АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ УРАВНЕНІЯ, РАЗРѢШИМЫЯ ВЪ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЯХЪ.

Л. К. Лахтина.

(Читано въ засѣданіяхъ Математическаго Общества 15 сентября и 20 октября 1892 года).

Введеніе.

Послѣ того, какъ Абель строго доказалъ невозможность рѣшенія въ радикалахъ алгебраическихъ уравненій 5-ой и высшихъ степеней общаго вида, всѣ усилія математиковъ въ области высшей алгебры должны были направиться по двумъ путямъ:

1) къ нахожденію по возможности всѣхъ видовъ алгебраическихъ уравненій, разрѣшимыхъ въ радикалахъ;

2) къ изслѣдованію корней алгебраическаго уравненія, какъ функцій его коэффиціентовъ.

Первое направленіе сохранило свой прежній характеръ—чисто алгебраическій.

Второе направленіе, созданное трудами Пюизе и Риманна, получило характеръ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго.

Когда трудами Риманна и его учениковъ уяснились съ замѣчательною полнотою свойства алгебраическихъ функцій, возникъ вопросъ о болѣе подробномъ изученіи отдѣльныхъ наиболѣе простыхъ алгебраическихъ уравненій.

Понятно, что послѣ изученныхъ еще Гауссомъ двучленныхъ уравненій стояло на очереди изученіе уравненій трехчленныхъ. Изученіе этихъ уравненій, начатое англійскими математиками: Гарлеемъ, Кели и Булемъ, было въ сравнительно недавнее время вполнѣ завершено профессоромъ П. А. Некрасовымъ.

Гарлей впервые обнаружилъ то свойство корней трехчленнаго уравненія, что они суть частные интегралы такъ называемыхъ двучленныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій *). Это обстоятельство интересно, между прочимъ, потому, что двучленныя линейныя дифференціальныя уравненія 2-го порядка—суть гипергеометрическія.

Рядомъ съ изученіемъ трехчленныхъ уравненій шло изученіе алгебраическихъ уравненій, появляющихся въ теоріи преобразованія эллиптическихъ функцій: уравненій модулярныхъ и уравненій множителя **). Эти замѣчательныя уравненія были найдены Якоби, въ честь котораго одинъ изъ классовъ относящихся сюда уравненій получилъ названіе класса уравненій Якоби (названіе, предложенное Бріоски).

---

*) Необходимо замѣтить, что Ланденъ еще въ 1755 году обратилъ вниманіе на то дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяютъ корни кубичнаго уравненія:

$$q = -(x^3 - px)$$

и изъ него получилъ формулу Кардана.

**) Извѣстно, что дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{Mdx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

только въ томъ случаѣ имѣетъ раціональный алгебраическій интегралъ вида:

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

когда λ и M суть нѣкоторыя алгебраическія функціи модуля k.

Уравненіе, связывающее между собою модули λ и k, называется модулярнымъ, а уравненіе, связывающее множитель M съ модулемъ k, называется уравненіемъ множителя.

Модулярныя уравненія были изучаемы весьма разносторонне. Между прочимъ Галуа нашелъ группу этихъ уравненій и доказалъ возможность понизить на единицу порядокъ модулярныхъ уравненій простыхъ степеней до 11-ой включительно.

Наиболѣе важный шагъ въ этой области сдѣлалъ Эрмитъ. Онъ сопоставилъ два уравненія 5-ой степени: уравненіе, получаемое пониженіемъ на единицу порядка модулярнаго уравненія 6-ой степени съ общимъ уравненіемъ 5-ой степени въ трехчленной формѣ Жеррарда. При этомъ Эрмитъ нашелъ, что всякое уравненіе 5-ой степени разрѣшимо въ модулярныхъ эллиптическихъ функціяхъ.

Послѣ опубликованія Эрмитомъ этихъ изслѣдованій въ 1858 году, Кронекеръ прислалъ Эрмиту письмо, въ которомъ говоритъ, что онъ уже работалъ въ этомъ направленіи и сообщаетъ ему въ краткихъ чертахъ результаты своихъ изслѣдованій *). Кронекеръ предложилъ рѣшеніе уравненія 5-ой степени, основанное на преобразованіи его въ уравненіе Якоби 6-ой степени.

Эти труды дали толчекъ къ разработкѣ вопроса въ томъ же направленіи, которымъ, кромѣ Кронекера, занялся Бріоски и цѣлый рядъ самыхъ выдающихся нѣмецкихъ математиковъ. Германскіе математики подошли, однако, къ этой области изслѣдованій совершенно иными соображеніями.

Необходимо замѣтить, что самъ Эрмитъ, сдѣлавъ такое важное открытіе въ высшей алгебрѣ, не оцѣнилъ его значенія. Онъ сравниваетъ свое рѣшеніе уравненія 5-ой степени съ тригонометрическимъ рѣшеніемъ кубичнаго уравненія и полагаетъ, что его рѣшеніе даетъ возможность только *вычислять* корни уравненія 5-ой степени, но не выражать ихъ, какъ многозначныя функціи параметровъ уравненія **).

*) Письмо Кронекера приведено въ отдѣльной книгѣ, содержащей работы Эрмита: Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré. 1859.

**) «Au lieu de chercher à représenter par une formule radicale à determinations multiples le système des racines si étroitement liées entre elles lorsqu'on les considére comme fonctions des coefficients, on peut, ainsi que l'exemple en a été donné dans le troisième degré, chercher, en

Такой взглядъ Эрмита на рѣшеніе уравненія 5-ой степени едва ли можно назвать вѣрнымъ. Формула Эрмита, содержащая въ себѣ трансцендентныя функціи, выражаетъ всѣ корни уравненія 5-ой степени, какъ функціи его параметровъ въ томъ же самомъ смыслѣ, въ какомъ формула, содержащая въ себѣ радикалы, выражаетъ многозначную алгебраическую функцію.

Для уясненія обратимся къ простому примѣру. Извѣстно, что

$$\cos \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc} \cos z\right] = \sqrt{\frac{1+z}{2}}\,.$$

Ясно, что выраженіе, стоящее въ лѣвой части этого равенства и содержащее въ себѣ двѣ трансцендентныя функціи есть двухзначная алгебраическая функція вполнѣ тождественная съ

$$\sqrt{\frac{1+z}{2}}$$

и выражаетъ оба корня двучленнаго уравненія:

$$2y^2 = 1 + z.$$

Совершенно то же можно сказать о тригонометрическомъ рѣшеніи кубичнаго уравненія, которое Эрмитъ приводитъ въ видѣ примѣра: функція

---

introduisant des valeurs auxiliaires, à obtenir *les racines séparément exprimées par autant de fonctions distinctes* et uniformes relatives a ces nouvelles variables. Dans le cas, dont nous venons de parler, où il s'agit de l'équation:

$$x^3 - 3x + 2a = 0$$

il suffit, comme on sait, de représenter le coefficient a par le sinus d'un arc α pour que les racines se séparent en ces trois fonctions bien determinées:

$$2\sin\frac{\alpha}{3},\quad 2\sin\frac{\alpha+2\pi}{3},\quad 2\sin\frac{\alpha+4\pi}{3}».$$

Hermite. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré.

$$x = 2sin\frac{1}{3}\left[arc.\,sin\,a\right]$$

такъ же точно выражаетъ собою всѣ три корня кубичнаго уравненія

$$x^3 - 3x + 2a = 0,$$

какъ и формула Кардана.

То же самое относится и къ предложенному Эрмитомъ рѣшенію уравненія 5-ой степени. Разсматривая Эрмитово рѣшеніе уравненія 5-ой степени и два только что приведенныхъ примѣра трансцендентнаго рѣшенія алгебраическихъ уравненій, мы замѣчаемъ, что всѣ эти формулы имѣютъ одинаковый характеръ *): алгебраическая функція изображается въ видѣ комбинаціи двухъ трансцендентныхъ:

$$\Phi[f(z)].$$

При этомъ внутренняя функція f есть многозначная и всѣ значенія ея связаны между собою линейно. Такъ, въ первомъ примѣрѣ значенія ея таковы:

$$arc\,cos z,\ arc\,cos z + 2\pi,\ arc\,cos z + 4\pi, \ldots$$

Внѣшняя функція Φ есть однозначная функція. Она не мѣняется при нѣкоторыхъ изъ тѣхъ линейныхъ преобразованій, которыя связываютъ между собою значенія функціи f. Такъ, въ 1-мъ примѣрѣ имѣютъ мѣсто равенства:

$$cos\,\frac{1}{2}[arc\,cos z + 4\pi] = cos\,\frac{1}{2}[arc\,cos z],$$

$$cos\,\frac{1}{2}[arc\,cos z + 6\pi] = cos\,\frac{1}{2}[arc\,cos z + 2\pi]$$

и т. д.

---

*) Такой же характеръ имѣетъ рѣшеніе двучленнаго уравненія

$$y^n = z$$

при помощи логариѳмовъ и показательныхъ функцій:

$$y = e^{\frac{1}{n}\log z}$$

Въ рѣшеніи Эрмита внутренняя функція f есть величина

$$\omega = \frac{iK'}{K},$$

разсматриваемая, какъ функція величины $u = \sqrt[4]{k}$, гдѣ k— модуль эллиптическихъ интеграловъ. Величина ω есть многозначная функція, значенія которой связаны между собою линейно. Она представляется въ видѣ отношенія двухъ частныхъ интеграловъ того *гипергеометрическаго* уравненія, которому удовлетворяютъ полные эллиптическіе интегралы K и K'. Наружная функція Φ въ формулѣ Эрмита довольно сложная; она опредѣляется такъ:

$$\Phi(\omega) = \left[\varphi(5\omega) + \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right) - \right.$$

$$\left. - \varphi\left(\frac{\omega+4.16}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+2.16}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+3.16}{5}\right)\right],$$

гдѣ $\varphi(\omega)$ выражаетъ u, какъ функцію ω:

$$u = \varphi(\omega).$$

Функція Φ не мѣняется отъ цѣлаго ряда линейныхъ подстановокъ, связывающихъ между собою значенія многозначной функціи ω.

Въ результатѣ двухъ трансцендентныхъ операцій мы получаемъ пятизначную функцію

$$\Phi(\omega)$$

величины u.

Функціи однозначныя, не мѣняющіяся отъ нѣкоторыхъ линейныхъ подстановокъ, впослѣдствіи были названы Клейномъ *аутоморфными* функціями. Поэтому Эрмитово рѣшеніе уравненія 5-ой степени можно назвать рѣшеніемъ въ аутоморфныхъ и гипергеометрическихъ функціяхъ.

Интересна та особенность алгебраическихъ функцій, что одна и та же функція иногда можетъ быть выражена при помощи различныхъ комбинацій паръ трансцендентныхъ функцій, напримѣръ:

$$\Phi[f(z)] \text{ и } \Phi_1[f_1(z)].$$

Въ такомъ случаѣ возникаетъ вопросъ о *простѣйшемъ* выраженіи функціи.

Значительно позднѣе работы Эрмита Клейну удалось выразить корни уравненія 5-ой степени, выбравъ пару функцій Φ и f такъ, что f есть функція алгебраическая, значенія которой связаны между собою линейно, и имѣющая видъ отношенія двухъ гипергеометрическихъ функцій, а Φ—есть раціональная алгебраическая дробь.

Понятно, что это былъ второй наиболѣе важный шагъ въ теоріи уравненій 5-ой степени.

Нѣмецкіе математики, какъ я упомянулъ выше, подошли къ разсматриваемой нами задачѣ высшей алгебры, идя совершенно инымъ путемъ, нежели какимъ шелъ Эрмитъ.

Въ 1872 году Шварцъ напечаталъ въ журналѣ Крелля свои изслѣдованія о тѣхъ случаяхъ, когда гипергеометрическій рядъ изображаетъ собою алгебраическую функцію *).

Онъ былъ приведенъ къ этимъ работамъ своими предшествующими изслѣдованіями о подобномъ отображеніи; и благодаря этому работа его содержитъ въ себѣ замѣчательныя по простотѣ и изяществу геометрическія истолкованія особенностей изучаемыхъ имъ функцій.

Функціи, изучаемыя Шварцемъ, суть отношенія частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія и сами удовлетворяютъ нѣкоторому дифференціальному уравненію 3-го порядка нелинейному.

---

*) Schwarz. Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt. Журналъ Крелля, т. 75 или: Gesammelte mathematische Abhandlungen von H. A. Schwarz. Томъ II, стр. 211.

Введеніе этихъ новыхъ функцій было, несомнѣнно, важной заслугой Шварца, вслѣдствіе чего онѣ и получили названіе функцій Шварца.

Функція Шварца есть многозначная функція. Значенія ея связаны между собою линейно.

Каждое значеніе функціи Шварца отображаетъ какъ верхнюю, такъ и нижнюю полуплоскость независимаго перемѣннаго въ видѣ треугольника, ограниченнаго дугами круговъ. Два треугольника, соотвѣтствующіе двумъ половинамъ плоскости, между собою смежны и симметричны относительно общей стороны. Всѣ значенія функціи Шварца отображаютъ плоскость независимо перемѣннаго въ видѣ сѣти такихъ треугольниковъ. Сѣть эта можетъ покрывать собою или всю плоскость, или только часть ея. Въ послѣднемъ случаѣ сѣть заключена внутри круга конечныхъ размѣровъ и ортогональнаго ко всѣмъ дугамъ окружностей, служащимъ сторонами треугольниковъ сѣти.

Функціи, обратныя функціямъ Шварца, принадлежатъ къ числу аутоморфныхъ, т.-е. не мѣняются отъ нѣкоторой группы линейныхъ подстановокъ. Въ случаѣ, если сѣть функціи Шварца заключена внутри ортогональнаго круга, то точки этого круга всѣ служатъ существенно особыми точками соотвѣтствующей ей аутоморфной функціи; самый кругъ служитъ естественной границей функціи, за которую никакое аналитическое продолженіе функціи невозможно. Это — фактъ, съ которымъ встрѣтился еще Эрмитъ, но онъ не могъ объяснить его потому, что онъ не зналъ этихъ геометрическихъ истолкованій, найденныхъ Шварцемъ позднѣе работъ Эрмита.

Шварцъ въ своей работѣ обнаружилъ всѣ тѣ случаи, когда его функція есть функція алгебраическая, и указалъ, что вопросъ объ этихъ случаяхъ находится въ самой тѣсной связи съ вопросомъ о дѣленіи поверхности сферы на равныя части, а этотъ послѣдній вопросъ рѣшается очень просто при посредствѣ многогранниковъ. Поэтому самыя уравненія открытыя Шварцемъ, получили названія: двупирамидное, тетраэдрическое, октаэдрическое, икосаэдрическое.

Въ 1875 году Клейнъ, не зная, какъ онъ говоритъ самъ, о работѣ Шварца, напечаталъ статью «о бинарныхъ формахъ съ линейными преобразованіями въ себя самихъ» *). Въ этой работѣ Клейнъ исходитъ изъ геометрическихъ представленій. Онъ доказываетъ, что каждому повороту сферы Неймана соотвѣтствуетъ линейное преобразованіе плоскости. Благодаря этому онъ приводитъ задачу о группахъ линейныхъ подстановокъ къ задачѣ о группѣ поворотовъ сферы и, въ сущности тоже къ дѣленію сферы на равныя части при помощи вписанныхъ многогранниковъ.

Изучая коваріанты найденныхъ имъ *основныхъ формъ* (Grundformen), Клейнъ приходитъ къ нѣкоторымъ уравненіямъ 5-ой и 6-ой степени. Эти уравненія дали впослѣдствіи Клейну возможность найти рѣшеніе уравненія 5-ой степени общаго вида.

Въ 1876 году Фуксъ, продолжая цѣлую серію своихъ изслѣдованій о линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ, напечаталъ въ журналѣ Крелля мемуаръ «о линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ 2-го порядка, имѣющихъ алгебраическіе интегралы и объ одномъ новомъ приложеніи теоріи инваріантовъ» **). Онъ старается установить критерій для рѣшенія вопроса, не имѣетъ ли данное линейное дифференціальное уравненіе 2-го порядка алгебраическихъ интеграловъ. При этомъ Фуксъ обнаруживаетъ цѣлый рядъ свойствъ алгебраическихъ уравненій, корни которыхъ удовлетворяютъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ 2-го порядка, вводитъ понятіе о *первичныхъ формахъ* (Primformen) и изслѣдуетъ многія замѣчательныя свойства этихъ формъ. Эти формы суть ничто иное, какъ тѣ, которыя Клейномъ были названы основными формами.

---

*) Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Math. Annalen Bd. IX.

**) Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Crelles Journal. Bd. 81.

Классифицируя тѣ уравненія, которыя имѣютъ корнями частные интегралы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка, Фуксъ приходитъ къ тѣмъ же самымъ случаямъ, которые были указаны Шварцемъ.

Впослѣдствіи, когда эти изслѣдованія Фукса были пополнены трудами Жордана, напечатавшаго въ журналѣ Крелля обширныя изслѣдованія о линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ съ алгебраическимъ интеграломъ *) и работами Гордана, о которыхъ мы скажемъ ниже, Фуксъ напечаталъ второй мемуаръ, озаглавленный такъ же, какъ и первый и помѣщенный въ 85 томѣ журнала Крелля. Здѣсь онъ указываетъ между прочимъ способъ, какъ вычислить коэффиціенты алгебраическихъ уравненій изучаемаго имъ класса.

Послѣ работы Клейна, помѣщенной въ IX томѣ Математическихъ Анналъ, въ этомъ журналѣ появляется цѣлый рядъ изслѣдованій такого же характера и принадлежащихъ какъ самому Клейну, такъ и многочисленнымъ его ученикамъ. Эти работы въ началѣ носятъ на себѣ алгебраическій характеръ, но постепенно область этихъ работъ расширяется и такимъ образомъ создается обширная литература теоріи аутоморфныхъ функцій, до сихъ поръ еще далеко не завершенная. Благодаря этой литературѣ мы знакомимся съ цѣлымъ рядомъ свойствъ функцій новаго класса, охватывающаго собою весь классъ функцій двоякопеліодическихъ, какъ частный случай.

Имѣя въ виду задачу чисто алгебраическаго характера, я не останавливаюсь долѣе на этой весьма интересной литературѣ теоріи аутоморфныхъ функцій.

Первыя работы самого Клейна и отчасти другихъ математиковъ собраны имъ въ отдѣльной книгѣ, озаглавленной: «Vorlesungen über das Ikosaeder». Дальнѣйшія его работы, касающіяся модулярныхъ функцій, обработанныя Фрикке, изданы въ видѣ весьма обширнаго сочиненія, озаглавленнаго: «Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctio-

*) Memoire sur les équations differentielles linéaires à intégrale algebrique. Crelles Journal. Bd. 84.

nen». Первый томъ этого сочиненія появился въ 1890 году, второй томъ появился только въ самое послѣднее время въ настоящемъ 1892 году.

Заглавія другихъ работъ Клейна, касающихся вопроса о рѣшеніи алгебраическихъ уравненій въ гипергеометрическихъ функціяхъ и другихъ вопросовъ наиболѣе тѣсно связанныхъ съ этимъ я приведу ниже.

Изъ числа другихъ математиковъ, особенно много потрудившихся въ разсматриваемой нами области необходимо указать на Гордана и Бріоски.

Работы Гордана помѣщены въ Математическихъ Анналахъ и идутъ почти параллельно работамъ Клейна. Различіе этихъ работъ состоитъ въ томъ, что Клейнъ вездѣ пользуется геометрическими представленіями, между тѣмъ какъ Горданъ ведетъ изслѣдованія чисто аналитически, пользуясь весьма искусно символическимъ методомъ Аронгольда, обычнымъ въ теоріи бинарныхъ алгебраическихъ формъ. Между прочимъ онъ весьма остроумно находитъ характерное свойство первичныхъ формъ наивысшей степени, выражаемое условіемъ, чтобы коваріантъ

$$(f, f)^4$$

былъ тождественный нуль.

Работы Бріоски касаются главнымъ образомъ уравненій 5-ой степени и Якобіевыхъ уравненій 6-ой степени. Уравненія эти изслѣдованы имъ съ замѣчательною полнотою и ясностью. Мемуары Бріоски помѣщены частью въ Annali di Matematica, частью въ Mathematische Annalen.

Такъ какъ теорія алгебраическихъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ находится въ тѣсной связи съ теоріей группъ линейныхъ подстановокъ, то говоря о литературѣ этого вопроса, нельзя не упомянуть о работахъ Пуанкаре. Особенно интересенъ въ этомъ отношеніи его мемуаръ въ 1 томѣ Acta Mathematica, озаглавленный: «Théorie des groupes Fuctiennes». Хотя этотъ мемуаръ касается исключительно группъ, которыя Пуанкаре называетъ Фуксовыми *), тѣмъ не менѣе многіе результаты, даваемые Пуанкаре въ этомъ мемуарѣ, легко обобщаются на случай какихъ угодно подстановокъ.

Въ нашей русской литературѣ встрѣчается очень мало сочиненій, затрогивающихъ вопросы объ алгебраическихъ интегралахъ дифференціальныхъ уравненій, о трансцендентномъ рѣшеніи алгебраическихъ уравненій и о группахъ линейныхъ подстановокъ. Мнѣ удалось найти только слѣдующія работы такого характера:

1) *Васильевъ.* О функціяхъ раціональныхъ, аналогичныхъ съ функціями двоякопеперіодическими.

2) *Савичъ.* О линейныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ.

3) *Ермаковъ.* Круговое преобразованіе.

О другихъ работахъ, касающихся тѣхъ же вопросовъ, я упомяну ниже при указаніи литературы.

Цѣль настоящаго моего сочиненія—собрать, обработать и изложить въ возможно болѣе систематическомъ порядкѣ все то, что касается свойствъ, вида и рѣшенія всѣхъ тѣхъ алгебраическихъ уравненій, которыя разрѣшимы въ гипергеометрическихъ функціяхъ, при чемъ радикалы могутъ входить въ формулы. Эти рѣшенія суть алгебраическія въ собственномъ смыслѣ слова.

Трансцендентное рѣшеніе уравненій въ мою работу не входитъ: трансцендентное рѣшеніе содержитъ въ себѣ кромѣ гипергеометрическихъ функцій еще новый элементъ—трансцендентныя аутоморфныя функціи. Задача объ алгебраическихъ уравненіяхъ разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ и аутоморфныхъ функціяхъ далеко выходитъ за указанные выше предѣлы моего сочиненія. Она представляетъ собою весьма

*) Клейнъ, по видимому, вполнѣ справедливо считаетъ это названіе неправильнымъ.

большой интересъ и я надѣюсь посвятить ей слѣдующую свою работу, для которой настоящая служитъ лишь какъ бы введеніемъ.

Укажу въ краткихъ чертахъ планъ моей работы.

Прежде чѣмъ приступить къ постановкѣ общей задачи объ алгебраическихъ уравненіяхъ, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ, я останавливаюсь весьма подробно на изученіи свойствъ, видовъ и рѣшеній двухъ отдѣльныхъ классовъ относящихся сюда уравненій. Эти два класса суть:

1) уравненія, имѣющія корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка;

2) уравненія, имѣющія корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Первый изъ этихъ классовъ впервые былъ изученъ Фуксомъ, а второй—Шварцемъ.

Эти уравненія служатъ ядромъ всей теоріи: всякое уравненіе, разрѣшимое въ гипергеометрическихъ функціяхъ, можетъ быть получено раціональнымъ или ирраціональнымъ преобразованіемъ одного изъ уравненій указанныхъ классовъ.

Первыя восемь главъ моей работы посвящены этимъ двумъ классамъ уравненій.

Глава I содержитъ въ себѣ изложеніе свойствъ уравненій перваго изъ двухъ указанныхъ классовъ. Эти свойства я излагаю въ видѣ ряда теоремъ, заимствованныхъ мною главнымъ образомъ въ указанномъ выше мемуарѣ Фукса и пополненныхъ тѣми новыми теоремами, которыя оказались необходимыми въ дальнѣйшемъ изложеніи. Разсмотрѣвъ свойства первичныхъ формъ, введенныхъ Фуксомъ, я совершенно оставляю въ сторонѣ его изложеніе и показываю, что найдя первичную форму наинисшей степени и ея коваріанты, весьма легко построить новое уравненіе, которому удовлетворяютъ отношенія корней изучаемаго уравненія. Это новое уравненіе имѣетъ такой видъ:

$$H^{\lambda_1}(u) : c_1 T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1, \qquad \text{(A)}$$

гдѣ $f(u)$ многочленъ, соотвѣтствующій первичной формѣ наинисшей степени, $H(u)$—его гессіанъ, $T(u)$—функціональный опредѣлитель отъ $f(u)$ и $H(u)$, функція $R(z)$—нѣкоторая раціональная функція перемѣннаго z, а показатели λ_1, λ_2, λ суть цѣлыя числа, которыя равны индексамъ или половинамъ индексовъ первичныхъ функцій $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$. Уравненіе (А) есть уравненіе втораго изъ указанныхъ выше классовъ. При моемъ способѣ изложенія видъ его съ самаго начала опредѣленъ и остается найти функцію $f(u)$ и показатели λ_1, λ_2, λ, ибо функція $R(z)$ совершенно произвольна.

Найдя уравненіе (А), я показываю, что корни уравненія перваго изъ двухъ изучаемыхъ классовъ выражаются, какъ явныя функціи корней уравненія (А).

Этимъ самымъ теорія уравненій перваго изъ двухъ классовъ приведена къ теоріи уравненій втораго класса и только впослѣдствіи приходится вернуться къ нимъ, чтобы найти внѣшній видъ этихъ уравненій.

Въ главѣ II я излагаю свойства уравненій вида (А), т.-е. уравненій втораго изъ двухъ изучаемыхъ мною классовъ. Свойства этихъ уравненій изложены въ работахъ Шварца и Клейна, но вслѣдствіе особенностей моего изслѣдованія, мнѣ удалось упростить изложеніе этой главы. Доказавъ, слѣдуя Клейну, что всякое уравненіе вида (А) разрѣшимо въ гипергеометричаскихъ функціяхъ, я тѣмъ самымъ доказываю, что всѣ уравненія перваго класса тоже разрѣшимы въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Такъ какъ корни уравненія (А) могутъ быть представлены, въ видѣ функцій Шварца отъ аргумента $\frac{1}{c}R(z)$, то необходимо было разсмотрѣть довольно подробно свойства этихъ функцій.

Глава III содержитъ въ себѣ изложеніе свойствъ функцій Шварца:

$$s\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right).$$

Источниками для этой главы послужили, кромѣ мемуаровъ самого Шварца, сочиненія Клейна: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen *) и отчасти Vorlesungen uber das Ikosaeder. Изложеніе этой главы довольно близко къ Клейну.

Обнаруживъ существованіе четырехъ типовъ конечныхъ группъ линейныхъ подстановокъ и указавъ на геометрическій способъ построенія соотвѣтствующихъ имъ сѣтей, я приступаю къ вычисленію подстановокъ этихъ группъ. Рѣшеніе этой задачи приведено въ главѣ IV.

Изложивъ вначалѣ главы IV нѣкоторыя свойства группъ линейныхъ подставовокъ по Пуанкаре, я далѣе примѣняю эти свойства къ нахожденію основныхъ подстановокъ конечныхъ группъ и затѣмъ уже нахожу всѣ подстановки группы. Черезъ это достигается значительное упрощеніе въ рѣшеніи какъ данной, такъ и послѣдующей задачи, состоящей въ нахожденіи числовыхъ коэффиціентовъ уравненія (A). При построеніи сѣтей, соотвѣтствующихъ конечнымъ группамъ, я строю *нѣсколько* нормальныхъ сѣтей каждаго типа для того, чтобы въ дальнѣйшемъ изложеніи можно было упростить вычисленія и довести ихъ до конца.

Въ главѣ V приведено вычисленіе коэффиціентовъ уравненій (A) различныхъ типовъ. Эти вычисленія совершаются весьма просто какъ по плану, такъ и съ механической стороны благодаря тому, что напередъ извѣстны основныя подстановки группъ.

Въ главѣ VI изложены инваріантныя свойства первичныхъ формъ и соотношенія между первичными формами различныхъ типовъ. Это—собраніе теоремъ и формулъ, необходимыхъ для послѣдующихъ главъ. Содержаніе этой главы частью заимствовано у Гордана и Клейна, частью оригинально.

Глава VII содержитъ рѣшеніе уравненій вида (A). Самое рѣшеніе я раздѣляю на слѣдующія стадіи:

---

*) Изъ этой книги я заимствую, между прочимъ, чертежи 11 и 12.

1) Примѣняю критерій съ цѣлью узнать, принадлежитъ ли *данное* намъ алгебраическое уравненіе къ числу уравненій изучаемаго класса и вмѣстѣ съ тѣмъ привожу къ виду (A), если оно оказывается принадлежащимъ къ этому классу. Этотъ критерій найденъ мною и основанъ на теоремѣ Гордана, изложенной въ предшествующей главѣ.

2) Привожу уравненіе вида (A) къ нормальному виду. На такое приведеніе къ нормальному виду есть указаніе у Клейна.

3) Рѣшаю уравненіе вида (A), приведенное къ нормальной формѣ.

Корни уравненія (A) типовъ: двупирамиднаго, тетраэдрическаго и октаэдрическаго могутъ быть выражены въ радикалахъ. Этотъ способъ рѣшенія найденъ Клейномъ; онъ основанъ на тѣхъ соотношеніяхъ, которыя приведены у меня въ главѣ VI. Икосаэдрическое уравненіе оказывается не разрѣшимымъ въ радикалахъ.

Уравненія всѣхъ типовъ разрѣшимы въ гипергеометрическихъ функціяхъ. Эти рѣшенія приведены мною въ явной формѣ. Подобныя Рѣшенія приведены у Клейна и у Пухта *); но они представлены тамъ въ иной формѣ и основаны на иныхъ соображеніяхъ.

Этимъ заканчивается изученіе уравненій вида (A).

Въ VIII главѣ я возвращаюсь къ уравненіямъ того класса, которому посвящена глава I съ тѣмъ, чтобы найти внѣшній видъ этихъ уравненій. Эти уравненія получаются изъ уравненій вида (A) нѣкоторыми ирраціональными преобразованіями. Степени этихъ уравненій весьма высоки и коэффиціенты сложны, вслѣдствіе чего они представляютъ интересъ гораздо меньшій, чѣмъ уравненія вида (A). Способъ вычисленія коэффиціентовъ этихъ уравненій указанъ во второмъ мемуарѣ Фукса.

Окончивъ такимъ образомъ изученіе двухъ отдѣльныхъ классовъ уравненій, я приступаю въ главѣ IX къ постановкѣ

---

*) *Puchta.* Das Oktaeder und die Gleichung vierten Grades. Denkschrift der Kaiserlichen Akademie in Wien.

и упрощенію общей задачи объ алгебраическихъ уравненіяхъ, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ. Помѣщенное въ этой главѣ изложеніе нѣкоторыхъ свойствъ группъ линейныхъ подстановокъ заимствовано мною въ мемуарѣ Пуанкаре а изложеніе нѣкоторыхъ свойствъ аутоморфныхъ функцій заимствовано у Клейна въ Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. За исключеніемъ этихъ двухъ подготовительныхъ параграфовъ остальное въ въ этой главѣ оригинально. Оказывается, что всякое уравненіе, разрѣшимое въ гипергеомотрическихъ функціяхъ, можетъ быть получено раціональнымъ или ирраціональнымъ преобразованіемъ уравненія вида (A). При этомъ задача всегда можетъ быть приведена къ раціональному преобразованію уравненія (A). Раціональное преобразованіе въ свою очередь распадается на два:

1) раціональное преобразованіе уравненія (A), понижающее его степень относительно неизвѣстной функціи, не измѣняя степени его относительно независимаго перемѣннаго. Въ результатѣ получается уравненіе вида:

$$F_1(\zeta) : F_2(\zeta) : F(\zeta) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1, \tag{B}$$

гдѣ ζ есть новая неизвѣстная функція, F_1, F_2, F суть цѣлые многочлены;

2) раціональное преобразованіе уравненія (B), не измѣняющее его степень относительно неизвѣстной функціи и, вообще говоря, мѣняющее его степень относительно независимаго перемѣннаго z. Въ результатѣ получается окончательное уравнаніе:

$$\Psi(Y, z) = 0, \tag{C}$$

разрѣшимое въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Наибольшій интересъ и важность представляетъ первое изъ этихъ преобразованій. Такихъ преобразованій существуетъ весьма ограниченное число и каждое изъ нихъ соотвѣтствуетъ опредѣленной *подгруппѣ* группы уравненія (A).

Преобразованій втораго рода существуетъ безконечное число и они способны только иногда упростить по виду уравненіе (B).

Въ главѣ X разсмотрѣны всѣ подгруппы, входящія въ составъ конечныхъ группъ линейныхъ подстановокъ, выдѣлены тѣ изъ нихъ, которыя для разсматриваемой теоріи имѣютъ интересъ и составлены соотвѣтствующія имъ резольвенты. Теоремы главы IX даютъ возможность очень легко найти группы Галуа для этихъ резольвентъ и указать геометрическія представленія соотвѣтствующія тѣмъ подгруппамъ, которыя приводятъ къ этимъ резольвентамъ. Эти резольвенты оказываются слѣдующія:

1) уравненіе кубичное съ симметрической группой;

2) уравненіе 4-ой степени съ знакоперемѣнной группой;

3) уравненіе 4-ой степени съ симметрической группой;

4) уравненіе 5-ой степени съ знакоперемѣнной группой;

5) уравненіе Якоби 6-ой степени.

Эти резольвенты найдены Клейномъ, но указанный выше обзоръ подгруппъ, соотвѣтствующихъ имъ геометрическихъ представленій и группъ субституцій приводятся мною впервые.

Глава XI содержитъ рѣшеніе уравненій 3-ей, 4-ой и 5-ой степени общаго вида и Якобіева уравненія 6-ой степени общаго вида. Эта глава въ значительной степени заимствована мною у Клейна, Бріоски и отчасти Эрмита.

Заглавія сочиненій, послужившихъ источниками настоящей работы или наиболѣе близко касающихся тѣмъ же вопросовъ, приведены мною въ концѣ статьи.

ГЛАВА I.

Свойства алгебраическихъ уравненій, имѣющихъ корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка.

Мы начнемъ изученіе алгебраическихъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ, съ разсмотрѣнія свойствъ двухъ классовъ, относящихся сюда уравненій.

Это суть уравненія, корнями которыхъ служатъ: 1) частные интегралы, 2) отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка съ раціональными алгебраическими коэффиціентами.

Если это дифференціальное уравненіе есть гипергеометрическое, то ясно само собою, что то алгебраическое уравненіе, которому удовлетворяютъ его интегралы или отношенія интеграловъ, разрѣшимо въ гипергеометрическихъ функціяхъ. Но важно, то, что *всѣ уравненія сказанныхъ двухъ классовъ разрѣшимы въ гипергеометрическихъ функціяхъ, какъ выяснится въ главѣ II.*

Предметомъ настоящей I главы нашей работы служитъ изученіе свойствъ перваго изъ двухъ только что указанныхъ классовъ.

§ 1. **Основныя свойства**.

Пусть алгебраическое уравненіе:

$$\Phi(y, z) = 0 \qquad (1)$$

степени m имѣетъ корнемъ частный интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1 \frac{dy}{dz} + p_2 y = 0, \tag{2}$$

гдѣ коэффиціенты p_1 и p_2 суть раціональныя алгебраическія функціи z.

Пусть уравненіе (1) неприводимо и, кромѣ того, не двучленное, потому что двучленное уравненіе всегда способно удовлетворяться частными интегралами нѣкотораго линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка и имѣетъ совершенно иной характеръ сравнительно съ другими уравненіями изучаемаго нами класса. Вслѣдствіе этого мы его временно совершенно устраняемъ съ тѣмъ, чтобы впослѣдствіи пополнить наше изложеніе указаніемъ на его особенности.

Обозначимъ корни уравненія (1) такъ:

$$y_1\, y_2, \ldots, y_m. \tag{3}$$

Это суть нѣкоторыя функціи z.

Докажемъ, что имѣетъ мѣсто:

Теорема 1*). *Если отношеніе двухъ количествъ ряда (3) постоянно, то оно равно радикалу нѣкоторой степени изъ 1.*

Пусть:

$$\Phi(y, z) = a_0\, y^m + a_1\, y^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\, y + a_m, \tag{4}$$

гдѣ

$$a_0,\ a_1, \ldots a_m$$

суть раціональныя алгебраическія функціи z, и пусть

$$\frac{y_2}{y_1} = c$$

гдѣ c постоянное.

---

*) Эта теорема и слѣдующія за нею теоремы параграфа 1 и отчасти параграфа 2 заимствованы мною въ мемуарѣ Фукса: Ueber die linearen Differentialgleihungen Zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Журналъ Крелля т. 81 стр. 97.

Тогда мы имѣемъ два тождества:

$$\left.\begin{aligned} a_0 y_1^m + a_1 y_1^{m-1} + \ldots + a_{m-1} y_1 + a_m = 0, \\ a_0 c^m y_1^m + a_1 c^{m-1} y_1^{m-1} + \ldots + a_{m-1} c y_1 + a_m = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Такъ какъ уравненіе (1) по нашему предположенію неприприводимо, то изъ равенствъ (5) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= a_0 c^m, \\ a_1 &= a_1 c^{m-1}, \\ a_2 &= a_2 c^{m-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{m-1} &= a_{m-1} c. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Такъ какъ a_0 не есть 0, то

$$c^m = 1,$$

что и доказываетъ справедливость теоремы: c равно радикалу нѣкоторой степени μ изъ 1, при чемъ μ есть дѣлитель степени m уравненія (1).

Обозначивъ корень степени μ изъ 1 черезъ j_μ, имѣемъ:

$$c = j_\mu.$$

Изъ тождествъ (5) мы видимъ, что всѣ коэффиціенты a_i, у которыхъ индексъ i не дѣлится нацѣло на μ, должны равняться нулю—иначе равенства (6) были бы невозможны. Отсюда заключаемъ, что уравненіе (1) таково:

$$a_0 y^m + a_\mu y^{m-\mu} + a_{2\mu} y^{m-2\mu} + \ldots + a_{m-\mu} y^\mu + a_m = 0. \quad (7)$$

Теорема 2. *Всѣ отношенія корней (3), взятыхъ попарно, не могутъ быть постоянными.*

Допустимъ, что всѣ отношенія корней (3), взятыхъ попарно, оказались постоянными. Тогда эти корни (3) представятся въ такомъ видѣ:

$$y_1, \; j_{\mu_1} y_1, \; j_{\mu_2} y_1, \ldots j_{\mu_{m-1}} y_1,$$

гдѣ $j_{\mu_1}, j_{\mu_2}, \ldots, j_{\mu_{m-1}}$ суть корни изъ 1 степеней соотвѣтственно равныхъ:

$$\mu_1, \; \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}.$$

Всѣ эти числа μ_i, какъ мы видѣли, должны быть дѣлителями числа m. Пусть наименьшее кратное чиселъ μ_i есть μ. Число μ будетъ тоже дѣлителемъ числа m; слѣдовательно оно будетъ или меньше m, или равно m. Обозначимъ первообразный корень степени μ изъ 1 буквою j; тогда количества j_{μ_i} выразятся, какъ степени взятаго первообразнаго корня j:

$$j^{\alpha_1}, \; j^{\alpha_2}, \ldots, \; j^{\alpha_{m-1}}.$$

Число этихъ количествъ равно $m-1$ и всѣ они различны между собою и отличны отъ 1. Это показываетъ:

1) что числа

$$\alpha_1, \; \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$$

представляютъ собою рядъ натуральныхъ чиселъ:

$$1, \; 2, \; 3, \ldots, \; m-1,$$

только, быть можетъ, въ измѣненномъ порядкѣ;

2) что степень μ должна равняться m.

Итакъ, j есть первообразный корень степени m изъ 1.

Корни (3) при сдѣланномъ предположеніи, представляются въ такомъ видѣ:

$$y_1, \; jy_1, \; j^2 y_1, \ldots j^{m-1} y_1.$$

А это значитъ, что уравненіе (1) есть уравненіе двучленное:

$$y^m = y_1^{\,m}.$$

гдѣ $y_1^{\,m}$ есть раціональная функція z.

Такъ какъ взятое уравненіе (1) было не двучленное, то мы пришли къ противорѣчію.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если одинъ изъ корней уравненія (1) удовлетворятъ дифференціальному уравненію (2), то ему удовлетворятъ всѣ корни уравненія (1).*

Изъ уравненія (1) мы имѣемъ:

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{\dfrac{\partial\Phi(y,z)}{\partial z}}{\dfrac{\partial\Phi(y,z)}{\partial y}} = \Psi(y,z) \tag{8}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{\partial\Psi(y,z)}{\partial y}\Psi(y,z) + \frac{\partial\Psi(y,z)}{\partial z} = X(y,z). \tag{9}$$

Если корень y_1 уравненія (1) удовлетворяетъ уравненію (2), то это значитъ, что имѣетъ мѣсто тождество:

$$X(y_1, z) + p_1\,\Psi(y_1, z) + p_2\,y_1 = 0. \tag{10}$$

Слѣдовательно корень y_1 уравненія (1) удовлетворяетъ также уравненію

$$\Psi(y,z) + p_1\,\Psi(y,z) + p_2\,y = 0. \tag{11}$$

Вслѣдствіе неприводимости уравненія (1), уравненію (11) должны удовлетворять и всѣ остальные корни уравненія (1); а это и значитъ, что всѣ они удовлетворяютъ дифференціальному уравненію (2).

Теорема 4. *Если какой нибудь корень уравненія (1) удовлетворяетъ уравненію (2), то общій интегралъ уравненія (2) представится въ видѣ:*

$$c_1y_1 + c_2y_2,$$

гдѣ c_1 и c_2 суть постоянныя числа а y_1 и y_2 суть любые два корня уравненія (1), отношеніе которыхъ не есть величина постоянная.

Если какой нибудь корень уравненія (1) удовлетворяетъ уравненію (2), то на основаніи теоремы 3 всѣ корни уравненія (1) удовлетворятъ уравненію (2) и будутъ его частными интегралами; слѣд. въ разсматриваемомъ случаѣ y_1 и y_2 будутъ частными интегралами уравненія (2) и при томъ линейно-независимыми, ибо по условію отношеніе $\frac{y_1}{y_2}$ не есть величина постоянная.

Если такъ, то функція

$$c_1\, y_1 + c_2\, y_2$$

есть дѣйствительно общій интегралъ уравненія (2).

На основаніи теоремы 2 въ числѣ корней уравненія (1) всегда найдется хотя бы одна пара корней, отношеніе которыхъ не есть величина постоянная.

Теорема 5. *Если одинъ изъ корней уравненія (1) удовлетворяетъ уравненію, (2), то всѣ интегралы уравненія (2) будутъ алгебраическіе.*

На основаніи теоремы 4 въ разсматриваемомъ случаѣ всѣ интегралы уравненія (2) представятся въ видѣ:

$$c_1\, y_1 + c_2\, y_2$$

т. е. въ видѣ раціональной функціи двухъ корней алгебраическаго уравненія. Извѣстно, что такая функція сама есть корень нѣкотораго алгебраическаго уравненія.

Опредѣлимъ теперь нѣсколько ближе видъ функцій p_1 и p_2 входящихъ въ дифференціальное уравненіе (2).

Прежде всего замѣтимъ, что если какой либо корень уравненія (1) удовлетворяетъ уравненію (2), то всѣ частные интегралы дифференціальнаго уравненія (2) суть правильные *) на всей Нейманновой сферѣ и имѣютъ конечное число особыхъ точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что всѣ эти частные интегралы суть функціи алгебраическія; слѣдовательно

*) Т. е. не имѣютъ существенно особыхъ точекъ.

они имѣютъ лишь конечное число полюсовъ и критическихъ точекъ алгебраическаго характера, а существенно особыхъ точекъ совсѣмъ не имѣютъ.

Эта особенность уравненія (2) въ значительной степени его опредѣляетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что особыми точками частныхъ интеграловъ уравненія (2) могутъ служить: точка $z = \infty$ и тѣ точки, гдѣ p_1 или p_2 обращаются въ безконечность.

Что касается до точки $z = \infty$, то мы въ правѣ считать ее простою точкою, п. ч. въ противномъ случаѣ мы могли бы преобразовать уравненіе (2) линейною подстановкою вида:

$$z = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}$$

такъ, чтобы въ преобразованномъ уравненіи точка $z' = \infty$ была простою точкою.

Пусть α_i есть особая точка интеграловъ уравненія (2). Это значитъ, что p_1, или p_2, или обѣ функціи вмѣстѣ при $z = \alpha_i$ обращаются въ безконечность.

Извѣстно *), что линейное дифференціальное уравненіе 2-го порядка (2) должно имѣть два линейно-независимыхъ частныхъ интеграла, которые въ области не существенно особой точки $z = a_i$ разлагаются въ ряды вида:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= (z-\alpha_i)^{r_1}\,\varphi_1(z-\alpha_i), \\ y_2 &= (z-\alpha_i)^{r_2}\,\varphi_2(z-\alpha_i), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

гдѣ $\varphi_1(z-\alpha_i)$ и $\varphi_2(z-\alpha_i)$ суть функціи голоморфныя въ области точки α_i и отличныя отъ нуля при $z=\alpha_i$.

Исключеніе представляетъ только тотъ случай, когда показатели r_1 и r_2 оказываются равными:

$$r_1 = r_2.$$

---

*) См. Анисимовъ. Основанія теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Стр. 40.

Въ этомъ случаѣ существуетъ два линейно-независимыхъ частныхъ интеграла, разлагающихся въ области точки α_i въ ряды такого вида:

$$y_1 = (z-\alpha_i)^{r_1} \varphi_1 (z-\alpha_i),$$

$$y_2 = (z-\alpha_i)^{r_1} [\varphi_2(z-\alpha_i) + lg(z-\alpha_i) \varphi_3 (z-\alpha_i)] \text{ *)}.$$

Если въ уравненіи (2) всѣ интегралы алгебраическіе, то этотъ послѣдній случай встрѣтиться не можетъ.

Поэтому мы въ правѣ утверждать, что уравненіе (2) въ области особой точки α_i непремѣнно имѣетъ два частныхъ интеграла вида (12) съ различными между собою показателями степени r_1 и r_2.

Подставивъ въ уравненіе (2) выраженіе

$$y = (z-\alpha_i)^{r_j} \varphi_i(z-\alpha_i) \text{ гдѣ } j=1 \text{ или } 2, \tag{12'}$$

найдемъ:

$$r_j(r_j-1)(z-\alpha_i)^{r_j-2} \varphi_j(z-\alpha_i) + r_j p_1 (z-\alpha_i)^{r_j-1} \varphi_j(z-\alpha_i) + \tag{13}$$

$$+ p_2 (z-\alpha_i)^{r_j} \varphi_j(z-\alpha_i) + \ldots = 0,$$

Для нахожденія величинъ r_1 и r_2 мы отберемъ въ лѣвой части тождества (13) коэффиціентъ при наинисшей степени $(z-\alpha_i)$ и приравняемъ его нулю. Полученное такимъ образомъ уравненіе должно быть квадратнымъ относительно r_j: ему должно удовлетворять два не равныхъ между собою корня r_1 и r_2. Слѣдовательно наинисшая степень $z-\alpha_i$ въ лѣвой части тождества (13) есть r_j-2. Коэффиціенты p_1 и p_2, какъ мы знаемъ, могутъ (одинъ изъ нихъ даже долженъ) имѣть полюсъ въ точкѣ α_i. Изъ тождества (13) заключаемъ, что порядокъ этого полюса для функціи p_1 — не выше 1, а для

---

*) См. Анисимовъ ibidem стр. 49.

функціи p_2—не выше 2. Поэтому коэффиціенты p_1 и p_2 можно представить въ такомъ видѣ:

$$p_1 = \frac{\pi_1}{z-\alpha_i}, \quad p_2 = \frac{\pi_2}{(z-\alpha_i)^2}, \tag{14}$$

гдѣ π_1 и π_2 суть раціональныя алгебраическія функціи z, которыя при $z=\alpha_i$ имѣютъ конечныя величины (одна изъ нихъ можетъ обращаться въ 0).

Подставивъ выраженія (14) въ тождество (13), мы найдемъ что коэффиціентъ при $(z-\alpha_i)^{r_j-2}$ въ лѣвой части тождества (13) равенъ:

$$[r_j(r_j-1) + (\pi_1)_0 r_j + (\pi_2)_0]\,\varphi_j(0), \tag{15}$$

гдѣ $(\pi_1)_0$ и $(\pi_2)_0$ суть значенія π_1 и π_2 при $z=\alpha_j$.

Такъ какъ $\varphi_j(0)$ отлично отъ 0, то уравненіе, опредѣляющее показатели r_1 и r_2 таково:

$$r_j(r_j-1) + (\pi_1)_0 r_j + (\pi_2)_0 = 0,$$

или, опуская индексъ j:

$$r(r-1) + (\pi_1)_0 r + (\pi_2)_0 = 0. \tag{16}$$

Это—опредѣляющее уравненіе Фукса *) для точки α_i.

Разложимъ функціи p_1 и p_2 на простыя дроби. Изъ формулъ (14) видно, что эти разложенія будутъ таковы:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda_1}{z-\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{z-\alpha_2} + \ldots + \frac{\lambda_i}{z-\alpha_i} + \ldots + \frac{\lambda_\rho}{z-\alpha_\rho}, \\ p_2 &= \frac{\mu_1}{(z-\alpha_1)^2} + \frac{\mu_2}{(z-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{\mu_i}{(z-\alpha_i)^2} + \ldots + \frac{\mu_\rho}{(z-\alpha_\rho)^2} + \\ &+ \frac{\nu_1}{z-\alpha_1} + \frac{\nu_2}{z-\alpha_2} + \ldots + \frac{\nu_i}{z-\alpha_i} + \ldots + \frac{\nu_\rho}{z-\alpha_\rho}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

*) Уравненіе (16) а равно и видъ (14) коэффиціентовъ p_1 и p_2 можно получить очень просто изъ общихъ формулъ Фукса. См. Анисимовъ ibidem стр. 96.

гдѣ $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$, $\mu_1, \ldots \mu_\rho$, $\nu_1, \ldots \nu_\rho$ суть числа конечныя, при чемъ нулевыя значенія встрѣтиться могутъ.

Изъ выраженій (17) слѣдуетъ, что величины

$$(\pi_1)_0 \text{ и } (\pi_2)_0,$$

входящія въ уравненіе (16), таковы:

$$(\pi_1)_0 = \lambda_i, \ (\pi_2)_0 = \mu_i.$$

Слѣдовательно опредѣляющее уравненіе Фукса для точки α_i принимаетъ такой видъ:

$$r(r-1) + \lambda_i r + \mu_i = 0. \tag{18}$$

Для того, чтобы интегралы уравненія (2) были алгебраическіе, необходимо, чтобы корни опредѣляющаго уравненія (18) были раціональны. Такъ какъ сумма корней уравненія (18) равна $1-\lambda_i$, а произведеніе ихъ равно μ_i, то ясно, что λ_i и μ_i должны быть числами раціональными.

И такъ, функціи p_1 и p_2 имѣютъ видъ (17), гдѣ λ_i и μ_i суть раціональныя числа.

Найдя выраженія (17) функцій p_1 и p_2, мы можемъ сдѣлать нѣкоторое преобразованіе какъ алгебраическаго уравненія (1), такъ и дифференціальнаго уравненія (2) съ цѣлью упростить нѣсколько это дифференціальное уравненіе, и облегчить дальнѣйшія изслѣдованія.

Положимъ:

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}\eta = (z-\alpha_1)^{-\frac{1}{2}\lambda_1}(z-\alpha_2)^{-\frac{1}{2}\lambda_2}\ldots(z-\alpha_\rho)^{-\frac{1}{2}\lambda_\rho}\eta. \tag{19}$$

Такъ какъ

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\rho$$

суть числа раціональная, то множитель:

$$(z-\alpha_1)^{-\frac{1}{2}\lambda_1}(z-\alpha_2)^{-\frac{1}{2}\lambda_2}\ldots(z-\alpha_\rho)^{-\frac{1}{2}\lambda_\rho}$$

есть радикалъ изъ раціональной функціи z.

Если y было функціей алгебраической, то и η будетъ тоже функціей алгебраической и обратно.

Послѣ подстановки (19) алгебраическое уравненіе (1) преобразуется въ новое алгебраическое уравненіе нѣкоторой степени n:

$$F(y,\ z) = 0. \tag{20}$$

Дифференціальное же уравненіе (2) преобразуется въ болѣе простое уравненіе:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py\,, \tag{21}$$

гдѣ

$$P = \frac{1}{4}p_1{}^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_1}{dz} - p_2\,. \tag{22}$$

Понятно, что все сказанное объ уравненіяхъ (1) и (2) безъусловно примѣнимо и къ уравненіямъ (20) и (21), но не обратно: уравненіямъ (20) и (21) принадлежатъ новыя свойства, которыя уравненіемъ (1) и (2) не принадлежали.

Уравненіе (21) можно разсматривать, какъ простѣйшій частный случай уравненія (2): когда коэффиціентъ p_1 равенъ 0, а коэффиціентъ p_2 равенъ $-P$. Поэтому изъ формулъ (17) заключаемъ, что коэффиціентъ $-P$ разлагается на простыя дроби такого вида:

$$\begin{aligned} -P = \frac{M_1}{(z-\alpha_1)^2} + \frac{M_2}{(z-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{M_\rho}{(z-\alpha_\rho)^2} + \frac{N_1}{z-\alpha_1} + \\ + \frac{N_2}{z-\alpha_2} + \ldots + \frac{N_\rho}{z-\alpha_\rho}\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Опредѣляющее уравненіе Фукса для особой точки α_i будетъ таково:

$$r\,(r-1) + M_i = 0. \tag{24}$$

Для того, чтобы дифференціальное уравненіе (21) имѣло алгебраическіе интегралы, необходимо, чтобы корни опредѣляющихъ уравненій вида (24) для всѣхъ особыхъ точекъ α_i были раціональны.

Теорема 6. *Опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ обхода около какой либо критической точки для двухъ частныхъ интеграловъ уравненія (21),—равенъ единицѣ.*

На основаніи извѣстной теоремы Ліувилля между двумя частными интегралами y_1 и y_2 уравненія (2) существуетъ такая зависимость:

$$y_2 \frac{dy_1}{dz} - y_1 \frac{dy_2}{dz} = Ce^{-\int p_1 dz}, \tag{25}$$

гдѣ C есть нѣкоторое постоянное число. Примѣняя эту теорему къ уравненію (21), находимъ:

$$\eta_2 \frac{d\eta_1}{dz} - \eta_1 \frac{d\eta_2}{dz} = C. \tag{26}$$

Будемъ разсматривать η_1 и η_2, какъ функціи на плоскости комплекснаго перемѣннаго. При обходахъ около критическихъ точекъ функціи η_1 и η_1 будутъ развѣтвляться и принимать новыя значенія. Пусть послѣ нѣкотораго обхода функціи η_1 и η_2 приняли новыя значенія $\overline{\eta_1}$ и $\overline{\eta_2}$. Если отношеніе $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ не есть постоянная величина, то $\overline{\eta_1}$ и $\overline{\eta_2}$ выразятся, какъ линейныя функціи η_1, η_2:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\eta_1} &= \alpha\eta_1 + \beta\eta_2, ^{*)} \\ \overline{\eta_2} &= \gamma\eta_1 + \delta\eta_2, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

при чемъ опредѣлитель $\alpha\delta - \beta\gamma$ отличенъ отъ 0.

Выраженіе:

$$\eta_2 \frac{d\eta_1}{dz} - \eta_1 \frac{d\eta_2}{dz},$$

---

*) Величины α, β, γ, δ называются *коэффиціентами обхода.*

какъ показываетъ равенство (26), постоянно при всѣхъ значеніяхъ z. Оно сохранитъ свое значеніе и послѣ сдѣланнаго обхода; слѣд.

$$\bar{\eta}_2 \frac{d\bar{\eta}_1}{dz} - \bar{\eta}_1 \frac{d\bar{\eta}_2}{dz} = \eta_2 \frac{d\eta_1}{dz} - \eta_1 \frac{d\eta_2}{dz}. \tag{28}$$

Подставляя въ это равенство выраженія $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ изъ формулъ (27), находимъ:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\left(\eta_2 \frac{d\eta_1}{dz} - \eta_1 \frac{d\eta_2}{dz}\right) = \eta_2 \frac{d\eta_1}{dz} - \eta_1 \frac{d\eta_2}{dz}, \tag{29}$$

Такъ какъ величина

$$\eta_2 \frac{d\eta_1}{dz} - \eta_1 \frac{d\eta_2}{dz}$$

не есть 0, (иначе отношеніе $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ было бы постоянно), то:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{30}$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 7. *Если уравненіе (20) имѣетъ алгебраическіе интегралы, то всякіе два частныхъ интеграла его взаимно выражаются раціонально* *) *и удовлетворяютъ алгебраическимъ уравненіямъ одинаковыхъ степеней.*

Изъ уравненія (26) находимъ, что

$$\eta_1 = \left[C\int\frac{dz}{\eta_2^{\,2}} + Const.\right]\eta_2, \quad \eta_1 = \left[-C\int\frac{dz}{\eta_1^{\,2}} + Const'\right]\eta_1. \tag{31}$$

Такъ какъ лѣвыя части равенствъ (31) суть функціи алгебраическія, то и правыя части ихъ будутъ функціями алгебраическими. Для опредѣленности будемъ говорить объ одной изъ формулъ (31), напр. о первой.

*) Въ коэффиціенты этихъ раціональныхъ функцій можетъ входить перемѣнное z и при томъ коэффиціенты сами суть раціональныя функціи z. Перемѣнное z разсматриваестя, какъ величина данная.

Построимъ Риманнову поверхность S, соотвѣтствующую функцію η_2, построимъ на этой Римановой поверхности систему сѣченій L (Querschnittsystem) *) съ тѣмъ, чтобы превратить поверхность S въодносвязную (если порядокъ связности ея выше 1); назовемъ полученную односвязную поверхность черезъ S'. Посмотримъ, каковъ характеръ измѣненія функціи $\int\frac{dz}{\eta_2{}^2}$ на поверхности S. На поверхности S' функція эта однозначна, но при переходѣ съ одного берега какого либо изъ сѣченій системы L на другой она будетъ пріобрѣтать нѣкоторое постоянное приращеніе, называемое періодомъ интеграла $\int\frac{dz}{\eta_2{}^2}$.

Въ разсматриваемомъ нами случаѣ $\int\frac{dz}{\eta_2{}^2}$ есть функція алгебраическая, слѣд. всѣ эти періоды равны 0; а если такъ, то функція $\int\frac{dz}{\eta_2{}^2}$ однозначна не только на поверхности S', но и на всей поверхности S. То же самое, необходимо, будетъ справедливо для функціи:

$$\eta_1 = \left[C\int\frac{dz}{\eta_2{}^2} + Const.\right]\eta_2. \tag{31'}$$

И такъ, мы нашли, что функція η_1 однозначно распространена на Римановой поверхности, соотвѣтствующей функціи η_2. Вторая формула (31) такимъ же образомъ даетъ намъ возможность доказать, что функція η_2 однозначно распространена на Римановой поверхности, соотвѣтствующей функціи η_1.

Отсюда слѣдуетъ:

1) что функціи η_1 и η_2 взаимно выражаются раціонально:

$$\eta_1 = \Psi_1(\eta_2, z), \quad \eta_2 = \Psi_2(\eta_1, z). \tag{32}$$

---

*) О системахъ сѣченій Римановой поверхности см. Neumann Theorie der Abelschen Integrale глава VII, § 13.

гдѣ $\Psi_1(\eta_2, z)$ и $\Psi_2(\eta_1, z)$ суть раціональныя функціи ихъ аргументовъ;

2) что функціи η_1 и η_2 удовлетворяютъ алгебраическимъ уравненіямъ одинаковыхъ степеней.

Теорема доказана.

(Случай, когда отношеніе взятыхъ интеграловъ η_1 и η_2 постоянно, не составляетъ исключенія изъ этой теоремы: справедливость ея въ этомъ случаѣ очевидна).

Теорема 8. *Каждой парѣ линейно-независимыхъ частныхъ интеграловъ дифференціальнаго уравненія (21) соотвѣтствуетъ группа*) линейныхъ бинарныхъ подстановокъ съ опредѣлителемъ равнымъ 1. Порядокъ этой группы равенъ степени уравненія (20).*

Пусть η_1 и η_2 суть два линейно независимыхъ частныхъ интеграла уравненія (21). Совершивъ обходъ около какой либо критической точки, мы увидимъ, что η_1, η_2 примутъ

---

*) Подъ группою какихъ бы то ни было операцій мы подразумѣваемъ совокупность

$$S_0, S_1, S_2, \ldots S_{n-1} \qquad \text{(a)}$$

операцій, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что комбинація $S_i S_j$ всякихъ двухъ операцій этой совокупности есть снова нѣкоторая операція S_h принадлежащая къ той же совокупности (a). Порядкомъ группы называется число различныхъ операцій, входящихъ въ совокупность (a).

Бинарною линейною подстановкою мы будемъ называть однородное линейное преобразованіе двухъ перемѣнныхъ слѣдующаго вида:

$$\bar{\eta}_1 = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2,$$
$$\bar{\eta}_2 = \gamma\eta_1 + \delta\eta_2,$$

при чемъ $\alpha\delta - \beta\gamma$ носитъ названіе опредѣлителя подстановки.

Ниже намъ часто придется имѣть дѣло съ линейнымъ неоднороднымъ преобразованіемъ одного перемѣннаго:

$$\bar{u} = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}.$$

Такое преобразованіе мы будемъ называть просто *линейною подстановкою.*

новыя значенія $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$, связанныя съ прежними линейною зависимостью:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\eta}_1 &= \alpha\eta_1 + \beta\eta_2,\\ \bar{\eta}_2 &= \gamma\eta_1 + \delta\eta_2,\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

при чемъ на основаніи теоремы 6:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Принимая обычное въ теоріи чиселъ обозначеніе, мы скажемъ, что новыя значенія $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ получились изъ прежнихъ η_1, η_2 линейнымъ преобразованіемъ:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix},$$

при чемъ

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Каждому обходу около критической точки будетъ соотвѣтствовать подстановка такого же вида. Вообразимъ себѣ всевозможные обходы около критическихъ точекъ и имъ соотвѣтствующія подстановки. Число этихъ подстановокъ конечно, потому что функціи η_1, η_2 алгебраическія и имѣютъ конечное число значеній. Подстановки эти образуютъ группу, потому что каждые два обхода около критическихъ точекъ совершенные другъ за другомъ равносильны одному обходу, окружающему всѣ критическія точки, заключенныя внутри обоихъ этихъ обходовъ.

Такъ какъ на основаніи теоремы 7 интегралъ η_2 есть раціональная функція интиграла η_1, то число всѣхъ паръ значеній функцій η_1, η_2 равно числу различныхъ значеній функціи η_1, т. е. равно n.

Порядокъ группы бинарныхъ подстановокъ, связывающихъ между собою пары значеній η_1, η_2 равенъ числу этихъ паръ значеній, т. е. равенъ n.

Теорема доказана.

§ 2. **Первичныя формы.**

Возьмемъ снова алгебраическое уравненіе n-ой степени:

$$F(\eta, z) = 0, \tag{20}$$

корни котораго суть частные интегралы уравненія

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = P\eta\ . \tag{21}$$

Пусть

$$\eta_1,\ \eta_2, \ldots\ \eta_n \tag{34}$$

суть корни уравненія (20). Нѣкоторыя изъ этихъ величинъ разнятся между собою лишь постояннымъ множителемъ, который въ такомъ случаѣ есть корень нѣкоторой степени изъ 1. Отбросимъ въ рядѣ (34) всѣ тѣ величины, которыя разнятся отъ одной изъ остальныхъ лишь постояннымъ множителемъ. Въ оставшемся рядѣ корней:

$$\eta_1,\ \eta_2, \ldots\ \eta_\nu \tag{35}$$

не будетъ ни одной пары величинъ, отношеніе которыхъ было бы постоянно. Систему (35) будемъ называть приведенной системой корней уравненія (20). Всѣ остальные корни уравненія (20) будутъ разниться отъ корней приведенной системы (34) присутствіемъ множителей вида j^α, гдѣ j первообразный корень изъ 1 нѣкоторой степени μ. Это число μ есть дѣлитель степени уравненія n, а α нѣкоторое цѣлое число. На основаніи вида уравненія (7) мы можемъ утверждать, что уравненіе (20) будетъ такого вида:

$$A_0\eta^n + A_\mu\eta^{n-\mu} + A_{2\mu}\eta^{n-2\mu} + \ldots + A_{n-\mu}\eta^\mu + A_n = 0. \tag{36}$$

Мы видимъ, что если уравненію (36) удовлетворяетъ количество η_1, то ему, необходимо, удовлетворить и весь рядъ количествъ:

$$\eta_1,\ j\eta_1,\ j^2\eta_1, \ldots\ j^{\mu-1}\eta_1. \tag{37}$$

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ корни уравненія (36), или, что то же, уравненія (20), могутъ быть расположены въ видѣ таблицы:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1, j\eta_1, j^2\eta_1, \dots j^{\mu-1}\eta_1, \\ \eta_2, j\eta_2, j^2\eta_2, \dots j^{\mu-1}\eta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_\nu, j\eta_\nu, j^2\eta_\nu, \dots j^{\mu-1}\eta_\nu. \end{array}\right\} \tag{38}$$

Такъ какъ таблица эта исчерпываетъ всѣ корни уравненія степени n, то между числами μ, ν и n существуетъ соотношеніе:

$$\mu\nu = n. \tag{39}$$

Пусть η' и η'' есть какая-нибудь пара линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ уравненія (21). Въ такомъ случаѣ всѣ корни системы (34) выразятся чрезъ нихъ линейно:

$$\eta_i = c_1^{(i)}\eta' + c_2^{(i)}\eta'', \tag{40}$$

произведеніе же величинъ:

$$\eta_1, \eta_1, \dots \eta_\nu \tag{34}$$

представится въ видѣ цѣлой однородной формы съ перемѣнными η', η'':

$$\eta_1\eta_2\dots\eta_\nu = \mathop{P}_{i=1}^{i=\nu}[c_1^{(i)}\eta' + c_2^{(i)}\eta''] = \Omega(\eta', \eta'')\,^{*}). \tag{41}$$

Форму $\Omega(\eta', \eta'')$ мы будемъ называть, слѣдуя Фуксу *первичною формою* (Primform) **); ν есть ея степень, а μ называется ея *индексомъ*.

---

*) Если мы примемъ $\eta' = \eta_1$, $\eta'' = \eta_2$ (что мы въ правѣ сдѣлать, потому что отношеніе $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ не есть величина постоянная), то форма $\Omega(\eta_1, \eta_2)$ будетъ имѣть множителемъ $\eta_1\eta_2$, т.-е. въ формѣ $\Omega(\eta_1, \eta_2)$ коэффиціенты при η_1^ν и η_2^ν будутъ равны 0. Съ такими формами мы впослѣдствіи будемъ встрѣчаться.

**) Клейнъ называетъ такія формы основными формами (Grundformen).

Равенство (39) показываетъ, что степень уравненія (20) равна степени первичной формы, умноженной на ея индексъ.

Т е о р е м а 9. *Существуетъ группа бинарныхъ линейныхъ подстановокъ съ опредѣлителемъ 1, подъ вліяніемъ которыхъ первичная форма индекса μ или совсѣмъ не мѣняется, или пріобрѣтаетъ множителемъ различныя степени корня степени μ изъ 1.*

При обходахъ на плоскости перемѣннаго z будутъ происходить всевозможныя перестановки въ рядѣ количествъ (34), а вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ мѣняться и величина первичной формы (41). Эти перестановки въ рядѣ (34) могутъ быть двоякаго рода: 1) могутъ перемѣститься корни приведенной системы (34) только между собою, 2) корни приведенной системы (34) могутъ перемѣститься какъ между собою, такъ и съ корнями, не входящими въ эту систему. Въ первомъ случаѣ первичная форма, какъ видно изъ равенства (41), совсѣмъ не измѣняется, а во второмъ она пріобрѣтаетъ множителемъ лишь нѣкоторую степень количества j—радикала степени μ изъ 1.

Итакъ, при всевозможныхъ обходахъ на плоскости z форма $\Omega(\eta', \eta'')$ будетъ пріобрѣтать лишь множителемъ степени величины j. Съ другой стороны изъ теоремы 8 мы знаемъ, что каждому обходу на плоскости перемѣннаго z соотвѣтствуетъ своя линейная подстановка надъ η', η'' съ опредѣлителемъ, равнымъ 1, и что всѣ эти подстановки образуютъ группу. Отсюда мы заключаемъ, что подъ вліяніемъ подстановокъ этой группы форма $\Omega(\eta', \eta'')$ будутъ пріобрѣтать множителемъ лишь различныя степени количества j.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 10. *Всякая первичная форма* *) *индекса μ равна радикалу степени μ изъ нѣкоторой раціональной функціи z.*

---

*) Въ этой и послѣдующихъ теоремахъ мы должны помнить, что аргументы η', η'' первичной формы суть частные интегралы уравненія (21).

Въ теоремѣ 9 мы видѣли, что подъ вліяніемъ всевозможныхъ обходовъ на плоскости z первичная форма пріобрѣтаетъ лишь множителемъ различныя степени j — радикала степени μ изъ 1. Если такъ, то форма:

$$\Omega^{\mu}(\eta', \eta'')$$

ни при какихъ обходахъ на плоскости z мѣняться не будетъ; а такъ какъ, кромѣ того, мы знаемъ, что это алгебраическая функція z, то приходимъ къ заключенію, что она функція раціональная

$$\Omega^{\mu}(\eta', \eta'') = R(z). \tag{42}$$

Откуда:

$$\Omega(\eta', \eta'') = \sqrt[\mu]{R(z)}. \tag{43}$$

Теорема доказана.

Слѣдуетъ замѣтить однако, что степень радикала можетъ понизиться, если функція $R(z)$ имѣетъ видъ:

$$R(z) = \mathfrak{R}^{\mu'}(z),$$

гдѣ $\mathfrak{R}(z)$ есть функція раціональная, а μ'—дѣлитель μ.

Такъ какъ всѣ корни уравненія (20) расположены въ таблицѣ (38), то свободный членъ уравненія (20), независимо отъ знака, равенъ произведенію величинъ (38), т.-е. онъ равенъ:

$$(\eta_1 . \eta_2 \ldots . \eta_\nu)^{\mu} = \Omega^{\mu}(\eta', \eta''). \tag{44}$$

Иными словами, функція $R(z)$, стоящая во второй части равенства (42), независимо отъ знака, равна свободному члену уравненія (20).

Теорема 11. *Если цѣлая однородная форма $\omega(\eta', \eta'')$, имѣющая аргументами два линейно-независимыхъ частныхъ интеграла уравненія (21), равна радикалу изъ раціональной функціи перемѣннаго z и если она имѣетъ общій линейный множитель $c_1^{(1)}\eta' + c_2^{(1)}\eta''$ съ первичною формою $\Omega(\eta', \eta'')$, то она нацѣло дѣлится на эту первичную форму.*

Выдѣлимъ въ формѣ $\omega(\eta', \eta'')$ линейный множитель:

$$c_1^{(1)}\eta' + c_2^{(1)}\eta'':$$

$$\omega(\eta', \eta'') = (c_1^{(1)}\eta' + c_2^{(1)}\eta'')\omega_1(\eta', \eta''). \tag{45}$$

Совершимъ такой обходъ на плоскости перемѣннаго z, чтобы частный интегралъ:

$$\eta_1 = c_1^{(1)}\eta' + c_2^{(1)}\eta'' \tag{46}$$

перешелъ въ частный интегралъ:

$$\eta_i = c_1^{(i)}\eta' + c_2^{(i)}\eta''. \tag{47}$$

Такъ какъ η_1 и η_i суть корни одного и того же неприводимаго уравненія (20), то такой обходъ существуетъ.

Пусть послѣ этого обхода функція $\omega(\eta', \eta'')$ перешла въ $\overline{\omega}(\eta', \eta'')$, а функція $\omega_1(\eta', \eta'')$ въ $\overline{\omega}_1(\eta', \eta'')$:

$$\overline{\omega}(\eta', \eta'') = (c_1^{(i)}\eta' + c_2^{(i)}\eta'')\overline{\omega}_1(\eta', \eta''). \tag{48}$$

Такъ какъ $\omega(\eta', \eta'')$ есть радикалъ изъ раціональной функціи перемѣннаго z, то послѣ сдѣланнаго обхода она могла пріобрѣсти лишь нѣкоторый постоянный множитель c:

$$\overline{\omega}(\eta', \eta'') = c.\omega(\eta', \eta''). \tag{49}$$

Принявъ во вниманіе формулы (49) и (45), мы можемъ представить равенство (48) въ такомъ видѣ:

$$c.(c_1^{(1)}\eta' + c_2^{(1)}\eta'')\omega_1(\eta', \eta'') = (c_1^{(i)}\eta' + c_2^{(i)}\eta'')\overline{\omega}_1(\eta', \eta''). \tag{50}$$

Равенство это должно быть тождествомъ п. ч. иначе изъ него можно было бы опредѣлить отношеніе $\frac{\eta'}{\eta''}$, и это отношеніе оказалось бы постояннымъ. Тождество (50) показываетъ, что форма $\omega_1(\eta', \eta'')$ должна нацѣло раздѣлиться на $c_1^{(i)}\eta' + c_2^{(i)}\eta''$, т. е. на всякій линейный множитель формы (41), кромѣ $c_1^{(1)}\eta' + c_2^{(1)}\eta''$. Если такъ, то форма $\omega(\eta' \eta'')$ дѣлится нацѣло на всякій линейный множитель формы $\Omega(\eta', \eta'')$, а слѣдовательно, и на самую форму $\Omega(\eta', \eta'')$.

Т е о р е м а 12. *Если форма $\omega(\eta', \eta'')$, имѣющая аргументами два линейно-независимыхъ частныхъ интеграла η', η'' уравненія (21), равна радикалу изъ раціональной функціи z, то ее можно представить въ видѣ произведенія нѣсколькихъ первичныхъ формъ.*

Отдѣлимъ въ формѣ $\omega(\eta', \eta'')$ линейный множитель $c_1\eta' + c_2\eta''$, найдемъ то алгебраическое уравненіе, которому удовлетворяетъ функція:

$$(\eta) = c_1\eta' + c_2\eta'', \tag{51}$$

найдемъ приведенную систему корней этого уравненія:

$$(\eta_1),\ (\eta_2), \ldots\ (\eta_\nu)$$

и составимъ первичную форму:

$$(\eta_1)(\eta_2)\ldots(\eta_\nu) = \Omega_1(\eta', \eta''), \tag{52}$$

соотвѣтствующую этому уравненію. На основаніи теоремы 11, форма $\omega(\eta', \eta'')$, имѣя съ первичной формой $\Omega_1(\eta', \eta'')$ общій множитель $c_1\eta' + c_2\eta''$, раздѣлится на нее нацѣло:

$$\omega(\eta', \eta'') = \Omega_1(\eta', \eta'')\,\omega_1(\eta', \eta''). \tag{53}$$

Такъ какъ $\omega(\eta', \eta'')$ и $\Omega_1(\eta', \eta'')$ суть радикалы изъ раціональной функціи z, то и $\omega_1(\eta', \eta'')$ есть радикалъ изъ раціональной функціи z.

Примѣняя тѣ же разсужденія къ формѣ $\omega_1(\eta', \eta'')$, найдемъ, что

$$\omega_1(\eta', \eta'') = \Omega_2(\eta', \eta'')\,\omega_2(\eta', \eta''),$$

гдѣ $\Omega_2(\eta', \eta'')$ есть нѣкоторая первичная форма. И т. д.

Въ результатѣ мы найдемъ, что

$$\omega(\eta', \eta'') = \Omega_1(\eta', \eta'')\,.\,\Omega_2(\eta', \eta'')\ldots\,\Omega_\rho(\eta', \eta''), \tag{54}$$

гдѣ

$$\Omega_1(\eta', \eta''),\ \Omega_2(\eta', \eta''), \ldots\ \Omega_\rho(\eta', \eta'')$$

суть первичныя формы.

Теорема доказана.

Теорема 13. *Всякій коваріантъ первичной формы равенъ радикалу изъ раціональной функціи перемѣннаго z.*

Пусть первичная форма $\Omega(\eta', \eta'')$ такова:

$$\Omega(\eta', \eta'') = \alpha_0 \eta'^{\nu} + (\nu)_1 \alpha_1 \eta'^{\nu-1}\eta'' + (\nu)_2 \alpha_2 \eta'^{\nu-2}\eta''^2 + \ldots \\ + (\nu)_{\nu-1} \alpha_{\nu-1} \eta' \eta''^{\nu-1} + \alpha_\nu \eta''^{\nu} \text{ *)}. \tag{54}$$

Возьмемъ какой-либо коваріантъ ея:

$$c(\eta', \eta'') = c_0 \eta'^{\sigma} + (\sigma)_1 c_1 \eta'^{\sigma-1}\eta'' + (\sigma)_2 c_2 \eta'^{\sigma-2}\eta''^2 + \ldots \\ + (\sigma)_{\sigma-1} c_{\sigma-1} \eta' \eta''^{\sigma-1} + c_\sigma \eta''^{\sigma}. \tag{55}$$

Совершимъ обходъ около какой-нибудь критической точки на плоскости перемѣннаго z. Пусть послѣ этого обхода интегралы η', η'' перейдутъ въ $\bar{\eta}'$, $\bar{\eta}''$, при чемъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= \alpha\bar{\eta}' + \beta\bar{\eta}'', \\ \eta'' &= \gamma\bar{\eta}' + \delta\bar{\eta}'', \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \text{ **)} \tag{56}$$

Форма $\Omega(\eta', \eta'')$ перейдетъ въ $\Omega(\bar{\eta}', \bar{\eta}'')$, гдѣ:

$$\Omega(\bar{\eta}', \bar{\eta}'') = \alpha_0 \bar{\eta}'^{\nu} + (\nu)_1 \alpha_1 \bar{\eta}'^{\nu-1}\bar{\eta}'' + (\nu)_2 \alpha_2 \bar{\eta}'^{\nu-2}\bar{\eta}''^2 + \ldots \\ + (\nu)_{\nu-1} \alpha_{\nu-1} \bar{\eta}'\bar{\eta}''^{\nu-1} + \alpha_\nu \bar{\eta}''^{\nu}. \tag{57}$$

такъ какъ $\Omega(\eta', \eta'')$ есть радикалъ изъ раціональной функціи перемѣннаго z, то:

$$\Omega(\bar{\eta}', \bar{\eta}'') = j^k \Omega(\eta', \eta''), \tag{58}$$

гдѣ j корень степени μ изъ единицы, а k—нѣкоторое цѣлое число.

Подставивъ въ $\Omega(\eta', \eta'')$ вмѣсто η', η'' ихъ выраженія (56), мы приведемъ эту форму къ такому виду:

---

*) Величины:

$$(\nu)_1,\ (\nu)_2,\ (\nu)_3 \ldots$$

суть биноміальные коэффиціенты.

**) На основаніи теоремы 6.

$$\Omega(\eta', \eta'') = A_0 \bar{\eta}'^{\nu} + (\nu)_1 A_1 \bar{\eta}'^{\nu-1} \bar{\eta}'' + \ldots + A_\nu \bar{\eta}''^{\nu}. \tag{59}$$

Подставивъ выраженія (57) и (59) въ равенство (58), находимъ:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \bar{\eta}'^{\nu} + (\nu)_1 \alpha_1 \bar{\eta}'^{\nu-1} \bar{\eta}'' + \ldots + \alpha_\nu \bar{\eta}''^{\nu} = \\ &= j^k \{ A_0 \bar{\eta}'^{\nu} + (\nu)_1 A_1 \bar{\eta}'^{\nu-1} \bar{\eta}'' + \ldots + A_\nu \bar{\eta}''^{\nu} \}. \end{aligned} \tag{60}$$

Равенство (60) есть тождество, потому что иначе отношеніе $\frac{\bar{\eta}'}{\bar{\eta}''}$ было бы постоянно, интегралы $\bar{\eta}'$, $\bar{\eta}''$, а вмѣстѣ съ ними и η', η'' не были бы линейно независимы.

Сравнивая коэффиціенты въ обѣихъ частяхъ тождества (60), находимъ:

$$\alpha_0 = j^k A_0, \quad \alpha_1 = j^k A_1, \quad \alpha_2 = j^k A_2, \ldots \quad \alpha_\nu = j^k A_\nu. \tag{61}$$

Коваріантъ $c(\eta', \eta'')$ формы $\Omega(\eta', \eta'')$ послѣ совершеннаго обхода перейдетъ въ $c(\bar{\eta}', \bar{\eta}'')$.

Составимъ коваріантъ, подобный $c(\eta', \eta'')$, для формы:

$$A_0 \bar{\eta}'^{\nu} + (\nu)_1 A_1 \bar{\eta}'^{\nu-1} \bar{\eta}'' + \ldots + A_\nu \bar{\eta}''^{\nu}. \tag{59'}$$

Обозначимъ его такъ:

$$C(\bar{\eta}', \bar{\eta}''),$$

и пусть:

$$C(\bar{\eta}', \bar{\eta}'') = C_0 \bar{\eta}'^{\sigma} + (\sigma)_1 C_1 \bar{\eta}'^{\sigma-1} \bar{\eta}'' + \ldots + C_\sigma \bar{\eta}''^{\sigma}. \tag{62}$$

Въ силу основнаго свойства всякаго коваріанта, имѣемъ:

$$C(\bar{\eta}', \bar{\eta}'') = (\alpha\delta - \beta\gamma)^\lambda c(\eta', \eta''), \tag{63}$$

гдѣ λ—нѣкоторое цѣлое число.

Такъ какъ:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

то равенство (63) принимаетъ такой видъ:

$$C(\bar{\eta}', \bar{\eta}'') = c(\eta', \eta''). \tag{64}$$

Извѣстно, что коэффиціенты коваріанта суть однородныя функціи коэффиціентовъ данной формы и притомъ всѣ одинаковаго измѣренія. Обозначимъ измѣреніе коэффиціентовъ коваріанта $c(\eta', \eta'')$ буквою r. Принимая во вниманіе формулы (61), получимъ:

$$c_0 = j^{rk} C_0, \; c_1 = j^{rk} C_1, \dots \; c_\sigma = j^{rk} C_\sigma. \tag{65}$$

Вслѣдствіе этого равенство (64) преобразуется такъ:

$$c(\bar{\eta}', \bar{\eta}'') = j^{rk} c(\eta', \eta''), \tag{66}$$

откуда:

$$[c(\bar{\eta}', \bar{\eta}'')]^\mu = [c(\eta', \eta'')]^\mu, \tag{67}$$

т.-е. степень μ коваріанта $c(\eta', \eta'')$ послѣ совершеннаго обхода не измѣнила своей величины. То же самое, понятно, справедливо и для остальныхъ обходовъ. Слѣдовательно степень μ коваріанта $c(\eta', \eta'')$ есть раціональная функція z, а самъ коваріантъ есть радикалъ изъ раціональной функціи z.

Изъ теоремъ 12 и 13 слѣдуетъ, что всякій коваріантъ первичной формы можно представить въ видѣ произведенія нѣсколькихъ первичныхъ формъ.

Каждому частному интегралу дифференціальнаго уравненія (21) соотвѣтствуетъ свое алгебраическое уравненіе, которому онъ удовлетворяетъ; найдя приведенную систему корней этого уравненія, мы будемъ въ состояніи найти и соотвѣтствующую ему первичную форму. Степени алгебраическихъ уравненій на основаніи теоремы 7 одинаковы и равны n, степени же первичныхъ формъ могутъ быть различны. Изъ всѣхъ первичныхъ формъ даннаго дифференціальнаго уравненія (21) особую важность имѣетъ та, степень которой наименьшая.

Условимся во всемъ дальнѣйшемъ обозначать эту первичную форму черезъ $f(\eta', \eta'')$, степень ея буквою ν, а индексъ буквою μ. Между числами n, μ, ν существуетъ зависимость:

$$\mu\nu = n. \tag{39}$$

Теорема 14. *Индексъ μ первичной формы наинисшей степени $f(\eta', \eta'')$ не можетъ равняться 1.*

Если индексъ первичной формы равенъ 1, то въ числѣ корней алгебраическаго уравненія, соотвѣтствующаго этой формѣ, нѣтъ ни одной пары корней, отношеніе которыхъ было бы постоянно. Степень такой формы равна n.

Докажемъ, что для дифференціальнаго уравненія (21) можно составить первичную форму степени ниже n.

Пусть

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots\ \alpha_i, \ldots,\ \alpha_\rho$$

суть особыя точки интеграловъ уравненія (21).

Непремѣнно нѣкоторыя изъ этихъ точекъ будутъ точками критическими, потому что интегралы уравненія (21) суть функціи многозначныя.

Пусть α_i есть критическая точка.

Мы знаемъ, что существуютъ два интеграла уравненія (21), которые въ области точки α_i разлагаются въ ряды такого вида:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= (z-\alpha_i)^{r_1}\, \varphi_1(z-\alpha_i), \\ \eta_2 &= (z-\alpha_i)^{r_2}\, \varphi_2(z-\alpha_i), \end{aligned}\right\} \text{*)} \tag{68}$$

гдѣ r_1 и r_2 суть корни Фуксова опредѣляющаго уравненія:

$$r(r-1)+M_i=0. \tag{24}$$

Корни урявненія (24) раціональны и по крайней мѣрѣ одинъ изъ нихъ есть число дробное: иначе точка α_i не была бы критическою точкою ни для одного изъ интеграловъ уравненія (21).

Пусть r_1 число дробное.

Составимъ то алгебраическое уравненіе, которому удовлетворяетъ функція:

$$\eta_1 = (z-\alpha_i)^{r_1}\, \varphi_1(z-\alpha_i). \tag{69}$$

Для этого мы должны найти всѣ значенія, пріобрѣтаемыя функціею η_1 при всевозможныхъ обходахъ на плоскости перемѣннаго z.

---

*) Въ § 1 это было доказано для уравненія (2). Уравненіе (21) есть простѣйшій частный случай уравненія (2).

Дѣлая обходы вокругъ точки α_i, мы увидимъ, что η_1 принимаетъ такія значенія:

$$e^{2\pi r_1 i}\eta_1,\quad e^{4\pi r_1 i}\eta_1,\quad e^{6\pi r_1 i}\eta_1,\ldots$$

Въ числѣ корней составляемаго уравненія находятся такіе корни, которые разнятся отъ корня η_1 постоянными множителями:

$$e^{2\pi r_1 i},\ e^{4\pi r_1 i},\ e^{6\pi r_1 i}\ldots$$

Приведенная система корней будетъ содержать въ себѣ менѣе, нежели n корней, соотвѣтствующая первичная форма будетъ степени ниже n.

Теорема доказана.

Теорема 15. *Если степень первичной формы $f(\eta', \eta'')$ выше 2, то индексъ ея не можетъ равняться 2.*

Если индексъ первичной формы равенъ 2, то степень ея равна $\frac{n}{2}$. Докажемъ, что всегда можно построить первичную форму степени ниже $\frac{n}{2}$, если степень формы $f(\eta', \eta'')$ не равна 2.

Возьмемъ снова тѣ два частныхъ интеграла η_1, η_2 уравненія (21), которые въ области критической точки α_i разлагаются въ ряды вида:

$$\left.\begin{aligned}\eta_1&=(z-\alpha_i)^{r_1}\varphi_1(z-\alpha_i),\\ \eta_2&=(z-\alpha_i)^{r_2}\varphi_1(z-\alpha_i),\end{aligned}\right\}\tag{68}$$

гдѣ показатели степени r_1, r_2 суть корни опредѣляющаго уравненія Фукса:

$$r(r-1)+M_i=0.\tag{24}$$

Для того, чтобы функціи η_1, η_2 были алгебраическія, необходимо, чтобы корни уравненія (24) были раціональны.

Исключимъ цѣлую часть изъ числа r_1 и обозначимъ ее буквою e, а остающуюся положительную правильную дробь обозначимъ буквою ε:

$$r_1 = e + \varepsilon. \tag{69}$$

Изъ уравненія (24) видно, что

$$r_1 + r_2 = 1;$$

слѣдовательно:

$$r_2 = 1 - e - \varepsilon. \tag{70}$$

Различимъ два случая:

1) хотя бы для одной какой-нибудь изъ критическихъ точекъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p,$$

напримѣръ для α_i, дробь ε отлична отъ $\frac{1}{2}$;

2) для всѣхъ критическихъ точекъ дробь ε равна $\frac{1}{2}$.

I. Пусть для точки α_i дробь ε отлична отъ $\frac{1}{2}$.

Обозначимъ знаменатель дроби ε буквою l. Число это по нашему предположенію больше 2.

Пусть:

$$e^{\frac{2\pi i}{l}} = j. \tag{71}$$

Тогда при l обходахъ около точки α_i, функція η_1 пріобрѣтетъ l такихъ значеній:

$$\eta_1, j\eta_1, j^2\eta_1, \ldots j^{l-1}\eta_1. \tag{72}$$

Всѣ n значеній того уравненія, которому удовлетворяетъ функція η_1, могутъ быть расположены въ видѣ таблицы, подобной таблицѣ (38). Приведенная система корней этого уравненія будетъ содержать въ себѣ не болѣе $\frac{n}{l}$ членовъ.

Соотвѣтствующая первичная форма будетъ степени не выше $\frac{n}{l}$, т.-е. во всякомъ случаѣ ниже $\frac{n}{2}$.

Это противорѣчитъ сдѣланному допущенію, что первичная форма $f(\eta', \eta'')$ наинисшей степени имѣетъ степень равную $\frac{n}{2}$.

Итакъ, первый изъ указанныхъ случаевъ встрѣтиться не можетъ.

II. Пусть для всѣхъ критическихъ точекъ дробь ε равна $\frac{1}{2}$.

Возьмемъ форму:

$$a\eta_1^2 + b\eta_1\eta_2 + c\eta_2^2, \tag{73}$$

гдѣ a, b, c, произвольно взятыя постоянныя числа.

Функціи η_1^2, $\eta_1\eta_2$, η_2^2 въ области точки α_i разлагаются въ ряды вида:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1^2 &= (z-\alpha_i)^{1+2e}\,\varphi_1^2(z-\alpha_i), \\ \eta_2^2 &= (z-\alpha_i)^{1-2e}\,\varphi_2^2(z-\alpha_i), \\ \eta_1\eta_2 &= (z-\alpha_i)\,\varphi_1(z-\alpha_i)\,\varphi_2(z-\alpha_i). \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Онѣ однозначны въ области особой точки α_i.

Если такъ, то и функція (73) однозначна въ области точки α_i.

Возьмемъ форму:

$$A\eta'^2 + B\eta'\eta'' + C\eta''^2, \tag{75}$$

гдѣ A, B, C суть произвольныя постоянныя числа, а η', η'' любыхъ два линейно-независимыхъ частныхъ интеграла уравненія (21).

Выразивъ η' и η'' линейно черезъ η_1, η_2, мы убѣдимся, въ томъ, что форма (75) приводится къ виду (73) и по доказанному однозначна въ области точки α_i. По той же причинѣ она однозначна въ области всѣхъ остальныхъ особыхъ точекъ. Слѣдовательно она равна раціональной функціи z и есть первичная форма второй степени.

Итакъ, мы убѣдились въ томъ, что первичная форма $f(\eta', \eta'')$ только тогда можетъ имѣть индексъ 2, когда она второй степени.

Теорема доказана.

Теорема 16. *Гессіанъ первичной формы* $f(\eta', \eta'')$ *есть тоже первичная форма за исключеніемъ случая, когда форма* $f(\eta', \eta'')$ *второй степени.*

Составимъ гессіанъ (опредѣлитель Гессе) формы $f(\eta', \eta'')$. Пусть это будетъ $H(\eta', \eta'')$. На основаніи теоремы 13 форма $H(\eta', \eta'')$, какъ коваріантъ первичной формы, будетъ равна радикалу изъ раціональной функціи z, а потому, на основаніи теоремы 12, функція эта есть или первичная форма, или произведеніе нѣсколькихъ первичныхъ формъ.

Такъ какъ степень формы $f(\eta', \eta'')$ равна ν, то степень $H(\eta', \eta'')$ равна $2\nu—4$.

Форма $H(\eta', \eta'')$ не можетъ дѣлиться нацѣло на $f(\eta', \eta'')$, потому что въ такомъ случаѣ дополнительный множитель былъ бы степени $\nu - 4$ и не могъ бы быть ни первичною формой, ни, подавно, произведеніемъ первичныхъ формъ. (Первичная форма наинисшей степени есть форма степени ν). Изъ того же разсужденія слѣдуетъ, что форма $H(\eta', \eta'')$ подавно не можетъ дѣлиться нацѣло на какую-либо первичную форму степени, выше ν. Итакъ форма $H(\eta', \eta'')$ есть форма первичная.

Однако надо замѣтить, что наши разсужденія потеряютъ силу, когда

$$\nu = 1, 2, 3, 4.$$

Разберемъ эти случаи въ отдѣльности.

1) Если $\nu = 1$, то гессіана не существуетъ вовсе. Въ этомъ случаѣ формой $f(\eta', \eta'')$ будетъ линейная форма:

$$c_1\eta' + c_2\eta''.$$

Этотъ частный интегралъ равенъ радикалу изъ раціональной функціи—иными словами онъ есть корень двучленнаго уравненія. Случай, когда уравненіе (1), а слѣдовательно и

(20) двучленное, былъ нами устраненъ; поэтому въ изучаемыхъ нами случаяхъ ν не можетъ равняться 1.

2) Если $\nu=2$, то гессіанъ есть постоянное число (инваріантъ). Этотъ случай, дѣйствительно, особый и совершенно элементарнаго характера. Его мы разберемъ отдѣльно въ концѣ настоящей главы; теперь же мы его временно устраняемъ изъ разсмотрѣнія такъ же, какъ устранили уравненіе двучленное.

3) Если $\nu=3$, то степень гессіана равна 2. Это, очевидно, невозможно: форма второй степени $H(\eta', \eta'')$ не можетъ раздѣлиться нацѣло ни на кубичную форму $f(\eta', \eta'')$, ни, подавно, на форму степени выше, нежели 3; а сама она не можетъ быть первичною формой, потому что въ разсматриваемомъ случаѣ первичная форма наинисшей степени есть форма кубичная.

Это противорѣчіе показываетъ, что случая $\nu=3$ совсѣмъ встрѣтиться не можетъ.

4) Если $\nu=4$, то степень гессіана тоже равна 4. Возникаетъ сомнѣніе, не разнится ли гессіанъ отъ формы $f(\eta', \eta'')$ лишь постояннымъ множителемъ. Изъ теоріи алгебраическихъ формъ *) извѣстно, что такой случай можетъ наступить только тогда, когда форма $f(\eta', \eta'')$ имѣетъ равные корни. Такъ какъ линейные множители первичной формы $f(\eta', \eta'')$ суть корни приведенной системы, то въ числѣ ихъ равныхъ или отличающихся между собою только постояннымъ множителемъ оказаться не можетъ.

Итакъ, за исключеніемъ случая $\nu=2$ гессіанъ $H(\eta', \eta'')$ формы $f(\eta', \eta'')$ есть первичная форма, отличная отъ $f(\eta', \eta'')$.

Теорема доказана.

Условимся обозначать степень гессіана буквою ν_1, индексъ его буквою μ_1; тогда

$$\nu_1=2\nu-4,\quad \nu_1\mu_1=n. \tag{76}$$

*) См. Clebsch. Theorie der binären algebraischen Formen стр. 163 или: Gordan. Vorlesungen über Invariantentheorie, томъ 2, стр. 197.

Теорема 17. *Индексъ μ_1 первичной формы $H(\eta', \eta'')$ не можетъ быть равенъ 1.*

Если индексъ μ_1 первичной формы $H(\eta', \eta'')$ равенъ 1, то степень ν_1 этой формы равна n:

$$\nu_1 = 2\nu - 4 = n. \tag{77}$$

Такъ какъ ν дѣлитель числа n *), то изъ равенства (77) слѣдуетъ, что ν есть дѣлитель числа 4; а такъ какъ мы знаемъ, что

$$\nu \geqq 4,$$

то приходимъ къ заключенію, что

$$\nu = 4.$$

Положивъ въ равенствѣ (77):

$$\nu = 4,$$

находимъ:

$$\nu_1 = 4 = n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что:

$$\mu = \frac{n}{\nu} = 1.$$

А это противорѣчитъ теоремѣ 14.

Теорема 18. *Индексъ μ_1 первичной формы $H(\eta', \eta'')$ не можетъ равняться двумъ.*

Если индексъ μ_1 первичной формы $H(\eta', \eta'')$ равенъ 2, то степень ν_1 этой формы равна $\frac{n}{2}$:

$$\nu_1 = 2\nu - 4 = \frac{n}{2}. \tag{78}$$

Отсюда находимъ, что

*) Потому что $\mu\nu = n$.

$$\nu = 2 + \frac{n}{4}. \tag{79}$$

Слѣдовательно число n кратно четырехъ:

$$n = 4n_1, \tag{80}$$

и поэтому:

$$\nu = n_1 + 2. \tag{81}$$

Будемъ различать два случая:

1) Число n_1 нечетное. Изъ равенства (81) видно, что ν число взаимно простое съ n_1. Такъ какъ ν есть дѣлитель числа $n = 4n_1$, и не меньше 4, то оно равно 4.

Въ такомъ случаѣ изъ равенства (79) находимъ, что $n=8$. Индексъ μ первичной формы $f(\eta', \eta'')$ равенъ:

$$\mu = \frac{n}{\nu} = 2.$$

Это противорѣчитъ теоремѣ 15.

2) Число n_1 четное. Изъ равенства (81) видно, что ν имѣетъ съ нимъ общій наибольшій дѣлитель 2:

$$\nu = 2\nu_1,$$

гдѣ ν_1 число взаимно простое съ n_1.

Если

$$\nu = 2\nu_1$$

есть дѣлитель числа

$$n = 4n_1,$$

и числа ν_1 и n_1 взаимно простыя, то ν_1 равно 1 или 2.

Если $\nu_1=1$, то $\nu=2$. Этотъ случай нами устраненъ.

Если $\nu_1=2$, то $\nu=4$. Въ такомъ случаѣ изъ равенства (79) находимъ, что $n=8$ и что индексъ μ первичной формы $f(\eta', \eta'')$ равенъ:

$$\mu = \frac{n}{\nu} = 2.$$

Это противорѣчитъ теоремѣ 15.

Итакъ, дѣйствительно, индексъ μ первичной формы $H(\eta', \eta'')$ не можетъ равняться 2.

§ 3. **Уравненія, которымъ удовлетворяютъ отношенія корней уравненія разсматриваемаго класса.**

Теорема 19. *Отношеніе частныхъ интеграловъ уравненія (21) удовлетворяютъ неприводимому алгебраическому уравненію степени:*

$$N = n \text{ или } N = \frac{n}{2}.$$

Пусть η', η'' суть два линейно независимыхъ частныхъ интеграла уравненія (21).

Возьмемъ функцію:

$$u = \frac{\eta'}{\eta''}, \tag{82}$$

и построимъ то *неприводимое* *) уравненіе, которому она удовлетворяетъ:

$$\Psi(u, z) = 0. \tag{83}$$

Пусть степень этого уравненія равна N.

Ясно, что η' есть алгебраическая функція u и обратно: u есть алгебраическая функція η'.

Величина u есть однозначная функція η' **). Въ самомъ дѣлѣ, изъ теоремы 7 мы знаемъ, что η'' есть раціональная функція η'. Вставивъ это выраженіе η'' въ формулу (82), мы найдемъ, что u есть раціональная функція η'.

Посмотримъ, сколько значеній имѣетъ η', разсматриваемая какъ функція u.

Пусть нѣкоторому значенію u соотвѣтствуетъ два значенія η':

---

*) Если бы полученное уравненіе оказалось приводимымъ, то мы отдѣлили бы тотъ неприводимый множитель лѣвой части уравненія, который имѣетъ корнемъ величину (82). Приравнявъ этотъ множитель нулю, мы нашли бы неприводимое уравненіе (83).

**) Въ коэффиціенты этой функціи можетъ входить перемѣнное z; при томъ эти коэффиціенты будутъ раціональны относительно z. Перемѣнное z мы разсматриваемъ, какъ величину данную.

η' и $\bar{\eta}'$.

Пусть обходъ на плоскости перемѣннаго z, переводящій значеніе η' въ $\bar{\eta}'$, преобразуетъ значеніе η'' въ $\bar{\eta}''$.

Въ такомъ случаѣ:

$$u = \frac{\eta'}{\eta''}\,, \quad u = \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\eta}''}\,. \tag{84}$$

Отсюда:

$$\frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\eta}''}\,. \tag{85}$$

Одифференцировавъ это равенство по z, находимъ:

$$\frac{\eta''\frac{d\eta'}{dz} - \eta'\frac{d\eta''}{dz}}{\eta''^2} = \frac{\bar{\eta}''\frac{d\bar{\eta}'}{dz} - \bar{\eta}'\frac{d\bar{\eta}''}{dz}}{\bar{\eta}''^2}\,. \tag{86}$$

На основаніи теоремы Ліувилля имѣемъ:

$$\eta''\frac{d\eta'}{dz} - \eta'\frac{d\eta''}{dz} = C, \tag{87}$$

гдѣ C—постоянное число.

Совершивъ обходъ на плоскости перемѣннаго z, переводящій значенія η', η'' въ $\bar{\eta}'$, $\bar{\eta}''$ найдемъ:

$$\bar{\eta}''\frac{d\bar{\eta}'}{dz} - \bar{\eta}'\frac{d\bar{\eta}''}{dz} = C. \tag{88}$$

Изъ равенствъ (86), (87), (88) слѣдуетъ:

$$\eta''^2 = \bar{\eta}''^2, \tag{89}$$

а изъ равенствъ (85) и (89) заключаемъ, что:

$$\eta'^2 = \bar{\eta}'^2.$$

Слѣдовательно:

$$\eta' = \pm\,\bar{\eta}'. \tag{90}$$

Мы видимъ, что каждому значенію u соотвѣтствуетъ или одно значеніе η', или два значенія, разнящихся между собою знаками.

Отсюда слѣдуетъ, что η' можетъ быть представлена въ видѣ квадратнаго радикала изъ раціональной функціи u *).

Итакъ, мы нашли, что u есть раціональная функція η', а η' есть квадратный радикалъ изъ раціональной функціи u.

Отсюда слѣдуетъ, что степень N уравненія (83) или равна**), или вдвое меньше степени n уравненія (20):

$$N = n \text{ или } N = \frac{n}{2}.$$

Теорема доказана.

Обратимъ вниманіе на слѣдующую особенность уравненія (20): *если степень уравненія (83) равна* $\frac{n}{2}$, *то неизвѣстное* η *входитъ въ уравненіе (20) только въ четныхъ степеняхъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ $N = \frac{n}{2}$ значенія функціи η' попарно разнятся знаками, какъ мы только что видѣли.

Теорема 20. *Отношеніе частныхъ интеграловъ уравненія (21) удовлетворяетъ алгебраическому уравненію*:

$$\frac{H^{\mu}(u)}{f^{\mu}(u)} = \Re(z), \tag{93}$$

гдѣ $\Re(z)$ *есть раціональная функція* z, *а черезъ* $H(u)$ *и* $f(u)$ *обозначены многочлены*

$$H(u, 1),\ f(u, 1).$$

Пусть намъ удалось найти для уравненія (20) первичную форму наинисшей степени:

---

*) Подкоренная функція можетъ содержать перемѣнное z, и въ такомъ случаѣ коэффиціенты ея будутъ раціональными функціями z. Выраженіе этой функціи приведено ниже.

**) Если корень извлекается точно.

$$f(\eta', \eta'').$$

Степень этой формы равна ν, а индексъ μ, при чемъ:

$$\mu\nu = n. \tag{39}$$

Гессіанъ $H(\eta', \eta'')$ формы $f(\eta', \eta'')$, какъ мы знаемъ, есть тоже первичная форма степени $\nu_1 = 2\nu - 4$ индекса μ_1, при чемъ:

$$\mu_1 \nu_1 = n. \tag{76'}$$

Составимъ выраженіе:

$$\frac{H^{\mu_1}(\eta', \eta'')}{f^{\mu}(\eta', \eta'')}. \tag{91}$$

Относительно выраженія (91) можно сказать слѣдующее:

1) оно равно раціональной функціи z, потому что числитель и знаменатель его суть раціональныя функціи z:

$$\frac{H^{\mu_1}(\eta', \eta'')}{f^{\mu}(\eta', \eta'')} = \Re(z); \tag{92}$$

2) выраженіе (91) есть однородная функція нулевой степени относительно перемѣнныхъ η' и η'', потому что числитель и знаменатель его суть однородныя функціи этихъ перемѣнныхъ одинаковой степени n.

Положивъ снова

$$u = \frac{\eta'}{\eta''} \tag{82}$$

и введя для краткости обозначенія:

$$H(u, 1) = H(u),\ f(u, 1) = f(u),$$

мы приведемъ уравненіе (92) къ такому виду:

$$\frac{H^{\mu_1}(u)}{f^{\mu}(u)} = \Re(z). \tag{93}$$

Теорема доказана.

Теорема 21. *При $N=n$ уравненіе (93) неприводимо и тождественно съ уравненіемъ (83). При $N=\frac{n}{2}$ уравненіе (93) распадается на два неприводимыхъ уравненія степени $\frac{n}{2}$; эти два уравненія тождественны какъ между собою, такъ и съ уравненіемъ (83).*

I. Пусть $N=n$. Въ этомъ случаѣ уравненіе (93) имѣетъ общій корень съ неприводимымъ уравненіемъ (83), и степени обоихъ уравненій одинаковы. Слѣдовательно они между собою тождественны.

II. Пусть $N=\frac{n}{2}$. Въ этомъ случаѣ, какъ мы знаемъ, каждой парѣ значеній функцій η', η'' соотвѣтствуетъ другая пара значеній, разнящихся отъ нихъ только знаками.

Корнями уравненія (93) служатъ величины отношеній всѣхъ паръ значеній η', η'' между собою. Ясно, что всѣ корни уравненія (93) попарно равны между собою. Уравненіе (93) распадается на два тождественныхъ между собою уравненія степени $\frac{n}{2}$. Это возможно только въ томъ случаѣ, если μ_1 и μ суть числа четныя, а раціональная функція $\mathfrak{R}(z)$ есть точный квадратъ:

$$\mu_1=2\lambda_1,\ \mu=2\lambda,\ \mathfrak{R}(z)=R^2(z), \tag{94}$$

гдѣ $R(z)$ есть нѣкоторая раціональная функція z.

При выполненіи этихъ условій уравненіе (93) распадается на два одинаковыхъ уравненія:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)}=R(z). \tag{95}$$

Это уравненіе степени $N=\frac{n}{2}$ неприводимо и тождественно съ уравненіемъ (83), что видно изъ такихъ же соображеній, которыя мы привели при разсмотрѣніи предъидущаго случая.

Теорема доказана.

Ради единства формулъ мы дальше всегда будемъ изображать уравненіе (83) въ видѣ (95), имѣя постоянно въ виду два возможныхъ случая:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & N=n,\ \lambda=\mu,\ \lambda_1=\mu_1,\ R(z)=\mathfrak{R}(z), \\ \text{II.} & N=\frac{n}{2},\ \lambda=\frac{\mu}{2},\ \lambda_1=\frac{\mu_1}{2},\ R(z)=\sqrt{\mathfrak{R}(z)}, \end{array}\right\} \qquad (96)$$

гдѣ N, λ, λ_1 суть цѣлыя числа, а $R(z)$—раціональная функція z. Въ обоихъ случаяхъ имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$N=\lambda\nu=\lambda_1\nu_1. \qquad (97)$$

Теорема 22. *Отношенія частныхъ интеграловъ уравненій (2) и (21) и отношенія корней уравненій (1) и (20) удовлетворяютъ уравненіямъ вида:*

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)}=R(z), \qquad (95)$$

при чемъ степень N этого уравненія и показатели λ_1 и λ опредѣляются равенствами (96).

Справедливость теоремы для интеграловъ уравненія (21) была уже доказана нами выше.

Корни уравненія (20) суть частные интегралы уравненія (21); слѣдовательно, для нихъ теорема подавно справедлива. Изъ формулы (19) видно, что интегралы уравненія (2) связаны съ интегралами уравненія (21) посредствомъ соотношенія:

$$y=e^{-\frac{1}{2}\int p_1\,dz}\,\eta. \qquad (19')$$

Слѣдовательно отношеніе интеграловъ:

$$\frac{y'}{y''}$$

уравненія (2) таково же, какъ и отношеніе интеграловъ:

$$\frac{\eta'}{\eta''}$$

уравненія (21):

$$u = \frac{y'}{y''} = \frac{\eta'}{\eta''}. \tag{98}$$

Если такъ, то теорема должна быть справедлива какъ для дифференціальнаго уравненія (2), такъ и для алгебраическаго уравненія (1).

Такъ какъ теорема 20 по доказанному справедлива для уравненій (1) и (2), а уравненія (20) и (21) могутъ быть разсматриваемы какъ простѣйшій случай уравненій (1) и (2), то въ дальнѣйшемъ мы снова вернемся къ уравненіямъ (1) и (2). Уравненіями (20) и (21) мы будемъ пользоваться иногда для упрощенія вычисленій тамъ, гдѣ это будетъ возможно сдѣлать, не нарушая общности теоремы. Мы будемъ также иногда указывать на особенности этого болѣе простаго частнаго случая.

Теорема 23. *Корни y_1, y_2 уравненія (1) выражаются при помощи одного квадратнаго радикала, какъ явныя функціи корня*

$$u = \frac{y_1}{y_2} \tag{98'}$$

уравненія (95).

Пусть

$$u = \frac{y_1}{y_2} \tag{98'}$$

есть корень уравненія:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)} = R(z). \tag{95}$$

Одифференцируемъ равенство (98′):

$$\frac{du}{dz} = \frac{y_2 \dfrac{dy_1}{dz} - y_1 \dfrac{dy_2}{dz}}{{y_2}^2}. \tag{99}$$

Пользуясь теоремою Ліувилля:

$$y_2 \frac{dy_1}{dz} - y_1 \frac{dy_2}{dz} = Ce^{-\int p_1 dz},$$

приводимъ уравненіе (99) къ такому виду:

$$\frac{Ce^{-\int p_1 dz}}{y_2^{\,2}} = \frac{du}{dz},$$

откуда:

$$y_2 = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{\frac{du}{dz}}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz} \quad . \tag{100}$$

Изъ равенствъ (98′) и (100) находимъ:

$$y_1 = \frac{u\sqrt{C}}{\sqrt{\frac{du}{dz}}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz} \quad . \tag{101}$$

Для нахожденія производной $\frac{du}{dz}$ дифференцируемъ уравненіе (95):

$$\frac{H^{\lambda_1-1}(u)}{f^{\lambda+1}(u)}\left\{\lambda_1 f(u)\frac{dH(u)}{du} - \lambda H(u)\frac{df(u)}{du}\right\}\frac{du}{dz} = \frac{dR(z)}{dz} . \tag{102}$$

Полагая:

$$\lambda_1 f(u)\frac{dH(u)}{du} - \lambda H(u)\frac{df(u)}{du} = NT(u) \text{ *)}, \tag{103}$$

находимъ:

---

*) Бинарная форма $T(\eta', \eta'')$, соотвѣтствующая многочлену $T(u)$, есть функціональный опредѣлитель формъ $f(\eta', \eta'')$ и $H(\eta', \eta'')$. Отсюда слѣдуетъ, что форма $T(\eta', \eta'')$ есть коваріантъ первичной формы $f(\eta', \eta'')$ и потому равна радикалу изъ раціональной функціи перемѣннаго z. Впослѣдствіи мы часто будемъ пользоваться многочленомъ $T(u)$.

$$N\frac{H^{\lambda_1-1}(u)\,T(u)}{f^{\lambda+1}(u)}\frac{du}{dz}=\frac{dR(z)}{dz}\,, \tag{104}$$

откуда, принимая во вниманіе уравненіе (95), имѣемъ:

$$\frac{du}{dz}=\frac{f(u)\,H(u)\,\dfrac{dR(z)}{dz}}{NT(u)\,R(z)}\,. \tag{105}$$

Подставивъ это выраженіе въ формулы (101) и (100), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= ku\sqrt{\frac{T(u)R(z)}{f(u)\,H(u)\,\dfrac{dR(z)}{dz}}}\,e^{-\frac{1}{2}\int p_1dz}\,,\\ y_2 &= k\sqrt{\frac{T(u)R(z)}{f(u)\,H(u)\,\dfrac{dR(z)}{dz}}}\,e^{-\frac{1}{2}\int p_1dz}\,, \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

гдѣ k есть нѣкоторое постоянное число.

Изъ формулъ (106) слѣдуетъ, что доказываемая теорема справедлива.

Для уравненія (20) формулы (106) нѣсколько упрощаются:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= ku\sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)\,H(u)\,\dfrac{dR(z)}{dz}}}\,,\\ \eta_2 &= k\sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)\,H(u)\,\dfrac{dR(z)}{dz}}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

Изъ теоремы 23 слѣдуетъ, что задача о рѣшеніи уравненій (1) и (20) приводится къ задачѣ о рѣшеніи уравненія (95):

корни уравненій (1) и (20) выражены нами, какъ явныя функціи корней уравненія (95).

Вслѣдствіе этого мы съ особенною полнотою будемъ изучать свойства и способы рѣшенія уравненій (95). Ниже мы увидимъ, что корни всѣхъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ, выражаются, какъ явныя функціи корней уравненій вида (95).

§ 4. **Случай, когда дифференціальное уравненіе имѣетъ первичную форму второй степени.**

Пусть дифференціальное уравненіе (21) имѣетъ первичную форму 2-ой степени:

$$(\alpha\eta'+\beta\eta'')(\gamma\eta'+\delta\eta''). \tag{108}$$

Положивъ:

$$\alpha\eta'+\beta\eta''=\eta_1, \quad \gamma\eta'+\delta\eta''+\eta_2, \tag{109}$$

мы приведемъ первичную форму (108) къ виду:

$$f(\eta_1, \eta_2)=\eta_1\,\eta_2. \tag{110}$$

Функціи η_1 и η_2 суть частные интегралы дифференціальнаго уравненія (21) и корни алгебраическаго уравненія (20) степени n.

Индексъ первичной формы (110) равенъ:

$$\nu=\frac{n}{2}.$$

Слѣдовательно, степень n четная.

Положивъ:

$$n=2m,$$

мы находимъ, что индексъ первичной формы 2-ой степени (110) равенъ m.

Изъ свойствъ первичной формы слѣдуетъ, что

$$(\eta_1 \eta_2)^m = \mathfrak{R}(z), \tag{111}$$

гдѣ $\mathfrak{R}(z)$ раціональная функція z.

На основаніи вида уравненія (36) мы можемъ сказать, что то алгебраическое уравненіе, которому удовлетворяютъ частные интегралы η_1, η_2 должно быть таково:

$$A_0 \eta^{2m} + A_m \eta^m + A_{2m} = 0, \tag{112}$$

гдѣ A_0, A_m, A_{2m} суть раціональныя функціи z.

Всѣ корни этого уравненія могутъ быть расположены въ слѣдующей таблицѣ:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1,\ j\eta_1, j^2\eta_1, \ldots\ j^{m-1}\eta_1, \\ \eta_2,\ j\eta_2, j^2\eta_2, \ldots\ j^{m-1}\eta_2, \end{array}\right\} \tag{113}$$

гдѣ j есть первообразный корень степени m изъ 1.

Произведеніе всѣхъ корней уравненія (112) равно:

$$\frac{A_{2m}}{A_0}.$$

Слѣдовательно

$$(\eta_1 \eta_2)^m = \frac{A_{2m}}{A_0}. \tag{114}$$

Изъ равенствъ (111) и (114) находимъ:

$$\mathfrak{R}(z) = \frac{A_{2m}}{A_0}. \tag{115}$$

Это равенство опредѣляетъ функцію $\mathfrak{R}(z)$.

Корни уравненія (112) опредѣляются формулой:

$$\eta = \sqrt[m]{\frac{-A_m + \sqrt{A_m^2 - 4A_0 A_{2m}}}{2A_0}}, \tag{116}$$

гдѣ радикалы должны послѣдовательно получать всѣ свои значенія.

Итакъ, случай существованія первичной формы 2-ой степени по характеру своему совершенно элементарный *).

Ради полноты изложенія составимъ то алгебраическое уравненіе, которому удовлетворяютъ отношенія корней уравненія (112).

Положивъ:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=u,$$

мы легко находимъ, что u есть корень уравненія:

$$\frac{\left(\frac{u^m+1}{2}\right)^2}{u^m}=R(z), \tag{117}$$

гдѣ

$$R(z)=\frac{A_m{}^2}{4A_0A_{2m}}\,. \tag{118}$$

---

*) Не лишено интереса такое замѣчаніе: всякое кубичное уравненіе вида:

$$y^3+py+q=0 \tag{a}$$

имѣетъ корнями частные интегралы нѣкотораго линейнаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка. Оба радикала Кардановой формулы:

$$\eta_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}\ \text{и}\ \eta_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}} \tag{b}$$

суть частные интегралы того же дифференціальнаго уравненія, и въ то же время они суть корни уравненія 6-ой степени:

$$\eta^6+q\eta^3+\frac{p^3}{27}=0. \tag{c}$$

Произведеніе

$$\eta_1\ \eta_2$$

есть первичная форма второй степени индекса 3:

$$\eta_1\ \eta_2=\sqrt[3]{\frac{p^3}{27}}=\frac{p}{3}\,. \tag{d}$$

Это уравненіе того же типа, какъ и уравненіе (95). Разница только въ томъ, что:

$$\frac{u^m+1}{2}$$

не есть гессіанъ функціи u *).

Для большаго сходства формулъ мы будемъ полагать:

$$f(u)=u,\quad H(u)=\frac{u^m+1}{2}\,. \tag{119}$$

Тогда уравненіе (117) приметъ видъ:

$$\frac{H^2(u)}{f^m(u)}=R(z). \tag{120}$$

Это уравненіе того же типа и обладаетъ тѣми же свойствами, какъ и уравненіе (95). Въ дальнѣйшемъ мы его больше не будемъ выдѣлять изъ общей теоріи. Не лишено интереса то замѣчаніе, что корни уравненія (112) могутъ быть выражены при помощи формулъ (107) черезъ корень u уравненія (120). При этомъ функціональный опредѣлитель $T(u)$ функцій $f(u)$ и $H(u)$ выразится такъ:

$$T(u)=\frac{u^m-1}{2}\,. \tag{121}$$

---

*) Если $f(\eta_1,\ \eta_2)=\eta_1\ \eta_2$, то $f(u)=u$.

ГЛАВА II.

Свойства алгебраическихъ уравненій, имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Въ главѣ I мы разсмотрѣли главнѣйшія свойства уравненій, имѣющихъ корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка, и видѣли, что рѣшеніе этихъ уравненій можетъ быть приведено къ рѣшенію уравненій иного класса: уравненій имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Теперь мѣ займемся изученіемъ свойствъ уравненій этого новаго класса и убѣдимся въ томъ, что всѣ они разрѣшимы въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

§ 5. Основныя свойства.

Согласно съ результатами, найденными въ главѣ I, мы можемъ утверждать, что неприводимое алгебраическое уравненіе, которому удовлетворяютъ частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+p_1\frac{dy}{dz}+p_2\,y=0, \qquad (1)$$

должно имѣть такой видъ:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)}=R(z). \qquad (2)$$

Степени многочленовъ $f(u)$ и $H(u)$ по прежнему мы будемъ обозначать буквами ν и ν_1. Въ такомъ случаѣ:

$$\lambda\nu=\lambda_1\nu_1=N. \tag{3}$$

Теорема 1. *Показатели λ и λ_1, входящіе въ уравненіе (2), не могутъ равняться единицѣ.*

Обозначимъ по прежнему индексы первичныхъ формъ

$$f(\eta', \eta''),\ H(\eta', \eta'')$$

буквами μ и μ_1.

Изъ формулъ (96) главы I мы видимъ, что показатели λ и λ_1 или соотвѣтственно равны индексамъ μ и μ_1, или вдвое меньше ихъ.

Изъ теоремъ 14, 15, 17 и 18 главы I слѣдуетъ, что если степень ν первичной формы $f(\eta', \eta'')$ отлична отъ 2, то индексы μ и μ_1 не могутъ равняться ни 1, ни 2.

Если такъ, то при ν отличномъ отъ 2 показатели λ и λ_1 не могутъ равняться 1.

Случай $\nu=2$ былъ нами разсмотрѣнъ въ § 4.

Въ этомъ случаѣ уравненіе (1) таково:

$$\frac{H^2(u)}{f^m(u)}=R(z), \tag{4}$$

гдѣ

$$f(u)=u,\ H(u)=\frac{u^m+1}{2}. \tag{5}$$

Такъ какъ при $m=1$ уравненіе (4) никакого интереса не представляетъ, то мы въ правѣ сказать, что въ случаѣ $\nu=2$ уравненіе (1) имѣетъ показателями λ и λ_1 числа, не меньшія 2.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Степень N уравненія (2) не ниже 4.*

Изъ равенствъ (3) слѣдуетъ, что

$$N=\lambda\nu,$$

а такъ какъ ν не меньше 2, и λ по теоремѣ 1 тоже не меньше 2, то N не меньше 4.

Теорема 3. *Уравненіе (2) имѣетъ группу линейныхъ подстановокъ* *).

*) Какъ мы уже говорили выше, мы будемъ называть линейною подстановкою преобразованіе такого вида:

$$\bar{u}=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}.$$

Линейныя подстановки мы будемъ обозначать символами

$$S,\ \mathfrak{T},\ U\ldots$$

напр.:

$$S(u)=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}.$$

Если надъ количествомъ u совершается подстановка S и затѣмъ *надъ полученнымъ результатомъ* совершается подстановка $\mathfrak{T}$, то мы будемъ обозначать это формулою:

$$\mathfrak{T}S(u)$$

и называть подстановку $\mathfrak{T}S$ произведеніемъ подстановокъ S и $\mathfrak{T}$.

Подстановку вида:

$$SSS\ldots S(u)$$

мы будемъ обозначать сокращенно такъ:

$$S^m(u)$$

и называть символъ S^m степенью подстановки S.

Если:

$$S^m(u)=u,$$

то мы будемъ сокращенно выражать это такъ:

$$S^m=1.$$

Наинисшую степень m, удовлетворяющую этому условію мы будемъ называть *порядкомъ* подстановки S. Если двѣ подстановки S и S' таковы, что

$$SS'(u)=u,$$

т. е.

$$SS'=1,$$

то мы будемъ называть подстановку S' обратною подстановкѣ S и обозначать ее черезъ S^{-1}. Ясно, что подстановка обратная подстановкѣ S^α есть $(S^{-1})^\alpha$ или, короче, $S^{-\alpha}$.

Мы уже говорили выше, что мы называемъ группою линейныхъ под-

Пусть $\bar{u}$ и u суть два корня уравненія (2). Каждый изъ нихъ есть отношеніе двухъ линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ уравненія (1):

$$u = \frac{y'}{y''}, \quad \bar{u} = \frac{\bar{y}'}{\bar{y}''}. \tag{6}$$

Частные интегралы $\bar{y}'$ $\bar{y}''$ могутъ быть выражены линейно черезъ y' и y'':

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}' &= \alpha y' + \beta y'', \\ \bar{y}'' &= \gamma y' + \delta y''. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отсюда:

$$\bar{u} = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}. \tag{8}$$

Мы видимъ, что всѣ корни уравненія (2) связаны между собою линейно. Остается доказать, что эти линейныя подстановки образуютъ группу.

Представимъ для краткости уравненіе (2) въ такомъ видѣ:

становокъ и порядкомъ группы.

Ясно, что если въ группу входитъ подстановка S, то въ нее войдутъ и всѣ степени этой подстановки:

$$S,\ S^2,\ S^3, \ldots,\ S^{m-1},\ S^m = 1.$$

Подстановка *единица*:

$$1.u = u$$

входитъ во всякую группу.

Новое понятіе о группахъ подстановокъ взошло уже въ курсы алгебры (см. Serret Cours d'algèbre supérieure изд. 4, т. II, стр. 356).

Свойства группъ линейныхъ подстановокъ совершенно аналогичны со свойствами тѣхъ субституцій, которыя обыкновенно разсматриваются въ алгебрѣ.

Говоря: уравненіе имѣетъ группу линейныхъ подстановокъ, мы этими ловами будемъ сокращенно выражать ту особенность уравненія, что 1) *всѣ* корни его связаны между собою линейными подстановками и 2) что эти линейныя подстановки образуютъ группу.

$$\psi(u, z)=0. \tag{2'}$$

Пусть подстановки, преобразующія корень u_1 въ корни:

$$u_1,\ u_2, \ldots,\ u_i, \ldots,\ u_N \tag{9}$$

уравненія (2') суть:

$$S_1=1,\ S_2, \ldots,\ S_i, \ldots,\ S_N. \tag{10}$$

Такъ какъ

$$u_i = S_i(u_1)$$

есть корень уравненія (2'), то мы имѣемъ:

$$\psi[S_i(u_1), z] = 0. \tag{11}$$

Уравненіе:

$$\psi[S_i(u), z] = 0 \tag{12}$$

такой же степени, какъ и неприводимое уравненіе (2') и имѣетъ съ нимъ общій корень u_1; слѣдовательно уравненія (2') и (12) между собою тождественны.

Подставивъ въ уравненіе (12) вмѣсто u корень уравненія (2'):

$$u_j = S_j(u_1),$$

мы должны получить тождество:

$$\psi[S_i S_j(u_1), z] = 0. \qquad (13$$

Сравнивая это тождество съ уравненіемъ (2'), мы находимъ что величина:

$$S_i S_j(u_1)$$

есть одинъ изъ корней (9) уравненія (2'), т. е.:

$$S_i S_j(u_1) = u_h, \tag{14}$$

гдѣ h имѣетъ одно изъ значеній: 1, 2, 3,... N.

Тождество (14) можно представить въ такомъ видѣ:

$$S_i S_j(u_1)=S_h(u_1),$$

откуда

$$S_i S_j = S_h. \tag{15}$$

Дѣйствительно, подстановки (10) образуютъ группу.

Такъ какъ всѣ корни уравненія (2')или, что то же, уравненія (2) черезъ каждый изъ нихъ выражаются раціонально, то это уравненіе само для себя служитъ резольвентою Галуа.

Теорема 4. *Всякое отношеніе двухъ линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка (1)* *) *и всякій корень уравненія (2) удовлетворяютъ дифференціальному уравненію 3-го порядка вида*:

$$\frac{\frac{d^3u}{dz^3}}{\frac{du}{dz}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2u}{dz^2}}{\frac{du}{dz}}\right)^2 = -2P, \tag{16}$$

гдѣ P есть раціональная функція z:

$$P = \frac{1}{4}p_1^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_1}{dz} - p_2 \text{ **)}. \tag{17}$$

Возьмемъ линейное дифференціальное уравненіе 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1\frac{dy}{dz} + p_2 y = 0. \tag{1}$$

Пусть y', y'' суть два линейно независимыхъ частныхъ интеграла этого уравненія и пусть

$$u = \frac{y'}{y''}. \tag{6'}$$

Одифференцируемъ это равенство три раза по z и составимъ выраженіе:

---

*) Первая часть доказываемой теоремы справедлива не только для дифференціальнаго уравненія (1), имѣющаго алгебраическіе интегралы, но и вообще для всякаго линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

**) Сравн. формулу (22) главы I.

$$\frac{\frac{d^3u}{dz^3}}{\frac{du}{dz}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2u}{dz^2}}{\frac{du}{dz}}\right)^2,$$

принимая при этомъ во вниманіе, что y' и y'' суть интегралы уравненія (1).

Выполнивъ вычисленія, находимъ:

$$\frac{\frac{d^3u}{dz^3}}{\frac{du}{dz}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2u}{dz^2}}{\frac{du}{dz}}\right)^2 = -2P, \tag{16}$$

гдѣ по прежнему:

$$P = \frac{1}{4} p_1{}^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_1}{dz} - p_2. \tag{17}$$

Первая часть теоремы доказана.

Если интегралы уравненія (1) алгебраическіе, то отношеніе:

$$u = \frac{y'}{y''} \tag{6'}$$

всякихъ двухъ линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ уравненія (1) есть корень уравненія вида (2).

Слѣдовательно корень u уравненія (2) также удовлетворяетъ дифференціальному уравненію (16).

Такъ какъ всѣ корни уравненія (2) суть отношенія частныхъ интеграловъ уравненія (1), то всѣ они удовлетворяютъ дифференціальному уравненію (16).

Условимся для краткости въ такомъ обозначеніи:

$$\frac{\frac{d^3u}{dz^3}}{\frac{du}{dz}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2u}{dz^2}}{\frac{du}{dz}}\right)^2 = [u]_z. \tag{18}$$

Тогда дифференціальное уравненіе (16) приметъ такой видъ:

$$[u]_z = -2P. \tag{19}$$

Теорема 5. *Если u есть частный интегралъ дифференціальнаго уравненія (19), то общій его интегралъ представится въ видѣ линейной функціи u:*

$$U = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}. \tag{20}$$

Одифференцируемъ равенство (20) три раза по z, считая U и u функціями z, и исключимъ постоянныя: α, β, γ, δ.

Результатъ исключенія представится въ такомъ видѣ:

$$[U]_z = [u]_z. \tag{21}$$

Такъ какъ на основаніи уравненія (19):

$$[u]_z = -2P,$$

то изъ равенства (21) слѣдуетъ, что

$$[U]_z = -2P. \tag{22}$$

А это и значитъ, что U есть интегралъ уравненія (19).

Въ него входятъ три независимыхъ произвольныхъ постоянныхъ:

$$\frac{\alpha}{\delta},\ \frac{\beta}{\delta},\ \frac{\gamma}{\delta}.$$

Слѣдовательно U есть интегралъ общій.

Найденное свойство уравненія (19) значительно облегчаетъ его интегрированіе: достаточно найти одинъ частный интегралъ его, чтобы сталъ извѣстенъ и общій интегралъ.

Равенство (21) показываетъ, что *выраженіе*:

$$[u]_z$$

инваріантно по отношенію ко всякой линейной подстановкѣ.

Теорема 6. *Всякій интегралъ дифференціальнаго уравненія:*

$$[u]_z = -2P \tag{19}$$

можетъ быть представленъ въ видѣ отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Возьмемъ уравненіе:

$$P = \frac{1}{4} p_1{}^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_1}{dz} - p_2 \tag{17}$$

и по данной функціи P подъищемъ двѣ функціи p_1 и p_2, которыя удовлетворяли бы уравненію (17) — такихъ паръ функцій можно найти безконечное множество.

Возьмемъ линейное дифференціальное уравненіе

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1 \frac{dy}{dz} + p_2\, y = 0, \tag{1}$$

гдѣ p_1 и p_2 имѣютъ только что выбранныя нами значенія.

Изъ теоремы 4 слѣдуетъ, что отношеніе всякихъ двухъ линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ уравненія (1):

$$u = \frac{y'}{y''} \tag{6'}$$

удовлетворяетъ уравненію (19). Общій же интегралъ уравненія (19) на основаніи теоремы 5 выразится такъ:

$$U = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} = \frac{\alpha y' + \beta y''}{\gamma y' + \delta y''}\,. \tag{20}$$

Числитель и знаменатель выраженія:

$$\frac{\alpha y' + \beta y''}{\gamma y' + \delta y''}$$

суть снова интегралы того же уравненія (1).

Слѣдовательно, всякій интегралъ дифференціальнаго уравненія (19) есть отношеніе частныхъ интеграловъ нѣкотораго линейнаго дифференціальнаго уравненія (1).

Теорема доказана.

Теорема 7. *Если алгебраическое уравненіе имѣетъ группу линейныхъ подстановокъ, то корни его удовлетворяютъ дифференціальному уравненію вида:*

$$[u]_z = -2P. \tag{19}$$

Пусть алгебраическое уравненіе:

$$\psi(u, z) = 0 \tag{2'}$$

имѣетъ группу линейныхъ подстановокъ и пусть его корни суть:

$$u_1,\ u_2, \ldots,\ u_i, \ldots,\ u_N. \tag{9}$$

Эти величины связаны между собою линейно; поэтому, какъ мы видимъ изъ равенства (21), должны имѣть мѣсто тождества:

$$[u_1]_z = [u_2]_z = \ldots = [u_N]_z. \tag{23}$$

Одифференцируемъ уравненіе (2′) три раза по z, считая u функціею z, и составимъ выраженіе $[u]_z$.

Мы увидимъ, что оно представится въ видѣ раціональной функціи u и z:

$$[u]_z = \varphi(u, z). \tag{24}$$

Подставляя въ это равенство вмѣсто u послѣдовательно всѣ величины (9), мы получимъ на основаніи тождествъ (23) слѣдующее:

$$\varphi(u_1, z) = \varphi(u_2, z) = \ldots = \varphi(u_i, z) = \ldots = \varphi(u_N, z). \tag{25}$$

Это значитъ, что величина

$$\varphi(u_i, z),$$

есть симметрическая функція корней (9) уравненія (2′). Слѣдовательно она можетъ быть представлена въ видѣ раціональной функціи z:

$$\varphi(u_i, z) = -2P, \tag{26}$$

гдѣ P есть нѣкоторая раціональная функція z.

Изъ равенствъ (24), (25) и (26) слѣдуетъ, что:

$$[u_i]_z = -2P, \text{ гдѣ } i = 1,\ 2,\ 3\ldots\ N; \tag{27}$$

а это и значитъ, что корни (9) уравненія (2′) суть частные интегралы уравненія

$$[u]_z = -2P. \tag{19}$$

Теорема доказана.

Возьмемъ снова алгебраическое уравненіе:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)} = R(z) \tag{2}$$

и то дифференціальное уравненіе:

$$[u]_z = -2P, \tag{19}$$

которому удовлетворяютъ корни уравненія (2).

Преобразуемъ уравненіе (2), введя вмѣсто z новое независимое перемѣнное t, связанное съ z соотношеніемъ:

$$R(z) = ct, \tag{28}$$

гдѣ c—постоянный множитель, который мы оставляемъ пока произвольнымъ.

Алгебраическое уравненіе (2) приметъ видъ:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)} = ct. \tag{29}$$

Такъ какъ это уравненіе имѣетъ группу линейныхъ подстановокъ—ту же самую, какъ и уравненіе (2), то на основаніи теоремы 7 мы можемъ сказать, что корни его удовлетворяютъ дифференціальному уравненію вида:

$$[u]_t = -2p, \tag{30}$$

гдѣ p есть нѣкоторая раціональная функція t.

Въ концѣ настоящей главы мы найдемъ выраженіе этой функціи, а затѣмъ, пользуясь соотношеніемъ (28), будемъ въ состояніи легко найти функцію P.

Т е о р е м а 8. *Корни уравненія*:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)}=ct \qquad (29)$$

имѣютъ три крититическія точки. При надлежащемъ выборѣ постояннаго с эти критическія точки суть: 0, 1, ∞.

Для сокращенія формулъ положимъ:

$$H^{\lambda_1}(u)=\varphi(u),\ f^{\lambda}(u)=\psi(u). \qquad (31)$$

Тогда уравненіе (29) приметъ видъ:

$$\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}=ct, \qquad (32)$$

или:

$$\varphi(u)-ct\psi(u)=0. \qquad (33)$$

Найдемъ, какія значенія u могутъ служить кратными корнями уравненія (33) при соотвѣтствующихъ значеніяхъ t. Для этого приравняемъ нулю производную по u отъ лѣвой части уравненія (33):

$$\frac{d\varphi(u)}{du}-ct\frac{d\psi(u)}{du}=0. \qquad (34)$$

Исключивъ t изъ уравненій (33) и (34), находимъ:

$$\varphi(u)\frac{d\psi(u)}{du}-\psi(u)\frac{d\varphi(u)}{du}=0. \qquad (35)$$

Корнями уравненія (35) служатъ всѣ тѣ количества, которыя при соотвѣтствующихъ значеніяхъ t, найденныхъ изъ уравненія (33), служатъ кратными корнями уравненія (33).

При этомъ всякое количество u, служащее m-кратнымъ корнемъ уравненія (33) служитъ m-1-кратнымъ корнемъ уравненія (35) и обратно: всякій m-1-кратный корень уравненія (35) есть m-кратный корень уравненія (33) при соотвѣтствующемъ ему значеніи t.

Степень уравненія (35) равна $2N$—2.

Группа уравненія (33) та же, какъ и группа уравненія (2).

Подстановки ея были нами обозначены такъ:

$$S_1=1,\ S_2,\ldots,\ S_i,\ldots,\ S_N. \tag{10}$$

Пусть при

$$t=t_i$$

m_i корней уравненія (33) дѣлаются равными между собою:

$$u_1=u_2=\ldots=u_{m_i}.$$

Ясно, что въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l} S_1(u_1)=S_1(u_2)=\ldots=S_1(u_{m_i}), \\ S_2(u_1)=S_2(u_2)=\ldots=S_2(u_{m_i}), \\ S_3(u_1)=S_3(u_2)=\ldots=S_3(u_{m_i}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{36}$$

т. е. при $t=t_i$ уравненіе (33) имѣетъ $\frac{N}{m_i}$ различныхъ корней, и каждый изъ нихъ есть m_i-кратный корень.

Мы видѣли, что каждый изъ этихъ корней есть m_i-1-кратный корень уравненія (35); слѣдовательно уравненіе (35) будетъ имѣть:

$$\frac{N}{m_i}(m_i-1)$$

корней, соотвѣтствующихъ $t=t_i$.

Такимъ же образомъ сосчитаемъ, сколько уравненіе (35) имѣетъ корней, соотвѣтствующихъ всякой другой критической точкѣ.

Число всѣхъ корней уравненія (35) выразится такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=\sigma}\frac{N}{m_i}(m_i-1), \tag{37}$$

гдѣ σ есть число всѣхъ критическихъ точекъ корней уравненія (33).

Съ другой стороны, число всѣхъ корней уравненія (35) равно его степени $2N-2$. Слѣдовательно мы можемъ написать такое равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=\sigma}\frac{N}{m_i}(m_i-1)=2N-2 \tag{38}$$

или:

$$\sum_{i=1}^{i=\sigma}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)=2-\frac{2}{N}. \tag{39}$$

Такъ какъ m_i суть цѣлыя числа не меньшія 2, а N на основаніи теоремы 2 не меньше 4, то изъ неопредѣленнаго уравненія (39) видимъ, что число σ больше 1, но меньше 4 т. е. σ равно 2 или 3.

Обратимся снова къ уравненію (35). Подставивъ въ него вмѣсто $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ выраженія (31) этихъ функцій, мы приведемъ уравненіе (35) къ такому виду:

$$f^{\lambda-1}(u)H^{\lambda_1-1}(u)\left\{\lambda H(u)\frac{df(u)}{du}-\lambda_1 f(u)\frac{dH(u)}{du}\right\}=0, \tag{40}$$

или:

$$f^{\lambda-1}(u)\,H^{\lambda_1-1}(u)\,T(u)=0, \tag{41}$$

гдѣ $T(u)$ имѣетъ прежнее значеніе, опредѣляемое формулою (103) главы I.

Уравненіе (41) мы можемъ разбить на 3 уравненія:

$$f^{\lambda-1}(u)=0,\ H^{\lambda_1-1}(u)=0,\ T(u)=0. \tag{42}$$

Первое изъ нихъ опредѣляетъ кратные корни уравненія (29), соотвѣтствующіе критической точкѣ:

$$t=\infty.$$

Это суть λ-кратные корни уравненія (29), какъ видно и прямо изъ уравненія (29).

Второе изъ уравненій (42) опредѣляетъ кратные корни уравненія (29), соотвѣтствующія критической точкѣ:

$$t = 0.$$

Это суть λ_1-кратные корни уравненія (29), какъ видно и прямо изъ уравненія (29).

Третье изъ уравненій (42):

$$T(u) = 0$$

опредѣляетъ кратные корни, соотвѣтствующіе нѣкоторой третьей критической точкѣ.

Уравненіе (29) только въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ будетъ имѣть меньше трехъ критическихъ точекъ:

1) когда $\lambda=1$, 2) когда $\lambda_1=1$, 3) когда степень многочлена $T(u)$ равна 0.

Изъ теоремы 1 мы знаемъ, что показатели λ и λ_1 не меньше 2.

Слѣдовательно, два первые изъ трехъ только что указанныхъ случаевъ встрѣтиться не могутъ.

Степень многочлена $T(u)$ равна $3\nu-6$. Это число ни при какомъ ν, отличномъ отъ 2 не можетъ равняться 0. Случай $\nu=2$ былъ разсмотрѣнъ нами въ § 4 и мы видѣли, что въ этомъ случаѣ многочленъ $T(u)$ равенъ:

$$T(u) = \frac{u^m-1}{2}.$$

Степень его отлична отъ 0.

Итакъ, корни уравненія (29) имѣютъ непремѣнно 3 критическія точки: 0, ∞ и еще одну намъ неизвѣстную конечную критическую точку t_0.

Пользуясь тѣмъ, что постоянное c въ уравненіи (29) осталось неопредѣленнымъ, мы можемъ его выбрать такъ, чтобы t_0 равнялось 1: если a есть какой-нибудь корень уравненія

$$T(u)=0,$$

то для нашей цѣли достаточно положить:

$$c = \frac{H^{\lambda_1}(a)}{f^{\lambda}(a)}. \tag{43}$$

Эта величина отлична отъ ∞ и 0, потому что функціональный опредѣлитель $T(u)$ не можетъ имѣть общаго корня ни съ $f(u)$, ни съ $H(u)$.

Теорема доказана.

Во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ предполагать, что c имѣетъ значеніе (43). Поэтому критическими точками корней уравненія (29) будутъ служить точки:

$$t = 0,\ 1,\ \infty.$$

Пусть при $t=1$ уравненіе (29) имѣетъ λ_2-кратные корни.

Вычтя изъ обѣихъ частей уравненія (29) по 1, получимъ:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u) - cf^{\lambda}(u)}{cf^{\lambda}(u)} = t - 1. \tag{44}$$

При $t=1$ оно обратится въ:

$$H^{\lambda_1}(u) - cf^{\lambda}(u) = 0. \tag{45}$$

Такъ какъ это уравненіе должно имѣть исключительно λ_2-кратные корни, то должно существовать такое тождество:

$$H^{\lambda_1}(u) - cf^{\lambda}(u) = T_1^{\lambda_2}(u), \tag{46}$$

гдѣ $T_1(u)$ нѣкоторый раціональный многочленъ, не имѣющій кратныхъ корней.

Мы знаемъ, что всѣ корни уравненія (29), соотвѣтствующіе $t=1$, могутъ быть найдены изъ уравненія:

$$T(u) = 0$$

и для этого уравненія они служатъ λ_2-1-кратными корнями. Слѣдовательно:

$$T_1^{\lambda_2 - 1}(u) = c_1 T(u), \tag{47}$$

гдѣ c_1 нѣкоторое постоянное число.

Обозначимъ степень многочлена $T_1(u)$ буквою ν_2.

Докажемъ, что степень ν_2 выше степени ν первичной функціи $f(u)$.

Форма $T(\eta', \eta'')$ есть функціональный опредѣлитель формъ $f(\eta', \eta'')$ и $H(\eta', \eta'')$; слѣдовательно она коваріантъ формы $f(\eta', \eta'')$. Поэтому на основаніи теоремы 13 главы I она равна радикалу изъ раціональной функціи z.

Если такъ, то изъ равенства (47) слѣдуетъ, что и $T_1(\eta', \eta'')$ есть радикалъ изъ раціональной функціи z.

Изъ теоремы 12 главы I мы знаемъ, что въ такомъ случаѣ форма $T_1(\eta', \eta'')$ должна быть или первичною формою, или произведеніемъ нѣсколькихъ первичныхъ формъ. Отсюда слѣдуетъ, что степень ν_2 формы $T_1(\eta', \eta'')$ выше степени ν первичной формы $f(\eta', \eta'')$ наинисшей степени.

Итакъ, дѣйствительно

$$\nu_2 > \nu.$$

Обратимся снова къ уравненію (39). Въ немъ, какъ мы теперь знаемъ, $\sigma=3$, а числа m_1, m_2, m_3 равны λ, λ_1, λ_2. Слѣдовательно уравненіе (39) можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{2}{N}=1. \tag{48}$$

Изъ равенства (3) и изъ сравненія степеней обѣихъ частей тождества (46) заключаемъ, что:

$$N=\nu\lambda=\nu_1\lambda_1=\nu_2\lambda_2. \tag{49}$$

Числа N, λ, λ_1, λ_2, ν, ν_1, ν_2 суть числа цѣлыя и положительныя; числа λ, λ_1, λ_2 больше 1. Изъ чиселъ ν, ν_1, ν_2 наименьшее есть ν; число $\nu_1=2\nu-4$ *). Число N на основаніи теоремы 2 не менѣе 4.

*) За исключеніемъ того случая, когда ν равно 2. При $\nu=2$ имѣетъ мѣсто особый случай, разсмотрѣнный въ § 4.

Отыщемъ всѣ системы рѣшеній неопредѣленнаго уравненія (48), удовлетворяющія только что перечисленнымъ условіямъ. Онѣ суть слѣдующія:

I. Для чиселъ λ, λ_1, λ_2 получаемъ значенія m, 2, 2, гдѣ m произвольное цѣлое число; $N=2m$. По формуламъ (49) для чиселъ ν, ν_1, ν_2 получаемъ такія значенія: 2, m, m. Наименьшему изъ этихъ чиселъ должно равняться ν:

$$\nu=2.$$

Слѣдовательно въ разсматриваемомъ случаѣ:

$$\nu=2,\ \nu_1=m,\ \nu_2=m,\ \lambda=m,\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=2,\ N=2m.$$

Это—особый случай, разсмотрѣнный нами въ § 4.

II. Для чиселъ λ, λ_1, λ_2 получаемъ значенія: 3, 3, 2; $N=12$.

По формуламъ (49) для чиселъ ν, ν_1, ν_2 получаемъ значенія:

$$4,\ 4,\ 6.$$

Наименьшему изъ этихъ чиселъ должно равняться ν:

$$\nu=4;$$

число ν_1 равно $2\nu-4$:

$$\nu_1=2\nu-4=4;$$

число ν_2 должно равняться остающемуся числу 6:

$$\nu_2=6.$$

Отсюда:

$$\lambda=3,\ \lambda_1=3,\ \lambda_2=2.$$

III. Для чиселъ λ, λ_1, λ_2 получаемъ значенія: 4, 3, 2; $N=24$.

По формуламъ (49) для чиселъ ν, ν_1, ν_2 получаемъ значенія: 6, 8, 12.

Наименьшему изъ этихъ чиселъ должно равняться ν:

$$\nu=6;$$

число ν_1 равно $2\nu - 4$:

$$\nu_1=2\nu-4=8;$$

число ν_2 должно равняться остающемуся числу 12:

$$\nu_2 = 12.$$

Отсюда:

$$\lambda = 4,\ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2.$$

IV. Для чиселъ λ, λ_1, λ_2 получаемъ значенія: 5, 3, 2; $N = 60$.

По формуламъ (49) для чиселъ ν, ν_1, ν_2 получаемъ значенія: 12, 20, 30.

Наименьшему изъ этихъ чиселъ должно равняться ν:

$$\nu = 12;$$

число ν_1 равно $2\nu - 4$:

$$\nu_1 = 2\nu - 4 = 20;$$

число ν_2 должно равняться остающемуся числу 30:

$$\nu_2 = 30.$$

Отсюда:

$$\lambda = 5,\ \lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 2.$$

Итакъ, существуетъ лишь четыре комбинаціи чиселъ N, ν, ν_1, ν_2, λ, λ_1, λ_2, удовлетворяющихъ всѣмъ требуемымъ условіямъ. Ихъ мы можемъ расположить въ слѣдующую таблицу:

$N=$	$2m$	12	24	60
$\nu=$	2	4	6	12
$\nu_1=$	m	4	8	20
$\nu_2=$	m	6	12	30
$\lambda=$	m	3	4	5
$\lambda_1=$	2	3	3	3
$\lambda_2=$	2	2	2	2

(50)

Сообразно съ этимъ существуетъ и четыре типа алгебраическихъ уравненій, имѣющихъ группу линейныхъ подстановокъ.

Обратимъ вниманіе на то, что λ_2 во всѣхъ четырехъ случаяхъ равно 2 и подставимъ это значеніе λ_2 въ тождества (47) и (46):

$$T_1(u)=c_1 T(u), \tag{51}$$

$$H^{\lambda_1}(u)-cf^{\lambda}(u)=c' T^2(u) \text{ *)}, \tag{52}$$

гдѣ $c'=c_1{}^2$ есть нѣкоторое новое постоянное.

Уравненіе (44) приметъ такой видъ:

$$\frac{c' T^2(u)}{cf^{\lambda}(u)}=t-1. \tag{53}$$

Итакъ, уравненіе (29) тождественнымъ образомъ можетъ быть преобразовано въ (53).

Соединяя эти двѣ формы уравненія (29) вмѣстѣ, мы представимъ уравненіе (29) въ слѣдующемъ видѣ:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u)=t : t-1 : 1 \text{ **)}. \tag{54}$$

Послѣдніе результаты, полученные нами въ настоящемъ параграфѣ, можно формулировать въ видѣ слѣдующихъ двухъ теоремъ:

Теорема 9. *Между функціями* $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$ *существуетъ тождественное соотношеніе вида*:

$$H^{\lambda_1}(u)-cf^{\lambda}(u)=c' T^2(u). \tag{52}$$

Теорема 10. *Существуетъ не болѣе четырехъ типовъ алгебраическихъ уравненій, имѣющихъ группу линейныхъ подстановокъ. Всѣ эти уравненія приводятся къ виду*:

---

*) Съ подобными тождествами часто приходится встрѣчаться въ теоріи формъ: квадратъ *нечетнаго* (gauche, ungerade) коваріанта выражается раціонально черезъ *четные* (droit, gerade) коваріанты.

**) Къ подобной формѣ Клейнъ постоянно приводитъ изучаемыя имъ уравненія.

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = t : t-1 : 1, \tag{54}$$

при чемъ степень N этого уравненія, степени ν, ν_1, ν_2 функцій $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$ и показатели $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ могутъ имѣть только тѣ значенія, которыя приведены въ таблицѣ (50).

§ 6. Дифференціальное уравненіе 3-го порядка, которому удовлетворяютъ корни алгебраическаго уравненія изучаемаго класса.

Мы знаемъ, что корни уравненія (54) удовлетворяютъ дифференціальному уравненію:

$$[u]_t = -2p. \tag{30}$$

Займемся опредѣленіемъ функціи p.

Разсмотримъ, каково разложеніе функціи $[u]_t$ въ области:

1) обыкновенной точки функціи u,

2) полюса функціи u,

3) критическихъ точекъ: 0, 1, ∞ функціи u.

I. Пусть точка $t = t_1$ есть обыкновенная точка функціи u.

Въ области точки t_1 функція u голоморфна и можетъ быть разложена въ рядъ вида:

$$u - (u)_{t=t_1} = a(t-t_1) + b(t-t_1)^2 + c(t-t_1)^3 + \ldots \tag{55}$$

Коэффиціентъ a въ рядѣ (55) отличенъ отъ 0, потому что въ противномъ случаѣ t не было бы однозначною функціею u, какъ того требуетъ уравненіе (54). Подставивъ рядъ (55) въ выраженіе $[u]_t$, мы убѣждаемся въ томъ, что въ области точки t_1 функція $[u]_t$ голоморфна.

II. Пусть $t = t_2$ есть полюсъ функціи u.

Въ области точки t_2 функція

$$v = \frac{1}{u}$$

голоморфна и можетъ быть разложена въ рядъ вида (55). Функція $[v]_t$ въ области точки t_2 голоморфна. Но вслѣдствіе линейной зависимости между u и v должно существовать равенство:

$$[u]_t = [v]_t.$$

Слѣдовательно функція $[u]_t$ въ области точки t_2 голоморфна.

III. Пусть въ точкѣ $t=0$ функція u конечна. Тогда въ области точки 0 она разложится въ рядъ вида:

$$u-u_0=a_0t^{\frac{1}{\lambda_1}}+b_0t^{\frac{2}{\lambda_1}}+c_0t^{\frac{3}{\lambda_1}}+\ldots, \tag{56}$$

гдѣ a_0 отлично отъ 0 по той же причинѣ, по какой въ формулѣ (55) коэффиціентъ a отличенъ отъ 0.

Подставивъ рядъ (56) въ выраженіе $[u]_t$, находимъ, что въ области точки $t=0$ имѣетъ мѣсто разложеніе:

$$[u]_t=\frac{1-\frac{1}{\lambda_1^2}}{2t^2}+\frac{A}{t}+W_0(t), \tag{57}$$

гдѣ $W_0(t)$ есть функція голоморфная въ области точки $t=0$.

Если въ точкѣ $t=0$ функція u обратится въ ∞, то функція:

$$v=\frac{1}{u}$$

будетъ конечна и разложится въ рядъ вида (56); функція $[v]_t$ разложится въ рядъ вида (57). Но вслѣдствіе линейной зависимости между u и v имѣетъ мѣсто равенство:

$$[u]_t=[v]_t.$$

Слѣдовательно формула (57) справедлива и въ томъ случаѣ, когда въ точкѣ $t=0$ функція u обращается въ ∞.

Повторяя тѣ же разсужденія, убѣдимся въ томъ, что въ области точки $t=1$ имѣетъ мѣсто разложеніе:

$$[u]_t=\frac{1-\frac{1}{\lambda_2^2}}{2(t-1)^2}+\frac{B}{t-1}+W_1(t) \tag{58}$$

гдѣ $W_1(t)$ функція, голоморфная въ области точки $t=1$.

Чтобы найти разложеніе функціи $[u]_t$ въ области точки $t=\infty$, совершимъ прежде измѣненіе перемѣннаго, положивъ:

$$t=\frac{1}{\tau}.$$

Тогда:

$$[u]_t=\tau^4[u]_\tau. \tag{59}$$

Уравненіе (54) приметъ видъ:

$$\frac{cf^\lambda(u)}{H^{\lambda_1}(u)}=\tau. \tag{60}$$

Разсужденіями, подобными приведенными выше, мы найдемъ, что въ области точки $\tau=0$ имѣетъ мѣсто разложеніе:

$$[u]_\tau=\frac{1-\dfrac{1}{\lambda^2}}{2\tau^2}+\frac{C}{\tau}+W_\infty(\tau), \tag{61}$$

гдѣ $W_\infty(\tau)$ функція, голоморфная въ области точки $\tau=0$. Изъ равенствъ (59) и (61) слѣдуетъ, что въ области точки $t=\infty$ имѣетъ мѣсто разложеніе:

$$[u]_t=\frac{1-\dfrac{1}{\lambda^2}}{2t^2}+\frac{C}{t^3}+\frac{1}{t^4}W_\infty\left(\frac{1}{t}\right). \tag{62}$$

Разсмотримъ выраженіе:

$$[u]_t-\left\{\frac{1-\dfrac{1}{\lambda_1^2}}{2t^2}+\frac{1-\dfrac{1}{\lambda_2^2}}{2(t-1)^2}+\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}\right\}. \tag{63}$$

Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что если u есть корень уравненія (54), то выраженіе (63) есть алгебраическая функція, которая на всей плоскости конечна, однозначна и непрерывна, а въ безконечности обращается въ нуль.

Изъ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго извѣстно, что такая функція на всей плоскости равна 0:

$$[u]_t = \frac{1-\frac{1}{\lambda_1^2}}{2t^2} + \frac{1-\frac{1}{\lambda_2^2}}{2(t-1)^2} + \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1}. \tag{64}$$

Для опредѣленія A и B разложимъ вторую часть равенства (64) въ рядъ по убывающимъ степенямъ t (въ области безконечно удаленной точки) и сравнимъ полученное разложеніе съ разложеніемъ (62). Такимъ образомъ находимъ:

$$A+B=0,\ B+\frac{1-\frac{1}{\lambda_1^2}}{2} + \frac{1-\frac{1}{\lambda_2^2}}{2} = \frac{1-\frac{1}{\lambda^2}}{2}. \tag{65}$$

Опредѣливъ изъ этихъ уравненій A и B и подставивъ ихъ въ равенство (64), находимъ:

$$[u]_t = \frac{1-\frac{1}{\lambda_1^2}}{2t^2} + \frac{1-\frac{1}{\lambda_2^2}}{2(t-1)^2} + \frac{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda^2}-1}{2t(t-1)}. \tag{66}$$

Таковъ окончательный видъ уравненія (30). Вторая часть уравненія (66) есть искомое выраженіе функціи $-2p$.

Теорема 11. *Всякій интегралъ дифференціальнаго уравненія (66) и всякій корень алгебраическаго уравненія (54) можно представить въ видѣ отношенія двухъ частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія*:

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + \left\{\gamma-(\alpha+\beta+1)t\right\}\frac{dy}{dt} - \alpha\beta y = 0. \tag{67}$$

Положимъ временно:

$$p_1 = \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)t}{t(1-t)},\quad p_2 = -\frac{\alpha\beta}{t(1-t)}. \tag{68}$$

На основаніи теоремы 4 отношеніе

$$u = \frac{y'}{y''}$$

двухъ линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ *всякаго* линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка вида:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p_1\frac{dy}{dt}+p_2y=0$$

есть интегралъ дифференціальнаго уравненія:

$$[u]_t=2p_2-\frac{dp_1}{dt}-\frac{1}{2}p_1^{\,2}.$$

Примѣняя этотъ результатъ къ гипергеометрическому уравненію (67), мы найдемъ, что отношеніе всякихъ двухъ линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ его удовлетворяетъ уравненію:

$$\begin{gathered}[u]_t=\frac{1-(1-\gamma)^2}{2t^2}+\frac{1-(\gamma-\alpha-\beta)^2}{2(t-1)^2}+\\ +\frac{(1-\gamma)^2+(\gamma-\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^2-1}{2t(t-1)}.\end{gathered}\tag{69}$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (66), находимъ, что оно станетъ съ нимъ тождественнымъ, если:

$$1-\gamma=\frac{1}{\lambda_1},\quad \gamma-\alpha-\beta=\frac{1}{\lambda_2},\quad \alpha-\beta=\frac{1}{\lambda},\tag{70}$$

откуда:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda}\right),\\ \beta&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda}\right),\\ \gamma&=1-\frac{1}{\lambda_1}.\end{aligned}\right\}\tag{71}$$

Мы видимъ, что если параметры α, β, γ гипергеометрическаго уравненія опредѣлены изъ таблицы (71), то отношеніе двухъ линейно независимыхъ интеграловъ его

$$u=\frac{y'}{y''}$$

удовлетворяетъ дифференціальному уравненію (66).

На основаніи теоремы 6 мы въ правѣ сказать, что *всякій* интегралъ уравненія (66) можно представить въ видѣ отношенія двухъ частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія (67).

Такъ какъ корни уравненія (54) суть частные интегралы уравненія (66), то мы заключаемъ, что всякій корень уравненія (54) можно представить въ видѣ отношенія двухъ частныхъ интеграловъ уравненія гипергеометрическаго.

Теорема доказана.

Ближайшее слѣдствіе изъ этой теоремы то, что уравненіе (54) разрѣшимо въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Обращаясь къ таблицамъ (71) и (50), мы находимъ числовыя значенія параметровъ α, β, γ гипергеометрическихъ уравненій, соотвѣтствующихъ каждому изъ четырехъ найденныхъ нами типовъ алгебраическихъ уравненій, имѣющихъ группу линейныхъ подстановокъ:

$N=$	$2m$	12	24	60
$\alpha=$	$\frac{1}{2m}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{11}{60}$
$\beta=$	$-\frac{1}{2m}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{60}$
$\gamma=$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(72)

Перейдемъ снова отъ перемѣннаго t къ перемѣнному z. Мы положили:

$$R(z)=ct, \tag{28}$$

гдѣ c есть постоянное число, опредѣляемое формулою (43).

Совершая измѣненіе перемѣннаго, мы находимъ, что уравненіе (54) приметъ видъ:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1. \quad (73)$$

Это самый общій видъ уравненія, имѣющаго группу линейныхъ подстановокъ.

Послѣ весьма простыхъ вычисленій, изъ равенства (28) мы найдемъ, что

$$[u]_z = [R(z)]_z + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)^2 [u]_t. \quad (74)$$

Подставимъ въ это равенство вмѣсто $[u]_t$ ея выраженіе (66), замѣнивъ предварительно въ формулѣ (66) перемѣнное t функціей $\frac{1}{c} R(z)$:

$$[u]_z = [R(z)]_z + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)^2 \left\{ \frac{1 - \frac{1}{\lambda_1^2}}{\frac{2}{c^2} R^2(z)} + \frac{1 - \frac{1}{\lambda_1^2}}{2\left(\frac{1}{c} R(z) - 1\right)^2} + \frac{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda^2} - 1}{\frac{2}{c} R(z) \left(\frac{1}{c} R(z) - 1\right)} \right\}. \quad (75)$$

Таково то дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяютъ корни алгебраическаго уравненія (73).

Вторая часть уравненія (75) есть окончательное выраженіе функціи $-2P$, входящей въ уравненіе (19).

На основаніи теоремы 6 всякій интегралъ дифференціальнаго уравненія (75), а слѣдовательно и всякій корень алгебраическаго уравненія (73) можно представить въ видѣ отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Но для насъ гораздо важнѣе то свойство уравненія (73), что оно преобразованіемъ перемѣннаго z:

$$R(z)=ct \tag{28}$$

приводится къ уравненію (54), разрѣшимому въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Этотъ послѣдній результатъ настоящаго параграфа мы можемъ формулировать въ видѣ слѣдующей теоремы:

Теорема 12. *Всякое (не двучленное) алгебраическое уравненіе, имѣющее группу линейныхъ подстановокъ, разрѣшимо въ гипергеометрическихъ фуркціяхъ.*

§ 7. Двучленное уравненіе.

Двучленнымъ уравненіемъ мы будемъ называть не только уравненіе

$$u^N=R(z), \tag{76}$$

но и всякое уравненіе, приводимое къ уравненію (76) линейнымъ преобразованіемъ:

$$u=\frac{\alpha u'+\beta}{\gamma u'+\delta},$$

т. е. уравненія вида:

$$\left(\frac{\alpha u'+\beta}{\gamma u'+\delta}\right)^N=R(z). \tag{77}$$

Двучленное уравненіе мы до сихъ поръ устраняли во всѣхъ нашихъ разсужденіяхъ, потому что оно не принадлежитъ ни къ одному изъ разсмотрѣнныхъ нами двухъ классовъ. Но по своимъ свойствамъ оно довольно похоже на уравненія втораго изъ разсмотрѣнныхъ классовъ и объ этомъ мы скажемъ теперь нѣсколько словъ.

1) Двучленное уравненіе имѣетъ группу линейныхъ подстановокъ. Группа эта циклическая: она состоитъ изъ степеней одной и той же подстановки:

$$S^0=1,\ S,\ S^2,\dots\ S^{N-1}. \tag{78}$$

Въ самомъ дѣлѣ, для уравненія (76) подстановка S такова:

$$S(u)=\varepsilon u,\ \text{гдѣ}\ \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{N}}. \tag{79}$$

Для уравненія же (77) она представляется въ такомъ видѣ:

$$S(u')=\frac{(\alpha\delta\varepsilon-\beta\gamma)u'+(\varepsilon-1)\beta\delta}{(1-\varepsilon)\varkappa\gamma u'+\alpha\delta-\beta\gamma\varepsilon}\,. \tag{80}$$

2) Корни двучленнаго уравненія удовлетворяютъ дифференціальному уравненію 3-го порядка:

$$[u]_z=[R(z)]_z+\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)^2\left\{\frac{1-\frac{1}{N^2}}{2R^2(z)}\right\}. \tag{81}$$

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ:

$$R(z)=t, \tag{82}$$

мы легко убѣждаемся въ томъ, что корни уравненія

$$u^N=t \tag{83}$$

удовлетворяютъ дифференціальному уравненію:

$$[u]_t=\frac{1-\frac{1}{N^2}}{2t^2}. \tag{84}$$

Введя въ это уравненіе независимое перемѣнное z, находимъ:

$$[u]_z=[R(z)]_z+\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)^2\left\{\frac{1-\frac{1}{N^2}}{2R^2(z)}\right\}. \tag{85}$$

Корни уравненія (77) удовлетворяютъ также дифференціальному уравненію (85) потому, что дифференціальное выраженіе

$$[u]_z$$

не мѣняется отъ линейныхъ подстановокъ.

Уравненія (84) и (85) имѣютъ аналогію съ уравненіями (66) и (75).

ГЛАВА III.

О функціяхъ Шварца.

Мы изучили въ прошлой главѣ важнѣйшія свойства алгебраическихъ уравненій, корнями которыхъ служатъ отношенія частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія.

Отношенія частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія представляютъ собою функціи весьма замѣчательныя по своимъ свойствамъ.

Функціи эти впервые были изучены Шварцемъ и получили поэтому названіе функцій Шварца.

Теорія функцій Шварца находится въ тѣсной связи съ теоріей группъ линейныхъ подстановокъ.

Въ настоящей главѣ мы займемся разсмотрѣніемъ главнѣйшихъ свойствъ функцій Шварца. Но прежде, чѣмъ приступить къ этой задачѣ, остановимся нѣсколько на свойствахъ линейнаго преобразованія на плоскости комплекснаго перемѣннаго, а затѣмъ приведемъ тѣ теоремы теоріи гипергеометрическихъ функцій, которыми намъ придется пользоваться.

§ 8. Линейное преобразованіе на плоскости комплекснаго перемѣннаго.

Припомнимъ нѣкоторыя опредѣленія и теоремы, извѣстныя изъ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго.

Пусть даны два комплексныхъ количества:

$$z=x+iy,\quad z'=x'+iy'.$$

По опредѣленію Коши мы назовемъ z' функціею z, если x' и y' суть функціи x и y. Величина z' представится въ такомъ видѣ:

$$z'=f(x, y).$$

Это самое широкое опредѣленіе функціи комплекснаго перемѣннаго.

Моногенными функціями Коши назвалъ тѣ функціи, которыя удовлетворяютъ условію:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+i\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=0.$$

Моногенныя функціи могутъ быть представлены въ такомъ видѣ:

$$z'=F(z),$$

гдѣ F есть знакъ алгебраическихъ или трансцендентныхъ операцій, совершаемыхъ надъ величиной

$$z=x+iy.$$

Пусть z' есть моногенная функція. Пусть точка z описываетъ нѣкоторую кривую C, не проходящую 1) черезъ точки, въ которыхъ производная $\frac{dz'}{dz}$ обращается въ 0 или ∞, 2) черезъ критическія точки функціи z'; тогда точка z' тоже опишетъ нѣкоторую кривую C', въ безконечно малыхъ частяхъ подобную кривой C.

Такая кривая C' называется подобнымъ отображеніемъ кривой C. Если кривая C проходитъ черезъ критическія точки функціи z' или черезъ такія точки, гдѣ производная $\frac{dz'}{dz}$ обращается въ 0 или ∞, то въ соотвѣтствующихъ точкахъ кривой C' можетъ наступить нарушеніе подобія; но мы условимся во всякомъ случаѣ называть кривую C' подобнымъ отображеніемъ кривой C.

Если кривыя C и C' сомкнуты, то мы условимся называть площадь S', ограничиваемую кривою C', подобнымъ отображенiемъ площади S, ограничиваемой кривою C.

Способность давать подобныя отображенiя присуща исключительно моногеннымъ функцiямъ. Если мы убѣдимся въ томъ, что нѣкоторая функцiя z' перемѣннаго z *всякую* кривую C преобразуетъ въ кривую C', подобную ей въ безконечно малыхъ частяхъ, то мы въ правѣ сказать, что z' есть моногенная функцiя z.

Построимъ сферу радiуса 1 съ центромъ въ началѣ координатъ.

Сѣченiе этой сферы плоскостью перемѣннаго z назовемъ экваторомъ сферы. Полюсъ сферы, лежащiй надъ плоскостью перемѣннаго z, назовемъ сѣвернымъ полюсомъ, а противоположный полюсъ—южнымъ.

Станемъ проэктировать стереографически изъ южнаго полюса точки плоскости на сферу. Обозначимъ проэкцiю точки z на сферу буквою Z. Точка Z есть изображенiе количества

$$z = x + iy$$

на сферѣ.

Часть плоскости, лежащую кверху отъ дѣйствительной оси будемъ называть верхнею полуплоскостью, а соотвѣтствующую ей половину сферы—верхнею полусферою. Остальную половину плоскости будемъ называть нижнею полуплоскостью, а соотвѣтствующую ей полусферу—нижнею полусферою.

Говоря объ обходахъ на плоскости, мы постоянно будемъ имѣть въ виду въ то же время и соотвѣтствующiе имъ обходы на сферѣ.

Отнесемъ сферу къ прямоугольнымъ осямъ координатъ.

Пусть двѣ оси совпадаютъ съ осями x и y плоскости z; тогда третья ось пройдетъ черезъ полюсы сферы, ее мы назовемъ осью сферы.

Обозначимъ координаты точекъ сферы буквами ξ, η, ζ. Уравненiе сферы будетъ таково:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \tag{1}$$

Не трудно убѣдиться въ томъ, что координаты x, y точки z плоскости связаны съ координатами ξ, η, ζ соотвѣтствующей ей точки Z сферы такими соотношеніями:

$$x=\frac{\xi}{1+\zeta},\ y=\frac{\eta}{1+\zeta}, \tag{2}$$

откуда:

$$z=\frac{\xi+i\eta}{1+\zeta}; \tag{3}$$

координаты же ξ, η, ζ точки Z выражаются черезъ координаты x и y точки z такимъ образомъ:

$$\xi=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\quad \eta=\frac{2y}{1+x^2+y^2},\quad \zeta=\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}. \tag{4}$$

Возьмемъ линейную подстановку:

$$\bar{z}=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \tag{5}$$

гдѣ коэффиціенты α, β, γ, δ суть постоянныя числа дѣйствительныя или мнимыя.

Подстановка (5) преобразуетъ каждую точку плоскости z въ нѣкоторую другую точку $\bar{z}$ той же плоскости.

Преобразованіе это однозначное: каждой данной точкѣ соотвѣтствуетъ опредѣленная одна преобразованная и обратно.

Одновременно съ такимъ преобразованіемъ точекъ плоскости мы будемъ представлять себѣ и соотвѣтствующее преобразованіе точекъ сферы.

Каково бы то ни было значеніе коэффиціентовъ α, β, γ, δ, всегда существуетъ на плоскости перемѣннаго z пара такихъ точекъ, которыя подстановкою (5) преобразуются сами въ себя. Эти точки суть корни уравненія:

$$z=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \tag{6}$$

или:

$$\gamma z^2+(\delta-\alpha)z-\beta=0. \tag{7}$$

Если корни уравненія (7) равные, то сказанныя двѣ точки совпадаютъ.

Станемъ различать два случая:

1) корни уравненія (7) различны между собою;

2) корни уравненія (7) одинаковы.

Начнемъ съ перваго случая.

I. Пусть корни уравненія (7) различны между собою и соотвѣтственно равны:

$$z_1 \text{ и } z_2.$$

Такъ какъ точки эти подстановкою (5) преобразуются сами въ себя, то ясно, что подстановку (5) можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{\bar{z}-z_1}{\bar{z}-z_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}, \tag{8}$$

гдѣ k есть нѣкоторое постоянное число. Такъ какъ оно, вообще говоря, комплексное, то мы его представимъ въ нормальной формѣ:

$$k=\rho e^{\theta i}. \tag{9}$$

Тогда подстановка (8) приметъ такой видъ:

$$\frac{\bar{z}-z_1}{\bar{z}-z_2}=\rho e^{\theta i}\frac{z-z_1}{z-z_2}. \tag{10}$$

Будемъ называть подстановку (10) *эллиптической*, если $\rho=1$, *гиперболической*, если $\theta=0$ и *локсодромической* *), если ρ отлично отъ 1, а θ отлично отъ 0.

II. Пусть корни уравненія (7) одинаковы и равны z_0.

---

*) См. Klein. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modul·functionen, т. I, стр. 165 и 170. Здѣсь указана причина такого названія. Главнѣйшія свойства линейныхъ подстановокъ изложены въ статьѣ проф. Ермакова: Круговое преобразованіе. Мат. Сборн. т. XIV.

Тогда подстановка (5) приметъ видъ:

$$\frac{1}{\bar{z}-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+A, \tag{11}$$

гдѣ A есть нѣкоторое постоянное число.

Такую подстановку мы назовемъ *параболической.*

Посмотримъ, каковъ порядокъ линейной подстановки (5) въ каждомъ изъ указанныхъ четырехъ случаевъ.

Начнемъ снова съ первыхъ трехъ случаевъ.

Пусть подстановка (5) приведена къ виду:

$$\frac{\bar{z}-z_1}{\bar{z}-z_2}=\rho e^{\theta i}\frac{z-z_1}{z-z_2}. \tag{10}$$

Введемъ такія обозначенія:

$$S(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \tag{12}$$

$$\mathfrak{T}(z)=\rho e^{\theta i}z, \tag{13}$$

$$U(z)=\frac{z-z_1}{z-z_2}. \tag{14}$$

Равенства (5) и (10) примутъ видъ:

$$\bar{z}=S(z), \tag{15}$$

$$U(\bar{z})=\mathfrak{T}U(z). \tag{16}$$

Обозначая подстановку, обратную $U(z)$, черезъ $U^{-1}(z)$, мы находимъ изъ равенства (16):

$$\bar{z}=U^{-1}\mathfrak{T}U(z). \tag{17}$$

Изъ равенствъ (15) и (17) слѣдуетъ:

$$S(z)=U^{-1}\mathfrak{T}U(z), \tag{18}$$

откуда:

$$S=U^{-1}\mathfrak{T}U. \tag{19}$$

Степень n подстановки S выразится такъ:

$$S^n = U^{-1}\mathfrak{T}^n U. \tag{20}$$

Если m есть порядокъ подстановки S, то должно имѣть мѣсто символическое равенство:

$$S^m = U^{-1}\mathfrak{T}^m U = 1. \tag{21}$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что:

$$\mathfrak{T}^m = 1. \tag{22}$$

Слѣдовательно порядокъ подстановки S таковъ же, какъ и подстановки $\mathfrak{T}$. Это и слѣдовало ожидать, потому что подстановки S и $\mathfrak{T}$ подобны,*) между собою.

Подстановка $\mathfrak{T}^m(z)$ такова:

$$\mathfrak{T}^m(z) = \rho^m e^{m\theta i} z. \tag{23}$$

Если

$$\mathfrak{T}^m = 1, \tag{22}$$

то:

$$\mathfrak{T}^m(z) = z, \tag{22'}$$

или:

$$\rho^m e^{m\theta i} z = z, \tag{24}$$

откуда:

$$\rho = 1,\ m\theta = 2h\pi, \tag{25}$$

гдѣ h цѣлое число.

Слѣдовательно подстановки гиперболическія и локсодромическія никогда не могутъ быть конечнаго порядка. Подстановки же эллиптическія только тогда будутъ конечнаго порядка, когда онѣ приводятся къ виду:

$$\frac{\bar{z} - z_1}{\bar{z} - z_2} = e^{\frac{2h\pi i}{m}} \frac{z - z_1}{z - z_2}, \tag{26}$$

гдѣ m и h взаимно простыя цѣлыя числа.

---

*) О подобныхъ подстановкахъ см. Serret. Cours d'algèbre supérieure т. II, стр. 257.

Порядокъ подстановки (26) равенъ m.

Въ частномъ случаѣ, когда

$$z_2 = \infty, \ z_1 = 0,$$

подстановка (26) приметъ такой видъ:

$$\bar{z} = e^{\frac{2h\pi i}{m}} z. \tag{27}$$

Это—эллиптическая подстановка въ нормальномъ видѣ.

Для параболической подстановки мы можемъ повторить почти дословно тѣ же разсужденія.

Положивъ:

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{12}$$

$$\mathfrak{T}(z) = z + A, \tag{28}$$

$$U(z) = \frac{1}{z - z_0}, \tag{29}$$

и принявъ во вниманіе равенства (5) и (11), мы приведемъ параболическую подстановку $S(z)$ къ такому виду:

$$S(z) = U^{-1}\,\mathfrak{T}U(z), \tag{30}$$

откуда:

$$S = U^{-1}\,\mathfrak{T}U; \tag{31}$$

далѣе:

$$S^n = U^{-1}\,\mathfrak{T}^n\,U. \tag{32}$$

Условіе:

$$S^m = 1 \tag{33}$$

приводитъ къ такому условію:

$$\mathfrak{T}^m = 1. \tag{34}$$

Такъ какъ:

$$\mathfrak{T}^m(z) = z + mA, \tag{35}$$

то изъ равенства (34) слѣдуетъ:

$$z + mA = z. \tag{36}$$

Это равенство показываетъ что *порядокъ параболической линейной подстановки не можетъ быть числомъ конечнымъ.*

Такъ какъ въ послѣдующемъ намъ придется имѣть дѣло съ конечными группами линейныхъ подстановокъ, то всѣ подстановки, входящія въ составъ этихъ группъ, должны быть конечнаго порядка. Всѣ эти подстановки будутъ эллиптическія вида (26).

Вернемся къ геометрическимъ представленіямъ на сферѣ.

Повернемъ сферу около нѣкоторой оси, проходящей черезъ ея центръ на нѣкоторый уголъ θ.

Такому повороту сферы соотвѣтствуетъ нѣкоторое преобразованіе ея точекъ: каждой данной точкѣ Z сферы соотвѣтствуетъ нѣкоторая преобразованная точка $\overline{Z}$, и обратно.

Одновременно съ точками сферы и точки плоскости тоже преобразуются: каждой данной точкѣ z плоскости соотвѣтствуетъ единственная преобразованная точка $\bar{z}$, и обратно.

Ясно, что $\bar{z}$ есть функція z. Докажемъ, что она будетъ моногенная функція z.

Пусть точка z опишетъ нѣкоторую произвольную кривую c на плоскости. Точка Z въ то же время опишетъ на сферѣ нѣкоторую кривую C, подобную въ безконечно малыхъ частяхъ кривой c: дѣйствительно, кривая c есть стереографическая проэкція кривой C, а въ стереографической проэкціи подобіе безконечно малыхъ частей сохраняется. Въ то же самое время точка $\overline{Z}$ опишетъ кривую $\overline{C}$, разнящуюся отъ C лишь положеніемъ на сферѣ: кривая C повернулась вмѣстѣ со сферою и заняла новое положеніе $\overline{C}$. Ясно, что $\overline{C}$ не только подобна, но и равна C. Наконецъ, точка $\bar{z}$ опишетъ кривую $\bar{c}$, служащую стереографической проэкціей кривой $\overline{C}$ и, слѣдовательно, подобную кривой $\overline{C}$.

Если такъ, то кривыя $\bar{c}$ и c подобны между собою въ безконечно малыхъ частяхъ. Поэтому $\bar{z}$ есть моногенная функція z:

$$\bar{z} = F(z).$$

Не трудно усмотрѣть, какова эта функція.

Мы видѣли, что каждой точкѣ z соотвѣтствуетъ единственная точка $\bar{z}$ и обратно: каждой точкѣ z соотвѣтствуетъ единственная точка z. Это значитъ, что функція $F(z)$ линейная:

$$\bar{z} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} . \tag{5}$$

Слѣдовательно, *каждому повороту сферы около оси, проходящей черезъ ея центръ, соотвѣтствуетъ линейное преобразованіе плоскости.*

Если уголъ поворота сферы равенъ

$$\frac{2h\pi}{m},$$

гдѣ h и m взаимно простыя цѣлыя числа, то соотвѣтствующая ему подстановка (5) должна быть m-го порядка, потому что послѣ m такихъ поворотовъ сфера впервые приходитъ въ свое первоначальное положеніе. Отсюда слѣдуетъ, что *линейная подстановка, соотвѣтствующая повороту сферы—эллиптическая.*

Она должна приводиться къ виду:

$$\frac{\bar{z} - z_1}{\bar{z} - z_2} = e^{\theta i} \frac{z - z_1}{z - z_2} . \tag{37}$$

Ясно, что z_1 и z_2 суть точки плоскости, соотвѣтствующія полюсамъ Z_1 и Z_2 той оси, около которой была повернута сфера.

Пусть координаты точки Z таковы:

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1.$$

Тогда координаты точки Z_2 будутъ:

$$-\xi_1,\ -\eta_1,\ -\zeta_1.$$

Величины z_1 и z_2 выразятся такъ:

$$z_1 = \frac{\xi_1 + i\eta_1}{\zeta_1 + 1},\quad z_2 = \frac{\xi_1 + i\eta_1}{\zeta_1 - 1} . \tag{38}$$

Уголъ θ, входящій въ формулу (37), какъ не трудно видѣть, равенъ углу, на который повернута сфера.

Введемъ такія обозначенія:

$$\xi_1 \sin\frac{\theta}{2} = a, \quad \eta_1 \sin\frac{\theta}{2} = b, \quad \zeta_1 \sin\frac{\theta}{2} = c, \quad \cos\frac{\theta}{2} = d. \qquad (39)$$

Изъ уравненія сферы:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \qquad (1)$$

слѣдуетъ, что:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \qquad (40)$$

Подставимъ выраженія (38) величинъ z_1, z_2 въ уравненіе (37) и рѣшимъ это уравненіе относительно $\bar{z}$, принимая при этомъ во вниманіе равенства (39) и (40). Въ результатѣ получимъ:

$$\bar{z} = -\frac{(d+ic)z + (b-ia)}{(b+ia)z - (d-ic)}. \qquad (41)$$

Формула (41) есть выраженіе эллиптической линейной подстановки, соотвѣтствующей повороту сферы на уголъ θ около оси, имѣющей полюсами:

$$\xi_1, \ \eta_1, \ \zeta_1 \ \text{и} \ -\xi_1, \ -\eta_1, \ -\zeta_1.$$

Обратимся теперь къ подобнымъ отображеніямъ, даваемымъ линейною подстановкою:

$$\bar{z} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}. \qquad (5)$$

Функція (5) критическихъ точекъ не имѣетъ вовсе; производная:

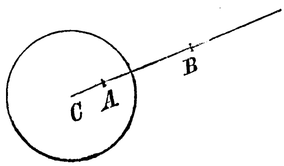
$$\frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} \qquad (42)$$

обращается въ 0 при $z = \infty$, а въ безконечность—одновременно съ $\bar{z}$.

Поэтому отображеніе, получаемое помощью этой функціи, всюду въ безконечно малыхъ частяхъ подобно отображаемой кривой.

Изъ курсовъ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго извѣстно, что если точка z движется по кругу (или по прямой) *), то и точка $\bar{z}$, опредѣляемая формулою (5) движется по кругу (или по прямой).

Возьмемъ на плоскости перемѣннаго z кругъ произвольнаго радіуса R съ центромъ въ нѣкоторой точкѣ C (черт. 1) и двѣ точки: A и B на прямой CB, расположенныя такъ, что:



Черт. 1.

$$CA \, . \, CB = R^2. \qquad (43)$$

Такія двѣ точки называются симметричными относительно круга. Одна изъ нихъ называется зеркальнымъ изображеніемъ другой относительно даннаго круга.

Построимъ отображеніе круга C и точекъ A и B при посредствѣ линейнаго преобразованія (5). Кругъ C преобразуется въ нѣкоторый новый кругъ C', точки A и B въ A' и B'. Важно то, что точки A' и B' будутъ симметричны относительно круга C'. Мы можемъ это выразить словами: *линейное преобразованіе не нарушаетъ симметріи.*

Если радіусъ круга обращается въ безконечность, то окружность обращается въ прямую и тогда симметричными будутъ такія двѣ точки, которыя лежатъ на одномъ перпендикулярѣ къ прямой въ равномъ разстояніи отъ нея. Это симметрія въ самомъ элементарномъ смыслѣ слова.

§ 9. Нѣкоторыя теоремы теоріи гипергеометрическихъ функцій **).

Приведемъ теперь нѣкоторыя теоремы теоріи гипергеометрическихъ функцій, которыми намъ скоро придется пользоваться.

---

*) Прямая разсматривается какъ кругъ безконечно большаго радіуса.

**) Мы заимствуемъ эти теоремы изъ диссертаціи профессора Тихомандрицкаго: О гипергеометрическихъ рядахъ. С.-Петербургъ, 1876.

Гипергеометрическимъ уравненіемъ называется уравненіе:

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{du}{dz}-\alpha\beta u=0. \qquad (44)$$

Одинъ изъ частныхъ интеграловъ этого уравненія въ области точки 0 разлагается въ такой рядъ:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}z^2+\ldots, \qquad (45)$$

называемый гипергеометрическимъ рядомъ.

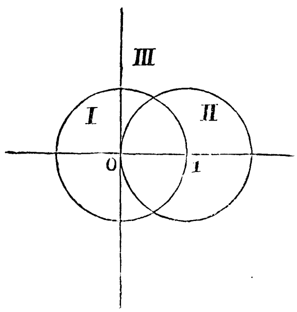
Ясно, что функція, изображаемая рядомъ (45), существуетъ и за предѣлами сходимости этого ряда; но тамъ она выражается иначе.

Въ рядѣ (45) коэффиціенты α, β, γ могутъ быть какія угодно количества дѣйствительныя или мнимыя, лишь бы γ не было цѣлымъ отрицательнымъ числомъ; но въ нашей работѣ мы будемъ считать ихъ дѣйствительными.

Въ такомъ случаѣ при дѣйствительномъ z величина функціи $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ будетъ непремѣнно дѣйствительная.

Кругомъ сходимости ряда (45) служитъ кругъ, описанный изъ начала координатъ радіусомъ, равнымъ 1.

Критическими точками интеграловъ уравненія (44) служатъ: 0, 1, ∞.



Черт. 2.

Выдѣлимъ на плоскости z слѣдующія области:

1) Область, лежащая внутри круга, описаннаго изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ 1 (черт. 2).

2) Область, лежащая внутри круга, описаннаго изъ точки $+1$ радіусомъ равнымъ 1.

3) Область, лежащая внѣ круга, описаннаго изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ 1.

Для краткости мы будемъ ихъ называть такъ: область I, область II, область III.

Изъ чертежа 2 видно, что эти области заходятъ другъ за друга. Въ каждой изъ указанныхъ областей существуетъ по два частныхъ интеграла, весьма просто выражающихся при помощи гипергеометрическихъ рядовъ.

Интегралы эти суть слѣдующіе:

Въ области I:

$$\left.\begin{aligned} &y_1=F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)\text{.... однозначный въ области I.}\\ &y_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z)\text{..... неоднозначный въ области I.}\end{aligned}\right\}\qquad(46)$$

Въ области II:

$$\left.\begin{aligned} &y_3=F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-z)\text{..... однозначный въ области II.}\\ &y_4=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-z)\text{.....}\\ &\quad\text{....неоднозначный въ области II.}\end{aligned}\right\}\qquad(47)$$

Въ области III:

$$\left.\begin{aligned} &y_5=z^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z}\right)\\ &y_6=z^{-\beta}F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{z}\right)\end{aligned}\right\}\text{неоднозначные въ области III.}\qquad(48)$$

Написанные ряды сходятся въ соотвѣтствующихъ областяхъ.

§ 10. Основныя свойства функцій Шварца.

Въ главѣ II мы видѣли, что всякое (не двучленное) алгебраическое уравненіе, имѣющее группу линейныхъ подстановокъ, измѣненіемъ независимаго перемѣннаго приводится къ уравненію (54) главы II и въ такомъ случаѣ корни его могутъ быть выражены въ видѣ отношеній частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія.

Будемъ предполагать, что преобразованіе перемѣннаго совершено и будемъ снова обозначать независимое перемѣнное буквою z.

Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ уравненіе:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1, \tag{49}$$

корни котораго суть отношенія частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія (44) и удовлетворяютъ дифференціальному уравненію:

$$[u]_z = \frac{1 - \frac{1}{\lambda_1^2}}{2z^2} + \frac{1 - \frac{1}{\lambda_2^2}}{2(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda^2} - 1}{2z(z-1)}, \tag{50}$$

при чемъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda}\right), \\ \beta &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda}\right), \\ \gamma &= 1 - \frac{1}{\lambda_1}, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

а числовыя величины λ, λ_1, λ_2 опредѣляются изъ таблицы (50) главы II.

Займемся изученіемъ свойствъ интеграла уравненія (50), считая числа λ, λ_1, λ_2 цѣлыми и положительными, но не давая имъ непремѣнно значенія, приведенныя въ таблицѣ (50) главы II. Въ такомъ случаѣ частные интегралы уравненія (50) могутъ быть и трансцендентными функціями.

Слѣдуя Шварцу *) мы обозначимъ одинъ какой нибудь частный интегралъ уравненія (50) слѣдующимъ образомъ:

---

*) Шварцъ изучаетъ свойства интеграловъ уравненія:

$$[u]_z = \frac{1-\lambda^2}{2z^2} + \frac{1-\nu^2}{2(z-1)^2} + \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2z(z-1)}$$

и обозначаетъ одинъ изъ частныхъ интеграловъ его такъ:

$$s(\lambda, \mu, \nu, z).$$

Приведенное выше уравненіе (50) есть простѣйшій частный случай уравненія Шварца. Мы ограничимся въ настоящей работѣ разсмотрѣніемъ только этого простѣйшаго частнаго случая.

$$u = s\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right), \tag{52}$$

или короче:

$$u = s(z). \tag{53}$$

Остальные частные интегралы уравненія (50) суть линейныя функціи u, какъ мы знаемъ изъ теоремы 5 главы II.

Изъ теоремы 11 главы II видно, что функція $s(z)$ есть отношеніе частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія (44), при чемъ коэффиціенты α, β, γ этого уравненія опредѣляются формулами (51).

Отсюда слѣдуетъ, что свойства функціи $s(z)$ тѣсно связаны со свойствами гипергеометрическихъ функцій.

Теорема 1. *Функція $s(z)$ многозначна и всѣ значенія ея связаны между собою линейно.*

Это слѣдуетъ изъ того, что интегралъ уравненія (50)— функція многозначная и общій интегралъ этого уравненія выражается черезъ любой частный интегралъ линейно. Слѣдовательно послѣ обхода около критической точки функція

$$u = s(z) \tag{53}$$

перейдетъ въ

$$\bar{u} = \bar{s}(z), \tag{54}$$

при чемъ:

$$\bar{u} = \frac{au + b}{cu + \partial}, \tag{55}$$

гдѣ a, b, c, ∂—нѣкоторыя постоянныя числа. Линейныя подстановки, соотвѣтствующія всевозможнымъ обходамъ около критическихъ точекъ, образуютъ группу. Эта группа—безконечнаго порядка, если число значеній функціи $s(z)$ безконечно велико. Если же число значеній функціи $s(z)$ конечно, то порядокъ группы будетъ, понятно, конченъ, и въ этомъ случаѣ, какъ мы увидимъ, функція $s(z)$ будетъ, необходимо, алгебраическою.

Теорема 2. *Функція $s(z)$ имѣетъ три критическія точки: 0, 1, ∞.*

Это слѣдуетъ изъ того, что $s(z)$ есть отношеніе двухъ частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія, а они имѣютъ лишь три критическія точки: 0, 1, ∞.

Теорема 3. *Подобное отображеніе верхней полуплоскости при посредствѣ функціи:*

$$u = s(z) \tag{53}$$

есть треугольникъ, образованный дугами круговъ и имѣющій углы соотвѣтственно равные:

$$\frac{\pi}{\lambda}, \frac{\pi}{\lambda_1}, \frac{\pi}{\lambda_2}.$$

Выберемъ въ каждой изъ областей, указанныхъ въ § 9 по одному частному интегралу уравненія (50):

Въ области I:

$$U = \frac{y_2}{y_1} = z^{1-\gamma} \frac{F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)}, \tag{56}$$

въ области II:

$$V = \frac{y_4}{y_3} = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-z)}{F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-z)}, \tag{57}$$

въ области III:

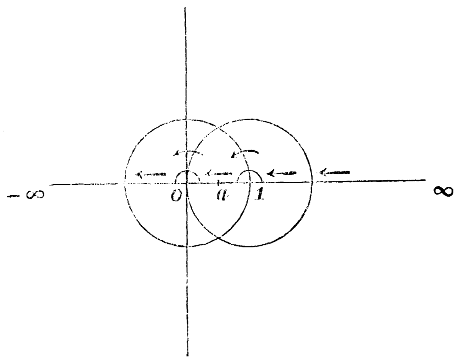
$$W = \frac{y_6}{y_5} = z^{\alpha-\beta} \frac{F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{z}\right)}{F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z}\right)}. \tag{58}$$

Интегралы U, V, W будутъ существовать, понятно, и за предѣлами указанныхъ областей, но выраженія ихъ будутъ за этими предѣлами иныя, потому что ряды, стоящіе во вторыхъ частяхъ равенствъ (56), (57), (58) за предѣлами соотвѣтствующихъ областей станутъ расходящимися.

Функція $s(z)$ выражается линейно черезъ всѣ три частныхъ интеграла:

$$u = s(z) = \frac{a_1 U + b_1}{c_1 U + \partial_1} = \frac{a_2 V + b_2}{c_2 V + \partial_2} = \frac{a_3 W + b_3}{c_3 W + \partial_3} \, . \tag{59}$$

Будемъ точку z двигать по дѣйствительной оси справа влѣво.



Черт. 3.

Пусть она выходитъ изъ точки a (черт. 3), лежащей на оси x въ области I и идетъ по оси x влѣво. Уйдя въ $-\infty$ и двигаясь дальше, она появляется на оси x съ правой стороны и идетъ опять влѣво, пока снова не придетъ въ a. Пусть при этомъ движеніи точка z огибаетъ критическія точки 0, 1 и ∞ по безконечно малымъ полукругамъ, лежащимъ *въ верхней* полуплоскости (*верхней* полусферѣ). Ясно, что путь, описанный точкой z сомкнутый: *она обогнула въ обратномъ направленіи верхнюю полуплоскость.* Такъ какъ всѣ критическія точки функціи $s(z)$ остались внѣ той площади, которую обогнула точка z, то кривая, описанная при этомъ движеніи точкою u, есть кривая сомкнутая.

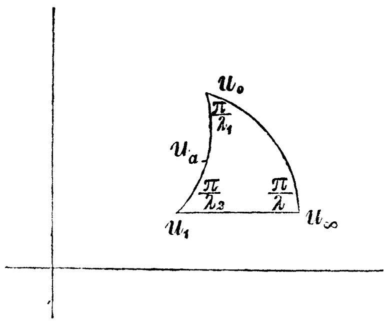
Площадь, заключенная внутри этой кривой есть подобное отображеніе верхней полуплоскости при посредствѣ функціи $s(z)$.

Посмотримъ, каковъ видъ этого подобнаго отображенія.

Пока точка z движется отъ a къ 0, функція U остается дѣйствительною, точка U движется прямолинейно по дѣйствительной оси. Точка u, связанная съ U линейною зависимостью (59), описываетъ нѣкоторую дугу круга u_a u_0 (черт. 4). Когда точка z обогнетъ точку 0 по безконечно малому полукругу, то функція U перейдетъ въ:

$$\overline{U} = e^{(1-\gamma)\pi i} U,$$

какъ видно изъ формулы (56). При дальнѣйшемъ движеніи точки z отъ 0 къ $-\infty$ точка U пойдетъ по прямой, наклоненной къ оси x подъ угломъ $(1-\gamma)\pi$, точка же u, повернувъ въ u_0 подъ такимъ же угломъ къ своему прежнему пути, пойдетъ по новой дугѣ круга $u_0\ u_\infty$. Это движеніе будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока точка z не дойдетъ до ∞.



Черт. 4.

Совершенно такими же разсужденіями мы убѣдимся въ томъ, что когда точка z, обогнувъ точку $z=\infty$ по безконечно малому полукругу, будетъ двигаться къ $+1$, точка u, повернувъ въ u_∞ подъ угломъ $(\alpha-\beta)\pi$ къ прежнему пути, пойдетъ по дугѣ круга $u_\infty\ u_1$.

Наконецъ, когда точка z обогнувъ точку 1 по безконечно малому полукругу, станетъ приближаться къ точкѣ своего выхода a, точка u, повернувъ въ u_1 подъ угломъ $(\gamma-\alpha-\beta)\pi$ къ своему прежнему пути, снова вступитъ на дугу круга $u_1\ u_a\ u_0$ и станетъ приближаться къ точкѣ u_a.

Итакъ, подобное отображеніе верхней полуплоскости помощью функціи $s(z)$ есть треугольникъ $u_0\ u_1\ u_\infty$, образованный дугами круговъ.

Углы этого треугольника суть:

$$(1-\gamma)\pi,\ (\gamma-\alpha-\beta)\pi,\ (\alpha-\beta)\pi, \tag{60}$$

или, на основаніи формулъ (51):

$$\frac{\pi}{\lambda_1},\ \frac{\pi}{\lambda_2},\ \frac{\pi}{\lambda}. \tag{61}$$

Необходимо замѣтить, что приведенный нами чертежъ 4 сдѣланъ въ предположеніи:

1) что углы треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$ всѣ меньше π,

2) что дуги круговъ, ограничивающія треугольникъ $u_0\ u_1\ u_\infty$, содержатъ въ себѣ менѣе 360^0.

Докажемъ, что такой видъ треугольника дѣйствительно соотвѣтствуетъ условіямъ рѣшаемой нами задачи.

Что касается до угловъ треугольника, то они опредѣляются формулами (61), гдѣ λ_1, λ_2, λ суть цѣлыя числа. Ясно, что они меньше π.

Докажемъ теперь, что ни одна изъ сторонъ треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$ не можетъ содержать въ себѣ 360^0 или больше.

Допустимъ, что въ дугѣ $u_0\ u_1$ больше 360^0; пусть она равна:

$$k.360^0+\psi^0,$$

гдѣ $\psi^0 < 360^0$, а k цѣлое положительное число.

Это значитъ, что пока точка z проходитъ по дѣйствительной оси отрѣзокъ 01, точка u описываетъ k полныхъ окружностей и еще дугу въ ψ^0.

Посмотримъ, какой путь въ то же время проходитъ точка:

$$U=\frac{y_2}{y_1}=z^{1-\gamma}\frac{F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)}\,. \tag{56}$$

Она связана съ точкою u соотношеніемъ:

$$u=\frac{a_1 U+b_1}{c_1 U+d_1}\,, \tag{59'}$$

откуда:

$$U=\frac{d_1 u-b_1}{a_1-c_1 u}\,. \tag{62}$$

Мы видѣли выше, что пока точка z движется по отрѣзку 01 дѣйствительной оси, точка U движется по дѣйствительной оси, а точка u описываетъ дугу $u_0\ u_1$. Слѣдовательно линейная подстановка (62) преобразуетъ точки дуги $u_0\ u_1$ въ точки дѣйствительной оси. Всякій разъ, когда точка u_1, двигаясь по дугѣ $u_0\ u_1$, описываетъ полную окружность, точка U пробѣгаетъ всю дѣйствительную ось.

Мы предположили, что дуга $u_0\ u_1$ равна:

$$k.360^0+\psi^0.$$

Если такъ, то пока точка z опишетъ отрѣзокъ 01, точка U должна пройти k разъ всю дѣйствительную ось и еще нѣкоторый конечный отрѣзокъ ея. При такомъ измѣненіи функція U должна k разъ пройти черезъ безконечность. Обращаясь къ формулѣ (56), мы видимъ, что функція U при z дѣйствительномъ и лежащемъ между 0 и 1 только въ томъ случаѣ можетъ обратиться въ ∞, если рядъ

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$$

при этомъ значеніи z равенъ 0. Между тѣмъ весьма простыми соображеніями мы убѣждаемся въ томъ, что при α, β, γ удовлетворяющихъ условіямъ (51), функція

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$$

существенно положительна и отлична отъ 0 для всѣхъ значеній z, лежащихъ между 0 и 1 *).

Такое противорѣчіе произошло отъ сдѣланнаго нами допущенія, что дуга $u_0\ u_1$ содержитъ въ себѣ болѣе 360^0.

То же самое справедливо по отношенію къ двумъ другимъ сторонамъ треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$ **).

Т е о р е м а 4. *Подобное отображеніе нижней полуплоскости при помощи функціи $s(z)$ есть треугольникъ, смежный съ $u_0\ u_1\ u_\infty$ и симметричный съ нимъ относительно ихъ общей стороны.*

---

*) Изъ формулъ (51) слѣдуетъ, что:

$$\alpha > 0,\ \beta \geqq -\frac{1}{4},\ \gamma \geqq \frac{1}{2}.$$

Въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ, когда

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \alpha = \frac{1}{4},\ \beta = -\frac{1}{4},\ \gamma = \frac{1}{2},$$

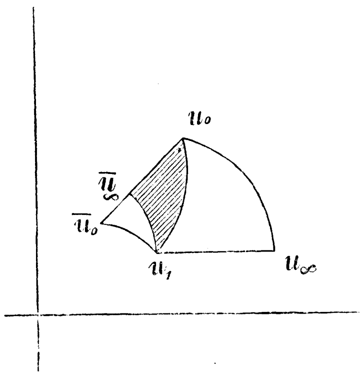
функція $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ непрерывно уменьшается отъ

$$F\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 0\right)=1, \text{ до } F\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1\right)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

слѣдовательно она остается положительною.

**) Если бы мы стали изучать функцію Шварца общаго вида $S(\lambda,\mu,\nu,z)$, то свойства ея оказались бы много сложнѣе.

Пусть точка z перешла изъ верхней полуплоскости въ нижнюю чрезъ отрѣзокъ оси x, лежащій между 0 и 1. Точка u выйдетъ изъ треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$ черезъ сторону $u_0\ u_1$, и, пока точка z будетъ оставаться въ нижней полуплоскости, точка u будетъ оставаться внѣ треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$. Чтобы найти подобное отображеніе всей нижней полуплоскости, мы заставимъ точку z пройти всю ось x справа влѣво, обходя критическія точки 0, 1, ∞ по безконечно малымъ полукругамъ, лежащимъ *въ нижней* полуплоскости.

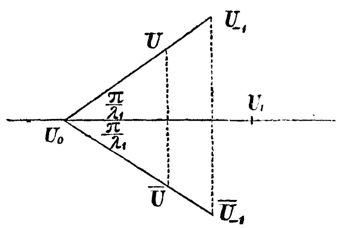


Черт. 5.

Повторяя разсужденія, приведенныя выше, мы найдемъ, что отображеніе нижней полуплоскости есть треугольникъ $u_0\ u_1\ \bar{u}_\infty$ (черт. 5), имѣющій съ треугольникомъ $u_0\ u_1\ u_\infty$ общую сторону $u_0\ u_1$ и такіе же углы какъ и треугольникъ $u_0\ u_1\ u_\infty$. Остается доказать, что треугольники: $u_0\ u_1\ u_\infty$ и $u_0\ u_1\ \bar{u}_\infty$ симметричны относительно дуги $u_0\ u_1$.

Возьмемъ два пути на плоскости перемѣннаго z:

1) пусть z идетъ по оси x отъ 1 къ 0, обходитъ 0 по безконечно малому полукругу, лежащему *въ верхней* полуплоскости и идетъ по оси x къ —1;



Черт. 6.

2) пусть z идетъ по оси x отъ 1 къ 0, обходитъ 0 по безконечно малому полукругу, лежащему *въ нижней* полуплоскости и идетъ по оси x къ —1.

Изъ формулы (56) видно, что при посредствѣ функціи U первый путь отобразится ломанной $U_1\ U_0\ U_{-1}$ (черт. 6), а второй путь—ломанной $U_1\ U_0\ \overline{U}_{-1}$. Прямыя $U_0\ U_{-1}$ и $U_0\ \overline{U}_{-1}$ симметричны относительно дѣйствительной оси.

Такъ какъ функціи u и U связаны между собою линейною зависимостью:

$$u = \frac{a_1 U + b_1}{c_1 U + \partial_1}, \tag{59'}$$

то послѣ этого линейнаго преобразованія прямая $U_1\ U_0$ перейдетъ въ дугу $u_1\ u_0$, а прямыя $U_0\ U_{-1}$ и $U_0\ \overline{U}_{-1}$ перейдутъ въ дуги круговъ, направленныя по $u_0\ u_\infty$ и $u_0\ \bar{u}_\infty$. Линейное преобразованіе, какъ мы знаемъ, не нарушаетъ симметріи; поэтому дуги $u_0\ u_\infty$ и $u_0\ \bar{u}_\infty$ будутъ симметричны относительно дуги $u_0\ u_1$.

Такимъ же образомъ докажемъ, что дуги $u_1\ u_\infty$ и $u_1\ \bar{u}_\infty$ симметричны относительно дуги $u_0\ u_1$.

Теорема доказана.

Треугольникъ, симметричный съ даннымъ относительно одной изъ сторонъ его, мы можемъ построить средствами элементарной геометріи.

Если бы точка z перешла изъ верхней полуплоскости въ нижнюю черезъ одинъ изъ отрѣзковъ: $0\ \infty$ или $\infty\ 1$, то точка u вышла бы изъ треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$ черезъ сторону $u_0\ u_\infty$ или $u_\infty\ u_1$ и тогда нижняя полуплоскость отобразилась бы треугольникомъ симметричнымъ съ $u_0\ u_1\ u_\infty$ относительно стороны $u_0\ u_\infty$ или $u_\infty\ u_1$.

Пусть точка z двигалась сначала въ верхней полуплоскости, затѣмъ перешла въ нижнюю черезъ отрѣзокъ 01, описала какую-либо кривую и снова вернулась въ верхнюю полуплоскость черезъ отрѣзокъ $1\ \infty$. Посмотримъ, какой путь описала въ то же время точка u. Путь этотъ будетъ, необходимо, разомкнутый, потому что точка z совершила обходъ около критической точки $+1$.

Сначала точка u вышла изъ треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$ черезъ сторону его $u_0\ u_1$ въ треугольникъ $u_0\ u_1\ \bar{u}_\infty$, а затѣмъ, совершивъ нѣкоторый путь внутри этого треугольника, она вышла изъ него черезъ сторону $u_1\ \bar{u}_\infty$.

Если мы заставимъ точку z послѣ сдѣланнаго обхода обогнуть верхнюю полуплоскость, то разсужденіями, подобными приведеннымъ въ теоремахъ 3 и 4, убѣдимся въ томъ, что точка u опишетъ контуръ треугольника $\bar{u}_0\ u_1\ \bar{u}_\infty$ (черт. 5), симметричнаго съ треугольникомъ $u_0\, u_1\, \bar{u}_\infty$ относительно общей стороны $u_1\, \bar{u}_\infty$.

Треугольникъ $\bar{u}_0\, u_1\, \bar{u}_\infty$ будетъ служить подобнымъ отображеніемъ верхней полуплоскости при помощи другаго значенія:

$$\bar{u} = \bar{s}(z)$$

функціи $u = s(z)$, которое она пріобрѣла послѣ обхода около критической точки $+1$.

На основаніи теоремы 1 функція $\bar{u} = \bar{s}(z)$ выражается черезъ $u = s(z)$ линейно:

$$\bar{u} = \frac{au + b}{cu + d}. \tag{55}$$

Треугольникъ $\bar{u}_0\, u_1\, \bar{u}_\infty$ можетъ быть полученъ изъ треугольника $u_0\, u_1\, u_\infty$ линейнымъ преобразованіемъ (55).

Условимся называть *эквивалентными* всякія двѣ фигуры, которыя могутъ быть получены одна изъ другой линейнымъ преобразованіемъ. Въ такомъ случаѣ труегольники $u_0\, u_1\, u_\infty$ и $\bar{u}_0\, u_1\, \bar{u}_\infty$ между собою эквивалентны.

Построимъ на плоскости сѣть *) треугольниковъ слѣдующимъ образомъ: возьмемъ треугольникъ $u_0\, u_1\, u_\infty$; на всѣхъ сторонахъ его построимъ треугольники, съ нимъ симметричные; на всѣхъ сторонахъ каждаго изъ построенныхъ треугольниковъ строимъ треугольники, симметричные съ ними относительно общей стороны, и т. д., пока будетъ возможно продолжать эти построенія. Такимъ образомъ мы или всю плоскость или нѣкоторую часть ея покроемъ сѣтью треугольниковъ.

Треугольники эти будутъ плотно прилегать другъ къ другу и нигдѣ не будутъ находить другъ на друга.

Въ самомъ дѣлѣ, всякіе два рядомъ лежащіе треугольника суть смежные: между ними незанятой части плоскости не остается; если же около какой-нибудь точки треугольники сходятся своими вершинами, то сумма угловъ, сходящихся около этой точки

---

*) Примѣры подобныхъ сѣтей см. ниже не чертежахъ: 11, 12, 14, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

какъ разъ равна 2π, потому что углы эти равны одной изъ величинъ: $\frac{\pi}{\lambda}$, $\frac{\pi}{\lambda_1}$, $\frac{\pi}{\lambda_2}$, гдѣ λ, λ_1, λ_2 суть числа цѣлыя и положительныя.

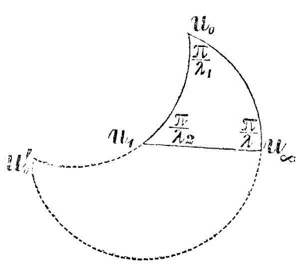
Отсюда видно, что если около какой либо точки треугольники сходятся своими вершинами, то число этихъ треугольниковъ четное; оно равно одному изъ чиселъ: 2λ, $2\lambda_1$, $2\lambda_2$. Слѣдуя Клейну поступимъ такъ: первый треугольникъ $u_0\,u_1\,u_\infty$ оставимъ бѣлаго цвѣта; всѣ смежные съ нимъ затушуемъ; всѣ треугольники, смежные съ этими черными, оставимъ бѣлаго цвѣта, а всѣ смежные съ бѣлыми затушуемъ и т. д. Тогда всякій бѣлый треугольникъ будетъ окруженъ черными, и обратно. Если около какой либо точки нѣсколько треугольниковъ сходятся своими вершинами, то половина ихъ будетъ бѣлаго цвѣта, а другая половина чернаго цвѣта. Изъ сказаннаго выше ясно, что всѣ бѣлые треугольники будутъ подобными отображеніями верхней полуплоскости перемѣннаго z при помощи различныхъ значеній многозначной функціи $s(z)$, а черные треугольники—подобными отображеніями нижней полуплоскости перемѣннаго z при помощи значеній той же функціи. Точки, гдѣ треугольники сходятся вершинами, будутъ отображеніями критическихъ точекъ 0, 1, ∞, а число треугольниковъ одинаковаго цвѣта λ, λ_1, λ_2, сходящихся около такой точки, равно числу значеній функціи $s(z)$, связанныхъ между собою въ соотвѣтствующей критической точкѣ. Всѣ треугольники одинаковаго цвѣта эквивалентны между собою, и подстановки, преобразующія первый изъ нихъ во всѣ остальные, суть подстановки группы, соотвѣтствующей функціи $s(z)$.

Число треугольниковъ сѣти равно числу значеній функціи $s(z)$. Если функція $s(z)$ алгебраическая, то число треугольниковъ сѣти конечно и сѣть покроетъ собою *всю* плоскость перемѣннаго $u=s(z)$, ибо алгебраическая функція можетъ пріобрѣтать *всѣ* значенія. Если функція $s(z)$ трансцендентная, то въ сѣти можетъ быть безконечное число треугольниковъ и эти треугольники могутъ закрывать не всю плоскость.

Возьмемъ два смежныхъ треугольника сѣти; вмѣстѣ они составятъ четыреугольникъ. Ясно, что построенную сѣть мы можемъ разсматривать, какъ сѣть четыреугольниковъ. Каждый изъ этихъ четыреугольниковъ есть подобное отображеніе *всей* плоскости перемѣннаго z при помощи соотвѣтствующаго ему значенія функціи $s(z)$ и дѣлится діагональю (дугою круга) на два треугольника различныхъ цвѣтовъ и соотвѣтствующихъ двумъ половинамъ плоскости. Всѣ четыреугольники сѣти эквивалентны между собою. Гдѣ бы въ части плоскости, занятой сѣтью, мы ни отмѣтили точку, (лишь бы она не лежала на контурѣ одного изъ четыреугольниковъ), въ каждомъ четыреугольникѣ сѣти найдется одна вполнѣ опредѣленная точка, ей соотвѣтствующая и связанная съ ней одной изъ подставокъ группы. Вслѣдствіе этого послѣдняго свойства мы назовемъ каждый изъ четыреугольниковъ сѣти *основною областью* *) группы.

Лемма. *Всякіе два треугольника, составленные дугами круговъ и имѣющіе углы соотвѣтственно равные и сходственно расположенные, эквивалентны.*

Пусть данъ треугольникъ $u_0\ u_1\ u_\infty$ на плоскости перемѣннаго u (черт. 7); пусть углы его суть:



Черт. 7.

$$\frac{\pi}{\lambda},\ \frac{\pi}{\lambda_1},\ \frac{\pi}{\lambda_2},$$

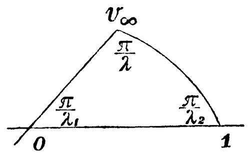
гдѣ λ, λ_1, λ_2 суть числа цѣлыя и положительныя. Обозначимъ вторую точку пересѣченія дугъ $u_0\ u_1$ и $u_0\ u_\infty$ буквою u_0'. Преобразуемъ треугольникъ $u_0\ u_1\ u_\infty$ посредствомъ линейной подстановки:

$$v = \frac{u_1 - u_0'}{u_1 - u_0} \cdot \frac{u - u_0}{u - u_0'}. \tag{63}$$

---

*) Fundamentalbereich по Клейну, polygone générateur по Пуанкаре. Строгое опредѣленіе понятія объ основной области группы линейныхъ подстановокъ мы приводимъ ниже въ главѣ IX.

Изъ формулы (63) видно, что при $u=u_0$, $v=0$; при $u=u_1$, $v=1$; при $u=u_0'$, $v=\infty$. Треугольникъ $01v_\infty$ (черт. 8), въ который $u_0\ u_1\ u_\infty$ преобразуется подстановкой (63), имѣетъ одну вершину въ точкѣ $+1$, другую въ началѣ координатъ; стороны треугольника 01, $0v_\infty$, выходящія изъ вершины 0, прямолинейны (ибо вторая точка пересѣченія ихъ лежитъ въ безконечности); углы треугольника $01v_\infty$ таковы же и такъ же расположены, какъ углы треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$, потому что треугольникъ $01v_\infty$ есть подобное отображеніе треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$ при посредствѣ линейной функціи (63). Сказанными свойствами треугольникъ $01v_\infty$ опредѣленъ вполнѣ: такой треугольникъ существуетъ и только одинъ.



Черт. 8.

Всякій треугольникъ $\bar{u}_0\ \bar{u}_1\ \bar{u}_\infty$, имѣющій съ треугольникомъ $u_0\ u_1\ u_\infty$ углы равные и сходственно расположенные, подстановкой:

$$v=\frac{\bar{u}_1-\bar{u}_0'}{\bar{u}_1-\bar{u}_0}\cdot\frac{\bar{u}-\bar{u}_0}{\bar{u}-\bar{u}_0'},$$

преобразуется въ тотъ же треугольникъ $01v_\infty$.

Если такъ, то треугольники $u_0\ u_1\ u_\infty$ и $\bar{u}_0\ \bar{u}_1\ \bar{u}_\infty$ между собою эквивалентны.

Лемма доказана.

Теорема 5. *Если данъ треугольникъ $u_0\ u_1\ u_\infty$, составленный дугами круговъ и имѣющій углы равные $\frac{\pi}{\lambda}$, $\frac{\pi}{\lambda_1}$, $\frac{\pi}{\lambda_2}$, гдѣ λ, λ_1, λ_2 числа цѣлыя и положительныя, то тѣмъ самымъ соотвѣтствующая ему функція $s(z)$ вполнѣ опредѣлена.*

Подставимъ данныя намъ значенія λ, λ_1, λ_2 въ уравненіе (50), найдемъ какой нибудь частный интегралъ $\bar{s}(z)$ полученнаго уравненія и построимъ треугольникъ $\bar{u}_0\ \bar{u}_1\ \bar{u}_\infty$, соотвѣтствующій частному интегралу $\bar{s}(z)$. Треугольникъ $\bar{u}_0\ \bar{u}_1\ \bar{u}_\infty$ будетъ имѣть съ треугольникомъ $u_0\ u_1\ u_\infty$ углы соотвѣтственно равные и сходственно расположенные. На основаніи доказанной леммы онъ будетъ эквивалентенъ треугольнику $u_0\, u_1\, u_\infty$. Найдя коэффиціенты a, b, c, $д$ линейной подстановки, преобразующей треугольникъ $\bar{u}_0\, \bar{u}_1\, \bar{u}_\infty$ въ треугольникъ $u_0\, u_1\, u_\infty$, мы придемъ къ заключенію, что искомая функція $s(z)$ можетъ быть изображена такою формулою:

$$s(z) = \frac{a\bar{s}(z) + b}{c\bar{s}(z) + д}. \tag{64}$$

Она будетъ частнымъ интеграломъ того же дифференціальнаго уравненія, которому удовлетворяетъ функція $\bar{s}(z)$.

§ 11. **Свойства сѣти треугольниковъ.**

Пусть углы треугольниковъ нѣкоторой сѣти соотвѣтственно равны $\frac{\pi}{\lambda}$, $\frac{\pi}{\lambda_1}$, $\frac{\pi}{\lambda_2}$. Совершивъ надъ сѣтью какое нибудь линейное преобразованіе, мы получимъ новую сѣть эквивалентную прежней. Углы треугольниковъ новой сѣти будутъ такіе же, какъ и въ прежней: $\frac{\pi}{\lambda}$, $\frac{\pi}{\lambda_1}$, $\frac{\pi}{\lambda_2}$. Наоборотъ, всякія двѣ сѣти, у которыхъ углы треугольниковъ соотвѣтственно равны, эквивалентны между собою на основаніи доказанной выше леммы.

Въ дальнѣйшемъ эквивалентныя сѣти не будутъ для насъ имѣть существеннаго различія, мы будемъ называть ихъ сѣтями одного *типа*.

Теорема 6. *Существуетъ безконечное число типовъ сѣтей, у которыхъ сумма внутреннихъ угловъ каждаго треугольника меньше* π; *существуетъ четыре типа сѣтей, у которыхъ сумма внутреннихъ угловъ каждаго треугольника равна* π *и существуетъ четыре типа сѣтей, у которыхъ сумма внутреннихъ угловъ каждаго треугольника больше* π.

I. Пусть сумма внутреннихъ угловъ треугольника меньше π:

$$\frac{\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{\lambda_1} + \frac{\pi}{\lambda_2} < \pi, \tag{65}$$

откуда:

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}<1. \tag{66}$$

Неравенство (66) имѣетъ безконечное число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній.

Первая часть теоремы доказана.

II. Пусть сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна π:

$$\frac{\pi}{\lambda}+\frac{\pi}{\lambda_1}+\frac{\pi}{\lambda_2}=\pi, \tag{67}$$

откуда:

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}=1. \tag{68}$$

Неопредѣленное уравненіе (68) имѣетъ лишь четыре слѣдующія системы цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній:

$\lambda=$	3	4	6	∞
$\lambda_1=$	3	4	3	2
$\lambda_2=$	3	2	2	2

*) (69)

Вторая часть теоремы доказана.

III. Пусть сумма внутреннихъ угловъ треугольника больше π:

$$\frac{\pi}{\lambda}+\frac{\pi}{\lambda_1}+\frac{\pi}{\lambda_2}>\pi, \tag{70}$$

откуда:

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}>1. \tag{71}$$

---

*) Для аналогіи съ табл. (50) главы II мы условимся полагать, что $\lambda \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2$.

Неравенство (71) имѣетъ лишь четыре *) системы цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній:

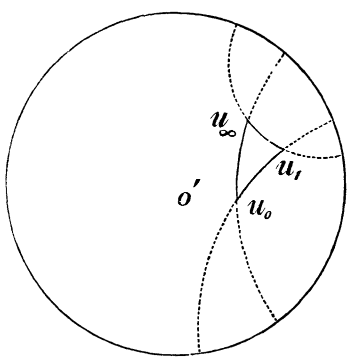
$\lambda =$	m	3	4	5
$\lambda_1 =$	2	3	3	3
$\alpha_2 =$	2	2	2	2

(72)

гдѣ m произвольное цѣлое число.

Послѣдняя часть теоремы доказана.

Теорема 7. *Если сумма внутреннихъ угловъ треугольниковъ меньше* π, *то сѣть содержитъ въ себѣ безконечно большое число треугольниковъ и заключается внутри конечнаго круга, ортогональнаго ко всѣмъ сторонамъ треугольниковъ сѣти. Функція* $s(z)$, *соотвѣтствующая такой сѣти, трансцендентная.*



Черт. 9.

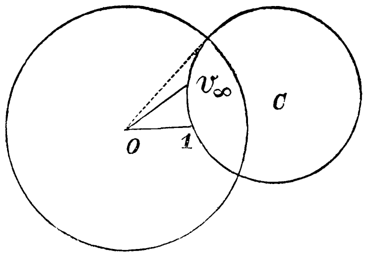
Пусть u_0 u_1 u_∞ (черт. 9) есть одинъ изъ треугольниковъ сѣти и пусть сумма внутреннихъ угловъ его меньше π.

Построимъ эквивалентный ему треугольнкъ $01v_\infty$ (черт. 10), имѣющій двѣ прямолинейныя стороны 01 и $0v_\infty$. При доказательствѣ приведенной выше леммы мы видѣли, что такой треугольникъ существуетъ и притомъ единственный.

---

*) Точнѣе было бы сказать, что въ таблицѣ (72) безконечное число рѣшеній, потому что число m можетъ получать безконечное число значеній, и что существуетъ безконечное число типовъ сѣтей треугольниковъ, у которыхъ сумма внутреннихъ угловъ больше π. Но всѣ сѣти треугольниковъ, имѣющихъ углы равные $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, совершенно одинаковы по своимъ свойствамъ: вотъ почему мы относимъ ихъ *къ одному типу*, давая слову типъ нѣсколько болѣе широкое значеніе.

Совершенно элементарными соображеніями убѣждаемся въ томъ, что если сумма внутреннихъ угловъ треугольника $01v_\infty$ меньше π, то дуга $1v_\infty$ обращена къ вершинѣ 0 своею выпуклостью. Въ такомъ случаѣ возможно провести конечный кругъ съ центромъ въ O и ортогональный къ кругу C, дуга котораго $1v_\infty$ служитъ стороною треугольника $01v_\infty$. Этотъ кругъ O ортогоналенъ ко всѣмъ тремъ сторонамъ треугольника $01v_\infty$ и притомъ треугольникъ $01v_\infty$ весь лежитъ внутри круга O.



Черт. 10.

Треугольникъ $01v_\infty$ только въ томъ случаѣ достигаетъ ортогональнаго круга O одною или двумя своими вершинами: 1 и v_∞, когда уголъ соотвѣтствующій этой вершинѣ равенъ нулю, т.-е. когда одно изъ чиселъ λ_2, λ или оба равны ∞.

Линейная подстановка, преобразующая треугольникъ $01v_\infty$ въ $u_0\ u_1\ u_\infty$, преобразуетъ кругъ O, въ нѣкоторый конечный кругъ O' (черт. 9), который будетъ ортогоналенъ ко всѣмъ сторонамъ треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$, потому что при линейномъ преобразованіи всѣ углы сохраняютъ свою величину.

Чтобы построить сѣть, соотвѣтствующую треугольнику $u_0\ u_1\ u_\infty$, мы должны построить его зеркальныя изображенія относительно всѣхъ трехъ сторонъ его и производить такія же построенія для каждаго изъ вновь построенныхъ треугольниковъ до тѣхъ поръ, пока это будетъ возможно. При построеніи всѣхъ этихъ зеркальныхъ изображеній ортогональный кругъ O' преобразуется самъ въ себя и остается ортогональнымъ для всѣхъ вновь построенныхъ треугольниковъ, потому что при всѣхъ этихъ преобразованіяхъ углы сохраняютъ свою величину.

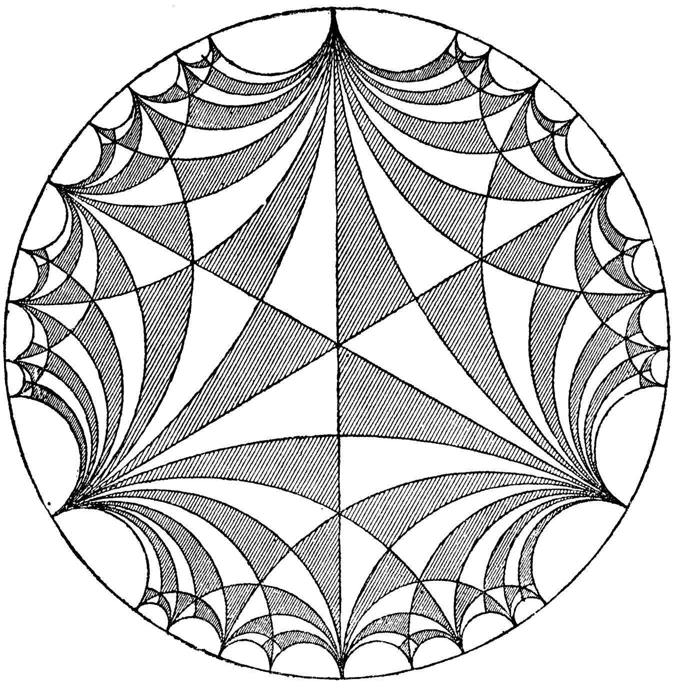
И такъ, дѣйствительно кругъ O' ортогоналенъ ко всѣмъ треугольникамъ сѣти.

При построеніи зеркальнаго изображенія всякая точка, лежащая внутри ортогональнаго круга O', преобразуется въ точку, лежащую внутри круга O'. Треугольникъ $u_0\ u_1\ u_\infty$

лежитъ внутри круга O', слѣдовательно и вся сѣть будетъ лежать внутри этого ортогональнаго круга.

Если треугольникъ $u_0\ u_1\ u_\infty$ имѣетъ вершину, лежащую на ортогональномъ кругѣ, то всѣ вершины другихъ треугольниковъ сѣти, соотвѣтствующія этой вершинѣ, также будутъ лежать на ортогональномъ кругѣ и въ такомъ случаѣ въ точкахъ ортогональнаго круга будутъ сходиться своими вершинами тѣ углы треугольниковъ, которые равны нулю.

Такія точки будутъ лежать на ортогональномъ кругѣ безконечно часто, но не непрерывно и въ каждой такой точкѣ сходится безконечное число треугольниковъ.



Черт. 11.

Ясно, что число всѣхъ треугольниковъ сѣти безконечно велико. Примѣръ такой сѣти представленъ на черт. 11 *).

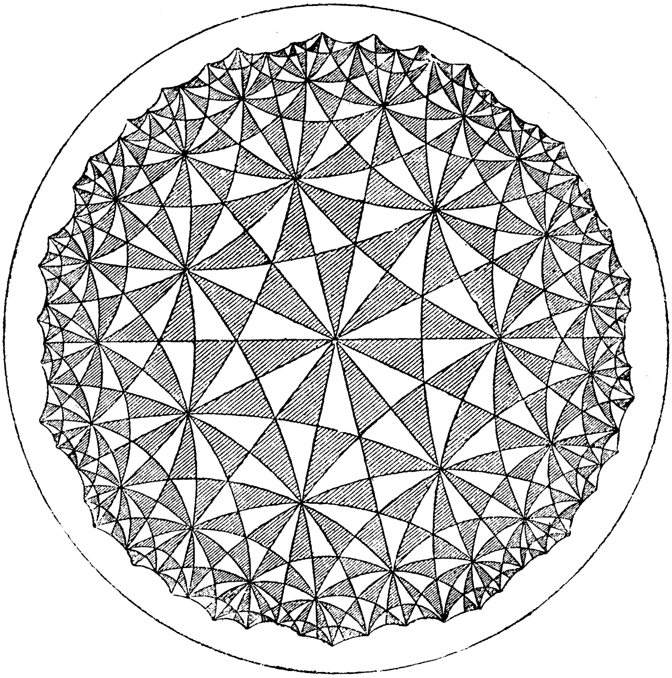
Если ни одна изъ вершинъ треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$ не

---

*) Чертежи 11 и 12 заимствованы у Клейна: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Bd. I.

лежитъ на ортогональномъ кругѣ, то ни одинъ изъ треугольниковъ сѣти не достигнетъ ортогональнаго круга, хотя ихъ и будетъ безконечное число: по мѣрѣ приближенія къ ортогональному кругу, размѣры треугольниковъ уменьшаются и вблизи ортогональнаго круга становятся безконечно малыми.

Ясно, что число треугольниковъ сѣти безконечно велико. Примѣръ такой сѣти представленъ на черт. 12.

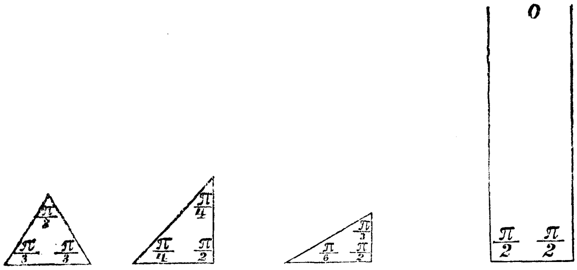


Черт. 12.

Понятно, что если въ сѣти безконечное число треугольниковъ, то соотвѣтствующая ей группа безконечнаго порядка, а соотвѣтствующая ей функція $s(z)$ есть функція трансцендентная.

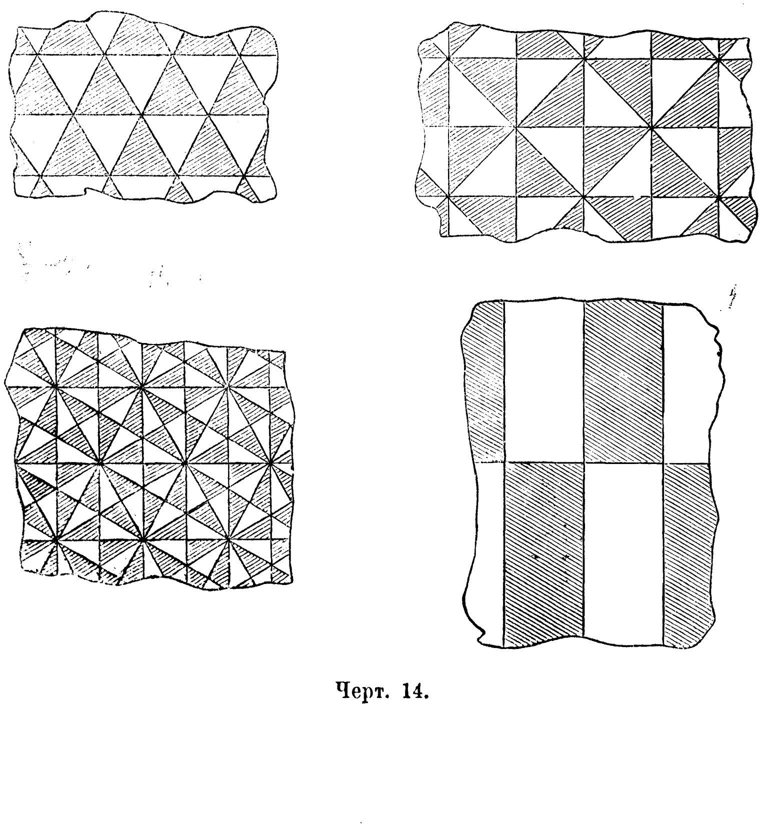
Теорема 8. *Если сумма внутреннихъ угловъ треугольниковъ сѣти равна* π, *то сѣть покрываетъ всю плоскость и содержитъ въ себѣ безконечно большое число треугольниковъ. Соотвѣтствующая ей функція* $s(z)$ *трансцендентная.*

Пусть $u_0\ u_1\ u_\infty$ есть одинъ изъ треугольниковъ сѣти и пусть сумма внутреннихъ угловъ его равна π. Построивъ эквивалентный ему треугольникъ $01v_\infty$, имѣющій двѣ прямолинейныя стороны, мы увидимъ, что и третья сторона будетъ прямолинейна (иначе сумма внутреннихъ угловъ не равнялась бы π). Изъ таблицы (69) видно, что треугольникъ $01v_\infty$ будетъ одного изъ четырехъ видовъ построенныхъ на черт. 13.



Черт. 13.

Сѣти, соотвѣтствующія этимъ треугольникамъ, изображены на черт. 14.

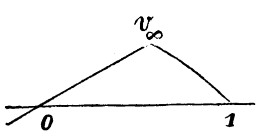


Черт. 14.

Изъ чертежей видно, что всѣ четыре сѣти покрываютъ собою всю плоскость и содержатъ въ себѣ безконечное число треугольниковъ. Всѣ сѣти имъ эквивалентныя, а въ томъ числѣ и сѣть, соотвѣтствующая первоначально взятому нами треугольнику $u_0\ u_1\ u_\infty$ тоже будутъ покрывать собою всю плоскость и содержать въ себѣ безконечное число треугольниковъ.

Группы, соотвѣтствующія этимъ сѣтямъ суть группы безконечнаго порядка. Функціи $s(z)$, имъ соотвѣтствующія имѣютъ безконечное число значеній и суть функціи трансцендентныя.

Пусть $u_0\ u_1\ u_\infty$ есть треугольникъ сѣти и пусть сумма внутреннихъ угловъ его больше π. Построивъ эквивалентный ему треугольникъ $01v_\infty$ (черт. 15), имѣющій двѣ прямолинейныя стороны, мы увидимъ, что дуга $1v_\infty$ обращена къ точкѣ 0 своею вогнутостью. Отсюда слѣдуетъ, что круга, ортогональнаго къ сторонамъ треугольника $01v_\infty$, а слѣдовательно, и круга, ортогональнаго къ сторонамъ треугольника $u_0\ u_1\ u_\infty$, не существуетъ. Но сдѣлать на основаніи этого заключеніе о томъ, будетъ ли сѣть покрывать собою всю плоскость и будетъ ли она содержать въ себѣ конечное число треугольниковъ—мы не можемъ. Поэтому разсматриваемый случай требуетъ особаго изученія тѣмъ больше, что мы въ правѣ предположить, что именно въ этомъ случаѣ функція $s(z)$ есть функція алгебраическая.



Черт. 15.

§ 12. Построеніе четырехъ типовъ сѣти треугольниковъ, у которыхъ сумма внутреннихъ угловъ больше π.

Воспользуемся тѣми геометрическими представленіями на сферѣ, которыя были указаны въ § 8. Будемъ помнить, что всякому повороту сферы около оси, проходящей черезъ центръ ея, соотвѣтствуетъ нѣкоторое линейное преобразованіе точекъ плоскости.

Впишемъ въ сферу одинъ изъ слѣдующихъ многогранниковъ:

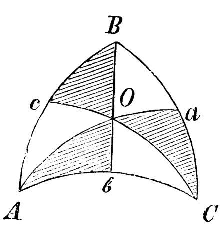
1) Многогранникъ, состоящій изъ двухъ одинаковыхъ m-гранныхъ правильныхъ пирамидъ, сложенныхъ своими основаніями и имѣющихъ высоты равныя радіусу круга, описаннаго около основанія. Такое тѣло, слѣдуя Клейну, будемъ называть $2m$-гранной двупирамидой (Doppelpyramide).

2) правильный тетраэдръ,

3) правильный октаэдръ,

4) правильный икосаэдръ.

Вписавъ въ сферу одинъ изъ этихъ четырехъ многогранниковъ, проэктируемъ на поверхность сферы изъ ея центра всѣ грани этого многогранника. Тогда сфера покроется сѣтью *равныхъ* треугольниковъ, сторонами которыхъ служатъ дуги большихъ круговъ. Дуги эти суть проэкціи реберъ многогранника изъ центра на поверхность сферы. Возьмемъ одно изъ послѣднихъ трехъ тѣлъ: тетраэдръ, октаэдръ или икосаэдръ (о двупирамидѣ будемъ говорить отдѣльно); ради общности будемъ его называть p-гранникомъ. Пусть сферическій треугольникъ ABC (черт. 16) есть проэкція одной изъ граней взятаго p-гранника изъ центра на поверхность сферы. Отмѣтимъ проэкціи a, b, c срединъ реберъ взятой грани и проведемъ окружности большихъ круговъ Aa, Bb, Cc. Онѣ пересѣкутся въ одной точкѣ O—проэкціи центра грани на поверхность сферы.



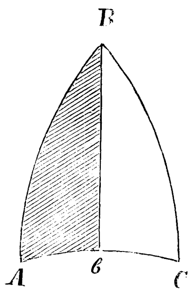
Черт. 16.

Треугольникъ ABC разбился на 6 меньшихъ треугольниковъ.

Затушуемъ ихъ черезъ одинъ, какъ показано на черт. 16.

Поступимъ точно такъ же и со всѣми остальными треугольниками сѣти, построенной на сферѣ.

Тогда вся сфера покроется сѣтью изъ $6p$ треугольниковъ; каждые два рядомъ лежащіе треугольника суть смежные, суть симметричные въ элементарномъ смыслѣ относительно общей стороны и различаются цвѣтомъ: одинъ бѣлый, а другой черный. Бѣлыхъ треугольниковъ на поверхности сферы $3p$ и они всѣ между собою равны, черныхъ треугольниковъ также $3p$, и они тоже между собою равны.


Черт. 17.

Пусть теперь ABC (черт. 17) есть сферическій треугольникъ, служащій проэкціей грани двупирамиды.

Пусть при этомъ дуга AC соотвѣтствуетъ ребру основанія. Отмѣтимъ проэкцію b средины ребра AC на поверхность сферы и проведемъ окружность большаго круга Bb. Она раздѣлитъ треугольникъ ABC на два треугольника ABb и CBb, симметричныхъ относительно общей стороны Bb.

Подобнымъ же образомъ мы поступимъ со всѣми $2m$ проэкціями граней двупирамиды на поверхность сферы. Тогда мы получимъ на поверхности сферы сѣть изъ $4m$ треугольниковъ, обладающую тѣми же свойствами, которыми обладали сѣти, соотвѣтствующія остальнымъ видамъ многогранниковъ.

Углы треугольниковъ сѣти на поверхности сферы мы обозначимъ такъ:

$$\frac{\pi}{\lambda}, \quad \frac{\pi}{\lambda_1}, \quad \frac{\pi}{\lambda_2},$$

число треугольниковъ одинаковаго цвѣта сходящихся около вершинъ этихъ угловъ мы обозначимъ буквами ν, ν_1, ν_2; число всѣхъ треугольниковъ одинаковаго цвѣта обозначимъ буквою N.

Сообразить, каковы будутъ числовыя величины N, ν, ν_1, ν_2, λ, λ_1, λ_2 для каждаго изъ четырехъ многогранниковъ очень легко. Мы ихъ расположимъ въ слѣдующую таблицу:

	Двупирамид.	тетр.	окт.	икос.
$N=$	$2m$	12	24	60
$\nu=$	2	4	6	12
$\nu_1=$	m	4	8	20
$\nu_2=$	m	6	12	30
$\lambda=$	m	3	4	5
$\lambda_1=$	2	3	3	3
$\lambda_2=$	2	2	2	2

(73)

Сѣть, построенную на сферѣ, проэктируемъ стереографически изъ южнаго полюса на плоскость перемѣннаго u и заштрихуемъ проэкціи тѣхъ треугольниковъ, которые были заштрихованы на сферѣ.

Такимъ образомъ *вся* плоскость покроется *конечнымъ числомъ* треугольниковъ двухъ цвѣтовъ. Каждые два рядомъ лежащіе треугольника суть смежные, каждый бѣлый треугольникъ окруженъ черными и обратно. Углы всѣхъ треугольниковъ одинаковаго цвѣта соотвѣтственно равны и сходственно расположены, потому что на сферѣ всѣ треугольники одного цвѣта были равны, а при стереографическомъ проэктированіи углы сохраняютъ свою величину. Углы всякихъ двухъ треугольниковъ различнаго цвѣта соотвѣтственно равны, но расположены въ обратномъ порядкѣ.

Для того, чтобы мы были въ правѣ сказать, что треугольники, построенные нами на плоскости, образуютъ *сѣть треугольниковъ* въ томъ смыслѣ, въ какомъ мы выше употребляли это выраженіе, остается доказать, что всякіе два смежные треугольника симметричны относительно общей стороны.

Пусть $u_0\ u_1\ u_\infty$ и $u_0\ u_1\ \bar{u}_\infty$ суть два смежныхъ треугольника на плоскости; общая сторона ихъ $u_0\ u_1$. Пусть соотвѣтствующіе имъ треугольники на сферѣ суть: $U_0\ U_1\ U_\infty$ и $U_0\ U_1\ \bar{U}_\infty$. Они, какъ мы знаемъ, симметричны въ элементарномъ смыслѣ относительно общей стороны $U_0\ U_1$. Повернемъ сферу около ея центра такъ, чтобы сторона $U_0\ U_1$ прошла черезъ сѣверный полюсъ. Тогда дуга $U_0\ U_1$ въ новомъ положеніи будетъ проэктироваться на плоскость въ видѣ прямой $u_0'\ u_1'$, треугольники же $U_0\ U_1\ U_\infty$ и $U_0\ U_1\ \bar{U}_\infty$ въ новомъ положеніи будутъ проэктироваться въ видѣ треугольниковъ $u_0'\ u_1'\ u_\infty'$ и $u_0'\ u_1'\ \bar{u}_\infty$, симметричныхъ въ элементарномъ смыслѣ относительно ихъ общей прямолинейной стороны $u_0'\ u_1'$.

Фигура $u_0'\ u_1'\ u'_\infty\ \bar{u}'_\infty$ получается изъ фигуры $u_0\ u_1\ u_\infty\ \bar{u}_\infty$ линейнымъ преобразованіемъ, соотвѣтствующимъ сдѣланному нами повороту сферы. Такъ какъ линейное преобразованіе не нарушаетъ симметріи, то мы приходимъ къ заключенію, что треугольники $u_0\ u_1\ u_\infty$ и $u_0\ u_1\ \bar{u}_\infty$ симметричны относительно общей стороны $u_0\ u_1$.

И такъ, мы построили на плоскости четыре типа сѣти треугольниковъ. *Каждая изъ этихъ сѣтей покрываетъ собою всю плоскость, содержитъ въ себѣ конечное число треугольниковъ, углы этихъ треугольниковъ равны:*

$$\frac{\pi}{\lambda}, \frac{\pi}{\lambda_1}, \frac{\pi}{\lambda_2},$$

гдѣ $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ *суть цѣлыя числа, величины которыхъ даны въ таблицѣ (73).*

Каждый типъ сѣтей треугольниковъ соотвѣтствуетъ одному изъ названныхъ выше видовъ многогранниковъ. Смотря по тому, къ какому изъ этихъ типовъ принадлежитъ данная сѣть, мы будемъ ее называть *двупирамидной*, *тетраэдрической*, *октаэдрической* или *икосаэдрической сѣтью.*

Сравнивая таблицу (73) съ таблицей (72), мы замѣчаемъ, что величины $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ приведенныя въ нихъ—одинаковы.

Слѣдовательно, построенныя нами сѣти суть какъ разъ тѣ четыре вида искомыхъ сѣтей, у которыхъ сумма внутреннихъ угловъ каждаго треугольника больше π. Сравнивая таблицу (73) съ таблицей (50) главы II, мы замѣчаемъ ихъ тождественность.

Отсюда слѣдуетъ:

Теорема 9. *Функціи Шварца, соотвѣтствующія четыремъ типамъ сѣтей съ конечнымъ числомъ треугольниковъ, суть функціи алгебраическія и служатъ корнями уравненій вида:*

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z-1 : 1. \qquad (49)$$

Для того, чтобы найти группу линейныхъ подстановокъ уравненія (49), необходимо построить сѣть той функціи Шварца, которая ему удовлетворяетъ, а затѣмъ вычислить коэффиціенты линейныхъ подстановокъ группы, соотвѣтствующей построенной сѣти.

Выполненіе этихъ вычисленій составитъ задачу слѣдующей главы.

ГЛАВА IV.

Конечныя группы линейныхъ подстановокъ.

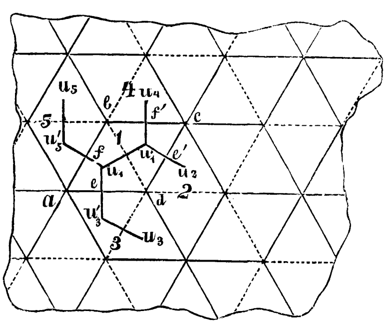
§ 13. **Общіе пріемы вычисленія подстановокъ группы, соотвѣтствующей данной сѣти треугольниковъ.**

Пусть дана сѣть треугольниковъ. Соединивъ треугольники попарно, мы получимъ сѣть четыреугольниковъ. Каждый изъ этихъ четыреугольниковъ есть основная область нѣкоторой неизвѣстной намъ группы линейныхъ подстановокъ. Всѣ четыреугольники эквивалентны между собою относительно подстановокъ этой группы.

Для краткости мы будемъ обозначать четыреугольники сѣти нумерами: 1, 2, 3....

Возьмемъ въ четыреугольникѣ 1-мъ произвольную точку u_1 (черт. 18), строимъ рядъ зеркальныхъ изображеній точки u_1:

$$u_1', \; u_2, \; u_2', \; u_3', \; u_3 \dots$$



Черт. 18 *).

Въ каждомъ четыреугольникѣ найдется по одной точкѣ, соотвѣтствующей точкѣ u_1:

$$u_1, \; u_2, \; u_3 \dots$$

Точки u_1', u_2', u_3'... будутъ симметричны съ точками u_1, u_2, u_3... относительно діагоналей четыреугольниковъ.

*) Случай $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 3$ взятъ лишь для упрощенія чертежа. Разсужденія, приведенныя въ текстѣ, относятся ко всякой сѣти четыреугольниковъ.

Теорема 1. *Стороны четыреугольника суть попарно эквивалентны.*

Будемъ двигать точку u_1 внутри четыреугольника 1, приближая ее къ какой нибудь точкѣ e стороны ad. Зеркальное изображеніе u_1' будетъ приближаться къ точкѣ e', симметричной съ точкой e относительно діагонали bd. Точка u_2, симметричная съ u_1' относительно стороны cd, будетъ приближаться къ той же точкѣ e' стороны cd. Въ тотъ моментъ, когда u_1 придетъ въ e, точка u_2 придетъ въ e'.

Точки u_1 и u_2 суть точки соотвѣтственныя въ четыреугольникахъ 1 и 2. Онѣ связаны между собою линейной подстановкой S, преобразующей четыреугольникъ 1 въ четыреугольникъ 2:

$$u_2 = S(u_1). \tag{1}$$

Если такъ, то:

$$e' = S(e). \tag{2}$$

Это послѣднее равенство справедливо, гдѣ бы на сторонѣ ad мы ни взяли точку e: сторона ad эквивалентна сторонѣ cd, и подстановка, преобразующая ad въ cd, есть та подстановка S, которая преобразуетъ четыреугольникъ 1 въ 2.

Будемъ двигать точку u_1, приближая ее къ какой нибудь точкѣ f стороны ab. Зеркальное изображеніе u_1' будетъ приближаться къ точкѣ f', симметричной съ f относительно діагонали bd. Точка u_4, симметричная съ u_1' относительно стороны bc, будетъ приближаться къ той же точкѣ f' стороны bc. Въ тотъ моментъ, когда точка u_1 придетъ въ f, точка u_4 придетъ въ f'. Точки u_1 и u_4 суть соотвѣтственныя точки въ четыреугольникахъ 1 и 4; онѣ связаны между собою линейной подстановкой $\mathfrak{T}$, преобразующей четыреугольникъ 1 въ 4:

$$u_4 = \mathfrak{T}(u_1). \tag{3}$$

Если такъ, то:

$$f' = \mathfrak{T}(f). \tag{4}$$

Это равенство справедливо, гдѣ бы на сторонѣ ab мы ни взяли точку f: сторона cb эквивалентна сторонѣ ab и подстановка, преобразующая ab въ cb, есть та подстановка $\mathfrak{T}$, которая преобразуетъ четыреугольникъ 1 въ 4.

Четыреугольникъ 1 былъ взятъ совершенно произвольно; поэтому мы въ правѣ сказать, что стороны всякаго четыреугольника сѣти попарно эквивалентны *).

Теорема доказана.

Слѣдуя Пуанкаре, будемъ называть эквивалентныя стороны четыреугольника сопряженными.

Для послѣдующаго важно обратить вниманіе на слѣдующее обстоятельство.

Подстановка S^{-1}, преобразующая сторону cd въ сопряженную съ ней ad, есть та подстановка, которая преобразуетъ четыреугольникъ 1 въ 3 **); слѣдовательно подстановка, преобразующая четыреугольникъ 1 въ 2, обратна той, которая преобразуетъ четыреугольникъ 1 въ 3.

На томъ же основаніи подстановка, преобразующая четыреугольникъ 1 въ 4, обратна той, которая преобразуетъ четыреугольникъ 1 въ 5.

Эти послѣднія заключенія мы можемъ формулировать въ видѣ теоремы:

Т е о р е м а 2. *Подстановки, преобразующія четыреугольникъ 1 въ смежные, суть*:

$$S,\ \mathfrak{T},\ S^{-1},\ \mathfrak{T}^{-1}. \qquad (5)$$

Т е о р е м а 3. *Подстановки*:

$$S \text{ и } \mathfrak{T}$$

суть основныя ***) *подстановки группы.*

---

*) Срав. Poincaré. Théorie des groupes fuchsiennes. Acta Mathem. Томъ I.

**) Въ этомъ мы убѣждаемся совершенно такими же разсужденіями, которыя приведены выше.

***) Основными подстановками называются такія подстановки, изъ которыхъ можно составить любую подстановку группы и которыя въ то же время независимы между собою.

Возьмемъ четыреугольникъ 1-ый и какой нибудь четыреугольникъ m-ый данной сѣти и въ нихъ отмѣтимъ соотвѣтственныя точки u_1 и u_m. Пусть четыреугольникъ m-ый получается изъ четыреугольника 1-го линейнымъ преобразованіемъ Σ:

$$u_m = \Sigma(u_1). \tag{6}$$

Будемъ точку u_m перемѣщать такъ, чтобы она вышла изъ четыреугольника m-го, вступила въ смежный съ нимъ четыреугольникъ $m+1$-ый и пришла въ совпаденіе съ точкой u_{m+1} этого послѣдняго четыреугольника, при чемъ подъ u_{m+1} мы подразумѣваемъ точку четыреугольника $m+1$-го, эквивалентную u_1 относительно подстановокъ группы. Въ то же время точка u_1 будетъ, необходимо, также перемѣщаться, выйдетъ изъ четыреугольника 1-го и вступитъ въ одинъ изъ смежныхъ съ нимъ четыреугольниковъ. Для опредѣленности положимъ, что она вступила въ четыреугольникъ 2-ой.

Въ тотъ моментъ, когда точка u_m пришла въ u_{m+1}, точка u_1 достигнетъ u_2.

Ясно, что точки u_{m+1} и u_2 связаны между собою подстановкою Σ:

$$u_{m+1} = \Sigma(u_2). \tag{7}$$

Подставивъ въ это равенство вмѣсто u_2 ея выраженіе:

$$u_2 = S(u_1), \tag{1}$$

находимъ:

$$u_{m+1} = \Sigma S(u_1). \tag{8}$$

Это значитъ, что четыреугольникъ $m+1$-ый, смежный съ четыреугольникомъ m-мъ, получается изъ четыреугольника 1-го подстановкой:

$$\Sigma S. \tag{9}$$

На основаніи тѣхъ же разсужденій мы въ правѣ сказать, что остальные три четыреугольника, смежные съ m-мъ, получаются изъ четыреугольника 1-го подстановками:

$$\Sigma\mathfrak{T},\ \Sigma S^{-1},\ \Sigma\mathfrak{T}^{-1}. \tag{10}$$

Итакъ, если четыреугольникъ m-ый получается изъ начальнаго четыреугольника 1-го подстановкой Σ, то четыреугольники, смежные съ m-мъ, получаются изъ 1-го подстановками:

$$\Sigma S,\ \Sigma S^{-1},\ \Sigma\mathfrak{T},\ \Sigma\mathfrak{T}^{-1}. \tag{11}$$

Пользуясь этимъ результатомъ, мы можемъ найти подстановку, преобразующую четыреугольникъ 1-ый въ любой четыреугольникъ сѣти. Въ самомъ дѣлѣ, въ теоремѣ 2 мы видѣли, что четыреугольники, смежные съ 1-мъ, получаются изъ него подстановками:

$$S,\ \mathfrak{T},\ S^{-1},\ \mathfrak{T}^{-1}. \tag{5}$$

Отсюда слѣдуетъ, что четыреугольники, смежные съ только что перечисленными, получаются изъ четыреугольника 1-го подстановками:

$$\left.\begin{array}{l} S^2,\ S\mathfrak{T},\ S\mathfrak{T}^{-1}, \\ \mathfrak{T}S,\ \mathfrak{T}^2,\ \mathfrak{T}S^{-1}, \\ S^{-1}\mathfrak{T},\ S^{-2},\ S^{-1}\mathfrak{T}^{-1}, \\ \mathfrak{T}^{-1}S,\ \mathfrak{T}^{-1}S^{-1},\ \mathfrak{T}^{-2}. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Имѣя подстановки (5) и (12), мы найдемъ подстановки, соотвѣтствующія слѣдующимъ четыреугольникамъ, смежнымъ съ разсмотрѣнными, и т. д. Такъ, мы найдемъ подстановки, соотвѣтствующія всѣмъ четыреугольникамъ сѣти. Всѣ эти подстановки будутъ представляться формулами вида:

$$S^{\alpha}\ \mathfrak{T}^{\beta}\ S^{\gamma}\ \mathfrak{T}^{\delta} \ldots\ S^{\varkappa}\ \mathfrak{T}^{\lambda}, \tag{13}$$

гдѣ α, β, γ, δ,..., $\varkappa$, λ суть числа цѣлыя положительныя или отрицательныя. Нѣкоторыя изъ нихъ могутъ равняться нулю.

Итакъ, мы доказали, что всякая подстановка группы можетъ быть составлена изъ подстановокъ S и $\mathfrak{T}$. Остается доказать, что эти подстановки S и $\mathfrak{T}$ независимы между собою.

Допустимъ, что подстановки S и $\mathfrak{T}$ не независимы. Въ такомъ случаѣ одна изъ нихъ должна быть степенью другой. Пусть:

$$\mathfrak{T}=S^{\alpha}. \tag{14}$$

Подстановка S, какъ мы видѣли, преобразуетъ сторону da четыреугольника 1 въ сопряженную съ нею сторону dc; при этомъ точка d преобразуется сама въ себя.

Слѣдовательно, точка d есть одна изъ двухъ точекъ, не мѣняемыхъ подстановкою S. Если точка d не мѣняется подстановкою S, то она не можетъ мѣняться и подстановкой:

$$\mathfrak{T}=S^{\alpha}. \tag{14}$$

Между тѣмъ мы знаемъ, что подстановка $\mathfrak{T}$ преобразуетъ четыреугольникъ 1 въ четыреугольникъ 4, не прилегающій ни къ сторонѣ ad, ни къ сторонѣ dc. Слѣдовательно, точка d подстановкою $\mathfrak{T}$ непремѣнно мѣняется.

Такое противорѣчіе произошло отъ сдѣланнаго нами допущенія, что подстановки $\mathfrak{T}$ и S не независимы между собою.

Итакъ, дѣйствительно, подстановки S и $\mathfrak{T}$ суть основныя подстановки группы.

Если бы, какъ мы допустили выше, подстановка $\mathfrak{T}$ была зависима отъ S, то группа была бы *циклическая*:

$$S^0=1,\ S,\ S^2,\ S^3\ldots \tag{15}$$

Основною областью такой группы не служитъ четыреугольникъ. О циклической группѣ конечнаго порядка мы будемъ говорить въ § 19 и увидимъ, что основною областью ея служитъ двуугольникъ, образованный дугами круговъ *).

Посмотримъ теперь, какъ по данной сѣти четыреугольниковъ построить соотвѣтствующую ей группу линейныхъ подстановокъ.

---

*) Подробности о циклическихъ группахъ можно найти у Клейна: Vorlesungen über die Theorie der elliptichen Modulfunction. Стр. 186.

Примемъ одинъ изъ четыреугольниковъ сѣти за основной четыреугольникъ. Діагональною дугою окружности онъ дѣлится на два треугольника, изъ которыхъ одинъ бѣлый, а другой черный. Стороны четыреугольника, симметричныя относительно этой діагонали, суть сопряженныя. Найдемъ линейныя подстановки S и $\mathfrak{T}$ преобразующія двѣ стороны четыреугольника въ двѣ другія стороны, сопряженныя съ ними.

Эти подстановки S и $\mathfrak{T}$ суть *основныя* подстановки группы.

Имѣя основныя подстановки, мы можемъ указаннымъ выше способомъ найти подстановку, соотвѣтствующую каждому четыреугольнику сѣти. При этомъ особенности данной сѣти могутъ значительно облегчить вычисленія.

Такъ, напримѣръ, вычисленія значительно упростятся, если намъ удастся найти эллиптическую подстановку и извѣстенъ уголъ соотвѣтствующаго ей поворота сферы.

Во всѣхъ случаяхъ, съ которыми намъ придется встрѣтиться, всѣ подстановки будутъ эллиптическія и вычисленія совершаются очень легко. Поэтому мы не будемъ останавливаться на этихъ вычисленіяхъ и только на чертежахъ будемъ отмѣчать подстановки, соотвѣтствующія каждому четыреугольнику.

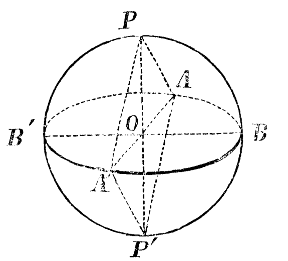
§ 14. **Геометрическія представленія для группъ конечныхъ порядковъ.**

Вообразимъ вписанный въ сферу одинъ изъ многогранниковъ, указанныхъ въ § 12, соотвѣтствующую ему сѣть на сферѣ и ея стереографическую проэкцію на плоскость.

Такъ какъ всѣ подстановки группы, соотвѣтствующей этой сѣти,—конечнаго порядка, то всѣ онѣ эллиптическія. Онѣ соотвѣтствуютъ такимъ поворотамъ сферы около центра, которые приводятъ сѣть на сферѣ и вписанный многогранникъ въ ихъ прежнее положеніе. Ясно, что эти повороты могутъ происходить около осей, проходящихъ или 1) черезъ вершину многогранника, или 2) черезъ центръ его грани, или 3) черезъ средину ребра. Въ первомъ случаѣ поворотъ совершается на уголъ $\frac{2\pi}{\lambda}$, гдѣ λ число граней многогранника, сходящихся около вершины, во второмъ случаѣ поворотъ совершается на уголъ $\frac{2\pi}{3}$, въ третьемъ случаѣ—на уголъ π. Порядокъ подстановки, соотвѣтствующей повороту, равенъ въ первомъ случаѣ λ, во второмъ—числу 3 въ третьемъ—числу 2.

Будемъ называть для краткости проэкціи на поверхность сферы центровъ граней и срединъ реберъ многогранника—центрами граней, срединами реберъ.

Изъ числа группъ двупирамиднаго типа намъ больше всего придется имѣть дѣло съ группой 4-го порядка, такъ называемой *четверичной группой* (Vierergruppe по Клейну). Многогранникъ, соотвѣтствующій четверичной группѣ, есть *четырехгранная двупирамида.* Ясно, что мы называемъ ее многогранникомъ лишь ради аналогіи: она имѣетъ видъ четыреугольника $APA'P'$, вписаннаго въ сферу (черт. 19). Точки P и P' мы разсматриваемъ, какъ вершины четырехгранной двупирамиды, A и A' какъ вершины основанія ея, а точки B и B', лежащія на перпендикулярѣ BB' къ плоскости $A'PAP'$—какъ средины реберъ основанія четырехгранной двупирамиды.



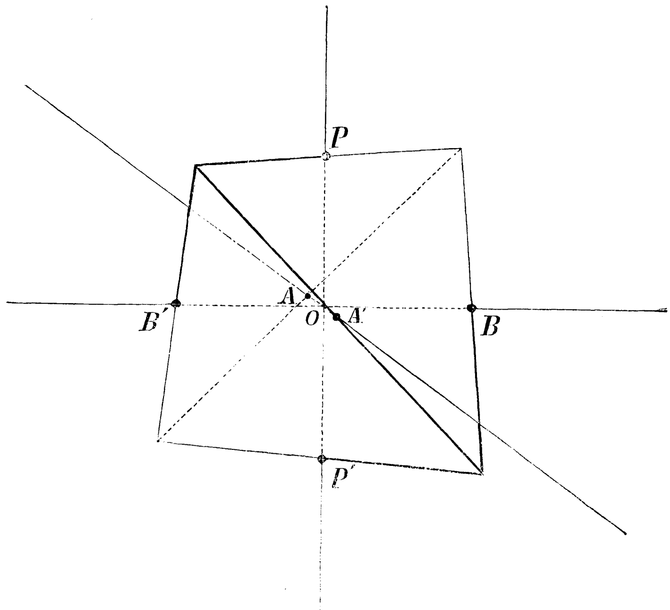
Черт. 19.

Ниже, на черт. 26, изображена четверичная сѣть, соотвѣтствующая четырехгранной двупирамидѣ, изображенной на черт. 19.

Сравнимъ между собою расположенія вершинъ, центровъ граней и срединъ реберъ для четырехъ видовъ многогранниковъ: четырехгранной двупирамиды, тетраэдра, октаэдра и икосаэдра.

Помѣстимъ тетраэдръ въ сферѣ такъ, чтобы средины реберъ его находились на осяхъ координатъ, къ которымъ отнесена сфера. Такое положеніе его изображено на черт. 20.

Ясно, что средины реберъ его: A', P, A, P' могутъ быть приняты за вершины четырехгранной двупирамиды; шесть срединъ граней тетраэдра распадаются на три группы точекъ, изъ которыхъ каждая группа можетъ быть принята за вершины четырехгранной двупирамиды. Это мы выразимъ словами:



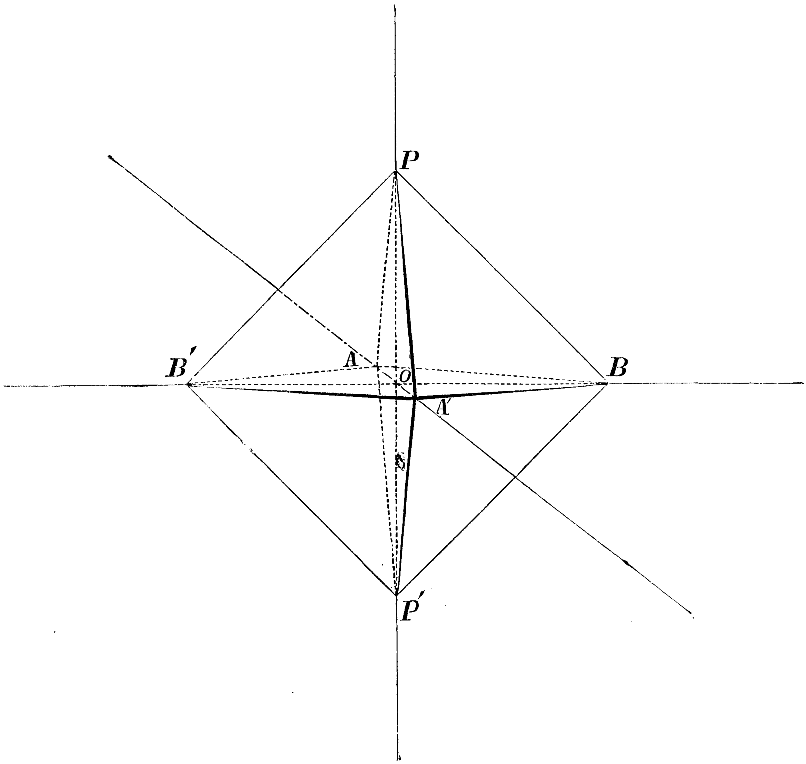
Черт. 20.

тетраэдру соотвѣтствуетъ три четырехгранныхъ двупирамиды. Обратно: *четырехгранной двупирамидѣ соотвѣтствуетъ одинъ опредѣленный тетраэдръ.*

Каждый поворотъ, соотвѣтствующій подстановкѣ четверичной группы, приводитъ какъ четырехгранную двупирамиду, такъ и тетраэдръ въ прежнее ихъ положеніе, но не обратно: нѣкоторые повороты тетраэдрической группы будутъ смѣнять между собою три четырехгранныя двупирамиды, соотвѣтствующія тетраэдру.

Отсюда заключаемъ, что *въ тетраэдрической группѣ заключаются три четверичныя группы.*

Помѣстимъ октаэдръ въ сферѣ такъ, чтобы вершины его лежали на осяхъ координатъ. Такое положеніе его изображено на черт. 21.



Черт. 21.

Мы видимъ, что вершины его совпадаютъ съ срединами реберъ тетраэдра, изображеннаго на черт. 20.

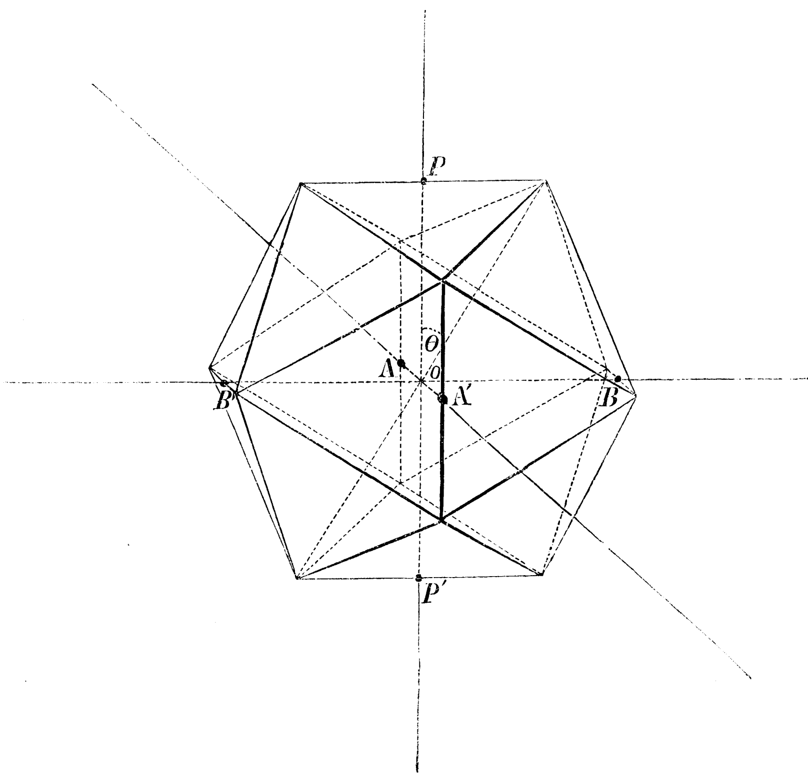
Изъ числа восьми центровъ граней октаэдра четыре совпадаютъ съ вершинами, а остальныя четыре съ центрами граней тетраэдра.

Октаэдру соотвѣтствуютъ два взаимно дополнительныхъ тетраэдра, изъ которыхъ одинъ переходитъ въ другой при поворотѣ на уголъ $\frac{\pi}{2}$ *около каждой изъ трехъ осей, соединяющихъ противоположныя вершины октаэдра.* Обратно, *тетраэдру соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленный октаэдръ.*

Отсюда слѣдуетъ, что повороты, соотвѣтствующіе подстановкамъ тетраэдрической группы, не мѣняютъ положенія октаэдра, но не обратно: нѣкоторые повороты октаэдрической группы смѣняютъ между собою два тетраэдра, соотвѣтствующихъ октаэдру.

Отсюда заключаемъ, что *въ октаэдрическую группу входятъ двѣ тетраэдрическія.*

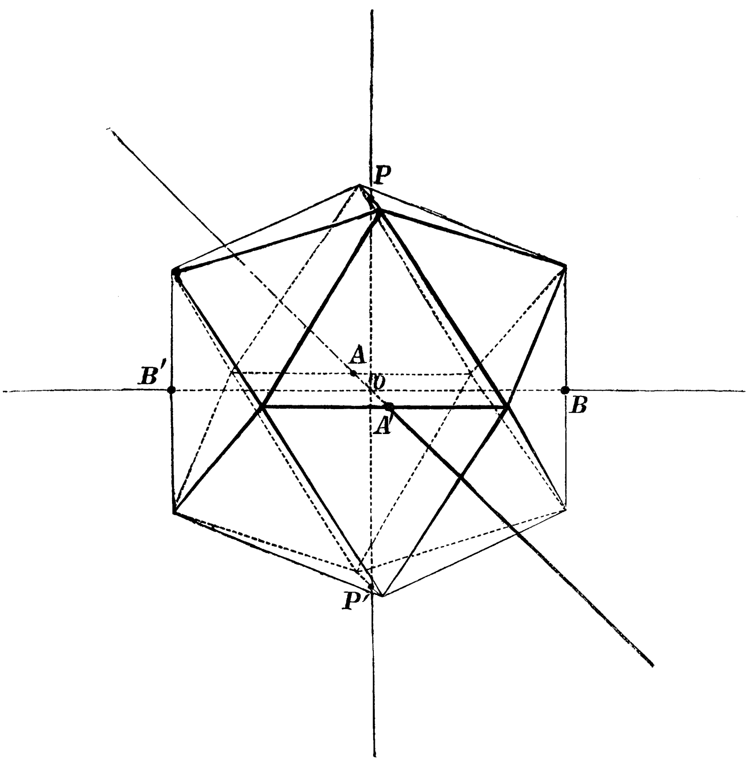
Помѣстимъ, наконецъ, икосаэдръ въ сферѣ такъ, чтобы шесть срединъ реберъ его лежали на осяхъ координатъ. Такое положеніе его изображено на черт. 22.



Черт. 22.

Средины реберъ икосаэдра, лежащія на осяхъ координатъ, могутъ быть приняты за вершины октаэдра. Всѣ 30 срединъ реберъ икосаэдра распадаются на 5 группъ по 6 точекъ въ каждой, при чемъ 6 точекъ каждой такой группы могутъ служить вершинами октаэдра.

Слѣдовательно, *икосаэдру соотвѣтствуетъ 5 октаэдровъ*. Однако необходимо замѣтить, что *каждому октаэдру соотвѣтствуетъ 2 икосаэдра*: повернувъ октаэдръ на уголъ $\frac{\pi}{2}$ около какой либо оси, соединяющей двѣ его противоположныя вершины, мы измѣнимъ положеніе соотвѣтствующаго ему икосаэдра: переведемъ его изъ положенія, изображеннаго на черт. 22 въ положеніе, изображенное на черт. 23.



Черт. 23.

Слѣдовательно *октаэдрическая группа не входитъ въ составъ икосаэдрической*.

Возьмемъ снова икосаэдръ, изображенный на чертежѣ 22. Средины реберъ его, лежащія на осяхъ координатъ, могутъ быть приняты за средины реберъ тетраэдра. Такъ какъ каждому октаэдру соотвѣтствуетъ два взаимно дополнительныхъ тетраэдра, то *икосаэдру соотвѣтствуетъ 5 паръ взаимно дополнительныхъ тетраэдровъ.* Каждый поворотъ, не мѣняющій положеніе одного изъ этихъ тетраэдровъ, не измѣнитъ ни положенія дополнительнаго ему тетраэдра, ни положенія икосаэдра. *Каждому тетраэдру соотвѣтствуетъ одинъ опредѣленный икосаэдръ.*

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что *въ икосаэдрическую группу входитъ 5 группъ тетраэдрическихъ.*

Помѣстимъ икосаэдръ въ сферѣ такъ, чтобы одна изъ осей, соединяющихъ двѣ противоположныя вершины его, совпала съ осью сферы, а одна изъ плоскостей симметріи, проходящихъ черезъ эту ось, прошла черезъ дѣйствительную ось плоскости перемѣннаго u. Такое положеніе икосаэдра изображено на черт. 24.

Въ послѣдующихъ вычисленіяхъ намъ понадобится выраженіе линейной подстановки, соотвѣтствующей тому повороту сферы, который приводитъ икосаэдръ изъ положенія, изображеннаго на черт. 22, въ положеніе, изображенное на черт. 24.

Полюсами оси вращенія въ данномъ случаѣ служатъ точки $+i$ и $-i$. Вращеніе происходитъ около оси AA' (черт. 22) въ положительномъ направленіи относительно наблюдателя, смотрящаго отъ A къ A'. Уголъ поворота θ отмѣченъ на чертежѣ 22 и опредѣляется формулою:

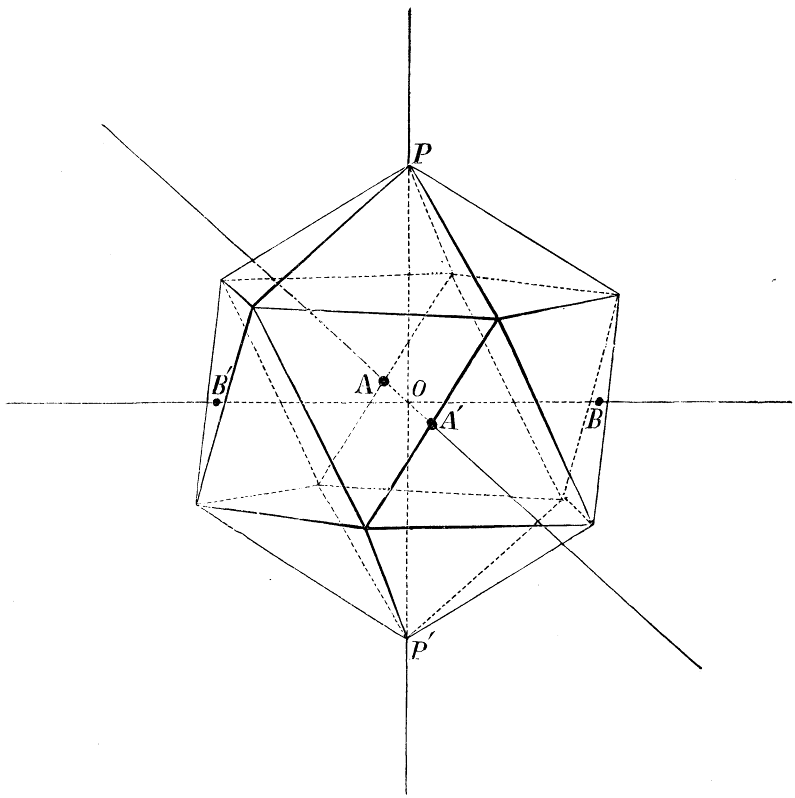
$$\theta = \frac{1}{2\cos 36^0}. \tag{16}$$

Примѣняя формулы (39) и (41) главы III, находимъ, что искомая подстановка σ выражается такъ:

$$\sigma(u) = -\frac{u + tg\frac{\theta}{2}}{u\, tg\frac{\theta}{2} - 1}. \tag{17}$$

Обратная ей подстановка такова:

$$\sigma^{-1}(u) = \frac{u - tg\frac{\theta}{2}}{u\,tg\frac{\theta}{2} + 1}. \tag{18}$$



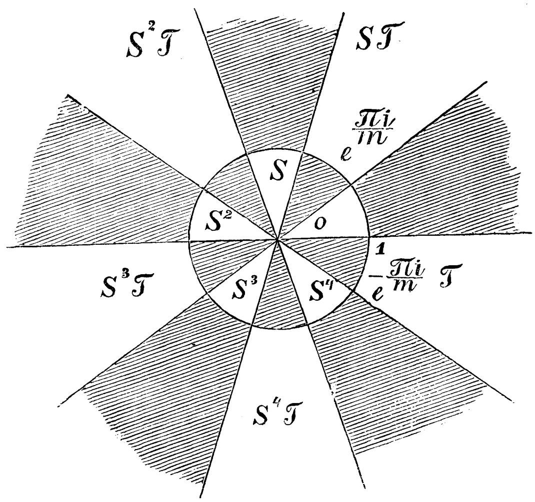
Черт. 24.

§ 15. Группа двупирамидная.

Углы треугольника двупирамидной группы суть: $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, гдѣ m произвольное цѣлое число *).

*) См. глава III, таблица (73).

Помѣстимъ двупирамиду въ сферѣ такъ, чтобы ось ея совпала съ осью сферы и чтобы двѣ вершины основанія ея лежали симметрично относительно положительнаго направленія дѣйствительной оси. Тогда сѣть представляется въ такомъ видѣ, какъ изображено на черт. 25 (чертежъ этотъ соотвѣтствуетъ случаю $m=5$).



Черт. 25.

Условимся называть сѣть 25 *нормальною двупирамидною сѣтью*, соотвѣтствующую ей группу — *нормальною двупирамидною группой*.

Примемъ четыреугольникъ $0e^{-\frac{\pi i}{m}}1e^{\frac{\pi i}{m}}$ за основной четыреугольникъ сѣти.

Сопряженныя стороны его суть: $0e^{-\frac{\pi i}{m}}$ и $0e^{\frac{\pi i}{m}}$, $1e^{-\frac{\pi i}{m}}$ и $1e^{\frac{\pi i}{m}}$.

Возьмемъ какую нибудь точку u на сторонѣ $0e^{-\frac{\pi i}{m}}$ и соотвѣтствующую ей точку u' на сторонѣ $0e^{\frac{\pi i}{m}}$. Ясно, что

$$u=\rho e^{-\frac{\pi i}{m}},\quad u'=\rho e^{\frac{\pi i}{m}},\ \text{гдѣ}\ 0<\rho<1.$$

Отсюда:

$$u'=\varepsilon u,\ \text{гдѣ}\ \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{m}}. \tag{19}$$

Подстановка S, преобразующая сторону $0e^{-\frac{\pi i}{m}}$ въ сопряженную съ нею сторону $0e^{\frac{\pi i}{m}}$, выражается такъ:

$$S(u)=\varepsilon u, \text{ гдѣ } \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{m}}. \tag{20}$$

Возьмемъ точку u на сторонѣ $1e^{-\frac{\pi i}{m}}$ и соотвѣтствующую ей точку u' на сторонѣ $1e^{\frac{\pi i}{m}}$. Ясно, что

$$u=e^{-\psi i},\ u'=e^{\psi i}, \text{ гдѣ } 0<\psi<\frac{\pi i}{m}.$$

Отсюда:

$$u'=\frac{1}{u}. \tag{21}$$

Подстановка $\mathfrak{T}$, преобразующая сторону $1e^{-\frac{\pi i}{m}}$ въ сопряженную съ нею сторону $1e^{\frac{\pi i}{m}}$, выражается такъ:

$$\mathfrak{T}(u)=\frac{1}{u}. \tag{22}$$

Для отличія символовъ подстановокъ двупирамидной группы отъ символовъ иныхъ подстановокъ, мы присоединимъ къ этимъ символамъ индексъ «$д$» (*двупирамида*).

Итакъ, основныя подстановки двупирамидной группы таковы:

$$\left.\begin{aligned} S_д(u)&=\varepsilon u, \text{ гдѣ } \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{m}},\\ \mathfrak{T}_д(u)&=\frac{1}{u}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Первая изъ нихъ m-го порядка, а вторая—2-го порядка.

Первая изъ нихъ соотвѣтствуетъ повороту сферы на уголъ $\frac{2\pi}{m}$ около оси, соединяющей полюсы сферы, а вторая—повороту сферы на уголъ π около дѣйствительной оси.

Вся совокупность $2m$ подстановокъ нормальной двупирамидной группы исчерпывается слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} S_\partial^k(u) &= \varepsilon^k u, \\ S_\partial^k \mathcal{T}_\partial &= \frac{\varepsilon^k}{u}, \end{aligned}\right\} \text{ гдѣ: } \begin{aligned} &k=0, 1, 2, \ldots m-1, \\ &\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Соотвѣтствіе между этими подстановками и четыреугольниками сѣти указано на черт. 25.

Положивъ въ предыдущихъ формулахъ $m=2$, найдемъ подстановки *четверичной группы.*

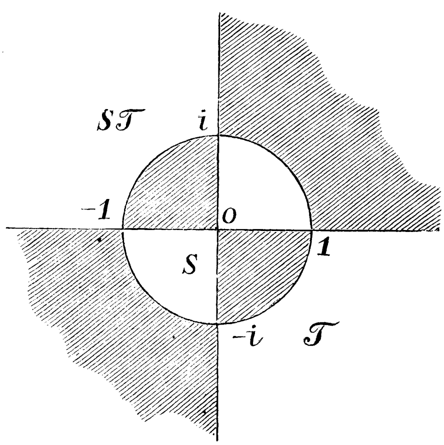
Основныя подстановки ея суть:

$$S_ч(u) = -u, \quad \mathcal{T}_ч(u) = \frac{1}{u}. \tag{25}$$

Онѣ обѣ 2-го порядка.

Вся совокупность четырехъ подстановокъ нормальной четверичной группы такова:

$$1.u=u, \quad S_ч(u) = -u, \quad \mathcal{T}_ч(u) = \frac{1}{u}, \quad S_ч\mathcal{T}_ч(u) = -\frac{1}{u}. \tag{26}$$



Черт. 26.

Нормальная четверичная сѣть изображена на черт. 26.

§ 16. Группа тетраэдрическая.

Треугольникъ тетраэдрической сѣти имѣетъ углы, равные:

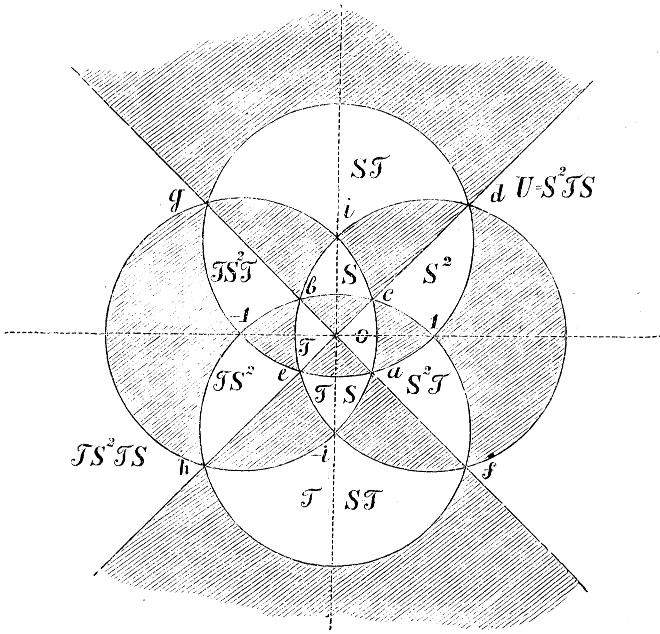
$$\frac{\pi}{3}, \ \frac{\pi}{3}, \ \frac{\pi}{2} \ {}^{*)}.$$

I. Дадимъ тетраэдру положеніе, изображенное на черт. 20: шесть techрединъ реберъ его лежатъ на осяхъ координатъ.

*) См. глава III, таблица (73).

Тетраэдрическую сѣть, соотвѣтствующую такому положенію тетраэдра назовемъ *первою нормальною тетраэдрическою сѣтью.*

Въ основномъ четыреугольникѣ $0acb$ сопряженныя стороны суть: $0a$ и $0b$, ca и cb.



Черт. 27.

Возьмемъ пару соотвѣтственныхъ точекъ u и u' на сторонахъ $0a$ и $0b$. Ясно, что:

$$u = \rho e^{-\frac{\pi i}{4}}, \quad u' = -\rho e^{-\frac{\pi i}{4}}, \tag{27}$$

гдѣ ρ меньше длины $\overline{0a}$ *):

$$\rho < \overline{0a}.$$

*) Мы обозначаемъ разстояніе между точками 0 и a черезъ $\overline{0a}$.

Изъ формулъ (27) слѣдуетъ, что:

$$u' = -u. \tag{28}$$

Подстановка $\mathfrak{T}$, преобразующая сторону $0a$ въ $0b$, такова:

$$\mathfrak{T}(u) = -u. \tag{29}$$

Возьмемъ пару соотвѣтственныхъ точекъ u и u' на сторонахъ ca и cb.

Не трудно видѣть, что:

$$u = -1 + \sqrt{2}e^{\psi i},\quad u' = -i + \sqrt{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)i}, \tag{30}$$

гдѣ ψ перемѣнная величина.

Изъ формулъ (30) слѣдуетъ:

$$(u+1)(u'+i) = 2i,$$

откуда:

$$u' = i\,\frac{1-u}{1+u}. \tag{31}$$

Подстановка S, преобразующая сторону ca въ сопряженную съ нею cb, такова:

$$S(u) = i\,\frac{1-u}{1+u}. \tag{32}$$

Подстановки S и $\mathfrak{T}$ суть основныя подстановки первой нормальной тетраэдрической группы.

Укажемъ на одну простую неосновную подстановку этой группы: вычислимъ коэффиціенты подстановки, преобразующей треугольникъ $0ac$ въ треугольникъ ∞df.

Соотвѣтственныя вершины этихъ треугольниковъ суть: 0 и ∞, a и d, c и f.

Подстановка, преобразующая точки $0, a, c$ соотвѣтственно въ ∞, d, f, и есть искомая подстановка—этими условіями она опредѣлена вполнѣ.

Весьма простыми вычисленіями находимъ, что:

$$a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi i}{4}},\quad c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi i}{4}},$$
$$d=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi i}{4}},\quad f=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}. \tag{33}$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$ad=1,\ cf=1,$$

или:

$$d=\frac{1}{a},\quad f=\frac{1}{c}. \tag{34}$$

Такъ какъ, кромѣ того, мы въ правѣ написать:

$$\infty=\frac{1}{0},$$

то мы приходимъ къ заключенію, что подстановка U, преобразующая треугольникъ $0ac$ въ ∞df, такова:

$$U(u)=\frac{1}{u}. \tag{35}$$

Для отличія символовъ подстановокъ тетраэдрической группы отъ символовъ иныхъ подстановокъ, мы будемъ отмѣчать ихъ индексомъ «*m*» (*тетраэдръ*).

Итакъ, мы нашли *двѣ основныя подстановки первой нормальной тетраэдрической группы*:

$$\left.\begin{aligned} S_m(u)&=i\frac{1-u}{1+u},\\ \mathcal{T}_m(u)&=-u, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

и одну весьма простую *неосновную подстановку*:

$$U_m(u)=\frac{1}{u}. \tag{37}$$

Подстановка S_m — *третьяго порядка,* $\mathfrak{T}_m$ *и* U_m — *втораго порядка.*

Всѣ 12 подстановокъ 1-ой нормальной тетраэдрической группы исчерпываются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
&1.u=u,\ S_m(u)=i\,\frac{1-u}{1+u},\ S_m{}^2(u)=\frac{i-u}{i+u},\\
&\mathfrak{T}_m(u)=-u,\ \mathfrak{T}_mS_m(u)=-i\,\frac{1-u}{1+u},\\
&\mathfrak{T}_mS_m{}^2(u)=-\frac{i-u}{i+u},\\
&U_m(u)=\frac{1}{u},\ U_mS_m(u)=-i\,\frac{1+u}{1-u}\\
&U_mS_m{}^2(u)=\frac{i+u}{i-u},\\
&\mathfrak{T}_mU_m(u)=-\frac{1}{u},\ \mathfrak{T}_mU_mS_m(u)=i\,\frac{1+u}{1-u},\\
&\mathfrak{T}_m\,U_m\,S_m{}^2(u)=-\frac{i+u}{i-u}.
\end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

Соотвѣтствіе между подстановками группы и четыреугольниками сѣти указано на черт. 27.

Изъ этого чертежа, между прочимъ, видно, что

$$U_m=S_m{}^2\,\mathfrak{T}_m\,S_m,\qquad(39)$$

въ чемъ также очень легко убѣдиться повѣркой при помощи формулъ (38).

Изъ чертежа 27 видно, что подстановка $\mathfrak{T}_m\,S_m$ есть эллиптическая подстановка, соотвѣтствующая повороту сферы на уголъ $\frac{2\pi}{3}$ около оси, одинъ изъ полюсовъ которой проэктируется въ точку a.

Слѣдовательно это подстановка 3-го порядка:

$$\mathfrak{T}_m S_m \mathfrak{T}_m S_m \mathfrak{T}_m S_m = 1. \tag{40}$$

Символическихъ соотношеній, подобныхъ (40), можно вывести довольно много, пользуясь чертежемъ 27, но они намъ въ дальнѣйшемъ не будутъ нужны.

Обратимъ вниманіе на то, что *всѣ подстановки четверичной группы (26) входятъ въ составъ тетраэдрической группы (38)*:

$$S_ч = \mathfrak{T}_m, \ \mathfrak{T}_ч = U_m. \tag{41}$$

Чтобы изъ четверичной группы получить тетраэдрическую, мы должны къ подстановкамъ четверичной группы присоединить ихъ комбинаціи съ тетраэдрическими подстановками:

$$S_m, \ S_m^2.$$

Преобразуя *) четверичную группу посредствомъ подстановокъ S_m и S_m^2, мы снова получаемъ ту же четверичную группу. Слѣдовательно *четверичная группа есть особая часть тетраэдрической.*

Отношеніе порядковъ этихъ группъ (показатель сложности) равно 3.

Отсюда слѣдуетъ, что функція, инваріантная относительно подстановокъ четверичной группы, выражается раціонально черезъ функцію, инваріантную относительно подстановокъ тетраэдрической группы; а эта послѣдняя функція выражается черезъ первую при посредствѣ одного кубичнаго радикала. Эти формулы мы построимъ въ главѣ VII и онѣ дадутъ намъ возможность рѣшить въ радикалахъ тетраэдрическое уравненіе.

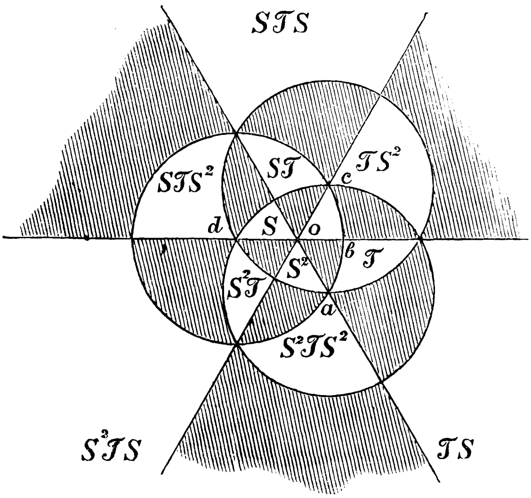
II. Построимъ теперь сѣть, соотвѣтствующую другому положенію тетраэдра въ сферѣ: помѣстимъ тетраэдръ въ сферѣ

*) Если S_0, $S_1, \ldots S_{N-1}$ суть подстановки группы и σ есть какая-нибудь подстановка, то мы назовемъ группу:

$$\sigma S_0 \sigma^{-1}, \ \sigma S \sigma^{-1} \ldots \ \sigma S_{N-1} \sigma^{-1}$$

преобразованною изъ первой посредствомъ подстановки σ. Опредѣленія и свойства понятій: *особая часть* группы, *уравненіе, имѣющее своею группою особую часть группы даннаго уравненія*, и пр. излагаются въ курсахъ высшей алгебры. См., напр., Serret. Cours d'algèbre supérieure; или: Селивановъ. Теорія алгебраическаго рѣшенія уравненій.

такъ, чтобы одна вершина его лежала въ сѣверномъ полюсѣ сферы и чтобы одно изъ реберъ его пересѣкало положительное направленіе дѣйствительной оси. Сѣть, соотвѣтствующая такому положенію тетраэдра, изображена на черт. 28.



Черт. 28.

Такую сѣть мы условимся называть *второю нормальною тетраэдрическою сѣтью*, а соотвѣтствующую ей группу — *второю нормальною тетраэдрическою группою*.

Примемъ $0abc$ за основной четыреугольникъ сѣти 28. Сопряженныя стороны его суть: $0a$ и $0c$, ba и bc.

Пользуясь тѣми же пріемами, которые мы прилагали выше, мы находимъ, что подстановка S_m', преобразующая сторону $0a$ въ $0c$, выражается такъ:

$$S_m'(u) = \varepsilon u, \quad \text{гдѣ} \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}; \tag{42}$$

подстановка же $\mathcal{T}_m'(u)$, преобразующая сторону ba въ bc, такова:

$$\mathcal{T}_m'(u) = \frac{\sqrt{2} - u}{\sqrt{2}u + 1}\,. \;^{*)} \tag{43}$$

III. Возьмемъ тетраэдръ въ положеніи, соотвѣтствующемъ первой нормальной группѣ и построимъ соотвѣтствующій

---

*) При вычисленіи этой подстановки необходимо знать величину отрѣзка $\overline{0d}$. Совершенно элементарнымъ путемъ мы находимъ, что

$$\overline{0d} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

ему икосаэдръ: онъ изображенъ на черт. 22. Повернемъ икосаэдръ вмѣстѣ съ тетраэдромъ около мнимой оси плоскости на уголъ θ, отмѣченный на чертежѣ 22. Икосаэдръ приметъ положеніе, изображенное на черт. 24, а тетраэдръ — нѣкоторое новое положеніе, нами еще не разсмотрѣнное.

Сѣть, соотвѣтствующая такому положенію тетраэдра, условимся называть *третьею нормальною тетраэдрическою сѣтью.*

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что первая нормальная тетраэдрическая сѣть преобразуется въ 3-ю посредствомъ подстановки σ, выражаемой формулами (17) и (16).

Третья нормальная тетраэдрическая группа будетъ имѣть для насъ лишь вспомогательное значеніе при сравненіи формъ икосаэдрическаго типа съ формами типа тетраэдрическаго.

Поэтому мы не будемъ теперь вычислять основныхъ подстановокъ этой группы и только обозначимъ ихъ буквами:

$$S_m'' \text{ и } \mathfrak{T}_m''.$$

§ 17. Группа октаэдрическая.

Углы треугольника октаэдрической сѣти суть: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

I. Возьмемъ октаэдръ въ положеніи, изображенномъ на черт. 21: его вершины лежатъ на осяхъ координатъ, къ которымъ отнесена сфера.

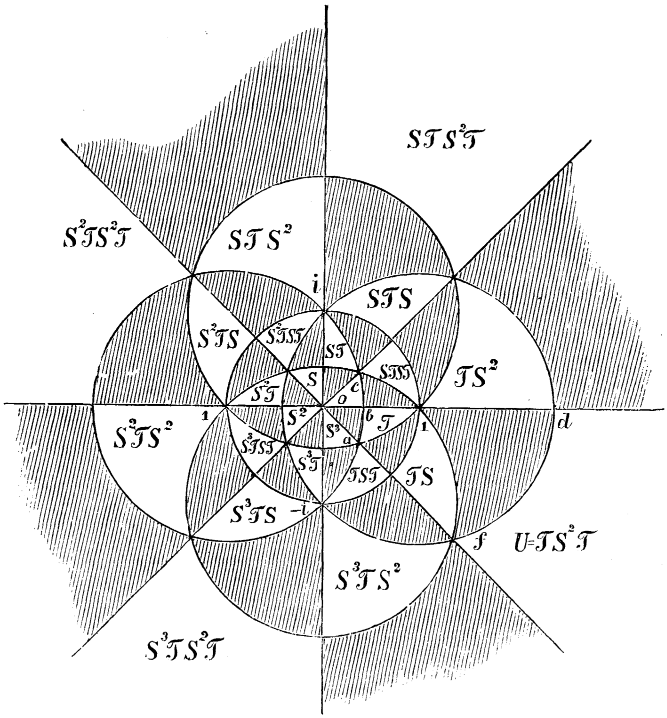
Сѣть, соотвѣтствующую такому положенію октаэдра, мы назовемъ *первою нормальною октаэдрическою сѣтью.* Она изображена на черт. 29.

Примемъ за основной четыреугольникъ ея $0abc$. Сопряженныя стороны его суть: $0a$ и $0c$, ba и bc. Основныя подстановки S_0 и $\mathfrak{T}_0$, преобразующія $0a$ въ $0c$ и ba въ bc, выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} S_0(u) &= iu, \\ \mathfrak{T}_0(u) &= \frac{1-u}{1+u}. \end{aligned}\right\} \text{*)} \qquad (44)$$

*) Подстановки эти вычисляются тѣми же пріемами, какъ и въ разсмотрѣнныхъ выше случаяхъ. Вычисленія никакихъ затрудненій не представляютъ.

Формулы (44) даютъ выраженія основныхъ подстановокъ первой нормальной октаэдрической группы.



Черт. 29.

Первая изъ нихъ 4-го, а вторая—2-го порядка.

Укажемъ на одну весьма простую неосновную подстановку, преобразующую треугольникъ Obc въ ∞df. Примѣняя совершенно такія же разсужденія, какъ и въ § 16, находимъ, что искомая подстановка выражается такъ:

$$U_0(u) = \frac{1}{u}\,. \tag{45}$$

Вся совокупность 24 подстановокъ первой нормальной октаэдрической группы исчерпывается формулами:

$$\left.\begin{aligned}&S_0{}^k(u)=i^k u,\\&S_0{}^k\,\mathfrak{T}_0\,S_0{}^h(u)=i^k\frac{1-i^h u}{1+i^h u},\\&S_0{}^k\,U_0(u)=\frac{i^k}{u},\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

где:

$$k,\ h=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Соотвѣтствіе между подстановками группы и четыреугольниками сѣти указано на самомъ черт. 29. Изъ черт. 29 видно, что подстановка U_0 выражается черезъ основныя подстановки S_0 и $\mathfrak{T}_0$ формулою:

$$U_0=\mathfrak{T}_0\,S_0{}^2\,\mathfrak{T}_0,\tag{47}$$

въ чемъ легко убѣдиться и непосредственною повѣркою. Изъ черт. 29, между прочимъ, видно, что подстановка $S_0\mathfrak{T}_0$ соотвѣтствуетъ повороту сферы на уголъ $\frac{2\pi}{3}$ около оси, одинъ изъ полюсовъ которой проэктируется въ точку c. Слѣдовательно $S_0\mathfrak{T}_0$ есть эллиптическая подстановка 3-го порядка:

$$S_0\,\mathfrak{T}_0\,S_0\,\mathfrak{T}_0\,S_0\,\mathfrak{T}_0=1.\tag{48}$$

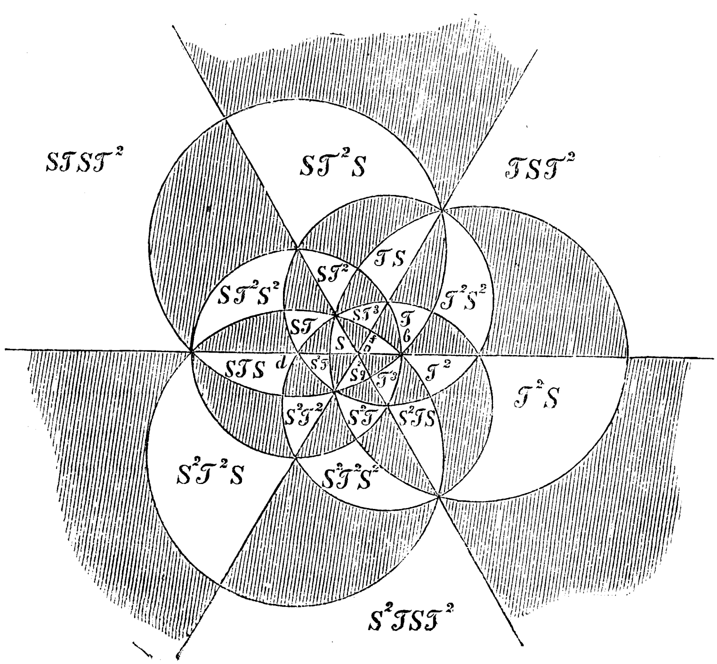
Сравнивая октаэдрическую группу (46) съ тетраэдрической группой (38), мы замѣчаемъ, что основныя подстановки тетраэдрической группы входятъ въ октаэдрическую:

$$S_m=S_0\mathfrak{T}_0,\quad \mathfrak{T}_m=S_0{}^2.\tag{49}$$

Чтобы изъ тетраэдрической группы получить октаэдрическую, мы должны присоединить къ подстановкамъ тетраэдрической группы комбинаціи этихъ подстановокъ съ октаэдрической подстановкой S_0. Преобразуя тетраэдрическую группу подстановкою S_0, мы опять получаемъ ту же тетраэдрическую группу. Слѣдовательно *тетраэдрическая группа есть особая часть октаэдрической.* Отношеніе порядковъ этихъ группъ (показатель сложности) равно 2.

Отсюда слѣдуетъ, что всякая функція, инваріантная по отношенію къ подстановкамъ октаэдрической группы, выражается раціонально черезъ функцію, инваріантную по отношенію къ подстановкамъ группы тетраэдрической; обратно же—вторая функція выражается черезъ первую при помощи одного квадратнаго радикала. Эти формулы мы построимъ въ главѣ VII. Благодаря имъ, умѣя рѣшить въ радикалахъ тетраэдрическое уравненіе, мы будемъ въ состояніи рѣшить въ радикалахъ также и уравненіе октаэдрическое.

II. Возьмемъ тетраэдръ въ положеніи, соотвѣтствующемъ 2-ой нормальной тетраэдрической сѣти и соотвѣтствующій ему октаэдръ.



Черт. 30.

Два противоположныхъ центра граней его помѣстятся въ полюсахъ сферы. Сѣть, соотвѣтствующая такому положенію октаэдра, изображена на черт. 30.

Сѣть, опредѣляемую этими условіями, мы назовемъ *второю нормальною октаэдрическою сѣтью.*

Примемъ за основной четыреугольникъ $0gbf$.

Сопряженныя стороны его суть: $0g$ и $0f$, bg и bf. Подстановки S_0' и $\mathfrak{T}_0'$ *), преобразующія $0g$ въ $0f$ и bg въ bf, выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} S_0'(u) &= \varepsilon u, \\ \mathfrak{T}_0'(u) &= \frac{1+\sqrt{2}\,\varepsilon^2 u}{u-\sqrt{2}\,\varepsilon}, \;{}^{**)} \end{aligned}\right\} \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}. \tag{50}$$

Ясно, что сѣть 30 можетъ быть получена изъ сѣти 29 тѣмъ же линейнымъ преобразованіемъ, которое сѣть 27 преобразуетъ въ сѣть 28.

III. Возьмемъ тетраэдръ въ положеніи, соотвѣтствующемъ третьей нормальной тетраэдрической сѣти и построимъ соотвѣтствующій ему октаэдръ. Сѣть, соотвѣтствующую такому положенію октаэдра, назовемъ *третьею нормальною октаэдрическою сѣтью.* Она получается изъ 1-ой нормальной октаэдрической сѣти преобразованіемъ посредствомъ подстановки σ, гдѣ σ есть линейная подстановка (17), найденная въ § 14.

Основныя подстановки третьей нормальной октаэдрической группы мы будемъ обозначать такъ:

$$S_0'' \text{ и } \mathfrak{T}_0''.$$

Долѣе на этой группѣ мы не останавливаемся потому, что она будетъ имѣть для насъ лишь вспомогательное значеніе.

---

*) При вычисленіи подстановки $\mathfrak{T}_0'$ необходимо замѣтить, что точка d на чертежѣ 30 занимаетъ то же положеніе, какъ и точка d на чертежѣ 28:

$$\overline{0d} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**) Не лишено интереса замѣчаніе, что тетраэдрическая подстановка $\mathfrak{T}_m'$ есть квадратъ октаэдрической $\mathfrak{T}_0'$:

$$\mathfrak{T}_m' = \mathfrak{T}_0'^{\,2}.$$

§ 18. **Группа икосаэдрическая.**

I. Помѣстимъ икосаэдръ въ сферѣ такъ, какъ изображено на черт. 24. Сѣть, соотвѣтствующую такому положенію икосаэдра, назовемъ *первою нормальною икосаэдрическою сѣтью*.

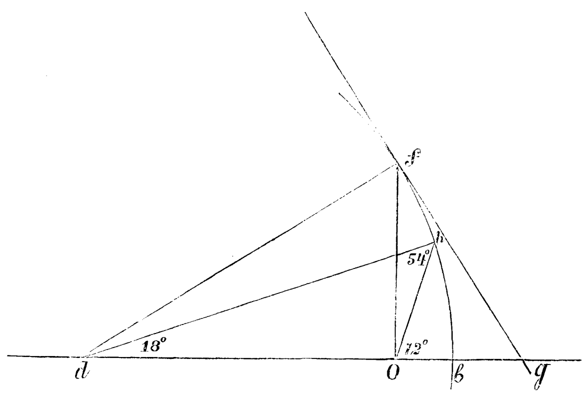
Она изображена на чертежѣ I *).

За основную область икосаэдрической группы мы примемъ четыреугольникъ $0abc$. Сопряженныя стороны его суть: $0a$ и $0c$, ba и bc.

Подстановка S_u, преобразующая сторону $0a$ въ $0c$, какъ легко видѣть, такова:

$$S_u(u) = \varepsilon u, \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}. \tag{51}$$

Подстановка $\mathfrak{T}_u$, преобразующая сторону ba въ bc, получается тѣмъ же способомъ, но вычисленія нѣсколько сложнѣе. Разсмотримъ эти вычисленія подробно.



Черт. 31.

Для ясности нѣкоторыя части чертежа I изображены въ большемъ масштабѣ на черт. 31.

Точка f лежитъ на экваторѣ сферы; поэтому:

$$\overline{0f} = 1.$$

*) Въ концѣ сочиненія.

Изъ черт. I видно, что:

$$\overline{0h} = \overline{0g},\ \overline{df} = \overline{dh}$$

Прямая $0f$ перпендикулярна къ dg.

Изъ треугольника $dh0$ (черт. 31) находимъ:

$$\overline{0h} = \overline{d0}\,\frac{\sin 18^0}{\sin 54^0}\,.$$

Изъ прямоугольнаго треугольника dfg находимъ:

$$\overline{f0}^2 = \overline{d0}\,.\,\overline{0g}.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ:

$$1 = \overline{d0}^2\,\frac{\sin 18^0}{\sin 54^0}\,,\quad \overline{d0} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,,\quad \overline{h0} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,;$$

далѣе:

$$\overline{df} = \sqrt{\overline{d0}.\overline{dg}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,.$$

Взявъ пару соотвѣтственныхъ точекъ u и u' на сопряженныхъ сторонахъ ba и bc, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,e^{-\psi i}, \\ u' &= -\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,e^{\psi i}, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

гдѣ ψ перемѣнная величина.

Отсюда:

$$\left(u+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(u'+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}\,. \tag{53}$$

Такъ какъ:

$$-\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\varepsilon^2+\varepsilon^3, \text{ гдѣ } \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{5}},$$

то изъ уравненія (53) находимъ:

$$u'=\frac{1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)u}{u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)}. \tag{54}$$

Искомая подстановка $\mathfrak{T}_u(u)$ выражается такъ:

$$\mathfrak{T}_u(u)=\frac{1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)u}{u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)}. \tag{55}$$

Основныя подстановки 1-ой нормальной икосаэдрической группы суть:

$$\left.\begin{aligned} &S_u(u)=\varepsilon u,\\ &\mathfrak{T}_u(u)=\frac{1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)u}{u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)},\\ &\text{гдѣ } \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{5}}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Первая изъ нихъ 5-го, а вторая—2-го порядка.

Обратимъ вниманіе на одну очень простую неосновную подстановку U_u, преобразующую треугольникъ $0bc$ въ эквивалентный ему треугольникъ ∞kl. Соотвѣтственныя вершины этихъ треугольниковъ суть: 0 и ∞, b и k, c и l. Разсужденіями, подобными приведеннымъ въ § 16, находимъ, что искомая подстановка U_u выражается такъ:

$$U_u(u)=-\frac{1}{u}. \tag{57}$$

Вся совокупность 60 подстановокъ первой нормальной икосаэдрической группы исчерпывается формулами:

$$\left.\begin{aligned}
&S_u^{\,k}(u) = \varepsilon^k u,\ S_u^{\,k}\,U_u(u) = -\frac{\varepsilon^k}{u},\\
&S_u^{\,k}\mathfrak{T}_u\,S_u^{\,h}(u) = \varepsilon^k\,\frac{1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^h u}{\varepsilon^h u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)},\\
&S_u^{\,k}\,\mathfrak{T}_u\,S_u^{\,h}\,U_u = -\frac{u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^h}{\varepsilon^h+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)u},\\
&\text{гдѣ } k,\ h = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Соотвѣтствія между подстановками группы и четыреугольниками икосаэдрической сѣти указаны на чертежѣ I.

Изъ чертежа I видно, что

$$U = S_u^{\,2}\,\mathfrak{T}_u\,S_u^{\,3}\,\mathfrak{T}_u\,S_u^{\,2}\,\mathfrak{T}_u. \tag{59}$$

Кромѣ того мы замѣчаемъ, что подстановка $S_u\,\mathfrak{T}_u$ соотвѣтствуетъ повороту сферы на уголъ $\frac{2\pi}{3}$ около оси, одинъ изъ полюсовъ которой проэктируется въ точку c. Слѣдовательно подстановка

$$S_u\,\mathfrak{T}_u$$

— третьяго порядка:

$$S_u\,\mathfrak{T}_u\,S_u\,\mathfrak{T}_u\,S_u\,\mathfrak{T}_u = 1. \tag{60}$$

II. Возьмемъ икосаэдръ въ положеніи, указанномъ на черт. 22.

Сѣть, соотвѣтствующую такому положенію икосаэдра мы назовемъ *второю нормальною икосаэдрическою сѣтью.* Она изображена на чертежѣ II *). Ясно, что эта сѣть можетъ быть получена изъ первой преобразованіемъ посредствомъ подстановки σ^{-1}, опредѣляемой формулою (18).

Подстановки второй нормальной икосаэдрической группы мы не вычисляемъ потому, что онѣ намъ нужны не будутъ.

---

*) Въ концѣ сочиненія.

Выше мы видѣли, что положеніе икосаэдра не мѣняется отъ поворотовъ, не мѣняющихъ положенія соотвѣтствующаго ему тетраэдра. Отсюда слѣдуетъ, что въ первую нормальную икосаэдрическую группу входитъ третья нормальная тетраэдрическая группа, а во вторую нормальную икосаэдрическую группу входитъ первая нормальная тетраэдрическая группа.

Тетраэдрическая группа, входящая въ икосаэдрическую, не составляетъ собой части ея. Въ этомъ кроется существенное различіе икосаэдрической группы отъ остальныхъ разсмотрѣнныхъ нами группъ. Въ главѣ VII мы увидимъ, что вслѣдствіе сказанной особенности икосаэдрической группы, икосаэдрическое уравненіе не разрѣшимо въ радикалахъ.

§ 19. **Циклическая группа конечнаго порядка.**

Циклическая группа состоитъ изъ степеней одной и той же подстановки:

$$S^0,\ S^1,\ S^2,\ S^3,\dots \tag{61}$$

Она можетъ быть конечнаго порядка только тогда, когда подстановка S есть эллиптическая подстановка конечнаго порядка. Порядокъ группы (61) равенъ порядку подстановки S.

Возьмемъ сначала эллиптическую подстановку конечнаго порядка m въ нормальной формѣ:

$$S'(u)=e^{\frac{2h\pi i}{m}}u, \tag{62}$$

гдѣ h и m числа взаимно простыя.

Взявъ наименьшій положительный корень α сравненія:

$$h\alpha\equiv 1(\textit{мод.}\,m), \tag{63}$$

мы найдемъ:

$$S'^{\alpha}(u)=e^{\frac{2\pi i}{m}}u. \tag{64}$$

Итакъ, въ разсматриваемую циклическую группу входитъ подстановка:

$$S(u)=e^{\frac{2\pi i}{m}}u, \tag{65}$$

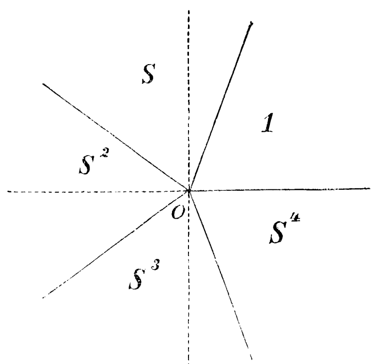
или, короче:

$$S(u) = \varepsilon u, \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}. \qquad (66)$$

Группа можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$S^0 = 1,\ S,\ S^2, \ldots\ S^{m-1}. \qquad (67)$$

Не трудно убѣдиться въ томъ, что основная область этой группы можетъ быть представлена въ видѣ безконечной части плоскости ограниченной двумя прямыми, выходящими изъ начала координатъ и наклоненными другъ къ другу подъ угломъ $\frac{2\pi}{m}$.



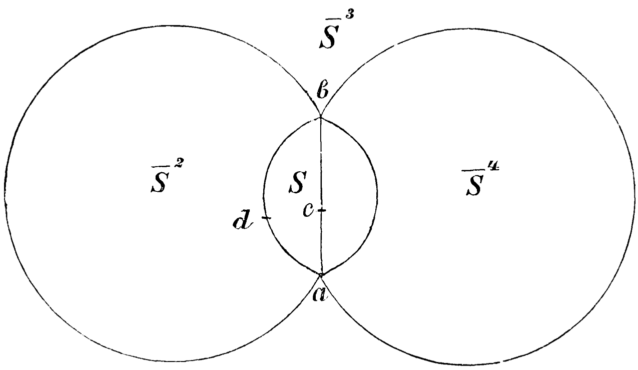
Черт. 32.

Покрывъ всю плоскость сѣтью такихъ областей, какъ указано на черт. 32, мы получимъ сѣть, которая соотвѣтствуетъ нормальной циклической группѣ (67) въ томъ же самомъ смыслѣ, въ какомъ разсмотрѣнныя выше сѣти четыреугольниковъ соотвѣтствовали группамъ: двупирамидной, тетраэдрической, и т. д.

Дѣйствительно, если мы возьмемъ въ какой либо изъ m областей произвольную точку u, то въ каждой изъ остальныхъ областей найдется единственная эквивалентная ей точка относительно подстановокъ циклической группы (67).

Если мы хотимъ построить какую нибудь (не нормальную) циклическую сѣть, то должны преобразовать сѣть 32 какою нибудь линейной подстановкой. При этомъ точки O и ∞ преобразуются въ нѣкоторыя двѣ, вообще говоря, конечныя точки a и b, а лучи, идущіе на черт. 32 изъ точки O въ безконечность, преобразуются въ дуги круговъ, соединяющія точки a и b. Получится сѣть, изображенная на черт. 33. Основная подстановка $\overline{S}$ этой группы есть та подстановка, которая преобразуетъ одну изъ дугъ, напр., *acb* въ ближайшую слѣдующую за нею: въ *adb*. Группа, соотвѣтствующая сѣти 33, представится въ такомъ видѣ:

$$\overline{S}^0 = 1,\ \overline{S},\ \overline{S}^2, \ldots\ \overline{S}^{m-1}. \tag{68}$$



Черт. 33.

Основная область циклической группы имѣетъ видъ двуугольника *acbda*, какъ мы уже замѣчали выше.

Такъ какъ всякая группа содержитъ въ себѣ всѣ степени всякой подстановки, входящей въ эту группу, то циклическая группа входитъ во всякую группу.

§ 20. Конечныя группы бинарныхъ линейныхъ подстановокъ.

Бинарною подстановкою, какъ мы уже говорили въ главѣ I, мы называемъ преобразованіе двухъ перемѣнныхъ y_1, y_2 такого вида:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2, \\ \bar{y}_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

гдѣ α, β, γ, δ какія либо постоянныя числа. Для краткости мы будемъ обозначать бинарную подстановку (69) такимъ символомъ:

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}. \tag{70}$$

Опредѣлителемъ бинарной линейной подстановки (70) называется величина:

$$\alpha\delta - \beta\gamma.$$

Перемноживъ символически двѣ линейныя бинарныя подстановки, мы получаемъ опять линейную бинарную подстановку, опредѣлитель которой равенъ произведенію опредѣлителей перемноженныхъ подстановокъ.

Если нѣкоторая совокупность линейныхъ бинарныхъ подстановокъ образуетъ группу *), то мы назовемъ ее группою бинарныхъ подстановокъ.

Каждой бинарной линейной подстановкѣ (70) соотвѣтствуетъ единственная неоднородная линейная подстановка:

$$\bar{u} = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}, \tag{71}$$

но не обратно: каждой неоднородной подстановкѣ (71) соотвѣтствуетъ безконечное множество бинарныхъ подстановокъ, которыя можно изобразить символомъ:

$$\begin{pmatrix} \rho\alpha, & \rho\beta \\ \rho\gamma, & \rho\delta \end{pmatrix}, \tag{72}$$

гдѣ ρ произвольное постоянное.

Если двѣ группы одинаковаго порядка составлены изъ одинаковаго числа основныхъ подстановокъ такъ, что каждой подстановкѣ одной группы соотвѣтствуетъ единственная подстановка другой и обратно, то мы назовемъ ихъ *изоморфными группами* **).

*) Выше, въ § 1, мы опредѣлили понятіе о группѣ какихъ бы то ни было операцій.

**) Holoedrisch isomorph по терминологіи нѣмецкихъ математиковъ.

Возьмемъ группу Γ бинарныхъ линейныхъ подстановокъ, найдемъ соотвѣтствующія имъ неоднородныя линейныя подстановки. Эти послѣднія, конечно, образуютъ нѣкоторую группу G неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ.

Если порядокъ группы Γ конечный, то и порядокъ группы G будетъ конечный. Эта группа будетъ принадлежать къ одному изъ типовъ: циклическому, двупирамидному, тетраэдрическому, октаэдрическому или икосаэдрическому.

Посмотримъ, могутъ ли быть группы Γ и G изоморфны между собою.

Для простоты мы можемъ предполагать группу G приведенною къ нормальному виду *).

I. Пусть G группа циклическая и пусть она изоморфна соотвѣтствующей ей группѣ Γ.

Группа G составлена изъ одной основной подстановки:

$$S(u) = \varepsilon u, \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}. \tag{66}$$

Соотвѣтствующая ей основная бинарная подстановка группы Γ такова:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \rho\varepsilon, & 0 \\ 0, & \rho \end{pmatrix}, \tag{73}$$

гдѣ ρ—нѣкоторый постоянный множитель.

Такъ какъ

$$S^m = 1, \tag{74}$$

то должно имѣть мѣсто символическое равенство:

---

*) Всякую группу G неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ можно преобразовать въ нормальную группу того же типа.

Въ самомъ дѣлѣ, построимъ сѣть, соотвѣтствующую группѣ G и нормальную сѣть того же типа. Эти сѣти, какъ мы знаемъ, эквивалентны между собою. Пусть подстановка, преобразующая первую сѣть во вторую, есть Σ. Преобразуя группу G подстановкою Σ, мы получаемъ нормальную группу, соотвѣтствующую взятой нами нормальной сѣти.

$$\sigma^m = 1, \tag{75}$$

или:

$$\begin{pmatrix} \rho^m \varepsilon^m, & 0 \\ 0, & \rho^m \end{pmatrix} = 1, \tag{76}$$

откуда:

$$\rho^m = 1. \tag{77}$$

Если ρ есть корень m-ой степени изъ 1, то циклическая группа бинарныхъ линейныхъ подстановокъ:

$$\sigma_0 = 1,\ \sigma,\ \sigma^2, \ldots\ \sigma^{m-1} \tag{78}$$

изоморфна группѣ неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ:

$$S^0 = 1,\ S,\ S^2, \ldots\ S^{m-1}. \tag{67}$$

II. Пусть группа G двупирамидная и изоморфна соотвѣтствующей ей группѣ Γ.

Основныя подстановки двупирамидной группы суть:

$$\left.\begin{aligned} & S_\partial(u) = \varepsilon u, \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}, \\ & \mathfrak{T}_\partial(u) = \frac{1}{u}\ . \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Основныя подстановки группы Γ суть:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \rho\varepsilon, & 0 \\ 0, & \rho \end{pmatrix},\ \tau = \begin{pmatrix} 0, & \rho' \\ \rho', & 0 \end{pmatrix}. \tag{79}$$

Такъ какъ:

$$S^m = 1,\ \mathfrak{T}^2 = 1, \tag{80}$$

то должны имѣть мѣсто символическія равенства:

$$\sigma^m = 1,\ \tau^2 = 1, \tag{81}$$

или:

$$\begin{pmatrix} \rho^m \varepsilon^m, & 0 \\ 0, & \rho^m \end{pmatrix} = 1,\ \begin{pmatrix} \rho'^2, & 0 \\ 0, & \rho'^2 \end{pmatrix} = 1, \tag{82}$$

откуда:

$$\rho^m = 1, \ \rho'^2 = 1. \tag{83}$$

Въ группу G входитъ подстановка 2-го порядка $S\mathfrak{T}$:

$$S\mathfrak{T}(u) = \frac{\varepsilon}{u}. \tag{84}$$

Соотвѣтствующая ей подстановка $\sigma\tau$ тоже должна быть втораго порядка:

$$(\sigma\tau)^2 = \begin{pmatrix} 0, & \rho\rho'\varepsilon \\ \rho\rho', & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \rho^2\rho'^2\varepsilon, & 0 \\ 0, & \rho^2\rho'^2\varepsilon \end{pmatrix} = 1, \tag{85}$$

откуда:

$$\rho^2\rho'^2\varepsilon = 1. \tag{86}$$

Изъ равенствъ (83) и (86) слѣдуетъ:

$$\rho^2 = e^{-\frac{2\pi i}{m}}, \tag{87}$$

откуда:

$$\rho = \pm e^{-\frac{\pi i}{m}}, \tag{88}$$

и далѣе:

$$\rho^m = -(\pm 1)^m. \tag{89}$$

Ясно, что послѣднее равенство не противорѣчитъ первому изъ равенствъ (83) только въ томъ случаѣ, если m нечетно и если, кромѣ того, въ формулѣ (88) взять нижній знакъ. Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\rho = -e^{-\frac{\pi i}{m}}. \tag{90}$$

Итакъ, *двупирамидная группа бинарныхъ линейныхъ подстановокъ только въ томъ случаѣ можетъ быть изоморфна соотвѣтствующей ей группѣ неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ, если порядокъ этой группы есть число вида:*

$$2m = 2(2p + 1).$$

III. Пусть группа G тетраэдрическая, октаэдрическая или икосаэдрическая.

Мы уже видѣли выше, что въ составъ каждой изъ этихъ группъ входитъ группа четверичная, то есть двупирамидная, порядка

$$2m = 2.2.$$

Эта четверичная группа на основаніи только что полученнаго результата не можетъ быть изоморфна соотвѣтствующей ей группѣ бинарныхъ линейныхъ подстановокъ.

Если такъ, то и вся группа G не можетъ быть изоморфна группѣ Γ.

Этотъ послѣдній результатъ можно формулировать въ видѣ такой теоремы:

Теорема 4. *Группы бинарныхъ подстановокъ тетраэдрическаго, октаэдрическаго и икосаэдрическаго типовъ не могутъ быть изоморфны группамъ соотвѣтствующихъ имъ неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ.*

Теорема эта принадлежитъ Клейну *) и имѣетъ важное значеніе для изучаемыхъ нами уравненій.

Пользуясь теоремой 4, мы можемъ нѣсколько пополнить результаты главы I.

Мы знаемъ изъ теоремы 8 главы I, что существуетъ группа бинарныхъ линейныхъ подстановокъ съ опредѣлителемъ равнымъ 1, связывающая между собою корни уравненія (20) главы I.

Порядокъ этой группы равенъ степени n уравненія (20) главы I. Подстановки этой группы выражаютъ каждый корень уравненія (20) черезъ два корня того же уравненія.

Далѣе, изъ теоремы 22 главы I мы знаемъ, что отношенія корней уравненія (20) служатъ корнями уравненія (95) степени N, при чемъ N равно n или $\frac{n}{2}$. Уравненіе (95) главы I

*) Vorlesungen über das Ikosaeder. Стр. 46.

имѣетъ группу неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ, соотвѣтствующую группѣ бинарныхъ линейныхъ подстановокъ уравненія (20).

Ясно, что степень N уравненія (95) можетъ равняться степени n уравненія (20) только въ томъ случаѣ, когда двѣ названныя группы изоморфны, а это возможно только для двупирамидной группы, степень которой есть число вида:

$$2m=2(2p+1).$$

Итакъ, для типовъ: тетраэдрическаго, октаэдрическаго и икосаэдрическаго степень n уравненія (20) вдвое выше степени N уравненія (95):

$$n=2N.$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ формулахъ (106) и (107) главы I радикалъ не можетъ быть извлеченъ точно изъ подкоренныхъ выраженій; корни уравненія (20) попарно разнятся знаками.

Посмотримъ, каковы группы уравненій (20) главы I для каждаго изъ 4 типовъ.

Это суть группы бинарныхъ подстановокъ съ опредѣлителемъ 1, соотвѣтствующія группамъ неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ, найденнымъ въ настоящей главѣ.

Имѣя неоднородную подстановку

$$\bar{u}=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta},$$

легко найти соотвѣтствующія ей бинарныя подстановки съ опредѣлителемъ 1. Это суть подстановки вида:

$$\begin{pmatrix}\rho\alpha, & \rho\beta\\ \rho\gamma, & \rho\delta\end{pmatrix},$$

гдѣ ρ есть величина, опредѣляемая условіемъ:

$$\rho^2(\alpha\delta-\beta\gamma)=1.$$

Ясно, что ρ имѣетъ два значенія, разнящихся знаками.

Выполнимъ эти вычисленія для первыхъ нормальныхъ группъ, найденныхъ въ настоящей главѣ.

Въ результатѣ мы найдемъ такія выраженія основныхъ подстановокъ конечныхъ группъ бинарныхъ линейныхъ подстановокъ:

Группа двупирамидная.

$$=\begin{vmatrix} e^{\frac{\pi i}{m}}, & 0 \\ 0, & e^{-\frac{\pi i}{m}} \end{vmatrix}, \quad \tau=\begin{pmatrix} 0, & i \\ i, & 0 \end{pmatrix}. \tag{91}$$

Группа тетраэдрическая.

$$\sigma=\begin{vmatrix} \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}}, & \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}}, & \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}, \quad \tau=\begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{pmatrix}. \tag{92}$$

Группа октаэдрическая.

$$\sigma=\begin{vmatrix} e^{\frac{\pi i}{4}}, & 0 \\ 0, & e^{-\frac{\pi i}{4}} \end{vmatrix}, \quad \tau=\begin{vmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}, & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}}, & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}. \tag{93}$$

Группа икосаэдрическая.

$$\sigma=\begin{pmatrix} -\varepsilon^3, & 0 \\ 0, & -\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \tau=\begin{vmatrix} -\frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}}, & \frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}} \\ \frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}}, & \frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}, \text{ гдѣ } \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{5}}. \tag{94}$$

Не трудно усмотрѣть, что во всѣ четыре группы входитъ подстановка:

$$\begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \tag{95}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_1 &= -y_1, \\ \bar{y}_2 &= -y_2. \end{aligned}\right\}$$

Въ самомъ дѣлѣ:

для двупирамидной группы (91): $\sigma^m = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$,

для тетраэдрической группы (92): $\tau^2 = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$,

для октаэдрической группы (93): $\sigma^4 = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$,

для икосаэдрической группы (94): $\sigma^5 = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$.

Слѣдовательно, порядокъ всѣхъ пяти группъ дѣйствительно вдвое выше порядка соотвѣтствующихъ имъ группъ неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ.

ГЛАВА V.

Нормальный видъ алгебраическихъ уравненій, имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Припомнимъ главнѣйшіе результаты, найденные въ главахъ II—IV.

Алгебраическія уравненія, имѣющія корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка, приводятся къ виду:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1, \tag{1}$$

при чемъ между многочленами $H(u)$, $T(u)$, $f(u)$ существуетъ тождественная зависимость:

$$H^{\lambda_1}(u) - cf^{\lambda}(u) = c' T^{\lambda_2}(u). \tag{2}$$

Уравненія эти принадлежатъ къ одному изъ четырехъ типовъ: двупирамидному, тетраэдрическому, октаэдрическому или икосаэдрическому.

Степень N уравненія (1), степени ν, ν_1, ν_2 многочленовъ $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$ и показатели λ, λ_1, λ_2 приведены въ таблицѣ:

	Двупирамид.	Тетраэдрич.	Октаэдрич.	Икосаэдрич.
$N=$	$2m$	12	24	60
$\nu=$	2	4	6	12
$\nu_1=$	m	4	8	20
$\nu_2=$	m	6	12	30
$\lambda=$	m	3	4	5
$\lambda_1=$	2	3	3	3
$\lambda_2=$	2	2	2	2

(3)

Всѣ уравненія вида (1) удовлетворяются функціями Шварца:

$$S\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right).$$

Каждое изъ уравненій разсматриваемаго класса имѣетъ группу линейныхъ подстановокъ.

Всѣ уравненія одного типа и одинаковой степени эквивалентны между собою, т. е. изъ одного уравненія даннаго типа всѣ остальныя уравненія того же типа и той же степени могутъ быть получены линейными преобразованіями. Поэтому достаточно для каждаго типа построить одно *нормальное* уравненіе и найти способъ рѣшенія его: этимъ самымъ рѣшится задача о рѣшеніи всѣхъ уравненій изучаемаго класса.

Наконецъ, въ главѣ IV мы нашли нормальныя группы линейныхъ подстановокъ. Уравненія, соотвѣтствующія этимъ группамъ мы назовемъ *нормальными*.

Вычисленіе коэффиціентовъ этихъ уравненій есть задача настоящей главы.

§ 21. Общіе пріемы вычисленія коэффиціентовъ уравненія, соотвѣтствующаго данной группѣ.

Представимъ уравненіе (1) въ такомъ видѣ:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}=z. \tag{1'}$$

Пусть одна изъ подстановокъ группы этого уравненія есть:

$$\Sigma(u)=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}. \tag{4}$$

Въ такомъ случаѣ уравненіе:

$$\frac{H^{\lambda_1}\left(\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}\right)}{cf^{\lambda}\left(\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}\right)}=z, \tag{5}$$

должно быть тождественно съ уравненіемъ (1′), ибо уравненіе (1′) неприводимо.

Такъ какъ степени многочленовъ $H^{\lambda_1}(u)$ и $f^{\lambda}(u)$ одинаковы (онѣ равны N), то уравненіе (5) можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{H^{\lambda_1}(\alpha u+\beta,\ \gamma u+\delta)}{cf^{\lambda}(\alpha u+\beta,\ \gamma u+\delta)}=z.\ ^{*)} \tag{6}$$

Такъ какъ уравненіе (6) тождественно съ (1′), то числитель и знаменатель лѣвой части уравненія (6) могутъ разниться отъ $H^{\lambda_1}(u)$ и $cf^{\lambda}(u)$ лишь постояннымъ множителемъ.

Отсюда слѣдуетъ, что уравненія:

*) Слѣдуя прежнимъ обозначеніямъ, мы полагаемъ:

$$(\gamma u+\delta)^{\nu} f\left(\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}\right)=f(\alpha u+\beta,\ \gamma u+\delta),\quad (\gamma u+\delta)^{\nu_1} H\left(\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\alpha}\right)=H(\alpha u+\beta,\ \gamma u+\delta).$$

$$f(u) = 0 \text{ и } f(\alpha u + \beta,\ \gamma u + \delta) = 0 \tag{7}$$

должны быть тождественны между собою.

Это мы можемъ выразить словами:

Уравненіе:

$$f(u) = 0$$

имѣетъ ту же группу линейныхъ подстановокъ, какъ и уравненіе (1′) *).

Пользуясь этимъ, легко опредѣлить числовыя величины коэффиціентовъ многочлена $f(u)$.

Для этого возьмемъ многочленъ ν-ой степени:

$$f(u) = a_0 u^\nu + a_1 u^{\nu-1} + \ldots + a_{\nu-1} u + a_\nu, \tag{8}$$

приравняемъ его нулю и потребуемъ, чтобы уравненіе:

$$a_0 u^\nu + a_1 u^{\nu-1} + \ldots + a_{\nu-1} u + a_\nu = 0 \tag{9}$$

отъ преобразованія посредствомъ *основныхъ* подстановокъ S и $\mathfrak{T}$ соотвѣтствующей группы не мѣнялось.

Лѣвая часть полученнаго такимъ образомъ уравненія опредѣлитъ величину функціи $f(u)$ до постояннаго множителя. Знаніе *неосновной* подстановки U нѣсколько облегчитъ вычисленія.

Найдя функцію $f(u)$, мы вычислимъ по извѣстнымъ правиламъ коваріанты $H(u)$ и $T(u)$ и опредѣлимъ постоянныя c и c' изъ условія (2).

Тогда уравненіе (1), соотвѣтствующее данной группѣ, будетъ вполнѣ опредѣлено.

§ 22. **Уравненіе двупирамидное**.

Мы получили уже въ § 4 двупирамидное уравненіе въ такой формѣ:

$$\frac{\left(\dfrac{u^m + 1}{2}\right)^2}{u^m} = z. \tag{10}$$

---

*) Это и понятно: уравненіе (1′) при $z = \infty$ обращаетсявъ $f^\lambda(u) = 0$.

Мы можемъ его представить въ нѣсколько иномъ видѣ:

$$\left(\frac{u^m+1}{2}\right)^2 : \left(\frac{u^m-1}{2}\right)^2 : u^m = z : z-1 : 1. \tag{11}$$

Остается показать, что это уравненіе есть *нормальное двупирамидное уравненіе*, т. е. не мѣняется отъ подстановокъ нормальной двупирамидной группы, найденной нами въ § 15.

Основныя подстановки нормальной двупирамидной группы таковы:

$$S_\partial(u) = \varepsilon u,\ \ \mathfrak{T}_\partial(u) = \frac{1}{u},\ \text{ гдѣ }\ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}. \tag{12}$$

Инваріантность уравненія (11) по отношенію къ этимъ подстановкамъ ясна сама собою.

Посмотримъ, каково друпирамидное уравненіе общаго вида, не нормальное.

Для этого преобразуемъ уравненіе (11) произвольною линейною подстановкою:

$$u = \frac{au'+b}{cu'+\partial}. \tag{13}$$

Оно приметъ видъ:

$$\left[\frac{(au'+b)^m+(cu'+\partial)^m}{2}\right] : \left[\frac{(au'+b)^m-(cu'+\partial)^m}{2}\right]^2 : \\ : (au'+b)^m\,(cu'+\partial)^m = z : z-1 : 1. \tag{14}$$

Выраженія:

$$au'+b \text{ и } cu'+\partial$$

суть двѣ совершенно произвольныя цѣлыя линейныя функціи.

Обозначивъ ихъ буквами:

$$f_1 \text{ и } f_2,$$

мы приведемъ уравненіе (14) къ виду:

$$\left(\frac{f_1^m+f_2^m}{2}\right)^2 \left(\frac{f_1^m-f_2^m}{2}\right)^2 : f_1^m f_2^m = z : z-1 : 1. \qquad (15)$$

Положивъ:

$$\frac{f_1^m+f_2^m}{2} = H(u'),\ \frac{f_1^m-f_2^m}{2} = T(u'), f_1 f_2 = f(u'), \qquad (16)$$

мы приведемъ уравненіе (15) къ виду уравненія (1):

$$H^2(u') : T^2(u') : f^m(u') = z : z-1 : 1. \qquad (17)$$

Таковъ самый общій видъ двупирамиднаго уравненія.

Въ немъ функція $f(u')$ совершенно произвольный квадратный многочленъ. Обозначивъ линейные множители его черезъ f_1 и f_2, мы опредѣлимъ функціи $H(u')$ и $T(u')$ изъ формулъ (16).

Между функціями $H(u')$, $T(u')$, $f(u')$ существуетъ тождественная зависимость:

$$H^2(u') - f^m(u') = T^2(u'), \qquad (18)$$

соотвѣтствующая тождеству (2).

§ 23. **Уравненіе тетраэдрическое.**

I.

Первая нормальная форма.

Основныя подстановки тетраэдрической группы въ первомъ нормальномъ видѣ суть слѣдующія:

$$S_m(u) = i\,\frac{1-u}{1+u},\ \mathfrak{T}_m(u) = -u. \qquad (19)$$

Кромѣ того, намъ извѣстна одна очень простая неосновная подстановка:

$$U_m = \frac{1}{u}. \qquad (20)$$

Обозначимъ тетраэдрическую функцію $f(u)$ перваго нормальнаго вида черезъ:

$f_m(u)$.

Пусть:

$$f_m(u) = a_0 u^4 + a_1 u^2 + a_2 u^2 + a_3 u + a_4. \tag{21}$$

Возьмемъ уравненіе:

$$a_0 u^4 + a_1 u^3 + a_2 u^2 + a_3 u + a_4 = 0. \tag{22}$$

Совершимъ надъ нимъ основную подстановку $\mathcal{T}_m$:

$$a_0 u^4 - a_1 u^3 + a_2 u^2 - a_3 u + a_4 = 0. \tag{23}$$

Сравнивая уравненія (22) и (23), находимъ:

$$a_1 = a_3 = 0.$$

Уравненіе (22) принимаетъ видъ:

$$a_0 u^4 + a_2 u^2 + a_4 = 0. \tag{24}$$

Совершаемъ неосновную подстановку U_m:

$$a_4 u^4 + a_2 u^2 + a_0 = 0. \tag{25}$$

Сравнивая уравненія (24) и (25), находимъ:

$$a_0 = a_4.$$

Полагая $\frac{a_2}{a_0} = a$, приведемъ уравненіе (24) къ виду:

$$u^4 + a u^2 + 1 = 0. \tag{26}$$

Совершаемъ основную подстановку S_m:

$$u^4 + \frac{2a + 12}{2 - a} u^2 + 1 = 0. \tag{27}$$

Сравнивая уравненія (26) и (27), находимъ:

$$a = \pm 2i\sqrt{3}.$$

Мы въ правѣ взять въ этомъ выраженіи какой угодно изъ двухъ знаковъ: $+$ или $-$, потому что, какой бы знакъ мы ни взяли, уравненіе:

$$u^4 \pm 2i\sqrt{3}u^2 + 1 = 0 \tag{28}$$

не будетъ мѣняться отъ основныхъ подстановокъ S_m и $\mathfrak{T}_m$ первой нормальной тетраэдрической группы.

Возьмемъ верхній знакъ.

Тогда:

$$f_m(u) = u^4 + 2i\sqrt{3}\,u^2 + 1. \tag{29}$$

Вычисливъ коваріанты $H_m(u)$ и $T_m(u)$ многочлена $f_m(u)$, находимъ:

$$H_m(u) = u^4 - 2i\sqrt{3}\,u^2 + 1, \tag{30}$$

$$T_m(u) = u^5 - u. \tag{31}$$

Подставивъ выраженія (29), (30), (31) въ равенство (2) и требуя, чтобы оно удовлетворялось тождественно, находимъ:

$$c = 1,\ c' = -12i\sqrt{3}. \tag{32}$$

Первое нормальное тетраэдрическое уравненіе таково:

$$(u^4-2i\sqrt{3}\,u^2+1)^3 : -12i\sqrt{3}(u^5-u)^2 : (u^4+2i\sqrt{3}\,u^2+1)^3 = \tag{33}$$

$$= z : z-1 : 1.$$

Сдѣлаемъ два замѣчанія по поводу выраженій (29), (30), (31).

1) Выраженіе $T_m(u)$, даваемое формулою (31), по видимому пятой степени, тогда какъ таблица (3) показываетъ, что степень ν_2 многочлена $T_m(u)$ равна 6.

Причина этого лежитъ въ томъ, что коэффиціентъ при u^6 въ многочленѣ (31) равенъ 0. Дѣйствительно, бинарная форма $T(y', y'')$, соотвѣтствующая многочлену $T(u)$, такова:

$$T(y', y'') = y'\,y''(y'^5 - y''^5).$$

Съ подобнымъ обстоятельствомъ мы встрѣтимся ниже при опредѣленіи многочлена $f(u)$.

2) Если бы въ формулѣ (27) мы приняли $a = -2i\sqrt{3}$, то многочленъ $f(u)$ получилъ бы выраженіе (30), а соотвѣтствующій ему гессіанъ $H(u)$—выраженіе (29), и уравненіе (33) приняло бы видъ:

$$(u^4+2i\sqrt{3}\,u^2+1)^2 : 12i\sqrt{3}(u^5-u)^2 : (u^4-2i\sqrt{3}\,u^2+1)^3 = \tag{34}$$

$$= z : z-1 : 1.$$

Ясно, что уравненіе (34) получается изъ уравненія (33) линейнымъ преобразованіемъ:

$$\Sigma(u) = iu.$$

Уравненіе (34) есть одно изъ безконечнаго числа уравненій того же тетраэдрическаго типа, какъ и уравненіе (33).

II.

Вторая нормальная форма.

Основныя подстановки второй нормальной тетраэдрической группы таковы:

$$S_m'(u) = \varepsilon u, \quad \mathfrak{T}_m'(u) = \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}u+1}, \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}. \tag{35}$$

Обозначимъ тетраэдрическую функцію $f(u)$ втораго нормальнаго вида черезъ

$$f_m'(u).$$

Пусть:

$$f_m'(u) = a_0u^4 + a_1u^3 + a_2u^2 + a_3u + a_4. \tag{36}$$

Возьмемъ уравненіе:

$$a_0 u^4 + a_1 u^3 + a_2 u^2 + a_3 u + a_4 = 0. \qquad (37)$$

Совершимъ надъ нимъ основную подстановку S_m':

$$a_0 u^4 + \varepsilon^2 a_1 u^3 + \varepsilon a_2 u^2 + a_3 u + \varepsilon^2 a_4 = 0. \qquad (38)$$

Сравнивая уравненія (37) и (38), находимъ:

$$a_1 = a_2 = a_4 = 0.$$

Уравненіе (37) принимаетъ видъ:

$$a_0 u^4 + a_3 u = 0. \qquad (39)$$

Совершаемъ подстановку $\mathfrak{T}_m'$:

$$a_0(\sqrt{2}-u)^4 + a_3(\sqrt{2}-u)(\sqrt{2}u+1)^3 = 0. \qquad (40)$$

Лѣвая часть уравненія (40) при $u = 0$ обращается въ

$$4a_0 + \sqrt{2}\, a_3.$$

Такъ какъ въ лѣвой части уравненія (39) свободный членъ равенъ 0, то

$$a_3 = -2\sqrt{2}\, a_0. \qquad (41)$$

Уравненіе (39) приметъ видъ:

$$u^4 - 2\sqrt{2}\, u = 0. \qquad (42)$$

Итакъ:

$$f_m'(u) = u^4 - 2\sqrt{2}\, u. \qquad (43)$$

Соотвѣтствующіе коваріанты $H_m'(u)$ и $T_m'(u)$ таковы:

$$H_m'(u) = 2\sqrt{2}\, u^3 + 1, \qquad (44)$$

$$T_m'(u) = u^6 + 5\sqrt{2}\, u^3 - 1. \qquad (45)$$

Подставляя выраженія (43), (44), (45) въ условіе (2), находимъ:

$$c = -1,\ c' = 1. \qquad (46)$$

Второе нормальное тетраэдрическое уравненіе таково:

$$(2\sqrt{2}\,u^3+1)^3:(u^6+5\sqrt{2}\,u^3-1)^2:-(u^4-2\sqrt{2}\,u)^3=z:z-1:1. \quad (47)$$

Такъ какъ сѣти треугольниковъ, соотвѣтствующія уравненіямъ (33) и (47), эквивалентны, то уравненіе (47) можетъ быть получено изъ уравненія (33) линейнымъ преобразованіемъ неизвѣстнаго.

Функціи $f_m''(u)$, $H_m''(u)$, $T_m''(u)$ третьяго нормальнаго тетраэдрическаго типа мы не вычисляемъ потому, что онѣ довольно сложны и намъ впослѣдствіи нужны не будутъ.

Функціи третьяго нормальнаго типа могутъ быть получены изъ функцій:

$$f_m(u),\ H_m(u),\ T_m(u)$$

подстановкою σ, опредѣляемой формулою (17) главы IV.

§ 24. Уравненіе октаэдрическое.

I.

Первая нормальная форма.

Основныя подстановки первой нормальной октаэдрической группы таковы:

$$S_0(u)=i\,u,\quad \mathfrak{T}(u)=\frac{1-u}{1+u}\,. \qquad (48)$$

Кромѣ того, существуетъ очень простая неосновная подстановка:

$$U_0(u)=\frac{1}{u}\,. \qquad (49)$$

Пусть:

$$f_0(u)=a_0u^6+a_1u^5+a_2u^4+a_3u^3+a_4u^2+a_5u+a_6. \qquad (50)$$

Возьмемъ уравненіе:

$$a_0u^6+a_1u^5+a_2u^4+a_3u^3+a_4u^2+a_5u+a_6=0. \qquad (51)$$

Совершимъ подстановку S_0:

$$a_0u^6-a_1iu^5-a_2u^4+a_3iu^3+a_4u^2-a_5iu-a_6=0. \qquad (52)$$

Если мы допустимъ, что a_0 отлично отъ 0, то сравнивая между собою уравненія (51) и (52), придемъ къ заключенію:

$$a_6=a_5=0.$$

Въ такомъ случаѣ функція $f_0(u)$ дѣлится на u^2, форма $f_0(y', y'')$ имѣетъ два равныхъ линейныхъ множителя: она дѣлится на y'^2, что противорѣчитъ опредѣленію первичной формы.

Итакъ, коэффиціентъ a_0 равенъ 0.

Сравнивая между собою уравненія (51) и (52) въ предположеніи, что a_0 равно 0, а a_1 отлично отъ 0 *), находимъ:

$$a_0=a_2=a_3=a_4=a_6=0.$$

Уравненіе (51) принимаетъ видъ:

$$a_1u^5+a_5u=0. \qquad (53)$$

Совершимъ надъ уравненіемъ (53) подстановку $\mathfrak{T}_0$:

$$(1-u^2)\{a_1(1-u)^4+a_5(1+u)^4\}=0. \qquad (54)$$

Лѣвая часть уравненія (54) при $u=0$ обращается въ:

$$a_1+a_5.$$

Такъ какъ въ лѣвой части уравненія (53) свободный членъ равенъ 0, то:

$$a_1+a_5=0;\ a_5=-a_1. \qquad (55)$$

---

*) Коэффиціенты a_0 и a_1 не могутъ равняться одновременно нулю; иначе форма $f_0(y', y'')$ имѣла бы два равныхъ линейныхъ множителя: она дѣлилась бы на y''^2.

Итакъ, многочленъ $f_0(u)$ выражается слѣдующимъ образомъ:

$$f_0(u) = u^5 - u. \tag{56}$$

Отсюда:

$$H_0(u) = u^8 + 14u^4 + 1, \tag{57}$$

$$T_0(u) = u^{12} - 33u^8 - 33u^4 + 1. \tag{58}$$

Изъ условія (2) находимъ, что:

$$c' = 1, \; c = 108. \tag{59}$$

Первое нормальное октаэдрическое уравненіе таково:

$$(u^8 + 14u^4 + 1)^3 : (u^{12} - 33u^8 - 33u^4 + 1)^2 : 108(u^5 - u)^4 = \tag{60}$$

$$= z : z - 1 : 1.$$

II.

Вторая нормальная форма.

Основныя подстановки второй нормальной октаэдрической группы таковы:

$$\left.\begin{aligned} S_0'(u) &= \varepsilon\, u, \\ \mathfrak{T}_0'(u) &= \frac{1 + \sqrt{2}\,\varepsilon^2 u}{u - \sqrt{2}\,\varepsilon} \end{aligned}\right\}, \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}. \tag{61}$$

Примѣняя тотъ же пріемъ, который мы подробно прослѣдили на трехъ предшествующихъ случаяхъ, мы найдемъ такое выраженіе функціи f_0':

$$f_0'(u) = u^6 + 5\sqrt{2}\, u^3 - 1. \tag{62}$$

Отсюда:

$$H_0'(u) = u^7 - \frac{7}{2\sqrt{2}}\, u^4 - u, \tag{63}$$

$$T_0'(u) = u^{12} - 22\sqrt{2}\,u^9 - 22\sqrt{2}\,u^3 - 1. \tag{64}$$

Второе нормальное октаэдрическое уравненіе таково:

$$64\sqrt{2}\left(u^7 - \frac{7}{2\sqrt{2}}\,u^4 - u\right)^3 : -\left(u^{12} - 22\sqrt{2}\,u^9 - 22\sqrt{2}u^3 - 1\right)^2 :$$

$$: (u^6 + 5\sqrt{2}\,u^3 - 1)^4 = z : z - 1 : 1. \tag{65}$$

III.

Третья нормальная форма.

Для нахожденія октаэдрической функціи $f(u)$ въ третьей нормальной формѣ, преобразуетъ найденную нами функцію

$$f_0(u) = u^5 - u$$

линейной подстановкой:

$$\sigma(u) = -\frac{u + tg\frac{\theta}{2}}{utg\frac{\theta}{2} - 1},$$

гдѣ

$$tg\theta = \frac{1}{2cos\,36^0}.$$

Эта подстановка была нами найдена въ § 14.

Выполнивъ вычисленія, находимъ:

$$f_0''(u) = u^6 + 2u^5 - 5u^4 - 5u^2 - 2u + 1, \tag{66}$$

откуда:

$$H_0''(u) = u^8 - u^7 + 7u^6 + 7u^5 - 7u^3 + 7u^2 + u + 1. \tag{67}$$

Функцію $T_0''(u)$ мы не вычисляемъ, такъ какъ она намъ нужна не будетъ.

§ 25. **Уравненіе икосаэдрическое.**

Основныя подстановки первой нормальной икосаэдрической группы таковы:

$$\left.\begin{aligned} S_u(u) &= \varepsilon u, \\ \mathfrak{T}_u(u) &= \frac{1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)u}{u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)}, \end{aligned}\right\} \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}, \tag{68}$$

кромѣ того существуетъ, какъ мы знаемъ, одна очень простая неосновная подстановка:

$$U_u(u) = -\frac{1}{u}.$$

Положивъ:

$$f_u(u) = a_0 u^{12} + a_1 u^{11} + \ldots + a_{11} u + a_{12} \tag{69}$$

и примѣняя затѣмъ пріемы уже подробно разсмотрѣнные выше, мы придемъ къ заключенію, что:

$$a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{12} = 0,$$

$$\frac{a_6}{a_1} = 11, \quad \frac{a_{11}}{a_1} = -1.$$

Поэтому имѣемъ:

$$f_u(u) = u^{11} + 11u^6 - u. \tag{70}$$

Отсюда:

$$H_u(u) = u^{20} - 228u^{15} + 494u^{10} + 228u^5 + 1, \tag{71}$$

$$T_u(u) = u^{30} + 522u^{25} - 10005u^{20} - 10005u^{10} - 522u^5 + 1. \tag{72}$$

Изъ условія (2) находимъ:

$$c' = 1, \quad c = -1728. \tag{73}$$

Нормальное икосаэдрическое уравненіе таково:

$$(u^{20} - 228u^{15} + 494u^{10} + 228u^5 + 1)^3 : (u^{30} + 522u^{25} - 10005u^{20} -$$
$$- 10005u^{10} - 522u^5 + 1)^2 : -1728(u^{11} + 11u^6 - u)^5 = z : z - 1 : 1. \tag{74}$$

ГЛАВА VI.

Инваріантныя свойства первичныхъ формъ $f(y', y'')$, $H(y', y'')$, $T(y', y'')$. Соотношенія между первичными функціями различныхъ типовъ.

§ 29. Коваріантъ $(f, f)^4$ первичной формы наивысшей степени $f(y', y'')$.

Слѣдуя обозначеніямъ, обычнымъ въ теоріи формъ, будемъ подразумѣвать подъ символомъ:

$$(f, f)^4$$

коваріантъ втораго порядка формы $f(y', y'')$:

$$2\left\{\frac{\partial^4 f}{\partial y'^4}\frac{\partial^4 f}{\partial y''^4} - 4\frac{\partial^4 f}{\partial y'^3\,\partial y''}\frac{\partial^4 f}{\partial y'\,\partial y''^3} + 3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y'^2\,\partial y''^2}\right)^2\right\}. \qquad (1)$$

Составимъ коваріантъ $(f, f)^4$ для первичныхъ формъ $f(y', y'')$ тетраэдрическаго, октаэдрическаго и икосаэдрическаго типовъ *).

Формы $f(y', y'')$ одного и того же типа эквивалентны между собою; поэтому выраженія коваріанта $(f, f)^4$ для формъ $f(y', y'')$ одного и того же типа разнятся между собою лишь нѣкоторою (четвертою) степенью опредѣлителей линейныхъ подстановокъ.

Мы возьмемъ формы $f(y', y'')$ въ нормальныхъ видахъ:

---

*) О двупирамидномъ типѣ мы не говоримъ въ настоящемъ параграфѣ потому, что форма второй степени не имѣетъ коваріанта $(f, f)^4$.

$$f_m'(y', y'') = y'^4 - 2\sqrt{2}\, y' y''^3, \tag{2}$$

$$f_0(y', y'') = y' y''(y'^4 - y''^4), \tag{3}$$

$$f_u(y', y'') = y' y''(y'^{10} + 11 y'^5 y''^5 - y''^{10}). \tag{4}$$

Найдя коваріантъ $(f, f)^4$ для формъ (2), (3), (4) по формулѣ (1), мы убѣждаемся въ томъ, что онъ тождественно равенъ нулю.

Если такъ, то мы можемъ утверждать, что коваріантъ $(f, f)^4$ тождественно равенъ нулю и для всѣхъ формъ, эквивалентныхъ формамъ (2), (3), (4).

Отсюда слѣдуетъ:

Теорема 1. *Коваріантъ $(f, f)^4$ для всякой первичной формы наинисшей степени $f(y', y'')$ тождественно равенъ нулю.*

Докажемъ, что имѣетъ мѣсто:

Теорема 2 (обратная). *Если форма $f(y', y'')$ не имѣетъ кратныхъ корней и коваріантъ ея $(f, f)^4$ тождественно равенъ нулю, то она есть первичная форма наинисшей степени* *).

Пусть форма:

$$f(y', y'') = \mathop{\mathrm{S}}_{k=0}^{k=\nu} (\nu)_k\, a_k\, y'^{\nu-k} y''^k \; **), \text{ гдѣ } \nu \geqq 4, \tag{5}$$

не имѣетъ кратныхъ корней и пусть имѣетъ мѣсто тождество:

$$(f, f)^4 = 0. \tag{6}$$

*) Доказательство этой теоремы приведено у Гордана: Vorlesungen über Invariantentheorie, томъ II, стр. 204. При доказательствѣ онъ пользуется символическимъ методомъ Аронгольда (Aronhold). Сущность приведеннаго мною доказательства та же, что у Гордана.

**) Черезъ $(\nu)_k$ мы обозначаемъ биноміальный коэффиціентъ:

$$\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)}{1.2.3\ldots k}.$$

Замѣтимъ прежде всего, что всякую бинарную форму, не имѣющую кратныхъ корней, линейной подстановкой можно преобразовать такъ, чтобы

$$a_0 = a_2 = 0,\ a_1 = 1. \tag{7}$$

Мы будемъ предполагать, что форма (5) уже приведена къ такому виду.

Выраженіе коваріанта $(f, f)^4$ для формы (5) въ раскрытомъ видѣ таково:

$$(f, f)^4 = 2[\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)]^2 \times$$

$$\times \mathop{\mathrm{S}}_{k=0}^{k=\nu-4} \mathop{\mathrm{S}}_{h=0}^{h=\nu-4} (\nu-4)_k(\nu-4)_h \left\{a_k a_{h+4} - 4a_{k+1}a_{h+3} + 3a_{k+2}a_{h+2}\right\} \times$$

$$\times\, y'^{\,2\nu-k-h-8}\, y''^{\,k+h}. \tag{8}$$

Вводимъ вмѣсто h новый индексъ суммованія

$$l = k + h:$$

$$(f, f)^4 = 2[\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)]^2 \times$$

$$\times \mathop{\mathrm{S}}_{l=0}^{l=2\nu-8} y'^{\,\nu-l-8}\, y''^{\,l} \mathop{\mathrm{S}}_{k=0,\ l-(\nu-4)}^{k=l,\ \nu-4} (\nu-4)_k\, (\nu-4)_{l-k} \times$$

$$\times \{a_k a_{l-k+4} - 4a_{k+1} a_{l-k+3} + 3a_{k+2} a_{l-k+2}\}. \tag{9}$$

Во второй суммѣ формулы (9) предѣлами служатъ:

$$0 \text{ и } l, \text{ если } l \leqq \nu - 4,$$

или:

$$l - (\nu - 4) \text{ и } \nu - 4, \text{ если } l \geqq \nu - 4.$$

Если $(f, f)^4$ тождественно обращается въ 0, то имѣетъ мѣсто равенство:

$$\mathop{\mathbf{S}}_{k=0,\ l-(\nu-4)}^{k=l,\ \nu-4}(\nu-4)_k(\nu-4)_{l-k}\times \tag{10}$$

$$\times\{a_k\,a_{l-k+4}-4a_{k+1}\,a_{l-k+3}+3a_{k+2}\,a_{l-k+2}\}=0,$$

гдѣ:

$$l=0,\ 1,\ 2,\ldots\ 2\nu-8.$$

Согласно сдѣланному выше условію:

$$a_0=a_2=0,\ a_1=1. \tag{7}$$

Положивъ въ равенствѣ (10):

$$l=0,$$

и принявъ во вниманіе условія (7), находимъ:

$$a_3=0.$$

Итакъ:

$$a_1=1,\ a_0=a_2=a_3=0. \tag{11}$$

Всѣ коэффиціенты, слѣдующіе за a_3 не могутъ быть одновременно нулями; иначе форма (5) приняла бы такой видъ:

$$y'^{\nu-1}\ y''$$

и имѣла бы кратные корни, что противорѣчитъ условію теоремы.

Пусть a_{m+1} есть первый изъ коэффиціентовъ, слѣдующихъ за a_3, отличный отъ 0.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=1,\ a_0=a_2=a_3=\ldots=a_m=0, \\ \nu>m\geqq 3,\ a_{m+1}\ \text{отлично отъ}\ 0. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Полагая въ равенствѣ (10):

$$l = m - 2$$

и принимая во вниманіе условія (12), находимъ:

$$[(\nu - 4)_1 \, (\nu - 4)_{m-3} - 4(\nu - 4)_{m-2}] \, a_{m+1} = 0, \tag{13}$$

или:

$$\frac{\nu(\nu-4)_{m-3}}{m-2} \left[m - 6 + \frac{12}{\nu} \right] a_{m+1} = 0. \tag{14}$$

Лѣвая часть равенства (14) можетъ быть представлена въ видѣ произведенія трехъ множителей:

$$\frac{\nu(\nu-4)_{m-3}}{m-2}, \quad m - 6 + \frac{12}{\nu}, \quad a_{m+1}.$$

Первый изъ этихъ множителей при условіи:

$$\nu > m \geqq 3$$

нулю равняться не можетъ.

Множитель a_{m+1}, какъ мы знаемъ, тоже отличенъ отъ 0.

Слѣдовательно, должно имѣть мѣсто тождественное равенство:

$$m - 6 + \frac{12}{\nu} = 0. \tag{15}$$

Такъ какъ m и ν суть числа цѣлыя и

$$\nu \geqq 4,$$

то изъ равенства (15) слѣдуетъ, что ν можетъ имѣть только одно изъ трехъ значеній:

$$\nu = 4, \ 6, \ 12. \tag{16}$$

Соотвѣтствующія значенія m таковы:

$$m = 3, \ 4, \ 5. \tag{17}$$

Итакъ, *степень формы $f(y', y'')$ должна равняться одному изъ чиселъ:*

4, 6, 12.

Изъ равенствъ (12) и (17) слѣдуетъ, что:

при $\nu=4$: $$a_1=1,\ a_0=a_2=a_3=0, \tag{18}$$

при $\nu=6$: $$a_1=1,\ a_0=a_2=a_3=a_4=0, \tag{19}$$

при $\nu=12$: $$a_1=1,\ a_0=a_2=a_3=a_4=a_5=0. \tag{20}$$

Самыя формы $f(y', y'')$ будутъ таковы:

1) $$f(y', y'')=4y'^3y''+a_4y''^4, \tag{21}$$

2) $$f(y', y'')=6y'^5y''+6a_5y'y''^5+a_6y''^6, \tag{22}$$

3) $$f(y', y'')=12y'^{11}y''+(12)_6a_6y'^6y''^6+(12)_7a_7y'^5y''^7+ \\ +\ldots+12a_{11}y'y''^{11}+a_{12}y''^{12}. \tag{23}$$

Займемся каждою изъ этихъ формъ въ отдѣльности.

I. Непосредственной повѣркой убѣждаемся въ томъ, что форма:

$$f(y', y'')=4y'^3y''+a_4y''^4 \tag{21}$$

удовлетворяетъ условію:

$$(f, f)^4=0$$

при всякомъ значеніи a_4.

II. Возьмемъ форму:

$$f(y', y'')=6y'^5y''+6a_5y'y''^5+a_6y''^6. \tag{22}$$

Положивъ въ равенствѣ (10):

$$\nu=6,\ a_1=1,\ a_0=a_2=a_3=a_4=0 \text{ и } l=3,$$

находимъ:

$$a_6=0.$$

Форма (22) принимаетъ такой видъ:

$$f(y', y'') = 6\, y'^5 y'' + 6\, a_5\, y'\, y''^5. \tag{24}$$

Непосредственной повѣркой убѣждаемся въ томъ, что форма (24) удовлетворяетъ условію:

$$(f, f)^4 = 0$$

при всякомъ значеніи a_5.

III. Возьмемъ форму:

$$\left.\begin{array}{l} f(y', y'') = 12 y'^{11} y'' + (12)_6\, a_6\, y'^6 y''^6 + (12)_7\, a_7\, y'^5 y''^7 + \\ \quad + \ldots + 12 a_{11}\, y'\, y''^{11} + a_{12}\, y''^{12}. \end{array}\right. \tag{23}$$

Положивъ въ равенствѣ (10):

$$\nu = 12,\ a_1 = 1,\ a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0,\ 4 \leqq l \leqq 7,$$

находимъ:

$$[(8)_1 . (8)_{l-1} - 4 . (8)_l] a_{l+3} = 0, \tag{25}$$

или:

$$12(l-3)\, \frac{8 . 7 \ldots (10-l)}{1 . 2 \ldots l}\, a_{l+3} = 0, \tag{26}$$

откуда:

$$a_{l+3} = 0 \quad \text{при}\ 4 \leqq l \leqq 7, \tag{27}$$

т. е.:

$$a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = 0. \tag{28}$$

Полагая въ равенствѣ (10):

$$\left.\begin{array}{c} \nu = 12,\ a_1 = 1, \\ a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = 0,\ l = 8, \end{array}\right\} \tag{29}$$

находимъ:

$$a_{11} = -49 . a_6^2. \tag{30}$$

Полагая въ равенствѣ (10) при тѣхъ же остальныхъ условіяхъ

$$l=9,$$

находимъ:

$$a_{12}=0.$$

Форма (23) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$f(y', y'')=12y'^{11}y''+(12)_6\, a_6\, y'^6 y''^6-12.49a_6^2\, y' y''^{11}. \quad (31)$$

Непосредственной повѣркой убѣждаемся въ томъ, что форма (31) удовлетворяетъ условію:

$$(f, f)^4=0$$

при всякомъ значеніи a_6.

Мы нашли слѣдующія три формы, не имѣющія кратныхъ корней и удовлетворяющія условію:

$$(f, f)^4=0:$$

1) $f(y', y'')=4y'^3y''+a_4\, y''^4,$ (21)

2) $f(y', y'')=6\, y'^5 y''+6\, a_5\, y' y''^5,$ (24)

3) $f(y', y'')=12y'^{11}y''+(12)_6\, a_6\, y'^6 y''^6-12.49a_6^2\, y' y''^{11}.$ (31)

Остальныя формы, удовлетворяющія тѣмъ же условіямъ, суть всевозможныя формы, эквивалентныя тремъ найденнымъ формамъ (21), (24), (31).

Упростимъ формы (21), (24), (31). Совершимъ надъ ними линейныя преобразованія:

надъ формою (21):

$$\left.\begin{aligned} y' &= -\sqrt[12]{\frac{a_4}{4}}\; y_2, \\ y'' &= \frac{1}{\sqrt[4]{a_4}}\, y_1; \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

надъ формою (24):

$$\left.\begin{aligned} y' &= e^{-\frac{\pi i}{24}} \sqrt[24]{\frac{a_5}{6^4}}\, y_1, \\ y'' &= e^{\frac{5\pi i}{24}} \frac{1}{\sqrt[24]{6^4 a_5{}^5}}\, y_2; \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

надъ формою (31):

$$\left.\begin{aligned} y' &= \sqrt[60]{\frac{7a_6}{12^5}}\, y_1, \\ y'' &= \frac{1}{\sqrt[60]{7^{11} 12^5 a_6{}^{11}}}\, y_2. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Послѣ этихъ преобразованій формы (21), (24), (32) примутъ такой видъ:

$$1)\ f_m'(y_1, y_2) = y_1{}^4 - 2\sqrt{2}\, y_1 y_2{}^3, \qquad (35)$$

$$2)\ f_0(y_1, y_2) = y_1 y_2 (y_1{}^4 - y_2{}^4), \qquad (36)$$

$$3)\ f_u(y_1, y_2) = y_1 y_2 (y_1{}^{10} + 11 y_1{}^5 y_2{}^5 - y_2{}^{10}). \qquad (37)$$

Это суть первичныя формы наинисшей степени.

Теорема доказана.

Результаты, полученные въ настоящемъ параграфѣ, можно формулировать такъ:

Для того, чтобы форма $f(y', y'')$ была первичною формою наинисшей степени, необходимо и достаточно:

1) чтобы она не имѣла кратныхъ корней,

2) чтобы она удовлетворяла условію:

$$(f, f)^4 = 0.$$

§ 27. Выраженіе формы, инваріантной по отношенію къ бинарнымъ линейнымъ подстановкамъ конечной группы, черезъ первичныя формы:

$$f(y', y''),\ H(y', y''),\ T(y', y'').$$

Уяснимъ прежде всего геометрическій смыслъ уравненій:

$$f(u) = 0, \ H(u) = 0, \ T(u) = 0.$$

Изъ уравненія:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1 \tag{38}$$

видно, что уравненіе

$$f(u) = 0$$

имѣетъ корнями тѣ точки сѣти, которыя соотвѣтствуютъ значенію $z = \infty$. Это суть вершины сѣти, въ которыхъ сходится по λ четыреугольниковъ. Онѣ служатъ проэкціями вершинъ многогранника, соотвѣтствующаго сѣти.

Итакъ, уравненіе:

$$f(u) = 0$$

имѣетъ корнями проэкціи вершинъ многогранника.

Такимъ же образомъ убѣдимся въ томъ, что уравненіе:

$$H(u) = 0$$

имѣетъ корнями проэкціи центровъ граней многогранника, а уравненіе:

$$T(u) = 0$$

имѣетъ корнями проэкціи срединъ реберъ многогранника.

Ясно, что уравненія:

$$f(u) = 0, \ H(u) = 0, \ T(u) = 0$$

не мѣняются отъ подстановокъ группы уравненія (38).

Пусть намъ удалось найти такую цѣлую функцію $F(u)$, что уравненіе

$$F(u) = 0 \tag{39}$$

не мѣняется отъ подстановокъ той же группы.

Будемъ различать два случая:

1) степень уравненія (39) ниже степени N уравненія (38).

2) Степень уравненія (39) выше степени N уравненія (38).

Начнемъ съ перваго случая.

I.

Пусть степень уравненія (39) ниже N.

Возьмемъ какой нибудь корень u_1 уравненія (39).

Совершивъ надъ u_1 всѣ подстановки группы, находимъ N величинъ:

$$u_1,\ u_2, \ldots u_N. \tag{40}$$

Всѣ точки, имъ соотвѣтствующія, суть соотвѣтственныя точки сѣти четыреугольниковъ.

Всѣ величины (40) суть корни уравненія (39).

Такъ какъ степень уравненія (39) ниже N, то въ числѣ величинъ (40) найдутся равныя.

Соотвѣтственныя точки сѣти четыреугольниковъ только тогда могутъ совпадать, когда онѣ лежатъ въ вершинахъ четыреугольниковъ.

Если такъ, то многочленъ $F(u)$ долженъ дѣлиться на одну изъ функцій $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$.

Пусть онъ раздѣлился на $f(u)$:

$$F(u) = f(u)\, F_1(u). \tag{41}$$

Уравненіе:

$$F_1(u) = 0$$

тоже не мѣняется отъ подстановокъ той же группы и къ нему примѣнимы тѣ же разсужденія; и т. д.

Въ результатѣ мы придемъ къ заключенію, что многочленъ $F(u)$ можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$F(u) = f^{m_1}(u)\, H^{m_2}(u)\, T^{m_3}(u), \tag{42}$$

гдѣ m_1, m_2, m_3 числа цѣлыя положительныя, или равныя нулю.

II.

Пусть степень уравненія (39) выше N.

Возьмемъ какой нибудь корень u_1 этого уравненія.

Совершая надъ u_1 подстановки группы, находимъ N величинъ:

$$u_1;\ u_2\ u_3, \ldots\ u_N. \tag{40}$$

Если между величинами (40) найдутся равныя, то, примѣняя тѣ же разсужденія, какъ и выше, найдемъ, что $F(u)$ дѣлится на одинъ изъ многочленовъ: $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$.

Пусть между величинами (40) равныхъ не оказалось.

Подставимъ величину u_1 въ уравненіе (38) и опредѣлимъ соотвѣтствующее значеніе z. Обозначимъ его буквою z_1:

$$z_1 = \frac{H^{\lambda_1}(u_1)}{cf^{\lambda}(u_1)}. \tag{43}$$

Величины (40) составляютъ совокупность всѣхъ корней уравненія:

$$z_1 = \frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}, \tag{44}$$

или:

$$H^{\lambda_1}(u) - z_1 cf^{\lambda}(u) = 0. \tag{45}$$

Отсюда слѣдуетъ, что многочленъ $F(u)$ дѣлится нацѣло на лѣвую часть уравненія (45):

$$F(u) = [H^{\lambda_1}(u) - z_1 cf^{\lambda}(u)]F_1(u). \tag{46}$$

Уравненіе

$$F_1(u) = 0$$

тоже не мѣняется отъ подстановокъ группы уравненія (38), и къ нему примѣнимы тѣ же разсужденія.

Соображая все сказанное, мы приходимъ къ заключенію, что функція $F(u)$ можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$F(u)=\Phi[H^{\lambda_1}(u),\ f^{\lambda}(u)]\, f^{m_1}(u)\, H^{m_2}(u)\, T^{m_3}(u), \tag{47}$$

гдѣ Φ есть цѣлая форма, однородная относительно входящихъ въ нее величинъ:

$$H^{\lambda_1}(u) \text{ и } f^{\lambda}(u),$$

а m_1, m_2, m_3 суть числа цѣлыя и положительныя или равныя 0. Число m_2 мы въ правѣ считать не большимъ 2 вслѣдствіе тождественной связи между функціями $f(u)$, $H(u)$ и $T(u)$:

$$H^{\lambda_1}(u)-cf^{\lambda}(u)=c'\,T^{\lambda_2}(u),$$

гдѣ $\lambda_2=2$.

Пусть форма $F(y',\ y'')$, цѣлая и однородная относительно y', y'', инваріантна по отношенію къ бинарнымъ подстановкамъ нѣкоторой группы, т. е. пусть она подъ вліяніемъ этихъ подстановокъ или совсѣмъ не мѣняется, или пріобрѣтаетъ лишь постоянные множители.

Въ такомъ случаѣ уравненіе:

$$F(u)=0 \tag{39}$$

не будетъ мѣняться отъ подстановокъ соотвѣтствующей группы неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ.

Какъ мы видѣли выше, функція $F(u)$ изобразится формулою (47).

Возстановивъ однородность въ тождествѣ (47), находимъ:

$$\begin{gathered} F(y',y'')= \\ =\Phi[H^{\lambda_1}(y',\ y''),\ f^{\lambda}(y',y'')]\, f^{m_1}(y',\ y'')\, H^{m_2}(y',y'')\, T^{m_3}(y',y''). \end{gathered} \tag{48}$$

Этотъ результатъ мы можемъ формулировать въ видѣ теоремы:

Т е о р е м а 3. *Всякая форма, инваріантная по отношенію къ бинарнымъ подстановкамъ нѣкоторой группы, выражается раціонально черезъ формы:* $f(y',\ y'')$, $H(y',\ y'')$, $T(y',\ y'')$.

Изъ этой теоремы мы выводимъ такія слѣдствія:

Слѣдствіе 1. *Всякій коваріантъ формы $f(y', y'')$ можетъ быть выраженъ раціонально черезъ $f(y', y'')$, $H(y', y'')$, $T(y', y'')$.*

Дѣйствительно, всякій коваріантъ формы $f(y', y'')$ инваріантенъ по отношенію къ подстановкамъ группы.

Слѣдствіе 2. *Всякая бинарная форма, не имѣющая кратныхъ корней и удовлетворяющая условію:*

$$(f, f)^4 = 0,$$

имѣетъ только два независимыхъ коваріанта:

$$H(y', y''),\ T(y', y'')\ *).$$

Дѣйствительно, изъ теоремъ 1-ой и 2-ой мы знаемъ, что условіе:

$$(f, f)^4 = 0$$

характерно для первичной формы наинисшей степени $f(y', y'')$, а изъ слѣдствія 1-го теоремы 3 видимъ, что всякій коваріантъ этой формы выражается черезъ формы:

$$f(y', y''),\ H(y', y''),\ T(y', y'').$$

Теорема 4. *Всякая первичная форма выражается одною изъ формулъ:*

$$af(y', y''),\ bH(y', y''),\ gT(y', y''),\ hH^{\lambda}(y', y'') + kf^{\lambda}(y', y''), \quad (51)$$

гдѣ:

$$a,\ b,\ g,\ h,\ k$$

суть постоянныя числа.

---

*) Это свойство формъ $f(y', y'')$ впервые обнаружено Клейномъ изъ геометрическихъ соображеній. См. Math. Annalen. Томъ 9. Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst.

Горданъ изслѣдовалъ систему инваріантовъ первичныхъ формъ $f(y', y'')$ помощью символическаго метода Аронгольда. См. Math. Annalen. T. 14. Binäre Formen mit verschwindenden Covarianten.

Приведенное мною доказательство разнится отъ доказательствъ Клейна и Гордана.

Пусть:

$$F(y',\ y'')$$

есть первичная форма нѣкоторой степени ν' и пусть линейные множители ея таковы:

$$y_1 = c_1^{(1)}y' + c_2^{(1)}y'',\ y_2 = c_1^{(2)}y' + c_2^{(2)}y'',\ldots,\ y_i = c_1^{(i)}y' + c_2^{(i)}y'',\ldots$$
$$y_{\nu'} = c_1^{(\nu')}y' + c_2^{(\nu')}y''. \tag{49}$$

Величины (49) служатъ приведенною системою корней того уравненія, которому удовлетворяетъ величина y_1. Это суть всевозможныя значенія многозначной функціи y_1 за исключеніемъ тѣхъ значеній, которыя разнятся отъ одного изъ остальныхъ лишь постояннымъ множителемъ.

Положимъ:

$$\frac{y'}{y''} = u\ ,$$

и возьмемъ уравненіе:

$$F(u) = 0. \tag{39}$$

Корни этого уравненія таковы:

$$u_1 = -\frac{c_2^{(1)}}{c_1^{(1)}},\ u_2 = -\frac{c_2^{(2)}}{c_1^{(2)}},\ldots,\ u_i = -\frac{c_2^{(i)}}{c_1^{(i)}},\ldots,$$
$$u_{\nu'} = -\frac{c_2^{(\nu')}}{c_1^{(\nu')}}. \tag{50}$$

Относительно величинъ (50) мы можемъ сказать слѣдующее:

1) равныхъ величинъ между ними нѣтъ,

2) всѣ величины (50) связаны между собою нѣкоторою группою линейныхъ подстановокъ.

Построивъ сѣть, соотвѣтствующую этой группѣ, мы найдемъ, что точки, изображающія количества (50) соотвѣтственны относительно четыреугольниковъ этой сѣти.

Относительно этихъ точекъ можно сдѣлать два предположенія:

1) точки (50) находятся въ вершинахъ четыреугольниковъ сѣти,

2) точки (50) не находятся въ вершинахъ четыреугольниковъ сѣти.

Въ первомъ случаѣ уравненіе (39) тождественно съ однимъ изъ уравненій:

$$f(u) = 0,\ H(u) = 0,\ T(u) = 0.$$

Разсмотримъ второй случай.

Пусть точки (50) не находятся въ вершинахъ четыреугольниковъ сѣти.

Найдемъ величину z_1 по формулѣ:

$$z_1 = \frac{H^{\lambda_1}(u_1)}{f^{\lambda}(u_1)}, \tag{43}$$

гдѣ u_1 есть первая изъ величинъ (50). Ясно, что количества (50) какъ разъ исчерпываютъ собою всѣ корни уравненія:

$$z_1 = \frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)}, \tag{44}$$

или:

$$H^{\lambda_1}(u) - z_1 f^{\lambda}(u) = 0. \tag{45}$$

Если такъ, то уравненіе (39) тождественно съ уравненіемъ (45).

Итакъ, мы нашли, что уравненіе (39) тождественно съ однимъ изъ уравненій:

$$f(u) = 0,\ H(u) = 0,\ T(u) = 0,\ H^{\lambda_1}(u) - z_1 f^{\lambda}(u) = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что многочленъ $F(u)$ тождественъ съ однимъ изъ многочленовъ:

$$af(u),\ bH(u),\ gT(u),\ hH^{\lambda_1}(u) + kf^{\lambda}(u),$$

гдѣ a, b, g, h, k суть нѣкоторыя постоянныя числа.

Возстановивъ однородность, находимъ, что форма $F(y', y'')$ тождественна съ одною изъ формъ:

$$af(y', y''),\ bH(y', y''),\ gT(y', y''),\ hH^{\lambda_1}(y', y'')+kf^{\lambda}(y', y''). \quad (51)$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *Форма*

$$T(y', y'')$$

есть первичная форма.

Если бы $T(y', y'')$ не была первичною формою, то, какъ коваріантъ первичной формы $f(y', y'')$, она могла бы быть представлена въ видѣ произведенія первичныхъ формъ. Эти первичныя формы на основаніи теоремы 4 выразились бы формулами вида:

$$af(y', y''),\ bH(y', y''),\ gT(y', y''),\ hH^{\lambda_1}(y', y''),+kf^{\lambda}(y', y''). \quad (51)$$

Ясно, что форма $T(y', y'')$ не можетъ имѣть общаго множителя съ формами $f(y', y'')$, $H(y', y'')$ и поэтому ни на одну изъ этихъ двухъ формъ она дѣлиться не можетъ.

Такъ какъ степень формы:

$$hH^{\lambda_1}(y', y'')+kf^{\lambda}(y', y'')$$

выше степени формы $T(y', y'')$, то форма $T(y', y'')$ на нее раздѣлиться также не можетъ.

Итакъ, форма $T(y', y'')$ не дѣлится ни на одну изъ формъ (51) кромѣ формы $gT(y', y'')$. Она, необходимо, форма первичная.

§ 28. **Тождества, связывающія между собою первичныя формы $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$ различныхъ типовъ.**

Въ § 14 мы разсмотрѣли относительное расположеніе вершинъ, центровъ граней и срединъ реберъ различныхъ многогранниковъ, приведенныхъ въ такія положенія, что они, какъ мы говорили, *соотвѣтствуютъ* другъ другу.

Соотвѣтственными положеніями многогранниковъ могутъ служить: четырехгранная двупирамида, тетраэдръ и октаэдръ въ положеніяхъ, соотвѣтствующихъ *первымъ* нормальнымъ сѣтямъ и икосаэдръ въ положеніи, соотвѣтствующемъ *второй* нормальной сѣти, или: икосаэдръ въ положеніи, соотвѣтствующемъ первой нормальной сѣти, тетраэдръ и октаэдръ въ положеніяхъ, соотвѣтствующихъ третьимъ нормальнымъ сѣтямъ.

Поэтому, сравнивая между собою функціи типовъ: четверичнаго, тетраэдрическаго и октаэдрическаго, мы беремъ первые или третьи нормальные виды, а сравнивая функціи икосаэдрическія съ остальными, мы беремъ первыя нормальныя икосаэдрическія функціи и третьи нормальныя тетраэдрическія и октаэдрическія функціи.

Пользуясь результатами, найденными въ § 27, мы можемъ получить рядъ соотношеній между функціями $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$ различныхъ типовъ.

При составленіи этихъ соотношеній мы должны помнить, что многочлены:

$$f(u), \quad H(u), \quad T(u)$$

имѣютъ корнями: проэкціи вершинъ, центровъ граней и срединъ реберъ соотвѣтствующаго многогранника.

Типъ функціи мы будемъ обозначать индексомъ внизу функціональнаго знака.

Рядомъ съ тетраэдрическими функціями:

$$f_m(u), \quad H_m(u), \quad T_m(u)$$

мы будемъ пользоваться функціями, соотвѣтствующими дополнительному тетраэдру и обозначимъ ихъ такъ:

$$f_m{}^*(u), \quad H_m{}^*(u), \quad T_m{}^*(u).$$

I. Такъ какъ вершины тетраэдра совпадаютъ съ центрами граней дополнительнаго ему тетраэдра, то:

$$\left.\begin{aligned} f_m(u) &= H_m{}^*(u), \\ f_m{}^*(u) &= H_m(u). \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

II. Такъ какъ средины реберъ двухъ взаимно дополнительныхъ тетраэдровъ совпадають, то должно имѣть мѣсто тождество:

$$T_m(u) = T_m{}^*(u). \tag{53}$$

III. Восемь вершинъ двухъ взаимно дополнительныхъ тетраэдровъ совпадаютъ съ восьмью центрами граней октаэдра; отсюда слѣдуютъ тождества:

$$f_m(u) \cdot f_m{}^*(u) = H_m(u)\ H_m{}^*(u) = H_0(u)\ ^*), \tag{54}$$

или:

$$f_m(u) H_m(u) = f_m{}^*(u) H_m{}^*(u) = H_0(u). \tag{55}$$

IV. Шесть srединъ реберъ каждаго изъ двухъ взаимно дополнительныхъ тетраэдровъ совпадаютъ съ вершинами октаэдра:

$$T_m(u) = T_m{}^*(u) = f_0(u). \tag{56}$$

V. Вершины A, A', P, P' вмѣстѣ съ срединами реберъ B, B' четырехгранной двупирамиды **) совпадаютъ съ вершинами октаэдра:

$$f_u(u)\ H_u(u)\ T_u(u) = \frac{1}{4} f_0(u) = \frac{1}{4}\ T_m(u). \tag{57}$$

VI. Вершины октаэдра совпадаютъ съ 6 изъ числа 30 срединъ реберъ соотвѣтствующаго ему икосаэдра. Отсюда слѣдуетъ, что икосаэдрическая функція $T_u(u)$ дѣлится нацѣло на октаэдрическую функцію $f_0{}''(u)$:

---

*) Для большей полноты слѣдовало бы во второй части тождества (54) и всѣхъ дальнѣйшихъ подобныхъ тождествъ присоединять постоянный множитель, потому что изъ тождественности двухъ уравненій слѣдуетъ лишь пропорціональность ихъ коэффиціентовъ. Сравнивая затѣмъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ перемѣннаго, можно найти числовую величину этого постояннаго множителя. Для сокращенія разсужденій мы во всѣхъ тождествахъ, подобныхъ (54), прямо вставляемъ числовыя значенія множителей пропорціональности.

**) См черт. 19.

$$T(u) = f_0''(u)\,\psi(u). \tag{58}$$

Совершая надъ обѣими частями тождества (58) икосаэдрическую подстановку:

$$S_u^k(u) = \varepsilon^k u, \text{ гдѣ } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}},$$

находимъ:

$$T_u(u) = f_0''(\varepsilon^k u)\,\psi(\varepsilon^k u). \tag{59}$$

Изъ формулы (66) главы V заключаемъ, что многочлены:

$$f_0''(u),\ f_0''(\varepsilon u),\ f_0''(\varepsilon^2 u),\ f_1''(\varepsilon^3 u),\ f_0''(\varepsilon^4 u) \tag{60}$$

различны между собою и общихъ корней не имѣютъ.

Если такъ, то изъ тождества (59) слѣдуетъ, что многочленъ $T_u(u)$ дѣлится на всѣ 5 многочленовъ (60); онъ равенъ произведенію многочленовъ (60):

$$T_u(u) = f_0''(u)\,f_0''(\varepsilon u)\ f_0''(\varepsilon^2 u)\ f_0''(\varepsilon^3 u)\ f_0''(\varepsilon^4 u). \tag{61}$$

VII. Такъ какъ положеніе тетраэдра не мѣняется отъ поворотовъ, не мѣняющихъ положенія соотвѣтствующей ему четырехгранной двупирамиды, то уравненія:

$$f_m(u) = 0 \text{ и } H_m(u) = 0$$

инваріанты относительно подстановокъ четверичной группы.

Отсюда слѣдуетъ, что многочлены $f_m(u)$ и $H_m(u)$ могутъ быть выражены черезъ $f_u(u)$, $H_u(u)$, $T_u(u)$ по формулѣ (47). При этомъ ясно, что въ данномъ случаѣ показатели m_1, m_2, m_3 равны нулю, а форма Φ первой степени относительно ея аргументовъ:

$$\left.\begin{aligned} f_m(u) &= a\ H_u^2(u) + b f_u^2(u), \\ H_m(u) &= h\ H_u^2(u) + k f_u^2(u). \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Совершивъ сравненіе коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ въ обѣихъ частяхъ тождествъ (62), легко находимъ числовыя значенія a, b, h, k. Вставивъ эти числовыя значенія въ равенства (62), находимъ такія тождества:

$$\left.\begin{aligned} f_m(u) &= 4H_u^2(u) + 4\varepsilon f_u^2(u), \\ H_m(u) &= 4H_u^2(u) + 4\varepsilon^2 f_u^2(u), \\ &\text{гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

VIII. Возведя въ квадратъ обѣ части тождества:

$$f_0(u) = T_m(u) \qquad (56')$$

и припомнивъ, что:

$$-12i\sqrt{3}\, T_m^2(u) = H_m^3(u) - f_m^3(u), \qquad (64)$$

находимъ:

$$f_0^2(u) = \frac{i}{12\sqrt{3}}[H_m^3(u) - f_m^3(u)]\ ^*). \qquad (65)$$

IX. Такъ какъ положеніе икосаэдра не мѣняется отъ поворотовъ, не мѣняющихъ положенія соотвѣтствующаго ему тетраэдра, то уравненіе:

$$f_u(u) = 0$$

инваріантно по отношенію къ подстановкамъ третьей нормальной тетраэдрической группы. Отсюда слѣдуетъ, что многочленъ $f_u(u)$ можетъ быть выраженъ черезъ $f_m''(u)$, $H_m''(u)$, $T_m''(u)$ по формулѣ (47):

$$f_u(u) = \Phi[H_m''^2(u),\ f_m''^3(u)]\, f_m''^{m_1}(u)\, H_m''^{m_2}(u)\, T_m''^{m_3}(u). \qquad (66)$$

Вершины икосаэдра не совпадаютъ ни съ вершинами, ни съ центрами граней, ни съ срединами реберъ соотвѣтствующаго тетраэдра. Отсюда слѣдуетъ, что въ тождествѣ (66)

---

*) Это тождество можно получить тѣмъ же путемъ, какъ мы получили тождества (63).

показатели m_1, m_2, m_3 равны нулю. Если такъ, то функція Φ первой степени относительно входящихъ въ нее аргументовъ:

$$f_u(u) = hH_m''^3(u) + kf_m''^3(u). \tag{67}$$

Вычислять коэффиціенты h и k мы не будемъ, потому что они намъ не нужны.

Возьмемъ тождество:

$$f_0^2(u) = \frac{i}{12\sqrt{3}}[H_m^3(u) - f_m^3(u)]. \tag{65}$$

Совершивъ надъ нимъ подстановку σ, преобразующую первую нормальную тетраэдрическую сѣть въ третью *), находимъ:

$$f_0''^2(u) = \frac{i}{12\sqrt{3}}[H_m''^3(u) - f_m''^3(u)]. \tag{65'}$$

Рѣшая систему уравненій (67) и (65′) относительно $H_m''^3(u)$ и $f_m''^3(u)$, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} H_m''^3(u) &= Af_u(u) + Bf_0''^2(u), \\ f_m''^3(u) &= Cf_u(u) + Df_0''^2(u). \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Коэффиціенты A, B, C, D имѣютъ конечныя величины потому, что опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} h\;, & k \\ \dfrac{i}{12\sqrt{3}}\,, & -\dfrac{i}{12\sqrt{2}} \end{vmatrix} \tag{69}$$

не можетъ равняться 0; иначе величина h равнялась бы $-k$, функція $f_u(u)$ разнилась бы отъ $f_0''^2(u)$ лишь постояннымъ

---

*) См. главу IV, формулу (17).

множителемъ, первичная функція $f_u(u)$ имѣла бы кратные корни; а этого быть не можетъ.

Всѣ четыре коэффиціента: A, B, C, D отличны отъ нуля; иначе тождества (68) были бы невозможны: напр. при $B=0$ мы нашли бы:

$$H_m''^3(u) = Af_u(u);$$

первичная функція $f_u(u)$ имѣла бы кратные корни.

Итакъ, въ тождествахъ (68) коэффиціенты A, B, C, D конечны и отличны отъ 0.

Такъ какъ уравненія:

$$T_u(u) = 0 \text{ и } H_u(u) = 0$$

инваріантны по отношенію къ подстановкамъ третьей нормальной тетраэдрической группы, то должны имѣть мѣсто тождества вида:

$$\left.\begin{aligned} T_u(u) &= \Phi_1[f_m''^3(u), H_m''^3(u)]\, f_m''^{m_1}(u) H_m''^{m_2}(u)\, T_m''^{m_3}(u), \\ H_u(u) &= \Phi_2[f_m''^3(u), H_m''^3(u)]\, f_m''^{p_1}(u)\, H_m''^{p_2}(u)\, T_m''^{p_3}(u). \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Подставивъ въ тождества (70) выраженія (68) функцій $f_m''^3(u)$ и $H_m''^3(u)$ и замѣтивъ, что вслѣдствіе тождества (56′) должно имѣть мѣсто тождество:

$$T_m''(u) = f_0''(u), \qquad (56'')$$

мы приведемъ тождества (70) къ такому виду:

$$\left.\begin{aligned} T_u(u) &= \psi_1[f_u(u), f_0''^2(u)]\, f_m''^{\alpha}(u)\, H_m''^{\beta}(u)\, f_0''^{m_3}(u), \\ H_u(u) &= \psi_2[f_u(u), f_0''^2(u)]\, f_m''^{\gamma}(u)\, H_m''^{\delta}(u)\, f_0''^{p_3}(u), \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

гдѣ ψ_1, ψ_2 суть цѣлыя однородныя формы по отношенію къ входящимъ въ нихъ аргументамъ, а показатели α, β, γ, δ суть наименьшіе положительные вычеты чиселъ m_1, m_2, p_1, p_2 по модулю 3.

Каждое изъ чиселъ:

$$\alpha,\ \beta,\ m_3,\ \gamma,\ \delta,\ p_3$$

можетъ равняться только 0 или 1, потому что функціи $T_u(u)$ и $H_u(u)$ кратныхъ корней не имѣютъ.

Такъ какъ вершины октаэдра совпадаютъ съ 6 изъ числа 30 срединъ реберъ икосаэдра, а вершины и центры граней тетраэдра совпадаютъ съ 8 изъ числа 20 центровъ граней икосаэдра, то $T_u(u)$ дѣлится на $f_0''(u)$, а $H_u(u)$ дѣлится на $f_m''(u)\,H_m''(u)$. Поэтому въ равенствахъ (71) показатели m_3, γ и δ равны 1.

Такъ какъ многочлены $T_u(u)$ и $H_u(u)$ общихъ корней имѣть не могутъ, то показатели: α, β, p_3 должны равняться нулю. Теперь не трудно найти, каковы степени формъ ψ_1 и ψ_2 относительно $f_u(u)$ и $f_0''^2(u)$: первая изъ нихъ второй степени, а вторая—первой степени.

Итакъ:

$$\left.\begin{aligned} T_u(u) &= [af_u^2(u) + bf_u(u)\,f_0''^2(u) + cf_0''^4(u)]\,f_0''(u) \\ H_u(u) &= [pf_u(u) + q\,f_0''^2(u)]\,f_m''(u)\,H_m''(u). \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Замѣтивъ, что изъ тождества (55) слѣдуетъ:

$$f_m''(u)\,H_m''(u) = H_0''(u), \tag{55'}$$

и подставивъ это выраженіе во второе изъ равенствъ (72), мы можемъ затѣмъ опредѣлить числовыя величины постоянныхъ a, b, c, p, q черезъ сравненіе коэффиціентовъ.

Вставивъ эти числовыя значенія коэффиціентовъ въ тождества (72), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} T_u(u) &= [f_0''^4(u) - 10f_0''^2(u)\,f_u(u) + 45f_u^2(u)]\,f_0''(u) \\ H_u(u) &= [f_0''^2(u) - 3f_u(u)]\,H_0''(u). \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

X. Возведя въ кубъ обѣ части тождества (55′) и замѣнивъ

$f_m''^3(u)$, $H_m''^3(u)$ выраженіями (68), мы найдемъ тождество такого вида:

$$H_0''^3(u) = af_u^2(u) + bf_u(u)f_0''^2(u) + cf_0''^4(u). \qquad (74)$$

Подставивъ выраженія функцій $H_0''(u)$, $f_u(u), f_0''(u)$ и совершивъ сравненіе коэффиціентовъ, находимъ числовыя величины a, b, c. Вставивъ ихъ въ равенство (74), находимъ:

$$H_0''^3(u) = 64f_u^2(u) - 11f_u(u)f_0''^2(u) + f_0''^4(u). \qquad (75)$$

Найденныя въ настоящей главѣ свойства функцій $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$ и соотношенія между функціями различныхъ типовъ дадутъ возможность раскрыть глубже свойства изучаемыхъ нами уравненій и приведутъ весьма просто къ ихъ рѣшенію.

АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ УРАВНЕНІЯ, РАЗРѢШИМЫЯ ВЪ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЯХЪ.

Л. К. Лахтина.

Читано въ засѣданіяхъ Математическаго Общества 15 сентября и 20 октября 1892 года).

ГЛАВА VII.

Рѣшеніе уравненій, имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

§ 29. **Критерій для рѣшенія вопроса о томъ, не служатъ ли корни даннаго алгебраическаго уравненія отношеніями частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.**

Изъ главы II намъ извѣстно, что всякое алгебраическое уравненіе, имѣющее корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка тождественными преобразованіями приводится къ виду:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : c f^{\lambda}(u) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1, \tag{1}$$

или:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)} = R(z), \tag{1'}$$

при чемъ многочлены $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$, ихъ степени ν, ν_1, ν_2 и показатели λ, λ_1, λ_2 имѣютъ уже извѣстныя намъ значенія.

Пусть дано алгебраическое уравненіе:

$$\psi(u, z) = 0 \tag{2}$$

степени N, и спрашивается, не принадлежитъ ли оно къ классу уравненій (1)?

Мы въ правѣ предполагать, что уравненіе (2) неприводимо, потому что иначе мы разбили бы его на нѣсколько неприводимыхъ уравненій и разсмотрѣли бы ихъ въ отдѣльности.

Если уравненіе (2) принадлежитъ къ одному изъ четырехъ типовъ: двупирамидному—степени $2m$, тетраэдрическому—степени 12, октаэдрическому—степени 24 или икосаэдрическому—степени 60, то степень уравненія (2) непремѣнно четная. Отсюда:

Первое необходимое условіе тождественности уравненій (2) и (1):

Степень N уравненія (2) должна быть четная.

Если уравненіе (2) можетъ быть приведено къ виду (1′), то оно во всякомъ случаѣ должно приводиться къ виду:

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = \Re(z), \tag{3}$$

гдѣ $\psi(u)$ и $\varphi(u)$ суть цѣлые раціональные взаимно простые многочлены, а $\Re(z)$—раціональная функція z.

Отсюда:

Второе необходимое условіе тождественности уравненій (2) и (1):

Уравненіе (2) послѣ переноса во вторую часть нѣкоторыхъ членовъ и дѣленія на нѣкоторую раціональную функцію u и z должно приводиться къ виду:

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = \Re(z). \tag{3}$$

Рѣшить вопросъ о томъ, выполняется ли это условіе, можно совершенно элементарными способами.

Пусть это условіе выполнено.

Убѣдившись въ этомъ, мы въ то же время находимъ функціи $\psi(u)$ и $\varphi(u)$.

Преобразуя линейно обѣ части уравненія (1′), мы можемъ получить безконечное число уравненій тождественныхъ съ (1′); всѣ они будутъ такого вида:

$$\frac{\alpha H^{\lambda_1}(u) + \beta f^{\lambda}(u)}{\gamma H^{\lambda_1}(u) + \delta f^{\lambda}(u)} = \frac{\alpha R(z) + \beta}{\gamma R(z) + \delta}, \tag{4}$$

гдѣ α, β, γ, δ суть какія угодно числа, удовлетворяющія условію: $\alpha\delta - \beta\gamma$ отлично отъ 0.

Не трудно усмотрѣть, что уравненіе (3) только въ томъ случаѣ можетъ быть тождественно съ уравненіемъ (1′), когда оно принадлежитъ къ числу уравненій (4), т. е. когда имѣютъ мѣсто тождественныя равенства:

$$\left.\begin{aligned}\psi(u) &= \alpha H^{\lambda_1}(u) + \beta f^{\lambda}(u),\\ \varphi(u) &= \gamma H^{\lambda_1}(u) + \delta f^{\lambda}(u).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Посмотримъ, какъ по даннымъ многочленамъ $\psi(u)$ и $\varphi(u)$ найти многочлены $f(u)$ и $H(u)$ и убѣдиться въ существованіи тождествъ (5).

Возьмемъ выраженіе:

$$\Omega(u) = \psi(u)\frac{d\varphi(u)}{du} - \varphi(u)\frac{d\psi(u)}{du}. \tag{6}$$

Подставивъ въ это выраженіе формулы $\psi(u)$ и $\varphi(u)$, даваемыя равенствами (5), находимъ:

$$\begin{aligned}\Omega(u) = (\alpha\delta - \beta\gamma)\left[\lambda_1 f(u)\frac{dH(u)}{du} - \lambda H(u)\frac{df(u)}{du}\right]\times\\ \times f^{\lambda-1}(u)H^{\lambda_1-1}(u),\end{aligned} \tag{7}$$

или:

$$\Omega(u) = N(\alpha\delta - \beta\gamma)\, f^{\lambda-1}(u)\, H^{\lambda_1-1}(u)\, T(u). \tag{8}$$

Функція $\Omega(u)$ намъ извѣстна; степень N уравненія (2) тоже извѣстна; относительно показателей λ, λ_1, λ_2 и степеней ν, ν_1, ν_2 функцій $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$ можно сдѣлать не болѣе двухъ предположеній:

1) уравненіе (2) можетъ быть двупирамиднымъ, и въ такомъ случаѣ числа λ, λ_1, λ_2, ν, ν_1, ν_2 должны соотвѣтственно равняться:

$$\frac{N}{2},\ 2,\ 2,\ 2,\ \frac{N}{2},\ \frac{N}{2};$$

2) если N равно одному изъ чиселъ:

$$12,\ 24,\ 60,$$

то уравненіе (2) можетъ принадлежать къ одному изъ типовъ: тетраэдрическому, октаэдрическому или икосаэдрическому, и тогда числа λ, λ_1, λ_2, ν, ν_1, ν_2 получатъ значенія соотвѣтствующія этому типу.

На основаніи только что приведенныхъ соображеній мы найдемъ одну или двѣ системы значеній, которыя могутъ имѣть числа λ, λ_1, λ_2, ν, ν_1, ν_2.

Отсюда вытекаетъ:

Третье необходимое условіе тождественности уравненій (2) и (1):

Многочленъ $\Omega(u)$ долженъ имѣть:

ν корней λ—1-кратныхъ,

ν_1 корней λ_1—1-кратныхъ,

ν_2 корней простыхъ.

Мы можемъ убѣдиться въ выполненіи этого условія, примѣняя обычный пріемъ алгебры, служащій для отдѣленія кратныхъ корней *).

Пусть эти условія выполнились.

Убѣдившись въ выполненіи условія, мы въ то же время находимъ многочлены $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$ и узнаемъ, къ которому изъ четырехъ типовъ можетъ принадлежать уравненіе (2).

Четвертое необходимое условіе тождественности уравненій (1) и (2):

Если уравненіе (2) тетраэдрическое, октаэдрическое или икосаэдрическое, то найденная функція $f(u)$ должна удовлетворять условію:

$$(f, f)^4 = 0.$$

Если уравненіе (2) двупирамидное, то многочленъ $f(u)$ долженъ быть второй степени.

*) Въ случаѣ тетраэдрическаго уравненія указанный пріемъ даетъ функцію $T(u)$ и произведеніе $f(u)\,H(u)$. По этимъ даннымъ можно найти $f(u)$ и $H(u)$.

Въ случаѣ четверичнаго уравненія указанный путь къ цѣли не приводимъ; но это—случай вполнѣ элементарный.

Пятое необходимое условіе:

Если уравненіе (2) принадлежитъ къ одному изъ типовъ: тетраэдрическому, октаэдрическому или икосаэдрическому, то найденная функція $H(u)$ должна быть гессіаномъ найденной функціи $f(u)$, а найденная функція $T(u)$ должна быть функціональнымъ опредѣлителемъ $f(u)$ и $H(u)$.

Если уравненіе (2) принадлежитъ къ двупирамидному типу, то должны имѣть мѣсто тождества:

$$H(u)=\frac{f_1^m+f_2^m}{2},\quad T(u)=\frac{f_1^m-f_2^m}{2},$$

гдѣ f_1 и f_2 суть два линейныхъ множителя найденнаго квадратнаго многочлена $f(u)$:

$$f(u)=f_1f_2 \text{ *)}.$$

Шестое необходимое условіе:

Между найденными многочленами $\psi(u)$, $\varphi(u)$, $f(u)$, $H(u)$ должна имѣть мѣсто тождественная зависимость:

$$\left.\begin{aligned}\psi(u)&=\alpha H^{\lambda_1}(u)+\beta f^{\lambda}(u),\\ \varphi(u)&=\gamma H^{\lambda_1}(u)+\delta f^{\lambda}(u).\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Убѣдившись въ выполненіи этого условія, мы въ то же время находимъ коэффиціенты α, β, γ, δ.

Имѣя величины этихъ коэффиціентовъ, мы можемъ въ дѣйствительности преобразовать уравненіе (2) въ (1′) и въ (1).

Изъ сказаннаго видно, что приведенные шесть условій необходимы и достаточны для того, чтобы уравненіе (2) имѣло корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Примѣръ.

Дано уравненіе:

$$u^3(u+1)^3+3u(u+1)+1+zu^2(u+1)^2=0. \qquad (9)$$

Спрашивается, не принадлежитъ ли оно къ изучаемому нами классу уравненій?

---

*) См. § 22 формулы 16.

Степень уравненія (9) равна 6—числу четному. Слѣдовательно первое условіе выполняется.

Уравненіе (9) можетъ принадлежать лишь къ двупирамидному типу.

Приводимъ уравненіе (9) къ виду:

$$\frac{u^3(u+1)^3+3u(u+1)+1}{u^2(u+1)^2}=-z. \tag{10}$$

Второе условіе выполнено.

Сохраняя прежнія обозначенія, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}\psi(u)&=u^3(u+1)^3+3u(u+1)+1,\\ \varphi(u)&=u^2(u+1)^2.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Отсюда:

$$\Omega(u)=u(u+1)(2u+1)(u^2+u-2)(u^2+u+1)^2. \tag{12}$$

Этотъ многочленъ имѣетъ два двукратныхъ корня.

Условіе третье выполнено.

Первичная функція $f(u)$ такова:

$$f(u)=u^2+u+1. \tag{13}$$

Условіе четвертое выполнено.

Линейные множители многочлена $f(u)$ таковы:

$$f_1=u-\varepsilon,\ f_2=u-\varepsilon^2,\ \text{гдѣ}\ \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}. \tag{14}$$

Функціи $H(u)$ и $T(u)$ таковы:

$$\left.\begin{aligned}H(u)&=\frac{f_1{}^3+f_2{}^3}{2}=\frac{1}{2}(2u+1)(u^2+u-2),\\ T(u)&=\frac{f_1{}^3-f_2{}^3}{2}=-\frac{i\sqrt{3}}{2}u(u+1).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Дѣйствительно, функція $\Omega(u)$ разнится отъ

$$f^2(u)\ H(u)\ T(u)$$

только постояннымъ множителемъ.

Въ то же время мы видимъ, что функціи:

$$f(u),\ H(u),\ T(u)$$

удовлетворяютъ условію пятому.

Подставивъ выраженія (13) и (15) въ равенства:

$$\left.\begin{aligned}\psi(u)&=\alpha H^2(u)+\beta f^3(u),\\ \varphi(u)&=\gamma H^2(u)+\delta f^3(u),\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

находимъ:

$$\alpha=\frac{4}{9},\ \beta=\frac{5}{9},\ \gamma=-\frac{4}{27},\ \delta=\frac{4}{27}.\qquad(17)$$

Условіе шестое выполнено.

Слѣдовательно уравненіе (9) двупирамидное.

Изъ формулъ (16), (17), (11) и (10) слѣдуетъ, что его можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{4H^2(u)+5f^3(u)}{H^2(u)-f^3(u)}=\frac{4}{3}z,\qquad(18)$$

гдѣ $H(u)$ и $f(u)$ даются формулами (13) и (15).

Изъ уравненія (18) слѣдуетъ:

$$\frac{H^2(u)}{f^3(u)}=\frac{4z+15}{4z-12},\qquad(19)$$

или, наконецъ:

$$H^2(u):T^2(u):f^3(u)=4z+15:27:4z-12,\qquad(20)$$

гдѣ $H(u)$, $T(u)$ и $f(u)$ имѣютъ значенія, даваемыя формулами (13) и (15).

§ 30. Приведеніе уравненія къ нормальному виду.

Примѣняя пріемы предыдущаго параграфа, мы можемъ всякое уравненіе изучаемаго нами класса привести къ виду (1).

Затѣмъ мы можемъ его нѣсколько упростить по виду, принявъ:

$$\frac{1}{c} R(z)$$

за новое независимое перемѣнное (въ главѣ II-ой мы его обозначали буквою t).

Для простоты (какъ мы уже дѣлали раньше) мы обозначимъ новое перемѣнное тою же буквою z и представимъ уравненіе (1) въ такомъ видѣ:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : c f^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1. \tag{21}$$

Вообще говоря, уравненіе (21) не будетъ нормальнаго вида; но мы можемъ утверждать, что оно непремѣнно эквивалентно нормальному уравненію.

Посмотримъ, какъ найти ту линейную подстановку, которая преобразуетъ данное уравненіе въ нормальное.

Для опредѣленности мы будемъ изображать данное намъ алгебраическое уравненіе такъ:

$$\overline{H}^{\lambda_1}(\bar{u}) : \bar{c}' \overline{T}^{\lambda_2}(\bar{u}) : \bar{c} \bar{f}^{\lambda}(\bar{u}) = z : z - 1 : 1, \tag{22}$$

а для нормальнаго уравненія сохранимъ прежнія обозначенія:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : c f^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1. \tag{21}$$

Функціи $\overline{H}(\bar{u})$, $\overline{T}(\bar{u})$, $\bar{f}(\bar{u})$ и постоянныя $\bar{c}'$, $\bar{c}$ намъ даны, нормальныя функціи $H(u)$, $T(u)$, $f(u)$ и постоянныя c' и c найдены нами въ главѣ V.

Неизвѣстныя $\bar{u}$ и u связаны между собою линейною зависимостью:

$$\bar{u} = \frac{pu + q}{ru + s}. \tag{23}$$

Задача наша состоитъ въ нахожденіи постоянныхъ коэффиціентовъ:

$$p,\ q,\ r,\ s.$$

Пользуясь произволомъ одного изъ этихъ коэффиціентовъ, мы можемъ на нихъ наложить условіе:

$$ps - qr = 1. \tag{24}$$

Дадимъ величинѣ $\bar{u}$ какое нибудь произвольное значенiе $\bar{a}$ и опредѣлимъ соотвѣтствующее ему значенiе z изъ уравненiя (22); пусть при $\bar{u} = \bar{a}$ перемѣнное z равно α.

Въ такомъ случаѣ:

$$\alpha = \frac{\bar{H}^{\lambda_1}(\bar{a})}{\bar{c}\bar{f}^{\lambda}(\bar{a})}. \tag{25}$$

Подставивъ значенiе $z = \alpha$ въ уравненiе (21), находимъ:

$$\alpha = \frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}. \tag{26}$$

Положимъ, что намъ удалось рѣшить это *нормальное* уравненiе и пусть одинъ изъ корней его есть:

$$u = a.$$

Въ такомъ случаѣ между величинами a и $\bar{a}$ существуетъ зависимость (23):

$$\bar{a} = \frac{pa + q}{ra + s}. \tag{27}$$

Изъ уравненiй (21) и (22) слѣдуетъ:

$$\frac{\bar{H}^{\lambda_1}(\bar{u})}{\bar{c}\bar{f}^{\lambda}(\bar{u})} = \frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}. \tag{28}$$

Дифференцируемъ обѣ части этого уравненiя по u:

$$\frac{\left(\lambda_1 \bar{f}(\bar{u}) \dfrac{d\bar{H}(\bar{u})}{du} - \lambda \bar{H}(\bar{u}) \dfrac{d\bar{f}(\bar{u})}{du}\right) \bar{H}^{\lambda_1 - 1}(\bar{u})}{\bar{c}\bar{f}^{\lambda+1}(\bar{u})} \frac{d\bar{u}}{du} =$$

$$= \frac{\left(\lambda_1 f(u) \dfrac{dH(u)}{du} - \lambda H(u) \dfrac{df(u)}{du}\right) H^{\lambda_1 - 1}(u)}{cf^{\lambda+1}(u)}, \tag{29}$$

или:

$$\frac{\overline{T}(\bar{u})}{\overline{f}(\bar{u})\,\overline{H}(\bar{u})}\frac{d\bar{u}}{du}=\frac{T(u)}{f(u)\;H(u)},$$

откуда:

$$\frac{d\bar{u}}{du}=\frac{T(u)\,\overline{f}(\bar{u})\;\overline{H}(\bar{u})}{\overline{T}(\bar{u})\,f(u)\;H(u)}. \tag{30}$$

Дифференцируя это равенство по u, мы можемъ найти выраженіе:

$$\frac{d^2\bar{u}}{du^2}$$

въ функціи u и $\bar{u}$.

Подставивъ въ полученныхъ выраженіяхъ $\frac{d\bar{u}}{du}$, $\frac{d^2\bar{u}}{du^2}$ величины:

$$u=a,\ \bar{u}=\bar{a},$$

найдемъ:

$$\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)_{z=\alpha}=A,\ \left(\frac{d^2\bar{u}}{du^2}\right)_{z=\alpha}=B, \tag{31}$$

гдѣ A и B суть нѣкоторыя извѣстныя числа.

Дифференцируя два раза по u уравненіе (23), находимъ:

$$\frac{d\bar{u}}{du}=\frac{1}{(ru+s)^2}, \tag{32}$$

$$\frac{d^2\bar{u}}{du^2}=-\frac{2r}{(ru+s)^3}. \tag{33}$$

Подставивъ въ эти равенства значенія:

$$u=a,\ \frac{d\bar{u}}{du}=A,\ \frac{d^2\bar{u}}{du^2}=B,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} A(ra+s)^2 &= 1, \\ B(ra+s)^3 &= -2r. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Изъ уравненій (24), (27), (34) мы опредѣлимъ четыре искомыхъ коэффиціента:

$$p,\ q,\ r,\ s.$$

Итакъ, *для приведенія уравненія (22) къ нормальному виду (21) необходимо рѣшить одно нормальное уравненіе (26) того же типа.*

Рѣшивъ уравненіе (21), мы будемъ въ состояніи найти корни уравненія (22): корни этихъ уравненій связаны между собою линейною зависимостью (23).

Слѣдовательно *для рѣшенія уравненія общаго вида (22) необходимо рѣшить два нормальныхъ уравненія того же типа (26) и (21).*

Задача о рѣшеніи уравненія общаго вида приводится, такимъ образомъ, къ задачѣ о рѣшеніи нормальнаго уравненія того же типа.

Въ слѣдующихъ параграфахъ мы займемся вопросомъ о рѣшеніи нормальныхъ уравненій.

§ 31. **Рѣшеніе въ радикалахъ уравненій: двупирамиднаго, тетраэдрическаго и октаэдрическаго.**

Мы уже упоминали въ главѣ IV, что уравненія: тетраэдрическое и октаэдрическое разрѣшимы въ радикалахъ. Двупирамидное уравненіе въ нормальной формѣ разрѣшимо въ радикалахъ совершенно элементарнымъ способомъ.

Найдемъ эти рѣшенія.

Возьмемъ нормальныя уравненія:

1) $\left(\dfrac{u^m+1}{2}\right)^2 : \left(\dfrac{u^m-1}{2}\right)^2 : u^m = z_\partial : z_\partial - 1 : 1$ двупирамидное, (35)

2) $\left(\dfrac{u^2+1}{2}\right)^2 : \left(\dfrac{u^2-1}{2}\right)^2 : u^2 = z_ч : z_ч - 1 : 1$ четверичное, (36)

3) $(u^4-2i\sqrt{3}\,u^2+1)^3 : -12i\sqrt{3}(u^5-u)^2 :$
$: (u^4+2i\sqrt{3}\,u^2+1)^3 = z_m : z_m - 1 : 1$ — тетраэдрическое, (37)

4) $(u^8+14u^4+1)^3 : (u^{12}-33u^8-33u^4+1)^2 :$
$: 108(u^5-u)^4 = z_0 : z_0 - 1 : 1$ — октаэдрическое. (38)

Пусть параметры $z_ч$, z_m, z_0 выбраны такъ, что уравненія (36), (37), (38) имѣютъ общій корень u.

I. Двупирамидное уравненіе.

Рѣшеніе двупирамиднаго уравненія не представляетъ никакихъ затрудненій: написавъ это уравненіе въ формѣ:

$$\left(\frac{u^m+1}{u^m-1}\right)^2=\frac{z_д}{z_д-1}, \tag{39}$$

мы находимъ, что

$$u=\sqrt[m]{\frac{\sqrt{z_д}+\sqrt{z_д-1}}{\sqrt{z_д}-\sqrt{z_д-1}}}, \tag{40}$$

или:

$$u=\sqrt[m]{(\sqrt{z_д}+\sqrt{z_д-1})^2}. \tag{41}$$

Всѣ корни уравненія (35) выражаются $2m$-значною функціею (41).

II. Четверичное уравненіе.

Положивъ въ формулѣ (41) $m=2$, находимъ выраженія корней четверичнаго уравненія (36):

$$u=\sqrt{z_ч}+\sqrt{z_ч-1}. \tag{42}$$

III. Тетраэдрическое уравненіе.

Возьмемъ тождества (63) главы VI:

$$\left.\begin{aligned} &f_m(u)=4H_ч^2(u)+4\varepsilon f_ч^2(u),\\ &H_m(u)=4H_ч^2(u)+4\varepsilon^2 f_ч^2(u),\\ &\text{гдѣ } \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Изъ этихъ тождествъ находимъ:

$$\frac{H_m^3(u)}{f_m^3(u)}=\left\{\frac{\dfrac{H_ч^2(u)}{f_ч^2(u)}+\varepsilon^2}{\dfrac{H_ч^2(u)}{f_ч^2(u)}+\varepsilon}\right\}^3, \tag{44}$$

или, принявъ во вниманіе уравненія (36) и (37):

$$z_m=\left(\frac{z_ч+\varepsilon^2}{z_ч+\varepsilon}\right)^3, \tag{45}$$

откуда:

$$z_ч=\frac{\varepsilon\sqrt[3]{z_m}-\varepsilon^2}{1-\sqrt[3]{z_m}}. \tag{46}$$

Подставивъ это выраженіе $z_ч$ въ формулу (42), находимъ выраженіе корня u тетраэдрическаго уравненія (37):

$$u=\frac{\sqrt{\varepsilon\sqrt[3]{z_m}-\varepsilon^2}+\sqrt{-\varepsilon^2\sqrt[3]{z_m}+\varepsilon}}{\sqrt{1-\sqrt[3]{z_m}}}. \tag{47}$$

Всѣ 12 корней тетраэдрическаго уравненія (37) выражаются значеніями 12-значной функціи (47).

IV. Октаэдрическое уравненіе.

Возьмемъ тождества (55) и (56) главы VI:

$$\left.\begin{aligned}H_0(u)&=f_m(u)\,H_m(u),\\ f_0(u)&=T_m(u).\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Изъ тождествъ (48) слѣдуетъ:

$$\frac{H_0^3(u)}{108f_0^4(u)}=\frac{f_m^3(u)\,H_m^3(u)}{108\,T_m^4(u)}, \tag{49}$$

или, принимая во вниманіе уравненія (37) и (38):

$$z_0=-\frac{4z_m}{(z_m-1)^2}, \tag{50}$$

откуда:

$$z_m = \frac{z_0 - 2 + 2\sqrt{1 - z_0}}{z_0}. \tag{51}$$

Подставивъ это выраженіе z_m въ формулу (47), находимъ выраженіе корня u октаэдрическаго уравненія (38):

$$u = \frac{\sqrt{\varepsilon\sqrt[3]{z_0-2+2\sqrt{1-z_0}}-\varepsilon^2\sqrt[3]{z_0}}+\sqrt{\varepsilon\sqrt[3]{z_0}-\varepsilon^2\sqrt[3]{z_0-2+2\sqrt{1-z_0}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{z_0}-\sqrt[3]{z_0-2+2\sqrt{1-z_0}}}}. \tag{52}$$

Всѣ 24 корня октаэдрическаго уравненія (38) выражаются 24-значной функціей (52).

§ 32. **Невозможность рѣшенія икосаэдрическаго уравненія въ радикалахъ.**

Возьмемъ два уравненія:

$$\frac{f_0''^2(u)}{f_u(u)} = \zeta, \tag{53}$$

$$H_u^3(u) : T_u^2(u) : -1728 f_u^5(u) = z : z-1 : 1. \tag{54}$$

Возьмемъ тождества (65′) и (67) главы VI:

$$f_0''^2(u) = \frac{i}{12\sqrt{3}}[H_m''^3(u) - f_m''^3(u)], \tag{55}$$

$$f_u(u) = h\, H_m''^3(u) + k f_m''^3(u). \tag{56}$$

На основаніи этихъ тождествъ мы въ правѣ сказать, что уравненіе (53) есть тетраэдрическое уравненіе третьяго нормальнаго вида.

Уравненіе (54) есть, какъ мы знаемъ, нормальное икосаэдрическое уравненіе.

Пусть перемѣнныя z и ζ выбраны такъ, что уравненія (53) и (54) имѣютъ общій корень u.

Возьмемъ тождества (73) и (75) главы VI:

$$T_u(u)=[f_0''^4(u)-10\,f_0''^2(u)f_u(u)+45\,f_u^2(u)]\,f_0''(u), \qquad (57)$$

$$H_u(u)=[f_0''^2(u)-3\,f_u(u)]\,H_0''(u), \qquad (58)$$

$$H_0''^3(u)=64\,f_u^2(u)-11\,f_u(u)f_0''^2(u)+f_0''^4(u). \qquad (59)$$

Изъ тождествъ (58) и (59) слѣдуетъ:

$$\frac{H_u^3(u)}{f_u^5(u)}=\left\{\frac{f_0''^2(u)}{f_u(u)}-3\right\}^3\left\{64-11\frac{f_0''^2(u)}{f_u(u)}+\frac{f_0''^4(u)}{f_u^2(u)}\right\},$$

или, принимая во вниманіе уравненія (53) и (54):

$$-1728z=(\zeta-3)^3(64-11\zeta+\zeta^2). \qquad (60)$$

Такимъ же образомъ изъ тождества (57), принимая во вниманіе уравненія (53) и (54), находимъ:

$$-1728(z-1)=(\zeta^2-10\zeta+45)^2\zeta. \qquad (61)$$

Соединяя вмѣстѣ уравненія (60) и (61), можемъ написать:

$$(\zeta-3)^2(\zeta^2-11\zeta+64):\zeta(\zeta^2-10\zeta+45)^2:-1728=z:z-1:1. \qquad (62)$$

Идя тѣмъ же путемъ, которымъ мы шли въ § 31, мы должны были бы для рѣшенія икосаэдрическаго уравненія (54) поступить такъ:

1) Рѣшить тетраэдрическое уравненіе (53)—его, какъ мы знаемъ, можно рѣшить въ радикалахъ.

2) Выразить изъ уравненія (62) величину ζ, какъ явную функцію z.

3) Подставить полученное выраженіе ζ въ выраженіе корня u тетраэдрическаго уравненія (53). Полученное такимъ образомъ выраженіе и будетъ корнемъ икосаэдрическаго уравненія (54).

Не трудно усмотрѣть, что путь этотъ для икосаэдрическаго уравненія непримѣнимъ, потому что уравненіе (62) есть уравненіе 5-ой степени.

Ниже, въ главѣ X, мы убѣдимся въ томъ, что уравненіе 5-ой степени (62) не разрѣшимо въ радикалахъ *). Поэтому и икосаэдрическое уравненіе (54) не разрѣшимо въ радикалахъ.

§ 33. **Рѣшеніе уравненій изучаемаго класса въ гипергеометрическихъ функціяхъ.**

Пусть дано нормальное уравненіе:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z-1 : 1. \qquad (21)$$

Мы видѣли въ главѣ II, что корни его суть отношенія частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0, \qquad (63)$$

при чемъ значенія параметровъ α, β, γ таковы:

	Друпирамидное.	Тетраэдрическое.	Октаэдрическое.	Икосаэдрическое.
$\alpha =$	$\frac{1}{2m}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{11}{60}$
$\beta =$	$-\frac{1}{2m}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{60}$
$\gamma =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(64)

*) Горданъ показалъ, что всякое уравненіе 5-ой степени можетъ быть преобразовано въ уравненіе вида (62). См. Math. Annalen. Томъ 28, стр. 152. Мы не приводимъ этого весьма интереснаго но нѣсколько сложнаго преобразованія Гордана. Ниже справедливость теоремы Гордана станетъ ясна изъ другихъ соображеній.

Обозначивъ черезъ y', y'' два линейно независимыхъ частныхъ интеграла уравненія (63), мы можемъ всякій корень уравненія (21) представить въ такомъ видѣ:

$$u = \frac{py' + qy''}{ry' + sy''}, \tag{65}$$

гдѣ p, q, r, s суть нѣкоторыя постоянныя числа.

Займемся вычисленіемъ этихъ постоянныхъ для нормальныхъ уравненій тетраэдрическаго, октаэдрическаго и икосаэдрическаго типовъ *).

Мы начнемъ съ икосаэдрическаго уравненія, какъ наиболѣе для насъ важнаго.

Въ вычисленіяхъ мы будемъ пользоваться формулами и обозначеніями § 9.

I. Икосаэдрическое уравненіе.

$$(u^{20}-228u^{15}+494u^{10}+228u^{5}+1)^3:(u^{30}+522u^{25}-10005u^{20}- \tag{54'}$$
$$-10005u^{10}-522u^5+1)^2:-1728u^5(u^{10}+11u^5-1)^5=z:z-1:1.$$

Параметры α, β, γ гипергеометрическаго уравненія, соотвѣтствующіе разсматриваемому случаю, таковы:

$$\alpha = \frac{11}{60}, \quad \beta = -\frac{1}{60}, \quad \gamma = \frac{2}{3}.$$

Подставивъ эти значенія параметровъ α, β, γ въ формулы (46) и (48) параграфа 9, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{2}{3}, z\right), \\ y_2 &= z^{\frac{1}{3}}F\left(\frac{31}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{3}, z\right), \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

*) Двупирамидное уравненіе мы опускаемъ потому, что оно въ радикалахъ рѣшается очень просто.

$$\left.\begin{aligned} y_5 &= z^{-\frac{11}{60}} F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{z}\right), \\ y_6 &= z^{\frac{1}{60}} F\left(-\frac{1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{z}\right). \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Область сходимости рядовъ (66) есть кругъ, описанный изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ 1. На самомъ кругѣ ряды остаются сходящимися, хотя сходимость ихъ медленная. Площадь этого круга мы по прежнему назовемъ областью I. Областью сходимости рядовъ (67) служитъ вся плоскость за исключеніемъ области I. Ряды остаются сходящимися и на границѣ этой области: на окружности круга, описаннаго изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ 1. Область сходимости рядовъ (67) мы по прежнему будемъ называть областью III.

Положивъ въ формулѣ (65):

$$y' = y_5, \quad y'' = y_6,$$

мы представимъ корни икосаэдрическаго уравненія (54′) въ такомъ видѣ:

$$u = \frac{py_5 + qy_6}{ry_5 + sy_6}. \quad (68)$$

При надлежащемъ выборѣ коэффиціентовъ p, q, r, s формула (68) способна изобразить каждый корень икосаэдрическаго уравненія.

Корни икосаэдрическаго уравненія, какъ мы знаемъ, на плоскости перемѣннаго u изображаются точками, соотвѣтственными относительно четыреугольниковъ икосаэдрической сѣти. Условимся буквою u обозначать тотъ корень икосаэдрическаго уравненія, который соотвѣтствуетъ основному четыреугольнику $0abc$ (черт. I) сѣти и выберемъ постоянныя

$$p, \; q, \; r, \; s$$

такъ, чтобы формула (68) изображала именно этотъ корень u икосаэдрическаго уравненія.

Изъ икосаэдрическаго уравненія ($54'$) видно, что въ области точки $z=\infty$ корень u разлагается въ рядъ такого вида:

$$u=\frac{1}{12^{\frac{3}{5}}}z^{-\frac{1}{5}}+\ldots \tag{69}$$

Сравнивая этотъ рядъ съ формулою (68), гдѣ y_5 и y_6 имѣютъ величины, даваемыя формулами (67), мы находимъ, что для тождественности формулъ (69) и (68) коэффиціенты

$$p,\ q,\ r,\ s$$

должны удовлетворять такимъ условіямъ:

$$q=r=0,\ \frac{p}{s}=\frac{1}{12^{\frac{3}{5}}}.$$

Послѣ подстановки этихъ величинъ въ формулу (68) и послѣ замѣны y_5 и y_6 ихъ выраженіями (67), мы найдемъ, что въ области III корень u выражается формулою:

$$u=\frac{1}{12^{\frac{3}{5}}}\frac{F\left(\frac{11}{60},\frac{31}{60},\frac{6}{5},\frac{1}{z}\right)}{F\left(-\frac{1}{60},\frac{19}{60},\frac{4}{5},\frac{1}{z}\right)}z^{-\frac{1}{5}}. \tag{70}$$

Таково выраженіе корня u въ области III, т. е. при

$$mod.\, z \geqq 1.$$

Посмотримъ, каково выраженіе того же корня въ области I.

Положивъ въ формулѣ (65):

$$y'=y_1,\quad y''=y_2,$$

мы представимъ корень u въ такомъ видѣ:

$$u=\frac{py_1+qy_2}{ry_1+sy_2}, \tag{71}$$

гдѣ p, q, r, s имѣютъ другія значенія, чѣмъ прежде.

Займемся ихъ опредѣленіемъ.

Въ § 10, при доказательствѣ теоремы 3 главы III, мы видѣли, что когда точка z идетъ по дѣйствительной оси справа влѣво и подходитъ къ точкѣ 0, точка u движется по сторонѣ треугольника сѣти — сторонѣ, обозначенной на чертежѣ 4 буквами $u_1\, u_0$, а въ разсматриваемомъ случаѣ на черт. I буквами bc, и подходитъ къ соотвѣтствующей вершинѣ треугольника—вершинѣ, обозначенной на черт. I буквою c. Касательная къ дугѣ окружности bc въ точкѣ c наклонена къ дѣйствительной оси плоскости подъ угломъ $\frac{23}{15}\pi$.

Изъ этихъ соображеній и изъ вида икосаэдрическаго уравненія (54′) не трудно усмотрѣть, что въ области точки $z=0$ корень u разлагается въ рядъ вида:

$$u = he^{\frac{\pi i}{5}} + ke^{\frac{23}{15}\pi i} z^{\frac{1}{3}} + \ldots, \tag{72}$$

гдѣ h есть разстояніе точки c отъ начала координатъ, т. е. модуль количества, изображаемаго точкою c, а k—нѣкоторое дѣйствительное положительное число.

Займемся опредѣленіемъ постоянныхъ h и k.

Изъ чертежа I видно, что точка c не мѣняется икосаэдрическою подстановкою:

$$S_u\, \mathfrak{T}_u;$$

она служитъ поэтому корнемъ уравненія:

$$u = \frac{1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)u}{u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)}\,\varepsilon. \tag{73}$$

$$\text{гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}.$$

Корни уравненія (73) таковы:

$$\frac{\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}-(3+\sqrt{5})}{4}\, e^{\frac{\pi i}{5}}. \tag{74}$$

Отсюда ясно, что:

$$h = \frac{+\sqrt{30+6\sqrt{5}} - (3+\sqrt{5})}{4}, \tag{75}$$

или, по вычисленіи:

$$h = 0{,}33826121\ldots \tag{76}$$

Величина

$$he^{\frac{\pi i}{5}},$$

изображаемая точкою c на чертежѣ I, есть корень многочлена $H_u(u)$.

Подставивъ разложеніе (72) въ икосаэдрическое уравненіе, произведя сокращеніе на z и положивъ затѣмъ $z=0$, мы получимъ такое равенство:

$$\frac{5^3(57-247h^5-171h^{10}-h^{15})^3 h^7 k^3}{3^3(1+11h^5-h^{10})^5} = 1, \tag{77}$$

откуда:

$$k = 0{,}6\,\frac{(1+11h^5-h^{10})^{\frac{5}{3}}}{(57-247h^5-171h^{10}-h^{15})h^{\frac{7}{3}}}. \tag{78}$$

Подставивъ въ эту формулу найденную величину h (76), находимъ:

$$k = 0{,}145\ldots. \tag{79}$$

Итакъ, въ области точки $z=0$ корень u разлагается въ такой рядъ:

$$u = 0{,}33826121\ldots e^{\frac{\pi i}{5}} + 0{,}145\ldots e^{\frac{23}{15}\pi i} z^{\frac{1}{3}} + \ldots \tag{80}$$

Для того, чтобы эта формула была тождественна съ формулою (71), гдѣ y_1 и y_2 имѣютъ значенія, даваемыя равенствами (66), необходимо, чтобы коэффиціенты p, q, r, s формулы (71) удовлетворяли условіямъ:

$$s=0,\ \frac{p}{r}=he^{\frac{\pi i}{5}}=0{,}33826121\ldots e^{\frac{\pi i}{5}},$$
$$\frac{q}{r}=ke^{\frac{23}{15}\pi i}=0{,}145\ldots\ldots e^{\frac{23}{15}\pi i}. \tag{81}$$

Итакъ, въ области I корень u икосаэдрическаго уравненія выражается формулою:

$$u=0{,}33826121\ldots e^{\frac{\pi i}{5}}+0{,}145\ldots e^{\frac{23}{15}\pi i}\frac{F\left(\frac{31}{60},\frac{19}{60},\frac{4}{3},z\right)}{F\left(\frac{11}{60},-\frac{1}{60},\frac{2}{3},z\right)}\cdot \tag{82}$$

Таково выраженіе корня u въ области I, т. е. при

$$mod.\ z \leqq 1.$$

Формулы (70) и (82) позволяютъ вычислить корень u икосаэдрическаго уравненія при всякомъ значеніи z. Найдя величину одного корня и зная подстановки икосаэдрической группы, мы можемъ вычислить всѣ остальные корни икосаэдрическаго уравненія *).

II. Октаэдрическое уравненіе.

Возьмемъ октаэдрическое уравненіе въ первой нормальной формѣ:

$$(u^8+14u^4+1)^3:(u^{12}-33u^8-33u^4+1)^2:108(u^5-u)^4=$$
$$=z:z-1:1. \tag{38}$$

---

*) Клейнъ даетъ рѣшеніе икосаэдрическаго уравненія нѣсколько въ иной формѣ. См. Math. Annalen. Томъ 12. Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. Ту же задачу нѣсколько иначе Клейнъ рѣшаетъ въ статьѣ того же заглавія, помѣщенной въ Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. 9 Heft.

Къ нему примѣнимы почти дословно тѣ же разсужденія, которыя мы привели по поводу икосаэдрическаго уравненія. Поэтому ограничимся лишь самыми краткими указаніями.

Величины параметровъ α, β, γ, въ разсматриваемомъ случаѣ таковы:

$$\alpha=\frac{5}{24},\ \beta=-\frac{1}{24},\ \gamma=\frac{2}{3}.$$

Подставивъ эти величины въ формулы (46) и (48) § 9, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=F\left(\frac{5}{24},-\frac{1}{24},\frac{2}{3},z\right),\\ y_2&=z^{\frac{1}{3}}F\left(\frac{13}{24},\frac{7}{24},\frac{4}{3},z\right),\end{aligned}\right\}\tag{83}$$

$$\left.\begin{aligned} y_5&=z^{-\frac{5}{24}}F\left(\frac{5}{24},\frac{13}{24},\frac{5}{4},\frac{1}{z}\right),\\ y_6&=z^{\frac{1}{24}}F\left(-\frac{1}{24},\frac{7}{24},\frac{3}{4},\frac{1}{z}\right).\end{aligned}\right\}\tag{84}$$

Въ области III корень u уравненія (38) изобразится формулою вида:

$$u=\frac{py_5+qy_6}{ry_5+sy_6}.\tag{68}$$

Изъ уравненія (38) видно, что въ области точки $z=\infty$ корень u разлагается въ рядъ:

$$u=\frac{1}{\sqrt[4]{108}}z^{-\frac{1}{4}}+\ldots\tag{85}$$

Для тождественности формулъ (85) и (68) необходимо, чтобы коэффиціенты p, q, r, s удовлетворяли условіямъ:

$$q=r=0,\ \frac{p}{s}=\frac{1}{\sqrt[4]{108}}.\tag{86}$$

Подставивъ эти величины въ формулу (68), находимъ:

$$u = \frac{1}{\sqrt[4]{108}} \frac{F\left(\frac{5}{24}, \frac{13}{24}, \frac{5}{4}, \frac{1}{z}\right)}{F\left(-\frac{1}{24}, \frac{7}{24}, \frac{3}{4}, \frac{1}{z}\right)} z^{-\frac{1}{4}} . \qquad (87)$$

Таково выраженіе корня u октаэдрическаго уравненія въ области III, т. е. при

$$mod.\, z \geqq 1.$$

Въ области I тотъ же корень u изобразится формулою вида:

$$u = \frac{py_1 + qy_2}{ry_1 + sy_2} . \qquad (71)$$

Съ другой стороны, разсужденіями, подобными приведеннымъ выше при разсмотрѣніи уравненія икосаэдрическаго типа, обнаружимъ, что корень u въ области точки $u = 0$ разлагается въ рядъ вида:

$$u = he^{\frac{\pi i}{4}} + ke^{\frac{19}{12}\pi i} z^{\frac{1}{3}} + \ldots, \qquad (88)$$

гдѣ h и k суть постоянныя, дѣйствительныя и положительныя числа.

Величина h есть разстояніе точки, отмѣченной на черт. 29 буквою c, отъ начала координатъ. Точка c не мѣняется октаэдрической подстановкой:

$$S_0 \mathfrak{T}_0$$

и служитъ поэтому корнемъ уравненія:

$$u = i \frac{1-u}{1+u} . \qquad (89)$$

Корни уравненія (89) таковы:

$$\frac{\pm\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} .$$

Отсюда заключаемъ, что:

$$h=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=0{,}51763809\ldots. \tag{90}$$

Подставивъ разложеніе (88) въ октаэдрическое уравненіе (38), сокративъ полученное равенство на z и положивъ $z=0$, мы получимъ уравненіе:

$$\frac{2^7(7-h^4)^3h^5k^3}{3^3(h^4+1)^4}=1,$$

откуда:

$$k=\frac{3(h^4+1)^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{7}{3}}(7-h^4)h^{\frac{5}{3}}}, \tag{91}$$

или, послѣ подстановки вмѣсто h его величины (90):

$$k=0{,}282403\ldots \tag{92}$$

Итакъ, корень u въ области точки $z=0$ разлагается въ рядъ:

$$u=0{,}51763809\ldots.e^{\frac{\pi i}{4}}+0{,}282403\ldots.\,e^{\frac{19}{12}\pi i}z^{\frac{1}{3}}+\ldots \tag{93}$$

Формулы (93) и (71) только въ томъ случаѣ могутъ быть тождественны между собою, если коэффиціенты p, q, r, s удовлетворяютъ условіямъ:

$$s=0,\ \frac{p}{r}=0{,}51763809\ldots e^{\frac{\pi i}{4}},\ \frac{q}{r}=0{,}282403\ldots.\,e^{\frac{19}{12}\pi i}.$$

Подставивъ эти величины въ формулу (71), находимъ:

$$u=0{,}51763809\ldots\ e^{\frac{\pi i}{4}}+0{,}282403\ldots e^{\frac{19}{12}\pi i}\,\frac{F\left(\frac{13}{24},\frac{7}{24},\frac{4}{3},z\right)}{F\left(\frac{5}{24},-\frac{1}{24},\frac{2}{3},z\right)}. \tag{94}$$

Таково выраженіе корня u октаэдрическаго уравненія въ области I, т. е. при

$$mod.\, z \leqq 1.$$

Формулы (87) и (94) даютъ возможность найти величину корня u октаэдрическаго уравненія при какомъ угодно значеніи z.

Вычисливъ величину корня u и зная подстановки первой нормальной октаэдрической группы, мы можемъ вычислить всѣ корни октаэдрическаго уравненія.

III. Тетраэдрическое уравненіе.

Возьмемъ тетраэдрическое уравненіе во 2-мъ нормальномъ видѣ:

$$(2\sqrt{2}\,u^3+1)^3 : (u^6+5\sqrt{2}\,u^3-1)^2 : -(u^3-2\sqrt{2})^3u^3 = z : z-1 : 1. \quad (95)$$

Параметры α, β, γ гипергеометрическаго уравненія въ данномъ случаѣ будутъ таковы:

$$\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = -\frac{1}{12},\ \gamma = \frac{2}{3}.$$

Повторяя дословно тѣ же разсужденія, какія мы привели выше при нахожденіи рѣшенія уравненій предшествующихъ типовъ, мы придемъ къ заключенію, что корень u тетраэдрическаго уравненія при

$$mod.\, z \geqq 1$$

выразится формулою:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{F\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{4}{3}, \frac{1}{z}\right)}{F\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{z}\right)} z^{-\frac{1}{3}}. \quad (96)$$

Тотъ же корень u при

$$mod.\, z \leqq 1$$

выразится формулою:

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi i}{3}}+\frac{3}{4\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi i}{3}}\frac{F\left(\frac{7}{12},\frac{1}{4},\frac{4}{3},z\right)}{F\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{12},\frac{2}{3},z\right)}z^{\frac{1}{3}}. \tag{97}$$

Имѣя корень u тетраэдрическаго уравненія и зная подстановки второй нормальной тетраэдрической группы, мы можемъ вычислить всѣ корни втораго нормальнаго тетраэдрическаго уравненія *).

Результаты, полученные нами въ настоящей главѣ, завершаютъ теорію уравненій, имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка. Мы изучили свойства и нашли нормальные виды этихъ уравненій, нашли критерій, дающій возможность убѣдиться въ томъ, что данное уравненіе принадлежитъ къ названному классу, умѣемъ привести уравненіе къ нормальному виду и, наконецъ, знаемъ, какъ рѣшить уравненіе, приведенное къ нормальному виду. Мы убѣдились въ томъ, что дѣйствительно всѣ уравненія изученнаго класса разрѣшимы въ гипергеометрическихъ функціяхъ и, кромѣ того, нашли, что уравненія всѣхъ типовъ, кромѣ икосаэдрическаго, разрѣшимы въ радикалахъ.

---

*) Рѣшеніе уравненія октаэдрическаго типа приведено у Puchta. Das Oktaeder und die Gleichung vierten Grades. Denkschriften der Kaiserlichen Akademie in Wien. Bd. 41. Его рѣшеніе аналогично Клейнову рѣшенію икосаэдрическаго уравненія и разнится отъ приведеннаго въ текстѣ.

Аналогичное рѣшеніе тетраэдрическаго уравненія построить не трудно.

ГЛАВА VIII.

Алгебраическія уравненія, имѣющія корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

§ 34. Предварительныя замѣчанія.

Въ настоящей главѣ мы разсмотримъ ближе внѣшній видъ уравненій, свойства которыхъ изучены нами въ главѣ I, уравненій, имѣющихъ корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Въ главѣ I мы видѣли *), что корни этихъ уравненій выражаются какъ явныя функціи корней алгебраическаго уравненія:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_1}(u) : cf^{\lambda}(u) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1, \tag{1}$$

рѣшеніе котораго было нами найдено въ главѣ VII.

Припомнимъ главнѣйшіе результаты, найденные въ главѣ I и отчасти въ главѣ II.

Пусть корни уравненія

$$\Phi(y, z) = 0 \tag{2}$$

служатъ частными интегралами линейнаго дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1 \frac{dy}{dz} + p_2 y = 0. \tag{3}$$

---

*) См. формулы (106) и (107) главы I.

Отношеніе двухъ линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ y_1, y_2 уравненія (3):

$$\frac{y_1}{y_2} = u \tag{4}$$

есть корень нѣкотораго алгебраическаго уравненія вида (1).

Корни y_1 и y_2 могутъ быть выражены, какъ явныя функціи u:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= ku\sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)\,H(u)\,\frac{dR(z)}{dz}}\,e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}}, \\ y_2 &= k\sqrt{\frac{T(u)\,R(u)}{f(u)\,H(u)\,\frac{dR(z)}{dz}}\,e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

гдѣ k есть нѣкоторое постоянное.

Если y_2 есть корень уравненія (2), то мы въ правѣ сказать что уравненіе (2) можетъ быть получено изъ уравненія (1) преобразованіемъ неизвѣстнаго:

$$y = k\sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)\,H(u)\,\frac{dR(z)}{dz}}\,e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}}. \tag{6}$$

Корни уравненія (2) выражаются черезъ корни уравненія (1) при помощи формулъ (6).

Умѣя рѣшить уравненіе (1), мы можемъ найти всѣ корни уравненія (2).

Положивъ:

$$y = ke^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}\,\eta, \tag{7}$$

мы преобразуемъ уравненіе (2) въ новое уравненіе:

$$F(\eta, z) = 0, \tag{8}$$

дифференціальное же уравненіе (3) въ новое дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d^2\eta}{dz^2}=P\eta, \tag{9}$$

гдѣ P есть раціональная функція z, которая выражается черезъ p_1 и p_2 слѣдующимъ образомъ:

$$P=\frac{1}{4}p_1{}^2+\frac{1}{2}\frac{dp_1}{dz}-p_2. \tag{10}$$

Та же функція P можетъ быть выражена черезъ $R(z)$ изъ такого уравненія:

$$-2P=[R(z)]_z+\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)^2\left\{\frac{1-\frac{1}{\lambda_1{}^2}}{\frac{2}{c^2}R^2(z)}+\frac{1-\frac{1}{\lambda_2{}^2}}{2\left(\frac{1}{c}R(z)-1\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{\lambda_1{}^2}+\frac{1}{\lambda_2{}^2}-\frac{1}{\lambda^2}-1}{\frac{2}{c}R(z)\left(\frac{1}{c}R(z)-1\right)}\right\}\text{*)}. \tag{11}$$

Изъ равенства (7) слѣдуетъ, что отношеніе частныхъ интеграловъ y_1, y_2 уравненія (3) таково же, какъ отношеніе соотвѣтствующихъ имъ частныхъ интеграловъ η_1, η_2 уравненія (9):

$$u=\frac{y_1}{y_2}=\frac{\eta_1}{\eta_2}. \tag{12}$$

Отношеніе

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}$$

есть корень того же алгебраическаго уравненія (1).

Корни η_1, η_2 уравненія (8) выражаются черезъ корень u уравненія (1) при помощи формулъ:

*) См. формулы (19) и (75) главы II.

$$\eta_1 = u\sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)H(u)\,\dfrac{dR(z)}{dz}}}\,, \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)\,H(u)\,\dfrac{dR(z)}{dz}}}. \quad (13)$$

Уравненіе (8) можно разсматривать, какъ результатъ преобразованія уравненія (1) подстановкою:

$$\eta = \sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)\,H(u)\,\dfrac{dR(z)}{dz}}}\,. \qquad (14)$$

Найдя уравненіе (8), мы можемъ построить уравненіе (2), преобразуя уравненіе (8) подстановкою:

$$\eta = \frac{1}{k}e^{\frac{1}{2}\int p_1 dz}\,y. \qquad (15)$$

Изъ уравненій вида (2) наибольшій интересъ представляютъ тѣ уравненія, корни которыхъ суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \left\{\gamma - (\alpha+\beta+1)z\right\}\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0. \qquad (16)$$

Мы знаемъ, что въ такомъ случаѣ параметры α, β, γ суть функціи величинъ λ, λ_1, λ_2 и опредѣляются по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda}\right), \\ \beta &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda}\right), \\ \gamma &= 1 - \frac{1}{\lambda_1}\,. \end{aligned}\right\}^{*)} \qquad (17)$$

*) См. формулы (71) главы II.

Положимъ въ формулахъ (10) и (11):

$$p_1 = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{z(1-z)}, \quad p_2 = -\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}, \tag{18}$$

гдѣ α, β, γ опредѣляются формулами (17).

Изъ формулъ (10), (18), (17) находимъ:

$$P = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1-\frac{1}{\lambda_1^2}}{2z^2} + \frac{1-\frac{1}{\lambda_2^2}}{2(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda^2}-1}{2z(z-1)}\right\}. \tag{19}$$

Вставивъ это выраженіе въ лѣвую часть равенства (11), мы находимъ уравненіе, опредѣляющее функцію $R(z)$. Мы видимъ, что оно удовлетворяется при:

$$R(z) = cz. \tag{20}$$

Итакъ, положивъ

$$R(z) = cz, \tag{20}$$

и преобразуя затѣмъ уравненіе (8) подстановкою:

$$\eta = \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}\int \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)} dz} y,$$

или:

$$\eta = \frac{1}{k} z^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_1}\right)} (1-z)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_2}\right)} y, \tag{21}$$

гдѣ k—нѣкоторое произвольное постоянное, мы должны получить новое алгебраическое уравненіе, имѣющее корнями частные интегралы гипергеометрическаго уравненія (16).

Такъ какъ для уравненій типовъ: тетраэдрическаго, октаэдрическаго и икосаэдрическаго величины λ_1 и λ_2 опредѣляются равенствами:

$$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 2,$$

то подстановка (21) можетъ быть для уравненій этихъ трехъ типовъ представлена формулою:

$$\eta = \frac{1}{k} z^{\frac{1}{3}} (1-z)^{\frac{1}{4}} y. \tag{22}$$

Мы видимъ, что изъ числа уравненій изучаемаго класса наибольшій интересъ представляютъ:

1) уравненія вида (8)—по наибольшей простотѣ своихъ свойствъ,

2) уравненія, получаемыя изъ уравненій вида (8) преобразованіемъ (22)—по своему свойству имѣть корнями частные интегралы гипергеометрическаго уравненія.

Остальныя уравненія того же класса могутъ быть получаемы изъ уравненій (8) подстановкою:

$$\eta = \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}\int p_1 dz} y, \tag{15}$$

гдѣ p_1 какая угодно раціональная функція z, подчиненная только тому условію, чтобы выраженіе:

$$e^{\frac{1}{2}\int p_1 dz}$$

было алгебраическою функціею z.

Что касается до уравненія (8), соотвѣтствующаго уравненію (1) двупирамиднаго типа, то оно было нами разсмотрѣно въ § 4.

Это уравненіе рѣшается въ радикалахъ совершенно элементарнымъ образомъ. Поэтому мы будемъ говорить только объ уравненіяхъ вида (8) типовъ: тетраэдрическаго, октаэдрическаго и икосаэдрическаго.

Въ § 20 мы нашли, что порядокъ n группы бинарныхъ линейныхъ подстановокъ, каждаго изъ названныхъ трехъ типовъ вдвое выше порядка N соотвѣтствующей группы неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ. Отсюда слѣдуетъ, что степень n уравненія (8) вдвое выше степени N уравненія (1) того же типа:

$$n = 2N.$$

Далѣе, отсюда заключаемъ, что индексы:

$$\mu = \frac{n}{\nu}\,,\ \mu_1 = \frac{n}{\nu_1}\,,\ \mu_2 = \frac{n}{\nu_2}$$

первичныхъ формъ $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ вдвое больше показателей:

$$\lambda = \frac{N}{\nu}\,,\ \lambda_1 = \frac{N}{\nu_1}\,,\ \lambda_2 = \frac{N}{\nu_2}\,.$$

§ 35. **Выраженія первичныхъ формъ $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ въ видѣ радикаловъ изъ раціональныхъ функцій перемѣннаго z.**

Мы видѣли въ теоремѣ 10 главы I, что всякая первичная форма, имѣющая аргументами два частныхъ интеграла уравненія (8), равна радикалу изъ раціональной функціи z. Степень этого радикала равна индексу первичной формы или дѣлителю этого индекса—если степень радикала удастся понизить.

Построимъ сказанныя выраженія для первичныхъ формъ $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ разсматриваемыхъ трехъ типовъ.

Возведемъ обѣ части втораго изъ равенствъ (13) въ степень

$$n = 2N:$$

$$\eta_2{}^n = \frac{T^N(u)\,R^N}{f^N(u)\,H^N(u)\,R'^N}\,, \tag{23}$$

гдѣ для краткости введены обозначенія:

$$R = R(z),\ R' = \frac{dR(z)}{dz}\,.$$

Изъ уравненія (1) имѣемъ:

$$H^{\lambda_1}(u) = Rf^{\lambda}(u),\ T^{\lambda_2}(u) = \frac{1}{c'}\,(R - c)\,f^{\lambda}(u), \tag{24}$$

откуда:

$$H^N(u) = R^{\nu_1} f^{\lambda\nu_1}(u),\ T^N(u) = \frac{1}{c'^{\nu_2}}\,(R - c)^{\nu_2} f^{\lambda\nu_2}(u). \tag{25}$$

Вставивъ эти выраженія въ формулу (23), находимъ:

$$\eta_2{}^n = \frac{(R-c)^{\nu_2}\, R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2}\, R'^N} f^{\lambda(\nu_2-\nu_1-\nu)}(u). \tag{26}$$

Величины ν, ν_1, ν_2, какъ мы знаемъ, таковы:

для тетраэдрическаго типа: $\nu=4$, $\nu_1=4$, $\nu_2=6$,

для октаэдрическаго типа: $\nu=6$, $\nu_1=8$, $\nu_2=12$,

для икосаэдрическаго типа: $\nu=12$, $\nu_1=20$, $\nu_2=30$.

Во всѣхъ трехъ случаяхъ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\nu_2 - \nu_1 - \nu = -2. \tag{27}$$

Поэтому равенство (26) можно представить въ такомъ видѣ:

$$\eta_2{}^n f^{2\lambda}(u) = \frac{(R-c)^{\nu_2}\, R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2}\, R'^N}\,. \tag{28}$$

Такъ какъ многочленъ $f(u)$ степени ν, то:

$$\eta_2{}^\nu f(u) = f(\eta_1, \eta_2).$$

Отсюда слѣдуетъ, что равенство (28) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$f^{2\lambda}(\eta_1, \eta_2) = \frac{(R-c)^{\nu_2}\, R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2}\, R'^N}\,. \tag{29}$$

Отсюда, обозначая индексъ первичной формы $f(\eta_1, \eta_2)$ по прежнему буквою μ и припомнивъ, что

$$2\lambda = \mu,$$

находимъ:

$$f(\eta_1, \eta_2) = \sqrt[\mu]{\frac{(R-c)^{\nu_2}\, R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2}\, R'^N}}\,. \tag{30}$$

Первичная форма $f(\eta_1, \eta_2)$ выражена въ видѣ радикала степени μ изъ раціональной функціи z.

Изъ уравненій (24) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} H^{2\lambda_1}(\eta_1,\eta_2) &= R^2 f^{2\lambda}(\eta_1,\eta_2), \\ T^{2\lambda_2}(\eta_1,\eta_2) &= \frac{1}{c'^2}(R-c)^2 f^{2\lambda}(\eta_1,\eta_2). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Подставивъ въ эти равенства выраженіе (30) формы $f^{2\lambda}(\eta_1,\eta_2)$, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} H^{2\lambda_1}(\eta_1,\eta_2) &= \frac{(R-c)^{\nu_2} R^{N-\nu_1+2}}{c'^{\nu_2} R'^N}, \\ T^{2\lambda_2}(\eta_1,\eta_2) &= \frac{(R-c)^{\nu_2+2} R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2+2} R'^N}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Откуда, припомнивъ, что:

$$2\lambda_1 = \mu_1, \quad 2\lambda_2 = \mu_2,$$

находимъ:

$$H(\eta_1,\eta_2) = \sqrt[\mu_1]{\frac{(R-c)^{\nu_2} R^{N-\nu_1+2}}{c'^{\nu_2} R'^N}}, \tag{33}$$

$$T(\eta_1,\eta_2) = \sqrt[\mu_2]{\frac{(R-c)^{\nu_2+2} R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2+2} R'^N}}. \tag{34}$$

Формулы эти даютъ выраженія первичныхъ формъ $H(\eta_1,\eta_2)$, $T(\eta_1,\eta_2)$ въ видѣ радикаловъ изъ раціональной функціи z.

Примѣнимъ формулы (30), (33), (34) къ каждому изъ разсматриваемыхъ трехъ типовъ въ отдѣльности, давая показателямъ μ, μ_1, μ_2, ν, ν_1, ν_2 соотвѣтствующія значенія.

I. Типъ тетраэдрическій.

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1,\eta_2) &= \frac{(R-c)R}{c'R'^2}\sqrt[3]{R}, \\ H(\eta_1,\eta_2) &= \frac{(R-c)R}{c'^2R'^2}\sqrt[3]{R^2}, \\ T(\eta_1,\eta_2) &= \frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^3}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

II. Типъ октаэдрическій.

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1,\eta_2)&=\frac{(R-c)R^2}{c'\sqrt{c'}R'^3}\sqrt{R-c}\,,\\ H(\eta_1,\eta_2)&=\frac{(R-c)^2R^3}{c'^2R'^4}\,,\\ T(\eta_1,\eta_2)&=\frac{(R-c)^3R^4}{c'^3\sqrt{c'}R'^6}\sqrt{R-c}. \end{aligned}\right\}\tag{36}$$

III. Типъ икосаэдрическій.

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1,\eta_1)&=\frac{(R-c)^3R^4}{c'^3R'^6}\,,\\ H(\eta_1,\eta_2)&=\frac{(R-c)^5R^7}{c'^5R'^{10}}\,,\\ T(\eta_1,\eta_2)&=\frac{(R-c)^8R^{10}}{c'^8R'^{15}}\,. \end{aligned}\right\}\tag{37}$$

Заслуживаетъ нѣкотораго вниманія та особенность уравненія икосаэдрическаго типа, что здѣсь всѣ три формы $f(\eta_1,\eta_2)$, $H(\eta_1,\eta_2)$, $T(\eta_1,\eta_2)$ суть раціональныя функціи z.

§ 36. **Внѣшній видъ уравненій, имѣющихъ корнями частные интегралы дифференціальнаго уравненія вида:**

$$\frac{d^2\eta}{dz^2}=P\eta.\tag{9}$$

Пусть, согласно нашимъ обозначеніямъ, уравненіе степени n

$$F(\eta,z)=0\tag{8}$$

имѣетъ корнями частные интегралы дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{d^2\eta}{dz^2}=P\eta.\tag{9}$$

Пусть:

$$\eta_1,\ \eta_2, \dots\ \eta_{\nu'}, \tag{38}$$

есть приведенная система корней уравненія (8).

Выразимъ величины (38) въ видѣ линейныхъ функцій двухъ какихъ нибудь частныхъ интеграловъ уравненія (9):

$$\eta',\ \eta''.$$

Перемноживъ полученныя выраженія между собою, мы получимъ первичную форму:

$$\eta_1\eta_2 \dots\ \eta_{\nu'} = \mathfrak{F}(\eta', \eta''), \tag{39}$$

соотвѣтствующую алгебраическому уравненію (8).

Степень первичной формы (39) равна числу ν' корней приведенной системы (38), а индексъ μ' равенъ:

$$\mu' = \frac{n}{\nu'}\,. \tag{40}$$

Всѣ первичныя формы, соотвѣтствующія алгебраическому уравненію (8), эквивалентны между собою: онѣ получаются изъ формы (39) всевозможными бинарными линейными преобразованіями.

Каждое такое преобразованіе соотвѣтствуетъ новому выбору тѣхъ двухъ частныхъ интеграловъ η', η'' уравненія (9), чрезъ которые мы выражаемъ корни приведенной системы (38).

Считая всѣ эквивалентныя формы тождественными между собою, мы можемъ сказать, что каждому алгебраическому уравненію (8) соотвѣтствуетъ опредѣленная первичная форма (39) и обратно: каждой первичной формѣ (39) сотвѣтствуетъ единственное уравненіе (8).

Для большей простоты формулъ мы примемъ η'' равною одному изъ корней (38) уравненія (8).

Мы видѣли въ § 27, что всякая первичная форма должна принадлежать къ одному изъ четырехъ видовъ:

$$af(\eta', \eta''),\ bH(\eta', \eta''),\ gT(\eta', \eta''),\ hH^{\lambda_1}(\eta', \eta'') + kf^{\lambda}(\eta', \eta''), \tag{41}$$

гдѣ a, b, g, h, k—нѣкоторыя постоянныя.

Отсюда заключаемъ, что уравненіе (8) должно имѣть одинъ изъ четырехъ видовъ, соотвѣтствующихъ формамъ (41).

Индексы формъ (41) таковы:

$$\mu=2\lambda,\ \mu_1=2\lambda_1,\ \mu_2=2\lambda_2,\ \mu_3=2. \qquad (42)$$

Въ началѣ § 2 мы видѣли, что уравненіе (8) содержитъ неизвѣстное η исключительно въ степеняхъ, дѣлящихся на индексъ соотвѣтствующей первичной формы.

Пусть уравненіе (8) соотвѣтствуетъ первичной формѣ:

$$\mathfrak{F}(\eta', \eta'')$$

степени ν', индекса μ'.

Тогда уравненіе (8) будетъ таково:

$$\eta^n + A_{\mu'}\,\eta^{n-\mu'} + A_{2\mu'}\,\eta^{n-2\mu'} + \ldots + A_{n-\mu'}\,\eta^{\mu'} + A_n = 0, \qquad (43)$$

гдѣ:

$$A_{\mu'},\ A_{2\mu'}, \ldots\ A_{n-\mu'},\ A_n \qquad (44)$$

суть раціональныя функціи z.

Посмотримъ, какъ найти выраженія этихъ функцій.

Коэффиціенты (44) суть цѣлыя, однородныя, симметрическія функціи корней уравненія (43), или, что то же, уравненія (8). Выразивъ ихъ, какъ функціи корней и вставивъ затѣмъ выраженія этихъ корней чрезъ интегралы η', η'', мы представимъ каждый изъ коэффиціентовъ (44) въ видѣ цѣлой однородной бинарной формы съ аргументами η', η'':

$$A_{k\mu'}(\eta', \eta''),\ \text{гдѣ}\ k = 1, 2, 3, \ldots, \nu'. \qquad (45)$$

Всѣ формы (45) инваріанты по отношенію къ группамъ бинарныхъ линейныхъ подстановокъ, испытываемыхъ величинами η', η'' при всевозможныхъ обходахъ на плоскости перемѣннаго z.

Это слѣдуетъ изъ того, что коэффиціенты (44) могутъ быть представлены въ видѣ раціональныхъ функцій перемѣннаго z.

Что касается коэффиціента

$$A_n(\eta', \eta''),$$

то онъ равенъ произведенію корней уравненія (8), и поэтому можетъ разниться лишь постояннымъ множителемъ отъ степени μ' первичной формы

$$\mathfrak{F}(\eta', \eta''),$$

соотвѣтствующей уравненію (8):

$$A_n(\eta', \eta'') = q_n \ \mathfrak{F}^{\mu'}(\eta', \eta''), \tag{46}$$

гдѣ q_n— постоянное число.

Мы знаемъ, что первичная форма въ степени, равной ея индексу, есть раціональная функція z. Помня, что первичная форма выражается одною изъ формулъ (41) и имѣя равенства (35), (36), (37), мы можемъ найти выраженіе этой раціональной функціи z, какова бы ни была первичная форма $\mathfrak{F}(\eta', \eta'')$.

Вставивъ во второй части равенства (46) вмѣсто $\mathfrak{F}^{\mu'}(\eta', \eta'')$ ея выраженіе въ видѣ функціи z, мы опредѣлимъ коэффиціентъ A_n уравненія (43) до постояннаго множителя.

Подобнымъ же образомъ найдутся выраженія остальныхъ коэффиціентовъ (44). Дѣйствительно, на основаніи теоремы 3 главы VI мы можемъ утверждать, что каждая изъ формъ (45) можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$A_{k\mu'}(\eta', \eta'') =$$

$$= \Phi[H^{\lambda_1}(\eta', \eta''), f^{\lambda}(\eta', \eta'')] \ f^{m_1}(\eta', \eta''), H^{m_2}(\eta', \eta'') \ T^{m_3}(\eta', \eta''), \tag{47}$$

гдѣ Φ есть форма нѣкоторой степени s, однородная относительно ея аргументовъ:

$$H^{\lambda_1}(\eta', \eta'') \text{ и } f^{\lambda}(\eta', \eta''),$$

показатели m_1, m_2, m_3 суть числа цѣлыя, положительныя и меньшія чиселъ λ, λ_1, λ_2.

Сравнивая степени формъ, стоящихъ въ обѣихъ частяхъ тождества (47), находимъ неопредѣленное уравненіе:

$$k\mu' = Ns + m_1\nu + m_2\nu_1 + m_3\nu_2. \tag{48}$$

Такъ какъ

$$k\mu' < n, \; n = 2N,$$

то изъ неопредѣленнаго уравненія (48) заключаемъ, что степень s формы Φ равна 0 или 1.

Неопредѣленное уравненіе (48) даетъ одну или, въ крайнемъ случаѣ, весьма ограниченное число системъ рѣшеній. Если уравненіе (48) окажется невозможнымъ, то это служитъ признакомъ того, что коэффиціентъ $A_{k\mu'}$ равенъ нулю.

Вставивъ найденныя системы рѣшеній уравненія (48) въ формулу (47), мы найдемъ одно или, въ крайнемъ случаѣ, весьма ограниченное число выраженій, могущихъ изобразить собою коэффиціентъ $A_{k\mu'}$. Въ каждомъ изъ этихъ выраженій входитъ одинъ или два неизвѣстныхъ постоянныхъ коэффиціента.

Вставивъ найденныя выраженія коэффиціентовъ $A_{k\mu'}(\eta', \eta'')$ въ уравненіе (43), раздѣливъ все уравненіе на η''^n и положивъ

$$\eta = \eta'', \; \frac{\eta'}{\eta''} = u,$$

найдемъ:

$$1 + A_{\mu'}(u) + A_{2\mu'}(u) + \ldots + A_n(u) = 0. \tag{49}$$

Равенство (49) должно быть тождествомъ: иначе отношеніе

$$\frac{\eta'}{\eta''} = u$$

было бы постояннымъ.

Отобравъ въ лѣвой части равенства (49) коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ u и приравнивая ихъ нулю, мы находимъ уравненія 1-ой степени, опредѣляющія тѣ неизвѣстныя постоянныя, которыя входятъ въ эффиціенты $A_{k\mu'}(u)$.

Выполнивъ эти вычисленія, мы найдемъ окончательныя выраженія функцій $A_{k\mu'}(\eta', \eta'')$.

Вставивъ затѣмъ въ полученныя выраженія $A_{k\mu}'(\eta', \eta'')$ вмѣсто первичныхъ формъ

$$f(\eta', \eta''),\ H(\eta', \eta''),\ T(\eta', \eta'')$$

ихъ выраженія въ видѣ функцій перемѣннаго z, мы находимъ окончательныя выраженія коэффиціентовъ (44) уравненія (43).

Таковъ совершенно общій пріемъ составленія уравненія (43). Онъ представляетъ лишь механическія затрудненія, правда довольно значительныя, при опредѣленіи неизвѣстныхъ постоянныхъ, обращающихъ въ тождество уравненіе (49).

Пріемъ этотъ въ отдѣльныхъ случаяхъ можетъ быть упрощенъ или замѣненъ другими болѣе удобными въ этихъ случаяхъ пріемами, какъ это мы сейчасъ увидимъ.

Изъ уравненій вида (43) наибольшій интересъ по своей простотѣ представляютъ уравненія, соотвѣтствующія первичной формѣ $f(\eta', \eta'')$—эти уравненія содержатъ въ себѣ наименьшее число членовъ. Займемся ихъ составленіемъ.

I. Уравненіе тетраэдрическаго типа.

Возьмемъ формы втораго нормальнаго тетраэдрическаго типа:

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1^4 - 2\sqrt{2}\,\eta_1\,\eta_2^3, \\ H(\eta_1, \eta_2) &= 2\sqrt{2}\,\eta_1^3\eta_2 + \eta_2^4, \\ T(\eta_1, \eta_1) &= \eta_1^6 + 5\sqrt{2}\,\eta_1^3\eta_2^3 - \eta_2^6. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Подставивъ эти выраженія въ равенства (35), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1^4 - 2\sqrt{2}\,\eta_1\eta_2^3 &= \frac{(R-c)R}{c'\,R'^2}\sqrt[3]{R}, \\ 2\sqrt{2}\,\eta_1^3\eta_2 + \eta_2^4 &= \frac{(R-c)R}{c'^2\,R'^2}\sqrt[3]{R^2}, \\ \eta_1^6 + 5\sqrt{2}\,\eta_1^3\eta_2^3 - \eta_2^6 &= \frac{(R-c)^2R^2}{c'^2\,R'^3}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Положивъ въ формулахъ (51):

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = u,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{2\sqrt{2}}{u^3} &= \frac{(R-c)R}{c'R'^2\eta_1^4}\sqrt[3]{R}, \\ 1 + \frac{5\sqrt{2}}{u^3} - \frac{1}{u^6} &= \frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^3\eta_1^6}. \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Исключимъ u изъ уравненій (52):

$$\begin{gathered} \eta_1^8 - \frac{2}{3}\frac{(R-c)R}{c'R'^2}\sqrt[3]{R}\;\eta_1^4 - \frac{8}{27}\frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^3}\eta_1^2 - \\ -\frac{1}{27}\frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^4}\sqrt[3]{R^2} = 0. \end{gathered} \qquad (53)$$

Освободивъ это уравненіе отъ радикаловъ и опуская индексъ 1 при η_1, находимъ:

$$\begin{gathered} \left(\eta^8 - \frac{2^3}{3^3}\frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^3}\eta^2\right)^3 - \frac{2^3}{3^3}\frac{(R-c)^3R^4}{c'^3R'^6}\eta^{12} - \\ -\frac{2}{3^3}\left(\eta^8 - \frac{2^3}{3^3}\frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^3}\eta^2\right)\frac{(R-c)^3R^4}{c'^3R'^6}\eta^4 - \frac{1}{3^9}\frac{(R-c)^6R^8}{c'^6R'^{12}} = 0. \end{gathered} \qquad (54)$$

Это—уравненіе, соотвѣтствующее первичной формѣ:

$$f(\eta_1, \eta_2) = \eta_1^4 - 2\sqrt{2}\,\eta_1\eta_2^3.$$

Оно, какъ и слѣдовало ожидать, содержитъ въ себѣ неизвѣстное η только въ степеняхъ, кратныхъ 6. Свободный членъ его

$$-\frac{1}{3^9}\frac{(R-c)^6R^8}{c'^6R'^{12}},$$

какъ и должно быть, разнится отъ выраженія

$$f^6(\eta_1, \eta_2) = \frac{(R-c)^6 R^8}{c'^6 R'^{12}}$$

только постояннымъ множителемъ: $-\frac{1}{3^9}$.

Подставивъ въ уравненіи (54) вмѣсто c и c' ихъ величины:

$$c = -1, \; c' = 1$$

и положивъ:

$$\frac{1}{c} R(z) = z,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\eta^{24} - \frac{2^3}{3^2}(1-z)^2 z^2 \eta^{18} - \frac{2}{3^5}(32z+13)(1-z)^3 z^4 \eta^{12} + \\ &+ \frac{2^4}{3^9}(32z-5)(1-z)^5 z^6 \eta^6 - \frac{1}{3^9}(1-z)^6 z^8 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

II. Уравненіе октаэдрическаго типа.

Возьмемъ октаэдрическія формы перваго нормальнаго вида:

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1{}^5 \eta_2 - \eta_1 \eta_2{}^5, \\ H(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1{}^8 + 14\eta_1{}^4 \eta_2{}^4 + \eta_2{}^8, \\ T(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1{}^{12} - 33\eta_1{}^8 \eta_2{}^4 - 33\eta_1{}^4 \eta_2{}^8 + \eta_2{}^{12}. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Вставивъ эти выраженія въ формулы (36), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1{}^5 \eta_2 - \eta_1 \eta_2{}^5 &= \frac{(R-c)^{1} R^2}{c'\sqrt{c'} R'^3}\sqrt{R-c}, \\ \eta_1{}^8 + 14\eta_1{}^4 \eta_2{}^4 + \eta_2{}^8 &= \frac{(R-c)^2 R^3}{c'^2 R'^4}, \\ \eta_1{}^{12} - 33\eta_1{}^8 \eta_2{}^4 - 33\eta_1{}^4 \eta_2{}^8 + \eta_2{}^{12} &= \frac{(R-c)^3 R^4}{c'^3\sqrt{c'} R'^6}\sqrt{R-c}. \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Положивъ въ уравненіяхъ (57):

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=u,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} u^8+14u^4+1&=\frac{(R-c)^2 R^3}{c'^2 R'^4 \eta_2^8}, \\ u^{12}-33u^8-33u^4+1&=\frac{(R-c)^3 R^4}{c'^3\sqrt{c'}R'^6\eta_2^{12}}\sqrt{R-c}. \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Исключивъ u изъ уравненій (58), находимъ:

$$\begin{aligned} &\eta_2^{24}-\frac{5}{2.3}\frac{(R-c)^2 R^3}{c'^2 R'^4}\eta_2^{16}-\frac{5}{2^4}\frac{(R-c)^3 R^4}{c'^3\sqrt{c'}\,R'^6}\sqrt{R-c}\,\eta_2^{12}- \\ &-\frac{3.5}{2^8}\frac{(R-c)^4 R^6}{c'^4 R'^8}\eta_2^8-\frac{1}{2^8}\frac{(R-c)^5 R^7}{c'^5\sqrt{c'}\,R'^{10}}\sqrt{R-c}\,\eta_2^4- \\ &-\frac{1}{2^{10}.3^3}\frac{(R-c)^6 R^8}{c'^6 R'^{12}}\left(\frac{R-c}{c'}-R\right)=0, \end{aligned} \quad (59)$$

или, освобождая это уравненіе отъ радикаловъ и опустивъ индексъ 2 при η_2:

$$\begin{aligned} &\left\{\eta^{24}-\frac{5}{2.3}\frac{(R-c)^2 R^3}{c'^2 R'^4}\eta^{16}-\frac{3.5}{2^8}\frac{(R-c)^4 R^6}{c'^4 R'^8}\eta^8-\right. \\ &\left.-\frac{1}{2^{10}.3^3}\frac{(R-c)^6 R^8}{c'^6 R'^{12}}\left(\frac{R-c}{c'}-R\right)\right\}^2- \\ &-\frac{5^2}{2^8}\left\{\eta^8-\frac{1}{2^4.5}\frac{(R-c)^2 R^3}{c'^2 R'^4}\right\}^2\frac{(R-c)^7 R^8}{c'^7 R'^{12}}\eta^8=0. \end{aligned} \quad (60)$$

Таково уравненіе, соотвѣтствующее октаэдрической формѣ $f(\eta_1, \eta_2)$.

Подставивъ въ него значенія постоянныхъ:

$$c=108,\ c'=1,$$

и положивъ:

$$\frac{1}{c}R(z) = z,$$

находимъ:

$$\left\{\eta^{24} - 2.3^2.5(1-z)^2 z^3 \eta^{16} - \frac{3^7.5}{2^4}(1-z)^4 z^6 \eta^8 + \frac{3^6}{2^4}(1-z)^6 z^8\right\}^2 + \qquad (61)$$

$$+ \frac{3^9.5^2}{2^2}\left\{\eta^8 - \frac{3^3}{2^2.5}(1-z)^2 z^3\right\}^2 (1-z)^7 z^8 \eta^8 = 0.$$

Уравненіе икосаэдрическаго типа.

Возьмемъ нормальныя формы икосаэдрическаго типа:

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1 \eta_2(\eta_1^{10} + 11\eta_1^5\eta_2^5 - \eta_2^{10}) \\ H(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1^{20} - 228\eta_1^{15}\eta_2^5 + 494\eta_1^{10}\eta_2^{10} + \\ &\quad + 228\eta_1^5\eta_2^{15} + \eta_2^{20}, \\ T(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1^{30} + 522\eta_1^{25}\eta_2^5 - 10005\eta_1^{20}\eta_2^{10} - \\ &\quad - 10005\eta_1^{10}\eta_2^{20} - 522\eta_1^5\eta_2^{25} + \eta_2^{30}. \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

Мы могли бы составить уравненіе, соотвѣтствующее первичной формѣ $f(\eta_1, \eta_2)$, пользуясь тѣмъ же пріемомъ, который мы примѣнили въ предшествующихъ двухъ случаяхъ; но исключеніе перемѣннаго

$$u = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

въ данномъ случаѣ представляло бы весьма большія механическія затрудненія.

Будетъ нѣсколько короче воспользоваться общимъ пріемомъ, указаннымъ въ началѣ настоящаго параграфа.

Индексъ первичной формы $f(\eta_1, \eta_2)$ икосаэдрическаго типа равенъ 10; поэтому искомое уравненіе будетъ такого вида:

$$\eta^{120} + A_{10}\eta^{110} + A_{20}\eta^{100} + \ldots + A_{110}\eta^{10} + A_{120} + 0. \qquad (63)$$

Выразивъ коэффиціенты этого уравненія въ видѣ однородныхъ формъ съ аргументами η_1, η_2, мы можемъ сказать, что коэффиціентъ

$$A_{10k}(\eta_1, \eta_2)$$

представляется въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} A_{10k}(\eta_1, \eta_2) = \varPhi[f^5(\eta_1, \eta_2),\ H^3(\eta_1, \eta_2)] \times \\ \times f^{m_1}(\eta_1, \eta_2)\ H^{m_2}(\eta_1, \eta_2)\ T^{m_3}(\eta_1, \eta_2), \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

при чемъ показатели m_1, m_2, m_3, и степень s формы $\varPhi$ связаны между собою неопредѣленнымъ уравненіемъ:

$$10k = 60s + 12m_1 + 20m_2 + 30m_3, \quad (65)$$

откуда:

$$k = 6s + \frac{6}{5} m_1 + 2m_2 + 3m_3. \quad (66)$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что число m_1 дѣлится на 5. Такъ какъ мы, кромѣ того, знаемъ, что m_1 должно быть меньше 5, то число это, необходимо, равно 0.

Итакъ:

$$m_1 = 0,$$
$$k = 6s + 2m_2 + 3m_3. \quad (67)$$

Неопредѣленное уравненіе (67) при всѣхъ значеніяхъ k отъ $k = 1$ до $k = 11$ допускаетъ только по одной системѣ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Рѣшивъ эти уравненія, находимъ слѣдующія выраженія коэффиціентовъ $A_{10k}(\eta_1, \eta_2)$:

$$\left.\begin{aligned}
&A_{10} = 0,\ A_{20} = p_2\, H(\eta_1, \eta_2),\ A_{30} = p_3\, T(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{40} = p_4\, H^2(\eta_1, \eta_2),\ A_{50} = p_5\, H(\eta_1, \eta_2)\, T(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{60} = p_6\, f^5(\eta_1, \eta_2) + q_6 H^3(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{70} = p_7 H^2(\eta_1, \eta_2) T(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{80} = \{p_8 f^5(\eta_1, \eta_2) + q_8 H^3(\eta_1, \eta_2)\}\, H(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{90} = \{p_9 f^5(\eta_1, \eta_2) + q_9 H^3(\eta_1, \eta_2)\}\, T(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{100} = \{p_{10} f^5(\eta_1, \eta_2) + q_{10} H^3(\eta_1, \eta_2)\}\, H^2(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{110} = \{p_{11} f^5(\eta_1, \eta_2) + q_{11} H^3(\eta_1, \eta_2)\}\, H(\eta_1, \eta_2)\, T(\eta_1, \eta_2),
\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

гдѣ $p_2, p_3, \ldots p_{11}, q_6, q_8, q_9, \ldots q_{11}$ суть нѣкоторые пока намъ не извѣстные постоянные коэффиціенты.

Коэффиціентъ A_{120}, какъ мы знаемъ, разнится отъ $f^{10}(\eta_1, \eta_2)$ только нѣкоторымъ постояннымъ множителемъ:

$$A_{120} = q_{12}\, f^{10}(\eta_1, \eta_2). \tag{69}$$

Для опредѣленія постоянныхъ $p_2, p_3, \ldots p_{11}, q_6\ q_8, \ldots q_{12}$ мы могли бы подставить выраженія коэффиціентовъ (68) и (69) въ уравненіе (63) и примѣнить общій пріемъ, указанный выше.

Такой способъ, несомнѣнно, привелъ бы къ цѣли, но потребовалъ бы громадныхъ ариѳметическихъ вычисленій.

Можно нѣсколько упростить эти вычисленія, пользуясь слѣдующими соображеніями *).

Въ § 20 мы нашли основныя подстановки икосаэдрической группы бинарныхъ линейныхъ подстановокъ. Тѣмъ же способомъ можно найти всѣ подстановки этой группы.

Обозначивъ черезъ υ бинарную подстановку:

$$\upsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \tag{70}$$

соотвѣтствующую неоднородной подстановкѣ:

$$U(u) = -\frac{1}{u},$$

мы можемъ изобразить бинарныя подстановки нормальной икосаэдрической группы такими символическими формулами:

---

*) Этотъ способъ предложенъ Фуксомъ въ его второмъ мемуарѣ: Ueber linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen uud eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Crelles Journal. Bd. 85.

Онъ значительно проще непосредственнаго сравненія коэффиціентовъ, хотя тоже требуетъ вычисленій очень утомительныхъ. Фуксъ, указавъ на пріемъ, однако не вычислилъ ни одного изъ коэффиціентовъ уравненія.

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^k,\ \sigma^k\upsilon,\ \sigma^k\tau\sigma^h,\ \sigma^k\tau\sigma^h\upsilon\ ^{*)}, \\ \text{гдѣ } k = 0, 1, \ldots\ 9, \\ \qquad h = 0, 1, \ldots\ 4. \end{array}\right\} \tag{71}$$

Если η_1 есть корень уравненія (63), то тому же уравненію удовлетворитъ функція—η_2: это слѣдуетъ изъ того, что въ группу (71) разсматриваемаго уравненія входитъ подстановка υ:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\eta}_1 = -\eta_2, \\ \bar{\eta}_2 = \eta_1. \end{array}\right\} \tag{70'}$$

Примѣняя къ величинамъ η_1, $-\eta_2$ подстановки группы (71), находимъ всѣ корни уравненія (63), выраженныя въ видѣ линейныхъ функцій отъ η_1, η_2.

Десятыя степени корней изобразятся формулами:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1^{10},\ \eta_2^{10},\ \left(\dfrac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}}\varepsilon^h\eta_1 - \dfrac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}}\eta_2\right)^{10}, \\ \left(\dfrac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}}\varepsilon^h\eta_1 + \dfrac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}}\eta_2\right)^{10}, \\ \text{гдѣ } h = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}. \end{array}\right\} \tag{72}$$

Уравненіе (63) представится въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{l} (\eta^{10}-\eta_1^{10})(\eta^{10}-\eta_2^{10}) \underset{h=1}{\overset{h=4}{P}} \left\{\eta^{10} - \left(\dfrac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}}\varepsilon^h\eta_1 - \dfrac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}}\eta_2\right)^{10}\right\} \times \\ \times \left\{\eta^{10} - \left(\dfrac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}}\varepsilon^h\eta_1 + \dfrac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}}\eta_2\right)^{10}\right\} = 0. \end{array} \tag{73}$$

Представивъ уравненіе (63) въ видѣ (73), мы можемъ вычислить симметрическія функціи s_{10}, s_{20}, $s_{30}\ldots$ его корней, а затѣмъ и коэффиціенты уравненія (63). Эти коэффиціенты представляются въ видѣ однородныхъ формъ съ аргунентами

*) Сравн. формулы (58), главы IV.

η_1, η_2 и должны быть тождественны съ найденными выше выраженіями (68) этихъ коэффиціентовъ.

Сравнивая полученныя два выраженія каждаго изъ коэффиціентовъ A_{10k}, мы опредѣлимъ величины постоянныхъ, входящихъ въ формулы (68). Само собою ясно, что находя выраженія формъ $A_{10k}(\eta_1, \eta_2)$ изъ уравненія (73), мы можемъ ограничиваться вычисленіемъ одного или двухъ старшихъ коэффиціентовъ этихъ формъ.

Приведемъ величины нѣсколькихъ изъ коэффиціентовъ, найденныхъ этимъ способомъ:

$$\left.\begin{aligned} &p_2 = -\frac{14}{5^2},\ p_3 = -\frac{41}{5^3},\ p_4 = -\frac{293}{5^5},\ p_5 = -\frac{254}{5^6},\\ &p_6 = -\frac{718}{5^8},\ p_7 = -\frac{271}{5^9},\ldots,\ p_{11} = -\frac{1}{5^{25}},\ldots,\\ &\qquad\qquad q_{12} = \frac{1}{5^{25}}. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Всѣхъ коэффиціентовъ мы не вычисляемъ потому, что уравненіе (63) по своей высокой степени и сложности коэффиціентовъ можетъ имѣть исключительно теоретическій интересъ.

Вставивъ въ формулы (68) вмѣсто $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ выраженія (37) этихъ первичныхъ формъ черезъ независимое перемѣнное z, и внеся затѣмъ полученныя выраженія коэффиціентовъ въ уравненіе (63), найдемъ:

$$\begin{aligned} &\eta^{120} + p_2\frac{(R-c)^5R^7}{c'^5R'^{10}}\eta^{100} + p_3\frac{(R-c)^8R^{10}}{c'^8R'^{15}}\eta^{90} + \\ &+ p_4\frac{(R-c)^{10}R^{14}}{c'^{10}R'^{20}}\eta^{80} + p_5\frac{(R-c)^{13}R^{17}}{c'^{13}R'^{25}}\eta^{70} + \\ &+ \frac{(R-c)^{15}R^{20}}{c'^{15}R'^{30}}(p_6 + Rq_6)\eta^{60} + p_7\frac{(R-c)^{18}R^{24}}{c'^{18}R'^{35}}\eta^{50} + \\ &+ \frac{(R-c)^{20}R^{27}}{c'^{20}R'^{40}}(p_8 + Rq_8)\eta^{40} + \frac{(R-c)^{23}R^{30}}{c'^{23}R'^{45}}(p_9 + Rq_9)\eta^{30} + \\ &+ \frac{(R-c)^{25}R^{34}}{c'^{25}R'^{50}}(p_{10} + Rq_{10})\eta^{20} + \frac{(R-c)^{28}R^{37}}{c'^{28}R'^{55}}(p_{11} + Rq_{11})\eta^{10} + \\ &+ q_{12}\frac{(R-c)^{30}R^{40}}{c'^{30}R'^{60}} = 0. \end{aligned} \tag{75}$$

Подставивъ вмѣсто c и c' величины этихъ постоянныхъ:

$$c = -12^3,\ c' = 1,$$

и положивъ:

$$\frac{1}{c} R(z) = z,$$

находимъ:

$$\begin{aligned}
&\eta^{120} + 12^6 p_2 (1-z)^5 z^7 \eta^{100} + 12^9 p_3 (1-z)^8 z^{10} \eta^{90} + \\
&+ 12^{12} p_4 (1-z)^{10} z^{14} \eta^{80} + 12^{15} p_5 (1-z)^{13} z^{17} \eta^{70} + \\
&+ 12^{15} (p_6 - 12^3 z q_6)(1-z)^{15} z^{20} \eta^{60} + 12^{21} p_7 (1-z)^{18} z^{24} \eta^{50} + \\
&+ 12^{21} (p_8 - 12^3 z q_8)(1-z)^{20} z^{27} \eta^{40} + \\
&+ 12^{24} (p_9 - 12^3 z q_9)(1-z)^{23} z^{30} \eta^{30} + \\
&+ 12^{27} (p_{10} - 12^3 z q_{10})(1-z)^{25} z^{34} \eta^{20} + \\
&+ 12^{30} (p_{11} - 12^3 z q_{11})(1-z)^{28} z^{37} \eta^{10} + 12^{30} (1-z)^{30} z^{40} = 0.
\end{aligned} \tag{76}$$

§ 37. **Алгебраическія уравненія, имѣющія корнями частные интегралы гипергеометрическихъ дифференціальныхъ уравненій.**

Мы видѣли въ § 34, что преобразуя уравненіе

$$F(\eta, z) = 0 \tag{8}$$

подстановкой:

$$\eta = \frac{1}{k} z^{\frac{1}{3}} (1-z)^{\frac{1}{4}} y, \tag{22}$$

мы получаемъ новое алгебраическое уравненіе, имѣющее корнями частные интегралы гипергеометрическаго уравненія.

Выполнимъ эти преобразованія для уравненій, найденныхъ въ предыдущемъ параграфѣ.

I. Уравненіе тетраэдрическаго типа.

Положивъ въ формулѣ (22):

$$k = 1$$

и совершивъ затѣмъ подстановку (22) въ уравненіи (55), находимъ:

$$\begin{aligned} & y^{24} + \frac{2^3}{3^2}\sqrt{1-z}\, y^{18} - \frac{2}{3^5}(32z+13)y^{12} + \\ & + \frac{2^4}{3^9}(32z-5)\sqrt{1-z}\, y^6 - \frac{1}{3^9} = 0. \end{aligned} \tag{77}$$

Освободивъ это уравненіе отъ радикаловъ, находимъ:

$$\begin{aligned} & \left\{ y^{24} - \frac{2}{3^5}(32z+13)y^{12} - \frac{1}{3^9} \right\}^2 - \\ & - \frac{2^6}{3^4}\left\{ y^{12} + \frac{2}{3^7}(32z-5) \right\}^2 (1-z)\, y^{12} = 0. \end{aligned} \tag{78}$$

Всѣ корни этого уравненія, какъ мы знаемъ, суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія (16), въ которомъ параметры α, β, γ таковы:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \ \beta = -\frac{1}{12}, \ \gamma = \frac{2}{3}. \tag{79}$$

Иными словами, корни уравненія (78) суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{6}(4-7z)\frac{dy}{dz} + \frac{1}{48}y = 0. \tag{80}$$

Изъ формулъ (48) главы III слѣдуетъ, что существуетъ два частныхъ интеграла y_5, y_6 уравненія (80), которые въ области безконечно удаленной точки могутъ быть изображены формулами:

$$\left. \begin{aligned} & y_5 = z^{-\frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{4}{3}, \frac{1}{z}\right), \\ & y_6 = z^{\frac{1}{12}} F\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{z}\right). \end{aligned} \right\} \tag{81}$$

Всякій интегралъ уравненія (80) и, вслѣдствіе этого, всякій корень уравненія (78) могутъ быть представлены въ видѣ линейной функціи отъ y_5 и y_6:

$$y = Ay_5 + By_6. \tag{82}$$

Одинъ изъ корней уравненія (80) въ области точки $z=\infty$ разлагается въ рядъ вида:

$$y = \frac{e^{\frac{\pi i}{12}}}{2\sqrt{2}} z^{-\frac{1}{4}} + \ldots \tag{83}$$

Этотъ корень при $z=\infty$ обращается въ 0 и можетъ выражаться формулою (82) только въ такомъ случаѣ, если

$$A = \frac{e^{\frac{\pi i}{12}}}{2\sqrt{2}}, \quad B=0. \tag{84}$$

Итакъ, одинъ изъ корней уравненія (78) въ области III (см. черт. 2) изображается формулою:

$$y = \frac{e^{\frac{\pi i}{12}}}{2\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{4}{3}, \frac{1}{z}\right) z^{-\frac{1}{4}}. \tag{85}$$

Остальные корни суть другія значенія той же самой многозначной функціи, имѣющей 48 значеній какъ видно изъ уравненія (78).

Выраженія этихъ остальныхъ корней въ области III и выраженія всѣхъ корней въ области I найдутся изъ формулы (85) примѣненіемъ общихъ формулъ теоріи гипергеометрическихъ функцій *).

На этихъ вычисленіяхъ мы не будемъ останавливаться.

II. Уравненіе октаэдрическаго типа.

Выполнимъ такія же вычисленія для уравненія (61) октаэдрическаго типа.

---

*) См. Тихомандритскій. О гипергеометрическихъ рядахъ. Стр. 53—57.

Совершимъ въ уравненіи (61) подстановку:

$$\eta = \frac{1}{k} z^{\frac{1}{3}} (1-z)^{\frac{1}{4}} y, \tag{22}$$

положивъ при этомъ

$$k=1.$$

Въ результатѣ находимъ:

$$\left(y^{24} - 2.3^2.5\, z^{\frac{1}{3}} y^{16} - \frac{3^7.5}{2^4} z^{\frac{2}{3}} y^8 + \frac{3^6}{2^4}\right)^2 + \\ + \frac{3^9.5^2}{2^2}\left(y^8 - \frac{3^3}{2^2.5} z^{\frac{1}{3}}\right)^2 (1-z) y^8 = 0. \tag{86}$$

Освободивъ это уравненіе отъ радикаловъ, находимъ:

$$\left\{\left(y^{24} + \frac{3^6}{2^4}\right)^3 - 2^3.3^6.5^3 z\, y^{48} - \frac{3^{21}.5^3}{2^{12}} z^2 y^{24} - \right. \\ \left. - \frac{3^{10}.5^2}{2^3} z\left(y^{24} + \frac{3^6}{2^4}\right) y^{24}\right\}^2 + \frac{3^{27}.5^6}{2^6}\left(y^{24} - \frac{3^9}{2^6.5^3} z\right)^2 (1-z)^3 y^{24} = 0. \tag{87}$$

Корни этого уравненія суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія (16), въ которомъ параметры α, β, γ таковы:

$$\alpha = \frac{5}{24}, \ \beta = -\frac{1}{24}, \ \gamma = \frac{2}{3}, \tag{88}$$

т. е. корни уравненія (87) суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{6}(4-7z)\frac{dy}{dz} + \frac{5}{576} y = 0. \tag{89}$$

Изъ формулъ (48) главы III слѣдуетъ, что два частныхъ интеграла y_5, y_6 уравненія (89) въ области III (черт. 2) изображаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} y_5 &= z^{\frac{5}{24}} F\left(\frac{5}{24}, \frac{13}{24}, \frac{5}{4}, \frac{1}{z}\right), \\ y_6 &= z^{\frac{1}{24}} F\left(-\frac{1}{24}, \frac{7}{24}, \frac{3}{4}, \frac{1}{z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Всякій частный интегралъ уравненія (89) изобразится формулою вида:

$$y = Ay_5 + By_6, \tag{91}$$

гдѣ A и B суть постоянныя.

Одинъ изъ корней уравненія (87) въ области точки $z=\infty$ разлагается въ рядъ вида:

$$y = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{9}{8}}} z^{-\frac{5}{24}} + \ldots \tag{92}$$

Эта функція при $z=\infty$ обращается въ 0 и только въ томъ случаѣ можетъ быть изображена формулою (91), если:

$$A = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{9}{8}}}, \quad B = 0.$$

Итакъ, одинъ изъ корней уравненія (87) въ области III изображается формулою:

$$y = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{9}{8}}} F\left(\frac{5}{24}, \frac{13}{24}, \frac{5}{4}, \frac{1}{z}\right) z^{-\frac{5}{24}}. \tag{93}$$

Остальные корни уравненія (87) выразятся другими значеніями той же многозначной функціи. Число всѣхъ значеній этой функціи равно 144, какъ видно изъ уравненія (87).

III. Уравненіе икосаэдрическаго типа.

Совершимъ ту же подстановку:

$$\eta = \frac{1}{k} z^{\frac{1}{3}} (1-z)^{\frac{1}{4}} y \tag{22}$$

въ уравненіи икосаэдрическаго типа (76) и примемъ

$$k = 12^{\frac{3}{10}}.$$

Выполнивъ эту подстановку, находимъ:

$$y^{120} + p_2 \sqrt[3]{z}\, y^{100} + p_3 \sqrt{1-z}\, y^{90} + p_4 \sqrt[3]{z^2}\, y^{80} + p_5 \sqrt{1-z}\sqrt[3]{z}\, y^{70} +$$

$$+ \frac{1}{12^3}(p_6 - 12^3 q_6 z) y^{60} + p_7 \sqrt{1-z}\, \sqrt[3]{z^2}\, y^{50} +$$

$$+ \frac{1}{12^3}(p_8 - 12^3 q_8 z)\, \sqrt[3]{z}\, y^{40} + \frac{1}{12^3}(p_9 - 12^3 q_9 z)\sqrt{1-z}\, y^{30} + \tag{94}$$

$$+ \frac{1}{12^3}(p_{10} - 12^3 q_{10} z)\, \sqrt[3]{z^2}\, y^{20} +$$

$$\frac{1}{12^3}(p_{11} - 12^3 q_{11} z)\sqrt{1-z}\, \sqrt[3]{z}\, y^{10} + \frac{1}{12^6} = 0.$$

Освободивъ это уравненіе отъ радикаловъ, мы получили бы уравненіе 720-ой степени весьма сложное по своему виду.

Корни уравненія (94) суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія (16), въ которомъ:

$$\alpha = \frac{11}{60}, \ \beta = -\frac{1}{60}, \ \gamma = \frac{2}{3}, \tag{95}$$

т. е. корни уравненія (94) суть частные интегралы уравненія:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{6}(4 - 7z)\frac{dy}{dz} + \frac{11}{3600}y = 0. \tag{96}$$

Это уравненіе имѣетъ два линейно независимыхъ частныхъ интеграла y_5, y_6, которые въ области III (черт. 2) изображаются формулами

$$\left.\begin{aligned} y_5 &= z^{-\frac{11}{60}} F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{z}\right), \\ y_6 &= z^{\frac{1}{60}} F\left(-\frac{1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Всякій интегралъ уравненія (96) изобразится формулою вида:

$$y = Ay_5 + By_6. \tag{98}$$

гдѣ A и B суть нѣкоторыя постоянныя.

Въ области точки $z = \infty$ одинъ изъ корней уравненія (94) разлагается въ рядъ вида:

$$y = \frac{e^{\frac{\pi i}{40}}}{12^{\frac{3}{5}} q_{11}^{\frac{1}{10}}} z^{-\frac{11}{60}} + \ldots \tag{99}$$

Эта функція при $z = \infty$ обращается въ 0 и можетъ изображаться формулою (98) только при условіи:

$$A = \frac{e^{\frac{\pi i}{40}}}{12^{\frac{3}{5}} q_{11}^{\frac{1}{10}}}, \quad B = 0.$$

Итакъ, одинъ изъ корней уравненія (94) въ области III изображается формулою:

$$y = \frac{e^{\frac{\pi i}{40}}}{12^{\frac{3}{5}} q_{11}^{\frac{1}{10}}} F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{z}\right). \tag{100}$$

Остальные корни того же уравненія изобразятся другими значеніями той же функціи. Всего функція (100) должна имѣть 720 значеній.

Этимъ мы закончимъ изученіе свойствъ и видовъ уравненій разсмотрѣннаго нами класса уравненій и перейдемъ къ постановкѣ общей задачи о видахъ и рѣшеніяхъ алгебраическихъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

ГЛАВА IX.

Общая задача объ алгебраическихъ уравненіяхъ, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Результаты, полученные нами въ главахъ I—VII, даютъ возможность довольно просто рѣшить главную задачу нашей работы: найти виды и способы рѣшенія алгебраическихъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ. Въ настоящей главѣ мы разсмотримъ, къ какимъ болѣе частнымъ вопросамъ приводится рѣшеніе этой общей задачи и каковы пріемы рѣшенія этихъ вопросовъ.

Но прежде чѣмъ приступить къ этой задачѣ намъ необходимо нѣсколько пополнить то изложеніе свойствъ группъ линейныхъ подстановокъ, которое приведено въ главахъ III и IV, и ознакомиться съ понятіемъ объ аутоморфныхъ функціяхъ и съ главнѣйшими свойствами этихъ функцій.

§ 38. **Нѣкоторыя свойства группъ линейныхъ подстановокъ.**

Пусть дана группа линейныхъ подстановотъ:

$$S_0 = 1,\ S_1,\ S_2, \ldots\ S_{N-1}. \tag{1}$$

Порядокъ ея N можетъ быть конечнымъ или безконечно большимъ числомъ.

Отмѣтимъ гдѣ либо на плоскости перемѣннаго u произвольную точку u_0. Совершивъ надъ количествомъ u_0 подстановки группы (1), мы получимъ N точекъ на плоскости:

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots\ u_{N-1}. \tag{2}$$

Точки эти эквивалентны между собою относительно подстановокъ группы (1). Число ихъ конечно или безконечно велико, смотря по тому, конеченъ или безконечно великъ порядокъ N группы (1).

Можетъ случиться, что *каждая* изъ точекъ (2) безконечно близка къ ближайшимъ точкамъ той же совокупности (2). Тогда группа (1) будетъ группою *непрерывною*; въ противномъ случаѣ группа (1) будетъ *прерывною*. Мы будемъ говорить только о прерывныхъ группахъ. Въ прерывныхъ группахъ *нѣкоторыя* изъ точекъ (2) могутъ лежать безконечно близко другъ къ другу.

Таковы точки, лежащія на окружности на чертежѣ 11.

Пусть u_0 лежитъ на конечномъ разстояніи отъ ближайшей къ ней точки совокупности точекъ (2). Окружимъ ее какою либо сомкнутою кривою весьма малыхъ размѣровъ такъ, чтобы внутри кривой лежала только одна точка u_0 изъ числа точекъ совокупнисти (2). Назовемъ площадь, ограниченную этою кривою—площадью c_0 *). Преобразуя площадь c_0 подстановками (1), мы получимъ N эквивалентныхъ между собою площадей:

$$c_0,\ c_1,\ c_2, \dots\ c_{N-1}. \tag{3}$$

Въ каждой изъ площадей (3) лежитъ по одной изъ числа точекъ (2).

Площадь c_0 всегда можно взять на столько малыхъ размѣровъ, чтобы площади (3) нигдѣ не заходили другъ за друга,

Станемъ увеличивать размѣры площади c_0.

Въ то же время остальныя площади (3) будутъ тоже возрастать. Продолжимъ увелеченіе площади c_0 до тѣхъ поръ. пока она не придетъ въ соприкосновеніе съ одною или нѣсколькими изъ площадей (3). Въ то же самое время каждая изъ площадей (3) придетъ въ соприкосновеніе съ такимъ же числомъ площадей совокупности (3). Если между площадью

---

*) Площадь c_0 можетъ состоять даже изъ нѣсколькихъ не смежныхъ между собою весьма малыхъ площадей, выбранныхъ такъ, чтобы внутри площади c_0 лежала только одна изъ числа точекъ совокупности (2)— именно точка u_0.

c_0 и сосѣдними съ нею площадями остается еще незанятая часть плоскости, то мы можемъ начать увеличеніе площади c_0 въ новомъ направленіи до тѣхъ поръ, пока она въ новой точкѣ не встрѣтится съ одною изъ сосѣднихъ областей, и т. д. Въ результатѣ мы достигнемъ того, что области (3) будутъ плотно прилегать другъ къ другу на всемъ протяженіи границы каждой изъ нихъ, нигдѣ не заходя другъ за друга.

Назовемъ эти области въ такомъ окончательномъ видѣ областями:

$$C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots\ C_{N-1}. \tag{4}$$

Эти области тоже между собою эквивалентны и, какъ мы сказали, плотно прилегаютъ другъ къ другу, не заходя другъ за друга. Онѣ образуютъ нѣкоторую *сѣть* областей. Число областей сѣти равно порядку группы (1). Сѣть можетъ покрывать собою или всю плоскость, или только часть ея.

Каждая изъ областей (4), наприм. область C_0, обладаетъ двумя главными свойствами:

1) Гдѣ бы мы ни взяли точку u въ той части плоскости, которая занята сѣтью,—въ области C_0 найдется одна точка, ей эквивалентная.

2) Внутри области C_0 нѣтъ ни одной пары точекъ между собою эквивалентныхъ. (Точки, лежащія на контурѣ области C_0, попарно эквивалентны между собою, какъ мы увидимъ ниже).

Каждую изъ областей (4) мы назовемъ основною областью группы (1).

Сказанныя два свойства площади C_0 суть характерныя свойства основной области, которыя могутъ быть приняты за ея опредѣленіе. Ясно, что тѣ сѣти четыреугольниковъ, которыя мы разсматривали въ главахъ III и IV, суть лишь частные случаи разсматриваемыхъ нами теперь сѣтей.

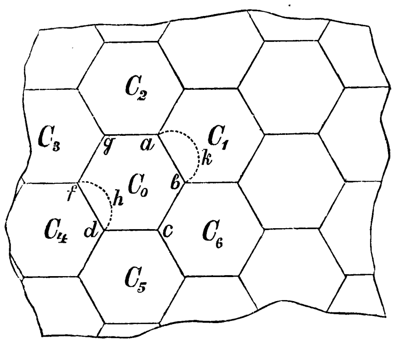
Пусть сѣть нѣкоторой группы изображена на черт. 34.

Пусть точка u_0, лежащая внутри области C_0, приближается къ границѣ этой области, переступаетъ эту границу и входитъ въ область C_4. Въ то же время точки

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \dots\ u_{N-1}, \tag{5}$$

соотвѣтственныя съ u_0, тоже приближаются къ границамъ областей:

$$C_1,\ C_2,\ C_3, \dots\ C_{N-1},$$



Чер. 34.

переходятъ эти границы и вступаютъ въ смежныя области.

Въ тотъ моментъ, когда u_0, перейдя границу fd, вступила въ C_4, одна изъ соотвѣтственныхъ точекъ (5) вступила внутрь области C_0. Для опредѣленности положимъ, что именно точка u_1 вступила въ область C_0 черезъ границу ab.

Точки u_0 и u_1 связаны между собою одною изъ подстановокъ (1).

Пусть:

$$u_1 = S_1(u_0).$$

Мы сказали, что въ тотъ моментъ, когда u_0 приходитъ въ нѣкоторую точку границы fd, точка u_1 приходитъ въ нѣкоторую точку границы ab. Отсюда слѣдуетъ, что точки границы fd эквивалентны точкамъ границы ab, и при томъ подстановка, преобразующая границу ab въ fd, есть подстановка S_1 группы (1).

Подстановка S_1 преобразуетъ область C_0 въ область C_1.

Этотъ результатъ совершенно аналогиченъ результату, полученному въ § 13 для сѣти четыреугольниковъ. Его мы можемъ формулировать въ видѣ теоремы:

Теорема 1. *Стороны основной области попарно эквивалентны между собою. Подстановки, преобразующія эквивалентныя стороны основной области другъ въ друга, преобразуютъ основную область въ смежныя съ нею основныя области.*

Эквивалентныя между собою стороны основной области мы по прежнему будемъ называть *сопряженными*.

Пусть подстановки, преобразующія попарно другъ въ друга сопряженныя стороны области C_0 суть:

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots \mathfrak{T}_\nu. \tag{6}$$

Эти подстановки (6) преобразуютъ область C_0 во всѣ смежныя съ нею.

Повторяя разсужденія, приведенныя въ § 13, найдемъ, что изъ подстановокъ (6) можно составить любую подстановку группы (1).

Въ числѣ этихъ подстановокъ находятся *всѣ* основныя подстановки группы (1), хотя мы и не можемъ утверждать, что между ними нѣтъ неосновныхъ подстановокъ.

Изъ приведеннаго выше опредѣленія основной области видно, что въ выборѣ контура основной области есть нѣкоторый произволъ. И дѣйствительно, какъ мы сейчасъ увидимъ, контуръ основной области можетъ быть деформируемъ въ значительной степени.

Обратимся снова къ чертежу 34 и пусть по прежнему сторона fd есть сторона сопряженная съ ab. Отдѣлимъ внутри области C_0 произвольную площадь fhd, примыкающую къ сторонѣ fd. Въ области C_1 найдется площадь эквивалентная площади fhd: пусть это будетъ akb. Площадь akb непремѣнно примыкаетъ къ сторонѣ ab сопряженной съ fd. Вычтя изъ основной области C_0 площадь fhd и прибавивъ площадь akb, получимъ площадь $akbcdhfg$, которая можетъ быть принята за основную область группы (1) вмѣсто области C_0.

Измѣненія основной области, подобныя только что разсмотрѣнному, мы будемъ называть *возможными измѣненіями* (erlaubte Abänderungen).

Производя возможныя измѣненія основной области, мы можемъ ее деформировать значительно. Пользуясь возможными измѣненіями, мы всегда можемъ достичь того, чтобы:

1) Основная область была сплошною односвязною площадью.

2) Чтобы основная область была ограничена дугами круговъ и прямыми линіями.

Въ такомъ видѣ мы и будемъ ее себѣ представлять.

Возьмемъ двѣ группы G и g. Пусть *всѣ* подстановки группы g входятъ въ группу G.

Пусть порядки g и G равны n и N, при чемъ n и N суть числа конечныя или безконечно большія.

Пусть подстановки группы g таковы:

$$s_0 = 1,\ s_1,\ s_2, \ldots,\ s_{n-1}. \tag{7}$$

Повторяя разсужденія, весьма обычныя въ высшей алгебрѣ, мы придемъ къ заключенію, что подстановки группы G могутъ быть расположены въ видѣ такой таблицы:

$$\left.\begin{array}{llll}
s_0=1, & s_1, & s_2, \ldots & s_{n-1}, \\
s_0\sigma_1=\sigma_1, & s_1\sigma_1, & s_2\sigma_1, \ldots & s_{n-1}\sigma_1, \\
s_0\sigma_2=\sigma_2, & s_1\sigma_2, & s_2\sigma_2, \ldots & s_{n-1}\sigma_2, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
s_0\sigma_{l-1}=\sigma_{l-1}, & s_1\sigma_{l-1}, & s_2\sigma_{l-1}, \ldots & s_{n-1}\sigma_{l-1},
\end{array}\right\} \tag{8}$$

гдѣ:

$$\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots\ \sigma_{l-1} \tag{9}$$

суть нѣкоторыя подстановки группы G, не входящія въ g. Число l равно отношенію порядковъ группъ G и g *):

$$l = \frac{N}{n}. \tag{10}$$

Построимъ сѣть, соотвѣтствующую группѣ G.

Найдемъ тѣ изъ числа областей (4), которыя соотвѣтствуютъ подстановкамъ:

---

*) Это справедливо въ предположеніи, что числа n и N конечны. Ради сокращенія рѣчи мы будемъ называть l отношеніемъ порядковъ группъ даже и въ томъ случаѣ, когда эти порядки безконечно велики.

$$\sigma_0=1,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ldots\ \sigma_{l-1}. \tag{11}$$

Пусть эти области суть:

$$\Gamma_0=C_0,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ldots\ \Gamma_{l-1}. \tag{12}$$

Совокупность этихъ l областей составляетъ нѣкоторую площадь, вообще говоря, не сплошную. Обозначимъ ее буквою c. Докажемъ, что c можетъ быть принята за основную область группы g.

Часть плоскости, покрываемая сѣтью группы G, во всякомъ случаѣ не меньше части плоскости, покрываемой сѣтью группы g.

Возьмемъ гдѣ либо внутри этой части плоскости какую либо точку u, не лежащую на границѣ области. Пусть область группы g, въ которой лежитъ точка u, соотвѣтствуетъ подстановкѣ:

$$s_i\ \sigma_j,$$

гдѣ i равно одному изъ чиселъ $0,\ 1,\ 2,\ldots\ n-1$, а j—одному изъ чиселъ: $0,\ 1,\ 2,\ldots\ l-1$.

Совершивъ надъ точкою u подстановку

$$s_i^{-1}$$

группы g, мы найдемъ точку u', лежащую въ той области группы G, которая соотвѣтствуетъ подстановкѣ σ_j, т. е. найдемъ точку, лежащую внутри площади c.

И такъ, каждой точкѣ той части плоскости, которая занята сѣтью группы g, соотвѣтствуетъ одна точка, лежащая внутри площади c и эквивалентная взятой точкѣ относительно подстановокъ группы g.

Докажемъ, что внутри площади c нѣтъ ни одной пары точекъ, эквивалентныхъ относительно подстановокъ группы g.

Допустимъ, что мы нашли пару точекъ u и u', связанныхъ подстановкою s_i:

$$u'=s_i(u) \tag{13}$$

и лежащихъ внутри области c.

Точки u и u', эквивалентныя относительно группы g, эквивалентны и относительно G. Слѣдовательно онѣ не могутъ лежать внутри одной и той же изъ числа областей (12).

Если онѣ лежатъ въ двухъ различныхъ изъ числа областей (12), то онѣ связаны между собою одной изъ подстановокъ (11):

$$u'=\sigma_j(u). \tag{14}$$

Изъ равенствъ (13) и (14) слѣдуетъ, что подстановка σ_j входитъ въ группу g; а это противорѣчитъ условію.

И такъ, дѣйствительно c есть основная область группы g.

Покажемъ, что подстановки (11) всегда могутъ быть выбраны такъ, чтобы площадь c была сплошная.

Пусть Γ' есть область, смежная съ C_0 и не входящая въ число областей (12). Пусть подстановка, преобразующая Γ_0 въ Γ', есть σ'. Такъ какъ σ' есть подстановка группы G, то она представится одной изъ формулъ (8). Пусть, напр.,

$$\sigma'=s_i\,\sigma_1. \tag{15}$$

Изъ символическаго равенства (15) слѣдуетъ:

$$\sigma_1=s_i^{-1}\,\sigma'. \tag{16}$$

Внеся это выраженіе σ_1 во вторую строку таблицы (8), находимъ:

$$s_0 s_i^{-1}\,\sigma',\ s_1\,s_i^{-1}\,\sigma',\ s_2\,s_i^{-1}\,\sigma',\ldots,\ s_{n-1}\,s_i^{-1}\,\sigma'. \tag{17}$$

Тѣ же подстановки, только въ иномъ порядкѣ, изобразятся формулами:

$$s_0\,\sigma'=\sigma',\ s_1\,\sigma',\ s_2\,\sigma',\ldots,\ s_{n-1}\,\sigma'. \tag{18}$$

Слѣдовательно, вторую строку таблицы (8) можно замѣнить строкой (18). Вмѣстѣ съ тѣмъ подстановка σ_1 замѣнилась подстановкой σ', а область Γ_1 областью Γ'—смежною съ Γ_0.

Дѣлая подобныя же замѣны, мы достигнемъ того, что подстановки (11) замѣнятся новыми подстановками

$$\sigma',\ \sigma'',\ldots\ \sigma^{(l-1)}, \tag{19}$$

а области:

$$\Gamma_0 = C_0, \ \Gamma_1, \ldots \ \Gamma_{(l-1)} \tag{12}$$

областями:

$$\Gamma_0 = C_0, \ \Gamma', \ldots \ \Gamma^{(l-1)}, \tag{20}$$

составляющими сплошную площадь.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что подстановки (11) уже съ самаго начала были выбраны такъ, чтобы соотвѣтствующія имъ области (12) составляли сплошную площадь.

Полученные результаты можно формулировать въ видѣ теоремы:

Теорема 2. *Если группа g порядка n входитъ въ группу G порядка N, то за основную область группы g можно принять сплошную площадь, состоящую изъ*

$$l = \frac{N}{n}$$

рядомъ лежащихъ областей группы G.

Ту же теорему можемъ формулировать нѣсколько иначе: *Если группа g порядка n входитъ въ группу G порядка N, то послѣ различныхъ возможныхъ измѣненій каждая основная область сѣти группы g покроетъ собою какъ разъ*

$$l = \frac{N}{n}$$

основныхъ областей сѣти группы G.

Справедливость этого предложенія легко провѣрить на чертежахъ (27) и (29), (28) и (30).

§ 39. **Понятіе объ аутоморфныхъ функціяхъ.**

Пусть функція

$$F(u)$$

инваріантна по отношенію къ нѣкоторой линейной подстановкѣ:

$$\bar{u} = \frac{au+b}{cu+d}, \tag{21}$$

т. е. пусть имѣетъ мѣсто тождество:

$$F\left(\frac{au+b}{cu+д}\right)=F(u). \tag{22}$$

Въ такомъ случаѣ, слѣдуя Клейну, мы будемъ называть функцію $F(u)$—аутоморфною функціею.

Слѣдуя Клейну, мы будемъ имѣть въ виду исключительно однозначныя аутоморфныя функціи.

Само собою ясно, что если функція $F(u)$ инваріанта по отношенію къ подстановкѣ

$$S(u)=\frac{au+b}{cu+д}, \tag{23}$$

то она будетъ инваріантна и по отношенію къ степенямъ этой подстановки:

$$S^2,\ S^3\ldots$$

Совокупность всѣхъ линейныхъ подстановокъ, по отношенію къ которымъ функція $F(u)$ инваріантна, образуютъ нѣкоторую группу. Эту группу мы обозначимъ буквою G и будемъ называть ее группою аутоморфной функціи $F(u)$.

Порядокъ группы G функціи $F(u)$ можетъ быть конеченъ или безконечно великъ.

Если порядокъ N группы G безконечно великъ, то функція $F(u)$ непремѣнно трансцендентная.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть порядокъ группы G безконечно великъ и пусть подстановки этой группы таковы:

$$S_0=1,\ S_1,\ S_2,\ S_3\ldots \tag{24}$$

Возьмемъ уравненіе:

$$F(u)=0. \tag{25}$$

Пусть u_0 есть одинъ изъ корней уравненія (25).

Ясно, что уравненію (25) удовлетворитъ весь безконечный рядъ величинъ:

$$S_0(u_0) = u_0, \ S_1(u_0) = u_1, \ S_2(u_0) = u_2, \ S_3(u_0) = u_3, \ldots \quad (26)$$

Уравненіе (25) имѣетъ безконечно большое число корней. Функція $F(u)$ дѣйствительно трансцендентная.

Примѣры аутоморфныхъ функцій извѣстны въ математикѣ очень давно: всякая періодическая функція есть аутоморфная. Дѣйствительно, положивъ въ формулѣ (22):

$$a = 1, \ b = \omega, \ c = 0, \ d = 1,$$

находимъ:

$$F(u + \omega) = F(u).$$

Это равенство характеризуетъ періодическую функцію съ періодомъ ω.

Функціи

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}, \quad (27)$$

съ которыми намъ приходилось часто встрѣчаться въ предшествующихъ главахъ—тоже аутоморфныя. Группою G такой функціи, служитъ группа соотвѣтствующаго уравненія:

$$H^{\lambda_1}(u) : c'T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1. \quad (28)$$

Функція (27) есть раціональная алгебраическая аутоморфная функція. Порядокъ ея группы конеченъ. Группа G составлена изъ двухъ основныхъ подстановокъ. Въ этомъ отношеніи функція (27) имѣетъ нѣкоторую аналогію съ двояко-періодическими функціями *).

Болѣе общій примѣръ аутоморфной функціи представляетъ намъ функція, обратная функціи Шварца.

$$u = s\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right), \quad (29)$$

---

*) Проф. Васильевъ посвятилъ теоріи функцій вида:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}$$

свою диссертацію: О функціяхъ раціональныхъ, аналогичныхъ съ функціями двояко-періодическими. Казань. 1880.

гдѣ λ, λ_1, λ_2 суть какія угодно цѣлыя положительныя числа.

Если

$$z = F(u) \tag{30}$$

есть аутоморфная функція, имѣющая группу G линейныхъ подстановокъ, то обратная ей функція:

$$u = F^{-1}(z), \tag{31}$$

необходимо, многозначна и значенія ея связаны между собою подстановками группы G.

Можетъ случиться, что число значеній функціи (31) равно порядку группы G. Въ такомъ случаѣ подстановки группы G связываютъ между собою *всѣ* значенія функціи (31).

Условимся называть въ такомъ случаѣ функцію $F(u)$ собственно аутоморфною.

Въ противномъ случаѣ будемъ называть ее несобственно аутоморфною *).

Докажемъ, что имѣетъ мѣсто

Теорема 3. *Если группа g аутоморфной функціи $f(u)$ входитъ въ группу G аутоморфной функціи $F(u)$, и если функція $f(u)$ собственно аутоморфная, то $F(u)$ есть однозначная функція отъ $f(u)$.*

Положивъ

$$z = f(u), \tag{32}$$

мы найдемъ, что

$$u = f^{-1}(z), \tag{33}$$

гдѣ f^{-1} есть символъ функціи, обратной функціи f.

Подставивъ выраженіе (33) перемѣннаго u въ $F(u)$, находимъ:

$$F(u) = F[f^{-1}(z)]. \tag{34}$$

Если функція $f(u)$ собственно аутоморфная, то всѣ значенія функціи

$$u = f^{-1}(z) \tag{33}$$

*) У Клейна нѣтъ этого различія.

связаны между собою всевозможными подстановками группы g. При всевозможныхъ обходахъ на плоскости z величина u, опредѣляемая по формулѣ (33), будетъ испытывать различныя подстановки группы g. Такъ какъ всѣ подстановки группы g входятъ въ G, то функція

$$F(u) = F[f^{-1}(z)] \tag{34}$$

послѣ всевозможныхъ сомкнутыхъ обходовъ на плоскости z сохраняетъ свою величину: она есть однозначная функція z.

Обозначивъ эту однозначную функцію черезъ $R(z)$, находимъ:

$$F(u) = R(z), \tag{35}$$

или, вставляя вмѣсто z его выраженіе (32):

$$F(u) = R[f(u)]. \tag{36}$$

Теорема доказана.

Слѣдствіе 1. *Если функціи $f(u)$ и $F(u)$ алгебраическія, то $F(u)$ есть раціональная алгебраическая функція отъ $f(u)$.*

Дѣйствительно, если $f(u)$ и $F(u)$ суть функціи алгебраическія, то и функція $R(z)$ — алгебраическая раціональная функція.

Слѣдствіе 2. *Если функціи $f(u)$ и $F(u)$ обѣ собственно аутоморфныя и при томъ обѣ алгебраическія, то функція $R(z)$ есть раціональная дробь степени*

$$l = \frac{N}{n}$$

относительно z.

Докажемъ справедливость этого предложенія.

Чтобы найти степень $R(z)$ относительно z, положимъ, что въ уравненіи

$$F(u) = R(z) \tag{35}$$

намъ дана величина $F(u)$ и найдемъ, сколько величинъ перемѣннаго

$$z = f(u) \tag{32}$$

соотвѣтствуетъ данной величинѣ $F(u)$.

Если функція $F(u)$ собственно аутоморфная, то *всѣ* значенія обратной ей функціи связаны между собою подстановками группы G. Сохраняя прежнія обозначенія, мы можемъ сказать, что подстановки группы G расположены въ таблицѣ (8).

Слѣдовательно, значенія величины u, соотвѣтствующія данной величинѣ $F(u)$, таковы:

$$\left.\begin{array}{lll} s_0(u)=u, & s_1(u),\ldots & s_{n-1}(u), \\ s_0\sigma_1(u)=\sigma_1(u), & s_1\sigma_1(u),\ldots & s_{n-1}\sigma_1(u), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ s_0\sigma_{l-1}(u)=\sigma_{l-1}(u), & s_1\sigma_{l-1}(u),\ldots & s_{n-1}\sigma_{l-1}(u). \end{array}\right\} \quad (37)$$

Чтобы найти значенія функціи

$$z=f(u), \quad (32)$$

соотвѣтствующія данному значенію $F(u)$, мы должны подставить въ $f(u)$ вмѣсто u всѣ величины (37).

Такъ какъ функція $f(u)$ не мѣняется отъ подстановокъ:

$$s_0=1,\ s_1,\ldots\ s_{n-1} \quad (7)$$

группы g, то она будетъ имѣть всего l значеній:

$$f(u),\ f[\sigma_1(u)],\ f[\sigma_2(u)],\ldots\ f[\sigma_{l-1}(u)]. \quad (38)$$

Если данному значенію $F(u)$ соотвѣтствуетъ l значеній функціи:

$$z=f(u), \quad (32)$$

то раціональная функція $R(z)$—степени l относительно z.

Слѣдствіе 3. *Если $f(u)$ есть собственно аутоморфная функція относительно подстановокъ группы G, то всякая собственно аутоморфная функція $F(u)$, соотвѣтствующая той же группѣ G, есть линейная функція отъ $f(u)$.*

Дѣйствительно, въ данномъ случаѣ изъ предшествующаго слѣдствія мы заключаемъ, что функціи $F(u)$ и $f(u)$ связаны между собою соотношеніемъ вида (36), гдѣ R—раціональная функція 1-ой степени.

Слѣдствіе 4. *Всякая аутоморфная алгебраическая функція $F(u)$ можетъ быть представлена въ видѣ:*

$$F(u) = R\left[\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}\right], \tag{39}$$

гдѣ:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)} \tag{27}$$

есть уже извѣстная намъ аутоморфная функція, соотвѣтствующая группѣ G функціи $F(u)$, а R есть алгебраическая раціональная дробь.

Дѣйствительно, алгебраической аутоморфной функціи $F(u)$ соотвѣтствуетъ, какъ мы знаемъ, группа G конечнаго порядка. Группы конечнаго порядка *всѣ* нами разсмотрѣны въ главахъ III и IV. Мы видѣли, что каждой группѣ конечнаго порядка соотвѣтствуетъ своя функція Шварца:

$$u = s\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right) \tag{29}$$

и одна обратная ей алгебраическая аутоморфная функція:

$$z = \frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}. \tag{27'}$$

Функція (27′) есть собственно аутоморфная. На основаніи слѣдствія 1 изъ теоремы 3 мы можемъ сказать, что $F(u)$ есть раціональная алгебраическая функція z:

$$F(u) = R(z) \tag{35}$$

откуда, наконецъ:

$$F(u) = R\left(\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}\right). \tag{39}$$

Функцію собственно аутоморфную относительно подстановокъ группы g мы условимся обозначать черезъ

$$A_g(u).$$

На основаніи только что доказанныхъ слѣдствій 1 и 3 можемъ сказать, что всякая другая функція собственно аутоморфная относительно подстановокъ группы g, есть линейная функція отъ

$$A_g(u),$$

а всякая несобственно аутоморфная функція есть вообще нѣкоторая раціональная функція отъ

$$A_g(u).$$

§ 40. **Упрощеніе общей задачи объ алгебраическихъ уравненіяхъ, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.**

Пусть алгебраическое уравненіе:

$$\psi(Y, z) = 0 \tag{40}$$

имѣетъ корнями *алгебраическія* раціональныя или ирраціональныя *выразимыя въ радикалахъ* функціи независимаго перемѣннаго z и частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0. \tag{41}$$

Иными словами, пусть корни уравненія (40) суть функціи вида:

$$Y = \Phi(z, y_1, y_2, \ldots), \tag{42}$$

гдѣ Φ есть функція *алгебраическая* раціональная или ирраціональная, *выразимая въ радикалахъ.*

Въ такомъ случаѣ мы скажемъ, что *уравненіе (40) разрѣшимо въ гипергеометрическихъ функціяхъ.*

Главною задачею нашей работы служитъ нахожденіе вида и свойствъ алгебраическихъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Мы налагаемъ на функцію Φ условіе, чтобы она была *алгебраическою* потому, что иначе мы ввели бы въ рѣшеніе уравненія (40) помимо гипергеометрическихъ функцій $y_1, y_2, \ldots$ еще новый элементъ: трансцендентную функцію Φ. Это была бы задача болѣе широкая, чѣмъ та, которая составляетъ цѣль нашей работы *).

Мы говоримъ, что функція Φ—раціональная или ирраціональная *выразимая въ радикалахъ*, потому что иначе мы не могли бы опредѣлить видъ этой функціи: ея видъ пришлось бы опредѣлять снова изъ алгебраическаго уравненія и мы вернулись бы къ первоначальной задачѣ.

Вотъ почему поставленную выше задачу можно назвать *общей задачей объ алгебраическихъ уравненіяхъ, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.*

Приступимъ къ упрощенію этой общей задачи.

Выразимъ всѣ частные интегралы уравненія (41), входящіе въ формулу (42) въ видѣ линейныхъ функцій двухъ изъ нихъ: напримѣръ y_1 и y_2, и вставимъ въ функцію Φ:

$$Y = \varphi(z,\ y_1,\ y_2), \tag{43}$$

гдѣ φ—функція раціональная или ирраціональная, *выразимая въ радикалахъ.*

Положимъ:

$$\frac{y_1}{y_2} = u, \tag{44}$$

и докажемъ слѣдующую теорему:

Теорема 4. *Если алгебраическое уравненіе* (*40*) *разрѣшимо въ частныхъ интегралахъ гипергеометрическаго уравненія* (*41*), *то отношеніе всякихъ двухъ линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ* y_1, y_2 *гипергеометрическаго уравненія* (*41*):

$$\frac{y_1}{y_2} = u \tag{44}$$

есть алгебраическая функція перемѣннаго z.

---

*) Эта болѣе широкая задача и есть та задача, о трансцендентномъ рѣшеніи алгебраическихъ уравненій, о которой уже было упомянуто въ предисловіи. Ее я надѣюсь разсмотрѣть въ слѣдующей своей работѣ, для которой настоящая служитъ только какъ бы введеніемъ.

Вставимъ выраженіе (43) въ уравненіе (40) и освободимъ полученное такимъ образомъ равенство отъ радикаловъ и отъ знаменателей. Въ результатѣ находимъ уравненіе вида:

$$X(z, y_1, y_2) = 0, \tag{45}$$

гдѣ X есть цѣлая раціональная функція отъ z, y_1, y_2.

Расположимъ ее по степенямъ z:

$$X_0(y_1, y_2) + X_1(y_1, y_2)z + X_2(y_1, y_2)z^2 + \ldots = 0. \tag{46}$$

Совершимъ на плоскости перемѣннаго z сомкнутый обходъ около одной изъ критическихъ точекъ: 0, 1, ∞ функцій y_1, y_2. Послѣ этого обхода перемѣнное z приметъ свое прежнее значеніе, а функціи y_1, y_2 преобразуются линейно:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_1 &= ay_1 + by_2, \\ \bar{y}_2 &= cy_1 + \partial y_2. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Уравненіе (46) приметъ такой видъ:

$$X_0(\bar{y}_1, \bar{y}_2) + X_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2)z + X_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2)z^2 + \ldots = 0, \tag{48}$$

или, послѣ замѣны величинъ $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ ихъ выраженіями (47):

$$\overline{X}_0(y_1, y_2) + \overline{X}_1(y_1, y_2)z + X_2(y_1, y_2)z^2 + \ldots = 0. \tag{49}$$

Уравненіе (49) можетъ оказаться или тождественнымъ съ уравненіемъ (46), или отличнымъ отъ уравненія (46).

Если бы послѣ двухъ различныхъ обходовъ мы получили два уравненія вида (49), не тождественныхъ ни между собою, ни съ уравненіемъ (46), то мы имѣли бы три не тождественныхъ между собою уравненія съ тремя неизвѣстными:

$$z, \; y_1, \; y_2.$$

Изъ этихъ уравненій можно было бы найти всѣ три неизвѣстныхъ. Въ такомъ случаѣ всѣ три величины: z, y_1, y_2 были бы постоянными, что, конечно, нелѣпо.

Итакъ, мы въ правѣ предполагать, что уравненіе (49) тождественно съ уравненіемъ (46). Коэффиціенты ихъ пропорціональны:

$$\left.\begin{array}{l} X_0(y_1, y_2)=C\overline{X}_0(y_1, y_2), \\ X_1(y_1, y_2)=C\overline{X}_1(y_1, y_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (50)$$

Между функціями $X_0(y_1, y_2)$, $X_1(y_1, y_2), \dots$ могутъ оказаться такія, которыя нулевой степени относительно y_1, y_2, т. е. не зависятъ отъ y_1, y_2; но всѣ онѣ не могутъ быть нулевой степени потому, что иначе уравненіе (46) было бы справедливо при всякихъ значеніяхъ y_1, y_2, а уравненіе (40) могло бы быть разрѣшено въ радикалахъ безъ посредства гипергеометрическихъ функцій.

Положимъ, для опредѣленности разсужденій, что функція $X_0(y_1, y_2)$ не нулевой степени.

Возьмемъ первое изъ тождествъ (50):

$$X_0(y_1, y_2) = C\overline{X}_0(y_1, y_2). \qquad (51)$$

Функціи $X_0(y_1, y_2)$ и $\overline{X}_0(y_1, y_2)$—цѣлыя относительно y_1, y_2, но онѣ могутъ быть неоднородными.

Въ такомъ случаѣ мы разобьемъ ихъ на части такъ, чтобы каждая часть была однородна:

$$\left.\begin{array}{l} X_0(y_1, y_2) = \psi_0(y_1, y_2) + \psi_1(y_1, y_2) + \dots, \\ \overline{X}_0(y_1, y_2) = \overline{\psi}_0(y_1, y_2) + \overline{\psi}_1(y_1, y_2) + \dots. \end{array}\right\} \qquad (52)$$

Ясно, что тождество (51) возможно только при условіи, что имѣютъ мѣсто тождества:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_0(y_1, y_2) = C\overline{\psi}_0(y_1, y_2), \\ \psi_1(y_1, y_2) = C\overline{\psi}_1(y_1, y_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (53)$$

Такъ какъ степень формы $X_0(y_1, y_2)$ выше 0, то въ числѣ однородныхъ формъ:

$$\psi_0(y_1, y_2),\ \psi_1(y_1, y_2)\cdots$$

найдутся формы, степень которыхъ выше 0.

Пусть степень формы $\psi_0(y_1, y_2)$ отлична отъ 0.

Возьмемъ первое изъ тождествъ (53):

$$\psi_0(y_1, y_2) = C\overline{\psi}_0(y_1, y_2). \tag{54}$$

Положивъ снова:

$$\frac{y_1}{y_2} = u, \tag{44}$$

находимъ:

$$\psi_0(u) = C\overline{\psi_0}(u). \tag{55}$$

Тождество (55) показываетъ, что уравненіе:

$$\psi_0(u) = 0 \tag{56}$$

инваріантно по отношенію къ линейнымъ подстановкамъ группы G, соотвѣтствующей группѣ тѣхъ бинарныхъ подстановокъ, которыя испытываютъ частные интегралы y_1, y_2 уравненія (41) при обходахъ на плоскости перемѣннаго z.

Уравненіе (56) алгебраическое; слѣдовательно порядокъ группы G конеченъ.

Отсюда заключаемъ, что функція:

$$\frac{y_1}{y_2} = u \tag{44}$$

есть алгебраическая функція Шварца, ибо она имѣетъ конечную группу линейныхъ подстановокъ. Она служитъ корнемъ алгебраическаго уравненія вида:

$$H^{\lambda_1}(u) : c'T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = \frac{1}{c}R(z) : \frac{1}{c}R(z) - 1 : 1 \tag{57}$$

Теорема доказана.

Величина y_2, какъ мы знаемъ изъ главы I, выражается черезъ u и z такою формулою:

$$y_2 = \sqrt{\frac{T(u)R(z)}{f(u)H(u)\dfrac{dR(z)}{dz}}e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}}, \tag{58}$$

гдѣ, p_1, въ данномъ случаѣ, выражается такъ:

$$p_1 = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{z(1 - z)}. \tag{59}$$

Возникаетъ вопросъ, будетъ ли выраженіе:

$$e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}$$

алгебраическою функціею z, или, что то же, будетъ ли y_2 алгебраическою функціею z.

Изъ равенства (44) слѣдуетъ, что

$$y_1 = uy_2.$$

Внеся это выраженіе y_1 въ формулу (43), находимъ:

$$Y = \varphi(z, uy_2, y_2). \tag{60}$$

Въ этомъ равенствѣ u есть алгебраическая функція z, φ есть алгебраическая функція входящихъ въ нее аргументовъ:

$$z, u, y_2,$$

и все выраженіе, служащее правою частью равенства (60), равно Y-алгебраической функціи z.

Отсюда слѣдуетъ, что если y_2 дѣйствительно входитъ явнымъ образомъ въ выраженіе (60), то и она есть алгебраическая функція z.

И такъ возможны только два случая:

1) *Функція* y_2 *въ равенствѣ* (60) *явно не входитъ.*

2) *Функція* y_2 *есть алгебраическая функція* z.

Въ первомъ случаѣ Y есть алгебраическая функція отъ z и u раціональная или ирраціональная, выразимая въ радикалахъ:

$$Y = \omega(z, u). \tag{61}$$

Во второмъ случаѣ, вставивъ въ формулу (60) вмѣсто y_2 выраженіе (58), мы приведемъ формулу (60) къ тому же виду (61), гдѣ ω есть снова функція алгебраическая раціональная или ирраціональная, выразимая въ радикалахъ.

Уравненіе (40) можно разсматривать, какъ результатъ преобразованія уравненія (57) подстановкою (61).

Это заключеніе можно формулировать въ видѣ такой теоремы.

Теорема 4. *Всякое алгебраическое уравненіе, разрѣшимое въ гипергеометрическихъ функціяхъ, можетъ быть получено изъ уравненія вида* (57) *преобразованіемъ перемѣннаго:*

$$Y = \omega(z, u), \tag{61}$$

гдѣ ω*-функція раціональная или ирраціональная выразимая въ радикалахъ.*

I.

Пусть функція ω раціональна.

Посмотримъ, какъ составляется въ такомъ случаѣ уравненіе (40).

Перенесемъ всѣ члены уравненія (61) влѣво:

$$Y - \omega(z, u) = 0, \tag{62}$$

и станемъ совершать въ формулѣ

$$Y - \omega(z, u) \tag{63}$$

надъ перемѣннымъ u линейныя преобразованія группы G уравненія (57), считая Y и z постоянными параметрами.

Функція (63) можетъ оказаться аутоморфною по отношенію къ нѣкоторымъ изъ подстановокъ группы G.

Выпишемъ всѣ *различныя* значенія функціи (63):

$$Y - \omega_0(z, u),\ Y - \omega_1(z, u), \ldots\ldots Y - \omega_{l-1}(z, u). \tag{64}$$

Перемноживъ величины (64) и приравнявъ произведеніе ихъ нулю, мы получимъ уравненіе, которому удовлетворяютъ значенія Y:

$$\mathop{P}_{i=0}^{i=l-1} \{Y - \omega_i(z, u)\} = 0. \tag{65}$$

Функція, стоящая въ лѣвой части уравненія (65), аутоморфна относительно подстановокъ группы G. По слѣдствію 4 изъ теоремы 3 ее можно представить въ видѣ раціональной функціи отъ собственно аутоморфной функціи

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)} \tag{27}$$

и параметровъ Y и z:

$$\underset{i=0}{\overset{i=l-1}{P}} \{ Y - \omega_i(z, u) \} = \mathfrak{R}\left(Y, z, \frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)} \right), \tag{66}$$

гдѣ $\mathfrak{R}$—раціональная функція входящихъ въ нее аргументовъ.

Степень функціи $\mathfrak{R}$ относительно Y равна l.

Изъ уравненія (57) слѣдуетъ:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)} = \frac{1}{c} R(z) . \tag{57'}$$

Внеся эту величину въ формулу (66) и положивъ:

$$\mathfrak{R} \left\{ Y, z, \frac{1}{c} R(z) \right\} = \psi(Y, z), \tag{67}$$

находимъ:

$$\underset{i=0}{\overset{i=l-1}{P}} \{ Y - \omega_i(z, u) \} = \psi(Y, z). \tag{68}$$

Приравнявъ эту функцію нулю, находимъ искомое уравненіе

$$\psi(Y, z) = 0. \tag{40}$$

Оно степени l относительно Y. Число l, какъ мы видѣли, равно числу *различныхъ* значеній, пріобрѣтаемыхъ функціею $\omega(z, u)$ подъ вліяніемъ подстановокъ группы G.

II.

Перейдемъ къ общему случаю: пусть функція ω, входящая въ формулу (61), какая-нибудь ирраціональная функція, выразимая въ радикалахъ.

Освободимъ уравненіе (61) отъ радикаловъ. Пусть оно приметъ видъ:

$$X(Y, z, u) = 0, \tag{69}$$

гдѣ X раціональная функція отъ Y, z, u.

Положимъ:

$$H = X(Y, z, u). \tag{70}$$

Будемъ разсматривать величины Y и z, какъ постоянные параметры, и совершимъ надъ перемѣннымъ u въ выраженіи

$$X(Y, z, u) \tag{71}$$

всевозможныя подстановки группы G.

Пусть всѣ *различныя* значенія, пріобрѣтаемыя функціею (71) подъ вліяніемъ этихъ подстановокъ, таковы:

$$X_0(Y, z, u),\ X_1(Y, z, u), \dots X_{l-1}(Y, z, u). \tag{72}$$

Функція:

$$\mathop{P}_{i=0}^{i=l-1} \{H - X_i(Y, z, u)\} \tag{73}$$

по отношенію къ перемѣнному u есть аутоморфная функція, соотвѣтствующая группѣ G.

Повторяя разсужденія, приведенныя при разсмотрѣніи предыдущаго случая, найдемъ, что функцію (73) можно представить въ видѣ раціональной функціи аргументовъ.

$$H, Y, z:$$

$$\mathop{P}_{i=0}^{i=l-1} \{H - X_i(Y, z, u)\} = \mathfrak{R}(H, Y, z). \tag{74}$$

Положивъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства

$$H = 0,$$

и введя обозначеніе:

$$\mathfrak{R}(0, Y, z) = \psi(Y, z), \tag{75}$$

находимъ:

$$(-1)^l \mathop{P}_{i=0}^{i=l-1} X_i(Y, z, u) = \psi(Y, z). \tag{76}$$

Приравнявъ нулю найденную функцію $\psi(Y,z)$, мы получимъ искомое уравненіе:

$$\psi(Y, z) = 0, \tag{40}$$

которому удовлетворяютъ значенія функціи Y.

Это уравненіе есть результатъ преобразованія уравненія (57) ирраціональною подстановкою (61).

Разсматривая сдѣланныя нами вычисленія, мы находимъ, что преобразованіе уравненія (57) подстановкою (61) можетъ быть достигнуто слѣдующимъ пріемомъ.

1) Освободивъ уравненіе

$$Y = \omega(z, u) \tag{61}$$

отъ радикаловъ, находимъ уравненіе:

$$X(Y, z, u) = 0. \tag{69}$$

2) Преобразуемъ уравненіе (57) *раціональною* подстановкою:

$$H = X(Y, z, u), \tag{70}$$

гдѣ H есть новое перемѣнное, а Y и z—параметры.

Въ результатѣ этого раціональнаго преобразованія находимъ уравненіе:

$$\mathfrak{R}(H, Y, z) = 0.$$

3) Положивъ въ этомъ уравненіи

$$H = 0,$$

находимъ уравненіе

$$\mathfrak{R}(0, Y, z) = 0,$$

или, введя обозначеніе (75)

$$\psi(Y, z) = 0. \tag{40}$$

Уравненіе (40) и есть искомое.

Такимъ образомъ нахожденіе уравненія (40) во всякомъ случаѣ приводится къ *раціональному* преобразованію уравненія (57).

Простѣйшій случай ирраціональнаго преобразованія таковъ:

$$Y = \sqrt[m]{\bar{\omega}(z, u)}, \tag{77}$$

гдѣ $\bar{\omega}$—раціональная функція величинъ z и u.

Въ этомъ случаѣ указанный выше пріемъ можетъ быть упрощенъ.

Положивъ:

$$H = Y^m = \bar{\omega}(z, u), \tag{78}$$

мы преобразуемъ уравненіе (57) раціональною подстановкою:

$$H = \bar{\omega}(z, u). \tag{79}$$

Найдя результатъ этого преобразованія:

$$\psi_1(H, z) = 0, \tag{80}$$

и замѣнивъ H величиною Y^m, находимъ уравненіе:

$$\psi_1(Y^m, z) = 0, \tag{81}$$

или, что то же, искомое уравненіе:

$$\psi(Y, z) = 0. \tag{40}$$

Уравненія, разсмотрѣнныя нами въ главахъ I и VIII получаются изъ уравненія (57) преобразованіемъ вида:

$$y = \sqrt{\frac{T(u)\,R(u)}{f(u)\,H(u)\,\dfrac{dR(z)}{dz}}}\,e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}.$$

Это—преобразованіе вида (77).

Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что наибольшую важность представляетъ раціональное преобразованіе уравненія (57). Поэтому въ дальнѣйшихъ нашихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ говорить исключительно о *раціональныхъ* преобразованіяхъ уравненія (57).

Итакъ, пусть ω есть раціональная функція z и u.

Мы сказали, что функція:

$$\omega(z, u)$$

подъ вліяніемъ подстановокъ группы G порядка N пріобрѣтаетъ l различныхъ значеній.

Найдемъ совокупность подстановокъ группы G, не мѣняющихъ функцію $\omega(z, u)$. Эти подстановки образуютъ нѣкоторую группу g порядка n, входящую въ G. Отношеніе порядковъ этихъ группъ равно числу l:

$$\frac{N}{n} = l.$$

(Можетъ случиться, что группа g есть группа *единица*. Это будетъ тогда, когда всѣ подстановки группы G мѣняютъ функцію $\omega(z, u)$. Въ такомъ случаѣ $l = N$).

Составимъ собственно аутоморфную функцію:

$$\zeta = A_g(u), \tag{82}$$

соотвѣтствующую группѣ g.

Изъ теоремы 3 слѣдуетъ, что $\omega(z, u)$ есть раціональная функція отъ ζ и параметра z:

$$Y = \omega(z, u) = \chi(\zeta, z). \tag{83}$$

Такъ какъ функціи:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}, \quad \frac{c' T^{\lambda_2}(u)}{cf^{\lambda}(u)}$$

тоже аутоморфны относительно подстановокъ группы g, то ихъ также можно представить въ видѣ раціональныхъ функцій величины ζ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)} &= \frac{F_1(\zeta)}{F(\zeta)}, \\ \frac{c' T^{\lambda_2}(u)}{cf^{\lambda}(u)} &= \frac{F_2(\zeta)}{F(\zeta)}, \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

гдѣ $F(\zeta)$, $F_1(\zeta)$, $F_2(\zeta)$ суть цѣлыя раціональныя алгебраическія функціи ζ.

Внеся эти выраженія въ уравненіе (57), находимъ:

$$F_1(\zeta) : F_2(\zeta) : F(\zeta) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1. \tag{85}$$

Такъ какъ функціи, стоящія въ лѣвой части равенствъ (84) суть собственно аутоморфныя функціи, соотвѣтствующія группѣ G, то по слѣдствію 2 теоремы 3 мы можемъ сказать, что какъ вторыя части равенствъ (84), такъ и уравненіе (85)— степени

$$l = \frac{N}{n}$$

относительно ζ.

Возьмемъ уравненія:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1, \qquad (57)$$

$$\zeta = A_g(u), \qquad (82)$$

$$F_1(u) : F_2(\zeta) : F(\zeta) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1, \qquad (85)$$

$$Y = \chi(\zeta, z), \qquad (83')$$

$$\psi(Y, z) = 0. \qquad (40)$$

Эти уравненія мы можемъ разсматривать съ такой точки зрѣнія:

1) Уравненіе (57), степени N относительно неизвѣстнаго u, преобразовано раціональною подстановкою (82). Въ результатѣ получилось уравненіе (85), степень котораго относительно новаго неизвѣстнаго ζ равна

$$l = \frac{N}{n},$$

а относительно независимаго перемѣннаго z такая же, какъ и степень уравненія (57).

2) Уравненіе (85) преобразовано раціональною подстановкою (83′).

Въ результатѣ получилось окончательное уравненіе (40), степень котораго относительно новаго неизвѣстнаго Y такова же, какъ и степень уравненія (85): оно степени l относительно Y, какъ мы видѣли выше. Степень уравненія (40) относительно z, вообще говоря, иная, чѣмъ степень уравненія (85): она могла какъ понизиться, такъ и повыситься.

Итакъ, мы разбили разсматриваемое преобразованіе на двѣ стадіи.

Первое преобразованіе имѣетъ цѣлью понизить степень уравненія (57) относительно неизвѣстнаго, не измѣняя степени его относительно z. Число такихъ преобразованій строго опредѣленное; каждое преобразованіе (82) соотвѣтствуетъ одной изъ числа группъ, входящихъ въ группу G.

Второе преобразованіе (83′) оставляетъ степень уравненія относительно неизвѣстнаго безъ перемѣны, а степень его относительно z, вообще говоря, мѣняетъ. Такихъ преобразованій существуетъ безконечное множество: всякая раціональная функція, за исключеніемъ весьма ограниченнаго числа функцій, пригодна для этой цѣли.

Ясно, что это второе преобразованіе играетъ второстепенную роль: имъ мы можемъ воспользоваться или для того, чтобы упростить уравненіе (85) по внѣшнему виду, или для того, чтобы привести *данное* алгебраическое уравненіе (40) къ уравненію (85), корни котораго выражаются помощью формулы (82) черезъ величину u.

Только что полученными нами разультатами опредѣляется планъ нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій: въ слѣдующей X главѣ мы разсмотримъ для каждаго изъ четырехъ типовъ, всѣ виды подстановки (82), способной понизить степень уравненія (57), найдемъ видъ и свойства полученныхъ такимъ образомъ выводныхъ уравненій или *резольвентъ*, какъ мы ихъ будемъ называть, а также и нѣкоторыя упрощенія, которыя въ нихъ можно сдѣлать преобразованіемъ (83′). Въ главѣ XI мы разсмотримъ, какъ привести нѣкоторыя наиболѣе интересныя уравненія извѣстныхъ и напередъ заданныхъ типовъ къ виду (85) при помощи подстановокъ вида (83′), и какъ затѣмъ выразить ихъ корни въ функціи величины u.

ГЛАВА X.

Резольвенты уравненій, имѣющихъ группу линейныхъ подстановокъ.

§ 41. Свойства резольвентъ уравненій, имѣющихъ группу линейныхъ подстановокъ.

Въ главѣ IX мы привели рѣшеніе нашей основной задачи къ нахожденію всевозможныхъ преобразованій вида:

$$\zeta = A_g(u), \tag{1}$$

понижающихъ степень уравненія:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1, \tag{2}$$

и къ составленію резольвентъ уравненія (2), получаемыхъ преобразованіемъ его посредствомъ подстановокъ вида (1).

Для упрощенія формулъ мы можемъ ввести въ уравненіе (2) новое независимое перемѣнное, обозначивъ функцію $\frac{1}{c} R(z)$ одною буквою.

Мы будемъ предполагать это упрощеніе уже выполненнымъ и замѣнимъ въ уравненіи (2) функцію $\frac{1}{c} R(z)$ перемѣннымъ z, какъ это мы дѣлали неоднократно выше.

Уравненіе (2) будетъ таково:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1. \tag{3}$$

Итакъ, ближайшая наша задача состоитъ въ слѣдующемъ:

1) Зная группу G уравненія (3), мы должны найти всѣ группы g, входящія въ G. Мы будемъ ихъ называть подгруппами (Untergruppen) по отношенію къ G.

2) Для каждой подгруппы g мы должны составить соотвѣтствующую ей аутоморфную функцію:

$$\zeta = A_g(u). \tag{1}$$

3) Зная функцію (1), мы должны преобразовать уравненіе (3) подстановкою (1), при чемъ, какъ намъ извѣстно, получится уравненіе вида:

$$F_1(\zeta) : F_2(\zeta) : F(\zeta) = z : z - 1 : 1. \tag{4}$$

Сказанные вопросы мы должны рѣшить для каждаго изъ четырехъ типовъ уравненія (3).

Прежде чѣмъ приступить къ выполненію намѣченнаго плана, займемся раскрытіемъ нѣкоторыхъ свойствъ резольвентъ вида (4).

Пусть группа G уравненія (3)—порядка N, пусть въ группу G входитъ подгруппа g порядка n, а въ g пусть входитъ подгруппа g' порядка n'.

Положимъ:

$$\frac{N}{n} = l, \quad \frac{n}{n'} = l'. \tag{5}$$

Собственно аутоморфная функція, соотвѣтствующая группѣ g, такова:

$$\zeta = A_g(u). \tag{1}$$

Собственно аутоморфную функцію, соотвѣтствующую группѣ g' мы обозначимъ такъ:

$$\zeta' = A_{g'}(u). \tag{6}$$

Такъ какъ функція ζ тоже аутоморфна относительно подстановокъ группы g', то ζ есть раціональная функція ζ' степени $\frac{n}{n'} = l'$:

$$\zeta = \psi(\zeta'). \tag{7}$$

Преобразуя уравненіе (3) подстановкою (1), находимъ уравненіе степени l относительно ζ:

$$F_1(\zeta) : F_2(\zeta) : F(\zeta) = z : z - 1 : 1. \tag{4}$$

Преобразуя уравненіе (3) подстановкою (6), находимъ уравненіе степени ll' относительно ζ':

$$F_1'(\zeta') : F_2'(\zeta') : F'(\zeta') = z : z - 1 : 1. \tag{8}$$

Изъ уравненій (4), (8), (7) слѣдуетъ, что:

$$F_1'(\zeta') : F_2'(\zeta') : F'(\zeta') = F_1[\psi(\zeta')] : F_2[\psi(\zeta')] : F[\psi(\zeta')]. \tag{9}$$

Иными словами, уравненіе (8) можетъ быть получено изъ уравненія (4), если мы въ уравненіи (4) вмѣсто ζ вставимъ раціональную функцію $\psi(\zeta')$ степени l' относительно ζ', причемъ, понятно, степень его относительно неизвѣстнаго повышается въ l' разъ.

Интересъ представляетъ только уравненіе (4), ибо, внося въ него вмѣсто ζ различныя функціи новаго неизвѣстнаго ζ', мы можемъ получить сколько угодно уравненій вида (9).

Отсюда слѣдуетъ, что составляя резольвенты уравненія (3), мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ тѣхъ изъ нихъ, которыя соотвѣтствуютъ *наиболѣе широкимъ* подгруппамъ группы G уравненія (3).

Посмотримъ, какова группа Галуа для уравненія (4).

Слѣдуя обозначеніямъ главы IX, мы положимъ, что подстановки подгруппы g таковы:

$$s_0 = 1,\ s_1,\ s_2 \ldots\ s_{n-1}. \tag{10}$$

Подстановки группы G могутъ быть расположены въ таблицѣ:

$$\left.\begin{array}{llll}
s_0 = 1, & s_1, & s_2, \ldots & s_{n-1}, \\
s_0\sigma_1 = \sigma_1, & s_1\sigma_1, & s_2\sigma_1, \ldots & s_{n-1}\sigma_1, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
s_0\sigma_{l-1} = s_{l-1}, & s_1\sigma_{l-1}, & s_2\sigma_{l-1}, \ldots & s_{n-1}s_{l-1},
\end{array}\right\} \tag{11}$$

гдѣ

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{l-1} \tag{12}$$

суть различныя между собою и извѣстнымъ образомъ выбранныя подстановки группы G, не входящія въ группу g.

Подъ вліяніемъ подстановокъ:

$$\sigma_0 = 1, \sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{l-1} \tag{13}$$

функція

$$\zeta = A_g(u) \tag{1}$$

пріобрѣтаетъ l различныхъ между собою значеній:

$$\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{l-1}. \tag{14}$$

Эти l значеній суть какъ разъ *всѣ* тѣ значенія, которыя функція (1) пріобрѣтаетъ подъ вліяніемъ подстановокъ группы G. Это суть l корней уравненія (4). Каждой линейной подстановкѣ S группы G соотвѣтствуетъ нѣкоторая перестановка, совершаемая надъ l корнями (14) уравненія (4).

Мы будемъ называть эти перестановки, совершаемыя надъ l корнями (14) уравненія (3), *субституціями* въ отличіе отъ *линейныхъ подстановокъ* группъ G и g.

Найдемъ N субституцій надъ количествами (14), соотвѣтствующихъ N линейнымъ подстановкамъ группы G. Обозначимъ эту совокупность субституцій буквою Γ.

Докажемъ слѣдующую теорему:

Теорема 1. *Совокупность субституцій Γ есть группа Галуа для уравненія (4).*

Субституціи группы Γ суть *всевозможныя* субституціи, испытываемыя величинами (14) при обходахъ на плоскости перемѣннаго z. Отсюда слѣдуетъ, что онѣ образуютъ группу.

Всякая функція величинъ (14), инваріантная относительно субституцій группы Γ, будучи выражена черезъ u, есть функція аутоморфная относительно подстановокъ группы G и поэтому выражается раціонально черезъ z. На оборотъ: всякая раціонально извѣстная функція величинъ (14) есть раціональная функція z; будучи выражена черезъ u, она инваріантна относительно подстановокъ группы G. Поэтому всякая раціонально извѣстная функція величинъ (14) инваріантна относительно субституцій группы Γ. Сказанныя два свойства группы Γ суть характерные признаки того, что группа Γ есть группа Галуа для уравненія (4).

Условимся въ слѣдующей терминологіи:

1) Если *каждая* изъ подстановокъ группы g, будучи преобразована *каждою* изъ подстановокъ группы G, даетъ въ результатѣ подстановку группы g, то мы назовемъ по общепринятому группу g *особою частью* группы G.

2) Если *нѣкоторыя* изъ подстановокъ группы g, будучи преобразованы *каждою* изъ подстановокъ группы G, даютъ въ результатѣ подстановку группы g, то мы назовемъ g *полуособою частью* группы G.

3) Если *ни одна* изъ подстановокъ группы g не обладаетъ сказаннымъ свойствомъ, то мы назовемъ g *неособою* частью группы G.

Теорема 2. *Если подгруппа g есть неособая часть группы G, то группа Γ соотвѣтствующей ей резольвенты—такого же порядка N, какъ и группа G.*

Пусть g есть *неособая часть* группы G. Мы видѣли, что каждой подстановкѣ группы G соотвѣтствуетъ своя субституція группы Γ. Посмотримъ, не можетъ ли нѣсколькимъ различнымъ подстановкамъ группы G соотвѣтствовать одна и та же субституція группы Γ.

Допустимъ, что двумъ различнымъ подстановкамъ S и S' группы G соотвѣтствуетъ одна и та же субституція группы Γ.

Въ такомъ случаѣ подстановкѣ

$$S^{-1} S',$$

отличной отъ 1, соотвѣтствуетъ субституція 1.

Подстановка $S^{-1} S'$ есть одна изъ подстановокъ группы G; слѣдовательно она приводится къ виду:

$$s_i \sigma_j.$$

Будемъ различать два случая:

1) Индексъ j отличенъ отъ 0,

2) Индексъ j равенъ 0.

I. Пусть индексъ j отличенъ отъ 0.

Возьмемъ корень:

$$\zeta_0 = A_g(u) \tag{1'}$$

уравненія (4).

Совершимъ надъ нимъ подстановку:

$$s_i \, \sigma_j.$$

Послѣ подстановки функція ζ_0 переходитъ въ $\overline{\zeta}_0$, при чемъ:

$$\overline{\zeta}_0 = A_g[s_i \, \sigma_j(u)]. \tag{15}$$

Такъ какъ функція $A_g(u)$ не мѣняется отъ подстановки s_i, то:

$$\overline{\zeta}_0 = A_g[\sigma_j(u)] = \zeta_j. \tag{16}$$

Итакъ, субституція, соотвѣтствующая подстановкѣ

$$S^{-1} \, S' = s_i \, \sigma_j,$$

мѣняетъ корень ζ_0 на отличный отъ него корень ζ_j.

Это противорѣчитъ сдѣланному ранѣе заключенію, что субституція, соотвѣтствующая подстановкѣ $S^{-1} \, S'$, есть 1.

II. Пусть индексъ j равенъ 0:

$$S^{-1} \, S' = s_i.$$

Эта подстановка не мѣняетъ корня:

$$\zeta_0 = A_g(u). \tag{1'}$$

Возьмемъ какой нибудь изъ остальныхъ корней уравненія (4), напр.

$$\zeta_k = A_g[\sigma_k(u)]. \tag{17}$$

Послѣ подстановки $S^{-1} S' = s_i$ этотъ корень перейдетъ въ $\overline{\zeta}_k$, при чемъ:

$$\overline{\zeta}_k = A_g[\sigma_k s_i(u)]. \tag{18}$$

Эта величина только въ томъ случаѣ равна ζ_k при произвольномъ u, если имѣетъ мѣсто символическое равенство вида:

$$\sigma_k s_i \sigma_k^{-1} = s_h, \qquad (19)$$

гдѣ h имѣетъ одно изъ значеній: 0, 1, 2,... n—1.

Если субституція, соотвѣтствующая подстановкѣ

$$S^{-1}S' = s_i,$$

есть 1, то она не мѣняетъ ни одного изъ корней (14) уравненія (4).

Въ такомъ случаѣ символическое равенство (19) справедливо при всѣхъ значеніяхъ k отъ $k = 0$ до $k = n - 1$. Если такъ, то подстановка s_i группы g, будучи преобразована *всѣми* подстановками группы G, даетъ въ результатѣ подстановки той же группы g. Группа g есть особая или полуособая часть группы G.

Это заключеніе противорѣчитъ условію теоремы.

Итакъ, дѣйствительно, каждой подстановкѣ группы G соотвѣтствуетъ и притомъ единственная субституція группы Γ. Порядки обѣихъ группъ одинаковы.

Теорема 3. *Если группа g неособая часть группы G, то группы G и Γ изоморфны между собою.*

Это—ближайшее слѣдствіе изъ предшествующей теоремы: если двѣ группы G и Γ одинаковаго порядка и каждой подстановкѣ группы G соотвѣтствуетъ единственная субституція группы Γ, то онѣ не могутъ не быть изоморфны между собою.

Если измѣрять сложность уравненія порядкомъ его группы, то мы можемъ сказать, что всѣ резольвенты (4) уравненія (3), соотвѣтствующія неособой части группы G, такъ же сложны, какъ и уравненіе (3). Онѣ проще только по виду: степень ихъ ниже степени N уравненія (3).

Уравненіе (3) есть резольвента Галуа какъ для самого себя, такъ и для всѣхъ уравненій вида (4).

Значеніе уравненій (4) для алгебры заключается въ томъ, что мы можемъ *данное* намъ уравненіе, удовлетворяющее извѣстнымъ условіямъ (напр. всякое уравненіе 5-ой степени, какъ будетъ видно ниже), преобразовать въ одно изъ уравненій вида (4); а за тѣмъ рѣшить уравненіе (4), пользуясь тѣмъ, что корни его выражаются раціонально помощью формулы:

$$\zeta = A_g(u) \qquad (1)$$

черезъ корни уравненія (3), разрѣшимаго въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Если мы припомнимъ, что корни уравненія (3) суть функціи Шварца

$$u = s\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right), \qquad (20)$$

то замѣтимъ, что корни уравненія (4) выражаются такою формулою:

$$\zeta = A_g\left[s\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right)\right]. \qquad (21)$$

Итакъ, корни уравненія (4) представляются въ видѣ функціи отъ функціи перемѣннаго z, при чемъ эта вторая, *внутренняя* функція есть многозначная функція Шварца, соотвѣтствующая группѣ G, а *наружная* функція есть функція аутоморфная, обратная функціи Шварца, соотвѣтствующей подгруппѣ g группы G *).

Теорема 4. *Если подгруппа g есть неособая часть группы G, то группа субституцій Γ можетъ быть составлена изъ двухъ основныхъ субституцій σ и τ, соотвѣтствующихъ основнымъ подстановкамъ S и $\mathfrak{T}$ группы G.*

---

*) Весьма интересно то обстоятельство, что одну и ту же алгебраическую функцію ζ можно выражать различно, комбинируя различныя пары функцій, обладающихъ сказанными свойствами. Въ формулѣ (21) обѣ функціи суть алгебраическія по самому условію рѣшаемой нами задачи, но можно подобрать пару *трансцендентныхъ* функцій, комбинація которыхъ выражаетъ ту же самую *алгебраическую* функцію. Таково рѣшеніе уравненія 5-ой степени, предложенное Эрмитомъ.

Я не касаюсь этого интереснаго вопроса, чтобы не выйти за предѣлы, указываемыя заглавіемъ моей работы. Объ этой задачѣ о трансцендентномъ рѣшеніи уравненій я упоминалъ уже во введеніи и въ главѣ IX.

Эта теорема есть слѣдствіе предшествующихъ: если группа Γ изоморфна группѣ G, то основныя субституціи группы Γ должны соотвѣтствовать основнымъ подстановкамъ S и $\mathfrak{T}$ группы G.

Теорема 5. *Если порядки группъ G и Γ одинаковы, то подгруппа g есть неособая часть группы G.*

Эта теорема есть слѣдствіе, вытекающее изъ тѣхъ разсужденій, которыя мы приводили при доказательствѣ теоремы 2: если бы подгруппа g была особою или полуособою частью группы G, то нашлись бы такія различныя подстановки группы G, которымъ соотвѣтствуетъ одна и та же субституція группы Γ. Порядокъ группы Γ былъ бы ниже порядка группы G.

Въ нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ наибольшій интересъ будутъ представлять неособыя части группъ. Особыя части группъ: тетраэдрической и октаэдрической приводятъ къ рѣшенію уравненій: тетраэдрическаго и октаэдрическаго въ радикалахъ.

Эти рѣшенія были нами уже разсмотрѣны въ главѣ VII и больше о нихъ говорить мы не будемъ.

§ 42. **Подгруппы конечныхъ порядковъ.**

Разсмотримъ другъ за другомъ всѣ конечныя группы линейныхъ подстановокъ и найдемъ, каковы входящія въ нихъ подгруппы.

I.

Группа двупирамидная порядка 2 m.

Подстановки двупирамидной группы соотвѣтствуютъ поворотамъ сферы двоякаго рода:

1) Поворотамъ на углы, кратные $\frac{2\pi}{m}$ около оси, соединяющей двѣ противоположныя вершины двупирамиды. Подстановка S, соотвѣтствующая повороту на уголъ $\frac{2\pi}{m}$, есть одна изъ двухъ основныхъ подстановокъ группы.

2) Поворотамъ на углы, кратные π около осей, лежащихъ въ плоскости основанія обѣихъ пирамидъ, составляющихъ

двупирамиду. Подстановка $\mathfrak{T}$, соотвѣтствующая одному изъ этихъ поворотовъ на уголъ π, есть вторая основная подстановка группы.

Ясно, что повороты группъ: тетраэдрической, октаэдрической и икосаэдрической мѣняютъ положеніе двупирамиды.

Въ двупирамидную группу могутъ входить только подгруппы слѣдующихъ типовъ:

1) Подгруппы циклическаго типа порядка m_1:

$$(S^l)^0 = 1,\ S^l,\ S^{2l}, \ldots S^{(m_1-1)l}, \tag{22}$$

гдѣ l есть дѣлитель числа m, а m_1 есть дѣлитель, ему дополнительный:

$$lm_1 = m. \tag{23}$$

2) Подгруппы циклическаго типа порядка 2:

$$(S^k\mathfrak{T})^0 = 1,\ S^k\mathfrak{T},\ ^*) \tag{24}$$

гдѣ k-какое угодно цѣлое число.

3) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка $2m_1$, составленныя изъ основныхъ подстановокъ.

$$S^l,\ S^k\mathfrak{T}, \tag{25}$$

гдѣ l есть дѣлитель числа m, число m_1 есть дѣлитель ему дополнительный:

$$lm_1 = m,$$

а k какое-либо цѣлое число.

Другихъ подгруппъ двупирамидная группа порядка $2m$ въ себѣ не содержитъ.

Первая и вторая изъ перечисленныхъ подгруппъ входятъ въ третью.

---

*) Подстановка $S^k\mathfrak{T}$—втораго порядка. Она соотвѣтствуетъ повороту сферы на уголъ π около одной изъ осей, лежащихъ въ плоскости основанія двупирамиды.

Такъ какъ мы въ правѣ ограничиться разсмотрѣніемъ наиболѣе широкихъ подгруппъ, то мы будемъ строить только резольвенту порядка:

$$l=\frac{2m}{2m_1},$$

соотвѣтствующую третьей изъ перечисленныхъ подгруппъ двупирамидной группы. При этомъ мы примемъ число m_1 равнымъ наибольшему изъ дѣлителей числа m, отличному отъ самого числа m.

(Если число m—простое, то наибольшій его дѣлитель, отличный отъ m, есть 1, число l равно m, подстановка S^l равна 1. Въ этомъ случаѣ подгруппа двупирамиднаго типа порядка $2m_1$ замѣняется циклической порядка 2).

II

Группа тетраэдрическая.

Въ тетраэдрическую группу входятъ подстановки, соотвѣтствующія поворотамъ двоякаго рода:

1) Поворотамъ на углы, кратные $\frac{2\pi}{3}$, около осей, соединяющихъ вершины тетраэдра съ центрами противоположныхъ граней. Одна изъ этихъ подстановокъ есть основная подстановка S тетраэдрической группы.

2) Поворотамъ на углы, кратные π около осей, соединяющихъ средины противоположныхъ реберъ тетраэдра. Одна изъ этихъ подстановокъ $\mathfrak{T}$ есть вторая основная подстановка тетраэдрической группы.

Ясно, что группы: октаэдрическая и икосаэдрическая не могутъ входить въ тетраэдрическую. Изъ группъ двупирамиднаго типа можетъ быть вопросъ только о двупирамидныхъ группахъ 4-го и 6-го порядковъ.

Группа 4-го порядка, т. е. четверичная дѣйствительно, какъ мы знаемъ, входитъ въ тетраэдрическую. Группа 6-го порядка въ тетраэдрическую не входитъ, потому что повороты на уголъ π около осей, лежащихъ въ плоскости основанія двупирамиды, приводятъ тетраэдръ въ положеніе, соотвѣтствующее тетраэдру, ему дополнительному.

Итакъ, мы въ правѣ сказать, что въ тетраэдрическую группу входятъ только слѣдующія подгруппы:

1) Подгруппа циклическаго типа порядка 3:

$$S^0 = 1,\ S,\ S^2. \tag{26}$$

2) Подгруппа циклическая порядка 2:

$$\mathfrak{T}^0 = 1,\ \mathfrak{T}. \tag{27}$$

3) Подгруппа четверичная.

Послѣдняя изъ перечисленныхъ подгруппъ есть особая часть тетраэдрической группы. Она приводитъ къ рѣшенію тетраэдрическаго уравненія въ радикалахъ, которое было уже разсмотрѣно въ главѣ VII.

Подгруппа 2-го порядка входитъ въ четверичную. Слѣдовательно мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ резольвенты порядка:

$$l = \frac{12}{3} = 4,$$

соотвѣтствующей подгруппѣ 3-го порядка.

III

Группа октаэдрическая.

Подстановки октаэдрической группы соотвѣтствуютъ поворотамъ троякаго рода:

1) Поворотамъ на углы кратные $\frac{\pi}{2}$ около осей, соединяющихъ противоположныя вершины октаэдра. Одна изъ этихъ подстановокъ S, соотвѣтствующая повороту на уголъ $\frac{\pi}{2}$, есть основная подстановка группы.

2) Поворотамъ на углы, кратные $\frac{2\pi}{3}$, около осей, соединяющихъ центры противоположныхъ граней октаэдра. Одна

изъ этихъ подстановокъ S', соотвѣтствующая повороту на $\frac{2\pi}{3}$, можетъ быть принята за вторую основную подстановку группы.

3) Поворотамъ на углы, кратные π около осей, соединяющихъ средины противоположныхъ реберъ октаэдра. Одна изъ этихъ подстановокъ $\mathfrak{T}$ можетъ быть принята за вторую основную подстановку группы вмѣсто указанной выше подстановки S'.

Ясно, что икосаэдрическая группа въ октаэдрическую войти не можетъ.

Группы всѣхъ остальныхъ типовъ входятъ въ октаэдрическую.

Итакъ, въ октаэдрическую группу входятъ слѣдующія подгруппы:

1) Подгруппы циклическаго типа порядка 4:

$$S^0 = 1,\ S,\ S^2,\ S^3. \tag{28}$$

2) Подгруппы циклическаго типа порядка 3:

$$S'^0 = 1,\ S',\ S'^2. \tag{29}$$

3) Подгруппы циклическаго типа порядка 2:

$$\mathfrak{T}^0 = 1,\ \mathfrak{T}. \tag{30}$$

4) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 8 составленныя изъ основныхъ подстановокъ S и U, гдѣ U есть подстановка 2-го порядка, выбранная такъ, чтобы повороты, соотвѣтствующіе подстановкамъ S и U, а также S' и U совершались около взаимно перпендикулярныхъ осей.

5) Подгруппа двупирамиднаго типа порядка 6, составленная изъ основныхъ подстановокъ S' и U.

6) Подгруппа двупирамиднаго типа порядка 4, т. е. четверичная, составленная изъ основныхъ подстановокъ S^2 и U.

7) Подгруппа тетраэдрическаго типа.

Кромѣ того входятъ подгруппы, входящія въ подгруппы перечисленныхъ типовъ.

Для насъ представляютъ интересъ резольвенты, соотвѣтствующія лишь нѣкоторымъ изъ подгруппъ октаэдрической группы. Разсмотримъ, какія именно.

Подгруппа тетраэдрическаго типа есть особая часть октаэдрической группы. Она ведетъ къ разрѣшенію октаэдрическаго уравненія въ радикалахъ, о чемъ мы говорили уже въ главѣ VII.

Четверичная подгруппа входитъ въ тетраэдрическую.

Подгруппы циклическаго типа порядковъ 4, 3, 2 тоже входятъ въ другія подгруппы октаэдрической группы. Резольвенты, соотвѣтствующія этимъ подгруппамъ интереса не представляютъ.

Остаются подгруппы двухъ типовъ:

1) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 8.

2) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 6.

Этимъ двумъ подгруппамъ соотвѣтствуютъ резольвенты степеней:

$$l_1 = \frac{24}{8} = 3 \text{ и } l_2 = \frac{24}{6} = 4\ .$$

Только объ этихъ двухъ резольвентахъ мы и будемъ говорить.

III

Группа икосаэдрическая.

Подстановки икосаэдрической группы соотвѣтствуютъ поворотамъ троякаго рода:

1) Поворотамъ на углы, кратные $\frac{2\pi}{5}$ около осей, соединяющихъ противоположныя вершины икосаэдра. Одна изъ этихъ подстановокъ S, соотвѣтствующая повороту на уголъ $\frac{2\pi}{5}$, можетъ быть принята за основную подстановку группы.

2) Поворотамъ на углы кратные $\frac{2\pi}{3}$ около осей, соединяющихъ центры противоположныхъ граней икосаэдра. Одна изъ

этихъ подстановокъ S', соотвѣтствующая повороту на уголъ $\frac{2\pi}{3}$, можетъ быть принята за основную подстановку икосаэдрической группы вмѣсто подстановки S, указанной выше.

3) Поворотамъ на углы, кратные π, около осей, соединяющихъ средины противоположныхъ реберъ икосаэдра. Одна изъ этихъ подстановокъ $\mathfrak{T}$ можетъ быть принята за вторую основную подстановну икосаэдрической группы.

Мы знаемъ, что октаэдрическая группа въ икосаэдрическую не входитъ.

Группы всѣхъ остальныхъ типовъ въ нее входитъ могутъ.

Итакъ, въ икосаэдрическую группу входятъ слѣдующія подгруппы:

1) Подгруппы циклическаго типа порядка 5:

$$S^0 = 1,\ S,\ S^2,\ S^3,\ S^4. \tag{31}$$

2) Подгруппы циклическаго типа порядка 3:

$$S'^0 = 1,\ S',\ S'^2. \tag{32}$$

3) Подгруппы циклическаго типа порядка 2:

$$\mathfrak{T}^0 = 1,\ \mathfrak{T}. \tag{33}$$

4) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 10, составленныя изъ основныхъ подстановокъ S и U, гдѣ U есть подстановка 2-го порядка, выбранная такъ, чтобы повороты, соотвѣтствующіе подстановкамъ S и U, а также S' и U совершались около двухъ взаимно перпендикулярныхъ осей.

5) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 6, составленныя изъ основныхъ подстановокъ S' и U.

6) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 4, т. е. четверичныя.

7) Подгруппы тетраэдрическаго типа.

Для насъ представляютъ интересъ резольвенты, соотвѣтствующія только нѣкоторымъ изъ этихъ подгруппъ.

Разсмотримъ, какія это подгруппы.

Подгруппы: четверичныя и циклическія порядковъ 5, 3, 2 входятъ въ другія изъ числа перечисленныхъ подгруппъ и потому интереса не представляютъ.

Остаются подгруппы:

1) Двупирамиднаго типа порядка 10.

2) Двупирамиднаго типа порядка 6.

3) Тетраэдрическаго типа.

Резольвента, соотвѣтствующая второй изъ этихъ подгруппъ, какъ мы сейчасъ увидимъ, можетъ быть получена изъ резольвенты, соотвѣтствующей подгруппѣ тетраэдрическаго типа и поэтому самостоятельнаго интереса не представляетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : c f^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1 \tag{3}$$

есть уравненіе икосаэдрическаго типа.

Обозначимъ собственно аутоморфныя функціи, соотвѣтствующія подгруппамъ: тетраэдрической, двупирамидной 6-го порядка и циклической 3-го порядка буквами:

$$\zeta,\ \zeta_6,\ \zeta_3.$$

Пусть резольвента уравненія (3), соотвѣтствующая тетраэдрической подгруппѣ, такова:

$$F_1(\zeta) : F_2(\zeta) : F(\zeta) = z : z - 1 : 1. \tag{4}$$

Циклическая подгруппа 3-го порядка входитъ какъ въ тетраэдрическую подгруппу, такъ и въ двупирамидную подгруппу 6-го порядка. Слѣдовательно, обѣ функціи: ζ и ζ_6 суть раціональныя функціи величины ζ_3:

$$\zeta = \psi_4(\zeta_3), \tag{34}$$

$$\zeta_6 = \psi_2(\zeta_3), \tag{35}$$

гдѣ ψ_4 и ψ_2 суть раціональныя функціи степеней соотвѣтствтнно равныхъ 4 и 2.

Обозначимъ функцію, обратную ψ_2 черезъ ψ_2^{-1}: это ирраціональная функція, содержащая въ себѣ одинъ квадратный радикалъ.

Изъ уравненія (35) имѣемъ:

$$\zeta_3 = \psi_2^{-1}(\zeta_6), \tag{36}$$

а изъ уравненій (34) и (36):

$$\zeta = \psi_4[\psi_2^{-1}(\zeta_6)], \tag{37}$$

или:

$$\zeta = \omega(\zeta_6), \tag{38}$$

гдѣ ω есть ирраціональная функція, содержащая въ себѣ одинъ квадратный радикалъ.

Вставивъ выраженіе (38) въ уравненіе (4), находимъ:

$$F_1[\omega(\zeta_6)] : F_2[\omega(\zeta_6)] : F[\omega(\zeta_6)] = z : z - 1 : 1. \tag{39}$$

Такова резольвента степени:

$$\frac{60}{6} = 10,$$

соотвѣтствующая подгруппѣ двупирамиднаго типа 6-го порядка. Она получается изъ резольвенты (4) подстановкою вмѣсто ζ ирраціональнаго выраженія (38), содержащаго въ себѣ одинъ квадратный радикалъ.

Итакъ, изучая резольвенты икосаэдрическаго уравненія, мы въ правѣ ограничиться разсмотрѣніемъ тѣхъ изъ нихъ, которыя соотвѣтствютъ:

1) подгруппѣ тетраэдрическаго типа,

2) подгруппѣ двупирамиднаго типа 10-го порядка.

Этимъ подгруппамъ соотвѣтствуютъ резольвенты степеней:

$$l_1 = \frac{60}{12} = 5, \quad l_2 = \frac{60}{10} = 6.$$

§ 43. **Резольвенты уравненія двупирамиднаго типа.**

Возьмемъ нормальное уравненіе двупирамиднаго типа:

$$\left(\frac{u^m+1}{2}\right)^2 : \left(\frac{u^m-1}{2}\right)^2 : u^m = z : z - 1 : 1. \tag{40}$$

Группа G этого уравненія состоитъ изъ двухъ основныхъ подстановокъ:

$$S(u) = e^{\frac{2\pi i}{m}} u, \quad \mathfrak{T}(u) = \frac{1}{u}. \tag{41}$$

Мы видѣли, что интересъ представляетъ только одна резольвента этого уравненія: резольвента, соотвѣтствующая подгруппѣ g двупирамиднаго типа порядка $2m_1$, гдѣ m_1 есть наибольшій изъ дѣлителей числа m, отличныхъ отъ самого числа m. Положивъ:

$$\frac{m}{m_1} = l,$$

мы представимъ основныя подстановки подгруппы g въ такомъ видѣ:

$$S^l(u) = e^{\frac{2\pi i}{m_1}} u, \quad \mathfrak{T}(u) = \frac{1}{u}. \tag{42}$$

Функція собственно аутоморфная относительно подстановокъ подгруппы g такова:

$$\zeta = u^{m_1} + \frac{1}{u^{m_1}}. \tag{43}$$

Для составленія резольвенты, которой удовлетворяетъ функція ζ, мы представимъ уравненіе (40) въ такомъ видѣ:

$$\{(u^{m_1})^l + (u^{-m_1})^l + 2\} : \{(u^{m_1})^l + (u^{-m_1})^l - 2\} : 4 = z : z-1 : 1. \tag{44}$$

Изъ уравненія (43) находимъ:

$$\left.\begin{array}{l}
u^{m_1} + u^{-m_1} = \zeta, \\
(u^{m_1})^2 + (u^{-m_1})^2 = \zeta^2 - 2, \\
(u^{m_1})^3 + (u^{-m_1})^3 = \zeta^3 - 3\zeta, \\
(n^{m_1})^4 + (u^{-m_1})^4 = \zeta^4 - 4\zeta^2 + 2. \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \tag{45}$$

Каково бы ни было число l, продолжая составленіе формулъ (45), мы найдемъ выраженіе функціи:

$$(u^{m_1})^l + (u^{-m_1})^l$$

черезъ величину ζ. Это будетъ цѣлый многочленъ степени l относительно ζ. Вставивъ полученное выраженіе функціи $(u^{m_1})^l + (u^{-m_1})^l$ въ уравненіе (44), мы найдемъ искомую резольвенту, корнемъ которой служитъ величина ζ.

Разсмотримъ подробно случай, когда $m=3$. Наибольшій дѣлитель числа 3, отличный отъ самого числа 3, есть 1. Преобразуемъ уравненіе:

$$\left(\frac{u^3+1}{2}\right)^2 : \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2 : u^3 = z : z-1 : 1 \tag{46}$$

подстановкою:

$$\zeta = u + \frac{1}{u}. \tag{47}$$

Въ результатѣ находимъ кубичное уравненіе:

$$(\zeta^3 - 3\zeta + 2) : (\zeta^3 - 3\zeta - 2) : 4 = z : z-1 : 1. \tag{48}$$

Положивъ:

$$\zeta = hY, \tag{49}$$

гдѣ h—произвольное постоянное число, находимъ:

$$(h^3Y^3 - 3hY + 2) : (h^3Y^3 - 3hY - 2) : 4 = z : z-1 : 1. \tag{50}$$

Посмотримъ, какова группа уравненія (48).

Функція:

$$\zeta = u + \frac{1}{u} \tag{47}$$

подъ вліяніемъ подстановокъ группы уравненія (46) должна пріобрѣтать всего три значенія.

Основныя подстановки S и $\mathfrak{T}$ группы уравненія (46) таковы:

$$S(u) = \varepsilon u, \quad \text{гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \mathfrak{T}(u) = \frac{1}{u}. \tag{51}$$

Совершивъ надъ функціей (47) подстановки:

$$S^0 = 1,\ S,\ S^2,$$

находимъ:

$$\zeta_0 = u + \frac{1}{u},\ \zeta_1 = \varepsilon u + \frac{\varepsilon^2}{u},\ \zeta_2 = \varepsilon^2 u + \frac{\varepsilon}{u}. \tag{52}$$

Эти три значенія различны между собою и исчерпываютъ всѣ корни уравненія (48).

Подстановки, которыя мы обозначали буквами:

$$\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots\ \sigma_{l-1}$$

въ данномъ случаѣ суть:

$$S,\ S^2.$$

Подстановка S преобразуетъ величины ζ_0, ζ_1, ζ_2 въ $\overline{\zeta}_0, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, при чемъ:

$$\overline{\zeta}_0 = \zeta_1,\ \overline{\zeta}_1 = \zeta_2,\ \overline{\zeta}_1 = \zeta_0. \tag{53}$$

Слѣдовательно основная субституція σ группы Γ уравненія (48) такова:

$$\sigma = (\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2). \tag{54}$$

Подстановка $\mathfrak{T}$ преобразуетъ величины ζ_0, ζ_1, ζ_2 въ $\overline{\overline{\zeta}}_0, \overline{\overline{\zeta}}_1, \overline{\overline{\zeta}}_2$, при чемъ:

$$\overline{\overline{\zeta}}_0 = \zeta_0,\ \overline{\overline{\zeta}}_1 = \zeta_2,\ \overline{\overline{\zeta}}_2 = \zeta_1. \tag{55}$$

Слѣдовательно основная субституція τ группы Γ уравненія (48) такова:

$$\tau = (\zeta_0)(\zeta_1, \zeta_2). \tag{56}$$

Корни уравненія (50) разнятся отъ корней уравненія (48) только постояннымъ множителемъ h. Группы этихъ уравненій одинаковы.

Основныя субституціи группы уравненія (50) таковы:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_0,\ Y_1,\ Y_2), \\ T &= (Y_0)(Y_1,\ Y_2). \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

§ 44. **Резольвента уравненія тетраэдрическаго типа.**

Мы видѣли въ § 42, что изъ числа резольвентъ тетраэдрическаго уравненія представляетъ интересъ только та резольвента, которая соотвѣтствуетъ циклической подгруппѣ 3-го порядка.

Возьмемъ тетраэдрическое уравненіе во второй нормальной формѣ:

$$(2\sqrt{2}u^3+1)^3:(u^6+5\sqrt{2}u^3-1)^2:-(u^3-2\sqrt{2})^3u^3= \\ = z:z-1:1. \tag{58}$$

Основныя подстановки группы этого уравненія таковы:

$$\left.\begin{aligned} &S(u)=\varepsilon u,\ \mathfrak{T}(u)=\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}u+1}, \\ &\text{гдѣ } \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Основная подстановка циклической подгруппы 3-го порядка есть S.

Функція аутоморфная относительно подстановокъ этой группы есть:

$$\zeta=u^3. \tag{60}$$

Преобразуя уравненіе (58) подстановкою (60), находимъ:

$$(2\sqrt{2}\,\zeta+1)^3:(\zeta^2+5\sqrt{2}\,\zeta-1)^2:-(\zeta-2\sqrt{2})^3\zeta=z:z-1:1. \tag{61}$$

Такова резольвента 4-ой степени тетраэдрическаго уравненія.

Посмотримъ, какова группа Γ этого уравненія.

Совершивъ надъ функціей (60) подстановки:

$$1,\ \mathfrak{T},\ \mathfrak{T}S,\ \mathfrak{T}S^2, \tag{62}$$

находимъ:

$$\left.\begin{array}{c}\zeta_0 = u^3,\ \zeta_1 = \left(\dfrac{\sqrt{2} - u}{\sqrt{2}\,u + 1}\right)^3,\ \zeta_2 = \left(\dfrac{\sqrt{2} - \varepsilon u}{\sqrt{2}\,\varepsilon u + 1}\right)^3, \\ \zeta_3 = \left(\dfrac{\sqrt{2} - \varepsilon^2 u}{\sqrt{2}\varepsilon^2 u + 1}\right)^3.\end{array}\right. \tag{63}$$

Подстановка S преобразуетъ функціи ζ_0, ζ_1, ζ_2, ζ_3 въ $\overline{\zeta}_0$, $\overline{\zeta}_1$, $\overline{\zeta}_2$, $\overline{\zeta}_3$, при чемъ:

$$\overline{\zeta}_0 = \zeta_0,\ \overline{\zeta}_1 = \zeta_2,\ \overline{\zeta}_2 = \zeta_3,\ \overline{\zeta}_3 = \zeta_1. \tag{64}$$

Слѣдовательно, основная субституція σ группы Γ уравненія (61) такова:

$$\sigma = (\zeta_0)(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3). \tag{65}$$

Подстановка $\mathfrak{T}$ преобразуетъ функціи ζ_0, ζ_1, ζ_2, ζ_3 въ $\overline{\overline{\zeta}}_0$, $\overline{\overline{\zeta}}_1$, $\overline{\overline{\zeta}}_2$, $\overline{\overline{\zeta}}_3$, при чемъ:

$$\overline{\overline{\zeta}}_0 = [\mathfrak{T}(u)]^3,\ \overline{\overline{\zeta}}_1 = u^3,\ \overline{\overline{\zeta}}_2 = [\mathfrak{T}S\mathfrak{T}(u)]^3,\ \overline{\overline{\zeta}}_3 = [\mathfrak{T}S^2\mathfrak{T}(u)]^3. \tag{66}$$

Изъ чертежа 28 видно, что подстановка $S\mathfrak{T}$ соотвѣтствуетъ повороту сферы на уголъ $\frac{2\pi}{3}$ около оси, одинъ изъ полюсовъ которой проектируется въ точку c. Слѣдовательно подстановка $S\mathfrak{T}$—третьяго порядка:

$$S\mathfrak{T}S\mathfrak{T}S\mathfrak{T} = 1. \tag{67}$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{T}S\mathfrak{T} = S^2\mathfrak{T}S^2, \\ \mathfrak{T}S^2\mathfrak{T} = S\mathfrak{T}S.\end{array}\right\} \tag{68}$$

Изъ формулъ (66) и (68) слѣдуетъ, что:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\overline{\zeta}}_0 = \zeta_1,\ \overline{\overline{\zeta}}_1 = \zeta_0,\ \overline{\overline{\zeta}}_2 = [S^2\mathfrak{T}S^2(u)]^3 = [\mathfrak{T}S^2(u)]^3 = \zeta_3, \\ \overline{\overline{\zeta}}_3 = [S\mathfrak{T}S(u)]^3 = [\mathfrak{T}S(u)]^2 = \zeta_2.\end{array}\right\} \tag{69}$$

Слѣдовательно основная субституція τ группы Γ уравненія (61) такова:

$$\tau = (\zeta_0, \zeta_1)(\zeta_2, \zeta_3). \tag{70}$$

Положивъ въ уравненіи (61):

$$\zeta = hY, \tag{71}$$

гдѣ h произвольное постоянное число, находимъ:

$$\begin{gathered}(2\sqrt{2}\,hY+1)^3:(h^2Y^2+5\sqrt{2}h\,Y-1)^2:-h(hY-2\sqrt{2})^3Y= \\ = z:z-1:1.\end{gathered} \tag{72}$$

Группа этого уравненія такая же, какъ и группа уравненія (61); она составлена изъ двухъ основнымъ субституцій:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma &= (Y_0)(Y_1,\ Y_2,\ Y_3), \\ T &= (Y_0,\ Y_1)(Y_2,\ Y_3).\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Не безъинтересно на разсматриваемомъ примѣрѣ убѣдиться въ вѣрности тѣхъ геометрическихъ представленій, которыя указаны въ теоремѣ 2 главы IX.

Подстановки, обозначенныя въ главѣ IX буквами:

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{l-1},$$

въ данномъ случаѣ суть:

$$\mathfrak{T},\ \mathfrak{T}S,\ \mathfrak{T}S^2.$$

Выдѣлимъ на чертежѣ 28 четыреугольники, соотвѣтствующіе подстановкамъ:

$$1,\ \mathfrak{T},\ \mathfrak{T}S,\ \mathfrak{T}S^2. \tag{74}$$

Площадь эта есть безконечная часть плоскости, заключенная внутри сторонъ угла $c0a$.

Это дѣйствительно основная область циклической группы 3-го порядка:

$$S^0 = 1, S, S^2.$$

§ 45. **Резольвенты уравненія октаэдрическаго типа.**

Мы видѣли, что изъ числа резольвентъ октаэдрическаго уравненія представляютъ интересъ только двѣ резольвенты: именно тѣ, которыя соотвѣтствуютъ подгруппамъ двупирамиднаго типа порядковъ 8 и 6.

Степени этихъ резольвентъ соотвѣтственно равны 3 и 4. Разсмотримъ ихъ въ отдѣльности.

I.

Резольвента четвертой степени.

Возьмемъ октаэдрическое уравненіе во 2-ой нормальной формѣ:

$$64\sqrt{2}\left(u^7 - \frac{7}{2\sqrt{2}}u^4 - u\right)^3 : -(u^{12} - 22\sqrt{2}u^9 - 22\sqrt{2}u^3 - 1)^2 : \tag{75}$$
$$: (u^6 + 5\sqrt{2}u^3 - 1)^4 = z : z - 1 : 1.$$

Основныя подстановки группы этого уравненія таковы:

$$\left.\begin{aligned} &S(u) = \varepsilon u, \\ &\mathfrak{T}(u) = \frac{1 + \sqrt{2}\varepsilon^2 u}{u - \sqrt{2}\varepsilon}, \\ &\text{гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Основныя подстановки подгруппы двупирамиднаго типа 6-го порядка таковы:

$$S(u) = \varepsilon u, \quad U(u) = -\frac{1}{u}, \tag{77}$$

при чемъ:

$$U = S\mathfrak{T}S\mathfrak{T}^2. \tag{78}$$

Функція собственно аутоморфная относительно подстановокъ этой подгруппы такова:

$$\zeta = u^3 - \frac{1}{u^3}. \tag{79}$$

Преобразуя уравненіе (75) подстановкою (79), находимъ:

$$64\sqrt{2}\left(\zeta - \frac{7}{2\sqrt{2}}\right)^3 : -(\zeta^2+4)(\zeta-22\sqrt{2})^2 : (\zeta+5\sqrt{2})^4 = \tag{80}$$
$$= z : z - 1 : 1.$$

Функція (79) подъ вліяніемъ подстановокъ октаэдрической группы:

$$1,\ \mathfrak{T},\ \mathfrak{T}^2,\ \mathfrak{T}^3 \tag{81}$$

пріобрѣтаетъ слѣдующія значенія:

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_0 &= u^3 - \frac{1}{u^3},\\
\zeta_1 &= \frac{(1+\sqrt{2}\,\varepsilon^2 u)^6 - (u-\sqrt{2}\,\varepsilon)^6}{[\sqrt{2}\,\varepsilon^2 u^2 - u - \sqrt{2}\,\varepsilon]^3},\\
\zeta_2 &= \frac{(1+\sqrt{2}\,u)^6 - (u-\sqrt{2})^6}{[\sqrt{2}u^2 - u - \sqrt{2}]^3},\\
\zeta_3 &= \frac{(1+\sqrt{2}\varepsilon u)^6 - (u-\sqrt{2}\,\varepsilon^2)^6}{[\sqrt{2}\,\varepsilon u^2 - u - \sqrt{2}\,\varepsilon^2]^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Подъ вліяніемъ подстановки S величины ζ_0, ζ_1, ζ_2, ζ_3 переходятъ въ $\overline{\zeta}_0$, $\overline{\zeta}_1$, $\overline{\zeta}_2$, $\overline{\zeta}_3$, при чемъ:

$$\overline{\zeta}_0 = \zeta_0,\ \overline{\zeta}_1 = \zeta_2,\ \overline{\zeta}_2 = \zeta_3,\ \overline{\zeta}_3 = \zeta_1. \tag{83}$$

Подъ вліяніемъ подстановки $\mathfrak{T}$ величины ζ_0, ζ_1, ζ_2, ζ_3 переходятъ въ $\overline{\overline{\zeta}}_0$, $\overline{\overline{\zeta}}_1$, $\overline{\overline{\zeta}}_2$, $\overline{\overline{\zeta}}_3$, при чемъ:

$$\bar{\bar{\zeta}}_0=\zeta_1,\ \bar{\bar{\zeta}}_1=\zeta_2,\ \bar{\bar{\zeta}}_2=\zeta_3,\ \bar{\bar{\zeta}}_3=\zeta_0. \tag{84}$$

Слѣдовательно основныя субституціи σ и τ группы Γ уравненія (80) таковы:

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=(\zeta_0)(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3),\\ \tau&=(\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3).\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Преобразуемъ уравненіе (80) линейною подстановкою:

$$\zeta=\frac{7\sqrt{2}hY-5\sqrt{2}}{4hY+1}, \tag{86}$$

гдѣ h произвольное постоянное число, а Y—новое неизвѣстное. Въ результатѣ находимъ:

$$Y^4+\frac{4}{27h^3z}Y+\frac{1}{27h^4z}=0. \tag{87}$$

Такъ какъ корни уравненій (80) и (87) связаны между собою линейно, то группы этихъ уравненій одинаковы. Основныя субституціи группы уравненія (87) таковы:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma&=(Y_0)(Y_1,\ Y_2,\ Y_3),\\ T&=(Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3).\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Обратимъ вниманіе на геометрическія представленія, указанныя въ теоремѣ 2 главы IX, въ примѣненіи къ разсматриваемому случаю.

Подстановки, обозначенныя въ главѣ IX буквами:

$$\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots\ \sigma_{l-1},$$

въ данномъ случаѣ суть:

$$\mathfrak{T},\ \mathfrak{T}^2,\ \mathfrak{T}^3.$$

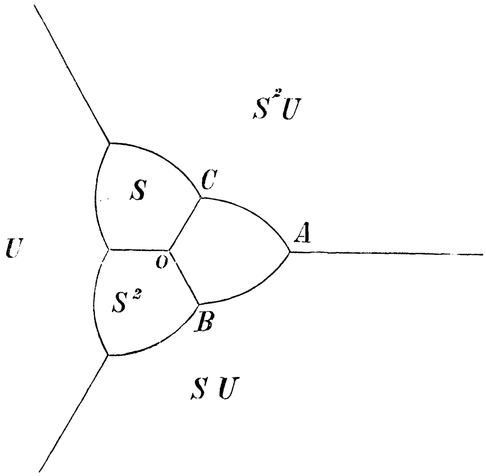
Отмѣтивъ на чертежѣ 30 четыреугольники, соотвѣтствующіе подстановкамъ:

$$1,\ \mathfrak{T},\ \mathfrak{T}^2,\ \mathfrak{T}^3,$$

получимъ сплошную площадь, имѣющую видъ четыреугольника и обозначенную на чертежѣ 35 буквами: *OBAC*. Этотъ четыреугольникъ можетъ быть принятъ за основную область двупирамидной группы 6-го порядка, составленной изъ подстановокъ:

$$\left.\begin{array}{l} S^0=1, S, S^2, \\ U, SU, S^2U. \end{array}\right\} \qquad (89)$$

Преобразуя четыреугольникъ *OBAC* подстановками (89), получимъ сѣть, изображенную на черт. 35. Соотвѣтствіе между областями этой сѣти и подстановками (89) двупирамидной группы указано на самомъ черт. 35.



Черт. 35.

Не трудно видѣть, что сѣть 35 можетъ быть построена слѣдующимъ образомъ: вписавъ кубъ въ сферу такъ, чтобы двѣ противоположныя вершины его лежали въ полюсахъ сферы, мы проэктируемъ его ребра изъ центра на поверхность сферы. На поверхности сферы получится сѣть изъ 6 равныхъ между собою четыреугольниковъ. Проэктируя эту сѣть изъ южнаго полюса на плоскость экватора, мы получимъ ту сѣть, которая изображена на черт. 35.

II.

Резольвента третьей степени.

Возьмемъ октаэдрическое уравненіе въ 1-ой нормальной формѣ:

$$(u^8+14u^4+1)^3 : (u^{12}-33u^8-33u^4+1)^2 : 108(u^5-u)^4 = \tag{90}$$
$$= z : z-1 : 1.$$

Основныя подстановки группы этого уравненія таковы:

$$S(u) = iu, \quad \mathfrak{T}(u) = \frac{1-u}{1+u}. \tag{91}$$

Подгруппа двупирамиднаго типа 8-го порядка, входящая въ эту группу, имѣетъ слѣдующія основныя подстановки:

$$S(u) = iu, \quad U(u) = \frac{1}{u}, \tag{92}$$

при чемъ:

$$U = \mathfrak{T}S^2\mathfrak{T}. \tag{93}$$

Функція аутоморфная относительно подстановокъ этой подгруппы 6-го порядка такова:

$$\zeta = u^4 + \frac{1}{u^4}. \tag{94}$$

Преобразуя уравненіе (90) подстановкою (94), находимъ:

$$(\zeta+14)^3 : (\zeta+2)(\zeta-34)^2 : 108(\zeta-2)^2 = z : z-1 : 1. \tag{95}$$

Совершая надъ функціей (94) подстановки:

$$1, \ \mathfrak{T}, \ \mathfrak{T}S, \tag{96}$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0 &= u^4 + \frac{1}{u^4}, \quad \zeta_1 = \frac{(1+u)^8+(1-u)^8}{(1-u^2)^4}, \\ \zeta_2 &= \frac{(1+iu)^8+(1-iu)^8}{(1+u^2)^4}. \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Совершая надъ этими величинами подстановку S, находимъ:

$$\overline{\zeta_0} = \zeta_0, \quad \overline{\zeta_1} = \zeta_2, \quad \overline{\zeta_2} = \zeta_1. \tag{98}$$

Совершая надъ функціями (97) подстановку $\mathfrak{T}$, находимъ:

$$\bar{\bar{\zeta}}_0 = \zeta_1,\ \bar{\bar{\zeta}}_1 = \zeta_0,\ \bar{\bar{\zeta}}_2 = \zeta_2. \qquad (99)$$

Слѣдовательно, основныя субституціи σ и τ группы Γ уравненія (95) таковы:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= (\zeta_0)(\zeta_1,\ \zeta_2), \\ \tau &= (\zeta_0,\ \zeta_1)(\zeta_2). \end{aligned}\right\} \qquad (100)$$

Отсюда видно, что группа уравненія (95) не изоморфна съ группой октаэдрическаго уравненія: субституція σ—2-го порядка, тогда какъ соотвѣтствующая ей подстановка S— четвертаго порядка. Это происходитъ отъ того, что подгруппа 8-го порядка есть *полуособая часть* октаэдрической: основная подстановка U подгруппы 8-го порядка, будучи преобразована основными подстановками S и $\mathfrak{T}$ октаэдрической группы, даетъ въ результатѣ подстановки, принадлежащія къ той же подгруппѣ 8-го порядка.

Найденную особенность подгруппы 8-го порядка можно было предвидѣть и ранѣе: группа уравненія третьей степени (95) не можетъ быть порядка выше 12. Слѣдовательно она не можетъ оказаться изоморфною съ октаэдрической группой 24-го порядка.

Уравненіе (95) не представляетъ особаго интереса потому, что мы уже получили выше резольвенту 3-ей степени, исходя изъ болѣе простаго двупирамиднаго уравненія.

§ 46. **Резольвенты уравненія икосаэдрическаго типа.**

Мы видѣли, что изъ числа резольвентъ икосаэдрическаго уравненія представляютъ интересъ только двѣ: соотвѣтствующія подгруппѣ тетраэдрическаго типа и подгруппѣ типа двупирамиднаго 10-го порядка.

Степени этихъ резольвентъ соотвѣтственно равны 5 и 6. Разсмотримъ ихъ въ отдѣльности.

I.

Резольвента пятой степени.

Возьмемъ икосаэдрическое уравненіе въ нормальной формѣ:

$$(u^{20}-228u^{15}+494u^{10}+228u^5+1)^3:$$
$$:(u^{30}+522u^{25}-10005u^{20}-10005u^{10}-522u^5+1)^2:$$
$$:-1728(u^{11}+11u^6-u)^5=z:z-1:1. \qquad (101)$$

Основныя подстановки группы этого уравненія таковы:

$$\left.\begin{aligned} &S(u)=\varepsilon u,\\ &\mathfrak{T}(u)=\frac{1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)u}{u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)},\\ &\text{гдѣ: } \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{5}}. \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

Въ эту группу входитъ тетраэдрическая группа третьяго нормальнаго вида. Въ главѣ IV мы только обозначили основныя подстановки ея буквами: S_m'' и $\mathfrak{T}_m''$, но не нашли выраженій этихъ подстановокъ. Начнемъ съ нахожденія основныхъ подстановокъ S_m'' и $\mathfrak{T}_m''$.

Сравнимъ вторую нормальную икосаэдрическую сѣть, изображенную на чертежѣ II *) съ 1-ою нормальную тетраэдрическою сѣтью, изображенною на чертежѣ 27.

Тетраэдръ, соотвѣтствующій сѣти 27, находится въ соотвѣтственномъ положеніи относительно икосаэдра, соотвѣтствующаго сѣти II: всѣ вершины и центры граней тетраэдра совпадаютъ съ 8 изъ числа 20 центровъ граней икосаэдра, а всѣ средины реберъ тетраэдра совпадаютъ съ 6 изъ числа 30 срединъ реберъ икосаэдра. Поэтому при наложеніи сѣти 27 на сѣть II узловыя точки сѣти 27, гдѣ сходятся по 3 бѣлыхъ и по 3 черныхъ треугольника, должны упасть на

*) Въ концѣ сочиненія.

узловыя точки сѣти II, гдѣ сходится такое же число треугольниковъ *).

Точки, отмѣченныя на чертежѣ 27 буквами: a, b, c, d, e, f, g, h упадутъ въ точки, отмѣченныя на черт. II буквами: A', B', C', D', E', F', G', H'.

Если мы повернемъ какъ тетраэдръ, такъ и икосаэдръ на извѣстный уголъ, отмѣченный на черт. 22 буквою θ такъ, чтобы икосаэдръ занялъ положеніе, соотвѣтствующее 1-ой нормальной икосаэдрической сѣти **), то сѣти 27 и II преобразуются. При этомъ сѣть II переходитъ въ сѣть I, а точки A', B', C', D', E', F', G', H' занимаютъ положенія, отмѣченныя на чертежѣ I буквами: A, B, C, D, E, F, G, H. Точка, отмѣченная на чертежахъ 27 и II буквою O, на чертежѣ I займетъ положеніе b.

Вычисляя подстановки 1-ой нормальной тетраэдрической группы, мы приняли за основныя тѣ двѣ подстановки, которыя соотвѣтствуютъ поворотамъ:

1) На уголъ π около оси, полюсъ которой проэктируется на черт. 27 въ точку O.

2) На уголъ $\frac{2\pi}{3}$ около оси, полюсъ которой проэктируется на черт. 27 въ точку c.

Совершенно съ тѣмъ же правомъ мы могли бы за вторую основную подстановку тетраэдрической группы принять подстановку, соотвѣтствующую повороту на уголъ $\frac{2\pi}{3}$ около оси, полюсъ которой проэктируется на черт. 27 въ точку b. Въ такомъ случаѣ основныя подстановки третьей нормальной тетраэдрической группы будутъ слѣдующія:

1) Подстановка $\mathfrak{T}_m''$, соотвѣтствующая повороту на уголъ π около оси, полюсъ которой на черт. I проэктируется въ точку b: это основная подстановка $\mathfrak{T}$ икосаэдрической группы.

---

*) Само собою понятно, что это справедливо только въ предположеніи, что сѣти 27 и II выполнены въ одинаковомъ масштабѣ. У насъ масштабы взяты различные.

**) Такое положеніе икосаэдра изображено на черт. 24.

2) Подстановка S_m'', соотвѣтствующая повороту на уголъ $\frac{2\pi}{3}$ около оси, полюсъ которой на черт. I проэктируется въ точку B.

Вычислимъ эту подстановку.

Изъ черт. I видно, что послѣ преобразованія сказанною подстановкою S_m'' треугольникъ, отмѣченный на черт. I буквою S преобразуется въ треугольникъ $S\mathfrak{T}S^4$. Слѣдовательно:

$$S_m''S = S\mathfrak{T}S^4. \tag{103}$$

Отсюда слѣдуетъ, что:

$$S_m'' = S\mathfrak{T}S^3. \tag{104}$$

Итакъ, основныя подстановки разсматриваемой нами подгруппы тетраэдрическаго типа таковы:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_m'' &= \mathfrak{T}, \\ S_m'' &= S\mathfrak{T}S^3. \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Мы уже видѣли въ § 32 *), что третье нормальное тетраэдрическое уравненіе можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\zeta = \frac{f_0''^2(u)}{f_u(u)}. \tag{106}$$

Слѣдовательно функція ζ, опредѣляемая формулою (106), есть собственно аутоморфная функція, соотвѣтствующая подстановкамъ подгруппы третьяго нормальнаго тетраэдрическаго типа. Ее мы обозначимъ для краткости такъ:

$$\zeta = A_m(u). \tag{107}$$

Функція ζ подъ вліяніемъ подстановокъ икосаэдрической группы должна пріобрѣтать всего

---

*) См. главу VII, уравненіе (53).

$$l = \frac{60}{12} = 5$$

значеній.

Преобразуя функцію (106) подстановками:

$$S^0=1,\ S,\ S^2,\ S^3,\ S^4, \tag{108}$$

мы находимъ пять *различныхъ* значеній:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_0 = \frac{f_0''^2(u)}{f_u(u)},\quad \zeta_1 = \varepsilon^4 \frac{f_0''^2(\varepsilon u)}{f_u(u)},\quad \zeta_2 = \varepsilon^3 \frac{f_0''^2(\varepsilon^2 u)}{f_u(u)},\\ &\zeta_3 = \varepsilon^2 \frac{f_0''^2(\varepsilon^3 u)}{f_u(u)},\quad \zeta_4 = \varepsilon\, \frac{f_0''^2(\ {}^4u)}{f_u(u)}, \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

или, короче:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_0=A_m(u),\ \zeta_1=A_m(\ u),\ \zeta_2=A_m(\varepsilon^2 u),\ \zeta_3=A(\varepsilon^3 u),\\ &\qquad \zeta_4=A_m(\ {}^4u)\cdot \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Эти пять различныхъ значеній исчерпываютъ всѣ тѣ значенія, которыя пріобрѣтаетъ функція ζ подъ вліяніемъ подстановокъ икосаэдрической группы.

Уравненіе, которому удовлетворяютъ найденныя 5 значеній функціи ζ, было нами уже составлено въ главѣ VII. Оно таково:

$$(\zeta-3)^3(\zeta^2-11\zeta+64):\zeta(\zeta^2-10\zeta+45)^2:-1728=z:z-1:1. \tag{111}$$

Посмотримъ, какова группа этой резольвенты.

Преобразуемъ функціи (110) подстановкою S. Послѣ подстановки онѣ перейдутъ въ $\overline{\zeta_0}$, $\overline{\zeta_1}$, $\overline{\zeta_2}$, $\overline{\zeta_3}$, $\overline{\zeta_4}$, при чемъ:

$$\overline{\zeta_0}=\zeta_1,\ \overline{\zeta_1}=\zeta_2,\ \overline{\zeta_2}=\zeta_3,\ \overline{\zeta_3}=\zeta_4,\ \overline{\zeta_4}=\zeta_0. \tag{112}$$

Слѣдовательно, основная субституція σ группы Γ уравненія (111) такова:

$$\sigma=(\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3,\ \zeta_4). \tag{113}$$

Подстановка $\mathfrak{T}$ преобразуетъ величины $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ въ $\bar{\bar{\zeta}}_0, \bar{\bar{\zeta}}_1, \bar{\bar{\zeta}}_2, \bar{\bar{\zeta}}_3, \bar{\bar{\zeta}}_4$, при чемъ:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\bar{\zeta}}_0=A_m[\mathfrak{T}(u)],\ \bar{\bar{\zeta}}_1=A_m[S\mathfrak{T}(u)],\ \bar{\bar{\zeta}}_2=A_m[S^2\mathfrak{T}(u)],\\&\bar{\bar{\zeta}}_3=A_m[S^3\mathfrak{T}(u)],\ \bar{\bar{\zeta}}_4=A_m[S^4\mathfrak{T}(u)].\end{aligned}\right\}\tag{114}$$

Припомнивъ замѣчаніе, сдѣланное въ § 18 о томъ, что подстановка $S\mathfrak{T}$ икосаэдрической группы—третьяго порядка:

$$S\mathfrak{T}S\mathfrak{T}S\mathfrak{T}=1,\tag{115}$$

и пользуясь выраженіями (105) подстановокъ $\mathfrak{T}_m''$ и S_m'', находимъ:

$$\left.\begin{aligned}&S\,\mathfrak{T}=S_m''\,S^2,\\&S^2\mathfrak{T}=S_m''^2S,\\&S^3\mathfrak{T}=S_m''^2\mathfrak{T}_m''S^4,\\&S^4\mathfrak{T}=\mathfrak{T}_m''S_m''S^3.\end{aligned}\right\}\tag{116}$$

Такъ какъ подстановки S_m'' и $\mathfrak{T}_m''$ не мѣняютъ функцію $A_m(u)$, то изъ формулъ (114) и (116) слѣдуетъ:

$$\bar{\bar{\zeta}}_0=\zeta_0,\ \bar{\bar{\zeta}}_1=\zeta_2,\ \bar{\bar{\zeta}}_2=\zeta_1,\ \bar{\bar{\zeta}}_3=\zeta_4,\ \bar{\bar{\zeta}}_4=\zeta_3.\tag{117}$$

Отсюда слѣдуетъ, что основная субституція τ группы Γ такова:

$$\tau=(\zeta_0)(\zeta_1,\zeta_2)(\zeta_3,\zeta_4).\tag{118}$$

Обратимъ вниманіе на геометрическія представленія, соотвѣтствующія подгруппѣ тетраэдрическаго типа.

Подстановки, которыя въ главѣ IX были обозначены буквами:

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ldots\ \sigma_{l-1},$$

въ данномъ случаѣ суть:

$$S,\ S^2,\ S^3,\ S^4.$$

Отмѣтивъ на черт. I пять четыреугольниковъ сѣти, соотвѣтствующихъ подстановкамъ:

$$1,\ S,\ S^2,\ S^3,\ S^4, \tag{119}$$

мы найдемъ сплошную площадь, имѣющую видъ пятиугольника. Эта площадь можетъ быть принята за основную область подгруппы тетраэдрическаго типа. Вся тетраэдрическая сѣть будетъ состоять изъ 12 такихъ областей. Эта сѣть изображена на черт. III. Свотвѣтствіе между областями этой сѣти и подстановками тетраэдрической подгруппы указано на черт. III.

Не трудно замѣтить, что сѣть III можетъ быть получена слѣдующимъ образомъ: вписавъ додекаэдръ въ сферу такъ, чтобы центры двухъ противоположныхъ граней додекаэдра лежали на оси сферы, и проэктируя ребра додекаэдра изъ центра на поверхность сферы, мы получимъ сѣть на сферѣ, раздѣляющую поверхность сферы на 12 равныхъ сферическихъ пятиугольниковъ. Проэктируя эту сѣть изъ южнаго полюса на плоскость экватора, мы получаемъ ту сѣть, которая изображена на черт. III.

Займемся преобразованіемъ уравненія (111) *).

А) Возьмемъ функцію:

$$U=12\frac{f_u^2(u)\,f_0''(u)}{T_u(u)}\,. \tag{120}$$

Она инваріантна по отношенію къ подстановкамъ второй нормальной тетраэдрической группы. Слѣдовательно она должна быть раціональною функціею ζ. Дѣйствительно, мы видѣли въ главѣ VI, что:

$$T_u(u)=[f_0''^4(u)-10\,f_0''^2(u)\,f_u(u)+45\,f_u^2(u)]\,f_0''(u)\ \text{**)}. \tag{121}$$

---

*) Эти нѣсколько искусственныя, но весьма остроумныя преобразованія принадлежатъ Клейну. См. Vorlesungen über das Ikosaeder. Стр. 103—107.

**) Глава VI, формулы (73).

Подставивъ это выраженіе въ формулу (120) и принявъ во во вниманіе равенство:

$$\zeta = \frac{f_0''^2(u)}{f_u(u)}, \tag{121}$$

находимъ:

$$U = \frac{12}{\zeta^2 - 10\zeta + 45}. \tag{122}$$

Исключивъ ζ изъ уравненій (111) и (122), находимъ:

$$48(z-1)^2 U^5 + 40(z-1) U^3 + 15 U - 4 = 0. \tag{123}$$

B) Возьмемъ функцію:

$$V = \frac{12 H_0''(u) f_u(u)}{H_u(u)}. \tag{124}$$

Она тоже не мѣняется отъ подстановокъ третьей нормальной тетраэдрической группы и потому тоже должна выражаться въ видѣ раціональной функціи ζ.

Дѣйствительно, мы видѣли въ главѣ VI, что:

$$H_u(u) = [f_0''^2(u) - 3 f_u(u)]\, H_0''(u)\ ^{*}). \tag{125}$$

Подставивъ это выраженіе въ формулу (124) и принявъ во вниманіе равенство (106), находимъ:

$$V = \frac{12}{\zeta - 3}. \tag{126}$$

Исключивъ ζ изъ уравненій (111) и (126), находимъ:

$$z V^5 + 40 V^2 - 60 V + 144 = 0. \tag{127}$$

C) Возьмемъ функцію:

$$Y = hV + kUV, \tag{128}$$

---

*) Глава VI, формулы (73).

гдѣ h и k произвольныя постоянныя числа, а U и V суть функціи опредѣленныя выше.

Внеся вмѣсто U и V выраженія (122) и (126), находимъ:

$$Y=\frac{12h(\zeta^2-10\zeta+45)+144k}{(\zeta-3)(\zeta^2-10\zeta+45)}\,. \tag{129}$$

Эта функція должна удовлетворять нѣкоторому уравненію 5-ой степени:

$$Y^5+a_1\,Y^4+a_2\,Y^3+a_3\,Y^2+a_4\,Y+a_5=0, \tag{130}$$

гдѣ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 суть нѣкоторыя раціональныя функціи перемѣннаго z.

Займемся ихъ опредѣленіемъ.

Вставивъ въ выраженіе (128) вмѣсто U и V выраженія (120) и (124), находимъ:

$$Y=12h\frac{f_u(u)\,H_0''(u)}{H_u(u)}+12^2k\frac{f_u^{\,3}(u)\,f_0''(u)\,H_0''(u)}{T_u(u)\,H_u(u)}\,. \tag{131}$$

Положимъ:

$$u=\frac{\eta_1}{\eta_2}\,, \tag{132}$$

гдѣ η_1, η_2 имѣютъ тѣ же значенія, которыя они имѣли въ главѣ VIII: они связаны съ корнемъ u икосаэдрическаго уравненія (101) соотношеніями:

$$\eta_1=u\sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}}\,,\quad \eta_2=\sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}}\,. \tag{133}$$

Положивъ въ формулахъ (37) главы VIII:

$$\frac{1}{c}R(z)=z,\quad c=-12^3,\ c'=1,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} f_u(\eta_1,\eta_2)&=12^3(1-z)^3z^4,\\ H_u(\eta_1,\eta_2)&=-12^6(1-z)^5z^7,\\ T_u(\eta_1,\eta_2)&=-12^9(1-z)^8z^{10}. \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

Подставивъ выраженіе (132) въ формулу (131) и принявъ во вниманіе формулы (134), находимъ:

$$
\left.\begin{aligned}
Y = &-\frac{h}{12^2(1-z)^2z^3}\,H_0''(\eta_1, \eta_2)+\\
&+\frac{k}{12^4(1-z)^4z^5}\,f_0''(\eta_1, \eta_2)\,H_0''(\eta_1, \eta_2).
\end{aligned}\right\} \tag{135}
$$

Вводимъ временно такія обозначенія:

$$
-\frac{h}{12^2(1-z)^2z^3}=P,\quad \frac{k}{12^4(1-z)^4z^5}=Q. \tag{136}
$$

Величины P и Q суть раціональныя функціи z. Будучи выражены черезъ u, онѣ не мѣняются ни при какихъ подстановкахъ икосаэдрической группы.

Функція Y приметъ видъ:

$$
Y=PH_0''(\eta_1, \eta_2)+Qf_0''(\eta_1, \eta_2)\,H_0''(\eta_1, \eta_2). \tag{137}
$$

Она имѣетъ всего 5 значеній, которыя могутъ быть получены посредствомъ преобразованія функціи (131) линейными подстановками:

$$
1,\ S,\ S^2,\ S^3,\ S^4. \tag{119}
$$

Неоднородной линейной подстановкѣ:

$$
S(u)=\varepsilon u
$$

соотвѣтствуютъ, какъ мы видѣли въ главѣ IV, двѣ бинарныя линейныя подстановки надъ величинами η_1, η_2:

$$
\begin{pmatrix}\pm\varepsilon^3, & 0\\ 0, & \pm\varepsilon^2\end{pmatrix}. \tag{138}
$$

Степени этихъ подстановокъ таковы:

$$
\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\pm\varepsilon^3, & 0\\ 0, & \pm\varepsilon^2\end{pmatrix}^0=1,\ \begin{pmatrix}\pm\varepsilon^3, & 0\\ 0, & \pm\varepsilon^2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\pm\varepsilon^3, & 0\\ 0, & \pm\varepsilon^2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\varepsilon, & 0\\ 0, & \varepsilon^4\end{pmatrix},\\
&\begin{pmatrix}\pm\varepsilon^3, & 0\\ 0, & \pm\varepsilon^2\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}\pm\varepsilon^4, & 0\\ 0, & \pm\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\pm\varepsilon^3, & 0\\ 0, & \pm\varepsilon^2\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}\varepsilon^2, & 0\\ 0, & \varepsilon^3\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{139}
$$

Совершивъ подстановки (139) надъ функціей (137), получаемъ пять различныхъ значеній функціи Y, которыя могутъ быть выражены формулою:

$$Y_j = PH_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2) + Qf_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2)H_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2), \qquad (140)$$

гдѣ $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

Для вычисленія коэффиціентовъ уравненія (130) найдемъ сначала симметрическія функціи:

$$s_1, \; s_2, \; s_3, \; s_4, \; s_5$$

его корней.

Функція s_1 выражается такъ:

$$s_1 = P\sum_{j=0}^{j=4} H_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2) + $$
$$+ Q\sum_{j=0}^{j=4} f_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2)H_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2). \qquad (141)$$

Функція:

$$\sum_{j=0}^{j=4} H_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2) \qquad (142)$$

инваріантна относительно всѣхъ линейныхъ бинарныхъ подстановокъ икосаэдрической группы. По теоремѣ 3 главы VI ее можно изобразить формулою вида:

$$\Phi[H_u^{\lambda_1}(\eta_1, \eta_2), f_u^{\lambda}(\eta_1, \eta_2)] \times$$
$$\times f_u^{m_1}(\eta_1, \eta_2)\, H_u^{m_2}(\eta_1, \eta_2)\, T^{m_3}(\eta_1, \eta_2). \qquad (143)$$

Степень функціи (142) относительно аргументовъ η_1, η_2 равна 8, степень же функціи (143) во всякомъ случаѣ выше 8. Слѣдовательно функція (142) равна нулю.

Подобнымъ же образомъ убѣждаемся въ томъ, что и вторая сумма формулы (141) равна нулю.

Слѣдовательно:

$$s_1 = 0.$$

Составивъ выраженія, подобныя (141), для функцій s_2, s_3, s_4, s_5 и сравнивая ихъ съ выраженіемъ вида (143), мы легко находимъ выраженія функцій s_2, s_3, s_4, s_5, изъ которыхъ каждое содержитъ въ себѣ только нѣсколько неизвѣстныхъ постоянныхъ коэффиціентовъ.

Въ результатѣ всѣхъ этихъ вычисленій находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ s_3 = A_1 P^3 f_u^2(\eta_1, \eta_2) + A_2 P^2 Q T_u(\eta_1, \eta_2) + \\
&\quad + A_3 P Q^2 f_u^3(\eta_1, \eta_2) + A_4 Q^3 f_u(\eta_1, \eta_2) T_u(\eta_1, \eta_2), \\
&s_4 = B_1 P^4 f_u(\eta_1, \eta_2) H_u(\eta_1, \eta_2) + \\
&\quad + B_2 P^2 Q^2 f_u^2(\eta_1, \eta_2) H_u(\eta_1, \eta_2) + \\
&+ B_3 P Q^3 H(\eta_1, \eta_2) T(\eta_1, \eta_2) + B_4 Q^4 f_u^3(\eta_1, \eta_2) H_u(\eta_1, \eta_2), \\
&s_5 = D_1 P^5 H^2(\eta_1, \eta_2) + D_2 P^3 Q^2 f_u(\eta_1, \eta_2) H_u^2(\eta_1, \eta_2) + \\
&\quad + D_3 P Q^4 f_u^2(\eta_1, \eta_2) H_u^2(\eta_1, \eta_2) + \\
&\quad + D_4 Q^5 H_u^2(\eta_1, \eta_2) T_u(\eta_1, \eta_2),
\end{aligned}\right\} \quad (144)$$

гдѣ A_1, $A_2, \ldots D_4$ суть нѣкоторыя постоянныя.

Подставивъ въ формулахъ (144) вмѣсто $f_u(\eta_1, \eta_2)$, $H_u(\eta_1, \eta_2)$, $T_u(\eta_1, \eta_2)$ выраженія (134), а вмѣсто P и Q выраженія (136), находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&s_1 = 0,\ s_2 = 0,\\
&s_3 = -A_1 \frac{h^3}{z} - A_2 \frac{12h^2k}{z} - A_3 \frac{hk^2}{12z(1-z)} - A_4 \frac{k^3}{z(1-z)},\\
&s_4 = -B_1 \frac{12h^4}{z} - B_2 \frac{h^2k^2}{z(1-z)} - B_3 \frac{12hk^3}{z(1-z)} -\\
&\qquad - B_4 \frac{k^4}{12z(1-z)^2},\\
&s_5 = -D_1 \frac{12^2 h^5}{z} - D_2 \frac{12h^3k^2}{z(1-z)} - D_3 \frac{hk^4}{z(1-z)^2} -\\
&\qquad - D_4 \frac{12k^5}{z(1-z)^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (145)$$

Подставивъ эти величины s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 въ формулы Ньютона:

$$\left.\begin{aligned}
&s_1 + a_1 = 0,\\
&s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0,\\
&s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0,\\
&s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + 4a_4 = 0,\\
&s_5 + a_1 s_4 + a_2 s_3 + a_3 s_2 + a_4 s_1 + 5a_5 = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (146)$$

мы находимъ выраженія коэффиціентовъ:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 = 0,\ a_2 = 0,\\
&a_3 = A_1' \frac{h^3}{z} + A_2' \frac{h^2k}{z} + A_3' \frac{hk^2}{z(1-z)} + A_4' \frac{k^3}{z(1-z)},\\
&a_4 = B_1' \frac{h^4}{z} + B_2' \frac{h^2k^2}{z(1-z)} + B_3' \frac{hk^3}{z(1-z)} + B_4' \frac{k^4}{z(1-z)^2},\\
&a_5 = D_1' \frac{h^5}{z} + D_2' \frac{h^3k^2}{z(1-z)} + D_3' \frac{hk^4}{z(1-z)^2} + D_4' \frac{k^5}{z(1-z)^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (147)$$

Гдѣ A'_1, $A'_2, \ldots D'_4$ суть постоянныя, не зависящія ни отъ z, ни отъ h и k.

Остается опредѣлить величины этихъ постоянныхъ.

Если мы положимъ въ формулахъ (147):

$$h=1, \; k=0$$

и затѣмъ подставимъ полученныя выраженія коэффиціентовъ въ уравненіе (130), то мы должны получить уравненіе (127). Отсюда мы заключаемъ, что:

$$A_1'=40, \; B_1'=-60, \; D_1'=144. \tag{148}$$

Остальные 9 коэффиціентовъ находятся гораздо труднѣе. Ихъ мы можемъ вычислить такъ: подставимъ въ формулахъ (147) вмѣсто z и $1-z$ ихъ выраженія черезъ u изъ икосаэдрическаго уравненія (101), вставимъ полученныя выраженія въ уравненіе (130), замѣнимъ въ этомъ уравненіи Y его выраженіемъ (131), освободимъ отъ знаменателей и произведемъ сравненіе коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ h, k и u.

Такимъ образомъ мы найдемъ линейныя уравненія, опредѣляющія коэффиціенты A'_2, $A'_3, \ldots$

Необходимо однако замѣтить, что эти вычисленія съ механической стороны очень сложны. Той же цѣли мы можемъ достичь нѣсколько иначе. Пользуясь формулою (129) и уравненіемъ (111), можно разложить функцію Y въ рядъ по степенямъ z, $1-z$ или $\frac{1}{z}$ въ областяхъ критическихъ точекъ, 0, 1 или ∞; вставивъ эти разложенія въ уравненіе (130) и замѣнивъ коэффиціенты этого уравненія выраженіями (147), мы можемъ произвести сравненіе коэффиціентовъ у различныхъ степеней z, $1-z$ или $\frac{1}{z}$. Такимъ образомъ мы снова находимъ линейныя уравненія, опредѣляющія постоянныя A'_2, $A'_3 \ldots$ Съ механической стороны этотъ пріемъ проще предшествующаго *).

*) Этимъ именно способомъ мнѣ и удалось получить величины коэффиціентовъ A'_2, A'_3,... Клейнъ приводитъ только результатъ своихъ вы-

Не вдаваясь въ подробности этихъ довольно утомительныхъ вычисленій, приводимъ окончательный видъ уравненія (130), который получится, если мы замѣнимъ коэффиціенты $A'_1, A'_2 \ldots$ ихъ числовыми значеніями и затѣмъ внесемъ выраженія (147) въ уравненіе (130):

$$\begin{aligned} zY^5 &+ 5\left(8h^3+12h^2k+\frac{6hk^2+k^3}{1-z}\right)Y^2+ \\ &+ 15\left(-4h^4+\frac{6h^2k^2+4hk^3}{1-z}+\frac{3k^4}{4(1-z)^2}\right)Y+ \\ &+ 3\left(48h^5-\frac{40h^3k^2}{1-z}+\frac{15hk^4+4k^5}{(1-z)^2}\right)=0. \end{aligned} \qquad (149)$$

Уравненія 5-ой степени, свободныя отъ 4-ой и 3-ей степеней неизвѣстнаго, слѣдуя Клейну, мы будемъ называть главными уравненіями (Hauptgleichungen) по причинѣ, которая будетъ указана въ слѣдующей главѣ.

Уравненіе (149) интересно тѣмъ, что это—главное уравненіе 5-ой степени, полученное изъ уравненія (111) раціональнымъ преобразованіемъ (129), заключающимъ въ себѣ два произвольныхъ параметра: h и k.

Уравненіе (149) есть самый общій видъ главнаго уравненія, получаемаго изъ уравненія (111) раціональнымъ преобразованіемъ. Въ самомъ дѣлѣ, раціональная функція корня уравненія 5-ой степени (111) всегда можетъ быть приведена къ виду:

$$Y=\zeta^4+b_1\zeta^3+b_2\zeta^2+b_3\zeta+b_4. \qquad (150)$$

Она содержитъ въ себѣ 4 коэффиціента:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4. \qquad (151)$$

численій, говоря: Jndem die Einzelheiten der Rechunug keinerlei principielles Interesse darbieten, theile ich hier geich das Resultat mit"... По видимому онъ тоже не зналъ болѣе простаго способа, чѣмъ тѣ, которые указаны выше.

Совершая раціональное преобразованіе (150) надъ уравненіемъ (111), мы можемъ, наложивши на коэффиціенты (151) два условія, достичь того, чтобы преобразованное уравненіе было главнымъ.

Если мы выберемъ два коэффиціента (151) такъ, чтобы удовлетворялись два наложенныя условія, то формула (150) и уравненіе полученное послѣ преобразованія, будетъ содержать въ себѣ только два независимыхъ параметра.

Такой именно случай и представляютъ собою: преобразованіе (129) и соотвѣтствующее ему уравненіе (149).

Такъ какъ уравненія (111) и (149) одинаковой степени и корни уравненія (149) выражаются раціонально черезъ корни уравненія (111), то и обратно—корни уравненія (111) должны выражаться раціонально черезъ корни уравненія (149); группы уравненій (111) и (149) дожны быть одинаковы.

Отсюда мы заключаемъ, что группа уравненія (149) составлена изъ двухъ основныхъ субституцій:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma&=(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4), \\ T&=(Y_0)(Y_1, Y_2)(Y_3, Y_4), \end{aligned}\right\} \qquad (152)$$

II.

Резольвента шестой степени.

Возьмемъ снова икосаэдрическое уравненіе въ нормальной формѣ (101).

Основныя подстановки подгруппы 10-го порядка двупирамиднаго типа, входящей въ икосаэдрическую группу, таковы:

$$\left.\begin{aligned} S(u)&=.u, \\ U(u)&=-\frac{1}{u}. \\ \text{гдѣ: } \varepsilon&=e^{\frac{2\pi i}{5}}. \end{aligned}\right\} \qquad (153)$$

Функція, аутоморфная по отношенію къ подстановкамъ этой подгруппы, такова:

$$\zeta = u^5 - \frac{1}{u^5}. \qquad (154)$$

Преобразуя икосаэдрическое уравненіе

$$(u^{20}-228u^{15}+494u^{10}+228u^5+1)^3:$$
$$:(u^{30}+522u^{25}-10005u^{20}-10005u^{10}-522u^5+1)^2: \quad (101)$$
$$-1728(u^{11}+11u^6-u)^5=z:z-1:1$$

подстановкою (154), находимъ:

$$\begin{aligned}(\zeta^2-228\zeta+496)^3:(\zeta^2+522\zeta-10004)^2(\zeta^2+4):\\ :-1728(\zeta+11)^5=z:z-1:1.\end{aligned} \quad (155)$$

Посмотримъ, какова группа этого уравненія.

Примѣнивъ къ функціи (154) подстановки икосаэдрической группы:

$$1,\ \mathfrak{T},\ \mathfrak{T}S,\ \mathfrak{T}S^2,\ \mathfrak{T}S^3,\ \mathfrak{T}S^4, \quad (156)$$

находимъ слѣдующія 6 различныхъ между собою значеній функціи ζ:

$$\left.\begin{aligned}&\zeta_\infty=u^5-\frac{1}{u^5},\\ &\zeta_j=\frac{[1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^j u]^{10}-[\varepsilon^j u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)]^{10}}{(\varepsilon^2+\varepsilon^3)^5(\varepsilon^{2j}u^2+\varepsilon^j u-1)^5},\\ &\text{гдѣ: } j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.\end{aligned}\right\} \quad (157)$$

Совершивъ надъ функціями (157) подстановку S, находимъ, что подъ вліяніемъ этой подстановки функціи

$$\zeta_\infty,\ \zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3,\ \zeta_4 \quad (158)$$

переходитъ въ:

$$\overline{\zeta_\infty}=\zeta_\infty,\ \overline{\zeta_0}=\zeta_1,\ \overline{\zeta_1}=\zeta_2,\ \overline{\zeta_2}=\zeta_3,\ \overline{\zeta_3}=\zeta_4,\ \overline{\zeta_4}=\zeta_0. \quad (159)$$

Слѣдовательно, основная субституція σ группы уравненія (155) такова:

$$\sigma=(\zeta_\infty)(\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3,\ \zeta_4). \quad (160)$$

9*

Для нахожденія второй основной субституціи τ группы уравненія (156) замѣтимъ прежде всего, что изъ символическаго соотношенія:

$$S\mathfrak{T}S\mathfrak{T}S\mathfrak{T} = 1 \tag{115}$$

слѣдуетъ, что:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}S\mathfrak{T} &= S^4\,\mathfrak{T}S^4, \\ \mathfrak{T}S^4\,\mathfrak{T} &= S\mathfrak{T}S. \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

Кромѣ того, непосредственнымъ вычисленіемъ находимъ, что:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}S^2\,\mathfrak{T} &= S^2U\mathfrak{T}S^2, \\ \mathfrak{T}S^3\,\mathfrak{T} &= S^3U\mathfrak{T}S^3. \end{aligned}\right\} \tag{162}$$

Помня, что подстановки S и U не мѣняютъ функцію ζ и пользуясь формулами (161) и (162), находимъ, что послѣ подстановки $\mathfrak{T}$ величины (158) переходятъ въ слѣдующія:

$$\bar{\bar{\zeta}}_\infty = \zeta_0, \quad \bar{\bar{\zeta}}_0 = \zeta_\infty, \quad \bar{\bar{\zeta}}_1 = \zeta_4, \quad \bar{\bar{\zeta}}_2 = \zeta_2, \quad \bar{\bar{\zeta}}_3 = \zeta_3, \quad \bar{\bar{\zeta}}_4 = \zeta_1. \tag{163}$$

Слѣдовательно, вторая основная субституція τ группы уравненія (155) такова:

$$\tau = (\zeta_\infty, \zeta_0)(\zeta_1, \zeta_4)(\zeta_2)(\zeta_3). \tag{164}$$

Обратимъ вниманіе на геометрическія представленія для двупирамидной подгруппы 10-го порядка.

Подстановки, которыя въ главѣ IX мы обозначили буквами:

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{l-1},$$

въ данномъ случаѣ суть:

$$\mathfrak{T}, \mathfrak{T}S, \mathfrak{T}S^2, \mathfrak{T}S^3, \mathfrak{T}S^4.$$

Отмѣтивъ на сѣти I четыреугольники, соотвѣтствующіе подстановкамъ:

$$1, \mathfrak{T}, \mathfrak{T}S, \mathfrak{T}S^2, \mathfrak{T}S^3, \mathfrak{T}S^4, \tag{165}$$

находимъ основную область двупирамидной подгруппы 10-го порядка, имѣющую видъ четыреугольника.

Примѣняя къ этому четыреугольнику подстановки разсматриваемой двупирамидной подгруппы 10-го порядка, мы получимъ сѣть, состоящую изъ 10 четыреугольниковъ и изображенную на черт. IV.

Обратимся къ раціональному преобразованію уравненія (155). Положимъ снова:

$$u = \frac{\eta_1}{\eta_2}. \tag{132}$$

Мы знаемъ, что

$$\eta_1 = u\sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}},\quad \eta_2 = \sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}}. \tag{133}$$

Перемноживъ эти величины, находимъ:

$$\eta_1\eta_2 = \frac{uT_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}. \tag{166}$$

Подставивъ въ эту формулу вмѣсто $T_u(u)$, $H_u(u)$, $f_u(u)$ выраженія этихъ первичныхъ функцій, соотвѣтствующія икосаэдрическому уравненію нормальнаго вида, находимъ:

$$\eta_1\eta_2 = \frac{u^{30}+522u^{25}-10005u^{20}-10005u^{10}-522u^5+1}{(u^{10}+11u^5-1)(u^{20}-228u^{15}+494u^{10}+228u^5+1)}z. \tag{167}$$

Эта функція подъ вліяніемъ икосаэдрической подстановки S совсѣмъ не мѣняется, а подъ вліяніемъ подстановки U мѣняетъ только свой знакъ. Слѣдовательно квадратъ функціи (167) есть функція аутоморфная по отношенію къ подстановкамъ разсматриваемой двупирамидной подгруппы 10-го порядка: она должна быть раціональной функціей отъ

$$\zeta = u^5 - \frac{1}{u^5}. \tag{154}$$

И дѣйствительно·

$$(\eta_1\,\eta_2)^2 = \frac{(\zeta^2+522\zeta-10004)^2(\zeta^2+4)}{(\zeta+11)^2(\zeta^2-228\zeta+496)^2}\,z^2. \tag{168}$$

Найдемъ уравненіе, которому удовлетворяетъ функція:

$$\xi = 5(\eta_1\,\eta_2)^2. \tag{169}$$

Для этого мы должны внести во вторую часть равенства (169) вмѣсто $(\eta_1\,\eta_2)^2$ выраженіе (168) и полученною подстановкою преобразовать уравненіе (155).

Тотъ же результатъ мы можемъ получить проще.

Подставивъ въ первыхъ двухъ формулахъ (134) вмѣсто $f_u(\eta_1, \eta_2)$ и $H_u(\eta_1, \eta_2)$ выраженія этихъ формъ, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\eta_1^{11}\eta_2+11\eta_1^6\eta_2^6-\eta_1\eta_2^{11}=12^3(1-z)^3z^4,\\ &\eta_1^{20}-228\,\eta_1^{15}\eta_2^5+494\,\eta_1^{10}\eta_2^{10}+228\,\eta_1^5\eta_2^{15}+\eta_2^{20}=\\ &=-12^6(1-z)^5z^7. \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

Присоединивъ къ уравненіямъ (170) уравненіе

$$\xi = 5(\eta_1\,\eta_2)^2, \tag{169}$$

мы легко можемъ изъ полученныхъ трехъ уравненій исключить η_1 и η_2.

Въ результатѣ находимъ:

$$\begin{aligned} \xi^6 - 10.12^3(1-z)^3z^4\,\xi^3 + 12^6(1-z)^5z^7\,\xi + \\ + 5.12^6(1-z)^6z^8 = 0. \end{aligned} \tag{171}$$

Положивъ:

$$\xi = 12(1-z)zhY, \tag{172}$$

гдѣ h—нѣкоторое постоянное, находимъ:

$$Y^6 - \frac{10}{h^3}zY^3 + \frac{12}{h^5}z^2Y + \frac{5}{h^6}z^2 = 0. \tag{173}$$

Группы уравненій (171) и (173) совершенно такія же, какъ и группа уравненія (155). Слѣдовательно основныя субституціи группы уравненія (173) таковы:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_\infty)(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4), \\ T &= (Y_\infty, Y_0)(Y_1, Y_4)(Y_2)(Y_3), \end{aligned}\right\} \tag{174}$$

гдѣ:

$$Y_\infty, Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \tag{175}$$

суть корни уравненія (173), соотвѣтствующіе корнямъ

$$\zeta_\infty, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4 \tag{158}$$

уравненія (155).

Остановимся нѣсколько подробнѣе на свойствахъ уравненія (171).

Пусть его корни суть:

$$\xi_\infty, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4. \tag{176}$$

Корень ξ_∞ выражается такъ:

$$\xi_\infty = 5(\eta_1 \eta_2)^2. \tag{169'}$$

Мы видѣли въ § 20, что бинарныя подстановки съ опредѣлителемъ $+1$, соотвѣтствующія икосаэдрическимъ неоднороднымъ линейнымъ подстановкамъ S и $\mathfrak{T}$, таковы:

$$\begin{pmatrix} \pm \varepsilon^3, & 0 \\ 0, & \pm \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \pm \dfrac{\varepsilon - \varepsilon^4}{\sqrt{5}}, & \mp \dfrac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{\sqrt{5}} \\ \mp \dfrac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{\sqrt{5}}, & \mp \dfrac{\varepsilon - \varepsilon^4}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}. \tag{177}$$

Таковы тѣ бинарныя линейныя преобразованія перемѣнныхъ η_1, η_2, которыя соотвѣтствуютъ линейнымъ подстановкамъ S и $\mathfrak{T}$ перемѣннаго u.

Имѣя эти выраженія, мы легко находимъ бинарныя подстановки надъ величинами η_1, η_2, соотвѣтствующія линейнымъ неоднороднымъ подстановкамъ:

$$\mathfrak{T},\ \mathfrak{T}S,\ \mathfrak{T}S^2,\ \mathfrak{T}S^3,\ \mathfrak{T}S^4$$

перемѣннаго u.

Примѣняя найденныя бинарныя линейныя преобразованія къ функціи, стоящей во второй части равенства (169′), мы находимъ выраженія всѣхъ корней уравннія (171) чрезъ η_1 и η_2:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_\infty = 5(\eta_1\eta_2)^2, \\ &\xi_j = (\varepsilon^j\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 - \varepsilon^{4j}\eta_2^2)^2, \\ &\text{гдѣ } j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}\right\} \tag{178}$$

Положивъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1\eta_2 &= A_0, \\ \eta_1^2 &= A_1, \\ \eta_2^2 &= -A_2, \end{aligned}\right\} \tag{179}$$

мы приведемъ формулы (178) къ такому виду:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_\infty = 5A_0^2, \\ &\xi_j = (A_0 + \varepsilon^j A_1 + \varepsilon^{4j} A_2)^2, \\ &\text{гдѣ } j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

Эти формулы показываютъ, что шесть корней уравненія (171) выражаются черезъ три вспомогательныя величины:

$$A_0,\ A_1,\ A_2.$$

Квадратные радикалы изъ корней уравненія (171) суть линейныя функціи этихъ трехъ вспомогательныхъ величинъ.

Между величинами

$$A_0,\ A_1,\ A_2$$

существуетъ зависимость:

$$A_0^2 + A_1 A_2 = 0. \tag{181}$$

Уравненія обладающія такими свойствами были впервые найдены Якоби *) въ его изслѣдованіяхъ по теоріи эллиптическихъ функцій и получили названіе уравненій Якоби (это названіе предложено Бріоски).

Итакъ уравненіе (171), а вмѣстѣ съ тѣмъ и (173) суть уравненія Якоби 6-ой степени.

Въ уравненіи Якоби 6-ой степени общаго вида величины

$$A_0,\ A_1,\ A_2$$

совершенно произвольны. Случай, когда онѣ связаны между собою соотношеніемъ:

$$A_0^2+A_1\ A_2=0 \tag{181}$$

самый простой, какъ мы увидимъ въ слѣдующей главѣ.

---

*) См. Jacobi Gesammelte Werke. Томъ 1 стр. 261.

Вообще Якобіевымъ уравненіемъ $n+1$-ой степени называется такое уравненіе, корни котораго выражаются черезъ $\frac{n+1}{2}$ вспомогательныхъ величинъ:

$$A_0,\ A_1,\dots\ A_{\frac{n-1}{2}}$$

слѣдующимъ образомъ:

$$\xi_\infty=(-1)^{\frac{n-1}{2}}nA_0^2,$$

$$\xi_j=[A_0+\varepsilon^j A_1+\varepsilon^{4j}A_2+\dots+\varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 j}A_{\frac{n-1}{2}}]^2,$$

гдѣ:

$$\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}},\ j=0,\ 1,\ 2,\dots\ n-1.$$

Величины

$$A_0,\ A_1,\dots\ A_{\frac{n-1}{2}},$$

въ уравненіи Якоби общаго вида совершенно произвольны.

Изложивъ свойства найденныхъ имъ уравненій въ мемуарѣ: „Suite des notices sur les fonctions elliptiques,“ Якоби совершенно справедливо говоритъ „cela donne le théoreme énoncé, un des plus importants dans la théorie algébrique de la transformation et de la division des fonctions elliptiques“.

Такой именно случай и представляютъ собою уравненія (171) и (173).

Обратимъ вниманіе на слѣдующую особенность величинъ A_0, A_1, A_2, опредѣляемыхъ формулами (179). Это суть раціональныя функціи перемѣннаго u, которыя подъ вліяніемъ икосаэдрическихъ линейныхъ подстановокъ испытываютъ тернарныя однородныя линейныя преобразованія.

Въ самомъ дѣлѣ, помня опредѣленія величины A_0, A_1, A_2, даваемыя формулами (179) и зная тѣ бинарныя преобразованія величинъ η_1, η_2, которыя соотвѣтствуютъ линейнымъ неоднороднымъ подстановкамъ S, $\mathfrak{T}$ и U икосаэдрической группы, мы находимъ, что подъ вліяніемъ подстановокъ S, $\mathfrak{T}$ и U велины A_0, A_1, A_2 преобразуются такъ:

Подъ вліяніемъ подстановки S:
$$\left\{\begin{aligned} \overline{A}_0 &= A_0, \\ \overline{A}_1 &= \varepsilon A_1, \\ \overline{A}_2 &= \varepsilon^4 A_2. \end{aligned}\right. \tag{182}$$

Подъ вліяніемъ подстановки $\mathfrak{T}$:
$$\left\{\begin{aligned} \overline{\overline{A}}_0 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(A_0 + A_1 + A_2), \\ \overline{\overline{A}}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\{2A_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)A_1 + (\varepsilon + \varepsilon^4)A_2\}, \\ \overline{\overline{A}}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\{2A_0 + (\varepsilon + \varepsilon^4)A_1 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)A_2\}, \end{aligned}\right. \tag{183}$$

Подъ вліяніемъ подстановки U:
$$\left\{\begin{aligned} A_0' &= -A_0, \\ A_1' &= -A_1, \\ A_2' &= -A_2. \end{aligned}\right. \tag{184}$$

Весьма не трудно убѣдиться въ томъ, что всякая цѣлая μ-я степень частнаго интеграла линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка, а также однородная форма μ-ой степени, имѣющая аргументами два частныхъ интеграла линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка, суть частные интегралы одного и того же линейнаго дифференціальнаго уравненія порядка $\mu+1$ *).

Величины

$$A_0,\ A_1,\ A_2$$

суть формы 2-го порядка съ аргументами η_1, η_2, какъ видно изъ формулъ (179). Слѣдовательно это суть частные интегралы нѣкотораго линейнаго дифференціальнаго уравненія 3-го порядка.

Отсюда становится понятнымъ, почему эти функціи при обходахъ на плоскости перемѣннаго z испытываютъ тернарныя линейныя преобразованія.

Корни уравненія Якоби суть квадраты линейныхъ однородныхъ формъ съ аргументами A_0, A_1, A_2; это суть однородныя формы 4 ой степени съ аргументами η_1, η_2. Отсюда слѣдуетъ, что корни уравненія Якоби суть частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 5 го порядка **).

§ 47. **Нѣкоторыя замѣчанія о группахъ уравненій, найденныхъ въ предыдущихъ параграфахъ.**

Въ предшествующихъ параграфахъ мы остановились подробно на группахъ пяти особенно интересныхъ для насъ уравненій: (50), (72), (87), (149), (173). Степени этихъ уравненій соотвѣтственно равны: 3, 4, 4, 5, 6. Что касается до уравненія 6-ой степени (173), то мы уже знаемъ, что это не есть уравненіе 6-ой степени общаго вида: оно принадлежитъ лишь къ довольно обширному классу уравненій Якоби. Слѣдовательно группа этого уравненія не есть симметрическая группа субституцій изъ 6 буквъ.

Посмотримъ, въ какомъ отношеніи находятся группы остальныхъ уравненій: (50), (72), (87), (149) къ симметрическимъ группамъ субституцій изъ соотвѣтствующаго имъ числа буквъ.

---

*) См. журналъ Ліувилля т. IV стр. 430.

**) Изслѣдованіе уравненія 6-ой степени общаго вида можно найти въ мемуарѣ Cole: A Contribution to the Theory of the general Equation of the Sixth Degree. Американскій журналъ т. VIII.

I.

Группа уравненія 3-ей степени (50), какъ мы видѣли, составлена изъ двухъ основныхъ субституцій:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_0,\ Y_1,\ Y_2), \\ T &= (Y_0)(Y_1,\ Y_2). \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Не трудно замѣтить, что всякая транспозиція *), перемѣщающая двѣ изъ числа трехъ буквъ:

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,$$

можетъ быть составлена изъ субституцій Σ и T:

$$\left.\begin{aligned} (Y_0,\ Y_1) &= \Sigma T, \\ (Y_0,\ Y_2) &= \Sigma^2 T, \\ (Y_1,\ Y_2) &= T. \end{aligned}\right\} \qquad (185)$$

Если транспозиція всякихъ двухъ корней уравненія входитъ въ группу этого уравненія, то группа уравненія—симметрическая.

Порядокъ симметрической группы кубичнаго уравненія равенъ

$$1.2.3=6.$$

Итакъ, дѣйствительно, уравненіе (50) имѣетъ симметрическую группу 6-го порядка.

II.

Уравненіе (72)—четвертой степени. Основныя субституціи его группы таковы:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_0)\,(Y_1,\ Y_2,\ Y_3), \\ T &= (Y_0,\ Y_1)(Y_2,\ Y_3). \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

*) Транспозиціею по общепринятому я называю субституцію, перемѣщающую только 2 буквы, напр. $(Y_0,\ Y_1)$.

Группа уравненія (72) изоморфна съ тетраэдрической группой. Слѣдовательно она 12-го порядка.

Порядокъ симметрической группы субституцій изъ 4 буквъ равенъ:

$$1.2.3.4 = 24.$$

Слѣдовательно, группа уравненія (72)—знакоперемѣнная. И дѣйствительно, не трудно убѣдиться въ томъ, что всякая четная субституція четырехъ буквъ можетъ быть составлена изъ субституцій Σ и T:

$$\left.\begin{aligned}
&(Y_0,\ Y_1,\ Y_2) = T\Sigma^2,\\
&(Y_0,\ Y_2,\ Y_1) = \Sigma T,\\
&(Y_0,\ Y_1,\ Y_3) = T\Sigma,\\
&(Y_0,\ Y_3,\ Y_1) = \Sigma^2 T,\\
&(Y_0,\ Y_2,\ Y_3) = \Sigma T\Sigma,\\
&(Y_0,\ Y_3,\ Y_2) = \Sigma^2 T\Sigma^2,\\
&(Y_1,\ Y_2,\ Y_3) = \Sigma,\\
&(Y_1,\ Y_3,\ Y_2) = \Sigma^2,\\
&(Y_0,\ Y_1)(Y_2,\ Y_3) = T,\\
&(Y_0,\ Y_2)(Y_1,\ Y_3) = \Sigma T\Sigma^2,\\
&(Y_0,\ Y_3)(Y_1,\ Y_2) = \Sigma^2 T\Sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{186}$$

III.

Уравненіе (87)—четвертой степени. Основныя субституціи его группы таковы:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma &= (Y_0)(Y_1,\ Y_2,\ Y_3),\\
T &= (Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3).
\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Такъ какъ группа уравненія (87) изоморфна съ октаэдрической группой, то порядокъ ея равенъ 24. Это—группа симметрическая.

Въ справедливости только что сказаннаго можно убѣдиться и непосредственно. Группа уравненія (87) содержитъ въ себѣ обѣ основныя подстановки (73) группы уравненія (72):

$$\left.\begin{aligned}\Sigma &= (Y_0)(Y_1,\ Y_2,\ Y_3),\\ \Sigma^2 T^2 \Sigma &= (Y_0,\ Y_1)(Y_2,\ Y_3).\end{aligned}\right\} \tag{187}$$

Отсюда слѣдуетъ, что группа уравненія (87) содержитъ въ себѣ знакоперемѣнную группу. Такъ какъ въ группу уравненія (87), кромѣ того, входитъ одна *нечетная* подстановка T, то она шире знакоперемѣнной группы. Если такъ, то группа уравненія (87)— симметрическая.

IV.

Группа уравненія (149) составлена изъ двухъ основныхъ субституцій:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma &= (Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4),\\ T &= (Y_0)(Y_1,\ Y_2)(Y_3,\ Y_4).\end{aligned}\right\} \tag{152}$$

Составляя уравненіе (149), мы оставили не выясненнымъ вопросъ о томъ, будетъ-ли тетраэдрическая подгруппа соотвѣтствующая уравненію (149), неособою частью икосаэдрическаго уравненія, или нѣтъ.

Если тетраэдрическая группа—неособая часть икосаэдрической группы, то группа уравненія (149) изоморфна съ икосаэдрической группой; порядокъ ея равенъ 60. Если тетраэдрическая группа есть особая или полуособая часть икосаэдрической группы, то порядокъ ея долженъ быть ниже 60. Во всякомъ случаѣ она не есть симметрическая группа, потому что порядокъ симметрической группы субституцій изъ 5 буквъ равенъ:

$$1.2.3.4.5=120.$$

Изъ высшей алгебры извѣстно, что въ составъ симметрической группы субституцій изъ 5 буквъ входятъ:

1) знакоперемѣнная группа порядка 60,

2) метациклическая группа порядка 20,

3) полуметациклическая группа порядка 10,

4) циклическія группы.

Всѣ субституціи знакоперемѣнной группы могутъ быть составлены изъ слѣдующихъ трехъ субституцій:

$$(Y_0,\ Y_1,\ Y_2),\ (Y_0,\ Y_1,\ Y_3),\ (Y_0,\ Y_1,\ Y_4)\ ^{*}). \qquad (188)$$

Не трудно видѣть, что каждая изъ этихъ трехъ субституцій можетъ быть составлена изъ Σ и T:

$$\left.\begin{aligned}(Y_0,\ Y_1,\ Y_2) &= \Sigma^3 T \Sigma^2 T \Sigma,\\ (Y_0,\ Y_1,\ Y_3) &= \Sigma T,\\ (Y_0,\ Y_1,\ Y_4) &= \Sigma^2 T \Sigma^2 T \Sigma^2.\end{aligned}\right\} \qquad (188)$$

Итакъ, группа уравненія (149) содержитъ въ себѣ знакоперемѣнную группу субституцій изъ 5 буквъ порядка 60. Такъ какъ порядокъ группы уравненія (149) не выше 60, то группа *уравненія (149) есть группа знакоперемѣнная.*

Слѣдовательно группа уравненія (149) изоморфна съ икосаэдрической группой. Тетраэдрическая подгруппа есть *неособая часть* икосаэдрической.

Изъ высшей алгебры извѣстно, что уравненіе 5-ой степени, группа котораго — знакоперемѣнная, не разрѣшимо въ радикалахъ.

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (149), а вмѣстѣ съ тѣмъ и уравненіе (111), изъ котораго (149) получается раціональнымъ преобразованіемъ (129),—не разрѣшимы въ радикалахъ.

Мы говорили объ уравненіи (111) въ § 32 и упомянули о томъ, что оно не разрѣшимо въ радикалахъ. Теперь это предложеніе доказано. Изъ него слѣдуетъ, какъ мы видѣли въ

---

*) См. Селивановъ. Объ уравненіяхъ пятой степени съ цѣлыми коэффиціентами стр. 79. СПБ. 1889 г.

§ 32, что икосаэдрическое уравненіе тоже не разрѣшимо въ радикалахъ.

Сдѣлаемъ короткій обзоръ результатовъ, найденныхъ въ настоящей главѣ.

Мы нашли 5 типовъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ:

1) кубичное уравненіе съ симметрической группой,

2) уравненіе 4-ой степени съ знакоперемѣнной группой,

3) уравненіе 4-ой степени съ симметрической группой,

4) уравненіе 5-ой степени съ знакоперемѣнной группой,

5) уравненіе 6-ой степени, принадлежащее къ числу уравненій Якоби.

Всѣ безъ исключенія остальныя уравненія, разрѣшимыя въ гипергеометрическихъ функціяхъ, могутъ быть приведены къ одному изъ уравненій только что перечисленныхъ видовъ раціональнымъ или ирраціональнымъ преобразованіемъ.

Рѣшеніе вопроса о томъ, можетъ ли данное уравненіе какой либо степени быть приведено къ одному изъ этихъ четырехъ типовъ есть вопросъ во многихъ случаяхъ довольно трудный, но онъ относится уже къ области вопросовъ, рѣшаемыхъ чисто алгебраическими пріемами.

Для довершенія задачи нашей настоящей работы намъ остается разсмотрѣть, какъ приводятся уравненія общаго вида 3-ей, 4-ой, 5-ой степени и уравненіе Якоби 6-ой степени къ виду уравненій (50), (72), (87), (149), (173).

Рѣшеніе этого вопроса составитъ задачу слѣдующей XI главы нашей работы.

ГЛАВА XI.

Рѣшеніе уравненій 3-ей, 4-ой, 5-ой степени и уравненія Якоби 6-ой степени.

§ 48. **Геометрическія представленія, связанныя съ алгебраическими уравненіями.**

Пусть дано *неприводимое* алгебраическое уравненіе n-ой степени въ общемъ видѣ.

Посредствомъ извѣстнаго линейнаго преобразованія мы обратимъ въ нуль коэффиціентъ при n—1-ой степени неизвѣстнаго и приведемъ уравненіе къ такому виду:

$$y^n + a_2 y^{n-2} + a_3 y^{n-3} + \ldots + a_{n-1} y + a_n = 0. \tag{1}$$

Корни этого уравненія суть функціи отъ n—2, вообще говоря, независимыхъ между собою параметровъ:

$$a_2,\ a_3, \ldots\ a_{n-1},\ a_n. \tag{2}$$

Пусть корни уравненія (1) суть:

$$y_0,\ y_1, \ldots\ y_{n-1}. \tag{3}$$

Они связаны между собою соотношеніемъ:

$$\Sigma y_i = 0, \tag{4}$$

вслѣдствіе котораго одна изъ величинъ (3) есть линейная функція остальныхъ.

Будемъ, слѣдуя Клейну, разсматривать величины:

$$y_0,\ y_1, \ldots\ y_{n-1}. \tag{3}$$

какъ систему n однородныхъ координатъ точки въ пространствѣ $n-2$-хъ измѣреній, при чемъ эти координаты связаны между собою линейнымъ соотношеніемъ (4) *).

Назовемъ точку, опредѣляемую координатами (3) буквою A.

Пусть группа уравненія (1) есть группа Γ порядка N.

Примѣнивъ одну изъ субституцій группы Γ къ ряду количествъ (3), мы получимъ рядъ количествъ:

$$\bar{y}_0,\ \bar{y}_1, \ldots\ \bar{y}_{n-1}, \tag{5}$$

отличающихся отъ количествъ (3) только порядкомъ.

Взятой нами субституціи группы Γ соотвѣтствуетъ нѣкоторая коллинеація точекъ пространства:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_0 = y_h, \\ \bar{y}_1 = y_k, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \bar{y}_{n-1} = y_t. \end{array}\right\} \tag{6}$$

---

*) Введеніе лишнихъ координатъ, связанныхъ съ остальными посредствомъ линейныхъ соотношеній, предложено Bobillier. См. P. Serret Géométrie de direction.

Намъ придется болѣе всего имѣть дѣло съ системою *пяти* однородныхъ (пентаэдрическихъ) координатъ въ пространствѣ *трехъ* измѣреній Этотъ случай соотвѣтствуетъ значенію

$$n=5,$$

т. е. онъ соотвѣтствуетъ уравненію 5-ой степени.

При

$$n=4$$

намъ придется имѣть дѣло съ системою четырехъ однородныхъ координатъ на плоскости.

При

$$n=3$$

мы будемъ имѣть дѣло съ геометріею на прямой, при чемъ точка опредѣляется тремя однородными координатами.

Со случаями, когда

$$n>5,$$

т. е. съ пространствами 4, 5... измѣреній намъ не придется вовсе имѣть дѣла. Поэтому разсужденія, приведенныя въ текстѣ имѣютъ вполнѣ реальный смыслъ.

Количества (5) служитъ координатами нѣкоторой точки A', отличной отъ A.

Каждой субституціи группы Γ соотвѣтствуетъ нѣкоторое перемѣщеніе величинъ (3) и нѣкоторая точка, координатами которой служатъ эти величины.

Совокупности N субституцій группы Γ соотвѣтствуетъ совокупность N точекъ:

$$A,\ A',\ A'',\ldots\ A^{(N-1)}. \tag{7}$$

Корни уравненія (1) вполнѣ опредѣляются значеніями n—2 параметровъ (2). Поэтому данной системѣ значеній параметровъ (2) соотвѣтствуетъ опредѣленная совокупность N точекъ (7) въ пространствѣ n—2 измѣреній, и всѣ эти N точекъ, вообще говоря, различны между собою.

Станемъ теперь непрерывно измѣнять значенія параметровъ (2).

Пусть параметры (2), непрерывно мѣняясь, прошли черезъ всевозможныя значенія дѣйствительныя и мнимыя. Точки (7) описали нѣкоторую вполнѣ опредѣленную форму въ пространствѣ n—2 измѣреній.

Посмотримъ, что это за форма?

Прежде всего замѣтимъ, что величина одного изъ параметровъ (2)—для опредѣленности будемъ полагать: величина параметра a_n—не вліяетъ на положеніе точекъ (7). Въ самомъ дѣлѣ, величины (3) суть *однородныя* координаты точки A. Положеніе точки A опредѣляется только ихъ отношеніями; величина же коэффиціента a_n опредѣляетъ только множитель пропорціональности, сопровождающій однородныя координаты. Если мы измѣнимъ этотъ множитель пропорціональности, положивъ

$$y=\sqrt[n]{a_n}\,y', \tag{8}$$

и преобразуемъ уравненіе (1) линейною подстановкою (8), то мы достигнемъ того, что извѣстный членъ уравненія станетъ равнымъ единицѣ.

Вслѣдствіе только что сказаннаго мы будемъ считать коэффиціентъ a_n постояннымъ и будемъ говорить только объ измѣненіи параметровъ:

$$a_2,\ a_3, \ldots\ a_{n-1}. \tag{9}$$

Каждому измѣненію величинъ параметровъ (9) соотвѣтствуетъ нѣкоторое передвиженіе точекъ (7).

I. Пусть параметры (9) *независимы* между собою. Когда они, непрерывно мѣняясь, пройдутъ черезъ всевозможныя значенія какъ дѣйствительныя такъ и мнимыя, то точки (7), двигаясь непрерывно, опишутъ *все* пространство $n-2$ измѣреній. Въ самомъ дѣлѣ, каковы бы ни были отношенія количествъ (3) между собою,—всегда найдется соотвѣтствующая имъ система значеній параметровъ (9). Слѣдовательно *при независимыхъ между собою параметрахъ* (9) *геометрическая форма, соотвѣтствующая уравненію* (1)—*есть все пространство $n-2$ измѣреній.*

II. Пусть параметры (9) связаны между собою *однимъ* соотношеніемъ: напр. пусть

$$a_2 = 0.$$

Понятно, что въ такомъ случаѣ между координатами (3) точки A будетъ существовать кромѣ (4) еще *одно* соотношеніе. При всевозможныхъ измѣненіяхъ параметровъ (9), точки (7) опишутъ:

1) при $n=5$ поверхность въ пространствѣ 3-хъ измѣреній,

2) при $n=4$ линію на плоскости,

3) при $n=3$ систему N постоянныхъ точекъ на прямой.

Таковы геометрическія формы, соотвѣтствующія уравненію (1) въ томъ случаѣ, когда параметры (9) связаны между собою *однимъ* условіемъ.

III. Пусть параметры (9) связаны между собою двумя условіями: напр.

$$a_2 = 0,\ a_3 = 0.$$

Въ такомъ случаѣ координаты (3) точки A связаны между собою кромѣ (4) еще двумя уравненіями.

При всевозможныхъ измѣненіяхъ величинъ параметровъ (9), точки (7) опишутъ:

1) при $n=5$ кривую въ пространствѣ трехъ измѣреній,

2) при $n=4$ систему N постоянныхъ точекъ на плоскости.

(При $n=3$ разсматриваемый случай совсѣмъ встрѣтиться не можетъ).

Таковы геометрическія формы, соотвѣтствующія уравненію (1) въ томъ случаѣ, когда параметры (9) связаны между собою двумя условіями.

Мы будемъ называть разсмотрѣнныя нами геометрическія формы *изображеніями* (Bilder—по Клейну) соотвѣтствующихъ уравненій (1). Будемъ говорить, что уравненіе (1) *изображается* соотвѣтствующею ему геометрическою формою.

§ 49. Геометрическія изображенія для уравненій 5-ой степени.

I.

Пусть въ уравненіи 5-ой степени коэффиціентъ a_2 равенъ нулю:

$$a_2 = 0.$$

Уравненіе принимаетъ такой видъ:

$$y^5+a_3\, y^2+a_4\, y+a_5=0. \tag{10}$$

Корни уравненія (10) удовлетворяютъ двумъ соотношеніямъ:

$$\Sigma y_i = 0, \tag{4}$$

и

$$\Sigma y_i^2 = 0, \tag{11}$$

или:

$$y_0+y_1+y_2+y_3+y_4=0, \tag{12}$$

$$y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=0. \tag{13}$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій y_4, находимъ:

$$y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_0y_1+y_0y_2+y_0y_3+y_1y_2+ \\ +y_1y_3+y_2y_3=0. \tag{14}$$

Это уравненіе изображаетъ нѣкоторую поверхность 2-го порядка. Слѣдуя Клейну, мы назовемъ ее *главною поверхностью* (Hauptfläche). Она служитъ изображеніемъ уравненія (10), которое мы назвали въ главѣ X *главнымъ* уравненіемъ 5-ой степени.

При всевозможныхъ измѣненіяхъ коэффиціентовъ главнаго уравненія (10) корни его служатъ координатами точекъ, лежащихъ на главной поверхности (14).

II.

Пусть въ уравненіи 5-ой степени коэффиціентъ a_3 равенъ нулю:

$$a_3 = 0.$$

Уравненіе принимаетъ такой видъ:

$$y^5 + a_2 y^3 + a_4 y + a_5 = 0. \tag{15}$$

Между корнями его существуетъ двѣ зависимости:

$$\Sigma y_i = 0, \tag{4}$$

и

$$\Sigma y_i^3 = 0, \tag{16}$$

или:

$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0, \tag{12}$$

$$y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3 = 0. \tag{17}$$

Исключивъ y_4 изъ уравненій (12) и (17), находимъ:

$$y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - (y_0 + y_1 + y_2 + y_3)^3 = 0. \tag{18}$$

Эта поверхность 3-го порядка обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что на ней лежитъ каждая изъ діагоналей полнаго пятигранника, образованнаго пятью плоскостями координатъ. Вслѣдствіе этого Клебшъ назвалъ поверхность 3-го порядка, изображаемую уравненіемъ (17) *діагональною поверхностью* (Diagonalfläche).

Итакъ, изображеніемъ уравненія (15) служитъ діагональная поверхность (18).

Слѣдуя Клейну, мы назовемъ уравненіе (15) *діагональнымъ уравненіемъ.*

III.

Пусть въ уравненіи 5-ой степени коэффиціенты a_2 и a_3 равны нулю:

$$a_2 = a_3 = 0.$$

Уравненіе принимаетъ такой видъ:

$$y^5 + a_4 y + a_5 = 0. \tag{19}$$

Это—уравненіе въ формѣ Жеррарда *).

Изображеніе его есть, понятно, та кривая 6-го порядка, которая служитъ линіей пересѣченія поверхностей: главной и діагональной.

Уравненіе Жеррарда—простѣйшее изъ уравненій 5-ой степени. Корни его суть функціи одного параметра.

Остановимся на свойствахъ главной поверхности:

$$y_0{}^2 + y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 + y_4{}^2 = 0. \tag{13}$$

Каждая точка поверхности 2-го порядка вполнѣ опредѣляется двумя прямолинейными образующими, черезъ нее проходящими. Когда дана поверхность втораго порядка, то всякая прямолинейная образующая ея опредѣлена величиною одного параметра.

Представимъ уравненіе

$$y_0{}^2 + y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 + y_4{}^2 = 0, \tag{13}$$

въ такомъ видѣ:

$$f_1 f_2 + f_3 f_4 = 0, \tag{20}$$

гдѣ f_1, f_2, f_3, f_4 суть цѣлые линейные многочлены съ перемѣнными:

---

*) Клейнъ называетъ его уравненіемъ Бринга по причинѣ, которую онъ указываетъ на стр. 143 Vorlesungen über das Ikosaeder.

$$y_0, \; y_1, \; y_2, \; y_3, \; y_4. \tag{21}$$

Достичь такого разложенія квадратнаго многочлена можно безконечнымъ числомъ способовъ. Какъ это сдѣлать всего проще въ нашемъ случаѣ—мы увидимъ ниже.

Представимъ уравненіе (20) въ такомъ видѣ:

$$-\frac{f_1}{f_3}=\frac{f_4}{f_2},$$

и положимъ:

$$-\frac{f_1}{f_3}=\frac{f_4}{f_2}=u, \tag{22}$$

гдѣ u—нѣкоторое постоянное число.

Уравненія одной изъ прямолинейныхъ образующихъ поверхности (20) представятся въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} f_1+uf_3&=0,\\ f_4-uf_2&=0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Представивъ уравненія (20) въ такомъ видѣ:

$$-\frac{f_1}{f_4}=\frac{f_3}{f_2}$$

и положивъ:

$$-\frac{f_1}{f_4}=\frac{f_3}{f_2}=v, \tag{24}$$

мы представимъ уравненія одной изъ прямолинейныхъ образующихъ второй системы въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} f_1+vf_4&=0,\\ f_3-vf_2&=0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Если даны значенія параметровъ u и v, то изъ уравненій: (12), (23) и (25), мы можемъ опредѣлить значенія всѣхъ пяти корней уравненія (10):

$$y_0, \; y_1, \; y_2, \; y_3, \; y_4. \tag{21}$$

При этомъ намъ придется только рѣшить систему пяти уравненій 1-ой степени съ пятью неизвѣстными.

Не трудно усмотрѣть, что линейныя функціи f_1, f_2, f_3, f_4 могутъ быть выбраны слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} &f_1 = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4, \\ &f_2 = y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4, \\ &f_3 = y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4, \\ &f_4 = y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4, \\ &\text{гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Дѣйствительно, подставивъ выраженія (26) въ формулу:

$$f_1 f_2 + f_3 f_4, \tag{27}$$

находимъ:

$$f_1 f_2 + f_3 f_4 = 2\Sigma y_i^2 - \Sigma y_i y_j, \tag{28}$$

гдѣ индексы i и j пріобрѣтаютъ значенія: 0, 1, 2, 3, 4 и при томъ такъ, что i и j во второй суммѣ имѣютъ непремѣнно значенія различныя между собою.

Изъ равенства:

$$\Sigma y_i = 0 \tag{4}$$

слѣдуетъ:

$$\Sigma y_i^2 + 2\Sigma y_i y_j = 0. \tag{29}$$

Поэтому

$$f_1 f_2 + f_3 f_4 = \frac{5}{2}\Sigma y_i^2 = \frac{5}{2}(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2). \tag{30}$$

Слѣдовательно уравненіе главной поверхности можетъ быть представлено въ видѣ:

$$f_1 f_2 + f_3 f_4 = 0, \tag{20}$$

гдѣ f_1, f_2, f_3, f_4 имѣютъ значенія, даваемыя формулами (26).

Соображая только что сказанное, мы приходимъ къ заключенію, что точки главной поверхности, а слѣдовательно и корни уравненія:

$$y^5+a_3\,y^2+a_4\,y+a_5=0 \tag{10}$$

вполнѣ опредѣляются значеніями двухъ параметровъ u и v, опредѣляемыхъ формулами:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\varepsilon^3 y_3+\varepsilon^4 y_4}{y_0+\varepsilon^2 y_1+\varepsilon^4 y_2+\varepsilon y_3+\varepsilon^3 y_4}= \\ &= \frac{y_0+\varepsilon^3 y_1+\varepsilon y_2+\varepsilon^4 y_3+\varepsilon^2 y_4}{y_0+\varepsilon^4 y_1+\varepsilon^3 y_2+\varepsilon^2 y_3+\varepsilon y_4}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= -\frac{y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\varepsilon^3 y_3+\varepsilon^4 y_4}{y_0+\varepsilon^3 y_1+\varepsilon y_2+\varepsilon^4 y_3+\varepsilon^2 y_4}= \\ &= \frac{y_0+\varepsilon^2 y_1+\varepsilon^4 y_2+\varepsilon y_3+\varepsilon^3 y_4}{y_0+\varepsilon^4 y_1+\varepsilon^3 y_2+\varepsilon^2 y_3+\varepsilon y_4}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Это еще разъ подтверждаетъ сказанное выше: корни уравненія (10) суть функціи *двухъ* независимыхъ между собою параметровъ. За такіе параметры можно принять u и v, входящіе совершенно симметрично.

Посмотримъ, каковы измѣненія количествъ u и v, соотвѣтствующія всевозможнымъ субституціямъ надъ корнями:

$$y_0,\; y_1,\; y_2,\; y_3,\; y_4 \tag{21}$$

уравненія (10).

Совершивъ надъ пятью количествами (21) всѣ 120 субституцій симметрической группы, мы получимъ 120 перемѣщеній этихъ количествъ. Каждому изъ этихъ перемѣщеній соотвѣтствуетъ одна опредѣленная точка на главной поверхности. Черезъ каждую точку поверхности проходятъ двѣ образующія: 1-ой и 2-ой системы. Каждой субституціи надъ количествами (21) соотвѣтствуетъ своя коллинеація точекъ пространства, перемѣщающая между собою полученныя 120 точекъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и проходящія чрезъ нихъ образующія. При этомъ можетъ случиться одно изъ двухъ: образующая каждой системы преобразуется въ образующую той же системы, или же образующая каждой системы преобразуется въ образующую другой системы.

Пусть нѣкоторая субституція σ измѣняетъ образующую, опредѣляемую параметромъ u въ образущую той же самой системы, опредѣляемую параметромъ $\bar{u}$. Параметры u и $\bar{u}$ связаны между собою аналитически и при томъ такъ, что каждый изъ нихъ есть однозначная функція другаго. Это значитъ, что они связаны между собою линейно:

$$\bar{u} = S(u),$$

гдѣ S есть символъ нѣкоторой линейной подстановки.

Пусть нѣкоторая субституція σ' замѣняетъ образующую, опредѣляемую параметромъ u, другою образующею, опредѣляемою параметромъ $\bar{v}$. Совершенно тѣми же разсужденіями, какія приведены выше, мы убѣдимся въ томъ, что $\bar{v}$ есть линейная функція u:

$$\bar{v} = S'(u).$$

Совокупность субституцій, замѣняющихъ каждую образующую новою образующею той же самой системы, необходимо, должна составить группу. Обозначимъ эту группу буквою Γ.

Посмотримъ, что это за группа.

Если всякая субституція симметрической группы входитъ въ Γ, то Γ есть симметрическая группа субституцій изъ пяти буквъ порядка 120.

Если Γ не есть симметрическая группа, то должна существовать хотя бы одна субституція σ', замѣняющая образующую одной системы новою образующею другой системы. Въ такомъ случаѣ, обозначая буквою σ какую либо изъ субституцій группы Γ, мы замѣтимъ, что

$$\sigma' \sigma \sigma'^{-1}$$

есть субституція группы Γ.

Если такъ, то Γ есть особая часть симметрической группы

Такъ какъ симметрическая группа 120-го порядка имѣетъ единственную особую часть: знакоперемѣнную группу 60-го порядка, то мы приходимъ къ заключенію, что группа Γ есть или:

1) симметрическая группа порядка 120,

или:

2) знакоперемѣнная группа порядка 60.

Мы видѣли, что каждой субституціи σ группы Γ соотвѣтствуетъ линейная неоднородная подстановка:

$$\bar{u} = S(u)$$

величины u.

Если порядокъ группы Γ равенъ 120, что величина u имѣетъ 120 значеній, связанныхъ между собою группою 120-го порядка линейныхъ неоднородныхъ подстановокъ. Въ главѣ IV мы видѣли, что такой группы неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ не существуетъ. Самый высокій порядокъ группы неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ равенъ 60, и въ такомъ случаѣ эта группа—икосаэдрическаго типа.

Итакъ, группа Γ—знакоперемѣнная порядка 60 и изоморфна съ икосаэдрической группой.

Совокупность субституцій, замѣняющихъ каждую образующую другой образующей той же самой системы, есть знакоперемѣнная группа Γ порядка 60.

Подъ вліяніемъ этихъ субституцій параметръ u пріобрѣтаетъ 60 значеній, связанныхъ между собою линейными неоднородными подстановками икосаэдрической группы.

Возьмемъ функцію (31). Примѣнивъ къ ней 60 подстановокъ знакоперемѣнной группы, мы получимъ 60 величинъ

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots\ u_{59}, \tag{33}$$

связанныхъ между собою линейными подстановками икосаэдрической группы.

Произведеніе

$$\prod_{i=0}^{i=59}(u - u_i) \tag{34}$$

есть многочленъ цѣлый относительно u и имѣющій коэффиціентами знакоперемѣнныя функціи количествъ (21).

Такъ какъ всякая знакоперемѣнная функція корней уравненія (10) есть раціональная функція его коэффиціентовъ и квадратнаго корня изъ его дискриминанта Δ, то мы въ правѣ представить функцію (34) въ такомъ видѣ:

$$\prod_{i=0}^{i=59}(u - u_i) = \Phi(u,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \sqrt{\Delta}). \tag{35}$$

Уравненіе, опредѣляющее величину u будетъ таково:

$$\Phi(u, a_3, a_4, a_5, \sqrt{\Delta}) = 0. \tag{36}$$

Это уравненіе—60-ой степени; оно не мѣняется отъ преобразованія посредствомъ линейныхъ подстановокъ нѣкоторой икосаэдрической группы. Если такъ, то на основаніи извѣстнаго намъ объ икосаэдрическомъ уравненіи мы можемъ утверждать, что уравненіе (36) приводится къ виду:

$$\frac{H_u{}^3(u)}{-12^3 f_u{}^5(u)} = A + B\sqrt{\Delta}, \tag{37}$$

гдѣ $f_u(u)$ есть первичная функція икосаэдрическаго типа, $H_u(u)$ ея гессіанъ, A и B—раціональныя функціи коэффиціентовъ

$$a_3,\ a_4,\ a_5$$

уравненія (10).

Остается разсмотрѣть слѣдующіе два вопроса:

1) Будетъ ли уравненіе (37) *нормальнымъ* икосаэдрическимъ уравненіемъ?

2) Какъ выражаются величины A и B черезъ коэффиціенты уравненія (10)?

Уравненіе (10) есть резольвента 5-ой степени икосаэдрическаго уравненія (37). Въ главѣ X мы видѣли, что въ такомъ случаѣ группы обоихъ уравненій изоморфны между собою.

Основныя субституціи σ и τ группы уравненія (10) соотвѣтствуютъ основнымъ субституціямъ S и $\mathfrak{T}$ икосаэдрической группы и выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= (y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4), \\ \tau &= (y_0)\ (y_1,\ y_2)\ (y_3,\ y_4). \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Для нахожденія основныхъ подстановокъ S и $\mathfrak{T}$ группы уравненія (37), мы возьмемъ корень u этого уравненія, выражаемый формулою (31), и посмотримъ, какія измѣненія вызываютъ въ немъ субституціи σ и τ.

Послѣ подстановки σ онъ переходитъ въ $\bar{u}$, при чемъ:

$$\bar{u} = \varepsilon u. \tag{39}$$

Слѣдовательно основная подстановка S группы уравненія (37) такова:

$$S(u) = \varepsilon u. \tag{40}$$

Такое же вычисленіе подстановки $\mathfrak{T}$ оказалось бы довольно сложнымъ *). Его мы можемъ значительно сократить, пользуясь слѣдующими соображеніями.

Разсмотримъ сначала частный видъ уравненія (10).

Положимъ:

$$y_0 = 0,\ y_1 = -y_2 = 1,\ y_3 = -y_4 = \pm i. \tag{41}$$

Уравненіе (10) будетъ таково:

$$y^5 - y = 0. \tag{42}$$

Изъ формулы (31) слѣдуетъ:

---

*) Оно потребовало бы, между прочимъ, исключенія двухъ корней, напр. y_3 и y_4 изъ формулы (31) при посредствѣ условій:

$$\Sigma y_i = 0,\ \Sigma y_i^2 = 0.$$

$$u = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon^2) \pm i(\varepsilon^3 - \varepsilon^4)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^4) \pm i(\varepsilon - \varepsilon^3)}, \tag{43}$$

откуда:

$$u = (\varepsilon^2 + \varepsilon^3) \mp i(\varepsilon - \varepsilon^4) = 2\cos\frac{4\pi}{5} \pm 2\sin\frac{2\pi}{5}. \tag{44}$$

Выполнивъ субституцію:

$$\tau = (y_0)(y_1, y_2)(y_3, y_4)$$

надъ величинами (41) и вставивъ ихъ затѣмъ въ формулу (31), мы замѣтимъ, что величина u не измѣнилась. Слѣдовательно, искомая подстановка $\mathfrak{T}$ не мѣняетъ величину:

$$u = 2\left(\cos\frac{4\pi}{5} \pm \sin\frac{2\pi}{5}\right), \tag{44'}$$

и это справедливо независимо отъ того, который изъ двухъ знаковъ мы возьмемъ передъ вторымъ членомъ формулы (44′).

Отсюда мы выводимъ такое заключеніе: тѣ двѣ точки плоскости комплекснаго перемѣннаго u, которыя не мѣняются искомою подстановкою $\mathfrak{T}$, суть слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2\left(\cos\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5}\right), \\ b &= 2\left(\cos\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\right). \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Зная, что подстановка $\mathfrak{T}$—втораго порядка, и имѣя тѣ двѣ точки a и b, которыя ею не мѣняются, легко найти эту подстановку.

Пусть:

$$\mathfrak{T}(u) = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}. \tag{46}$$

Обратная ей подстановка:

$$\mathfrak{T}^{-1}(u) = \frac{\delta u - \beta}{\alpha - \gamma u} \tag{47}$$

должна быть тождественна съ нею. Отсюда слѣдуетъ, что:

$$\delta = -\alpha. \tag{48}$$

Положивъ:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = k, \quad \frac{\beta}{\gamma} = l, \tag{49}$$

находимъ:

$$\mathfrak{T}(u) = \frac{ku + l}{u - k}. \tag{50}$$

Двойныя точки этой подстановки служатъ корнями квадратнаго уравненія:

$$u^2 - 2ku - l = 0. \tag{51}$$

Зная, что корни этого уравненія выражаются формулами (45), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} k &= 2\cos\frac{4\pi}{5} = \varepsilon^2 + \varepsilon^3, \\ l &= -4\left(\cos^2\frac{4\pi}{5} - \sin^2\frac{2\pi}{5}\right) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Искомая подстановка $\mathfrak{T}$ такова:

$$\mathfrak{T}(u) = \frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)u + 1}{u - (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)}. \tag{53}$$

Основныя подстановки S и $\mathfrak{T}$ группы уравненія (37) выражаются формулами (40) и (53):

$$S(u) = \varepsilon u, \tag{40}$$

$$\mathfrak{T}(u) = \frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)u + 1}{u - (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)}. \tag{53}$$

Эти формулы тождественны съ формулами (56) главы IV.

Поэтому мы въ правѣ сказать, что S и $\mathfrak{T}$ суть основныя подстановки *нормальной* икосаэдрической группы. Слѣдовательно какъ группа уравненія (37), такъ и само это уравненіе представлены въ нормальномъ видѣ. Для нахожденія величины параметра u прямолинейной образующей главной поверхности, необходимо рѣшить нормальное икосаэдрическое уравненіе (37).

Такъ какъ величина u, опредѣляемая формулою (31), подъ вліяніемъ субституцій знакоперемѣнной группы пріобрѣтаетъ полное число значеній (т. е. 60 значеній), то всѣ корни уравненія (10) суть раціональныя функціи величины u.

Какъ выражаются коэффиціенты A и B уравненія (37) черезъ коэффиціенты a_3, a_4, a_5 уравненія (10)—мы увидимъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 50. **Рѣшеніе главнаго уравненія 5-ой степени.**

Въ § 49 мы пришли къ заключенію, что для рѣшенія главнаго уравненія 5-ой степени:

$$y^5+a_3y^2+a_4y+a_5=0 \tag{10}$$

достаточно рѣшить икосаэдрическое уравненіе нормальнаго вида:

$$\frac{H^3(u)}{-12^3f^5(u)}=A+B\sqrt{\Delta}\,. \tag{37}$$

Займемся подробностями этихъ вычисленій.

Для простоты формулъ представимъ уравненіе (10) въ такомъ видѣ:

$$y^5+5\alpha y^2+5\beta y+\gamma=0, \tag{54}$$

при чемъ:

$$\alpha=\frac{a_3}{5},\ \beta=\frac{a_4}{5},\ \gamma=a_5.$$

Дискриминантъ уравненія (54) таковъ:

$$\Delta=108\alpha^5\gamma-135\alpha^4\beta^2+90\alpha^2\beta\gamma^2-320\alpha\beta^3\gamma+256\beta^5+\gamma^4 \text{ *)}. \tag{55}$$

*) См. Faà de Bruno Théorie des formes binaires. Таблица IV².

Уравненіе (54) есть одна изъ резольвентъ 5-ой степени икосаэдрическаго уравненія (37), или, что то же, уравненія:

$$\frac{H_u^3(u)}{-12^3 f_u^5(u)} = z, \tag{37'}$$

гдѣ:

$$z = A + B\sqrt{\Delta}. \tag{56}$$

Мы видѣли въ § 46, что резольвента 5-ой степени уравненія (37′) въ самомъ общемъ видѣ содержитъ въ себѣ кромѣ перемѣннаго z еще два произвольныхъ параметра. Эта резольвента можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{gathered} zY^5 + 5\left(8h^3 + 12h^2k + \frac{6hk^2 + k^3}{1-z}\right)Y^2 + \\ + 15\left(-4h^4 + \frac{6h^2k^2 + 4hk^3}{1-z} + \frac{3k^4}{4(1-z)^2}\right)Y + \\ + 3\left(48h^5 - \frac{40h^3k^2}{1-z} + \frac{15hk^4 + 4k^5}{(1-z)^2}\right) = 0. \end{gathered} \tag{57}$$

Уравненіе (54) есть одна изъ главныхъ резольвентъ 5-ой степени икосаэдрическаго уравненія (55). Она заключается въ общей формулѣ (57) и сдѣлается тождественною съ уравненіемъ (57), если мы дадимъ параметрамъ h, k, z значенія, удовлетворяющія тремъ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\alpha = \frac{8h^3 + 12h^2k}{z} + \frac{6hk^2 + k^3}{z(1-z)}, \tag{58}$$

$$\beta = -12\frac{h^4}{z} + \frac{18h^2k^2 + 12hk^3}{z(1-z)} + \frac{9k^4}{4z(1-z)^2}, \tag{59}$$

$$\gamma = 144\frac{h^5}{z} - 120\frac{h^3k^2}{z(1-z)} + \frac{45hk^4 + 12k^5}{z(1-z)^2}. \tag{60}$$

Опредѣлимъ изъ этихъ уравненій величины h, k, z *).

Изъ уравненій (59) и (60) находимъ:

$$\frac{(12h\beta+\gamma)z}{12}=\frac{8h^3k^2+12h^2k^3}{1-z}+\frac{6hk^4+k^5}{(1-z)^2}. \tag{61}$$

Раздѣливъ уравненіе (61) на уравненіе (58), имѣемъ:

$$\frac{12h\beta+\gamma}{12\alpha}=\frac{k^2}{1-z}. \tag{62}$$

Изъ тѣхъ же уравненій (59) и (60) находимъ:

$$\left(\frac{k^2}{1-z}-4h^2\right)^3=\frac{4}{9}z\left(\frac{k^2\beta}{1-z}-h\gamma\right). \tag{63}$$

Такимъ же образомъ изъ уравненій (58) и (59) получимъ:

$$\left(\frac{k^2}{1-z}-4h^2\right)^3=z\left[\frac{4}{81}\frac{(1-z)}{k^2}(3h\alpha+2\beta)^2-\alpha^2\right]. \tag{64}$$

Изъ уравненій (63) и (64) слѣдуетъ, что:

$$\frac{k^2\beta}{1-z}-h\gamma=\frac{1}{9}\frac{(1-z)}{k^2}(3h\alpha+2\beta)^2-\frac{9}{4}\alpha^2, \tag{65}$$

или:

$$\beta\left(\frac{k^2}{1-z}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\alpha^2-h\gamma\right)\frac{k^2}{1-z}-\frac{(3h\alpha+2\beta)^2}{9}=0. \tag{66}$$

Вставляя въ это уравненіе вмѣсто

$$\frac{k^2}{1-z}$$

*) Приведенное въ текстѣ весьма искусное рѣшеніе этихъ уравненій заимствовано у Клейна (Vorles. üb. das Ikos. стр. 192). По словамъ Клейна онъ самъ заимствовалъ его изъ лекцій Гордана. Подобное же исключеніе есть у Киперта въ сочиненіи „Auflösung der Gleichungen fünften Grades“. Журналъ Крелля. т. 87.

выраженіе, стоящее въ лѣвой части уравненія (62), находимъ:

$$16(\alpha^4-\beta^3+\alpha\beta\gamma)h^2-\frac{4}{3}(11\alpha^3\beta+2\beta^2\gamma-\alpha\gamma^2)h+$$
$$+\frac{1}{9}(64\alpha^2\beta^2-27\alpha^3\gamma-\beta\gamma^2)=0. \tag{67}$$

Таково квадратное уравненіе, опредѣляющее величину параметра h. Рѣшивъ его, будемъ имѣть:

$$h=\frac{11\alpha^3\beta+2\beta^2\gamma-\alpha\gamma^2\pm\alpha\sqrt{\Delta}}{24(\alpha^4-\beta^3+\alpha\beta\gamma)}, \tag{68}$$

гдѣ Δ есть дискриминантъ уравненія (54), опредѣляемый формулою (55).

Такъ какъ величины коэффиціентовъ α, β, γ извѣстны, то извѣстна и величина Δ. Вставивъ значенія α, β, γ, Δ въ формулу (68), находимъ величину h.

Подставимъ выраженіе (62) величины:

$$\frac{k^2}{1-z}$$

въ формулу (63) и опредѣлимъ изъ нея z:

$$z=\frac{(48\alpha h^2-12\beta h-\gamma)^3}{64\alpha^2(12\alpha\gamma h-12\beta^2 h-\beta\gamma)}. \tag{69}$$

Внеся величину h, вычисленную по формулѣ (68), въ выраженіе (69), мы вычислимъ величину z.

Выраженіе величины z дѣйствительно приметъ видъ:

$$z=A+B\sqrt{\Delta}. \tag{56}$$

Представимъ равенство (58) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\alpha=\frac{8h^3+12h^2k}{z}+\frac{6h+k}{z}\cdot\frac{k^2}{1-z}. \tag{70}$$

Подставивъ въ него вмѣсто

$$\frac{k^2}{1-z}$$

выраженіе (62) и рѣшивъ затѣмъ полученное уравненіе относительно k, находимъ:

$$k = -\frac{96\alpha h^3 + 72\beta h^2 + 6\gamma h - 12\alpha^2 z}{144\alpha h^2 + 12\beta h + \gamma}. \tag{71}$$

Вставивъ въ эту формулу вмѣсто h и z найденныя раньше значенія этихъ параметровъ, находимъ величину k.

Итакъ, формулы (68), (69), (71) даютъ возможность по даннымъ коэффиціентамъ α, β, γ уравненія (54) найти величины h, k, z. *Въ выраженія этихъ величинъ входитъ единственная ирраціональность: квадратный корень изъ дискриминанта уравненія (54).* Знакъ передъ этимъ радикаломъ вполнѣ произволенъ.

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы будемъ полагать, что h, k, z имѣютъ числовыя значенія, найденныя по формуламъ (68), (69), (71). Въ такомъ случаѣ уравненіе (54) тождественно съ (57) и служитъ главною резольвентою 5-ой степени для нормальнаго икосаэдрическаго уравненія:

$$\frac{H^3(u)}{-12^3 f^5(u)} = z. \tag{37'}$$

Изъ формулы (131) главы X видно, что корни уравненія (57) выражаются черезъ корни уравненія (37′) слѣдующимъ образомъ:

$$Y = 12h\frac{f_u(u)\,H_0''(u)}{H_u(u)} + 12^2 k\frac{f_u{}^3(u)\,f_0''(u)\,H_0''(u)}{T_u(u)\,H_u(u)}. \tag{72}$$

Вставляя въ эту формулу вмѣсто u корни икосаэдрическаго уравненія (37′), мы найдемъ всего 5 различныхъ величинъ, служащихъ корнями уравненія (57), или, что то же, даннаго намъ уравненія (54).

Такъ какъ мы знаемъ изъ сказаннаго въ главѣ X, что подстановкѣ

$$S(u) = \varepsilon u$$

икосаэдрической группы соотвѣтствуетъ субституція:

$$\Sigma = (Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_2,\ Y_4) \tag{73}$$

группы уравненія (57), то для нахожденія всѣхъ пяти корней уравненія (54) достаточно найти одинъ изъ корней u икосаэдрическаго уравненія (37′) и подставить въ формулу (72) послѣдовательно 5 величинъ:

$$u,\ \varepsilon u,\ \varepsilon^2 u,\ \varepsilon^3 u,\ \varepsilon^4 u. \tag{74}$$

Полученныя 5 значеній величины Y будутъ служить пятью корнями уравненія (54).

Изъ сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ вытекаетъ слѣдующій способъ рѣшенія всякаго главнаго уравненія 5-ой степени.

Подставивъ коэффиціенты α, β, γ даннаго уравненія въ формулы (68), (69), (71), находимъ величины h, k, z, которыя мы вносимъ въ формулы (37′) и (72).

Найдя одинъ изъ корней u икосаэдрическаго уравненія (37′), мы подставляемъ величины (74) вмѣсто u въ формулу (72).

Выполнивъ вычисленія, находимъ всѣ 5 корней уравненія (54).

Этотъ способъ рѣшенія принадлежитъ Клейну.

§ 51. Рѣшеніе уравненія 5-ой степени общаго вида.

Еще Абелемъ было показано, что въ случаѣ разрѣшимости алгебраическаго уравненія въ радикалахъ формула его рѣшенія можетъ быть построена такъ, чтобы всякій входящій въ нее радикалъ былъ раціональною функціею корней даннаго уравненія.

Такіе радикалы, которые могутъ быть выражены въ видѣ раціональныхъ функцій корней, Кронекеръ назвалъ *естественными* ирраціональностями въ противоположность тѣмъ радикаламъ, которые даже и черезъ корни уравненія выражаются ирраціонально. Радикалы послѣдняго рода онъ назвалъ *вспомогательными* (accessorische) *).

Рѣшая *главное* уравненіе 5-ой степени, мы пользовались двумя ирраціональными величинами:

1) корнемъ икосаэдрическаго уравненія u, который выражается раціонально черезъ корни разрѣшаемаго уравненія 5-ой степени при посредствѣ формулы (31);

2) квадратнымъ радикаломъ изъ дискриминанта $\sqrt{\Delta}$, выражающимися тоже раціонально черезъ корни разрѣшаемаго уравненія:

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta}=(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)(y_0-y_4)\times \\ \times (y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-y_4)\times \\ \times (y_2-y_3)(y_2-y_4)\times \\ \times (y_3-y_4). \qquad (75)\end{aligned}$$

Слѣдовательно мы въ правѣ сказать, что главное уравненіе 5-ой степени можетъ быть разрѣшено въ *естественныхъ* ирраціональностяхъ.

Посмотримъ, не можетъ ли уравненіе 5-ой степени общаго вида:

$$y^5+a_2y^3+a_3y^2+a_4y+a_5=0 \qquad (76)$$

быть разрѣшено въ естественныхъ ирраціональностяхъ подобно тому, какъ разрѣшается главное уравненіе 5-ой степени.

Если уравненіе (76) разрѣшимо въ естественныхъ ирраціональностяхъ при посредствѣ корней икосаэдрическаго уравненія, то должна существовать *раціональная* функція корней уравненія (76), которая при субституціяхъ группы этого уравненія испытываетъ линейныя преобразованія икосаэдрической группы. Назовемъ эту функцію снова буквою u.

---

*) Объ этомъ различіи см. Kronecker. Ueber die Gleichungen fünften Grades. Crelles Journal Bd. 59. А также: Klein. Vorlesungen über das Ikosaeder. Стр. 157.

Пусть корни уравненія (76) обозначены буквами:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4, \tag{77}$$

между ними существуетъ линейное соотношеніе:

$$y_0+y_1+y_2+y_3+y_4=0, \tag{78}$$

позволяющее во всѣхъ нашихъ формулахъ исключить одинъ изъ корней, напр. y_4. Остальные четыре корня вполнѣ между собою независимы.

Функція u представится въ видѣ:

$$u=\frac{\varphi(y_0,y_1,y_2,y_3)}{\psi(y_0,y_1,y_2,y_3)}, \tag{79}$$

гдѣ φ и ψ суть цѣлыя раціональныя функціи аргументовъ, не имѣющія общихъ множителей.

Совершимъ такую *четную* субституцію величинъ (77), которая измѣняетъ величину функціи (79).

Въ результатѣ находимъ:

$$\bar{u}=\frac{\bar{\varphi}(y_0,y_1,y_2,y_3)}{\bar{\psi}(y_0,y_1,y_2,y_3)}. \tag{80}$$

Согласно сдѣланному нами условію $\bar{u}$ есть линейная функція u:

$$\bar{u}=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}. \tag{81}$$

Отсюда вытекаетъ тождество:

$$\frac{\bar{\varphi}(y_0,y_1,y_2,y_3)}{\bar{\psi}(y_0,y_1,y_2,y_3)}=\frac{\alpha\varphi(y_0,y_1,y_2,y_3)+\beta\psi(y_0,y_1,y_2,y_3)}{\gamma\varphi(y_0,y_1,y_2,y_3)+\delta\psi(y_0,y_1,y_2,y_3)}. \tag{82}$$

Такъ какъ многочлены φ и ψ не имѣютъ общихъ множителей, то обѣ дроби, входящія въ равенство (82), несократимы.

Такъ какъ, кромѣ того, величины:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3$$

между собою вполнѣ независимы, то должны имѣть мѣсто тождества *):

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varphi}(y_0, y_1, y_2, y_3) &= C[\alpha\varphi(y_0, y_1, y_2, y_3) + \beta\psi(y_0, y_1, y_2, y_3)],\\ \bar{\psi}(y_0, y_1, y_2, y_3) &= C[\gamma\varphi(y_0, y_1, y_2, y_3) + \delta\psi(y_0, y_1, y_2, y_3)].\end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Слѣдовательно, каждой изъ 60 субституцій знакоперемѣнной группы соотвѣтствуетъ линейная бинарная подстановка надъ величинами φ и ψ.

Совершимъ надъ φ и ψ всѣ 60 субституцій и найдемъ соотвѣтствующія имъ 60 бинарныхъ линейныхъ подстановокъ. Эти 60 бинарныхъ подстановокъ образуютъ группу, потому что соотвѣтствующія имъ субституціи образуютъ группу. Между этими шестьюдесятью подстановками равныхъ оказаться не можетъ—иначе величина u имѣла бы меньше 60 значеній.

Итакъ, найденныя нами бинарныя линейныя подстановки образуютъ группу бинарныхъ линейныхъ подстановокъ 60-го порядка изоморфную съ икосаэдрической группой неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ. Это заключеніе противорѣчитъ теоремѣ 4 главы IV. Отсюда слѣдуетъ, что нѣтъ такой *раціональной* функціи корней уравненія 5-ой степени общаго вида, которая удовлетворяла бы икосаэдрическому уравненію.

Для разрѣшенія уравненія 5-ой степени (76) намъ надо преобразовать его раціональною подстановкою въ главное уравненіе.

Въ коэффиціенты этого раціональнаго преобразованія непремѣнно войдутъ радикалы, и при томъ эти радикалы будутъ *вспомогательными*.

---

*) Въ случаѣ главнаго уравненія величины:

$$y_0, y_1, y_2, y_3,$$

связаны между собою уравненіемъ главной поверхности:

$$y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_0y_1+y_0y_2+y_0y_3+y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=0. \qquad (14)$$

Поэтому къ главному уравненію сказанное выше непримѣнимо. Въ этомъ заключается существенное различіе главнаго уравненія отъ общаго.

Геометрическій смыслъ такого преобразованія заключается въ слѣдующемъ: мы устанавливаемъ соотвѣтствіе между точками пространства и точками главной поверхности такъ, чтобы каждой точкѣ пространства соотвѣтствовала единственная точка главной поверхности. Мы можемъ этого достичь различно: напр. проведя черезъ данную точку пространства лучъ въ опредѣленномъ произвольно выбранномъ направленіи, мы можемъ принимать за соотвѣтственную одну изъ двухъ точекъ пересѣченія этого луча съ главною поверхностью. Для раздѣленія двухъ точекъ пересѣченія луча съ главною поверхностью придется ввести въ формулы одинъ *вспомогательный* квадратный радикалъ.

На практикѣ всего удобнѣе выполнить преобразованіе уравненія (76) въ главное уравненіе, положивъ:

$$Y = y^2 + Ay + B. \tag{84}$$

Обозначивъ буквами:

$$s_1, \; s_2, \; s_3, \; s_4$$

извѣстныя симметрическія функціи корней уравненія (76) и припомнивъ, что для уравненія (76)

$$s_1 = 0,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Y &= s_2 + 5B, \\ \Sigma Y^2 &= s_4 + 2As_3 + (A^2 + 2B)s_2 + 5B^2. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Для того, чтобы преобразованное уравненіе было главнымъ, величины A и B должны удовлетворять условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &s_2 + 5B = 0, \\ &s_4 + 2As_3 + (A^2 + 2B)s_2 + 5B^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Величина B раціональна, а A зависитъ отъ одного вспомогательнаго квадратнаго радикала.

§ 52. Рѣшеніе уравненія 5-ой степени въ формѣ Жеррарда.

Уравненіе Жеррарда:

$$y^5+5\beta y+\gamma=0 \tag{87}$$

принадлежитъ къ числу *главныхъ*. Его рѣшеніе получится изъ формулъ главнаго уравненія, если мы положимъ въ этихъ формулахъ $\alpha=0$.

Положивъ:

$$\alpha=0$$

въ формулѣ (55), получимъ:

$$\Delta=256\beta^5+\gamma^4. \tag{88}$$

Изъ формулы (68) находимъ:

$$h=-\frac{\gamma}{12\beta}. \tag{89}$$

Подставивъ выраженіе (68) величины h въ формулу:

$$12\beta h+\gamma,$$

и разложивъ полученную функцію по возрастающимъ степенямъ α, будемъ имѣть:

$$12\beta h+\gamma=-\frac{\gamma^2\pm\sqrt{\Delta}}{2\beta^2}\alpha+\ldots, \tag{90}$$

гдѣ Δ имѣетъ значеніе, опредѣляемое формулою (88).

Подставивъ выраженіе (90) величины:

$$12\beta h+\gamma$$

въ формулу (69), произведя сокращеніе полученной дроби на α^3 и положивъ затѣмъ:

$$\alpha=0,$$

находимъ:

$$z=\frac{(96^2\beta h^2+\gamma^2\pm\sqrt{\Delta})^3}{256\beta^5(24\beta\gamma h+\gamma^2\pm\sqrt{\Delta})}, \tag{91}$$

или, подставляя вмѣсто h выраженіе (89):

$$z = \frac{\left\{\frac{5}{3}\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta}\right\}^3}{256(-\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta})\beta^5}. \tag{92}$$

Подставивъ выраженіе (90) въ формулу (71), сокративъ полученную дробь на α и положивъ затѣмъ $\alpha = 0$, находимъ:

$$k = \frac{192\beta^2 h^2 - 6(\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta})}{-288h^2\beta^2 + \gamma^2 \pm \sqrt{\Delta}}\, h, \tag{93}$$

или, подставляя вмѣсто h выраженіе (89):

$$k = \frac{\left(\frac{7}{9}\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta}\right)\gamma}{2(-\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta})\beta}. \tag{94}$$

Найдя числовыя значенія h, k, z по формуламъ (89), (92), (94), мы будемъ дальше рѣшать уравненіе (87) совершенно такъ же какъ выше рѣшали уравненіе (54).

Извѣстно, что всякое уравненіе 5-ой степени раціональнымъ преобразованіемъ приводится къ Жеррардовой формѣ. Посмотримъ, каковъ геометрическій смыслъ преобразованія главнаго уравненія въ Жеррардово.

Геометрическимъ изображеніемъ Жеррардова уравненія служитъ кривая 6-го порядка въ пространствѣ, служащая линіей пересѣченія поверхностей: главной и діагональной. Желая преобразовать главное уравненіе въ Жеррардово, мы устанавливаемъ такое соотвѣтствіе между точками главной поверхности и этой кривой 6-го порядка, чтобы каждой точкѣ главной поверхности соотвѣтствовала единственная точка кривой 6-го порядка.

Всего проще сдѣлать это такъ: провести черезъ данную точку главной поверхности одну изъ прямолинейныхъ образующихъ, найти три точки пересѣченія этой образующей съ діагональною поверхностью и одну изъ этихъ трехъ точекъ принять за соотвѣтственную съ данной точкой. Для раздѣленія трехъ точекъ пересѣченія образующей съ діагональною поверхностью придется рѣшить кубичное уравненіе, при чемъ въ формулы войдутъ два радикала: квадратный и кубичный.

Въ справедливости этого заключенія можно убѣдиться и аналитически. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что всякое главное уравненіе 5-ой степени есть резольвента икосаэдрическаго уравненія:

$$\frac{H_u^3(u)}{-12^3 f_u^5(u)} = z, \tag{37'}$$

гдѣ z есть нѣкоторая извѣстная намъ функція коэффиціентовъ даннаго уравненія 5-ой степени.

Преобразуя раціонально данное намъ уравненіе 5-ой степени, мы будемъ получать всевозможныя резольвенты 5-ой степени того же уравненія (37′). Всѣ эти главныя резольвенты заключены въ формулѣ (57) и разнятся только значеніями параметровъ h и k. Если мы хотимъ, чтобы преобразованное уравненіе было Жеррардово, то должны выбрать h и k такъ, чтобы они удовлетворяли условію:

$$8h^3 + 12h^2k + \frac{6hk^2 + k^3}{1-z} = 0, \tag{95}$$

т. е. чтобы отношеніе

$$\frac{h}{k}$$

было корнемъ *кубичнаго* уравненія:

$$8\left(\frac{h}{k}\right)^3 + 12\left(\frac{h}{k}\right)^2 + \frac{6}{1-z}\left(\frac{h}{k}\right) + \frac{1}{1-z} = 0. \tag{96}$$

При рѣшеніи этого уравненія дѣйствительно входятъ два радикала: квадратный и кубичный.

§ 53. **Рѣшеніе уравненія 4-ой степени.**

Уравненіе 4-ой степени общаго вида можетъ быть изображено такъ:

$$y^4 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4 = 0. \tag{97}$$

Главное уравненіе 4-ой степени таково:

$$y^4+a_3y+a_4=0. \tag{98}$$

Сравнимъ это уравненіе съ уравненіемъ (87) главы X:

$$Y^4+\frac{4}{27h^3z}Y+\frac{1}{27h^4z}=0. \tag{99}$$

Уравненіе (99) есть резольвента 4-ой степени октаэдрическаго уравненія во второй нормальной формѣ:

$$\frac{64\sqrt{2}\left(u^7-\frac{1}{2\sqrt{2}}u^4-u\right)^3}{(u^6+5\sqrt{2}\,u^3-1)^4}=z. \tag{100}$$

Корни уравненій (99) и (100) связаны между собою соотношеніемъ:

$$u^3-\frac{1}{u^3}=\frac{7\sqrt{2}\,hY-5\sqrt{2}}{4hY+1}, \tag{101}$$

откуда:

$$Y=\frac{u^3-\frac{1}{u^3}+5\sqrt{2}}{7\sqrt{2}\,h-4h\left(u^3-\frac{1}{u^3}\right)}. \tag{102}$$

Для тождественности уравненій (98) и (99) необходимо выбрать величины h и z такъ, чтобы они удовлетворяли уравненіямъ:

$$a_3=\frac{4}{27h^3z},\quad a_4=\frac{1}{27h^4z}. \tag{103}$$

Изъ этихъ уравненій находимъ:

$$h=\frac{a_3}{4a_4},\quad z=\frac{1}{27h^4a_4}. \tag{104}$$

Подставивъ въ формулы (102) и (100) вмѣсто h и z ихъ величины, опредѣляемыя формулами (104), и внеся затѣмъ въ формулу (102) вмѣсто u величину одного изъ корней октаэдрическаго уравненія (100), мы находимъ величину одного изъ корней уравненія (98).

Для полученія всѣхъ четырехъ корней уравненія (98), мы должны послѣдовательно подставить въ формулу (102) четыре слѣдующихъ корня октаэдрическаго уравненія (100):

$$u,\ \mathfrak{T}(u),\ \mathfrak{T}^2(u),\ \mathfrak{T}^3(u), \tag{105}$$

гдѣ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}(u) &= \frac{1+\sqrt{2}\,\varepsilon^2 u}{u-\sqrt{2}\,\varepsilon}, \\ \varepsilon &= e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Для рѣшенія уравненія 4-ой степени общаго вида (97) въ гипергеометрическихъ функціяхъ, мы должны предварительно преобразовать его въ главное уравненіе. Для этого преобразованія мы можемъ воспользоваться приведенными выше формулами (84) и (86). Коэффиціентъ A будетъ выражаться при помощи одного *вспомогательнаго* квадратнаго радикала.

Геометрическій смыслъ этого преобразованія слѣдующій. Мы устанавливаемъ такое соотвѣтствіе между точками плоскости и точками главнаго коническаго сѣченія:

$$Y_0^2+Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2=0, \tag{107}$$

чтобы каждой точкѣ плоскости, соотвѣтствовала единственная точка на коническомъ сѣченіи (107).

Координаты:

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3$$

этой точки мы принимаемъ за корни преобразованнаго уравненія.

Мы можемъ установить такое соотвѣтствіе, проводя черезъ точку плоскости лучъ въ произвольномъ направленіи и принимая одну изъ точекъ пересѣченія его съ *главною* кривою (107) за соотвѣтственную точку.

Для раздѣленія двухъ точекъ пересѣченія луча съ кривою (107) необходимо ввести въ формулы одинъ *вспомогательный* квадратный радикалъ.

Мы убѣждаемся въ томъ, что этотъ радикалъ—вспомогательный, повторяя разсужденія, приведенныя выше по поводу уравненія 5-ой степени.

Если бы радикалъ не былъ *вспомогательнымъ*, то корни уравненія четвертой степени общаго вида были бы раціональными функціями корней октаэдрическаго уравненія.

Отсюда мы пришли бы къ заключенію, что существуетъ группа однородныхъ линейныхъ подстановокъ изоморфная съ октаэдрической; а это противорѣчило бы теоремѣ 4 главы IV.

§ 54. **Рѣшеніе уравненія 3-ей степени.**

Кубичное уравненіе общаго вида:

$$y^3+a_2y+a_3=0 \tag{108}$$

есть главное уравненіе.

Такъ какъ изъ сказаннаго въ § 20 слѣдуетъ, что двупирамидная группа 6-го порядка можетъ быть изоморфна съ соотвѣтствующею ей группою бинарныхъ линейныхъ подстановокъ, то мы въ правѣ ожидать, что корни кубичнаго уравненія общаго вида суть раціональныя функціи корней двупирамиднаго уравненія 6-ой степени.

И дѣйствительно, не трудно убѣдиться въ томъ, что Лагранжева функція:

$$u=y_0+\varepsilon^2y_1+\varepsilon y_2, \text{ гдѣ } \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}. \tag{109}$$

подъ вліяніемъ симметрической группы субституцій изъ трехъ буквъ испытываетъ линейныя преобразованія.

Примѣнимъ къ функціи (109) основныя субституціи:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= (y_0,\ y_1,\ y_2), \\ \tau &= (y_0)\ (y_1,\ y_2), \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

симметрической группы.

Подъ вліяніемъ этихъ субституцій функція (109) преобразуется въ $\bar{u}$ и $\bar{\bar{u}}$, при чемъ:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}&=y_1+\varepsilon^2 y_2+\varepsilon y_0=\varepsilon u, \\ \bar{\bar{u}}&=y_0+\varepsilon^2 y_2+\varepsilon y_1= \\ &=\frac{y_0^2+y_1^2+y_2^2-y_0 y_1-y_0 y_2-y_1 y_2}{u}=\frac{-a_2}{u}\,. \end{aligned}\right\} \quad (111)$$

Слѣдовательно подъ вліяніемъ субституцій σ и τ функція u испытываетъ линейныя подстановки:

$$S_1(u)=\varepsilon u, \quad \mathfrak{T}_1(u)=-\frac{a_2}{u}\,. \qquad (112)$$

Функція величины u, инваріантная относительно этихъ подстановокъ, такова:

$$u^3-\frac{a_2^3}{u^3}\,. \qquad (113)$$

Функція эта не мѣняется подъ вліяніемъ основныхъ субституцій σ и τ группы уравненія (108); она не измѣнится и отъ всевозможныхъ субституцій той же группы. Это—симметрическая функція корней уравненія (108).

Дѣйствительно, произведя вычисленія, находимъ, что:

$$u^3-\frac{a_2^3}{u^3}=-27a_3. \qquad (114)$$

Таково то двупирамидное уравненіе 6-го порядка, которому удовлетворяетъ величина u. Основныя подстановки S_1 и $\mathfrak{T}_1$ группы уравненія (114) опредѣляются формулами (112).

Всѣ три корня кубичнаго уравненія (108) суть раціональныя функціи корня u уравненія (114). Они могутъ быть найдены изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} u &= y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon y_2, \\ -\frac{a_2}{u} &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2, \\ 0 &= y_0 + y_1 + y_2. \end{aligned}\right\} \qquad (115)$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:

$$y_0 = \frac{1}{3}\left(u - \frac{a_2}{u}\right),\ y_1 = \frac{1}{3}\left(\varepsilon u - \varepsilon^2 \frac{a_2}{u}\right),\ y_3 = \frac{1}{3}\left(\varepsilon^2 u - \varepsilon \frac{a_2}{u}\right). \quad (116)$$

Уравненіе (114) есть двупирамидное уравненіе, неприведенное къ нормальной формѣ.

Мы можемъ рѣшить кубичное уравненіе (108), слѣдуя тому пути какимъ мы шли въ предшествующихъ случаяхъ.

Сравнивъ уравненіе (108) съ резольвентой (50) главы X, мы можемъ выбрать параметры h и z такъ чтобы эти уравненія были тождественны между собою. Тогда корни уравненія (108) выразятся, какъ раціональныя функціи корней нормальнаго двупирамиднаго уравненія. Однако необходимо замѣтить, что при этомъ выраженія h и z будутъ содержать въ себѣ *вспомогательный* квадратный радикалъ:

$$\sqrt{a_2},$$

который для рѣшенія уравненія (108) является излишнимъ.

§ 55. **Уравненіе Якоби 6-ой степени.**

Слѣдуя Бріоски, мы будемъ называть уравненіемъ Якоби 6-ой степени *всякое* уравненіе 6-ой степени, обладающее слѣдующимъ свойствомъ: его корни

$$y_\infty,\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \qquad (117)$$

выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{y_\infty} &= \sqrt{5}A_0, \\ \sqrt{y_k} &= A_0 + \varepsilon^k A_1 + \varepsilon^{4k} A_2,\ k=0, 1, 2, 3, 4,\ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}. \end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

Въ этихъ формулахъ величины

$$A_0,\ A_1,\ A_2 \tag{119}$$

суть нѣкоторыя количества, опредѣляющія собою коэффиціенты уравненія.

Равенства (118) устанавливаютъ нѣкоторую линейную связь между квадратными корнями изъ величинъ (117): исключивъ три величины (119) изъ шести уравненій (118), мы находимъ три различныхъ между собою линейныхъ соотношенія между шестью квадратными радикалами изъ корней (117) уравненія Якоби.

Рѣшивъ уравненія (118) относительно величинъ

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \tag{119}$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{y_\infty} = \frac{1}{5}\left(\sqrt{y_0}+\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}+\sqrt{y_4}\right),\\
A_1 &= \frac{1}{5}\left(\sqrt{y_0}+\varepsilon^4\sqrt{y_1}+\varepsilon^3\sqrt{y_2}+\varepsilon^2\sqrt{y_3}+\varepsilon\sqrt{y_4}\right),\\
A_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{y_0}+\varepsilon\sqrt{y_1}+\varepsilon^2\sqrt{y_2}+\varepsilon^3\sqrt{y_3}+\varepsilon^4\sqrt{y_4}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{120}$$

Слѣдовательно величины

$$A_0,\ A_1,\ A_2 \tag{119}$$

суть три такія функціи корней уравненія Якоби, черезъ которыя всѣ корни этого уравненія выражаются раціонально.

Отсюда, между прочимъ, видно, что корни уравненія Якоби суть функціи трехъ, вообще говоря, независимыхъ между собою параметровъ (119).

Пусть уравненіе, имѣющее корнями величины (117), таково:

$$y^6+a_1y^5+a_2y^4+a_3y^3+a_4y^2+a_5y+a_6=0. \tag{121}$$

Выразимъ симметрическія функціи

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6$$

корней уравненія (121) черезъ величины (119) при помощи формулъ (118) и вычислимъ затѣмъ коэфиціенты уравненія (121), примѣняя формулы Ньютона.

Въ результатѣ этихъ довольно сложныхъ вычисленій, *) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &a_1=-10A,\ a_2=35A^2,\ a_3=-60A^3+10B,\\ &a_4=55A^4-30AB,\ a_5=-26A^5+30A^2B-4C,\\ &a_6=5(A^3-B)^2, \end{aligned}\right\}\qquad(122)$$

гдѣ:

$$\left.\begin{aligned} &A=\mathrm{A}_0{}^2+\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2,\ B=8\mathrm{A}_0{}^4\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2-2\mathrm{A}_0{}^2\mathrm{A}_1{}^2\mathrm{A}_2{}^2+\mathrm{A}_1{}^3\mathrm{A}_2{}^3-\\ &\qquad -\mathrm{A}_0(\mathrm{A}_1{}^5+\mathrm{A}_2{}^5),\\ &C=320\mathrm{A}_0{}^6\mathrm{A}_1{}^2\mathrm{A}_2{}^2-160\mathrm{A}_0{}^4\mathrm{A}_1{}^3\mathrm{A}_2{}^3+20\mathrm{A}_0{}^2\mathrm{A}_1{}^4\mathrm{A}_2{}^4+\\ &\qquad +6\mathrm{A}_1{}^5\mathrm{A}_2{}^5-4\mathrm{A}_0(32\mathrm{A}_0{}^4-20\mathrm{A}_0{}^2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2+\\ &\qquad +5\mathrm{A}_1{}^2\mathrm{A}_2{}^2)(\mathrm{A}_1{}^5+\mathrm{A}_2{}^5)+\mathrm{A}_1{}^{10}+\mathrm{A}_2{}^{10}. \end{aligned}\right\}\qquad(123)$$

Вставивъ выраженія (122) въ уравненіе (121), мы приведемъ его къ такому виду:

$$\begin{aligned} &(y-A)^6-4A(y-A)^5+10B(y-A)^3-4C(y-A)+\\ &\qquad +5B^2-4AC=0. \end{aligned}\qquad(124)$$

Если Якобіево уравненіе (121) дано, то величины коэфиціентовъ

$$A,\ B,\ C$$

намъ извѣстны: они выражаются *раціонально* черезъ:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$$

при посредствѣ формулъ (122).

---

*) Эти вычисленія принадлежатъ Бріоски. См. Annali di Matematica. T. I. Sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado; или Mathem. Annalen, Die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Формулы (122) показываютъ, что между *шестью* коэффиціентами уравненія Якоби существуетъ *три* соотношенія. Коэффиціенты этого уравненія, точно такъ же, какъ и его корни, суть функціи трехъ, вообще говоря, независимыхъ между собою параметровъ. За такіе параметры всего естественнѣе принять величины

$$A,\ B,\ C.$$

Эти величины раціонально извѣстны.

Посмотримъ, нельзя ли уравненіе Якоби (124) преобразовать раціонально въ другое уравненіе того же типа *).

Такъ какъ уравненіе Якоби содержитъ въ себѣ три параметра, то введя въ формулу искомаго раціональнаго преобразованія три произвольныхъ коэффиціента, мы будемъ имѣть самую общую формулу раціональнаго преобразованія уравненія Якоби въ другое уравненіе того же типа. Каково бы ни было первоначальное уравненіе Якоби,—преобразованное уравненіе будетъ уравненіемъ Якоби *самаго общаго вида.*

Изъ формулъ (123) находимъ:

$$\frac{\partial A}{\partial A_0} = 2A_0, \quad \frac{\partial A}{\partial A_1} = A_2, \quad \frac{\partial A}{\partial A_2} = A_1. \tag{125}$$

Кромѣ того, введемъ такія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial B}{\partial A_0} = 2A_0', \quad \frac{\partial B}{\partial A_1} = A_2', \quad \frac{\partial B}{\partial A_2} = A_1', \\ &\frac{1}{5}\frac{\partial C}{\partial A_0} = 2A_0'', \quad \frac{1}{5}\frac{\partial C}{\partial A_1} = A_2'', \quad \frac{1}{5}\frac{\partial C}{\partial A_2} = A_1''. \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

Величины:

$$A_0',\ A_1',\ A_2',\ A_0'',\ A_1'',\ A_2''$$

легко найдутся по формуламъ (123).

---

*) Приведенное ниже весьма искусное преобразованіе уравненія Якоби принадлежитъ Бріоски.

Изъ формулъ (118), (125), (126), находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A_0}=1=2\left[\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A}A_0+\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B}A_0'+5\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C}A_0''\right],\\
&\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A_1}=\varepsilon^k=\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A}A_2+\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B}A_2'+5\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C}A_2'',\\
&\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A_2}=\varepsilon^{4k}=\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A}A_1+\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B}A_1'+5\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C}A_1'',\\
&k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.
\end{aligned}\right\}\quad(127)$$

Умножимъ соотвѣтственно равенства (127) на слѣдующія величины:

1) на A_0, A_1, A_2,

2) на A_0', A_1', A_2',

3) на A_0'', A_1'', A_2'',

и послѣ каждаго умноженія сложимъ между собою три полученныхъ равенства.

Принявъ во вниманіе формулы (118) и введя новыя обозначенія:

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{y_k'}=A_0'+\varepsilon^kA_1'+\varepsilon^{4k}A_2',\\
&\sqrt{y_k''}=A_0''+\varepsilon^kA_1''+\varepsilon^{4k}A_2'',\\
&k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,
\end{aligned}\right\}\quad(128)$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sqrt{y_k}=A\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A}+b\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B}+5c\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C},\\
&\frac{1}{2}\sqrt{y'_k}=b\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A}+A'\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B}+5g\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C},\\
&\frac{1}{2}\sqrt{y_k''}=c\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A}+g\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B}+5A''\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C},\\
&k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.
\end{aligned}\right\}\quad(129)$$

Въ этихъ формулахъ буквами

$$A,\ A',\ A'',\ b,\ c,\ g$$

обозначены слѣдующія величины:

$$\left.\begin{aligned} A &= A_0{}^2 + A_1A_2, \\ A' &= A_0'^2 + A_1'A_2', \\ A'' &= A_0''^2 + A_1''A_2'', \\ b &= \frac{1}{2}(2A_0A_0' + A_1A_2' + A_2A_1'), \\ c &= \frac{1}{2}(2A_0A_0'' + A_1A_2'' + A_2A_1''), \\ g &= \frac{1}{2}(2A_0'A_0'' + A_1'A_2'' + A_2'A_1''). \end{aligned}\right\} \qquad (130)$$

Величины A, A', A'', b, c, g раціонально извѣстны, ибо онѣ суть раціональныя функціи отъ A, B, C. Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ формулахъ (130) вмѣсто величинъ:

$$A_0',\ A_1',\ A_2',\ A_0'',\ A_1'',\ A_2''$$

ихъ выраженія (126) и принявъ во вниманіе формулы (123) найдемъ:

$$\begin{array}{l|l} A = A, & b = 3B, \\ A' = 8A^2B + C, & c = C, \\ A'' = 4ABC - 3B^3, & g = 4A^2C - AB^2. \end{array} \qquad (131)$$

Присоединивъ къ величинамъ (128) величины:

$$\sqrt{y'_\infty} = \sqrt{5}A_0',\ \sqrt{y''_\infty} = \sqrt{5}A_0'', \qquad (132)$$

мы можемъ составить два Якобіевыхъ уравненія, имѣющихъ корнями слѣдующія величины:

$$1)\ y'_\infty,\ y_0',\ y_1',\ y_2',\ y_3'\ y_4', \tag{133}$$

$$2)\ y''_\infty,\ y_0'',\ y_1'',\ y_2'',\ y_3'',\ y_4''. \tag{134}$$

Эти уравненія могутъ быть получены раціональнымъ преобразованіемъ уравненія (124).

Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ y_h одинъ изъ корней уравненія (124), при чемъ индексъ h имѣетъ одно изъ шести значеній:

$$\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Изъ уравненія (124) слѣдуетъ, что величины:

$$\frac{d\sqrt{y_h}}{dA},\ \frac{d\sqrt{y_h}}{dB},\ \frac{d\sqrt{y_h}}{dC}$$

могутъ быть изображены формулами вида:

$$\left.\begin{array}{c} f_1(y_h,\ A,\ B,\ C)\sqrt{y_h}.\ \ f_2(y_h, A,\ B,\ C)\sqrt{y_h}, \\ f_3(y_h,\ A\ \ B,\ C)\sqrt{y_h}, \end{array}\right\} \tag{135}$$

гдѣ f_1, f_2, f_3 суть раціональныя функціи.

Подставивъ эти выраженія въ формулы (129), мы найдемъ, что величины $\sqrt{y_h'}$, $\sqrt{y_h''}$ могутъ быть изображены формулами вида:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{y_h'} = \Phi_1(y_h,\ A,\ B,\ C)\sqrt{y_h}, \\ \sqrt{y_h''} = \Phi_2(y_h,\ A,\ B,\ C)\sqrt{y_h}, \end{array}\right\} \tag{136}$$

гдѣ Φ_1 и Φ_2 суть раціональныя функціи, а индексъ h принимаетъ послѣдовательно значенія: 0, 1, 2, 3, 4.

Возведя равенства (136) въ квадратъ, находимъ:

$$\left.\begin{array}{l} y_h' = \Phi_1^2(y_h,\ A,\ B,\ C)y_h, \\ y_h'' = \Phi_2^2(y_h,\ A,\ B,\ C)y_h. \end{array}\right\} \tag{137}$$

Формулы эти сохраняютъ силу и для значенія $h = \infty$.

Эти равенства показываютъ, что дѣйствительно Якобіевы уравненія, которымъ удовлетворяютъ величины (133) и (134), могутъ быть получены раціональнымъ преобразованіемъ уравненія (124).

Положимъ:

$$\sqrt{Y_h} = p\sqrt{y_h} + q\sqrt{y_h'} + r\sqrt{y_h''}. \qquad (138)$$

гдѣ p, q, r суть произвольно взятыя постоянныя числа, а индексъ h снова послѣдовательно принимаетъ значенія:

$$\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Изъ формулъ (118), (128), (132) слѣдуетъ, что величины:

$$Y_\infty,\ Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4, \qquad (139)$$

опредѣляемыя формулою (138), суть корни нѣкотораго новаго уравненія Якоби.

Изъ формулъ (136) и (138) находимъ:

$$\sqrt{Y_h} = \{p + q\Phi_1(y_h, A, B, C) + r\Phi_2(y_h, A, B, C)\}\sqrt{y_h},$$

откуда:

$$Y_h = \{p + q\Phi_1(y_h, A, B, C) + r\Phi_2(y_h, A, B\ C)\}^2 y_h. \qquad (140)$$

Эта формула показываетъ, что уравненіе Якоби, имѣющее корнями величины (139), тоже получается изъ уравненія (124) раціональнымъ преобразованіемъ.

Такъ какъ раціональная подстановка (140) содержитъ въ себѣ три совершенно произвольныхъ параметра: p, q, r, то подстановка (140) есть самая общая раціональная подстановка, преобразующая уравненіе Якоби (124) въ уравненіе того же типа; а преобразованное уравненіе—есть самое общее уравненіе Якоби, какое можетъ быть получено изъ уравненія (124) раціональнымъ преобразованіемъ.

Обозначимъ параметры, аналогичные A, B, C, для преобразованнаго уравненія Якоби буквами:

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}.$$

Это суть раціональныя функціи отъ:

$$A,\ B,\ C,\ p,\ q,\ r.$$

Остановимся на вычисленіи $\mathfrak{A}$ *).

Изъ уравненія Якоби (124) слѣдуетъ, что:

$$\Sigma y_h = 10A. \tag{141}$$

На томъ же основаніи будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma y_h' &= 10A', \\ \Sigma y_h'' &= 10A'', \\ \Sigma Y_h &= 10\mathfrak{A}. \end{aligned}\right\} \tag{142}$$

Подставивъ въ выраженіе ΣY_h вмѣсто Y_h ея выраженіе изъ равенства (138), находимъ:

$$\begin{aligned} \Sigma Y_h = p^2\Sigma y_h + q^2\Sigma y_h' + r^2\Sigma y_h'' + \\ + 2pq\Sigma\sqrt{y_h y_h'} + 2pr\Sigma\sqrt{y_h y_h''} + 2qr\Sigma\sqrt{y_h' y_h''}. \end{aligned} \tag{143}$$

Изъ формулъ (118), (128), (132), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\sqrt{y_h y_h'} &= 10A_0A_0' + 5A_1A_2' + 5A_2A_1', \\ \Sigma\sqrt{y_h y_h''} &= 10A_0A_0'' + 5A_1A_2'' + 5A_2A_1'', \\ \Sigma\sqrt{y_h' y_h''} &= 10A_0'A_0'' + 5A_1'A_2'' + 5A_2'A_1'', \end{aligned}\right\} \tag{144}$$

или, на основаніи формулъ (130):

$$\Sigma\sqrt{y_h y_h'} = 10b,\quad \Sigma\sqrt{y_h y_h''} = 10c,\quad \Sigma\sqrt{y_h' y_h''} = 10g. \tag{145}$$

Изъ формулъ (141), (142), (143), (145) находимъ:

$$\mathfrak{A} = p^2A + q^2A' + r^2A'' + 2pqb + 2prc + 2qrg. \tag{146}$$

*) Результаты этихъ вычисленій приведены у Бріоски. Онъ ведетъ вычисленія нѣсколько иначе и, по видимому, сложнѣе.

Подставивъ въ эту формулу вмѣсто A', A'', b, c, g выраженія этихъ величинъ (131), получаемъ:

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}=p^2A+q^2(8A^2B+C)+r^2(4ABC-3B^3)+\\ +6pqB+2prC+2qr(4A^2C-AB^2).\end{gathered} \tag{147}$$

Отсюда видно, что если въ данномъ уравненіи Якоби (124) коэффиціентъ A былъ отличенъ отъ нуля, то раціональнымъ преобразованіемъ можно достичь того, чтобы преобразованное уравненіе было того же Якобіева типа и имѣло параметръ $\mathfrak{A}$ равный нулю. Въ самомъ дѣлѣ, для этой цѣли достаточно выбрать параметры p, q и r такъ, чтобы выраженіе (147) обратилось въ нуль.

Приравнявъ выраженіе (147) нулю, мы находимъ одно квадратное уравненіе между двумя независимыми между собою величинами:

$$\frac{q}{p} \text{ и } \frac{r}{p}.$$

Слѣдовательно, существуетъ безчисленное множество раціональныхъ подстановокъ, преобразующихъ уравненіе Якоби въ новое уравненіе того же типа, имѣющее при томъ коэффиціентъ A равный нулю.

Положивъ:

$$r=0,$$

и приравнявъ выраженіе (147) нулю, мы находимъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія величины $\frac{q}{p}$:

$$A+6B\frac{q}{p}+(8A^2B+C)\frac{q^2}{p^2}=0. \tag{148}$$

Корни этого уравненія выражаются черезъ одинъ квадратный радикалъ.

Если въ уравненіи (124) коэффиціентъ B равенъ нулю, то можно обратить выраженіе (147) въ нуль, полагая:

$$p = q = 0,\ r = 1.$$

Въ этомъ случаѣ преобразованное уравненіе будетъ имѣть корнями величины:

$$y_\infty'',\ y_0'',\ y_1'',\ y_2'',\ y_3'',\ y_4''. \qquad (134)$$

И дѣйствительно, мы видимъ, что коэффиціентъ этого преобразованнаго уравненія:

$$A'' = 4ABC - 3B^3$$

обращается въ нуль при $B = 0$.

Итакъ, если въ уравненіи (124) коэффиціентъ B равенъ 0, то уравненіе (124) раціональнымъ преобразованіемъ *съ раціональными коэффиціентами* приводится къ новому уравненію Якоби, имѣющему коэффиціентъ $\mathfrak{A}$ равный нулю.

Возвращаясь къ общему случаю, когда въ уравненіи Якоби (124) ни одинъ изъ коэффиціентовъ A, B, C не равенъ 0, мы можемъ сказать, что *всякое уравненіе Якоби 6-ой степени раціональной подстановкой можетъ быть преобразовано въ новое уравненіе Якоби, имѣющее коэффиціентъ $\mathfrak{A}$ равный нулю*:

$$Y^6 + 10\mathfrak{B}Y^3 - 4\mathfrak{C}Y + 5\mathfrak{B}^2 = 0. \qquad (149)$$

Коэффиціенты этой раціональной подстановки содержатъ въ себѣ одинъ квадратный радикалъ.

Уравненіе (149) есть простѣйшій видъ уравненія Якоби 6-ой степени. Оно содержитъ въ себѣ только два независимыхъ параметра $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. Его мы будемъ называть *главнымъ* уравненіемъ Якоби.

Резольвента 6-ой степени типа Якоби, разсмотрѣнная нами въ главѣ X, принадлежитъ къ числу главныхъ уравненій Якоби.

Къ числу уравненій Якоби 6-ой степени принадлежитъ извѣстное изъ теоріи эллиптическихъ функцій уравненіе множителя, соотвѣтствующее преобразованію 5-ой степени *).

*) Объ уравненіяхъ модулярномъ и уравненіи множителя мы говорили уже выше во введеніи.

Уравненіе множителя для преобразованія 5-ой степени таково:

$$(M-1)^5(M-5)+256k^2k'^2M=0 \text{ *)}. \qquad (150)$$

Это уравненіе сдѣлается тождественнымъ съ уравненіемъ (124), если мы положимъ:

$$y=M,\ A=1,\ B=0,\ C=-64k^2k'^2. \qquad (151)$$

Отсюда видно, что уравненіе (150) не есть главное уравненіе Якоби. Такъ какъ въ этомъ уравненіи коэффиціентъ B равенъ нулю, то оно раціональною подстановкою съ раціональными коэффиціентами преобразуется въ главное.

§ 56. **Рѣшеніе уравненія Якоби 6-ой степени.**

Сравнимъ уравненіе:

$$Y^6+10\mathfrak{B}Y^3-4\mathfrak{C}Y+5\mathfrak{B}^2=0 \qquad (149)$$

съ резольвентой 6-ой степени икосаэдрическаго уравненія:

$$Y^6-\frac{10z}{h^3}Y^3+\frac{12z^2}{h^5}Y+\frac{5z^2}{h^6}=0 \text{ **)}. \qquad (152)$$

Эти уравненія сдѣлаются тождественными между собою, если мы выберемъ z и h такъ, чтобы они удовлетворяли условіямъ:

$$\frac{z}{h^3}=-\mathfrak{B},\quad \frac{3z^2}{h^5}=-\mathfrak{C}. \qquad (153)$$

Изъ уравненій (153) находимъ:

$$z=\frac{\mathfrak{C}^3}{27\mathfrak{B}^5},\ h=-\frac{\mathfrak{C}}{3\mathfrak{B}^2}. \qquad (154)$$

Итакъ, давая z и h значенія (154), мы достигнемъ того, чтобы уравненія (149) и (152) были между собою тождественны. Пусть величины z и h имѣютъ именно эти значенія.

---

*) См. Joubert. Sur les équations qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions éelliptiques. Стр. 76.

**) Глава X, уравненіе (173).

Припомнимъ формулы (172), (169), (133), (101) главы X:

$$\xi = 12(1-z)zhY, \qquad (155)$$

$$\xi = 5(\eta_1, \eta_2)^2, \qquad (156)$$

$$\eta_1 = u\sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}}, \qquad (157)$$

$$H_u^3(u) : T_u^2(u) : -1728f_u^5(u) = z : z-1 : 1. \qquad (158)$$

Эти формулы показываютъ, что корень Y уравненія (149) есть раціональная функція корня u икосаэдрическаго уравненія:

$$H_u^3(u) : T_u^2(u) : -1728f_u^5(u) = z : z-1 : 1. \qquad (158)$$

Корень Y выражается такъ:

$$Y = \frac{5}{12h(1-z)z}\left\{\frac{uT_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}\right\}^2, \qquad (159)$$

гдѣ u—одинъ изъ корней уравненія (158).

Для того, чтобы получить всѣ 6 корней уравненія (149), мы должны подставить въ формулу (159) вмѣсто u послѣдовательно слѣдующія шесть величинъ:

$$u,\ \mathfrak{T}(u),\ \mathfrak{T}S(u),\ \mathfrak{T}S^2(u),\ \mathfrak{T}S^3(u),\ \mathfrak{T}S^4(u), \qquad (160)$$

гдѣ u—одинъ изъ корней уравненія (158), а S и $\mathfrak{T}$ суть извѣстныя намъ основныя подстановки нормальной икосаэдрической группы.

Изъ тождественности уравненій (149) и (152) слѣдуетъ, что группы субституцій этихъ уравненій одинаковы.

Въ главѣ X мы видѣли, что основныя субституціи группы уравненія (152) таковы:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_\infty)\,(Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4), \\ T &= (Y_\infty\ Y_0)\,(Y_1,\ Y_4)\,(Y_2)\,(Y_3). \end{aligned}\right\} \qquad (161)$$

Таковы основныя субституціи группы главнаго уравненія Якоби.

Порядокъ группы главнаго уравненія Якоби равенъ 60.

Обѣ субституціи (161)—четныя. Слѣдовательно, всѣ подстановки группы главнаго уравненія Якоби тоже четныя.

Группа главнаго уравненія Якоби есть одна изъ подгруппъ знакоперемѣнной группы изъ шести буквъ порядка:

$$\frac{1.2.3.4.5.6}{2} = 360.$$

Отсюда слѣдуетъ, что знакоперемѣнная функція корней главнаго уравненія Якоби есть величина раціонально извѣстная. Дискриминантъ главнаго уравненія Якоби есть точный квадратъ.

Такъ какъ мы видѣли, что всякое уравненіе Якоби 6-ой степени раціональнымъ преобразованіемъ приводится къ главному, то его группа такова же, какъ и группа главнаго уравненія. Дискриминантъ его тоже точный квадратъ.

Для рѣшенія общаго уравненія Якоби, мы его преобразуемъ въ главное и затѣмъ рѣшимъ это главное уравненіе указаннымъ выше способомъ.

§ 57. **Дискриминантъ уравненія Якоби 6-ой степени.**

Займемся вычисленіями дискриминанта уравненія (124).

Обозначивъ для краткости лѣвую часть уравненія (124) черезъ $F(y)$, имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial\sqrt{y_h}}{\partial A} = -\dfrac{1}{2\sqrt{y_h}}\dfrac{\dfrac{\partial F(y_h)}{\partial A}}{\dfrac{\partial F(y_h)}{\partial y_h}}, \quad \dfrac{\partial\sqrt{y_h}}{\partial B} = -\dfrac{1}{2\sqrt{y_h}}\dfrac{\dfrac{\partial F(y_h)}{\partial B}}{\dfrac{\partial F(y_h)}{\partial y_h}}, \\ \dfrac{\partial\sqrt{y_h}}{\partial C} = -\dfrac{1}{2\sqrt{y_h}}\dfrac{\dfrac{\partial F(y_h)}{\partial C}}{\dfrac{\partial F(y_h)}{\partial y_h}}, \end{array}\right\} \quad (162)$$

гдѣ y_h есть одинъ изъ корней уравненія (124); индексъ h имѣетъ одно изъ значеній:

$$\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Подставивъ выраженія (162) въ равенства (129), находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
-\sqrt{y_k}\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial y_k} &= A\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial A}+b\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial B}+5c\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial C}\,,\\
-\sqrt{y_k y'_k}\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial y_k} &= b\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial A}+A'\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial B}+5g\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial C}\,,\\
-\sqrt{y_k y_k''}\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial y_k} &= c\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial A}+g\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial B}+5A''\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial C}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(163)$$

гдѣ $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

Дадимъ параметрамъ A, B, C такія конечныя значенія, чтобы уравненіе (124) имѣло кратные корни, а величинѣ y_k дадимъ значеніе одного изъ этихъ кратныхъ корней.

Изъ уравненія (124) видно, что при A, B, C конечныхъ величины y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 конечны. Въ такомъ случаѣ изъ уравненій (120) заключаемъ, что A_0, A_1, A_2 имѣютъ тоже конечныя величины. Изъ формулъ (126) видимъ, что при A, B, C, A_0, A_1, A_2 конечныхъ и величины A_0', A_1', A_2', A_0'', A_1'', A_2'' тоже конечны. Если такъ, то на основаніи формулъ (228) можемъ утверждать, что корни:

$$y_0',\ y_1',\ y_2',\ y_3';\ y_4',$$
$$y_0'',\ y_1'',\ y_2'',\ y_3'',\ y_4''$$

также имѣютъ конечныя величины.

Итакъ, въ формулахъ (163) величины:

$$A,\ A',\ A'',\ b,\ c,\ g,\ y_k,\ y_k',\ y_k''$$

конечны.

Такъ какъ y_k есть кратный корень уравненія (124), то величина:

$$\frac{\partial F(y_k)}{\partial y_k}$$

равна нулю.

Если такъ, то лѣвыя части равенствъ (163) равны нулю. Отсюда слѣдуетъ, что имѣетъ мѣсто одинъ изъ двухъ случаевъ.

Или:

$$1)\ \frac{dF(y_k)}{dA}=0,\ \frac{dF(y_k)}{dB}=0,\ \frac{dF(y_k)}{dC}=0; \qquad (164)$$

или:

$$2)\ \begin{vmatrix} A, & b, & c \\ b, & A', & g \\ c, & g, & A'' \end{vmatrix}=0, \qquad (165)$$

Подставивъ въ равенства (164) вмѣсто $F(y_k)$ выраженіе этой функціи, находимъ, что они совмѣстны только при условіяхъ:

$$y_k=0,\ B=A^3. \qquad (166)$$

При подстановкѣ значеній (166) въ уравненіе (124) мы получаемъ тождество.

Для того, чтобы величина

$$y_k=0$$

была кратнымъ корнемъ уравненія (124) при

$$B=A^3,$$

необходимо и достаточно, чтобы величины (166) обращали въ тождество слѣдующее уравненіе:

$$\frac{dF(y_k)}{dy_k}=0. \qquad (167)$$

Для выполненія этого условія необходимо, чтобы величина C равнялась A^5.

Подставивъ величины:

$$B=A^3,\ C=A^5$$

въ опредѣлитель (165), и принявъ во вниманіе формулы (131), находимъ, что онъ обращается въ нуль.

Отсюда слѣдуетъ, что во всякомъ случаѣ для существованія кратныхъ корней уравненія (124) необходимо, чтобы опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} A, & b, & c \\ b, & A', & g \\ c, & g, & A'' \end{vmatrix} \tag{168}$$

обращался въ нуль.

Раскрывъ опредѣлитель (168), подставивъ вмѣсто величинъ:

$$A',\ A'',\ b,\ c,\ g$$

ихъ выраженія (131) и расположивъ затѣмъ полученное выраженіе по степенямъ C, мы представимъ условіе (165) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{gathered} C^3-(20A^2B-16A^5)C^2-(40A^4B^2-45AB^3)C+ \\ +25A^3B^4-27B^5=0. \end{gathered} \tag{169}$$

Таково условіе, *необходимое* для того, чтобы уравненіе (124) имѣло кратные корни.

Отсюда слѣдуетъ, что выраженіе:

$$\begin{gathered} C^3-(20A^2B-16A^5)C^2-(40A^4B^2-45AB^3)C+ \\ +25A^3B^4-27B^5 \end{gathered} \tag{170}$$

есть или дѣлитель дискриминанта Δ уравненія (124) или, по крайней мѣрѣ, имѣетъ съ дискриминантомъ Δ общаго дѣлителя.

Въ послѣднемъ случаѣ, зная дискриминантъ Δ, мы можемъ найти этотъ общій дѣлитель. Это будетъ нѣкоторое выраженіе, раціональное относительно коэффиціентовъ A, B, C.

Докажемъ, что выраженіе (170) не имѣетъ раціональныхъ дѣлителей.

Допустимъ, что существуетъ раціональный дѣлитель выраженія (170). Такъ какъ коэффиціентъ при C въ выраженіи

(170) равенъ 1, то дѣлитель выраженія (170) можетъ быть только линейный или квадратный относительно C. Изъ двухъ взаимно дополнительныхъ дѣлителей выраженія (170) одинъ будетъ линейный, а другой—квадратный.

Линейный дѣлитель выраженія (170) долженъ быть такого вида:

$$C - M,$$

гдѣ M есть дѣлитель свободнаго члена:

$$25A^3B^4 - 27B^5$$

выраженія (170).

Слѣдовательно, M есть выраженіе вида:

$$M = B^h(25A^3 - 27B)^k, \tag{171}$$

гдѣ h равно одному изъ чиселъ: 0, 1, 2, 3, 4, а k—одному изъ чиселъ: 0, 1.

Если выраженіе (170) дѣлится нацѣло на

$$C - M,$$

то при подстановкѣ въ выраженіе (170) вмѣсто C величины M, выраженіе (170) должно обратиться въ нуль.

Подставивъ въ формулу (170) вмѣсто C выраженіе (171), мы замѣтимъ, что результатъ подстановки не обращается въ нуль ни при какихъ указанныхъ выше значеніяхъ показателей h и k.

Слѣдовательно, выраженіе (170) не имѣетъ раціональныхъ дѣлителей.

Если выраженіе (170) не имѣетъ раціональныхъ дѣлителей, то на основаніи сказаннаго выше мы можемъ утверждать, что оно само есть дѣлитель дискриминанта Δ.

Такъ какъ обращеніе въ нуль выраженія (170) есть условіе необходимое для того, чтобы уравненіе (124) имѣло кратные корни, то дискриминантъ Δ долженъ равняться нѣкоторой степени выраженія (170) или разниться отъ нея только постояннымъ множителемъ.

Такъ какъ мы знаемъ, что дискриминантъ Δ есть полный квадратъ, то степень эта должна быть четною.

Посмотримъ, какова эта степень.

Положимъ въ уравненіи (124):

$$y-A=Z. \tag{172}$$

Уравненіе (124) приметъ такой видъ:

$$Z^6-4AZ^5+10BZ^3-4CZ+5B^2-4AC=0. \tag{173}$$

Обозначивъ для краткости лѣвую часть этого уравненія черезъ $F(Z)$, имѣемъ:

$$F(Z)=0. \tag{174}$$

Дискриминантомъ этого уравненія будетъ служить та же самая величина Δ, ибо всѣ корни его разнятся отъ корней уравненія (124) на одно и то же количество A.

Посмотримъ, каковъ *вѣсъ* *) коэффиціентовъ A, B, C уравненія (173).

Изъ уравненія (173) видно, что вѣса эти таковы:

вѣсъ	коэффиціентовъ	A	равенъ	1,
»	»	B	»	3,
»	»	C	»	5.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ члены выраженія (170) одинаковаго вѣса, равнаго 15.

Обозначивъ производную по Z многочлена $F(Z)$ черезъ $F'(Z)$, мы можемъ представить дискриминантъ Δ въ слѣдующемъ видѣ:

---

*) Если мы выразимъ коэффиціентъ уравненія черезъ корни, то степень этой функціи относительно корней уравненія называется вѣсомъ даннаго коэффиціента. Всякій инваріантъ формы есть раціональная однородная функція ея корней. Степень этой функціи относительно корней называется вѣсомъ инваріанта.

$$\Delta = -\prod_{k=\infty,\,0,\,1,\,2,\,3,\,4.} F'(Z_k), \tag{175}$$

гдѣ:

$$Z_\infty,\ Z_0,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ Z_4$$

суть корни уравненія (173).

Изъ формулы (175) видно, что вѣсъ выраженія Δ равенъ 30, т. е. въ два раза больше вѣса выраженія (170).

Отсюда слѣдуетъ, что дискриминантъ Δ, независимо отъ постояннаго множителя, равенъ квадрату выраженія (170):

$$\Delta = K\{C^3 - (20A^2B - 16A^5)C^2 - (40A^4B^2 - 45AB^3)C + \\ + 25A^3B^4 - 27B^5\}^2, \tag{176}$$

гдѣ K—нѣкоторое постоянное число, не зависящее отъ A, B, C.

Для опредѣленія K положимъ:

$$A = 0,\ B = 0,$$

а C оставимъ произвольнымъ.

Уравненіе (124) приметъ видъ:

$$y^6 - 4Cy = 0. \tag{177}$$

Дискриминантъ этого уравненія равенъ:

$$4^6\, 5^5\, C^6. \tag{178}$$

Положивъ:

$$A = 0,\ B = 0$$

въ формулѣ (176), находимъ, что тотъ же дискриминантъ равенъ:

$$KC^6. \tag{179}$$

Слѣдовательно:

$$KC^6 = 4^6\, 5^5\, C^6. \tag{180}$$

Откуда:

$$K = 4^6\,5^5. \tag{181}$$

Итакъ, дискриминантъ Δ уравненія (124) равенъ:

$$\Delta = 4^6.5^5\{C^3 - (20A^2B - 16A^5)C^2 - (40A^4B^2 - 45AB^3)C + \\ + 25A^3B^4 - 27B^5\}^2. \tag{182}$$

§ 58. **Связь между уравненіемъ 5-ой степени и уравненіемъ Якоби 6-ой степени.**

Мы видѣли, что корни главнаго уравненія 5-ой степени и корни главнаго уравненія Якоби суть раціональныя функціи корней икосаэдрическаго уравненія. Уже отсюда видна связь, существующая между уравненіемъ 5-ой степени и уравненіемъ Якоби 6-ой степени.

Эта связь была обнаружена Эрмитомъ *) и положена имъ въ основу способа рѣшенія уравненія 5-ой степени въ модулярныхъ эллиптическихъ функціяхъ.

Остановимся на уясненіи этой связи.

Обозначимъ снова буквами:

$$y_\infty,\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \tag{117}$$

корни уравненія Якоби (124).

Субституціи группы этого уравненія могутъ быть составлены изъ двухъ основныхъ субституцій:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= (y_\infty)(y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4), \\ \tau &= (y_\infty,\ y_0)\ (y_1,\ y_4)\ (y_2)\ (y_3). \end{aligned}\right\}^{**)} \tag{183}$$

Возьмемъ функцію:

$$U = (y_\infty - y_0)(y_1 - y_4)(y_3 - y_2). \tag{184}$$

Эта функція подъ вліяніемъ субституцій:

---

*) Hermite. Sur la résolution de l'équation du cinquième degre. Comptes Bendus. T. 46.

**) См. главу X, формулы (174).

$$\sigma^0=1,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \sigma^3,\ \sigma^4 \tag{185}$$

принимаетъ слѣдующія значенія:

$$\left.\begin{aligned}
U_0&=(y_\infty-y_0)(y_1-y_4)(y_3-y_2),\\
U_1&=(y_\infty-y_1)(y_2-y_0)(y_4-y_3),\\
U_2&=(y_\infty-y_2)(y_3-y_1)(y_0-y_4),\\
U_3&=(y_\infty-y_3)(y_4-y_2)(y_1-y_0),\\
U_4&=(y_\infty-y_4)(y_0-y_3)(y_2-y_1).
\end{aligned}\right\} \tag{186}$$

Примѣняя къ функціямъ (186) субституцію τ, найдемъ тѣ же пять величинъ:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{U_0}=U_0,\ \overline{U_1}=U_2,\ \overline{U_2}=U_1,\\
\overline{U_3}=U_4,\ \overline{U_4}=U_3.
\end{aligned}\right\} \tag{187}$$

Отсюда мы заключаемъ, что подъ вліяніемъ субституцій группы уравненія Якоби функція U пріобрѣтаетъ всего пять различныхъ значеній. Функція U есть корень нѣкотораго уравненія 5-ой степени.

Займемся вычисленіемъ коэффиціентовъ этого уравненія. Изъ формулъ (118) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{y_\infty}+\sqrt{y_0}&=-2(\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_0+A_1+A_2\ {*}),\\
\sqrt{y_\infty}-\sqrt{y_0}&=2(\varepsilon+\varepsilon^4)A_0-A_1-A_2,\\
\sqrt{y_1}+\sqrt{y_4}&=2A_0+(\varepsilon+\varepsilon^4)A_1+(\varepsilon+\varepsilon^4)A_2,\\
\sqrt{y_1}-\sqrt{y_4}&=(\varepsilon-\varepsilon^4)A_1-(\varepsilon-\varepsilon^4)A_2,\\
\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}&=2A_0+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_2,\\
\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}&=(\varepsilon^2-\varepsilon^3)A_1-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)A_2,
\end{aligned}\right\} \tag{188}$$

---

*) На основаніи тождества:

$$\sqrt{5}=1+2(\varepsilon+\varepsilon^4).$$

Изъ формулъ (188) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &y_\infty - y_0 = 4A_0^2 - (A_1 + A_2)^2 - 2A_0(A_1 + A_2), \\ &(\sqrt{y_0} + \sqrt{y_1})(\sqrt{y_3} + \sqrt{y_2}) = \\ &= 4A_0^2 - (A_1 + A_2)^2 - 2A_0(A_1 + A_2), \\ &(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_4})(\sqrt{y_3} - \sqrt{y_2}) = (A_1 - A_2)^2\sqrt{5}. \end{aligned}\right\} \quad (189)$$

Перемноживъ между собою равенства (189) и принявъ во вниманіе формулу (184), находимъ:

$$U = \sqrt{5}\{-4A_0^2 + (A_1 + A_2)^2 + 2A_0(A_1 + A_2)\}^2(A_1 - A_2)^2. \quad (190)$$

Положивъ:

$$\{-4A_0^2 + (A_1 + A_2)^2 + 2A_0(A_1 + A_2)\}(A_1 - A_2) = V, \quad (191)$$

находимъ:

$$U = \sqrt{5}\, V^2. \quad (192)$$

Величина V есть раціональная функція величинъ A_0, A_1, A_2. Поэтому она, такъ же какъ и U, есть раціональная функція корней уравненія Якоби (124); но число значеній ея, необходимо, вдвое больше числа значеній функціи U. Эти значенія попарно разнятся знаками:

$$\left.\begin{aligned} &V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4, \\ -&V_0,\ -V_1,\ -V_2,\ -V_3,\ -V_4. \end{aligned}\right\} \quad (193)$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе, которому удовлетворяютъ *пять* величинъ:

$$V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4 \quad (194)$$

имѣетъ коэффиціенты, ирраціональные, содержащіе въ себѣ только квадратные радикалы.

Извѣстный членъ этого уравненія равенъ:

$$-V_0\, V_1\, V_2\, V_3\, V_4 = -\frac{1}{5\sqrt[4]{5}}\sqrt{U_0\, U_1\, U_2\, U_3\, U_4}. \quad (195)$$

Выраженіе:

$$U_0\ U_1\ U_2\ U_3\ U_4,$$

какъ видно изъ формулъ (186) равно произведенію всевозможныхъ разностей корной уравненія (124) взятыхъ попарно. Слѣдовательно оно равно квадратному корню изъ дискриминанта Δ уравненія Якоби (124).

Итакъ, свободный членъ того уравненія, которому удовлетворяютъ величины (194), равенъ:

$$-\frac{1}{5\sqrt[4]{5}}\sqrt[4]{\Delta}, \tag{196}$$

гдѣ Δ есть дискриминантъ уравненія Якоби (124) и опредѣляется формулою (182).

Такъ какъ Δ есть полный квадратъ, то коэффиціенты A, B, C уравненія (124) входятъ въ формулѣ (196) только подъ знакомъ квадратнаго корня.

Введемъ вспомогательныя величины:

$$\left.\begin{aligned} &C_1 = -A_1(4A_0^2 - A_1A_2),\ C_2 = 2A_0A_1^2 - A_2^3,\\ &C_4 = A_2(4A_0^2 - A_1A_2),\ C_3 = -2A_0A_2^2 + A_1^3. \end{aligned}\right\} \tag{197}$$

Въ такомъ случаѣ, какъ видно изъ формулы (191), величина V выразится такъ:

$$V = C_1 + C_2 + C_3 + C_4. \tag{198}$$

Изъ формулъ (120) видно, что подъ вліяніемъ субституціи σ величины A_0, A_1, A_2 переходятъ въ:

$$A_0,\ \varepsilon A_1,\ \varepsilon^4 A_2.$$

Отсюда слѣдуетъ, что подъ вліяніемъ субституціи σ величины:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$$

переходятъ въ

$$\varepsilon C_1,\ \varepsilon^2 C_2,\ \varepsilon^3 C_3,\ \varepsilon^4 C_4.$$

Функція:

$$V_0 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \tag{198'}$$

подъ вліяніемъ субституціи σ переходитъ въ

$$V_1 = \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^3 C_3 + \varepsilon^4 C_4. \tag{199}$$

Совершивъ надъ функціею V_0 субституцію σ^k, мы найдемъ, что подъ вліяніемъ этой субституціи она перейдетъ въ

$$V_k = \varepsilon^k C_1 + \varepsilon^{2k} C_2 + \varepsilon^{3k} C_3 + \varepsilon^{4k} C_4. \tag{200}$$

Отсюда находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma V_k = 0, \\ &\Sigma V_k^2 = 10(C_1 C_4 + C_2 C_3), \\ &\Sigma V_k^3 = 15(C_1^2 C_3 + C_2^2 C_1 + C_3^2 C_4 + C_4^2 C_2), \\ &\Sigma V_k^4 = 10\{3(C_1 C_4 + C_2 C_3)^2 + \\ &\quad + 2(C_1^3 C_2 + C_2^3 C_4 + C_3^3 C_1 + C_4^3 C_3) + 6 C_1 C_2 C_3 C_4\}. \end{aligned}\right\} \tag{201}$$

Подставивъ вмѣсто C_1, C_2, C_3, C_4 выраженія (197), и пользуясь формулами (123), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma V_k = 0, \\ &\Sigma V_k^2 = -20B, \\ &\Sigma V_k^3 = 0, \\ &\Sigma V_k^4 = 20(AC + B^2). \end{aligned}\right\} \tag{202}$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе, которому удовлетворяетъ функція V, таково:

$$V^5 + 10BV^3 + 5(9B^2 - AC)V - \frac{\sqrt[4]{\Delta}}{5\sqrt[4]{5}} = 0, \tag{203}$$

гдѣ Δ есть дискриминантъ уравненія (124), опредѣляемый формулою (182).

Это—уравненіе діагональнаго типа.

Если въ уравненіи Якоби (124) коэффиціентъ B равенъ нулю, то уравненіе (203) приметъ видъ:

$$V^5 - 5ACV - \frac{\sqrt[4]{\Delta}}{5\sqrt[4]{5}} = 0. \tag{204}$$

Это—уравненіе 5-ой степени въ формѣ Жеррарда.

Имѣя уравненіе (203), легко найти то уравненіе, которому удовлетворяетъ функція U.

Перенеся членъ:

$$\frac{\sqrt[4]{\Delta}}{5\sqrt[4]{5}}$$

во вторую часть уравненія (203) и возведя обѣ части полученнаго уравненія въ квадратъ, находимъ:

$$V^2[V^4+10BV^2+5(9B^2-AC)]^2=\frac{\sqrt{\Delta}}{25\sqrt{5}}, \qquad (205)$$

или, на основаніи равенства (192):

$$U[U^2+10\sqrt{5}BU+25(9B^2-AC)]^2=\sqrt{\Delta}. \qquad (206)$$

Въ этомъ уравненіи всѣ коэффиціенты раціональны, потому что Δ есть полный квадратъ.

Если коэффиціентъ B равенъ нулю, то уравненіе (206) приметъ такой видъ:

$$U^5-50ACU^3+5^4A^3C^2U-\sqrt{\Delta}=0. \qquad (207)$$

Это—уравненіе діагональнаго типа.

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Заканчивая свою работу, позволю себѣ еще разъ указать на ея главную задачу.

Литература той области математики, которой касается моя работа, весьма обширна, какъ сама по себѣ, такъ въ особенности по количеству тѣхъ побочныхъ вопросовъ, которые, необходимо, приходится въ ней разсматривать.

Собрать эту литературу, разбросанную главнымъ образомъ по журналамъ, обработать ее и представить возможно болѣе стройное и полное рѣшеніе поставленной задачи—было моею цѣлью.

При этомъ, понятно, приходилось весьма многое разрабатывать вновь или пополнять своими изслѣдованіями.

Размѣры работы оказались значительно больше, чѣмъ я предполагалъ въ началѣ. Вотъ почему, чтобы не увеличивать ихъ еще болѣе, мнѣ пришлось обойти нѣсколько вопросовъ, могущихъ легко возникнуть при чтеніи работы.

Такъ, задача Куммера о раціональномъ или, даже, вообще алгебраическомъ интегрированіи уравненія:

$$[R(z)]_z + \; + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)^2 \left\{ \frac{1 - \frac{1}{\lambda_1^2}}{\frac{2}{c^2} R^2(z)} + \frac{1 - \frac{1}{\lambda_2^2}}{2\left(\frac{1}{c} R(z) - 1\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda^2} - 1}{\frac{2}{c} R(z)\left(\frac{1}{c} R(z) - 1\right)} \right\} = \frac{1 - \frac{1}{\lambda_1'^2}}{2z^2} + \frac{1 - \frac{1}{\lambda_2'^2}}{2(z-1)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{\lambda_1'^2} + \frac{1}{\lambda_2'^2} - \frac{1}{\lambda'^2} - 1}{2z(z-1)}$$

находится въ тѣсной связи съ изслѣдованіями главы VIII. Я ограничился указаніемъ на очевидное рѣшеніе задачи:

$$\lambda' = \lambda, \; \lambda_1' = \lambda_1, \; \lambda_2' = \lambda_2, \; \frac{1}{c} R(z) = z.$$

Подробное изученіе рѣшенія задачи Куммера можно найти у Гурза, Папперицъ, Клейна, Бріоски, Фишера.

Точно также я не имѣлъ возможности остановиться подробнѣе на уравненіяхъ 5-ой степени и уравненіяхъ Якоби. Эти изслѣдованія можно найти у Эрмита, Бріоски, Кронекера, Клейна. Не говорю уже о трансцендентномъ рѣшеніи алгебраическихъ уравненій, о которомъ неоднократно было мною упомянуто. Во всякомъ случаѣ, когда основные вопросы задачи ясно поставлены и разсмотрѣны достаточно полно, то рѣшенія ихъ дѣлаются точками отправленія для дальнѣйшихъ изслѣдованій, отношеніе которыхъ къ основной задачѣ вполнѣ ясно.

Если мнѣ удалось освѣтить рѣшеніе этой основной задачи, то моя цѣль достигнута.

Приведу, наконецъ, литературу, послужившую отчасти непосредственнымъ источникомъ моей работы, отчасти касающуюся вопросовъ, имѣющихъ къ ней близкое отношеніе.

ЛИТЕРАТУРА.

1) *Schwarz.* Gesammelte Mathematische Abhandlhngen. Berin. 1890.

2) *Klein.* Vorlesungen über das Ikosaeder. Leipzig, 1884.

3) *Klein.* Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Leipzig, 1890, 1892.

4) *Klein.* Ueber eine geometrische Representation der Resolventen algebraischer Gleichungen. Math. Ann. Bd. IV.

5) *Klein.* Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Math. Ann. Bd. IX.

6) *Klein.* Ueber lineare Differentialgleichungen. Math. Ann. Bd. XI, XII.

7) *Klein.* Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. Math. Ann. Bd. XII, а также въ Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. 9 Heft.

8) *Klein.* Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünten Grades. Math. Ann. Bd. XIV.

9) *Klein.* Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade. Math. Ann. Bd. XV.

10) *Klein.* Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen 6 und 7 Grades Math. Ann. Bd. XXVIII.

11) *Klein.* Ueber lineare Differentialgleichungen. Sitzungsberichte der physikalich-medicinischen Sociät zu Erlangen. 8 Heft.

12) *Brioschi.* Extrait d'une lettre a M. Klein. Math. Ann. Bd. XI.

13) *Brioschi.* La theorie des Formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. Math. Ann. Bd. XI.

14) *Brioschi.* Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Math. Ann. Bd. XIII.

15) *Brioschi.* Sur quelques équations différentielles. Math. Ann. Bd. XXVI.

16) *Brioschi.* Sulle equazioni del moltiplicatore per la transformazione della funzioni ellittische. Annali di Matematica. T. I, serie I.

17) *Brioschi.* Sulla risoluzione dell equazioni di quinto grado два мемуара въ Annali di Matematica. T. I, serie I.

18) *Brioschi.* La soluzione generale delle equazioni del 5 grado. Annali di Matematica. T. I, serie II.

19) *Brioschi.* Sulle equazioni differenziali del tetraedro, del ottaedro e del icosaedro. Annali di Matematica. T. X, serie II.

20) *Brioschi.* Sur l'équation du 5-me degré (lettre à M. Hermite) Comptes Rendus. Vol. 73.

21) *Brioschi.* Sur quelques formes binaires. Sitzunsberichte der physikalich-medicinischen Sociätat zu Erlanden. 8 Heft.

22) *Brioschi.* Sopra alcuni recenti risultati ottenuti dal sig. Klein nella risoluzione delle equazioni del quinto grado. Atti della Reale Accademia dei Lincei. Transunti. Vol. I, serie III.

23) *Brioschi.* Sulla equazione dell ottaedro. Atti della Reale Accademia dei Lincei. Transunti. Vol. III, serie III.

24) *Gordan.* Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen. Math. Ann. Bd. XII.

25) *Gordan.* Binäre Formen mit verschwindenden Covarianten. Math. Ann. Bd. XII. Весьма интересныя изслѣдованія Гордана, сюда относящіеся, приведены въ его курсѣ: Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. II. Leipzig, 1887.

26) *Gordan.* Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Math. Ann. Bd. XIII.

27) *Gordan.* Ueber die Gleichungen fünften Grades. Math. Ann. Bd. XXVIII

28) *Gordan.* Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. 8 Heft.

29) *Fuchs.* Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Два мемуара. Crelles Journal. Bd. 81, 85.

30) *Cayley.* On the correspondence of Homographics and Partitions. Math. Ann. Bd. XV.

31) *Cayley.* On the finite Groups of linear Transformations of a Variable Math. Ann. Bd. XV.

32) *Cayley.* Note on a hypergeometric series. Quarterly journal of pure and applied Mathematics. Vol. XVI.

33) *Cayley.* Note on the octaedron function. Quarterly journal of pure and applied Mathematics. Vol. XVI.

34) *Cayley.* On the Schwarzian Derivative and the Pelyhedral Functions. Transactions of the Cambridge philosophcal society. Vol. XIII.

35) *Cayley.* On the Jacobian sextic Equation. Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Vol. XVIII.

36) *Poincaré.* Théorie des Groupes fuchsiennes. Acta Math. T. I

37) *Poincaré.* Memoire sur les Groupes Kleineens. Acta Math. T. III.

38) *Hermite.* Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré. Paris 1859.

39) *Hermite.* Sur l'invariant du 18-e ordre des formes du 5-e degré et sur le rôle qn'il joue dans la résolution de l'équation du 5 degré. Crelles Journal. Bd. 59.

40) *Kronecker.* Ueber die Gleichungen fünften Grades. Crelles Journal. Bd. 59.

41) *Kronecker.* Mittheilung über seine algebraische Arbeiten. Monatsberichte der Königlichen Akademie zu Berlin. 1861.

42) *Kiepert.* Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Crelles Journal. Bd. 87.

43) *Jordan.* Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique. Crelles Journal. Bd. 84.

44) *Jordan.* Sur la résolution des équations les unes par les autres. Comptes Rendus. Vol. 72.

45) *Jordan.* Sur les équations linéaires du 2-e ordre, dont les intégrales sont algébriques. Comptes Rendus. Vol. 82.

46) *Cole.* A Contribution of the Theory of the General Equation of the sixth Degree. American Journal of Mathematics. Vol. VIII.

47) *Cole.* Kleins Jkosaeder. American Journal of Mathematics. Vol. IX.

48) *Fischer.* Konforme Abbildung sphärischer Dreiecke auf einander mittelst algebraischer Functionen. Leipzig, 1885.

49) *Pepin.* Méthode pour obtenir les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du second ordre. Atti dell' Accademia pontifica dei nuovi Lincei. 1881.

50) *Puchta.* Das Oktaeder und die Gleichungen vierten Grades. Denkschrift der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. 41.

51) *Autonne.* Sur les intégrales algébriques des équations differentielles à coefficients rationnelles. Comptes Rendus. Vol. 96.

52) *Besso.* Sopra una classe d'equazioni del sesto grado risolubili per serie ipergeometrische. Atti della Reale Accademia dei Lincei. Serie III. Vol. XIV.

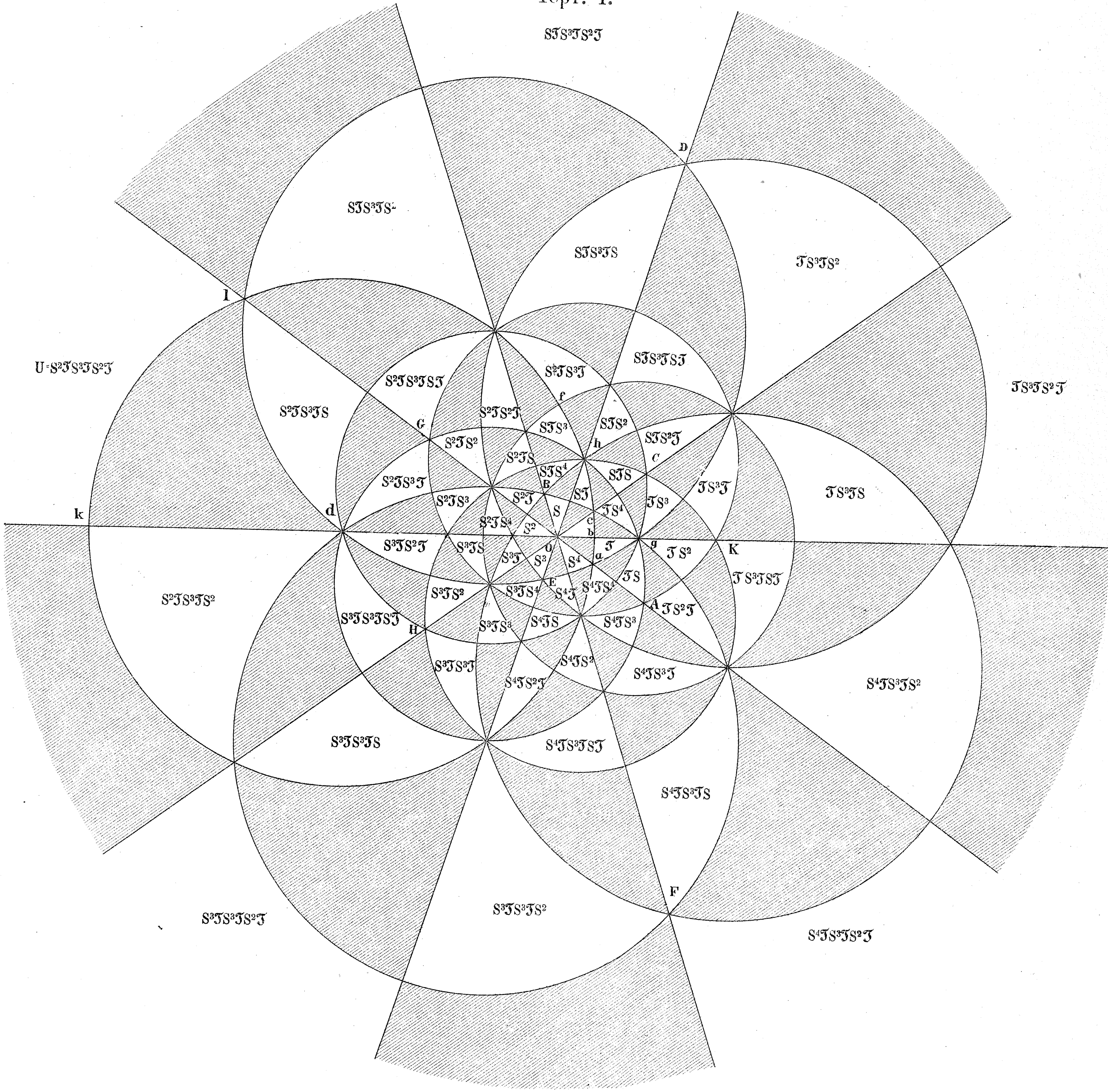
53) *Goursat.* Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéometrique. Thèses presenteés à la Faculté des sciences de Paris. 1881.

54) *Васильевъ.* О функціяхъ раціональныхъ, аналогичныхъ съ функціями двоякопеaccording періодическими. Казань. 1880.

55) *Савичъ.* О линейныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ. С.-Петербургъ. 1892.

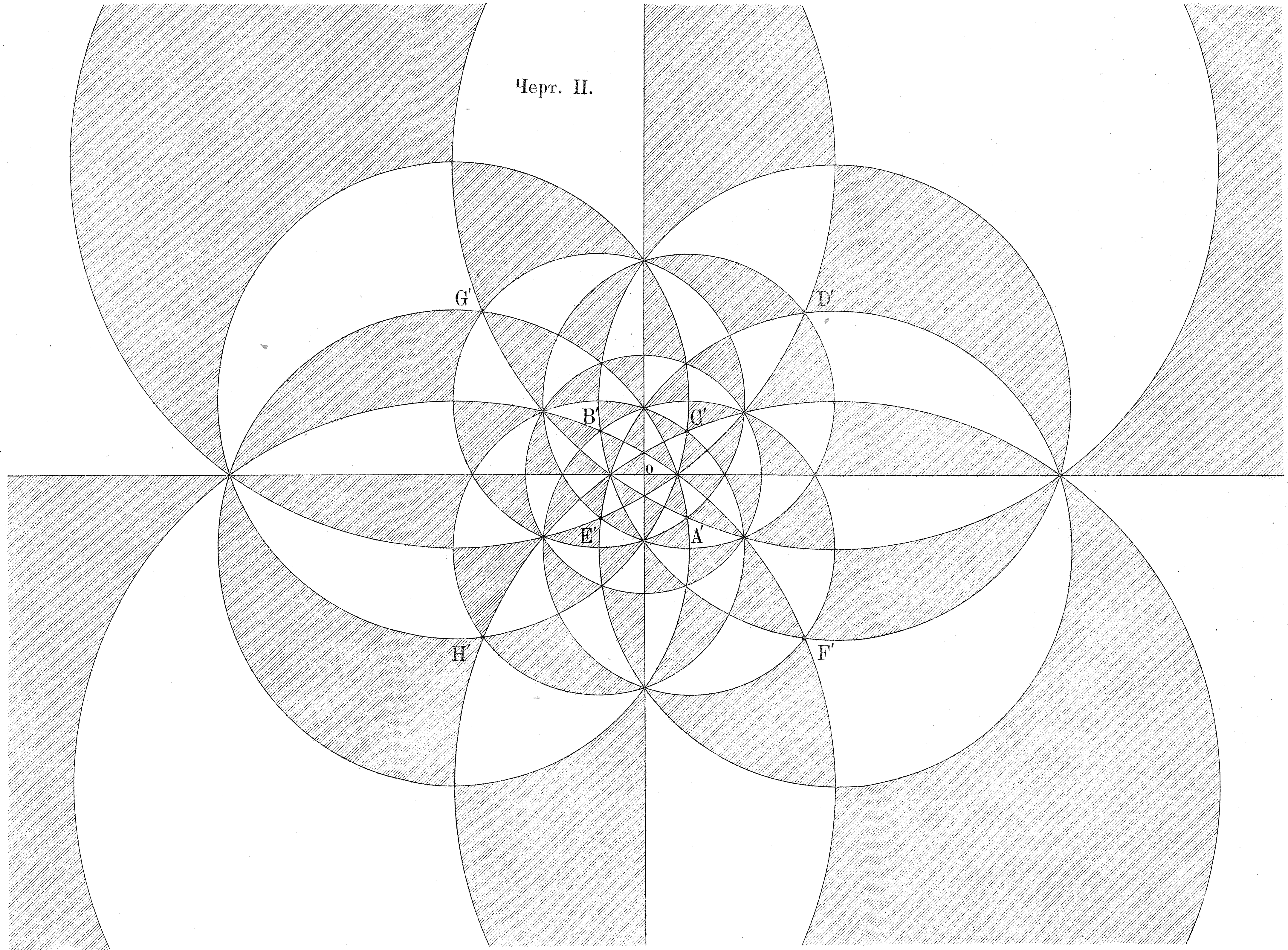
56) *Ермаковъ.* Круговое преобразованіе. Мат. Сб. 1888.

Черт. I.



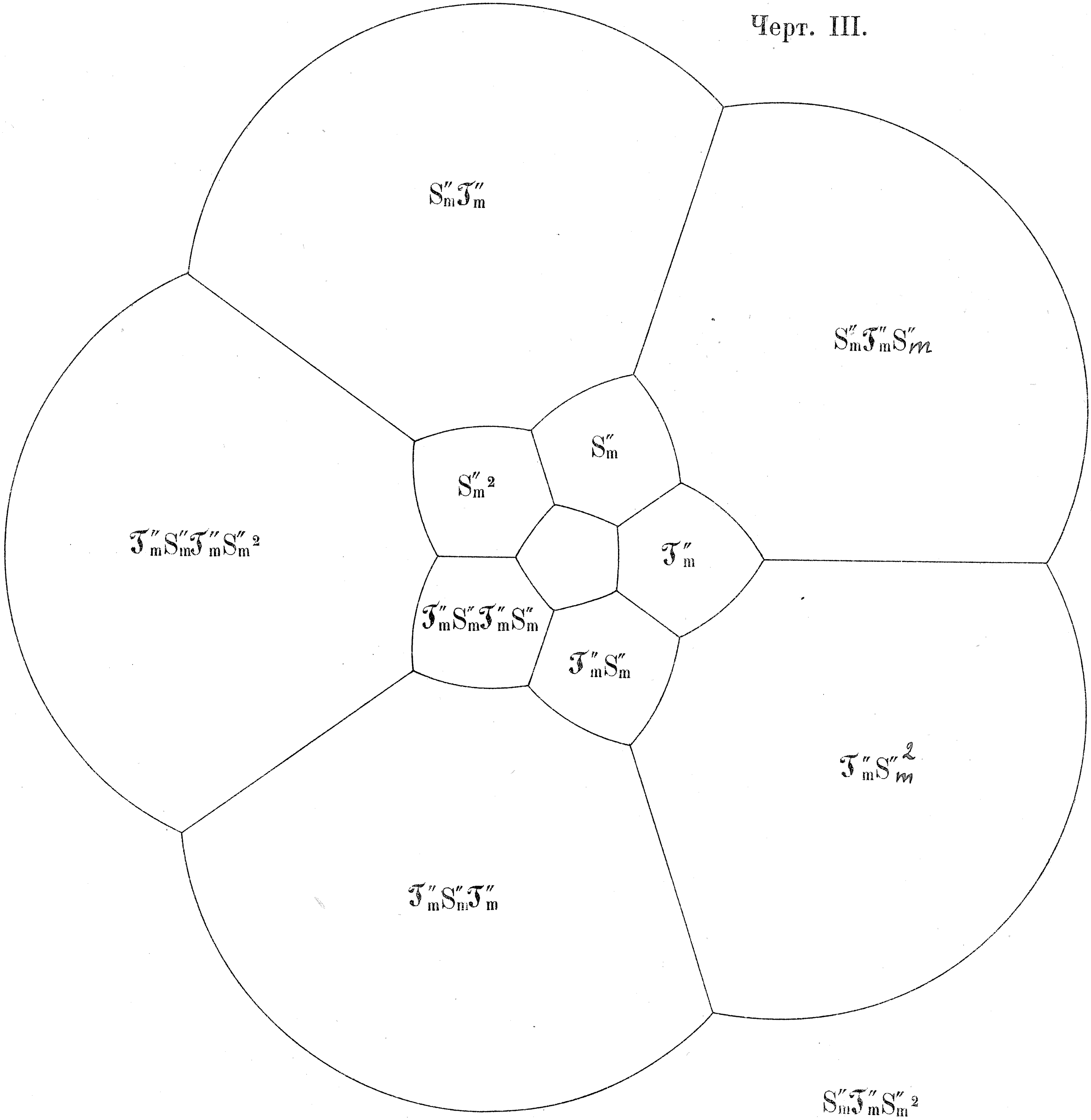
STS³TS²T
STS³TS²
STS³TS
TS³TS²
U=S²TS³TS²T
TS³TS²T
S²TS³TS
STS³TST
S²TS³TST
S²TS³T
TS³TS
S²TS²T
STS²T
S²TS³TS²
S³TS²T
TS³TST
S³TS³TST
S⁴TS³TS²
S³TS³TS
S⁴TS³TST
S⁴TS³TS
S³TS³TS²
S³TS³TS²T
S⁴TS³TS²T
D
l
k
d
G
H
K
A
C
F
f
h
g
O
a
b
c
B
E

Черт. II.

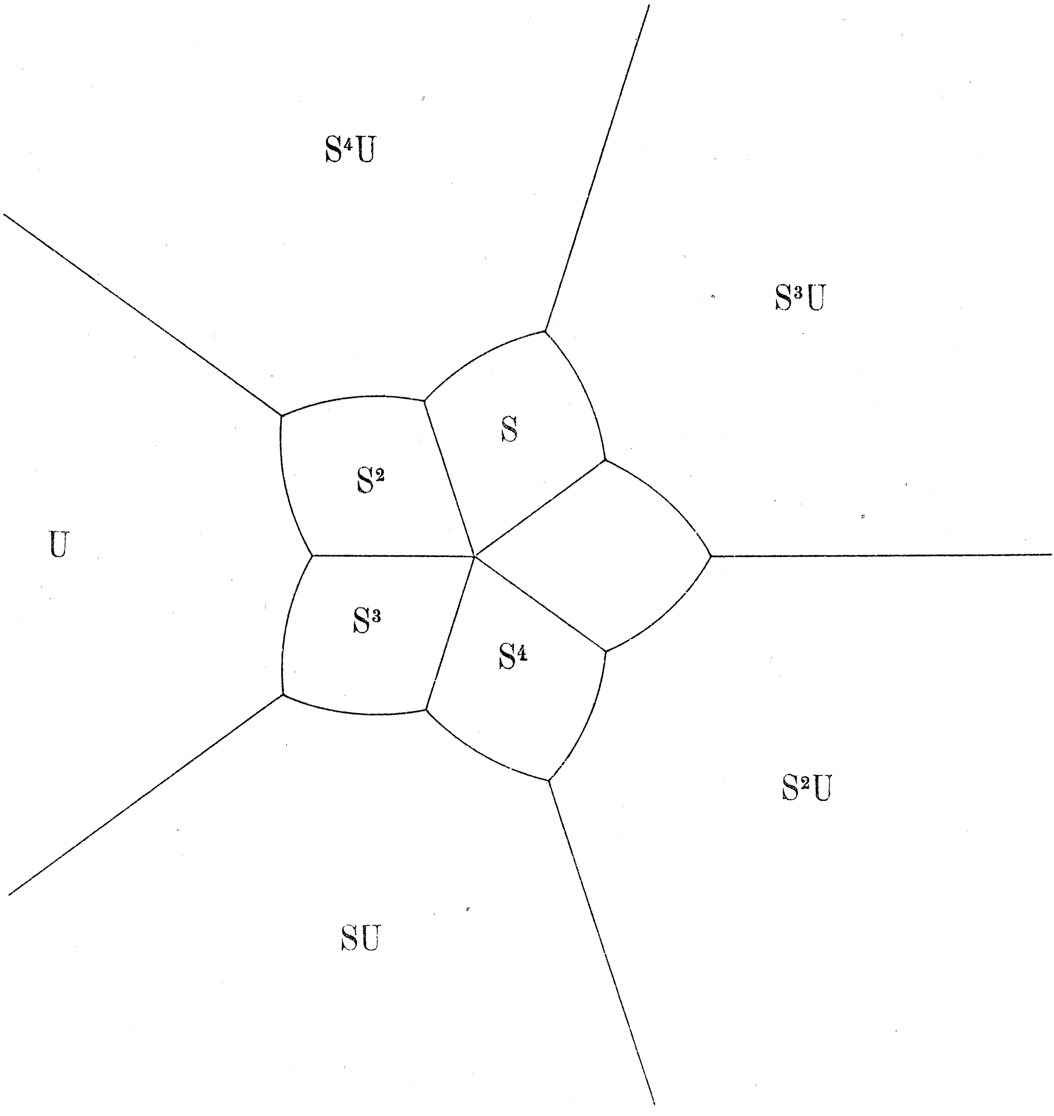


Автолит. Ф Кремера, Звѣринская 46, Спб.

Черт. III.


$S''_m \mathfrak{T}''_m$
$S''_m \mathfrak{T}''_m S''_m$
$\mathfrak{T}''_m S''_m \mathfrak{T}''_m S''^2_m$
S''^2_m
S''_m
$\mathfrak{T}''_m$
$\mathfrak{T}''_m S''_m \mathfrak{T}''_m S''_m$
$\mathfrak{T}''_m S''_m$
$\mathfrak{T}''_m S''^2_m$
$\mathfrak{T}''_m S''_m \mathfrak{T}''_m$
$S''_m \mathfrak{T}''_m S''^2_m$

Черт. IV.



ОПЕЧАТКИ.

Стр.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
621	8 сн.	$z = a_i$	$z = \alpha_i$
622	13 св.	$\varphi_i(z - \alpha_i)$	$\varphi_j(z - \alpha_i)$
627	10 сн.	(20)	(21)
627	5 »	$\eta_1 = \left[-C\int\frac{dz}{\eta_1^2} + Const'\right]\eta_1$	$\eta_2 = \left[-C\int\frac{dz}{\eta_1^2} + Const'\right]\eta_1$
633	13 св. 14 »	(34)	(35)
641	6 сн.	$\varphi_1(z - \alpha_i)$	$\varphi_2(z - \alpha_i)$
657	14 св.	$\gamma\eta' + \delta\eta'' + \eta_2$	$\gamma\eta' + \delta\eta'' = \eta_2$
687	12 »	$\dfrac{1 - \dfrac{1}{\lambda_1^2}}{2\left(\dfrac{1}{c}R(z) - 1\right)^2}$	$\dfrac{1 - \dfrac{1}{\lambda_2^2}}{2\left(\dfrac{1}{c}R(z) - 1\right)^2}$
709	5 сн.	u_1	u
719	5 св.	α_2	λ_2
742	4 сн.	$\theta = \dfrac{1}{2\cos 36^0}$	$tg\theta = \dfrac{1}{2\cos 36^0}$
771	7 св.	$= \begin{vmatrix} e^{\frac{\pi i}{m}}, & 0 \\ 0, & e^{-\frac{\pi i}{m}} \end{vmatrix}$	$\sigma = \begin{vmatrix} e^{\frac{\pi i}{m}}, & 0 \\ 0, & e^{-\frac{\pi i}{m}} \end{vmatrix}$
774	14 сн.	$S\left(\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{1}{\lambda_2}, z\right)$	$s\left(\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{1}{\lambda_2}, z\right)$
781	7 св.	$(u^4 + 2i\sqrt{3}\,u^2 + 1)^2$	$(u^4 + 2i\sqrt{3}\,u^3 + 1)^3$
788	5 »	§ 29	§ 26
790	6 »	m_2	m_3

Томъ XVII.

Стр.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
15	15 сн.	$(\zeta-3)^2$	$(\zeta-3)^3$
22		Во второмъ членѣ правой части равенства (82) пропущенъ множитель $z^{\frac{1}{3}}$.	
25		Во второмъ членѣ правой части равенства (94) пропущенъ множитель $z^{\frac{1}{3}}$.	
49	6 сн.	$\overset{h=4}{\underset{h=1}{P}}$	$\overset{h=4}{\underset{h=0}{P}}$
55	1 св.	$z^{\frac{5}{24}}$	$z^{-\frac{5}{24}}$
57		Во второй части равенства (100) пропущенъ множитель $z^{-\frac{11}{60}}$.	
65	2 сн.	(11)	(9)
66	2 св.	I_0	Γ_0
83	12 сн.	$R(u)$	$R(z)$
85	9 св.	$F_1(u)$	$F_1(\zeta)$
108	1 сн.	$[\mathfrak{T}S(u)]^2$	$[\mathfrak{T}S(u)]^3$
115	13 ›	12	6
147	9 св.	$n-2$	$n-1$
156	8 ›	I	Γ

ПОПРАВКА.

На стр. 652 тома XVI вып. 4 при формулировкѣ теоремы 21 есть неточность. Эту теорему слѣдуетъ формулировать такъ:

«*При $N=n$ уравненіе (93) неприводимо и тождественно съ уравненіемъ (83). При $N=\frac{n}{2}$ уравненіе (93) распадается на два неприводимыхъ уравненія степени $\frac{n}{2}$; одно изъ этихъ уравненій тождественно съ уравненіемъ (83)*».

Сообразно съ этимъ разсужденія начиная съ строки 13 слѣдуетъ измѣнить такъ:

«Отсюда слѣдуетъ, что функціи:

$$\frac{H^{\mu_1}(u)}{f^{\mu}(u)} \text{ и } \mathfrak{R}(z)$$

суть полные квадраты. Поэтому:

$$\mu=2\lambda,\ \mu_1=2\lambda_1,\ \mathfrak{R}(z)=R^2(z), \tag{94}$$

гдѣ λ и λ_1 суть цѣлыя числа, а $R(z)$—раціональная функція z.

Одно изъ двухъ уравненій степени $\frac{n}{2}$:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)}=\pm R(z),$$

—его мы будемъ представлять въ видѣ:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)} = R(z), \tag{95}$$

имѣетъ съ неприводимымъ уравненіемъ (83) той же степени $\frac{n}{2}$ общій корень. Слѣдовательно, оно тождественно съ уравненіемъ (83)».

ОГЛАВЛЕНІЕ. Т. XVI.

Глава IV.

Конечныя группы линейныхъ подстановокъ.

Глава V.

Нормальные виды алгебраическихъ уравненій, имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка.

Глава VI.

Инваріантныя свойства первичныхъ формъ $f(y', y'')$, $H(y', y'')$, $T(y', y'')$. Соотношенія между первичными функціями различныхъ типовъ.

Глава VII.

Рѣшеніе уравненій, имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Глава VIII.

Алгебраическія уравненія, имѣющія корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Глава IX.

Общая задача объ алгебраическихъ уравненіяхъ, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Глава X.

Резольвенты уравненій, имѣющихъ группу линейныхъ подстановокъ.

Т. XVII.

Стран.

Глава XI.

Рѣшеніе уравненій: 3-ей, 4-ой, 5-ой степени и уравненія Якоби 6-ой степени