CURSŬ

DE

TRIGONOMETRIE

DE

SPIRU C. HARETU
Profesorŭ la Facultatea de Sciinţe din Bucuresci.

EDIŢIA II.

BUCURESCI
EDITURA LIBRĂRIEĬ SOCECŬ & Comp
7. Calea Victorieĭ, 7.
1887.

Preţul 5 LEI.

CURSŬ

DE

TRIGONOMETRIE

CURSŬ

DE

TRIGONOMETRIE

DE

SPIRU C. HARETU
Profesorŭ la Facultatea de Sciințe din Bucuresci.

EDIȚIA II.

BUCURESCI
EDITURA LIBRĂRIEĬ SOCECŬ & Comp.
7. Calea Victorieĭ, 7.
1886.

Stabilimentul grafic
SOCECŬ & TECLU. — Bucurescĭ.
96. Strada Berzi, 96.
[24,431].

CURSŬ DE TRIGONOMETRIE

CARTEA I

STUDIULŬ FUNCŢIUNILORŬ CIRCULARIE

CAPITULULŬ I.

Noţiunĭ preliminariĭ şi definiţiunĭ.

1. *Trigonometria* are de obiectŭ a găsi *prin calculŭ* elementele necunoscute ale unuĭ poligonŭ, planŭ saŭ sfericŭ, când se cunósce un numĕrŭ suficientŭ din aceste elemente. Acéstă operaţiune se numesce *resoluţiunea* poligonuluĭ.

Insĕ ori-ce poligonŭ póte să se descompună in un numerŭ óre-care de triunghiuri prin liniĭ duse din un punctŭ óre-care la tóte vêrfurile lui; resolvêndŭ aceste triunghiuri, poligonulŭ însuşi va fi resolvatŭ. Prin urmare objectulŭ trigonometriei, se reduce la *resoluţiunea triunghiurilorŭ*, rectiliniĭ saŭ sferice. De aci 'ĭ vine şi numele, precum şi divisiunea sa naturalĕ in *Trigonometriă plană* sau *rectilinia* şi *Trigonometriă sferică.*

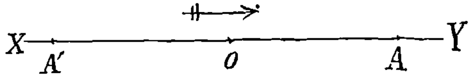
2. Pentru a resolva un triunghiŭ, este necesar mai întâiŭ a găsi relaţiunile ce există intre diferitele sale elemente; ast-fel cà dacă unele din aceste elemente ar fi necunoscute, se le putemŭ afla prin nisce simple resoluţiĭ de ecuaţiuni. Insă elementele unuĭ triunghiŭ fiind parte laturi, parte unghiuri, cantităţi neomogene unele cu altele, relaţiunile ce am putea găsi între dênsele nu potŭ fi destulŭ de simple şi lesnicióse pentru a face cu uşurinţă o resoluţiune de triunghiuri. Din acéstă causă în trigonometriă unghiurile se înlocuescŭ prin nisce liniĭ drepte, numite *funcţiuni circulare directe* sau *liniĭ trigonometrice*; şi se caută relaţiuni, nu între *laturile şi unghiurile triunghiului*, ci *între laturi şi liniile trigonometrice ale unghiurilorŭ lui.*

PRINCIPIULŬ LUI DESCARTES.

3. Mai înainte de a intra în studiulŭ liniilorŭ trigonometrice vom admite principiulŭ urmĕtorŭ, detorat lui Descartes, care simplifică fórte multŭ formulele trigonometriei, şi înlesnesce generalisarea lor.

Fie XY (fig. 1) o dréptă indifinită şi O un puntŭ fixŭ pe dênsa. Luămŭ puntulŭ A pe acéstă drép-

Fig. 1.



tă şi însemnămŭ distanţa OA cu *a*. *Se admite ca acéstă distanţă să se considere ca positivă şi să se însemneḍe cu + dacă se socotesce de la origine in un sensŭ óre-care*, s. es. la drépta, in sensulŭ săgeţiĭ; şi *negativă, cu semnulŭ* —, *dacă se consideră in sensulŭ opusŭ.*—Pentru ca posiţia puntului A pe drépta XY să fie determinată, trebue a se cunósce trei date: 1⁰ posiţia pe acéstă dréptă a puntului fixŭ *O*, care se numesce *originea*, şi de la care se mĕsóră distanţele; 2⁰ mărimea *a* a distanţei punctului A de la acésta origine; şi 3⁰ sensulŭ in care acéstă distanţă este socotită de la origine.—In adĕvĕrŭ, dacă cunóscemŭ posiţia originei, pentru a găsi posiţia puntului A, la distanţa $+a$ de la origină, n'avemŭ de cât pe drăpta *XY* in sensulŭ săgeţiĭ seą luămŭ o distanţă $OA+a$, şi A va fi posiţia puntului căutatŭ. Dacă ni s'ar cere a găsi posiţia unui puntŭ A′ situatŭ la distanţa $-a$ de la origine, am lua distanţa $OA'=a$ in sensŭ contrarŭ sageţiĭ, şi puntulŭ căutatŭ ar fi A′.

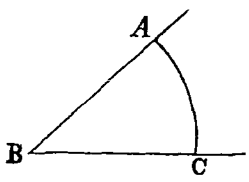
De aci urméḍă principiulŭ: *Dacă considerămŭ pe o linie óre-care, dréptă saŭ curbă, diferite distanţe mĕsurate de la o origine comună, fixă pe acéstă linie, şi dacă voimŭ a le introduce in calculŭ, vom afecta cu semnulŭ + valorile numerice ale distanţelorŭ cari sunt îndreptate in un sensŭ, şi cu — pe acele cari vor fi îndreptate in sensulŭ contrarŭ.*

Cu tóte acestea nu vom perde din vedere că acestŭ principiu este numai convenţionalŭ, şi că pentru a admite cu sicuranţă generalitatea unei formule, totŭ va trebui a demonstra cu rigurositate că ea există in tóte ipotesele posibile.

ARCURILE DE CERCŬ.

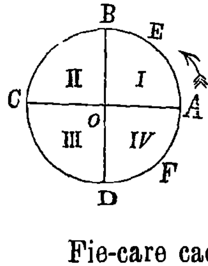
4. Se scie ca un unghiŭ se mĕsóră cu arculŭ descrisŭ între laturile sale, cu centrulŭ in vêrfulŭ unghiului şi cu o radă arbitrară. Ast-felŭ mĕsura unghiului ABC va fi arculŭ AC (fig. 2).

Fig. 2.



In trigonometrie in generalŭ unghiurile se înlocuescŭ cu arcurile de cercŭ. Aceste arcuri se mĕsóră pe o circonferenţă a cărei radă se consideră tot-d'a-una egală cu unitatea (R=1); prin urmare lungimea unei circumferenţe cu rada R fiindŭ 2 (π) R, in trigonometrie ea va fi tot-d'a-una egală cu 2 (π); o semicirconferenţă va fi π, şi un cuartŭ de circumferenţă $\frac{\pi}{2.}$

Fig. 3.



Ducândŭ in circumferenţă dóuĕ diametre perpendiculare AC şi BD, (fig. 3) acéstă circumferenţă va fi împărţită in patru părţi egale, numite *cadrane*, care pórtă fie-care numele de *ântâiul, alŭ douilea, alŭ treilea, alŭ patrulea cadranŭ.*

Fie-care cadranŭ alŭ circomferenţei se împarte in câte 90 părți egale numite *grade;* fie-care gradŭ se împarte in 60 *minute*, fie-care minută in 60 *secunde*. Prin urmare o circomferență întrégă are 360 grade, saŭ 21600 minute, saŭ 1296000 secunde. Aceste diferite sub-împărțiri ale circomferenței se însemnédă respectivŭ cu ^{0}, $'$, $''$; ast-felŭ un arcŭ de 15 grade 39 minute 51 secunde și 0,4 din o secundă, se insemnédă $15^0 39' 51,'' 4$.

De cât-va timpŭ a inceputŭ să se usiteze o împărțire *centesimală* a circomferenței, in loculŭ divisiunei *sexagesimale*, espusă mai susŭ. Dupe acéstă nouĕ divisiune, un cadranŭ se imparte in 100 grade, un gradŭ in 100 minute, o minută in 100 secunde; așa că circomferența întrégă cuprinde 400 grade, saŭ 40,000 minute, saŭ 4,000,000 secunde.

Origina de la care vom socoti arcurile pe circomferență va fi in generalŭ puntulŭ A, la inceputulŭ primului cadranŭ. Sensulŭ in care vom considera arcele ca positive va fi celŭ arĕtat de săgétă, de la primulŭ către al doilea cadranŭ. Arcele socotite in sensulŭ contrarŭ vor fi privite ca negative. As-fel arculŭ AE va fi positivŭ, iar AF negativŭ.

ARCURI COMPLEMENTARE ȘI SUPLEMENTARE

5. Se numescŭ *arcuri complementare* dóuĕ arcuri a cărorŭ sumă este egală cu un cadranŭ saŭ $\frac{\pi}{2}$; ast-fel sunt arcurile AE si EB, căci $AE + EB = \frac{\pi}{2}$.

Se numescŭ *arcuri suplementare* dóuĕ arcuri a căror sumă este egală cu dóuĕ cadrane saŭ π; ast-felŭ sunt arcurile AE şi EC, căci $AE+EC=\pi$.

LINIILE TRIGONOMETRICE

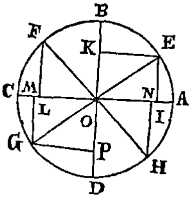
6. Liniile trigonometrice sunt in numĕrŭ de şĭase: *sinusŭ, tangenta, secanta, cosinusŭ, cotangenta* şi *cosecanta.*

Liniile trigonometrice nu se consideră nici o dată in valóre absolută, ci sunt date tot-d'a-una prin raportulŭ lorŭ către radă; aşa când se dice că trangenta unui arcŭ este 3, 7, acésta însemnédă că raportulŭ între lungimea absolută a acelei tangente şi radă este 3,7.

SINUSŬ

7. Se numesce *sinusŭ* al unui arcŭ *perpendiculara lăsată din o estremitate a arcului pe diametrulŭ care trece prin cea altă estremitate.* Ast-felŭ sinusulŭ arcului AE (fig. 4) este EI şi se insemnédă: EI=sin AE.

Fig. 4.



Ducândŭ EK paralelŭ cu AC avem: EI=KO, ca paralele coprinse între paralele; prin urmare putemŭ dice că şi KO este sinusulŭ arcului AE.

Sinusurile se socotescŭ pe diametrulŭ verticalŭ BD,

de la originea O*. In totŭ cursulŭ acesteĭ scrieri vom *3
considera ca positive sinusurile socotite pe raḑa OB, si ca negative pe cele considerate pe OD. Ast-felŭ vom pune:

$$\sin AE = + EI.$$

căci EI este egalŭ cu KO, care se află pe partea OB a diametrului BD; şi

$$\sin ABG = - GM,$$

căci GM este egalŭ cu OP, consideratŭ pe partea OD a diametrului verticalŭ BD.

8. Când arculŭ merge crescêndŭ de la A până la B, adică de la zero până la $\frac{\pi}{2}$, valórea sinusului rĕmâne tot-d'a-una positivă şi merge şi ea crescêndŭ de la zero in susŭ. Când arculŭ este AB saŭ $\frac{\pi}{2}$, valórea sinusului este BO, adică raḑa însuşi; deci

$$\sin\frac{\pi}{2} = BO = + 1.$$

Arculŭ trecêndŭ in al duoilea cadranŭ şi mergêndŭ de la B până la C, valórea sinusului este totŭ positivă, însă merge descrescêndŭ de la 1 in josŭ.

Arculŭ $ABC = \pi$ are dreptŭ sinusŭ pe zero, aşa că

$$\sin \pi = 0.$$

Când arculŭ intră in cadranulŭ al treilea, sinusulŭ devine negativŭ, după convenţiunea de mai susŭ; însă valórea arcului crescêndŭ de la ABC până la ABCD, adică de la π până la $\frac{3\pi}{2}$ *valórea absolută* a sinusului cresce şi ea de la zero până la 1 aşa că

$$\sin \frac{3\pi}{2} = OD = -1.$$

In cadranulŭ al patrulea sinusulŭ rĕmâne totŭ negativŭ, însă descresce in *valóre absolută* de la 1 până la 0 adică:

$$\sin 2\pi = 0.$$

Prin urmare in resumatŭ:

In primulŭ cadranŭ, sinusulŭ este *positivŭ* şi variadă de la zero până la $+1$.

In al doilea cadranŭ, sinusulŭ este *positivŭ* şi variadă de la $+1$ până la zero.

In al treilea cadranŭ, sinusulŭ este *negativŭ* şi variadă de la zero până la -1.

In al patrulea cadranŭ, sinusulŭ este *negativŭ* şi variadă de la -1 până la zero.

De aci vedemŭ că tóte valorile sinusului sunt coprinse între limitele -1 si $+1$. Ori ce valóre a sinusului mai mare de cât $+1$ saŭ mai mică de cât -1 nu mai este o valóre reală, ci o valóre *absurdă*. La o asemenea valóre de sinusŭ nu corespunde nici un arcŭ realŭ.

9. Dacă ne-am imagina că arculŭ, după ce a percursŭ circomferinţa întrégă, ar trece de punctulŭ A şi ar percurge din noŭ circomferinţa in acelaşŭ sensŭ şi de mai multe ori, am vedea că sinusulŭ in acelési

cadrane ia neîncetatŭ aceléşi valori cu aceleaşi semne *in un modŭ periodicŭ:* după fie-care trecere de o çircomferenţă întrégă, valorile şi semnele sinusului se repetă. Prin urmare *sinusulŭ este o funcţiune circulară periodică, şi perióda sa este o circomferenţă saŭ* 2π.

Putemŭ esprima acestŭ principiŭ prin formula următóre:

$$\sin(2k\pi + x) = \sin x,$$

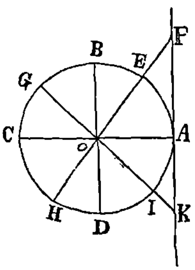
in care k însemnéḑă un numĕrŭ întregŭ óre-care, positivŭ saŭ negativŭ.

TANGENTA

10. Se numesce *tangenta* unui arcŭ, *porţiunea tangentei geometrice dusă la una din estremităţile arcului, coprinsă între acéstă estremitate şi diametrulŭ ce trece prin cea altă estremitate.*

Asf-felŭ tangenta arcului AE (fig. 5) este AF şi se însemnéḑă:

Fig. 5.



$$AF = \text{tg } AE.$$

Tangentele trigonometrice se socotescŭ pe tangenta geometrică FK, şi puntulŭ A este consideratŭ ca originea lorŭ (3). Se consideră ca positive tangentele socotite de la originea A pe pe partea AF a tangentei geometrice, şi ca negative cele considerate pe partea AK. Ast-felŭ vom pune:

$$\mathrm{tg}\, AE = + AF \text{ şi } \mathrm{tg}\, AI = - AK.$$

11. Când arculŭ merge crescândŭ de la A până la B, adică de la zero până la $\frac{\pi}{2}$, valórea tangentei rĕmâne tot-d'a-una positivă şi merge şi ea crescândŭ de la zero in susŭ. Când arculŭ este AB saŭ $\frac{\pi}{2}$, diametrulŭ ce trece prin estremitatea B a arcului, fiindŭ paralelŭ cu tangenta AF, o întâlnesce la infinitŭ; prin urmare:

$$\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{2} = \infty$$

Când arculŭ AG intră in cadranulŭ al duoilea, diametrulŭ ce trece prin estremitatea G a lui întalnesce linia tangentelorŭ in partea sa inferióră AK; prin urmare, in acestŭ cadranŭ, tangenta este negativă. Arculŭ crescândŭ de la B spre C, tangenta descresce *in valóre absolută*, şi când arculŭ devine ABC, saŭ π, ea devine zero; deci

$$\mathrm{tg}\, \pi = 0.$$

Arculŭ ABH fiind in cadranulŭ al treilea, tangenta AF se află pe partea positivă a liniei tangentelorŭ, şi cresce pe cât cresce şi arculŭ; şi când acesta are valórea $\frac{3\pi}{2}$, tangenta este érăşi infinită; adică:

$$\mathrm{tg}\, \frac{3\pi}{2} = \infty$$

Indată ce arculŭ intră in cadranulŭ al patrulea, tangenta trece de o dată de la valorile positive la cele negative; și cu cât cresce arculŭ, cu atât ea descresce in *valóre absolută*, așa că, arculŭ ajungêndŭ a fi 2 (π), avemŭ:

$$\operatorname{tg} 2\pi = 0.$$

In resumatŭ:

In cadranulŭ întâiŭ, tangenta este *positivă* și variadă de la zero până la $+\infty$.

In cadranulŭ al duoilea, trangenta este *negativă* și variadă de la $-\infty$ până la zero.

In cadranulŭ al treilea, tangenta este *positivă*, și variadă de la zero până la $+\infty$.

In cadranulŭ al patrulea, tangenta este *negativă* si variadă de la $-\infty$ până la zero.

Vedemŭ dar că tangenta póte se ia tóte valorile posibile de la $-\infty$ până la $+\infty$, și prin urmare la ori-ce valóre reală a tangentei corespunde o valóre reală pentru arcŭ.

12. Dacă ne-am imagina că arculŭ, după ce a percursŭ circumferența intrégă, ar trece de punctulŭ A și ar percurge din noŭ circumferența in acelașŭ sensŭ și de mai multe ori, am vedea că tangenta, din dóuĕ in dóuĕ cadrane, ia ne'ncentatŭ aceléși valori cu aceléși semne, *in un modŭ periodicŭ*. Prin urmare *tangenta este o funcțiune circulară perirdica, și perióda sa este o semi-circomferență, saŭ* π.

Putemŭ esprima acestŭ principiŭ prin formula următóre:

$$\operatorname{tg}(k\pi + x) = \operatorname{tg} x,$$

in care k represintă un numĕrŭ intregŭ óre-care, positivŭ saŭ negativŭ.

SECANTA

13. Se numesce *secantă* a unui arcŭ *distanța de la centrulŭ acelui arcŭ până la estremitatea tangentei sale trigonometrice.* Ast-felŭ tangenta arcului AE este AF, (fig. 5) era secanta lui este OF, şi se notédă: OF = sec AE.

Originea secantelorŭ este centrulŭ O. Ele sunt positive dacă întâlnescŭ linia tangentelorŭ trecândŭ chiarŭ prin estremitatea arcului; ast-felŭ secanta OF a arcului AE este positivă, căci trece prin estremitatea E a acestui arcŭ. Din contra, secanta este negativă dacă, pentru a întalni linia tangentelorŭ, trebue prelungită in partea opusă estremitățiĭ arcului; ast-fel secantaŭ OK a arcului AG este negativă, căci nu trece ea însăşi prin estremitatea G a arcului, ci numai prelungirea sa.

14. Când arculŭ este zero, secanta este OA, saŭ +1; adeca

$$\sec 0 = +1.$$

Arculŭ crescând in cadranulŭ întâiŭ până la B, secanta cresce şi ea, remânândŭ neîncetatŭ positivă; şi când arculŭ devine $\frac{\pi}{2}$ seu AB, estremitatea tangentei fiindŭ la infinitŭ, după cum scimŭ (11), avem:

$$\sec\frac{\pi}{2} = +\infty$$

Când arculŭ intră in cadranulŭ al duoilea, secanta trece de o dată de la valorile positive la cele negative, şi cu cât cresce arculŭ, cu atât ea descresce in *valóre absolută*. Când arculŭ devine ABC saŭ π, secanta este ŎA saŭ — 1, adică:

$$\sec\pi = -1.$$

In cadranulŭ al treilea, secanta este totŭ negativă, însă merge crescândŭ in *valóre absolută*, cu cât cresce şi arculŭ; aşa că, când arculŭ este de trei cadrane, secanta este iarăşi infinită; saŭ

$$\sec\frac{3\pi}{2} = -\infty\cdot$$

In cadranulŭ al patrulea secanta trece de o dată la valorile positive, şi descresce de la $+\infty$, până când arculŭ ajungândŭ a fi 2π, avem:

$$\sec 2\pi = +1.$$

In resumatŭ:

In primulŭ cadranŭ, secanta este *positivă* şi variadă de la $+1$ până la $+\infty$.

In al doileà cadranŭ, secanta este *negativă* şi variadă de la $-\infty$ până la -1.

In al treilea cadranŭ, secanta este *negativă* şi variadă de la — 1 până la — ∞.

In al patrulea cadranŭ, secanta este *positivă* variadă de la $+\infty$ până la $+1$.

Vedemŭ dar că secanta póte se aibă tóte valorile posibile de la $-\infty$ până la $+\infty$, afară de cele coprinse între -1 şi $+1$. Ori-ce valóre a secantei coprinsă între -1 şi $+1$ nu mai este o valóre reală, ci o valóre *absurdă*, şi nici un arcŭ realŭ nu corespunde la o asemenea valóre a secantei.

15. Presupunêndŭ că arculŭ lorŭ ar percurge circomferenţa de mai multe ori şi in acelaşŭ sensŭ, am vedea îndată că secanta reia neîncetatŭ acelésĭ valori, cu acelésĭ semne, *in un modŭ periodicŭ*, după fiecare intervalŭ de o circomferenţă intrégă. Prin urmare *secanta este o funcţiune circulară periodică, şi perióda sa este o circomferenţă întrégă, saŭ* 2π.

Putemŭ esprima acestŭ principiŭ prin formula:

$$\sec(2k\pi + x) = \sec x,$$

in care k represintă un numĕrŭ întregŭ óre-care, positivŭ saŭ negativŭ.

COSINUSU

16. Se numesce *cosinusŭ* al unui arcŭ *sinusulŭ arcului săŭ complementarŭ*. Fie s. e. arculŭ AE (fig. 4);

arculŭ complementarŭ alŭ acestuia este EB; și, după definițiunea sinusului, avemŭ:

$$EK = \sin EB;$$

prin urmare

$$EK = \cos AE$$

Observămŭ că $EK = IO$; prin urmare putemŭ încă defini cosinulŭ că este *distanța de la centru până la piciorulŭ sinusului.*

Cosinusurile se socotescŭ pe diametrulŭ orizontalŭ AC de la originea O*3. Sunt positive cosinusurile socotite pe partea din drépta, OA, a diametrului, și negative cele socotite pe partea OC. Avemŭ ast-felŭ:

$$\cos AE = + OI, \text{ si } \cos AF = - OL.$$

17. Dacă arculŭ este zero, cosinusulŭ fiind distanța de la centru la estremitatea sinusului, avemŭ:

$$\cos 0 = OA, \text{ saŭ } \cos 0 = + 1$$

Arculŭ crescândŭ in primulŭ cadranŭ, cosinusnlŭ remâne neîncetatŭ positivŭ, însă descresce; așa încât, când arculŭ este AB saŭ $\frac{\pi}{2}$, sinusulŭ BO cădêndŭ chiar in centru avemŭ:

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

In cadranulŭ al doilea, cosinusulŭ este negativŭ; și cu cât cresce arculŭ, cresce și elŭ *in valóre absolută;* când arculŭ este ABC saŭ π, avemŭ:

$$\cos \pi = OC, \text{ saŭ } \cos \pi = -1.$$

In cadranulŭ al treilea, cosinusulŭ este totŭ negativŭ; însă cu cât cresce arculŭ, el descresce *in valóre absolută* aşa că, când arculŭ este ABCD saŭ $\frac{3\pi}{2}$, avemŭ:

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0.$$

In cadranulŭ al patrulea, cosinusulŭ este positivŭ; şi cu cât cresce arculŭ, cresce şi elŭ; când arculŭ este 2π, avemŭ:

$$\cos 2\pi = +1.$$

In resumatŭ:

In cadranulŭ întâiŭ, cosinusulŭ este *positivŭ* şi variadă de la $+1$ până la zero.

In cadranulŭ al doilea, consinusulŭ este *negativŭ* şi variadă de la zero până la -1.

In cadranulŭ al treilea, cosinusulŭ este *negativŭ* şi variadă de la -1 până la zero.

In cadranulŭ al patrulea, cosinusulŭ este *positivŭ* şi variadă de la zero până la $+1$.

Tóte valorile cosinusului sunt coprinse, ca şi ale sinusului, între $+1$ şi -1. Ori-ce valóre a cosinusului mai mare de cât $+1$ saŭ mai mica de cât -1 nu mai este o valóre reală, şi nici un arcŭ realŭ nu corespunde la o asemenea valóre de cosinusŭ.

18. Dacă arculŭ, trecândŭ de puntulŭ A, ar percurge circomferenţa de mai multe ori şi in acelaşŭ sensŭ, am vedea că cosinulŭ, după fie-care trecere de o cir-

comferență intrégă, reia aceleașĭ valori cu aceleașĭ semne *in unŭ modŭ periodicŭ*. Prin urmare *cosinulŭ este o funcțiune circulară periodică, și periódа sa este* 2π.

Acestŭ principiu se esprimă prin formula:

$$\cos(2k\pi + x) = \cos x,$$

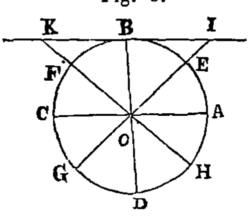
k fiindŭ unŭ numĕrŭ intregŭ óre-care, positivŭ saŭ negativŭ.

CONTANGENTA

19. *Contangenta* unui arcŭ este *tangenta arcului sĕŭ complementarŭ*. Ast-felŭ complementulŭ arcului datŭ AE (fig. 6) este EB a cărui tangentă este BI, considerândŭ puntulŭ B ca origine; prin urmare:

$$BI = \operatorname{tg} BE, \text{ saŭ } BI = \cot AE.$$

Fig. 6.



Contangentele se socotescŭ pe tangenta KI, dusă la inceputulŭ celui de al doilea cadranŭ. Originea este punctulŭ B. Contangentele socotite la drépta de acestŭ punctŭ pe partea BI sunt positive, éră cele socotite la stânga pe partea BK sunt negative. Așa: $\cot AE = + BI$, și $\cot AF = - BK$.

20. Arculŭ datŭ fiind zero, avem:

$$\cot 0 = +\infty, \text{ căci } \cot 0 = \operatorname{tg} 90^0 = +\infty$$

Arculŭ crescêndŭ in primulŭ cadranŭ, cotangenta rĕmâne positivă şi descresce neincetatŭ până la zero, adecă:

$$\cot\frac{\pi}{2}=0.$$

In cadranulŭ al doilea contangenta este negativă, şi cresce *in valóre absolută* de la zero până la $-\infty$; acéstă valóre o are când arculŭ este ABC saŭ π, adecă:

$$\cot\pi=-\infty.$$

Arculŭ ABG trecêndŭ in cadranulŭ al treilea, contangenta trece de o dată de la valorile negative la cele positive; însă cu cât cresce arculŭ ea descresce; aşa că când arculŭ este ABCD sau $\frac{3\pi}{2}$, avem:

$$\cot\frac{3\pi}{2}=0.$$

In cadranulŭ al patrulea contangenta este érăşĭ negativă, şi cresce *iu valóre absolută* de la zero in susŭ, până când arculŭ fiind 2π, avem:

$$\cot 2\pi=-\infty.$$

In resumatŭ:

In cadranulŭ intâiŭ, contangenta este *positivă* şi variadă de la $+\infty$ până la zero.

In cadranulŭ al doilea, contangenta este *negativă* şi variadă de la zero până la $-\infty$.

In cadranulŭ al treilea, contangenta este *positivă* şi variadă de la $+\infty$ până la zero.

In cadranulŭ al patrulea, contangenta este *negativă* şi variadă de la zero până la $-\infty$.

Prin urmare contangenta, ca şi tangenta, este susceptibilă de a primi tóte valorile posibile de la $-\infty$ până la $+\infty$, şi la ori-ce valóre reală a contangentei corespunde unŭ arcŭ realŭ.

21. Dacă arculŭ ar percurge de mai multe ori circomferenţa in acelaşĭ sensŭ, am vedea că valorile contangentei revinŭ cu aceleaşĭ semne din dóuĕ in dóuĕ cadrane *in un modŭ periodicŭ;* aşa dară *cotangenta este o funcţiune circulară periodică cu perióda* π; principiu ce se póte esprima prin formula:

$$\cot\,(k\,\pi + x) = \cot\,x,$$

unde k este érăşĭ un numĕrŭ intregŭ óre-care, positivŭ saŭ negativŭ.

COSECANTA

22. *Cosecanta* unui arcŭ se numesce *secanta arcului sĕu complementarŭ.* Aşa secanta arcului BE, (fig. 6) complementarŭ arcului datŭ AE, este OI; acésta este dară cosecanta arcului AE, şi se notédă:

$$OI = \mathrm{cosec}\ AE.$$

După figură, vedemŭ că cosecanta se póte încă defini: *distanța de la centru până la estremitatea cotangentei.*

Originea cosecanteloră este centrulă O. Cosecanta este positivă daca intâlnesce linia cotangenteloră trecêndă chiar prin estremitatea arcului dată; și este negativă dacă, pentru a intâlni acéstă linie a cotangenteloră trebue prelungită in partea opusă estremitâții arcului. Așa avemă:

$$\text{cosec } AE = +OI, \text{ și cosec } ABG = -OI.$$

23. Când arculă este zero, extremitatea cotangentei fiind la infinită, avemă:

$$\text{cosec } 0 = +\infty.$$

Insă cu cât arculă cresce in primulă cadrană, cosecanta descresce, rĕmânândă neincetată positivă; și când arculă este AB sau $\frac{\pi}{2}$, avemă:

$$\text{cosec } \frac{\pi}{2} \text{ OB, sau cosec } \frac{\pi}{2} = +1.$$

In cadranulă al doilea cosecanta este totă positivă, și cresce neincetată până când arculă ajunge a fi ABC saŭ π; atunci avemă:

$$\text{cosec } \pi = +\infty.$$

In cadranulă al treilea, consecanta trece de o dată la valorile negative și descresce in *valóre absolută* de la $-\infty$ până la -1, cu cât arcul cresce de la π până la $\frac{3\pi}{2}$, avênd

$$\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2} = -1$$

In fine, in cadranulŭ al patrulea, cosecanta fiind totŭ negativă, cresce *in valóre absolută* de la -1 până la $-\infty$, avêndŭ acéstă din urmă valóre când arculŭ este 2π, adecă:

$$\operatorname{cosec} 2\pi = -\infty.$$

In resumatŭ:

In primulŭ cadranŭ cosecanta este *positivă* şi variadă de la $+\infty$ până la $+1$.

In al doilea cadranulŭ, cosecanta este *positivă* şi variadă de la $+1$ până la $+\infty$.

In al treilea cadranŭ, cosecanta este *negativă* şi variadă de la $-\infty$ până la -1.

In al patrulea cadranŭ, cosecanta este *negativă* şi variadă de la -1 până la $-\infty$.

Prin urmare cosecanta, ca şi secanta, primesce tóte valorile posibile de la $-\infty$ până la $+\infty$, afară de cele coprinse între -1 şi $+1$. Ori-ce valóre a cosecantei coprinsă între -1 şi $+1$ nu mai este o valóre reală şi nici un arcŭ realŭ nu corespunde la o asemenea valóre a cosecantei.

Presupunêndŭ că arculŭ percurge de mai multe orĭ circumferenţa in acelaşŭ sensŭ vedemŭ că cosecanta, reia neîncentatŭ aceléşĭ valori cu acelési semne, *in un modŭ periodicŭ* la fie-care intervalŭ de o circomferenţă intrégă. Prin urmare *cosecanta este o* *funcţiune circulară periodica, şi perióda sa este o circomferenţă intrégă saŭ* 2π.

Acestŭ principiŭ se esprimă prin formula:

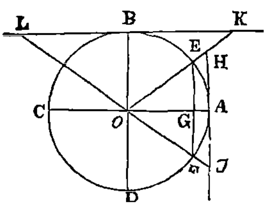
$$\operatorname{cosec}(2k\pi + x) = \operatorname{cosec} x,$$

k fiind un numĕrŭ intregŭ óre-care, positivŭ saŭ negativŭ.

LINIILE TRIGONOMETRICE ALE ARCELORŬ EGALE ŞI DE SEMNE CONTRARIĬ

25. Teoremă. *Arcele egale şi de semne contrarii aŭ liniĭ trigonometrice egale şi de semne contrariĭ, afară de cosinusŭ şi secantă, carĭ sunt şi de acelaşŭ semnŭ.*

Fig. 7.



Fie arcele AE şi AF, (fig. 7) egale şi de semne contrariĭ *4. Avem:

$$\begin{aligned} \sin AE &= EG, & \sin AF &= FG, \\ \cos AE &= OG, & \cos AF &= OG, \\ \operatorname{tg} AE &= AH, & \operatorname{tg} AF &= AI, \\ \sec AE &= OH, & \sec AF &= OI, \\ \cot AE &= BK, & \cot AF &= BL, \\ \operatorname{cosec} AE &= OK, & \operatorname{cosec} AF &= OL. \end{aligned}$$

Triunghiurile OEG şi OGF sunt egale, căci OE = OF ca raḑe; unghiurile EOG şi GOF sunt egale, căci $AE = AF$, și unghiurile EGO și OGF sunt egale, ca drepte; prin urmare:

$$EG = GF, \text{ sau } \sin AE = \sin AF.$$

Considerândŭ însă sensulŭ acestorŭ dóuĕ sinusuri *7, avemŭ:

$$\sin AE = -\sin AF.$$

In aceleașĭ triunghiuri OG fiind comunŭ, avem:

$$OG = OG, \text{ sau } \cos AE = \cos AF.$$

Semnele sunt aceleașĭ la ambele cosinusuri *16.

Triunghiurile OHA și OAI sunt egale, căci OA este comunŭ la amândóuĕ, unghiurile HOA și AOI sont egale din date, și $HAO = OAI$ ca drepte; prin urmare:

$$AH = AI, \text{ sau } \operatorname{tg} AE = \operatorname{tg} AF.$$

Considerandŭ însă sensulŭ acestorŭ dóuĕ tangente *10, avem:

$$\operatorname{tg} AE = -\operatorname{tg} AF.$$

Din aceleașĭ triunghiuri avem:

$$OH = OI, \text{ sau } \sec AE = \sec AF.$$

Semnele ambelorŭ secante sunt aceleașĭ *13.

Triunghiurile dreptunghii OBK și OBL sunt egale, căci OB este comunŭ, și $BOK = BOL$, din causă că $BOK = 90^0 - KOA$, și $BOL = 90^0 - LOC = 90^0 - KOA$. Din egalitatea acestorŭ triunghiuri resultă:

$$BK = BL \text{ sau } \cot AE = \cot AF.$$

Considerândŭ însă semnele * **19**, avemŭ:

$$\cot AE = -\cot AF.$$

Din egalitatea acelorŭ şi triunghiurĭ deducemŭ:

$$OK = OL, \text{ sau } \operatorname{cosec} AE = \operatorname{cosec} AF,$$

ori * **22**,

$$\operatorname{cosec} AE = -\operatorname{cosec} AF.$$

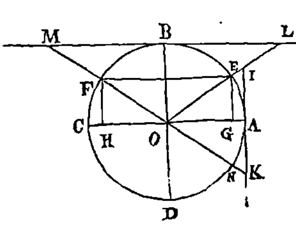
Aşa dară, pe basa acestei teoreme, putemŭ pune relaţiunile:

$$\sin x = -\sin(-x), \qquad \cot x = -\cot(-x),$$
$$\cos x = \cos(-x), \qquad \sec x = \sec(-x),$$
$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x), \qquad \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(-x).$$

LINIILE TRIGONOMETRICE ALE ARCELORŬ SUPLEMENTARE

26. Teoremă. *Dóuĕ arce suplimentare au linii trigonometrice egale şi de semne contrare, afară de sinusŭ şi cosecantă, carĭ sunt şi de aceleaşĭ semne.*

Fig. 8.



Fie arcele AE şi EFC (fig. 8), ast-felŭ că $AE + EFC = \pi$.

Ducêndŭ EF paralelŭ cu AC, avemŭ:

$$EFC = EF + FC, AEF = AE + EF, \text{ și } FC = AE;$$

deci:

$$EFC = AEF.$$

Așa dară in loculŭ arcelorŭ date AE și EFC, putemŭ considera arcele AE și AEF.

După figură avem:

$$\begin{aligned} \sin AE &= EG, & \sin AEF &= FH, \\ \cos AE &= OG, & \cos AEF &= OH, \\ \operatorname{tg} AE &= AI, & \operatorname{tg} AEF &= AK, \\ \sec AE &= OI, & \sec AEF &= OK, \\ \cot AE &= BL, & \cot AEF &= BM, \\ \operatorname{cosec} AE &= OL, & \operatorname{cosec} AEF &= OM. \end{aligned}$$

Triunghiurile dreptunghe OEG și OFH sunt egale, căci $OE = OF$, ca rade și unghiurile EOG și FOH sunt egale, din causă că $EA = FC$; prin urmare:

$$EG = FH, \text{ sau } \sin AE = \sin AEF,$$

și semnele ambelorŭ sinusuri sunt aceleașĭ.

Din aceleașĭ triunghiuri avemŭ:

$$OG = OH, \text{ sau } \cos AE = \cos AEF,$$

și considerândŭ sensulŭ ambelorŭ cosinusuri,

$$\cos AE = -\cos AEF.$$

Triunghiurile dreptunghe OAI și OAK sunt egale, căci OA este comunŭ, și unghiurile IOA și AOK sunt egale, pentru că $AE = FC = AN$; așa dară:

$$AI = AK, \text{ sau } \operatorname{tg} AE = \operatorname{tg} AEF,$$

şi considerândŭ sensulŭ ambelorŭ tangente,

$$\operatorname{tg} AE = - \operatorname{tg} AEF$$

Din egalitatea aceloraşĭ triunghiuri resultă :

$$OI = OK, \text{ sau } \sec AE = \sec AEF,$$

şi din consideraţia sensului ambelorŭ secante,

$$\sec AE = - \sec AEF$$

Triunghiurile OBL şi OBM sunt egale, căci OB este comunŭ şi unghiurile BOL şi BOM sunt egale, pentru că $BOL = 90^0 - EOA$, şi $BOM = 90^0 - FOC$, érâ $EOA = FOC$; prin urmare:

$$BL = BM, \text{ sau } \cot AE = \cot AEF,$$

şi considerândŭ sensulŭ :

$$\cot AE = - \cot AEF$$

Din egalitatea aceloraşĭ triunghiuri,

$$OL = OM, \text{ sau } \operatorname{cosec} AE = \operatorname{cosec} AEF.$$

Semnele sunt aceleaşĭ la ambele cosecante *22.

Pe basa acestei teoreme putemŭ dară pune relaţiunile :

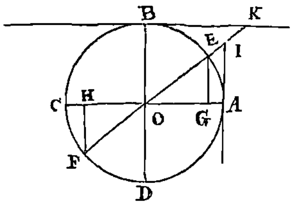
$$\sin x = \sin (\pi - x), \qquad \cot x = - \cot (\pi - x),$$
$$\cos x = - \cos (\pi - x), \qquad \sec x = - \sec (\pi - x),$$
$$\operatorname{tg} x = - \operatorname{tg} (\pi - x), \qquad \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} (\pi - x).$$

LINIILE TRIGONOMETRICE ALE ARCELORŬ CARĬ DIFERĂ INTRE ELE CU O SEMICIRCOMFERENŢĂ

27. Teoremă. *Arcele care diferă între dênsele cu o semicircomferenţă, aŭ liniĭ trigonometrice egale şi de semne contrare, afară de tangentă şi cotangentă carĭ aŭ şi acelaşŭ semnŭ.*

Fie arcele AE şi ABCF (fig. 9) ast-felŭ că $ABCF - AE = ECF = \pi$, avemŭ:

(Fig. 9)



$$\sin AE = EG,$$
$$\cos AE = OG,$$
$$\operatorname{tg} AE = AI,$$
$$\sec AE = OI,$$
$$\cot AE = BK,$$
$$\operatorname{cosec} AE = OK;$$

$$\sin ABCF = FH, \qquad \sec ABCF = OI,$$
$$\cos ABCF = OH, \qquad \cot ABCF = BK,$$
$$\operatorname{tg} ABCF = AI, \qquad \operatorname{cosec} ABCF = OK,$$

Triunghiurile dreptunghe OEG şi OHF sunt egale căci OE = OF ca raḑe, şi unghiurile EOG şi HOF sunt egale, ca opuse la vêrfŭ; prin urmare:

$$EG = FH, \text{ sau } \sin AE = \sin ABCF,$$

şi luândŭ in consideraţie semnele,

$$\sin AE = -\sin ABCF.$$

Din egalitatea aceloraşĭ triunghiuri, avemŭ :

$$OG = OH, \text{ sau } \cos AE = \cos ABCF,$$

şi din causa sensului ambelorŭ cosinusuri,

$$\cos AE = -\cos ABCF.$$

Tangenta arcului AE este AI, şi a arcului ABCF totŭ AI; prin urmare:

$$\operatorname{tg} AE = \operatorname{tg} ABCF.$$

Cotangenta arcului AE, precum şi a arcului ABCF, este BK; aşa dară

$$\cot AE = \cot ABCF.$$

Secanta arcului AE este OI, care trece prin estremitatea E a arcului; secanta arcului ABCF este totŭ OI, însă nu trece prin estremitatea F a lui; prin urmare * **13**

$$\sec AE = -\sec ABCF.$$

Asemenea OK este cosecanta şi a lui AE şi a lui ABCF; însă fiind-că trece prin estremitatea primului arcŭ, éră prin a celui de al doilea nu, avemŭ * **22**:

$$\operatorname{cosec} AE = -\operatorname{cosec} ABCF.$$

Putemŭ dară, pe basa acestei teoreme, se stabilimŭ relaţiunile următóre:

$$\sin x = -\sin(\pi + x), \qquad \cot x = \cot(\pi + x),$$
$$\cos x = -\cos(\pi + x), \qquad \sec x = -\sec(\pi + x),$$
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\pi + x), \qquad \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec}(\pi + x),$$

REDUCEREA ARCELORŬ LA PRIMULŬ CADRANŬ

28. Se întêmplă de multe ori să se céră liniile trigonometrice ale unui arcŭ mai mare de cât unŭ cadranŭ une-ori chiar coprindêndŭ mai multe circomferențe. Cu ajutorulŭ teoremelorŭ precedente putemŭ însă tot-d'a-una găsi unŭ arcŭ mai micŭ de cât unŭ cadranŭ, ale cărui liniĭ trigonometrice să aibă aceașĭ valóre absolută ca și liniile trigonometrice ale arcului datŭ.

Fie, spre esemplu, a se găsi liniile trigonometrice ale arcului de 1953^C. Impărțindŭ acestŭ arcŭ cu 360^0, găsimŭ că:

$$1953^0 = 5 \times 360^0 + 153^0, \text{ sau } 1953^0 = 5 \times 2\pi + 153^0;$$

prin urmare * **9, 12, 15, 18, 21, 24.**

$$\begin{aligned} \sin 1953^0 &= \sin 153^0, & \cot 1953^0 &= \cot 153^0, \\ \cos 1953^0 &= \cos 153^0, & \sec 1953^0 &= \sec 153^0, \\ \operatorname{tg} 1953^0 &= \operatorname{tg} 153^0, & \operatorname{cosec} 1953^0 &= \operatorname{cosec} 153^0, \end{aligned}$$

și fiind-că $153^0 = 180^0 - 27$, avem * **26**:

$$\begin{aligned} \sin 1953^0 &= \sin 153^0 = \sin 27^0, \\ \cos 1953^0 &= \cos 153^0 = -\cos 27^0, \\ \operatorname{tg} 1953^0 &= \operatorname{tg} 153^0 = -\operatorname{tg} 27^0, \\ \cot 1953^0 &= \cot 153^0 = -\cot 27^0, \\ \sec 1953^0 &= \sec 153^0 = -\sec 27^0, \\ \operatorname{cosec} 1953^0 &= \operatorname{cosec} 153^0 = \operatorname{cosec} 27^0, \end{aligned}$$

Fie încă arculŭ de 2375^0; avem:

$$2375^0 = 6 \times 360^0 + 215^0 = 6 \times 2\pi + 215^0,$$
$$\text{şi } 215^0 = 180^0 + 35^0;$$

pşin urmare * **27**,

$$\sin 2375^0 = \sin 215^0 = -\sin 35^0,$$
$$\cos 2375^0 = \cos 215^0 = -\cos 35^0,$$
$$\operatorname{tg} 2375^0 = \operatorname{tg} 215^0 = \operatorname{tg} 35^0,$$
$$\cot 2375^0 = \cot 215^0 = \cot 35^0,$$
$$\sec 2375^0 = \sec 215^0 = -\sec 35^0,$$
$$\operatorname{cosec} 2375^0 = \operatorname{cosec} 215^0 = -\operatorname{cosec} 35^0.$$

Fie in fine arculŭ de 1388^0; avemŭ:

$$1388^0 = 4 \times 360^0 - 52^0 = 4 \times 2\pi - 52^0;$$

aşa-dară * **25**

$$\sin 1388^0 = \sin(-52^0) = -\sin 52^0,$$
$$\cos 1388^0 = \cos(-52^0) = \cos 52^0,$$
$$\operatorname{tg} 1388^0 = \operatorname{tg}(-52^0) = -\operatorname{tg} 52^0,$$
$$\cot 1388^0 = \cot(-52^0) = -\cot 52^0,$$
$$\sec 1388^0 = \sec(-52^0) = \sec 52^0,$$
$$\operatorname{cosec} 1388^0 = \operatorname{cosec}(-52^0) = -\operatorname{cosec} 52^0,$$

ARCELE CARĬ CORESPUNDŬ LA O LINIE TRIGONOMETRICĂ DATĂ

29. Când ni se dă unŭ arcŭ, nu putemŭ avea de cât o singură valóre pentru fie-care linie trigonometrică a sa. Nu este însă totŭ aşa când ni se dă

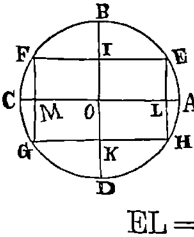
o linie trigonometrică, și se cere a se găsi arculŭ corespundĕtorŭ la dênsa. In adevĕrŭ, scimŭ, că funcțiunile circulare sunt tóte periodice; prin urmare la o valóre a unei liniĭ trigonometrice nu corespunde numai un arcŭ, ci o mulțime de arce, cariĭ diferă între dênsele cu un multiplu al periódei.

Să se găséscă, spre exemplu, arculŭ al căruĭ sinusŭ are valórea a; fie l unŭ arcŭ al căruĭ sinusŭ are acéstă valóre. Insă de óre-ce sinusulŭ are perióda 2π nu numai arculŭ l va avea sinusulŭ a, ci și arcele $2\pi+l$, $4\pi+l$, $6\pi+l$,.... Prin urmare găsimŭ pentru arculŭ căutatŭ o mulțime de valori cariĭ împlinescŭ cererea. Acelașŭ lucru se întêmplă și pentru tóte cele alte liniĭ trigonometrice.

De ordinar însă când se dă o linie trigonometrică, dintre tóte arcele cari corespundŭ la dênsa, nu se iaŭ de cât cele coprinse între 0^0 și 360^0, și cu modulŭ acesta se reduce numĕrulŭ arcelorŭ cariĭ rĕspundŭ la cerere.

Dându-se sinusulŭ unuĭ arcŭ să se găséscă arculŭ.

Fig. 10.



Dacă sinusulŭ datŭ a este positivŭ pe rada OB (fig. 10) luămŭ $OI=a$, și prin I ducemŭ FE paralelŭ cu CA; arculŭ căutatŭ este AE saŭ AF; căci dacă din E și F lăsămŭ EL și FM perpendiculare pe AC,

$$EL=\sin AE, \text{ și } FM=\sin AF;$$

însă EL = FM = OI = a; prin urmare AE şi AF sunt in adĕvĕrŭ arcurile al căror sinusŭ este $+a$.

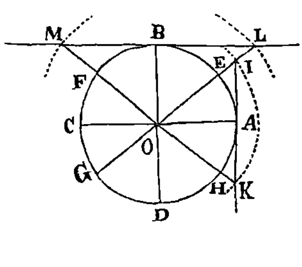
Dacă sinusulŭ datŭ a este negativŭ, luămŭ pe rada OD o lungime OK = a, şi ducêndŭ prin K linia GH paralelă cu AC, arculŭ căutatŭ este ABG saŭ ABCDH; căci MG=OK = $-a$=sin ABG, şi LH = OK = $-a$= sin ABCDH.

Dându-se cosinusulŭ unuĭ arcŭ să se găséscă arculŭ.

Construcţiunea este analógă cu cea dată pentru sinusŭ. Dacă cosinusulŭ a este positivŭ, luămŭ pe rada OA lungimea OL = a, şi ducêndŭ prin L pe EH paralelŭ cu BD, arculŭ căutatŭ este AE saŭ ABCDH. Dacă cosinusulŭ datŭ a este negativŭ, luămŭ pe OC lungimea OM = a, şi prin M ducemŭ FG paralelŭ la BD; arculŭ căutatŭ este ABF saŭ ABCG.

Dându-se tangenta unuĭ arcŭ să se găséscă arculŭ.

Fig. 11



Dacă tangenta dată a este positivă, pe partea positivă AI (fig. 11) a liniei tangentelorŭ luămŭ AI = a, şi prin I şi O ducem drépta IG; arculŭ căutat este AE saŭ ABCG; căci dacă vom construi tangentele acestorŭ dóuĕ arce, vom găsi că ambele aŭ dreptŭ tangentă pe $AI = a$.

Dacă a este negativŭ, pe partea negativă AK a liniei tangentelorŭ luămŭ $AK = a$, și ducêndŭ drépta KF prin centru, arculŭ căutatŭ este AF saŭ ABCDH; căci amêndóuĕ aceste arce aŭ dreptŭ tangentă pe $AK = a$.

Dându-se cotangenta unui arcŭ, să se găséscă arculŭ.

Cotangenta a fiindŭ positivă, luămŭ pe partea positivă BL a liniei cotangentelorŭ $BL = a$, și ducêndŭ LG, arculŭ căutatŭ este AE saŭ ABCG. — Dacă cotangenta dată este negativă, luândŭ pe partea negativă BM a liniei cotangentelorŭ $BM = -a$, ducemŭ MH; atunci arculŭ căutatŭ este AF saŭ ABCDH.

Dându-se secanta unui arcŭ să se găséscă arculŭ.

Dacă secanta a este positivă, din centrulŭ O (fig. 11) cu o radă egală cu a, descriemŭ un arcŭ care tae linia tangentelorŭ in punctele I și K; unindŭ IO și KO, arculŭ căutatŭ este AE saŭ ABCDH; in adĕvĕrŭ secantele acestorŭ dóuĕ arce sunt $+IO = +a$ și $+OK = +a$.

Dacă secanta a era negativă, construcțiunea era aceiaşĭ; însă prelungindŭ pe IO până in G şi pe KO până in F, arculŭ căutatŭ era AF saŭ ABCG.

Dându-se cosecanta unui arcŭ, să se găséscă arculŭ.

Dacă cosecanta dată a este positivă, din centrulŭ O cu o radă egală cu a descriemŭ unŭ arcŭ care tae linia cotangentelorŭ in punctele L şi M; unindŭ LO şi MO, arculŭ căutatŭ este AE saŭ AF.

Dacă cosecanta dată a este negativă, prelungindŭ pe LO până in G şi pe MO până in H, arculŭ căutatŭ este ABCG saŭ ABCDH.

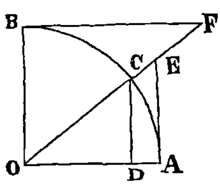
CAPITOLULŬ II.

FORMULE FUNDAMENTALE

RELAŢIUNI INTRE LINIILE TRIGONOMETRICE ALE ACELUIAŞŬ ARCŬ

30. Fie arculŭ $AC = a$ (fig. 12); liniile sale trigonometrice sunt:

Fig. 12



$CD = \sin a$, $\quad BF = \cot a$,
$OD = \cos a$, $\quad OE = \sec a$,
$AE = \text{tg}\, a$, $\quad OF = \text{cosec}\, a$.

Triunghiulŭ OCD, fiindŭ dreptunghiŭ ̀in D, dă:

$$\overline{CD}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OC}^2, \text{ sau } \sin^2 a + \cos^2 a = 1, \qquad (1)$$

căci OC este rada. Prin urmare *suma pătratelorŭ sinusului şi cosinusului unui arcŭ este egală cu unitatea.*

Din (1) putemŭ deduce încă:

$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$, saŭ $\sin a = \pm\sqrt{1-\cos^2 a}$, (a)

$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, saŭ $\cos a = \pm\sqrt{1-\sin^2 a}$, (b)

Triunghiurile OCD şi OEA sunt asemeni, căci aŭ unghiulŭ O comunŭ, şi pe cele-alte egale ca corespondente; prin urmare:

$$\frac{EA}{CD} = \frac{OA}{OD}, \text{ saŭ } \frac{tg a}{\sin a} = \frac{1}{\cos a},$$

ori inmulţindŭ ambii membri cu sin a,

$$tg a = \frac{\sin a}{\cos a} \tag{2}$$

adecă *tangenta unui arcŭ este egală cu raportulŭ sinusului către cosinusulŭ acelui arcŭ.*

Din asemănarea acelorașĭ triunghiuri avemŭ:

$$\frac{OE}{OC} = \frac{OA}{OD}, \text{ saŭ } \frac{\sec a}{1} = \frac{1}{\cos a},$$

ori in fine

$$\cos a \ \sec a = 1. \tag{3}$$

Din (3) putemŭ încă scóte, împărţindŭ cu cos a:

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}, \tag{c}$$

şi impărţindŭ cu sec a:

$$\cos a = \frac{1}{\sec a}, \tag{d}$$

Din aceste dóuĕ formule vedemŭ că *cosinusulŭ și secanta unui arcŭ sunt inverse una alteia.*

Triunghiurile OBF și OCD sunt asemeni, căci unghiurile din B și D sunt egale ca drepte, și cele din F și O ca alterne-interne: prin urmare

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{OD}}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{CD}},\ \text{saŭ}\ \frac{\cot a}{\cos a}=\frac{1}{\sin a},$$

de unde, înmulțindŭ ambiĭ membri cu cos a,

$$\cot a=\frac{\cos a}{\sin a},\qquad (4)$$

adecă *cotangenta unuĭ arcŭ este egală cu raportulŭ cosinusului către sinusulŭ aceluĭ arcŭ.*

Din asemĕnarea acelorașĭ triunghiurĭ avemŭ încă:

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OD}}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{CD}},\ \text{saŭ}\ \frac{\operatorname{cosec} a}{1}=\frac{1}{\sin a},$$

ori

$$\sin a\ \operatorname{cosec} a=1\qquad (5)$$

Din (5) putemŭ încă deduce, dacă împărțimŭ cu cosec a:

$$\sin a=\frac{1}{\operatorname{cosec} a},\qquad (e)$$

éră impărțindŭ cu sin$a$,

$$\operatorname{cosec} a=\frac{1}{\sin a},\qquad (f)$$

Din aceste dóuĕ formule se vede că *sinusulŭ și cosecanta unuĭ arcŭ sunt inverse una alteia.*

Imulțindŭ (2) și (4) membru cum embru, avemŭ:

$$\operatorname{tg}a \cot a = \frac{\sin a \cos a}{\cos a \sin a} = 1,$$

din care putemŭ scóte următórele dóuĕ formule:

$$\operatorname{tg}a = \frac{1}{\cot a}, \tag{g}$$

$$\cot a = \frac{1}{\operatorname{tg}a}. \tag{h}$$

Prin urmare *tangenta și cotangenta unui arcŭ sunt inverse una alteia.*

Formulele (1), (2), (3), (4), (5), împreună cu cele ce am derivatŭ până acum dintr'ênsele, sunt de un usŭ fórte desŭ in trigonometrie, din care causă să și numescŭ *formule trigonometrice fundamentale.*

FORMULE CORELATIVE

31. Sub acestŭ nume se înțelege *o serie de formule prin carĭ esprimămŭ o linie trigonometrică óre-care a unuĭ arcŭ in funcțiune de o altă linie trigonometrică a aceluĭ arcŭ.* Aceste formule sunt in numĕrŭ de trei-deci și se deducŭ din formulele deja aflate:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}, \tag{2}$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}, \tag{3}$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}, \tag{4}$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}, \tag{5}$$

Daca una din liniile trigonometrice ale arcului este cunoscută, cele-alte cinci vor putea să se afle resolvêndŭ cele cinci ecuaţiuni de susŭ. Prin urmare problema se póte deslega tot-d'a-una.

1°. *Dându-se sinusulŭ unuĭ arcŭ, să se găséscă cele-alte liniĭ trigonometrice ale arcului.*

Valórea cosinusului se scóte din (1); avemŭ:

$$\cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a}$$

Substitituindŭ acéstă valóre a cosinusului in (2), (3), (4), vom avea valórea tangentei, secantei şi cotangentei in funcţiune de sinusŭ:

$$\operatorname{tg} a = \pm\frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}},\ \sec a = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 a}},\ \cot a = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 a'}}{\sin a}$$

şi după (5),

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}.$$

2°. *Dându-se cosinusulŭ, să se afle cele-alte linii trigonometrice.*

Din (1) avemŭ:

$$\sin a = \pm\sqrt{1 - \cos^2 a}$$

espresiune a sinusului in funţiune de cosinusŭ. Substituindŭ acéstă valóre in (2), (4), (5), vom avea şi espresiunea tangentei, cotangentei şi cosecantei in funcţiune de cosinusŭ:

$$\operatorname{tg} a=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a},\ \cot a=\pm\frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}},\ \operatorname{cosec} a=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$$

şi după (3),

$$\sec a=\frac{1}{\cos a}.$$

3⁰. *Dându-se tangenta să se afle cele alte linii trigonometrice.*

Ecuaţiunea (2) dă:

$$\sin a=\cos a\ \operatorname{tg} a, \tag{A}$$

saŭ

$$\sin^2 a=\cos^2 a\ \operatorname{tg}^2 a$$

Punemŭ acéstă valóre in (1), şi avemŭ:

$$\cos^2 a\ \operatorname{tg}^2 a+\cos^2 a=1,\ \text{saŭ}\ \cos^2 a\ (1+\operatorname{tg}^2 a)=1,$$

de unde

$$\cos a=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$$

Punêndŭ acéstă valóre in (A), vom avea valórea lui sin a:

$$\sin a=\pm\frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}} \tag{B}$$

Din (3) avemŭ:

$$\sec a=\frac{1}{\cos a},$$

substituindŭ in loculŭ lui cos a valórea sa,

$$\sec a=\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}.$$

Ecuaţiunea (5) dă:

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a},$$

şi după (B),

$$\operatorname{cosec} a = \pm \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}$$

Iin fine ecuaţiunea (h) * 30 dă:

$$\cot a = \frac{1}{\operatorname{tg} a},$$

4°. *Dându-se cotangenta, să se afle cele-alte linii trigonometrice.*

Din (4) avemŭ:

$$\cos a = \sin a \cot a, \qquad (C)$$

sau

$$\cos^2 a = \sin^2 a \cot^2 a.$$

Punêndŭ acéstă valóre in (1), avemŭ:

$$\sin^2 a + \sin^2 a \cot^2 a = 1, \text{ ori } \sin^2 a\,(1+\cot^2 a) = 1.$$

de unde:

$$\sin a = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 a}} \qquad (D)$$

Acéstă valóre pusă in (C) dă:

$$\cos a = \pm \frac{\cot a}{\sqrt{1+\cot^2 a}},$$

şi fiind-că: $\sec a = \frac{1}{\cos a}$, avemŭ:

$$\sec a = \pm \frac{\sqrt{1+\cot^2 a}}{\cot a}.$$

Din (5) avemŭ:

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a},$$

şi punêndŭ locŭ de sin a valórea dată prin (D),

$$\operatorname{cosec} a = \pm\sqrt{1+\cot^2 a}$$

In fine ecuaţiunea (g) * 30 dă:

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{\cot a}.$$

5°. *Dânduse-se secanta să se găséscă cele-alte liniĭ trigonometrice.*

Ecuaţiunea (d) * 20 dă:

$$\cos a = \frac{1}{\sec a},$$

Punêndŭ acéstă valóre in (1), avemŭ succesivŭ:

$$\sin^2 a + \frac{1}{\sec^2 a} = 1,$$

$$\sec^2 a \sin^2 a + 1 = \sec^2 a,$$

$$\sin^2 a = \frac{\sec^2 a - 1}{\sec^2 a},$$

$$\sin a = \pm\frac{\sqrt{\sec^2 a - 1}}{\sec a},$$

Punêndŭ aceste valori ale lui sin a şi cos a in (2), (4) şi (5) şi făcêndŭ reducerile, avemŭ:

$$\operatorname{tg} a = \pm\sqrt{\sec^2 a - 1},\ \cot a = \frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 a - 1}},\ \operatorname{cosec} a = \pm\frac{\sec a}{\sqrt{\sec^2 a - 1}}$$

6°. *Dându-se cosecanta, să se găséscă cele-alte liniĭ trigonometrice.*

După (e) * 30 avemŭ:

$$\sin a = \frac{1}{\operatorname{cosec} a},$$

Punêndŭ acéstă valóre in (1), (2), (3), (4), vom avea, după nisce calcule analóge cu cele de la casulŭ trecutŭ:

$$\cos a = \pm \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}}{\operatorname{cosec} a}, \quad \operatorname{tg} a = \pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}},$$

$$\cot a = \pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}, \quad \sec a = \pm \frac{\operatorname{cosec} a}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}}.$$

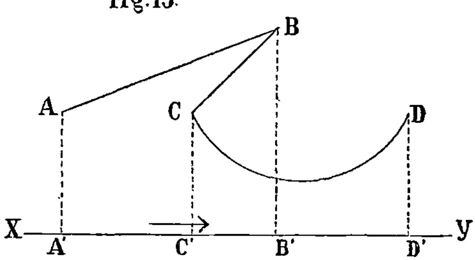
Tabelulŭ alăturatŭ coprinde tóte aceste resultate. In prima colónă verticală la stânga se află inscrisŭ numele liniei trigonometrice ce trebue să se esprime in funcţiune de alta, şi in prima colónă orizontală este numele liniei in funcţiune de care trebue să se esprime linia considerată. La întâlnirea colónelorŭ respective ale ambelorŭ linii trigonometrice se află espresiunea căutată.

	$\sin a$	$\cos a$	$\operatorname{tg} a$	$\cot a$	$\sec a$	$\operatorname{cosec} a$
$\sin a$	$\sin a$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$	$\pm\frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2 a-1}}{\sec a}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} a}$
$\cos a$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 a}$	$\cos a$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\pm\frac{\cot a}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$	$\frac{1}{\sec a}$	$\pm\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}{\operatorname{cosec} a}$
$\operatorname{tg} a$	$\pm\frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$	$\operatorname{tg} a$	$\frac{1}{\cot a}$	$\pm\sqrt{\sec^2 a-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
$\cot a$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}$	$\pm\frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} a}$	$\cot a$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2 a-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}$
$\sec a$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\frac{1}{\cos a}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\cot^2 a}}{\cot a}$	$\sec a$	$\pm\frac{\operatorname{cosec} a}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
$\operatorname{cosec} a$	$\frac{1}{\sin a}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 a}$	$\pm\frac{\sec a}{\sqrt{\sec^2 a-1}}$	$\operatorname{cosec} a$

DESTRE PROJECŢIUNI.

Se numesce *projecţiunea* unui punctŭ A (fig. 13) o dreptă XY, piciorul A' al perpendicularei lăsate din punctulŭ A pe dreapta XY. Acéstă dréptă se chiamă *axa de projecţine*.

Fig. 13.



Projecţiunea unei linii óre-care AB pe XY se numesce porţiunea A'B' a lui XY, coprinsă intre projecţiunile A' şi B' ale capetelorŭ A şi B ale liniei AB.

Să ne inchipuimŭ unŭ mobilŭ care se mişcă pe linia AB, de la A spre B. Dacă considerămŭ in fie-care momentŭ projecţiunea mobilului aceluia pe axa XY, vedemŭ că, pe când mobilulŭ de pe AB merge din A până in B, projecţiunea lui de pe XY merge din A' până in B'. Se convine a se considera projecţiunea A'B' ca *positivă*, dacă mobilulŭ care o descrie se mişcă pe aya XY intr'unŭ sensŭ óre-care determinatŭ spre exemplu in sensulŭ săgeţiĭ; şi ca *negativă* in casulŭ contrarŭ. Cu modulŭ acesta, dacă presupunemŭ că linia AB a fostŭ strĕbătută de mobilulŭ sĕŭ in sensulŭ de la A spre B, projecţiunea sa $A'B'$ este positivă; dacă insă mobilulŭ s'arŭ fi mişcatŭ din B spre A, projecţiunea $B'A'$ ar fi fostŭ negativă; aşa că $A'B' = -B'A'$.

Projecţiunile potŭ fi dar considerate ca cantităţi algebrice, susceptibile de a avé semnulŭ *plusŭ* saŭ *minusŭ*.

33. Teorema I. *Projecţiunea pe un axŭ a unei linii formate din mai multe altele este egală cu suma algebrică a projecţiunilorŭ părţilorŭ sale.*

Fie, spre esemplu, linia ABCD (fig. 13), formată din liniile AB, BC şi CD. Este evidentŭ că projecţiunea $A'D'$ a liniei totale se póte considera ca formată in modulŭ următorŭ: projecţiunea A' a mersŭ mai întâiŭ in sensulŭ positivŭ până in B', descriindŭ projecţiunea liniei AB, pe urmă a revenitŭ din B' in C', in sensulŭ negativŭ, descriindŭ projecţia lui BC; în fine a mersŭ din C' in D', in sensulŭ positivŭ, descriindŭ projecţia lui CD. Prin urmare putemŭ scrie:

$$A'D' = A'B' - B'C' + C'D';$$

însă de vreme ce $B'C'$ este in sine negativŭ, din causa modului cum a fostŭ descrisŭ, ecuaţia acésta se póte scrie şi aşa:

$$A'D' = A'B' + B'C' + C'D',$$

in care diferiţiĭ termeni sunt consideraţi ca cantităţi algebrice. C. C. T. D.

33. Teorema II. *Projecţiunea pe unŭ axŭ a unui conturŭ poligonalŭ închisŭ este zero.*

Fie conturulŭ poligonalŭ inchisŭ ABCDEF (fig. 14). Dacă considerămŭ unŭ mobilŭ care strĕbate acestŭ conturŭ, mergêndŭ din A în B, din B în C, . . ., projecţia pe XY a acestui mobilŭ va merge din A′ în B′, din B′ in C′. . . .; şi când mobilulŭ va termina de strĕbătutŭ drépta FA şi va ajunge in A, projecţia sa va ajunge şi ea în A′, punctulŭ sĕŭ de plecare; prin urmare distanţa între punctulŭ de plecare şi punctulŭ de ajungere alŭ projecţiunei este zero; cea ce demonstră teorema.

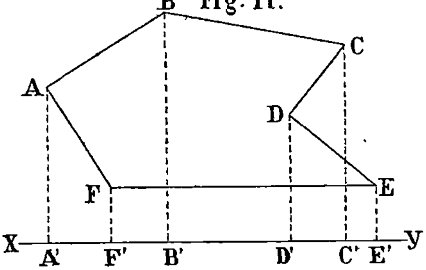


Fig. 14.

Corolarŭ. Projecţiunea pe unŭ axŭ a unei drepte care închide unŭ conturŭ poligonalŭ este egală cu projecţiunea acestuĭ conturŭ poligonalŭ.

După teorema II avemŭ (fig. 14):

$$\text{pr. } AB + \text{pr. } BC + \text{pr. } CD + \text{pr. } DE + \text{pr. } EF + \text{pr. } FA = 0,$$

de unde

$$-\text{pr. } FA = \text{pr. } AB + \text{pr. } BC + \text{pr. } CD + \text{pr. } DE + \text{pr. } EF;$$

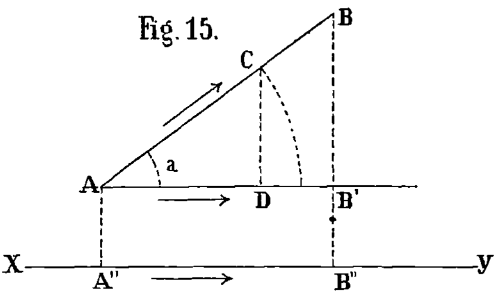
însă de óre-ce pr. FA = — pr. AF (**32**), acéstă ecuaţie se póte scrie:

$$\text{pr. AF} = \text{pr. AB} + \text{pr. BC} + \text{pr. CD} + \text{pr. DE} + \text{pr. EF}.$$

35. Teorema III. *Projecţia pe unŭ axŭ a unei drepte este egală cu produsulŭ lungimeĭ acesteĭ drepte prin cosinusulŭ unghiuluĭ ce face ea cu axa de projecţiune* şi care se numesce *unghiŭ de projecţiune.*

Fie AB (fig. 15) drépta dată şi XY axa de projecţiune. Projecţia luĭ AB pe XY este A″B″; însă dacă ducemŭ dreapta AB′ paralelă cu XY, avemŭ:

Fig. 15.



$$AB' = A''B'',$$

ca paralele coprinse între paralele, aşa că

$$AB' = \text{proj } AB.$$

Din A, cu o radă AC egală cu 1, se descriemŭ unŭ arcŭ, şi din C se lăsămŭ perpendiculara CD pe AB′; după definiţiune (**16**), avemŭ:

$$AD = \cos BAB' = \cos\alpha$$

Din triunghiurile asemenĭ BAB′ şi CAD, avemŭ:

$$\frac{AB'}{AD}=\frac{AB}{AC},$$

saŭ :

$$\frac{\text{proj. } AB}{\cos\alpha}=\frac{AB}{1},$$

de unde

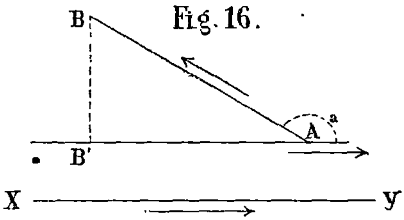
$$\text{proj } AB = AB\cos\alpha \qquad (1)$$

cea ce demonstră teorema.

36. Pentru a arĕta că acéstă teoremă este cu totulŭ generală, e necesarŭ a se precisa bine ce se înțelege prin mărimea unghiului de projecțiune.

Am spusŭ (32) că lungimile mĕsurate pe XY se consideră ca positive saŭ negative, după cum sunt socotite în sensulŭ săgețiĭ, saŭ în sensulŭ opusŭ. Totŭ asemenea, dacă drépta AB este considerată ca descrisă de unŭ mobilŭ care merge din A in B, sensulŭ AB se chiamă *sensulŭ positivŭ*, pe când BA este *sensulŭ negativŭ*. Ast-felŭ fiindŭ, *se consideră ca unghiŭ de projecțiune, unghiulŭ formatŭ de partea positivă a luĭ XY cu partea positivă a luĭ AB.*

Fig. 16.



Daca definimŭ ast-felŭ unghiulŭ de projecțiune, e ușorŭ de vĕḑutŭ că formula (1) este cu totulŭ generală, adecă că convine orĭ-cum ar fi așeḑate dreptele AB și XY una în raportŭ cu alta.

In fig. 16, repețindŭ rațіonamentulŭ de maĭ susŭ, vom găsi:

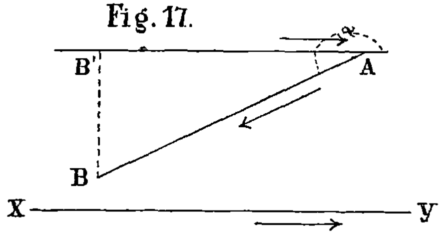
$$AB' = AB \cos BAB'.$$

Insă după sensulŭ cum sunt socotite mărimile în figură, projecția AB′ este negativă, iar unghiulŭ de projecțiune este α, care este suplementarŭ cu BAB′; deci $\cos\alpha = -\cos BAB'$ (**26**). Ecuația precedentă devine dar:

$$-AB' = -AB\cos\alpha,$$

care este chiar ecuația (1).

Fig. 17.

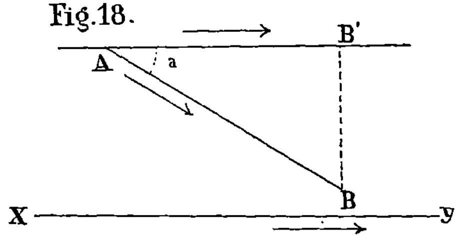


In fig. 17, unghiulŭ α diferă de BAB′ cu 180^0 așa că avemŭ iarășĭ:

$\cos BAB' = -\cos\alpha$ (**27**),

prin urmare și aci formula (1) este aplicabilă întocmaĭ.

Fig. 18.



In fine în fig. 18, projecțiunea AB′ este positivă; unghiulŭ α e negativŭ, fiind că e socotitŭ de la drépta AB′ în josŭ; însă cosinusulŭ sĕŭ este egalŭ cu cosinusulŭ unghiului positivŭ, (**25**), şi prin urmare

$$AB' = AB \cos BAB' = AB \cos \alpha.$$

Formula (1) este dar cu totulŭ generală.

ADUNAREA ARCELORŬ

37. *Sinusŭ şi Cosinusŭ.* Ne propunemŭ a găsi espresiunea sinusului şi cosinusului sumei a dóuĕ arce, cunoscêndŭ sinusulŭ şi cosinusulŭ arcelorŭ simple.

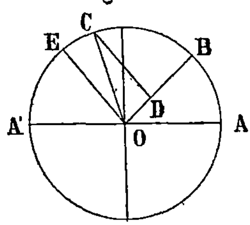
Fie $AB = a$ şi $BC = b$ cele dóuĕ arce date.

Avemŭ, dupe figură,

$$AC = a + b.$$

Ducemŭ radele OB şi OC şi perpendiculara CD.

Fig. 19.



Avemŭ, după definiţiuni, (**7, 16**):

$$CD = \sin b, \quad OD = \cos b.$$

Se projectămŭ pe A′A conturulŭ poligonalŭ OCD, avemŭ (**34**, *corolarŭ*) :

$$\text{(a)} \quad \text{pr. } OC = \text{pr. } OD = \text{pr. } DC.$$

Insă (**35**)

$$\text{pr. } OC = OC \cos COA, \quad \text{pr. } OD = OD \cos DOA,$$

$$\text{pr. } DC = DC \cos (CD, OA),$$

Aci avemŭ:

$$OC = 1, \text{ ca rađă } (\mathbf{4})\text{ ; } OD = \cos b, \; DC = \sin b,$$
$$COA = a + b, \; DOA = a.$$

Pentru a evalua şi unghiulŭ (CD, OA), ducemŭ rađa OE paralelă cu DC; atunci

$$(CD, \; OA) = EOA = EOB + BOA = \frac{\pi}{2} + a.$$

Substituindŭ succesivŭ tóte aceste valori in (a), găsimŭ:

$$\cos(a + b) = \cos b \cos a + \sin b \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right).$$

Insă

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin\left(-a\right) = -\sin a \; (\mathbf{16}, \mathbf{25});$$

deci

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \qquad (1)$$

38. Formula (1) este cu totulŭ generală, de óre ce a fostŭ stabilită cu ajutorulŭ unei teoreme a cărei generalitate a fostŭ stabilită (**36**); prin urmare ea subsistă orĭ-carĭ ar fi valorile unghiurilorŭ a şi b. De acea putemŭ înlocui într'ênsa pe b prin $-b$, cea ce dă:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b),$$

sau (**25**).

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \qquad (2)$$

Totŭ asemenea, in (1) şi (2) putemŭ înlocui pe a prin $\frac{\pi}{2} - a$, cea ce dă:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b,$$

saŭ:

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \sin b \cos b - \cos a \sin b,$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

orĭ în fine:

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b, \qquad (3)$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \qquad (4)$$

Formulele (1), (2), (3), (4) daŭ sinusulŭ şi cosinusulŭ sumei saŭ diferenţei a dóuĕ arce in funcţie de sinusele şi cosinusele arcelorŭ simple. Ele sunt cu totulŭ generale.

39. Formulele (1) şi (4) ne daŭ sinusulŭ şi cosinusulŭ sumeĭ a dóuĕ arce; însă este lesne a le generalisa şi pentru mai multe arce.

Dacă in (1) şi (4) înlocuimŭ pe b prin $c + d$, acele formule devinŭ:

$$\sin(a + c + d) = \sin a \cos(c + d) + \sin(c + d)\cos a,$$

$$\cos(a + c + d) = \cos a \cos(c + d) - \sin a \sin(c + d),$$

saŭ

$$\sin(a + c + d) = \sin a (\cos c \cos d - \sin c \sin d)$$

$$+\cos a\,(\sin c \cos d + \sin d \cos c),$$

$$\cos(a+c+d) = \cos a\,(\cos c \cos d - \sin c \sin d)$$
$$- \sin a\,(\sin c \cos d + \sin d \cos c),$$

de unde

$$\sin(a+c+d) = \sin a \cos c \cos d + \sin c \cos a \cos d$$
$$+ \sin d \cos a \cos c - \sin a \sin c \sin d,$$

$$\cos(a+c+d) = \cos a \cos c \cos d - \cos a \sin c \sin d$$
$$- \sin a \sin c \cos d - \sin a \sin d \cos c.$$

Cu ajutorulŭ acestora putemŭ găsi sinusulŭ şi cosinusulŭ sumei a patru arce, şi aşa mai departe.

40. Tagenta şi cotagenta. Pentru a găsi tangenta sumeĭ a dóuĕ arce, vomŭ recurge la formula * 30 (2):

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)},$$

înlocuindŭ pre sin $(a+b)$ şi cos $(a+b)$ cu valorile lor date prin (1) şi (4),

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b},$$

şi împărţindŭ ambiĭ termenĭ ai fracţiunii cu cos$a$, cos$b$,

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\dfrac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\sin b \cos a}{\cos b \cos a}}{1 - \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$$

saŭ

$$\mathrm{tg}\,(a+b)=\frac{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b}{1-\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b}. \qquad (5)$$

Dacă în acéstă formulă înlocuimŭ pe b cu $-b$, avemŭ *25 :

$$\mathrm{tg}\,(a-b)=\frac{\mathrm{tg}a-\mathrm{tg}b}{1+\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b}. \qquad (6)$$

Pentru a găsi contagenta sumei a dóuĕ arce, vomŭ avea asemenea:

$$\cot\,(a+b)=\frac{\cos\,(a+b)}{\sin\,(a+b)}=\frac{\cos a\,\cos b-\sin a\,\sin b}{\sin a\,\cos b+\sin b\,\cos a},$$

și împărțindŭ ambiĭ termeni cu $\sin a\,\sin b$,

$$\cot\,(a+b)=\frac{\frac{\cos a\,\cos b}{\sin a\,\sin b}-1}{\frac{\sin a\,\cos b}{\sin a\,\sin b}+\frac{\sin b\,\cos a}{\sin a\,\sin b}},$$

saŭ

$$\cot\,(a+b)=\frac{\cot a\,\cot b-1}{\cot b+\cot a}. \qquad (7)$$

Dacă aci înlocuimŭ pe b cu $-b$ și schimbămŭ semnele ambilorŭ termeni ai fracțiunei, avemŭ:

$$\cot\,(a-b)=\frac{1+\cot a\,\cot b}{\cot b-\cot a}. \qquad (8)$$

41. Prin formulele (5) și (7) putemŭ găsi tangenta și contangenta unei sume de mai multŭ de câtŭ dóuĕ arce. In adĕvĕrŭ punêndŭ în aceste formule în locŭ de b pe $c+d$, avemŭ:

$$\operatorname{tg}(a+c+d)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}(c+d)}{1-\operatorname{tg}a\ \operatorname{tg}(c+d)},$$

$$\cot(a+c+d)=\frac{\cot a\ \cot(c+d)-1}{\cot(c+d)+\cot a},$$

şi înlocuindŭ pe $\operatorname{tg}(c+d)$ şi pe $\cot(c+d)$ cu valorile lorŭ,

$$\operatorname{tg}(a+c+d)=\frac{\operatorname{tg}a+\dfrac{\operatorname{tg}c+\operatorname{tg}d}{1-\operatorname{tg}c\operatorname{tg}d}}{1-\operatorname{tg}a\dfrac{\operatorname{tg}c+\operatorname{tg}d}{1-\operatorname{tg}c\operatorname{tg}d}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}c+\operatorname{tg}d-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}c\operatorname{tg}d}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}d-\operatorname{tg}c\operatorname{tg}d},$$

$$\cot(a+c+d)=\frac{\cot a\ \dfrac{\cot c\cot d-1}{\cot c+\cot d}-1}{\dfrac{\cot c\cot d-1}{\cot c+\cot d}+\cot a}$$

$$=\frac{\cot a\cot c\cot d-\cot a-\cot c-\cot d}{\cot a\cot c+\cot a\cot d+\cot c\cot d-1}.$$

IMMULŢIREA ARCELORŬ

42. Considerămŭ formulele

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b)&=\sin a\ \cos b+\sin b\ \cos a,\\ \cos(a+b)&=\cos a\ \cos b-\sin a\ \sin b.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(A)}$$

Făcêndŭ $a=b$, ele devinŭ:

$$\sin 2a=2\sin a\cos a,\qquad(1)$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a.\qquad(2)$$

Aceste formule ne daŭ sinusulŭ şi cosinusulŭ arcului îndoitŭ $2a$ în funcţiune de sinusulŭ şi cosinusulŭ arcului simplu a.

Dacă in (1) şi (2) înlocuimŭ pe rândŭ pe $\sin a$ $\cos a$ cu valorile lorŭ date prin ecuaţiunile (a) şi (b) de la § 30, avemŭ alte formule, destulŭ de desŭ intrebuinţate:

$$\sin 2a = \pm 2 \sin a\sqrt{1-\sin^2 a} = \pm 2 \cos a\sqrt{1-\cos^2 a},$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1,$$

$$\cos 2a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a.$$

Dacă in formulele

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b}, \quad \cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}, \quad \text{(B)}$$

facemŭ asemenea $a = b$, avemŭ:

$$\operatorname{tg}2a = \frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a}, \quad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}. \quad (3)$$

43. In formula (A) înlocuindŭ pe b cu $2a$, avemŭ:

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \sin 2a \cos a,$$

$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a,$$

şi substituindŭ in loculŭ lui $\sin 2a$ şi $\cos 2a$ valorile lor date prin (1) şi (2),

$$\sin 3a = \sin a(\cos^2 a - \sin^2 a) + 2\sin a \cos a \cos a$$
$$= 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a,$$

$$\cos 3a = \cos a(\cos^2 a - \sin^2 a) - 2\sin a \sin a \cos a$$
$$= \cos^3 a - 3\cos a \sin^2 a.$$

Punêndŭ in prima ecuaţiune $1-\sin^2 a$ in locŭ de $\cos^2 a$, şi in a dóua $1-\cos^2 a$ in locŭ de $\sin^2 a$, şi reducêndŭ,

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

Făcêndŭ şi in formulele (B) pe $b=2a$, vomŭ avé asemenea:

$$\mathrm{tg}3a=\frac{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}2a}{1-\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}2a}=\frac{\mathrm{tg}a+\frac{2\mathrm{tg}\,a}{1-\mathrm{tg}^2 a}}{1-\mathrm{tg}a\frac{2\mathrm{tg}a}{1-\mathrm{tg}^2 a}}=\frac{3\mathrm{tg}a-\mathrm{tg}^3 a}{1-3\mathrm{tg}^2 a},$$

$$\cot 3a=\frac{\cot a\cot 2a-1}{\cot a+\cot 2a}=\frac{\cot a\frac{\cot^2 a-1}{2\cot a}-1}{\cot a+\frac{\cot^2 a-1}{2\cot a}}=\frac{\cot^3 a-3\cot a}{3\cot^2 a-1}.$$

44. Putemŭ găsi formule generale carĭ să ne dea sinusulŭ şi cosinusulŭ multiplului unui arcŭ prin ori-ce numĕrŭ, intregŭ şi positivŭ. Pentru acésta considerămŭ ecuaţiunile cunoscute:

$$\sin(a+b)=\sin a\ \cos b+\sin b\ \cos a,$$

$$\sin(a-b)=\sin a\ \cos b-\sin b\ \cos a,$$

$$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\sin a\ \sin b,$$

$$\cos(a-b)=\cos a\ \cos b+\sin a\ \sin b.$$

Adunândŭ respectivŭ aceste ecuaţiuni, avemŭ:

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\ \cos b,$$

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\ \cos b.$$

Punemŭ $a=mb$; atunci $a+b=(m+1)b, a-b=(m-1)\,b$, şi ecuaţiunile devinŭ:

$$\left.\begin{array}{l}\sin(m+1)b=2\sin mb\cos b-\sin(m-1)b,\\ \cos(m+1)b=2\cos mb\cos b-\cos(m-1)b.\end{array}\right\}\quad(4)$$

Aceste formule, numite formulele lui *Thoma Simpson*, ne daŭ mediulŭ de a calcula sinusulŭ şi cosinusulŭ multiplului unui arcŭ prin un numĕrŭ întregŭ şi positivŭ $m+1$, când se cunoscŭ sinusele şi cosinusele multiplilorŭ acelui arcŭ prin numerele m şi $m-1$.

Esemplu. Fie $b=8^0 13' 32''$, $m=5$; după (4) avemŭ:

$$\sin[(5+1)\times 8^0 13' 32'']=2\sin[5\times 8^0 13' 32'']\cos 8^0 13' 32''$$
$$-\sin[(5-1)\times 8^0 13' 32''],$$
$$\cos[(5+1)\times 8^0 13' 32'']=2\cos[5\times 8^0 13' 32'']\cos 8^0 13' 32''$$
$$-\cos[(5-1)\times 8^0 13' 32''],$$

şi efectuândŭ înmulţirile,

$$\sin 49^0 21' 12''=2\sin 41^0 7' 40''\cos 8^0 13' 32''-\sin 32^0 54' 8'',$$

$$\cos 49^0 21' 12''=2\cos 41^0 7' 40''\cos 8^0 13' 32''-\cos 32^0 54' 8''.$$

DIVISIUNEA ARCELORŬ

45. Adunândŭ ecuaţiunile

$$1=\sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}$$

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2},$$

obținemŭ relațiunea:

$$1 + \sin a = \sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$= \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right)^2,$$

de unde

$$\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin a}$$

Dacă, din contră, scădemŭ una din alta ecuațiunile de susŭ, avemŭ:

$$1 - \sin a = \sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}\, 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$= \left(\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} \right)^2,$$

de unde

$$\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin a} \tag{2}$$

Adunândŭ ecuațiunile (1) și (2) și împărțindŭ cu 2, avemŭ:

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{1 + \sin a}}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - \sin a}}{2}. \tag{3}$$

Scădêndŭ ecuaţiunile (1) şi (2) una din alta şi împărţindŭ cu 2, avemŭ:

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+\sin a}}{2} \mp \frac{\sqrt{1-\sin a}}{2}.$$

Formulele (3) şi (4) ne daŭ *sinusulŭ şi cosinusulŭ arculuĭ pe jumĕtate in funcţiune de sinusulŭ arcului intregŭ.*

46. Considerămŭ ecuaţiunile.

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1.$$

Resolvêndu-le in raportŭ cu $\sin\frac{a}{2}$ şi cu $\cos\frac{a}{2}$, avemŭ:

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \qquad (5)$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \qquad (6)$$

Impărţindŭ (5) prin (6) membru cu membru, obţinemŭ:

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \pm\frac{\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}$$

saŭ, fiind-că in membrulŭ alŭ doilea se împartŭ numai cantitățile de sub radicalŭ,

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \qquad (7)$$

Formulele (5), (6) și (7) ne daŭ *sinusulŭ, cosinusulŭ și tangenta arcului pe jumĕtate in funcțiune de cosinusulŭ arcului intregŭ.*

Observare. Dacă presupunemŭ că $a < 180^0$, atunci $\frac{a}{2} < 90^0$, și prin urmare $\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ și $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ sunt positivi; deci in ipotesa că $a < 180^0$, nu vomŭ lua de cât semnulŭ $+$ alŭ radicalului din membrulŭ alŭ doilea alŭ ecuațiunilorŭ (5), (6) și (7), și atunci aceste ecuațiuni se scriŭ:

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}},\ \cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},\ \operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

47. Dacă în ecuețiunea

$$\operatorname{tg}a\frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$$

eliminămŭ numitorulŭ, avemŭ:

$$\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}=2\operatorname{tg}\frac{a}{2},$$

saŭ:

$$\operatorname{tg}a \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}+2\operatorname{tg}\frac{a}{2}-\operatorname{tg}a=0,$$

ori, divisândŭ peste totŭ cu $\operatorname{tg}a$,

$$\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}+\frac{2}{\operatorname{tg}a}\operatorname{tg}\frac{a}{2}-1=0,$$

ecuaţiune de gradulŭ al doilea in $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, care ne dă *valórea lui* $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ *in funcţiune* de $\operatorname{tg}a$:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=-\frac{1}{\operatorname{tg}a}\pm\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2a}+1}=-\frac{1}{\operatorname{tg}a}\pm\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2a}{\operatorname{tg}^2a}}$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2a}}{\operatorname{tg}a} \tag{8}$$

In asemenea modŭ, din

$$\cot a=\frac{\cot^2\frac{a}{2}-1}{2\cot\frac{a}{2}},$$

tragemŭ:

$$2\cot a\cot\frac{a}{2}=\cot^2\frac{a}{2}-1,$$

de unde

$$\cot^2\frac{a}{2}-2\cot a\cot\frac{a}{2}-1=0,$$

ecuaţiune din care scótemŭ:

$$\cot\frac{a}{2}=\cot a\pm\sqrt{\cot^2a+1}; \tag{9}$$

acéstă relaţiune ne dă *valórea cotagentei arcului pe jumĕtate in funcţiune de valórea cotagentei arcului intregŭ.*

FORMULE CALCULABILE PRIN LOGARITMI

48. Pentru inlesnirea calculelorŭ este bine tot-d'a-una, pe cât se póte, a înlocui sumele şi diferinţele ce figuréză in espresiunile algebrice şi trigonometrice, prin produse şi câturi, din causă că aceste din urmă, după cum scimŭ, se potŭ calcula prin logaritmi, pre când cele d'întâiŭ nu.

Amŭ găsitŭ deja (46, (5) şi (6)):

$$1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2},\ 1-\cos a=2\sin^2\frac{a}{2}.$$

Insă putemŭ încă găsi şi alte espresiuni, fórte insemnate, calculabile prin logaritmi.

Considerămŭ ecuaţiunile:

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a,$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a.$$

Adunândŭ mai întâiŭ aceste dóuĕ egalităti, şi apoi scăḑêndu-le membru cu membru, obţinemŭ relaţiunile urmĕtóre:

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b)+\sin(a-b)&=2\sin a\cos b,\\ \sin(a+b)-\sin(a-b)&=2\sin b\cos a.\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

Punemŭ:

$$a+b=p,\qquad a-b=q;\qquad (a)$$

aceste dóuĕ ecuaţiuni, mai întâiŭ adunate şi apoi scăḑute, şi pe urmă împărţite cu 2, dau:

$$a=\frac{p+q}{2},\ b=\frac{p-q}{2}, \tag{b}$$

Valorile date de (a) şi (b) le substituimŭ in (A), cari devinŭ atunci:

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \tag{1}$$

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}. \tag{2}$$

Ecuaţiunea (1) esprimă că *suma sinusurilorŭ a dóuĕ arce este egală cu de dóuĕ orĭ sinusulŭ semisumei arcelorŭ înmulţitŭ prin cosinusulŭ semidiferenţei lorŭ.*

Ecuaţiunea (2) arată că *diferenţa sinusurilorŭ a dóuĕ arce este egală cu de dóuĕ orĭ sinusulŭ semidiferenţei arcelorŭ inmulţitŭ prin cosinusulŭ semisumei lorŭ.*

49. Ecuaţiunile

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b,$$

mai întâiŭ adunate şi apoi scăḑute una din alta, dau:

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b,$$

$$\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin a\sin b;$$

şi făcêndŭ şi aci substituirile indicate de ecuaţiunile (a) şi (b),

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos q - \cos p = 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}, \qquad (4)$$

Ecuaţiunea (3) esprimă că *suma cosinusurilorŭ a dóuĕ arce este egală cu de dóuĕ ori cosinusulŭ semisumei arcelorŭ înmulţitŭ prin cosinusulŭ semidiferenţei lorŭ.*

Ecuaţiunea (4) arată că *diferenţa cosinusurilorŭ a dóuĕ arce este egală cu dóuĕ ori sinusulŭ semisumei arcelorŭ înmulţitŭ prin sinusulŭ semidiferenţei lorŭ.*

50. Divisândŭ una cu alta ecuaţiunile (1), (2), (3) şi (4) dóuĕ câte dóuĕ, obţinemŭ o serie de alte formule calculabile prin logaritmi:

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}} = \operatorname{tg}\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{p+q}{2} \times \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}}.$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}} = \operatorname{tg}\frac{p+q}{2},$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos q-\cos p}=\frac{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p-q}{2},$$

$$\frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}}{2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}=\operatorname{tg}\frac{p-q}{2},$$

$$\frac{\sin p-\sin q}{\cos q-\cos p}=\frac{2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p+q}{2},$$

$$\frac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p}=\frac{2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}=\cot\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}.$$

51. Écă o formulă însemnată care se întrebuințédă uneori in calcule.

Inmulțimŭ una cu alta egalitățile

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a,$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a,$$

și obținemŭ:

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a\cos^2 b-\sin^2 b\cos^2 a$$

Inlocuindŭ in acéstă egalitate mai întâiŭ pe $\cos^2 a$ și $\cos^2 b$ cu $1-\sin^2 a$ și $1-\sin^2 b$, și apoi pe $\sin^2 a$ și $\sin^2 b$ cu $1-\cos^2 a$ și $1-\cos^2 b$, dobândimŭ ecuațiile:

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a(1-\sin^2 b)-\sin^2 b(1-\sin^2 a),$$

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=(1-\cos^2 a)\cos^2 b-(1-\cos^2 b)\cos^2 a.$$

Efectuândŭ înmulţirile din membrulŭ al doilea şi făcêndŭ tóte reducerile, ajungemŭ la ecuaţiile:

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b,$$

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\cos^2 b-\cos^2 a.$$

51- Putemŭ face calculabile prin logaritmi şi suma saŭ diferenţa a dóuĕ tangente. In adevĕrŭ:

$$\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b=\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b}=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b},$$

$$\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b=\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{\cos a\cos b}=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}.$$

In asemenea modŭ avemŭ:

$$\cot a+\cot b=\frac{\cos a}{\sin a}+\frac{\cos b}{\sin b}=\frac{\cos a\sin b+\cos b\sin a}{\sin a\sin b}=\frac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b},$$

$$\cot a-\cot b=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\cos b}{\sin b}=\frac{\cos a\sin b-\cos b\sin a}{\sin a\sin b}=\frac{\sin(b-a)}{\sin a\sin b}.$$

52. Se facemŭ calculabile prin logaritmi suma sau diferenţa a dóuĕ secante; avemŭ:

$$\sec a+\sec b=\frac{1}{\cos a}+\frac{1}{\cos b}=\frac{\cos a+\cos b}{\cos a\cos b}$$

$$=\frac{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\cos a\cos b},$$

$$\sec a-\sec b=\frac{1}{\cos a}-\frac{1}{\cos b}=\frac{\cos b-\cos a}{\cos a\cos b}$$

$$=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{\cos a\cos b}.$$

Asemenea:

$$\operatorname{cosec} a+\operatorname{cosec} b=\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\sin b}=\frac{\sin b+\sin a}{\sin a\sin b}$$

$$=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\sin a\sin b},$$

$$\operatorname{cosec} a-\operatorname{cosec} b=\frac{1}{\sin a}-\frac{1}{\sin b}=\frac{\sin b-\sin a}{\sin a\sin b}$$

$$=\frac{2\sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\sin a\sin b}.$$

54. Pentru a face calculabile prin logaritmi espresiunea $\sin a+\cos b$, observămŭ că $\cos b=\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$, şi atunci

$$\sin a+\cos b=\sin a+\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$$

$$=2\sin\frac{a+\frac{\pi}{2}-b}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-b-a}{2},$$

saŭ

$$\sin a+\cos b=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right).$$

Asemenea

$$\sin a-\cos b=\sin a-\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$$

$$= 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-b-a}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-b+a}{2},$$

orĭ

$$\sin a - \cos b = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a-b}{2}\right).$$

55. Fórte adesea este necesarĭŭ a se transforma espresiunile $1-\sin a$ şĭ $1+\sin a$. Pentru acésta

$$1-\sin a = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right),$$

$$1+\sin a = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right),$$

avêndŭ in vedere formulele aflate (5) şi (6) (46).

Divisândŭ una cu alta ecuaţiunile aflate şi estrăgêndŭ rădĕcina pătrată, găsimŭ:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}.$$

56. Espresiunea

$$1+\operatorname{tg}a = 1+\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos a+\sin a}{\cos a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+\sin a}{\cos a}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}{\cos a}.$$

Asemenea:

$$1-\operatorname{tg}a = 1-\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos a-\sin a}{\cos a}$$

$$= \frac{\cos a - \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos a}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\cos a}$$

şi fiind-că

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - a\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right),$$

avemŭ:

$$1 - \operatorname{tg} a = \frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{\cos a}.$$

57. Une-ori este necesariŭ a transforma espresiunea $\sin a + \sin b + \sin c$, în care $a + b + c = \pi$.

Avemŭ mai întâiŭ: (46).

$$\sin b + \sin c = 2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}. \qquad \text{(a)}$$

Insă din relaţiunea $a + b + c = \pi$, deducemŭ: $a = \pi - (b + c)$, şi prin urmare (26, 42),

$$\sin a = \sin(b + c) = 2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b+c}{2}.$$

Adăogând acéstă ecuaţiune la (a),

$$\sin a + \sin b + \sin c = 2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b+c}{2} + 2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$= 2\sin\frac{b+c}{2}\left(\cos\frac{b+c}{2} + \cos\frac{b-c}{2}\right),$$

insă (47)

$$\cos\frac{b+c}{2}+\cos\frac{b-c}{2}=2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2};$$

aşa-dară

$$\sin a+\sin b+\sin c=4\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

Pe lângă acestea din $a+b+c=\pi$, avemŭ $\frac{b+c}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$, şi prin urmare $\sin\frac{b+c}{2}=\cos\frac{a}{2}$; deci ecuaţiunea din urmă devine:

$$\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}. \qquad \text{(b)}$$

58. Fie încă de transformatŭ espresiunea $\sin a+\sin b-\sin c$, in care $a+b+c=\pi$. Vomŭ avea, ca şi mai susŭ:

$$\sin b-\sin c=2\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{b+c}{2},$$

$$\sin a=\sin(b+c)=2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b+c}{2};$$

adunândŭ,

$$\sin a+\sin b-\sin c=2\cos\frac{b+c}{2}\left(\sin\frac{b+c}{2}+\sin\frac{b-c}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

sau

$$\sin a+\sin b-\sin c=4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}. \qquad \text{(c)}$$

59. Se facemŭ calculabilă prin logaritmi espresiunea $\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}$, in care $a+b+c=\pi$ Avemŭ (50):

$$\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}},$$

şi fiind-că $\frac{b+c}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$,

$$\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}.$$

Insă

$$\cot\frac{a}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}};$$

adunândŭ,

$$\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}+\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right).}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

Insă după condiţiunea pusă avemŭ:

$$\sin\frac{a}{2}=\cos\frac{b+c}{2}=\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2};$$

atunci

$$\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}},$$

saŭ in fine,

$$\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}.$$

O demonstraţiune identică ne va da, pentru $a+b+c=\pi$, şi

$$\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c=\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c.$$

METODE GENERALE PENTRU A FACE ESPRESIUNILE CALCULABILE PRIN LOGARITMI

60. Până acum nu am urmatŭ nici o regulă fixă in operaţiunile ce amŭ făcutŭ pentru a transforma espresiunile, ci am căutatŭ numai a profita de forma lorŭ particulară pentru a simplifica, pe cât se póte, calculele. Sunt însă şi metode generale pentru a face acéstă transformare.

Fie binomulŭ $A+B$, in care cantităţile A şi B aŭ orĭ-ce fel de valori vom voi, însă positive. Punêndŭ pe A ca factorŭ comunŭ, vom avea :

$$A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right). \qquad (a)$$

Punemŭ

$$\frac{B}{A}=\operatorname{tg}^2\varphi, \qquad (b)$$

φ fiindŭ unŭ unghĭŭ ajutătorŭ óre-care; şi putemŭ tot-d'a-una găsi unŭ unghĭŭ φ care se satisfacă ecuaţiunea (b), căci scimŭ că tangenta unui arcŭ póte se aibă tóte valorile posibile. Substituindŭ acéstă valóre in (a),

$$A+B=A\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=A\sec^2\varphi=\frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

Unghiulŭ φ fiind determinatŭ prin relaţiunea (b), espresiunea $\frac{A}{\cos^2\varphi}$, calculabilă prin logaritmi, va fi şi ea determinată.

61. Luămŭ binomulŭ $A-B$, in care A şi B sunt positive, însă $A>B$. Punêndŭ érăşĭ pe A ca factorŭ comunŭ,

$$A-B=A\left(1-\frac{B}{A}\right). \qquad (c)$$

Fiind-că $A>B$, $\frac{B}{A}<1$; prin urmare putemŭ pune:

$$\frac{B}{A}=\cos^2\varphi, \qquad (d)$$

şi acéstă relaţiune ne va da tot-d'a-una o valóre reală pentru φ. Punêndŭ in (c) valórea lui $\frac{B}{A}$ dată de (d), acea espresiune se face:

$$A-B=A\,(1-\cos^2\varphi)=A\sin^2\varphi.$$

Dacă in $A-B$ presupunemŭ că $A<B$, avemŭ:

$$A-B=-(B-A)=-B\left(1-\frac{A}{B}\right),$$

şi punêndŭ érăşĭ $\frac{A}{B}=\cos^2\varphi$,

$$A-B=-B(1-\cos^2\varphi)=-B\sin^2\varphi.$$

62. Fie binomulŭ

$$m\sin a+n\cos a,$$

in care a este unŭ unghĭŭ óre-care, m şi n nisce monóme óre-care. Punêndŭ pe m ca factorŭ comunŭ,

$$m\sin a+n\cos a=m\left(\sin a+\frac{n}{m}\cos a\right).$$

Dacă luămŭ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{n}{m}$, avemŭ:

$$m\sin a+n\cos a=m(\sin a+\operatorname{tg}\varphi\cos a)=m\left(\sin a+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos a\right)$$

$$=m\frac{\sin a\cos\varphi+\sin\varphi\cos a}{\cos\varphi},$$

saŭ in fine,

$$m\sin a+n\cos a=\frac{m\sin(\varphi+a)}{\cos\varphi}.$$

Asemenea am fi avutŭ şi:

$$m\sin a=n\sin a+\frac{m\sin(\varphi-a)}{\cos\varphi}.$$

63. Binomulŭ $A\pm B\operatorname{tg}a=B\left(\frac{A}{B}\pm\operatorname{tg}a\right)$ devine, dacă punemŭ $\frac{A}{B}=\operatorname{tg}\varphi$:

$$A \pm B\,\mathrm{tg}a = B\,(\mathrm{tg}\varphi \pm \mathrm{tg}a) = B\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \pm \frac{\sin a}{\cos a}\right)$$

$$= B\frac{\sin(\varphi \pm a)}{\cos\varphi\cos a}.$$

Asemenea se transformă şi $A \pm B\cot a$.

64. Fie încă espresiunea $m \pm n\sin a$, in care m şi n sunt nisce cantităţi óre-carĭ, însă nu coprindŭ nici o linie trigonometrică; atunci

$$m \pm n\sin a = \frac{m}{\cos a}\cos a \pm n\sin a = n\left(\frac{m}{n\cos a}\cos a \pm \sin a\right),$$

punêndŭ $\frac{m}{n\cos a} = \mathrm{tg}\varphi$, obţinemŭ:

$$m \pm n\sin a = n\,(\mathrm{tg}\varphi\cos a \pm \sin a)$$

$$= n\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos a \pm \sin a\right) = \frac{n\,(\sin\varphi\cos a \pm \sin a\cos\varphi)}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{n\sin(\varphi \pm a)}{\cos\varphi}.$$

65. Pentru a reduce in unŭ monomŭ unŭ polinomŭ $a + b + c + d + \ldots$, reducemŭ mai întâĭŭ cei doi termeni $a + b$ in unulŭ singurŭ m; apoi reducemŭ pe m şi c in unŭ termenŭ n; pe n şi d in unŭ termenŭ p, şi aşa mai departe.

Esemple. 1°. Să se facă calculabilă prin logaritmi formula

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A.$$

Punêndŭ ca factorŭ comunŭ pe $\sin b\cos A$, avemŭ;

$$\cos a = \sin b\cos A\left(\frac{\cot b}{\cos A}\cos c + \sin c\right),$$

şi luândŭ $\frac{\cot b}{\cos A} = \operatorname{tg}\varphi$,

$$\cos a = \sin b \cos A\,(\operatorname{tg}\varphi \cos c + \sin c)$$

$$= \sin b \cos A\,\frac{\sin\varphi \cos c + \sin c \cos\varphi}{\cos\varphi},$$

saŭ

$$\cos a = \sin b \cos A\,\frac{\sin(\varphi + c)}{\cos\varphi}.$$

2°. Să se facă calculabilă prin logaritmi ecuaţiunea:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

Punemŭ pe cotA factorŭ comunŭ:

$$\cot a \sin b = \cot A\left(\frac{\cos b}{\cot A}\cos C + \sin C\right),$$

şi luândŭ $\frac{\cos b}{\cot A} = \operatorname{tg}\varphi$, avemŭ:

$$\cot a \sin b = \cot A\,(\operatorname{tg}\varphi \cos C + \sin C)$$

$$= \cot A\,\frac{\sin\varphi \cos C + \cos\varphi \sin C}{\cos\varphi},$$

de unde

$$\cot a \sin b = \cot A\,\frac{\sin(\varphi + C)}{\cos\varphi}.$$

3°. Se transformămŭ ecuaţiunea

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C.$$

Acéstă ecuaţiune este identică cu

$$\sin c \cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin C}\sin C - \sin a \cos b \cos C,$$

şi punêndŭ ca factorŭ comunŭ pe $\sin a \cos b$,

$$\sin c \cos A = \sin a \cos b \left(\frac{\cot a \operatorname{tg} b}{\sin C} \sin C - \cos C.\right),$$

şi punêndŭ $\dfrac{\cot a \operatorname{tg} b}{\sin C} = \cot \varphi$,

$$\sin c \cos A = \sin a \cos b \,(\cot \varphi \sin C - \cos C)$$

$$= \sin a \cos b \frac{\cos \varphi \sin C - \sin \varphi \cos C}{\sin \varphi},$$

saŭ, in fine,

$$\sin c \cos A = \sin a \cos b \frac{\sin (C - \varphi)}{\sin \varphi},$$

66. Regulele pre cari le-am datŭ pentru a face o espresiune calculabilă prin logaritmi de multe orĭ se póte să nu se aplice, când espresiunea are óre-carĭ forme particulare. Am datŭ (46-56) mai multe esemple de acestea. Iacă încă o espresiune fórte însemnată, care se póte face calculabilă prin logaritmĭ nu după metoda generală:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Adăogândŭ 1 la ambele membre avemŭ:

$$1 + \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc},$$

şi scădêndŭ 1 din ambele membre ale acestei din urmă ecuaţiuni,

$$\cos A = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2cb} - 1.$$

Punemŭ $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}$; atunci

$$\cos A = \operatorname{tg}\varphi - 1;$$

şi fiind-că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, după cum vom vedea îndată (68)

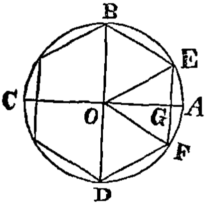
$$\cos A = \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\varphi \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\varphi},$$

$$\text{căci } \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (68)$$

VALORILE LINIILORŬ TRIGONOMETRICE A CĂTOR-VA ARCURI

67. Se găsimŭ valorile liniilorŭ trigonometrice ale arcului AE de 30^0.

Fig. 20.



Latura EF a unui exagonŭ regulatŭ inscrisŭ subîntinde unŭ arcŭ EAF de 60^0; rada OA, perpendiculară pe acéstă latură, împarte arculŭ EAF in dóuĕ părţi, EA şi AF, fie-care de câte 30^0; asemenea $EG = GF$. Insă $EF = OE = 1$; prin urmare

$$EG = \sin 30^0 = \frac{1}{2}.$$

Găsimŭ $\cos 30^0$ prin relaţia

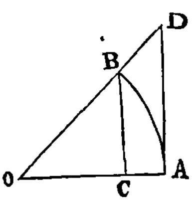
$$\cos 30^0 = \sqrt{1 - \sin^2 30^0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Impărţindŭ espresiunea lui $\sin 30^0$ cu a lui $\cos 30^0$, avemŭ:

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

68. Fie arculŭ $AB = 45^0$. In triunghiulŭ dreptunghiŭ OBC avemŭ:

Fig. 21.



$$\overline{OC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{OB}^2, \text{ saŭ:}$$

$$\cos^2 45^0 + \sin^2 45^0 = 1.$$

Insă $OC = BC$, căci $BOC = OBC = 45^0$; prin urmare

$$2\sin^2 45^0 = 1,$$

saŭ

$$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0.$$

In OAD avemŭ érăşĭ $AD = OA$, adică $\operatorname{tg} 45^0 = 1$.

69. Se va demonstra ca mai susŭ (**67**) că $\sin 60^0$ este jumĕtate din latura triunghiului ecuilateralŭ inscrisŭ, care latură se scie că este $\sqrt{3}$; prin urmare:

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^0 = \sqrt{1 - \sin^2 60^0}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}.$$

70. Arculŭ de 18^0 este jumătate din arculŭ de 36^0 subintinsŭ de latura decagonului regulatŭ inscrisŭ şi valórea ace-

stei laturi se scie din geometrie că este $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; prin urmare, dupe unŭ raţionamentŭ analogŭ cu celŭ de mai susŭ,

$$\sin 18^{\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^{\circ}.$$

Atunci

$$\cos 18^{\circ} = \sqrt{1-\sin^2 18^{\circ}} = \sqrt{1-\frac{5+1-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72^{\circ},$$

şi

$$\operatorname{tg} 18^{\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

71. După formula (**39**)

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

avemŭ:

$$\sin 36^{\circ} = 2 \sin 18^{\circ} \cos 18^{\circ} = 2\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

sau

$$\sin^2 36^{\circ} = 4\,\frac{(5+1-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{16^2} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}.$$

de unde

$$\sin 36^{\circ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54^{\circ}.$$

72. După formula (**40**): $\sin 3a = 3 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a$, avemŭ încă:

$$\sin 54^0 = 3 \sin 18^0 \cos^2 18^0 - \sin^3 18^0$$

$$= 3\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,\frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{8\sqrt{5}-16}{64}.$$

de unde

$$\sin 54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 36^0.$$

Combinândŭ prin împărţire formulele aflate la § 71 şi 72, aflămŭ:

$$\operatorname{tg} 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1},\quad \operatorname{tg} 54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

73. Prin formulele

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a},$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a},$$

avemŭ:

$$\sin 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^0} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 18^0},$$

$$\cos 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 18^0} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 18^0},$$

saŭ

$$\sin 9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}},$$

$$\cos 9_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}},$$

orĭ

$$\sin 9^{0} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}} = \cos 81^{0},$$

$$\cos 9^{0} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}} = \sin 81^{0}.$$

Asemenea

$$\sin 27^{0} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \cos 63^{0}$$

$$\cos 27^{0} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sin 63^{0}.$$

CAPITOLULŬ III.

TABLE TRIGONOMETRICE

73. Proprietățile pe cari le-am studiatŭ pănă acumŭ nu vor putea avea nici unŭ usŭ practicŭ dacă nu vomŭ avea medii de a găsi îndată valórea numerică a liniilorŭ trigonometrice ale ori-cărui arcŭ ni s'ar da. Insă *liniile trigonometrice sunt funcțiuni transcedente ale arculuĭ*, adecă nu se póte stabili nici o ecuațiune algebrică întrégă care, pentru o valóre a liniei trigonometrice, se coprindă tóte valorile corespundătóre ale arcului. Din acéstă causă calculele prin carĭ aflămŭ valórea liniilorŭ trigonometrice ale unui arcŭ datŭ sunt peste mĕsură de lungi și dificile, și ar fi peste putință a aplica formulele trigonometriei la calculele practice, dacă ar trebui ca la fie-care momentŭ să calculămŭ și valórea liniilorŭ tri-

gonometrice ce ar intra in acele formule. Din acéstă causă se construescŭ *table* carĭ, pentru ori-ce valóre dată a arculuĭ, conţinŭ valorile calculate ale tutorŭ liniilorŭ sale trigonometrice.

74. De şi arcele potŭ se aibă valori orĭ-cât de mari, tablele trigonometrice nu se calculéḑă de cât pentru arcele de la 0^0 până la 90^0; căci scimŭ (28) că orĭ-ce arcŭ orĭ-cât de mare ar fi, se póte reduce la primulŭ cadranŭ.

Pe lângă acestea, dacă calculămŭ tóte liniile trigonometrice ale arcelorŭ de la 0^0 până la 45^0, nu mai este necesarŭ a calcula valórea lorŭ şi pentru arcele de la 45^0 până la 90^0; căcĭ aceste din urmă arce sunt complementele celorŭ d'ântâiŭ, şi prin urmare liniile lorŭ trigonometrice vor fi complementare cu ale celorŭ d'ântâiŭ. Dacă cunóscemŭ, spre esemplu, $\sin 36^0$, $\cos 36^0$, $\operatorname{tg} 36^0$, $\cot 36^0$, $\sec 36^0$, $\operatorname{cosec} 36^0$, vomŭ cunósce şi $\cos 54^0 = \sin 36^0$, $\sin 54^0 = \cos 36^0$, $\cot 54^0 = \operatorname{tg} 36^0$, $\operatorname{tg} 54^0 = \cot 36^0$, $\operatorname{cosec} 54^0 = \sec 36^0$, $\sec 54^0 = \operatorname{cosec} 36^0$; căcĭ $54^0 = 90^0 - 36^0$.

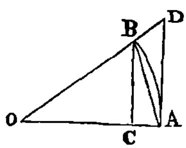
75. Tablele trigonometrice nu daŭ chiar valórea numerică a liniilorŭ trigonometrice, ci, fiind-că maĭ tóte calculele trigonometriei se facŭ prin logaritmi, daŭ numai logaritmiĭ acelorŭ liniĭ. Pe lângă acestea, tablele nu coprindŭ logaritmiĭ secantei şi cosecantei arcelorŭ, căci din relaţiunile: $\sin x = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$,

avemŭ : $\log\sin x = -\log\operatorname{cosec} x$, $\log\cos x = -\log\sec x$. Prin urmare, pentru a găsi logaritmiĭ secantei şi cosecantei unui arcŭ, n'avemŭ de cât se luămŭ logaritmiĭ cosinusului saŭ sinusului acelui arcŭ cu semnulŭ contrariŭ.

Logaritmiĭ liniilorŭ trigonometrice se calculédă prin nisce metóde a cărorŭ espunere nu póte găsi locŭ aci. Acumŭ ne vomŭ mulţumi a arăta numai posibilitatea de a se construi tablele trigonometrice pentru arcele din 10″ in 10″. Pentru acésta vomŭ demonstra mai ântâiŭ următórele teoreme:

76. Teorema I. *Orĭ-ce arcŭ coprinsŭ între* 0^0 *şi* 90^0 *este:* 1^0 *mai mare de cât sinusulŭ sĕŭ, şi* 2^0 *mai micŭ de cât tangenta sa.*

Fig. 22.



1^0. Fie arculŭ $AB = a$; avemŭ: $\sin a = BC$, $\operatorname{tg} a = DA$. Ducemŭ córda BA, şi avemŭ: $BC < BA$, saŭ $\sin a < BA$, căci BC este perpendiculară, iar BA oblică. De altă parte $BA < \text{arc}BA$, saŭ $BA < a$, căci arcele mai mici de cât 90^0 sunt mai mari de cât córdele lorŭ; prin urmare *a fortiori.*

$$\sin a < a. \qquad \text{(a)}$$

2^0. Aria sectorului circularŭ OBA este: $OBA = \frac{1}{2} OA \times \text{arc}BA = \frac{1}{2} OA \times a$. Aria triunghiului dreptunghiŭ ODA este: $ODA = \frac{1}{2} OA \times AD = \frac{1}{2} OA \times \operatorname{tg} a$;

însă ODA$>$OBA; prin urmare $\frac{1}{2}$OA tg$a > \frac{1}{2}$OA$\times a$; şi împărţindŭ de ambele părţi cu $\frac{1}{2}$OA,

$$\text{tg}a > a. \qquad \text{(b)}$$

Relaţiunile (a) şi (b) se potŭ scrie in unŭ şirŭ:

$$\sin a < a < \text{tg}a. \qquad (1)$$

77. Teorema II. *Când arculŭ se micşoréḑă peste măsură, raportulŭ arcului către sinusulŭ sĕŭ tinde către* 1.

Punêndŭ in (1) in locŭ de tg$a$ pe $\frac{\sin a}{\cos a}$, avemŭ:

$$\sin a < a < \frac{\sin a}{\cos a}.$$

Impărţindŭ pe fie-care membru prin sin$a$, aceste relaţiuni se facŭ:

$$1 < \frac{a}{\sin a} < \frac{1}{\cos a}.$$

Insă dacă arculŭ se apropie de zero, cos$a$ se apropie de 1, aşa că dacă arculŭ este fórte micŭ, cos$a$ se póte socoti egale cu 1; deci *la limită* relaţiunea de mai susŭ devine:

$$\frac{a}{\sin a} = 1, \text{ saŭ } a = \sin a.$$

78. *Observare.* In calculŭ unghiurile se esprimă saŭ prin gradele, minutele şi secundele pre carĭ le coprindŭ, saŭ prin lungimea absolută a arcurílorŭ

carĭ le mĕsóră, aceste arcuri fiind luate pe o circomferenţă cu raḑa 1. Aşa se póte ḑice că unŭ unghiŭ este de $22^0 30'$, saŭ că este mĕsuratŭ cu unŭ arcŭ de lungimea 0,39269908... Insă de multe ori este de trebuinţă ca, cunoscêndŭ espresiunea unui unghiŭ in unŭ felŭ, să găsimŭ espresiunea sa in celalt felŭ.

Fie a *lungimea lineară* a unui arcŭ care mĕsóră unŭ unghiŭ óre-care, şi a'' *numĕrulŭ întregŭ de secunde* ce coprinde acelŭ arcŭ; este evidentŭ că arculŭ a este egalŭ cu de a'' orĭ arculŭ de $1''$; adică $a = a'' \times \text{arc } 1''$. Insă arculŭ de $1''$ fiind fórte micŭ, avemŭ după (2): $\text{arc } 1'' = \sin 1''$; şi atunci

$$a = a'' \sin 1'', \tag{3}$$

din care

$$a'' = \frac{a}{\sin 1''}. \tag{4}$$

Relaţia (3) ne arată că *pentru a afla lungimea absolută a unui arcŭ, trebue a înmulţi numĕrulŭ de secunde ce conţine elŭ cu sin* $1''$; şi (4) că *pentru a afla numĕrulŭ de secunde conţinutŭ in unŭ arcŭ, trebue a împărţi lungimea absolută a arculuĭ cu sin* $1''$.

79. Teorema III. *Sinusulŭ unui arcŭ coprinsŭ intre* 0^0 *şi* 90^0 *este mai mare de cât diferenţa intre arcŭ şi a patra parte din cubulŭ arcului.*

După teorema I avemŭ: $\frac{a}{2}<\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, saŭ $\frac{a}{2}<\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$.

Imulţindŭ ambiĭ membri ai acestei neegalităţi cu $2\cos^2\frac{a}{2}$, avemŭ: $a\cos^2\frac{a}{2}<2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$; şi fiind-că: $\cos^2\frac{a}{2}=1-\sin^2\frac{a}{2}$, $2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=\sin a$,

$$a\left(1-\sin^2\frac{a}{2}\right)<\sin a,\ \text{saŭ}\ a-a\sin^2\frac{a}{2}<\sin a.$$

Insă (74) $\sin^2\frac{a}{2}<\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$; punândŭ dară in neegalitate pe $\frac{a^2}{4}$ in locŭ de $\sin^2\frac{a}{2}$ vomŭ avea *a fortiori* :

$$a-\frac{a^3}{4}<\sin a. \qquad (5)$$

Corolarŭ. Din (5) deducemŭ:

$$a-\sin a<\frac{a^3}{4}. \qquad (6)$$

adecă *diferenţa între unŭ arcŭ şi sinusulŭ sĕŭ este maĭ mică de cât a patra parte din cubulŭ arculuĭ.*

80. Teorema IV. *Cosinusulŭ unuĭ arcŭ maĭ*

micŭ de 90^0 *este mai mare de cât diferența între unitate și jumĕtatea pătratului arcului*, adecă $\cos a > 1 - \frac{a^2}{2}$.

Avemŭ (**42**): $\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$, și $\sin\frac{a}{2} < \frac{a}{2}$.

Punêndŭ dară in ecuatiune, in locŭ de $\sin^2\frac{a}{2}$, valórea mai mare $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, este evidentŭ că vomŭ avea:

$$\cos a > 1 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ saŭ } \cos a > 1 - \frac{a^2}{2}. \qquad (7)$$

81. Teorema V. *Cosinusulŭ unuĭ arcŭ coprinsŭ între* 0^0 *și* 90^0 *este mai micŭ de cât unitatea minusŭ jumĕtate din pătratulŭ arcului, plus a șasespre-ḑece parte din a patra putere a arcului*, adecă $\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$.

Avemŭ:

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}.$$

Insă (**77**):

$$\sin\frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3,$$

sau

$$\sin\frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{a^3}{32};$$

prin urmare

$$\cos a < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}\right)^2,$$

saŭ

$$\cos a < 1 - 2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{32} + \frac{a^6}{1024}\right),$$

orĭ

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - \frac{a^6}{512},$$

şi *a forţiori*

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}. \tag{8}$$

Corolariu. Daca in (8) trecemŭ pe $1 - \frac{a^2}{2}$ in membrulŭ ântâiŭ cu semnulŭ contrariŭ, avemŭ:

$$\cos a - \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) < \frac{a^4}{16}. \tag{9}$$

CALCULUL SINUSULUI ŞI COSINUSULUI ARCULUI DE 10″.

82. *Sinus de* 10″. Se scie că lungimea unei semicircomferenţe, când raḑa are valórea 1, este

$$\pi = 3,1415926535897932.....,$$

şi fiind-că o semicircomferinţă coprinde 180° saŭ 648000″, vom avea:

$$\text{arc}\,648000'' = 3,1415926535897932....,$$

saŭ

$$\text{arc}\,10'' = \frac{3,141592.....}{64800,} = 0,000048481368110.....;$$

prin urmare

$$\text{arc}\,10'' < 0,00005,$$

şi

$$\frac{(\text{arc}\,10'')^3}{4} < 0,000000000000032.$$

Insă relaţiunea (5) (77) dă: $\sin a > a - \frac{a^3}{4}$; prin urmare in casulŭ de faţă:

$$\sin 10'' > 0,000048481368110 - 0,000000000000032,^1$$

şi făcêndŭ substracţiunea,

$$\sin 10'' > 0,000048481368078.$$

Comparândŭ valórea din membrulŭ al doilea cu valórea lui arc 10″, vedemŭ că ele nu diferă una de alta de cât de la 13ª ḑecimale înainte; şi încă acésta a 13ª ḑecimale in valórea arculuĭ este numai cu o unitate mai mare de cât a 13ª ḑecimală din valórea lui sin 10″. Dacă dară vom lua

$$\sin 10'' = 0{,}0000484813681, \qquad (A)$$

putemŭ fi sicuri că erórea comisă asupra valoriĭ lui sin $10''$ va fi mai mică de cât o unitate de al 13^{lea} ordinŭ ḑecimalŭ.

83. *Cosinusul de* $10''$. Formula (9) (79) ne arată că diferenţa între $\cos 10''$ şi $1 - \frac{(\text{arc } 10'')^2}{2}$ este mai mică de cat $\frac{(\text{arc } 10'')^4}{16}$. Insă dacă luămŭ pentru arcŭ $10''$ valórea $0{,}0000484813....$, găsită mai susŭ, aflămŭ :

$$\frac{(\text{arc } 10'')^4}{16} = 0{,}00000000000000000039,$$

cantitate care neavêndŭ cifre însemnătóre de cât de la a 18^a ḑecimală înainte, se póte neglige cu totulŭ. Aşa dară putemŭ lua :

$$\cos 10'' = 1 - \frac{(\text{arc } 10'')^2}{2},$$

saŭ

$$\cos 10'' = 1 - 0{,}000000001152 = 0{,}9999999988248, \qquad (B)$$

şi asupra acestei valori este comisă o eróre mai mică de cât o unitate de al 18^{lea} ordinŭ ḑecimalŭ.

Cunoscândŭ sin $10''$ şi cos $10''$, vomŭ găsi tg $10''$ prin relaţia

$$\operatorname{tg} 10'' = \frac{\sin 10''}{\cos 10}.$$

84. *Sinusulŭ şi cosinusulŭ arcelorŭ din 10 in 10 secunde.* Formulele lui Thoma Simpson, date mai susŭ (**41**) sunt:

$$\sin(m+1)b = 2\sin mb \cos b - \sin(m-1)b,$$

$$\cos(m+1)b = 2\cos mb \cos b - \cos(m-1)b.$$

Dacă luămŭ $b = 10''$ şi $m = 1$, aceste formule devinŭ:

$$\sin 20'' = 2\sin 10'' \cos 10'', \cos 20'' = 2\cos^2 10'' - 1.$$

Punêndŭ $b = 10''$ şi $m = 2$, aceléşĭ formule daŭ:

$$\sin 30'' = 2\sin 20'' \cos 10'' - \sin 10'',$$

$$\cos 30'' = 2\cos 20'' \cos 10'' - \cos 10''.$$

şi aşa maĭ departe. Făcêndŭ in fine $b = 10$ şi $m = m$, avemŭ:

$$\left.\begin{aligned}\sin(m+1)10'' &= 2\sin m10'' \cos 10'' - \sin(m-1)10'',\\ \cos(m+1)10'' &= 2\cos m10'' \cos 10'' - \cos(m-1)10''.\end{aligned}\right\}(C)$$

Cu formulele lui Thoma Simpson putemŭ dară calcula sinusurile şi cosinusurile arcelorŭ din 10″ in 10″ cu ajutorulŭ lui sin 10″ şi cos 10″, pre carĭ le-am aflatŭ maĭ susŭ.

Calculele se potŭ prescurta observândŭ că factorulŭ constantŭ $2\cos 10''$ diferă fórte puţinŭ de 2 unităţĭ, căci relaţia (B) ne arată că $\cos 10''$ diferă fórte puţinŭ de 1. Punemŭ $k = 2 - 2\cos 10''$, de unde $2\cos 10'' = 2 - k$. Substituindŭ acéstă valóre in relaţiile (C),

$$\sin(m+1)\,10'' = (2-k)\sin m\,10'' - \sin(m-1)\,10'',$$
$$\cos(m+1)\,10'' = (2-k)\cos m\,10'' - \cos(m-1)\,10'',$$

din carĭ

$$\sin(m+1)\,10'' = \sin m\,10' + \sin m\,10'' - k\sin m\,10'' \\ - \sin(m-1)\,10'',$$
$$\cos(m+1)\,10'' = \cos m\,10'' + \cos m\,10'' - k\cos m\,10'' \\ - \cos(m-1)\,10'',$$

sau

$$[\sin(m+1)10'' - \sin m10''] = [\sin m10'' - \sin(m-1)10''] \\ - k\sin m\,10'',$$
$$[\cos(m+1)10'' - \cos m10''] = [\cos m10'' - \cos(m-1)10''] \\ - k\cos m\,10''.$$

Aceste formule ne daŭ diferinţele $\sin(m+1)\,10'' - \sin m10''$ şi $\cos(m+1)\,10'' - \cos m10''$, când cunóscemŭ diferinţele precedente $\sin m\,10'' - \sin(m-1)10''$ şi $\cos m10'' - \cos(m-1)\,10''$, precum şi cantităţile $\sin m\,10''$ şi $\cos m\,10''$. Adăogândŭ acele diferenţe la $\sin m10''$ şi $\cos m\,10''$ găsimŭ pe $\sin(m+1)\,10''$ şi $\cos(m+1)\,10''$.

Cantitatea constantă k se calculéḑă o dată pentru tot-d'a-una pentru a se introduce in calcule. Se găsesce

$$k = 0{,}000000002304.$$

85. Formarea tablelorŭ de logaritmi după acéstă metodă are trebuinţă de lungi calcule aproxima-

tive; şi de acea trebue din când in când a verifica resultatele calculului, comparându-le cu resultatele găsite prin alte mijlóce. Pentru acésta ne putemŭ servi cu seria arcelorŭ din 9 in 9 grade, ale cărorŭ liniĭ trigonometrice le-am găsitŭ prin mijlóce geometrice (**64-70**).

TABLELE LUI CALLET

86. Tablele trigonometrice cele mai usitate sunt *tablele lui Lalande* calculate cu cinci ḑecimale pentru arcele din primulŭ cadranŭ din minutŭ in minutŭ, şi *tablele lui Callet*, calculate cu şapte ḑecimale, din secundă in secundă pentru arcele de la 0^0 până la 5^0, şi din 10 secunde in 10 secunde pentru tóte arcele de la 0^0 până la 90^0.

Amêndóuĕ aceste table, editate şi perfecţionate de J. Dupuis, presintă o disposiţiune analógă. Vomŭ da descrierea şi usulŭ tablelorŭ lui Callet, şi totŭ ce vomŭ ḑice despre acestea se va aplica şi la ale lui Lalande.

87. Prima parte a tablelorŭ lui Callet dă logaritmiĭ sinusului şi tangentei arcelorŭ de la 0^0 până la 5^0 din secundă in secundă. Insă sinusulŭ şi tangenta unui arcŭ fiind egală cu cosinusulŭ şi cotangenta arcului complimentarŭ, acéstă tablă ne dă in acelaşŭ timpŭ şi cosinusulŭ şi cotangenta arcelorŭ de la 90^0 până la 85^0.

Acéstă tablă se împarte in dóuĕ: tabla de sinusuri şi tabla de tangente. Sinusurile sunt date pe *verso* al foiĭ, iar tangentele pe *recto;* aşa că deschiḑêndŭ tabla, sinusurile se află pe pagina stângă şi tangentele pe pagina dreptă. Dispoziţiunea ambelorŭ pagine este cu totulŭ analógă.

Reproducemŭ aci o parte din tabla sinusurilorŭ. Numĕrulŭ gradelorŭ este înscrisŭ d'asupra şi dedesubtulŭ

SINUSŬ 3°

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
"	36′	37′	38′	39′	40′	41′	"
0	$\overline{2}$,7978941	$\overline{2}$,7998974	$\overline{2}$,8018915	2,8038764	2,8058523	2,8078197	60
1	979275	999307	019247	039095	058852	078519	9
2	979610	999640	019578	039425	059180	078846	8
3	979945	$\overline{2}$,7999973	019910	039755	059509	079683	7
4	980279	2,8000306	020241	040085	059837	079500	6
5	980614	000639	020573	040414	060166	079827	5
6	980948	000972	020904	040744	060494	080154	4
7	981283	001305	021235	041074	060823	080181	3
8	981617	001638	021567	041404	061151	080808	2
9	981952	001971	021898	041734	061479	081135	1
10	982286	002304	022230	042064	061808	081462	50
1	982620	002637	022561	042394	062136	081788	9
2	982955	002970	022892	042723	062464	082115	8
3	983239	003302	023223	043053	062792	082442	7
4	983624	003635	023555	043383	063121	082769	6
5	983958	003968	023886	043713	063449	083094	5
6	984292	004301	023217	044042	063777	083422	4
7	984626	004633	024548	044372	064105	083749	3
8	984961	004966	024829	044702	064433	084075	2
9	985295	005299	024211	045031	064701	084402	1
"	23′	22′	21′	20′	19′	18′	"

COSINUS 87°

tablei, afară din cadru. Pagina este împărțită in optŭ colóne verticale, dintre carĭ cele dóuĕ de la margini, *a* şi *h*, coprindŭ numĕrulŭ de secunde, in colóna *a* crescêndŭ de susŭ in josŭ de la 0 până la 60, iar in colóna *h* de josŭ in susŭ; pentru simplicitate, decimele se scriŭ numaĭ o dată, iar in colo se subințelegŭ. Colónele de la mijlocŭ, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, pórtă susŭ şi josŭ numĕrulŭ minutelorŭ.

Când arculŭ datŭ este coprinsŭ între 0^0 şi 5^0, logaritmiĭ *sinusuluĭ* saŭ *tangentei* sale se află pe pagina ce pórtă in partea *de susŭ* afară din cadru numĕrulŭ de grade al arculuĭ, in colóna verticală care pórtă in capĕtulŭ *de susŭ* numĕrulŭ de minute al arcului, şi pe linia orizontală care trece prin numĕrulŭ de secunde al arcului, înscrisŭ in colóna *de la stânga* a.

Când arculŭ datŭ este coprinsŭ între 90^0 şi 85^0, logaritmiĭ *cosinusului* saŭ *cotangentei* sale se află pe pagina ce pórtă in partea *de josŭ* afară din cadru numĕrulŭ de grade al arcului, in colóna verticală care pórtă in capĕtulŭ sĕŭ *de josŭ* numĕrulŭ de minute al arcului, şi pe linia orizontală care trece prin numĕrulŭ de secunde al arcului, înscrisŭ in colóna *de la drépta* b.

Când mai mulți logaritmi succesivi înscrişĭ in aceiaşi colónă aŭ primele lorŭ cifre comune, de ordinarŭ se subințelegŭ cele dóuĕ de la începutŭ, afară numaĭ de logaritmiĭ estremi, şi de cei scrişi in capulŭ colónei. Ast-felŭ când in tablă găsimŭ numai şase cifre ale unui logaritmŭ, trebue să-lŭ complectămŭ, scriindu-i la stânga cifrele escedente pre carĭ le conţine logaritmulŭ celŭ mai apropiatŭ, urcândŭ saŭ pogorîndŭ.

1°. Fie a se căuta: log sin $3°37'12''$. Deschidemŭ tabla la o pagină care in partea *de susŭ* se pórte scrisŭ: *sinus* 3°, şi anume căutămŭ pe acea in care a treia colónă verticală, *c*, pórtă *susŭ* titlulŭ 37'. Descindemŭ pe acéstă colónă până în rândulŭ orizontalŭ care trece prin numĕrulŭ 12 înscrisŭ la stânga in colóna *a* a secundelorŭ. Acolo găsimŭ cifrele 002970. Pentru a complecta logaritmulŭ, vom adăogi la începutulŭ acestui numĕrŭ cifrele $\overline{2}$,8 carĭ se află înscrise la logaritmulŭ celŭ mai apropiatŭ urcândŭ saŭ pogorîndŭ, şi atuncĭ

$$\log\sin 3°37'12'' = \overline{2},8002970.$$

Cu totulŭ asemenea se face şi pentru a găsi

$$\log\mathrm{tg}\, 3°37'12'',$$

care este;

$$\log\mathrm{tg}\, 3°37'12'' = \overline{2},8011644.$$

2°. Fie a se căuta logcos $86°20'53''$. Deschidemŭ tabla la o pagină care in partea *de josŭ* se pórte scrisŭ : *cosinus* 86°, şi căutămŭ pe aceea anume in care a cincea colónă verticală *e* pórtă *josŭ* titlulŭ : 20'. Ne urcămŭ pe acéstă colónă până in rândulŭ orizontalŭ care trece prin numĕrulŭ 53, înscrisŭ la drépta în colóna *h* a secundelorŭ. Acolo găsimŭ cifrele 041074; şi pentru a complecta logaritmulŭ, adăogândŭ la începutulŭ acestui numĕrŭ şi cifrele $\overline{2}$,8 carĭ se află înscrise la logaritmulŭ celŭ mai apropiatŭ urcândŭ saŭ pogorîndŭ, avemŭ:

$$\log\cos 86^{0}20'53''=\overline{2},8041074.$$

Totŭ asemenea se face şi pentru a găsi logcot $86^{0}20'53''$, care este

$$\log\cot 86^{0}20'53''=\overline{2},8049902.$$

88. A dóua parte a tablelorŭ lui Callet dă logaritmiĭ sinusuluĭ, tangentei, cotangentei şi cosinusului arcelorŭ de la 0^{0} până la 90^{0}, din 10″ in 10″.

Reproducemŭ aci o pagină din a dóua parte a tablelorŭ lui Callet. Numĕrulŭ gradelorŭ, *dacă este mai micŭ de* 45, este scrisŭ *in susulŭ* paginei, afară din cadru; iar *dacă este mai mare de* 45, se scrie *in josulŭ* paginei. Numĕrulŭ minutelorŭ este scrisŭ in colónele verticale A şi L, la stânga şi la drépta paginei, şi merge crescêndŭ *de susŭ in josŭ in* A, şi *de josŭ in susŭ in* L.

Numĕrulŭ secundelorŭ se află scrisŭ in colónele verticale B şi K, carĭ vinŭ după ale minutelorŭ, şi acestŭ numĕrŭ merge crescêndŭ *de susŭ in josŭ in* B, şi *de josŭ in susŭ in* K.

Sinusurile pentru arcele *mai mici de* 45^{0} se

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
′	″	Sin.	D.	Tang.	D. c.	Cotg.	Cos.	D.	″	′
10	0	$\overline{1}$,6739769	393	$\overline{1}$,7287161	506	0,8712839	$\overline{1}$,9452069	113	0	50
	10	740162	394	287667	506	712333	452496	113	50	
	20	740556	393	288173	506	711727	452383	113	40	
	30	740949	393	288679	506	711321	452270	113	30	
	40	741342	393	289184	506	710716	452157	112	20	
	50	741735	393	289690	506	710310	452045	113	10	
11	0	742128	393	290196	506	709804	451932	113	0	49
	10	742521	393	290701	505	709298	451819	113	50	
	20	742914	392	291207	506	708793	451706	113	40	
	30	743306	393	291713	506	708287	451593	113	30	
	40	743699	393	292219	505	707781	451480	112	20	
	50	744092	393	292724	506	707276	451368	113	10	
12	0	744485	392	293230	506	706770	451255	113	0	48
	10	744877	393	293736	505	706264	451142	113	50	
	20	745270	393	294241	506	705759	451029	113	40	
	30	745653	392	294747	505	705253	450916	113	30	
	40	746055	393	295252	505	704748	450803	113	20	
	50	746448	392	295757	506	704243	450690	113	10	
13	0	746840	392	296263	505	703737	450577	113	0	47
	10	747232	393	296768	506	703232	450464	113	50	
	20	747625	392	297274	505	702726	450351	113	40	
	30	748017	392	297779	505	702221	450238	113	30	
	40	748409	392	298284	505	701716	450125	113	20	
	50	748801	393	298789	506	701211	450012	113	10	
14	0	749194	392	299295	505	700705	449899	113	0	46
	10	749586	392	299800	505	700200	449786	113	50	
	20	749978	392	300305	505	699695	449673	113	40	
	30	750370	392	300810	505	699190	449560	113	30	
	40	750762	395	901315	505	698685	449447	113	20	
	50	751154	392	301920	505	698180	449334	114	10	
15	0	751546	391	302325	505	697675	449220	113	0	45
	10	751937	392	302830	505	697170	449107	113	50	
	20	752329	392	303335	505	696665	448994	113	40	
	30	752721	392	303840	505	696160	448881	113	30	
	40	753113	391	304345	505	695655	448768	113	20	
	50	753504	392	304850	504	695150	448655	114	10	
16	0	753896	391	305354	505	694646	448541	113	0	44
	10	754287	392	305859	506	694141	448428	113	50	
	20	754679	391	306364	505	693636	448315	113	40	
	30	755070	392	306869	504	693131	448202	114	30	
	40	755492	391	307373	505	692627	448088	113	20	
	50	755883	392	307878	505	692122	447975	113	10	
17	0	756245	391	308383	504	691617	447862	113	0	43
	10	756636	391	308887	505	691113	446749	114	50	
	20	757027	391	301392	504	690608	447635	113	40	
	30	757418	391	309896	505	690104	447522	113	30	
	40	757809	391	310401	504	689599	447409	114	20	
	50	758200	392	310905	505	689095	447295	113	10	
18	0	758594	391	311410	504	688590	447182	113	0	42
	10	758983	391	311014	504	688086	447069	114	50	
	20	759374	390	312427	505	637582	446955	113	40	
	30	759764	391	312923	504	687077	446842	114	30	
	40	760155	391	313427	504	686573	446728	113	20	
	50	760546	391	313931	505	686069	446615	114	10	
19	0	760937	391	314436	504	685564	446501	113	0	41
	10	761328	390	314940	504	685060	446388	113	50	
	20	761718	391	315444	504	684556	446275	114	40	
	30	762109	391	315948	504	684052	446161	113	30	
	40	762500	390	316452	504	683548	446048	114	20	
	50	762890	391	316956	504	683044	445934	113	10	
20	0	$\overline{1}$,6763281		1,7317460		0,2682540	$\overline{1}$,9445821		0	40
′	″	Cos.		Cotg.		Tang.	Sin.		″	′

M

506	
1	50.6
2	101.2
3	151 8
4	202.4
5	253.0
6	303.6
7	354.2
8	404.8
9	455.4

505	
1	50.5
2	101.0
3	151.5
4	202.0
5	252 5
6	303.0
7	353.5
8	404.0
9	454.5

504	
1	50.4
2	100.8
3	151.2
4	201.6
5	252.0
6	302.4
7	352.8
8	403.2
9	453.6

393	
1	39.3
2	78.6
3	117.9
4	157.2
5	196.5
6	235.8
7	275.1
8	314.4
9	453.7

392	
1	39.2
2	78.4
3	117.6
4	156 8
5	196.0
6	235.2
7	274.4
8	313.6
9	352.8

391	
1	39.1
2	78.2
3	117.3
4	156.4
5	195.8
6	234.6
7	273.7
8	312 8
9	351.9

390	
1	39
2	78
3	117
4	156
5	195
6	234
7	273
8	312
9	351

113	
1	11.3
2	22.6
3	33.9
4	45.2
5	56.5
6	67.8
7	79.1
8	90.4
9	101.7

găsescŭ în colóna C, intitulntă *susŭ* **sin**, iar pentru arcele *mai mari* de 45^{0} in colóna H intitulată *josŭ* **sin**.

Tangentele, pentru arcele *până la* 45^{0}, se află in colóna E, intitulată *susŭ* **tang**, şi pentru arcele *mai mari de* 45^{0}, in colóna G, intitulată *josŭ* **tang**.

Asemenea cotangentele şi cosinusurile arcelorŭ *până la* 45^{0} se vorŭ găsi in colónele G şi H intitulate *susŭ* **cotg** şi **cos**, şi pentru arcele *mai mari de* 45^{0} in colónele E şi C, intitulate *josŭ* **cotg** şi **cos**.

Colóna cea mică D coprinde *diferenţele tabulare* între logaritmiĭ consecutivi înscrişi in colóna C. Asemenea colóna F conţine diferinţile între logaritmiĭ consecutivi inscrişi in colónele E şi G, şi colóna I diferinţele logaritmilorŭ din colóna H.

Fie acumŭ : 1^{0} a se găsi logsin $28^{0}13'30''$. Considerândŭ că arculŭ datŭ este mai micŭ de cât 45^{0}. vomŭ deschide tablele la pagina intitulată *susŭ* 28^{0}, şi in colóna A vomŭ căuta numĕrulŭ minutelorŭ, 13; apoi in B vomŭ căuta şi numĕrulŭ de secunde, 30, corespondente la 13'. Atunci pe rândulŭ orizontalŭ care trece prin acestŭ numĕrŭ de secunde, in colóna C, intitulată *susŭ* **sin**, vomŭ găsi cifrele 748017; şi adăogîndŭ la începutŭ şi cifrele subînţelese $\bar{1},6$, avemŭ :

$$\text{logsin}\, 28^{0}13'30''=\bar{1},6748017.$$

2°. Se găsimŭ logsin $61^{0}46'40''$. Arculŭ fiind mai mare de 45^{0}, pe pagina intitulată *josŭ* 61^{0}, vomŭ căuta minutele 46 in colóna *de la drépta* L, iar secundele 40 in colóna alăturată K. Logaritmulŭ căutatŭ ilŭ vomŭ găsi in colóna H, in dreptulŭ numĕrului secundelorŭ 40; acest logaritmŭ este:

$$\log\sin 61^{0}46'40''=\overline{1},9450351.$$

3°. Fie încă a se găsi logtg $28^{0}15'20''$. Vomŭ căuta pagina intitulată *susŭ* 28^{0}, şi in colóna A *de la stânga* acestei pagine vom căuta 15′; apoi in colóna alăturată, B,20″ Pe linia orizontală ce trece prin acestŭ numĕrŭ de secunde, 20, vomŭ găsi:

$$\log\mathrm{tg}\, 28^{0}15'20''=\overline{1},7303335.$$

Totŭ asemenea vomŭ găsì:

$$\log\mathrm{tg}\, 61^{0}41'30''=0,2687077,$$

$$\log\cot 28^{0}14'50''=0,2698180,$$

$$\log\cot 61^{0}49'10''=\overline{1},7289690,$$

$$\log\cos 28^{0}15'40''=\overline{1},9448768,$$

$$\log\cos 61^{0}44'0''=\overline{1},6753896.$$

USULŬ TABLELORŬ

Dóuĕ sunt problemele ce se potŭ presinta când voimŭ a ne servi cu tablele trigonometrice: 1° Se dă unŭ arcŭ şi se cere se găsimŭ logaritmulŭ uneia din liniile sale trigonometrice; 2⁰. Se dă logarimulŭ unei liniĭ trigonometrice a unui arcŭ necunoscutŭ, şi se cere să găsimŭ acelŭ arcŭ.

89. **Problema I.** *Dându-se unŭ arcŭ, să găsimŭ logaritmulŭ uneia din liniile sale trigonometrice.*

Amŭ vĕḑutŭ (**86**) cum trebue a procede pentru a găsi logaritmulŭ liniei trigenometrice a unui arcŭ care se găsesce in table. Nu vom mai reveni asupra acestei probleme, ci ne vom ocupa numai de casulŭ când arculŭ datŭ nu se află in table.

1⁰. *Să se găséscă logaritmulŭ sinusuluĭ unui arcŭ.*

Fie a se găsi $\log\sin 28^{0}14'30'',5$. Fiind-că arculŭ datŭ nu se află in table, vom căuta logaritmiĭ sinusului arcelorŭ ce se află in table şi între carĭ este coprinsŭ arculŭ datŭ, adecă:

$$\log\sin 28^{0}14'30''=\bar{1},6750370$$

şi

$$\log\sin 28^{0}14'40''=\bar{1},6750762.$$

In colóna D vedemŭ că diferinţa Δ între aceşti doi logaritmi este 392; de altă părte diferinţa între celŭ mai micŭ din aceste arce şi arculŭ datŭ este de $6'',5$. Insă pentru intervale fórte mici, ca cele din casulŭ de faţă, putemŭ considera crescerile logaritmilorŭ sinusurilorŭ ca fiind proporţionali cu crescerile arcelorŭ ênsăşĭ; aşa-dară putemŭ face raţionamentulŭ urmĕtorŭ : la o crescere de 10″ a arcului, corespunde o adăogire de 392 unităţi de al şaptelea ordinŭ la logaritmŭ : la o crescere de 6″,5 a arcului, ce adăogire se cuvine logaritmului? Proporţiunea :

$$10'' : 392 = 6''5 : x, \text{ ne dă} : x = \frac{392 \times 6'',5}{10} = 254{,}8,$$

valórea cantităţiĭ cu care trebue crescutŭ logsin 28°14′30″ pentru a avea logsin 21°14′36″,5; prin urmare

$$\log\sin 28^{0}14'36'',5 = \bar{1},67506248.$$

Iacă disposiţiunea calculului :

$$\begin{array}{lr} \log\sin 28^{0}14'30'' = \bar{1},6750370 & \Delta = 392 \\ \text{pentru } 6'',5 \qquad\qquad 2548 & \\ \hline \log\sin 28^{0}14'36'',5 = \bar{1},67506248 & \dfrac{392 \times 6'',5}{10} = 254{,}8. \end{array}$$

Observare. Când diferenţa găsită pentru logaritmŭ presintă o parte fracţionară, a căriĭ primă decimală este mai mică de cât 5, tótă partea fracţionară se lapădă; iar dacă prima decimală e mai mare de cât 5, partea fracţionară totŭ se lapădă, mărindŭ insă cu o unitate ultima cifră a intregilorŭ. Aşa, in esemplulŭ precedinte diferinţa fiind 254,8, după transformare ea va deveni 255, şi atunci logsin 28°14′36″,5 va fi $\bar{1}$,6750625. Dacă diferinţă ar fi fostŭ 254,31, spre esemplu, nu amŭ fi întrodusŭ in calcülŭ de cât partea 254.

Acéstă observare este aplicabilă la tóte calculele ce se facŭ cu logarirmi.

90. Calcululŭ părţiĭ proporţionale 254,8 se póte face cu multŭ mai mare inlesnire cu ajutorulŭ tablelorŭ de diferinţe proporţionale, aşeḑate pe marginea paginei, afară din cadru. Aceste table coprindŭ crescerile logaritmului corespunḑĕtóre la fie-care crescere de 1″, 2″.... 9″ a arcului. Se găsimŭ, spre esemplu, care este crescerea logaritmului ce corespunde la crescerea 6″,5 in arcŭ, diferenţa tabulară fiindŭ 392. Tabelulŭ intitulatŭ *392* ne arată că la crescerea 6″ a arcului corespunde diferenţa 235,2. Pentru a găsi şi diferenţa corespunḑătóre la crescerea de 0″5, observămŭ că acéstă diferenţă este a ḑecea parte din diferenţa corespunḑătóre la 5″, căci şi 0″,5 este a ḑecea parte din 5″; deci acéstă diferenţă va fi 19,6, pre care adăogindu-o la 235,2 aflămŭ 254,8.

Totŭ asemenea vom opera şi pentru a găsi *logaritmulŭ tangentei unui arcŭ óre-care*: aşa

$$\log \operatorname{tg} 61^{\circ}43'48'',3 = 0{,}2694055.$$

91. 2°. *Să se găséscă logaritmulŭ cosinusuluĭ unui arcŭ.*

Fie a se găsi logcos 61°41′37″,8. Acestŭ arcŭ este coprinsŭ intre 61°41′30″ şi 61°41′40″, şi tablele daŭ:

$$\log\cos 61^{\circ}41'30'' = \bar{1}{,}6759764,$$

$$\log\cos 61^\circ 41' 40'' = \bar{1},6759374,$$

cu diferenţa tabulară 390. Observămŭ incă că

$$\log\cos 61^\circ 41' 30'' > \log\cos 61^\circ 41' 40'',$$

căci scimŭ că in primulŭ cadranŭ cosinusulŭ descresce cu cât cresce arculŭ; prin urmare vom raţiona in modulŭ următorŭ: la o *descrescere* de 10″ in arcŭ, corespunde *crescerea* la logaritmŭ de 390; la o *descrescere* in arcŭ de 2″,2 (diferenţa între arculŭ datŭ şi arculŭ celŭ mai mare din cele-alte dóuĕ), ce *crescere* la logaritmŭ va corespunde?

Tabela părţilorŭ proporţionale ne dă:

$$\begin{array}{lr} \text{crescere corespundĕtóre la } 2'' & = 78 \\ \text{crescere corespundĕtóre la } 0'',2 & = \underline{7,8} \\ & 85,8, \end{array}$$

Acéstă diferenţă, fiind adăogită la $\log\cos 61^\circ 41' 40''$, dă:

$$\log\cos 61^\circ 41' 37'',8 = \bar{1},6759460.$$

In asemenea modŭ găsimŭ şi

$$\log\cot 28^\circ 18' 38'',4 = 0,2686644.$$

Observare. Din acestea vedemŭ că pentru sinusŭ şi tangentă, calcululŭ diferenţei logaritmilorŭ se face *prin escesŭ,* adecă se ia in considerare diferenţa între arculŭ datŭ şi unŭ arcŭ *mai micŭ* de cât densulŭ. Pentru cosinusŭ şi cotangentă acelŭ calculŭ se face *prin lipsă,* căci se ia diferenţa între arculŭ datŭ şi unŭ altŭ arcŭ *mai mare* de cât dênsulŭ. Restulŭ calculului este identicŭ in ambele casuri.

92. In calculele precedente am presupusŭ că crescerile logaritmilorŭ sunt proporţionale cu crescerile arcurilorŭ. Când însă arcurile sunt fórte mici, acésta nu mai este esactŭ pentru logsin şi logtg, şi atunci numai putemŭ aplica metódele ce am datŭ. Iacă cum operămŭ in casulŭ acesta:

Fie unŭ arcŭ datŭ, $a+h$, esprimatŭ prin unŭ numĕrŭ întregŭ a de secunde, şi prin o fracţiune h de secundă. Pentru a găsi logsin $(a+h)$ şi logtg $(a+h)$, arcele fiindŭ fórte mici, putemŭ admite că raportulŭ între arcele a şi $a+h$ este egalŭ cu raportulŭ între sinusurile saŭ între tangentele lorŭ, adecă:

$$\frac{\sin(a+h)}{\sin a}=\frac{a+h}{a},\quad \frac{\operatorname{tg}(a+h)}{\operatorname{tg}a}=\frac{a+h}{a}.$$

şi luândŭ logaritmiĭ,

$$\left.\begin{aligned}\log\sin(a+h)&=\log\sin a+\log(a+h)-\log a,\\ \log\operatorname{tg}(a+h)&=\log\operatorname{tg}a+\log(a+h)-\log a.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Aci logsin$a$ şi logtg$a$ se află din *prima parte a tablelorŭ trigonometrice*, căci a este unŭ numĕrŭ intregŭ de secunde; log $(a+h)$ şi log$a$ se află din tabla logaritmilorŭ *numerelorŭ*. Valorile găsite pentru aceste diferite cantităţi fiindŭ întroduse in relaţiile (1), vom obţine pe

$$\log\sin(a+h) \text{ şi } \log\text{tg}(a+h).$$

1°. Se aflămŭ logsin $0°2'38'',7254$. Acestŭ arcŭ, redusŭ in secunde, este $158'',7254$. Prin urmare in acestŭ esemplu $a=158$, $h=0,7254$, şi relaţia ântâia din (1) se face:

$$\log\sin 158'',7262 = \log\sin 158'' + \log 158,7254 - \log 158.$$

Insă, după table,

$$\log\sin 158'' = \bar{4},8842319,$$

$$\log 158,724 = 2,2006464,$$

$$\log 158 = 2,1986571;$$

prin urmare

$$\log\sin 0°2'38'',7254 = \bar{4},8862212.$$

Asemenea şi

$$\log\text{tg}\, 0°2'38'',7254 = \bar{4},8862213.$$

Pentru a găsi logcot a unui arcŭ fórte micŭ, trebue mai ântâiŭ a calcula logtg; căci, din $\cot x = \frac{1}{\text{tg}x}$, avemŭ: $\log\cot x = -\log\text{tg}x$. Aşa:

$$\log\cot 0°2'38'',7254 = -(\bar{4}'8862213) = 3,1137787,$$

2°. Să se afle logaritmulŭ cosinusului unui arcŭ fórte micŭ $a+h$.

Din relaţia

$$\operatorname{tg}(a+h)=\frac{\sin(a+h)}{\cos(a+h)}.$$

deducemŭ:

$$\log\cos(a+h)=\log\sin(a+h)-\log\operatorname{tg}(a+h),$$

formulă prin care am putea calcula $\log\cos(a+h)$, cunoscêndŭ pre $\log\sin(a+h)$ şi $\log\operatorname{tg}(a+h)$. Insă dacă vomŭ înlocui pe $\log\sin(a+h)$ şi $\log\operatorname{tg}(a+h)$ cu valorile lorŭ date prin (1) şi vom reduce termeniĭ asemeni, vom ajunge la

$$\log\cos(a+h)=\log\sin a-\log\operatorname{tg} a,$$

saŭ

$$\log\cos(a+h)=\log\cos a. \tag{a}$$

Prin urmare, dacă arcele $a+h$ şi a sunt fórte mici, logaritmiĭ cosinelorŭ lorŭ sunt aprópe egale. Acésta se póte vedea şi din table. Arculŭ $0^0 2'38'',7254$ este coprinsŭ între $0^0 2'30''$ şi $0^0 2'40''$; însă a dóua parte a tablelorŭ arată că tóte arcele de la $0^0 1'40'$ până la $0^0 2'50''$ aŭ acelaşŭ logcos; aşa dar

$$\log\cos 0^0 2'38'',7254=\log\cos 0^0 2'30''.$$

Observare. Din relaţiunea (a) resultă că arcele fórte mici sunt fórte rĕŭ determinate prin cosinusurile lorŭ; aşa in esemplulŭ precedinte am vĕḑutŭ că la unŭ acelaşŭ logcos corespundea tóte arcele de la $1'40''$ până la $2'50''$, ceea ce produce o incertitudine de $1'10''$.

Pe de altă parte avemŭ:

$$\cos a = \sin(90^0 - a);$$

dacă a este fórte micŭ, $90^0 - a$ diferă prea puținŭ de 90^0; relațiunea acésta ne arată dar că arcele vecine de 90^0 sunt fórte rĕŭ determinate prin sinusurile lorŭ, carĭ variadă prea încetŭ.

Nu este totŭ așa pentru tangentă și cotangentă. Aceste liniĭ trigonometrice variadă multŭ mai repede de cât sinusulŭ și cosinusulŭ, căci scimŭ că in primulŭ cadranŭ ele iaŭ tóte valorile de la 0 până la ∞. Observândŭ diferențele tabulare ale lorŭ, vedemŭ că valórea cea mai mică a acestorŭ diferențe este la 45^0; așa-dar acolo tangenta și cotangenta variadă mai incetŭ, și acolo se póte produce erórea cea mai mare. Insă cu tablele lui Callet chiar acéstă valóre maximumŭ a eroriĭ este așa de neînsemnată ($0'',03$), in cât se póte neglige. Prin urmare din tóte liniile trigonometrice, cele mai avantagióse pentru a represinta arcele cu esactitate sunt tangenta și cotangenta.

93. **Problema II.** *Dându-se logaritmulŭ unei liniĭ trigonometrice a unui arcŭ, să se găséscă arculŭ.*

Fie a se găsi arculŭ x alŭ căruĭ logsin este $\bar{1},9451480$. Căutămŭ in table la colóna intitulată **sin** până când se dămŭ peste logaritmulŭ datŭ, și vedemŭ că acestŭ logaritmŭ se află in colóna H intitulată *josŭ* sin ; prin urmare, pentru a găsi secundele şi minutele arcului, le vomŭ lua la drépta in colónele L şi K, iar gradele le vomŭ lua de josŭ. Ast-felŭ arculŭ căutatŭ este $x = 61^0 48' 20''$.

Asemenea vom face şi pentru a găsi unŭ arcŭ corespunḑătorŭ la unŭ logcos, logtg, logcot datŭ, *când aceştĭ logaritmi se află in table.* Ast-felŭ se găsesce:

Pentru $\log \mathrm{tg} x = \overline{1},7297779$, $x = 28^0 13' 30''$,

pentru $\log \mathrm{cot} x = \overline{1},7307373$, $x = 61^0 43' 20''$,

pentru $\log \cos x = \overline{1},9449107$, $x = 28^0 15' 10''$,

94. *Dacă logaritmulŭ datŭ nu se află in table*, vomŭ căuta doi logaritmi intre cari să fie coprinsŭ logaritmulŭ datŭ, şi vom găsi arculŭ corespunḑătorŭ la acestŭ logaritmŭ prin o proporţie.

Ast-fel, fie $\log \sin x = \overline{1},6756418$. Căutândŭ in table, vedemŭ că acestŭ logaritmŭ este coprinsŭ intre

$$\overline{1},6756245 = \log \sin 28^0 17' 0'',$$

şi

$$\overline{1},6756636 = \log \sin 28^0 17' 10''.$$

Diferenţa tabulară între aceşti doi logaritmi este 391, iar intre celŭ mai micŭ din aceştia şi logaritmulŭ datŭ, 173. Ḑicemŭ dar: dacă o diferenţă a logaritmilorŭ de 391 unităţi de al şéptelea ordinŭ ḑecimalŭ corespunde la o crescere in arcŭ de 10″, o diferenţă in logaritmŭ de 173 unităţi de acelaşŭ ordinŭ ḑecimalŭ la ce crescere in arcŭ va corespunde? Rĕspunsulŭ este datŭ prin proporţiunea:

$$391 : 10'' = 173 ;\ \delta, \text{ de unde } \delta = \frac{173 \times 10''}{319} = 4'',4.$$

Adăogîndŭ acéstă crescere la arculŭ celŭ mai micŭ, găsimŭ arculŭ căutatŭ

$$x = 28^0 17' 4'',4.$$

Iacă disposiţiunea calculului:

$$\bar{1},6756418 = \log\sin x \qquad \Delta = 391$$

$$\frac{\bar{1},5756245 = \log\sin 28^0 17'' 0}{173} \qquad \delta = \frac{173 \times 10''}{391} = 4'',4\,;$$

$$x = 28^0 17' 0'' + 4'',4 = 28^0 17' 4'',4.$$

95. Crescerea in arcŭ de 4″,4 se póte găsi şi prin tablele diferenţelorŭ proporţionale de pe margine. Pentru aceasta, in tabelulŭ intitulatŭ *391* căutămŭ cea mai mare diferenţă care se coprinde in 173, şi acésta este 156,4, corespunḑătóre la 4″. Scăḑêndŭ apoi pe 156,4 din 173, găsimŭ diferenţa 16,6. Impărţindŭ in minte numerile din tabelŭ cu 10, vedemŭ că din tóte câturile obţinute, celŭ mai mare care incape in 16,6 este 15,64, corespunḑătorŭ la crescerea in arcŭ 0″,4. Oprindŭ aprosimaţiunea la părţile din 10 ale secundei, crescerea totală in arcŭ va fi dar de 4″,4.

Totŭ asemenea, dându-se: logtg$x=\bar{1},7297543$, găsimŭ: $x=28^0 13'25'',3$.

96. *Să găsimŭ arculŭ* x *al cărui logcos este* $\bar{1},9447589$.

Tablele ne arată că acestŭ logaritmŭ este coprinsŭ între

$$\bar{1},9447635=\text{logcos}\,28^0 17'20'',$$

și $$\bar{1},9447522=\text{logcos}\,28^0 1'730'',$$

a cărorŭ diferență tabulară este 113; diferența între logaritmulŭ celŭ mai micŭ $\bar{1},9447522$ și celŭ datŭ este 67. Dicemŭ dar: dacă la o adăogire de 113 unități de al șéptelea ordinŭ decimalŭ la logaritmŭ, corespunde o *descrescere* de 10″ in arcŭ, la o *adăogire* de 67 unități la logaritmŭ, ce *descrescere* in arcŭ va corespunde? Proporțiunea:

$$113 : 10''=67 : \delta,\ \text{dă}:\ \delta=\frac{67\times10''}{113}=5'',9.$$

Scădêndŭ acéstă *descrescere* din arculŭ$28^0 17'30''$, găsimŭ arculŭ căutatŭ: $x=28^0 17'24'',1$.

Valórea descrescerii arcului, 5″,9, se póte găsi și prin tabla părțilorŭ proporționale. In tabelulŭ intitulatŭ *113* vedemŭ că numĕrulŭ celŭ mai apropiatŭ de 67 este 56,5 la care corespunde descrescerea 5″. Apoi numĕrulŭ din tabelŭ divisatŭ cu 10 care se apropie mai multŭ de diferența $67-56,5=10,5$, este

10,17, la care corespunde descrescerea $0'',9$. Prin urmare descrescerea totală in arcŭ este de $5'',9$.

In asemenea modŭ pentru $\log\cot x = \bar{1},7310740$, vomŭ găsi:

$$x = 61^0 42' 12'',3.$$

97. In lucrările precedente amŭ presupusŭ că variaţiunile arcelorŭ sunt proporţionale cu variaţiunile logaritmilorŭ liniilorŭ sale trigonometrice. Insă acésta nu mai este adevĕratŭ pentru arcele fórte mici, când este vorba să le determinămŭ prin logsin sau logtg. In acestŭ casŭ vom căuta in *prîma parte a tablelorŭ trigonometrice* logaritmulŭ care se apropie mai multŭ de logaritmulŭ datŭ; vom lua arculŭ corespundătorŭ la acestŭ logaritmŭ, şi-lŭ vom reduce in secunde. Fie a acestŭ numĕrŭ întregŭ de secunde, şi $a+h$ numĕrulŭ de secunde şi fracţiuni de secundă al arcului necunoscutŭ ce corespunde la logaritmulŭ datŭ. Relaţiunile (1) (**92**) ne daŭ:

$$\left.\begin{aligned} \log(a+h) &= \log\sin(a+h) - \log\sin a + \log a, \\ \log(a+h) &= \log\mathrm{tg}(a+h) - \log\mathrm{tg} a + \log a. \end{aligned}\right\} (2)$$

Aci $\log\sin(a+h)$ saŭ $\log\mathrm{tg}\,(a+h)$ sunt cantităţile date, $\log\sin a$ sau $\log\mathrm{tg} a$ se află in *prima parte a tablelorŭ trigonometrice*, şi $\log a$ in tabla de logaritmi a numerelorŭ. Prin urmare $\log(a+h)$ este determinatŭ, precum şi $a+h$, arculŭ căutatŭ.

Fie a se determina, spre esemplu, arculŭ al cărui logsin este $\bar{3},3325473$.

Prima parte a tablelorŭ trigonometrice ne arată că logsin celŭ mai apropiatŭ de acésta este $\overline{3},3319783$, corespundătorŭ la arculŭ $0^{\circ}7'23''=443''$. Prin urmare, in prima din formulele (2) avemŭ: $a=443$, logsin $(a+h)=\overline{3},3325473$, logsin$a=\overline{3},3319783$, şi tablele ne daŭ: $\log a=\log 443=2,6464037$. Prima din formulele (2) devine dar:

$$\log(a+h)=\overline{3},3325473-\overline{3},3319783$$
$$+2,6464037=2,6469727,$$

şi calculândŭ pe $a+h$, găsimŭ: $a+h=443'',5807=0^{\circ}7'23'',5807$. Acèsta este valórea arcului căutatŭ.

Asemenea vomŭ găsi: $a+h=0^{\circ}8'10'',4995$, pentru logtg$(a+h)=\overline{3},3762143$.

Totŭ aşa se operédă când se cere a se găsi unŭ arcŭ micŭ, cunoscândŭ logaritmulŭ cotangentei sale; căci acestŭ logaritmŭ este egalŭ şi de semnŭ contrariŭ cu al tangentei (**92**).

Dacă însă se cere a se calcula unŭ arcŭ micŭ cunoscêndŭ logaritmulŭ cosinusului sĕŭ, acestŭ calculŭ nu se póte face cu precisiune. Fie, spre esemplu, a se găsi arculŭ alŭ cărui logcos este $\overline{1},9999998$. Tablele arată că acestŭ logcos corespunde la tóte arcele coprinse intre $0^{\circ}3'0''$ şi $0^{\circ}3'40''$; prin urmare determinarea ce ni se cere nu se póte face de cât cu o nesicuranţă de $40''$.

CARTEA II

TRIGONOMETRIA RECTILINIĂ

CAPITOLULŬ I.

PROPRIETĂŢILE TRIUNGHIURILORŬ RECTILINIĬ

Vom însemna cele trei unghiuri ale unui triunghiŭ cu literele majuscule A, B, C, éră laturele cu literele minuscule a, b, c, corespundătóre la unghiurile opuse. Dacă triunghiulŭ este dreptunghiŭ, unghiulŭ dreptŭ se va însemna cu litera A şi ipotenusa cu a.

TRIUNGHIURI DREPTUNGHE

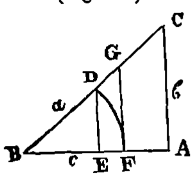
98. **Teorema I.** *In ori-ce triunghiŭ drept-unghiŭ, o lature a unghiului dreptŭ este egală cu ipotenusa inmulţită cu sinusulŭ unghiului opusŭ.*

Relațiunea ce trebue demonstrată este

$$b = a \sin B.$$

Din vêrfulŭ unghiului B (fig. 23) cu o radă BD = 1 descriemŭ arculŭ DF, și ducemŭ DE perpendiculară pe BA. Triunghiurile asemeni BCA și BDE daŭ:

(Fig. 23)



$$\frac{CA}{DE} = \frac{BC}{BD};$$

însă $CA = b$, $DE = \sin DF = \sin B$, $BC = a$, $BD = 1$; prin urmare relațiunea se reduce la

$$\frac{b}{\sin B} = a,$$

saŭ $$b = a \sin B. \qquad (1)$$

C.C.T.D.

Asemenea vomŭ avea și

$$c = a \sin C. \qquad (1)$$

99. **Teorema II.** *In ori-ce triunghiŭ dreptunghiŭ o laturе a unghiului dreptŭ este egală cu ipotenusa inmulțită cu cosinusulŭ unghiului alăturatŭ.*

Trebue a demonstra relația,

$$c = a \cos B.$$

Triunghiurile asemeni BCA și BDE, de mai susŭ, daŭ:

$$\frac{BA}{BE}=\frac{BC}{BD},$$

şi înlocuindŭ pe BA, BE, BC, BD, prin valorile lorŭ,

$$\frac{c}{\cos B}=a,$$

saŭ

$$c=a\cos B \qquad (2)$$

C.C.T.D.

Asemenea aflămŭ şi:

$$b=a\cos C \qquad (2)$$

Observarea I. Relaţiunile (1) şi (2) se potŭ deduce unele din altele. In adevĕrŭ, in ori-ce triunghiŭ dreptunghiŭ avemŭ: $B+C=90^0$, saŭ $B=90^0-C$; aşa-dară: $\sin B=\cos C$. Punêndŭ acéstă valóre in (1), dobândimŭ:

$$b=a\cos C,$$

care este una din relaţiile (2).

Totŭ asemenea vomŭ deduce şi formulele (1) din (2).

Observarea II. Rĕdicândŭ la pătratŭ formulele:

$$b=a\sin B,$$

$$c=a\cos B,$$

şi adunândŭ membru cu membru, obţinemŭ:

$$b^2+c^2=a^2(\sin^2 B+\cos^2 B)=a^2;$$

prin urmare *pătratulŭ ipotenusei este egalŭ cu suma pătratelorŭ ambelorŭ catete*, resultatŭ pre care-lŭ cunóscemŭ deja.

Trebue insă să observămŭ că acésta nu se póte considera ca o demonstrațiune nóuĕ a teoremei pătratului ipotenusei, ci ca o simplă verificare; căci formula

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1,$$

cu care ne-amŭ servitŭ aci, a fostŭ chiarŭ ea stabilită pe basa teoremei pătratului ipotenusei.

100. **Teorema III.** *In ori-ce triunghiŭ dreptunghiŭ, o lature a unghiului dreptŭ este egală cu cea-altă latură inmulțită cu tangenta unghiului opusŭ.*

Relația ce trebue demonstrată este

$$b = c \operatorname{tg} B$$

Asemĕnarea triunghiurilorŭ BCA și BGF de mai susŭ ne dă:

$$\frac{CA}{BA} = \frac{GF}{BF}, \text{ saŭ } \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{tg} B}{1},$$

de unde

$$b = c \operatorname{tg} B. \tag{3}$$

C.C.T.D.

Asemenea vom avea și

$$c = b\,\mathrm{tg}C. \qquad (3)$$

101. *Observarea I.* Fiind-că: $B+C=90^0$, avemŭ:

$$B=90^0-C, \text{ şi } C=90^0-B;$$

prin urmare: $\mathrm{tg}B=\cot C$, şi: $\mathrm{tg}C=\cot B$. Punêndŭ aceste valori in (3) avemŭ:

$$\left.\begin{aligned} b &= c\cot B, \\ c &= b\cot C, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

adecă *in unŭ triunghiŭ dreptunghiŭ, o latură a unghiului dreptŭ este egală cu cea-altă latură înmulţită cu cotangenta unghiului alăturatŭ.*

102 *Observarea II.* Relaţiunile (3) şi (4) se potŭ deduce din (1) şi (2) prin nisce simple impărţiri. In adevĕrŭ, divisândŭ ecuaţiunile (1) şi (2) respectivŭ una prin alta, avemŭ:

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\cos B}, \quad \frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\cos C},$$

saŭ:

$$b=c\cot B, \quad c=b\,\mathrm{tg}C;$$

şi făcândŭ divisiunea in sensŭ contrariŭ,

$$\frac{c}{b}=\frac{\cos B}{\sin B}, \quad \frac{b}{c}=\frac{\cos C}{\sin C},$$

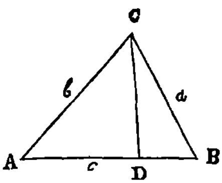
de unde

$$c=b\cot B, \quad b=c\cot C.$$

TRIUNGHIURI ÓRE-CARĬ SAŬ OBLICUNGHE

103. Teorema I. *In unŭ triunghiŭ rectiliniŭ óre-care laturile sunt proporţionale cu sinusurile unghiurilorŭ opuse.*

(Fig. 24)



Relaţiunea ce se cere a se demonstra este:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\cdot$$

Din vêrfulŭ C (fig. 24) lăsămŭ perpendiculara CD pe AB. In triunghiulŭ ACD, avemŭ (**96**):

$$CD = AC \sin A, \text{ saŭ: } CD = b \sin A.$$

In CDB avemŭ asemenea

$$CD = CB \sin B, \text{ saŭ: } CD = a \sin B.$$

Comparândŭ aceste dóuĕ ecuaţiuni vedemŭ că:

$$a \sin B = b \sin A,$$

şi divisândŭ ambiĭ membri cu sinA sinB,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\cdot$$

Vom demonstra asemenea că

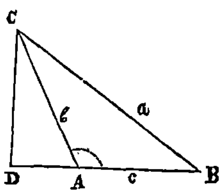
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\cdot$$

Putemŭ dar scrie şirulŭ de raporturi egale:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \qquad (1)$$

C.C.T.D.

(Fig. 25)



Se vedemŭ dacă aceste relaţiuni subsistă şi când triunghiulŭ are unŭ unghiŭ A obtusŭ. In acestŭ casŭ, din triunghiulŭ CDB (fig. 25), avemŭ:

$CD = CB\sin B$, saŭ: $CD = a\sin B$;

din CDA avemŭ asemenea:

$$CD = CA \sin CAD$$

saŭ

$$CD = b\sin(180^0 - A),$$

şi fiind-că $\sin(180^0 - A) = \sin A$ **(26)**,

$$CD = b\sin A;$$

aşa-dar

$$a\sin B = b\sin A,$$

de unde

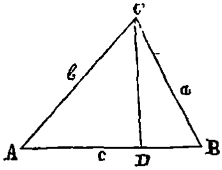
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

Prin urmare relaţiunile (1) sunt generale.

104. **Teorema II.** *In unŭ triunghiŭ rectiliniŭ*

óre-care, pătratulŭ unei laturi este egalŭ cu suma pătratelorŭ celor-alte dóuĕ laturi, minus de dóuĕ ori produsulŭ acelorŭ laturi prin cosinusul unghiului coprinsŭ între ele.

(Fig. 26)



Scimŭ din geometrie că pătratulŭ laturei opuse la unŭ unghiŭ ascuțitŭ este egalŭ cu suma pătratelorŭ celor-alte dóuĕ laturi, minus de dóuĕ ori produsulŭ uneia din ele prin projecția celei de a dóua pe cea d'ântâiŭ; ceea ce se esprimă prin ecuațiunea (fig. 26):

$$\overline{CB}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2AB\times AD.$$

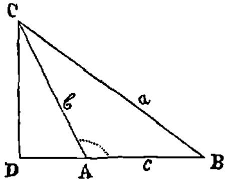
Insă $CB=a$, $AC=b$, $AB=c$, și în triunghiulŭ dreptunghiŭ CDA avemŭ:

$$AD=AC\cos A:$$

așa-dar relația de susŭ devine:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

(Fig. 27)



Dacă latura considerată se opune la unŭ unghiŭ obtusŭ, relațiunea geometrică este (fig. 27):

$$\overline{CB}^2=\overline{CA}^2+\overline{AB}^2+2AB\times DA.$$

Insă în triunghiulŭ dreptunghiŭ CDA avemŭ:

$$DA=CA\cos CAD=b\cos(180^0-A)=-b\cos a\ \mathbf{(26)};$$

punêndŭ in ecuaţie acéstă valóre, şi inlocuindŭ pe CB, CA, AB, cu a, b, c, avemŭ :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

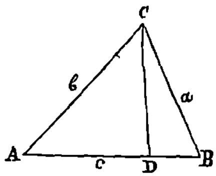
care este identică cu ecuaţiunea găsită deja.

Totŭ ast-felŭ vomŭ găsi şi espresiunea valoriĭ lui b^2 şi c^2. Obţinemŭ ast-felŭ cele trei ecuaţiuni următóre :

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

105. **Teorema III.** *In ori-ce triunghiŭ rectiliniŭ óre-care, o latură este egală cu suma celor-altă dóuĕ, inmulţite fie-care respectivŭ cu cosinusulŭ unghiului ce acéstă latură face cu latura considerată.*

(Fig. 28)



După figura 28 avemŭ:

$$c = AD + DB.$$

Insă in ACD,

$$AD = b\cos A,$$

şi in CDB,

$$DB = a\cos B.$$

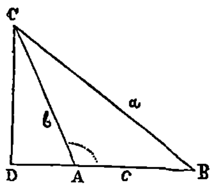
Punêndŭ aceste valori in ecuaţia de susŭ,

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

C.C.T.D.

Dacă triunghiulŭ este obtusunghiŭ, avemŭ (fig. 29):

Fig. 29.



$$c = DB - DA,$$

și fiind-că

$DB = a\cos B$, și $DA = b\cos(180^0 - A)$.

avemŭ:

$$c = a\cos B - b\cos(180^0 - A);$$

însă $\cos(180^0 - A) = -\cos A$; prin urmare

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

Făcêndŭ asemenea pentru cele-alte laturi, vom găsi valori analóge; avemŭ dar cele trei ecuațiuni următóre:

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B, \\ b &= a\cos C + c\cos A, \\ c &= a\cos B + b\cos A. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

105. Sistemele de ecuațiuni (1), (2) și (3) se potŭ deduce unele din altele.

Pentru a deduce ecuațiunile (3) din (2), adunămŭ primele dóuĕ ecuațiuni (2); avemŭ:

$$a^2 + b^2 = b^2 + 2c^2 - 2bc\cos A + a^2 - 2ac\cos B,$$

și făcêndŭ tóte reducerile,

$$c = a\cos B + b\cos A,$$

care este una din ecuaţiunile (3). Totŭ asemenea vom obţine şi pe cele-alte dóuĕ.

Pentru a deduce din (3) ecuaţiunile (2) inmulţimŭ pe prima ecuaţiune din (3) cu a, pe a dóua cu b, pe a treia cu $-c$, şi le adunămŭ:

$$a^2+b^2-c^2=ab\cos C+ac\cos B+ab\cos C$$
$$+bc\cos A-ac\cos B-bc\cos A,$$

şi făcĕndŭ tóte reducerile,

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

care este una din ecuaţiunile (2). Cele-alte dóuĕ se obţinŭ asemenea.

Din acestea resultă că sistemele de ecuaţiuni (2) şi (3) se potŭ deduce unele din altele; prin urmare sunt echivalente.

Se demonstrămŭ acum că sistemele (2) şi (3) se potŭ deduce din ecuaţiunile fundamentale

$$A+B+C=180^\circ, \qquad (a)$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \qquad (b)$$

Relaţiunea (a) dă:

$$C=180^\circ-(A+B),$$

de unde

$$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A. \qquad (c)$$

Dacă insemnămŭ cu m valórea raportului constant

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

vom avea:

$$\frac{a}{\sin A}=m, \frac{b}{\sin B}=m, \frac{c}{\sin C}=m,$$

de unde

$$\frac{a}{m}=\sin A, \frac{b}{m}=\sin B, \frac{c}{m}=\sin C.$$

Punêndŭ aceste valori in (c) şi făcând reducerile,

$$c=a\cos B+b\cos A,$$

care este una din ecuaţiunile (3).

Se scótemŭ relaţiunea (b) din (2). Prima din aceste ecuaţiuni dă:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

şi ridicândŭ la pătratŭ,

$$\cos^2 A;=\frac{b^4+c^4+a^4+2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2}{4b^2c^2};$$

scădêndŭ acéstă ecuaţiune din $1=1$ şi reducêndŭ.

$$1-\cos^2 A=\sin^2 A=\frac{2b^2c^2+2a^2b^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2};$$

divisândŭ ambiĭ membri cu a^2,

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{2b^2c^2+2a^2b^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2b^2c^2}.$$

Dacă din a dóua ecuaţiune (2) vom scóte valórea lui $\frac{\sin^2 B}{b^2}$ şi din a treia pe a luì $\frac{\sin^2 C}{c^2}$, vom găsi totŭ aceéşĭ valóre ca şi pentru $\frac{\sin^2 A}{a^2}$; prin urmare.

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\sin^2 B}{b^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2},$$

şi estrăgêndŭ rădăcina pătrată,

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c},$$

cari cunt chiar ecuaţiunile (1).

Aşa-dar cele trei sisteme de ecuaţiuni (1), (2), (3) se potŭ deduce unele din altele; prin urmare ele sunt equivalente. Totŭ asemenea şi ecuaţiunea

$$A+B+C=180^0$$

se póte deduce unele din acele trei sisteme de ecuaţiuni. Pentru acésta, însemnândŭ érăşĭ cu m raportulŭ constantŭ al laturei către sinusulŭ unghiului opusŭ, avemŭ:

$$\frac{a}{\sin A}=m, \frac{b}{\sin B}=m, \frac{c}{\sin C}=m,$$

din cari:

$$a=m\sin A,\ b=m\sin B,\ c=m\sin C,$$

şi punêndŭ aceste valori in una din ecuaţiunile (3), spre esemplu in cea d'ântâiŭ, şi impărţindŭ cu m, avemŭ:

$$\sin A=\sin B\cos C+\sin C\,\mathrm{co}B,$$

sau

$$\sin A=\sin(B+C);$$

deci, fiend-că arcele A şi B+C aŭ acelaşŭ sinusŭ cu acelaşŭ semnŭ, trebue să avemŭ:

$$A=B+C,\ \text{saŭ:}\ A=180^0-(B+C).$$

Prima ipotesă nu se póte admite, căci, cum n'am făcutŭ noi până acum nici o suposiţiune asupra valoriĭ relative a unghiurilorŭ A, B, C, unghiulŭ A s'ar putea se fie şi celŭ mai micŭ din tóte, şi atunci ecuaţiunea

$$A=B+C$$

ar fi absură. Vom cdmite dar numai pe a dóua

$$A = 180^{o} - (B + C), \text{ saŭ : } A + B + C = 180^{o},$$

care este chiar ecuațiunea (a) din formulele fundamentale.

UNGHIURI IN FUNCȚIUNE DE LATURI

106. Din ecuațiunile fundamentale

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

deducemŭ după teoria proporțiilorŭ:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C}.$$

Asemenea avemŭ și:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C}.$$

Inlocuindŭ pe $\sin A + \sin B$ și pe $\sin A - \sin B$ cu valorile lorŭ calculabile prin logaritmi, și pe $\sin C$ cu $2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{B}$, obținemŭ:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Insă din

$$A+B+C=180^0,$$

deducemŭ:

$$\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{C}{2};$$

prin urmare

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2},\quad \cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}.$$

Reducêndŭ dar după aceste formule, factoriĭ comuni da la numĕrătorulŭ şi de la numitorulŭ ecuaţiunilorŭ de mai susŭ, rĕmâne:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Prin o simplă permutare de litere vom obţine alte patru ecuaţiuni analóge cu acestea. Sistemulŭ întregŭ se compune dar din urmĕtórele şase ecuaţiuni, tóte calculabile prin logaritmi, şi coprindêndŭ fie-care câte şase elementele triunghiului

$$\left.\begin{aligned}\frac{a+b}{c}&=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},\\ \frac{a+c}{b}&=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{B}{2}},\\ \frac{b+c}{a}&=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},\end{aligned}\right\}(1)\qquad \left.\begin{aligned}\frac{a-b}{c}&=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},\\ \frac{a-c}{b}&=\frac{\sin\frac{A-C}{2}}{\cos\frac{B}{2}},\\ \frac{b-c}{a}&=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.\end{aligned}\right\}(2)$$

Divisândŭ respectivŭ ecuaţiunile (2) prin (1) avemŭ :

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\,\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{a-b}{a+b},$$

saŭ

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

Operândŭ asemenea vom găsi încă dóuĕ relaţiuni; aşa cŭ vom avea o nóuĕ sistemă de ecuaţiuni calculabile prin logaritmi, cari coprindŭ fie-care câte dóuĕ laturi şi tóte unghiurile :

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}&=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},\\
\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}&=\frac{a-b}{a+c}\cot\frac{B}{2},\\
\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}&=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

107. Relaţiunea

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

dă :

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Insă avemŭ ***45** :

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$

Punêndŭ in aceste ecuaţiuni in locŭ de cosA valórea sa, vom avea :

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}.$$

Pentru inlesnire punemŭ:

$$2p=a+b+c;$$

scăḑêndŭ pe rândŭ din ambiĭ membri $2a$, $2b$, $2c$, vom avea:

$$2(p-a)=b+c-a,\ 2(p-b)=a+c-b,\ 2(p-c)=a+b-c;$$

şi substituindŭ tóte aceste valori in ecuaţiunile de mai sus,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)\,2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2p.2(p-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

ecuaţiuni cari daŭ sinusulŭ şi cosinusulŭ jumĕtăţiĭ unui unghiŭ in funcţiune de laturile triunghiului. Făcândŭ asemenea şi pentru cele-alte dóuĕ unghiuri, obţinemŭ cele dóuĕ sisteme de ecuaţiuni urmĕtóre:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},\end{aligned}\right\}(4)\quad \left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},\end{aligned}\right\}(5)$$

Dacă dividemŭ fie-care ecuaţiune din sistema (4) prin ecuaţiunea corespondentă din sistema (5), obţinemŭ unŭ noŭ sistemŭ de formule:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

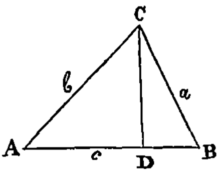
In tóte formulele (4), (5), (6), trebue să luămŭ pentru radicalŭ semnulŭ $+$; căci unghiurile triunghiului fiindŭ tóte mai mici de cât 180^0, jumĕtăţile lor vor fi mai mici de 90^0, şi prin urmare liniile lor trigonometrice vor fi positive.

SUPRAFAŢA TRIUNGHIULUI

108. Se scie că suprafaţa unui triunghiŭ este

egală cu jumětatea produsului basei prin înălţimea sa. Ast-felŭ in triunghiulŭ ABC (fig. 30),

Fig. 30.



suprafaţa $s=\frac{1}{2}AB\times CD.=\frac{1}{2}c\times CD$

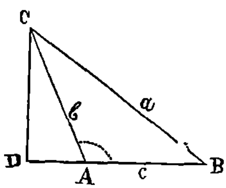
Insă in triunghiulŭ dreptunghiŭ ACD avemŭ:

$$DC=AC\sin A=b\sin A.$$

Prin urmare

$$s=\frac{bc\sin A}{2}, \qquad (1)$$

Fig. 31.



ecuaţiune care dă *suprafaţa triunghiului in funcţiune de dóuĕ laturi şi unghiulŭ coprinsŭ între ele.*

Dacă triunghiulŭ este obtusunghiŭ, avemŭ (fig. 31) încă:

$$CD=CA\sin CAD=b\sin(180^0-A)=b\sin A,$$

valóre pe care punênd-o in

$$s=\frac{1}{2}c\times CD,$$

obţinemŭ:

$$s=\frac{bc\sin A}{2}.$$

Pri urmare ecuaţiunea (1) este generală.

109. Din relaţiunea

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

scótemŭ :

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B},$$

pe care punênd-o in (1) avemŭ :

$$s=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B},$$

şi fiind-că

$$B=180^0-(A+C),$$

$$s=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin(A+C)},$$

ecuaţiune care dă *suprafaţa unghiului in funcţiune o lature şi cele dóuĕ unghiuri alăturate.*

110. Dacă in

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

inlocuimŭ pe $\sin\frac{A}{2}$ şi $\cos\frac{A}{2}$ prin valorilĕ lorŭ date prin ecuaţiunile (4) şi (5) ***107**, avemŭ :

$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$=2\frac{\sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)}}{bc}$$

Punêndŭ acéstă valóre a lui sinA in (1) şi făcêndŭ reducerile, obţinemŭ ecuaţiunea :

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ecuaţiune care dă *suprafaţa triunghiului in funcţiune de cele trei laturi ale sale.*

Esemple. 1⁰. Se calculămŭ suprafaţa unui triunghiŭ in care cunóscemŭ: $b=234^{m},504$; $c=203^{m},17$; $A=41^{0}43'56'',8$.

După (1) avem:

$$s=\frac{234^{m},504\times 203^{m},17\times \sin 41^{0}43'56'',8}{2},$$

de unde:

$$\log s=\log 234^{m},504+\log 203^{m},17$$
$$+\log\sin 41^{0}43'56'',8-\log 2$$
$$=2,3701502+2,3078596+\bar{1},8232479-0,3010300$$
$$=4,2002277;$$

prin urmare

$$s=15857^{mp},244.$$

2⁰. Se calculămŭ suprafaţa unui triunghiŭ in care se cunósce: $b=234^{m},504$; $A=41^{0}43'56''8$; $C=58^{0}29'48'',6$.

După formula (2) avemŭ:

$$\log s=2\log 234^{m}504+\log\sin 41^{0}43'56'',8$$
$$+\log\sin 58^{0}29'48'',6-\log 2-\log\sin 100^{0}13'45''4.$$
$$=4,7403004+\bar{1},8232479+\bar{1},9307511-0,3010300$$
$$-\bar{1},9930414=4,2002280,$$

adecă

$$s = 15857^{mp},255.$$

3⁰. Sĕ se afle suprafaţa unui triunghiŭ in care se cunósce: $a=158^m,62$; $b=234^m,504$; $c=203^m,17$.

Formula (3) dă:

$$\log s = \frac{\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c)}{2}$$

Insă in casulŭ de faţă avemŭ: $p=298^m,147$; $p-a=139^m,527$; $p-b=63^m,643$, $p-c=94^m977$. Prin urmare

$$\log s = \frac{2,4744304 + 2,1446583 + 1,8037506 + 19,776184}{2}$$

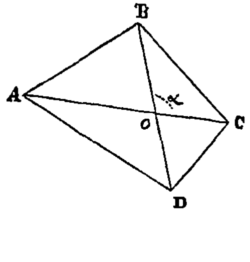
$$= \bar{4},2002288,$$

saŭ

$$s = 15857^{mp},284.$$

111. In asemenea modŭ se póte găsi espresiunea suprafeţei unui patrulaterŭ óre-care ABCD, (fig. 32.) in funcţiune de diagonalele sale AC şi BD şi de unghiulŭ α ce facŭ ele una cu alta. Avemŭ:

Fig. 32.



$$ABCD = AOB + BOC + COD + DOA.$$

Insă in cele patru triunghiuri, considerândŭ şi că: $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$, avemŭ:

$$AOB = \tfrac{1}{2} AO \times OB \sin\alpha,$$

$$BOC = \tfrac{1}{2} OB \times OC \sin\alpha,$$

$$\mathrm{COD} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{OC} \times \mathrm{OD} \sin\alpha,$$

$$\mathrm{DOA} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{OD} \times \mathrm{AO} \sin\alpha,$$

și adunândŭ,

$$\begin{aligned}\mathrm{ABCD} &= \tfrac{1}{2}\sin\alpha\,(\mathrm{AO}\times\mathrm{OB}+\mathrm{OB}\times\mathrm{OC}+\mathrm{OC}\times\mathrm{OD}+\mathrm{OD}\times\mathrm{AO})\\ &= \tfrac{1}{2}\sin\alpha\,\{\mathrm{AO}\,(\mathrm{OB}+\mathrm{OD})+\mathrm{OC}\,(\mathrm{OB}+\mathrm{OD})\}\\ &= \tfrac{1}{2}\sin\alpha\,(\mathrm{AO}\times\mathrm{BD}+\mathrm{OC}\times\mathrm{BD})\\ &= \tfrac{1}{2}\sin\alpha\times\mathrm{BD}\,(\mathrm{AO}+\mathrm{OC})\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}\sin\alpha;\end{aligned}$$

adecă *suprafața unui patrulaterŭ óre-care este egală cu jumĕtatea produsului diagonalelorŭ prin sinusulŭ unghiului ce facŭ ele una cu alta.*

Esemplu. Date: $\mathrm{AC} = 117^{\mathrm{m}},13$; $\mathrm{BD} = 98^{\mathrm{m}},56$; $\alpha = 63^\circ 14' 36'',3$.

Necunoscuta: $\mathrm{ABCD} = 5154^{\mathrm{mp}},124$.

112. Inmulțindŭ una cu alta formulele (4)* **106**, avemŭ:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{(p-a)\,(p-b\,(p-c)}{abc}.$$

Insă din (3)* **109**, scótemŭ:

$$s^2 = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c),$$

saŭ:

$$(p-a)(p-b)\,(p-c) = \frac{s^2}{p}. \qquad \text{(a)}$$

Punêndŭ acéstă valóre în equațiune, rĕmâne:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{s^2}{pabc}.$$

Dacă inmulţimŭ una cu alta şi relaţiunile (5)* **106**, obţinemŭ:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc},$$

saŭ

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{ps}{abc}.$$

In fine, făcêndŭ produsulŭ relaţiunilorŭ (6)* **106**, avemŭ:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

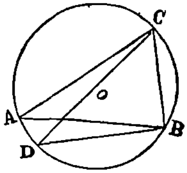
şi inlocuindŭ numĕrătorulŭ şi radicalulŭ de la numitorŭ prin valorile lorŭ date de equaţiunile (a) şi (3) precedente,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{s}{p^2}.$$

RADA CERCULUI CIRCUMSCRISŬ

113. Fie triunghiulŭ ABC (fig. 33) la care circumscriemŭ un cercŭ, a căriĭ radă o însemnămŭ cu R. Ducemŭ diametrulŭ CD = 2R, şi unimŭ D cu B.

Fig. 33.



Unghiulŭ CBD este dreptŭ, căci este înscrisŭ in o semi-circomferenţă, şi prin urmare triunghiulŭ drept-unghiŭ CBD dă:

$$CB = CD \sin D;$$

insă $CB = a$, $CD = 2R$, $D = A$; formula dară se va scrie:

$$a = 2R\sin A,$$

de unde

$$R = \frac{a}{2\sin A};$$

și inmulțindŭ ambiĭ termeni ai fracțiuneĭ cu bc,

$$R = \frac{abc}{2\,bc\sin A},$$

Insă după formula (1)* **107**,

$$\frac{bc\sin A}{2} = s,$$

de unde

$$2\,bc\sin A = 4s;$$

așa dară

$$R = \frac{abc}{4s} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Esemplu. Date: $a = 158^m{,}62$; $b = 234^m{,}504$; $c = 203^m{,}17$.

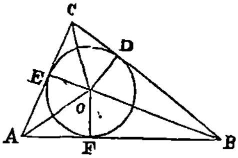
Necunoscuta: $R = 119^m{,}1458$.

RAḌA CERCULUI INSCRISU

114. Fie triunghiulŭ ABC (fig. 34). Pentru a construi cerculŭ inscrisŭ, după cum scimŭ, ducemŭ bisectrițele celorŭ trei unghiuri, carĭ se întâlnescŭ tóte în unŭ

punctŭ O, centrulŭ cercului inscrisŭ; dacă din acestŭ punctŭ lăsămŭ perpendicularele OD, OE, OF pe laturile triunghiului, aceste perpendiculare sunt radele cercului inscrisŭ. Cunoscêndŭ dară centrulŭ, şi lungimea radei cerculuĭ inscrisŭ, va fi lesne a descrie acelŭ cercŭ.

Fig. 34.



Se găsimŭ o espresiune a acestei rade r. După figură,

$$ABC = AOB + BOC + COA;$$

insă

$$AOB = \tfrac{1}{2} AB \times OF = \tfrac{1}{2} cr,$$

$$BOC = \tfrac{1}{2} CB \times OD = \tfrac{1}{2} ar,$$

$$COA = \tfrac{1}{2} AC \times OE = \tfrac{1}{2} br;$$

şi adunândŭ aceste trei egalităţi membru cu membru,

$$ABC = \tfrac{1}{2} r\,(a + b + c);$$

şi punêndŭ

$$ABC = s, \quad a + b + c = 2p,$$

$$s = pr,$$

saŭ

$$r = \frac{s}{p}.$$

Dacă substituimŭ in loculŭ lui s valórea sa

$$\sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}$$

şi reducemŭ, avemŭ:

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

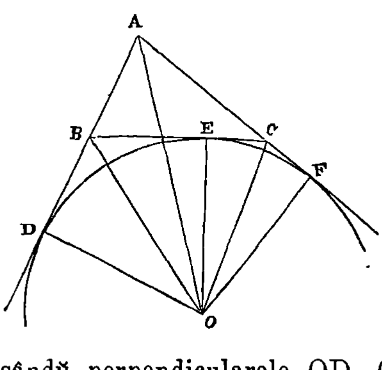
Esemplu. Date: $a=158^m,62$; $b=234^m,504$; $c=203^m,17$.

Necunoscuta: $r=53^m,1861$.

RAḌELE CERCURILORŬ EXINSCRISE

115. *Cercŭ exinscrisŭ* la unŭ triunghiŭ se numesce unŭ cercŭ tangentŭ la o lature a triunghiuluĭ şi la prelungirea celor-alte dóuĕ.

Fig. 35.



Pentru a construi cerculŭ exinscrisŭ la o lature BC $=a$ a triunghiului (fig. 35), ducemŭ bisectriţele BO şi CO ale unghiurilorŭ esteriόre CBD şi BCF; intersecţiunea lorŭ O este centrulŭ cercului căutatŭ; din acestŭ punctŭ lăsândŭ perpendicularele OD, OE, OF pe laturea BC şi pre prelungirile celor-alte dóuĕ, aceste perpendiculare vor fi egale cu raḍa căutată α a cercului exinscrisŭ la laturea a.

Pentru a găsi o espresiune a acestei raḍe, observămŭ că

$$ABC = ABO + ACO - BCO\,;$$

şi dacă în triunghiurile ABO, ACO, BCO, considerămŭ respectivŭ ca basă pe $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, şi ca inălţimi pe $OD = OF = OE = \alpha$, avemŭ:

$$s = \tfrac{1}{2} c\alpha + \tfrac{1}{2} b\alpha - \tfrac{1}{2} a\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha(b + c - a) = \alpha(p - a)$$

de unde

$$\alpha = \frac{s}{p - a}.$$

punêndŭ in locŭ de s valórea sa şi reducêndŭ,

$$\alpha = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

In asemenea modŭ vom găsi şi espresiunea raḍelorŭ cercurilorŭ exinscrise la laturile b şi c:

$$\beta = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}},$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

116. Formulele (6) * **106** daŭ:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p^2(p-a)}} = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

de unde

$$\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = p \operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

şi punêndŭ acéstă valóre in equaţiunea care dă pe α, avemŭ:

$$\alpha = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Asemenea

$$\beta = p \operatorname{tg} \frac{B}{2},$$

$$\gamma = p \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Esemple. 1⁰. Date: $a = 158^m,62; b = 234^m,504;$
$c = 203^m,17.$

Necunoscute: $\alpha = 113^m,6503;\ \beta = 249^m,1600;$
$\gamma = 166^m,9592.$

2⁰. Date: $p = 482^m,356;\ A = 52^0 16' 35'',4;$
$B = 76^0 25' 57'' 4;\ C = 51^0 17' 27'',2.$

Necunoscute: $\alpha = 236^m,7031;\ \beta = 379^m,7990;$
$\gamma = 231^m,5768.$

117. Din formulele cari daŭ pe R, r, α, β, γ, se potŭ deduce mai multe altele, carĭ de şi nu aŭ ver-o importanţă prin ele însăşi, potŭ insă servi ca verificaţiuni. Eacă câte-va din acele formule:

1⁰. Făcêndŭ inversa eqnaţiunilor

$$r = \frac{s}{p},\ \alpha = \frac{s}{p-a},\ \beta = \frac{s}{p-b},\ \gamma = \frac{s}{p-c},$$

se obține:

$$\frac{1}{r}=\frac{p}{s},\ \frac{1}{\alpha}=\frac{p-a}{s},\ \frac{1}{\beta}=\frac{p-b}{s},\ \frac{1}{\gamma}=\frac{p-c}{s}.$$

Adunândŭ pe cele treĭ din urmă din aceste equațiuni, avemŭ:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{p-a+p-b+p-c}{s}=\frac{3p-(a+b+c)}{s}=\frac{p}{s}$$

saŭ:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{r}. \tag{1}$$

2°. Inmulțindŭ între ele formulele:

$$r=\frac{s}{p},\ \alpha=\frac{s}{p-a},\ \beta=\frac{s}{p-b},\ \gamma=\frac{s}{p-c}, \tag{a}$$

obținemŭ:

$$r\,\alpha\beta\gamma=\frac{s^4}{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}=\frac{s^4}{s^2}=s^2,$$

de unde

$$s=\sqrt{r\,\alpha\beta\gamma}. \tag{2}$$

3°. Adunândŭ una cu alta pe cele trei din urmă din formulele (a) și scădêndŭ pe cea d'ântâiŭ, avemŭ:

$$\alpha+\beta+\gamma-r=\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p-b}+\frac{s}{p-c}-\frac{s}{p}=$$

$$s\frac{p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{1}{s}\left\{p\,(p-c)\,[(p-b)+(p-a)]+(p-a)\,(p-b)\,[p-(p-c)]\right\}.$$

Insă

$$p-b+p-a=2p-(a+b)=c,$$

$$p-(p-c)=c;$$

prin urmare

$$\alpha+\beta+\gamma-r=\frac{c}{s}\left\{p(p-c)+(p-a)(p+b)\right\}$$

$$=\frac{c}{s}\left\{\frac{(a+b)+c}{4}\,\frac{(a+b)-c}{4}+\frac{c+(b-a)}{2}\,\frac{c-(b-a)}{2}\right\}$$

$$=\frac{c}{s}\left\{\frac{(a+b)^2-c^2}{4}+\frac{c^2-(b-a)^2}{4}\right\}$$

$$=\frac{c}{4s}\times 4\,ab=\frac{abc}{s}.$$

Insă avemŭ :

$$\mathrm{R}=\frac{abc}{4s}.$$

aşa dară:

$$\alpha+\beta+\gamma-r=4\mathrm{R}. \qquad (3)$$

118. In casŭ când triunghiulŭ este dreptunghiŭ, putemŭ obţine alte formule, sciindŭ că in casulŭ acesta

$$a^2=b^2+c^2,\ s=\frac{bc}{2}. \qquad (\mathrm{A})$$

1°. Inmulţindŭ una cu alta equaţiunile

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},\ \alpha=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

avemŭ :

$$r\,\alpha=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)^2(p-c)^2}{p(p-a)}}$$

$$=(p-b)(p-c)=\frac{a+c-b}{2}\,\frac{a+b-c}{2};$$

efectuândŭ produsele şi făcêndŭ tóte reducerile, avêndŭ în vedere şi equaţiunile (A) obţinemŭ:

$$r\alpha=s$$

Asemenea vom avea:

$$\beta r=\sqrt{\frac{p^2(p-a)^2(p-b)(p-c)}{(p-b)(p-c)}}=p(p-a)=s.$$

Prin urmare

$$r\alpha=\beta r. \tag{4}$$

2°. Scădêndŭ una din alta equaţiunile

$$\alpha=\frac{s}{p-a},\quad r=\frac{s}{p},$$

vom avea:

$$\alpha-r=\frac{s}{p-a}-\frac{s}{p}=s\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}\right).$$

$$=s\frac{p-(p-a)}{p(p-a)}=\frac{sa}{p(p-a)}.$$

Punêndŭ in locŭ de p valórea sa

$$\frac{a+b+c}{2}$$

şi făcêndŭ tóte reducerile posibile, avêndŭ in vedere relaţiunile (A) ajungemŭ la:

$$\alpha-r=a.$$

Adunândŭ intre dênsele equațiunile

$$\beta = \frac{s}{p-b}, \ \gamma = \frac{s}{p-c},$$

avemŭ :

$$\beta + \gamma = s\left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right),$$

$$= s\frac{p-b+p-c}{(p-b)(p-c)} = \frac{sa}{(p-b)(p-c)},$$

și făcêndŭ reducerile,

$$\beta + \gamma = a.$$

Așa dară

$$\alpha - r = \beta + \gamma. \qquad (5)$$

Esemple. 1°. Verificândŭ prin formula (3) * **116** valorile găsite mai susŭ :

$$R = 119^m,1458; \ r = 53^m,1861; \ \alpha = 113^m,6503;$$

$$\beta = 249^m,1600; \ r = 166^m,9592,$$

găsimŭ numai diferența $0^m,0002$, care provine din micele quantități cari se negligŭ tot-d'a-una in calculele logaritmice.

2°. Aceleași valori, verificate prin formula

$$s = \sqrt{r\,\alpha\,\beta\,\gamma},$$

nu daŭ nici o diferență de valórea lui s găsită la *esemplul* 3° **109**.

3°. In unŭ triunghiŭ dreptunghiŭ in care avemŭ :

$$a = 302^m,752; \ b = 185^m,121; \ c = 239^m,56,$$

s'a găsitŭ pentru valórea radelorŭ cercurilorŭ inscrisŭ şi exinscrise valorile următóre :

$$r = 60^{m},9645 ; \quad \alpha = 363^{m},7165 ; \quad \beta = 124^{m},1565 ;$$

$$\gamma = 178^{m},5955.$$

Aceste valori, verificate prin ambele relaţiuni :

$$\alpha - r = \beta + \gamma, \text{ şi : } \alpha r = \beta \gamma,$$

nu daŭ nici o diferenţă.

CAPITOLULŬ I.

RESOLUŢIUNEA TRIUNGHIURILORŬ

TRIUNGHIURILE DREPTUNGHE

119. La resoluţiunea triunghiurilorŭ dreptunghe se presentă patru casuri: 1°. Când se dă hipotenusa şi unŭ unghiŭ ascuţitŭ şi se cerŭ cele dóuĕ laturi ale unghiului dreptŭ şi cel-altŭ unghiŭ ascuţitŭ. 2°. Când se dă hipotenusa şi o lature a unghiului dreptŭ, şi se cere cea-altă lature şi cele dóuĕ unghiuri ascuţite. 3°. Când se dă o lature a unghiului dreptŭ şi unŭ unghiŭ ascuţitŭ, şi se cere cea-altă lature a unghiului dreptŭ, hipotenusa şi cel-altŭ unghiŭ ascuţitŭ. 4°. Când se daŭ cele dóuĕ laturi ale unghiului dreptŭ, şi se cere hipotenusa şi cele dóuĕ unghiuri ascuţite.

120 **Casul I.** *Dându-se hipotenusa şi unghiulŭ ascuţitŭ* B *al unui triunghiŭ dreptunghiŭ, să se calculeḑe cele dóuĕ laturi,* b *şi* c *ale unghiului dreptŭ şi unghiulŭ ascuţitŭ* C.

Vom determina unghiulŭ C prin relaţiunea cunoscută din geometrie:

$$B + C = 90^0, \text{ din care: } C = 90^0 - B.$$

Laturile b şi c se vor determina pri formulele cunoscute ***96, 97:**

$$b = a \sin B, \quad c = a \sin C.$$

121. **Casul II.** *Se resolvămŭ unŭ triunghiŭ dreptunghiŭ in care se cunósce. hipotenusa* a *şi o lature* b *a unghiuluĭ dreptŭ.*

Elementele necunoscute sunt c, B, C Pentru a le determina avemŭ formulele:

$$b = a \sin B, \quad b = a \cos C,$$

din cari deducemŭ:

$$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}.$$

carĭ daŭ valórea lui B şi C. Pentru a afla pe c, intrebuinţămŭ relaţiunea:

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

din care

$$c^2 = (a + b)(a - b), \text{ saŭ: } c = \sqrt{(a + b)(a - b)}.$$

122. Unghiulŭ C, după acéstă metódă, se determină prin cosinusulŭ sĕŭ; insă când b diferă prea puţinŭ de a, quantitatea $\frac{b}{a}$ diferindŭ şi ea puţinŭ de 1, unghiulŭ C este micŭ; şi fiind-că scimŭ *95 că unghiurile mici se determină rĕŭ prin cosinusulŭ lorŭ, equaţiunea precedentă nu ne va da pe C cu destulă precisiune. In acestŭ casŭ calculămŭ mai intâiŭ pe c, şi atunci formula

$$c = b \operatorname{tg} C$$

ne dă:

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b},$$

şi unghiulŭ C, determinatŭ acum prin tangenta sa, va fi calculatŭ cu mai multă esactitate.

Putemŭ incă intrebuinţa, pentru calcululŭ lui C, şi formula următóre cunoscută *44:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}},$$

in care, punêndŭ în locŭ de $\cos C$ valórea sa $\frac{b}{a}$, şi inmulţiundŭ ambiĭ termenĭ aĭ fracţiuneĭ cu a, obţinemŭ:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}.$$

Calcululŭ făcêndu-se prin logaritmi, acéstă din urmă formulă are avantagiulŭ că coprinde numai logaritmiĭ luĭ $a-b$ şi $a+b$, carĭ intră şi în valórea luĭ c.

123. **Casul III.** *In unŭ triunghiŭ dreptunghiŭ cunoscêndŭ laturea* b *a triunghiuluĭ dreptŭ şi unghiulŭ ascuţitŭ* B, *să se calculeḑe hipotenusa* a, *laturea* c *şi unghiulŭ* C.

Unghiulŭ C se determină directŭ prin formula:

$$C = 90^{0} - B;$$

éră a şi c se vor afla prin formulele sciute* **96, 100:**

$$a = \frac{b}{\sin B}, \quad c = b \cot B.$$

124. **Casul IV.** *Dându-se cele dóuĕ laturi* b *şi* c *ale unghiului dreptŭ, să se calculeḑe hipotenusa* a, *şi unghiurile ascuţite* B *şi* C.

Determinămŭ mai ântâiŭ unghiurile B şi C prin formulele

$$b = c \operatorname{tg} B, \quad b = c \cot C,$$

din carĭ

$$\operatorname{tg} B = \cot C = \frac{b}{c}. \qquad \text{(a)}$$

Hipotenusa se determină in urmă prin ver-una din formulele:

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B,$$

de unde

$$a=\frac{b}{\sin B},\quad a=\frac{c}{\cos B}.$$

Observare. Am fi putută calcula pe a de a dreptulŭ prin

$$a^2=b^2+c^2.$$

Insă acéstă formulă nu este calculabilă prin logaritmi. Pentru a o face calculabilă prin logaritmi, vom pune pe c^2 ca factorŭ comunŭ, şi atunci

$$a^2=c^2\left(1+\frac{b^2}{c^2}\right).$$

Punemŭ

$$\frac{b}{c}=\operatorname{tg}\varphi; \qquad (b)$$

atunci

$$a^2=c^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=c^2\left(1+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)=c^2\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{c^2}{\cos^2\varphi},$$

de unde

$$a=\frac{c}{\cos\varphi},$$

formulă calculabilă prin logaritmi care ne-ar da pe a. Insă pentru acésta trebue se cunóscemŭ pe φ, şi dacă comparămŭ formula (a) cu (b), vedemŭ că

$$\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{c},$$

adecă

$$B=\varphi,$$

Prin urmare, chiar după acéstă metódă, determinarea lui a depinde totŭ de calcululŭ lui B.

VERIFICAŢIUNI

125. Pentru a fi sicuri de resultatele obţinute prin calculele ce am espusŭ, trebue să avem medie de a le verifica.

Mediele cele mai ordinare pentru a face aceste verificaţiuni constaŭ intru a calcula pe unulŭ din elementele date cu ajutorulŭ elementelorŭ calculate. Dacă valórea aflată ast-felŭ nu diferă de cât prea puţinŭ de valórea dată, calcululŭ este esactŭ. Spre esemplu, dacă am calculatŭ pe a, c, C, dându-ni-se b, B, cu valorile găsite prin calculŭ pentru a şi c vom calcula pe b prin formula

$$b=\sqrt{(a+c)(a-c)},$$

şi dacă valórea aflată nu va diferi multŭ de valórea dată a lui b, calcululŭ va fi esactŭ.

ESEMPLE

Casulŭ I.

Date	Formule	Necunoscute
$a=5836^m,43$;	$C=90^0-B$,	$C=35^0 45' 31'',4$;

Date	Formule	Necunoscute
$B=54^0 14'28'',6.$	$b=a \sin B,$	$b=4736^m,1758;$
	$c=a \cos B,$	$c=3410^m,6535.$

Calcululŭ lui *C*.	Calcululŭ lui *b*.	Calcululŭ lui *c*.
90^0	$\log a=3,7661473$	$\log a=3,7661473$
$B=54^0 14'28'',6$	$\log \sin B=\bar{1},9092805$	$\log \cos B=\bar{1},7666903$
$C=35^0 45'31'',4$	$\log b=3,6754278$	$\log c=3,5328376$
	$b=4736^m,1758$	$c=3410^m,6535$

Casulŭ II.

Date	Formule	Necunoscute
$a=574^m,35,$	$\sin B=\cos C=\dfrac{b}{a},$	$B=41^0 38'6'',41.$
$b=384^m,08.$		$C=48^0 1'53'',59,$
	$c=\sqrt{(a+b)(a-b)}.$	$c=427^m,0368.$

Calcululŭ luĭ *B*. şi *C*.	Calcululŭ lui *c*.
$\log b=2,5844217$	$\log (a+b)=2,9815604$
$-\log a=\bar{3},2408234$ [1]	$\log (a-b)=2,2793703$
$\log \sin B=\log \cos C=1,8252451$	$2 \log c=5,2069307$
$B=41^0 58'6'',41$	$\log c=2,6304654$
$C=48^0 1'53'',59$	$c=427^m,0368$

[1]) Se scie din algebră că, in locŭ de a scădé unŭ logaritmŭ din altulŭ, putemŭ adăogi acestui din urmă complimentulŭ celui d'ântâiŭ, adică diferenţa intre acelŭ logaritmŭ şi 0. Acésta s'a făcutŭ aci, şi in tóte esemplele subsequente unde aŭ fost a se scădé logaritmi.

VERIFICARE

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

$$\log(a-b)=2,2793703$$
$$-\log(a+b)=\overline{3},0184396$$
$$2\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\overline{1},2978099$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\overline{1},6489050$$

$$C=48^0 1'53'',62 \text{ (diff. } 0'',03.)$$

Casulŭ III.

Date	Formule	Necunoscute
$b=7536^m,14,$	$C=90^0-B,$	$B=33^0 35'46'',3,$
$B=56^0 24'13''7.$	$a=\frac{b}{\sin B},$	$a=9047^m,4437,$
	$c=b\cot B.$	$c=5006^m,2896.$

Calcululŭ lui *C.*

$$90^0$$
$$B=56^0 24'13'',7.$$
$$C=33^0 35'46'',3.$$

Calcululŭ lui a.	Calcululŭ lui c.
$\log b = 3{,}8771490$	$\log b = 3{,}8771490$
$-\log \sin B = 0{,}0793769$	$\log \cot B = \overline{1}{,}8223670$
$\log a = 3{,}9565259$	$\log c = 3{,}6995160$
$a = 9047^m{,}4437$	$c = 5006^m{,}2896$

Casulŭ IV.

Date	Formule	Necunoscute
$b = 2236^m{,}34,$ $c = 3814^m{,}51.$	$\operatorname{tg} B = \cot C = \frac{b}{c}$	$B = 30^0 22' 54'',85,$ $C = 59^0 37' 5'',15,$
	$a = \frac{b}{\sin B}$	$a = 4421^m{,}7306.$

Calcululululŭ lui B şi C.

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}3495379 \\ -\log c &= \overline{4}{,}4185613 \\ \hline \log \operatorname{tg} B = \log \cot C &= \overline{1}{,}7680992 \\ B &= 30^0 22' 54'' 85, \\ C &= 59^0 37' 5'',15. \end{aligned}$$

Calcululŭ lui a.

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}3495379 \\ -\log \sin B &= 0{,}2960544 \\ \hline \log a &= 3{,}6455923 \\ a &= 4421^m{,}7306 \end{aligned}$$

RESOLUŢIUNEA TRIUNGHIURILORŬ ÓRE-CARĬ SAŬ OBLIGUNGHIE.

126. La resoluţiunea unuĭ triunghiŭ oblicunghiŭ se potŭ presinta patru casuri: 1°. Când se dă o lature şi dóuĕ unghiuri, şi se cerŭ cele-alte dóuĕ laturi şi alŭ treilea unghiŭ. 2°. Când se dă dóuĕ laturi şi unghiulŭ *coprinsŭ intre ele*, şi se cere a treia lature şi cele-alte dóuĕ unghiuri. 3°. Când se dă dóuĕ laturi şi unghiulŭ *opusŭ la una din ele*, şi se cere a treia lature şi cele alte dóuĕ unghiuri. 4°. Când se daŭ cele trei laturi şi se cere cele trei unghiuri.

127. **Casul I.** *In unŭ triunghiŭ óre-care dându-se laturea* a *şi unghiurile* B *şi* C, *să se determine al treilea unghiŭ* A *şi laturile* b *şi* c, *precum şi suprafaţa* s.

Unghiulŭ A se obţine directŭ din formula

$$A+B+C=180^\circ,$$

de unde

$$A=180^\circ-(B+C).$$

Apoi din relaţiunile

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}, \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

deducemŭ

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}, \quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Suprafaţa este dată prin formula cunoscută:

$$s=\frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B+C)}.$$

128. **Casul II.** *Dându-se laturile* a *şi* b *şi unghiulŭ coprinsŭ intre ele* C *ale unuĭ triunghiŭ óre-care, se calculămŭ a treia lature* c, *şi unghiurile* A *şi* B, *precum şi suprafaţa* s.

Suma $A+B$ a unghiurilorŭ căutate este cunoscută din relaţiunea:

$$A+B=180^0-C.$$

Diferenţa lorŭ o vomŭ calcula prin formula (3) *105:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

Vom avea dară, prin aceste formule:

$$A+B=M,$$

$$A-B=N,$$

M şi N fiind nisce cantităţi cunoscute. Adunândŭ, şi apoi scădêndŭ aceste egalităţi una din alta, şi impărţindŭ cu 2, avemŭ:

$$A=\frac{M+N}{2},$$

$$B=\frac{M-N}{2}.$$

Unghiurile A şi B fiindŭ ast-felŭ determinate, vom calcula pe c prin formula:

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A},$$

saŭ mai bine prin ver-una din formulele (1) saŭ (2) * **105**, cari daŭ:

$$c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}, \text{ şi } c=\frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.$$

Suprafaţa este dată prin formula:

$$s=\frac{ab\sin C}{2}.$$

129. **Casul III.** *Să se resolve unŭ triunghiŭ óre-care in care se cunoscŭ dóuĕ laturi* a *şi* b, *şi unghiulŭ* A, *opusŭ la* a.

Se caută c, B, C. Vom calcula mai întâiŭ pe B prin formula

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a},$$

şi apoi pe C prin

$$C=180^0-(A+B);$$

in fine vom afla

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

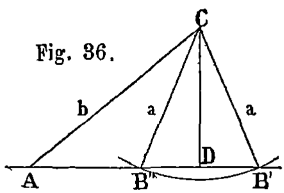
Suprafaţa s se va afla asemenea prin

$$s=\frac{ab\sin C}{2}.$$

130. *Discuţiune*.. Mai întâiŭ vom reamenti in câte-va cuvinte construcţiunea geometrică a triunghiului, pentru ca discuţiunea pe formulă să fie mai bine inţelésă.

Pentru a construi triunghiulŭ cu elementele a, b, A, in unŭ punctŭ alŭ unei drepte indefinite AB′ facemŭ unghiulŭ datŭ A, şi pe drépta AC luămŭ lungimea AC$=b$; (fig. 36) din C cu o radă egală cu a descriemŭ unŭ arcŭ, care ne dă pe drépta AB′ punctele B′ şi B″, pre cari le unimŭ cu C. Triunghiulŭ căutatŭ este ACB′ saŭ ACB″.

Fig. 36.



Formula

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$$

ne va da pe B. Insă in table scimŭ că nu se găsescŭ de cât unghiurile mai mici de cât 90^0, adică unghiurile ascuţite. Fie M unghiulŭ *ascuţitŭ* al cărui sinusŭ este egalŭ cu $\frac{b\sin A}{a}$; se scie insă *26 că şi arculŭ suplimentarŭ $180^\circ-M$, care este obtusŭ, va avea acelaşŭ sinusŭ, prin urmare trebue să vedemŭ care din aceste dóuĕ unghiurĭ M şi 180^0-M, este adevĕrata soluţiune a chestiuneĭ.

Pentru ca M se fie o soluţiune a equaţiunei, trebue să avemŭ:

$$A+M<180^0, \tag{a}$$

căci

$$A+M+C=180^0.$$

Asemenea, pentru ca 180^0-M se fie o soluţiune va trebui ca

$$A+180^0-M<180^0,$$

saŭ

$$A<M. \tag{b}$$

Se vedemŭ carĭ sunt casurile in carĭ aceste condiţiuni potŭ fi inplinite.

1°. Dacă $A>90^0$, *valórea* 180^0-M *nu convine pentru* B, căci in unŭ triunghiŭ nu potŭ fi dóuĕ unghiuri obtuse; rĕmâne dară numai M, care trebue incă să se supună condiţiunei (a), din care se deduce:

$$M<180^0-A.$$

Aci M este ascuţitŭ; 180^0-A asemenea; prin urmare putemŭ pune:

$$\sin M<\sin(180^0-A),$$

saŭ

$$\sin M < \sin A.$$

Insă

$$\sin M = \frac{b \sin A}{a};$$

prin urmare

$$\frac{b \sin A}{a} < \sin A,$$

orĭ

$$b < a. \qquad (1)$$

Dacă acéstă condiţiune nu este împlinită, nu avemŭ nici o soluţiune.

2°. Dacă $A = 90^0$, valórea $180^0 - M$, fiindŭ mai mare de 90^0, totŭ trebue lăsată, şi atunci (a) ne dă:

$$90^0 + M < 180^0, \text{ sau: } M < 90^0, \text{ saŭ: } \sin M < 1,$$

şi punêndŭ valórea lui $\sin M$ şi a lui A,

$$\frac{b \sin 90^0}{a} < 1, \text{ saŭ: } b < a,$$

Condiţiunea este aceaşĭ ca şi în casulŭ când

$$A > 90^0.$$

In resumatŭ dară, *dacă unghiulŭ datŭ este obtusŭ saŭ dreptŭ triunghiulŭ are o singură soluţiune, cu condiţiune insă ca laturea opusă la unghiulŭ* *datŭ se fie mai mare de cât cea-altă; dacă este egală cu dênsa, saŭ dacă este mai mică, triunghiulŭ n'are nici o soluţiune.*

3⁰. Dacă $A < 90^0$, trebue se distingemŭ casurile când $b \sin A$ este mai micŭ, egalŭ saŭ mai mare de cât a.

Dacă

$$b \sin A < a,$$

formula

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

dă o valóre reală, M, pentru B. Acéstă valóre, M, se póte primi tot-d'a-una, căci condiţiunea (a) se póte tot-d'a-una satisface; insă pentru a putea admite şi soluţiunea $180^0 - M$, după (b), trebue se avemŭ:

$$M > A,$$

şi fiind-că şi M şi A sunt ascuţite,

$$\sin M > \sin A, \text{ saŭ } \frac{b \sin A}{a} > \sin A,$$

de unde

$$b > a.$$

In acestŭ casŭ dară se póte se fié dóuĕ soluţiunĭ M *şi* $180^0 - M$, *insă cea din urmă convine numai când laturea opusă unghiuluĭ datŭ este mai mică de cât cea-altă.*

Dacă $b\sin A = a$, valórea

$$\sin M = \frac{b\sin A}{a}$$

se reduce la

$$\sin M = 1, \text{ saŭ: } M = 90^0,$$

şi in casulŭ acesta *cele dóuĕ soluţiunĭ* M *şi* $180^0 - M$ *se reducŭ la una singură.*

Dacă $b\sin A > a$, valórea

$$\sin M = \frac{b\sin A}{a}$$

devine

$$\sin M > 1,$$

care este absurdă; prin urmare in casulŭ acesta *nu este nici o soluţiune.*

Iacă unŭ tabelŭ care conţine resultatulŭ tutulorŭ acestorŭ discuţiunĭ.

$$A > 90^0 \begin{cases} a > b \ldots\ldots\ldots & 1 \text{ soluţiune, } B < 90; \\ \left.\begin{matrix} a = b \\ a < b \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots & 0 \text{ soluţiunĭ;} \end{cases}$$

$$A = 90^0 \begin{cases} a > b \ldots\ldots\ldots & 1 \text{ soluţiune, } B < 90^0; \\ \left.\begin{matrix} a = b \\ a < b \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots & 0 \text{ soluţiuni;} \end{cases}$$

$$
A<90^0\begin{cases}
b\sin A<a\begin{cases}
b>a \;.\;.\; 2 \text{ soluţiunĭ, } B'<90^0, \\
\qquad\qquad\qquad B''=180^0-B'; \\
b=a \;.\;.\; 1 \text{ soluţiune, } B<90^0; \\
b<a \;.\;.\; 1 \text{ soluţiune, } B<90^0;
\end{cases} \\
b\sin A=a.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1 \text{ soluţiune, } B=90^0; \\
b\sin A>a.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \text{ soluţiuni.}
\end{cases}
$$

Cu ajutorulŭ acestui tabelŭ se va putea recunósce din date chiar dacă problema are dóuĕ soluţiuni, o soluţiune saŭ nici o soluţiune, cea ce este fórte importantŭ, pentru a evita de multe orĭ calculele inutile.

Verificări. Când sunt dóuĕ soluţiuni, putemŭ avea dóuĕ verificaţiuni fórte simple. Fie $AB'=c'$, $AB''=c''$, $ACB'=C'$, $ACB''=C''$. După figură,

$$AD-B''D=c'',\ AD+DB'=c'.$$

Adunândŭ aceste egalităţi, şi avêndŭ in vedere că $B''D=B'D$, vom avea:

$$AD=\frac{c'+c''}{2}.$$

Insă in triunghiulŭ dreptunghiŭ ACD avemŭ:

$$AD=AC\ \cos A=b\cos A.$$

Vom calcula dară pe AD prin acéstă formulă, şi dacă valórea aflată va fi identică cu $\frac{c'+c''}{2}$, calcululŭ va fi esactŭ.

Asemenea, dacă am scădé una din alta cele dóuĕ equaţiuni de susŭ, am avea:

$$DB' = \frac{c' - c''}{2}$$

De altă parte

$$DCB' = ACB' - ACD = C' - ACD,$$

$$DCB'' = ACD - ACB'' = ACD - C''.$$

Adunândŭ,

$$DCB' = \frac{C' - C''}{2}.$$

In CDB′ avemŭ:

$$DB' = CB' \sin DCB' = a \sin \frac{C' - C''}{2}.$$

Aşa dară, calculândŭ pe DB′ prin acéstă equaţiune, dacă calcululŭ este esactŭ, valórea aflată va trebui să fie identică cu $\frac{c' - c''}{2}$.

131. **Casul IV.** *Dându-se cele trei laturĭ* a, b, c, *ale unui triunghiŭ óre-care, se aflămŭ unghiurile luĭ,* A, B, C, *precum şi suprafaţa* s.

Unghiurile se potŭ calcula prin equaţiunile (4), saŭ (5), saŭ (6)* **106**, tóte calculabile prin logaritmĭ; vom preferi insă equaţiunile (6), căci dacă am intrebuinţa formulele (4), ar trebui să căutămŭ şiase logartmi, şi anume pe alŭ lui a, b, c, $p-a$, $p-b$,

$p-c$; dacă ne-am servi cu (5), am avea necesitate de şiapte logaritmi: al lui a, b, c, p, $p-a$, $p-b$, $p-c$. Cu formulele (6) insă nu avem necesitate a căuta de cât patru: pe al lui p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, Afară de acésta, formulele din urmă, determinândŭ unghiurile prin tangenta lorŭ, sunt mai precise de cât cele-alte.

Formulele ce vomŭ intrebuinţa vorŭ fi dară acestea:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

Observare. Pentru ca triunghiulŭ să se pótă resolva, este necesarŭ şi de ajunsŭ ca orĭ-care din laturile date să fie mai mică de cât suma celor-alte dóuĕ. In adevĕrŭ, dacă am avea, spre esemplu:

$$a>b+c,$$

ar resulta că

$$p-a=\frac{b+c-a}{2}$$

ar fi negativŭ, pe când p, $p-b$, $p-c$, ar fi positive. Atunci quantităţile de sub radicalele ce daŭ pe

$\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ fiind negative, valorile triunghiurilorŭ ar fi imaginare.

ESSEMPLE

Casulŭ I.

Date	Formule
$a=5816^{m},35$	$A=180^{0}-(B+C),$
$B=54^{0}37^{0}12''4,$	$b=\frac{a\sin B}{\sin A},$
$C=78^{0}19'45'',7.$	$c=\frac{a\sin C}{\sin A},$
	$s=\frac{a^{2}\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}.$

Necunoscute

$$A=47^{0}3'1'',9,$$
$$b=6478^{m},885,$$
$$c=7782^{m},048,$$
$$s=18452216^{mp}.$$

Calcululŭ lui *A.*

$$\begin{array}{r} 180^{0} \\ \underline{B+C=132^{0}56'58'',1} \\ A=47^{0}3'1'',9. \end{array}$$

Calcululŭ lui *b*.

$$\log a = 3{,}7646506$$
$$\log\sin B = \overline{1}{,}9113340$$
$$-\log\sin A = 0{,}1355157$$
$$\log b = 3{,}8115003$$
$$b = 6478^{\mathrm{m}}{,}885$$

Calcululŭ lui *c*,

$$\log a = 3{,}7646506$$
$$\log\sin C = 1{,}9909276$$
$$-\log\sin A = 0{,}1355157$$
$$\log c = 3{,}8910939$$
$$c = 7782^{\mathrm{m}}{,}048$$

Calcululŭ lui *s*.

$$2\log a = 7{,}5293012$$
$$\log\sin B = \overline{1}{,}9113340$$
$$\log\sin C = \overline{1}{,}9909276$$
$$-\log 2 = \overline{1}{,}6989700$$
$$-\log\sin(B+C) = 0{,}1355157$$
$$\log s = 7{,}2660485$$
$$s = 18452216^{\mathrm{mp.}}$$

Casulŭ II.

Date

$$a = 578^{\mathrm{m}}{,}312,$$
$$b = 345^{\mathrm{m}}{,}104,$$
$$C = 48^{0}18'35'',4.$$

Formule

$$A + B = 180^{0} - C,$$
$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$
$$c = \frac{a\sin C}{\sin A},$$
$$s = \frac{a\sin C}{2},$$

Necunoscute

$$A = 95^0 13' 49'',23,$$
$$B = 36^0 27' 35'',37,$$
$$c = 433^m,6615,$$
$$s = 74517^{mp},586.$$

Calcululŭ lui $A+B$.

$$180^0$$
$$C = 48^0 18' 35'',4.$$
$$A+B = 131^0 41' 24'',6.$$

Calcululŭ lui $A-B$.

$$\log(a-b) = 2,3677435$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = 0,3482643$$
$$-\log(a+b) = \bar{3},0346026$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \bar{1},7506104$$
$$\frac{A-B}{2} = 29^0 23' 6'',93,$$
$$A-B = 58^0 46' 13'',86.$$

Calcululŭ lui A şi B.

$$A+B = 131^0 41' 24'',6$$
$$A-B = 58^0 46' 13'',86$$
$$A = 95^0 13' 49'',23$$
$$B = 36^0 27' 35'',37$$

Calcululŭ lui c.

$$\log a = 2,7621622$$
$$\log \sin C = \bar{1},8731766$$
$$-\log \sin A = 0,0018121$$
$$\log c = 2,6371509$$
$$c = 433^m,6615$$

Calcululŭ lui s.

$$\log a = 2,7621622$$
$$\log b = 2,5379500$$
$$\log \sin C = \bar{1},8731766$$
$$-\log 2 = \bar{1},6989700$$
$$\log s = 4,8722588$$
$$s = 74517^{mp},586$$

Casulŭ III.

Date	Formule
$a = 21^m,324,$	$\sin B = \dfrac{b \sin A}{a},$
$b = 26^m,715,$	$C = 180^0 - (A + B).$
$A = 45^0 32' 6'',4.$	$c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}.$
	$s = \dfrac{ab \sin C}{2}$

Necunoscute

1ª soluţie	2ª soluţie
$B' = 63^0 23' 58'',28,$	$B'' = 116^0 36' 1'',72,$
$C' = 71^0 3' 45'',32,$	$C'' = 17^0 51' 41'',88,$
$c' = 28^m,26036,$	$c'' = 9^m,16401,$
$s' = 269^{mp},4182.$	$s'' = 87^{mp},3645.$

Calcululŭ lui b sin A.

$$\begin{array}{r@{\;=\;}l} \log b & 1,4267552 \\ \log \sin A & \bar{1},8535241 \\ \hline \log b \sin A & 1,2802793 \\ b \sin A & 19^m,0668 \end{array}$$

Fiind-că $b > a > b\sin A$, avem două soluţiuni * **130.**

Calcululŭ lui B.

$$\log b = 1,4267552$$
$$\log\sin A = \bar{1},8535241$$
$$-\log a = \bar{2},6711313$$
$$\log\sin B = \bar{1},9514106$$
$$B' = 63^0 23' 58'',28$$
$$B'' = 116^0 36' 1'' 72.$$

1a soluție

Calcululŭ lui C'

$$180^0$$
$$A + B' = 180^0 56' 14'',68$$
$$C' = 71^0 3' 45'',32$$

Calcululŭ lui c'

$$\log a = 1,3288687$$
$$\log\sin C' = \bar{1}.9758331$$
$$-\log\sin A = 0,1464759$$
$$\log c' = 1,4511777$$
$$c' = 28^m,26036$$

Calcululŭ luĭ s'

$$\log a = 1,3288687$$
$$\log b = 1,4267552$$
$$\log\sin C' = \bar{1},9758331$$
$$-\log 2 = \bar{1},6989700$$
$$\log s' = 2.4304270$$
$$s' = 269^{mp},4182$$

2a soluție

Calcululŭ luĭ C''

$$180^0$$
$$A + B'' = 162^0 8' 18'' 12$$
$$C'' = 17^0 51' 41'',88$$

Calcululŭ luĭ c''

$$\log a = 1,3288687$$
$$\log\sin C'' = \bar{1},4867412$$
$$-\log\sin A = 0,1464759$$
$$\log c'' = 0,9620858$$
$$c'' = 9^m,16401$$

Calcululŭ luĭ s''

$$\log a = 1,3288687$$
$$\log b = 1,4267552$$
$$\log\sin C'' = \bar{1},4867412$$
$$-\log 2 = \bar{1},6989700$$
$$\log s'' = 1,9413351$$
$$s'' = 87^{mp},3645$$

VERIFICĂRĬ * 130

1⁰. *Formula:* $b\cos A = \frac{c' + c''}{2}$.

Calcululŭ luĭ $b\cos A$

$$\log b = 1,4267552$$
$$\log\cos A = \bar{1},8453693$$
$$\log b\cos A = 1,2721245$$
$$b\cos A = 18^m,71218$$

Calcululŭ luĭ $\frac{c' + c''}{2}$

$$c' = 28^m,26036$$
$$c'' = 9^m.16401$$
$$\frac{c' + c''}{2} = 18^m,71218 \text{ (dif. 0)}$$

2⁰. *Formula:* $a\sin\frac{C' - C''}{2} = \frac{c' - c''}{2}$.

Calcululŭ luĭ $a\sin\frac{C' - C''}{2}$.

$$\log a = 1,3288687$$
$$\log\sin\frac{C' - C''}{2} = 1,6510490$$
$$\log a\sin\frac{C' - C''}{2} = 0,9799177$$
$$a\sin\frac{C' - C''}{2} = 9^m,54811$$

Calcululŭ luĭ $\frac{c' - c''}{2}$.

$$c' = 28^m,26036$$
$$c'' = 9^m,16401$$
$$\frac{c' - c''}{2} = 9^m,54817 \text{ (dif. } 0^m,00006).$$

Casulŭ IV.

Date

$$a = 87^{m},5108,$$
$$b = 36^{m},927,$$
$$c = 64^{m},529,$$

Formule

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$
$$s = \sqrt{p(p-a)(p-a)(p-c)}.$$

Necunoscute

$$A = 116^{0}33'17''78,$$
$$B = 22^{0}10'34'',16,$$
$$C = 41^{0}16'8'',08,$$
$$s = 1065^{mp},7425.$$

Calcululŭ luĭ *A*	Calcululŭ luĭ *B*
$\log(p-b) = 1,7600936$	$\log(p-a) = 0,8433948$
$\log(p-c) = 1,4764606$	$\log(p-c) = 1,4764606$
$-\log p = \bar{2},0246445$	$-\log p = \bar{2},0246445$
$-\log(p-a = \bar{1},1566052$	$-\log(p-b) = \bar{2},2399064$
$2\log\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 0,4178039$	$2\log\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{2},5844063$
$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 0,2089020$	$\log\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{1},2922032$
$A = 116^{0}33'17'',78.$	$B = 22^{0}10'34'',16.$

Calcululŭ luĭ C	Calcululŭ suprafeţeĭ s
$\log(p-a)=0,8433948$	$\log p=1,9753555$
$\log(p-b)=1,7600936$	$\log(p-a)=0,8433048$
$-\log p=\bar{2},0246445$	$\log(p-b)=1,7600936$
$-\log(p-c)=\bar{2},5235394$	$\log(p-c)=1,4764606$
$2\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1},1516723$	$2\log s=6,0553045$
$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1},5758362$	$\log s=3,0276523$
$C=41^{0}16'8'',08.$	$s=1065^{mp},7425.$

VERIFICARE

$$A+B+C=180^{0}0'0'',02 \text{ (dif. totale } 0'',02)$$

CAPITOLULŬ III

ESERCIŢIĬ ŞI APLICAŢIUNĬ

Câte-va casurĭ de resoluţiunĭ de triunghiurĭ, in carĭ se daŭ nu treĭ elemente, ci treĭ combinaţiunĭ ale acestorŭ elemente.

132. *Să se resolve unŭ triunghiŭ dreptunghiŭ, dându-se hipotenusa* a *şi suma* b + c *a celor-alte dóuĕ laturĭ.*

Se caută B, C, b, c.

Adunândŭ relaţiunile

$$b = a\sin B,$$

$$c = a\sin C,$$

avemŭ:

$$b + c = a(\sin B + \sin C)$$

$$= 2a\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

şi fiind-că $B + C = 90^{\circ}$,

$$b + c = 2a\sin 45^{\circ}\cos\frac{B-C}{2},$$

din care

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{2a\sin 45^{0}},$$

equaţiune care ne dă pe $B-C$; fiind-că cunóscemŭ şi pre $B+C$, vom puté afla valórea fiie-căruia din unghiurile B şi C. Atunci laturile se vor calcula prin formulele

$$b=a\sin B,$$

$$c=a\sin C.$$

Esemplu. Date: $a=2416^{m},34$; $b+c=3283^{m},51$.

Necunoscute: $B=61^{0}4'51'',48$; $c=28^{0}55'8'',52$;

$b=2115^{m},032$; $c=1168^{m},477$.

133. *Să se resolve unŭ triunghiŭ dreptunghiŭ cunoscêndŭ unŭ unghiŭ ascuţitŭ* B *şi diferenţa* $b-c$ *a celor dóuĕ laturĭ ale unghiuluĭ dreptŭ.*

Necunoscutele sunt a, b, c, C.

Unghiulŭ C se determină indată prin

$$C=90^{0}-B.$$

Relaţiunile

$$b=a\sin B,$$

$$c=a\sin C,$$

daŭ prin scădere:

$$b-c=a(\sin B-\sin C)=a\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$=2a\cos 45^{0}\sin\frac{B-C}{2},$$

din care deducemŭ:

$$a = \frac{B - C}{2\cos 45^{\circ} \sin \frac{B-C}{2}},$$

formula ce dă hipotenusa in funcțiune de cantitățĭ cunoscute.

Laturile b și c le vom determina apoi prin formulele de maĭ susŭ.

Esemplu. Date: $B = 46^{\circ}18'5'',7$; $b - c = 0^{m},7543$

Necunoscute: $C = 43^{\circ}41'54'',3$; $a = 23^{m},4810$;

$b = 16^{m},9764$; $c = 16^{m},2221$

134. *Să se resolve unŭ triunghiŭ dreptunghiŭ cunoscêndŭ hipotenusa* a *și raportul* $\frac{b}{c}$ *al celor-alte dóuĕ laturĭ.*

Avemŭ:

$$\operatorname{tg} B = \cot C = \frac{b}{c},$$

care ne dă unghiurile ascuțite; cu ajutorulŭ lorŭ și al hipotenusei, vom calcula și laturile.

Esemplu. Date: $a = 13^{m},152$; $\frac{b}{c} = 1,5324$

Necunoscute: $B = 56^{\circ}52'21'',69$; $C = 33^{\circ}7'38'',31$;

$b = 11^{m},0143$; $c = 7^{m},1876.$

135. *Să se resolve unŭ triunghiŭ óre-care cunoscêndŭ laturea* c, *unghiulŭ opusŭ* C *si suma* a + b *a celor-alte dóuĕ laturĭ.*

Se caută unghiurile A și B și laturile a și b.

Cunóscemŭ

$$A + B = 180^{\circ} - C.$$

Formulele (1) * **107** daŭ încă

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}, \text{ saŭ: } \cos\frac{A-B}{2}=\frac{a+b}{c}\sin\frac{C}{2},$$

care dă şi diferenţa A—B. Unghiurile A şi B vor fi dară cunoscute.

Suma $a+b$ a laturilor fiind dată, relaţiunea (2) * **107**.

$$a-b=\frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

ne va da şi diferenţa $a-b$, şi ast-fel vom puté calcula pe fie-care din laturile a şi b in parte.

Dacă ni s'ar fi datŭ c, C, şi diferenţa $a-b$, am fi determinatŭ mai ântâiŭ pe A—B prin relaţiunile (2), şi apoi pe $a+b$ prin (1).

Esemplu. Date: $c=742^{m},14$; $C=114^{0}49'32'',4$;

$$a+b=831^{m},52.$$

Necunoscute: $A=51^{0}50'38'',87$; $B=13^{0}19'48'',72$;

$$a=642^{m},9879;\ b=188^{m},5321.$$

136. *Să se resolve unŭ triunghiŭ óre-care, cunoscêndŭ unghiurile* A, B, C, *şi perimetrulŭ* 2p.

Se caută a, b, c şi s.

Formulele

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

daŭ:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2p}{\sin A+\sin B+\sin C},$$

saŭ:

$$a=\frac{2p\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C},$$

şi inlocuindŭ pe sinA şi sinA + sinB + sinC cu valorile lor, *42, 55.

$$a=\frac{4p\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Asemenea:

$$b=\frac{p\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

$$c=\frac{p\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

Pentru suprafaţă avem:

$$s=\frac{ab\sin C}{2}.$$

şi inlocuindŭ pe a şi b cu valorile lor de maĭ susŭ şi pe sinC cu $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$,

$$s=\frac{p^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Esemplu. Date: $2p = 1836^m,24$; $A = 36^0 14'56'',2$;

$B = 73^0 28'23'',6$; $C = 70^0 16'40'',2$.

Neeunoscute: $a = 435^m,8163$; $b = 706^m,6043$,

$c = 693^m,8188$; $s = 144942^{mp},74$.

137. *Să se resolve unŭ triunghiŭ óre-care, cunoscêndŭ o lature* c, *unghiul adjacentŭ* A *şi suma* a + b *a celor-alte dóuĕ laturĭ.*

Se caută B, C, a, b.

Din relaţiunile

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

se deduce:

$$\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a+b-c}{\sin A + \sin B - \sin C}.$$

Inlocuindŭ pe $a+b+c$ cu $2p$, pe $a+b-c$, cu $2(p-c)$, pe $\sin A + \sin B + \sin C$ şi $\sin A + \sin B - \sin C$ cu valorile lor * **55**, obţinemŭ:

$$\frac{2p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{2(p-c)}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Reducêndŭ şi scoţindŭ valórea luĭ B,

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{p-c}{p}\cot\frac{A}{2}.$$

Cunoscêndŭ pe B, C este cunoscutŭ de sine. Laturile a şi b se vor determina prin formulele fundamentale, saŭ prin (2) * **105**.

Esemplu. Date: $c = 215^m,31$; $a + b = 492^m,07$;

$A = 81^0 24'13'',8$.

Necunoscute ; $B = 48^{0}54'55'',52$; $C = 49^{0}40'50'',68$;

$a = 279^{m}.2196$; $b = 212^{m},8502$.

138. *Să se resolve unŭ triunghiŭ cunoscêndŭ suprafaţa* s *şi unghiurile* A, B, C.

Necunoscutele sunt a, b, c.

Relaţiunea

$$s = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A},$$

dă imediat

$$a = \sqrt{\frac{2s \sin A}{\sin B \sin C}}.$$

Asemenea avemŭ şi :

$$b = \sqrt{\frac{2s \sin B}{\sin A \sin C}},$$

$$c = \sqrt{\frac{2s \sin C}{\sin A \sin B}}.$$

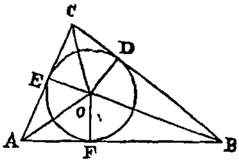
Esemplu. Date : $s = 98^{mp},125$; $A = 34^{0}48'12'',3$;

$B = 66^{0}38'53'',2$; $C = 78^{0}32'54'',5$;

Necunoscute: $a = 11^{m},1572$; $b = 17^{m},9467$; $c = 19^{m},1588$.

139. *Să se resolve unŭ triunghiŭ óreo-care cunoscêndŭ raḑa cerculuĭ inscrisŭ,* r, *şi unghiurile* A, B, C.

Fig. 37.



Trebue a se calcula a, b, c, s.

Triunghiulŭ AOF (fig. 37) dă:

$$AF = r \cot \frac{A}{2};$$

triunghiulŭ OFB dă asemenea:

$$FB = r\cot\frac{B}{2}.$$

Adunêndŭ acéstă relaţiune cu cea precedinte, avemŭ:

$$c = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right) = r\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\right)$$

$$= r\,\frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$= r\,\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}},$$

şi fiind-că

$$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2},$$

$$c = \frac{r\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}.$$

Asemenea se găsesce şi:

$$a = \frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

$$b = \frac{r\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

Suprafaţa este dată prin

$$s = \frac{ab\sin C}{2},$$

in care locuimŭ pe a şi b cu valorile lorŭ şi pe $\sin C$ cu

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2};$$

atunci

$$s = \frac{2r^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}},$$

sau

$$s = r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{3}.$$

Esemplu. Date: $r = 4^m,371$; $A = 58^{\circ}34'13'',4$;
$B = 97^{\circ}15'26'',2$; $C = 24^{\circ}10'20'',4$.
Necunoscute: $a = 24^m,2626$; $b = 28^m,2066$; $c = 11^m,6434$;
$s = 140^{mp},1180$.

140. *Să se resolve unŭ triunghiŭ óre-care, cunoscêndŭ o lature* a, *suma* b+c *a celor-alte dóuĕ, şi perpendiculara* h *lăsată din* A *pe laturea* a.

Se cere b, c, A, B, C.

Avemŭ:

$$s = \frac{bc\sin A}{2}, \text{ şi: } s = \frac{ah}{2};$$

aşa dară

$$ah = bc\sin A, \tag{a}$$

sau

$$\sin A = \frac{ah}{bc},$$

ori

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{ah}{bc}. \tag{b}$$

Avemŭ apoĭ:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 + 2bc - 2bc - 2bc\cos A \\ &= (b+c)^2 - 2bc(1+\cos A) \\ &= (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2}, \end{aligned}$$

de unde (c)

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}.$$

Impărţindŭ (b) prin (c), obţinemŭ:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{2ah}{(b+c)^2 - h^2}.$$

care dă unghiul A. Atunci (a) ne va da pe bc in funcţiune de cantităţĭ cunoscute

$$bc = \frac{ah}{\sin A};$$

insă din date avemŭ

$$b + c = m,$$

m fiind o quantitate cunoscută. Avêndŭ dară suma şi produsulŭ quantităţilorŭ b şi c, aceste quantităţi, după cum scimŭ din algebră, vor fi rădĕcinele equaţiunei de gradulŭ al doilea:

$$x^2 - mx + \frac{ah}{\sin A} = 0,$$

adecă:

$$b = x' = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2 \sin A - 4ah}{4 \sin A}},$$

$$c = x'' = \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2 \sin A - 4ah}{4 \sin A}}.$$

Cunoscêndŭ ast-fel tóte laturile, am ajunsŭ la unŭ casŭ cunoscutŭ.

Esemplu. Date: $a = 12^m,514$; $b + c = 19^m,325$;

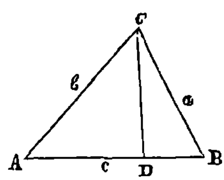
$$h = 6^m,142.$$

Necunoscute: $b = 13^m,1133$; $c = 6^m,2117$:

$A = 70^\circ 39' 47'',70$; $B = 81^\circ 24' 27'',41$; $C = 27^\circ 55' 45'',13$.

111. *Să se resolve unŭ triunghiŭ óre-care cunoscêndŭ o lature* c, *unghiulŭ opusŭ* C *şi perpendiculara* h *lăsată din* C *pe* c.

Fig. 38.



Se caută a, b, A, B.

In ACD şi CDB (fig. 38) avemŭ:

$$AD = h \cot A,$$

$$DB = h \cot B;$$

şi adunêndŭ,

$$c = h(\cot A + \cot B) = h\left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}\right)$$

$$=h\frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B}=\frac{h\sin C}{\sin A \sin B};$$

insă * **49**

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B;$$

aşa-dară

$$c=\frac{2h\sin C}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}=\frac{2h\sin C}{\cos(A-B)+\cos C},$$

din care

$$\cos(A-A)=\frac{2h}{c}\sin C-\cos C.$$

Acéstă formulă o vom face calculabilă prin logaritmi * **61** punêndŭ $\frac{2h}{c}=\cot\varphi$, şi atunci ea devine:

$$\cos(A-B)=\frac{\sin(C-\varphi)}{\sin\varphi},$$

care dă diferenţa $A-B$, şi ast-fel vom puté calcula unghiurile A şi B. Atunci cunoscêndŭ o lature c şi unghiurile, revenimŭ la unŭ casŭ cunoscutŭ * **127**.

Esemplu. Date: $c=534^m,59$; $C=64^{\circ}18'33'',4$;

$h=217^m,38$.

Necunoscute: $A=94^{\circ}8'9''35$; $B=21^{\circ}33'17'',25$;

$a=591^m,6878$; $b=217^m,9482$.

142. *Să se resolve unŭ triunghiŭ óre-care cunoscêndŭ o lature* c, *inălţimea corespundătóre* h *şi diferenţa* $A-B$ *a unghiurilorŭ alăturate.*

Să se afle a, b, A, B, C.

Unghiulŭ C se va determina prin equaţiunea găsită maĭ susŭ:

$$\cos(A-B)=\frac{2h}{c}\sin C-\cos C,$$

sau

$$\cos(A-B)=\frac{\sin(C-\varphi)}{\sin\varphi},$$

şi

$$\cot\varphi=\frac{2h}{c}.$$

Atuncĭ, cunoscêndŭ pe c, C şi h, revenimŭ la chestiunea precedinte.

Esemplu. Date: $c=13^m,251$; $h=8^m,434$;

$$A-B=28^0 23'48'',3.$$

Necunoscute: $A=68^0 39'50'',04$; $B=40^0 16'1'',74$;

$C=71^0 4'8'',22$; $a=13^m,0486$; $b=9^m,0545$.

143. *Să se resolve unŭ triunghiŭ cunoscêndŭ cele trei inălţimi.*

Fie α, β, γ inălţimele cari corespundŭ respectivŭ la laturile a, b, c. Avemŭ:

$$s=\frac{a\alpha}{2}=\frac{b\beta}{2}=\frac{c\gamma}{2},$$

relaţiuni din cari scótemŭ:

$$a=\frac{2s}{\alpha},\ b=\frac{2s}{\beta},\ c=\frac{2s}{\gamma}.$$

Punêndŭ aceste valori in

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}},$$

vom avé:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\left(\frac{2s}{\alpha}+\frac{2s}{\gamma}-\frac{2s}{\beta}\right)\left(\frac{2s}{\alpha}+\frac{2s}{\beta}-\frac{2s}{\gamma}\right)}{\left(\frac{2s}{\alpha}+\frac{2s}{\beta}+\frac{2s}{\gamma}\right)\left(\frac{2s}{\beta}+\frac{2s}{\gamma}-\frac{2s}{\alpha}\right)}},$$

şi impărţindŭ ambiĭ termeni ai fracţiunei de sub radicalŭ cu $2s\times 2s$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)}};$$

inmulţindŭ érăşĭ ambiĭ membri cu $\alpha\beta\gamma\times\alpha\beta\gamma$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\beta\gamma+\alpha\beta-\alpha\gamma)(\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta)}{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)(\alpha\gamma+\alpha\beta-\beta\gamma)}}.$$

Asemenea găsimŭ şi:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma)(\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta)}{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)(\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}\sqrt{\frac{(\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma)(\beta\gamma+\alpha\beta-\alpha\gamma)}{(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)(\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta)}}.$$

Cunoscêndŭ ast-feĭ unghiurile, relaţiunile

$$s=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A},\quad s=\frac{a\alpha}{2},$$

daŭ:

$$\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A},\quad s=\frac{a\alpha}{2},$$

din care:

$$a=\frac{\alpha\sin A}{\sin B\sin C}.$$

Asemenea:

$$b=\frac{\beta\sin B}{\sin A\sin C},$$

$$c=\frac{\gamma\sin C}{\sin A\sin B}.$$

Esemplu. Date: $\alpha=15^m,324$; $\beta=9^m,413$; $\gamma=18^m,102$.

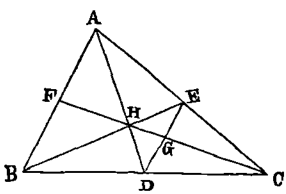
Necunoscute: $A=30^\circ 49'32'',42$; $B=123^\circ 27'57'',94$;

$C=25^\circ 42'29'',68$; $a=21^m,6996$; $b=35^m,3257$;

$c=18^m,3693$.

144. *Să se resolve unŭ triunghiŭ cunoscêndŭ cele trei mediane* (numindŭ *mediană* linia care unesce unŭ vêrfŭ alŭ triunghiului cu migloculŭ laturei opuse).

Fig. 39)



Fie α, β, γ, medianele carĭ trecŭ respectivŭ prin vêrfurile A, B, C, ale triunghiuluĭ.

Unindŭ estremităţile E şi D ale medianelorŭ β şi α, linia ED este paralelă cu AB, căci imparte laturile AC şi BC in părţi egale. Aşa dară triunghiurile AFC, EGC sunt asemeni, şi daŭ:

$$\frac{EG}{AF}=\frac{EC}{AC}=\frac{1}{3}. \tag{a}$$

Triunghiurile FBH şi EGH sunt érăşĭ asemeni şi prin urmare

$$\frac{EG}{AF}=\frac{EH}{BH}. \tag{b}$$

Insă $FB=AF$; şi prin urmare, comparândŭ equaţiunea (b) cu (a), avemŭ:

$$\frac{EH}{BH}=\frac{1}{2}.$$

Deci

$$\frac{EH}{EH+BH}=\frac{1}{1+2},$$

sau

$$\frac{EH}{\beta}=\frac{1}{3}.$$

Aşa-dară punctulŭ de întêlnire al celor trei mediane imparte pe fie-care dintr'ènsele in dóuĕ părţi, dintre cari partea despre basă este jumĕtatea celei despre vêrpŭ, saŭ a treia parte din mediana intrégă.

Triunghiulŭ BHC dă, după o teoremă din geometrie:

$$\overline{BH}^2+\overline{HC}^2=2\overline{HD}^2+2\overline{BD}^2;$$

insă

$$BD=\frac{a}{2},\ HD=\frac{\alpha}{3},\ BH=\frac{2\beta}{3},\ HC=\frac{2\gamma}{3};$$

aşa-dară:

$$\frac{4}{9}\beta^2+\frac{4}{9}\gamma^2=\frac{2}{9}\alpha^2+\frac{a^2}{2},$$

saŭ

$$8\beta^2+8\gamma^2=4\alpha^2+9a^2,$$

de unde

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2},$$

Vom găsi asemenea:

$$b=\frac{2}{3}\sqrt{2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2},$$

$$c=\frac{2}{3}\sqrt{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}.$$

Laturile fiind calculate, ajungemŭ dară la unŭ casŭ cunoscutŭ * 131.

Esemplu. Date: $\alpha=0^m,143$; $\beta=0^m,115$, $\gamma=0^m,083$.

Necunoscute: $a=0^m,093758$; $b=0^m,13573$;

$c=0^m,16392$; $A=34^\circ 53'3'',72$; $B=55^\circ 53'19'',62$;

$C=89^\circ 13'36'',72$.

OPERAŢIUNI PE PĂMÊNTŬ

145. Trigonometria găsesce aplicaţiuni variate şi de cea mai mare importanţă in tóte operaţiunile ce aŭ de scopŭ a determina dimensiunile unei figuri óre-care prin cunoscinţa câtor-va din elementele sale. Ast-felŭ se intrebuinţéḑă calcululŭ trigonometricŭ la ridicările de planuri, la mĕsurătorile de distanţe, de inălţimi, de unghiuri, etc. Tóte aceste operaţiuni se potŭ efectua şi prin metóde grafice; insă nesicuranţa acestorŭ metóde, şi chiar dificultatea intrebuinţăriĭ lorŭ facŭ ca tot-d'a-una să se prefere calcululŭ.

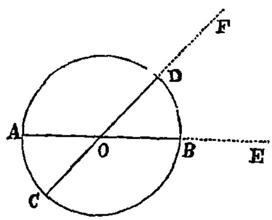
In aplicaţiunile practice ale trigonometriei este necesariŭ să se scie a mĕsura *lungimi* şi *unghiuri*.

Lungimile se mĕsóră cu *lanţulŭ de agrime-*

sură, saŭ cu nisce *rigle* de lungimi cunoscute. Acestŭ lanţŭ saŭ aceste rigle se punŭ pe drépta ce voimŭ a mĕsura de câte orĭ incapŭ, şi numĕrândŭ de câte orĭ am pusŭ lanţulŭ sau riglele pe acéstă dréptă, cunóscemŭ lungimea ei.

Unghiurile se mĕsóră cu nisce instrumente cari pórtă diferite numiri: *grafometrulŭ*, *cerculŭ repetitorŭ* saŭ *teodolitulŭ* sunt cele mai usitate. Tóte aceste aparate, reduse la cea mai simplă espresiune a lorŭ, se compunŭ din unŭ *limbŭ* saŭ cercŭ gradatŭ de metalŭ, O, care pórtă dóuĕ *alidade*, adecă dóuĕ rigle de metalŭ, (fig. 40) AB şi CD, cari trecŭ prin centrulŭ cercului. Una din aceste rigle, AB, este fixă, éră cea-altă, CD, se póte invêrti in giurulŭ centrului O. Pentru a mĕsura unŭ unghiŭ, se aşédă centrulŭ cercului in vêrfulŭ O al unghiului EOF ce trebue să se mĕsóre, se indreptédă alidada fixă AB in direcţiunea uneia din laturile unghiului, OE, şi alidada monilă CD se invêrtesce in giurulŭ centruluĭ pênă se aduce in direcţia celei de a dóua laturе a unghiului, OF. Atunci arculŭ DB, cu care s'a mişcatŭ acéstă alidadă, mĕsóră unghiulŭ.

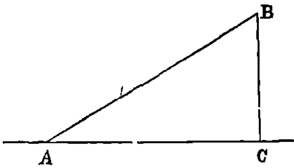
(Fig. 40)



In instrumentele moderne, alidadele sunt inlocuite prin lunete, cari dau o direcţie mai precisă, şi potŭ vedé objectele la o mai mare depărtare de cât ochiulŭ liberŭ.

In cele mai multe din operaţiunile de pe pămêntŭ dacă terenulŭ nu este cu totulŭ orizontalŭ, nu se mĕsóră liniile şi unghiurile cum sunt in natură, ci projecţiile lor pe unŭ planŭ orizontalŭ. Aşa in locŭ de a mĕsura drépta inclinată AB, se mĕsóră projecţia sa AC pe o linie orizontală. (fig. 41).

(Fig. 41).



Acésta se chiamă *a reduce liniile şi unghiurile la orizontŭ.*

Sunt diferite metóde a se reduce liniile şi unghiurile la orizontŭ. Teodolitulŭ, intre altele, dă dedreptulŭ unghiurile reduse la orizontŭ.

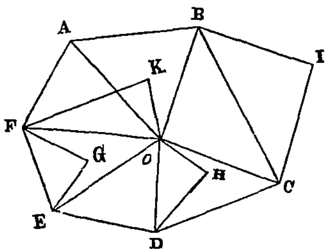
TRIUNGULAŢIUNE

146. Pentru a se esecuta cu precisiune unŭ planŭ alŭ unei moşiĭ, alŭ unui oraşŭ saŭ alt-ceva, trebue a se determina distanţele respective intre diferitele sale puncte principale, reduse la orizontŭ. Aceste distanţe nu se mĕsóră tóte directŭ, din causă că este fórte lungŭ a se mĕsura o dréptă pe pămêntŭ; ci pentru acésta se forméḑă o mulţime de triunghiuri cari acopere partea de locŭ considerată, şi ale căror vêrfuri se află in punctele principale ale

locului. In aceste triunghiuri, se mĕsóră cu instrumentele tóte unghiurile şi numai o latură, numită *basă*; şi apoi prin calculŭ se determină tóte celealte laturi ale triunghiurilorŭ. Acéstă operaţiune se numesce *triungulaţiune*.

Écă unŭ esemplu de triungulaţiune (fig. 42). Cam in centrulŭ loculuĭ consideratŭ, se alege unŭ punctŭ O, din care să se pótă vedé tóte punctele principale ale locului. Se alegŭ apoi câte-va puncte insemnate, A, B, C, D, E, F, astfel ca unindŭ aceste puncte intre ele şi cu O prin liniĭ drepte, triunghiurile ABO, BOC, etc., cari vor resulta, se nu aibă nici unŭ unghiŭ prea ascuţitŭ saŭ prea obtusŭ, căci atunci erorile de temutŭ sunt cu multŭ mai mari. Se mĕsóră tóte unghiurile din aceste triunghiuri, şi se alege o lature óre-care, spre esemplu AB, care să se pótă mósura directŭ in condiţiunile cele mai avantagióse. Acéstă lature va fi *basa* triunghiulaţiuneĭ.

(Fig. 42)



In triunghiulŭ AOB cunoscêndu-se AB şi unghiurile ABO, BAO, mĕsurate directŭ, se vor puté calcula şi laturile AO şi BO.

Triunghiulŭ BOC, in care se cunósce BO din triunghiulŭ precedinte, şi tóte unghiurile din mĕsurături, ne va da lungimea laturilorŭ BC şi OC.

Totŭ asemenea mergêndŭ mai departe din triunghiŭ in triunghiŭ, vom determina laturile CD, OD, DE, OE, EF, FO FA, AO.

Determinarea acestei din urmă laturi ne póte servi ca verificare; căci dacă valórea găsită acum va fi identică saŭ prea puţinŭ diferită de cea aflată la inceputŭ din triunghiulŭ ABO, acésta va fi o probă că calculele aŭ fost esacte.

Triunghiurile formate ast-fel numai cu punctele principale se numesc *triughiuri de ântâia mărime.*

Pentru a determina in urmă posiţiunea punctelorŭ mai puţin insemnate, G, H, I, K, se légă aceste puncte prin drepte cu punctele principale considerate mai nainte şi se mĕsóră tóte unghiurile triunghiurilorŭ FGE, OHD, BIC, FKO, ast-fel formate. Aceste triunghiuri, in cari se cunósce câte o lature din triunghiurile de ântâia mărime, şi tóte unghiurile din mĕsurături, ne vor da şi distanţele FG, GE, OH, HD, BI, IC, FK, KO, cari determină posiţiunea punctelorŭ G, H, I, K.

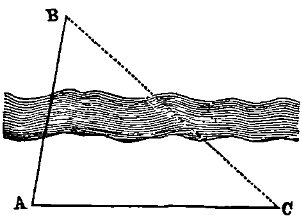
CALCULULŬ DISTANŢELORŬ

147. *Să se găséscă distanţa de la unŭ punctŭ pênă la unŭ altŭ punctŭ inaccesibilŭ.*

Fie A punctulŭ unde staţionédă observatorulŭ şi B punctulŭ visibilŭ insă inaccesibilŭ; (fig. 43) să cere distanţa AB.

Se mĕsóră pe pămêntŭ o basă AC, care se trécă prin punctulŭ A; apoi cu unŭ instrumentŭ de măsuratŭ unghiurile se ridică unghiurile A şi C; atunci triunghiulŭ ABC, in care se cunósce o lature şi dóuĕ unghiuri, ne va da prin unŭ calculŭ cunoscutŭ * **127** distanţa căutată AB.

(Fig. 43)

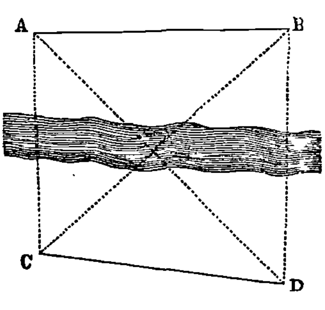


Ex. Date: $AC = 315^{m},74$; $A = 72^{0}13'24'',1$; $C = 47^{0}37'18'',5$.

Necunoscuta: $AB = 268^{m},904$.

148. *Să se găséscă distanţa dintre dóuĕ puncte, visibile insă inaccesibile.*

(Fig. 44)



Fie A şi B punctele inaccesibile a căror distanţă este cerută (fig. 44).

Se mĕsóră o basă CD şi apoi unghiurile ACD şi ADC; triunghiul ACD, in care se cunósce o lature şi dóuĕ unghiuri, ne va da prin calculŭ laturea AC. Mĕsurămŭ apoi unghiurile BCD şi BDC, şi triunghiulŭ BCD, in care se cunósce laturea DC, mĕsurată şi cele dóuĕ unghiuri adjacente, ne va da pe BC. Atunci triunghiulŭ ABC, in care cunóscemŭ pe

AC şi pe BC prin cele dóuě triunghiuri precedente, precum şi unghiulŭ $ACB = ACD - BCD$, ne va da laturea AB, care este distanţa căutată.

Esemplu. Date : $CD = 1432^m,16$;

$ACD = 79^0 13'28''4$; $ADC = 35^0 51'12'',3$;

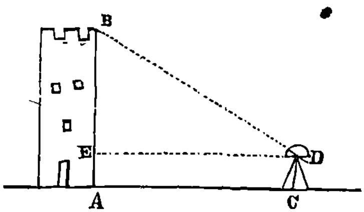
$BCD = 46^0 25'56'',8$; $BDC = 64^0 36'5'',9$.

Necunoscuta : $AB = 787^m,848$.

CALCULULŬ INĂLŢIMILORŬ

149. *Să calculămŭ inălţimea unui turnŭ alŭ căruĭ piciorŭ accesibilŭ este pe unŭ planŭ orizontalŭ.*

(Fig. 45)



Aşeḑămŭ unŭ instrumentŭ de měsuratŭ unghiurile in unŭ punctŭ C, la óre-care depărtare de piciorulŭ turnului, şi měsurămŭ unghiulŭ BDE ce face raḑa visuală dusă la vêrfulŭ turnului cu linia orizontală ED. Měsurămŭ apoi pe pămêntŭ distanţa AC. In triunghiulŭ dreptunghiŭ BED se cunósce laturea $ED = AC$ şi unghiulŭ ascuţitŭ BDE; vom puté dară *123 se calculămŭ pe BE ; adăogândŭ la acéstă mărime şi pe $EA = DC$, care este inălţimea h a instrumentului, vom avea inălţimea AB a turnului.

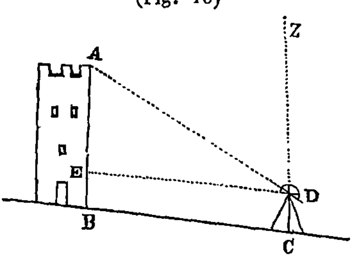
Esemplu. Date: $AC = 41^m,35$; $BDE = 39^0 15' 49'6$;

$h = 1^m,25$.

Necunoscuta: $AB = 35^m,05$

150. *Se calculămŭ inălţimea unui turnŭ alŭ căruĭ piciorŭ accesibilŭ nu este pe unŭ planŭ orizontalŭ.*

(Fig. 46)



Aşedămŭ unŭ instrumentŭ de mĕsuratŭ unghiurile in D, şi apoi insemnămŭ pe turnŭ unŭ punctŭ E ast-fel că EB se fie egalŭ cu DC (fig. 46). Mĕsurămŭ pe urmă unghiulŭ ADE, precum şi unghiulŭ ADZ, pe care 'lŭ face drépta AD cu verticala DZ; mĕsurămŭ in fine basa BC = ED. Triunghiulŭ AED, in care cunóscemŭ laturea ED şi unghiurile ADE şi EAD = ADZ, ne va da pe AE * **127** adăogîndŭ la acéstă cantitate pe $EB = DC = h$, inălţimea instrumentului, vom avea inălţimea AB a turnului.

Esemplu. Date: $BC = 52^m,36$; $ADE = 36^0 24' 17'',3$;

$ADZ = 40^0 58' 12'',2$; $h = 0^m,982$

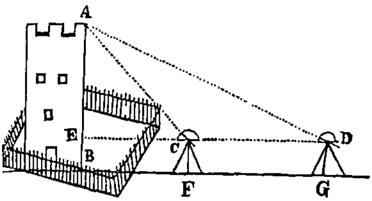
Necunoscuta: $AB = 48^m,485$.

151. *Se calculămŭ inălţimea unuĭ turnŭ alŭ*

căruĭ piciorŭ este inaccesibilŭ, însă aşeḑatŭ pe unŭ planŭ orizontalŭ.

Aşeḑămŭ in C unŭ instrumentŭ de mĕsuratŭ unghiurile, şi luămŭ unghiulŭ ACE ce face raḑa visuală dusă la vêrfulŭ turnului cu direcţia orizontală CE. Mutămŭ apoi instrumentulŭ in D, totŭ pe linia EC, şi mĕsurămŭ unghiulŭ ADE; in fine mĕsurămŭ şi pe FG = CD (fig. 47). In triunghiulŭ ACD se cunósce laturea CD şi unghiurile ADC şi ACD = 180° — ACE; prin urmare din acelŭ triunghiŭ vom puté calcula pe AC * **127**. Atunci triunghiulŭ dreptunghiŭ ACE, in care se cunósce AC şi ACE, ne va da * **120** pe AE, la care adăogîndŭ pe EB = h, inălţimea instrumentului, vom avé inălţimea căutată AB.

(Fig. 47)



Esemplu. Date: FG = $12^m,15$; ACE = $44^o27'42''0$;

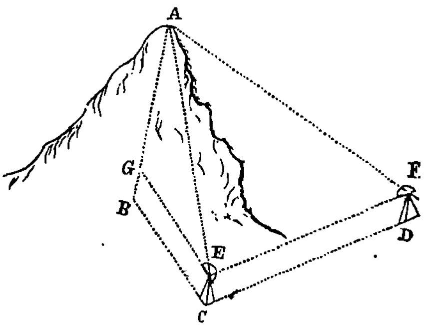
ADE = $32^o51'13'',5$; $h = 1^m,51$.

Necunoscută : AB = $34^m,264$.

152. *Să se calculeḑe inălţimea unui munte.*

Alegemŭ dóuĕ puncte C şi D ast-fel ca se putemŭ mĕsura cu inlesnire şi precisiune o basă CD. Aşeḑămŭ apoi unŭ instrumentŭ de mĕsuratŭ unghiurile in D, şi mĕsurămŭ unghiulŭ AFE formatŭ de rađa visuală dusă la vêrfulŭ muntelui cu cea dusă la punctulŭ E (fig. 48); mutămŭ pe urmă instrumentulŭ in C şi mĕsurămŭ unghiulŭ AEF, făcutŭ de rađele visuale duse la vêrfulŭ muntelui şi la punctulŭ F. Triunghiŭ AEF, in care se cunósce EF=CD şi unghĭurile alăturate ne va da*127 pe AE.

Fig. 48)



Atunci, dacă mĕsurămŭ şi unghiulŭ AEG făcutŭ de rađa visuală dusă din E la vêrfulŭ muntelui cu orizontala EG, triunghiulŭ dreptunghiŭ AEG, in care se cunósce hipotenusa AE din triunghiulŭ precedentŭ, şi unghiulŭ ascuţitŭ AEG, va da pe AG. Inălţimea totală a muntelui se va află adăogindŭ la AG pe $GB=EC=h$, inălţimea instrumentului.

Esemplu. Date: $CD=248^m,36$; $AFE=58^0 13'25'',3$; $AEF=72^0 15'20'',9$; $AEG=30^0 37'14'',5$; $h=1^m,18$.

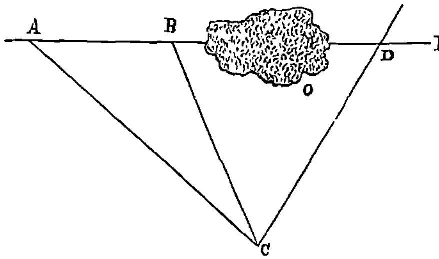
Necunoscuta : $AB=142^m,564$.

QUESTIUNI DIVERSE

153. *Se prelungimŭ o dréptă pe pământŭ pênă dincolo de unŭ obstacolŭ care oprésce vederea.*

Fie drépta AB pe care trebue se o prelungimŭ dincolo de obstaculuĭ O, care impedică vederea (fig. 49).

(Fig. 49)



Mĕsurămŭ o porţiune AB din drépta dată; apoi alegêndŭ unŭ punctŭ C, din care să se vadă şi drépta AB, şi obstaculuĭ, şi partea locului unde trebue prelungită drépta, mĕsurămŭ unghiurile BAC şi ABC; atunci triunghiulŭ ABC ne va da pe AC. Dupĕ acésta ducemŭ o dréptă dupĕ voie CD in partea locului unde trebue prelungită drépta, şi mĕsurăm unghiulŭ ACD; triunghiulŭ ACD, in care se cunósce AC şi unghiurile A şi C, ne va da pe CD şi unghiulŭ ADC. Luândŭ dară pe drépta indefinită CD o lungime egală cu distanţa calculată ast-fel, şi ducêndŭ prin D o dréptă DE care se facă cu CD unŭ unghiŭ egalŭ cu celŭ găsitŭ prin calculŭ, acéstă dréptă DE va fi chiar prelungirea căutată a dreptei AB.

Esemplu. Date: $AB = 87^m,34$; $BAC = 50^0 13'25'',4$;

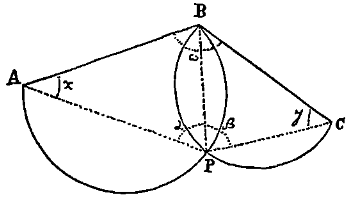
$ABC = 107^0 38'9'',3$; $ACD = 61^0 29'32'',8$.

Necunoscute: $ADC = 68^0 17'1'',8$; $CD = 182^m,284$.

154. *Trei puncte de pe pămêntŭ* A, B, C, *sunt insemnate pe o chartă; se găsimŭ pe acéstă chartă*

şi posiţiunea punctului P *care este ast-fel situatŭ, că distanţa* AB *privită din* P, *se vede sub unghiulŭ* α, *şi distanţa* BC *sub unghiulŭ* β.

(Fig. 50)



Este evidentŭ că punctulŭ P, din care drépta AB se vede sub unghiulŭ α, se află pe segmentulŭ descrisŭ pe AB şi capabilŭ de unghiulŭ α; de altă parte P trebue să se afle şi pe segmentulŭ descrisŭ pe BC şi capabilŭ de unghiulŭ β. Aşa-dară punctulŭ P se va afla la intersecţia acestorŭ dóuĕ segmente.

Se cere insă a determina prin calculŭ posiţia punctului P.

Punemŭ $AB=a$, $BC=b$, $BAP=x$, $BCP=y$, $ABC=\omega$. Triunghiulŭ ABP dă:

$$\frac{BP}{\sin x}=\frac{AB}{\sin \alpha},$$

sau

$$BP=\frac{a\sin x}{\sin\alpha}.$$

Triunghiulŭ BCP dă asemenea:

$$BP=\frac{b\sin y}{\sin\beta};$$

aşa-dară

$$\frac{a\sin x}{\sin\alpha}=\frac{b\sin y}{\sin\beta}, \tag{a}$$

de unde

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta},$$

și după proprietățile proporțiilorŭ,

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}.$$

Insă *48

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}};$$

așa-dară:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta},$$

saŭ

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}.$$

Pentru a face calculabilă prin logaritmi acéstă equațiune, impărțimŭ ambiĭ termeni aĭ fracțiunei cu $b\sin\alpha$ și avemŭ:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{1-\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}{1+\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}.$$

Punêndŭ

$$\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}=\operatorname{tg}\varphi,$$

şi observêndŭ că $1=\operatorname{tg}45^0$, relaţiunea acésta devine:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{\operatorname{tg}45^0-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}45^0\operatorname{tg}\varphi}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2},$$

saŭ

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}(45^0-\varphi)\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}. \qquad (1)$$

Pe de altă parte suma unghiurilorŭ din patrulaterulŭ ABCP fiind de 360^0, avemŭ:

$$\alpha+\beta+x+y+\omega=360^0,$$

de unde

$$\frac{x+y}{2}=180^0-\frac{\alpha+\beta+\omega}{2}. \qquad (2)$$

Equaţiunile (1) şi (2) ne vorŭ da pe x şi y, cari determină posiţia punctului P pe chartă.

Cunoscêndŭ pe x şi y, vomŭ puté determina şi pe BP prin ver-una din relaţiunile

$$BP=\frac{a\sin x}{\sin\alpha}, \text{ saŭ } BP=\frac{b\sin y}{\sin\beta}.$$

Esemplu. Date: $\alpha=53^0 43'27'',4$; $\beta=42^0 18'53'',3$; $\omega=112^0 34'32'',3$; $a=2456^m,13$; $b=1934^m,25$.

Necunoscute: $x=69^0 8'27'',78$; $y=82^0 14'39',22$;

$$BP=2846^m,918.$$

Observare. In casŭ când

$$\alpha+\beta+\omega=180^0,$$

avemŭ din (2):

$$\frac{x+y}{2}=90^0, \text{ sau: } \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\infty.$$

De altă parte, fiind-că unghiurile opuse $\alpha+\beta$ şi ω din patrulaterulŭ ABCP sunt suplementare, patrulaterulŭ este inscriptibilŭ; prin urmare şi unghiurile x şi y vor fi suplementare şi vom avé:

$$\sin x=\sin y;$$

atunci relaţiunea (a) devine:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta},$$

saŭ

$$a\sin\beta=b\sin\alpha,$$

şi prin urmare

$$\operatorname{tg}\varphi=1, \text{ şi } \varphi=45^0.$$

Formula (1) se face in casulŭ acesta:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}0^0\operatorname{tg}90^0=0\times\infty=\frac{0}{0}.$$

In casŭ darĭ când *cele patru puncte* A,B,C,P, *sunt pe aceiaşĭ circomferinţă, problema este nedeterminată.*

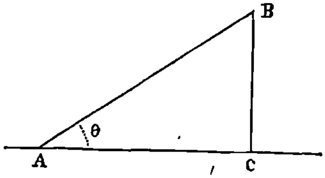


Fig. 51

155. *Să se reducă o dréptă la orizontŭ.*

Fiind dată drépta AB şi inclinarea sa θ pe orizontŭ, se cere drépta AC redusă la orizontŭ (fig. 51).

Triunghiulŭ dreptunghiŭ ABC dă imediatŭ:

$$AC = AB \cos\theta.$$

Aşa-darĭ *o dréptă redusă la orizontŭ este egală cu drépta din natură inmulţită cu cosinusulŭ inclinăriĭ eĭ pe orizontŭ.*

Esemplu. Date: $AB = 193^{m},37$; $\theta = 8^{0}13'25'',5$

Necunoscuta: $AC = 191^{m},381$.

CARTEA III

TRIGONOMETRIA SFERICĂ

CAPITOLULŬ I

PROPRIETĂŢILE TRIUNGHIURILOR SFERICE

156. *Trigonometria sferică* are dreptŭ objectŭ resoluţiunea triunghiurilor sferice.

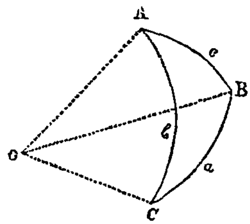
Laturile triunghiurilorŭ sferice fiind nisce arcuri de cercuri marĭ ale sferei, se socotescŭ in grade, minute şi secunde, ca şi unghiurile; insă dacă voimŭ se aflămŭ *lungimea lineară* a unei laturi cunoscêndŭ numĕrulŭ de grade, minute şi secunde ce conţine ea, vom puté face lesne acéstă determinare prin relaţiunea cunoscută din geometrie:

$$x = \frac{2\pi R}{360} x^0,$$

in care x insemnéḑă lungimea lineară a laturei, éră x^0 numĕrulŭ gradelorŭ coprinse intr'ênsa.

In trigonometria sferică nu vom considera de cât triunghiurile sferice ale căror laturi sunt mai mici de cât 180^0; aşa că, dacă unimŭ vêrfurile A, B, C, ale triunghiului cu centrulŭ O alŭ sferei, formămŭ unŭ unghiŭ *triedru*, ale cărui feţe AOB, BOC, COA, se mĕsóră respectivŭ chiar cu laturile AB, BC, CA ale triunghiului sfericŭ, şi ale cărui unghiuri diedre pe muchile OA, OB, OC sunt egale respectivŭ cu unghiurile A, B, C ale triunghiului (fig. 52).

(Fig. 52)



Raḑa sferei in trigonometria sferică o vom considera tot-d'a-una egală cu unitatea.

Unghiurile triunghiurilorŭ sferice se notéḑă totŭ cu literile A, B, C, şi laturile opuse cu a, b, c.

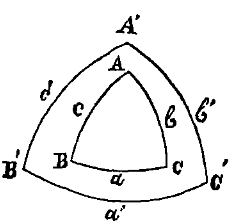
157. Reamintimŭ aci principalele proprietăţi ale triunghiurilorŭ sferice, de cari vomŭ avea trebuinţă mai in urmă:

1°. Suma unghiurilorŭ, A, B, C, dintr'unŭ triunghiŭ sfericŭ este mai mare de cât dóuĕ unghiuri drepte şi mai mică de cât şase. Urméḑă de aci că in unŭ triunghiŭ sfericŭ putemŭ avea nu numai unŭ unghiŭ dreptŭ saŭ obtusŭ, ci şi dóuĕ; chiar şi treĭ.

2°. Suma laturilorŭ, a, b, c, este mai mică de cât o circomferenţă.

3^0. Dacă din fie-care vêrfŭ alŭ unui triunghiŭ sfericŭ ABC, cu o radă de 90^0, descriemŭ câte unŭ arcŭ pe sferă, aceste arcuri formédă unŭ noŭ triunghiŭ sfericŭ A′B′C′, care se numesce *polarŭ* alŭ celui d'ântâiŭ, şi *a)* fie-care lature a triunghiului ABC este suplimentară cu unghiulŭ opusŭ din triunghiulŭ polarŭ (fig. 53); ast-fel $a+A'=180^0$, $b+B'=180^0$, $c+C'=180^0$; *b)* fie-care unghiŭ alŭ triunghiului consideratŭ ABC este egalŭ cu o semicircomferenţă, minusŭ laturea opusă din triunghiulŭ polarŭ, ast-felŭ:

(Fig. 53)



$$A+a'=180^0,\ B+b'=180^0,$$
$$C+c'=180^0.$$

4^0. Dóuĕ triunghiuri sferice ce se află pe aceeaşĭ sferă saŭ pe sfere egale, sunt egale: *a)* când aŭ unŭ unghiŭ egalŭ coprinsŭ intre dóuĕ laturi egale; *b)* când aŭ o lature egală coprinsă intre dóuĕ unghiuri egale; *c)* când aŭ câte trele laturile egale; *d)* când aŭ câte trele unghiurile egale.

Din acéstă proprietate resultă că unŭ triunghiŭ sfericŭ se póte tot-d'a-una resolva când ni se daŭ trei óre-cari din elementele lui, fără a fi necesitate ca prĭntre aceste elemente să se afle şi celŭ puţinŭ o lature, cum este la triunghiurile rectilinii.

Problema generală a trigonometriei sferice este dară cea următóre : *dându-se trei óre-carĭ din elementele unui triunghiŭ sfericŭ, să se determine unŭ alŭ patrulea elementŭ.* Acéstă problemă se va resolva aflândŭ relaţiuni intre patru óre-cari din elementele unui triunghiŭ sfericŭ. Dacă vom presupune apoi că unulŭ din aceste elemente este necunoscutŭ, cele-alte trei fiindŭ cunoscute, vom puté afla elementulŭ necunoscutŭ resolvêndŭ equaţiunea.

Cele şase elemente ale unui triunghiŭ sfericŭ, combinate patru câte patru, daŭ cele 15 grupe următóre :

$$\mathrm{A}abc,\ \mathrm{B}abc,\ \mathrm{C}abc\,;$$

$$\mathrm{AB}ab,\ \mathrm{AC}ac,\ \mathrm{BC}bc\,;$$

$$\mathrm{AB}ac,\ \mathrm{AB}bc,\ \mathrm{AC}ab,\ \mathrm{AC}bc,\ \mathrm{BC}ab,\ \mathrm{BC}ac\,;$$

$$\mathrm{ABC}a,\ \mathrm{ABC}b,\ \mathrm{ABC}c.$$

Prin urmare relaţiunile ce vom găsi intre patru elemente ale unui triunghiŭ sfericŭ vor fi de patru felurĭ :

1°. Intre cele trei laturi şi unŭ unghiŭ;

2°. Intre dóuĕ laturi şi unghiurile opuse la fie-care ;

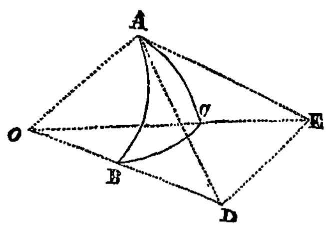
3°. Intre dóuĕ laturi, unŭ unghiŭ coprinsŭ intre ele şi unulŭ opusŭ la una din ele.

4°. Intre cele treĭ unghiuri şi o lature.

RELAŢIUNI INTRE CELE TREI LATURI ŞI UNŬ UNGHIŬ

158. Fie ABC unŭ triunghiŭ sfericŭ, in care presupunemŭ că laturile $AC=b$ şi $AB=c$ sunt fiecare mai mici de 90^0. Ducemŭ AE tangentă la arculŭ AC, şi AD tangentă la AB, şi prelungimŭ aceste tangente până întâlnescŭ radele OC şi OB in E şi D (fig. 54); unimŭ apoi D cu E. După definiţiunea liniilor trigonometrice, şi fiind-că rada sferei OA este egală cu 1, avemŭ:

(Fig. 54)



$$AD=\operatorname{tg}c,\quad OD=\sec c,$$

$$AE=\operatorname{tg}b,\quad OE=\sec b;$$

pe lângă acestea, unghiulŭ *DOE fiindŭ mĕsuratŭ cu arculŭ BC, avemŭ: $DOE=a$; şi unghiulŭ diedru CAOB, avêndŭ dreptŭ mĕsură unghiulŭ planŭ DAE,

$$DAE=A.$$

Triunghiulŭ rectiliniŭ DAE dă ***103**:

$$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2AD\times AE\cos DAE,$$

saŭ

$$\overline{DE}^2=\operatorname{tg}^2c+\operatorname{tg}^2b-2\operatorname{tg}c\operatorname{tg}b\cos A.$$

Triunghiulŭ DOE dă asemenea:

$$\overline{DE}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{OE}^2 - 2DO \times OE \cos DOE,$$

saŭ

$$\overline{DE}^2 = \sec^2 c + \sec^2 b - 2\sec c \sec b \cos a.$$

Egalândŭ acéstă valóre cu cea precedinte,

$$\mathrm{tg}^2 b + \mathrm{tg}^2 c - 2\mathrm{tg} b\, \mathrm{tg} c \cos A = \sec^2 b + \sec^2 c - 2\sec b \sec c \cos a,$$

de unde:

$$2\sec b \sec c \cos a = (\sec^2 b - \mathrm{tg}^2 b) + (\sec^2 c - \mathrm{tg}^2 c) + 2\,\mathrm{tg} b\, \mathrm{tg} c \cos A,$$

şi fiind-că * **32**

$$\sec^2 b - \mathrm{tg}^2 b = 1, \quad \sec^2 c - \mathrm{tg}^2 c = 1,$$

avemŭ:

$$\sec b \sec c \cos a = 1 + \mathrm{tg} b\, \mathrm{tg} c \cos A,$$

saŭ

$$\frac{\cos a}{\cos b \cos b} = 1 + \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c} \cos A,$$

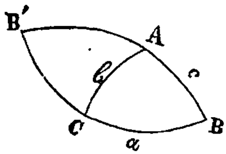
şi inmulţindŭ tótă ecuaţiunea cu $\cos b \cos c$,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \tag{a}$$

159. Formula acésta este generală, adică esistă chiar în casurile când b şi c nu sunt mai mici de 90^0, precumŭ amŭ presupusŭ in cursulŭ demonstraţiunei.

Se presupunemŭ mai ântâiŭ că $AB = c$ este mai mare de 90^0, pe când $AC = b$ este totŭ mai micŭ de 90^0. Prelungimŭ arcele AB şi CB până la intâlnirea lorŭ in B′ (fig. 55). In triunghiulŭ sfericŭ noŭ formatŭ, AB′C, laturea AC$<90^0$, din date; apoi AB′$<90^0$, căci dacă AB$>90^0$, diferența sa până la BAB′$=180^0$ este evidentŭ că va fi mai mică de cât 90^0; acestŭ triunghiŭ implinindŭ dară condițiunea pusă la inceputulŭ demonstrațiunei precedente, ca se aibă laturile AC și AB′ mai mici de 90^0, vomŭ avé relațiunea:

(Fig. 55)



$$\cos CB' = \cos AB' \cos AC + \sin AB' \sin AC \cos B'AC,$$

și fiind-că

$$CB' = 180^0 - a,\quad AB' = 180^0 - c,\quad AC = b,$$
$$B'AC = 180^0 - A,$$

avemŭ

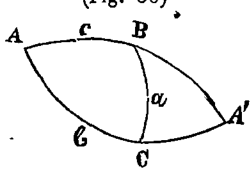
$$-\cos a = -\cos c \cos b - \sin c \sin b \cos A.$$

și schimbândŭ semnele,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

care este chiar relația (a); insă acum $c>90^0$.

(Fig. 56)



Fie încă $b>90^0$ și $c>90^0$. Prelungimŭ laturile AB și AC până la intâlnirea lorŭ in A′, și atunci triunghiulŭ BA′C (fig. 56), in care BA′$<90^0$ și CA′$<90^0$, dă:

$$\cos BC = \cos BA' \cos CA' + \sin BA' \sin CA' \cos BA'C,$$

şi fiind-că

$$BC = a,\ BA' = 180^0 - c,\ CA' = 180^0 - b,\ BA'C = A,$$

punêndŭ aceste valori in equaţiune, vom avé érăşi:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

relaţiune identică cu (a), insă in care $b > 90^0$ şi $c > 90^0$.

In fine, fiind-că acéstă formulă subsistă ori-cât de multŭ s'ar apropia b şi c de 90^0, putemŭ admite că ea subsistă şi la limită, adică când b şi c sunt egali cu 90^0. Formula dară este generală.

Operândŭ in B şi C in acelaşŭ modŭ cum am făcutŭ in A, vom găsi alte dóuĕ formule; avem dară sistema următóre de trei formule:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

cari sunt formulele fundamentale ale trigonometriei sferice, căci din ele se deducŭ tóte relaţiunile ce vom găsi mai in urmă.

RELAŢIUNI INTRE DÓUĔ LATURI ŞI UNGHIURILE OPUSE

160. Scoţêndŭ valórea lui cosA din prima din equaţiunile (1), avemŭ:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

și ridicândŭ la pătratŭ

$$\cos^2 A = \frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c};$$

insă

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

și impărțindŭ ambiĭ membri cu $\sin^2 a$,

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

Operândŭ asemenea asupra celei de a dóua și a treia equațiuni (1), am găsi pentru

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} \text{ și } \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}$$

aceași valóre ca și pentru

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a};$$

prin urmare

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}=\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c},$$

şi estrăgêndŭ rădĕcina pătrată,

$$\pm\frac{\sin A}{\sin a}=\pm\frac{\sin B}{\sin b}=\pm\frac{\sin C}{\sin c};$$

insă fiind-că şi unghiurile, şi laturile triunghiului sunt mai mici de 180^0 * **157**, sinusurile lorŭ sunt positive şi prin urmare nu vom lua in equaţiunea precedinte, de cât semnul $+$ pentru fie-care termenŭ. Avemŭ dară şirulŭ de raporturi egale:

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}, \tag{2}$$

carĭ esprimă că *in ori-ce triunghiŭ sfericŭ, sinusurile unghiurilorŭ sunt proporţionale cu sinusurile laturilorŭ opuse.*

RELAŢIUNI INTRE DOUĔ LATURI, UNGHIULŬ COPRINSŬ INTRE ELE ŞI UNGHIULŬ OPUSŬ LA UNA DIN ELE

161. Să se găséscă, spre esemplu, relaţiunea ce esistă intre elementele a, b, A, C. Trebue se eliminămŭ pe c şi pe B intre cele trei equaţiuni (1).

In prima din equaţiunile (1) inlocuimŭ pe $\cos c$ prin valórea sa dată de a treia; acea equaţiune devine atunci:

$$\cos a = \cos b\,(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C)$$
$$+ \sin b \sin c \cos A.$$

De altă parte formulele (2) dau:

$$\sin c = \sin a \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Punêndŭ acéstă valóre in equațiunea din urmă, desfăcêndŭ parentesele și punêndŭ pe $\sin a \sin b$ factorŭ comunŭ la termeniĭ unde se află, avemŭ:

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \left(\cos b \cos C + \sin C \frac{\cos A}{\sin A}\right);$$

trecêndŭ pe $\cos a \cos^2 b$ in membrulŭ ântâiŭ,

$$\cos a\,(1 - \cos^2 b) = \cos a \sin^2 b = \sin a \sin b\,(\cos b \cos C$$
$$+ \sin C \cot A)$$

și divisândŭ prin $\sin a \sin b$,

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$$

In acelașŭ modŭ vom găsi incă alte cinci formule analóge, așa că sistemulŭ completŭ se compune din cele șase formule următóre:

$$\left.\begin{aligned}
\cot a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \cot A,\\
\cot a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \cot A,\\
\cot b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \cot B,\\
\cot b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \cot B,\\
\cot c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \cot C,\\
\cot c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \cot C.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Écă unŭ miḍlocŭ facile de a ţine minte aceste formule: voind, spre esemplu, a găsi relaţiunea intre elementele a, b, B, C, le vom scrie in ordinea următóre :

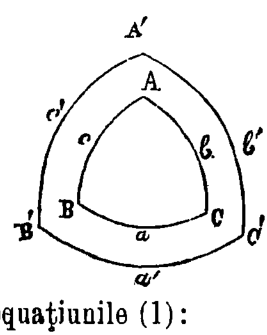
$$b\ a\ a\ \mathrm{C}\ \mathrm{C}\ \mathrm{B},$$

adecă : ântâiŭ laturea la care se opune unulŭ din unghiurile date ; pe urmă cea-altă lature ; al treilea, unghiulŭ coprinsŭ intre laturi, şi in fine unghiulŭ opusŭ la prima lature ; elementele de la mediu locŭ se scriŭ de căte dóuĕ ori. Inaintea elementelorŭ estreme se scriu iniţialele *cot*; inaintea celorŭ dóuĕ cari vinŭ lângă margini cuventulŭ *sin*, şi inaintea celorŭ dóuĕ din mijlocŭ *cos*. Intre al doilea şi al treilea elementŭ se pune semnulŭ $=$, intre al patrulea şi al cincilea $+$.

RELAŢIUNI INTRE O LATURE ŞI CELE TREI UNGHIURI

162. Considerămŭ triunghiul A′B′C′, polarŭ al triunghiuluĭ datŭ ABC; avemŭ *157. (fig. 57).

(Fig. 57)



$$a' = 180^0 - \mathrm{A},\ b' = 180^0 - \mathrm{B},$$

$$c' = 180^0 - \mathrm{C}$$

$$\mathrm{A}' = 180^0 - a,\ \mathrm{B}' = 180^0 - b,$$

$$\mathrm{C}' = 180^0 - c$$

Insă in A′B′C′ avemŭ, dupĕ equaţiunile (1):

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A' ;$$

inlocuindŭ pe a', b', c', A', cu valorile lorŭ,

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a,$$

și schimbândŭ semnele,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

In acelașŭ modŭ vom găsi incă dóuĕ relațiuni analóge cu acésta, așa că sistemulŭ completŭ se compune din cele equațiuni următóre:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

FORMULE RELATIVE LA TRIUNGHIURILE DREPTUNGHIE

163. Dacă unghiulŭ A este dreptŭ, avemŭ: $\cos A = 0$, $\sin A = 1$, $\cot A = 0$. Punêndŭ acéstă valóre in prima din equațiunile (1), ea devine;

$$\cos a = \cos b \cos c, \qquad (5)$$

care esprimĕ că *in unŭ triunghiŭ sfericŭ dreptunghiŭ cosinusulŭ hipotenusei este egalŭ cu produsulŭ cosinuselorŭ celor-alte dóuĕ laturi.*

164. Equațiunile (2) dau:

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}, \quad \sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A},$$

şi pentru $A = 90^0$,

$$\sin b = \sin a \sin B, \sin c = \sin a \sin C\ ;$$

adică *sinusulŭ unei laturi a unghiului dreptŭ este egalŭ cu sinusulŭ hipotenusei immulţitŭ cu sinusulŭ unghiului opusŭ.*

165. Introducêndŭ hipotesa $A = 90^0$ in equaţiunile (3), obţinemŭ :

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C,$$

$$\cot a \sin c = \cos c \cos B,$$

$$\cot b \sin c = \cot B,$$

$$\cot c \sin b = \cot C,$$

şi impărţindŭ pe fie care din aceste equaţini respectivŭ prin $\cos b \cot a$, $\cos c \cot a$, $\cot b \cot B$, $\cot c \cot C$, dobândimŭ sistema :

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C, \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B, \\ \operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B, \\ \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C, \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Cele dóuĕ d'ântâiŭ esprimă că *tangenta unei laturi a unghiului dreptŭ este egală cu produsulŭ tangentei hipotenusei prin cosinusulŭ unghiului oblicŭ alăturatŭ*, éră cele dóuĕ din urmă, *că tangenta unei laturi a unghiului dreptŭ este egală cu sinusulŭ celei-alte din aceste laturi immulţitŭ cu tangenta unghiului opusŭ.*

166. Equaţiunile (4), pentru $A = 90^0$, dau :

$$\cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a,$$

$$\cos B = \sin C \cos b,$$

$$\cos C = \sin B \cos c,$$

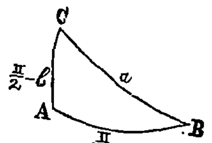
şi dacă pe prima din acestea o dividemŭ cu $\sin B \sin C$,

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cot B \cot C, \\ \cos B &= \sin C \cos b, \\ \cos C &= \sin B \cos c. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Cea d'ântâiŭ din aceste formule aretă că *cosinusulŭ hipotenusei este egalŭ cu produsulŭ cotangentelorŭ celorŭ dóuĕ unghiuri oblice*; éră céle-alte dóuĕ, că *cosinusulŭ unui unghiŭ oblicŭ este egalŭ cu cosinusulŭ laturei opuse immulţitŭ cu sinusulŭ celui-altŭ unghiŭ oblicŭ.*

167. Dăm aci o metódă mnemonică fórte simplă pentru a se puté ţine minte tóte aceste formule.

(Fig. 58)



Pe laturile unghiului dreptŭ, scriemŭ $\frac{\pi}{2} - b$ in locŭ de b, şi $\frac{\pi}{2} - c$ in locŭ de c, (fig. 58). Atunci dacă considerămŭ trei elemente şi *dacă aceste elemente sunt consecutive, cosinusulŭ celui din mijlocŭ este egalŭ cu produsulŭ cotangentelorŭ celorŭ de la margini; éră dacă cele trei elemente considerate nu sunt tóte consecutive, cosinusulŭ elemen-*

tului separatŭ este egalŭ cu produsulŭ sinuselorŭ celor-alte dóuĕ consecutive.

In aceste diverse consideraţiuni, unghiulŭ A se socotesce ca cum nici n'ar esista.

Spre esemplu, sĕ se afle relaţiunea ce esistă intre hipotenusa a şi laturile b şi c. Aceste trei elemente vedemŭ că nu sunt tóte consecutive, căci a este separatŭ de b prin unghiulŭ C, şi de c prin unghiulŭ B. Laturile b şi c, din contră, sunt consecutive, căci unghiulŭ A care se află intre ele nu se socotesce. Aşa dară, dupĕ regulă, vom avé:

$$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cos b \cos c,$$

care este tocmai equaţiunea (5).

Sĕ se afle incă relaţiunea ce esistă intre a, c, B. Aceste trei elemente sunt consecutive; prin urmare, dupe regulă,

$$\cos B = \cot a \,\text{cót}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cot a \,\text{tg}\, c,$$

şi impărţindŭ cu $\cot a$,

$$\text{tg}\, c = \text{tg}\, a \cos B,$$

care este a dóua din equaţiunile (7).

Cele alte optŭ relaţiuni se găsesc totŭ in acelaşŭ modŭ.

168. Formulele (5), (6), (7), (8) potŭ să se pună sub alte forme mai comode pentru calculŭ, şi cari tot-de-o-dată

se dea loc la mai mare precisiune, căci tóte vor da unghiurile şi laturile prin tangentele lorŭ; de acea ele aŭ preferinţă in resoluţiunea triunghiurilorŭ dreptunghie.

Formula (5) dă:

$$\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}.$$

Punêndŭ acéstă valóre in formula cunoscută * 45

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}},$$

avemŭ:

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{1-\dfrac{\cos a}{\cos c}}{1+\dfrac{\cos a}{\cos c}}} = \sqrt{\frac{\cos c - \cos a}{\cos c + \cos a}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin\dfrac{a+c}{2}\sin\dfrac{a-c}{2}}{2\cos\dfrac{a+c}{2}\cos\dfrac{a-c}{2}}}$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+c}{2}\operatorname{tg}\frac{a-c}{2}}.$$

Dacă din (5) am fi scosŭ valórea lui $\cos c$ şi am fi pus-o in formula:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos c}{1+\cos c}},$$

am fi găsitŭ asemenea:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}.$$

Aceste dóuĕ formule esprimă *tangenta* unei laturi a unghiului dreptŭ in funcţiune de *tangenta* semisumei şi semi-diferenţei hipotenusei şi a celei-alte laturi.

169. Prima din formulele (6) dă:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B},$$

care pusă in formula * 54

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}},$$

dă

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\dfrac{\sin b}{\sin B}}{1-\dfrac{\sin b}{\sin B}}} = \pm\sqrt{\frac{\sin B + \sin b}{\sin B - \sin b}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2\sin\dfrac{B+b}{2}\cos\dfrac{B-b}{2}}{2\sin\dfrac{B-b}{2}\cos\dfrac{B+b}{2}}},$$

orĭ

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\dfrac{B+b}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{B-b}{2}}},$$

Asemenea şi

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\dfrac{C+c}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{C-c}{2}}}.$$

170. Dacă din prima equaţiune (6) am fi scosŭ

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a},$$

şi am fi pusŭ in

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{B}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}},$$

am fi găsitŭ, după o serie de transformări identice cu cele de susŭ:

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{B}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}}.$$

Asemenea şi

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{C}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{a+c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-c}{2}}}.$$

171. Prima din formulele (7) dă:

$$\cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a},$$

care pusă in equaţia

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}},$$

dă

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}}{1+\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\sin b}{\cos b}}{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}}=\sqrt{\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{\sin a\cos b+\sin b\cos a}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}.$$

Putemŭ dar, in loculŭ primelorŭ dóuĕ formule (7), se substituimŭ pe cele următóre:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)}}.$$

172. A treia şi a patra din formulele (7) daŭ:

$$\sin c=\frac{\operatorname{tg}b}{\operatorname{tg}B},\quad \sin b=\frac{\operatorname{tg}c}{\operatorname{tg}C},$$

carĭ puse in formulele

$$\operatorname{tg}\left(45^{\circ}+\frac{c}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin c}{1-\sin c}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^{\circ}+\frac{b}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin b}{1-\sin b}}.$$

daŭ, după nisce transformărĭ analóge cu cele de la formulele imediatŭ precedente:

$$\operatorname{tg}\left(45^{\circ}+\frac{c}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^{\circ}+\frac{b}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{\sin(C+c)}{\sin(C-c)}}.$$

173. Dacă 'n

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

punemŭ in locŭ de $\cos a$ valórea dată de prima din equațiunile (8), avemŭ:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cot B\cot C}{1+\cot B\cot C}}=\sqrt{\frac{\sin B\sin C-\cos B\cos C}{\sin B\sin C+\cos B\cos C}}$$

$$=\sqrt{\frac{-\cos(B+C)}{\cos(B-C)}},$$

și fiind-că * **27**

$$-\cos(B+C)=\cos(180^{\circ}-B-C)$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(180^{\circ}-B-C)}{\cos(B-C)}}.$$

174. In fine cele dóuĕ din urmă equațiuni (8) daŭ:

$$\cos b=\frac{\cos B}{\sin C},\quad \cos c=\frac{\cos C}{\sin B},$$

saŭ

$$\cos b=\frac{\cos B}{\cos(90^{\circ}-C)},\quad \cos b=\frac{\cos C}{\cos(90^{\circ}-B)}.$$

Aceste valori puse in

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}}$$

daŭ:

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{\cos B}{\cos(90^{\circ}-C)}}{1+\dfrac{\cos B}{\cos(90^{\circ}-C)}}}=\sqrt{\frac{\cos(90^{\circ}-C)-\cos B}{\cos(90^{\circ}-C)+\cos B}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sin\left(45^{\circ}+\frac{B-C}{2}\right)\sin\left(-45^{\circ}+\frac{B+C}{2}\right)}{2\cos\left(45^{\circ}+\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(-45^{\circ}+\frac{B+C}{2}\right)}},$$

saŭ:

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(-45^{\circ}+\frac{B+C}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^{\circ}+\frac{B-C}{2}\right)};$$

asemenea

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(-45^{\circ}+\frac{B+C}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^{\circ}-\frac{B-C}{2}\right)}$$

175. Dacă din cele dóuĕ din urmă equaţiuni (8) amŭ fi scosŭ

$$\cos(90^{\circ}-B)=\frac{\cos C}{\cos c},\ \text{şi}:\ \cos(90^{\circ}-C)=\frac{\cos B}{\cos b},$$

şi le-am fi substituitŭ in * **54**

$$\operatorname{tg}\left(45^{\circ}-\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(90^{\circ}-B)}{1+\cos(90^{\circ}-B)}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^{\circ}-\frac{C}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(90^{\circ}-C)}{1+\cos(90^{\circ}-C)}},$$

am fi avutŭ, dupĕ diferite transformări, analóge cu altele pre carĭ le-am mai vĕḑutŭ deja:

$$\operatorname{tg}\left(45^{\circ}-\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C+c}{2}\operatorname{tg}\frac{C-c}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^{\circ}-\frac{C}{2}\right)=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}},$$

și făcêndŭ inversa,

$$\cot\left(45^0-\frac{B}{2}\right)=\left(\ 5^0+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\cot\frac{C+c}{2}\cot\frac{C-c}{2}},$$

$$\cot\left(45^0-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{C}{2}\right)=\pm\sqrt{\cot\frac{B+b}{2}\cot\frac{B-b}{2}}.$$

FORMULE RELATIVE LA TRIUNGHIURILE RECTILATERALI

176. Unŭ triunghiŭ sfericŭ se numesce *rectilateralŭ* când una din laturile sale, a, este de 90^0.

Formulele relative la triunghiurile rectilaterale le vom deduce, ca și pe cele pentru triunghiurile drept-unghe, din formulele generale (1), (2), (3), (4), făcêndŭ $a=90^0$; atunci: $\cos a=0$, $\sin a=1$, $\cot a=0$, și acele equațiuni devinŭ:

$$\cos A=-\cos B\cos C, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin B&=\sin A\sin b,\\ \sin C&=\sin A\sin c,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

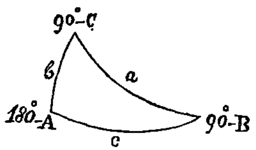
$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}B&=-\operatorname{tg}A\cos c,\\ \operatorname{tg}C&=-\operatorname{tg}A\cos b,\\ \operatorname{tg}B&=\sin C\operatorname{tg}b,\\ \operatorname{tg}C&=\sin B\operatorname{tg}c,\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=-\cot b\cot c,\\ \cos b&=\cos B\sin c,\\ \cos c&=\cos C\sin b.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

177. Écă o metódă mnemonică comodă pentru a ține minte aceste formule. Scriemŭ pe figură 90^0-C in locŭ de C, 90^0-B in locŭ de B, și 180^0-A in locŭ de A. Atunci,

voindŭ a stabili o relaţiune intre trei elemente *consecutive* ale triunghiului (laturea a nu se socotesce), vom avé *cosinusulŭ elementului de la mijlocŭ egalŭ cu produsulŭ cotangentelorŭ elementelorŭ de la margini; érŭ dacă cele trei elemente nu sunt consecutive, cosinusulŭ elementului separatŭ va fi egalŭ cu produsulŭ sinuselorŭ celor-alte dóuĕ* (Fig. 59).

(Fig. 59)



Fie, spre esemplu, a se găsi o relaţiune intre elementele C, b, c. Aceste elemente, nefiind consecutive, căci c este separatŭ de cele-alte dóuĕ prin unghiulŭ A, avemŭ:

$$\cos c = \sin(90^\circ - C)\sin b = \sin b \cos C,$$

care este a treia din (4).

Sĕ se gaséscă o relaţiune intre A, B, C. Aceste elemente nu sunt consecutive; deci

$$\cos(180^\circ - A) = \sin(90^\circ - B)\sin(90^\circ - C),$$

sau

$$-\cos A = \cos B \cos C,$$

care este equaţia (1).

Se găsimŭ in fine, o relaţiune intre B, C, b, cari sunt consecutive; avemŭ, dupĕ regula dată:

$$\cos(90^\circ - C) = \cot(90^\circ - B)\cot b,$$

sau

$$\sin C = \operatorname{tg} B \cot b,$$

orĭ

$$\operatorname{tg} B = \sin C \operatorname{tg} b,$$

a treia din formulele (3).

FORMULE CALCULABILE PRIN LOGARITMI CARI DAU UNGHIURILE IN FUNCŢIUNE DE LATURI.

178. Din cele patru sisteme de formule ce am găsitŭ la 159, 160, 161, 162, numai formulele (2)* **160** sunt calculabile prin logaritmi; trebue se transformămŭ şi pe cele-alte ast-fel ca sĕ se pótă şi ele calcula prin logaritmi.

Formulele (1)* **159** potŭ se ne dea unghiurile in funcţiune de laturi; aşa cea d'ântâiŭ din ele dă:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

insă acéstă espresiune nu este calculabilă prin logaritmi.

Vom pune acéstă valóre in equaţiunile

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}},$$

şi vom avea:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{2 \sin b \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin\dfrac{a+b-c}{2}\sin\dfrac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos a-\cos b\cos c+\sin b\sin c}{2\sin b\sin c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos a-\cos(b=c)}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\sin\dfrac{a+b+c}{2}\sin\dfrac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c}}$$

Punemŭ

$$a+b+c=2p;$$

scădêndŭ succesivŭ din ambiĭ membri ai acestei equaţiuni $2a$, $2b$, $2c$, şi divisândŭ cu 2, avem incă:

$$\frac{b+c-a}{2}=p-a,\ \frac{a+c-b}{2}=p-b,\ \frac{a+b-c}{2}=p-c.$$

Substituindŭ aceste valori in equaţiunile la cari am ajunsŭ mai susŭ, avemŭ:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}.$$

Operândŭ in acelaşŭ modŭ asupra celei de a dóua şi a treia equaţiuni (1)*, **159** vom obţine alte dóuĕ perechi de formule; in totulŭ dară avemŭ cele dóuĕ sisteme următórie:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},\\
\sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}},\\
\sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}};
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}},\\
\cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}},\\
\cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}.
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Divisândŭ respectivŭ equaţiunile (1) prin (2) şi făcêndŭ reducerile, obţinemŭ o nóuĕ serie de formule:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},\\
\operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}},\\
\operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}.
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Aceste trei sisteme de equaţiuni ne daŭ sinusulŭ, cosinusulŭ şi tangenta semiunghiurilorŭ triunghiului in funcţiune de laturi.

La tóte radicalele trebue să se ia semnulŭ $+$, căci jumĕtăţile unghiurilorŭ A, B, C sunt mai mici de 90^0, şi prin urmare liniile lorŭ trigonometrice sunt positive.

Ca mediu practicŭ de a memora aceste formule, vom observa că factorii de sub radicale sunt identici cu cei de sub radicalele din formulele (4), (5), (6), de la § 106, cu singura diferenţă că li s'a pusŭ inainte la fie-care cuvêntulŭ *sin*.

FORMULE CALCULABILE PRIN LOGARITMI CARI DAU LATURILE IN FUNCŢIUNE DE UNGHIURI

179. Punemŭ

$$A+B+C-180^0=\varepsilon.$$

Cantitatea ε, egală cu diférenţa intre suma unghiurilorŭ triunghiului şi 180^0 se numesce *escesŭ sfericŭ*, şi are mare importanţă in trigonometria sferică.

Considirămŭ triunghiulŭ polarŭ $A'B'C'$ al triunghiului datŭ ABC. Unghiurile acelui triunghiŭ polarŭ vor fi * **157**:

$$A'=180^0-a,\quad B'=180^0-b,\quad C'=180^0-c,$$

éră laturile lui,

$$a'=180^0-A,\quad b'=180^0-B,\quad c'=180^0-C;$$

făcêndŭ suma acestorŭ trei din urmă egalităţi şi insemnândŭ cu $2p'$ perimetrulŭ $a'+b'+c'$ al triunghiului polarŭ A'B'C', vom avé:

$$a'+b'+c'=2p'=360^0-(A+B+C-180^0);$$

impărțindŭ cu 2 și observândŭ că

$$A+B+C-180^0=\varepsilon,$$

$$p'=180^0-\frac{\varepsilon}{2};$$

prin urmare

$$p'-a'=180^0-\frac{\varepsilon}{2}-(180^0-A)=A-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$p'-b'=180^0-\frac{\varepsilon}{2}-(180^0-B)=B-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$p'-c'=180^0-\frac{\varepsilon}{2}-(180^0-C)=C-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplicândŭ triunghiului polarŭ formulele (1), (2), avemŭ:

$$\sin\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p'-b')\sin(p'-c')}{\sin b'\sin c'}},$$

$$\cos\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin p'\sin(p'-a')}{\sin b'\sin c'}},$$

și punêndŭ in locŭ de $A', p', p'-a', p'-b', p'-c', a', b', c'$, valorile date mai susŭ, vom avé:

$$\sin\left(90^0-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{a}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin(180^0-B)\sin(180^0-C)}},$$

$$\cos\left(90^0-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin\left(180^0-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin(180^0-B)\sin(180^0-C)}},$$

saŭ

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}},$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}}.$$

Operândŭ totŭ asemenea şi asupra celor-alte din equaţiunile (1) şi (2), am găsi şi espresiunea lui $\cos\frac{b}{2}$, $\sin\frac{b}{2}$, $\cos\frac{c}{2}$, $\sin\frac{c}{2}$. Ecă formulele la cari ajungemŭ

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}},\\
\sin\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin C}},\\
\sin\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin B}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}},\\
\cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin C}},\\
\cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin B}},
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Impărțindŭ respectivŭ formulele (4) prin (5), găsimŭ incă:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},\\
\operatorname{tg}\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},\\
\operatorname{tg}\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

In tóte aceste formule, radicalele trebue luate tot cu semnul +, căci arcurile $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ sunt tóte mai mici de cât 90^0.

FORMULELE LUI DELAMBRE.

180. Dacă in

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$$

inlocuimŭ pe $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ cu valorile lorŭ date prin formulele (1) şi (2) avemŭ;

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin^2(p-b)\sin(p-c)}{\sin a\sin b\sin^2 c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin p\sin^2(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin b\sin^2 c}}$$

$$=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}+\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}$$

$$=\frac{\sin(p-a)+\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}$$

Insă

$$\sin(p-a)+\sin(p-b)=2\sin\frac{2p-a-b}{2}\cos\frac{p-b-(p-a)}{2}$$

$$=2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\sin c=2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2},$$

şi după (2),

$$\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} = \cos\frac{C}{2}.$$

Punêndŭ tóte aceste valori in equaţiunea de susŭ şi simplificândŭ fracţia cu factorulŭ $2\sin\frac{c}{2}$, remâne:

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}.$$

saŭ

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Dacă tot ast-fel in

$$\sin\frac{A-B}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2},$$

$$\cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2},$$

inlocuimŭ pe $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ cu valorile lorŭ date prin (1) şi (2), şi facemŭ aceleaşi transformări ca şi mai susŭ, găsimŭ incă trei equaţiuni. In totulŭ dară avemŭ aceste patru formule:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}&=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},\\ \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}&=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}&=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},\\ \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}&=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Aceste formule esprimă relaţiuni intre câte-şase elementele triunghiului. Ele aŭ fostŭ descoperite de Delambre, din care causă şi pórtă numele lui.

Écă cum se potŭ memora aceste formule: dacă unghiurile sunt puse in primulŭ membru şi laturile in al doilea, precum sunt in tabelulŭ (7), observămŭ: 1^0 că in primulŭ membru la numĕrătorŭ şi la numitorŭ se află dóuĕ liniĭ trigonometrice diferite, pe când in membrulŭ al doilea ambiĭ termenì ai fracțiuniĭ coprindŭ liniĭ trigonometrice asemeni; 2° când la numĕrătorŭ in unŭ membru se afla unŭ sinusŭ, la numĕrătorulŭ membrului celui-alt se află semnulŭ —; dacă la celŭ d'ântâiŭ se află unŭ cosinusŭ, cel-alt coprinde semnulŭ +.

ANALOGILE LUI NAPIER.

181. Divisêndŭ membru cu membru pe ântâia din relațiunile (7) cu a treia, pe a dóua cu a patra, pe a patra cu a treia, și in fine pe a dóua cu ântâia, obținemŭ următórea serie de patru formule, descoperite de Napier, din cari fie care coprinde câte cinci elemente ale triunghiului:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\cot\dfrac{C}{2}} &= \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}},\\[2ex]
\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\cot\dfrac{C}{2}} &= \frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}},\\[2ex]
\frac{\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}} &= \frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}},
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$\left.\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\right\} \qquad (8)$$

ESPRESIUNI DIVERSE ALE ESCESULUI SFERICŬ.

182. Suprafaţa unui triunghiŭ sfericŭ fiind o funcţiune a escesului sĕŭ sfericŭ după cum vom vedé indată *, **220** este importantŭ a avé mijlóce prin cari se putemŭ determina directŭ acestŭ escesŭ sfericŭ.

Immulţindŭ membru cu membru equaţiunile (6)* **179** cari dau pe $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ şi $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ in funcţiune de unghiuri, avemŭ :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin^2\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin C\cos\frac{\varepsilon}{2}-\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos C},$$

şi divisêndŭ susŭ şi josŭ cu $\sin\frac{\varepsilon}{2}$,

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\frac{1}{\sin C\cos\frac{\varepsilon}{2}-\cos C},$$

de unde

$$\cot\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos C}{\sin C}, \tag{9}$$

equaţiune care dă esprêsiunea escesului sfericŭ in funcţiune de dóuĕ laturi ale triunghiului şi de unghiulŭ coprinsŭ intre ele.

183. Din

$$A+B+C-180^0=\varepsilon$$

deducemŭ :

$$\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{C-\varepsilon}{2}.$$

Punênd acéstă valóre in prima din formulele lui Delambre, avemŭ :

$$\frac{\cos\frac{C-\varepsilon}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

de aci, dupĕ proprietăţile proporţiilorŭ,

$$\frac{\cos\frac{C-\varepsilon}{2}-\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C-\varepsilon}{2}+\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}},$$

saŭ *47, 48:

$$\frac{2\sin\frac{2C-\varepsilon}{4}\sin\frac{\varepsilon}{4}}{2\cos\frac{2C-\varepsilon}{4}\cos\frac{\varepsilon}{4}}=\frac{2\sin\frac{c-a+b}{4}\sin\frac{c+a-b}{4}}{2\cos\frac{c-a+b}{4}\cos\frac{c+a-b}{4}},$$

orĭ

$$\operatorname{tg}\frac{2C-\varepsilon}{4}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}. \tag{a}$$

In a treia din formulele lui Delambre inlocuimŭ asemenea pe $\frac{A+B}{2}$ prin $90^0-\frac{C-\varepsilon}{2}$, şi avem:

$$\frac{\sin\frac{C-\varepsilon}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

de aci

$$\frac{\sin\frac{C-\varepsilon}{2}-\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C-\varepsilon}{2}+\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}},$$

saŭ:

$$\frac{2\sin\frac{\varepsilon}{4}\cos\frac{2C-\varepsilon}{4}}{2\sin\frac{2C-\varepsilon}{4}\cos\frac{\varepsilon}{4}}=\frac{2\sin\frac{a+b+c}{4}\sin\frac{a+b-c}{4}}{2\cos\frac{a+b+c}{4}\cos\frac{a+b-c}{4}},$$

din care

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}}{\operatorname{tg}\frac{2C-\varepsilon}{4}}=\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}. \qquad \text{(b)}$$

Inmulţindŭ acéstă equaţiune cu (a)

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{4}=\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2},$$

şi estrăgêndŭ rădĕcina pătrată.

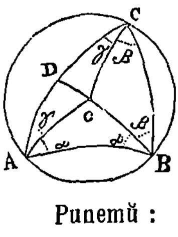
$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

Acéstă formulă, descoperită de Simon Lhuillier din Geneva, dă escesulŭ sfericŭ in funcţiune de cele trei laturi ale triunghiului.

RAḌA CERCULUI CIRCUMSCRISŬ.

184. Fie triunghiulŭ sfericŭ ABC; unimŭ polulŭ O al cercului circumscrisŭ cu vêrfurile triunghiului prin arce de cercŭ mare, şi ducemŭ incă arculŭ OD perpendicularŭ pe laturea b.

(Fig. 60).



Distanţele polare OA, OB, OC fiind egale, avemŭ: (Fig. 60).

$$OAB=OBA,\ OBC=OCB,\ OCA=OAC.$$

Punemŭ :

$$\alpha=OAB=OBA,\ \beta=OBC=OCA,\ \gamma=OCA=OAC.$$

După figură.

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\gamma&=\mathrm{A}, \\ \alpha+\beta&=\mathrm{B}, \\ \beta+\gamma&=\mathrm{C}, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Adunândŭ aceste egalităţi şi divisêndŭ cu 2, obţinemŭ

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}=\frac{180^{\circ}+\varepsilon}{2}=90^{\circ}+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (b)$$

Din acéstă egalitate scădêndŭ pe rândŭ egalităţile (a),

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=90^{\circ}-\left(\mathrm{C}-\frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \beta&=90^{\circ}-\left(\mathrm{A}-\frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \gamma&=90^{\circ}-\left(\mathrm{B}-\frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Acum triunghiulŭ dreptunghiŭ ADO dă, după a dóua din formulele (7)* **165**:

$$\operatorname{tg} \mathrm{AD}=\operatorname{tg} \mathrm{AO} \cos\gamma.$$

Punêndŭ $\mathrm{AO}=\mathrm{R}$, rada căutată a cercului circumscrisŭ, substituiudŭ in locŭ de γ valórea sa dată prin (c), şi observândŭ incă că $\mathrm{AD}=\frac{\mathrm{AC}}{2}=\frac{b}{2}$, căci AOC este isoscelŭ, avemŭ:

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\operatorname{tg} \mathrm{R} \sin\left(\mathrm{B}-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

sau

$$\operatorname{tg} \mathrm{R}=\frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\sin\left(\mathrm{B}-\frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

formulă care dă raḑa cercului circumscrisŭ in funcţiune de o lature óre-care, de unghiulŭ opusŭ şi de escesulŭ sfericŭ.

Dacă in (1) inlocuimŭ pe $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ prin valórea sa dată de equaţiunile (6) *, 169 avemŭ:

$$\operatorname{tg} R = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin^2\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

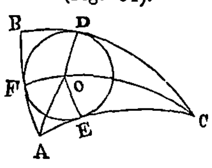
sau

$$\operatorname{tg} R = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

care dă raḑa cerculuĭ circumscrisŭ in funcţiune de unghiuri.

RAḐA CERCULUI INSCRISŬ.

185. Fie O polulŭ cercului inscrisŭ la triunghiul ABC. (Fig. 61).



Arcurile de cercŭ mare AO, BO, CO, împartŭ unghiurile A, B, C, in câte dóuă părţi egale, şi din egalitatea triunghiurilorŭ BOF cu BOD, AOF cu AOE, COE cu COD, resultă: (Fig. 61).

$$BF = BD, \quad AF = AE, \quad CE = CD;$$

aşa-deră

$$a + b + c = 2BD + 2DC + 2AE,$$

sau

$$p = BD + DC + AE = a + AE,$$

de unde

$$AE = p - a.$$

Triunghiulŭ dreptunghiŭ AOE dă, după a treia din formulele (7) * 165

$$\sin AE = \cot OAE \operatorname{tg} OE.$$

Insemnândŭ cu r arculŭ OE, radia căutată a cercului inscrisŭ, şi punêndŭ in locŭ de AE şi OAE valorile $p-a$ şi $\frac{A}{2}$,

$$\sin(p-a) = \cot\frac{A}{2}\operatorname{tg} r,$$

séŭ

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin(p-a).$$

Substituindŭ in loculŭ lui $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ valórea sa dată prin equaţiunile (3) * 178 şi reducêndŭ,

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}. \qquad (3)$$

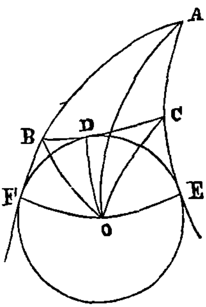
Acéstă equaţiune dă radia cercului inscrisŭ la triunghiŭ in funcţiune de laturile lui.

RADIELE CERCURILORŬ EXINSCRISE

186. Fie triunghiulŭ ABC. Se scie că pentru a construi cerculŭ exinscrisŭ la o lature óre-care a, se ducŭ arcurile BO şi CO, bisectriţe ale unghiurilorŭ esterióre CBF şi BCE, şi punctulŭ lorŭ de intersecţie O este polulŭ cercului exinscrisŭ la laturea a. Radia acestui cercŭ se găsesce ducêndŭ arcele

OF, OD, OE, respectivŭ perpendiculare pe cele trei laturi ale triunghiului (fig. 62).

(Fig. 62)



Triunghiurile egale BDO şi BFO daŭ:

$$BD = BF;$$

asemenea, DCO şi CEO fiindŭ egale, avemŭ:

$$CD = CE;$$

prin urmare

$$AF = AB + BD,$$

$$AE = AC + CD,$$

şi adunândŭ,

$$AF + AE = AB + AC + BC = 2p,$$

şi fiind-că $AF = AE$ din egalitatea triunghiurilorŭ AFO şi AEO,

$$AF = p.$$

Triunghiulŭ dreptunghiŭ AFO dă:

$$\sin AF = \cot FAO \operatorname{tg} FO;$$

punêndŭ in locŭ de AF valórea sa p, insemnândŭ pe FO cu α, rața cercului exinscrisŭ la laturea a, şi observândŭ că din causa egalităţiĭ triunghiurilorŭ AFO şi AEO unghiulŭ $FAO = \frac{A}{2}$, avemŭ:

$$\sin p = \cot \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha,$$

saŭ

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sin p;$$

inlocuindŭ pe $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ cu valórea sa dată de equaţiile (3) *178 şi făcêndŭ reducerile,

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha &= \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin (p-a)}}. \\
&\text{Asemenea vom afla şi:} \\
\operatorname{tg}\beta &= \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a) \sin (p-c)}{\sin (p-b)}}, \\
\operatorname{tg}\gamma &= \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin (p-c)}}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

CAPITOLULŬ II

RESOLUŢIUNEA TRIUNGHIURILORŬ SFERICE

187. Mai nainte de a intra in resoluţiunea triunghiurilorŭ sferice, vom reaminti următórele dóuĕ teoreme, fórte importante din geometrie.

Pentru ca cu trei laturi date se fie posibilŭ a se construi un triunghiŭ sfericŭ, este necesariŭ şi de ajunsŭ : 1^0 ca fie-care din laturile date se fie mai mică de cât suma celor-ălte dóuĕ ; 2^0 ca suma celor trei laturi se fie mai mică de cât o circumferenţă de cercŭ mare.

Pentru ca cu trei unghiuri date se fie posibilŭ a se construi un triunghiŭ sfericŭ, este necesariŭ şi de ajunsŭ : 1^0 ca suma unghiurilorŭ date se fie mai mare de cât dóuĕ unghiuri drepte şi mai mică de cât şase ; 2^0 că celŭ mai micŭ dintre ele, mĕritŭ cu dóuĕ unghiuri drepte, se devină mai mare de cât suma celor-alte dóuĕ.

Trebue să observămŭ asemenea că, dacă unŭ unghiŭ sau o lature a triunghiului sfericŭ sunt date prin cosinusulŭ, tangenta sau cotangenta lorŭ, ele sunt pe deplin determinate, căci valórea lorŭ fiind coprinsă intre 0^0 şi 180^0*, **156** semnulŭ liniei lorŭ trigonometrice ne va ărĕta dacă sunt mai mici sau mai mari de 90^0. Dacă insă unghiulŭ sau laturea sunt date prin sinusulŭ lorŭ, ele nu mai sunt cu totulŭ determinate, căci la o aceaşi valóre positivă a sinusului corespundŭ dóuĕ arcuri, suplementare unulŭ altuia.

Pé de altă parte, dacă unŭ unghiŭ sau o lature vorŭ fi date prin unŭ cosinusŭ, o tangentă sau o cotangentă negativă, va trebui se luămŭ nu chiar unghiulŭ sau laturea dată de table, ci suplimentulŭ lorŭ, căci numai arcurile coprinse intre 90^0 şi 180^0 au acele liniĭ trigonometrice negative.

RESOLUŢIUNEA TRIUNGHIURILORŬ DREPTUNGHIE

188. Se scie că unŭ triunghiŭ sfericŭ póte se aibă şi dóuĕ unghiuri drepte, şi chiar trei. Insă in casulŭ celŭ d'ântâiŭ se scie că cele dóuĕ laturi cari se opunŭ la unghiurile drepte sunt fie care de *câte* 90^0, éră a treia lature este egală cu unghiulŭ opusŭ. In casulŭ al doilea, câte trele laturile sunt de câte 90^0. Prin urmare, aceste dóuĕ casuri nedândŭ locŭ la nici o problemă, ne vom ocupa numai de *reso-*

luţiunea triunghiurilorŭ ce au numai unŭ unghiŭ dreptŭ.

Acéstă resoluţiune presintă şase casuri: 1° când se dau cele dóuĕ laturi ale unghiului dreptŭ; 2° o lature a unghiului dreptŭ şi hipotenusa; 3° o lature a unghiului dreptŭ şi unghiulŭ oblicŭ adjancent; 4° o lature a unghiului dreptŭ şi unghiulŭ oblicŭ opusŭ; 5° hipotenusa şi unŭ unghiŭ oblicŭ; 6° cele dóuĕ unghiuri oblice.

189. **Casulu I.** *Dându-se laturile* b *şi* c, *se se resolve triunghiulŭ.*

Se cere a, B, C.

Hipotenusa se va calcula prin formula (5)* **163**.

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Unghiurile B şi C sunt date prin cele dóuĕ din urmă din formulele (7), **165** din cari scótemŭ.

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

Dacă hipotenusa a nu este bine determinată prin cosinusulŭ sĕu, vom calcula mai ântâiŭ pe B, şi apoi a va fi datŭ prin a dóua furmulă (7)* **165**:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos B}.$$

Triunghiulŭ are tot-d'a-una o soluţiune.

190. **Casulu II.** *Dându-se hipotenusa* a *şi laturea* b, *se se resolve triunghiulŭ.*

Se caută c, B, C. Le vom găsi prin (5)*163, prima din (6)** 164 şi prima din (7)*** 165, cari dau:

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b},\ \sin \mathrm{B} = \frac{\sin b}{\sin a},\ \cos \mathrm{C} = \frac{\mathrm{tg} b}{\mathrm{tg} a}. \qquad \text{(a)}$$

Insă fiind-că aceste formule dau elementele necunoscute prin sinusulŭ sau cosinusulŭ lorŭ, cari nu le determină cu destulă precisiune in unele casuri, este mai bine a intrebuinţa formulele următóre, găsite la 168, 170 şi 171, cari ne dau acele elemente prin tangenta lorŭ:

$$\mathrm{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\mathrm{tg}\frac{a+b}{2}\,\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}},$$

$$\mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{\mathrm{B}}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\frac{a+b}{2}}{\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}}},$$

$$\mathrm{tg}\frac{\mathrm{C}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}.$$

Aceste formule sunt şi mai comode, căci nu cerŭ de cât căutarea a patru logaritmi: $\mathrm{tg}\frac{a+b}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}$, $\sin(a-b)$, $\sin(a+b)$, pentru calcululŭ cătorŭ trele elementele.

Pentru ca problema se fie posibilă, formulele (a) ne aretă că trebue să avemŭ:

$$\sin b < \sin a;$$

atunci vom avé asemenea:

$$\cos a < \cos b, \ \operatorname{tg} b < \operatorname{tg} a,$$

şi vom avé pentru $\sin B$, $\cos c$, $\cos C$ valori reale. Insă pentru ca $\sin b$ se fie mai micŭ de cât $\sin a$, dacă $a < 90^0$, trebue se avemŭ: $b < a$, sau $b > 180^0 - a$; éra dacă $a > 90^0$, $b > a$ sau: $b < 180^0 - a$. Când $a = 90^0$, $\sin a = 1$, şi in acestŭ casŭ avemŭ tot-d'a-una: $\sin b < \sin a$. Dacă aceste condiţiuni suntŭ implinite, problema are o singură soluţiune, de şi unghiulŭ B este datŭ prin sinusulŭ sĕu, căci formula

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$$

ne aretă că B şi b sunt amêndoi de o dată inferiori sau superiori lui 90^0, căci $\sin B$ şi $\sin b$ crescŭ şi se micşoréḍă impreună. Tot prin acéstă observaţie vom puté alege pe care din semnele $+$ sau $-$ trebue se luămu in formula care dă pe $\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{B}{2}\right)$ când intrebuinţămŭ a dóua sistemă de formule.

191. **Casulu III.** *Dându-se laturea* b *şi unghiulŭ* C, *se se resolve triunghiulŭ.*

Trebue să se găséscă a, c, B. Pentru acéstă intrebuințămŭ a dóua din formulele (8) *. 166 prima și a patra din (7) **: 165

$$\cos B = \cos b \sin C, \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C}, \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C.$$

Dacă unghiulŭ B nu e bine determinatŭ prin cosinusulŭ sĕu, calculămŭ mai ântâiŭ pe a sau c, și pe urmă B va fi datŭ prin ver una din formulele următóre:

$$\cot B = \cos a \operatorname{tg} C, \cot B = \sin c \cot b.$$

Triunghiulŭ are tot-d'a-una o singură soluțiune.

192. **Casulu IV.** *Sĕ se resolve unŭ triunghiŭ dreptunghiŭ cunoscêndŭ laturea* b *și unghiulŭ opusŭ* B.

Necunoscutele sunt a, c, C. Vom intrebuința prima din formulele (6) *. 164 a treia din (7) ** 165 și a doua din (8) *** 166:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}, \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}, \tag{a}$$

sau mai bine formulele următóre, aflate la 169, 172 și 175:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}}} \\ \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{c}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}} \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

$$\left.\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{C}{2}\right)=\pm\sqrt{\cot\frac{B+b}{2}\cot\frac{B-b}{2}}.\right\}\quad (b)$$

193. *Discuțiune.* Ori-care din aceste dóuĕ sisteme de formule am intrebuința, pentru fie-care necunoscuta vom găsi câte dóuĕ valori suplementare, căci primulŭ sistemŭ ne dă necunoscutele prin sinusurile lorŭ,* 187, éră cel de al doilea coprinde radicale cu semnulŭ duplu. Se vedemŭ dară pe cari din valorile date de aceste equațiuni trebue se le luămŭ impreună.

1⁰ Daca $b=B$, prima sistemă dă:

$$\sin a=\sin c=\sin C=1,$$

și prin urmare

$$a=c=C=90^0.$$

In acestŭ casŭ dară triunghiulŭ este bidreptunghiŭ.

2⁰. Dacă $b<90^0$, $\cos b$, $\operatorname{tg} b$ sunt positive; și fiind-că c și C sunt mai mici de cât 180^0, adecă $\sin c$ și $\sin C$ sunt positive, vedemŭ dupe formulele (a), că și $\operatorname{tg}B$ și $\cos B$ sunt positive, adecă $B<90^0$. Pe lângă acestea, aceleașĭ formule ne arată că $b<B$, căci alt-felŭ $\sin a$, $\sin c$, $\sin C$ n'ar avé valori reale. Se presupunemŭ că aceste condițiuni sunt implinite tóte. Formula

$$\cos a=\cos b\cos c$$

ne arată că, $\cos b$ fiindŭ positivŭ, $\cos a$ şi $\cos c$ aŭ tot-d'a-una acelaşŭ semnŭ, şi prin urmare a şi c sunt amêndóuĕ de o dată mai mici de 90^0, saŭ de o dată mai mari de 90^0. Equaţiunea

$$\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C$$

ne arată asemenea că c şi C sunt érăşĭ amêndóuĕ mai mici saŭ amêndóuĕ mai mari de 90^0. Prin urmare, dacă insemnămŭ cu a', c', C' valorile mai mici de 90^0 pe cari ni le daŭ tablele pentru a, c, C, soluţiile problemei vor fi

$$a = a', \quad c = c', \quad C = C',$$

saŭ

$$a = 180^0 - a', \quad c = 180^0 - c', \quad C = 180^0 - C'.$$

3^0. Dacă $b > 90^0$, formulele (a) ne arată că pentru ca a, c, C se fie reale şi mai mici de 180^0, trebŭe ce avemŭ incă $B > 90^0$, şi $b > B$. Dacă aceste condiţiĭ vor fi implinite, in equaţiunea

$$\cos a = \cos b \cos c$$

$\cos b$ fiindŭ negativŭ, trebue ca $\cos a$ şi $\cos c$ se fie de semne contrarie, adecă a şi c se fie unulŭ superiorŭ şi altulŭ inferiorŭ lui 90^0. De altă parte formula

$$\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C,$$

in care $\sin b$ este positivŭ, arată că $\operatorname{tg} c$ şi $\operatorname{tg} C$ sunt de acelaşŭ semnŭ, şi prin urmare c şi C sunt in acelaşŭ timpŭ inferiori saŭ in acelaşŭ timpŭ superiori lui 180^0. Insemnândŭ dară érăşĭ cu a', c', C' valorile mai mici de 90^0 pe cari le daŭ tablele pentru a, c, C, soluţiile problemei vor fi:

$$a=a', \quad c=180^0-c', \quad C=180^0-C'$$

saŭ

$$a=180^0-a', \quad c=c', \quad C=C'.$$

Tabelulŭ următorŭ coprinde in resumatŭ tóte aceste discuţiuni.

$b=B$ . . . . 1 soluţiune (triunghiŭ bidreptunghiŭ);

$$b<90^0 \left\{\begin{array}{ll} B\geqq 90^0 \ \ldots\ldots & 0 \text{ soluţiĭ;} \\ B<90^0,\ b>B \ \ldots & 0 \text{ soluţiĭ;} \\ B<90^0,\ b<B;\ 2 \text{ soluţiĭ} & \left\{\begin{array}{ll} a=a', & \text{şi } a=180^0-a', \\ c=c' & c=180^0-c', \\ C=C' & C=180^0-C'; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$b>90^0 \left\{\begin{array}{ll} B\leqq 90^0 \ \ldots\ldots & 0 \text{ soluţiĭ;} \\ B>90^0,\ b<B \ \ldots & 0 \text{ soluţiĭ;} \\ B>90^0,\ b>B,\ 2 \text{ soluţiĭ} & \left\{\begin{array}{ll} a=a' & \text{şi } a=180^0-a', \\ c=180^0-c', & c=c', \\ C=180^0-C', & C=C'. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

194. **Casul V.** *Se dă hipotenusa* a *şi unghiulŭ oblicŭ* B, *şi se cere a se resolva triunghiulŭ.*

Necunoscutele b, c, C le calculămŭ prin formulele (6) **164**, (7) **165**, (8) **166**:

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\cot B}{\cos a}.$$

Dacă laturea *b* nu este bine determinată prin sinusulŭ sĕu, vom calcula mai întâiŭ pe *c* saŭ pe C, şi apoi vom avé pe *b* prin

$$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B, \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C.$$

Problema are tot-d'a-una o soluţiune unică.

195. **Casul VI.** *Dându-se unghiurile oblice* B *şi* C, *să se resolve triunghiulŭ.*

Se caută *a*, *b*, *c*, pre cari le putemŭ avé prin formulele :

$$\cos a = \cot B \cot C, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B},$$

saŭ mai bine prin cele următóre, găsite la 173 şi 174, cari daŭ laturile prin tangentele lorŭ :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(180^0 - B - C)}{\cos(B - C)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2} - 45^0\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2} + 45^0\right)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2} - 45^0\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C-B}{2} + 45^0\right)}.$$

Prima formulă din a dóua sistemă ne arată că, pentru ca problema să fie posibilă, trebue ca : 1^0 suma $B+C$ se fie mai mare de 90^0 şi mai mică de 270^0; 2^0 diferenţa $B-C$ se fie mai mare de

-90^0 şi mai mică de $+90^0$. In aceste condiţiuni, $\cos\{180^0-(B+C)\}$ şi $\cos(B-C)$ aŭ valori positive, şi prin urmare vomŭ obţine pentru $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ o valóre reală. Tot asemenea valorile lui $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ vor fi reale. Problema are dară o singură soluţiune.

ESSEMPLE

Casulŭ I

Date

$$b=69^0 34' 17'',3,$$

$$c=104^0 10' 28'',2,$$

Formule	Necunoscute
$\operatorname{tg}B=\dfrac{\operatorname{tg}b}{\sin c}$,	$B=70^0 8' 38'',92$,
$\operatorname{tg}C=\dfrac{\operatorname{tg}c}{\sin b}$,	$C=103^0 18' 56'',87$,
$\operatorname{tg}a=\dfrac{\operatorname{tg}c}{\cos B}$,	$a=94^0 54' 11''23$.

Calcululŭ lui *B*.

$$\log\operatorname{tg}b=0,4289162$$

$$-\log\sin c=0,0134278$$

$$\log\operatorname{tg}B=0,4423440$$

$$B=70^0 8' 38'',92$$

Calcululŭ lui C.

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tg}(180^0 - c) &= 0,5976262\\
-\log \sin b &= 0,0282102\\
\hline
\log \operatorname{tg}(180^0 - C) &= 0,6258364\\
C &= 103^0 18' 56'',87.
\end{aligned}$$

Calcululŭ lui a.

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tg}(180^0 - c) &= 0,5976262\\
-\log \cos B &= 0,4689620\\
\hline
\log \operatorname{tg}(180^0 - a) &= 1,0665882\\
a &= 94^0 54' 11',23
\end{aligned}$$

Casulŭ II.

Date

$$a = 68^0 16' 23'',4\ ;$$

$$b = 53^0 21' 34'',6.$$

Formule	Necunoscute
$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}$,	$c = 51^0 39' 56'',24$;
$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{B}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}}$,	$B = 59^0 44' 25'',28$;
$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}$.	$C = 57^0 36' 20'',92$;

Calcululŭ luĭ c.

$$\log \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 0,2529847$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \overline{1},1169312$$

$$2 \log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \overline{1},3699159$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \overline{1},6849580$$

$$c = 51^0 39' 56'',24.$$

Calcululŭ luĭ B.

$$\log \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 0,2529847$$

$$-\log \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = 0,8830688$$

$$2 \log \operatorname{tg} \left(45^0 + \frac{\mathrm{B}}{2}\right) = 1,1360535$$

$$\log \operatorname{tg} \left(45^0 + \frac{\mathrm{B}}{2}\right) = 0,5680268$$

$$45^0 + \frac{\mathrm{B}}{2} = 74^0 52' 12'',64$$

$$\mathrm{B} = 59^0 44' 25'' 28.$$

Calcululŭ lui *C*.

$$\log\sin(a-b)=\bar{1},4105830$$
$$-\log\sin(a+b)=0,0698591$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1},4804421$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1},7402211$$

$$C=57^{0}36'20'',92$$

Casulŭ III.

Date	Formule	Necunoscute
$b=65^{0}10'29'',3$;	$\cos B=\cos b\sin C$,	$B=73^{0}28'46'',79$,
$C=42^{0}37'52'',5$.	$\operatorname{tg}a=\frac{\operatorname{tg}b}{\cos C}$,	$a=71^{0}12'14'',99$,
	$\operatorname{tg}c=\sin b\operatorname{tg}C$.	$c=39^{0}52'42'',12$.

Calcululŭ lui *B*.

$$\log\cos b=\bar{1},6230954$$
$$\log\sin C=\bar{1},8307665$$
$$\log\cos B=\bar{1},4538619$$
$$B=73^{0}28'46'',79$$

Calcululŭ lui *a*.

$$\log\operatorname{tg}b=0,3347957$$
$$-\log\cos C=0,1332828$$
$$\log\operatorname{tg}a=0,4680785$$
$$a=71^{0}12'14'',99$$

Calcululŭ lui *c*.

$$\log\sin b=\bar{1},9578911$$
$$\log\operatorname{tg}C=\bar{1},9640494$$
$$\log\operatorname{tg}c=\bar{1},9219405$$
$$c=39^{0}52'42'',12$$

Casulŭ IV.

Date

$$b = 56^0 38' 13'',2\,;$$

$$B = 74^0 50' 24'',4.$$

Formule

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{C}{2}\right) = \pm\sqrt{\cot\frac{B+b}{2}\cot\frac{B-b}{2}}.$$

Necunoscute

1ª soluţie	2ª soluţie
$a' = 59^0 55' 7'',84,$	$a'' = 120^0 4' 52'',16\,;$
$c' = 24^0 17' 53'',06,$	$c'' = 155^0 42' 6'',94\,;$
$C' = 28^0 23' 37'',90\,;$	$C'' = 151^0 36' 22'',10.$

Calcululŭ lui a.

$$\log \operatorname{tg} \frac{B+b}{2} = 0,3461053$$

$$-\log \operatorname{tg} \frac{B-b}{2} = 0,7953323$$

$$2 \log \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = 1,1414376$$

$$\log \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) = 0,5707188$$

$$45^0 + \frac{a}{2} = 74^0 57' 33'',92.$$

$$a' = 59^0 55' 7'',84\,;\; a'' = 120^0 4' 52'',16$$

Calcululŭ luĭ c.

$$\log \sin (B+b) = \overline{1},8746096$$

$$-\log \sin (B-b) = 0,5053077$$

$$2 \log \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{c}{2}\right) = 0,3799173$$

$$\log \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{c}{2}\right) = 0,1899587$$

$$45^0 + \frac{c}{2} = 57^0 8' 56'',53$$

$$c' = 24^0 17' 53'' 06\,;\; c'' = 155^0 42' 6'',94$$

Calcululŭ lui C.

$$\log\cot\frac{B+b}{2}=\bar{1},6538947$$

$$\log\cot\frac{B-b}{2}=0,7953323$$

$$2\log\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{C}{2}\right)=0,4492270$$

$$\log\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{C}{2}\right)=0,2246135$$

$$45^0+\frac{C}{2}=59^0 11'48'',95$$

$$C'=28^0 23'37'',90;\ C''=151^0 36'22''10$$

Casulŭ V.

Date

$a=108^0 37'12'',4;$

$B=49^0 32'43'',3.$

Formule

$\sin b=\sin a\sin B,$

$\operatorname{tg}c=\operatorname{tg}a\cos B,$

$$\operatorname{tg}C=\frac{\cot B}{\cos a}.$$

Necunoscute

$b=46^0 8'40'',54;$

$c=62^0 33'30'',15;$

$C=69^0 28'19'',03.$

Calcululŭ lui b.

$$\log\sin a=\bar{1},9766509$$

$$\log\sin B=\bar{1},8813389$$

$$\log\sin b=\bar{1},8579898$$

$$b=46^0 8'40'',54$$

Calcululŭ lui c

$$\log\operatorname{tg}a=0,4724629$$

$$\log\cos B=\bar{1},8121415$$

$$\log\operatorname{tg}c=0,2846044$$

$$c=62^0 33'30'',15$$

Calcululŭ luĭ *C*.

$$\log \cot B = \overline{1},9308026$$
$$-\log \cos a = 0,4958120$$
$$\log \operatorname{tg} C = 0,4266146$$
$$C = 69^{0}28'19'',03$$

Casulŭ VI.

Date

$$B = 69^{0}25'13'',4;$$
$$C = 41^{0}48'37'',8.$$

Formule

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(180^{0}-B-C)}{\cos(B-C)}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-45^{0}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}+45^{0}\right)}$$
$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-45^{0}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C-B}{2}+45^{0}\right)}$$

Necunoscute

$$a = 65^{0}10'44'',42;$$
$$b = 58^{0}10'45'',96;$$
$$c = 37^{0}14'5'',76.$$

Calcululŭ luĭ a.

$$\log\cos(180^0-B-C)=\bar{1},5588611$$
$$-\log\cos(B-C)=0.0525057$$
$$2\log\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\bar{1},6113668$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\bar{1},8056834$$
$$a=65^0 10' 44'',42.$$

Calcululŭ luĭ b.

$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-45^0\right)=\bar{1},2728250$$
$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}+45^0\right)=0,2178833$$
$$2\log\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\bar{1},4907083$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\bar{1},7453542$$
$$b=58^0 10' 45'',96.$$

Calculululŭ luį c.

$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-45^0\right)=\bar{1},2728250$$
$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{C-B}{2}+45^0\right)=\bar{1},7821168$$
$$2\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\bar{1},0549418$$

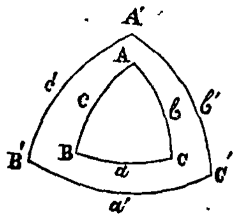
$$\log \operatorname{tg}\frac{c}{2}=\bar{1},5274709$$

$$c=37^0 14' 5'',76.$$

RESOLUŢIUNEA TRIUNGHIURILORŬ RECTILATERALI

196. Resoluţiunea unui triunghiŭ reetilateralŭ se póte reduce la resoluţiunea unui triunghiŭ dreptunghiŭ. In adevĕrŭ, dacă considerămŭ triunghiulŭ polarŭ A′B′C′ alŭ triunghiului rectilateralŭ datŭ ABC, unghiulŭ A′ al triunghiului polarŭ va fi egalŭ cu $180^0 - a = 90^0$; prin urmare triunghiulŭ A′B′C′ este dreptunghiŭ, şi-lŭ putemŭ resolva. Cunoscêndŭ elementele lui A′B′C′, vom cunósce şi pe ale lui ABC, cari sunt suplementare cu ale celui d'ântâiŭ. (Fig. 63).

(Fig. 63).



Triunghiurile rectilaterali insă se potŭ resolva şi directŭ prin formulele ce am datŭ * **176**, şi pre cari le putemŭ transforma in acelaşŭ modŭ că şi pre cele relative la triunghiurile dreptunghie * **168—175.**

Cele şase casuri ce se potŭ presinta la resoluţiunea triunghiurilorŭ rectilaterali sunt: 1° Când se dau unghiurile B şi C; 2° unghiurile A şi B; 3° unghiulŭ B şi laturea adjacentă c; 4° unghiulŭ B şi laturea opusă b; 5° unghiulŭ A şi laturea b; 6° laturile b şi c.

197. **Casul I.** *Dându-se unghiurile* B *şi* C *ale unuĭ triunghiŭ rectilateralŭ se se resolve triunghiulŭ.*

Acestŭ casŭ se póte reduce la casulŭ I al resoluţiunei triunghiurilorŭ dreptunghie; se póte insă resolva şi directŭ prin formulele * **176.**

$$\cos A = -\cos B \cos C,\ \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} B}{\sin C},\ \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} C}{\sin B},$$

sau calculămu mai ântâiu laturea b sau c, şi pe urmă unghiulŭ A prin ver-una din formulele

$$\operatorname{tg} A = -\frac{\operatorname{tg} C}{\cos b},\ \operatorname{tg} A = -\frac{\operatorname{tg} B}{\cos c}.$$

Esemplu. Date : $B = 64^0 38' 4', 2$; $C = 52^0 12' 29'', 3$.

Necunoscute : $A = 115^0 12' 50'', 17$; $b = 69^0 27' 41'', 23$; $c = 54^0 58' 52', 38$.

198. **Casulu II.** *Dându-se unghiurile* A *şi* B *ale unui triunghiŭ rectilateralŭ, se se resolve triunghiulŭ.*

Acestŭ casŭ, care se póte reduce la casulŭ II al resoluţiunei triunghiurilorŭ dreptunghie, se póte resolva şi directŭ prin formulele următóre :

$$\cos C = -\frac{\cos A}{\cos B},\ \sin b = \frac{\sin B}{\sin A},\ \cos c = -\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A},$$

cari se potŭ pune sub forma

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\cot\frac{A+B}{2}\cot\frac{A-B}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{b}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}}.$$

Esemplu. Date: $A = 72^0 28' 15'', 0$; $B = 59^0 13' 24'', 6$.

Necunoscute : $C = 126^0 35' 19'', 8$; $c = 122^0 1' 45'', 3$; $b = 64^0 17' 24'', 4$.

199. **Casulu III.** *Dându-se unghiulŭ* B *şi laturea adjacentă* c, *se se resolve triunghiulŭ.*

Sau reducemu problema la casulŭ III al resoluţiunei triunghiurilorŭ dreptunghie, sau intrebuinţămŭ formulele

$$\cos b = \cos B \sin c,\ \operatorname{tg} A = -\frac{\operatorname{tg} B}{\cos c},\ \operatorname{tg} C = \sin B \operatorname{tg} c.$$

Dacă voimŭ se determinămŭ pre b prin tangenta sa, calculămŭ mai ântâiŭ pe A sau C, şi apoi pe b prin una din relaţiunile :

$$\cot b = -\cos A \operatorname{tg} c, \cot b = \sin C \cot B.$$

Esemplu. Date : $B = 43^0 38' 12'', 4$; $c = 58^0 14' 8'', 3$.
Necunoscute : $b = 37^0 58' 33'', 03$; $A = 118^0 54' 9'', 98$; $C = 48^0 6' 1'', 93$.

200. **Casulu IV.** *Dându-se unghiulŭ* B *şi laturea opusă* b, *se se resolve triunghiulŭ.*

Acésta se póte reduce la casulŭ IV al resoluţiunei triunghiurilorŭ dreptunghie; insă se póte resolva şi prin formulele :

$$\sin A = \frac{\sin B}{\sin b},\ \sin C = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} b},\ \sin c = \frac{\cos b}{\cos B},$$

cari se potŭ transforma in :

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{b+A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{b-A}{2}}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{C}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\sin(b+B)}{\sin(b-B)}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\cot\frac{b-B}{2}\cot\frac{b+B}{2}},$$

Problema póte se aibă dóuĕ soluţiuni, o soluţiune sau nici una; soluţiile se potŭ alege prin nisce consideraţiuni analoge cu cele de la § 193.

Esemplu. Date: $B = 53^0 18' 38'', 0$; $b = 74^0 15' 28'', 8$.

Necunoscute. Prima soluţie: $A' = 123^0 34' 40'', 65$; $C' = 22^0 13' 45'', 59$; $c' = 27^0 0' 22'', 08$.

A dóua soluţie: $A'' = 56^0 25' 19'', 35$; $C'' = 157^0 46'' 14'', 41$; $c'' = 152^0 59' 37'', 92$.

201. **Casulu V.** *Dându-se unghiulŭ* A *şi laturea* b, *se se resolve triunghiulŭ.*

Putemŭ aplica resoluţiunea casului V de la triunghiurile dreptunghie, sau formulele:

$$\sin B = \sin A \sin b, \operatorname{tg} C = -\operatorname{tg} A \cos b, \operatorname{tg} c = -\frac{\cot b}{\cos A},$$

şi dacă voim se avem pe B prin tangenta sa, calculândŭ mai ântâiŭ pe C saŭ c, vom avé:

$$\operatorname{tg} B = \sin C \operatorname{tg} b, \text{ sau: } \operatorname{tg} B = -\operatorname{tg} A \cos c.$$

Esemplu. Date: $A = 96^0 15' 32'', 7$; $b = 80^0 3' 17'', 5$.

Necunoscute: $B = 78^0 15' 57'', 72$; $C = 57^0 34' 55'', 09$; $c = 58^0 7' 37'', 54$.

202. **Casulu VI.** *Dându-se laturile* b *şi* c, *se se resolve triunghiulŭ.*

Problema se póte reduce la casulŭ VI al resoluţiunei triunghiurilorŭ dreptunghie, sau se póte resolva de dreptulŭ prin:

$$\cos A = -\cot b \cos c, \cos B = \frac{\cos b}{\sin c}, \cos C = \frac{\cos c}{\sin b},$$

cari se potŭ transforma in:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\cos(b-c)}{\cos(180^0 - b - c)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(-45^0 + \frac{b+c}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{b-c}{2}\right)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(-45^0+\frac{b+c}{2}\right)\operatorname{tg}\left(-45^0-\frac{b-c}{2}\right)},$$

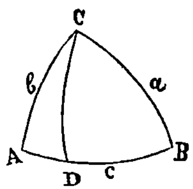
Esemplu. Date: $b=78^0\,13'\,26'',4$; $c=63^0\,29'\,53'',8$. Necunoscute: $A=95^0\,57'\,59'',8$; $B=76^0\,49'\,3'',88$; $C=63^0\,33'\,0'',38$.

OBSERVARE.

203. Nu numai resoluţiunea triunghiurilorŭ rectilateralĭ se póte reduce la resoluţiunea triunghiurilorŭ dreptunghie, ci, in unele casuri particulare, se póte face asemenea şi pentru unŭ triunghiŭ óre-care.

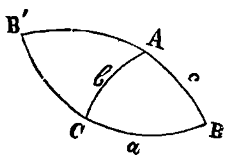
1⁰ Dacă triunghiulŭ are dóuĕ laturi egale, a şi b, sau dóuĕ unghiuri egale, A şi B, el este isoscelŭ, prin urmare, ducêndŭ arculŭ CD perpendicularŭ pe basă, vom impărţi triunghiulŭ datŭ in dóuĕ triunghiuri dreptunghie egale, şi in fie-care din acestea vom cunósce, afară de unghiulŭ dreptŭ, o lature sau unŭ unghiŭ datŭ şi ver-unŭ altŭ elementŭ totŭ datŭ; resolvêndŭ unulŭ din aceste triunghiurĭ dreptunghie, vom cunósce şi elementele triunghiului datŭ. (Fig. 64).

(Fig. 64)



2⁰ Dacă printre elementele date se află dóuĕ laturi, a şi b, sau dóuĕ unghiuri, A şi B, suplementare, prelungindŭ laturile a şi c pênĕ la intâlnirea lorŭ in B′, vom forma unŭ al doilea triunghiuŭ, AB′C, care este isoscelŭ; căci dacă $a+b=180^0$, avemŭ asemenea: $a+CB'=180^0$; deci $b=CB'$; éră dacă $A+B=180^0$, avemŭ $B'=B$, şi $B'AC+A=180^0$; deci $B'=B'AC$. Vom resolve dară triunghiulŭ B′CA des-

(Fig. 65).



făcêndulŭ in dóuĕ triunghiuri dreptunghie egale, precum am ḑis mai susŭ, şi din elementele lui vom deduce pe ale triunghiului datŭ.

RESOLUŢIUNEA TRIUNGHIURILORŬ ORE-CARE.

204. Resoluţiunea triunghiurilorŭ sferice óre-care presentă şase casuri: 1^0 Când se dau cele trei laturi; 2^0 cele trei unghiuri; 3^0 dóuĕ laturi şi unghiulŭ coprinsŭ intre ele; 4^0 dóuĕ unghiuri şi laturea coprinsă intre ele; 5^0 dóuĕ laturi şi unghiulŭ opusŭ la una din ele; 6^0 dóuĕ unghiuri şi laturea opusă la una din ele.

Aceste şase casuri se potŭ reduce la trei prin consideraţiunea triunghiului polarŭ. In adevĕrŭ, avêndŭ, spre esemplu, a resolva triunghiulŭ ABC in care sunt cunoscute laturile a şi b şi unghiulŭ coprinsŭ C, in triunghiulŭ polarŭ A′B′C′ vom cunósce: $A' = 180^0 - a$, $B' = 180^0 - b$, $c' = 180^0 - C$, adecă dóuĕ unghiuri şi laturea coprinsă intre ele. Calculândŭ elementele c, A, B ale lui ABC, vom cunósce şi elementele $C' = 180^0 - c$, $a' = 180^0 - A$, $b' = 180^0 - B$ ale lui A′B′C′. Vedemŭ dară că casulŭ III şi IV se potŭ resolva unulŭ prin altulŭ. Asemenea este şi pentru casulŭ I cu II, pentru V cu VI.

205. **Casulu I.** *Dându-se laturile* a, b, c, *se se resolve triunghiulŭ.*

Unghiurile A, B, C se calculéḑă prin formulele (1), (2) sau (3)* **178**; se preferă insă cele din urmă:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}},$$

in cari $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Escesulŭ sfericŭ se póte calcula directŭ prin formula * **183**:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

Pentru ca problema se aibă o soluţiune, trebue* **187**: 1^0 ca suma laturilorŭ se fie mai mică de cât 360^0; 2^0 ca fie care lature se fie mai mică de cât suma celor alte dóuĕ. Dacă prima condiţiune n'ar fi implinită, $\sin p$ ar fi negativŭ; dacă cea de a dóua n'ar fi implinită, şi am avé, spre esemplu, $a>b+c$, $\sin(p-a)$ ar fi negativŭ, éră $\sin p$, $\sin(p-b)$, $\sin(p-c)$ ar fi positive. In ambele casuri radicalele coprindĕndŭ cantităţi negative, am avé, pentru $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, nisce valori imaginare.

206. **Casulu II.** *Dându-se unghiurile* A, B, C, *se se resolve triunghiulŭ.*

Laturile se potŭ calcula prin formulele (4), (5) sau (6) * **179**; se intrebuinţédă însă de preferinţă formulele (6), cari dau laturile prin tangentele lorŭ;

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}.$$

Problema are o soluţiune unică dacă: 1^0 jumĕtatea escesului sfericŭ ε este coprinsă intre 0^0 şi 180; 2^0 dacă fie-care unghiŭ este mai mare de cât jumĕtatea escesului sfericŭ. Dacă una din aceste condiţiĭ n'ar fi implinită, am obţine pentru $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ valori imaginare.

207. **Casul III.** *Dându-se laturile* a *şi* b *şi unghiulŭ coprinsŭ* C, *să se resolve triunghiulŭ.*

Triunghiulŭ este tot-d'a-una posibilŭ. Unghiurile A şi B se potŭ determina prin ântâia şi a dóua din analogiele lui Napier * **181**.

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},$$

cari daŭ suma şi diferinţa lui A şi B, din cunoscinţa cărora vom puté deduce chiar pe A şi B. Laturea c se va calcula pe urmă prin ver-una din cele-alte dóuĕ analogiĭ :

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\operatorname{tg}\frac{a+b}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

208. De multe ori este necesitate a se calcula directŭ laturea c; atunci intrrebuinţămŭ formulele (1) * **159**, cari daŭ :

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

Acéstă formulă, făcută calculabilă prin logaritmi * **62**, ess. I, devine :

$$\cos c=\frac{\cos b\cos(a-\varphi)}{\cos\varphi},$$

in care

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}b \cos C.$$

Unghiulŭ B incă se póte calcula directŭ cu ajutorulŭ unghiului ausiliarŭ φ; in adevĕrŭ, a patra din relaţiunile (3) * 162 :

$$\cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot B,$$

dă

$$\sin C \cot B = \cot b \sin a - \cos a \cos C = \cot b \left(\sin a - \frac{\cos a \cos C}{\cot b}\right)$$

$$= \cot b (\sin a - \cos a \,\mathrm{tg} b \cos C),$$

şi punĕndŭ éră̆şĭ: $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}b \cos C$,

$$\sin C \cot B = \cot b (\sin a - \cos a \,\mathrm{tg}\varphi) = \cot b \,\frac{\sin a \cos\varphi - \cos a \sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{\cot b \sin(a-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Insă din :

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}b \cos C,$$

avemŭ :

$$\cot b = \frac{\cos C}{\mathrm{tg}\varphi},$$

şi acéstă valóre, pusă in equaţia din urmă, dă:

$$\sin C \cot B = \frac{\cos C \sin(a-\varphi)}{\cos\varphi \,\mathrm{tg}\varphi} = \frac{\cos C \sin(a-\varphi)}{\sin\varphi},$$

saŭ in fine

$$\cot B = \frac{\cot C \sin(a-\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Totŭ asemenea, prima din formulele (3) *162: devine:

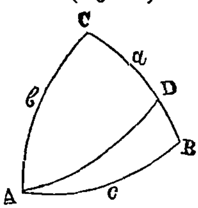
$$\cot A = \frac{\cot C \sin(b-\psi)}{\sin\psi},$$

punêndŭ :

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}a \cos C.$$

209. Intrebuinţarea unghiurilorŭ ausiliare φ şi ψ face totŭ-una ca şi când am descompune triunghiulŭ datŭ in dóuĕ triunghiuri dreptunghie. In adevĕrŭ, ducêndŭ AD perpendicularŭ pe CB, triunghiulŭ dreptunghiŭ ACD dă *165, (7) (fig. 66):

(Fig. 66)



$$\operatorname{tg}CD = \operatorname{tg}b \cos C = \operatorname{tg}\varphi,$$

saŭ

$$CD = \varphi.$$

Avemŭ dară din acelaşiŭ triunghiŭ:

$$\cos AD = \frac{\cos b}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{tg}AD = \frac{\sin\varphi}{\cot C}.$$

Triunghiulŭ ADB, in care $DB = a - CD = a - \varphi$, dă:

$$\cos c = \cos AD \cos DB = \frac{\cos b \cos(a-\varphi)}{\cos\varphi}$$

$$\cot B = \frac{\sin DB}{\operatorname{tg}AD} = \frac{\cot C \sin(a-\varphi)}{\sin\varphi},$$

cari sunt tocmai formulele găsite mai susŭ. Totŭ asemenea vom găsi şi formula care dă pe A, lăsândŭ un arcŭ perpendicularŭ din B pe AC.

210. **Casul IV.** *Dându-se dóuĕ unghiuri* A *şi* B *şi laturea coprinsă* c, *să se resolve triunghiulŭ.*

Problema are tot-d'a-una o soluţiune unică. Laturile a şi b se calculéḍă prin cele dóuĕ din urmă din analogiele lui Napier * **181**:

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2},\ \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

Unghiulŭ C se va calcula in urmă prin ver-una din cele-alte dóuĕ analogiĭ:

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}},\ \operatorname{tg}\frac{A+B}{2},\ \cot\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}.$$

211. Pentru a obţine directŭ unghiulŭ C, intrebuinţămŭ pe a treia din formulele (4) * **162**:

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c$$

$$= \cos B\,(-\cos A + \sin A\operatorname{tg} B\cos c)$$

şi punêndŭ

$$\cot\varphi = \operatorname{tg} B\cos c$$

acéstă equaţiune devine :

$$\cos C = \frac{\cos B\sin(A-\varphi)}{\sin\varphi},$$

Laturile a şi b potŭ asemenea se se obţină in parte prin următórele din formulele (3) * **161**:

$$\left.\begin{aligned}\cot a\sin c &= \cos c\cos B + \sin B\cot A\\ \cot b\sin c &= \cos c\cos A + \sin A\cot B\end{aligned}\right\}\qquad (a)$$

Pe a dóua o transformămŭ in modulŭ următorŭ :

$$\cot b \sin c = \cot B\left(\frac{\cos c \cos A}{\cot B} + \sin A\right)$$

$$= \cot B\,(\cos A \cos c \operatorname{tg} B + \sin A)$$

şi punêndŭ érăşĭ :

$$\cot\varphi = \operatorname{tg} B \cos c, \tag{b}$$

avemŭ :

$$\cot b \sin c = \cot B\,(\cot\varphi \cos A + \sin A) = \cot B \frac{\cos(A-\varphi)}{\sin\varphi},$$

şi fiind-că, după (b),

$$\cot B = \frac{\cos c}{\cot\varphi} = \cos c \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\cot b = \frac{\cos c \sin\varphi \cos(A-\varphi)}{\sin c \sin\varphi \cos\varphi} = \frac{\cot c \cos(A-\varphi)}{\cos\varphi},$$

Prima din formulele (a) se transformă in acelaşŭ modŭ punêndŭ

$$\cot\psi = \operatorname{tg} A \cos c,$$

şi devine :

$$\cot a = \frac{\cot c \cos(B-\psi)}{\cos\psi}.$$

212. Acéstă a dóua metodă de resoluţiune se póte interpreta éraşi prin descompunerea triunghiului datŭ in dóuĕ triunghiuri dreptunghie; in adevĕr, ducêndŭ arculŭ AD perpendicularŭ pe BC, triunghiulŭ dreptunghiŭ BAD dă *166(8):

$$\cot BAD = \cos c \operatorname{tg} B = \cot\varphi,$$

sau

$$BAD = \varphi.$$

Apoi, din acelaşŭ triunghiŭ, avemŭ:

$$\cos AD = \frac{\cos B}{\sin BAD} = \frac{\cos B}{\sin\varphi},\ \operatorname{tg} AD = \frac{\cos BAD}{\cot c} = \frac{\cos\varphi}{\cot c}.$$

Triunghiulŭ DAC, în care $CAD = A - \varphi$, dă:

$$\cos C = \cos AD \sin CAD = \frac{\cos B \sin(A-\varphi)}{\sin\varphi}.$$

$$\cot b = \frac{\cos CAD}{\operatorname{tg} AD} = \frac{\cot c \cos(A-\varphi)}{\cos\varphi},$$

Am puté asemenea obţine pe a ducênd din B un arcŭ perpendicularŭ pe AC.

213. **Casulu V.** *Dându-se dóuĕ laturi,* a *şi* b, *şi unghiulŭ* A *opusŭ la* a, *se se resolve triunghiulŭ.*

Vom calcula mai ântâiŭ unghiulŭ B prin formula

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a},$$

care dă unghiulŭ B prin sinusulŭ sĕŭ; aşa dară vom avé pentru B dóuĕ valori, suplementare una alteia.

Cele-alte dóuĕ necunoscute, C şi c, se vor calcula apoi prin analogiile lui Napier* **181**:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}\cot\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}\cot\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.$$

Fiind-că am găsit pentru B dóuĕ valori, aceste formule ne vor da érăşi pentru $\frac{C}{2}$ şi $\frac{c}{2}$ câte dóuĕ valori. Insă, fiind-că nu admitemŭ de cât valorile lui $\frac{C}{2}$ şi $\frac{c}{2}$ coprinse intre 0^0 şi 90* **156**, vom introduce in formulele de susŭ numai acele valori ale lui B cari vor face pe $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ şi $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ positive. Pentru acésta trebue ca diferinţele $a—b$ şi A—B se fie de acelaşŭ semnŭ; vom lua dară numai acele valori ale lui B cari vor face diferenţele $a—b$ şi A—B de acelaşŭ semuŭ.

214. Elementele c şi C se potŭ calcula şi de dreptulŭ prin formulele:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A,$$

Prima din aceste formule devine:

$$\cos a = \cos b\,(\cos c + \operatorname{tg} b \sin c \cot A),$$

şi punêndŭ

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} b \cos A,$$

$$\cos a = \cos b\,(\cos c + \sin c \operatorname{tg}\varphi) = \cos b\,\frac{\cos(c-\varphi)}{\cos\varphi},$$

de unde

$$\cos(c-\varphi) = \frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b}.$$

Din a dóua formulă scótemŭ:

$$\cot a \sin b = \cot A \cos C\,(\cos b \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C),$$

și punêndŭ

$$\cot\psi = \cos b \,\mathrm{tg} A,$$

de unde

$$\cot A = \frac{\cos b}{\cot\psi},$$

avemŭ :

$$\cot a \sin b = \frac{\cos b \cos C}{\cot\psi} \frac{\cos(C-\psi)}{\sin\psi \cos C} = \frac{\cos(C-\psi)\cos b}{\cos\psi}$$

de unde

$$\cos(C-\psi) = \cot a \cos\psi \,\mathrm{tg} b. \tag{b}$$

In formulele (a) și (b) unghiurile φ și ψ fiind mai mici de 90^0, $\cos\varphi$ și $\cos\psi$ suntŭ positive; prin urmare $\cos(c-\varphi)$ va fi positiv dacă $\cos a$ și $\cos b$ vor fi de acelașŭ semnŭ, și negativŭ dacă $\cos a$ și $\cos b$ vor fi de semne contrarie. Asemenea, $\cos(C-\psi)$ va fi positivŭ dacă $\cot a$ și $\mathrm{tg} b$ vor fi de acelașŭ semnŭ, și negativŭ in casulŭ contrariŭ. Din acestea resultă că $c > \varphi$ și $C > \psi$ dacă a și b sunt de o dată mai mari sau mai mici de 90^0; și $c < \varphi$ și $C < \psi$, dacă a și b sunt unulŭ mai mare și altulŭ mai micŭ de 90^0.

215. *Discuțiune.* Formulele ce am datŭ pentru resoluțiunea casului V ne potŭ arĕta imediatŭ, chiar prin date, dacă problema are o soluțiune, dóuĕ sau nici una, și ne dau și valorile acestorŭ soluțiuni. Cu tóte acestea este utile a studia mai de a aprópe diferitele circumstanțe ale problemei.

Formulele intrebuințate sunt:

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}, \tag{a}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\cot\frac{A+B}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}=\frac{\cot\frac{A-B}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}},\quad(b)$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.\quad(c)$$

Dacă $a=b$, formula (a) ne arată că şi $A=B$; atunci primele din formulele (b) şi (c) ne dau:

$$\cot\frac{C}{2}=\operatorname{tg}A\cos a,\quad \operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}a\cos A.$$

Pentru ca să avem pentru $\frac{C}{2}$ şi $\frac{c}{2}$ valori intre 0^0 şi 90^0, trebue ca $\operatorname{tg}A$ şi $\cos a$, $\operatorname{tg}a$ şi $\cos A$ se fie de acelaşiŭ semnŭ, şi pentru acésta trebue ca a şi A se fie amêndoi de odată inferiori sau superiori lui 90^0. Dacă acéstă condiţie e implinită, problema are o soluţiune unică.

Se trecemŭ la casulŭ generalŭ. Pentru ca se avemŭ o soluţiune a problemei, trebue ca $\frac{\sin b\sin A}{\sin a}$ se fie coprinsŭ intre 0 si $+1$; atunci vom avé pentru B dóuĕ valori, M şi M′, suplimentare una alteia ($M+M'=180^0$, şi dacă $M<90^0$, $M<M'$). Insĕ am vĕḑutŭ * 213 că pentru ca aceste valori se fie soluţiuni reale ale problemei, trebue ca se fie ast-fel

incât se facă diferinţele $A-B$ şi $a-b$ de acelaşiŭ semnŭ. Va trebui dară să avemŭ $A-M$ de acelaşiŭ semnŭ cu $a-b$, şi $A-M'$ de acelaşiŭ semnŭ cu $a-b$.

1°. Fie $A<90^0$ şi $b<90^0$.

Dacă $a<b$, $\frac{\sin b}{\sin a}>1$, şi formula (a) ne arată că $\sin B>\sin A$, adecă $B>A$; şi prin urmare punêndŭ in locŭ de B soluţiunile sale, $M>A$ şi $M'>A$; avem dară dóuĕ soluţiuni, căci atât diferinţele $A-M$ şi $A-M'$, cât şi diferinţa $a-b$, sunt negative.

Dacă $a<b$ şi $a+b<180^0$, avem: $b<180^0-a$ şi $\sin b<\sin a$; formula (a) ne arată atunci că $\sin B<\sin A$; prin urmare $M<A$. Insĕ M' fiind mai mare de 90^0 şi $A<90^0$, avemŭ $M'>A$. Diferinţa $A-M$ este dară positivă, ca şi $a-b$, pe când $A-M$ este negativă; aşadară n'avemŭ de cât o singură soluţiune, care este M.

Dacă $a>b$ şi $a+b=180^0$, avem: $b=180^0-a$, $\sin b=\sin a$; formula (a) arată atunci că $\sin B=\sin A$, sau $B=A$; deci $M=A$, éră $M'>A$, căci am presupusŭ că $M'>M$. Aşa-dară diferinţa $A-M$ se reduce la zero şi $A-M'$ este negativă, pe când $a-b$ este positivă; deci soluţiunea M' nu convine. Soluţiunea $M=A$, pusă în prima equaţie (b) şi în prima equaţie (c), ne dă $C=180^0$, $c=180^0$; prin urmare, nici ea nu convine.

Dacă $a>b$ şi $a+b>180^0$, $b>180^0-a$ şi $\sin b>\sin a$; atunci, după (a), $\sin B>\sin A$; ar trebui dară să avem: $M > A$ şi $M' > A$; insĕ, dacă ar fi ast-fel, diferinţele $A-M$ şi $A-M'$ ar fi negative, pe când $a-b$ este positivă; aşa dară ambele aceste soluţiuni trebue lăsate la o parte.

2^0. Fie $A < 90^0$ şi $b = 90^0$.

In acestŭ casŭ formula (a) devine: $\sin B = \frac{\sin A}{\sin a}$; dacă $a < b$, $\sin a < 1$, şi prin urmare $\sin B > \sin A$, $M > A$, şi *a forţiori* $M' > A$. Aşa-dară diferinţele $a-b$ şi $A-M$, precum şi $a-b$ cu $A-M'$, sunt impreună negative; problema are dară dóuĕ soluţiuni.

Dacă $a > b$, diferinţa $a-b$ este positivă, pe când $A-M$ şi $A-M'$ sunt negative, şi nu avemŭ nici o soluţiune.

Dacă $a = b$, diferinţele $a-b$ şi $A-M$ se reducŭ la zero, éră $A-M'$ este negativă; deci érăşi nu avem nici o soluţiune.

3^0. Fie $A < 90^0$ şi $b > 90^0$.

Dacă $a < b$ şi $a + b < 180^0$, $b < 180^0 - a$ şi $\sin b > \sin a$ (căci in al doilea cadranŭ sinusurile sunt cu atât mai mici cu cât sunt arcele mai mari). Formula (a) ne arată atunci că $\sin B > \sin A$, $M > A$, şi *a forţiori* $M' > A$. Diferinţele $A-M$ şi $A-M'$ sunt dară negative, ca şi $a-b$: avem dóuĕ soluţiuni.

Dacă $a < b$ şi $a + b = 180^0$, avem: $b = 180^0 - a$, $\sin b = \sin a$; atunci $M = A$ şi $M' > A$; numai a doua soluţiune convine problemei, căci diferinţele $A-M'$ şi $a-b$ sunt amêndóuĕ negative, pe când $A-M = 0$.

Deca $a<b$ şi $a+b>180^0$, $b>180^0-a$, şi $\sin b<\sin a$; atunci $\sin B<\sin A$ şi $M<A$; insĕ $M'>A$, căci $A<90^0$, éră $M'>90^0$. A dóua valóre convine problemei, éră cea d'ântâiŭ trebue lăsata la o parte.

Dacă $a>b$, $\sin a<\sin b$, căci a şi b sunt in cadranulŭ al doilea. Formula (a) ne dă atunci : $\sin B>\sin A$, $M>A$ şi $M'>A$. Diferinţele $A-M$ şi $A-M'$ fiind negative, pe când $a-b$ este positivŭ, nu avem nici o soluţiune.

Dacă $a=b$, avem incă: $\sin B=\sin A$, $M=A$ şi $M'>A$. Diferinţele $A-M$ şi $a-b$ se reducŭ la zero, pe când $A-M'$ este negativă: nu este nici o soluţiune.

Discuţiunea hipoteselorŭ $A=90^0$ şi $A>90^0$ se face cu totulŭ in acelaşiŭ modŭ, şi de aceea nu vom insista asupra ei; ne mulţămimŭ numai a insera resultatele in următorulŭ tabelŭ :

$$A<90^0\begin{cases} b<90^0\begin{cases} a<b \dots\dots\dots & 2 \text{ soluţiuni;}\\ a=b \dots\dots\dots & 1 \text{ soluţiune;}\\ a>b,\ a+b<180^0 \dots & 1 \text{ soluţiune;}\\ a<b,\ a+b = \text{seu} > 180^0. & 0 \text{ soluţiuni;}\end{cases}\\ b=90^0\begin{cases} a<b \dots\dots\dots & 2 \text{ soluţiuni;}\\ a=\text{seu}>b \dots\dots & 0 \text{ soluţiuni;}\end{cases}\\ b>90^0\begin{cases} a<b,\ a+b<180^0 \dots & 2 \text{ soluţiuni;}\\ a<b,\ a+b=\text{séu}>180^0. & 1 \text{ soluţiune;}\\ a=\text{séu}>b \dots\dots & 0 \text{ soluţiuni;}\end{cases}\end{cases}$$

$$
A = 90^0 \begin{cases}
b < 90^0 \begin{cases} a = \text{seu} < b \;.\;.\;.\;.\;.\;. & \text{0 soluţiuni;} \\ a > b,\ a + b < 180^0 \;.\;. & \text{1 soluţiune;} \\ a > b,\ a+b = \text{seu} > 180^0. & \text{0 soluţiuni;} \end{cases} \\[2ex]
b = 90^0 \begin{cases} a = b \;.\;.\;. \text{ o infinitate de soluţiuni;} \\ a < \text{seu} > b \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \text{0 soluţiuni;} \end{cases} \\[2ex]
b > 90^0 \begin{cases} a < b,\ a+b = \text{seu} < 180^0. & \text{0 soluţiuni;} \\ a < b,\ a + b > 180^0 \;.\;. & \text{1 soluţiune;} \\ a = \text{seu} > b \;.\;.\;.\;.\;.\;. & \text{0 soluţiuni;} \end{cases}
\end{cases}
$$

$$
A > 90^0 \begin{cases}
b < 90^0 \begin{cases} a = \text{seu} < b \;.\;.\;.\;.\;.\;. & \text{0 soluţiuni;} \\ a > b,\ a+b = \text{seu} < 180^0. & \text{1 soluţiune;} \\ a > b,\ a + b > 180^0 \;.\;. & \text{2 soluţiuni;} \end{cases} \\[2ex]
b = 90^0 \begin{cases} a = \text{seu} < b \;.\;.\;.\;.\;.\;. & \text{0 soluţiuni;} \\ a > b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & \text{2 soluţiuni;} \end{cases} \\[2ex]
b > 90^0 \begin{cases} a < b,\ a+b = \text{seu} < 180^0. & \text{0 soluţiuni;} \\ a < b,\ a + b > 180^0 \;.\;. & \text{1 soluţiune;} \\ a = b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & \text{1 soluţiune;} \\ a > b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & \text{2 soluţiuni;} \end{cases}
\end{cases}
$$

216. **Casulu VI.** *Dându-se dóuĕ unghiuri* A *şi* B *şi laturea* a *opusă la* A, *să se resolve triunghiulŭ.*

Vom calcula pe b prin formula

$$\sin b = \frac{\sin a \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}}, \tag{a}$$

şi apoi calculămŭ pe C şi c prin analogiile lui Napier:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\mathrm{C}}{2} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}\cot\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}\cot\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}, \\ \operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \frac{\cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}} = \frac{\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

217. Formula (a) determinândŭ pe b prin sinusulŭ sĕu, dă dóuĕ valori pentru b: m şi m', ast-fel că $m+m'=180^0$. Insă fiind-că noi căutămŭ numai valorile elementelor coprinse intre 0^0 şi 180^0, trebue ca espresiunea lui $\operatorname{tg}\frac{\mathrm{C}}{2}$ şi $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, dată de formulele ($b$), să fie positivă, şi pentru acésta, trebue ca diferinţele $a-b$ şi $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ se fie de acelaşiŭ semnŭ. Prin urmare din cele dóuĕ valori găsite pentru b, nu vom admite de cât pe acelea cari vor implini acéstă condiţiune. Cu modulŭ acesta vom cunósce numĕrulŭ soluţiunilorŭ reale ale problemei.

Discuţiunea completă a formulelorŭ (a) şi (b) se face intocmai ca şi pentru casulŭ precedinte *215; aceea nu vom mai reveni asupra ei.

218. Elementele C şi c se potŭ determina şi directŭ prin formulele

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

$$\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A.$$

Punêndŭ in prima din aceste formule

$$\cot \psi = \cos a \,\mathrm{tg} B$$

şi in a dóua

$$\cot \varphi = \frac{\cot a}{\cos B},$$

ele devinŭ, dupĕ nisce transformări analóge cu cele de la casulŭ precedinte:

$$\sin(C - \psi) = \frac{\cos A \sin \psi}{\cos B},$$

$$\sin(c - \varphi) = \sin \varphi \cot A \,\mathrm{tg} B.$$

In aceste formule, fiind-că $\sin\psi$ şi $\sin\varphi$ sunt positive, $\sin(C - \psi)$ va fi positivŭ, adică $C > \psi$, dacă $\cos A$ şi $\cos B$ sunt de acelaşiŭ semnŭ; şi $\sin(C - \psi)$ va fi negativŭ, adecă $C < \psi$, dacă $\cos A$ şi $\cos B$ sunt de semne contrarie. Asemenea $\sin(c - \varphi)$ este positivŭ, şi prin urmare $c > \varphi$, dacă $\cot A$ şi $\mathrm{tg} B$ sunt de acelaşiŭ semnŭ, şi $\sin(c - \varphi)$ este negativŭ, adecă $c < \varphi$, in casulŭ contrariŭ.

Din acestea resultă că diferenţele $c - \varphi$ şi $C - \psi$ sunt tot d'a-una de acelaşiŭ semnŭ : positivŭ dacă A şi B sunt tot de o dată superióre sau inferióre lui 90°, negativŭ dacă unulŭ e mai mare şi altulŭ mai micŭ de 90°.

ESEMPLE

Casulŭ I.

Date

$a = 84^0 19' 34'',2;$

$b = 68^0 29' 7'',6.$

$c = 108^0 34', 17'', 0.$

Formule.

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

Necunoscute

$A = 75^0 50' 40'',58;$

$B = 65^0 1' 42'',32;$

$C = 112^0 31', 52'',92;$

$\varepsilon = 73^0 24' 15'',72.$

Calcululŭ lui A.

$$\begin{aligned}
\log\sin(p-b) &= \bar{1},9467618\\
\log\sin(p-c) &= \bar{1},5758220\\
-\log\sin p &= 0,1201984\\
-\log\sin(p-a) &= 0,1404087\\
\hline
2\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \bar{1},7831909\\
\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \bar{1},8915955\\
A &= 75^{0}50'40'',58.
\end{aligned}$$

Calcululŭ luĭ B.

$$\begin{aligned}
\log\sin(p-a) &= \bar{1},8595913\\
\log\sin(p-c) &= \bar{1},5758220\\
-\log\sin p &= 0,1201984\\
-\log\sin(p-b) &= 0,0532382\\
\hline
2\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \bar{1},6088499\\
\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \bar{1},8044250\\
B &= 65^{0}1'42'',32.
\end{aligned}$$

Calcululŭ lui C.

$$\log\sin(p-a)=\bar{1},8595913$$

$$\log\sin(p-b)=\bar{1},9467618$$

$$-\log\sin p=0,1201984$$

$$-\log\sin(p-c)=0,4241780$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=0,3507295$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=0,1753648$$

$$C=112^{0}31'52'',92.$$

Calcululŭ lui ε.

$$\log\operatorname{tg}\frac{p}{2}=0,3382048$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}=\bar{1},6316897$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}=\bar{1},7805410$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}=\bar{1},2910763$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\bar{1},0415118$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\bar{1},5207559$$

$$\varepsilon=73^{0}24'15'',72.$$

VERIFICARE

$$A+B+C-180^0=\varepsilon=73^0 24' 15'',82 \text{ (dif. totală } 0'',1).$$

Casulŭ II.

Date

$$A=98^0 32' 28'',6;$$

$$B=83^0 25' 10'',4;$$

$$C=113^0 39' 51'',6.$$

Formule

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}.$$

Necunoscute

$$a=102^0 20' 39'',48;$$

$$b=78^0 54' 38'',54;$$

$$c=115^0 12' 26'',66.$$

Calcululŭ lui a.

$$
\begin{aligned}
\log\sin\frac{\varepsilon}{2} &= \overline{1},9275295\\
\log\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right) &= \overline{1},8145659\\
-\log\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right) &= 0,3643198\\
-\log\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right) &= 0,0821859\\
\hline
2\log\operatorname{tg}\frac{a}{2} &= 0,1886011\\
\log\operatorname{tg}\frac{a}{2} &= 0,0943005\\
a &= 102^{0}20'39'',48.
\end{aligned}
$$

Calcululŭ lui b.

$$
\begin{aligned}
\log\sin\frac{\varepsilon}{2} &= \overline{1},9275295\\
\log\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right) &= \overline{1},6356802\\
-\log\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right) &= 0,1854341\\
-\log\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right) &= 0,0821859\\
\hline
2\log\operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \overline{1},8308297\\
\log\operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \overline{1},9154149\\
b &= 78^{0}54'38'',54.
\end{aligned}
$$

Calcululŭ lui c.

$$\log\sin\frac{\varepsilon}{2}=\overline{1},9275295$$

$$\log\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\overline{1},9178141$$

$$-\log\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,1854341$$

$$-\log\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,3643198$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=0,3950975$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=0,1975488$$

$$c=115^{0}12'26'',66.$$

Casulŭ III.

Date

$$a=53^{0}15'28'',4\,;$$

$$b=44^{0}43'52'',0\,;$$

$$C=73^{0}20'48'',6.$$

Formule

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2};$$

Necunoscute

$$A=71^{0}26'0'',80;$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2};$$

$$B=56^0 21' 41'',66;$$
$$c=54^0 5' 1'',70.$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

Calcululŭ lui $A+B$.

$$\log\cos\frac{a-b}{2}=\overline{1},9987966$$
$$\log\cot\frac{C}{2}=0,1280446$$
$$-\log\cos\frac{a+b}{2}=0,1830091$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=0,3098503$$
$$A+B=127^0 47' 42'',46.$$

Calcululŭ lui $A-B$.

$$\log\sin\frac{a-b}{2}=\overline{2},8712315$$
$$\log\cot\frac{C}{2}=0,1280446$$
$$-\log\sin\frac{a+b}{2}=0,1222563$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\overline{1},1215324$$
$$A-B=15^0 4' 19'',14.$$

Calcululŭ lui *A* și *B*.

$$A+B=127^0 47'42'',46$$
$$A-B=15^0 4'19'',14$$

$$A=71^0 26'0''.80$$
$$B=56^0 21'41'',66.$$

Calcululŭ lui *c*.

$$\log\sin\frac{A+B}{2}=\overline{1},9532807$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\overline{2},8724349$$
$$-\log\sin\frac{A-B}{2}=0,8822351$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\overline{1},7079507$$
$$c=54^0 5'1'',70.$$

CALCULULŬ DIRECTŬ AL LUI *c*.

Formule

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}b\cos C;$$
$$\cos c=\frac{\cos b\cos(a-\varphi)}{\cos\varphi}$$

Calcululŭ lui φ.

$$\log\operatorname{tg}b=\overline{1},9959236$$
$$\log\cos C=\overline{1},4572421$$

$$\log\operatorname{tg}\varphi=\overline{1},4531657$$
$$\varphi=15^0 50'57'',31.$$

Calcululŭ lui c.

$$\log\cos b = \overline{1},8515136$$

$$\log\cos(a-\varphi) = \overline{1},8999971$$

$$-\log\cos\varphi = 0,0168323$$

$$\log\cos c = \overline{1},7683430$$

$$c = 54^0 5' 1'',72 (\text{diff. } 0'',02).$$

Casulŭ IV.

Date

$$A = 128^0 23' 5'',8;$$

$$B = 74^0 0' 0'',0;$$

$$c = 38^0 48' 22'',2.$$

Formule.

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}.$$

Necunoscute.

$$a = 75^0 25' 9'',28;$$

$$b = 59^0 48' 16'',42.$$

$$C = 38^0 43' 2'',24.$$

Calcululŭ lui $a+b$.

$$\log\cos\frac{A-B}{2}=\bar{1},9650081$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\bar{1},5468092$$

$$-\log\cos\frac{A+B}{2}=0,8733622$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=0,3851795$$

$$a+b=135^0\,13'\,25'',70.$$

Calcululŭ iui $a-b$.

$$\log\sin\frac{A-B}{2}=\bar{1},5863451$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\bar{1},5468092$$

$$-\log\sin\frac{A+B}{2}=0,0039260$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\bar{1},1370803$$

$$a-b=15^0\,36'\,52'',86.$$

Calcululŭ lui a şi b.

$$a+b=135^0 13' 25'',70$$
$$a-b=15^0 36' 52'',86$$

$$a=75^0 25' 9'',28$$
$$b=59^0 48' 16'',42.$$

Calcululŭ lui C.

$$\log\sin\frac{a+b}{2}=\overline{1},9659657$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\overline{1},6213370$$
$$-\log\sin\frac{a-b}{2}=0,8669642$$

$$\log\cot\frac{C}{2}=0,4542669$$
$$C=38^0 43' 2'',24.$$

CALCULULŬ DIRECTŬ AL LUI C.

Formule.

$$\cot\varphi=\operatorname{tg}B\cos c\,;$$
$$\cos C=\frac{\cos B\sin(A-\varphi)}{\sin\varphi},$$

Calcululŭ lui φ.

$$\log \operatorname{tg} B = 0{,}5719475$$
$$\log \cos c = 1{,}8916883$$
$$\log \cot \varphi = 0{,}4636358$$
$$\varphi = 18^0\, 58'\, 31'', 22.$$

Calcululŭ lui C.

$$\log \cos B = \overline{1}{,}4129962$$
$$\log \sin (A - \varphi) = \overline{1}{,}9913315$$
$$-\log \sin \varphi = 0{,}4879013$$
$$\log \cos C = \overline{1}{,}8922290$$
$$C = 38^0\, 43'\, 2'', 33 \text{ (dif. } 0'', 09).$$

Casulŭ V.

Date.

$$a = 105^0\, 31'\, 42'', 3;$$
$$b = 83^0\, 43'\, 13'', 5;$$
$$A = 113^0\, 38'\, 15'', 4.$$

Formule.

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a};$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \cot \frac{A-B}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}.$$

Necunoscute

1ª soluţie	2ª soluţie
$B' = 70^0 55' 36'',16;$	$B'' = 109^0 4' 23'',84;$
$C' = 51^0 46' 54'',16;$	$C'' = 156^0 16' 53'',52;$
$c' = 55^0 43' 16'',98.$	$c'' = 154^0 58' 20'',68.$

Calcululŭ lui B.

$$\begin{array}{r} \log \sin b = \overline{1}.9973864. \\ \log \sin A = \overline{1},9619427 \\ -\log \sin a = 0,0161493 \\ \hline \log \sin B = \overline{1},9754784 \end{array}$$

1ª soluţie	2ª soluţie
$B' = 70^0 55' 36'',16.$	$B'' = 109^0 4' 23'',84;$

Calcululŭ lui C'.

$$\begin{array}{r} \log \sin \frac{a-b}{2} = \overline{1},2768385 \\ \log \cot \frac{A-B'}{2} = 0,4078244 \\ -\log \sin \frac{a+b}{2} = 0,0014161 \\ \hline \log \operatorname{tg} \frac{C'}{2} = \overline{1},6860790 \end{array}$$

$$C' = 51^0 46' 54'',16.$$

Calcululŭ lui C''

$$\log\sin\frac{a-b}{2}=\bar{1},2768385$$
$$\log\cot\frac{A-B''}{2}=\bar{1},3995467$$
$$-\log\sin\frac{a+b}{2}=0,0014161$$

$$\log\mathrm{tg}\frac{C''}{2}=0,6778013$$
$$C''=156^0 16' 53'',12.$$

Calcululŭ lui c'.

$$\log\sin\frac{A+B'}{2}=\bar{1},9996554$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}=\bar{1},2847511$$
$$-\log\sin\frac{A-B'}{2}=0,4387163$$

$$\log\mathrm{tg}\frac{c'}{2}=\bar{1},7221228$$
$$c'=55^0 43' 16'',98.$$

Calcululŭ lui c''.

$$\log\sin\frac{A+B''}{2}=\bar{1},9691079$$
$$\log\mathrm{tg}\frac{a-b}{2}=\bar{1},2847511$$
$$-\log\sin\frac{A-B''}{2}=1,3998912$$

$$\log\mathrm{tg}\frac{c''}{2}=0,6537502$$
$$c''=154^0 58' 20'',68.$$

CALCULULŬ DIRECTŬ ALŬ LUI C' ŞI C''

Formule

$$\cot\psi = \cos b \operatorname{tg} A;$$

$$\cos(\psi - C) = \cot a \cos\psi \operatorname{tg} b.$$

Calcululŭ lui ψ.	Calcululŭ lui C.
$\log\cos b = \overline{1},0389384$	$\log\cot a = \overline{1},4438241$
$\log\operatorname{tg} A = 0,3588520$	$\log\cos\psi = \overline{1},3846347$
$\log\cot\psi = \overline{1},3977904$	$\log\operatorname{tg} b = 0,9584480$
$\psi = 104^\circ 1'53'',76.$	$\log\cos(\psi - C) = \overline{1},7869068.$

1ª soluţie

$$\psi - C' = 52^\circ 14' 59'',56$$

$$C' = 51^\circ 46' 54'',20 \text{ (dif. } 0'',04).$$

2ª soluţie

$$C'' - \psi = 52^\circ 14' 59'',56$$

$$C'' = 156^\circ 16' 53'',32 \text{ (dif. } 0'',20).$$

CALCULULŬ DIRECTŬ AL LUI c' ŞI c''.

Formule

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} b \cos A;$$

$$\cos(c - \varphi) = \frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b}.$$

Calcululŭ lui φ.	Calcululŭ lui c.
$\log \mathrm{tg} b = 0,9584480$	$\log \cos a = \overline{1},4276747$
$\log \cos A = \overline{1},6030908$	$\log \cos \varphi = \overline{1},4226919$
$\log \mathrm{tg} \varphi = 0,5615388$	$-\log \cos b = 0,9610616$
$\varphi = 105^0 20' 48'',78.$	$\log \cos(c-\varphi) = \overline{1},8114282.$

1ª soluție

$$\varphi - c' = 49^0 37' 31'',78;$$

$$c' = 55^0 43' 17'',00 \text{(diff. } 0'',02).$$

2ª soluție

$$c'' - \varphi = 49^0 37' 31'',78;$$

$$c'' = 154^0 58' 20'',56 \text{(diff. } 0'',12).$$

Casulŭ VI.

Date

$$A = 65^0 15' 32'',4;$$
$$B = 58^0 23' 48'',6;$$
$$a = 73^0 42' 8'',2.$$

Formule

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A},$$

$$\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \cot\frac{A-B}{2};$$

Necunoscŭte.

$$b = 64^0 10' 13'',69;$$
$$C = 112^0 5' 14'',68.$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.\qquad c=101^0 41' 17'',44.$$

Calcululŭ lui *b*.

$$\begin{aligned}\log\sin a &= \overline{1},9821882\\ \log\sin B &= \overline{1},9302856\\ -\log\sin A &= 0,0418143\\ \hline \log\sin b &= \overline{1},9542881\\ b &= 64^0 10' 13'',69.\end{aligned}$$

Calcululŭ lui *C*.

$$\begin{aligned}\log\sin\frac{a-b}{2} &= \overline{2},9195219\\ \log\cot\frac{A-B}{2} &= 1,2221718\\ -\log\sin\frac{a+b}{2} &= 0,0300337\\ \hline \log\operatorname{tg}\frac{C}{2} &= 0,1717274\\ C &= 112^0 5' 14'',68.\end{aligned}$$

Calcululŭ lui c.

$$\log\sin\frac{A+B}{2}=\bar{1},9452389$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\bar{2},9210260$$
$$-\log\sin\frac{A-B}{2}=1,2229509$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2}=0,0892158$$
$$c=101^{0}41'17'',44.$$

CALCULULŬ DIRECTŬ AL LUI C.

Formule.

$$\cot\psi=\cos a\operatorname{tg}B;$$
$$\sin(C-\psi)=\frac{\cos A\sin\psi}{\cos B}.$$

Calcululŭ lui ψ.

$$\log\cos a=\bar{1},4481319$$
$$\log\operatorname{tg}B=0,2109270$$

$$\log\cot\psi=\bar{1},6590589.$$
$$\psi=65^{0}28'56'',38.$$

Calcululŭ lui C.

$$\log\cos A=\bar{1},6217132$$
$$\log\sin\psi=\bar{1},9589618$$
$$-\log\cos B=0,2806414$$

$$\log\sin(C-\psi)=\bar{1},8613164$$
$$C-\psi=46^{0}36'18'',14$$
$$C=112^{0}5'14'',52.$$
(dif. 0'', 16).

CALCULULŬ DIRECTŬ AL LUI c.

Formule.

$$\cot\varphi = \frac{\cot a}{\cos B};$$

$$\sin(c-\varphi) = \sin\varphi \cot A \operatorname{tg}B.$$

Calcululŭ lui φ.

$$\log\cot a = \overline{1},4659437$$
$$-\log\cos B = 0,2806414$$

$$\log\cot\varphi = \overline{1},7465851$$
$$\varphi = 60^0\,50'\,28'',47.$$

Calcululŭ lui c.

$$\log\sin\varphi = \overline{1},9411500$$
$$\log\cot A = \overline{1},6635274$$
$$\log\operatorname{tg}B = 0,2109270$$

$$\log\sin(c-\varphi) = \overline{1},8156044$$
$$c-\varphi = 40^0\,50'\,48'',85$$
$$c = 101^0\,41'\,17'',32$$

(dif. $0''$, 12).

ESPRESIUNEA IN LUNGIME A LATURILORŬ

219. Pênă acum laturile a, b, c ale unui triunghiŭ sfericŭ au fost tot-d'a-una esprimate in grade, minute şi secunde, şi raḑa sferei a fost tot-d'a-una presupusă egală cu unitatea. Se póte insĕ calcula şi *lungimea lineară* a unei laturi, dacă se cunósce numĕrulŭ de grade conţinutŭ intr'ênsa, şi lungimea raḑei R a sferei.

Fie l lungimea unui arcŭ de $1''$ dintr'o circumferinţă a căriĭ raḑă este 1; fie incă a^0 numĕrulŭ de secunde conţinutŭ in unŭ arcŭ de cercŭ mare al unei sfere cu raḑă R, şi a lungimea lui lineară; éră l' lungimea unui arcŭ de $1''$ din o circomferinţă tot cu raḑa R. Dupĕ geometrie avemŭ:

$$\frac{l'}{l}=\frac{\mathrm{R}}{1},\ \text{san: } l'=\mathrm{R}l;$$

insĕ

$$a=a^0 l';$$

deci

$$a=a^0\mathrm{R}l.$$

Valórea lui $\sin l = \sin 1''$ diferă aşa de puţinŭ de valórea l a arcului de $1''$, incât primele şapte ḑecimale ale lui $\log\sin l$ sunt identice cu cele şapte ḑecimale de la inceputulŭ lui $\log l$; prin urmare in calculele logaritmice, unde nu se intrebuinţéḑă de cât logaritmiĭ cu şapte ḑecimale, putemŭ presupune că

$$\sin l = l,$$

şi atunci

$$a = a^0 R \sin l,$$

sau

$$a = a^0 R \sin 1'', \quad (1)$$

care ne dă lungimea laturei când cunóscemŭ numĕrulŭ de secunde conţinutŭ intr'ênsa. De aci tragemŭ:

$$a^0 = \frac{a}{R \sin 1''}, \quad (2)$$

care dă numĕrulŭ de secunde al unei laturi, dacă cunóscemŭ lungimea sa lineară.

Esemple. 1°. Date: $a^0 = 34°18'52'',1$; $R = 8^m,352$.

Necunoscuta: $a = 5^m,002$.

2° Date: $a = 25^m,722$; $R = 18^m,513$.

Necunoscuta: $a^0 = 79°36'24'',7$.

SUPRAFAŢA UNUI TRIUNGHIŬ SFERICŬ

220. Cunóscemŭ din geometria sferică espresiunea suprafeţeĭ S a unui triunghiŭ sfericŭ:

$$S = T \frac{\varepsilon}{360^0},$$

in care T represintă jumĕtate din suprafaţa totală a sferei, şi ε escesulŭ sfericŭ. Insă $T = 2\pi R^2$; deci

$$S = \frac{\pi R^2 \varepsilon}{180^0}.$$

Dacă prefacemŭ pe ε şi 180^0 in secunde, fiindcă π esprimă lungimea unei semicircomferinţe cu raḑa 1*4, câtulŭ $\frac{\pi}{180^0} = \frac{\pi}{648000''}$ este lungimea arcului de $1''$, care am vĕḑutŭ *219 că este egalŭ cu $\sin 1''$.

Punêndŭ acéstă valóre in formula din urmă, obţinemŭ:

$$S = R^2 \varepsilon \sin 1'', \tag{3}$$

in care trebue se nu perdemŭ din vedere că ε esprimă numĕrulŭ de secunde coprinsŭ in escesulŭ sfericŭ.

Esemplu. Date: $R = 486^m,5$; $\varepsilon = 84^0 13' 28'',4$

$= 303208'',4.$

Necunoscuta: $S = 347921^{mp},84.$

CAPITOLULŬ III.

ESERCIŢIĬ ŞI APLICAŢIUNI.

221. *Se se resolve unŭ triunghiŭ sfericŭ in care se cunosc o lature* a, *unghiulŭ opusŭ* A *şi suma sau diferinţa celor-alte dóuĕ laturi* b *şi* c.

Dacă se dă a, A, $b+c$, vom determina unghiurile necunoscute B şi C prin a treia şi a patra din formulele lui Delambre * **180**:

$$\cos\frac{B+C}{2}=\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\sin\frac{A}{2},$$

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\sin\frac{A}{2},$$

cari ne dau suma $B+C$ şi diferinţa $B-C$; prin urmare chiar pe B şi C.

Laturile b şi c le vom calcula in urmă prin formulele:

$$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin a}{\sin A}, \quad \frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\sin a}{\sin A}.$$

Dacă se dă a, A, $b-c$, unghiurile B şi C se vor determina prin primele dóuĕ formule ale lui Delambre:

$$\sin\frac{B+C}{2}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\cos\frac{A}{2},$$

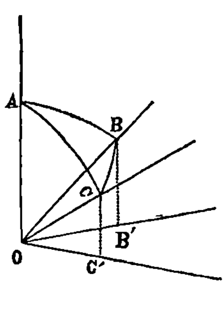
$$\sin\frac{B-C}{2}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cos\frac{A}{2}.$$

Laturile b şi c se determină apoi in acelaşiŭ modŭ ca şi mai susŭ.

Esemplu. Date: $a=64^0 28' 33'',4$; $A=76' 3' 51'',2$; $b+c=98^0 34' 13'',6$.

Necunoscute: $B=90^0 32' 12'',72$; $C=32^0 43' 40'',98$; $b=68^0 23' 34'',04$; $c=30^0 10' 39'',53$.

(Fig. 67)



222. *Să se reducă unŭ unghiŭ la orizontŭ.*

Unŭ observatorŭ O mĕsóră unghiulŭ BOC alŭ radelorŭ visuale duse la dóuĕ objecte B şi C, ungiulŭ BOC nefiindŭ in unŭ planŭ orizontalŭ (fig. 67). In aplicaţiuni însă este maĭ tot-d'a-una necesariŭ a se cunósce, nu insuşi unghiul BOC, ci proiecţia B'OC' a acestui unghiŭ pe unŭ planŭ orizontalŭ. Acéstă projecţie se numesce *unghiulŭ redusŭ la orizontŭ*.

Pentru a se reduce unghiulŭ BOC la orizontŭ, se mĕsóră şi unghiurile AOB, AOC ce facŭ radele visuale duse la cele dóuĕ objecte considerate cu verticala AO. Imaginându-ne apoi o sferă cu raḑa 1 şi cu centrulŭ in O, acéstă sferă va tăia feţele triedrului OABC după arcele AB,BC,AC, cari forméză unŭ triunghiŭ sfericŭ, al cărui unghiŭ A are dreptŭ unghiŭ planŭ cu care se mĕsóră chiar pe unghiulŭ căutatŭ B'OC'. Resolvândŭ dară triunghiulŭ ABC* **205**, in care se cunósce AB = AOB, AC = AOC, BC = BOC, tóte quantităţi mĕsurate, vom puté calcula unghiulŭ A.

Reducerea unghiurilorŭ la orizontŭ nu se mai face astăḑi prin calculŭ, căci cu teodolitulŭ se póte mĕsura directŭ unghiulŭ B'OC'.

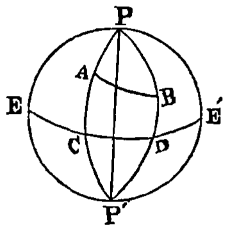
Esemplu. Date : $BOC = 49^\circ 28' 31''$;
$BOA = 78^\circ 35' 8''$; $COA = 82^\circ 51' 43''$.
Necunoscuta : $A = B'OC' = 50^\circ 0' 1'' 8,$.

223. *Cunoscêndŭ longitudinea şi latitudinea a dóuĕ locuri de pe suprafaţa pămêntului, să se calculeḑe distanţa intre aceste dóuĕ puncte.*

Fie P şi P' cei doi poli ai pămêntuluĭ, PEP'E' primulŭ meridianŭ, spre esemplu celŭ care trece prin

Paris, EE′ equatorulŭ, A şi B punctele considerate. Se dă:

(Fig. 68).



pentru A, longitudinea $L = EPC$, şi latitudinea $l = AC$; (fig. 68).
pentru B, longitudinea $L' = EPD$ şi latitudinea $l' = BD$.

In triunghiulŭ sfericŭ APB se cunósce dară unghiulŭ $APB = L' - L$, laturea $AP = 90^0 - l$, şi $BP = 90^0 - l'$. Putemŭ dară resolva triunghiul * **207** şi calcula laturea cerută AB.

Lungimea lineară a lui AB s'ar puté găsi prin formula (1) * **219**; insĕ in casulŭ acesta putemŭ se reducemŭ acea formulă in modulŭ următorŭ.

Formula

$$\frac{AB}{180^0} = \frac{l}{\pi},$$

in care AB este numĕrulŭ de secunde conţinutŭ ïn distanţa de la A la B, l lungimea lineară a lui AB şi π lungimea semicircomferinţei, dă:

$$l = \frac{\pi AB}{180^0},$$

şi fiind-că:

$$180^0 = 648000'',$$

şi pentru pămêntŭ

$$\pi = 20000^{kmt},$$

avemŭ:

$$l = \frac{20000^{kmt}}{648000} \times AB = \frac{10^{kmt}}{324} \times AB.$$

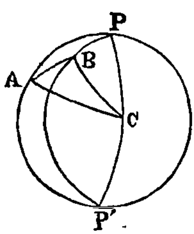
Esemplu. Date: Bucuresci $\frac{\text{lat. } 44^o 25' 39'' N.}{\text{Long. } 23^o 46' 12''' \text{est}}$,

Paris $\frac{\text{lat. } 48^o 50' 11'' N.}{\text{Long. } 0^o 0' 0''}$.

Necunoscuta: $AB = 16^o 49' 48', 91 = 1870^{kmt}, 028$.

224. *Dându-se longitudinile şi latitudinile a trei puncte,* A, B, C, *de pe suprafaţa pământului, se se calculeçe suprafaţa triunghiului sfericŭ* ABC, *formatŭ de aceste puncte.*

(Fig. 69).



Vom calcula laturile AB, BC, AC ale triunghiului ABC după metóda dată la problema precedinte, şi apoi escesulŭ sfericŭ prin formula (10)*183. (fig. 69). Atunci relaţiunea (3)*220 ne va da suprafaţa căutată, sciindŭ că pentru pămêntŭ $R = 6377398^m$.

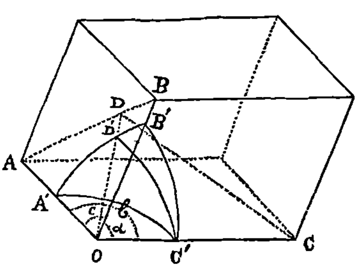
Esemplu. Date: Jassy $\frac{\text{lat. } 47^0 10' 24'' N.}{\text{Long. } 25^0 15' 45'' \text{est}}$;

Londra $\frac{\text{lat. } 51^0 30' 49'' N}{\text{Long. } 2^0 25' 57'' \text{vest}}$; Petersb, $\frac{\text{lat. } 59^0 56' 30'' N}{\text{Long. } 27^0 58' 13'' \text{est}}$.

Necunoscute: $JL=18^{0}26'17'',43$; $JP=12^{0}51'59'',38$; $LP=18^{0}51'19'',73$; $\varepsilon=1^{0}59'9'',03=7149'',03$; $S=1409643^{kmp},181818$.

225. *Se se calculeḑe volumulŭ unui paralepipedŭ, cunoscêndŭ lungimea celorŭ trei muchiĭ ale unuia din unghiurile sale solide, și unghiurile ce aceste muchiĭ fac intre ele.*

Fie $OA=\alpha$, $OB=\beta$, $OC=\gamma$ lungimile celorŭ trei



muchiĭ date, cari tóte concură in punctulŭ O; $BOC=a$, $AOC=b$, $AOB=c$ unghiurile ce aceste muchiĭ facŭ una cu alta.

Lăsândŭ din C perpendiculara CD pe fața AB, volumulŭ paralepipedului este :

$$V=\text{paralelogramŭ } AB\times CD. \tag{a}$$

Insĕ

$$\text{paralelogramŭ } AB=2ABO=2\frac{\alpha\beta\sin c}{2}=\alpha\beta\sin c. \tag{b}$$

Triunghiulŭ dreptunghiŭ CDO dă :

$$CD=CO\sin COD=\gamma\sin COD \tag{c}$$

Ne imaginămŭ o sferă cu centrulŭ in O și cu raḑa 1, care taie fețele triedrului OADC dupe arcele A'D', D'C', A'C'. Triunghiulŭ sfericŭ A'D'C' este dreptunghiŭ in D′, căci CD fiind perpendiculară pe faţa AB, şi planulŭ CDO, care trece prin CD, va fi perpendicularŭ pe acea faţa. Prin urmare, dupĕ proprietăţile triunghiurilorŭ sferice dreptunghie*,**164**(6),

$$\sin C'D' = \sin A'C' \sin A',$$

saŭ:

$$\sin COD = \sin b \sin A',$$

orĭ

$$\sin COD = 2\sin b \sin\frac{A'}{2}\cos\frac{A'}{2}.$$

Prelungindŭ arculŭ A′D′ pênă in B′ şi unindŭ B′ cu C′ prin unŭ arcŭ descrisŭ din O ca centru, in triunghiulŭ sfericŭ A′B′C′ avem: $B'C' = a$, $A'C' = b$, $A'B' = c$; punêndŭ dară in locŭ de $\sin\frac{A'}{2}$ şi de $\cos\frac{A'}{2}$ valórea lorŭ dată prin equaţiunile (1) şi (2)*,**178**,

$$\sin COD = 2\sin b\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin^2 b \sin^2 c}}$$

$$= 2\frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin c}.$$

Substituindŭ acéstă valóre în (c),

$$CD = 2\gamma\frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin c}.$$

Acéstă valóre a lui CD, precum şi valórea lui AB dată de (b), o introducemŭ in (a), şi atunci

$$V = 2\alpha\beta\gamma\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}.$$

Esemplu. Date: $\alpha = 15^m,38$; $\beta = 21^m,13$; $\gamma = 18^m,72$; $a = 63^0 13' 29''$; $b = 52^0 38' 32''$; $c = 79^0 25' 15''$.

Necunoscuta: $V = 4282^{mc},4833$.

FINE.