^2-q^2,$$
$$a^2=b^2-p^2+q^2.$$

由圖(i) $$a^2=b^2-p^2+(c-p)^2$$
$$=b^2-p^2+c^2-2cp+p^2$$
$$=b^2+c^2-2cp.$$

但 $$p=b\cos A,$$
$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

由圖(ii) $$a^2=b^2-p^2+(c+p)^2$$
$$=b^2-p^2+c^2+2cp+p^2$$
$$=b^2+c^2+2cp.$$

但 $$p=b\cos(180^\circ-A)=-b\cos A$$
$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

餘同理可證.

吾人可由 $A+B+C=180^\circ$，互導此二定律，今分證如下：

（i）由正弦定律導出餘弦定律.（重慶區聯考，31 年度）.

$$\because \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{\sqrt{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}},$$

$$\therefore \quad \frac{c^2}{\sin^2 C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C},$$

又 $\because \quad \sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C,$

$$\therefore \quad \frac{c^2}{\sin^2 C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\sin A\sin B\cos C},$$

但 $$\sin A=\frac{a\sin C}{c}, \qquad \sin B=\frac{b\sin C}{c},$$

$$\therefore \quad \frac{c^2}{\sin^2 C}=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{2ab\cos C\sin^2 C},$$

即 $$1=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\cos C},$$

亦即 $$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

餘同理可證.

【註】: 如 $A+B+C=180^\circ$，則

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C.$$

令 $A=90^\circ-A'$, $B=90^\circ-B'$, $C=180^\circ-C'$

條件式變為 $A'+B'+C'=180^\circ$，結果化為

$$\cos 2A'+\cos 2B'-\cos 2C'=1-4\sin A'\sin B'\cos C'.$$

又 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}-\frac{1-\cos 2C}{2}$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4\sin A\sin B\cos C)$$

$$=2\sin A\sin B\cos C.$$

（ii）由餘弦定律導出正弦定律.（唐山，25年度）。

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sqrt{1-\cos^2 A}}=\frac{a}{\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}}$$

$$=\frac{2abc}{\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}.$$

同理

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2abc}{\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}.$$

故得證明。

3．正切定律 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}},$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}},$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}.$$

[證]: $\because \quad \frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B},$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}.$$

餘同理可證.

例一. 若 a, b, c 成調和級數, 則 $\sin^2\frac{1}{2}A$, $\sin^2\frac{1}{2}B$, $\sin^2\frac{1}{2}C$ 亦成調和級數(a, b, c 爲 $\triangle ABC$ 之三邊)試證之.(交大,25 年度).

[解]: $\because\ a,\ b,\ c$ 爲 H.P.,

按正弦定律 $\sin A,\ \sin B,\ \sin C$ 亦爲 H.P.

而 $$\frac{1}{\sin B}-\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin C}-\frac{1}{\sin B},$$

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A\sin B}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B\sin C},$$

$$\sin C(\sin A-\sin B)=\sin A(\sin B-\sin C),$$

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\times 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\times 2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2},$$

$$\sin^2\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)=\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2},$$

$$\sin^2\frac{C}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)=\sin^2\frac{A}{2}\left(\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right),$$

兩端同除以 $\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$,

$$\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}},$$

故得證明。

例二. 有一三角形,其三角爲 A, B, C. 其三相對邊分別爲 a, b, c. 若 a^2, b^2, c^2 爲等差級數. 則 $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ 亦爲等差級數. (武大, 24 年度).

[證]: $$\because \quad a^2+c^2=2b^2,$$

按餘弦定律 $$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$=2b^2-2ac\cos B,$$

$$\therefore \quad b^2=2ac\cos B.$$

再按正弦定律 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore \quad b^2=2\times\frac{b\sin A}{\sin B}\times\frac{b\sin C}{\sin B}\cos B,$$

$$\therefore \quad \sin^2 B=2\sin A\cos B\sin C,$$

即 $$\frac{2\cos B}{\sin B}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C},$$

亦即 $$\frac{2\cos B}{\sin B}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C},$$

$$\therefore \quad 2\cot B=\cot A+\cot C.$$

故得證明.

例三. 設 $\triangle ABC$ 三邊之長爲 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,

求證 $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$ (北大, 25 年度).

[解]: 按餘弦定律

$$ab\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2},$$

$$ca\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2},$$

相減卽得.

例四. 設$\triangle ABC$之三邊爲a, b, c; 且

$$\tan\phi=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},$$

試證
$$c=(a+b)\sec\phi\sin\frac{C}{2}.$$

[解]:

$$\because\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}=\frac{\cot\frac{C}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}},$$

$$\therefore\quad \tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},$$

由題設
$$\tan\frac{A-B}{2}=\tan\phi,$$

$$\therefore\quad \phi=\frac{A-B}{2}.$$

又
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}$$

$$=\frac{a+b}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}},$$

$$\therefore\quad c=\frac{(a+b)\sin C}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\phi}=\frac{(a+b)\times 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\cos\phi}$$

$$=(a+b)\sec\phi\sin\frac{C}{2}.$$

例五. 設三角形三角之比為 1 : 2 : 7 時, 則其最大邊與最小邊之比為 $\sqrt{5}+1 : \sqrt{5}-1$ 試證明之.(武大, 22 年度).

[解]: 設 A, B, C 為此三角形之角, a, b, c 為其對應邊.

$$\because\quad \frac{A}{1}=\frac{B}{2}=\frac{C}{7}=\frac{A+B+C}{10}=\frac{180^\circ}{10}=18^\circ,$$

$$\therefore\quad A=18^\circ,\quad B=36^\circ,\quad C=126^\circ.$$

故 c 為最大邊, a 為最小邊.

更按正弦定律

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin 126^\circ}{\sin 18^\circ}=\frac{\sin 54^\circ}{\sin 18^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}.$$

例六. 設 $\triangle ABC$ 中, BC 邊中點為 M, 試證

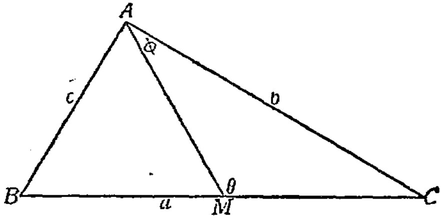
$$\cot\angle AMC=\frac{1}{2}(\cot B-\cot C).$$

[解]:

設 $AC>AB$, 即 $\angle B>\angle C$.

$\angle AMC=\theta$, $\angle CAM=\phi$.

在 $\triangle AMC$ 內,



$$\frac{\sin\phi}{\sin\theta}=\frac{\frac{1}{2}a}{b}=\frac{a}{2b}=\frac{\sin A}{2\sin B},$$

即 $$\frac{\sin(\theta+C)}{\sin\theta}=\frac{\sin(B+C)}{2\sin B},$$

亦即 $$\frac{\sin\theta\cos C+\cos\theta\sin C}{\sin\theta}=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{2\sin B},$$

$$\frac{\sin\theta\cos C+\cos\theta\sin C}{\sin\theta\sin C}=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{2\sin B\sin C},$$

$$2\cot C+2\cot\theta=\cot C+\cot B,$$

$$\therefore\quad \cot\theta=\frac{1}{2}(\cot B-\cot C).$$

如 $AB>AC$,同理可證

$$\cot\theta=\frac{1}{2}(\cot C-\cot B).$$

$\therefore\quad \cot\angle AMC=\frac{1}{2}(\cot B\sim\cot C).$

二. 投影定理

$$a=c\cos B+b\cos C, \tag{1}$$

$$b=c\cos A+a\cos C, \tag{2}$$

$$c=a\cos B+b\cos A, \tag{3}$$

[證]: 上節圖(i),

$$AD=b\cos A,\quad DB=a\cos B,$$

$$\therefore\quad DB+AD=a\cos B+b\cos A,$$

卽 $$c=a\cos B+b\cos A.$$

圖(ii), $AD=b\cos(180^\circ-A)=-b\cos A,$

$$DB=a\cos B,$$

$$\therefore\quad DB-AD=a\cos B+b\cos A,$$

卽 $c=a\cos B+b\cos A.$

餘同理可證.

吾人可由正弦定律導出本定理,其法如下.

$$\because\quad \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C,$$

按正弦定律 $$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=k,$$

$\sin A=ak,\quad \sin B=bk,\quad \sin C=ck,$代入得

$$ak=(b\cos C+c\cos B)k,$$

$$\therefore \quad a = b\cos C + c\cos B.$$

$(1)\times a,\qquad a^2 = ac\cos B + ab\cos C,\qquad (4)$

$(2)\times b,\qquad b^2 = bc\cos A + ab\cos C,\qquad (5)$

$(3)\times c,\qquad c^2 = ac\cos B + bc\cos A,\qquad (6)$

$(4)+(5)-(6),\qquad a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C,$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

故本定理可導出餘弦定律,反之亦然.蓋

$$b\cos C + c\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a.$$

例一. 設三角形 ABC 中, a^2, b^2, c^2 成 A. P. 試證 $a\sec A$, $b\sec B$, $c\sec C$ 成 H. P.

[證]:

$$\because \quad b\sec B = \frac{b}{\cos B} = \frac{2abc}{2ac\cos B} = \frac{2abc}{a^2+c^2-b^2},$$

又 $\qquad \because \quad a^2 + c^2 = 2b^2,$

$$\therefore \quad b\sec B = \frac{2abc}{b^2} = \frac{2ac}{b} = \frac{2ac}{a\cos C + c\cos A}$$

$$= \frac{2ac\sec A\sec C}{a\sec A + c\sec C}.$$ 故得證明.

例二. 若 $\cos B = \dfrac{\sin A}{2\sin C}$ 則 $\triangle ABC$ 為等腰三角形,試證明之.(北大,21年度).

［解］: $$\cos B=\frac{\sin A}{2\sin C}=\frac{a}{2c},$$

$$a=2c\cos B,$$

$$c\cos B+b\cos C=2c\cos B,$$

$$b\cos C=c\cos B,$$

$$\frac{b}{c}=\frac{\cos B}{\cos C},$$

$$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\cos B}{\cos C},$$

$$\sin B\cos C-\cos B\sin C=0,$$

$$\sin(B-C)=0,$$

$\therefore\ B=C$, 而 $\triangle ABC$ 為等腰三角形.

三. 以三邊表各半角函數.

1. $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

［證］: $$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

令 $a+b+c=2s$,

則 $a+b-c=2(s-c)$, $a-b+c=2(s-b)$,

$b+c-a=2(s-a)$.

$$\therefore\quad 2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc},$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

餘同理可證.

2. $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

[證]:

$$\cos^2\frac{A}{2}=1-\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$=\frac{bc-s^2+(b+c)s-bc}{bc}=\frac{s(b+c-s)}{bc}$$

$$=\frac{s(2s-a-s)}{bc}=\frac{s(s-a)}{bc}.$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

餘同理可證.

【註】: $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

同理 $\sin B=\frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$

$$\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

由此三式可立得正弦定律.

3. $$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

利用商數關係即得.

【註】: 在 $\triangle ABC$ 內，因 $\angle A<180^\circ$，故 $\frac{\angle A}{2}<90^\circ$，而 $\sin\frac{A}{2}$，$\cos\frac{A}{2}$ 等等，皆取正值.

例一. 設 a, b, c 爲三角形 ABC 中對 A, B, C 三角之邊，求證下式. 但證時不可展開行列式. (交大, 24 年度).

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos^2\frac{A}{2} \\ b & b^2 & \cos^2\frac{B}{2} \\ c & c^2 & \cos^2\frac{C}{2} \end{vmatrix}=0.$$

[證]:

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos^2\frac{A}{2} \\ b & b^3 & \cos^2\frac{B}{2} \\ c & c^2 & \cos^2\frac{C}{2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a^2 & \frac{s(s-a)}{bc} \\ b & b^2 & \frac{s(s-b)}{ca} \\ c & c^2 & \frac{s(s-c)}{ab} \end{vmatrix}$$

$$=s\begin{vmatrix} a & a^2 & \frac{a(s-a)}{abc} \\ b & b^2 & \frac{b(s-b)}{abc} \\ c & c^2 & \frac{c(s-c)}{abc} \end{vmatrix}=\frac{s\,abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a & s-a \\ 1 & b & s-b \\ 1 & c & s-c \end{vmatrix}$$

$$=s\begin{vmatrix} 1 & a & s \\ 1 & b & s \\ 1 & c & s \end{vmatrix}=s^2\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}=0.$$

例二. 設三角形 ABC 中, a, b, c 成等差級數, 試證

$$\cot\frac{A}{2},\quad \cot\frac{B}{2},\quad \cot\frac{C}{2}$$ 亦成等差級數.

[解]: 本例即由 $$a+c=2b \tag{1}$$

推證 $$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}=2\cot\frac{B}{2} \tag{2}$$

今設(2)成立, 則

$$\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}+\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}=2\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}},$$

兩端同乘以 $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ 得

$$(s-a)+(s-c)=2(s-b),$$

化簡 $$a+c=2b,$$

故得證明.

例三. 設 $\triangle ABC$ 中, $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ 成 H. P., 試證 $1-\cos A$, $1-\cos B$, $1-\cos C$ 亦成 H. P..

[證]: $\sin A,\quad \sin B,\quad \sin C$ 成 H. P.

$a,\quad b,\quad c$ 成 H. P.

$\frac{1}{a},\quad \frac{1}{b},\quad \frac{1}{c}$ 成 A. P.

$\frac{s}{a},\quad \frac{s}{b},\quad \frac{s}{c}$ 成 A. P.

$$\frac{s}{a}-1,\qquad \frac{s}{b}-1,\qquad \frac{s}{c}-1 \qquad 成\ A.P.$$

$$\frac{s-a}{a},\qquad \frac{s-b}{b},\qquad \frac{s-c}{c} \qquad 成\ A.P.$$

各項同乘以 $\dfrac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$，則

$$\frac{bc}{(s-b)(s-c)},\quad \frac{ca}{(s-c)(s-a)},\quad \frac{ab}{(s-a)(s-b)} \qquad 成\ A.P.$$

$$\frac{(s-b)(s-c)}{bc},\quad \frac{(s-c)(s-a)}{ca},\quad \frac{(s-a)(s-b)}{ab} \qquad 成\ H.P.$$

$$\sin^2\frac{A}{2},\qquad \sin^2\frac{B}{2},\qquad \sin^2\frac{C}{2} \qquad 成\ H.P.$$

$$2\sin^2\frac{A}{2},\qquad 2\sin^2\frac{B}{2},\qquad 2\sin^2\frac{C}{2} \qquad 成\ H.P.$$

$$\therefore\ 1-\cos A,\qquad 1-\cos B,\qquad 1-\cos C \qquad 成\ H.P.$$

四. 三角形之面積公式. 設$\triangle ABC$之面積爲Δ，則

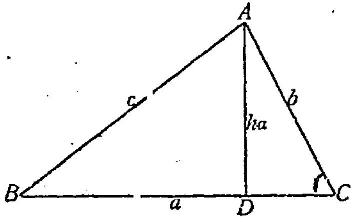
1. $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B.$

[證]: (i) 設三角皆爲銳角，作 $AD\perp BC$，

$\because\ \Delta=\frac{1}{2}ah_a,$

$h_a=b\sin C,$

$\therefore\ \Delta=\frac{1}{2}ab\sin C,$

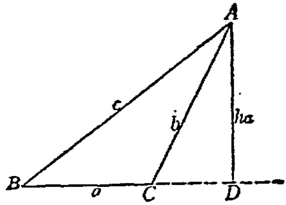


餘同理可證.

(ii) 設 $\angle BCA > 90^\circ$, 作

$AD \perp BC$,

其垂足 D 點在 BC 之延線上.



$$\because \quad \Delta = \frac{1}{2} a h_a,$$

$$h_a = b\sin(180^\circ - C) = b\sin C,$$

$$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2} ab\sin C,$$

餘同理可證.

2. $$\Delta = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin C} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin C}{\sin B}$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \sin C}{\sin A}.$$

[證]: $$\Delta = \frac{1}{2} bc\sin A = \frac{c}{2} \times \frac{c\sin B}{\sin C} \sin A$$

$$= \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin C}.$$

餘同理可證.

3. Hero 氏公式. $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

[證]: $$\Delta = \frac{1}{2} ab\sin C$$

$$=\frac{1}{2}ab\times\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

例一. 設 a, b, c 為 $\triangle ABC$ 之三邊，Δ 為面積，試證

$$\Delta=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}.$$

[證]: $$\Delta=\frac{a^2\sin A\sin B\sin C}{2\sin^2 A}=\frac{b^2\sin A\sin B\sin C}{2\sin^2 B}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B\sin C}{2(\sin^2 A-\sin^2 B)}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B\sin C}{2\sin(A+B)\sin(A-B)}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}.$$

例二. 設 a, b, c 為 $\triangle ABC$ 之三邊，Δ 為面積，試證

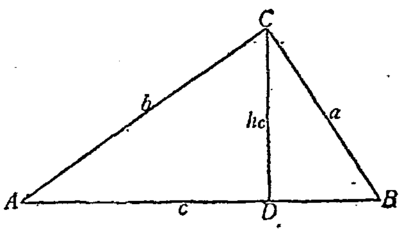
$$\Delta=\frac{a^2+b^2+c^2}{4(\cot A+\cot B+\cot C)}.$$

[證]:

$\because\quad \Delta=\frac{1}{2}ch_c.$

$AD=h_c\cot A,$

$BD=h_c\cot B,$



$$c=h_c(\cot A+\cot B)$$

$$h_c=\frac{c}{\cot A+\cot B}.$$

$$\therefore\quad \Delta=\frac{c^2}{2(\cot A+\cot B)},$$

同理
$$\Delta=\frac{b^2}{2(\cot A+\cot C)},$$

$$\Delta=\frac{a^2}{2(\cot B+\cot C)}.$$

因得
$$\Delta=\frac{a^2+b^2+c^2}{4(\cot A+\cot B+\cot C)}.$$

例三. 若 a,b,c 為 ΔABC 之三邊，試證

$$\begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 B & \cot B & 1 \\ \sin^2 C & \cot C & 1 \end{vmatrix}=0.$$

[解]: 此例乃上章第一節後例三之特例，茲另述一證法如下:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 B & \cot B & 1 \\ \sin^2 C & \cot C & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{4\Delta^2}{b^2c^2} & \frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta} & 1 \\ \frac{4\Delta^2}{c^2a^2} & \frac{c^2+a^2-b^2}{4\Delta} & 1 \\ \frac{4\Delta^2}{a^2b^2} & \frac{a^2+b^2-c^2}{4\Delta} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{4\Delta^2}{4\Delta}\begin{vmatrix}\frac{1}{b^2c^2} & b^2+c^2-a^2 & 1\\ \frac{1}{c^2a^2} & c^2+a^2-b^2 & 1\\ \frac{1}{a^2b^2} & a^2+b^2-c^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\Delta}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix}a^2 & b^2+c^2-a^2 & 1\\ b^2 & c^2+a^2-b^2 & 1\\ c^2 & a^2+b^2-c^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\Delta}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix}a^2 & b^2+c^2 & 1\\ b^2 & c^2+a^2 & 1\\ c^2 & a^2+b^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\Delta}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix}a^2 & a^2+b^2+c^2 & 1\\ b^2 & a^2+b^2+c^2 & 1\\ c^2 & a^2+b^2+c^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)\Delta}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix}a^2 & 1 & 1\\ b^2 & 1 & 1\\ c^2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

五. 三角形之高，中線及角之平分線之長.

1. 各高之長.

$$h_a=\frac{2\Delta}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_b=\frac{2\Delta}{b}=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_c=\frac{2\Delta}{c}=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

2. 各中線之長.

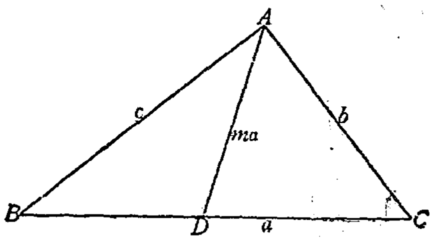
$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A},$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2+2ca\cos B},$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C}.$$

[證]:

$$m_a^2=b^2+CD^2-2b\cdot CD\cos C=b^2+\frac{a^2}{4}-ab\cos C;$$



但 $$\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab},$$

$$\therefore\quad m_a^2=b^2+\frac{a^2}{4}-\frac{b^2+a^2-c^2}{2}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4},$$

$$\therefore\quad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

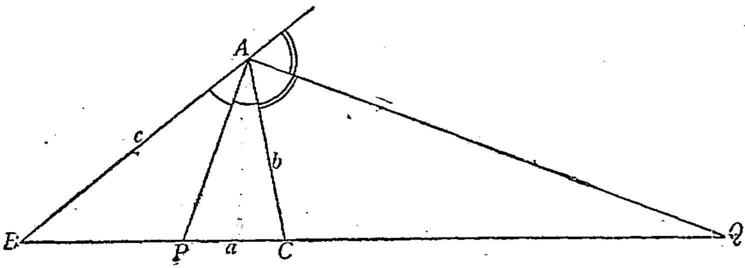
又 $$\because\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\therefore\quad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}.$$

餘同理可證.

3. 內外角平分線之長.

[解]:



$$\because\quad \triangle ABP+\triangle ACP=\triangle ABC,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}c\cdot AP\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}b\cdot AP\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

$$\therefore \quad AP=\frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

又 $\quad \because \quad \triangle BAQ-\triangle ACQ=\triangle ABC,$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}c\cdot AQ\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}b\cdot AQ\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

$$\therefore \quad AQ=\frac{bc\sin A}{(c-b)\cos\frac{A}{2}}=\frac{2bc}{c-b}\sin\frac{A}{2}.$$

(式中設 $c>b$, 但如 $c<b$ 時, 則分母取 $b-c$).

餘同理可求得.

例. 設一直角三角形內切圓之半徑爲 r, 直角之平分線長爲 m. 求證其 a 與 b 二直角邊長爲下列二次方程式之根.

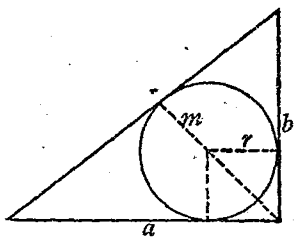
$$(m-2\sqrt{2}r)x^2+2\sqrt{2}r^2x-2mr^2=0.$$

[解]:

$$\because \quad m=\frac{2ab}{a+b}\cos 45^\circ$$

$$=\frac{2ab}{a+b}\times\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore \quad ab=(a+b)\frac{m}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$



又 $\quad \because \quad [(a-r)+(b-r)]^2=a^2+b^2,$

即 $\quad 2r^2+ab-2r(a+b)=0,$

(1) 代入得 $2\sqrt{2}r^2+(m-2\sqrt{2}r)(a+b)=0$,

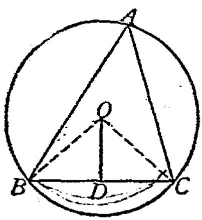
$$\therefore\quad a+b=\frac{-2\sqrt{2}r^2}{m-2\sqrt{2}r},\qquad ab=\frac{-2mr^2}{m-2\sqrt{2}r}.$$

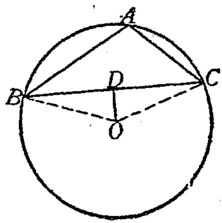
故得證明.

六. 外接圓半徑之公式.

1. $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

[證]:





設 O 爲 $\triangle ABC$ 外接圓之圓心, R 爲其半徑,

作 $OD\perp BC$, $\because\ \angle BOC=2\angle A$.

$\therefore\quad \angle BOD=\angle A$. (左圖),

或 $\angle BOD=180^\circ-\angle A$. (右圖).

$\therefore\quad \frac{a}{2}=R\sin A$, 卽 $\frac{a}{\sin A}=2R$,

餘同理可證,

2. $$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4\Delta}.$$

例一. 設一三角形之各邊角為 a, A, b, B, c, C; 試證

(i) $$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

(ii) $$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},$$

(iii) $$c^2=(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}+(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}.$$

[解]:

$$\because\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

$$\therefore\quad a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C.$$

(i) $$左端=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=右端,$$

(ii) 左端 $=\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\text{右端}.$$

【註】 上二公式稱爲 Mollweide 公式，可供解三角形核算之用。

(iii) 右端 $=c^2\cos^2\frac{A-B}{2}+c^2\sin^2\frac{A-B}{2}=c^2.$

例二. 試證 $a^2+b^2+c^2=8R^2(1+\cos A\cos B\cos C)$

R 爲 $\triangle ABC$ 外接圓之半徑.（交大，23 年度）.

[解]: $\because\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R,$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$

$$=4R^2\left(\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}\right)$$

$$=4R^2\left(\frac{3}{2}+2\cos A\cos B\cos C+\frac{1}{2}\right)$$

$$=8R^2(1+\cos A\cos B\cos C).$$

例三. 設 a, b, c 爲 $\triangle ABC$ 之三邊，$\triangle$ 爲面積，試證

$$a^2b^2c^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=32\Delta^3.$$

[解]: 左端 $=a^2b^2c^2\times 4\sin A\sin B\sin C$

$$=16\Delta^2R^2\times 4\sin A\sin B\sin C$$

$$=32\Delta^2(2R^2\sin A\sin B\sin C)$$

$$=32\Delta^2\times\frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin C$$

$$=32\Delta^2\times\frac{1}{2}ab\sin C=32\Delta^3.$$

七. 內切圓半徑之公式.

1. $$r=\frac{\Delta}{s}.$$

[證]: 設 I 為 $\triangle ABC$ 內切圓之圓心, r 為其半徑.

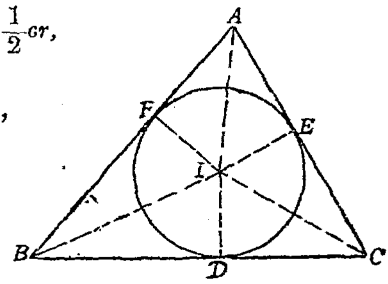
$$\therefore\quad \triangle ABC=\triangle BIC+\triangle CIA+\triangle AIB,$$

$$\therefore\quad \Delta=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr,$$

$$\Delta=\frac{1}{2}(a+b+c)r,$$

$$\Delta=sr,$$

$$\therefore\quad r=\frac{\Delta}{s},$$



2. $$r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}.$$

[證]: 令 $FA=AE=x$, $BD=BF=y$, $CD=CE=z$ 則

$$x+y=c,\quad y+z=a;\quad z+x=b,$$

$$2(x+y+z)=a+b+c=2s,$$

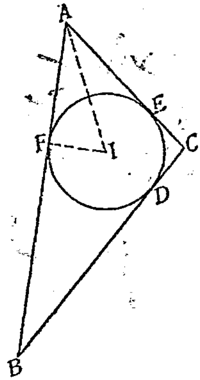
$$x+y+z=s,$$

$$\therefore \quad AF=AE=x=s-a,$$

$$BD=BF=y=s-b,$$

$$CD=CE=z=s-c,$$

$$\therefore \quad r=AF\tan\frac{A}{2}=(s-a)\tan\frac{A}{2}.$$



同理 $$r=(s-b)\tan\frac{B}{2}$$

$$r=(s-c)\tan\frac{C}{2}.$$

例. 試證 $\Delta=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$，$\Delta$ 爲 $\triangle ABC$ 之面積，R 爲其外接圓半徑，r 爲其內切圓半徑.

[解]:

$$右端=\frac{abc}{4\Delta}\times\frac{\Delta}{s}\times 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

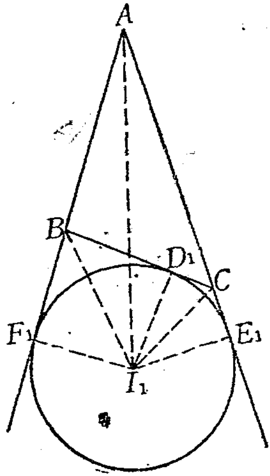
$$=\frac{abc}{4\Delta}\times\frac{\Delta}{s}\times 4\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\Delta.$$

八. 傍切圓半徑之公式.

1. $r_1=\dfrac{\Delta}{s-a}$, $\quad r_2=\dfrac{\Delta}{s-b}$, $\quad r_3=\dfrac{\Delta}{s-c}$.

[證]: 設 I_1 爲 $\triangle ABC$ 角 A 內之傍切圜圓心，此圓切 BC 於 D_1 點，切 AB 與 AC 之延線各於 F_1 點與 E_1 點，半徑 $I_1D_1=r_1$. 則



$$\triangle ABC=\triangle BI_1A+\triangle CI_1A-\triangle BI_1C$$

$$=\frac{1}{2}cr_1+\frac{1}{2}br_1-\frac{1}{2}ar_1$$

$$=\frac{1}{2}(c+b-a)r_1$$

$$=r_1(s-a).$$

$$\therefore\ r_1=\frac{\Delta}{s-a}.$$

同理可證 $$r_2=\frac{\Delta}{s-b},$$

$$r_3=\frac{\Delta}{s-c}.$$

2. $$r_1=s\tan\frac{A}{2},$$

$$r_2=s\tan\frac{B}{2},$$

$$r_3=s\tan\frac{C}{2}.$$

[證]:

$$\because \quad 2AF_1=2AE_1=AF_1+AE_1$$

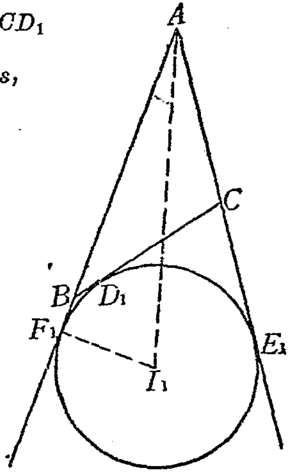
$$=AB+BD_1+AC+CD_1$$

$$=AB+BC+CA=2s,$$

即 $$AF_1=AE_1=s,$$

$$\therefore \quad r_1=AF_1\tan\frac{A}{2}$$

$$=s\tan\frac{A}{2}.$$



同理可證

$$r_2=s\tan\frac{B}{2},$$

$$r_3=s\tan\frac{C}{2}.$$

例一. 試證 $\frac{rr_1}{r_2r_3}=\tan^2\frac{A}{2}$.

[解]:

$$\text{左端}=\frac{(s-a)\tan\frac{A}{2}\times s\tan\frac{A}{2}}{s\tan\frac{B}{2}\times s\tan\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{(s-a)\tan^2\frac{A}{2}}{s\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}}$$

$$=\frac{(s-a)\tan^2\frac{A}{2}}{s\times\frac{s-a}{s}}=\text{右端}.$$

例二. 試證 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$.

[解]: 左端 $=\frac{a}{2\Delta}+\frac{b}{2\Delta}+\frac{c}{2\Delta}$

$$=\frac{a+b+c}{2\Delta}=\frac{2s}{2\Delta}=\frac{s}{\Delta}=\frac{1}{r},$$

右端 $=\frac{s-a}{\Delta}+\frac{s-b}{\Delta}+\frac{s-c}{\Delta}$,

$$=\frac{3s-2s}{\Delta}=\frac{s}{\Delta}=\frac{1}{r}.$$

$\therefore$ 左端=右端.

習 題 三

1. 三角形各角之比爲 3 : 4 : 5, 其最小邊爲 5, 求他二邊.

答: $\frac{5\sqrt{6}}{2}$, $\frac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$,

2. 已知三角形之 A 角及夾 A 角之邊分別爲

$$x+y\cos A \quad 及 \quad y+x\cos A$$

試證 A 角之對邊爲

$$\sin A\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos A},$$

3. 三角形 ABC 之內角平分線交對邊於 D, E, F 三點. 設 $\angle ADB=\alpha$, $\angle BEC=\beta$, $\angle CFA=\gamma$. 試證

$$a\sin 2\alpha+b\sin 2\beta+c\sin 2\gamma=0.$$

(a, b, c 順次爲 BC, CA, AB 三邊之長).

4. 若三角形之三邊成等差級數, 且其最大角與最小角之差爲 90°, 則其三邊之比爲 $\sqrt{7}+1:\sqrt{7}:\sqrt{7}-1$. (復旦大, 33 年度).

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 如 $\angle C=60^\circ$, 試證

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

6. 三角形 $\triangle ABC$ 中, 若 $2\cos A+\cos B+\cos C=2$, 求證 $2a=b+c$. (國立師範學院, 32 年度).

7. 已知三角形之三邊長 a, b, c 爲方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$. 之三根.

(1) 求以 p, q, r 表示此三角形面積.

(2) 求以 p, q, r 表示 $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$ 之值. (復旦大, 36 年度).

答: (1) $\frac{\sqrt{-p^4+4p^2q-8pr}}{4}$, (2) $\frac{p^2-2q}{2r}$.

8. 設 R 爲任意三角形 ABC 之外接圓半徑, 試證

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C.$$

(武大, 34 年度).

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 求證:

(1) $$\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$$

(2) $$(b+c-a)\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=2a\cot\frac{A}{2}.$$

(復旦大, 36 年度).

10. 設 $\triangle ABC$ 之周界為 $2p$, 面積為 Δ, 及其內切圓與三個傍切圓之半徑分別為 r, r_1, r_2, r_3, 求證:

(1) $$\Delta=\sqrt{rr_1r_2r_3},$$

(2) $$r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2=p^2$$

(復旦大, 36 年度).

設 a, b, c 為 $\triangle ABC$ 之邊, Δ 為其面積, R 為外接圓之半徑, r 為內切圓之半徑, r_1, r_2, r_3 為傍切圓之半徑.

11. 如 $\cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}=\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 試證 $\triangle ABC$ 為等腰.

12. 試證

$$a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B+c(a^2+b^2)\cos C=3abc.$$

13. 如 a, b, c 成等差級數, 試證

$$\cos A\cot\frac{A}{2},\quad \cos B\cot\frac{B}{2},\quad \cos C\cot\frac{C}{2}$$

亦成等差級數.

14. 試證 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \sin^2\frac{A}{2} & \sin^2\frac{B}{2} & \sin^2\frac{C}{2} \\ \cos^2\frac{A}{2} & \cos^2\frac{B}{2} & \cos^2\frac{C}{2} \end{vmatrix}$

$$=\frac{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{2abc}.$$

15. 試證 $\Delta=r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ 因而證明其內切圓之面積與三角形面積之比爲 $\pi:\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

16. 試證

$$\Delta=2R^2\sin A\sin B\sin C=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

17. 試證

(i) $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4Rr^2$,

(ii) $r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2=16R^2-a^2-b^2-c^2$.

18. 如 $r_1=r_2+r_3+r$, 試證 $\triangle ABC$ 爲直角三角形.

19. 試證 $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}=\frac{r(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}{r_1r_2r_3}$.

20. 如四邊形 $ABCD$ 有一外接圓及一內切圓，試證

(i) $\cos A=\frac{ad-bc}{ad+bc}$,

(ii) $\tan^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{bc}{ad}$,

(iii) 四邊形之面積$=\sqrt{abcd}$,

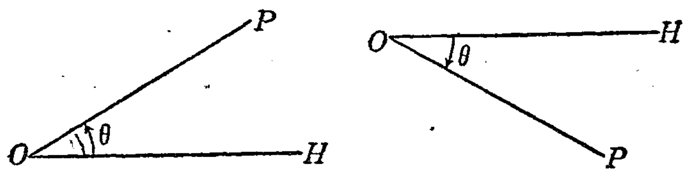
(iv) 內切圓半徑$=\dfrac{\sqrt{abcd}}{s}$.

(式中 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$, 且 a, b, c, d 順次為 AB, BC, CD, DA 之長).

第四章　三角形之解法

一. 測量術語.

1. 俯角與仰角.　一人自 O 點望見 P 處之目標,在含視線 OP 之垂面(卽與水平面垂直之平面)內,作水平線 OH(卽與水平面平行之直線)則 $\angle HOP$ 當 P 點高於 O 點時,稱爲仰角,低於 O 點時,稱爲俯角.



2. 方位.　航海用之羅盤,共分 32 等份,每份 $=\frac{360^\circ}{32}=11\frac{1}{4}^\circ$.如圖(i)點 A 可謂在點 C 之東北偏東,亦可謂在點 C 之東 $33\frac{3^\circ}{4}$ 北,後者述法,較爲普遍,如圖(ii),CA 之方位爲北 30° 東(或東 60° 北).CD 之方位爲北 50° 西(或西 40° 北),CE 之方位爲南 63° 西(或西 27° 南).

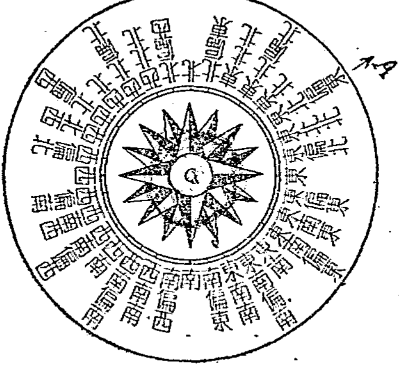


圖 (i)

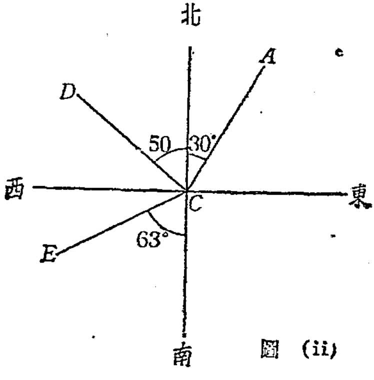
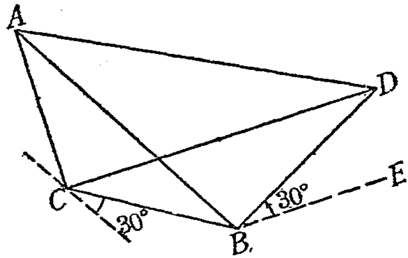


圖 (ii)

二. 直角三角形之解法. 任何直角三角形除直角已知外，如知一邊及他一原素(邊或角)，則此直角三角形可應用銳角三角函數之定義及他兩銳角互餘之性質求出他未知原素，

例一. 在山上見平地南 30° 東之方向，有一汽車測得俯角為 45°，經 10 分鐘時間，見汽車行至山之正東．其進行之方向為東 30° 北，每時速率為 20 哩，試求山高.

［解］: 設 AC 為山高，B 點為汽車原在處，則 $\angle BAC=45°$.又 D 點為汽車 10 分鐘後所在處.



在 $\triangle ACB$ 內，

$$\because\quad \angle ACB=90°,\quad \angle ABC=\angle BAC=45°,$$

$$\therefore\quad BC=AC,$$

又在 $\triangle BCD$ 內，

$$\because\quad \angle DCB=60°,\quad \angle BDC=\angle DBE=30°,$$

$$\therefore\quad \angle CBD=90°$$

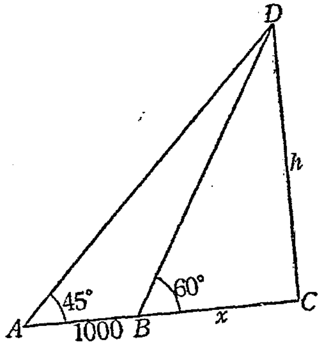
$$\therefore\quad \cot\angle DCB=\frac{CB}{BD},$$

$$\therefore\quad BC=BD\cot 60°.$$

故 $$AC=BD\cot 60°=\frac{20}{60}\times 10\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{10}{3\sqrt{3}}=\frac{10}{9}\sqrt{3}\text{ 哩}.$$

例二. 某人從一點測得一山，其仰角為 45°. 若向山前進 1000 尺，再測則得仰角 60°，求山高.（同濟大，31 年度）.

[解]:　設 A 點爲第一次觀察點，B 點爲第二次觀察點．DC 爲山高並設 $DC=h$，$BC=x$.



在 $\triangle ADC$ 內，

$$\tan 45^\circ=\frac{h}{1000+x} \qquad (1)$$

在 $\triangle BDC$ 內，

$$\tan 60^\circ=\frac{h}{x} \qquad (2)$$

即

$$1=\frac{h}{1000+x} \qquad (3)$$

$$\sqrt{3}=\frac{h}{x} \qquad (4)$$

由(4)

$$x=\frac{h}{\sqrt{3}}$$

代入(3)

$$1=\frac{\sqrt{3}\,h}{1000\sqrt{3}+h}$$

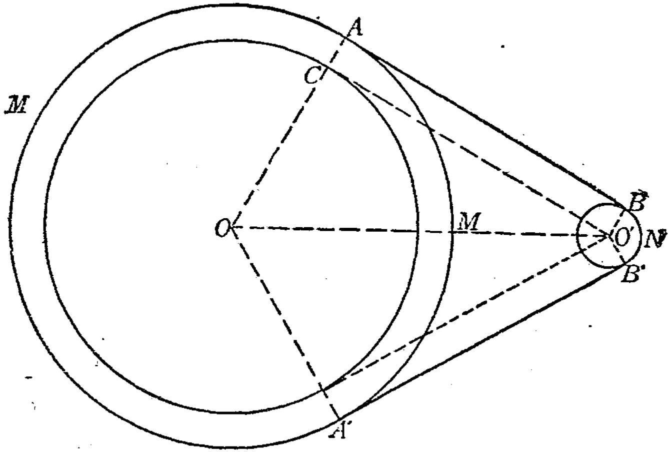
$$\therefore\ h=\frac{1000\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{1000\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$=500(3+\sqrt{3})\text{尺}.$$

例三．一繩環繞二輪上，二輪之半徑，各爲 7 尺及 1 尺，二輪心相距 12 尺，試證繩長爲$(12\sqrt{3}+10\pi)$尺.

[解]:



在 $\triangle OCO'$ 内， $\because \quad \angle OCO' = 90^\circ$,

$$OC = OA - CA = 7 - 1 = 6, \quad OO' = 12.$$

$$\therefore \quad \cos\angle COO' = \frac{CO}{OO'} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},$$

而 $\angle COO' = 60^\circ$.

又 $\tan 60^\circ = \dfrac{CO'}{CO}$,

$$\therefore \quad CO' = CO \tan 60^\circ = 6\sqrt{3},$$

故 $AB = A'B' = CO' = 6\sqrt{3}$ 尺.

又因 $\angle AOA' = 120^\circ$,

故 AMA' 為 O 圓周長之 $\frac{2}{3}$，即 $\frac{2}{3}\times 2\pi\times 7=\frac{28}{3}\pi=9\frac{1}{3}\pi$.

同理 BNB' 為 O' 圓周長之 $\frac{1}{3}$，即 $\frac{1}{3}\times 2\pi=\frac{2}{3}\pi$. 故全繩之長為 $12\sqrt{3}+9\frac{1}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi=(12\sqrt{3}+10\pi)$ 尺.

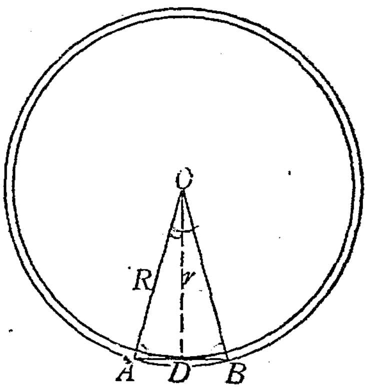
【註】:

1. 因自等腰三角形頂點作底邊上之垂線，即可分成二個全等直角三角形，故可歸入直角三角形求解.

2. 因自正多角形之心作外接圓之半徑，可分成若干個全等等腰三角形，再作內切圓之半徑，又分各等腰三角形為直角三角形，故可歸入直角三角形求解.

例. 已知一正十二角形之內切圓半徑為 8，試求此多角形每邊之長，外接圓半徑之長及其面積.

[解]:



$\because\quad \angle AOB=\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$,

$\therefore\quad \angle AOD=\frac{30^\circ}{2}=15^\circ$,

而　$\cos\angle AOD=\frac{r}{R}$,

$\therefore\quad R=\frac{r}{\cos\angle AOD}$

$=\frac{r}{\cos 15^\circ}$.

$$=\frac{8}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{32}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{32(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}=8(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

又 $\because \quad \tan\angle AOD=\frac{AD}{r},$

$$\therefore \quad AD=r\tan\angle AOD=8\tan 15^\circ=8(2-\sqrt{3}),$$

$$\therefore \quad AB=2AD=16(2-\sqrt{3}).$$

$$面積=\frac{16(2-\sqrt{3})\times 12\times 8}{2}=768(2-\sqrt{3}).$$

三．任意三角形之解法． 已知三角形一邊及他任意二原素(邊或角)，卽可求出他三原素，今分述如下:

1．二角一邊．

(A) 解法．

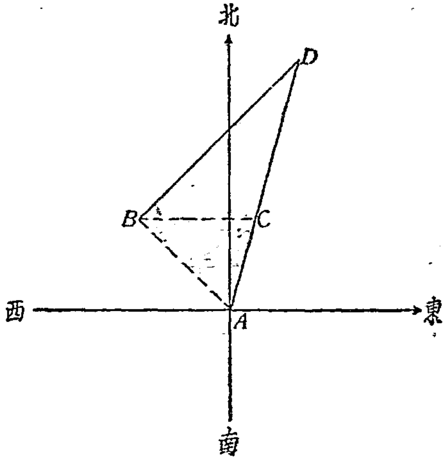
第一步． 用內角和定理求他角．

第二步． 用正弦定律求他二邊．

例．有船行至海面之 A 點，望見北 15° 東之方向，有甲乙二小島，其船由 A 點向西北航行 5 浬至 B 點，望見甲在正東，乙在東北，問二島之距離幾何?

[解]: 設 C 點爲甲島之位置，D 點爲乙島之位置．

$$\because \quad \angle DBA=\angle CBA+\angle DBC=45^\circ+45^\circ=90^\circ,$$



且 $\angle DAB = 45° + 15° = 60°$.

故在 $\triangle ABD$ 內， $\cos 60° = \frac{AB}{AD}$,

$$\therefore \quad AD = \frac{AB}{\cos 60°} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10 \text{ 浬}.$$

又 $\because \quad \angle CBA = 45°, \quad \angle DAB = 60°$,

$$\therefore \quad \angle BCA = 180° - 105° = 75°.$$

在 $\triangle ABC$ 內，按正弦定律

$$\frac{AC}{\sin 45°} = \frac{AB}{\sin 75°},$$

$$\therefore\quad AC=\frac{AB\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}=\frac{5\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{10}{\sqrt{3}+1}=\frac{10(\sqrt{3}-1)}{2}=5(\sqrt{3}-1)\text{浬}.$$

故 $$CD=AD-AC=10-5(\sqrt{3}-1)$$

$$=15-5\sqrt{3}=5(3-\sqrt{3})\text{浬}.$$

(B) 討論. 必須已知兩角之和小於 180°，方有解.

2. 二邊對角.

(A) 解法.

第一步 用正弦定律求他對角.

第二步 用內角和定理求二邊之夾角.

第三步 用正弦定律求他邊.

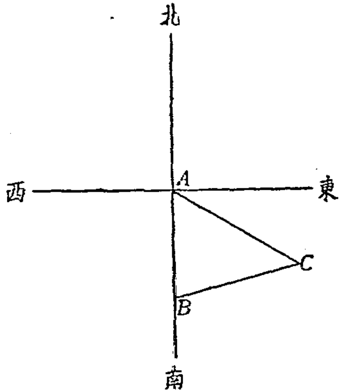
例. 敵之軍港正南 $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ 浬之某島,駐有封鎖敵港之艦隊,有一敵艦由港駛出，向南 60° 東逃遁. 5 分鐘後封鎖司令官聞訊；派出每小時速率 15 浬之艦駛行 20 分鐘追及，求此艦進行之方向,及敵艦每小時之速率.

[解]: 設 A 點爲港口，B 點爲封鎖敵港之艦隊停泊處,C 點爲追及敵艦之處.

$$\because\quad AB=\frac{5\sqrt{6}}{3}\text{浬},$$

$$BC=15\times\frac{20}{60}=5\text{ 浬},$$

$$\angle BAC=60°,$$



在 $\triangle ABC$ 內，按正弦定律

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC},$$

$$\therefore\quad \sin\angle ACB$$

$$=\frac{5\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{5}\sin 60°$$

$$=\frac{5\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore\quad \angle ACB=45° \quad \text{而} \quad \angle ABC=180°-105°=75°.$$

故 BC 之方向爲北 $75°$ 東.

更按正弦定律 $$\frac{AC}{\sin 75°}=\frac{BC}{\sin 60°},$$

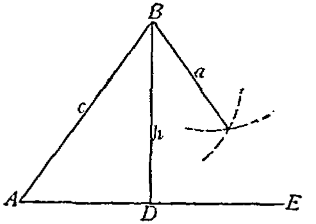
$$\therefore\quad AC=\frac{BC\sin 75°}{\sin 60°}=5\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{5(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2\sqrt{3}}=\frac{5(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{6}\text{ 浬}.$$

故其速率爲

$$\frac{5(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{6}\times\frac{60}{25}=2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\text{浬}/1\text{時}.$$

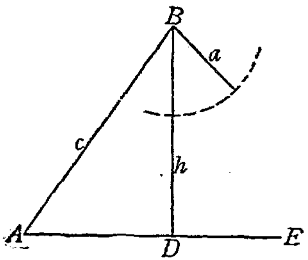
(B) 討論. 如已知 $\triangle ABC$ 中之 a, c 邊及 A 角. 其作法爲: "作 $\angle BAE$ 等於已知角, 取 AB 等於鄰邊 C, 更以 B 爲圓心, 對邊 a 爲半徑作弦, 與 AE 相交卽得,"吾人欲研討有無解答, 及解答之組數, 可作 $BD\perp AE$, 知 $BD=h=c\sin A$, 而分下列諸情形討論之.



甲. $A<90°$.

(i) $a<c\sin A$. 因所作之弧不與 AE 相交, 故無解.

(ii) $a=c\sin A$. 因所作之弧與 AE 相切, 故有一解, 且爲直角三角形.

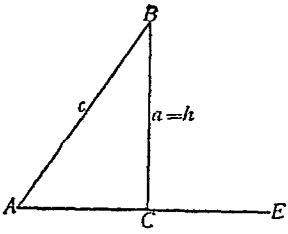


(i)

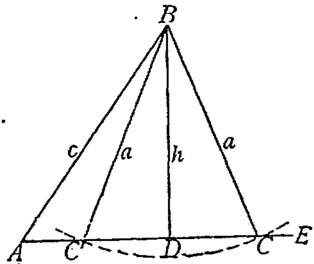
(iii) $c>a>c\sin A$. 因所作之弧與 AE 相交於二點, 且皆在已知角之邊 AE 上, 故得 $\triangle ABC$, $\triangle ABC'$ 兩解.

(iv) $a=c$. 因 c' 點與 A 點相合, 故僅有 $\triangle ABC$ 一解, 且爲等腰三角形.

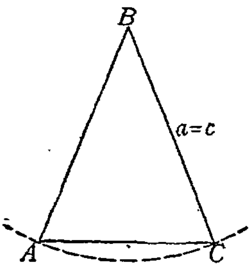
(v) $a>c$. 因 c' 點在 EA 之延線上, 故得二三角形, 其中 $\triangle ABC'$ 不合用, 蓋 $\angle BAC'$ 爲已知角之補角也.



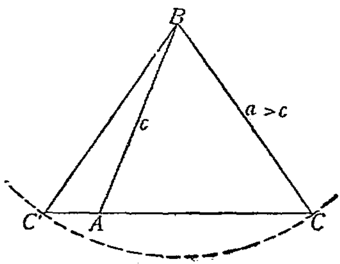
(ii)



(iii)

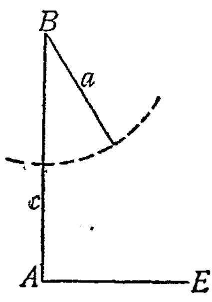


(iv)



(v)

乙. $A=90^{\circ}$.

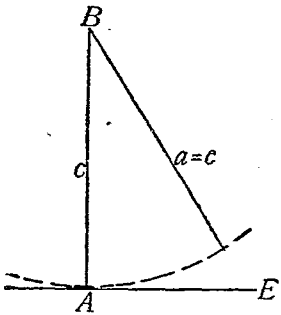


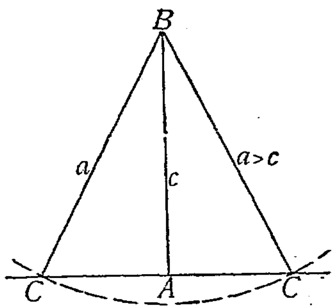
(i) $a<c$. 因所作之弧不與 AE 相交,故無解.

(ii) $a=c$. 因所作之弧與 AE 切於 A 點,故無解.

(iii) $a>c$. 因所作之弧與 AE 及 EA 延線各有一交點,故有二解. 但所成之二直

角三角形全等,而可視爲一解.



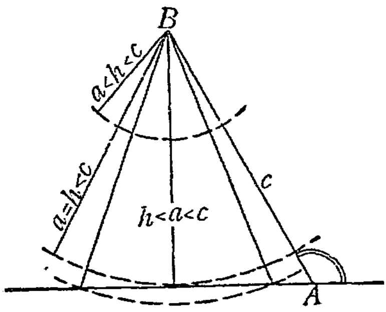


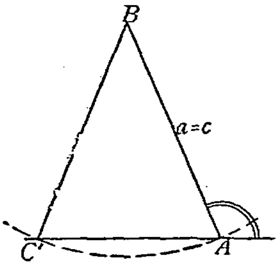
丙. $A>90°$.

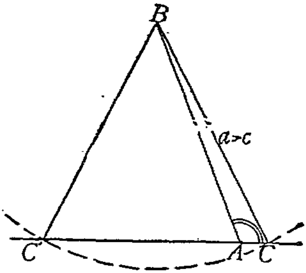
(i) $a<c$. 因所作之弧,不與 AE 相交,故無解.

(ii) $a=c$. 雖有一解.因 $\angle BAC'$ 爲已知角之補角,故不合用,當亦無解.

(iii) $a>c$. 雖有二解.僅有鈍角者合用,故有一解.







3. 二邊夾角.

第一步. 用餘弦定律求他邊.

第二步. 用正弦定律求他二角之一角.

第三步. 用內角和定理求第三角.

【註】: 因餘弦定律,不便用對數計算,故如用對數解法,其法則改為

第一步. 用內角和定理求出他二角之和.

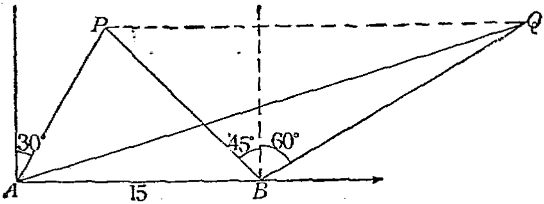
第二步. 用正切定律求出他二角之差,再算得他二角.

第三步. 用正弦定律求他邊.

例. 有一軍艦向正東航行,望見 P, Q 二燈塔,測其方向,P 在北 60° 東,Q 在北 75° 東,該艦進行 15 浬,復測二燈塔之方向,P 在北 45° 西,Q 在北 60° 東,求二燈塔之距離.

[解]: 設 A 點為軍艦原在處,B 點為向東進行 15 浬之處.

在 $\triangle ABP$ 內, $$\frac{AP}{\sin\angle ABP}=\frac{AB}{\sin\angle APB},$$



$$\therefore \quad \frac{AP}{\sin(90^\circ-45^\circ)}=\frac{15}{\sin[180^\circ-(60^\circ+45^\circ)]},$$

$$\therefore \quad AP=\frac{15\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}=\frac{15\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=15(\sqrt{3}-1),$$

在$\triangle ABQ$內，$\quad \dfrac{AQ}{\sin 150^\circ}=\dfrac{AB}{\sin 15^\circ}$；

$$\therefore \quad AQ=\frac{15\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ}=\frac{15(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}.$$

更在$\triangle APQ$內，

$$PQ=\sqrt{AP^2+AQ^2-2AP\cdot AQ\cos 45^\circ}=15\sqrt{4-\sqrt{3}}\text{ 浬}.$$

4．三邊.

(A) 解法.

第一步．　用餘弦定律求出二角.

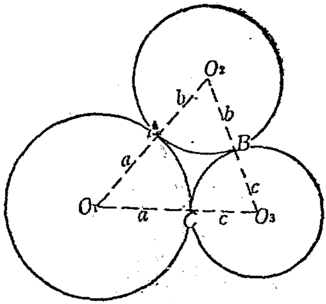
第二步．　用內角和定理求第三角.

【註】：　有時用半角與各邊關係諸公式解之，尤便於對數計算.

(B) 討論.　必兩邊之和大於第三邊方有解.

例. 有互相外切之三圓，其半徑分別爲 a, b, c; 試求三圓當中空隙之面積.（統考，28年度）.

［解］: 設 O_1, O_2, O_3 三圓互相外切於 A, B, C; 其半徑依次爲 a, b, c.



$$\because\quad O_1O_2=a+b=A,$$

$$O_2O_3=b+c=B,$$

$$O_3O_1=c+a=C.$$

$$\therefore\quad S=\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{2}=a+b+c,$$

$$S-A=a+b+c-(a+b)=c,$$

$$S-B=a+b+c-(b+c)=a,$$

$$S-C=a+b+c-(c+a)=b.$$

$$\therefore\quad \triangle O_1O_2O_3=\sqrt{S(S-A)(S-B)(S-C)}$$

$$=\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

$$\because\quad \tan\frac{\angle O_1O_3O_2}{2}=\sqrt{\frac{(S-B)(S-C)}{S(S-A)}}$$

$$=\sqrt{\frac{ab}{c(a+b+c)}},$$

$$\therefore\quad \frac{\angle O_1O_3O_2}{2}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{ab}{c(a+b+c)}}.$$

即 $$\angle O_1O_3O_2=2\tan^{-1}\sqrt{\frac{ab}{c(a+b+c)}},$$

又 $$\because\quad \tan\frac{\angle O_2O_1O_3}{2}=\sqrt{\frac{(S-C)(S-A)}{S(S-B)}}$$

$$=\sqrt{\frac{bc}{a(a+b+c)}}.$$

$$\therefore\quad \angle O_2O_1O_3=2\tan^{-1}\sqrt{\frac{bc}{a(a+b+c)}}.$$

又 $$\because\quad \tan\frac{\angle O_1O_2O_3}{2}=\sqrt{\frac{(S-A)(S-B)}{S(S-C)}}$$

$$=\sqrt{\frac{ca}{b(a+b+c)}}.$$

$$\therefore\quad \angle O_1O_2O_3=2\tan^{-1}\sqrt{\frac{ca}{b(a+b+c)}}.$$

$$\therefore\quad \Delta O_1AC=\frac{1}{2}a\times\frac{2\pi a}{360^\circ}\times\angle O_2O_1O_3$$

$$=\frac{\pi}{180^\circ}a^2\tan^{-1}\sqrt{\frac{bc}{a(a+b+c)}}.$$

同理 $$\Delta O_2AB=\frac{\pi}{180^\circ}b^2\tan^{-1}\sqrt{\frac{ca}{b(a+b+c)}},$$

$$\Delta O_2BC=\frac{\pi}{180^\circ}c^2\tan^{-1}\sqrt{\frac{ab}{c(a+b+c)}},$$

故空隙面積 $=\triangle O_1O_2O_3-(\Delta O_1AC+\Delta O_2AB+\Delta O_3BC)$

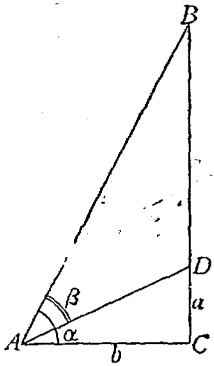
$$=\sqrt{abc(a+b+c)}-\frac{\pi}{180^\circ}\left[a^2\tan^{-1}\sqrt{\frac{bc}{a(a+b+c)}}\right.$$

$$\left.+b^2\tan^{-1}\sqrt{\frac{ca}{b(a+b+c)}}+c^2\tan^{-1}\sqrt{\frac{ab}{c(a+b+c)}}\right].$$

四. 測量問題. 舉例釋之如下:

例一. 人在岸上望見一船桅頂與桅上他一點. 其視角之正切值爲 0.6, 今知他點距桅頂之長爲全桅之 $\frac{3}{4}$, 求此人望全桅之視角正切值.

[解]: 設 A 爲觀察點,



$$BC=4a,\qquad CD=a,$$

$$AC=b,\qquad \angle BAC=\alpha,$$

$$\angle DAB=\beta.$$

由 $\triangle DAC$ 得 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{a}{b}$,

由 $\triangle BAC$ 得 $\tan\alpha=\frac{4a}{b}$,

$$\therefore\quad \tan\alpha=4\tan(\alpha-\beta)=\frac{4(\tan\alpha-\tan\beta)}{1+\tan\alpha\tan\beta},$$

但 $\tan\beta=\frac{3}{5}$, $\therefore\quad \tan\alpha=\dfrac{4\left(\tan\alpha-\frac{3}{5}\right)}{1+\frac{3}{5}\tan\alpha}$,

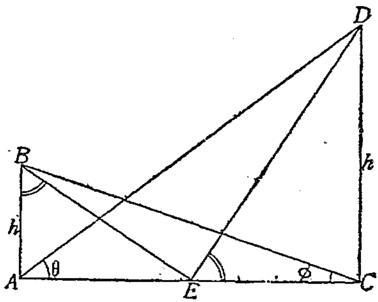
化簡得 $$\tan^2\alpha-5\tan\alpha+4=0,$$

$$(\tan\alpha-1)(\tan\alpha-4)=0,$$

$$\therefore\quad \tan\alpha=1,\qquad \tan\alpha=4.$$

例二. 兩桿相距 12 尺, 在兩桿底交換測得此桿之仰角為彼桿仰角之二倍, 如在兩桿底間中點測之, 則兩仰角互為餘角, 求證兩桿之長為 9 尺與 4 尺(交大, 25 年度).

[解]: 設 AB, CD 為兩桿, E 為 A, C 之中點.



$$\angle CAD=\theta,$$

$$\angle ACB=\phi,$$

$$AB=h,$$

$$CD=h'.$$

則 $$\theta=2\phi,$$

$$\angle BED=90^\circ.$$

$$\because\quad \angle BAE=\angle DCE=90^\circ,$$

且 $$\angle ABE+\angle BEA=90^\circ,$$

$$\angle DEC+\angle BEA=90^\circ,$$

$$\therefore\quad \angle ABE=\angle DEC.$$

$$\therefore\quad \triangle ABE\backsim\triangle CED.$$

$$\frac{AB}{AE}=\frac{CE}{CD},$$

即 $$hh'=AE\times CE=6\times 6=36,\qquad(1)$$

又 $$\because\quad \tan\theta=\frac{h'}{12},\qquad \tan\phi=\frac{h}{12}.$$

$$\therefore\quad \frac{h'}{h}=\frac{\tan\theta}{\tan\phi}=\frac{\tan 2\phi}{\tan\phi}=\frac{\dfrac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi}}{\tan\phi}$$

$$=\frac{2}{1-\tan^2\phi}=\frac{2}{1-\dfrac{h^2}{144}}=\frac{288}{144-h^2}.$$

$$\therefore\quad hh'=\frac{288h^2}{144-h^2}.\qquad(2)$$

由(1), (2) $$\frac{288h^2}{144-h^2}=36,$$

$$h^2=16;$$

$$\therefore\quad h=4\text{ 尺},$$

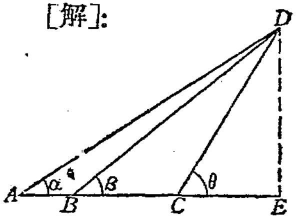
$$h'=9\text{ 尺}.$$

例三. 有向北傾斜之塔，塔之南有兩點，與塔底之距離為 a 及 b，在兩點測得塔頂之仰角，順序為 α 及 β. 求證此塔與平面所成之角為

$$\cot^{-1}\frac{b\cot\alpha-a\cot\beta}{b-a},$$

(交大，25年度).

[解]:



設 DC 爲塔身，在 A 點測得之仰角爲 α，在 B 點測得之仰角爲 β. 塔與平面所成之角爲 θ. 則

$$AC=a,$$

$$BC=b.$$

在 $\triangle ACD$ 內， $\angle ADC=\theta-\alpha,$

$$\therefore \quad \frac{CD}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin(\theta-\alpha)} \tag{1}$$

在 $\triangle BCD$ 內， $\angle BDC=\theta-\beta,$

$$\therefore \quad \frac{CD}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin(\theta-\beta)} \tag{2}$$

$\frac{(1)}{(2)}$,

$$\frac{a}{b}=\frac{\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha}}{\dfrac{\sin(\theta-\beta)}{\sin\beta}}=\frac{\sin\theta\cot\alpha-\cos\theta}{\sin\theta\cot\beta-\cos\theta}$$

$$=\frac{\cot\alpha-\cot\theta}{\cot\beta-\cot\theta}.$$

化簡得 $$\cot\theta=\frac{b\cot\alpha-a\cot\beta}{b-a}.$$

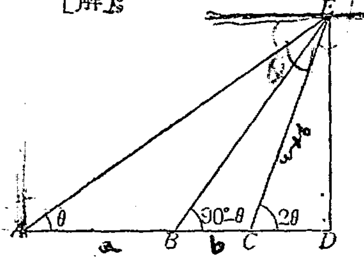
$$\therefore \quad \theta=\cot^{-1}\frac{b\cot\alpha-a\cot\beta}{b-a}.$$

例四，有人在某處測得一山頂之仰角爲 θ，而向前進 a 尺，

其仰角爲 $90^\circ-\theta$. 再前進 b 尺, 其仰角爲 2θ. 求證山高爲

$$\sqrt{(a+b)^2-\frac{1}{4}a^2}\text{ 尺.}$$ (北大, 25 年度)。

[解]: 設三測點依次爲 A, B, C; 山高爲 DE.



$\because\quad \angle AEC=2\theta-\theta=\theta,$

$\therefore\quad CE=AC=a+b,$

又 $a+b+CD=DE\cot\theta,$ (1)

$$b+CD=DE\cot(90^\circ-\theta)=DE\tan\theta \qquad (2)$$

(1)−(2), $$a=DE(\cot\theta-\tan\theta)=\frac{DE(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{2DE\cos2\theta}{\sin2\theta}=2DE\cot2\theta=2CD.$$

$$\therefore\quad CD=\frac{1}{2}a.$$

而 $$DE=\sqrt{CE^2-CD^2}=\sqrt{(a+b)^2-\frac{1}{4}a^2}\text{ 尺.}$$

例五. 在 A 點測得正南一塔之仰角爲 30°, 又在 A 點正西 B 點, 測得其仰角爲 18°, 設 AB 之距離爲 a, 求證塔高爲

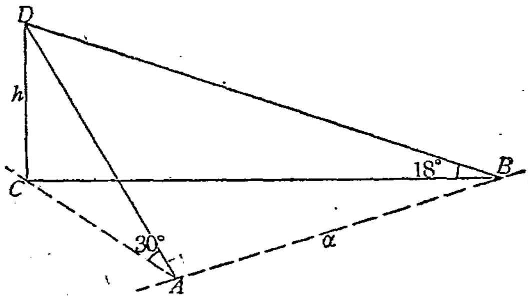
$$\frac{a}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}.$$ 但已知

$$\tan 18^\circ=\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$ (交大，25年度)。

[解]：　設 $CD=h=$ 塔高.

因　　$\angle BCD=90^\circ.$

故在 $\triangle BCD$ 內，　　$BC=h\cot 18^\circ.$



又因　　$\angle ACD=90^\circ.$

故在 $\triangle ACD$ 內，　　$AC=h\cot 30^\circ.$

更因　　$\angle BAC=90^\circ,$

故在 $\triangle BAC$ 內，　　$BC^2=AB^2+AC^2,$

即　　$h^2\cot^2 18^\circ=\alpha^2+h^2\cot^2 30^\circ,$

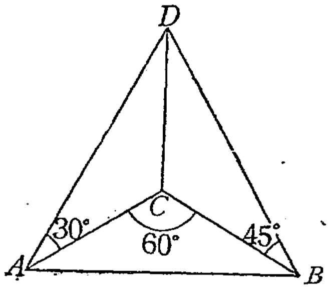
$$\therefore\quad h^2=\frac{\alpha^2}{\cot^2 18^\circ-\cot^2 30^\circ}.$$

但　　$\cot^2 18^\circ-\cot^2 30^\circ=\dfrac{1}{\tan^2 18^\circ}-3=\dfrac{5}{5-2\sqrt{5}}-3$

$$=\frac{5(5+2\sqrt{5})}{25-20}-3=5+2\sqrt{5}-3=2+2\sqrt{5}.$$

$$\therefore\quad h=\frac{a}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}.$$

例六. 江岸有一砲台，其高爲 30 尺，江內有二艦由台頂測之，其俯角一爲 30°，一爲 45°，又二艦與台底聯線所成之角爲 60°，求二艦之距離.(統考，28 年度).



[解]:　設 CD 爲砲台之高，

A, B 爲二艦所在處.

在 $\triangle ACD$ 內，

$$AC=CD\cot 30^\circ=30\sqrt{3}.$$

在 $\triangle BCD$ 內，

$$BC=CD\cot 45^\circ=30$$

在 $\triangle ABC$ 內，

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\cos 60^\circ$$

$$=2700+900-2\times 30\sqrt{3}\times 30\times\frac{1}{2}$$

$$=2700+900-900\sqrt{3}$$

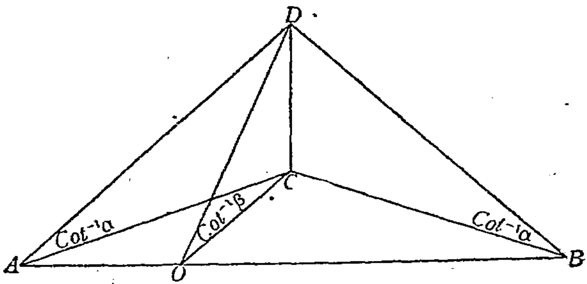
$$=3600-900\sqrt{3}=900(4-\sqrt{3}).$$

$$\therefore\quad AB=\sqrt{900(4-\sqrt{3})}=30\sqrt{4-\sqrt{3}}\text{ 尺}.$$

【註】 $\angle ACB$ 亦稱水平角.

例七. 在同一直線上之 A, O, B 三處，同時測一氣球之高度. 設 $OA=a$, $OB=b$. 又在 A, O, B 三點之仰角各爲 $\cot^{-1}\alpha$, $\cot^{-1}\beta$, $\cot^{-1}\alpha$; 試證此氣球之高爲 $\sqrt{\frac{ab}{\alpha^2-\beta^2}}$. (交大，21年度).

[解]: 設 $CD=h$ 爲氣球之高.



在 $\triangle ACD$ 內， $\cot\angle CAD=\frac{AC}{h}$,

即 $\alpha=\frac{AC}{h}$, $\therefore\ AC=\alpha h$.

在 $\triangle BCD$ 內， $\cot\angle CBD=\frac{BC}{h}$,

即 $\alpha=\frac{BC}{h}$, $\therefore\ BC=\alpha h$.

故 $AC=BC$, 而 $\triangle ACB$ 爲等腰三角形.

$$\therefore\ \angle CAB=\angle CBA.$$

又在 $\triangle OCD$ 內， $\cot\angle COD=\frac{OC}{h}$,

即 $\beta=\frac{OC}{h}$, $\therefore\ OC=\beta h$.

在 $\triangle AOC$ 內，

$$\cos\angle CAO=\frac{AC^2+AO^2-OC^2}{2AC\times AO}=\frac{\alpha^2h^2+a^2-\beta^2h^2}{2\alpha ha}.$$

在 $\triangle BOC$ 內，

$$\cos\angle CBO=\frac{BC^2+BO^2-OC^2}{2BC\times BO}=\frac{\alpha^2h^2+b^2-\beta^2h^2}{2\alpha hb}.$$

但 $\angle CAO=\angle CBO$.

$$\therefore\ \frac{\alpha^2h^2+a^2-\beta^2h^2}{2\alpha ha}=\frac{\alpha^2h^2+b^2-\beta^2h^2}{2\alpha hb},$$

$$\frac{(\alpha^2-\beta^2)h^2+a^2}{a}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)h^2+b^2}{b}.$$

$$b(\alpha^2-\beta^2)h^2+a^2b=a(\alpha^2-\beta^2)h^2+ab^2,$$

$$(a-b)(\alpha^2-\beta^2)h^2=ab(a-b).$$

$$h^2=\frac{ab}{\alpha^2-\beta^2},$$

$$\therefore\ h=\sqrt{\frac{ab}{\alpha^2-\beta^2}}.$$

例八. 一直線上 A, B, C 三點，在各點測一山，其仰角為 30°, 45°, 60°. AB, BC 相距為 600 尺，求山高.（統考，重慶沙

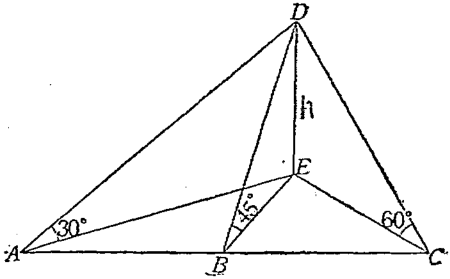
坪壩區, 29 年度).

[解]: 設 $ED=h$ 爲山高.

在 $\triangle ADE$ 內, $AE=h\cot 30^\circ=\sqrt{3}h$,

在 $\triangle CDE$ 內, $CE=h\cot 60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$.

在 $\triangle BDE$ 內, $BE=h\cot 45^\circ=h$,



$\because$ $AB=BC=600$, $\therefore$ BE 爲 $\triangle AEC$ 之中線,

而 $$4BE^2=2AE^2+2CE^2-AC^2,$$

卽 $$4h^2=6h^2+\frac{2}{3}h^2-1440000,$$

$$h^2=3\times 180000=540000,$$

$$\therefore\ h=\sqrt{540000}=300\sqrt{6}\ 尺.$$

習題四

1. 塔與電桿同立於地平面上, 今自塔頂測得桿頂之俯角

爲 A，自塔底測得桿頂之仰角爲 B. 若塔高爲 h 尺，問電桿高幾尺?(中央大，33 年度).

答: $\dfrac{h\tan B}{\tan A+\tan B}$ 尺.

2. 一 50 尺長之旗竿豎立 49 尺高之塔上，設於地面上一點仰視，所得旗竿與塔之全長之視角相等，求此點與塔足之距離.(武大，川大，東北大聯考，31 年度).

答: $147\sqrt{11}$ 尺.

3. 於塔之平距離 a 處，測得塔頂仰角爲 α，塔底之俯角爲 β. 求證塔高爲 $h=a(\tan\alpha+\tan\alpha)=\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ (交大，23 年度).

4. 海上有一小島，距離該島中心 3 里內之海面，因特殊關係，敷設水雷. 今有一軍艦由西向東而行，望見該島在北 48° 東. 如此艦之方向不變，問有無危險.

5. 山上有一塔，由某點測塔頂及塔底之仰角爲 α, β. 向塔行 d 丈，測塔之仰角爲 θ. 試證山高爲 $\dfrac{d\sin\theta\cos\alpha\tan\beta}{\sin(\theta-\alpha)}$ (交大，30 年度).

6. 有一處測得一石岩之仰角爲 47°，沿斜坡 (坡角爲 32°) 而上 1000 尺，再測得仰角 77°，試求石岩高出第一測點之數.(已知 $\sin 47°=0.73135$) (交大，26 年度).

答: 1034.13 尺.

7. 氣球上昇，經氣球在地面上之垂足，作一垂線；此直線過地面上 A, B, C 三點；在 B 之仰角二倍於在 A 者，在 C 之仰角 3 倍於在 A 者．已知 $AB=a$，$BC=b$，設 h 爲氣球之高度求證 $h=\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$（交大，30 年度）．

8. 於地上某處，測塔頂之仰角，由是向塔行 30 尺測之，得塔頂之仰角爲前之 2 倍，更向塔行 $10\sqrt{3}$ 尺，則塔頂之仰角爲最初之 4 倍，問最初之仰角爲若干？

答：15°．

9. 二尖塔之頂點，恰好與觀測者之眼在同一直線上，而仰角爲 A；二塔在靜水中之倒影之俯角，則各爲 B 及 C，若觀測者之眼高於水面 a 尺；求證二塔之水平距離爲

$$\frac{2a\cos^2 A\sin(B-C)}{\sin(A-B)\sin(C-A)}\text{ 尺．（交大，30 年度）．}$$

10. 於氣球之北 A 點望氣球，得仰角 x，同時於 A 點之東 B 點望氣球，得仰角 y．若 $AB=a$，求汽球之高．（清華大，23 年度）．

答：$\frac{a\tan x\tan y}{\sqrt{\tan^2 x-\tan^2 y}}$．

11. 相距 1000 公尺有兩砲台，甲砲台在乙砲台之西，自甲砲台發現正北方有敵機一架．乃以仰角 20° 之方向擊之墮落，其時乙砲台觀測，敵機墮落之處，在北 60° 西之方向，問敵機被

擊時之高如何?(設聲速不計).

答: 210.028 尺.

12. 一人立於一高爲 h 之塔之正南,測得塔之仰角爲 α,自此向西行至 A 處,測得仰角 β. 繼續西行至 B,得仰角 γ. 求 AB 之長. 以 h, α, β, γ 表之.(交大,22 年度).

答: $h[\sqrt{\cot^2\gamma-\cot^2\alpha}-\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}]$.

13. 一塔高 h, 自其南方向測之, 得仰角 α, 由此地再向正西距離 d 測之, 得仰角 β. 求證 $h=\dfrac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}$.(交大,23 年度).

14. 於相距 1000 尺之甲乙兩地, 測得山之仰角爲 30° 及 45°, 今甲地在山之正東向, 乙地在山之東南向, 求山高.(中大,23 年度).

答: $100\sqrt{40+10\sqrt{6}}$ 尺.

15. 一人沿着北 30° 東之直路前進,見其正北有一屋,前行 1 哩後,見屋在正西; 同時見路之他側尚有一風車在東北方位. 又前行 3 哩, 則人在風車之正北. 求證屋與風車之連線與直路之交角之正切爲 $\dfrac{48-25\sqrt{3}}{11}$.

第五章

反三角函數,三角方程式及消去法

一. 反三角函數.

1. 定義. 視一角為某函數值之函數，稱為反三角函數。記為 $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ 或記為 arcsin, arccos, arctan.

2. 有等函數值之角.

(i) 如 $\sin\theta=a$, 則

$$\sin^{-1}a=n\pi+(-1)^n\theta.$$

[證]: 如 $$\sin\theta=\frac{1}{2},$$

特解 $$\theta=\frac{\pi}{6},\qquad \theta=\pi-\frac{\pi}{6}.$$

通解 $$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6},\qquad \theta=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore\quad \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

一般言之， $$\sin^{-1}a=n\pi+(-1)^n\theta.$$

(ii)如 $\cos\theta=a$, 則

$$\cos^{-1}a=2n\pi\pm\theta.$$

[證]: 如 $$\cos\theta=\frac{1}{2}.$$

特解 $\theta=\frac{\pi}{3}$, $\theta=2\pi-\frac{\pi}{3}$.

通解 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{3}$, $\theta=2(k+1)\pi-\frac{\pi}{3}$.

$$\therefore\quad \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

一般言之, $\cos^{-1}a=2n\pi\pm\theta$.

(iii) 如 $\tan\theta=a$, 則

$$\tan^{-1}a=n\pi+\theta.$$

[證]: 如 $$\tan\theta=1.$$

特解 $\theta=\frac{\pi}{4}$, $\theta=\pi+\frac{\pi}{4}$.

通解 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{4}$, $\theta=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$.

$$\therefore\quad \theta=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

一般言之, $\tan^{-1}a=n\pi+\theta$.

[註]: 如 $a>1$ 或 $a<-1$ 時 $\sin^{-1}a$ 與 $\cos^{-1}a$ 無意義, 又如 $-1<a<1$ 時 $\sec^{-1}a$ 與 $\csc^{-1}a$ 無意義.

3. 主值,

(i) 定義. 合於 $\sin\theta=a$ 且與 a 同號, 而其絕對值又最

小之角 θ，稱爲 $\sin^{-1}a$ 之主值. $\tan^{-1}a$, $\cot^{-1}a$, $\csc^{-1}a$ 之主值意義相同. 合於 $\cos\theta=a$ 且其值最小之正角，稱爲 $\cos^{-1}a$ 之主值，$\sec^{-1}a$ 之主值相同.

(ii) 取法 $\sin^{-1}a$, $\csc^{-1}a$, $\tan^{-1}a$, $\cot^{-1}a$ 四者主值在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，$\cos^{-1}a$, $\sec^{-1}a$ 之主值在 0 與 π 之間.

例. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 之主值爲 $\frac{\pi}{3}$.

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 之主值爲 $-\frac{\pi}{6}$.

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 之主值爲 $\frac{2\pi}{3}$.

$\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ 之主值爲 $-\frac{\pi}{6}$.

4. 正反三角函數之相消性.

設 $\sin\theta=a$，則

$$\sin^{-1}a=n\pi+(-1)^n\theta,$$

故得 $$\sin(\sin^{-1}a)=\sin[n\pi+(-1)^n\theta]=\sin\theta=a.$$

$$\sin^{-1}(\sin\theta)=\sin^{-1}a=n\pi+(-1)^n\theta.$$

如限定爲主值則

$$\sin^{-1}\sin\theta=\theta.$$

5. 反三角函數關係式之證法. 通常多先化爲 $\tan^{-1}$，而再證明. 故須熟記下述三公式，

(i) $$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}.$$

[證]: 令 $\tan^{-1}a=\alpha$, $\tan^{-1}b=\beta$,

則 $\tan\alpha=a$, $\tan\beta=b$.

原式卽證 $$\alpha+\beta=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}.$$

亦卽證 $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{a+b}{1-ab}.$$

$$左端=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{a+b}{1-ab}.$$ 故得證明.

(ii) $$\tan^{-1}a-\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}.$$

[證]: 如上所設,原式卽證

$$\alpha-\beta=\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab},$$

亦卽證 $$\tan(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{1+ab}.$$

$$左端=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{a-b}{1+ab}.$$ 故得證明.

(iii) $$2\tan^{-1}a=\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}.$$

[證]: 令 $\tan^{-1}a=\alpha$, 則 $\tan\alpha=a$.

原式卽證 $$2\alpha=\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2},$$

亦卽證 $$\tan 2\alpha=\frac{2a}{1-a^2},$$

$$左端=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2a}{1-a^2}.$$ 故得證明.

例一. 試證 $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+3\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}(-3)$.

[解]:

$$左端=\tan^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}+\tan^{-1}\frac{3}{4}=\tan^{-1}3+\tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$=\tan^{-1}\frac{3+\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{4}}=\tan^{-1}(-3),$$

例二. 試證 $\cos^{-1}\frac{63}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$.

[解]: 原題卽證 $\tan^{-1}\frac{16}{63}+\tan^{-1}\frac{5}{12}=\tan^{-1}\frac{3}{4}$.

亦卽證 $\tan^{-1}\frac{16}{63}=\tan^{-1}\frac{3}{4}-\tan^{-1}\frac{5}{12}$.

$$右端=\tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{1+\frac{5}{16}}=\tan^{-1}\frac{16}{63}.$$

例三. 試證 $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\cot^{-1}\frac{2}{11}$.

[解]: 原題卽證 $\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{11}{2}$.

$$左端=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}}=\tan^{-1}\frac{11}{2}.$$

例四. 試證明

$$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{82}}+\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{\pi}{4}$$ (淸華大, 21年度).

[解]: 令 $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{82}}=\alpha$, $\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}=\beta$.

則 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{82}}$, $\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{41}}$.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{82}}=\sqrt{\frac{81}{82}}=\frac{9}{\sqrt{82}},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\frac{25}{41}}=\sqrt{\frac{16}{41}}=\frac{4}{\sqrt{41}},$$

原題卽證 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

亦卽證 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{左端}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{82}}\times\frac{5}{\sqrt{41}}+\frac{9}{\sqrt{82}}\times\frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$=\frac{5}{41\sqrt{2}}+\frac{36}{41\sqrt{2}}=\frac{41}{41\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故 得 證 明.

例五. 試證 $\cos^{-1}\frac{4}{5}=\cos^{-1}\frac{33}{65}-\cos^{-1}\frac{12}{13}$,

[解]: 原題卽證 $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$,

令 $\cos^{-1}\frac{4}{5}=\alpha$, $\cos^{-1}\frac{12}{13}=\beta$,

則 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=\frac{12}{13}$,

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{5}{13}.$$

原題即證 $\alpha+\beta=\cos^{-1}\frac{33}{65}$,

亦即證 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{33}{65}$,

左端 $=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$.

故得證明.

例六. 試證 $\frac{1}{2}\tan^{-1}\{2\tan[a+\tan^{-1}(\tan^3a)]\}=a$.

[解]: 命 $\tan^{-1}(\tan^3a)=b$, 則

$\tan^3a=\tan b$.

原題即證 $\tan^{-1}[2\tan(a+b)]=2a$,

亦即證 $2\tan(a+b)=\tan 2a$,

$$左端=\frac{2(\tan a+\tan b)}{1-\tan a\tan b}=\frac{2(\tan a+\tan^3 a)}{1-\tan^4 a}$$

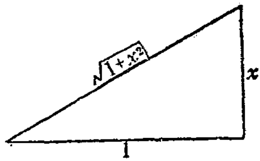
$$=\frac{2\tan a(1+\tan^2 a)}{1-\tan^4 a}=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=\tan 2a.$$

故得證明.

例七. 求證 $\sin\cot^{-1}\cos\tan^{-1}x$

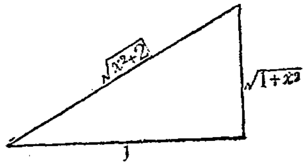
$$=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}.$$ (交大, 25 年度).

[解]:



$$\text{左端}=\sin\cot^{-1}\cos\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\sin\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$



$$=\sin\sin^{-1}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$$

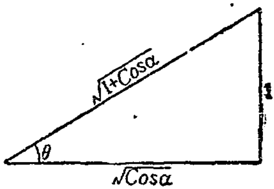
$$=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}.$$

例八. 若 $u=\operatorname{arc}\cot\sqrt{\cos\alpha}-\operatorname{arc}\tan\sqrt{\cos\alpha}$ 證明

$$\sin u=\tan^2\frac{\alpha}{2}\text{(浙大,24年度)}.$$

[解]: 令 $\operatorname{arc}\cot\sqrt{\cos\alpha}=\theta,\ \operatorname{arc}\tan\sqrt{\cos\alpha}=\phi,$

則 $\cot\theta=\tan\phi=\sqrt{\cos\alpha}.$



故得 $\sin\theta=\cos\phi=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos\alpha}}$

$$\cos\theta=\sin\phi=\sqrt{\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$\therefore\ \sin u=\sin(\theta-\phi)=\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi$

$$=\frac{1}{1+\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan^2\frac{\alpha}{2}.$$

5. 反三角方程式之解法. 應化爲其中未知數之代數方程式再解，茲舉例釋之如下：

例一. 試由 $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$，求 x.（齊魯大，33 年度）.

［解］：$\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x-\tan^{-1}x$,

$$\tan^{-1}\frac{2x}{2-x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1+3x^2},$$

$$\frac{2x}{2-x^2}=\frac{2x}{1+3x^2},$$

$$\therefore\quad x=0.$$

$$1+3x^2=2-x^2,\quad 4x^2=1,\quad x^2=\frac{1}{4},\quad x=\pm\frac{1}{2}.$$

例二. 解方程式 $\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$.

［解］：$\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}-\tan^{-1}\frac{2b}{1-b^2}=2\tan^{-1}x$,

$$2\tan^{-1}a-2\tan^{-1}b=2\tan^{-1}x,$$

$$\tan^{-1}a-\tan^{-1}b=\tan^{-1}x,$$

$$\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}=\tan^{-1}x,$$

$$\therefore\quad x=\frac{a-b}{1+ab}.$$

例三. 解方程式 $\cos^{-1}x-\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{3}x$.(安徽大,25年度).

[解]: 令 $\cos^{-1}x=\alpha$, $\sin^{-1}x=\beta$,

$$\therefore\quad \cos\alpha=x,\qquad \sin\beta=x.$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-x^2},\qquad \cos\beta=\sqrt{1-x^2}$$

原方程式即 $\alpha-\beta=\cos^{-1}\sqrt{3}x$,

$$\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{3}x,$$

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\sqrt{3}x,$$

$$x\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}x,$$

$$2x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}x,\qquad \therefore\quad x=0.$$

$$2\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3};\qquad 4(1-x^2)=3;$$

$$4x^2=1,\qquad \therefore\quad x=\pm\frac{1}{2}.$$

例四. 解方程式 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$.

[解]: 令 $\sin^{-1}x=\theta$, 则 $\sin\theta=x$.

原方程式即 $\sin^{-1}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}-\theta$,

$$\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right),$$

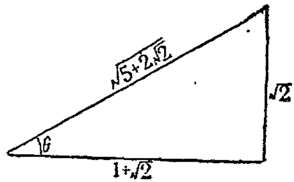
$$x=2\left[\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right],$$

$$x=\sqrt{2}(\cos\theta-\sin\theta)$$

即 $$\sin\theta=\sqrt{2}(\cos\theta-\sin\theta),$$

$$\tan\theta=\sqrt{2}(1-\tan\theta),$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$



$$\therefore\quad \sin\theta=\pm\sqrt{\frac{2}{5+2\sqrt{2}}}.$$

(θ 在第一象限或第三象限).

故 $$x=\pm\sqrt{\frac{2}{5+2\sqrt{2}}}.$$

例五. 求滿足次方程式 x 之值

$$\text{vers}^{-1}x-\text{vers}^{-1}\alpha x=\text{vers}^{-1}(1-\alpha).$$ (交大, 22 年度).

[解]: 設 $\text{vers}^{-1}x=\theta,\quad \text{vers}^{-1}\alpha x=\phi,$

則 $\text{vers}\theta=x,\quad \cos\theta=1-x,\quad \sin\theta=\sqrt{2x-x^2}.$

$\text{vers}\phi=\alpha x,\quad \cos\phi=1-\alpha x,\quad \sin\phi=\sqrt{2\alpha x-\alpha^2x^2}.$

原方程式即 $$\theta-\phi=\text{vers}^{-1}(1-\alpha),$$

$$\text{vers}(\theta-\phi)=1-\alpha,$$

$$\cos(\theta-\phi)=\alpha.$$

$$\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi=\alpha,$$

$$(1-x)(1-\alpha x)+\sqrt{2x-x^2}\sqrt{2\alpha x-\alpha^2x^2}=\alpha,$$

化簡得 $$x^2-2x+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}=0.$$

$$\therefore\quad x=1\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}.$$

例六. 如 $\sin\{2\cos^{-1}[\cot(2\tan^{-1}x)]\}=0$, 求 x.

[解]: 原方程式卽

$$\sin\left\{2\cos^{-1}\left[\cot\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)\right]\right\}=0,$$

$$\sin\left[2\cos^{-1}\cot\cot^{-1}\frac{1-x^2}{2x}\right]=0.$$

$$\sin\left(2\cos^{-1}\frac{1-x^2}{2x}\right)=0.$$

令 $$\cos^{-1}\frac{1-x^2}{2x}=\theta,\qquad \cos\theta=\frac{1-x^2}{2x},$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)^2}=\frac{\sqrt{4x^2-(1-x^2)^2}}{2x},$$

原方程式卽 $$\sin 2\theta=0,\quad 2\sin\theta\cos\theta=0.$$

$$\frac{\sqrt{4x^2-(1-x^2)^2}}{2x}\times\frac{1-x^2}{2x}=0,$$

$$\therefore\quad 1-x^2=0,\qquad x=\pm1.$$

$$4x^2-(1-x^2)^2=0,$$

$$(2x+1-x^2)(2x-1+x^2)=0,$$

解 $x^2-2x-1=0,\qquad x=1\pm\sqrt{2}.$

解 $x^2+2x-1=0,\qquad x=-1\pm\sqrt{2}.$

例七. 試解三角式 $\sin\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right)=\tan\left(\cos^{-1}\sqrt{x}\right)$. (武大, 22 年度).

[解]: 原方程式卽 $\sin\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\tan\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$,

$$\therefore\quad \frac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{1-x}{x}},\tag{1}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{1-x}{x},$$

解得
$$x=\frac{5}{9}.$$

代入(1)適合, 故爲原方程式之根.

例八. 求方程式 $\tan^{-1}x+\cot^{-1}y=\tan^{-1}3$ 之正整數解.

[解]:
$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{y}=\tan^{-1}3,$$

$$\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{y}}{1-\frac{x}{y}}=\tan^{-1}3,$$

$$\frac{xy+1}{y-x}=3,\qquad xy+1=3(y-x),$$

$$x=\frac{3y-1}{y+3}=3-\frac{10}{y+3}.$$

欲 x 爲整數，必

$$y+3=1,\quad y+3=2,\quad y+3=5,\quad y+3=10.$$

卽 $$y=-2,\quad y=-1,\quad y=2,\quad y=7.$$

但 x, y 限爲正整數，故得

$$\begin{cases}x=1,\\ y=2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=2,\\ y=7.\end{cases}$$

二. 三角方程式. 其解法普通情形有三步驟.

1. 化各函數爲單角之同函數.（有時應先後按三角公式化爲適當形狀再解）.

2. 視該函數爲未知數，解得特解.

3. 由反三角函數之理求得通解.

例一. 解 $2\cos 2\theta+2(\sqrt{3}+1)\sin\theta+\sqrt{3}-2=0$.（浙大，25 年度）.

[解]: $$2(1-2\sin^2\theta)+2(\sqrt{3}+1)\sin\theta+\sqrt{3}-2=0,$$

$$4\sin^2\theta-2(\sqrt{3}+1)\sin\theta+\sqrt{3}=0,$$

$$(2\sin\theta-\sqrt{3})(2\sin\theta-1)=0,$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \theta=\frac{\pi}{3}.\qquad \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}.$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2},\qquad \theta=\frac{\pi}{6}.\qquad \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

例二. 解方程式 $\cot x\tan 2x=\sec 2x$.（北洋工，25 年度）.

[解]: $$\frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{1}{\cos 2x},$$

兩端同乘以 $\sin x\cos 2x$ 得

$$\cos x\sin 2x=\sin x,$$

$$2\cos^2 x\sin x=\sin x,$$

$$\because\quad \sin x\neq 0,\qquad \therefore\quad 2\cos^2 x=1.$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2},\qquad \cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad x=\frac{\pi}{4},\qquad x=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad x=\frac{3\pi}{4},\qquad x=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}.$$

例三. 解方程式 $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\csc x)$,

[解] 令 $\tan^{-1}(\cos x)=\alpha,\quad \tan^{-1}(2\csc x)=\beta,$

原方程式即 $$2\alpha=\beta,$$

$$\tan 2\alpha=\tan\beta,$$

即 $$\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{2}{\sin x},$$

$$\frac{2\cos x}{\sin^2 x}=\frac{2}{\sin x},$$

$$\sin^2 x-\sin x\cos x=0,$$

$$\sin x=0. \qquad x=n\pi.$$

$$\sin x=\cos x, \qquad \tan x=1, \qquad x=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

例四. 解方程式 $\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta=0$.

[解]: $(\cos 5\theta+\cos 3\theta)+(\cos 7\theta+\cos\theta)=0,$

$$2\cos 4\theta\cos\theta+2\cos 4\theta\cos 3\theta=0,$$

$$2\cos 4\theta(\cos 3\theta+\cos\theta)=0,$$

$$2\cos 4\theta\times 2\cos 2\theta\cos\theta=0,$$

$$\cos\theta=0, \qquad \theta=\frac{\pi}{2}, \qquad \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2},$$

$$\cos 2\theta=0, \qquad 2\theta=\frac{\pi}{2}, \qquad 2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2},$$

即 $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

$$\cos 4\theta=0, \qquad 4\theta=\frac{\pi}{2}, \qquad 4\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2},$$

即 $\theta=\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8}$.

例五. 解方程式 $\sin 11\theta\sin 4\theta+\sin 5\theta\sin 2\theta=0$.

[解]: $-\frac{1}{2}(\cos 15\theta-\cos 7\theta+\cos 7\theta-\cos 3\theta)=0,$

$$\cos 15\theta-\cos 3\theta=0,$$

$$-2\sin 9\theta\sin 6\theta=0,$$

$$\text{ssn}\,9\theta=0,\quad 9\theta=0,\quad 9\theta=n\pi,\qquad \text{即}\quad \theta=\frac{n\pi}{9}.$$

$$\sin 6\theta=0,\quad 6\theta=0,\quad 6\theta=n\pi,\qquad \text{即}\quad \theta=\frac{n\pi}{6}.$$

例六. 解方程式 $\tan\theta+\tan 3\theta=2\tan 2\theta$.

[解]:

$$\tan 3\theta-\tan 2\theta=\tan 2\theta-\tan\theta,$$

$$\frac{\sin(3\theta-2\theta)}{\cos 3\theta\cos 2\theta}=\frac{\sin(2\theta-\theta)}{\cos 2\theta\cos\theta},$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos 3\theta\cos 2\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta\cos\theta},$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos 3\theta\cos 2\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta\cos\theta}=0,$$

$$\frac{\sin\theta(\cos\theta-\cos 3\theta)}{\cos 3\theta\cos 2\theta\cos\theta}=0,$$

$$\frac{\sin\theta\times 2\sin 2\theta\sin\theta}{\cos 3\theta\cos 2\theta\cos\theta}=0,$$

$$\frac{4\sin^3\theta\cos\theta}{\cos 3\theta\cos 2\theta\cos\theta}=0,$$

$$\frac{4\sin^3\theta}{\cos 3\theta\cos 2\theta}=0,$$

$$\therefore\quad \sin\theta=0,\qquad \theta=0,\qquad \theta=n\pi.$$

例七. 解下方程式, 求 θ 之一般值.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ 0 & \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ 0 & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(交大，25 年度).

〔解〕：第一直行 $\times(-\cos\theta)+$ 第二直行得

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin^2\theta & \cos\alpha & \cos\beta \\ 0 & \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ 0 & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \sin^2\theta & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\sin^2\theta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin^2\theta\cos^2\gamma - \cos^2\beta - \cos^2\alpha = 0,$$

$$(1-\cos^2\gamma)\sin^2\theta = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

$$\therefore\quad \sin^2\theta = \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$$

$$\therefore\quad \theta = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}}.$$

例八．　若　$\tan(\pi\cot\theta)=\cot(\pi\tan\theta)$ 則

$$\tan\theta=\frac{1}{4}\left[2n+1\pm\sqrt{4n^2+4n-15}\right]$$

試證之．但 n 爲大於 1 及小於 -2 之整數．(武大，21 年度)．

［解］：

$$\tan(\pi\cot\theta)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\pi\tan\theta\right),$$

$$\pi\cot\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}-\pi\tan\theta,$$

$$\pi\cot\theta+\pi\tan\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2},$$

$$2\tan^2\theta-(2n+1)\tan\theta+2=0.$$

$$\tan\theta=\frac{1}{4}\left[2n+1\pm\sqrt{(2n+1)^2-16}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[2n+1\pm\sqrt{4n^2+4n-15}\right]$$

必　$4n^2+4n-15\geq 0$ 方有解，

解得　$n\geq\frac{3}{2}$，　$n\leq-\frac{5}{2}$

因 n 須爲整數，　$\therefore$　$n>1$，　$n<-2$．

例九．解方程式 $16^{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}+4^{2\cos^2\theta}=40$．(交大，24 年度)．

［解］：

$$16^{2-\cos^2\theta}+16^{\cos^2\theta}=40,$$

令　　$16^{\cos^2\theta}=u,\quad \dfrac{256}{u}+u=40,$

$$u^2-40u+256=0,\quad (u-32)(u-8)=0,$$

$$u=32,\quad 16^{\cos^2\theta}=32,\quad 2^{4\cos^2\theta}=2^5,\quad 4\cos^2\theta=5.$$

$$\cos^2\theta=\frac{5}{4}\ \text{不可能}.$$

$$u=8,\quad 16^{\cos^2\theta}=8,\quad 2^{4\cos^2\theta}=2^3,\quad 4\cos^2\theta=3.$$

$$\cos^2\theta=\frac{3}{4}\qquad \cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \theta=\frac{\pi}{6},\qquad \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \theta=\frac{5\pi}{6},\quad \theta=2n\pi\pm\frac{5\pi}{6}.$$

例十. 解方程式 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ (山東大, 25 年度).

[解]: 原方程式卽　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1,$

$$\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}=1,$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 0^\circ,$$

$$\therefore\ x-\frac{\pi}{4}=2n\pi,\quad \text{而}\quad x=2n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

三. 聯立三角方程式. 其解法無通則可言，玆舉例釋之如下:

例一. 解方程組 $\begin{cases} x+y=\alpha & (1) \\ \cos x+\cos y=a & (2) \end{cases}$

[解]:

由(2) $$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a,$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{x-y}{2}=2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\therefore\quad x-y=4n\pi\pm2\cos^{-1}\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}. \qquad (3)$$

$\frac{(1)+(3)}{2}$ $$x=\frac{\alpha}{2}+2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$\frac{(1)-(3)}{2}$ $$y=\frac{\alpha}{2}-2n\pi\mp\cos^{-1}\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

必 $\left|\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right|\leq1$ 方有解,

例二. 解方程組 $\begin{cases} x+y=\alpha & (1) \\ \cot x\cot y=a & (2) \end{cases}$

[解]:

由(2), $$\frac{\cos x\cos y}{\sin x\sin y}=a,$$

$$\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{\cos(x-y)-\cos(x+y)}=a,$$

$$\frac{\cos(x-y)+\cos\alpha}{\cos(x-y)-\cos\alpha}=a,$$

$$\frac{2\cos(x-y)}{2\cos\alpha}=\frac{a+1}{a-1}$$

$$\cos(x-y)=\frac{a+1}{a-1}\cos\alpha,$$

$$\therefore\quad x-y=2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{a+1}{a-1}\cos\alpha. \qquad (3)$$

$\frac{(1)+(3)}{2}$ $$x=\frac{\alpha}{2}+n\pi\pm\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a+1}{a-1}\cos\alpha,$$

$\frac{(1)-(3)}{2}$ $$y=\frac{\alpha}{2}-n\pi\mp\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a+1}{a-1}\cos\alpha.$$

必 $\left|\frac{a+1}{a-1}\cos\alpha\right|\leq 1$ 方有解.

例三. 試解 $\begin{cases} \sin x+\sin y=a & (1) \\ \cos x+\cos y=b & (2) \end{cases}$ (武大,25 年度).

[解]:

(1)²+(2)², $2+2\cos(x-y)=a^2+b^2$,

$$\cos(x-y)=\frac{a^2+b^2-2}{2}. \qquad (3)$$

$$\therefore \quad x-y=2m\pi\pm\cos^{-1}\frac{a^2+b^2-2}{2}. \qquad (4)$$

(2)²−(1)², $\cos 2x+\cos 2y+2\cos(x+y)=b^2-a^2$,

$$2\cos(x+y)\cos(x-y)+2\cos(x+y)=b^2-a^2,$$

(3)代入, $\cos(x+y)(a^2+b^2-2)+2\cos(x+y)=b^2-a^2$,

$$(a^2+b^2)\cos(x+y)=b^2-a^2,$$

$$\therefore \quad x+y=2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}. \qquad (5)$$

$\frac{(4)+(5)}{2}$ $x=(m+n)\pi\pm\frac{1}{2}\left[\cos^{-1}\frac{a^2+b^2-2}{2}+\cos^{-1}\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right]$.

$\frac{(4)-(5)}{2}$ $y=(m-n)\pi\pm\frac{1}{2}\left[\cos^{-1}\frac{a^2+b^2-2}{2}-\cos^{-1}\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right]$.

必 $\left|\frac{a^2+b^2-2}{2}\right|\leq 1$, 及 $\left|\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right|\leq 1$,

方有解.

[又解]: (1)²+(2)²,

$$2+2\cos(x-y)=a^2+b^2,$$

$$2+2\left[2\cos^2\frac{x-y}{2}-1\right]=a^2+b^2,$$

$$4\cos^2\frac{x-y}{2}=a^2+b^2,$$

$$\therefore\quad \frac{x-y}{2}=2m\pi\pm\cos^{-1}\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}. \tag{3}$$

又因
$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a. \tag{4}$$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b. \tag{5}$$

$\frac{(4)}{(5)}$,
$$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}.$$

$$\therefore\quad \frac{x+y}{2}=n\pi+\tan^{-1}\frac{a}{b}. \tag{6}$$

$(3)+(6)$,
$$x=(2m+n)\pi+\tan^{-1}\frac{a}{b}\pm\cos^{-1}\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

$(6)-(3)$,
$$y=(n-2m)\pi+\tan^{-1}\frac{a}{b}\mp\cos^{-1}\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

必 $\left|\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right|\leq 1$ 方有解.

二者形異而實同.

例四. 解方程組(r, x, y 爲未知數).

$$r\cos x\sin y=a, \tag{1}$$

$$r\cos x\cos y=b, \qquad (2)$$

$$r\sin x=c. \qquad (3)$$

[解]: $\dfrac{(1)}{(2)}$, $\qquad \tan y=\dfrac{a}{b}.$

$$\therefore\ \underline{y}=m\pi+\tan^{-1}\frac{a}{b}.$$

$(1)^2+(2)^2$, $\qquad r^2\cos^2 x=a^2+b^2,$

$$r\cos x=\pm\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (4)$$

$\dfrac{(3)}{(4)}$ $\qquad \tan x=\dfrac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},$

$$\underline{x}=n\pi+\tan^{-1}\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$(3)^2+(4)^2$, $\qquad r^2=a^2+b^2+c^2,$

$$\underline{r}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

例五. 解方程組 $\begin{cases}\cos x+\cos y=a & (1)\\ \cos 2x+\cos 2y=b & (2)\end{cases}$

[解]: 由(2), $\qquad 2\cos^2 x+2\cos^2 y=b+2. \qquad (3)$

$(1)^2$, $\qquad \cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y=a^2. \qquad (4)$

$(3)-(4)$, $\qquad \cos^2 x-2\cos x\cos y+\cos^2 y=b-a^2+2.$

$$(\cos x-\cos y)^2=b-a^2+2$$

$$\therefore \quad \cos x-\cos y=\pm\sqrt{b-a^2+2}. \tag{5}$$

解 (1), (5)得 $\cos x=\dfrac{a\pm\sqrt{b-a^2+2}}{2}$,

$$\cos y=\frac{a\mp\sqrt{b-a^2+2}}{2}.$$

$$\therefore \quad x=2m\pi\pm\cos^{-1}\frac{a\pm\sqrt{b-a^2+2}}{2},$$

$$y=2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{a\mp\sqrt{b-a^2+2}}{2}.$$

必 $\left|\dfrac{a\pm\sqrt{b-a^2+2}}{2}\right|\leq 1$ 方有解.

例六. 解 r 與 x, $\begin{cases} r\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\sqrt{3}, & (1)\\ r\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)=1. & (2)\end{cases}$

[解]: $\dfrac{(1)}{(2)}$ $\quad \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)}=\sqrt{3}$,

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x=\sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right),$$

$$\sin x=0, \qquad \therefore \quad x=n\pi.$$

代入(1)，
$$r\sin\left(\frac{\pi}{3}+n\pi\right)=\sqrt{3},$$

當 $n=2k$，
$$r=\frac{\sqrt{3}}{\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2.$$

當 $n=2k+1$，
$$r=\frac{\sqrt{3}}{\sin\left[(2k+1)\pi+\frac{\pi}{3}\right]}=\sqrt{3}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-2.$$

例七：解方程組
$$\begin{cases} a\sin^4\theta-b\sin^4\phi=a, & (1)\\ a\cos^4\theta-b\cos^4\phi=b. & (2)\end{cases}$$

[解]：(1)−(2)，
$$a(\sin^4\theta-\cos^4\theta)-b(\sin^4\phi-\cos^4\phi)=a-b,$$
$$a(\sin^2\theta-\cos^2\theta)-b(\sin^2\phi-\cos^2\phi)=a-b,$$
$$a(1-2\cos^2\theta)-b(1-2\cos^2\phi)=a-b,$$
$$-2a\cos^2\theta+2b\cos^2\phi=0,$$
$$\cos^2\phi=\frac{a}{b}\cos^2\theta,$$

代入(2)，
$$a\cos^4\theta-b\left(\frac{a}{b}\cos^2\theta\right)^2=b,$$
$$a\cos^4\theta-\frac{a^2}{b}\cos^4\theta=b,$$

$$\cos^4\theta\left(a-\frac{a^2}{b}\right)=b,$$

$$\cos^4\theta=\frac{b^2}{a(b-a)}. \qquad (3)$$

$$\therefore \quad \theta=2m\theta\pm\cos^{-1}\left[\pm\sqrt[4]{\frac{b^2}{a(b-a)}}\right].$$

(3)代入(2) $$\frac{b^2}{b-a}-b\cos^4\phi=b,$$

$$\cos^4\phi=\frac{a}{b-a},$$

$$\therefore \quad \phi=2n\pi\pm\cos^{-1}\left[\pm\sqrt[4]{\frac{a}{b-a}}\right].$$

必 $\left|\pm\sqrt[4]{\dfrac{b^2}{a(b-a)}}\right|\leq 1$

及 $\left|\pm\sqrt[4]{\dfrac{a}{b-a}}\right|\leq 1$ 方有解.

例八. 解方程組

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{1-xy}=1,\\[2ex] \dfrac{(1-x^2)(1-y^2)+4xy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

[解]. 令 $x=\tan\theta, \qquad y=\tan\phi,$

$$\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}=1,$$

即 $\tan(\theta+\phi)=1$,

$$\therefore\quad \theta+\phi=m\pi+\frac{\pi}{4}. \qquad (1)$$

$$\frac{\dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}\times\dfrac{1-\tan^2\phi}{2\tan\phi}+1}{\dfrac{1+\tan^2\theta}{2\tan\theta}\times\dfrac{1+\tan^2\phi}{2\tan\phi}}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\cot 2\theta\cot 2\phi+1}{\csc 2\theta\csc 2\phi}=\frac{1}{2},$$

即 $$\cos 2\theta\cos 2\phi+\sin 2\theta\sin 2\phi=\frac{1}{2},$$

$$\cos 2(\theta-\phi)=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad 2(\theta-\phi)=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad \theta-\phi=n\pi\pm\frac{\pi}{6}. \qquad (2)$$

$\dfrac{(1)+(2)}{2}$ $$\theta=\frac{(m+n)\pi}{2}+\frac{5\pi}{24},$$

或 $$\theta=\frac{(m+n)\pi}{2}+\frac{\pi}{24}.$$

$\dfrac{(1)-(2)}{2}$ $$\phi=\frac{(m-n)\pi}{2}+\frac{\pi}{24},$$

或 $$\phi=\frac{(m-n)\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}.$$

故得
$$\begin{cases} x=\tan\left[\dfrac{(m+n)\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{24}\right], \\ y=\tan\left[\dfrac{(m-n)\pi}{2}+\dfrac{\pi}{24}\right]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\tan\left[\dfrac{(m+n)\pi}{2}+\dfrac{\pi}{24}\right], \\ y=\tan\left[\dfrac{(m-n)\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{24}\right]. \end{cases}$$

四. 消去法 乃求一組方程式中未知角有公解之條件,所得之關係式,稱爲結式,無法則以求之,玆舉例释之如下:

例一. 消去θ
$$\begin{cases} a\sec\theta - x\tan\theta = y, \\ b\sec\theta + y\tan\theta = x. \end{cases}$$

[解]:
$$\sec\theta=\frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ x & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -x \\ b & y \end{vmatrix}}=\frac{x^2+y^2}{ay+bx},$$

$$\tan\theta=\frac{\begin{vmatrix} a & y \\ b & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -x \\ b & y \end{vmatrix}}=\frac{ax-by}{ay+bx}.$$

$$\because \quad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta,$$

$$\therefore \quad 1+\left(\frac{ax-by}{ay+bx}\right)^2=\left(\frac{x^2+y^2}{ay+bx}\right)^2,$$

$$(ay+bx)^2+(ax-by)^2=(x^2+y^2)^2,$$

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(x^2+y^2)^2,$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=a^2+b^2.$$

例二. 試由 $x\cos\theta+y\sin\theta=a\sin\theta$, (1)

$$y\cos\theta=x\sin\theta+a(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \qquad (2)$$

將 θ 消去之. (武大, 21 年度).

[解]: 由(1) $\dfrac{\sin\theta}{x}=\dfrac{\cos\theta}{a-y}$,

$$\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\sqrt{\sin^2\theta+\text{sos}^2\theta}}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}},$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}.$$

$$\cos\theta=\frac{a-y}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}.$$

代入(2)化簡得,

$$[y(a-y)-x^2]^2[x^2+(a-y)^2]=a^2[(a-y)^2-x^2]^2.$$

例三. 消去 θ, $\begin{cases}x=\tan^2\theta(a\tan\theta-x),\\ y=\sec^2\theta(y-a\sec\theta).\end{cases}$

[解]: $x=a\tan^3\theta-x\tan^2\theta$,

$$y=y\sec^2\theta-a\sec^3\theta,$$

$$x=\frac{a\tan^3\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{a\tan^3\theta}{\sec^2\theta},$$

$$y=\frac{a\sec^3\theta}{\sec^2\theta-1}=\frac{a\sec^3\theta}{\tan^2\theta}.$$

$$\therefore\quad x^2y^3=\frac{a^2\tan^6\theta}{\sec^4\theta}\times\frac{a^3\sec^9\theta}{\tan^6\theta}=a^5\sec^5\theta,$$

$$x^3y^2=\frac{a^3\tan^9\theta}{\sec^6\theta}\times\frac{a^2\sec^6\theta}{\tan^4\theta}=a^5\tan^5\theta,$$

$$\therefore\quad (x^2y^3)^{\frac{2}{5}}-(x^3y^2)^{\frac{2}{5}}=a^2,$$

即
$$x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{6}{5}}-x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{4}{5}}=a^2.$$

例四. 消去 θ,
$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\cos\theta+\cos2\theta, & (1)\\[2ex] \dfrac{y}{b}=\sin\theta+\sin2\theta. & (2)\end{cases}$$

[解]:
$$\frac{x}{a}=2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},\qquad(3)$$

$$\frac{y}{b}=2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.\qquad(4)$$

$(3)^2+(4)^2$,
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4\cos^2\frac{\theta}{2}.\qquad(5)$$

由(3),
$$\frac{x}{a}=2\cos\frac{\theta}{2}\left(4\cos^3\frac{\theta}{2}-3\cos\frac{\theta}{2}\right),$$

$$=2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}-3\right).$$

(5)代入， $$\frac{2x}{a}=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-3\right).$$

例五. 消去 θ， $$a\cos\theta+b\sin\theta=c, \qquad (1)$$

$$a\cos^2\theta+2a\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta=c. \qquad (2) \quad (a\neq b\neq c)$$

[解]: $(1)^2$， $$a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta+b^2\sin^2\theta=c^2,$$

$$a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta+b^2\sin^2\theta=c^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta),$$

$$\therefore\quad (a^2-c^2)\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta+(b^2-c^2)\sin^2\theta=0. \qquad (3)$$

由(2)， $$a\cos^2\theta+2a\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta=c(\sin^2\theta+\cos^2\theta),$$

$$\therefore\quad (a-c)\cos^2\theta+2a\cos\theta\sin+(b-c)\sin^2\theta=0. \qquad (4)$$

用十字乘法得

$$\begin{array}{cccccc} a^2-c^2 & 2ab & b^2-c^2 & a^2-c^2 & 2ab & b^2-c^2 \\ a-c & 2a & b-c & a-c & 2a & b-c \end{array}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{2ab(b-c)-2a(b^2-c^2)}=\frac{\cos\theta\sin\theta}{(b^2-c^2)(a-c)-(a^2-c^2)(b-c)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{2a(a^2-c^2)-2ab(a-c)},$$

$$\frac{\cos^2\theta}{-2ac(b-c)}=\frac{\cos\theta\sin\theta}{(b-c)(a-c)(b-a)}=\frac{\sin^2\theta}{2a(a-c)(a+c-b)}.$$

$$\therefore\quad \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{-4a^2c(b-c)(a-c)(a+c-b)}=\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(b-c)^2(a-c)^2(b-a)^2},$$

即 $$4a^2c(a+c-b)+(b-c)(a-c)(a-b)^2=0.$$

例六. 如 $\cos(\theta-\alpha)=a$, $\sin(\theta-\beta)=b$ 試證

$$a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta).$$

[解]: $$\because\quad \cos^{-1}a=\theta-\alpha,\quad \sin^{-1}b=\theta-\beta,$$

$$\therefore\quad \sin^{-1}b-\cos^{-1}a=\alpha-\beta.$$

而 $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\sin^{-1}b\cos\cos^{-1}a+\sin\sin^{-1}b\sin\cos^{-1}a$$

$$=a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2},$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\sin^{-1}b\cos\cos^{-1}a-\cos\sin^{-1}b\sin\cos^{-1}a$$

$$=ab-\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}.$$

$$\therefore\quad \cos^2(\alpha-\beta)=a^2+b^2-2ab\left[ab-\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}\right]$$

$$\therefore\quad a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta).$$

例七. 消去 θ,ϕ

$$\begin{cases} a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m, & (1)\\ b\sin^2\phi+a\cos^2\phi=n, & (2)\\ a\tan\theta=b\tan\phi. & (3)\end{cases}$$

[解]:

由(1), $$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m(\sin^2\theta+\cos^2\theta),$$

$$\therefore\quad (a-m)\sin^2\theta=(m-b)\cos^2\theta,$$

$$\therefore\quad \tan^2\theta=\frac{m-b}{a-m}.$$

由(2)， $b\sin^2\phi+a\cos^2\phi=n(\sin^2\phi+\cos^2\phi)$.

$$\therefore\quad (b-n)\sin^2\phi=(n-a)\cos^2\phi.$$

$$\therefore\quad \tan^2\phi=\frac{n-a}{b-n}.$$

由(3)， $a^2\tan^2\theta=b^2\tan^2\phi$,

$$\therefore\quad \frac{a^2(m-b)}{a-m}=\frac{b^2(n-a)}{b-n},$$

$$a^2(bm-b^2-mn+bn)=b^2(an-a^2-mn+am),$$

$$mab(a-b)+nab(a-b)=mn(a^2-b^2),$$

$$mab+nab=mn(a+b),$$

$$\therefore\quad \frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

例八. 消去 θ,ϕ.

$$\begin{cases} x\cos\theta+y\sin\theta=x\cos\phi+y\sin\phi=2a, \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}=1. \end{cases}$$

[解]:

$$由\quad \begin{cases} x\cos\theta+y\sin\theta=2a, \\ x\cos\phi+y\sin\phi=2a, \end{cases}$$

知 θ 及 ϕ 爲二次方程式 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=2a$ 之兩根.

$$\because\quad (x\cos\alpha-2a)^2=y^2\sin^2\alpha=y^2(1-\cos^2\alpha),$$

$$\therefore \quad (x^2+y^2)\cos^2\alpha-4ax\cos\alpha+4a^2-y^2=0,$$

此爲含 $\cos\alpha$ 之二次方程式，其兩根爲 $\cos\theta$，$\cos\phi$。

$$\therefore \quad \cos\theta+\cos\phi=\frac{4ax}{x^2+y^2},$$

$$\cos\theta\cos\phi=\frac{4a^2-y^2}{x^2+y^2},$$

但 $$1=4\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\phi}{2}=(1-\cos\theta)(1-\cos\phi),$$

即 $$\cos\theta+\cos\phi=\cos\theta\cos\phi,$$

$$\therefore \quad \frac{4ax}{x^2+y^2}=\frac{4a^2-y^2}{x^2+y^2},$$

$$\therefore \quad y^2=4a(a-x).$$

例九．消去 θ，ϕ．

$$\begin{cases} x\cos\theta+y\sin\theta=2a\sqrt{3}, & (1)\\ x\cos(\theta+\phi)+y\sin(\theta+\phi)=4a, & (2)\\ x\cos(\theta-\phi)+y\sin(\theta-\phi)=2a. & (3)\end{cases}$$

[解]:

(2)+(3)， $$x[\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)]$$

$$+y[\sin(\theta+\phi)+\sin(\theta-\phi)]=6a,$$

$$x\cos\theta\cos\phi+y\sin\theta\,\mathrm{sos}\phi=3a,$$

$$(x\cos\theta+y\sin\theta)\cos\phi=3a,$$

(1)代入 $\cos\phi=\dfrac{3a}{2a\sqrt{3}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\sin\phi=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}.$$

(2)−(3), $x[\cos(\theta+\phi)-\cos(\theta-\phi)]$

$$+y[\sin(\theta+\phi)-\sin(\theta-\phi)]=2a,$$

$$-x\sin\theta\sin\phi+y\cos\theta\sin\phi=a,$$

$$x\sin\theta-y\cos\theta=-\frac{a}{\sin\phi}=-\frac{a}{\frac{1}{2}}=-2a, \quad (4)$$

$(1)^2+(4)^2$, $x^2+y^2=16a^2$.

例十. 如 $\tan\theta+\tan\phi=a$, (1) $\cot\theta+\cot\phi=b$, (2)

$\theta-\phi=\alpha$. (3) 試證

$$ab(ab-4)=(a+b)^2\tan^2\alpha.$$

[解]: 由(3), $\tan(\theta-\phi)=\tan\alpha$,

$$\tan^2\alpha=\left(\frac{\tan\theta-\tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}\right)^2, \quad (4)$$

由(2) $\cot\theta+\cot\phi=\dfrac{\tan\theta+\tan\phi}{\tan\theta\tan\phi}=b$.

(1)代入, $\dfrac{a}{\tan\theta\tan\phi}=b$.

$$\therefore \quad \tan\theta\tan\phi=\frac{a}{b}. \quad (5)$$

$(1)^2-4(5)$,

$$(\tan\theta-\tan\phi)^2=a^2-\frac{4a}{b}=\frac{a^2b-4a}{b}. \qquad (6)$$

(5), (6)代入(4),

$$\tan^2\alpha=\frac{\dfrac{a^2b-4a}{b}}{\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^2}=\frac{ab(ab-4)}{(a+b)^2}.$$

$$\therefore\quad ab(ab-4)=(a+b)^2\tan^2\alpha.$$

習　題　五

1. 試證 $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=\frac{\pi}{4}$.

2. 若 α,β 爲任意角，試示

$$\tan^{-1}\alpha+\tan^{-1}\beta+\tan^{-1}\frac{1-\alpha-\beta-\alpha\beta}{1+\alpha+\beta-\alpha\beta}=\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi.$$

(交大，26年度).

3. 試證 $\cos^{-1}\frac{20}{29}-\tan^{-1}\frac{16}{63}=\cos^{-1}\frac{1596}{1885}$.

4. 問 $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos\frac{12}{13}$ 能等於 $\sin^{-1}\frac{16}{65}$ 否？試答並證.

(交大，34年度).

答：　相等

5. 試證 $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}+\sin^{-1}\frac{36}{85}=\frac{\pi}{2}$.

6. 設方程式 $x^4-x^3\sin 2\beta+x^2\cos 2\beta-x\cos\beta-\sin\beta=0$ 之根爲 x_1, x_2, x_3, x_4 求證

$$\tan^{-1}x_1+\tan^{-1}x_2+\tan^{-1}x_3+\tan^{-1}x_4=n\pi+\frac{\pi}{2}-\beta.$$

7. 解方程式 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}(1-x)=2\tan^{-1}\sqrt{x-x^2}$. (交大,34 年度).

答: $\frac{1}{2}$.

8. 試解 $\sin^{-1}x+\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}$(重慶區白沙分處聯考,24 年度).

答: $\pm\sqrt{-1\pm\sqrt{5}}$.

9. 解方程式 $\sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\sin^{-1}x(3x-2)$. (東北大,30 年度).

答: 1.

10. 解方程式 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\frac{\pi}{3}$.

答: $\pm\frac{\sqrt{21}}{14}$.

11. 設 x, y 爲正整數, 能有 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\frac{3\pi}{4}$, 試求 x, y 之値. (國立女子師範,33 年度).

答: $\begin{cases} x=2, \\ y=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

12. 當 $\sin A+\sin B+\sin C=0$, $\cos A+\cos B+\cos C=0$ 時，試證 $3(B-C)$, $3(C-A)$, $3(A-B)$ 各爲 $360°$ 之整數倍，並求 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$ 之值(武大，25年度)?

答: 3.

13. 求解 $(1+\cos\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=(1+\cos\theta+\sin\theta)\sin\theta$. (西南聯大，32年度).

答: $2n\pi\pm\pi$, $n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\frac{-1\pm\sqrt{7}}{4}$.

14. 解方程式 $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$. (中大，32年度).

答: $\frac{2n\pi}{5}$, $2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$, $2n\pi\pm\pi$.

15. 解方程式 $3\tan(x-15°)=\tan(x+15°)$. (交大，31年度).

答: $\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}$.

16. 先將 $\tan 3\theta$ 表成 $\tan\theta$ 之函數，次解方程式

$$\tan 3\theta+\tan 2\theta+\tan\theta=0. \text{(中大，31年度)}.$$

答: $n\pi$, $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $n\pi+\tan^{-1}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

17. 設 $x+y+z=0$,

$$x\cos 2\theta+y\cos 4\theta+z\cos 6\theta=0,$$

$$x\sin\theta+y\sin2\theta+z\sin3\theta=0.$$

異於零之共同解時，試求 θ 之值(交大，32 年度).

答: $n\pi$, $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$, $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$.

18. 已與齊次方程組

$$x-y\cos C-y\cos B=0,$$

$$-x\cos C+y-z\cos A=0,$$

$$-x\cos B-y\cos A+z=0.$$

式中 A, B, C 爲三參數(Parameter).

(1) 求此方程組除 $x=y=z=0$ 之一組解答外，有其他解時，A, B, C 間之關係.

(2) 求證 $A+B+C=\pi$ 時，x, y, z 恰爲一三角形之三邊.(復旦大，36 年度).

答: $\pi-A=2n\pi\pm(B+C)$, $\pi-A=2n\pi\pm(B-C)$.

19. 解下列方程式

$$\sin x+\sin y=2m\sin\alpha,$$

$$\cos x+\cos y=2n\cos\alpha.$$ (交大，25 年度).

答: $x=(k'+2k)\pi+\tan^{-1}\frac{m}{n}\tan\alpha\pm\cos^{-1}[\pm\sqrt{m^2\sin^2\alpha+n^2\cos^2\alpha}]$,

$y=(k'-2k)\pi+\tan^{-1}\frac{m}{n}\tan\alpha\mp\cos^{-1}[\pm\sqrt{m^2\sin^2\alpha+n^2\cos^2\alpha}]$.

20. 解 $\sin x+\cos y=a$, $\cos x+\sin y=b$ (唐山，25 年度).

答:

$$x=\frac{1}{2}\left[(m+n)\pi+(-1)^m\sin^{-1}\frac{a^2+b^2-2}{2}+(-1)^n\sin^{-1}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right],$$

$$y=\frac{1}{2}\left[(m-n)\pi+(-1)^m\sin^{-1}\frac{a^2+b^2-2}{2}-(-1)^n\sin^{-1}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right].$$

21. 消去下列二式中之θ.

$$x=\sin\theta+\cos\theta,$$

$$y=\tan\theta+\cot\theta. \text{(同濟大, 32 年度)}.$$

答: $y(x^2-1)=2.$

22. 設 $\tan A+\sin A=m$, $\tan A-\sin A=n$.

試證 $(m^2-n^2)^2=16mn$. (北平大, 25 年度).

23. 由 $\sin\theta+\cos\theta=a$ 及 $\sin 2\theta+\cos 2\theta=b$ 消去θ以求a, b之結式(金陵大, 34 年度).

答: $(a-1)^2+(b-a+1)^2=1.$

24. 消去θ, $x=\cot\theta+\tan\theta$,

$$y=\csc\theta-\sin\theta.$$

答: $x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}=1.$

25. 試由下列二式消去θ.

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2, \quad \frac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{by\cos\theta}{\sin^2\theta}=0.$$

(交大, 34 年度).

答: $\left(\frac{ax}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{by}{b^2-a^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$

26. 試由下列二式消去 θ.

$$\frac{x}{a}\cos\theta-\frac{y}{b}\sin\theta=\cos 2\theta,$$

$$\frac{x}{a}\sin\theta+\frac{y}{b}\cos\theta=2\sin 2\theta.$$ (交大，34年度).

答: $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=2.$

27. 若　$x=a\cos\theta+b\cos 2\theta$, 及 $y=a\sin\theta+b\sin 2\theta$.

試證　$a^2[(x+b)^2+y^2]=(x^2+y^2-b^2)^2$. (交大，33年度).

28. 試由下式消去 θ 及 ϕ.

$a\cos\theta+b\sin\theta=c,\qquad a\cos\phi+b\sin\phi=c,$

$\tan\theta\tan\phi=m$.　(重慶區白沙分處聯考，34年度

答: $m(b^2-c^2)=a^2-c^2$.

29. 消去 x, y.　$\cos x+\cos y=a,$

$\cos 2x+\cos 2y=b,$

$\cos 3x+\cos 3y=c.$

答: $2a^3+c=3a(1+b)$.

30. 消去 α,β,γ.

$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0,$

$a\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma=0,$

$a\sec\alpha+b\sec\beta+c\sec\gamma=0.$

答: $c^2-a^2-b^2=\pm 2ab$.