初等代數詳解

趙樂天著

數 學 參 考 書

初等代數詳解

趙 樂 天 著

盛 京 書 店 發 行

編輯大意

1. 本書將中等學校用之初等代數學教科書，所有問題，一一加以詳細解答，故名初等代數詳解。

2. 本書係供初學或複習中等代數學者之參考，故每解一題，不嫌繁瑣，必反復闡明，以求易解，使學者一目了然。

3. 本書為教員及自修之學生參考書，故在校肄業學生幸勿依樣抄襲，凡一切科學，皆須自己用心，方有心得，數學一道，更為要緊，但苦索不得其法時，亦可翻閱此書，以節腦力，或演算之後，校正錯誤逐題參照，自能漸識門徑，是在學者善用此書。

4. 本書倉促付印，掛誤之處，在所難免，倘蒙讀者指正，俾便再版時得以改正是幸。

初等代數學

問題詳解

目次

緒論

第一篇 整式

第二編　一次方程式

第三編　整式之續

第四編　分式及不等式

第五編　二次方程式

第六編　特殊根

第七編
各種方程式歸於一元二次方程式解法者

第八編　二項定理

第九編　指數及對數

第十編　比例及級數

第十一編　圖解法

附錄

初等代數學

問題詳解

緒　　論

問　題　一　　P. 2〔原書頁數〕

下列各結果，試以代數記法表示之。

1. a,b,c 三數之和。　答. $a+b+c$.

2. a,b,c 三數之積。　答. abc.

3. 相鄰之三數，其最小者爲 a。　答. $a, a+1, a+2$.

4. 相鄰之三數，其中間者爲 x。　答. $x-1, x, x+1$.

5. a 之立方。　答. a^3.

6. a,b 之積之 7 倍。　答. $7ab$.

7. 凡 3 能除絕之數。　答. $3n$.

8. 凡 m 能除絕之數。　答. am.

9. a 爲 b,c 之積所除。　答. $\dfrac{a}{bc}$.

10. m,a,b 之和除 b,c 之差。　答. $\dfrac{b-c}{m+a+b}$

11. 以 $2m$ 爲一切偶數，則一切奇數之記法如何。

　　答. $2m-1$.

12. 凡爲 7 所除，而餘數爲 2 者。　答. $7n+2$.

下列各算式，以普通言語表示之。

13. x^2+y^2.　答. x,y 二數平方之和。

14. $3a^2b^3-\dfrac{c}{4}$.　答. 3 倍 a 的平方 b 的立方之積與 c 被 4 除之差。

15. $\sqrt{a^2-b^2}$. 答. a,b 二數平方之差開平方。

16. $13a+2$. 答. 13 倍的 a 與 2 之和。

17. $\frac{b+e+a}{d-e}$. 答. $b,e,a,$之和，被 d,e之差所除。

18. $a^3-b^3+2a^2b-\frac{ab^2}{4}$.

答. a,b 立方之差與 2 倍 a 平方 b 之積之和減去 a, b 平方之積被 4 除之商。

問 題 二 P. 3

下列各結果，試以代數記法表示之。

1. a,b 之和，等於 d,c 之積。 答. $a+b=dc$.
2. 自 a 減 x，其差等於 c 之 8 倍。 答. $a-x=8c$.
3. x 平方與 y平方之和，等於 a 之平方。答. $x^2+y^2=a^2$.
4. a 爲 b 所除，其商小於 a,b 之積。 答. $\frac{a}{b}<ab$.
5. g 之平方，不小於 g 之立方。 答. $g^2 \nless g^3$.
6. 三角形之面積，等於高乘底之半。(設面積爲 S，高爲 h，底爲 a。) 答. $S=\frac{ha}{2}$.
7. 球之面積，爲圓周率乘半徑平方之 4 倍。(設面積爲 S，圓周率爲 π，半徑爲 r。) 答. $S=4\pi r^2$.

下列各算式，以普通言語表示之。

8. $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$.

答. x 等於 a,b 之和之半，y 等於 a,b 之差之半。

9. $ax^2+by^2=c^2$。

答. a 乘 x 的平方與 b 乘 y 的平方之和等於 c 的平方.

10 $y^2=4px$.

答. y的平方等於4倍的p, x之積。

11. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

答. a,b二數之和與其差之積等於a,b平方之差。

12. $m^n<mn$.

答. m的n次方小於mn之積。

13. $3a+2b \ngtr 4a+3b$.

答. 3倍的a與2倍的b之和不大於4倍的a與3倍的b之和。

14. $\sqrt{(x^2+2xy+y^2)}=x+y$。

答. x,y二數平方之和加其積之二倍開平方等於x,y之和。

15. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} \nless \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$.

答. x,y二數平方之和之半,不小於其二數平方之差之半。

16. $\sqrt{a^2-b^2} \neq \sqrt{x^2-y^2}$.

答. a,b二數之平方差開平方,不等於x,y二數之平方差開平方。

問 題 三 P. 5

將下列各數依$x=\frac{a-b}{2}$, $y=\frac{a+b}{2}$代入結果,而求x,y為何數。

1. $a=40$, $b=30$.

解. $x=\frac{a-b}{2}=\frac{40-30}{2}=5$.

$y=\frac{a+b}{2}=\frac{40+30}{2}=35$.

2. $a=83$, $b=\frac{2}{12}$,

解. $x=\frac{a-b}{2}=\frac{83-\frac{2}{12}}{2}=\frac{\frac{497}{6}}{2}=\frac{497}{6}\times\frac{1}{2}=41\frac{5}{12}.$

$y=\frac{a+b}{2}=\frac{83+\frac{2}{12}}{2}=\frac{\frac{499}{6}}{2}=\frac{499}{6}\times\frac{1}{2}=41\frac{7}{12}.$

3. $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{3}{12}$,

解. $x=\frac{a-b}{2}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{3}{12}}{2}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{2}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$

$y=\frac{a+b}{2}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{12}}{2}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{4}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

問 題 四 P. 7

1. 元金300圓,年利百分之四,求五年間之總利息。

解. $a=300$, $r=4$, $t=5$ 代入(1)

$c=\frac{art}{100}=\frac{300\times4\times5}{100}=\frac{6000}{100}=60$圓.

2. 3年間之利息為8圓,元金為60圓,求利率。

解. $a=60$, $t=3$, $c=8$ 代入(2)

$\frac{r}{100}=\frac{c}{at}=\frac{8}{60\times3}=\frac{8}{180}=\frac{2}{45}=0.44.$

3. 年利百分之八,10年之利息為62圓,求元金。

解. $c=62$, $r=8$, $t=10$ 代入(3)

$a=\frac{100c}{rt}=\frac{100\times62}{8\times10}=\frac{6200}{80}=77\frac{1}{2}$圓.

4. 年利百分之七,元金400圓,問幾年間之利息為300圓。

解. $a=400, r=7, c=300$ 代入(4)

$$t=\frac{100c}{ar}=\frac{100\times 300}{400\times 7}=\frac{30000}{2800}=\frac{300}{28}=10\frac{5}{7}\text{年.}$$

問　題　五　P. 8

1. $5x, 3axy, axy^2, x$ 問何者爲 x 之係數。

答. $5, 3ay, ay^2, 1$, 爲 x 之係數。

2. $7ab$, $\frac{1}{2}ax^2, a^2xy, 0.008xy^2$ 問何者爲係數。

答. 7 爲 ab 之係數, $\frac{1}{2}$ 爲 ax^2 之係數。

1 爲 a^2xy 之係數, 0.008 爲 xy^2 之係數。

3. $7abxy$ 中, 何者爲 xy 之係數, 何者爲 by 之係數。

答. $7ab$ 爲 xy 之係數, $7ax$ 爲 by 之係數。

4. $\frac{1}{3}a^2b^2xy$, 何者得爲何者之係數, 逐一說明之。

答. $\frac{1}{3}$ 爲 a^2b^2xy 之係數, $\frac{1}{3}xy$ 爲 a^2b^2 之係數,

$\frac{1}{3}a^2$ 爲 b^2xy 之係數, $\frac{1}{3}b^2x$ 爲 a^2y 之係數,

$\frac{1}{3}b^2$ 爲 a^2xy 之係數, $\frac{1}{3}b^2y$ 爲 a^2x 之係數,

$\frac{1}{3}x$ 爲 a^2b^2y 之係數, $\frac{1}{3}b^2xy$ 爲 a^2 之係數,

$\frac{1}{3}y$ 爲 a^2b^2x 之係數, $\frac{1}{3}a^2xy$ 爲 b^2 之係數,

$\frac{1}{3}a^2b^2$ 爲 xy 之係數, $\frac{1}{3}a^2b^2y$ 爲 x 之係數,

$\frac{1}{3}a^2x$ 爲 b^2y 之係數, $\frac{1}{3}a^2b^2x$ 爲 y 之係數,

$\frac{1}{3}a^2y$ 爲 b^2x 之係數。

問題六 P. 8

1. $a=10$，求 $3a$ 及 a^3 之值。

解. $3a=3\times10=30.\qquad a^3=10^3=1000.$

2. $x=6, y=\dfrac{2}{3}$，求 $12x^2y^3$ 之值。

解. $$12x^2y^3=12\times6^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=12\times36\times\frac{8}{27}$$
$$=432\times\frac{8}{27}=128.$$

3. $r=8, \pi=3.1416$，求 $2\pi r^2$ 之值。

解. $2\pi r^2=2\times3.1416\times8^2=6.2832\times64=402.1248$。

4. $a=\dfrac{3}{4}, b=3, c=\dfrac{2}{3}, d=5$，求 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$ 之值。

解. $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{\frac{3}{4}}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{15}=\frac{15}{60}+\frac{8}{60}=\frac{23}{60}.$$

5. 公式 $x=\dfrac{a(b+c)}{p-q}$ 中，以 $a=5, b=13, c=11, p=48, q=18$，代入而求 x 之值。

解. $$x=\frac{a(b+c)}{p-q}=\frac{5(13+11)}{48-18}=\frac{5\times24}{30}=\frac{120}{30}=4.$$

6. $x=1$ 或 $x=2$，則 $x^2+2-3x=0$，試實驗之。

解. 若 $x=1$ 則 $x^2+2-3x=1^2+2-3\times1=1+2-3=0.$

若 $x=1$ 則 $x^2+2-3x=2^2+2-3\times2=4+2-6=0.$

7. 任意取數字所表之二數，以大者為 a 之值，小者為 b 之值，而求下列各式之值。

解· 設 大者爲 7，小者爲 5. 即 $a=7$ $b=5$

(i) $(a+b)(a-b)=(7+5)(7-5)=12\times 2=24.$

(ii) $a^2-b^2=7^2-5^2=49-25=24\cdot$

8. a 與 b 任爲何數，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，試以普通言語表示之，並求 a,b 有無限制。

解· 任意二數之和與差之積，等於其二數之平方差。

a,b 有限制 a 必得大於 b，否則不能相減。

問 題 七 P.11

1. a,b,c 三數之和，用加之交換與組合二定則，能得十二種形式試列舉之。

答· $(a+b)+c$, $(b+c)+a$, $(c+a)+b$,

$(b+a)+c$, $(c+b)+a$, $(a+c)+b$,

$a+(b+c)$, $b+(c+a)$, $c+(a+b)$,

$a+(c+b)$, $b+(a+c)$, $c+(b+a)$,

2. a,b,c 三數之積，用乘之交換與組合二定則，能得十二種形式，試列舉之。

答. $(ab)c$, $(bc)a$, $(ca)b$, $(ba)c$, $(cb)a$, $(ac)b$,

$a(bc)$, $b(ca)$, $c(ab)$, $a(cb)$, $b(ac)$, $c(ba)$,

問 題 八 P.12

下列各式，試化爲簡單之形式。

1. $3xy+2xy-4xy$

解. 原式$=(3+2-4)xy=xy.$

2. $5a^2b^2+3a^2b^2-a^2b^2-2a^2b^2$

解.　原式$=(5+3-1-2)a^2b^2=5a^2b^2$

3. $5a^2\times 6b\times 7x$.

解.　原式$=5\times a^2\times 6\times b\times 7\times x=5\times 6\times 7\times a^2\times b\times x$

$=210a^2bx$.

4. $4x\div 2\times 3y$.

解.　原式$=4\times x\times \frac{1}{2}\times 3\times y=4\times \frac{1}{2}\times 3\times x\times y=6xy$.

5. $6x^2\div \frac{2}{3}\div 4$.

解.　原式$=6\times x^2\times \frac{3}{2}\times \frac{1}{4}=6\times \frac{3}{2}\times \frac{1}{4}\times x^2=\frac{9}{4}x^2$

6. $(58-46)\div 2$

解.　原式$=58\div 2-46\div 2=29-23=6$.

7. $(3+81)\div 3$

解.　原式$=(3+81)\times \frac{1}{3}=3\times \frac{1}{3}+81\times \frac{1}{3}=1+27=28$.

8. $(3x+11x)\div 7$

解.　原式$=(3+11)x\div 7=14x\times \frac{1}{7}=14\times \frac{1}{7}\times x=2x$.

9. $5\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}x-6x$

解.　原式$=\left(5\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-6\right)x=\left(\frac{11}{2}+\frac{4}{3}-6\right)x=\frac{5}{6}x$.

10. $3x$與$5x$之和，以8除之。

解.　$(3x+5x)\div 8=(3+5)x\times \frac{1}{8}=8x\times \frac{1}{8}=8\times \frac{1}{8}\times x=x$.

問　題　集　I　P. 12

下列各題，以代數式表示其所求之數。

1. 自然數列中與 a 相鄰之二數爲何數。　($a>1$)

答. 與 a 相鄰之二數為 $a+1, a-1$.

2. 加何數於 x，則為 y。($x<y$)

答. 加 $y-x$ 於 x 則為 y.

3. 二數之差為 7，小者之數為 y，則大者之數若何。

答. 大者之數為 $y+7$.

4. 銀百圓中，減去 x 圓，其餘為若干。

答. 其餘為 $100-x$ 圓.

5. 自 x 減何數，則其所餘者為 $x-a$。($x>a$)

答. 自 x 減 a.

6. 分 100 為二組，其一組為 x，問他之一組若干。

答. 他一組為 $100-x$.

7. 二數之差為 3，大者之數為 x，則小者之數若何。

答. 小者之數為 $x-3$.

8. 設 36 中之一因數為 x，其他之一因數若何。

答. 其他之一因數為 $36\div x=\dfrac{36}{x}$

9. 銀 x 圓 a 人均分之，問各得若干圓。

答. 各得 $x\div a=\dfrac{x}{x}$ 圓.

10. 甲原有銀 p 圓，乙原有銀 q 圓，若甲以 x 圓付乙，則兩人各有若干圓。

答. 甲有 $p-x$ 圓，乙應有 $q+x$ 圓.

11. 甲有銀 x 圓，乙所有者較甲多 y 圓，丙所有者，為甲乙兩人所有銀合計之 n 倍，問丙有銀若干圓。

答. 甲有銀 x 圓，則乙有銀 $(x+y)$ 圓

故 丙有銀為 $n(x+x+y)=n(2x+y)$ 圓。

12. 兄年 a 歲，弟年 b 歲，問弟生時兄年幾歲。

答. 兄年爲 $(a-b+1)$ 歲.

13. m 年前父年爲女年之 n 倍，今女年 y 歲，問父年若干歲。

答. 女 m 年前爲 $(y-m)$ 歲，則父 m 年前爲 $n(y-m)$ 歲。

故　父今年之歲數爲 $n(y-m)+m$ 歲.

14. 20 圓之鈔票 x 頁，10 圓鈔票 $(x+4)$ 頁，5 圓鈔票 $3x$ 頁，問合計爲若干圓。

答. 20 圓鈔票有 $20x$ 圓，10 圓鈔票有 $10(x+4)$ 圓，

5 圓鈔票有 $5\times3x=15x$ 圓。

三種鈔票合計圓數爲 $20x+10(x+4)+15x$

15. 設有一石，長 a 尺，廣 b 尺，厚 c 尺，其六面之總計爲若干平方尺。

答. 六面之總計爲 $(2ab+2bc+2ac)$ 平方尺.

16. 除數爲 x，商爲 y，剩餘爲 z，問被除數爲若干。

答. 被除數爲 $xy+z$.

17. 設有二位之數，其在十位者爲 x，其在單位者爲 y，問其數爲何數。

答. 其數爲 $10x+y$.

18. 鷄兎同籠，總數爲 a，兎數爲 b，問鷄之足數爲若干？

答. 鷄數爲 $(a-b)$　　故　鷄之足數爲 $2(a-b)$

19. 設有一人，5 年前爲 x 歲，c 年後爲若干歲。

答. c 年後之歲數爲 $5+x+c$.

20. a,b,c 之公倍數，其公式若何。

答. 其公式爲 $mabc$.（m 爲任意自然數）

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

1．$-3,\quad +9.$

解．$(-3)+(+9)=+6.$

2．$-7,\quad -5,$

解．$(-7)+(-5)=-12.$

3．$+5,\quad -20.$

解．$(+5)+(-20)=-15.$

4．$-\frac{1}{2},\qquad +\frac{3}{4}.$

解．$\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{2}{4}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)=+\frac{1}{4},$

5．$-\frac{1}{3},\qquad +\frac{5}{4}.$

解．$\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)=\left(-\frac{4}{12}\right)+\left(+\frac{15}{12}\right)=+\frac{11}{12},$

6．$-0.5,\qquad -105,$

解．$(-0.5)+(-105)=-105.5.$

7．設有一人經商，春季獲利300圓，夏季虧本200圓，秋季虧本250圓，冬季獲利200圓，問上半年獲利若干圓，虧本若干圓，下半年獲利若干圓，虧本若干圓。

答．上半年獲利100圓，虧本-100圓。

下半年獲利-50圓，虧本50圓。

問　題　十　三　P.23

下列各題，自左邊之數，減右邊之數：

1．$+7.\quad +8.$

解．$(+7)-(+8)=-1.$

2．$-11,\quad -3.$

解. $(-11)-(-3)=-8$.

3. -4. -9.

解. $(-4)-(-9)=-5$,

4. $+\frac{2}{3}$, $+\frac{1}{2}$.

解. $\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{2}\right)=\left(+\frac{4}{6}\right)-\left(+\frac{3}{6}\right)=+\frac{1}{6}$,

5. $-\frac{1}{2}$ $+\frac{2}{3}$.

解. $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{3}{6}\right)-\left(+\frac{4}{6}\right)=-\frac{7}{6}$

6, $-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

解. $\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{2}{4}\right)=+\frac{1}{4}$

7. 0, -4

解, $0-(-4)=+4$

8, 0. $+\frac{2}{3}$

解. $0-\left(+\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$.

9. $+30$, 0.

解. $(+30)-0=+30$.

10. 設有一人,生於8年前,問前二年時,其人年幾歲。

答. 某人生於8年前,即某人現年為8歲。

故知二年前之年歲為 $8-2=6$.

問題十四 P.25

求下列各題之積:

1. -13, $+3$,

解. $(-13)(+3)=-39.$

2. $-7,\quad -15.$

解. $(-7)(-15)=+105.$

3. $-\frac{2}{9},\quad +\frac{3}{4}.$

解. $\left(-\frac{2}{9}\right)\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{6}{36}=-\frac{1}{6}.$

4. $+\frac{4}{15},\quad -\frac{9}{15}.$

解. $\left(+\frac{4}{15}\right)\left(-\frac{9}{15}\right)=-\frac{36}{225}=-\frac{4}{25}.$

5, $-0.5.\quad -0.4.$

解. $(-0.5)(-0.4)=+0.2$

6. $-0.2,\quad +4.1.$

解. $(-0.2)(+4.1)=-8.2.$

7. 設一學生在校門外向東進行，每分鐘行$\frac{1}{4}$里，問 8 分鐘後距校東若干里。又問在校西若干里。

解. 設　此學生向校東進行爲+，向校西爲一.

$+\left(\frac{1}{4}\times 8\right)=+2$ 里　距校東，

$-\left(\frac{1}{4}\times 8\right)=-2$　即如向校西行亦爲 2 里.

問　題　十　五　　P. 25

下列各題，以右邊之數，除左邊之數。

1. $-75,\quad +5.$

解. $(-75)\div(+5)=-15.$

2. $+12,\ -3.$

解. $(+12)\div(-3)=-4.$

3. $-\frac{5}{4}$, $+1\frac{1}{5}$.

解. $\left(-\frac{5}{4}\right)\div\left(\frac{6}{5}\right)=-\frac{5}{4}\times\frac{5}{6}=-\frac{25}{24}$

4. -3, -0.5.

解. $(-3)\div(-0.5)=+\frac{3}{0.5}=+\frac{30}{5}=+6.$

5. $+\frac{5}{6}$, $-\frac{2}{3}$.

解. $\left(+\frac{5}{6}\right)\div\left(-\frac{2}{3}\right)=-\left(\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{4}$

6. 0, -5.

解. $0\div(-5)=0.$

問 題 十 六 P. 26

$a+b$, 及 $b+a$ 二式中，各將下列各數代入而計算之。

(i) $a=-\frac{2}{3}$, $b=+4$.

解. $a+b=\left(-\frac{2}{3}\right)+(+4)=+3\frac{1}{3}.$

$b+a=(+4)+\left(-\frac{2}{3}\right)=+3\frac{1}{3}.$

(ii) $a=-\frac{1}{3}$. $b=+\frac{3}{4}$.

解. $a+b=\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{4}{12}\right)+\left(+\frac{9}{12}\right)=+\frac{5}{12}.$

$b+a=\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(+\frac{9}{12}\right)+\left(-\frac{4}{12}\right)=+\frac{5}{12}$

(iii) $a=+6$, $b=-8$.

解. $a+b=(+6)+(-8)=-2.$

$b+a=(-8)+(+6)=-2.$

2．$a(b+c)$, $ab+ac$ 二式中，各將下列各數代入而計算之。

（i）$a=+2,\quad b=-\dfrac{2}{3},\quad c=+3.$

解．$a(b+c)=(+2)\left(-\dfrac{2}{3}+3\right)=(+2)\left(+\dfrac{7}{3}\right)=+\dfrac{14}{3}$

$$ab+ac=(+2)\left(-\frac{2}{3}\right)+(+2)(+3)$$

$$=\left(-\frac{4}{3}\right)+(+6)=+\frac{14}{3}$$

（ii）$a=+5.\quad b=-\dfrac{1}{2},\quad c=-\dfrac{2}{5}.$

解．$a(b+c)=(+5)\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{2}{5}\right)\right\}$

$$=(+5)\left(-\frac{9}{10}\right)=-\frac{9}{2}$$

$$ab+ac=(+5)\left(-\frac{1}{2}\right)+(+5)\left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$=\left(-\frac{5}{2}\right)+(-2)=\left(-2\frac{1}{2}\right)+(-2)=-4\frac{1}{2}$$

（iii）$a=-\dfrac{1}{5},\quad b=-\dfrac{3}{4},\quad c=-\dfrac{1}{6}.$

解．$a(b+c)=\left(-\dfrac{1}{5}\right)\left\{\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\left(-\dfrac{1}{6}\right)\right\}$

$$=\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{11}{12}\right)=+\frac{11}{60}.$$

$$ab+ac=\left(+\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$=\left(-\frac{3}{20}\right)+\left(+\frac{1}{30}\right)=+\frac{11}{60}.$$

3．$(a+b)+c$ 及 $(b+c)+a$ 二式中，各將下列各數代入而計算之。

（i）$a=-\dfrac{1}{4},\quad b=-\dfrac{2}{3},\quad c=-5.$

解．$(a+b)+c=\left\{\left(-\dfrac{1}{4}\right)+\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right\}+(-5)$

$$=\left(-\frac{11}{12}\right)+(-5)=-5\frac{11}{12}.$$

$$(b+c)+a=\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-5\right)\right\}+\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\left(-5\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)=-5\frac{11}{12}.$$

(ii) $a=-\frac{1}{5}$, $b=+3$, $c=+5$.

解. $(a+b)+c=\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)+(+3)\right\}+(+5)$

$$=\left(+2\frac{4}{5}\right)+(+5)=+7\frac{4}{5}.$$

$$(b+c)+a=\left\{(+3)+(+5)\right\}+\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$=(+8)+\left(-\frac{1}{5}\right)=+7\frac{4}{5}.$$

(iii) $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{4}$.

解. $(a+b)+c=\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}+\left(-\frac{1}{4}\right)$

$$=\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{13}{12}=-1\frac{1}{12}.$$

$$(b+c)+a=\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{7}{12}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{13}{12}=-1\frac{1}{12}.$$

4. $(ab)c$, 及 $a(cb)$ 二式中,各將下列各數代入而計算之.

(i) $a=-5$, $b=-3$, $c=-2$.

解. $(ab)c=\{(-5)(-3)\}(-2)$

$$=(+15)(-2)=-30.$$

$$a(cb)=(-5)\{(-2)(-3)\}$$

$$=(-5)(+6)=-30.$$

(ii) $a=+\frac{1}{2}$, $b=-\frac{2}{3}$, $c=-\frac{4}{5}$.

解. $(ab)c=\left\{\left(+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}\left(-\frac{4}{5}\right)$

$=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)=+\frac{4}{15}.$

$a(cb)=\left(+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$

$=\left(+\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{8}{15}\right)=+\frac{4}{15}.$

(iii)　$a=+6,\quad b=+2,\quad c=-2.$

解. $(ab)c=\{(+6)(+2)\}(-2)$

$=(+12)(-2)=-24.$

$a(cb)=(+6)\{(+2)(-2)\}$

$=(+6)(-4)=-24.$

問 題 十 七　　P. 28

1. 母年35,子年13,問幾年後母年爲子年之3倍。

解. 設　x年後母年爲子年之3倍。

x年後:　母年爲$35+x$,　　子年爲$13+x$

但　x年後,母年爲子年之3倍。

得方程式　　$35+x=3(13+x)$

去括弧　　$35+x=39+3x$

移 項　　$35-39=3x-x$

合 併　　$2x=-4$

移 因　　$\therefore\ x=-2$ 即二年前母年爲子年3倍。

前二年母年爲33,子年爲11.

2. 如前題之假定,幾年前母年爲子年之3倍。

解. 設　x年前母年爲子年之3倍。

x年前：　母年爲$35-x$，　子年爲$13-x$

依題意得：　$35-x=3(13-x)$

去括弧　$35-x=39-3x$

移 項　$3x-x=39-35$

合 併　$2x=4$　$\therefore\ x=2.$

二年前母年爲子年之3倍。

3．十圓紙幣及五圓紙幣共16張，合計170圓，問兩種紙幣各有幾張。

解．設　五圓紙幣爲x張，　十圓爲$16-x$張

則　五圓紙幣爲$5x$圓，　十圓爲$10(16-x)$圓

依題意得　$5x+10(16-x)=170$

去括弧　$5x+160-10x=170$

移 項　$160-170=10x-5x$

合 併　$5x=-10$　$\therefore\ x=-2$

五圓紙幣之張數爲-2，此-2無可作解，因五圓紙幣之張數不能有反對數之故也。可知此問題爲不合理。

問 題 集 III　　P. 28

求下列1至3題x之值。

1．$5x+8=x+5$

解．移 項　$5x-x=5-8$

合 併　$4x=-3$　$\therefore\ x=-\frac{3}{4}.$

2．$x-2-(2x-3)=\frac{3x+1}{2}$

解．以2乘　$2x-4-2(2x-3)=3x+1$

去括弧　　$2x-4-4x+6=3x+1$

移　項　　$2x-4x-3x=1-2$

合　併　　$-5x=-1$　$\therefore$　$x=\frac{1}{5}$

3．$\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+1=\frac{x}{4}+\frac{7}{18}$

解．以36乘　$18x+24x+36=9x+14$

移　項　$18x+24x-9x=14-36$

合　併　$33x=-22$　$\therefore$　$x=-\frac{2}{3}$

4．$a=5$，$b=-7$，試代入下列二式，而各求其數值。

$(a+b)^2+(a-b)^2$，　$2(a^2+b^2)$．

解．$(a+b)^2+(a-b)^2=(5+(-7))^2+(5-(-7))^2$

$=(-2)^2+(12)^2=4+144=148.$

$2(a^2+b^2)=2(5^2+(-7)^2)=2(25+49)$

$=2\times 74=148.$

5．$a=-3$，$b=-7$，試代入下列二式，而各求其數值。

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$，　$(a-b)^3$．

解．$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$=(-3)^3-3(-3)^2(-7)+3(-3)(-7)^2-(-7)^3$

$=(-27)-3\times 9(-7)+(-9\times 49)-(-343)$

$=(-27)-27(-7)+(-441)-(-343)$

$=(-27)-(-189)+(-441)-(-343)$

$=162+(-441)-(-343)$

$=(-279)-(-343)$

$=64.$

$$(a-b)^3=[(-3)-(-7)]^3=4^3=64.$$

6．$a=4$,　$b=-\frac{1}{3}$,　$c=\frac{4}{3}$,試代入下列二式,而各求其數值。

$$a^2+b^2+c^2+2bc-2ab-2ac,\qquad (a-b-c)^2$$

解．$a^2+b^2+c^2+2bc-2ab-2ac$

$$=4^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)-2\times4\left(-\frac{1}{3}\right)-2\times4\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$=16+\frac{1}{9}+\frac{16}{9}+2\left(-\frac{4}{9}\right)-8\left(-\frac{1}{3}\right)-8\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$=16+\frac{17}{9}-\frac{8}{9}+\frac{8}{3}+\frac{32}{3}=16+\frac{9}{9}-\frac{24}{3}$$

$$=16+1-8=9.$$

$$(a-b-c)^2=\left\{4-\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{4}\right\}^2=\left(4+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\right)^2$$

$$=\left(4-\frac{3}{3}\right)^2=(4-1)^2=3^2=9.$$

7．二數之差爲5,而一數之三分之一,爲他數之七分之一,問小者之數爲何數。

解．設　小數$=x$,　　大數$=x+5$

依題意得　　$\frac{1}{3}x=\frac{1}{7}(x+5)$

以21乘　　$7x=3(x+5)$

去括弧　　$7x=3x+15$

移　項　　$7x-3x=15$

合　併　　$4x=15$　$\therefore$　$x=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$.

故知小者之數爲 $3\frac{3}{4}$.

8．一次方程式 $3x+17=10x+(\quad)$,若括弧中有何數,則 $x=5$。

解. 將 x 之值代入：

$$3\times5+47=10\times5+(\ ?\ )$$

$$15+47=50+(\ ?\ )$$

$$62=50+(\ ?\ )$$

$$(\ ?\ )=62-50=12.$$

括弧中之數爲 12，則 $x=5$。

9．甲乙二人間，有借欵交涉，若甲有銀 500 圓，乙得銀 100 圓，則二人間借欵了結之後，甲所有之銀，爲乙所有銀之半數，問借款爲若干，並說爲負債者。

解. 設　甲向乙所借之款爲 x

依題意得　$500-x=\dfrac{1}{2}(100+x)$

去分母　$1000-2x=100+x$

移　項　$1000-100=2x+x$

合　併　$3x=900\quad\therefore\quad x=300$

即　甲向乙借 300 圓，甲爲負債者

（如得負數，即乙爲負債者.）

10. 甲年爲 a 歲，乙年爲 b 歲，問何年後甲年爲乙年之 4 倍，并研究其答數之爲正爲負，或爲 0，與 a,b 有何關係。

解. 設　x 年後甲年爲乙年之四倍。

則　x 年後：　甲年爲 $a+x$　　乙年爲 $b+x$

但　x 年後甲年爲乙年之 4 倍。

故得方程式：　$a+x=4(b+x)$

去括弧　$a+x=4b+4x$

移項　$a-4b=4x-x$

合併　$3x=a-4b$　$\therefore\ x=\dfrac{a-4b}{3}$.

a大於4倍的b能被3整除者,則答數爲正整數,

a小於4倍的b能被3整除者,則答數爲負整數,

a等於4倍的b,則答數爲0.

第一編　整式

問題十八　P.31

下列各式,試以規則排列之。

1. $xa3b$　答. $3abx$.
2. $2x76y$　答. $152xy$.
3. $5xa\dfrac{2}{3}b$　答. $\dfrac{10}{3}abx$.
4. $5x3b$　答. $15bx$.
5. $5x3y16$　答. $240xy$.
6. $4xa\dfrac{1}{3}y\dfrac{3}{4}$　答. axy.
7. $a\dfrac{1}{2}bx4$　答. $2abx$.
8. $cab4x$　答. $4abcx$.
9. $5x6\times4y\times\dfrac{1}{12}$　答. $10xy$.
10. $a^2xb^2y\dfrac{1}{4}c$　答. $\dfrac{1}{4}a^2b^2cxy$.
11. $5x^3a^2b2y$　答. $10a^2bx^3y$.
12. $8axb\dfrac{5}{8}ym$　答. $5abmxy$.

問題十九　P.32

下列各式,以指數規則整理其次序。

1. $3a^2x^3a^33x^75a$

　解. 原式$=3\times3\times5a^{2+3+1}x^{3+7}=45a^6x^{10}$.

2. $2a\dfrac{1}{2}b^24x\dfrac{2}{3}b^3b^7x^6$

　解. 原式$=2\times4\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}ab^{2+3+7}x^{1+6}=\dfrac{8}{3}ab^{12}x^7$

3. $\frac{8aa^2bx4x}{3a4}$.

解. 原式$=\frac{8\times4a^{1+2}bx^{1+1}}{3\times4\times a}=\frac{32a^3bx^2}{12a}=\frac{8}{3}a^2bx^2$.

4. $\frac{ba^4 6x^{12}yxy^2}{2a^2 3x^3}$

解. 原式$=\frac{6a^4bx^{12+1}y^{1+2}}{2\times3a^2x^3}=\frac{6a^4bx^{13}y^3}{6a^2x^3}=a^2bx^{10}y^3$.

5. $4ax\frac{1}{4}xy^2a^2b$.

解. 原式 $=4\times\frac{1}{2}a^{1+2}bx^{1+1}y=a^3bx^2y^2$

6. $\frac{mnaa^5 42xm}{a^2}$

解. 原式 $=\frac{42a^{1+5}m^{1+1}nx}{a^2}=\frac{42a^6m^2nx}{a^2}=42a^4m^2nx$.

7. $6a^2cb^2ab^2c^2c^2a^2b$

解. 原式 $=6a^{2+1+2}b^{2+2+1}c^{1+2+2}=6a^5b^5c^5$.

8. $cbcbcb\frac{91c}{c^2b^2}$

解. 原式 $=cbcbcb\frac{91c}{cbcb}=91bc^2$.

9. $\frac{axyzx2z^2}{2z^3x}$

解. 原式 $=\frac{2ax^{1+1}yz^{1+2}}{2z^3x}=\frac{2ax^2yz^3}{2z^3x}=axy$.

10. $\frac{8x^2yy^2xa^23b}{xy4a}$

解. 原式 $=\frac{8\times3a^2bx^{2+1}y^{1+2}}{4axy}=\frac{24a^2bx^3y^3}{4axy}=6abx^2y^2$.

問　題　二　十　P. 33

下列各式中同類之項，試集之為一項。

1. $-3a+7a-2a-8a+16a$

解. 原式 $=10a$.

2. $4ab+7ab+ab-m+6m-4ab$.

解. 原式 $=8ab+5m$.

3. $3abc+4bc-2abc-4bc+4abc+ab$.

解. 原式 $=5abc+ab$.

4. $5a^2b-3ab^2+7abm-9a^2b-abm+3ab^2$

解. 原式 $=-4a^2b+6abm$.

5. $2mx+3m^2y+mx-m^2y+6m^2y+2m^2y-5mx$.

解. 原式 $=-2mx+10m^2y$.

6. $3xy-6xy+x^2y-12+8x^2y-xy-3x^2y+3$

解. 原式 $=-4xy+6x^2y-9$.

7. $2my-3a^2b+my-a^2b+2a^3+a^2b^2+4my$

解. 原式 $=7my-4a^2b+a^2b^2+2a^3$.

8. $2a^2b-3ab^2-a^2b+2a^3+ab^2-a^3$

解. 原式 $=a^2b-2ab^2+a^3$.

9. $2x^2-x+3x^3-x^3-4x^2+2x$

解. 原式 $=x+x^2-x^3$.

10. $32-16x+6x^2+24-4x+4x^2-48-12x^2$

解. 原式 $=8-20x-2x^2$

問題二十一 P. 33

1. $4x+x^5-2x^2-3x^3$, 試依 x 之降冪排列之。

解. $x^5-3x^3-2x^2+4x$.

2. $a^2b^2+a^3+ab^5+b^3$, 試依 a 之昇冪排列之。

解. $b^6+ab^5+a^2b^2+a^3$.

3. $a^2b+ab^2+a^3+b^3-a^6$ 試依 a 之降冪，b 之昇冪排列之。

解. $-a^6+a^3+a^2b+ab^2+b^3$.

4. $-xy^2+9x^2y-xy+7xy^2$，試依 x 降冪，y 昇冪排列之。

解. $9x^2y-xy+7xy^2-xy^2=9x^2y-xy+6xy^2$

問題二十二 P. 35

試求下列各式之和。

1. $a+b$, $a-4b$, $-a+3b+12$.

解.
$$\begin{array}{r}
a+b\\
a-4b\\
-a+3b+12\\
\hline
a+12
\end{array}$$

2. $a+b+c$, $2a-3b+c$, $5a-7b+c$.

解.
$$\begin{array}{r}
a+b+c\\
2a-3b+c\\
5a-7a+c\\
\hline
8a-9b+3c.
\end{array}$$

3. $3a-2b$, $4a-5b$, $7a-11b$, $a+9b$.

解.
$$\begin{array}{r}
3a-2b\\
4a-5b\\
7a-11b\\
a+9b\\
\hline
15a-9b.
\end{array}$$

4. $4x^2-3y^2$, $2x^2-5y^2$, $-x^2+y^2$, $-2x^2+4y^2$.

解.
$$\begin{array}{r}
4x^2-3y^2\\
2x^2-5y^2\\
-x^2+y^2\\
-2x^2+4y^2\\
\hline
3x^2-3y^2
\end{array}$$

5. $6x^2+8x+7x^4$, $x+2$, x^3-16+x^4-2x.

解.
$$\begin{array}{r}
7x^4 \qquad +6x^2+8x \\
x+\ 2 \\
x^4+x^3 \qquad -2x-16 \\
\hline
8x^4+x^3+6x^2+7x-14
\end{array}$$

6. $ax^2+2b^2y^2+cxy,\quad -2b^2y^2+cxy,\quad 2ax^2.$

解.
$$\begin{array}{r}
ax^2+2b^2y^2+\ cxy \\
2ax^2-2b^2y^2+\ cxy \\
\hline
3ax^2 \qquad\qquad +2cxy
\end{array}$$

7. $5a^2-6b+g,\quad 4a,\quad 5b^2+g+2a^2,\quad 6b+4a.$

解.
$$\begin{array}{r}
5a^2 \qquad\qquad -6b+\ g \\
5a^2+4a+5b^2 \qquad +\ g \\
4a \qquad +6b \qquad \\
\hline
7a^2+8a+5b^2 \qquad +2g
\end{array}$$

8. $x-4a+b,\quad 3x+2b,\quad a-x-5b,\quad a^2+x+b^2.$

解.
$$\begin{array}{r}
-4a+\ x+\ b \\
3x+2b \\
a-\ x-5b \\
a^2 \qquad +\ x \qquad +b^2 \\
\hline
a^2-3a+4x-2b+b^2
\end{array}$$

9. $x^3-4x^2+5x-3,\quad 2x^3-7x^2-14x+5,\quad 8+x+9x^2-x^3.$

解.
$$\begin{array}{r}
x^3-4x^2+\ 5x-\ 3 \\
2x^3-7x^2-14x+\ 5 \\
-x^3+9x^2+\ \ x+\ 8 \\
\hline
2x^3-2x^2-\ 8x+10
\end{array}$$

10. $a^3b^2-3a^2b^3+a^5,\quad 3a^3b^2+5a^2b^3-b^5,\quad 2a^5+2b^5+5ab^4.$

解.
$$\begin{array}{r}
a^5+\ a^3b^2-3a^2b^3 \qquad\qquad\qquad \\
+3a^3b^2+5a^2b^3 \qquad\quad -\ b^5 \\
2a^5 \qquad\qquad\qquad\qquad +5ab^4+2b^5 \\
\hline
3a^5+4a^3b^2+2a^2b^3+5ab^4+\ b^5
\end{array}$$

問題二十三　　P. 37

1. 自 $7a+14b$ 減 $4a+10b$.

解.
$$\begin{array}{r}
7a+14b \\
4a+10b \\
\hline
3a+\ 4b
\end{array}$$

2．自 $6a-2b-c$ 減 $2a-2b-3c$.

解.
$$\begin{array}{r} 6a-2b-\ c \\ 2a-2b-3b \\ \hline 4a\qquad +2c \end{array}$$

3．自 $3a-2b+3c$ 減 $3a-7b-c-d$.

解.
$$\begin{array}{r} 3a-2b+3c\quad \\ 2a-7b-\ c-d \\ \hline a+5b+4c+d \end{array}$$

4．自 $7x^2-8x-1$ 減 $6x+5x^2+3$.

解.
$$\begin{array}{r} 7x^2-\ 8x-1 \\ 5x^2+\ 6x+3 \\ \hline 2x^2-14x-4. \end{array}$$

5．自 $-3x^3+9-7x+4x^4-2x^2$ 減 $x^4-2x^3+2x^2+7x-9$.

解.
$$\begin{array}{r} 4x^4-3x^3-2x^2-\ 7x+\ 9 \\ x^4-2x^3+2x^2+\ 7x-\ 9 \\ \hline 3x^4-\ x^3-4x^2-14x+18 \end{array}$$

6．自 $a^3b-3ba^2b+a^4$ 減 $4a^2b^2+b^3a+6b^4-a^4$,

解.
$$\begin{array}{r} a^4+a^3b-3a^2b^2\qquad\qquad\quad \\ -a^4\qquad\quad +4a^2b^2+ab^3+6b^4 \\ \hline 2a^4+a^3b-7a^2b^2-ab^3-6b^4 \end{array}$$

問 題 二 十 四　　P. 37

下列各式,試去其括弧而整理之。

1．$(2x^2+3ax-2a^2)-(a^2-x^2)+(2x^2-ax+a^2)$

解. 原式 $=2x^2+3ax-2a^2-a^2+x^2+2x^2-ax+a^2$

$=5x^2+2ax-2a^2$

2．$2a^3b-(2b^2a^2+3a^4)+ab^3-(4a^3b+ab^2a)+(b^2a^2+a^4)$

解. 原式 $=3a^3b-2a^2b^2-3a^4+ab^3-4a^3b+a^2b^2+a^2b^2+a^4$

$=-2a^4-a^3b-2a^2b^2+2b^3$.

3．$2y^3+(3y^2-y)-(3y+5y^3-2y^2)-6y^4-(4+y^4)$

解. 原式$=2y^2+3y^5-y-3y-5y^3+2y^2-6y^4-4-y^2$

$=3y^5-7y^4-5y^3+4y^2-4y-4.$

4．$3abc+acb+(5ab-2+5a)-(4bc^2+bac)$

解. 原式$=3abc+abc+5ab-2+5a-4bc^2-abc$

$=3abc+5ab+5a-4bc^2-2.$

5．$(3a^2b+2ab^2)-(b^3+a^3-2ab^2+3a^2b)-(5ba^2-6ab^2)$

解. 原式$=3a^2b+2ab^2-b^3-a^3+2ab^2-3a^2b-5a^2b+6ab^2$

$=-a^3-5a^2b+10ab^2-b^3.$

6．$7a+(ab-4b^4-2)-(4b+a6b)+2abc$

解. 原式$=7a+ab-4b^4-2-4b-6ab+2abc$

$=7a-5ab-4b-4b^4+2abc-2.$

問題二十五 P.38

試撤去下列各式之括弧。

1．$3a+[2b+3c-\{(fx^2-x)-56ab-4\}+y]$

解. 原式$=3a+[2b+3c-\{fx^2-x-56ab-4\}+y]$

$=3a+[2b+3c-fx^2+x+56ab+4+y]$

$=3a+2b+3c-fx^2+x+56ab+4+y.$

2．$3x^4+2x^3-[5x^2-\{6x+(7-a^2)\}+b^2]$

解. 原式$=3x^4+2x^3-[5x^2-\{6x+7-a^2\}+b^2]$

$=3x^4+3x^3-[5x^2-6x-7+a^2+b^2]$

$=3x^4+2x^3-5x^2+6x+7-a^2-b^2.$

3．$2a^3+[b^3-3c-\{a^2b-(b^4-6x^2-4x)-5\}]$

解. 原式$=2a^3+[b^3-3c-\{a^2b-b^4+6x^2+4x-5\}]$

$=2a^3+b^3-3c-a^2b+b^4-6x^2-4x+5.$

$=2a^3+b^3-3c-a^2b+b^4+6x^2+4x+5.$

4. $a-[b+\{c-(d+e)-f\}+g]-h$

解. 原式$=a-[b+\{c-d-e-f\}+g]-h$

$=a-[b+c-d-e-f+g]-h$

$=a-b-c+d+e+f-g-h.$

5. $\{a-(b+c)-d\}+\{e-(f+g)-h\}$

解. 原式$=\{a-b-c-d\}+\{e-f-g-h\}$

$=a-b-c-d+e-f-g-h.$

6. $x^8-[(x^7-2x^6)-\{(3x^5+2x^4)-(x^3+x^2)\}-2x]-4$

解. 原式$=x^8-[x^7-2x^6-\{3x^5+2x^4-x^3-x^2\}-2x]-4$

$=x^8-[x^7-2x^6-3x^5-2x^4+x^3+x^2-2x]-4$

$=x^8-x^7+2x^6+3x^5+2x^4-x^3-x^2+2x-4.$

問題二十六　P. 39

1. $x+y-z$,將y與z括入負括弧中。

答.　$x-(-y+z).$

2. $p-q+r-s$將q與r,s,括入正括弧中。

答.　$p+(-q+r-s).$

3. $a-b+c-d+e$將b與c,d與e各括入負括弧中。

答.　$a-(b-c)-(d-e).$

4. 前題之式,a與b括入正括弧中,c,d,e括入負括弧中。

答.　$(a-b)-(-c+d-e).$

5. $x^6+x^3-x^2+2x-4$,將x之奇次冪,括入負括弧中,x之偶次冪,括入正括弧中。但0可視為偶數。

答.　$(x^6-x^2-4)-(-x^3-2x).$

6．$a^3+b^2-a^4-b^3-a+a^2$ 將 a 之奇次冪，括入負括弧中，a 之偶次冪，括入正括弧中，更與 b^3 同括於負括弧中。

答．　$-(-a^3+a)-\{-(-a^4+a^2)+b^3\}+b^2$

問題集 IV　　P. 39

試去下列各式之括弧而整理之。

1．$(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+(2a^3+5a^2b-6ab^2-7b^3)+(a^3-b^3)$

解．原式$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+2a^3+5a^2b-6ab^2-7b^3+a^3$
$-b^3$
$=4a^3+2a^2b-3ab^2-9b^3.$

2．$(x^3-2ax^2+a^3+axa)-(3ax^2-x^3)+(2a^3-x^2a-2x^3)$

解．原式$=x^3-2ax^2+a^3+a^2x-3ax^2+x^3+2a^3-ax^2-2x^3$
$=-6ax^2+a^2x+3a^3.$

3．$(x^2+z^3+y^4)-(4x^2-5z^3)-(8x^2-7y^4+10z^3)+(6y^4-6z^3)$

解．原式$=x^2+z^3+y^4-4x^2+5z^3-8x^2+7y^4-10z^3+6y^4$
$-6z^3$
$=-11x^2+14y^4-10z^3.$

4．$(3x^2-4xy+y^2+2x+3y-7)+(2x^2-4y^2+8-5y+3x)$
$+(10xy+8y-8y^2)+(5x^2-6xy+3y^2-7y-7x+11)$

解．原式$=3x^2-4xy+y^2+2x+3y-7+2x^2-4y^2+8-5y$
$+3x+10xy+8y-8y^2+5x^2-6xy+3y^2-7y-7x$
$+11$
$=10x^2-8y^2-2x-y+12.$

5．$x^2-3xy-y^2+yz-2z^2-(x^2-2xy+5xz-3y^2-2z^2)$

解．原式$=x^2-3xy-y^2+yz-2z^2-x^2+2xy-5xz+3y^2+2z^2$

$=2y^2-xy+yz-5xz+2z^2-2z^3.$

6．$\{7x^3+2-2x^2+2x-(4x^3-2x-2x^2-14)\}-(2x^3-8x^2)$

解．原式$=7x^3+2-2x^2+2x-4x^3+2x+2x^2+14-2x^3+8x^2$

$=x^3+8x^2+4x+16.$

7．$2a-(b-d)-\{a-b-(2c-2d)\}$

解．原式$=2a-b+d-\{a-b-2c+2d\}$

$=2a-b+d-a+b+2c-2d$

$=a+2c-d.$

8．$15x-[4-\{3-5x-(3x-7)\}]$

解．原式$=15x-[4-\{3-5x-3x+7\}]$

$=15x-[4-10+8x]$

$=15x+6-8x$

$=7x+6.$

9．$16-x-[7x-\{8x-(9x-\overline{3x-6x})\}]$

解．原式$=16-x-[7x-\{8x-(9x-3x+6x)\}]$

$=16-x-[7x-\{8x-12x\}]$

$=16-x-[7x+4x]$

$=16-x-11x$

$=16-12x$

10．$2a-[3b+(2b-c)-4c+\{2a-(3b-\overline{c-2b})\}]$

解．原式$=2a-[3b+2b-c-4c+\{2a-(3b-c+2b)\}]$

$=2a-[3b+2b-c-4c+\{2a-5b+c\}]$

$=2a-(5b-5c+2a-5b+c)$

$=2a-2a+4c$

$=4c.$

11. $a-2x+4y-3z-2b+c$，將 a 與 x，b 與 y，c 與 z，各括於一弧中，且括弧中之 a，b，c 必須爲正。

解. $(a-2x)-(2b-4y)+(c-3z)$

12. $a^5+3a^4-2a^3-4a^2+a+1$，將 a 之奇數冪於正括弧中，偶數冪括於負括弧中。

解. $(a^5-2a^3+a)-(-3a^4+4a^2-1)$.

13. $-3a-2b+2c+5d-e-2f$，順次每兩項括以一弧。且括弧之號與奇項相同。

解. $-(3a+2b)+(2c+5d)-(e+2f)$.

14. $ax-by-cz-bx+cy+az$，順次每兩項括以一弧，且括時務令奇項之號不變。

解. $(ax-by)+(-cz-bx)+(cy+az)$.

15. 前式每三項括以一弧，且括時務令偶項之號不變。

解. $(ax-by-cz)+(-bx+cy+az)$.

16. $(3a-4b)-\{(4x-y)-(6-a)\}-(4b-y)$，去括弧而整理之，且將 x，y 括於正括弧中，a，b 括於負括弧中。

解. 原式 $=3a-4b-(4x-y-6+a)-4b+y$

$$=3a-4b-4x+y+6-a-4b+y$$

$$=2a-8b-4x+2y+6$$

$$=(-4x+2y)-(8b-2a)+6.$$

問題二十七 P.40

求下列各式之積：

1. $3a$, $5b$.

解. $3a\times5b=15ab$.

2．$5a,\quad -7b.$

解．$5a\times(-7b)=-35ab.$

3．$-a,\quad -b,\quad c.$

解．$(-a)\times(-b)\times c=abc.$

4．$9a,\quad -c,\quad -3b.$

解．$9a\times(-c)\times(-3b)=27abc.$

5．$8yz,\quad 3am.$

解．$8yz\times 3am=24amyz.$

6．$-m,\quad -2n,\quad -a.$

解．$(-m)\times(-2n)\times(-a)=-2amn.$

7．$-3x^3y^2z,\quad 3z^2x^3y^3.$

解．$(-3x^3y^2z)\times(3z^2x^3y^3)=-9x^{3+3}y^{3+2}z^{1+2}=-9x^6y^5z^3.$

8．$-7y^2x^4,\quad -7y^2z^4$

解．$(-7y^2x^4)\times(-7y^2z^4)=49x^4y^{2+2}z^4=49x^4y^4z^4.$

9．$ab,\quad bm,\quad cm.$

解．$ab\times bm\times cm=ab^{1+1}cm^{1+1}=ab^2cm^2.$

10．$ya^2,\quad -3z,\quad -a^3.$

解．$ya^2\times(-3z)\times(-a^3)=3a^{3+2}yz=3a^5yz.$

11．$-3a^2b^2,\quad -4amb^2,\quad -m^2c.$

解．$(-3a^2b^2)\times(-4amb^2)\times(-m^2c)$

$=-12a^{2+1}b^{2+2}m^{1+2}c=-12a^3b^4cm^3.$

12．$-2ab,\quad 5a^4y,\quad 3a^2y.$

解．$(-2ab)\times 5a^4y\times 3a^2y=-30x^{1+2+4}by^{1+1}=-30a^7by^2.$

13．$-3a^2b^2,\quad ac,\quad -6bym^2,\quad -4ab^4ma.$

解．$(-3a^2b^2)\times ac\times(-6bym^2)\times(-4ab^4ma)$

$=-72a^{2+1+1+1}b^{2+1+4}cm^{2+1}y=-72a^{5}b^{7}cm^{3}y.$

14. $7yx^{2}$, $-2y^{2}x^{3}$, $-9xy$, $2y^{2}z$, -10.

解. $7yx^{2}\times(-2y^{2}x^{3})\times(-9xy)\times2y^{2}z\times(-10)$

$=-7\times2\times9\times2\times10x^{2+3+1}y^{1+2+1+2}z$

$=-2520x^{6}y^{6}z.$

問題二十八 P. 41

下列各題試右式除左式：

1. $24aby$, $-3ay$.

解. $24aby\div(-3ay)=-24aby\times\dfrac{1}{3ay}=-8b.$

2. $-64ab^{4}m$, $8ab^{2}$.

解. $(-64ab^{4}m)\div8ab^{2}=-64ab^{4}m\times\dfrac{1}{8ab^{2}}=-8b^{2}m.$

3. $38a^{4}bx^{3}$, $19a^{3}bx$.

解. $38a^{4}bx^{3}\div19a^{3}bx=38a^{4}bx^{3}\times\dfrac{1}{19a^{3}bx}=2ax^{2}.$

4. $-15a^{5}b^{4}c$, $-3a^{2}c$.

解. $(-15a^{5}b^{4}c)\div(-3a^{2}c)=15a^{5}b^{4}c\times\dfrac{1}{3a^{2}c}=5a^{3}b^{4}.$

5. $7amy$, $-5a^{2}my$.

解. $7amy\div(-5a^{2}my)=-7amy\times\dfrac{1}{5a^{2}my}=-\dfrac{7}{5a}.$

6. $-16p^{2}qy$, $2ap^{3}y$.

解. $-(16p^{2}qy)\div2ap^{3}y=-16p^{2}qy\times\dfrac{1}{2ap^{3}y}=-\dfrac{8q}{ap}.$

7. $-\dfrac{1}{4}x^{2}y$, $-\dfrac{4}{5}xy^{2}$.

解. $\left(-\dfrac{1}{4}x^{2}y\right)\div\left(-\dfrac{4}{5}xy^{2}\right)=\dfrac{x^{2}y}{4}\times\dfrac{5}{4xy^{2}}=\dfrac{5x}{16y}$

8. $a^3b^3c^3$, $-\frac{1}{4}abc$.

解. $a^3b^3c^3 \div \left(-\frac{abc}{4}\right) = -a^3b^3c^3 \times \frac{4}{abc} = -4a^2b^2c^2$

9. $a^mb^nc^l$, $a^{m-1}b^{n-2}c^{l-3}$

解. $a^mb^nc^l \div a^{m-1}b^{n-2}c^{l-3} = a^{m-(m-1)}b^{n-(n-2)}c^{l-(l-3)} = ab^2c^3$.

10. $3m^mn^nl^l$, $-\frac{1}{2}n^nl^{l-n}$

解. $3m^mn^nl^l \div \left(-\frac{n^nl^{l-n}}{2}\right) = -3m^mn^nl^l \times \frac{2}{n^nl^{l-n}} = -\frac{6m^ml^l}{l^{l-n}}$

$= -6m^ml^{l-(l-n)} = -6m^ml^n$.

問題二十九 P. 42

試求下列各式之積。

1. $a+2b+c+1$, d.

解. $(a+2b+c+1)d = ad+2bd+cd+d$.

2. $2a$, $4a-3b+2c$.

解. $2a(4a-3b+2c) = 8a^2-6ab+4ac$.

3. $1+2x-4x^2+x^3$, $-3x$.

解. $(1+2x-4x^2+x^3)(-3x) = -3x-6x^2+12x^3-3x^4$

4. x^2-xy^2+2y, $-xy$.

解. $(x^2-xy^2+2y)(-xy) = -x^3y+x^2y^3-2xy^2$.

5. $5ab$, $3a^2-2ab+7b^2$.

解. $5ab(3a^2-2ab+7b^2) = 15a^3b-10a^2b^2+35ab^3$.

6. $a^4y-a^3y^2-y$, $3a^2y$.

解. $(a^4y-a^3y^2-y)3a^2y = 3a^6y^2-3a^5y^3-3a^2y^2$.

試整理下列各式。

7. $\frac{1}{2}(b-2c)-\frac{3}{2}(c-2b)$

解. 原式$=\frac{1}{2}b-c-\frac{3}{2}c+3b=\left(\frac{1}{2}+3\right)b-\left(1+\frac{3}{2}\right)c$

$=\frac{7}{2}b-\frac{5}{2}c.$

8. $7a(b-c)-2a(a-c)$

解. 原式$=7ab-7ac-2a^2+2ac=7ab-2a^2-5ac.$

9. $2x(3a+2a^2x-5a^3x^2)+5x^2(a^2-a^3x)$

解. 原式$=6ax+4a^2x^2-10a^3x^3+5a^2x^2-5a^3x^3$

$=6ax+9a^2x^2-15a^3x^3.$

10. $ab(c-d)+cd(a-b)+bc(d-a)$

解. 原式$=abc-abd+acd-bcd+bcd-abc=acd-abd.$

問題三十 P. 43

下列各題試以右式除左式。

3. $3x^2-5ax,\quad x.$

解. $(3x^2-5ax)\div x=\frac{3x^2}{x}-\frac{5ax}{x}=3x-5a.$

2. $3a^2-12a^3+15a,\quad -3a^2.$

解. $(3a^2-12a^3+15a)\div(-3a^2)=-1+4a-\frac{5}{a}.$

3. $4x^3-8x^2+16x,\quad 4x.$

解. $(4x^3-8x^2+16x)\div 4x^2=x^2-2x+4.$

4. $12abx-16a^2bm+8a^2b^2,\quad 4ab.$

解. $(12abx-16a^2bm+8a^2b^2)\div 4ab=3x-4a^2m+2ab.$

5. $x^3y-3x^2y^2+4xy^3,\quad xy.$

解. $(x^3y-3x^2y^2+4xy^3)\div xy=x^2-3xy+4y^2$

6. $5a^2by-3ay^2+ayz,\quad 5axy.$

解. $(5a^2by-3ay^2+ayz)\div 5axy=\frac{ab}{x}-\frac{2y}{5x}+\frac{z}{5x}$

7. $-12a^2bm+16a^2by-a^2b^3z+xy,\quad -4a^2bm.$

解. $(-12a^2bm+16a^2by-a^2b^3z+xy)\div(-4a^2bm)$

$=3-\frac{4y}{m}+\frac{b^2z}{m}-\frac{xy}{4a^2bm}$

8. $42a^3x^3-12a^3bx^2y+ab^2xy^2-y^3,\quad abxy.$

解. $(42a^3x^3-12a^3bx^2y+ab^2xy^2-y^3)\div abxy$

$=\frac{42a^2x^2}{by}-12a^2x+by-\frac{y^2}{abx}$

試整理下列各式。

9. $\frac{(4xy-2x^2)}{2x}-6(x+\frac{1}{3}y)$

解. 原式$=2y-x-6x-2y=-7x.$

10. $\left(2a^2m^3n+\frac{1}{2}a^2m^2\right)\div am^2+6m(x-an+4a^2)$

解. 原式$=2amn+\frac{1}{2}a+6mx-6mn+24a^2m$

$=-4amn+\frac{1}{2}a+6mx+24a^2m.$

11. $(a-b)x^2+\frac{ax^3-xy}{x}-\frac{bx^4-x^3y}{x^2}$

解. 原式$=ax^2-bx^2+ax^2-y-bx^2+xy$

$=2ax^2-2bx^2+xy-y.$

12. $ab(c-d)-\frac{ab^2c+3ab}{b}+\frac{a^2bd^2-5ab}{ad}$

解. 原式$=abc-abd-abc-3a+abd-5=-3a-5.$

問題三十一 P. 44

試求下列各式之積。

1. $-a+b$, $-a-b$.

解. $(-a+b)(-a-b)=-a(-a-b)+b(-a-b)$

$=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$

2. $-a-b$. $-a-b$.

解. $(-a-b)(-a-b)=-a(-a-b)-b(-a-b)$

$=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$.

3. $2x+3y$, $3x-2y$.

解. $(2x+3y)(3x-2y)=2x(3x-2y)+3y(3x-2y)$

$=6x^2-4xy+9xy-6y^2=6x^2+5xy-6y^2$.

4. $5a+4b$. $a-b$.

解. $(5a+4b)(a-b)=5a(a-b)+4b(a-b)$

$=5a^2-5ab+4ab-4b^2=5a^2-ab-4b^2$.

5. $x+7$, $x+6$.

解. $(x+7)(x+6)=x(x+6)+7(x+6)$

$=x^2+6x+7x+42=x^2+13x+42$.

6. $x+7$, $x-6$.

解. $(x+7)(x-6)=x(x-6)+7(x-6)$

$=x^2-6x+7x-42=x^2+x-42$.

7. $3a^2+2ab+b^2$, $a-b$.

解. $(3a^2+2ab+b^2)(a-b)$

$=3a^2(a-b)+2ab(a-b)+b^2(a-b)$

$=3a^3-3a^2b+2a^2b-2ab^2+ab^2-b^3$

$=3a^3-a^2b-ab^2-b^3$.

8. x^2+x+1, $x-1$.

解. $(x^2+x+1)(x-1)$

$=x^2(x-1)+x(x-1)+(x-1)$

$=x^3-x^2+x^2-x+x-1=x^3-1.$

9. x^2+3x+2, $x+3$.

解. $(x^2+3x+2)(x+3)$

$=x^2(x+3)+3x(x+3)+2(x+3)$

$=x^3+3x^2+3x^2+9x+2x+6$

$=x^3+6x^2+11x+6.$

10. $x+1$, $x+2$, $x+3$

解. $(x+1)(x+2)(x+3)$

$=x(x+2)(x+3)+(x+2)(x+3)$

$=(x^2+2x)(x+3)+x(x+3)+2(x+3)$

$=x^2(x+3)+2x(x+3)+x^2+3x+2x+6$

$=x^3+3x^2+3x^2+6x+x^2+5x+6$

$=x^3+6x^2+11x+6.$

11. b^2+3a^2+2ab, $a-b$.

解. $(b^2+3a^2+2ab)(a-b)$

$=b^2(a-b)+3a^2(a-b)+2ab(a-b)$

$=ab^2-b^3+3a^3-3a^2b+2a^2b-2ab^2$

$=3a^3-b^3-ab^2-a^2b.$

12. $5x+x^2+1$, $3x-1+2x^2$.

解. $(5x+x^2+1)(3x-1+2x^2)$

$=5x(3x-1+2x^2)+x^2(3x-1+2x^2)+(3x-1+2x^2)$

$=15x^2-5x+10x^3+3x^3-x^2+2x^4+3x-1+2x^2$

$=2x^4+13x^3+16x^2-2x-1.$

13. $x^3-3ax^2+2a^2x$, $x+3a$.

解. $(x^3-3ax^2+2a^2x)(x+3a)$

$=x^3(x+3a)-3ax^2(x+3a)+2a^2x(x+3a)$

$=x^4+3ax^3-3ax^3-9a^2x^2+2a^2x^2+6a^3x$

$=x^4-7a^2x^2+6a^3x.$

14. $a^2+b^2+2ab,\quad b^2-2ab+a^2$

解. $(a^2+b^2+2ab)(b^2-2ab+a^2)$

$=a^2(b^2-2ab+a^2)+b^2(b^2-2ab+a^2)+2ab(b^2-2ab+a^2)$

$=a^2b^2-2a^3b+a^4+b^4-2ab^3+a^2b^2+2ab^3-4a^2b^2+2a^3b$

$=a^4-2a^2b^2+b^4.$

問　題　集　V　　P. 45

試求下列各組之積。

1. $x^3+3x^2y+y^3,\quad x-y.$

解.
$$\begin{array}{r}
x^3+3x^2y+y^3\\
x-y\\
\hline
x^4+3x^3y+xy^3\qquad\qquad\\
-x^3y\qquad\quad-3x^2y^2-y^4\\
\hline
x^4+2x^3y+xy^3-3x^2y^2-y^4
\end{array}$$

2. $a^3-b^3,\quad a^2b+ab^2+b^3.$

解. $(a^3-b^3)(a^2b+ab^2+b^3)$

$=a^3(a^2b+ab^2+b^3)-b^3(a^2b+ab^2+b^3)$

$=a^5b+a^4b^2+a^3b^3-a^2b^4-ab^5-b^6.$

3. $4x^2-24+5x+x^3,\quad x^2-4x+11.$

解.
$$\begin{array}{r}
x^3+4x^2+5x-24\qquad\qquad\\
x^2-4x+11\qquad\qquad\\
\hline
x^5+4x^4+5x^3-24x^2\qquad\qquad\\
-4x^4-16x^3-20x^2+96x\qquad\\
11x^3+44x^2+55x-264\\
\hline
x^5\qquad\qquad\qquad\qquad+151x-264
\end{array}$$

4．$x^2-3ax,\quad x+3a,$

解.

$$\begin{array}{r}
x^2-3ax\\
\underline{x+3a}\\
x^3-3ax^2\\
\underline{3ax^2-9a^2x}\\
x^3-9a^2x
\end{array}$$

5．$a^2-ab+2b^2,\quad a^2+ab+2b^2.$

解.

$$\begin{array}{r}
a^2-ab+2b^2\\
\underline{a^2+ab+2b^2}\\
a^4-a^3b+2a^2b^2\\
+a^3b-a^2b^2+2ab^3\\
\underline{+2a^2b^2-2ab^3+4b^4}\\
a^4+3a^2b^2+4b^4
\end{array}$$

6．$2b^2+3ab-a^2,\quad 7a-5b.$

解.

$$\begin{array}{r}
2b^2+3ab-a^2\\
\underline{-5b-7a}\\
-10b^3-15ab^2+5a^2b\\
\underline{14ab^2+21a^2b-7a^3}\\
-10b^3-ab^2+26a^2b-7a^3
\end{array}$$

7．$a^2-2ax-x^2,\quad a^2+2ax+x^2$

解.

$$\begin{array}{r}
a^2-2ax-x^2\\
\underline{a^2+2ax+x^2}\\
a^4-2a^3x-a^2x^2\\
2a^3x-4a^2x^2-2ax^3\\
\underline{a^2x^2-2ax^3-a^4}\\
a^4-4a^2x^2-4ax^3-x^4
\end{array}$$

8．$3x^4-2x^3+5x^2-x+1.\quad 2x^2+6x-3.$

解.

$$\begin{array}{r}
3x^4-2x^3+5x^2-x+1\\
\underline{2x^2+6x-3}\\
6x^6-4x^5+10x^4-2x^3+2x^2\\
18x^5-12x^4+20x^3-6x^2+6x\\
\underline{-9x^4+6x^3-15x^2+3x-3}\\
6x^6+14x^5-11x^4+34x^3-19x^2+9x-3
\end{array}$$

9．$4x^2-3xy-y^2,\quad 3x-$

解.
$$
\begin{array}{r}
4x^2-3xy-y^2\\
3x-2y\\
\hline
12x^3-9x^2y-3xy^2\\
-8x^2y+6xy^2+2y^3\\
\hline
12x^3-17x^2y+3xy^2+2y^3
\end{array}
$$

10. $x^5-x^4y+xy^4-y^5,\quad x+y.$

解.
$$
\begin{array}{r}
x^5-x^4y+xy^4-y^5\\
x+y\\
\hline
x^6-x^5y+x^2y^4-xy^5\\
x^5y-x^4y^2+xy^5-y^6\\
\hline
x^6-x^4y^2+x^2y^4-y^6
\end{array}
$$

11. $x^2+y^2-xy+x+y-1,\quad x+y-1$

解.
$$
\begin{array}{r}
x^2+y^2-xy+x+y-1\\
x+y-1\\
\hline
x^3+xy^2-x^2y+x^2+xy-x\\
-xy^2+x^2y+xy+y^3+y^2-y\\
-x^2+xy-x-y^2-y+1\\
\hline
x^3+3xy-2x+y^3-2y+1
\end{array}
$$

12. $x^4+2x^3y+4x^2y^2+8xy^3+16y^4,\ x-2y.$

解.
$$
\begin{array}{r}
x^4+2x^3y+4x^2y^2+8xy^3+16y^4\\
x-2y\\
\hline
x^5+2x^4y+4x^3y^2+8x^2y^3+16xy^4\\
-2x^4y-4x^3y^2-8x^2y^3-16xy^4-32y^5\\
\hline
x^5-32y^5
\end{array}
$$

13. $x+2y-3z,\quad x-2y+3z.$

解.
$$
\begin{array}{r}
x+2y-3z\\
x-2y+3z\\
\hline
x^2+2xy-3xz\\
-2xy-4y^2+6yz\\
+3xz+6yz-9z^2\\
\hline
x^2-4y^2+12yz-9z^2
\end{array}
$$

14. $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab,\quad a+b-c.$

解.
$$
\begin{array}{r}
a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab\\
a+b-c\\
\hline
a^3+ab^2+ac^2+abc+a^2c-a^2b\\
-ab^2+abc+a^2b+b^3+bc^2+b^2c\\
-ac^2+abc-a^2c-bc^2-b^2c-c^3\\
\hline
a^3+3abc+b^3-c^3
\end{array}
$$

15. $a^2-ax+bx+b^2,\quad a+b+x.$

解.
$$
\begin{array}{r}
a^2-ax+bx+b^2 \\
a+b+x \\
\hline
a^3-a^2x+abx+ab^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
-abx \qquad +a^2b+b^2x+b^3 \qquad\qquad \\
a^2x \qquad\qquad\qquad +b^2x -ax^2+bx^2 \\
\hline
a^3 \qquad +ab^2+a^2b+2b^2x+b^3-ax^2+bx^2
\end{array}
$$

16. $a^2-2ab+b^2+c^2,\quad a^2+2ab+b^2-c^2$

解.
$$
\begin{array}{r}
a^2-2ab+b^2+c^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
a^2+2ab+b^2-c^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
a^4-2a^3b+a^2b^2+a^2c^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
2a^3b-4a^2b^2 \quad +2ab^3+2abc^2 \qquad\qquad\qquad \\
a^2b^2 \quad -2ab^3 \qquad +b^4+b^2c^2 \qquad \\
-a^2c^2 \quad +2abc^2 \qquad -b^2c^2-c^4 \\
\hline
a^4 \qquad -2a^2b^2 \qquad\qquad\qquad 4abc^2+b^4 \qquad\qquad -c^4
\end{array}
$$

17. $x-a,\quad x+a,\quad x^2+a^2.$

解. $(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$

$=[x(x+a)-a(x+a)](x^2+a^2)$

$=(x^2+ax-ax-a^2)(x^2+a^2)$

$=(x^2-a^2)(x^2+a^2)$

$=x^2(x^2+a^2)-a^2(x^2+a^2)$

$=x^4+a^2x^2-a^2x^2-a^4=x^4-a^4.$

18. $(x+y+z)^2$

解. $(x+y+z)^2=(x+y+z)(x+y+z).$

$$
\begin{array}{r}
x+y+z \qquad\qquad\qquad\qquad \\
x+y+z \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
x^2+xy+xz \qquad\qquad\qquad\qquad \\
xy \qquad +y^2+yz \qquad \\
+xz \qquad +yz+z^2 \\
\hline
x^2+2xy+2xz+y^2+2yz+z^2
\end{array}
$$

19. $x^2-ax+a^2,\quad x^2+ax+a^2,\quad x^4-a^2x^2+a^4.$

解.

$$\begin{array}{r}
x^2-ax+a^2\\
x^2+ax+a^2\\
\hline
x^4-ax^3+a^2x^2\qquad\qquad\\
ax^3-a^2x^2+a^3x\qquad\\
+a^2x^2-a^3x+a^4\\
\hline
x^4\qquad+a^2x^2\qquad+a^4
\end{array}$$

$$(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)$$

$$=(x^4+a^2x^2+a^4)(a^4-a^2x^2+a^4)$$

$$\begin{array}{r}
x^4+a^2x^2+a^4\qquad\qquad\\
x^4-a^2x^2+a^4\qquad\qquad\\
\hline
x^8+a^2x^6+a^4x^4\qquad\qquad\\
-a^2x^6-a^4x^4-a^6x^2\qquad\\
a^4x^4+a^6x^2+a^8\\
\hline
x^8\qquad+a^4x^4\qquad+a^8
\end{array}$$

$\therefore\quad (x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)$

$$=x^8+a^4x^4+a^8.$$

20. $x-2a,\quad x-a,\quad x+a,\quad x+2a,$

解. $(x-2a)(x-a)(x+a)(x+2a)$

$$=(x-2a)(x+2a)(x-a)(x-a)$$

$$\begin{array}{r}
x-2a\qquad\\
x+2a\qquad\\
\hline
x^2-2ax\qquad\\
+2ax-4a^2\\
\hline
x^2\qquad-4a^2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
x-a\qquad\\
x+a\qquad\\
\hline
x^2-ax\qquad\\
+ax-a^2\\
\hline
x^2\qquad-a^2
\end{array}$$

$\therefore\quad (x-2a)(x+2a)(x-a)(x+a)$

$$=(x^2-4a^2)(x^2-a^2)$$

$$=x^2(x^2-a^2)-4a^2(x^2-a^2)$$

$$=x^4-a^2x^2-4a^2x^2+4a^4$$

$$=x^4-5a^2x^2+4a^4.$$

問題三十二 P.46

1. $3x^2y^2(a-2b)-2xy(a-2b)+4(a-2b)$以 $a-2b$ 除之。

解. $$\frac{3x^2y^2(a-2b)}{a-2b}-\frac{2xy(a-2b)}{a-2b}+\frac{4(a-2b)}{a-2b}$$
$$=3x^2y^2-2xy+4.$$

2. $8a^2(2a+b)+ab(2a+b)+b^2(2a+b)$以 $2a+b$ 除之。

解. $$\frac{8a^2(2a+b)}{2a+b}+\frac{ab(2a+b)}{2a+b}+\frac{b^2(2a+b)}{2a+b}$$
$$=8a^2+ab+b^2$$

3. $-3x^2(1-x)+x(1-x)-(1-x)$ 以 $1-x$ 除之。

解. $$\frac{-3x^2(1-x)}{1-x}+\frac{x(1-x)}{1-x}-\frac{1-x}{1-x}$$
$$=-3x^2+x-1.$$

4. $a(a+b-c)-b(a+b-c)+c(a+b-c)$以$a+b-c$除之。

解. $$\frac{a(a+b-c)}{a+b-c}-\frac{b(a+b-c)}{a+b-c}+\frac{c(a+b-c)}{a+b-c}$$
$$=a-b+c.$$

5. $a^2(a^2-ab+b^2)+ab(a^2-ab+b^2)+b^2(a^2-ab+b^2)$以$a^2-ab+b^2$除之。

解. $$\frac{a^2(a^2-ab+b)}{a^2-ab+b^2}+\frac{ab(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}+\frac{a^2(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}$$
$$=a^2+ab+b^2.$$

6. $x(x+a)-2a(x+a)+3a^2$以 $x+a$ 除之。

解. $$\frac{x(x+a)}{x+a}-\frac{2a(x+a)}{x+a}+\frac{3a^2}{x+a}=x-2a+\frac{3a^2}{x+a}.$$

問題三十三 P.51

下列各題試以右式除左式。

1. $x^2+2ax+a^2$, $x+a$.

解.

$$
\begin{array}{rl}
x+a\,)\,x^2+2ax+a^2\,(\,x+a & \\
x^2+ax & \\
\hline
ax+a^2 & \\
ax+a^2 & \\
\hline
\end{array}
$$

2. $x^2-2ax+a^2$, $x-a$.

解.

$$
\begin{array}{rl}
x-a\,)\,x^2-2ax+a^2\,(\,x-a & \\
x^2+ax & \\
\hline
-ax+a^2 & \\
-ax+a^2 & \\
\hline
\end{array}
$$

3 x^3-a^3, $x-a$.

解.

$$
\begin{array}{rl}
x-a\,)\,x^3 \qquad\qquad -a^3\,(\,x^2+ax+a^2 & \\
x^3-ax^2 & \\
\hline
ax^2 & \\
ax^2-a^2x & \\
\hline
a^2x-a^3 & \\
a^2x-a^3 & \\
\hline
\end{array}
$$

4. x^3+a^3, $x+a$.

解.

$$
\begin{array}{rl}
x+a\,)\,x^3 \qquad\qquad +a^3\,(\,x^2-ax+a^2 & \\
x^3+ax^2 & \\
\hline
-ax^2 & \\
-ax^2-a^2x & \\
\hline
a^2x+a^3 & \\
a^2x+a^3 & \\
\hline
\end{array}
$$

5. $x^2-23x+132$. $x-11$.

解.

$$
\begin{array}{rl}
x^2-11\,)\,x^2-23x+132\,(\,x-12 & \\
x^2-11x & \\
\hline
-12x+132 & \\
-12x+122 & \\
\hline
\end{array}
$$

6. $3x^2-11x+10$, $3x-5$.

解.

$$
\begin{array}{rl}
3x-5\,)\,3x^2-11x+10\,(\,x-2 & \\
3x^2-5x & \\
\hline
-6x+10 & \\
-6x+10 & \\
\hline
\end{array}
$$

7. a^3-b^3, $a-b$.

解. $a-b)a^3 \qquad -b^3(a^2+ab+b^2$

$$\begin{array}{l} a^3-a^2b \\ \hline a^2b \\ a^2b-ab^2 \\ \hline ab^2-b^3 \\ ab^2-b^3 \\ \hline \end{array}$$

8. $8a^3+27b^3$, $2a+3b$.

解. $2a+3b)8a^3 \qquad +27b^3(4a^2-6ab+9b^2$

$$\begin{array}{l} 8a^3+12a^2b \\ \hline -12a^2b \\ -12a^2b-18ab^2 \\ \hline 18ab^2+27b^3 \\ 18ab^2+27b^3 \\ \hline \end{array}$$

9. x^3-8x-3, $3-x$.

解. $-x+3)x^3 \qquad -8x-3(-x^2-3x-1$

$$\begin{array}{l} x^3-3x^2 \\ \hline 3x^2-8x \\ 3x^2-9x \\ \hline x-3 \\ x-3 \\ \hline \end{array}$$

10. $2x^3-5x^2+4$, $-2+x$

解. $x-2)2x^3-5x^2 \qquad +4(2x^2-x-2$

$$\begin{array}{l} 2x^3-4x^2 \\ \hline -x^2 \qquad +4 \\ -x^2+2x \\ \hline -2x+4 \\ -2x+4 \\ \hline \end{array}$$

11. x^4+2x^2-x+2, $1-x+x^2$.

解. $x^2-x+1)x^4 \qquad +2x^2-x+2(x^2+x+2$

$$\begin{array}{l} x^4-x^3+x^2 \\ \hline x^3+x^2-x \\ x^3-x^2+x \\ \hline 2x^2-2x+2 \\ 2x^2-2x+2 \end{array}$$

12. $a^2-b^2-2bc-c^2$, $a-b-c$.

解. $a-b-c\,)\,a^2 \qquad -b^2-2bc-c^2\,(\,a+b+c$

$$\begin{array}{r}
a^2-ab-ac \qquad\qquad\qquad \\
\hline
ab+ac-b^2-2bc \qquad \\
ab \qquad -b^2-\ bc \qquad \\
\hline
ac \qquad -\ bc-c^2 \\
ac \qquad -\ bc-c^2 \\
\hline
\end{array}$$

問題集 VI P.52

下列各式,試以右左除左式。

1. $12x^5y^4-24x^4y^2+36x^3y^2-12x^2y^2$, $12x^2y^2$

解. $\dfrac{12x^5y^4}{12x^2y^2}-\dfrac{24x^4y^2}{12x^2y^2}+\dfrac{36x^3y^3}{12x^2y^2}-\dfrac{12x^2y^2}{12x^2y^2}$

$=x^3y^2-2x^2+3xy-1.$

2. x^4+64, x^2+4x+8.

解. $x^2+4x+8\,)\,x^4 \qquad\qquad +64\,(\,x^2-4x+8$

$$\begin{array}{r}
x^4+4x^3-\ 8x^2 \qquad\qquad \\
\hline
-4x^3-\ 8x^2 \qquad\qquad \\
-4x^3-16x^3-32x \qquad \\
\hline
8x^2+32x+64 \\
8x^2+32x+64 \\
\hline
\end{array}$$

3. $x^4+x^3+57-35x-24x^2$, x^2-3+2x.

解. $x^2+2x-3\,)\,x^4+\ x^3-24x^2-35x+57\,(\,x^2-x-19$

$$\begin{array}{r}
x^4+2x^3-\ 3x^2 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
-\ x^3-21x^2-35x \qquad \\
-\ x^3-\ 2x^2+\ 3x \qquad \\
\hline
-19x^2-38x+57 \\
-19x^2-38x+57 \\
\hline
\end{array}$$

4. $1-x-3x^2-4x^3$, x^2-x+1.

解. $x^2-x+1\,)-4x^3-3x^2-\ x+1\,(-4x-7$

$$\begin{array}{r}
-7x^3+4x^2-4x \qquad\qquad \\
\hline
-7x^2+3x+1 \\
-7x^2+7x-7 \\
\hline
-4x+8 \\
\end{array}$$

5. x^2+4a^a+3a, $x+2a$.

解．
$$\begin{array}{l}
x+2a\,)\,x^2+4ax \qquad +3a\,(\,x+2a \\
\qquad\quad \underline{x^2+2ax\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\quad 2ax \\
\qquad\qquad\quad \underline{2ax+4a^2} \\
\qquad\qquad\qquad -4a^2+3a
\end{array}$$

6．$2x^2-3y^2+xy-xz-4yz-z^2$，　$2x+3y+z$.

解．
$$\begin{array}{l}
2x+3y+z\,)\,2x^2-3y^2+xy-xz-4yz-z^2\,(\,x-y-z \\
\qquad\qquad\quad \underline{2x^2\qquad\quad +3xy+xz\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad -3y^2-2xy-2xz-4yz \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-3y^2-2xy\qquad\quad -yz\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2xz-3yz-z^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-2xz-3yz-z^2}
\end{array}$$

7．a^7+x^7，　$(a-b)(a+b)$.

解．$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\begin{array}{l}
a^2-b^2\,)\,a^7 \qquad\qquad\qquad\qquad +x^7\,(\,a^5+a^3b^2+ab^4 \\
\qquad\quad \underline{a^7-a^5b^2\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\quad a^5b^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{a^5b^2-a^3b^4\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\quad a^3b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{a^3b^4-ab^6\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ab^6+x^7
\end{array}$$

8．$4a^2b^2-3a^3b+ab^3+a^4$，　b^2-a^2.

解．
$$\begin{array}{l}
b^2-a^2\,)\,ab^3+4a^2b^2-3a^3b+a^4\,(\,ab+4a^2 \\
\qquad\quad \underline{ab^3\qquad\qquad\quad -a^3b\qquad} \\
\qquad\qquad\quad 4a^2b^2-2a^3b+a^4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{4a^2b^2\qquad\qquad -4a^4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -2a^3b+5a^4
\end{array}$$

9．$a^{4n}-a^{3n}b^m+a^nb^{3m}-b^{4m}$，　a^n-b^m

解．
$$\begin{array}{l}
a^n-b^m\,)\,a^{4n}-a^{3n}b^m+a^nb^{3m}-b^{4m}\,(\,a^{3n}+b^{3m} \\
\qquad\quad \underline{a^{4n}-a^{3n}b^m\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a^nb^{3m}-b^{4m} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{a^nb^{3m}-b^{4m}}
\end{array}$$

10．$a^{3x}-a^{2x}+a^x-1$，　a^x-1

解．
$$\begin{array}{l}
a^x-1\,)\,a^{3x}-a^{2x}+a^x-1\,(\,a^{2x}+1 \\
\qquad\quad \underline{a^{3x}-a^{2x}\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\quad a^x-1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{a^x-1}
\end{array}$$

11. $a^{5(p+q)}-x^{5(p+q)}$, $a^{p+q}-x^{p+q}$

解. 設 $p+q=c$

$$\{a^{5(p+q)}-x^{5(p+q)}\}\div(a^{p+q}-x^{p+q})$$

$$=(a^{5c}-x^{5c})\div(a^{c}-x^{c})$$

$$\begin{array}{l}
a^{c}-x^{c}\,)\,a^{5c}-x^{5c}\,(\,a^{4c}+a^{3c}x^{c}+a^{2c}x^{2c}+a^{c}x^{3c}+x^{4c}\\
\qquad a^{5c}-a^{4c}x^{c}\\
\hline
\qquad\quad a^{4c}x^{c}\\
\qquad\quad a^{4c}x^{c}-a^{3c}x^{2c}\\
\hline
\qquad\qquad a^{3c}x^{2c}\\
\qquad\qquad a^{3c}x^{2c}-a^{2c}x^{3c}\\
\hline
\qquad\qquad\quad a^{2c}x^{3c}\\
\qquad\qquad\quad a^{2c}x^{3c}-a^{c}x^{4c}\\
\hline
\qquad\qquad\qquad a^{c}x^{4c}-x^{5c}\\
\qquad\qquad\qquad a^{c}x^{4c}-x^{5c}\\
\hline
\end{array}$$

$$\therefore\ \{a^{5(p+q)}-x^{5(p+q)}\}\div(a^{p+q}-x^{p+q})$$

$$=a^{4(p+q)}+a^{3(p+q)}x^{p+q}+a^{2(p+q)}x^{2(p+q)}+a^{p+q}x^{3(p+q)}+x^{4(p+q)}$$

12. 若 $n^2=n+1$ 則 $x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$ 必為 $x^2+nax+a^2$ 所除絕,試證明之。

證明:

$$\begin{array}{l}
x^2+nax+a^2\,)\,x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4\,(\,x^2-(n-1)ax+a^2\\
\qquad x^4+nax^3+a^2x^2\\
\hline
\qquad\quad -(n-1)ax^3+a^3x\\
\qquad\quad -(n-1)ax^3-n(n-1)a^2x^2-(n-1)a^3x\\
\hline
\qquad\qquad n(n-1)a^2x^2+na^3x+a^4\\
\qquad\qquad\qquad a^2x^2+na^3x+a^4\\
\hline
\end{array}$$

由上式可知 $n(n-1)=1$ 則可除絕,

但 $n(n-1)=n^2-n=1$ 即 $n^2=n+1$.

$\therefore$ $x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$ 被 $x^2+nax+a^2$ 所除絕,

則 n^2 必得等於 $n+1$.

13. $6x^2+(a+3)x-8$，爲 $2x+3$ 所除絕，試決定 a 之值。

解. $$2x+3\overline{)6x^2+(a+3)x-8}\left(3x-\frac{8}{3}\right.$$
$$\begin{array}{r}6x^2+\quad 9x\\ \hline ax-6x-8\\ -\frac{16}{3}x-8\\ \hline \left(a-\frac{2}{3}\right)x\end{array}$$

$6x^2+(a+3)x-8$ 爲 $2x+3$ 所除絕，則無餘式（即於等零）

故 a 之值爲 $\frac{2}{3}$

14. 以何式除 x^3+6x^2-4x+1，則商爲 x^2-5x-9 而餘式爲 8。

解. 因　商×除式＋餘式＝被除式

故　$$除式=\frac{被除式-餘式}{商}$$

$$=\frac{x^3+6x^2-4x-1-8}{x^2+5x-9}$$

$$x^2+5x-9\overline{)x^3+6x^2-4x-9}(x+1$$
$$\begin{array}{r}x^3+5x^2-9x\\ \hline x^2+5x-9\\ x^2+5x-9\\ \hline\end{array}$$

即以 $x+1$ 除 x^3+6x^2-4x-1 則商爲 x^2+5x-9 除式爲 8.

問 三 十 四　P.53

1. $\frac{ax^2+bx+c}{ab}$ 爲 x 之整式與否。

答. x 之整式。

2. $\frac{3x^2}{by}+r$，爲 x 之整式與否。

答. r 之整式。

3．$\frac{4a^2b^2}{ab}+\frac{a}{b}$爲$a$之整式乎，爲$b$之整式乎。

答．原式$=4ab+\frac{a}{b}$　爲a之整式。

4．$\frac{5x^3y^2+x^2y^2+x}{xy}$，爲$x$之整式乎，爲$y$之整式乎。

答．原式$=5x^2y+xy+\frac{1}{y}$爲x之整式。

問題三十五　　P.54

下列各式，試注目於x而整理之。

1．$x^2+ax+bx+ab$

解．原式$=x^2+(a+b)x+ab$，

2．$x^2-ax-bx-ab$

解．原式$=x^2-(a+b)x-ab$，

3．$ax^2-bx^2-bcx-cax+cx^2+abc-abx$

解．原式$=ax^2-bx^2+cx^2-bcx-acx-abx+abc$

$$=(a-b+c)x^2-(bc+ac+ab)x+abc$$

4．$\frac{b}{a}x+\frac{a}{b+c}x^2-\frac{c}{b+a}x-bcx^2+a^2x^3+\frac{1}{abc}$

解．原式$=a^2x^3+\frac{a}{b+c}x^2-bcx^2-\frac{c}{b+a}x+\frac{b}{a}x+\frac{1}{abc}$

$$=a^2x^3+\left(\frac{a}{b+c}-bc\right)x^2-\left(\frac{c}{b+a}-\frac{b}{a}\right)x+\frac{1}{abc},$$

5．$x^2(y-z)+y^2(z-x)+x^2(x-y)$

解．原式$=(y-z)x^2+y^2z-y^2x+z^2x-yz^2$

$$=(y-z)x^2-y^2x+z^2x+y^2z-yz^2$$

$$=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+(y-z)yz,$$

6．$x^2\left(y-\frac{z}{y}\right)+y^2\left(z-\frac{x}{y}\right)+z^2\left(x-\frac{y}{y}\right)$

解. 原式$=(y-\frac{z}{y})x^2+y^2z-xy+z^2x-z^3$

$=(y-\frac{z}{y})x^2-xy+z^2x+y^2z-z^3$

$=(y-\frac{z}{y})x^2-(y-z^2)x+(y^2-z)z,$

7. $ax+cby+xy+x^2-ax^2$

解. 原式$=x^2-ax^2+ax+xy+bcy$

$=(1-a)x^2+(a+y)x+bcy,$

8. $(ax^2+by^2)z^4+(abx+y)z^2+cx^3-bxy$

解. 原式$=ax^2z^4+by^2z^4+abxz^2+yz^2+cx^3-bxy$

$=cx^3+ax^2z^4+abxz^2-bxy+by^2z^4+yz^2$

$=cx^3+az^4x^2+(abz^2-by)x+yz^2(byz^2+1),$

問 題 三 十 六 P.56

下列各式,試分離係數而計算之。

1. $(5x^2-2xy-y^2)(2x^3+4x^2y-y^3),$

解.

$$
\begin{array}{r}
2+4+\ 0-1\\
5-\ 2-1\\
\hline
10+20+\ 0-5\qquad\quad\\
-\ 4-\ 8+0+2\quad\\
-\ 2-4-0+1\\
\hline
10+16-10-9+2+1
\end{array}
$$

$\therefore$ 積$=10x^5+16x^4y-10x^3y^2-9^2y^3+2xy^4+y^5,$

2. $(9c^6+5c^4-13c^2)(5c^8-3c^6+9c^4-10c^2+4),$

解.

$$
\begin{array}{r}
5-3+9-10-4\qquad\qquad\\
9+\ 5-13\qquad\qquad\\
\hline
45-27+81-90+\ 36\qquad\qquad\\
25-15+45-\ 50+\ 20\qquad\\
-65+39-117+130-52\\
\hline
45-\ 2+\ 1-\ 6-121\ \ 150-52
\end{array}
$$

$\therefore$　積 $=4c^{14}-2c^{12}+c^{10}-6c^{8}-131c^{6}-150c^{4}-52c^{2}$.

3. $(4x^2-28xy+49y^2)\div(2x-7y)$.

解.
$$\begin{array}{r|l}
2-7 & 4-28+49\,(2-7 \\
 & \underline{4-14} \\
 & -14+49 \\
 & \underline{-14+49}
\end{array}$$

$\therefore$　商 $=2x-7y$

4. $(x^7-2x^6+x^5+2x^3-3x^2+1)\div(x^5+2x+1)$.

解.
$$\begin{array}{r|l}
1+0+0+0+2+1 & 1-2+1+0+2-3+0+1\,(1-2+1 \\
 & \underline{1+0+0+0+2+1} \\
 & -2+1+0+0-4+0 \\
 & \underline{-2+0+0+0-4-2} \\
 & 1+0+0+0+2+1 \\
 & \underline{1+0+0+0+2+1}
\end{array}$$

$\therefore$　商 $=x^2-2x+1$.

5. $[x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc]$

$\div[x^2-(a+b)x+ab]$.

解.
$$\begin{array}{r|l}
1-(a+b)+ab & 1-(a+b+c)+(ab+ac+bc)-abc\,(1-c \\
 & \underline{1-a+b)\quad+\ ab} \\
 & -c+(ac+bc)\quad-abc \\
 & \underline{-c+(ac+bc)\quad-abc}
\end{array}$$

$\therefore$　商 $=x-c$.

6. $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3)\div(a+b+c)$.

解. 原式 $=\{a^3+3ba^2+3b^2a+(b^3+c^3)\}\div\{a+(b+c)\}$

$$\begin{array}{r|l}
1+(b+c) & 1+3b+3b^2+(b^3+c^3)\,(1+(2b-c)+(b^2-bc+c^2) \\
 & \underline{1+(b+c)} \\
 & (2b-c)+3b^2 \\
 & \underline{(2b-c)+(2b^2+bc-c^2)} \\
 & (b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3) \\
 & \underline{(b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3)}
\end{array}$$

$\therefore$　商 $=a^2+(2b-c)a+(b^2-bc+c^2)$

$=a^2+2ab-ac+b^2-bc+c^2$

7. $(5a^5-3a^2b^3+ab^4-b^5)(a^3+a^2b-ab^2)$,

解.
$$
\begin{array}{r}
5+0+0-3+1-1\\
1+1-1\\
\hline
5+0+0-3+1-1\\
5+0+0-3+1-1\\
-5+0+0+3-1+1\\
\hline
5+5-5-3-2+3-2+1
\end{array}
$$

$\therefore$ 積 $=5a^8+5a^7b-5a^6b^2-3a^5b^3-2a^4b^4+3a^3b^5$

$-2a^2b^6+ab^7$,

8. $(4x^3y^3-2x^2y^2+xy-4)\div(x^3y^3-2xy-1)$,

解. $1+0-2-1\overline{)4-2+1-4}(4$
$$
\begin{array}{r}
4+0-8-4\\
\hline
-2+9+0
\end{array}
$$

$\therefore$ 商 $=4$, 餘 $=-2x^2y^2+9xy$,

第二編 一次方程式

問題三十七 P.60

試解下列各方程式：

1. $3(x-1)-\{3x-(2-x)\}=5$,

解. 去括弧 $3x-3-(3x-2+x)=5$

即 $3x-3-3x+2-x=5$

移項，合併 $-x=5+1$ $\therefore$ $x=-6$,

實驗 左 $=3(-6-1)-\{3(-6)-[-2-6]\}$

$=3(-7)-\{-18-8\}=-21+26=5$,

右 $=5$

故知所得 x 之值無誤

2． $x-(4-2x)=7(x-1)$

解. 去括弧 $x-4+2x=7x-7$

移　項 $7x-3x=7-4$

合　併 $4x=3 \quad \therefore \quad x=\frac{3}{4}$,

實　驗 $左=\frac{3}{4}-\left(4-2\times\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}-\frac{10}{4}=-\frac{7}{4}$,

$右=7\left(\frac{3}{4}-1\right)=7\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{7}{4}$

故知所得之 x 值無誤。

3． $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=1$,

解. 以20乘 $5x-4x=20 \quad \therefore \quad x=20$

實　驗 $左=\frac{20}{4}-\frac{20}{5}=5-4=1$,

$右=1$

故知所得 x 之值無誤。

4． $5(4+3x)=7(3+4x)$

解. 去括弧 $20+15x=20-28x$

移　項 $28x-15x=20-21$

合　併 $13x=-1 \quad \therefore \quad x=-\frac{1}{13}$,

實　驗 $左=5\left\{4+3\left(-\frac{1}{73}\right)\right\}=20-\frac{4}{13}\times 5$

$=20-\frac{15}{13}=18\frac{11}{13}$,

$右=7\left\{3+4\left(-\frac{1}{13}\right)\right\}=21-\frac{4}{13}\times 7$

$=21-\frac{28}{13}=18\frac{11}{13}$,

故知所得 x 之值無誤.

5. $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x-3}{3}=3$,

解. 以6乘 $3(x-1)+2(x-3)=18$

去括弧 $3x-3+2x-6=18$

移項, 合併 $5x=18+9=27$

$\therefore \quad x=\dfrac{27}{5}$

實 驗 $左=\left(\dfrac{27}{5}-1\right)\div 2+\left(\dfrac{27}{5}-3\right)\div 3$

$=\dfrac{22}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{12}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{5}+\dfrac{4}{5}=3,$

$右=3,$

故知所得 x 之值無誤。

6. $\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{2(x-1)}{3}=3$。

解. 以12乘 $3(x+1)-8(x-1)=36$

去括弧 $3x+3-8x+8=36$

移項, 合併 $-5x=25 \quad \therefore \quad x=-5,$

實 驗 $左=\dfrac{-5+1}{4}-\dfrac{2(-5-1)}{3}$

$=\dfrac{-4}{4}+\dfrac{12}{3}=-1+4=3.$

$右=3,$

故知所得 x 之值無誤。

7. $\dfrac{5x+8}{3}-x=6+\dfrac{3x+8}{5}$.

解. 以15乘 $5(5x+8)-15x=6\times 15+3(3x+8)$

去括弧 $25x+40-15x=90+9x+24$

移 項 $10x-9x=114-40$

合 併 $\therefore \quad x=74,$

實驗 $左=(5\times74+8)\div3-74$

$=\frac{378}{3}-74=126-74=52$

$右=6+(3\times74+8)\div5$

$=6+\frac{230}{5}=6+46=52$

故知所得 x 之值無誤。

8. $(4x-3)(9x+6)=(6x-5)^2+8$

解. 去括弧 $36x^2-3x-18=36x^2-60x+25+8$

移　項 $36x^2-36x^2-3x+60x=33+18$

合　併 $57x=51$　　$\therefore\ x=\frac{51}{57}=\frac{17}{19}$.

實 $左=\left(4\times\frac{17}{19}-3\right)\left(9\times\frac{17}{19}+6\right)$

$=\left(\frac{68}{19}-3\right)\left(\frac{153}{19}+\frac{114}{19}\right)$

$=\frac{11}{19}\times\frac{267}{19}=\frac{2937}{361}$.

$右=\left(6\times\frac{17}{19}-5\right)^2+8$

$=\left(\frac{102}{19}-5\right)^2+8=\left(\frac{7}{19}\right)^2+8$

$=\frac{49}{361}+\frac{2888}{361}=\frac{2937}{861}$.

故知所得 x 之值無誤。

問題集 VI P.60

試解下列各方程式。

1. $\frac{x-2}{4}+\frac{1}{3}=x-\frac{2x-1}{3}$.

解. 以12乘 $3(x-2)+4=12x-4(2x-1)$

去括弧　$3x-6+1=12x-8x+4$

移　項　$3x-4x=4+2$　$\therefore$　$x=-6.$

2. $1-2(x-3(1+x))=0$

解. 去括弧　$1-2(x-3-3x)=0$

即　$1-2x+6+6x=0$

移項,合併　$4x=-7$　$\therefore$　$x=-1\frac{3}{4}$。

3. $(x+1)(x+2)=(x-2)(x-4)$.

解. 去括弧　$x^2+3x+2=x^2-6x+8$

移　項　$x^2-x^2+3x+6x=8-2$

合　併　$9x=6$　$\therefore$　$x=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

4. $\frac{x-5}{2}-\frac{x-4}{3}=\frac{x+1}{2}-x$.

解. 以6乘　$3(x-5)-2(x-4)=3(x+1)-6x$

去括弧　$3x-15-2x-8=3x+3-6x$

移項,合併　$4x=10$　$\therefore$　$x=2\frac{1}{2}$.

5. $2x^2=(x+1)^2+(x+3)^2$.

解. 去括弧　$2x^2=x^2+2x+1+x^2+6x+9$

移　項　$2x^2+8x-2x^2=-10$

合　併　$8x=-10$　$\therefore$　$x=-1\frac{1}{4}$.

6. $(x-1)(x-4)=2x+(x-2)(x-3)$

解. 去括弧　$x^2-5x+4=2x+x^2-5x+6$

移項,合併　$-2x=2$　$\therefore$　$x=-1$.

7. $0.5x+3.75=5.25x-1$.

解. 以100乘　$50x+375=525x-100$

移項　$525x-50x=375+100$

合併　$475x=475$　$\therefore\ x=1.$

8．$\dfrac{x+\frac{1}{2}}{2}-\dfrac{2x-\frac{1}{2}}{5}+1\frac{1}{4}=0.$

解．以20乘　$10\left(x+\frac{1}{2}\right)-4\left(2x-\frac{1}{2}\right)+25=0$

去括弧　$10x+5-8x+2+25=0$

移項，合併　$2x=-32$　$\therefore\ x=-16.$

9．$0.15x+1.2-0.875x+0.375=0.0625x.$

解．以10000乘

$1500x+12000-8750x+3750=625x$

移項　$8750x-1500x+625x=15750$

合併　$7875x=15750$　$\therefore\ x=2.$

10．$(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$

解．$(x^3-3x^2+3x-1)+(x^3-6x^2+12x-8)+(x^3-9x^2$

$+27x-27)=3x^3-18x^2+33x-18$

即　$3x^3-3x^3-18x^2+18x^2+42x-33x=36-18$

合併　$9x=18$　$\therefore\ x=2.$

11．$0.3x-(0.9x-0.05)=1.2x-3.7$

解．去括弧 $0.3x-0.9x+0.05=1.2x-3.7$

以100乘　$30x-90x+5=120x-370$

移項　$120x+60x=5+370$

合併　$120x=375$　$\therefore\ x=2\frac{1}{12}.$

12．$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c.$

解. 以 ab 乘 $bx+ax=abc$

即 $(a+b)x=abc$ $\therefore$ $x=\dfrac{abc}{a+b}$

13. $2(x-a)+3(x-2a)=2a.$

解. 去括弧 $2x-2a+3x-6a=2a$

移項,合併 $5x=2a+8a$

即 $5x=10a$ $\therefore$ $x=2a.$

14. $\dfrac{1}{2}(a+x)+\dfrac{1}{3}(2a+x)+\dfrac{1}{4}(3a+x)=3a.$

解. 以12乘 $6(a+x)+4(2a+x)+3(3a+x)=3a\times 12$

去括弧 $6a+6x+8a+4x+9a+3x=36a$

移 項 $6x+4x+3x=36a-23a$

合 併 $13x=13a$ $\therefore$ $x=a.$

15. $\dfrac{ax}{b}+\dfrac{bx}{a}=a^2+b^2$

解. 以 ab 乘 $a^2x+b^2x=ab(a^2+b^2)$

即 $(a^2+b^2)x=ab(a^2+b^2)$ $\therefore$ $x=ab.$

16. $(a^2+x)(b^2+x)=(ab+x)^2.$

解. 去括弧 $a^2b^2+a^2x+b^2x+x^2=a^2b^2+2abx+x^2$

移 項 $x^2-x^2+a^2x-2abx+b^2x=a^2b^2-a^2b^2$

即 $(a^2-2ab+b^2)x=0$ $\therefore$ $x=0.$

17. $a(x+a)+b(b-x)=2ab.$

解. 去括弧 $ax+a^2+b^2-bx=2ab$

移 項 $+ax+bx=a^2-2ab+b^2$

即 $-(a-b)x=(a-b)^2$

以 $-(a-b)$ 除 $\therefore$ $x=-(a-b)=b-a.$

18. $(x-a)(x-b)+(a+b)^2=(x+a)(x+b)$.

解. 移　項　$(x+a)(x+b)-(x-a)(x-b)=(a+b)^2$

去括弧　$x^2+ax+bx+ab-x^2+ax+bx-ab=(a+b)^2$

即　$2x(a+b)=(a+b)(a+b)$

以$(a+b)$除　$2x=a+b$　$\therefore x=\dfrac{a+b}{2}$.

問　題　集 VIII　　P. 64

1. 設有銀若干圓，分配於若干人，若每人得10圓，則不足5圓，若每人得7圓，則所餘者，與一人所得之數相等，問銀之圓數為若干。

解. 設　人數$=x$

依題意得　$10x-5=7x+7$

移　項　$10x-7x=7+5$

合　併　$3x=12$　$\therefore$　$x=4$……人數

$10x-4=35$…………銀之圓數

2. 二有效數字，組成二位之數，但二數之和為9，而數字交換，則所得之數，較原數大17，問原數為何數。

解. 設　十位數字$=x$，　個位數字$=9-x$

則　原數$=10x+(9-x)$

數字交換之數$=10(9-x)+x$

依題意得　$10(9-x)+x=10x+(9-x)+17$

去括弧　$90-10x+x=10x+9-x+17$

移　項　$9x+9x=90-26$

合　$18x=64$　$\therefore$　$x=3\frac{5}{9}$　十位數字

因所求之數字必爲正整數，今不爲正整數，故知此題不合理。

3．年利4分，5年間之單利與元金合併則爲600圓，問元金若干圓。

解．設　元金$=x$，　　5年間之單利$=\frac{4}{100}\times 5x$

依題意得　$\frac{4}{100}\times 5x+x=600$

即　$\frac{1}{5}x+x=600$

去分母　$x+5x=3000$

合　併　$6x=3000$　　$\therefore\ x=500$

即元金爲500圓.

4．一汽車自甲地出發至乙地後，停30分鐘，即駛歸原處，往返共需11時間，但知往時速率每時18浬，返時速率每時24浬，問甲乙兩地距離若干。

解．設　甲乙兩地距離$=x$浬

依題意得　$\frac{x}{18}+\frac{x}{24}=11-\frac{30}{60}$

即　$\frac{x}{18}+\frac{x}{24}=\frac{21}{2}$

去分母　$8x+6x=72\times 21$

合　併　$14x=1512$　　$\therefore\ x=108$

甲乙兩地之距離爲108浬.

5．兎在犬前100步，犬逐之，兎6步之時能行5步，兎9步之距離犬行7步，問兎行幾步犬當追及。

解．設　兎行之步數$=x$　　犬行之步數$=\frac{7}{9}(x+100)$

但　兎6步之時等於犬5步之時

故得方程式：$\dfrac{\frac{7}{9}(x+100)}{5}=\dfrac{x}{6}$

以 30 乘　$6\times\frac{7}{9}(x+100)=5x$

以 3 乘　$14x+1400=15x$

移　項　$15x-14x=1400$

合　併　$\therefore\ x=1400$

兎行 1400 步犬當追及。

6. 有賣柑者，其第一次所售之數，較原數之半少 1，第二次所售之數，較餘柑之數之半少 1，第三次所售之數，更較餘柑之數之半少 1，歸家計之，餘柑 24，問出門時柑數爲若干。

解．設　原有之柑數$=x$

第一次：所售之數$=\frac{1}{2}x-1$

所餘之數$=x-\left(\frac{1}{2}x-1\right)=\frac{1}{2}x+1$

第二次：所售之數$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

所餘之數$=\left(\frac{1}{2}x+1\right)-\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

第三次：所售之數$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\right)-1$

$=\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}$

所餘之數$=\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{8}x+\frac{7}{4}$

但　歸家計之共餘柑 24

故得方程式：　$\frac{1}{8}x+\frac{7}{4}=24$

以 8 乘　$x+14=192$　　$\therefore\ x=192-14=178.$

即此人出門時之相數爲 178.

7．有問希臘之學者 *Pythagoras* 其弟子之數，彼答曰弟子總數之半爲哲學，三之一爲數學，未定專門之數加三人，則適當哲數二科弟子四之一，問弟子究有幾人。

解. 設　其弟子之人數爲 x

則　爲哲學者$=\frac{1}{2}x$　　爲數學者$=\frac{1}{3}x$

未定專門者$=x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}x$

依題意得：　$\frac{1}{6}x+3=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)$

去括弧　　$\frac{1}{6}x+3=\frac{1}{8}x+\frac{1}{12}x$

以24乘　　$4x+72=3x+2x$

移　項　　$5x-4x=72$

$\therefore\ x=72$

即其弟子爲 72 人

8．水槽之底有二栓，槽中滿注以水，拔一栓則 5 時間流盡，拔他栓則 7 時間流盡，二栓同拔，則 2 時間流出水一石二斗，問槽中容水若干。

解. 設　槽中容水爲 x 斗

即　一栓每時流出爲$\frac{x}{5}$斗，他栓流出爲$\frac{x}{7}$斗

但　二者同流則 2 時間流出爲一石二斗（即 12 斗）

故得方程式：　$2\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{7}\right)=12$

去括弧 $\frac{2}{5}x+\frac{2}{7}x=12$

以35乘 $14x+10x=420$

合　併 $24x=420 \quad \therefore x=17\frac{1}{2}.$

即槽中容水當一石七斗五升。

9. 二數之差爲4，其平方之差爲112，問二數爲何數。

解. 設 一數$=x$ 他數$=x-4$

依題意得： $x^2-(x-4)^2=112$

去括弧 $x^2-(x^2-8x+16)=112$

即 $x^2-x^2+8x-16=112$

移項，合併 $8x=112+16 \quad \therefore \quad x=16$

$16-4=12.$

即二數爲16與12.

10. 酒一石二斗與水一石八斗，混合爲薄酒，酒九斗與水三斗，混合爲濃酒，今欲造酒水等分之酒一石四斗，問薄酒與濃酒當各用若干。

解. 設 用薄酒之數$=x$ 斗， 用濃酒之數$=14-x$

由題意知：薄酒含酒 $\frac{12}{12+18}=\frac{2}{5}$，含水 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

濃酒含酒 $\frac{9}{9+3}=\frac{3}{4}$ 含水 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

今欲造酒水相等之酒（共一石四斗）

故得方程式 $\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}(14-x)=\frac{3}{5}x+\frac{1}{4}(14-x)$

以20乘 $8x+210-15x=12x+70-5x$

移　項 $8x-15x-12x+5x=70-210$

合　併 $-14x=-140$

移 因 $\therefore \quad x=10$ ………… 淸酒1石

$14-10=4$ ………… 濃酒4斗

11. 父年43, 母年34, 子年12, 問幾年後, 兩親之年, 適當子年之三倍。

解. 設 兩親爲子年3倍時爲 x 年

則 x 年後： 父年$=43+x$, 母年$=34+x$

子年$=12+x$

但 x 年後兩親之年爲子年3倍

故得爲方程式：

$$(43+x)+(34+x)=3(12+x)$$

去括弧 $43+x+34+x=36+3x$

移 項 $3x-2x=77-36$

合 併 $\therefore \quad x=41.$

即41年後兩親之年方爲子年之3倍。

12. 三角形之周爲33尺, 其最短邊之2倍, 最長邊之半, 與第三邊減5尺之差, 三者互等, 問三邊各長若干。

解. 設 其最短邊$=x$尺, 其最長邊$=4x$尺

則 第三邊$=33-x-4x=33-5x$

依題意得 $\frac{1}{2}\times 4x=(33-5x)-5$

去括弧 $2x=28-5x$

移項, 合併 $7x=28 \qquad \therefore \quad x=4.$

$4\times 4=16 \qquad 33-16-4=13$

三邊之長爲4尺13尺與16尺.

13. 設甲乙丙丁四數之和爲720, 而甲加3, 乙減3, 丙以3乘, 丁以

3 除，則四者互等，問甲乙丙丁各爲何數。

解. 設 甲數$=x$

則 乙數$=(x+3)+3=x+6$

丙數$=\frac{1}{3}(x+3)=\frac{1}{3}x+1$

丁數$=3(x+3)=3x+9$

但 四數之和爲 720

故得方程式：

$$x+(x+6)+\left(\frac{1}{3}x+1\right)+(3x+9)=720$$

去括弧 $5x+\frac{1}{3}x=720-16$

以 3 乘 $15x+x=2112$

合 併 $15x=2112 \quad \therefore \quad x=132.$

$132+6=138,\qquad \frac{1}{3}\times133+1=45,\qquad 3\times132+9=405$

甲數爲 132，乙數爲 138，丙數爲 45，丁數爲 405.

14. 時鐘之二針在五時六時二時間，(i) 成直角，(ii) 相重，(iii)成一直線，各在何時。

解. (i) 成直角：1. 成直角時，兩針相差必爲 15 分鐘.

2. 可知每時都能成兩次直角，（即時針在分針前 15分，時針在分針後 15 分）

3 5 時，時針在分針前 25 分.

4. 分針速度爲時針速度 12 倍。

解之如下：

I 設 兩針第一次成直角之時刻爲 x 分

則 時針所行之分數$=x+15-25=x-10$

但　分針速度爲時針速度 12 倍

$\therefore\quad x=12(x-10)$

去括弧　$x=12x-120$

移　項　$11x=120\qquad\therefore\quad x=10\frac{10}{11}$分

即第一次成直角之時爲 5 時$10\frac{10}{11}$分

I　設　兩針第二次成直角之時刻爲 x 分

則　時針所行之分數$=x-25-15=x-40$

但　分針速度爲時針速度 12 倍.

$\therefore\quad x=12(x-40)$

去括弧　$x=12x-480$

移　項　$11x=480\qquad\therefore\quad x=43\frac{7}{11}$.

即第二次成直角之時爲 5 時$43\frac{7}{11}$分

(ii)　相重.

設　兩針相重之時刻爲 x 分

則　時針所行之分數$=x-25$.

但　分針速度爲時針速度 12 倍。

$\therefore\quad x=12(x-25)$

去括弧　$x=12x-300$

移　項　$11x=300\quad\therefore\quad x=27\frac{3}{11}$.

即　5 時$27\frac{3}{11}$分，兩針相重.

(iii)　成一直線（兩針相差為 30 分）

設　兩針成一直線之時刻為 x 分

則　時針所行之分數 $=x-30-25=x-55$.

但　分針速度爲時針速度 12 倍

$$\therefore\quad x=12(x-55)$$

去括弧　$x=12x-660$

移　項　$11x=660$　　$\therefore\quad x=60$

即　六時兩針成一直線。

15. 有一工人每日得工資 5 角，但停工之日須償飯費 3 角於僱主，今 36 日共得國幣 11 圓 6 角，問作工若干日。

解. 設　作工之日數 $=x$　　停工之日數 $=36-x$

依題意得　$5x-3(36-x)=116$

去括弧　$5x-108+3x=116$

移　項　$5x+3x=116+108$

合　併　$8x=224$　$\therefore\quad x=28$

此人作 28 日工.

16. 某飯店因宴會備 24 人之筵席，按定價每份當得一成二分五釐然其中有三人不到，其餘 21 人照定價付款，因之虧本一圓，問每份筵席之定價幾何。

解. 設　每份筵席之定價 $=x$

則　每份筵席之原價 $=\dfrac{x}{1+.125}$

（即母數 $=$ 母子和 $\div$ (1+分率)）

但　21 人照定價付款某飯店尚虧本一圓。

故得方程式：　$24\times\dfrac{x}{1+.125}=21x+1$

即　$\frac{24000x}{1125}=21x+1$

去分母　$24000x=23625x+1125$

移　項　$24000x-23625x=1125$

合　併　$375x=1125$　　$\therefore\ x=3$

每份筵席之定價爲3圓.

17. 有一工程,甲乙二工作,甲80日完,乙20日完,今甲先作此工程若干日之後,以乙代之,全工程共經25日完成,問甲作若干日。

解. 設　甲作工之日數$=x$　　乙作工之日數$=25-x$

則　甲一日作全工程$=\frac{1}{80}$　乙一日作全工程$=\frac{1}{20}$

甲未作工之日數$=80-x$

但　甲未作之工等於乙所作之工

$\therefore\ \frac{1}{80}(80-x)=\frac{1}{20}(25-x)$

以80乘　$80-x=100-4x$

移　項　$4x-x=100-80$

合　併　$3x=20$　　$x=6\frac{2}{3}$

甲作工之日數爲$6\frac{2}{3}$

18. 有甲乙二工,甲20日完成之工程乙30日始完,今甲作若干日因病以乙代之,至全工程告終之日,甲比乙多作10日,求甲作工之日數。

解. 設　甲作工之日數$=x$　　乙作工之日數$=x+10$

則　甲一日作全工程之$\frac{1}{20}$,乙一日作全工程之$\frac{1}{30}$

但　二人合作完成之工程爲1

故得方程式： $\frac{1}{20}x+\frac{1}{30}(x+10)=1$

以60乘　$3x+2x+20=60$

移項，合併 $5x=60-20=40$ $\therefore x=8$

即　甲作工8日

19. 一室中男女雜坐，男子目中所見人數，男女相等，女子目中，所見人數，男倍於女，問室中男女各幾人。

解. 設　女子人數$=x$　男子人數$=x+1$

依題意得　$2(x-1)=x+1$

去括弧　$2x-2=x+1$

移　項　$2x-x=x+2$

合　併　$\therefore$ $x=3.$　$3+1=4$

男子4人，女子3人.

20. 設有三位之數，其末位之數字為2，若將2置左處，則所成之數，小於原數189，問原數為何數。

解. 設　原數為x，則將2置左邊所成之數為$x-189$，其十倍與單位之數為$(x-189-200)$此數以10倍之，即為原數之百位與十位之數.

故得方程式： $10(x-189-200)+2=x$

去括弧　$10x-1890-2000+2=x$

移　項　$10x-x=2000+1890-2$

合　併　$9x=3888$　$\therefore$ $x=432$……原數

21. 兵若干名，列一方陣，則餘60人，若縱行增5人，橫列減3人，則不足1人，問兵為幾名。

解. 設　方陣每一列之人數$=x$

依題意得 $x^2+60=(x+5)(x-3)-1$

去括弧 $x^2+60=x^2+2x-15-1$

移 項 $x^2+2x-x^2=60+16$

合 併 $2x=76 \quad \therefore \quad x=38$

$38\times 38+50=1504.$

兵之總數爲 1504 名。

22. 有兵一隊，列成中空之方陣兩個，一爲三列，一爲五列，而一方陣恰能容於他方陣之中，且二陣之人數相等，問共有兵若干名。

解. 設 三列中空方陣外列之人數 $=x$

其第三列之人數 $=x-4.$

則 五列中空方陣外列之人數 $=x-6.$

其第六列之人數 $=x-16.$

故知： 三列中空方陣之人數 $=x^2-(x-6)^2$

五列中空方陣之人數 $=(x-6)^2-(x-16)^2$

但 二者之人數相等，

故得方程式： $x^2-(x-6)^2=(x-6)^2-(x-16)^2$

即 $x^2-x^2+12x-36=x^2-12x+36-x^2+32x-256$

移 項 $20x-12x=220-36$

合 併 $8x=184 \quad \therefore \quad x=23$

$\{23\times 23-(23-6)^2\}+\{(23-6)^2-(23-16)^2\}$

$=240+240=480$ 名 即共有兵之人數，

23. 設東西兩地，距離20里，甲自東向西以每時3里之速出發，甲行10分鐘後，乙以每時四里之速，自西向東出發，問在何地相遇

解. 設 甲乙相遇之時 $=x$

則　甲行之里數$=3x\times\frac{10}{60}\times3=3x+\frac{1}{2}$

乙行之里數$=4x$

但　東西兩地之距離爲 20 里，

故得方程式：　$2x+\frac{1}{2}+4x=20$

以 2 乘　　$6x+1+8x=40$

移項，合併　　$14x=39$　　$\therefore\quad x=2\frac{11}{14}$

$3\times\frac{39}{14}+\frac{1}{2}=8\frac{6}{7}$，$4\times\frac{39}{14}=11\frac{1}{7}$，

距離東地 $8\frac{6}{7}$ 里西地 $11\frac{1}{7}$ 里爲甲乙相遇之地。

24. 甲乙二人，各取圍棋若干枚，甲以所得者多於乙，乃按乙所有之數與之，乙以所得者多於甲，乃按甲所餘者返之，甲以所得者又多於乙，更按乙所餘者與之，乙以所得者又多於甲，更按甲所餘者返之，而甲乙所得之數，適各爲 16 枚，問初取時，甲乙各取若干枚。

解．設　甲初取時之枚數$=x$

則　乙初取時之枚數$=16\times2-x=32-x$

依題意；第一次：　甲有$=x-(32-x)=2x-32$

乙有$=2(32-x)=64-2x$

第二次：　乙有$=(64-2x)-(2x-32)=96-4x$

甲有$=2(2x-32)=4x-64$

第三次：　甲有$=(4x-64)-(96-4x)=8x-160$

乙有$=2(96-4x)=192-8x$

第四次：　乙有$=(192-8x)-(8x-160)=352-16x$

甲有$=2(8x-160)=16x-320$

但　第四次甲所得之數與乙所得之數相等。

故得方程式：$16x-320=352-16x$

移　項　　$16x+16x=352+320$

合　併　　$32x=672$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore\quad x=21\text{ 枚}\cdots\text{甲初取時之數}\\ 32-21=11\text{ 枚}\cdots\text{乙初取時之數}\end{array}\right\}\text{答}$$

問題三十八　　P.70

試解下列聯立方程式。

1. $\begin{cases} x+y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2x+4y=10 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. (1)×2　$2x+2y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(2)−(3)　$2y=2$　$\therefore\ y=1$　代入(1)

$\therefore\ x=4-1=3$

2. $\begin{cases} 5x+y-2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x-2y=22 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. (1)×2　$10x+2y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(2)+(3)　$13x=26$　$\therefore\ x=2$　代入(1)

$\therefore\ y=2-5\times2=-8$

3. $\begin{cases} 2x+3y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x-2y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. (2)×2　$2x-4y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(1)−(3)　$7y=5$　$\therefore\ y=\frac{5}{7}$　代入(2)

$$\therefore \quad x=2\times\frac{5}{7}=1\frac{3}{7}$$

4. $\begin{cases}3x-3y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 2x+y-6=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. (2)×3　$6x+3y=18 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)+(3)　$9x=19$　　$\therefore \quad x=2\frac{1}{9}$　代入(2)

$$\therefore \quad y=6-2\times\frac{19}{9}=1\frac{7}{9}$$

5. $\begin{cases}5x+2y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ x+y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. (2)×2　$2x+2y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)−(3)　$3x=-8$　　$\therefore \quad x=-2\frac{2}{3}$　代入(2)

$$\therefore \quad y=4-(-2\frac{2}{3})=4+2\frac{2}{3}=6\frac{2}{3}.$$

6. $\begin{cases}34x-15y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 51x+25y=101 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. (1)×5　$170x-75y=20 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)×3　$153x+75y=303 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)+(4)　$323x=323$　　$\therefore \quad x=1$　代入(1)

即　$15y=34\times1-4$　　$\therefore \quad y=2$

7. $\begin{cases}19x+85y=350 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 17x+119y=442 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. (1)×17　$323x+1445y=9550 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)×19　$323x+2261y=8368 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)−(3)　$816y=244$　　$\therefore \quad y=3$　代入(1)

即　$19x=350-85\times3$　　$\therefore \quad x=5.$

8. $\begin{cases} 3x-11y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 19x-19y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. $(1)\times 19 \quad 57x-209y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

$(2)\times 3 \quad 57x-57y=24 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

$(3)-(4) \quad 152y=24 \quad \therefore \quad y=\frac{3}{19}$ 代入(1)

即 $\quad 3x=11\times\frac{3}{19} \quad \therefore \quad x=\frac{11}{19}$

9. $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \frac{x}{4}-\frac{2y}{3}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. $(1)\times 2 \quad x+\frac{2y}{3}=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

$(2)+(3) \quad \frac{x}{4}+x=5$

以4乘 $\quad x+4x=20 \quad \therefore \quad x=4$ 代入(1)

$\frac{y}{3}=1-\frac{4}{2} \quad \therefore \quad y=-3$

10. $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{6}=\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \frac{x}{5}-\frac{3y}{10}=\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. $(5)\times 6 \quad 2x-y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

$(2)\times 10 \quad 2x-3y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

$(4)-(3) \quad -2y=2 \quad \therefore \quad y=-1$ 代入(1)

即 $\quad \frac{x}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6} \quad \therefore \quad x=1$

11. $\begin{cases} \frac{x}{3}+3y+14=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \frac{x}{5}+5y+4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. (1)×3　　$x+9y=-42 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(2)×5　　$x+25y=-20 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(3)−(4)　　$-16y=-22$　　$\therefore \quad y=1\frac{3}{8}$ 代入(3)

$$\therefore \quad x=-42-9\times\frac{11}{8}=-54\frac{3}{8}$$

12. $\begin{cases} \frac{x}{5}+5y=-4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \frac{y}{5}+5x=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. (1)×25　$5x+125y=-100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(3)−(2)　$125y-\frac{y}{5}=-100-4$

以5乘　　$625y-y=-520$

合　併　　$624y=-520$　　$\therefore \quad y=-\frac{65}{78}$ 代入(1)

$$\frac{x}{5}=-4-5\left(-\frac{65}{78}\right) \qquad \therefore \quad x=\frac{65}{78}.$$

13. $\begin{cases} \frac{x+2}{3}+4y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \frac{y+11}{11}-\frac{x+1}{3}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

∴ 變(1)爲　　$x+12y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

變(2)爲　　$2y-11x=11 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(3)×11　　$132y+11x=44 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

(4)+(5)　　$134y=55$　　$\therefore \quad y=\frac{55}{134}$ 代入(3)

$$\therefore \quad x=4-12\times\frac{55}{134}=-\frac{62}{67}.$$

14. $\begin{cases} \frac{2x+3y}{3}+\frac{y+6}{7}=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \frac{2x-5y}{3}+\frac{x+7}{4}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 變(1)爲 $7x+13y=20 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

變(2)爲 $11x-20y=-9 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

$(3)\times 11$ $77x+143y=220 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

$(4)\times 7$ $77x-140y=-63 \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

$(5)-(6)$ $283y=283$ $\therefore\ y=1$ 代入(3)

即 $7x=20-13\times 1$ $\therefore\ x=1$

15. $\begin{cases} 4x-\dfrac{1}{3}(y+3)=5x-3 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2y+\dfrac{1}{3}(2x-5)=\dfrac{21y+37}{6} \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 變(1)爲 $3x+y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

變(2)爲 $4x-9y=47 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

$(3)\times 9$ $27x+9y=54 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

$(4)+(5)$ $31x=101$ $\therefore\ x=3\frac{8}{31}$ 代入(3)

$\therefore\ y=6-3\times\dfrac{101}{31}=-3\frac{24}{31}$

16. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}(y-2)-\dfrac{1}{4}(x-3)=0 \cdots\cdots\cdots (1) \\ x-\dfrac{1}{2}(y-1)-\dfrac{1}{3}(x-2)=0 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 變(1)爲 $3x-4y=-17 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

變(2)爲 $4x-3y=-7 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

$(3)\times 4$ $12x-16y=-68 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

$(4)\times 3$ $12x-9y=-21 \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

$(5)-(6)$ $-7y=-47$ $\therefore\ y=6\frac{5}{7}$ 代入(3)

$3x=-17+4\times\dfrac{47}{7}$ $\therefore\ x=3\frac{2}{7}$.

17. $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}-\dfrac{y+2}{4}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{2x-5}{5}-\dfrac{11-2y}{7}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　$4x-3y=14 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)爲　$14x+10y=90 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)\times 7$　$28x-21y=98 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$(4)\times 2$　$28x+20y=180 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

$(6)-(5)$　$41y=82$　　$\therefore\ y=2$　代入(3)

$4x=14+3\times 2$　　$\therefore\ x=5$

18. $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}-\dfrac{y+5}{2}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{2x-7}{3}-\dfrac{13-y}{16}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　$2x-3y=19 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)爲　$32x+3y=151 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)+(4)$　$34x=170$　　$\therefore\ x=5$　代入(3)

$3y=2\times 5-19$　　$\therefore\ y=-3$

問題三十九　P. 72

試用代入法解下列聯立方程式。

1. $\begin{cases} 3x-2y=15 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 5x-9y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　$x=\dfrac{15+2y}{3}$　代入(2)

即　$\dfrac{5(15+2y)}{3}-9y=8$

以3乘　$75+10y-27y=24$

移項,合併　$17y=51$　$\therefore\ y=3$　代入 x 之值

$$\therefore\quad x=\frac{15+2\times3}{3}=\frac{21}{3}=7$$

2. $\begin{cases}10x-3y=116 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ 3x-10y=53 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$

解. 變(1)為　$x=\dfrac{116+3y}{10}$　代入(1)

即　$\dfrac{3(116+3y)}{10}-10y=53$

以10乘　$348+9y-100y=530$

移項,合併　$-91y=530-348$　$\therefore\ y=-2$ 代入 x 之值

$$\therefore\quad x=\{116+3\times(-2)\}\div10=11$$

3. $\begin{cases}3x-\ \ y=16 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ 5x-12y=-25 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$

解. 變(1)為　$y=3x-16$　代入(2)

即　$5x-12(3x-16)=-25$

去括弧　$5x-36x+192=-25$

移項,合併　$31x=192+25$　$\therefore$　$x=7$ 代入 y 之值

$$\therefore\quad y=3\times7-16=5$$

4. $\begin{cases}7x-2y=91 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ 2x+5y=143 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$

解. 變(1)為　$x=\dfrac{91+2y}{7}$　代入(2)

即　$\dfrac{2(91+2y)}{7}+5y=143$

以7乘　$182+4y+35y=1001$

移項,合併　$39y=1001-182$　$\therefore$　$y=21$　代入 x 之值

$\therefore\quad x=(91+2\times 21)\div 7=19.$

5. $\begin{cases} 8x+3y=113 \cdots\cdots(1) \\ 4x+7y=29 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)為 $x=\dfrac{113-3y}{8}$ 代入(1)

即 $\dfrac{4(113-3y)}{8}+7y=29$

以8乘 $452-12y+56y=232$

移項,合併 $44y=-220$ $\therefore\quad y=-5$ 代入x之值

$\therefore\quad x=(113+3\times 5)\div 8=16$

6. $\begin{cases} 3y-2x=30 \cdots\cdots(1) \\ 2y-5x=42 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)為 $y=\dfrac{30+2x}{3}$ 代入(2)

即 $\dfrac{2(30+2x)}{3}-5x=42$

以3乘 $60+4x-15x=126$

移項,合併 $-11x=126-60$ $\therefore\quad x=-6$ 代入y之值

$\therefore\quad y=(30-6\times 2)\div 3=6.$

7. $\begin{cases} 5x+7y=125 \cdots\cdots(1) \\ 7x-y=13 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(2)為 $y=7x-13$ 代入(1)

即 $5x+7(7x-13)=125$

去括 $5x+49x-91=125$

移項,合併 $54x=216$ $\therefore\quad x=4$ 代入y之值

$\therefore\quad y=7\times 4-13=15.$

8. $\begin{cases} 17x-4y=26 & \cdots\cdots(1) \\ 12x+7y=197 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)為　$y=\dfrac{7x-26}{4}$　代入(2)

即　$12x+\dfrac{7(7x-26)}{4}=197$

以4乘　$48x+49x-182=788$

移項,合併　$97x=970$　$\therefore\ x=10$　代入 y 之值

$\therefore\ y=(7\times10-26)\div4=11.$

問　題　四　十　P.73

試用比較法解下列聯立方程式。

1. $\begin{cases} x+2y=13 & \cdots\cdots(1) \\ 3x+y=14 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)為　$x=13-2y$　$\cdots\cdots(3)$

變(2)為　$x=\dfrac{14-y}{3}$　$\cdots\cdots(4)$

(3)=(4)　$13-2y=\dfrac{14-y}{3}$

去分母　$39-6y=14-y$

移項,合併　$5y=25$　$\therefore\ y=5$　代入(3)

$\therefore\ x=13-2\times5=3$

2. $\begin{cases} 5x+6y=17 & \cdots\cdots(1) \\ 6x+5y=16 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)為　$x=\dfrac{17-6y}{5}$　$\cdots\cdots(3)$

變(2)為　$x=\dfrac{16-5y}{6}$　$\cdots\cdots(4)$

(3)=(4)　　$\frac{17-6y}{5}=\frac{16-5y}{6}$

去分母　　$102-36y=80-25y$

移項,合併　　$11y=22$　　$\therefore\ y=2$　　代入(2)

$$\therefore\ x=(17-6\times 2)\div 5=1$$

3. $\begin{cases} 15x+7y=29 & \cdots\cdots(1) \\ 9x+15y=39 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　　$x=\frac{29-7y}{15}$ ……(3)

變(2)爲　　$x=\frac{39-15y}{9}$ ……(4)

(3)=(4)　　$\frac{29-7y}{15}=\frac{39-15y}{9}$

去分母　　$261-63y=585-225y$

移項,合併　　$162=324$　　$\therefore\ y=2$　代入(4)

$$\therefore\ x=(39-15\times 2)\div 9=1$$

4. $\begin{cases} 35x+17y=86 & \cdots\cdots(1) \\ 56x-13y=17 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　　$y=\frac{86-35x}{17}$ ……(3)

變(2)　　$y=\frac{56x-17}{13}$ ……(4)

(3)=(4)　　$\frac{86-35x}{15}=\frac{56x-17}{13}$

去分母　　$1118-455x=952x-289$

移　項　　$952x+455x=1118+289$

合　併　$1407x=1407$　　$\therefore\ x=1$　　代入(3)

$$y=(86-35\times 1)\div 17=3$$

5. $\begin{cases} 21x-50y=60 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 28x-27y=199 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　$x=\dfrac{60+50y}{21}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)爲　$x=\dfrac{199+27y}{28}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)=(4)　$\dfrac{60+50y}{21}=\dfrac{199+27y}{28}$

去分母　$28(60+50y)=21(199+27y)$

去括弧　$1680+1400y=4179+567y$

移　項　$1400y-567y=4179-1680$

合　併　$833y=2499$　$\therefore\ y=3$　代入(3)

$\therefore\ x=(60+50\times3)\div21=10$

6. $\begin{cases} 6y-5x=18 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 12x-9y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　$y=\dfrac{18+5x}{6}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)爲　$y=\dfrac{12x}{9}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)=(4)　$\dfrac{18+5x}{6}=\dfrac{12x}{9}$

去分母　$9(18+5x)=12x\times6$

去括弧　$162+45x=72x$

移項,合併　$27x=162$　$\therefore\ x=6$　代入(4)

$\therefore\ y=12\times6\div9=8$

7. $\begin{cases} 19x+17y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x-\ \ y=53 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　$y=\dfrac{-19x}{17}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)爲 $y=2x-53$ ……………………(4)

(3)=(4) $\dfrac{-19x}{17}=2x-53$

去分母 $-19x=17(2x-53)$

去括弧 $-19x=34x-901$

移項，合併 $53x=901$ $\therefore$ $x=17$ 代入(4)

$\therefore$ $y=2\times17-53=-19$

8. $\begin{cases}5(x+2y)-(3x+11y)=14 & \cdots\cdots(1)\\ 7x-9y-3(x-4y)=38 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. 變(1)爲 $y=2x-14$ ……………………(3)

變(2)爲 $y=\dfrac{38-4x}{3}$ ……………………(4)

(3)=(4) $2x-14=\dfrac{38-4x}{3}$

去分母 $6x-12=38-4x$

移　項 $6x+4x=38+12$

合　併 $10x=80$ $\therefore$ $x=8$ 代入(3)

$\therefore$ $y=2\times8-14=2.$

問題四十一　　P.74

試用公式法解下列聯立方程式。

1. $\begin{cases}14x-3y=39 & \cdots\cdots(1)\\ 6x+17y=35 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. $x=\dfrac{(-3)(-35)-17(-39)}{14\times17-6(-3)}=\dfrac{105+663}{238+18}=\dfrac{768}{256}=3.$

$y=\dfrac{6(-39)-14(-35)}{14\times17-6(-3)}=\dfrac{-234+490}{238+18}=\dfrac{256}{256}=1.$

2. $\begin{cases}15x+77y=92 & \cdots\cdots(1)\\ 55x-33y=22 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. $x=\dfrac{77(-22)-(-33)(-92)}{15(-33)-55\times 77}=\dfrac{-1694-3036}{-495-4235}=1.$

$y=\dfrac{55(-92)-15(-22)}{15(-33)-55\times 77}=\dfrac{-5060+330}{-495-4235}=\dfrac{-4730}{-4730}=1.$

3. $\begin{cases} 39x-8y=39 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 52x-15y=80 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. $x=\dfrac{(-8)(-80)-(-15)(-39)}{39(-15)-52(-8)}=\dfrac{640-585}{-585+416}=\dfrac{-55}{169}.$

$y=\dfrac{52(-39)-39(-80)}{39(-15)-92(-8)}=\dfrac{-2028+3120}{-585+416}=6\dfrac{78}{169}.$

4. $\begin{cases} x-y=5 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}=2 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　$x-y-5=0$

變(2)爲　$x-2y-8=0$

∴　$x=\dfrac{(-1)(-8)-(-2)(-5)}{1(-2)-1(-1)}=\dfrac{8-10}{-2+1}=\dfrac{-2}{-1}=2.$

$y=\dfrac{1(-5)-1(-8)}{1(-2)-1(-1)}=\dfrac{-5+3}{-2+1}=\dfrac{3}{-1}=-3.$

5. $\begin{cases} \dfrac{5x}{6}-y=3 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-\dfrac{5y}{6}=8 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　$5x-6y-18=0$

變(2)爲　$6x-5y-48=0$

∴　$x=\dfrac{(-6)(-48)-(-5)(-18)}{5(-5)-6(-5)}=\dfrac{288-90}{-25+36}=\dfrac{198}{11}=18.$

$y=\dfrac{6(-18)-5(-48)}{5(-5)-6(-6)}=\dfrac{-108+240}{-25+36}=\dfrac{132}{11}=12.$

6. $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{4}=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x+\dfrac{y}{2}=17 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲 $4x-5y-0=0$

變(2)爲 $6x-y-34=0$

$$\therefore\quad x=\frac{(-5)(-34)-1\times0}{1\times4-6(-5)}=\frac{170}{4+30}=\frac{170}{34}=5.$$

$$y=\frac{0\times6-4(-34)}{1\times4-6(-5)}=\frac{136}{4+30}=\frac{136}{34}=4.$$

7. $\frac{x+1}{10}=\frac{3y-5}{2}=\frac{x-y}{8}$

解. 以 40 乘 $4(x+1)=20(3y-5)=5(x-y)$

$$4x+4=60y-100=5x-5y$$

即 $\begin{cases}4x+4=60y-100\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\4x+4=5x-5y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

變(1)爲 $x-15y+26=0$

變(2)爲 $x-5y-4=0$

$$\therefore\quad x=\frac{(-15)(-4)-26(-5)}{1(-5)-1(-15)}=\frac{60+130}{-5+15}=\frac{190}{10}=19.$$

$$y=\frac{1\times26-1(-4)}{1(-5)-1(-15)}=\frac{26+4}{-5+15}=\frac{30}{10}=3.$$

8. $\frac{x+3}{5}=\frac{8-y}{4}=\frac{3(x+y)}{4}$

解. 以 20 乘 $4(x+3)=5(8-y)=2\times5(x+y)$

$$4x+12=40-5y=15x+15y$$

即 $\begin{cases}4x+12=40-5y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\40-5y=15x+15y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

變(1)爲 $4x+5y-28=0$

變(2)爲 $3x+4y-8=0$

$$\therefore\quad x=\frac{5(-8)-4(-28)}{4\times4-3\times5}=\frac{-40+112}{16-15}=72.$$

$$y=\frac{3(-28)-4(-8)}{4\times4-3\times5}=\frac{-84+32}{16-15}=-52.$$

問 題 集 IX P.78

試解下列聯立方程式：

1. $$\begin{cases} \dfrac{9}{x}-\dfrac{4}{y}=1 & \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{18}{x}+\dfrac{20}{y}=16 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解. (1)×2 $\dfrac{18}{x}-\dfrac{8}{y}=2$ ⋯⋯(3)

(2)−(3) $\dfrac{28}{y}=14$ 即 $28=14y$

$\therefore\ y=2$ 代入(1)

即 $\dfrac{9}{x}=1+\dfrac{4}{2}=3$ $\therefore\ x=3.$

2. $$\begin{cases} xy-(x-1)(y-1)=6(y-1) & \cdots\cdots(1) \\ x-y=1 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解. 變(1)爲 $x-5y=-5$ ⋯⋯(3)

(2)−(3) $4y=6$ $\therefore\ y=\dfrac{3}{2}=1\dfrac{1}{2}$ 代入(2)

$\therefore\ x=1+1\dfrac{1}{2}=2\dfrac{1}{2}.$

3. $$\begin{cases} 2x-\dfrac{3}{y}=3 & \cdots\cdots(1) \\ 8x+\dfrac{15}{y}+6=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解. (1)×5 $10x-\dfrac{15}{y}=15$ ⋯⋯(3)

變(2)爲 $8x+\dfrac{15}{y}=-6$ ⋯⋯(4)

(3)+(4) $18x=7$ $\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$ 代入(1)

$\dfrac{3}{y}=2\times\dfrac{1}{2}-3$ $\therefore\ y=-1\dfrac{1}{2}$

4. $\begin{cases} x+y=a+b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ bx+ay=2ab \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. $(1)\times b$ $\quad bx+by=ab+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(2)-(3)$ $\quad ay+by=ab-b^2$

即 $\quad (a-b)y=b(a-b) \quad \therefore \quad y=b$ 代入(1)

$\therefore \quad x=a+b-b=a$

5. $\begin{cases} (a+c)x-by=bc \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y=a+b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. $(2)\times b$ $\quad bx+by=ab+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(1)+(3)$ $\quad ax+cx+bx=bc+ab+b^2$

即 $\quad (a+b+c)x=b(a+b+c)$

$\therefore \quad x=b$ 代入(2)

$\therefore \quad y=a+b-b=a.$

6. $\begin{cases} x+y=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ ax-by=c(a-b) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. $(1)\times b$ $\quad bx+by=bc \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(2)+(3)$ $\quad ax+bx=ac-bc+bc$

即 $\quad (a+b)x=ac \quad \therefore \quad x=\frac{ac}{a+b}$ 代入(1)

$\therefore \quad y=c-\frac{ac}{a+b}=\frac{(a+b)c}{a+b}-\frac{ac}{a+b}=\frac{bc}{a+b}$

7. $\begin{cases} a(x+y)+b(x-y)=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ a(x-y)+b(x+y)=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲 $\quad (a+b)x+(a-b)y=1 \cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)爲 $\quad (a+b)x-(a-b)y=1 \cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)+(4)$ $\quad 2(a+b)x=2 \quad \therefore \quad x=\frac{1}{a+b}$ 代入(3)

$(3)-(4)$ $\quad 2(a-b)y=0 \quad \therefore \quad y=0$

8. $\begin{cases} \dfrac{x-a}{b}+\dfrac{y-b}{a}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x+y-b}{a}+\dfrac{x-y-a}{b}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (2)−(1) $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0 \qquad \therefore \quad \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

$\therefore \quad y=\dfrac{bx}{a}$ 代入(1)

$$\frac{x-a}{b}+\frac{bx/a-b}{a}=0$$

去分母 $a^2x-a^3+b^2x-ab^2=0$

即 $(a^2+b^2)x=a^3+ab^2=a(a^2+b^2) \quad \therefore \quad x=a$

$$y=\frac{bx}{a}=\frac{ba}{a}=b.$$

9. $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (1)×(a+b) $(a+b)^2x-(a^2-b^2)y=4ab(a+b)$

(2)×(a−b) $(a-b)^2x+(a^2-b^2)y=2(a^2-b^2)(a-b)$

$$=2(a+b)(a-b)^2$$

相加 $2(a^2+b^2)x=2(a+b)(a^2+b^2)$

$\therefore \quad x=a+b$ 代入(2)

$$(a+b)y=2(a^2-b^2)-(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$\therefore \quad y=a-b.$

10. $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{a'}{x}+\dfrac{b'}{y}=c' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (1)×a' $\dfrac{a'a}{x}+\dfrac{a'b}{y}=a'c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)×a $\dfrac{a'b}{x}+\dfrac{bb'}{y}=ac' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)−(4) $\frac{a'b}{y}-\frac{ab'}{y}=a'c-ac'$

即 $a'b-ab'=(a'c-ab')y$ $\therefore$ $y=\frac{a'b-ab'}{a'b-ac'}$

(1)×b' $\frac{ab'}{x}+\frac{bb'}{y}=b'c$ ……………………(5)

(2)×b $\frac{a'b}{x}+\frac{bb'}{y}=bc'$ ……………………(6)

(5)−(6) $\frac{ab'}{x}-\frac{a'b}{x}=b'c-bc'$

$ab'-a'b=(b'c-bc')x$

$\therefore$ $x=\frac{ab'-a'b}{b'c-bc'}$

11. $\begin{cases} x+y+z=14 \cdots\cdots(1) \\ 2x+5y-4z=1 \cdots\cdots(2) \\ 7x-2y+3z=25 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

解. (2)−(1)×2 $3y-6z=-27$ ……………(4)

(1)×7−(3) $9y+4z=73$ ……………(5)

(4)×2 $6y-12z=-54$ ……………(6)

(5)×3 $27y+12z=219$ ……………(7)

(6)+(7) $33y=165$ $\therefore$ $y=5$ 代入(5)

$4z=73-9\times5$ $\therefore$ $z=7$

將 y,z 之值代入(1) $\therefore$ $x=14-5-7=2$

12. $\begin{cases} x+3y+2z=11 \cdots\cdots(1) \\ 2x+y+3z=14 \cdots\cdots(2) \\ 3x+2y+z=11 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

解. (1)×2 $2x+6y+4z=22$ ……………(4)

(4)−(2) $5y+z=8$ ……………(5)

(1)×3 $3x+9y+6z=33$ ……………(6)

$(6)-(3)$　　$7y+5z=22$ ……………………… (7)

$(5)\times 5$　　$25y+5z=40$ ……………………… (8)

$(8)-(7)$　　$18y=18$　　$\therefore\ y=1$　代入(5)

$\therefore\ z=8-5\times 1=3$

將 y,z 之值代入(1)　$\therefore\ x=11-3\times 1-2\times 3=2.$

13. $\begin{cases} 2x-y+3z-8=5y-3x-z+7 \cdots\cdots\cdots(1) \\ z+4x-2y+1=20-2z-3x+3y \cdots\cdots\cdots(2) \\ x-y-z-36=10-x-2y-7z \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

解. 變(1)為　$5x-6y+4z=15$ ……………… (4)

變(2)為　$7x-5y+3z=19$ ……………… (5)

變(3)為　$2x+y+6z=46$ ……………… (6)

$(4)\times 3$　$15x-18y+12z=45$ ……………… (7)

$(5)\times 4$　$28x-20y+12z=76$ ……………… (8)

$(8)-(7)$　　$13x-2y=31$ ……………… (9)

$(6)\times 2$　$4x+2y+12z=92$ ……………… (10)

$(7)-(10)$　　$11x-20y=-47$ ……………… (11)

$(9)\times 10$　　$130x-20y=310$ ……………… (12)

$(12)-(11)$　$119x=357$　　$\therefore\ x=3$　代入(9)

$2y=13\times 3-31$　　$\therefore\ y=4.$

將 x,y 值代入(5)　$3z=19+5\times 4-7\times 3$　$\therefore\ z=6.$

14. $\begin{cases} 7x-3y=30 \cdots\cdots\cdots(1) \\ 9y-5z=34 \cdots\cdots\cdots(2) \\ x+y+z=33 \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

解. $(3)\times 3$　$3x+3y+3z=99$ ……………… (4)

$(1)+(4)\quad 10x+3z=129 \cdots\cdots(5)$

$(3)\times 9\quad 9x+9y+9z=297 \cdots\cdots(6)$

$(6)-(2)\quad 9x+14z=263 \cdots\cdots(7)$

$(5)\times 9\quad 90x+27z=1161 \cdots\cdots(8)$

$(7)\times 10\quad 90x+140z=2630 \cdots\cdots(9)$

$(9)-(8)\quad 113z=1499\quad \therefore\ z=13$ 代入(5)

$10x=129-3\times 13\quad \therefore\ x=9$

將 x,z 之值代入(3) $\quad\therefore\ y=33-13-9=11$

15. $\begin{cases} x+y+z=5 \cdots\cdots(1) \\ 3x-5y+7z=75 \cdots\cdots(2) \\ 9x-11z+10=0 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

解. $(1)\times 5\quad 5x+5y+5z=25 \cdots\cdots(4)$

$(4)+(2)\quad 8x+12z=100 \cdots\cdots(5)$

變(3)爲 $\quad 9x-11z=-10 \cdots\cdots(6)$

$(5)\times 9\quad 72x+108z=900 \cdots\cdots(7)$

$(6)\times 8\quad 72x-88z=-80 \cdots\cdots(8)$

$(7)-(8)\quad 196z=980\quad \therefore\ z=5$ 代入(6)

即 $\quad 9x=11\times 5-10\quad \therefore\ x=5$

將 x,z 之值代入(1) $\quad\therefore\ y=5-5-5=-5.$

16. $\begin{cases} 2x+4y+z=7 \cdots\cdots(1) \\ 3x+2y+2z=8 \cdots\cdots(2) \\ 5x-4y+4z=9 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

解. $(2)\times 2\quad 6x+4y+4z=16 \cdots\cdots(4)$

$(4)-(1)\quad 4x+3z=9 \cdots\cdots(5)$

$(1)+(3)\qquad 7x+5z=16\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

$(5)\times5\qquad 20x+15z=45\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

$(6)\times3\qquad 21x+15z=48\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

$(8)-(7)\qquad \therefore\ x=3$　代入(5)

即　$3z=9-4\times3\qquad\therefore\ z=-1$

將 x,z 之值代入(1)　$4y=7-2\times3-(-1)\qquad\therefore\ y=\dfrac{1}{2}$

17. $$\begin{cases} y+z=2a\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ z+x=2b\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ x+y=2c\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

解. $(1)-(2)\qquad y-x=2a-2b\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)+(4)\quad 2y=2(a-b+c)\qquad\therefore\ y=a-b+c$　代入(1)

$\therefore\qquad z=2a-a+b-c=a+b-c$　代入(2)

$\therefore\qquad x=2b-a-b+c=b-a+c.$

18. $$\begin{cases} cy+bz=bc\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ az+cx=ca\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ bx+ay=ab\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

解. $(1)\times a\qquad cay+abz=abc\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(2)\times b\qquad abz+bcx=abc\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$(4)-(5)\qquad cay-bcx=0\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

$(3)\times c\qquad bcx+cay=abc\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

$(6)+(7)\qquad 2cay=abc\qquad\therefore\ y=\dfrac{b}{2}$　代入(6)

$$bcx=\frac{cab}{2}\qquad\therefore\ x=\frac{a}{2}\quad\text{代入(2)}$$

$$az=ca-\frac{ca}{2}\qquad\therefore\ z=\frac{c}{2}$$

19. $\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

解. (1)+(2)　$\dfrac{2}{z}=8$　$\therefore$　$z=\dfrac{1}{4}$

(1)+(3)　$\dfrac{2}{y}=6$　$\therefore$　$y=\dfrac{1}{3}$

(2)+(3)　$\dfrac{2}{x}=6$　$\therefore$　$x=\dfrac{1}{2}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

解. (1)−(2)　$\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)+(4)　$\dfrac{2x}{a}=2$　$\therefore$　$x=a$　代入(1)

$\dfrac{y}{b}=3-1$　$\therefore$　$y=2b$　代入(2)

$\dfrac{y}{c}=5-2$　$\therefore$　$z=3c.$

問　題　集　X　　P.80

1．一畝地價，甲地爲5圓，乙地爲12圓，甲乙兩地共計地375畝共價合計爲1450圓。問甲乙兩地之畝數各爲若干。

解. 設　甲地畝數爲 x　　乙地畝數爲 y

依題意得 $\begin{cases} x+y=375 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 5x+12y=1450 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

變(1)爲　$x=376-y$　代入(2)

$$5(375-y)+12y=1450$$

即　$$1875-5y+12y=1450$$

$$7y=-425 \qquad \therefore\ y=-60\frac{5}{7},$$

此題 x,y 之值不能等於負，故此題爲不合理，

2. 有甲乙二數，甲數之半與乙數三分之一之和爲 32。甲數四分之一與乙數五分之一之和有 18，問二數各爲若干。

解. 設　甲數$=x$　　乙數$=y$,

$$\text{依題意得}\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=32 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y=18 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$(1)\times 6$　　$3x+2y=192 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(2)\times 20$　　$5x+4y=360 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)\times 2$　　$6x+4y=384 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$(5)-(4)$　$\therefore$　$x=24$　代入(3)

$$2y=162-3\times 24 \qquad y=60,$$

甲數爲 24，乙數爲 60，

3. 甲乙兩軍交戰，甲軍傷亡 500 人，乙軍傷亡 2000 人，但知戰前甲軍之人數爲乙軍$\frac{5}{6}$，戰後甲軍人數爲乙軍$\frac{9}{8}$。問兩軍人數各若干。

解. 設　戰前人數：　甲軍$=x$，　乙軍$=y$

$$\text{依題意得}\begin{cases}x=\frac{5}{6}y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ x-500=\frac{9}{8}(y-2000) \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1)代入(2)　$\frac{6}{5}y-500=\frac{9}{8}(y-2000)$

去分母　　$20y-12000=27y-54000$

移項，合併　$7y=42000$　$\therefore\ y=6000$　代入(1)

$$\therefore\ x=\frac{5}{6}\times 6000=5000$$

$$5000-500=4500 \qquad 6000-2000=4000$$

甲軍戰前之人數為 5000 名，戰後之人數為 4500 名

乙軍戰前之人數為 6000 名，戰後之人數為 4000 名

4．7 年前甲之年歲為乙之 3 倍，7 年後甲之年歲爲乙之 2 倍，問兩人現今各若干。

解. 設　甲現年$=x$　　乙現年$=y$

依題意得$\begin{cases} x-7=3(y-7) & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+7=2(y+7) & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(2)－(1)　$14=-y+35$　$\therefore\ y=21$　代入(2)

$$x=2(21+7)-7=49.$$

甲現年爲 49 歲，乙現年爲 21 歲。

5．書二卷，初版合計 600 頁，再版時下卷減四分之一，上卷增 30 頁，而上下二卷之頁數相等。問初版時二卷各若干頁。

解. 設　初版時之頁數：上卷$=x$，　下卷$=y$

依題意得$\begin{cases} x+y=600 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y-\frac{1}{4}y=x+3 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

變(1)爲　$x=600-y$　代入(2)

即　$y-\frac{1}{4}y=600-y+30$

去分母　$4y-y=2400-4y+120$

移項　$3y+4y=2400+120$

合併　$7y=2520$　$\therefore\ y=360$　代入 x 之值

$$\therefore\ x=600-360=240$$

初版時上卷 240 頁，下卷 360 頁。

6．買牛 8 頭，馬 30 匹，共價 2460 圓，賣牛獲利十分之二，賣馬獲利十分之一，共價爲 2802 圓。問一牛一馬價各若干。

解．設　牛每頭價爲 x　　馬每匹價爲 y

則　牛 8 頭所獲利 $=\frac{2}{10}\times 8x$

馬30匹所獲利 $=\frac{2}{10}\times 30y$

但　總利 $=2802-2460=342$

依題意得 $\begin{cases} 8x+30y=2460 \cdots\cdots\cdots(1) \\ \frac{2}{10}\times 8x+\frac{1}{10}\times 3y=342 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

變(3)爲　$8x+15y=1710 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)−(3)　$15y=750$　$\therefore$　$y=50$　代入(3)

$8x=1710-15\times 50$　$\therefore$　$x=120$

牛一頭價 120 圓，馬一匹價 50 圓。

7．以甲乙二管，注水於槽中，甲管開 10 時，乙管開 6 時，或甲管開 8 時，乙管開 9 時，則水槽適滿，若獨開甲管或乙管，滿水槽需時若干。

解．設　甲管所需之時 $=x$　　乙管所需之時 $=y$

依題意得 $\begin{cases} \frac{10}{x}+\frac{6}{y}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \frac{8}{x}+\frac{9}{y}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)×9　$\frac{90}{x}+\frac{54}{y}=9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)×6　$\frac{48}{x}+\frac{54}{y}=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)−(4)　$\frac{42}{x}=3$　即　$3x=42$　$\therefore$　$x=14$　代入(1)

$\frac{6}{y}=1-\frac{10}{14}=\frac{4}{14}$　$\therefore$　$y=21$

甲獨開14時，乙獨開21時。

8．方程式 $ax=b$ 之根爲 3，且 a,b 之和爲10。問 a,b 之値爲若干。

解．　$3a=b$ ……………………(1)

$a+b=10$ ……………………(2)

(1)代入(2) $a+3a=10$　$4a=10$　$\therefore\ a=2\frac{1}{2}$　代入(1)

$$b=3\times\frac{5}{2}=7\frac{1}{2}$$

9．知 $x^4-3x^3+5x^2+lx+m$ 爲 $x-2$，$x-3$ 之公倍數，試決定 m 及 l 之値。

解．

$$\begin{array}{rl}
x-2\,) & x^4-3x^3+5x^2+lx+m\,(\,x^3-x^2+3x+(l+6) \\
& \underline{x^4-2x^3\qquad\qquad\qquad} \\
& \quad -x^3+5x^2 \\
& \quad \underline{-x^3+2x^2\qquad} \\
& \qquad\quad 3x^2+lx \\
& \qquad\quad \underline{3x^2-6x\qquad} \\
& \qquad\qquad (l+6)x+m \\
& \qquad\qquad \underline{(l+6)x-2(l+6)} \\
& \qquad\qquad\qquad m+2(l+6)
\end{array}$$

題言 $x^4-3x^3+5x^2+lx+m$ 爲 $x-2$，$x-3$ 之公倍數，則其商式必爲整式，而其餘式可視爲 0，

故　$m+2(l+6)=0$ ……………………(1)

$$\begin{array}{rl}
x-3\,) & x^3-x^2+3x+l+6\,(\,x^2+2x+6 \\
& \underline{x^3-3x^2\qquad\qquad} \\
& \qquad 2x^2+3x \\
& \qquad \underline{2x^2-6x\qquad} \\
& \qquad\qquad 9x+l+6 \\
& \qquad\qquad \underline{9x-27\qquad} \\
& \qquad\qquad\quad l+33
\end{array}$$

與前同理　$l+33=0$　$\therefore\ l=-33$　代入(1)

$$\therefore\ m=-2(-33+6)=54.$$

別法：

$x=2$ 代入 $2^4-3\times2^3+5\times2^2+2l+m=0\cdots(1)$

$x=3$ 代入 $3^4-3\times3^3+5\times3^2+3l+m=0\cdots(2)$

化(1)得　　$2l+m=-12\cdots\cdots(3)$

化(2)得　　$3l+m=-45\cdots\cdots(4)$

(4)−(3)　　$\therefore\ l=-33$ 代入(3)

$\therefore\ m=-12+2(33)=54$,

10. 知 $\left.\begin{array}{l}ax+by+6=0\\ bx+ay-4=0\end{array}\right\}$聯立方程式之根為 $\begin{array}{l}x=4\\ y=2\end{array}$ 試式定 a,b 之值。

解. $\begin{cases}4a+2b=-6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 2a+4b=4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

(2)×2　　$4a+8b=8\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(3)−(1)　　$6b=14$　$\therefore\ b=2\frac{1}{3}$ 代入(2)

$2a=4-4\times\frac{7}{3}$　$\therefore\ a=-2\frac{2}{3}$

11. 男子10人,童子8人每日工資為4.44元,而男子4人較童子6人之工資多12分,問各一人每日之工資若干。

解. 設　男子一人每日之工資$=x$分

童子一人每日之工資$=y$分

依題意得$\begin{cases}10x+8y=444\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 4x-6y=12\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

(2)÷2　　$2x-3y=6\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(3)×5　　$10x-15y=30\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(1)−(4)　　$23y=414$　$\therefore\ y=18$ 代入(3)

$2x=6+3\times18$　$\therefore\ x=30$

男子一人每日工資三角,童子一人每日工資一角八分。

12. 某人有銀貨十枚，共値一元。其種類爲二角，一角，五分。今以五分之銀貨與一分銅貨換，以一角之銀貨與五分之銀貨換，則其數爲 30。問各有幾枚。

解. 設　二角銀貨之數 $=x$，　一角 $=y$，　五分 $=z$

$$\text{依題意得}\begin{cases} x+y+z=10 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 20x+10y+5z=100 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ x+2y+5z=30 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

$(1)\times 5$　　$5x+5y+5z=50 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

$(2)-(4)$　　$15x+5y=50 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

$(2)-(3)$　　$19x+8y=70 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

$(5)\div 5\times 8$　　$24x+8y=80 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$

$(7)-(6)$　　$5x=10$　　$\therefore\ x=2$

將 x 之値代入 (7)　　$y=10-3\times 2$　　$\therefore\ y=4$

將 x, y 之値代入 (1)　　$z=10-4-2$　　$\therefore\ z=4$

二角銀貨 2 枚，一角銀貨 3 枚，五分銀貨 4 枚。

13. 法國鐵路票價以旅行之距離爲比例，且旅客所攜之行李以 25 公斤爲限，踰限制每公斤預付運費若干，其運費亦以距離爲比例。今某旅客攜行李 50 公斤，行程 200 哩，票費及運費共付 25 フラン。其後又攜行李 35 公斤，行程 150 哩，票費及運費共付 $16\frac{1}{2}$ フラン。今有人攜行李 100 公斤，行程 100 哩，其票費及運費共値若干。

解. 設　某人每里之票費 $=x$，　一公斤每里之運費 $=y$

$$\text{依題意得}\begin{cases} 200\{x+(50-25)y\}=25 \cdots\cdots\cdots (1) \\ 150\{x+(35-25)y\}=16\frac{1}{2} \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

變(1)爲 $x+25y=\frac{25}{200}$ ……………(3)

變(2)爲 $x+10y=\frac{22}{200}$ ……………(4)

(3)−(4) $15y=\frac{3}{200}$ $\therefore\ y=\frac{1}{1000}$ 代入(1)

$$\therefore\ x=\frac{22}{200}-10\times\frac{1}{1000}=\frac{1}{10}.$$

$100\times\frac{1}{10}=10$ ………………………100哩之票費

$100\times(100-25)\times\frac{1}{1000}=7\frac{1}{2}$ ………100哩之運費

$10+7\frac{1}{2}=17\frac{1}{2}$ ………………………共票費及運費

故共票費及運費共需 $17\frac{1}{2}$ フラン。

14. 甲乙二人,甲所有辨士之數二倍於先令之數,乙所有先令之數二倍於辨士之數,但乙較甲多8辨士,若合此二人之所有,則辨士之數,較先令之數多1,問各有若干。

解. 設 甲所有先令之數$=x$, 辨士之數$=2x$,

乙所有辨士之數$=y$, 先令之數$=2y$,

依題意得 $\begin{cases}(2x+12x)+8=12\times 2y+y & \cdots\cdots(1)\\ 2x+y=x+2y+1 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

變(1)爲 $14x-25y=-8$ ……………(3)

變(2)爲 $x=y+1$ 代入(3)

即 $14(y+1)-25y=-8$

去括弧 $14y-25y=-8-14$

合 併 $11y=22$ $\therefore\ y=2$ 代入x之値

$$\therefore\ x=1+2=3,\quad 2x=6,\quad 2y=4,$$

甲有3先令6辨士,乙有4先令2辨士。(1先令=12辨士)

第三編 整式之積

公式一	$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

問題四十二

P.83

應用公式一，試直接記出下列各式之積。

1. $(a+2b)^2$

解. 原式$=a^2+2a(2b)+(2b)^2=a^2+4ab+4b^2$

2. $(3a-2b)^2$

解. 原式$=(3a)^2+2(3a)(-2b)+(-2b)^2=9a^2-12ab+4b^2$

3. $(7x+5)^2$

解. 原式$=(7x)^2+2(7x)5+5^2=49x^2+70x+25.$

4. $(5x^2+9y^2)^2$

解. 原式$=(5x^2)^2+2(5x^2)(9y^2)+(9y^2)^2$

$=25x^4+90x^2y^2+81y^4.$

5. $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$

解. 原式$=(2x)^2+2(2x)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=4x^2-2x+\frac{1}{4}$

6. $(2x^2-3xy)^2$

解. 原式$=(2x^2)^2+2(2x^2)(-3xy)+(-3xy)^2$

$=4x^4-12x^3y+9x^2y^2.$

7. $(3x-5y-z)^2$

解. 原式$=\{(3x-5y)-z\}^2$

$=(3x-5y)^2+2(3x-5y)(-z)+(-z)^2$

$=(3x)^2+2(3x)(-5y)+(-5y)^2-6xz+10yz+z^2$

$=9x^2-30xy+25y^2-6xz+10yz+z^2.$

8. $(3a^2+2a-1)^2$

解. 原式$=(3a^2+(2a-1))^2$

$=(3a^2)^2+2(3a^2)(2a-1)+(2a-1)^2$

$=9a^4+12a^3-6a^2+(2a)^2+2(2a)(-1)+(1)^2$

$=9a^4+12a^3-6a^2+4a^2-4a+1$

$=9a^4+12a^3-2a^2-4a+1.$

9. $(300+20+5)^2$

解. 原式$=(300+(20+5))^2$

$=300^2+2\times300(20+5)+(20+5)^2$

$=90000+12000+3000+20^2+2\times20\times5+5^2$

$=105000+400+200+25=105625.$

公式二	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

問題四十三 P.81

應用公式二,試求下列各式之值。

1. $(m+n)(m-n)$

解. 原式$=m^2-n^2.$

2. $(x+9)(x-9)$

解. 原式$=x^2-9^2=x^2-81.$

3. $(3a-5)(3a+5)$

解. 原式$=(3a)^2-5^2=9a^2-25.$

4. $(6x+2b)(6x-2b)$

解. 原式$=(6x)^2-(2b)^2=36x^2-4b^2$.

5. $(x+1)(1-x)$

解. 原式$=(1+x)(1-x)=1-x^2$.

6. $(2a^2b^2-ab)(2a^2b^2+ab)$

解. 原式$=(2a^2b^2)^2-(ab)^2=4a^4b^4-a^2b^2$.

7. $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)$

解. 原式$=\left(\frac{a}{3}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{9}-\frac{b^2}{4}$.

8. $(-2x-1)(2x-1)$

解. 原式$=-(2x+1)(2x-1)$

$$=-\{(2x)^2-1^2\}=-(4x^2-1)=1-4x^2.$$

9. $(x-1)(x+1)(x^2+1)$

解. 原式$=(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1$.

10. $(a+b-c)(a-b+c)$

解. 原式$=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$

$$=a^2-(b-c)^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)$$

$$=a^2-b^2-c^2+2bc.$$

11. 102×98

解. 原式$=(100+2)(100-2)=100^2-2^2$

$$=10000-4=9996.$$

12. $3\frac{1}{2}\times2\frac{1}{2}$

解. 原式$=\left(3+\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{2}\right)=3^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=9-\frac{1}{4}=8\frac{3}{4}$.

公式三	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

問題四十四　P.84

應用公式三,試求下列各式之積。

1. $(x+8)(x+7)$

解. 原式$=x^2+(8+7)x+8\times 7=x^2+15x+56$.

2. $(x+8)(x-7)$

解. 原式$=x^2+(8-7)x+8(-7)=x^2+x-56$.

3. $(x-10)(x-5)$

解. 原式$=x^2+\{(-10)+(-5)\}x+(-10)(-5)$

$=x^2-15x+50$.

4. $(x+6y)(x-y)$

解. 原式$=x^2+(6y-y)x+6y(-y)=x^2+5xy-6y^2$.

5. $\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

解. 原式$=x^2+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)=x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$.

6. $(x+3a)(x+2a)$

解. 原式$=x^2+(3a+2a)x+3a\times 2a=x^2+5ax+6a^2$.

7. $(2x-3)(2x+2)$

解. 原式$=(2x)^2+\{(-3)+2\}(2x)+(-3)2=4x^2-2x-6$.

8. $(x-3a)(2x+3a)$

解. 原式$=-(3a-x)(3a+2x)$

$=-\{(3a)^2+(-x+2x)(3a)+(-x)(2x)\}$

$=-(9a^2+3ax-2x^2)=2x^2-3ax-9a^2$.

公式四	$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

問題四十五 P.85

應用公式四，試求下列各式之積。

1．$(x-5)(2x+3)$

解．原式$=2x^2+\{1\times3+2(-5)\}x+3(-5)$

$=2x^2+(3-10)x-15=2x^2-7x-15.$

2．$(3x-1)(x+1)$

解．原式$=3x^2+(1\times3-1\times1)x+1(-1)$

$=3x^2+(3-1)x-1=3x^2+2x-1.$

3．$\left(3x+\frac{3}{4}\right)\left(2x-\frac{1}{3}\right)$

解．原式$=3\times2x^2+\left\{3\left(-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right)\right\}x+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)$

$=6x^2+\left(-1+\frac{3}{2}\right)x-\frac{3}{4}=6x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}.$

4．$(5x+y)(2x+z)$

解．原式$=5\times2x^2+(5z+2y)x+yz.$

$=10x^2+(5z+2y)x+yz.$

5．$(3x+4y)(x-2a)$

解．原式$=3x^2+\{3(-2a)+4y\times1\}x+4y(-2a)$

$=3x^2+(-6a+4y)x-8ay$

$=3x^2+(4y-6a)x-8ay.$

6．$(ax+by)(cx+dy).$

解．原式$=acx^2+(ady+bcy)x+bdy^2$

$=acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2.$

7．$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)$

解. 原式$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}x^2+\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right\}xy+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)y^2$

$=\frac{1}{6}x^2+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)xy-\frac{1}{6}y^2.$

$=\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{36}xy-\frac{1}{6}y^2.$

8. $(2x^2-3)(3x^2-4)$

解. 原式$=2x^2\times3x^2+\{2(-4)+3(-3)\}x^2+(-3)(-4)$

$=6x^4+(-8-9)x^2+12=6x^4-17x^2+12.$

公式五	$(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$
公式六	$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

問題四十六　P.85

下列各式試以適宜之公式來乘算證明之。

1. $(a-b)(b-c)(c-a)=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$

明：　左式$=(a-b)(bc-ab-c^2+ac)$

$=a(bc-ab-c^2+ac)-b(bc-ab-c^2+ac)$

$=abc-a^2b-ac^2+a^2c-b^2c+ab^2+bc^2-abc$

$=a^2c-a^2b+ab^2-b^2c+bc^2-ac^2$

$=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$

∴　左式=右式

2. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

證　：　右式$=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2$

$=a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$

$=c^2(a^2+b^2)+d^2(a^2+b^2)$

$=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$

∴　左式=右式

3. $(a-b)(b-c)(c-a)=bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)$

證明： 左式$=(a-b)(bc-ab-c^2+ac)$

$=a(bc-ab-c^2+ac)-b(bc-ab-c^2+ac)$

$=abc-a^2b-ac^2+a^2c-b^2c+ab^2+bc^2-abc$

$=bc^2-b^2c+a^2c-ac^2+ab^2-a^2b$

$=bc(c-b)+ac(a-c)+ab(b-a).$

∴ 左式=右式

4. $(a-b)^3+b^3-a^3=3ab(b-a).$

證明： 左式$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+b^3-a^3$

$=3ab^2-3a^2b=3ab(b-a).$

∴ 左式=右式

5. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4ab(a^2+b^2).$

證明： 左式$=(a^2+ab+b^2+a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2$

$-a^2+ab-b^2)=(2a^2+2b^2)(2ab)$

$=4ab(a^2+b^2)$

∴ 左式=右式

6. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a).$

證明： 左式$=\{(a+b)+c\}^3-a^3-b^3-c^3$

$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2$

$+c^3-a^3-b^3-c^3$

$=a^3+3ab(a+b)+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2$

$-a^3-b^3$

$=3(a+b)\{ab+(a+b)c+c^2\}$

$=3(a+b)(ab+ac+bc+c^2)$

$=3(a+b)\{a(b+c)+c(b+c)\}.$

$=3(a+b)(b+c)(a+c).$

∴ 左式=右式

7. $(a+b+c)(ab+bc+ca)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc.$

證明： 左式$=\{(a+b)+c\}\{b(a+c)+ca\}$

$$=b(a+b)(a+c)+ca(a+b)+bc(a+c)+c^2a$$
$$=b(a+b)(a+c)+a^2c+abc+abc+bc^2+c^2a$$
$$=b(a+b)(a+c)+bc(a+c)+ac(a+c)+abc$$
$$=(a+c)\{b(a+b)+bc+ac\}+abc$$
$$=(a+c)\{b(a+b)+c(a+b)\}+abc$$
$$=(a+b)(b+c)(a+c)+abc.$$

$\therefore$　　左式＝右式

8. $(a+b)^2+2(a^2-b^2)+(a+b)^2=(2a)^2$

證明：　左式$=(a+b)^2+2(a+b)(a-b)+(a-b)^2$
$$=\{(a+b)+(a-b)\}^2=(a+b+a-b)^2=(2a)^2$$

$\therefore$　　左式＝右式

9. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-a)(c-a)$

證明：　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$$(b-c)^3=b^3-3b^2c+3bc^2-c^3$$
$$(c-a)^3=c^3-3c^2a+3ca^2-a^3$$

三式相加：　$-3a^2b+3ab^2-3b^2c+3bc^2-3c^2a+3ca^2$

即　左式$=3(-a^2b+ab^2-b^2c+bc^2-c^2a+ca^2)$
$$=3\{(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)\}$$
$$=3(c-b)(a^2-ac-ab+bc)$$
$$=3(c-b)\{a(a-c)-b(a-c)\}$$
$$=3(c-b)(a-c)(a-b)$$
$$=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

$\therefore$　　左式＝右式

10. $(a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)$
$$+(c-a)(x-c)(x-a)=(a-b)(b-c)(a-c).$$

證明：$(a-b)(x-a)(x-b)=ax^2-bx^2-a^2x+b^2x+a^2b-ab^2$
$$(b-c)(x-b)(x-c)=bx^2-cx^2-b^2x+c^2x+b^2c-bc^2$$

$$(c-a)(x-c)(x-a)=cx^2-ax^2-c^2x+a^2x+ac^2-a^2c$$

三式相加：　$a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+ac^2-a^2c$

即　左式$=a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

$=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$

$=(b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

∴　左式＝右式.

問題四十七　P.86

試分解下列各式之因數。

1．$2x^2+3x$

解. 原式$=x(2x+3)$.

2．x^3-3ax^2

解. 原式$=x^2(x-3a)$.

3．$2ax+\frac{x^2}{2}$

解. 原式$=\frac{x}{2}(4a+x)$.

4．$x^3y+3x^2y^2+5x^2y^3$

解. 原式$=x^2y(x+3y+5y^2)$.

5．$a^2b^3c-\frac{1}{2}ab^2c^2$

解. 原式$=ab^2c(ab-\frac{1}{2}c)$.

6．$3ab^2+15a^2b^3$

解. 原式$=2ab^2(1+5ab)$.

7．$\frac{1}{4}axy+\frac{1}{4}ayz$

解. 原式$=\frac{1}{4}ay(x+z)$.

問題四十八　P.87

應用公式一，試分解下列各式之因數。

1．$16x^2$ …

解. 原式$=(4x)^2+2(4x)+1=(4x+1)^2$.

2. $9x^2-6x+1$

解. 原式$=(3x)^2-2(3x)+1=(3x-1)^2$.

3. $1-8x+16x^2$

解. 原式$=1-2(4x)+(4x)^2=(1-4x)^2$.

4. $4a^2-12ab+9b^2$.

解. 原式$=(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2=(2a-3b)^2$

5. $3a^2+6ab+3b^2$

解. 原式$=3(a^2+2ab+b^2)=3(a+b)^2$.

6. $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$

解. 原式$=x^2+2x\left(\frac{1}{2}\right)y+\left(\frac{1}{2}y\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2$.

7. $a^3-6a^2b+9ab^2$

解. 原式$=a(a^2-6ab+9b^2)=a\{a^2-2a(3b)+(3b)^2\}$

$=a(a-3b)^2$.

8. $(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$

解. 原式$=\{(x+y)+z\}^2=(x+y+z)^2$.

9. $4x^2y^2-x^4-4y^4$

解. 原式$=-(x^4-4x^2y^2+4y^4)$

$=-\{(x^2)^2-2x^2(2y^2)+(2y^2)^2\}=-(x^2-2y^2)^2$,

10. $9(a+b)^2-6c(a+b)+c^2$

解. $=\{3(a+b)\}^2-2\{3(a+b)\}c+c^2$

$=\{3(a+b)-c\}^2=(3a+3b-c)^2$

11. $8x^2-4x^4-4$

解. 原式$=-4(x^4-2x^2+1)=-4(x^2-1)^2=-4(x+1)^2(x-1)^2$

12. $4x^2y^2+4(a+b)xy+(a+b)^2$

解. 原式$=(2xy)^2+2(a+b)(2xy)+(a+b)^2$

$=\{2xy+(a+b)\}^2=(a+2xy+b)^2$

問題四十九 P. 88

應用公式二,試分解下列各式之因數。

1. $64a^2-49b^2$

解. 原式$=(8a)^2-(7b)^2=(8a+7b)(8a-7b)$.

2. $4x^2-9y^4$

解. 原式$=(2x)^2-(3y^2)^2=(2x+3y^2)(2x-3y^2)$.

3. $4a^2b^2-9c^2$

解. 原式$=(2ab)^2-(3c)^2=(2ab+3c)(2ab-3c)$.

4. $25a^2b^2-4x^2y^2$

解. 原式$=(5ab)^2-(2xy)^2=(5ab+2xy)(5ab-2xy)$.

5. $9xy^2-x^3$

解. 原式$=x\{(3y)^2-x^2\}=x(3y+x)(3y-x)$.

6. $8ab^2-18a^3$

解. 原式$=2a(4b^2-9a^2)=2a\{(2b)^2-(3a)^2\}$

$=2a(2b+3a)(2b-3a)$.

7. $7abc^2-7a^3b^3$

解. 原式$=7ab\{c^2-(ab)^2\}=7ab(c+ab)(c-ab)$.

8. x^4-16a^4

解. 原式$=(x^2)^2-(4a^2)^2=(x^2-4a^2)(x^2+4a^2)$

$=(x-2a)(x+2a)(x^2+4a^2)$.

9. $81x^4-1$

解. 原式$=(9x^2)^2-1$

$=(9x^2+1)(9x-1)$.

$=(9x^2+1)(3x+1)(3x-1)$.

10. $1-16a^4b^4$

解. 原式$=1-(4a^2b^2)^2=(1+4a^2b^2)(1-4a^2b^2)$

$=(1+4a^2b^2)(1+2ab)(1-2ab)$.

11. $(x+y)^2-z^2$

解. 原式$=\{(x+y)+z\}\{(x+y)-z\}$

$=(x+y+z)(x+y-z)$.

12. $a^2-(2b-a)^2$

解. 原式$=\{a+(2b-a)\}\{a-(2b-a)\}$

$=(a+2b-a)(a-2b+a)$

$=2b(2a-2b)=4b(a-b)$.

13. $(x+y)^2-(x-y)^2$

解. 原式$=\{(x+y)+(x-y)\}\{(x+y)-(x-y)\}$

$=(x+y+x-y)(x+y-x+y)$

$=2x\times 2y=4xy$.

14. $(2a+b)^2-(2b+a)^2$

解. 原式$=\{(2a+b)+(2b+a)\}\{(2a+b)-(2b+a)\}$

$=(2a+b+2b+a)(2a+b-2b-a)$

$==3(a+b)(a-b)$.

15. $9(x+y)^2-4(x-y)^2$

解. 原式$=\{3(x+y)+2(x-y)\}\{3(x+y)-2(x-y)\}$

$=(3x+3y+2x-2y)(3x+3y-2x+2y)$

$=(5x+y)(5y+x)$.

16. $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$

解. 原式$=\{(a^2+b^2)+2ab\}\{(a^2+b^2)-2ab\}$

$=(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)^2(a-b)^2$.

17. $(a-2b+3c)^2-(a-c)^2$

解. 原式$=\{(a-2b+3c)+(a-c)\}\{(a-2b+3c)-(a-c)\}$

$=(a-2b+3c+a-c)(a-2b+3c-a+c)$

$=(2a-2b+2c)(4c-2b)$

$=4(a-b+c)(2c-b)$.

19. $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$

解. 原式$=\{(a+b+c)+(a-b-c)\}\{(a+b+c)-(a-b-c)\}$

$=(a+b+c+a-b-c)(a+b+c-a+b+c)$

$=2a(2b+2c)=4a(b+c)$.

問題五十　　P.88

應用公式五，分解下列各式之因數。

1. $8a^3+b^3$

解. 原式$=(2a)^3+b^3=(2a+b)\{(2a)^2-2ab+b^2\}$

$=(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$.

2. a^3-125x^3

解. 原式$=a^3-(5x)^3=(a-5x)\{a^2+5ax+(5x)^2\}$

$=(a-5x)(a^2+5ax+25x^2)$

3. $4x^3+32a^3$

解. 原式$=4(x^3+8a^3)=4\{a^3+(2a)^3\}$

$$=4(x+2a)\{x^2-2ax+(2a)^2\}$$

$$=4(x+2a)(x^2-2ax+4a^2).$$

4. $27x^3-\frac{1}{8}y^3$

解. 原式$=\left(3x-\frac{1}{2}y\right)\left\{(3x)^2+(3x)\left(\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right\}$

$$=\left(3x-\frac{1}{2}y\right)\left(9x^2+\frac{3}{2}xy+\frac{1}{4}y^2\right).$$

5. $3a^4b+24ab^4$

解. 原式$=3ab(a^3+8b^3)=3ab\{a^3+(2b)^3\}$

$$=3ab(a+2b)\{a^2-2ab+(2b)^2\}$$

$$=3ab(a+2b)(a^2-2ab+4b^2).$$

6. $40a^3bc-5b^4c^4$

解. 原式$=5bc(8a^3-b^3c^3)=5bc\{(2a)^3-(bc)^3\}$

$$=5bc(2a-bc)\{(2a)^2+2abc+(bc)^2\}$$

$$=5bc(2a-bc)(4a^2+2abc+b^2c^2).$$

7. a^6-64

解. 原式$=(a^3)^2-(2^3)^2=(a^3+2^3)(a^3-2^3)$

$$=(a+2)(a^2-2a+2^2)(a-2)(a^2+2a+2^2)$$

$$=(a+2)(a-2)(a^2-2a+4)(a^2+2a+4).$$

8. $(x+2y)^3-y^3$

解. 原式$=(x+2y-y)\{(x+2y)^2+(x+2y)y+y^2\}$

$$=(x+y)(x^2+4xy+4y^2+xy+2y^2+y^2).$$

$$=(x+y)(x^2+5xy+7y^2).$$

9. $(2y-x)^3+(2x-y)^3$

解. 原式$=(2y-x+2x-y)\{(2y-x)^2-(2y-x)(2x-y)+$

$(2x-y)^2\}=(x+y)(4y^2-4xy+x^2-5xy+2x^2+$

$+4x^2-4xy+y^2)=(x+y)(7x^2-13xy+7y^2).$

10. $(x+y)^6-(x-y)^6$

解. 原式$=\{(x+y)^3\}^2-\{(x-y)^3\}^2$

$=\{(x+y)^3+(x-y)^3\}\{(x+y)^3-(x-y)^3\}$

$=(2x^3+6xy^2)(6x^2y+2y^3)$

$=2x(x^2+3y^2)2y(3x^2+y^2)$

$=4xy(x^2+3y^2)(3x^2+y^2).$

問題五十一　　P. 89

應用公式三，解下列各式之因數。

1. x^2+4x+3

解. 原式$=(x+1)(x+3).$

2. x^2-4x+3

解. 原式$=(x-1)(x-3).$

3. x^2-6x+8

解. 原式$=(x-4)(x-2).$

4. $x^2-8x+15$

解. 原式$=(x-3)(x-5).$

5. $x^2-12x+32$

解. 原式$=(x-4)(x-8).$

6. $x^2+9x+20$

解. 原式$=(x+4)(x+5).$

7. x^2+2x-3

解. 原式$=(x-1)(x+3).$

8. x^2+4x-5

解. 原式$=(x-1)(x+5).$

9. x^2+x-6

解. 原式$=(x-2)(x+3).$

10. x^2-x-6

解. 原式$=(x+2)(x-3).$

11. $x^2+2x-35$

解. 原式$=(x-5)(x+7).$

12. $x^2-3x-19$

解. 原式$=(x+2)(x-5).$

問題五十二　　P. 90

1．$x^2-5ax+4a^2$

解．原式$=(x-a)(x-4a)$.

2．$x^2+4xy+3y^2$

解．原式$=(x+y)(x+3y)$.

3．$x^2-6ax+8a^2$

解．原式$=(x-2a)(x-4a)$.

4．$x^2-11xy+18y^2$

解．原式$=(x-2y)(x-9y)$.

5．$x^2-5xy-14y^2$

解．原式$=(x+2y)(x-7y)$.

6．$x^3y-x^2y^2-2xy^3$

解．原式$=xy(x^2-xy-2y^2)$.

$=xy(x+y)(x-2y)$.

問題五十三　P,93

應用公式四或三，分解下列各式之因數。

1．$3x^2-10x+3$

解．原式$=(3x-1)(x-3)$

2．$2x^2+11x+12$

解．原式$=(2x+3)(x+4)$.

3．$2x^2+3x-2$

解．原式$=(2x-1)(x+2)$.

4．$3x^2+7x-6$

解．原式$=(3x-2)(x+3)$.

5．$4x^2+x-3$

解．原式$=(4x-3)(x+1)$.

6．$5x^2-38x+21$

解．原式$=(5x-3)(x-7)$.

7．$3x^2+8x-3$

解．原式$=(3x-1)(x+3)$.

8．$10x^2+3x-1$

解．原式$=(5x-1)(2x+1)$.

9．$4x^2-5x+1$

解．原式$=\dfrac{(4x^2-5x+1)\times 4}{4}=\dfrac{(4x)^2-5(4x)+4}{4}$

$=\dfrac{(4x-1)(4x-4)}{4}=\dfrac{(4x-1)4(x-1)}{5}$

$=(4x-1)(x-1)$.

10．$3x^2-17xy+10y^2$

解. 原式$=\dfrac{(3x^2-17xy+10y^2)\times 3}{3}=\dfrac{(3x)^2-17(3x)y+30y^2}{3}$

$=\dfrac{(3x-2y)(3x-15y)}{3}=\dfrac{(3x-2y)3(x-5y)}{3}$

$=(3x-2y)(x-5y).$

11. $7x^2-33xy-54y^2$

解. 原式$=\dfrac{(7x^2-33xy-54y^2)\times 7}{7}=\dfrac{(7x)^2-33(7x)y-378y^2}{7}$

$=\dfrac{(7x-42y)(7x+9y)}{7}=\dfrac{7(x-6y)(7x+9y)}{7}$

$=(x-6y)(7x+9y).$

12. $2x^4-7a^2x^2+3a^4$

解. 原式$=\dfrac{(2x^4-7a^2x^2+3a^4)\times 2}{2}=\dfrac{(2x^2)^2-7(2x^2)a^2+6a^4}{2}$

$=\dfrac{(2x^2-a^2)(2x^2-6a^2)}{2}=\dfrac{(2x^2-a^2)2(x^2-3a^2)}{2}$

$=(2x^2-a^2)(x^2-3a^2).$

13. $x^3-5x^2+x-5.$

解. 原式$=x^2(x-5)+(x-5)=(x-5)(x^2+1)$

14. x^3+x^2-4x-4

解. 原式$=x^2(x+1)-4(x+1)=(x+1)(x^2-4)$

$=(x+1)(x+2)(x-2).$

15. $2x^3-3x^2-2x+3$

解. 原式$=x^2(2x-3)-(2x-3)=(2x-3)(x^2-1)$

$=(2x-3)(x+1)(x-1).$

16. $5x^3-x^2-5x+1$

解. 原式$=x^2(5x-1)-(5x-1)=(5x-1)(x^2-1)$

$=(5x-1)(x+1)(x-1).$

17. $ax^2+bx+a+b$

原式 = (a−3b+2c)(3a)

解. 原式$=ax^3+a+bx+b$

$=a(x^3+1)+b(x+1)$

$=a(x+1)(x^2-x+1)+b(x+1)$

$=(x+1)(ax^2-ax+a+b).$

18. $x^3+bx^2-a^2x-a^2b$

解. 原式$=x^2(x+b)-a^2(x+b)=(x+b)(x^2-a^2)$

$=(x+b)(x+a)(x-a).$

19. bx^3+ax^2+bx+a

解. 原式$=bx(x^2+1)+a(x^2+1)=(x^2+1)(bx+a).$

20. $ax^2+by^2+(a+b)xy$

解. 原式$=ax^2+by^2+axy+bxy$

$=ax(x+y)+by(x+y)$

$=(x+y)(ax+by).$

問　題　集　XI　　P.93

試分解下列各式之因數。

1. $(a+b+c+d)^2-(a-b+c-d)^2$

解. 原式$=\{(a+b+c+d)+(a-b+c-d)\}\{(a+b+c+d)$
$-(a-b+c-d)\}$

$=(a+b+c+d+a-b+c-d)$
$(a+b+c+d-a+b-c+d)$

$=(2a+2c)(2b+2d)$

$=2(a+c)2(b+d)$

$=4(a+c)(b+d).$

2. x^5-81x

解. 原式$=x(x^4-9^2)=x(x^2+9)(x^2-3^2)$

$=x(x^2+9)(x+3)(x-3).$

3. $x^2-\frac{3}{4}xy-\frac{1}{4}y^2$

解. 原式$=(x-y)\left(x+\frac{1}{4}y\right)$.

4. $x^2+\left(m+\frac{1}{m}\right)xy+y^2$

解. 原式$=(x+my)\left(x+\frac{1}{m}y\right)$

5. x^4-5x+4

解. 原式$=(x^2-4)(x^2-1)=(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$.

6. $x(x+4)-y(y+4)$

解. 原式$=x^2+4x-y^2-4y=x^2-y^2+4x-4y$

$=(x+y)(x-y)+4(x-y)=(x-y)(x+y+4)$.

7. $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$

解. 原式$=abx^2+aby^2+a^2xy+b^2xy$

$=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2$

$=ax(bx+ay)+by(bx+ay)$

$=(bx+ay)(ax+by)$.

8. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$

解. 原式$=\{(a^2+ab+b^2)+(a^2-ab+b^2)\}\{(a^2+ab+b^2)$

$-(a^2-ab+b^2)\}=(a^2+ab+b^2+a^2-ab+b^2)(a^2+$

$ab+b^2-a^2+ab-b^2)$

$=(2a^2+2b^2)2ab=4ab(a^2+b^2)$

9. $(x+y)^2-7z(x+y)+10z^2$

解. 原式$=\{(x+y)-2z\}\{(x+y)-5z\}$

$=(x+y-2z)(x+y-5z)$.

10. x^3+x^2-4x-4

解. 原式$=x^2(x+1)-4(x+1)=(x+1)(x^2-4)$

$=(x+1)(x+2)(x-2)$.

11. $x^3+bx^2-a^2x-a^2b$

解. 原式$=x^2(x+b)-a^2(x+b)=(x+b)(x^2-a^2)$

$=(x+b)(x+a)(x-a)$.

12. bx^3+ax^2+bx+a

解. 原式$=x^2(bx+a)+(bx+a)=(bx+a)(x^2+1)$.

13. $(a+2b)a^3-(b+2a)b^3$

解. 原式$=a^4+2a^3b-b^4-2ab^3=a^4-b^4+2a^3b-2ab^3$

$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)+2ab(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)\{(a^2+b^2)+2ab\}$

$=(a+b)(a-b)(a^2+2ab+b^2)$

$=(a+b)(a-b)(a+b)^2=(a+b)^3(a-b)$.

14. $ax^2+by^2+(a+b)xy$

解. 原式$=ax^2+by^2+axy+bxy=ax(x+y)+by(x+y)$

$=(x+y)(ax+by)$.

15. $ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$

解. 原式$=ac^2-bc^2-ad^2+bd^2=c^2(a-b)-d^2(a-b)$

$=(a-b)(c^2-d^2)=(a-b)(c+d)(c-d)$.

16. $a^2-b^2+c^2-d^2-2(ac-bd)$

解. 原式$=a^2-b^2+c^2-d^2-2ac+2bd$

$=(a^2-2ac+c^2)-(b^2-2bd+d^2)=(a-c)^2-(b-d)^2$

$=\{(a-c)+(b-d)\}\{(a-c)-(b-d)\}$

$=(a+b-c-d)(a-b-c+d)$.

17. $1+bx-(a^2+ab)x^2$

解. 原式$=1+bx-a^2x^2-abx^2=(1-a^2x^2)+bx(1-ax)$

$=(1+ax)(1-ax)+bx(1-ax)$

$=(1-ax)(1+ax+bx)$.

18. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

解. 原式$=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$

$=\{(a^2+2ab+b^2)-c^2\}\{b^2-(a^2-2ab+b^2)\}$

$=\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$

$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b-a+b)$.

19. $a^2b^2-a^2-b^2+1$

解. 原式$=a^2(b^2-1)-(b^2-1)=(b^2-1)(a^2-1)$

$=(b+1)(b-1)(a+1)(a-1)$.

20. $ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$

解. 原式$=ac^2-bc^2-ad^2+bd^2=c^2(a-b)-d^2(a-b)$

$=(a-b)(c^2-d^2)=(a-b)(c+d)(c-d)$.

21. $x^4+a^2b^2-b^2c^2-c^4$

解. 原式$=a^4-c^4+a^2b^2-b^2c^2$

$=(a^2+c^2)(a^2-c^2)+b^2(a^2-c^2)$

$=(a^2-c^2)(a^2+c^2+b^2)=(a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2)$

22. $a^2x+abx+ac+b^2y+aby+bc$.

解. 原式$=ax(a+b)+by(a+b)+c(a+b)$

$=(a+b)(ax+by+c)$.

23. $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$

解. 原式$=\{(x^2+4x)+3\}\{(x^2+4x)-5\}$

$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)$

$=(x+1)(x+3)(x-1)(x+5).$

24. $(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280$

解. 原式$=(x^2+7x+6)(x^2+7x+6+6)-280$

$=(x^2+7x+6)^2+6(x^2+7x+6)-280$

$=\{(x^2+7x+6)-14\}\{(x^2+7x+6)+20\}$

$=(x^2+7x-8)(x^2+7x+26)$

$=(x-1)(x+8)(x^2+7x+26)$

問題五十四

P. 95

求下列各式之最大公約數。

1. ab^2c^2d, a^2bcd^2.

解. G.C.M.$=abcd$.

2. $24a^3b^3x^4$, $60a^2b^4x^5$.

解. G.C.M.$=12a^2b^3x^4$.

3. ab^3, a^2bc, abc^2.

解. G.C.M.$=ab$

4. $8x^2y^3z^4$ $12x^3y^2z^3$.

$20x^4y^3z^2$.

解. G.C.M.$=4x^2y^2z^2$

5. $9x^2-1$, $(3x+1)^2$.

解. $9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$

$(3a+1)^2=(3x+1)(3x+1)$

$\therefore$ G.C.M.$=3x+1$.

6. x^2-y^2, x^3-y^3.

解. $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$\therefore$ G.C.M.$=x-y$.

7. $(x-a)^3(x+b)^2$, $(x-a)^2(x+b)^4$.

解. G.C.M.$=(x-a)^2(x+b)^2$.

8. $8a^3b^2c-12a^2bc^3$, $6ab^3c+4ab^3c^2$,

解. $8a^3b^2c-12a^2bc^3=4a^2bc(2ab-3c^2)$

$6ab^4c+4ab^3c^2=2ab^3c(b+2c)$

$\therefore$ G.C.M.$=2abc$.

9. x^2-2x-3, x^2+x-12

解. $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

$x^2+x-12=(x-3)(x+4)$

$\therefore$ G.C.M.$=x-3$.

10. $ac(a-b)(a-c)$, $bc(b-c)(a-c)$.

解. G.C.M.$=c(a-c)$.

11. $a^3+3a^2b+2ab^2$, $a^4+4a^3b+3a^2b^2$.

解. $a^4+3a^2b+2ab^2=a(a^2+3ab+2b^2)=a(a+b)(a+2b)$

$a^4+4a^3b+3a^2b^2=a^2(a^2+4ab+3b^2)=a^2(a+b)(a+3b)$

$\therefore$ G.C.M.$=a(a+b)$

12. $3x^2-4x+1$, $4x^2-5x+1$.

解. $3x^2-4x+1=1-4x+3x^2=(1-x)(1-3x)$

$4x^2-5x+1=1-5x+4x^2=(1-x)(1-4x)$

$\therefore$ G.C.M.$=1-x$.

13. x^2-y^2, x^3-y^3, $x^2-7xy+6y^2$.

解. $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$x^2-7xy+6y^2=(x-y)(x-6y)$

$\therefore$ G.C.M.$=x-y$.

14. x^4-a^4, x^3+a^3, x^2-a^2.

解. $x^4-a^4=(x^2+a^2)(x^2-a^2)=(x^2+a^2)(x+a)(x-a)$

$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

$\therefore$ G.C.M. $=x+a.$

問　題　集　XII　P. 102

求下列各組之最大公約數。

1．$x^3-41x-30,\quad x^3-11x^2+25x+25.$

解.
$$\begin{array}{r|r|r|l}
x+6 & x^3-41x-30 & x^3-11x^2+25x+25 & 1 \\
 & x^3-6x^2-5x & x^3-41x-30 & \\
\hline
 & 6x^2-36x-30 & -11\,|\,-11x^2+66x+25 & \\
 & 6x^2-36x-30 & x^2-6x-5 & \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}$$

$\therefore$ G.C.M. $=x^2-6x-5.$

2．$x^3+7x^2+17x+15,\quad x^3+8x^2+19x+12.$

解.
$$\begin{array}{r|r|r|l}
x+5 & x^3+7x^2+17x+15 & x^3+8x^2+19x+12 & 1 \\
 & x^3+2x^2-3x & x^2+7x^2+17x+15 & \\
\hline
 & 5x^2+20x+15 & x^2+2x-3 & x-1 \\
 & 5x^2+10x-15 & x^2+3x & \\
\hline
 & 10\,|\,10x+30 & -x-3 & \\
 & x+3 & -x-3 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

$\therefore$ G.C.M. $=x+3.$

3．$x^3-10x^2+26x-8,\quad x^3-9x^2+23x-12.$

解. 用分離係數法演算：
$$\begin{array}{r|r|r|l}
1 & 1-10+26-8 & 1-9+23-12 & -1+6 \\
 & 1-9+23-12 & 1-3-4 & \\
\hline
-1-1 & -1+3+4 & -6+27-12 & \\
 & -1+4 & -6+18+24 & \\
\hline
 & -1+4 & 9\,|\,9-36 & \\
 & -1+4 & 1-4 & \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}$$

$\therefore$ G.C.M. $=x-4.$

4． $4(x^2-x+1)$， $3(x^4+x^2+1)$.

解．
$$\begin{array}{c|l|l}
\underline{\underline{x^2-x+1}} & x^4 \qquad +x^2+1 & x^2+x+1 \\
 & \underline{x^4-x^3+x^2} & \\
 & \quad x^3 \qquad +1 & \\
 & \quad \underline{x^3-x^2+x} & \\
 & \quad x^2-x+1 & \\
 & \quad \underline{x^2-x+1} & \\
 & \qquad 0 &
\end{array}$$

$\therefore$ G.C.M. $=x^2-x+1$.

5． $6x^2+x-2$， $9x^3+48x^2+52x+16$.

解．以2乘第二式得 $18x^3+96x^2+104x+32$

用分離係數法演算：

$$\begin{array}{c|r|r|l}
2-1 & 6+1-2 & 18+96+104+32 & 3+31 \\
 & \underline{6+4} & \underline{18+3-6} & \\
 & -3-2 & 93+110+32 & \\
 & \underline{-3-2} & 2 & \\
 & 0 & \times)\overline{186+220+64} & \\
 & & \underline{186+31-62} & \\
 & & 63 \mid 189+126 & \\
 & & \underline{\underline{3+2}} &
\end{array}$$

$\therefore$ G.C.M. $=3x+2$.

6． x^3-4x^2+2x+3， $2x^4-9x^3+12x^2-7$.

解．用分離係數法演算：

$$\begin{array}{c|r|r|l}
1-2 & 1-4+2+3 & 2-9+12+0-7 & 2-1 \\
 & \underline{1-1-1} & \underline{2-8+4+6} & \\
 & -3+3+3 & -1+8-6-7 & \\
 & \underline{-3+3+3} & \underline{-1+4-2-3} & \\
 & 0 & 4 \mid 4-4-4 & \\
 & & \underline{\underline{1-1-1}} &
\end{array}$$

$\therefore$ G.C.M. $=x^2-x-1$.

7． x^4+x^2-6， x^4-3x^2+2.

解.
$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x^2+3 & x^4+x^2-6 & x^4-3x^2+2 & 1 \\
 & x^4-2x^2 & x^4+\ x^2-6 & \\
\hline
 & 3x^2-6 & -4\,|-4x^2+8 & \\
 & 3x^2-6 & x^2-2 & \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ G.C.M.$=x^2-2$.

8. $x^3-2x^2+3x-6,\quad x^4-x^3-x^2-2x$.

解. 用分離係數法演算：

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
-1+3 & 1-2+3-6 & 1-1-1-2+0 & 1+1 \\
 & \times)\ 2 & 1-2+3-6 & \\
 & 2-4+6-12 & 1-4+4+0 & -2-3 \\
 & 2-1-6 & 1-2+3-6 & \\
\hline
 & -3+12-12 & -2+1+6 & \\
 & \times)\ 2 & -2+4 & \\
 & -6+24-24 & -3+6 & -2-3 \\
 & -6+3\ +18 & -3+6 & \\
\hline
 & 21\,|21-42 & 0 & \\
 & 1-2 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ G.C.M.$=x-2$.

9. $x^4-1,\quad 3x^5+2x^4+4x^3+2x^2+x$.

解.
$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x+1 & x^4\qquad\qquad -1 & 3x^5+2x^4+4x^3+2x^2+\ x & 3x+2 \\
 & \times)\ 2 & 3x^5\qquad\qquad\qquad -3x & \\
 & 2x^4\qquad\qquad -2 & 2x^4+4x^3+2x^2+4x & \\
 & 2x^4+x^3+2x^2+x & 2x^4\qquad\qquad -2 & \\
\hline
 & -x^3-2x^2-x-2 & 2\,|4x^3+2x^2+4x+2 & \\
 & \times)\ -2 & 2x^3+\ x^2+2x+1 & 3x+1 \\
 & 2x^3+4x^2+2x+4 & 2x^3\qquad +2x & \\
 & 2x^3+\ x^2+2x+1 & x^2\qquad +1 & \\
\hline
 & 3\,|3x^2+3 & x^2\qquad +1 & \\
 & x^2+1 & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ G.C.M.$=x^2+1$.

10. $x^4-9x^2-30x-25,\quad x^5+x^4-7x^2+5x$

解. 第二式$=x(x^4+x^3-7x+5)$

用分離係數法演算。

$$
\begin{array}{r|r|r|r}
1 & 1+0-9-30-25 & 1+1+0-7+5 & -1 \\
 & 1+1+0-7+5 & 1+9+23+30 & \\
\hline
-1 & -1-9-23-30 & -8-23-37+5 & 8 \\
 & -1-3-5 & -8-72-184-240 & \\
\hline
-6 & -6-18-30 & 49 \mid 49+147+245 & \\
 & -6-18-30 & 1+3+5 & \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ G.C.M. $=x^2+3x+5.$

11. $35x^3+47x^2+13x+1,\quad 42x^4+41x^3-9x^2-9x-1.$

解. 第二式以5乘之得 $210x^4+205x^3-45x^2-45x-5$

用分離係數法演算：

$$
\begin{array}{r|r|r|r}
5 & 35+47+13+1 & 210+205-45-45-5 & 6 \\
 & 35+40+5 & 210+282+78+6 & \\
\hline
1 & 7+8+1 & -77-123-51-5 & \\
 & 7+8+1 & \times)\quad -5 & \\
\hline
 & 0 & 385+615+255+25 & \\
 & & 385+517+143+11 & 11 \\
\hline
 & & 14 \mid 98+112+14 & \\
 & & 7+8+1 &
\end{array}
$$

$\therefore$ G.C.M. $=7x^2+x+1.$

12. $x^2-3x-70,\quad x^3-39x+70,\quad x^3-48x+7.$

解. 一式 $=(x-10)(x+7)$

二式 $=x^3+7x^2-7x^2-49x+10x+70$

$=x^2(x+7)-7x(x+7)+10(x+7)$

$=(x+7)(x^2-7x+10)$

$=(x+7)(x-2)(x-5)$

三式 $=x^3+7x^2-7x^2-49x+x+7$

$=x^2(x+7)-7x(x+7)+(x+7)$

$=(x+7)(x^2-7x+1)$

$\therefore$ G.C.M. $=x+7$.

13. $x^2-xy-12y^2$, $\quad x^2+5xy+6y^2$

解. 一式 $=(x+3y)(x-4y)$

二式 $=(x+3y)(x+2y)$

$\therefore$ G.C.M $=x+3y$.

14. $2x^2+3ax+a^2$, $\quad 3x^2+3ax-a^2$.

解. 一式 $=(x+a)(2x+a)$

二式 $=(x+a)(3x-a)$

$\therefore$ G.C.M. $=x+a$.

15. $3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$, $\quad 4x^2y-5xy^2+y^3$.

解. 一式 $=3x^2(x-y)+y^2(x-y)$

$=(x-y)(3x^2+y^2)$

二式 $=4x^2y-4xy^2-xy^2+y^3$

$=4xy(x-y)-y^2(x-y)$

$=y(x-y)(4x-y)$

$\therefore$ G.C.M. $=x-y$.

問題五十五 P.104

求下列各組之式之 L.C.M.

1. ac^2, $\quad a^2bc^3$.

解. L.C.M. $=a^2bc^3$.

2. $4x^3y$, $\quad 10xy^3$

解. L.C.M. $=20x^3y^3$.

3. $24a^3b^3x^4$, $\quad 60a^2b^4x^6$.

解. $\therefore$ L.C.M. $=120a^3b^4x^6$.

4. x^2-1, $\quad x^2-x$.

解. 一式 $=(x+1)(x-1)$

二式$=x(x-1)$

$\therefore$L.C.M.$=x(x+1)(x-1)$.

5. a^2-b^2, a^2+ab.

解. 一式$=(a+b)(a-b)$

二式$=a(a+b)$

$\therefore$L.C.M.$=a(a+b)(a-b)$.

6. $2x-1$, $4x^2-1$.

解. 一式$=2x-1$

二式$=(2x+1)(2x-1)$

$\therefore$L.C.M.$=(2x+1)(2x-1)$.

7. x^2+3x+2, x^2+5x+4.

解. 一式$=(x+1)(x+2)$

二式$=(x+1)(x+4)$

$\therefore$L.C.M.$=(x+1)(x+2)(x+4)$.

8. $a(a+x)$, $ab(b+x)$.

解. L.C.M.$=ab(a+x)(b+x)$.

9. $(x-a)(x-b)^2(x-c)^2$, $(x-a)^3(x-b)(x-c)$.

解. L.C.M.$=(x-a)^3(x-b)^2(x-c)^2$

10. $(x-1)(x^2+2x+2)$, $(x-1)(x^2+3x+3)$.

解. L.C.M.$=(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+3x+3)$.

問題五十六 P. 105

求下列各式之最小公倍數。

1. $x^3-6x^2+11x-6$, $x^3-9x^2+26x-24$.

解. 一式$=x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6$

$=x^2(x-1)-5x(x-1)+6(x-1)$

$=(x-1)(x^2-5x+6)$

$=(x-1)(x-2)(x-3)$

二式$=x^3-2x^2-7x^2+14x+12x-24$

$=x^2(x-2)-7x(x-2)+12(x-2)$

$=(x-2)(x^2-7x+12)$

$=(x-2)(x-3)(x-4)$

$\therefore$ L.C.M.$=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

2. $6x^4-13x^3+6x^2$, $8x^4-36x^3+54x^2-27x$.

解. 一式$=x^2(6x^2-13x+6)$

二式$=x(8x^3-36x^2+54x-27)$

$\therefore$ L.C.M.$=x^2(6x^2-13+6)(8x^3-36x^2+54x-27)$

3. n^3+4n^2+5n+2, n^3+2n^2-n-2.

解. 一式$=n^3+n^2+3n^2+3n+2n+2$

$=n^2(n+1)+3n(n+1)+2(n+1)$

$=(n+1)(n^2+3n+2)$

$=(n+1)(n+1)(n+2)$

$=(n+1)^2(n+2)$

二式$=n^2(n+2)-(n+2)$

$=(n+2)(n^2-1)$

$=(n+2)(n+1)(n-1)$

$\therefore$ L.C.M.$=(n-1)(n+1)^2(n+2)$

4. x^4+2x^2+9, $x^4-4x^3+8x-21$.

解. 二式之G.C.M.爲 x^2-2x+3 以之除式一得 x^2+2x+3

$\therefore$ L.C.M.$=(x^2+2x+3)(x^4-4x^3+8x-21)$.

5. $2x^3-9x^2+11x-3,\quad 4x^3-4x^2-5x+3.$

解. 一式$=2x^3-3x^2-6x^2+9x+2x-3$

$=x^2(2x-3)-3x(2x-3)+(2x-3)$

$=(2x-3)(x^2-3x+1)$

一式$=4x^3+4x^2-8x^2-8x+3x+3$

$=4x^2(x+1)-8x(x+1)+3(x+1)$

$=(x+1)(4x^2-8x+3)$

$=(x+1)(2x-3)(2x-1)$

$\therefore$ L.C.M.$=(x+1)(2x-3)(2x-1)(x^2-3x+1).$

6. $x^3-3x^2y+3xy^2-2y^3,\ x^3+3xy^2-2x^2y-6y^3$

解. 一式$=x^3-2x^2y-x^2y+2xy^2+xy^2-2y^3$

$=x^2(x-2y)-xy(x-2y)+y^2(x-2y)$

$=(x-2y)(x^2-xy+y^2)$

二式$=x^3-2x^2y+3xy^2-6y^3$

$=x^2(x-2y)+3y^2(x-2y)$

$=(x-2y)(x^2+3y^2)$

$\therefore$ L.C.M.$=(x-2y)(x^2+3y^2)(x^2-xy+y^2).$

問題五十七 P.106

試求下列各式之 L.C.M.

1. $4a^3x,\quad 6a^2x^2,\quad 2ax^3.$

解. L.C.M.$=12a^3x^3.$

2. $18ax^2,\quad 72ay^2,\quad 12xy.$

解. L.C.M.$=72ax^2y^2.$

3. $x^2-1,\quad x^2-x,\quad x^3-1.$

解. 一式$=1=(x+1)(x-1)$

二式$=x(x-1)$

三式$=(x-1)(x^2+x+1)$

$\therefore$ L.C.M.$=x(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$.

4. x^2-y^2, $(x+y)^2$, $(x-y)^2$.

解. 一式$=(x+y)(x-y)$

$\therefore$ L.C.M.$=(x+y)^2(x-y)^2$.

5. $(a-b)(b-c)$, $(b-c)(c-a)$, $(c-a)(a-b)$.

解. L.C.M$=(a-b)(b-c)(c-a)$.

6. $x^2+3xy+2y^2$, $x^2+5xy+4y^2$, $x^2+6xy+8y^2$.

解. 一式$=(x+y)(x+2y)$

二式$=(x+y)(x+4y)$

三式$=(x+2y)(x+4y)$

$\therefore$ L.C.M.$=(x+y)(x+2y)(x+4y)$.

問題集 XIII　P. 107

試求下列各式之 L.C.M.

1. $x^3-6x^2+11x-6$, $x^3-9x^2+26x-24$.

解. 一式$=x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6$

$=x^2(x-1)-5x(x-1)+6(x-1)$

$=(x-1)(x^2-5x+6)$

$=(x-1)(x-2)(x-3)$

二式$=x^3-4x^2-5x^2+20x+6x-24$

$=x^2(x-4)-5x(x-4)+6(x-4)$

$=(x-4)(x^2-5x+6)$

$$=(x-4)(x-3)(x-2)$$

$\therefore$ L.C.M.$=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

2. $x^3-7x-6,\quad x^3+8x^2+17x+10$

解. 一式$=x^3-x-6x-6$

$$=x(x^2-1)-6(x+1)$$

$$=x(x+1)(x-1)-6(x+1)$$

$$=(x+1)(x^2-x-6)$$

$$=(x+1)(x+2)(x-3)$$

二式$=x^3+5x^2+3x^2+15x+2x+10$

$$=x^2(x+5)+3x(x+5)+2(x+5)$$

$$=(x+5)(x^2+3x+2)$$

$$=(x+5)(x+2)(x+1)$$

$\therefore$ L.C.M.$=(x+1)(x+2)(x-3)(x+5)$.

3. $x^4+x^3+2x^2+x+1,\quad x^4-1$.

解. 一式$=x^4+x^2+x^3+x+x^2+1$

$$=x^2(x^2+1)+x(x^2+1)+(x^2+1)$$

$$=(x^2+1)(x^2+x+1)$$

二式$=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$\therefore$ L.C.M.$=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)$.

4. $x^4-2x^3-3x^2+8x-4.\quad x^4-5x^3+20x-16$.

解. 一式$=x^4-x^3-x^3+x^2-4x^2+4x+4x-4$

$$=x^3(x-1)-x^2(x-1)-4x(x-1)+4(x-1)$$

$$=(x-1)(x^3-x^2-4x+4)$$

$$=(x-1)\{x^2(x-1)-4(x-1)\}$$

$$=(x-1)(x-1)(x^2-4)$$

$$=(x-1)^2(x+2)(x-2)$$

二式$=x^4-x^3-4x^3+4x^2-4x^2+4x+16x-16$

$=x^3(x-1)-4x^2(x-1)-4x(x-1)+16(x-1)$

$=(x-1)(x^3-4x^2-4x-16)$

$=(x-1)\{x^2(x-4)-4(x-4)\}$

$=(x-1)(x-4)(x^2-4)$

$=(x-1)(x-4)(x+2)(x-2)$

$\therefore$ L.C.M.$=(x-1)^2(x+2)(x-2)(x-4)$.

5．$x^4+a^2x^2+a^4,\quad x^4-ax^3-a^3x+a^4$.

解. 二式之 G.C.M.$=x^2+ax+a^2$

以之除一式得 x^2-ax+a^2

除二式得 $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

$\therefore$ L.C.M.$=(x-a)^2(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$.

6．$x^4-x^2+8x-8,\quad x^3+4x^2-8x+24$.

解. 二式之 G.C.M.$=x^2-2x+4$ 以之

除一式得 $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

除二式得 $x+6$

$\therefore$ L.C.M.$=(x-1)(x+2)(x+6)(x^2-2x+4)$.

7．$x^3+6x^2+11x+6,\quad x^3+8x^2+19x+12$.

解. 一式$=x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6$.

$=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)$

$=(x+1)(x^2+5x+6)$

$=(x+1)(x+2)(x+3)$

二式$=x^3+4x^2+4x^2+16x+3x+12$

$=x^2(x+4)+4x(x+4)+3(x+4)$

$=(x+4)(x^2+4x+3)$

$=(x+4)(x+3)(x+1)$

$\therefore$ L.C.M.$=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

8. $4(a+b),\ 6(a^2-b^2).\quad 8(a^3+b^3)$.

解. 二式$=6(a+b)(a-b)$

三式$=8(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\therefore$ L.C.M.$=24(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)$

9. $15(a^2b-ab^2).\quad 21(a^3-ab^2).\quad 35(ab^2+b^3)$,

解. 一式$=3\times5ab(a-b)$

二式$=3\times7a(a+b)(a-b)$

三式$=5\times7b^2(a+b)$

$\therefore$ L.C.M.$=105ab^2(a-b)(a+b)$.

10. $x^2-1,\quad x^3+1,\quad x^3-1$,

解. 一式$=(x+1)(x-1)$

二式$=(x+1)(x^2-x+1)$

三式$=(x-1)(x^2+x+1)$

$\therefore$ L.C.M.$=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

11. $x^2+3x+2,\quad x^2+4x+3,\quad x^2+5x+6$.

解. 一式$=(x+1)(x+2)$

二式$=(x+1)(x+3)$

三式$=(x+2)(x+3)$

$\therefore$ L.C.M.$=(x+1)(x+2)(x+3)$,

12. $x^2+2x-3,\quad x^3+3x^2-x-3,\quad x^3+4x^2+x-6$.

解. 一式$=(x-1)(x+3)$

二式$=x^2(x+3)-(x+3)$

$=(x+3)(x^2-1)$

$$=(x+3)(x+1)(x-1)$$

三式$=x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6$

$$=x^2(x-1)+5x(x-1)+6(x-1)$$

$$=(x-1)(x^2+5x+6)$$

$$=(x-1)(x+2)(x+3)$$

$\therefore$ L.C.M.$=(x-1)(x+3)(x+1)(x+2)$

第四編　分式及不等式

問題五十八　　P.109

下列各分數式，試化之爲既約分數。

1．$\dfrac{3ax^2y}{6a^3xy}$　　答．$\dfrac{x}{2a}$．

2．$\dfrac{2a^3b^2xy^4}{3ab^3x^3y^2}$　　答．$\dfrac{2a^2y^2}{3bx^2}$．

3．$\dfrac{a^2-ax}{a^2-x^2}$．

解．原式$=\dfrac{a(a-x)}{(a+x)(a-x)}=\dfrac{a}{a+x}$．

4．$\dfrac{10a^2x}{5a^2x-15ay^2}$

解．原式$=\dfrac{10a^2x}{5a(ax-3y^2)}=\dfrac{2ax}{ax-3y^2}$．

5．$\dfrac{x^2-ax}{a^2-x^2}$．

解．原式$=\dfrac{x(x-a)}{(a+x)(a-x)}=\dfrac{x(x-a)}{-(a+x)(x-a)}=-\dfrac{x}{a+x}$

6．$\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$．

解. 原式$=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+1}{x^2+x+1}$.

7. $\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$.

解. 原式$=\frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x-5}{x-3}$.

8. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$.

解. 原式$=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+2)}=\frac{x+1}{x+3}$.

9. $\frac{1+3x+2x^2}{1+5x+6x^2}$.

解. 原式$=\frac{(1+x)(1+2x)}{(1+3x)(1+2x)}=\frac{1+x}{1+3x}$.

10. $\frac{x^2+3xy+2y^2}{x^2+5xy+6y^2}$.

解. 原式$=\frac{(x+y)(x+2y)}{(x+3y)(x+2y)}=\frac{x+y}{x+3y}$.

11. $\frac{(a^3-x^3)(a+x)}{(a^3+x^3)(a-x)}$.

解. 原式$=\frac{(a-x)(a^2+ax+x^2)(a+x)}{(a+x)(a^2-ax+x^2)(a-x)}=\frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$

12. $\frac{x^{m-1}y^{2m}}{x^{2m}y^{n+1}}$.

解. 原式$=\frac{y^{2m}}{x^{2m-(m-1)}y^{n+1}}=\frac{y^{2m}}{x^{m+1}y^{n+1}}$.

13. $\frac{3x^2-8x+5}{x^3-4x^2+5x-2}$

解. 分子$=(x-1)(3x-5)$

分母$=x^3-x^2-3x^2+3x+2x-2$

$=x^2(x-1)-3x(x-1)+2(x-1)$

$=(x-1)(x^2-3x+2)$

$=(x-1)(x-1)(x-2)$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{(x-1)(3x-5)}{(x-1)(x-1)(x-2)}=\dfrac{3x-5}{(x-1)(x-2)}$.

14. $\dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3+5x^2+6x}$

解. 分子$=x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6$

$=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)$

$=(x+1)(x^2+5x+6)$

$=(x+1)(x+2)(x+3)$

分母$=x(x^2+5x+6)$

$=x(x+2)(x+3)$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x(x+2)(x+3)}=\dfrac{x+1}{x}$.

15. $\dfrac{x^3-3x-2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$

解. 分子$=x^3+x^2-x^2-x-2x-2$

$=x^2(x+1)-x(x+1)-2(x+1)$

$=(x+1)(x^2-x-2)$

$=(x+1)(x+1)(x-2)$

$=(x+1)^2(x-2)$

分母$=x^4+x^2+2x^3+2x+x^2+1$

$=x^2(x^2+1)+2x(x^2+1)+(x^2+1)$

$=(x^2+1)(x^2+2x+1)$

$=(x^2+1)(x+1)^2$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{(x^2+1)(x+1)^2}=\dfrac{x-2}{x^2+1}$.

問題五十九　　P. 110

下列各式,試以最小分母,化之爲同分母的分數式。

1. $\frac{3}{4x}$, $\frac{4}{6x^2}$, $\frac{5}{12x^3}$.

解. 三式分母的 L. C. M. 爲 $12x^3$,故得;

$$\frac{9x^2}{12x^3},\quad \frac{8x}{12x^3},\quad \frac{5}{12x^3}.$$

2. $\frac{a}{a-b}$, $\frac{b}{a+b}$, $\frac{ab}{a^2-b^2}$.

解. 三式分母的 L. C. M. 爲 a^2-b^2,故得;

$$\frac{a(a+b)}{a^2-b^2},\quad \frac{b(a-b)}{a^2-b^2},\quad \frac{ab}{a^2-b^2}.$$

3. $\frac{a}{x-a}$, $\frac{x}{a-x}$, $\frac{a^2}{a^2-x^2}$, $\frac{ax}{x^2-a^2}$.

解. 變四式爲 $\frac{-a}{a-x}$, $\frac{x}{a-x}$, $\frac{a^2}{a^2-x^2}$, $\frac{-ax}{a^2-a^2}$.

四式分母的 L. C. M. 爲 a^2-x^2,故得:

$$\frac{-a(a+x)}{a^2-x^2},\quad \frac{x(a+x)}{a^2-x^2},\quad \frac{a^2}{a^2-x^2},\quad \frac{-ax}{a^2-x^2}.$$

4. $\frac{1}{x-1}$, $\frac{x}{(x-1)^2}$, $\frac{3}{x+1}$, $\frac{4}{(x+1)^2}$, $\frac{5}{x^2-1}$.

解. 五式分母的 L. C. M. 爲 $(x-1)^2(x+1)^2$ 故得;

$$\frac{(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2},\quad \frac{x(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2},\quad \frac{3(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$\frac{4(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2},\quad \frac{5(x^2-1)}{(x-1)(x+1)^2}.$$

5. $\frac{a}{x-a}$, $\frac{a+x}{x^2+ax+a^2}$, $\frac{x}{x^3-a^3}$.

解. 三式分母的 L. C. M. 爲 x^3-a^3,故得:

$$\frac{a(x^2+ax+a^2)}{x^3-a^3},\quad \frac{(a+x)(x-a)}{x^3-a^3},\quad \frac{ax}{x^3-a^3}.$$

6. $\dfrac{1}{x^2-ax+a^2},\quad \dfrac{1}{x^2+ax+a^2},\quad \dfrac{a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}.$

解. 三式分母的 L. C. M. 爲 $x^4+a^2x^2+a^4$，故得：

$$\frac{x^2+a^2x+a^2}{x^4+a^2x^2+a^4},\quad \frac{x^2-ax+a^2}{x^4+a^2x^2+a^4},\quad \frac{a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}.$$

7. $\dfrac{1}{x^2-(a+b)x+ab},\quad \dfrac{1}{x^2-(a+c)x+ac},\quad \dfrac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$

解. 一式$=\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$， 二式$=\dfrac{1}{(x-a)(x-c)}$，

三式$=\dfrac{1}{(x-b)(x-c)}$，

以上三式分母的L. C. M. 爲 $(x-a)(x-b)(x-c)$，故得：

$$\frac{x-c}{(x-a)(x-b)(x-c)},\quad \frac{x-b}{(x-a)(x-b)(x-c)},$$

$$\frac{x-a}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

問 題 六 十 P. 112

下列各式，試化之爲較簡之式。

1. $\dfrac{3a-5b}{4}+\dfrac{a-b-c}{3}+\dfrac{a+b+c}{12}.$

解. 原式 $=\dfrac{9a-15b}{12}+\dfrac{8a-4b-4c}{12}+\dfrac{a+b+c}{12}$

$$=\frac{9a-15b+8a-4b-4c+a+b+c}{12}$$

$$=\frac{18a-18b-3c}{12}=\frac{6a-6b-c}{4}.$$

2. $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}.$

解. 原式$=\dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2}+\dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2+ab+ab-b^2}{a^2-b^2}$

$$=\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}$$

3. $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{ab}$

解. 原式$=\dfrac{a}{abc}+\dfrac{b}{abc}+\dfrac{c}{abc}=\dfrac{a+b+c}{abc}$

4. $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2y}{x^2-y^2}$

解. 原式$=\dfrac{x-y}{x^2-y^2}+\dfrac{2y}{x^2-y^2}=\dfrac{x-y+2y}{x^2-y^2}=\dfrac{x+y}{x^2-y^2}=\dfrac{1}{x-y}.$

5. $\dfrac{1+3x}{1-3x}+\dfrac{1-3x}{1+3x}$

解. 原式$=\dfrac{(1+3x)^2}{1-9x^2}+\dfrac{(1-3x)^2}{1-9x^2}=\dfrac{1+6x+9x^2+1-6x+9x^2}{1-9x^2}$

$$=\frac{2(1+9x^2)}{1-9x^2}.$$

6. $\dfrac{a}{x(a-x)}-\dfrac{a}{a(a-x)}$

解. 原式$=\dfrac{a^2}{ax(a-x)}-\dfrac{ax}{ax(a-x)}=\dfrac{a^2-ax}{ax(a-x)}$

$$=\frac{a(a-x)}{ax(a-x)}=\frac{1}{x}.$$

7. $\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{3a}{a+x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}$

解. 原式$=\dfrac{a(a+x)}{a^2-x^2}+\dfrac{3a(a-x)}{a^2-x^2}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}$

$$=\frac{a^2+ax+3a^2-3ax-2ax}{a^2-x^2}=\frac{4a^2-4ax}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{4a(a-x)}{a^2-x^2}=\frac{4a}{a+x}.$$

8. $\dfrac{a-b}{b}+\dfrac{2a}{a-b}-\dfrac{a^3+a^2b}{a^2b-b}$

解. 原式$=\dfrac{(a-b)^2+2ab}{b(a-b)}-\dfrac{a^2(a+b)}{b(a^2-1)}$

$$=\frac{(a^2+b^2)(a^2-1)-a^2(a^2-b^2)}{b(a-b)(a^2-1)}$$

$$=\frac{a^2b^2-a^2-b^2+a^2b^2}{b(a-b)(a^2-1)}=\frac{2a^2b^2-a^2-b^2}{b(a-b)(a^2-1)}$$

9. $\frac{2b-a}{x-b}+\frac{b-2a}{x+b}+\frac{3x(a-b)}{x^2-b^2}$

解. 原式$=\frac{(2b-a)(x+b)}{x^2-b^2}+\frac{(b-2a)(x-b)}{x^2-b^2}+\frac{3x(a-b)}{x^2-b^2}$

$$=\frac{2bx+2b^2-ax-ab+bx-b^2-2ax+2ab+3ax-3bx}{x^2-b^2}$$

$$=\frac{ab+b^2}{x^2-b^2}=\frac{b(a+b)}{x^2-b^2}.$$

10. $x-\frac{x^2}{x+1}+\frac{x}{x-1}$

解. 原式$=\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}-\frac{x^2(x-1)}{x^2-1}+\frac{x(x+1)}{x^2-1}$

$$=\frac{x^3-x-x^3+x^2+x^2+x}{x^2-1}=\frac{2x^2}{x^2-1}.$$

11. $\frac{4x}{y}-\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}$

解. 原式$=\frac{4x(x^2-y^2)}{y(x^2-y^2)}-\frac{y(x-y)^2}{y(x^2-y^2)}+\frac{y(x+y)^2}{y(x^2-y^2)}$

$$=\frac{4x^3-4xy^2-x^2y+2xy^2-y^3+x^2y+2xy^2+y^3}{y(x^2-y^2)}$$

$$=\frac{4x^3}{y(x^2-y^2)}.$$

12. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}-\frac{2}{x}$

解. 原式$=\frac{x(x+a)}{x(x^2-a^2)}+\frac{x(x-a)}{x(x^2-a^2)}-\frac{2(x^2-a^2)}{x(x^2-a^2)}$

$$=\frac{x^2+ax+x^2-ax-2x^2+2a^2}{x(x^2-a^2)}=\frac{2a^2}{x(x^2-a^2)}.$$

13. $\frac{3}{2x-4}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2x^2+8}$

解. 原式$=\frac{3}{2(x-2)}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2(x^2+4)}$ 　　$=\frac{2}{x-y}.$

$$=\frac{3(x+2)-2(x-2)}{2(x^2-4)}-\frac{x+10}{2(x^2+4)}$$

$$=\frac{x+10}{2(x^2-4)}-\frac{x+10}{2(x^2+4)}=\frac{(x+10)(x^2+4)-(x+10)(x^2-4)}{2(x^2-4)(x^2+4)}$$

$$=\frac{(x+10)(x^2+4-x^2+4)}{2(x^4-16)}=\frac{8(x+10)}{2(x^4-16)}=\frac{4(x+10)}{x^4-16}.$$

14. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$.

解. 原式 $=\frac{(x+1)-(x-1)}{x^2-1}+\frac{(x+2)-(x-2)}{x^2-4}$

$$=\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}=\frac{2(x^2-4)+4(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)}$$

$$=\frac{2x^2-8+4x^2-4}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{6(x^2-2)}{(x^2-1)(x^2-4)}.$$

15. $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x^2-7x+12}$.

解. 原式 $=\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{1}{(x-3)(x-4)}$

$$=\frac{(x-4)-(x-2)}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{-2}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

問題六十一 P. 114

試實行下列各分數式之乘除。

1. $\frac{2a}{3b}\times\frac{6bc}{5a^2}$ 答. $\frac{4c}{5a}$.

2. $\frac{a^2}{bc}\times\frac{b^2}{ac}\times\frac{c^2}{ab}$ 答. 1.

3. $\frac{4a^2b}{5x^2y}\div\frac{3ab^3}{15xy^2}$

解. 原式 $=\frac{4a^2b}{5x^2y}\times\frac{15xy^2}{3ab^3}=\frac{4ay}{b^2x}$

4. $\frac{3a^2b^3c^4}{4x^2y^3z^4} \div \frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^3z^2}$

解. 原式$=\frac{3a^2b^3c^4}{4x^2y^3z^4} \times \frac{3x^4y^3z^2}{4a^4b^3c^2}=\frac{9c^2x^2}{16a^2z^2}$.

5. $\frac{1}{x^2-y^2} \div \frac{1}{x-y}$

解. 原式$=\frac{1}{(x+y)(x-y)} \times (x-y)=\frac{1}{x+y}$.

6. $\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x+2}{x^2-1} \times \frac{x-1}{(x+2)^2}$

解. 原式$=\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x+2}{(x+1)(x-1)} \times \frac{x-1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}$

7. $\frac{6(ab-b^2)}{a(a+b)^2} \div \frac{ab^2}{a(a^2-b^2)}$

解. 原式$=\frac{6b(a-b)}{a(a+b)^2} \times \frac{a(a+b)(a-b)}{ab^2}=\frac{6(a-b)^2}{ab(a+b)}$

8. $\frac{ax}{x+a} \times \left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)$

解. 原式$=\frac{ax}{x+a} \times \frac{x^2-a^2}{ax}=x-a$.

9. $\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\left(b-\frac{ab}{a-b}\right)$

解. 原式$=\left(\frac{a^2-ab}{a-b}+\frac{ab}{a-b}\right)\left(\frac{ab-b^2}{a-b}-\frac{ab}{a-b}\right)$

$$=\frac{a^2}{a-b} \times \frac{-b^2}{a-b}=\frac{-a^2b^2}{(a-b)^2}.$$

10. $\frac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2} \times \frac{x(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$.

解. 原式$=\frac{x(a-x)}{(a+x)^2} \times \frac{x(a+x)}{(a-x)^2}=\frac{x^2}{(a+x)(a-x)}=\frac{x^2}{a^2-x^2}$.

11. $\frac{8x^2}{x^3-y^3} \div \frac{4x^2}{x^2+xy+y^2}$.

解. 原式$=\frac{8x^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} \times \frac{x^2+xy+y^2}{4x^2}=\frac{2}{x-y}$.

12. $\dfrac{x^6-y^6}{x^4+2x^2y^2+y^4}\times\dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}\times\dfrac{x+y}{x^3-y^3}$

解. 原式$=\dfrac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)(x^2+y^2)(x+y)}{(x^2+y^2)^2(x^2-xy+y^2)(x^3-y^3)}$

$=\dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x+y)}{(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)}=\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

問題六十二　P. 116

下列各式，試化之爲簡式。

1. $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$

解. 原式$=1-\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}=1-\dfrac{x}{x+1}$

$=\dfrac{x+1-x}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}$.

2. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

解. 原式$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x+1}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{x+1-x}{x+1}}=\dfrac{x+1}{x+1-x}=x+1$.

3. $\dfrac{\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}}{\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1-x}{x}}$

解. 分子$=\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{x^2}{x(1+x)}+\dfrac{1-x^2}{x(1+x)}=\dfrac{1}{x(1+x)}$

分母$=\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{x^2}{x(1+x)}-\dfrac{1-x^2}{x(1+x)}=\dfrac{2x^2-1}{x(1+x)}$

$$\therefore \text{原式}=\frac{1}{x(1+x)}\div\frac{2x^2-1}{x(1+x)}=\frac{1}{x(1+x)}\times\frac{x(1+x)}{2x^2-1}$$

$$=\frac{1}{2x^2-1}.$$

4．方程式 $a(x-1)+b(x+2)=cx$，試求其根，並實驗之。

解．即　$ax-a+bx+2b=cx$

整　理　$(a+b-c)x=a-2b$　　$\therefore\quad x=\dfrac{a-2b}{a+b-c}.$

實　驗　以 x 之值代入原方程式：

$$\text{左式}=a\left(\frac{a-2b}{a+b-c}-1\right)+b\left(\frac{a-2b}{a+b-c}+2\right)$$

$$=a\times\frac{a-2b-a-b+c}{a+b-c}+b\times\frac{a-2b+2a+2b-2c}{a+b-c}$$

$$=\frac{a(-3b+c)}{a+b-c}+\frac{b(3a-2c)}{a+b-c}$$

$$=\frac{-3ab+ac+3ab-2bc}{a+b-c}=\frac{ac-2bc}{a+b-c}.$$

$$\text{右式}=c\times\frac{a-2b}{a+b-c}=\frac{ac-2bc}{a+b-c}$$

可知所求之根，爲正確之答數。

5．方程式 $(ax+c)^2=a^2(x^2+bx+c)$ 試求其根，幷實驗之。

解．$a^2x^2+2acx+c^2=a^2x^2+a^2bx+a^2c$

$$(2ac-a^2b)x=a^2c-c^2$$

$$\therefore\quad x=\frac{a^2c-c^2}{2ac-a^2b}.$$

實　驗　變原方程式爲：

$$2acx+c^2=a^2bx+a^2c$$

即　$2acx-a^2bx=a^2c-c^2$

將 x 之值代入上式：

$$\text{左式}=\frac{2ac(a^2c-c^2)}{2ac-a^2b}-\frac{a^2b(a^2c-c^2)}{2ac-a^2b}$$

$$=\frac{2a^2c^2-2c^3}{2c-ab}-\frac{a^3bc-abc^2}{2c-ab}$$

$$=\frac{2a^2c^2-2c^3-a^3bc+abc^2}{2c-ab}$$

$$=\frac{a^2c(2c-ab)-c^2(2c-ab)}{2c-ab}$$

$$=\frac{(2c-ab)(a^2c-c^2)}{2c-ab}=a^2c-c^2$$

右式 $=a^2c-c^2$

故知所求之根，爲正確之答數。

6．設 $x=\dfrac{a^2}{a-b}$ 求 $\dfrac{x-a}{b}-\dfrac{x-b}{a}$ 之值。

解. $x-a=\dfrac{a^2}{a-b}-a=\dfrac{a^2-a^2+ab}{a-b}=\dfrac{ab}{a-b}$

$x-b=\dfrac{a^2}{a-b}-b=\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

∴ $\dfrac{x-a}{b}=\dfrac{ab}{a-b}\div b=\dfrac{ab}{a-b}\times\dfrac{1}{b}=\dfrac{a}{a-b}$

$\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}\div a=\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2-ab+b^2}{a(a-b)}$

∴ 原式 $=\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a^2-ab+b^2}{a(a-b)}=\dfrac{a^2}{a(a-b)}-\dfrac{a^2-ab+b^2}{a(a-b)}$

$=\dfrac{a^2-a^2+ab-b^2}{a(a-b)}=\dfrac{ab-b^2}{a(a-b)}=\dfrac{b(a-b)}{a(a-b)}=\dfrac{b}{a}$.

問題集 XIV P.116

下列各分數式，試化爲最簡。

1．$\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}+\dfrac{y^2-(z-x)^2}{(y+z)^2-x^2}+\dfrac{z^2-(x-y)^2}{(z+x)^2-y^2}$

解. 原式 $=\dfrac{(x-y+z)(x+y-z)}{(x+y+z)(x+y-z)}+\dfrac{(y-z+x)(y+z-x)}{(y+z-x)(y+z+x)}$

$+\dfrac{(z-x+y)(z+x-y)}{(z+x-y)(z+x+y)}$

$=\dfrac{x-y+z+y-z+x+z-x+y}{x+y+z}=\dfrac{x+y+z}{x+y+z}=1$.

2. $\dfrac{a^2-(b+c)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{b^2-(c+a)^2}{(b-c)^2-a^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(c-a)^2-b^2}$

解. 原式$=\dfrac{(a+b+c)(a-b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)}+\dfrac{(b+c+a)(b-c-a)}{(b-c+a)(b-c-a)}$

$$+\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(c-a-b)(c-a+b)}$$

$$=\frac{a-b-c+b+c+a-c-a+b}{a+b-c}=\frac{a+b-c}{a+b-c}=1.$$

3. $\dfrac{(a-b)^2-c^2}{(a-c)^2-b^2}\times\dfrac{b^2-(c-a)^2}{c^2-(a-b)^2}$

解. 原式$=\dfrac{(a-b)^2-c^2}{(a-c)^2-b^2}\times\dfrac{(a-c)^2-b^2}{(a-b)^2-c^2}=1.$

4. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}+1\right)\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)$

解. 原式$=\dfrac{x^4+a^4-ax^3-a^3x+a^2x^2}{a^2x^2}\times\dfrac{x^2-a^2}{ax}$

$$=\frac{x^6-ax^5+a^5x-a^6}{a^3x^3}=\frac{x^3}{a^3}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-\frac{a^3}{x^3}.$$

5. $\dfrac{x^3+3x^2a+3ax^2+a^3}{x^3+y^3}\div\dfrac{(a+x)^2}{x^2-xy+y^2}$

解. 原式$=\dfrac{(x+a)^3}{(x^2-xy+y^2)(x+y)}\times\dfrac{x^2-xy+y^2}{(a+x)^2}=\dfrac{x+a}{x+y}.$

6. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\times\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3}\times\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x+2}$

解. 原式$=\dfrac{(x-1)^2}{(x-2)(x-3)}\times\dfrac{(x-2)^2}{(x-1)(x-3)}\times\dfrac{(x-3)^2}{(x-1)(x-2)}=1.$

7. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-6x+9}\div\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1}$

解. 原式$=\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)^2}\times\dfrac{(x-1)^2}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{(x-1)^4}{(x-2)(x-3)^3}$

8. $\left(\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{x}\right)\div\left(\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)$

解. 原式$=\dfrac{x^3-y^3}{xy^3}\div\dfrac{x^2+xy+y^2}{xy^2}$

$$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy^3}\times\frac{xy^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{x-y}{y}$$

9. $\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2-2\frac{a-b}{a+b}+1\right\}\div\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2-2\frac{a+b}{a-b}+1\right\}$

解. 原式$=\left(\frac{a-b}{a+b}-1\right)^2\div\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)^2=\left(\frac{-2b}{a+b}\right)^2\div\left(\frac{2b}{a-b}\right)^2$

$$=\frac{4b^2}{(a+b)^2}\times\frac{(a-b)^2}{4b^2}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

10. $\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3+3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+3\frac{a-b}{a+b}+1\right\}$

$$\div\left\{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3+3\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+3\frac{a+b}{a-b}+1\right\}$$

解. 原式$=\left(\frac{a-b}{a+b}+1\right)^3\div\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)^3$

$$=\left(\frac{2a}{a+b}\right)^3\div\left(\frac{2a}{a-b}\right)^3=\frac{8a^3}{(a+b)^3}\times\frac{(a-b)^3}{8a^3}$$

$$=\frac{(a-b)^3}{(a+b)^3}$$

11. $\frac{(a+b-c)^2-d^2}{(a+b)^2-(c+d)^2}+\frac{(b+c-a)^2-d^2}{(b+c)^2-(a+d)^2}+\frac{(c+a-b)^2-d^2}{(c+a)^2-(b+d)^2}$

解. 原式$=\frac{(a+b-c+d)(a+b-c-d)}{(a+b+c+d)(a+b-c-d)}$

$$+\frac{(b+c-a+d)(b+c-a-d)}{(b+c+a+d)(b+c-a-d)}$$

$$+\frac{(c+a-b+d)(c+a-b-d)}{(c+a+b+d)(c+a-b-d)}$$

$$=\frac{a+b-c+d+b+c-a+d+c+a-b+d}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{a+b+c+3d}{a+b+c+d}$$

12. $(x^3+y^3)\left\{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right\}\times\frac{1}{x^2-xy+y^2}$

$$+\left\{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right\}$$

解. 原式$=(x^2+y^3)\left\{\frac{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}{x^4-y^4}\right\}$

$$\times\frac{1}{x^2-xy+y^2}+\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}$$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)\times\frac{1}{x^2-xy+y^2}$$

$$\times\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}\times\frac{x^2-y^2}{4xy}=\frac{(x+y)xy}{x^2+y^2}$$

13. $$\frac{\dfrac{3x}{2}+\dfrac{x-1}{3}}{\dfrac{13}{6}(x+1)-\dfrac{x}{3}-2\dfrac{1}{2}}$$

解. 原式$=\dfrac{9x+2x-2}{6}\div\dfrac{13(x+1)-2x-15}{6}$

$$=\frac{11x-2}{6}\times\frac{6}{11x-2}=1.$$

14. $$\frac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}$$

解. 原式$=\dfrac{x^2-7x+6+6}{x-6}\div\dfrac{x^2-8x+12+3}{x-6}$

$$=\frac{x^2-7x+12}{x-6}\times\frac{x-6}{x^2-8x+15}=\frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-5)}=\frac{x-4}{x-5}.$$

15. $$\frac{3}{x+1}-\frac{2x-1}{x^2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}}$$

解. 原式$=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2(2x-1)}{2x^2+x-1}$

$$=\frac{3}{x+1}-\frac{2(2x-1)}{(2x-1)(x+1)}=\frac{3-2}{x+1}=\frac{1}{x+1}.$$

16. $$1+\frac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}$$

解. 原式$=1+\dfrac{(1-x)x}{1-x^2+2x^2}=1+\dfrac{x-x^2}{1+x^2}$

$$=\frac{1+x^2+x-x^2}{1+x^2}=\frac{1+x}{1+x^2}.$$

17. $$\frac{\left\{1+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right\}\left\{1-\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right\}}{\left\{1-\dfrac{c^3}{(a+b)^3}\right\}\left\{1-\dfrac{c}{a+b}\right\}}$$

解. 原式$=\dfrac{\left\{1+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right\}\left\{1+\dfrac{c}{a+b}\right\}\left\{1-\dfrac{c}{a+b}\right\}}{\left\{1-\dfrac{c}{a+b}\right\}\left\{1+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right\}\left\{1+\dfrac{c}{a+b}\right\}}=1.$

問題六十三　P. 119

試解下列各方程式。

1. $\dfrac{6}{x-2}=\dfrac{5}{x-3}$

解. 移　項　$\dfrac{6}{x-2}-\dfrac{5}{x-3}=0$

去分母　$6(x-3)-5(x-2)=0$

去括弧　$6x-18-5x+10=0$

移　項　$6x-5x=18-10$

合　併　$\therefore\quad x=8$

2. $\dfrac{16}{3x-4}=\dfrac{27}{5x-6}$

解. 移　項　$\dfrac{16}{3x-4}-\dfrac{27}{5x-6}=0$

去分母　$16(5x-6)-27(3x-4)=0$

去括弧　$80x-96-81x+108=0$

移　項　$80x-81x=96-108$

合　併　$-x=-12\quad\therefore\quad x=12.$

3. $\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x-5}{x-2}$

解. 移　項　$\dfrac{x-2}{x+1}-\dfrac{x-5}{x-2}=0$

去分母　$(x-2)(x-2)-(x-5)(x+1)=0$

去括弧　$x^2-4x+4-x^2+4x+5=0$

合　併　$9=0.$　　此題不合理.

4. $\dfrac{45}{2x-3}=\dfrac{57}{4x+5}$

解. 移　項　$\dfrac{45}{2x-3}-\dfrac{57}{4x+5}=0$

去分母　$45(4x+5)-57(2x-3)=0$

去括弧　$180x+225-114x+171=0$

移　項　$180x-114x=-225-171$

合　併　$66x=-396$　$\therefore\ x=-6.$

5. $x-\dfrac{x^2+3}{x+2}=1$

解. 移　項　$x-\dfrac{x^2+3}{x+2}-1=0$

去分母　$x^2+2x-x^2-3-x-2=0$

移　項　$2x-x=2+3$

合　併　$\therefore\ x=5.$

6. $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{7x-21}{7x-26}$

解. 移　項　$\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{7x-21}{7x-26}=0$

去分母　$(x-1)(7x-26)-(7x-21)(x-2)=0$

去括弧　$7x^2-33x+26-7x^2+35x-42=0$

移　項　$35x-33x=42-26$

合　併　$2x=16$　$\therefore\ 2x=8.$

7. $\dfrac{3+4x}{1+x}+\dfrac{3+2x}{1-x}=\dfrac{2x+1}{1+x}$

解. 移　項　$\dfrac{3+4x}{1+x}-\dfrac{2x+1}{1+x}+\dfrac{3+2x}{1-x}=0$

即　$\dfrac{2(1+x)}{1+x}+\dfrac{3+2x}{1-x}=0$

去分母　$2(1-x)+3+2x=0$

去括弧　　$2-2x+3+2x=0$

合　併　　$5=0$　　此題不合理.

問題六十四　　P. 122

解下列各方程式,並與驗之。

1. $\dfrac{x+7}{x+3}=\dfrac{x+3}{x+1}$

解. 以母除子　　$1+\dfrac{4}{x+3}=1+\dfrac{2}{x+1}$

即　　$\dfrac{4}{x+3}=\dfrac{2}{x+1}$

互　乘　　$4(x+1)=2(x+3)$

去括弧　　$4x+4=2x+6$

移　項　　$4x-2x=6-4$

合　併　　$2x=2$　$\therefore\ x=1.$

2. $\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{1}{x+8}$

解. 變原式　　$\dfrac{x+6-x-5}{(x+5)(x+6)}=\dfrac{x+8-x-6}{(x+6)(x+8)}$

互　乘　　$(x+6)(x+8)=2(x+5)(x+6)$

去括弧　　$x+8=2x+10$

移　項　　$x-2x=10-8$　　$\therefore\ x=-2.$

3. $\dfrac{2x-6}{3x-8}=\dfrac{2x-5}{3x-7}$

解. 互　乘　　$(2x-6)(3x-7)=(2x-5)(3x-8)$

去括弧　　$6x^2-32x+42=6x^2-31x+40$

移　項　　$32x-31x=42-40$　　$\therefore\ x=2.$

4. $\dfrac{4x-17}{x-3}+\dfrac{3x-10}{x-4}=7$

解. 以母除子　$4-\dfrac{5}{x-3}+3+\dfrac{2}{x-4}=7$

即　$-\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{2}{x-4}=0$

去分母　$-5(x-4)+2(x-3)=0$

去括弧　$-5x+20+2x-6=0$

移項, 合併　$3x=14$　$\therefore x=4\dfrac{2}{3}$.

5. $\dfrac{1}{x+7}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}$

解. 即　$\dfrac{-6}{(x+7)(x+1)}=\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$

互　乘　$-6(x+3)=2(x+7)$

去括弧　$-6x-18=2x+14$

移　項　$-6x-2x=14+18$

合　併　$8x=-32$　$\therefore\ x=-4$.

6. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+10}=\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+8}$

解. 移　項　$\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x+8}-\dfrac{1}{x+10}$

即　$\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{2}{(x+8)(x+10)}$

互　乘　$2(x+8)(x+10)=2(x+2)(x+4)$

即　$x^2+18x+80=x^2+6x+8$

移　項　$18x-6x=8-80$　$\therefore\ x=-6$

7. $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-6}$

解. 以母除子　$1+\dfrac{1}{x-2}-1-\dfrac{1}{x-3}=1+\dfrac{1}{x-5}-1-\dfrac{1}{x-6}$

即　$\dfrac{-1}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{-1}{(x-5)(x-6)}$

互　乘　$x^2-11x+30=x^2-5x+6$

移　項　　$5x-11x=6-30$

合　併　　$6x=24\quad\therefore\quad x=4.$

8. $\dfrac{2x+1}{x+1}+\dfrac{2x+9}{x+5}=\dfrac{2x+3}{x+2}+\dfrac{2x+7}{x+4}$

解. 以母除子　$2-\dfrac{1}{x+1}+2-\dfrac{1}{x+5}=2-\dfrac{1}{x+2}+2-\dfrac{1}{x+4}$

移　項　$\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+2}$

即　$\dfrac{3}{(x+4)(x+1)}=\dfrac{3}{(x+5)(x+2)}$

互　乘　$3(x+5)(x+2)=3(x+4)(x+1)$

即　$x^2+7x+10=x^2+5x+4$

移項，合併　$2x=-6\quad\therefore\quad x=-3.$

9. $\dfrac{2x-3}{2x-4}-\dfrac{2x-4}{2x-5}=\dfrac{2x-7}{2x-8}-\dfrac{2x-8}{2x-9}$

解. 以母除子　$1+\dfrac{1}{2x-4}-1-\dfrac{1}{2x-5}=1+\dfrac{1}{2x-8}-1-\dfrac{1}{2x-9}$

即　$\dfrac{1}{2x-9}-\dfrac{1}{2x-5}=\dfrac{1}{2x-8}-\dfrac{1}{2x-4}$

$$\frac{-4}{(2x-9)(2x-5)}=\frac{-4}{(2x-8)(2x-4)}$$

互　乘　$-4(2x-8)(2x-4)=-4(2x-9)(2x-5)$

$$4x^2-24x+32=4x^2-28x+45$$

移項，合併　$4x=13\qquad x=3\frac{1}{4}$

10. $\dfrac{16x-13}{4x-3}+\dfrac{40x-43}{8x-9}=\dfrac{32x-30}{8x-7}+\dfrac{20x-24}{4x-5}$

解. 以母除子　$4-\dfrac{1}{8x-3}+5+\dfrac{2}{8x-9}=4-\dfrac{2}{8x-7}+5-\dfrac{1}{4x-5}$

即　$\dfrac{2}{8x-9}-\dfrac{1}{4x-3}=\dfrac{1}{4x-5}-\dfrac{2}{8x-7}$

$$\frac{2(4x-3)-(8x-9)}{(8x-9)(4x-3)}=\frac{(8x-7)-2(4x-5)}{(4x-5)(8x-7)}$$

$$\frac{3}{(8x-9)(4x-3)}=\frac{3}{(4x-5)(8x-7)}$$

互乘 $3(4x-5)(8x-7)=3(8x-9)(4x-3)$

即 $32x^2-68x+35=32x^2-60x+27.$

移項, 合併 $8x=8$ $\therefore x=1.$

問題六十五 P. 123

試解下列各聯立分數方程式。

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{3x+1}=\dfrac{1}{5y+4} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{4x-3}=\dfrac{2}{7y-6} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 整理(1)爲 $6x-5y=2$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

整理(2)爲 $8x-7y=0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

變 (4)爲 $x=\dfrac{7}{8}y$ 代入(3)

即 $6\times\dfrac{7}{8}y-6y=2$ $21y-20y=8$

$\therefore y=8$ 代入 x $\therefore$ $x=7.$

2. $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{x-y}=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{7x-13}{3y-5}=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 整理(1)爲 $7x-11y=0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

整理(2)爲 $7x-12y=-7$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)−(4) $\therefore y=7$ 代入(3) $\therefore$ $x=11$

3. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4-2y}=\dfrac{1}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(2)為　$y=1-x$ 代入(1)

即　$\dfrac{3x+1}{4-2+2x}=\dfrac{4}{3}$

去分母　$9x+3=8+8x$

$\therefore\ x=5$ 代入 y　$\therefore\ y=-4$

4. $\begin{cases} \dfrac{xy}{y+2x}=\dfrac{1}{10} & \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{xy}{4y+3x}=\dfrac{1}{20} & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (1)逆數為　$\dfrac{y+2x}{xy}=\dfrac{10}{1}$ ……(3)

(2)逆數為　$\dfrac{4y+3x}{xy}=\dfrac{20}{1}$ ……(4)

變(3)為　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=10$ ……(5)

變(4)為　$\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=20$ ……(6)

(5)×4　$\dfrac{4}{x}+\dfrac{8}{y}=40$ ……(7)

(7)−(6)　$\dfrac{5}{y}=20$　$\therefore\ y=\dfrac{1}{4}$　代入(5)

$\dfrac{1}{x}=10-2\times4$　$\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$

5. $\begin{cases} \dfrac{xy}{y+2x}=\dfrac{1}{4} & \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{xy}{3y-2x}=\dfrac{1}{4} & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (1)逆數為　$\dfrac{y+2x}{xy}=4$ ……(3)

(2)逆數為　$\dfrac{3y-2x}{xy}=4$ ……(4)

變(4)為　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=4$ ……(5)

變(5)為　$\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=4$ ……(6)

(5)+(6)　　$\frac{4}{x}=8$　$\therefore$　$x=\frac{1}{2}$ 代入(5)

$\frac{2}{y}=4-2$　$\therefore$　$y=1.$

問題六十六　P. 128

1. 如 $a>b>c$，則 $c<\frac{a+b+c}{3}<a$　試證之。

證　明：$c<a$　　又　$a>b$

$c<b$　　$a>b$

$c=c$　　$a=a$

即　$3c<a+b+c$　　$3a>a+b+c$

$\therefore$　$c<\frac{a+b+c}{3}$　　$\therefore$　$a>\frac{a+b+c}{3}$

$\therefore$　$c<\frac{a+b+c}{3}<a.$

2. 如 a, b 爲不等之正數，則 $a^3+b^3>ab(a+b)$，試證之。

證　明：$a\neq b$　　$\therefore$　$a^2+b^2>2ab$

即　　$a^2-ab+b^2>ab$

兩端以 $(a+b)$ 乘之：

$(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b)$

$\therefore$　$a^3+b^3>ab(a+b).$

3. 如 $a+b>0$，則 $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a^2}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 試證之。但 $a\neq b\neq 0$.

證　明：$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}=\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}=\left(\frac{a+b}{ab}\right)\left(\frac{a^2-ab+b^2}{ab}\right)$

又　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$

$a\neq b$　　$\therefore$　$a^2+b^2>2ab$

兩端減 ab，再以 ab 除之：

即 $\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab}>1$

∴ $\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)\left(\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab}\right)>\dfrac{a+b}{ab}$,

∴ $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

4．解下列各不等式：

（a） $2x-3>1$

解. $2x>1+3$

即 $2x>4$

∴ $x>2$.

（b） $9x-5>2x+23$

解. $9x-2x>5+23$

$7x>28$

∴ $x>4$.

（c） $5x-1<6x+4$

解. $4x-6x<4+1$

$-x<5$

∴ $x>-5$.

（d） $3x-\dfrac{x}{2}<30$

解. $6x-x<60$

$5x<60$

∴ $x<12$.

5．求同時適合下列各組不等式中 x 之數值界限。

（a） $\begin{cases} 4x-11>\dfrac{x}{3} & \cdots\cdots(1) \\ 20-2x>10 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由（1）得 $12x-33>x$

$12x-x>33$

$11x>33$

∴ $x>3$.

由（2） $20-2x>10$

$-2x>10-20$

由 $2x<10$

∴ $x<5$

∴ $5>x>3$.

（b） $\begin{cases} 3-4x<7 & \cdots\cdots(1) \\ 5x+10<20 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由（1） $3-4x<7$　　由（2） $5x+10<20$

$-4x<7-3$ $\qquad\qquad$ $5x<20-10$

即 $4x>-4$ $\qquad\qquad$ 即 $5x<10$

$\therefore\ x>-1.$ $\qquad\qquad$ $\therefore\ x<2$

$\therefore\ 2>x>-1.$

問 題 集 XV P. 128

1. $\begin{cases} \dfrac{7-2x}{5-3y}=\dfrac{3}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y-x=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲 $9y-4x=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(2)\times 4$ $\quad 4y-4x=16 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)-(4)$ $\quad 5x=-15$ $\quad\therefore\ y=-3$ 代入(2)

$\therefore\ x=-7.$

2. $\begin{cases} \dfrac{x-4}{y+4}=\dfrac{x-3}{y+7} \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x+2}{y-2}=\dfrac{x+5}{y-1} \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲 $y-3x=-16 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)爲 $3y-x=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)\times 3$ $\quad 3y-9x=-48 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$(4)-(5)$ $\quad 8x=56$ $\quad\therefore\ x=7$ 代入(3)

$\therefore\ y=5.$

3. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-1}-\dfrac{x-1}{y}=\dfrac{6}{y} \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲 $xy+y-xy+x+y-1=6y-6$

即 $\qquad x-4y=-5 \cdots(3)$

(2)−(3)　　$3y=6$　$\therefore$　$y=2$ 代入(3)

$\therefore$　$x=3.$

4. $\begin{cases} \dfrac{13}{x+2y+3}+\dfrac{3}{4x-5y+6}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{3}{6x-5y+4}=\dfrac{19}{3x+2y+1} \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)為　　$52x-65y+78+3x+6y+9=0$

即　　$55x-59y+87=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)為　　$9x+6y+3-114x+95y-76=0$

即　　$105x-101y+73=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)−(3)　　$50x-42y-14=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(3)−(5)　　$5x-17y+101=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

(6)×10　　$50x-170y+1010=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

(5)−(7)　　$128y-1024=0$　即　$128y=1024$

$\therefore$　$y=8$ 代入(6)

$$\therefore\quad x=\frac{17\times 8-101}{5}=7.$$

5. $\begin{cases} \dfrac{x+3y+13}{4x+5y-25}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{8x+y+6}{5x+3y-23}=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)為　　$x+3y+13=12x+15y-75$

即　　$11x+12y=88 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)為　　$8x+y+6=25x+15y-115$

即　　$17x+14y=121 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)×7　　$77x+84y=616 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(4)×6　　$102x+84y=726 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

(6)−(5)　$25x=110$　　$\therefore\ x=4.4$ 代入(3)

$\therefore\ y=3.3$

6. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{5y}{3y-4x} & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{6x}{4y-5x} & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)為　$3y-4x=5xy$

兩端以 xy 除之:　$\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=5$ ⋯⋯⋯⋯(3)

變(2)得　$4y-5x=6xy$

兩端以 xy 除之:　$\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{y}=6$ ⋯⋯⋯⋯(4)

(3)×5　$\dfrac{15}{x}-\dfrac{20}{y}=25$ ⋯⋯⋯⋯(5)

(4)×4　$\dfrac{16}{x}-\dfrac{20}{y}=24$ ⋯⋯⋯⋯(6)

(6)−(5)　$\dfrac{1}{x}=-1$　$\therefore\ x=-1$ 代入(3)

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2}$.

7. $\begin{cases} \dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{b}{a} & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{xy}{ax+by}=\dfrac{a}{b} & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)為　$\dfrac{ay+bx}{xy}=\dfrac{a}{b}$

即　$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{a}{b}$ ⋯⋯⋯⋯(3)

變(2)為　$\dfrac{ax+by}{xy}=\dfrac{b}{a}$

即　$\dfrac{a}{y}+\dfrac{b}{x}=\dfrac{b}{a}$ ⋯⋯⋯⋯(4)

(3)×a　$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{ab}{y}=\dfrac{a^2}{b}$ ⋯⋯⋯⋯(5)

$(4)\times b$ $\quad \dfrac{ab}{y}+\dfrac{b^2}{x}=\dfrac{b^2}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

$(5)-(6)$ $\quad \dfrac{a^2-b^2}{x}=\dfrac{a^3-b^3}{ab}$

$$\therefore\quad x=\frac{ab(a^2-b^2)}{a^3-b^3}=\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$$

$(3)\times b$ $\quad \dfrac{ab}{x}+\dfrac{b^2}{y}=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

$(4)\times a$ $\quad \dfrac{a^2}{y}+\dfrac{ab}{x}=b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

$(8)-(7)$ $\quad \dfrac{a^2-b^2}{y}=b-a$

$$\therefore\quad y=\frac{a^2-b^2}{-(a-b)}=-(a+b)$$

8．設一分數，其分子加1，其分母減1，則為1。於分子則加以分母，於分母則減於分子，則為4。問原分數若何。

解 設 分子$=x$ 分母$=y$.

依題意得 $\begin{cases}\dfrac{x+1}{y-1}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2ex]\dfrac{x+y}{y-x}=4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

變(1)為 $x+1=y-1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)為 $x+y=4y-4x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由(4)得 $x=\dfrac{3}{5}y$ 代入(3)

$$\frac{3}{5}y+1=y-1$$

$$3y+5=5y-5$$

$2y=10\quad\therefore\quad y=5$ 代入x

$$\therefore\quad x=3.$$

故原分數為$\dfrac{3}{5}$.

9. 二有效數字，組成二位之數，此數爲二數字之和所除，其商爲7。由二數字交換後，所成之數減12，而以原數十位數字減單位數字之差除之，則其商爲9，求原數爲何數。

解. 設 十位數字$=x$ 單位數字$=y$

依題意得 $\begin{cases} \dfrac{10x+y}{x+y}=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{10y+x-12}{x-y}=9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

變（1）爲 $10x+y=7x+7y$

即 $x=2y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變（2）爲 $10y+x-12=9x-9y$

即 $19y-8x=12 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

將（3）代入（4） $19y-8\times2y=12$

$3y=12 \quad \therefore \quad y=4$ 代入（3）

$\therefore \quad x=8.$

故其所成之數爲84.

10. 設有二分數，其分子一爲2，一爲5，此二分數之和之二倍爲3，二分母交換所成二分數之和爲2，問原有二分數爲何數。

解. 設 2之分母爲x， 5之分母爲y.

依題意得 $\begin{cases} 2\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}\right)=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{5}{x}=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

變（1）爲 $\dfrac{4}{x}+\dfrac{10}{y}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

（2）×5 $\dfrac{25}{x}+\dfrac{10}{y}=10\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

（4）−（3） $\dfrac{21}{x}=7 \quad \therefore \quad x=3$ 代入（2）

$$\frac{2}{y}=2-\frac{5}{3} \qquad \therefore \quad y=6.$$

故二分數爲$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{6}$.

11. 二有效數字所組成之數，以數字之和除之，得整商6，剩餘3，數字交換所得之數，以數字之和除之，得整商4，剩餘9，問原數爲何數。

解. 設　十位數字$=x$　單位數字$=y$.

依題意得 $\begin{cases} \dfrac{10x+y-3}{x+y}=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{10x+x-9}{x+y}=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

變(1)爲　$10x+y-3=6x+6y$

即　$4x-5y=3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)爲　$10y+x-9=4x+4y$

即　$3x-6y=-9\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)×3　$12x-15y=9\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(4)×4　$12x-24y=-36\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

(5)−(6)　$9y=45$　$\therefore$　$y=5$ 代入(3)

$4x=3+5\times5$　$\therefore$　$x=7$.

故原數爲75.

12. 設沿川有甲乙二村相距12里，一人自甲至乙步行至半道，舍陸乘舟，溯流而上，共經7時而抵乙，歸時步行至半道，復舍陸乘舟，順流而下，共經6時而抵甲。但知步行之速，歸時爲往時$\frac{3}{4}$，舟行之速，歸時爲往時之二倍，問往時步行及舟行之速率若干。

解. 設　往時：　步速$=x$里　　舟速$=y$里

$$步行需時=\frac{\frac{12}{2}}{x}=\frac{6}{x}\qquad 舟行需時=\frac{\frac{12}{2}}{y}=\frac{6}{y}$$

歸時：　步速$=\frac{3}{4}x$里．　舟速$=2y$里

$$步行需時=\frac{6}{\frac{3}{4}x}=\frac{8}{x}\qquad 舟行需時=\frac{6}{2y}=\frac{3}{y}$$

$$依題意得\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2ex] \dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$$(2)\times2\qquad \frac{16}{x}+\frac{6}{y}=12\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$(3)-(1)\qquad \frac{10}{x}=5\qquad \therefore\ x=2代入(1)$$

$$\frac{6}{y}=7-3\qquad \therefore\ y=1\frac{1}{2}$$

即往步行之速爲2里，舟行之速爲$1\frac{1}{2}$里。

第五編 二次方程式

問題六十七　P. 132

下列各無理數，試用公式(3)，或(4)，化之爲簡單。

1．　$\sqrt{8}$

解．原式$=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$．

2．　$\sqrt{128}$

解．原式$=\sqrt{64\times2}=8\sqrt{2}$．

3．　$\sqrt{396}$

解．原式$=\sqrt{36\times11}=6\sqrt{11}$．

4.　$\sqrt{507}$

解. 原式$=\sqrt{169\times 3}=13\sqrt{3}$.

5.　$\sqrt{\frac{1}{2}}$

解. 原式$=\sqrt{\frac{2}{2\times 2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.　$\sqrt{\frac{2}{3}}$

解. 原式$=\sqrt{\frac{2\times 3}{3\times 3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

7.　$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}}$

解. 原式$=\sqrt{\frac{7\times 9\times 2}{8\times 2}}=\frac{3}{4}\sqrt{6}$.

8.　$\sqrt{\frac{363}{5}}$

解. 原式$=\sqrt{\frac{3\times 121\times 5}{5\times 5}}=\frac{11\sqrt{3\times 5}}{6}=\frac{11}{5}\sqrt{15}$

問題六十八　P. 132

下列各式，設 a 及 $a+b$ 爲正，試化之爲簡單之式。

1.　$\sqrt{a^2(x+y)}$

解. 原式$=a\sqrt{x+y}$.

2.　$\sqrt{\frac{1+x}{a}}$

解. 原式$=\sqrt{\frac{a(1+x)}{a^2}}=\frac{\sqrt{a(1+x)}}{a}$.

3.　$\sqrt{p^2-q}$

解. 原式$=\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}=\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

4. $\sqrt{a^3+2a^2b+ab^2}$

解. 原式 $=\sqrt{a(a^2+2ab+b^2)}=(a+b)\sqrt{a}$.

5. $\sqrt{a^3-2a^2b+ab^2}$

解. 原式 $=\sqrt{a(a^2-2ab+b^2)}=(a-b)\sqrt{a}$.

問 題 六 十 九 P. 133

試解下列純二次方程式。

1. $x^2=225$

解. $x=\pm\sqrt{225}$

$\therefore\ x=\pm 15.$

2. $4x^2=36.$

解. $x^2=9$

$\therefore\ x=\pm 3$

3. $9x^2=25$

解. $x^2=\frac{25}{9}$

$\therefore\ x=\pm\frac{5}{3}.$

4. $\frac{2}{3}x^2=24$

解. $x^2=24\times\frac{3}{2}=36$

$\therefore\ x=\pm 6.$

5. $2x^2=54$

解. $x^2=27$

$\therefore\ x=\pm 3\sqrt{3}.$

6. $8x^2=1$

解. $x^2=\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$

$\therefore\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}.$

7. $(2x-3)(2x+3)=91$

解. 即 $4x^2-9=91$

移項, 合併 $4x^2=100.$

以 4 除 $x^2=25$ $\therefore\ x=\pm 5.$

8. $(5+x)^2+(5-x)^2=58$

解. 即 $25+10x+x^2+25-10x+x^2=58$

合 併 $50+2x^2=58$ 即 $2x^2=8.$

以2除　　$x^2=4$　　$\therefore x=\pm 2$。

9. $(4x-3)^2+(4x+3)^2=26$

解. 即　$16x^2-24x+9+16x^2+24x+9=26$

移項　$16x^2+16x^2=26-18$

合併　$32x^2=8$

以32除　$x^2=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$　$\therefore x=\pm\dfrac{1}{2}$

10. $\dfrac{x^2}{4}+7-\dfrac{2x^2}{3}=\dfrac{5x^2}{6}-153$

解. 去分母　$3x^2+84-8x^2=10x^2-153\times 12$

移項,合併　$15x^2=1920$　即　$x^2=128$

$\therefore x=\pm\sqrt{64\times 2}=\pm 8\sqrt{2}$.

問題七十　P. 134

下列各式,加以適當之數使之成完全平方。

1. x^2-5x　　答. $\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$

2. $x^2+\dfrac{4}{5}x$.　　答. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

3. $x^2-\dfrac{5}{4}x$　　答. $\left(\dfrac{5}{8}\right)^2$

問題七十一　P. 136

求下列各式之根。

1. $x^2-3x+2=0$

解. 移項　$x^2-3x=-2$

各加$\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$　$x^2-3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}-2$

即　　$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

開平方　　$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}=2$ 或 1.

2．$x^2-5x+6=0$

解. 移　項　　$x^2-5x=-6$

各加$\left(\frac{5}{2}\right)^2$　　$x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-6$

即　　$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

開　方　　$x-\frac{5}{2}=\pm\frac{1}{2}$

$x=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}=3$ 或 2

3．$x^2+10x=24$

解. 各加5^2　　$x^2+10x+5^2=25+24$

即　　$(x+5)^2=49$

開　方　　$x+5=\pm7$

$\therefore\ x=\pm7-5=2$ 或 -12.

4．$2x^2-1=5x+2$

解. 移　項　　$2x^2-5x=3$

以2除　　$x^2-\frac{5}{2}x=\frac{3}{2}$

各加$\left(\frac{5}{4}\right)^2$　　$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}+\frac{3}{2}$

即　　$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$

開　方　　$x-\frac{5}{4}=\pm\frac{7}{4}$

$\therefore\ x=\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4}=3$ 或 $-\frac{1}{2}$

5．$3x^2-4x=39$

解．以3除 $$x^2-\frac{4}{3}x=13$$

各加$\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $$x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}+13$$

即 $$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{121}{9}$$

開　方 $$x-\frac{2}{3}=\pm\frac{11}{3}$$

$$\therefore\ x=\frac{2}{3}\pm\frac{11}{3}=\frac{13}{3}\text{ 或 }-3.$$

6．$x^2+10x=2x^2-5x+50$

解．移　項 $$x^2-15x=-50$$

各加$\left(\frac{15}{2}\right)^2$ $$x^2-15x+\left(\frac{15}{2}\right)^2=\frac{225}{4}-50$$

即 $$\left(x-\frac{15}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

開　方 $$x-\frac{15}{2}=\pm\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{15}{2}\pm\frac{5}{2}=10\text{ 或 }5.$$

7．$(x-1)(x-2)=20$

解．即 $$x^2-3x+2=20$$

移　項 $$x^2-3x=18$$

各加$\left(\frac{3}{2}\right)^2$ $$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+18$$

即 $$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$$

開　方 $$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{3}{2}\pm\frac{9}{2}=6\text{ 或 }-3$$

8．$4(x^2-1)=4x-1$

解．去括弧 $$4x^2-4=4x-1$$

移項 $3x^2-4x=3$

以4除 $x^2-x=\frac{3}{4}$

各$\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=1$

開方 $x-\frac{1}{2}=\pm1$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}\pm1=1\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$.

9. $x^2+3a^2=4ax$

解. 移項 $x^2-4ax=-3a^2$

各加$(2a)^2$ $x^2-4ax+(2a)^2=4a^2-3a^2$

即 $(x-2a)^2=a^2$

開方 $x-2a=\pm a$

$\therefore\ x=2a\pm a=3a$ 或 a.

10. $x^2+2ab=b^2+2ax$

解. 移項 $x^2-2ax=b^2-2ab$

各加a^2, $x^2-2ax+a^2=a^2-2ab+b^2$

即 $(x-a)^2=(a-b)^2$

開方 $x-a=\pm(a-b)$

$\therefore\ x=a\pm(a-b)=2a-b$ 或 b.

題七十二 P.137

1. 用因數分解法解問題七十一 1, 2, 3, 各題。

(1) $x^2-3x+2=0$

解. 分解 $(x-2)(x-1)=0$ $\therefore\ x=2$ 或 1.

（2） $x^2-5x+6=0$

解. 分　解　　$(x-2)(x-3)=0$　　$\therefore\ x=2$ 或 $3.$

（3） $x^2+10x=24$

解. 移　項　　$x^2+10x-24=0$

分　解　　$(x-2)(x+12)=0$　　$\therefore\ x=2$ 或 $-12.$

2. 分解下列各式之因數

$$x^2-18x-319,\quad x^2-4x-1,\quad 24x^2-5x-14.$$

解.

$$\begin{aligned}
\text{一式} &= x^2-18x+9^2-(319+81)\\
&=(x-9)^2-400\\
&=(x-9)^2-20^2\\
&=(x-9+20)(x-9-20)\\
&=(x+11)(x-59).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{二式} &= x^2-4x+2^2-(1+4)\\
&=(x-2)^2-5\\
&=(x-2)^2-(\sqrt{5})^2\\
&=(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{三式} &= (144x^2-30x-84)/6\\
&=\left\{(12x)^2-\frac{5}{2}\times 12x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}-84\right\}/6\\
&=\left\{\left(12x-\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{37}{4}\right)^2\right\}/6\\
&=\left(12x-\frac{5}{4}-\frac{37}{4}\right)\left(12x-\frac{5}{4}+\frac{37}{4}\right)/6\\
&=\left(12x-\frac{42}{4}\right)\left(12x+\frac{32}{4}\right)/6\\
&=\left(2x-\frac{7}{4}\right)\left(12x+8\right)\\
&=(8x-7)(3x+2).
\end{aligned}$$

3. 不以 x^2 之係數除各項，解問題七十一 4, 5, 8. 各題。

(4)　$2x^2-1=5x+2.$

解. 移　項　　　$2x^2-5x=3$

以2乘　　　$(2x)^2-5(2x)=6$

各加 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$　　$(2x)^2-5(2x)+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}+6$

即　　　$\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$

開　方　　　$2x-\frac{5}{2}=\pm\frac{7}{2}$

即　　　$2x=\frac{5}{2}\pm\frac{7}{2}=6$ 或 -1

$\therefore\ x=3$ 或 $-\frac{1}{2}$

(5)　$3x^2-4x=39$

解. 以3乘　　　$(3x)^2-4(3x)=117$

各加2^2　　$(3x)^2-4(3x)+2^2=117+4$

即　　　$(3x-2)^2=121$

開　方　　　$3x-2=\pm 11$

即　　　$3x=2\pm 11=13$ 或 $-9.$

$\therefore\ x=\frac{13}{3}$ 或 $-3.$

(6)　$4(x^2-1)=4x-1$

解. 整　理　　　$4x^2-4x=3$

即　　　$(2x)^2-2(2x)=3$

各加1　　$(2x)^2-2(2x)+1=3+1$

即　　　$(2x-1)^2=4$

開　方　　　$2x-1=\pm 2$

即　　　$2x=1\pm 2=3$ 或 -1

$$\therefore\ x=1\frac{1}{2}\ \text{或}\ -\frac{1}{2}.$$

解下列方程式。

4．$(2x-3)^2=8x$

解．整　理　　$4x^2-20x=-9$

各加 5^2　　$4x^2-20x+5^2=25-9$

即　　$(2x-5)^2=16$

開　方　　$2x-5=\pm4$

即　　$2x=5\pm4=9$ 或 1

$$\therefore\ x=4\frac{1}{2}\ \text{或}\ \frac{1}{2}.$$

5．$(x+1)(2x+3)=4x^2-22$

解．整　理　　$2x^2-5x=25$

以 2 乘　　$(2x)^2-5(2x)=50$

各加 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$　　$(2x)^2-5(2x)+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}+50$

即　　$\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{225}{4}$

開　方　　$2x-\frac{5}{2}=\pm\frac{15}{2}$

即　　$2x=\frac{5}{2}\pm\frac{15}{2}=10$ 或 -5

$$\therefore x=5\ \text{或}\ -2\frac{1}{2}$$

6．$3x^2-17x+10=0$

解．移　項　　$3x^2-17x=-10$

以 3 乘　　$(3x)^2-17(3x)=-30$

各加 $\left(\frac{17}{2}\right)^2$　　$(3x)^2-17(3x)+\left(\frac{17}{2}\right)^2=\frac{289}{4}-30$

即　　$\left(3x-\frac{17}{2}\right)^2=\frac{169}{4}$

開　方　　$3x-\frac{17}{2}=\pm\frac{13}{2}$

即　　$3x=\frac{17}{2}\pm\frac{13}{2}=15$ 或 2

$\therefore\ x=5$ 或 $\frac{2}{3}$.

7．$91x^2-2x=45$

解．移　項　　$91x^2-2x-45=0$

分　解　　$(7x-5)(13x+9)=0$

$7x=5$ 或 $13x=-9$

$\therefore\ x=\frac{5}{7}$ 或 $-\frac{9}{13}$.

8．$x^2+2x=1$

解．各加1　　$x^2+2x+1=1+1$

即　　$(x+1)^2=2$

開　方　　$x+1=\pm\sqrt{2}$　$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{2}$.

9．$9x^2-18x-11=0$

解．移　項　　$(3x)^2-6(3x)=11$

各加3^2　　$(3x)^2-6(3x)+3^2=(11+9)$

即　　$(3x-3)^2=20$

開　方　　$3x-3=\pm2\sqrt{5}$

即　　$3x=3=\pm2\sqrt{5}$　$\therefore\ x=\frac{3\pm2\sqrt{5}}{3}$

10．$4x^2+4ax=b^2-a^2$

解．移　項　　$4x^2+4ax+a^2=b^2$

即　　$(2x+a)^2=b^2$

開　方　　$2x+a=\pm b$

即　　$2x=-a\pm b$　$\therefore\ a=\frac{-a\pm b}{2}$.

11. $ax^2-(a^2+1)x+a=0$

解. 分解 $(ax-1)(x-a)=0$

$ax=1$ 或 $x=a$ $\therefore$ $x=a$ 或 $\frac{1}{a}$.

12. $(a-x)(b-x)=2(a-b)^2$

解. $ab-(a+b)x+x^2=2(a-b)^2$

即 $x^2-(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=2(a-b)^2-ab+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{9(a-b)^2}{2}$$

開方 $x-\frac{a+b}{2}=\pm\frac{3(a-b)}{2}$

$\therefore$ $x=2a-b$ 或 $2b-a$.

問題七十三 P. 138

解下列各方程式。

1. $x^2+1=0$

解. $x^2=-1$

$\therefore$ $x=\pm i$.

2. $x^2+9=0$

解. $x^2=-9$

$\therefore$ $x=\pm 3i$.

3. $x^2+7=0$

解. $x^2=-7$

$\therefore$ $x=\pm i\sqrt{7}$.

4. $2x^2+3=0$

解. $2x^2=-3$ 即 $x^2=-\frac{3}{2}$

$\therefore$ $x=\pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$

5. $4x^2+25=0$

解. $4x^2=-25$

$x^2=-\frac{25}{4}$

$\therefore$ $x=\pm\frac{5}{2}i$

6. $x^2+5=4x$

解. $x^2-4x+4=-1$

$(x-2)^2=-1$

$x-2=\pm\sqrt{-1}$ $\therefore$ $x=2\pm i$

7. $x^2-2x+4=0$

解. $x^2-2x+1=-3$

$(x-1)^2=-3$

$x-1=\pm i\sqrt{3}$

$\therefore\ x=1\pm i\sqrt{3}.$

8. $2x^2-2x+1=0$

解. $4x^2-4x+1=-1$

$(2x-1)^2=-1$

$2x-1=\pm i$

$\therefore\ x=\dfrac{1\pm i}{2}.$

6. $25x^2-20x+13=0$

解. 移　項　　$25x^2-20x+4=-9$

即　　$(5x-2)^2=-9$

開　方　　$5x-2=\pm 3i$

移　項　　$5x=2\pm 3i$　　$\therefore\ x=\dfrac{2\pm 3i}{5}.$

10. $3x^2+4x+3=0$

解. 以3乘　　$9x^2+12x+9=0$

即　　$9x^2+12x+4=-5$

亦　即　　$(3x+2)^2=-5$

開　方　　$3x+2=\pm i\sqrt{5}$

移　項　　$3x=-2\pm i\sqrt{5}$　$\therefore\ x=\dfrac{-2\pm i\sqrt{5}}{3}$

問題七十四　　P. 140

應用上列公式解法，試解問題七十各題，及問題七十二4至12，及問題七十三7至10。

問題七十一之各題：

(1)　$x^2-3x+2=0$

解. $\therefore\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\times 2}}{2}=\dfrac{2\pm 1}{2}=1$ 或 2.

(2)　$x^2-5x+6=0$

解. $\therefore\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4\times6}}{2}=\dfrac{5\pm1}{2}=3$ 或 2.

(3) $x^2+10x=24$

解. 移 項 $x^2+10x-24=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100+96}}{2}=\dfrac{-10\pm14}{2}=2$ 或 -12

(4) $2x^2-1=5x+2$

解. 整 理 $2x^2-5x-3=0$

$\therefore\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2+4\times2\times3}}{2\times2}=\dfrac{5\pm7}{4}=3$ 或 $-\dfrac{1}{2}$

(5) $3x^2-4x=39$

解. 移 項 $3x^2-4x-39=0$

$\therefore\ x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+4\times3\times39}}{2\times3}=\dfrac{4\pm22}{6}=\dfrac{13}{3}$ 或 -3,

(6) $x^2+10x=2x^2-5x+50$.

解. 整 理 $x^2-15x+50=0$

$\therefore\ x=\dfrac{15\pm\sqrt{225-200}}{2}=\dfrac{15\pm5}{2}=10$ 或 5.

(7) $(x-1)(x-2)=20$

解. 整 理 $x^2-3x-18=0$

$\therefore\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\dfrac{3\pm9}{2}=6$ 或 -3

(8) $4(x^2-1)=4x-1$

解. 整 理 $4x^2-4x-3=0$

$\therefore\ x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+48}}{2\times4}=\dfrac{4\pm8}{8}=1\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{1}{2}$.

(9) $x^2+3a^2=4ax$

解. 整 理 $x^2+4ax+3a^2=0$

$\therefore\ x=\dfrac{4a\pm\sqrt{16a^2-12a^2}}{2}=\dfrac{4a\pm2a}{2}=3a$ 或 a.

(10)　$x^2+2ab=b^2+2ax$

解. 整　理　$2x^2-2ax+2ab-b^2=0$

$$\therefore\ x=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-8ab+4b^2}}{2}=\frac{2a\pm2(a-b)}{2}=2a-b\text{ 或 }b.$$

問題七十二：

（4）　$(2x-3)^2=8x$

解. 整　理　$4x^2-20x+9=0$

$$\therefore\ x=\frac{20\pm\sqrt{400-144}}{2\times4}=\frac{20\pm16}{8}=4\frac{1}{2}\text{ 或 }\frac{1}{2}.$$

（5）　$(x+1)(2x+3)=4x^2-22$

解. 整　理　$2x^2-5x-25=0$

$$\therefore\ x=\frac{5\pm\sqrt{25+200}}{2\times2}=\frac{5\pm15}{4}=5\text{ 或 }-2\frac{1}{3}$$

（6）　$3x^2-17x+10=0$

解. $$\therefore\ x=\frac{17\pm\sqrt{289-120}}{2\times3}=\frac{17\pm13}{6}=5\text{ 或 }\frac{2}{3}.$$

（7）　$91x^2-2x=45$

解. 移　項　$91x^2-2x-45$

$$\therefore\ x=\frac{2\pm\sqrt{4+16380}}{2\times91}=\frac{2\pm128}{2\times7\times13}=\frac{5}{7}\text{ 或 }-\frac{9}{13}.$$

（8）　$x^2+2x=1$

解. 移　項　$x^2+2x-1=0$

$$\therefore\ x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

（9）　$9x^2-18x-11=0$

$$\therefore\ x=\frac{18\pm\sqrt{324+396}}{2\times9}=\frac{18\pm12\sqrt{5}}{18}=\frac{3\pm2\sqrt{5}}{3}.$$

(10)　$4x^2+4ax=b^2-a^2$

解. 整　理　$4x^2+4ax+a^2-b^2=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-4a\pm\sqrt{16a^2-16(a^2-b^2)}}{2\times4}=\dfrac{-4a\pm4b}{2\times4}=\dfrac{-a\pm b}{2}$

(11) $ax^2-(a^2+1)x+a=0$

解. $\therefore\ x=\dfrac{a^2+1\pm\sqrt{(a^2+1)^2-4a^2}}{2a}=\dfrac{a^2+1\pm(a^2-1)}{2a}$

$=a$ 或 $\dfrac{1}{a}$.

(12) $(a-x)(b-x)=2(a-b)^2$

解. 整　理　$x^2-(a+b)x-2(a-b)^2+5ab=0$

$\therefore\ x=\dfrac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2+8(a^2+b^2)-20ab}}{2}$

$=\dfrac{a+b\pm\sqrt{9(a^2-2ab+b^2)}}{2}=\dfrac{a+b\pm3(a-b)}{2}$

$=2a-b$ 或 $2b-a$.

問題七十三：

(7) $x^2-2x+4=0$

解. $\therefore\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-16}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=1\pm i\sqrt{3}$,

(8) $2x^2-2x+1=0$

解. $\therefore\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{2\times2}=\dfrac{\pm2i}{2\times2}=\dfrac{1\pm i}{2}$.

(9) $25x^2-20x+13=0$

解. $\therefore\ x=\dfrac{20\pm\sqrt{400-1300}}{2\times20}=\dfrac{20\pm30i}{50}=\dfrac{2\pm3i}{5}$.

(10) $3x^2+4x+3=0$

解. $\therefore\ x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-36}}{2\times3}=\dfrac{-4\pm2i\sqrt{5}}{2\times3}=\dfrac{-2\pm i\sqrt{5}}{3}$.

問題七十五　P.141

I 研究下列方程式之根。

（i） $49x^2+42x+9=0$

解. $a=49$, $b=42$, $c=9$.

$\therefore$ $b^2-4ac=42^2-4\times49\times9=0$ 二根相等.

（ii） $3x^2-12x+1=0$

解. $a=3$, $b=-12$, $c=1$.

$\therefore b^2-4ac=12^2-4\times3\times1=132$. 二根各含無理數.

（iii） $12x^2-36x+31=0$

解. $a=12$, $b=-36$, $c=31$.

$\therefore$ $b^2-4ac=36^2-4\times12\times31=-192$ 二根各含虛數.

2. 等根方程式爲 $3x^2+4x+c=0$ 求 c 之値。

解. 題爲等根 故 $b^2-4ac=0$

即 $4^2-4\times3c=0$

以4除 $4-3c=0$ 即 $3c=4$. $\therefore$ $c=\dfrac{4}{3}$.

3. 純二次方程式之二根，有爲相等者否，如以爲有，則舉其爲等根者之形狀。

解. $x^2=0$ 爲純二次方程式，其二根爲0而相等。

4. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 若 $c=0$, 則二根俱爲有理數，且一根爲0，試以根之公式表示之。

解. 因 $c=0$，則 $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{b^2}=b$，故二根俱爲有理.

$\therefore$ $x=\dfrac{-b\pm b}{2a}=0$ 或 $-\dfrac{b}{a}$.

5. 設一元二次方程式爲 $ax^2+2bx+c=0$，試記其根之公式及判別式。

解. $ax^2+2bx+c=0$

$$\therefore x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b\pm2\sqrt{b^2-ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$ 此式為根之公式

而 b^2-ac，為判別式。

問題集 XVI P. 141

試研究下列各方程式之根，并解之。

1．$25x^2+2=30x$

解．移　項　　$25x^2-30x+2=0$

$$\therefore x=\frac{30\pm\sqrt{900-200}}{50}=\frac{30\pm10\sqrt{7}}{50}=\frac{3\pm\sqrt{7}}{5}$$

即二根為有理數。

2．$6x^2-13x+6=0$

解．$$\therefore x=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{6\times4}=\frac{13\pm5}{12}=\frac{3}{2}\text{ 或 }\frac{2}{3},$$

即二根為有理數。

3．$3x^2-7x=16$

解．移　項　　$3x^2-7x-16=0$

$$\therefore x=\frac{7\pm\sqrt{49+192}}{2\times3}=\frac{7\pm\sqrt{241}}{6}.$$

即二根為有理數。

4．$x^2+6.51=5.2x$

解．移　項　　$x^2-5.2x+6.51=0$

$$\therefore x=\frac{5.2\pm\sqrt{27.04-26.04}}{2}=\frac{5.2\pm1}{2}=3.1\text{ 或 }2.1$$

即二根為有理數。

5．$x^2+4.3x=27.3$

解．移　項　　$x^2+4.3x-27.3=0$

$$\therefore\ x=\frac{-4.3\pm\sqrt{18.49+109.2}}{2}=\frac{-4.3\pm11.3}{2}$$

$=3.5$ 或 -7.8,

即二根爲有理數。

6．$7x^2+6x+2=0$

解　$$\therefore\ x=\frac{-6\pm\sqrt{36-56}}{2\times7}=\frac{-6\pm\sqrt{-20}}{2\times7}=\frac{-6\pm2\sqrt{-5}}{2\times7}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{-5}}{7}.$$

即二根各含虛數。

7．$(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)=11$

解．整　理　　$2x^2-12x=0$

以3除　　$x^2-4x=0$

$$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-0}}{2}=\frac{4\pm4}{2}=4\ \text{或}\ 0.$$

即二根爲有理數。

8．$3(8x-3)(7x-5)+(x+2)^2=3x$

解．整　理　　$169x^2-182x+49=0$

$$\therefore\ x=\frac{182\pm\sqrt{182^2-4\times169\times49}}{2\times169}$$

$$=\frac{182\pm\sqrt{182^2-182^2}}{2\times169}=\frac{182}{338}=\frac{7}{17}$$

即二根相等。

9．$(x+6)(x+5)+(x+7)(x+4)=10$

解．整　理　　$x^2+11x+24=0$

分　解　　$(x+8)(x+3)=0$

$\therefore\ x=-8$ 或 -3

即二根爲有理數。

10. 方程式 $(3x-3)^2-8(3x-5)+7=0$ 試先視 $(3x-5)$ 爲一個未知數而解之,更求 x 之值。

解. $$(3x-5)^2-8(3x-5)+7=0$$

分　解 $$\{(3x-5)-7\}\{(3x-5)-1\}=0$$

即 $$(3x-12)(3x-6)=0$$

$$\therefore\quad x=4 \text{ 或 } 2.$$

11. 試解方程式 $x^2+bx-2ab=2ax$。

解. 變原式 $$x^2+(b-2a)x-2ab=0$$

$$(x+b)(x-2a)=0$$

$$\therefore\quad x=-b \text{ 或 } 2a.$$

12. 試解方程式 $b(cx^2+a)=(ac+b^2)x$

解. 變原式 $$bcx^2-(ac+b^2)x+ab=0$$

以 bc 除 $$\therefore\quad x^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)x+\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=0$$

分　解 $$\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{b}{c}\right)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{a}{b} \text{ 或 } \frac{b}{c}$$

13. 試解方程式 $x^2+(a-x)^2=c^2$,設 $a^2>2c^2$, $a^2<2c^2$ 而分別解之。

解. 整　理 $$2x^2-2ax+a^2-c^2=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-8(a^2-c^2)}}{4}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-2(a^2-c^2)}}{2}$$

$$=\frac{a\pm\sqrt{2c^2-a^2}}{2}$$

若　$a^2<2c^2$,則如上式答式。

若　$a^2>2c^2$,則 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{-(a^2-2c^2)}}{2}=\dfrac{a\pm i\sqrt{a^2-2c^2}}{2}$

14. 試解方程式 $x^2-(a-m)x=(a-1)(m-1)$

解.　變原式　$x^2+\{(m-1)-(a-1)\}x-(m-1)(a-1)=0$

分解　$\{x+(m-1)\}\{x-(a-1)\}=0$

即　$(x+m-1)(x-a+1)=0$

$\therefore\ x=1-m$ 或 $a-1$.

問　題　集　XVII　　P. 144

1．某數之平方，與其數二分之一之平方，三分之一之平方之和，爲549，求某數爲何數。

解.　設　某數 $=x$

依題意得　$x^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2=549$

即　$x^2+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^2}{9}=549$

去分母　$36x^2+9x^2+4x^2=549\times36$

即　$49x^2=61\times9\times36$

開　方　$7x=\pm6\times3\sqrt{61}$

$\therefore\ x=\pm\dfrac{18\sqrt{61}}{7}$

2．二數之和爲27，其積爲180，求二數爲何數。

解.　設　一數 $=x$　他數 $=27-x$

依題意得　$x(27-x)=180$

整　理　$x^2-27x+180=0$

分　答　$(x-15)(x-12)=0$

$\therefore\ x=15$ 或 12

答二數爲 15,12.

3．二數之和爲$2c$，其平方之和爲$2a^2$，求二數爲何數。

解．設 一數$=x$ 他數$=2c-x$

依題意得 $x^2+(2c-x)^2=2a^2$

整 理 $x^2-4cx+4c^2-2a^2=0$

以2除 $x^2-2cx+2c^2-a^2=0$

$$\therefore\ x=\frac{2c\pm\sqrt{4c^2-4(2c^2-a^2)}}{4}=\frac{2c\pm\sqrt{c^2-(2c^2-a^2)}}{2}$$

$$=c\pm\sqrt{a^2-c^2}$$

故二數爲：$c+\sqrt{a^2-c^2}$，$c-\sqrt{a^2-c^2}$.

4．分$5a+\dfrac{b}{5}$爲二部分，使其各部平方之和爲$13\left(a^2+\dfrac{b^2}{25}\right)$。求二部各爲何數。

解．設 一數$=x$ 他數$=\left(5a+\dfrac{b}{5}\right)-x$

依題意得 $x^2+\left\{\left(5a+\dfrac{b}{5}\right)-x\right\}^2=13\left(a^2+\dfrac{b^2}{25}\right)$

整 理 $2x^2-2\left(5a-\dfrac{b}{5}\right)x+12a^2+2ab-\dfrac{12}{25}b^2=0$

以2除 $x^2-\left(5a-\dfrac{b}{5}\right)x+\left(6a^2-ab-\dfrac{6}{25}b^2\right)=0$

即 $x^2-\left(5a-\dfrac{b}{5}\right)x+\left(3a-\dfrac{2}{5}b\right)\left(2a-\dfrac{3}{5}b\right)=0$

分 解 $\left\{x-\left(3a-\dfrac{2}{5}b\right)\right\}\left\{x-\left(2a+\dfrac{3}{5}b\right)\right\}=0$

$$\therefore\ x=3a-\frac{2}{5}b\text{ 或 }2a+\frac{3}{5}b,$$

故二部分爲 $2a-\dfrac{2}{5}b$， $2a+\dfrac{3}{5}b$.

5．設有連續之四正整數，其相鄰之二數之各積，與兩端之數之積相加，則爲186，求四數中最大之數。

解. 設 最小數 $=x$

則 連續四數爲 $x, x+1, x+2, x+3$。

依題意得方程式:

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)x=168$$

整 理 $4x^2+12x-160=0$

以4除 $x^2+3x-40=0$

分 解 $(x+8)(x-5)=0$

$\therefore \quad x=5$ 或 -8.

題言正整數,故負數之答不合,即所求之數爲5, 6, 7, 8.

6. 長方形之周爲4丈2尺,若縱減一尺,橫減四分之一,則面積爲原面積三分之二,問縱橫各若干尺。

解. 設 縱長 $=x$ 橫長 $=\dfrac{42-2x}{2}=21-x$

則 原面積 $=x(21-x)$.

依題意得 $(x-1)\left\{(21-x)-\dfrac{1}{4}(21-x)\right\}=\dfrac{2}{3}x(21-x)$

即 $\dfrac{3(x-1)(21-x)}{4}=\dfrac{2}{3}(21-x)$

去分母 $9x(21-x)-9(21-x)=x(21-x)$

即 $x(21-x)-9(21-x)=0$

分 解 $(21-x)(x-9)=0$

$\therefore \quad x=9$ 或 21.

$21-9=12. \quad 21-21=0$

題言爲長方形,故縱爲21尺,橫爲0尺,與題意不相合,故可略去,即縱長9尺,橫長12尺爲答數。

7. 一長方形,與一邊長10公尺之正方形相較,則周圍長4公尺,而面積小4平方公尺,求長方形之縱橫各幾何。

解. 設 縱長 $=x$ 尺 橫長 $=\dfrac{4+10\times4-2x}{2}=22-x$ 尺

依題意得 $10\times10-x(22-x)=4$

去括弧 $100-22x+x^2=4$

整 理 $x^2-22x+96=0$

分 解 $(x-6)(x-16)=0$

$\therefore\ x=6$ 或 $16.$

$22-6=16.\ \ 22-16=6.$

故此長方形之縱長爲6尺，則橫長16尺，或縱長16尺，則橫長爲6尺。

8．二整數相比，如5與4之比，若各加15而平方之，則其差爲999，求二數何數。

解. 設 一數 $=x$ 他數 $=\dfrac{4}{5}x.$

依題意得 $(x+15)^2-\left(\dfrac{4}{5}x+15\right)^2=999$

整 理 $9x^2+150x-25\times999=0$

以3除 $3x^2+50x-8325=0$

分 解 $(3x+185)(x-45)=0$

$\therefore\ x=45$ 或 $-\dfrac{185}{3}.$

$45\times\dfrac{4}{5}=36.$

題言整數，故分數答不合，即所求之二數爲45與36.

9．甲乙二人年齡之和爲100，年齡之積之$\dfrac{1}{10}$，大於甲之年齡180，問甲乙各年若干歲，若甲爲父，乙爲子，則若何。

解. 設 甲年 $=x$ 歲 乙年 $=100-x$ 歲

依題意得 $\frac{1}{10}(100-x)x-x=180$

整 理 $x^2-90x+1800=0$

分 解 $(x-30)(x-60)=0$

$\therefore\ x=30$ 或 60.

$100-30=70.\qquad 100-60=40.$

故甲年爲30歲,則乙年爲70歲,或甲年爲60歲,則乙年爲40歲,若甲父乙子,則30與70二答無理,可去之。

10. 二數之和爲20,其立方之和爲2540,求二數爲何數。

解. 設 一數 $=x$ 他數 $=20-x$

依題意得 $x^3+(20-x)^3=2540$

整 理 $x^2-20x+91=0$

分 解 $(x-13)(x-7)=0$

$\therefore\ x=13$ 或 7, $20-x=7$ 或 13.

即二數爲13與7.

11. 宴會費80圓當按人均派,今因4人不出會費,其餘人各多出一圓,問會員有幾名。

解. 設 會員 $=x$ 名 每人會費 $=\frac{80}{x}$

依題意得 $4\times\frac{80}{x}=(x-4)\times 1$

去分母 $320=x^2-4x$

移 項 $x^2-4x-320=0$

分 解 $(x-20)(x+16)=0$

$\therefore\ x=20$ 或 -16.

負數與理不合,當取正數,即會員爲20名。

12. 某二市間有36公里,甲車比乙車先到12分鐘,但知甲車比

乙車每時多行 15 公里，求二車之速度。

解.　設　　甲速 $=x$ 公里　　乙速 $=x-15$ 公里

依題意得　　$\dfrac{36}{x-15}-\dfrac{36}{x}=\dfrac{12}{x}$

以 12 除　　$\dfrac{3}{x-15}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{60}$

$$\therefore\ 60(3x^2-3x+45)=x^2-15x$$

整　理　　$x^2-15x-60\times45=0$

分　解　　$(x-60)(x+45)=0$

$$\therefore\ x=60\text{ 或 }-45.$$

$$x-15=45$$

速度必爲正數，故甲車每時之速度爲 60 里，乙車每時之速度爲 45 里。

13.　一軍隊進行，進時其側面比前列多 14 人，迨達於前敵時將軍隊展開，前列增 828 人，而側面之人數爲 5，問此軍隊之人數有幾。

解.　設　　前列原數 $=x$ 人

依題意得　　$x(x+14)=5(x+828)$

整　理　　$x^2+9x-4140=0$

分　解　　$(x+69)(x-60)=0$

$$\therefore\ x=60\text{ 或 }-69$$

負數不合理，故知軍人數爲 $60\times(60+14)=60\times74=4440$，

14.　一直角三角形，其二邊之長之和爲 23 公尺，斜邊之長爲 17 公尺，問二邊之長各幾何。

解.　　設一邊 $=x$ 公尺　　又一邊 $=23-x$ 公尺

依畢達哥拉斯定理得

$$x^2+(23-x)^2=17^2$$

整 理 $\quad 2x^2-46x+240=0$

以2除 $\quad x^2-23x+120=0$

$$(x-8)(x-15)=0$$

$$\therefore\ x=8 \text{ 或 } 15$$

$$23-x=15 \text{ 或 } 8$$

二邊長爲8公尺與15公尺。

15. 甲乙二人，同時自A, B, 二地相向而行，但知相遇時甲比乙多行30里，相遇後甲以4日抵B，乙以9日抵A，問A, B二地距離爲若干里。

解. 設 $\quad$ AB距離$=x$里

相遇時 $\quad$ 甲行里數$=\dfrac{x+30}{2}$ $\quad$ 乙行里數$=\dfrac{x-30}{2}$

相遇後 $\quad$ 甲每日行$=\dfrac{x+30}{2\times4}$ $\quad$ 乙每日行$=\dfrac{x+30}{2\times9}$

但甲乙同時起程至相遇時二者日數相同。

故 得 $\quad \dfrac{x+30}{3}\div\dfrac{x-30}{2\times4}=\dfrac{x-30}{2}\div\dfrac{x+30}{2\times9}$

簡 單 $\quad 4(x+30)^2=9(x-30)$

開 方 $\quad 2(x+30)=3(x-30)$

去括弧 $\quad 2x+60=3x-90$

移項，合併 $\quad \therefore\ x=150$

故A, B, 二地相距150里。

16. 前題中之30里易爲a里，4日易爲b^2日，9日易爲c^2日，問A, B, 二地之距離若何。且自所得之結果，求前題之答數。

解. 如前題方程式 $30=a$, $4=b^2$ $9=c^2$ 代入之

$$\frac{x+a}{2}\div\frac{x-a}{2b^2}=\frac{x-a}{2}\div\frac{x+a}{2c^2}$$

解　之　　$b^2(x+a)^2=c^2(x-a)^2$

開　方　　$b(x+a)=c(x-a)$

去括弧　　$bx+ab=cx-ac$

移項，合併　　$(c-b)x=(c+b)a$

$$\therefore\ x=\frac{a(c+b)}{c-b}.$$

以前題各數代入 $x=\dfrac{30(\sqrt{9}+\sqrt{4})}{\sqrt{9}-\sqrt{4}}=\dfrac{30(3+2)}{3-2}=150$

17. 兵一隊作爲矩形之陣，其長爲廣之二倍。若由此兵中減去206名，則能作爲厚三列之中空方陣，且其外面一列之兵數，與原矩形之長之人數相等，問共有兵若干名。

解. 設　廣邊$=x$　　長邊$=2x$　　則　總人數$=2x^2$

中空方陣之人數$=(2x)^2-(2x-3\times2)^2$

依題意得　$2x^2-\{(2x)^2-(2x-3\times2)^2\}=206$

整　理　　$2x^2-24x-170=0$

以2除　　$x^2-12x-85=0$

分　解　　$(x-17)(x+5)=0$

$\therefore\ x=17$ 或 -5

$2x^2=578$

負數不合理，故共有兵578人.

18. 矩形之一對角線與長邊之和，恰爲短邊之五倍，而長邊較短邊長35尺，求此矩形之面積。

解.　　設　　短邊$=x$尺　　長邊$=x+35$尺

對角線長$=5x-(x+35)$

依幾何定理矩形兩邊平方之和,與對角線之平方相等.

故得方程式 $x^2+(x+35)^2=\{5x-(x+35)\}^2$

整　理　　　$14x^2-350x=0$

以14除　　　$x^2-25x=0$

$$x(x-25)=0 \qquad \therefore\ x=25\text{ 或 }0$$

$$x+35=60$$

故此矩形之面積為 $25\times60=1500$ 平方尺.

19. 有 A, B 二列車, 由 P 地向 Q 地出發, 同時又有 C, D 二列車由 Q 地向 P 地出發, A 車在距 P 地 120 哩之處與 C 相會, 又在距 P 地 140 哩之處與 D 相會, B 車在距 Q 地 126 哩之處與 C 相會, 又在 P, Q 二地之中央與 D 相會. 求 P, Q 二地之距離。

解,　　設　　P, Q 二地之距離$=x$ 里

A 車每時之速度$=a$ 里　　B 車每時之速度$=b$ 里

C 車每時之速度$=c$ 里　　D 車每時之速度$=d$ 里

依題意得
$$\begin{cases} \dfrac{120}{a}=\dfrac{x-120}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\[2ex] \dfrac{140}{b}=\dfrac{x-140}{d} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\[2ex] \dfrac{x-126}{b}=\dfrac{126}{d} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

又知 B, D 兩車同時出發而會於 P, Q 兩地之中央

$$\therefore\quad b=d$$

化(3)為　$\dfrac{x-126}{126}=\dfrac{d}{c}$ 以 d 代入此式 b.

即　　$\dfrac{x-126}{126}=\dfrac{d}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(1)÷(2)得　$\dfrac{120}{a}\times\dfrac{a}{140}=\dfrac{x-120}{c}\times\dfrac{d}{x-140}$

即　　$\frac{120}{140}=\frac{x-120}{x-140}\times\frac{d}{c}$

以(4)代入上式　$\frac{d}{c}$

即　　$\frac{120}{140}=\frac{x-120}{x-140}\times\frac{x-126}{126}$

整　理　　$x^2-354x+30240=0$

分　解　　$(x-144)(x-210)=0$

$\therefore\ x=144$ 或 210.

故P,Q二地之距離為144里或210里。

問題七十六　　P.147

分解下列各式之因數:

1．$10x^2-23x-21$.

解．原式$=10\left\{x-\frac{23}{20}+\frac{\sqrt{23^2+840}}{20}\right\}\left\{x-\frac{23}{20}-\frac{\sqrt{23^2+840}}{20}\right\}$

$=10\left\{x-\frac{23-37}{20}\right\}\left\{x-\frac{23+37}{20}\right\}$

$=10\left\{x+\frac{14}{20}\right\}\left\{x-\frac{60}{20}\right\}$

$=(10x+7)(x-3)$.

2．$91x^2-19x-126$.

解．原式$=91\left\{x-\frac{19+\sqrt{19^2+4\times91\times126}}{2\times91}\right\}$

$\left\{x-\frac{19-\sqrt{19^2+4\times91\times126}}{2\times91}\right\}$

$=91\left\{x-\frac{19-215}{2\times91}\right\}\left\{x-\frac{19+215}{2\times91}\right\}$

$=13\times7\left\{x+\frac{14}{13}\right\}\left\{x-\frac{9}{7}\right\}$

$=(13x+14)(7x-9)$.

3．$2x^2-2x-1$.

解．原式 $=2\left(x-\frac{2}{4}+\frac{\sqrt{2^2+8}}{4}\right)\left(x-\frac{2}{4}-\frac{\sqrt{2^2+8}}{4}\right)$

$$=2\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=(2x-1+\sqrt{3})\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

4．$17x^2+70x+8$

解．原式 $=17\left\{x+\frac{70}{2\times17}+\frac{\sqrt{70^2-4\times17\times8}}{2\times17}\right\}$

$$\left\{x+\frac{7}{2\times17}-\frac{\sqrt{70^2-4\times17\times8}}{2\times17}\right\}$$

$$=17\left\{x-\frac{70+66}{2\times17}\right\}\left\{x+\frac{70-66}{2\times17}\right\}$$

$$=(12x+68)\left(x-\frac{2}{17}\right)$$

5．$x^2-6x+13$

解．原式 $=\left(x-\frac{6}{2}+\frac{\sqrt{6^2-52}}{2}\right)\left(x-\frac{6}{2}-\frac{\sqrt{6^2-52}}{2}\right)$

$$=\left(x-3+\frac{4\sqrt{-1}}{2}\right)\left(x-3-\frac{4\sqrt{-1}}{2}\right)$$

$$=(x-3+2i)(x-3-2i)$$

6．$x^2+2ax-b^2-2ab$.

解．原式 $=\left\{x+\frac{2a}{2}+\frac{\sqrt{4a^2+4(b^2+2ab)}}{2}\right\}$

$$\left\{x+\frac{2a}{2}-\frac{\sqrt{4a^2+4(b^2-2ab)}}{2}\right\}$$

$$=\left\{x+a+\frac{\sqrt{4(a^2+2ab+b^2)}}{2}\right\}$$

$$\left\{x+a-\frac{\sqrt{4(a^2+2ab+b^2)}}{2}\right\}$$

$$=\left\{x+a+\frac{2(a+b)}{2}\right\}\left\{x+a-\frac{2(a+b)}{2}\right\}$$

$$=(x+2a+b)(x-b).$$

問題七十七 P.148

下列自1至10,各爲預定二根,試各作方程式。

1. 7. -8.

解. $P=-(7-8)=1$, $Q=7(-8)=-56$

故得方程式爲 $x^2+x-56=0$

2. a, b,

解. $P=-(a+b)$, $Q=ab$,

故得方程式爲 $x^2-(a+b)x+ab=0$.

3. $a+b$, $a-b$,

解. $P=-(a+b+a-b)=-2a$.

$Q=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

故得方程式 $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

4. $3\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$

解. $P=-\left(3\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}\right)=-6$. $Q=3\frac{1}{3}\times2\frac{2}{3}=\frac{80}{9}$

故得方程式 $x^2-6x+\frac{80}{9}=0$

即 $9x^2-54x+80=0$

5. $4\frac{1}{2}$, $-3\frac{1}{2}$.

解. $P=-\left(4\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}\right)=-1$, $Q=4\frac{1}{2}\times\left(-3\frac{1}{2}\right)=-\frac{63}{4}$

故得方程式 $x^2-x-\frac{63}{4}=0$

即 $x^2-4x-63=0$.

6．$2+i,\ 2-i$

解．$P=-(2+i+2-i)=-4.$

$Q=(2+i)(2-i)=4-i^2=5.$

故得方程式　$x^2-4x+5=0.$

7．$a+ib,\ a-ib.$

解．$P=-(a+ib+a-ib)=-2a,$

$Q=(a+ib)(a-ib)=a^2-i^2b^2=a^2+b^2$

故得方程式：　$x^2-2ax+a^2+b^2=0.$

8．$1+\sqrt{3},\quad 1-\sqrt{3}.$

解．$P=-(1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3})=-2.$

$Q=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1-3=-2.$

故得方程式　$x^2-2x-2=0$

9．$a+b\sqrt{3},\quad a-b\sqrt{3}.$

解．$P=-(a+b\sqrt{3}+a-b\sqrt{2})=-2a$

$Q=(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})=a^2-3b^2$

故得方程式　$x^2-2ax+a^2-3b^2=0.$

10．$5a+3b\sqrt{5},\quad 5a-3b\sqrt{5}.$

解．$P=-(5a+3b\sqrt{5}+5a-3b\sqrt{5})=-10a$

$Q=(5a+3b\sqrt{5})(5a-3b\sqrt{5})=25a^2-45b^2$

故方得程式　$x^2-10ax+25a^2-45b^2=0$

11．下列各方程式之二根之積若何。

$4x^2+35x+4=8x,\quad 2ax^2+3bx+4c=0.$

$3x^2+ax=5x+b,\quad a^2x^2+b^2x+c=0$

解．一式爲 $\frac{4}{4}=1$　　二式爲 $\frac{4c}{2a}=\frac{2c}{a}.$

三式整理 $2x^2+(a-5)x-b=0$

故二根之積爲 $-\frac{6}{2}$.

四式爲 $\frac{c}{a^2}$.

12. 下列各式之二根之和若何。

$2x^2+2=0$, $\qquad ax^2+2ax=3ax-4c$.

$(3x-2)(4x-3)=0$, $\qquad (3ax+b)(2x+c)=a^2b^2c^2$.

解. 一式無含 x 之項, 故二根之和爲0,

二式整理 $ax^2-ax+4c=0$, 故二根之和爲 $\frac{a}{a}=1$

三式整理 $12x^2-17x+6=0$, 故二根之和爲 $\frac{17}{12}$.

四式整理 $6ax^2+(3ac+2b)x+bc-a^2b^2c^2=0$

故二根之和爲 $-\frac{3ac+2b}{6a}$.

問題七十八 P.149

1. 求方程式 $3x^2+16x-12=0$ 之根, 以此二根之平方爲二根。而作一二次方程式, 并以例1之公式驗之。

解. $3x^2+16x-12=0$

分解 $(3x-2)(x+6)=0 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$ 或 -6

而作 $\left(x-\frac{4}{9}\right)\left(x-36\right)=0$

即 $(9x-4)(x-36)=0$

$\therefore 9x^2-28x+144=0$

由例1 $P=-\left(\frac{4}{9}+36\right)=\frac{-328}{9}$

$Q=\frac{4}{9}\times36=16.$

得　　$x^2-\frac{328}{9}x+16=0$

亦　得　$9x^2-328x+144=0.$

2. 求方程式 $x^2-6x+8=0$ 之根，以此二根之比，及逆數之比爲二根，而作一二次方程式。並之例 2 之公式驗之。

解.　　$x^2-6x+8=0$

分　解　$(x-2)(x-4)=0$　　$\therefore\ x=2$ 或 $4.$

而　作　$\left(x-\frac{2}{4}\right)\left(x-\frac{4}{2}\right)=0$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-2\right)=0$$

即　$(2x-1)(x-2)=0$

由例 2.　$P=-\left(\frac{2}{4}+\frac{4}{2}\right)=-\frac{5}{2}.$

$$Q=\frac{2}{4}\times\frac{4}{2}=1.$$

得　　$x^2-\frac{5}{2}x+1=0$

亦　得　　$2x^2-5x+2=0$

3. 方程式 $x^2+Px+Q=0$ 之二根，命之爲 α,β，則

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{P}{Q}=0,\ \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{P^2-2Q}{Q^2}$，試證明之。

證　明：　$P=-(\alpha+\beta),\quad Q=\alpha\beta,$

$$\frac{P}{Q}=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{P}{Q}=0,$$

又　$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}$

$$=\frac{\{-(\alpha+\beta)\}^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$\therefore\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{P^2-2Q}{Q^2}$$

4．方程式 $x^2+4ax+a^2=0$ 之二根，其平方之和爲 $14a^2$，試證明之。

證明：　設　二根爲 α, β,

則　$\alpha+\beta=-4a$ ……………………(1)

$\alpha\beta=a^2$ ……………………(2)

(1)自乘　$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=16a^2$ ……………(3)

(2)×2　$2\alpha\beta=2a^2$ ……………………(4)

(3)−(4)　$\alpha^2+\beta^2=14a^2$

即　二根平方之和爲 $14a^2$

5．方程式 $3x^2+4mx+m=0$ 之二根相等，m 之值若何。

解.　設　二根爲 α, β,　但　$\alpha=\beta$

則　$\alpha+\beta=-\dfrac{4m}{3}$ ……………………(1)

$\alpha\beta=\dfrac{m}{3}$ ……………………(2)

又　$\beta=\alpha$ 代入(1)(2)

$2\alpha=-\dfrac{4m}{3}$　　$\therefore\ \alpha=-\dfrac{2}{3}m$

$\therefore\ \alpha^2=\dfrac{4}{9}m^2$　　又　$\alpha^2=\dfrac{m}{3}$

$\therefore\ \dfrac{4}{9}m^2=\dfrac{m}{3}$

即　$4m^2-3m=0$

$m(4m-3)=0$　　$\therefore\ m=0$ 或 $\dfrac{3}{4}$.

6．方程式 $4x^2+(1+a)x+1=0$ 之二根相等，a 之值若何。

解.　$\alpha+\beta=2\alpha=-\dfrac{1+a}{4}$,

即　$\alpha=-\dfrac{1+a}{4\times2}$　　$\alpha^2=\left(\dfrac{1+a}{4\times2}\right)^2$

又　$\alpha\beta=\alpha^2=\frac{1}{4}$.　　即　$\frac{(1+a)^2}{(4\times2)^2}=\frac{1}{4}$

故　$1+2a+a^2=16$　　即　$(1+a)^2=16$

開方　$1+a=\pm4$　　$\therefore$　$a=3$ 或 -5.

7．方程式 $x^2+Px+Q=0$ 之二根爲符號相反，絕對數相同之實數其條件若何。

解.　設　絕對值爲 m.

$$P=-(m-m)=0$$

$$Q=(-m)m=-m^2<0.$$

故其條件爲 $P=0$,　$Q=-m^2<0$.

問　題　集　XVIII　　P. 150

1．方程式 $100x^2+60x+m=0$ 之一根爲他根之二倍，試定 m 之值。

解.　設　二根爲 α, β, 但 $\beta=2\alpha$.

則　$\alpha+\beta=3\alpha=-\frac{60}{100}=-\frac{3}{5}$

即　$\alpha=-\frac{1}{5}$　　$\therefore$ $\alpha^2=\frac{1}{25}$

又　$\alpha\beta=2\alpha^2=\frac{m}{100}$　　$\therefore$ $\alpha^2=\frac{m}{200}$

故　$\frac{m}{200}=\frac{1}{25}$　解之　$\therefore$　$m=8$.

2．方程式 $x^2+Px+Q=0$ 之一根爲他根之二倍，則 $9Q=2P^2$ 試證明之。

證明：設　二根爲 α, β　但 $\beta=\alpha$.

則　　$\alpha+\beta=3\alpha=-P$

即　　$\alpha=-\frac{P}{3}$　　$\therefore$　$\alpha^2=\frac{P^2}{9}$

又　$\alpha\beta=2\alpha^2=Q$　　$\therefore\ \alpha^2=\frac{Q}{2}$

故　$\frac{P}{9}=\frac{Q}{2}$.　　$\therefore\ 9Q=2P^2$

3．方程式 $x^2+Px+Q=0$ 之根爲 α,β 試作 $\alpha+\beta$ 及 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 爲二根之方程式，以 P, Q 表之。

證明：　$\alpha+\beta=-P$……………………(1)

$\alpha\beta=Q$……………………(2)

(1)÷(2)　$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{P}{Q}$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{P}{Q}$$

$$(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=-P-\frac{P}{Q}=\frac{-PQ-P}{Q}$$

$$=-\frac{PQ+P}{Q}$$

又　$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=-P\left(-\frac{P}{Q}\right)=\frac{P^2}{Q}$

故得方程式：$x^2+\frac{PQ+P}{Q}x+\frac{P^2}{Q}=0$

$$\therefore\ Qx^2+(PQ+P)x+P^2=0$$

4．方程式 $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ 之二根各爲方程式，$ax^2+bx+c=0$ 之二根之平方，試求其必要之條件。

解．故原書第148頁例四有 $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$

與 $a^2x^2+b^2+c^2=0$ 比較。

$b^2=-(b^2-2ac)$　　即　$2b^2=2ac$

$\therefore\ b^2=ac$. 即其必要之條件.

5．方程式 $Px^2+Qx+r=0$ 之根爲 α,β. 試作 $\alpha+\beta$ 及 $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ 爲二根之方程式。

證明: $\alpha+\beta=-\frac{Q}{P}$ ……………………(1)

$\alpha\beta=\frac{r}{P}$ ……………………(2)

(2)÷(1) $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{r}{P}\div\left(-\frac{Q}{P}\right)=-\frac{r}{Q}$

$(\alpha+\beta)+\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)=-\frac{Q}{P}-\frac{r}{Q}=-\frac{Q^2+Pr}{PQ}$

$(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)=\left(-\frac{Q}{P}\right)\left(-\frac{r}{Q}\right)=\frac{r}{P}$

故得如下之方程式:

$$x^2+\left(\frac{Q^2+Pr}{PQ}\right)x+\frac{r}{P}=0$$

$$\therefore\quad QPx^2+(Q^2+Pr)x+Qr=0$$

6. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 α, β, 試作 $\alpha\beta$ 及 $\frac{1}{\alpha\beta}$ 爲二根之二次方程式。

解. $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ $\therefore\ \frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a}{c}$

即 $\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=\frac{c^2+a^2}{ac}$

又 $\alpha\beta\times\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{c}{a}\times\frac{a}{c}=1$

故得方程式 $x^2-\left(\frac{c^2+a^2}{ac}\right)x+1=0$

$$\therefore\quad acx^2-(c^2+a^2)x+ac=0$$

7. 如前題更作 $\alpha+\beta$ 及 $\frac{1}{\alpha+\beta}$ 爲二根之方程式。

解. $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\therefore\ \frac{1}{\alpha+\beta}=-\frac{a}{b}$.

即 $(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)=-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=-\frac{a^2+b^2}{ab}$

$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)=\left(-\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{a}{b}\right)=1$

故得方程式如下:

$$x^2+\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)x+1=0$$

$$\therefore\quad abx^2+(a^2+b^2)x+ab=0$$

8．一元二次方程式中，變其 x 之係數，則其根爲 3 與 4，變不含 x 之項，則其根爲 6 與 7。問原方程式之根爲何數。

解．方程式之中項爲二根之和，末項爲二根之積，

題言變 x 之係數，則二根爲 3 與 4，

故可知末項必爲 $3\times4=12$.

又　變不含 x 之項，則二根爲 6 與 7.

故可知中項必爲 $-(6+7)=-13$.

故得原方程式如下：

$$x^2-13x+12=0$$

$$(x-12)(x-1)=0$$

$$\therefore x=12 \text{ 或 } 1.$$

9．設 3 爲 x^2 之係數之一元二次方程式中，變 x 之係數，則其根爲 1 與 2。變不含 x 之項，則其根爲 4 與 $-\frac{1}{3}$，問原方程式若何。

解．依上題解之

其中項爲　$4-\frac{1}{3}=\frac{12-1}{3}=\frac{11}{3}$

其末項爲　$1\times2=2$

故原方程式爲：　$x^2-\frac{11}{3}x+2=0$

$$\therefore\ 3x^2-11x+6=0$$

10．方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β，則

$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{3abc-b^3}{a^3c}$ 試證之。

證明：$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ……………………………(1)

又　$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ ……………………………(2)

(1)立方 $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=-\dfrac{b^3}{a^3}$ ………(3)

又　$3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2=3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=3\times\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{3bc}{a^2}\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

(3)−(4) $\alpha^3+\beta^3=-\dfrac{b^3}{a^3}+\dfrac{3bc}{a^2}=\dfrac{3abc-b^3}{a^3}$ …(5)

(5)÷(2)　$\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{3abc-b^3}{a^3}\div\dfrac{c}{a}$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3abc-b^3}{a^2c}$$

11. 二次式 x^2+Px+Q 爲 $x-a$ 所除，試求其剩餘，更證剩餘爲 0 時，a 必適於方程式 $x^2+Px+Q=0$。

解.
$$\begin{array}{r|l}
x-a & x^2+Px+Q\ (x+(P+a) \\
 & \underline{x^2-ax\qquad\qquad} \\
 & (P+a)x+Q \\
 & \underline{(P+a)x-a(P+a)} \\
 & a(P+a)+Q
\end{array}$$

剩餘爲 $a(P+a)+Q=a^2+Pa+Q$.

其商爲 $x+(P+a)$，若剩餘爲 0，　即 $a(P+a)+Q=0$

則原式可記爲　$(x+P+a)(x-a)=0$,

令　$x-a=0$　$\therefore$ $x=a$ 爲式之一根

若　$a^2+aP+Q=0$

依公式得 $a=-\dfrac{P}{2}\pm\dfrac{\sqrt{P^2-4Q}}{2}$.

原式亦得 $x=-\dfrac{P}{2}\pm\dfrac{\sqrt{P^2-4Q}}{2}$.

故亦得 $x=a$ 爲式之一根

$\therefore\quad \alpha$ 必適於方程式 $x^2+Px+Q=0$

12. $x^2+fx+g=0$ 之二根爲 $\alpha.\ \beta$, 則 $\alpha+\dfrac{1}{\beta}$ 及 $\beta+\dfrac{1}{\alpha}$ 爲二根之方程式，必爲 $gx^2+f(1+g)x+(1+g)^2=0$, 試證之。

證　明： $\alpha+\beta=-f,\qquad \alpha\beta=g.$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{f}{g}.$$

新方程式 x 之係數爲：

$$-\left(\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=-\left(\alpha+\beta+\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\alpha}\right)=f+\frac{f}{g}.$$

其二根之積爲：

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta+1}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha\beta+1)^2}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(1+g)^2}{g}$$

故得方程式爲： $x^2+\left(f+\dfrac{f}{g}\right)x+\dfrac{(1+g)^2}{g}=0$

即　　$gx^2+f(1+g)x+(1+g)^2=0.$

13. 設 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 $\alpha,\ \beta$, 則以 $(\alpha+\beta)^2$ 與 $(\alpha-\beta)^2$ 爲二根之方程式必爲：

$x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0$ 求證。

證　明： $\alpha+\beta=-p\qquad \alpha\beta=q$

$$(\alpha-\beta)^2=(-p)^2=p^2.$$

又　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=p^2+4q$

故所求之方程式爲：

$(x-p^2)[x-(p^2-4q)]=0$

$\therefore\quad x^2-[p^2+(p^2-4q)]x+p^2(p^2-4q)q=0$

$$x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0$$

14. 設 $x^2+bx+c=0$ 之根爲 α,β, 則方程式 $(2b^2+ac)x^2$

$+3abx+a^2=0$ 之根為 $\dfrac{1}{\alpha+2\beta}$ 及 $\dfrac{1}{\beta+2\alpha}$ 求證。

證　明：　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$,　　$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$$\frac{1}{\alpha+2\beta}+\frac{1}{\beta+2\alpha}=\frac{\beta+2\alpha+\alpha+2\beta}{(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)}$$

$$=\frac{3\beta+3\beta}{2\alpha^2+5\alpha\beta+2\beta^2}=\frac{3(\alpha+\beta)}{2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta}$$

$$=3\left(-\frac{b}{a}\right)\div\left\{2\left(-\frac{b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}=-\frac{3b}{a}\div\frac{2b^2+ac}{a^2}$$

$$=-\frac{3b}{a}\times\frac{a^2}{2b^2+ac}=-\frac{3ab}{2b^2+ac}$$

$$\frac{1}{\alpha+2\beta}\times\frac{1}{\alpha+2\beta}=\frac{1}{(\alpha+2\beta)\ (\beta+2\alpha)}=\frac{1}{2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta}$$

$$=1\div\left\{2\left(-\frac{b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}=1\div\frac{2b^2+ac}{a^2}=\frac{a^2}{2b^2+ac}$$

故得方程式如下

$$x^2+\frac{3ab}{2b^2+ac}x+\frac{a^2}{2b^2+ac}=0$$

$$\therefore\quad(2b^2+ac)x+3abx+a^2=0$$

第六編　特　殊　根

問題七十九　P. 155

求下列之數或式之平方根。

1．104976.

解.

$$\begin{array}{rl}
 & 10|49|76(300+20+4 \\
a^2= & 90000\quad(a)\ (b)\ (c) \\
2a+b=620) & \overline{14976} \\
(2a+b)b= & 12400 \\
2a+2b+c=644) & \overline{2576} \\
(a+2b+c)c= & \underline{2576} \\
 & 0
\end{array}$$

2. 308025.

解.

$$
\begin{array}{rl}
 & 30|80|25(500+50+5 \\
a^2= & 250000\quad (a)\ \ (b)\ \ (c) \\
2a+b=1050) & \overline{58025} \\
(2a+b)b= & 52500 \\
2a+2b+c=1105) & \overline{5525} \\
(2a+2b+c)c= & \underline{5525} \\
 & 0
\end{array}
$$

3. 41.2164.

解.

$$
\begin{array}{rl}
 & 41.|21|64(\,6+.4+.02. \\
a^2= & 36\qquad (a)\ \ (b)\ \ (c) \\
2a+b=12.4) & \overline{5.21} \\
(2a+b)b= & 4.96 \\
2a+2b+c=12.82) & \overline{.2564} \\
(2a+2b+c)c= & \underline{.2564} \\
 & 0
\end{array}
$$

4. 0.835396.

解.

$$
\begin{array}{rl}
 & 0.83|53|96(\,.9+.01+.004 \\
a^2= & .81\qquad (a)\ \ (b)\ \ (c) \\
2a+b=1.81) & \overline{.0253} \\
(2a+b)b= & .0181 \\
2a+2b+c=1.824) & \overline{.007296} \\
(2a+2b+c)c= & \underline{.007296} \\
 & 0
\end{array}
$$

5. 1522756.

解.

$$
\begin{array}{rl}
 & 1|52|27|56(1000+200+30+4 \\
 & 1\,000000 \\
2200) & \overline{522756} \\
 & 440000 \\
2430) & \overline{82756} \\
 & 72900 \\
2464) & \overline{9856} \\
 & \underline{9856} \\
 & 0
\end{array}
$$

6. 29376400.

解.

$$
\begin{array}{r}
29376400(5000+400+20\\
25000000\\
10400)\overline{4376400}\\
4160000\\
10820)\overline{216400}\\
216400\\
\hline
0
\end{array}
$$

7. $16a^2+40ab+25b^2$.

解.

$$
\begin{array}{r}
16a^2+\quad 40ab+25b^2(4a+5b\\
16a^2\qquad\qquad\qquad\\
8a+5b)\overline{40ab+25b^2}\\
40ab+25b^2\\
\hline
0
\end{array}
$$

8. $36x^6+12x^3+1$.

解.

$$
\begin{array}{r}
36x^6+12x^3+1(6x^3+1\\
36x^6\qquad\qquad\qquad\\
12x^3+1)\overline{12x^3+1}\\
12x^3+1\\
\hline
0
\end{array}
$$

9. $\dfrac{25a^2+20ab+4b^2}{25a^2+20ac+4c^2}$ 　答. $\dfrac{2a+2b}{5a+2c}$

10. $\dfrac{9x^4-24x^2+16}{4x^2-12x+9}$ 　答. $\dfrac{3x^2-4}{2x-3}$.

11. $x^4+4x^3+3x^2+2x+1$

解.

$$
\begin{array}{r}
x^4+4x^3+3x^2+2x+1(x^2+x+1\\
x^4\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\\
2x^2+x)\overline{4x^3+3x^2+2x+1}\\
4x^3+x^2\qquad\quad\\
2x^2+2x+1)\overline{2x^2+2x+1}\\
2x^2+2x+1\\
\hline
0
\end{array}
$$

12. x^4-4x^3+8x+4.

解.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^4-4x^3+8x+4\,(x^2-2x-2 \\
 & x^4 \\
2x^2-2x) & -4x^3+8x+4 \\
 & -4x^3+4x^2 \\
2x^2-4x-2) & -4x^2+8x+4 \\
 & -4x^2+8x+4 \\
 & 0
\end{array}
$$

13. $4x^8-4x^6-7x^4+4x^2+4$

解.

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x^8-4x^6-7x^4+4x^2+4\,(2x^4-x^2-2 \\
 & 4x^8 \\
4x^4-x^2) & -4x^6-7x^4+4x^2+4 \\
 & -4x^6+x^4 \\
4x^4-2x^2-2) & -8x^4+4x^2+4 \\
 & -8x^4+4x^2+4 \\
 & 0
\end{array}
$$

14. $x^4-2ax^3+5a^2x^2-4a^3x+4a^4$.

解.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^4-2ax^3+5a^2x^2-4a^3x+4a^4\,(x^2-ax+2a^2 \\
 & x^4 \\
2x^2-ax) & -2ax^3+5a^2x^2-4a^3x+4a^4 \\
 & -2ax^3+5a^2x^2 \\
2x^2-2ax+2a^2) & 4a^2x^2-4a^3x+4a^4 \\
 & 4a^2x^2-4a^3x+4a^4 \\
 & 0
\end{array}
$$

15. $x^4-4x^3y+10x^2y^2-12xy^3+9y^4$

解.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^4-4x^3y+10x^2y^2-12xy^3+9y^4\,(x^2-2xy+3y^2 \\
 & x^4 \\
2x^2-2xy) & -4x^3y+10x^2y^2-12xy^3+9y^4 \\
 & -4x^3y+4x^2y^2 \\
2x^2-4xy+3y^2) & 6x^2y^2-12xy^2+9y^4 \\
 & 6x^2y^2-12xy^2+9y^4 \\
 & 0
\end{array}
$$

16. $x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$

$$
\begin{array}{rl}
\text{解.} & x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64\,(x^3-6x^2+12x-8 \\
 & x^6 \\
\hline
2x^3-6x^2) & -12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64 \\
 & -12x^5+36x^4 \\
\hline
2x^3-12x^2+12x) & 24x^4-160x^3+240x^2-192x+64 \\
 & 24x^4-144x^3+144x^2 \\
\hline
2x^3-12x^2+24x-8) & -16x^3+96x^2-192x+64 \\
 & -16x^3+96x^2-192x+64 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

問 題 八 十　　P. 159

求下列之數或式之立方根。

1．220348864.

解.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 220348864\,(600+4. \\
a^3= & 216 \qquad (a)\quad (b) \\
\hline
3a^2=1080000 & 4348864 \\
(3a+b)b=\quad 7216 & \\
\hline
3a^2+3ab+b^2=1087216 & 4348864 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

2．1371330631.

解.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \begin{array}{c}(a)\quad(b)\quad(c)\quad(d)\\ 1000+100+10+1\end{array} \\
 & 1371330631 \\
a^3= & 1000000000 \\
\hline
3a^2=3000000 & 371330631 \\
(3a+b)b=\ 310000 & \\
\hline
3a^2+3ab+b^2=331000 & 331000000 \\
\hline
3(a+b)^2=3630000 & 40330631 \\
(3(a+b)+c)c=\quad 33100 & \\
\hline
3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2=3663100 & 36361000 \\
\hline
3(a+b+c)=3696300 & 3699631 \\
(3(a+b+c)+d)d=\quad 3331 & \\
\hline
3(a+b+c)^2+3(a+b+c)d+d^2=3699631 & 3699631 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

3. 20910518875

解.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \begin{array}{cccc}(a) & (b) & (c) & (d)\end{array} \\
 & 2000+700+50+5 \\ \hline
 & 20910518875 \\
a^2= & 8000000000 \\ \hline
3a^2=12000000 & 12910518875 \\
(3a+b)+b=\ \ 4690000 & \\ \hline
3a^2+3ab+b^2=16690000 & 11683000000 \\ \hline
3(a+b)^2=21870000 & 1227518875 \\
\{3(a+b)+b\}=\quad 407500 & \\ \hline
3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2=22277500 & 1113875000 \\ \hline
3(a+b+c)^2=\ \ 22687500 & 113643875 \\
\{3(a+b+c)+d\}d=\qquad 41275 & \\ \hline
3(a+b+c)^2+3(a+b+c)d+d^2=22728775 & 113543875 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

4. 91398648466125.

解.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \begin{array}{cccc}(a) & (b) & (c) & (d)\end{array} \\
 & 40000+5000+40+5 \\ \hline
 & 91398648466125 \\
a^3= & 64000000000000 \\ \hline
3a^2=4800000000 & 27398648466125 \\
3(a+b)b=625000000 & \\ \hline
3a^2+3ab+b^2=5425000000 & 27125000000000 \\ \hline
3(a+b)^2=6075000000 & 273648466125 \\
\{3(a+b)+c\}c=\qquad 5401600 & \\ \hline
6080401600 & 243216064000 \\ \hline
3(a+b+c)^2=6085804300 & 30432402115 \\
\{3(a+b+c)+d\}d=\qquad 675625 & \\ \hline
6086480425 & 30432402125 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

5. 5340104393239.

解.

$$\begin{array}{rr}
 & \begin{array}{ccccc}(a) & (b) & (c) & (d) & (e)\end{array} \\
 & 10000+7000+400+70+9 \\
 & 5340104393239 \\
a^3= & 1000000000000 \\
3a^2=300000000 & 4340104393239 \\
(3a+b)b=259000000 & \\
3a^2+3ab+b^2=559000000 & 3913000000000 \\
3(a+b)^2=867000000 & 427104393239 \\
\{3(a+b)+c\}c=20560000 & \\
3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2=887560000 & 355024000000 \\
3(a+b+c)^2=908280000 & 72080393239 \\
\{3(a+b+c)+d\}d=3658900 & \\
3(a+b+c)^2+3(a+b+c)d+d=911938900 & 63835723000 \\
3(a+b+c+d)^2=915602700 & 8244670239 \\
\{3(a+b+c+d)+e\}e=471771 & \\
3(a+b+c+d)^2+3(a+b+c+d)c+e=916074471 & 8244670239 \\
 & 0
\end{array}$$

6. $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$.

解.

$$\begin{array}{rl}
 & 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3(2x+3y \\
 & 8x^3 \\
12x^2+3y(6x+3y) & 36x^2y+54xy^2+27y^3 \\
 & 36x^2y+54xy^2+27y^3 \\
 & 0
\end{array}$$

7. $1728x^6+1728x^4y^3+576x^2y^6+64x^9$.

解.

$$\begin{array}{rl}
 & 1728x^6+1728x^4y^3+576x^2y^6+64y^9(12x^2+4y^3 \\
 & 1728x^6 \\
432x^4+4y^3(36x^2+4y^2) & 1728x^4y^3+576x^2y^6+64y^9 \\
 & 1728x^4y^3+576x^2y^6+64y^9 \\
 & 0
\end{array}$$

8. $x^3-3x^2(a+b)+3x(a+b)^2-(a+b)^3$

解.

$$\begin{array}{rl}
 & x-(a+b) \\
 & x^3-3x^2(a+b)+3x(a+b)^2-(a+b)^3 \\
 & x^3 \\
3x^2-(a+b)\{3x-(a+b)\} & -3x^2(a+b)+3x(a+b)^2-(a+b)^3 \\
 & -3x^2(a+b)+3x(a+b)^2-(a+b)^3 \\
 & 0
\end{array}$$

9. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$

解.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x+1 \\ \hline
 & x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1 \\
 & x^6 \\ \hline
3x^4+x(3x^2+x) & 3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1 \\
 & 3x^5+3x^4+x^3 \\ \hline
3(x^2+x)^2+3(x^2+x)+1 & 3x^4+6x^3+6x^2+3x+1 \\
 & 3x^4+6x^3+6x^2+3x+1 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

10. $8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64$

解.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-3x+4 \\ \hline
 & 8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64 \\
 & 8x^6 \\ \hline
12x^4-3x(6x^2-3x) & -36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64 \\
 & -36x^5+54x^4-27x^3 \\ \hline
3(2x^2-3x)^2+4(3(2x^2-3x+4) & 48x^4-144x^3+204x^2-144x+64 \\
 & 48x^4-144x^3+204x^2-144x+64 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

11. $x^6-3ax^5+5a^3x^3-3a^5x-a^6$.

解.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-ax-a^2 \\ \hline
 & x^6-3ax^5\qquad+5a^3x^3\quad-3a^5x-a^6 \\
 & x^6 \\ \hline
3x^4-ax(3x^2-ax) & -3ax^5\qquad+5a^3x^3\quad-3a^5x-a^6 \\
 & -3ax^5+3a^2x^4\quad-a^3x^3 \\ \hline
3(x^2-ax)^2-a^2\{3(x^2-ax)-a^2\} & -3a^2x^4+6a^3x^3\quad-3a^5x-a^6 \\
 & -3a^2x^4+6a^3x^3\quad-3a^5x-a^6 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

12. $8x^6+48x^5+60x^4-80x^3-90x^2+108x-27$.

解.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+4x-3 \\ \hline
 & 8x^6+48x^5+60x^3-80x^3-90x^2+108x-27 \\
 & 8x^6 \\ \hline
12x^3+4x(6x^2+4x) & 48x^5+60x^4-80x^3-90x^2+108x-27 \\
 & 48x^5+96x^4+64x^3 \\ \hline
3(2x^2+4x)^2-3\{3(2x^2+4x)-3\} & -36x^4-144x^3-90x^2+108x-27 \\
 & -36x^4-144x^3-90x^2+108x-27 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

13. $1-9x+39x^2-99x^3+156x^4-144x^5+64x^6$

解.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-3x+4x^2 \\
\hline
 & 1-9x+39x^2-99x^3+156x^3-144x^5+64x^6 \\
 & 1 \\
\hline
3-3x(3-3x) & -9x+39x^2-99x^3+156x^4-144x^5+64x^6 \\
 & -9x+39x^2-27x^3 \\
\hline
3(1-4x)^2+4x^2(3(1-3x) & 12x^2-72x^3+156x^4-144x^5+64x^6 \\
+4x^2 & 12x^2-72x^3+156x^4-144x^5+64x^6 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

問　題　集　XIX　P. 160

將下列之數或式開平方，所得之根，再開平方，以求其四次根。

1. 279841,

解.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 279841(500+20+9 \\
 & 250000 \\
\hline
1020) & 29841 \\
 & 20400 \\
\hline
1049) & 9441 \\
 & 9441 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 529(20+3 \\
 & 400 \\
\hline
43) & 129 \\
 & 129 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

即四次根爲 23.

2. $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$.

解.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^4+4x^3+6x^2+4x+1(x^2+2x+1 \\
 & x^4 \\
\hline
2x^2+2x) & 4x^3+6x^2+4x+1 \\
 & 4x^3+4x^2 \\
\hline
2x^2+4x+1) & 2x^2+4x+1 \\
 & 2x^2+4x+1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+1(x+1 \\
 & x^2 \\
\hline
2x+1) & 2x+1 \\
 & 2x+1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

即四次根爲 $x+1$.

3. $16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$

解.
$$
\begin{array}{rl}
 & 16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4\,(4x^2-12xy+9y^2 \\
 & 16x^4 \\
\hline
8x^2-12xy) & -96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4 \\
 & -96x^3y+144x^2y^2 \\
\hline
8x^2-24xy+9y^2) & 72x^2y^2-216xy^3+81y^4 \\
 & 72x^2y^2-216xy^3+81y^4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x^2-12xy+9y^2\,(2x-3y \\
 & 4x^2 \\
\hline
4x-3y) & -12xy+9y^2 \\
 & -12xy+9y^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

即四次根爲 $2x-3y$.

將下列各式開平方，所得之根，再開立方，以求其六次根。

4. $64x^6+192x^5+240x^4+160x^3+60x^2+12x+1$。

解.
$$
\begin{array}{r|l}
 & 8x^3+12x^2+6x+1 \\
\hline
 & 64x^6+192x^5+240x^4+160x^3+60x^2+12x+1 \\
 & 64x^6 \\
\hline
19x^3+12x^2 & 192x^5+240x^4+160x^3+60x^2+12x+1 \\
 & 192x^5+144x^4 \\
\hline
16x^3+24x^2+6x & 96x^4+160x^3+60x^2+12x+1 \\
 & 96x^4+144x^3+36x^2 \\
\hline
16x^3+24x^2+12x+1 & 16x^3+24x^2+12x+1 \\
 & 16x^3+24x^2+12x+1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x+1 \\
\hline
 & 8x^3+12x^2+6x+1 \\
 & 8x^3 \\
\hline
12x+3\times 2x+1 & 12x^2+6x+1 \\
 & 12x^2+6x+1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

故六次根爲 $2x+1$

5. $729x^6-1458x^5+1215x^4-540x^3+135x^2-18x+1$

解.

$$
\begin{array}{rl}
 & 27x^3-27x^2+9x-1 \\
\hline
 & 729x^6-1458x^5+1215x^4-540x^3+135x^2-18x+1 \\
 & 729x^6 \\
\hline
54x^3-27x^2 & -1458x^5+1215x^4-540x^3+135x^2-18x+1 \\
 & -1458x^5+729x^4 \\
\hline
54x^3-54x^2+9x & 486x^4-540x^3+135x^2-18x+1 \\
 & 486x^4-486x^3+81x^2 \\
\hline
54x^3-54x^2+18x-1 & -54x^3+54x^2-18x+1 \\
 & -54x^3+54x^2-18x+1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x-1 \\
\hline
 & 27x^3-27x^2+9x-1 \\
 & 27x^3 \\
\hline
27x^2-(3\times 3x-1) & -27x^2+9x-1 \\
 & -27x^2+9x-1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

故六次根為 $3x-1$,

6．若 $x^6-4x^5+ax^4+bx^3+cx^2-4x+4$ 為完全平方式，則 a, b, c 之數值如何。

解. 原式若為完全平方，則首二項必為 x^3-2x^2,

末二項必為 $\pm(2-x)$

$(x^3-2x^2\mp x\pm 2)^2=x^6-4x^5+(4\mp 2)x^4\pm 8x^3+(1\pm 8)x^2-4x+4$

原式相當項比較:

則得 $a=2,\quad b=8,\quad c=-7.$

或 $a=6,\quad b=-8,\quad c=9.$

7．若 ax^3+bx^2+cx+d 為完全立方式，則 $b^2=3ac, c^2=3bd$ 求證。

證明: 原式若為完全立方，則必等於:

$$(x\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{d})^3=ax^3+3x^2\sqrt[3]{a^2d}+3x\sqrt[3]{ad^2}+d,$$

與式原相當項比較:

則 $b=3\sqrt[3]{a^2d},\quad c=3\sqrt[3]{ad^2}$

故 $b^2=3^2\sqrt[3]{a^4d^2}=3a\times 3\sqrt[3]{ad^2}=3ac.$

$$c^2=3^2\sqrt{a^2d^4}=3d\times3\sqrt{a^2d}=3bd.$$

第七編

各種方程式之歸於一元二次方程式解法者

問題八十一 P. 162

1. $6x^3-17x^2-31x+12$, 但 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=4$, 則其式爲 0, 求分解其因式。

解. 原式必含 $3x-1$ 及 $x-4$ 之因式, 故以 $(3x-1)(x-4)$ 除原式得 $2x+3$.

$\therefore$ 原式 $=(3x-1)(x-4)(2x+3)$.

2. $2+11x+11x^2+x^3-x^4$, 但知 $x=-1$ 或 $x=-2$, 則其式爲 0. 求分解其因式。

解. 原式必有 $x+1$ 及 $x+2$ 之因式, 故以 $(x+1)(x+2)$ 除原式得 $1+4x-x^2$

$\therefore$ 原式 $=(x+1)(x+2)(1+4x-x^2)$.

3. x^3-x^2-2x+2 與 $x^4-3x^3+2x^2+x-1$ 惟 $x=1$ 時, 則二式等同於 0, 試證之。

證明: $x^3-x^2-2x+2=(x-1)(x^2-2)$

$$x^4-3x^3+2x^2+x-1=(x-1)(x^3-2x+1)$$

以上二式之最高公因式爲 $x-1$, 故二式同等於 0 時, 則

$x-1=0$, 即 $x=1$

4. $2x^2-7x+5$ 與 $3x^2-7x+4$ 求二式同等於 0 之 x 之值, 並求一式獨等於 0 之 x 之值。

解. $2x^2-7x+5=(2x-5)(x-1)$

$3x^2-7x+4=(3x-4)(x-1)$

以上二式之最高公因式爲 $x-1$. 即二式同等於0時, 則

$x-1=0$ 則 $x=1$.

又第一式獨等於0時, 則 $2x-5=0$, 即 $x=\frac{5}{2}$.

第二式獨等於0時, 則 $3x-4=0$, 即 $x=\frac{4}{3}$.

5. x^2-x+1 與 $3x^2+x+5$, 等有同等於0之 x 之值否。

解. 二式無公因式, 故無同等於0之 x 之值。

6. 試求 $x^3-41x-30$ 等於0, 而 $x^3-11x^2+25x+25$ 不等於0之 x 之值。

解. 先求得二式之最高公因式爲 x^2-6x-5, 以之除第一式得 $x+6$ 因非第二式之因式故第一式等於0, 第二式不等於0時, 則 $x+6=0$, 即 $x=-6$.

7. 整式 p 爲 $x-a$ 所除, 命共商爲 Q, 剩餘爲 R, 則 $p=(x-a)Q+R$, 更以 a 代 x, 則 $p=R$ 試應用之以求 $3x^3-4x^2-5x+13$ 爲 $x-1$ 所除得之剩餘。

解. 以1代入原式之 x 則

$3-4-5+13=7$ 即剩餘

問 題 八 十 二 P.163

解下列方程式:

1. $\frac{x^3-1}{x-1}=0$

解. $$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=0$$

即　$x^2+x+1=0$

$\therefore\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

2. $\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2+x-2}=0$

解. 原式$=\dfrac{(2x+1)(x+1)}{(3x-2)(x+1)}=\dfrac{2x+1}{3x-2}=0$

故　$2x+1=0$　　$\therefore\quad x=-\dfrac{1}{2}$.

3. $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^3-5x^2+x}=0$

解. 原式$=\dfrac{x(x-1)(x-2)}{x(x^2-5x+1)}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2-5x+1}=0$

故　$(x-1)(x-2)=0$　　$\therefore\quad x=1$ 或 2.

4. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x+5}=0$

解. 原式$=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x+5}=0$　　即 $(x+1)^2=0$

故　$x+1=0$　　$\therefore\quad x=-1$.

5. $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}=0$

解. 原式$=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=0$

即　$\dfrac{1}{x-1}=0$ 此式不能求得其根.

問題八十三　P. 165

試解下列各方程式:

1. $\sqrt{3x+1}=4$

解. 兩邊各自乘 $3x+1=16$　　即　$3x=15$　　$\therefore\quad x=5$.

2. $\sqrt{x^2-9}+x=9$

解. 移 項 $\sqrt{x^2-9}=9-x$

自 乘 $x^2-9=81-18x+x^2$

移項，合併 $18x=90$ $\therefore$ $x=5$.

3. $x=7\sqrt{2-x^2}$

解. 自 乘 $x^2=49(2-x^2)$

去括弧 $x^2=98-49x^2$ 故 $50x^2=98$

即 $x^2=\frac{98}{50}=\frac{49}{25}$ $\therefore$ $x=\pm\frac{7}{5}$

4. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=0$

解. 移 項 $\sqrt{x+1}=-\sqrt{2x+3}$

自 乘 $x+1=2x+3$ $\therefore$ $x=-2$.

5. $x-5\sqrt{x}=14$.

解. 移 項 $-5\sqrt{x}=14-x$

自 乘 $25x=196-28x+x^2$

即 $x^2-53x+196=0$

分 解 $(x-49)(x-4)=0$ $\therefore$ $x=49$ 或 4.

問 題 集 XX P.166

試解下列各方程式：

1. $\sqrt{13+x}+\sqrt{13-x}=6$.

解. 自 乘 $13+x+2\sqrt{13+x}\sqrt{13-x}+13-x=36$

整 理 $\sqrt{13^2-x^2}=5$

自 乘 $169-x^2=25$

即 $x^2=144$ $\therefore$ $x=\pm12$.

2. $x-\sqrt{(x-4)(5x-24)}=2.$

解. 移 項 $x-2=\sqrt{(x-4)(5x-24)}$

自 乘 $x^2-4x+4=5x^2-44x+96$

整 理 $x^2-10x+23=0$

解 之 $\therefore\ x=5\pm\sqrt{2}.$

3. $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\dfrac{2}{3}.$

解. 去分母 $3(1-\sqrt{1-x})+3(1+\sqrt{1-x})=2(1+\sqrt{1-x})$
$(1-\sqrt{1-x})$

即 $3-3\sqrt{1-x}+3+3\sqrt{1-x}=2\{1-(1-x)\}$

整 理 $2x=6\qquad\therefore\ x=3$

4. $2\sqrt{5+2x}-\sqrt{13-6x}=\sqrt{37-6x}.$

解. 自 乘 $4(5+2x)-4\sqrt{5+2x}\sqrt{13-6x}+13-6x=37-6x$

整 理 $\sqrt{65-4x-12x^2}=2x-1$

自 乘 $65-4x-12x^2=4x^2-4x+1$

整 理 $x^2=4\qquad\therefore\ x=\pm2.$

5. $3x-7\sqrt{x}+2=0.$

解. 移 項 $3x+2=7\sqrt{x}$

自 乘 $9x^2+12x+4=49x$

整 理 $9x^2-37x+4=0$

分 解 $(9x-1)(x-4)=0\qquad\therefore\ x=4$ 或 $\dfrac{1}{9}.$

6. $x+\sqrt{x+5}=7$

解. 移 項 $x-7=-\sqrt{x+5}$

自 乘 $x^2-14x+49=x+5$

整 理 $x^2-15x+44=0$

分 解 $(x-11)(x-4)=0$ $\therefore$ $x=11$ 或 4.

7．$3x+\sqrt{x^2+7x+5}=19$.

解. 移 項 $\sqrt{x^2+7x+5}=19-3x$

自 乘 $x^2+7x+5=361-114x+9x^2$

整 理 $8x^2-121x+356=0$

分 解 $(8x-89)(x-4)=0$ $\therefore$ $x=4$ 或 $\frac{89}{8}$.

8．$\sqrt{x+9}=2\sqrt{x}-3$

解. 自 乘 $x+9=4x-12\sqrt{x}+9$

整 理 $3x=12\sqrt{x}$

以3除之 $x=4\sqrt{x}$

自 乘 $x^2=16x$

即 $x(x-16)=0$ $\therefore$ $x=0$ 或 16.

9．$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-3}=6$

解. 自 乘 $x+3-2\sqrt{x+3}\sqrt{2x-3}+2x-3=36$

即 $2\sqrt{2x^2+3x-9}=3x-36$

自 乘 $4(2x^2+3x-9)=9x^2-216x+1296$

整 理 $x^2-228x+1332=0$

$$\therefore\ x=\frac{228\pm\sqrt{228^2-4\times1332}}{2}$$

$$=\frac{228\pm216}{2}=222 \text{ 或 } 6.$$

10．$\sqrt{4x-3}-\sqrt{x-4}=4$

解. 自 乘 $4x-3-2\sqrt{4x-3}\sqrt{x-4}+x-4=16$

即 $5x-23=2\sqrt{4x^2-19x+12}$

自乘　$25x^2-230x+529=4(4x^2-19x+12)$

整理　$9x^2-154x+481=0$

分解　$(9x-37)(x-13)=0$　　$\therefore\ x=13$ 或 $\frac{37}{9}$.

11. $5\sqrt{1-x^2}+5x=7$.

解. 移項　$5\sqrt{1-x^2}=7-5x$

自乘　$25(1-x^2)=49-70x+25x^2$

整理　$25x^2-35x+12=0$

分解　$(5x-4)(5x-3)=0$　$\therefore\ x=\frac{4}{5}$ 或 $\frac{3}{5}$.

12. $a+\sqrt{a^2-x^2}=x$.

解. 移項　$\sqrt{a^2-x^2}=x-a$

自乘　$a^2-x^2=x^2-2ax+a^2$

即　$2x^2=2ax$

移項　$x^2-ax=0$

即　$x(x-a)=0$　　$\therefore\ x=a$ 或 0

13. $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{2x+8}$.

解. 自乘　$3x-3+2\sqrt{3x-3}\sqrt{2x-19}+5x-19=2x+8$

即　$3x-15=\sqrt{15x^2-72x+57}$

自乘　$9x^2-90x+225=15x^2-72x+57$

整理　$2x^2+6x-56=0$

分解　$(2x-8)(x+7)=0$　　$\therefore\ x=4$ 或 -7.

14. $\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+1}$.

解. 自乘　$3x+2-2\sqrt{2x+2}\sqrt{2x+1}+2x+1=x+1$

即　$2x+1=\sqrt{6x^2+7x+2}$

自乘　$4x^2+4x+1=6x^2+7x+2$

整　理　$2x^2+3x+1=0$

分　解　$(x+1)(2x+1)=0$　∴　$x=-1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

15. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}$.

解. 自　乘　$5x-1-2\sqrt{5x-1}\sqrt{8-2x}+8-2x=x-1$

即　$x+4=\sqrt{-(10x^2-42x+8)}$

自　乘　$x^2+8x+16=-(10x^2-42x+8)$

整　理　$11x^2-34x+24=0$

分　解　$(11x-12)(x-2)=0$　∴　$x=2$ 或 $\frac{12}{11}$.

16. $\sqrt{x+7-\sqrt{5(x-2)}}=3$.

解. 自　乘　$x+7-\sqrt{5(x-2)}=9$

移　項　$x-2=\sqrt{5(x-2)}$

自　乘　$x^2-4x+4=5x-10$

整　理　$x^2-9x+14=0$

分　解　$(x-7)(x-2)=0$　∴　$x=7$ 或 2.

17. $\sqrt{2x+1-2\sqrt{2x+3}}=1$.

解. 自　乘　$2x+1-2\sqrt{2x+3}=1$

即　$x=\sqrt{2x+3}$

自　乘　$x^2=2x+3$

移　項　$x^2-2x-3=0$

分　解　$(x-3)(x+1)=0$　∴　$x=3$ 或 -1.

18. $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$.

解. 自　乘　$a-x+2\sqrt{a-x}\sqrt{x-b}+x-b=a-b$

即　$\sqrt{-(x-a)(x-b)}=0$

自　乘　$(x-a)(x-b)=0$　∴　$x=a$ 或 b.

19. $\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{a+c-(b+d)x}$

解. 自 乘 $a-bx+2\sqrt{a-bx}\sqrt{c-dx}+c-dx=a+c-(b+d)x$

即 $(a-bx)(c-dx)=0$ $\therefore$ $x=\dfrac{a}{b}$ 或 $\dfrac{c}{d}$.

20. $2x\sqrt{a+x^2}+2x^2=a^2-a$

解. 化 爲 $x^2+2x\sqrt{a+x^2}+(a+x)=a^2$

即 $(x+\sqrt{a+x^2})^2=a^2$

開 方 $x+\sqrt{a+x^2}=a$

移 項 $\sqrt{a+x^2}=a-x$

自 乘 $a+x^2=a^2-2ax+x^2$

即 $2ax=a^2-a$ $\therefore$ $x=\dfrac{a-1}{2}$

21. $\dfrac{x+\sqrt{12a^2-x}}{x-\sqrt{12a^2-x}}=\dfrac{a+1}{a-1}$

解. 去分母 $(a-1)(x+\sqrt{12a^2-x})=(a+1)(x-\sqrt{12a^2-x})$

簡 約 $x=a\sqrt{12a^2-x}$

自 乘 $x^2=a^2(12a^2-x)$

整 理 $x^2+a^2x-12a^4=0$

分 解 $(x+4a^2)(x-3a^2)=0$ $\therefore$ $x=-4a^2$ 或 $3a^2$

問 題 八 十 四 P. 167

知下列各式等於 0 時 x 之一値，試分解之爲一次因式。

1. x^3-x^2+x-1. $[x=1]$

解. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=x^2+1=(x+i)(x-i)$

$\therefore$ 原式$=(x-1)(x+i)(x-i)$

2. x^3+2x^2+2x+1. $[x=-1]$

解.　$\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x+1}=x^2+x+1$

命　$x^2+x+1=0$

解 之：　$x=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ 或 $-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$　原式$=(x+1)(2x+1-i\sqrt{3})(2x+1+i\sqrt{3})$

3．$x^3-2x^2-x+2.$ $[x=1]$

解.　$\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x-1}=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

$\therefore$　原式$=(x-1)(x+1)(x-2)$

4．$x^3-7x+6.$ $[x=1]$

解.　$\dfrac{x^3-7x+6}{x-1}=x^2+x-6=(x+3)(x-2).$

$\therefore$　原式$=(x-1)(x-2)(x+3).$

5．$x^3-1.$ $[x=1]$

解.　$\dfrac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$

命　$x^2+x+1=0$

解 之：　$x=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ 或 $-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$　原式$=(x-1)(2x+1+i\sqrt{3})(2x+1-i\sqrt{3}).$

6．$x^3+1.$ $[x=-1]$

解.　$\dfrac{x^3+1}{x+1}=x^2-x+1$

命　$x^2-x+1=0$

解 之：　$x=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ 或 $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore$　原式$=(x+1)(2x+1+i\sqrt{3})(2x-1-i\sqrt{3}).$

問 題 八 十 五　P. 168

下列1至4各方程式，既知其一根，試求其餘各根。

1. $x^3-2x+1=0$. [$x=1$]

解. $$\frac{x^3-2x+1}{x-1}=x^2+x-1$$

命 $x^2+x-1=0$

解之: $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

故原式之根爲 1. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

2. $x^3-5x+4=0$. [$x=1$]

解. $$\frac{x^3-5x+4}{x-1}=x^2+x-4$$

命 $x^2+x-4=0$

解之: $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ 或 $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

故原式之根爲 1, $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

3. $x^3-49x+120=0$. [$x=3$]

解. $$\frac{x^3-49x+120}{x-3}=x^2+3x-40$$

命 $x^2+3x-40=0$

分解 $(x-5)(x+8)=0$ $\therefore$ $x=5$ 或 -8.

故原式之根爲 $3, 5, -8$.

4. $x^3+21=3x^2+7x$. [$x=3$].

解. 整理 $x^3-3x^2-7x+21=0$

$$\frac{x^3-3x^2-7x+21}{x-3}=x^2-7$$

命 $x^2-7=0$

解之: $x=\sqrt{7}$ 或 $-\sqrt{7}$.

故原式之根爲 $3, \sqrt{7}, -\sqrt{7}$.

5. 試求 $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ 及 $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ 之立方.

解. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=\left(\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{(-1)^2-(i\sqrt{3})^2}{4}=\frac{1+3}{4}=1.$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{(-1)^2-(i\sqrt{3})^2}{2}=\frac{1+3}{4}=1.$$

6. 試求 $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ 及 $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ 之積.

解. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{(-1)^2-(i\sqrt{3})^2}{4}$

$$=\frac{1-3i^2}{4}=\frac{1+3}{4}=1.$$

7. 問 $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$ 及 $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ 有何關係。

解. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}+3i^2}{4}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}$

$$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

故知二式之關係爲相等。

8. 問 $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ 及 $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2$ 有何關係。

解. $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1+2i\sqrt{3}+3i}{4}=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}$

$$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

故知二式之關係爲相等。

問題八十六 P.172

試解下列各方程式：

1．$x^4-5x^2+4=0$

解．分　解　$(x^2-1)(x^2-4)=0$

$x^2-1=0$ 或 $x^2-4=0$

$\therefore\quad x=\pm 1\qquad x=\pm 2.$

2．$x^4-7x^2-18=0.$

解．分　解　$(x^2+2)(x^2-9)=0$

$x^2+2=0$ 或 $x^2-9=0$

$\therefore\quad x=\pm\sqrt{-2}\qquad x=\pm 3.$

3．$x^2+\dfrac{100}{x^2}=29.$

解．整　理　$x^4-29x^2+100=0$

即　$(x^2-4)(x^2-25)=0$

$x^2-4=0$ 或 $x^2-25=0$

$\therefore\quad x=\pm 2\qquad x=\pm 5.$

4．$x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}.$

解．整　理　$a^2x^4-a^4x^2-x^2+a^2=0$

即　$(x^2-a^2)(a^2x^2-1)=0$

$\therefore\quad x=\pm a$ 或 $\pm\dfrac{1}{a}.$

5．$x^4+\dfrac{1}{x^4}=a^4+\dfrac{1}{a^4}$

解. 整　理　$a^4x^8-a^8x^4-x^4+a^4=0$

分　解　$(x^4-a^4)(a^4x^4-1)=0$

即　$(x^2-a^2)(x^2+a^2)(a^2x^2-1)(a^2x^2+1)=0$

$\therefore\ x=\pm a$ 或 $\pm ai$ 或 $\pm\dfrac{1}{a}$ 或 $\pm\dfrac{1}{a}i$

6. $(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40=0$.

解. 分　解　$(x^2+x-2)(x^2+x-20)=0$

即　$(x-1)(x+2)(x-4)(x+5)=0$

$\therefore\ x=1$ 或 -2 或 4 或 -5.

7. $(x^2+x)(x^2+x+1)=42$.

解. 整　理　$(x^2+x)^2+(x^2+x)-42=0$

分　解　$(x^2+x-6)(x^2+x+7)=0$

即　$(x-2)(x+3)(x^2+x+7)=0$

$\therefore\ x=2$ 或 -3 或 $\dfrac{-1\pm\sqrt{-27}}{2}$.

8. $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=2$.

解. 設　$\dfrac{x^2}{x+1}=y$, 則　$\dfrac{x+1}{x^2}=\dfrac{1}{y}$.

$\therefore\ y+\dfrac{1}{y}=2$

整　理　$y^2-2y+1=0$

即　$(y-1)^2=0$　　$y=1$

故　$\dfrac{x^2}{x+1}=0$

即　$x^2=x+1$

移　項　$x^2-x-1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$.

9. $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$.

解. 設 $\dfrac{x}{x^2+1}=y$, 則 $\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{1}{y}$.

$\therefore\quad y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$

整　理　$2y^2-5y+2=0$

分　解　$(y-2)(2y-1)=0$　$\therefore\quad y=2$ 或 $\dfrac{1}{2}$.

即　$\dfrac{x}{x^2+1}=2$ 或 $\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}$.

整　理　$2x^2+x+2=0$　　$x^2-2x+1=0$

$\therefore\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-16}}{4}$　　$(x-1)^2=0$　$\therefore\quad x=1$.

故　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-15}}{4}$ 或 1.

10. $(x^2+x+1)(x^2+x-\dfrac{3}{2})+1=0$.

解. 整　理　$(x^2+x)^2-\dfrac{1}{2}(x^2+x)-\dfrac{1}{2}=0$

以2乘　$2(x^2+x)^2-(x^2+x)-1=0$

分　解　$(x^2+x-1)(2x^2+2x+1)=0$

即　$x^2+x-1=0$　或　$2x^2+2x+1=0$

$\therefore\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$　　$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{4}$

故　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 或 $\dfrac{-1\pm i}{2}$.

11. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$.

解. 整　理　$(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10=0$

分　解　$(x^2+x-2)(x^2+x+5)=0$

即　$x^2+x-2=0$　或　$x^2+x+5=0$

$(x-1)(x+2)=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-20}}{2}$

$\therefore \quad x=1$ 或 $-2 \qquad\qquad =\frac{-1\pm\sqrt{-19}}{2}$

故　$x=1$ 或 -2 或 $\frac{-1\pm\sqrt{-19}}{2}$

12. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)=12.$

解. 設　$x+\frac{1}{x}=y.$

$\therefore \quad y^2+4y-12=0$

分　解　$(y-2)(y+6)=0 \qquad \therefore \quad y=2$ 或 $-6.$

即　$x+\frac{1}{x}=2$ 或 $x+\frac{1}{x}=-6$

$x^2-2x+1=0 \qquad x^2+6x+1=0$

$(x-1)^2=0 \qquad x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4}}{2}$

$\therefore \quad x=1 \qquad\qquad =\frac{-6\pm2\sqrt{8}}{2}=-3\pm2\sqrt{2}$

故　$x=1$ 或 $-3\pm2\sqrt{2}.$

13. $\frac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\frac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\frac{5}{2}.$

解. 設　$\frac{x^2+2}{x^2+4x+1}=y$ 則 $\frac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\frac{1}{y}$

$\therefore \quad y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$

整　理　$2y^2-5y+2=0$

分　解　$(2y-1)(y-2)=0 \qquad \therefore \quad y=\frac{1}{2}$ 或 $2.$

即　$\frac{x^2+2}{x^2+4x+1}=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{x^2+2}{x^2+4x+1}=2$

整　理　$x^2-4x+3=0 \qquad x^2+8x=0$

分　解　$(x-1)(x-3)=0$　　$x(x+8)=0$

$\therefore\ x=1$ 或 3　　$\therefore\ x=0$ 或 -8.

14. $2x^2-4x-\sqrt{x^2-2x-3}=9$

解. 設　$\sqrt{x^2-2x-3}=y$

則　$x^2-2x=y^2+3$

即　$2x^2-4x=2(x^2-2x)=2(y^2+3)$

變原式　$2(y^2+3)-y=9$

整　理　$2y^2-y-3=0$

分　解　$(2y-3)(y+1)=0$　　$\therefore\ y=\dfrac{3}{2}$ 或 -1.

即　$x^2-2x-3=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ 或 $x^2-2x-3=(-1)^2$

整　理　$4x^2-8x-21=0$　　$x^2-2x-4=0$

分　解　$(2x-7)(2x+3)=0$　　$\therefore\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+16}}{2}$

$\therefore\ x=\dfrac{7}{2}$ 或 $-\dfrac{3}{2}$.　　$=1\pm\sqrt{5}$

15. $2x^2+6x=1-\sqrt{x^2+3x+1}$

解. 設　$\sqrt{x^2+3x+1}=y$

則　$x^2+3x=y^2-1$

即　$2x^2+6x=2(x^2+3x)=2(y^2-1)$

變原式　$2(y^2-1)=1-y$

整　理　$2y^2+y-3=0$

分　解　$(2y+3)(y-1)=0$　　$\therefore\ y=-\dfrac{3}{2}$ 或 1.

即　$x^2+3x+1=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2$ 或 $x^2+3x+1=1$

整　理　$x^2+3x-\dfrac{5}{4}=0$　　$x^2+3x=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9+5}}{2},\qquad x(x+3)=0$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{14}}{2}\qquad \therefore\quad x=0\text{ 或 }-3$$

16. $2(2x-3)(x-4)-\sqrt{2x^2-11x+15}=60$

解. 變原式爲 $2(2x^2-11x+15)-\sqrt{2x^2-11x+15}-66=0$

設 $\sqrt{2x^2-11x+15}=y$ 代入上式

$\therefore\quad 2y^2-y-66=0$

分　解 $(y-6)(2y+11)=0 \qquad \therefore\quad y=6$ 或 $-\frac{11}{2}$.

即 $2x^2-11x+15=6$ 或 $2x^2-11x+15=\left(-\frac{11}{2}\right)^2$

整　理 $2x^2-11x-21=0 \qquad 2x^2-11x-\frac{61}{4}=0$

分　解 $(x-7)(2x+3)=0 \qquad \therefore\quad x=\frac{11\pm\sqrt{121+122}}{4}$

$\therefore\quad x=7$ 或 $-\frac{3}{2}$. $\qquad =\frac{11\pm\sqrt{243}}{4}$

17. $x^2+(x-2)(x-3)+\sqrt{2x^2-5x+6}=6$

解. 整　理 $2x^2-5x+6+\sqrt{2x^2-5x+6}-6=0$

設 $\sqrt{2x^2-5x+6}=y$

$\therefore\quad y^2+y-6=0$

分　解 $(y+3)(y-2)=0 \qquad \therefore\quad y=-3$ 或 2

即 $2x^2-5x+6=(-3)^2$ 或 $2x^2-5x+6=2^2$

整　理 $2x^2-5x-3=0 \qquad 2x^2-5x+2=0$

分　解 $(x-3)(2x+1)=0 \qquad (2x-1)(x-2)=0$

$x=3$ 或 $-\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad x=\frac{1}{2}$ 或 2.

18. $(x+5)(x-2)-36=\sqrt{(x+4)(x-1)}$

解. 整　理　$x^2+3x-4-\sqrt{x^2+3x-4}-42=0$

設　$\sqrt{x^2+3x-4}=y$ 代入上式

$\therefore$　$y^2-y-42=0$

分　解　$(y+6)(y-7)=0$　　$\therefore$　$y=-6$ 或 7.

即　$x^2+3x-4=(-6)^2$ 或 $x^2+3x-4=7$

整　理　$x^2+3x-40=0$　　　$x^2+3x-53=0$

分　解　$(x+8)(x-5)=0$　　$\therefore$　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+212}}{2}$

$\therefore$　$x=-8$ 或 5.　　　　$=\dfrac{-3\pm\sqrt{221}}{2}$

問題八十七 P. 175

試解下列各方程式：

1. $3x^3-24x^2-24x+3=0.$

解. 以3除　$x^3-8x^2-8x+1=0$

即　$x^3+1-8x(x+1)=0$

分　解　$(x+1)(x^2-x+1-8x)=0$

整　理　$(x+1)(x^2-9x+1)=0$

即　$x+1=0$　或　$x^2-9x+1=0$

$\therefore$　$x=-1$　　$x=\dfrac{9\pm\sqrt{81-4}}{2}=\dfrac{9\pm\sqrt{77}}{2}$

2. $x^4+3x^3+6x^2+3x+1=0$

解. 以 x^2 除　$x^2+\dfrac{1}{x^2}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$

設　$x+\dfrac{1}{x}=y$ 則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=y^2$, $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-$

$\therefore\quad (y^2-2)+3y+6=0$

整 理 $\quad y^2+3y+4=0$

$$y=\frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2}=\frac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}$$

即 $\quad x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}$

$$x^2-\frac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}x+1=0$$

以2乘 $\quad 2x^2-(-3\pm i\sqrt{7})x+2=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-3\pm i\sqrt{7}\pm\sqrt{(-3\pm i\sqrt{7})^2-16}}{4}$$

$$=\frac{-3\pm i\sqrt{7}\pm\sqrt{-14\mp 6i\sqrt{7}}}{4}$$

$$=\frac{-3\pm i\sqrt{7}\pm i\sqrt{14\pm 6i\sqrt{7}}}{4}$$

3． $4x^4-2x^3+2x^2-2x+4=0.$

解. 以 x^2 除 $\quad 4x^2-2x+2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}=0$

化 爲 $\quad 4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0$

設 $\quad x+\dfrac{1}{x}=y$ 則 $x^2+\dfrac{1}{x^4}=y^2-2$

$\therefore\quad 4(y^2-2)-2y+2=0$

即 $\quad 2y^2-y-3=0$

$(y+1)(2y-3)=0 \qquad \therefore\quad y=-1$ 或 $\dfrac{3}{2}$.

即 $\quad x+\dfrac{1}{x}=-1$ 或 $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$

$x^2+x+1=0 \qquad\qquad 2x^2-3x+2=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}\qquad x=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{4}$$

$$=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad =\frac{3\pm i\sqrt{7}}{4}$$

4. $40x^4-286x^3+573x^2-286x+40=0$.

解. 以x^2除 $\quad 40x^2-286x+573-\frac{286}{x}+\frac{40}{x^2}=0$

化 為 $\quad 40\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-286\left(x+\frac{1}{x}\right)+573=0$

設 $\quad x+\frac{1}{x}=y$ 則 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

$\therefore \quad 40(y^2-2)-286y+573=0$

即 $\quad 40y^2-286y+493=0$

$(4y-17)(10y-29)=0 \qquad \therefore \quad y=\frac{17}{4}$ 或 $\frac{29}{10}$

即 $\quad x+\frac{1}{x}=\frac{17}{4}$ 或 $x+\frac{1}{x}=\frac{29}{10}$

$4x^2-17x+4=0 \qquad 10x^2-29x+10=0$

$(x-4)(4x-1)=0 \qquad (5x-2)(2x-5)=0$

$\therefore \quad x=4$ 或 $\frac{1}{4} \qquad\qquad x=\frac{2}{5}$ 或 $\frac{5}{2}$

5. $5x^4-5x^3-5x+5=0$.

解. 以5除 $\quad x^4-x^3-x+1=0$

分 解 $\quad (x^3-1)(x-1)=0$

即 $\quad (x^2+x+1)(x-1)(x-1)=0$

$\therefore \quad x=1$ 或 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-5}}{5}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

6. $12x^3+5x^2-5x-12=0$.

解. 化 為 $\quad 12(x^3-1)+5(x-1)x=0$

分 解 $\quad (x-1)\{12(x^2+x+1)+5x\}=0$

$x-1=0 \qquad \therefore \quad x=1$

或 $\quad 12(x^2+x+1)+5x=0$

$$12x^2+17x+12=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{-17\pm\sqrt{17^2-4\times12\times12}}{2\times12}=\frac{-17\pm i\sqrt{287}}{24}$$

7. $7x^4-17x^3+17x-7=0.$

解 化為 $7(x^4-1)-17(x^2-1)x=0$

分解 $(x^2-1)\{7(x^2+1)-17x\}=0$

$x^2-1=0 \qquad \therefore\quad x=\pm1$

或 $7(x^2+1)-17x=0$

$7x^2-17x+7=0$

$$\therefore\quad x=\frac{17\pm\sqrt{289-196}}{2\times7}=\frac{17\pm\sqrt{92}}{14}.$$

8. $m^2x^4+mx^3-mx-m^2=0.$

解 化為 $m^2(x^4-1)+mx(x^2-1)=0$

分解 $(x^2-1)\{m^2(x^2+1)+mx\}=0$

$x^2-1=0 \qquad \therefore\quad x=\pm1$

或 $m^2x^2+mx+m^2=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4m^4}}{2m^2}=\frac{-m\pm m\sqrt{1-4m^2}}{2m^2}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1-4m^2}}{2m}$$

9. $9x^5+5x^4-\frac{22}{9}x^3-\frac{22}{9}x^2+5x+9=0.$

解 整理 $9(x^5+1)+5x(x^3+1)-\frac{22}{9}x^2(x+1)=0$

即 $9(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)+5(x+1)(x^2-x+1)$

$$-\frac{22}{9}x^2(x+1)=0$$

$$(x+1)(9x^4-4x^3)+\frac{14}{9}x^2-4x+9=0$$

$$x+1=0 \qquad \therefore \quad x=-1.$$

或　$$9x^4-4x^3+\frac{14}{9}x^2-4x+9=0$$

以 x^2 除　$$9x^2-4x+\frac{14}{9}-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}=0$$

即　$$9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{14}{9}=0$$

設　$x+\dfrac{1}{x}=y$ 則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$

$$\therefore \quad 9(y^2-2)-4y+\frac{14}{9}=0$$

整　理　$$81y^2-36y-148=0$$

$$\therefore \quad y=\frac{36\pm\sqrt{296+4\times81\times148}}{2\times81}=\frac{36\pm36\sqrt{38}}{162}$$

$$=\frac{2\pm2\sqrt{38}}{9}$$

故　$$x+\frac{1}{x}=\frac{2\pm2\sqrt{38}}{9}$$

整　理　$$x^2-\frac{2\pm2\sqrt{38}}{9}x+1=0$$

即　$$9x^2-(2\pm2\sqrt{38})x+9=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{2\pm2\sqrt{38}\pm\sqrt{(2\pm2\sqrt{38})^2-4\times9\times9}}{2\times9}$$

$$=\frac{2\pm2\sqrt{38}\pm2\sqrt{-42\mp2\sqrt{38}}}{2\times9}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{38}\pm i\sqrt{42\mp2\sqrt{36}}}{9}$$

10. $6x^5+4x^4-6x^3+6x^2-4x-6=0$

解. 整　理　$$6(x^5-1)+4x(x^3-1)-6x^2(x-1)=0$$

即　$$(x-1)\{6(x^4+x^3+x^2+x+1)+4x(x^2+x+1)$$
$$-6x^2\}=0$$

$$(x-1)(6x^4+10x^3+4x^2+10x+6)=0$$

$$x-1=0 \qquad \therefore \quad x=1$$

或 $$6x^4+10x^3+4x^2+10x+6=0$$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+10\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

設 $x+\dfrac{1}{x}=y$ 則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$

$$6(y^2-2)+10y+4=0$$

即 $$6y^2+10y-8=0$$

以 2 除 $$3y^2+5y-4=0$$

$$\therefore \quad y=\frac{-5\pm\sqrt{25+48}}{2\times 3}=\frac{-5\pm\sqrt{73}}{6}$$

即 $$x+\frac{1}{x}=\frac{-5\pm\sqrt{73}}{6}$$

整　理 $$6x^2-(-5\pm\sqrt{73})x+6=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{73}\pm\sqrt{(-5\pm\sqrt{73})^2-4\times 6\times 6}}{2\times 6}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{73}\pm\sqrt{-46+10\sqrt{73}}}{2\times 6}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{73}\pm i\sqrt{46\pm 10\sqrt{73}}}{12}.$$

問 題 八 十 八 P.177

解下列各聯立方程式：

1. $$\begin{cases} 3x^2-2xy=5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-y=2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解. 由 (2) $x=y+2$

自 乘 $x^2=y^2+4y+4$, 代入 (1)

即　$3y^2+12y+12-2y^2-4y=5$

整　理　$y^2+8y+7=0$

分　解　$(y+7)(y+1)=0$

$\therefore\ y=-7$ 或 -1

代入 x　$\therefore\ x=-5$ 或 $1.$

2. $\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots(1) \\ 2xy-3y=28 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由（1）　$y=6-x$ 代入（2）

$2x(6-x)-3(6-x)=28$

整　理　$2x^2-15x+46=0$

$$\therefore\ x=\frac{15\pm\sqrt{225-368}}{2\times2}=\frac{15\pm i\sqrt{143}}{4}$$

代入 y　$\therefore\ y=6-x=\dfrac{6\mp i\sqrt{143}}{4}$

3. $\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots(1) \\ x^2-y^2=24 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解.（2）÷（1）　$x-y=4$ ……………………（3）

（1）+（3）　$2x=10$　$\therefore\ x=5$

代入（3）　$\therefore\ y=1.$

4. $\begin{cases} x-y=4 & \cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=40 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解.（1）自乘　$x^2-2xy+y^2=16$ ……………（3）

（2）×2　$2x^2+2y^2=80$ ……………………（4）

（4）−（3）　$x^2+2xy+y^2=64$

即　$(x+y)^2=64$　$\therefore\ x+y=\pm8$

即　$x+y=8$ 或 $x+y=-8$

$$\therefore\ x=6 \qquad \therefore\ x=-2$$
$$y=2 \qquad y=-6$$

5. $$\begin{cases} 2x^2+4y^2-z^2+6yz-8zx+15xy+51x+18y+8=0 \cdots\cdots(1) \\ 2x-4y-16z+26=0 \cdots\cdots(2) \\ 5x+3y-z=0 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解, (2)×5　　$10x-20y-80z+130=0 \cdots\cdots(4)$

(3)×2　　$10x+6y-2z=0 \cdots\cdots(5)$

(5)−(4)　　$26y+78z-130=0$

以26除　$y+3z-5=0$　　$\therefore\ z=\dfrac{5-y}{3}$

(2)÷2　　$x-2y-8z+13=0 \cdots\cdots(6)$

(3)×8　　$40x+24y-8z=0 \cdots\cdots(7)$

(7)−(6)　　$39x+26y-13=0$

以13除　$3x+2y+1=0$　　$\therefore\ x=\dfrac{1-2y}{3}$

將 x, z 之值代入(1),即

$$2\left(\frac{1-2y}{3}\right)^2+4y^2-\left(\frac{5-y}{3}\right)^2+6y\left(\frac{5-y}{3}\right)-8\left(\frac{5-y}{3}\right)$$
$$\times\left(\frac{1-2y}{3}\right)+15y\left(\frac{1-2y}{3}\right)+51\left(\frac{1-2y}{3}\right)+18y+8=0$$

整　理　　$-9y^2+9y+18=0$

以−9除　　$y^2-y-2=0$

分　解　　$(y+1)(y-2)=0$

$$\therefore\ \begin{cases} y=-1 \\ z=2 \\ x=1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y=2 \\ z=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

問題集 XXI P. 177

試解下列各聯立方程式：

1. $\begin{cases} x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-xy+y^2=21 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由（1） $y=x-1$ 代入（2）

即 $x^2-x(x-1)+(x-1)^2=21$

整　理 $x^2-x-20=0$

分　解 $(x-5)(x+4)=0$

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-4 \\ y=-5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-5y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+xy=20 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由（1） $y=\dfrac{2x-3}{5}$ 代入（2）

即 $x^2+x\left(\dfrac{2x-3}{5}\right)=20$

整　理 $7x^2-3x-100=0$

$\therefore \quad x=\dfrac{3\pm\sqrt{2809}}{14}=\dfrac{3\pm53}{14}$

$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\dfrac{25}{7} \\ y=-\dfrac{71}{35} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=7(x-y) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由（1） $x=\dfrac{6y}{8}=\dfrac{3x}{4}$ 代入（2）

$$x^2+\left(\frac{3x}{4}\right)^2=100$$

整　理　　$25x^2=1600$

即　　$x^2=64$　　$\therefore$　$x=\pm 8$

代入 y 之值：　即 $y=\pm 6$

4. $\begin{cases} x-y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2+y^2=65 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 由（1）　　$y=x-3$　　代入（2）

$$x^2+(x-3)^2=65$$

整　理　　$x^2-3x-28=0$

分　解　　$(x-7)(x+4)=0$

$$\begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=-7 \end{cases}$$

5. $\begin{cases} 5(x^2-y^2)=4(x^2+y^2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x+y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 由（2）　　$x=8-y$　　代入（1）

$$5\{(8-y)^2-y^2\}=4\{(8-y)^2+y^2\}$$

整　理　　$y^2+2y-8=0$

分　解　　$(y+4)(y-2)=0$

$$\therefore \begin{cases} y=-4 \\ x=12 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases}$$

6. $\begin{cases} 4x-5y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2x^2-xy+3y^2+3x-4y=47 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 由（1）　　$y=\dfrac{4x-1}{5}$　代入（2）

$$2x^2-\frac{x(4x-1)}{5}+3\left(\frac{4x-1}{5}\right)^2+3x-4\left(\frac{4x-1}{5}\right)=47$$

整　理　　$78x^2-24x-1152=0$

以 6 除　　$13x^2-4x-192=0$

$$\therefore\quad x=\frac{4\pm\sqrt{16+9984}}{2\times13}=\frac{4\pm100}{2\times13}=\frac{2\pm50}{13}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}\quad 或\quad \begin{cases} x=-\dfrac{48}{13} \\ y=-\dfrac{41}{13} \end{cases}$$

7． $\begin{cases} 4x+9y=12\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x^2+xy=6y^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由（1）　　$y=\dfrac{12-4x}{9}$　　代入（2）

$$2x^2+\frac{x(12-4x)}{9}=6\left(\frac{12-4x}{9}\right)^2$$

整　理　　$5x^2+114x-144=0$

$$\therefore\ x=\frac{-114\pm\sqrt{12996+2880}}{2\times5}=\frac{-114\pm126}{2\times5}=\frac{-57\pm63}{5}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=\dfrac{6}{5} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{cases}\quad 或\quad \begin{cases} x=-24 \\ y=12 \end{cases}$$

8． $\begin{cases} 4x^2+2xy+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{5}{12}(4x+y)=41\cdots\cdots(1) \\ 4x-y=4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由（2）　　$y=4x-4=4(x-1)$　　代入（1）

$$4x^2+8x(x-1)+4(x^2-2x+1)+\frac{5}{3}(2x-1)=41$$

整　理　　$24x^2-19x-58=0$

$$\therefore\quad x=\frac{19\pm\sqrt{361+5568}}{2\times24}=\frac{19\pm77}{2\times24}$$

$$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=-\dfrac{29}{24} \\ y=-\dfrac{53}{6} \end{cases}$$

9. $\begin{cases} \dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{10}=x-y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{7xy}{15}-\dfrac{2x}{3}-2y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. (1)簡約　$110x=132y$　$\therefore$　$y=\dfrac{5y}{6}$ 代入(2)

$$\frac{7x^2}{18}-\frac{2x}{3}-\frac{5x}{3}=0$$

即　$\dfrac{7x^2}{18}-\dfrac{42x}{18}=0$

簡　約　$x^2-6x=0$　即　$x(x-6)=0$

$$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$$

10. $\begin{cases} 3x+2y=5xy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 15x-4y=4xy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. (2)×4　　$12x+8y=20xy \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(2)×5　　$75x-20y=20xy \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(4)−(3)　$95x-28y=0$　$\therefore$　$y=\dfrac{9x}{4}$ 代入(1)

$$3x+\frac{9x}{2}=\frac{45x^2}{4}$$

整　理　$3x^2-2x=9$　即　$x(3x-2)=0$

$$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

11. $\begin{cases} xy+2=9y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ xy+2=x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. (2)−(1) $x-9y=0$ 即 $x=9y$ 代入(1)

$$9y^2+2=9y$$

整 理 $9y^2-9y+2=0$

分 解 $(3y-2)(3y-1)=0$

$$\therefore \begin{cases} y=\dfrac{2}{3} \\ x=6 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y=\dfrac{1}{3} \\ x=3 \end{cases}$$

12. $\begin{cases} 8(xy+1)=33y \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 4(xy+1)=33x \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (1)÷(2) $2=\dfrac{y}{x}$ 即 $y=2x$ 代入(2)

$$8x^2+4=33x$$

整 理 $8x^2-33x+4=0$

分 解 $(x-4)(8x-1)=0$

$$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{8} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

13. $\begin{cases} xy=x+y \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ ax=by \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由(2) $y=\dfrac{a}{b}x$ 代入(1)

$$\frac{a}{b}x^2=x+\frac{a}{b}x$$

整 理 $ax^2-(a+b)x=0$

即 $x\{ax-(a+b)\}=0$

$$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{a} \\ y=\dfrac{a+b}{b} \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2 & \cdots\cdots(1) \\ xy=ab & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解. 由 (2)×4 $\dfrac{4xy}{ab}=4$ ……(3)

(1) 自乘 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{2xy}{ab}+\dfrac{y^2}{b^2}=4$ ……(4)

(4)−(3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2xy}{ab}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$

即 $\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)^2=0$

開 方 $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$ ……(5)

(1)+(5) $\dfrac{2x}{a}=2$ $\therefore$ $x=a.$

(1)−(5) $\dfrac{2y}{b}=2$ $\therefore$ $y=b.$

12. $$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 & \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解. (1)自乘 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{2xy}{ab}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……(3)

(2)×2−(3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2xy}{ab}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

即 $\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)^2=1$

開 方 $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\pm 1$ ……(4)

(1)+(4) $\dfrac{2x}{a}=1\pm 1$ $\therefore$ $x=0$ 或 $a.$

(1)−(4) $\dfrac{2y}{b}=1\mp 1$ $\therefore$ $y=0$ 或 $b.$

問題集 XXII　　P. 180

試解下列各聯立方程式：

1. $\begin{cases} y^2-3xy=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x^2+5y^2=48 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 由（1）　$y(y-3x)=0$

$\therefore\ y=0$ 或 $3x$

以 $y=0$ 代入（2）　$3x^2=48$　　即　$x^2=16$

$\therefore\ x=\pm4.$　　　$y=0.$

以 $y=3x$ 代入（2）　$3x^2+45x^2=48$　即　$x^2=1$

$\therefore\ x=\pm1.$　　　$y=\pm3.$

2. $x^2+xy=28.$　　$xy-y^2=3.$

解. 令　$y=xz$

則原二式變爲：　$x^2+x^2z=28 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$x^2z-x^2z^2=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

(1)÷(2)　$\dfrac{x^2+x^2z}{x^2z-x^2z^2}=\dfrac{28}{3}$

即　$\dfrac{1+z}{z-z^2}=\dfrac{28}{3}$

整　理　$28z^2-25z+3=0$

分　解　$(4z-3)(7z-1)=0$

$\therefore\ z=\dfrac{3}{4}$　或　$z=\dfrac{1}{7}$

$z=\dfrac{3}{4}$ 代入（1）　$x^2+\dfrac{3}{4}x^2=28$

即　$x^2=4\times4$　　$\therefore\ x=\pm4.$　代入 y 之值：

$y=xz=\pm4\times\dfrac{3}{4}=\pm3.$

或　$z=\frac{1}{7}$ 代入（2）　$\frac{1}{7}x^2-\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}x^2=3$

即　$x^2=\frac{49}{2}$　　$\therefore\ x=\pm\frac{9}{\sqrt{2}}$ 代入 y 之值：

$$y=xz=\pm\frac{9}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{7}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3．$x^2+xy=45.\qquad y^2+xy=36$

解．令　$y=xz$

則二式變為：　$x^2+x^2z=45\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2z^2+x^2z=36\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

（1）÷（2）　$\frac{x^2(1+z)}{x^2(z^2+z)}=\frac{45}{36}$

即　$\frac{1+z}{z^2+z}=\frac{5}{4}$

整　理　$5z^2+z-4=0$

分　解　$(5z-4)(z+1)=0$

$\therefore\ z=\frac{4}{5}$　或　-1

$z=\frac{4}{5}$ 代入（1）　$x^2+\frac{4}{5}x^2=45$

即　$x^2=25$　　$\therefore\ x=\pm5.$

$\therefore\ y=xz=\pm5\times\frac{4}{5}=\pm4$

又　$z=-1$ 代入（1）或（2）均不合理

4．$2x^2-xy=56.\qquad 2xy-y^2=48\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

解．令　$y=xz$

則二式變為：　$2x^2z-x^2z=56\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$2x^2z-x^2z^2=48\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

（1）÷（2）　$\frac{3x^2-x^2z^2}{2x^2z-x^2z^2}=\frac{56}{48}$

即　$\dfrac{2-z}{2z-z^2}=\dfrac{7}{6}$

整　理　$7z^2-20z+12=0$

分　解　$(7z-6)(z-2)=0$　　$\therefore\ z=\dfrac{6}{7}$ 或 2

$z=\dfrac{6}{7}$ 代入（1）$2x^2-\dfrac{6}{7}x^2=56$

即　$x^2=49$　　$\therefore\ x=\pm 7$

$\therefore\ y=xz=\pm 7\times\dfrac{6}{7}=\pm 6$

又　$z=2$ 代（1）或（2）均不合理

5．$x^2+3xy=28$.　　$xy+4y^2=8$

解．令　$y=xz$

則二式變爲：　$x^2+3x^2z=28$……………（1）

$x^2z+4x^2z^2=8$ ……………（2）

（1）÷（2）　$\dfrac{x^2(1+3z)}{x^2(z^2+4z^2)}=\dfrac{28}{8}$

即　$\dfrac{1+3z}{z+4z^2}=\dfrac{7}{2}$

整　理　$28z^2+z-2=0$

分　解　$(7z+2)(4z-1)=0$　　$\therefore\ z=-\dfrac{2}{7}$ 或 $\dfrac{1}{4}$

$z=\dfrac{1}{4}$ 代入（1）　$x^2+\dfrac{3}{4}x^2=28$

即　$x^2=16$　　$\therefore\ x=\pm 4$

$\therefore\ y=xz=\pm 4\times\dfrac{1}{4}=\pm 1.$

又　$z=-\dfrac{2}{7}$ 代入（2）$-\dfrac{2}{7}x^2+\dfrac{16}{49}x^2=8$

即　$x^2=4\times 49=196$　　$\therefore\ x=\pm 14$

$\therefore\ y=xz=\pm 14\times\left(-\dfrac{2}{7}\right)=\pm 4.$

6． $x^2+xy-6y^2=21.\qquad xy-2y^2=4.$

解. 令 $y=xz$

則二式變爲： $x^2+x^2z-6x^2z^2=21\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2z-2x^2z^2=4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)÷(2) $\dfrac{x^2(1+z-6z^2)}{x^2(z-2z^2)}=\dfrac{21}{4}$

即 $\dfrac{1+z-6z^2}{z-2z^2}=\dfrac{21}{4}$

整 理 $18z^2-17z+4=0$

分 解 $(9z-4)(2z-1)=0\qquad\therefore\quad z=\dfrac{4}{9}$ 或 $\dfrac{1}{2}$

$z=\dfrac{4}{9}$ 代入(2) $\dfrac{4}{9}x^2-2x^2\times\dfrac{16}{81}=4$

即 $x^2=18\qquad\therefore\quad x=\pm9$

$y=xz=\pm9\times\dfrac{4}{9}=\pm4$

又 $z=\dfrac{1}{2}$ 代入(1)或(2)均不合理

7． $\begin{cases} x^2+y^2=97\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=36\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (2)×2 $2xy=72\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)+(3) $x^2+2xy+y^2=169$

即 $(x+y)^2=13^2$

$\therefore\quad x+y=\pm13\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(1)−(3) $x^2-2xy+y^2=25$

即 $(x+y)^2=5^2$

$\therefore\quad x-y=\pm5\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(4)+(5) $2x=(\pm13\pm5)\qquad\therefore\ x=\dfrac{1}{2}(\pm13\pm5)$

$(4)-(5)\quad 2y=(-13\mp5)\quad \therefore\ y=\frac{1}{2}(\pm13\mp5)$

$$\begin{cases} x=\mp9 \\ y=\pm4 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=\pm4 \\ y=\pm9 \end{cases}$$

8．$x(x+y)=10.\qquad y(x-y)=6$

解．令　　$y=xz$

則原二式變為：　$x^2+x^2z=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2z-x^2z^2=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$(1)\div(2)\quad \frac{x^2(1+z)}{x^2(z-z^2)}=\frac{10}{6}$ 即 $\frac{1+z}{z-z^2}=\frac{20}{3}$

整　理　　$20z^2-17z+3=0$

分　解　　$(4z-1)(5z-3)=0\qquad \therefore\ z=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{5}$

$z=\frac{3}{5}$ 代入(1)　$x^2+\frac{3}{5}x^2=10$

即　　$x^2=25\qquad \therefore\ x=\pm5$

$y=xz=\pm5\times\frac{3}{5}=\pm3$

$z=\frac{1}{4}$ 代入(2)　$\frac{1}{4}x^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2x^2=6$

即　　$x^2=32\qquad \therefore\ x=\pm\sqrt{16\times2}=\pm4\sqrt{2}$

$y=xz=\pm4\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=\pm\sqrt{2}$

9．$x^2-2xy+5=0.\qquad (x-y)^2=4.$

解．令　　$y=xz$

則二式變為：　$x^2-2x^2z=-5\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2(1-z)^2=4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$(1)\div(2)\quad \frac{x^2(1-2z)}{x^2(1-z)^2}=\frac{-5}{4}$

即　　$\frac{1-2z}{1-2z+z^2}=\frac{-5}{4}$

整　理　$5z^2-18z+9=0$

分　解　$(z-3)(5z-3)=0$　$\therefore\ z=3$ 或 $\frac{3}{5}$

$z=\frac{3}{5}$ 代入（1）　$x^2-3x^2\times\frac{3}{5}=-5$

即　$x^2=25$　$\therefore\ x=\pm5.$

$y=xz=\pm5\times\frac{3}{5}=\pm3.$

又　$z=3$ 代入（2）　$x^2(1-3)^2=4$

即　$x^2=1$　$\therefore\ x=\pm1$

$x=xz=\pm1\times3=\pm3.$

10. $2y^2-4xy+3x^2=17.$　$y^2-x^2=16.$

解. 令　$y=xz$

則二式變爲：　$2x^2z^2-4x^2z+3x^2=17\cdots\cdots(1)$

$x^2z^4-x^2=16\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

（1）÷（2）　$\frac{x^2(2z^2-4z+3)}{x^2(z-1)}=\frac{17}{16}$

即　$\frac{2z^2-4z+3}{z^2-1}=\frac{17}{16}$

整　理　$15z^2-64z+65=0$

分　解　$(3z-5)(5z-13)=0$　$\therefore\ z=\frac{5}{3}$ 或 $\frac{13}{5}$

$z=\frac{5}{3}$ 代入（2）　$x^2\times\frac{25}{9}-x^2=16$

即　$x^2=9$　$\therefore\ x^2=\pm2$

$y=xz=\pm3\times\frac{5}{3}=\pm5.$

又　$z=\frac{13}{5}$ 代入（2）　$x^2\times\left(\frac{13}{5}\right)^2-x^2=16$

即　$x^2=\frac{25}{9}$　$\therefore\ x=\pm\frac{5}{3}$

$$y=xz=\pm\frac{5}{3}\times\frac{15}{5}=\pm\frac{13}{3}.$$

11. $x(x+y)+y(x-y)=158.\qquad 7x(x+y)=22y(x-y).$

解. 令 $\qquad y=xz$

則二式變爲: $x^2(1+z)+x^2(1-z)z=159\cdots(1)$

$7x^2(1+z)-72x^2z(1-z)=0\cdots\cdots(2)$

(2)÷(1) $\dfrac{7x^2(1+z)-72x^2z(1-z)}{x^2(1+z)+x(1-z)z}=\dfrac{0}{158}$

即 $\qquad 7(1+z)-72z(1-z)=0$

整理 $\qquad 72z^2-65z+7=0$

分解 $\qquad (8z-1)(9z-7)=0 \qquad \therefore\ z=\frac{1}{8}$ 或 $\frac{7}{9}$.

$z=\frac{1}{8}$ 代入(1) $x_2\left(1+\frac{1}{8}\right)+x^2\left(1-\frac{1}{8}\right)\times\frac{1}{8}=158$

即 $\qquad x^2=64\times 2 \qquad \therefore\ x=\pm 8\sqrt{2}$

$$y=xz=\pm 8\sqrt{2}\times\frac{1}{8}=\pm 8\sqrt{2}.$$

又 $\qquad z=\frac{7}{9}$ 代入(1)

$$x^2\left(1+\frac{7}{9}\right)+x^2\left(1+\frac{7}{9}\right)\times\frac{7}{9}=158$$

即 $\qquad x^2=81 \qquad \therefore\ x=\pm 9.$

$$y=xz=\pm 9\times\frac{7}{9}=\pm 7.$$

12. $x^2+xy=a(a+b).\qquad x^2+y^2=a^2+b^2.$

解. 令 $\qquad y=xz$

則二式變爲: $x^2+x^2z=a(a+b)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2+x^2z^2=a^2+b^2\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)÷(2) $\qquad \dfrac{x^2(1+z)}{x^2(1+z^2)}=\dfrac{a(a+b)}{a^2+b^2}$

$$\frac{1+z}{1+z^2}=\frac{a(a+b)}{a^2+b^2}$$

整 理 $a(a+b)z^2-(a^2+b^2)z+b(a-b)=0$

分 解 $(az-b)[(a+b)z-(a-b)]=0$

$\therefore\ z=\dfrac{b}{a}$，或 $\dfrac{a-b}{a+b}$

$z=\dfrac{b}{a}$ 代入（1） $x^2+x^2\dfrac{b}{a}=a(a+b)$

即 $x^2=a^2$ $\therefore\ x=\pm a$

$y=xz=\pm a\times\dfrac{b}{a}=\pm b.$

又 $z=\dfrac{a-b}{a+b}$ 代入（1） $x^2+x^2\dfrac{a-b}{a+b}=a(a+b)$

即 $x^2=\dfrac{(a+b)^2}{2}$ $\therefore\ x=\pm\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$

$y=xz=\pm\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}\times\dfrac{a-b}{a+b}=\pm\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}.$

問 題 集 XXIII P. 186

試解下列各組聯立方程式：

1．$\begin{cases} x-y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^3-y^3=152 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解.（2）÷（1）得 $x^2+xy+y^2=76\cdots\cdots\cdots(3)$

（1）自乘 $x^2-2xy+y^2=4\cdots\cdots\cdots(4)$

（3）−（4） $3xy=72$ $\therefore\ xy=24\cdots\cdots(5)$

（3）+（5） $(x+y)^2=100$ $\therefore\ x+y=\pm10$（6）

（1）+（6） $2x=\pm10+2$ $\therefore\ x=\dfrac{\pm10+2}{2}=6$ 或 $-4.$

（6）−（1） $2y=\pm10-2$ $\therefore\ y=\dfrac{\pm10-2}{2}=4$ 或 $-6.$

2．$\begin{cases} x+y=9 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^3+y^3=189 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (2)+(1) 得 $x^2-xy+y^2=21$……………(3)

(1) 自乘　$x^2+2xy+y^2=81$……………(4)

(4)−(3)　$3xy=60$　$\therefore\ xy=20$………(5)

(3)−(5)　$(x-y)^2=1$　$\therefore\ x-y=\pm1$…(6)

(1)+(6)　$2x=9\pm1$　$\therefore\ x=\dfrac{9\pm1}{2}=5$ 或 4

(1)−(6)　$2y=9\mp1$　$\therefore\ y=\dfrac{9\mp1}{2}=4$ 或 5

3. $\begin{cases} x^2+y^2=20 \cdots\cdots (1) \\ xy-x-y=2 \cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 變 (2)　$x+y=xy-2$……………(3)

(3) 自乘　$x^2+2xy+y^2=x^2y^2-4xy+4$…(4)

(4)−(1)　$2xy=x^2y^2-4xy-16$

即　$x^2y^2-6xy=16$

配　方　$x^2y^2-6xy+9=25$

開　方　$xy-3=\pm5$　$\therefore\ xy=8$ 或 -2.

$xy=8$　即　$2xy=16$……………(5)

(1)−(5)　$(x-y)^2=4$　$\therefore\ x-y=\pm2$‥(6)

(2)+(6)　$xy-2y=2\mp2$

即　$2y=8-2\pm2=6\pm2$

$\therefore\ y=\dfrac{6\mp2}{2}=2$ 或 4.

$\therefore\ x=\dfrac{8}{y}=4$ 或 2.

又　$xy=-2$ 則 $2xy=-4$…………(7)

(1)−(7)　$(x-y)^2=24$

$\therefore\ x-y=\pm2\sqrt{6}$……………(8)

(2)+(8)　$xy-2y=2\pm2\sqrt{6}$

即　　$2y=-2-2\pm2\sqrt{6}=14\mp2\sqrt{6}$

$$\therefore\quad y=\frac{-4\mp2\sqrt{6}}{2}=-2\mp\sqrt{6}.$$

$$x=\frac{-2}{y}=\frac{-2}{-2\mp\sqrt{6}}=\frac{-2(-\pm\sqrt{6})}{(-2\mp\sqrt{6})(-2\pm\sqrt{6})}$$

$$=\frac{4\mp2\sqrt{6}}{4-6}=\frac{2(2\mp\sqrt{6})}{-2}=-2\pm\sqrt{6}.$$

4. $\begin{cases} x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^5-y^5=781 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (2)÷(1)　$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=781$

即　$x^4+y^4+xy(x^2+y^2)+x^2y^2=781 \cdots(3)$

(1)自乘　$x^2-2xy+y^2=1$

即　　$x^2+y^2=2xy+1 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)自乘　$x^4+2x^2y^2+y^4=4x^2y^2+4xy+1$

即　　$x^4+y^4=2x^2y^2+4xy+1 \cdots\cdots(5)$

將(4),(5)之等値代入(3)

$$2x^2y^2+4xy+1+xy(2xy+1)+x^2y^2=781$$

整　理　$5x^2y^2+5xy-780=0$

即　　$x^2y^2+xy-156=0$

$$\therefore\quad xy=\frac{-1\pm\sqrt{1+624}}{2}=\frac{-1\pm25}{2}$$

由(1)　$y=x-1$ 代入 xy 之値:

即　　$x(x-1)=x^2-x=\frac{-1\pm25}{2}$

配　方　$x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{-1\pm25}{2}+\frac{1}{4}$

即　　$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{-1\pm50}{4}$

開　方　$x-\frac{1}{2}=\frac{\pm\sqrt{-1\pm50}}{2}$

則 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{-1\pm50}}{2}$, $y=x-1=\dfrac{-1\pm\sqrt{-1\pm50}}{2}$

$\therefore$ $x=4$, $y=3$.　　$x=-3$. $y=-4$.

又 $x=\dfrac{1+i\sqrt{51}}{2}$,　　$y=\dfrac{-1\pm i\sqrt{51}}{2}$

5. $\begin{cases} x+y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^5+y^5=33 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (2)÷(1) $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=11$

又 $x^4+y^4-xy(x^2+y^2)+x^2y^2=11 \cdots(3)$

(1)自乘 $x^2+2xy+y^2=9$

即 $x^2+y^2=9-2xy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)自乘 $x^4+2x^2y^2+y^4=81-36xy+4x^2y^2$

即 $x^4+y^4=2x^2y^2-36xy+81 \cdots\cdots(5)$

將(4),(5)之等值代入(3)

$2x^2y^2-36xy+81-xy(9-2xy)+x^2y^2=11$

整理 $5x^2y^2-45xy+70=0$

以5除 $x^2y^2-9xy+14=0$

分解 $(xy-2)(xy-7)=0$ $\therefore$ $xy=2$ 或 7

由(1) $y=3-x$

若 $xy=2$ 即 $x(3-x)=2$

$\therefore$ $x^2-3x+2=0$

分解 $(x-1)(x-2)=0$ $\therefore$ $x=1$ 或 2

$y=3-x=2$ 或 1

又若 $xy=7$ 即 $x(3-x)=7$

$\therefore$ $x^2-3x+7=0$

即 $\qquad x=\dfrac{3\pm\sqrt{6-28}}{2}$

$$\therefore\quad x=\frac{3\pm i\sqrt{19}}{2},\qquad y=\frac{3\mp i\sqrt{19}}{2}$$

6．$\begin{cases} x^2+xy+y^2=37 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^4+x^2y^2+y^4=481 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. (2)÷(1) $\quad x^2-xy+y^2=13 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(1)+(3) $\quad 2x^2+2y^2=50$

以2除 $\quad x^2+y^2=25 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(1)−(3) $\quad 2xy=24 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

(4)+(5) $\quad (x+y)^2=49$

開 方 $\quad \therefore\ x+y=\pm 7 \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

(4)−(5) $\quad (x-y)^2=1$

開 方 $\quad \therefore\ x-y=\pm 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$

(6)+(1) $\quad 2x=\pm 7\pm 1$

$$\therefore\quad x=\frac{\pm 7\pm 1}{2}=\pm 4 \text{ 或 } \pm 3.$$

(6)−(7) $\quad 2y=\pm 7\pm 1$

$$\therefore\quad y=\frac{\pm 7\pm 1}{2}=\pm 3 \text{ 或 } \pm 4.$$

7．$\begin{cases} x^2-xy+y^2=9 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^4+x^2y^2+y^4=243 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. (2)÷(1) $\quad x^2+xy+y^2=27 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(1)+(3) $\quad 2x^2+2y^2=36$

以2除 $\quad x^2+y^2=18 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(3)−(1) $\quad 2xy=18 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

(4)+(5) $\quad (x+y)^2=36$

開方　　$x+y=\pm6$ ……………………(6)

(4)−(5)　$(x-y)^2=0$

開方　　$x-y=0$　　即　　$x=y$　代入(6)

$2x=\pm6$　　或　　$2y=\pm6$

∴　$x=\pm3$　　∴　$y=\pm3$.

8. $\begin{cases} x^2-2xy=3y & \cdots\cdots(1) \\ 2x^2-9y^2=9y & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (1)×3　　$3x^2-6xy=9y$ ……………………(3)

(3)−(2)　$x^2-6xy+9y^2=0$

即　　$(x-3y)^2=0$

∴　$x-3y=0$　　∴　$x=3y$　代入(1)

即　　$9y^2-6y^2=3y$　　∴　$3y^2=3y$

∴　$y=1$,　　$x=3$.

或　　$3y^2-3y=0$　　即　$y(y-1)=0$

∴　　$y=0$　　$x=0$.

9. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{9y^2}=3 & \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{3xy}+\dfrac{1}{9y^2}=9 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 令　　$\dfrac{1}{x}=u$　　$\dfrac{1}{3y}=v$.

則原二式變為.　$u^2-v^2=3$ ……………………(3)

$u^2-2uv+v^2=9$ ……………………(4)

(4)開方　　$u-v=\pm3$ ……………………(5)

(3)÷(5)　$u+v=\pm1$ ……………………(6)

(5)+(6)　$2u=\pm3\pm1$ …… $\pm$ …… $\pm$

(6)−(5)　$2v=\pm1\mp3$，　$\therefore\ v=\dfrac{\pm1\mp3}{2}=\mp1.$

即　$x=\pm\dfrac{1}{2}$，　$y=\mp\dfrac{1}{2}$

10. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ x^2+y^2=90\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. (1)去分母　$2\{(x+y)^2+(x-y)^2\}=5(x^2-y^2)$

即　$4(x^2+y^2)=5(x^2-y^2)\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)代入(3)　$5(x^2-y^2)=4\times90$

即　$x^2-y^2=72\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(2)+(4)　$2x^2=162$　即　$x^2=81$　$\therefore\ x=\pm9$

(2)−(4)　$2y^2=18$　即　$y^2=9$　$\therefore\ y=\pm3.$

11. $\begin{cases}\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 2+3xy=3x\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. (1)去分母　$x^2+xy-(x-y)^2=x^2-y^2$

即　$3xy=x^2$　$\therefore\ 3y=x$ 代入(2)

$2+x^2=3x$　即　$x^2-3x+2=0$

分　解　$(x-2)(x-1)=0$　$\therefore\ x=1$ 或 $2.$

$\therefore\ y=\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{2}{3}.$

12. $\begin{cases}x^2+y^2=34\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=20\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. 設　$\sqrt{x^2-y^2}=z$ 則 $x^2-y^2=z^2$

則(2)變爲：　$z^2+z-20=0$

分　解　$(z+5)(z-4)=0$　$\therefore\ z=4$ 或 -5

即　$\sqrt{x^2-y^2}=4$

開 方 $x^2-y^2=16$ ……………………………(3)

(1)+(3) $2x^2=50$ 即 $x^2=25$ ∴ $x=\pm5$.

(1)−(3) $2y^2=18$ 即 $y^2=9$ ∴ $y=\pm3$.

或 $\sqrt{x^2-y^2}=-5$

開 方 $x^2-y^2=25$ ……………………………(4)

(1)+(4) $2x^2=59$ 即 $x^2=\frac{59}{2}$ ∴ $x=\pm\sqrt{\frac{59}{2}}$.

(1)−(4) $2y^2=9$ 即 $y^2=\frac{9}{2}$ ∴ $y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

13. $\begin{cases} x^2y(x+y)=80 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2y(2x-3y)=80 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (2)÷(1) $\frac{2x-3y}{x+y}=1$

即 $x+y=2x-3y$ ∴ $x=4y$ 代入(1)

$(4y)^2y(4x+y)=80$ 即 $80y^4=80$

∴ $y^4=1$ $y^2=\pm1$

∴ $y=\pm1$ 或 $\pm i$ $x=\pm4$ 或 $\pm4i$.

14. $\begin{cases} xy(x-y)=12 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^3-y^3=63 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (2)÷(1) $\frac{x^2+xy+y^2}{xy}=\frac{21}{4}$

即 $4x^2+4xy+4y^2=21xy$

整 理 $4x^2-17xy+4y^2=0$

分 解 $(4x-y)(x-4y)=0$ ∴ $y=4x$ 或 $\frac{1}{4}x$

若 $y=4x$ 代入(1) 則 $4x^2(x-4x)=12$

即 $-12x^3=12$ ∴ $x^3=-1$

$$\therefore\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2} \\ y=3\pm2\sqrt{3}. \end{cases}$$

或 $y=-\frac{1}{4}x$ 代入（1） 即 $\frac{1}{4}x^2(x-\frac{1}{4}x)=12$

即 $x^3=64$ $\therefore$ $x^3-64=0$

分 解 $(x-4)(x^2+8x+16)=0$

$$\therefore\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=-2\pm2i\sqrt{3} \\ y=\dfrac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3}) \end{cases}$$

15. $\begin{cases} x^2+y^2-1=2xy \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy(xy+1)=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由（1） $x^2-2xy+y^2=1$ 即 $(x-y)^2=1$

開 方 $x-y=\pm1$ $\therefore$ $y=x\mp1$

由（2） $x^2y^2+xy-6=0$

分 解 $(xy+3)(xy-2)=0$ $\therefore$ $xy+3=0$ 或 $xy-2=0$

若 $xy+3=0$ 以 $y=x\mp1$ 代入

即 $x^2\mp x+3=0$

$$\therefore\ x=\frac{\pm1\mp\sqrt{1-12}}{2}=\frac{\pm1\pm i\sqrt{11}}{2}.$$

則 $y=\dfrac{\mp1\pm i\sqrt{11}}{2}.$

若 $xy-2=0$ 以 $y=x\mp1$ 代入

即 $x^2\pm x-2=0$

$$\therefore\ x=\frac{\mp1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{\pm1\pm3}{2}=\begin{cases}\pm2.\\ \pm1.\end{cases}$$

$$y=\frac{\mp1\pm3}{2}=\begin{cases}\pm1,\\ \pm2.\end{cases}$$

16. $\begin{cases} x^2+xy=8x+3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y^2+xy=8y+6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (1)+(2)　$x^2+2xy+y^2=8(x+y)+9$

即　$(x+y)^2-8(x+y)-9=0$

分　解　$(x+y-9)(x+y+1)=0$

$\therefore\ x+y=9$　或　$x+y=-1$

若　$x+y=9$　由(1)　$x(x+y)=8x+3$

即　$9x=8x+3\quad \therefore\ x=3\quad \therefore\ y=9-x=6.$

若　$x+y=-1$　由(2)　$y(x+y)-8y=6$

即　$-y-8y=6\quad \therefore\ y=-\dfrac{2}{3},$

$\therefore\ x=-1-y=-\dfrac{1}{3},$

17. $\begin{cases} x^2+1=9y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+x=6y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (1)×2　$2x^2+2=18y \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)×3　$3x^2+3x=18y \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)−(3)　$x^2+3x-2=0$

$$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$

由(1)　$\therefore\ y=\dfrac{x^2+1}{9}=\left(\dfrac{9\mp6\sqrt{17}+17}{4}+1\right)\div9$

$$=\frac{5\pm\sqrt{17}}{6}.$$

18. $\begin{cases} 2(x+y)^2=9(x+y)+18 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (x-y)^2=6-(x-y) \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　$2(x+y)^2-6(x+y)-18=0$

分　解　$\{2(x+y)+3\}\{(x+y)-6\}=0$

$\therefore\ x+y=-\dfrac{3}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

或　　$x+y=6$ ……………………（4）

變（2）爲　$(x-y)^2+(x-y)-6=0$

分　解　　$(x-y+3)(x-y-2)=0$

$\therefore$　$x-y=-3$ ……………………（5）

或　　$x-y=2$ ……………………（6）

（3）+（5）　$2x=-\frac{3}{2}-3=-\frac{9}{2}$　　$\therefore$ $x=-\frac{9}{4}$

（3）−（5）　$2y=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$　　$\therefore$ $y=\frac{3}{4}$

（3）+（6）　$2x=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$　　$\therefore$ $x=\frac{1}{4}$

（3）−（6）　$2y=-\frac{3}{2}-2=-\frac{7}{2}$　　$\therefore$ $y=-\frac{7}{4}$

（4）+（5）　$2x=6-3=3$　　$\therefore$ $x=\frac{3}{2}$

（4）−（5）　$2y=6+3=9$　　$\therefore$ $y=\frac{9}{2}$

（4）+（6）　$2x=6+2=8$　　$\therefore$ $x=4.$

（4）−（6）　$2y=6-2=4$　　$\therefore$ $y=2.$

19. $\begin{cases} (x+y)^2+(x+y)-2xy=4 & \cdots\cdots(1) \\ (x+y)^2-3xy=1 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解.（1）−（2）　$x+y+xy=3$

移　項　　$x+y=3-xy$ ……………………（3）

自　乘　　$(x+y)^2=9-6xy+x^2y^2$ ……（4）

（4）−（2）　$3xy=8-6xy+x^2y^2$

即　　$x^2y^2-9xy+8=0$

分　解　　$(xy-1)(xy-8)=0$

$\therefore$　$xy=1$　或　$xy=8$

若　　$xy=1$ 代入（3）　　$x+y=3-1=2$

$\therefore\quad y=2-x$ 代入（3）

即　$x+(2-x)=3-x(2-x)$

整理　$x^2-2x+1=0$　即　$x-1=0$

$\therefore\quad x=1,\quad \therefore\quad y=2-1=1,$

若　$xy=8$, 代入（3）$x+y=3-8=-5$

$\therefore\quad y=-(x+5)$ 代入（3）

即　$x-(x+5)=3+x(x+5)$

整理　$x^2+5x+8=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-32}}{2}=\frac{-5\pm i\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore\quad y=-(x+5)=-\left(\frac{5\pm i\sqrt{7}}{2}\right)=\frac{-5\mp i\sqrt{7}}{2}.$$

20. $\begin{cases} x^2+3xy+y^2+4(x+y)=13\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x^2-xy+3y^2+2(x+y)=9\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. （1）×3　$3x^2+9xy+3y^2+13(x+y)=39\cdots$（3）

（3）－（2）　$10x+10(x+y)=3$

以10除　$xy+x+y=3$

移　項　$x+y=3-xy\cdots\cdots\cdots\cdots$（4）

（2）×2　$6x^2-2xy+6y^2+4(x+y)=18\cdots$（5）

（5）－（1）　$5x^2-5xy+5x^2=5$

以5除　$x^2-xy+5y^2=1\cdots\cdots\cdots\cdots$（6）

（4）自乘　$x^2+2xy+y^2=9-6xy+x^2y^2\cdots$（7）

（7）－（6）　$3xy=8-6xy+x^2y^2$

整　理　$x^2y^2-9xy+8=0$

分　解　$(xy-1)(xy-8)=0$

$\therefore\quad xy=1$, 或　$xy=8$

若　　$xy=1$，代入（4）$x+y=3-1=2$

$\therefore\ y=2-x$ 代入（4）

即　　$x+(2-x)=3-x(2-x)$

整理　$x^2-2x+1=0$

即　　$(x-1)^2=0 \quad \therefore\ x-1=0$

$\therefore\ x=1. \quad \therefore\ y=2-1=1.$

若　　$xy=8$，代入（4）$x+y=3-8=-5$

$\therefore\ y=-(x+5)$ 代入（4）

即　　$x-(x+5)=3+x(x+5)$

理　　$x^2+5x+8=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-32}}{2}=\dfrac{-5\pm i\sqrt{7}}{2}.$

$\therefore\ y=-(x+5)=-\left(\dfrac{5\pm i\sqrt{7}}{2}\right)=\dfrac{-6\mp i\sqrt{7}}{2}.$

21. $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{20}{3} \cdots\cdots(1) \\ xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3} \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解.（1）×（2）　$y^2+2+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{100}{9}$

以 y^2 乘　$y^4+2y^2+1=\dfrac{100y^2}{9}$

即　　$(y^2+1)^2=\left(\dfrac{10y}{3}\right)^2 \quad \therefore\ y^2+1=\pm\dfrac{10y}{3}$

整理　$3y^2\mp10y+3=0 \quad (3y\mp1)(y\mp3)=0$

$\therefore\ y=\pm\dfrac{1}{3}$　或　$\pm3.$

由（2）　$x=\dfrac{5y}{3(y^2+1)}$ 將 y 值代入　$\therefore\ x=\pm\dfrac{1}{2}.$

22. $\begin{cases} ax=by \cdots\cdots(1) \\ (x-a)(y-b)=ab \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變（2）　$xy-ay-bx=0$ ……………………（3）

由（1）　$y=\frac{a}{b}x$ 代入（3）

即　$\frac{a}{b}x^2-\frac{a^2}{b}x-bx=0$

以 b 乘　$ax^2-a^2x-b^2x=0$

即　$x\{ax-(a^2+b^2)\}=0$

$$\therefore\ \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x=\frac{a^2+b^2}{a}\\y=\frac{a}{b}\times\frac{a^2+b^2}{a}=\frac{a^2+b^2}{b}\end{cases}$$

23. $\begin{cases}a(x-a)=b(y-b)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\xy=ax+by\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. 由（1）　$ax-a^2=by-b^2$ ……………………（3）

由（2）　$xy-bx=ax$　　即　$y(x-b)=ax$

$\therefore$　$y=\frac{ax}{x-b}$ 代入（3）

即　$ax-a^2=\frac{abx}{x-b}-b^2$

去分母　$ax^2-abx-a^2x+a^2b=abx-b^2x+b^3$

整　理　$ax^2-(a^2+2ab-b^2)x+b(a^2-b^2)=0$

即　$ax^2-\{a(a+b)+b(a-b)\}x+b(a-b)(a+b)=0$

分　解　$\{ax-b(a-b)\}\{x-(a+b)\}=0$

$\therefore$　$x=a+b,$　　$y=\frac{a(a+b)}{(a+b)-b}=a+b$

或 $x=\frac{b(a-b)}{a}$,　$y=\frac{\frac{b(a-b)}{a}}{\frac{b(a-b)}{a}-b}=\frac{a(a-b)}{-b}=\frac{a(b-a)}{b}$.

24. $yz=4,$　　$xz=9,$　　$xy=16$

解. 三式連乘：　$x^2y^2z^2=4\times9\times16$

開　方　　$xyz=\pm2\times3\times4$

以三式分除　$x=\pm 6.$　$y=\pm\dfrac{8}{3}$，$z=\pm\dfrac{3}{2}$

25. $x(y+z)=6,\quad y(z+x)=12,\quad z(x+y)=10,$

解. 三式相加　$2(xy+yz+xz)=28$

以2除　$xy+yz+xz=14$

以三式分减　$yz=8$ ……………(1)

$xz=2$ ……………(2)

$xy=4$ ……………(3)

(1)×(2)×(3)　$x^2y^2z^2=64$

開　方　$xyz=\pm 8$

以(1),(2),(3)分除　$\therefore\ x=\pm 1,\quad y=\pm 4,\quad z=\pm 2$

第八編　二項定理

問題八十九　P.189

1. 四文字 a, b, c, d 中取1個取2個取3個之排列，試記出之。

解. 取1個爲　${}_4P_1=4$　即　$a, b, c, d.$

取2個爲　${}_4P_2=4\times 3=12.$

即　$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc.$

取3個爲　${}_4P_3=4\times 3\times 2=24.$

即　$abc, acb, abd, adb, acd, adc, bac, bda, bca, bda, bcd, bdc, cab,$

$cba, cbd, cdb, cad, cda, dab, dba, dac, dca, dbc, dcb,$

2. 二不同之有效數字得組成二位之數若干個。

解. 有效數字共有9個

$\therefore\quad {}_9P_2=9\cdots(9-2+1)=9\times 8=72$

3. 五個數字1, 2, 3, 4, 5以其三字組成三位數，問共成數若干個。

解. ${}_5P_3=5\cdots(5-3+1)=5\times4\times3=60.$

4. 學生六人，排爲一列，共法有幾種。

解. ${}_6P_6=6\times5\cdots\times(6-6+1)=\underline{|6}=720$

5. 設有物 $a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n$，$n$ 個中取其三個爲排列，其中以 a_1 爲首者有幾種。

解. 只須將 a_1 以外之各物，取其 2 個順列之，冠以 a_1 即爲所求。

$${}_{n-1}P_2=(n-1)\cdots(n-1-2+1)=(n-1)(n-2).$$

6. 公式 ${}_nP_r=(n-r+1)\,{}_nP_{r-1}$ 中之 r 順次代以 $r-1, r-2, \cdots 3, 2$ 所得之各公式，各邊相乘，則爲

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).\text{ 試證之，}$$

證 明: 原式 ${}_nP_r=(n-r+1)\,{}_nP_{r-1}.$

順次代入之式 ${}_nP_{r-1}=(n-r+2)\,{}_nP_{r-2}.$

$${}_nP_{r-2}=(n-r+3)\,{}_nP_{r-3}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}_nP_3=(n-3+1)\,{}_nP_2.$$

$${}_nP_2=(n-2+1)\,{}_nP_1\quad(\text{而 }{}_nP_1=n).$$

各式連乘，兩邊去公因子：

$$\begin{aligned}{}_nP_r&=(n-r+1)\cdots(n-2)(n-1)n\\&=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).\end{aligned}$$

下列各式，試證明之。

7. ${}_nP_r=n\,{}_{n-1}P_{r-1}.$

證 明: ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$

$$\begin{aligned}n\,{}_{n-1}P_{r-1}&=n[(n-1)(n-2)\cdots\{(n-1)-(r-1)+1\}]\\&=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad {}_nP_r=n\,{}_{n-1}P_{r-1}.$$

8. $(n-r)_nP_r = n_{n-1}P_r$

證 明: $(n-n)_nP_r = (n-r)\{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\}$

$$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r).$$

$$n_{n-1}P_r = n\{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-r+1)\}$$

$$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r)$$

故 $(n-r)_nP_r = n_{n-1}P_r$.

9. $_nP_r - _{n-1}P_r = r_{n-1}P_{r-1}$.

證 明: $_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

$$_{n-1}P_r = (n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r).$$

$$r_{n-1}P_{r-1} = (n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)r$$

$$_{n-1}P_{r-1} + r_{r-1}P_{r-1} = (n-1)\cdots\{(n-r)+r\}$$

$$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

整 $_nP_r - _{n-1}P_r = (n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-n+r)$

$$=(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)r = r_{n-1}P_{r-1}$$

問 題 九 十 P. 190

1, 求$_{16}C_4$之値。

解, $_{16}C_4 = 16.15.14.13/4.3.2.1 = 1820.$

2, 求$_{16}C_{12}$之値。

解, $_{16}C_{12} = 16.15.14\cdots5/12!$

$$=16.15.14.13/1.2.3.4 = 1820.$$

3, 知$_nC_{10} = {}_nC_{11}$, 求$_nC_2$之値。

解, $_nC_{10} = \dfrac{n!}{10!(n-10)!}$, $_nC_{11} = \dfrac{n!}{11!(n-11)!}$,

依 題 $\dfrac{n!}{10!(n-10)!} = \dfrac{n!}{11!(n-11)!}$,

$$\therefore \quad \frac{1}{n-10}=\frac{1}{11} \qquad n-10=11, \quad n=21,$$

$$_nC_2={}_{21}C_2=\frac{21!}{2!19!}=\frac{21.20}{2}=210.$$

4，知$_{2n}C_3={}_nC_2\times 12$, 求$n$之值。

解. $_{2n}C_3=\frac{2n!}{2!(2n-3)!}$, $\quad {}_nC_2=\frac{n!}{2!(n-2)!}$

依題 $$\frac{2n!}{3!(2n-3)!}=\frac{n!}{2!(n-2)!}\times 12,$$

$$\frac{2n(2n-3)(2n-2)}{3.2.1}=\frac{n(n-1)}{2.1}\times 12$$

$$8n^2-12n+4=(3n-3)\times 12,$$

$$8n^2-48n+40=0, \qquad n^2-6n+5=0,$$

$$(n-5)(n-1)=0, \qquad \therefore \quad n=1 \text{ 或 } 5$$

5，同窗會中，會員有60名，今欲舉出幹事8名，問舉法有幾種。

解. $_{60}C_8=\frac{60!}{8!(60-8)!}=2558620845$

6，運動會中會員有30名，今欲選出兩種運動員，每組各11名，問選法有幾種。

解. 先由總員選出11名。共選法爲$\frac{30!}{11!(30-11)!}$

又由每次餘數中選出11名。則爲$\frac{(30-11)!}{11!\{(30-11)-11\}!}$

故總法爲 $$\frac{30!}{11!(30-11)!}\times\frac{(30-11)!}{11!(30-22)!}=\frac{30!}{11!11!8!}$$

但如其中a, b二組，a在第一次選出，b在第二次選出，與b在第一次選出，a在第二次選出，其所成立之兩組無異，

故實際上總數爲 $\frac{1}{2}\times\frac{30!}{11!11!8!}$

別解：先從30名選出22名。其法爲$\frac{30!}{22!(30-22)!}$,

又從 22 名中選出 11 名。其法爲 $\frac{22!}{11!(22-11)!}$.

故總法爲　$\frac{30!}{22!8!}\times\frac{22!}{11!11!}=\frac{30}{11!11!8!}$.

又第二次選時，選 a 組餘 b 組，或選 b 組餘 a 組，所成立之兩組亦複出，故實際亦必爲 $\frac{1}{2}\times\frac{30}{11!11!8!}$.

其數爲　2064420294300.

7．$r\ {}_nC_r = n_{n-1}C_{r-1}$ 試證明之。

證　明：$_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (a) $_{n-1}C_{r-1}=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$ (b)

$\therefore\quad r(a)=n(b)$.

8．$_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_np_{r-1}$ 試證明之。

證　明：$_{n+1}C_1=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+11)!}$　$_nC_{r-1}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$

$$_nC_r + {}_nC_{r-1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$=\frac{n!(n-r+1)+n!r}{r!(n-r+1)!}=\frac{(n+1)n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+r)!}.$$

問 題 九 十 一　P. 196

下列各式，試展開之。

1．$(1+a^2)^4$,

解．原式 $=1+4a^2+\frac{4.3}{1.2}a^4+4a^6+a^8$

$=1+4a^2+6a^4+4a^6+a^8$.

2．$(1-xy)^6$.

解．原式 $=1-6xy+\frac{6.5}{1.2}x^2y^2-\frac{6.5.4}{1.2.3}x^3y^3+\frac{6.5}{1.2}x^4y^4$

$$-6x^5y^5+x^6y^6.$$

$$=1-6xy+15x^2y^2-20x^3y^3+15x^4y^4-6x^5y^5+x^6y^6.$$

3．$(1+a^2bc^3)^4$

解. 原式$=1+4a^2bc^3+\frac{4.3}{1.2}(a^2bc^3)^2+4(a^2bc^3)^3+(a^2bc^3)^4$

$$=1+4a^2bc^3+6a^4b^2c^6+4a^6b^3c^9+a^8b^4c^{12}.$$

4．$\left(1+\frac{y}{x}\right)^n$

解. 原式$=1+n.\frac{y}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{y^2}{x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.\frac{y^3}{x^3}$

$$+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots3.2.1}{(n-1)!}.\frac{y^{n-1}}{x^{n-1}}.\frac{y^n}{x^n}$$

5．$\left(1-\frac{y}{x}\right)^{n-1}$

解. 原式$=1-(n-1)\frac{y}{x}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}.\frac{y^2}{x^2}$

$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}.\frac{y^3}{x^3}$$

$$+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}.\frac{y^{n-1}}{x^{n-1}}$$

6．$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^8$

解. 原式$=(x^2)^8+{}_8C_1(x^2)^7(\frac{1}{x^2})+{}_8C_2(x^2)^6(\frac{1}{x^2})^2+{}_8C_7$

$$(x^2)^5(\frac{1}{x^2})^3+{}_8C_4(x^2)^4(\frac{1}{n^2})^4+{}_8C_5(x^3)^3(\frac{1}{x^2})^5$$

$$+{}_8C_6(x^2)^2(\frac{1}{x^2})^6+{}_8C_7(x^2)(\frac{1}{x^2})^7+(\frac{1}{x^2})^8$$

$$=x^{16}+{}_8C_1x^{12}+{}_8C_2x^8+{}_8C_3x^4+{}_8C_4+{}_8C_5x^{-4}$$

$$+{}_8C_6x^{-8}+{}_8C_7x^{-12}+x^{-16}.$$

下列各式，試展開之。

7．$(a+x)^8$.

解. 原式$=a^5+5a^4x+\frac{5.4}{1.2}a^3x^2+\frac{5.4}{1.2}a^2x^3+5ax^4+x^5$

$=a^5+5a^4x+10a^3x^2+10a^2x^3+5ax^4+x^5$.

8. $(a^2+x^2)^6$.

解. 原式$=(a^2)^6+6(a^2)^5(x^2)+\frac{6.5}{1.2}(a^2)^4(x^2)^2+\frac{6.5.4}{1.2.3}(a^2)^3$

$(x^2)^3+\frac{6.5}{1.2}(a^2)^2(x^2)^4+6a^2(x^2)^5+(x^2)^6$.

$=a^{12}+6a^{10}x^2+15a^8x^4+20a^6x^6+15a^4x^8+6a^2x^{10}+x^{12}$

9. $(1001)^5$

解. $(1000+1)^5=1000^5+5\times1000^4\times1+10\times1000^3\times1^2$

$+10\times1000^2\times1^3\times5\times1000\times1^4+1^5$

$=1005010010005001$.

10. $(a^3+ab)^n$.

解. 原式$=a^n(a^2+b)^n=a^n\{a^{2n}+na^{2(n-1)}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{2(n-2)}$

$b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{2!}a^{2(n-r)}b^r+\cdots$

$+\frac{n(n-1)\cdots4.3.2}{(n-1)!}a^2b^{n-1}+b^n\}$.

11. $(x-y)^n$.

解. 原式$=x^n-nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2-\cdots\cdots$

$+(-1)^{n-1}\frac{n(n-1)\cdots3.2}{(n-1)!}xy^{n-1}+(-1)^ny^n$

12. $(x-y)^{p+q}$

解. 原式$=x^{p+q}-(p+q)x^{p+q-1}y+\frac{(p+q)(p+q-1)}{2!}x^{p+q-2}y^2$

$-\cdots+(-1)^{p+q-1}\frac{(p+q)(p+q-1)\cdots3.2}{(p+q-1)!}xy^{p+q-1}$

$+(-1)^{p+q}y^{p+q}$.

13. $(9999)^7$

解. 原式$=(10000-1)^7=10000^7-7\times10000^6+21\times10000^5$

$-35\times10000^4+35\times10000^3-21\times10000^2+7\times10000-1$

$=9993002099650034997900069999.$

14. $(x-px)^q$.

解. 原式$=x^p(1-p)^q=x^p\{1-qp+\dfrac{q(q-1)}{2n}p^2-\cdots\cdots$

$+(-1)^{p-1}\dfrac{q(q-1)\cdots2}{(q-1)!}p^{p-1}+(-1)^p p^2\}.$

15. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$

解. 原式$=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2n}(x^2-1)^2=\dfrac{1}{x^{2n}}\{x^{4n}-2nx^{2(2n-1)}$

$+\dfrac{2n(2n-1)}{2!}x^{2(2n-2)}-\cdots-\dfrac{2n(n-1)\cdots2}{(2n-1)!}x^2+1\}$

$=x^{2n}2nx^{2(n-1)}+\dfrac{2n(2n-1)}{2!}x^{2(n-2)}-\cdots\cdots$

$-\dfrac{2n(2n-1)\cdots2}{(2n-1)!}x^{2(1-n)}+x^{-22n}$

16. $(a+\sqrt{x})^6+(a-\sqrt{x})^6$,

解. $(a+\sqrt{x})^6=a^6+6a^5\sqrt{x}+15a^4x+20a^3x\sqrt{x}+15a^2x^2$

$+6ax^2\sqrt{x}+x^3.$

$(a-\sqrt{x})^6=a^6-6x^5\sqrt{x}+15a^4x-20a^3x\sqrt{x}+15a^2x^2$

$-6ax^2\sqrt{x}+x^3.$

故　原式$=2(a^6+15a^4x+15a^2x^2+x+x^3).$

17. $(\sqrt{1-x^2}+1)^5-(\sqrt{1-x^2}-1)^5$.

解. 命　$\sqrt{1-x^2}=y$

則有　$(y+1)^5=y^5+5y^4 10y^3+10y^2+5y-1$

$(y-1)^5=y^5-5y^4+10y^3-10y^2+5y-1$

即　　$(y+1)^5-(y-1)^5=2(5y^4+10y^2+1)$

故　　$原式=2\{5(1-x^2)^2+10(1-x^2)+1\}$

$$=2(5x^4-20x^2+16).$$

18. 展開$(1-x)^{-4}$至第五項

解. $原式=1+(-4)(-x)+\frac{(-4)(-5)}{1.2}(-x)^2$

$$+\frac{(-4)(-5)(-6)}{1.2.3}(-x)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+4x\times10x^2+20x^3+\cdots\cdots$$

19. 展開$(1+2x)^{-4}$至第六項.

解. $原式=1+(-4)(2x)+\frac{(-4)(-5)}{1.2}(2x)^2+\frac{(-4)(-5)(-6)}{1.2.3}$

$$(2x)^3+\frac{(-4)(-5)(-6)(-7)}{1.2.3.4}(2x)^4+\cdots\cdots$$

$$=1-8x+40x^2-160x^3+560x^4+\cdots\cdots$$

20. 展開$(1-3x)^{-\frac{2}{3}}$至第五項.

解. $原式=1+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-3x\right)+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{1.2}(-3x)^2$

$$+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{1.2.3}(-3x)^3+\cdots\cdots$$

下列各式,試展開之。

21. $(1-x)^{-5}$

解. $原式=\frac{(-5)(-6)(-7)\cdots(-r-4)}{1.2.3\cdots\cdots r}(-x)^r$

$$=\frac{5.6.7\cdots(r+4)}{\lfloor r}x^r.$$

22. $(1+x)^{\frac{3}{2}}$

解. $原式=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2r-5}{2}\right)}{1.2.3\cdots\cdots r}x^r$

$$=(-1)^r\cdot\frac{.1.1.3.5\cdots(2r-5)}{2^r\,\underline{|r}}x^r$$

23. $(1-x)^{-\frac{3}{2}}$

解. 原式$=\dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{2r+1}{2}\right)}{1.2.3.4\cdots\cdots r}x^r$

$$=\frac{5.5.7\cdots(2r+1)}{2^r\,\underline{|r}}x^r$$

24. $(1+x)^{-\frac{2}{3}}$

解. 原式$=\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{2r-1}{3}\right)}{1.2.3\cdots\cdots r}x^r$

$$=(-1)^r\frac{2.5\cdots(3r-1)}{3^r\,\underline{|r}}x^r.$$

25. $(1-2x)^{-\frac{5}{2}}$

解. 原式$=\dfrac{\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{x+3}{3}\right)}{1.2.3\cdots\cdots r}(-2x)^r$

$$=\frac{5.7\cdots(2r+3)}{\underline{|r}}x^r$$

26. $(1+3x)^{-\frac{4}{3}}$

解. 原式$=\dfrac{\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{3r+1}{3}\right)}{1.2.3\cdots\cdots r}(3x)^r$

$$=(-1)^r\frac{4.7.10\cdots(3r+1)}{\underline{|r}}x^r$$

試依二項定理，求次之各式至小數四位止。

27. $\sqrt{120}$

解. 原式$=\sqrt{(100+20)}=\sqrt{100}\sqrt{\left(1+\frac{2}{10}\right)}=10(1+.2)^{\frac{1}{2}}$

$$=10\left\{1+\frac{1}{2}(.2)=\frac{1.1}{2.4}(.2)^2+\frac{1.1.3}{2.4.6}(.2)^3\right.$$

$$\left.+\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}(.2)^4+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$=10\{1+.1-.005+.0005-.0000625+\cdots\cdots\cdots\cdots\}$

$=10.9543\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

28. $\sqrt[3]{130}$

解. 原式$=\sqrt[3]{(125+5)}=\sqrt[3]{125\left(1+\frac{1}{25}\right)}=5(1+.04)^{\frac{1}{3}}$

$=5\left\{1+\frac{1}{3}(.04)-\frac{1.2}{3.6}(.04)^2+\frac{1.2.5}{3.6.9}(.04)^3-\cdots\right\}$

$=5(1+.01\dot{3}-.0001\dot{7}+000003-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

29. $\sqrt[4]{630}$

解. 原式$=\sqrt[4]{(625+5)}=\sqrt[4]{625\left(1+\frac{1}{125}\right)}=5(1+.008)^{\frac{1}{4}}$

$=5\left\{1+\frac{1}{4}(.008)-\frac{1.3}{4.8}(.008)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$

$=5(1+.002-.00006+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$

$=5.0097\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

問 題 九 十 二 P. 198

1. 設 m, n 表正敵數, 試說明下列二式之意義。

$a^{-m}\times a^{n}=a^{-m+n},\qquad a^{-m}\times a^{-n}=a^{-(m+n)}.$

解. $a^{-m}\times a^{n}=\frac{1}{a^{m}}\times a^{n}=a^{-m+n}$

$a^{-m}\times a^{-n}=\frac{1}{a^{m}}\times\frac{1}{a^{n}}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}.$

2. 設 m, n 表正整數, 試說明下列三式之意義。

$(a^{-m})^{n}=a^{-mn},\quad (a^{m})^{-n}=a^{-mn},\quad (a^{-m})^{-n}=a^{mn},$

解. $(a^{-m})^{n}=\left(\frac{1}{a^{m}}\right)^{n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}.$

$(a^{m})^{-n}=\frac{1}{(a^{m})^{n}}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}.$

$$(a^{-m})^{-n}=\left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}=\frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}}=a^{mn}.$$

3．設 m, n 表正整數，且 m 爲 n 之倍數，試說明下列之式。

$$\sqrt[n]{a^{-m}}=a^{-\frac{m}{n}}.$$

解．設 $m=pn$.

則 $$\sqrt[n]{a^{-m}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=a^{-\frac{m}{n}}=a^{-p}.$$

4．$3^{-2}=?$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=?$，$-\sqrt[2]{\frac{1}{9}}=?$，$-\sqrt[3]{8}=?$

解．$3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{\frac{1}{8}}=8.$

$$-\sqrt[2]{\frac{1}{9}}=-\sqrt[2]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3,$$

$$-\sqrt[3]{8}=-\sqrt[3]{2^3}=2^{-\frac{3}{3}}=2^{-1}=\frac{1}{2}.$$

5．下列各式中，分子之各因數悉移於分母，分母之各因數悉移於分子。 $\frac{x}{y}$，$\frac{3ab^2}{4c^3d}$，$\frac{a^2bx^3}{cy^2z^3}$。

答：$\frac{x}{y}=\frac{y^{-1}}{x^{-1}}$，$\frac{3ab^2}{4c^3d}=\frac{4^{-1}c^{-3}d^{-1}}{3^{-1}a^{-1}b^{-2}}$，$\frac{a^2bx^3}{cy^2z^3}=\frac{c^{-1}y^{-2}z^{-3}}{a^{-2}b^{-1}x^{-3}}$.

6．試將 $\frac{ax^2}{b^2y}$ 中之 a，移於分母，而 y 則移於分子。

答：$\frac{x^2y^{-1}}{a^{-1}b^2}$

問題九十三 P.200

下列各式，試化之爲簡式。

1. $8^{\frac{2}{3}}$ 解. 原式$=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$

2. $4^{-\frac{3}{2}}$ 解. 原式$=\sqrt[2]{4^{-3}}=\sqrt[2]{\frac{1}{4^3}}=\sqrt[2]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{8}$.

3. $(16)^{-\frac{1}{2}}$ 解. 原式$=\sqrt[2]{(16)^{-1}}=\sqrt[2]{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$.

4. $(100)^{\frac{1}{2}}$ 解. 原式$=\sqrt[2]{100}=10$

5. $(1000)^{\frac{2}{3}}$ 解. 原式$=\sqrt[3]{(1000)^2}=\sqrt[3]{1000000}=100$

6. $(8)^{-\frac{3}{4}}$ 解. 原式$=\sqrt[4]{(81)^{-3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{(81)^3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{3^{12}}}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$.

7. $\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$ 解. 原式$=\sqrt{\left(\frac{4}{25}\right)^3}=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$.

8. $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$ 解. 原式$=\sqrt[3]{\left(\frac{27}{64}\right)^{-2}}=\sqrt[3]{\left(\frac{64}{27}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{4^6}{3^6}}=\frac{4^2}{3^2}=\frac{16}{9}$.

9. $(27)^{-\frac{4}{3}}$ 解. 原式$=\sqrt[3]{(27)^{-4}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^4}=\sqrt[3]{\frac{1}{3^7}}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$.

10. $(100)^{-\frac{5}{2}}$

解. 原式$=\sqrt[2]{(100)^{-5}}=\sqrt{\frac{1}{(100)^5}}=\sqrt{\frac{1}{(10)^7}}=\frac{1}{(10)^5}=\frac{1}{100000}$.

11. $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{4}{3}}$

解. 原式$=\sqrt[3]{\left(\frac{27}{125}\right)^{-4}}=\sqrt[3]{\left(\frac{125}{27}\right)^4}=\sqrt[3]{\frac{5^7}{3^7}}=\frac{5^4}{3^4}=\frac{125}{81}$

12. $(a^2)^{-3}$ 解. 原式$=\frac{1}{(a^2)^3}=\frac{1}{a^6}$.

13. $(a^{-2})^{-3}$ 解. 原式$=\left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3}=(a^2)^3=a^6$.

14. $\sqrt{a^{-4}}$ 解. 原式$=\sqrt{\frac{1}{a^4}}=\frac{1}{a^2}$

15. $\sqrt[3]{a^{-3}}$ 解. 原式$=\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$.

問題九十四　P. 201

試將下列各式，化爲簡式。

1．$a^{-\frac{2}{3}}\times a$　　解．原式$=a^{-\frac{2}{3}}\times a^{\frac{3}{3}}=a^{\frac{3}{3}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}}$.

2．$a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}$　　解．原式$=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

3．$(a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}})^2$　　解．原式$=a^{\frac{2}{3}\times2}b^{-\frac{1}{2}\times2}=a^{3}b^{-1}$

4．$(a^{-\frac{2}{2}}b^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{2}}$　　解．原式$=a^{-\frac{2}{2}\times\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}}=a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{4}}$.

5．$\{(a^{-2})^2\}^{\frac{3}{4}}$　　解．原式$=a^{-2\times2\times\frac{3}{4}}=a^{-3}$.

6．$\{(a^{-\frac{5}{6}})^3\}^{-\frac{1}{5}}$　　解．原式$=a^{(-\frac{5}{6})\times3\times(-\frac{1}{5})}=a^{\frac{1}{2}}$

7．$a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{3}{4}}.a^{\frac{5}{12}}$.　　解．原式$=a^{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{12}}=a^0=1$.

8．$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}c.ab^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{3}}$.

解．原式$=a^{\frac{2}{3}+1}b^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}c^{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{3}{2}}c^2$.

9．$(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\div x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}})\div(x^{\frac{1}{6}}\div y^{\frac{1}{6}})$.

解．原式$=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\div x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\div x^{\frac{1}{6}}\times y^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}y^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$

$=x^0y^{\frac{1}{3}}=y^{\frac{1}{3}}$

試將下列各式中之根號，改爲分指數，并化之爲簡式。

10．$\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}$　　解．原式$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=a$.

11．$\sqrt{a^3x}\sqrt[3]{a^2x^5}$　　解．原式$=a^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}x^{1+5}=a^{\frac{13}{6}}x^6$.

12．$(\sqrt[3]{a^7}.\sqrt[5]{a^7}.a^{-\frac{1}{3}})\div a^{\frac{4}{5}}$

解．原式$=a^{\frac{7}{3}+\frac{7}{5}-\frac{1}{3}-\frac{4}{5}}=a^{\frac{39}{15}}=a^{\frac{13}{5}}$

13．$\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{a^4}$　　解．原式$=a^{\frac{2}{4}+\frac{4}{3}}=a^{\frac{11}{6}}$.

14．$\sqrt{a^3b^{-2}}\div\sqrt[3]{a^{-4}b^5}$.

解．原式$=a^{\frac{3}{2}-(-\frac{4}{3})}b^{-2+5}=a^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}b^3=a^{\frac{17}{6}}b^3$.

15. $\sqrt[3]{a^6 b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}}} \cdot (a^4 b c^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}$.

解. 原式 $= a^{\frac{6}{3}+4\times(-\frac{1}{2})} b^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})} = a^0 b c^{\frac{1}{3}} = bc^{\frac{1}{3}}$

試變下列各式之形，而去其負指數與分指數。

16. $a^{-3} b^{-\frac{1}{3}}$

解. 原式 $= \frac{1}{a^3} \times \sqrt[3]{b^{-1}} = \frac{1}{a^3} \times \sqrt[3]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{a^3 \sqrt[3]{b}}$.

17. $(b^{\frac{1}{3}} x^{\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{2}}$.

解. 原式 $= a^{\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})} x^{\frac{5}{2}\times(-\frac{1}{2})} = a^{-\frac{1}{6}} x^{-\frac{5}{4}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a}}\ \sqrt[4]{\frac{1}{x^5}}$

$$= \frac{1}{\sqrt[6]{a}\ \sqrt[4]{x^5}}.$$

18. $\frac{x^{-\frac{3}{4}} y^{-2}}{a^{\frac{2}{3}} bc^{-2}}$

解. 原式 $= \frac{c^2}{a^{\frac{1}{3}} b x^{\frac{3}{4}} y^2} = \frac{c^2}{\sqrt[3]{a} b \sqrt[4]{x^3} y^2}$

19. $a^{\frac{2}{3}} b^{-1} - a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{2}}$.

解. 原式 $= a^{\frac{2}{3}} \frac{1}{b} - a^{\frac{2}{3}} \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{b} - \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{b}}$.

20. $a^{-2} b^{-\frac{1}{3}} + 3^{-1} a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{2}{3}}$

解. 原式 $= \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{3} a^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{1}{a^2 \sqrt[3]{b}} + \frac{\sqrt[3]{a^2}}{3\sqrt[3]{b^2}}$.

問題九十五 P. 3

求以下各題中兩式之積：

1. $a^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}$

解. $(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}) = (x^{\frac{1}{3}})^2 - (y^{\frac{1}{3}})^2 = x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$

2. $x^2 + x^{\frac{1}{3}} + 1$, $x^{\frac{1}{3}} - 1$.

解 $(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1)(x^{\frac{1}{3}} - 1) = [x^{\frac{2}{3}} + (x^{\frac{1}{3}} + 1)](x^{\frac{1}{3}} - 1)$

$$= x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{3}} - 1) + (x^{\frac{1}{3}} + 1)(x^{\frac{1}{3}} - 1)$$

$$=x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}+(x^{\frac{1}{3}})^2-1^2=x-1.$$

3. $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$.

解. $(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$

$$=x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})+y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$$

$$=(x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}})+(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}})$$

$$=x-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y=x+y.$$

4. $x^{n}+x^{\frac{n}{2}}+1$, $x^{-n}+x^{-\frac{n}{2}}+1$

解.

$$\begin{array}{rrrrr}
x^{n} & +x^{\frac{n}{2}} & +1 & & \\
x^{-n} & +x^{-\frac{n}{2}} & +1 & & \\
\hline
x^{n} & +x^{\frac{n}{2}} & +1 & & \\
 & x^{\frac{n}{2}} & +1 & +x^{-\frac{n}{2}} & \\
 & & +1 & +x^{-\frac{n}{2}} & +x^{-n} \\
\hline
x^{n} & +2x^{\frac{n}{2}} & +3 & +2x^{-\frac{n}{2}} & +x^{-n}
\end{array}$$

5. $x^{2n}+x^{n}y^{n}+y^{2n}$, $x^{-2n}+x^{-n}y^{-n}+y^{-2n}$

解.

$$\begin{array}{rrrrr}
x^{2n} & +x^{n}y^{n} & +y^{2n} & & \\
y^{-2n} & +x^{-n}y^{-n} & +x^{-2n} & & \\
\hline
x^{2n}y^{-2n} & +x^{n}y^{-n} & +1 & & \\
 & +x^{n}y^{-n} & +1 & +x^{-n}y^{n} & \\
 & & +1 & +x^{-n}y^{n} & +x^{-2n}y^{2n} \\
\hline
x^{2n}y^{-2n} & +2x^{n}y^{-n} & +3 & +2x^{-n}y^{n} & +x^{-2n}y^{2n}
\end{array}$$

6. $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$

解.

$$\begin{array}{l}
a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}} \\
a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}} \\
\hline
a-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}
\end{array}$$

$$+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\qquad -a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}\quad +b-b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$$

$$+a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}\qquad -a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}+c$$

$$a\qquad -3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}\quad +b\qquad +c$$

7. $81x^{\frac{4}{5}}-27x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{3}}+9x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{5}}y+y^{\frac{4}{3}}$, $3x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{3}}$.

解. $81x^{\frac{4}{5}}-27x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{3}}+9x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{5}}y+y^{\frac{4}{3}}$

$$3x^{\frac{1}{5}}\quad +y^{\frac{1}{3}}$$

$$243x-81x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{3}}+27x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{3}}-9x^{\frac{2}{5}}y+3x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{3}}$$

$$+81x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{3}}-27x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{3}}+9x^{\frac{2}{5}}y-3x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{5}{3}}$$

$$243x\qquad +y^{\frac{5}{3}}$$

以下各題用後式除前式。

8. x^2+y^2, $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

解. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})\ x^2\ +y^2\ (y^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}$

$$x^2+x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

$$-x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^2$$

$$-x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}$$

$$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}+y^2$$

$$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}+y^2$$

$$0$$

9. $x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}+2+x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$, $x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}-1+x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$.

解.

$$x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}.$$

$$x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}-1+x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}})\,x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}+2+x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$$

$$x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}$$

$$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}+2+x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$$

$$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}+1$$

$$1+x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$$

$$1-x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$
$$x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$$
$$x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$$
$$0$$

10. $a^{\frac{5}{2}}+a^2b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{3}}$, $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}$

解. $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}})a^{\frac{5}{2}}+a^2b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{3}}(a^2-ab^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}$

$$a^{\frac{5}{2}}+a^2b^{\frac{1}{3}}$$
$$-a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}-ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}+b^{5}$$
$$-a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-ab$$
$$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{3}}$$
$$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{3}}$$
$$0$$

11. $x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{14}{5}}+y^{\frac{14}{5}}x^{-\frac{7}{3}}$, $x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}x^{-\frac{1}{3}}$.

解. $x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{5}}+x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}})x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{14}{5}}+x^{-\frac{7}{3}}y^{\frac{14}{5}}(Q$

$$x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{14}{5}}+x^{\frac{5}{3}}y^{-2}$$
$$-x^{\frac{5}{3}}y^{-2}+x^{-\frac{7}{3}}y^{\frac{14}{5}}$$
$$-x^{\frac{5}{3}}y^{-2}-xy^{-\frac{6}{5}}$$
$$xy^{-\frac{6}{5}}+x^{-\frac{7}{3}}y^{\frac{4}{5}}$$
$$xy^{-\frac{6}{5}}+x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{5}}$$
$$-x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{5}}+x^{-\frac{7}{3}}y^{\frac{14}{5}}$$
$$-x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{5}}-x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}}$$
$$x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}}+x^{-\frac{7}{3}}y^{\frac{14}{5}}$$
$$x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}}+x^{-1}y^{\frac{6}{5}}$$
$$-x^{-4}y^{\frac{6}{5}}+x^{-\frac{7}{3}}y^{\frac{14}{5}}$$
$$-x^{-4}y^{\frac{6}{5}}-x^{-\frac{7}{3}}y^{2}$$
$$x^{-\frac{5}{3}}y^{2}+x^{-\frac{7}{3}}y^{\frac{14}{5}}$$

$$\begin{array}{r} x^{-\frac{5}{3}}y^{2}+x^{-\frac{7}{3}}y^{\frac{14}{5}} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$Q=x^{2}y^{-\frac{17}{5}}-x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{5}}-1+x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{5}}-x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}+x^{-2}y^{\frac{12}{5}}.$$

12. 化$(a-4b^{\frac{2}{3}})(a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})(a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})$爲最簡。

解.
$$\begin{array}{l} a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}} \\ \underline{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}} \\ a^{2}+2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{3}}+4ab^{\frac{2}{3}} \\ \qquad -2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{3}}-4ab^{\frac{2}{3}}-8a^{\frac{1}{2}}b \\ \qquad\qquad\qquad +5ab^{\frac{2}{3}}+8a^{\frac{1}{2}}b+16b^{\frac{4}{3}} \\ \hline a^{2}\qquad\qquad\quad +4ab^{\frac{2}{3}}\qquad\quad +16b^{\frac{4}{3}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a-4\ b^{\frac{2}{3}} \\ \hline a^{3}+4a^{2}b^{\frac{2}{3}}+16ab^{\frac{4}{3}} \\ \quad -4a^{2}b^{\frac{2}{3}}+16ab^{\frac{4}{3}}-64b^{2} \\ \hline a^{3}.\qquad\qquad\qquad\qquad -64b^{2} \end{array}$$

13. 求$25x^{2}y^{-2}+\frac{1}{4}y^{2}x^{-2}-20xy^{-1}-2yx^{-1}+9$之平方根。

解.
$$25x^{2}y^{-2}-20xy^{-1}-2yx^{-1}+9+\frac{1}{4}y^{2}x^{-2}\ \Big|\ \underline{5xy^{-1}-2+\frac{1}{2}x^{-1}y}$$

$$\begin{array}{l|l} & \underline{25x^{2}y^{-2}} \\ 10xy^{-1}-2 & -20xy^{-1}+9 \\ & \underline{-20xy^{-1}+4} \\ 10xy^{-1}-4+\frac{1}{2}x^{-1}y & 5-2yx^{-1}+\frac{1}{4}y^{2}x^{-2} \\ & \underline{5-2yx^{-1}+\frac{1}{4}y^{2}x^{-2}} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

14. 求$x^{\frac{8}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{2}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{11}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}$之平方根。

解.
$$a^{\frac{8}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+x^{\frac{8}{5}}-2a^{\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+a^{-\frac{8}{5}}x^{\frac{11}{5}}\ \Big|\ \underline{x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{7}{5}}}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{a^{\frac{8}{5}}} \\
\hline
2a^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{4}{5}} & 2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+x^{\frac{8}{5}} \\
 & 2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}\qquad\qquad +x^{\frac{8}{5}} \\
\hline
2a^{\frac{4}{5}}+2x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}} & -2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}} \\
 & -2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}} \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

15. 求 $x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}}$ 之平方根。

解. $x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}} \,\big|\, \underline{x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}}$

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{x^{\frac{2}{3}}} \\
\hline
2x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}} & -4x^{\frac{5}{6}}+4x \\
 & -4x^{\frac{5}{6}}+4x \\
\hline
2x^{\frac{1}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}} & 2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}} \\
 & 2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}} \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

解下列各方式：

16. $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{3}{4}}+1=0$

解. 即 $(x^{\frac{3}{4}})^2-2x^{\frac{3}{4}}+1=0$

$\therefore\ (x^{\frac{3}{4}}-1)^2=0$

開方 $x^{\frac{3}{4}}-1=0$

$\therefore\ x^{\frac{3}{4}}=1 \qquad \therefore\ x^3=1$

即 $x^3-1=0$

$\therefore\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x=1$ 或 $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

17. $x^{\frac{3}{2}}-26x^{\frac{3}{4}}-27=0$

解. 即 $(x^{\frac{3}{4}})^2-26(x^{\frac{3}{4}})-27=0$

分　解　$(x^{\frac34}+1)(x^{\frac34}-27)=0$

∴　$x^{\frac34}=-1$

∴　$x^3=1$　由前題得　$x=1$　或　$-\frac12\pm\frac12\sqrt{-3}$.

或　$x^{\frac34}=27$

∴　$(x^{\frac14})^3-27=(x^{\frac14}-3)\{(x^{\frac14})^2+3(x^{\frac14})+9\}=0$

∴　$x^{\frac14}=3$　∴$x=81$　或　$x^{\frac14}=-\frac32(1\mp\sqrt{-3})$

∴　$x=-\frac{81}{2}(1\pm\sqrt{-3})$.

18. $4x^{\frac13}-3x^{-\frac13}=4$

解.　以 $x^{\frac13}$ 乘　　$4x^{\frac23}-3=4x^{\frac13}$

移　項　　$4x^{\frac23}-4x^{\frac13}-3=0$

即　　$(2x^{\frac13})^2-2(2x^{\frac13})-3=0$

分　解　　$(2x^{\frac13}+1)(2x^{\frac13}-3)=0$

∴　　$2x^{\frac13}=-7$ 即　$x^{\frac13}=-\frac12$　∴　$x=\frac18$.

或　　$2x^{\frac13}=3$.　即　$x^{\frac13}=\frac32$　∴　$x=\frac{27}{8}$.

問 題 九 十 六　P. 207

化以下各式爲簡式:

1. $\sqrt{27}+\sqrt{48}$

解. 原式$=\sqrt{9}\times\sqrt{3}+\sqrt{16}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}+4\sqrt{3}=7\sqrt{3}$.

2. $2\sqrt{180}-\sqrt{405}$

解. 原式$=2\sqrt{36}\times\sqrt{5}-\sqrt{81}\times\sqrt{5}=12\sqrt{5}-9\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

3. $3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{625}$

解. 原式$=3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{125}\times\sqrt[3]{5}=3\sqrt[3]{5}+5\sqrt[3]{5}=8\sqrt[3]{5}$

4. $\sqrt{512}-\sqrt{50}-\sqrt{98}$

解. 原式 $=\sqrt{256}\times\sqrt{2}-\sqrt{25}\times\sqrt{2}-\sqrt{49}\times\sqrt{2}$

$=16\sqrt{2}-5\sqrt{2}-7\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$

5. $3\sqrt{12}-\sqrt{27}+2\sqrt{75}$

解. 原式 $=3\sqrt{4}\times\sqrt{3}-\sqrt{9}\times\sqrt{3}+2\sqrt{25}\times\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}-3\sqrt{3}+10\sqrt{3}=13\sqrt{3}.$

6. $\sqrt{15}\times\sqrt{60}$

解. 原式 $=\sqrt{15\times60}=\sqrt{900}=30.$

7. $\sqrt[3]{12}\times\sqrt[3]{75}\times\sqrt[3]{60}$

解. 原式 $=\sqrt[3]{12\times75+60}=\sqrt[3]{3\times2^2\times3\times5^2\times2\times3\times5\times2}$

$=\sqrt[3]{3^3\times2^3\times5^3\times2}=30\sqrt[3]{2},$

8. $\sqrt{20}\times\sqrt{96}\div\sqrt{30}$

解. 原式 $=(\sqrt{4}\times\sqrt{5})\times(\sqrt{16}\times\sqrt{6})\div(\sqrt{6}\times\sqrt{5})$

$=2\sqrt{5}\times4\sqrt{6}\div(\sqrt{6}\times\sqrt{5})$

$=8\sqrt{5}\sqrt{6}\div\sqrt{6}\sqrt{5}=8.$

9. 將 $\sqrt{50}$. $\sqrt[3]{344}$, $\sqrt[4]{2402}$ 依大小之次序排列。

解. 將三式化爲相同之根數爲 12.

$\sqrt{50}=\sqrt[12]{50^6}=\sqrt[12]{12625000000}$

$\sqrt[3]{344}=\sqrt[12]{344^4}=\sqrt[12]{14003408896}$

$\sqrt[4]{2402}=\sqrt[12]{2402^3}=\sqrt[12]{1385858803}.$

故 $\sqrt{50}$ 爲最大 $\sqrt[3]{344}$ 次之 $\sqrt[4]{2402}$ 爲最小.

10. 以 $3\sqrt{5}-4\sqrt{3}$ 乘 $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}$

解. $(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})(3\sqrt{5}-4\sqrt{3})$

$=(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})\times3\sqrt{5}-(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})\times4\sqrt{3}$

$=2\sqrt{5}\times3\sqrt{5}+3\sqrt{3}\times3\sqrt{5}-2\sqrt{5}\times4\sqrt{3}-3\sqrt{3}\times4\sqrt{3}$

$=6\times5+9\sqrt{15}-8\sqrt{15}-12\times3$

$=30+\sqrt{15}-36=\sqrt{15}-6.$

11. 以 $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 乘 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

解.

$$\begin{array}{llll}
\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} & & & \\
2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6} & & & \\
\hline
2\times2+2\sqrt{6}+2\times2\sqrt{3} & & & \\
\qquad 3\sqrt{6} & & +3\times3+3\times3\sqrt{2} & \\
 & +2\sqrt{3} & + & 3\sqrt{2}+6 \\
\hline
4+5\sqrt{6} & +6\sqrt{3} & +9+12\sqrt{2}+6 &
\end{array}$$

$=19+5\sqrt{6}+12\sqrt{2}+6\sqrt{3},$

12. 求 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 之平方.

解. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}$

$+2\sqrt{2}\sqrt{5}+2\sqrt{3}\sqrt{5}=2+3+5+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$

$=10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}.$

下列各式化爲有理分母:

13. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

解. 原式 $=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=2-2\sqrt{2}+1$

$=3-2\sqrt{2}.$

14. $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

解. 原式 $=\dfrac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-3)}=\dfrac{10-2\sqrt{15}}{5-3}=5-\sqrt{15}.$

15. $\dfrac{15+14\sqrt{3}}{15-2\sqrt{3}}$

解. 原式 $=\dfrac{(15+14\sqrt{3})(15+2\sqrt{3})}{(15-2\sqrt{3})(15+2\sqrt{3})}$

$=\dfrac{15^2+14\times2\times3+15\times14\sqrt{3}+15\times2\sqrt{3}}{15^2-2^2\times3}$

$=\dfrac{309+240\sqrt{3}}{213}=\dfrac{103+80\sqrt{3}}{71}$

16. $\dfrac{\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

解. 原式$=\dfrac{(\sqrt{5}+3\sqrt{3})(2\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(2\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{2\times5+2\times3\sqrt{15}+\sqrt{15}+3\times3}{2^2\times5-3}=\dfrac{19+7\sqrt{15}}{17}.$

17. $\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{12}}{2\sqrt{6}+\sqrt{12}}$

解. 原式$=\dfrac{\sqrt{6}(1-3\sqrt{2})}{\sqrt{6}(2+\sqrt{2})}=\dfrac{1-3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{(1-3\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{2-6\sqrt{2}-\sqrt{2}+3\times2}{2^2-2}=4-\dfrac{7}{2}\sqrt{2}.$

18. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

解. 原式$=\dfrac{1\times(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\dfrac{1\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{\ }+2-3}=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$

問題九十七 P.211

下列各對數，試以普通記法記之。

1. $log.9=-(.04576).$

解. $log.9=1-.04576-1=.95424-1=\bar{1}.95424.$

2. $log.003=-(2.52288).$

解. $log.003=3-2.52288-3=.47712-3=\bar{3}.47712.$

3. $log.0458=(1.33913).$

解. $log.0458=2-133913-2=.66087-2=\bar{2}.66087.$

問題九十八 P. 213

下列各題，試用五位對數表求之。

1．948.76×0.013875.

解．$log948.76 + log0.013875 = 2.67715 + \overline{2}.64222$

$= 1.61937 = log41.926.$

2．830.75×0.0003796.

解．$log830.75 + log.0003796 = 2.91947 + \overline{4}.57933$

$= \overline{1}.49880 = log0.31536$

3．3.1416×0.0087634.

解．$log3.2416 + log0.0087034 = 0.49715 + \overline{3}.94267$

$= \overline{2}.43982 = log0.027531$

4．2.1415×3.1416

解．$log2.1415 + log3.141 = 60.33072 + 0.49715$

$= 0.82787 = log6.7277.$

5．$7064 \div 8929$.

解．$log7064 - lob8929 = 3.84905 + 3.95080$

$= 1.89825 = log0.79114$

6．$8.3215 + 0.7892$.

解．$log8.3215 - log0.7892 = 0.92021 - 1.89719$

$= 1.02302 = log10.544.$

7．$0.6782 + 0.04382$.

解．$log0.6792 - log0.04282 = \overline{1}.83136 - \overline{2}.64167$

$= 1.18969 = log15.477.$

8．$7.8247 + 3.1416$.

解. $log7.8247 - log3.1416 = 0.89347 - 0.49715$

$= 0.39632 = log2.4907.$

9. $\frac{0.07452}{73.487 \times 0.8375}$.

解. $log0.07452 - log73.487 - log0.8375$

$= \bar{2}.87227 - 1.86621 - \bar{1}.92298 = 3.08308 = log0.0012108$

10. $\frac{7514 \times 0.07439}{7935 \times 0.09837}$.

解. $log7514 + log0.07439 - log7945 - log0.09837$

$= 3.8787 + \bar{2}.87154 - 3.89955 - \bar{2}.99886$

$= \bar{1}.85497 = log0.7161.$

11. $\frac{79 \times 837 \times 0.00972}{480 \times 0.9 \times 0.04902}$.

解. $log79 + log837 + log0.00972 - log480 - log0.9 - log0.04902$

$= 1.8973 + \bar{2}.92273 + \bar{3}.98767 - 2.69124 - \bar{1}.95424 - \bar{2}.6037.$

$= 1.48216 = log30.35.$

12. $\frac{341 \times 7.87 \times 3.141}{753 \times 9.18 \times 2.141}$.

解. $log341 + log7.87 + log3.141 - log753 - log9.18 - log2.141$

$= 2.53275 + 0.89597 + 0.49707 - 2.87678 - 0.96284 - 0.33062$

$= .75554 = log0.56956.$

13. $(1.37)^2$.

解. $log(1.38)^2 = 2log1.31 = 2 \times 0.11727 = 0.23154 = log1.7161.$

14. $(8.172)^4$

解. $log(8.172)^4 = 4log8.172 = 4 \times 0.91233$

$= 3.64932 = log4459.9.$

15. $(7.8134)^5$.

解. $log(7.8134)^5=5log7.8134=5\times0.89284$

$=4.46420=log29121.$

16. $\left(1\frac{7}{9}\right)^8$.

解. $log\left(1\frac{7}{9}\right)^8=8(log16-log9)=8(1.20412-0.95424)$

$=8\times0.24988=1.99904=log99.78.$

17. $\sqrt{3.14}$.

解. $log\sqrt{3.14}=\frac{1}{2}log3.14=\frac{1}{2}\times0.49693$

$=0.24847=log1.772.$

18. $\sqrt{82.75}$

解. $log\sqrt{82.75}=\frac{1}{2}log\,82.75=\frac{1}{2}\times1.91777$

$=0.95889=log9.0968.$

19. $\sqrt{1.002}$.

解. $log\sqrt{1.002}=\frac{1}{2}log\,1.002=\frac{1}{2}\times0.00087$

$=0.00044=log1.001$

20. $\sqrt{3.1416}$.

解. $log\sqrt{3.1416}=\frac{1}{2}log3.1416=\frac{1}{2}\times0.49715$

$=0.24858=log1.7725.$

21. $\sqrt[3]{793}$.

解. $log\sqrt[3]{793}=\frac{1}{3}log793=\frac{1}{3}\times2.89927$

$=0.96642=log9.256.$

22. $\sqrt[3]{2}$.

解. $\log\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}\log 2=\frac{1}{3}\times 0.30203$

$=0.10034=\log 1.2599.$

23. $\sqrt[3]{582}.$

解. $\log\sqrt[3]{582}=\frac{1}{3}\log 582=\frac{1}{3}\times 2.76492$

$=0.92164=\log 8.3492.$

24. $\sqrt[3]{71.896}.$

解. $\log\sqrt[3]{71.896}=\frac{1}{3}\log 71.896=\frac{1}{3}\times 1.85671$

$=0.61890=\log 4.1582.$

25. $\sqrt[4]{793}.$

解. $\log\sqrt[4]{793}=\frac{1}{4}\log 793=\frac{1}{4}\times 2.89927$

$=0.72482=\log 5.3066.$

26. $\sqrt[7]{453}.$

解. $\log\sqrt[7]{453}=\frac{1}{7}\log 453=\frac{1}{7}\times 2.65610$

$=0.27944=\log 2.3957.$

27. $\sqrt[8]{4.83}.$

解. $\log\sqrt[8]{4.83}=\frac{1}{8}\log 4.83=\frac{1}{8}+0.68395$

$=0.08549=\log 1.2176.$

28. $\sqrt[9]{8.964}.$

解. $\log\sqrt[9]{8.964}=\frac{1}{9}\log 8.964=\frac{1}{9}\times 0.95250$

$=0.10583=\log 1.2759.$

29. $\frac{(18.239)^2(7.8245)^2}{(11.389)^2\sqrt{5.8927}}.$

解. $\log\left\{\frac{(18.239)^2(7.8245)^2}{(11.389)^2\sqrt{5.8927}}\right\}$

$=2\log 48.239+2\log 7.8245-2\log 41.389-\frac{1}{2}\log 58927$

$=2\times 1.68340+2\times 0.89346-2\times 1.61689-\frac{1}{2}\times 4.77032$

$=3.36680+1.78962-3.23378-2.38516$

$=\overline{1}.53478=\log 0.34259.$

30\. $\dfrac{\sqrt{48143}(4.8156)^2}{37587\sqrt[3]{823.95}}$.

解. $\log\left\{\dfrac{\sqrt{48143}(4.8156)^2}{37587\sqrt[3]{823.95}}\right\}$

$=\frac{1}{2}\log 48143+2\log 4.8156-\log 37587-\frac{1}{3}\log 823.95$

$=\frac{1}{2}\times 4.68254+2\times 0.68265-4.57504-\frac{1}{3}\times 2.91590$

$=2.34127+1.36530-4.57504-0.97197$

$=\overline{2}.15956=\log 0.01444.$

問 題 九 十 九 P. 214

用五位對數表計算下列各數。

1\. $(0.491)^3$.

解. $\log(0.491)^3=3\log 0.491=3\times\overline{1}.69108$

$=\overline{3}+2.07324=\overline{1}.07324=\log 0.11837.$

2\. $(0.00723)^5$.

解. $\log(0.00723)^5=5\log 0.00723=5\times\overline{3}.85914$

$=\overline{15}+4.29570=\overline{11}.29570=\log 0.000000000019756.$

3\. $\left(\dfrac{14}{51}\right)^9$

解. $\log\left(\dfrac{14}{51}\right)^9=9(\log 14-\log 51)=9(1.14613-1.70757)$

$=9\times\overline{1}.43856=\overline{9}+3.94704=\overline{6}.94704=log0.0000088352.$

4. $\sqrt{0.078}.$

解. $log\sqrt{0.078}=\frac{1}{2}log0.078=\frac{1}{2}\times\overline{2}.89206$

$=\overline{1}.44605=log0.27929.$

5. $\sqrt[3]{0.537}.$

解. $log\sqrt[3]{0.537}=\frac{1}{3}log0.537=\frac{1}{3}\times\overline{1}.72997$

$=\frac{1}{3}(\overline{3}+2.72997)=\overline{1}.99999=log0.81282.$

6. $\sqrt[3]{0.00279}.$

解. $log\sqrt[3]{0.00279}=\frac{1}{3}log0.00279=\frac{1}{3}\times\overline{3}.44560$

$=\overline{1}.14853=log0.14078$

7. $\sqrt[5]{0.000000314}.$

解. $log\sqrt[5]{0.000000314}=\frac{1}{5}log0.000000314$

$=\frac{1}{5}\times\overline{7}.49693=\frac{1}{6}\times(\overline{10}+2.49693)=\overline{2}.69930$

$=log0.050049.$

問題一百 P.216

1. 年利5釐，元金100元，問100年後之元利合爲若干。(每年加利一次)。

解. 用公式(1)。

$log\,A=logP+nlog(1+i)=log100+100log1.05$

$=2+100\times0.02119=2+2.11900=4.11900=log131.52$

2. 若每半年加利一次則若何。

解. 如上法。

$\log A = \log 100 + 200\log 1.025 = 2 + 200 \times 0.01072$

$= 2 + 2.14400 = 4.14400 = \log 139.32.$

3. 元金100圓，25年後之元利合計爲265圓零5分，問利率爲若干。

解. 用公式(2)。

$$i = \sqrt[n]{\frac{A}{P}} - 1 = \sqrt[25]{\frac{265.05}{100}} - 1 = \sqrt[25]{2.660} - 1$$

$$\log \sqrt[25]{2.6505} = \frac{1}{25}\log 2.6505 = \frac{1}{25} \times 0.42333$$

$$= 0.01693 = \log 1.0398$$

故 $i = 1.0398 - 1 = 0.0398$ 即約4釐

4. 年利5釐，元銀100圓，問幾年後其元利之總數爲1147圓。

解. 用公式(3)。

$$n = \frac{\log 1147 - \log 100}{\log 1.05} = \frac{3.05956 - 2}{0.02119} = \frac{1.05956}{0.02119} = 50(\text{略})。$$

5. 年利7釐，定期100年，金額10000圓，問現價若干。

解. 用公式(4)。

$$\log A = \log P - n\log(1 + r)$$

$$= \log 10000 - 100\log 1.07 = 4 - 100 \times 0.02938$$

$$= 4 - 2.93800 = 1.06200 = \log 11.534.$$

問 題 一 百 一　P.217

1. 求4, 5, 6, 8, 9, 12, 14, 15之對數。

解. $\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2 = 2 \times 0.30103 = 0.60206.$

$\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.30103 = 0.69897$

$\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0.30103 + 0.47712 = 0.77815$

$\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = 3 \times 0.30103 = 0.90309.$

$\log 9 = \log 3^2 = 2\log 3 = 2 \times 0.47712 = 0.95424.$

$log12=log(2^2\times3)=2log2+log3=2\times0.30103+0.47712$

$=1.07918.$

$log14=log(2\times7)=log2+log7=0.30103+0.84510$

$=1.14613$

$log15=log\frac{10\times3}{2}=log10+log3-log2$

$=1+0.47712-0.30103=1.17609$。

2．以5爲底數，求2之對數。

解．$5^x=2$,　∴　$xlog5=log2.$

∴　$0.69897x=0.3103.$

故　$x=\frac{0.30103}{0.69897}=0.43068.$

3．以0.001爲底數，求10之對數。

解．$0.001^x=10.$　　∴　$xlog0.001=log10$

∴　$-3x=1$　　∴　$x=-\frac{1}{3}=-0.33333=\bar{1}.66667.$

3．$log0.032=\bar{2}.50515$。由之求$log2$之值。

解．$log2=log\sqrt[5]{32}=log\sqrt[5]{0.032\times1000}$

$=\frac{1}{5}(log0.032+log1000)=\frac{1}{5}(\bar{2}.50515+3)$

$=\frac{1}{5}\times1.50515=0.30103,$

5．求　$\sqrt{\frac{35}{27}}$, [illegible]98, [illegible]6 之對數。

解　$log\sqrt{\frac{35}{27}}=\frac{1}{2}(log35-log27)=\frac{1}{2}\left\{log\left(\frac{7\times10}{2}\right)-log3^3\right\}$

$=\frac{1}{2}\{(log7+log10-log2)-(3log3)\}$

$=\frac{1}{2}\{(0.84510+1-0.30103)-(3\times0.47712)\}$

$$=\frac{1}{2}(1.54407-1.43136)=\frac{1}{2}\times0.11271=0.05636$$

$$log\sqrt{0.98}=\frac{1}{2}log\left(\frac{7^2\times2}{100}\right)=\frac{1}{2}(2log7+log2-log100)$$

$$=\frac{1}{2}(2\times0.84500+0.30103-2)=\frac{1}{2}\times\overline{1}.99123=\overline{1}.99562.$$

$$log\sqrt[3]{3.6}=\frac{1}{3}log\left(\frac{2^2\times3^2}{10}\right)=\frac{1}{3}(2log2+2log3-log10)$$

$$=\frac{1}{3}(2\times0.30103+2\times0.47712-1)$$

$$=\frac{1}{3}\times0.55630=0.18543.$$

6．求下列三方程式中 x 之值。

(i) $10^x=3$,　(ii) $2^x=10$,　(iii) $56^x=9$.

解. (i) $xlog10=log3$,　$\therefore\ x=0.37712$,

(ii) $xlog2=log10$,　$\therefore\ 0.30103x=1$,

$$\therefore\ x=\frac{1}{0.30103}.$$

(iii) $xlog56=log9$,

因　$log56=log(7\times2^3)=log7+3log2$

$$=0.84510+3\times0.30103=1.74819.$$

$$log9=log3^2=2log3=3\times0.47712=0.95424.$$

故　$1.74819x=0.95424$,　$\therefore\ x=\frac{0.95424}{1.74819}.$

7．$\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ 其第一位數字，在小數第幾位。

解. $log\left(\frac{1}{4}\right)^{100}=100(log1-log3)$

$$=100(2-0.47712)=100\times1.52288$$

$$=-100+52.288=\overline{18}.28800.$$

故第一位數字，在小數第四十八位。

問題集 XXIV P.218

求下列方程式之根。

1．$log(x-1)-log(x^2+2x-3)+1=0.$

解. 變其式爲 $log\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}=-1=log0.1$

$$\therefore\quad \frac{x-1}{x^2+2x-3}=0.1,\qquad \frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\frac{1}{x+3}=\frac{1}{10}$$

如是 $x+3=10,\qquad \therefore\quad x=7.$

2．$log2x^2=log(2x+15)+1.$

解. 變之 $log2x^2-log(2x+15)=1.$

即 $log\dfrac{2x^2}{2x+15}=log10.$

$$\therefore\quad \frac{2x^2}{2x+15}=10\qquad \therefore\quad 2x^2=20x+150.$$

所以 $x^2-10x-75=0\quad \therefore\quad (x-15)(x+5)=0.$

$\therefore\quad x=15$ 或 $-5.$

於實數範圍中，解下列方程式。

3．$2^{2x+1}+9=28\times3^x$。

解. 原式爲 $3\times3^{2x}-28\times3^x+9=0.$

設 $y=3^x.$

得 $3y^2-28y+9=0.$

即 $(3y-1)(y-9)=0.\quad \therefore\quad y=\dfrac{1}{3}.$ 或 $9.$

即 $3^x=9=3^2.\qquad \therefore\quad x=2.$

又 $2^x=\dfrac{1}{3}=3^{-1}.\qquad \therefore\quad x=-1.$

4．$5^{x^2+x}=2^{1-x^2}$

解. 變之 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x}=\frac{10^{x^2+x}}{2^{x^2+x}}=2^{1-x^2}$

$$\therefore\quad 10^{x^2+x}=2^{1-x^2}\times 2^{x^2+x}=2^{x+1}.$$

故 $(x^4+x)log10=(x+1)log2.$

$\therefore\quad x(x+1)(x-1)log2=0,\quad \therefore\quad (x-log2)(x+1)=0.$

所以 $x=log2$ 或 $-1.$

5. $\sqrt[3]{.02}$ 與 $\sqrt{.007}$ 之比例中數之對數。

解. 中數$=\sqrt{\sqrt[3]{.02}\times\sqrt{.007}}=\sqrt{\sqrt[6]{(.02)^2}\sqrt[6]{(.007)^3}}$

$$=\sqrt[12]{(.02)^2(.007)^3}.$$

此數命之為 a, 則

$$loga=\{(\bar{2}.30103)\times2+(\bar{3}.84510)\times3\}\div12$$

$$=(\bar{4}.60206+\bar{7}.53530)/12=\overline{10}.13736/12$$

$$=(\overline{12}+2.13736)/12=\bar{1}.17811.$$

6. $2\sqrt{2}$為底數, 求 64 之對數, 又問如何之數為底數, 則12之對數為2。

解. 設 $(2\sqrt{2})^x=64.$

則 $log(2\sqrt{2})x=log64=log(2^6).$

$\therefore\quad (log2+log2\div2)x=log2\times6.$

以 $log2$ 除之, $\left(1+\frac{1}{2}\right)x=6.$

$\therefore\quad 3x=12\quad x=4.$

又設底數為 x, 可作 $x^2=12,\quad\therefore\quad x=\sqrt{12}.$

問 題 一 百 二 P. 219

1. 二數之比, 如2與3之比, 二數之差與其平方之差之比, 如1

與 25 之比，求二數爲何數。

解. 設二數爲 x, y。如題得

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}\qquad \therefore\quad 3x=2y\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $$\frac{y-x}{y^2-x^2}=\frac{1}{25}\qquad \therefore\quad 25(y-x)=y^2-x^2,$$

故 $$25=y+x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1) $y=\dfrac{3}{2}x$

代入(2) $$\frac{3}{2}x+x=25\qquad 故\quad 5x=50$$

$$\therefore\qquad x=10\qquad y=\frac{3}{2}\times 10=15.$$

2. 由 $x^2+2y^2=3xy$ 求 $x:y$ 之值。

解. $x^2-3xy+2y^2=0$　即　$(x-2y)(x-y)=0$

$$\therefore\qquad x=2y\qquad 或\qquad x=y$$

$$\therefore\qquad \frac{x}{y}=2\qquad 或\qquad \frac{x}{y}=1.$$

3. $x:1$ 與 $8:x$ 之二乘比相等，求 x 之值。

解. $$\frac{x^2}{1}=\frac{64}{x^2}\qquad \therefore\quad x^4=64$$

$$x^2=\pm 8\qquad x=\pm 2\sqrt{2}\ 或\ \pm 2i\sqrt{2}.$$

4. $b-a:b+a$ 等於 $4a-b:6a-b$，求 $a:b$ 之值。

解. $$\frac{b-a}{b+a}=\frac{4a-b}{6a-b}=\frac{b-4a}{b-6a}.$$

$$b^2-7ab+6a^2=b^2-3ab-4a^2$$

$$10a^2-4ab=0,\qquad a(5a-2b)=8$$

$$\therefore\qquad a=0\qquad 或\qquad 5a=2b$$

$$\frac{a}{b}=0\qquad 或\qquad \frac{a}{b}=\frac{2}{5}$$

問題一百三 P. 221

1．$l:a-b,\ m:b-c,\ n:c-a$ 互等時，$l+m+n=0$ 試證之。

證 明：令 $k=\dfrac{l}{a-b}=\dfrac{m}{b-c}=\dfrac{n}{c-a}$.

故 有 $k(a-b)=l,\quad k(b-c)=m,\quad k(c-a)=n.$

相加得 $k\times 0=l+m+n,\quad \therefore\ l+m+n=0.$

2．$a>b$ 且各爲正數，則 $a^2-b^2:a^2+b^2$ 大於 $a-b:a+b$。試證之。

證 明： $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}=\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$

$\because\ a^2+b^2<(a+b)^2,\qquad \therefore\ \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}>\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}.$

故 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}>\dfrac{a-b}{a+b}$

3．b, d, f 俱爲正數，則 $\dfrac{a+c+e}{b+d+f}$ 大於 $\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{c}{d}$，$\dfrac{e}{f}$ 中之最小者，而小於 $\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{c}{d}$，$\dfrac{e}{f}$ 中之最大者試證之。

證 明： 設 $\dfrac{e}{f}$ 爲分數中之最小者，其值爲 x.

則 $\dfrac{a}{b}>x,\ \dfrac{c}{d}>x,\ \dfrac{e}{f}=x,$

$\therefore\ a>bx,\ c>dx,\ e=fx.$

故 $a+c+e>(b+d+f)x,\qquad \dfrac{a+c+e}{b+d+f}>x,$

又設 $\dfrac{a}{b}$ 爲分數中之最大者，其值爲 x。

則 $\dfrac{a}{b}=x,\ \dfrac{c}{d}<x,\ \dfrac{e}{f}<x,$

$\therefore\ a=bx,\ c<dx,\ e<fx.$

故 $a+c+e<(b+d+f)x$, $\therefore \dfrac{a+c+e}{b+d+f}<x$.

4. $\dfrac{bz-cy}{b-c}=\dfrac{cx-az}{c-a}$, $c\neq 0$, 則等式之兩邊，各等於$\dfrac{ay-bx}{a-b}$，試證之。

證明：設 $\dfrac{bz-cy}{b-c}=\dfrac{cx-az}{c-a}=k$.

$$\therefore \quad bz-cy=(b-c)y\cdots(1) \quad cx-az=(c-a)k\cdots(2)$$

以a乘(1)式，b乘(2)式。

$$abz-acy=a(b-c)k,\quad bcx-abz=b(c-a)k.$$

相加 $(bx-ay)c=(d-a)ck$.

$$\therefore \quad \frac{bx-ay}{b-a}=\frac{ay-bx}{a-b}=k.$$

問題一百四 P. 224

1. 求下列各比例中之 x。

(i) $5:x=x:45$

解. 即 $x^2=45\times 5=225$ $\qquad\therefore\ x=\pm 15$.

(ii) $x+4:x+2=x+8:x+5$.

解. 即 $(x+2)(x+8)=(x+4)(x+5)$

$$x^2+10x+16=x^2+9x+20.$$

移項，合併 $\therefore\ x=4$.

(iii) $3x+2:x+7=9x-2:5x+8$

解. 即 $(3x+2)(5x+8)=(x+7)(9x-2)$

$$15x^2+34x+16=9x^2+61x-14.$$

移項，合併 $6x^2-27x+30=0$

分解 $(3x-6)(2x-5)=0$

$$\therefore\ x=\frac{5}{3}=2 \quad 或 \quad \frac{5}{2}.$$

(iv) $x^2+x+1:63(x+1)=x^2-x+1:63(x-1)$.

解. $(x^2+x+1)63(x-1)=62(x+1)(x^2-x+1)$

即 $$63(x^3-1)=62(x^3+1)$$

$$x^3-125=0,$$

即$(x-5)(x^2+5x+25)=0$. $\therefore\quad x=5.$

或 $$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-100}}{2}=\frac{-5\pm5\sqrt{-3}}{3}=5\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$$

2. $pq=rs$, $qt=sn$。求證 $p:r=t:n$。

證　明：由原兩式 $\dfrac{p}{r}=\dfrac{s}{q}$, $\dfrac{t}{n}=\dfrac{s}{q}$.

故 $\dfrac{p}{r}=\dfrac{t}{n}$, $p:r=t:n$.

3. $a:b=c:d$, $p:q=r:s$。求證 $aq:bp=cs:dr$.

證　明： $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{p}{q}=\dfrac{r}{s}$.

以後式除前式 $\dfrac{aq}{bp}=\dfrac{cs}{dr}$, $\therefore\quad aq:bp=cs:dr$.

4. 二數之和為 125, 而其比例中數為 60, 問二數為何數。

解. 設二數為 x, y, 依題意得：

$x+y=125\cdots\cdots(1)$ $xy=60^2\cdots\cdots(2)$

(1)式自乘減(2)數之4倍

$$x^2-2xy+y^2=125^2-120^2=(25^2-24^2)5^2$$

$$=49\times5^2=(7\times5)^2.$$

開　方 $x-y=\pm(7\times5)=\pm35\cdots\cdots(3)$

(1)(3)相加減

$$x=\frac{125\pm35}{2}=80\text{ 或 }45,\quad y=\frac{125\mp35}{2}=45\text{ 或 }80.$$

5. 設 $a:b=c:d$ 求證下列各式。

(i) $la+mb:pc+qb=lc+md:pc+qd$.

證明: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ $\quad \dfrac{b}{b}=\dfrac{d}{d}$.

則 $\dfrac{la}{b}=\dfrac{lc}{d}$, $\quad \dfrac{mb}{b}=\dfrac{md}{d}$.

$\dfrac{pa}{b}=\dfrac{pc}{d}$, $\quad \dfrac{qb}{b}=\dfrac{qd}{d}$,

相加,得 $\dfrac{la+mb}{b}=\dfrac{lc+md}{d}$, $\quad \dfrac{pa+qb}{b}=\dfrac{pc+qd}{d}$.

相除,得 $\dfrac{la+mb}{pa+qd}=\dfrac{lc+md}{pc+qd}$.

$\therefore\ la+mb:pa+pb=lc+md:pc+qd$.

(ii) $a:\sqrt{a^2+b^2}=c:\sqrt{c^2+d^2}$.

證明 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 則 $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{c^2}{d^2}$ 即 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{d^2}{c^2}$.

而 $1+\dfrac{b^2}{a^2}=1+\dfrac{d^2}{c^2}$, $\therefore\ \dfrac{a^2+b^2}{a^2}=\dfrac{c^2+d^2}{c^2}$.

開方 $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{c^2+d^2}}{c}$, $\therefore\ \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}$

故 $a:\sqrt{a^2+b^2}=c:\sqrt{c^2+d^2}$

(iii) $a^2+ab:c^2+cd=a^2-2ab:c^2-2cd$.

證明 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{a}$,則 $\dfrac{a}{b}+1=\dfrac{c}{d}+1$, $\dfrac{a}{b}-2=\dfrac{c}{d}-2$.

故 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$, $\quad \dfrac{a-2b}{b}=\dfrac{c-2d}{d}$.

相除 $\dfrac{a+b}{a-2b}=\dfrac{c+d}{c-2d}$ 亦即 $\dfrac{a+b}{a-2b}\times\dfrac{a}{a}=\dfrac{c+d}{c-2d}\times\dfrac{c}{c}$

即 $\dfrac{a^2+ab}{a^2-2ab}=\dfrac{c^2+cd}{c^2-2cd}$ $\therefore\ \dfrac{a^2+ab}{c^2+cd}=\dfrac{a^2-2ab}{c^2-2cd}$

故 $a^2+a:bc^2+cd=a^2-2ab:c^2-2cd$.

(iv) $a:b=\sqrt[n]{pa^n+qd^n}:\sqrt[n]{pb^n+qd^n}$.

證明： $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則 $\frac{pa^n}{pb^n}=\frac{qc^n}{qd^n}$.

$$\frac{qc^n}{pa^n}=\frac{qd^n}{pb^n}，故\ 1+\frac{qc^n}{qa^n}=1+\frac{qd^n}{pb^n}.$$

$$\frac{pa^n+qc^n}{a^n}=\frac{pb^n+qd^n}{b^n}.$$

開 n 方 $\frac{\sqrt[n]{pa^n+qc^n}}{a}=\frac{\sqrt[n]{pb^n+qd^n}}{b}$.

改之，即得 $a:b=\sqrt[n]{pa^n+qc^n}:\sqrt[n]{pb^n+qd^n}$.

6. $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$，求證 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

證明：設 $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}=x$

則 $a(bz-cy)=a^2x \qquad b(cx-ax)=b^2x$,

$c(ay-bx)=c^2x$.

三式相加：

$$a(bz-cx)+b(cx-ay)+c(ay-bx)=(a^2+b^2+c^2)x.$$

$$\therefore\quad x=\frac{a(bz-cy)+b(cx-az)+c(ay-bx)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{0}{a^2+b^2+c^2}=0.$$

即 $bz-cy=0$，$cx-az=0$，$ay-bx=0$,

故 $\frac{z}{c}=\frac{y}{b}$，$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$，$\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$,

$$\therefore\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

問題一百五 P. 225

1. 級數 5, 9, 13………之第十三項爲何數。

解. $a=5$，$x=13$，$d=9-5=4$.

代入公式（1） $l=5+(13-1)4=53$.

2．級數 $-2,-5,-8$…………之第十項為何數。

解. $a=-2$, $n=10$　　$d=-5-(-2)=-3$.

代入公式（1） $l=-2+(10-1)\times(-3)=-29$.

3．級數 $1,\frac{6}{7},\frac{5}{7}$…………之第十五項為何數。

解. $a=1$, $n=15$, $d=\frac{6}{7}-1=-\frac{1}{7}$.

代入公式（1） $l=1+(15-1)\times\left(-\frac{1}{7}\right)=-1$.

4．級數 $a,a+3b,a+6b$…………之第八項為何數。

解. $n=8$,　$d=3b$.

代入公式（1） $l=a+(8-1)3b=a+21b$.

5．等差級數之項數為奇，則初末二項之和，等於中央之項之二倍

證　明：設 a 為初項，b 為末項，d 為公差，項數為 $2n+1$,

則中央項為 $n+1$ 項，故

$a+b=a+a+(2n+1-1)d=2a+2nd=2(a+nd)$,

中央項 $=a+(n+1-1)d=a+nd$,

$\therefore$　$a+b=$ 中央項中二倍。

6．求下列各二數之中項.

3 與 12, -5 與 17, a^2+ab-b^2 與 a^2-ab+b^2.

解. $\frac{3+12}{2}=\frac{15}{2}$, $\frac{-5+17}{2}=6$　$\frac{a^2+ab-b^2+a^2-ab+b^2}{2}=a^2$.

7．-4 與 17 之間插入等差中項四。

解. $d=\frac{17-(-4)}{4+1}=\frac{21}{5}$.

故所插入者，為：

$$-4+\frac{21}{5}=\frac{1}{5}, \quad \frac{1}{5}+\frac{21}{5}=\frac{22}{5},$$

$$\frac{22}{5}+\frac{21}{5}=\frac{43}{5}, \quad \frac{43}{5}+\frac{21}{5}=\frac{64}{5}.$$

8. 等差級數之第一項爲 2, 公差爲 $\frac{1}{8}$, 問 10 爲第幾項。

解. $a=2,\ d=\frac{1}{8}\quad l=10.$

代入公式（1） $10=2+(n-1)\times\frac{1}{8}.$

$\therefore\quad 80=16+n-1\qquad\therefore\quad n=65.$

9. $1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots+n=?$

解. $a=1,\ d=2-1=1.$

代入公式（4） $S=\frac{n(1+n)}{2}$

10. $a+4a+7a+\cdots\cdots\cdots\cdots+n$ 項之級數，其和爲何數。

解. $d=4a-a=3a,\ l=a+(n-1)3a=3an-2a.$

代入公式（4）

$$S=\frac{n(a+3an-2a)}{2}=\frac{n(3an-a)}{2}=\frac{na(3n-1)}{2}$$

問題一百六 P.227

1. 求級數 2, 6, 18 之第七項。

解. $a=2,\ r=\frac{6}{2}=3,\ n=7.$

代入公式：$l=ar^{n-1},\ l=2\times3^6=1458.$

2. 求級數 1, -2, 4 之第八項。

解. $a=1,\ r=\frac{-2}{1}=-2.\ n=8.$

公式代入：$l=1\times(-2^7)=-128.$

3. 求級數 6, 3, $1\frac{1}{2}$ 之第九項。

解 $a=6$, $r=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $n=6$.

代入公式：$l=6+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{6}{256}=\frac{3}{128}$.

4．求級數 $4a, -6ma^2, 9m^2a^3$ 之第五項。

解. $a=4a$, $r=\frac{-6ma^2}{4a}=-\frac{3ma}{2}$, $n=5$.

代入公式：$l=4a\times\left(-\frac{3ma}{2}\right)^4=\frac{4a(81m^4a^4)}{16}=\frac{81m^4a^5}{4}$

5．求 $18x^3y$ 與 $30xy^3z$ 之等比中項。

解. $G=\sqrt{18x^3y\times 30xy^3z}=\sqrt{36x^4y^4\times 15z}=\pm 6x^2y^2\sqrt{15z}$.

6．14與224之間求插入比例中項3.

解. $r=\sqrt[4]{\frac{224}{14}}=\sqrt[4]{16}=\pm\sqrt{\pm 4}=\pm 2$ 或 $\pm 2i$.

故所挿入者爲：

$14\times(\pm 2)=\pm 28$, $\pm 28\times(\pm 2)=56$, $56\times(\pm 2)=\pm 112$

或 $14\times\pm 2i=\pm 28i$, $\pm 28i\times(\pm 2i)=56i=-56$,

$-56\times(\pm 2i)=\pm 612i$.

7．$a=2$, $r=3$, 問162爲第幾項。

解. 因 $l=ar^{n-1}$.

故 $162=2\times 3^{n-1}$, $\therefore$ $81=3^{n-1}$, $\therefore$ $3^4=3^{n-1}$.

故得 $n-1=4$, $\therefore$ $n=5$

8．求下列各級數之和。

(i) $3+6+12+\cdots\cdots\cdots$ 至第八項。

解. $r=\frac{6}{3}=2$, $\therefore$ $S=\frac{3(2^8-1)}{2-1}=3(255-1)=765$.

(ii) $1-3+9-\cdots\cdots\cdots$ 至第七項。

解. $r=\frac{-3}{1}=-3$. $\therefore$ $S=\frac{1(1-(-3^7))}{1-(-3)}=\frac{2188}{4}=647$.

（iii） $0.1+0.5+2.5+\cdots\cdots$至第七項。

解. $r=\dfrac{0.5}{0.1}=5$, $\therefore\ S=\dfrac{0.1(5^7-1)}{5-1}=\dfrac{7812.4}{4}=1953.1.$

（iv） $m-\dfrac{m}{4}+\dfrac{m}{16}-\cdots\cdots$至第五項。

解. $r=\dfrac{-\dfrac{m}{4}}{m}=-\dfrac{1}{4}$,

$$\therefore\ S=\frac{m\left\{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^5\right\}}{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)}=\frac{m\left(\dfrac{1025}{1024}\right)}{\dfrac{5}{4}}=\frac{1025m\times 4}{1024\times 5}=\frac{205m}{256}.$$

問 題 一 百 七 P.228

求下列各無限級數之和。

1． $1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}.$

解. $a=1$, $r=\dfrac{\dfrac{1}{3}}{1}=\dfrac{1}{3}$. 故 $\lim\limits_{n=\infty} S=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}.$

2． $1,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{16}.$

解. $a=1$, $r=\dfrac{1}{4}$. 故 $\lim\limits_{x=\infty} S=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}.$

3． $5,\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{4}.$

解. $a=5$, $r=\dfrac{\dfrac{5}{2}}{5}=\dfrac{1}{2}$. 故 $\lim\limits_{n=\infty} S=\dfrac{5}{1-\dfrac{1}{2}}=10.$

4. $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{2r^2}$, $\frac{1}{4r^3}$ $\left(但 r>\frac{1}{2}\right)$.

解. $a=\frac{1}{r}$, $r=\frac{1}{2r^2}\div\frac{1}{r}=\frac{1}{2r}$.

故 $$\lim_{n=\infty} S=\frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{2r}}=\frac{2}{2r-1}.$$

化下列各循環小數爲分數。

5. $0.\dot{1}\dot{5}$

解. 原式$=\frac{15}{100}+\frac{15}{100^2}+\frac{15}{100^3}+\cdots\cdots$

$$=\frac{\frac{15}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}.$$

6. $0.\dot{1}2\dot{3}$

解. 原式$=\frac{123}{1000}+\frac{123}{1000^2}+\frac{123}{1000^3}+\cdots\cdots$

$$=\frac{\frac{123}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{123}{999}=\frac{41}{333}.$$

7. $0.4\dot{2}\dot{8}$

解. 原式$=\frac{4}{10}+\frac{28}{1000}+\frac{28}{100000}+\frac{28}{10000000}+\cdots\cdots$

$$=\frac{4}{10}+\frac{\frac{28}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{4}{10}+\frac{\frac{28}{1000}}{\frac{99}{100}}=\frac{4}{10}+\frac{28}{990}$$

$$=\frac{396+28}{990}=\frac{424}{990}=\frac{212}{495}.$$

8. $9.28\dot{1}\dot{3}$

解. 原式$=9\frac{28}{100}+\frac{13}{10000}+\frac{13}{1000000}+\cdots\cdots$

$$=9\frac{28}{100}+\frac{\frac{13}{10000}}{1-\frac{1}{100}}=9\frac{28}{100}+\frac{\frac{13}{10000}}{\frac{99}{100}}$$

$$=9\frac{28}{100}+\frac{13}{9900}=9\frac{2772+13}{9900}$$

$$=9\frac{2785}{9900}=9\frac{557}{1980}$$

問題一百八 P. 231

1. 於1與7之間，插入五個調和中項。

解. 由此數求等差級數：

$a=1,\qquad a+6d=\frac{1}{7}$

即 $6d=\frac{1}{7}-1=-\frac{6}{7}$.

$$d=-\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{7}.$$

故此等差級數爲：

$$1,\ \frac{6}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{7}.$$

所以調和中項爲：

$$\frac{7}{6},\ \frac{7}{5},\ \frac{7}{4},\ \frac{7}{3},\ \frac{7}{2},$$

2. 於$\frac{2}{3}$與$\frac{3}{2}$之間，插入四個調和中項。

解. $a=\frac{2}{3},\qquad a+5d=\frac{3}{2},$

即 $5d=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

$$\therefore\quad d=\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$$

此等差級數爲:

$$\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}+\frac{1}{6},\ \frac{2}{3}+\frac{2}{6},\ \frac{2}{3}+\frac{3}{6},\ \frac{2}{3}+\frac{4}{6},\ \frac{3}{2}$$

即 $\frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ 1,\ \frac{7}{6},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2}$

此等差級數爲: $\frac{5}{6},\ 1,\ \frac{7}{6},\ \frac{4}{3}$.

故調和中項爲: $\frac{6}{5},\ 1,\ \frac{6}{7},\ \frac{3}{4}$.

3. 設 a^2, b^2, c^2, 爲等差級數, 求證 $b+c, c+a, a+b$, 爲調和級數。

證 明: $b^2-a^2=c^2-b^2$

即 $(b+a)(b-a)=(c+b)(c-b)$

全式以 $(a+b)(c-b)$ 除之:

得 $\frac{b-a}{c-b}=\frac{b+c}{a+b}$ ……………………………… (1)

而 $b-a=(b+c)-(c+a)$ ………………… (2)

$c-b=(c+a)-(a+b)$ ………………… (3)

將 (2), (3) 代入 (1)

即 $\frac{(b+c)-(c+a)}{(c+a)-(a+b)}=\frac{b+c}{a+b}$

$\therefore\quad (b+c)-(c+a):(c+a)-(a+b)=b+c:a+b$

$\therefore\quad b+c,\ c+a,\ a+b$, 爲調和級數.

4. x, y, z 爲調和級數, 則 $(y+z-x)^2, (z+x-y)^2, (x+y-z)^2$, 爲等差級數。

證　明：$(z+x-y)^2-(y+z-x)^2=(x+y-z)^2-(z+x-y)^2$

即　　$z(x-y)=x(y-z)$

$$\therefore\quad 2xz=xy+yz$$

全式以 xyz 除之：

得　$\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}$

變上式爲　$\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{y}$

$\therefore$　x, y, z 爲調和級數

5．設 x, y, z 爲調和級數，求證 $\dfrac{x}{y+z}$，$\dfrac{y}{z+x}$，$\dfrac{z}{x+y}$ 亦爲調和級數。

證　明：$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{1}{z}$ 爲等差級數

各以 $x+y+z$ 乘之得：

$$\frac{x+y+z}{x},\quad \frac{x+y+z}{y},\quad \frac{x+y+z}{z},$$

上式仍爲等差級數。

而　$\dfrac{x+y+z}{x}-1=\dfrac{y+z}{x}$

$\dfrac{x+y+z}{y}-1=\dfrac{z+x}{y}$、

$\dfrac{x+y+z}{z}-1=\dfrac{x+y}{z}$

以上三式亦仍爲等差級數，

$\therefore$　$\dfrac{x}{y+z}$，$\dfrac{y}{z+x}$，$\dfrac{z}{x+y}$，亦爲調和級數。

6．設 x, y, z，爲調和級數，求證 $\dfrac{x}{y+z-x}$，$\dfrac{y}{z+x-y}$，$\dfrac{z}{x+y-z}$

亦為調和級數.

證　明: 由1題可知:

$$\frac{x+y+z}{x},\ \frac{x+y+z}{y},\ \frac{x+y+z}{y}\ \text{為等差級數.}$$

而

$$\frac{x+y+z}{x}-2=\frac{y+z-x}{x},$$

$$\frac{x+y+z}{y}-2=\frac{z+x-y}{y},$$

$$\frac{x+y+z}{z}-2=\frac{x+y-z}{z},$$

以上三式亦為等差級數.

$$\therefore\quad \frac{x}{y+z-x},\ \frac{y}{z+x-y},\ \frac{z}{x+y-z}\ \text{為調和級數.}$$

7. a, b, c, 為調和級數, 求證 $\dfrac{b+a}{b-a}+\dfrac{b+c}{b-c}=2$。

證　明:

$$a-b:b-c=a:c$$

$$c(a-b)=a(b-c),$$

上式以 $\dfrac{2}{(a-b)(b-c)}$ 乘之得:

$$\frac{2c}{b-c}=\frac{2a}{a-b}$$

即

$$\frac{b+c}{b-c}-1=1+\frac{a+b}{a-b}$$

$$\therefore\quad -\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}=2$$

即

$$\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=2$$

問題一百九　P. 234

求以下各級數 n 項之和，其能求無窮項之和者，則須求至無窮項之和。

1．$2.4+4.6+6.8+\cdots\cdots$

解．
$$\begin{aligned}
\Sigma &= 2.4.6+4.6.8+6.8.10+\cdots\cdots+2n(2n+2)(2n+4)\\
\Sigma &= \qquad\quad 2.4.6+4.6.8+\cdots\cdots+(2n-2)(2n)(3n+2)+2n(2n+2)(2n+4)\\
\hline
0 &= 2.4.6+6.4.6+6.6.8+\cdots\cdots+6(2n)(2n+2)-2n(2n+2)(2n+4)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 6(2.4+4.6+6.8+\cdots\cdots+2n(2n+2))=2n(2n+2)(2n+4)$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{2n(2n+2)(2n+4)}{6}=\frac{8n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{4}{3}n(n+1)(n+2)$$

2．$3.5+5.7+7.9+\cdots\cdots$

解．
$$\begin{aligned}
\Sigma &= 3.5.7+5.7.9+7.9.11+\cdots\cdots+(2n+1)(2n+3)(2n+5)\\
\Sigma &= \qquad\quad 2.5.7+5.7.9+\cdots\cdots+(2n-1)(2n+1)(2n+3)+(2n+1)(2n+3)(2n+5)\\
\hline
0 &= 3.5.7+6.5.7+6.7.9+\cdots\cdots+6(2n+1)(2n+3)-(2n+1)(2n+3)(2n+5)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 3.5+6.3.5+6.5.7+6.7.9+\cdots\cdots+6(2n+1)(2n+3)=(2n+1)(2n+3)(2n+5)$$

$$\therefore\quad 6\{3.5+5.7+7.9+\cdots\cdots+(2n+1)(2n+3)\}=(2n+1)(2n+3)(2n+5)-3.5$$

$$\therefore \quad S_n=\frac{1}{6}\{(2n+1)(2n+3)(2n+5)-15\}.$$

3．$1.3.5+3.5.7+5.7.9+\cdots\cdots$

解．$\Sigma=1.5.5.7+3.5.7.9+5.7.9.11+\cdots+(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)$

$\Sigma=\qquad 1.3.5.7+3.5.7.9+\cdots+(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)$

$0=1.3.5.7+8.3.5.6+8.5.7.9+\cdots+8(2n-1)(2n+1)(2n+3)-(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)$

$\therefore 1.3.5.8\cdot 1.3.5+8.3.5.7+8.5.7.9+\cdots+8(2n-1)(2n+1)(2n+3)=(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)$

$$\therefore \quad S_n=\frac{1}{8}\{(2n-1)(3n+8)(2n+5)+15\}.$$

4．$2.7.12+7.12.17+12.17.22+\cdots\cdots$

解．$\Sigma=2.7.12.17+7.12.17.22+\cdots+(5n-3)(5n+2)(5n+7)(5n+12)$

$\Sigma=\qquad 2.7.12.17+\cdots+(5n-8)(5n-3)(5n+2)(5n+7)+(5n-3)(5n+2)(5n+7)(5n+12)$

$0=2.7.12.17+20.7.12.17+\cdots+20(5n-3)(5n+2)(5n+7)-(5n-3)(5n+2)(5n+7)(5n+12)$

$\therefore 20\{2.7.12+7.12.17+\cdots+(5n-3)(5n+2)(5n+7)\}=(5n-3)(5n+2)(5n+7)(5n+12)+2.7.12.3$

$$\therefore \quad S_n=\frac{1}{20}\{(5n-3)(5n+2)(5n+7)(5n+12)+504\}.$$

5. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots\cdots\cdots$

解. $\Sigma=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}$

$\Sigma=\quad\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}$

$$0=1-\frac{2}{1.3}-\frac{2}{3.5}-\frac{2}{5.7}-\cdots\frac{2}{(2n-3)(2n-1)}-\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$-\frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore 2\left\{\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(2n-2)(2n-1)}\right\}=1-\frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{2n+1}\right\}.$$

若 n 爲無窮大,則 $\frac{1}{2n+1}=0$ 故 $S_n=\frac{1}{2}$.

6. $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+\cdots\cdots\cdots$

解. $\Sigma=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n+2}$

$\Sigma=\quad\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{3n-4}+\frac{1}{3n-4}+\frac{1}{3n+2}$

$$0=\frac{1}{2}-\frac{3}{2.5}-\frac{3}{5.3}+\cdots\cdots\cdots\frac{3}{(3n-1)(3n-1)}$$
$$=\frac{3}{(3n-1)(3n+2)}-\frac{1}{3n+2}$$

$$\therefore 3\left\{\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-4)(3n-1)}\right.$$

$$+\frac{1}{(3n-1)(2n-2)}\Big\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}$$

$$\therefore\quad Sn=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{3(n+3)}$$

若 $n=\infty$ 則 $\frac{1}{3(3n+2)}=0$ 故 $Sn=\frac{1}{6}$.

7. $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+\cdots\cdots$

解. $\frac{1}{1.3.5}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}\right)$, $\frac{1}{3.5.7}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3.5}-\frac{1}{3.7}\right)\cdots\cdots$

$$\frac{1}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}-\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right\}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\},$$

$$\therefore Sn=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\}=\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$$

若 $n=\infty\ Sn=S_\infty=\frac{1}{12}$.

8. $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\cdots\cdots$

解. $Sn=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots+\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}$

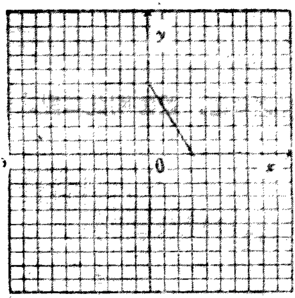
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1},\qquad\therefore\quad S\infty=\frac{1}{x+1}.$$

問題一百十 P. 242

求下列各題中，點之位置並以線連結之。

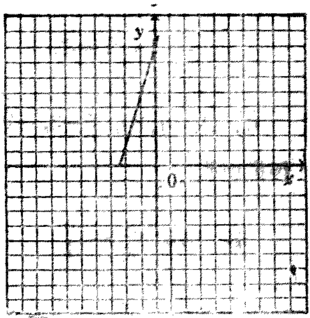
1. (3, 0), (0, 6)

解.



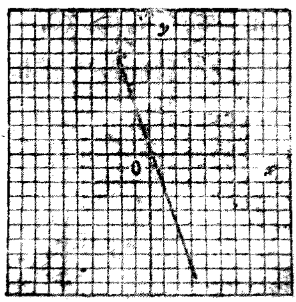
2. (−2, 0), (0, 8).

解.



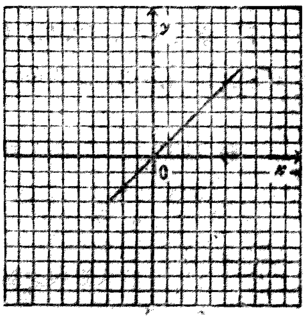
3. (3, − 8), (−2, 6).

解.

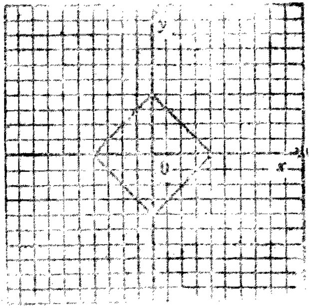


4. (5, 5), (−2, −2).

解.



5. 求(4,0), (0,4), (−4,0), (0,−4)四點之位置，並求此四點連結線所包圖形之面積。



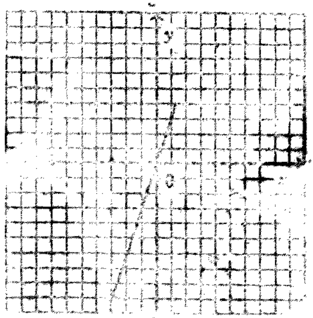
解. 此四點連結線所包之圖形為菱形。

故其面積為:

$(4+4)\times(4+4)\div2$

$=64\div2=32$

6. 求(1,3), (−3,−9)二點之位置，並證明此二點之連結線經過原點。

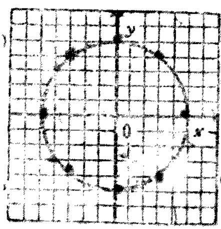


證明: $\frac{y}{x}=\frac{3}{1}$

$\frac{y}{x}=\frac{-9}{-3}=3$

∴ 此二點之結線必經過原點。

7. 求(0,5), (3,4), (5,0), (4,−3), (−5,0), (0,−5), (−4,3), (−4,−3)點之位置，並證明此八點與原點之距離相等。



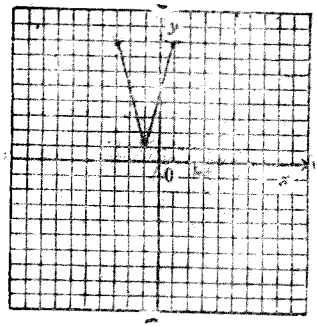
證明: 此八點連結線所包之圖形為圓周，原點為中心，故八點與原點之距離相等。

試作下列各函數之圖形。

8. $y=5x+6$.

解. 設 $x=1, 2, 3, -1, -2, -3$.

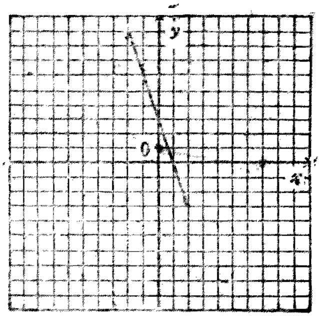
則 $y=11, 16, 21, +1, +4, +9$.



9. $y=-3x+3$

設 $x=6, 1, +2, +3, -1, -2$

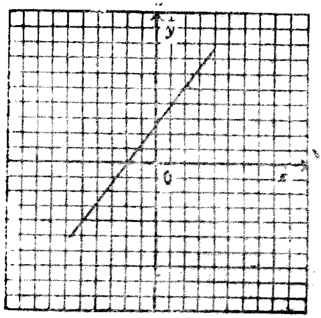
則 $y=3, 0, -3, -6, +6+9$.



10. $3y=4x+6$,

解. 設 $x=0, 1, 2, -1-2$.

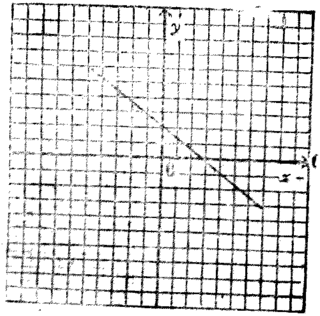
則 $y=2, 3.3, 4.6, 0.6, -0.6$.



11. $4y+3x=8$.

設 $x=0, 1, 2, -1, -2$.

則 $y=2, 1, 2, 0.5, 2.7, 3.5$,

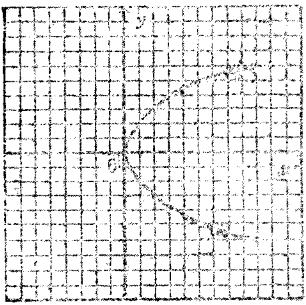


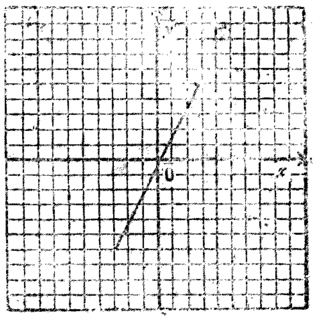
12. 求下列三式之圖形。

(i) $y^2=4x$. (ii) $y=2y-\frac{x^2}{4}$

解. 設 $x=1, 2, 3, 4$, 設 $x=1, 3, -1, -2$,

則 $y=\pm2, \pm2.4, \pm3.5, \pm4$ 則 $y=1.75, 3.25, -2.25, -5$.

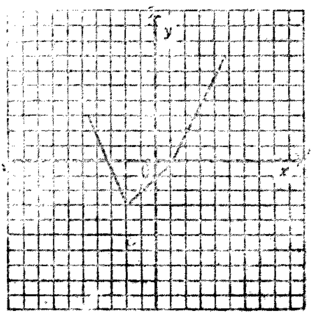




(iii) $y=\frac{x^2}{4}+x-2$.

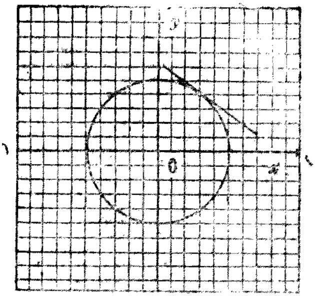
解. 設 $x=1, 2, 3, 4, -2, -4$,

則 $y=-0.75, 1, 3.25, 6, -3, +2$



13. 求作 $x^2+y^2=25$, $3x+4y=25$ 之圖，並研究二圖相互之關係，且以代數解法證明之。

解.



$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

此題第一方程式所作之圖形爲圓，第二方程式所作之圖形爲一直線，而圓與直線相交於一點，此點即爲二圖相互之關係。

代數解法證明如下：

由第二方程式得 $x=\dfrac{25-4y}{3}$ 代入第一式

即 $\left(\dfrac{25-4y}{3}\right)^2+y^2=25$

$\dfrac{625-200y+16y^2}{9}+y^2=25$

即 $625-200y+16y^2+9y^2=225$

整理 $y^2-8y+16=0$

即 $(y-4)^2=0$

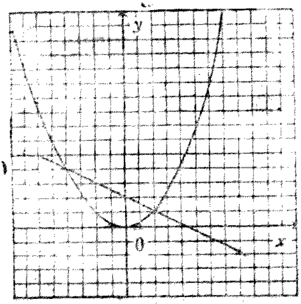
開方 $y-4=0$

$\therefore$ $y=4$ 代入 x 之值

$\therefore$ $x=3$.

用作圖法,解下列各方程式:

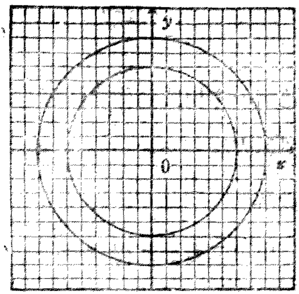
14. $\begin{cases} x^2=4y, \\ x+3y=5 \end{cases}$ 解.



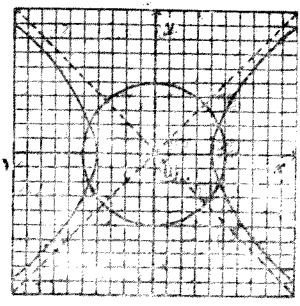
$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-4, \\ y=1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$

解. 此二方程式所作之圖形爲二圓而此二圓又不相交,故此題無解.



16. $\begin{cases} x^2+y^2=25. \\ x^2-y^2=16 \end{cases}$ 解.



解.

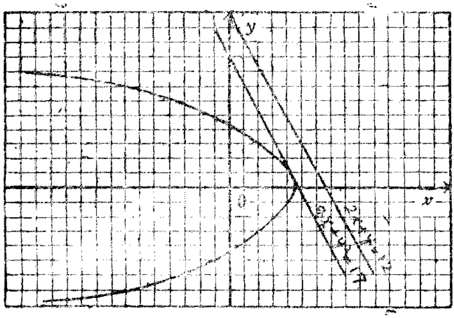
$\therefore \begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{41}{2}}, \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{9}{2}} \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x+y^2=17 \\ 2x+y=12 \end{cases}$

此題無解.

19. $\begin{cases} y^2+4x=17 \\ 2x+y=9 \end{cases}$

解. $y=1,\ x=4.$

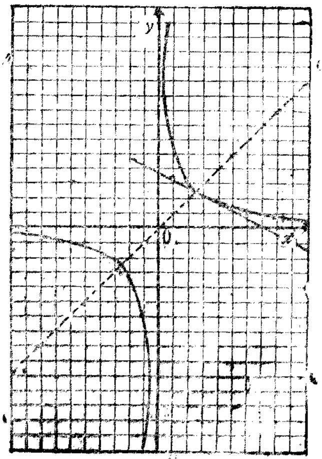


18. $\begin{cases} xy=24 \\ x+2y=14 \end{cases}$

解.

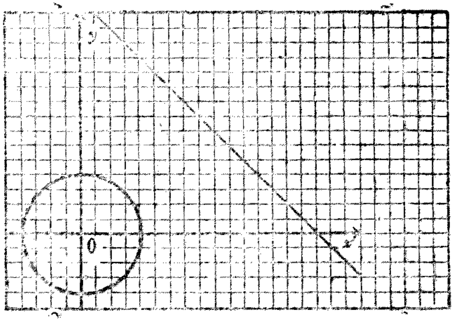
$\therefore \begin{cases} x=8, \\ y=3, \end{cases}$

或 $\begin{cases} x=6, \\ y=4. \end{cases}$



20. $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=8, \end{cases}$

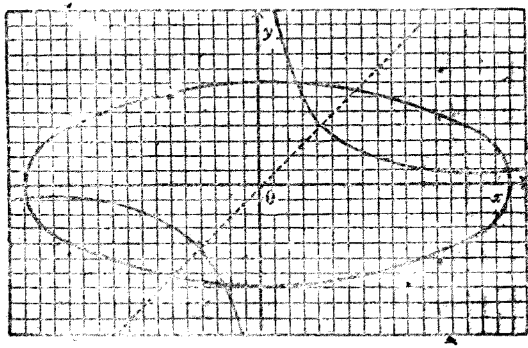
解.



此題第一方程式為圓，第二方程式為一直線而圓與直線不相交，故此題無解。

21. $\begin{cases} x^2+5y^2=15, \\ xy=1 \end{cases}$

解. $x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{8\pm\sqrt{65}}}$, $y=\pm\sqrt{\dfrac{8\pm\sqrt{65}}{5}}$



總　問　題　上　P.244

1．凡爲 a 所除其商爲 m，其剩餘爲 b 之數，試記之。但 $a>b$ 均爲一定之正整數，而 m 爲任意之正整數。

答：　$am+b$.

2．箱中有彩筆若干枝，其五分之一爲紅色，四分之一爲青色，其餘33枝爲黑色，問紅色筆有幾枝。

解. 設　筆之總數$=x$枝

則　紅色筆數$=\frac{1}{5}x$枝　青色筆數$=\frac{1}{4}x$枝

依題意得　$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{4}x=33$

去分母　$20x-4x-5x=660$

合併　$11x=660$　$\therefore$　$x=60$

$$\frac{1}{5}x=\frac{1}{5}\times 60=12.$$

即紅色筆有12枝

3．等式之兩邊，各乘以-1，所得之結果，若欲由移項法求得之其法若何，試述之。

解. 設　$a=b$.　以-1乘　$-a=-b$.

若令　$b=a$.　移項，亦得　$-a=-b$.

4．一次方程式中之 x 易以 $-x$ 或易 $\frac{x}{2}$，其與元根之關係若何。

解. x 易以 $-x$，則絕對值同，而符號相反。

若易以$\frac{x}{2}$，則 a 之值反大一倍。

5．設一軍隊初戰時進 $(2a+b-2c)$ 步，旋避猛烈礮火，退$(4a-2b-2c)$ 步，及敵軍礮火漸衰，更進 $(3a-4b-c)$ 步，問其

時在原駐地點之前若干步或後若干步。

解. $(2a+b-2c)-(4a-2b-2c)+(3a-4b-c)$

$=2a+b-2c-4a+2b+2c+3a-4b-c$

$=a-b-c=a-(b+c).$

故離原駐地點爲 $a-(b+c)$ 步.

討論: 若 $a=b+c$ 則仍在原駐地點.

若 $a<b+c$ 則在原駐地點之後.

若 $a>b+c$ 則在原駐地點之前

6. 自 $5x^2+6xy-12xz-4y^2-5z^2$ 減 $2x^2-7xy+4xz-3y^3$ $+6yz-5z^2$.

解. $(5x^2+6xy-13xz-4x^2-5z^2)-(2x^2-7xy+4xz-2y^2$ $+6yz-5z^2)$

$=5x^2+6xy-12xz-4y^2-5z^2-2x^2+7xy-4xz+3y^2-6yz$ $+5z^2$

$=3x^2+13xy-16xz-y^2-6yz,$

7. 試撤去下二式之括弧, 且整理之。

(i) $a-[2b+\{3c-3a-(a+b)\}+\{2a-(b+c)\}]$

解. 原式 $=a-[2b+\{3c-3a-a-b\}+\{2a-b-c\}]$

$=a-[2b+3c-3a-a-b+2a-b-c]$

$=a-2b-3c+3a+a+b-2a+b+c$

$=3a-2c.$

(ii) $x^4-[4x^3-\{6x^2-(4x-1)\}]-(x^4+6x^2+1)$

解. 原式 $=x^4-[4x^3-\{6x^2-4x+1\}]-x^4-6x^2-1$

$=x^4-[4x^3-6x^2+4x-1]-x^4-6x^2-1$

$=x^4-4x^3+6x^2-4x+1-x^4-6x^2-1$

$=-4x^3-4x.$

8. 凡三位之數，其首末二位俱爲有效數字者，若將各數字逆列，則與原數之差，必爲 9 所除絕，亦必爲 11 所除絕，試證明之。

證　明：設　三位之數在百位者爲 x，

在十位者爲 y，在個位者爲 z，

則其數爲　$100x+10y+z$ ………………（1）

其數逆列爲　$100z+10y+x$ ………………（2）

（1）－（2）　得　$99x-99z=99(x-z)$

$=11\times 9(x-z)$

故各數字逆列，則與原數之差，必爲 9 與 11 所除絕。

9. 有直方體其縱爲 a 尺，橫較縱之二倍大 36 尺，高較縱之三倍小 26 尺，求其全表面積爲若干方尺。

解. 依題意：縱$=a$，橫$=2a+36$，高$=3a-26$，

則其表面積爲：

$2a(2a+36)+2a(3a+26)+2(2a+36)(3a-36)$

$=4a^2+72a+6a^2-52a+12a^2+112a-1872.$

$=(22a^2+132a-1872)$ 方尺，

10. $(x+y+z)^2-(-x+y+z)^2+(x-y+z)^2-(x+y-z)^2$ 試整理之。

解. 原式$=\{(x+y+z)+(-x+y+z)\}\{(x+y+z)-(-x+y+z)\}+\{(x-y+z)+(x+y-z)\}\{x-y+z)-(x+y-z)\}$

$=(2y+2z)\times 2x+2x(-2y+2x)$

$=4xy+4xz-4xy+4xz$

$$=8xz.$$

11. $x=y+z$, 則 $x^3=y^3+3xyz+z^3$, 試實驗之.

解. 以 $x=y+z$ 代入上式;

$$\begin{aligned}
\text{得}\quad (y+x)^3&=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3\\
&=y^3+3(y+z)yz+z^3\\
&=y^3+3xyz+z^3,
\end{aligned}$$

12. 試實行下列各式之除算:

(i) $(a^6-b^6)\div(a^3-2a^2b+2ab^2-b^3)$

解.

$$\begin{array}{r|l}
a^3-2a^2b+2ab^2-b^3 & a^6 \qquad\qquad\qquad\qquad -b^6\ (a^3+2a^2b+2ab^2+b^3\\
 & \underline{a^6-2a^5b+2a^4b^2-a^3b^3}\\
 & 2a^5b-2a^4b^2+a^3b^3\\
 & \underline{2a^5b-4a^4b^2+4a^3b^3-2a^2b^4}\\
 & 2a^4b^2-3a^3b^3+2a^2b^4\\
 & \underline{2a^4b^2-4a^3b^3+4a^2b^4-2ab^5}\\
 & a^3b^3-2a^2b^4+2ab^5-b^6\\
 & \underline{a^3b^3-2a^2b^4+2ab^5-b^6}\\
 & 0
\end{array}$$

(ii) $(x^{12}+x^6-2)\div(x^4+x^2+1)$.

解.

$$\begin{array}{r|l}
x^4+x^2+1 & x^{12}+x^6-2\ (x^8-x^6+2x^2-2\\
 & \underline{x^{12}+x^{10}+x^8}\\
 & -x^{10}-x^8+x^6\\
 & \underline{-x^{10}-x^8-x^6}\\
 & 2x^6\\
 & \underline{2x^6+2x^4+2x^2}\\
 & -2x^4-2x^2-2\\
 & \underline{-2x^4-2x^2-2}
\end{array}$$

(iii) $[x^3-2ax^2+(a^2+ab-b^2)x-a^2b+ab^2]\div(x-a+b)$

解.

$$x-a+b)\,x^3-2ax^2+(a^2+ab-b^2)x-a^2b+ab^2\,(x^2-ax-bx+ab$$

$$
\begin{array}{l}
x^3-ax^2+bx^2 \\
\hline
-ax^2-bx^2+a^2x+abx-b^2x \\
-ax^2\qquad\quad +a^2x-abx \\
\hline
\qquad -bx^2\quad +2abx-b^2x \\
\qquad -bx^2\quad +abx-b^2x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad abx-a^2b+ab^2 \\
\qquad\qquad\qquad abx-a^2b+ab^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

13. 試解下列各方程式:

(i) $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{x+4}{4}+8=0$

解. 去分母 $6(x+1)+4(x+2)+3(x+4)+96=0$

去括弧 $6x+6+4x+8+3x+12+96=0$

移　項 $6x+4x+3x=-96-12-8-6$

合　併 $13x=-122$ $\therefore$ $x=-\dfrac{122}{13}=-9\dfrac{5}{13}$.

(ii) $(x-1)(x-2)=(x-3)(x-4)$

解. 去括弧 $x^2-3x+2=x^2-7x+12$

移項, 合併 $4x=10$, $\therefore$ $x=\dfrac{10}{4}=2\dfrac{1}{2}$.

(iii) $0.25x+4-0.375x=0.2x-9$

解. 去小數點以 1000 乘全式.

得 $250x+4000-375x=200x-9000$

移　項 $250x-375x-200x=-9000-4000$

合　併 $-325x=-13000$

即 $325x=13000$ $\therefore$ $x=40$.

(iv) $(a+bx)(b+ax)=ab(x^2-1)$

解. 去括弧 $ab+a^2x+b^2x+abx^2=abx^2-ab$

移項, 合併 $(a^2+b^2)x=-2ab$

$$\therefore \quad x=-\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

(v) $ax(x+a)+bx(x+b)=(a+b)(x+a)(x+b)$

解. 去括弧 $ax^2+a^2x+bx^2+b^2x=ax^2+bx^2+(a+b^2)x$
$$+ab(a+b)$$

移項, 合併 $2abx=-ab(a+b)$

$$\therefore \quad x=-\frac{ab(a+b)}{2ab}=-\frac{a+b}{2}.$$

(vi) $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$

解. 整理方程式之各式:

左 式: $(x-a)^3=x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$

$(x-b)^3=x^3-3x^2b+3xb^2-b^3$

$(x-c)^3=x^3-3x^2c+3xc^2-c^3$

三式相加: $3x^3-3(a+b+c)x^2+3(a^2+b^2+c^2)x-a^3-b^3-c^3$

右 式: $=3(x-a)(x^2-bx+cx+bc)$

$=3\{x(x^2-bx+cx+bc)-a(x^2-bx-cx+bc)\}$

$=3(x^3-bx^2-cx^2+cx-ax^2+abx+acx-abc)$

$=3x^3-3bx^2-3cx^2+3bcx-3ax^2+3abx+3acx-3abc$

$=3x^2-3(a+b+c)x^2+3(ab+bc+ac)x-3abc.$

$\therefore \quad 3(a^2+b^2+c^2)x-a^3-b^3-c^3=3(ab+bc+ac)x-3abc$

即 $3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)x=a^3+b^3+c^3-3abc$

$\therefore \quad x=(a^3+b^3+c^3-3abc)\div 3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

$$=\frac{a+b+c}{3}$$

14. 相續之三偶數之和為 1122, 求中央之偶數為何數。

解. 設 中央偶數為 x

則　餘兩數爲 $x-2$ 及 $x+2$.

依題意得　$x+x-2+x+2=1122$

即　$2x=1122$,　$\therefore\ x=374$.

故中央之偶數爲 374

15. 設一水槽以管注之滿則需 5 時，拔其底栓而放之盡則需 10 時，今以管注水於空槽中，需若干時而滿，但知前半所需之時開底栓，其後半則閉底栓，問需若干時。

解. 設　所求之時爲 x.

則　其時之半爲 $\frac{x}{2}$

前半所積水爲 $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)\frac{x}{2}=\frac{x}{20}$

後半所積水爲 $\frac{1}{5}\times\frac{x}{2}=\frac{x}{10}$

命全槽之容量爲 1.

故得方程式：$\frac{x}{20}+\frac{x}{10}=1$

去分母　$x+2x=20$

即　$3x=20$　$\therefore\ x=6\frac{2}{2}$

即需 $6\frac{2}{3}$ 時而水滿.

16. 時計之長短二針在三時爲直角後，何時更爲直角。

解. 設　第二次兩針成直角之時刻爲 x 分

則　時針所行之分數 $=x-15-15=x-30$

但　分針速度爲時針速度之十二倍

故得方程式：　$x=12(x-30)$

即　$x=12x-360$

移項，合併　$11x=360$　$\therefore\quad x=32\frac{7}{11}$

即在3時$32\frac{7}{11}$分鐘，兩針恰爲直角。

17. 試解下各聯立方程式：

（i）$\begin{cases} 57x+25y=3772 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 25x+57y=1148 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (1)+(2)　$82x+82y=4920 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)−(2)　$32x-32y=2624 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)÷82　$x+y=60 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(4)÷32　$x-y=82 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

(5)+(6)　$2x=142$　$\therefore\quad x=71$

(5)−(6)　$2y=-22$　$\therefore\quad y=-11.$

（ii）$\begin{cases} 0.3x+0.125y=x-6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x-0.5y=28-0.25y \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　$28x-5y=240 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)爲　$60x-5y=560 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)−(3)　$32y=320$　$\therefore\quad x=10$ 代入(3)

$5y=28\times10-240=40$　$\therefore\quad y=8.$

（iii）$\begin{cases} (x+1)(y+5)=(x+5)(x+1) \cdots\cdots(1) \\ xy+x+y=(x+2)(y+2) \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 變(1)爲　$x^2-xy+x-y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)爲　$y=-x-4$　代入(3)

即　$x^2-x(-x-4)+x-(-x-4)=0$

整理　$x^2+3x+2=0$

分　解　$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\quad x=-1$ 或 $x=-2$

將 x 之值代入 y 之值:

$\therefore\quad y=-(-1)-4=1-4=-3$

或 $y=-(-2)-4=2-4=-2$

解. (iv) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}-3y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{7}{x}+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

設 $\dfrac{1}{x}=u$

變(1)爲 $3u-3y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

變(2)爲 $7u+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)×3 $21u+3y=15 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(3)+(5) $24u=23 \quad \therefore\quad u=\dfrac{23}{24}$

即 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{23}{24}$. $\quad\therefore\quad x=\dfrac{24}{23}=1\dfrac{1}{23}$.

$\therefore\quad y=5-7\times\dfrac{24}{23}=-\dfrac{41}{24}=-1\dfrac{17}{24}$.

(v) $\begin{cases} (a+h)x+(b-h)y=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (b+k)x+(a-k)y=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. (1)×$(b+k)$ $(a+h)(b+k)x+(b-h)(b+k)y=(b+k)c \cdots(3)$

(2)×$(a+h)$ $(a+h)(b+k)x+(a+h)(a-k)y=(a+h)c \cdots(4)$

(3)−(4) $(b-h)(b+k)y-(a+h)(a-k)y=(b+k)c-(a+h)c$

即 $\{(b^2+bk-bh-hk)-(a^2+ah-ak-hk)\}y=(b+k-a-h)c$

$\{a^2-b^2+(a+b)h-(a+b)k\}y=(a-b+h-k)c$

$(a+b)(a-b+h-k)y=(a-b+h-k)c$

$\therefore\quad y=\dfrac{c}{a+b}$ 代入(1)

$$(a+b)x=c-(b-h)y=c-\frac{(b-h)c}{a+b}$$

$$=\frac{(a+b-b+h)c}{a+b}=\frac{(a+h)c}{a+b}.$$

(vi) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3\dfrac{5}{6} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{4}{z} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

解. (3)$\times\dfrac{1}{4}$ $\qquad \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{4y}=\dfrac{1}{z}$

即 $\qquad \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{4y}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(2)+(4) $\qquad \dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{4y}=\dfrac{23}{6} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(5)−(1) $\qquad \dfrac{7}{4y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{22}{6}$

即 $\qquad \dfrac{11}{4y}=\dfrac{11}{3} \qquad \therefore \quad \dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}$

將 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}$ 代入(1) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{3}{2}.$

$\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}$ 代入(2) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{23}{6}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{2}.$

$\therefore \quad x=\dfrac{2}{3}, \quad y=\dfrac{3}{4}, \quad z=\dfrac{2}{5}.$

18. 設有甲乙二數，自甲數減去二倍乙數則為5，而3與乙數之和之3倍較之自甲數減5之2倍大2，問甲乙各為若干。

解. 設甲數為x, 乙數為y,

依題意得 $\begin{cases} x-2y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3(y+3)-2(x-5)=2 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

變(2)為 $\qquad 2x-3y=17 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)×2　$2x-4y=10$ ……………………(4)

(3)−(4)　$\therefore\ y=7$ 代入(1)

$\therefore\ x=5+2y=5+2\times7=19.$

即甲數為19，乙數為7。

19. 距的1670公尺放鎗者，自發火後閱時七秒乃聞中的聲，而距的2000公尺距發火點998公尺之人聞鎗聲後閱時五秒乃聞中的之聲，問彈與聲之速每秒若干。

解. 設　彈速為 x 公尺　　聲速為 y 公尺

則　彈達之秒數為 $\dfrac{1670}{x}$　　聲回到耳之秒數為 $\dfrac{1670}{y}$

而距中者2000公尺，距發火點998公尺之地

則　其鎗聲到耳之秒數為 $\dfrac{998}{y}$

彈中後至聞聲之秒數為 $\dfrac{2000}{y}$

依題意得 $\begin{cases} \dfrac{1670}{x}+\dfrac{1670}{y}=7 & \cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1670}{x}+\dfrac{2000}{y}-\dfrac{998}{y}=5 & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)−(2)　$\dfrac{1670+998-2000}{y}=2$

即　$2y=668,\quad \therefore\ y=334$ 代入(1)

$$\frac{1670}{x}=7-\frac{1670}{334}=7-5$$

即　$2x=1670\quad \therefore\ x=835$

故每秒彈速為835公尺，聲速為334公尺.

20. 試分解下列各式之因式：

(i)　$72(x^2-1)-17x$

解. 原式 $=72x^2-72-17x$

$=72x^2-17x-72$

$=(8x-9)(9x-8)$.

(ii) $2x^3-3x^2-2x+3$

解. 原式$=2x^3-2x-3x^2+3$

$=2x(x^2-1)-3(x^2-1)$

$=(x^2-1)(2x-3)$

$=(x+1)(x-1)(2x-3)$.

(iii) $a^4+a^2b^2-b^2c^2-c^4$

解. 原式$=a^4-c^4+a^2b^2-b^2c^2$

$=(a^2+c^2)(a^2-c^2)+b^2(a^2-c^2)$

$=(a^2-c^2)(a^2+b^2+c^2)$

$=(a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2)$

(iv) $(2x+3y)^3+(3x+2y)^3$

解. $(2x+3y)^3=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

$(3x+2y)^3=27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$

二式相加: $35x^3+90x^2y+90xy^2+35y^3$

∴ 原式$=35(x^3+y^3)+90xy(x+y)$

$=35(x+y)(x^2-xy+y^2)+90xy(x+y)$

$=(x+y)(35x^2-35xy+35y^2+90xy)$

$=(x+y)(35x^2+55xy+35y^2)$

$=5(x+y)(7x^2+11xy+7y^2)$.

(v) $a(a-2b)^3-b(b-2a)^3$

解. 原式$=a(a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3)-b(b^3-6ab^2+12a^2b-8a^3)$

$=a^4-6a^3b+12a^2b^2-8ab^3-b^4+6ab^3-12a^2b^2+8a^3b$

$=a^4-b^4+2a^3b-2ab^3$

$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)+2ab(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2+2ab+b^2)$

$=(a+b)(a-b)(a+b)^2$

$=(a-b)(a+b)^3$

(vi)　$(a^2-b^2+c^2-d^2)^2-(2ac-2bd)^2$

解．原式$=(a^2-b^2+c^2-d^2+2ac-2bd)$

$(a^2-b^2+c^2-d^2-2ac+2bd)$

$=\{(a^2+2ac+c^2)-(b^2+2bd+d^2)\}$

$\{(a^2-2ac+c^2)-(b^2-2bd+d^2)\}$

$=\{(a+c)^2-(b+d)^2\}\{(a-c)^2-(b-d)^2\}$

$=(a+c+b+d)(a+c-b-d)(a-c+b-d)$

$(a-c-b+d)$

$=(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)$

$(a-b-c-d)$.

21. 自奇數之平方減 1，其所得之差恆爲 8 所除絕，試證之。

證　明：設　奇數爲 $2n+1$

則　平方爲 $4n^2+4n+1$

減 1 爲 $4n^2+4n$

即　$4n(n+1)$

如 n 爲偶數，則可以 $2m$ 代 n

其式爲 $4\times 2m(2m+1)$

即　$8m(2m+1)$ ……………… (1)

如 n 爲奇數，則可以 $2m+1$ 代 n

其式爲 $4(2m+1)(2m+2)$

即　$8(2m+1)(m+1)$ ……… (2)

(1)與(2)皆為8之倍數，

故自奇數之平方減1，其所得之差為8所除絕。

22. 相續之三整數之立方之和，必為此三整數之和所除絕，試證明。

證　明：設　相續三整數為 $x-1, x, x+1$.

則 $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3$

$=x^3-3x^2+3x-1+x^3+x^3+3x^2+3x+1$

$=3x^3+6x$

$=3x(x^2+2)$.

三數之和為：

$x-1+x+x+1=3x$

又 $3x(x^2+2)/3x=x^2+2$

故相續三整數立方之和，必為此三整數之和所除絕。

23. 試求下列各組之式之最高公因式：

(i) $5(x^2-x+1)$, $4(x^6-1)$.

解. 一式 $=5(x^2-x+1)$

二式 $=4(x^3-1)(x^3+1)$

$=4(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

$\therefore$ G. C. M $=x^2-x+1$.

(ii) $2x^4-6x^3+3x^2-3x+1$, $x^7-3x^6+x^5-4x^2+12x-4$

解. 一式 $=2x^4+x^2-6x^3-3x+2x^2+1$

$=x^2(2x^2+1)-3x(2x^2+1)+(2x^2+1)$

$=(2x^2+1)(x^2-3x+1)$

二式 $=x^7-4x^2-3x^6+12x+x^5-4$

$=x^2(x^5-4)-3x(x^5-4)+(x^5-4)$

$=(x^3-4)(x^2-3x+1)$

G. C. M$=x^2-3x+1$.

(iii) $x^3-3a^2x-2a^3$, $x^3-ax^2-4a^3$

解. 一式$=x^3-a^2x-2a^2x-2a^3$

$=x(x^2-a^2)-2a^2(x+a)$

$=x(x+a)(x-a)-2a^2(x+a)$

$=(x+a)(x^2-ax-2a^2)$

$=(x+a)(x+a)(x-2a)$

二式$=x^3-2ax^2+ax^2-4a^3$

$=x^2(x-2a)+a(x^2-4a^2)$

$=x^2(x-2a)+a(x+2a)(x-2a)$

$=(x-2a)(x^2+ax+2a^2)$

$\therefore$ G. C. M$=x-2a$.

(iv) $2x^3-9x^2+7x+6$, x^3-4x^2+x+6,

$3x^3-13x^2+8x+12$.

解. 一式$=2x^3-4x^2-5x^2+10x-3x+6$

$=2x^2(x-2)-5x(x-2)-3(x-2)$

$=(x-2)(2x^2-5x-3)$

$=(x-2)(x-3)(2x+1)$

二式$=x^3-2x^2-2x^2+4x-3x+6$

$=x^2(x-2)-2x(x-2)-3(x-2)$

$=(x-2)(x^2-2x-3)$

$=(x-2)(x+1)(x-3)$

三式$=3x^3-6x^2-7x^2+14x-6x+12$

$=3x^2(x-2)-7x(x-2)-6(x-2)$

$$=(x-2)(3x^2-7x-6)$$

$$=(x-2)(x-3)(3x+2)$$

$\therefore$ G. C. M $=(x-3)(x-2)$

21. 試求下列各組之式之最低公倍式。

(i) $15x^4+11x^3-8$, $6x^4+2x^3+x^2-x-2$.

解. 二式之 G. C. M $=3x^2+x+2$

以之除第一式得 $5x^2+2x-4$

除第二式得 $2x^2-1$

$\therefore$ L. C. M $=(3x^2+x+2)(5x^2+2x-4)(2x^2-1)$.

(ii) $x^2-7xy+12y^2$, $x^2-6xy+8y^2$, $x^2-5xy+6y^2$

解. $x^2-7xy+12y^2=(x-3y)(x-4y)$

$x^2-6xy+8y^2=(x-2y)(x-4y)$

$x^2-5xy+6y^2=(x-2y)(x-3y)$

$\therefore$ L. C. M $=(x-2y)(x-3y)(x-4y)$.

(iii) x^2-1, x^2+1, x^4+1, x^8-1

解. $x^2-1=(x+1)(x-1)$.　　x^2+1, x^4+1

$x^8-1=(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$\therefore$ L. C. M $=(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$.

(iv) $x^2+5x+10$, $x^3-19x-30$, $x^3-15x-50$.

解. 一式 $=x^2+5x+10$

二式 $=x^3-5x^2+5x^2-25x+6x-30$

$$=x^2(x-5)+5x(x-5)+6(x-5)$$

$$=(x-5)(x^2+5x+6)$$

$$=(x-5)(x+2)(x+3)$$

三式 $=x^3-5x^2+5x^2-25x+10x-50$

$$=x^2(x-5)+5x(x-5)+10(x-5)$$

$$=(x-5)(x^2+5x+10)$$

$$\therefore \quad \text{L. C. M}=(x+2)(x+3)(x-5)(x^2+5x+10)$$

25. 下列各式試化之爲較簡之式：

(i) $$\frac{2x}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2+x+1}$$

解. 原式$$=\frac{2x}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2+x+1-(x^2-x+1)}{x^4+x^2+1}$$

$$=\frac{2x}{x^4-x^2+1}-\frac{2x}{x^4+x^2+1}$$

$$=\frac{2x(x^4+x^2+1)-2x(x^4-x^2+1)}{(x^4-x^2+1)(x^4+x^2+1)}$$

$$=\frac{2x^5+2x^3+2x-2x^5+2x^3-2x}{x^8+x^4+1}$$

$$=\frac{4x^3}{x^8+x^4+1}.$$

(ii) $$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}-\frac{1}{abc}$$

解. 原式$$=\frac{1}{a(a-b)(a-c)}-\frac{1}{b(a-b)(b-c)}-\frac{1}{abc}$$

$$=\frac{bc(b-c)-ac(a-c)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}-\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(b^2c-bc^2-a^2c+ac^2)-(a^2b-ab^2+b^2c-a^2c+ac^2-bc^2)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{b^2c-bc^2-a^2c+ac^2-a^2b+ab^2-b^2c-a^2c-ac^2+bc^2}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{-a^2b+ab^2}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{b-\parallel b(-ab-)}{abca((a-b)(a-c))c}$$

$$=-\frac{1}{c(a-c)(b-c)}$$

(iii) $$\frac{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2-y^2}}$$

解. 分子$=\dfrac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{x^2+xy-xy+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

分母$=\dfrac{x^2(x^2-y^2)+y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}=\dfrac{x^4-x^2y^2+x^2y^2+y^4}{x^4-y^4}$

$$=\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}.$$

∴ 原式$=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\div\dfrac{x^4+y^4}{x^4-y^4}$

$$=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\times\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^4+y^4}=\frac{(x^2+y^2)^2}{x^4+y^4}.$$

(iv) $$\frac{\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{y^2}{x^2-y^2}}{\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{x}{x^2-y^2}}.$$

解. 分子$=\dfrac{2x(x-y)+y(x+y)-y^2}{x^2-y^2}$

$$=\frac{2x^2-2xy+xy+y^2-y^2}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{2x^2-xy}{x^2-y^2}=\frac{x(2x-y)}{x^2-y^2}.$$

分母$=\dfrac{x+y+x}{x^2-y^2}=\dfrac{2x+y}{x^2-y^2}$.

∴ 原式$=\dfrac{x(2x-y)}{x^2-y^2}\div\dfrac{2x+y}{x^2-y^2}$

$$=\frac{x(2x-y)}{x^2-y^2}\times\frac{x^2-y^2}{2x+y}=\frac{x(2x-y)}{2x+y}.$$

（v） $\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}}$

解. 原式$=\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{\dfrac{1-x^2+2x^2}{1-x}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x-x^2}{1+x^2}}=\dfrac{1}{\dfrac{1+x^2+x-x^2}{1+x^2}}=\dfrac{1+x^2}{1+x}$

（vi） $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$

解. $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}=\dfrac{\dfrac{xy+1}{y}}{x+\dfrac{1}{\dfrac{yz+1}{z}}}=\dfrac{\dfrac{xy+1}{y}}{x+\dfrac{z}{yz+1}}=\dfrac{\dfrac{xy+1}{y}}{\dfrac{xyz+x+z}{yz+1}}$

$=\dfrac{xy+1}{y}\times\dfrac{yz+1}{xyz+x+z}=\dfrac{xy^2z+xy+yz+1}{y(xyz+x+z)}$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{xy^2z+xy+yz+1}{y(xyz+x+z)}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$

$=\dfrac{xy^2z+xy+yz}{y(xyz+x+z)}=\dfrac{y(xyz+x+z)}{y(xyz+x+z)}=1.$

26. 試解下列各方程式。

（i） $\dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-6)(x-10)}=\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-9)(x-7)}$

解. 即 $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-16x+60}=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-16x+64}$

$(x^2-6x+5)(x^2-16x+63)=(x^2-6x+8)(x^2-16x+60)$

即 $(x^2-6x+5)\{(x^2-16x+60)+3\}=\{(x^2-6x+5)+3\}$

$(x^2-16x+60)$

$\therefore\ 3(x^2-6x+5)=3(x^2-16x+60)$

$$x^2-6x+5=x^2-16x+60$$

即　$10x=55$　　$\therefore$　$x=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}.$

(ii)　$\frac{8x}{x^3-1}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}$

解. 即　$\frac{8x}{x^3-1}=\frac{8}{x^2-16}$

$\therefore$　$x^3-16x=x^3-1$

即　$16x=1$　　$\therefore$　$x=\frac{1}{16}.$

(iii)　$\frac{3x+5}{3x-1}+\frac{5}{1-9x^2}=\frac{8+3x}{1+3x}$

解. $1+\frac{6}{3x-1}+\frac{5}{9x^2-1}=1+\frac{7}{3x+1}$

即　$\frac{6}{3x-1}-\frac{5}{9x^2-1}=\frac{7}{3x+1}$

去分母　$18x+6-5=21x-7$

移項, 合併　$3x=8$　　$\therefore$　$x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$

(iv)　$\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+1}.$

解. 移　項　$\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

即　$\frac{1}{x^2-9x+20}=\frac{1}{x^2+3x+2}$

$\therefore$　$x^2+3x+2=x^2-9x+20$

移項, 合併　$12x=18$　　$\therefore$　$x=\frac{18}{12}=1\frac{1}{2}.$

27. 試解下列各組聯立方程式。

(i) $\begin{cases} x-4y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{x}{3y}+\dfrac{11}{10}=\dfrac{4x-5y}{5y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 由(1)得　$x=7+4y$ 代入(2)

$$\frac{7+4y}{3y}+\frac{11}{10}=\frac{4(7+4y)-5y}{5y}$$

以母除子　$1+\dfrac{y+7}{3y}+1\dfrac{1}{10}=2+\dfrac{y+28}{5y}$

以 $30y$ 乘　$10y+70+3y=6y+168$

移項, 合併　$7y=98$　$\therefore\ y=14$

$\therefore\ x=7+4y=7+1\times14=63$

(ii) $\begin{cases} \dfrac{2x+y-6}{x-5}+14=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{3y-10(x-1)}{6}+\dfrac{x-y}{4}+1=0 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 由(1)得　$2x+y-6+14x-70=0$

移項, 合併　$16x+y=76$. $\therefore\ y=76-16x$ 代入(2)

$$\frac{3(76-16x)-10(x-1)}{6}+\frac{x-(76-16x)}{4}+1=0$$

即　$\dfrac{228-48x-10x+10}{6}+\dfrac{x-76+16x}{4}+1=0$

去分母　$2(228-48x-10x+10)+3(x-76+14x)+12=0$

即　$456-96x-20x+20+3x-228+42x+12=0$

移項, 合併　$65x=260$　$\therefore\ x=4$

$\therefore\ y=76-16x=76-16\times4=12.$

(iii) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{15}{8} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 9x-\dfrac{3y+41}{7}=100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 由(1)得　$8x+8y=15y-15x$

即 $23x-7y=0$ ················(3)

由(2)得 $63x-3y=744$

即 $21x-y=248$ ················(4)

(4)×7 $147x-7y=1736$ ················(5)

(5)−(3) $124x=1736$. ∴ $x=14$ 代入(4)

∴ $y=21x-248=21\times14-248=46$.

(iv) $\begin{cases} x-\dfrac{2y-x}{23-x}=20-\dfrac{59-2x}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y+\dfrac{y-3}{x-18}=\dfrac{3y+17}{3} & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由(1)得 $x-\dfrac{x-2y}{x-23}=20-\dfrac{59}{2}+x$

即 $\dfrac{x-2y}{x-23}=\dfrac{19}{2}$

去分母 $2x-4y=19x-437$

即 $17x+4y=437$ ················(3)

由(2)得 $y+\dfrac{y-3}{x-18}=y+\dfrac{17}{3}$

即 $\dfrac{y-3}{x-18}=\dfrac{17}{3}$

去分母 $3y-9=17x-306$

即 $17x-3y=297$ ················(4)

(3)−(4) $7y=140$. ∴ $y=20$ 代入(4)

$17x=297+3\times30=357$

∴ $x=21$.

28. 沿湖有甲乙二地，其一方之距離爲5里，其他方之距離爲9里，今有二人自甲地反向出發，遇於乙地後，速者較遲者先三時半歸甲地，問二人之速各若干。

解. 設　行他方者爲 a, 其速度爲 x 里

行一方者爲 b, 其速度爲 y 里

依題意則得: $x : y = 9 : 5$

故得方程式: $5x = 9y$ ················(1)

及遇於乙地後:

a 行一方至甲地, 其所需之時爲 $\frac{5}{x}$,

b 行他方至甲地, 其所需之時爲 $\frac{9}{y}$,

故又得方程式: $\frac{9}{y} - \frac{5}{x} = 3\frac{1}{2}$ ········(2)

由(1)爲 $9y - 5x = 0$ ··················(3)

(3)÷xy　$\frac{9}{x} - \frac{5}{y} = 0$ ··················(4)

(4)+(2)　$\frac{4}{x} - \frac{4}{y} = \frac{7}{2}$················(5)

(5)÷4　$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{8}$················(6)

(4)−(2)　$\frac{14}{x} - \frac{14}{y} = -\frac{7}{2}$··············(7)

(7)÷14　$\frac{1}{x} - \frac{4}{y} = -\frac{1}{4}$··············(8)

(6)+(8)　$\frac{2}{x} = \frac{5}{8}$ 即 $5x = 16$

$\therefore\ x = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$.

(6)−(8)　$\frac{2}{y} = \frac{9}{8}$　即　$9y = 16$

$\therefore\ y = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$.

29. 甲乙二地間有鐵道, 貨車於正午 12 時, 客車於午後 1 時, 各自

甲地出發.貨車行全距離三分之二後,機關忽生故障,其速減爲原速四分之三,至午後2時40分距乙地10里處,客車追及貨車,但知客車之速爲貨車生故障後之速之2倍,問甲乙二地距離若干里,及客車貨車之速各若何。

解. 設 二地距離爲 x 里.

貨車之速爲 y 里

客車之速爲 $2\times\frac{3}{4}y=\frac{3}{2}y$ 里,

貨車自出發行至被客車追及,

歷時 $2\frac{40}{60}$ 即 $2\frac{2}{3}$.

其行至 $\frac{2}{3}x$ 里. 歷時 $\frac{2}{3}x/y$.

其以後行至被追及處,

歷時爲 $2\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x/y$, 即 $\frac{8y-2x}{3y}$,

$\frac{8y-2x}{3y}$時間所行之路爲:

$\frac{8y-2x}{3y}\times\frac{3}{4}y$ 里, 即 $\frac{4y-x}{2}$里,

客車自出發至追及之時爲 $1\frac{40}{60}$ 即 $\frac{5}{3}$時,

$\frac{5}{3}$時間所行之路爲:

$\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}y$ 里 即 $\frac{5y}{2}$里.

故就甲地至追及處之路得二方程式如下:

$$\frac{2}{3}x+\frac{4y-x}{2}=x-10 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{5y}{2}=x-10 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由（2）得 $x=\frac{5y}{2}+10$

去分母 $2x=5y+20$

以2除之 $\therefore\ x=(5y+20)/2$ 代入（1）

得 $\frac{2}{3}\times\frac{5y+20}{2}+\frac{4y}{2}-\frac{5y+20}{2\times2}=\frac{5y+20}{2}-10$

即 $\frac{5y+20}{3}+2y-\frac{5y+20}{4}=\frac{5y+10}{2}-10$

去分母 $4(5y+20)+24y-3(5y+20)=6(5y+20)-120$

即 $20y+80+24y-15y-60=30y+120-120$

移 項 $20y+24y-15y-30y=60-80$

合 併 $-y=-20$ 即 $y=20$ 代入 x 之值

$\therefore\ x=(5\times20+20)\div2=60$

$\frac{3}{2}y=\frac{3}{2}\times20=30$

故甲乙二地距離爲60里，

客車之速度爲30里，

貨車之速度爲20里，

30. n 時與 $(n+1)$ 時之間，長短二針間夾有 m 分畫，問其時爲何時。（此 n 爲小於12之整數），但短針在長針之前，或在長針之後，須分別答之。

解. 設 長針距零時之分畫爲 x，

則 短針距零時之分畫在長針前或後，

可定爲 $x\pm m$，

惟長針在零時之時，短針在 n 時，

則 同則所進行之分畫，長針爲 x，

而 短針爲 $x\pm m-5n$ 即 $x-(5n\mp m)$

又　因長短二針之速恒爲 12：1

故　得：$x:x-(5n\mp m)=12:1$

即　$12\{x-(5x\mp m)\}=x$

去括弧　$12x-12(5n\mp m)=x$

即　$11x=12(5n\mp m)$

$\therefore\quad x=\dfrac{12}{11}(5n\mp m).$

短針在前，則答爲 n 時 $\dfrac{12}{11}(5n-m)$ 分

短針在後，則答爲 n 時 $\dfrac{12}{11}(5n+m)$ 分

總　問　題（下） P. 248

1．一時與二時之間，時針之長短二針，在 Ⅲ 之左右與 Ⅲ 成等角者爲何時。

解．設　長針距零時分畫爲 x.

則　長短二針與 Ⅲ 成等角時，

距 Ⅲ 之絕對值爲 $x-15$,

短針所在之分畫爲：

$15-(x-15)=15-x\times 15=30-x$

長針在針零時行起，短針在 1 時行起，

同時所歷之分針有如下之比例式：

$x:30-x-5=12:1$

即　$x=12(30-x-5)$

$x=360-12x-60$

$\therefore\quad 13x=300$

$$\therefore \quad x=23\frac{1}{13}$$

故答爲1時$23\frac{1}{13}$分，即1時23分$(\frac{1}{13}\times 60=)4\frac{8}{13}$秒.

2. 試解下列各方程式。

(i) $mn(x^2+1)=(m^2+n^2)x$

解. $mnx^2+mn=m^2x+n^2x$

即 $mnx^2-(m^2+n^2)x+mn=0$

分解 $(mx-n)(nx-m)=0$

$$\therefore \quad x=\frac{n}{m}, \text{ 或 } \frac{m}{n}.$$

(ii) $(a^3-b^2)x=ab(x^2-a)$

解. $(a^3-b^2)x=abx^2-a^2b$

即 $abx^2-(a^3-b^2)x-a^2b=0$

分解 $(ax+b)(bx-a^2)=0$

$$\therefore \quad x=-\frac{b}{a}, \text{ 或 } \frac{a^2}{b}.$$

(iii) $x^2+a^2=2\{ab+(a-b)x\}$

解. $x^2+a^2=2ab+2(a-b)x$

即 $x^2-2(a-b)x+a^2-2ab=0$

$x^2-2(a-b)x+a(a-2b)=0$

分解 $(x-a)(x-a+2b)=0$

$$\therefore \quad x=a \text{ 或 } a-2b.$$

(iv) $4x^2+a^2=4ax+b^2$

解. 移項 $4x^2-4ax+a^2-b^2=0$

分解 $\{2x-(a+b)\}\{2x-(a-b)\}=0$

$\therefore\quad x=\dfrac{a+b}{2}$ 或 $\dfrac{a-b}{2}$.

(v) $(a^2-b^2)(x^2+1)=2(a^2+b^2)x$

解. $(a^2-b^2)x^2+a^2-b^2=2(a^2+b^2)x$

移項 $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$

分解 $\{(a+b)x-(a-b)\}\{(a-b)x-(a+b)\}=0$

$\therefore\quad x=\dfrac{a-b}{a+b}$ 或 $\dfrac{a+b}{a-b}$.

(vi) $x^2-(a-b)x=(a-c)(b-c)$

解. 移項 $x^2-(a-b)x+(a-c)(c-b)=0$

分解 $\{x-(a-c)\}\{x-(c-b)\}=0$

$\therefore\quad x=a-c$ 或 $c-b$,

3. $ax^2+bx+c=0$ 中 a,b,c 爲無理數時,其所有之性質,若視 a, b,c 爲整數亦無變動,試說明之。

解. 依原教科書中98節所求得之公式,其入手之變化,施之無理數亦無不合,旣如是,則101節之各種變化,亦無不合可知矣。

4. 分 $2(a^2+b^2)$ 爲二體,其積爲 $(a^4+a^2b^2+b^4)$, 其二分各爲若干。

解. $2(a^2+b^2)=2a^2+2b^2=(a^2+ab+b^2)+(a^2-ab+b^2)$

又 $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

故所求爲: a^2+ab+b^2 及 a^2-ab+b^2.

5. 有一矩形,其縱橫之差爲16尺,若減橫之$\dfrac{1}{3}$,縱之$\dfrac{1}{4}$, 則其面積減1320平方尺,問此矩形縱橫各幾尺。

解. 設 縱爲 x 尺, 橫爲 y 尺,

(假定縱長橫短)

依題意得 $\begin{cases} x-y=18 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \left(x-\frac{1}{4}x\right)\left(y-\frac{1}{3}y\right)=xy-1320 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

變(2)爲 $\frac{3}{4}x\times\frac{2}{3}y=xy-1320$

即 $\frac{1}{2}xy=xy-1320$

去分母 $xy=2xy-2640$

$\therefore\ xy=2640$

以4乘 $4xy=10560 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)自乘 $x^2-2xy+y^2=256 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)+(4) $x^2+2xy+y^2=10816$

即 $(x+y)^2=10816$

開方 $x+y=\pm104$

負數略去 $\therefore\ x+y=104 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(1)+(5) $2x=120$ $\therefore\ x=60$

(5)−(1) $2y=88$ $\therefore\ y=44$

如設 $y-x=16$ 則 $x=44,\ y=60.$

6. 半徑三寸之圓，其中作每邊長二寸之正方孔，以孔中取出者，加於周圍，其半徑當增若干，但圓周率以$\frac{22}{7}$計算，而寸之小數用三位。

解. 此圓之原面積爲 $3^2\times\frac{22}{7}=\frac{198}{7}$

孔中取出加於圓周之面積爲 $\frac{198}{7}+2^2=\frac{226}{7}$

設 加後之半徑爲 r 寸

則 當增者爲 $r-3$寸

即 $r^2=\frac{226}{7}\div\frac{22}{7}=\frac{226}{7}\times\frac{7}{22}=10.\dot{2}\dot{7}$

$\therefore\quad r=3.205\cdots\cdots$ 故 $r-3=0.205\cdots\cdots$

7．二次方程式之根不多於二個，故二次式之分解法只有一種，試說明之。

解．二次方程式之根，只有二個即α，β．

在 $ax^2+bx+c=0$ 之公式中．

已證明：$\frac{b}{a}=-(\alpha+\beta)$

$$\frac{c}{a}=\alpha\beta$$

故原式可改為 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

無論用何法，都求得 $x=\alpha$

同時必發現 $x=\beta$，

故其求法只有一種．

8．$x^2+ax+b=0$ 之二根之差等於 $x^2+px+q=0$ 之二根之差則 a, b, p, q，之間，有 $a^2-p^2=4(b-q)$ 之關係，試證之。

證　明：依原教科書第98節云：

第一式二根之差為$\sqrt{a^2-4b}$，

第二式二根之差為$\sqrt{p^2-4q}$

但以上式相等，

$\therefore\quad \sqrt{a^2-4b}=\sqrt{p^2-4q}$

即　$a^2-4b=p^2-4q$

亦　即　$a^2-p^2=4b-4q$

$\therefore\quad a^2-p^2=4(b-q)$．

9．$x^2+px+q=0$ 與 $x^2+rx+s=0$，其一根為通用之根之必要條

件，爲 $(q-s)^2=(p-r)(rq-ps)$ 試證明之。

證　明：設前式之二根爲 l, m,

後式之二根爲 m, n,

則　有：$l+m=-p\cdots\cdots(1)$　$n+m=-r\cdots\cdots(3)$

$lm=q\cdots\cdots(2)$　$nm=s\cdots\cdots(4)$

(1)−(2)　$l-n=-(p-r)\cdots\cdots(5)$

(3)÷(4)　$\frac{l}{n}=\frac{q}{s}\cdots\cdots(6)$

由(6)　$l=\frac{nq}{s}$ 代入(5)

得　$\frac{nq}{s}-n=-(p-r)$

即　$nq-ns=-(p-r)s$

$(q-s)n=-(p-r)s$

∴　$n=-\frac{(p-r)s}{q-s}$ 代入(4)

$-\frac{(p-r)s}{q-s}m=s$

∴　$m=s\times\left(-\frac{q-s}{(p-r)s}\right)=-\frac{q-s}{p-r}\cdots\cdots(7)$

由(2)　$m=-n-r=\frac{(p-r)s}{q-s}-r=\frac{ps-rq}{b-s}\cdots\cdots(8)$

(7)=(8)　$-\frac{q-s}{p-r}=\frac{ps-rq}{q-s}$

∴　$(p-s)^2=-(p-r)(ps-rq)$

即　$(q-s)^2=(p-r)(rq-ps)$

10. 下列方程式，其根爲實數之必要之條件爲何。

(i)　$x^2+(k+3)x+2k+3=0$

解．解之：∴ $x=\frac{-(k+3)\pm\sqrt{(k+3)^2-4(2k+3)}}{2}$

其根既限定爲實數，則根號內之數宜爲正數。

即　$(k+3)^2-4(2k+3)$

$=k^2+6k+9-8k-12$

$=k^2-2k-3$

$=k(k-2)-3$

此數欲爲正數，則 $k>3$，此即必要之條件，

（ii）　$(a-3)(x^2+1)=4x+3$

解．去括弧　$ax^2-3x^2+a-3=4x+3$

整　理　$(a-3)x^2-4x+(a-6)=0$

$$\therefore\quad x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4(a-3)(a-6)}}{2(a-3)}$$

其根爲實數，則根號內之數必爲正數。

即　$4^2-4(a-3)(a-6)$

$=16-4(a^2-9a+18)$

$=16-4a^2+36a-72$

$=36a-4a^2-56$

$=4(9a-a^2-14)$

$=4\{a(9-a)-14\}$

此數欲爲正數，則 $a<7,a<2$.

即　$7<a<2$ 此即其必要之條件．

11．試解下列各方程式：

（i）　$\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{4}{2-x}=0$

解．即　$\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{4}{x+3}=0$

$$\frac{3x-4}{x-2}-\frac{4}{x+3}=0$$

去分母 $(3x-4)(x+3)-4(x-2)=0$

即 $3x^2+5x-12-4x+8=0$

合 併 $3x^2+x-4=0$

分 解 $(3x+4)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1$ 或 $-\frac{4}{3}$.

（ii） $x-\frac{14x-9}{8x-3}=\frac{x^2-3}{x+1}$

解. 以母除子 $x-\frac{14x-9}{8x-3}=x-\frac{x-3}{x+1}$

即 $\frac{14x-9}{8x-3}=\frac{x+3}{x+1}$

去分母 $(14x-9)(x+1)=(x+3)(8x-3)$

即 $14x^2+5x-9=8x^2+21x-9$

移 項 $14x^2+5x-9-8x^2-21x+9=9$

合 併 $6x^2-16x=0$

即 $2x(3x-8)=0$

$\therefore\ x=0$ 或 $\frac{8}{3}$.

（iii） $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}$

解. 移 項 $\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{x+b}$

即 $\frac{a-x}{ax}=\frac{(x+b)-(a+b)}{(a+b)(x+b)}$

$\frac{a-x}{ax}=\frac{x-a}{(a+b)x+(a+b)b}$

$\therefore\ (x-a)ax=(a-x)\{(a+b)x+(a+b)b\}$

即 $-(a-x)ax=(a-x)\{(a+b)x+(a+b)b\}$

$\therefore\ ax=-\{(a+b)x+(a+b)b\}$

即 $ax=-(a+b)x-(a+b)b$

移項 $ax+(a+b)x=-(a+b)b$

即 $(2a+b)x=-(a+b)b$

$\therefore \quad x=-\dfrac{(a+b)b}{2a+b}.$

(iv) $\dfrac{a^2}{x-b}+\dfrac{b^2}{x-a}=a+b$

解. 即 $\dfrac{a^2(x-a)+b^2(x-b)}{(x-b)(x-a)}=a+b$

$a^2(x-a)+b^2(x-b)=(a+b)(x-b)(x-a)$

去括弧 $a^2x-a^3+b^2x-b^3=(a+b)\{x^2-(a+b)x+ab\}$

即 $(a^2+b^2)x-(a^3+b^3)$

$=(a+b)x^2-(a+b)^2x+ab(a+b)$

移項 $(a+b)x^2-(a+b)^2x-(a^2+b^2)x+(a^3+b^3)$

$+ab(a+b)=0$

$\therefore \quad (a+b)x^2-2(a^2+ab+b^2)x+(a+b)(a^2+b^2)=0$

分解 $\{(a+b)x-(a^2+b^2)\}\{x-(a+b)\}=0$

$\therefore \quad x=a+b$ 或 $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}.$

12. a,b,c 爲實數，則 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$ 之根恒爲實數，試證之。又 $a>b>c$ 則一根在 a,b 之間，一根在 b,c 之間，試證之。

證明 變原式爲：

$(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$

$(x-b)(x-c)=x^2-(b+c)x+bc$

$(x-a)(x-c)=x^2-(a+c)x+ac$

$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

三式相加　$3x^2-\{(b+c)+(a+c)+(a+b)\}x+ab+ac+bc$

即　$3x^2-(b+c+a+c+a+b)x+ab+ac+bc$

$\therefore\quad 3x^2-2(a+b+c)x+ab+ac+bc=0$

$$\therefore\ x=\frac{2(a+b+c)\pm\sqrt{4(a+b+c)^2-12(ab+ac+bc)}}{3\times2}$$

$$=\frac{2(a+b+c)\pm2\sqrt{(a+b+c)^2-3(ab+ac+bc)}}{3\times2}$$

$$=\frac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}$$

$$=\frac{a+b+c\pm\sqrt{\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}}}{3}$$

設 a, b, c 爲實數，則無論爲正爲負，其根號之數，必爲正數，故其根必爲實數。

解．若　$a>b>c$,

設　$a=l+m,\quad b=l,\quad c=-l-n$

其 l 爲正數或負數，而 m, n 爲正數，

則代入上式：

一根爲。

$$x=\frac{l+m+l+l-n+\sqrt{\frac{1}{2}\{(l+m-l)^2+(l-l+m)^2+(l-n-l-m)^2\}}}{3}$$

$$=\frac{3l+m-n+\sqrt{\frac{1}{2}\{m^2+n^2+(n+m)^2\}}}{3}$$

$$=\frac{3l+m-n+\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+n^2+n^2+2mn+m^2)}}{3}$$

$$=\frac{3l+m-n+\sqrt{\frac{1}{2}(2m^2+2n^2+2mn)}}{3}$$

$$=\frac{3l+m-n+\sqrt{m^2+n^2+mn}}{3}$$

即 $\dfrac{3l+m-n+\sqrt{m^2+n^2+mn}}{3}<\dfrac{3l+m-n+m+n}{3}$

即 小於$l+\dfrac{2m}{3}$，即在a, b之間

又一根爲：

$x=\dfrac{3l+m-n-\sqrt{m^2+n^2+mn}}{3}<\dfrac{3l+m-n-m-n}{3}$

即大於$l-\dfrac{2n}{3}$，即在b, c之間。

13. 購牛一羣，以a圓根之，其中自用n頭，而以所餘者出售，其每頭之價比原價高c圓，其自用之牛價適爲所獲之利，問牛之總數若干頭。

解. 設 牛之總頭爲x頭，

則 每頭之買價爲$\dfrac{a}{x}$圓.

每頭之售價爲$\dfrac{a}{x}+c$圓.

做出牛數爲$x-n$頭。

依題意得 $(x-n)\left(\dfrac{a}{x}+c\right)=a$

即 $(x-n)(a+cx)=ax$

去括弧 $ax-an+cx^2-cnx=ax$

整 理 $cx^2-cnx-an=0$

$\therefore\quad x=\dfrac{cn\pm\sqrt{c^2n^2+4acn}}{2c}$（負號可略去）

14. 試解下列各方程式：

（i） $\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x}$

解 自 乘 $x+8+2\sqrt{x+8}\sqrt{x+3}+x+3=x$

移項，合併 $x+11=-2\sqrt{x^2+11x+24}$

再自乘 $x^2+22x+121=4(x^2+11x+24)$

即 $x^2+22x+121=4x^2+44x+96$

移項，合併 $3x^2+22x-25=0$

分 解 $(3x+25)(x-1)=0$

$\therefore \quad x=1$ 或 $-\dfrac{25}{3}$。

(ii) $\sqrt{x+20}-\sqrt{x+4}=2\sqrt{x+11}$

解．自 乘 $x+20-2\sqrt{x+20}\sqrt{x+4}+x+4=4(x+11)$

移項，合併 $2x+20=-2\sqrt{x^2+24x+80}$

以 2 除 $x+10=-\sqrt{x^2+24x+80}$

再自乘 $x^2+20x+100=x^2+24x+80$

移項，合併 $4x=20 \qquad \therefore \quad x=5$。

(iii) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8\sqrt{x^2-1}$

解．即 $\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(x^2-1)}=8\sqrt{x^2-1}$

$$4x\sqrt{x^2-1}=8\sqrt{x^2-1}$$

即 $4x=8 \qquad \therefore \quad x=2$。

(iv) $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{a}{x}$

解．即 $\dfrac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\dfrac{a}{x}$

$$\frac{a+x+2\sqrt{a^2+x^2}+a+x}{(a+x)-(a-x)}=\frac{a}{x}$$

$$\frac{2(a+\sqrt{a^2-x^2})}{2x}=\frac{a}{x}$$

即 $a+\sqrt{a^2-x^2}=a$

∴ $\sqrt{a^2-x^2}=0$

自乘 $a^2-x^2=0$

移項 $x^2=a^2$

∴ $x=\pm a$

(v) $\sqrt{a(x-b)}+\sqrt{b(x-a)}=x$

解. 自乘 $a(x-b)+2\sqrt{a(x-b)}\sqrt{b(x-a)}+b(x-a)=x^2$

整理 $x^2-(a+b)x+ab-2\sqrt{ab\{x^2-(a+b)x+ab\}}$

$+ab=0$

開方 $\sqrt{x^2-(a+b)x+ab}-\sqrt{ab}=0$

即 $\sqrt{x^2-(a+b)x+ab}=\sqrt{ab}$

平方 $x^2-(a+b)x+ab=ab$

即 $x\{x-(a+b)\}=0$

∴ $x=0$ 或 $a+b$

15. 解下列各組聯立方程式:

(i) $\begin{cases}(x-6)^2+(y-5)^2+2xy=60 \cdots\cdots(1)\\ 5y-4x=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. 由(2)得 $y=\frac{4x+1}{5}$ 代入(1)

$$(x-6)^2+\left(\frac{4x+1}{5}-5\right)^2+2x\times\frac{4x+1}{5}=60$$

即 $x^2-12x+36+\frac{(4x-24)^2}{25}+\frac{8x^2+2x}{5}=60$

∴ $25x^2-300x+900+16x^2-192x+576+40x^2+10x=1500$

整理 $81x^2-482x-24=0$

分解 $(81x+4)(x-6)=0$

$\therefore\quad x=6$ 或 $-\frac{4}{81}$.

將 x 之値代入 y 之値.

$\therefore\quad y=5$ 或 $\frac{13}{81}$

(ii) $\begin{cases} bx+ay=2ab \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=ax=ax+6y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由 (1) 得　$y=\frac{2ab-bx}{a}=\frac{b}{a}(2a-x)$ 代入 (2)

$$x^2+\frac{b^2}{a^2}(2a-x)^2=ax+\frac{b^2}{a}(2a-x)$$

去分母　$a^2x^2+b^2(4a^2-4ax+x^2)=a^3x+ab^2(2a-x)$

去括弧　$a^2x^2+4a^2b^2-4ab^2x+b^2x^2=a^2x+2a^2b^2-ab^2x$

整　理　$(a^2+b^2)x^2-a(a^2+3b^2)x+2a^2b^2=0$

分　解　$\{(a^2+b^2)x-2ab^2\}(x-a)=0$

$\therefore\quad x=a$ 或 $\frac{2ab^2}{a^2+b^2}$.

將 x 之値代入 y 之値:

$\therefore\quad y=b$ 或 $\frac{2a^2b}{a^2+b^2}$.

(iii) $\begin{cases} x^2+3xy-y^2=a^2+2a-1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (a-1)x(x+y)=a(a+1)y(x-y) \cdots(2) \end{cases}$

解. 設 $y=zx$　代入第二式.

則:　$(a-1)x(x+zx)=a(a+1)zx(x-zx)$

$(a-1)(1+z)x^2=a(a+1)(z-z^2)x^2$

以 x^2 除　$(a-1)(1+z)=a(a+1)(z-z^2)$

即　$(a-1)+(a-1)z=a(a+1)z-a(a+1)z^2$

整　理　$a(a+1)z^2-(a^2+1)z+(a-1)=0$

分解 $(az-1)\{(a+1)z-(a-1)\}=0$

$\therefore\ z=\dfrac{1}{a}$ 或 $\dfrac{a-1}{a+1}$.

取 $y=\dfrac{1}{a}x$ 代入第一式

得 $x^2+2\dfrac{1}{a}x^2-\dfrac{1}{a^2}x^2=a^2+2a-1$

去分母 $a^2x^2+2ax^2-x^2=a^4+2a^3-a^2$

即 $x^2(a^2+2a-1)=a^2(a^2+2a-1)$

$\therefore\ x^2=a^2 \qquad \therefore\ x=\pm a,\ y=\pm 1.$

又取 $y=\dfrac{a-1}{a+1}x$ 代入第一式

得 $x^2+2\dfrac{a-1}{a+1}x^2-\dfrac{(a-1)^2}{(a+1)^2}x^2=a^2+2a-1$

$\therefore\ (a+1)^2x^2+2(a^2-1)x^2-(a-1)^2x^2=(a^2+2a-1)(a+1)^2$

即 $2(a^2+2a-1)x^2=(a^2+2a-1)(a+1)^2$

$\therefore\ 2x^2=(a+1)^2$

$x^2=\dfrac{(a+1)^2}{2}=\dfrac{2(a+1)^2}{4}$

$\therefore\ x=\dfrac{(a+1)\sqrt{2}}{2} \qquad y=\dfrac{(a-1)\sqrt{2}}{2}$

(iv) $\begin{cases} 7(x^2+y^2)=25(x^2-y^2) \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=48 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 設 $y=zx$ 代入第一式

得 $7(x^2+z^2x^2)=25(x^2-z^2x^2)$

即 $7(1+z^2)x^2=25(1-z^2)x^2$

$7+7z^2=26-25z^2$

$\therefore\ 32z^2=18$ 即 $16z^2=9$

$\therefore\ x=\pm\dfrac{3}{4}$ 代入 y 之值

即 $y=\pm\frac{3}{4}x$ 代入第二式

得 $\pm\frac{3}{4}x^2=48$ $\therefore$ $x^2=\pm 64$

$\therefore$ $x=\pm 8$, 或 $\pm 8i$.

$\therefore$ $y=\pm 6$, 或 $\mp 6i$.

(v) $\begin{cases} x^2-xy=2x+5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy-y^2=2y+2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由(1)得 $x(x-y-2)=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由(2)得 $y(x-y-2)=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)÷(4) $\frac{x}{y}=\frac{5}{2}$ $\therefore$ $y=\frac{2x}{5}$ 代入(1)

得 $x^2-\frac{2x^2}{5}=2x+5$

去分母 $5x^2-2x^2=10x+25$

整 理 $3x^2-10x-25=0$

分 解 $(3x+5)(x-5)=0$ $\therefore$ $x=5$, 或 $-\frac{5}{3}$.

$\therefore$ $y=2$, 或 $-\frac{2}{3}$.

(vi) $\begin{cases} x(x+y+z)=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y(x+y+z)=12 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ z(x+y+z)=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

解. 由(1)得 $x^2+xy+xz=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由(2)得 $xy+y^2+yz=12 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

由(3)得 $xz+yz+z^2=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

(4)+(5)+(6) $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=25$

即 $(x+y+z)^2=25$

開　方　$x+y+z=\pm 5$

代入一式　$\pm 5x=8,\qquad \therefore\quad x=\pm\frac{8}{5},$

代式二式　$\pm 5y=12,\qquad \therefore\quad y=\pm\frac{12}{5},$

代入三式　$\pm 5z=5,\qquad \therefore\quad z=\pm 1.$

(vii) $\begin{cases}(x+y)(x+z)=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ (y+z)(y+x)=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ (z+x)(z+y)=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$

解. (1)×(2)×(3)　$(x+a)^2(y+z)^2(z+x)^2=36$

開　方　$(x+y)(y+z)(z+x)=\pm 6 \cdots\cdots(4)$

(4)÷(1)　$y+z=\pm 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(4)÷(2)　$z+x=\pm 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

(4)÷(3)　$x+y=\pm 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

(5)+(6)+(7)　$2x+2y+2z=\pm 6 \cdots\cdots(8)$

(8)÷2　$x+y+z=\pm 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

(9)−(5)　$\therefore\quad x=0.$

(9)−(6)　$\therefore\quad y=\pm 1.$

(9)−(7)　$\therefore\quad z=\pm 2.$

(viii) $\begin{cases}2x^3-5y^3=115 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 3x^3-7y^3=186 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. (1)×3　$6x^3-5y^3=345 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)×2　$6x^3-14y^3=372 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)−(3)　$y^3=27$　　即　$y^3-27=0$

分　解　$(y-3)(y^2+3y+9)=0$

$\therefore\quad y=3$

或　$y=\frac{-3\pm\sqrt{9-36}}{2}=\frac{-3\pm3\sqrt{-3}}{2}=\frac{3}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$

將　$y=3$　代入第一式

得　$2x^3-15\times3^2=115$

即　$2x^3-135=115$

$\therefore\ 2x^3-250=0$　即　$x^3-125=0$

分　解　$(x-5)(x^2+5x+25)=0$

$\therefore\ x=5$

或　$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-100}}{2}=\frac{-5\pm5\sqrt{-3}}{2}=\frac{5}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$.

(ix)　$\begin{cases} 4x^2+y^2+2(2x+y)=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 4xy(xy-1)=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解．由（1）得　$4x^2+4xy+y^2+2(2x+y)=2+4xy$

即　$(2x+y)^2+2(2x+y)+1=3+4xy$

開　方　$2x+y+1=\sqrt{3+4xy} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

由（1）得　$4x^2y^2=3+4xy$

開　方　$2xy=\sqrt{3+4xy} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

（3）=（4）　$2x+y+1=2xy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

又由（2）得　$4x^2y^2-4xy+1=4$

開　方　$2xy-1=\pm2$　$\therefore\ y=\frac{1\pm2}{2x}$

將　$y=\frac{1+2}{2x}=\frac{3}{2x}$ 代入（5）

即　$2x+\frac{3}{2x}+1=3$

去分母　$4x^2+3+2x=6x$

整　理　$4x^2-4x+1=-2$

開　方　$2x-1=\pm\sqrt{-2}=\pm i\sqrt{2}$

$\therefore\quad x=\dfrac{1\pm i\sqrt{2}}{2}$　代入 y 之值

$$y=3\div\left(2\times\frac{1\pm i\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{1\pm i\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3(1\pm i\sqrt{2})}{(1\pm i\sqrt{2})(1\pm i\sqrt{2})}=\frac{3(1\mp i\sqrt{2})}{1-(-2)}$$

$$=\frac{3(1\mp\sqrt{2})}{1+2}=1\mp i\sqrt{2}.$$

再　將　$y=\dfrac{1-2}{2x}=\dfrac{-1}{2x}$ 代入（5）

即　$2x-\dfrac{1}{2x}+1=2x\times\dfrac{-1}{2x}$

去分母　$4x^2-1+2x=-2x$

整　理　$4x^2+4x+1=2$

開　方　$2x+1=\pm\sqrt{2}$　即　$2x=-1\pm\sqrt{2}$

$\therefore\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$　代入 y 之值.

$$\therefore\quad y=\frac{-1}{-1\pm\sqrt{2}}=\frac{-1\times(-1\mp\sqrt{2})}{(-1\pm\sqrt{2})(-1\mp\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{2}}{1-2}=-1\mp\sqrt{2}.$$

（x）$\begin{cases} xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解.（1）−（2）　$\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{6}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(3)\times\dfrac{x}{y}\quad\dfrac{x^2}{y^2}-1=\dfrac{5x}{6y}.$

即　$\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{5x}{6y}-1=0$

以6乘 $6\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)-6=0$

分 解 $\left\{3\left(\frac{x}{y}\right)+2\right\}\left\{2\left(\frac{x}{y}\right)-3\right\}=0$

$\therefore\quad \frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$

$\therefore\quad y=\frac{2}{3}x$ 或 $-\frac{3}{2}x$

將 $y=\frac{2}{3}x$ 代入第一式：

即 $$\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{2}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{2}{3}x^2=\frac{5}{3}-\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{1}{6}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{1}{2},\qquad \therefore\quad y=\pm\frac{1}{3}.$$

再 將 $y=-\frac{3}{2}x$ 代入第一式：

即 $$-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$$

$$-\frac{3}{2}x^2=\frac{5}{6}+\frac{3}{2}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{7}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{14}{9}$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{1}{3}i\sqrt{14},\quad y=\mp\frac{1}{3}i\sqrt{14}.$$

16. 二數之差與其平方之差其積爲32，二數之和與其平方之和，其積爲272，問二數爲何數。

解. 設 大數爲 x， 小數爲 y.

依題意得 $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=32 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ (x+y)(x^2+y^2)=272 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

(1)+(2) $\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}=\dfrac{32}{272}=\dfrac{2}{17}$

即 $17(x^2-2xy+y^2)=2(x^2+y^2)$

去括弧 $17x^2-34xy+17y^2=2x^2+2y^2$

整　理 $15x^2-34xy+15y^2=0$

分　解 $(3x-5y)(5x-3y)=0$

$\therefore\ 3x=5y \qquad \therefore\ y=\dfrac{3}{5}x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

或 $5x=3y \qquad \therefore\ y=\dfrac{5}{2}x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

將(3)代入(1)

得 $\left(x-\dfrac{3}{5}x\right)\left(x^2-\dfrac{9}{25}x^2\right)=32$

即 $\dfrac{2}{5}x\times\dfrac{16}{25}x^2=32$

去分母 $2x\times16x^2=32\times25\times5$

即 $32x^3=32\times125$ 即 $3x^3-125=0$

分　解 $(x-5)(x^2+5x+25)=0$

$\therefore\ x=5$

或 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-4\times25}}{2}=\dfrac{-5\pm5\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5}{2}(-1\pm\sqrt{3})i$

將 x 之值代入(3)

$\therefore\ y=3$ 或 $\dfrac{3}{2}(-1\pm\sqrt{3})$

再將(4)代入(1)

得 $\left(x-\dfrac{5}{3}x\right)\left(x^2+\dfrac{20}{9}x^2\right)=32$

即 $\left(-\frac{2}{3}x\right)\left(-\frac{16}{9}x^2\right)=32$

去分母 $(-3x)(-16x^2)=32\times 27$

即 $32x^3=32\times 27$

$\therefore\quad x^3=27$ 即 $x^3-27=0$

分 票 $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore\quad x=3$

或 $x=\frac{-3\pm\sqrt{9-36}}{2}=\frac{-3\pm 3\sqrt{-3}}{2}=\frac{3}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$

將 x 之值代入（4）

$\therefore\quad y=4$ 或 $\frac{5}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$

17. A, B, 二人, B 自乙地出發時, A 適自甲地出發, 其目的須經過乙地與 B 行同一之道, 待 A 追及 B 時, 其兩人所行之路, 合計爲 30 里, 且在 4 時前經過乙地, 又 B 自甲地至此需 9 時, 問甲乙二地距若干里。

解. 設 兩地距離爲 x 里。

則 A 所行路爲 $\frac{30+x}{2}$ 里, B 所行路爲 $\frac{30-x}{2}$ 里.

又 設 兩人同行之時間爲 y.

則 A 每時速度爲 $\frac{30+x}{2y}$ 里. B 每時速度爲 $\frac{30-x}{2y}$ 里.

而自甲至乙: A 行所需之時間爲 $y-4$.

B 所行需之時間爲 $9-y$.

依題意得 $\begin{cases} (y-4)\left(\dfrac{30+x}{2y}\right)=x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (9-y)\left(\dfrac{30-x}{2y}\right)=x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$$(1)=(2)\quad (y-4)\left(\frac{30+x}{2y}\right)=(9+y)\left(\frac{30-x}{2y}\right)$$

即　$30y-120+xy-4x=270-30y-9x+xy$

移項，合併　$5x+60y=390$

以5除　$x-12y=78$

$$\therefore\quad y=\frac{78-x}{12}\qquad \text{代入}(1)$$

得　$$\left(\frac{78-x}{12}-4\right)\left(\frac{30+x}{\frac{8-x}{6}}\right)=x$$

即　$$\left(\frac{30-x}{12}\right)\left\{\frac{6(30+x)}{78-x}\right\}=x$$

$$\therefore\quad \frac{(30-x)(30+x)}{3(78-x)}=x$$

$$\therefore\quad 90-x^2=156x-2x^2$$

整　理　$x^2-156x+900=0$

分　解　$(x-150)(x-6)=0$

$$\therefore\quad x=150,\ \text{或}\ 6.$$

但題言二人所行之路合計爲30里，故知150里不合，可略去，即所求之距離爲6里。

18. 試證下列各式爲恒等式：

(i)　$$1-\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}=\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$$

證　明：$$\text{左式}=1-\frac{a^2+b^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}{a^2b^2-\frac{1}{a^2b^2}}$$

$$=1-\frac{\frac{(a^2+b^2)(a^2b^2-1)}{a^2b^2}}{\frac{a^4b^4-1}{a^2b^2}}$$

$$=1-\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}=\frac{a^2b^2+1-(a^2+b^2)}{a^2b^2+1}$$

（上式以 ab 除分子分母）

$$=\frac{ab+\frac{1}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}}{ab+\frac{1}{ab}}$$

$$=\frac{ab-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{ab}}{ab+\frac{1}{ab}}$$

$$=\frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)}{ab+\frac{1}{ab}}$$

$$=\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$$

（ii） $$\frac{a}{a^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}-1}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=2+x^{\frac{2}{3}}$$

證　明：左端 $=\dfrac{x(x^{\frac{1}{3}}+1)-x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-1)}{(x^{\frac{1}{3}})^2-1^2}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+1-x^{\frac{1}{3}}+1}{(x^{\frac{1}{3}})^2-1}$

$$=\frac{x^{1\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-1}-\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}-1}$$

$$=\frac{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}-2}{x^{\frac{2}{3}}-1}$$

$$=\frac{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}-2}{x^{\frac{2}{3}}-1}$$

$$=\frac{x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-1)+2(x^{\frac{2}{3}}-1)}{x^{\frac{2}{3}}-1}$$

$$=x^{\frac{2}{3}}+2=2+x^{\frac{2}{3}}$$

19. 試化下列各式之分母爲有理式：

(i) $\dfrac{12}{1-3\sqrt{5}}$

解. 原式$=\dfrac{12(1+3\sqrt{5})}{(1-3\sqrt{5})(1+3\sqrt{5})}=\dfrac{12(1+3\sqrt{5})}{1-45}$

$=-\dfrac{3(1+3\sqrt{5})}{11}$.

(ii) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{c+d\sqrt{x}}$

解. 原式$=\dfrac{(a+b\sqrt{x})(c-d\sqrt{x})}{(c+d\sqrt{x})(c-d\sqrt{x})}=\dfrac{ac-(ad-bc)\sqrt{x}-bdx}{c^2-d^2x}$

(iii) $\dfrac{22}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

解. 原式$=\dfrac{22(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\{(2+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(2+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}$

$=\dfrac{22(2+\sqrt{3}-5)}{4+4\sqrt{3}+3-5}=\dfrac{22(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2+4\sqrt{3}}$

$=\dfrac{22(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})(1-2\sqrt{3})}{2(1+2\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})}$

$=\dfrac{11(-4-3\sqrt{3}-\sqrt{5}+2\sqrt{3}\sqrt{5})}{1-12}$

$=4+3\sqrt{3}+(1-2\sqrt{3})\sqrt{5}$

20. 相異之物12個縱三橫四之排列法共有幾種。

解. 先取一列 ${}_{12}P_4=12\times11\times10\times9$

再就餘物取二列 ${}_8P_4=8\times7\times6\times5$

又就餘物取三列 ${}_4P_4=4\times3\times2\times1$

故 全數 ${}_{12}P_4\times{}_8P_4\times{}_4P_4=12!$

別解: 先取一行 ${}_{12}P_3=12\times11\times10$

又就餘物取二行 ${}_9P_3=9\times8\times7$

又就餘物取三行 $_6P_3=6\times5\times4$

又就餘物取四行 $_3P_3=3\times2\times1$

故亦得　全數$=121$

21. 一干一支之配搭共成幾種。

解. 干　$10=2\times5$

支　$12=2\times2\times3$

小公倍　$2\times2\times3\times5=60$　即所求。

別解: 若用列法, 須識別得陽干只配陽支, 陰干只配陰支。

取陽干　$_5P_1=5$

取陽支　$_6P_1=6$

配搭　$5\times6=30$

陰同　$\therefore\ 30+30=60$

22. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 六字組成 5 位之數共有幾種。

解. $_6P_5=6.5.4.3.2$

但 0 居首時, 不得稱五位之數, 其種數爲:

$_5P_4=5.4.3.2$

故所求之種數爲

$$_6P_4-{}_5P_4=(6-1)\times5.4.3.2=600.$$

23. 試展開 $(1+x+x^2)^5$

解. 原式$=\{(1+x)+x^2\}^5$

$$=(1+x)^5+5(1+x)^4x^2+10(1+x)^3x^4$$

$$+10(1+x)^2x^6+5(1+x)x^8+x^{10}$$

$$=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$$

$$+5(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)x^2$$

$$+10(1+3x+3x^2+x^3)x^4$$

$$+10(1+2x+x^2)x^6+5(1+x)x^8+x^{10}$$

$$=1+5x+15x^2+30x^3+45x^4+51x^{10}$$

$$+30x^7+15x^8+5x^9+x^{10}$$

24. 應用二項定理算出 $(1.03)^7$ 之值。

解. $(1.03)^7=(1+0.03)^7$

$$=1+7\times0.03+21\times0.00009+35\times0.000027$$

$$+35\times0.00000081+21\times0.0000000243$$

$$+7\times0.000000000729+0.00000000002197$$

$$=1.2298738642487.$$

25. $ax+b:bx+a=mx+n:nx+m$。試求 x 之值。

解. 即 $(bx+a)(mx+n)=(ax+b)(nx+m)$

$$bmx^2+(am+bn)x+an=anx^2+(am+bn)x+bm$$

$$(bm-an)x^2=bm+an$$

$$\therefore\ x^2=1 \qquad \therefore\ x=\pm1.$$

26. 自 $a:b=c:d$ 證出下列三式:

(i) $(a+c)(a^2+c^2):(a-c)(a^2-c^2)$

$$=(b+d)(b^2+d^2):(b-d)(b^2-d^2)$$

證明: 令 $\dfrac{a}{b}=x$, $\therefore$ $a=bx$ ……………(1)

又令 $\dfrac{c}{d}=x$, $\therefore$ $c=dx$ ……………(2)

(1)+(2) $a+c=(b+d)x$ ……………(3)

(1)−(2) $a-c=(b-d)x$ ……………(4)

(1) 自乘 $a^2=b^2x^2$ ……………(5)

(2) 自乘 $c^2=d^2x^2$ ……………(6)

(5)+(6) $a^2+c^2=(b^2+d^2)x^2$ ……………(7)

(5)−(6) $a^2-c^2=(b^2-d^2)x^2$ ……………(8)

(3)÷(4) $\dfrac{a+c}{a-c}=\dfrac{b+d}{b-d}$ ……………………(9)

(7)÷(8) $\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\dfrac{b\ +d^2}{b^2-d^2}$ ………………(10)

(9)×(10) $\dfrac{(a+c)(a^2+c^2)}{(a-c)(a^2-c^2)}=\dfrac{(b+d)(b^2+d^2)}{(b-d)(b^2-d^2)}$

$\therefore\ (a+c)(a^2+c^2)(a-c)(a^2-c^2)$

$=(b+d)(b^2+d^2):(b-d)(b^2-d^2).$

(ii) $pa^2+qab+rb^2:la^2+mab+nb^2$

$=pc^2+qcd+rd^2:lc^2+mcd+nd^2$

證 明：原題比例式改爲 $a:c=b:d$

$\therefore\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

令 $\dfrac{a}{c}=x$, $\therefore\ a=cx$ ………………(1)

又 令 $\dfrac{b}{d}=x$, $\therefore\ b=dx$ ………………(2)

(1)自乘 $a^2=c^2x^2$ ………………………(3)

(2)自乘 $b^2=d^2x^2$ ………………………(4)

(1)×(2) $ab=cpx^2$ ………………………(5)

(3)×p $pa^2=pc^2x^2$ ……………………(6)

(5)×q $qab=qcdx^2$ ………………………(7)

(4)×r $rb^2=rd^2x^2$ ………………………(8)

(3)×l $la^2=lc^2x^2$ ………………………(9)

(5)×m $mab=mcdx^2$ ……………………(10)

(4)×n $nb^2=na^2x^2$ ……………………(11)

(6)+(7)+(8) $pa^2+qab+rb^2=(pc^2+qcd+rd^2)x^2$ …(12)

(9)+(10)+(11) $la^2+mab+nb^2=(lc^2+mcd+nd^2)x^2\cdots$(13)

(12)÷(13) $\dfrac{pa^2+qab+rb^2}{la^2+mab+nb^2}=\dfrac{pc^2+qcd+rd^2}{lc^2+mcd+nd^2}$

$\therefore\quad pa^2+qab+rb^2 : la^2+mab+nd^2$

$=pc^2+qcd+rd^2 : lc+mcd+nd^2$

(iii) $a^2+b^2 : ac+ad=ac+bd : c^2+cd$

證明：令 $\dfrac{a}{c}=x,\quad\therefore\quad a=cx\cdots\cdots\cdots\cdots$(1)

又令 $\dfrac{b}{d}=x,\quad\therefore\quad b=dx\cdots\cdots\cdots\cdots$(2)

(1)×a $\quad a^2=acx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(3)

(2)×b $\quad b^2=bdx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(4)

(1)×c $\quad ac=c^2x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(5)

(1)×d $\quad ad=cdx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(6)

(3)+(4) $\quad a^2+b^2=(ac+bd)x\cdots\cdots\cdots\cdots$(7)

(5)+(6) $\quad ac+ad=(c^2+cd)x\cdots\cdots\cdots\cdots$(8)

(7)÷(8) $\quad \dfrac{a^2+b^2}{ac+ad}=\dfrac{ab+bd}{c^2+cd}$

$\therefore\quad a^2+b^2 : ac+ad=ac+bd : c^2+cd.$

27. a,b,c 爲等差級數，則

$(a+b+c)^3-3(a^3+b^3+c^3)=18abc$ 試證之。

證明：設 $b=a+d,\quad c=a+2d.$

則 $(a+b+c)^3=(3a+3d)^3=3^3(a+d)^3$

$=27(a^3+3a^2d+3ad^2+d^3)$

又 $3(a^3+b^3+c^3)=3\{a^3+(a+d)^3+(a+2d)^3\}$

$=3(a^3+a^3+3a^2d+3ad^2+d^3+a^3+6a^2d+12ad^2+8d^3)$

$=3(3a^3+9a^2d+15ad^2+9d^3)$

$\therefore\quad (a+b+c)^3-3(a^3+b^3+c^3)$

$=27(a^3+3a^2d+3ad^2+d^3)-3(3a^3+9a^2d+15ad^2+9d^3)$

$=27a^3+81a^2d+81ad^2+27a^3-9a^3-27a^2d-45ad^2-27d^3$

$=18a^3+54a^2d+36ad^2$

$=18a(a^2+3ad+2d^2)$

$=18a(a+d)(a+2d)$

$=18abc.$

18. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}$…………無限級數之和，求至小數三位。

解. 由公式得：

$$\lim_{n=\infty} S=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{2+\sqrt{2}}{2-1}=3.414.$$

29. 等比級數之第 l 項爲 a，第 m 項爲 b，第 n 項爲 c，則 $(m-n)\log a+(n-l)\log b+(l-m)\log c=0$，試證之。

證 明：設初項爲 g，公比爲 r，則有

$a=gr^{l-1}$, $\quad b=gr^{m-1}$ $\quad c=gr^{m-1}$

$\frac{a}{b}=r^{l-m}$, $\quad \frac{b}{c}=r^{m}$,

$\therefore$ $\log a-\log b=\log r(l-m)$

$\log b-\log c=\log r(m-n)$

$\therefore$ $(\log a-\log b)\div(b-m)=\log r$

$(\log b-\log c)\div(m-n)=\log r$

$\therefore$ $(\log a-\log b)\div(l-m)-(\log b-\log c)+(m-n)=0$

即 $(m-n)\log a-m-n\log b-(l-m)\log b+(l-m)\log c=0$

$\therefore$ $(m-n)\log+(n-l)\log b+(l-m)\log c=0$