中等學校用

三S立體幾何學

全一冊

仲光然
譯　者　嚴幼芝
徐任吾

上海中華書局印行

三S立體幾何學

目　錄

三S立體幾何學

第六編

空間的直線及平面——多面角

480. 定義. **空間幾何學**或**立體幾何學**,研究不全在一平面內的圖形.

481. 定義. 過面內任意兩點的直線全在面內,則這個面叫做**平面**.

若通過幾個定點或幾條定直線的平面只能作一個,則這**平面**稱爲被定點或定直線所**決定**.

幾何公理 A. 過不在一直線上的三點祇能有一平面.

幾何公理 B. 若二平面有一點共有,則必有第二點共有.

482. 定義. 若**一直線和一平面**雖任何延長而決不相遇,則這直線和平面叫做**互相平行**.

483. 定義. 若**二平面**雖任何延長而決不相遇,則

這二平面叫做**互相平行**.

【註】[1] 上述任何要素所決定的平面,在立體幾何學作圖中好像有具體的方法可作,實在用模型之外沒有別的法子. 平常用直規及圓規所得的圖不過是一種表象,和平面作圖所得的完全不同.

命題 I. 定理

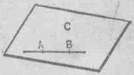
484. 可以決定一平面的:

(1) 一直線及線外一點.

(2) 二相交直線.

(3) 二平行直線.

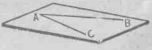
(1) 求證直線 AB 及線外一點 C 決定一平面.



過線上二點 A, B 及 C 祇能作一個平面(481,幾何公理 A.)

AB 線在這面內. (481)

(2) 求證相交二直線 AB 及 AC 決定一平面.



[學者自證之.]

---

(1)譯註: 立體幾何學中的作圖題不能實際確實作在紙上,倘在推理上能作適合於所設的條件的圖形,就算圖已作就. 在推理上認爲可以作圖的基礎事項如下:

(I) 作公理 A, § 484 (1), (2), (3)所決定的平面,

(II) 作以上各平面內的平面作圖.

(3) 求證二平行直線 AB 及 CD 決定一平面.

從定義知平行直線 AB 及 CD 在一平面內.

因 AB 及 C 點決定一平面,故二平行直線決定一平面.

485. 系. 二平面的相交處爲直線.

相交處不能含不在一直線上的三點,因過這三點,只能作一個平面. (481 幾何公理 B.)

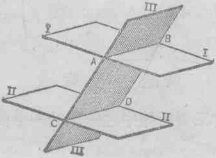
習 題

1. 攝影者的照相器及測量者的經緯儀都用三足支持,何故?

2. 過不在一平面內四點中的三點能決定多少平面?

命題 II. 定理

486. 二平行平面與第三平面相交的交線互相平



行.

設 I 及 II 爲平行平面,各與第三平面 III 相交於 AB 及 CD.

求證 AB//CD.

證 AB 與 CD 不能相遇,不然 I 面與 II 面須相遇.

AB 及 CD 在一平面內.

所以 AB//CD.

487. 系. 在平行平面間的平行線相等.

習 題

*1. 一平面和二平行面中之一平面相交者,必與其他一平面相交.

*2. 一直線和二平行平面中之一平面相交者,必與其他一平面相交.

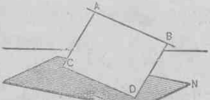
3. 在敎室內指出命題 II 的例子.

4. 在命題 II 的圖中,若 AC//BD,證明 AB=CD.

【註】學者須注意在立體幾何學欲證明二直線相平行只證明不相遇尙不足够,更須證明這二直線同在一平面內.

命題 III. 定理

488. 含二平行線中之一線的一平面必平行於其他一線.



設　AB//CD,又平面 MN 祇含 CD.

求證　平面 MN//AB.

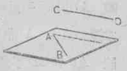
證　AB 與 CD 決定一平面,與 MN 相交於 CD.

所以,若 AB 遇 MN,必遇 MN 於 CD.

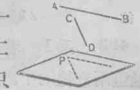
但因　AB//CD,故這是不可能的.

所以　　平面 MN//AB.

489. 【注意】 應用命題 III 可作一平面使平行於所設直線 AB. 其作法先作一平行於所設直線 AB 的 CD 線,然後過 CD 作一平面.



490. 系 1.　過一所設直線可作一平面使平行於另一任何所設直線;若二所設直線不相平行,則只能作一個平面.



491. 系 2.　過一所設點可作一平面使平行於在空間的所設任意二直線;若所設二直線不相平行,則只

能作一個平面.

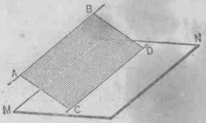
習　題

過所設二點作一平面使平行於所設直線.

有不共同一平面內之二直線，試作一平面含其一而與他一直線平行之平面.

命題 IV.　定理

492.　過平行於一平面的直線的平面與這一平面的交線,必平行於這直線.



設　AB//MN 平面,又 BC 平面含 AB 且交 MN 於 CD.

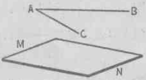
求證　　AB//CD.

證　AB 與 CD 不能相遇,不然 AB 將與 MN 平面相遇.

　　AB 及 CD 在一平面內.

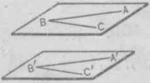
故　　AB//CD.

493.　系 1.　若兩相交直線皆平行於所設平面,則過這兩直線的平面必平行於所設平面.



設AB及AC都平行於MN。若ABC平面與MN相交，則交綫必皆平行於AB及AC，這是不可能的。

494. 系2. 若兩角的邊各各互相平行，則其平面必相平行。



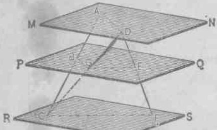
因 AB∥A′B′，ABC平面平行於A′B′，

同理ABC平面平行於B′C′.

故ABC平面∥A′B′C′平面.　（系1.）

命題V.　定理

495. 若二直線被許多平行平面所截，則相當的線分成比例.



設　平行平面MN，PQ，及RS被二直線截於A，B，C，及D，E，F.

求證　AB:BC=DE:EF.

證　作DC，又過AC及DC作一平面與平面PQ及MN相交於BG及AD.

則 AD//BG. (486)

過 DC 及 DF 作一平面,同樣可得,

GE//CF.

故 $\frac{AB}{BC}=\frac{DG}{GC}$, 又 $\frac{DE}{EF}=\frac{DG}{GC}$. (何故?)

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$. (公理 1)

496. 系. 若從任意一點作許多直線被二平行平面所截,則相當的線分成比例.

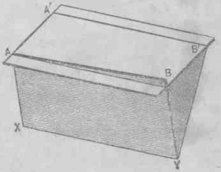
習 題

1. 若三個平行平面在一橫截線上,截相等線分,則在任何橫截線上,亦截成相等線分.

2. 在命題 V 的圖中,若 BG=5,AD=15,DE=4,求 EF.

命題 VI. 定理

497. 若二直線都平行於第三直線,則必互相平行.



設　$AB // XY$，又 $A'B' // XY$.

求證　　$AB // A'B'$.

證　過 AB 及 XY 作平面 AY，又過 $A'B'$ 及 A 點作平面 $B'A$.

設平面 AY 及 $B'A$ 相交於 AC.

	平面 $B'A // XY$	(488)
故	$AC // XY$	(492)
但	$AB // XY$	(假設)
所以	AB 及 AC 必重合.	(公理16)
	AB 及 $A'B'$ 在一平面內.	
但	AB 及 $A'B'$ 不能相遇.	(公理16)
故	$AB // A'B'$.	

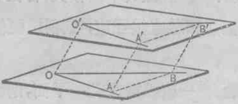
習　題

若一直線AB平行於平面P，又平行於另一直線CD，則平面$P // CD$.

【示意】 過 AB 作一平面和 P 相交於 XY 線.

命題 VII.　定理

498. 若不在一平面內的二角，二邊各各平行且方



向亦同，則二角必相等.

設　AOB 角及 A′O′B′ 角的邊各各平行，且方向亦同.

求證　$\angle AOB=\angle A'O'B'$.

證　取 $OA=O'A'$，又 $OB=O'B'$.

作　AA'，BB'，AB 及 $A'B'$.

　　AO' 是一平行四邊形.　　　　(何故?)

　　BO' 是一平行四邊形.　　　　(何故?)

故　AA' 等於且平行於 OO'，

又　BB' 等於且平行於 OO'.

故　AA' 等於且平行於 BB'.　　　　(公理 1.)(497).

因之 $AA'B'B$ 是一平行四邊形，

又　　$AB=A'B'$.

$$\therefore\ \triangle AOB\cong\triangle A'O'B'\qquad\text{(何故?)}$$

$$\therefore\ \angle O=\angle O'.$$

499. 定義.　一直線與一平面相交的交點叫做**足**.

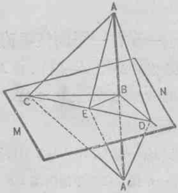
500. 定義.　一直線與平面相交，若在平面上過其足的任何直線都和這直線垂直，則稱這**直線垂直於平面**.

501. 定義.　一直線垂直於一平面，則稱這**平面垂**

直於這直線.

命題 VIII.　定理

502. 若一直線垂直於二相交直線於其交點，則這直線必垂直於這相交直線的平面.



設　BC 及 BD⊥AB，又平面 MN 含 BC 及 BD.

求證　AB⊥ 平面 MN.

證　在平面 MN 內過 B 作任意直線 BE.

作 CD 過 BE 於 E，又延長 AB 至 A′，使 BA′=AB.

作 AC，AE，AD，CA′，EA′，及 DA′.

$AC=A'C,\ AD=DA'.$　(125)

$CD=CD.$　(何故?)

所以　$\triangle ACD\cong\triangle CDA'.$　(何故?)

$\therefore \quad \angle ACD = \angle A'CD,$

又 $\triangle ACE \cong \triangle A'CE.$ (何故?)

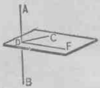
$\therefore \quad EA = EA'.$

則 $BE \perp AA'.$ ——(79)

故 AB 垂直於在平面 MN 內過足的任何直線,即 AB⊥ 平面 MN. (500)

503. 系. 過一點作一平面使垂直於一直線.

I. 設直線 AB 及在直線 AB 上的一點 D. 過 AB 作二平面. 在這兩平面內(圖上未畫出)作 DC⊥AB 及 DF⊥AB. 平面 CDF 即所求之平面.



II. 設直線 AB 及線外一點 C. 作 CD⊥AB. 過 AB 而不含 C 點作一平面. 在這平面內作 DF ⊥AB. CDF 即所求之平面.

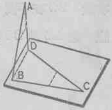
習 題

1. 在命題 VIII 的圖內,若 AD=5, AB=4, BC=5, ∠CBD=120°, 又 AB⊥ 平面 MN, 求 CD 的長.

2. 若 ABCD 爲空間四邊形(即 A,B,C及D 不在一平面內)又 AB=BC,CD=DA,則平面角 A 等於平面角 C.

3. 聯空間四邊形兩鄰邊中點的直線必等於且平行於其他二邊中

點的聯結線.



4. 不在一平面內的二角，若兩邊各各平行，而方向相反，則二角相等.

5. 二角的邊各各平行，在何種條件之下二角互為補角？

6. 在何種條件之下過二點作一平面能使垂直於所設直線？

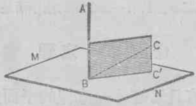
7. 過五點能作多少平面，若這五點中沒有四點同在一平面內？

8. 包圍空間的一部份，至少須幾個平面？何故？

9. 證明：(a)若四邊形的二對角線能相遇，(b)若有二邊平行，(c)若有二對邊相遇，則這四邊形決定一平面.

命題 IX.　定理

504.　過直線上的一點而垂直於這直線的一切垂線必在過這一點而垂直於這直線的平面內.



設　AB⊥BC，又 AB⊥ 平面 MN 於 B.

求證　BC 在平面 MN 內.

證　過 AB 及 BC 作一平面與 MN 相交於 BC′.

$AB \perp BC'$.　　(500)

$AB \perp BC$.　　(假設)

故　BC 與 BC′ 必重合,　　(47)

即　BC 在平面 MN 內.

505.　系 1.　過直線上的一所設點, 祇能作一個平面垂直於這直線.

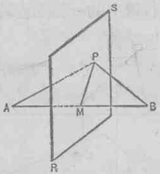
506.　系 2.　過線外一點祇能作一個平面垂直於這直線.

習　題

1. 一直角以一邊為軸而旋轉之, 其他一邊所成的面是那一種面?
2. 三直線互相垂直. 求證不能有第四直線都垂直於這三直線.
3. 證明作一直線垂直於有一公共點的兩平面是不可能的.

命題 X.　定理

507.　在垂直且二等分一直線的平面內的各點, 至直線的二端的距離相等.



設　P 點為 AB 直線的垂直二等分平面(RS)內的一點.

求證　P 點至 A 及 B 等距離;卽

$$PA=BP.$$

證　PM 為 AB 的垂直二等分線.　　(何故?)

$$PA=PB.\quad(何故?)$$

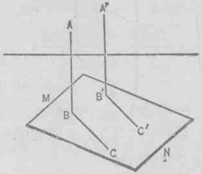
508.　系 1.　至一直線的二端距離相等的點必在所設直線的垂直二等分平面內.

【示意】 用上圖過 P 點作一平面,垂直於 AB, 證明平面 RS 將二等分 AB,因此平面 RS 為 AB 直線的垂直二等分平面.

509.　系 2.　至一直線的二端距離相等的點的軌跡為這直線的垂直二等分平面.

命題 XI.　定理

510. 若二平行線中的一線垂直於一平面，則其他一線亦必垂直於這平面.



設 $AB \parallel A'B'$, 又 $AB \perp$ 平面 MN.

求證　$A'B' \perp$ 平面 MN.

證 在平面 MN 內，過 B 及 B′ 作任意二平行直線 BC 及 B′C′.

則　$\angle ABC = \angle A'B'C'$.　(何故?)

但　$\angle ABC$ 爲直角.

故　$\angle A'B'C'$ 爲直角,

卽 A′B′ 垂直於過其足的任意直線.

故　$A'B' \perp$ 平面 MN.

習　題

1. 依次聯結空間四邊形各邊中點的直線成一平行四邊形.

2. 聯結空間四邊形對邊中點的直線必互相二等分.

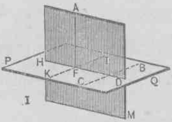
3. 將命題 XI 改述爲：若一平面垂直於二平行直線中的一直線，……………．

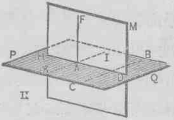
4. 作 BB′ 再用一對直線如 BC 及 B′C′，試證明命題 XI．

√5. 若一平面斜交二平行線中的一直線，則必不垂直於他一線，試證明之．

命題 XII．作圖題

511．過所設一點作一直線垂直於一所設平面．





設　平面 PQ 及 A 點．

求作　一直線使過 A 且垂直於 PQ．

作法　在平面 PQ 內，作任意直線 BC．

過 A 作平面 AM⊥BC 與 PQ 交於 DH．

在平面 AM 內過 A 作 AF⊥DH．

AF 卽所求之垂線．

證　在平面 PQ 內過 AF 的足（在第一圖爲 F，在第二圖爲 A）作

IK//BC.

因 BC⊥平面AM, (作圖)

BC//IK. (作圖)

∴ IK⊥平面AM. (510)

∴ FA⊥IK. (何故?)

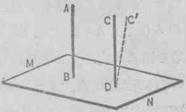
但 FA⊥DH. (作圖)

∴ FA⊥平面PQ. (何故?)

512. 系1. 過所設一點，祇能作一直線垂直於所設平面.

若過一點能作二垂線，則含二垂線的平面與所設平面相交所成的一直線，必與二垂直線都各垂直. 換言之，在一平面內過所設一點能作二直線都與所設一直線垂直，這是不可能的.

513. 系2. 垂直於同一平面的二直線必互相平行.



設AB及CD⊥平面MN.

作 DC'//AB.

則 DC'⊥MN.

但過D點祇能作一直線垂直於MN.

故DC與DC'重合，而DC//AB.

514. 定義. 從一點到一平面所引垂線的長叫做**從這一平面到這一點的距離.**

習　題

1. 距一所設平面一定距離的動點的軌跡是什麼?

2. 距一所設平面一定距離,且距二所設點等距離的動點的軌跡是什麼?

3. 求距二點A及B等距離且距二點C及D亦等距離的點的軌跡.

4. 討論習題3,若(a)直線AB//直線CD,(b)C與B重合,(d)四點A,B,C及D都在一直線上.

5. 過二相交平面外的一點作一直線使平行於各平面.

6. 證明:每三角形決定一平面.

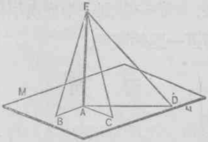
7. 若AB//A′B′又過各直線作一平面相交於CD,則CD//AB.

命題XIII.　定理

515. 若從平面外一點至平面作斜線:

(1) 二斜線遇平面之點與垂足距離相等者相等.

(2) 二斜線遇平面之點與垂足距離不相等者距離遠者較長.



設 $EA \perp$ 平面 MN. 作斜線 EB, EC, 及 ED 使 $AB=AC$, 及 $AD>AC$.

求證 (1) $EB=EC$.

(2) $ED>EC$.

【示意】 (1) 應用三角形之全同證明之.

(2) $\overline{ED}^2=\overline{EA}^2+\overline{AD}^2$, $\overline{EC}^2=\overline{EA}^2+\overline{AC}^2$.

516. 系 1. 其逆, 從一點至一平面作相等斜線遇平面之點與從這點所引垂線之足等距離, 又二不等斜線大者與垂足的距離亦大.

517. 系 2. 在空間至圓周上各點距離相等點的軌跡爲過中心且垂直於圓的平面的直線.

518. 系 3. 從平面外一點至平面引諸直線, 垂線爲最短, 其逆亦眞.

519. 系 4. 若二平面平行,則其間的距離處處相等,其逆亦眞.

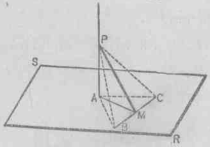
習　題

1. 在命題 XIII 的圖中,若 ∠B=∠C 則 EB=EC 又 AB=AC.

2. 從離平面 MN 三吋的一點,作直線 PA,A 在 MN 內.若 PA=5 時,則從 A 至過 P 垂直於平面 MN 的垂足的距離是多少?

命題 XIV. 定理

520. 從平面內的垂線足,引一直線使垂直於平面內任意一直線,則其交點與垂直線上任意一點所聯的直線必垂直於平面內的那一條直線.



設 PA⊥平面 SR,AM⊥BC(在平面 SR 內),又直線 PM.

求證　PM⊥BC.

證 取BM=MC;作 AB,AC,PB 及 PC.

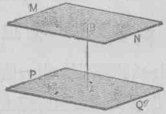
AB=AC.　(何故?)

PB=PC.　(515)

∴ PM⊥BC.　(何故?)

命題 XV. 定理

521. 垂直於同一直線的諸平面互相平行.



設 平面 MN 及 PQ 都垂直於 AB 直線.

求證 平面 MN// 平面 PQ.

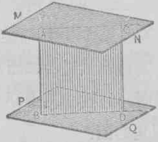
證 若平面 MN 及 PQ 不相平行,則必須相遇於某點.

這是不可能的.　(506)

∴ 平面 MN// 平面 PQ.

命題 XVI. 定理

522. 一直線垂直於二平行平面中的一平面亦必垂直於他一平面.



設　平面 MN// 平面 PQ, 又 AB⊥ 平面 MN。

求證　AB⊥ 平面 PQ.

證　過 AB 作任意一平面與 MN 相交於 AC 與 PQ 相交於 BD.

AC//BD,　(486)

又　AC⊥AB.　(500)

故　BD⊥AB.　(105)

所以 AB 垂直於在 PQ 內過 B 的任意直線.

故　AB⊥ 平面 PQ.

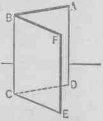
523. 系.　過所設一點祇能作一平面使平行於所設平面.

習　題

若二平面都平行於第三平面,則這二平面互相平行.

【示意】 作一直線使垂直於其中的一平面.

二 面 角



524. 若平面ABC以BC爲軸而旋轉至FBC地位，則其旋轉量叫做**二面角**.

直線BC叫做二面角的**稜**,又平面ABC及FBC叫做二面角的**面**.

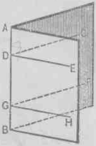
【註】 學者須注意上所述者不是二面角的定義不過爲二面角的說明罷了.

525. 二面角可用稜上二個文字表他；若有幾個二面角共有一公共稜則用四個文字表他，每一個面上取一個字,而稜上的二個字放在其他二字的中間.

例如,上圖內的二面角可用BC或A-BC-E表他.

二面角的大小與面的大小無關,這是很明顯的.

526. 定義. 從二面角稜上一點,在二面內各作一直線都垂直於其稜,這二直線所成的角叫做**二面角的平面角**.



例如,若 $CD\perp AB$ 又 $ED\perp AB$，則 $\angle CDE$ 爲二面角AB的平面角.

同一二面角的二個平面角如CDE及FGH，必相

等,因其邊各平行且方向亦同.

或云在二面角稜上任意一點所作的平面角都相等.

527. 能使重合的兩**二面角必相等**.

將二個相等的二面角重疊起來,則二個平面角能使重合.故相等二面角的平面角相等.

528. 二面角有**銳角**,**直角**,**鈍角**或**平角**等名稱,依其平面角爲銳角,直角,鈍角,或平角而定.

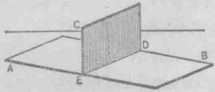
平二面角的二面在一平面內.

二面角有**補角**,**餘角**,**隣角**,**對頂角**等名稱,依其平面角爲補角,餘角,隣角等而定.

若一平面與另一平面相交而成相等的二個二面角,則各二面角顯然爲一直角.

529. 一平二面角分成 180 等分,每份叫做**一度**.度分成**分**,分分成**秒**.

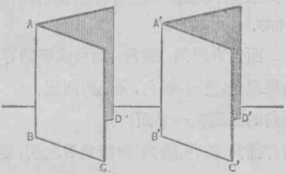
530. 成直二面角的二平面叫做**互相垂直**.



例如,若平面CD和平面AB成直二面角,則平面CD垂直於平面AB.

命題XVII. 定理

531. 若兩二面角的平面角相等,則兩二面角相等.



設 兩二面角AB,A′B′的平面角CBD和C′B′D′相等.

求證 二面角AB=二面角A′B′.

證 因 AB⊥BD,及AB⊥BC,

AB⊥平面BDC.

又同理 A′B′⊥平面B′D′C′.

移置∠DBC於∠D′B′C′上,

則平面BDC與平面B′D′C′重合.

故 BA與B′A′重合, (512)

又因 DB與D′B′重合,

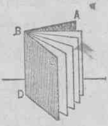
平面AD與平面A′D′重合. (484)

同樣,平面 AC 與平面 A′C′ 重合.

故　二面角 AB 和 A′B′ 重合.

故　兩二面角相等.

532. 系. 若一二面角分成 n 等分,則他的平面角亦被分成 n 等分; 其逆亦眞.

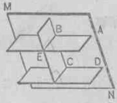


習　題

1. 對頂二面角相等.

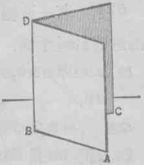
2. 若二平行平面被第三平面所截,則同位二面角相等.

【示意】 作一平面 MN ⊥ EB(二平面的交線).



命題 XVIII. 定理

533. 二面角拿他的平面角度之.



設　∠ABC 爲二面角, BD 的平面角.

求證　度量∠ABC 及二面角 BD 的數量相同.

證　(甲)　∠ABC 的度數爲有理數, 例

如$\frac{m}{n}$，m 及 n 都是整數.

180°的二面角有 180°的平面角.　(527)

∴　1°的二面角有 1°的平面角.　(532)

∴ $\left(\frac{1}{n}\right)^\circ$的二面角有$\left(\frac{1}{n}\right)^\circ$的平面角.

∴ $\left(\frac{m}{n}\right)^\circ$的二面角有$\left(\frac{m}{n}\right)^\circ$的平面角.

(乙)　∠ABC 的度數為無理數.

∠ABC 的任一近似值(有理數)必與 BD 的相當近似值相等.（甲）

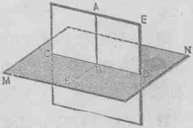
或　ABC 和 BD 的數量的一切近似值都各各相等.所以他們的數量相等.　(223)

習　題

若兩相隣二面角各為 30° 及 40°，求等分這二角的二個平面所成的二面角的度數.

命題 XIX.　定理

534. 若一直線垂直於一平面，則過這直線的平面都垂直於這平面.



設　AB⊥平面 MN，又平面 EC 含 AB.

求證　平面 EC⊥平面 MN.

【示意】　在平面 MN 內，自 B 作

BF⊥CD,證明∠ABF為直角.

535. 【註】 應用上命題可得作一所設平面的垂直平面的方法.卽先作一直線垂直於所設平面,然後過這直線作一平面.

習　題

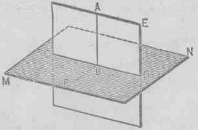
1. 過一所設點作一平面使垂直於二所設平面.

2. 過一所設點作一平面使垂直於一所設平面 P 且平行於一所設直線 CD.

3. 過一所設直線作一平面使垂直於一所設平面.

命題 XX.　定理

536. 若二平面互相垂直,在一平面內作垂直於交線的直線必垂直於他平面.



設 平面CE⊥平面 MN,又在 CE 內,BA 垂直於交線 CD.

求證 AB⊥平面 MN.

【示意】 在 B 作平面角,證明 AB 垂直於過其足的二直線.

537. 系 1. 若二平面互相垂直,過交線上任一點

垂直於一平面的一直線必在他平面內.

設 BP 垂直於平面 MN 於 B 點.作 BA 如上圖. 則 BP 與 BA 重合. 故 BP 在平面 CE 內.

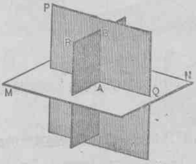
538. 系 2. 若二平面互相垂直, 則從一平面內的任一點作一直線垂直於他平面, 這直線必在第一平面內. 〔用間接法證明之.〕

習 題

在命題 XX 的圖中,若平面 CE⊥平面 MN, AB⊥CD, AB=m 吋,又 BF=n 吋,求 AF 的長.

命題 XXI. 定理

539. 若相交二平面都垂直於第三平面, 則其交線亦垂直於這平面.



設 平面 PQ 及 RA⊥平面 MN, 又交於 AB.

求證　AB⊥平面 MN.

證　在 A 作一直線⊥MN.

這直線一定在平面 PQ 及 RA 內。　(537)

故必與 AB 重合.

即　AB⊥平面 MN.

540. 系. 若二平面互相垂直,又第三平面垂直於其交線,則每一交線必垂直於其他二交線.

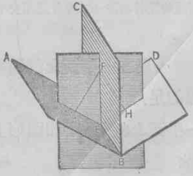
534 [illegible]

習　題

若一直線平行於一平面，則垂直於這直線的任何平面必垂直於第一平面.

命題 XXII.　定理

541. 二等分二面角的平面內的各點距二面角的兩面成等距離.



設　平面 CB 二等分二面角 A—BE—D，又 FG 及 FH 爲 BC 上 F 點距 AB 及 BD 的距離.

求證　FH=FG.

證　過 FG 及 FH 作一平面與二面角的兩面交於 EG 及 EH,

平面 FGH⊥AB 及 DB.　(534)

∴ 平面 FGH⊥BE.　(539)

故　EB⊥EG, EF 及 EH.　(500)

∴ ∠GEF 及 ∠HEF 爲二面角 A—BE—C 及 D—BE—C 的平面角.

〔由學者自己完成之. 與 70 節比較.〕

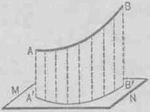
542. 系.　距二面角二面距離相等的各點都在二面角的二等分平面內.

習　題

距二相交平面等距離的點的軌跡是二等分這相交平面所成二面角的二平面.

543. 定義.　**一點在一平面上的射影**即從這點到這平面的垂直線的足.

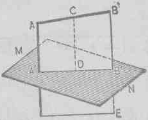
一個圖形在一平面上的射影，即圖形上各點在平面上的射影的軌跡.



如，A'B' 爲 AB 在平面 MN 上的射影.

命題 XXIII. 定理

544. 過不垂直於一平面的一所設直線祇能作一平面使垂直於所設平面.



設 AB 爲不垂直於平面 MN 的一直線.

求證 過 AB 祇能作一個平面 ⊥ MN.

證 從 AB 內任意一點 C，作 CD ⊥ MN.

過 AB 及 CD 作一平面 AE.

則 平面 AD ⊥ MN.　(534)

若過 AB 能作兩平面都 ⊥ 平面 MN，則交線 AB 將垂直於平面 MN.

(539)

這是不可能的,因與假設相背.

故過 AB 祇能作一個平面使垂直於平面 MN.

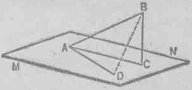
545. 系. 不垂直於一平面的直線在這平面上的射影是一條直線.

546. 定義. 一直線與**他在一平面上自己的射影**所成的角叫做**直線對於平面的傾角**,或叫做**直線與平面所成的角**.

如,下一命題的圖中,若 AC 是 AB 在 MN 上的射影,則 ∠BAC 是 AB 與 MN 所成的角.

命題 XXIV. 定理

547. 一直線與他在一平面上的射影所成的銳角是這直線與在這平面上任一直線所成角中之最小者.



設 直線 AC 爲 AB 在 MN 上的射影,又 AD 爲過 A 在 MN 內的任意一直線.

求證 ∠BAC < ∠BAD.

證　在平面 MN 內使 AD=AC，又作 BD。

在 $\triangle$ABC 及 ABD 中，

$$AB=AB,$$

$$AC=AD,$$

$$BC<BD. \qquad (518)$$

故　$\angle BAC<\angle BAD.$　(133)

習　題

1. 二平面平行，在一平面內的一個圓射影到他平面上。所成的射影是什麼？若二平面互相垂直，所成的射影是什麼？

2. 若一個圖形在一平面上的射影是一直線，則這圖形是一個平面圖形。

3. 若一直線AB與一平面 MN 成 45° 角，又 AB=10 時，AB 在 MN上的射影長多少？

4. 在命題 XXIII 的圖中，若 $AA'=6$，$BB'=11$，又 $AB=10$，求 AB 對於 MN 的傾角。

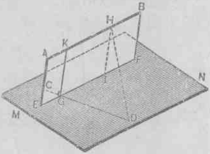
5. 在命題 XXIV 的圖中，若 AC=3 時 $\angle BAC=60^\circ$，又 $\angle CAD=90^\circ$，AC=AD，及 $\angle C=90^\circ$，求 BD 的長。

***6.** 二平行直線對於一平面的傾角相等。

7. 在命題 XXIV 的圖中(但 $AC\neq AD$)，若 $AB=10$，$CD=5\sqrt{2}$，$\angle BAC=30^\circ$，及 $\angle CDA=90^\circ$，求$\angle BAD$。

8. 在同圖內,若 $AD=m$, $DC=n$, $CB=p$, 及 $\angle ADC=90°$. 求 AB 及 BD,由此再求 $\angle ADB$ 的值.

9. 作不在同一平面內的二直線AB 及 CD 的公共垂線.



【示意】 過CD作平面 MN//AB. 過AB 作平面 AF⊥MN. 作 GK⊥EF. GK 即所求之直線.

10. 證明這樣的公共垂線祇能作一條. 〔用上圖〕

11. 求距不在一直線上的所設三點距離相等的點的軌跡.

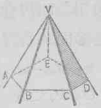
12. 若一直線遇他的射影於一平面上,則在這平面內過交點且垂直於其中一線的垂線亦必垂直於其他直線.

多 面 角

548. 定義. 一個**多面角**是由於一條過一定點的動直線,繼續的沿着一定多邊形的周邊移動而成的圖形.

如, V—ABCDE 是一個多面角.

549. 這定點叫做多面角的**頂點**,如 V.在任何位置的動直線叫做**基線**.過多邊形頂點的基線爲**稜**;如 VA, VB, VC 等. 在二條連續稜間的平面部份爲**面**;如AVB, BVC 等.二條連續稜所成的角爲**面角**;如∠AVB,∠BVC,等.二相隣的面所成的二面角爲多面角的**二面角**;如二面角VA,VB,等.



550. 若所設的多邊形是凸的, 則多面角爲**凸多面角**.

551. 定義. 三個面,或四個面等所成的多面角叫做**三面角**或**四面角**等.

552. 定義. 一個三面角有一個, 二個, 或三個直二面角的叫做**一直三面角**, **二直三面角**, 或**三直三面角**.

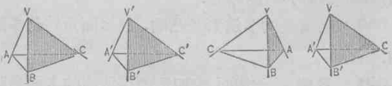
553. 定義. 有二個面角相等的三面角叫做**等腰三面角**或**二等面三面角**.

554. 若一多面角的面角和二面角與其他一多面角的面角和二面角各各相等, 且各部分安置排列的次序亦同則兩多面角爲全同(因能使重合).

若一多面角的面角和二面角與其他一多面角的面

角和二面角各各相等,而各部份排列的次序相反,則這二多面角爲對稱.

如,在第一圖,若$\angle AVB=\angle A'V'B'$, $\angle BVC=\angle B'V'C'$, $\angle CVA=\angle C'V'A'$,又二面角$AV=$二面角$A'V'$,二面角$BV=$二面角$B'V'$,及二面角$CV=$二面角$C'V'$,則三面角$V-ABC\cong$三面角$V'-A'B'C'$.



I II

在第二圖,$V-ABC$及$V'-A'B'C'$爲對稱.

普通二個對稱的多面角不能使他重合,這是很明顯的.

命題XXV. 定理

555. 二三面角若一角的二個面角和所夾的二面角與其他一角的二個面角和所夾的二面角各各相等,且相等部分排列的次序亦同,則二三面角全同.〔用重疊法證明之.〕

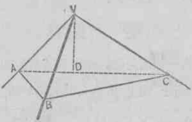
命題XXVI. 定理

556. 二三面角若一角的兩二面角和所夾的面角與其他一角的兩二面角和所夾的面角各各相等,且相

等部分排列的次序亦同,則二三面角全同.〔用重疊法證明之.〕

命題 XXVII. 定理

557. 三面角任何兩面角的和大於第三面角.



設 ∠AVC 爲三面角 V—ABC 的最大的一個面角.

求證 ∠AVB+∠BVC>∠AVC.

證 在面角 AVC 內作 AC, 又作 VD 使 ∠DVA=∠BVA. 取 VB=VD. 作 BC.

則　　△AVB≅△AVD.　　(何故?)

　　∴ AB=AD.

但　　AB+BC>AC.　　(何故?)

　　∴ BC>DC.　　(公理 5)

但在 △BVC 及 DVC 中,

　　VC 是公共的,

　　VD=VB,　　(何故?)

又　　$BC>DC$.

故　　$\angle BVC>\angle DVC$.　　　　　　(133)

加等角 AVB 及 AVD,

$$\angle AVB+\angle BVC>\angle DVC+\angle AVD,$$

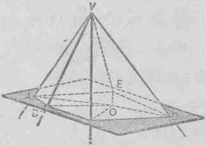
或　$\angle AVB+\angle BVC>\angle AVC$.

習　題

1. 多面角的任何一個面角較其餘幾個面角的和小.
2. 歪(不在一平面上)四邊形,各角的和小於四直角.

命題 XXVIII.　定理

558. 任何凸多面角的面角的和小於四直角.



設　V—ABCDE 爲任何凸多面角.

求證　$\angle s$ AVB, BVC, 等的和小於四直角.

證　作一平面與稜交於 A, B, C, 等, 與面交於 AB, BC, CD 等.則 ABCDE 是一個凸多邊形.

在平面 ABC 內聯任一點 O 至 A, B, C 等.

則　$\angle VBA + \angle VBC > \angle ABC$,

又　$\angle VCB + \angle VCD > \angle BCD$, 等等.　(557)

所以以 V 爲頂點的三角形底角的和大於以 O 爲頂點的三角形底角的和.

但是以 V 爲頂點的三角形各角的和等於以 O 爲頂點的三角形各角的和.　(何故?)

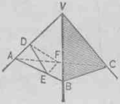
從等量減去諸底角, 卽得在 V 周各角的和小於在 O 周各角的和.

但在 O 周各角的和等於四直角.

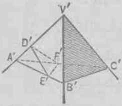
故在 V 周各角的和小於四直角.

命題 XXIX.　定理

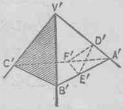
559. 若兩三面角有三個面角各各相等, 則相當的二面角相等, 且這兩三面角必相等或對稱.



1



2



3

設　在三面角 $V-ABC$ 及 $V'-A'B'C'$ 內, $\angle AVB = \angle A'V'B'$, $\angle BVC = \angle B'V'C'$, $\angle CVA = \angle C'V'A'$.

求證 $V-ABC\cong$ 或對稱於 $V'-A'B'C'$，又二面角 VA，VB 及 VC 各與 $V'A'$，$V'B'$，$V'C'$ 相等.

證 在六稜上取 $VA=VB=VC=V'A'=V'B'=V'C'$.

作 AB，BC，CA，$A'B'$，$B'C'$ 及 $C'A'$.

則 $\triangle AVB\cong\triangle A'V'B'$， (何故?)

又 $AB=A'B'$.

同樣， $BC=B'C'$，$CA=C'A'$.

在 AV 及 $A'V'$ 上各取 $AD=A'D'$.

在 AVB 面內作 DE，在 AVC 面內作 DF 垂直於 VA.

因 AVB 及 AVC 爲等腰三角形，故這兩直線必各過 AB 及 AC.

同樣，作 $D'E'$ 及 $D'F'$，又聯 EF 及 $E'F'$.

[由學者完成之.]

【示意】 證明 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

$\triangle ADE\cong\triangle A'D'E'$.

$\triangle ADF\cong\triangle A'D'F'$.

$\triangle AEF\cong\triangle A'E'F'$.

$\triangle DEF\cong\triangle D'E'F'$.

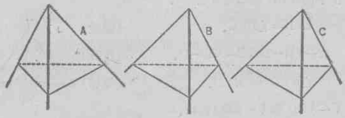
560. 定義. 若一多面角的各稜爲他一多面角各稜過頂點的延長線，則這兩多面角爲對頂.

命題 XXX.

561. 兩三面角爲對稱：

(1) 若一三面角的兩個面角和所夾的二面角與其他一角的兩個面角和所夾的二面角各各相等,或(2)若兩二面角與其所夾的面角各各相等,或(3)三個面角各各相等,

祇須所有相等部份排列的次序相反.



證 若 A 及 B 是所設的三面角,作三面角 C 與 A 對稱.

因 C 與 A 各部分排列的次序相反,故 C 與 B 各部分排列的次序相同.

故　　　　$C\cong B$.

但因 C 對稱於 A,故他的全同圖形 B 對稱於 A.

562. 系. 對頂三面角爲對稱.

563. 【註】 三角形與三面角有顯著的相類處(多邊形與多面角亦然).三角形的邊相當於三面角的面角,而角相當於二面角.關於三面角命題的證明可從相類的三角形命題只加一 V 字(即頂點)於各記號之

首面得之．如下面的敍述,若删去各處的 V 字即爲下面命題的證明．

若三角形(ABC)的二邊(AB 及 BC)相等,其所對之角(A 及 C)亦等.若含有 V 字卽爲下面定理的證明:

若一三面角的兩個面角相等,其所對的二面角亦等.

例題　設　$\angle AVB = \angle BVC$.

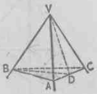
求證　二面 $\angle VA =$ 二面 $\angle VC$.

證　作平面 VBD 使二等分 $\angle VB$.

$\angle AVB = \angle BVC$.　(假設)

A—VB—D=C—VB—D.　(作圖)

$\angle BVD = \angle BVD$.　(恆等)



∴ V—ABD 與 V—BDC 對稱.

∴ 二面 $\angle VA =$ 二面 $\angle VC$.

習　題

1. 敍述和下列平面幾何學定理相當的三面角或多面角的命題:
   (a) 三角形兩邊的和大於第三邊.
   (b) 若三角形的兩角相等,則其對邊亦等.
   (c) 若三角形的兩邊不等,則其對角亦不等,等等.
   (d) 兩三角形若兩邊及其夾角各各相等,則兩形全同,等等.
   (e) 若四邊形的對邊相等,則對角亦等.

2. 在命題 XXVII 的圖中，

$\angle AVD + \angle DVB < \angle AVC + \angle CVB$.

3. 若在四面角 V—ABCD 內，$\angle AVB = \angle AVD$，又 $\angle BVC = \angle CVD$，則二面角 VD = 二面角 VB.

4. 若四面角相對的面角相等，則相對的二面角亦等.

*5. 在同一平面上的二平行線的射影普通亦爲平行.

6. 平分互爲補角的兩隣二面角的平面互相垂直.

7. 一直線二倍於在一平面上的射影，求直線對於這平面的傾角.

8. 三面角的三個面角相等，則三個二面角亦等.

9. 三面角的三個面角都是直角，則三個二面角亦都是直角.（三直三面角）.

*10. 若一直線與二平行平面相交，則與二平面成相等的角.

*11. 對頂多面角是對稱的.

12. 求距三面角三面距離相等的點的軌跡.

*13. 求距不在一平面內所設四點距離相等的一點.

14. 若 X 在平面 MN 內，PX 等於所設一直線，又 P 爲 MN 外的一點，求 X 點的軌跡.

15. 若四邊形四角之和等於四直角，則四頂點在一平面內.

16. 若 D 是在三面角 V—ABC 形內的一點，則

$\angle AVD + \angle BVD + \angle CVD > \frac{1}{2}(\angle AVB + \angle BVC + \angle CVA)$.

17. 過所設一點作一直線使平行於所設二平面.

18. 一直角的射影在什麼時候仍為一直角? 在什麼時候為銳角呢? 在什麼時候為平角呢?

19. 在 § 563 下的例題內,求證平面 BVD⊥ 平面 VAC.

復習題

1. 二直線都平行於同一平面,這二直線互相平行否?何故?

2. 若一直線與一平面都垂直於同一平面,則這直線平行於第一平面,或在第一平面內.

3. 若一平面通過平行四邊形的一對角線,則從其他一對角線的二端至這平面的垂線是相等的.

4. 已知一點及在空間不相交的二直線,求證普通只能作一直線使過這點而且與這二直線相遇.試述他的例外情形.

5. 若一直線垂直於相交二平面中的一平面,則其在他平面上的射影必垂直於二平面的交線.

6. 求在一所設三面角內而距各稜距離相等的點的軌跡.

7. 若從二面角內的任意一點至各面作垂線,則這二垂線所決定的平面必垂直於這二面角的稜.

8. 三平面角各為 20°, 80° 及 105°,能成一三面角否?何故?

9. 距相交二直線距離相等的點軌跡是什麼?距二平行直線呢?

10. 從一二面角內的任意一點至各面作垂直線,求證這二直線所成

的角與二面角的平面角互爲補角.

11. 若二平行的線份投射於同一平面上，則射影的比等於線份的比.

12. 平行平面在一橫截線上截取相等的距離,則必於任何橫截線上截取相等的距離.

13. 求作一平面截一銳二面角的二面使交線成一直角.

14. 求作一平面截一四面角的四面使截面爲一平行四邊形.

15. 在平面內,求一點距在空間的所設三點距離相等.

16. 在一所設平面內,決定一點使距在平面同側的二點的距離的和爲最小.

17. 距兩所設平面的距離的和等於一所設線份的點的軌跡是什麼?

18. 在空間有所設三直線,從第一線作一直線至第二線而平行於第三線.

19. 求證:若一直線平行於一平面,則直線上處處距平面等距離.

20. 若過三面角的頂點在各面內作對稜的垂線,則此三直線在一平面內.

21. 在長方形屋子的一牆壁上的一點 A，及對面壁上的一點 B，不用證明試述在地板上那一點距二點距離相等.

22. 一直線能同時垂直於二相交的平面否?何故?

23. 若持一根直規平行於黑板，則他在黑板上的影子平行於直規

否？何故？

24. A 及 B 相距 8 吋. 距 A 及 B 等距離，且距相隔 10 吋的二個平行平面亦等距離的點的軌跡是什麼？

25. 距二平行平面等距離的點的軌跡是什麼？

26. 過一直線上的各點引一所設直線的平行線，證明這許多線是在一平面內.

27. 三面角的各二面角的二等分面相交於一直線.

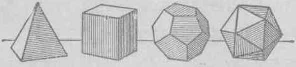
28. 一三角形 $6''$ 長的底在某平面內. 對於這底的高是 $4''$. 若這三角形與平面成 60° 的角，在這平面上的射影的面積是多少？

第七編

多面體　柱　及錐

多面體

564. 定義. 平面多邊形所圍成的封閉圖形叫做**多面體**. 爲境界的平面多邊形叫做多面體的**面**;面的交線叫做**稜**;稜的交點叫做**頂點**.



565. 定義. 四個面的多面體叫做**四面體**;六個面的,**六面體**;八個面的,**八面體**;十二個面的,**十二面體**;二十個面的,**二十面體**.

【註】多面體至少有四個面;因爲三面相交於公共一點成一三面角,所以成一立體必須再有一平面.

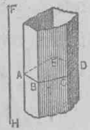
566. 定義. 聯結不在一面上的兩頂點所成的直線叫做多面體的**對角線**.

567. 定義. 任何截面都是凸多邊形的多面體叫做**凸多面體**.

【註】本書所討論的都是凸多面體.

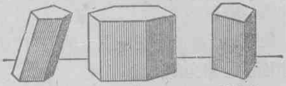
角柱和平行六面體

568. 定義. 一直線沿已知多邊形(如ABCDE)的周邊而移動,且常和一不在這多邊形平面上的定直線平行,(如FH)這樣所生的面叫做**角柱面**.



569. 定義. 一角柱面和截此面的兩平行平面所成的多面體叫做**角柱**.平行平面所成的面叫做**底面**或簡稱**底**;角柱面所構成的面叫做**側面**.相隣兩側面的交線叫做**側稜**.側面面積的和叫做**側面積**.兩底平面間的垂直距離叫做角柱的**高**.

所有的側面顯然都是平行四邊形(486),側稜都互相平行且相等.



斜角柱　　正角柱　　直角柱

570. 定義. 各側稜垂直於底平面的角柱叫做**直角柱**.

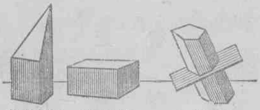
直角柱所有的側面都是矩形,且和底面垂直,所有的側稜都等於其高.

571. 定義. 底面爲正多邊形的直角柱叫做**正角柱**.

572. 定義. 側稜和底平面不相垂直的角柱叫做**斜角柱**.

角柱依他的底面爲三角形,四邊形等等;叫做**三角柱**,**四角柱**等等.

573. 定義. 角柱的一底面與和底面不平行而和各側稜相截的截面間的角柱部份叫做**截頭角柱**.


截頭角柱　直六面體　直截面

574. 定義. 垂直於角柱諸側稜(必要時引長之)的平面所生的截面叫做角柱的**直截面**.

垂直於角柱一側稜的平面必垂直於任何側稜(510).

575. 定義. 以平行四邊形爲兩底面的角柱叫做**平行六面體**;所以一切的面都是平行四邊形.

576. 定義. 各側稜和底面垂直的平行六面體叫做**直平行六面體**.

有一條側稜和底面垂直的平行六面體,顯然爲直平行六面體.

577. 定義. 以矩形爲底的直平行六面體叫做**直六面體**(長方體);所以一切的面都是矩形.

證平行六面體爲直六面體,祇須證明在任一頂點的三角都是直角.

578. 定義. 各面都是正方形的平行六面體叫做**立方體**.

習 題

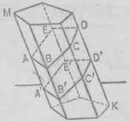
1. 能作幾條對角線在(a)一平行六面體?(b)一五角柱?(c)一四角柱?

2. 一多面體最少能有幾面?最少能有幾稜?幾頂點?

命題 I. 定理

579. 和角柱各側稜相交的諸平行平面所生的截面

是全同多邊形.



設　角柱KM被平行平面AD, A′D′所截,且割其一切側稜.

求證　截面AD≅截面A′D′.

證　AB∥A′B′, BC∥B′C′, 等等.　(486)

∠ABC=∠A′B′C′, ∠BCD=∠B′C′D′ 等等.　(498)

AB=A′B′, BC=B′C′, CD=C′D′,等等.　(141)

∴ 截面AD≅截面A′D′.　(155)

580. 系. 角柱的兩底爲全同形,且與底面平行的平面所生的截面都和底面全同.

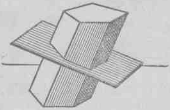
習　題

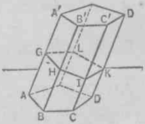
1. 在命題Ⅰ的圖中,過不相隣兩側稜的平面截角柱成一平行四邊形.試證明之.

2. 在同圖中,和一側稜平行的平面截角柱成一平行四邊形.試證明之.

命題 II. 定理

581. 角柱的側面積等於直截面的周圍和一側稜的積.





設 AD′ 爲角柱, L 爲其側面積, E 爲一側稜, 又 P 爲直截面 GK 的周圍.

求證 $L=P\times E$.

證 $BB'\perp GH$. (500)

∴ 面積 $AB'=GH\times BB'=GH\times E$. (353)

同理, 面積 $BC'=HI\times E$, 等等.

但 $L=$ 面積 $AB'+$ 面積 $BC'+\cdots\cdots$

$=GH\times E+HI\times E+IK\times E+\cdots\cdots$

$=(GH+HI+IK+\cdots\cdots)\times E$

$=P\times E.$

582. 系. 直角柱的側面積等於底面周圍以高乘之.

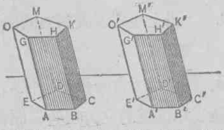
習　題

1. 若高爲 15 吋;底面爲三角形,他的三邊爲 8 吋,10 吋,及 11 吋.求直角柱的側面積.

2. 若側面積爲 190 平方吋;底面爲四邊形,他的邊爲 7 吋,8 吋,11 吋,及 12 吋.求直角柱的高.

命題 III.　定理

583. 兩角柱中,一角柱的一三面角的三面和他角柱的一三面角的三面各各相等,且各面的地位亦相似,則兩角柱全同.



設　角柱 AM 的三個面 AD, AH, AO 和角柱 A'M' 的三個面 A'D', A'H', A'O' 各各全同,且地位亦相似.

求證　　AM≅A'M'.

證　$\angle BAE=\angle B'A'E'$, $\angle BAG=\angle B'A'G'$,

$\angle EAG=\angle E'A'G'$.　　(何故?)

∴ 三面角 A≅三面角 A'.　　(559)

放三面角 A 在 A′ 上.

則 AD 面和 A′D′ 面重合, AH 面和 A′H′ 面重合, 及 AO 面和 A′O′ 面重合.

C 點落在 C′ 點, D 點落在 D′ 點. (何故?)

CK 將落在 C′K′, DM 落在 D′M′. (何故?)

G, H, 及 O 點各和 G′, H′ 及 O′ 點重合. (何故?)

∴ GM 平面和 G′M′ 平面重合. (481, 幾何公理 A.)

故 K 點和 K′ 點重合, M 點和 M′ 點重合. (何故?)

∴ 兩角柱完全重合卽全同.

584. 系 1. 等底等高的兩直角柱是全同的.

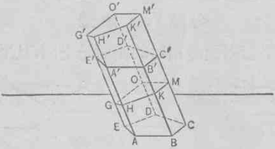
585. 系 2. 和上定理假設相同的兩截頭角柱是全同的.

586. 定義. 立體所含體積的單位的倍數稱爲立體的**體積**.每棱爲單位長的立方體叫做**體積的單位**.

587. 定義. 體積相等的立體叫做**等積**或**相等立體**.

命題 IV. 定理

588. 斜角柱與以直截面爲底, 側棱爲高的直角柱等積.



設　GM 爲斜角柱 AD′ 的直截面，GM′ 爲一直角柱，他的高等於 AD′ 的一側稜.

求證　　AD′=GM′.

證　在四邊形 ABKH 和 A′B′K′H′ 中，

AH=A′H′, BK=B′K′.　　(公理 3)

AB=A′B′, HK=H′K′.　　(139)

∠A=∠A′, ∠B=∠B′, ∠K=∠K′, ∠H=∠H′.　　(106)

∴ ABKH≅A′B′K′H′.　　(155)

同理，　BKMC≅B′K′M′C′.

但　　AD 面≅A′D′ 面.　　(580)

∴ 截頭角柱 AM≅截頭角柱 A′M′.　　(585)

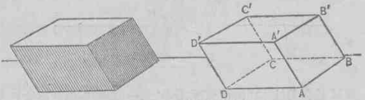
故　　AM′−AM=AM′−A′M′.　　(公理 3)

或　　AD′=GM′.

589. 系. 直截面全同，且側稜相等的兩角柱是等積的.

命題 V. 定理

590. 平行六面體相對的側面是全同,且平行.



設 AB', DC' 為平行六面體 AC' 的相對側面.

求證 AB' 面 $\cong DC'$ 面且 AB' 面 $\parallel DC'$ 面.

證 $AB =$ 且 $\parallel DC$. (575,139)

$A'A =$ 且 $\parallel D'D$.

$\therefore$ $\angle A'AB = \angle D'DC$. (498)

$\therefore$ AB' 面 $\cong DC'$ 面, (147)

且 AB' 面 $\parallel DC'$ 面 (494)

591. 系. 平行六面體的任何兩相對面可當做底面.

習題

1. 一直六面體,用上圖的記法,若 $AB=9$, $BC=12$, $CC'=8$,求對角線 AC' 的長.

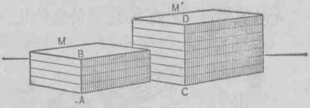
2. 一直平行六面體,用上圖的記法,若 $AB=5$, $BC=3$, $CC'=2$,及 $\angle ABC=120^\circ$,求對角線 AC' 的長.

3. 一直角柱的高爲 12 吋;底是一三角形,他的三邊爲 13 吋,15吋及 4 吋.求全面積.

4. 一直角柱的高爲 9 吋;底爲一菱形,每邊長 4 吋,有一角是$60°$.求全面積.

命題 VI. 定理

592. 等底的兩直六面體的比等於高的比.



設 AB,CD 爲等底直六面體 M,M′ 的高.

求證 $M:M'=AB:CD$.

(甲) $\frac{AB}{CD}$=一有理數.

設 $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$, m, n 爲整數.

卽假使分 CD 爲 n 等分,取其一份在 AB 上分割, AB 必含這樣一份的 m 倍.

過諸分點作平行於底的平面.

[學者自己完成之.]

(乙) $\frac{AB}{CD}$=一無理數.

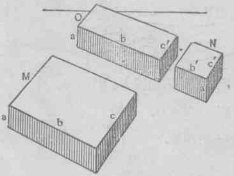
用第 IV 編命題 I 的方法.

593. 定義. 直六面體的向度就是會於同一頂點的三稜.

594. 系 上定理可述之如下: 二向度相同的兩直六面體的比等於第三向度的比.

命題 VII. 定理

595. 等高的兩直六面體的比等於底的比.



設 a, b, c 及 a, b', c' 各爲直六面體 M, N 的向度; a 爲其相等的高.

求證 $M:N=b\times c:b'\times c'$.

證 以 a, b, c' 爲向度,作一直六面體 O.

$$\frac{M}{O}=\frac{c}{c'}. \qquad (594)$$

$$\frac{O}{N}=\frac{b}{b'}. \qquad (594)$$

$\therefore\ \frac{M}{N}=\frac{b\times c}{b'\times c'}.$　　(公理7)

596. 系. 一向度相等的兩直六面體的比等於其他兩向度積的比.

597. 【註】 所謂三線的積,或一面積和一線的積,就是指他們數量的積.

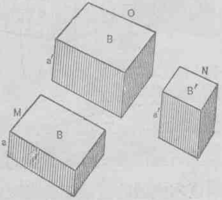
習　題

1. 等高的兩直六面體底的兩向度一爲 4 與 7,一爲 5 與 9.求兩體積的比.

2. 等底的兩直六面體的高爲 a,與 b.求兩體積的比.

命題 VIII. 定理

598. 兩直六面體的比等於底和高的積的比.



設　M, N 爲兩直六面體, B 和 B' 爲其底, 又 a 和 a' 爲其高.

求證　$M:N=B\times a:B'\times a'$.

證　以 B 爲底, a' 爲高, 作直六面體 O.

$$\frac{M}{O}=\frac{a}{a'}. \qquad (592)$$

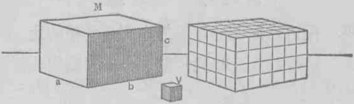
$$\frac{O}{N}=\frac{B}{B'}. \qquad (595)$$

$$\therefore\ \frac{M}{N}=\frac{B\times a}{B'\times a'}. \qquad (公理 7)$$

599. 系. 兩直六面體的比等於三向度的積之比.

命題 IX. 定理

600. 直六面體的體積等於三向度的積.



設　a, b, c 爲一直六面體M的三向度.

求證　M 的體積$=a\times b\times c$.

【示意】 作 V=體積的單位, 再應用命題 VIII.

601. 系 1. 立方體的體積等於其稜的立方.

602. 系 2. 直六面體的體積等於高和底的積.

習　題

1. 求一直六面體的底面積，設他的高爲 6，且與以 8, 12, 15 爲三向度的直六面體等積.

2. 一直六面體底的兩向度爲 12,20；全面積爲 800.求其體積.

3. 一直六面體底的兩向度爲 12 吋，和 a 吋；又全面積爲 (120+34a)平方吋.求其體積.

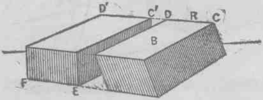
4. 兩立方體的稜一爲 120 吋，一爲 209 吋，求一立方體稜的長，設他的全面積等於上兩立方體全面積之和.

5. 直六面體三向度的比爲 3,4,5. 全面積爲 2350 平方吋，求其三向度.

6. 求對角線爲 $\sqrt{18}$ 的立方體的體積.

命題 X.　定理

603. 直平行六面體的體積等於一側面和其相當高的積.



設 R 爲直平行六面體的體積，B 爲其一側面，H 爲其相當高.

求證　　體積 $R=B\times H$.

證　引長 CD 及和 CD 平行的各稜. 取 $C'D'=CD$, 作垂直於 $C'D'$ 的平面 $C'E$, $D'F$; 則成一平行六面體 $C'F$.

則　　體積 $C'F$＝體積 R.　　(588)

但在 C' 的三角都是直角.　　(540)

∴　$C'F$ 爲一直六面體.　　(577)

故 $C'F$＝底×高.　　(602)

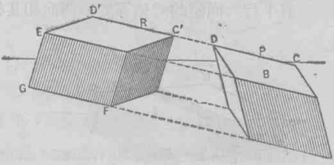
但 $C'F$ 的底＝B,　　(354)

又 $C'F$ 的高＝H.　　(519)

∴　$R=B\times H$.　　(代入)

命題 XI.　定理

604.　平行六面體的體積等於底和高的積.



設　P 爲任一平行六面體的體積, B 爲其底, H 爲其高.

求證　　體積 $P=B\times H$.

證　引長CD稜及和CD平行的各稜. 取 $C'D'=CD$, 過 C', D' 作 $C'D'$ 的垂直平面 $C'F$, 及 $D'G$; 則成一平行六面體 R.

$R=P$. (588)

但 R 爲一直平行六面體. (576)

故　$R=EC'\times$ 他的高. (603)

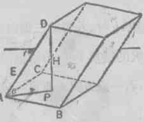
但　$EC'=B$, (354)

又　R 的高 $=H$. (519)

$\therefore\ R=B\times H$. (代入)

故　$P=B\times H$.

605. 【註】在任何角柱中: 其側稜 E, 高 H, 及 E 在底上的射影成一直角三角形. 和 H 相對的 e 角爲 E 對於底面的傾角.



習　題

1. 一平行六面體底面積爲 50, 側稜爲 20, 若側稜對於底面的傾角爲 30°, 求其體積.

2. 一平行六面體底面積爲 20,側稜爲 10. 若側稜對於底面的傾角爲 45°,求其體積.

3. 在前圖中,若 $AB=6, AC=5, \angle BAC=30^\circ, E=10$, 又 E 在底上的射影等於 8,求其體積.

4. 在同圖中,若 $AB=5, AC=6, AD=8, \angle BAC=60^\circ$, 又 E 對於底面的傾角爲 60°,求其體積.

5. 一平行六面體的底面積爲 10 平方吋. 若側稜在底上的射影等於 2 呎,又對於底面的傾角爲 60°,求其體積.

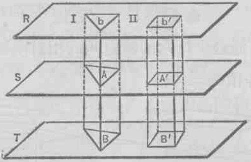
6. 一長方槽長 5 呎,闊 4 呎,深 3 呎. 裏面用 $\frac{1}{8}$ 吋厚的鋅敷起來,假使允許 3 方呎的重疊,問要多少立方呎的鋅?

7. 一立方吋的金塊搥成金箔能遮蓋 20000 平方吋的面積,求金箔的厚.

8. 一鐵製的開口桶厚 $\frac{1}{2}$ 吋. 外表的三個向度如下:長 2 呎,闊 1 呎 6 吋,高 1 呎. 若 1 立方呎的鐵重 460 磅,求桶的重量.

9. 設雨量爲 $1\frac{1}{4}$ 吋,若一立方呎水重 62.5 磅,則在一英畝的地上降下水多少噸?

606. Cavalieri 的定理.　夾在兩平行平面間的兩立體,若平行於這兩平面的一切相當截面爲等積,則兩立體的體積相等.



設　I, II 爲兩立體；面積 A＝面積 A′，爲平行於 R，T 兩平面的 S 平面所截的任何兩截面．

則　體積 I＝體積 II．

要嚴密證明這定理必須應用積分學．

607. 定理． 等底面積及等高的兩角柱的體積相等．

用上圖，

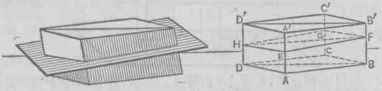
面積 B ＝ 面積 B′	(假設)
面積 A ＝ 面積 B	(579)
面積 A′＝ 面積 B′	(579)
面積 A ＝ 面積 A′	(代入)
∴ 體積 I ＝ 體積 II．	(606)

習　題

應用這定理證命題 XI．

命題 XII. 定理

608. 通過平行六面體對角的相對兩稜的平面分原體為兩等積的三角柱.



設 BDD′B′ 為通過平行六面體 AC′ 的兩稜 DD′, BB′ 的平面.

求證 角柱 ABD−A′=角柱 BCD−C′.

證 作直截面 EFGH,和 DD′B′B 交於 HF.

平面 AB′// 平面 DC′.　　　　(590)

∴ EF//HG.　　　　(486)

同理,　　EH//FG.

∴ EFGH 為一平行四邊形.

△EFH≌△FGH.　　　　(140)

∴ 角柱 ABD−A′=角柱 BDC−C′.　　　　(589)

習　題

1. 在命題 XII 圖中,若△ABD=60 平方吋,又立體的高為 10 吋,求三角柱 A′−ABD 的體積.

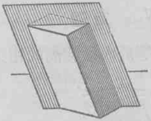
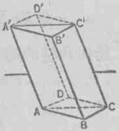
2. 在直平行六面體內,記號如上圖, AB=6, AD=4, AA′=8, 又

$\angle DAB=30°$，求三角柱 $A'-ABD$ 的體積.

3. 應用 Cavalieri 的定理證命題 XII.

命題 XIII. 定理

609. 三角柱的體積等於底面和高的積.

設　V 為三角柱 $ABC-B'$ 的體積，B 為底，H 為高.

求證　　體積 $V=B\times H$.

證　在 AB, BC, BB' 三稜上作成一個平行六面體 $ABCD-D'$.

$ABC-B'=\frac{1}{2}ABCD-B'$.　(608)

體積 $ABCD-B'=$ 底面 $ABCD\times H$.　(604)

但　　$ABCD=2B$.

故　$ABCD-B'=2B\times H$.

$\therefore\ V=B\times H$.

習題

1. 在命題 XIII 的圖中，若體積 $ABC-B'$ 為 200，高為 20，求

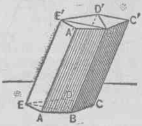
△ABC 的面積.

2. 在前圖中，若 $BA=2$, $BC=6$, $\angle ABC=30^\circ$, 又 $H=7$, 求 $ABC-B'$ 的體積.

3. 在前圖中，若 $AB=4$, $BC=6$, $BB'=5$, $\angle ABC=60^\circ$, 又 BB' 在底面上的射影爲 4, 求 $ABC-B'$ 的體積.

命題 XIV. 定理

610. 任何角柱的體積等於底面和高的相乘積.



設 V 爲角柱的體積，B 爲底面，H 爲高.

求證 $V=B\times H$.

證 過側稜 BB' 及底面的對角線 BE, BD, 等等作諸平面.

則這角柱分成許多三角柱，他們的高都是 H.

$B'-ABE=H\times(ABE)$. (何故?)

$B'-BDE=H\times(BDE)$, 等等.

$\therefore\ V=H\times(ABE+BDE+\cdots\cdots)$. (何故?)

即 $V=H\times B$.

611. 系 1　底面等積兩角柱的比等於高的比.

612. 系 2.　高相等兩角柱的比等於底的比.

513. 系 3.　等高,等底面積的兩角柱的體積相等.

習　題

1. 若一正四角柱的底面的邊爲 4,側稜爲 6,求其體積.

2. 若一正六角柱的底面的邊爲 2,側稜爲 5,求其體積.

3. 若一正六角柱的底面的邊爲 4,體積爲 $30\sqrt{3}$,求其高.

4. 若一正三角柱的底面的邊爲 8,高爲 10,求其體積.

5. 一直三角柱若其側稜爲 9,底面的邊爲 6,8,及10,求其體積.

6. 一直四角柱的側稜爲 E,底面爲 ABCD.若 AB=9,BC=12,CD=14,DA=13,AC=15,E=10,求其體積.

7. 一三角柱的底面的三邊爲 6,4,及 4,側稜 E=8,又E 對於底面的傾角爲 30°,求其體積.

8. E 爲角柱的側稜,p 爲 E 在底面上的射影,又 s 爲底面的邊.若 E=7,p=1,s=1,又底面爲正六角形,求其體積.

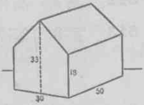
9. 在命題 XIV 的圖中,若 V=200,ABCDE=25,又 AA′ 在底面上的射影爲 6,求 AA′.

10. 在命題 XIV 的圖中,若 ABCDE=15,AA′ 在底面上的射影爲 3,又 AA′ 對於底面的傾角爲 45°,求角柱的體積.

11. 在前圖中,若 $AA'=6$,$ABCDE=20$,$V=60$, 求 AA' 對於底面的傾角.

***12.** 平行六面體的對角線互相二等分.

13. 求房屋中有多少立方呎的空氣,房屋的大小如附圖所示.



14. 前習題中求房屋的全表面積.

復習題

1. 立方體的對角線爲 $8\sqrt{3}$,求立方體的體積及其全面積.

2. 截頭直三角柱的三側稜各爲 8″, 9″, 和 12″; 底面各邊爲 12″, 27″, 和 25″,求其側面積.

3. 直角柱的底面爲一菱形,其一邊爲 10 吋,而較短的對角線爲12吋.角柱的高爲 15 吋.求其體積.

4. 以 4 吋爲邊的正六角形爲底面的角柱, 其稜爲 7 吋; 角柱的稜和高成 60° 的角.求角柱的體積.

5. 立方體的體積等於對角線的立方乘 $\frac{1}{9}\sqrt{3}$,試證明之.

6. A,B 爲所設兩點各在相交兩平面 M,N 上. 在 M,N 的交線上求一點 Z,使 $AZ+ZB$ 爲極小.

7. 三平面角爲 120°,80°,165°. 這三角能構成一三面角否?何故?

8. 一三面角的兩個二面角相等則兩個面角亦相等,其逆亦眞.

9. 從一點 P 引兩平面的垂線，其垂足爲 M, N，則兩平面的交線必垂直於平面 MNP.

10. 兩直線在同一平面上的射影卽使平行，兩直線未必平行.

11. 平面外一定直線，若所對之角爲直角時，則直角頂點在平面上的軌跡是什麼？並證明在什麼時候軌跡變爲一點？什麼時候消滅？

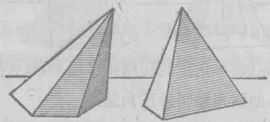
12. 立方體的對角線和與其不相交的一稜間的最短距離等於這立方體一面的對角線的一半，試證明之.

13. 若 MA, MB, MC 爲平行六面體的三稜，又 MD 爲一對角線，則 ABC 平面分 MD 之點爲 MD 的三等分點.

14. 設一四面體的三雙相對稜相等，則各面都是銳角三角形.

15. 若一平面截一四面體，所成截面爲一平行四邊形，則這平面和一雙相對的稜平行.

角　錐



614. 定義. 以多面角的諸面及和各面相交的一平面爲界的多面體叫做**角錐**.

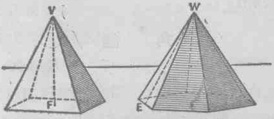
很明顯的，會於多面角頂點的諸面都是三角形，其餘的一面為一多邊形．

615. 多面角的頂點叫做**角錐的頂點**，多面角的稜為**側稜**，會於頂點的諸三角形為**側面**，側面面積之和為**側面積**，又和頂點相對的面為**底面**．

616. 定義． 角錐依他的底面為三角形，四邊形等等而叫做**三角錐**，**四角錐**等等．

【註】 四面體是一三角錐．

617. 定義． 從角錐的頂點所引底平面的垂線的長，如 VF，叫做角錐的**高**．



618. 定義． 角錐的底為正多邊形，且其中心和高的足重合，則這角錐叫做**正角錐**．

正角錐又名直角錐．

619. 定義． 過正角錐的頂點而垂直於底面的線

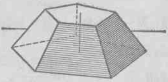
叫做**正角錐的軸**.

因正角錐的各側稜和底面相交的點與高的足爲等距離,所以都相等.故正角錐的各側面都是全同的等腰三角形.

620. 定義. 正角錐任一側面的高,如WE,(617的圖)叫做**正角錐的斜高**.

621. 定義. 角錐底面與和各側稜相交的平面所成截面間的角錐部分,叫做**斜截頭角錐**.

622. 定義. 截面和底面平行的斜截頭角錐,叫做**截頭角錐**.



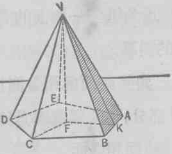
623. 定義. 截頭角錐兩底面間的垂直距離叫做**截頭角錐的高**.

624. 定義. 截頭角錐各側面面積的和叫做**截頭角錐的側面積**; **截頭正角錐的各側面**是全同的等腰矩形.

625. 定義. 截頭正角錐一側面矩形的高叫做**截頭正角錐的斜高**.

命題 XV. 定理

626. 正角錐的側面積，等於斜高和底面周圍相乘積之半.



設 V—ABCDE 爲有 n 個側面的正角錐，P 爲底面的周圍，L 爲側面積，又 S 爲斜高.

求證 $L=\frac{P\times S}{2}$.

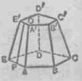
證 $\triangle VAB=\triangle VBC=\triangle VCD$，等等. (619)

$\triangle VAB=\frac{AB\times S}{2}$.

$\therefore L=\frac{n\times AB\times S}{2}$,

或 $L=\frac{P\times S}{2}$.

627. 系. 截頭正角錐的側面積等於兩底周圍的和與斜高相乘積之半.



【示意】 側面的形狀是什麼?

628. 有許多關於正角錐的計算，三種直角三角形最關重要．(參看命題 XV.) 這三種三角形用 VKF, VAK,及 VFC 表明之：△VKF 含 S,H,r,∠f. △VAK 含 E,S,$\frac{s}{2}$. △VFC 含 E,H,R,∠e.

這裏所用的記號：

E＝側稜．

H＝立體的高．

S＝斜高．

s＝底面的邊．

r＝底面的邊心距．

R＝底面的半徑．

∠e＝E 對於底面的傾角．

∠f＝一側面對於底面的傾角．

以後還有幾個記號是：

B＝底面積．(倘有兩個底面則是下底面)

b＝上底面積．

L＝側面積．

V＝體積．

T＝全面積．

h＝下底面三角形的高．

h′＝上底面三角形的高．

s′＝上底面的邊．

r′＝上底面的邊心距．

R′＝上底面的半徑．

習　題

1—4 求側面積：

1. 一正三角錐，若 s=5, S=4.

2. 一正四角錐，若 $s=8$, $H=3$.

3. 一正八角錐，若 $E=13$, $s=10$.

*4. 一正四角錐，若 $E=8$, $\angle e=30^\circ$.

5. 一正三角錐，若 $s=2$, $S=3$, 求全面積.

6. 一正六角錐，若 $s=4$, $H=2$, 求全面積.

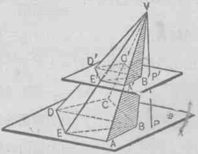
7. 一正五角錐，若 $L=60$, $s=3$, 求斜高.

命題 XVI.　定理

629. 若一角錐爲一平行於底面的平面所截，則：

(1) 分諸側稜及其高成比例.

(2) 截面爲與底面相似的一多邊形.



設 角錐 V—ABCDE 爲一平行於底面的平面所截，和側稜交於 A', B', C', D', E', 和高 VP 交於 P'.

(1) 求證 $\frac{VA'}{VA}=\frac{VB'}{VB}=\cdots\frac{VP'}{VP}$.

經過 V 作一平面 // 底面，從(495)可直接推論得之.

(2) **求證** ABCDE$\sim$A′B′C′D′E′.

證 過 VB, 及 VE 作一平面和兩平行平面各交於 BE, 及 B′E′. 同樣, 得 BD, B′D′.

AB//A′B′, BE//B′E′, 及 EA//E′A′. (486)

$\therefore$ ∠ABE=∠A′B′E′, ∠BEA=∠B′E′A′. (498)

$\therefore$ △ABE$\sim$△A′B′E′. (305)

同樣, △BED$\sim$△B′E′D′, 等等.

$\therefore$ ABCDE$\sim$A′B′C′D′E′. (316)

630. 系 1. 平行於角錐底面的截面和底面之比等於頂點到截面距離的平方和角錐高的平方之比.

從 △VAB 和 V′A′B′ 的相似推論出:

$$AB:A'B'=VA:VA'=VP:VP',$$

但 $$ABCDE:A'B'C'D'E'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2$$

$$=\overline{VP}^2:\overline{V'P'}^2.$$

631. 系 2. 若兩角錐高相等底亦等積, 用平行於各底面之平面作兩截面, 與頂點的距離相等, 則兩截面必等積.

【示意】 若 B 爲底面積, b, b′ 爲截面積,

則 $B:b=\overline{VP}^2:\overline{VP'}^2$,

及 $B:b'=\overline{VP}^2:\overline{VP'}^2$. (用275)

習題

1. 正三角錐的高爲12呎，底的每邊爲4呎．距頂點4呎作一平行於底面的平面，求其截面的面積．

2. 正四角錐的底的每邊爲3呎，高爲8呎．距頂點3呎作一平行於底面的平面，求其截面的面積．

3. 正六角錐的底面每邊爲10吋，若高爲5吋，則欲使截面的面積爲$3\sqrt{3}$平方吋，必須距頂點多少遠？

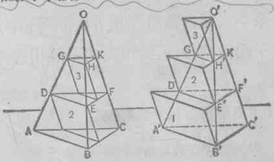
4. 一截頭正三角錐，若$S=6$, $s=4$, 及$s'=3$，求其側面積．

5. 一截頭正四角錐，若$s=12$, $s'=4$, 及$H=3$，求其側面積．

6. 每稜爲4″之立方體，過會於一頂點三稜之中點作平面，截去各角．求所餘立體的表面積．

命題 XVII. 定理

632. 底面等積及高相等的兩三角錐體積必相等．



設　O－ABC, O′－A′B′C′ 爲兩三角錐，高相等及底面等積，體積爲 V, V′.

求證　　V＝V′.

證　　假使 V′＞V.

將兩底面放置在同一平面內.

分兩高各爲 n 等分，命其一分的長爲 h.

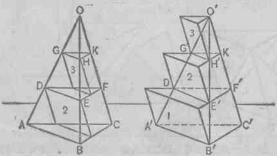
過各分點作平行於底面的平面.

則所成的相當截面必等積.　(631)

用 A′B′C′ 底面及 O′－A′B′C′ 的各平行截面爲下底面作角柱，使各側稜都和 O′C′ 平行，高等於 h.

用 O－ABC 的各平行截面爲上底面作角柱，使各側稜都和 OC 平行，高等於 h.

O－ABC 內的每一角柱和 O′－A′B′C′ 內的每上面一個角柱體積相等，故兩羣角柱之差等於 O′－A′B′C′ 內最下的一角柱.



將兩角錐的高的等分數增大，則每份的 h，及 O′－A′B′C′ 內最下的一

角柱可使之減少至無限小.或說:設 P' 和 P 表這兩羣角柱的體積,則$(P'-P)$的極限$=0$.

但 $P'>V'$, (公理 11.)

及 $P<V$. (公理 11.)

$\therefore\ P'-P>V'-V$[1].

若 V' 大於 V,則 $V'-V$ 爲一正量,而這正量小於一以零爲極限的量,是不可能的.

所以 V' 必不能大於 V.同理可證角錐 V 必不能大於角錐 V'.

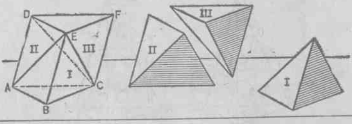
$\therefore\ V=V'$.

習題

應用 Cavalieri 的定理證本定理.

命題 XVIII. 定理

633. 三角錐的體積等於底和高相乘積的三分之一.



1. 這裏所含的原理是一公理,雖這公理能從其他公理導出,卽:從不等量減去次序相反的不等量,其剩餘仍爲不等.

設　三角錐 E—ABC 的體積爲 V，底面積爲 B，高爲 H.

求證　　　$V=\frac{1}{3}B\times H$.

證　在 ABC 上作角柱 ABC—DEF，使側稜都和 EB 相等且平行.

這角柱是由角錐 E—ABC 和四角錐 E—ACFD 所組成.

過 ED，EC 作平面截 ACFD 於 DC，成兩個三角錐，E—DCF，及 E—ADC.

用 I，II，及 III 表 E—ABC，E—ADC，及 E—DCF 的體積.

將 C 看做他們的公共頂點，則角錐 I 和 II 爲同高及等底面.　(140)

$\therefore\quad I=II.$　(632)

將 E 看做 II 和 III 的公共頂點，同樣可得

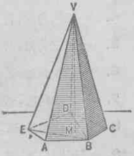
$$II=III.$$

$$\therefore\quad I=II=III.$$

故，　$I=\frac{1}{3}$ 角柱 ABC—EFD.

所以　　$V=\frac{1}{3}B\times H.$　(609)

634. 系 1. 任何角錐的體積等於底和高的積的三分之一.



因倘將含有任何一稜及與此稜相遇的各對角線(底面的)作諸平面則這角錐可以分成許多三角錐，這許多三角錐有相同的高 VM，或 H.

$$V-ABE=\frac{1}{3}H\times ABE.$$

$V-BED=\frac{1}{3}H\times BED$,等等.

$\therefore$ $V-ABCDE=\frac{1}{3}H(ABE+BED+\cdots\cdots)$.

$V-ABCDE=\frac{1}{3}H\times B$.

635. 系 2. 兩角錐體積之比等於底面積和高的相乘積之比.

636. 系 3. 底面積相等兩角錐之比等於高之比. 高相等兩角錐之比等於底面積之比.

637. 系 4. 等高,等底面積的角錐的體積必相等.

習 題

1. 三角錐的底面積爲 20,一側稜爲 12,且這稜對於底面的傾角爲 30°,求體積.
2. 三角錐的高爲 8,底面的三邊爲 14,15, 及 13.求體積.
3. 一角錐的底面爲一正方形,每邊爲 6,體積爲 72.求其高.
4. 一正六角錐,若 $s=6$, 及 $H=8$,求其體積.(看 628 節的記號)
5. 一正三角錐,若 $s=4$, 及 $H=6$,求其體積.
6. 一正四角錐,若 $s=6$, 及 $S=5$,求其體積.
7. 一正四角錐,若 $S=12$,及 $\angle f=30°$,求其體積.
8. 一正六角錐,若 $E=12$,及 $\angle e=30°$,求其體積.
9. 一正四角錐,若 $E=11$,及 $H=7$,求其體積.

10. 一正六角錐,若 $E=7$,及 $s=1$,求其體積.

11. 一正四角錐,若 $S=4$,及 $\angle f=45°$,求其體積.

12. 一正四角錐,若 $V=336$,及 $H=7$,求其側稜.

13. 大金字塔(Ghizeh 金字塔)的底面爲 233 公尺的正方形,高爲 146.5 公尺.求體積及重量,設材料的平均重量每立方公尺爲 3 噸.

14. 立方體對角線和在底面上的射影所成的角是多少度?

15. 一平面與四面體相對兩稜平行,則所生的截面爲平行四邊形.

16. 直六面體的四對角線相等.

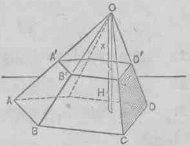
17. 一四面體的各頂點和對面的三中線的交點的聯結線相交於一點,且分每聯結線爲 3:1 之比.

18. 角錐側面積必較其底面積爲大.

19. 正角錐的體積,等於側面積與底面中心到一側面的距離的三分之一的相乘積.

命題 XIX. 定理

638. 若 H 爲截頭角錐的高,B 爲下底面積,又 b 爲上底面積,則體積等於$\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$.



【證】 將截頭角錐的各稜延長

使交於 O 點，又 x 表上部角錐的高．

很明顯的，　$V=(O-ABCD)-(O-A'B'C'D')$

$$=\frac{1}{3}B(H+x)-\frac{1}{3}bx \qquad (633)$$

$$=\frac{1}{3}[BH+Bx-bx].$$

$$V=\frac{1}{3}[BH+x(B-b)].$$

從下列比例可求 x 的值：

$$B:b=(H+x)^2:x^2. \qquad (630)$$

$$\therefore\ \sqrt{B}:\sqrt{b}=H+x:x. \qquad (287)$$

$$\therefore\ \sqrt{B}-\sqrt{b}:\sqrt{b}=H:x. \qquad (282)$$

$$\therefore\ x=\frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}.$$

代入　$V=\frac{1}{3}[BH+x(B-b)]$內，

得　$$V=\frac{1}{3}\left[BH+\frac{H\sqrt{b}(B-b)}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}H[B+\sqrt{b}[\sqrt{B}+\sqrt{b}]].$$

或　$$V=\frac{1}{3}H[B+\sqrt{Bb}+b].$$

習　題

1. 一截頭三角錐，若下底面積爲 9，上底面積爲 4，又高爲 5，求其體積．

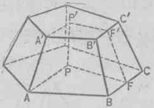
2. 一截頭正四角錐，若下底面的邊爲 7，上底面的邊爲 6，又高爲 8，求其體積．

3. 一截頭角錐，若上底面積為 2，下底面積為 18，又體積為 260，求其高.

4. 截頭正三角錐的兩底面的邊為 8，和 6，又高為 9. 求體積.

5. 截頭正六角錐兩底面的邊為 4，和 2，又高為 9，求體積.

639.【註】 在較難的截頭角錐問題中，三個梯形是很重要，即：



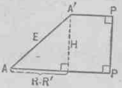
APP′A′，FPP′F′ 及 BFF′B′ (附圖).

用(628)的記號則，

APP′A′ 含 H，E，R，R′，$\angle e$.

FPP′F′ 含 H，S，r，r'，$\angle f$.

BFF′B′ 含 S，E，$\frac{s}{2}$，$\frac{s'}{2}$.



因為每一個這樣的四邊形，含有兩個直角，所以倘其中三部分已知，就可求其他的部分.

欲解一梯形通常通過一頂點引對邊的平行線，解所成的三角形.

6. 一截頭正六角錐，若 $s=10$，$s'=6$，及 E=5，求其體積.

7. 一截頭正四角錐，若 S=13，$r=11$，及 $r'=7$，求其體積.

8. 一截頭正五角錐，若 $s=11$，$s'=5$，及 E=5，求其側面積.

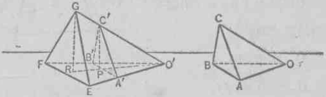
9. 一截頭正六角錐，若 $s=10$，$s'=8$，及 E=4，求其側面積.

10. Cleopatra 氏針為一個埃及方尖碑，已移在紐約中央公園內. 這是一個截頭四角錐，高為 64 呎，底面為每邊 8 呎的正方形，頂為每邊 5

呎的正方形，又上載一7呎高的角錐．求其體積及重量．(假定每立方呎的重量為165磅)

命題 XX. 定理

640. 兩三角錐有一三面角彼此相等，則體積之比等於這三面角的三稜的積之比．



設 V, V′ 為三角錐 O－ABC, O′－EFG 的體積，三面角 O 和O′相等．

求證 $\frac{V}{V'}=\frac{OA\times OB\times OC}{O'E\times O'F\times O'G}$.

證 將兩三角錐放在一起，使兩三面角 O 和 O′相重合．

引 C′P 及 GR 使和O′FE 面垂直，又設含 C′P 和 GR 的平面和 O′EF 面相交於直線 O′PR．

因 O′A′B′ 及 O′EF 為三角錐 C′－O′A′B′ 及 G－O′EF 的底面．C′P, GR 為其高，

$$\frac{V}{V'}=\frac{\triangle O'A'B'\times C'P}{\triangle O'EF\times GR}=\frac{\triangle O'A'B'}{\triangle O'FE}\times\frac{C'P}{GR}. \qquad (635)$$

$$\frac{\triangle O'A'B'}{\triangle O'EF}=\frac{O'A'\times O'B'}{O'E\times O'F}. \qquad (377)$$

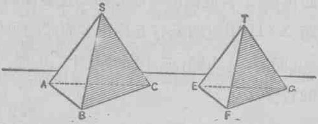
$$\frac{C'P}{GR}=\frac{O'C'}{O'G}. \qquad (何故?)$$

$$\therefore \frac{V}{V'}=\frac{O'A'\times O'B'}{O'E\times O'F}\times\frac{O'C'}{O'G}=\frac{OA\times OB\times OC}{O'E\times O'F\times O'G}. \qquad (何故?)$$

641. 定義. 二多面體面數相同,彼此各各相似,且在相似地位,又相當的各多面角各相等,這樣的多面體稱為**相似多面體**.

命題 XXI. 定理

642. 兩相似四面體體積之比等於相當稜的立方之比.



設 V, V′ 為兩相似四面體 S−ABC, T−EFG 的體積.

求證 $\frac{V}{V'}=\frac{\overline{SB}^3}{\overline{TF}^3}=\frac{\overline{SA}^3}{\overline{TE}^3}$,等等.

證 三面 $\angle S$=三面 $\angle T$. (641)

$$\frac{V}{V'}=\frac{SB\times SC\times SA}{TF\times TG\times TE}\text{或}\frac{SB}{TF}\times\frac{SC}{TG}\times\frac{SA}{TE}. \qquad (640)$$

但 $$\frac{SB}{TF}=\frac{SC}{TG}=\frac{SA}{TE}. \qquad \text{(何故?)}$$

$$\therefore\ \frac{V}{V'}=\frac{\overline{SB}^3}{\overline{TF}^3}. \qquad \text{(何故?)}$$

習　題

1. 在命題 XXI 的圖中,若 SA=3 及 TE=2, 求 V 對於 V′ 的比.
2. 在同圖中,若 SB=2, 及 V:V′=1:2, 求 TF.

正多面體

643. 定義. 多面體的各面若爲全同的正多邊形,且各多面角皆相等,這樣的多面體稱爲**正多面體**.

在命題 XXII 中證明祇有五種正多面體的可能,卽四面體,八面體,立方體,二十面體及十二面體.(圖見49頁及92頁.)

命題XXII. 作圖題

644. 能成立的正凸多面體種數的決定.

凡是凸多面角至少須有三個面,且其面角之和須小

於 360°.　(558)

1. 由三個,四個,或五個正三角形可造成一凸多面角.因正三角形每角為 60°,六個角相加等於 360°,其和大於一凸多面角各面角之和.

所以倘用**正三角形**為面造成的正凸多面體有**三種**的可能.

2. 由三個正方形可造成一凸多面角,但不可以用四個或多於四個.　(何故?)

所以倘用**正方形**為面造成的正凸多面體祇有**一種**的可能.

3. 由三個正五邊形可造成一凸多面角,但不可以用四個或多於四個.　(何故?)

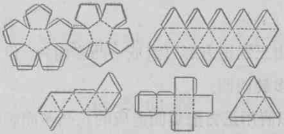
所以倘用**正五邊形**為面造成的正凸多面體祇有**一種**的可能.

4. 由正六邊形,正七邊形,或正八邊形等,欲造成一凸多面角是不可能的.　(何故?)

所以祇有五種凸正多面體的可能,就是**四面體**,**八面**

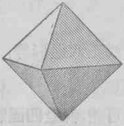
體,**二十面體**,(用正三角形爲面),**六面體**或**立方體**(用正方形爲面),及**十二面體**(用正五邊形爲面).

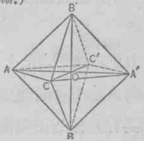
645. 製作正多面體,可在馬糞紙上畫下面的圖形,在虛線上用刀略切不使致斷,摺疊成形,在狹條部份用糊使各稜接合.



習　題

1. 三等長的線 AA′, BB′ 及 CC′ 三中點同在一點 O, 每一線和其他二線垂直, 那麼 A, B, C, A′, B′, C′ 諸點決定一正八面體. (AA′, BB′, 及 CC′ 叫做正八面體的軸.)





2. 若正八面體的一稜爲2吋,求各軸的長(AA'等).

3. 若正八面體的一稜爲4吋,求其體積,及表面積.

4. 一角錐底面的三邊爲10,17,及21.若高爲5,求其體積.

5. 一角錐底面的三邊爲9,10,及17.若側稜爲20,又側稜在底面上的射影爲12,求其體積.

6. 一角錐的一側稜爲10,對於底面的傾角爲30°.若角錐的體積爲100,求其底面積.

7. 一角錐的底面是一菱形,他的對角線爲10,和20.若高爲6,求其體積.

***8.** 平行六面體的對角線分其形爲六個等體積的角錐.

9. 平行六面體內的任意一點和八頂點相聯結,作成六個角錐,其中相對任何二角錐的和等於其他相對任何二角錐的和.

10. 三角錐的各稜爲10,求其體積.

11. 正三角錐底面的周圍爲30.若高爲12,求其體積.

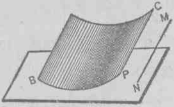
12. 一角錐的底面爲一平行四邊形,他的底邊爲10,高爲8.若一側稜爲6,且和底面成45°的角,求其體積.

13. 一角錐的底面爲一矩形,他的兩邊爲a和b.一側稜爲c,對於底面的傾角爲30°,求其體積.

14. 一底面爲b的角錐與他一以a爲底面h爲高的角錐等積,求其高.

柱[1]

646. 定義. 一直線沿一定曲線而動，且常和一不在曲線的平面上的定直線平行，這樣所生的面叫做**柱面**.



647. 定義. 這動直線叫做柱面的**母線**；定曲線叫做**準線**；在任何位置時的動直線叫做柱面的**基線**.

648. 定義. 柱面和與基線相截的兩平行平面所成的圖形叫做**柱**或**柱體**；平行平面爲柱面所圍界的部份叫做**底面**；平行平面間所夾的柱面部份叫做**側面**.

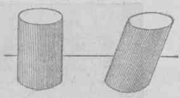
柱的基線都相等，因他們都是夾在平行平面間的平行線.

649. 定義. 底面爲圓的柱叫做**圓柱**.

650. 定義. 基線都和底面垂直的柱叫做**直柱**.

---

1. 譯註 柱(Cylinder)和圓柱(Circular Cylinder)有分別，不可混同. 但初學者除圓柱外不知其他倘有柱，教者可以淺顯的柱(如橢圓柱等)例解之.

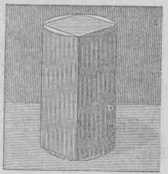


直柱　斜柱

651. 定義. 基線和底面斜交的叫做**斜柱**.

652. 定義. 柱的兩底面間的垂直距離叫做柱的**高**.

653. 定義. 若一直線和柱的側面接觸於一點,雖延長之亦不再相交,則稱這**直線和柱相切**.若一平面含柱的一基線,而不與柱相交,則稱這**平面和柱相切**.



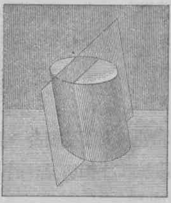
內接角柱

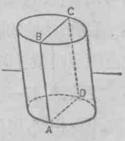
654. 定義. 角柱的側稜爲柱的基線,角柱的底面內接於柱的底面,則稱這角柱**內接於柱**.

655. 定義. 柱被一平面所截,所成的圖形叫做**柱的截面**;垂直於基線的平面所成的截面叫做**直截面**.

命題XXIII. 定理

656. 過一基線的平面所成柱的任何截面爲一平行四邊形.





設　ABCD 爲過柱 AC 的基線 AB 的截面.

求證　ABCD 爲平行四邊形.

證　在 AC 平面內過 D 引直線平行於 AB.

則這直線爲柱的一基線.　(646).

因這直線在AC平面內且爲柱面的基線,必爲他們的交線,所以和DC重合.

∴　DC 是一平行於 AB 的直線.

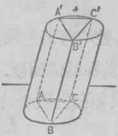
又　　AD 是一平行於 BC 的直線.　　(何故?)

∴　ABCD 爲一平行四邊形.　　(何故?)

657. 系.　過直柱的一基線的平面所成的截面爲一矩形.

命題 XXIV.　定理

658. 柱的底面是全同.



設　ABC 及 A′B′C′ 爲柱 BC 的底面.

求證　底面 ABC≅ 底面 A′B′C′.

證　設 A, B 爲下底面周圍上的兩定點, C 爲下底面周圍上的任意一點. AA′, BB′, CC′ 爲相當的基線. 作 $\triangle$ABC, 及 A′B′C′.

AB′, BC′, 及 CA′ 爲平行四邊形.　(656)

所以 AB=A′B′, BC=B′C′, CA=C′A′.

∴　△ABC≅△A′B′C′.　(s. s. s.=s. s. s.)

將上底面放置在下底面上, 使 A′B′ 和 AB 重合. 則 C′ 必和 C 重合. 但 C 爲下底周圍上的任意點, 所以下底面周圍上所有的點都和上底面周圍上的相當點重合, 反之亦眞.

∴　兩底面全同.

659. 系 1.　和柱的一切基線相截的任何兩平行截面必全同.

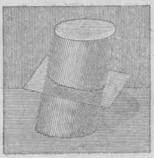
660. 系 2.　和柱的底面平行的任何截面必和底面全同.

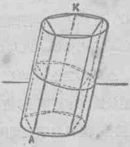
661. 定義.　若柱的內接角柱的側面之數無限增加,側面積的極限叫做**柱的側面積**.

柱的內接角柱若其側面之數無限增加,體積的極限叫做**柱的體積**.

命題 XXV.　定理

662.　圓柱的側面積等於直截面的周圍和基線的積.





設　L 爲 AK 柱的側面積, P 爲其直截面的周圍, E 爲一基線;以正多邊形爲底面內接於圓柱 AK 的角柱的側面積爲 L′, 直截面的周圍爲 P′.

求證　　$L=P\times E$.

[1]證　內接角柱的稜和柱的一基線相重合.

$$\therefore\ L'=P'\times E. \qquad (581)$$

若將內接角柱的面數增加,則 L' 漸近極限 L, P' 漸近極限 P.

$$\therefore\ L=P\times E. \qquad (414)$$

663. 定義. 直圓柱亦叫**迴轉柱**,因其可由一矩形以一邊為軸迴轉而成.

664. 相似矩形以相當邊為軸迴轉而生的迴轉柱叫做**相似迴轉柱**.

665. 系 1. 迴轉柱的側面積等於底面的周圍和高的積.

666. 系 2. 若 L 為迴轉柱的側面積, T 為全面積, H 為高, R 為其半徑,

$$L=2\pi RH,\ 及\ T=2\pi R(H+R).$$

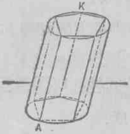
習　題

若 $H=6$, 及 $R=2$, 求迴轉柱的全面積.

命題 XXVI.　定理

1. 參閱 §701.

667. 圓柱的體積等於底面和高的積.



設 圓柱 AK的體積為 V，底面為 B，高為 H；內接於 AK 的角柱的體積為 V′，底面的正多邊形的面積為 B′.

[1]求證 $V=B\times H$.

【示意】 和上命題同樣應用極限定理[2].

668. 系. 迴轉柱的底面的半徑為 R,

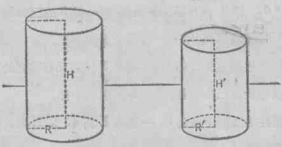
$$V=\pi R^2\times H.$$

命題 XXVII. 定理

669. 相似迴轉柱側面積，或全面積之比等於半徑的平方或高的平方之比；體積之比等於半徑的立方或高的立方之比.

---

1. 參閱 §701.
2. 若邊數增加無限，假定 B′ 漸近極限 B.



設　兩相似迴轉柱的側面積爲 L, L'; 全面積爲 T, T'; 體積爲 V, V'; 半徑爲 R, R'; 又高爲 H, H'.

求證　$L:L'=T:T'=R^2:R'^2=H^2:H'^2$,

及　$V:V'=R^3:R'^3=H^3:H'^3$.

證　$\frac{H}{H'}=\frac{R}{R'}=\frac{H+R}{H'+R'}$.　(284)

$$\frac{L}{L'}=\frac{2\pi RH}{2\pi R'H'}=\frac{R}{R'}\times\frac{H}{H'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{H^2}{H'^2},\quad(666)$$

及 $$\frac{T}{T'}=\frac{2\pi R(H+R)}{2\pi R'(H'+R')}=\frac{R}{R'}\times\frac{H+R}{H'+R'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{H^2}{H'^2},\quad(666)$$

及 $$\frac{V}{V'}=\frac{\pi R^2H}{\pi R'^2H'}=\frac{R^2}{R'^2}\times\frac{H}{H'}=\frac{R^3}{R'^3}=\frac{H^3}{H'^3}.\quad(668)$$

習　題

1. 若兩相似迴轉柱的高之比爲 3:4, 求體積之比.

2. 一迴轉柱的側面積爲 440, 又高爲 7, 求底面的半徑(假定 $\pi=\frac{22}{7}$).

3. 一迴轉柱的側面積等於半徑爲 3, 4, 及 5 的三個迴轉柱側面積的和，又設四柱體爲等高，求第一柱體底面的半徑。

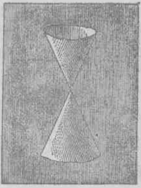
4. 兩迴轉柱體有相等的高，半徑爲 3, 4. 又有等高的第三迴轉柱體，他的體積等於這已知兩柱體的和，試求其半徑。

5. 若圓柱的底面半徑爲 3，一基線 E 爲 4，又 E 對於底面的傾角爲 45°，求其體積。

錐

670. 定義. 一直線沿一定曲線而移動，且常通過不在曲線平面內的一定點，所生的面叫做**錐面**.

671. 定義. 這動直線叫做錐面的**母線**；定曲線叫做**準線**；定點叫做**頂點**.



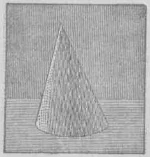
672. 定義. 在任何位置的母線叫做錐面的**基線**.

673. 定義. 當母線爲無限長時,則在頂點上下生兩個錐面;在上的叫做**上錐面**,在下的叫做**下錐面**.

674. 定義. 錐面,與和錐面諸基線相截的平面所生的圖形叫做**錐**,或**錐體**.

675. 定義. 錐面,叫做**錐的側面**;平面,爲**錐的底面**;錐面的頂點,爲**錐的頂點**;錐面的基線,爲**錐的基線**.

676. 定義. 底面爲圓的錐叫做**圓錐**;其頂點和底面中心的聯結線叫做**圓錐的軸**.



圓 錐

677. 定義. 圓錐的軸垂直於底面時叫做**直圓錐**;不垂直時叫做**斜圓錐**.

【註】本書祇討論圓錐.

678. 定義. 從錐體的頂點所引底平面的垂線叫

做錐體的高.

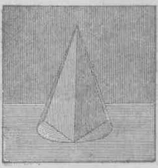
679. 定義. 直圓錐亦稱**迴轉錐**,因其可由一直角三角形以一直角邊爲軸迴轉而成.

680. 定義. 相似直角三角形以相當邊爲軸迴轉而生的迴轉錐叫做**相似迴轉錐**.

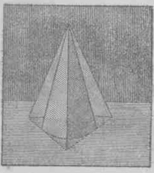
681. 定義. 一直線祇接觸錐體於一點,若延長之亦不再相交,則這**直線**叫做**切於錐體**.

682. 定義. 一平面含錐體的一基線且不再含其他點,則這**平面**叫做**切於錐體**.

683. 定義. 若角錐的底面內接於於錐體的底面,且頂點和錐體的頂點重合,則這角錐叫做**內接於錐體**.



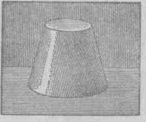
內接角錐



外切角錐

684. 若角錐的底面外切於錐體的底面，且頂點和錐體的頂點重合，則這角錐叫做**外切於錐體**.

685. 定義. 錐體的底面與和底面平行的平面間所夾部分叫做**截頭錐體**. 錐體的底面為截頭錐體的**下底**，平面所生的截面為**上底**.



截頭錐體

686. 若外切及內接於錐體的角錐的側面之數無限增加，又錐體的體積為 V，側面積為 L，底面積為 B，又底面的周圍為 C，

則 L 為外切角錐的側面積的極限.

V 為內接角錐的體積的極限.

B 為內接角錐的底面積的極限.

C 為外切角錐的底面周圍的極限.

【註】 前兩項可當做定義；後兩項為假定.

在下節更須假定：

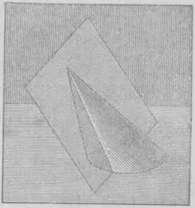
a) 幾個變量和的極限等於諸變量極限的和.

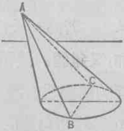
b) 幾個變量積的極限，倘沒有一個極限爲零，則等於各極限的積.

以上四個假定根據適當定義都能證明的.

命題 XXVIII. 定理

687. 過錐體的頂點的平面所成的每個截面是一三角形.





設 ABC 爲經過錐體頂點 A 的平面所成之截面.

求證 ABC 是一三角形.

證 聯結 A 和 B.

這直線爲錐體的一基線. (670)

這直線在所設平面內.　(481)

∴ 這直線爲錐面和所設平面的交線.

同樣, AC 直線爲錐面和所設平面的交線.

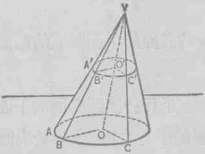
BC 是一直線.　(485)

∴ 截面 ABC 是一三角形.

688. 系. 經過直錐體的項點的平面所成的每個截面是一等腰三角形.

命題 XXIX. 定理

689. 平行於圓錐的底面的平面所成的每個截面是一圓.



設 A′B′C′ 爲平行於圓錐 V—ABC 的底面 ABC 所成的截面, O 爲底面中心, O′ 爲 VO 與 A′B′C′ 平面的交點.

求證 A′B′C′ 是一圓.

證 經過 VO, 及定半徑 OB 作一平面, 又經過 VO 及變的半徑 OC

作一平面，又設他們各與平面 A'B'C' 交於 O'B'，及 O'C'。

$OB \parallel O'B'$.　　(486)

$\therefore \triangle VOB \sim \triangle V'O'B'$.　　(307)

$\therefore \dfrac{VO}{VO'} = \dfrac{OB}{O'B'}$.　　(303)

同樣　$\dfrac{VO}{VO'} = \dfrac{OC}{O'C'}$.　　(303)

但　$OB = OC$.　　(何故?)

$\therefore O'B' = O'C'$.　　(275)

$\therefore$ A'B'C' 是一圓。

690. 系 1.　圓錐的軸必通過與底面平行的截面的中心，或

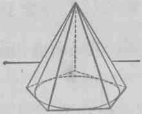
平行於圓錐的底面的平面所成的截面的中心的軌跡為圓錐的軸。

691. 系 2.　平行於圓錐底面的平面所成截面之比等於他們半徑的平方之比，或等於與圓錐頂點距離的平方之比。

命題 XXX.　定理

692.　迴轉錐的側面積等於斜高和底面周圍的積

之半.



設　L 爲迴轉錐的側面積, C 爲底面的周圍, S 爲斜高; L′ 爲外切於迴轉錐的角錐的側面積, P 爲其底面正多邊形的周圍.

[1]求證　$L=\frac{1}{2}C\times S.$

【示意】 外切一角錐;斜高爲 S. 應用極限定理證明之.

693. 系.　L 爲迴轉錐的側面積, T 爲全面積, H 爲高, S 爲斜高, R 爲底面半徑,

$$L=\pi R\cdot S.$$

$$T=\pi R(S+R).$$

習　題

1. 一迴轉錐的半徑爲 12, 高爲 5, 求側面積.

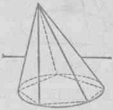
2. 一迴轉錐若用以迴轉的三角形其斜邊爲 10 吋, 兩銳角都爲 45° 求其側面積.

1. 參看 § 701.

3. 一迴轉錐，若 $L=36\pi$，$R=4$，求其高.

命題 XXXI. 定理

694. 錐的體積等於其底面積和高的積的三分之一.



設 V 爲錐的體積，B 爲底，H 爲高；V′ 爲外切角錐的體積，B′ 爲其底面的正多邊形.

[1]求證 $V=\frac{1}{3}B\times H$.

【示意】 用極限定理. $V'=\frac{1}{3}B'\times H$. (633)

695. 系. 若其錐爲迴轉錐，R 爲其底半徑，則

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

習 題

1. 一迴轉錐半徑爲 6，高爲 2，求其體積.
2. 一迴轉錐半徑爲 5，斜高爲 13，求其體積.
3. 一迴轉錐體積爲 314，高爲 3，求其側面積.(設 $\pi=3.14$).

1. 參看 § 701.

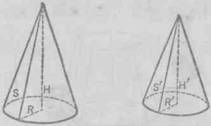
4. 圓錐的軸爲 17 吋,在底面上的射影爲 8 吋. 若其體積爲 80π, 求其底面的半徑.

5. 一迴轉錐,高爲 3 吋底面積爲 81π 平方吋,被一平行於底面的平面所截.若平面距底面 2 吋,求截頭迴轉錐的體積.

6. 一木質錐體的頂角爲 60°, 底面半徑爲 2 吋. 通過全錐鑽一半徑爲一吋的圓孔,又這孔的軸和錐的軸重合.問多少錐體變成木屑?

命題 XXXII. 定理

696. 兩相似迴轉錐側面積或全面積的比等於其高的平方之比,或其半徑的平方之比,或其斜高的平方之比;體積的比等於高的立方,或半徑的立方,或斜高的立方之比.



設 L, L′ 爲兩相似迴轉錐的側面積; T, T′ 爲全面積; V, V′ 爲體積; H, H′ 爲高; R, R′ 爲半徑; S, S′ 爲斜高.

求證 $L:L'=T:T'=H^2:H'^2=R^2:R'^2=S^2:S'^2$,

及 $V:V'=H^3:H'^3=R^3:R'^3=S^3:S'^3$.

和命題 XXVII 的證法相仿.

習 題

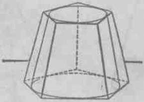
1. 求兩相似迴轉錐全面積的比,他們的高爲 (*a*) 12 吋及 24 吋; (*b*) 5 吋及 d 吋.

2. 一迴轉錐的體積爲 343 立方吋,又高爲 7 吋, 求其相似迴轉錐的體積,若高爲 (*a*) 8 吋; (*b*) 15 吋.

3. 以直角三角形的斜邊爲軸迴轉成一立體.若兩直角邊各爲15″及20″,求其體積.

命題 XXXIII. 定理

697. 截頭迴轉錐的側面積等於兩底面周圍之和之半與斜高的積。



設 L 爲截頭迴轉錐的側面積,C 和 C′ 爲底面的周圍,R 和 R′ 爲半徑,S 爲斜高; L′ 爲外切於錐的截頭正角錐的側面積, P 和 P′ 爲其底面的周圍.

求證　$L=\frac{1}{2}(C+C')\times S$.

證　外切的截頭角錐的斜高$=S$.　(何故?)

$\therefore\ L'=\frac{1}{2}(P+P')\times S$.　(何故?)

〔學者自己完成之.用極限定理.〕

698. 系.　截頭迴轉錐的側面積等於和兩底面等距離的截面的圓周和斜高的積.

因　$\frac{1}{2}(C+C')=\frac{1}{2}(2\pi R+2\pi R')=2\pi\left(\frac{R+R'}{2}\right)$.

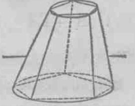
但　$2\pi\left(\frac{R+R'}{2}\right)=$和兩底面等距離的截面的圓周.

習　題

求截頭迴轉錐的側面積,若兩底面的半徑爲 6 和 7, 而 (a) 斜高爲 3. (b) 高爲 12.

命題 XXXIV.　定理

699.　截頭圓錐的體積等於兩底面與兩底面的比例中項之和與高的三分之一的積.



1. 參看 § 701 的註.

設　V 爲截頭圓錐的體積，B 爲下底面，b 爲上底面，H 爲高；V′ 爲以正多邊形爲兩底面的內接截頭角錐的體積，B′ 爲下底面，b' 爲上底面.

求證　$V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{B\times b})$.

[1]證　截頭角錐的高＝H.

則　$V'=\frac{1}{3}H(B'+b'+\sqrt{B'\times b'})$.　(638)

將內接截頭角錐的側面之數無限增加，

則 V′ 爲一變數以 V 爲極限，

B′ 漸近極限 B，

b' 漸近極限 b，又 $B'\times b'$ 以 $B\times b$ 爲極限.

$\therefore$ $B'+b'+\sqrt{B'\times b'}$ 漸近

極限 $B+b+\sqrt{B\times b}$.

$\therefore$ $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{B\times b})$.　(何故?)

700. 系．若這截頭圓錐爲迴轉錐，以 R, R′ 爲兩底面的半徑，

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+RR').$$

【註】上命題可述之如下：

截頭圓錐的體積等於三錐體體積之和，其公共的高等於截頭圓錐的

1. 參看 § 701 的註.

高，其底面一等於截頭圓錐的下底面，一等於上底面，一等於上下兩底面的比例中項.因 V 的值爲，

$$\tfrac{1}{3}H\times B+\tfrac{1}{3}H\times b+\tfrac{1}{3}H\times\sqrt{B\times b}.$$

習　題

1. 一截頭圓錐，若 $R=5$，$R'=4$，及 $H=6$，求其體積.

2. 荷蘭風車的石造物爲一中空的截頭錐，高爲 50 呎.下底面的外徑爲 35 呎，上底面的外徑爲 30 呎，下底面的內徑爲 30 呎，上底面的內徑爲 26 呎.問需石多少立方呎？

3. 截頭直圓錐上下底面的半徑各爲 3 吋及 9 吋；高爲 8 吋，求 (1) 斜高，(2) 體積，(3) 全面積.

4. 一截頭直圓錐的兩底面半徑爲 3 吋與 5 吋，又其體積等於高爲 6 吋底面半徑爲 4 吋的圓錐.問其高爲多少，計算至一吋的十分之一.

5. 求習題 1 的截頭圓錐的側面積.

6. 以一等腰梯形兩底中點的聯結線爲軸旋轉一周.若這梯形兩底邊之長爲 6 吋及 12 吋，所成的體積爲 105π 立方吋，求其高.

701. 以正多邊形爲底的角柱（或角錐）其與底面的邊數無關的諸性質卽是圓柱（或圓錐）的性質.

這敍述用高深的方法可以證明，且能用以證明第七編內的命題XXV，XXVI，XXX，及 XXXI.

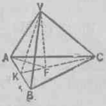
習　題

1. 用 § 701 的假定，證明第七編內的命題XXV，XXVI，XXX，及 XXXI.

2. 在 § 701 用"截頭角錐"代"角錐"證明命題 XXXIII，及 XXXIV.

雜　題

1. 一正三角錐底面的各邊為 5，又高為 3. 求其側稜，側面積，及體積[1].



$$AF=\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)=\frac{5}{3}\sqrt{3}；\ KF=\frac{1}{3}h=\frac{5}{6}\sqrt{3}.$$

$$E=VA=\sqrt{H^2+\overline{AF}^2}=\sqrt{9+\frac{75}{9}}=\sqrt{\frac{156}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{39}.$$

$$S=VK=\sqrt{H^2+\overline{KF}^2}=\sqrt{9+\frac{75}{36}}=\sqrt{\frac{399}{36}}=\frac{1}{6}\sqrt{399}.$$

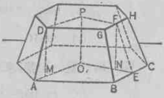
$$L=\frac{1}{2}S\,(AB+BC+CA)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{399}\cdot 15=\frac{5}{4}\sqrt{399}.$$

$$V=\frac{1}{3}B\times H=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\sqrt{3}\right)\cdot 3=\frac{25}{4}\sqrt{3}.$$

1. 關於記號可參看 § 628. 本題及以下諸例題解法的原理，可參看 § 628 及 § 639.

2. 一截頭正六角錐底面的邊各爲 14 及 6，又高爲 8. 求其側稜，側面積，及體積.

設 O 與 P 爲上下底面的中心. 引 OE，PF 各垂直於 BC，GH. 引 OA，PD，$DM \perp OA$，



又 $FN \perp OE$.

$NE=OE-PF=7\sqrt{3}-3\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

$S=FE=\sqrt{\overline{FN}^2+\overline{NE}^2}=\sqrt{64+48}$

$=4\sqrt{7}$.

$AD=\sqrt{\overline{DM}^2+\overline{AM}^2}=\sqrt{64+64}=8\sqrt{2}$.

$L=\frac{6}{2}[(14+6)4\sqrt{7}]=240\sqrt{7}$.

$V=(B+b+\sqrt{Bb})\frac{H}{3}=(294\sqrt{3}+54\sqrt{3}+126\sqrt{3})\frac{8}{3}$

$=1264\sqrt{3}$.

3. 一正角錐，設 s= 底面的一邊，n 爲底面的邊數，H 爲高. 求其側稜，及體積若:

(a) $n=3$, $s=12$, $H=12$.

(b) $n=4$, $s=6$, $H=9$.

4. 用前題的記號求側面積，若

(a) $s=6$, $n=3$, $H=1$.

(b) $s=8$, $n=4$, $H=5$.

5. 一截頭角錐，設 s= 下底面的一邊，s'= 上底面的一邊，n 爲底面的邊數，又 H 爲高，求其側稜及體積，若

(a) $s=10,\quad s'=6,\quad n=4,\quad H=1.$

(b) $s=8,\quad s'=5,\quad n=4,\quad H=3.$

(c) $s=10,\quad s'=6,\quad n=6,\quad H=2.$

6. 用前題的記號，求側面積，若

(a) $s=10,\quad s'=2,\quad n=4,\quad H=5.$

(b) $s=6,\quad s'=4,\quad n=4,\quad H=3.$

7. 一正角錐，若 $E=11$，$s=12$，及 $n=4$，求 V.

8. 一立方體的全面積爲 336 平方吋．求其體積．

9. 一直角柱的側面積爲 140．其底面爲一三角形，其三邊爲 5, 7, 及 8．求其體積．

10. 一斜角柱的底面爲內接於半徑 5 吋的圓內的正六邊形，若一側稜爲 8 吋，又其在底面上的射影爲 3 吋．求其體積．

11. 一角錐的高爲 24，底面爲每邊 10 的正方形．求距頂點 4 吋而平行於底面的截面積．

12. 一角錐的側稜爲 a，作一平行於底面的平面，使分角錐爲相等兩部分，則在側稜上須距頂點多少遠?

13. 一角錐的高爲 28 吋，底面爲正六邊形，每邊爲 8 吋．求從頂點到一截面的距離，若截面積爲 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 平方吋．

14. 一立方體的每面的對角線爲 15 吋,求全面積及體積.

15. 一立方體的對角線爲 30 吋,求其全面積及體積.

16. 一直角柱的底面爲一四邊形 ABCD, AB=7 吋, BC=20 吋, CD=15 吋, DA=24 吋, 及 A 角,和 C 角都是直角. 若角柱的高爲 12 吋,求其全面積及體積.

17. 一直角錐, 他的底面和高與每稜爲 10 吋的立方體的底面和高相同,求其側面積.

***18.** 直六面體的諸對角線必相等.

19. 一截頭正角錐的高爲 15 吋,兩底面各爲以 10 吋, 24 吋爲邊的兩正方形.求其側面積.

20. 一迴轉錐的高爲 12 吋.底面的直徑爲 16 吋. 被一距底面 9 吋的平行平面所截,求所成截頭錐的側面積及體積.

21. 一四面體兩雙相對的稜的中點,決定一平行四邊形.

22. 一直角柱的高爲 10 吋,其底面爲每邊 8 吋的正六邊形.從這角柱切取一同軸的最大圓柱,求這圓柱的面積及體積.

23. 一直角錐的底面爲每邊 20 吋的正六邊形, 又其側面對於底的傾角爲 60°.求其體積.

24. 聯四面體相對稜的中點的諸直線必會於一點且互爲二等分.

25. 一迴轉錐的高爲 27 吋,又其曲面積爲底面積的 7 倍.求其底面的半徑.

26. 一正六角錐,若側稜等於 13,又底面的邊等於 11,求其體積.

27. 一正四面體的每稜爲 4 吋,求其體積及面積.

28. 一正四面體,若從一頂點到對面的垂線爲 5 吋,求其全面積.

29. 一立方體,過會於每一頂點諸稜的中點作平面截去立方體的各角.若立方體的稜爲 2 呎,求所成立體的體積.

30. 一直徑爲10吋的圓柱形器要使他容10加侖.若一加侖等於231立方吋,求其高計算至吋的十分之一.

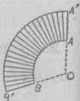
31. 一中空圓柱長爲 5 呎,外半徑爲 1 呎,厚爲 1 吋.若質料的重量爲水的 $7\frac{1}{2}$ 倍(卽其比重=7.5),一立方呎的水重 62.4 磅,求其重量.

32. 一直徑爲 6 吋的圓柱形器中盛有水. 投入一形狀不規則的物體後水面昇高 2 吋,求這物體的體積.

33. 從一立方吋的白金塊可拉成直徑爲$\frac{1}{100}$吋的白金絲多少碼?

34. 半徑爲 5 吋的半圓形的紙片可以湊合成一圓錐面,求這圓錐面所成的圓錐的體積及全表面積.

35. 由兩同心圓弧及兩半徑的一部份所圍成的面積 AA′B′B 做成一截頭圓錐的側面,其下底面爲 36π. 若 OA=5, 及 OA′=10,求 ∠O, 及截頭圓錐的體積.



36. 用與前題相似的紙片欲做成一截頭圓錐,其斜高等於 5 及其底面半徑爲 9 與 6,求 OA, OA′ 及 ∠O.

37. 一頂上封閉的圓柱形錫罐,若其高等於直徑,則需錫最少[1],裝

一夸爾的罐,直徑多少?(一夸爾 Quart=57.75 立方吋.)

38. 一蓬帳成 8 呎高的圓錐形.若蓬布爲 $188\frac{4}{7}$ 平方呎,問蓬帳遮蓋的地面多少平方呎?(設 $\pi=3\frac{1}{7}$).

39. 一圓錐形器的高等於底面的直徑,盛水至 6 吋深. 投入一立方體後水面昇高 2 吋,求立方體的稜.

40. 一長爲 6 呎,直徑爲 2 呎的圓柱形汽鍋內盛有水. 若其最大深度爲 6 吋,圓柱的軸放在水平位置,求水的體積.

復習題

1. 設 e 爲正四面體一稜的長,求證其全表面積 $=e^2\sqrt{3}$, 及體積 $=\frac{e^3}{12}\sqrt{2}$.

2. 求一正八面體的體積,及全表面積,若其稜爲 e.

3. 兩矩形的底爲 a 和 b,高爲 b 和 a,各以高爲軸而旋轉生出兩個直圓柱,試比較其全表面積及其體積.

4. 以直角三角形每直角邊爲軸旋轉而得的立體,試比較其全面積及體積.

5. 設 AB 及 CD 爲不在同一平面上的兩直線(歪線),又設 E 爲 AB 上任意點, F 爲 CD 上任意點.問 EF 中點的軌跡是什麼?說明理由.

6. 由每邊 $=e$ 的一正六邊形,以較長的對角線爲軸旋轉 360°. 用

譯註(1)理見極大極小的理論可參考微積分.

e 表出他的全表面積及體積.

7. 求證：直三角柱的體積等於任何一側面與對於這面的高的積之半.

8. 求證：若四角柱的一切對角線經過同一點，則這四角柱是一平行六面體.

9. 一平面應該怎樣截一立方體適使其截面成一正六邊形?

10. 正角柱的體積等於側面積與底面的邊心距之半的相乘積.

11. 與一平面及垂直於這平面的一直線等距離的點的軌跡是什麼?

12. 側面積相等的兩迴轉柱的體積之比是多少?

13. 體積相等的兩迴轉柱的側面積之比是多少?

第八編
球

702. 定義. **球**是一個面,這面上一切之點和一定點等距離,這定點叫做**球心**.

703. 定義. 從中心引到球上任何點之直線叫做球的**半徑**.

704. 定義. 經過球心而止於球面的直線叫做球的**直徑**.

705. 從上述定義得:

(1)球的半徑都相等,又直徑都相等.

(2)一半圓以直徑爲軸旋轉 360° 則生一球.

(3)若兩球的半徑或直徑相等,則兩球相等,其逆亦眞.

(4)若一點與球心的距離大於半徑,則這一點在球外.

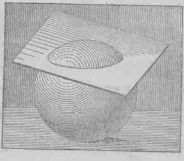
習題

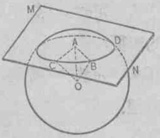
兩球的半徑各爲 10 吋及 4 吋,又其兩球心的距離爲 7 吋. 問小球上

各點是否都在大球內?

命題 I.　定理

706. 球被平面所截所成的截面是一圓.





設　CBD 為平面 MN 與中心為O的球的截面.

求證　　CBD 是一圓.

證　從 O 作 OA⊥MN.

作 AB, AC, CO, 及 OB.　AC 為定直線.

因　　　　OC=OB,

　　　　　CA=AB.　　　　　　　　(516)

因 AC 為定直線,故與 AC 相等的 AB,其動點 B 必和 A 點有一定的距離.

或 CBD 是一圓.　　　　　　　　(37)

707. 系 1.　和球心距離相等的平面截球所得的

圓必相等；和球心距離不相等的平面截球所得的兩圓近球心的較大.

因 $\overline{AC}^2=\overline{OC}^2-\overline{AO}^2$，當 AO 增加則 AC 減少.

708. 定義. 經過球心的平面截球所成的截面叫做**球的大圓**.

709. 定義. 不經過球心的平面所成的截面叫做**球的小圓**.

710. 定義. 和球的圓的平面垂直的球的直徑叫做**圓的軸**；其兩端叫做**圓的極**。

711. 系 2. 圓的軸必經過圓的中心.

712. 系 3. 一球的諸大圓都相等.

713. 系 4. 一球的任何兩大圓互相二等分.

因每大圓的平面，必含球心，其交線爲一直徑且二等分這兩圓.

714. 系 5. 任何大圓分球爲二等分.

715. 系 6. 過球面上任何三點祇能作一圓.(三點決定一平面.)

716. 系 7. 過球面上兩點 B 和 C 可作一大圓.

(三點 B, C, 及中心 O 決定一平面.)

通過已知兩點平常祇有一個大圓，惟倘這兩已知點為一直徑的兩端，那麼經過這兩點有無數的大圓。

717. 定義. 兩點間**大圓**的劣弧的長叫做這**兩點在球面上的距離.**

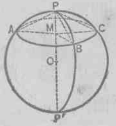
習　題

1. 拿地球當做一個球，則子午線是那種的圓？緯線呢？赤道呢？緯線的極是什麼？

2. 若小圓的平面距球心 9 吋，球半徑為 15 吋，問小圓的半徑是多少？

命題 II. 定理

718. 球的圓上各點和圓的一極為等距離.



設　P, P′ 為圓 ABC 的兩極.

求證　弧 PA = 弧 PB = 弧 PC,

　及　弧 P′A = 弧 P′B = 弧 P′C.

【示意】 用(711,515)證明直線 PA, PB 及 PC 的相等.

719. 定義.　球的圓上一點和較近的極的距離叫做**圓的極距離**.

720. 【注意】　大圓的四分之一叫做球面幾何學的**一象限**.

721. 系 1.　大圓的極距離是一象限.

系 2.　從圓的一極到圓上各點所引諸大圓的弧都是相等.

習　題

1. 設球的一圓的極距離為 60°, 球半徑為 13 吋.

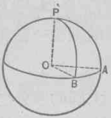
求　(a) 其平面和球心的距離.

　　(b) 圓的半徑.

2. 地球當做一個球, 其半徑為 4000 哩, 求在緯度 $23\frac{1}{2}$°N. 的地方和北極的極距離.

命題 III.　定理

722. 在球上有一點和其他兩點(不是一直徑的兩端)的距離都是一象限，則此點必爲通過這兩點的大圓的極.



設 P, A, 及 B 爲球上三點. PA, PB 爲象限.

求證 P 爲大圓 AB 的極.

【示意】 用(502)證明 OP 線是垂直於平面 ABO.

723. 【注意】 根據定理 III 我們可以用兩脚規在實質的球面上作過兩點的大圓,倘使已知球半徑.

以兩已知點 A，和 B 爲中心，用等於一象限的弦的長做半徑作弧相交於 P. 以 P 爲中心,半徑同上,作圓,那麼這就是所要求的圓.

724. 平面和球祗有一點共有，**這平面叫做切於這球.**

725. 定義. 直線雖任何延長和球祗有一點共有，**這直線叫做切於這球.**

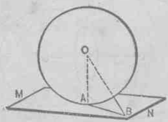
726. 定義. 兩球祇有一點共有,**這兩球叫做相切.**

727. 定義. 多面體的各面都和一球相切,**這球叫做內切於這多面體.**

728. 定義. 多面體的各頂點都在一球上,**這球叫做外接於這多面體.**

命題 IV. 定理

729. 過球半徑的外端而垂直於球半徑的平面必切於球.



設 平面 MN 過 A 點而垂直於球半徑 OA.

求證 MN 切於這球.

證 在 MN 內的任意一點 B 與 O 聯結.

那麼　　　$OB>AO$.　　　(518)

所以 B 在球外.　　　(705,(4))

所以在 MN 上除 A 外的各點都在球外,卽 MN 切於這球.

730. 系. 切於一球的平面(或直線)必垂直於過切點的半徑.〔用間接法證明之.〕

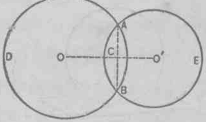
習　題

1. 過半徑的外端而垂直於這半徑的任何直線必切於球.

2. 切於球的一圓的一直線必切於這球,且在過這切點而切於這球的平面內.

命題 V. 定理

731. 兩球的相交處是一圓.



設 ABD和ABE爲相交兩球,其球心爲O和O′.

求證 ABD和ABE的相交處是一圓.

證 這相交的兩球可將相交的兩圓ABD和ABE以聯心線OO′爲軸旋轉而成.所以這交線是從A點旋轉而生.

但OO′是AB的垂直二等分線.　(79)

∴AB線旋轉時生一平面.　(504)

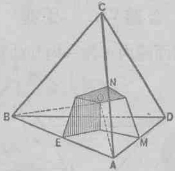
A(或 B)點旋轉時生一以 CA 爲半徑的圓.

所以兩球的相交處是一圓.

732. 系. 兩球相交所成的圓的平面必垂直於兩球的聯心線,且這圓的中心必在這聯心線上.

命題VI. 定理

733. 任何四面體外可作一外接的球.



設 ABCD 爲一四面體.

求證 可作一球外接於 ABCD.

證 過 AB 的中點 E 作一平面使垂直於 AB.

同樣,過 AC 和 AD 的中點 N 和 M 作平面垂直於 AC 和 AD.

設三平面遇於 O.　　(何故?)

∴ OA=OB.　　(507)

同樣, OA=OC, 及 OA=OD.

所以 O 與 A, B, C, 及 D 爲等距離，故以 O 爲中心，以 AO 爲半徑所作的球必外接於這四面體.

734. 系. 不在一平面上的四點決定一球.

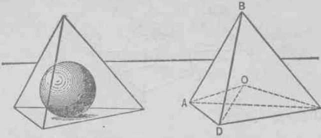
過六稜中點而垂直於各稜的六平面必遇於一點.

習　題

一四面體不能有兩個外接的球.

命題 VII. 定理

735. 任何四面體內可作一內切的球.



設 ABCD 爲一四面體.

求證 可作一球內切於 ABCD.

證 用平面 OAD, ODC, 及 OAC 二等分任意三個二面角如 AD, DC, 及 AC.

那麼 O 與四面體的四面爲等距離.

〔學者自己完成之.〕

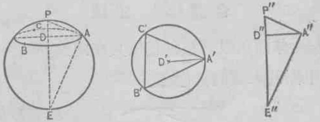
736. 系． 二等分四面體各二面角的六平面相遇於一點．

習　　題

四面體的體積等於表面積和內切球半徑的積的三分之一．

命題 VIII. 作圖題

737. 求作一實質球的直徑．



設 一實質球 ABCE．

求作 這球的直徑．

作圖 用任意點 P 爲中心，用任意〔兩脚規的開度爲〕半徑，作圓 ABC．

〔用兩脚規〕量三條弦 AB，BC 及 CA，且在任何平面上作$\triangle A'B'C'$使他的各邊等於 AB，BC，及 CA．

作外接圓 $A'B'C'$ 的半徑 $D'A'$．

作直角三角形 $P''A''D''$，使斜邊 $P''A''=PA$，及一直角邊 $D''A''=$

D′A′.

過 A″ 作 A″E″⊥P″A″, 遇 P″D″ 的延長線於 E″.

那麼, P″E″ 爲所求的直徑.

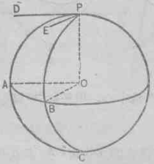
【示意】 證 △PAE≅△P″A″E″.

738. 定義. 從兩相交曲線的交點引各曲線的切線所成的角叫做**兩曲線的交角**.

739. 定義. 兩相交大圓所成的角叫做**球面角**.

命題 IX. 定理

740. 球面角以其頂點爲極夾在兩邊(必要時得延長之)中間的大圓的弧度之.



設 DPE 爲大圓 PAC 和 PBC 所成的球面角; AB 爲以 P 爲極的大圓的弧.

求證 ∠DPE 以 $\overset{\frown}{AB}$ 度之.

證　作半徑 OA, OB, 及 OP.

$\angle POA$ 以象限 PA 度之.　　(227)

所以　　$AO \perp OP$.

但　　$DP \perp OP$,　　(204)

又 AO 和 OP 在 ⊙PAO 的平面內.

所以　　$AO \parallel DP$.　　(96)

同樣　　$BO \parallel EP$.

$\therefore \angle DPE = \angle AOB$.　　(498)

但 $\angle AOB$ 以 $\overset{\frown}{AB}$ 度之.　　(227)

所以 $\angle DPE$ 以 $\overset{\frown}{AB}$ 度之.

741. 系 1.　兩大圓所成的角等於其平面所成的二面角的平面角.

742. 系 2.　過一大圓的一極的諸大圓都垂直於這大圓.

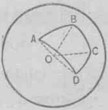
球面多邊形

743. 定義.　在球上由三或三以上大圓的弧所成的圖形叫做球面多邊形.

其弧叫做多邊形的邊,其交點叫做多邊形的**頂點**,其

邊所成的球面角叫做多邊形的角.

如 ABCD 為一球面多邊形; AB、BC,等為其邊; A, B, C,等為其頂點;及 $\angle s$ABC, BCD,等為其角.



744. 定義. 聯球面多邊形兩不相鄰頂點的弧叫做**對角線**.

745. 定義. 三邊的球面多邊形叫做**球面三角形**. 球面三角形的等腰,等邊等的稱呼和平面三角形相同.

球面三角形的邊的平面在球心成一多面角(O－ABCD),這多面角叫做和球面多邊形相當.

球面多邊形的邊用相當多面角的面角度之;球面多邊形的諸角等於相當多面角的諸二面角.

746. 【注意】 **因球面多邊形的各部分和其相當多面角各部分的關係,我們可以從多面角的任一定理推出一相仿的球面多邊形的定理.**

747. 若球面多邊形的相當多面角爲凸多面角，則球面多邊形叫做凸球面多邊形.若不說明，則一切的球面多邊形都指凸多邊形而言.

748. 若球面多邊形的相當多面角爲對稱，則球面多邊形叫做對稱.很明瞭的他們的各部份必各各相等，而排列的順序相反.

兩個對稱球面多邊形通常都不能使他們重合.

球面多邊形的邊平常都用度來度量的.

習　題

從下面諸命題試直接敍述出關於球面多邊形的定理：

(*a*) 若兩三面角的面角各各相等，則兩三面角爲全等或對稱.

(*b*) 若一三面角的兩個面角相等，則其所對的二面角相等.

(*c*) 若一三面角的三個面角都是直角，則三個二面角都是直角.

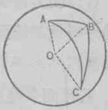
(*d*) 一多面角面角的和小於 360°.

(*e*) 一三面角的兩個面角之和大於其第三面角.

(*f*) 若四面角的相對面角相等，則相對二面角相等.

命題 X.　定理

749. 一球面三角形的兩邊之和大於第三邊.



設 ABC 爲一球面三角形.

求證 $\widehat{AB}+\widehat{BC}>\widehat{AC}$.

證 作半徑 OA, OB, 及 OC.

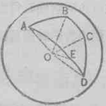
那麼 $\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC$. (557)

但圓心角用他所截的弧度之,

$\therefore\ \widehat{AB}+\widehat{BC}>\widehat{AC}$.

命題 XI. 定理

750. 一凸球面多邊形諸邊之和小於一大圓的圓周.



設　ABCDE 爲一 n 邊的球面多邊形.

求證　$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EA}+\cdots\cdots<360°$.

【示意】 作相當多面角,再與(746)的注意比較.

命題 XII.　定理

751. 在同一球上的兩三角形全同:

(1) 若一三角形的兩角及其夾邊和他三角形的兩角及其夾邊彼此各各相等,

(2) 若一三角形的兩邊及其夾角和他三角形的兩邊及其夾角彼此各各相等,

(3) 若一三角形的三邊和他三角形的三邊彼此各各相等,

祇要相等部分排列的順序相同.

【示意】 證相當多面角的全同.

752. 系. 兩對稱等腰三角形是全同的.

命題 XIII.　定理

753. 在同一球上的兩三角形爲對稱:

(1) 若一三角形的兩角及其夾邊和他三角形的兩

角及其夾邊彼此各各相等，

(2) 若一三角形的兩邊及其夾角和他三角形的兩邊及其夾角彼此各各相等，

(3) 若一三角形的三邊和他三角形的三邊彼此各各相等，

祇要相等部分排列的順序相反．

【示意】 證相當多面角的對稱．

754. 【注意】 球面角及弧的相等常常應用相等或對稱三角形證明之．

命題 XIV. 定理

755. 等腰球面三角形的底角相等．

【示意】 二等分其頂角且證明所成的兩三角形是對稱的．

756. 系． 等邊的球面三角形亦為等角的．

757.【注意】 許多球面幾何學的定理可用與平面幾何學相仿的方法證之.

758.【註】下面習題的圖形都假定作在一球面上，且一切的作圖應當用一兩脚規及一作大圓弧的器械(例如半球杯的邊)在球形黑板面上行之.

在球面圖形的命題中：線，半徑，聯心線，中心角等字樣常常用來代替大圓弧，極距離，聯兩圓的極的弧，在極所成的角等.

習　題

1. 在大圓弧垂直二等分線上的各點與弧的兩端等距離.
2. 與大圓弧兩端等距離的兩點決定這弧的垂直二等分線.
3. 二等分一球面角.
4. 二等分一大圓弧.
5. 在所設大圓弧上一點，作這弧的垂直線.
6. 從弧外一點，作一線垂直於所設大圓弧.
7. 若球面四邊形的相對邊相等，則其相對角亦等.
8. 對頂球面角相等.
9. 若球面四邊形的相對邊相等，則對角線互相二等分.
10. 作一球面三角形的外接圓.
11. 在大圓上一所設點，作一角等於一所設角.

12. 已知兩邊及夾角，作一球面三角形.

13. 已知三邊，作一球面三角形.

14. 已知底邊，高，及底邊的中線，作一球面三角形.

15. 二等邊球面三角形兩底角的二等分線相等.

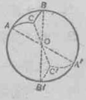
16. 等邊球面四邊形的對角線互相垂直.

17. 在球上一圓的中心角以其所截的弧度之.

18. 若球上兩小圓相交，其聯心線必垂直二等分其公共弦.

19. 若一半徑二等分一球上小圓的一弦，則垂直於這弦.

20. 球上小圓內，相等的弦和極等距離.



759. 定義. 若兩球面多邊形的相當多面角互爲對頂多面角，則兩球面多邊形叫做**對頂球面多邊形**.　　(560)

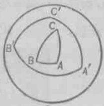
習　題

兩對頂球面三角形爲對稱.

極三角形

760. 定義. 若以任何球面三角形的各頂點爲極，作大圓弧，則成另一三角形，這三角形叫做第一三角形的**極三角形**.

如，若 A 爲大圓 B′C′ 的極，B 爲大圓 A′C′ 的極，及 C 爲大圓 A′B′ 的極，則 △A′B′C′ 爲 ABC 三角形的極三角形。



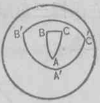
若以 A，B 及 C 爲極作全圓，則可作成八個三角形。

極三角形用下述的方法選擇之：

B，和 C 爲極所作弧的交點以 A′ 記之，則兩交點中距 A 小於一象限之點爲 A，同樣得 B′ 和 C′。

命題 XV.　定理

761.　若一球面三角形爲他一球面三角形的極三角形，則第二形爲第一形的極三角形。



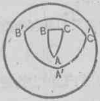
設　△A′B′C′ 爲 △ABC 的極三角形。

求證　△ABC 爲 △A′B′C′ 的極三角形。

證　A 爲 B′C′ 的極，故 AB′ 的距離爲一象限，又因 C 爲 A′B′ 的一

極，所以 B′C 爲一象限。

所以，　　B′ 爲 AC 的極。　　(722)



同樣，A′ 爲 BC 的極，

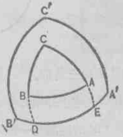
又　C′ 爲 AB 的極。

但 AA′，BB′，CC′ 其距離都是小於一象限。

所以 ABC 爲 A′B′C′ 的極三角形。

命題 XVI.　定理

762. 在兩極三角形內，一形的各角以他一形的對邊的補角度之。



設 ABC 及 $A'B'C'$ 爲兩極三角形.

求證 $\angle C$ 爲 $B'A'$ 的補角.

證 延長 $\angle C$ 的兩邊遇 $B'A'$ 於 D, 及 E.

則 $\angle C$ 以 DE 弧度之. (740)

又 $B'E$ 和 DA' 各爲 $90°$. (760)

但 $DE+B'A'=B'E+DA'$ 或 $180°$.

所以 DE 和 $B'A'$ 相補.

$\therefore$ $\angle C$ 和 $B'A'$ 相補.

習 題

1. 一球面三角形的三邊爲 $60°$, $50°$ 及 $100°$. 求其極三角形的各角.

763. 【注意】 **用關於邊(或角)的相當定理來證明關於角(或邊)的定理時可應用極球面三角形.**

2. 從關於極三角形的下述諸命題直接推出關於 $\triangle ABC$ 的定理:

(a) 若 $A'B'=A'C'$, 則 $\angle B'=\angle C'$.

(b) $A'B'+B'C'+C'A'<360°$.

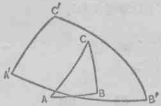
(c) $A'B'+B'C'>A'C'$.

3. 在球面 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A=110°$, 及 $\angle B=80°$, 求證 $\angle C>10°$.

【示意】 作極$\triangle A'B'C'$。

命題 XVII. 定理

764. 一球面三角形三角之和大於二直角而小於六直角.



設 ABC 爲一球面三角形.

求證 $\angle A+\angle B+\angle C>180°$,

又 $\angle A+\angle B+\angle C<540°$.

證 作極三角形 $A'B'C'$, 以 a, b, 和 c 表 $B'C'$, $C'A'$, 和 $A'B'$ 的度數.

則 $A=180°-a$. (762)

$B=180°-b$.

$C=180°-c$.

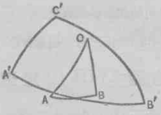
兩邊相加,得

$$A+B+C=540°-(a+b+c).$$

所以 $A+B+C<540°$.

但　　$a+b+c<360°$.　　(750)

所以　　$A+B+C>180°$.

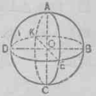


765. 系. 一球面三角形可有一個, 或二個, 或三個直角;亦可有一個,或二個,或三個鈍角.

766. 定義. 有兩個直角的球面三角形叫做**兩直角球面三角形**.

767. 定義. 有三個直角的球面三角形叫做**三直角球面三角形**.

768. 系 1. 若通過球心的三平面的每一平面垂直於其他兩平面,則球面被分成八個相等的三直角球面三角形,他們的各邊都等於象限。



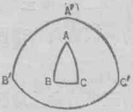
769. 系 2. 一球面等於一三直角三角形面積的八倍。

習 題

1. 球面三角形的一外角小於其不相隣兩內對角的和。
2. 球面四邊形諸角的和大於四直角。
3. 三直角三角形和他的極三角形相重合。

命題 XVIII. 定理

770. 若一球面三角形的兩角相等，則所對的邊亦相等。



設 球面三角形 ABC 的 $\angle B=\angle C$。

求證 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$。

證 作極 $\triangle A'B'C'$。

則 $\overset{\frown}{A'B'}$ 爲 $\angle C$ 的補角，及 $\overset{\frown}{A'C'}$ 爲 $\angle B$ 的補角。 (762)

所以 $\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{A'C'}$。

$\therefore \angle B'=\angle C'$。 (755)

但 $\overset{\frown}{AB}$ 及 $\overset{\frown}{AC}$ 各爲 $\angle C'$ 及 $\angle B'$ 的補角。 (762)

所以 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$。

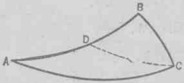
習　題

1. 等角球面三角形亦爲等邊球面三角形.

2. 若在等邊球面三角形 ABC 的三邊 AB, BC 及 CA 上截取相等的距離 AA′, BB′, 及 CC′, 則 A′B′C′ 亦爲等邊三角形.

命題 XIX.　定理

771. 在任何球面三角形中,大角所對的邊必大.



設　球面三角形 ABC 的 $\angle BCA > \angle BAC$.

求證　　$\widehat{AB} > \widehat{BC}$.

證　作一大圓弧 CD 使 $\angle DCA = \angle A$, 又設 D 爲 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{DC}$ 的交點.

則　　$\widehat{AD} = \widehat{DC}$.　　(770)

但　　$\widehat{DB} + \widehat{DC} > \widehat{BC}$.　　(749)

$\therefore$　$\widehat{DB} + \widehat{AD} > \widehat{BC}$.　　(代入)

或　　$\widehat{AB} > \widehat{BC}$.

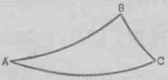
習　題

若 $\widehat{BC}$ 爲等腰球面三角形 ABC 的底邊,又 D 爲 $\widehat{AC}$ 上的任意點,則

$\widehat{BD} > \widehat{CD}$.

命題 XX. 定理

772. 在任何球面三角形中，大邊所對的角必大.



設 在球面 $\triangle ABC$ 中，$\widehat{AB} > \widehat{BC}$.

求證 $\angle C > \angle A$.

【示意】 用間接法證明之.

習 題

用極三角形證明命題 XX.

命題 XXI. 定理

773. 在同一球上的兩三角形若爲互等角，則必爲互等邊，且非全同卽對稱.

設　球面△A 和 A′ 為互等角.

求證　A 和 A′ 互等邊且非相等卽對稱.

證　作 A 的極三角形 P, 及 A′ 的極三角形 P′.

因 A 和 A′ 為互等角,　　(假設)

　　P 和 P′ 為互等邊.　　(762)

所以　P 和 P′ 為互等角.　　(751,753)

但　A 和 A′ 為 P 和 P′ 的極三角形.　　(761)

所以　A 和 A′ 為互等邊.　　(762)

所以　A 和 A′ 非相等卽對稱.

習　題

1. 球面四邊形的對角若相等,則其對邊亦等.

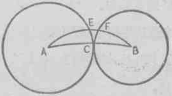
【示意】 將兩條對邊兩方向都延長使相交,求二個全同三角形.

2. 若在球面四邊形 ABCD 中, ∠A=∠B, 及 ∠C=∠D, 則 BC=AD. (示意:習題 1.)

3. 若 A 和 B 兩點間的距離為 180°, 用兩半圓 ACB, 及 ADB 聯結之,且 ∠BCD=∠CDA, 則 BC=AD.

命題 XXII.　定理

774. 球面上兩點間的最短線為一大圓的劣弧.



設 AB 爲所設球上一大圓的劣弧.

求證 AB 較球上聯 A 和 B 的任何他線爲短.

證 在 AB 上任取 C 點，以 A 和 B 爲中心 AC 和 BC 爲半徑作兩圓.若這兩圓再遇於一點 D，則 △ADB 的兩邊 AD 和 DB 不大於第三邊 AB.所以這兩圓除 C 點外不再相交於其他任何點.

所以 AB 間其他任何的線 AEFB 必再和兩圓周各交於兩點 E 及 F.

將 AE 繞 A，BF 繞 B 而旋轉，使 E，F 和 C 重合，則得一 A 和 B 的聯結線較 AEFB 爲短.所以 AEFB 不能爲 A 和 B 間的最短線.

故 A 和 B 間的最短線必過 C.

但因 C 爲 AB 內的任意點，故 A 和 B 間的最短線必和 AB 重合.

即 AB 爲聯 A 和 B 的最短線.

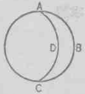
習題

紐約和 Oporto (葡萄牙地名)約在同緯線.若一船從紐約常在這同緯線上，向 Oporto 航行，其航路是否爲最短的航路.

球面圖形的度量

775. 定義. 球面上兩半圓所成的圖形叫做月形，

如 ABCD.



776. 定義. 月形兩弧所成的一球面角叫做**月形的角**.

很明顯的,在同一球上的月形若他們的角相等,則月形相等.

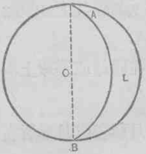
所以若將月形的角分成 n 分, 所成的各個小月形爲所設月形的 n 分之一.

777. 在球面幾何學, 常拿**三直角三角形**的面積爲面的單位,又直角爲角的單位.

那末球的面積爲 8, 半球的面積爲 4.

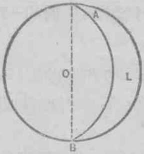
命題 XXIII. 定理

778. 若直角作爲角的單位, 又三直角三角形爲面的單位,則月形的面積以其一角的兩倍度之.



設 L 爲月形 AB 所含三直角三角形數, 又 A 爲其角的直角數.

求證　　　$L=2A$.



證　全球面可看做一月形,其角$=4rt.\angle s$.

或若　　　$A=4,\quad L=8$.

∴若　　　$A=1,\quad L=2$.　　　(776)

∴若　　　$A=\frac{1}{n},\quad L=\frac{2}{n}$.　　　(776)

∴若　　　$A=\frac{m}{n},\quad L=\frac{2m}{n}$.

或若 A 爲一有理數, $L=2A$.

若 A 爲無理數,則 2A 與 L 的一切近似值各各相等.

故　　　$L=2A$.　　　(223)

779. 系 1.　在同球或等球上兩月形的比等於其角之比.

780. 系 2.　月形和這月形所在的球面的比等於其角和四直角之比.

習　題

1. 求一月形所含三直角三角形的數，若其角等於：

(*a*) $1\frac{1}{2}rt.\angle s$,　　(*b*) 45°.

2. 設 A 爲月形的角，T_r 爲球面 (面積爲 S)上一三直角三角形的面積.求這月形的面積若

(*a*) $A=2\frac{1}{2}rt.\angle s$,　　$T_r=20$ 平方呎.

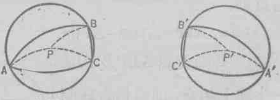
(*b*) $A=60^\circ$,　　$T_r=30$ 平方呎.

(*c*) $A=\frac{1}{3}rt.\angle$,　　$S=80$ 平方吋.

(*d*) $A=20^\circ$,　　$S=4$ 平方吋.

命題 XXIV.　定理

781. 在同球上的對稱三角形必等積.



設　ABC 和 A′B′C′ 爲在同球上的對稱球面三角形.

求證　　$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$.

證　設 P 及 P′ 各爲通過 A, B, C 及 A′, B′, C′ 小圓的極.

因 AB, BC, CA 諸弧各等於 A′B′, B′C′, C′A′ 諸弧；AB, BC, CA 諸弦各等於 A′B′, B′C′, C′A′ 諸弦.　(187)

故平面$\triangle ABC$和$A'B'C'$爲全同. (74)

故ABC圓$=A'B'C'$圓. (193)

作$PA, PB, PC, P'A', P'B', P'C'$.

這些弧都相等. (718)

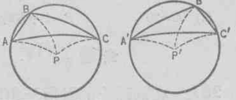
故　$\triangle ABP\cong\triangle A'B'P'$. (752)

同樣,　$\triangle ACP\cong\triangle A'C'P'$.

　$\triangle BCP\cong\triangle B'C'P'$.

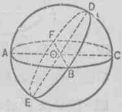
故相加卽得　$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$.

782. 【注意】 若$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的極在三角形外, 則其證明須略更動.



【示意】 $\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle BCP-\triangle ACP$.

783. 系. 若兩大圓ABC及DBE的弧在一半球上相交, 則兩相對球面三角形ABE和DBC面積之和等於以兩弧所夾的ABE爲角的月形.



【示意】 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CF}$, $\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{DF}$, $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DC}$.

$\therefore$ $\triangle ABE$和$\triangle DCF$對稱.

$\therefore$ $\triangle ABE=\triangle DCF$,等等.

784. 定義. 球面多邊形各角之和超過同邊數的平面多邊形各角之和的過剩叫做**球面過剩**. 在本書球面過剩用直角來度量.

例如:若 A, B, 及 C 爲一三角形的三角,都用直角表的,又 E 爲球面過剩,則

$$E=A+B+C-2.$$

若 A, B, C, ……爲一 n 邊多邊形的各角,用直角表的,則

$$E=(A+B+C+\cdots\cdots)-2(n-2).$$

習　題

1. 求一球面三角形 ABC 的球面過剩,若

(a) $A=\frac{1}{2}rt.\angle$, $B=\frac{3}{4}rt.\angle$, $C=1rt.\angle$.

(b) $A=60^\circ$, $B=70^\circ$, $C=80^\circ$.

(c) $A=90^\circ$, $B+C=180^\circ$.

2. 求一球面四邊形 ABCD 的球面過剩,若

(a) $A=90^\circ$, $B=100^\circ$, $C=110^\circ$, $D=80^\circ$.

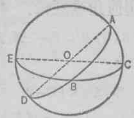
(b) $A=150^\circ$, $B=110^\circ$, $C+D=190^\circ$.

3. 求一球面六邊形的球面過剩,若各角等於

(a) 130°.　　(b) 170°.

命題 XXV. 定理

785. 若直角爲角的單位，又三直角三角形爲面的單位，則球面三角形的面積用其球面過剩度之.



設 ABC 爲一球面三角形.

求證 若角的單位爲直角，又面的單位爲三直角三角形，則面積 $ABC=A+B+C-2$.

證 完成 ACDE 圓，且延長 $\widehat{AB}$ 及 $\widehat{CB}$ 使各遇 ACD 於 D 及 E.

那末，因 $\triangle ABC+\triangle BED$ 等於以 $\angle ABC$ 爲角的月形，　(783)

$$\triangle ABC+\triangle BED=2B. \quad (778)$$

但 $$\triangle ABC+\triangle ABE=2C, \quad (778)$$

及 $$\triangle ABC+\triangle BCD=2A. \quad (778)$$

相加卽得：

$$3\triangle ABC+\triangle BED+\triangle ABE+\triangle BCD=2(A+B+C).$$

但 $\triangle ABC+\triangle BED+\triangle ABE+\triangle BCD=$ 一半球或 4.

故　$2\triangle ABC+4=2(A+B+C)$,

或　　$\triangle ABC+2=A+B+C$.

所以　　$\triangle ABC=A+B+C-2$.

786. 系. 若E爲一球上球面三角形的球面過剩,又球面爲S,則三角形的面積等於 $E\times\frac{S}{8}$.

習　題

1. 若球面積爲40平方呎,求一球面三角形的面積,若其三角爲 $40°$, $60°$ 及 $100°$.

2. 若一球面三角形的三角爲 $90°$, $100°$, 及 $110°$, 這三角形佔據球面積的幾分之幾?

3. 一等角球面三角形的面積爲球面的四分之一,問其角多少大?

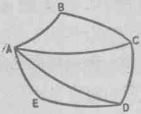
4. 一月形的角等於 $80°$,又一等邊球面三角形的角等於 $80°$,求他們面積的比.

5. 延長底角爲 $80°$ 的等腰球面三角形的兩腰成一月形.若這三角形爲這月形的三分之一,求其頂角.

6. 一球面三角形的三角爲 $80°$, $90°$ 及 $100°$.求其等積月形的角.

命題XXVI. 定理

787. 若直角爲角的單位,又三直角三角形爲面的單位,則任何球面多邊形的面積以其球面過剩度之.



設　ABCD……，爲一 n 邊的球面多邊形.

求證　ABCD……以(A+B+C+D+……)−2(n−2)度之.

證　從A盡作對角線，則分ABCD……成(n−2)個三角形.

每一三角形的面積較其角的和少2.　　(785)

故多邊形ABCD……的面積等於

(A+B+C+……)−2(n−2).

788. 【注意】 命題XXV和XXVI告訴我們球面上面積的相對的大小.

習　題

1. 一等角六邊形的角爲160°，求其面積.（以三直角三角形爲單位).

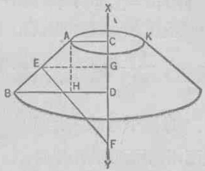
2. 一六邊形的角爲130°，140°，130°，150°，120°，160°，問佔球面的幾分之幾?

3. 一球面四邊形的角爲90°，100°，110°及120°. 求其等積等邊三角形的角.

4. 兩球心的距離爲 13.若兩球的半徑爲 5 及 12,求其相交圓的半徑.

命題 XXVII. 定理

789. 一直線繞其平面內的一軸而旋轉所生的面積等於直線在軸上的射影以一圓周乘之,這圓周的半徑爲過直線中點而止於軸的垂線.



設 AB 繞 XY 軸(在其平面內)而旋轉生出 ABK 面, CD 爲 AB 在 XY 上的射影,又 EF 爲 AB 的垂直二等分線至 XY 爲止.

求證 面積 ABK$=$CD$\times 2\pi$EF.

證 作 EG//BD 及 AH//CF.

ABK 面爲正截頭廻轉錐的側面.

故　　面積 ABK$=$AB$\times 2\pi$EG.　　(1)　(698)

但　　$\triangle$ABH$\sim\triangle$EFG.　　(306)

$$\therefore\ \frac{AB}{EF}=\frac{AH}{EG}. \qquad (303)$$

所以 $AB\times EG=AH\times EF,$ (274)

或 $AB\times EG=CD\times EF.$ (代入)

將此值代入 (1),

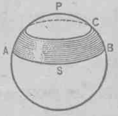
面積 $ABK=CD\times 2\pi EF.$

習 題

在直徑爲 26 呎的半圓內作一弦，這弦距半圓的中心爲 12 呎，又這弦的中點距直徑爲 6 呎，這弦繞直徑而旋轉所生的面是什麼?

790. 定義. 一球在兩平行平面間所夾的部份叫做球帶.

791. 定義. 球與平面的公共圓叫做**球帶的底面**，兩平面間的距離叫做**球帶的高**.



如球 S 的 ABC 部分是一球帶. 若兩平面中的一面切於這球，其他一面與球相交，則截出一獨底球帶，如 PAB.

習 題

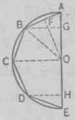
1. AB//XY 時，證命題 XXVII.

2. A 在 XY 上時，證命題 XXVII.

3. 在命題 XXVII 的圖中，若 EF 等於 10 吋，AB 等於 8 吋，又 ABH角$=30°$，求面積 ABK。

命題 XXVIII. 定理

792. 球面積等於大圓面積的四倍。



設 半圓 ABE 繞 AE 而旋轉，所生的球面積爲 S，半徑爲 R。

求證 $S=4\pi R^2$。

證 在半圓內，作半個偶數邊的內切正多邊形，如 ABCDE。

作 BG,CO,及 DH 使垂直於 AE，又 AB,BC,CD,及 DE 與 O 的公共距離以 d 表之。

則　面積 $AB=AG\times 2\pi d$,[1]　(791，習題 2)

面積 $BC=GO\times 2\pi d$，等等。　(789)

相加卽得：

面積 $ABCDE=(AG+GO+OH+HE)\times 2\pi d$

或　面積 $ABCDE=2R\times 2\pi d=4R\pi d$。

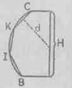
現設內接多邊形的邊數無限增加，則面積 ABCDE 漸近極限 S，而 d 漸近極限 R。

故　$S=4\pi R^2$。　(414)

1. 面積 AB 卽 AB 所生的面積.

793. 系 1. 兩球面積之比等於其半徑的平方之比.

794. 系 2. 球帶的面積等於其高與一大圓的圓周的積.



旋轉 BC 弧所生的球帶等於 $H\times 2\pi R$, 因若將 $\overset{\frown}{BC}$ 分成等分又聯結其相隣分點, 與(792)同樣得

面積 $BIKC=H\cdot 2\pi d$.

故 球帶$=H\cdot 2\pi R$. (414)

795. 系 3. 在同球或等球上球帶之比等於其高之比.

796. 【注意】 命題 XXVIII 和命題 XXV, XXVI 聯合起來,就能求球面的絕對大小.

習 題

1. 假定 $\pi=3.1416$, 求球的面積, 若半徑為

(a) 10 吋, ( ) 4 呎, (c) 3 碼,

(d) 2 呎 4 吋, (e) 4000 哩.

2. 求球的半徑, 若面積為

(a) 314.16 平方呎, (b) 628.32 平方吋,

(c) 1 平方呎，　(d) 10π 平方呎。

3. 求在半徑等於 10 吋的球上月形的面積的平方吋數，若他們的角爲

(a) $30°$，　(b) $45°$，　(c) $90°$，　(d) $135°$。

4. 在半徑爲 R 的球面上計算高爲 h 的球帶面積，若

(a) $R=20$ 吋，　$h=10$ 吋。

(b) $R=4$ 呎，　$h=3$ 呎。

(c) $R=1$ 呎，　$h=.001$ 呎。

5. 設 R 爲球的半徑，又 $\pi=\frac{22}{7}$。求角爲 A, B, C 的球面三角的面積，若

(a) $A=60°$，　$B=70°$，　$C=85°$，　$R=10$ 呎。

(b) $A=70°$，　$B=80°$，　$C=72°$，　$R=1$ 哩。

(c) $A=90°$，　$B=90°$，　$C=90°$，　$R=1$ 吋。

(d) $A=80°$，　$B=90°$，　$C=100°$，$R=20$ 呎。

6. 設 R 爲球的半徑，求角爲 A, B, C, D 等等的球面多邊形的面積，若

(a) $A=90°$，　$B=100°$，　$C=110°$，　$D=130°$，　$R=4$ 呎。

(b) $A=B=C=D=E=F=134°$，　$R=10$ 吋。

(c) $A=70°$，　$B=90°$，　$C=100°$，　$D=120°$，　$R=4$ 碼。

7. 求一直徑爲 40 呎的半球形屋頂的平方呎數。

8. 假定地球爲一完整的球，半徑爲 4000 哩，表面積是多少？

9. 若地球的半徑爲 4000 哩，北溫帶的高爲半徑的 $\frac{13}{25}$，北溫帶的面積是多少？

10. 求以赤道及北緯 30° 線爲界的球帶面積，若地球的半徑爲4000哩.

11. 分一球爲等面積的十個球帶.

12. 一球的表面等於 110 平方吋，又在這球上的一球帶等於 11 平方吋，求這球帶的高.

13. 在半徑爲 2 的球面上有一等邊球面三角形，若其面積等於 π，求其角.

球 體 積

797. 定義. 半圓的任何平面扇形當半圓繞直徑旋轉時所生的圖形叫做**球扇形**.

扇形的弧因旋轉而生的球帶叫做球扇形的**底面**.

如，若扇形 OAB，(圖 2)繞直徑 XY 而旋轉生球扇形 O—AB(圖 1).

若旋轉生球扇形的平面扇形的一半徑爲軸的一部分，那末球扇形的底爲一獨底球帶，而這球扇形有時叫做**球錐**.

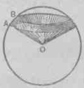


圖1

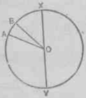
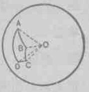


圖2

798. 定義. 一球面多邊形和相當多面角的面所

圍界的圖形叫做**球角錐**.



這球面多邊形叫做球角錐的**底面**,球心叫做**頂點**.

如, O—ABCD 爲球角錐, ABCD 爲底面.

799. 定義. 二平行平面及在兩平面間所夾球的部分所成的圖形叫做**球盤**.

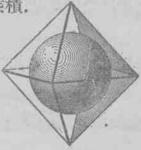
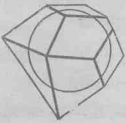
兩平行平面所成的兩截面叫做**底面**, 兩平面間的距離叫做球盤的**高**.

若其中的一平面切於這球,這球盤叫做**獨底球盤**.

800. 定義. 一月形及其邊的兩平面所成的圖形叫做**球楔**.

命題 XXIX. 定理

801. 球的體積等於其半徑的三分之一和球面積的相乘積.

設 V 爲半徑 R 的球的體積，其面積爲 S.

求證 $V=S\times\frac{1}{3}R$.

證 想像一任意多面體使外切於球，又多面體的各頂點和球心相聯。那末這多面體分成許多角錐，每一角錐以一個面爲底，R 爲公共高。所以多面體的體積等於各底面之和與 R 的三分之一的積，或等於其表面與半徑的三分之一的積。

但若將多面體的面數無限增加，則其體積漸近極限球體積，面積漸近極限球面積。

故 $V=S\times\frac{1}{3}R$. (414)

802. 系 1. 若 V 爲球的體積，R 爲半徑，又 D 爲直徑，

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ 或 } V=\frac{\pi}{6}\times D^3=\frac{\pi D^3}{6}.$$

803. 系 2. 兩球體積之比等於其半徑，或其直徑的立方之比.

804. 系 3. 球角錐的體積等於底面積和球半徑三分之一的積.

805. 系 4. 球扇形的體積等於底面積和球半徑三分之一的積.

這證明和命題 XXIX 的證明相彷。

806. 系5. 若H爲球扇形的高,V爲其體積,Z爲其底面積,

$$V = Z \times \frac{R}{3}.$$

但 $$Z = 2\pi R \times H. \qquad (794)$$

$$\therefore \quad V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

807. 系6. 球體積和外切柱體積的比等於2比3.因外切柱的體積爲 $2\pi R^3$.

習　題

1. 求球的體積,若半徑爲

(a) 10吋,　(b) 2吋,　(c) 4吋,

(d) 1呎,　(e) 4000哩.

2. 假定 $\pi = \frac{22}{7}$,求球的半徑,若體積爲

(a) 4851立方呎,　(b) 0.1立方呎.

3. 若球半徑爲10,底面積爲20,求球扇形的體積.

4. 球體積爲100立方呎,求其半徑.

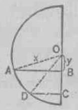
5. 球面積等於10平方公尺,求其體積.

6. 球體積等於M,求其面積.

【註】 V(ABC…)表示:面積(ABC…)繞XY軸旋轉而生的體積.

7. 求 ABCD 所生球盤的體積,若 AB=6 吋, BC=2 吋, DC=4 吋,及 $\angle B=\angle C=90°$.

解. 作 OA 及 OD. 用 x 表 OA, y 表 OB.



因　$\angle B=90°$,　$x^2=y^2+36$.

因　$\angle C=90°$,　$x^2=(y+2)^2+16$.

相減,　$0=y^2-(y+2)^2+20$.

$\therefore\ 4y=16$.

$y=4$.

故,　$x^2=16+36$.

或　$x=\sqrt{52}=R$.

但　球盤$=V(ABCD)$,

及　$V(ABCD)=V(OAD)+V(ODC)-V(OAB)$.

$V(OAD)=$球帶$\times\frac{R}{3}=2\pi R\times H\times\frac{R}{3}=2\pi\cdot 2\cdot\frac{52}{3}=\frac{208}{3}\pi$.

$V(ODC)=(CD)^2\pi\cdot\frac{OC}{3}=\frac{16\cdot\pi\cdot 6}{3}=\frac{96\pi}{3}$.

$V(OAB)=(AB)^2\pi\cdot\frac{OB}{3}=\frac{36\cdot\pi\cdot 4}{3}=\frac{144\pi}{3}$.

$\therefore\ V(ABCD)=\frac{\pi}{3}(208+96-144)=\frac{160\pi}{3}$.

8. 一球盤的底面的半徑爲 2 及 5,高爲 1,求其體積.

9. 一球盤的底面的半徑爲 6 及 8,高爲 2,求其體積.

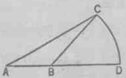
10. 一獨底球盤的底面的半徑爲 3,高爲 2,求其體積.

11. 求以AB爲軸旋轉ABC三角形而生的體積，若AB=14, BC=15, 及 CA=13.

12. 求以 AB 底邊爲軸旋轉梯形 ABCD 而生的體積，若 AB=10, BC=AD=5, 及 CD=4.

13. 直線 XY 及三角形 ABC 在一平面內, A 在 XY 上, 從 C 引 CC' 使垂直於 XY, 同樣 $BB' \perp XY$. 求三角形繞 XY 旋轉所生的體積，若 $AC'=5$, $C'B'=7$, $AB'=12$, $CC'=12$, 及 $BB'=5$.

14. 在圖中， ABD 爲一直線， B 爲 CD 弧的圓心, 求以 AD 爲軸旋轉全形而生的體積, 若 AC=15, CB=13, 及 AB=4.



(14,15)

15. 在同圖中, 求以 AB 爲軸旋轉 ABC 三角形而生的體積, 若 AB=5, BC=8, 及 $\angle ABC=120°$.

16. 兩球體積之比爲 8 比 125, 求其半徑之比.

17. 兩球體積之比爲 125 比 216, 求其面積之比.

18. 一球的面積等於半徑爲 3 和 4 的兩球面積之和, 求其半徑.

19. 一球殼的外半徑爲 13, 又厚爲 8, 求其體積.

20. 一球的體積等於一外半徑爲 3, 厚爲 1 的球殼的體積，求其半徑.

21. 若月的直徑爲 2160 哩, 求其面積及體積.

22. 一球帶的面積爲 80, 高爲 4. 求球半徑.

23. 求與每邊爲 a 的立方體等積的球的半徑.

24. 一直徑爲 4 吋的圓柱器皿內盛有水.沉一球於水後，水面上昇 1 吋,求球的直徑.

25. 一半徑爲 2 吋的球重 32 盎斯,求半徑爲 3 吋同質的球的重量.

26. 一球角錐的底爲每角等於 $80°$ 的一等邊三角形,若球半徑等於 10,求其體積.

27. 每邊爲 4 的正方形繞一對角線而旋轉,求其所生立體的面積及體積.

28. 一獨底球盤的曲面積爲 20π 又高爲 2,求其體積.

29. 一球的面積等於一稜爲 4 的立方體的全面積,求其半徑.

30. 一立方體的稜爲 10 吋,求其外接球的直徑.

31. 求內切於每稜爲 4 吋的正四面體的球的半徑.

32. 一 $40°$ 角的月形等於在同球上的一球帶.若球的直徑爲 18 吋,求球帶的高.

33. 六邊的球角錐的二面角各爲 $140°$.若半徑等於 10,求角錐的體積.

34. 球的面積等於外切柱的側面積.

35. 求一球與外切立方體的體積之比.

36. 若球面四邊形對角線互相二等分,其對邊必相等.

37. 球半徑爲 9 吋,求其角爲 $60°$ 的球楔的體積.

38. 一球的體積等於底半徑爲 r，及高爲 h 的迴轉錐，求其半徑。

39. 球帶的面積等於 A，高爲 h，求球半徑。

40. 一球體積的數值等於其面積的半，求其半徑。

41. 迴轉柱的體積等於其側面積與底面半徑的積之半。

42. 一觀察者離球心的距離等於半徑的三倍，則可見的球面部分爲全球幾分之幾。

43. 自地面上方 1000 哩的一點能看到的地面多少方哩。若地球當做半徑等於 4000 哩的完整的球形。

44. 一觀察者欲看到半徑爲 6 呎的球的全表面的 $\frac{5}{12}$，問須距球心多少遠！

45. 若從球外一點作一切線及割線，則切線爲割線及割線在球外部份的比例中項。

46. 直徑爲 10 吋的球穿一直徑爲 6 吋的圓柱形孔。若圓柱的軸通過球心，求其立體的體積。

47. 一球的半徑爲 r，一小圓的面積爲 a，求其與球心的距離。

48. 一球的體積爲 V。求其角等於 100° 的等邊球面三角形的面積。

49. 求熱帶的面積，若其高爲地球半徑的 $\frac{4}{5}$。

50. 欲看到地球表面 $\frac{1}{20}$，須離地面多少哩？

51. 地面上每平方吋的平均大氣壓力爲 15 磅，求大氣的全重量。

52. 從一立方呎的鉛能製出直徑爲 $\frac{1}{4}$ 吋的彈丸多少？

53. 一咖啡壺 8 吋高,上口的直徑爲 4 吋,又底面直徑爲 5 吋.若每杯的容量爲 10 立方吋,問能容多少杯?

54. 在地面上的 A, B, C 三地點決定一球面三角形 ABC, 其角爲 $A=50°$, $B=61°$, $C=71°$.求三角形 ABC 的面積.

復 習 題

1. 凸球面多邊形外角之和小於四直角.

2. 過球內的一定點互爲垂直的三弦其平方之和爲常數.

3. 欲使球面三角形的極三角形就是本形,其條件怎樣?

4. 在直圓柱內能內切一球,且所切之處成一圓.

5. 距兩定點的距離的平方和爲一常數之點,其軌跡是什麼?

6. 球的半徑爲 12 吋, 二等分其半徑的垂直平面所成的小圓的圓周有多少吋?

7. 通過球心穿一圓柱形孔, 球所餘的體積等於以孔長爲直徑的球.

8. 球面三角形的面積和其極三角形的周圍有什麼關係?

9. 直圓錐的底面爲球的一圓.求證這圓錐與球相交又成一圓.

10. 求以等邊三角形的一邊爲軸旋轉所生的體積.

11. 相交兩平面切於一柱,其交線和其基線平行.

12. 正四面體的高等於從形內任意一點向四面所引的四垂線之和.

13. 求証:正四面體各稜的中點爲一正八面體的頂點.

14. 求證:平行六面體相對的三面角爲全同.

15. 求證:若平行六面體的四對角線相等,則爲直六面體.

16. 兩平行平面間的最短距離爲兩平面的垂直線.

17. 一線在相交兩平面上的射影都是直線,則除了一個例外,其線必爲直線.說出這個例外.

18. 求證:圓投射於平行於圓的平面的平面上時爲一圓.

19. 一正八面體爲一平行於其一面的平面所截.求證截面的周圍爲常數.

20. 一球內切於一直圓柱內.求證他們全面積之比等於其體積之比.

21. 外切於等球的兩多面體的體積之比等於其面積之比.

22. 平行平面截球成同極的圓.

23. 各自垂直於兩不相平行的直線的兩平面必相交.若兩線平行則怎樣?

24. 各自垂直於二面角兩面的平面(若都不垂直於其稜)必相交.

25. 求證:從一定點向過其他一定點的諸平面所引的垂線的足的軌跡爲一球.

26. 求證:從一定點向過一定直線的諸平面所引的垂線的足的軌跡爲一圓.

27. 一線在兩平行線上的射影必相等.

應用 372 頁—376 頁(平面幾何學)的原理解下面各題:

28. 立方體的一對角線和在其一面上的射影所成的角有幾度?

29. 正四面體兩面所成的二面角有幾度?

30. 一迴轉錐,若其迴轉直角三角形的斜邊和軸成 40° 角,又其斜邊為 12 吋,求其體積.

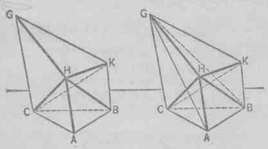
31. 一正四角錐,設底面每邊為 6 呎,又每面和底面所成的二面角為 36°,求其體積.

32. 一圓柱底面半徑為 4 呎,又各基線(長 10 呎)和底面成 25° 的角,求其體積.

附　　錄

命題I.　定理

808. 一截頭三角柱的體積等於三個角錐的和，其公共底面卽角柱的底面，其頂點卽斜截面的三頂點.



設　ABC—HKG 爲以 ABC 爲底面的截頭三角柱.

求證　ABC—HGK＝H—ABC＋K—ABC＋G—ABC.

證　過 H, B, C 及 H, K, C 作二平面成角錐 H—ABC, H—BCK, 及 H—CKG.

H—ABC 顯然是所要求的角錐中之一.

H—BCK 卽爲 C—HBK.

C—HBK＝C—AKB.　(637)

C—AKB 卽爲 K—ABC.

∴ H—BCK 和所要求的第二角錐等積.

$$H-CKG=H-GBC. \qquad (637)$$

$H-GBC$ 或 $B-HGC=B-AGC$ 或 $G-ABC$.

所以 $H-CKG$=所要求的第三角錐.

$\therefore\ ABC-HKG=H-ABC+K-ABC+G-ABC.$

809. 系 1. 截頭直三角柱的體積等於其底面與側稜的和的三分之一的積.

810. 系 2. 任何截頭三角柱的體積等於其直截面與側稜的和的三分之一的積.

【示意】 直截面分截頭角柱爲兩個截頭直角柱.

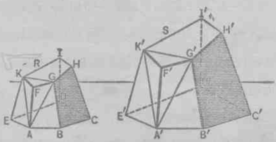
習　題

1. 一斜截頭直三角錐,若側稜爲 4, 5 和 6,又底面的稜爲 6, 8 和 10,求其體積.

2. 若一截頭三角柱的底面的邊爲 13,14 和 15. 又側稜爲 6, 8 和 10,若稜對於底面的傾角爲 30°,求其體積.

命題 II.　定理

811. 兩相似多面體能分成同數的四面體,彼此各各相似,且地位亦相似.



設　R 和 S 爲兩相似多面體；A 和 A′ 爲相當頂點。

求證　R 和 S 能分成同數的四面體，彼此各各相似，且地位亦相似。

證　從 A 和 A′ 作兩立體的一切對角線。

若將 R 和 S 的每一面(除去通過 A 或 A′ 的)看作一角錐的底面，其頂點爲 A 或 A′，則各立體都分成和假定底面數相同的許多角錐。

在相當的底面作相當的對角線，且通過這種對角線及 A 或 A′ 各作平面，則相當的角錐分成同數的三角錐。

所以 R 及 S 能分成同數的四面體。

在四面體 A−KFG 及 A′−K′F′G′ 中，

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AKF\sim\triangle A'K'F'\\ \triangle AFG\sim\triangle A'F'G'\\ \triangle KFG\sim\triangle K'F'G'\end{array}\right\}\qquad(315)$$

$$\frac{AK}{A'K'}=\frac{KF}{K'F'}=\frac{KG}{K'G'}=\frac{FG}{F'G'}=\frac{AG}{A'G'}.\qquad\text{(何故?)}$$

$$\therefore\quad \triangle AKG\sim\triangle A'K'G'.\qquad\text{(何故?)}$$

A−KFG 及 A′−K′F′G′ 二四面體的一切相當三面角都相等.(559)

∴ 四面體 A−KFG 和四面體 A′−K′F′G′ 爲相似. (641)

移去 A−KFG 及 A′−K′F′G′時,因其諸面仍舊相似及多面角相等,故所剩的多面體爲相似.

同樣可證任何別的兩相當四面體爲相似.

所以 R 及 S 能分成同數的四面體,彼此各各相似且地位亦相似.

812. 系 1. 相似多面體的相當稜成比例.

813. 系 2. 兩相似多面體內,任何兩相當線和任何兩相當稜有同樣的比.

814. 系 3. 相似多面體的兩相當面的比等於任何兩相當稜的平方比.

815. 系 4. 兩相似多面體全面積的比等於任何兩相當稜的平方比.

816. 系 5. 兩相似多面體體積的比等於任何兩相當稜的立方比.

【示意】 若第一多面體的一稜對於第二多面體相當稜的比等於$1:n$,則第二多面體的任何稜爲第一多面體相當稜的 n 倍,所以構成第二多面體的任何四面體爲第一多面體相當四面體的 n^3 倍.故用加法卽可得結論.

習　題

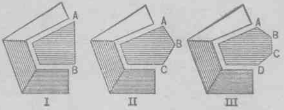
1. 求證一切正十二面體都相似.

2. R 和 S 爲兩相似多面體的體積,及 r 和 s 爲兩相當稜. 若 R=100 立方吋, $r=5$, 又 $s=4$, 求 S.

3. 兩相似多面體的體積爲 216 立方吋及 343 立方吋.若第一圖形的一稜等於 12 吋,求第二圖形的相當稜.

命題 III. 定理

817. 任何凸多面體,稜數加二等於頂點數加面數的和.(Euler 的定理.)



設 E 爲凸多面體的稜數, V 爲頂點數,又 F 爲面數.

求證 $V+F=E+2$.

證 假使這立體的造成是先成立一個面,然後陸續增加其他一切的面.

設增加第 m 面後所增的頂點數,面數,稜數用 v_m, f_m, e_m 來表之.

很明顯的不論 m 的值是怎樣, $f_m=1$,

若$e_m=1$，$v_m=0$．（圖 I）

若$e_m=2$，$v_m=1$．（圖 II）

若$e_m=3$，$v_m=2$．（圖 III），等等，

很容易知道，普遍的 $e_m-v_m=1=f_m$．

或 $v_m+f_m-e_m=0$．

所以普遍的 V+F−E 不因增加任何面而變動．不過有兩個例外，即第一面及末一面．

很明顯的 $v_1=e_1$．

所以 $v_1+f_1-e_1=1$．

及因對於末（或第 n）面，$v_n=0$，$e_n=0$，

故得 $v_n+f_n-e_n=1$．

故得

$$v_1+f_1-e_1=1.$$
$$v_2+f_2-e_2=0.$$
$$v_3+f_3-e_3=0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_n+f_n-e_n=1.$$

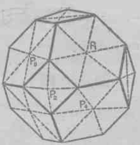
相加卽得 V+F−E=2.

$\therefore$ V+F=E+2.

命題 IV. 定理

818. 有n頂點的凸多面體的面角的和等於2(n−2)

平角.



設　n 爲一凸多面體的頂點數，s 爲其面角的和.

求證　　$s=2(n-2)$平角.

證　在每一面上聯一點(如 P_1, P_2, P_3,等等)至其面的各頂點.

設 F=多面體的面數.

E=多面體的稜數.

P=在 P_1, P_2, P_3,等等所成一切角的和.

T=在面上所成諸三角形一切角的和.

很明顯的　　$s=T-P$.

因每一稜爲兩三角形的底邊,故得2E個三角形,即

$$T=2E\text{ 平角}.$$

因 P_1, P_2, P_3 等等的點數爲 F,

$$P=F\times 2\text{ 平角}=2F\text{ 平角}.$$

$$\therefore\ s=(2E-2F)\text{平角}.$$

$$=2(E-F)\text{平角}.$$

但自前命題很容易得到

$$E-F=n-2(\text{因 } n=V).$$

$$\therefore\ s=2(n-2)\text{平角}.$$

習 題

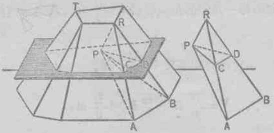
1. 求側面數爲十的角錐面角的和.
2. 求頂點數爲六的多面體面角的和;頂點數爲十的.
3. 一多面體的稜數爲 30,其面數爲 12,求其面角的和.
4. 求證正立體的面數,頂點數,和稜數與 Euler 的定理符合.
5. 求證不能有 7 稜的多面體.

819. 定義. **準截頭角錐**爲以在平行平面內的兩多邊形(叫做底面)及一邊在一底內又對頂或對邊在他底內的幾個三角形與梯形(叫做側面)爲界的一多面體.

兩底平面間的距離叫做高. 和兩底面平行且二等分其高的平面所成的截面叫做中截面.

命題 V. 定理

820. 準截頭角錐的體積等於其兩底面及四倍其中截面的和與其高的六分之一的積.



設　V 爲準截頭角錐 ABT 的體積；H 爲高；B，b 各爲底面積；M 爲中截面積．

求證　$V=\frac{H}{6}(B+b+4M)$．

證　若一側面爲一梯形，作對角線分爲兩三角形．

設 P 爲 M 內任意一點，聯 P 與各頂點，則這立體分成幾個角錐，都以 P 爲其頂點，以 B，b，及側面所成的三角形爲其底面．

$P-B$ 的體積 $=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot B=\frac{H}{6}\cdot B$．

$P-b$ 的體積 $=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot b=\frac{H}{6}\cdot b$．

欲求其餘角錐的體積先推討 P—ABR 角錐．

$RC=CA,\quad RD=DB.$　　(496)

$\therefore\ \triangle RAB=4(\triangle RCD).$

$\therefore\ P-RAB=4(P-RCD).$　　(636)

但若拿 R 當做角錐 P—RCD 的頂點，則其體積是 $\frac{H}{6}(\triangle PCD)$．

$\therefore\ P-RAB=4\cdot\frac{H}{6}(\triangle PCD).$

同樣,旁向的每一角錐的體積等於 $4\cdot\frac{H}{6}\times$ 含於角錐內部分 M 的面積.

所以旁向一切角錐的和等於 $4\cdot\frac{H}{6}\cdot M$.

$$\therefore\quad V=\frac{H}{6}B+\frac{H}{6}b+4\frac{H}{6}M,$$

或
$$V=\frac{H}{6}(B+b+4M).$$

【註】 用微積分可證明在初等幾何學中的立體都可以用準截頭角錐公式求得其體積.

例. 求半徑等於 R 的球的體積.

解. 將球放在兩平行面相切的平面間,兩底面看作半徑爲零的兩圓,卽得:

$$V\,(球)=\frac{1}{6}\times 2R\times(0+0+4\times\pi R^2)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

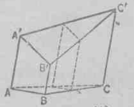
習 題

1. 求下列各圖形的體積 (a) 圓柱, (b) 圓錐, (c) 截頭圓錐.

2. 從準截頭角錐的公式,求下列圖形的體積的公式 (a) 角柱, (b) 角錐, (c) 截頭角錐.

3. 一準截頭角錐若 $B=20$, $b=6$, $M=12$, 及 $H=15$. 求體積.

4. 截頭角柱 $ABC-A'B'C'$ 中 $AA'=6$,



(4)

$BB'=2$, $CC'=8$, 梯形 $A'B$ 的高$=4$, 又從 C 到 $ABB'A'$ 的垂線 $=12$, 求這立體的體積。

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

對　數　表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9465	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

平方,立方,平方及立方根表

x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$
1	1	1	1.000	1.000	26	6 76	17 576	5.099	2.962
2	4	8	1.414	1.260	27	7 29	19 683	5.196	3.000
3	9	27	1.732	1.442	28	7 84	21 952	5.292	3.037
4	16	64	2.000	1.587	29	8 41	24 389	5.385	3.072
5	25	125	2.236	1.710	30	9 00	27 000	5.477	3.107
6	36	216	2.449	1.817	31	9 61	29 791	5.568	3.141
7	49	343	2.646	1.913	32	10 24	32 768	5.657	3.175
8	64	512	2.828	2.000	33	10 89	85 937	5.745	3.208
9	81	729	3.000	2.080	34	11 56	39 304	5.831	3.240
10	1 00	1 000	3.162	2.154	35	12 25	42 875	5.916	3.271
11	1 21	1 331	3.317	2.224	36	12 96	46 656	6.000	3.302
12	1 44	1 728	3.464	2.289	37	13 69	59 653	6.083	3.332
13	1 69	2 197	3.606	2.351	38	14 44	54 872	6.164	3.362
14	1 96	2 744	3.742	2.410	39	15 21	59 319	6.245	3.391
15	2 25	3 375	3.873	2.466	40	16 00	64 000	6.325	3.420
16	2 56	4 096	4.000	2.520	41	16 81	68 921	6.403	3.448
17	2 89	4 913	4.123	2.571	42	17 64	74 088	6.481	3.476
18	3 24	5 832	4.243	2.620	43	18 49	79 507	6.557	3.503
19	3 61	6 859	4.359	2.668	44	19 36	85 184	6.633	3.530
20	4 00	8 000	4.472	2.714	45	20 25	91 125	6.708	3.557
21	4 41	9 261	4.583	2.759	46	21 16	97 336	6.782	3.583
22	4 84	10 648	4.690	2.802	47	22 09	103 823	6.856	3.609
23	5 29	12 167	4.796	2.844	48	23 04	110 592	6.928	3.634
24	5 76	13 824	4.899	2.884	49	24 01	117 649	7.000	3.659
25	6 25	15 625	5.000	2.924	50	25 00	125 000	7.071	3.684

重要的數值

1 立方呎=1728 立方吋

1 加侖=231 立方吋

1 布希爾=2150.4 立方吋

$\pi=3.1416$

$2\pi=6.2832$

$\frac{\pi}{4}=0.7854$

$\frac{\pi}{6}=0.5236$

$\pi^2=9.8696$

$\sqrt{\pi}=1.7725$

$\sqrt[3]{\pi}=1.4646$

$\frac{1}{\pi}=0.3183$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}=0.5642$

$\frac{\pi}{180}=0.0175$

公　式

L＝側面積；S＝斜高；V＝體積；E＝側稜（或球面過剩）；B 及 b＝底面；T＝全面積。

立體圖形的面積：

直角柱，	$L=E\times$底面的周圍。
任何角柱，	$L=E\times$直截面的周圍。
正角錐，	$L=\frac{1}{2}S\times$底面的周圍。
截頭正角錐，	$L=\frac{1}{2}S\times$兩底面周圍之和。
迴轉柱，	$L=2\pi RH$，$T=2\pi R(H+R)$。
迴轉錐，	$L=\pi RS$，$T=\pi R(S+R)$。
截頭迴轉錐，	$L=\pi(R+R')S$，$T=L+\pi(R^2+R'^2)$。
球，	$T=4\pi R^2$。
球帶，	$T=2\pi RH$。
月形，	$T=\frac{\angle A^\circ}{90^\circ}\times\pi R^2$。
球面△，	$T=\frac{E^\circ}{180^\circ}\times\pi R^2$。
球面△過剩，	$E=(\angle A^\circ+\angle B^\circ+\angle C^\circ)-\angle 180^\circ$。

體積：

直六面體，	V＝三向度的積.
平行六面體，或角柱，或柱，	$V=B\times H$.
角錐，或錐，	$V=\frac{1}{3}B\times H$.
截頭角錐，或截頭錐，	$V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{B\times b})$.
迴轉柱，	$V=\pi R^2H$.
迴轉錐，	$V=\frac{1}{3}\pi R^2H$.
截頭迴轉錐，	$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+RR')$.
準截頭角柱，	$V=\frac{H}{6}(B+b+4M)$
球，	$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi}{6}\times$(直徑)^3.
球角錐，	$V=\frac{1}{3}B\times R$.
球扇形，	$V=\frac{1}{3}R\times$球帶.
球盤，	$V=\frac{\pi H}{2}(R^2+R'^2)+\frac{\pi H^3}{6}$.

中西名詞對照表

第六編

空間幾何學(Geomtery of space)

立體幾何學(Solid geometry)

平面(Plane)

足(Foot)

二面角(Dihedral angle)

稜(Edge)

面(Face)

平面角(Plane angle)

射影(Projection)

傾角(Inclination)

多面角(Polyhedral angle)

基線(Element)

面角(Face angle)

三面角(Trihedral angle)

四面角(Tetrahedral angle)

直角三面角(Rectangular trihedral angle)

二直角三面角(Birectangular trihedral angle)

三直角三面角(Trirectangular trihedral angle)

第 七 編

多面體(Polyhedron)

柱(Cylinder)

錐(Cone)

四面體(Tetrahedron)

六面體(Hexahedron)

八面體(Octahedron)

十二面體(Dodecahedron)

二十面體(Icosahedron)

角柱(Prism)

平行六面體(Parallelopiped)

角柱面(Prismatic surface)

底面(Base)

側面(Lateral face)

側稜(Lateral edge)

側面積(Lateral area)

直角柱(Right prism)

正角柱(Regular prism)

斜角柱(Oblique prism)
三角柱(Triangular prism)
四角柱(Quadrangular prism)
截頭角柱(Truncated prism)
直截面(Right section)
直平行六面體(Right parallelopiped)
直六面體(Rectangular parallelopiped)
長方體(Rectangular solid)
立方體(Cube)
體積的單位(Unit of volume)
等積立體(Equivalent solid)
相等立體(Equal solid)
角錐(Pyramid)
三角錐(Triangular pyramid)
四角錐(Quadrangular pyramid)
正角錐(Regular pyramid)
直角錐(Right pyramid)
軸(Axis)
斜高(Slant height)
斜截頭角錐(Truncated pyramid)

截頭角錐(Frustum of a pyramid)

相似多面體(Similar polyhedron)

正多面體(Regular polyhedron)

柱面(Cylindrical surface)

圓柱(Circular cylinder)

直柱(Right cylinder)

斜柱(Oblique cylinder)

截面(Section)

迴轉柱(Cylinder of revolution)

相似迴轉柱(Similar cylinders of revolution)

錐面(Conical surface)

母線(Generatrix)

準線(Directrix)

上錐面(Upper nappe)

下錐面(Lower nappe)

圓錐(Circular cone)

直圓錐(Right circular cone)

斜圓錐(Oblique circular cone)

迴轉錐(Cone of revolution)

相似迴轉錐(Similar cones of revolution)

截頭錐(Frustum of a cone)

上底面(Upper base)

下底面(Lower base)

第 八 編

球(Sphere)

球心(Center of sphere)

大圓(Great circle)

小圓(Small circle)

極(Pole)

極距離(Polar distance)

象限(Quadrant)

球面角(Spherical angle)

球面多邊形(Spherical polygon)

球面三角形(Spherical triangle)

極三角形(Polar triangle)

二直角球面三角形(Birectangular spherical triangle)

三直角球面三角形(Trirectangular spherical triangle)

月形(Lune)

月形的角(Angle of lune)

球面過剩(Spherical excess)

球帶(Zone)

獨底球帶(Zone of one base)

球體積(Spherical volume)

球扇形(Spherical sector)

球錐(Spherical cone)

球角錐(Spherical pyramid)

球盤(Spherical segment)

獨底球盤(Segment of one base)

球楔(Spherical wedge)

附 錄

準截頭角柱(Prismatoid)

中截面(Mid-section)