

新中學文庫

材料強度學

上 冊

陸志鴻著

商務印書館發行

工學小叢書

材 料 強 度 學

上 冊

陸 志 鴻 著

商 務 印 書 館 發 行

序

材料強度學爲工學基礎。吾邦尙乏此必須有之書籍。爰於課餘之暇，略就下列各種參考文獻，編成此冊。以供工科大學中教科或參考之用。或有未盡之處，尙祈讀者指教是幸。

民國十七年十一月，編者誌於國立中央大學。

參考書籍

野口尙一：“材料強弱學。”

田中不二：“應用力學第一編。”

小野鑑正：“材料力學。”

Arthur Morley: “Strength of Materials.”

C. E. Fuller and W. A. Johnston: “Applied Mechanics,”
Vol. II.

Bach-Baumann: “Elastizität und Festigkeit.”

目 錄

	頁 數
第一章 緒論 [1-22]	
1. 材料強度學 1	
2. 內力 2	
3. 內力之種類 4	
4. 變形 6	
5. 彈性 7	
6. 彈性係數 8	
7. 內力與歪之關係 9	
8. 材料之最大強度 12	
9. 荷重之種類 15	
10. 安全率 16	
11. 物質之機械的性質 18	
12. 材料 19	
13. 材料試驗 21	
第二章 拉及壓 [23-40]	
14. 垂直內力與其歪 23	
15. 傾斜內力 26	
問題 37	
第三章 剪 [41-58]	

	頁 數
16. 橫彈性係數	41
17. 容積彈性係數	43
18. 單純剪與共衡剪	44
19. 各種彈性係數間之關係	47
問題	57
第四章 樑 [59-203]	
20. 樑之平衡	59
21. 剪力及彎曲能率	61
22. 樑與荷重之種類	63
23. 突出樑	64
24. 支持樑	73
25. 剪力與彎曲能率之關係	82
26. 支點外有荷重時之支持樑	85
27. 彎曲所生之內力	92
28. 慣性能率	101
29. 重要平面形之慣性能率與斷面係數	105
30. 慣性能率,幾何學的能率,及重心之圖 式求法	128
31. 材料之性質與斷面形	133
32. 樑之傾斜及曲率	135
33. 樑之撓屈	139
34. 固着樑	142

	頁 數
35. 連續樑… … … … …	149
36. 一端固着而他端支持之樑… … …	158
37. 有移動荷重之樑 … … … … …	167
38. 均一強度之樑… … … … …	170
39. 疊板彈條 … … … … …	175
40. 樑之橫斷面上剪內力之分布 … …	178
41. 應用例題 … … … … …	183
問題 … … … … …	198
第五章 柱 … … … … …	[205-231]
42. 柱 … … … … …	205
43. 柱端之附着 … … … … …	206
44. 關於柱之 <u>屋伊勒</u> 公式 … … … …	207
45. <u>古爾屯藍慶</u> 之公式 … … … …	214
46. 其他之公式 … … … … …	218
47. 偏心荷重作用之柱 … … … …	221
問題 … … … … …	229
第六章 扭及軸 … … … … …	[233-247]
48. 圓軸之扭 … … … … …	233
49. 軸之扭角 … … … … …	236
50. 傳送已知馬力之圓軸 … … … …	237
51. 異形軸… … … … …	240

	頁數
問題	245
第七章 螺旋彈條	[249-256]
52. 螺旋彈條	249
問題	255
第八章 圓筒及管	[257-283]
53. 壁之厚與內力之分布	257
54. 薄圓筒受內壓時之強度	258
55. 受內壓力之薄球面殼	263
56. 有接縫圓筒或球面殼之強度	264
57. 受外壓之圓筒	265
58. 管或圓筒凹陷之公式	266
59. 厚壁圓筒	267
60. 決定圓筒或圓管尺寸之公式	272
61. 圓環或輪邊之迴轉	273
62. 圓板之迴轉	275
問題	282
第九章 鉚釘接縫	[285-316]
63. 鉚釘及其接縫	285
64. 接縫之種類	285
65. 鉚釘接縫之強度計算	287
66. 鉚釘之直徑與板之厚	293

	頁 數
67. 板及鉚釘材料之強度	293
68. 各種鉚釘接縫之效率	295
問題	316
第十章 螺絲接合	[317-328]
69. 螺絲及螺絲接合	317
70. 螺絲之種類	319
71. 螺帽釘,端入螺帽釘,及釘帽... ..	319
72. 螺帽釘,端入螺帽釘,及釘帽之尺寸... ..	321
第十一章 橫栓接合及縱栓接	
 合	[329-346]
73. 串釘接合	329
74. 楔接合... ..	334
75. 縱栓接合	343
第十二章 聯合內力	[347-368]
76. 主內力... ..	347
77. 主歪	351
78. 傾斜面上之內力	355
79. 內力之橢圓	358
80. 物體之彈性的破損	359
81. 彎與扭之聯立... ..	361

	頁 數
問題 … … … … …	368
第十三章 曲樑 … … … …	[369-409]
82. 曲樑 … … … … …	369
83. A_1 量之計算 … … … … …	376
84. 鉤 … … … … …	381
85. 圓環 … … … … …	386
86. 曲樑之撓屈 … … … … …	395
87. 簡單形之鏈環 … … … … …	397
88. 渦卷彈條 … … … … …	400
89. 懸垂鏈或懸垂線 … … … … …	404
問題 … … … … …	408
第十四章 歪能 … … … …	[411-435]
90. 拉伸歪能 … … … … …	411
91. 最大彈性歪能 … … … … …	413
92. 彈性限界以內之活荷重 … … … … …	414
93. 樑之歪能 … … … … …	418
94. 樑之橫方向上曲率 … … … … …	422
95. 剪斷歪能 … … … … …	424
96. 樑因剪作用所起之撓屈 … … … … …	427
97. 用歪能可解決之問題 … … … … …	430

第十五章 平面板	[437-463]
98. 平面板	437
99. 圓板之內力與歪	437
100. 周緣支持而面上受均布壓力之圓板	443
101. 周緣固着一面受均布壓力之圓板	449
102. 周緣支持中央受荷重之圓板	451
103. 周緣固着中央受荷重之圓板	455
104. 對於圓板之近似方法	456
105. 周緣支持受均布壓力之橢圓板	458
106. 周緣支持受均布壓力之方板	460
107. 周緣支持受均布壓力之矩形板	461
問題	463
材料強度學術名中英對譯表	[465-474]

材 料 強 度 學

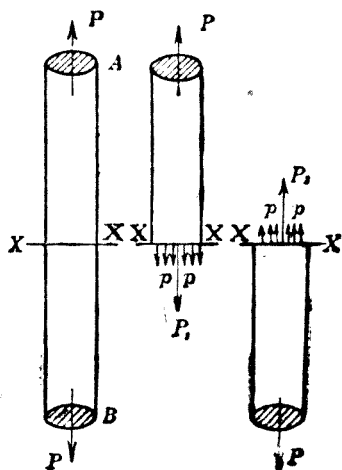
第 一 章

緒 論

1. 材料強度學. 材料強度學 (strength of materials) 者, 爲應用力學之一部, 研究工業用材料及構造物諸部內力 (stress) 之性質及其影響. 機械及他構造物 (structure) 上必有外力作用. 若某部分材料不能充分抵抗外力時, 則該機械或構造物必破壞. 若對於所作用之外力, 構造物各部大小過大時, 雖無破壞之虞, 而使用不必要之材料, 不免有不經濟之弊. 故設計構造物時, 其各部內力與所加荷重 (load, 即外力) 之關係, 及構造物材料強弱之性質, 須完全知悉. 俾免材料之損失, 且可對於外力, 得充分安全. 此謂之經濟的設計法.

凡任何學問，理論及應用不可分離。理論待實地應用始奏其效，而實際應用必先通曉理論，而後可盡其妙。材料強弱學亦須學理研究及應用計算，讀者當致意於此焉。

2. 內力。物體上加外力時，不論力之大小，必生變形。而物體內部各分子生一種之抵抗力，稱曰內力 (stress)。例如第1圖上棒 AB 一端加 P 力時，他端必加以相等反向之力，方可平衡



第 1 圖

(作用於物體上力之和與能率之和皆為零時，物體始在平衡狀態)。今設棒之軸線上，假想一直交橫斷面 XX 。若無抵抗外力 P, P 之力作用於此面時，則因 P, P 二力，棒將於此面分離。然事實上棒並不分離，故 XX 之假想斷面上，必有與外力 P, P 相等反向之內力 P_1, P_2 ，以與外力相平衡。此內力必不為單一而成對，其大小相等而方向相反。

內力之分布於斷面狀況，因外力作用狀態，棒之形狀，與性質等而不同。棒長而外力沿軸線作用時，則可視為平均分布於橫斷面上。此時單位面積上內力之強 (intensity of stress) p 為

$$p = \frac{P}{A}$$

但 A 為斷面積。一般平均分布之內力甚鮮。此時微小面積 dA 上內力 dP 可視為平均分布。故

$$p = \frac{dP}{dA}$$

上述內力之強以單位面積上內力之大小表

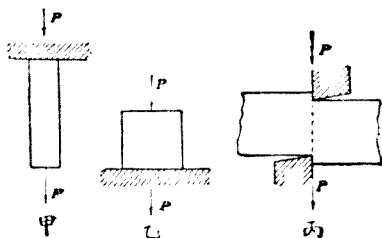
之。力之單位及面積之單位，須採用通常所用者。力之單位有尪 (kilogram) 及磅 (pound)，若力甚大時有米突制噸 (metric ton = 1000 kg.) 及英噸 (= 2240 lb.) 等。面積單位用平方厘 (sq. cm.) 及平方吋 (sq. in.)。故內力強度之單位為「尪每平方厘 (kg./sq. cm.)」或「磅每平方吋 (lb./sq. in.)」或「噸每平方吋 (tons/sq. in.)」等。但英國單位與米突制單位不可混用。

3. 內力之種類。內力為物體對於外力之抵抗，故方向與外力相反。而外力有各種作用方法，因之內力亦生相異之種類。

對於物體某斷面上，外力垂直作用時，內力亦垂直於該面。此謂之垂直內力 (normal stress) 或縱內力 (direct stress)。因其方向之不同，有拉內力 (tensile stress) 與壓內力 (compressive stress) 之分。例如第2圖上甲沿軸線方向將棒兩端拉伸。垂直於軸線之斷面上內力，與欲將棒沿此面分為二部之外力相抵抗。故稱為拉內力。同圖

乙上, 將短柱沿軸線方向壓縮時, 軸線之垂直斷面上內力, 與欲將棒之二部壓合之外力相抵抗, 故稱為壓內力。

若外力如第2圖丙, 沿斷面平行作用時, 則內力接觸於面, 與欲將棒沿此面剪斷為二部之外力相抵抗。稱曰切線內力 (tangential stress) 或剪內力 (shearing stress)。



第 2 圖

以上三種內力最為簡單。他各種內力均可分解為此三種。故此三種內力稱曰簡單內力 (simple stress)。由此三種內力, 多數合成之內力曰合成內力 (combined stress)。例如將棒彎曲

或扭轉時所生內力，均為合成內力。

4. 變形。歪。內力所生物體之變形曰歪 (strain)。因各種內力生各種變形。有拉伸歪，壓縮歪，剪斷歪，彎曲歪，扭轉歪等之區別。

(1) 拉伸歪 (tensile strain)。拉力作用時，沿其方向上生伸長 (elongation)。歪之絕對量因材料大小而不一定，長者較短者，對於同一內力，生多量之歪。故不能以歪量比較變形。吾人常以對於單位長之歪表示歪量。因之伸長時，棒之原長設為 l ，全體伸長為 δl ，則歪量為

$$\text{伸長歪} = \frac{\delta l}{l}$$

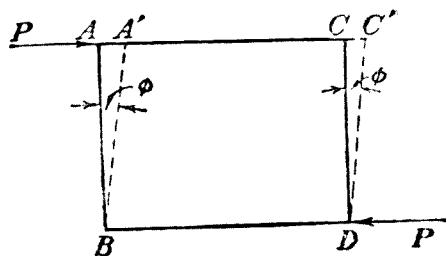
即示單位長之平均伸長也。

(2) 壓縮歪 (compressive strain)。壓內力作用時，其長度短縮。原長設為 l ，全體短縮為 δl ，則

$$\text{壓縮歪} = \frac{\delta l}{l}$$

亦為單位長之平均短縮。

(3) 剪斷歪 (shearing strain). 受剪內力時, 與外力平行之物體層, 於其方向上生平行之相互移動. 如第3圖 $ABCD$ 變形為 $A'B'C'D'$. 即對於 AB 之長生 AA' 之變形. 此時歪以 $(AA' \div AB)$ 表之. 即 AB 與 $A'B$ 所成角度 ϕ 之弧度法 (circular measure) 也.



第 3 圖

5. 彈性. 增加外力時, 內力亦增, 而歪亦增大. 由實驗結果, 就多數材料, 內力大小在一定限界內, 若取去外力時, 內力消失, 而同時歪亦全消失. 物體復歸於原狀. 此性質稱曰彈性 (elasticity). 若外力更增加, 至內力大小超過一

定限界時，則雖取去外力，而物體不能完全恢復原形，殘留多少之歪。此一定限界名曰彈性限界 (elastic limit)。彈性限界以內所生之歪曰彈性歪 (elastic strain)。超過彈性限界後，殘留而不消失之歪曰不復歪 (permanent set) 或永久變形。

6. 彈性係數。彈性限界以內，內力與其所生之歪成正比例。此爲呼克法則 (Hooke's law)。但此法則並非對於任何材料均可適合。僅就多數金屬材料大體可成立耳。其表示法如下：

$$\frac{\text{內力}}{\text{歪}} = \text{常數} \quad \text{或} \quad \text{內力} = \text{常數} \times \text{歪}$$

此常數稱曰彈性係數 (modulus of elasticity)。彈性係數有縱彈性係數 (modulus of direct elasticity) 與橫彈性係數 (modulus of transverse elasticity) 之別。前者示拉內力與拉伸歪之關係，亦名楊氏係數 (Young's modulus)。通常以 E 表之。設原長爲 l ，拉伸歪爲 δl ，內力之強爲 p ，則

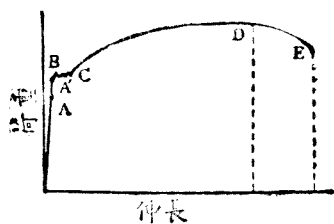
$$\frac{p}{\frac{\delta l}{l}} = E$$

但壓內力與壓縮歪之關係略與上同。橫彈性係數示剪內力與剪斷歪之關係，普通稱曰剛性係數(modulus of rigidity)。以 N 表之(或用 G ，或用 C)。設 q 為剪內力之強，剪斷歪為 ϕ (第3圖)，則

$$\frac{q}{\phi} = N$$

7. 內力與歪之關係。將物體之變形取於水平軸，外力取於垂直軸，可表示物體上荷重與變形之關係。名曰荷重變形線圖(load-deformation diagram)。若變形為拉伸歪，則為荷重伸長線圖(load-elongation diagram)。若變形為壓縮歪，則為荷重壓縮線圖(load-compression diagram)。又若線圖上表示內力之強與歪時，則得內力歪線圖(stress-strain diagram)。後者多用之。但所謂內力依習慣上以原斷面除各瞬間荷重而得者。

今將軟鋼 (mild steel) 之荷重伸長線圖示於第 4 圖。 OA 部爲直線, $ABCDE$ 爲曲線。未至 A 點時, 荷重與伸長成正比例。 A 點稍上方至 B 處, 伸長較荷重增加驟速。 B, C 間荷重雖不增加而伸長急增。此 B 點曰降伏點 (yield point)。 C 至 D 處, 荷重與伸長又共增, 惟伸長之增加較荷重爲大。過 D 點後, 荷重減小, 而伸長仍增。卒至 E 點而物體破斷。



第 4 圖

OA 間荷重與伸長成正比例, 過 A 點後則否。此 A 點名曰比例限界 (limit of proportionality)。 OA' 間取去內力時, 歪幾完全消失。過 A' 點後始有較大之殘留伸長。此 A' 點曰彈性限界

(limit of elasticity). A' 點以後, 若取去內力, 有一部永久變形之殘留, 物體呈萎性 (plasticity). 加以一定荷重時, 歪與時間共增大. A' 至 D 間物體一部分為彈性, 一部分為萎性. D 點附近完全呈萎性. OD 間物體全部伸長, 而 DE 間則生局部伸長 (local elongation), 而變形驟增. D 點荷重最大. E 點之破壞荷重較此尚小. 然 DE 間局部變形, 斷面積縮小甚速. 故實際之破壞內力較 D 點內力為大. 圖上各點之內力如下:

$$\text{比例限界 } p_A = \frac{P_A}{F}$$

$$\text{彈性限界 } p_{A'} = \frac{P_{A'}}{F}$$

$$\text{降伏點 } p_B = \frac{P_B}{F}$$

$$\text{最大強度 } p_D = \frac{P_D}{F}$$

$$\text{破壞內力 } p_E = \frac{P_E}{F}$$

$$\text{實際破壞內力 } p'_E = \frac{P_E}{F''}$$

但 F 爲原有斷面積, F' 爲破斷後斷面積。

8. 材料之最大強度. 物體上加外力而破壞者, 因內部抵抗力即內力不足以抵抗其時之外力故也. 因小外力而破斷之材料, 其生內力之能力小. 因大外力而破斷之材料, 其生內力之能力大. 故材料之強弱可由生內力之能力以比較之.

材料所可生內力較外力大時, 無破壞之虞. 若外力較可生內力大, 則即破壞. 破壞瞬間之內力爲材料所可生之最大內力. 稱爲該材料之最大強度 (ultimate strength) 或破壞強度 (breaking strength). 通常最大強度當材料試驗時, 以最初原有斷面積除試驗棒 (test-piece) 所可支持之最大荷重而得之內力強度以表之. 即上圖 B 點之內力也.

各材料之最大強度及彈性係數表之如次

材料強弱表 (金屬) (其一)

材料	重量 lb./cu. in.	最大力內 lb./sq. in.			彈性係數 lb./sq. in.	
		拉	壓	剪	縱	橫
鑄鐵	.271	16,000	95,000	27,000	17,000,000	6,300,000
鍊鐵	.278	50,000	50,000	40,000	29,000,000	10,500,000
軟鋼(板)	.283	70,000	65,000	55,000	31,000,000	13,000,000
極軟鋼(板) (汽鍋用)	.283	65,000	—	52,000	30,000,000	—
鑄鋼	.287	72,000	—	—	30,000,000	12,000,000
鑄銅	.310	20,000	58,000	24,000	13,000,000	5,000,000
銅板	.321	30,000	—	—	15,000,000	6,300,000
砲金(青銅)	.319	30,000	—	—	11,500,000	4,100,000
磷青銅	.310	35,000	—	29,000	13,500,000	5,200,000
黃銅	.304	18,000	10,500	—	9,000,000	3,400,000
鋁	.096	19,000	—	13,500	10,000,000	—

材料強弱表 (木材石材等) (其二)

材 料	重 量 lb./cu. ft.	最大內力 lb./sq. in.			縱彈性係數 lb./sq. in.
		拉	壓	剪	
杉	24	6,400	5,700	800	1,000,000
檜	29	8,200	7,400	1,000	1,300,000
松	21	4,000	4,800	640	850,000
樅	27	7,200	6,300	930	1,350,000
松	33	8,200	7,300	1,170	1,400,000
栗	31	8,500	5,000	1,000	1,150,000
徑	63	17,000	7,300	1,700	—
樺	42	12,500	7,500	1,600	1,200,000
花崗岩	162	650	16,500	—	—
安山岩	141	—	7,200	—	—
凝灰岩	139	—	6,400	—	—
磚	96	95	650	—	—
混凝土	11.9	305	3,900	—	—
	—	—	3,500	—	—
皮 革	—	2,900	—	—	—
木 棉	—	6,500	—	—	—
	—	5,000	—	—	—
麻	—	10,000	—	—	—
	—	6,600	—	—	—
		17,000	—	—	—

9. 荷重之種類. 作用於機械或構造物上之外力曰荷重 (load). 荷重分兩大類. 如懸錘之重或材料自身之重等靜止荷重, 又或徐徐所加之一定不變之外力等, 均稱爲死荷重 (dead load). 反之, 如急激所加之外力, 或外力大小有變化者, 稱爲活荷重 (live load). 例如鐵道橋自身之重或軌道重量等爲死荷重, 而火車之進行重量或風壓等爲活荷重.

活荷重中外力大小雖變化而方向不變者, 曰反覆荷重 (repeated load). 方向大小同變化者, 曰交變荷重 (alternate load). 例如拉棒之力有變化時爲反覆荷重, 若或拉或壓, 外力大小自一方變化至他方向者爲交變荷重.

急激加外力於物體時之內力與同大死荷重所生內力之二倍相當. 故活荷重對於材料之影響較死荷重大. 因之因荷重種類之不同, 材料之安全度亦異. 普通之材料試驗時, 試驗片上徐受荷重, 故爲死荷重. 前節二表所示強度

乃對於死荷重而得者。

10. 安全率. 材料上生最大內力時即破壞. 故機械或構造物上各部荷重須小於最大荷重. 又若荷重所生內力超過彈性限界時, 則材料上生不復歪, 而變形永久殘留. 使材質生變化, 易於破壞. 故甚危險. 是以期機械或構造物之安全時, 須使材料各部內力必在其彈性限界以內. 此安全範圍內可容許之內力, 曰可容內力 (allowable stress) 或安全內力 (safe working stress). 生此內力之荷重曰可容荷重 (allowable load) 或安全荷重 (safe working load).

最大荷重與可容荷重之比或最大內力與可容內力之比, 稱曰安全率 (factor of safety).

$$\text{安全率} = \frac{\text{最大內力}}{\text{可容內力}} \quad \text{或} \quad \text{可容內力} = \frac{\text{最大內力}}{\text{安全率}}$$

安全率必大於1. 因材料之性質與荷重之種類而定. 材料性質不均一而不可信用時, 或因周圍狀況易於變質時, 安全率之值須大. 荷重之

量不能確知而荷重有急激增加時，安全率之值亦須大。反覆荷重時安全率之值，普通為死荷重時之一倍半，交變荷重時為死荷重時之三倍。

若製作一機械或構造物，欲使各部有平等強度時，則對於各部之可容內力，不可取同一之安全率。蓋某部分上或僅受死荷重而他部分上或受活荷重，或又有受衝擊(shock)者。若用同一安全率計算各部時，則受衝擊之部必先破壞。故受衝擊之處必取較大之安全率，而須充分強大。

因材料之種類及荷重之性質，安全率之標準略如下。

材 料	死荷重	活 荷 重	衝 擊
		反覆荷重~交變荷重	
鑄鐵等脆金屬與合金	4	6~10	15
鍊鐵及軟鋼	3	5~8	12
鑄 鋼	3.5	5~8	15
銅等軟金屬與合金	5	6~9	15
木 材	6	8~12	20
石 材 類	10	15~20	—

11. 物質之機械的性質，物體上加外力時，形狀生變化，稱爲機械的變化。關於此性質曰機械的性質 (mechanical property)。

(1) 彈性。物體上加外力時，則生內力而起歪。若取去外力而歪同時安全消失時，此性質曰彈性。多數金屬在彈性限界內幾有完全彈性。

(2) 萎性。若取去外力，歪不能完全消失而有殘留者，稱曰萎性 (plasticity)。例如粘土卽爲一例。因外力而生永久變形，有彈性之物質在彈性限界以外，生部分的萎性。金屬上施機械的作業而付以一定之形時，卽利用此彈性限界以外之萎性也。若爲完全彈性，則雖任何加工，苟取去外力卽復原形，故機械的作業爲無効。

萎性物質加以荷重時，因時間經過，而歪亦增大。宛如流體之呈流 (flow) 之現象。如由小孔將金屬拉成細線時，卽爲其例。

(3) 延性. 受拉伸作用時, 物體增長而減細, 或展成板狀. 此性質曰延性 (ductility). 又或稱爲可鍛性 (malleability). 各金屬之延性各不相同.

(4) 脆性. 缺除延性之物質曰脆性 (brittleness). 例如玻璃, 甄所生之歪極小而即破壞. 有脆性之物質無預兆而即突然破壞. 須審慎用於機械及構造物上.

12. 材料. 工業用材料大別之爲金屬與非金屬兩種. 前者如鐵, 銅, 錫, 鉛, 鋅, 鋁, 鎳等, 後者如木材, 石材, 甄, 水泥, 混凝土, 皮革, 木棉, 麻等. 而其中尤以鐵之用途爲最廣. 但工業上所用者非爲純鐵, 而爲鐵與他金屬或非金屬之合金. 例如最近所用之配合物質爲鎳, 鉻等, 稱爲鎳鋼, 鎳鉻鋼等類. 此種尙爲特殊合金. 鐵中最普通所含元素爲炭素, 硅素, 錳, 磷, 硫黃等. 其中炭素之量可變換鐵之性質. 炭素含量大者

脆而難鍛，含量小者軟而易鍛。普通實用上就鐵之種類分別如下：

I. 生鐵 (pig iron) (炭素含量 2% 以上)

a. 白生鐵 (white pig iron) (炭素與鐵為化合狀態而不遊離。斷面白色。用於製鐵或特種鑄物用。)

b. 灰生鐵 (gray pig iron) (炭素一部成為黑鉛而遊離。斷面灰色。普通用於鑄造，稱為鑄鐵 cast iron。)

II. 可鍛鐵 (malleable iron) (炭素含量 2% 以下)

a. 鍊鐵 (wrought iron). 鍊鋼 (wrought steel). (半熔融狀態時製造者，含有熔滓 slag。)

b. 鑄鐵 (ingot iron). 鑄鋼 (ingot steel). (熔融狀態時製造者，不含熔滓。)

鐵與鋼之區別非為顯然。大體言之，可鍛鐵中炭素含量多者有可硬燒性 (hardening)，炭素少者無之。前者曰鋼，後者曰鐵。但以炭素量，

實難明白區別。大抵言之，可以炭素 0.5% 爲境界。然較此少者亦有多少可硬性者也。鋼中又可分爲炭素鋼及特殊鋼二種。前者有軟鋼硬鋼之分，而後者如鎳鋼、鉻鋼等是也。

13. 材料試驗。工業用材料之重要性質，用種種試驗方法以闡明之。就金屬材料之試驗方法，自物理的與化學的性質之試驗而外，尙有下之各項：

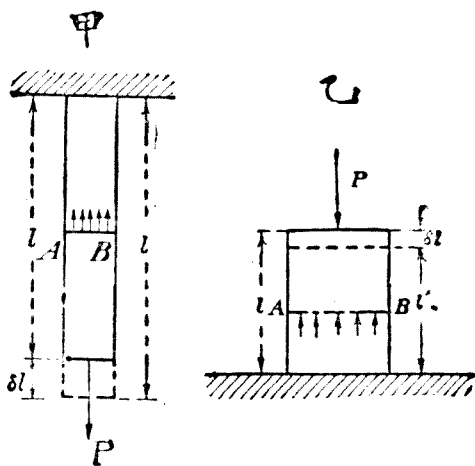
1. 靜力試驗 (拉, 壓, 彎, 扭, 剪等試驗)。
2. 衝擊試驗
3. 反覆內力試驗
4. 硬度試驗
5. 加工試驗
6. 組織試驗

通常研究彈性及強度上，1, 2, 3 三項必須施行，以明其對於靜的荷重及衝擊與周期變化的荷重諸影響。區別硬度時，用硬度試驗。檢

別其對於工作上之適否，用加工試驗。輒近因冶金學之進步，金屬組織之試驗亦成一分科。材料研究上得益良多。

第二章 拉 及 壓

14. 垂直內力與其歪。第5圖上一端固定之棒，他端加以拉力或壓力，則棒內部生內力以與此抵抗，因之生歪。此時內力全量必與外力 P 相平衡。設棒之橫斷面為 A ，內力之強為 p ，則



第 5 圖

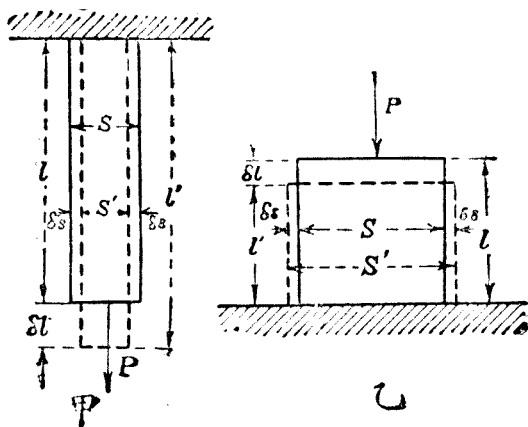
$$p \cdot A = P \quad \therefore p = \frac{P}{A} \dots \dots \dots (1)$$

設棒原長為 l ，長之變化為 δl ，則歪 λ 為

$$\lambda = \frac{\delta l}{l} \dots \dots \dots (2)$$

由呼克法則，彈性限界內，內力與歪成比例。其比例常數即彈性係數。設拉及壓之彈性係數為 E ，則

$$E = \frac{p}{\lambda} = \frac{Pl}{A\delta l} \dots \dots \dots (3)$$



第 6 圖

此 E 稱曰縱彈性係數或楊氏係數。 E 為生單位歪時，單位面積上所作用之力。 其值如第 8 節表中所示為甚大。 實際上不存在。 故 Bach 教授取 E 之逆數 α ，名曰伸長係數 (Dehnungszahl)。 即

$$\alpha = \frac{1}{E} = \frac{\lambda}{p} \dots\dots\dots (3a)$$

物體受拉伸時，其內力方向上生伸長而斷面積縮小。 如第 6 圖所示。 受壓縮時，內力方向上生縮短而斷面積膨大。 此長短之變化稱曰縱歪 (longitudinal strain)，而斷面積之變化稱曰橫歪 (transverse strain)。 橫歪之量以橫方向上長度之變化對於原長之比以測之。 即拉伸時為 $(S-S')/S$ ，壓縮時為 $(S'-S)/S$ 。

由實驗結果，某材料之橫歪與縱歪之比常一定。 此定比稱曰包生比 (Poisson's ratio)。 其值小於 1。 因各材料而異其值。

$$\text{包生比} = \frac{1}{m} = \frac{\frac{\delta s}{s}}{\frac{\delta l}{l}} = \frac{l}{s} \cdot \frac{\delta s}{\delta l} \dots\dots\dots(4)$$

m 之值通常在 3 與 5 之間，對於金屬略近於 4。

15. 傾斜內力。前述內力均與一假想斷面成垂直或平行者。但一般作用於某面上內力，其方向為傾斜。謂之傾斜內力 (inclined stress)。上述垂直內力及切線內力可視為其特別情形。傾斜內力可分為垂直於面之垂直內力與接觸於面之切線內力二分力。其垂直分內力 (normal component stress) 因外力方向，或為拉力，或為壓力。切線分內力 (tangential component stress) 為剪內力。

第 7 圖上棒之橫斷面積為 A ，拉伸荷重 P 作用時，斷面上之內力均垂直於面。強度為 $p = \frac{P}{A}$ 。無切線內力。今假想一他面與橫斷面成 θ 角，則對於此面之內力為傾斜內力，將此分為垂直與切線二分內力。棒上作用之外力 P 對於此

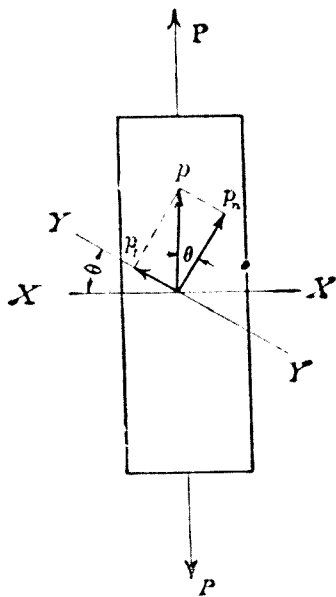
面之垂直及平行二分力各爲

$$P_n = P \cos \theta, \quad P_t = P \sin \theta$$

假想面 YY 之面積爲

$$A' = A \sec \theta$$

故垂直分內力 p_n 與切線分內力 p_t 各爲



第 7 圖

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \frac{P_n}{A'} = \frac{P \cos \theta}{A \sec \theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = p \cos^2 \theta \\ p_t &= \frac{P_t}{A'} = \frac{P \sin \theta}{A \sec \theta} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \frac{p}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

故垂直內力與切線內力之值均因面之傾斜角而變化。 p_t 之值當 $\sin 2\theta = 1$ 時為最大。即 $\theta = 45^\circ$ 。此時

$$\text{最大之 } p_t = \frac{1}{2} p \dots\dots\dots(6)$$

由此觀之，雖為單純之拉或壓，而傾斜面上可誘起切線內力。對於此剪力抵抗較弱之材料，往往因此切線內力，沿傾斜面而裂破。脆質物如鑄鐵，硬鋼，軋，石材，水泥等受壓縮時，多沿傾斜面而破壞。破壞面上若無摩擦，則該面之傾斜度 θ 當為 45° 。但因有摩擦，故摩擦靜止角亦當加入。

今設 p 為荷重軸上壓內力之強， q 為最大剪

內力之強， μ 爲二部分摩擦係數， ϕ 爲靜止角 (angle of repose)，即 $\tan \phi = \mu$ 。抵抗於沿面滑動而破壞之力爲 $q + \mu p_n$ 即 $q + \mu p \cos^2 \theta$ 。此時切線內力 p_t 爲 $p \sin \theta \cos \theta$ ，

$$\therefore q + \mu p \cos^2 \theta = p \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore p = \frac{q}{\sin \theta \cos \theta - \mu \cos^2 \theta}$$



第 8 圖

壓縮破壞面必沿壓內力 p 爲最小時之 θ 之面而起。即

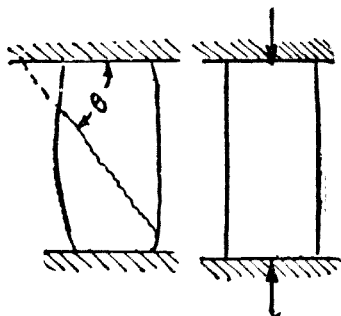
$$\frac{dp}{d\theta} = 0$$

$$\therefore \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \mu \cdot 2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

或
$$\cot 2\theta = -\mu = -\tan \phi = \cot \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$$

鑄鐵受壓縮時，破壞角 θ 約爲 55° 內外。故 ϕ 約爲 20° 。其狀若第 9 圖。



第 9 圖

例 1. 今有可容內力 1400 lb./sq. in. 之松材, 須支持 25 噸之荷重. 問當用幾吋方木?

$$P = 25 \text{ tons} = 25 \times 2240 \text{ lb.}$$

$$p = 1400 \text{ lb./sq. in.}$$

$$\therefore A = \frac{P}{p} = \frac{25 \times 2240}{1400} = 40 \text{ sq. in.}$$

故每邊長 = $\sqrt{40} = 6.32 \text{ in.}$

例 2. 有軟鋼圓棒, 以 18000 kg. 之力拉之. 其最大內力設為 36 kg./sq. cm., 安全率為 4. 則須直徑若干?

可容內力 $p = \frac{36}{4} = 9 \text{ kg./sq. cm.}$

$$\therefore A = \frac{P}{p} = \frac{18000}{9} = 2000 \text{ sq. cm.}$$

所求直徑 d 爲 $\frac{\pi}{4} d^2 = 2000$

$$\therefore d = \sqrt{\frac{2000 \times 4}{3.14}} = 50.5 \text{ cm.}$$

例 3. 有直徑 2 吋之軟鋼圓棒. 可容內力爲 12000 lb./sq. in. 問可加至若干噸拉力?

$$A = \frac{\pi}{4} \times 2^2 = 3.14 \text{ sq. in.}, \quad p = 12000 \text{ lb./sq. in.}$$

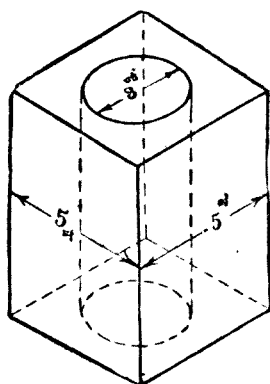
$$\therefore P = pA = 3.14 \times 12000 = 37,680 \text{ lb.} = 16.85 \text{ tons.}$$

例 4. 有每邊 5 吋之正方形短柱, 內部有直徑 3 吋之孔. 可容內力若爲 3.8 ton/sq. in., 則可支持若干噸荷重(第 10 圖)?

$$A = (5 \times 5) - \left(\frac{\pi}{4} \times 3^2 \right) = 17.93 \text{ sq. in.}$$

$$p = 3.8 \text{ ton/sq. in.}$$

$$\therefore P = pA = 3.8 \times 17.93 = 68.1 \text{ tons.}$$



第 10 圖。

例 5. 長 10 呎直徑 1 吋之軟鋼圓棒，以 4 噸之力拉時，伸長若干？但縱彈性係數為 13000 ton/sq. in.

$$P = 4 \text{ tons}$$

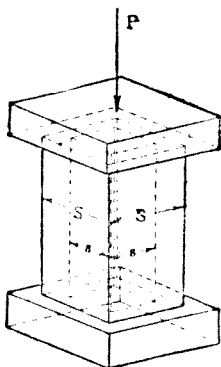
$$l = 10 \times 12 = 120 \text{ 吋}$$

$$A = \frac{\pi}{4} \times 1^2 = 0.785 \text{ sq. in.}$$

$$E = 13,000 \text{ ton/sq. in.}$$

$$\therefore \delta l = \frac{Pl}{EA} = \frac{4 \times 120}{13000 \times 0.785} = 0.047 \text{ in.}$$

例 6. 第 11 圖二柱中, 外柱爲鋼, 內柱爲鍊鐵. 其每邊長各爲 S 與 s , 高爲 l . 今支持重量 P 時, 求各柱中所誘起之內力, 及兩柱共通之短縮幾何.



第 11 圖

設 E_W 爲鍊鐵之縱彈性係數, E_S 爲鋼之縱彈性係數. p_W 爲鍊鐵上內力, p_S 爲鋼之內力. 則

$$A_W = s^2, \quad A_S = S^2 - s^2$$

設共通短縮爲 δl , 則

$$P = p_W A_W + p_S A_S = p_W s^2 + p_S (S^2 - s^2) \dots (c)$$

$$\delta l = \frac{p_W l}{E_W} \dots (b)$$

$$\delta l = \frac{p_s l}{E_s} \dots\dots\dots (c)$$

由 (b) 及 (c),

$$\frac{p_w l}{E_w} = \frac{p_s l}{E_s}, \text{ 或 } \frac{p_w}{p_s} = \frac{E_w}{E_s}$$

將此 p_w 值代入 (a) 式,

$$p_s \frac{E_w}{E_s} s^2 + p_s (S^2 - s^2) = P$$

或

$$p_s = \frac{P E_s}{E_w s^2 + E_s (S^2 - s^2)}$$

同樣

$$p_w = \frac{P E_w}{E_w s^2 + E_s (S^2 - s^2)}$$

又

$$\delta l = \frac{l p_w}{E_w} = \frac{l p_s}{E_s} = \frac{P l}{E_w s^2 + E_s (S^2 - s^2)}$$

例 7. 將直徑 1 吋之鍊鐵圓棒垂直懸垂. 因自己重量所誘起之最大內力爲 6 tons/sq. in. 時, 問棒長若干? 但鍊鐵每立方吋重 0.28 磅.

均一斷面積之棒懸垂時, 其最大內力生於最上部.

$$\text{最大之 } p = \frac{\frac{\pi}{4} d^2 l w}{\frac{\pi}{4} d^2} = l w$$

或

$$l = \frac{\text{最大之 } p}{w}$$

但 d 爲棒直徑, l 爲棒長, w 爲單位體積之材料重量. 故棒長與直徑無關, 其最大內力僅因單位體積之重量而定. 今

$$\text{最大之 } p = 6 \text{ tons/sq. in.} = 13,440 \text{ lb./sq. in.}$$

$$w = 0.28 \text{ lb./sq. in.}$$

$$\text{故 } l = \frac{13440}{0.28} = 48,000 \text{ 吋} = 4,000 \text{ 呎}$$

例 8. 有軟鋼拉伸棒, 長 50 呎, 斷面積 1.5 sq. in., 支持 5 噸之拉力時, 生 0.15 吋之伸長. 問縱彈性係數若干? 又此荷重所生之內力與歪各幾何?

$$P = 5 \text{ tons, } A = 1.5 \text{ sq. in., } l = 50 \times 12 = 600 \text{ in.}$$

$$\delta l = 0.15 \text{ in.}$$

$$\therefore p = \frac{P}{A} = \frac{5 \times 2240}{1.5} = 7,467 \text{ lb./sq. in.}$$

$$\lambda = \frac{\delta l}{l} = \frac{0.15}{600} = 0.00025$$

$$\therefore E = \frac{pl}{\delta l} = \frac{7467 \times 600}{0.15} = 29,868,000 \text{ lb./sq. in.}$$

例 9. 以 $1\frac{1}{4}$ 吋方之鍊鐵棒製成平均直徑 40 吋之輪，加熱時膨脹而為平均直徑 $40\frac{1}{64}$ 吋，以之嵌入於 $40\frac{1}{64}$ 吋之圓筒周而冷卻之，輪收縮時生拉內力於材料中，設縱彈性係數為 12500 噸/平方吋，求內力之值。

因膨脹所生之伸長為 $\delta l = \pi \cdot 40 \left(\frac{1}{64} - 40 \right) = 0.0491$

吋，輪周初長為 $l = \pi \times 40 = 125.6$ 吋。

$$\therefore p = \frac{E \delta l}{l} = \frac{12500 \times 0.0491}{125.6} = 4.87 \text{ 噸/平方吋.}$$

例 10. 有拉伸棒，軸向上受 5 噸平方吋之拉內力，與橫斷面成 40° 之傾斜面上，垂直內力與切線內力之大小幾何？

橫斷面積 1 平方吋之棒一部分，其傾斜面上面積為

$$A' = 1 \times \sec 40^\circ \text{ 平方吋}$$

傾斜面上垂直拉分力為 $P_n = 5 \times \cos 40^\circ$ 噸。

傾斜面上平行拉分力為 $P_t = 5 \times \sin 40^\circ$ 噸。

故傾斜面上垂直內力及切線內力各為

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{5 \times \cos 40^\circ}{1 \times \sec 40^\circ} = 5 \times \cos^2 40^\circ = 5 \times 0.7660 \times 0.7660 \\ &= 2.933 \text{ 噸/平方吋。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{5 \times \sin 40^\circ}{1 \times \sec 40^\circ} = 5 \times \cos 40^\circ \times \sin 40^\circ \\ &= 5 \times 0.7660 \times 0.6428 = 2.462 \text{ 噸/平方吋。} \end{aligned}$$

問 題

1. 支持 10 噸死荷重之鍊鐵拉棒 (tie rod)，其可容內力為 6 噸/平方吋。求 (1) 棒之斷面積，(2) 圓形斷面時之直徑，(3) 正方形斷面時每邊之長，(4) 一邊長 1 吋時矩形斷面之他邊長。

2. 直徑 $1\frac{1}{4}$ 吋之麻繩吊懸 17,200 磅之重量，可

得安全。若麻之最大拉伸強為 $7,000 \text{ lb./sq. in.}$ 時，問所取安全率數幾何？又可容最大內力若干？

3. 有圓形鑄鐵柱，外徑 10 吋，內徑 8 吋，長 10 呎。支持 60 噸之壓縮荷重。問當生短縮幾何？但鑄鐵之 E 值為 8000 噸/平方吋。

4. 有每邊長 h 正方形脚之柱，載於輓基臺上。使柱支持 80 噸荷重。求 h 之長。但輓之可容壓內力為 200 lb./sq. in. 。又柱斷面為圓形，而鑄鐵之可容壓內力為 8000 lb./sq. in. 。求其直徑。

5. 直徑 0.4 吋，長 100 呎之銅線，以 250 磅之力拉之，其伸長為 0.14 吋。求銅之縱彈性係數。

6. 斷面 1 平方呎之鑄鐵柱，支持 2000 噸荷重。問生壓內力幾何，及歪幾何？但鑄鐵之縱彈性係數為 17,000,000 磅/平方吋。

7. 直徑 1 吋長 40 吋之鋼棒，以外力一噸伸長 0.00384 吋。求鋼之縱彈性係數。

8. 斷面積 0.62 平方吋長 14 呎之鋼棒，使伸長

$\frac{1}{16}$ 吋。問須加幾噸荷重？但鋼之縱彈性係數爲14000噸/平方吋。

9. 1吋直徑銅圓棒，寬插入於內徑1吋厚 $\frac{1}{8}$ 吋之鋼管內，固定其兩端。此合成棒以10噸力拉之。問鋼與銅上之內力幾何？但縱彈性係數鋼爲13000噸/平方吋，銅爲6000噸/平方吋。

10. 由彈性限界內單純之拉內力，鋼棒伸長初長之 $\frac{1}{1000}$ 。問容積變化幾何？但包生比爲0.25。

11. 相隔25呎之對立二壁，以直徑1吋之軟鋼拉棒拉緊之。其法熱棒至300°F.，使膨脹伸長時，裝緊於壁上適當距離。若壁可充分抵抗壓縮力時，問冷卻至常溫(60°F.)時棒上所加荷重幾何？但軟鋼對於華氏升高1度，伸長0.000062，其縱彈性係數爲13500磅/平方吋。

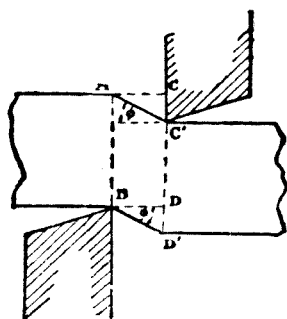
12. 二厚銅板以軟鋼螺帽釘(bolt)緊着之溫

度 200° F. 時, 釘上生幾何之拉內力? 但鋼之膨脹係數為 0.0000062, 銅之膨脹係數為 0.00001, 鋼之縱彈性係數為 13500 噸/平方吋.

第三章

剪

16. 橫彈性係數. 第12圖上 AB, CD 二斷面, 自材料之反對側加外力 P, P , 則一般兩斷面間生彎曲. 若兩斷面相距極近, 則無彎曲而材料於兩斷面間被截斷成二部. 例如以剪刀剪物即其一例.



第 12 圖

此時 AB, CD 間平行各斷面上有內力作用, 即

剪內力是也。拉與壓時，內力垂直作用於斷面，而剪內力則沿斷面而平行作用。其全量與外力 P 相平衡。故斷面積設為 A ，則剪內力之強為

$$q = \frac{P}{A} \dots\dots\dots(7)$$

或 $P = q \cdot A \dots\dots\dots(8)$

此與拉及壓時同樣。

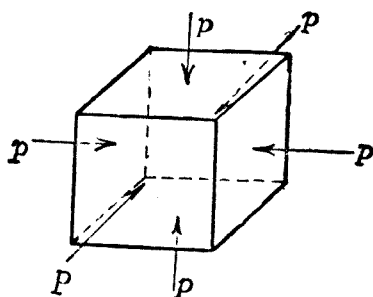
又同圖上 AB, CD 二斷面，因剪內力沿力向滑動， BD 變為 BD' 。 DD' 即滑動總量。對於 BD 之長，滑動 DD' ，故剪內力所生之歪為 $\frac{DD'}{BD}$ ，即圖中 ϕ 角 (radian)。

由呼克法則，彈性限界以內，內力與歪成正比。其常數為彈性係數。名曰橫彈性係數 (modulus of transverse elasticity 或 modulus of rigidity)。普通以 N (或 G 或 C) 表之。

$$N = \frac{q}{\phi} = \frac{P}{\phi A} \dots\dots\dots(9)$$

或 $q = N\phi \dots\dots\dots(10)$

17. 容積彈性係數. 今如第 13 圖所示, 取正方體材料, 其周圍六面上, 每單位面積, 加以平均分布之外力 p 而拉之或壓之. 則材料生相當之歪. 其結果必生容積變化. 稱為容積歪 (volumetric strain).



第 13 圖

容積歪以對於原容積單位容積之容積變化表之. 設原容積為 v , 容積變化為 δv , 則

$$\text{容積歪} = \frac{\delta v}{v}$$

由實驗結果, 容積歪與外力 p 之比為常數. 設其值為 k , 則

$$k = \frac{p}{\left(\frac{\delta v}{v}\right)} = \frac{pv}{\delta v} \dots\dots\dots (11)$$

此為容積彈性係數 (bulk modulus 或 modulus of elasticity of volume).

今設一立方體每邊長 a . 各邊變形後其長為

$$a \pm \delta a$$

其歪為 $\frac{\delta a}{a}$

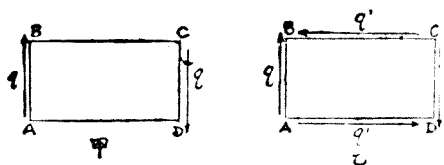
但容積變化為 $(a \pm \delta a)^3 - a^3$, 或因 δa 為甚小, 略為

$$\pm 3a^2\delta a$$

故容積歪為 $\frac{3a^2\delta a}{a^3} = 3 \cdot \frac{\delta a}{a}$

即容積歪為直線歪之三倍。

18. 單純剪與共衡剪. 今如第 14 圖甲所示. 一矩形體 $ABCD$, 受剪力, 其強為 q . 若僅有 AB , DC 二平行面上之一對剪力, 則物體必不能平衡. 蓋此二力成一偶力, 有迴轉能率 (turning



第 14 圖

moment) 故也。此時若須平衡，則不得不另有一相反等大之能率以與之抵抗。故 AD, BC 二平行面上亦必另有一剪力之存在。設其強為 q' ， $ABCD$ 與紙面直角之厚為 t ，則 AB, BC, CD, DA 四面上各力為

$$AB.t.q, BC.t.q', CD.t.q, DA.t.q'.$$

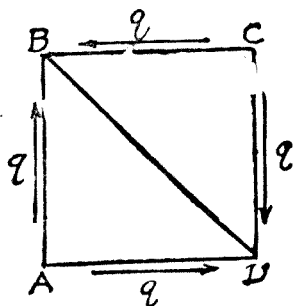
二偶力之能率必相等。

$$\therefore AB.t.q \times BC = BC.t.q' \times AB$$

$$\therefore q = q'$$

此 q, q' 二剪力曰共衡剪 (complementary shear stresses)。第 14 圖甲所示僅有相等強 q 之剪內力作用者，曰單純剪 (simple shear)。

第 15 圖上 $ABCD$ 正方體各邊長 s 。紙面直角之



第 15 圖

厚 t . 今想 BCD 之平衡. 將 q 分解為對角線 BD 之垂直與平行二分力. 則前者即垂直於 BD 面之力為 $2qst \cdot \cos 45^\circ = 2 \frac{qst}{\sqrt{2}}$. 但 BD 面積為 $BD \times t$ 即 $\sqrt{2} \cdot st$. 故 BD 上垂直內力 p_n 為

$$p_n \times \sqrt{2} \cdot st = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot qst$$

$$\therefore p_n = q$$

此 p_n 對於 BD 面為壓內力. 同樣可知 AC 面上拉內力亦等於 q .

又後者即平行於 BD 或 AC 之分力, 易知其爲零。故單純剪對於剪力之 45° 傾斜面上生拉內力或壓內力, 其值與剪力之強相等。

19. 各種彈性係數間之關係。彈性係數有縱彈性係數, 橫彈性係數, 及容積彈性係數之三種, 三者間常有一定之關係。

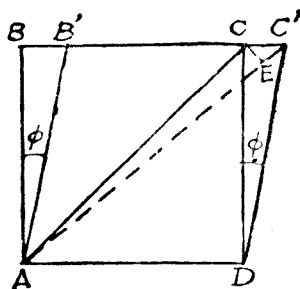
今設第 16 圖上 $ABCD$ 立方體受單純剪, 其變形後爲 $AB'C'D$, 則

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{CD} = \phi = \frac{q}{N}$$

對角線 AC 之伸長爲 EC' , 其拉伸歪爲

$$\begin{aligned} \frac{EC'}{AC} &= \frac{CC' \cdot \cos 45^\circ}{CD \cdot \sec 45^\circ} = \frac{CC' \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{CD \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{CC'}{CD} = \frac{1}{2} \cdot \phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{N} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{N} \quad (\S 18). \end{aligned}$$

對角線 AC 伸長而 BD 短縮, 其內力強相等 (§18), 各設爲 p . 今 AC 上拉內力 p 單獨作用時, 伸長爲 $\frac{p}{E}$. 但 BD 上同時有拉內力 p , 使其直角方向



第 16 圖

即 AC 上變形增加 $\frac{1}{m} \cdot \frac{p}{E}$ (§14). 故 AC 上總伸長為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{N} = \frac{p}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

$$\therefore \frac{N}{E} = \frac{m}{2(m+1)} \dots\dots\dots(12)$$

今又設第13圖上, 一立方體各面受壓力強 p . 各邊短縮 $\frac{p}{E}$. 但各邊同時又因其垂直方向上二對力之作用, 其伸長為 $2 \times \frac{1}{m} \cdot \frac{p}{E}$ (§14). 故每邊總歪為

$$\frac{p}{E} \left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

而容積歪為

$$3 \cdot \frac{p}{E} \left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

由定義 (§17),

$$\frac{p}{k} = 3 \cdot \frac{p}{E} \left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

$$\therefore \frac{k}{E} = \frac{m}{3(m-2)} \dots\dots\dots(13)$$

由 (12) 與 (13), $E = \frac{9kN}{N+3k} \dots\dots\dots(14)$

$$N = \frac{mE}{2(m+1)} \dots\dots\dots(15)$$

$$k = \frac{mE}{3(m-2)} \dots\dots\dots(16)$$

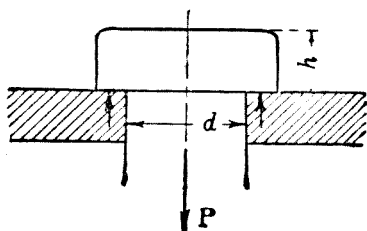
若 $m=3$, 則 $N = \frac{3}{8} E, \quad k = E$

若 $m=4$, 則 $N = \frac{2}{5} E, \quad k = \frac{2}{3} E$

故包生比若已知時, 由一種彈性係數之值可

求他種之彈性係數。一般縱彈性係數由實驗求得。

例 1. 圖示之鋼製螺帽釘 (bolt), 支持 10 噸荷重。求頭高與桿直徑。但鋼之可容內力, 拉伸時為 14,000 lb./sq. in., 剪斷時為 11,000 lb./sq. in.



第 17 圖

釘之桿部受拉力, 若略去自重, 則 $A = \frac{P}{p_t}$.

但 $A = \frac{\pi}{4} d^2$, $P = 10 \text{ 噸} = 22,400 \text{ lb.}$,

$p_t = 14,000 \text{ lb./sq. in.}$

$$\therefore d = \sqrt{\frac{4 \times 22400}{3.14 \times 14000}} = 1.43 \text{ 吋} \quad \text{約 } 1\frac{7}{16} \text{ 吋.}$$

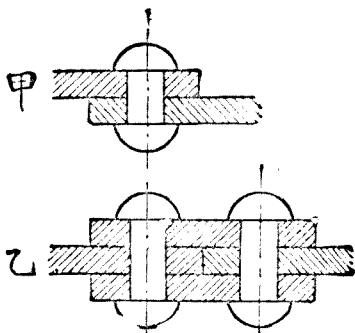
次釘頭中央部受桿部之拉力, 而周圍部受向上之支持力。故周圍部適當之處, 高 h 之圓筒

形表面上受剪內力。故

$$A = \pi dh, P = 22,400 \text{ lb.}, p_s = 11,000 \text{ lb./sq. in.}$$

$$\therefore h = \frac{22400}{3.14 \times 1.43 \times 11000} = 0.45 \text{ 吋} \approx \frac{1}{2} \text{ 吋.}$$

例 2. 鑿釘 (rivet) 一般受剪作用。將二板重疊接合時，稱曰疊接縫 (lap joint)，鑿釘僅於兩板接觸部斷面上生剪內力。若將板端對接，兩側重以縫板 (butt straps) 時，稱曰對接縫 (butt joint)。此時板與縫板接觸部二斷面上鑿釘生剪內力。前者曰單剪 (single shear)，後者曰復剪 (double shear)。



第 18 圖

今鉚釘直徑 $\frac{3}{4}$ 吋，受拉力 12 噸時，須用幾個之釘？但釘為軟鋼，其可容剪內力為 8,500 lb./sq. in.

單剪時，釘數設為 n ，則生剪內力之斷面數亦為 n 。

$$\therefore A = n \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{3.14}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 n = 0.4422n$$

但 $p_s A = P,$

故 $0.4422n = \frac{12 \times 2240}{8500} = 3.16$

$$\therefore n = \frac{3.16}{0.442} = 7.16$$

約須 8 個。

複剪時，每釘有二抵抗斷面，故

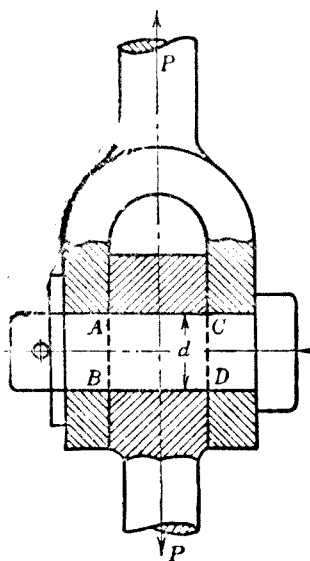
$$A = 2n \frac{\pi}{4} d^2 = 2n \cdot \frac{3.14}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.884n$$

$$\therefore 0.884n = 3.16 \quad \therefore n = 3.58$$

約須 4 個。

例 3. 第 19 圖示之釘 (pin)，受外力 P 時， AB ， CD 二斷面受剪內力。今 p 為 12 噸，釘之可容剪

內力爲 8,000 lb./sq. in. 求釘之所需直徑幾何。



第 19 圖

所要直徑設爲 d , 則

$$A = 2 \times \frac{\pi}{4} d^2$$

而

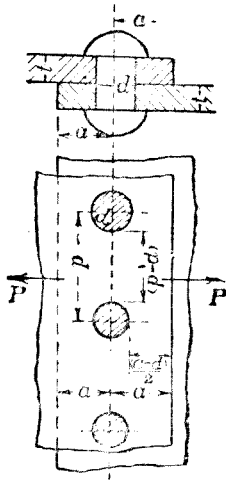
$$p_s = \frac{P}{A}$$

∴

$$d^2 = \frac{12 \times 2240 \times 4}{2 \times 3.14 \times 8000} = 2.14$$

∴ $d = 1.46$ 吋，約 $1\frac{1}{2}$ 吋。

例 4. 圖示之鑿釘板上加外力拉之，因釘與板之孰強而生破壞於其中一者。今釘直徑 d ，板厚 t ，板與釘爲等強時，所要釘中心間距離 (pitch) 及釘中心至板邊緣之距離各幾何？



第 20 圖

釘受剪內力，故每釘所可支持外力爲

$$P_1 = p_s A = \frac{\pi}{4} d^2 p_s$$

釘與釘間斷面爲寬 $(p-d)$, 厚 t , 故板之可支持外力爲

$$P_2 = p_t A = (p-d)tp_t$$

又釘一個將寬 $\left(a - \frac{d}{2}\right)$ 之板支持於二處。故

板之支持外力爲

$$P_3 = p_s A = 2\left(a - \frac{d}{2}\right)tp_s$$

此三個 P 之值相等：由此可求 p 及 a 之值。但鋼之 p_s 約爲 p_t 之 0.8 倍。

$$\frac{\pi}{4}d^2p_s = (p-d)t p_t = 2\left(a - \frac{d}{2}\right)tp_s$$

$$p-d = \frac{\pi}{4}d^2p_s \cdot \frac{1}{tp_t} = \frac{3.14}{4} \cdot \frac{d^2}{t} \cdot \frac{p_s}{p_t}$$

或
$$p = d + \frac{3.14}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{d^2}{t} = d\left(1 + \frac{3.14}{5} \cdot \frac{d}{t}\right)$$

又
$$a - \frac{d}{2} = \frac{\pi}{4}d^2p_s \cdot \frac{1}{2tp_s} = \frac{3.14}{4} \cdot \frac{d^2}{2t}$$

或
$$a = \frac{d}{2} + \frac{3.14}{4} \cdot \frac{d^2}{2t} = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{3.14}{4} \cdot \frac{d}{t}\right)$$

今設
$$d = 2t,$$

$$\text{則} \quad p = d \left(1 + \frac{3.14}{5} \times 2 \right) = 2.26d$$

$$a = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{3.14}{4} \times 2 \right) = 1.3d$$

例 5. 某材料之楊氏係數為 6000 噸/平方吋，其橫彈性係數為 2300 噸/平方吋。求其容積彈性係數。又一圓棒直徑 1 吋，長 10 呎，伸長 0.1 吋時，其傍側面縮小幾何？

$$\text{由公式 (15)} \quad N = \frac{mE}{2(m+1)}$$

$$\frac{E}{N} = \frac{2(m+1)}{m} = 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

$$\therefore \quad \frac{6000}{2300} = 2 \times \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

$$\text{由此} \quad m = \frac{23}{7}$$

$$\text{再由公式 (16)} \quad k = \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{E}{3 \left(1 - \frac{2}{m} \right)}$$

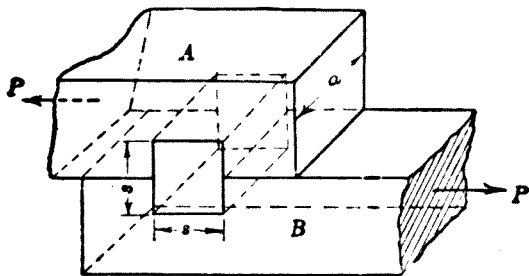
$$= \frac{6000}{3 \left(1 - \frac{14}{23} \right)} = 5111 \text{ 噸/平方吋.}$$

$$\text{橫側之歪} = \frac{7}{23} \times \frac{0.1}{12 \times 10}$$

$$\therefore \text{傍側面縮小} = \frac{7}{27600} = 0.000254 \text{ 吋.}$$

問 題

1. 互相以平面接觸之 A, B 二物體間, 有正方形斷面之楔 (wedge) C 插入, 以結合 A, B . 今以 10 噸之力拉 A, B 時, 楔上最大內力不得過 8000 lb./sq. in., 問楔之斷面幾何? 但楔長 2 吋.

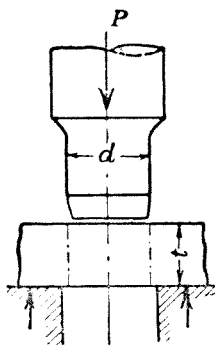


第 21 圖

2. 寬 3 吋, 厚 $\frac{1}{2}$ 吋之鋼板二塊, 以疊接法接合之. 鋼鑼釘直徑為 1 吋. 求此鑼釘所能耐之最

大拉力。但鋼之最大剪內力爲最大拉內力之 0.8 倍，而最大拉內力爲 28 噸/平方吋。

3. 鋼板，鐵板上穿孔時，以等於孔徑之硬鋼圓棒壓於板上，由剪斷作用而穿孔 (punch)。今厚 $\frac{3}{4}$ 吋之鋼板上欲穿直徑 1 吋之孔時，問須要壓力幾何？但鋼之最大剪內力爲 22 噸/平方吋。



第 22 圖

4. 直徑 0.750 吋，高 1.245 吋之鑄鐵短圓柱，受壓縮荷重 21.2 噸而破壞。其破壞面與底面成 59 度之角。求最大壓內力，破壞面上剪內力，及最大剪內力。以噸/平方吋表之。

第四章

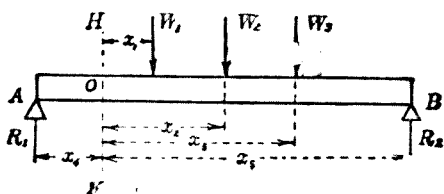
樑

20. 樑之平衡. 一般對於自己縱軸, 受斜向之外力者曰樑 (beam). 作用於樑之外力爲荷重與反作用力 (reaction). 其垂直於縱軸之分力使樑生彎曲 (bending).

實際上樑多成水平, 而荷重卽爲重力. 故視樑爲水平, 外力爲垂直較便. 且無特別申明時, 若視樑爲無重量, 則此便法無何妨礙.

第23圖上兩端支持之樑, 垂直於軸之外力爲 W_1, W_2, W_3 等. 兩支點上必生 R_1, R_2 之反作用力, 與上之外力相平衡.

物體之平衡條件爲諸力垂直分力之代數和與水平分力之代數和各等於零, 且同時對於任一點諸力之能率之代數和亦爲零.



第 23 圖

今外力均垂直，而水平分力不存在。故滿足於第一條件時，必

$$W_1 + W_2 + W_3 - R_1 - R_2 = 0$$

或

$$W_1 + W_2 + W_3 - R_1 = R_2$$

設樑中任一斷面 HK 中任意一點 O ，取諸力對於此點之能率 (moment)，則滿足於第二條件時，必

$$W_1x_1 + W_2x_2 + W_3x_3 + R_1x_4 - R_2x_5 = 0$$

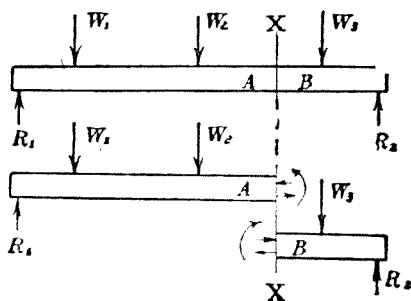
或

$$W_1x_1 + W_2x_2 + W_3x_3 + R_1x_4 = R_2x_5$$

故外力作用之樑若在平衡狀態時，上二條件式為必要。由第一條件式視之，則斷面右方諸力之代數和等於斷面左方諸力之代數和。由

第二條件式，則斷面右方諸力能率之代數和等於斷面左方諸力能率之代數和。

21. 剪力及彎曲能率. 第24圖示外力作用之樑中，假想一斷面 XX ，分樑為 A, B 二部。則此二部亦各平衡。然由前節斷面兩側力之代數和與其能率代數和皆各相等。故該斷面上內力，由右方諸力所生者與由左方諸力所生者，必大小同而方向反也。故欲知內力大小時，僅就右或左任一側研究其外力之作用即可。



第 24 圖

今使 A 部平衡之力為外力 W_1, W_2 及 R_1 與斷面 XX 上之內力。物體因外力作用必生歪與內

力,故樑受外力時,亦必生歪,即起彎曲. 而與此屈曲相當之內力起於斷面 XX ,可視為 B 部作用於 A 部上之力也.

水平分力之代數和為零,今外力無水平分力,故內力之水平分力之代數和必為零. 然斷面為垂直面,故水平力必垂直於斷面,而為拉或壓之作用. 此條件示作用於斷面 XX 上縱內力之代數和必為零.

次垂直分力之代數和必為零. 即外力與內力垂直分力之代數和須為零. 作用於 A 部之外力向下,為 $(W_1 + W_2 - R_1)$, 故 B 部作用於 A 部之力須向上而等於 $(W_1 + W_2 - R_1)$. 此力與斷面平行,對於斷面成剪內力. 即作用於斷面一側諸垂直力生剪內力於斷面上. 其代數和稱為作用於該斷面之剪力 (shearing force).

由上二條件觀之,斷面 XX 上縱內力與剪內力同時作用. 二者合成而為彎內力 (bending stress).

又平衡之第二條件謂諸力之能率之代數和爲零。今就斷面 XX 上任一點，因剪內力能率爲零，故斷面左方外力能率之代數和等於作用於斷面上縱內力能率之代數和。

任意一斷面之一側諸外力對於該斷面之能率之代數和，稱曰作用於該斷面之彎曲能率 (bending moment)。作用於該斷面上縱內力之能率之代數和，稱曰抵抗能率 (moment of resistance)。彎曲能率與抵抗能率相平衡，大小相等而方向相反。

加荷重於樑時，所生彎曲能率及剪力之大小，沿樑中各斷面而異其值。取樑之長爲橫坐標，彎曲能率或剪力之值爲縱坐標時，可得圖法的表示。如此所得線圖，稱曰彎曲能率圖 (bending moment diagram) 或剪力圖 (shearing force diagram)。

22. 樑與荷重之種類。作用樑上之彎曲能率與剪力之大小對於樑長之變化，因樑之支持

法與外力性質而異。若同一大小之樑，同總量之荷重作用時，亦因支持方法與荷重分布狀況而樑之強弱有不同者。

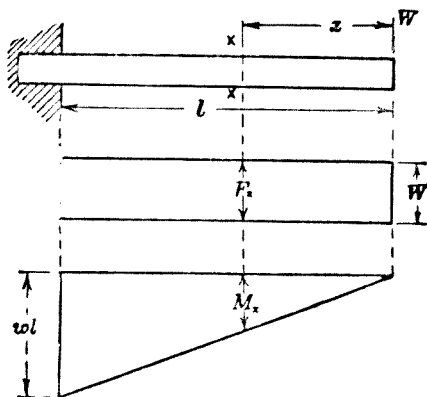
樑之支持法可分三種。(a) 固着樑之一端，其他端自由者，稱曰突出樑 (canti-lever)。(b) 有二個支點者為普通種類，分為支持樑 (supported beam) 與固着樑 (fixed beam 或 built-in beam 或 encastré beam) 二種。(c) 有三個以上之支點者曰連續樑 (continuous beam)。

荷重可分二種。若作用於樑之跨徑 (span) 中甚小部者，可視為集中於一點或數點。稱曰集中荷重 (concentrated load)。若連續作用於樑之全長或一部者，稱為分布荷重 (distributed load)。分布荷重中普通為分布狀態均一之樑，稱曰均布荷重 (uniform load)。

23. 突出樑。研究樑時有二要件。一為樑之支持法及荷重之作用法所生之彎曲能率與剪力等外部狀態；一為內部所生之內力與抵抗能

率等內部狀態是也。今先就外力諸關係研究之。

(1) 有一端上集中荷重者(第25圖)。



第 25 圖

樑之自由端 (free end) 上有集中荷重 W 時, 離荷重任意距離 x 處斷面 XX 上剪力及彎曲能率可求之如次。斷面右方僅有荷重 W 向下作用, 故剪力在任何斷面上為一定之值 W 。因之剪力圖為高 W 之矩形。而

$$F_x = W \dots \dots \dots (17)$$

次該斷面上彎曲能率之值 M_x 爲

$$M_x = Wx \dots \dots \dots (18)$$

故 M_x 與 x 成比例, 在固着端 (fixed end) 上爲最大. 有最大值 M_0 爲

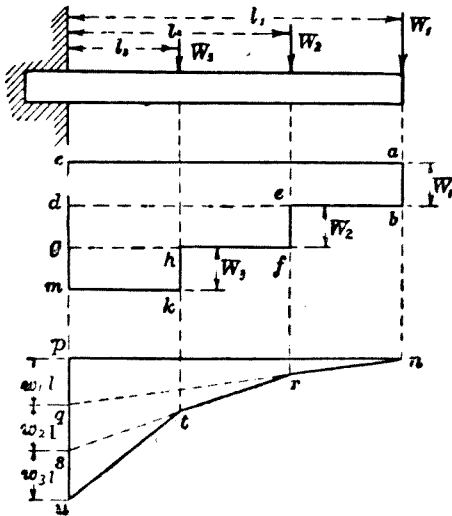
$$M_0 = WL \dots \dots \dots (18a)$$

圖上爲直角三角形, 自由端之高爲零, 而固着端之高爲 M_0 .

剪力圖與彎曲能率之圖, 正負符號之定法全爲任意. 上圖中剪力以將右部自左部剪下者爲正, 而彎曲能率以時針方向者爲正.

樑中一斷面上作用之彎曲能率與其所生內力相比例, 故若樑有均一斷面時, 當彎曲能率最大之斷面上內力最大. 此最大內力之斷面在全樑中爲最危險, 故稱曰危險斷面 (dangerous section). 本項中固着端之斷面即危險斷面. 論樑之強弱時, 求危險斷面之內力即可.

(2) 有多數集中荷重者 (第 26 圖).



第 26 圖

如圖所示 W_1, W_2, W_3 為集中荷重，其與固着端之距離各為 l_1, l_2, l_3 。此時可視為上項多數同時起生者。故剪力圖與彎曲能率圖將前項線圖重合而得。

剪力圖對於 W_1 為 $abcd$ ，對於 W_2 為 $efgd$ ，對於 W_3 為 $hkmng$ 。故全樑之剪力圖為 $abefhkmnc$ 。以式示之如下：

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ 大於 } l_2 \text{ 時,} \quad F_x = W_1 \\ x \text{ 在於 } l_2 \text{ 與 } l_3 \text{ 間時,} \quad F_x = W_1 + W_2 \\ x \text{ 小於 } l_3 \text{ 時,} \quad F_x = W_1 + W_2 + W_3 \end{array} \right\} \dots\dots(19)$$

彎曲能率圖對於荷重 W_1 爲 npq , 對於 W_2 爲 rqs , 對於 W_3 爲 tsu . (此等彎曲能率圖沿縱直線而表示, 故 qr 與 st 雖傾斜, 其縱長仍與水平同.) 故全樑之線圖爲 $nrtup$.

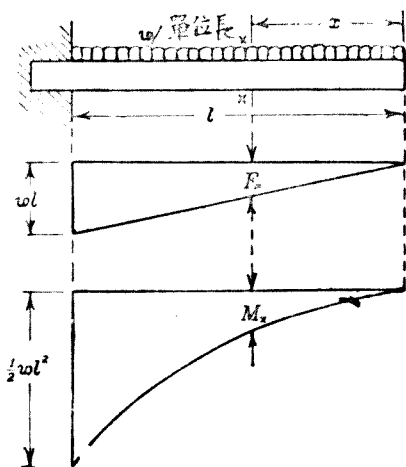
$$\left. \begin{array}{l} x \text{ 大於 } l_2 \text{ 時,} \quad M_x = W_1(l_1 - x) = W_1 l_1 - W_1 x \\ x \text{ 在 } l_3 \text{ 與 } l_2 \text{ 間時,} \quad M_x = W_1(l_1 - x) + W_2(l_2 - x) \\ \quad \quad \quad = W_1 l_1 + W_2 l_2 - (W_1 + W_2)x \\ x \text{ 小於 } l_3 \text{ 時,} \quad M_x = W_1(l_1 - x) + W_2(l_2 - x) \\ \quad \quad \quad + W_3(l_3 - x) \\ \quad \quad \quad = W_1 l_1 + W_2 l_2 + W_3 l_3 \\ \quad \quad \quad - (W_1 + W_2 + W_3)x \end{array} \right\} (20)$$

最大彎曲能率在於 $x=0$ 處即固着端上.

$$M_0 = W_1 l_1 + W_2 l_2 + W_3 l_3 \dots\dots\dots(20a)$$

(3) 樑全長上有均布荷重者(第 27 圖).

突出樑全長上有均布荷重時, 就隔離自由端 x 處之 XX 斷面論之, 則其右方每單位長有 w 荷重之作用, 故 x 長共有 wx 荷重, 而



第 27 圖

$$F_x = wx \dots \dots \dots (21)$$

即剪力與 x 成比例。其線圖為圖示之三角形，固着端之剪力最大，其值為

$$F_x = wl \dots \dots \dots (21a)$$

次因數多力之能率和等於合成力之能率。故彎曲能率可視為 wx 之集中荷重作用於 $\frac{1}{2}x$ 之距離處而生者也。即

$$M_x = wx \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}wx^2 \dots \dots \dots (22)$$

上式又可由微積分觀念證明之。蓋

$$dF_x = w \quad \therefore F_x = \int_0^x w dx = wx$$

$$dM_x = F_x dx \quad \therefore M_x = \int_0^x wx dx = \frac{1}{2}wx^2$$

(22) 式爲拋物線 (parabola) 式。其彎曲能率線圖爲拋物線。彎曲能率之最大值生於固着端。而

$$M_0 = \frac{1}{2}wl^2 \dots \dots \dots (22a)$$

或荷重全量設爲 W , 則 $W = wl$,

$$\therefore M_0 = \frac{1}{2}Wl \dots \dots \dots (22b)$$

(4) 均布荷重與集中荷重兼有者。

此時將前項計算合加之即可。即剪力與彎曲能率爲

$$F_x = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + wx \dots \dots \dots (23)$$

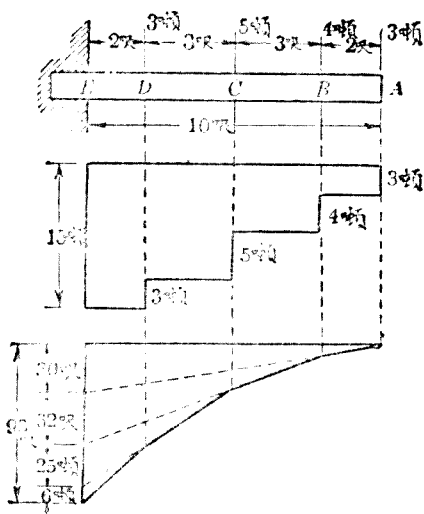
$$M_x = W_1(l_1 - x) + W_2(l_2 - x) + W_3(l_3 - x) \\ + \dots + \frac{1}{2}wx^2 \dots \dots \dots (24)$$

其最大值生於固着端，各為

$$F_0 = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + wl \dots \dots \dots (23a)$$

$$M_0 = W_1 l_1 + W_2 l_2 + W_3 l_3 + \dots + \frac{1}{2} wl^2 \dots \dots (24a)$$

例 1. 圖示突出樑上加荷重時，求剪力圖與彎曲能率圖。并求最大剪力與最大彎曲能率之值。



第 28 圖

$$F_B = 3 \text{ 噸}$$

$$F_C = 3 + 4 = 7 \text{ 噸}$$

$$F_D = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ 噸}$$

$$F_O = 3 + 4 + 5 + 3 = 15 \text{ 噸}$$

$$M_B = 3 \times 2 = 6 \text{ 呎噸}$$

$$M_C = (3 \times 5) + (4 \times 3)$$

$$= 15 + 12 = 27 \text{ 呎噸}$$

$$M_D = (3 \times 8) + (4 \times 6) + (5 \times 3)$$

$$= 24 + 24 + 15 = 63 \text{ 呎噸}$$

$$M_O = M_E = (3 \times 10) + (4 \times 8)$$

$$+ (5 \times 5) + (3 \times 2)$$

$$= 30 + 32 + 25 + 6 = 93 \text{ 呎噸}$$

例 2. 前題中若樑每呎重 $\frac{1}{5}$ 噸時, 最大剪力及最大彎曲能率之值如何?

樑自身重為均布荷重. 故將集中荷重與均布荷重合成之.

$$F_O = 15 + \left(\frac{1}{5} \times 10\right) = 15 + 2 = 17 \text{ 噸,}$$

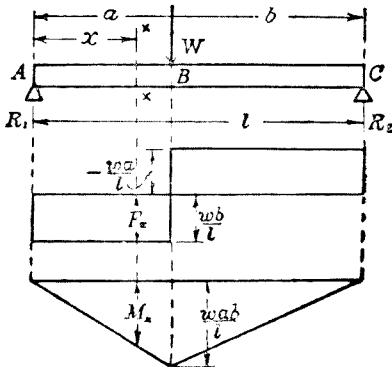
$$M_0 = 93 + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times 10^2 \right) = 93 + 10 = 103 \text{ 呎噸.}$$

24. 支持樑. (1) 有一個集中荷重者(第29圖).

圖中 ABC 為樑, A 及 C 為支點. 二點間任意一點 B 處有集中荷重 W . 此時 A 及 C 之支點僅受外力作用, 樑端彎曲時對於方向之變動, 毫無影響. 此謂之支持樑. 其兩端毫無彎曲能率之作用.

由平衡之條件, 求支點 A, C 上之反作用力.

$$-R_1 + W - R_2 = 0 \text{ (力之代數和)}$$



第 29 圖

$Wa - R_2l = 0$ (對於 A 點能率代數和)

$$\therefore R_1 = W \frac{b}{l}, \quad R_2 = W \frac{a}{l} \dots\dots\dots(25)$$

由此即可求剪力與彎曲能率。

剪力如下：

$$\left. \begin{array}{l} AB \text{ 間 } (F_x)_1 = R_1 = W \frac{b}{l} \\ BC \text{ 間 } (F_x)_2 = -R_2 = -W \frac{a}{l} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

彎曲能率如下：

$$\left. \begin{array}{l} AB \text{ 間 } (M_x)_1 = R_1 x_1 = W \frac{b}{l} x_1 \\ BC \text{ 間 } (M_x)_2 = R_1 x_2 - W(x_2 - a) \\ \quad \quad \quad = Wa - (W - R_1)x_2 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

故 $(M_x)_1$ 當 x_1 最大即 $x_1 = a$ 時為最大值。

$$M_0 = M_B = W \frac{ab}{l} \dots\dots\dots(27a)$$

此值與 $(M_x)_2$ 中 x_2 最小時即 $x_2 = a$ 時之值相等。

將此等值表於線圖即得第 29 圖。剪力圖由二矩形而成。於荷重作用點上自正移於負，而正面積與負面積相等。彎曲能率為三角形，荷

重作用點上有最大值。

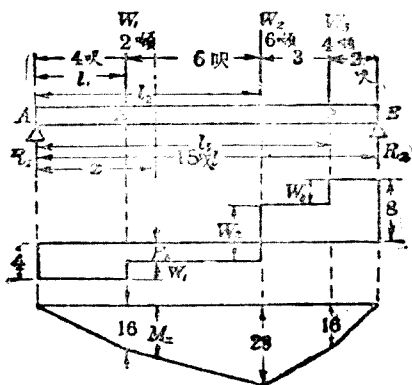
特別情形 支持樑上 W 在支點中央時最普通。此時 $a = b = \frac{l}{2}$ 。

$$\therefore R_1 = R_2 = \frac{W}{2} \dots\dots\dots (25a)$$

$$(F_x)_1 = \frac{W}{2}, (F_x)_2 = -\frac{W}{2} \dots\dots\dots (26a)$$

$$(M_x)_1 = \frac{W}{2} x_1, (M_x)_2 = W\left(a - \frac{x_2}{2}\right) \dots\dots\dots (27b)$$

$$M_A = M_B = \frac{1}{4} Wl \dots\dots\dots (27c)$$



第 30 圖

(2) 有多數集中荷重者(第 30 圖).

圖示集中荷重三個時與他數集中荷重時,其方法相同.

由平衡條件,

$$-R_1 + W_1 + W_2 + W_3 - R_2 = 0 \text{ (力)}$$

$$R_2 l - W_1 l_1 - W_2 l_2 - W_3 l_3 = 0 \text{ (能率)}$$

由此得反作用力爲

$$R_1 = \frac{W_1(l-l_1) + W_2(l-l_2) + W_3(l-l_3)}{l}$$

$$R_2 = \frac{W_1 l_1 + W_2 l_2 + W_3 l_3}{l}$$

剪力大小當集中荷重時,於外力作用點上始有變化. 外力與外力之間爲一定值. 而彎曲能率之大小於外力與外力之間,亦與樑長相比例而變化. 故線圖爲直線所成. 其作法先求外力作用點上彎曲能率之值即可,而後以直線連結圖上各點即得.

$$M_A = 0$$

$$M_B = R_1 l_1$$

$$M_C = R_1 l_2 - W_1(l_2 - l_1)$$

$$M_D = R_1 l_3 - W_1(l_3 - l_1) - W_2(l_3 - l_2)$$

$$M_E = 0$$

例 3. 第 30 圖中附記數值試計算之。

$$R_1 = \frac{2 \times 11 + 6 \times 5 + 4 \times 2}{15} = 4 \text{ 噸}$$

$$R_2 = \frac{2 \times 4 + 6 \times 10 + 4 \times 13}{15} = 8 \text{ 噸}$$

剪力如下：

$$AB \text{ 間, } F_x = R_1 = 4 \text{ 噸}$$

$$BC \text{ 間, } F_x = R_1 - W_1 = 4 - 2 = 2 \text{ 噸}$$

$$CD \text{ 間, } F_x = R_1 - W_1 - W_2 = 4 - 2 - 6 = -4 \text{ 噸}$$

$$DE \text{ 間, } F_x = R_1 - W_1 - W_2 - W_3 \\ = 4 - 2 - 6 - 4 = -8 \text{ 噸}$$

彎曲能率如下：

$$M_A = 0$$

$$M_B = R_1 l_1 = 4 \times 4 = 16 \text{ 呎噸}$$

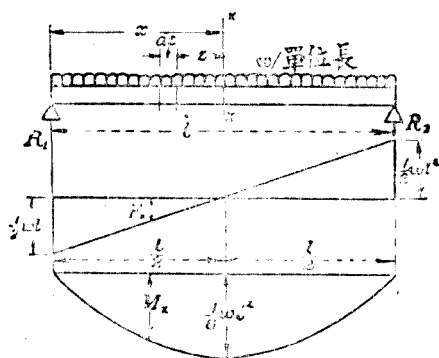
$$M_C = R_1 l_2 - W_1(l_2 - l_1)$$

$$= 4 \times 10 - 2 \times 6 = 40 - 12 = 28 \text{ 呎噸}$$

$$\begin{aligned}
 M_D &= R_1 l_3 - W_1(l_3 - l_1) - W_2(l_3 - l_2) \\
 &= 4 \times 13 - 2 \times 9 - 6 \times 3 = 52 - 18 - 18 = 16 \text{ 呎噸}
 \end{aligned}$$

$$M_E = 0$$

(3) 支點間全長上有均布荷重者(第31圖).



第 31 圖

均布荷重每單位長上設為 w ，則跨徑全長 l 上總荷重為 wl 。此時荷重分布與樑之支持法對於中央垂直線成對稱 (symmetry)。故 R_1 與 R_2 為同大，即

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2} wl \dots\dots\dots (28)$$

剪力在離 R_1x 處之橫斷面 NN 上為

$$F_x = R_1 - wx = \frac{1}{2}wl - wx \dots\dots\dots(29)$$

故剪力與 x 相比例而變化，其圖為傾斜直線。

$x = \frac{l}{2}$ 處為零，而變符號。極近支點之斷面處

$$F_0 = \frac{1}{2}wl \text{ (或 } F_0 = -\frac{1}{2}wl) \dots\dots\dots(29a)$$

彎曲能率在 NN 斷面上為

$$\begin{aligned} M_x &= R_1x - wx \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2}wlx - \frac{1}{2}wx^2 \\ &= \frac{1}{2}wx(l-x) \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

此關係為拋物線， M_x 在跨徑中央即 $x = \frac{l}{2}$ 處為最大，其值為

$$M_0 = \frac{1}{8}wl^2 \dots\dots\dots(30a)$$

上之結果以微積分求之如下

斷面 NN 左方距離 z 處設有 dz 之長，其上之荷重為 $w dz$ 。其對於 NN 之能率為 $z \cdot w dz$ 。

$$\therefore M_x = R_1 x - \int_0^x w z dz = \frac{1}{2} w l x - \frac{1}{2} w x^2 = \frac{1}{2} w x (l - x)$$

M_x 之最大值必滿足於

$$\frac{dM_x}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{2} w l - w x = 0$$

即 $x = \frac{1}{2} l$ 時, M_x 為最大, 其值易知其為 $\frac{1}{8} w l^2$.

(4) 支點間一部有均布荷重者(第32圖).

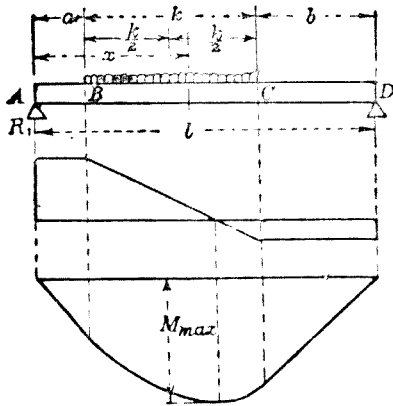
圖示由兩支點相隔 a, b 處有均布荷重之兩端, 其長 k , 單位長上荷重為 w . 則荷重全量為 wk .

$$-R_1 + wk - R_2 = 0$$

$$R_1 l - wk \left(b + \frac{k}{2} \right) = 0$$

$$\therefore R_1 = \frac{wk}{l} \left(b + \frac{k}{2} \right), \quad R_2 = \frac{wk}{l} \left(a + \frac{k}{2} \right) \dots \dots (31)$$

剪力如下:



第 32 圖

$$\left. \begin{aligned}
 AB \text{ 間 } F_x &= R_1 \\
 BC \text{ 間 } F_x &= R_1 - w(x-a) \\
 CD \text{ 間 } F_x &= R_1 - wk = -(wk - R_1) = -R_2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(32)$$

故 BC 間剪力大小與 x 相比例而變化，為傾斜直線。BC 間由正變負，通過於零。

$$R_1 - w(x_0 - a) = 0$$

$$x_0 = a + \frac{R_1}{w} = a + \frac{k}{l} \left(b + \frac{k}{2} \right) \dots\dots\dots(32a)$$

彎曲能率如下：

$$\begin{aligned}
 AB \text{ 間 } M_x &= R_1 x \dots\dots\dots (\text{傾斜直線}) \\
 BC \text{ 間 } M_x &= R_1 x - w(x-a) \frac{(x-a)}{2} \\
 &= R_1 x - \frac{w}{2} (x-a)^2 \dots\dots\dots (\text{拋物線}) \\
 CD \text{ 間 } M_x &= R_1 x - wk \left(x - a - \frac{k}{2} \right) \\
 &= wk \left(a + \frac{k}{2} \right) - (wk - R_1) x \dots\dots (\text{傾斜直線})
 \end{aligned} \quad (33)$$

最大彎曲能率作用於剪力零之斷面上。其值爲

$$M_0 = R_1 \left\{ a + \frac{k}{2} \left(b + \frac{k}{2} \right) \right\} \dots\dots\dots (33a)$$

特別情形。若均布荷重在跨徑中央時， $a = b$ 。

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2} wk \dots\dots\dots (31a)$$

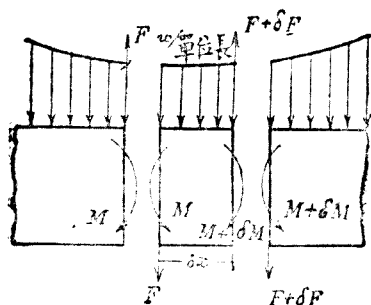
$$x_0 = a + \frac{k}{2} = \frac{l}{2} \dots\dots\dots (31b)$$

$$M_0 = \frac{wk}{2} \left(a + \frac{k}{4} \right) = \frac{wk}{4} \left(l - \frac{k}{2} \right) \dots\dots\dots (33c)$$

25. 剪力與彎曲能率之關係。今取連續分布荷重之樑之一部分，其極小長 δx 上，則荷重

可視為均一。設其單位長上荷重為 w 。長 δx 兩端之剪力設為 F 及 $F + \delta F$ ，彎曲能率設為 M 及 $M + \delta M$ ，則由力之平衡條件，

$$(F + \delta F) = F + w\delta x$$



第 33 圖

因之 $\delta F = w\delta x$ ，或 $\frac{\delta F}{\delta x} = w$ 。若 δx 為無限小時，

$$\frac{dF}{dx} = w \dots \dots \dots (34)$$

即樑長上剪力之變化率等於荷重單位長之強。若集中荷重，則荷重間無他荷重，而無剪力之變化，故剪力值為一定。若均布荷重，則 w 之值

一定，而剪力之變化率亦一定。其線圖易知其為傾斜直線。

對於自原點 x_1, x_2 距離處二斷面積分之，則

$$F_2 - F_1 = \int_{x_1}^{x_2} w dx$$

示剪力變化之總量。其值與剪力圖上 x_1, x_2 兩縱坐標間之面積相當。

次求對於此微小片左端之能率，求平衡之條件，

$$M + (F + \delta F) \delta x - w \delta x \cdot \frac{\delta x}{2} - (M + \delta M) = 0$$

略去其中二次微小量，則

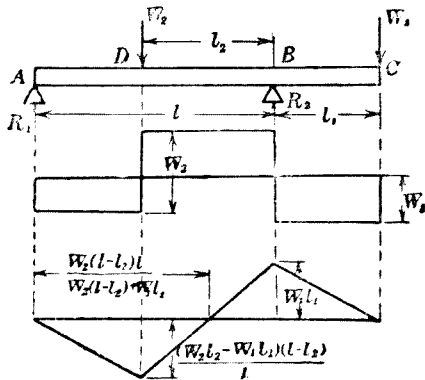
$$F \delta x - \delta M = 0 \quad \therefore \frac{\delta M}{\delta x} = F$$

若 δx 無限小時，

$$\frac{dM}{dx} = F \dots \dots \dots (35)$$

即對於樑長之彎曲能率變化率等於剪力。若集中荷重時，兩荷重間剪力一定，故彎曲能率變化率亦一定，其線圖為傾斜直線。

剪力之值通過零時，變其符號，由上式 $\frac{dM}{dx} = 0$ ，故該點上彎曲能率為極大或極小，此極大值或極小值中絕對值之最大者為最大彎曲能率。此原理對於求支持樑中危險斷面之位置上，應用甚廣。而集中荷重時，則僅荷重作用點上，變化剪力之值。



第 34 圖

26. 支點外有荷重時之支持樑。上述之支持樑上，荷重均在兩支點間，而支點上彎曲能率為零。若樑之支點外突出部上有荷重時，則支

點上彎曲能率不爲零。第34圖上支點 A, B 外突出部 C 處有集中荷重 W_1 之作用。若 A, B 間無他荷重時，則 A 處反作用力因與 W_1 平衡，必向下。

A, B 間若有他荷重 W_2 ，則其值未達適當大小時， A 處反動力亦向下。 W_2 增加時， R_1 減小，後爲零而變爲向上。

由平衡條件而求反作用力，則

$$-R_1 + W_2 - R_2 + W_1 = 0$$

$$R_1 l - W_2 l_2 + W_1 l_1 = 0$$

由此

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= -\frac{W_1 l_1 - W_2 l_2}{l} \\ R_2 &= \frac{W_1 (l + l_1) + W_2 (l - l_2)}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots (36)$$

故 $W_1 l_1 > W_2 l_2$ 時， R_1 向下， $W_1 l_1 = W_2 l_2$ 時， $R_1 = 0$ ， $W_1 l_1 < W_2 l_2$ 時， R_1 向上。圖所示者乃 $W_1 l_1 < W_2 l_2$ 也。

剪力之值如下：

$$AD \text{ 間} \quad F_x = R_1 = \frac{W_2 l_2 - W_1 l_1}{l}$$

$$DB \text{ 間} \quad F_x = R_1 - W_2 = -\frac{W_2(l-l_2) + W_1 l_1}{l}$$

$$BC \text{ 間} \quad F_x = R_1 - W_2 + R_2 = W_1$$

彎曲能率之值如下：

$$M_A = 0$$

$$M_D = R_1(l-l_2) = \frac{(W_2 l_2 - W_1 l_1)(l-l_2)}{l}$$

$$M_B = R_1 l - W_2 l_2 = -W_1 l_1$$

$$M_C = 0$$

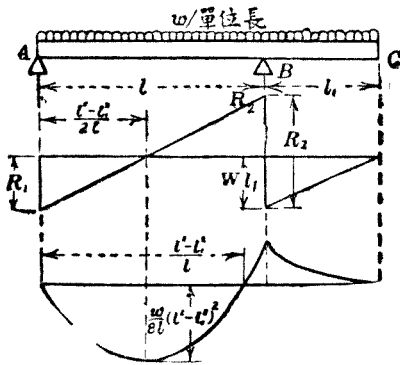
M_D 爲正而 M_B 爲負，故其間彎曲能率必有爲零之處。但線圖爲一直線，故此零點惟一。今設由 A 至該點之距爲 x_0 ，則

$$R_1 x_0 - W_2 \{x_0 - (l-l_2)\} = 0$$

或 $(R_1 - W_2) x_0 + W_2(l-l_2) = 0$

故 $x_0 = \frac{W_2(l-l_2)}{W_2 - R_1} = \frac{W_2 l(l-l_2)}{W_2(l-l_2) + W_1 l_1} \dots \dots \dots (37)$

均布荷重分布於樑之全長時如第 35 圖。此時荷重全量爲 $w(l+l_1)$ ，故



第 35 圖

$$-R_1 + w(l + l_1) - R_2 = 0$$

$$-R_2 l + w(l + l_1) \frac{l + l_1}{2} = 0$$

故

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{w(l + l_1)(l - l_1)}{2l} \\ R_2 &= \frac{w(l + l_1)^2}{2l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

(圖中 $l > l_1$, 若 $l_1 > l$, 則 R_1 爲負而向上.)

剪力大小如下:

$$F_A = R_1 = \frac{w(l^2 - l_1^2)}{2l}$$

$$F_{(B-0)} = R_1 - wl = -\frac{w(l^2 + l_1^2)}{2l}$$

$$F_{(B+0)} = R_1 - wl + R_2 = wl_1$$

剪力在 A 處爲正, B 處爲負. 故其間必有等於零之處. 然其線圖爲一直線, 故零點惟一. 設自 A 至此點之距爲 x_0 , 則

$$R_1 - wx_0 = 0 \quad \text{或} \quad \frac{w(l^2 - l_1^2)}{2l} - wx_0 = 0$$

$$\therefore x_0 = \frac{l^2 - l_1^2}{2l}$$

此點上彎曲能率爲極大或極小. 而彎曲能率之值如下:

$$AB \text{ 間} \quad M_x = R_1x - \frac{1}{2}wx^2 = \left(R_1 - \frac{1}{2}wx\right)x$$

$$BC \text{ 間} \quad M_x = R_1x - \frac{1}{2}wx^2 + R_2(x-l)$$

$$= w(l+l_1)x - \frac{1}{2}wx^2 - R_2l$$

由此求 M_B , 則 $M_B = -\frac{1}{2}wl_1^2$.

$x = x_0$ 時, 則彎曲能率爲極大或極小, 故

$$M_0 = \frac{w}{8l^2} (l^2 - l_1^2)^2$$

此值爲正，故至 B 間必有爲零之處。設 A 點至該處之距爲 x_1 ，則

$$\frac{w}{2l} (l^2 - l_1^2)x_1 - \frac{w}{2} x_1^2 = 0$$

因之 $(l^2 - l_1^2)x_1 - lx_1^2 = 0$

或 $x_1(l^2 - l_1^2 - lx_1) = 0$

故 $x_1 = 0$ 或 $x_1 = \frac{l^2 - l_1^2}{l}$

但 $x_1 = 0$ 卽 A 點。

例 4. 第 36 圖上支點外有荷重之樑，求剪力圖與彎曲能率圖。并計算最大剪力與最大彎曲能率。

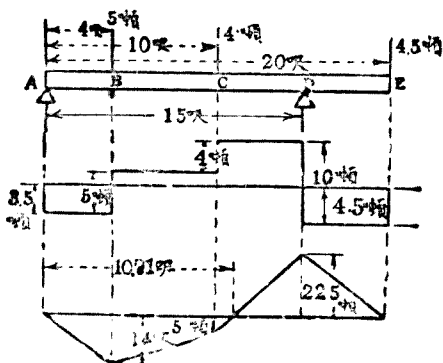
先求反作用力如下：

$$-R_1 + 5 + 4 - R_2 + 4.5 = 0$$

$$(5 \times 4) + (4 \times 10) - 15R_2 + (4.5 \times 20) = 0$$

$$\therefore R_1 = 3.5 \text{ 噸}$$

$$R_2 = 10 \text{ 噸}$$



第 36 圖

次求剪力如下：

$$AB \text{ 間 } F_x = R_1 = 3.5 \text{ 噸}$$

$$BC \text{ 間 } F_x = R_1 - 5 = -1.5 \text{ 噸}$$

$$CD \text{ 間 } F_x = R_1 - 5 - 4 = -5.5 \text{ 噸}$$

$$DE \text{ 間 } F_x = R_1 - 5 - 4 + R_2 = 4.5 \text{ 噸}$$

故最大剪力作用於 CD 間各斷面，其值為

$$F_0 = -5.5 \text{ 噸}$$

彎曲能率如下：

$$M_A = 0$$

$$M_B = 3.5 \times 4 = 14 \text{ 呎噸}$$

$$M_C = 3.5 \times 10 - 5(10 - 4) = 5 \text{ 呎噸}$$

$$M_D = 3.5 \times 15 - 5(15 - 4) - 4(15 - 10) = -22.5 \text{ 呎噸}$$

$$M_E = 0$$

故最大彎曲能率作用於 D 點，其值為

$$M_0 = -22.5 \text{ 呎噸}$$

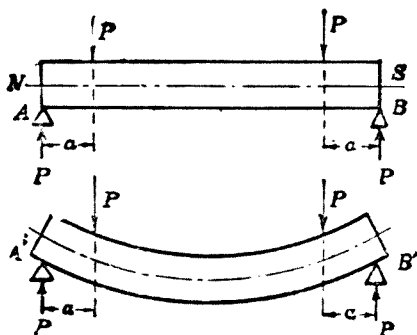
次求彎曲能率為零之位置如下：

$$3.5x_0 - 5(x_0 - 4) - 4(x_0 - 10) = 0$$

$$\therefore x_0 = \frac{60}{5.5} = 10.91 \text{ 呎}$$

27. 彎曲所生之內力。外力垂直作用於樑之橫軸使生彎曲時，則對於彎曲能率生縱內力之抵抗能率，而同時樑之各斷面上生剪內力以抵抗外力。此二種內力合成而為彎曲內力。若樑之兩端僅有偶力作用使彎曲時，則剪內力不生，僅有彎曲能率之作用。此謂之單純彎曲 (simple bending)。實際上樑一般不僅受單純彎曲，而必同生剪內力。但此剪內力較縱內力為甚小，故除特別情形外，近似的可視為僅有縱

內力作用之單純彎曲作用。

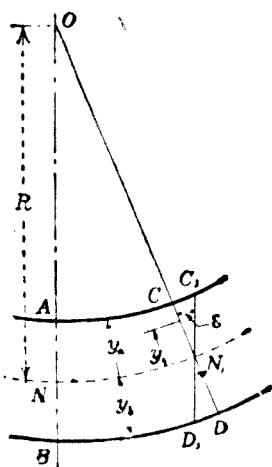


第 37 圖

第 37 圖上 AB 爲均一斷面之樑，兩端加以等大反向之偶力，則樑如 $A'B'$ 而彎曲。此時樑之上側較原長短縮，而下側較原長伸長。因之上側有壓內力而下側有拉內力之作用也明矣。如此樑之上下側生反對之歪，則其中間必有無伸縮之面之存在。此面稱曰中性面 (neutral surface)。加外力時，中性面僅受彎曲而毫無伸縮。此面互於樑之全長而與外力成直角。中性面與橫斷面相交之直線，稱曰該斷面之中性軸

(neutral axis). 故中性面為中性軸之連續軌跡.

研究彎曲作用時, 普通由下之假定為便. 即橫斷面(平面)當彎曲後亦仍保持其平面, 且仍與樑之縱軸成直角.



第 38 圖

第 38 圖上 NN_1 為中性面. AB, CD 為樑中相接近之二橫斷面. 此二斷面不受外力作用時相平行. 但加荷重後樑生彎曲, 而二斷面傾斜, 其沿長相交於 O . 今通過 N_1 作 $C_1N_1D_1$ 與 AB 平行, 則

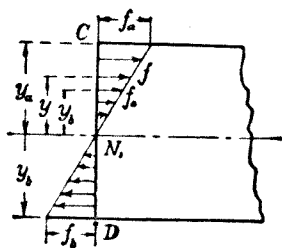
AC_1 及 BD_1 均等於 NN_1 , 即各等於 AC 及 BD 之原長。因之彎曲後, 上面縮短 CC_1 而下面伸長 DD_1 。

設彎曲所生之歪在彈性限界以內, 而 C 及 D 處內力各為 f_a 與 f_b , 則由呼克法則,

$$\overline{CC_1} = \frac{f_a \times \overline{AC_1}}{E} = f_a \frac{\overline{NN_1}}{E}$$

$$\overline{DD_1} = \frac{f_b \times \overline{BD_1}}{E} = f_b \frac{\overline{NN_1}}{E}$$

如第 39 圖所示, C 處內力為垂直壓內力, 而 D 處內力為垂直拉內力。



第 39 圖

平行於中性面之他面上, 其伸長或短縮之量與由 NN_1 至該面之距離成正比例。故 CN_1 或 N_1D 等面上任意點之內力亦與由 NN_1 至該點

距離成正比例。而內力分布狀況可以三角形表示之。今由 NN_1 相距 y 處之點上內力設為 f ，而至為 ε ，則有下之比例式，

$$\frac{\varepsilon}{CC_1} = \frac{f}{f_a}$$

但
$$\frac{\varepsilon}{CC_1} = \frac{y}{y_a}$$

$$\therefore \frac{f}{f_a} = \frac{y}{y_a}$$

或
$$f = f_a \cdot \frac{y}{y_a} \dots\dots\dots(39)$$

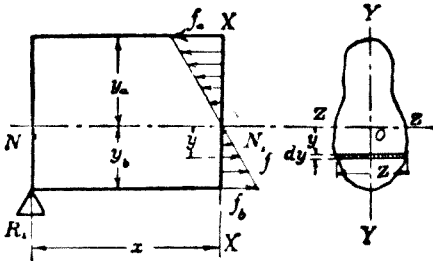
若由 NN_1 單位距離處之內力設為 f_0 ，則

$$f_a = f_0 y_a, \quad f_b = f_0 y_b \dots\dots\dots(39a)$$

一般
$$f = f_0 y \dots\dots\dots(39b)$$

今欲示作用於斷面 NN 上彎曲能率與抵抗能率之關係，將斷面與縱內力示如第 40 圖。 NN_1 為中性面， ZZ 為中性軸。斷面 NN 上縱內力之值因與中性軸之距離而異。但取一極小部分，則可視為有均一之內力。今距中性軸 y 處一平行微小面積 a ，其上內力之強設為 f ，則

該面積上力之全量為 fa . 而此力對於中性軸之能率為 fay .



第 40 圖

斷面 XX 由多數平行於 ZZ 軸之微小面積 a 集合而成. 設此等微小面積各為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. 其上之內力各為 $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$. 自中性軸至此等微小面積之距各為 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$. 則此等微小面積上作用之力各為 $f_1 a_1, \dots, f_n a_n$. 而其代數和必等於全斷面上作用內力之總量. 由平衡條件, 此等縱內力之代數和必為零. 故

$$f_1 a_1 + f_2 a_2 + f_3 a_3 + \dots + f_n a_n = 0$$

但 $f = f_0 y$, 故

$$f_0 a_1 y_1 + f_0 a_2 y_2 + f_0 a_3 y_3 + \dots + f_0 a_n y_n = 0$$

$$\text{或} \quad f_0(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \cdots + a_ny_n) = 0$$

然 f_0 爲一定值，非等於零，故上式若成立時，必

$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \cdots + a_ny_n = 0$$

此 $(a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n)$ 爲微小面積至中性軸之距離與微小面積之相乘積之總和。此謂之斷面積之幾何學的能率 (geometrical moment of area)。若以微積分記號表示之，則微小面積上總內力爲 $fzdy$ 。故全斷面上總內力爲 $\int_{y_b}^{y_a} fzd y$ 。

$$\therefore \int_{y_b}^{y_a} fzd y = 0$$

或

$$f_0 \int_{y_b}^{y_a} zydy = 0$$

此 $\int_{y_b}^{y_a} zydy$ 爲面積之幾何學的能率。

故樑之任意斷面上縱內力之代數和爲零時，其對於中性軸上斷面之幾何學的能率必爲零。但面積之幾何學的能率爲零之軸必通過該面積之重心，故中性軸必通過斷面之重心。

何者，設某平面形上任意軸至重心之距為 \bar{y} ，則

$$\bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \cdots + a_n y_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}$$

故若該軸通過重心時，必 $\bar{y} = 0$ ，因之 $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n = 0$ 。反之，若 $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n = 0$ ，則 \bar{y} 易知其為零，故軸過重心。但樑假定其為等質 (homogeneous)。

次內力對於中性軸之能率代數和即為抵抗能率，設以 M_r 表之，則因 $f = f_0 y$ ，故

$$M_r = f_0 (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + \cdots + a_n y_n^2)$$

此 $(a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \cdots + a_n y_n^2)$ 為對於中性軸上斷面之慣性能率 (moment of inertia)，通常以 I 表之。或以微積分記號表之，則微小面積上總計內力之能率為

$$dM_r = (fz dy) \times y = f y z dy$$

但 $f = f_0 y$ 。

$$\therefore dM_r = f_0 y^2 dy$$

故
$$M_r = f_0 \int_{y_b}^{y_a} zy^2 dy$$

而
$$I = \int_{y_b}^{y_a} zy^2 dy$$

$$\therefore M_r = f_0 I$$

或因
$$f_0 = \frac{f}{y}$$

$$\therefore M_r = f \frac{I}{y} \dots \dots \dots (40)$$

然抵抗能率等於對於同軸之外力能率，即等於該斷面上之彎曲能率。設彎曲能率以 M 表之，則

$$M_r = M$$

因之
$$M = f \frac{I}{y} \dots \dots \dots (41)$$

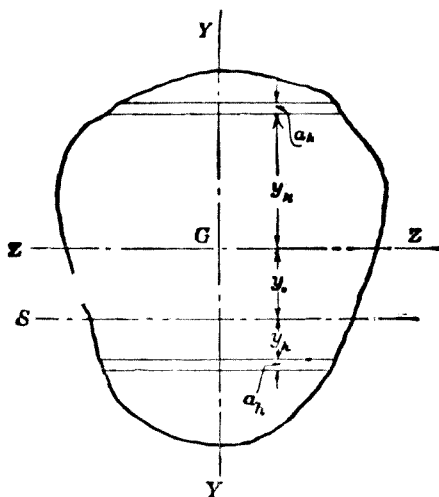
樑之最上面或最下面受最大之內力，故樑之強度以此等面上內力定之。此謂之表皮內力 (skin stress)。故

$$M = f_a \frac{I}{y_a} \text{ 或 } M = f_b \frac{I}{y_b} \dots \dots \dots (41a)$$

$\frac{I}{y_a}$ 或 $\frac{I}{y_b}$ 因樑之斷面形狀與大小而定，對於材料性質毫無關係。此謂之斷面係數(modulus of section)，通常以 Z 表之。故上式又可書之如下：

$$M = fZ \dots \dots \dots (41b)$$

28. 慣性能率。前節所述面積之慣性能率均對於中性軸即通過斷面重心之軸者也。但一般面積之慣性能率可對於任何軸而求得之。



第 41 圖

圖中 G 爲平面形重心, ZZ 爲通過重心之軸 (縱斷面上之中性軸), SS 爲相距 y_0 之他平行軸. 平面形面積設爲 A , 今分成平行於軸之多數微小面積 a_1, a_2, \dots, a_n , 則對於 ZZ 之慣性能率爲

$$I_0 = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2$$

或
$$I_0 = \int y^2 dA = \int_{y_0}^{y_n} y^2 z dy$$

對於 SS 之慣性能率同樣爲

$$\begin{aligned} I &= a_1 (y_1 \pm y_0)^2 + a_2 (y_2 \pm y_0)^2 + \dots + a_n (y_n \pm y_0)^2 \\ &= a_1 (y_1^2 \pm 2y_0 y_1 + y_0^2) + a_2 (y_2^2 \pm 2y_0 y_2 + y_0^2) + \dots \\ &\quad + a_n (y_n^2 \pm 2y_0 y_n + y_0^2) \\ &= (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2) \pm 2y_0 (a_1 y_1 + a_2 y_2 \\ &\quad + \dots + a_n y_n) + (a_1 + a_2 + \dots + a_n) y_0^2 \end{aligned}$$

但
$$a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2 = I_0$$

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n = 0$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = A$$

故
$$I = I_0 + A y_0^2 \dots \dots \dots (12)$$

故對於通過重心之軸, 慣性能率若已知時, 則

對於他平行軸之慣性能率亦可求得。或上式變形爲

$$I_0 = I - Ay_0^2 \dots\dots\dots (42a)$$

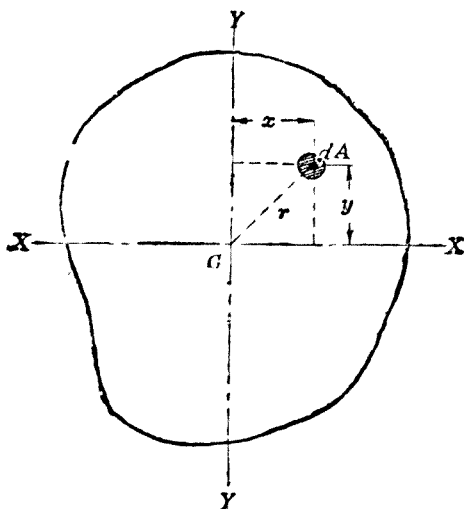
則對於任意軸之慣性能率若已知時，對於通過重心之平行軸，其慣性能率亦可求得。

$\sqrt{\frac{I}{A}}$ 稱曰對於 SS 軸，某平面形之回轉半徑 (radius of gyration)。普通以 k 表之，即

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \text{ 或 } Ak^2 = I \dots\dots\dots (43)$$

複雜平面形之慣性能率，可分成多數慣性能率已知之平面形，而用 (42) 及 (42a) 之形以求之。

極慣性能率。以上所述者乃對於平面形上之軸之慣性能率也。若對於通過平面形重心而垂直於平面之軸之慣性能率，則稱曰極慣性能率 (polar moment of inertia)。通常以 J 表之。第 42 圖中 G 爲平面形重心，對於 G 上垂直於平面之軸，其慣性能率如下：



第 42 圖

$$J_0 = a_1 r_1^2 + a_2 r_2^2 + \dots + a_n r_n^2$$

今 XX, YY 爲平面上通過 G 之兩直角軸, 則

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore J_0 = a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2(x_2^2 + y_2^2) + \dots$$

$$+ a_n(x_n^2 + y_n^2)$$

$$= (a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2)$$

$$+ (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2)$$

$$\text{但} \quad a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 = I_x$$

$$a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + \cdots + a_ny_n^2 = I_y$$

$$\therefore J_0 = I_x + I_y \cdots \cdots \cdots (44)$$

故極慣性能率等於對於重心上二直角軸之慣性能率之和。

或以微積分表之如下：

$$J_0 = \int r^2 dA, \text{ 但 } r^2 = x^2 + y^2, dA = dx dy,$$

$$\therefore J_0 = \int \int (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int \int x^2 dx dy + \int \int y^2 dx dy$$

$$= \int x^2 y dx + \int xy^2 dy = I_x + I_y$$

圓，正方形等可以相成直角二軸分成四同形同大之面積，故 $I_x = I_y$ ，因之對於此等平面形，

$$J_0 = 2I_x = 2I_y \cdots \cdots \cdots (44a)$$

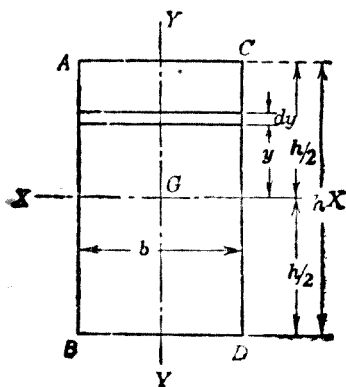
29. 重要平面形之慣性能率與斷面係數。

通常所用樑之斷面形多為對稱的有規則平面形。其慣性能率與斷面係數可由數學的方法

求出之。但用積分法爲便。

(1) 矩形。矩形斷面 (rectangular section) 之樑，外力常垂直於其一邊。故對於通過重心而平行於一邊之二軸之慣性能率最重要。第 43 圖中 G 爲重心， XX , YY 爲平行於一邊之直角二軸。先求矩形 $ABCD$ 對於 XX 軸之慣性能率 I_x 。平行於 XX 之微小面積 dA 爲 $b dy$ ，故微小面積對於 XX 之慣性能率爲

$$dI_x = y^2 dA = by^2 dy$$



第 43 圖

$$\begin{aligned}
 \therefore I_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} by^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\
 &= \frac{b}{3} \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right\} = \frac{b}{3} \cdot \frac{h^3}{4} \\
 &= \frac{1}{12} bh^3 \\
 \therefore I_x &= \frac{bh^3}{12} \dots\dots\dots (15)
 \end{aligned}$$

$Z_x = \frac{I_x}{y}$, 而 y 之最大值為 $\frac{h}{2}$, 故

$$Z_x = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \dots\dots\dots (15a)$$

又對於平行於 XX 之底邊 BC 之慣性能率 I_b 為

$$I_b = I_x + bh \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3} \dots\dots\dots (15b)$$

同樣對於 YY 軸與 CD 邊之慣性能率, 可於上式中交換 b 及 h 而得. 即

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \dots\dots\dots (15c)$$

$$Z_y = \frac{hb^2}{6} \dots\dots\dots(45d)$$

$$I_x = \frac{hb^3}{3} \dots\dots\dots(45e)$$

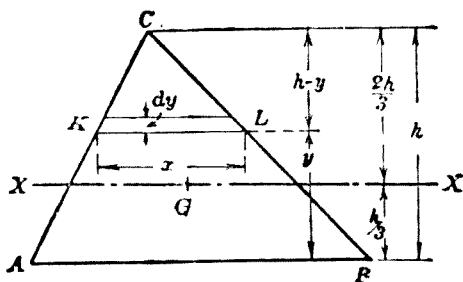
(2) 正方形 正方形 (square section) 乃矩形各邊相等者，即矩形斷面諸式中使 $b=h$ 即可。設正方形一邊之長為 h ，則

$$I_x = I_y = \frac{h^4}{12} \dots\dots\dots(46)$$

$$Z_x = Z_y = \frac{h^3}{6} \dots\dots\dots(46a)$$

$$I_b = I_c = \frac{h^4}{3} \dots\dots\dots(46b)$$

(3) 三角形 三角形斷面 (triangular section) 之樑普通為正三角形或二等邊三角形，而外力垂直加於底邊。對於平行於底邊之軸之慣性能率為必要。然其求法與不等邊三角形無異。故示其一般如下。但先求對於底邊之慣性能率，而後求對於通過重心之軸之慣性能率。



第 44 圖

第 44 圖中, ABC 爲已知三角形, 底邊 AB 之長爲 b , 高爲 h , 作 AB 之平行線 KL , 則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle KLC$ 相似. 故

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

即

$$x = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$dA = xdy = \frac{b}{h}(h-y)dy$$

故

$$I_a = \int y^2 dA = \int_0^h \frac{b}{h}(h-y)y^2 dy = \frac{b}{h} \int_0^h (hy^2 - y^3) dy$$

$$= \frac{b}{h} \left[\frac{h}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^h = \frac{b}{h} \left\{ \frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right\} = \frac{bh^3}{12} \dots\dots(47)$$

三角形之重心設為 G , 則 G 距 AB 為 $\frac{h}{3}$. 而 AB

與 XX 之距離為 $\frac{h}{3}$. 故

$$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{3} \right)^2 = \frac{bh^3}{36} \dots\dots(47a)$$

對於通過頂點平行於底邊之軸, 則

$$I_c = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \left(\frac{2}{3} h \right)^2 = \frac{bh^3}{4} \dots\dots(47b)$$

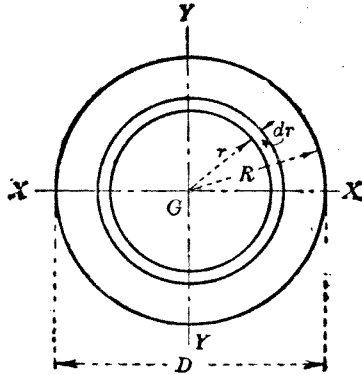
斷面係數有二值. 即

$$\left. \begin{aligned} y_1 = \frac{h}{3}, \quad Z_1 = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{h}{3}} = \frac{bh^2}{12} \\ y_2 = \frac{2}{3} h, \quad Z_2 = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{2}{3} h} = \frac{bh^2}{24} \end{aligned} \right\} \dots\dots(47c)$$

(4) 圓形. 圓形斷面 (circular section) 之樑. 如前所述, 有 $J_0 = 2I_x = 2I_y$ 之關係. 故先求 J_0 為便.

如第 45 圖所示，將圓分為多數同心環，則微小環面積為

$$dA = 2\pi r dr$$



第 45 圖

對於通過中心垂直軸之小面積極慣性能率為

$$dJ_0 = r^2 dA = 2\pi r^3 dr$$

故圓形斷面之極慣性能率為

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{\pi R^4}{2} \end{aligned}$$

$$\text{或 } R = \frac{D}{2}, \quad \therefore J_0 = \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

因之對於通過中心之軸 XX 或 YY 之慣性能率爲

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi D^4}{64} \dots\dots\dots(48)$$

y 之最大值爲 $\frac{D}{2}$, 故

$$Z_x = Z_y = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32} \dots\dots\dots(48a)$$

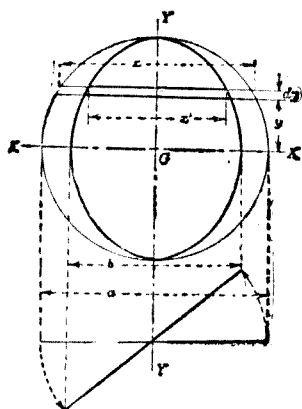
(5) 橢圓形. 橢圓形斷面 (elliptic section) 之樑, 普通外力直角作用於長軸 (major axis) 或短軸 (minor axis). 如第 46 圖所示, 橢圓可視爲圓之傾斜射影. a 與 b , x 與 x' 間有次之關係.

$$b = a \cos \theta, \quad x' = x \cos \theta$$

故橢圓上平行於 XX 軸之微小面積爲

$$x' dy = x dy \cdot \cos \theta$$

其對於 XX 軸之慣性能率爲 $y^2 x' dy = xy^2 dy \cdot \cos \theta$.



第 46 圖

$$\therefore I_x = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} xy^2 \cos \theta \cdot dy$$

但 $\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} xy^2 dy$ 為對於 XX 軸, 圓形斷面之慣性能

率, 其值由 (48) 為 $\frac{\pi a^4}{64}$. 故

$$I_x = \frac{\pi a^4}{64} \cos \theta = \frac{\pi a^3}{64} \cdot a \cos \theta = \frac{\pi a^3 b}{64} \dots \dots (49)$$

y 之最大值為 $\frac{a}{2}$, 故

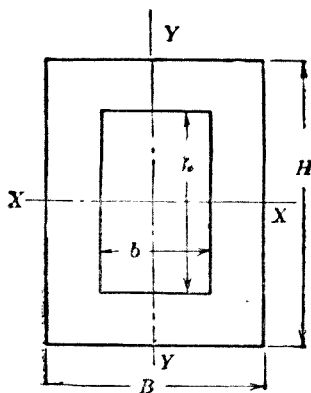
$$Z_x = \frac{\pi a^3 b}{64} = \frac{\pi a^2 b}{\frac{a}{2}} \dots \dots \dots (49a)$$

對於YY軸,則交換上式中a與b即可.

$$I_y = \frac{\pi a b^3}{64} \dots \dots \dots (49b)$$

$$Z_y = \frac{\pi a b^2}{32} \dots \dots \dots (49c)$$

以上所述均最重要之簡單斷面形. 他之複雜斷面形可視為此等簡單形之合成,應用以上結果而算出其慣性能率也.



第 47 圖

(6) 中空矩形(第47圖). 中空斷面形之慣性能率可自外形實體之慣性能率與對於同軸中空部分之慣性能率之相差而求得之. 內外矩形之重心相一致,故通過重心之軸亦合一.

$$I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{BH^3 - bh^3}{12} \dots\dots\dots(50)$$

$$Z_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H} \dots\dots\dots(50a)$$

同樣 $I_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12} \dots\dots\dots(50b)$

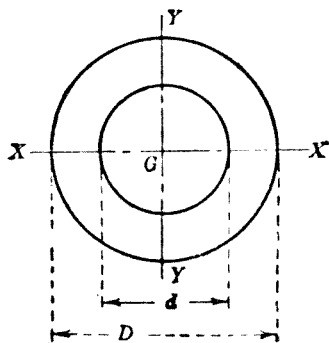
$$Z_y = \frac{HB^3 - hb^3}{6B} \dots\dots\dots(50c)$$

(7) 中空正方形. 就(50)式中 $B=H$, $b=h$ 即得.

$$I_x = I_y = \frac{H^4 - h^4}{12} \dots\dots\dots(51)$$

$$Z_x = Z_y = \frac{H^4 - h^4}{6H} \dots\dots\dots(51a)$$

(8) 中空圓形(第48圖). 此為直徑 D 圓之慣性能率與直徑 d 圓之慣性能率之相差.

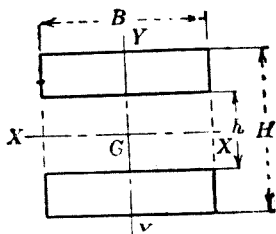


第 48 圖

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \dots \dots (52)$$

$$Z_x = Z_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \dots \dots (52a)$$

(9) 非相似形之中空斷面形。上述之中空斷面形，外形與中空部相似，重心共通。今內外形雖不相似，若重心共通時，亦可由同樣方法求其慣性能率。例如第49圖之形，外形矩形與中空矩形非相似，但其重心共通。故對於XX及YY軸之慣性能率各為



第 49 圖

$$I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{Bh^3}{12} = \frac{B(H^3 - h^3)}{12} \dots \dots \dots (53)$$

$$I_y = \frac{HB^3}{12} - \frac{hB^3}{12} = \frac{B^3(H - h)}{12} \dots \dots \dots (53a)$$

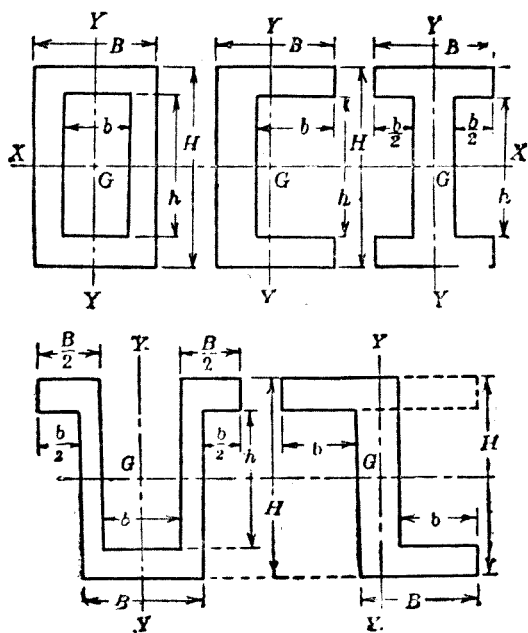
因之

$$Z_x = \frac{\frac{B(H^3 - h^3)}{12}}{\frac{H}{2}} = \frac{B(H^3 - h^3)}{6H} \dots \dots \dots (53b)$$

$$Z_y = \frac{\frac{B^3(H - h)}{12}}{\frac{B}{2}} = \frac{B^2(H - h)}{6} \dots \dots \dots (53c)$$

由此種方法，通常樑之斷面如方格形斷面 (box section)，溝形斷面 (channel section)，I 形斷面

(I section), Z形斷面 (Z section), U形斷面 (U section); 等之慣性能率可計算之。但實際斷面稜角上均附圓部, 然其差甚小, 可略視之。



第 50 圖

上示諸斷面形, 對於通過重心平行於底邊之 XX 軸之慣性能率 I_x , 均可視為外形矩形之慣

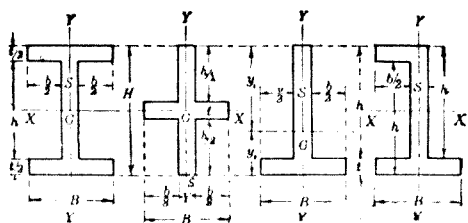
性能率與中空部矩形之慣性能率之差。故

$$I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{BH^3 - bh^3}{12} \dots\dots\dots(54)$$

$$Z_x = \frac{\frac{BH^3 - bh^3}{12}}{\frac{H}{2}} = \frac{BH^3 - bh^3}{6H} \dots\dots\dots(54a)$$

對於YY軸之慣性能率，則自方格形斷面外，均須用他法求之。

第51圖上諸斷面形對於YY軸上有同一之慣性能率。即I形斷面，十字形斷面(star section)，T形斷面(T section)，Z形斷面等。



第 51 圖

此等斷面對於YY軸之慣性能率，可視為B與h矩形之慣性能率及h與s矩形之慣性能率之和。

$$\begin{aligned}
 & I_y = \frac{tB^3}{12} + \frac{ts^3}{12} \\
 \text{或} \quad & I_y = \frac{1}{12} \left\{ (H-h)B^3 + h(B-b)^3 \right\} \dots\dots\dots (55) \\
 & Z_y = \frac{\frac{1}{12} \left\{ (H-h)B^3 + h(B-b)^3 \right\}}{\frac{B}{2}} \\
 & = \frac{(H-h)B^3 + h(B-b)^3}{6B} \dots\dots\dots (55a)
 \end{aligned}$$

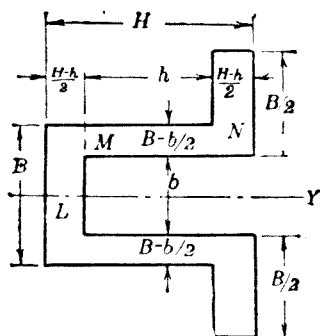
對於 XX 軸之慣性能率均不相同。I 形及 Z 形斷面已示於 (54) 及 (54a)。十字形斷面則交換 B 與 H , b 與 h 即可。

對於 YY 軸溝形斷面之慣性能率，對於 XX 軸 T 形斷面之慣性能率，及角形斷面 (angle section) 之對於 XX 軸與 YY 軸之慣性能率等，因此等斷面對於軸為非對稱，故不能由上述簡單方法求之。

(10) 非對稱斷面形。對稱斷面形上，對稱軸通過重心，軸之位置易知。然上示之溝形斷面，

T形斷面, 角形斷面等之 XX 軸, 或 YY 軸, 或兩者皆不為對稱軸, 故先定重心位置, 而後可定 XX 軸與 YY 軸。

例 5. U形斷面對於 YY 軸之慣性能率試計算之。



第 52 圖

此時慣性能率之計算法有種種。若分為 L , M , N 之三部而計算之, 則 L 部之慣性能率由 (45),

$$I_L = \frac{\frac{H-h}{2} B^3}{12} = \frac{B^3 (H-h)}{24}$$

M, N 部之慣性能率由 (53),

$$I_m = \frac{h(B^3 - b^3)}{12}$$

$$I_n = \frac{\frac{H-h}{2} \left\{ (B+b)^3 - b^3 \right\}}{12} = \frac{(H-h) \left\{ (B+b)^3 - b^3 \right\}}{24}$$

$$\therefore I_y = I_t + I_m + I_n$$

$$= \frac{1}{24} \left[B^3(H-h) + 2h(B^3 - b^3) \right.$$

$$\left. + (H-h) \left\{ (B+b)^3 - b^3 \right\} \right]$$

$$= \frac{B^3H - b^3h}{12} + \frac{Bb(B+b)(H-h)}{8} \dots \dots \dots (56)$$

$$Z_y = \frac{I_y}{B+b} = \frac{B^3H - b^3h}{6(B+b)} + \frac{Bb(H-h)}{4} \dots \dots \dots (56a)$$

例 6. 試計算 T 形斷面對於 XX 軸之慣性能率. (第 51 圖參照.)

此時須先求重心 G 之位置. 今分為矩形 B 與 t 及 h 與 S 二部. 則各矩形之重心在對角線交點上.

面積 Sh 之重心 g_1 在底邊上方 $t + \frac{h}{2}$ 處。

面積 Bt 之重心 g_2 在底邊上方 $\frac{t}{2}$ 處。

故底邊至 G 之高設為 y_2 ，則

$$(Sh + Bt)y_2 = Sh\left(t + \frac{h}{2}\right) + Bt\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\therefore y_2 = \frac{Sh(2t + h) + Bt^2}{2(Sh + Bt)}$$

但 $t = H - h$, $S = B - b$,

$$\begin{aligned} \text{則 } y_2 &= \frac{(B-b)h(2H-h) + B(H-h)^2}{2(BH-bh)} \\ &= \frac{BH^2 - 2bHh + bh^2}{2(BH-bh)} \dots\dots\dots (57) \end{aligned}$$

故頂邊至 G 之距為

$$y_1 = H - y_2 = \frac{BH^2 - bh^2}{2(BH-bh)} \dots\dots\dots (57a)$$

次求慣性能率。將前述所分成二矩形，對於通過重心之軸，求其慣性能率。

$$\text{面積 } Sh \text{ 之慣性能率 } I_1' = \frac{Sh^3}{12} = \frac{(B-b)h^3}{12}$$

面積 Bt 之慣性能率 $I_2' = \frac{Bt^3}{12} = \frac{B(H-h)^3}{12}$

故對於通過 G 之 XX 軸, 則

對於面積 Sh $I_1 = I_1' + Sh\left(t + \frac{h}{2} - y_2\right)^2$

對於面積 Bt $I_2 = I_2' + Bt\left(y_2 - \frac{t}{2}\right)^2$

由 (57) 式 y_2 之值, 則

$$\left(t + \frac{h}{2} - y_2\right)^2 = \frac{\{BH(H-h)\}^2}{2(BH-bh)} = \frac{B^2H^2(H-h)^2}{4(BH-bh)^2}$$

$$\left(y_2 - \frac{t}{2}\right)^2 = \frac{\{Hh(B-b)\}^2}{2(BH-bh)} = \frac{H^2h^2(B-b)^2}{4(BH-bh)^2}$$

因之

$$I_1 = \frac{(B-b)h^3}{12} + \frac{(B-b)hB^2H^2(H-h)^2}{4(BH-bh)^2}$$

$$I_2 = \frac{B(H-h)^3}{12} + \frac{B(H-h)H^2h^2(B-b)^2}{4(BH-bh)^2}$$

故對於 XX 軸全斷面之慣性能率為

$$I_x = I_1 + I_2 = \frac{(B-b)h^3 + B(H-h)^3}{12} + \frac{BH^2(B-b)(H-h)h\{B(H-h) + h(B-b)\}}{4(BH-bh)^2}$$

$$\therefore I_x = \frac{(BH^2 - bh^2)^2 - 4BbhHh(H-h)^2}{12(BH - bh)} \dots (58)$$

T形斷面對於YY軸爲對稱，故 I_y 易於計算。角形斷面對於XX, YY, 均非對稱，可由本例方法得同樣結果。上之(58)式亦可用於角形斷面對於XX軸之慣性能率之計算也。溝形斷面對於YY軸之慣性能率，可於上式中交換B與H, 及b與h而得。

通過重心之軸不在斷面中央時，自軸至最遠部距離，軸之兩側不等。故斷面係數有二。即

$$Z_1 = \frac{I}{y_1}, \quad Z_2 = \frac{I}{y_2}$$

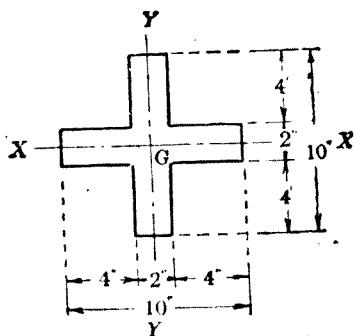
例7. 第53圖之十字形斷面對於通過重心之XX, YY軸之慣性能率與斷面係數如何？

此斷面積對於XX, YY之關係全相同。故

$$I_x = I_y.$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} \left\{ (H-h)H^3 + h(H-h)^3 \right\}$$

$$H-h = 2 \text{ 吋}, H = 10 \text{ 吋}, h = 8 \text{ 吋},$$



第 53 圖

$$\begin{aligned} \therefore I_x = I_y &= \frac{1}{12} \left\{ 2 \times 10^3 + 8 \times 2^3 \right\} \\ &= \frac{1}{12} (2000 + 64) = 172 \text{ (吋}^4\text{)} \end{aligned}$$

y 之最大值為 $\frac{10}{2} = 5$ 吋。故

$$Z_x = Z_y = \frac{172}{5} = 34.4 \text{ (吋}^3\text{)}$$

例 8. 求對於正方形斷面之對角線之慣性
能率。

本問題之解法有種種。今舉其一二如下。

(a) 正方形由對角線分爲全等之兩個二等邊直角三角形。其底邊之長，設正方形每邊長 H 時，當爲 $\sqrt{2}H$ 。而三角形之高爲 $\frac{H}{\sqrt{2}}$ 。故對於底邊求三角形之慣性能率，得

$$\frac{1}{12} \times \sqrt{2}H \times \left(\frac{H}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{H^4}{24}$$

但此三角形有二，故對於對角線，正方形之慣性能率爲

$$I_d = \frac{H^4}{24} \times 2 = \frac{H^4}{12}$$

(b) 正方形對於平行於各邊之二軸爲對稱，又對於二對角線亦對稱。故對於通過其交點（即重心）而垂直於面之軸之極慣性能率 J_0 爲

$$J_0 = 2I_x = 2I_y$$

又 $J_0 = 2I_d$

故 $I_d = \frac{J_0}{2} = I_x = \frac{H^4}{12}$

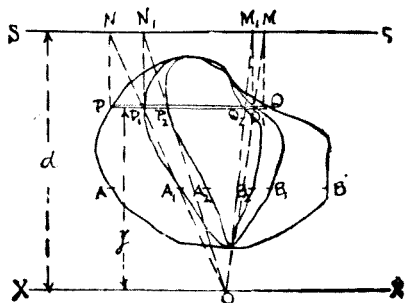
例 9. 內徑 8 吋，外徑 10 吋之同心圓所成之圓環，對於直徑之慣性能率及斷面係數若何？

$$I_x = \pi \frac{(D^4 - d^4)}{64} = \frac{3.14(10^4 - 8^4)}{64} = 290 \text{ (吋}^4\text{)}$$

$$Z_x = \frac{290}{5} = 58 \text{ (吋}^3\text{)}$$

30. 慣性能率, 幾何學的能率, 及重心之圖式求法. 對於複雜斷面形, 其斷面積之重心, 幾何學的能率, 與慣性能率之求法, 以圖式的方法 (graphical methodes) 爲便. 而平面積則用面積計 (planimeter) 以求得之.

第54圖上 $APQB$ 爲任意斷面形. 今求對於任一軸 XX 與通過重心之平行軸之慣性能率及幾何學的能率如下.



第 54 圖

作 SS 與 XX 平行, 其距爲 d . 取任一極點 (pole) O 於 XX 上. (此點近於 $APQB$ 者爲便.) 作數多平行線如 PQ 及 AB 等, 平行於 XX . 自 P, Q 等作 SS 之垂直線, 與之交於 N, M 等點. 將 N, M 等與 O 相連, 交 PQ 於 P_1, Q_1 , 及 AB 於 A_1, B_1 等. 由此得 $P_1Q_1B_1A_1$ 之面積. 將此面積仿上法, 自 P_1, Q_1 作垂直線, 得垂足 N_1, M_1 . 由此得 P_2, Q_2 等點. 又得第二面積 $P_2Q_2B_2A_2$. 由此則

面積 $P_1Q_1B_1A_1 \times d =$ 對於 XX 之 $PQBA$ 形之

幾何學的能率, 即 $\Sigma(y \cdot \delta A)$.

$$I_x = \text{面積 } P_2Q_2B_2A_2 \times d^2$$

對於通過重心之平行軸, 則

$$I_G = I_x - \frac{(\text{面積 } P_1Q_1B_1A_1)^2}{(\text{面積 } PQBA)} \cdot d^2$$

證明.—設面積 $PQBA, P_1Q_1B_1A_1$ 及 $P_2Q_2B_2A_2$ 各爲 A, A_1, A_2 . 離 XX 軸 y 距離處之寬設各爲 z, z_1 及 z_2 . 則微小面積 PQ, P_1Q_1, P_2Q_2 (或 $\delta A, \delta A_1, \delta A_2$) 各爲 $zdy, z_1dy, \text{ 及 } z_2dy$. 由 $\triangle OMN$ 及 $\triangle OP_1Q_1$

二相似形，知 PQ 與 P_1Q_1 之比等於 d 與 y 之比。

$$\therefore \delta A_1 = \frac{y}{d} \cdot \delta A, \text{ 或 } z_1 dy = \frac{y}{d} \cdot z dy$$

$$\begin{aligned} \text{今 } A_1 &= \Sigma(\delta A_1) = \Sigma\left(\frac{y}{d} \cdot \delta A\right) = \frac{1}{d} \Sigma(y \cdot \delta A) \\ &= \frac{1}{d} \Sigma(y \cdot z \cdot dy) \end{aligned}$$

$$\text{或 } \int z_1 dy = \frac{1}{d} \int yz dy$$

故 A_1 與對於 XX 軸 A 之幾何學的能量為比例。

而後者等於 $A_1 \cdot d$ 。

面積 A 之重心距 XX 軸設為 \bar{y} ，則

$$\bar{y} = \frac{\Sigma(y \cdot \delta A)}{\Sigma(\delta A)} = \frac{A_1}{A} \cdot d$$

又由相似三角形 OM_1N_1 及 OP_2Q_2 ，則 P_1Q_1 與 P_2Q_2 之比等於 d 與 y 之比。故

$$\delta A_2 = \frac{y}{d} \delta A_1 = \frac{y^2}{d^2} \delta A$$

$$\text{或 } z_2 dy = \frac{y}{d} z_1 dy = \frac{y^2}{d^2} z dy$$

而

$$\begin{aligned} A_2 &= \Sigma(\delta A_2) = \Sigma\left(\frac{y}{d} \cdot \delta A_1\right) = \frac{1}{d} \Sigma(y \cdot \delta A_1) \\ &= \frac{1}{d^2} \Sigma(y^2 \cdot \delta A) \end{aligned}$$

或

$$\int z_2 dy = \frac{1}{d} \int y z_1 dy = \frac{1}{d^2} \int y^2 z dy$$

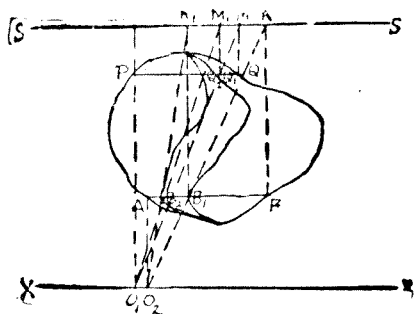
故 A_2 與對於 XX 軸 A 之慣性能率為比例，而後者等於 $A_2 \times d^2$ 。

A 之重心距 XX 為 $\frac{A_1}{A} \cdot d$,

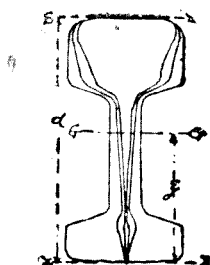
$$\begin{aligned} \therefore I_G &= A_2 \cdot d^2 - \bar{A} \bar{y}^2 = A_2 \cdot d^2 - A \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 d^2 \\ &= d^2 \left(A_2 - \frac{A_1^2}{A}\right) \end{aligned}$$

又或如第 55 圖之方法，則極點可變換。而 A_1 , A_2 諸面積之左邊相共通。此法較簡便。第 56 至 62 諸圖示其實例。第 56 與 57 圖為鐵軌斷面形，用第 54 圖之法求得。第 58 與 59 圖乃同上二圖之鐵軌用第 55 圖法以求出之。第 60 與 61 圖示 I 形斷面，由第 54 圖法以求慣性能率。但

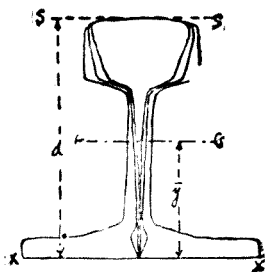
第 61 圖則對於中性軸之慣性能率直接求得。
第 62 圖則用第 55 圖法以求之。



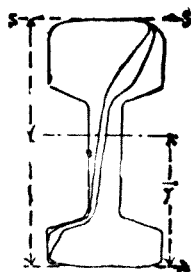
第 55 圖



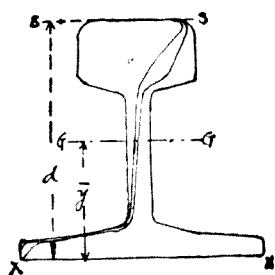
第 56 圖



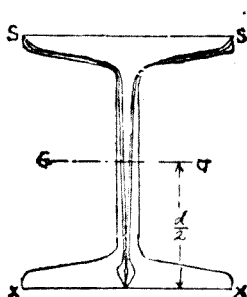
第 57 圖



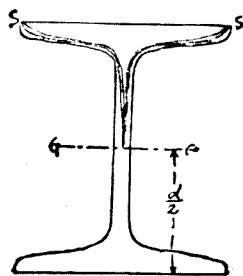
第 58 圖



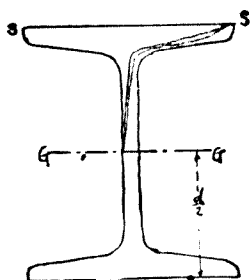
第 59 圖



第 60 圖



第 61 圖



第 62 圖

31. 材料之性質與斷面形，彎曲能率與內力之關係為

$$M = fZ$$

故受同一彎曲能率之樑之斷面上，斷面係數大

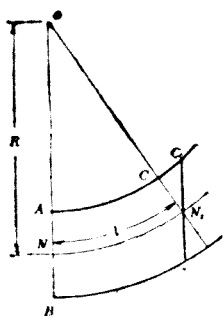
者所生內力小。又若生同一內力時，則斷面係數大者，所可耐之彎曲能率大。要之斷面係數大者，對於彎曲作用強。對於同形斷面，則斷面積大者斷面係數大。但所用材料增加而重量大。故經濟的設計法，不使斷面積增大，而變斷面之形，以增大斷面係數。

由慣性能率與斷面係數之定義，則中性軸至斷面最上面或最下面距離一定時，面積大部分之分布須遠離中性軸，方可使斷面係數大。故面積一定而 y 之最大值一定時，中空斷面，或溝形，I 形，T 形，十字形等斷面較圓形，正方形，矩形等，其強度大。此蓋距中性軸遠處有較多之面積故也。自中性軸遠隔之面，與中性軸距離二乘成比例而增樑之強度。例如矩形斷面，則短邊平行中性軸時，較長邊平行者，其強度大。又橢圓斷面時，則短軸平行於中性軸時，其強度大。

又材料性質對於決定斷面形時，亦甚重要。

一斷面中內力大小與自中性軸之距離成比例。若中性軸通過斷面中央，則中性軸至最上面及最下面之距相等。而最外側壓內力與最外側拉內力相等。反之，若T形斷面，角形斷面等，中性軸不通過斷面中央，則中性軸至最上面與最下面之距相異，故最外側壓內力與最外側拉內力亦不同。鍊鐵，鋼等材料拉伸強度與壓縮強度略等，故中性軸宜通過斷面之中央。使拉伸側與壓縮側有同等強度。鑄鐵之壓縮強度較拉伸大，約有五倍。若使最外側壓內力與拉內力相同，則樑之壓縮側較拉伸側有五倍之強，材料使用上甚不經濟。故中性軸至最外側壓縮面之距離須為至最外側拉伸面之五倍，若擇此斷面，則可有均等強度。

32. 樑之傾斜及曲率。樑受彎曲時，含樑縱軸而垂直於中性面之平面與中性面之交線為一曲線。此稱曰彈性曲線 (elastic curve)。此線在中性面上，故僅受彎曲而無長短之伸縮。



第 63 圖

此彈性曲線一般自特別情形外，非為圓弧。吾人論曲線時，一般視為種種相異半徑之無數微小圓弧之集合。各假想半徑稱曰該部分之曲率半徑 (radius of curvature)。第 63 圖中， NN_1 極近時， AB, CD 延長之交點 O 為曲率中心， ON 為半徑之圓弧 NN_1 近似的與彈性曲線 NN_1 相一致。而 ON 即曲率半徑。過 N_1 作 C_1D_1 與 AB 平行，而圓弧之長極小，可視為直線。得相似三角形 ONN_1 及 N_1DD_1 。設 ON 之長為 R ，則

$$\frac{DD_1}{NN_1} = \frac{N_1D_1}{ON} = \frac{y}{R}$$

但 $\overline{DD_1}$ 爲 DB 之歪, 設以 λ 表之, 則

$$\lambda = \frac{fl}{E}, \text{ 或 } \frac{f}{E} = \frac{\lambda}{l}$$

式中 f 爲 D 處拉內力, l 爲 NN_1 之長, E 爲樑材料之縱彈性係數。由上二式,

$$\frac{f}{E} = \frac{\lambda}{l} = \frac{y}{R}, \text{ 或 } \frac{1}{R} = \frac{f}{yE}$$

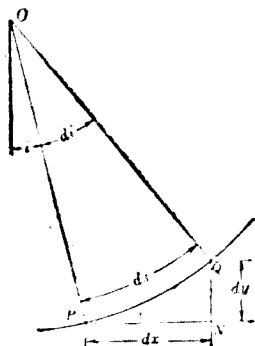
由 (41) 式, $M = f \frac{I}{y}$, 或 $\frac{f}{y} = \frac{M}{I}$

$$\therefore \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \dots \dots \dots (59)$$

此 $\frac{1}{R}$ 名曰曲率 (curvature)。故斷面均一之樑上, 受最大彎曲能率之斷面處, 曲率最大。即曲度最急。又彎曲能率對於各斷面均一時, 曲率半徑一定, 即樑變成圓弧。

第 64 圖上, x 爲水平距, y 爲垂直距, i 爲對於 x 軸之傾斜 (slope), 以弧度法表之, s 爲樑彎曲時中性線弧之長。圖中 PQ 爲 δs 。 PN, QN 各與 x 及 y 軸平行。

$$PN = \delta x, \quad QN = \delta y, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \tan i \approx i$$



第 64 圖

但 i 爲極小，曲線之曲率爲弧單位長上傾斜之變化率。今連結曲率中心與 P, Q ，則其間之角 δi 爲對於 δs 之傾斜之變化。

$$\frac{1}{R} = \frac{\delta i}{\delta s}$$

但 δi 極小， δs 與 δx 略等。故極限時，

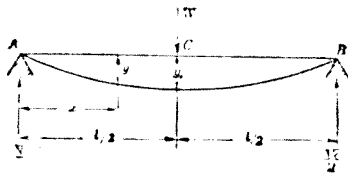
$$\frac{1}{R} = \frac{di}{ds} = \frac{di}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \dots\dots\dots (60)$$

由此積分之，

$$i = \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int \frac{M}{EI} dx \dots \dots \dots (61)$$

33. 樑之撓屈。樑受外力，則中性面沿彈性曲線而彎曲。各點沿外力方向而變化其位置。未加外力前之中性面與加外力而彎曲後之中性面間垂直距離，稱曰樑之撓屈 (deflection of beam)。 (樑為水平，外力垂直，故稱曰垂直距離。) 撓屈之計算須借微分方程式之力。茲示其一二例如下。



第 65 圖

由 (61) 積分之，得

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = \int i dx = \int \int \frac{M}{EI} dx dx \dots \dots \dots (62)$$

第 65 圖上 $M = \frac{W}{2} x$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{Wx}{2EI}$$

就 x 積分之，則

$$i = \frac{dy}{dx} = \int \frac{Wx}{2EI} dx = \frac{W}{2EI} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$x = \frac{l}{2}$ 即 C 點處， $i = 0$ ，

$$\frac{W}{2EI} \cdot \frac{l^2}{8} + C_1 = 0$$

$$\therefore C_1 = -\frac{W}{2EI} \cdot \frac{l^2}{8}$$

因之

$$i = \frac{W}{2EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{W}{2EI} \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{W}{4EI} \left(x^2 - \frac{l^2}{4} \right)$$

又對於 x 積分之，則

$$y = \int \frac{W}{4EI} \left(x^2 - \frac{l^2}{4} \right) dx = \frac{W}{4EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{l^2x}{4} \right) + C_2$$

$x = 0$ 即 A 點處 $y = 0$ ，故 $C_2 = 0$ 。

因之

$$y = \frac{W}{4EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{l^2x}{4} \right)$$

y 之最大值，起於 $\frac{dy}{dx} = 0$ 之處。故起於 C 點。而

$$y_0 = \frac{W}{4EI} \left(\frac{l^3}{3 \times 8} - \frac{l^3}{4 \times 2} \right) = -\frac{Wl^3}{48EI}$$

y_0 向下撓屈，故為負號。

若荷重均布時， $M = \frac{w}{2}(lx - x^2)$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{2EI}(lx - x^2)$$

$$i = \frac{dy}{dx} = \int \frac{w}{2EI}(lx - x^2)dx = \frac{w}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$x = \frac{l}{2} \text{ 時, } i = 0. \quad \therefore C_1 = -\frac{wl^3}{24EI}$$

$$\therefore i = \frac{w}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{l^3}{12} \right)$$

而

$$y = \int \frac{w}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{l^3}{12} \right) dx$$

$$= \frac{w}{2EI} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{l^3x}{12} \right) + C_2$$

$x=0$ 時， $y=0$ ， 故 $C_2=0$ 。

$$\therefore y = \frac{w}{24EI} (2lx^3 - x^4 - l^3x)$$

最大撓屈起於跨徑中央即 $x = \frac{l}{2}$ 處，

$$y_0 = \frac{w}{24EI} \left(\frac{2l^4}{8} - \frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{2} \right) = - \frac{5wl^4}{384EI}$$

但 $W = wl$,

$$\therefore y_0 = \frac{5Wl^3}{384EI}$$

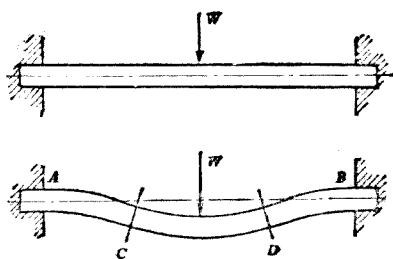
較之集中荷重之撓屈約 $\frac{5}{8}$.

34. 固着樑. 固定樑之兩端而支持者, 兩端傾斜一定. 荷重雖任何狀態而傾斜不變. 此曰固着樑 (built-in beam). 固着樑兩端之方向雖可任何, 但普通樑之兩端在一水平線, 而傾斜角爲零.

固着樑較之同跨徑同荷重之支持樑, 其強度與剛性均大. 即最外側內力與撓屈之量可減小.

支持樑上無保持樑之一定方向之作用. 故兩端斷面不受彎曲能率之作用. 且彎曲能率之符號, 自特別情形外, 對於跨徑全體常一定. 中途無等於零之值. 而樑之彎曲亦同一方向, 內側生壓內力, 外側生拉內力. 若固着樑, 則樑

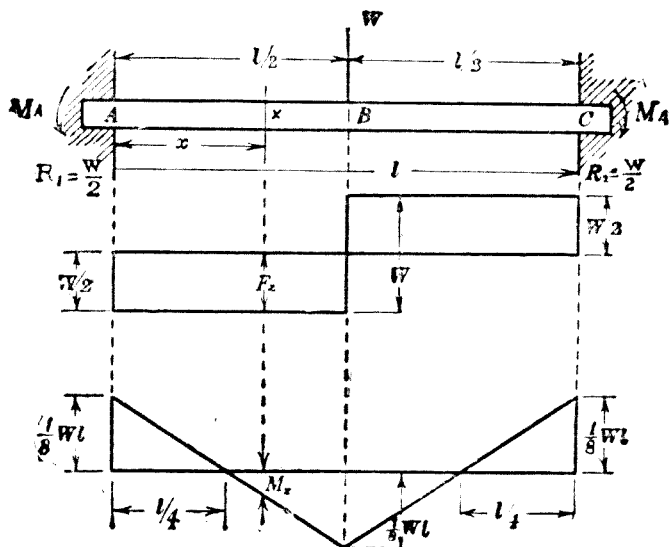
兩端支持部防止因荷重而變其方向。故樑兩端之彎曲能率不爲零，且與中央部分彎曲能率之符號相反。因之固着樑上彎曲能率圖至少有二次通過於零。第66圖示中央有一個集中荷重之固着樑之彎曲狀態。AC與BD部分自中性面上側受拉內力，下側受壓內力。中央CD部與之相反，上側受壓內力，下側受拉內力。因之中性面之一側，拉內力與壓內力連續而生，且此正反對之內力必漸次變化。故其間必有全無內力作用之斷面。換言之，即彎曲能率爲零之斷面必存在也。



第 66 圖

變曲能率爲零之斷面位置，須研究彈性曲線之性質而後可求。今示其例如下。

(1) 中央有一個集中荷重之固着樑(第67圖)。圖中 AC 爲固着樑，中央 B 有一個集中荷重 W 。此時 A 及 C 兩端之變曲能率不爲零，稱曰固着能率 (fixing moment)。設固着能率各爲 M_A 及 M_C ，則 AB 間任意斷面 X 之變曲能率爲



第 67 圖

$$M_x = M_A + \frac{W}{2}x$$

但 $\frac{W}{2}$ 爲 A 處反作用力, x 爲 A 至 X 之距離. 由 (60),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI} \left(M_A + \frac{W}{2}x \right)$$

但 E, I 爲常數. 積分之,

$$\frac{dy}{dx} = i = \frac{1}{EI} \left(M_A x + \frac{W}{4}x^2 \right) + C_1$$

$x=0$ 時, 卽 A 上. $i=0$. 故 $C_1=0$

$x = \frac{l}{2}$ 卽 B 處 $i=0$. 故

$$\frac{1}{EI} \left\{ M_A \frac{l}{2} + \frac{W}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right\} = 0$$

或
$$M_A = -\frac{1}{8} Wl$$

由此得

$$M_x = -\frac{1}{8} Wl + \frac{1}{2} Wx$$

設彎曲能率爲零之斷面距 A 爲 x_0 , 則

$$0 = -\frac{1}{8} Wl + \frac{1}{2} Wx_0$$

或
$$x_0 = \frac{l}{4}$$

B 處之彎曲能率 M_B 爲

$$M_B = -\frac{1}{8} Wl + \frac{1}{2} W\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{8} Wl$$

樑及荷重狀況爲對稱，故

$$M_C = M_A = -\frac{1}{8} Wl$$

而彎曲能率距 C 點 $\frac{l}{4}$ 處亦爲零。

(2) 有均布荷重之固着樑 (第 68 圖)。與上同樣，

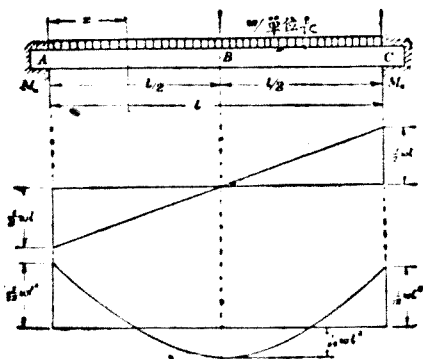
$$M_x = M_A + \frac{wl}{2}x - wx \cdot \frac{x}{2}$$

但 $\frac{wl}{2}$ 爲左端 A 之反作用力。因之

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI} \left(M_A + \frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left(M_A x + \frac{wl}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 \right) + C_1$$

左端 A 處 $i=0$ ，故 $C_1=$



第 68 圖

再積分之，

$$y = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} M_A x^2 + \frac{wl}{12} x^3 - \frac{w}{24} x^4 \right) + C_2$$

$x=0$ 即 A 處, $y=0$. 故 $C_2=0$

$x=l$ 即 C 處, $y=0$. 故

$$\frac{1}{2} M_A l^2 + \frac{wl^4}{12} - \frac{wl^4}{24} = 0$$

或
$$M_A = -\frac{1}{12} wl^2 = M_C$$

由此得
$$M_x = \frac{wl}{2} \left(-\frac{1}{6} l^2 + lx - x^2 \right)$$

$$F_x = \frac{w}{2}(l - 2x) = \frac{wl}{2} - wx$$

$$i = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{2EI} \left(\frac{1}{6}l^2x + \frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{3}x^3 \right)$$

$$y = \frac{w}{24EI} (-l^2x^2 + 2lx^3 - x^4)$$

中央之彎曲能率爲

$$M_B = \frac{w}{2} \left(-\frac{1}{6}l^2 + \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{4}l^2 \right) = \frac{1}{24}wl^2$$

中央之撓屈爲

$$y_B = \frac{w}{24EI} \left(-l^2 \cdot \frac{l^2}{4} + 2l \cdot \frac{l^3}{8} - \frac{l^4}{16} \right) = -\frac{wl^4}{384EI}$$

$M_x = 0$ 之斷面位置 x_0 爲

$$-\frac{1}{6}l^2 + lx_0 - x_0^2 = 0 \quad \therefore x_0 = \left(\frac{1}{2} \pm 0.289 \right) l$$

例 10. 跨徑 12 呎之固着樑上有全重量 6 噸之均布荷重。斷面之厚爲 10 吋，慣性能率爲 120 (吋單位)，則最大值之內力若干？

作用於樑之最大彎曲能率在兩固着端。其大小爲

$$M = -\frac{wl^2}{12}$$

但 $l = 12$ 呎, $w = \frac{6}{12} = 0.5$ 噸.

$$M = -\frac{0.5 \times 12^2}{12} = -6 \text{ 呎噸} = -72 \text{ 吋噸}$$

又 $f = \frac{My}{I}$, $y = 5$ 吋, $I = 120$ 吋單位.

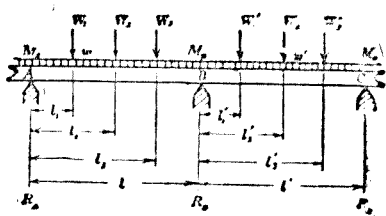
$$\therefore f = \frac{72 \times 5}{120} = 3 \text{ 噸/平方吋}$$

35. 連續樑. 以上所述者, 樑之支點均在二個以下. 反作用力容易求得. 若有三個以上之支點, 二個以上之跨徑者, 則表示平衡條件之二式不足以求三個以上之反作用力. 故不能以上述簡單方法解決之. 此種之樑曰連續樑 (continuous beam).

連續樑之支點中最端部者, 不論其固着或支持, 與普通二支點之樑相同. 其中間支點則如固着樑之固着端, 受彎曲能率之作用, 又其左右, 樑之傾斜角有同一之值.

連續梁之計算法有種種。今示克拉比倫之
三能率定理(Clapeyron's theorem of three moments)
如下。此定理示連續梁中任意相隣三支點間，
荷重與支點上彎曲能率之關係。

第69圖上 A, B, C 為相隣三支點。各點上彎
曲能率設各為 M_A, M_B, M_C 。第一跨徑 l 間有均布
荷重 w 與集中荷重 W_1, W_2, W_3 。後者距左方支
點各為 l_1, l_2, l_3 。次第二跨徑 l' 間有均布荷重 w'
與集中荷重 W'_1, W'_2, W'_3 。其自左方支點之距
各為 l'_1, l'_2, l'_3 。今加以荷重時，設三支點不沉下，
而常在一直線上，則三能率定理如次：



第 69 圖

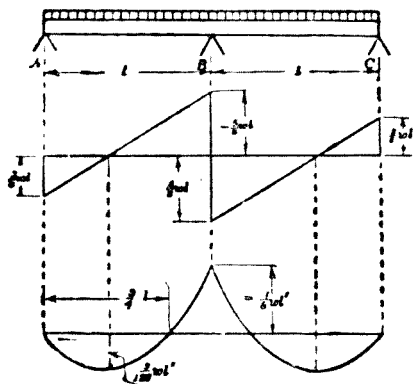
$$\begin{array}{l}
 \text{(彎曲能率)} \\
 \text{(集中荷重)} \\
 \text{(均布荷重)}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 M_A l + 2M_B(l+l') + M_C l' \\
 \begin{array}{l}
 (l) + \frac{1}{l} \{ W_1 l_1 (l^2 - l_1^2) + W_2 l_2 (l^2 - l_2^2) \\
 \qquad \qquad \qquad + W_3 l_3 (l^2 - l_3^2) \} \\
 (l') + \frac{1}{l'} \{ W_1' l_1' (2l'^2 - 3l' l_1' + l_1'^2) \\
 \qquad \qquad \qquad + W_2' l_2' (2l'^2 - 3l' l_2' + l_2'^2) \\
 \qquad \qquad \qquad + W_3' l_3' (2l'^2 - 3l' l_3' + l_3'^2) \} \\
 + \frac{1}{4} w l^3 + \frac{1}{4} w' l'^3 = 0 \dots\dots\dots (63)
 \end{array}
 \end{array} \right.$$

支點數若有 n 時，各取三個，依次用上之公式，可得 $n-2$ 個之式。更加以表示樑兩端狀態之二式，則可得含有 $M_A, M_B, \dots\dots M_N$ 等 n 個未知數之 n 個式。由此可求各支點之彎曲能率。兩端支持時，兩端支點上彎曲能率為零。兩端固着時，則兩端方向為水平，可取為條件之一。

注意。連續樑詳細說明當參考高等應用力學，例如 Morley's Strength of Materials, chap. VII, pp. 213~227.

次示計算之一二例如下。

(1) 有均布荷重之相等二跨徑連續樑 (第 70 圖)。



第 70 圖

圖示 ABC 為連續樑，跨徑 AB 與 BC 相等。此時無集中荷重，且 $l=l'$ ，故由三能率公式，

$$M_A l + 2M_B(l+l') + M_C l' + \frac{1}{4} w l^3 + \frac{1}{4} w' l'^3 = 0$$

兩端 A, C 僅為支持，故 $M_A = 0, M_C = 0$ 。故上式為

$$4M_B l + \frac{1}{2} w l^3 = 0$$

$$\therefore M_B = -\frac{w l^2}{8}$$

樑兩端 A, C 之反作用力設為 R_A 及 R_C , 則此樑對於 B 為對稱. 故 $R_A = R_C$. 跨徑中間自 A 距 x 處斷面 X 上之彎曲能率 M_x 為

$$M_x = R_A x - \frac{wx^2}{2}$$

$x=l$, 則 $M_x = M_B$

$$\therefore M_B = R_A l - \frac{wl^2}{2} = -\frac{wl^2}{8}$$

$$\therefore R_A l = \frac{wl^2}{2} - \frac{wl^2}{8} = \frac{3}{8} wl^2$$

因之 $R_A = \frac{3}{8} wl$

而 $R_C = \frac{3}{8} wl$

$$R_B = 2wl - 2 \times \frac{3}{8} wl = \frac{10}{8} wl$$

由此可求剪力與彎曲能率之值.

$$F_A = R_A = \frac{3}{8} wl$$

自 A 至 B $F_x = R_A - wx$

$$F_{B-0} = \frac{3}{8} wl - wl = -\frac{5}{8} wl$$

$$F_{B+0} = -\frac{5}{8}wl + \frac{10}{8}wl = \frac{5}{8}wl$$

自 B 至 C $F_x = \frac{5}{8}wl - w(x-l)$

$$F_C = \frac{5}{8}wl - wl = -\frac{3}{8}wl$$

$F_x=0$ 之斷面在 AB 間 $\frac{3}{8}wl - wx_0 = 0 \therefore x_0 = \frac{3}{8}l$

在 BC 間 $\frac{5}{8}wl - w(x_1-l) = 0 \therefore x_1 = l + \frac{5}{8}l$

或自 B $x_1' = \frac{5}{8}l$

此等之點，彎曲能率最大。

$$M_A = 0$$

A 至 B 間 $M_x = \frac{3}{8}wlx - \frac{1}{2}wx^2$

$$M_B = \frac{3}{8}wl^2 - \frac{1}{2}wl^2 = -\frac{wl^2}{8}$$

B 至 C 間 $M_x = -\frac{1}{8}wl^2 + \frac{5}{8}wl(x-l) - \frac{1}{2}w(x-l)^2$

$$M_C = 0$$

最大彎曲能率作用於 $x = \frac{3}{8}l$ ，其值為

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \frac{3}{8}wl \times \frac{3}{8}l - \frac{1}{2}w \left(\frac{3}{8}l \right)^2 \\
 &= \frac{9}{64}wl^2 - \frac{9}{128}wl^2 = \frac{9}{128}wl^2
 \end{aligned}$$

彎曲能率爲零之斷面，則

$$M_1 = \frac{3}{8}wx_2 - \frac{1}{2}wx_2^2 = 0$$

$$\therefore x_2 = 0, \text{ 或 } x_2 = \frac{3}{4}l$$

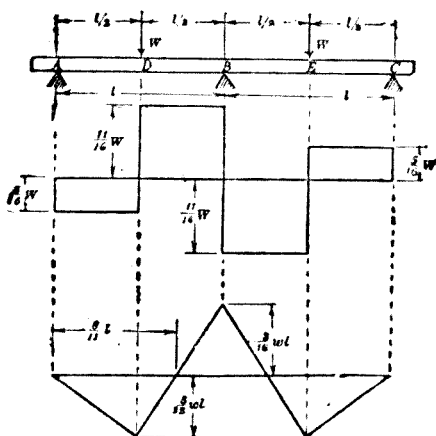
其線圖 (diagrams) 如第 70 圖。

(2) 跨徑中央有相等集中荷重之二等跨徑連續樑 (第 71 圖)。此時僅有集中荷重而無均布荷重，故 $w=0$, $w'=0$ 。兩端僅爲支持，故 $M_A=0$, $M_C=0$ 。

集中荷重在跨徑中央，且相等，故 $W=W'$, $l_1=l_1'=\frac{l}{2}$ 。

由三能率定理，

$$\begin{aligned}
 4M_0l + \frac{1}{l} \times W \times \frac{l}{2} \left\{ l^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right\} \\
 + \frac{1}{l} \times W \times \frac{l}{2} \left\{ 2l^2 - 3l \times \frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right\} = 0
 \end{aligned}$$



第 71 圖

$$\therefore 4M_B l + \frac{3}{4} W l^2 = 0$$

$$\therefore M_B = -\frac{3}{16} W l$$

A 處反作用力設為 R_A , 則 DB 間

$$M_x = R_A x - W \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

$x = l$, 則 $M_x = M_B$, 故

$$M_B = R_A l - W \times \frac{l}{2} = -\frac{3}{16} W l$$

$$\therefore R_A = \frac{5}{16} W$$

$$R_C = \frac{5}{16} W$$

$$R_B = 2W - \frac{5}{8} W = \frac{11}{8} W$$

反作用力既求得後，剪力與彎曲能率可求之如下。

$$F_A = R_A = \frac{5}{16} W$$

自 A 至 D , $F_x = R_A = \frac{5}{16} W$

$$F_{D+0} = \frac{5}{16} W - W = -\frac{11}{16} W$$

自 D 至 B , $F_x = -\frac{11}{16} W$

$$F_{B+0} = -\frac{11}{16} W + \frac{11}{8} W = \frac{11}{16} W$$

自 B 至 E , $F_x = \frac{11}{16} W$

$$F_{E+0} = \frac{11}{16} W - W = -\frac{5}{16} W$$

$$\text{自 } E \text{ 至 } C, \quad F_x = -\frac{5}{16} W$$

$$M_A = 0$$

$$AD \text{ 間} \quad M_x = R_A x = \frac{5}{16} W x$$

$$M_D = \frac{5}{16} W \times \frac{l}{2} = \frac{5}{32} W l$$

$$DB \text{ 間} \quad M_x = \frac{5}{16} W x - W \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

$$M_B = \frac{5}{16} W l - W \times \frac{l}{2} = -\frac{3}{16} W l$$

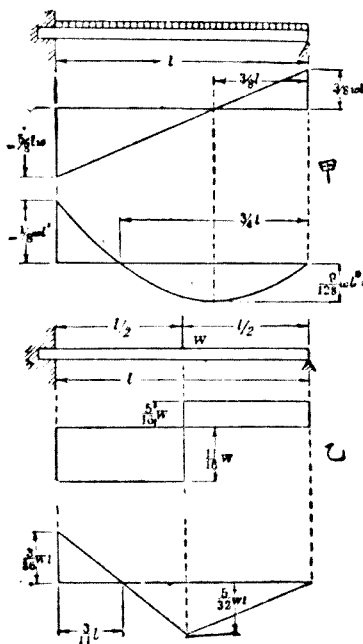
D 處彎曲能率爲正, B 處爲負. 且其間彎曲能率圖爲一直線. 故 DB 間之彎曲能率惟有一處斷面上爲零. 自 A 至該斷面設爲 x_1 . 則

$$M_x = \frac{5}{16} W x_1 - W \left(x_1 - \frac{l}{2} \right) = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{8}{11} l$$

36. 一端固着而他端支持之樑. 此種之樑可視爲前例三支點連續樑自其中央支點分爲左右二部分而得者. 蓋中央支點上樑之方向

常成水平，與固着端在同一狀態。因之左右兩部分可各視為固着其一端而支持其他端之樑。第72圖甲乙即示與第70, 71兩圖相當者。



第 72 圖

例 11. 支於五支點之樑 $ABCDE$. 其四跨徑皆相等. 全長上有均布荷重. 求各支點之反

作用力及彎曲能率之值，並作剪力圖與彎曲能率圖。（第73圖。）

由題意此連續樑對於支點 C 為對稱。故

$$M_A = M_E, \quad M_B = M_D, \quad R_A = R_E, \quad R_B = R_D.$$

且兩端支持，故

$$M_A = M_E = 0$$

次就 ABC 部用三能率定理，

$$0 + 4M_B l + M_C l + \frac{1}{2} w l^3 = 0 \dots\dots\dots (a)$$

又就 BCD 部

$$M_C l + 4M_B l + M_D l + \frac{1}{2} w l^3 = 0$$

或

$$2M_B l + 4M_C l + \frac{1}{2} w l^3 = 0 \dots\dots\dots (b)$$

由 (a), (b) 二式求 M_B, M_C 如下。

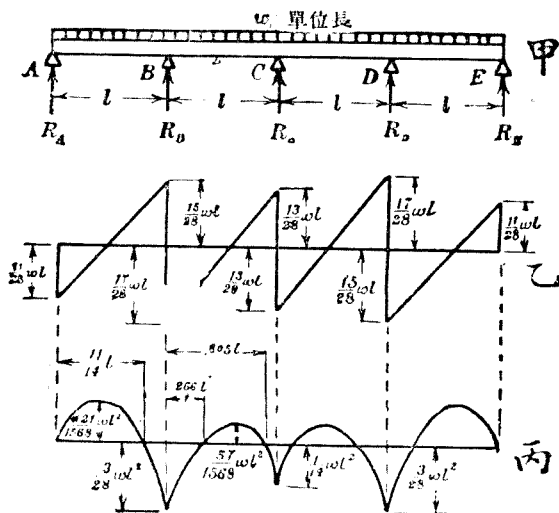
$$(b) \times 2 - (a)$$

$$7M_C l = -\frac{1}{2} w l^3$$

$$\therefore M_C = -\frac{1}{14} w l^2$$

$$2M_B l = \frac{2}{7} w l^3 - \frac{1}{2} w l^3$$

$$\therefore M_B = -\frac{3}{28} w l^2 = M_D$$



第 73 圖

$ABCDE$ 之反作用力設各為 R_A, R_B, R_C, R_D, R_E ;

則就 B 點取能率, 得

$$R_A l - \frac{1}{2} w l^2 = M_B = -\frac{3}{28} w l^2$$

$$\therefore R_A = \frac{1}{2}wl - \frac{3}{28}wl = \frac{11}{28}wl = R_B$$

就C點取能率,得

$$R_A \cdot 2l + R_B l - 2wl^2 = M_C = -\frac{1}{14}wl^2$$

$$\therefore \frac{11}{14}wl^2 + R_B l - 2wl^2 = -\frac{1}{14}wl^2$$

$$\therefore R_B = -\frac{1}{14}wl - \frac{11}{14}wl + 2wl = \frac{8}{7}wl = R_D$$

$$\begin{aligned} \text{因之 } R_C &= 4wl - 2R_A - 2R_B = 4wl - \frac{11}{14}wl - \frac{16}{7}wl \\ &= \frac{13}{14}wl \end{aligned}$$

A處剪力等於 R_A ,即

$$F_A = \frac{11}{28}wl$$

$$\text{自A至B, } F_{B-0} = F_A - wl = -\frac{17}{28}wl$$

AB間剪力圖爲一直線。

$$F_{B+0} = -\frac{17}{28}wl + R_B = -\frac{17}{28}wl + \frac{8}{7}wl = \frac{15}{28}wl$$

$$\text{同樣 } F_{C-0} = F_{B+0} - wl = \frac{15}{28}wl - wl = -\frac{13}{28}wl$$

$$F_{C+0} = F_{C-0} + R_C = -\frac{13}{28}wl + \frac{13}{14}wl = \frac{13}{28}wl$$

$$F_{D-0} = F_{C+0} - wl = \frac{13}{28}wl - wl = -\frac{15}{28}wl$$

$$F_{D+0} = F_{D-0} + R_D = -\frac{15}{28}wl + \frac{8}{7}wl = \frac{17}{28}wl$$

$$F_E = F_{D+0} - wl = \frac{17}{28}wl - wl = -\frac{11}{28}wl = -R_E$$

由此得第 73 圖。

彎曲能率之值如下。對於跨徑 AB ，則以 A 爲原點，

$$M_x = F_A x - \frac{1}{2}wx^2 = \frac{11}{28}wlx - \frac{1}{2}wx^2 = \frac{1}{2}wx\left(\frac{11}{14}l - x\right)$$

故 $x = \frac{11}{14}l$ 處， $M_x = 0$ 。 x 大於此值，則取負值。 $x = l$

即 B 處， $M_B = -\frac{3}{28}wl^2$ 。 而其間爲拋物線。 對於

跨徑 BC ，則以 B 爲原點，向右方取 x ，得

$$\begin{aligned} M_x &= M_B + F_B x - \frac{1}{2}wx^2 = -\frac{3}{28}wl^2 + \frac{15}{28}wlx - \frac{1}{2}wx^2 \\ &= -\frac{1}{2}w\left(x^2 - \frac{15}{14}lx + \frac{3}{14}l^2\right) \end{aligned}$$

故由 $B, x=0.266l$ 及 $x=0.805l$ 二點上彎曲能率爲零。其二點間取正值。 $x=l$ 即 C 點上取負值。 $M_c = -\frac{1}{14}wl^2$ 。對於 C 點，連續樑爲對稱。故 ABC 部彎曲能率既知後，可畫出全樑之彎曲能率圖。

例 12. 第 74 圖甲之連續樑，跨徑各爲 10 呎，12 呎，8 呎。各跨徑左端起順次 7 呎，4 呎，2 呎之斷面上，各有 5 噸，7 噸，6 噸之集中荷重。求各支點上反作用力與彎曲能率。

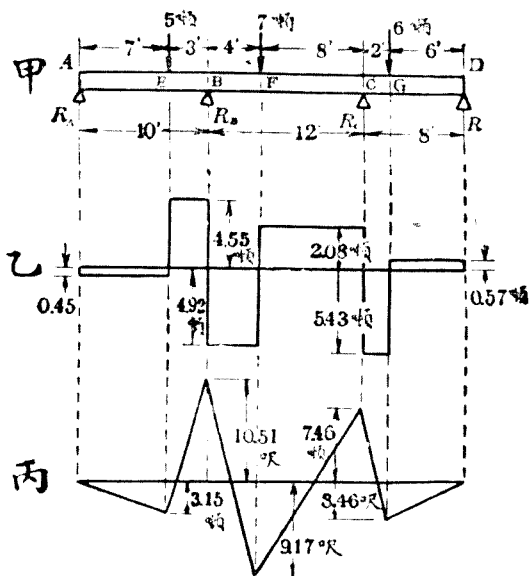
兩端爲支持，故 $M_A = M_D = 0$ 。對於 ABC 部分，應用三能率公式，

$$0 + 2M_B(10 + 12) + M_C \times 12 + \frac{1}{10} \times 5 \times 7 \times (10^2 - 7^2) + \frac{1}{12} \times 7 \times 4 \times (2 \times 12^2 - 3 \times 12 \times 4 + 4^2) = 0$$

$$\text{或} \quad 44 M_B + 12 M_C = -551.8 \dots \dots \dots (a)$$

對於 BCD 部分，則

$$M_B \times 12 + 2M_C(12 + 8) + 0 + \frac{1}{12} \times 7 \times 4 \times (12^2 - 4^2) + \frac{1}{8} \times 6 \times 2 \times (2 \times 8^2 - 3 \times 8 \times 2 + 2^2) = 0$$



第 74 圖

或 $12M_B + 40M_C = -424.6 \dots \dots \dots (b)$

由 (a), (b) 二式, 得

$$M_B = -10.51 \text{ 呎噸,}$$

$$M_C = -7.46 \text{ 呎噸.}$$

次求反作用力. 取 B 左側之能率,

$$R_A \times 10 - 5 \times 3 = -10.51$$

$$\therefore R_A = 0.45 \text{ 噸}$$

又取 C 左側之能率,

$$R_A \times 22 - 5 \times 15 + R_B \times 12 - 7 \times 8 = -7.46$$

$$\therefore R_B = 9.47 \text{ 噸}$$

次取 C 右側之能率,

$$R_D \times 8 - 6 \times 2 = -7.46$$

$$\therefore R_D = 0.57 \text{ 噸}$$

$$\text{因之 } R_C = (5 + 7 + 6) - (R_A + R_B + R_D) = 7.51 \text{ 噸}$$

由此得剪力如下:

$$AE \text{ 間 } F = R_A = 0.45 \text{ 噸}$$

$$EB \text{ 間 } F = 0.45 - 5 = -4.55 \text{ 噸}$$

$$BF \text{ 間 } F = -4.55 + 9.47 = 4.92 \text{ 噸}$$

$$FC \text{ 間 } F = 4.92 - 7.00 = -2.08 \text{ 噸}$$

$$CG \text{ 間 } F = -2.08 + 7.51 = 5.43 \text{ 噸}$$

$$GD \text{ 間 } F = 5.43 - 6.00 = -0.57 \text{ 噸} = -R_D$$

又彎曲能率如下:

$$M_A = 0$$

$$M_E = F_A \times 7 = 0.45 \times 7 = 3.15 \text{ 呎噸}$$

$$M_B = -10.51 \text{ 呎噸}$$

$$M_F = M_B + F'_B \times 4 = -10.51 + 4.92 \times 4 = 9.17 \text{ 呎噸}$$

$$M_C = -7.46 \text{ 呎噸}$$

$$M_G = M_C + F'_C \times 2 = -7.46 + 5.43 \times 2 = 3.40 \text{ 呎噸}$$

$$M_D = 0$$

37. 有移動荷重之樑。上述之樑，其荷重作用位置均一定。而所生剪力與彎曲能率之值，對於樑之各斷面，唯有一值。最大彎曲能率之作用斷面亦一定不變，而其值一定。故苟知此斷面上之內力時，即可知樑之強度。

若荷重移動於樑之左右時，則最大彎曲能率作用之斷面亦移動。而最大彎曲能率之值亦因荷重位置而變化。又對於一定斷面上，則因荷重之移動，其彎曲能率之作用有變化。若荷重加於該斷面上時，其彎曲能率為最大。故移動荷重之樑，若不求各斷面最大彎曲能率，及最大彎曲能率中之極大值作用於何處斷面，又其值若何，則不能決定樑之強度及其尺寸。

移動荷重之樑實例甚多，例如車輛通過於橋架，屋內起重機運行於橫樑上等是也。移動速度若大時，則有慣性力之作用，須依活荷重計算之，其詳在本書範圍之外。

移動荷重有多數，而移動速度不同時，最為複雜。茲僅就一個集中荷重移動於支持樑時，述其解法如下。

第75圖上 AB 為支持樑自一端 A 相距 x 處之斷面上有集中荷重 W 。此時支點 A, B 之反作用力為

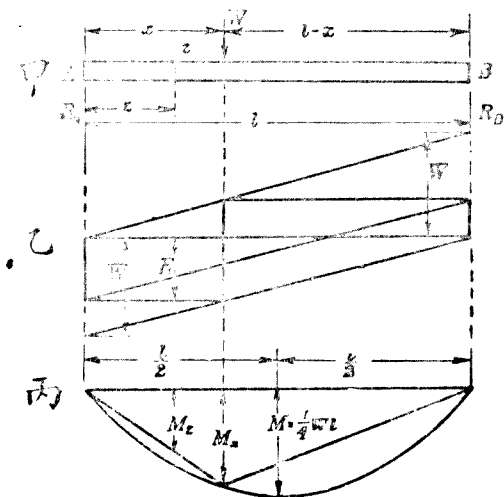
$$R_A = \frac{l-x}{l}W, \quad R_B = \frac{x}{l}W$$

故 R_A, R_B 隨 x 而變化。

今自一端 A 相距 z 處斷面上之剪力與彎曲能率求之如下。

$$F_z = R_A = \frac{l-x}{l}W$$

$$M_z = R_A z = \frac{l-x}{l}Wz$$



第 75 圖

故對於一定之 \$x\$ 值, \$F_x\$ 爲一定, \$M_x\$ 之值與 \$z\$ 爲比例而變化. \$z\$ 最大即 \$z=x\$ 時, \$M_x\$ 之值最大. 故不論 \$x\$ 之如何, 荷重作用處之斷面上有最大彎曲能率之作用. 然則最大彎曲能率之極大值果如何乎?

$$M_x = \frac{(l-x)x}{l} W$$

就 \$x\$ 取微分而使等於零, 則

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{W}{l}(l-2x) = 0$$

但 $\frac{W}{l} \neq 0$, $\therefore l-2x=0$, $x = \frac{l}{2}$.

因之

$$M_{max} = \frac{W}{l} \left(l - \frac{l}{2} \right) \frac{l}{2} = \frac{1}{4} Wl$$

即最大彎曲能率之極大值作用於跨徑中央，其值為 $\frac{1}{4} Wl$ 。 F_x 之式對於 x 為一次， F_x 與 x 有直線的關係。 $x=0$ 時 F_x 有最大值， $F_{max}=W$ 。 $x=l$ 時 F_x 有最小值， $F_{min}=0$ 。 其線圖如第75圖乙。

M_x 為 x 之二次式，故 M_x 對於 x 為拋物線之關係。 自基線至拋物線上縱線之長示該斷面上最大彎曲能率之值。 如第75圖丙。

38. 均一強度之樑。 樑上各斷面彎曲能率之值相異。 危險斷面上彎曲能率最大。 若樑之斷面與危險斷面等大之均一斷面時，則危險斷面以外斷面上受較小之內力，有必要以上之強度，而使用不經濟之材料。

故對於彎曲能率，計算適當大小之斷面，而使各斷面上最大內力均有同一之值。如是方為經濟的設計。此種之樑稱曰均一強度之樑 (beam of uniform strength).

集多數之片而組成之合成樑，普通有均一強度。而樑之形複雜，所要建造費反大，反有不經濟者。

樑之斷面與彎曲能率之關係為

$$M = fZ$$

f 之值使一定時， M 與 Z 成正比例。反之 M 與 Z 成正比例時， f 之值一定，而得均一強度之樑。 Z 與 M 正比例時，其變化因種種斷面之形而異。例如圓形斷面樑時，斷面在任何處均為圓。其 Z 之變化，由

$$Z = \frac{M}{f} = \frac{\pi}{32} d^3$$

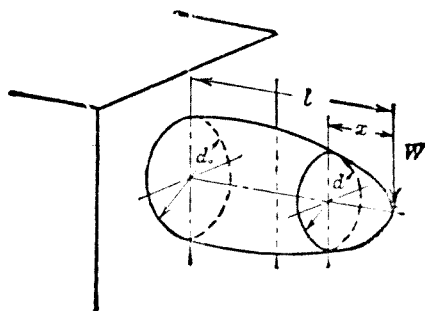
$$\therefore d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \cdot \frac{M}{f}}$$

d 與 M 之三乘根為比例。第 76 圖示自由端有一

個集中荷重之突出樑之例。

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi f} \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi f} l}$$



第 76 圖

若用矩形斷面，則 $Z = \frac{1}{6}bh^2$ ，故斷面大小之變化法有三種。

(a) 厚度一定而變化其寬度者。此時

$$b = \frac{6}{h^2 f} M$$

第 77 圖示自由端有一個集中荷重之突出樑

$$M_x = W_x, \quad b = \frac{6W}{h^2 f} x, \quad b_0 = \frac{6Wl}{h^2 f}.$$

x 與 b 之關係為一次，故樑之兩側為直線。其平面圖為三角形。

(b) 寬度一定而變化其厚度者。此時

$$h^2 = \frac{6}{bf} M$$

或如上例

$$h^2 = \frac{6W}{bf} x$$

h 與 x 之關係為二次。故樑之上下面(或一面為平面)為拋物線形。如第 77 圖乙。

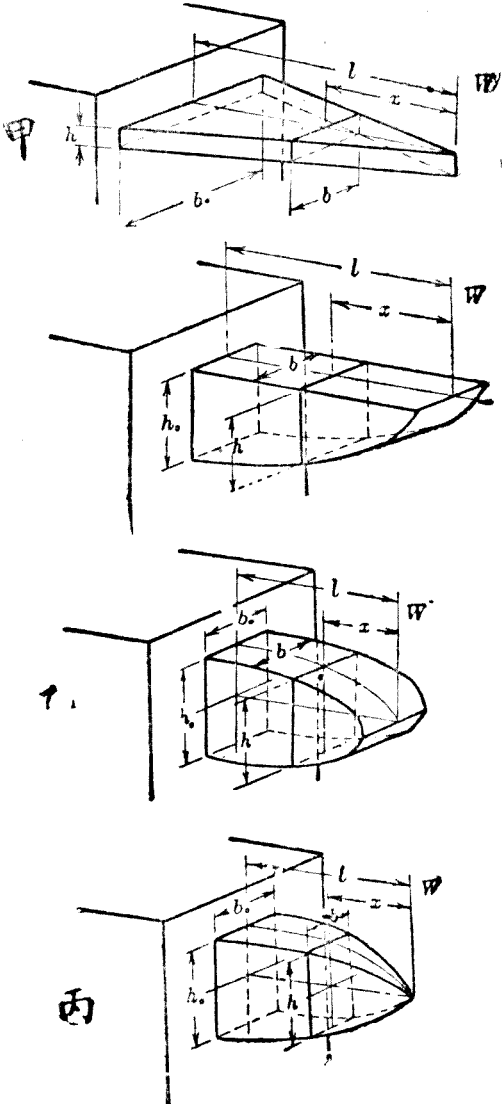
(c) 變化寬度及厚度，但斷面為相似形者。此時

$$bh^2 = \frac{6}{f} M$$

或如上例，

$$bh^2 = \frac{6W}{f} x$$

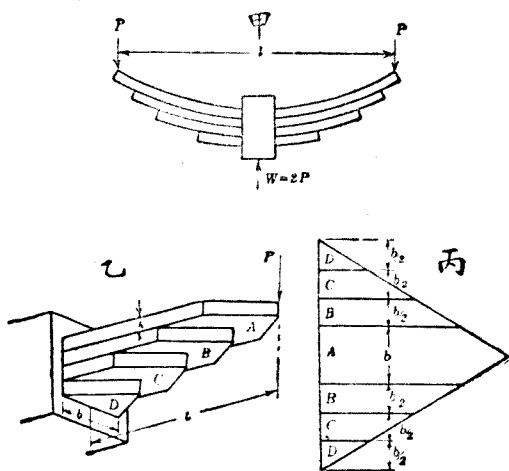
但 b 與 h 之比一定，故 $h = nb$ 。由此可得僅含 b 或 h 之式，而可計算 b 及 h 之值。此時 b 或 h 與 x 之關係為三次。如第 77 圖丙。



第 77 圖

39. 疊板彈條. 鐵道車輛或如汽車馬車等車臺下減少振動用之彈條, 多用鋼板疊合成弓形而製成. 此曰疊板彈條 (laminated spring). 此彈條應用均一強度之突出樑.

第 78 圖甲 示一疊板彈條, 可視為二個突出樑



第 78 圖

如乙. 將各個除最長片外切成二片, 並合成丙圖之形. 為一三角形彈條. 此與前節 (a) 相當.

實際之彈條因工作上之方便，板端不為尖形而有適當寬度。故與三角形板之計算略不一致。然普通仍使用三角形板之計算。

$$Pl = n \frac{bh^2}{6} f$$

略去中央束帶鐵之影響，設跨徑為 L ，全荷重為 W 。則

$$WL = \frac{2}{3} nbh^2 f \dots \dots \dots (64)$$

用此式可計算疊板彈條之強度。若求此彈條之撓屈，則因曲率變化為均一，對於最長彈條片，其中央撓屈為

$$d = \frac{1}{8} \cdot \frac{ML^2}{EI}$$

(參照 Morley's "Strength of Materials," p. 157)

但
$$M = \frac{1}{n} \left(\frac{WL}{4} \right)$$

$$\therefore d = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{WL^3}{4EI} = \frac{12}{8 \times 4} \cdot \frac{WL^3}{Enbh^3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{WL^3}{Enbh^3} \dots \dots (65)$$

例 13. 鋼製疊板彈條之跨徑 30 吋，荷重 $\frac{1}{2}$

噸。板寬 3 吋，厚 $\frac{1}{4}$ 吋。最大可容內力 12 噸/平方吋時，問須用若干塊之板？又彈條中央之撓屈幾何？

板之數若為 n ，則由 (64) 式

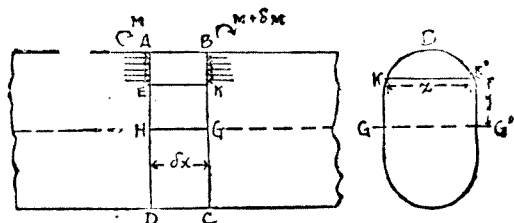
$$\frac{1}{2} \times 30 = \frac{2}{3} \times n \times 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 12$$

$$\therefore n = \frac{30 \times 3 \times 4 \times 4}{2 \times 2 \times 3 \times 12} = 10$$

又由 (65) 式
$$d = \frac{3}{8} \times \frac{\frac{1}{2} \times 30^3}{13,000 \times 10 \times 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3}$$

$$= 0.83 \text{ 吋}$$

但 13,000 噸/平方吋為鋼之縱彈性係數。



第 79 圖

40. 樑之橫斷面上剪內力之分布. 第79圖上 AD, BC 爲樑中二橫斷面, 其相距爲 δc . AD 上之彎曲能率設爲 M , BC 上彎曲能率設爲 $M + \delta M$. 離中性面上 y 處, AD 斷面之縱內力之強爲

$$p = \frac{My}{I}$$

今就 $ABKE$ 部分之平衡考察之. 微小面積 $z \cdot dy$ 上縱內力全量, 在 AE 側爲

$$p \cdot z \cdot dy = \frac{My}{I} \cdot z \cdot dy$$

在 BK 側爲

$$\frac{(M + \delta M)y}{I} \cdot z \cdot dy$$

故 BK 側微小面積上縱內力大於 AE 側之相當微小面積. 其差爲 $\frac{\delta M}{I} y \cdot z \cdot dy$. BK 面積較 AE 面積, 縱內力全量之相差爲

$$\int_y^{y_1} \frac{\delta M}{I} \cdot y \cdot z \cdot dy, \quad \text{或} \quad \frac{\delta M}{I} \int_y^{y_1} y \cdot z \cdot dy$$

但 y_1 爲最外側 y 之值. $ABKE$ 部分之水平合力爲零, 故上之 BK 面上較大之水平內力必與 EK 面上水平剪力相平衡. 此水平剪力因樑橫斷面上垂直剪力而生 (§ 18). 設高 y 處剪內力之平均強爲 q (δx 上 q 之變化略去之), 則 EK 面上水平剪力爲 $q \cdot z \cdot \delta x$.

$$\therefore q \cdot z \cdot \delta x = \frac{\delta M}{I} \int_y^{y_1} y \cdot z \cdot dy$$

因之

$$q = \frac{\delta M}{\delta x} \cdot \frac{1}{I \cdot z} \int_y^{y_1} y \cdot z \cdot dy = \frac{F}{I \cdot z} \int_y^{y_1} y \cdot z \cdot dy$$

但 $F = \frac{dM}{dx}$, 爲樑橫斷面上剪力之全量. 但實際上 y 處剪內力之強對於 EK 方向上尚有變化, 在中央部最大. 上之積分記號外之 z 爲 BK 斷面最低部 y 處之寬. 積分記號內之 z 爲 y 與 y_1 間寬度之變數. $\int_y^{y_1} y \cdot z \cdot dy$ 爲 KBK' 面積對於中性軸 GG' 之幾何學的能率, 而等於該面積與

其重心至 GG' 之距之相乘積。或由 § 30, 等於第一次作圖所得面積與 HA 即 y_1 之相乘積。故

$$q = \frac{F}{I \times KK'} \times (\text{面積 } KBB') \times (\text{其重心至 } GG' \text{ 之距})$$

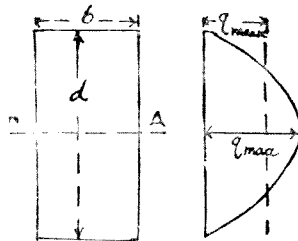
或

$$q = \frac{F \times y_1}{I \times KK'} \times (B \text{ 與 } KK' \text{ 間第一次作圖面積})$$

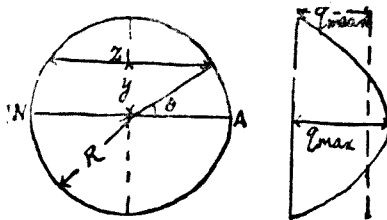
由上知積分下限為零即在中性面上時, q 為極大值。上下兩側即 $y = y_1$ 或 $y = -y_1$ 時, q 為零。

(1) 矩形斷面(第 80 圖)。設寬為 b , 高為 d 。自中性軸高 y 處, z 為定數 b 。故

$$\begin{aligned} q &= \frac{F}{I_z} \int_{-d/2}^{d/2} y \cdot z \cdot dy \\ &= \frac{F}{I} \int_{-d/2}^{d/2} y^2 dy \\ &= \frac{12F}{bd^3} \left(\frac{1}{2} y^2 \right)_{-d/2}^{d/2} = \frac{6F}{bd^3} \left\{ \left(\frac{d}{2} \right)^2 - y^2 \right\} \end{aligned}$$



第 80 圖



第 81 圖

若以 d 為基線, q 之值示於其直角方向上, 則得拋物線. $y=0$ 時, $q = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{bd}$. 剪內力之平均強為 $F \div bd$, 故 q 之極大值為平均值之 1.5 倍.

(2) 圓形斷面(第 81 圖). 設 R 為半徑, 則

$$y = R \sin \theta, \quad z = 2R \cos \theta$$

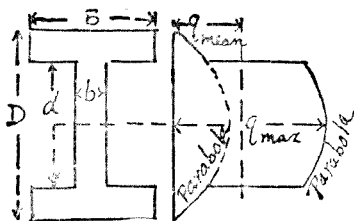
$$dy = R \cos \theta \cdot d\theta, \quad I = \frac{\pi R^4}{4}$$

由此

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{4F \times 2R^3}{\pi R^4 \times 2R \cos \theta} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{4F}{\pi R^2 \cos \theta} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4F}{3\pi R^2} \cos^2 \theta \\
 &= \frac{4F}{3\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right)
 \end{aligned}$$

中性軸上 $\theta=0$ 或 $y=0$, 故 $q = \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{\pi R^2}$, 而 q 之極大值為平均值之 $\frac{4}{3}$ 倍。全斷面上 q 之變化為拋物線。

(3) I 形斷面 (第 82 圖)。先對於緣邊部 (flange) 求之。



第 82 圖

$$q = \frac{F}{IB} \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} yB \cdot dy = \frac{F}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right)$$

$$y = \frac{d}{2} \text{ 時, } q = \frac{F}{I} \cdot \frac{D^2 - d^2}{8}$$

次對於中央部(web)求之。

$$q = \frac{F}{Ib} \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} y \cdot z \cdot dy$$

但 z 在邊緣部爲 B , 在其餘爲 b . 故

$$q = \frac{F}{Ib} \left(B \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} y dy + b \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} y dy \right)$$

$$= \frac{F}{I} \left(\frac{B}{b} \cdot \frac{D^2 - d^2}{8} + \frac{d^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right)$$

$$y = \frac{d}{2} \text{ 時, } q = \frac{F}{I} \cdot \frac{D^2 - d^2}{8} + \frac{B}{b}$$

$$y = 0 \text{ 時, } q = \frac{F}{I} \left\{ \left(\frac{B}{b} \cdot \frac{D^2 - d^2}{8} \right) + \frac{d^2}{8} \right\}$$

41. 應用例題. 以下示本章之例.

例 14. 由自由端 12 呎之內每呎 10 磅之均布

荷重所作用之突出樑，其長共16呎。求最大彎曲能率。又樑斷面若為寬3吋之矩形，材料之可容內力為1,200磅/平方吋，則其厚若何？

突出樑之最大彎曲能率在固着端。故

$$M_0 = wl \left(l - \frac{k}{2} \right) = 10 \times 12 (16 - 6) = 1,200 \text{ 呎磅}$$

$$= 14,400 \text{ 吋磅}$$

$$Z = \frac{1}{6} bh^2 = \frac{M_0}{f}$$

但 $b = 3$ 吋， $f = 1,200$ 磅/平方吋

$$\therefore h^2 = \frac{6 \times 14,400}{3 \times 1,200} = 24 \quad \therefore h = 4.9 \text{ 吋約 } 5 \text{ 吋}$$

例 15. 有鋼製突出樑，其長5呎。斷面為長方形，寬2吋厚3吋。鋼之可容內力為12,000磅/平方吋。求自由端上所可加之最大集中荷重。

最大荷重設為 W 磅，則固着端上彎曲能率為

$$M_0 = Wl = W \times 5 \times 12 = 60W \text{ 吋磅}$$

$$Z = \frac{1}{6} bh^2 = \frac{1}{6} \times 2 \times 3^2 = 3 \text{ (吋)}^3$$

故 $M_0 = fZ$

即 $60W = 3 \times 12000$

$$\therefore W = \frac{3 \times 12000}{60} = 600 \text{ 磅}$$

例 16. 設某木材之突出樑，其長 2 呎，寬 1 吋，厚 $1\frac{1}{2}$ 吋。自由端上加 125 磅之外力，而適破壞。求該木材之最大強度。

最大彎曲能率 $M_0 = 125 \times 2 \times 12 = 3,000$ 吋磅

斷面係數 $Z = \frac{1}{6} \times 1 \times 1.5^2 = 0.375$ (吋)³

$$\therefore f = \frac{M_0}{Z} = \frac{3000}{0.375} = 8,000 \text{ 磅/平方吋}$$

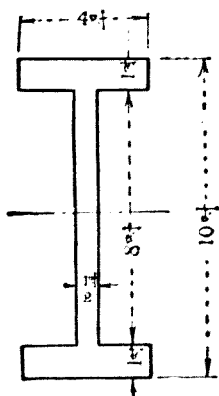
例 17. 第 83 圖之 I 形斷面支持樑，長 16 呎。略去自己重量時，可容內力為 4 噸/平方吋。問樑之中央可加至若干重量？

最大荷重設為 W 噸，則樑之最大彎曲能率為

$$M_0 = \frac{1}{4} W \times 16 \times 12 = 48W \text{ 吋噸}$$

樑斷面之慣性能率為

$$I = \frac{4 \times 10^3 - 3.5 \times 8^3}{12} = \frac{4000 - 1792}{12} = 184 (\text{吋})^4$$



第 83 圖

故斷面係數爲 $Z = \frac{184}{5} = 36.8 (\text{吋})^3$

因之 $48W = 4 \times 36.8$

$$\therefore W = \frac{4 \times 36.8}{48} = 3.07 \text{ 噸約 } 3 \text{ 噸.}$$

例 18. 跨徑 12 呎之方 12 吋木樑支於兩端，中央有荷重 2 噸。求彎曲能率最大之斷面上最大之內力。

最大彎曲能率作用於跨徑中央之斷面。

$$M_0 = \frac{1}{4} \times 2 \times 2240 \times 12 \times 12 = 161,280 \text{ 吋磅}$$

$$Z = \frac{1}{6} \times 12^3 = 288 \text{ (吋)}^3$$

$$\therefore f = \frac{M_0}{Z} = \frac{161280}{288} = 560 \text{ 磅/平方吋}$$

例 19. 直徑 1 吋之圓棒，其彎曲能率可耐至 0.4 吋噸。若支於兩端，則可耐自己重量之最大長度若干？但圓棒重量每長 1 吋為 0.22 磅。

若斷面均一，則棒重可視為均布荷重。今棒長設為 l 吋，則

$$M_0 = \frac{1}{8} w l^2 = \frac{1}{8} \times 0.22 \times l^2 \text{ 吋磅}$$

$$\therefore \frac{1}{8} \times 0.22 \times l^2 = 0.4 \times 2240$$

或
$$l^2 = \frac{0.4 \times 2240 \times 8}{0.22} = 32,580 \text{ (吋)}^2$$

$$\therefore l = 180.5 \text{ 吋} = 15 \text{ 呎 } \frac{1}{2} \text{ 吋}$$

例 20. 方 1 吋之鋼棒曲成 50 呎之半徑時，求棒之最大之內力。但彎曲時，曲於一邊之平面

內。鋼之縱彈性係數爲 13,000 噸/平方吋。

曲率半徑與彎曲能率之關係爲

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

$$\text{今 } R = 50 \times 12 = 600 \text{ 吋}, \quad I = \frac{1}{12} \times 1^4 = \frac{1}{12} \text{ (吋)}^4$$

$$M = \frac{EI}{R} = \frac{13000}{600 \times 12} = 1.8 \text{ 吋噸}$$

$$Z = \frac{1}{6} \times 1^3 = \frac{1}{6} \text{ (吋)}^3$$

$$f = \frac{M}{Z} = 1.8 \times 6 = 10.8 \text{ 噸/平方吋}$$

例 21. 厚爲寬 3 倍之矩形斷面樑與正方斷面樑，其彎曲強度相等。求其重量之比。

彎曲強度相等者，斷面係數相等之謂也。蓋受同大彎曲能率時，所生最大內力相等故也。若材料同一，則重量與容積成比例。同長之樑容積與橫斷面爲比例，故本題乃求斷面係數相等之矩形與正方形之面積比也。

設矩形寬爲 b ，正方形一邊爲 s ，則

$$\text{矩形 } Z_1 = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}b(3b)^2 = \frac{3}{2}b^3$$

$$\text{正方形 } Z_2 = \frac{1}{6}s^3$$

$$\text{但 } Z_1 = Z_2, \therefore \frac{3}{2}b^3 = \frac{1}{6}s^3,$$

$$\text{或 } s = 2.08 b$$

由此求面積，

$$\text{矩形 } A_1 = bh = 3b^2$$

$$\text{正方形 } A_2 = s^2 = 4.32b^2$$

$$\therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{3}{4.32} = 1.44$$

例 22. 有一均一強度之突出樑，其全長受均布荷重。斷面為一定寬之矩形。求外形之方程式。

樑長設為 l ，固着端之厚設為 h_0 ，由自由端相距 x 處斷面之厚設為 h ，則

$$f = \frac{6wl^2}{2bh_0^2} = \frac{6wx^2}{2bh^2}$$

$$\text{或 } \frac{l^2}{h_0^2} = \frac{x^2}{h^2} \quad \therefore \frac{h}{h_0} = \frac{x}{l}$$

h 與 x 之關係為一次,故為直線的變化. 即樑之正面圖為三角形.

例 23. 矩形斷面之松材樑,寬 9 吋,厚 12 吋,支於兩端,跨徑 30 呎. 中央懸 3,000 磅之重量時,求中央之曲率半徑及撓屈. 但 E 為 1,230,000 磅/平方吋. 且假定樑無重量.

中央之彎曲能率

$$M_0 = \frac{1}{4} Wl = \frac{1}{4} \times 3000 \times 30 \times 12 = 270,000 \text{ 吋磅}$$

$$\text{斷面慣性能率 } I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} \times 9 \times 12^3 = 1296 \text{ (吋)}^4$$

$$\begin{aligned} \text{故曲率半徑 } R &= \frac{EI}{M_0} = \frac{1230000 \times 1296}{270000} \\ &= 5904 \text{ 吋} = 492 \text{ 呎} \end{aligned}$$

又由撓屈之公式

$$d_0 = \frac{Wl^3}{48 EI} = \frac{3000 \times 30^3 \times 12^3}{48 \times 1230000 \times 1296} = 1.83 \text{ 吋}$$

例 24. 支於兩端而中央有集中荷重之矩形斷面樑. 最大撓屈若不超過跨徑之 $\frac{1}{n}$ 吋,樑之

厚與跨徑之比須大於 $\frac{nf}{6E}$ 。試證明之。

中央有集中荷重之支持樑，最大撓屈起於荷重作用處。其值對於矩形斷面為

$$d_0 = \frac{Wl^3}{48EI} = \frac{Wl^3}{4Ebh^3}$$

由題意此必等於或小於 l/n 。

$$\therefore \frac{Wl^3}{4Ebh^3} \leq \frac{l}{n}$$

或
$$\frac{1}{4} Wl \leq \frac{Ebh^3}{nl}$$

或 $\frac{1}{4} Wl$ 為樑中央之最大彎曲能率，故

$$\frac{1}{4} Wl = \frac{1}{6} bh^2f$$

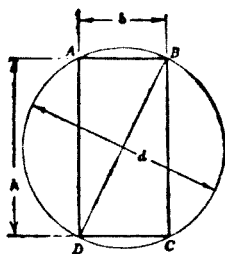
由上二式，

$$\frac{Eh}{nl} \geq \frac{f}{6}$$

即
$$\frac{h}{l} \geq \frac{nf}{6E}$$

例 25. 由原木截成最強矩形斷面之樑，其法如何？

第 84 圖圓 $ABCD$ 示原木之橫斷面. 矩形 $ABCD$ 爲由原木所切成者. 今決定此矩形之邊長, 使成最強之樑. 設此矩形一邊長爲 b , 他邊爲 h , 則由直角三角形三邊之關係,



第 84 圖

$$b^2 + h^2 = d^2 = \text{定數}$$

或

$$h^2 = d^2 - b^2$$

$$\therefore M = \frac{1}{6}fb(d^2 - b^2)$$

因 b 之變化, M 亦變化.

今求 M 最大時之 b 值,

$$\frac{dM}{db} = \frac{1}{6}f(d^2 - b^2 - 2b^2) = 0$$

$$\text{但} \quad \frac{1}{6}f \neq 0, \quad \therefore 3b^2 = d^2$$

$$\text{即} \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}d$$

$$\text{因之} \quad h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$$

例 26. 最大可容內力 1,500 磅/平方吋時，外徑 6 吋內徑 $4\frac{1}{2}$ 吋之鑄鐵管，其可耐之最大彎曲能率幾何？

視管爲樑，其斷面爲中空圓形，故

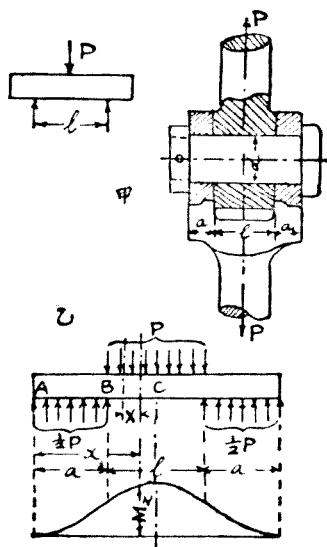
$$Z = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{3.14}{32} \times \frac{6^4 - 4.5^4}{6} = 14.6 \text{ (吋)}^3$$

$$\therefore M = fZ = 1500 \times 14.6 = 21,900 \text{ 吋磅}$$

例 27. 叉接合 (knuckle joint) 上釘 (pin) 之強度。叉接合上釘受剪作用，彎作用與壓作用。簡單言之，釘可視爲兩端支持，中央受荷重或分布荷重之樑。如第 85 圖。

此時集中荷重時， $M_{\max} = \frac{1}{4} Pl$ ；分布荷重時， $M_{\max} = \frac{1}{8} Pl$ 。

然實際釘受分布荷重,且反作用力亦為分布之力,如第85圖乙。



第 85 圖

AB間彎曲能率為

$$M_x = \frac{w l^3}{4a} x^2 \dots \dots \dots (a)$$

但

$$w = \frac{P}{l}$$

B點彎曲能率為

$$M_B = \frac{1}{4} wal$$

BC間彎曲能率爲

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{x-1}^x \frac{1}{a} wl X dX - \int_0^{x-a} w X dX \\ &= \frac{wl}{4a} [x^2 - (x-a)^2] - \frac{w}{2} (x-a)^2 \\ &= \frac{w}{2} \left[l(x - \frac{a}{2}) - (x-a)^2 \right] \dots\dots\dots (b) \end{aligned}$$

上式中 M_x 當 $x = a + \frac{1}{2}l$ 時爲最大。而

$$M_{max} = \frac{1}{8} wl(2a+l) \dots\dots\dots (c)$$

普通 $a = \frac{1}{2}l$, 故 $M_{max} = \frac{1}{4} wl^2 = \frac{1}{4} Pl \dots\dots\dots (c')$

釘之剪斷抵抗由 § 40,

$$f_s = \frac{4}{3} \frac{F}{(\text{面積})} = \frac{4}{3} \frac{P}{2 \times \frac{\pi}{4} d^2} = \frac{8}{3\pi} \frac{P}{d^2} \dots\dots\dots (d)$$

棒受拉伸時,

$$f_t = \frac{P}{\frac{\pi}{4} D^2} \dots\dots\dots (e)$$

但 D 爲棒直徑, f_t 爲棒之拉內力。

由 (c') 式 $\frac{1}{4}Pl = \frac{\pi}{32}f_b d^3 \dots\dots\dots (f)$

由 (c), (f) 兩式,

$$d = \sqrt[3]{2lD^2 \frac{f_t}{f_b}} \dots\dots\dots (g)$$

若 $l = D, f_t = f_b$, 則 $d = D\sqrt[3]{2} = 1.26 D$

更由 (d), (e) 兩式,

$$d = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{f_t}{f_s} D^2} \dots\dots\dots (h)$$

若 $f_t = f_s$,

$$d = D\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.817 D$$

故由彎作用, 則 $d = 1.26D$; 由剪作用, 則 $d = 0.817D$.

但實際上普通 $d = D$.

若由壓作用, 則

$$P = f_c l d = f_c \frac{\pi}{4} D^2$$

設 $l = D$, 則

$$d = \sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{f_t}{f_c} D^2} \dots\dots\dots (i)$$

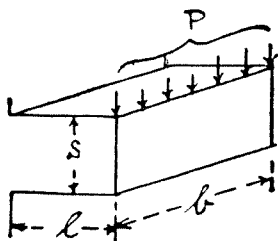
$\frac{f_t}{f_c}$ 略為 $\frac{4}{3}$, 則 d 可略等於 D .

例 28. 齒輪步距 (pitch) 之計算. 速度較低之齒, 以強度為眼目而定齒之尺寸. 第 86 圖上示一齒, 沿其尖端所傳之力 P 設為平均分布. 今齒高設為 l , 厚為 s , 寬為 b . P 所生之彎曲內力若使不超過 f_b , 則

$$f_b = \frac{6Pl}{bs^2}$$

或

$$P = \frac{bs^2 f_b}{6l}$$



第 86 圖

設 p 為步距, 而普通 $l = 0.7 p$, $s = 0.5 p$, 則

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{0.5^2}{0.7} f_b b p = 0.06 f_b b p$$

今設馬力為 H.P., 步距圓半徑為 r , 齒數為 n , 一

分間回轉數爲 N . 則

$$2\pi r = np$$

因之

$$Pr = \frac{0.06}{2\pi} \cdot f_b n b p^3$$

P 若視爲作用於比距圓, 則 Pr 爲迴轉能率 T .

今設 $b = 2p$, 則

$$0.06 f_b n p^3 = T\pi$$

或

$$p = \sqrt[3]{\frac{\pi}{0.06 f_b n} T}$$

又

$$\text{H.P.} = \frac{Pr \times 2\pi N}{33000} = \frac{2\pi NT}{33000}$$

$$\therefore T = \frac{33000 \text{ H.P.}}{2\pi N}$$

因之

$$p = \sqrt[3]{\frac{16500 \text{ H.P.}}{0.06 f_b n N}}$$

問 題

1. 長 12 呎之突出樑上每長 1 呎 300 磅之均布荷重作用時, 求最大彎曲能率.

2. 跨徑 42 呎之樑, 支於兩端. 自一支點相距 1, 6, 14, 24, 31 呎之處各有 5, 5, 11, 12, 9 噸之荷重

作用之。求兩支點上反作用力及荷重作用點上各彎曲能率。

3. 支點間距離 32 呎之樑，由其左端全長 $\frac{1}{2}$ 之間有每呎 1 噸之均布荷重作用之。求最大彎曲能率及危險斷面之位置。

4. 支距間距離 24 呎，全長有總量 60 噸之均布荷重，及自左方支點距 6 呎處向右方 8 呎之間有總量 12 噸之均布荷重。求危險斷面之位置及最大彎曲能率。

5. 最大之內力 7.5 噸/平方呎，高 10 吋，慣性能率 145 (吋)⁴。求此斷面之樑之抵抗能率。

6. 兩支點間距 l 之樑，兩支點外各突出 a, b 之長。第一端上有 W_1 ，第二端上有 W_2 荷重之作用。則兩支點中央彎曲能率之值為一定，且與 l 無關。試證明之。

7. 長 6 呎之木材突出樑，使支持總量 1200 磅之均布荷重。斷面之寬若為 4 吋，則厚須幾吋？但木材之最大強度為 9,000 磅/平方吋，安全率

爲5.

8. 長20呎之支持樑, 支持總量1噸之均布荷重. 自一端距7呎處斷面之彎曲能率幾何?

9. 跨徑14呎之木材支持樑, 其斷面爲寬8吋, 厚12吋之矩形斷面. 跨徑中央有3噸之集中荷重. 求所生最大之內力與中央之曲率半徑.

10. 矩形斷面之木材樑, 支於兩端, 跨徑30呎, 有每呎0.5噸之均布荷重作用之. 樑之厚爲寬之1.6倍. 木材之最大強度爲14,700磅/平方吋, 安全率爲14. 求斷面之尺寸.

11. 車軸上負擔6噸之荷重, 兩車輪距離6呎. 軸座(bearing)距離5呎時, 求剪力圖與彎曲能率圖.

12. 跨徑24呎之樑, 支於兩端, 跨徑之各四等分點上有20噸, 30噸, 40噸之荷重. 求兩支點上反作用力及荷重作用處彎曲能率. 並作剪力圖與彎曲能率圖.

13. 長18呎寬4吋厚12吋之木材樑, 支於兩

端。求作自己重量所生之剪力及彎曲能率圖。但木材每立方呎重量為48磅。

14. 高14吋慣性能率440(吋)⁴之I形斷面樑，支於跨徑20呎時，使最大撓屈不超過 $\frac{1}{4}$ 吋。則中央可懸若干荷重？又此荷重作用時，所生最大值內力幾何？

15. 前題若不為中央之集中荷重而為均布荷重則如何？

16. 長40呎之樑，支於各距兩端8呎處。全長上受1噸/呎之均布荷重。求彎曲能率圖及剪力圖。

17. 有I形斷面之樑，高12吋，上下邊(flange)寬6吋，厚1吋，中部(web)厚 $\frac{7}{8}$ 吋。此樑與他矩形樑，其重量相等，高為寬之2倍，試比較其強度。

18. 兩邊長3吋與9吋之矩形斷面樑。短邊置於水平時，與長邊置於水平時強度之比如何？

19. 有正方形斷面之樑。使用時一邊垂直與對角線垂直之強度比如何？

20. 將直徑 $\frac{1}{4}$ 吋鋼線彎成圓弧。使鋼線內力不超過 $6\frac{1}{2}$ 噸/平方吋時，圓之直徑最小幾何？但 $E=13,000$ 噸/平方吋。

21. 斷面厚 $\frac{1}{20}$ 吋之鋼板捲成直徑 2.5 呎之圓筒。所生最大值之內力幾何？但 $E=13,500$ 噸/平方吋。

22. 兩端固着，長 20 呎之樑上，有總量 12 噸之均布荷重。求最大值之內力。但樑斷面之高為 12 吋，慣性能率為 220 (吋)⁴。

23. 斷面大小一定之連續樑，支於三點。第一跨徑長為 l ，第二跨徑長為 $2l$ 。第一跨徑上有每單位長 $2w$ 之均布荷重，第二跨徑上有每單位長 w 之均布荷重。求支點上反作用力及各跨徑之最大彎曲能率與中央支點之彎曲能率。

24. 有貨車用疊板彈條。寬 4 吋，厚 $\frac{1}{2}$ 吋之

板共 10 塊。跨徑 4 呎。最大撓屈 1.5 吋時，問可支荷重幾何？又此荷重作用時，所生內力幾許？但 $E=13,000$ 噸/平方吋。

第五章

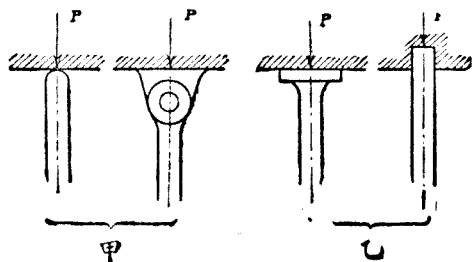
柱

42. 柱. 前述拉與壓時,對於拉無特別制限,而壓縮時則棒之橫斷面積須較其長為相當大者. 蓋若長度在橫之最小尺寸三倍以下之短棒,則內力略平均分布於斷面. 而斷面積為 A ,破壞內力為 f 時,則最大荷重可滿足於 $P=fA$ 之關係. 然棒若長則必同時生多少之彎曲作用,外力未達 fA 而棒已早破壞. 故上式不能應用於長棒. 壓縮時,同時起彎曲作用之長棒稱曰柱 (column or pillar) 或撐 (strut). 另有公式計算之. 一般稱曰長柱 (long column) 之公式.

細長棒兩端沿棒向壓縮之,必多少彎曲. 由此受彎曲內力之作用. 故此時為壓縮內力與彎曲內力之合成作用. 若短棒則無彎曲作用,僅有壓縮內力. 外觀上若能耐大內力者.

43. 柱端之附着. 柱之強度因彎曲作用而定. 故長與斷面之比例, 其影響甚大. 即棒長而細者易於彎曲而破壞. 且破壞難易不僅由於尺寸之如何, 又為兩端附着法所支配. 同大之柱, 若附着法易於彎曲者, 易於破壞.

第 87 圖甲示活動附着端或自由端 (hinged end or rounded end). 棒之軸線方向對於此端可自由傾斜. 同圖乙示固着端 (fixed end or flat end). 柱之軸線方向在此端上, 雖任何彎曲, 受限制而一定不變者也. 故同一尺寸之柱, 若兩端同為活動附着端, 則彎曲最易. 一端固着者較稍難. 兩端同固着者最難彎曲而柱最強.



第 87 圖

柱起彎曲之方向因橫斷面之形而異。屈曲時，慣性能率較斷面大小其關係尤大。對於柱軸線為對稱之斷面即圓，中空圓等，屈曲方向不定，因周圍狀態而異。然非對稱斷面時，則慣性能率最小軸之直角方向上生彎曲。

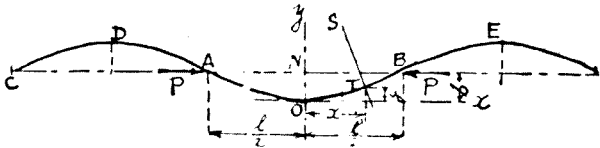
44. 關於柱之屋伊勒 (Euler) 公式。關於柱之公式自分兩種。一為純數理的，對於理想的假定而求得者。一為由實驗的數值應用於數理的公式而得者。後者少與理論的不合一，而能一致於實驗的結果。要之柱之公式研究複雜之合成內力，故不得與單內力或樑之計算得同一程度之精確。

理論的公式有屋伊勒式。此式對於橫斷面小而長度甚大之均質直棒，沿軸向上外力作用時可適用之。

第 88 圖 AB 為細長棒。兩端受軸線的荷重 PP ，則棒彎曲成 AOB 。此彎曲狀態繼續於棒之左右，成 $CDAOBE$ 之波形。或 AB 間波之頂部不

止一個而有數多波形，亦未可知。但此時為不安定。由數學上理論，知曲率半徑 R 為

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$



第 88 圖

但傾斜 $\frac{dy}{dx}$ 為極小，故上式右邊分母可視為 1。

因之

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

長柱之曲度甚小，故第 88 圖上 OY 及 ST' 可視為平行。故對於斷面 T' ，

$$\frac{1}{R} = \frac{(b-y)P}{EI}$$

或
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EI} (b-y) \dots \dots \dots (a)$$

若長柱斷面均一時, I 爲常數, $\frac{P}{EI}$ 亦爲定數. 故微分方程式 (a) 之兩邊乘以 $2 \frac{dy}{dx}$ 而積分之, 則

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{P}{EI} (2by - y^2) + C_1$$

$x=0$ 時, $\frac{dy}{dx}=0, y=0$. 故 $C_1=0$.

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{P}{EI} (2by - y^2) \dots\dots\dots (b)$$

或
$$\frac{dy}{\sqrt{2by - y^2}} = \sqrt{\frac{P}{EI}} dx$$

或
$$\frac{d(b-y)}{\sqrt{b^2 - (b-y)^2}} = -\sqrt{\frac{P}{EI}} dx$$

再積分之,

$$\sin^{-1} \frac{b-y}{b} = -\sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_2$$

但 $x=0, y=0 \quad \therefore C_2 = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \sin^{-1} \frac{b-y}{b} = -\sqrt{\frac{P}{EI}} x + \frac{\pi}{2}$$

或
$$\frac{b-y}{b} = \cos \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \dots\dots\dots (c)$$

$x = \frac{l}{2}$ 時, $y = b$.

$$\therefore 0 = \cos\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

或 $P = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$ (第 89 圖 甲).....(66)

此式為兩端自由之柱之公式。

兩端固着時, 可由 (66) 式導出。即此時兩端軸線方向不變。因之彎曲後軸線形狀如第 88 圖之 $DAOBE$ 之正弦曲線 (sine curve)。而柱長自 D 至 E 。此時 (66) 中 l 為 $\frac{1}{2}l$ 。故得

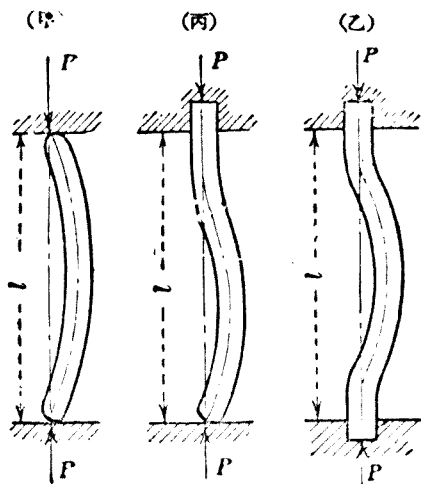
$$P = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} \text{ (第 89 圖 乙)(67)}$$

一端固着一端自由之柱, 則 (66) 中之 l 為 $\frac{3}{4}l$ 。故

$$P = \frac{9}{4}\pi^2 \frac{EI}{l^2} = 2\pi^2 \frac{EI}{l^2} \text{ (第 89 圖 丙)(68)}$$

以上各式中 P 為柱開始彎曲時之荷重, E 為

柱之縱彈性係數, I 為柱橫斷面之最小慣性能率, l 為柱之有效長。



第 89 圖

上諸式中不含材料之壓縮強度, 且在彈性限界以內, 雖在任何彎曲位置, 可保平衡. 故開始彎曲之荷重為安全荷重, 而亦為破壞荷重. 較屋伊勒公式所示者更小之荷重, 可使柱保持其直線形. 因之僅有壓縮內力之作用. 荷重若達上式 P 值時, 柱生彎曲. 且撓屈之值不因

P 之大小,可達任何值. 而彎曲能率與撓屈成正比例,因之屈曲內力亦增,最後達破壞. 故開始彎曲之荷重,可視為破壞荷重也.

若荷重未達 P 時,而內力已達壓縮之降服點或壓縮之最大強度之短柱,則屋伊勒公式不能適用. 其限界如次.

屋伊勒公式一般寫為

$$P = n\pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

n 表常數 1, 2, 4. $I = Ak^2$. 故

$$\frac{P}{A} = p_0 = n\pi^2 E \frac{k^2}{l^2}$$

但 p_0 為降服點內力, k 為斷面之迴轉半徑, A 為斷面積. p_0 與 E 已知時, $\frac{k}{l}$ 之最大值可求. 此為公式適用之限界. 即

$$\frac{l}{k} = \pi \sqrt{n} \sqrt{\frac{E}{p_0}}$$

今就重要材料,求 $\frac{l}{k}$ 之值如下:

$$\text{鑄鐵} \quad \pi\sqrt{\frac{17,000,000}{40,000}} = 65 \quad (\text{約})$$

$$\text{軟鋼} \quad \pi\sqrt{\frac{30,000,000}{36,000}} = 91 \quad (\text{約})$$

木材 平均 53

此等之值乘以 n 可得 $\frac{l}{k}$ 之最小值。即兩端均自由時，爲上記之值。一端固着時，須乘以 $\sqrt{2} = 1.41$ 。兩端均固着時，須乘以 2。

例 1. 對於圓形斷面之柱，求屋伊勒公式之適用限界。

設圓形斷面之直徑爲 d ，則

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{64}d^4}{\frac{\pi}{4}d^2}} = \frac{d}{4}$$

$$\therefore \frac{l}{k} = \frac{4l}{d}$$

對於兩端之軟鋼棒，則

$$\frac{l}{k} = 91 = \frac{4l}{d}$$

$$\therefore \frac{l}{d} = 22.75, \text{ 或 } l = 22.75 d.$$

例2. 以6吋方之松材, 作12呎長之自由端柱. 其安全荷重如何?

對於松材, $E = 1,400,000$ 磅/平方吋, $p_0 = 5,500$ 磅/平方吋, 故對於自由端,

$$\frac{l}{k} = \pi \sqrt{\frac{1,400,000}{5,500}} = 50 \text{ (約)}$$

但 $l = 12 \text{ 呎} = 144 \text{ 吋}$,

$$\therefore k = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \times 6^4}{6^2}} = \sqrt{3} = 1.732 \text{ 吋}$$

即
$$\frac{l}{k} = \frac{144}{1.732} = 83 \text{ (約)}$$

故屋伊勒公式可適用. 其破壞荷重爲

$$P = \pi^2 \frac{EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 1,400,000 \times 6^4}{(12 \times 12)^2} = 71,950 \text{ 磅} = 32.1 \text{ 噸}$$

若安全率爲10, 則 $P_s = \frac{P}{10} = 3.21 \text{ 噸}$.

45. 古爾屯藍慶 (Gordon-Rankine) 之公式.

古爾屯藍慶公式爲現時計算柱之強度上最多用者。其形自屋伊勒理論式導出，而加以實驗的係數者也。

$$\text{對於短柱,} \quad P_1 = fA$$

$$\text{對於長柱,} \quad P_2 = n\pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

故對於任何之柱可書爲

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}$$

但 P 爲破壞荷重。蓋若極短柱，則 P_2 極大，而

$\frac{1}{P_2}$ 甚小，可略去之。因之 $P = P_1$ 。若極長柱，則

可略去 $\frac{1}{P_1}$ 而 $P = P_2$ 。故上式兩極端時與理論一

致。因之

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\frac{1}{fA} + \frac{l^2}{n\pi^2 EI}} = \frac{fA}{1 + \frac{fl^2}{n\pi^2 Ek^2}} \\ &= \frac{fA}{1 + n'a \left(\frac{l}{k}\right)^2} \end{aligned}$$

但 n' 爲兩端附着法之常數, a 及 f 爲實驗係數。上之公式明記之如下:

(1) 兩端自由之柱(第 89 圖甲)

$$P = \frac{fA}{1 + 4a\left(\frac{l}{k}\right)^2} \dots\dots\dots(69)$$

(2) 一端固着他端自由之柱(第 89 圖丙)

$$P = \frac{fA}{1 + 2a\left(\frac{l}{k}\right)^2} \dots\dots\dots(70)$$

(3) 兩端固着之柱(第 89 圖乙)

$$P = \frac{fA}{1 + a\left(\frac{l}{k}\right)^2} \dots\dots\dots(71)$$

但 P 爲破壞壓縮荷重, f 爲實驗上之壓縮強度, l 爲柱之有效長, A 爲柱之橫斷面積, k 爲斷面之最小迴轉半徑, a 爲關係於材料之實驗係數。次示重要材料之 f 及 a 之值。

材 料	f 磅 平方吋	a
鍊 鐵	36,000	$\frac{1}{36,000}$
鑄 鐵	80,000	$\frac{1}{6,400}$
軟 鋼	48,000	$\frac{1}{30,000}$
硬 鋼	70,000	$\frac{1}{20,000}$
乾 燥 木 材	7,200	$\frac{1}{3,000}$

由實驗結果,則 $\frac{l}{k}$ 在 20 至 100 內外之間,古爾屯藍慶之公式甚與實際之值相一致. $\frac{l}{k}$ 在 150 以上,則尾伊勒公式為適用. 但實際 $\frac{l}{k}$ 無此大值,故多用古爾屯藍慶之公式.

例 3. 兩端自由之軟鋼支柱,長 6 呎,斷面積為 3.634 平方吋. 斷面之最小慣性能率為 4.7(吋)⁴. 問加幾噸外力壓縮時方破壞?

先求 $\frac{l}{k}$ 之值. $k^2 = \frac{I}{A} = \frac{4.7}{3.634} = 1.293$ (吋)².

$$\left(\frac{l}{k}\right)^2 = \frac{(6 \times 12)^2}{1.293} = 4,000, \quad \therefore \frac{l}{k} = 63.2$$

故以古爾屯藍慶公式計算之爲適當

對於軟鋼, $f=48,000$ 磅/平方吋, $a = \frac{1}{30,000}$

$$\therefore P = \frac{48,000 \times 3.634}{1 + \frac{4}{30,000} \times 4,000} = 114,000 \text{ 磅} = 50.8 \text{ 噸}$$

例4. 兩端活動附着之木材直柱,長9呎,斷面積爲8吋×10吋之矩形,安全使用內方爲900磅/平方吋時,安全荷重幾何?

最小慣性能率爲

$$I = \frac{1}{12} \times 10 \times 8^3 = 426.7 \text{ (吋)}^4$$

柱之斷面積爲 $A = 8 \times 10 = 80$ 平方吋.

$$k^2 = \frac{I}{A} = \frac{426.7}{80} = 5.33 \text{ (吋)}^2$$

故 $P = \frac{900 \times 80}{1 + \frac{4 \times (9 \times 12)^2}{3,000 \times 5.33}} = 18,370 \text{ 磅} = 8.20 \text{ 噸}$

46. 其他之公式. 實用上公式自古爾屯藍

慶公式外尚有數多，茲舉其一二如下。

江遜 (Johnson) 公式，江遜將 $\frac{l}{k}$ 與 f_0 之關係以拋物線式表之如下：

$$p_0 = f_c - b \left(\frac{l}{k} \right)^2 \dots\dots\dots (72)$$

但 f_c 爲對於壓縮之降服點內力， b 爲實驗常數，對於兩端無摩擦之柱，與屋伊勒公式相比較，則

$b = \frac{f_c^2}{4\pi^2 E}$ ，但實際有摩擦等影響，故江遜對於自

由端用 $\frac{f_c^2}{64E}$ ，對於固着端用 $\frac{f_c^2}{100E}$ 。

李里 (Lilly) 公式，李里氏就多數之活動附着端之鋼製小管柱實驗之，發見古爾屯藍慶之公式中 f 之值起於管之第二種撓屈 (secondary flexure)，此第二種撓屈與柱長無關，僅由管厚及其回轉半徑而定，此等與古爾屯藍慶式中 f 之關係爲

$$f = \frac{F}{1 + \beta \left(\frac{k}{t} \right)^2} \dots\dots\dots (73)$$

但 F 爲材料之壓縮強度, β 爲實驗係數, 對於鍊鐵及軟鋼取爲 $\frac{1}{60}$, t 爲管厚, k 爲斷面之回轉半徑。此公式乃求出古爾屯藍慶公式中 f 之值, 由此所得之 f 代入於古爾屯藍慶公式中者也。但此式不適用於管厚對於直徑爲大者, $\frac{k}{t}$ 漸小時, f 略與 F 相等。

例 5. 外徑及內徑各爲 5 吋與 4 $\frac{1}{2}$ 吋之軟鋼管, 長 100 吋, 兩端活動附着。用李里公式求 f 之值而計算破壞荷重, 但 $F=30$ 噸/平方吋。

柱橫斷面爲中空圓形,

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4), \quad A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$

$$\therefore k^2 = \frac{I}{A} = \frac{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)} = \frac{1}{16}(D^2 + d^2)$$

故
$$k^2 = \frac{5^2 + 4.5^2}{16} = \frac{45.25}{16} = 2.83 \text{ (吋)}^2$$

$$A = \frac{3.14}{4}(5^2 - 4.5^2) = \frac{3.14 \times 4.75}{4} = 3.73 \text{ 平方吋}$$

$$t = \frac{1}{2}(D-d) = \frac{1}{2}(5-4.5) = 0.25 \text{ 吋}$$

$$\therefore \left(\frac{k}{t}\right)^2 = \frac{2.83}{0.25^2} = 45.25$$

因之 $f = \frac{30}{1 + \frac{1}{60} \times 45.25} = \frac{30}{1.754} = 17.1 \text{ 噸/平方吋}$

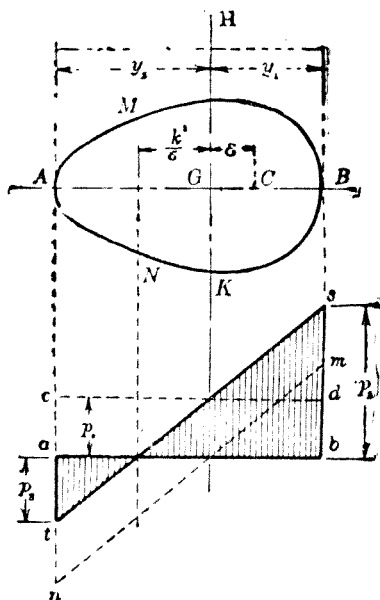
$$\therefore P = \frac{17.1 \times 3.73}{1 + \frac{4}{36,000} \times \frac{100^2}{2.83}} = \frac{17.1 \times 3.73}{1.393} = 45.8 \text{ 噸}$$

47. 偏心荷重作用之柱. 上述之柱, 外力作用於軸線上, 即受軸線荷重(axial load)者也. 然實際上往往壓縮力之作用線不在軸向上, 而在其平行方向, 偏於軸線一側. 此曰偏心荷重(eccentric load). (荷重作用方向若與軸傾斜時, 當另研究之.) 對於此種之柱, 橫斷面上內力分布不能視為平均分布. 大部分內力與偏心(eccentricity)成比例而作用於偏向之側. 以較軸線荷重更小之荷重而破壞.

(1) 短柱. 第90圖示偏心荷重作用之柱之

橫斷面。 G 為斷面重心，即軸線之切口。 C 為荷重作用線之切口。²⁶ 設荷重大小為 P ，則縱內力為

$$p_0 = \frac{P}{A}$$



第 90 圖

又此斷面上有 $P\varepsilon$ 彎曲能率之作用，故有彎曲

內力 p_0 之作用. 圖示 $abcd$ 爲僅有壓縮內力之線圖, $abmn$ 爲僅有彎曲內力之線圖. 故斷面上作用之內力, 爲此兩內力之合成. 即圖上 $abst$ 所表示者.

$$p_0 = \frac{P}{A}$$

$$p_b = \frac{P\varepsilon}{Z} = \frac{P\varepsilon y}{I}$$

但 $I = Ak^2$, $\therefore p_b = \frac{P\varepsilon y}{Ak^2} = \frac{P}{A} \left(\frac{\varepsilon y}{k^2} \right) = p_0 \frac{\varepsilon y}{k^2}$

故

$$p = p_0 + p_b = p_0 \left(1 + \frac{\varepsilon y}{k^2} \right)$$

y 對於 G 在荷重同側者爲正, 異側者爲負. 因之兩端內力爲

$$p_1 = p_0 \left(1 + \frac{\varepsilon y_1}{k^2} \right)$$

$$p_2 = p_0 \left(1 - \frac{\varepsilon y_2}{k^2} \right)$$

p_1 爲最大內力.

若斷面對於 HK 爲對稱. 則 $y_1 = y_2 = \frac{h}{2}$.

$$\therefore p_1 = p_0 \left(1 + \frac{\varepsilon h}{2k^2} \right), \quad p_2 = p_0 \left(1 - \frac{\varepsilon h}{2k^2} \right)$$

$y = -\frac{k^2}{\varepsilon}$ 時, $p = 0$. 故 $\frac{k^2}{\varepsilon}$ 較 y_2 小時, 此部分在斷面內, 而生無內力作用之部分. 圖中 MN 即此也. 此即中性軸. 若 $\frac{k^2}{\varepsilon}$ 較 y_2 大時, 則斷面中無內力爲零之部. 即僅有壓縮內力之作用. 荷重偏向側端面內力最大, 其反對側端面內力最小. 又荷重之反對側可生拉內力, 故鑄鐵等耐壓強而耐拉弱之材料, 反因拉內力而破壞者.

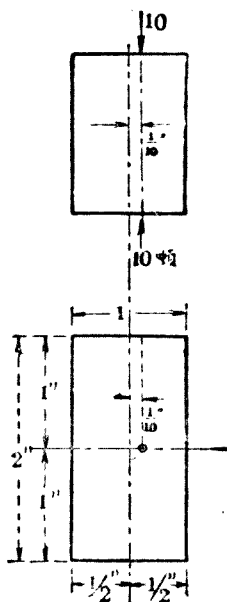
例 6. 第 91 圖所示矩形斷面之短柱, 以 10 噸之力, $\frac{1}{10}$ 吋之偏心壓之. 求所生最大值之內力.

壓縮內力爲

$$p_0 = \frac{P}{A} = \frac{10}{2 \times 1} = 5 \text{ 噸/平方吋}$$

$$k^2 = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{bh} = \frac{1}{12}h^2 = \frac{1}{12} \times 1^2 = \frac{1}{12} \text{ (吋)}^2$$

$$y_1 = \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \text{ 吋}$$



第 91 圖

故最大值內力爲

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_0 \left(1 + \frac{\epsilon y_1}{k^2} \right) = 5 \left(1 + \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} \right) \\
 &= 5 \times \left(\frac{5+3}{5} \right) = 8 \text{ 噸/平方吋}
 \end{aligned}$$

$$p_2 = p_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_{2/2}}{k^2} \right) = 5 \left(1 - \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} \right)$$

$$= 5 \left(\frac{5-3}{5} \right) = 2 \text{ 噸/平方吋}$$

例7. 外徑8吋, 內徑6吋之管狀鑄鐵柱. 自中心 $1\frac{3}{4}$ 吋偏心處有20噸荷重之作用. 求最大值內力.

斷面積為

$$A = \frac{\pi}{4} (8^2 - 6^2) = 22.0 \text{ 平方吋}$$

壓縮內力強

$$p_0 = \frac{20}{22} = 0.909 \text{ 噸/平方吋}$$

斷面慣性率

$$I = \frac{\pi}{64} (8^4 - 6^4) = 137.5 (\text{吋})^4$$

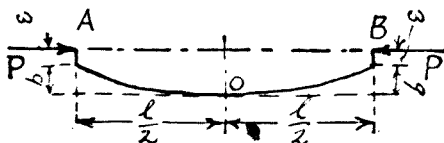
迴轉半徑

$$k^2 = \frac{I}{A} = \frac{137.5}{22} = 6.25 (\text{吋})^2$$

$$\begin{aligned} \therefore p_1 &= p_0 \left(1 + \frac{\varepsilon y_1}{k^2} \right) = 0.909 \left(1 + \frac{1.75 \times 4}{6.25} \right) \\ &= 1.927 \text{ 噸/平方吋 (壓內力)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= p_0 \left(1 - \frac{\varepsilon y_2}{k^2} \right) = 0.909 \left(1 - \frac{1.75 \times 4}{6.25} \right) \\ &= -0.109 \text{ 噸/平方吋 (拉內力)} \end{aligned}$$

(2) 長柱. 今設如第 92 圖所示兩端自由之長柱, 荷重作用處偏心為 ε , 則由 § 44 之方法得



第 92 圖

$$\frac{b + \varepsilon - y}{b + \varepsilon} = \cos \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

$$x = \frac{1}{2} l, y = b. \quad \therefore \frac{\varepsilon}{b + \varepsilon} = \cos \left(\frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

對於 O 處斷面, $p_a = \frac{P}{A}$

$$p_b = \frac{P(b + \varepsilon)}{Z} = \frac{y}{I} P \varepsilon \sec \left(\frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \bar{I} = p_0 + p_c &= \frac{P'}{A} \left\{ 1 + \frac{\epsilon y}{k^2} \sec \left(\frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P'}{EI}} \right) \right\} \\ &= p_0 \left\{ 1 + \frac{\epsilon y}{k^2} \sec \left(\frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P'}{EI}} \right) \right\} \end{aligned}$$

此 p 之值不得大於材料降伏點之壓縮內力 f_c 。故兩端自由之長柱，

$$p_0 = \frac{f_c}{1 + \frac{\epsilon y}{k^2} \sec \left(\frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P'}{EI}} \right)} \dots\dots\dots(74)$$

同樣對於兩端固着之長柱，則

$$p_0 = \frac{f_c}{1 + \frac{\epsilon y}{k^2} \sec \left(\frac{1}{4} l \sqrt{\frac{P'}{EI}} \right)} \dots\dots\dots(75)$$

例 8. 例 7 之管形柱，長 40 呎，兩端固着。20 噸荷重自中心 $1\frac{3}{4}$ 偏心處作用時，求最大值之內力。 $E=5,000$ 噸/平方吋。

$$k^2 = 6.25 \text{ (吋)}^2$$

$$\begin{aligned} \sec \left(\frac{1}{4} l \sqrt{\frac{P'}{EI}} \right) &= \sec \left(\frac{1}{4} l \sqrt{\frac{p_0 A}{E A k^2}} \right) \\ &= \sec \left(\frac{1}{4} l \sqrt{\frac{p_0}{E k^2}} \right) \end{aligned}$$

$$= \sec \frac{480}{4} \sqrt{\frac{0.909}{5,000 \times 6.25}} = \sec 0.646 = \sec 37^\circ$$

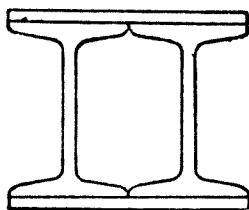
$$= 1.25$$

$$\therefore f_c = p_0 \left(1 + \frac{1.75 \times 4}{6.25} \times 1.25 \right) = 0.909 (1 + 1.4)$$

$$= 2.18 \text{ 噸/平方吋}$$

問 題

1. 圖示合成斷面之鋼柱，其橫斷面積為 39.88 平方吋，最小迴轉半徑為 3.84 吋。長 40 呎，兩端固着。由屋伊勒及古爾屯藍慶公式求其最大荷重。



第 93 圖

2. 圓管形鑄鐵柱，外徑 8 吋，長 20 呎，兩端固着。支持 80 噸荷重時，設安全率為 6，求管之必要厚度。（用古爾屯藍慶公式為便。）

3. 直徑 4 吋長 5 呎之鍊鐵圓棒, 一端固着, 一端自由. 安全率爲 8. 試用古爾屯藍慶公式求安全荷重.

4. 一邊長 7 吋之方松柱, 全長 8 呎, 其端爲活動附着. 設安全內力爲 700 磅/平方吋, 由古爾屯藍慶公式求安全荷重.

5. 正方形斷面之長 12 呎之兩端固定木柱, 須安全支持 15 噸之荷重. 安全率爲 10, 求斷面每邊長.

6. 兩端自由之軟鋼棒, 斷面積 4.77 平方吋, 慣性能率 $6.07 (\text{吋})^4$. 安全支持 4 噸之壓縮力時, 求最大之長. 但安全率爲 4.

7. 鑄鐵短柱, 有外徑 6 吋, 內徑 5 吋之管形斷面. 受 12 噸荷重. 荷重作用點離中心 $\frac{1}{2}$ 吋時, 求最大及最小壓內力.

8. 起重機柱之斷面爲 I 形, 斷面積 24 平方吋, 高 25 吋, 慣性能率 $3,000 (\text{吋})^4$. 吊 10 噸荷重於水平半徑 14 呎之處. 求最大壓內力與拉內力.

(短柱之計算.)

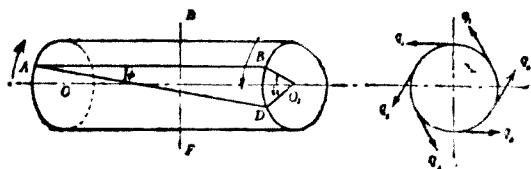
9. 中空矩形斷面之鑄鐵柱, 外形爲4吋×5吋, 內形爲3吋×4吋. 兩端固着, 長18呎. 由古爾屯藍慶公式求安全荷重. 但安全率爲8.

10. 軟鋼圓棒之支柱, 長5呎, 兩端爲自由之活動附着. 受12噸之壓縮力. 若壓縮力作用線自軸線偏 $\frac{1}{10}$ 吋時, 使最大內力不超過6噸/平方吋. 求直徑幾何. $E=13,000$ 噸/平方吋.

第 六 章

扭 及 軸

48. 圓軸之扭. 圓形之均等橫斷面之棒或圓軸, 固定其一端而他端加以偶力扭轉時, 軸之各部生扭內力而生歪. 此時之內力為單純之剪斷內力. 第94圖示圓軸表面平行於軸線 OO_1 之 AB 直線, 變形後取 AD 之位置. 半徑 O_1B 移至 O_1D 之位置. 其歪可視為各橫斷面對於其隣接斷面所扭轉之角度, 而扭轉之量與自固定端之距離成正比例. 故線 AD 各部分與其原線方向所成之角 ϕ 為一定, 線 AD 成一螺旋狀 (helix).



第 94 圖

而角 ϕ 稱曰歪角 (angle of shears). 然扭轉之量與自 A 之距成比例, 故 BD 最大. 此值爲各少量扭轉沿軸長方向上所集成, 故取其單位長上之扭轉量以表歪. 即 ϕ 角以弧度法表之者是也.

斷面 O_1BD 上半徑 O_1B 與 O_1D 間之角 i , 稱曰扭角 (angle of twist). 其值與 AB 之長成比例.

今設任意橫斷面 EF , 作用於軸外周面之剪內力爲 q_1 , 軸半徑爲 r_1 , 則

$$q_1 = N\phi$$

又
$$i = \frac{BD}{r_1} = \frac{l\phi}{r_1}$$

但 l 爲 AB 之長. 故

$$i = \frac{q_1 l}{N r_1}$$

此爲外周面上之關係. 次就圓軸內部之內力及歪考察之. 半徑 O_1B 扭轉後成半徑 O_1D , 亦爲直線. 故斷面各點歪之值與中心距離爲比例. 因之內力之強亦與中心距離即半徑爲比例. 故任意半徑 r 處之剪內力 q 爲

$$\frac{q}{r} = \frac{q_1}{r_1}$$

或

$$q = \frac{q_1 r}{r_1}$$

今設半徑 r , 半徑方向上寬 dr 之微小輪狀面, 而求該面積上剪內力之總量. 設此部分上剪內力強為 q , 則剪力總量為 $q \cdot 2\pi r \cdot dr$, 或 $\frac{q_1 \cdot r}{r_1} \times 2\pi r dr$. 其對於軸中心, 此力之能率為

$$\frac{q_1}{r_1} \times r \times 2\pi r dr \times r = \frac{q_1}{r_1} \cdot 2\pi r^3 \cdot dr$$

對於斷面全體積分之, 總能率為

$$\int_0^{r_1} 2\pi \cdot \frac{q_1 r^3}{r_1} dr = \frac{\pi}{2} q_1 r_1^3$$

若中空圓軸, 則 r 由內部半徑 r_2 至外部半徑 r_1 . 故總能率為

$$\int_{r_2}^{r_1} 2\pi \cdot \frac{q_1 r^3}{r_1} dr = \frac{\pi}{2} q_1 \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1}$$

此為對於外部所加扭作用而抵抗之內力對於中心之能率. 故稱曰極抵抗能率 (polar resisting moment).

外部所加偶力之能率，稱曰扭轉能率 (twisting moment)。普通以 T 表之。圓軸之平衡關係爲扭轉能率等於極抵抗能率。故

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{\pi}{2} \tau_1 r_1^3 && \text{(實體圓軸)} \\ T &= \frac{\pi}{2} \tau_1 \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1} && \text{(中空圓軸)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (76)$$

或 τ_1 卽材料之可容最大剪內力 f_s ，又半徑以直徑表之，則上式爲

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{\pi}{16} f_s r^3 && \text{(實體圓軸)} \\ T &= \frac{\pi}{16} f_s \frac{d^4 - d_0^4}{d} && \text{(中空圓軸)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (76a)$$

但 d_0 爲中空部直徑。上式卽普通所用計算圓軸強度之式。

49. 軸之扭角。扭角之式如上所示

$$i = \frac{q_1 l}{N r_1} = \frac{2 f_s l}{N d}$$

由 (76a) 得

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{32}{\pi N} \cdot \frac{T l}{d^4} && \text{(實體圓軸)} \\ i &= \frac{32}{\pi N} \cdot \frac{T l}{d^4 - d_0^4} && \text{(中空圓軸)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (77)$$

此即示軸之剛度之式也。故強度雖大而長度過長者，扭角太大，不適於用。此時須由剛度之式以決定棒之尺寸。

50. 傳送已知馬力之圓軸，扭轉能率 T 作用之半徑設為 R 吋，其外力設為 P 磅，軸每分間週轉數設為 n ，則

$$T = PR$$

軸上所加外力即軸上所加扭轉能率有常為同一值者，又有常多少變少者。後者須特別考察之。蓋定軸之強度，剛度等時，須就最大扭轉能率作用時計算之。然計算馬力時，則非常有最大值之作用，須用其平均值。

設傳送馬力為 H.P.，則

$$\text{H.P.} = \frac{\frac{2\pi R}{12} n P_m}{33,000}$$

故
$$T_m = P_m R = \frac{33,000 \times 12}{2\pi n} \frac{\text{H.P.}}{1}$$

或
$$T_m = 63,000 \frac{\text{H.P.}}{n} \dots\dots\dots (78)$$

但 P_m 及 T_m 爲 P 與 T 之平均值。

軸之大小須由 P 或 T 之最大值求之。今設

$$T_{max} = KT_m$$

但 K 爲係數而大於 1。則

$$KT_m = 63,000 \frac{K \text{ H.P.}}{n} = \frac{\pi}{16} f_s d^3$$

$$\therefore d = \sqrt[3]{\frac{321,000 K \text{ H.P.}}{f_s n}} \dots \dots \dots (79)$$

f_s 之值由普通使用材料而定，示其一二如下：

鍊鐵	9,000 磅/平方吋
鋼	13,000 磅/平方吋
鑄鐵	4,500 磅/平方吋

K 之值各種不同。就往復蒸汽機關之曲柄軸 (crank shaft) 言之，則

單汽筒機關	$K=2.10$	$\sqrt[3]{K}=1.28$
曲柄角 90° 雙筒機關	$K=1.37$	$\sqrt[3]{K}=1.11$
曲柄角 90° 複式機關	$K=1.48$	$\sqrt[3]{K}=1.14$
曲柄角 120° 複式機關	$K=1.77$	$\sqrt[3]{K}=1.21$

此等蒸汽機關之 K 值,由曲柄回轉力線圖 (crank effort diagram) 求得之. 而單汽筒機關上取

$$T_{max} = (\text{曲柄長, 吋}) \times (\text{動塞上最大總壓力, 磅})$$

$$f = 5000 \text{ 磅/平方吋}$$

以計算之.

有時由剛度求直徑,此時以扭轉能率及可容最大扭角以表直徑. 今 i_0 設為最大扭角度數, 則

$$d = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi N} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{l}{i_0} \cdot T_{max}} \dots\dots\dots (80)$$

對於普通所用材料 N 之值略定, 故

$$\left. \begin{array}{l} \text{鍊鐵軸 } d = 0.0863 \sqrt[4]{\frac{l}{i_0} \cdot T_{max}} \\ \text{鋼 軸 } d = 0.0835 \sqrt[4]{\frac{l}{i_0} \cdot T_{max}} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (81)$$

利用扭角而測馬力,則可不中斷馬力傳送而定之. 即所以求軸馬力 (shaft horse power) 者也. 此由已知軸之直徑,其材料之種類,其回轉數,及軸上任意二點間距離,而測定其間之扭角,

則可由前記數式以求馬力。即

$$i = \frac{32}{\pi N} \cdot \frac{Tl}{d^4}$$

或 i 以度數表之，則

$$i = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{32}{\pi N} \cdot \frac{Tl}{d^4}$$

但 $T = 63,000 \frac{\text{H.P.}}{n}$

故 $\text{H.P.} = \frac{\pi^2 N d^4 n i}{363,000,000 l} \dots \dots \dots (S2)$

51. 異形軸。圓軸以外之軸使用甚鮮，而精確之計算亦難。原來軸之扭轉理論中，假定始為平面之橫斷面，扭轉後仍保持為平面。此對於圓形斷面，與實際一致。但圓形以外之斷面，則外周各點至中心之距不相等，扭轉後，斷面上生歪，不能保持其平面。故前述理論不能適用於異形軸。關於異形軸之研究，則 St. Venant 最有名。非對稱形之不整形斷面，幾無用之為軸者，大抵如橢圓形，正方形，或矩形等斷面有用之者。

正方形斷面 (square section). 每邊長 s 時, 最大之內力起於各邊中央. 扭轉能率之式如次:

$$T = 0.208 s^3 f_s \dots \dots \dots (83)$$

扭角與扭轉能率之關係爲

$$i = 7.11 \frac{Tl}{Ns^4} \dots \dots \dots (84)$$

橢圓形斷面 (elliptic section). 設長軸爲 a , 短軸爲 b . 最大之內力起於短軸兩端. 扭轉能率之關係如次:

$$T = \frac{\pi}{16} ab^2 f_s \dots \dots \dots (85)$$

扭角與扭轉能率之關係爲

$$i = \frac{16(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \cdot \frac{Tl}{N} \dots \dots \dots (86)$$

矩形斷面 (rectangular section). 設長邊爲 a , 短邊爲 b , 最大之內力起於長邊中央. 扭轉能率之式如下:

$$T = \frac{a^2 b^2}{3a + 1.8b} \cdot f_s \dots \dots \dots (87)$$

而扭角與扭轉能率之關係可如次求之. 一

般對於對稱的斷面，扭角與扭轉能率之關係為

$$i = \frac{40J}{A^4} \cdot \frac{Tl}{N} \dots\dots\dots(88)$$

但 J 為斷面之極慣性能率， A 為斷面積。40 之數為實驗常數，圓形或橢圓形斷面時，用 $4\pi^2$ 之數， a 與 b 之比在 3 以下之矩形斷面時，用 42。

故對於矩形斷面，則

$$J = I_x + I_y = \frac{1}{12} ab(a^2 + b^2), \quad A = ab$$

$$\therefore i = \frac{42(a^2 + b^2)ab}{12a^4b^4} \cdot \frac{Tl}{N} = 3.5 \frac{a^2 + b^2}{a^3b^3} \cdot \frac{Tl}{N} \dots\dots\dots(89)$$

有縱栓之圓形斷面。軸上裝拖帶輪等時，普通用縱栓 (key)。圓形斷面之一部分凹入。內力之值對於同一扭轉能率為大。換言之，有同值最大內力時，其所耐扭轉能率為小。縱栓孔寬設為 w ，深為 h ，軸之直徑為 d ，則

$$T = \left(1.0 - 0.2 \frac{w}{d} - 1.1 \frac{h}{d}\right) f_s \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \dots\dots\dots(90)$$

$$i = \left(1.0 + 0.4 \frac{w}{d} + 0.7 \frac{h}{d}\right) \frac{32}{\pi N} \cdot \frac{Tl}{d^4} \dots\dots\dots(91)$$

上式括弧中係數為實驗所得者。

例 1. 每分 58 回轉, 傳送 600 馬力之鋼製圓形斷面軸, 其直徑如何? 但內力之極限為 10,000 磅/平方吋。

由公式 (79), $K=1$, $H.P.=600$, $f_s=10,000$, $n=58$.

$$d = \sqrt[3]{\frac{321,000 \times 600}{10,000 \times 58}} = 6.93 \text{ 或 } 6\frac{15}{16} \text{ 吋.}$$

例 2. 前題之軸若為內徑為外徑之 $\frac{3}{4}$ 倍之中空斷面, 則內徑與外徑之值如何?

設外徑為 d , 內徑為 d_0 , 則

$$d_0 = \frac{3}{4}d = 0.75d$$

$$\frac{d^4 - d_0^4}{d} = (1 - 0.75^4)d^3 = 321,000 \frac{H.P.}{nf_s}$$

$$\therefore d = \sqrt[3]{\frac{321,000 \times 600}{0.684 \times 58 \times 10,000}} = 7.87 \text{ 吋, 或 } 7\frac{7}{8} \text{ 吋.}$$

因之 $d_0 = 0.75 \times 7.87 = 5.87 \text{ 吋, 或 } 5\frac{7}{8} \text{ 吋.}$

例 3. 試比較前二題軸之重量。

前二題之軸以同一強度之條件計算者, 但重

量相異 中空軸輕而有利 二者爲同一材料，故重量與體積爲比例。設軸長相同，則與斷面積爲比例。求其斷面積即可。

$$\begin{aligned} \text{實體斷面, } A_1 &= \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4} \times (6.9375)^2 \\ &= 37.8 \text{ 平方吋} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{中空斷面, } A_2 &= \frac{\pi}{4}(d^2 - d_0^2) = \frac{\pi}{4}(7.875^2 - 5.875^2) \\ &= 21.6 \text{ 平方吋} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{A_1}{A_2} = \frac{37.8}{21.6} = 1.75$$

例4. D. K. Clark 氏謂扭角之最大可容限度爲每長 $20d$ 可有 1° 。就此極限求最大值內力。但軸之材料爲鍊鐵。

$$\text{由公式(77) } i = i' \times \frac{\pi}{180} = \frac{32}{\pi N} \frac{T}{d^4}$$

但此時 $l = 20d, i' = 1, N = 10,500,000$ 磅/平方吋。

$$\therefore T = \frac{\pi^2}{180} \times \frac{N}{32} \times \frac{d^4}{20d} = \frac{\pi^2 \times 10,500,000 \times d^3}{180 \times 32 \times 20}$$

$$\text{又由公式(76a), } T = \frac{\pi}{16} f_s d^3$$

$$\therefore \frac{\pi}{16} f_s d^3 = \frac{\pi^2 \times 10,500,000}{180 \times 32 \times 20} d^3$$

$$\therefore f_s = \frac{\pi \times 16 \times 10,500,000}{180 \times 32 \times 20} = 4,580 \text{ 磅/平方吋}$$

例 5. 直徑 3 吋之實體軸，生內力 9,000 磅/平方吋。求其扭轉能率。

由公式 (76a),

$$T = \frac{\pi}{16} f_s d^3 = \frac{\pi}{16} \times 9,000 \times 3^3 = 47,750 \text{ 吋磅}$$

例 6. 前題之軸 N 爲 12×10^6 磅/平方吋時，對於 10 呎之扭角如何？

$$\text{由公式 (77), } i = i^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{32}{\pi N} \times \frac{Tl}{d^4}$$

$$\therefore i^\circ = \frac{180 \times 32 \times 47,750 \times 10 \times 12}{\pi \times \pi \times 12 \times 10^6 \times 3^4} = 3.43^\circ$$

問 題

1. 直徑 3 吋之鋼軸，扭角限度爲每長 5 呎 1° 。求最大值內力。但 $N = 5,200$ 噸/平方吋。
2. 最大扭轉能率較平均扭轉能率增 30%。最大值內力爲 8,000 磅/平方吋時，每分 60 週轉。

傳送80馬力之軸直徑如何？

3. 前題之軸，橫彈性係數為12,000,000磅/平方吋時，長10呎之扭角幾何？

4. 每分150回轉，傳送100馬力，直徑3吋之軸。最大扭轉能率為平均扭轉能率之 $1\frac{1}{4}$ 倍。

求軸之最大值內力。

5. 受1,800吋噸之中空推進器軸，內徑8吋，外徑16吋。求其最大值內力。

6. 前題之軸之橫彈性係數設為5,200噸/平方吋。則對於外徑20倍之長度，其扭角如何？

7. 與第5題之軸同一斷面積(即同一重量)之實體軸直徑如何？試比較其對於扭之強度與剛度。

8. 鍊鐵製實體軸與等外徑之鋼製中空軸，其內徑為外徑之 $\frac{1}{2}$ 。設鋼之強度為鍊鐵之1.5倍，比較兩軸之強度。

9. 每分140回轉，傳送9,000馬力之中空鋼軸。

