Aritmetika za učiteljišča.

Spisal

dr. Fr. vitez Močnik.

Po drugem natisku poslovenil

J. Celestina.

V Ljubljani.

Natisnila in založila «Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg».

1885.

Kazalo.

Sedmi oddelek.

O najvažnejših gospodarskih in trgovskih računih.

Osmi oddelek.

O potencah in korenih.

Deveti oddelek.

O jednačbah prve stopinje z več neznankami.

Deseti oddelek.

O jednačbah druge stopinje z jedno neznanko.

Jednajsti oddelek.

O logaritmih.

Dodatek.

O jednostavnem knjigovodstvu.

U v o d.

§ 1.

Kar koli je iz istovrstnih delov sestavljeno, ali kar si vsaj iz istovrstnih delov sestavljeno misliti moremo, imenujemo količino *(Grösse)*. Vsako količino je môči povečati in zmanjšati.

Znanstvo o količinah imenujemo matematiko.

Ako si mislimo količino kot celoto, sestavljeno iz istovrstnih delov, ondaj zovemo vsak tak del jednoto *(Einheit)*, količino samo pa množino *(Vielheit)* in izraz, kateri kaže, kolikokrat ima množina jednoto v sebi, število *(Zahl)*.

Oni del matematike, kateri se peča s števili, zovemo aritmetiko ali računstvo *(Arithmetik)*.

§ 2.

Tvoreč števila začenjamo z jednoto. Ako pridenemo k jednoti še jedno jednoto, k številu, na ta način dobljenemu, zopet jednoto, in takó dalje, dobimo vrsto naravnih števil *(natürliche Zahlen)*.

Jednoto samo in tudi vsako število, katero smo dobili, dodajajoč jednoto, zovemo celo število *(ganze Zahl)*. Ako hočemo povedati, da še jednote ni, rabi nam izraz ničle *(Null, 0)*.

Vsako število naravne številne vrste dobimo iz prejšnjega, ako to za jednoto povečamo, in iz naslednjega, ako to za jednoto zmanjšamo. Kadar takó, jednoto dodajajoč ali odjemajoč, od števila do števila prehajamo, pravimo, da štejemo *(zählen)* in to v prvem slučaji naprej, v druzem nazaj.

Iz danih števil s pomočjo določenih izpremememb druga števila iskati, pravi se računati *(rechnen)*. Število, katero računajoč dobimo, zovemo rezultat ali iznesek računa *(Resultat)*.

1

§ 3.

Ako štejoč ne jemljemo v poštev, kakšna je jednota, ondaj imenujemo dobljena števila neimenovana ali brezimenska števila *(unbenannte Zahlen)*; ako pa gledamo tudi na to, kakšna je jednota, dobimo imenovana števila *(benannte Zahlen)*. N. pr. 5 je neimenovano, 5 goldinarjev imenovano število; izraz goldinarji je ime *(Benennung)* zadnjega števila.

§ 4.

Števila, izražujoča določeno množino *(Menge)* jednot, zovemo posebna števila *(besondere Zahlen)*; pismeno jih izražujemo s številkami *(Ziffern)*. N. pr. 5 je posebno število, izražujoče določeno množino jednot, ker izražuje le 5 jednot, ne več ne menj. Zaradi tega svojstva posebnih števil so pa tudi računi, katere smo z njimi izvršili, le za posamične posebne slučaje veljavni; le-té račune treba vsikdar ponoviti, kadar se v podatku kaj izpremeni, bodi si izpremena še takó majhna.

Da bi bili pa tudi občni računi mogoči, računi veljavni za vse podobne slučaje in nezavisni od posebnih vrednostij, katere se v kaki nalogi nahajejo, uvedla so se števila, katera izražujejo lahko vsakeršno množino jednot; ta števila zovemo zatorej občna števila *(allgemeine Zahlen)*.

Pokazalo se je, da so črke najpripravnejša znamenja takim občnim številom in to male latinske črke. Takó je n. pr. a občno število, katero zaznamenuje lahko katero koli množino jednot; a pomenja lahko 1, 5, 20 ali tudi vsako drugo število. Le to je treba pomniti, da mora vsaka črka tisto vrednost, katero smo ji dali v početku računa, pridržati v vsem računu; ako damo številu a v kaki nalogi določeno vrednost, n. pr. 5, pridržati treba v tej nalogi za a vseskozi vrednost 5.

V kak številen spoj za občna števila (črke) posebne številne vrednosti postavljati ter s temi zahtevane račune izvrševati, pravi se zamenjavati *(substituieren)*.

Ako se peča aritmetika le s posebnimi števili, zovemo jo posebno aritmetiko ali računanje s številkami *(besondere Arithmetik, Zifferrechnen)*; ako se pa peča s posebnimi in občnimi števili, imenujemo jo občno aritmetiko ali računanje s črkami *(allgemeine Arithmetik, Buchstabenrechnung)*.

§ 5.

Dve števili, kateri imata isto vrednost, kateri tedaj lahko med seboj zamenjamo, zovemo jednaki *(gleich)*. Ako hočemo naznačiti, da sta števili a in b jednaki, pišemo $a = b$; v tem slučaji je vselej tudi $b = a$. Takšen izraz kakor $a = b$ imenujemo jednačbo *(Gleichung)*; $b = a$ je obrat jednačbe $a = b$.

Dve števili, ki nimata iste vrednosti, imenujemo nejednaki *(ungleich)*, in sicer zovemo ono manjše, h kateremu treba še nekaj dodati, da dobimo drugo, to pa imenujemo večje. Da je število a večje od števila b, izražujemo z $a > b$; v tem slučaji je tudi število b manjše od števila a in to zaznamenujemo z $b < a$. Takšne izraze kakor $a > b$ ali $b < a$ imenujemo nejednačbe *(Ungleichungen)*.

§ 6.

Podstava matematiki so nekatere resnice, katere so same ob sebi jasne, katerih tedaj tudi dokazovati ni treba. Take resnice imenujemo osnovne resnice ali aksijome *(Grundsätze, Axiome)*.

Reki, kateri niso sami ob sebi jasni, ampak katerih resničnost treba še le iz druzih že spoznanih resnic izvajati, zovemo izreke ali teoreme *(Lehrsätze, Theoreme)*; te treba dokazati.

Rek, čegar resničnost neposredno iz kacega pojma ali dokazanega reka izvira, imenujemo izvod *(Folgesatz)*.

§ 7.

Občne matematične osnovne resnice.

1.) Vsaka količina je sama sebi jednaka.

$$a = a, \qquad 3 = 3.$$

2.) Celota je jednaka vsem svojim delom skupaj.

3.) Celota je večja nego nje del.

4.) Ako sta dve količini jednaki tretji, jednaki sta tudi med seboj.

Ako je $a = c$ in $b = c$, potem je tudi $a = b$.

5.) Jednake količine na jednak način izpremenjene dadé zopet jednako.

6.) Ako je prva količina jednaka drugi, druga pa večja (manjša) od tretje, večja (manjša) je tudi prva od tretje.

Ako je $a = b$,
$\underline{\quad b > c;}$
ondaj je tudi $a > c$.

Ako je $a = b$,
$\underline{\quad b < c;}$
ondaj je tudi $a < c$.

7.) Ako je prva količina večja (manjša) od druge, druga pa večja (manjša) od tretje, ondaj je prva tem večja (manjša) nego tretja.

Ako je $a > b$,
$\underline{\quad b > c;}$
ondaj je tudi $a > c$.

Ako je $a < b$,
$\underline{\quad b < c;}$
ondaj je tudi $a < c$.

Prvi oddelek.

Četvero osnovnih računov s posebnimi in občnimi celimi števili.

I. O dekadnem številnem sistemu.

§ 8.

Vsa cela števila, in naj so še tolika, dadó se z malo besedami natančno in določeno ustmeno, in s še menj znaki pismeno izraževati. V ta namen smatramo vselej določeno število nižjih jednot za novo višjo jednoto, za jednoto naslednjega višjega reda, in kakor taki damo ji tudi posebno ime. Vsako na to načelo opirajoče se izraževanje vseh posebnih števil imenujemo številni sistem *(Zahlensystem)*, in število, katero kaže, koliko nižjih jednot daje vselej višjo jednoto, osnovno število *(Grundzahl)* številnega sistema.

Sedaj nam rabi v obče dekadni (desetni) številni sistem *(dekadisches Zahlensystem)*; njega osnovno število je deset (grški deka).

V tem sistemu tvori po deset jednot jednega reda jednoto naslednjega višjega reda. Začenši pri jednoti štejemo z znanimi imeni števil: jedna, dve, tri, ... do deset. Deset prvotnih jednot, tudi jednice imenovanih, tvori novo višjo jednoto, katero imenujemo desetico; deset desetic dá stotico, deset stotic tisočico, deset tisočic desettisočico, deset desettisočic stotisočico, deset stotisočic milijon i. t. d. Vsako število je sestavljeno iz jednic, desetic, stotic, ..., in je po polnem določeno, ako povemo, koliko ima jednic, desetic, stotic ....

Z ustmenim izraževanjem števil zlaga se tudi njih pismeno predočevanje. V to potrebujemo le številk za prvih devet števil, namreč 1, 2, ... 9, in znaka 0 (ničle), kateri kaže, da dotično število nima jednot določenega reda. Da pa moremo sestavljajoč teh deset številk vsa mogoča cela števila izraževati, v to nam služi načelo, da pomenja vsaka številka na prvem mestu, začenši od desne, jednice, in na vsakem naslednjem mestu proti levi desetkrat toliko, kolikor na prejšnjem. Tedaj pomenja vsaka številka na drugem mestu, ako štejemo od desne, toliko desetic, na tretjem toliko stotic, na četrtem toliko tisočic i. t. d., kolikor na prvem jednic.

Ničla nima sama ob sebi nobedne vrednosti ter le kaže, da ni jednot določenega reda. Vsaka druga številka pa ima v napisanem številu dvojno vrednost, vrednost znaka, katera ji gre po znaku in je tedaj nepremenljiva, in mestno vrednost, katera ji gre po mestu ter je premenljiva. Takó pomenja n. pr. v številu 4404 vsaka veljavna številka štiri, toda s tem razločkom, da pomenja na prvem mestu, od desne začenši, štiri jednice, na tretjem štiri stotice, na četrtem štiri tisočice. Gledé na vrednost znaka pravimo, da je n. pr. številka 7 večja od številke 4, kar nam je takó razumevati, da je število, katero izražuje številka 7, večje od števila, katero izražuje številka 4. Oziraje se na mestno vrednost številke, imenujemo, in to zopet nepravo, ono številko višjo, katera izražuje jednote višjega reda ter stoji na kakem daljem mestu proti levi.

§ 9.

Pravilno napisavanje in pravilno čitanje napisanih števil imenujemo numeracijo ali številkovanje.

Številne rede, katere po dekadnem številnem sistemu zaporedoma na posamičnih mestih nahajamo, razdeljujemo lahko prav ugodno na razrede po tri mesta, v katerih so po vrsti jednice, desetice, stotice. Tri najnižja mesta so kar jednice, desetice, stotice; prvi naslednji razred ima jednice, desetice, stotice tisočev; v nadaljnem razredu so jednice, desetice, stotice milijonov, i. t. d. Takšna razdelitev zlajšuje bistveno razumévanje in pismeno izraževanje števil.

Naloge.

Čitaj tá-le števila:

1. 2000, 7000, 5600, 2750, 5904, 1039, 5138, 2718, 38090, 27026, 80912, 12345.

2. 630427, 938824, 732084, 493220, 815500, 408010, 276939, 356805, 1246829, 538191378.

3. Najvišja gora v Avstriji je Ortljev vrh na Tirolskem, čegar nadmorska višina znaša 3917 metrov.

4. Solnce je 1413879 krat toliko kakor naša zemlja.

5. Ako bije žila pri zdravem človeku po 75krat v jedni minuti, udari v jednem dnevi 108000 krat in v jednem letu 39420000 krat.

6. Ako je krogov premer 1000000000 metrov dolg, ima njega obod 3141592654 metrov. (Ludolfovo število)

Zapiši s številkami tá-le z besedami izražena števila:

7. Dva tisoč in štirideset, pet tisoč sedem sto štiri in devetdeset, osem tisoč in tri, tisoč tri sto in deset, dvanajst tisoč pet in dvajset.

8. Svetloba preleti pot od solnca do zemlje, katera je dvajset milijonov šest sto tri in osemdeset tisoč tri sto in deset milj dolga, v osmih minutah in trinajstih sekundah.

9. Ako bi kdo v jedni sekundi jedno štel, potreboval bi, da našteje jeden milijon, jednajst dnij, trinajst ur, šest in štirideset minut in štirideset sekund; da našteje jeden bilijon, potreboval bi jeden in trideset tisoč sedem sto in devet let, dve sto devet in osemdeset dnij, jedno uro, šest in štirideset minut in štirideset sekund.

II. Seštevanje.

§ 10.

1.) K številu a število b prištevati se pravi, iskati števila c, katero ima toliko jednot kakor števili a in b skupaj. Znak seštevanju je $+$ (več ali plus); zatorej pišemo $a + b = c$. Števili a in b imenujemo seštevanca, sumanda ali adenda, $a + b$ vsoto in c vrednost vsote.

Da seštejemo števili a in b, treba le v naravni številni vrsti, pri a začenši, za toliko jednot se dalje pomakniti, kolikor jih ima b; število, do katerega na ta način pridemo, je iskana vsota. Ako treba prišteti n. pr. k številu 5 število 3, pomaknemo se v številni vrsti od števila 5 za 3 jednote dalje; na ta način pridemo do števila 8; tedaj je $5 + 3 = 8$.

Iz pojma o seštevanji izvira:

Kadar je jeden sumand jednak 0, ondaj je vsota jednaka drugemu sumandu.

$$0 + a = a, \qquad a + 0 = a, \qquad 0 + 0 = 0.$$

Ako treba z naznačeno vsoto $a + b$ ali katerim koli številnim spojem še dalje računati, denemo jo med oklepaje *(Klammern)*. N. pr. $(6 + 5) + 7$ pomenja, da treba k vsoti števil 6 in 5 še število 7 prišteti.

$6 + (5 + 7)$ pomenja, da treba k številu 6 prišteti vsoto števil 5 in 7.

2.) Vsoto več števil dobimo, ako prištejemo k vsoti prvih dveh števil tretje, k novi vsoti četrto število i. t. d. Tedaj je

$$a + b + c = (a + b) + c,$$
$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d, \text{ i. t. d.}$$

Imenovana števila je môči le tedaj seštevati, kadar imajo isto ime; prav tisto ime dobi potem tudi vsota.

Izreki o vsotah.

§ 11.

Vsota ostane neizpremenjena, ako sumande med seboj zamenjamo.

$$a + b = b + a, \qquad 4 + 3 = 3 + 4:$$
$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = \ldots$$

Dokaz. Naj uredimo sumande kakor koli, množina njihovih jednot ostane ista; torej ostane tudi vsotna vrednost neizpremenjena.

§ 12.

1.) K vsoti prištejemo število, ako je prištejemo k jednemu sumandu.

$$(50 + 4) + 30 = (50 + 30) + 4,$$
$$(50 + 4) + 3 = 50 + (4 + 3).$$

V obče:

$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).$$

Dokaz. Ako povečamo jeden sumand za c jednot, povečamo tudi število jednot v vsoti, t. j. vsoto samo za c jednot.

2.) Obrnivši zadnjo jednačbo, dobimo

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b;$$

t. j.: K številu prištejemo vsoto, ako prištejemo sumande jednega za druzim.

Tedaj je môči tudi vsoto k vsoti prištevati. N. pr.

$$(60 + 5) + (20 + 4) = [(60 + 5) + 20] + 4 =$$
$$= [(60 + 20) + 5] + 4 = (60 + 20) + (5 + 4).$$

Kakó je seštevati istoimenske izraze.

§ 13.

Vsoto, v kateri se nahaja jedno in isto občno število večkrat kot sumand, zaznamenujemo krajše na ta način, da zapišemo občno število le jedenkrat, pred-nje pa postavimo število, kažoče, kolikokrat se nahaja občno število kot sumand; n. pr.

$$a + a + a + a + a = 5a.$$

V izrazu $5a$ zovemo a glavno količino *(Hauptgrösse)* in 5 koeficijent *(Coëfficient)*.

Koeficijent je lahko tudi občno število; n. pr.

$$ma = a + a + a + a + \ldots (m\text{krat}).$$

Izraze, imajoče isto glavno količino, imenujemo istoimenske *(gleichnamig)*, n. pr. $5a$ in $6a$, $3x$ in x. Izraze, imajoče različno glavno količino, zovemo raznoimenske *(ungleichnamig)*, n. pr. $3a$ in $7b$, $5x$ in $5y$.

§ 14.

Istoimenske izraze seštejemo, ako seštejemo njih koeficijente ter to vsoto pred skupno glavno količino postavimo.

$$\begin{array}{r} 3a = a + a + a \\ 4a = a + a + a + a \\ \hline 3a + 4a = a + a + a + a + a + a + a = 7a. \end{array}$$

Kakó je seštevati dekadna števila.

§ 15.

Vsako večštevilčno dekadno število smatramo lahko za vsoto iz jednic, desetic, stotic i. t. d. Kakó je dekadna števila seštevati, povedó izreki § 12.; le to je še pomniti, da se morejo le jednote jednakega reda seštevati.

V ta namen pišemo sumande takó druzega pod druzega, da pridejo jednice pod jednice, desetice pod desetice, . . .; potem seštejemo najprej jednice, potlej desetice, stotice i. t. d. Vsakokratno vsoto zapišemo, ako je jednoštevilčna, pod seštete jednote; ako je pa vsota katerega koli reda dvoštevilčna, zapišemo le jednice onega reda pod seštete jednote, desetice pa prištejemo k jednotam naslednjega višjega reda. N. pr.

1.)
$$\begin{array}{r}
324 = 300 + 20 + 4 \\
571 = 500 + 70 + 1 \\
\hline
895 = 800 + 90 + 5.
\end{array}$$

2.)
$$\begin{array}{rcrlcrlcrlcrl}
6719 & = & 6 & \text{tis.} & + & 7 & \text{stot.} & + & 1 & \text{des.} & + & 9 & \text{jedn.} \\
5348 & = & 5 & » & + & 3 & » & + & 4 & » & + & 8 & » \\
2864 & = & 2 & » & + & 8 & » & + & 6 & » & + & 4 & » \\
\hline
14931 & = & 13 & \text{tis.} & + & 18 & \text{stot.} & + & 11 & \text{des.} & + & 21 & \text{jedn.} \\
 & = & 14 & » & + & 9 & » & + & 3 & » & + & 1 & »
\end{array}$$

Pri računanji na pamet prištevamo k neizpremenjenemu prvemu sumandu najprej višje in potem nižje jednote druzega sumanda. N. pr. Koliko je 345 in 136? 345 in 100 je 445, in 30 je 475, in 6 je 481.

Seštevanje jednačeb in nejednačeb.

§ 16.

1.) Jednako k jednakemu prišteto dá jeanako.

$$\begin{array}{ll}
\text{Ako je} & a = b, \\
 & c = d; \\
\hline
\text{ondaj je} & a + c = b + d.
\end{array}$$

Izvira neposredno iz § 7., 5.

2.) Jednako k nejednakemu prišteto in obratno dá nejednako s prav tistim nejednačajem.

$$\begin{array}{ll}
\text{Ako je} & a > b, \\
 & c = d; \\
\hline
\text{ondaj je} & a + c > b + d.
\end{array}$$

Dokaz. Ker je b manjši od a, treba k b še neko število, recimo x, prišteti, da dobimo a, tedaj $a = b + x$; ker je pa vsled 1.) $a + c = b + d + x$ in $b + d + x > b + d$, je tudi $a + c > b + d$ (§ 7., 6).

3.) Nejednako, prišteto k nejednakemu s prav takó postavljenim nejednačajem, dá nejednako s prav tistim nejednačajem.

$$\begin{array}{rl} \text{Ako je} & a > b, \\ & c > d; \\ \hline \text{ondaj je} & a + c > b + d. \end{array}$$

Dokaz je prejšnjemu podoben.

Naloge.

1. $a + a$.	***2.*** $x + x + x$.
3. $2b + b$.	***4.*** $3m + 2m$.
5. $6y + y + 4y$.	***6.*** $4c + 7c + 9c$.
7. $3a + 5a + 7a + 9a$.	***8.*** $2x + 4x + 6x + 12x$.
9. $(x + 3) + 5$.	***10.*** $(4a + 6) + 2a$.
11. $(6 + 5x) + 7x$.	***12.*** $(5y + 2a) + 4y$.
13. $(2m + 5n + 3p) + 4p$.	***14.*** $(a + 6b + 10c) + 7a$.
15. $[(3x + 14y) + y] + 2x$.	***16.*** $[(5m + 2n) + 3m] + 6n$.
17. $5 + (2a + 1)$.	***18.*** $7x + (12x + 9)$.
19. $9m + (3m + 5n)$.	***20.*** $12y + (23x + 11y)$.
21. $4a + [3a + (2a + 7)]$.	***22.*** $x + [3x + (8x + 9y)]$.
23. $(a + 7) + (2a + 1)$.	***24.*** $(8b + 5c) + (3b + 4c)$.

25.
$$\begin{array}{r} 5x + 2y + 8z \\ 4x + 7y + 3z \\ 8x + 5y + 6z \\ \hline \end{array}$$

26.
$$\begin{array}{r} m + 2n + 3p + 4r \\ 2m + 4n + 6p + 8r \\ 4m + 8n + 12p + 16r \\ \hline \end{array}$$

Izračunaj vrednost téh-le vsot za $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$:

27. $5a + 6\ (b + c)$.	***28.*** $5b + 6\ (a + c)$.
29. $5c + 6\ (a + b)$.	***30.*** $5\ (a + b) + 6c$.

Z zvezdico * zaznamenovane naloge razreši tu in pozneje na pamet.

31.* *a)* 40 + 20; *b)* 50 + 60; *c)* 43 + 10; *d)* 38 + 20; *e)* 47 + 50.

32.* *a)* 45 + 13; *b)* 67 + 21; *c)* 38 + 42; *d)* 57 + 45; *e)* 63 + 57.

33.* *a)* 520 + 100; *b)* 370 + 200; *c)* 761 + 300; *d)* 254 + 500.

34.* *a)* 317 + 450; *b)* 436 + 324; *c)* 321 + 654; *d)* 827 + 173.

35.	***36.***	***37.***	***38.***
785	2637	45630	924492
364	6071	39987	827726
130	958	41865	776462
819	8705	7986	61678

39. 73308 + 905476 + 217663 + 8978 + 544879.

40. 369258 + 741852 + 15307 + 847941 + 403507.

41. Neka železnica je imela dohodkov: v prvem četrtletji 1270584 gl., v druzem 1583614 gl., v tretjem 1609375 gl., v četrtem 1364227 gl.; koliko vse leto?

42. V četverokotniku merijo koti $73^0\ 12'\ 47''$, $88^0\ 40'\ 42''$, $67^0\ 39'\ 58''$ in $130^0\ 26'\ 43''$; kolika je njih vsota?

43. Cesar Ferdinand I. je začel vladati v Avstriji dne 2. marcija 1835. l., a vlade se je odrekel čez 13 let 9 mes.; kedaj se je to zgodilo?

44. Prešíren je bil rojen v Vrbi na Gorenjskem dné 3. decembra l. 1800, umrl pa je 48 let 2 meseca in 5 dnij star; kedaj je umrl?

45. Od jednega ščipa do druzega (sinodski mesec) mine 29 dnij 12 ur 44 minut 3 sek.; ako je tedaj dné 16. aprila ob 8ih 45 min. 35 sek. ščip, kedaj bode prihodnji?

III. Odštevanje.

§ 17.

Obrat seštevanju je odštevanje *(Subtraction)*. Od števila a število b odštevati, se pravi, iz a kot vsote dveh števil in b kot jednega sumanda drugi sumand c iskati. Znak odštevanju je — (menj ali minus), tedaj pišemo $a - b = c$ ter imenujemo a minuend ali zmanjševanec *(Minuend)*, b subtrahend, zmanjševalec, odštevanec *(Subtrahend)* in $a - b$ diferenco ali ostanek *(Differenz, Rest)*; c zovemo vrednost diference.

Ker vsota dveh naravnih števil ne more biti manjša nego jeden sumand, zato si mislimo minuend vselej večji od subtrahenda.

Vsako seštevanje dveh števil, n. pr.: $7 + 6 = 13$, dá, ako je obrnemo, dve nalogi za odštevanje: razven vsote 13, katera je kot minuend vselej dana, je namreč dan kot subtrahend ali prvi sumand 7 ali drugi sumand 6. Ako je dan kot subtrahend prvi sumand 7, ondaj nam je preiskavati, koliko treba k številu 7 še prišteti, da dobimo 13; v tem slučaji moramo od števila 7 v številni vrsti za toliko naprej šteti, da pridemo do števila 13; število 6, katero na ta način seštevajoč najdemo, je drugi sumand, diferenca. Ako je pa drugi sumand 6 kot subtrahend dan, tedaj nam je preiskavati, h kateremu številu treba prišteti 6, da dobimo 13 za vsoto, t. j. koliko od 13 še ostane, ako prištetih 6 zopet odštejemo; ostalo število 7 je iskani prvi sumand, ostanek.

Ker je pa za vsoto vse jedno, kateri izmed dveh sumandov je prvi ali drugi, je tudi za diferenco vse jedno, ali se poslužujemo odštevajoč prve ali druge zgoraj navedene razrešitve. Pri prvi nalogi dobimo diferenco 6 tudi, ako od števila 13 število 7 odštejemo, in pri drugi nalogi diferenco 7 tudi takó, da prištejemo k številu 6 toliko, da dobimo število 13.

Odštevanje dveh števil *a* in *b* je môči izvršiti na dvojen način. Pomaknemo se namreč lahko v številni vrsti od minuenda *a* za toliko jednot nazaj, kolikor jih ima subtrahend *b*; število, do katerega na ta način pridemo, je iskana diferenca. Pomaknemo pa se lahko tudi v številni vrsti od subtrahenda *b* za toliko jednot naprej, da pridemo do minuenda *a*; število, kažoče, koliko jednot smo k subtrahendu prišteli, je diferenca.

Pri imenovanih številih morata imeti minuend in subtrahend isto ime in to dobi potem tudi diferenca.

§ 18.

Iz pojma o diferenci izvira:

1.) Ako prištejemo k diferenci dveh števil subtrahend, dobimo minuend.

$$(a - b) + b = a, \quad b + (a - b) = a.$$

2.) Ako odštejemo od vsote dveh števil jeden sumand, dobimo drugi sumand.

$$(a + b) - a = b, \quad (a + b) - b = a.$$

3.) Število ostane neizpremenjeno, ako isto število prištejemo in odštejemo in obratno.

$$a = (a + b) - b, \quad a = (a - b) + b.$$

4.) Diferenca je jednaka ničli, ako je subtrahend jednak minuendu.

$$a - a = 0.$$

5.) Ako je subtrahend 0, jednaka je diferenca minuendu.

$$a - 0 = a, \quad 0 - 0 = 0.$$

Izreki o diferencah.

§ 19.

Za kolikor zmanjšamo v vsoti jeden nje sumand, za prav toliko se zmanjša tudi vsota.

Od vsote odštejemo tedaj število, ako je od jednega nje sumanda odštejemo.

$$(70+8)-20=(70-20)+8,$$
$$(70+8)-5=70+(8-5).$$

V obče: 1.) $(a+b)-c=(a-c)+b$,
2.) $(a+b)-c=a+(b-c)$.

§ 20.

Obrnivši jednačbo 2.) v § 19., dobimo

$$a+(b-c)=(a+b)-c;$$

t. j.: K številu prištejemo diferenco, ako minuend prištejemo in subtrahend odštejemo.

Ta izrek uporabljamo pri računanji na pamet. N. pr.

$$357+96=357+(100-4)=(357+100)-4=457-4=453.$$

§ 21.

Za kolikor povečamo minuend, za prav toliko se poveča tudi diferenca. Za kolikor zmanjšamo subtrahend, za prav toliko se poveča tudi diferenca.

K diferenci prištejemo tedaj število, ako je k minuendu prištejemo, ali od subtrahenda odštejemo.

1.) $(a-b)+c=(a+c)-b$,
2.) $(a-b)+c=a-(b-c)$.

Tudi ta izrek uporabljamo pri računanji na pamet. N. pr.

$$97+85=(100-3)+85=(100+85)-3=185-3=182.$$

§ 22.

Ako jednačbo 2.) v § 21. obrnemo, dobimo

$$a-(b-c)=(a-b)+c;$$

t. j.: Od števila odštejemo diferenco, ako minuend odštejemo in subtrahend prištejemo.

Uporaba pri računanji na pamet. N. pr.

$$543-194=543-(200-6)=(543-200)+6=343+6=349.$$

§ 23.

Za kolikor zmanjšamo minuend, za prav toliko se zmanjša tudi diferenca. Za kolikor povečamo subtrahend, za toliko se zmanjša diferenca.

Od diference odštejemo tedaj število, ako je od minuenda odštejemo ali k subtrahendu prištejemo.

$$1.)\ (a - b) - c = (a - c) - b,$$
$$2.)\ (a - b) - c = a - (b + c).$$

Iz druge jednačbe izvira tudi:

Kadar je odšteti dve števili zaporedoma, odšteje se lahko tudi kar ob jednem njiju vsota. N. pr.

$$(628 - 48) - 52 = 628 - (48 + 52) = 628 - 100 = 528.$$

§ 24.

Ako jednačbo 2.) v § 23. obrnemo, dobimo

$$a - (b + c) = (a - b) - c, \qquad 13 - (4 + 5) = (13 - 4) - 5;$$

t. j.: Od števila odštejemo vsoto, ako sumande zaporedoma odštejemo.

Vsled tega je môči tudi vsoto od vsote odštevati. N. pr.

$$(90 + 7) - (20 + 5) = (90 - 20) + (7 - 5),$$
$$(700 + 40 + 8) - (200 + 30 + 5) = (700 - 200) + (40 - 30) + (8 - 5).$$

§ 25.

Ako povečamo jeden sumand za 1, 2, 3, . . ., poveča se tudi vsota za prav toliko. Ako zmanjšamo drugi sumand za 1, 2, 3, . . ., zmanjša se vsota za prav toliko. Ako torej obe izpremembi ob jednem izvršimo, dobimo zopet prvotno vrednost vsote.

Odtod izvira:

Vsota ostane neizpremenjena, ako k jednemu nje sumandu katero koli število prištejemo in od druzega sumanda isto število odštejemo.

V obče: $a + b = (a + m) + (b - m),$
$$a + b = (a - m) + (b + m).$$

Uporaba pri računanji na pamet. N. pr.

$$37 + 45 = 40 + 42 = 82,$$
$$36 + 49 = 35 + 50 = 85.$$

§ 26.

Ako povečamo minuend in subtrahend za 1, 2, 3, . . ., poveča se diferenca zaradi novega minuenda za 1, 2, 3, . . ., a zaradi večjega subtrahenda se ob jednem za prav toliko zmanjša; nje prvotna vrednost ostane tedaj neizpremenjena. Ako zmanjšamo minuend in subtrahend za 1, 2, 3, . . ., zmanjša se diferenca zaradi novega minuenda za 1, 2, 3, . . ., a ob jednem se zaradi manjšega subtrahenda za prav toliko poveča; nje vrednost ostane torej neizpremenjena.

Odtod izvira:

Diferenca ostane neizpremenjena, ako k minuendu in subtrahendu isto število prištejemo, ali od obeh isto število odštejemo.

V obče:
$$a - b = (a + m) - (b + m),$$
$$a - b = (a - m) - (b - m).$$

Uporaba pri računanji na pamet. N. pr.

$$76 - 28 = 78 - 30 = 48,$$
$$95 - 32 = 93 - 30 = 63.$$

§ 27.

Istoimenske izraze odštejemo, ako diferenco koeficijentov pred skupno glavno količino postavimo.

$$5a - 2a = 3a.$$

Dokaz. Ako je $3a$ prava diferenca števil $5a$ in $2a$, dobiti moramo minuend, ako prištejemo k nji subtrahend. In res je $3a + 2a = 5a$.

Kakó je mnogočlenske izraze seštevati in odštevati.

§ 28.

Kadar je več števil z znaki $+$ ali $-$ združenih in je treba naznačene račune v istem redu od leve proti desni izvršiti, kakor se nahajajo ona števila s svojimi znaki, takrat se oklepaji vselej lahko izpusté, ne da bi trpela določenost. Tedaj je

$$[(a + b) + c] + d = a + b + c + d,$$
$$[(a - b) + c] - d = a - b + c - d,$$
$$[(a - b) - c] - d = a - b - c - d.$$

Izraz, ki ima več z znakom $+$ ali $-$ združenih sestavin, zovemo mnogočlensk izraz ali polinom *(mehrgliedriger Ausdruck, Polynom)*; števila, katera treba prišteti, imenujemo njega aditivne člene *(additive Glieder)*, in ona, katera treba odšteti, njega subtraktivne člene *(subtractive Glieder)*. Člen brez znaka je aditiven.

Dvočlensk izraz imenujemo dvočlenec ali binom *(Binom)*, točlensk izraz pa točlenec ali trinom *(Trinom)*. Izraz, kateri ima le jeden člen, zovemo jednočlensk izraz ali monom *(eingliedriger Ausdruck, Monom)*.

§ 29.

Iz zgoraj dokazanih izrekov o seštevanji in odštevanji vsot in diferenc in iz tega, kar smo v prejšnjem paragrafu o napisavanji polinomov povedali, izvira:

1.) K številu prištejemo mnogočlensk izraz, ako pripišemo njega člene z neizpremenjenimi znaki k številu. N. pr.

$$a + (b + c) = (a + b) + c \ (\S\ 12., 2.) = a + b + c \ (\S\ 28.),$$
$$a + (b - c) = (a + b) - c \ (\S\ 20.) = a + b - c \ (\S\ 28.)$$

2.) Od števila odštejemo mnogočlensk izraz, ako pripišemo njega člene z nasprotnimi znaki k številu. N. pr.

$$a - (b + c) = (a - b) - c \ (\S\ 24.) = a - b - c \ (\S\ 28.),$$
$$a - (b - c) = (a - b) + c \ (\S\ 22.) = a - b + c \ (\S\ 28.)$$

§ 30.

Izvodi. 1.) Oklepaje lahko vselej odpravimo. V ta namen treba le, kadar stoji pred oklepajem znak $+$, oklepaj brez vsake izpremembe izpustiti, kadar stoji pa znak $-$, vsem členom, ki so bili med oklepajem, nasprotne znake dati.

Tako izpremembo imenujemo razreševanje oklepajev *(Klammernauflösung)*. N. pr.

$$\begin{aligned} & a - \{5b - [(3a + 2c) - 2b] + (2a - 4c)\} \\ = & a - 5b + [(3a + 2c) - 2b] - (2a - 4c) \\ = & a - 5b + (3a + 2c) - 2b - 2a + 4c \\ = & a - 5b + 3a + 2c - 2b - 2a + 4c. \end{aligned}$$

2.) Obratno pa denemo lahko tudi v vsacem mnogočlenskem izrazu več členov med oklepaj in to takó, da zapišemo med oklepaj vse člene z neizpremenjenimi znaki, kadar stoji oklepaj za znakom $+$, in vsak člen z nasprotnim znakom, kadar stoji oklepaj za znakom $-$. N. pr.

$$x + 2a - 3b + 4c = x + (2a - 3b + 4c),$$
$$x - 2a + 3b - 4c = x - (2a - 3b + 4c).$$

3.) Mnogočlensk izraz lahko skrčimo *(reducieren)*, ako ima več istoimenskih števil. V ta namen seštejemo najprej aditivne, potem subtraktivne istoimenske člene ter drugo vsoto od prve odštejemo. N. pr.

$$6a - 5a - 3a + 8a - 2a = (6a + 8a) - (5a + 3a + 2a)$$
$$= 14a - 10a = 4a.$$

Kakó je odštevati dekadna števila.

§ 31.

Odštevanje dekadnih števil se opira na izreke, dokazane v §§ 19., 24. in 26.

Subtrahend pišemo takó pod minuend, da pridejo jednice pod jednice, desetice pod desetice, . . .; potem odštejemo najprej jednice, potlej desetice, stotice i. t. d. in to takó, da prištejemo k vsaki subtrahendovi številki toliko jednot, da dobimo nad njo stoječo minuendovo številko; vsakokrat prišteto številko zapišemo na dotično mesto v ostanek. Ako je katera subtrahendova številka večja nego nad njo stoječa v minuendu, ondaj povečamo zadnjo za 10 ter odštejemo; da pa ostane diferenca neizpremenjena, treba potem povečati tudi številko naslednjega višjega reda v subtrahendu za 1 (§ 26.) N. pr.

$$1.)\quad \begin{array}{rcl} 978 & = & 900 + 70 + 8 \\ \underline{265} & = & \underline{200 + 60 + 5} \\ 713 & = & 700 + 10 + 3 \end{array}$$

$$2.)\quad \begin{array}{rl} 3582 & 3 \text{ tis.} + 15 \text{ stot.} + 8 \text{ des.} + 12 \text{ jedn.} \\ \underline{1853} & \underline{2 \text{ »} + 8 \text{ »} + 6 \text{ »} + 3 \text{ »}} \\ 1729 = & 1 \text{ tis.} + 7 \text{ stot.} + 2 \text{ des.} + 9 \text{ jedn.} \end{array}$$

Tu smo povečali minuend in subtrahend za 10 jednic = 1 des., in za 10 stot. = 1 tis.

Pri odštevanji **na pamet** odštevamo od neizpremenjenega minuenda najprej stotice, potem desetice in slednjič jednice. N. pr. Koliko je 791 menj 548? 791 menj 500 je 291, menj 40 je 251, menj 8 je 243.

Dostikrat je môči tudi izrek § 26. ugodno uporabiti. N. pr.

$$853 - 298 = 855 - 300 = 555.$$

Odštevanje jednačeb in nejednačeb.

§ 32.

1.) **Jednako od jednakega odšteto dá jednako.**

Ako je $a = b$ in $c = d$, ondaj je tudi $a - c = b - d$.

Izvira neposredno iz § 7., 5.

2.) Jednako od nejednakega odšteto dá nejednako s prav tistim nejednačajem.

Ako je $a > b$ in $c = d$, ondaj je $a - c > b - d$.

Dokaz. Ako bi ne bilo $a - c > b - d$, moralo bi biti $a - c \leqq b - d$; a potem bi moralo biti tudi $(a - c) + c \leqq (b - d) + d$ (§ 16., 1. in 2.), tedaj $a \leqq b$ (§ 18., 1.), kar pa pogoju nasprotuje.

3.) Nejednako od jednakega odšteto dá nejednako z nasprotnim nejednačajem.

Ako je $a = b$ in $c > d$, ondaj je $a - c < b - d$.

Dokaz. Ako bi bilo $a - c \geqq b - d$, moralo bi biti v obeh slučajih $(a - c) + c > (b - d) + d$ (§ 16., 2. in 3.), tedaj $a > b$ (§ 18., 1.), kar pogoju nasprotuje.

4.) Nejednako, odšteto od nejednakega z nasprotnim nejednačajem, dá nejednako s prvim nejednačajem.

Ako je $a > b$ in $c < d$, ondaj je $a - c > b - d$.

Dokaz kakor pri 3.)

Naloge.

1. $3a - 3a$.

2. $8x - 5x$.

3. $(a + 6) - 2$.

4. $(5m + 7) - 2m$.

5. $(8x + 4y) - 3y$.

6. $3b + 9b - 5b$.

7. $[(4a + 10) + 2a] - 3a$.

8. $6n + 7n + 13n - 9n$.

9. $(a - 2) + 5a$.

10. $(7y - 9) + 6$.

11. $(15x - 18y) + 5y$.

12. $[(10a - 8) + 3a] + 7$.

13. $(9m - 4) - 5$.

14. $(12a - 7b) - 7a$.

15. $[(4z - 1) - 7] - z$.

16. $7n + 3n - 5n - 2n$.

17. $7 + (x - 3)$.

18. $2y + (5y - 6m)$.

19. $6x - (2x + 5)$.

20. $9a - (4a + 5b)$.

21. $9a - (7a - 4b)$.

22. $3x - (9 - x)$.

23. $(3x + 5y) - (2x + y)$.

24. $(9m + 13n) - (3m - 5n)$.

25.
$$\begin{array}{r} 12a - 7b \\ 5a - 3b \\ - \quad + \\ \hline \end{array}$$

26.
$$\begin{array}{r} 8x - 9y \\ 4x - 8y \\ \hline + \end{array}$$

27.
$$\begin{array}{r} 17m - 15n + 13p \\ 12m - 14n + 10p \\ \hline \end{array}$$

28.
$$\begin{array}{r} 9a + 8b - 7c \\ 2a + 8b - 6c \\ \hline \end{array}$$

29.
$$\begin{array}{r} 23a - 26b + 19c - 7d \\ 18a + 14b - c + 8d \\ \hline \end{array}$$

30.
$$\begin{array}{r} 15u + 38x - 9y - 21z \\ 8u + 22x + 9y - 11z \\ \hline \end{array}$$

31. $(27a - 18b + 15c) - (20a + 2b - 15c) + (8a - 5b + 30c)$.

32. $(a + b) - \{a - [x - (b - a)]\}$.

33. $2x - [(3a + 4x) - (4x - 1)] - (x - 2a - 2)$.

Izračunaj vrednost téh-le izrazov za $a = 4$, $b = 3$:

34. $(8a + 7b) - (5a - 4b) - (2a - b)$;
35. $8a + (7b - 5a) - [(4b - 2a) - b]$;
36. $8a + (7b - 5a) - [4b - (2a - b)]$;
37. $(8a + 7b) - [5a - (4b - 2a) - b]$.

38.* *a)* 70 — 20; *b)* 140 — 50; *c)* 54 — 20; *d)* 81 — 40; *e)* 187 — 50.
39.* *a)* 59 — 47; *b)* 65 — 24; *c)* 167 — 53; *d)* 73 — 44; *e)* 715 — 69.
40.* *a)* 340 — 200; *b)* 770 — 400; *c)* 843 — 500; *d)* 667 — 300.
41.* *a)* 865 — 340; *b)* 598 — 324; *c)* 528 — 461; *d)* 952 — 507.

Izračunaj, uporabljajoč izrek § 26.:

42.* *a)* 314 — 95; *b)* 248 — 73; *c)* 477 — 197; *d)* 632 — 303.

Izračunaj, uporabljajoč izrek § 25.:

43.* *a)* 137 + 29; *b)* 225 + 198; *c)* 367 + 402; *d)* 543 — 290.

44.	785 261	***45.***	6318 4165	***46.***	5043 1827	***47.***	91737 8264
48.	78118 43489	***49.***	43070 36548	***50.***	123456 78907	***51.***	302858 190579

52. 471708 — 345725. ***53.*** 870194 — 401896.
54. 3660791 — 877553. ***55.*** 6092743 — 5694146.

56. (837145 + 24093) — 618814.

57. (732801 — 93786) — 48079.

58. Seštej števila 650890, 126604, 531899, 863925, potem pa odštej od vsote zaporedoma prve tri sumande; kolik je ostanek?

59.

$$\begin{array}{rr} \text{Od števila} & 731542 \\ \text{odštej števila} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{r} 82591 \\ 72859 \\ 127986 \\ 231578 \end{array} \\ \hline \text{ostanek} & 216528 \end{array}$$

Ako treba od danega števila dvoje ali več števil odšteti, ondaj seštej vsa ta števila ter njih vsoto od danega števila odštej. Sicer pa lahko seštevajoč ob jednem tudi odštevaš. V ta namen seštej najprej jednice vseh števil, katere treba odšteti, potem pa poišči, koliko treba k njih vsoti 24 še prišteti, da dobiš naslednje višje število, imajoče na mestu jednic 2, t. j. 32; prav tisto velja za desetice, stotice i. t. d. Računajoč govori: 8, 14, 23, 24 in **8** je 32, ostane 3; 3, 10, 18, 23, 32 in **2** je 34, ostane 3; i. t. d.

60. 401894 — (139214 + 91078 + 35709 + 102775).
61. 5404791 — (879356 + 937885 + 704799 + 689557).
62. 3924623 — (1572809 + 379886 + 1027795) —
— (236976 + 187595 + 229868).

---

63. Mont Blanc v Savoji je 4632 *m*, Triglav pa 2865 *m* visok; za koliko je prva gora višja od druge?

64. Oče zapusti starejšemu sinu 6840 gl., mlajšemu pa 1580 gl. menj; koliko dobita oba sinova skupaj?

65. Mesec ni od zemlje zmerom jednako oddaljen; njega najmanjša razdalja iznaša 48020 milj, največja 54680 milj; za koliko je v prvem slučaji zemlji bliže nego v druzem?

66. Praga ima $50^0\ 5'\ 20''$, Dunaj $48^0\ 12'\ 35''$, Gradec $47^0\ 4'\ 2''$ in Trst $45^0\ 38'\ 8''$ zemljepisne širine; za koliko širinskih stopinj je Praga severnejša nego vsaktero ostalih mest?

67. Vodník je bil rojen dne 3. februvarja l. 1758., umrl pa je dne 8. januvarja l. 1819.; kolike starosti je tedaj učakal?

68. Cesar Franc Josip I. je bil rojen dne 18. avgusta l. 1830., vladati pa je začel dne 2. decembra l. 1848.; *a)* koliko let je imel tedaj? *b)* koliko jih ima danes? *c)* koliko časa vlada že?

IV. Množenje.

§ 33.

Število *a* s številom *b* množiti se pravi, število *a* tolikokrat kot sumand postaviti, kolikor ima *b* jednot. Število *a* imenujemo multiplikand ali množenec *(Multiplicand)*, *b* multiplikator ali množitelj *(Multiplicator)* in oba dva skupaj faktorja *(Factoren)*; število pa, katero pri množenji dobimo, produkt *(Product)*. Produkt je torej vsota jednakih sumandov; multiplikand je jeden izmed teh jednakih sumandov, multiplikator pa kaže, koliko takih sumandov treba vzeti. Produkt iz multiplikanda *a* in multiplikatorja *b* zaznamenujemo z $a \times b$, ali $a \,.\, b$ (t. j. *a* *b*krat), ali tudi, kadar sta oba faktorja občni števili, kar z ab.

Produkt dveh celih števil imenujemo tudi multiplikandov mnogokratnik *(Vielfaches)*. N. pr. $12 = 4 \,.\, 3$; 12 je 3kratnik števila 4.

Iz pojma o množenji izvira:

a) Produkt je jednak multiplikatorju, ako je multiplikand 1.

$$1 \,.\, a = a.$$

b) Produkt je jednak 0, ako je multiplikand 0.

$$0 \cdot a = 0.$$

c) Multiplikator je vselej neimenovano število. Multiplikand je lahko neimenovano ali imenovano število; v zadnjem slučaji ima tudi produkt isto ime kakor multiplikand.

d) Multiplikator mora biti celo število ter večji od 1.

2.) Produkt več nego dveh števil je tisti, katerega dobimo, pomnoživši produkt prvih dveh števil s tretjim, ta novi produkt s četrtim številom, i. t. d. Tedaj

$$a \cdot b \cdot c = (ab) \cdot c,$$
$$a \cdot b \cdot c \cdot d = [(ab) \cdot c] \cdot d, \text{ i. t. d.}$$

Izreki o produktih.

§ 34.

Produkt se neizpremeni, ako faktorja med seboj zamenjamo.

Vzemimo, da sta n. pr. 5 in 3 dana faktorja. Ako razstavimo 5 na pet jednot in te v horizontalni vrsti predočimo ter potem 3 take vrste drugo pod drugo napišemo,

$$\begin{array}{c} 1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1 \end{array}$$

dobimo očividno prav toliko jednot, naj že seštejemo jednote vseh horizontalnih ali jednote vseh vertikalnih vrst. V prvem slučaji dobimo 5 jednot 3krat, ali $5 \cdot 3$; v drugem 3 jednote 5krat, ali $3 \cdot 5$. Tedaj je $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.

V obče: $a \cdot b = b \cdot a.$

Ta izrek velja tudi za več faktorjev. Kajti v produktu iz več faktorjev moremo po dva in dva sosedna faktorja med seboj zamenjati, pustivši druge na njihovem mestu; na tak način moremo tedaj vse zamenjati. Takó je n. pr. za tri faktorje

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a = b \cdot c \cdot a = b \cdot a \cdot c.$$

Tedaj je tudi za produkt iz več faktorjev vse jedno, v katerem redu jih množimo.

Dostavek. *a)* Da bode veljal prejšnji izrek v obče, treba, da je tudi $1 \cdot a = a \cdot 1$ in $0 \cdot a = a \cdot 0$. Na ta način pa dobita tudi izraza $a \,.\, 1$ in $a \,.\, 0$ natančno določen pomen, katerega dosedaj nista imela, kajti pojem o množenji ga ne kaže. Dobimo namreč

$$a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a \text{ in } a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0, \text{ t. j.:}$$

1.) Vsako število, z 1 pomnoženo, dá samo sebe za produkt.

2.) Vsako število, z 0 pomnoženo, dá 0 za produkt.

b) Koeficijent moremo smatrati za faktor glavne količine.

$$3a = a + a + a = a \,.\, 3.$$

§ 35.

1.) Produkt pomnožimo s številom, ako jeden faktor pomnožimo.

$$(ab) \,.\, c = (ac) \,.\, b = a \,.\, (bc).$$

Dokaz. Ker je

$$a \,.\, b \,.\, c = a \,.\, c \,.\, b = a \,.\, b \,.\, c \quad (\S\ 34.),$$

je tudi $(a \,.\, b) \,.\, c = (a \,.\, c) \,.\, b = a \,.\, (b \,.\, c)$ (§ 33., 2.)

N. pr. $(20 \,.\, 4) \,.\, 5 = (20 \,.\, 5) \,.\, 4 = 20 \,.\, (4 \,.\, 5)$.

Izvod. Število pomnožimo z dvema številoma, ako je v katerem koli redu z vsakim posamič, ali kar ob jednem z njiju produktom pomnožimo.

2.) Število pomnožimo s produktom, ako je pomnožimo z jednim faktorjem in dobljeni produkt še z druzim faktorjem.

$$a \,.\, (bc) = (ab) \,.\, c = (ac) b.$$

Dokaz izvira neposredno iz 1.

N. pr. $8 \,.\, (10 \,.\, 3) = (8 \,.\, 10) \,.\, 3 = (8 \,.\, 3) \,.\, 10$.

§ 36.

1.) Vsoto pomnožimo s številom, ako vsak sumand s številom pomnožimo in dobljene delske produkte seštejemo.

$$(a + b) \,.\, c = ac + bc.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}(a + b) \,.\, c &= (a + b) + (a + b) + (a + b) + \ldots\ldots (c\text{krat}) \\ &= a + b + a + b + a + b + \ldots\ldots (c\text{krat}) \\ &= a + a + a + \ldots (c\text{krat}) + b + b + b + \ldots (c\text{krat}) \\ &= ac + bc.\end{aligned}$$

N. pr. $(30 + 6) \,.\, 7 = 30 \,.\, 7 + 6 \,.\, 7$,

$(200 + 80 + 3) \,.\, 5 = 200 \,.\, 5 + 80 \,.\, 5 + 3 \,.\, 5$.

2.) Diferenco pomnožimo s številom, ako pomnožimo s številom minuend in subtrahend ter drugo diferenco od prve odštejemo.

$$(a - b) \,.\, c = ac - bc.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}(a - b) \,.\, c &= (a - b) + (a - b) + (a - b) + \ldots (c\text{krat})\\ &= [a + a + a + \ldots (c\text{krat})] - [b + b + b + \ldots (c\text{krat})]\\ &= ac - bc.\end{aligned}$$

Uporaba pri računanji na pamet. N. pr.

$$87 \,.\, 2 = (90 - 3) \,.\, 2 = 90 \,.\, 2 - 3 \,.\, 2 = 180 - 6 = 174.$$

§ 37.

Obrnivši jednačbi § 36., dobimo

$$\begin{aligned}ac + bc &= (a + b) \,.\, c,\\ ac - bc &= (a - b) \,.\, c;\end{aligned}$$

t. j. produkte, imajoče skupen faktor, seštejemo ali odštejemo, ako pomnožimo s skupnim faktorjem oziroma vsoto ali diferenco njihovih neskupnih faktorjev.

Ta račun zovemo izločevanje *(Herausheben)* skupnega faktorja.

§ 38.

1.) Število pomnožimo z vsoto, ako je z vsakim sumandom pomnožimo ter delske produkte seštejemo.

$$a \,.\, (b + c) = ab + \overset{a}{\cancel{b}}c.$$

Dokaz. $a \,.\, (b + c) = (b + c) \,.\, a$ (§ 34.) $= ba + ca$ (§ 36., 1.) $= ab + ac$ (§ 34.)

N. pr. $\quad 68 \,.\, (50 + 3) = 68 \,.\, 50 + 68 \,.\, 3.$

2.) Število pomnožimo z diferenco, ako je z minuendom in subtrahendom pomnožimo ter drugi delski produkt od prvega odštejemo.

$$a \,.\, (b - c) = ab - ac.$$

Dokaz je prejšnjemu podoben.

Ta izrek se dá pri računanji s posebnimi števili dostikrat prav ugodno uporabiti. N. pr.

$$\begin{aligned}346 \,.\, 299 &= 346 \,.\, (300 - 1) = 346 \,.\, 300 - 346 \,.\, 1,\\ 758 \,.\, 994 &= 758 \,.\, (1000 - 6) = 758 \,.\, 1000 - 758 \,.\, 6.\end{aligned}$$

O produktih iz jednakih faktorjev.

§ 39.

Produkt, čegar faktorji so jednaki, zaznamenujemo krajše takó, da zapišemo samo jeden tak faktor in k temu zgoraj na desno število, katero kaže, kolikokrat je le-tá faktor postaviti; n. pr.

$$a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a = a^5.$$

Produkt iz več jednakih faktorjev zovemo potenco ali vzmnož *(Potenz)*; število, katero kaže, koliko je jednakih faktorjev, imenujemo potenčni eksponent ali tudi kar eksponent *(Potenzexponent)*, faktor pa podlogo, osnovno število ali koren *(Basis, Grundzahl, Wurzel)*. V potenci a^m, katero čitamo: «a na $m$no» (potenco povišan ali vzmožen) ali «a z m vzmnožen», je a podloga, m eksponent. Drugo potenco a^2 imenujemo tudi kvadrat, tretjo a^3 kub števila a.

N. pr. $10 \,.\, 10 = 10^2 = 100$,
$10 \,.\, 10 \,.\, 10 = 10^3 = 1000$,
$10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 = 10^4 = 10000$, i. t. d

Vsako število a smatramo za prvo potenco od a; tedaj $a = a^1$, $10 = 10^1$.

Kadar se nahaja v mnogočlenskem izrazu več potenc iste podloge, urejamo jih navadno, da posamične člene lažje pregledamo, po potenčnih eksponentih one podloge. V ta namen denemo na prvo mesto najvišjo potenco in za to nižje in nižje potence, ali pa postavimo najprej člen brez potence ali z najnižjo potenco skupne podloge in potem višje in višje potence. V prvem slučaji pravimo, da je polinom urejen po padajočih *(fallend)*, v druzem po rastočih *(steigend)* potencah skupne podloge. Takó dobi n. pr. izraz

$$3x^2 + 4 + 5x - 6x^3 + x^4,$$

urejen po padajočih potencah, tó-le obliko:

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x + 4,$$

in urejen po rastočih potencah, tó-le:

$$4 + 5x + 3x^2 - 6x^3 + x^4.$$

§ 40.

Potence iste podloge pomnožimo, ako vzmnožimo skupno podlogo z vsoto eksponentov.

$$a^5 \,.\, a^3 = aaaaa \,.\, aaa = a^8.$$

V obče: $$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}.$$

Kakó je množiti mnogočlenske izraze.

§ 41.

1.) Mnogočlensk izraz pomnožimo s številom, ako pomnožimo s številom vsak njegov člen ter posamičnim produktom damo znake dotičnih multiplikandovih členov.

$$(a - b - c + d - e) \cdot f = af - bf - cf + df - ef.$$

2.) Število pomnožimo z mnogočlenskim izrazom, ako je pomnožimo z vsakim njegovim členom ter posamičnim produktom damo znake dotičnih multiplikatorjevih členov.

$$a \cdot (b - c - d + e - f) = ab - ac - ad + ae - af.$$

3.) Polinom pomnožimo s polinomom, ako pomnožimo ves multiplikand, t. j. vsak njegov člen z vsakim multiplikatorjevim členom ter gledé posamičnih produktov pomnimo, da so aditivni, ako imata dotična faktorja jednaka, in subtraktivni, ako imata različna računska znaka.

$$(a - b + c)(d - e - f)$$
$$= ad - bd + cd - ae + be - ce - af + bf - cf.$$

Resničnost teh treh izrekov izvira iz §§ 36. in 38.

Izvod. Pomni posebno

1.) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2,$
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2;$

t. j.: Kvadrat binoma je jednak kvadratu prvega člena, več ali menj dvojnemu produktu obeh členov, več kvadratu druzega člena.

2.) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$

t. j.: Produkt iz vsote in diference dveh števil je jednak diferenci kvadratov onih dveh števil.

§ 42.

Ako imajo polinomi, katere treba druzega z druzim pomnožiti, potence iste podloge, treba jih najprej na isti način urediti. Ako pomnožimo potem ves multiplikand z vsakim multiplikatorjevim členom, dobimo delske produkte, ki so prav takó urejeni. Da te delske produkte potem lažje skrčimo, pišemo jih takó, da pridejo istoimenski členi drug pod druzega. N. pr.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
4a^2 & -\ 3a & -\ 4 & & & \text{multiplikand} \\
3a^2 & -\ 7a & +\ 5 & & & \text{multiplikator} \\
\hline
12a^4 & -\ 9a^3 & -\ 12a^2 & & & \\
 & -\ 28a^3 & +\ 21a^2 & +\ 28a & & \\
 & & +\ 20a^2 & -\ 15a & -\ 20 & \\
\hline
12a^4 & -\ 37a^3 & +\ 29a^2 & +\ 13a & -\ 20. &
\end{array}
$$

§ 43.

Izreki prejšnjih paragrafov učé, da je produkt dveh členov katerih koli izrazov takó-le določevati:

1.) Oziraje se na znak vzemi produkt aditiven ali subtraktiven, kakor imata dotična dva člena jednak ali različen znak.

2.) Koeficijent produkta je jednak produktu obeh koeficijentov; kajti

$$3a \,.\, 4b = 3 \,.\, a \,.\, 4 \,.\, b = 3 \,.\, 4 \,.\, a \,.\, b = 12ab.$$

3.) Glavno količino produkta dobiš, ako glavni količini faktorjev (v abcédnem redu) drugo poleg druge zapišeš, in pri potencah iste podloge skupno podlogo z vsoto eksponentov vzmnožiš.

Kakó je množiti dekadna števila.

§ 44.

Dekadno število pomnožimo z 10, 100, 1000, . . ., ako mu na desni oziroma 1, 2, 3, . . . ničle pripišemo.

Kajti, ako mu na desni 1, 2, 3, . . . ničle pripišemo, pride vsaka številka oziroma za 1, 2, 3, . . . mesta dalje proti levi ter dobi na ta način 10krat, 100krat, 1000krat, . . . toliko vrednost (§ 8.); zatorej postane tudi število samo (§ 36., 1.) 10krat, 100krat, 1000krat, . . . toliko. N. pr.

$$376 \,.\, 10 = 3760, \qquad 583 \,.\, 1000 = 583000.$$

V obče pomenja $A \,.\, 10^m$ dekadno število, čegar številčna vrsta A ima na desni m ničel.

Dostavek. Vsako dekadno število moremo smatrati za polinom, urejen po padajočih potencah števila 10. N. pr.

$$
\begin{aligned}
6547 &= 6000 + 500 + 40 + 7 \\
&= 6 \,.\, 10^3 + 5 \,.\, 10^2 + 4 \,.\, 10 + 7.
\end{aligned}
$$

Red *(Rang)* vsake posamične številke določuje eksponent one potence od 10, katere koeficijent je dotična številka; vsled tega moremo ta eksponent števila 10 tudi redovni eksponent *(Rangexponent)* številke imenovati. N. pr. v številu 6547 je 1 redovni eksponent številke 4 in 3 redovni eksponent najvišje številke 6.

V vsakem dekadnem številu je redovni eksponent najvišjega mesta za 1 manjši od števila številk.

Tedaj je

$$r \,.\, 10^{m-1} + p \,.\, 10^{m-2} + \ldots\ldots + c \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + a$$

občni izraz mštevilčnega dekadnega števila, imajočega a jednic, b desetic, . . . r jednot $(m-1)$ reda.

§ 45.

Ako je $M = e \,.\, 10^4 + d \,.\, 10^3 + c \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + a$, ondaj je
$M \,.\, p = ep \,.\, 10^4 + dp \,.\, 10^3 + cp \,.\, 10^2 + bp \,.\, 10 + ap.$

Večštevilčno število pomnožimo tedaj z jednoštevilčnim, ako multiplikandove jednice, desetice, stotice, . . . z multiplikatorjem pomnožimo ter posamične produkte pod pomnožene multiplikandove številke zapišemo.

Ako je kateri koli teh produktov dvoštevilčen, n. pr. $cp = r \,.\, 10 + s$, ondaj zapiši na to mesto le nižjo številko s, višjo r pa prištej k produktu naslednjega višjega mesta. N. pr.

752 . 4		ali krajše:	752 . 4
8	jednic		3008
20.	desetic		
28..	stotic		
3008			

Računajoč na pamet pomnoži z jednoštevilčnim multiplikatorjem najprej višje in potem nižje jednote. N. pr.

Koliko je 6krat 78? 6krat 70 je 420, 6krat 8 je 48; 420 in 48 je 468.

Kadar je ceno kaki stvari s pomočjo množenja izračunati, ondaj kaže dostikrat ceno jednote razložiti na desetice in krajcarje. N. pr.

1 *kg* velja 64 kr.; koliko velja 9 *kg*?
9 *kg* po 64 kr.

9 *kg* po 6 desetic velja 9krat 6 des. = 54 d. = 5 gl. 40 kr.
9 » » 4 kr. » 9krat 4 kr. = ... 36 »
vsega skupaj 5 gl. 76 kr.

§ 46.

Ako je M večštevilčno število in

$$N = p \,.\, 10^3 + r \,.\, 10^2 + s \,.\, 10 + t, \text{ ondaj je}$$
$$M \,.\, N = Mp \,.\, 10^3 + Mr \,.\, 10^2 + Ms \,.\, 10 + Mt.$$

Dve večštevilčni števili pomnožimo torej drugo z druzim, ako pomnožimo multiplikand z vsako multiplikatorjevo številko, z jednicami začenši, ter dobljene delske produkte po vrsti še z rastočimi potencami števila 10, pomaknivši v ta namen vsak naslednji produkt za jedno mesto dalje proti levi; delske produkte treba potem še sešteti, in to kakor stojé. N. pr.

$$\begin{array}{r} 6237 \\ \underline{954} \\ 24948 \\ 311850 \\ \underline{5613300} \\ 5950098 \end{array} \qquad \text{ali:} \qquad \begin{array}{r} 6237 \\ \underline{954} \\ 24948 \\ 31185 \\ \underline{56133} \\ 5950098. \end{array}$$

Ako začnemo množiti z najvišjo multiplikatorjevo številko, ondaj treba vsak naslednji produkt za jedno mesto dalje proti desni pomakniti.

Množenje jednačeb in nejednačeb.

§ 47.

1.) Jednako z jednakim pomnoženo dá jednako.

Ako je $a = b$ in $c = d$, ondaj je tudi $ac = bd$.

Izvira neposredno iz § 7., 5.

2.) Jednako z nejednakim pomnoženo dá nejednako z istim nejednačajem.

Ako je $a = b$ in $c > d$, ondaj je $ac > bd$.

Dokaz. Vzemimo, da je $c = d + x$, potem je po 1.) $ac = b(d + x)$, ali $ac = bd + bx$; toda $bd + bx > bd$ (§ 7., 3.), tedaj tudi $ac > bd$ (§ 7., 6.)

3.) Nejednako, pomnoženo z nejednakim s prav takó postavljenim nejednačajem, dá nejednako s tistim nejednačajem.

Dokaz je prejšnjemu podoben.

Naloge.

1. $4a \,.\, b$. *2.* $3xy \,.\, 2$. *3.* $5a \,.\, b \,.\, 3$.

4. $m \,.\, 3n$. *5.* $a \,.\, 6bc$. *6.* $2x \,.\, 3y \,.\, 4z$.

7. $a^2 \,.\, a$. *8.* $x^5 \,.\, x^3$. *9.* $m^3 \,.\, m^2 \,.\, m$.

10. $ay^2 \,.\, a^2y$. *11.* $3m^4 \,.\, 2m^3$. *12.* $5a^2x^3 \,.\, 3a$.

13. $z^2 \,.\, 3z \,.\, 5z^4$. *14.* $8x^3 \,.\, 3b^2 \,.\, a$. *15.* $a^3b^4c^5 \,.\, a^3b^2c$.

16. $7x^4y^3 \,.\, 5x^2z^5 \,.\, 3y^5z$. *17.* $2ab^2c^3d^4 \,.\, 3a^2c^2d^2 \,.\, 4b^3c^2d^3$.

18. $(x + 2) \,.\, 3$. *19.* $(a + 5) \,.\, x$.

20. $(3a + 4b) \,.\, 5x$. *21.* $(x^2y + xy^2) \,.\, xy$.

22. $(a - b) \,.\, x$. *23.* $(2a^2 - 3a) \,.\, 4a$.

24. $(2x^2 - 5) \,.\, 4 + 2x^2$. *25.* $(x^3 - 2x^2) \,.\, 3x - 2x^4$.

26. $(m + n) \,.\, x + (m - n) \,.\, x$. *27.* $(m + n) \,.\, x - (m - n) \,.\, x$.

28. $7 \,.\, (a + 2)$. *29.* $m \,.\, (a^2 + x^2)$.

30. $8\,(3 - y)$. *31.* $5a\,(mx^3 - ny^3)$.

32. $n^2 \,.\, (x^2 - 2m^2) + m^2n^2$. *33.* $2a^2b^2 \,.\, (a^2b - ab^2) - a^4b^3$.

Izloči v naslednjih nalogah skupni faktor:

34. $5a + 5b$. *35.* $ax^2 + bx^2$. *36.* $(a + m)\,x - mx$.

37. $a \,.\, 10^3 - b \,.\, 10^3$. *38.* $9ay^2 - 6y^3$. *39.* $ax + ay + a$.

40. $a\,(2x - 3) - 2b\,(2x - 3) + (a - b)\,(2x - 3)$.

Seštej:

41.
$$\begin{array}{r} 3ax - 5by \\ 4ax + 2by \\ ax - 3by \\ \hline \end{array}$$

42.
$$\begin{array}{rrrr} 12x^4 + 20x^3 & - 8x^2 & & \\ - 9x^3 & - 15x^2 & + 6x & \\ & + 3x^2 & + 5x & - 2 \\ \hline \end{array}$$

Odštej:

43.
$$\begin{array}{r} 9mx + 6ny - 3pz \\ mx - 3ny + 8pz \\ \hline \end{array}$$

44.
$$\begin{array}{r} 20a^3 - 31a^2 + 22a - 8 \\ 20a^3 - 15a^2 + 10a \phantom{{}-8} \\ \hline \end{array}$$

45. Izračunaj vrednost izrazu:

$$4a\,(3x^2 - 5xy) - 5b\,(2x^2 - 6y^2)$$
za $a = 5,\ b = 3,\ x = 7,\ y = 4$.

---

46. $(x + 3)\,(y + 2)$. *47.* $(x + 3)\,(y - 2)$.

48. $(x - 3)\,(y + 2)$. *49.* $(x - 3)\,(y - 2)$.

50. $(3x + 2y)\,(2x - 3y)$. *51.* $(5a^2 - 3b^2)\,(3a^2 - 4b^2)$.

52. $(2x^2 + 3a^2)\,(5x^2 - 4a^2) - (10x^4 - 12a^4)$.

53. $(5 - x^2)\,(7 + y^2) + (7 - x^2)\,(6 + y^2)$.

54. $(a + 2)^2$. *55.* $(2a + 5b)^2$. *56.* $(3x^2 + 4y^2)^2$.

57. $(3 - x)^2$. *58.* $(10m - n)^2$. *59.* $(5a^2 - 2b^2)^2$.

60. $(a+5)^2 - 10a$. **61.** $(x-4)^2 + 8x$.
62. $(x+a)^2 + (x-a)^2$. **63.** $(x+a)^2 - (x-a)^2$.
64. $(x+3)(x-3)$. **65.** $(a+5)(a-5)$.
66. $(a+7)(a-7) + 49$. **67.** $x^2 - (x+4)(x-4)$.
68. $(5a-6b)(5a+6b)$. **69.** $(3y^2+2b^2)(3y^2-2b^2)$.
70. $(3x^2+5y^2)(3x^2-5y^2) - (2x^2-4y^2)(2x^2+4y^2)$.
71. $(3a-4b+5) \,.\, 8$. **72** $(7+5a-3a^2) \,.\, 4a^2$.
73. $5x^2 \,.\, (6a^2-9ab+4b^2)$. **74.** $3ax \,.\, (2a^2+7ax+5x^2)$.
75. $(8x+6y+5)(3a+4)$. **76.** $(x^2-xy+y^2)(x+y)$.
77. $(y^2-2y+1)(6y-3)$. **78.** $(5x^2+6x-7)(4x-5)$.
79. $(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)$.
80. $(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)$.
81. $(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)$.
82. $(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)(a+b)$.
83. $(16x^4+8x^2y^2+y^4)(4x^2-y^2)$.
84. $(a^2+2ab+b^2)(a+b) + (a^2-2ab+b^2)(a-b)$.
85. $(5x^2+4x-3)(4x+8) - (4x^2-3x-6)(5x+4)$.
86. $(x+1)(x+2)(x+3)$. **87.** $(x+3)(x-2)(x-1)$.
88. $(x+a)(x+b)(x+c)$. **89.** $(x-a)(x-b)(x-c)$.
90. $(3a-2b+c)^2$. **91.** $(ax^2+by^2-cz^2)^2$.
92. $(2x-3)(3x-4)(4x-5)(5x-6)$.
93. $(4a^2+3b^2-2c^2)(4a^2-3b^2+2c^2)$.
94. $(10x^4y+4x^3y^2-5x^2y^3)(9x^2y-5xy^2+7y^3)$.
95. $(x^4+x^3y+xy^3+y^4)(x^2-xy+y^2)$.
96. $(3a^3-4a^2b+6ab^2-2b^3)(4a^2-3ab+b^2)$.
97. $(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)(x^3-2x^2y+2xy^2-y^3)$.
98. $(a^4+2a^3-3a^2-3a+1)(a^3-3a^2+3a-1)$.
99. $(a^2-2ab+3b^2)(3a^2+ab-2b^2)(2a^3-3b^3)$.
100. $(4x^2-4xy-y^2)(x^2-2xy+2y^2)(2x^2+2xy+3y^2)$.

---

101. Pomnoži *a)* 358, *b)* 509, *c)* 2977, *d)* 8070 z 10, 100, 1000, 10000.

102.* Koliko je 3krat 21? 2krat 36? 4krat 41? 7krat 69?

103.* Koliko je 2krat 180? 4krat 213? 3krat 236? 6krat 149?

104. Pomnoži *a)* 875, *b)* 2168, *c)* 15786, *d)* 357986 z 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

105. 51709 . 3 . 5 . 6 . 6 . 8 . 8 . 9.

106. 286712 . 7 . 4 . 8 . 3 . 7 . 2 . 9 . 5 . 6.

107. Koliko je 15krat 40? 12krat 27? 21krat 43? 13krat 34?

108. 739 . 57. **109.** 1098 . 68.

110. 7664 . 94. ***111.*** 3467 . 238.

112. 52029 . 475. ***113.*** 12378 . 968.

114. 57964 . 9876. ***115.*** 74509 . 3049.

116. 91234 . 7800. ***117.*** 893600 . 3718.

118. 65800 . 978000. ***119.*** 665070 . 83850.

120. Pomnoži 928386 *a)* s 386, *b)* s 7405, *c)* s 91034.

121. Izračunaj $A = ab$, $B = ac$, $C = ad$, $D = bc$, $E = bd$, $F = cd$ za $a = 325694$, $b = 547816$, $c = 769039$, $d = 981256$.

122. 56789 . 12345 . 45678 . 67890.

123. 86325 . 11
86325
949575

124. 709458 . 11.

125. 288797 . 11.

126. 3705866 . 110.

127. 64538 . 41
258152
2646058

128. 357946 . 128
715892
2863568
45817088

129. 905643 . 31. ***130.*** 447653 . 17.

131. 582076 . 271. ***132.*** 290884 . 185.

133.* Izračunaj, uporabljajoč izrek § 35., 2.: *a)* 73 . 24, *b)* 17 . 18, *c)* 23 . 32, *d)* 19 . 42, *e)* 29 . 35.

134. 83452 . 45
$\times$ 5
417260
$\times$
3755340

135. 149335 . 72.

136. 265824 . 64.

137. 703796 . 320.

138. 753467_{00} . 98
1506934 $\quad$ 100 — 2
73839766

139. 357908 . 997.

140. 662452 . 9996.

141. 313678 . 9930.

142. 69374 . 399
27749600 $\quad$ 400 — 1
27680226

143. 480267 . 599.

144. 917304 . 2999.

145. 534426 . 99990.

146.* Koliko velja *a)* 8 *l* po 72 kr.? *b)* 18 *kg* po 46 kr.?

147.* Koliko velja *a)* 9 *m* po 1 gl. 82 kr.? *b)* 12 *hl* po 20 gl. 38 kr.?

148. V Avstro-Ogerski se izkoplje vsako leto poprek po 37180 *kg* čistega srebra; koliko goldinarjev, po 90 na 1 *kg*, je môči iz njega nakovati?

149. Zračni tlak na 1 dm^2 iznaša 103 *kg* 320 *g*; kolik je tlak na 1 m^2?

150. Nekdo prehodi vsako minuto poprek po 83 *m*; koliko mora še prehoditi, ako je že 2 uri hodil in iznaša vsa pot 15 *km* 310 *m*?

151. Avstro-ogerska država ima 6225 Mm^2; koliko ima prebivalstva, ako se računa na 1 Mm^2 poprek po 6395 prebivalcev?

V. Deljenje.

§ 48.

Množenju nasprotno je deljenje (delitev). Število *a* s številom *b* deliti se pravi, iz *a* kot produkta dveh števil in iz *b* kot jednega teh faktorjev druzega faktorja iskati. Dani produkt *a* imenujemo dividend (deljenec), dani faktor *b* divizor (delitelj) in iskani faktor kvocijent (količnik). Kvocijent zaznamenujemo z $a : b$ ali $\frac{a}{b}$.

Vsako množenje dveh števil, n. pr. $5 \times 3 = 15$, dá obrneno dve pojmovno različni delitveni nalogi, bodi si da je razven vsakokrat danega produkta 15, dividenda, dan kot divizor ali multiplikand 5 ali pa multiplikator 3.

Ako je dan kot divizor multiplikand 5, treba je onega števila iskati, katero kaže, kolikokrat treba 5 kot sumand postaviti, da dobimo dividend 15 za vsoto. To število 3 dobimo, ako preiščemo, kolikokrat je môči divizor 5 od dividenda 15 odšteti, ali kolikokrat ima dividend 15 divizor 5 v sebi. Delitev je tu merjenje *(Messen)*.

Ako je pa multiplikator 3 kot divizor dan, ondaj treba nam onega števila iskati, katero dá, 3krat kot sumand vzeto, dividend 15 za vsoto; to število 5 najdemo, ako razdelimo dividend na 3 jednake dele. Delitev je tu deljenje v ožjem pomenu *(Theilen)*.

Še bolj razvidna je razlika med obema delitvenima načinoma pri imenovanih številih. N. pr.

Množitvena naloga: 1 *m* velja 5 gl., koliko veljajo 3 *m*? Odgovor: 5 gl. $\times$ 3 = 15 gl.

Delitveni nalogi, kateri iz te naloge izvirata, sta:

a) 1 *m* velja 5 gl.; koliko *m* dobimo za 15 gl.? Tu sta dana produkt in multiplikand, multiplikatorja treba je iskati. Tu sklepamo: Za 5 gl. dobimo 1 *m*, za 15 gl. bodemo dobili tolikokrat po 1 *m*, kolikorkrat ima 15 gl. v sebi 5 gl., tedaj 3krat po 1 *m*, t. j. 3 *m*. Tu merimo 15 gl. s 5 gl., ter dobimo 15 gl.: 5 gl. = 3. Ako uporabljamo delitev imenovanih števil v razrešitev kake naloge o merjenji, morata biti dividend in divizor kot produkt in multiplikand istoimenska; kvocijent pa je kot multiplikator vselej neimenovan; še le drugo umovanje dati mu more imé, kakor v navedenem primeru ime «meter».

b) 3 *m* veljajo 15 gl., koliko velja 1 *m*? Tu sta dana produkt in multiplikator, multiplikanda pa je treba iskati. Tu sklepamo: 1 *m* je tretji del 3 *m*, 1 *m* velja tedaj le tretji del od 15 gl. Tedaj treba 15 gl. na tri jednake dele razdeliti, in kolikor goldinarjev ima tak del, toliko goldinarjev velja 1 *m*; na ta način dobimo: 15 gl. : 3 = 5 gl. Ako uporabljamo delitev imenovanih števil kot deljenje v ožjem pomenu, mora biti divizor kot multiplikator vselej neimenovan; kvocijent je kot multiplikand istoimensk z dividendom kot produktom.

Kakor je množenje ponavljano prištevanje istega števila, prav takó je tudi delitev ponavljano odštevanje istega števila od dane vsote. Pri merjenji vprašamo, kolikokrat je môči divizor od dividenda odšteti; n. pr. število 15 ima število 5 3krat v sebi, pravi se: število 5 se dá od števila 15 3krat odšteti. Pri deljenji vprašamo, katero število je môči od dividenda tolikrat odšteti, kakor zahteva divizor; n. pr. 5i del števila 15 je 3, pravi se: število, katero je môči od števila 15 5krat odšteti, je 3.

Deljenje se dá vselej v merjenje izpremeniti. Ako nam je n. pr. 15 s 5 razdeliti, moramo 5ega dela od 15 iskati; tega pa najdemo, ako od vsakih 5, ki so v 15, vselej le 1 vzamemo, potem dobimo tolikokrat po 1, kolikorkrat je 5 v 15, t. j. 5i del od 15 je toliko, kolikorkrat ima 15 število 5 v sebi. Akoravno sta tedaj oba dva delitvena načina, merjenje in deljenje, pojmovno različna, dasta vender oba za isti dividend in isti divizor, ne glede na imé, isto število za kvocijent, ter tvorita v izvršitvi jeden sam računsk način.

Da torej število s številom razdelimo, poiščemo v številni vrsti onega števila, katero dá, tolikrat kot sumand vzeto, kakor divizor kaže, dividend. Deljenje dveh števil je môči v naravni številni vrsti le tedaj izvršiti, kadar je dividend mnogokratnik divizorjev (§ 33.)

§ 49.

Iz pojma o deljenji izvira:

1.) Kvocijent, z divizorjem pomnožen, dá dividend.

$$(a : b) \cdot b = a.$$

2.) Ako razdelimo produkt dveh števil z jednim faktorjem, dobimo drugi faktor.

$$ab : a = b; \qquad ab : b = a.$$

3.) Število ostane neizpremenjeno, ako je s katerim koli številom pomnožimo in potem z istim številom zopet razdelimo in obratno.

$$a = (ab) : b; \qquad a = (a : b) \,.\, b.$$

4.) Vsako število dá, samo s seboj razdeljeno, 1 za kvocijent.

$$a : a = 1, \text{ kajti } 1 \,.\, a = a.$$

5.) Vsako število dá, z 1 razdeljeno, samo sebe za kvocijent.

$$a : 1 = a, \qquad 1 : 1 = 1.$$

6.) Ako razdelimo 0 s številom, ki je od 0 različno, dobimo 0 za kvocijent.

$$0 : a = 0; \text{ kajti } 0 \,.\, a = 0.$$

7.) Ničla z ničlo razdeljena dà lahko vsaktero število za kvocijent.

$0 : 0 = a$; a pomenja katero koli število, kajti $a \,.\, 0 = 0$.

Izraz $\frac{0}{0}$ rabi nam zato kot znamenje nedoločenosti.

Izreki o kvocijentih.

§ 50.

Produkt razdelimo s številom, ako jeden faktor z njim razdelimo.

1.) $(a \,.\, b) : c = (a : c) \,.\, b$, $\quad (12 \,.\, 9) : 3 = (12 : 3) \,.\, 9$;

2.) $(a \,.\, b) : c = a \,.\, (b : c)$, $\quad (12 \,.\, 9) : 3 = 12 \,.\, (9 : 3)$.

Dokaz. 1.) Ako je $(a : c) \,.\, b$ pravi kvocijent števil $(a \,.\, b)$ in c, ondaj mora dati, z divizorjem c pomnožen, dividend ab (§ 49., 1.)

Ker pa je

$$[(a : c) \,.\, b] \,.\, c = [(a : c) \,.\, c] \,.\, b \text{ (§ 35., 1.)} = a \,.\, b \text{ (§ 49., 1.)},$$

zato je $(a : c) \,.\, b$ pravi kvocijent.

2.) Prav takó je

$$[a \,.\, (b : c)] \,.\, c = a \,.\, [(b : c) \,.\, c] \text{ (§ 35., 1.)} = a \,.\, b \text{ (§ 49., 1.)},$$

tedaj tudi druga razrešitev naloge prava.

Izvod. Ako treba število z druzim številom pomnožiti in s tretjim razdeliti, ondaj je vse jedno, v katerem redu množimo in delimo. N. pr.

$$(8 \,.\, 100) : 4 = (8 : 4) \,.\, 100.$$

§ 51.

Število razdelimo s produktom, ako je razdelimo z jednim faktorjem in dobljeni kvocijent še z druzim faktorjem.

$$1.)\quad a : (b \,.\, c) = (a : b) : c, \qquad 24 : (2 \,.\, 3) = (24 : 2) : 3;$$
$$2.)\quad a : (b \,.\, c) = (a : c) : b. \qquad 24 : (2 \,.\, 3) = (24 : 3) : 2.$$

Dokaz. Izraza $(a : b) : c$ in $(a : c) : b$ zadostujeta oba § 49., 1., kajti

$$[(a : b) : c] \,.\, (b \,.\, c) = \{[(a : b) : c] \,.\, c\} \,.\, b \text{ (§ 35., 2.)} = (a : b) \,.\, b \text{ (§ 49., 1.)} = a \text{ (§ 49., 1.)}$$

in prav takó

$$[(a : c) : b] \,.\, (b \,.\, c) = \{[(a : c) : b] \,.\, b\} \,.\, c \text{ (§ 35., 2.)} = (a : c) \,.\, c \text{ (§ 49., 1.)} = a \text{ (§ 49., 1.)}$$

Izvod. Ako treba število z dvema številoma razdeliti, ondaj je razdelimo lahko z vsakim posamič v katerem koli redu, ali pa kar ob jednem z njiju produktom. N. pr.

$$(70 : 2) : 5 = (70 : 5) : 2 = 70 : (2 \,.\, 5)$$
$$35 : 5 = 14 : 2 = 70 : 10 = 7.$$

§ 52.

Produkt ostane neizpremenjen, ako mu jeden faktor s katerim koli številom pomnožimo in drugi faktor z istim številom razdelimo.

$$1.)\quad a \,.\, b = am \,.\, (b : m),$$
$$2.)\quad a \,.\, b = (a : m) \,.\, bm.$$

Dokaz.

1.) $a \,.\, b = [(a \,.\, b) \,.\, m] : m$ (§ 49., 3.) $= [(a \,.\, m) \,.\, b] : m$ (§ 35., 1.) $= am \,.\, (b : m)$ (§ 50.)

2.) $a \,.\, b = [(a \,.\, b) : m] \,.\, m$ (§ 49., 3.) $= [(a : m) \,.\, b] \,.\, m$ (§ 50.) $= (a : m) \,.\, bm$ (§ 35., 1.)

Ta izrek je môči prav ugodno uporabiti pri računanji s posebnimi števili. N. pr.

$$64 \,.\, 25 = (64 : 4) \,.\, (25 \,.\, 4) = (64 : 4) \,.\, 100 = (64 \,.\, 100) : 4,$$
$$64 \,.\, 125 = (64 : 8) \,.\, (125 \,.\, 8) = (64 : 8) \,.\, 1000 = (64 \,.\, 1000) : 8.$$

§ 53.

Kvocijent ostane neizpremenjen, ako dividend in divizor z istim številom pomnožimo, ali oba dva z istim številom razdelimo.

1.) $a : b = am : bm$,
2.) $a : b = (a : m) : (b : m)$.

Dokaz. 1.) Vzemimo, da je $a : b = k$, tedaj $a = bk$. Ako pomnožimo to jednačbo z m, dobimo $am = bkm$; razdelivši le-tó jednačbo z bm, dobimo dalje $am : bm = k$, iz te in prve jednačbe pa

$$a : b = am : bm.$$

Dokaz za 2.) je prejšnjemu podoben.

Tudi ta izrek je môči prav ugodno uporabljati. N. pr.

$$325 : 25 = (325 \,.\, 4) : (25 \,.\, 4) = (325 \,.\, 4) : 100,$$
$$7125 : 125 = (7125 \,.\, 8) : (125 \,.\, 8) = (7125 \,.\, 8) : 1000.$$

§ 54.

Potence iste podloge razdelimo, ako od dividendovega eksponenta odštejemo eksponent divizorjev ter s to diferenco skupno podlogo vzmnožimo.

$$a^8 : a^3 = a^5, \quad \text{kajti} \quad a^5 \,.\, a^3 = a^8 \; (\S\ 49.,\ 1.)$$

V obče:

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

ako je $m > n$.

Dostavek. Ako je $m = n$, dobimo, uporabljajoč ta izrek, $a^m : a^m = a^{m-n} = a^0$; ker pa potenca, imajoča 0 za eksponent, nima vsled pojma o potenci (§ 39.) nikakeršnega pomena, treba tej novi potenčni obliki pomen še le določiti. Po § 49., 4. je $a^m : a^m = 1$; a^0 pomenja tedaj 1.

§ 55.

1.) Vsoto razdelimo s številom, ako vsak sumand s številom razdelimo in dobljene delske kvocijente seštejemo.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Dokaz. $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) . c = \frac{a}{c} . c + \frac{b}{c} . c \, (\S\,36., 1.) = a + b \, (\S\,49., 1.)$

N. pr. $(90 + 6) : 3 = (90 : 3) + (6 : 3)$.

2.) Diferenco razdelimo s številom, ako minuend in subtrahend s številom razdelimo ter drugi kvocijent od prvega odštejemo.

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Dokaz. $\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) . c = \frac{a}{c} . c - \frac{b}{c} . c$ (§ 36., 2.) $= a - b$ (§ 49., 1.)

N. pr. $(100 - 8) : 4 = (100 : 4) - (8 : 4)$.

Kakó je deliti polinome.

§ 56.

Polinom razdelimo s številom, ako vsak njegov člen s številom razdelimo ter posamičnim kvocijentom znake dividendovih členov damo.

$$\frac{a-b-c+d-e}{f} = \frac{a}{f} - \frac{b}{f} - \frac{c}{f} + \frac{d}{f} - \frac{e}{f}.$$

Resničnost tega izreka dokážeš, uporabljajoč večkrat zaporedoma § 55., 1. in 2.

§ 57.

Kakó je deliti polinom s polinomom, razvideti je najlažje iz načina, kakó postane dividend iz divizorja in kvocijenta ter kakšen je odnošaj med divizorjevimi in kvocijentovimi členi v njiju produktu, t. j. v dividendu. Ako je $a + b + c$ divizor, $m + n + p$ kvocijent, dobimo, ako pomnožimo ter delske produkte druzega pod druzega zapišemo:

$$\begin{array}{rrrl} a & +\, b & +\, c & \text{divizor} \\ m & +\, n & +\, p & \text{kvocijent} \\ \hline am & +\, bm & +\, cm & \\ +\, an & +\, bn & +\, cn & \text{dividend} \\ +\, ap & +\, bp & +\, cp & \end{array}$$

Prvi dividendov člen am je produkt iz prvega divizorjevega člena a in prvega kvocijentovega člena m; prvi kvocijentov člen dobimo tedaj, razdelivši prvi dividendov člen s prvim členom divizorjevim. — Ako izračunamo sedaj sestavine, katere je dal m v produktu, pomnoživši ves divizor z m, ter ta produkt od dividenda odštejemo, ondaj je prvi člen an v ostanku produkt iz prvega divizorjevega člena a in druzega kvocijentovega člena n. Drugi kvocijentov člen dobimo torej, razdelivši prvi člen ostanka s prvim divizorjevim členom. — Ako odštejemo od prejšnjega ostanka zopet delski produkt, katerega je dal n v dividendu, namreč produkt iz vsega divizorja in n, potem je prvi člen ap v novem ostanku produkt iz prvega divizorjevega člena a in tretjega kvocijentovega člena p. Tretji člen kvocijenta dobimo tedaj, razdelivši prvi člen zadnjega ostanka s prvim divizorjevim členom; i. t. d.

Odtod izvajamo, da treba polinom s polinomom takó-le deliti:

Uredivši člene v dividendu in divizorji na isti način, razdeli prvi dividendov člen s prvim divizorjevim členom; na ta način dobiš prvi člen kvocijenta; s tem delskim kvocijentom pomnoži ves divizor in produkt odštej od dividenda. Ako ravnaš z ostankom, katerega treba na isti način urediti, kakor sta bila urejena dividend in divizor, prav takó kakor s prvotnim dividendom, dobiš drugi kvocijentov člen, i. t. d. N. pr.

$$
\begin{array}{l}
(3a^2 - 4ab - 4b^2) : (3a + 2b) = a - 2b \\
\ \ 3a^2 + 2ab \\
\ \ \ - \ \ - \\
\hline
\qquad - 6ab - 4b^2 \\
\qquad - 6ab - 4b^2 \\
\qquad \ + \qquad + \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Pomni posebno:

1.)
$$
\begin{array}{l}
(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b, \\
\ a^2 + ab \\
\ - \ - \\
\hline
\quad - ab - b^2 \\
\quad - ab - b^2 \\
\quad\ + \quad + \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

2.)
$$
\begin{array}{l}
(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b; \\
\ a^2 - ab \\
\ - \ + \\
\hline
\quad + ab - b^2 \\
\quad + ab - b^2 \\
\quad\ - \quad + \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

t. j. diferenca kvadratov dveh števil, razdeljena z vsoto ali diferenco teh števil, dá za kvocijent oziroma diferenco ali vsoto istih dveh števil.

§ 58.

Oziraje se na prejšnje izreke določuj torej kvocijent dveh členov katerih koli izrazov takó-le:

1.) Gledé na znak vzemi kvocijent aditiven ali subtraktiven, kakor sta oba člena jednako ali različno zaznamenovana. (Izvira iz § 41. in § 49., 2.)

2.) Za koeficijent daj kvocijentu kvocijent iz dividendovega in divizorjevega koeficijenta.

3.) Glavno količino kvocijentovo dobiš, ako izpustiš v dividendu vse one faktorje, katere ima tudi divizor, in to v jednakem številu kakor jih ima divizor.

Kakó deliti dekadna števila.

§ 59.

Iz izrekov v §§ 56. in 57. izvira, ako so mnogočlenski izrazi dekadna števila, t. j. po padajočih potencah števila 10 urejeni polinomi, da je dvoje dekadnih števil takó-le deliti:

Za prvi delski dividend vzemi toliko najvišjih dividendovih številk, kolikor jih ima divizor ali pa jedno več, ako bi bilo število, ki je one številke izražujejo, manjše od divizorja; na ta način dobiš najvišjo kvocijentovo številko in s to pomnoži ves divizor, produkt pa odštej od prvega delskega dividenda. K ostanku naslednjo dividendovo številko pripisavši določi iz tega novega delskega dividenda drugo kvocijentovo številko in to nadaljuj, dokler nisi vzel vseh dividendovih številk v račun. Pomniti pa je, da mora biti ostanek, katerega pri odštevanji delskih produktov dobiš, manjši od divizorja, kajti sicer bi dobil v kvocijentu še drugo številko istega reda.

N. pr. 132886 : 538 = 247, krajše: 132886 : 538 = 247

$$\begin{array}{r} 132886 \\ \underline{1076} \\ 2528 \\ \underline{2152} \\ 3766 \\ \underline{3766} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 132886 \\ 2528 \\ 3766 \\ 0 \end{array}$$

V druzem slučaji smo delske produkte takój pri množenji odštevali in le ostanke napisavali.

Deljenje jednačeb in nejednačeb.

§ 60.

1.) Jednako z jednakim razdeljeno dá jednako.

Ako je $a = b$ in $c = d$, potem je tudi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Izvira neposredno iz § 7., 5.

2.) Nejednako razdeljeno z jednakim dá nejednako z istim nejednačajem.

Ako je $a > b$ in $c = d$, ondaj je $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Dokaz. Ako bi ne bilo $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, moralo bi biti $\frac{a}{c} \overline{\lessgtr} \frac{b}{d}$; a potem bi bilo $\frac{a}{c} \cdot c \overline{\lessgtr} \frac{b}{d} \cdot d$ (§ 47., 1. in 2.), tedaj tudi $a \overline{\lessgtr} b$ (§ 49., 1.), kar pogoju nasprotuje.

3.) Jednako razdeljeno z nejednakim dá nejednako z nasprotnim nejednačajem.

Ako je $a = b$ in $c > d$, ondaj je $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Dokaz. Ako bi bilo $\frac{a}{c} \overline{>} \frac{b}{d}$, moralo bi biti v obeh slučajih $\frac{a}{c} \cdot c > \frac{b}{d} \cdot d$ (§ 47., 2. in 3.), tedaj $a > b$, kar pogoju nasprotuje.

4.) Nejednako, razdeljeno z nejednakim z nasprotnim nejednačajem, dá nejednako s prvim nejednačajem.

Ako je $a > b$ in $c < d$, ondaj je $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Dokaz je prejšnjemu podoben.

Naloge.

1. $15a : 5$. **2.** $6a : a$. **3.** $5xy : y$.
4. $12ab : 2a$. **5.** $8mxy : 2x$. **6.** $abxy : by$.
7. $a^5 : a^2$. **8.** $a^4 : a$. **9.** $a^{m+n} : a^m$.
10. $8x^3 : 2x^2$. **11.** $6y^2z : 3y$. **12.** $7a^3x^5 : ax^2$.
13. $16a^4b^4 : 4ab^2$. **14.** $9a^2x^3y : 3xy$. **15.** $2a^6m^3x^2 : a^3mx^2$.
16. $(6ab \,.\, 2x) : 3ax$. **17.** $(4a^2x : 5ax^2) : 2a^2x^2$.
18. $(12a^2x^3 : 2a) : 6x^2$. **19.** $(18a^2b^3c^4 : 3ab^2c) : 2ac^2$.
20. $(ax + ay) : a$. **21.** $(ax - bx) : x$.
22. $(a^2x + ax^2) : ax$. **23.** $(6a^2y - 3ay^2) : 3ay$.
24. $(8x^3y^3 - 12x^2y^2z^2) : 4x^2y^2$. **25.** $(12a^3x^2 + 9ax^4) : 3ax^2$.

---

26. $(36ax - 12bx + 24cx) : 6x$.
27. $(21m^4 + 15m^3 - 18m^2) : 3m^2$.
28. $(5a^3 - 25a^4 - 10a^5 + 15a^6) : 5a^2$.
29. $(10x^4y^2z - 25x^3y^2z^2 - 15x^2y^2z^3 + 5xy^2z^4) : 5xy^2z$.
30. $(16a^3b^2c^8 + 8a^4b^3c^6 - 12a^5b^4c^4 - 20a^6b^5c^2) : 4a^2b^2c^2$.
31. $(x^2 + 2xy + y^2) : (x + y)$. **32.** $(x^2 - 2xy + y^2) : (x - y)$.
33. $(9a^2 - 4b^2) : (3a + 2b)$. **34.** $(16x^2 - y^2) : (4x - y)$.
35. $(x^4 - 1) : (x + 1)$. **36.** $(x^4 - 1) : (x - 1)$.

37. $(a^5 + b^5) : (a + b)$. ***38.*** $(a^6 - b^6) : (a^2 - b^2)$.
39. $(28a^2 - 67ab + 40b^2) : (7a - 8b)$.
40. $(20a^5 - 18a^4b + 4a^3b^2) : (4a^2 - 2ab)$.
41. $(a^3 + a^2 - 2a - 8) : (a - 2)$.
42. $(15x^3 + 4x^2y - 29xy^2 + 10y^3) : (3x + 5y)$.
43. $(15 + 8x - 32x^2 + 32x^3 - 15x^4) : (3 + 4x - 5x^2)$.
44. $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 + 2ab + b^2)$.
45. $(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) : (a^2 - 2ab + b^2)$.
46. $(15x^4 + 8x^3y - 41x^2y^2 + 10xy^3 + 8y^4) : (5x^2 + 6xy - 8y^2)$.
47. $(4x^6 + 15a^2x^4 + 10a^4x^2 - 9a^6) : (2x^3 + ax^2 + 4a^2x + 3a^3)$.
48. $(27a^6 - 33a^5b - 45a^4b^2 + 71a^3b^3 - 36ab^5 + 16b^6) :$
$: (9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3)$.

---

49. Razdeli 2735000 z 10, 100, 1000.
50.* Kolikokrat je: 3 v 240? 4 v 84? 6 v 186?
51.* Kolikokrat je: 3 v 54? 6 v 72? 7 v 301?
52. Razdeli *a)* 4240, *b)* 29680, *c)* 72080 z 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
53. 134676 : 29. ***54.*** 5791338 : 63.
55. 309644 : 778. ***56.*** 5606912 : 752.
57. 1472692768 : 14734. ***58.*** 36363918357 : 62883.
59. 66688 : 32.

$$\begin{array}{r l} 66688 & \\ \hline & : 8 \\ 8336 & \\ \hline & : 4 \\ 2084 & \end{array}$$

60. 56538 : 81.
61. 125860 : 35.
62. 321111 : 63.

Izračunaj, uporabljajoč prikrajške:

63. 764625 : 25. ***64.*** 345673 × 25.
65. 634750 : 125. ***66.*** 53028 × 125.
67. 7825 × 25 + 3284 × 125 — 8598125 : 125.

68.* Koliko velja 1 *m*, ako dobiš za 15 gl. 12 kr. *a)* 6 *m*, *b)* 7 *m*?

69.* Koliko velja 1 *l*, ako dobiš za 7 gl. 56 kr. *a)* 9 *l*, *b)* 12 *l*?

70. Ekvator naše zemlje ima 5400 zemljep. milj v obsegu; kakó dolga je 1 ekvatorjeva stopinja?

71. Kranjska ima 100 Mm^2 površine in 481243 prebivalcev; koliko prebivalcev pride poprek na 1 Mm^2?

72. Česka ima 5560819 prebivalcev, in sicer po 10706 na 1 Mm^2; kolika je nje površina?

73. Trgovec plača za 3200 *kg* sladorja 1784 gl. ter hoče pri vsacih 100 *kg* 4 gl. 25 kr. dobička imeti; po čem mora *kg* prodajati?

74. Neki oče zapusti 16800 gl. To imenje je med njega ženo, 3 sinove in 3 hčere takó razdeliti, da dobi mati 4 dele, vsak sin po 3 in vsaka hči po 2 jednaka dela. Koliko dobi mati in koliko vsak otrok?

VI. Naloge v ponavljanje.

*1.** *a)* $57+12$; *b)* $39+63$; *c)* $25+47$; *d)* $86+35$; *e)* $94+96$.

*2.** *a)* $371+128$; *b)* $607+134$; *c)* $593+238$; *d)* $399+158$.

3. $132475 \,.\, 37160 + 7908 \,.\, 4296$.

4. $83716 \,.\, 5809 - 63077 \,.\, 7089$.

5. Seštej

$$a)\ \begin{array}{r} 6x + 5y \\ x + 7y \\ \underline{8x - \ y} \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{r} 8a + 7b - 6c + 5d \\ 9a - 6b + 7c - 4d \\ \underline{7a - 5b - 8c + 6d} \end{array}$$

6. $(4a^4 + 5a^2b^2 + 6b^4)(7a^2 - 8b^2)$.

7. $(2a^2 + 3b^2)(5a^2 - 4b^2) - (10a^4 - 12b^4)$.

8. $(5a + 2b - 3c) - [(2a - 3b + 5c) - (a - 2b - 4c)]$.

9. $7a - \{(3c - 6b) - [(6a - 3c) - 3b + (3a - 8c)]\}$.

10. $(9a^2 - 16b^2) : (3a + 4b)$.

11. $(8x^4 - 26x^3 - 43x^2 - 78x - 21) : (2x^2 - 9x - 3)$.

*12.** *a)* $85-24$; *b)* $74-53$; *c)* $56-29$; *d)* $81-47$; *e)* $98-29$.

*13.** *a)* $466-149$; *b)* $393-208$; *c)* $706-658$; *d)* $832-399$.

14. Pestalozzi je bil rojen v Zürich-u dné 12. januvarja 1746. l., umrl pa je v Brugg-u na Aargau-skem dné 17. februvarja 1827. l.; koliko let je imel, ko je umrl?

15. $7xy - [7yz - (3xz - 2xy) + 3xy] - (6yz - 3xz)$.

16. $(3a + 8b)^2 + (4a + 6b)^2 - (5a - 10b)^2$.

17. $(x^8 + x^4y^4 + y^8) : (x^4 - x^2y^2 + y^4)$.

18. *a)* $86727 \,.\, 25$; *b)* $13076 \,.\, 125$; *c)* $399448 \,.\, 11$.

19. *a)* $17768 \,.\, 399$; *b)* $64159 \,.\, 994$; *c)* $806635 \,.\, 999$.

20. *a)* $34625 : 25$; *b)* $57625 : 125$; *c)* $8872472 : 56$.

21. $(a^2x - b^2y)^2 + (a^2x + b^2y)^2 - (a^4x^2 + b^4y^2)$.

22. $(16x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 2x - 1) : (2x^2 + 1)$.

Drugi oddelek.

Četvero osnovnih računov z algebrajskimi celimi števili.

1. Negativna števila.

§ 61.

Naravna števila je môči le tedaj odštevati, kadar je minuend večji od subtrahenda ali prav tolik. Ako treba n. pr. od števila 6 število 4 odšteti, pomaknemo se v številni vrsti od števila 6 za 4 jednote nazaj in na ta način pridemo do števila 2; tedaj je $6 - 4 = 2$. Treba li od števila 6 isto število 6 odšteti, pomaknemo se od števila 6 za 6 jednot nazaj ter pridemo do ničle, katera je izhodišče vsem naravnim številom; tedaj $6 - 6 = 0$.

Ako bi pa trebalo od števila 6 odšteti večje število, n. pr. 8, šteli bi najprej od števila 6 za 6 jednot nazaj ter prišli do ničle, a potem bi morali še za 2 jednoti nazaj šteti; le-tó pa v naravni številni vrsti ni mogoče, ker se končuje pri ničli.

Da je môči tudi tedaj odštevati, kadar je minuend manjši od subtrahenda, za to treba števil, katera dobimo, če štejemo od ničle nazaj. Da dobimo taka števila, treba le številno vrsto, ki se do sedaj le naprej brez konca razteza, po istem tvorbnem zakonu tudi od ničle nazaj raztegniti in ob jednem primerno izraziti nasprotje med števili, katera dobimo, če štejemo jedenkrat od 0 naprej, drugokrat od 0 nazaj. Le-tó pa dosežemo, ako imenujemo prvotna števila, katera dobivamo, štejoč od 0 vselej za jedno jednoto naprej, pozitivna, števila pa, katera dobivamo, pomikajoč se po istem tvorbnem zakonu od 0 nazaj, negativna števila ter prva zaznamenujemo z znakom $+$ (več, plus), druga pa z znakom — (menj, minus). Na ta način dobimo tó-le dvostransko številno vrsto:

$$\ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ \ldots$$

Pozitivna števila veljajo nam tu za prvotna števila naravne številne vrste, negativna pa so nova števila, izražujoča nasprotje pozitivnim številom. $+4$ pomenja 4 od 0 naprej štete jednote, -4 pomenja 4 od 0 nazaj štete jednote.

Torej je zgoraj iskana diferenca $6 - 8 = -2$, tedaj negativno število.

Pozitivna in negativna števila si moremo predočiti, načrtavši na premi črti od točke 0 v določeno mer jednake daljice; krajišča teh daljic nam predočujejo zaporedna naravna (pozitivna) števila.

$$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4$$

Ako si hočemo na tej številni črti tudi negativna števila predočiti, treba le premo črto, katera se je s prva le v jedno mer (proti desni) raztezala, podaljšati čez nje izhodišče 0 tudi v nasprotno mer (proti levi), ter tudi tukaj jednake daljice načrtati; krajišča na levi načrtanih daljic predstavljajo negativna števila.

§ 62.

Števila, imajoča predznak *(Vorzeichen)*, imenujemo relativna (vziralna) ali algebrajska števila, v nasprotje številom brez znaka, katera zovemo absolutna (samoobsebna) števila.

Vsako algebrajsko število sestoji iz predznaka in absolutne vrednosti. Predznak kaže, da je število na pozitivni ali negativni strani številne vrste; absolutna vrednost pa povė, katero mesto ima število v vrsti pozitivnih ali negativnih števil.

Predznaka $+$ ne pišemo niti v začetku številnega izraza niti za jednačajem; znaka $-$ ne smemo nikdar izpustiti. Število, pred katerim ne stoji nikakeršen znak, treba tedaj za pozitivno smatrati.

Dve algebrajski števili, imajoči jednako absolutno vrednost, a različen predznak, imenujemo nasprotni *(entgegengesetzt)*; n. pr. $+4$ in -4.

Količine, izražujoče n. pr. pomikanje proti severju in proti jugu, dviganje in padanje, imenje in dolgove, višino nad in pod morsko gladino, dobo pred rojstvom in po rojstvu Kristusovem, i. t. d., katere je môči v dveh nasprotnih zmislih šteti, zovemo nasprotne količine. V matematiki zaznamenujemo jedno izmed dveh nasprotnih količin, in to katero koli, a dosledno, s $+$, drugo z $-$.

Ako dobimo v katerem koli računu za iskano količino negativno vrednost $-n$, ondaj pomenja tak rezultat, da ima dotična količina n jednot, a v nasprotnem zmislu, kakor se je bil s prva za ta račun določil. N. pr.

Dogodek A se je vršil leta 65. po Kristusu, dogodek B 128 let pozneje kakor A, in dogodek C 246 let prej kakor A; katerega leta po Kr. se je pripetil dogodek C? To dobimo $x = 65 + 128 - 46 = -53$; t. j. dogodek C se je pripetil leta 53. pred Kristusom.

---

2. Kakó je algebrajska števila seštevati in odštevati.

§ 63.

Ker smo, uvedši negativna števila, naše številstvo raztegnili, treba tudi računom prvotne pojme takó raztegniti, da bodo za negativna števila veljavni. Iz teh raztegnenih pojmov bode potem samo ob sebi jasno, kakó je račune same izvrševati.

Absolutna števila seštevati se pravi, pomikati se v naravni številni vrsti od prvega sumanda za toliko jednot dalje, kolikor jih ima drugi sumand.

Za algebrajska števila dobi ta pojem, ker veljajo tu absolutna števila za pozitivna, negativna pa izražujejo nasprotje pozitivnim, tó-le občnejšo obliko:

Algebrajska števila seštevati se pravi, pomikati se v algebrajski številni vrsti od prvega sumanda za toliko jednot, kolikor jih ima drugi sumand v ono mer, katero zahteva predznak druzega sumanda; število, do katerega na ta način v številni vrsti pridemo, je iskana vsota. N. pr. Recimo, da nam je izračunati vsoto $(+5) + (-3)$. V ta namen se pomaknemo v številni vrsti od števila $+5$ v negativno mer za 3 jednote dalje; na ta način pa pridemo do števila $+2$; tedaj je $(+5) + (-3) = +2$.

Izvodi. 1.) Prištevanje pozitivnega števila je prištevanje njega absolutne vrednosti; prištevanje negativnega števila je odštevanje njega absolutne vrednoti.

$$a + (+b) = a + b, \qquad a + (-b) = a - b,$$
$$7 + (+3) = 7 + 3, \qquad 7 + (-3) = 7 - 3.$$

2.) Dvoje jednako zaznamenovanih števil seštejemo, ako postavimo pred vsoto njiju absolutnih vrednostij skupni predznak.

$$(+a)+(+b)=+(a+b), \qquad (-a)+(-b)=-(a+b),$$
$$(+5)+(+3)=+(5+3), \qquad (-5)+(-3)=-(5+3).$$

3.) Dvoje različno zaznamenovanih števil seštejemo, ako postavimo pred diferenco njiju absolutnih vrednostij predznak večjega števila.

$$\begin{aligned}(+a)+(-b)&=+(a-b) \text{ za } a>b\\ &=-(b-a) \text{ » } a<b\\ (-a)+(+b)&=-(a-b) \text{ » } a>b\\ &=+(b-a) \text{ » } a<b\end{aligned}$$

N. pr. $(+5)+(-3)=+(5-3)=+2$
$(-5)+(+3)=-(5-3)=-2.$

4.) Vsota dveh nasprotnih števil je jednaka ničli (števili se uničujeta).

$$(+a)+(-a)=0, \qquad (-a)+(+a)=0,$$
$$(+5)+(-5)=0, \qquad (-5)+(+5)=0.$$

§ 64.

Pri odštevanji absolutnih števil se pomikamo v naravni številni vrsti od minuenda za toliko jednot nazaj, kolikor jih ima subtrahend.

Algebrajska števila odštevati se tedaj pravi, pomikati se v algebrajski številni vrsti od minuenda za toliko jednot, kolikor jih ima subtrahend, tudi nazaj, ako je ta pozitiven, a naprej, ako je negativen, tedaj v obče pomikati se v nasprotno mer, kakor jo zahteva subtrahendov predznak; število, do katerega na ta način v številni vrsti pridemo, je iskana diferenca.

Iz tega pojasnila izvira:

Odštevanje pozitivnega števila je odštevanje njega absolutne vrednosti; odštevanje negativnega števila je prištevanje njega absolutne vrednosti.

$$a-(+b)=a-b, \qquad a-(-b)=a+b,$$
$$8-(+5)=8-5, \qquad 8-(-5)=8+5.$$

§ 65.

Algebrajsko število odštejemo od druzega algebrajskega števila, ako prištejemo k neizpremenjenemu minuendu subtrahend z nasprotnim predznakom.

$$(+a)-(+b)=(+a)+(-b), \quad (+5)-(+3)=(+5)+(-3);$$
$$(+a)-(-b)=(+a)+(+b), \quad (+5)-(-3)=(+5)+(+3);$$
$$(-a)-(+b)=(-a)+(-b), \quad (-5)-(+3)=(-5)+(-3);$$
$$(-a)-(-b)=(-a)+(+b), \quad (-5)-(-3)=(-5)+(+3).$$

Dokaz. Diferenco $(+5)-(+3)$ najdemo, pomaknivši se od števila $+5$ v negativno mer za 3 jednote; na ta način pridemo do števila $+2$. A prav tisto storimo tudi, ako nam je k številu $+5$ število -3 prišteti, tedaj je

$$(+5)-(+3)=(+5)+(-3)=+2.$$

Vzemimo, da nam je še diferenco $(+5)-(-3)$ izračunati. Tu treba od števila $+5$ v pozitivno mer za 3 jednote se pomakniti; na ta način pridemo do števila $+8$. Prav tisto bi pa tudi storili, ako bi nam bilo k številu $+5$ število $+3$ prišteti; zatorej je

$$(+5)-(-3)=(+5)+(+3)=+8.$$

Na isti način dobimo

$$(-5)-(+3)=(-5)+(-3)=-8,$$
$$(-5)-(-3)=(-5)+(+3)=-2.$$

§ 66.

Vsoto, imajočo algebrajska števila za sumande, imenujemo algebrajsko vsoto; n. pr.

$$(+a)+(-b)+(-c)+(+d)+(-f).$$

Diferenco dveh algebrajskih števil nam je môči vselej v algebrajsko vsoto izpremeniti. (§ 65.)

Vsako algebrajsko vsoto pretvorimo lahko na polinom. V ta namen treba le znake za seštevanje in oklepaje izpustiti ter predznake za računske znake smatrati.

$$(+a)+(-b)+(-c)+(+d)=a-b-c+d.$$

Izvira neposredno iz § 63., izvoda 1.

V algebrajskih vsotah se znaki za seštevanje in oklepaji pri posamičnih sumandih navadno izpuščajo. V tej obliki se razločuje algebrajska vsota od polinoma le v tem, da treba smatrati tega računske znake $+$ in $-$ za predznake v oni, t. j. aditivne in subtraktivne člene tega za pozitivne in negativne sumande v oni. Na vrednost obeh nima ta različni pomen znakov nikakeršnega vpliva, kakor je razvidno iz § 63., izvoda 1.

Izreki o seštevanji in odštevanji polinomov (§ 29., 1. in 2.) veljajo tedaj tudi za algebrajske vsote, treba le aditivne in subtraktivne člene tu za pozitivne in negativne sumande smatrati.

Naloge.

1. $+7+(-2)$. **2.** $-15+(-5)$.

3. $-31-(+14)$. **4.** $+95-(-67)$.

5. $+412+(-318)+(+104)$.

6. $+752-(+319)+(-284)$.

7. $+378-(-129)+(-245)-(+88)-(-236)$.

8. Izračunaj $x-(x-2)+(x-4)-(x-6)+(x-8)$ za $x=3$.

9. $-8a+(+7a)$. **10.** $+5x+(-5x)$.

11. $+6m-(-4m)$. **12.** $-15y-(-20y)$.

13. $-4x+(-7x)-(-12x)$.

14. $+8a-(-9a)-(+7a)$.

15. $(6a-3b-9c)+(-4a+5b-c)$.

16.
$$\begin{array}{r} 8a-6b+4c \\ -5a-3b+7c \\ a+4b-9c \\ \hline \end{array}$$

17.
$$\begin{array}{r} 3-4x+5x^2 \\ -4-3x-2x^2 \\ 2+9x-3x^2 \\ \hline \end{array}$$

18. $(x+y-z)-(x-y+z)+(-x+y+z)-(-x-y+z)$.

19. $[(a-b)-b]-(b-a)$. **20.** $5a-[(3a-(a-b)]$.

21. $x+[(y-x)-(y-z)]$. **22.** $x-[(x+z)-(y+z)]$.

23. Nekdo stopi 65krat naprej, potem 37krat nazaj, potlej pa zopet 48krat naprej; *a)* kolikokrat je stopil sploh, *b)* za koliko korakov se je oddalil od prvotnega mesta?

24. Reka sama požene parobrod vsako minuto za 65 *m* z vodo, parna sila sama pa vsako minuto za 412 *m*; koliko *m* prevozi parobrod vsako minuto *a)* z vodo, *b)* proti vodi?

3. Kakó je algebrajska števila množiti in deliti.

§ 67.

Množeč absolutna števila vzamemo multiplikand tolikokrat kot sumand, kakor kaže multiplikator.

Algebrajska števila množiti se pa pravi, vzeti multiplikand tolikokrat kot sumand, kakor zahteva multiplikatorjeva absolutna vrednost in to z neizpremenjenim ali nasprotnim predznakom, kakor je multiplikator pozitiven ali negativen.

§ 68.

1.) Dva jednako zaznamenovana faktorja dasta pozitiven, dva različno zaznamenovana faktorja dasta negativen produkt.

$$(+a) \,.\, (+b) = +ab, \qquad (+4) \,.\, (+3) = +12;$$
$$(-a) \,.\, (+b) = -ab, \qquad (-4) \,.\, (+3) = -12;$$
$$(+a) \,.\, (-b) = -ab, \qquad (+4) \,.\, (-3) = -12;$$
$$(-a) \,.\, (-b) = +ab, \qquad (-4) \,.\, (-3) = +12.$$

Dokaz. Vsled pojma o množenji dveh algebrajskih števil je

$$(+4) \,.\, (+3) = (+4) + (+4) + (+4) = +12,$$
$$(-4) \,.\, (+3) = (-4) + (-4) + (-4) = -12,$$
$$(+4) \,.\, (-3) = (-4) + (-4) + (-4) = -12,$$
$$(-4) \,.\, (-3) = (+4) + (+4) + (+4) = +12.$$

2.) Za več faktorjev izvira iz prejšnjega izreka:

a) Ako so vsi faktorji pozitivni, pozitiven je tudi produkt.

b) Ako so vsi faktorji negativni, ali ako je vsaj nekaj negativnih, ondaj je produkt pozitiven ali negativen, kakor je število negativnih faktorjev sodo ali liho.

§ 69.

Pojem o deljenji absolutnih števil (§ 48.) velja neizpremenjen tudi za algebrajska števila.

Kvocijent dveh algebrajskih števil je pozitiven ali negativen, kakor sta obe ali jednako ali različno zaznamenovani.

1.) $(+a):(+b) = +\frac{a}{b}$, 3.) $(+a):(-b) = -\frac{a}{b}$,

2.) $(-a):(-b) = +\frac{a}{b}$, 4.) $(-a):(+b) = -\frac{a}{b}$.

Dokaz. 1.) $\left(+\frac{a}{b}\right).(+b) = +\left(\frac{a}{b}.b\right)$ (§ 68., 1.) $= +a$ (§ 49., 1.)

Prav takó dokažeš 2.), 3.) in 4.)

§ 70.

Izreki o množenji in deljenji polinomov (§§ 41., 42., 56.—58.) veljajo tudi za algebrajske vsote; le aditivne in subtraktivne člene treba tu (oziraje se na § 66.) za pozitivne in negativne sumande smatrati.

Naloge.

*1.** $+9.-7.$ *2.** $-19.+8.$

3. $-128.+39.$ *4.* $-217.-25.$

5. $+14.+9.-8.$ *6.* $+27.-6.-9.$

7. $-2.-7.-11.-20.$ *8.* $+9.-5.-12.-15.$

9. $[-2345-(+730)].[+1357+(-1468)]$.

10. $4.-3-5.-6+7.-5-9.+8$.

11. Izračunaj $(x-1)(x-4)(x-7)(x-10)$ za $x = 3$.

12. Izračunaj $x^2 - 6x - 16$ za $x = +8$ in za $x = -2$.

13. Telo, pomikajoče se v premi črti vsako sekundo za 12 m *a)* naprej, *b)* nazaj, je sedaj v točki A; na kateri strani in v kateri razdalji od A bode to telo čez 25 sekund? Na kateri strani in v kateri razdalji od A je bilo to telo pred 25 sekundami?

14. $6a.-3$. *15.* $-7ab.2ac$.

16. $-a^2.-4a$. *17.* $3x.-5xy$.

18. $-12x^4.8x^2y^2$. *19.* $-8ay^3.15a^3y$.

20. $-5x.-5x.-5x$. *21.* $9ab^2.7ac.-18c^2$.

22. $-6ab^2y^3.2b^3y^3.-8a^2y$. *23.* $12x^2y^3z.-9xy^2z^3.-2x^2z$.

24. $(6a-5b).-8c$. *25.* $(7x^2-6y^2).-2xy$.

26. $(2+3a-4a^2-5a^3).-6a^2$.

27. $-15a^2x^2.(2a^4-4a^3x+6a^2x^2)$.

28. $(7ax^2-10by^2).4abx^2-(8bx^2+5ay^2).-5aby^2$.

29. $(5a+6b)(-2a+3b)$. *30.* $(1-m^2)(1+m^2)$.

31. $(x^2+2xy+y^2)(-x^2+2xy-y^2)$.

32. $(3 - 4x + 6x^2)(2 - 6x - 18x^2)$.
33. $(1 - 2a + 3a^2 - 4a^3)(1 - 3a + 5a^2 - 7a^3)$.
34. $(a + b - c)(a - b + c)(- a + b + c)$.

---

35. $+ 63 : - 7$. **36.** $- 48 : + 12$.
37. $+ 264 : - 4$. **38.** $- 3840 : - 30$.
39. $[2760 - (+ 732)] : [- 62 - (- 23)]$.
40. Izračunaj $\frac{x - 14}{5 - x} - x + \frac{x - 10}{7 - x} - \frac{5(x - 2)}{3(6 - x)}$ za $x = 8$.
41.* Toplomer je kazal nekega dne zjutraj -8^0 R., o poldne $+ 2^0$ R., zvečer $- 5^0$ R.; kolika je bila poprečna dnevna toplina?
42. $12a^4 : - 3a$. **43.** $- 14a^4b^2 : 2a^2b$.
44. $- 4a^2m^4x^5 : - 2m^2x^3$. **45.** $36x^3y^2z^4 : - 9xy^2z^3$.
46. $(8ab - 12ac) : - 4a$. **47.** $- (16a^3 - 24a^2) : - 8a^2$.
48. $(18am^2y^3 - 27bmy^2 + 36cy) : - 3y$.
49. $(- 16a^3b^2c^5 + 8a^4b^3c^4 - 12a^5b^4c^3 + 20a^6b^5c^2) : 4a^2b^2c^2$.
50. $(1 - x^5) : (1 - x)$.
51. $(6x^3 - 23x^2 + 24x - 10) : (- 2x + 5)$.
52. $(- 30x^4 + 2x^3 + 125x^2 + 51x - 27) : (- 6x^2 - 8x + 3)$.
53. $(6a^4 - 5a^3 + 4a^2 + 11a - 4) : (- 2a^2 + 3a - 4)$.
54. $(2 - 7x + 16x^2 - 25x^3 + 24x^4 - 16x^5) : (2 - 3x + 4x^2)$.

---

4. Naloge v ponavljanje.

1.* Koliko velja:
a) 18 *l* po 36 kr.? *b)* 13 *m* po 1 gl. 74 kr.?
c) 21 *l* po 64 kr.? *d)* 12 *m* po 5 gl. 28 kr.?
2.* $- 1 . 2 . - 3 . 4 . - 5$.
3. $[10 - 2 . - 3 - (7 - 10 : 2)] : 2$.
4. $[x - (m + n)] + [x - (m + p)] - [x - (n + p)]$.
5. $(9a - 5b)(a + 2b - 3) - (3a - 5b)(3a - b - 3)$.
6. $(4a^3 - 16a^2 + 7a + 20) : (2a - 5)$.
7.* *a)* 728 + 154; *b)* 398 + 542; *c)* 827 − 452; *d)* 643 − 397.
8.* 15 *l* velja 6 gl. 60 kr.; koliko velja 1 *l*?

9. Nekdo je bil rojen dne 5. januvarja 1809. l., umrl pa je, imajoč 60 let 6 mesecev in 12 dnij; kedaj je umrl?

10. $(4a^3b^4 + 8a^5b^7 - 12a^7b^9) : - 2a^2b^3$.

11. $(8m - 5x) - \{(2m - 3n - 4x) + [(3x - 2n) - (4m + 3n)]\}$.

12. $(1 - 2a + 3a^2 - 4a^3)\,(1 - 3a + 5a^2 - 7a^3)$.

13. $- 2906 \,.\, 2076 \,.\, - 249 \,.\, 157$.

14. *a)* $123469037 : - 24679$; *b)* $- 462191832 : - 79251$.

15. $(24x^3 - 26x^2y + 18xy^2 - 4y^3) : (4x^2 - 3xy + 2y^2)$.

Tretji oddelek.

O razdelnosti števil.

§ 71.

O številu pravimo, da je z druzim številom razdelno, ako dá, z le-tém razdeljeno, celo število za kvocijent. Dividend zovemo v tem slučaji divizorjev mnogokratnik *(Vielfaches)*, divizor pa dividendovo mero *(Mass)*. Takó je n. pr. število 18 s 6. ab z a razdelno; ab je mnogokratnik števila a, in a mera števila ab,

Vsako število je razdelno z 1 in samo s seboj. Števila, katera so le z 1 in sama s seboj razdelna, imenujemo absolutna praštevila ali kar praštevila *(Primzahlen)*; n. pr. 3, 11, 29. Število, izraženo s katero koli črko, treba za praštevilo smatrati, ako se izrekoma nasprotno ne poudarja. Števila, katera so razdelna ne le z 1 in sama s seboj, nego tudi z druzimi števili, zovemo sestavljena števila; n. pr. 8, 15, abc.

Število, s katerim je razdelnih dvoje ali več druzih števil, imenujemo skupno mero *(gemeinschaftliches Mass)* teh števil; n. pr. 3 je skupna mera števil 12 in 21; m je skupna mera števil amx, bmy, cmz.

Števila, katera nimajo razven 1 nikakeršne druge skupne mere, zovemo relativna (medsebojna) praštevila *(relative Primzahlen)*; n. pr. 2, 9, 12; prav takó ab, bc, cd, $abcd$.

Število, katero je razdelno z dvema ali več druzimi števili, imenujemo skupen mnogokratnik *(gemeinschaftliches Vielfache)* teh števil; n. pr. 20 je skupen mnogokratnik števil 2, 4, 5, 10; $8abcd$ pa števil $2abc$, $4d$, $8acd$.

Ako število a ni razdelno s številom b, ondaj imenujemo število r, katero dobimo, odštevši od dividenda a največji mnogokratnik divizorja b, ki ga ima dividend v sebi, n. pr. bk, delitveni ostanek *(Divisionsrest)*. Tedaj je $r = a - bk$, in $a = bk + r$.

1. Občni izreki.

§ 72.

1.) **Ako ima dvoje ali več števil kako skupno mero, razdelna je z njo tudi njih vsota.**

Dokaz. Vzemimo, da so števila a, b in c s številom m razdelna, potem je razdelna z m tudi njih vsota $a + b + c$. Kajti po pogoji je $a : m = k$, $b : m = k_1$, $c : m = k_2$, kjer pomenjajo k, k_1, k_2 cela števila, tedaj $a = mk$, $b = mk_1$, $c = mk_2$. Ker pa dá jednako k jednakemu prišteto jednako, dobimo $a + b + c = mk + mk_1 + mk_2$, ali, ako razdelimo obe strani te jednačbe z m, $(a + b + c) : m = k + k_1 + k_2$; ker pa dá vsota $a + b + c$, z m razdeljena, celo število $k + k_1 + k_2$ za kvocijent, zato je res z m razdelna.

2.) **Ako imata dve števili kako skupno mero, razdelna je z njo tudi njiju diferenca.**

Vzemimo, da je m skupna mera števil a in b, in da je $a : m = k$, $b : m = k_1$, tedaj $a = mk$, $b = mk_1$. Drugo jednačbo od prve odštevši, dobimo $a - b = mk - mk_1$ in odtod $(a - b) : m = k - k_1$, tedaj je diferenca $a - b$ res z m razdelna.

§ 73.

1.) **Ako ima število kako mero, razdelen je z njo tudi vsak njegov mnogokratnik.**

Dokaz. Recimo, da je število a z m razdelno, in sicer $a : m = k$, tedaj $a = mk$; potem je pa tudi $ar = mkr$, in $ar : m = kr$; a-jev mnogokratnik ar je torej res z m razdelen.

2.) **Ako je število razdelno z dvema relativnima prašteviloma, razdelno je tudi z njiju produktom.**

Dokaz. Vzemimo, da je število a z relativnima prašteviloma m in n razdelno. Ker nimata te dve števili nikakeršnega skupnega faktorja, a pa mora vse faktorje števil m in n imeti, zato mora število a tudi vse faktorje produkta mn imeti, tedaj z mn razdelno biti.

Ako je število razdelno n. pr. z 2 in 3, razdelno mora biti tudi z njiju produktom 6.

§ 74.

1.) **Ako imata skupno mero dividend in divizor, razdelen je z njo tudi delitveni ostanek.**

Dokaz. Vzemimo, da sta števili a in b z m razdelni, in da dá a, z b razdeljen, k za kvocijent in r za ostanek; tedaj $r = a - bk$.

Ker je a z m razdelen, prav takó b, tedaj tudi njegov mnogokratnik bk, zato mora biti z m razdelna tudi diferenca $a - bk$ in ta je jednaka r.

Odtod izvajamo:

Vsaka skupna mera med dividendom in divizorjem je tudi skupna mera med divizorjem in delitvenim ostankom.

2.) Ako imata skupno mero divizor in delitveni ostanek, razdelen je z njo tudi dividend.

Vzemimo, da dobimo, a z b razdelivši, k za kvocijent in r za ostanek, tedaj $a = bk + r$, in da je m skupna mera števil b in r; ker pa je z m razdelen b, tedaj tudi njegov mnogokratnik bk, in prav takó r, razdelna mora biti z m tudi vsota $bk + r$ in ta je jednaka a.

Ta izrek izražujemo tudi takó-le:

Vsaka skupna mera med divizorjem in delitvenim ostankom je tudi skupna mera med dividendom in divizorjem.

2. Kakó je spoznavati razdelnost dekadnih števil.

§ 75.

Dekadno število je z 2 ali 5 razdelno, ako so njega jednice oziroma z 2 ali 5 razdelne.

Dokaz. Vsako dekadno število je môči razstaviti na mnogokratnik števila 10 in jednice; n. pr.

$$3576 = 357 \,.\, 10 + 6, \qquad 4385 = 438 \,.\, 10 + 5.$$

Število 10 je pa z 2 in 5 razdelno, tedaj tudi vsak mnogokratnik števila 10; ako so še jednice danega števila z 2 ali 5 razdelne, razdelno je tudi število.

Dostavki. 1.) Dekadno število je z 10 razdelno, ako je njega najnižja številka 0.

2.) Ona števila, katera imajo na mestu jednic 0, 2, 4, 6 ali 8, katera so tedaj z 2 razdelna, imenujemo soda (par) števila *(gerade Zahlen)*. Sodo število zaznamenujemo, ker je mnogokratnik števila 2, v obče z $2m$, kjer pomenja m katero koli celo število.

3.) Ona števila, katera imajo na mestu jednic 1, 3, 5, 7 ali 9, katera tedaj niso z 2 razdelna, zovemo liha (nepar) števila *(ungerade Zahlen)*. Občna oblika lihim številom je $2m + 1$ ali $2m - 1$, kajti vsako liho število je za 1 večje ali manjše od sodega.

§ 76.

Dekadno število je razdelno s 4 ali 25, ako je razdelno s 4 ali 25 število, katero izražata njegovi dve najnižji številki.

Dokaz. Vsako dekadno število razstavimo lahko na dva dela, na mnogokratnik števila 100 in število, izraženo z njega deseticami in jednicami; n. pr.

$$9132 = 91 \,.\, 100 + 32, \qquad 8475 = 84 \,.\, 100 + 75.$$

Število 100 je razdelno s 4 in 25, tedaj tudi vsak njegov mnogokratnik; ako je še drugi del, imajoč desetice in jednice danega števila, s 4 ali 25 razdelen, ondaj je tudi število samo razdelno.

Dostavek. Dekadno število je razdelno s 100, ako sta njega najnižji dve številki ničli.

§ 77.

Dekadno število je razdelno z 8 ali 125, ako je razdelno z 8 ali 125 število, katero izražajo njega tri najnižje številke.

Dokaz. Vsako dekadno število je môči takó na dva dela razstaviti, da je prvi mnogokratnik števila 1000, drugi pa ima stotice, desetice in jednice danega števila; n. pr.

$$37912 = 37 \,.\, 1000 + 912, \qquad 56388 = 56 \,.\, 1000 + 388.$$

Vsak mnogokratnik števila 1000 je razdelen z 8 in 125; ako je razdelno z 8 ali 125 tudi število iz treh najnižjih mest, ondaj je razdelno tudi dano število.

Dostavek. Dekadno število je razdelno s 1000, ako so njega tri najnižje številke ničle.

§ 78.

Dekadno število je razdelno s 3 ali 9, ako je njega številčna vsota razdelna oziroma s 3 ali 9.

Dokaz. Vsako dekadno število je môči takó na dva dela razstaviti, da ima prvi same mnogokratnike števila 9, drugi pa številčno vsoto danega števila; n. pr.

$$\begin{aligned} 75624 &= 7 \,.\, 10000 + 5 \,.\, 1000 + 6 \,.\, 100 + 2 \,.\, 10 + 4 \\ &= 7 \,.\, (9999 + 1) + 5 \,.\, (999 + 1) + 6 \,.\, (99 + 1) + 2 \,.\, (9 + 1) + 4 \\ &= 7 \,.\, 9999 + 7 + 5 \,.\, 999 + 5 + 6 \,.\, 99 + 6 + 2 \,.\, 9 + 2 + 4 \\ &= (7 \,.\, 9999 + 5 \,.\, 999 + 6 \,.\, 99 + 2 \,.\, 9) + (7 + 5 + 6 + 2 + 4). \end{aligned}$$

Prvi del ima same mnogokratnike števila 9, tedaj je razdelen s 3 in 9; ako je razdelen s 3 ali 9 tudi drugi del, namreč številčna vsota, razdelno je tudi dano število.

Dostavek. Število, katero je razdelno z 2 in 3, razdelno je tudi s 6 (§ 73., 2.)

§ 79.

Dekadno število je razdelno z 11, ako je razdelna z 11 diferenca med številčnima vsotama lihih in sodih mest.

Dokaz. Vsako dekadno število razstavimo lahkó takó na dva dela, da ima prvi same mnogokratnike števila 11, drugi pa diferenco med številčnima vsotama lihih in sodih mest; n. pr.

$$\begin{aligned}653972 &= 6.100000 + 5.10000 + 3.1000 + 9.100 + 7.10 + 2\\ &= 6(100001-1)+5.(9999+1)+3.(1001-1)+9.(99+1)+7.(11-1)+2\\ &= 6.100001 - 6 + 5.9999 + 5 + 3.1001 - 3 + 9.99 + 9 + 7.11 - 7 + 2\\ &= (6.100001+5.9999+3.1001+9.99+7.11)+[(5+9+2)-(6+3+7)],\end{aligned}$$

tedaj

$$653972:11 = (6.9091 + 5.909 + 3.91 + 9.9 + 7) + \frac{(5+9+2)-(6+3+7)}{11}.$$

Naloge.

1. Katera izmed števil 3924, 1038, 5016, 8033, 9062, 8752, 16536, 24300, 39235, 74636 so razdelna z 2, katera tudi s 4, in katera niti s 4 niti z 2?

2. Katera izmed števil 352, 1630, 2876, 4756, 9492, 12748, 22062, 25864, 30508 so razdelna z 2, katera tudi s 4, in katera z 8?

3. Katera izmed števil 273, 1540, 5926, 8028, 12345, 20475, 38124, 67089, 705426 so razdelna s 3, katera tudi z 9, in katera niti s 3 niti z 9?

4. S katerimi izmed števil 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 25, 100, 125, 1000 so razdelna tá-le števila:

a) 312; *b)* 6225; *c)* 17280; *d)* 71016; *e)* 948656?
f) 720: *g)* 6472; *h)* 76450; *i)* 484572; *k)* 567000?
l) 534; *m)* 8625; *n)* 10692; *o)* 734520; *p)* 350496?

3. Kakó je razstavljati števila na faktorje.

§ 80.

Vsako končno sestavljeno število je môči na same prafaktorje razstaviti.

Dokaz. Vsako sestavljeno število se mora vsaj na dva faktorja razstaviti dati; le-tá je môči razstaviti, ako sta sestavljeni števili, zopet na faktorje, kateri so ali praštevila ali zopet sestavljena števila; v zadnjem slučaji razstavljanje nadaljujoč, moramo dobiti slednjič same prafaktorje. Kajti sicer bi moralo biti dano število sestavljeno iz brezkončno mnogih prafaktorjev, ki bi bili vsi večji od 1, a ondaj bi bilo število samo brezkončno veliko, kar je proti pogoju.

§ 81.

Kakó je razstaviti sestavljeno število na njega prafaktorje.

Dano število razdeli z najmanjšim praštevilom, s katerim je razdelno, ne oziraje se na 1; kvocijent razdeli zopet z najmanjšim praštevilom, s katerim je razdelen, ne izvzemši prejšnjega praštevila, in takisto ravnaj z vsakim naslednjim kvocijentom, dokler ne dobiš kvocijenta, ki je sam praštevilo. Drug za drugim uporabljeni divizorji in pa zadnji kvocijent so prafaktorji danega števila.

Ako treba n. pr. 630 na prafaktorje razstaviti, dobimo

$$\begin{array}{rcl} 630 : 2 & = & 315 \\ 315 : 3 & = & 105 \\ 105 : 3 & = & 35 \\ 35 : 5 & = & 7 \end{array} \qquad \text{ali} \qquad \begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array}$$

tedaj $630 = 2 \,.\, 315 = 2 \,.\, 3 \,.\, 105 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 35 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7.$

§ 82.

Kakó je razstaviti občen številen izraz na prafaktorje.

1.) Pri jednočlenskih izrazih so posamične črke same prafaktorji; ako ima tak izraz tudi potence, ondaj vzemi podlogo tolikokrat kot faktor, kakor kaže eksponent. N. pr.

$$abc = a \,.\, b \,.\, c;\ ab^2m^3 = a \,.\, b \,.\, b \,.\, m \,.\, m \,.\, m;$$
$$21a^2mx^2 = 3 \,.\, 7 \,.\, a \,.\, a \,.\, m \,.\, x \,.\, x.$$

2.) Kakó je razstavljati polinome na prafaktorje, za to nimamo občnih pravil; zaradi tega navajamo tu le dva posebna slučaja, katera se mnogokrat uporabljata.

a) Polinom, čegar vsi členi imajo skupno mero, razstavimo po § 37. na dva faktorja, ako vzamemo izločeno skupno mero za jeden faktor, za drugi faktor pa kvocijent, katerega dobimo, ako razdelimo dani izraz z ono skupno mero; n. pr.

1.) $3ax - 4bx = x(3a - 4b)$,

2.) $20x^4 - 16x^3 + 12x^2 = 4x^2(5x^2 - 4x + 3)$.

b) Iz izvoda v § 41. izvira dalje:

1.) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$, $(a+b)^2$

2.) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b)$, $(a-b)^2$

3.) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Naloge.

Razstavi tá-le števila na prafaktorje:

1. *a)* 420; *b)* 504; *c)* 1260; *d)* 1694; *e)* 2025.

2. *a)* 2268; *b)* 3075; *c)* 3828; *d)* 5376; *e)* 10528.

3. *a)* $76a^3$; *b)* $66ab^2$; *c)* $26x^2y^2$; *d)* $72a^3b^2$; *e)* $60ax^2y^4$.

Razstavi na dva faktorja, uporabljajoč § 82., 2., *a)*:

4. $18ab - 15ac$.

5. $9x^2 - 24xy$.

6. $2a^4 - 4a^3 + 6a^2$.

7. $ax^4y^2 + bx^3y^3 + cx^2y^4$.

8. $a^3b^2x - a^2b^2x^2 + ab^2x^3$.

9. $5x^3z^2 - 15x^2z^3 + 25xz^4$.

Razstavi na faktorje, uporabljajoč § 82., 2., *b)*:

10. $x^2 + 2x + 1$.

11. $m^2 - 2m + 1$.

12. $4a^2 + 12a + 9$.

13. $9b^2 - 12b + 4$.

14. $y^2 + 10y + 25$.

15. $x^2 - 6xy + 9y^2$.

16. $4x^2 - 1$.

17. $9a^2 - 16b^2$.

18. $25x^2 - 16y^2$.

19. $6x^2 - 54a^2$.

20. $a^2 - (b + c)^2$.

21. $(b - c)^2 - a^2$.

---

4. O največji skupni meri.

§ 83.

Največjo skupno mero dveh ali več števil imenujemo ono največje število, s katerim so vsa ta števila razdelna.

Največjo skupno mero dveh ali več števil najdeš, ako vsako izmed njih na prafaktorje razstaviš in potem izmed teh one izločiš, kateri so vsem danim številom skupni; njih produkt je iskana največja skupna mera.

Dokaz. Ta produkt je gotovo skupna mera vseh danih števil, kajti vsako izmed njih ima vse njegove faktorje; a je tudi največja skupna mera, ker bi ne bilo vsako izmed danih števil z njim razdelno, ako bi mu dodali še kateri koli faktor.

N. pr. Poišči največjo skupno mero števil 300 in 420.

$300 = 2 . 2 . 3 . 5 . 5;$

$420 = 2 . 2 . 3 . 5 . 7;$ najv. sk. mera $= 2 . 2 . 3 . 5 = 60.$

§ 84.

Največjo skupno mero dveh števil pa najdeš, ne razstavljajoč ji na prafaktorje, tudi na tá-le način:

Večje izmed danih dveh števil razdeli z manjšim, potem divizor z delitvenim ostankom, novi divizor z novim ostankom, i. t. d., dokler ne dobiš za ostanek ničle; zadnji divizor je največja skupna mera danih dveh števil.

Dokaz. Ako sta a in b dani dve števili, in sicer $a > b$ in $r_1, r_2, r_3, r_4 \ldots$ zaporedoma dobljeni ostanki, ondaj stoji račun takó-le:

dividend a,	divizor b,	ostanek r_1,
» b,	» r_1,	» r_2,
» r_1,	» r_2,	» r_3,
» r_2,	» r_3,	» r_4, i. t. d.

Najprej je očividno, da moramo, deljenje nadaljujoč, priti slednjič do ostanka $= 0$, kajti vsakokratni ostanek mora biti celo število in vsaj za 1 manjši od divizorja, kateri je prejšnji ostanek. Vzemimo, da je n. pr. $r_4 = 0$.

Skupna mera števil a in b je potem r_3 gotovo. Iz zadnje delitve izvira namreč, da je r_3 sk. mera od r_2 in r_3; r_2 in r_3 sta pa v prejšnji delitvi divizor in ostanek, tedaj je (§ 74.) r_3 tudi sk. mera med dividendom r_1 in divizorjem r_2, prav takó je zaradi predprejšnje delitve, v kateri sta r_1 in r_2 divizor in ostanek, r_3 skupna mera med b in r_1, in slednjič zaradi prve delitve r_3 tudi skupna mera med a in b.

Toda r_3 je tudi največja skupna mera števil a in b. Kajti ako bi imeli te dve števili še večjo skupno mero $m > r_3$, ondaj bi morala (po § 74., izv. 1.) zaradi prve delitve, v kateri sta a in b dividend in divizor, z m razdelna biti tudi divizor b in ostanek r_1, tedaj zaradi druge delitve tudi r_1 in r_2, in slednjič zaradi tretje delitve tudi

r_2 in r_3, kar je pa nemogoče, ker je $m > r_3$. Tedaj je r_3 najv. sk. mera števil a in b.

Primeri. 1.) Recimo, da nam je poiskati najv. sk. mero števil 1134 in 3654. Tu dobimo

$$\begin{array}{rcll} 3654 : 1134 & = & 3 & \text{in ostanek } 252, \\ 1134 : \;\; 252 & = & 4 & \;\;\text{»} \quad\;\; \text{»} \quad\;\; 126 \\ 252 : \;\; 126 & = & 2 & \;\;\text{»} \quad\;\; \text{»} \qquad\;\; 0 \end{array} \qquad \text{ali} \qquad \begin{array}{r|r|l} 1134 & 3654 & 3 \\ 126 & 252 & 4 \\ & 0 & 2 \end{array}$$

Najv. sk. mera $= 126$.

2.) Poišči najv. sk. mero števil 377 in 848.

$$\begin{array}{r|r|l} 377 & 848 & 2 \\ 1 & 94 & 4 \\ & 0 & 94 \end{array}$$

Najv. sk. mera $= 1$.
Števili 377 in 848 sta relativni praštevili.

3.) Poišči najv. sk. mero števil $3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b$ in $a^2 - b^2$.

$$\begin{array}{l} (3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b) : (a^2 - b^2) = 3a - 2 \\ \underline{\begin{array}{l} 3a^3 \qquad\quad - 3ab^2 \\ - \qquad\qquad + \end{array}} \\ \qquad - 2a^2 + a + 2b^2 + b \\ \underline{\begin{array}{l} \qquad - 2a^2 \qquad + 2b^2 \\ \qquad + \qquad\quad\;\; - \end{array}} \\ \qquad\qquad\quad + a + b \ \text{ostanek} \end{array}$$

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b.$$

Iskana najv. sk. mera je zadnji divizor $a + b$.

Ako hočeš na ta način (imenujmo ga *delitveni način*) najti najv. sk. mero *za več nego dve števili*, poišči jo najprej za prvi dve števili, potem za to mero in tretje število, takisto za to novo mero in četrto število, i. t. d.; zadnja najv. sk. mera je ob jednem najv. sk. mera vseh danih števil.

Naloge.

1.* Poišči najv. sk. mero števil *a)* 12 in 16, *b)* 15 in 20, *c)* 40 in 56, *d)* 72 in 96, *e)* 45 in 75.

Razstavi tá-le števila na prafaktorje, potem pa poišči njih najv. sk. mero:

2. 84 in 308.
3. 360 in 680.
4. 108, 450 in 540.
5. 560, 620 in 760.
6. 693, 819 in 945.
7. 504, 756, 1260 in 1764.

8. $12acx$, $14a^2x$ in $16ax^2$. *9.* $10x^2y^4$, $5x^3y^3$ in $20x^4y^2$.
10. $m^2 + 2mn + n^2$ in $m^2 - n^2$.
11. $a^2 - 2ab + b^2$ in $a^2 - b^2$.
12. $a^2 - 2ab - 8b^2$ in $a^2 + 2ab - 3ab^2 - 6b^3$.

Poišči najv. sk. mero téh-le števil, ne razstavljajoč jih na prafaktorje:

13. 637 in 4277. *14.* 2091 in 1353.
15. 1404 in 8658. *16.* 3552 in 5143.
17. 7774 in 3718. *18.* 27671 in 21708.
19. 39215 in 73997. *20.* 24955 in 338625.
21. 1701, 6426, 10521. *22.* 120582, 145530, 167706.
23. $12a^3 - 2a^2 - 35a - 11$ in $6a^2 + 11a + 3$.
24. $24x^3 - 10x^2 - 56x + 10$ in $6x^2 - x - 15$.

---

5. O najmanjšem skupnem mnogokratniku.

§ 85.

Najmanjši skupni mnogokratnik dveh ali več števil imenujemo najmanjše število, katero je z vsemi onimi števili razdelno.

Da dobimo najmanjši skupni mnogokratnik dveh ali več števil, treba vsa dana števila na njih prafaktorje razstaviti in izmed teh vse različne faktorje vzeti, in sicer vsacega tolikokrat, kolikorkrat se v katerem izmed danih števil največkrat nahaja; produkt teh faktorjev je iskani najm. sk. mnogokratnik.

Dokaz. Ta produkt je gotovo skupen mnogokratnik vseh danih števil, ker ima vse faktorje vsakega izmed njih; pa tudi najm. sk. mnogokratnik je, kajti ako le jednega izmed onih faktorjev izpustimo, že ni več produkt ostalih z vsemi danimi števili razdelen.

Primer. Poiščimo najm. sk. mnogokratnik števil 60, 108 in 1050.

$$60 = \cancel{2} . 2 . \cancel{3} . 5,$$
$$108 = \cancel{2} . 2 . \cancel{3} . 3 . 3,$$
$$1050 = \cancel{2} . \cancel{3} . 5 . 5 . 7,$$

tedaj najm. sk. mnogokratnik $= 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 = 18900$.

To razrešitev uporabljajoč najdeš najm. sk. mnogokratnik več števil kratko takó-le:

1.) Dana števila zapiši v jedno vrsto drugo poleg druzega ter ona manjša, katera so mere večjih, takój prečrtaj.

2.) Potem poglej, ali ni kako praštevilo skupna mera dveh ali več ostalih števil. Ako je, zapiši to mero na desno ter razdeli z njo vsa ona števila, katerim je mera; kvocijente in vsa druga nerazdelna števila pa zapiši spodaj v novo vrsto drugo poleg druzega.

3.) S to novo vrsto ravnaj prav takó kakor s prvotno, in takó nadaljuj, dokler ne dobiš vrste, katera ima sama relativna praštevila.

4.) Slednjič pomnoži drugo z druzim relativna števila zadnje vrste in na desno zapisane skupne mere; produkt je iskani najm. sk. mnogokratnik.

Primer. Poišči najm. sk. mnogokratnik števil 2, 3, 4, 18, 24, 32, 45, 50.

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{2},\ \cancel{3},\ \cancel{4},\ 18,\ 24,\ 32,\ 45,\ 50 & \\
\cancel{9},\ 12,\ 16,\ 45,\ 25 & 2 \\
6,\ 8,\ 45,\ 25 & 2 \\
\cancel{3},\ 4,\ 45,\ 25 & 2 \\
4,\ 9,\ 5 & \cancel{5}
\end{array}$$

Najm. sk. mnogokratnik $= 4 \,.\, 9 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 5 = 7200$.

§ 86.

Ako se ne dadó dana števila lahko na prafaktorje razstaviti, ondaj iščemo najm. sk. mnogokratnik na delitveni način.

a) Da dobiš na ta način najm. sk. mnogokratnik dveh števil, poišči najprej njiju najv. sk. mero, s to razdeli jedno izmed danih dveh števil in s kvocijentom pomnoži drugo.

Dokaz. Recimo, da sta a in b dani dve števili. Ako nimata te dve števili nikakeršne skupne mere, ondaj je njiju produkt ab ob jednem njiju najm. sk. mnogokratnik. Ako pa a in b nista relativni praštevili nego je m njiju najv. sk. mera, in sicer $a : m = c$, $b : m = d$, kjer nimata c in d nikakeršnega skupnega faktorja več, ondaj dobimo $a = mc$ in $b = md$. Vsak mnogokratnik števila a mora imeti tedaj faktorja m in c, vsak mnogokratnik števila b pa faktorja m in d, vsak skupen mnogokratnik števil a in b torej faktorje m, c in d; najm. sk. mnogokratnik števil a in b je potem očividno oni, kateri ima le te tri faktorje. Ta najm. sk. mnogokratnik števil a in b moremo pa tudi takó-le izraziti:

$$\begin{aligned} mcd &= (mc) \,.\, d = a \,.\, (b : m) \\ &= (md) \,.\, c = b \,.\, (a : m). \end{aligned}$$

Poišči n. pr. najm. sk. mnogokratnik števil 648 in 972.

$$\begin{array}{r|r|l} 648 & 972 & 1 \\ 0 & 324 & 2 \end{array} \qquad \text{Najv. sk. mera} = 324.$$

$$648 : 324 = 2; \quad 972 \,.\, 2 = 1944,$$

ali

$$972 : 324 = 3; \quad 648 \,.\, 3 = 1944;$$

tedaj najm. sk. mnogokratnik $= 1944$.

b) Ako treba poiskati na ta način najm. sk. mnogokratnik treh ali več števil, ondaj poišči najm. sk. mnogokratnik za prvi dve števili, potem za ta najm. sk. mnogokratnik in tretje število, i. t. d. Zadnji najm. sk. mnogokratnik je ob jednem najm. sk. mnogokratnik vseh danih števil.

Dokaz je prejšnjemu podoben.

Naloge.

*1.** Kolik je najm. sk. mnogokratnik števil *a)* 8 in 15? *b)* 10 in 25? *c)* 24 in 36? *d)* 12 in 52? *e)* 30 in 48?

Razstavi naslednja števila na prafaktorje, potem pa poišči njih najm. sk. mnogokratnik:

2. 300 in 620.
3. 240 in 486.
4. 120, 168 in 182.
5. 105, 144 in 270.
6. 3, 4, 6, 10 in 25.
7. 2, 5, 9, 20, 21 in 24.
8. 4, 5, 6, 12, 18, 25, 70.
9. 10, 12, 14, 15, 16, 18, 21.
10. 4, 6, 7, 26, 35, 40, 56.
11. 8, 12, 16, 24, 32, 36, 256.
12. a, $2a^2$, $3ab^2$, $12abm$.
13. $6amn$, $10am^2n$, $5a^2n^2$.
14. $3x$, $x - 2$, $5(x + 2)$, $20(x^2 - 4)$ in $6(x + 2)^2$.

Poišči na delitveni način najm. sk. mnogokratnik téh-le števil:

15. 874 in 943.
16. 561 in 1530.
17. 1716 in 2222.
18. 6987 in 8083.
19. 816, 765, 697.
20. 259, 3219, 7548.
21. $24a^3 + 14a^2 - 26a + 4$ in $6a^2 + 5a - 6$.
22. $a^3 + 2a^2b - ab^2 - 2b^3$ in $a^2 - 3ab - 10b^2$.

---

6. Naloge v ponavljanje.

*1.** Izračunaj

a) 8kratnik vsote $28 + 39$;

b) tretji del 7kratnika od 87.

2.* Katerega števila 3kratnik treba za 20 povečati, da dobiš 167?

3. $2460 \,.\, 11 - [(4375 : 125) + (825 \times 25)]$.

4. $5a - \{[2b + (4b - 3a)] - (8b - 4a)\}$.

5. $(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)$.

6. $(4x^2 - 16xy + 16y^2)(2x - 4y) - 8xy(12y - 6x)$.

7. S katerimi izmed števil 2 do 11 je razdelno število 68640?

8. Poišči najv. sk. mero in najm. sk. mnogokratnik števil:
a) 1081 in 1403; *b)* 913, 1245 in 1411; *c)* $12a^2b + 18ab^2$ in $12a^4b - 27a^2b^3$.

9. Poišči najm. sk. mnogokratnik števil:
a) 12, 15, 20, 36, 40, 45; *b)* 36, 42, 54, 84, 90, 112.

10. Razstavi na prafaktorje:
a) 61380, *b)* $2ab + 4ac$, *c)* $xy - x$, *d)* $6ab(m^2 - n^2)$.

11. $(18a^5x^2 - 20a^2x^5 + 47a^3x^4 - 48a^4x^3) : (6a^3x + 5ax^3 - 8a^2x^2)$.

12.* 6krat *a)* 122, *b)* 192, *c)* 236, *d)* 324, *e)* 420.

13.* *a)* 476 + 450; *b)* 775 + 164; *c)* 960—324; *d)* 724—590.

14. Iz Pariza se odpošlje ob 10. uri 58 min. 15 sek. brzojavka na Dunaj, do kamor potrebuje 1 uro 8 minut. Kedaj dospé na Dunaj, ako je dunajska ura pariški za 56 min. 10 sek. naprej?

Četrti oddelek.

Četvero osnovnih računov z ulomljenimi števili.

§ 87.

Deljenje je môči v vrsti celih števil le tedaj izvršiti, kadar je dividend mnogokratnik divizorjev. N. pr. kvocijent 8 : 3 je večji od 2 in manjši od 3, zatorej ga v dosedajšnji številni vrsti ni môči predočiti.

Da bode môči kvocijent $a : b$ tudi tedaj določiti, kadar število a ni mnogokratnik števila b, za to treba novih števil. Le-tá dobimo, ako prvotno jednoto na b jednakih delov razdelimo ter jeden tak del, katerega z $\frac{1}{b}$ (1 $b$enina) zaznamenujemo, za novo jednoto vzamemo. S to novo jednoto prav takó kakor s prvotno štejoč, dobimo tó-le novo številno vrsto:

$$\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \frac{3}{b}, \frac{4}{b}, \ldots \frac{a}{b},$$

v kateri najdemo natančno vrednost vsakega kvocijenta, naj smo razdelili katero koli celo število z b.

Vsako tako novo število $\frac{a}{b}$ imenujemo ulomljeno število, ulomek ali drobec *(gebrochene Zahl, Bruch)* v nasprotje celim številom, s katerimi smo se dosedaj pečali; a zovemo ulomkov števec *(Zähler)*, b imenovalec *(Nenner)*.

Ulomek je torej število, katero izražuje jeden ali več jednakih delov prvotne jednote. Imenovalec kaže, na koliko jednakih delov smo prvotno jednoto razdelili, števec pa pové, kolikokrat smo jeden tak del vzeli. Ulomek $\frac{a}{b}$ pomenja tedaj $b$ni del jednote $a$krat vzet; ali

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a.$$

I. O navadnih ulomkih.

1. Občna svojstva ulomkov.

§ 88.

Ako razdelimo jednoto na b jednakih delov, jednaka je vsota vseh teh b delov zopet jednoti; tedaj $\frac{1}{b} \, . \, b = 1$. Ako vzamemo menj nego b tacih delov, dobimo menj, ako jih pa vzamemo več nego b, dobimo več kakor jednoto.

Ulomek $\frac{a}{b}$ je torej manjši od 1, ako je $a < b$; jednak 1, ako je $a = b$; in večji od 1, ako je $a > b$. N. pr.

$$\frac{5}{8} < 1, \quad \frac{8}{8} = 1, \quad \frac{13}{8} > 1.$$

Ulomke, katerih vrednost je manjša od 1, katerih števec je tedaj manjši od imenovalca, imenujemo prave ulomke *(echte Brüche)*, vse druge neprave ulomke *(unechte Brüche)*.

Število, sestavljeno iz celega števila in pravega ulomka, zovemo mešano število *(gemischte Zahl)*; n. pr

$$5\tfrac{3}{4} = 5 + \tfrac{3}{4}, \quad a + \frac{m}{n}, \quad a - \frac{m}{n}.$$

§ 89.

Ako pomnožimo ulomek z njegovim imenovalcem, dobimo števec za produkt.

$$\frac{a}{b} \, . \, b = a.$$

Dokaz.

$$\frac{a}{b} \cdot b = \left(\frac{1}{b} \cdot a\right) . \, b \;(\S\ 87.) = \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) . \, a \;(\S\ 35.,\ 1.) = a \;(\S\ 88.)$$

§ 90.

Vsak kvocijent moremo smatrati za ulomek, in obratno vsak ulomek za kvocijent; dividend je ulomkov števec, divizor pa imenovalec.

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

Dokaz.

$$(a : b) \, . \, b = a \;(\S\ 49.,\ 1.),$$
$$\frac{a}{b} \, . \, b = a \;(\S\ 89.);\ \text{tedaj}$$

$$(a : b) \, . \, b = \frac{a}{b} \, . \, b, \ \text{torej}$$
$$a : b = \frac{a}{b}.$$

§ 91.

Iz pojma o ulomku izvira:

1.) Izmed dveh ulomkov, imajočih isti imenovalec, je oni večji, kateri ima večji števec.

2.) Izmed dveh ulomkov, imajočih isti števec, je oni večji, kateri ima manjši imenovalec.

§ 92.

Vsak nepravi ulomek je môči pretvoriti na celo ali mešano število; v ta namen treba le števec z imenovalcem razdeliti.

$$\frac{20}{5} = 20 : 5 = 4.$$

$$\frac{23}{5} = \frac{20+3}{5} = 4 + \frac{3}{5} = 4\tfrac{3}{5}.$$

V obče:

$$\frac{am}{m} = a, \qquad \frac{am+r}{m} = a + \frac{r}{m}.$$

§ 93.

1.) Vsako celo število je môči pretvoriti na ulomek, čegar imenovalec je dan. V ta namen treba le produkt iz celega števila in danega imenovalca za ulomkov števec vzeti.

$$a = an : n = \frac{an}{n}, \qquad 5 = 5 \,.\, 4 : 4 = 20 : 4 = \frac{20}{4}.$$

2.) Vsako mešano število je môči na ulomek pretvoriti. V ta namen pomnoži celo število z ulomkovim imenovalcem in ta produkt povečaj ali zmanjšaj za števec, kakor je ulomek pozitiven ali negativen; to število je števec, imenovalec ostane neizpremenjen.

$$5\tfrac{2}{3} = 5 + \tfrac{2}{3} = [(5 + \tfrac{2}{3}) \,.\, 3] : 3 = (15 + 2) : 3 = \frac{17}{3}.$$

$$a + \frac{m}{n} = \left[\left(a + \frac{m}{n}\right) . \, n\right] : n = (an + m) : n = \frac{an+m}{n}.$$

$$a - \frac{m}{n} = \left[\left(a - \frac{m}{n}\right) . \, n\right] : n = (an - m) : n = \frac{an-m}{n}.$$

§ 94.

Ker moremo vsak ulomek za kvocijent smatrati, le-tá pa neizpremenjen ostane, ako dividend in divizor z istim številom pomnožimo ali razdelimo, zato velja:

Ulomku ostane vrednost neizpremenjena, ako števec in imenovalec z istim številom pomnožimo ali razdelimo.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \quad \frac{8}{12} = \frac{8 \,.\, 4}{12 \,.\, 4} = \frac{32}{48};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}, \quad \frac{8}{12} = \frac{8 : 4}{12 : 4} = \frac{2}{3}.$$

§ 95.

1.) Uporabljajoč prvi del izreka v § 94., pretvorimo lahko vsak ulomek, ne izpremenivši mu vrednosti, na drugega, ki ima za imenovalec mnogokratnik prejšnjega imenovalca. V ta namen treba le novi imenovalec s prejšnjim razdeliti in s tem kvocijentom prejšnji števec pomnožiti; produkt je novi števec. Recimo, da nam je n. pr. ulomek $\frac{4}{5}$ na imenovalec 40 pretvoriti. Tu dobimo

$$40 : 5 = 8; \quad 4 \,.\, 8 = 32; \text{ tedaj } \frac{4}{5} = \frac{32}{40}.$$

Ako bi hoteli ulomek $\frac{a}{2b}$ na imenovalec $4bc$ pretvoriti, dobili bi

$$4bc : 2b = 2c; \quad a \,.\, 2c = 2ac; \quad \text{tedaj } \frac{a}{2b} = \frac{2ac}{4bc}.$$

Kadar izpreminamo ulomku obliko, množeč njega števec in imenovalec z istim številom, pravimo, da ulomek razširjamo *(erweitern)*.

2.) Ulomke razširjajoč pretvorimo jih lahko tudi več na nov skupen imenovalec, treba le, da je ta imenovalec mnogokratnik vseh danih imenovalcev. Navadno pretvarjamo ulomke na najmanjši skupni imenovalec. V ta namen poiščemo najprej najm. sk. imenovalec. Da dobimo potem novi števec vsakemu ulomku, treba le novi skupni imenovalec s prejšnjim razdeliti ter kvocijent s prejšnjim števcem pomnožiti.

N. pr.

1.) Pretvori ulomke $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{10}$ na najm. sk. imenovalec.

Najm. sk. mnogokratnik vseh imenovalcev, torej najm. sk. imenovalec, je 40, in zaradi tega dobimo

$$40 : 2 = 20, \quad 1 \,.\, 20 = 20$$
$$40 : 8 = 5, \quad 3 \,.\, 5 = 15$$
$$40 : 10 = 4, \quad 9 \,.\, 4 = 36$$

ali

	40	
$\frac{1}{2}$	20	20
$\frac{3}{8}$	5	15
$\frac{9}{10}$	4	36

tedaj

$$\frac{1}{2} = \frac{20}{40}, \quad \frac{3}{8} = \frac{15}{40}, \quad \frac{9}{10} = \frac{36}{40}.$$

2.) Recimo, da nam je pretvoriti ulomke $\frac{a}{2b}, \frac{3m}{4bc}, \frac{4n}{c^2d}$ na najm. sk. imenovalec.

Najm. sk. imenovalec je $4bc^2d$, tedaj dobimo

$$4bc^2d : 2b = 2c^2d, \quad 2c^2d \,.\, a = 2ac^2d; \quad \text{tedaj } \frac{a}{2b} = \frac{2ac^2d}{4bc^2d}$$

$$4bc^2d : 4bc = cd, \quad cd \,.\, 3m = 3cdm; \quad \frac{3m}{4bc} = \frac{3cdm}{4bc^2d}$$

$$4bc^2d : c^2d = 4b, \quad 4b \,.\, 4n = 16bn; \quad \frac{4n}{c^2d} = \frac{16bn}{4bc^2d}.$$

§ 96.

Uporabljajoč drugi del izreka v § 94., je môči ulomek, čegar števec in imenovalec sta z istim številom razdelna, okrajšati *(abkürzen)*; v ta namen treba le števec in imenovalec z njiju skupno mero razdeliti. N. pr.

$$\frac{35}{40} = \frac{7}{8}, \qquad \frac{200}{240} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}.$$

$$\frac{4am}{6an} = \frac{2m}{3n}, \qquad \frac{12a^2bx^2}{15acx^3} = \frac{4ab}{5cx}.$$

Naloge.

Pretvori na cela ali mešana števila:

*1.** $\frac{24}{4}, \frac{27}{2}, \frac{32}{5}, \frac{37}{4}, \frac{30}{6}, \frac{57}{3}, \frac{96}{8}, \frac{104}{7}, \frac{223}{10}.$

2. *a)* $\frac{982}{15}, \frac{744}{24}, \frac{2383}{9}, \frac{3383}{30}, \frac{13785}{128}, \frac{405979}{96}.$

b) $\frac{ax}{a}, \frac{3bx^2}{x}, \frac{4a+3}{4}, \frac{am+b}{m}, \frac{3ax-b}{3x}, \frac{ab^2c-mx}{ab}.$

Pretvori na neprave ulomke:

*3.** $6\frac{1}{2}, 7\frac{3}{4}, 13\frac{2}{3}, 3\frac{5}{12}, 15\frac{3}{4}, 21\frac{3}{10}, 27\frac{6}{7}, 30\frac{5}{9}.$

4. *a)* $77\frac{2}{5}, 95\frac{11}{15}, 561\frac{5}{6}, 56\frac{17}{24}, 83\frac{19}{30}, 324\frac{37}{72}.$

b) $a + \frac{2}{m}, 3a + \frac{b}{a}, 5x - \frac{5y}{2x}, x + \frac{x^2-1}{x}, x - \frac{x^2-1}{x}.$

c) $m - \frac{m+n}{2}, \quad 1 + \frac{a-b}{a+b}, \quad 1 + \frac{x^2-2xy+y^2}{4xy}.$

d) $1 + \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}, \quad 1 - \frac{a^2-b^2-c}{2bc}, \quad a^2 + b^2 - \frac{a^4-2b^4}{a^2-b^2}.$

*5.** Pretvori ulomke $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ na skupni imenovalec 24.

6. Pretvori ulomke $\frac{1}{a}, \frac{2m}{3ab}, \frac{5n}{6ax}, \frac{3p}{10by}$ na imenovalec $30abxy$.

Pretvori té-le ulomke na najm. sk. imenovalec:

7.* *a)* $\frac{3}{4}$ in $\frac{5}{12}$; *b)* $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$; *c)* $\frac{1}{4}$ in $\frac{5}{6}$; *d)* $\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{10}$.

8.* *a)* $\frac{3}{8}$ in $\frac{7}{20}$; *b)* $\frac{5}{12}$ in $\frac{11}{16}$; *c)* $\frac{13}{24}$ in $\frac{25}{32}$; *d)* $\frac{10}{27}$ in $\frac{5}{18}$.

9. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$.

10. $\frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{11}{18}, \frac{13}{20}, \frac{8}{15}, \frac{11}{12}$.

11. $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{7}, \frac{18}{35}, \frac{19}{40}, \frac{25}{56}$.

12. $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{11}{20}$.

13. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \frac{15}{16}, \frac{31}{75}, \frac{127}{128}$.

14. $\frac{17}{30}, \frac{5}{32}, \frac{23}{25}, \frac{19}{24}, \frac{38}{75}, \frac{29}{36}$.

15. $\frac{1}{a}, \frac{2}{a^2}, \frac{3}{a^3}$.

16. $\frac{1}{m}, \frac{5a}{3m^2}, \frac{3bc}{4m^3}, \frac{4def}{5m^4}$.

17. $\frac{a-1}{a+1}, \frac{a-2}{a+2}, \frac{a-3}{a+3}$.

18. $\frac{y+1}{y-1}, \frac{y-1}{y+1}, \frac{y^2+1}{y^2-1}$.

19. $\frac{x+1}{x-1}, \frac{x^2+2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Okrajšaj té-le ulomke:

20.* $\frac{8}{10}, \frac{12}{15}, \frac{16}{20}, \frac{24}{32}, \frac{15}{25}, \frac{18}{45}, \frac{28}{40}, \frac{35}{60}, \frac{60}{96}, \frac{24}{120}$.

21. *a)* $\frac{45}{54}$; *b)* $\frac{114}{250}$; *c)* $\frac{840}{1020}$; *d)* $\frac{1824}{7008}$; *e)* $\frac{4096}{7424}$.

22. *a)* $\frac{5 \,.\, 12 \,.\, 18}{4 \,.\, 10 \,.\, 27}$; *b)* $\frac{6 \,.\, 12 \,.\, 20 \,.\, 28}{4 \,.\, 8 \,.\, 16 \,.\, 30}$; *c)* $\frac{6 \,.\, 21 \,.\, 24 \,.\, 36 \,.\, 75}{8 \,.\, 27 \,.\, 50 \,.\, 56 \,.\, 60}$.

23. *a)* $\frac{391}{989}$; *b)* $\frac{637}{819}$; *c)* $\frac{765}{5304}$; $\frac{2079}{7029}$; *e)* $\frac{9082}{67735}$.

24. Izračunaj vrednost izrazu $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ za $n = 6$, prav takó za $n = 8$, potem pa dobljena ulomka okrajšaj.

Okrajšaj té-le ulomke:

25. *a)* $\frac{3abx}{12bmx}$; *b)* $\frac{12a^2x}{28ax^2}$; *c)* $\frac{15amx^3}{40bmx}$; *d)* $\frac{72mx^2y^3}{96nx^3y^2}$.

26. *a)* $\frac{a(a+1)}{(a+1)(a+2)}$; *b)* $\frac{2m(m-1)}{m^2-1}$; *c)* $\frac{15(a+b)(x-y)}{24(a-b)(x-y)}$.

27. *a)* $\frac{3a-6b}{8a-16b}$; *b)* $\frac{6a+3b}{4a^2-b^2}$; *c)* $\frac{3a^2b-2a^2c}{6ab-4ac}$.

---

2. Kakó je ulomke seštevati in odštevati.

§ 97.

1.) Ulomke jednakih imenovalcev seštejemo, ako seštejemo njih števce ter tej vsoti skupni imenovalec za imenovalec damo.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

Dokaz izvira neposredno iz § 55., 1.) in § 90.

N. pr.
$$\frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7+5}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2};$$
$$\frac{a+b}{2m} + \frac{a-b}{2m} = \frac{(a+b)+(a-b)}{2m} = \frac{2a}{2m} = \frac{a}{m}.$$

2.) Kadar je treba ulomke nejednakih imenovalcev sešteti, ondaj jih pretvori na skupen imenovalec, potem pa uporabi prejšnji izrek. N. pr.
$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12} = 1\tfrac{7}{12};$$
$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an+bm}{mn}.$$

§ 98.

1.) Ulomke jednakih imenovalcev odštejemo, ako subtrahendov števec od minuendovega odštejemo ter tej diferenci skupni imenovalec za imenovalec damo.
$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Dokaz izvira neposredno iz § 55., 2.) in § 90.

N. pr.
$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7-3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5};$$
$$\frac{x+y}{m} - \frac{x-y}{m} = \frac{(x+y)-(x-y)}{m} = \frac{x+y-x+y}{m} = \frac{2y}{m}.$$

2.) Kadar je treba odšteti ulomke nejednakih imenovalcev, ondaj jih pretvori na skupen imenovalec, potem pa prejšnji izrek uporabi. N. pr.
$$\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8};$$
$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} - \frac{bm}{mn} = \frac{an-bm}{mn}.$$

Naloge.

1.* *a)* $8\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$; *b)* $\frac{3}{8} + 4\frac{7}{8}$; *c)* $2\frac{3}{7} + 4\frac{4}{7}$; *d)* $10\frac{7}{12} + 6\frac{11}{12}$.

2.* *a)* $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$; *b)* $8\frac{7}{15} + \frac{11}{15} + \frac{4}{15}$; *c)* $5\frac{3}{10} + 6\frac{7}{10} + 7\frac{9}{10}$.

3. $35\frac{3}{20} + 57\frac{7}{20} + 79\frac{13}{20}$. ***4.*** $54\frac{23}{32} + 98\frac{29}{32} + 44 + 61\frac{19}{32}$.

5.* *a)* $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$; *b)* $\frac{7}{10} + \frac{11}{20}$; *c)* $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$; *d)* $3\frac{7}{12} + \frac{11}{18}$.

6.* *a)* $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$; *b)* $2\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$; *c)* $3\frac{7}{8} + 9\frac{1}{6}$; *d)* $17\frac{8}{9} + 12\frac{7}{12}$.

7.* *a)* $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$; *b)* $\frac{2}{3} + \frac{7}{9} + \frac{4}{5}$; *c)* $1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5}$.

8. $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \frac{13}{15}$. ***9.*** $\frac{2}{5} + \frac{5}{12} + \frac{11}{20} + \frac{12}{25}$.

10. $23\frac{2}{5} + 21\frac{4}{15} + 58\frac{9}{20} + 47\frac{39}{50}$.

11. $52\frac{5}{8} + 93\frac{7}{10} + 88 + 35\frac{11}{12} + 208\frac{7}{36}$.

12. $4068 + 1234\frac{17}{20} + 5678\frac{29}{35} + 987\frac{41}{48} + 6543\frac{37}{42}$.

11.* *a)* $\frac{7}{11} - \frac{3}{11}$; *b)* $5\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$; *c)* $8\frac{4}{5} - 2\frac{3}{5}$; *d)* $37\frac{23}{25} - 18\frac{9}{25}$.

14.* *a)* $23\frac{3}{5} - 16$; *b)* $1 - \frac{5}{12}$; *c)* $10 - \frac{19}{24}$; *d)* $78 - 39\frac{7}{15}$.

15.* $503\frac{150}{193} - 319\frac{107}{193}$. ***16.*** $723\frac{241}{425} - 476\frac{409}{425}$.

17.* *a)* $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$; *b)* $2\frac{4}{5} - \frac{7}{10}$; *c)* $\frac{13}{16} - \frac{5}{12}$; *d)* $8\frac{17}{20} - \frac{19}{20}$.

18.* *a)* $12\frac{13}{15} - 8\frac{7}{20}$; *b)* $16\frac{2}{5} - 7\frac{5}{6}$; *c)* $58\frac{19}{24} - 19\frac{5}{16}$.

19. $265\frac{37}{40} - 156\frac{18}{25}$. ***20.*** $374\frac{29}{48} - 215\frac{11}{20}$.

21. $437\frac{7}{15} - 187\frac{11}{16}$. ***22.*** $329\frac{13}{29} - 109\frac{37}{64}$.

23. Recimo, da imamo té-le ulomke: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$; za koliko je vsota prvih dveh ulomkov manjša od 1? — za koliko vsota prvih treh, štirih, petih, šestih?

24. $3\frac{5}{8} - \left[1\frac{1}{5} - \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{3} - 2\right) - 1\frac{3}{10}\right] + 1\frac{1}{15}$.

25. $3 - \left(1\frac{1}{4} - \left\{3\frac{1}{2} - \left[\frac{5}{8} - \left(\frac{1}{3} - 2\right) - \frac{1}{6}\right] + \frac{1}{8}\right\} - \frac{5}{12}\right) + 1\frac{1}{3}$.

---

26. $\frac{4x}{3} + \frac{2x}{3}$. ***27.*** $\frac{3m}{4} - \frac{m}{4}$. ***28.*** $\frac{x}{8} - \frac{y-z}{8}$.

29. $\frac{a+4x}{3} + \frac{2a-x}{3}$. ***30.*** $\frac{a+b}{3m} + \frac{2a-b+3c}{3m}$.

31. $\frac{3a-2}{5} + \frac{2a+3}{3}$. ***32.*** $\frac{x+y}{8} - \frac{x-y}{12}$.

33. $\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab}$. ***34.*** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

35. $\frac{a+x}{a} + \frac{x}{a+x}$. ***36.*** $\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y-1}$.

37. $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$. ***38.*** $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$.

39. $\frac{9a+2}{3} - \frac{7a+5}{4} - \frac{8-7a}{6} + \frac{5-3a}{8} - \frac{3-7a}{12}$.

40. $\frac{2}{2x-1} - \frac{5}{3x-1} + \frac{4}{2x-3}$.

41. $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x-2} - \frac{4x-3}{x-3}$.

42. $\frac{a+b-c}{ab} + \frac{a-b+c}{ac} + \frac{b+c-a}{bc}$.

3. Kakó je ulomke množiti in deliti.

§ 99.

Ulomek pomnožimo s celim številom, ako z njim števec pomnožimo ali imenovalec razdelimo.

$$1.)\ \frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}, \quad 2.)\ \frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b:m}.$$

Dokaz 1.)

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots (m\,\text{krat})$$

$$= \frac{a + a + a + \ldots (m\,\text{krat})}{b}$$

$$= \frac{am}{b}.$$

$$2.)\ \frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}\ (\text{vsled } 1.) = \frac{am : m}{b : m}\ (\S\ 94.) = \frac{a}{b : m}.$$

Drugi način je môči le tedaj uporabiti, kadar je ulomkov imenovalec s celim številom razdelen.

Dokaži ta izrek, uporabljajoč § 91., še na téh-le primerih:

$$a)\ \frac{2}{15} \times 4, \qquad b)\ \frac{3}{16} \times 4.$$

§ 100.

Ulomek razdelimo s celim številom, ako z njim števec razdelimo ali imenovalec pomnožimo.

$$1.)\ \frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b}, \qquad 2.)\ \frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}.$$

Dokaz. 1.) Ako je izraz $\frac{a : m}{b}$ pravi kvocijent, dati mora, z divizorjem m pomnožen, dividend $\frac{a}{b}$ za produkt. In res je

$$\frac{a : m}{b} \,.\, m = \frac{(a : m) \,.\, m}{b}\ (\S\ 99.) = \frac{a}{b}.$$

Takisto dokažeš tudi 2.)

Prvi način je môči le tedaj uporabiti, kadar je ulomkov števec s celim številom razdelen.

Dokaži ta izrek, uporabljajoč § 91., še na téh-le primerih:

$$a)\ \frac{18}{25} : 3, \qquad b)\ \frac{7}{8} : 3.$$

§ 101.

Vzemimo, da treba n. pr. 5 s $\frac{3}{4}$ pomnožiti. Tu bi morali, oziraje se na ono, kar smo v § 33. o množitvi povedali, število 5 $\frac{3}{4}$krat kot sumand vzeti, to pa očividno nima nikakeršnega zmisla. Treba torej pojem, katerega smo za množenje celih števil prej ustanovili, takó raztegniti, da se bode dal uporabiti tudi za ulomke.

Da pomnožimo 5 s 3, treba vzeti 5 3krat za sumand; da pa pomnožimo 5 s četrtim delom od 3, vzeli bodemo 3krat za sumand ne števila 3 samega, nego njega četrti del; tedaj

$$5 \times \tfrac{3}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{4}.$$

Število z ulomkom pomnožiti se tedaj pravi, število na toliko jednakih delov razdeliti, kakor kaže ulomkov imenovalec ter jeden tak del tolikokrat za sumand vzeti, kakor kaže števec.

Naloge praktičnega življenja same kažejo, da nam je na ta način raztegniti pojem o množitvi. Da v obče iz izneska za jednoto najdemo iznesek katere koli istovrstne množine, treba pomnožiti jednotin iznesek s številom, množino izražujočim. Ako velja n. pr. 1 *m* 5 gl., veljajo $\frac{3}{4}$ *m* 5 gl. $\times$ $\frac{3}{4}$. Pomen tega produkta je razviden iz razrešitve te naloge; dobimo namreč:

1 *m* velja 5 gl.;

$\frac{1}{4}$ *m* velja četrti del od 5 gl., tedaj $\frac{5}{4}$ gl.;

$\frac{3}{4}$ *m* veljajo 3krat toliko, kolikor $\frac{1}{4}$ *m*, tedaj $\frac{5}{4}$ gl. $\times$ 3;

zato je 5 gl. $\times$ $\frac{3}{4}$ = $\frac{5}{4}$ gl. $\times$ 3.

Število pomnožimo tedaj z ulomkom, ako je z imenovalcem razdelimo in kvocijent s števcem pomnožimo.

$$a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{n} \cdot m = \frac{am}{n};$$

$$10 \cdot \frac{3}{5} = \frac{10}{5} \cdot 3 = 2 \,.\, 3 = 6.$$

Ako je ulomek $\frac{a}{b}$ pomnožiti z ulomkom $\frac{m}{n}$, dobimo po prejšnjem izreku

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : n\right) . \, m = \frac{a}{bn} \cdot m = \frac{am}{bn},$$

t. j.: Ulomek pomnožimo z ulomkom, ako pomnožimo števec s števcem in imenovalec z imenovalcem. N. pr.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{3 \,.\, 7}{5 \,.\, 10} = \frac{21}{50}.$$

Dostavek. Ako dasta dve števili 1 za produkt, imenujemo vsako izmed njiju obratno ali recipročno *(umgekehrt, reciprok)* vrednost druzega.

Takó je $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, tedaj $\frac{1}{a}$ recipročna vrednost števila a,

$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$, » $\frac{n}{m}$ » » » $\frac{m}{n}$,

$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$, » $\frac{4}{3}$ » » » $\frac{3}{4}$.

§ 102.

Ker je v § 48. ustanovljeni pojem o delitvi obče veljaven, izvira iz njega tudi izrek, kakó je deliti z ulomkom, namreč:

Število razdelimo z ulomkom, ako je s števcem razdelimo in kvocijent z imenovalcem pomnožimo, ali ako je z ulomkovo recipročno vrednostjo pomnožimo.

1.) $a : \frac{m}{n} = \frac{a}{m} \cdot n$, $\quad 8 : \frac{3}{5} = \frac{8}{3} \cdot 5 = \frac{40}{3}$;

2.) $a : \frac{m}{n} = a \cdot \frac{n}{m}$, $\quad 8 : \frac{3}{5} = 8 \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3}$.

Dokaz. 1.) Ako je izraz $\left(\frac{a}{m} \cdot n\right)$ pravi kvocijent, dati mora, z divizorjem $\frac{m}{n}$ pomnožen, dividend a za produkt. In res je

$$\left(\frac{a}{m} \cdot n\right) \cdot \frac{m}{n} = \left[\left(\frac{a}{m} \cdot n\right) : n\right] \cdot m \ (\S\ 101.) = \frac{a}{m} \cdot m = a.$$

2.) Prav takó je tudi

$$\left(a \cdot \frac{n}{m}\right) \cdot \frac{m}{n} = a \cdot \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}\right) = a \,.\, 1 = a.$$

Takisto dokažeš lahko tudi, da je

1.) $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a : m}{b : n}$, $\quad \frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8 : 4}{15 : 5} = \frac{2}{3}$;

2.) $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}$, $\quad \frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$.

Dostavek. Ulomek, čegar števec ali imenovalec, ali tudi čegar števec in imenovalec sta zopet ulomka, imenujemo dvojen ulomek ali ulomljen ulomek *(Doppelbruch, Bruchbruch)*.

Vsak dvojen ulomek pretvoriš lahko na jednostavnega, uporabljajoč § 94. ali § 90. N. pr.

$$\frac{\frac{8}{15}}{\frac{3}{5}} = \frac{8 \,.\, \cancel{5}}{3 \,.\, \cancel{15}_{\,3}} = \frac{8}{9},$$

ali

$$\frac{\frac{8}{15}}{\frac{3}{5}} = \frac{8}{15} : \frac{3}{5} = \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{3} = \frac{8}{9}.$$

Naloge.

1.* *a)* $\frac{3}{5} \,.\, 6$; *b)* $\frac{5}{12} \,.\, 7$; *c)* $\frac{13}{18} \,.\, 5$; *d)* $\frac{17}{25} \,.\, 16$.

2.* *a)* $\frac{11}{16} \,.\, 6$; *b)* $\frac{37}{48} \,.\, 12$; *c)* $\frac{19}{30} \,.\, 30$; *d)* $\frac{31}{45} \,.\, 20$.

3.* *a)* $7\frac{3}{4} \,.\, 9$; *b)* $8\frac{13}{20} \,.\, 5$; *c)* $5\frac{7}{15} \,.\, 6$; *d)* $13\frac{5}{8} \,.\, 24$.

4. *a)* $81\frac{17}{30} \,.\, 74$; *b)* $57\frac{34}{45} \,.\, 79$; *c)* $258\frac{13}{50} \,.\, 85$; *d)* $607\frac{52}{75} \,.\, 120$.

5.* 1 *m* velja $\frac{4}{5}$ gl.; koliko velja 5, 12, 37, 72 *m*?

6.* 1 *hl* velja $23\frac{3}{4}$ gl.; koliko velja 6, 15, 32 *hl*?

7. $\frac{ab}{4m} \cdot 3c.$ ***8.*** $\frac{6x^2}{m^3y} \cdot my.$ ***9.*** $\frac{2a^2x^2}{15b^2y^2} \cdot 5y^2.$

10. $\frac{24x^2}{5y^2} \cdot y^2.$ ***11.*** $\frac{a-b}{2ab} \cdot 2b.$ ***12.*** $\frac{a+b}{m} \cdot (a-b).$

13. $\left(a + \frac{b^2 - a^2}{a}\right) \cdot 2a.$ ***14.*** $\left(1 + \frac{1-a}{1+a}\right) \cdot (1+a).$

15. $\left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}\right) \cdot m^4.$ ***16.*** $\left(\frac{3m^3}{4n^3} + \frac{2m^2}{3n^2} + \frac{m}{2n}\right) \cdot 12n.$

17. $\left(\frac{a^3}{x^3} - \frac{2a^2}{x^2} + \frac{3a}{x} - 4\right) \cdot x^3.$

18. $\left(1 + \frac{a^2b^2 - 2abc^2 + c^4}{4abc^2}\right) \cdot (a^2b^2 - 2abc^2 + c^4).$

19.* *a)* $\frac{8}{15} : 4$; *b)* $\frac{24}{25} : 6$; *c)* $\frac{35}{41} : 7$; *d)* $7\frac{1}{5} : 12$.

20.* *a)* $\frac{7}{8} : 5$; *b)* $\frac{13}{20} : 4$; *c)* $1\frac{7}{12} : 9$; *d)* $9\frac{3}{10} : 15$.

21. *a)* $912\frac{6}{7} : 3$; *b)* $184\frac{5}{6} : 16$; *c)* $791\frac{9}{50} : 27$; *d)* $179\frac{13}{25} : 34$.

22. Lokomotiva predirja v 4 urah $113\frac{3}{5}$ *km*; koliko v 1 uri?

23. Koliko *hl* vina bodeš dobil za $499\frac{1}{2}$ gl., ako je *hl* po 18 gl.?

24. $\frac{15ax}{5b} : 5x.$ ***25.*** $\frac{12amx}{5bc} : 4ax.$ ***26.*** $\frac{8x^2}{3my} : 3my.$

27. $\frac{5x^3y^3}{4a^2b} : 2ab^2.$ ***28.*** $\frac{10m^3n^2}{xy^2} : 5m^2n^2.$

29. $\left(1 + \frac{m - n}{m + n}\right) : 2m.$ **30.** $\left(a + b - \frac{a^2 + b^2}{a + b}\right) : (a + b).$

31. $\frac{6a^2 + 5ab - 6b^2}{2a + 3b} : (3a - 2b).$

32. $\frac{1 + 2m - 2m^3 - m^4}{1 - 2m + m^2} : (1 + 2m + m^2).$

---

33. *a)* $15 \cdot \frac{3}{5}$; *b)* $64 \cdot \frac{7}{8}$; *c)* $31 \cdot \frac{7}{10}$; *d)* $8 \cdot 5\frac{3}{5}$.

34. *a)* $\frac{6}{35} \cdot \frac{7}{9}$; *b)* $\frac{14}{15} \cdot \frac{8}{21}$; *c)* $10\frac{8}{15} \cdot \frac{7}{12}$; *d)* $27\frac{10}{27} \cdot \frac{16}{25}$.

35. *a)* $\frac{31}{60} \cdot 15\frac{5}{13}$; *b)* $28\frac{2}{3} \cdot 9\frac{4}{5}$; *c)* $53\frac{13}{24} \cdot 8\frac{17}{30}$; *d)* $216\frac{9}{25} \cdot 15\frac{11}{16}$.

36. $6\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot 1\frac{3}{5}$. **37.** $\frac{4}{5} \cdot 1\frac{5}{6} \cdot 6 \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{9}$.

38.* Za koliko je produkt ulomkov $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{3}$ manjši nego vsak faktor?

39. Za koliko je produkt ulomkov $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ in $\frac{4}{5}$ manjši nego njih vsota?

40. 1 *kg* cukra velja 48 kr.; koliko velja $2\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, $4\frac{11}{20}$, $25\frac{9}{10}$ *kg*?

41. *B* ima $2\frac{1}{2}$krat toliko denarja kakor *A*, *C* $1\frac{1}{7}$krat toliko kakor *B*, *D* pa le $\frac{3}{8}$krat toliko kakor *C*; recimo, da ima *A* $45\frac{3}{5}$ gl.; *a)* koliko denarja ima vsak izmed ostalih, *b)* koliko ga imajo vsi skupaj?

42. $8a \cdot \frac{b}{4}$. **43.** $ax \cdot \frac{2b}{y}$. **44.** $4x^2y^2 \cdot \frac{3ab}{2xy}$.

45. $2a^3 \cdot \frac{bx^2}{2a^2c^2y^2}$. **46.** $(a - x) \cdot \frac{a + x}{ax}$. **47.** $3ax \cdot \left(a - \frac{b}{3ax}\right)$

48. $\frac{4x}{3y} \cdot \frac{7a}{9b}$. **49.** $\frac{2ab}{cd} \cdot \frac{3ax}{cm}$. **50.** $\frac{5mx}{9ny} \cdot \frac{3n}{10m}$.

51. $\frac{4a}{5b} \cdot \frac{7b}{8x} + \frac{2a}{5c} \cdot \frac{2c}{3x}$. **52.** $\frac{6a}{y} \cdot \frac{2x}{3a} - \frac{5x}{b} \cdot \frac{3b}{5y}$.

53. $\frac{12a^2b}{39xy^5} \cdot \frac{13x^2y^6}{24a^4b}$. **54.** $\frac{6a}{7b} \cdot \frac{2b}{3d} \cdot \frac{14c}{15e} \cdot \frac{5d}{6a}$.

55. $\frac{a + b}{m - n} \cdot \frac{a - b}{m + n}$. **56.** $\left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a - b}{2b}$.

57. $\left(\frac{a^3}{2b} - \frac{a^2}{3b^2} + \frac{a}{4b^3}\right) \cdot \frac{3a^2}{4b^2}$. **58.** $\frac{x^2 - 2x + 4}{x^4 - 2x^2 + 4} \cdot \frac{x^4 + 8}{x^2 - 9}$.

59. $\left(1 + \frac{a}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{a}{a + b} \cdot \frac{b}{a - b}$.

60. $\left(\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} - 2\right) \cdot \left(\frac{7x^2}{10} + \frac{5x}{4} + \frac{2}{3}\right)$.

61. $\left(1 + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} + \frac{m^3}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} - \frac{m^3}{4}\right)$.

62.* *a)* $24 : \frac{6}{7}$; *b)* $15 : \frac{5}{8}$; *c)* $10 : \frac{3}{5}$; *d)* $32 : 5\frac{1}{3}$.

63. *a)* $\frac{21}{32} : \frac{3}{32}$; *b)* $\frac{9}{10} : \frac{5}{12}$; *c)* $\frac{27}{40} : \frac{12}{35}$; *d)* $8\frac{3}{25} : \frac{7}{25}$.

64. *a)* $7\frac{7}{15} : \frac{27}{40}$; *b)* $140\frac{4}{5} : 5\frac{5}{12}$; *c)* $105\frac{7}{10} : 12\frac{2}{3}$; *d)* $135\frac{7}{48} : 2\frac{19}{24}$

65.* $27\frac{1}{2}$ *l* vina treba v steklenice iztočiti; koliko steklenic se potrebuje, ako drži vsaka natančno po $\frac{5}{6}$ *l*?

66. Vlak predirja, ker je cesta različno napeta, v prvih treh urah $94\frac{7}{8}$ *km*, v naslednjih $2\frac{1}{2}$ ure $70\frac{13}{20}$ *km* in potem v $3\frac{5}{6}$ ure $127\frac{7}{10}$ *km*; kolika je njega poprečna brzina v 1 uri?

67. $2am : \frac{2m}{b}$. **68.** $12a^3 : \frac{3a^2}{x}$. **69.** $6a^2y : \frac{3b^2}{2y}$.

70. $(x + y) : \frac{x + y}{x - y}$. ~~**71.**~~ $(a^2 - b^2) : \frac{a + b}{a - b}$.

72. $\frac{3a}{4y} : \frac{5x}{2b}$. ~~**73.**~~ $\frac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2} : \frac{x - y}{a + b}$.

74. $\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(a - \frac{b}{c}\right)$. **75.** $\left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y}\right) : \frac{xy}{x^2 - y^2}$.

76. $\frac{4(x + y)}{9(m - n)} : \frac{8(m - n)}{3(x - y)}$. **77.** $\left(\frac{3x^3}{4y} - \frac{9x^2}{15} + \frac{xy}{10}\right) : \frac{3x}{5y}$.

78. $\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{47}{210}ab - \frac{2}{3}b^2\right) : \left(\frac{3}{4}a - \frac{5}{7}b\right)$.

79. $\left(\frac{5x^6}{12a^6} - \frac{43x^2}{24a^2} + \frac{9a^2}{5x^2}\right) : \left(\frac{3x^2}{4a^2} - \frac{6a^2}{5x^2}\right)$.

---

80. *a)* $\frac{4\frac{1}{2}}{5\frac{1}{4}}$, *b)* $\frac{\frac{5}{6} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}}$, *c)* $\frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}}$.

81. $\frac{2\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{4}}$.

82. $\frac{2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2}}{5} + \frac{2\frac{1}{8}}{4\frac{1}{5}} - \frac{10\frac{1}{2} - 12\frac{3}{4}}{1\frac{1}{6}} + \frac{13\frac{2}{7}}{40}$.

83. $\frac{4 : 2\frac{1}{2}}{3} - \left(1 - \frac{2\frac{1}{3}}{1\frac{1}{2}} + \frac{4}{5 : 1\frac{2}{3}}\right) + \frac{2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{5} : 4}{2\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}$.

84. $\frac{\left[\left(2 + 1\frac{3}{4} : 7\right) \times 1\frac{2}{3}\right] : \frac{\frac{1}{3}}{4}}{\left(4\frac{1}{2} - 1\frac{3}{5}\right) . 2\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3}} - \frac{1\frac{1}{6} - \frac{1}{2}}{10\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}$.

85. $\left[\frac{3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} : \frac{4 . \left(2\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)}{1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2}}\right] \times \frac{2\frac{3}{5} . 5\frac{1}{8}}{3\frac{1}{8} : 4}$.

86. *a)* $\frac{a + b}{\frac{a}{b}}$, *b)* $\frac{\frac{a + b}{ab}}{\frac{a^2 - b^2}{a^2b^2}}$, *c)* $\frac{\frac{a - b}{m + n}}{\frac{a^2 - b^2}{m^2 - n^2}} + \frac{\frac{2b}{a - b}}{\frac{a^2 - b^2}{2ab}}$.

87. $\frac{\frac{x}{x + a} + \frac{x}{x - a}}{\frac{a}{x - a} - \frac{a}{x + a}}$. **88.** $\frac{a + \frac{bx - ay}{x + y}}{a - \frac{bx + ay}{x + y}}$.

II. O decimalnih ulomkih.

§ 103.

Ulomek, čegar števec je celo število, imenovalec pa cela potenca števila 10, tedaj 10, 100, 1000, ... 10^m, imenujemo decimalen ali desetinsk ulomek *(Decimalbruch)*; n. pr. $\frac{213}{100}$, $\frac{517}{10}$, $\frac{57}{1000}$. Občna oblika decimalnega ulomka je $\frac{A}{10^m}$, kjer pomenjata A in m celi števili. Vse druge ulomke zovemo v nasprotje decimalnim ulomkom navadne ulomke *(gemeine Brüche)*.

Decimalne ulomke pišemo brez imenovalca; zato pa odrežemo v števci od desne proti levi s točko, decimalna ali desetinska točka *(Decimalpunkt)* imenovano, toliko številk, kolikor ima potenčni eksponent števila 10 v imenovalci jednot, ali kar je prav tisto, kolikor ima imenovalec ničel. Ako v števci ni toliko številk, kolikor jih je treba odrezati, ondaj dopolnijo se prazna mesta na levi z ničlami. N. pr.

$$\frac{78317}{10^3} = \frac{78317}{1000} = 78 \cdot 317, \qquad \frac{5483}{10^4} = \frac{5483}{10000} = 0 \cdot 5483,$$

$$\frac{37}{10^5} = \frac{37}{100000} = 0 \cdot 00037.$$

Številke na desni decimalne točke imenujemo decimalke ali desetinke *(Decimalen)*. $\frac{A}{10^m}$ znači torej decimalen ulomek z m decimalkami.

Da zvemo, kaj pomenja v decimalnem ulomku vsaka posamična številka, vzemimo decimalni ulomek $\frac{A}{10^4}$, kateri ima 4 decimalke; recimo, da je

$$A = \ldots f \,.\, 10^5 + e \,.\, 10^4 + d \,.\, 10^3 + c \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + a,$$

tedaj

$$\frac{A}{10^4} = \frac{\ldots f \,.\, 10^5 + e \,.\, 10^4 + d \,.\, 10^3 + c \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + a}{10^4}$$

$$= \ldots f \,.\, 10 + e + \frac{d}{10} + \frac{c}{10^2} + \frac{b}{10^3} + \frac{a}{10^4}.$$

Število pred decimalno točko je tedaj celo število; prva decimalka pomenja desetine, druga stotnine, tretja tisočnine, četrta desettisočnine, i. t. d.

N. pr. $\quad 34 \cdot 781 = \frac{34781}{1000} = \frac{34000 + 700 + 80 + 1}{1000}$

$$= 34 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{1}{1000}.$$

V celem številu, napisanem po dekadnem zakonu (§ 8.), ima vsaka številka na naslednjem mestu proti desni le deseti del one vrednosti, katero je imela na prejšnjem mestu. Prav tisto velja tudi o decimalkah, kajti desetina je deseti del jednice, stotnina deseti del desetine, i. t. d. Uvedši decimalne ulomke smo tedaj le **dekadni številni sistem raztegnili** in to takó, da se ne končuje vrsta številnih redov . . . tisočev, stotic, desetic, jednic pri jednicah, nego se po istem zakonu, t. j. vsaka nižja jednota se smatra za deseti del jednote prejšnjega višjega reda, nadaljuje v desetinah, stotninah, tisočninah, . . . tudi pod jednice. Decimalna točka loči prvotne številne rede od te dopolnitve.

V dekadnem sistemu ima tedaj število v obče tó-le obliko:

$$\ldots c \,.\, 10^3 + b \,.\, 10^2 + a \,.\, 10 + j + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \ldots$$

kjer pomenjajo j, a, b, c . . . številke jednic, desetic, stotic, tisočic, . . ., in α, β, γ, . . . številke desetin, stotnin, tisočnin . . .

Decimalen ulomek čitamo takó, da izgovorimo najprej celote in potem vsako posamično decimalko z nje imenovalcem ali brez tega, ali pa vse decimalke z njih skupno vrednostjo.

Izvod. Decimalnemu ulomku vrednosti ne izpremenimo, ako mu pripišemo na desni kolikor si bodi ničel. N. pr.

$$0 \cdot 23 = 0 \cdot 230 = 0 \cdot 2300 = 0 \cdot 23000.$$

Kakó je pretvarjati navadne ulomke na decimalne in obratno.

§ 104.

Da pretvoriš navaden ulomek na decimalen ulomek, razdeli števec z imenovalcem, v kvocijentu pa postavi za celotami (na njih mesto pride pri pravem ulomku ničla) decimalno točko. K ostanku ničlo pripisavši, deli zopet ter dobljeno kvocijentovo številko na desno od decimalne točke zapiši; prav takó pripiši potem k vsakemu naslednjemu ostanku po jedno ničlo ter deljenje nadaljuj, dokler ne dobiš delitve brez ostanka, ali, ako se to ne zgodi, dokler nimaš toliko decimalk, kolikor je zahtevanih.

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{4} = 30 : 4 = 0 \cdot 75 & \qquad \frac{329}{125} = 329 : 125 = 2 \cdot 632 \\ \quad\;\; 20 & \qquad\qquad\quad 790 \\ \quad\;\; 0 & \qquad\qquad\quad\;\; 400 \\ & \qquad\qquad\qquad 250 \\ & \qquad\qquad\qquad\;\; 0 \end{array}$$

Dokaz. Ako pripišeš k ostanku celot ničlo, pretvoriš ga na desetine, in ako le-té razdeliš, dobiš tudi v kvocijentu desetine. Ako pripišeš ničlo prav takó k ostanku desetin, pretvoriš ga na stotnine, in le-té razdelivši dobiš tudi v kvocijentu stotnine; i. t. d.

Dostavek. 1.) Da je môči navaden ulomek natančno na decimalen ulomek izpremeniti, treba, da je ta končen *(endlich)* decimalen ulomek, t. j. prej omenjena delitev se mora dati izvršiti brez ostanka. A to je, ker vzamemo, da sta števec in imenovalec navadnega ulomka relativni praštevili, le tedaj mogoče, kadar nima imenovalec nikakega od 2 in 5 različnega faktorja.

V vseh slučajih, v katerih imenovalec faktorjev 2 in 5 celo nima, ali v katerih ima razven teh še druge različne faktorje, môči je navadni ulomek v njega najjednostavnejši obliki le približno na decimalen ulomek pretvoriti.

N. pr. $\frac{23}{78} = 23{\cdot}0 : 78 = 0{\cdot}2948 \ldots$

740
380
680
56

2.) Kadar ulomka ni môči natanko na decimalen ulomek pretvoriti, ondaj moramo, njega približno vrednost računajoč, dobiti nekaj decimalk, katere se v istem redu ponavljajo. Kajti v vsaki delitvi je ostanek manjši od divizorja; zato je le toliko različnih ostankov mogočih, kolikor je celih števil, ki so manjša od divizorja. Delitev nadaljujoč, moramo dobiti tedaj slednjič ostanek, katerega smo že prej imeli; a potem se bodo tudi v kvocijentu v istem redu ponavljale številke, katere smo bili že prej dobili, in prav takó se bodo ponavljali tudi prejšnji ostanki. N. pr.

$\frac{7}{15} = 7{\cdot}0 : 15 = 0{\cdot}4666 \ldots$

100
100
100
10

$\frac{18}{37} = 18{\cdot}0 : 37 = 0{\cdot}486486 \ldots$

320
240
180
320
240
18

Decimalne ulomke, v katerih se nekoliko številk v istem redu ponavlja, imenujemo povratne ali perijodne *(periodisch)*, vrsto ponavljajočih se številk pa povračaj ali perijodo *(Periode)*.

Perijodne decimalne ulomke imamo dvoje: čisto perijodne *(rein periodisch)*, t. j. take, pri katerih začenja perijoda s prvo decimalko, in nečisto ali mešano perijodne *(unrein periodisch)*, t. j. take, ki imajo pred perijodo še druge decimalke.

Perijodo pišemo navadno le jedenkrat, toda nad prvo in zadnjo njeno številko postavimo točko; tedaj je

$$\frac{7}{15} = 0{\cdot}4\dot{6}; \qquad \frac{18}{37} = 0{\cdot}\dot{4}8\dot{6}.$$

§ 105.

Pretvarjajoč decimalne ulomke na navadne ulomke razločuj té-le slučaje:

1.) Končen decimalen ulomek pretvoriš na navaden ulomek, ako ga v obliki navadnega ulomka napišeš ter tega, ako mogoče, okrajšaš.

N. pr. $0{\cdot}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}, \qquad 31{\cdot}325 = 31\frac{325}{1000} = 31\frac{13}{40}.$

2.) Čisto perijoden decimalen ulomek pretvoriš na navadnega, ako vzameš za števec perijodo, za imenovalec pa toliko 9, kolikor ima perijoda številk.

$$0{\cdot}\dot{4}\dot{6} = \frac{46}{99}.$$

Dokaz. Ako zaznamenuješ iskani navadni ulomek z x, ondaj je

$$x = 0{\cdot}46464646\ldots$$

To jednačbo s 100 pomnoživši, dobiš

$$100x = 46{\cdot}46464646\ldots$$

Ako prvo jednačbo od druge odšteješ, dobiš

$$99x = 46,$$

in odtod

$$x = \frac{46}{99}.$$

3.) Mešano perijoden decimalen ulomek pretvoriš na navadnega, ako odšteješ število, obstoječe iz decimalk pred perijodo, od števila, sestavljenega iz decimalk pred perijodo in v perijodi, ter to diferenco vzameš za števec ulomku, čegar imenovalec ima toliko 9, kolikor ima perijoda številk, s toliko ničlami na desni, kolikor je pred perijodo decimalk.

$$0{\cdot}3\dot{2}\dot{5} = \frac{325 - 3}{990} = \frac{322}{990}.$$

Dokaz. Ako zaznamenuješ iskani navadni ulomek z x, ondaj je

$$x = 0 \cdot 325252525 \dots .$$

Pomnoživši to jednačbo najprej s 1000 in potem s 10, dobiš

$$1000x = 325 \cdot 252525 \dots .$$
$$10x = 3 \cdot 252525 \dots .$$

Ako tretjo jednačbo od druge odštêješ, dobiš

$$990x = 325 - 3, \text{ in odtod}$$

$$x = \frac{325 - 3}{990} = \frac{322}{990}.$$

Četvero osnovnih računov z decimalnimi ulomki.

§ 106.

Za decimalne ulomke veljajo prav tisti zakoni kakor za cela števila, zatorej je z njimi tudi prav takó računati kakor s celimi števili, paziti je le na vrednost posamičnih številk, t. j. na decimalno točko.

Ako nam je decimalne ulomke seštevati ali odštevati, pišemo jih takó, da pridejo istoimenska mesta, tedaj tudi decimalne točke, natanko druga pod drugo; potem jih seštevamo ali odštevamo od desne proti levi, kakor cela števila. Na praznih mestih misliti si moremo ničle.

$$\begin{array}{rr} & 35 \cdot 312 \\ & 0 \cdot 5678 \\ & 39 \cdot 2 \\ \hline \text{vsota} & 75 \cdot 0798 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 215 \cdot 3456 \\ & 91 \cdot 45923 \\ \hline \text{diferenca} & 123 \cdot 88637 \end{array}$$

§ 107.

1.) Decimalen ulomek pomnožimo s potenco števila 10, ako pomaknemo decimalno točko za toliko mest proti desni, kolikor ima multiplikator ničel.

$$\frac{a}{10^m} \cdot 10^n = \frac{a}{10^m : 10^n} = \frac{a}{10^{m-n}}.$$

$$3 \cdot 14159 \,.\, 100 = 314 \cdot 159, \quad 0 \cdot 097325 \,.\, 1000 = 97 \cdot 325.$$

2.) Decimalen ulomek pomnožimo z decimalnim ulomkom, ako ga pomnožimo, ne oziraje se na decimalni točki, kakor celi števili ter potem v produktu od desne proti levi toliko decimalnih mest odrežemo, kolikor jih imata oba faktorja.

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}.$$

Prav tisto velja tudi, ako je jeden faktor celo število.

Kadar produkt nima toliko številk, kolikor jih je treba odrezati, postavijo se na prazna mesta na levi ničle.

```
 6·543 . 2·37          4·23 . 0·01307
13 086                 1 269
 1 9629                  2961
   45801            0·0552861
15·50691
```

§ 108.

Pri praktičnih računih zadostuje navadno, ako pridržimo od decimalnega ulomka, imajočega veliko decimalk, le nekaj decimalnih mest, in sicer toliko, kolikor jih zahteva natančnost računa. Pogrešek, ki na ta način nastane, skušamo kolikor mogoče zmanjšati in to takó, da povečamo, popravimo (*corrigieren*), zadnjo pridržano decimalko za 1, ako je prva izpuščena številka 5 ali večja od 5; kadar je pa prva izpuščena številka manjša od 5, tedaj ostane zadnja pridržana decimalka neizpremenjena. Takó vzamemo mesto decimalnega ulomka 0·728374, ako zadostujejo 4 decimalke, 0·7284, in če zadostujejo 3 decimalke, 0·728. Tak decimalen ulomek imenujemo okrajšan. Okrajšan decimalen ulomek izražuje le približno vrednost popolnega decimalnega ulomka, toda pogrešek ni nikdar večji nego pol jednote zadnjega pridržanega decimalnega mesta.

Kadar nočemo dobiti v produktu dveh decimalnih ulomkov nižjih mest, nego jih zahteva natančnost računa, poslužujemo se okrajšanega množenja, množeč z vsako multiplikatorjevo številko le one multiplikandove številke, katerih produkti uplivajo na zahtevana mesta. Kakor lahko razvidno, je v ta namen takó-le ravnati:

1.) Jednice multiplikatorjeve zapiši pod ono multiplikandovo mesto, katero se v produktu kot najnižje zahteva; vse druge številke pa napiši zraven teh jednic v obratnem redu takó, da se prikaže ves multiplikator obrnen.

2.) S prvo na desni stoječo številko obrnenega multiplikatorja pomnoži najprej ono multiplikandovo številko, katera stoji za jedno mesto dalje proti desni, pa tega produkta ne zapiši, zapomni si le njega najbližje desetice, katere dadé popravo ali korekturo; potem pomnoži ravno nad njo stoječo številko multiplikandovo, k produktu prištej popravo in tu začni produkt napisavati; na to pomnoži zaporedoma tudi vse naslednje multiplikandove številke. Prav takó množi z drugo, tretjo, ... multiplikatorjevo številko, dobljene okrajšane delske produkte pa piši takó druzega pod druzega, da pridejo njih najnižja mesta natanko drugo pod drugo.

3.) Te delske produkte seštej in v vsoti odreži toliko decimalk, kolikor je zahtevanih.

N. pr. Recimo, da nam je na okrajšani način izračunati:

a) 35·2156 . 3·506 na 3 decimalke.

$$\begin{array}{r} 35{\cdot}2156 \\ 6\,053 \\ \hline 105\,647 \\ 17\,608 \\ 211 \\ \hline 123{\cdot}466 \end{array}$$

b) 3·047653 . 0·000867 na 5 decimalk.

$$\begin{array}{r} 3{\cdot}047653 \\ 76\,80000 \\ \hline 24\,4 \quad\quad\; \\ 1\,8 \quad\quad\; \\ 2 \quad\quad\; \\ \hline 0{\cdot}00264 \quad\quad\; \end{array}$$

Ako hočeš, da je zadnja decimalka zanesljiva, izračunaj jedno več, nego je prav za prav zahtevanih.

Prav takó kakor decimalne ulomke množiti je na okrajšani način tudi **cela števila**, ako se zahteva le nekaj najvišjih mest.

Ako nam je n. pr. produkt 310786 . 45067 izračunati na desettisočice, dobimo

$$\begin{array}{r} 310786 \;.\; 45067 \\ 76054 \qquad\quad \\ \hline 1243144 \qquad\quad \\ 155393 \qquad\quad \\ 1864 \qquad\quad \\ 217 \qquad\quad \\ \hline 1400618 \text{ desettisočic } = 14006180000. \end{array}$$

§ 109.

1.) **Decimalen ulomek razdelimo s potenco števila 10**, ako pomaknemo decimalno točko za toliko mest dalje proti levi, kolikor ima divizor ničel.

$$\frac{a}{10^m} : 10^n = \frac{a}{10^{m+n}}$$

$$345 \cdot 67 : 10 = 34 \cdot 567, \qquad 3 \cdot 78 : 1000 = 0 \cdot 00378.$$

2.) Ako je razdeliti decimalen ulomek z decimalnim ulomkom, ondaj pripiši k dividendu in divizorji na desni toliko ničel, da bosta imela oba isto toliko decimalk, potem izpusti decimalni točki ter delitev izvrši kakor pri celih številih.

$$\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^m} = \frac{a}{10^m} \cdot \frac{10^m}{b} = \frac{a}{b} = a : b.$$

$$3 \cdot 1452 : 1 \cdot 234 = 31452 : 12340 = 2 \cdot 54878 \ldots$$

Prav takó ravnaj tudi, ako je dividend ali divizor celo število.

Bolj praktično pa je uporabljati tá-le pravila, katera so sama ob sebi jasna:

a) Decimalen ulomek razdelimo s celim številom, ako ga razdelimo kakor celo število ter v kvocijentu decimalno točko postavimo, predno vzamemo prvo dividendovo decimalko v račun. N. pr.

$$487 \cdot 75 : 25 = 19 \cdot 51$$
237
127
25
0

b) Število razdelimo z decimalnim ulomkom, ako pretvorimo, pomnoživši dividend in divizor s primerno potenco števila 10, divizor na celo število ter potem delimo kakor pri *a)*.

N. pr. $0 \cdot 05496 : 36 \cdot 84 = 5 \cdot 496 : 3684 = 0 \cdot 00149 \ldots$
$34461 : 0 \cdot 63 = 3446100 : 63 = 54700.$

Dostavek. Iz prejšnjega je jasno, da je zavisna številčna vrsta v kvocijentu le od številčne vrste v dividendu in divizorji; zaporedne kvocijentove številke dobimo tedaj, izvršivši delitev, ne oziraje se na decimalni točki v dividendu in divizorji, kakor pri celih številih. Da določimo kvocijentovim številkam mestno vrednost, treba si le divizor pod prvi delski dividend zapisan misliti; prva številka v kvocijentu ima prav tisto mestno vrednost, katero ima nad jednicami divizorjevimi stoječa številka v dividendu; ako je pa določena mestna vrednost prve kvocijentove številke, določena je tudi mestna vrednost vseh druzih. N. pr.

a) $9142 \cdot 2326 : 34 \cdot 9 = 2 \ldots \cdot \ldots$, *b)* $3 \cdot 4856 : 83 \cdot 7 = 0 \cdot 04 \ldots$
349 837

Pri *a)* stojé divizorjeve jednice (4) pod dividendovo številko 1, katera pomenja stotice; vsled tega pomenja stotice tudi prva kvocijentova številka 2.

Pri *b)* stojé divizorjeve jednice (3) pod dividendovo številko 8 in ta ima vrednost stotnin; tedaj ima vrednost stotnin tudi prva kvocijentova številka 4.

§ 110.

Da določimo v kvocijentu dveh števil le toliko številk, kolikor jih je zanesljivih, in se ob jednem izognemo vsemu nepotrebnemu računanju, v to služi nam **okrajšano deljenje**. Bistvo okrajšane delitve je tó-le:

1.) Najprej poišči prvo kvocijentovo številko in tej določi mestno vrednost (uporabljajoč dostavek k § 109.) Iz mestne vrednosti prve kvocijentove številke in iz števila zahtevanih decimalk določiš lahko, koliko številk je treba sploh v kvocijentu izračunati.

2.) Za **okrajšani divizor** vzemi toliko najvišjih divizorjevih številk, kolikor se jih v kvocijentu zahteva, za **okrajšani dividend** tudi prav toliko, ali pa jedno več, ako bi imel pri navadnem deljenji prvi delski dividend jedno številko več nego divizor.

3.) S prvo kvocijentovo številko pomnoži najprej najvišjo izpuščeno divizorjevo številko; iz tega produkta dobljeno popravo prištej k produktu iz okrajšanega divizorja in prve kvocijentove številke in ta produkt odštej od okrajšanega dividenda.

4.) K ostanku ne pripiši nobedne nove številke, za to pa odreži v divizorji najnižjo; potem deli kakor poprej in takó ravnaj, dokler ni v divizorji nobedne številke več.

5.) Ako dani dividend nima toliko številk, kolikor jih mora imeti okrajšani dividend, ondaj mu pripiši toliko ničel, kolikor ima številk premalo. Ako ima pa divizor premalo številk, začni na okrajšani način še le tedaj deliti, ko si vzel že vse številke okrajšanega dividenda v račun. N. pr.

3 dec.	3 dec.
876·54|38 : 1‚8·‚9‚5‚7|9 = 46·236	8·91|25 : 9‚4·|75 = 0·094
118 22	39
4 48	1
69	
12	
1	

Okrajšana delitev se more uporabljati tudi pri **celih** številih, ako se zahteva le nekaj najvišjih mest.

Ako hočemo določiti n. pr. kvocijent 35874137 : 8435 le do stotic, dobimo

358|74137 : 8‚4|35 = 42 stotic
21
4

Naloge.

Pretvori té-le navadne ulomke na decimalne:

1. *a)* $\frac{2}{5}$; *b)* $\frac{17}{25}$; *c)* $\frac{39}{80}$; *d)* $\frac{57}{125}$; *e)* $\frac{2346}{625}$; *f)* $\frac{107}{32}$.

2. *a)* $\frac{5}{6}$; *b)* $\frac{43}{9}$; *c)* $\frac{36}{11}$; *d)* $\frac{25}{37}$; *e)* $\frac{1043}{41}$; *f)* $\frac{312}{13}$.

3. *a)* $\frac{7}{12}$; *b)* $\frac{214}{55}$; *c)* $\frac{113}{74}$; *d)* $\frac{31}{36}$; *e)* $\frac{108}{275}$; *f)* $\frac{933}{1640}$.

Pretvori té-le decimalne ulomke na navadne:

4. *a)* 0·25, *b)* 0·75, *c)* 3·072, *d)* 5·725, *e)* 0·0024, *f)* 8·0875

5. *a)* $0\cdot\dot{6}$, *b)* $5\cdot\dot{4}$, *c)* $0\cdot\dot{2}\dot{1}$, *d)* $6\cdot\dot{0}\dot{6}$, *e)* $4\cdot\dot{2}4\dot{3}$, *f)* $0\cdot\dot{4}37\dot{8}$

6. *a)* $0\cdot2\dot{6}$, *b)* $2\cdot3\dot{5}\dot{1}$, *c)* $4\cdot41\dot{3}$, *d)* $0\cdot12\dot{4}\dot{5}$, *e)* $0\cdot79\dot{3}2\dot{4}$.

---

7. 32·38 + 43·49 + 21·27 + 78·04 + 49·83.

8.	**9.**	**10.**	**11.**
5·273	0·7619	13·58	23·3182
0·689	0·7988	6·376	9·305
5·035	0·5225	42·0457	0·2649
4·621	0·8098	86·93	68·16804

12. 83·8 — 25·4. **13.** 57·16 — 9·58.

14. 3·407 — 0·562. **15.** 62·027 — 29·28.

16. 17·6 — 9·374. **17.** 1 — 0·4736.

18. 257·328 — 138. **19.** 85 — 46·55037.

20. Izračunaj $A = a + b + c$, $B = a + b - c$,
$C = a - b + c$, $D = b + c - a$
za $a = 23\cdot4567$, $b = 39\cdot0703$, $c = 51\cdot809$.

21. Recimo, da preleti prosto padajoče telo v prvi sekundi svojega pada 4·904 *m* in v vsaki naslednji sekundi za 9·808 *m* več kakor v prejšnji; koliko *m* preleti *a)* v drugi, tretji, četrti sekundi? *b)* v prvih štirih sekundah?

---

22. 1 *km* = 0·131823 avstr. milje; koliko avstr. milj ima 10, 100, 1000 *km*?

23. Pomnoži *a)* 24·37, *b)* 1·928, *c)* 336·18, *d)* 0·27309 z 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

24. 3·147 . 23. **25.** 4·5378 . 58. **26.** 7·928 . 0·6.

27. 89·2586 . 5·35. **28.** 9·7084 . 0·925.

29. 0·82745 . 0·0798.

30. Razdalja med mesecem in zemljo je 58·525krat tolika kakor polumer zemljinega ekvatorja; kolika je ta razdalja, ako vzamemo, da ima ekvatorjev polumer 6377·5 *km*?

Izračunaj, na okrajšani način množeč:

31. 3·1415 . 9·2587. (3 dec.) ***32.*** 0·9156 . 23·851. (2 dec.)

33. 12·0748 . 19·1345. (4 dec.)

34. 81·286 . 12·34. (3 dec.)

35. $57\cdot\dot{3}$. $7\cdot2\dot{8}$. (2 dec.) ***36.*** $3\cdot7\dot{3}\dot{5}$. $0\cdot\dot{4}2\dot{6}$. (4 dec.)

37. 1·045 . 1·045 . 1·045 . 1·045. (6 dec.)

38. Izračunaj na 4 decimalke

$$p = (a + b + c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)\,(b + c - a)$$

za $a = 1\cdot30785$, $b = 2\cdot09122$, $c = 2\cdot80116$.

---

39. Razdeli *a)* 327·4, *b)* 58·06, *c)* 9·233, *d)* 0·5942 z 10, 100, 1000, 10000.

40. 38·4 : 4. ***41.*** 0·2244 : 6. ***42.*** 0·25673 : 7.

43. 268·8 : 32. ***44.*** 0·675 : 17. ***45.*** 7·74772 : 109.

46. 71·541 : 0·9. ***47.*** 0·3197 : 27·8. ***48.*** 4735·02 : 0·53.

49. 0·5976 : 0·083. ***50.*** 2 00093724 : 0·0054.

51. Zemlja preleti, vrteč se okoli solnca, v 1 uri 14787·68 zemljep. milje; koliko *a)* v 1 minuti, *b)* v 1 sekundi?

Izračunaj, na okrajšani način deleč:

52. 45·12345 : 3·8265. (3 dec.) ***53.*** 986·256 : 127·85. (2 dec.)

54. 0·7123 : 43·566. (4 dec.) ***55.*** 754·06 : 0·649. (2 dec.)

56. 57·6 : 0·082754. (2 dec.) ***57.*** 9·82467 : 0·758. (3 dec.)

58. 486 : $92\cdot\dot{7}$. (3 dec.) ***59.*** $23\cdot2\dot{4}$: $0\cdot0\dot{3}8\dot{5}$. (2 dec.)

60. 1 *kg* = 1·785523 dun. funta; koliko *kg* ima 1 dun. funt? (5 dec.)

III. Naloge v ponavljanje.

1.* Koliko velja 45 *kg* po 20 kr.? (20 kr. = $\frac{1}{5}$ gl.)

2.* Koliko velja 64 *l*, ako velja 1 *l* *a)* 10 kr., *b)* 20 kr., *c)* 25 kr., *d)* 50 kr.?

3.* Koliko velja 48 *m* po 30 kr.? (30 kr. = $\frac{1}{4}$ gl. + $\frac{1}{20}$ gl.)

4.* Koliko velja 127 *kg* po *a)* 15 kr., *b)* 24 kr., *c)* 35 kr., *d)* 60 kr., *e)* 75 kr.?

5. Pretvori na decimalne ulomke té-le navadne ulomke: *a)* $\frac{9}{16}$, *b)* $\frac{11}{125}$, *c)* $\frac{7}{27}$, *d)* $\frac{43}{75}$, *e)* $\frac{69}{22}$, *f)* $\frac{462}{591}$.

6. (59·302 — 27·8775) . 3·32.

7. 8·137526 . 3·044891 . 7·628573. (6 dec.)

8. 68·0124152 : 7·961. **9.** 0·0552861 : 0·423.

10. $\frac{17x + 12y}{x + y} - \frac{3x - 7y}{x + y} + \frac{2x - 3y}{x + y}$.

11. $\frac{8m^3x}{5n^2y} \cdot \frac{ny}{4mx}$. **12.** $\frac{4x^2y^2}{3b^2} : \frac{5a^2y^2}{3x^2}$.

13. Poišči najv. sk. mero števil:

a) 11467 in 16031; *b)* 2370, 56485 in 47005.

14. Pomnoži *a)* 45, *b)* 98, *c)* $16\frac{1}{2}$ s 50. $(50 = \frac{100}{2})$.

15. Pomnoži *a)* 36, *b)* 48, *c)* 120 z $12\frac{1}{2}$. $(12\frac{1}{2} = \frac{100}{8})$.

16. Pomnoži *a)* 24, *b)* 81, *c)* 135 s $33\frac{1}{3}$. $(33\frac{1}{3} = \frac{100}{3})$.

17. $a + b - \frac{a^2 + b^2}{a + b}$. **18.** $x^2 - y^2 - \frac{x^4 - 2x^2y^2 - y^4}{x^2 + y^2}$.

19. $\left(\frac{2a^2}{9} - \frac{ax}{12} - \frac{3x^2}{16}\right) : \left(\frac{2a}{3} - \frac{3x}{4}\right)$.

20. Za koliko se poveča ali zmanjša ulomek $\frac{35}{36}$, *a)* ako k števcu in imenovalcu 1 prišteješ, *b)* ako od števca in imenovalca 1 odšteješ?

21. $\{[(10\frac{1}{6} - 9\frac{3}{4}) \,.\, 3\frac{1}{5}] + 4\frac{2}{3}\} : \frac{3}{5}$.

22. $[15 : (5 - 1\frac{2}{3})] : 3\frac{3}{8}$.

23.* $\frac{3}{4}$ *m* veljajo 2 gl. 36 kr.; koliko velja 1 *m*?

24. $\frac{a + 1}{a - 1} + \frac{a + 2}{a - 2} - \frac{a + 3}{a - 3}$.

25. $(27a^6 - 33a^5b - 45a^4b^2 + 71a^3b^3 - 36ab^5 + 16b^6) : (9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3)$.

Peti oddelek.

O jednačbah prve stopinje z jedno neznanko.

§ 111.

Izjednačenje dveh številnih izrazov, imajočih isto vrednost, imenujemo j e d n a č b o. N. pr.

$$x = x, \quad (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4, \quad 7x - 6 = 5x.$$

Izraza na obeh stranéh jednačaja zovemo jednačbina d e l a; vsakteri ima lahko zopet po več č l e n o v. V jednačbi $7x - 6 = 5x$ je $7x - 6$ prvi, $5x$ drugi del; prvi del ima dva člena $7x$ in $- 6$.

Jednačbe so dvoje: i d e n t i č n e in d o l o č i l n e jednačbe.

I d e n t i č n a ali i s t o v n a *(identisch)* jednačba ostane veljavna za vsako vrednost, katero damo njenim še nedoločenim količinam; to svojstvo imata jednačbi $x = x$ in $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$, kateri ostaneta pravi, naj si damo količini x katero koli vrednost. Vsaka formula, izražujoča katero koli aritmetično operacijo, je taka identična jednačba.

D o l o č i l n e j e d n a č b e *(Bestimmungsgleichungen)* so pa one, katere ne ostanejo veljavne za vse, nego l e z a d o l o č e n e v r e d n o s t i njih neznank. Jednačba $7x - 6 = 5x$ je torej določilna jednačba, kajti nji zadostuje le vrednost $x = 3$. Vsaka določilna jednačba izražuje p o g o j, kateremu morajo njena neznana števila zadostovati.

Vrednosti neznanke, zadostujoče določilni jednačbi, imenujemo k o r e n e *(Wurzeln)* te jednačbe. Koren jednačbe $7x - 6 = 5x$ je 3, kajti ako postavimo v jednačbo za x to število, zadostuje ji po polnem.

Jednačbi korene določiti, pravi se, jednačbo r a z r e š i t i.

Po š t e v i l u n e z n a n k, ki jih ima jednačba, razločujemo jednačbe z j e d n o, z d v e m a in v e č n e z n a n k a m i. N. pr.

$7x - 3 = 4x$ je jednačba z jedno, $5x - 3y = 8$ jednačba z dvema, $7x = 3y - 5z + 5$ jednačba s tremi neznankami.

Jednačbo, katera nima neznank v višjih potencah kakor v prvi, in tudi produkta iz več neznank ne, imenujemo jednačbo **prve stopinje** *(ersten Grades)*.

Jednačbo, katera ima razven neznank sama posebna števila, zovemo **številčno jednačbo** *(Ziffergleichung)*; n. pr. $7x - 6 = 5x$. Jednačbo, katera ima razven neznank tudi občna števila, imenujemo **črkovno jednačbo** *(Buchstabengleichung)*; n. pr. $ax - b = cx + d$.

---

1. Kakó je razreševati jednačbe prve stopinje z jedno neznanko.

§ 112.

Jednačbe prve stopinje razrešujemo, opirajoč se na osnovno resnico (§ 7., 5.):

Jednako na jednak način izpremenjeno dá zopet jednako.

Iz te občne osnovne resnice izvajamo té-le posebne reke:

a) Jednako k jednakemu prišteto dá jednake vsote.

b) Jednako od jednacega odšteto dá jednake diference.

c) Jednako z jednacim pomnoženo dá jednake produkte.

d) Jednako z jednakim razdeljeno dá jednake kvocijente.

Odtod izvira:

1.) Vsak člen je môči iz jednega jednačbinega dela z nasprotnim znakom v druzega **prenesti** *(transponieren)*. N. pr.:

Iz $3x = 16 - 5x$ dobimo $3x + 5x = 16$;

» $x + 3 = 8$ » $x = 8 - 3$.

V prvi jednačbi smo k vsakteremu delu $5x$ prišteli, v drugi pa smo od vsakterega dela 3 odšteli.

2.) Iz vsake jednačbe je môči **ulomke odpraviti**; v ta namen treba le oba dva jednačbina dela z najmanjšim skupnim mnogokratnikom vseh imenovalcev pomnožiti. N. pr.

Iz $\frac{x}{4} - 1 = 2$ dobimo $x - 4 = 8$;

» $\frac{2x}{3} = \frac{5x}{2} - 11$ dobimo $4x = 15x - 66$.

3.) Vsak faktor jednega dela je môči prenesti kot divizor v drugi del. N. pr.

Iz $7x = 35$ dobimo $x = \frac{35}{7}$ ali $x = 5$.

§ 113.

Uporabljajoč prejšnje izreke, razrešuj torej jednačbe prve stopinje z jedno neznanko takó-le:

1.) Ako ima jednačba ulomke, odpravi jih; v ta namen pomnoži oba dva jednačbina dela z najmanjšim skupnim mnogokratnikom vseh imenovalcev. (Odpravi ulomke.)

2.) Ako so v jednačbi sestavljeni, z oklepaji združeni izrazi, ondaj izvrši res one račune, katere oklepaji le nakazujejo. (Razreši oklepaje.)

3.) Vse člene, imajoče neznanko, prenesi v prvi del ter jih potem skrči; znane člene pa prenesi v drugi del ter jih tudi skrči. (Prenesi in skrči.)

4.) Neznanko oprosti njenega koeficijenta; v ta namen razdeli z njim oba dva jednačbina dela. (Razdeli z neznankinim koeficijentom.)

Ako se hočeš prepričati, si-li jednačbo res prav razrešil, treba le neznanko v dani jednačbi zameniti z najdeno vrednostjo ter izraza na obeh stranéh skrčiti. Razrešil si jo prav, ako dobiš na obeh stranéh isti rezultat, t. j. ako se izpremeni dana jednačba v identično, drugače ne.

Primeri.

1.) $4x + 5 = 17$.

Razrešitev:	$4x = 17 - 5$	Presk.:	$4 \times 3 + 5 = 17$
	$4x = 12$		$12 + 5 = 17$
	$x = 3$.		$17 = 17$.

2.) $\frac{x}{5} = 2x - 36$.

Razrešitev:	$x = 10x - 180$	Presk.:	$\frac{20}{5} = 2 \,.\, 20 - 36$
	$x - 10x = - 180$		
	$- 9x = - 180$		$4 = 40 - 36$
	$x = 20$.		$4 = 4$.

3.) $6\,(2x - 5) = 5x + 12$.

Razrešitev:	$12x - 30 = 5x + 12$	Presk.:	$6 \,.\, (2 \,.\, 6 - 5) = 5 \,.\, 6 + 12$
	$12x - 5x = 12 + 30$		$6 \,.\, (12 - 5) = 30 + 12$
	$7x = 42$		$6 \,.\, 7 = 42$
	$x = 6$.		$42 = 42$.

Aufgabe.

1. $5x + 4 = 19.$ **2.** $3x - 4 = 20.$

3. $70 - 3x = 40.$ **4.** $42x - 35 = 75.$

5. $92 - 27y = 11.$ **6.** $29 = 6z - 13.$

7. $7x + 8 = 5x + 18.$ **8.** $17 + 8x = 71 - x.$

9. $39x - 168 = 24x + 42.$ **10.** $5y - 60 = 324 - 19y.$

11. $5z - 40 = 8z - 73.$ **12.** $47x - 155 = 35x - 25.$

13. $2x + 2 = 2x - 3 + 5x.$ **14.** $14y - 23 + 17y = 24y + 109.$

15. $2x - 11 + 2x - 5x + 7 = 7x - 7.$

16. $155 - 3x - 27 = 35 - 17x + 138 - 13x.$

17. $a + x = b.$ **18.** $a - x = b.$

19. $ax + b = c.$ **20.** $ax - b = cx - d.$

21. $3a - 4x = 9a + 6b - 6x.$ **22.** $2a - 5y + b = 4y.$

23. $a^2x + ax - abx = a - b + 1.$

24. $6ax - 7ac + 3ax - 5ab = 2ax + 2ab.$

---

25. $7(x - 5) = 35 + 7.$ **26.** $5(3 + x) + 16 = 61.$

27. $20 - (y - 4) = 2y.$ **28.** $9(2x - 7) = 5(4x - 15).$

29. $2(x - 7) = 3(8 - x) + 22.$

30. $3(7 - 8z) + 7(4z - 3) = 1.$

31. $8x + 5(2x - 1) = 2(x + 4) - 5.$

32. $2(2x - 19) + 3(x - 3) = 2(x - 1).$

33. $22(x + 1) - 8(x + 7) = 5(x + 5) - 32.$

34. $3(5 + x) - 2(x + 6) = 3(2x + 9) - 9(4 + x).$

35. $12(3x - 7) - 3(2x + 28) = 15(16 - 2x) + 4(18 - 5x).$

36. $(x - 1)(x + 1) = x^2 + x + 1.$

37. $(5 + x)(4 - x) = (3 - x)(x + 2) + 22.$

38. $2[3(3y - 4) - 8] + (11y - 15) = 2(5 - 2y).$

39. $5[3 + (2x - 7)] - 7(x + 5) + 1 = 3[4(3 - x) - x] - 60.$

40. $a(x - b) = b(a - x) - c.$ **41.** $p(y - r) + r(y + p) = m.$

42. $m(x - a) - n(x - b) = (a + b)x.$

43. $2a(a - x) + (a - b)x = a^2 + b^2.$

44. $z(z - 2a) - (b - z)^2 = 3b^2 - 4a^2.$

---

45. $\frac{2x}{3} = 25 - x.$

46. $\frac{3-4x}{7} + 3 = 4x.$

47. $\frac{x}{4} + 17 = \frac{x}{5} + 18.$

48. $\frac{y}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{6}.$ x = 12

49. $7 = \frac{5}{6}x - 3.$ x = 12

50. $\frac{1}{4}x - 4 = \frac{2}{9}x - 3.$

51. $2x - \frac{3x}{5} = 3(x - 2).$

52. $\frac{2z}{3} + \frac{z}{5} = z - 2.$ z = 15

53. $\frac{6+x}{6-x} = 2.$ x = 2

54. $\frac{1}{1-x} = \frac{3}{x}.$

55. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13.$

56. $\frac{z}{2} + \frac{z}{3} + \frac{z}{4} = z + 1.$

57. $\frac{30}{y} + \frac{90}{2y} = 4 + \frac{45}{37}.$

58. $\frac{25}{x} - \frac{2(5-x)}{x} = 3.$ x = 15

59. $\frac{x+3}{5} - \frac{x-3}{9} = 2.$

60. $\frac{y+7}{5} - 1 = \frac{9-y}{14}.$

61. $\frac{3z+5}{4} - 9 = \frac{2z-1}{3} - 7.$

62. $\frac{x-5}{3} + \frac{x+1}{4} = \frac{7x-2}{15}.$

63. $\frac{13-x}{16-x} = \frac{3}{4}.$

64. $\frac{x+9}{x-3} = \frac{x+5}{x-5}.$ x = 15

65. $\frac{10x+1}{5x-8} = \frac{6x+3}{3x-4}.$

66. $\frac{4}{x+3} + \frac{2}{x-3} = \frac{5x-1}{x^2-9}.$ x = 5

67. $\frac{10y+1}{3(y+1)} - 1 = \frac{3y-2}{y+1}.$

68. $\frac{4}{x-8} - \frac{3}{x-7} = \frac{1}{x-9}.$

69. $\frac{1}{5}(x+4) = 1.$

70. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}(x+3)+2\right)+1\right] = 1.$ x = 1

71. $z + \frac{z}{2} + \frac{2z}{3} + \frac{3z}{4} = \frac{7z}{8} + 49.$

72. $\frac{x+2}{3} - \frac{4x+5}{6} = x + 2 - \frac{7x-8}{9}.$

73. $\frac{y}{2} + \frac{y+1}{3} + \frac{y-2}{4} = \frac{2y}{11} - \frac{2-3y}{4} - 3.$

74. $\frac{2x-13}{2(x-8)} + \frac{2x-12}{x-8} = \frac{29}{24} - \frac{70-9x}{3(x-8)}.$

75. $\frac{x-a}{b} = \frac{x-b}{a}.$

76. $\frac{x}{a} - b = \frac{x}{b} - a.$

77. $\frac{a-bx}{c} = \frac{m-nx}{p}.$

78. $\frac{a}{y} + c = \frac{a(b+c)}{by}.$

79. $\frac{a-b}{x} + 1 = \frac{a+x}{x} - \frac{b(a-b)}{a+b}.$

80. $\frac{a+b}{a-b}\cdot x = \frac{b-a}{a+b}\cdot x + \frac{a^2+b^2}{2}$.

81. $\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)x - 1 = \left(\frac{a+b}{a-b} - 1\right)x$.

---

2. Kakó je jednačbe uporabljati v razreševanje nalog.

§ 114.

V vsaki nalogi so dani gotovi pogoji, katerim morajo iskana števila zadostovati. Nauk, kakó je uporabljati aritmetične zakone v razrešitev nalog, izražujoč odnošaje med znanimi in neznanimi števili z jednačbami ter iz teh jednačeb vrednosti za neznana števila iskajoč, zovemo algebro. Razrešujočim s pomočjo algebre kako nalogo nam je torej na dvoje paziti:

1.) Da jednačbe sestavimo *(ansetzen)*, t. j. da izrazimo dane pogoje z algebrajskimi znaki.

2.) Da na ta način dobljene jednačbe razrešimo.

Kakó je jednačbe sestavljati, za to nimamo nobednih občnih pravil; za to je treba bistroumnosti in vaje. Začetnikom bode stvar vsaj nekoliko zlajšalo tó-le pravilo: Dano nalogo si misli razrešeno in z neznanko ravnaj, kakor to zahtevajo pogoji naloge; na ta način dobiš za jedno in isto količino dva po obliki različna izraza, in ako ja izjednačiš, dobiš zahtevano jednačbo.

Jednostavnejše naloge je môči, ne sestavljajoč jih v jednačbe, kar na pamet s samim umovanjem razrešiti.

Ako se hočeš prepričati, je-li kaka naloga prav razrešena, treba le poskusiti, ali najdena vrednost neznanke tudi res pogojem naloge zadostuje.

Primeri.

1.) Katerega števila 5ina je za 52 manjša nego število samo?

Na pamet. Razlika med katerim koli številom in njega petino je jednaka $\frac{4}{5}$ dotičnega števila. Ako je torej ta razlika, t. j. $\frac{4}{5}$ iskanega števila 52, potem je njega petina 13, tedaj število samo 5krat 13 = 65.

Algebrajsko. Ako zaznamenujemo neznano število z x, potem je njega petina $\frac{x}{5}$. Ker je pa $\frac{x}{5}$ za 52 manjši od x, treba, da postaneta jednaka, k $\frac{x}{5}$ še 52 prišteti; tedaj dobimo

$$\frac{x}{5} + 52 = x.$$

Ako to jednačbo razrešimo, dobimo $x = 65$.

Preskušnja. $\frac{1}{5}$ od 65 je 13; 65 — 13 = 52.

2.) Gospodar obljubi svojemu služabniku kot letno plačilo 90 gl. in obleko; a čez 3 mesece ga odpusti ter mu dá le obleko za plačilo. Za koliko se je obleka zaračunala?

Na pamet. Ako dobi služabnik za 3 mesece, t. j. $\frac{1}{4}$ leta obleko za plačilo, dobiti bi moral za druge $\frac{3}{4}$ leta še 90 gl., tedaj za $\frac{1}{4}$ leta 30 gl. Ker pa dobi za ta čas obleko, vredna mora biti le-tá 30 gl.

Algebrajsko. Vzemimo, da je obleka x gl. vredna. Plačilo za celo leto iznaša torej $x + 90$ gl., tedaj plačilo za 3 mesece $\frac{x+90}{4}$ gl.; ker pa dobi služabnik za ta čas le obleko, katera je x gl. vredna, mora biti

$$x = \frac{x+90}{4},$$

tedaj $x = 30$ gl.

3.) Nekdo odgovori, vprašan, koliko let ima: Čez 10 let jih bom imel 2krat toliko, kolikor sem jih imel pred 4 leti. Koliko let ima?

Vzemimo, da ima x let, ondaj

bode jih imel čez 10 let $x + 10$,
jih je imel pred 4 leti $x - 4$.

Ker pa je po pogojih naloge prvo število 2krat toliko kakor drugo, treba, da dobimo jednačbo, drugo z 2 pomnožiti; tedaj

$$x + 10 = 2(x - 4),$$

in zato $x = 18$.

Preskušnja. Cez 10 let bode imel 28 let,
pred 4 leti je imel 14 let,
in res je $28 = 2 . 14$.

4.) Neki oče ima 48, njegov sin pa 18 let. Čez koliko let bode imel oče 4krat toliko let kakor sin?

Recimo čez x let. Čez toliko let bode pa imel oče $48 + x$, sin $18 + x$ let. Ker je pa po pogojih naloge prvo število 4krat toliko kakor drugo, zato treba, da dobimo jednačbo, drugo število s 4 pomnožiti; tedaj velja

$$48 + x = 4(18 + x)$$

in $x = -8$.

Tu dobimo za x negativno vrednost. Ker smo pa rekli, da pomenja x v tej nalogi prihodnja leta, pomenjati mora za x dobljena negativna vrednost leta v nasprotnem zmislu (§ 62.), tedaj 8 pretečenih let, t. j. oče je imel pred 8 leti 4krat toliko let kakor sin.

5.) Neki vodnjak napolni jedna cev v 3, druga v 4 urah. V koliko urah bode vodnjak poln, ako sta odprti obe cevi ob jednem?

Vzemimo, da pomenja p vodnjakovo prostornino in x iskano število ur. Prva cev napolni v 1 uri $\frac{p}{3}$, tedaj v x urah $\frac{px}{3}$; druga cev napolni v 1 uri

$\frac{p}{4}$, tedaj v x urah $\frac{px}{4}$; obe cevi napolnita tedaj v x urah $\frac{px}{3} + \frac{px}{4}$. Ker pa mora biti ta vsota jednaka vodnjakovi prostornini p, zato velja

$$\frac{px}{3} + \frac{px}{4} = p, \text{ ali}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1,$$

tedaj $x = 1\frac{5}{7}$.

6.) Za kurirjem, kateri je pred 2 dnevoma iz A odpotoval, in kateri prehodi vsak dan po 49 kilometrov, pošlje se od ravno tam drug kurir, kateri prehodi po 77 kilometrov na dan. V koliko dneh bode drugi kurir prvega dohitel?

Na pamet. Prvi kurir je 2 dni prej odpotoval nego drugi ter v tem času prehodil 2krat 49 = 98 kilometrov. Ker prehodi drugi po 77 kilometrov na dan, tedaj 28 kilometrov več nego prvi, zmanjša se njiju razdalja vsak dan za 28 kilometrov, tedaj postane čez $\frac{98}{28} = 3\frac{1}{2}$ dneva ničli jednaka, t. j. drugi kurir bode dohitel prvega v $3\frac{1}{2}$ dneva.

Algebrajsko. Recimo, da dohiti drugi kurir prvega v x dneh; tedaj potuje prvi $2 + x$, drugi x dnij, prvi prehodi $49(2 + x)$, drugi $77x$ kilometrov. Ker morata pa oba prav toliko poti prehoditi, zato velja

$$49(2 + x) = 77x,$$

tedaj $x = 3\frac{1}{2}$ dneva.

Naloge.

Z zvezdico zaznamenovane naloge razreši na pamet in algebrajsko.

1.* 5kratnik nekega števila, za 23 povečan, je jednak 88. Katero število je to?

2.* H kateremu številu treba 54 prišteti, da dobiš njega 4kratnik?

3.* Katerega števila 3kratnik je za 42 manjši od njegovega 5kratnika?

4.* Ako pomnožim neko število s 3, dobim prav toliko, kakor če je za 3 povečam; katero je to število?

5. Ako prišteješ k $m$kratniku nekega števila a, dobiš prav toliko, kakor če od njegovega $n$kratnika b odšteješ. Katero število je to?

6. Katerega števila četrtino treba za 12 zmanjšati, da dobiš njega 12ino?

7.* Katerega števila 5ina, 8krat vzeta, je za 6 večja nego število samo?

8.* Polovica in petina nekega števila sta skupaj za 86 manjši nego njega 5kratnik. Koliko je število?

9.* Katerega števila osmina, zmanjšana za njega desetino, je jednaka njegovi za 5 zmanjšani petnajstini?

10.* H kateremu številu treba prišteti njega polovico, tretjino in četrtino, da dobiš 100?

11. Ako prištejem k nekemu številu a ter vsoto z m razdelim, dobim prav toliko, kakor če od števila b odštejem ter diferenco z n razdelim. Katero število je to?

12. S katerim številom treba 230 razdeliti, da dobiš 13 za kvocijent in 9 za ostanek?

13. Mislim si število. Ako je pomnožim s 5, od produkta odštejem 6, diferenco razdelim s 3 in h kvocijentu prištejem 10, dobim dvakrat toliko število. Katero število sem si mislil?

14. Ako tretjino nekega števila za 1 povečaš in dvojno vsoto za 6 zmanjšaš, dobiš 0. Katero je to število?

15. Katero število treba od vsacega izmed števil 19 in 11 odšteti, da bode prva diferenca dvakrat tolika kakor druga?

16. Katero število treba k števcu in imenovalcu ulomka $\frac{13}{18}$ prišteti, da dobiš ulomek $\frac{4}{5}$?

17. Katero število treba od števca in imenovalca ulomka $\frac{12}{37}$ odšteti, da dobiš ulomek $\frac{4}{9}$?

18. Katero število treba k števcu ulomka $\frac{a}{b}$ prišteti in od njega imenovalca odšteti, da dobiš recipročno vrednost danega ulomka?

19. Ako odštevaš od števca in imenovalca ulomka $\frac{15}{16}$ neko število, potem je produkt iz danega in novega ulomka jednak $\frac{5}{6}$. Poišči to število.

20. Ako prištevaš k nekemu številu njega polovico in 6, k tej vsoti zopet nje polovico in 6, dobiš 69. Izračunaj to število.

21.* Ko se je zmanjšalo neko število za njega polovico in še za 15, ostanek zopet za njega tretjino in 10, ostalo je še 30. Koliko je bilo število?

Na pamet. Ker se je odštela na zadnje tretjina ostanka in 10, ostali sta še dve njegovi tretjini menj 10; tedaj je 30 + 10 ali 40 jednako $\frac{2}{3}$ prvega ostanka; ako sta $\frac{2}{3}$ ostanka = 40, ondaj je $\frac{1}{3}$ njegova = 20 in ves prvi ostanek = 3krat 20 = 60. Ker je pa ta za 15 manjši nego polovica neznanega števila, mora 60 + 15 ali 75 biti polovica tega števila, tedaj število samo 2krat 75 = 150.

22.* A ima 315 gl., B 205 gl.; koliko mora A B-ju dati, da bosta oba jednako imela?

23. Ako bi imel 20 gl. več, kakor imam, imel bi ravno 5 gl. menj nego dvakrat toliko, kolikor imam. Koliko imam tedaj dènarja?

24. Od 320 *kg* blaga se ga je nekaj odprodalo, a ostalo ga je vender še 50 *kg* več, nego se ga je prodalo. Koliko *kg* se je prodalo?

25.* Deček ima 60 orehov. Nekaj jih dá svojemu prijatelju, a njemu jih ostane še vender 4krat toliko, kolikor jih je prijatelju dal. Koliko orehov je dal prijatelju?

26.* *A* izda polovico svojih letnih dohodkov za hrano in stanovanje, osmino za obleko in perilo, petino jih potroši za druge stvari, prihrani pa si 260 gl. Koliko ima dohodkov na leto?

27. Neki popotnik, vprašan, koliko *km* je prehodil, odgovori: Ako bi bil 48 *km* več prehodil, prišel bi bil 3krat tako daleč kakor sem. Koliko *km* je popotnik prehodil?

28.* *A* si je hotel za določeno vsoto denarja vina kupiti, steklenico po 90 kr.; ker je pa steklenica le 70 kr. veljala, dobil ga je za isti denar 8 steklenic več. Koliko steklenic ga je dobil?

29.* Učitelj odgovori na vprašanje, koliko ima učencev: Polovica mojih učencev je za 16 večja nego šestina in devetina skupaj. Koliko je imel učencev?

30. Oče ima 32, njegov sin 2 leti; čez koliko let bode imel oče ravno 3krat toliko let kakor sin?

31. Oče, kateri je imel pred 8 leti 5krat toliko let kakor njegova hči, ima sedaj 45 let; koliko let ima hči?

32. Oče ima 60, njegov sin pa 24 let; pred koliko leti je imel oče 4krat toliko let kakor sin? $60 - x = (24 - x)4$, pred 12 leti. –

33. Nekdo, vprašan, koliko ima let, odgovori: Čez 12 let jih bodem imel 4krat toliko, kakor sem jih imel pred 12 leti. Koliko ima let?

34.* Nekdo hoče denar, kar ga ima ravno pri sebi, med 10 ubožcev razdeliti. Ako dá vsacemu 20 kr., ima prav toliko premalo, kolikor ima preveč, ako dá vsacemu 18 kr. Koliko krajcarjev ima pri sebi?

35. Ko se je tiskala neka knjiga, postavilo se je na vsako stran po 36 vrst in v vsako vrsto po 40 črk; ako bi se bilo pa postavilo na vsako stran po 4 vrste več in v vsako vrsto po 5 črk več, imela bi bila knjiga 2 poli menj. Koliko pol je imela knjiga?

36. Železnišk vlak je potreboval $4\frac{1}{2}$ ure, da je predirjal neko daljavo; potreboval pa bi bil le $3\frac{1}{2}$ ure, ako bi bil pretekel vsako uro po $9\frac{4}{5}$ *km* več. Koliko *km* je predirjal vsako uro in kolika je bila daljava?

37.* Ako vzamemo od neke vsote polovico, od ostanka zopet polovico in od novega ostanka tudi polovico, ostane še 37 gl. Kolika je bila prvotna vsota?

38. Igralec izgubi v prvi igri 6 gl. menj nego $\frac{1}{4}$ svojega denarja, v drugi igri 2 gl. več nego $\frac{1}{6}$ ostanka, v tretji igri 8 gl. več nego $\frac{1}{7}$ onega, kar mu je po drugi igri ostalo, in sedaj ima še 28 gl.; koliko je imel s početka? $\frac{6}{7}\left[\frac{5}{6}\left(\frac{3x}{4}+6\right)-2\right]-8=28$; 62,40 je imel

39. Za neko blago se je iztržilo 2744 gl., a dobiček je iznašal $\frac{3}{25}$ kupnine; kolika je bila le-tá? $x+\frac{3x}{25}=2744$; $x=2450$ gl.

40.* Trgovec je kupil kos sukna, meter po $3\frac{3}{4}$ gl., a potem ga zopet prodal, meter po $4\frac{1}{2}$ gl. Koliko metrov je imel kos, ako je bilo vsega dobička 27 gl.?

41. Žitar ima nekoliko hektolitrov pšenice. Ako proda hektoliter po 10 gl., ima 192 gl. dobička; ako ga proda pa po 9 gl., izgubi 48 gl. Koliko *hl* ima pšenice? $10x-192=9x+48$

42. V vodnjak priteka voda iz treh cevij; prva sama ga napolni v 4 urah, druga sama v 6 urah, tretja sama v 12 urah. V koliko urah bode vodnjak poln, ako priteka voda ob jednem iz vseh treh cevij?

43. Dvema delavcema treba 435 metrov dolg prekop blata očistiti; prvi očisti na dan 42 metrov, drugi 45 metrov; kedaj bode delo dovršeno?

44. Za neko delo se ponujata dve osebi; *A* bi dovršil delo v 18, *B* v 15 dneh. V koliko dneh bi *A* in *B* skupaj delo dovršila?

45. Od krajišč *A* in *B* 300 metrov dolge daljice se začneta dve telesi istodobno drugo proti druzemu pomikati; prvo preteče vsako minuto 7, drugo 5 metrov. Koliko minut po početku premikanja se bosta srečali?

Vsota poti, kateri pretečeta telesi do sestanka, je jednaka razdalji toček *A* in *B*.

46. Kateri rezultat dobiš v prejšnji nalogi, ako postaviš mesto števil 300, 7, 5 števila *d*, *a*, *b*?

47. Iz *A* gre v 356 *km* oddaljeno mesto *B* kurir, kateri prehodi po 56 *km* na dan; istodobno odpotuje iz *B* v *A* drug kurir, kateri prehodi po 52 *km* na dan. Kedaj in v kateri razdalji od *A* se bosta kurirja srečala? $56x+52x=356$

48. Od *A* do *B* je železnica. Od *A* se odpelje proti *B* poštni vlak, kateri preteče vsako uro po 30 *km*; istodobno se odpelje od *B* proti *A* tovorni vlak, kateri bi imel poštni vlak čez $4\frac{1}{2}$ ure srečati. Koliko *km* mora tovorni vlak vsako uro preteči, ako iznaša razdalja med *A* in *B* 225 *km*?

49.* Za kurirjem, kateri je pred 3 dnevi iz mesta *A* odpotoval, pošlje se od ravno tam drug kurir, kateri prehodi vsak dan po 60 *km*. Kedaj bode drugi prvega dohitel, ako prehodi ta vsak dan po 40 *km*?

50. Ob 7ih zjutraj se odpelje z Dunaja po zahodni železnici poštni vlak, ob 9ih zjutraj pa brzovlak. Kedaj in v kateri razdalji od Dunaja bode dohitel brzovlak poštni vlak, ako preteče prvi vsako uro po 42, drugi po 26 *km*? $52 + 26x = 42x$

51.* Iz A v B gre kurir, ki prehodi po 12 milj na dan; jeden dan pozneje pošlje se iz A drug kurir za njim; po koliko milj mora le-tá na dan prehoditi, da bode dohitel prvega v 4 dneh?

52. Za kurirjem, kateri je pred 6 dnevi iz A odpotoval, in kateri prehodi po 48 *km* na dan, pošlje se iz B, skozi katero mesto je šel, drug kurir, kateri prehodi po 75 *km* na dan. V koliko dneh bode drugi prvega dohitel, ako iznaša razdalja med A in B 100 *km*?

53. Od B se pelje proti C poštni vlak, kateri preteče vsako uro po 24 *km*; istodobno se odpelje brzovlak v isto mer iz mesta A, katero je za 36 *km* zadaj za B, ter dohiti poštni vlak v 3 urah. Po koliko *km* preteče brzovlak v 1 uri?

54. Dve telesi se pomikata v isto mer, prvo od A, drugo od B, katero mesto je za 2 *m* zadaj za A, in sicer se začne drugo 6 sekund pozneje pomikati kakor prvo. Čez koliko sekund od tedaj, ko se je začelo drugo pomikati, bode le-tó prvo dohitelo, ako preteče prvo vsako sekundo $\frac{1}{4}$, drugo $\frac{4}{9}$ *m*?

55. Kateri rezultat dobiš, ako postaviš v prejšnji nalogi mesto števil 2, 6, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{9}$ števila d, t, a, b?

56. Dve telesi se začneta istodobno na obodu kroga od iste točke v isto mer pomikati; prvo preteče ves obod v 24, drugo v 18 minutah. V koliko minutah bosta zopet skupaj?

57. Koliko časa mine od jednega sestanka kazalcev na uri do druzega?

58. Koliko minut čez 4 bode minutni kazalec ravno nad onim, ki ure kaže? Mali kazalec je 4 ure prej odpotoval [illegible] 4×5 minut [illegible] 55 minut [illegible] $\frac{20}{55} = \frac{4}{11} =$ [illegible] $= 60:4 = 5 \cdot 455 \cdot$ [illegible] $= 21 \cdot 82$ [illegible] $5(4+x) = 60x$

3. Naloge v ponavljanje.

1.* *a)* $56 \,.\, 3 + 38 \,.\, 4$; *b)* $36 \,.\, 9 + 74 \,.\, 4$; *c)* $97 \,.\, 3 + 65 \,.\, 8$.

2.* *a)* $96 \,.\, 4 - 54 \,.\, 5$; *b)* $98 \,.\, 3 - 24 \,.\, 9$; *c)* $81 \,.\, 9 - 69 \,.\, 6$.

3.* *a)* $\frac{1}{3} \cdot 255 + \frac{2}{3} \cdot 111$; *b)* $\frac{2}{5} \cdot 175 + \frac{5}{6} \cdot 276$;

c) $\frac{1}{8} \cdot 512 + \frac{5}{8} \cdot 264$.

4.* *a)* $\frac{3}{4} \cdot 340 - \frac{3}{8} \cdot 448$; *b)* $\frac{4}{9} \cdot 486 - \frac{2}{7} \cdot 546$:

c) $\frac{3}{5} \cdot 280 - \frac{2}{3} \cdot 108$.

5. $(17 \cdot 45 + 48 \cdot 354 + 8 \cdot 702 + 0 \cdot 0089 - 56 \cdot 2059) \cdot \frac{0 \cdot 7}{1 \cdot 847}$.

6. $\frac{4 \cdot 601}{0 \cdot 22} \cdot \frac{0 \cdot 34}{0 \cdot 682}$.

7. $\left(\frac{0 \cdot 6}{0 \cdot 9} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 8}\right) : (3 \cdot 5 - 2 \cdot 66)$.

8. $3(4x - 5) + 11(2x + 9) = 33(x + 3)$.

9. $\frac{7 + x}{5} - \frac{10 + x}{13} = \frac{4 + x}{7}$.

10. $\frac{8x - 3}{2x - 1} = \frac{3x + 4}{x + 1} + 1$.

11.* Železnica se napne pri vsacih 50 *m* dolžine za $\frac{1}{4}$ *m*; kolike dolžine treba, da se napne za $1\frac{1}{4}$ *m*?

12.* Ako prišteješ 6kratnik nekega števila k 204, dobiš njega 18kratnik. Koliko je ono število? 17

13. Katerega števila 64ina je tolika kakor vsota iz 209 . 15 in 158 . 23?

14. $\frac{2a^5}{3b^6} \cdot \frac{5b^5}{4a^4} + \frac{9a^2}{6b^3} \cdot \frac{5b^2}{9a^6}$.

15. $\frac{x^2 + 5ab - b^2}{a^2 + 4ab + 4b^2} - \frac{a - b}{a + 2b}$.

16. 332166 : 138. **17.** 3672444 : 732. **18.** 5586875 : 875.

19. $\frac{490 \,.\, 65 \,.\, 24}{50 \,.\, 36}$. **20.** $\frac{370 \,.\, 81 \,.\, 35}{280 \,.\, 63}$. **21.** $\frac{350 \,.\, 120 \,.\, 175}{360 \,.\, 125}$.

22. Za koliko postane ulomek $\frac{4807}{7218}$ večji ali manjši, ako v števci in imenovalci *a)* zadnjo, *b)* zadnji dve številki na desni izpustiš?

23. $\left(\frac{2a + 3x}{2a - 3x}\right)^2$.

24. $\left(\frac{3a}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{c}{2}\right) \cdot \left(\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} - \frac{4c}{5}\right)$.

25. $\left(\frac{3x^4}{a^4} - \frac{4x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{8x^2}{a^2} - \frac{4y^4}{b^4} + \frac{8y^2}{b^2} - 3\right) : \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} - 1\right)$.

26. Nekdo voli $\frac{3}{4}$ svoje gotovine sorodnikom, $\frac{3}{4}$ ostanka siromašnici in ostalih 225 gl. svoji gospodinji; koliko gotovine je mož zapustil?

27. Vodnjak napolni jedna cev v $4\frac{1}{2}$ ure, druga v $5\frac{2}{5}$ ure, tretja pa ga izprazni v $13\frac{1}{2}$ ure; v koliko urah bode prazni vodnjak poln, ako so vse tri cevi ob jednem odprte?

Šesti oddelek.

O razmerjih in sorazmerjih.

1. O razmerjih.

§ 115.

Delitev dveh števil je ali deljenje v ožjem pomenu ali merjenje; v prvem zmislu število s številom razdelivši dobimo ulomke, v druzem razmerje *(Verhältnis)*. Razmerje dveh števil ali dveh istovrstnih količin a in b imenujemo izraz, ki kaže, kolikokrat je a večji od b, ali kolikokrat ima a b v sebi (kolikokrat je b v a). Ako hočemo torej razmerje dveh količin a in b izraziti, treba le med nji delitveni znak postaviti, tedaj $a : b$, kar čitamo: a se ima proti b, ali krajše: a proti b. Dividend in divizor zovemo člena *(Glieder)*, in sicer dividend prednji člen *(Vorderglied)*, divizor zadnji člen *(Hinterglied)*, razmerja. Ako je $a : b = k$, ondaj imenujemo neimenovano število k eksponent ali kvocijent razmerja $a : b$. N. pr. V razmerji $8 : 2$ je 8 prednji člen, 2 zadnji člen in 4 eksponent.

Kolikost razmerja je zavisna od njega eksponenta; čim večji je ta, tem večje tudi razmerje. Dve razmerji sta jednaki, ako imata isti eksponent; n. pr. $8 : 2$ in $12 : 3$, prav takó $am : a$ in $bm : b$. Ako sta obratno dve razmerji jednaki, imata tudi jednak eksponent.

Razmerje, čegar člena sta neimenovani števili, imenujemo številno razmerje *(Zahlenverhältnis)*; n. pr. $8 : 2$.

Vsako razmerje med dvema istoimenskima številoma je môči pretvoriti na čisto številno razmerje; n. pr. razmerje 10 gl. : 5 gl. je jednako razmerju $10 : 5$, kajti obe dve imata isti eksponent 2.

§ 116.

Ker smatramo lahko vsako razmerje za naznačeno delitev, zato veljajo vsi izreki, katere smo o dividendu, divizorji in kvocijentu dokazali, tudi o prednjem in zadnjem členu razmerja ter o njega eksponentu. Tedaj velja:

1.) V vsakem razmerji je prednji člen jednak zadnjemu členu, pomnoženemu z eksponentom. (§ 49.)

2.) V vsakem razmerji je zadnji člen jednak prednjemu členu, razdeljenemu z eksponentom. (§ 49.)

Ako je $a : b = k$, je tudi

$$1.)\ a = bk; \qquad 2.)\ b = a : k.$$

N. pr. $10 : 2 = 5$, tedaj

$$10 = 2 . 5 \quad \text{in} \quad 2 = 10 : 5.$$

3.) Razmerje (t. j. njega vrednost) ostane neizpremenjeno, ako oba njegova člena z istim številom pomnožimo ali razdelimo. (§ 53.)

N. pr. Razmerje $12 : 4$ je jednako razmerju $(12 . 2) : (4 . 2)$ ali $24 : 8$;
» $12 : 4$ » » » $(12 : 2) : (4 : 2)$ » $6 : 2$.

Množitve se poslužujemo tedaj, kadar hočemo s celimi števili izraziti razmerje, čegar člena sta ulomka; v ta namen treba le oba dva člena s skupnim mnogokratnikom imenovalcev pomnožiti. N. pr.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot 12 : \frac{3}{4} \cdot 12 = 8 : 9.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot bd : \frac{c}{d} \cdot bd = ad : bc.$$

Delitev služi nam v to, da razmerje, čegar člena imata skupno mero, okrajšamo, kar se zgodi, ako oba njegova člena s skupno mero razdelimo. N. pr.

$$12 : 8 = \frac{12}{4} : \frac{8}{4} = 3 : 2; \quad abm : acm = b : c.$$

§ 117.

Ako pomnožimo v dveh ali več razmerjih vse prednje in prav tákó vse zadnje člene druzega z druzim, dobimo iz produktov novo razmerje; le-tó razmerje imenujemo sestavljeno nasproti danim jednostavnim razmerjem. Ako so n. pr.

$a : b$	$4 : 3$	
$c : d$	$7 : 12$	
$e : f$	$9 : 14$	jednostavna razmerja, ondaj je
$ace : bdf$	$4 . 7 . 9 : 3 . 12 . 14$	sestavljeno razmerje.

Ako pomnožimo ali razdelimo jednostavnim razmerjem kateri koli prednji in kateri koli zadnji člen z istim številom, pomnožimo ali razdelimo s tem tudi prednji in zadnji člen sestavljenega razmerja, njega vrednost ostane torej neizpremenjena.

Naloge.

Izrazi tá-le razmerja s celimi števili:

1.* *a)* $\frac{3}{4} : 5$; *b)* $\frac{19}{30} : \frac{13}{30}$; *c)* $\frac{2}{3} : \frac{7}{12}$.

2. *a)* $15\frac{3}{10} : 1\frac{4}{5}$; *b)* $128\frac{3}{8} : 45\frac{5}{16}$; *c)* $0{\cdot}05 : 1$.

3. *a)* $35{\cdot}4 : 12{\cdot}56$; *b)* $\frac{m}{ab} : \frac{n}{ac}$; *c)* $(a - b) : \frac{ab}{a + b}$.

Izrazi naslednja razmerja z najmanjšimi celimi števili:

4.* *a)* $30 : 24$; *b)* $112 : 144$; *c)* $240 : 96$.

5. *a)* $5 : \frac{5}{8}$; *b)* $3\frac{3}{4} : 4\frac{3}{8}$; *c)* $15\frac{5}{9} : 6\frac{2}{3}$.

6. *a)* $7{\cdot}5 : 2{\cdot}5$; *b)* $0{\cdot}625 : 0{\cdot}5$; *c)* $3{\cdot}208 : 1{\cdot}28$.

7. *a)* $ax(m^2 - n^2) : ab(m + n)$; *b)* $\frac{x + y}{ax} : \frac{x^2 - y^2}{bx^2}$.

8.* Izmed dveh teles preteče A v vsaki minuti 80 *m*, B 96 *m*; v kakem razmerji sta njiju brzini?

9.* Telo A preteče v 8 minutah isto pot kakor B v 6 minutah; v katerem razmerji sta njiju brzini?

10.* Izmed dveh koles, katerih zobci sezajo drug v druzega, ima prvo 28, drugo 36 zobcev; kakšno je razmerje med brzinama, s katerima se vrtita te dve kolesi?

11.* Razstoj med lediščem in vreliščem je razdeljen na Réaumurjevih toplomerih na 80°, na Celsijevih na 100°; kako je torej razmerje med 1° *R.* in 1° *C.*?

12. Kakšno razmerje je v Avstriji med vrednostjo zlata in srebra, ker se kuje iz 1 *kg* čistega zlata $172\frac{2}{9}$ zlatníka po osem goldinarjev, iz 1 *kg* čistega srebra pa 90 goldinarjev, in velja zlatník po osem goldinarjev $8\frac{1}{10}$ gl. v srebru?

13. Izmed dveh pravokotnikov je prvi 28 *m* dolg in 15 *m* širok, drugi 25 *m* dolg in 16 *m* širok; v kakem razmerji sta njiju ploščini?

14. Izmed dveh parnih strojev vzdigne prvi v a sekundah b *kg* c *m* visoko, drugi pa v d sekundah e *kg* f *m* visoko; v katerem razmerji sta njiju sposobnosti za delo?

2. O sorazmerjih.

§ 118.

Izjednačenje dveh jednakih razmerij imenujemo sorazmerje ali proporcijo *(Proportion)*. Ako je $a : b = k$ in $c : d = k$, je tudi $a : b = c : d$; ta izraz je sorazmerje in čitamo ga; a se ima proti b, kakor c proti d, ali krajše: a proti b, kakor c proti d. Prvi člen a in četrti d imenujemo tudi vnanja člena, drugi b in tretji c notranja člena; člena a in c zovemo tudi prednja, b in d zadnja člena sorazmerja.

Sorazmerje, čegar notranja dva člena sta jednaka, imenujemo stalno sorazmerje *(stetige Proportion)*; n. pr. $16 : 8 = 8 : 4$. Notranji člen 8 zovemo srednjo (geometrijsko) sorazmernico ali proporcijonalo števil 16 in 4, in 4 tretjo stalno sorazmernico števil 16 in 8.

Sorazmerje, v katerem so vsi členi neimenovana števila, imenujemo številno sorazmerje *(Zahlenproportion)*; n. pr. $12 : 4 = 15 : 5$.

Sorazmerje more imeti tudi imenovana števila; treba le, da imata oba dva člena vsakega razmerja isto ime; n. pr.

$$18\,m : 3\,m = 12\,m : 2\,m.$$
$$6\,kg : 2\,kg = 15\text{ gl.} : 5\text{ gl.}$$
$$15\text{ gl.} : 3\text{ gl.} = 25 : 5.$$

Ne le vsako razmerje nego tudi vsako sorazmerje, imajoče imenovana števila, môči je izpremeniti na čisto številno sorazmerje.

Izreki o številnih sorazmerjih.

§ 119.

1.) V vsakem številnem sorazmerji je produkt vnanjih členov jednak produktu notranjih členov.

Dokaz. Vzemimo, da je $a : b = c : d$, in $a : b = k$, tedaj tudi $c : d = k$. Odtod pa dobimo $a = bk$, $c = dk$. Pomnoživši prvo teh jednačeb z d in drugo z b, dobimo $ad = bdk$, $bc = bdk$, in odtod $ad = bc$.

Iz tega izreka izvira:

V vsakem stalnem številnem sorazmerji je kvadrat srednje sorazmernice jednak produktu iz druzih dveh členov.

Ako je $a : b = b : c$, ondaj je $b^2 = ac$.

N. pr. Iz $16 : 8 = 8 : 4$ dobimo $8^2 = 16 . 4$.

2.) Vsak vnanji člen številnega sorazmerja je jednak produktu notranjih dveh členov, razdeljenemu z drugim vnanjim členom; in vsak notranji člen je jednak produktu vnanjih dveh členov, razdeljenemu z druzim notranjim členom.

Ako je $a : b = c : d$, tedaj $ad = bc$, ondaj je

$$a = \frac{bc}{d}, \quad d = \frac{bc}{a}, \quad \text{in} \quad b = \frac{ad}{c}, \quad c = \frac{ad}{b}.$$

3.) Iz dveh jednakih produktov je môči vselej sorazmerje sestaviti; v ta namen treba le vsak produkt na dva faktorja razstaviti ter faktorja jednega produkta za vnanja, faktorja druzega produkta za notranja člena sorazmerju vzeti. (Obrat od 1.)

Recimo, da je $ad = bc$. Razdelivši to jednačbo z bd, dobimo $ad : bd = bc : bd$, ali

$$a : b = c : d.$$

Pravo številno sorazmerje je torej spoznati ne le iz tega, da sta eksponenta v obeh razmerjih jednaka, nego tudi iz jednakosti produktov vnanjih in notranjih členov.

§ 120.

Sorazmerje razrešiti se pravi, iz treh danih členov sorazmerja njega še neznani člen najti.

a) Sorazmerje razrešiš, ako poiščeš eksponent znanega razmerja ter potem z njega pomočjo neznani člen druzega razmerja določiš.

b) Številno sorazmerje je najlažje razrešiti s pomočjo § 119., 2.

N. pr. iz $x : 2 = 15 : 3$ dobiš

a) $15 : 3 = 5$, $x = 2 . 5 = 10$; ali

b) $x = \frac{2 . 15}{3} = 10$; tedaj

$$10 : 2 = 15 : 3 \text{ popolno sorazmerje.}$$

Kakó je izpremeniti sorazmerju obliko.

§ 121.

Vsako številno sorazmerje ostane pravo, ako zamenjamo *a)* vnanja člena med seboj, ali *b)* notranja člena med seboj, ali *c)* notranja člena z vnanjima.

Dokaz. Vzemimo, da velja $a : b = c : d$, tedaj $ad = bc$.

a) Ako zamenjamo v tem sorazmerji notranja člena, dobimo

$$a : c = b : d.$$

b) Zamenjavši v teh dveh sorazmerjih vnanja člena, dobimo

$$d : b = c : a,$$
$$d : c = b : a.$$

c) Ako zamenjamo slednjič v vseh teh štirih sorazmerjih notranja člena z vnanjima, dobimo

$$b : a = d : c,$$
$$c : a = d : b,$$
$$b : d = a : c,$$
$$c : d = a : b.$$

Da je vsak izmed zadnjih sedem postavkov pravo sorazmerje, razvidno je iz tega, ker je v vsakem izmed njih ad produkt vnanjih členov in bc produkt notranjih členov ali obratno, produkta ad in bc pa sta po pogoji jednaka.

Vsako sorazmerje je môči torej na osmer način izraziti; v ta namen treba le njega člene drugače razvrstiti.

§ 122.

Sorazmerje ostane pravo, ako jeden vnanji in jeden notranji člen z istim številom pomnožimo ali razdelimo.

Dokaz. Ako velja $a : b = c : d$, tedaj $ad = bc$, velja tudi

1.) $am : bm = c : d$, $\quad a : b = cm : dm$,
$\quad am : b = cm : d$, $\quad a : bm = c : dm$;

2.) $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$, $\quad a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$,
$\quad \frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$, $\quad a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$.

Kajti iz $ad = bc$ izvira ne le $adm = bcm$, nego tudi $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$. Toda v vseh sorazmerjih 1.) je adm produkt vnanjih, bcm produkt notranjih členov; prav takó je v sorazmerjih 2.) produkt vnanjih členov $\frac{ad}{m}$, produkt notranjih členov pa $\frac{bc}{m}$; vsa ta sorazmerja so torej prava.

Uporabljajoč ta izrek moremo *a)* vsako sorazmerje, v katerem so ulomki, izraziti s celimi števili; *b)* vsako sorazmerje, v katerem imata jeden vnanji in jeden notranji člen skupno mero, z le-tó skupno mero okrajšati.

§ 123.

1.) V vsakem sorazmerji se ima vsota (diferenca) prvih dveh členov proti prvemu ali drugemu členu, kakor se ima vsota (diferenca) zadnjih dveh členov proti tretjemu ali četrtemu členu.

Dokaz. Ako velja $a : b = c : d$, tedaj $ad = bc$, velja tudi

$$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c, \text{ in}$$
$$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d.$$

Te dve sorazmerji sta pravi, ako je v vsakem produkt vnanjih členov jednak produktu notranjih členov, t. j. ako je $(a \pm b) \cdot c = a \cdot (c \pm d)$ in $(a \pm b) \cdot d = b \cdot (c \pm d)$, tedaj ako je

$$ac \pm bc = ac \pm ad \text{ in } ad \pm bd = bc \pm bd.$$

To pa je tu, kajti po pogoji je $ad = bc$.

2.) V vsakem sorazmerji se imata vsota in diferenca prvih dveh členov, kakor se imata vsota in diferenca zadnjih dveh členov.

Dokaz. Ako velja $a : b = c : d$, ondaj velja vsled 1.)

$$(a + b) : a = (c + d) : c \text{ in } (a - b) : a = (c - d) : c,$$

ali, ako notranja člena zamenjamo,

$$(a + b) : (c + d) = a : c \text{ in } (a - b) : (c - d) = a : c,$$

tedaj tudi

$$(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d),$$

in če zamenjamo tu notranja člena

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

3.) V vsakem sorazmerji se ima vsota (diferenca) prednjih členov proti vsoti (diferenci) zadnjih členov, kakor se ima vsak prednji proti svojemu zadnjemu členu.

Dokaz. Vzemimo, da velja $a : b = c : d$. Zamenjavši notranja člena, dobimo

$$a : c = b : d.$$

A potem velja vsled 1.)

$$(a \pm c) : a = (b \pm d) : b \quad \text{in} \quad (a \pm c) : c = (b \pm d) : d,$$

in, ako v vsakem izmed teh dveh sorazmerij notranja člena zamenjamo,

$$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b \quad \text{in} \quad (a \pm c) : (b \pm d) = c : d.$$

Dostavek. Ako je več številnih sorazmerij med seboj jednakih, ima se vsota vseh prednjih členov proti vsoti vseh zadnjih členov, kakor vsak prednji člen proti svojemu zadnjemu členu.

Ako velja $a : b = c : d = f : g$, velja tudi

$$(a + c + f) : (b + d + g) = a : b.$$

§ 124.

Ako pomnožimo v dveh ali več številnih sorazmerjih vse istomestne člene druzega z druzim, tvorijo produkti zopet sorazmerje.

$$\begin{array}{rlll}
\text{Recimo, da velja} & a : b = c : d, & \text{tedaj} & ad = bc, \\
\text{dalje} & e : f = g : h, & \text{»} & eh = fg, \\
\text{slednjič} & k : l = m : n, & \text{»} & kn = lm. \\
\hline
\end{array}$$

Ako pomnožimo, dobimo $\quad adehkn = bcfglm.$

Ako damo temu izrazu obliko $\quad aek \,.\, dhn = bfl \,.\, cgm,$ dobimo odtod sorazmerje

$$aek : bfl = cgm : dhn.$$

To sorazmerje imenujemo sestavljeno naproti danim sorazmerjem, katera zovemo jednostavna.

Dostavek. Ako imamo

$$\begin{array}{c}
a : b = a_1 : b_1 \\
b : c = b_1 : c_1 \\
c : d = c_1 : d_1 \\
\vdots \qquad \vdots
\end{array}$$

pišemo krajše

$$a : b : c : d \ldots = a_1 : b_1 : c_1 : d_1 \ldots$$

Tako sorazmerje imenujemo zaporedno ali verižno sorazmerje *(fortlaufende Proportion, Kettenproportion).*

Naloge.

Razreši tá-le sorazmerja:

1. $3 : 8 = 12 : x.$ **2.** $12 : 27 = x : 15.$

3. $36 : x = 6 : 3.$ **4.** $x : 10 = 8 : 5.$

5. $x : 15 = 165 : 66.$ **6.** $88 : x = 72 : 63.$

7. $x : 5 = \frac{2}{3} : \frac{3}{8}.$ **8.** $3\frac{1}{2} : 4 = 5\frac{3}{4} : x.$

9. $x : \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} : 3.$ **10.** $7\frac{4}{5} : 2\frac{1}{6} = x : 5\frac{5}{8}.$

11. $5\frac{1}{3} : 7\frac{3}{4} = x : 2\frac{1}{2}.$ **12.** $x : \frac{7}{9} = 3\frac{1}{3} : 5.$

13. $14 : 4\frac{3}{8} = x : 5\frac{1}{4}.$ **14.** $x : 10\frac{1}{2} = 4\frac{2}{7} : 9\frac{1}{3}.$

15. $1\frac{5}{9} : x = 3\frac{23}{25} : 4\frac{4}{5}.$ **16.** $17\frac{1}{7} : 12\frac{2}{11} = 14\frac{2}{9} : x.$

17. $10\frac{11}{12} : x = 13\frac{14}{15} : 18\frac{19}{20}.$ **18.** $9\frac{17}{18} : 10\frac{1}{9} = 27\frac{3}{8} : x.$

19. $x : 0{\cdot}35 = 2{\cdot}38 : 1{\cdot}25.$ **20.** $14{\cdot}35 : 218{\cdot}275 = 9{\cdot}18 : x.$

---

21. $\frac{a}{m} : \frac{b}{p} = x : \frac{c}{r}.$ **22.** $x : 3\frac{3}{4} = m^3 : \frac{3m^2}{2}.$

23. $x : (m - 2n) = (6m + 8n) : (2m - 4n).$

24. $(6a - 5b) : x = (12a^2 - 4ab - 5b^2) : (8a^2 - 2ab - 3b^2).$

25. $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} : \frac{m + n}{m - n} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m + n} : x.$

26. $\left(b + \frac{b^3}{a^2 - b^2}\right) : x = \left(b + \frac{b^2}{a - b}\right) : \frac{a + b}{b}.$

27. $(51 - x) : 3\frac{3}{4} = x : 3\frac{1}{3}.$ **28.** $(44 + x) : x = 5\frac{1}{3} : 2\frac{2}{5}.$

29. $(x + a) : x = b : c.$

30. $x : (a - x) = \frac{a}{a + b} : \frac{b}{a - b}.$

31. Izpremeni obliko téma-le dvema sorazmerjema, uporabljajoč § 121. in § 123.:

a) $9 : 6 = 15 : 10,$ *b)* $36 : 12 = 24 : 8.$

32. Izračunaj $a : c$, $a : d$, $a : e$, ako je $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 9$, $c : d = 3 : 5$ in $d : e = 3 : 8$. (§ 124.)

---

3. O uporabi sorazmerij.

§ 125.

1.) Ako sta dve vrsti *(Arten)* števil takó druga od druge zavisni, da spada k 2-, 3-, 4-, . . . $m$krat tolikemu številu jedne vrste 2-, 3-, 4-, $m$krat toliko število druge vrste, ondaj pravimo, te dve vrsti števil sta premo sorazmerni *(gerade proportioniert),* ali oni sta v **p r e m e m r a z m e r j i** *(stehen im geraden Verhältnisse).* Takó sta blago in cena premo sorazmerni; kajti ako velja 1 meter katerega koli blaga a goldinarjev, treba plačati za 2, 3, 4, . . . m metrov istega blaga $2a$, $3a$, $4a$, . . . ma goldinarjev. N. pr.

Ako velja	1 m	sukna	5 gl.,					
veljata	2 »	»	2krat	5 gl.,	tedaj	10 gl.,		
veljajo	3 »	»	3 »	5 »	»	15 »		
»	4 »	»	4 »	5 »	»	20 »		
velja	5 »	»	5 »	5 »	»	25 »		

i. t. d.

Sploh je razvidno, da je razmerje med vsakima dvema številoma metrov jednako razmerju med pripadajočima številoma goldinarjev; n. pr.

$$2\,m : 5\,m = 10 \text{ gl.} : 25 \text{ gl.},$$

ali

$$2 : 5 = 10 : 25.$$

A k o s t a t e d a j d v e v r s t i š t e v i l p r e m o s o r a z m e r n i, o n d a j j e r a z m e r j e m e d v s a k i m a d v e m a š t e v i l o m a j e d n e v r s t e j e d n a k o r a z m e r j u m e d p r i p a d a j o č i m a š t e v i l o m a d r u g e v r s t e, v z e t i m a v i s t e m r e d u.

2.) Ako sta pa dve vrsti števil takó druga od druge zavisni, da spada k 2-, 3-, 4-, . . . $m$krat tolikemu številu jedne vrste, le $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, . . . $\frac{1}{m}$ števila druge vrste, ondaj pravimo, te dve vrsti števil sta **o b r a t n o s o r a z m e r n i** *(verkehrt proportioniert),* ali oni sta v **o b r a t n e m r a z m e r j i** *(stehen im verkehrten Verhältnisse).* To velja n. pr. o številu delavcev in o številu delovnikov; kajti ako potrebuje 1 delavec za kako delo a dnij, potrebujeta za isto delo 2 delavca le $\frac{a}{2}$ dnij, 3 delavci potrebujejo le $\frac{a}{3}$ dnij, . . . m delavcev potrebuje le $\frac{a}{m}$ dnij. N. pr.

Ako potrebuje	1	delav.	za neko delo	60	dnij,				
potrebujeta	2	»	le $\frac{1}{2}$	od	60	dnij,	tedaj	30	dnij,
potrebujejo	3	»	» $\frac{1}{3}$	»	60	»	»	20	»
»	4	»	» $\frac{1}{4}$	»	60	»	»	15	»
potrebuje	5	»	» $\frac{1}{5}$	»	60	»	»	12	»

i. t. d.

Tu je razvidno, da je razmerje med vsakima dvema številoma delavcev jednako razmerju med pripadajočima številoma delovnikov, toda vzetima v obratnem redu; n. pr.

$$3 \text{ delavci} : 5 \text{ delavcem} = 12 \text{ dnij} : 20 \text{ dnem},$$

ali

$$3 : 5 = 12 : 20.$$

Ako sta torej dve vrsti števil obratno sorazmerni, ondaj je razmerje med vsakima dvema številoma jedne vrste jednako razmerju med pripadajočima številoma druge vrste, toda vzetima v obratnem redu.

Kakó je uporabljati jednostavna razmerja v razreševanje nalog.

§ 126.

Razrešitev onih nalog, katerih količine so v jednostavnih razmerjih, — takó zvana jednostavna regeldetrija *(einfache Regeldetri)* —, opira se na izreka prejšnjega paragrafa. N. pr.

1.) 7 *m* sukna velja 30 gl., koliko velja 42 *m* prav tacega sukna? Ker sta te dve vrsti števil premo sorazmerni, dobimo

$$\begin{array}{ll} \uparrow 7\ m & \uparrow 30 \text{ gl.} \\ \downarrow 42\ » & \downarrow x\ » \end{array} \qquad \begin{array}{r} x : 30 = 42 : 7, \\ \text{tedaj } x = 180 \text{ gl.} \end{array}$$

2.) 16 delavcev izvrši neko delo v 6 dneh; koliko delavcev treba najeti, da izvršé isto delo v 4 dneh? Dani dve vrsti števil sta obratno sorazmerni, tedaj velja

$$\begin{array}{ll} \uparrow 16 \text{ delav.} & \downarrow 6 \text{ dni} \\ \downarrow x\ » & \uparrow 4\ » \end{array} \qquad \begin{array}{r} x : 16 = 6 : 4 \\ x = 24 \text{ delav.} \end{array}$$

Vsaka regeldetrijska naloga ima dva stavka: prvi izreka pogoj, drugi izražuje vprašanje.

Da imajo regeldetrijske naloge sploh pomen in veljavo za praktično življenje, treba, da si mislimo pri vsaki taki nalogi za obe dve vrsti števil, kateri med seboj primerjamo, vse v pogojnem in vprašalnem stavku ne imenovane okolščine kot jednake; ali, kar je prav tisto, treba vsakako, bodi si molčé bodi si izrekoma, staviti pogoj, da spada k vsaki jednoti jedne vrste v pogojnem in vprašalnem stavku ista množina jednot druge vrste. Na ta pogoj je paziti pri vseh naslednjih nalogah, da si tudi se ne naglaša zaradi kratkosti povsod izrekoma.

§ 127.

Jednostavnejše regeldetrijske naloge je môči dostikrat kar na pamet razrešiti. V obče sklepamo tu iz dane vrednosti za kako množino na vrednost jednote in potem iz te vrednosti na vrednost kake druge množine. N. pr.

1.) 8 *m* sukna velja 32 gl., koliko velja 5 *m*? — Ako velja 8 *m* 32 gl., velja 1 *m* 8mi del od 32 gl., torej 4 gl.; 5 *m* velja zatorej 5krat 4 gl., t. j. 20 gl.

2.) 6 delavcev izvrši neko delo v 20 dnéh, koliko dnij bode potrebovalo za isto delo 5 delavcev? — Ako izvrši delo 6 delavcev v 20 dnéh, potreboval bode 1 delavec 6krat 20 dnij, tedaj 120 dnij; 5 delavcev pa bode potrebovalo za delo le 5ega dela onega časa, katerega potrebuje 1 delavec, zatorej 5ega dela od 120 dnij, t. j. 24 dnij.

Krajša je razrešitev na pamet, kadar je množina v vprašalnem stavku mnogokratnik ali del ali mnogokratnik kakega dela istoimenske množine v pogojnem stavku. N. pr.

1.) 5 *hl* ječmena velja 21 gl. 15 kr.; koliko stane 30 *hl*? — 30 *hl* je 6krat 5 *hl*, tedaj velja 6krat 21 gl. 15 kr., t. j. 126 gl. 90 kr.

2.) 100 gl. kapitala daje na leto 5 gl. obrestij; koliko obrestij daje na leto 25 gl. kapitala? — Ker je 25 gl. četrti del od 100 gl., dá tudi le četrti del od 5 gl., tedaj 1 gl. 25 kr. obrestij.

3.) 48 *m* velja 60 gl. 72 kr.; koliko velja 36 *m*? — 36 *m* je 3krat 12 *m*; 12 *m* je četrti del od 48 *m*, 12 *m* velja tedaj četrti del od 60 gl. 72 kr., t. j. 15 gl. 18 kr.; 36 *m* pa velja 3krat 15 gl. 18 kr., zatorej 45 gl. 54 kr.

V posamičnih slučajih je môči razrešiti regeldetrijske naloge tudi na ta način, da se množina vprašalnega stavka primerno razstavi. N. pr.

1.) Koliko velja 30 *kg*, ako se plača za 14 *kg* 43 gl. 82 kr.? — 30 *kg* je 2krat 14 *kg* in še 2 *kg*; 2krat 14 *kg* velja 2krat 43 gl. 82 kr., t. j. 87 gl. 64 kr.; 2 *kg* sta 7mi del od 14 *kg*, tedaj veljata tudi 7mi del od 43 gl. 82 kr., t. j. 6 gl. 26 kr.; 87 gl. 64 kr. in 6 gl. 26 kr. je 93 gl. 90 kr.

2.) Ako velja 5 *hl* vina 92 gl., koliko velja 19 *hl*? — 20 *hl* veljalo bi 4krat 92 gl., t. j. 368 gl. Da najdemo ceno za 19 *hl*, treba še od 368 gl. odšteti ceno 1 *hl*; 1 *hl* velja 5i del od 92 gl., t. j. 18 gl. 40 kr.; ako odštejemo od 368 gl. najprej 18 gl., ostane 350 gl., in od tega še 40 kr., ostane 349 gl. 60 kr.

Kakó je uporabljati sestavljena razmerja v razreševanje nalog.

§ 128.

Kakó je razreševati naloge, katerih količine so v sestavljenih razmerjih, — takó zvano sestavljeno regeldetrijo — pokazati hočemo na téj-le nalogi:

3 zidarji sezidajo v 14 dneh 50 m^3 zidú; v koliko dneh bode sezidalo 7 zidarjev 125 m^3 zidú?

To nalogo je môči razstaviti na té-le dve nalogi z jednostavnimi razmerji:

1.) 3 zidarji sezidajo neki zid v 14 dneh; v koliko (y) dneh bode sezidalo 7 zidarjev isti zid, ako ostanejo vse druge okolščine prav tiste?

Ker je število zidarjev v obratnem razmerji s številom delovnikov, katerih je za določeno delo treba, odgovarja na ono vprašanje sorazmerje

$$y : 14 = 3 : 7,$$

iz katerega dobimo $y = 6$.

2.) Ako sezida 7 zidarjev v y ($= 6$) dneh 50 m^3 zidú, v koliko (x) dneh bode sezidalo prav toliko zidarjev 125 m^3 zidu? Ker je kolikost dela v premem razmerji s številom dnij, ki se za delo potrebujejo, dobimo odgovor na ono vprašanje, razrešivši sorazmerje

$$x : y = 125 : 50;$$

odtod pa dobimo neznanko prvotne naloge $x = 15$.

Neznanke y pa ni treba s pomočjo posebnega sorazmerja res izračunati; kajti neznanko x je môči kar neposredno določiti. V ta namen treba le prejšnji dve sorazmerji sestaviti. Ako pomnožimo namreč istomestne člene sorazmerij

$$\begin{array}{l} y : 14 = 3 : 7 \quad \text{in} \\ x : y = 125 : 50, \text{ dobimo} \\ \hline \cancel{y} \,.\, x : 14 \,.\, \cancel{y} = 3 \,.\, 125 : 7 \,.\, 50 \end{array}$$

in, ako okrajšamo prvo razmerje z y,

$$x : 14 = 3 \,.\, 125 : 7 \,.\, 50,$$

katero sorazmerje je môči zaradi lažjega pregleda tudi takó-le napisati:

$$\begin{array}{l} x : 14 = 3 : 7 \\ 125 : 50. \end{array}$$

Tu je le pomniti, da treba drugo pod druzim stoječa števila pomnožiti.

Razmerje $x : 14$ je torej jednako sestavljenemu razmerju, in sicer je le-tó sestavljeno iz jednostavnih razmerij $3 : 7$ in $125 : 50$.

Ako primerjamo, kakó so razvrščena števila v teh razmerjih in kakó v nalogi, namreč

3 zid.	14 dn.	50 m^3
7 »	x »	125 »

ter pomnimo, da je število dnij s številom delavcev obratno, s številom m^3 pa premo sorazmerno, vidimo takój, da sta k x dnem in 14 dnem spadajoči števili zidarjev v obratnem, dotični števili m^3 pa v istem redu v razmerje postavljeni.

Odtod izvajamo izrek:

Ako je katera koli vrsta števil od več druzih vrst takó zavisna, da je z vsako posamič ali premo ali obratno sorazmerna, potem je razmerje med vsakima dvema številoma one prve vrste jednako sestavljenemu razmerju, in sicer sestavljenemu iz razmerij med vsakima dvema pripadajočima številoma druzih vrst, vzetima v istem ali v obratnem redu, kakor so števila dotične vrste s števili prve vrste premo ali obratno sorazmerna.

Uporabljajoč ta izrek, razrešuj tedaj naloge sestavljene regeldetrije kratko takó-le:

1.) V prvo razmerje postavi neznanko in ono število, katero ima isto ime kakor neznanka.

2.) Drugo razmerje proporcije je sestavljeno; da dobiš njega posamična razmerja, primerjaj vrsto neznanke posamič z vsako drugo vrsto in to zato, da zveš, je-li sta te dve vrsti premo ali obratno sorazmerni; potem postavi v razmerje števili vsake vrste, spadajoči k neznanki in k številu, ki ima isto ime kakor neznanka, in to v istem ali v obratnem redu, kakor je dotična vrsta z vrsto neznanke premo ali obratno sorazmerna.

3.) Dobljeno sorazmerje razreši. V ta namen razdeli produkt vseh notranjih členov s produktom vseh znanih vnanjih členov.

Primer. Ako dovrši 20 delavcev, delajočih po 12 ur na dan, v 5 tednih 375 m dolg nasip; v koliko tednih bode dovršilo 12 delavcev, kateri delajo po 10 ur na dan, prav tak 600 m dolg nasip?

↑ 20 del.	↑ 12 ur na dan	↓ 5 tedn.	↓ 375 m d.
12 »	10 » » »	x »	600 » »

$$x : 5 = 20 : 12$$
$$12 : 10$$
$$600 : 375$$

$$x = \frac{5 \,.\, 20 \,.\, 12 \,.\, 600}{12 \,.\, 10 \,.\, 375} = 16 \text{ tedn.}$$

§ 129.

1.) Lažje naloge je môči tudi tu s pomočjo sklepov kar na pamet razrešiti. N. pr.

4 delavci, kateri delajo po 12 ur na dan, dovršé neko delo v $7\frac{1}{2}$ dneva; koliko dnij potrebuje za isto delo 6 delavcev, ako delajo le po 10 ur na dan?

Ako potrebujejo 4 delavci $7\frac{1}{2}$ dneva, potrebuje 1 delavec 4krat toliko časa, tedaj 4krat $7\frac{1}{2}$ dneva, t. j. 30 dnij; 6 delavcev pa potrebuje le 6ega dela od 30 dnij, t. j. 5 dnij, ako delajo po 12 ur na dan; ako bi pa delali le po 1 uro na dan, potrebovali bi 12krat 5 dnij, t. j. 60 dnij; ker pa delajo po 10 ur na dan, potrebovali bodo le 10ega dela od 60 dnij, tedaj 6 dnij.

2.) Prav takó sklepamo tudi pismeno računajoč.

Pri nalogi, katero smo razrešili v § 128., dobili bi, uporabljajoč pismeni sklepovni račun:

3	zid.	potrebujejo	za	50 m^3		14 dn.
1	»	potrebuje	»	50	»	$14 \,.\, 3$ »
7	»	»	»	50	»	$\frac{14 \,.\, 3}{7}$ »
7	»	»	»	1	»	$\frac{14 \,.\, 3}{7 \,.\, 50}$ »
7	»	»	»	125	»	$\frac{14 \,.\, 3 \,.\, 125}{7 \,.\, 50} = 15$ dn.

Naloge.

1.* 6 m sukna velja 18 gl.; koliko velja 12 m sukna?

Na pamet. Ako velja 6 m sukna 18 gl., velja 1 m 6i del od 18 gl., tedaj 3 gl.; 12 m bode veljalo torej 12krat 3 gl., t. j. 36 gl. — Ali krajše: 12 m je 2krat 6 m, 12 m bode veljalo tedaj 2krat toliko kakor 6 m, torej 2krat 18 gl. = 36 gl.

2.* 1 hl velja 20 gl.; koliko bode veljalo 40 l?

3.* 200 kg kave velja 320 gl.; koliko kave bodeš dobil za 64 gl.?

4.* Pri 100 gl. je 16 gl. dobička; koliko dobička je pri 425 gl.?

*5.** Hiša daje na leto 540 gl. obrestij; koliko v 8 mesecih?

*6.** 16 zidarjev sezida zid v 20 dneh; v koliko dneh bi sezidalo prav tisti zid 10 zidarjev?

Na pamet. Ako potrebuje 16 zidarjev 20 dnij, potreboval bi 1 zidar 16krat toliko dnij, tedaj 320 dnij; 10 zidarjev pa potrebuje le 10ega dela onega časa, katerega potrebuje 1 zidar, torej 10ega dela od 320 dnij, t. j. 32 dnij.

7. Ako iznaša zračni tlak na $1\frac{1}{2}$ dm^2 154 *kg*, kolik je zračni tlak na 1 m^2?

8. Izmed dveh delavcev zasluži jeden v 4 dneh toliko, kolikor drugi v 5 dneh; ako torej prvi v 15 dneh $18\frac{3}{4}$ gl. zasluži, koliko zasluži drugi v istem času?

9. Rokopis dá 126 stranij po 45 vrst; koliko stranij bi dal, ako bi se stavilo na stran le po 35 vrst?

10. Ako se zavrti kolo v 48 minutah 264krat, *a)* kolikokrat se zavrti v 36 minutah, *b)* v koliko minutah se zavrti 840krat?

11. Sprednje vozno kolo ima *a m*, zadnje pa *b m* v obsegu; kolikokrat se je zavrtelo sprednje, ako se je zavrtelo zadnje *p*krat?

$$a = 2\cdot8, \quad b = 4\cdot2, \quad p = 170.$$

*12.** 3000 delavcev dodela neko železnico v 9 mesecih; koliko delavcev treba še najeti, da bode železnica v 6 mesecih gotova?

13. Na njivi, imajoči $6\frac{2}{5}$ *ha*, se pridela $68\frac{1}{2}$ *hl* pšenice; *a)* koliko pšenice se pridela na njivi, ki ima $3\frac{7}{8}$ *ha*? *b)* koliko *ha* treba, da se pridela $37\frac{3}{4}$ *hl* pšenice?

14. Stroj vzdigne v *a* sekundah *b kg c m* visoko; v katerem času vzdigne b_1 *kg* c_1 *m* visoko?

$$a = 93, \quad b = 4185, \quad c = \tfrac{3}{5}, \quad b_1 = 3912, \quad c_1 = 1\tfrac{1}{4}.$$

15. 47 *l* olivnega olja tehta toliko kolikor 43 *l* vode; koliko tehta 1 *l* olivnega olja, ako tehta 1 *l* vode 1 *kg*?

16. Ako je razmerje med prostornino trde in zrahljane zemlje kakor 10 : 17, *a)* koliko zrahljane zemlje dá 248 m^3 trde zemlje, *b)* koliko trde zemlje dá 300 m^3 zrahljane zemlje?

17. Ako vloži zidar na dan v podzidje po 500, v oblok pa le po 325 opek, in se mu plača za 1 m^3 podzidja 1 gl. 25 kr., koliko potem za 1 m^3 obloka?

---

18. 15 delavcev dovrši neko delo v 10 dneh, ako delajo po 12 ur na dan; koliko delavcev treba najeti, da bodo izgotovili isto delo v 6 dneh, ako delajo le po 10 ur na dan?

19. Dvoje zobatih koles zaseza drugo v drugo; *A* ima 60, *B* 120 zobcev; kolikokrat se zavrti *B* v 36 sekundah, ako se zavrti *A* v 12 sekundah 10krat?

Na pamet. Ker ima *B* 120 in ne 60 zobcev, zavrtelo se bode le polovico od 10krat, t. j. 5krat; ker se pa ne vrti 12, ampak 36 sekund, zavrtelo se bode 3krat 5 = 15krat.

20. Parni stroj 4 konjskih sil vzdigne v 5 sekundah 1500 *kg* 1 *m* visoko; koliko *kg* bode vzdignil stroj 6 konjskih sil v 12 sekundah prav takó visoko?

21. Travnik, kateri je 512 *m* dolg in 72 *m* širok, dá 10 vozov sena po 900 *kg*; koliko vozov sena po 1000 *kg* bode dal 384 *m* dolg in 192 *m* širok travnik?

*22.** 20 delavcev izkoplje 80 *m* dolg, 5 *m* širok in 2 *m* globok prekop v 18 dneh; koliko delavcev bode izkopalo 120 *m* dolg, 6 *m* širok in 3 *m* globok prekop v 36 dneh?

Na pamet. Ako bi bil prekop 40 *m* in ne 80 *m* dolg, treba bi bilo le $\frac{1}{2}$ od 20, t. j. 10 delavcev; ker pa je prekop 120 *m*, tedaj 3krat takó dolg, treba bode 3krat 10, t. j. 30 delavcev; i. t. d.

23. 4500 môž ima kruha za 8 mesecev, ako ga dobiva vsak po $1\frac{1}{4}$ *kg* na dan. A pride jih še 500 môž; koliko *kg* bode treba dati vsakemu na dan, ako hočejo izhajati s kruhom $7\frac{1}{2}$ meseca?

24. V rudniku sta dva parna stroja; prvi vzdigne vsake 2 minuti 7 *hl* vode 84 *m* visoko, drugi vsake 3 minute 10 *hl* vode 108 *m* visoko. V koliko minutah spravila bi oba dva stroja 2550 *hl* vode 120 *m* visoko?

25. *A* ima toliko volnę, da je môči iz nje natkati 16 kosov sukna, ako je vsak po 54 *m* dolg in po $\frac{3}{4}$ *m* širok. Iz nekaj volne se natkata 2 kosa $1\frac{1}{4}$ *m* širokega sukna, vsak kos po 48 *m*; koliko kosov $1\frac{1}{4}$ *m* širokega sukna, kos po 44 *m*, je môči iz ostale volne natkati?

26. 6 delavcev je izkopalo v 4 dneh 300 *m* dolg, $8\frac{1}{3}$ *dm* širok in 6 *dm* globok prekop. Pri druzem prekopu se potrebuje za $2\frac{1}{3}$ m^3 prav toliko časa kakor pri prvem za $4\frac{1}{2}$ m^3. *a)* Koliko delavcev je treba, da izkopljejo drugi 245 *m* dolgi, $11\frac{2}{3}$ *dm* široki in $3\frac{1}{2}$ *dm* globoki prekop v 9 dneh; *b)* v koliko dneh izkoplje drugi prekop 10 delavcev, ako je le-tá 250 *m* dolg, $9\frac{3}{4}$ *dm* širok in $4\frac{1}{2}$ *dm* globok?

4. Naloge v ponavljanje.

*1.** Kolika je 6kratna diferenca med $10\frac{3}{5}$ in $6\frac{4}{5}$?

*2.** Zmanjšaj 7kratnik števila $5\frac{5}{9}$ za $29\frac{1}{9}$, od ostanka pa vzemi četrtino.

3. $\frac{65\frac{1}{6} \,.\, 19}{3\frac{5}{6}} + \frac{259\frac{7}{8} \,.\, 23}{12\frac{3}{8}} + \frac{124\frac{2}{3} \,.\, 15}{5\frac{2}{3}} - \frac{1508\frac{5}{12} \,.\, 17}{23}$.

4. $\frac{3a+4}{3} - \frac{7a+5}{4} - \frac{8-7a}{6} + \frac{5-3a}{8} - \frac{3-7a}{12}$.

5. $\frac{12a^2b}{13xy^5} \,.\, \frac{26xy^6}{36a^4b}$.   *6.* $\frac{26x^3y^4z^5}{45a^2b^3c^4} : \frac{39x^2y^3z^4}{40ab^2c^3}$.

7. $\left(\frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) : \left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{b}\right)$.   *8.* $\frac{a^2+1}{a^2-1} + \frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}$.

9. Izračunaj té-le produkte na 4 decimalke:

a) 24·83275 . 2·0437.   *b)* 27·0889 . 0·3067.
c) 6·354 . 0·00875.   *d)* 5·047329 . 0·00278.

10. Izračunaj té-le kvocijente na 3 decimalke:

a) 815·9025 : 87·53.   *b)* 12·345 : 678·908.
c) 4328·6 : 9876·702.   *d)* 3·8752 : 0·0207.

*11.** 30 *m* velja 138 gl.; koliko velja 65 *m*?

*12.** 45 *l* velja 27 gl.; koliko velja 10 *l*?

*13.** Brzini poštnega voza in lokomotive se imata kakor 2 : 9, lokomotiva pride v 2 urah 55 *km* daleč; kakó daleč pride poštni voz v 12 urah?

14. Izmed treh zidarjev sezida prvi v 3 urah 158 dm^3, drugi v 4 urah 205 dm^3, tretji v 6 urah 281 dm^3 zidú; *a)* koliko dm^3 sezidajo vsi trije v 1 uri, *b)* v koliko dneh sezidajo vsi 1708 dm^3 zidú, ako delajo po 12 ur na dan?

15. $(x+a) : (x-a) = b : c$.   *16.* $4 : \frac{2x}{3} = 1 : \left(15 - \frac{x}{3}\right)$.

17. $(x+1) : (x-5) = (x+3) : (x-7)$.

18. $(8x-1) : (4x+2) = (6x-9) : (3x-4)$.

*19.** Katerega števila tretjina je za 4 večja od njega četrtine?

20. Ob 6ih zjutraj se odpelje od *A* proti *B* poštni voz ter preteče vsako uro po $7\frac{1}{2}$ *km*; 20 minut čez 2 popoldne zapusti mesto *A* vlak, kateri preteče vsako uro po 36 *km*, ter dospe ob jednem s poštnim vozom v mesto *B*; koliko *km* je od *A* do *B*?

Sedmi oddelek.

O najvažnejših gospodarskih in trgovskih računih.

I. O procentnem računu.

§ 130.

Stotnino katerega koli števila imenujemo procent ali odstotek (1%) istega števila. 2%, 3%, ... $p\%$ kakega števila je $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, ... $\frac{p}{100}$ dotičnega števila. Procenti tedaj kažejo, koliko jednot katere koli vrste treba vzeti od 100 jednot iste vrste.

Pri nekaterih količinah se računa iznesek od 1000 jednot in to tedaj, kadar bi bili procenti zelo majhni ulomki. Tak iznesek imenujemo promil ali odtisoček (*Promille*, $‰$); n. pr. $\frac{1}{2}‰$ se pravi, od 1000 jednot treba vzeti $\frac{1}{2}$ jednote.

Pri procentnih računih treba paziti na štiri količine: 1.) na število 100 kot osnovno število; 2.) na iznesek, ki se jemlje od 100, t. j. na procente; 3.) na vsoto, od katere treba procente računati; 4.) na procentni iznesek, t. j. na množino, katero dobimo od dane vsote po procentih.

§ 131.

Procentni račun je trojen: od sto (*von Hundert*), nad sto (*auf Hundert*) in pod sto (*in Hundert*).

1.) Od sto se računa, kadar je vsota, od katere treba procentni iznesek izračunati, istovrstna z osnovnim številom 100. N. pr. Pri nakupu blaga, katero je 400 gl. veljalo, bilo je 2% stroškov; koliko iznašajo stroški? To nalogo razrešimo s pomočjo téga-le sorazmerja:

$$x : 2 = 400 : 100.$$

2.) **Nad** sto se računa, kadar vsota, od katere treba procentni iznesek izračunati, ni istovrstna z osnovnim številom 100, nego s **številom 100, povečanim za procente.** N. pr. Neko blago stane z 2 % stroškov vred 400 gl.; koliko iznašajo stroški? Tu velja sorazmerje:

$$x : 2 = 400 : 102.$$

3.) **Pod** sto se slednjič računa, ako je dana vsota, od katere treba procentni iznesek izračunti, istovrstna z **osnovnim številom 100, zmanjšanim za procente.** N. pr. Za prodano blago se iztrži po odbitku 2 % stroškov 400 gl.; koliko iznašajo stroški? Tu dobimo

$$x : 2 = 400 : 98.$$

Iz tega je razvidno, da treba smatrati za p %

pri računu **od** sto število 100,
» » **nad** » » $100 + p$,
» » **pod** » » $100 - p$

za istovrstno z dano vsoto.

O računu od sto.

§ 132.

Ako zaznamenujemo procente s p in iznesek od vsote s z i, dobimo sorazmerje

$$i : p = s : 100,$$

in odtod

$$i = \frac{sp}{100},$$

t. j.: **Pri procentnem računu od sto je iznesek jednak 100tnemu delu produkta iz dane vsote in procentov.**

Pri promilu treba dano vsoto pomnožiti s promilom ter produkt razdeliti s 1000.

Za s in p dobimo iz prejšnjega sorazmerja

$$s = \frac{100i}{p} \text{ in } p = \frac{100i}{s}.$$

Izrazi tudi te dve formuli z besedami.

Procentne račune razrešujemo tudi s pomočjo **sklepovnega računa.** Jednostavnejše naloge razreši kar **na pamet.**

Primeri.

1.) Koliko je *a)* 5 % od 2450; *b)* $4\frac{1}{2}$ % od 6800?

a) 2450 po 5 %	*b)* 6800 po $4\frac{1}{2}$ %
122·50	272
	34
	306

S pomočjo sklepovnega računa:

b) 1%, t. j. $\frac{1}{100}$ od 6800 je 68, 4% torej 4krat $68 = 272$, $\frac{1}{2}\%$ je polovica od 68, t. j. 34; 272 in 34 je 306.

2.) Katera vsota dá po 5% 87 za iznesek?

$$s = \frac{8700}{5} = 1740.$$

Po sklepovnem računu:

5% iskane vsote je 87,
1%, t. j. $\frac{1}{100}$ » » » 17·4;

tedaj vsota sama $= 17{\cdot}4 \,.\, 100 = 1740.$

3.) Koliko $\%$ je 18 gl. od 450 gl.?

$$p = \frac{1800}{450} = 4\%.$$

Po sklepovnem računu:

1% od 450 gl. je $4\frac{1}{2}$ gl.; 18 gl. je torej toliko $\%$ od 450 gl., kolikorkrat ima 18 gl. $4\frac{1}{2}$ gl. v sebi, tedaj 4%.

O računu nad sto.

§ 133.

Za procentni račun **nad** sto velja, ako imajo p, $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{i}$ isti pomen kakor v § 132., sorazmerje

$$\mathfrak{i} : p = \mathfrak{s} : (100 + p),$$

tedaj

$$\mathfrak{i} = \frac{\mathfrak{s}p}{100 + p}, \quad \mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{i}(100 + p)}{p}, \quad p = \frac{100\,i}{\mathfrak{s} - i}.$$

Primeri.

104

1.) Koliko iznašajo 4% nad sto od 2912 gl.?

$$i : 4 = 2912 : 104; \qquad i = 112 \text{ gl.}$$

2.) Katera vsota dá po 6% nad sto 75 gl. za iznesek?

$$s : 106 = 75 : 6; \qquad s = 1325 \text{ gl.}$$

3.) Koliko $\%$ nad sto je 120 gl. od 3120 gl.?

Tu dobimo

$$p : 120 = (100 + p) : 3120,$$

tedaj $3120p = 12000 + 120p$ in iz te jednačbe $p = 4\%$.

O računu pod sto.

§ 134.

Ako pomenijo p, s, z prav tisto kakor prej, dobimo za procentni račun pod sto

$$z : p = s : (100 - p),$$

tedaj

$$z = \frac{sp}{100 - p}, \quad s = \frac{z(100 - p)}{p}, \quad p = \frac{100z}{s + z}.$$

Primeri.

1.) Koliko je 5 % pod sto od vsote 2109 gl.?

$$z : 5 = 2109 : 95; \quad z = 111 \text{ gl.}$$

2.) Od katere vsote iznašajo 4 % pod sto 64 gl.?

$$s : 96 = 64 : 4; \quad s = 1536 \text{ gl.}$$

3.) Po koliko % pod sto dá 5031 gl. 129 gl. za iznesek?

$$p : 129 = (100 - p) : 5031,$$

tedaj

$$5031p = 12900 - 129p, \text{ in } p = 2\tfrac{1}{2}\,\%$$

Naloge.

*1.** *a)* 2 % od 50, 25, 20, 10, 75, 300, 650, 975;
b) 4 % od 400, 1600, 350, 775, 860, 1230, 2575;
c) 5 % od 600, 1400, 50, 350, 920, 480, 2860.

2. Koliko je

a) 4 % od 635? *b)* $5\frac{1}{2}$ % od 846?
c) $6\frac{1}{4}$ % od 1832? *d)* $7\frac{3}{4}$ % od 6052?

3. Koliko je

a) 1 ‰ od 7360? *b)* $1\frac{1}{4}$ ‰ od 8640?
c) $1\frac{1}{2}$ ‰ od 8380? *d)* $1\frac{3}{4}$ ‰ od 14320?

4. Kolik iznesek dá vsota 5280 gl. po *a)* $\frac{1}{3}$ %, *b)* $3\frac{1}{4}$ %, *c)* $4\frac{3}{4}$ %, *d)* $5\frac{1}{2}$ %, *e)* $6\frac{3}{8}$ %?

5. Izmed 409 35letnih ljudij jih umrje 40 % do 60. leta; koliko jih učaka torej 60. leta?

6. 6350 *m* dolga cesta je napeta za 1·8 %; koliko *m* iznaša tedaj napetost?

7. Prebivalstvo mesta, katero je imelo leta 1840. 15860 duš, pomnožilo se je do leta 1880. za 25 %; koliko prebivalcev je imelo tedaj mesto leta 1880.?

8. Za neki zid se potrebuje 64800 opek; koliko opek je treba kupiti, ako se jih $8\frac{1}{2}\%$ polomi in drugače poizgubi?

9. Dolnja Avstrijska ima 1885840 *ha* rodovitne zemlje, in sicer $42\frac{1}{2}\%$ njiv; koliko *ha* ima njiv?

*10.** Katera vsota dá

a) po 2% 48; *b)* po 3% 74; *c)* po 4% 38 za iznesek?

11. Koliko duš ima mesto, ako jih iznaša 22% 572?

12. Ako dobiš iz pese 5% neprečiščenega cukra, koliko *kg* pese je treba za 47200 *kg* neprečiščenega cukra?

13. Goveje meso izgubi, ako se skuha, 15% svoje teže; *a)* koliko tehta $3\frac{1}{4}$ *kg* sirovega mesa (brez kostij), kadar je kuhano? *b)* koliko sirovega mesa treba vsak dan za 12 oseb kupiti, da dobi vsaka $\frac{1}{8}$ *kg* kuhanega mesa?

*14.** Koliko % je

a) 12 od 200? *b)* 16 od 400? *c)* 38 od 2000?
d) 36 od 800? *e)* 80 od 1200? *f)* 63 od 1400?

15. Koliko % je

a) 40 kr. od 8 gl.? *b)* 35 gl. od 1050 gl.?
c) 308 gl. od 5600 gl.? *d)* 116·64 gl. od 1728 gl.?

16. V sreberni zlitini, tehtajoči $12\frac{1}{2}$ *kg*, je 5 *kg* bakra; koliko % bakra je v tej zlitini?

17. Ako prežgeš 25 *kg* kave, dobiš le $21\frac{3}{4}$ *kg* žgane kave; koliko % svoje teže izgubi tedaj kava, ako se prežge?

18. Česka je imela leta 1780. 2561794, leta 1870. pa 5140156 prebivalcev; za koliko % se je tedaj nje prebivalstvo v tej dobi pomnožilo?

---

19. Kolik je iznesek nad sto od vsote

a) 923 po 3%? *b)* 1555 po $5\frac{1}{2}\%$?
c) 680·85 po 2%? *d)* 3047·5 po $\frac{1}{3}\%$?

20. Koliko ostane od *a)* 3528 gl., *b)* 907·48 gl. po odbitku 2% nad sto?

21. Koliko % nad sto je 105 gl. od 3105 gl.?

22. Kolik je iznesek pod sto od

a) 2508 gl. po 10%? *b)* 836 gl. po $8\frac{1}{2}\%$?
c) 7018 gl. po $2\frac{1}{2}\%$? *d)* $1601\frac{1}{5}$ gl. po $6\frac{1}{4}\%$?

23. Izračunaj vsote k tém-le izneskom in procentom:

a) 300 gl. po 10 %, *b)* $128\frac{1}{4}$ gl. po $11\frac{1}{2}$ %,
c) 130·2 gl. po $3\frac{1}{2}$ %, *d)* $78\frac{1}{2}$ gl. po $1\frac{1}{2}$ %.

24. Koliko % pod sto je 66 gl. od 3234 gl.?

25. Nekdo plača davek in 32 % priklada; koliko plačuje davka, ako je plačal vsega skupaj 125 gl. 40 kr.?

26. Koliko plačuje kmet davka, ako plača po odbitku 4 % popusta 398 gl. 40 kr.?

27. Trgovec je iztržil za neko blago po odbitku $2\frac{1}{2}$ % stroškov $6676\frac{4}{5}$ gl.; koliko je bilo stroškov?

28. Pri nakupu blaga je iznašal $3\frac{1}{4}$% odbitek $175\frac{1}{2}$ gl.; koliko gl. je plačal kupec?

O tari.

§ 135.

Ako zvagamo blago s posodo vred, v kateri je, imenujemo to težo surovo ali nečisto težo *(Brutto-, Sporcogewicht)*. Odbitek od nečiste teže zaradi posodne teže zovemo taro *(Tara)* in težo blaga samega čisto težo *(Nettogewicht)*. Tara je dana dostikrat v procentih; v tem slučaji jo je računati od nečiste teže po procentnem računu od sto. Decimalke se jemljejo v poštev le pri zelo dragem blagu, sicer pa se ali prezirajo ali pa se število kilogramov za 1 poveča, ako iznašajo 5 ali več kakor 5 desetin. N. pr.

Koliko velja 5 vreč kave, ako iznaša nečista teža 773 *kg*, tara 5 % ter se računa 100 *kg* čiste teže po 165 gl.?

773 po 5 %		Nečiste teže	773 *kg*
38·65 *kg*		5 % tare	39 »
		čiste teže	734 *kg* po 165
			440 4
			36 70
			1211·10 gl.

O skontu ali rabatu.

§ 136.

Kupcu, ki kupuje blago na debelo, ni treba blaga precej plačati, nego še le o določenem roku, a zaradi tega zaračuna se mu blago nekoliko dražje. Ako pa kupec blago vender le precej plača, dovoliti se mu mora zaradi gotovega plačila odbitek od kupnine; ta odbitek se zove blagovni diskont, skonto, tudi rabat (*Waren-discont, Sconto, Rabatt*) ter se računa po procentih od sto. Ako se odšteje skonto od kupnine, zove se ostanek gotovo plačilo (*contante Zahlung*).

Pri marsikaterem blagu določuje izdelovalec sam ceno, po kateri se morajo njega izdelki na drobno prodajati, prodajalcu na drobno pa dovoljuje kot odškodnino za stroške in trud odbitek od omenjene cene; tudi tak odbitek se imenuje rabat. Tak je n. pr. knjigarski rabat (*Buchhändlerrabatt*). Ta iznaša navadno take procente, s katerimi je prav pripravno računati; n. pr. $33\frac{1}{3}$ % ali $\frac{1}{3}$ one cene, po kateri se knjiga prodaja, 25 %, 20 %. Knjigarski rabat se računa po procentnem računu od sto, dostikrat pa se tudi kar kratko delitev uporablja.

N. pr.

1.) Nekdo je kupil za 5192 gl. blaga; *a)* koliko iznaša skonto po 2 %, *b)* koliko je gotovega plačila?

Kupnine je gl.	5192
2 % skonta je »	103·84
gotovega plačila je gl.	5088·16.

2.) Knjigar-založnik je razposlal knjig, vrednih 2518 gl.; koliko ima zanje terjati, ako daje 20 % rabata?

2518 po 20 %	ali $\frac{1}{5}$ od 2518 gl.	2518 gl.
503·60 gl. rabata	503·6 gl.	503·6 gl.
		2014·4 gl.

O senzariji.

§ 137.

Zaprisežene osebe, katerim je posredovati med trgovci istega mesta pri nakupu in prodaji blaga, zovejo se mešetarji ali senzali (*Mäkler, Sensale*). Nagrada, katero dobé za svoj trud, zove se mešetarina ali senzarija (*Sensarie, Courtage*).

Senzarija iznaša pri blagu navadno 1 %, in sicer plača kupec $\frac{1}{2}$ %, prodajalec $\frac{1}{2}$ %, pri menicah pa 1 ‰.

N. pr.

1.) Koliko iznaša $\frac{1}{2}$ % senzarije pri blagu, prodanem za 4580 gl.; koliko dobi za blago prodajalec in koliko mora kupec plačati?

$$\frac{4580 \text{ po } \frac{1}{2}\%}{22\cdot 90 \text{ gl. senzarije.}}$$

Prodajalec dobi:

za blago	gl. 4580
ako se odbije $\frac{1}{2}$% senzarije . .	» 22·90
ostane mu čistega . .	gl. 4557·10.

Kupec plača:

za blago	gl. 4580
$\frac{1}{2}$% senzarije	» 22·90
vsega skupaj	gl. 4602·90.

2.) Za koliko se je kupilo državnih papirjev, ako iznaša 1‰ senzarije 5 gl. 64 kr.?

$$x = 5\cdot 64 \,.\, 1000 = 5640 \text{ gl.}$$

O proviziji.

§ 138.

Dostikrat naroči kdo komu druzemu, da izvrši zanj kako opravilo, n. pr. da kupi ali proda kako blago; osebo, katera nálog daje, zovemo poveritelja ali komitenta *(Committent)*, osebo pa, katera nálog dobi in izvrši, poverjenika, opravnika ali komisijonarja *(Commissionär)*. Nagrada, katero poverjenik za svoj trud dobi, zove se provizija ali opravnina *(Provision, Commission)* ter se računa po procentih od sto.

Pri nakupu se računa provizija od kupnine, povečane za vse druge stroške. V tem slučaji treba potem provizijo k prejšnjemu iznesku prišteti. Pri prodaji se računa provizija kar od izkupnine, predno so se odšteli drugi stroški. Provizijo treba tu z vsemi druzimi stroški vred od prvotne izkupnine odšteti; kar ostane, je čista izkupnina za prodano blago.

Račun, katerega pošlje poverjenik svojemu poveritelju o kupljenem ali prodanem blagu, zove se oziroma nakupni račun *(Faktura)* ali prodajni račun.

Primeri.

1.) Koliko iznaša provizija po $\frac{1}{2}$%, in kolika je čista izkupnina, ki se dobi za prodano menico, glaseč se na 1785·12 gl.?

$$\frac{1785\cdot 12 \text{ po } \frac{1}{2}\%}{8\cdot 9256 \text{ gl. proviz.}}$$

Menični iznesek.	1785·12 gl.
ako se odbije $\frac{1}{2}$% proviz. . .	8·93 »
ostane čiste izkupnine . .	1776·19 gl.

2.) Tržačan kupi za Dunajčana 3 zaboje sicilijanskega grozdjiča št. 12. do 14., nečiste teže 768 *kg*, tare po 18 *kg* od zaboja, 100 *kg* čiste teže po 31 gl. Izračunaj iznesek, o katerem se pošlje faktura, ako iznašajo stroški za zaboje, nakladanje, i. t. d. 15·58 gl., in se računa $\frac{1}{2}$ % senzarije in 2 % provizije.

Faktura.

3 zaboje sicilijanskega grozdjiča št. 12. do 14.			
nečiste teže . . . . . . 768 *kg*			
tare po 18 *kg* od zaboja 54 »			
čiste teže . . 714 *kg* po 31	gl.	221	34
Stroškov:			
za zaboje, nakladanje, i. t. d. . . 15·58 gl.			
$\frac{1}{2}$ % senzarije (od 221·34 gl.). . 1·11 »	»	16	69
	gl.	238	3
2 % provizije (od 238·03 gl.) . . .	»	4	76
	gl.	242	79

3.) Pražan zaukaže prodati v Vratislavu 218 cnt. pšenice, in sicer 200 funtov po 19·80 marke; vozarina iznaša 30 pfenigov od cnt.; darila za merjenje, pijačo, i. t. d. se plača 10·80 marke, senzarije pa $\frac{1}{2}$ %; koliko je čiste izkupnine, ako se računa $2\frac{1}{4}$ % provizije?

Prodajni račun.

218 cnt. pšenice po 19·80 za 200 funtov	mark	2158	20
Stroškov:			
vozarine po 30 pf. od cnt. . . . . . mark 65·40			
darila za merjenje, pijačo, i. t. d. . . » 10·80			
$\frac{1}{2}$ % senzarije (od 2158·2 marke). . » 10·79			
$2\frac{1}{4}$ % provizije (od 2158·2 marke) . » 48·56		135	55
	čiste izkupnine mark	2022	65

O zavarovalnini.

§ 139.

Društva, katera prevzemó proti določeni pristojbini odškodovanje za nezgode in izgube, nastale bodi si vsled prirodnih, bodi si vsled izvenrednih dogodkov, zovejo se **zavarovalna društva** *(Assecuranz-Gesellschaften)*. Pristojbino, katero jim treba naprej plačati za to, da prevzemó odškodovanje, imenujemo **zavarovalnino** *(Versicherungsprämie)*, pismo pa, s katerim potrjujejo, da se je kdo res in za koliko se je zavaroval, polico *(Polizze)*. Zavarovalnina se računa od zavarovane vsote po procentih od sto. N. pr.

Kolika je zavarovalnina od zavarovanih 15280 gl. po $1\frac{5}{8}$ %?

15280	po	$1\frac{5}{8}$ %
7640	»	$\frac{1}{2}$ %
1910	»	$\frac{1}{8}$ %
248·30 gl.		

od izkupn. = nad sto
Kupnina = od sto

O dobičku in izgubi.

pri nakupu = od sto
izkupu = pod sto.

§ 140.

Pri računih o dobičku in izgubi treba paziti na troje: na ~~razhodke~~ pri nakupu, na dohodke pri prodaji in na dobiček ali izgubo. Trgovci računajo dobiček in izgubo navadno po procentih; n. pr. 6 % dobička imeti se pravi, za 100 gl., ki so se izdali pri nakupu, dobiti 106 gl. pri prodaji; 6 % izgube pa, za 100 gl., izdanih pri nakupu, le 94 gl. pri prodaji iztržiti.

N. pr.

1.) Trgovec kupi *m* sukna po 4 gl. 80 kr.; po čem mora *m* prodati, da bode imel 15 % dobička?

4·8 po 15 %		Kupna cena	4 gl. 80 kr.
240		15 % dobička	— » 72 »
0·720 gl. dobička.		prodajna cena	5 gl. 52 kr.

2.) Blago, katero se je za 725 gl. kupilo, moralo se je za 674 gl. 25 kr. prodati; koliko % je bilo izgube?

Kupnina	725 gl.		
izkupnina	674 »	25 kr.	
izguba	50 gl.	75 kr.	

$$x = \frac{50 \cdot 75 \,.\, 100}{725} = 7\,\%.$$

Naloge.

1. Blago ima 2792 *kg* nečiste teže; kolika je njega čista teža, ako se računa tare *a)* 3 %, *b)* $5\frac{1}{2}$ %, *c)* 12 %?

2. Blago ima 2150 *kg* nečiste in 1978 *kg* čiste teže; koliko % iznaša tara?

3. Koliko iznaša skonto po $2\frac{1}{4}$ % pri *a)* 2577 gl., *b)* 3538 gl., *c)* 939·85 gl., *d)* 1714·17 gl.?

4. Koliko veljajo 4 sodi smokev, imajoči 518 *kg* nečiste teže, ako je 10 % tare ter se plača za vsacih 100 *kg* čiste teže po 24 gl., in se računa $1\frac{1}{2}$ % skonta?

*5.** 20 %, 25 %, $33\frac{1}{3}$ % rabata je koliki del one cene, po kateri se knjiga prodaja?

*6.** Koliko iznaša rabat po $33\frac{1}{3}$ %, ako kupi kdo knjig za *a)* 1518·24 gl., *b)* $917\frac{3}{5}$ marke?

*7.** Koliko je senzarije po $\frac{1}{2}$ % od

a) 918 gl.? *b)* 506 gl. 58 kr.?
c) 3096 gl.? *d)* 2744 gl. 87 kr.?

8. Za kupljeno blago se plača s $\frac{1}{2}$ % senzarije vred 2653 gl. 40 kr.; kolika je prvotna kupnina?

9. Koliko je provizije po 2 % od

a) 458 gl.? *b)* 720 gl.? *c)* 912 gl. 50 kr.?
d) 1325 gl.? *e)* 3915 gl.? *f)* 1118 gl. 75 kr.?

10. Koliko je provizije od 4760 gl. po

a) $\frac{1}{2}$ %? *b)* $\frac{5}{8}$ %? *c)* $1\frac{1}{2}$ %? *d)* $1\frac{3}{4}$ %?

11. Nekdo proda za nekoga druzega blaga za 2085 gl. 25 kr.; koliko ostane prodajalcu po odbitku $1\frac{3}{4}$ % provizije?

12. Neko blago stane pri nakupu z 2 % provizije vred 3207 gl. 90 kr.; *a)* koliko je provizije, *b)* kolika kupnina sama?

13. Za prodano blago se iztrži po odbitku 2 % provizije 2158 gl. 88 kr.; koliko iznaša provizija?

14. Trgovec proda za nekoga druzega blaga za 3518 gl., mešetarju plača $\frac{1}{2}$ %, zá-se pa zaračuna $1\frac{3}{4}$ % provizije; koliko dobi prodajalec?

15. Koliko treba plačati za 2308 *kg* nečiste teže, ako iznaša tara 8 %, 100 *kg* čiste teže pa velja 85·72 gl., in se računa 2 % skonta ~~in $1\frac{5}{8}$ % provizije~~?

16. Koliko zavarovalnine treba plačati od 7850 gl.

a) po $\frac{1}{2}$ %? *b)* po $\frac{3}{8}$ %? *c)* po 1 %? *d)* po $1\frac{1}{2}$ %?

*17.** Hišni posestnik je zavaroval pri zavarovalnem društvu svojo hišo ter plačal 18 gl. 84 kr.; koliko je hiša vredna, ako je računalo društvo $\frac{1}{2}$ % hišine vrednosti?

*18.** 5 %, $6\frac{1}{4}$ %, $8\frac{1}{3}$ %, 10 %, $12\frac{1}{2}$ %, $16\frac{2}{3}$ %, 20 % dobička je koliki del kupnine?

*19.** Za koliko treba prodati blago, katero se je za 780 gl. kupilo, da bode *a)* 10 % dobička, *b)* 10 % izgube?

20. Pri blagu, katero se je za 4250 gl. kupilo, je bilo pri prodaji 340 gl. dobička; koliko % je bilo dobička?

21. Trgovec je iztržil za blago, pri katerem je imel 3 % izgube, 1040 gl.; *a)* koliko je imel izgube, *b)* za koliko je bil blago kupil?

22. Nekdo je iztržil za prodano blago 1590 gl.; koliko % je imel dobička, ako je iznašal le-tá 90 gl.?

23. Za prodano blago se je iztržilo 1590 gl.; koliko % je bilo izgube, ako je iznašala le-tá 90 gl.?

24. Dunajčan dobi iz Trsta 4 zaboje grozdjiča, imajoče 972 *kg* nečiste teže, tare se računa po 18 *kg* od zaboja, 100 *kg* čiste teže po 30 gl., senzarije $\frac{1}{2}$ %, provizije 2 %; carina, vozarina in drugi stroški iznašajo 68 gl. 64 kr.; po čem mora *kg* prodati, ako hoče imeti 15 % dobička?

II. O obrestnem računu.

1. O jednostavnem obrestnem računu.

§ 141.

Denar, katerega kdo ali sam takó uporablja, da mu kaj nese, ali komu druzemu s tem pogojem posodi, da mu plačuje le-tá za uporabo določen iznesek, slednjič pa vender le ves posojen denar zopet povrne, imenujemo kapital ali glavnico *(Kapital)*, iznesek pa, kateri se plačuje za uporabo kapitala, obresti *(Zinsen, Interessen)*. Obresti se računajo po procentih; le-tí veljajo za 100 kapitalnih jednot in za časovno jednoto, navadno za jedno leto. Leto se računa pri obrestnih računih po 360 dnij, mesec po 30 dnij.

Obrestni račun je tedaj procenten račun, pri katerem pa treba razven količin, ki se v vsakem procentnem računu nahajajo, v poštev jemati še čas.

Obresti imenujemo jednostavne ali proste *(einfache Zinsen)*, ako ostane kapital ves čas, ko tečejo obresti, neizpremenjen; ako se pa obresti koncem vsacega leta ali poluleta h kapitalu pridevajo in same zopet na obresti nalagajo, ondaj jih imenujemo obrestne obresti *(Zinseszinsen)*.

§ 142.

Podloga obrestnemu računu je sestavljeno sorazmerje; toda vsako tako nalogo je môči tudi s pomočjo sklepovnega računa razrešiti. Sklepovni račun nam rabi posebno, kadar računamo na pamet.

N. pr. Kapital 1346 gl. je po 5 % naložen; koliko obrestij dá v 3 letih?

Uporabljajoč sklepovni račun, dobimo:

1346 gl. kap. dá po 1 % v 1 let.	$\frac{1346}{100}$	gl. obrestij
1346 » » » » 5 % » 1 »	$\frac{1346 \cdot 5}{100}$	» »
1346 » » » » 5 % » 3 »	$\frac{1346 \cdot 5 \cdot 3}{100}$	» »

Uporabljajoč sestavljeno sorazmerje:

100 gl. kap. v	1 let.	5 gl. obrestij	$x : 5 = 1346 : 100$
1346 » » »	3 »	x » »	$3 : 1$

$$x = \frac{1346 \cdot 5 \cdot 3}{100}.$$

V obče: Ako zaznamenujemo kapital, procente, število let in obresti oziroma s k, p, l in o, dobimo na isti način

$$o = \frac{kpl}{100},$$

in odtod

$$k = \frac{100 \cdot o}{pl}, \qquad p = \frac{100 \cdot o}{kl}, \qquad l = \frac{100 \cdot o}{kp}.$$

Izrazi te formule z besedami.

Primeri.

1.) Koliko obrestij dá 350 gl. po 4 % v 3 letih?

a) Na pamet. 350 gl. dá v 1 letu po 1 % 100tni del od 350 gl., tedaj $3\frac{1}{2}$ gl., po 4 % torej 4krat $3\frac{1}{2}$ gl. = 14 gl.; v 3 letih tedaj 3krat 14 gl. = 42 gl. obrestij.

b) Po formuli: $o = \frac{350 \cdot 4 \cdot 3}{100} = 42$ gl.

2.) Kateri kapital dá po 4 % v 5 letih 540 gl. obrestij?

a) Na pamet.

4 %	kapitala v 5 let.	= 540 gl.
4 %	» » 1 »	= 108 »
1 %, t. j. $\frac{1}{100}$	» » 1 »	= 27 »

tedaj je kapital sam = 100krat 27 gl. = 2700 gl.

b) Po formuli: $k = \frac{100 \cdot 540}{4 \cdot 5} = 2700$ gl.

3.) Po koliko % treba 3450 gl. kapitala na obresti naložiti, da bode dal v 2 letih 276 gl. obrestij?

a) Na pamet. Po 1 % dá 3450 gl. kap. v 1 letu $34\frac{1}{2}$ gl., v 2 letih 69 gl.; 276 gl. je tedaj toliko %, kolikorkrat ima 276 število 69 v sebi, torej 4 %.

b) Po formuli: $p = \frac{100 \cdot 276}{3450 \cdot 2} = 4$ %.

4.) Koliko časa treba imeti kapital 4800 gl. po 5 % izposojen, da bode dal 600 gl. obrestij?

a) Na pamet. 4800 gl. dá v 1 letu po 1 % 48 gl., po 5 % tedaj 5krat 48 gl. = 240 gl.; 600 gl. obrestij dá tedaj isti kapital v toliko letih, kolikorkrat je 240 v 600, torej v $2\frac{1}{2}$ leta.

b) Po formuli: $l = \frac{100 \,.\, 600}{4800 \,.\, 5} = 2\frac{1}{2}$ leta.

§ 143.

Navadno pa se računajo obresti za kateri koli kapital in kateri koli čas takó-le:

1.) Najprej izračunaj obresti za jedno leto po procentnem računu, pomnoživši stotni del kapitala s procenti.

2.) Obresti za več let dobiš, ako pomnožiš obresti za jedno leto s številom let.

3.) Ako so dani tudi meseci in dnevi, uporabljaj razstavni način *(Zerfällungsmethode)*; mesece razstavi namreč na pripravne dele leta, in dneve na pripravne dele meseca, potem vzemi od obrestij za jedno leto, oziroma za jeden mesec prav toliko delov in vse te izneske prištej k obrestim za leta.

N. pr. Koliko obrestij dá 4850 gl. kapitala po $4\frac{1}{2}$ % v 3 letih 7 mesecih 12 dneh?

48 50	gl. po $4\frac{1}{2}$ % v 3 l. 7 m. 12 dn.	
194 00		
24 25		
218·25	gl. obr. v 1 l.	
654·75	gl. obr. v 3 l.	
109·125	» » » 6 m.	= $\frac{1}{2}$ l.
18 187	» » » 1 »	= $\frac{1}{6}$ od 6 m.
6·062	» » » 10 dn.	= $\frac{1}{3}$ m.
1·212	» » » 2 »	= $\frac{1}{5}$ od 10 dn.
789·336	gl. = 789 gl. 34 kr.	

§ 144.

Dostikrat treba izračunati obresti le za določeno število dnij. V tem slučaji izračunaj najprej obresti za 6 % in iz teh po razstavnem načinu obresti za dane procente.

Ako je k oni kapital, kateri je po 6 % d dnij na obresti naložen, ondaj dobimo

100 gl. kap. v 360 dn. 6 gl. obr.
k » » » d » x » »

$x : 6 = k : 100$
$d : 360,$

tedaj $x = \frac{kd}{6000}$;

$= \frac{k.p}{100} \cdot \frac{d}{360} = \frac{kpd}{36000}$ 2% = $\frac{k.d}{18000}$ 3% = $\frac{kd}{12000}$ 5% = [illegible]

t. j. obresti po 6 % za določeno število dnij dobimo, ako pomnožimo kapital s številom dnij ter ta produkt najprej s 1000 in potem še s 6 razdelimo.

N. pr. 1.) Koliko obrestij dá 780 gl. kapitala po 6 % od dne 3. aprila do dne 12. avgusta?

Od dne 3. aprila	do dne 3. avgusta	so 4 m. =	120 dn.
» » 3. avgusta	» » 12. »	je	9 »
			129 dn.

780 . 129
156
702
100‚620 : 6‚000
16·77 gl.

2.) Koliko obrestij dá 4559 gl. 80 kr. po 8 % v 57 dneh?

45 60 . 57
228 0
31 92
259‚920 : 6‚000
43·32 gl. obr. po 6 %
14·44 » » » 2 % = $\frac{1}{3}$ od 6 %
57·76 gl. obr. po 8 %.

Naloge.

*1.** Izračunaj letne obresti od

a) 30 gl., 75 gl., 120 gl., 350 gl., 862 gl., 924 gl. po 5 %;
b) 55 gl. 80 kr., 110 gl., 235 gl., 560 gl., 772 gl. po 4 %;
c) 500 gl., 125 gl., 350 gl., 720 gl., 375 gl., 880 gl. po $4\frac{1}{2}$ %.

*2.** Koliko iznašajo obresti po 4 % od

a) 200 gl. v 3 letih? *b)* 525 gl. v 5 letih?
c) 465 » » 8 » *d)* 255 » » 6 »

*3.** Vdova ima naloženih svojih 9560 gl. kapitala po $5\frac{1}{2}$ %; koliko sme na dan potrošiti, ako živi o samih obrestih onega kapitala?

4. Koliko obrestij dá

a) 4105 gl. po 5 % v 3 letih?
b) 2412 gl. po $5\frac{3}{4}$ % v 5 letih?

5. Koliko obrestij dá 1428 gl.

a) po 5 % v 4 mesecih? *b)* po 6 % v 7 mesecih?
c) po $4\frac{1}{2}$ % v 5 mesecih? *d)* po $5\frac{3}{4}$ % v 9 mesecih?

6. Koliko obrestij dá

a) 6720 gl. po 4 % v 1 letu 5 mesecih?
b) 2928 gl. po $5\frac{1}{4}$ % v 2 letih 7 mes. 15 dneh?
c) 5704 gl. po $6\frac{1}{2}$ % v 3 letih 10 mes. 20 dneh?

7. Koliko iznašajo obresti po 6 % od

a) 984 gl. v 65 dneh? *b)* 2250 gl. v 212 dneh?
c) 2127·6 gl. v 96 dneh? *d)* 3284 gl. v 192 dneh?

8. Koliko obrestij dá

a) 8888 gl. kapitala po 7 % v 12 dneh?
b) 1278 gl. kapitala po $6\frac{1}{2}$ % v 147 dneh?

9. Koliko obrestij dá

a) 945 gl. po $5\frac{1}{4}$ % od dne 1. avg. do dne 7. nov.?
b) 9379 gl. po $6\frac{1}{2}$ % od dne 25. maja do dne 3. okt.?

10. Na koliko narase kapital k v l letih, ako je po p % na jednostavne obresti naložen?

11. Na nekem posestvu je 8500 gl. dolga; čez 2 leti plača posestnik dolg in $5\frac{1}{2}$% obresti; koliko mora plačati?

12.* Kolikokrat večji je kapital od letnih obrestij *a)* po 5 %, *b)* po 4 %?

13.* Kateri kapital daje na leto obrestij

a) 20 gl., 25 gl., 30 gl., 36 gl., 82 gl., 145 gl. in to po 5 %?
b) 10 gl., 24 gl., 40 gl., 75 gl., 120 gl., 200 gl. po 4 %?

14.* Kateri kapital dá po 5 % v 3 letih

a) 75 gl., *b)* 90 gl., *c)* 125 gl. obrestij?

15. Izračunaj kapital, kateri dá

a) po 4 % v 2 let. 70 gl. obrestij,
b) po 5 % v $1\frac{1}{2}$ let. $92\frac{11}{20}$ gl. obrestij.

16. Kateri kapital dá

a) po $4\frac{1}{2}$ % v 3 let. 837 gl. obrestij?
b) po $6\frac{1}{2}$ % v $1\frac{2}{3}$ let. 390 gl. obrestij?

17.* Koliko % se računa, ako dá v 1 letu

a) 800 gl. kap. 40 gl. obrestij?
b) 1500 gl. kap. 80 gl. obrestij?
c) 600 gl. kap. 27 gl. obrestij?
d) 1400 gl. kap. 63 gl. obrestij?

*18.** Koliko % se računa, ako dá

a) 400 gl. kap. v 2 let. 28 gl. obrestij?
b) 700 » » » 4 » 140 » »
c) 800 » » » $2\frac{1}{2}$ » 120 » »

19. Po koliko % dá 4260 gl. kapitala v 3 letih 4 mesecih 710 gl. obrestij?

20. Neki kapital dá v 3 letih po $4\frac{1}{2}$% $60\frac{3}{4}$ gl. obrestij; drug, za 150 gl. večji kapital pa dá v istem času 90 gl. obrestij; po koliko % je drugi kapital na obresti naložen?

21. Po koliko % treba 9110 gl. na obresti naložiti, da dadé od dne 2. maja do dne 15. oktobra 205 gl. 23 kr. obrestij?

22. Po koliko % treba kapital na obresti naložiti, da bodo jednostavne obresti *a)* v 20, *b)* v 25, *c)* v $33\frac{1}{3}$ let. kapitalu jednake?

---

*23.** V katerem času dá

a) 225 gl. kap. po 4 % 45 gl. obrestij?
b) 320 » » » 5 % 32 » »
c) 450 » » » 6 % $94\frac{1}{2}$ » »

24. V katerem času dá

a) 5460 gl. kap. po $5\frac{1}{2}$ % 365 gl. obrestij?
b) 5244·55 gl. kap. po $5\frac{1}{4}$ % 956·3 gl. obrestij?
c) 6580·5 gl. kap. po $4\frac{3}{4}$ % 849·82 gl. obrestij?

25. Koliko časa mora kapital na obresti naložen biti, da iznašajo obresti *a)* po 4 %, *b)* po 5 %, *c)* po 6 % prav toliko kakor kapital?

2. O diskontnem računu.

§ 145.

Recimo, da kdo kako vsoto, katero ima brez obrestij še le čez nekaj časa plačati, takój izplača; v tem slučaji mu očividno ne bode treba plačati vsega, kar je dolžan, nego plačal bode le oni iznesek, kateri dá, za obresti, ki bi narastle do plačilnega roka, povečan, ves dolg; dolžniku se mora dovoliti tedaj v tem slučaji neki odbitek. Ta odbitek se zove d i s k o n t *(Discont)* ter se računa po procentih. Ako odštejemo diskont od dolga, zove se ostanek g o t o v a, s e d a n j a ali d i s k o n t o v a n a kapitalna vrednost *(bare, gegenwärtige, discontierte Wert des Capitals).*

N. pr. Nekdo hoče takój izplačati brezobresten dolg 418 gl., katere je dolžan še le čez $1\frac{1}{2}$ leta plačati; *a)* koliko odbitka se mu mora dovoliti, ako se računa 6 % diskonta na leto, *b)* koliko je gotovega plačila?

100 gl. takój je vrednih, ako se računa 6 % obrestij, čez $1\frac{1}{2}$ leta 109 gl.; obratno: 109 gl., katere treba brez obrestij še le čez $1\frac{1}{2}$ leta plačati, vrednih je sedaj le 100 gl., ali od vsakih 109 gl. treba 9 gl. diskonta odbiti, ako se plačajo $1\frac{1}{2}$ leta prej. Tedaj

a) 109 gl. dolga 9 gl. disk. $x : 9 = 418 : 109$
418 » » x » » $x = 34 \cdot 51$ gl. disk.

b) Dolga je	418	gl.
odštev. 6 % disk. za $1\frac{1}{2}$ l. . . .	34·51	»
ostane gotovega plačila	383·49	gl.

Preskušnja.

3 83·49 gl. po 6 %		Gotovo plačilo	383·49 gl.
23·00 94 gl. obrestij v 1 l.		6% obresti za $1\frac{1}{2}$ leta	34·51 »
11·50 47 » » » $\frac{1}{2}$ »		kapital čez $1\frac{1}{2}$ leta	418·— gl.
34·51 41 gl.			

Iz tega je razvidno, da je računati diskont n a d sto.

Ako bi računali diskont o d sto, dobili bi:

418 gl. po 9 %	Dolga	418 gl.
37·62 gl. diskonta	odštev. disk.	37·62 »
	ostane gotovega plačila	380·38 gl.

Toda 380·38 gl. gotovega plačila ne dalo bi s 6% obrestimi vred čez $1\frac{1}{2}$ leta dolžni kapital 418 gl., ampak le 414·61 gl.

Ker pa je račun o d sto pripravnejši nego račun n a d sto, in razloček med obema rezultatoma za kratke roke neznaten, zato računajo trgovci diskont ali skonto pri i z n e s k i h z a b l a g o (§ 136.) vsikdar po pripravnejšem računu o d sto, kajti tu gre navadno le za kratke roke. Iz prav tistih vzrokov se računa tudi menični diskont, o katerem bodemo pozneje (§ 165.) govorili, vselej o d sto.

Ako je v obče v vsota, izplačna čez n let brez obrestij, g gotovo plačilo, katero mora dolžnik plačati, ako se računa p % diskonta, ondaj velja

$$g : v = 100 : (100 + pn), \text{ tedaj } g = \frac{100 \, . \, v}{100 + pn}.$$

Naloge.

1. Kateri kapital narase v 6 letih s $5\frac{1}{2}$% obrestimi vred na 452 gl. 20 kr.? 340 ...

2. Dolžnik plača upniku 5359 gl. ter poplača s tem kapital in $5\frac{1}{2}$% obresti za 3 leta; koliko iznašajo obresti in kolik je kapital?

3. Nekdo bi moral čez 1 leto 2345 gl. plačati; a on plača takój ter dobi 5 % diskonta; koliko iznaša *a)* diskont, *b)* gotovo plačilo?

4. Koliko je vrednih 850 gl., katere treba čez 2 leti plačati, sedaj, ako se računa 5 % diskonta?

5. *A* ponuja za neko hišo 11820 gl. s tem pogojem, da bode kupnino še le čez 3 leta plačal; koliko gl. je ponudba sedaj vredna, ako se računa 5 % diskonta?

6. *A* mora *B*-ju 1245 gl. čez 5 let plačati; koliko bi mu moral čez 2 leti plačati, ako se računa $5\frac{1}{4}$ % diskonta?

7. Za 980 gl., izplačnih čez 6 mesecev, plača se takój 931 gl.: koliko % diskonta se računa?

8. *A* posodi *B*-ju 1850 gl. po 6 % ter mu obresti za 1 leto precej odtegne; za koliko je *B* na škodi, kateri bi moral obresti prav za prav še le koncem leta plačati?

9. *A* ponuja za neko posestvo 40000 gl. v gotovini, *B* pa 44000 gl., in sicer hoče 20000 gl. precej, ostalo vsoto pa čez 2 leti plačati. Kateri ponuja več, ako se računa $5\frac{3}{4}$ % diskonta?

3. O rokovnem računu.

§ 146.

Dostikrat se plačajo brezobrestne vsote, katere bi trebalo drugo za drugo ob določenih rokih *(Termine)* plačati, vse kar ob jednem, ali pa ob druzih rokih nego je bilo s prva določeno. Kedaj naj se to zgodi, da ne bode niti dolžniku niti upniku na škodo, uči rokovni račun *(Terminrechnung)*.

Recimo, da so c_1, c_2, c_3 oni kapitali, katere treba oziroma čez m_1, m_2, m_3 let (mesecev) brez obrestij plačati. Vzemimo dalje, da se plačajo vsi ob jednem in to čez t let (mesecev).

Da ne bode na ta način oškodovan niti dolžnik niti upnik, treba, da je gotova vrednost vsega plačila jednaka vsoti gotovih vrednostij vseh posamičnih plačil. Določujoč gotove vrednosti bi morali računati diskont nad sto (Hoffmann-ov način). V resnici pa se navadno uporablja ne takó natančni, a pripravnejši Carpsow-ov način, kateremu je podstava diskont od sto, t. j. obresti. Ta način se opira tedaj na izrek: Obresti vsega plačila $c_1 + c_2 + c_3$ morajo tolike biti kakor obresti posamičnih plačil c_1, c_2, c_3 skupaj. Tedaj, ako vzamemo obrestno mero po $p\,\%$, je

$$\frac{(c_1 + c_2 + c_3)pt}{100} = \frac{c_1 p m_1}{100} + \frac{c_2 p m_2}{100} + \frac{c_3 p m_3}{100},$$

ali, ako razdelimo s $\frac{p}{100}$,

$$(c_1 + c_2 + c_3)t = c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3.$$

Iz te jednačbe je môči vsako posamično količino določiti, ako so znane vse druge.

Navadno treba poiskati t, t. j. poprečni plačilni rok *(mittlerer Zahlungstermin)*. Iz prejšnje jednačbe dobimo

$$t = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3}{c_1 + c_2 + c_3};$$

t. j. poprečni plačilni rok najdemo, ako pomnožimo vsako posamično plačilo z njegovim rokom ter vsoto teh produktov razdelimo z vsoto vseh posamičnih plačil.

N. pr. *A* je kupil hišo za 8000 gl. s tem pogojem, da plača kupnino v več obrokih, ne da bi se mu računale obresti, in sicer: 3500 gl. čez 2 meseca, 2000 gl. čez 3 mesece, 1500 gl. čez 4 mesece in 1000 gl. čez 5 mesecev; kedaj plača lahko vso kupnino ob jednem? (Poprečni plačilni rok).

3500	gl.	čez	2	mes. . . .	7000
2000	»	»	3	» . . .	6000
1500	»	»	4	» . . .	6000
1000	»	»	5	» . . .	5000
8000					24000 : 8000 = 3 mes.

Kakó se lahko prepričaš, je-li rezultat prav?

Dostavek. Kadar so posamična plačila jednaka, in sicer vsako $= c$, ondaj je poprečni plačilni rok

$$t = \frac{cm_1 + cm_2 + cm_3}{3c} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3},$$

tedaj jednak poprečnemu številu posamičnih rokov.

§ 147.

Ako treba kapitale c_1, c_2, c_3 oziroma čez m_1, m_2, m_3 let (mesecev) plačati, plača pa se kapital k_1 čez n_1, kapital k_2 čez n_2 let (mesecev), ondaj nastane vprašanje, kedaj treba ostanek $(c_1 + c_2 + c_3) - (k_1 + k_2) = r$ plačati, da ne bode niti dolžnik niti upnik na škodi.

Ako zaznamenujemo število teh let (mesecev) s t_1, ondaj mora biti, prav takó kakor v § 146., za katere koli procente p

$$\frac{k_1 p n_1}{100} + \frac{k_2 p n_2}{100} + \frac{r p t_1}{100} = \frac{c_1 p m_1}{100} + \frac{c_2 p m_2}{100} + \frac{c_3 p m_3}{100},$$

ali

$$k_1 n_1 + k_2 n_2 + r t_1 = c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3.$$

Iz te jednačbe pa dobimo

$$t_1 = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3) - (k_1 n_1 + k_2 n_2)}{r}.$$

N. pr. A bi moral čez 3 leta 300 gl., čez 4 leta 500 gl. in čez 5 let 600 gl. plačati; plača pa že čez 2 leti 400 gl. in čez $2\frac{1}{2}$ leta 600 gl.; kedaj bode moral ostanek plačati?

	300 gl. . 3 = 900 gl.		400 gl. . 2 = 800 gl.	
	500 » . 4 = 2000 »		600 » . $2\frac{1}{2}$ = 1500 »	
	600 » . 5 = 3000 »		1000 gl.	2300 gl.
	1400 gl.	5900 gl.		
	1000 »	2300 »		
ostanek	400 gl.	3600 gl. : 400 gl. = 9.		

Ostanek 400 gl. treba mu bode tedaj še le čez 9 let (od početka računano) plačati.

Naloge.

*1.** Štirje kapitali po 600 gl. so čez 4, 5, 7, 8 mesecev izplačni; čez koliko mesecev se plačajo lahko vsi ob jednem?

*2.** 4800 gl. treba v treh jednakih obrokih čez 2, $2\frac{1}{2}$ in 3 leta plačati; kedaj se plača lahko ves dolg na jedenkrat?

*3.** Nekdo je dolžán 1200 gl. in od teh mora vsake 3 mesece po 300 gl. odplačati; kedaj bi moral ves dolg ob jednem plačati?

4. A mora 10000 gl. v 4 obrokih plačati, in sicer: 3000 gl. čez 4 mesece, 2500 gl. čez 6 mesecev, 2000 gl. čez 8 mesecev in kar ostane čez 1 leto; kedaj plača lahko vse ob jednem?

5. Kedaj treba plačati 1800 gl. ob jednem, ako je izplačnih 300 gl. čez 1 leto, 400 gl. čez $1\frac{1}{4}$ leta, 500 gl. čez $2\frac{1}{2}$ leta in ostanek čez $3\frac{1}{3}$ leta in to brez obrestij?

6. A mora B-ju plačati: 1600 gl. dne 1. julija, 1400 gl. dne 1. septembra, 1000 gl. dne 1. novembra; kedaj plača lahko vse tri kapitale ob jednem?

Roke računaj od dne 1. julija.

7. A bi moral plačati 2000 gl. čez 2 leti in 1600 gl. čez 4 leta, plača pa 2400 gl. že čez $1\frac{1}{6}$ leta; kedaj bode moral ostanek plačati?

8. Nekdo bi moral 3000 gl. čez 8 mesecev plačati, plača pa 1800 gl. takój; kedaj bode moral ostanek plačati?

9. A bi moral plačati 800 gl. čez 2 meseca, 500 gl. čez 3 mesece in 600 gl. čez 4 mesece, plača pa 800 gl. čez 1 mesec in 600 gl. čez $3\frac{1}{2}$ meseca; kedaj bode moral ostalih 500 gl. plačati?

4. O obrestnoobrestnem računu.

§ 148.

Ako se pridevajo obresti koncem vsacega leta ali poluleta h kapitalu ter se s tem vred zopet na obresti nalagajo, ondaj pravimo: kapital je naložen na obrestne obresti. (§ 141.)

Pri obrestnoobrestnem računu imamo, prav takó kakor pri jednostavnem obrestnem računu, štiri količine, namreč: kapital, čas, procente in obresti. Obrestna doba je tudi tu jedno leto, ako se izrekoma nasprotno ne poudarja. Ako je kapital po $p\,\%$ na obresti naložen, narase 100 kapitalnih jednot (goldinarjev, mark) v jednem letu z obrestimi vred na $100 + p$; 1 kapitalna jednota je tedaj vredna čez 1 leto z obrestimi vred $\frac{100 + p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$. Vrednost $1 + \frac{p}{100}$, na katero narase kapitalna jednota z obrestimi v 1 letu, imenujemo navadno obrestno mero *(Zinsfuss)*. Za $4\,\%$ je tedaj obrestna mera $1 + \frac{4}{100} = 1 \cdot 04$.

§ 149.

Naloga. Na koliko narase kapital a v m letih, ako ga po $p\,\%$ na obrestne obresti naložimo?

Ker je vredna kapitalna jednota z obrestimi vred čez 1 leto $1 + \frac{p}{100}$, zato ima kapital a čez 1 leto vrednost

$$e_1 = a\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

t. j. vrednost, na katero narase kapital v jednem letu, dobimo, pomnoživši njega početno vrednost z obrestno mero.

Naloživši novi kapital e_1 zopet jedno leto na obresti, dobimo koncem leta

$$e_2 = e_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

V 3, 4, ... letih bode narasel kapital na

$$e_3 = e_2\left(1+\frac{p}{100}\right) = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3,$$

$$e_4 = e_3\left(1+\frac{p}{100}\right) = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^4,$$

i. t. d.

Kapital bode imel tedaj koncem *m*nega leta vrednost

$$e_m = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^m,$$

t. j.: Končni kapital je jednak začetnemu kapitalu, pomnoženemu s toliko potenco obrestne mere, kolikor je dob.

Ako je naloženih n. pr. 2000 gl. po 5 % na obrestne obresti, ondaj narasejo:

v 1 let. na 2000 . 1·05 gl.
» 2 » » 2000 . $(1 \cdot 05)^2$ »
» 3 » » 2000 . $(1 \cdot 05)^3$ »
. . . .
» 10 » » 2000 . $(1 \cdot 05)^{10}$ »

Ako se obresti ne pridevajo h kapitalu koncem vsacega leta nego koncem vsacega poluleta, ondaj treba vzeti dvakrat toliko dob kakor je danih let, a za vsako dobo le polovico procentov, tedaj v formuli $e_m = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^m$ za p in m oziroma $\frac{p}{2}$ in $2m$. N. pr. za 4 % in 8 let dobili bi $e_{16} = a \,.\, (1 \cdot 02)^{16}$.

V naslednji tablici so sestavljene že izračunane potence obrestne mere za 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5 procentov in za $m = 1, 2, 3, \ldots 29, 30$.

m	2 %	$2\frac{1}{2}$ %	3 %	4 %	5 %
1	1·02	1·025	1·03	1·04	1·05
2	1·0404	1·050625	1·0609	1·0816	1·1025
3	1·061208	1·076891	1·092727	1·124864	1·157625
4	1·082432	1·103813	1·125509	1·169859	1·215506
5	1·104081	1·131408	1·159274	1·216653	1·276282
6	1·126162	1·159693	1·194052	1·265319	1·340096
7	1·148686	1·188686	1·229874	1·315932	1·407100
8	1·171659	1·218403	1·266770	1·368569	1·477455
9	1·195093	1·248863	1·304773	1·423312	1·551328
10	1·218994	1·280085	1·343916	1·480244	1·628895
11	1·243374	1·312087	1·384234	1·539454	1·710339
12	1·268242	1·344889	1·425761	1·601032	1·795856
13	1·293607	1·378511	1·468534	1·665074	1·885649
14	1·319479	1·412974	1·512590	1·731676	1·979932
15	1·345868	1·448298	1·557967	1·800944	2·078928

m	2 %	$2\frac{1}{2}$ %	3 %	4 %	5 %
16	1·372786	1·484506	1·604706	1·872981	2·182875
17	1·400241	1·521618	1·652848	1·947900	2·292018
18	1·428246	1·559659	1·702433	2·025817	2·406619
19	1·456811	1·598650	1·753506	2·106849	2·526950
20	1·485947	1·638616	1·806111	2·191123	2·653298
21	1·515666	1·679582	1·860295	2·278768	2·785963
22	1·545980	1·721571	1·916103	2·369919	2·925261
23	1·576899	1·764611	1·973587	2·464716	3·071524
24	1·608437	1·808726	2·032794	2·563304	3·225100
25	1·640606	1·853944	2·093778	2·665836	3·386355
26	1·673418	1·900293	2·156591	2·772470	3·555673
27	1·706886	1·947800	2·221289	2·883369	3·733456
28	1·741024	1·996495	2·287928	2·998703	3·920129
29	1·775845	2·046407	2·356566	3·118651	4·116136
30	1·811362	2·097568	2·427262	3·243398	4·321942

N. pr.

1.) Koliko bode vrednih 5800 gl. čez 20 let, ako se 3% obresti celoletno kapitalizujejo?

$$5800 \,.\, (1\cdot03)^{20} = 5800 \,.\, 1\cdot806111 = 10475\cdot44 \text{ gl.}$$

2.) Na koliko narase kapital 1234 gl. v 7 letih, ako je po 4 % na obrestne obresti naložen in se obresti poluletno kapitalizujejo? Tu treba vzeti 14 poluletij in procente za pol leta, namreč 2 %; tedaj

$$1234 \,.\, (1\cdot02)^{14} = 1234 \,.\, 1\cdot319479 = 1628\cdot24 \text{ gl.}$$

§ 150.

Ako pa treba obratno določiti vrednost, katero je imel kapital pred toliko in toliko časom in to oziraje se na obrestne obresti, t. j. iz končnega kapitala početni kapital izračunati, ondaj dobimo iz formule

$$e_m = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m \text{ takój}$$

$$a = \frac{e_m}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m} = e_m \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m};$$

t. j.: Početni kapital je jednak končnemu kapitalu, razdeljenemu s toliko potenco obrestne mere, kolikor je dob, ali jednak končnemu kapitalu, pomnoženemu z recipročno vrednostjo te potence.

N. pr. 2000 gl. je bilo vrednih pred 12 leti, ako se računa 5 % obrestnih obrestij

$$2000 \cdot \frac{1}{(1\cdot05)^{12}} \text{ gl.}$$

V naslednji tablici so sestavljene že izračunane recipročne vrednosti dotičnih potenc obrestne mere za 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5 procentov in to za $m = 1, 2, 3, \ldots 29, 30$.

m	2 %	$2\frac{1}{2}$ %	3 %	4 %	5 %
1	0·980392	0·975610	0·970874	0·961538	0·952381
2	0·961169	0·951814	0·942596	0·924556	0·907029
3	0·942322	0·928599	0·915142	0·888996	0·863838
4	0·923845	0·905951	0·888487	0·854804	0·822702
5	0·905731	0·883854	0·862609	0·821927	0·783526
6	0·887971	0·862297	0·837484	0·790315	0·746215
7	0·870560	0·841265	0·813092	0·759918	0·710681
8	0·853490	0·820747	0·789409	0·730690	0·676839
9	0·836755	0·800728	0·766417	0·702587	0·644609
10	0·820348	0·781198	0·744094	0·675564	0·613913
11	0·804263	0·762145	0·722421	0·649581	0·584679
12	0·788493	0·743556	0·701380	0·624597	0·556837
13	0·773033	0·725420	0·680951	0·600574	0·530321
14	0·757875	0·707727	0·661118	0·577475	0·505068
15	0·743015	0·690466	0·641862	0·555265	0·481017
16	0·728446	0·673625	0·623167	0·533908	0·458112
17	0·714163	0·657195	0·605016	0·513373	0·436297
18	0·700159	0·641166	0·587395	0·493628	0·415521
19	0·686431	0·625528	0·570286	0·474642	0·395734
20	0·672971	0·610271	0·553676	0·456387	0·376889
21	0·659776	0·595386	0·537549	0·438834	0·358942
22	0·646839	0·580865	0·521893	0·421955	0·341850
23	0·634156	0·566697	0·506692	0·405726	0·325571
24	0·621722	0·552875	0·491934	0·390121	0·310068
25	0·609531	0·539391	0·477606	0·375117	0·295303
26	0·597579	0·526235	0·463695	0·360689	0·281241
27	0·585862	0·513400	0·450189	0·346817	0·267848
28	0·574375	0·500878	0·437077	0·333477	0·255094
29	0·563112	0·488661	0·424346	0·320651	0·242946
30	0·552071	0·476743	0·411987	0·308319	0·231377

N. pr.

1.) Koliko je bilo vrednih 7310·75 gl. pred 15 leti, ako se računa 5 % obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

$$7310{\cdot}75 \cdot \frac{1}{(1{\cdot}05)^{15}} = 7310{\cdot}75 \,.\, 0{\cdot}481017 = 3516{\cdot}6 \text{ gl.}$$

2.) Kateri kapital treba po 4 % na obrestne obresti naložiti, da bode narasel pri poluletnem kapitalizovanji v 12 letih na 5200 gl.?

$$5200 \cdot \frac{1}{(1{\cdot}02)^{24}} = 5200 \,.\, 0{\cdot}621722 = 3232{\cdot}95 \text{ gl.}$$

Dostavek. Formule, katere smo dobili v §§ 149. in 150. za obrestne obresti, veljajo tudi za druge v stalnem razmerji rastoče količine, n. pr. za prirast prebivalstva v deželi, lesú v gozdu, i. t. d.

Naloge.

1. Na koliko narase 1350 gl. v 24 letih, ako so po 4 % na obrestne obresti naloženi?

2. Na koliko narase, ako se računajo obrestne obresti:

a) 3280 gl. po 5 % v 15 letih?
b) 6340 » » 4 % » 22 »
c) 5165 » » 3 % » 28 »

3. Nekdo ima v hranilnici 4600 gl. Na koliko bode narasel ta kapital v 11 letih, ako plačuje hranilnica po 5 % na leto ter obresti poluletno kapitalizuje?

4. Nekdo naloži 3560 gl. po 4 % s tem pogojem na obresti, da se le-té poluletno kapitalizujejo; na koliko bode narasel kapital v 10 letih?

5. Gozd ima sedaj 9800 m^3 lesú; koliko ga bode imel čez 10 let, ako ga vsako leto po 3 % priraste?

6. Neko mesto je imelo leta 1850. 35 846 prebivalcev; koliko jih je imelo leta 1880., ako se je pomnožilo prebivalstvo vsako leto za $2\frac{1}{2}$ %?

7. Nekdo mora plačati 3000 gl. čez 1 leto, 2000 gl. čez 2 leti, 1000 gl. čez 3 leta in 4000 gl. čez 4 leta; koliko bodo vsi ti izneski čez 4 leta vredni, ako se računa 5 % obrestnih obrestij in se obresti celoletno kapitalizujejo?

8. Nekdo je nosil 4 leta zaporedoma v začetku vsacega poluleta po 140 gl. v hranilnico; koliko si je prihranil v tem času, ako plačuje hranilnica za pol leta 2 % obrestij in te poluletno kapitalizuje?

---

9. Koliko je bilo vrednih 2485 gl. pred 5 leti, ako se računa 5 % obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

10. Koliko je 8500 gl., izplačnih čez 9 let, sedaj vrednih, ako se računa 4 % obrestnih obrestij ter celoletno kapitalizovanje?

11. Koliko je sedaj vrednih

a) 750 gl., izplačnih čez 25 l., ako se računa 3 % obr. obrestij?
b) 4060 » » » 17 » » » » 4 % » »
c) 6372 » » » 12 » » » » 5 % » »

12. Kateri kapital treba po 4 % na obrestne obresti naložiti, da narase v 7 letih na 4711·03 gl.?

13. Kateri kapital treba po 5 % na obrestne obresti s poluletnim kapitalizovanjem naložiti, da narase v 20 letih na 8000 gl.?

14. Neka dežela ima sedaj 1258750 prebivalcev; koliko jih je imela pred 25 leti, ako jih je vsako leto po $2\frac{1}{2}$ % priraslo?

15. Nekdo hoče njivo prodati. *A* mu ponuja 3600 gl. v gotovini, *B* 4250 gl., izplačnih brez obrestij čez 2 leti, *C* 4310 gl., izplačnih brez obrestij čez 3 leta. Katera ponudba je za prodajalca najugodnejša, ako se računa 5 % obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

Da bode môči ponudbe drugo z drugo primerjati, treba njih vrednost za isti čas izračunati, torej njih sedanjo ali pa njih vrednost čez 3 leta.

16. Nekdo hoče dobivati 3 leta koncem vsakega leta po 1000 gl.; koliko mora v ta namen takój naložiti, ako se računa 5 % obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

17. Koliko mora *A* *B*-ju dati, da mu bode ta 5 let zaporedoma koncem vsacega leta po 586 gl. izplačeval, ako se računa 4 % obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

18. *A* prevzame neko hišo ter se zaveže, da bode dosedanjemu posestniku 15 let zaporedoma koncem vsacega leta po 600 gl. izplačeval; na koliko se je hiša cenila, ako se računa 5 % obrestnih obrestij?

III. O družbenem računu.

§ 151.

Družbeni račun ali razdelbeno pravilo *(Gesellschaftsrechnung, Theilregel)* uporablja se tedaj, kadar treba razdeliti dano število takó na več delov, da so ti deli med seboj v istem razmerji kakor druga dana števila. Števila, izražujoča razmerje med posamičnimi deli, zovemo razmerska števila *(Verhältniszahlen)*.

Družbeni račun je jednostaven ali sestavljen; prvega uporabljamo, kadar je dana le jedna vrsta, druzega pa, kadar je danih več vrst razmerskih števil.

1. O jednostavnem družbenem računu.

§ 152.

Recimo, da je s število, katero nam je razdeliti, a, b in c pa so sorazmerska števila. Ako imenujemo neznane dele x, y in z, velja

$$x + y + z = s, \text{ in}$$
$$x : y : z = a : b : c.$$

Iz tega zaporednega sorazmerja dobimo té-le dve jednostavni sorazmerji:

$$x : y = a : b \quad \text{in} \quad y : z = b : c \text{ (dostavek k § 124.)},$$

ali, ako zamenjamo v obeh notranja člena,

$$x : a = y : b \quad \text{in} \quad y : b = z : c, \quad \text{tedaj}$$

$$x : a = y : b = z : c.$$

Odtod pa dobimo, uporabljajoč dostavek k § 123.,

$$\begin{aligned}(x + y + z) : (a + b + c) &= x : a \\ &= y : b \\ &= z : c,\end{aligned}$$

ali, ker je po pogoji $x + y + z = s$,

$$\begin{aligned} s : (a + b + c) &= x : a, \quad \text{tedaj} \quad x = \frac{s}{a + b + c} \cdot a; \\ s : (a + b + c) &= y : b, \quad\quad » \quad\quad y = \frac{s}{a + b + c} \cdot b; \\ s : (a + b + c) &= z : c, \quad\quad » \quad\quad z = \frac{s}{a + b + c} \cdot c. \end{aligned}$$

Pri jednostavnem družbenem računu razdeli tedaj število, katero treba razdejati na dele, z vsoto vseh razmerskih števil, dobljeni kvocijent pa pomnoži zaporedoma z vsakim razmerskim številom; produkti so iskani deli.

Ako so razmerska števila ulomki, treba vsa z najmanjšim skupnim imenovalcem pomnožiti ter takisto na cela števila pretvoriti; ako imajo vsa razmerska števila kako skupno mero, treba jih s to skupno mero okrajšati.

N. pr. Med štiri osebe A, B, C, D treba razdeliti 5610 gl. v razmerji števil $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$.

A $\frac{1}{2}$	6;	170 gl. . 6 = 1020 gl.	dobi A,
B $\frac{2}{3}$	8;	170 » . 8 = 1360 »	» B,
C $\frac{3}{4}$	9;	170 » . 9 = 1530 »	» C,
D $\frac{5}{6}$	10;	170 » . 10 = 1700 »	» D,
5610 gl. : 33 = 170 gl.		5610 gl.	vsi skupaj.

Prav tisto pravilo dobimo tudi, uporabljajoč sklepovni račun. Vzemimo, da treba n. pr. 640 gl. med tri osebe A, B, C v razmerji števil 9, 7 in 4 razdeliti; koliko dobi vsaka oseba?

A dobi 9, B 7 in C 4, tedaj vsi skupaj 20 jednakih delov; 20i del od 640 gl. je 32 gl ; tedaj dobi

A 9krat 32 gl. = 288 gl.
B 7krat 32 » = 224 »
C 4krat 32 » = 128 »

Takisto sklepamo posebno tedaj, kadar na pamet računamo.

2. O sestavljenem družbenem računu.

§ 153.

Vsak sestavljen družbeni račun je môči izpremeniti na jednostaven.

N. pr. Trije trgovci so se združili za neko podjetje, pri katerem je bilo 2300 gl. dobička; kakó jim je ta dobiček razdeliti, ako se je udeleževal podjetja *A* z 2000 gl. 8 mesecev, *B* s 4000 gl. 6 mesecev, *C* s 8000 gl. 5 mesecev?

Tu treba dobiček razdeliti ne le v razmerji vlog, ampak tudi v razmerji časa. Toda, ker je vse jedno

ali	se	udeležuje	*A*	z	2000 gl.	8	mes.	ali	pa	s	16000 gl.	1	mesec,
»	»	»	*B*	s	4000 »	6	»	»	»	»	24000 »	1	»
»	»	»	*C*	s	8000 »	5	»	»	»	»	40000 »	1	»

zato morajo dobiti vsi trije v obeh slučajih prav toliko dobička. A v druzem slučaji se udeležujejo vsi trije jednako dolgo podjetja, in zato treba razdeliti dobiček med nje le po razmerji vlog, t. j. produktov 16000 gl., 24000 gl. in 40000 gl., katere smatramo lahko za razmerska števila jednostavnega družbenega računa. Račun stoji takó-le:

A 2000 gl. 8 mes.	$16\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}$	2	230 gl. $\times$ 2 = 460 gl.
B 4000 » 6 »	$24\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}$	3	230 » $\times$ 3 = 690 »
C 8000 » 5 »	$40\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}$	5	230 » $\times$ 5 = 1150 »
	2300 gl. : 10 = 230 gl.		2300 gl.

Pri sestavljenem družbenem računu pomnoži tedaj vsa k istemu delu spadajoča razmerska števila drugo z druzim, dobljene produkte pa smatraj za razmerska števila jednostavnega družbenega računa in le-téga uporabi potem v razrešitev naloge.

Naloge.

1.* 175 gl. treba med dve osebi *A* in *B* takó razdeliti, da dobi *A* 2, *B* 3 jednake dele; koliko bode dobila vsaka oseba?

2.* Razstavi število 160 takó na dva dela, da se bosta imela kakor 7 : 9; kolika sta ta dva dela?

3.* Štiri osebe kupijo srečko; *A* dá 50 kr., *B* dá 1 gl., *C* 1 gl. 50 kr., *D* 2 gl. Srečki pripade dobitek 8000 gl.; koliko dobi vsaka oseba?

4. Za neko skupno podjetje dá *A* $\frac{1}{2}$, *B* $\frac{1}{5}$ in *C* ostali del potrebne vsote. Dobička imajo 240 gl.; koliko dobi vsak?

5. Za belo steklo se vzame 13 delov kremenjaka, 4 dele pepelíke in 1 del krede; koliko treba vzeti vsake tvarine za 125 *kg* stekla?

6. Trgovec razpošlje 2133 *kg* kave, 1735 *kg* cukra in 923 *kg* popra ter plača vozarine 65 gl. 30 kr.; koliko vozarine pride na vsaktero blago?

7. Trgovec je dolžán: *A*-ju 2000 gl., *B*-ju 3200 gl., *C*-ju 1200 gl., *D*-ju 2800 gl., *E*-ju 4600 gl., imenja pa ima le 8625 gl.; koliko bode dobil vsak upnik pri delitvi in koliko procentov bode vsak izgubil?

8. 67270 gl. treba razdeliti med pet oseb v razmerji števil $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{32}, \frac{9}{40}, \frac{13}{60}$; koliko dobode vsaka?

9. Nekdo zapusti 15845 gl. imenja, katere je med njegove tri dediče takó razdeliti, da dobi *A* 2krat toliko kakor *B*, in *B* 3krat toliko kakor *C*; koliko dobi vsak dedič?

10. Med tri osebe treba 9150 gl. takó razdeliti, da dobi *A* tolikokrat po 5 gl. kakor *B* po 3 gl., in *C* tolikokrat po 3 gl. kakor *B* po 4 gl.; koliko dobode vsaka oseba?

11. Trije trgovci kupijo neko blago; pri prodaji imajo 15 % dobička in tega razdelé med seboj po razmerji svojih vlog. Koliko je vsak izmed njih vložil, ako ima *A* 810 gl., *B* 350 gl. in *C* 220 gl. dobička?

12. Trije trgovci so zložili 16000 gl., ter nekaj časa skupno trgovali. Ko so kupčijo razdrli, dobil je *A* 5400 gl, *B* 6200 gl., *C* 8400 gl.; koliko je bil vsak vložil in koliko % je bilo dobička?

---

13. Tri osebe so skupno trgovale. *A* je vložil 1500 gl. na 1 leto, *B* 1200 gl. na 6 mesecev, *C* 1000 gl. na 8 mesecev; dobička imajo 960 gl.; koliko tega dobička dobode vsak?

14. Tri občine dobé za neko delo 500 gl. Iz občine *A* je delalo 11 delavcev 10 dnij po 9 ur na dan; iz občine *B* 9 delavcev 9 dnij po 10 ur na dan, iz občine *C* 15 delavcev 5 dnij po 6 ur na dan; koliko plačila dobode vsaka občina?

15. *A* začne trgovati početkom leta z 8000 gl. kapitala; dva meseca pozneje pristopi *B* s 5000 gl., in še dva meseca pozneje *C* s 3000 gl. Koncem leta imajo 1059 gl. dobička; koliko tega dobička dobode vsak?

16. Za neko podjetje se je potrebovalo 9000 gl.; *A* je dal $\frac{1}{3}$ na 10 mesecev, *B* $\frac{4}{9}$ na 8 mesecev, *C* pa ostali del vsote na 6 mesecev; računski sklep je izkazal 629 gl. dobička; kakó se je moral ta razdeliti?

17. *A* začne trgovati dne 1. januvarja z 8000 gl. kapitala; dne 1. maja pristopi *B* s 5000 gl., in dne 1. julija *C* s 6000 gl.; koncem decembra je bilo 1180 gl. 33 kr. dobička. Koliko tega dobička dobode vsak družabnik?

IV. O zmesnem računu.

§ 154.

Dostikrat je treba več istovrstnih, a po vrednosti ali dobroti različnih stvarij takó zmešati, da dobimo zmes srednje vrednosti. Pri tem paziti je na té-le količine: 1.) na množino posamičnih sestavin, 2.) na njih vrednost in 3.) na vrednost zmesi.

Račun, kateri uči, kakó je katero koli teh količin iz druzih najti, zovemo v obče zmesni račun *(Mischungsrechnung)*. Sèm spadajo zelo različne naloge, a izmed vseh imata té-le dve za praktično življenje največjo važnost:

1.) Kakó je najti, koliko je vredna jednota zmesi, katero smo dobili iz več istovrstnih stvarij različne vrednosti. Ta račun imenujemo poprečni račun *(Durchschnittsrechnung)*.

2.) Kakó je najti razmerje, v katerem treba dvoje ali več istovrstnih stvarij različne vrednosti zmešati, da dobimo zmes srednje vrednosti. Zmesni račun imenujemo v tem slučaji aligacijski račun *(Alligationsrechnung)*.

§ 155.

1.) Podstava poprečnemu računu so prav jednostavni sklepi. N. pr. Trgovec zmeša trojo kavo: 6 *kg* po 1·92 gl., 8 *kg* po 1·80 gl. in 10 *kg* po 1·68 gl.; koliko velja 1 *kg* zmesi?

6 *kg*	po	1·92 gl.	velja	11·52	gl.
8 »	»	1·80 »	»	14·40	»
10 »	»	1·68 »	»	16·80	»
24 *kg* zmesi				42·72	gl.
tedaj velja 1 *kg* zmesi				1·78	gl.

2.) Pri aligacijskem računu pa treba na poseben način sklepati; kakó, pokazati hočemo na téj-le nalogi:

Krčmar hoče imeti vino po 20 gl. *hl*, ima pa le vino po 16 gl. in po 30 gl. *hl*; v katerem razmerji mora to dvoje vino zmešati, da bode veljal *hl* zmesi ravno 20 gl.?

1 *hl* boljšega vina velja 30 gl. — 20 gl. = 10 gl. več, 1 *hl* slabejšega vina pa 20 gl. — 16 gl. = 4 gl. menj kakor 1 *hl* zmesi. Pri prodaji bode tedaj pri vsacih 4 *hl* boljšega vina, ki so se za zmes uporabili, prav toliko izgube, kolikor bode pri vsacih 10 *hl* slabšega vina dobička, namreč 4 × 10 = 40 gl. Da se tedaj dobiček in izguba poravnata, vzeti bode treba na vsake 4 *hl* boljšega vina 10 *hl* slabšega, t. j. boljše in slabše vino treba zmešati v razmerji 4 : 10 ali 2 : 5.

Pismeni račun stoji takó-le:

$$\begin{array}{rr|r|r} & 30 & 4 & 2 \\ 20 & & & \\ & 16 & 10 & 5 \end{array}$$

vzemimo v obče, da sta A in B dve istovrstni tvarini, in da ima njiju jednota vrednost a, oziroma b in da je $a > b$. V katerem razmerji treba te dve tvarini zmešati, ako hočemo, da bode imela jednota zmesi srednjo vrednost m, tedaj $a > m > b$?

Recimo, da treba zmešati x jednot tvarine A z y jednotami tvarine B. Ker morata pa sestavini, kateri smo za zmes porabili, toliko vredni biti kakor zmes sama, velja

$$x \,.\, a + y \,.\, b = (x + y) \,.\, m, \text{ tedaj}$$
$$x(a - m) = y(m - b), \text{ ali}$$
$$x : y = (m - b) : (a - m);$$

t. j.: Množina boljše in množina slabejše tvarine se imata kakor diferenca med srednjo in slabejšo vrednostjo in diferenca med boljšo in srednjo vrednostjo.

Račun stoji takó-le:

$$b \mid a - m.$$

Kakó je ravnati, kadar je dana tudi množina zmesi, uči družbeni račun.

N. pr. Trgovec ima dvojo kavo, namreč *kg* po 160 kr. in po 148 kr.; od te dvoje kave hoče napraviti 18 *kg* zmesi po 156 kr.; koliko *kg* vsake kave bode moral v ta namen vzeti?

$$156\begin{array}{r|r|r} 160 & 8 & 2 \\ \hline 148 & 4 & 1 \end{array}$$

18 *kg* : 3 = 6 *kg*

6 *kg* × 2 = 12 *kg* po 160 kr.
6 » × 1 = 6 » » 148 »

§ 156.

Kadar treba več nego dvoje blago zmešati ter v ta namen poiskati razmerskih števil posamičnim sestavinam, ki se zmešajo, velja načelo: ako zmešamo vselej po jedno boljše in po jedno slabše blago takó, da dobimo zmes zahtevane srednje vrste, ondaj dadé gotovo tudi vse te zmesi skupaj isto srednjo vrsto. Take naloge dadé po več razrešitev, so tedaj v obče nedoločene.

N. pr. 1.) Troje blago po 48, 36 in 24 kr. *kg* treba takó zmešati, da bode veljal *kg* zmesi 40 kr.; koliko delov treba vsacega vzeti?

40	48	4 + 16	20	5
	36	8	8	2
	24	8	8	2

Tu zmešamo najprej blago po 48 kr. in po 36 kr., potem po 48 kr. in po 24 kr.; za razmerska števila dobimo 20, 8 in 8, ali 5, 2 in 2. Ako vzamemo n. pr. 5 *kg* po 48 kr. in 2 *kg* po 36 kr., potem treba še 2 *kg* po 24 kr. dodati, ako hočemo dobiti zmes po 40 kr. *kg*. In res

5 *kg* po 48 kr.	=	240 kr.
2 » » 36 »	=	72 »
2 » » 24 »	=	48 »
9 *kg* zmesi velja		360 kr.
1 » » »		40 »

2.) Krčmar hoče čvetero vino, *hl* po 15 gl., po 18 gl., po 24 gl. in po 28 gl. takó zmešati, da bode dobil 38 *hl* po 20 gl.; koliko *hl* lahko vzame v ta namen vsacega vina?

a) Vzemi najboljšo in najslabejšo vrsto, in potem obe srednji vrsti.

	A 15	8	2 *hl* × 8 = 16 *hl* po 15 gl.	= 240 gl.
20	*B* 18	4	2 » × 4 = 8 » » 18 »	= 144 »
	C 24	2	2 » × 2 = 4 » » 24 »	= 96 »
	D 28	5	2 » × 5 = 10 » » 28 »	= 280 »
38 *hl* : 19 = 2 *hl*			38 *hl*	760 gl.
			1 » velja tedaj res	20 »

b) Vzemi *A* in *C*, potem *B* in *D*.

	A 15	4	2 *hl* × 4 = 8 *hl* po 15 gl.	= 120 gl.
20	*B* 18	8	2 » × 8 = 16 » » 18 »	= 288 »
	C 24	5	2 » × 5 = 10 » » 24 »	= 240 »
	D 28	2	2 » × 2 = 4 » » 28 »	= 112 »
38 *hl* : 19 = 2 *hl*			38 *hl*	760 gl.
			tedaj velja 1 »	20 »

c) Vzemi *A* in *C*, *A* in *D*, *B* in *C*.

	A 15	4 + 8	12	$1\frac{5}{14}$ *hl* × 12 = $16\frac{4}{14}$ *hl* po 15 gl.	= $244\frac{4}{14}$ gl.
20	*B* 18	4	4	$1\frac{5}{14}$ » × 4 = $5\frac{6}{14}$ » » 18 »	= $97\frac{10}{14}$ »
	C 24	5 + 2	7	$1\frac{5}{14}$ » × 7 = $9\frac{7}{14}$ » » 24 »	= 228 »
	D 28	5	5	$1\frac{5}{14}$ » × 5 = $6\frac{11}{14}$ » » 28 »	= 190 »
38 *hl* : 28 = $1\frac{5}{14}$ *hl*				38 *hl*	760 gl.
				tedaj 1 »	20 »

Koliko sestav je tu še mogočih, in v katerem slučaji bi bila jedna ali druga ugodnejša od ostalih?

Naloge.

*1.** Nekdo zmeša 1 *l* vina po 36 kr. z 1 *l* po 40 kr. in 1 *l* po 56 kr.; koliko velja 1 *l* zmesi?

*2.** Nekega dne je kazal toplomer zjutraj 16°, o poludne 22°, zvečer 13°; kolika je bila poprečna toplina onega dneva?

3. Neko posestvo je dalo čistih dohodkov v 5 letih zaporedoma 2565 gl. 24 kr., 2844 gl. 64 kr., 2085 gl. 38 kr., 2633 gl., 2408 gl. 84 kr.; koliko poprek na leto?

*4.** Koliko je vreden 1 *l* zmesi, ako zmešaš 5 *l* vina po 34 kr. s 4 *l* vina po 40 kr. in 1 *l* vode?

Pri vodi in bakru jemljemo v poštev le množino, vrednost pa smatramo kot ničli jednako, kadar nam služita te dve tvarini v to, da zmanjšamo dobroto vinu ali kateri dragi kovini.

5. Krčmar zmeša 4 *hl* vina po 24 gl., 3 *hl* po 28 gl. in 5 *hl* po 30 gl.; koliko je vreden 1 *hl* zmesi?

6. Nekdo zmeša 39 *l* špirita po 40 stopinj s 26 *l* po 30 stopinj; koliko stopinj bode imela zmes?

7. Nekdo je izposodil 3600 gl. po $4\frac{3}{4}\%$, 4500 gl. po 5% in 1900 gl. po 6%; po koliko % bi moral izposoditi vsoto vseh teh treh kapitalov, da bi dobil iste obresti?

---

8. Trgovec ima dvoj riž, *kg* po 35 kr. in po 28 kr.; ta dvoj riž hoče takó zmešati, da mu bode môči *kg* zmesi po 32 kr. prodajati; v katerem razmerji mora oboj riž zmešati?

9. Iz srebra po 800 in po 600 tisočnin čistine zliti (legovati) hoče srebrar srebro po 720 tisočnin čistine; v katerem razmerji mora oboje srebro zliti?

10. Koliko *l* vina po 36 kr. in koliko po 56 kr. moraš zmešati, ako hočeš dobiti 100 *l* zmesi po 42 kr.?

11. Čisto srebro (po 1000 tisočnin čistine) in srebro po 640 tisočnin čistine treba takó zliti, da bode imela zlitina po 750 tisočnin čistine; koliko vsacega srebra treba vzeti za 24 *kg* zlitine?

12. Zlatar potrebuje za neko delo $\frac{3}{10}$ *kg* zlata po 700 tisočnin čistine in to si hoče zliti iz zlata po 650 in po 900 tisočnin čistine; koliko mora vsacega v ta namen vzeti?

13. Koliko *kg* po 18 kr. treba dodati k 564 *kg* po 32 kr., da bode veljal *kg* zmesi 24 kr.?

14. Koliko bakra treba dodati k 3 *kg* zlata po 850 tisočnin čistine, da bode imela zlitina po 700 tisočnin čistine?

---

15. Srebrar potrebuje srebra po 650 tisočnin čistine; ima pa le čisto srebro in tako, ki ima po 720 tisočnin čistine, tedaj mora bakra dodati; v katerem razmerji bode zlil te tri sestavine?

16. Nekdo hoče dobiti 4 *kg* zlata po 750 tisočnin čistine; koliko zlata po 900, 720 in 640 tisočnin čistine treba mu v ta namen zliti?

17. Trgovec ima petero blago, *kg* po 60 kr., po 68 kr., po 72 kr., po 75 kr., po 86 kr.; na koliko načinov zmeša lahko to petero blago takó, da bode veljal *kg* zmesi 70 kr.?

18. Iz špirita po 62, 40, 35 stopinj in vode treba namešati 94 *l* špirita po 50 stopinj; koliko treba vzeti vsacega?

V. O verižnem računu.

§ 157.

Verižni račun *(Kettenrechnung)* uporabljamo tedaj, kadar treba odnošaja med dvema količinama s pomočjo znanih vmesnih določil poiskati.

Kakó je ravnati v takem slučaji, pokazati hočemo na téj-le nalogi:

Koliko kr. a. v. veljajo 4 *dkg*, ako velja $7\frac{1}{2}$ *kg* 75 frankov?

Da bode môči izračunati, koliko kr. a. v. veljajo 4 *dkg*, treba ne le vedeti, da velja $7\frac{1}{2}$ *kg* 75 frankov, nego tudi še tá-le vmesna določila: 1 *kg* ima 100 *dkg*, $2\frac{1}{2}$ frk. = 100 kr. a. v. Popolni nalogi damo sedaj lahko tó-le verižno zvezo:

x kr. a. v. veljajo . . . . . 4 *dkg*,
ako iznaša 100 *dkg* . . . . 1 *kg*,
ako stane $7\frac{1}{2}$ *kg* . . . . . 75 frankov,
in ako veljata $2\frac{1}{2}$ frk. . . . 100 kr. a. v.?

To nalogo razstavimo lahko na té-le tri jednostavno-regeldetrijske naloge:

a) Koliko (y) *kg* dadé 4 *dkg*, ako iznaša 100 *dkg* 1 *kg*? Tu dobimo

$$\begin{array}{ll} y\ kg & 4\ dkg \\ 1\ \text{»} & 100\ \text{»} \end{array} \qquad y : 1 = 4 : 100.$$

b) Koliko (z) frankov velja y *kg*, ako velja $7\frac{1}{2}$ *kg* 75 frankov? Tu dobimo

$$\begin{array}{ll} \updownarrow\ z \text{ frank.} & \updownarrow\ y\ kg \\ \ \ 75\ \ \text{»} & \ \ 7\tfrac{1}{2}\ \text{»} \end{array} \qquad z : 75 = y : 7\tfrac{1}{2}.$$

c) Koliko (x) kr. a. v. je vrednih z frankov, ako se plača za $2\frac{1}{2}$ franka 100 kr. a. v.? Ako določimo x, dobimo

$$\begin{array}{ll} \updownarrow\ x \text{ kr. a. v.} & \updownarrow\ z \text{ frank.} \\ \ \ 100\ \text{» » »} & \ \ 2\tfrac{1}{2}\ \text{»} \end{array} \qquad x : 100 = z : 2\tfrac{1}{2}.$$

Ako pomnožimo v dobljenih treh sorazmerjih istomestne člene druzega z druzim, dobimo

$$xyz : 1 \,.\, 75 \,.\, 100 = 4yz : 100 \,.\, 7\tfrac{1}{2} \,.\, 2\tfrac{1}{2}, \quad \text{ali}$$

$$x : 1 \,.\, 75 \,.\, 100 = 4 : 100 \,.\, 7\tfrac{1}{2} \,.\, 2\tfrac{1}{2}; \quad \text{tedaj}$$

$$x = \frac{4 \,.\, 1 \,.\, 75 \,.\, 100}{100 \,.\, 7\frac{1}{2} \,.\, 2\frac{1}{2}} = 16 \text{ kr. a. v.}$$

Ako primerjamo ravnokar najdeni izraz za x in pa dano nalogo, kakeršna je v verižni obliki, razvidimo, da velja za verižni račun tó-le pravilo:

1.) Najprej potegni vertikalno črto in na levo te črte zapiši neznanko x z nje imenom, na desno pa ono znano količino, za katero treba izneska iskati, katera ima torej isto vrednost kakor neznanka x. Spodaj zapiši vsa vmesna določila, in sicer začni na levi vselej s količino, ki ima isto ime kakor najbližja prejšnja na desni; zraven na desno pa postavi vsakokrat tisto količino, ki ima isto vrednost kakor ona na levi. Takisto nadaljuj, dokler ne dobiš na desni količine, ki ima isto ime kakor neznanka x.

2.) Potem razdeli produkt vseh na desni zapisanih neimenovanih števil s produktom vseh na levi spodaj pod x zapisanih; kvocijent je iskana vrednost neznanke x.

N. pr. Ako velja v Angleški 1 kvarter pšenice 52 šilingov, koliko gl. a. v. velja potem 1 *hl*? (11 kvarterjev = 32 *hl*, 20 šiling. = 1 fnt. sterl., 10 fnt. sterl. = 118 gl. a. v.)

Razrešitev:

x gl. a. v.	1 *hl*	$x = \dfrac{11 \,.\, 52 \,.\, 118}{32 \,.\, 20 \,.\, 10}$
32 *hl*	11 kvart.	
1 kvart.	52 šiling.	$= 10 \cdot 55$ gl. a. v.
20 šiling.	1 fnt. sterl.	
10 fnt. sterl.	118 gl. a. v.	

Naloge.

1. Nekdo kupi v Hamburgu 3751 fnt. kave za 51·25 mark; koliko gl. a. v. velja 1 *kg*, ako sta 2 hamb. fnt. = 1 *kg*, in je 100 mark = 57 gl. a. v.?

2. Koliko londonskih cnt. je 2534 *kg*, ako je 100 lond. fnt. = $= 45\frac{9}{25}$ *kg* in ima 1 lond. cnt. 112 lond. fnt.?

3. Vzemimo, da tehta 5 *m* dolga železnocestna šina $125\frac{1}{2}$ *kg*, in da velja v Belgiji 100 *kg* šin $27\frac{6}{10}$ franka; koliko gl. a. v. stanejo šine, katerih je treba za 1 *km*? (100 frankov = 46 gl. a. v.)

4. Avstrijski goldinar ima 900 tisočnin čistega srebra; koliko *g* tehta tak goldinar, ako je v 45 goldinarjih 500 *g* čistega srebra?

5. Koliko velja blago, ki ima 455 *kg* nečiste teže, ako se plača po odbitku 10 % tare *kg* čiste teže po 62 kr.?

6. Trgovec kupi 4 kose sukna, kos po 30 *m*, za 512 gl.; po čem mora *m* prodati, ako hoče imeti 15 % dobička, t. j., ako hoče za vsacih 100 gl., katere je pri nakupu izdal, 115 gl. pri prodaji iztržiti?

7. Nekdo je kupil 923 *kg* nekega blaga za 876 gl., potem pa je po 100 *kg* za 87 gl. prodal; ali je pri tej kupčiji kaj dobil ali izgubil, in to koliko procentov?

Verigo začni: x gl. pri prodaji dá 100 gl. pri nakupu (izdanih), ako i. t. d.

8. Ako se kupi *hl* vina po 24 gl., *l* pa po 32 kr. proda, koliko % je dobička?

9. Ako kupi kdo 100 *kg* blaga za 87 gl., povrh pa še 2 % provizije plača, po čem mora *kg* prodati, ako hoče imeti $12\frac{1}{2}$ % dobička?

10. Neki stroj velja v Angleški 875 funtov sterl.; stroškov je v Londonu 8 %, prevoznih in drugih stroškov do Dunaja pa 25 % tega, kar stroj velja; koliko gl. a. v. stane stroj na Dunaji, ako je 10 funt. sterl. = 118 gl. a. v.?

11. V Smirni velja kantaro smokev 272 piastrov, stroški pri nakupu iznašajo ondi 5 %, provizija 2 %, vozarina do Dunaja, carina in drugi stroški pa 24 %; po čem pride v a. v. *kg* smokev na Dunaji, ako je 1 kantaro = $56\frac{9}{25}$ *kg* in 100 piastrov = 8·5 gl. a. v.?

VI. O novčnem računu.

§ 158.

Ono občno menjalo, katero določuje v trgovini in prometu vrednost različnemu blagu, imenujemo denar (*Geld*). Za uporabo kot denar so najbolj pripravne kovine, in to drage kovine, zlato in srebro.

Kovinske kose, določene oblike in teže, z napisom, grbom, imenom in podobo onega, ki jih daje kovati, imenujemo novce ali peneze (*Münzen*).

Pri novcih treba razločevati:

1.) Kov (*das Gepräge*), t. j. napise in podobe, ki se nahajajo na novcih vzvišeni.

2.) Kovino (*das Metall*), iz katere je novec kovan. Menj vredni drobiž (*Scheidemünzen*) se kuje navadno iz bakra, novci večje vrednosti pa so od srebra ali zlata. Ker sta pa te dve kovini precej mehki, zlivata se s kako foršo kovino, navadno z bakrom, da se novci v prometu preveč ne obrusijo.

3.) Težo. Vso težo novca imenujemo njega robelj (*Schrot*), težo čistega zlata ali srebra, kar ga je v njem, pa jedro ali zrno (*Korn*). Kot novčna utež (*Münzgewicht*) rabi v avstro-ogerski državi kilogram s svojimi nižjimi razdelki.

Prej rabila je kot novčna utež kolonjska marka (*kölnische Mark*) = = 233·87 *g*, tudi dunajska marka (*Wiener Mark*) = 280·67 *g* in od l. 1857. nemški funt = 500 *g*.

4.) Čistino (*Feingehalt*), t. j. razmerje med zrnom in robljem. Izraža jo navadno ulomek, čegar števec je zrno, imenovalec pa robelj. V Avstro-Ogerski, v Nemčiji in v večini druzih držav izraža se čistina v tisočninah (*Tausendtheilen*); n. pr. čistina avstr. srebrnjakom po goldinarji je $\frac{900}{1000}$ ali 0·900, pravi se: v 1000 utežnih delih jednega goldinarja (robelj) je 900 delov čistega srebra (zrno) in 100 delov bakra (primesi); krajše pravimo tudi: goldinarji imajo $\frac{9}{10}$ čistine.

Prej se je izraževala v Avstriji in Nemčiji čistina srebernih novcev v lotih, zlatih novcev v karatih, in sicer se je delila marka pri srebru na 16 lotov po 18 grênov, pri zlatu na 24 karatov po 12 grênov. N. pr. Stare avstrijske dvajsetice so bile $9\frac{1}{3}$ lotne, t. j. v 16 delih je bilo $9\frac{1}{3}$ dela čistega srebra; ces. zlatníki (cekini) so $23\frac{2}{3}$ karatni, t. j. v 24 delih je $23\frac{2}{3}$ dela čistega zlata.

Zakonite določbe o teži, čistini, razdelitvi in kovanji novcev zovemo novčno mero (*Münzfuss*).

Pri novcih treba razločevati trojno vrednost: notranjo ali kovinsko, zakonito in trgovsko. Notranja vrednost novca je vrednost njega čiste kovine; zakonito vrednost določuje vlada, in ta velja v obče za ono deželo, kjer se novec kuje; trgovska ali kurzna vrednost *(Handelswert, Curswert)* je ona premenljiva vrednost, katero ima novec v trgovini in prometu. Ako je ta premenljiva vrednost novca višja nego zakonita, zove se prebitek nadavek ali ažija *(Agio)*. V nekaterih deželah ima tudi srebro ažijo nasproti papirnatemu denarju. Ako je n. pr. na avstr. borzah srebro zabeleženo s 103, ondaj ima 3 % ažije, t. j. za vsacih 100 gl. srebra se plača 103 gl. v bankovcih ali državnih notah.

Ako se ravna v kaki deželi vrednost vseh novcev po določenem srebernem novci, ondaj pravimo, da ima dežela sreberno veljavo *(Silberwährung)*; kadar je pa zlat novec podloga denarnemu sistemu, ondaj ima dežela zlato veljavo *(Goldwährung)*. Zlato veljavo imajo med drugimi Angleška, Portugalska, Zjedinjene države severo-ameriške in v najnovejšem času tudi Nemška.

§ 159.

Najvažnejši zlati novci so:

1.) Avstro-ogerski zlatníki po osem goldinarjev *(Achtguldenstücke)*; kuje se jih po 155 od 1 *kg* $\frac{9}{10}$ čistega zlata. Po istem razmerji se kujejo tudi zlatníki po štiri goldinarje.

2.) Zlatníki po dvajset frankov v Francoski, Belgiji in Švici in zlatníki po dvajset lir v Italiji; jednaki so avstr. zlatníkom po osem goldinarjev. Prav takó so zlatníki po deset frankov in deset lir jednaki avstr. zlatníkom po štiri goldinarje.

3.) Ces. zlatníki (cekini, *Ducaten*); 67 jih tehta 1 kolonjsko marko = 233·87 *g*; njih zlato je $23\frac{2}{3}$ karatno.

4.) Nemški državni zlati novci, in sicer zlatníki po pet, deset in dvajset mark; zlatníkov po deset mark se kuje po $139\frac{1}{2}$ od 1 funta = 500 *g* čistega zlata; čistina iznaša $\frac{9}{10}$.

5.) Angleški sovereigni (funt ali *liver sterling*); kuje se jih po $46\frac{29}{40}$ od 1 troy-funta = 373·246 *g* $\frac{11}{12}$ čistega zlata.

6.) Ruski poluimperiali; teh gre po $62\frac{26}{45}$ na 1 ruski funt = = 409·512 *g* $\frac{11}{12}$ čistega zlata.

Najvažnejše sreberne novčne mere so:

1.) 45goldinarska mera ali avstrijska veljava (a. v., *österreichische Währung)*. Od 500 gramov čistega srebra se kuje po 45 goldinarjev (čistina $\frac{9}{10}$).

Do leta 1857. je rabila v Avstriji dvajsetgoldinarska mera ali konvencijska veljava (k. v., *Conventions-Münzfuss*); po tej se je kovalo od 1 kolonjske marke (233·87 *g*) čistega srebra po 20 goldinarjev k. v. po 60 kr. po 4 vinarje.

2.) Frankovna mera (v Francoski, Belgiji, Italiji in Švici); po tej se kuje od 1 *kg* srebra, imajočega $\frac{835}{1000}$ čistine, po $185\frac{5}{9}$ franka (lire).

3.) Sreberna rubeljska mera v Rusiji; čistina iznaša $\frac{125}{144}$, zrno jednega rublja pa 17·9961 *g*.

Kakó je izračunavati čistino, zrno in robelj.

§ 160.

a) Čistino najdeš, ako razdeliš zrno z robljem. N. pr.

Nove avstr. dvajsetice tehtajo po $2\frac{2}{3}$ *g* ter imajo po $1\frac{1}{3}$ *g* čistega srebra; kolika je njih čistina?

$$\text{Čistina} = \frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}} = \frac{4}{8} = \frac{500}{1000}.$$

Nove dvajsetice imajo tedaj 500 tisočnin čistine.

b) Zrno je jednako produktu iz roblja in čistine. N. pr.

Od 1 *kg* zlata, imajočega $\frac{9}{10}$ čistine, kuje se po 155 zlatníkov po osem goldinarjev; koliko čistega zlata je v vsakem takem zlatníku?

$$\text{Robelj} = \frac{1000}{155}\ g.$$

$$\text{Zrno} = \frac{1000}{155} \times \frac{9}{10} = 5\cdot80645\ g.$$

c) Robelj je jednak zrnu, razdeljenemu s čistino. N. pr.

Koliko tehta 1 ces. zlatník, ker je $23\frac{2}{3}$ karaten ter ima 3·4421 *g* čistega zlata?

$$\text{Čistina} = \frac{23\frac{2}{3}}{24} = \frac{71}{72}.$$

$$\text{Robelj} = 3\cdot4421 : \frac{71}{72} = 3\cdot4906\ g.$$

Kakó je izračunavati novcem notranjo vrednost.

§ 161.

Po različnosti novčne mere je môči take naloge tudi različno razreševati Ako treba določiti novcu vrednost v avstr. v., ondaj je najkrajše izračunati najprej vrednost jednemu gramu čistega srebra ali zlata v avstr. v. ter to vrednost pomnožiti z njega zrnom, izraženim v gramih. N. pr.

1.) Koliko je vreden 1 *g* čistega srebra, ker je v 45 gl. a. v. 500 *g* čistega srebra?

45 gl. : 500 = 0·09 gl. = 9 kr.

1 *g* čistega srebra je tedaj 9 kr. vreden.

2.) Koliko gl. a. v. je vrednih 100 frankov?

1 frank ima 4·5 *g* čistega srebra,
100 frankov » 450 » » »

9 kr. × 450 = 4050 kr. = 40·5 gl. a. v.

3.) Koliko je vreden 1 *g* čistega zlata, ako je razmerje med vrednostjo zlata in srebra $15\frac{1}{2} : 1$?

9 kr. × $15\frac{1}{2}$ = $139\frac{1}{2}$ kr. = 1·395 gl. a. v. v srebru.

4.) Koliko avstr. srebernih goldinarjev je vreden zlatník po osem goldinarjev, ker ima njega zrno 5·80645 *g*?

1·395 gl. × 5·80645 = 8·1 gl. a. v. v srebru.

Prav takó kakor pri zlatih in srebernih novcih je računati čistino in notranjo vrednost tudi pri nekovanem zlatu in srebru; pomniti je le, da nam rabita tu izraza nečista teža in čista teža *(Rauhgewicht, Feingewicht)* za robelj in zrno.

Kakó je izračunavati novcem kurzno vrednost.

§ 162.

Na dunajski borzi se zabeležuje kurz posamičnih novcev *(per Stück)* in to v bankovcih *(Bankvaluta)*; le za srebro (sreberne goldinarje ali kupone sreberne rente) je dan kurz v procentih. Vrednost se izračuna potem oziroma s pomočjo množitve ali procentnega računa. N. pr.

1.) Kurz ces. zlatníkom je 5 gl. 35 kr.; koliko velja 31 tacih zlatníkov?

5·35 × 31
1605
165·85 gl. v bankovcih.

2.) Koliko je vrednih 658 gl. srebra v papirnatem denarji, ako je 3 % ažije?

658 po 103
19·74
677·74 gl. v papirnatem denarji.

Naloge.

*1.** Nove avstrijske dvajsetice imajo po 500, desetice po 400, petice po 350 tisočnin čistine; izrazi čistino teh novcev z najmanjšimi ulomki.

2. Izračunaj zrno, robelj in notranjo vrednost v prejšnji nalogi omenjenih novcev, ako se jih kuje od 1 *kg* čistega srebra oziroma po 750, 1500, 3000.

*3.** Koliko čistino ima sreberna kepa, katera tehta 640 *g* ter ima 480 *g* čistega srebra?

4. Koliko tisočnin primesi je v zlitini, v kateri je $\frac{11}{12}$ čistega srebra?

5. Ruski sreberni rubelj tehta 20·7315 *g* ter ima 17·9961 *g* čistega srebra; kolika je *a)* njegova čistina v tisočninah, *b)* njega notranja vrednost v gl. a. v. in *c)* koliko rubljev se kuje od 1 *kg* čistega srebra?

6. Od 1 *kg* srebra, imajočega 0·945 čistine, kuje se 100 holandskih goldinarjev; izračunaj hol. goldinarju zrno in notranjo vrednost v gl. a. v.

7. Koliko srebra in koliko bakra je v sreberni šibiki, katera tehta $3\frac{2}{5}$ *kg* in ima 0·520 čistine?

8. Od 1 kolonjske marke $23\frac{2}{3}$ karatnega zlata se kuje po 67 ces. zlatníkov; izračunaj ces. zlatníku zrno in notranjo vrednost v a. v.

9. V 45 gl. a. v. je 500 *g* čistega srebra, njih čistina iznaša $\frac{9}{10}$; koliko tehta 100 srebernjakov po goldinarji?

10. Od 500 *g* čistega zlata se kuje po $69\frac{3}{4}$ nem. zlatníkov po 20 mark; njih čistina iznaša $\frac{9}{10}$; izračunaj zrno, robelj in notranjo vrednost v a. v. jednega tacega zlatníka.

11. V 20 gl. k. v. je 233·87 *g* čistega srebra; koliko gl. a. v. je tedaj 1 gl. k. v. vreden?

12. Nekdo zamenja 715 avstr. zlatníkov po osem goldinarjev za angleške sovereigne; koliko bode dobil sovereignov?

---

13. Na dunajski borzi je bil nekega dne

kurz ces. zlatníkom	5·52 gl.	v bankovcih
» » » po 8 gl.	9·35 »	
» angl. sovereignom . . .	11·78 »	

koliko je veljalo 158 vsacih tacih zlatníkov?

14. Ko je imelo srebro 25 % ažije, plačalo se je za dun. cent (56·006 *kg*) cukra 32 gl. v bankovcih; pozneje, ko je bilo le 2 % ažije, za *kg* 56 kr.; kedaj je bil cuker primerno dražji?

VII. O meničnem računu.

§ 163.

Pismo, s katerim se izdatelj meničnopravno zaveže, da hoče določeno vsoto denarja o določenem času določeni osebi ali sam, ali po kom tretjem izplačati, zove se menica *(Wechsel)*.

Gledé na plačevalca se delé menice na lastne *(eigene)* in tuje ali potegnene, trasovane *(fremde, gezogene, trassierte)* menice.

a) Lastne menice so one, v katerih se izdatelj zavezuje, da bode na menici zaznamenovano vsoto sam plačal. N. pr.

J. Kos v Ljubljani kupi od J. Pavliča ravno tam za 2000 gl. blaga, izplačnih čez 2 meseca, ter mu dá o tem iznesku tó-le menico:

V Ljubljani dne 7. avgusta 1883. l. Za gl. a. v. 2000.

Dva meseca od današnjega dne plačam za to jedino menico gospodu J. Pavliču dva tisoč goldinarjev a. v. J. Kos.

Kadar mineta dva meseca, dolžán je Kos po meničnem pravu lastniku te menice na njej imenovano vsoto izplačati.

Za lastno menico sta vsaj dve osebi potrebni: 1.) izdatelj, kateri se je zavezal, da bode na menici zaznamenovano vsoto plačal (tu Kos); 2.) remitent ali prvoímnik menice *(Remittent, erster Inhaber)*, kateremu mora izdatelj plačati (tu Pavlič).

b) Menice, katere se je zavezal izdatelj po kom tretjem izplačati, zovejo se tuje, potegnene ali trasovane menice. N. pr.

F. Pečar v Ljubljani prejme od H. Witgena v Hamburgu za 1200 mark blaga, izplačnih čez 3 mesece. V Ljubljani je pa trgovec F. Rupnik, kateri je s hamburškim trgovcem F. Kornom v trgovski zvezi. Pečar ne bode kupil one vsote nemškega denarja za avstrijski denar, da bi jo poslal v Hamburg, kar bi bilo neprilično, nevarno in tudi ne brez stroškov, nego on gre k Rupniku ter mu dá toliko v a. v., kolikor je onih 1200 mark vrednih in zato prejme od Rupnika tó-le menico:

V Ljubljani dne 15. julija 1883. l. Za mark 1200.

Čez tri mesece od današnjega dne plačajte za to prvo menico gospodu H. Witgenu jeden tisoč dve sto mark.

F. Rupnik.

Gospodu F. Kornu v Hamburgu.

To menico pošlje Pečar iz Ljubljane Witgenu v Hamburg, in ta jo predloži (prezentuje) Kornu, naj ta izreče, ali bode plačal ali ne. Korn izjavi potem na menici pismeno, da bode o določenem času plačal, t. j. on vzprejme *(acceptiert)* menico in njega dolžnost je, ob omenjenem času Witgenu ono vsoto izplačati. Pečar je poravnal s tem svoj dolg v Hamburgu na prav jednostaven način. Ako bi pa Korn menice ne vzprejel, ondaj bi moral izdatelj po meničnem pravu iznesek, na katerega se menica glasi, pa tudi stroške povrniti.

Menica je tedaj jako pripravno sredstvo, da poravnajo trgovci različnih mest med seboj svoje dolgove in terjatve.

Pri tujih menicah treba ozir jemati v obče na 4 osebe: 1.) na izdatelja ali trasanta *(Aussteller, Trassant)*, kateri menico izdá, potegne ali trasuje (tu Rupnik); 2.) na trasata *(Trassat)* ali tistega, na katerega ime se je menica izdala, in katerega izdatelj pozivlje, da naj plača menični iznesek (tu Korn); le-tá zove se, ako je menico vzprejel, tudi vzprejemnik ali akceptant *(Acceptant)*; 3.) na pošiljatelja ali remitenta *(Remittent)*, t. j. ono osebo katera menico kupi, da jo pošlje svojemu upniku (tu Pečar); 4.) na predložitelja ali prezentanta *(Präsentant)*, kateri menico predloži, da se vzprejme in pozneje izplača (tu Witgen).

Menica se zove gledé na trasanta in trasata trata *(Tratte)*, gledé na remitenta in prezentanta rimesa *(Rimesse)*.

§ 164.

Čas, kedaj se ima menica izplačati, t. j. plačilni rok ali dospetek *(Verfallszeit)*, zaznamenuje se na četver način:

a) Na določen dan, n. pr. dne 8. maja tega leta, sredi *(medio)* maja t. l. (sredi znači zmerom 15. dan meseca), zadnjega *(ultimo)* maja t. l. (dne 31. maja).

b) Na pokaz *(auf Sicht)*, in sicer 1.) takój na pokaz (na zahtevanje, *a vista, a piacere)*, kadar treba menico še tisti dan izplačati, ko se je predložila, in 2.) na določen čas (8 dnij, 3 tedne, 2 meseca) po pokazu, kadar treba menico izplačati toliko časa po predloženji. Pri poslednjih menicah na pokaz mora dostaviti akceptant, kedaj jo je vzprejel. Vender ostane vzprejem veljaven, če se tudi datum ne dostavi.

c) Na določen čas od dne izdanja, n. pr. 2 meseca od danes *(a dato)*, 3 tedne od današnjega dne.

d) Na kak sejem ali tržni dan.

O meničnem diskontu.

§ 165.

Menice, glaseče se na veljavo tistega mesta, kjer so se izdale in ravno tam izplačne, zovejo se mestne menice *(Platzwechsel)*. Ako se mestna menica pred nje dospetkom izplača, dovoljuje se dolžniku zarad tega, ker prej plača, nego bi moral, primeren popust, odbitek ali diskont *(Discont, Escompt)* imenovan. Menico pred nje dospetkom proti primernemu diskontu prodati ali kupiti, pravi se, menico diskontovati *(discontieren)*.

Menični diskont izražamo v procentih za 1 leto in trebalo bi ga prav za prav nad sto računati; v resnici pa se računa vselej po pripravnejšem procentnem računu od sto, ker gre tu le za kratke roke, za te je pa razloček med jednim in drugim rezultatom neznaten. Menični diskont se računa tedaj prav takó, kakor obresti za določeno število dnij, namreč za čas od dne, katerega se diskontuje, do dne dospetka; a pri določevanji tega časa se ne všteva ali dan, katerega se diskontuje ali pa dan dospetka. Meseci se računajo po toliko dnij, kolikor jih po pratiki res imajo, leto pa po 360 dnij. N. pr.

Menica za 960 gl., izplačna 31 dnij po pokazu, ter vzprejeta dne 18. junija, diskontuje se dne 27. junija po 4 %; koliko se dobi zanjo?

Vzprejela se je dne 18. junija	Menični iznesek . . .	960 gl.
Dospela bode dne 19. julija	4 % disk. za 22 dnij	2·35 »
Proda se dne 27. junija	gotova vrednost . . .	957·65 gl.
Junija 3 dni		
Julija 19 »		
22 dnij.		

Kakó je izračunavati menice na tuja mesta.

§ 166.

Menice, glaseče se na tuja mesta in navadno tudi na tujo veljavo, zovejo se tuje (inozemske) menice ali devize *(ausländische Wechsel, Devisen)*. Pri nakupu ali prodaji tujih menic treba s pomočjo danega meničnega kurza *(Wechselcours)* preračunati tuji denar (menično vrednost, *Wechselvaluta*) na svoj domači denar, ali pa obratno. Takovo preračunavanje zovemo menično redukcijo *(Wechselreduction)*.

Menični kurz je zavisen od notranje vrednosti tujega denarja, od časa, ki ga ima menica še do dospetka, dalje ali se menica ponuja ali se po njej popražuje. Pri meničnem kurzu treba vselej na dvojno veljavo gledati, na veljavo domačega in tujega mesta, jedna je nepremenljiva, druga premenljiva. Na avstrijskih borzah velja zmerom 100 (za London 10) jednot tujega denarja kot nepremenljiva valuta, in zabeleženi kurz kaže, koliko gl. a. v. v bankovcih se zanje dobi ali plača. Ako je n. pr. kurz v Pariz 44, pravi se to: za 100 frankov treba plačati 44 gl. a. v. v bankovcih.

Menice se preračunavajo s pomočjo procentnega ali sklepovnega računa. N. pr.

1.) Dunajsk trgovec ima v Amsterdamu 2360 hol. gl. plačati; mesto denarja pošlje menico; koliko mora zanjo plačati, ako je kurz v Amsterdam 97·50?

2360 po $97\frac{1}{2}$	ali	100 hol. gl.	97·50 gl. a. v.
16520		2000 hol. gl.	1950·00 gl. a. v.
21240		300 » »	292·50 » » »
1180		60 » »	58·50 » » »
2301·00 gl. a. v.			2301·00 gl. a. v.

2.) Dunajčan ima v Parizu za svoj račun 2485 gl. a. v. terjati; za koliko frankov bode menico izdal, ako je kurz v Pariz 46?

46 gl. a. v. . . . 100 frk.

1 » » » . . . $\frac{100}{46}$ »

2485 » » » . . . $\frac{2485 \times 100}{46} = 5402 \cdot 17$ frk.

Naloge.

1. Menica za 1249·13 gl., izplačna dne 15. junija, se proda dne 8. maja; diskonta se računa $4\frac{1}{2}$ %; koliko se dobi zanjo?

2. Izračunaj diskont in gotovo vrednost téh-le menic:

	Menični iznesek	kupi se	dospetek	diskonta
a)	1834 gl. 56 kr.	dne 3. aprila	dne 31. maja	6 %
b)	2508 » 80 »	» 27. marcija	» 2. maja	5 %
c)	960 » — »	» 18. junija	» 15. avgusta	$4\frac{1}{2}$ %
d)	3074 » 75 »	» 20. avgusta	» 20. oktobra	$6\frac{3}{4}$ %

3. Sredi avgusta izplačna menica za 849 gl. se diskontuje dne 26. junija po $6\frac{1}{2}$ %; koliko je menica ta dan vredna?

4. Menica za 3180 gl., izplačna 14 dnij po pokazu, vzprejeta dne 20. novembra, diskontuje se dne 23. novembra; kolika je nje gotova vrednost, ako se računa $4\frac{1}{2}$ % diskonta?

5. Menica za 3048·72 gl., izdana dne 13. maja, izplačna 2 meseca a dato, diskontuje se dne 18. junija; koliko treba zanjo plačati, ako se računa $5\frac{1}{2}$ % diskonta in $\frac{1}{3}$ % provizije?
Provizijo računaj od meničnega izneska.

6. Dne 24. aprila diskontuje avstro-ogerska banka té-le menice po 5 %:

za 3128 gl. na J. Kovača, dne 20. maja;
» 1073 » » F. Lavriča, zadnjega maja;
» 536 » » A. Bonača, 31. dnij po pokazu, vzprej. dne 8. aprila;
» 2895 » » L. Purgaja, od dne 28. marcija, 2 meseca a dato.

Koliko mora banka za vse te menice izplačati?

---

7. Dunajsk trgovec ima v Augsburgu 2915 drž. mark terjati; to terjatev poravna z menico, katero izda na svojega dolžnika ter po 57·6 proda; koliko dobi za to menico?

8. Trgovec v Marseille-u ima od Dunajčana 5682 frankov 56 centimov terjati; koliko je vredna ta terjatev v avstr. v., če je 100 frankov = 46·75 gl. a. v.?

9. Koliko je na Dunaji vredna menica v Berolin za *a)* 738 mark po 56·8, *b)* 1335 mark po 56·92, *c)* 3085 mark 48 pfenigov po 56·85?

10. Dunaj kupi 3708 frankov v Pariz po 46·80; koliko stane ta deviza, ako treba $\frac{1}{2}$ ‰ senzarije plačati?

11. Dunaj kupi po naročilu 7123 vlaških piastrov v devizah v Bukarešt po 17·15 ter računa $\frac{1}{4}$ % provizije in $\frac{3}{4}$ ‰ senzarije; kateri iznesek v a. v. bode Dunaj naročevalčevemu računu pripisal?

12. *A* kupi na Dunaji menice v Hamburg:

za 2032 mark, diskonta za 126 dnij,
» 1760 » » » 80 »
» 3188 » » » 52 »

Koliko mora za vse plačati, ako je kurz v Hamburg $56\frac{3}{4}$ in se računa diskonta po $4\frac{1}{2}$ %?

13. V Amsterdam se je poslalo za 2227·75 gl. a. v. 2345 hol. gl.; po katerem kurzu odposlal je Dunaj svojo menico?

14. Kolik je kurz v Bruselj, ako se pri $\frac{1}{2}$ % provizije za 5248 frankov 2241 gl. 55 kr. a. v. dobi?

VIII. Kakó je izračunavati državne papirje in akcije.

§ 167.

Državni papirji so dolžna pisma o manjših izneskih prejetega posojila, izdana od države same ali z nje dovoljenjem od posamičnih dežel, večjih družbenih podjetij ali celo od posamičnih posestnikov.

Iznesek, na katerega se kateri koli državni papir glasi, zove se njega imenovna ali nominalna vrednost *(Nominalwert)*.

Državne papirje delimo na obresti dajoče zadolžnice ali obligacije *(Obligationen)* in srečke *(Lose)*; od prvih se izplačujejo obresti o določenih rokih po določeni obrestni meri in to navadno proti tiskanim nakaznicam, kuponom (odstrižkom), druge dajó določene dobitke ter se o določenih rokih izžrebujejo. Nekatere srečke nesó tudi redne obresti.

Akcije ali delnice *(Actien)* so oni vrednostni papirji, kateri izpričujejo, da je postal njih lastnik s tem, da je vplačal določen iznesek, deležnik večjih prevoznih, obrtnih ali trgovskih podjetij.

Dohodki od vsake posamične akcije zovejo se dividenda, in ti so ali določene obresti ali del dobička, ki ga podjetje nese, ali največkrat oboje ob jednem. Redna dividenda velja v zadnjem slučaji za obresti, izvenredna pa razdeljuje ostali dobiček.

Razven akcij izdajajo taka akcijska društva tudi obresti dajoča dolžna pisma; ta nimajo sicer nikakeršne pravice do dobička, a obresti se jim morajo izplačati še pred akcijami in zaradi tega se zovejo prioritetne obligacije ali prioritete (prednice).

Akcije, prioritete in javne zaklade *(öffentliche Fonds)* zovemo s skupnim imenom vrednostne papirje *(Effecten, Wertpapiere)*.

§ 168.

Vrednostni papirji imajo premenljivo vrednost; ta premenljiva vrednost zove se kurz ter ni le od nominalne vrednosti zavisna nego tudi od obrestne mere in dobička, dalje od tega, ali se po dotičnem papirji poprašuje ali se papir ponuja. Na avstrijskih borzah se zabeležujejo kurzi v gl. a. v. bankovne valute (v papirnatem denarji), in sicer pri vseh zasebnih srečkah in akcijah za vsako posebej *(pr. Stück)*, a pri vseh državnih papirjih, zemljiščnih odveznih obligacijah, zastavnih pismih *(Pfandbriefe)* in večinoma tudi pri prioritetah v procentih, t. j. za 100 gl. nominalne vrednosti.

Pri nakupu tacih vrednostnih papirjev, kateri obresti nesó, mora kupec prodajalcu plačati ne le kapitalno vrednost, nego tudi še ne potegnene obresti in to od zadnjega obrestnega roka do dne, katerega jih kupi. Pri vrednostnih papirjih se računajo obresti vselej od nominalne vrednosti; mesec se računa tu po 30 dnij.

Kadar se glasi vrednostni papir na konv. veljavo, imajo tudi obresti to ime; te treba tedaj, ker je izražena kurzna vrednost v a. v., tudi na a. v. preračunati. Na avstrijskih borzah se računajo obresti v papirnatem denarji tudi pri onih vrednostnih papirjih, pri katerih bi se morale računati prav za prav v zlatu ali srebru, in to brez ažije za zlato ali srebro.

Pri večini državnih papirjev treba od obrestij odbijati še dohodarino; le akcije, zastavna pisma in nekatere prioritetne obligacije so davka proste.

Primeri.

1.) *A* kupi dne 3. decembra 8 akcij avstro-ogerske banke po 845; koliko mora zanje plačati? (Nominalna vrednost jedne akcije = 600 gl. 5 % obresti niso izplačane od dne 1. julija.)

8 akcij po 845 gl.	6760 gl.
obresti od 8 akcij po 600 gl. = 4800 gl. od dne 1. jul., t. j. za 152 dnij po 5 % .	101 » 33 kr.
	6861 gl. 33 kr.

2.) Nekdo kupi dne 6. novembra 2400 gl. jednotnega državnega dolga v srebru po 73·90; koliko mora plačati? ($4\frac{1}{5}$ % obresti od dne 1. julija.)

2400 gl. po 73·90	1773·60 gl.
$4\frac{1}{5}$ % obr. od dne 1. jul., t. j. za 125 dnij . .	35·00 »
	1808·60 gl.

3.) Koliko dobodeš dne 16. septembra za 12 srečk iz l. 1854., prodanih po 126? (Nominalna vrednost po 250 gl. k. v., 4 % obresti od dne 1. aprila, dohodarine 20 %.)

12 srečk po 250 gl. k. v. = 3000 gl. k. v.		
3000 gl. k. v. po 126		3780·— gl. a. v.
4 % obresti od 3000 gl. k. v. za 165 dnij		
55 gl. k. v. =	57·75 gl. a. v.	
20 % dohodarine	11·55 » » »	46·20 » » »
		3826·20 gl. a. v.

Naloge.

*1.** Koliko velja 9 sreček iz leta 1864. po 174?

*2.** Koliko velja

6 kreditnih sreček po 178,
12 Palffy-jevih sreček po 42 in
15 sreček Rudolfove ustanove po 19?

3. Koliko je vrednih dne 18. avgusta 2500 gl. jednotnega državnega dolga v bankovcih s kuponi od dne 1. maja po 81·5? (Obresti po $4\frac{1}{5}$ %.)

4. Koliko treba plačati dne 9. septembra za 6 celih sreček iz leta 1860. po 136·50? (Nominalna vrednost po 500 gl., 5% obresti od dne 1. maja, dohodarine 20 %.)

5. Nekdo kupi dne 1. maja:

9 akcij Rudolfove železnice po 184·75 in
12 » erdeljske » » 182.

Koliko mora za vse plačati? (Nominalna vrednost po 200 gl., 5% obresti od dne 1. januvarja.)

6. Nekdo proda dne 6. decembra 9 sreček iz leta 1854. po 128·5; koliko dobi zanje? (Nominalna vrednost po 250 gl. k. v., 4% obresti od dne 1. aprila, dohodarine 20 %.)

7. *A* proda dne 26. februvarja:

a) 18 prioritetnih obligacij erdeljske železnice po 99 (nominalna vrednost po 200 gl., 5% obresti od dne 1. oktobra);

b) 2400 gl. k. v. štajerskih zemljiščnih odveznih obligacij po 104 (5% obresti od dne 1. novembra, dohodarine 10 %); koliko dobi za vse?

8. *A* kupi dne 4. oktobra 6000 gl. zastavnih pisem štajerskega hranilnega društva po 101·50; koliko mora zanje plačati, ako se računa $\frac{1}{2}$ ‰ senzarije? ($5\frac{1}{2}$% obresti od dne 1. julija.)

9. Koliko treba plačati dne 26. aprila za *a)* 2 akciji Ferdinandove sev. železnice po 2465 (nominalna vrednost po 1000 gl. k. v.), *b)* 6 akcij Elizabetine železnice po 233 (nominalna vrednost po 200 gl. k. v.), ako treba povrniti nepotegnene 5% obresti od dne 1. januvarja naprej, in se računa $\frac{1}{2}$ ‰ senzarije?

10. Nekdo proda na Dunaji dne 26. novembra:

4 akcije avstro-ogerske banke po 862 (nominalna vrednost po 600 gl., 5% obresti od dne 1. julija),

8 sreček iz leta 1860 po 136·50 (nominalna vrednost po 500 gl., 5% obresti od dne 1. nov., dohodarine 20 %),

3500 gl. zastavnih pisem avstr. zemljiščnega kreditnega zavoda po 117·5 (5% obresti od dne 1. novembra);

koliko dobi za vse, ako se računa $\frac{1}{2}$ ‰ senzarije in $\frac{1}{8}$ % provizije?

IX. Naloge v ponavljanje.

1.* Nekega dne je kazal toplomer ob 6ih zjutraj 12°, ob 10ih 15°, ob 2h popoldne 21°, ob 6ih zvečer 16°; kolika je bila poprečna toplina onega dne?

2.* Nekdo zmeša 3 *l* vina po 40 kr. s 5 *l* po 56 kr.; koliko velja 6 *l* zmesi?

3. $100 - [(2\frac{1}{4} + 16\frac{7}{12} + 3\frac{5}{8} + 8\frac{3}{7}) \cdot \frac{9}{10}]$.

4. $(1 - 5\frac{2}{3}) : [4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} \cdot (1\frac{1}{2} - 3)]$.

5. Izmed štirih števil je prvo $25\frac{1}{3}$, drugo za $8\frac{3}{4}$ večje od prvega, tretje za $12\frac{3}{5}$ manjše od druzega, četrto pa je jednako diferenci med prvim in tretjim; kolika je vsota vseh štirih števil?

6. Koliko iznašajo 4 % od 775 gl. *a)* od, *b)* nad, *c)* pod sto?

7. Katera vsota dá 75 gl. po 6 % *a)* od, *b)* nad, *c)* pod sto?

8. Po koliko % *a)* od, *b)* nad, *c)* pod sto dá vsota 1634 gl. 86 gl. za iznesek?

9. Koliko veljajo 4 zaboji smokev, imajoči 511 *kg* nečiste teže, ako se računa 10 % tare in *kg* čiste teže po 36 kr?

10. Ako pomnožiš neko število s 15, k produktu prišteješ 20, vsoto razdeliš s 4 in od kvocijenta odšteješ 14, dobiš trojno ono število; katero število je to?

11. $\frac{5a^4b^2c}{6m^2n^2p^2} \cdot \frac{12ab^2c^3}{25m^2np} \cdot \frac{5m^5n^4p^4}{4a^5b^5c^5} \cdot \frac{2ab^2c}{mnp}$.

12. $\left(\frac{35(a^2 - b^2)}{64(x^2 - y^2)} : \frac{21(a - b)}{40(x + y)}\right) \cdot \frac{12x(x - y)}{5y(a + b)}$.

13. *a)* $(x + 5) : x = 3 : 2$, *b)* $(21 - x) : 2 = x : 5$.

14. Od 1 *kg* zlata, imajočega 900 tisočnin čistine, se nakuje 155 zlatníkov po osem goldinarjev; koliko gl. a. v. je 1 tak zlatník vreden, ako je razmerje med vrednostjo zlata in srebra $15\frac{1}{2} : 1$?

15. Koliko papirnatega denarja treba plačati za 2350 gl. v zlatu, ako ima zlato 17 % ažije?

16. Koliko treba v zlatu plačati za 3285 gl. papirnatega denarja, ako ima zlato 16 % ažije?

17.* *A* kupi vrt za 1200 gl. ter se zaveže, da bode vsake 3 mesece po 240 gl. odplačal; kedaj bi moral vso kupnino ob jednem plačati?

18. Koliko obrestij dá

a) 3678 gl. po 5 % v 1 letu 5 mes.?

b) 5782 gl. po $5\frac{3}{4}$ % v 6 mes. 12 dneh?

c) 986·85 gl. po $6\frac{1}{4}$ % v 2 letih 8 mes. 21 dneh?

19. Koliko obrestij dá

a) 942·75 gl. po $4\frac{1}{4}$ % v 37 dneh?

b) 1348 gl. po $5\frac{1}{2}$ % v 132 dneh?

20. Koliko obrestij dá

a) 1745 gl. po 6 % od dne 15. aprila do dne 12. julija?

b) 5680 gl. po $6\frac{1}{2}$ % od dne 1. julija do dne 18. oktobra?

21. Nekdo kupi v Trstu 5 sodov blaga, imajočih 5219 *kg* nečiste teže; koliko bode moral za vse blago takój plačati, ako se računa 10 % tare, 100 *kg* čiste teže po 14 gl. in 2 % skonta?

22. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{4} = \frac{2x}{5} + \frac{7}{4}.$

23. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{x}{11} - 9 = x + \frac{23}{66}.$

24. $\frac{23 \cdot 75x - 25}{6 \cdot 25} = 3 \cdot 6x.$ ***25.*** $\frac{x - 0 \cdot 08}{5} = \frac{2 \cdot 93x}{16} - 0 \cdot 00925.$

26. $\frac{7}{3}(2x + 5) + 3(2x - 3) - \frac{3}{4}(5x - 7) = 1.$

27. Nekdo naloži 3485 gl. po 4 % na obrestne obresti; na koliko bode narasel kapital v 3 letih?

28. Koliko ti bode izplačala zavarovalna banka čez 8 let, ako si ji plačal vsako leto po 200 gl. in se računa 4 % obrestnih obrestij?

29. Trgovec plača za neko blago s $\frac{1}{2}$ % senzarije vred 2653 gl. 40 kr.; koliko je senzarije? (Nad sto.)

30. Za neko blago se je iztržilo po odbitku $\frac{1}{2}$ % senzarije 5537 gl. 42 kr.; za koliko se je blago prodalo? (Pod sto.)

31. Pretvori té-le čisto perijodne decimalne ulomke na navadne:

a) $0 \cdot \dot{2}$, *b)* $0 \cdot \dot{1}\dot{5}$, *c)* $6 \cdot \dot{0}2\dot{3}$, *d)* $0 \cdot \dot{3}2\dot{4}$, *e)* $4 \cdot \dot{5}14\dot{8}$.

32. Pretvori té-le mešano perijodne decimalne ulomke na navadne:

a) $0 \cdot 1\dot{6}$, *b)* $2 \cdot 0\dot{8}$, *c)* $15 \cdot 3\dot{2}\dot{7}$, *d)* $0 \cdot 14\dot{7}\dot{2}$, *e)* $0 \cdot 65\dot{2}4\dot{3}$.

33. Menica za 2929 mark, izplačna 3 tedne po pokazu ter vzprejeta dne 11. avgusta, se diskontuje s 4 % dne 17. avgusta; koliko treba zanjo plačati?

34. Dunajsk trgovec mora za blago, katero je iz Marseille-a dobil, 5633 frankov 63 centimov plačati; koliko gl. a. v. bode moral svojemu trgovskemu prijatelju na korist zapisati, ako je kurz v Marseille 46·15?

35.* Nekdo kupi sukna, *m* po 5 gl., potem pa proda 4 *m* po 27 gl.; koliko *m* je kupil, ako ima 504 gl. dobička?

36.* 1000 gl. treba takó med *A* in *B* razdeliti, da dobi *A* tolikokrat po 3 gl. kakor *B* po 2 gl. Koliko dobi vsak?

37. Trije trgovci zložé za skupno podjetje potrebni kapital, in sicer dá A 8000 gl., B 7200 gl., C 4800 gl. Dobička je $232\frac{1}{2}$ gl. menj nego 16 % vloženega kapitala; koliko dobička pride na vsacega?

38. $\frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} + 1.$ *39.* $\frac{1}{x^2 - y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}.$

40. $(5x+a)(2x-a)-(4x-3a)(7x+a)+(3x-a)(6x+2a).$

41. $(48y^8 - 14a^4y^4 + 17a^6y^2 - 6a^8) : (6y^4 - 3a^2y^2 + 2a^4).$

42. $\left(\frac{3x^2}{4a^8} - \frac{19y^2}{3a^2} + \frac{12a^4y^4}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{2a^4} + \frac{y}{3a} - \frac{2a^2y^2}{x}\right).$

*43.** 6 delavcev izkoplje neki prekop v 72 dneh; v koliko dneh bi ga izkopalo 8 delavcev?

44. A ima v svoji fabriki 24 plinovih plamenov, kateri goré po 4 ure na dan, in za te plača v 6 mesecih 300 gl.; koliko bode moral plačati B, ako je gorelo pri njem po 30 plamenov $5\frac{1}{2}$ meseca po $4\frac{1}{2}$ ure na dan ter je vsak plamen 1·4 krat toliko plina potreboval kakor pri A?

45. Po koliko % treba kapital na obresti naložiti, da dá v 3 letih toliko obrestij, kolikor po 6 % v 2 letih?

46. Nekdo podeduje 4850 gl., izplačnih čez 5 let; na njegovo željo se mu izplača dedščina takój; koliko dobi v gotovini po odbitku $6\frac{1}{2}$ % diskonta?

47. Trgovec ima dvoje blago, *kg* po 60 kr. in po 36 kr.; to dvoje blago hoče takó zmešati, da mu bode môči *kg* zmesi po 45 kr. prodajati. Koliko *kg* vsacega blaga mora vzeti za 80 *kg* zmesi?

48. Kurz avstr. zlate rente, katera daje 4 % obrestij, je 89; kolik kurz bi morala imeti primeroma ogerska zlata renta, ker daje 6 % obrestij?

49. Nekdo bi rad dobival 5 let zaporedoma vsako leto po 1000 gl.; kolik kapital mora v ta namen naložiti, ako se 5% obrestne obresti celoletno kapitalizujejo?

50. Neka vsota se je med tri osebe takó razdelila, da je dobil A 100 gl. in $\frac{1}{3}$ ostanka, B $\frac{1}{2}$ novega ostanka in še 500 gl., C pa ostalih 2500 gl. Kolika je bila vsota, koliko je dobil A, koliko B?

51. Dunajsk trgovec proda za Tržačana 6 sodov zabelnega olja, imajočih 3285 *kg* nečiste teže; tare se računa 16 %, 100 *kg* čiste teže pa po 75 gl.; stroškov je 21 gl. 35 kr., senzarije $\frac{1}{2}$ %, provizije $1\frac{3}{4}$ %. Sestavi prodajni račun.

Osmi oddelek.

O potencah in korenih.

I. O potencah.

§ 169.

Število a na $m$no potenco povišati ali a z m vzmnožiti (potencevati) se pravi, število a $m$krat kot faktor postaviti. (§ 39.) Število a imenujemo osnovno število ali podlogo, m potenčni eksponent in dobljeni produkt p $m$no potenco števila a, pišemo pa $a^m = p$. Potenca je torej produkt iz jednakih faktorjev.

Vzmnoževanje ima za sedaj le kak pomen, ako je eksponent celo pozitivno število ter večji od 1; razven tega morata biti podloga in eksponent neimenovani števili.

Prvotni pojem potence smo raztegnili v § 39., vzemši, da je $a^1 = a$, in v § 54., dokazavši, da je $a^0 = 1$.

Izreki o potencah.

§ 170.

1.) Potence istih podlog pomnožimo, ako vzmnožimo skupno podlogo z vsoto eksponentov.

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}, \quad a^5 \,.\, a^3 = a^8.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} a^m \,.\, a^n &= a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\, (m\text{krat}) \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\, (n\text{krat}) \\ &= a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\, (m+n)\text{krat} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

2.) Ta izrek obrnivši, dobimo

$$a^{m+n} = a^m \,.\, a^n,$$

t. j.: Število vzmnožimo z vsoto, ako je vzmnožimo z vsakim sumandom ter dobljene potence drugo z drugo pomnožimo.

§ 171.

1.) Potence istih podlog razdelimo, ako skupno podlogo vzmnožimo z diferenco med dividendovim in divizorjevim eksponentom.

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad a^8 : a^3 = a^5.$$

Dokaz.

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m;$$

$$a^5 \cdot a^3 = a^{5+3} = a^8.$$

2) Kot obrat dobimo

$$a^{m-n} = a^m : a^n,$$

t. j.: Število vzmnožimo z diferenco, ako je z minuendom in subtrahendom vzmnožimo ter prvo potenco z drugo razdelimo.

§ 172.

1.) Potence istih eksponentov pomnožimo, ako produkt njih podlog s skupnim eksponentom vzmnožimo.

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m, \quad 2^3 \cdot 5^3 = 10^3.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} a^m \cdot b^m &= a \cdot a \cdot a \ldots (m\text{krat}) \cdot b \cdot b \cdot b \ldots (m\text{krat}) \\ &= ab \cdot ab \cdot ab \ldots (m\text{krat}) \ (\S\ 34.) \\ &= (ab)^m. \end{aligned}$$

2.) Kot obrat dobimo

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m,$$

t. j.: Produkt vzmnožimo s številom, ako vsak faktor z njim vzmnožimo.

§ 173.

1.) Potence istih eksponentov razdelimo, ako vzmnožimo kvocijent njih podlog s skupnim eksponentom.

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m, \quad \frac{21^4}{7^4} = 3^4.$$

Dokaz.

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots (m\text{krat})}{b \cdot b \cdot b \ldots (m\text{krat})} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots (m\text{krat}) = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

2.) Ako ta izrek obrnemo, dobimo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

t. j.: Kvocijent (ulomek) vzmnožimo s številom, ako dividend in divizor (števec in imenovalec) z njim vzmnožimo.

§ 174.

1.) Potenco vzmnožimo s številom, ako podlogo s produktom obeh eksponentov vzmnožimo.

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (a^4)^3 = a^{12}.$$

Dokaz.

$$(a^m)^n = a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \ldots (n\text{krat}) = a^{m+m+m+\ldots (n\text{krat})} = a^{mn}.$$

2.) Obrat:

$$a^{mn} = (a^m)^n,$$

t. j.: Število vzmnožimo s produktom, ako je vzmnožimo z jednim faktorjem in dobljeno potenco še z druzim faktorjem.

3.) Ako treba potenco zopet vzmnožiti, ondaj smemo eksponenta med seboj zamenjati.

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

Dokaz. Vsled 1.) je

$$(a^m)^n = a^{mn} \text{ in } (a^n)^m = a^{nm};$$

ker pa je $mn = nm$ (§ 34.), je tudi $a^{mn} = a^{nm}$, tedaj

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

Kakšne predznake imajo potence.

§ 175.

1.) Pozitivna podloga dá, s katerim koli celim številom vzmnožena, vsikdar pozitivno potenco.

Dokaz. Po § 68., 2., *a)* je

$$(+a^2) = +a \,.\, +a = +aa = +a^2,$$
$$(+a)^3 = +a \,.\, +a \,.\, +a = +aaa = +a^3,$$
$$(+a)^4 = +a \,.\, +a \,.\, +a \,.\, +a = +aaaa = +a^4,$$

i. t. d.; v obče

$$(+a)^m = +a^m.$$

2.) Negativna podloga dá, s sodim številom vzmnožena, pozitivno, in z lihim številom vzmnožena, negativno potenco.

Dokaz. Po § 68., 2., *b)* je

$$(-a)^2 = -a \,.\, -a = +aa = +a^2,$$
$$(-a)^3 = -a \,.\, -a \,.\, -a = -aaa = -a^3,$$
$$(-a)^4 = -a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a = +aaaa = +a^4,$$
$$(-a)^5 = -a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a = -aaaaa = -a^5,$$

i. t. d.; v obče

$$(-a)^{2m} = +a^{2m}, \quad (-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}.$$

O potencah z negativnimi eksponenti.

§ 176.

Jednačba $a^m : a^n = a^{m-n}$ uči, kakó je deliti potence iste podloge (§ 171., 1.), a uporabljali smo jo do sedaj le, ako je bil $m \gtreqless n$. Ako jo uporabljamo tudi tedaj, kadar je $m < n$, in sicer $m + p = n$, dobimo potenco z negativnim eksponentom; kajti

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+p} = a^{-p}.$$

Da bode tedaj zakon, katerega ona jednačba izražuje, obče veljaven, treba tudi potencam z negativnimi eksponenti tak pomen dati, da velja prvotni pojem o potenci tudi zanje. Ta pomen pa dobimo, ako damo kvocijentu, katerega a^{-p} izražuje, drugačno obliko. Dobimo namreč

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \,.\, a^p} = \frac{1}{a^p}.$$

Tedaj $$a^{-p} = \frac{1}{a^p};$$

t. j.: Potenca z negativnim eksponentom je jednaka ulomku, čegar števec je 1, imenovalec pa ista potenca s pozitivnim eksponentom.

Da dokažemo ta izrek za posebnoštevilne eksponente, določimo n. pr. $a^2 : a^5$. Tu dobimo

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}, \text{ in}$$

$$a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a \,.\, a}{aaaaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3},$$

tedaj $$a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

Dostavek. Iz $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ dobimo $a^p \,.\, a^{-p} = 1$, tedaj $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$. Vsako potenco, katera je kot faktor v števci, prenesemo torej lahko kot faktor v imenovalec ulomkov, in obratno; v ta namen treba le eksponentu predznak v nasprotnega izpremeniti.

§ 177.

Vsi izreki, katere smo dokazali o potencah s pozitivnimi eksponenti, veljajo tudi o potencah z negativnimi eksponenti.

Kajti

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)};$$

$$(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \cdot b^{-m};$$

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn};\ \text{i. t. d.}$$

Kakó je vzmnoževati števila na kvadrat ali drugo potenco.

§ 178.

Ako pomnožimo število samo s seboj, dobimo njega kvadrat. Ako hočemo torej kvadrat binoma $a + b$ izračunati, treba ga le z $a + b$ pomnožiti, a potem dobimo

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

t. j.: Kvadrat binoma je jednak vsoti iz kvadrata prvega člena, dvojnega produkta obeh členov in kvadrata druzega člena.

Ako bi hoteli trinom $a + b + c$ na kvadrat vzmnožiti, treba ga le za binom smatrati ter v ta namen $a + b$ za prvi, in c za drugi člen vzeti; tedaj je

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2.$$

Prav takó dobimo

$$(a + b + c + d)^2 =$$
$$= [(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2;$$
$$(a + b + c + d + e)^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2 +$$
$$+ 2(a + b + c + d)e + e^2,$$

i. t. d.

Iz tega je razvidno, da velja za vzmnoževanje polinoma na kvadrat tá-le tvorbni zakon:

1.) Prvi člen danega izraza dá sam svoj kvadrat.

2.) Vsak naslednji člen dá po dve sestavini, namreč dvojni produkt iz vsote vseh prejšnjih členov in tega člena, ter sam svoj kvadrat.

3.) Vsota vseh teh sestavin je iskani kvadrat.

Primer.

$$
\begin{aligned}
(2a-3b+4c)^2 &= 4a^2-12ab+9b^2+2(2a-3b)\,.\,4c+16c^2 \\
&= 4a^2-12ab+9b^2+16ac-24bc+16c^2.
\end{aligned}
$$

Dostavek. Sestavini, kateri dá vsak člen danega polinoma v kvadratu, môči je tudi v jeden sam člen združiti. V ta namen treba le ta člen k dvojni vsoti vseh prejšnjih členov prišteti ter dobljeno vsoto še s tem členom pomnožiti; kajti

$$
\begin{gathered}
\underbrace{2ab+b^2}=(2a+b)\,.\,b; \\
2(a+b)c+c^2=[2(a+b)+c]\,.\,c; \quad \text{i. t. d.}
\end{gathered}
$$

§ 179.

Ker je môči vsako večštevilčno dekadno število smatrati za polinom, urejen po padajočih potencah števila 10, zato velja pravilo, kakó je sestavljene algebrajske izraze na kvadrat vzmnoževati, tudi za dekadna števila.

Recimo, da nam je izračunati n. pr. kvadrat števila 3417. Tu dobimo

$$
\begin{aligned}
3417^2 &= (3000+400+10+7)^2 \\
&= 3000^2+2\,.\,3000\,.\,400+400^2+2\,.\,3400\,.\,10+10^2+ \\
&\quad +2\,.\,3410\,.\,7+7^2;
\end{aligned}
$$

ali, ako sestavine drugo pod drugo zapišemo ter res izračunamo

$$
\begin{array}{rrr}
3417^2 = & 3000^2 \;\ldots & 9000000 \\
& +\,2\,.\,3000\,.\;400 \;\ldots & 2400000 \\
& +\,400^2 \;\ldots & 160000 \\
& +\,2\,.\,3400\,.\;10 \;\ldots & 68000 \\
& +\,10^2 \;\ldots & 100 \\
& +\,2\,.\,3410\,.\;7 \;\ldots & 47740 \\
& +\,7^2 \;\ldots & 49 \\
\hline
& & 11675889,
\end{array}
$$

ali, ako ničle izpustimo

$$
\begin{array}{rl}
3417^2 & \\
\hline
3^2 & 9. \\
2\,.\;3\,.\,4 \;\ldots & 24. \\
4^2 \;\ldots & 16. \\
2\,.\;34\,.\,1 \;\ldots & 68. \\
1^2 \;\ldots & 1. \\
2\,.\,341\,.\,7 \;\ldots & 4774. \\
7^2 \;\ldots & 49 \\
\hline
& 11675889.
\end{array}
$$

Za vzmnoževanje dekadnega števila na kvadrat velja tedaj tó-le pravilo:

1.) Prva ali najvišja številka danega števila dá sama svoj kvadrat.

2.) Vsaka naslednja številka dá v kvadratu dve sestavini: dvojno pred njo stoječe število, pomnoženo s to številko in sama svoj kvadrat.

3.) Te sestavine zapišemo tako drugo pod drugo, da pride vsaka naslednja za jedno mesto dalje proti desni, ter jih potem seštejemo, kakor stojé; vsota je iskani kvadrat.

N. pr.

417^2	
4^2 . . .	16.
2 . 4 . 1 . . .	8.
1^2 . . .	1.
2 . 41 . 7 . . .	574.
7^2 . . .	49
	173889

31417^2					
3^2 . . .	9	.			
2 . 3 . 1 . . .		6.			
1^2 . . .		1	.		
2 . 31 . 4 . . .		24	8.		
4^2 . . .			16	.	
2 . 314 . 1 . . .			62	8.	
1^2 . . .				1	.
2 . 3141 . 7 . . .			43	97	4
7^2 . . .					49
	9	87	02	78	89

Kvadrat dekadnega števila ima ali dvakrat toliko številk kakor dano število, ali jedno menj; kajti prva številka dá v kvadratu jedno ali dve mesti, vsaka naslednja pa po dve mesti. Ako razstavimo tedaj kvadrat od desne proti levi na razdelke po dve številki — prvi razdelek na levi more imeti tudi le jedno številko — dobimo prav toliko razdelkov, kolikor ima dano število številk.

Dostavek. 1.) Iz $\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 = \frac{a^2}{10^{2n}}$ je razvidno, da je računati kvadrat decimalnega ulomka prav takó kakor kvadrat celega dekadnega števila, le treba v kvadratu števca dvakrat toliko decimalk odrezati, kolikor jih ima dani decimalni ulomek. Število decimalk v kvadratu decimalnega ulomka je tedaj vsikdar sodo.

2.) Sestavini, kateri dá druga in vsaka naslednja številka danega števila v kvadratu, je môči v jedno samo združiti. V ta namen treba le k dvojnemu pred to številko stoječemu številu to novo številko pripisati in na ta način dobljeno število z ravno tisto številko pomnožiti, a vsak naslednji produkt je treba za dve mesti dalje proti desni pomakniti; v obče je namreč

$$(2A \,.\, 10)p + p^2 = (2A \,.\, 10 + p)p.$$

Ako izračunamo zadnji primer na tà način, dobimo

31417^2		
3^2	. . .	9..
61.1	. . .	61..
624.4	. . .	2496..
6281.1	. . .	6281..
62827.7	. . .	439789
		987027889.

Kakó je števila vzmnoževati na kub ali tretjo potenco.

§ 180.

Ako pomnožimo kvadrat katerega koli števila zopet s tem številom, dobimo njega tretjo potenco. Tedaj je

$$(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

t. j.: Tretja potenca (kub) binoma je jednaka vsoti iz tretje potence prvega člena, trojnega kvadrata prvega člena, pomnoženega z druzim členom, trojnega prvega člena, pomnoženega s kvadratom druzega člena in tretje potence druzega člena.

Da dobimo, uporabljajoč ta izrek, tretjo potenco trinoma $a+b+c$, treba le $a+b$ za jeden sam člen smatrati; tedaj

$$(a+b+c)^3 =$$
$$= [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 . c + 3(a+b) . c^2 + c^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 . c + 3(a+b) . c^2 + c^3.$$

In prav takó

$$(a+b+c+d)^3 = [(a+b+c)+d]^3 =$$
$$= (a+b+c)^3 + 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c) d^2 + d^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b) c^2 + c^3 +$$
$$+ 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c) d^2 + d^3,$$

i. t. d.

Odtod izvira, da je polinom takó-le na tretjo potenco vzmnoževati:

1.) Prvi polinomov člen dá sam svoj kub.

2.) Vsak naslednji člen dá tri sestavine, namreč trojni kvadrat iz vsote vseh prejšnjih členov, pomnožen s tem členom, trojno vsoto vseh prejšnjih členov, pomnoženo s kvadratom tega člena in kub tega člena.

3.) Vsota vseh teh sestavin je zahtevana tretja potenca.

Primer.

$(y^2 + 2y - 3)^3 = y^6 + 6y^5 + 12y^4 + 8y^3 - 9(y^2 + 2y)^2 +$
$+ 27(y^2 + 2y) - 27 = y^6 + 6y^5 + 12y^4 + 8y^3 - 9y^4 - 36y^3 -$
$- 36y^2 + 27y^2 + 54y - 27 = y^6 + 6y^5 + 3y^4 - 28y^3 - 9y^2 +$
$+ 54y - 27.$

§ 181.

Prej navedeni tvorbni zakon za kub algebrajskega polinoma uporabimo lahko tudi za kub dekadnega števila. Ako nam je n. pr. izračunati kub števila 4213, dobimo, ako pišemo sestavine takój drugo pod drugo:

$$\begin{array}{rll}
4213^3 = & (4000 + 200 + 10 + 3)^3 & \\
= & 4000^3 \;\ldots & 64000000000 \\
& + 3\,.\,4000^2.\,200 \;\ldots & 9600000000 \\
& + 3\,.\,4000\,.\,200^2 \;\ldots & 480000000 \\
& + \; 200^3 \;\ldots & 8000000 \\
& + 3\,.\,4200^2.\;10 \;\ldots & 529200000 \\
& + 3\,.\,4200\,.\;10^2 \;\ldots & 1260000 \\
& + \; 10^3 \;\ldots & 1000 \\
& + 3\,.\,4210^2.\;3 \;\ldots & 159516900 \\
& + 3\,.\,4210\,.\;3^2 \;\ldots & 113670 \\
& + \; 3^3 \;\ldots & 27 \\
\hline
& & = 74778091597
\end{array}$$

ali, ako ničle izpustimo

$$\begin{array}{rll}
& 4213^3 & \\
\hline
& 4^3 \;\ldots & 64. \\
3\,. & 4^2.\,2 \;\ldots & 96. \\
3\,. & 4\,.\,2^2 \;\ldots & 48. \\
& 2^3 \;\ldots & 8. \\
3\,. & 42^2.\,1 \;\ldots & 5292. \\
3\,. & 42\,.\,1^2 \;\ldots & 126. \\
& 1^3 \;\ldots & 1. \\
3\,. & 421^2.\,3 \;\ldots & 1595169. \\
3\,. & 421\,.\,3^2 \;\ldots & 11367. \\
& 3^3 \;\ldots & 27 \\
\hline
& & 74778091597.
\end{array}$$

Iz tega izvira, da je tretjo potenco dekadnega števila takó-le računati:

1.) Najprej vzmnoži prvo ali najvišjo številko danega števila na tretjo potenco.

2.) Za vsako naslednjo številko dobodi tri sestavine: trojni kvadrat pred njo stoječega števila, pomnožen s to številko, trojno pred njo stoječe število, pomnoženo s kvadratom te številke in tretjo potenco te številke.

3.) Te sestavine zapiši takó drugo pod drugo, da pride vsaka naslednja za jedno mesto dalje proti desni, potem pa jih seštej, kakor stojé.

N. pr.

123^3	
1^3 . . .	1.
$3\,.\,1^2\,.\,2$ . . .	6.
$3\,.\,1\,.\,2^2$ . . .	12.
2^3 . . .	8.
$3\,.\,12^2\,.\,3$ . . .	1296.
$3\,.\,12\,.\,3^2$ . . .	324.
3^3 . . .	27
	1860867

3054^3				
3^3 . . .	27	. . .	.	
$3\,.\,30^2\,.\,5$ . . .	1	350	0.	
$3\,.\,30\,.\,5^2$ . . .		22	50.	
5^3 . . .			125	.
$3\,.\,305^2\,.\,4$ . . .		111	630	0.
$3\,.\,305\,.\,4^2$ . . .			146	40.
4^3 . . .				64
	28	484	401	464

Tretja potenca dekadnega števila ima trikrat toliko številk kakor dano število, ali pa za dve ali tudi za jedno menj; kajti prva številka danega števila dá v tretji potenci jedno, dve ali tri mesta, vsaka naslednja pa vsikdar po tri mesta. Ako razstavimo tedaj tretjo potenco od desne proti levi na razdelke po tri mesta — prvi razdelek na levi ima lahko dve ali tudi le jedno številko — dobimo prav toliko razdelkov, kolikor ima dano število številk.

Dostavek. Iz $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$ izvira, da treba pri decimalnih ulomkih v tretji potenci števca 3krat toliko decimalk odrezati, kolikor jih ima dani decimalni ulomek.

Naloge.

1. $a^5\,.\,a^4$. *2.* $x^{3m}\,.\,x^{2n}$. *3.* $(2x)^3\,.\,(2x)^5$.

4. $a^{n+1}\,.\,a^{n-1}$. *5.* $3a^2x^2\,.\,7a^3x^4$. *6.* $2a^2m^3x^4\,.\,3am^5x^2$.

7. $3a^2x\,.\,15ax^2\,.\,4a^2x^2$. *8.* $7am^2\,.\,3b^2n^2\,.\,8a^2bm^3n$.

9. $(8a^3x^2 - 5b^3y^2)\,.\,3x^2y^2$. *10.* $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3)\,.\,8a^3b$.

11. $(3m^2 - 8m - 5)(7m^2 + 5m - 6)$.

12. Izračunaj

a) 4^8 iz $4^5 = 1024$ in $4^3 = 64$;

b) 15^5 iz $15^3 = 3375$ in $15^2 = 225$;

c) $1{\cdot}04^{10}$ iz $1{\cdot}04^8 = 1{\cdot}368569$ in $1{\cdot}04^2 = 1{\cdot}0816$ (na 6 dec.);

d) $1{\cdot}025^6$ iz $1{\cdot}025^4 = 1{\cdot}103813$ in $1{\cdot}025^2 = 1{\cdot}050625$ (na 6 dec)

13. $x^9 : x^3$. **14.** $27a^6 : 3a^2$. **15.** $a^{2n+1} : a^{n-1}$.

16. $30x^4y^3 : 5x^3y$. **17.** $8x^{a+2b} : 12x^{2b-a}$.

18. $3a^6b^3c^4d^5 : a^4b^2cd^3$. **19.** $104ab^3x^9 : (91a^5b^6x^7 : 7a^4b^4x)$.

20. $\frac{15ax^4}{8by^2} : \frac{3x^3}{4y}$. **21.** $\frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5} : \frac{4a^6xy}{5bc^2z^4}$.

22. $(2x^3 - 6x^5 + 9x^7 - 12x^9) : 3x^2$.

23. $(24x^4 - 38a^2x^2 + 15a^4) : (4x^2 - 3a^2)$.

---

24. $2^3 \,.\, 5^3$. **25.** $25^2 \,.\, 4^2$. **26.** $4^4 \,.\, 5^4 \,.\, 5^4$.

27. $(3a)^5 \,.\, (4a)^5$. **28.** $(x+y)^2 \,.\, (x-y)^2$.

29. $(2x)^3$. **30.** $(abc)^6$. **31.** $(5ax)^4$

32. $45^3 : 9^3$. **33.** $(8a^2)^5 : (2a)^5$. **34.** $x^n : \left(\frac{1}{y}\right)^n$.

35. $(5a^2bc^2)^4 : (5ac)^4$. **36.** $(84a^2b^4x^3)^2 : (6ab^3x)^2$.

37. $\left(\frac{x}{2}\right)^3$. **38.** $\left(\frac{3a}{4b}\right)^4$. **39.** $\left(\frac{5am}{7bn}\right)^3$.

40. $18x^4 \,.\, \left(\frac{2y}{3x}\right)^2$. **41.** $(\frac{3}{8})^3 \,.\, (\frac{4}{9})^2$.

42. $(\frac{3}{4})^3 \,.\, (\frac{8}{9})^3$. **43.** $(3\frac{3}{5})^6 \,.\, (\frac{5}{9})^6$.

44. $\left(\frac{3x}{4a}\right)^3 \cdot \left(\frac{2ax}{3by}\right)^3$. **45.** $\left(\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{a+b}{x-y}\right)^4$.

---

46. $(a^5)^3$. **47.** $(x^3)^5$. **48.** $(10a^2)^4$.

49. $(3m^2n^3)^2$. **50.** $(2x^2y^4)^6$. **51.** $(am^2x^3)^5$.

52. $\left(\frac{2x^2}{3y^2}\right)^3$. **53.** $\left(\frac{3a^2x}{4by^2}\right)^3$. **54.** $\left(\frac{7a^4m^2y^3}{8b^2n^3x^4}\right)^3$.

55. $\left(\frac{a^4b^5c^2}{x^5y^7}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^4y^6}{a^3b^4c}\right)^4$. **56.** $\left(\frac{2a^2x^2}{3by^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{6ax^2}{5b^2y}\right)^2 \cdot \left(\frac{3b^2}{5a^2}\right)$.

57. $\left[\frac{(2x^3y^2)^3 \,.\, (3x^4y^2)^2}{6x^2y^2}\right]^3$. **58.** $\left[\frac{(2xy^2)^5 \,.\, (3x^2z^2)^4 \,.\, (5y^3z)^3}{(10x^3y^2)^2 \,.\, (6y^2z^4)^3}\right]^2$.

---

59. $(-5)^3$. **60.** $(-a^2)^3$. **61.** $(-a^3)^2$.

62. $(-4x^3)^4$. **63.** $(-a^2b^3)^5$. **64.** $(-3x^3yz^2)^4$.

65. $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$. **66.** $\left(-\frac{2a^3}{7b^3}\right)^2$. **67.** $\left(-\frac{3a^2x}{5b^2y}\right)^5$.

68. 3^{-2}. **69.** 5^{-3}. **70.** 15^{-1}.

71. $0{\cdot}25^{-2}$. **72.** $\frac{1}{4^{-3}}$. **73.** $\frac{3}{6^{-1}}$.

74. $a^5 . a^{-3}$. **75.** $-a^{2m} . a^{-m}$. **76.** $2^{-3} . 4^{-3}$.

77. $bx^2 . b^{-1}x^{-3}$. **78.** $(x^{-2})^4$. **79.** $(x^{-1})^{-1}$.

80. $(\frac{2}{3})^{-4} . (\frac{2}{3})^{-1}$. **81.** $5^{-2} . (\frac{2}{5})^{-2}$. **82.** $a^{-4} : -a^4$.

83. $-4a : a^{-4}$. **84.** $(-6a^{-5}) : (-3a^{-1})$.

---

85. $(2a + 3b)^2$. **86.** $(8x - 7y)^2$. **87.** $(5a^2 - 6y^3)^2$.

88. $\left(\frac{4a - 2x}{3a + 2x}\right)^2$. **89.** $\left(\frac{4x^2}{3} - \frac{5z^2}{2}\right)^2$. **90.** $\left(\frac{a^3m^2}{3x} + \frac{6x^2}{a^2m}\right)^2$.

91. $(a + 2b - 3c)^2$. **92.** $(4 + 2y - y^2)^2$. **93.** $(3x - 5y + 8z)^2$.

94. $(6x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^2$. **95.** $(27x^6 - 54x^4 + 36x^2 - 8)^2$.

96. $\left(2 - \frac{a}{2} + \frac{2a^2}{3}\right)^2$. **97.** $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4c} - \frac{4c}{5d}\right)^2$.

98. $\left(\frac{3y^2}{4b^2} + \frac{2y}{3b} - \frac{1}{2}\right)^2$.

99. $(-a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2$.

100. 376^2. **101.** 2543^2. **102.** 5079^2. **103.** 73416^2.

104. $8{\cdot}47^2$. **105.** $74{\cdot}06^2$. **106.** $0{\cdot}8315^2$. **107.** $2{\cdot}3456^2$.

108. 92704^2. **109.** 372182^2. **110.** $13{\cdot}5079^2$. **111.** $4{\cdot}612908^2$.

112. $(94^2)^2$. **113.** 813^4. **114.** $5{\cdot}276^4$. **115.** 7644^8.

---

116. $(3x + 2y)^3$. **117.** $(4a - 3)^3$. **118.** $(2ax^2 + 3by^2)^3$.

119. $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^3$. **120.** $\left(\frac{3x - 2y}{5x + 4y}\right)^3$. **121.** $\left(\frac{7m^2}{3n^2} + \frac{5p^2}{6r^2}\right)^3$.

122. $(y^2 + 2y - 3)^3$. **123.** $(x^2 - 3xy + 2y^2)^3$.

124. $(1 - 2x - 3x^2 + 4x^3)^3$. **125.** $(1 - 2a^2 + 4a^4 - 8a^8)^3$.

126. $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - 1\right)^3$. **127.** $\left(4a - \frac{2x^2}{3a} + \frac{9x^4}{8a^3}\right)^3$.

128. 734^3. **129.** 862^3. **130.** 6035^3. **131.** 21709^3.

132. 78256^3. **133.** $9{\cdot}17^3$. **134.** $5{\cdot}946^3$. **135.** $69{\cdot}9023^3$.

136. $(57^3)^3$. **137.** $0{\cdot}623^9$. **138.** $1{\cdot}376^6$. **139.** $1{\cdot}05^{12}$.

II. O korenih.

§ 182.

Razkorenjevanje *(Wurzelausziehen, Radicieren)* rabi nam, kadar treba iz vrednosti potence in nje eksponenta podloge poiskati.

Število a s številom m razkoreniti, ali številu a $m$nega korena poiskati, pravi se, iz potence a in eksponenta m podlogo izračunati. Dano potenco a imenujemo radikand *(Radikand)* ali kar število, dani eksponent m korenj eksponent *(Wurzelexponent)*, in iskano podlogo p $m$ni koren *(Wurzel)* števila a, pišemo pa $\sqrt[m]{a} = p$.

N. pr. $4^3 = 64$, tedaj obratno $\sqrt[3]{64} = 4$.

Drugi in tretji koren imenujemo tudi oziroma kvadratni in kubični koren.

Za sedaj ima $\sqrt[m]{a}$ le tedaj kak pomen, kadar je a $m$na potenca katerega koli celega ali ulomljenega števila ter radikand in prav takó korenj eksponent neimenovano število.

§ 183.

Iz prejšnjega pojasnila izvira:

1.) Koren ima to svojstvo, da dá, s korenjim eksponentom vzmnožen, radikand.

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a, \quad \left(\sqrt[3]{27}\right)^3 = 27.$$

2.) Število ostane neizpremenjeno, ako je s katerim koli številom vzmnožimo in z istim številom razkorenimo.

$$a = \sqrt[m]{(a)^m}; \quad a = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m.$$

Vsled tega je môči vsako število na koren pretvoriti; n. pr. $b = \sqrt[5]{b^5}$.

Vzmnoževanje in razkorenjevanje sta tedaj nasprotna računa; razkorenjevanje je obrat vzmnoževanju.

3.) Prvi koren vsakega števila je jednak številu samemu.

Ker je $a^1 = a$, je tudi $\sqrt[1]{a} = a$.

Za prvi koren ne pišemo torej niti eksponenta 1, niti korenjega znaka. Pri druzem ali kvadratnem korenu pišemo pač znak, ne pa eksponenta 2; $\sqrt{a}$ pomenja tedaj $\sqrt[2]{a}$.

4.) $\sqrt[m]{1} = 1$, 5.) $\sqrt[m]{0} = 0$.

Izreki o korenih.

§ 184.

1.) Produkt razkorenimo, ako vsak faktor razkorenimo.

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}, \quad \sqrt[3]{8 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 4 = 8.$$

Dokaz. Ako je $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ pravi koren, dati mora, s korenjim eksponentom m vzmnožen, radikand ab. In res je

$$\left(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[m]{b}\right)^m \text{ (§ 172., 2.)} = a \cdot b \text{ (§ 183., 1.)}$$

Uporabljajoč ta izrek je môči radikand deloma razkoreniti, ako ima kak faktor, ki se dá z dotičnim številom razkoreniti. N. pr.

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt{4a} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a} = 2\sqrt{a}.$$

Na ta način je môči dostikrat korene, imajoče isti eksponent, a različne radikande, na take pretvoriti, ki imajo isti radikand, ter potem skrčiti. N. pr.

$$\begin{aligned} & \sqrt{8} + \sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{128} \\ = & \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{36 \cdot 2} - \sqrt{64 \cdot 2} \\ = & 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2.) Ako prejšnji izrek obrnemo, dobimo

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab},$$

t. j.: Korene istih korenjih eksponentov pomnožimo, ako produkt radikandov s skupnim korenjim eksponentom razkorenimo.

Uporabljajoč ta izrek in pa § 183., 2., moremo obratno vsak korenov faktor pod korenj znak spraviti; v ta namen treba le dotični faktor s korenjim eksponentom vzmnožiti ter to potenco z radikandom pomnožiti. N. pr.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b},$$

$$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}.$$

§ 185.

1.) Kvocijent (ulomek) razkorenimo, ako dividend in divizor (števec in imenovalec) razkorenimo.

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \qquad \sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$$

Dokaz. $\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}$ (§ 137., 2.) $= \frac{a}{b}$ (§ 183., 1.)

2.) Obrat:

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}},$$

t. j.: Korene istih korenjih eksponentov razdelimo, ako kvocijent iz radikandov s skupnim korenjim eksponentom razkorenimo.

§ 186.

1.) Potenco razkorenimo, ako podlogo razkorenimo, ali pa, ako potenčni eksponent razdelimo s korenjim eksponentom.

a) $\sqrt[n]{(a^m)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \qquad \sqrt[3]{(8^5)} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5.$

b) $\sqrt[n]{(a^m)} = a^{\frac{m}{n}}, \qquad \sqrt{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3.$

Dokaz.

a) $\left[(\sqrt[n]{a})^m\right]^n = \left[(\sqrt[n]{a})^n\right]^m$ (§ 174., 3.) $= a^m$ (§ 183., 1.)

b) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n}$ (§ 174., 1.) $= a^m.$

2.) Jednačbo $\sqrt[n]{(a^m)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ obrnivši, dobimo

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{(a^m)},$$

t. j.: Koren vzmnožimo s številom, ako radikand z njim vzmnožimo.

Izvod. Kadar je število vzmnožiti in razkoreniti, izvrši se to lahko v katerem koli redu.

3.) Ako obrnemo jednačbo $\sqrt[n]{(a^m)} = a^{\frac{m}{n}}$, dobimo

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)},$$

t. j.: **Število vzmnožimo z ulomkom**, ako je s števcem vzmnožimo in z imenovalcem razkorenimo.

Potenca z ulomljenim eksponentom pomenja tedaj toliki koren, kakor imenovalec kaže, iz tolike podlogine potence kakor števec kaže.

Dostavek. Prvotni pojem o potenci velja tudi za potence z ulomljenimi eksponenti. Kajti po prejšnjem je

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a)^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{a} \,\ldots\, (m\text{krat}).$$

§ 187.

Koren razkorenimo s številom, ako z njim radikand razkorenimo, ali pa korenj eksponent pomnožimo.

1.) $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}$, $\quad \sqrt[3]{(\sqrt{27})} = \sqrt{(\sqrt[3]{27})} = \sqrt{3}$;

2.) $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[mn]{a}$, $\quad \sqrt[3]{(\sqrt{64})} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Dokaz.

1.) $\left[\sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}\right]^m = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})^m}$ (§ 186., 2.) $= \sqrt[n]{a}$ (183., 1).

2.) $(\sqrt[mn]{a})^m = \sqrt[n]{\left[(\sqrt[mn]{a})^m\right]^n}$ (§ 183., 2.) $= \sqrt[n]{(\sqrt[mn]{a})^{mn}}$ (§ 174., 1.)

$= \sqrt[n]{a}$.

Izvod. **Ako treba število z dvema številoma razkoreniti, razkorenimo je lahko ali z vsakim posamič v katerem koli redu, ali pa s produktom obeh ob jednem.**

§ 188.

Koren iz katere koli potence ostane neizpremenjen, ako korenj in potenčni eksponent z istim številom pomnožimo ali razdelimo.

Kajti $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$; in

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:p}{n:p}} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$.

Uporabljajoč prvi del tega izreka, pretvorimo lahko vsakeršne korene na **skupen korenj eksponent**.

Recimo, da nam je pretvoriti n. pr. korene $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[5]{c^3}$, $\sqrt[10]{d^7}$ na skupen eksponent. Najmanjši skupni mnogokratnik danih korenjih eksponentov 2, 3, 5, 10 je 30; tedaj dobimo

$$30 : 2 = 15, \text{ torej } \sqrt{a} = \sqrt[30]{a^{15}},$$
$$30 : 3 = 10, \quad » \quad \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[30]{b^{20}},$$
$$30 : 5 = 6, \quad » \quad \sqrt[5]{c^3} = \sqrt[30]{c^{18}},$$
$$30 : 10 = 3, \quad » \quad \sqrt[10]{d^7} = \sqrt[30]{d^{21}}.$$

Vsled tega je môči tudi korene, imajoče različne eksponente, množiti in deliti (§ 184., 2., in § 183., 2.); v ta namen treba jih le prej na skupen korenj eksponent pretvoriti. N. pr.

$$\sqrt{a} \,.\, \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \,.\, \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \,.\, a^2} = \sqrt[6]{a^5};$$
$$\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^9} : \sqrt[12]{a^4} = \sqrt[12]{a^9 : a^4} = \sqrt[12]{a^5}.$$

Uporabljajoč drugi del onega izreka, lahko koren okrajšamo, ako imata njega korenj in potenčni eksponent skupno mero. N. pr.

$$\sqrt[8]{a^6} = \sqrt[4]{a^3}, \quad \sqrt[mp]{a^p} = \sqrt[m]{a}.$$

Kakšne predznake imajo koreni.

§ 189.

1.) Pozitivno število, razkorenjeno s katerim koli lihim številom, dá pozitiven koren.

$$\sqrt[3]{+27} = +3.$$

Kajti $(+3)^3 = +27$.

V obče: $\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}$.

2.) Negativno število, razkorenjeno s katerim koli lihim številom, dá negativen koren.

$$\sqrt[3]{-27} = -3.$$

Kajti $(-3)^3 = -27$.

V obče: $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$.

3.) Pozitivno število, razkorenjeno s katerim koli sodim številom, dá dve jednaki, a različno zaznamenovani števili.

$$\sqrt[4]{+16} = \pm 2.$$

Kajti $(+2)^4 = +16$ in $(-2)^4 = +16$.

V obče: $$\sqrt[2n]{+a} = \pm \sqrt[2n]{a}.$$

4.) Sedaj treba si ogledati le še $\sqrt[2n]{-a}$. Ker ne dá niti pozitivno niti negativno število, s sodim številom vzmnoženo, negativnega števila, zato pomenja $\sqrt[2n]{-a}$ število, katerega ne nahajamo med onimi, s katerimi smo se do sedaj pečali. To novo število imenujemo imaginarno število *(imaginäre Zahl)* v nasprotje vsem drugim številom, katera zovemo realna *(reell)* števila.

N. pr. $\sqrt{-4}$ ni niti $= +2$, niti $= -2$, kajti $(+2)^2 = +4$ in prav takó tudi $(-2)^2 = +4$.

Sod koren iz negativnega radikanda je imaginarno število.

Da si tudi imaginarno število $\sqrt[2n]{-a}$ v aritmetiki nič druzega ne pomenja nego število, katero dá, $2n$krat kot faktor vzeto, $-a$, vender ne kaže je v matematiki prezirati, kajti že v aritmetiki je pri višjih algebrajskih računih dostikrat velike koristi, v geometriji pa ima prav določen pomen. Ako dobimo v čisto aritmetični nalogi, v kateri se more le po realnem številu vprašati, imaginarno število za rezultat, ondaj je to znamenje, da naloge pod danimi pogoji ni mogoče razrešiti.

O iracijonalnih številih.

§ 190.

Pojasnjujoč $\sqrt[n]{a}$ v § 182., smo vzeli, da je radikand a $n$tna potenca katerega koli celega ali ulomljenega števila. Sedaj si hočemo še slučaj ogledati, kadar ta pogoj ne velja.

Ako celo število a ni $n$tna potenca katerega koli celega števila, ondaj ne more biti $\sqrt[n]{a}$ niti celo število niti ulomek; vender moremo $\sqrt[n]{a}$ približno z ulomkom izraziti, in to takó natančno, kakor le hočemo.

Dokaz. *a)* Ako izračunamo po vrsti $n$tne potence celih števil, namreč

$$1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ 4^n,\ \ldots\ p^n,\ (p+1)^n,\ \ldots$$

in ne najdemo števila a med temi potencami, ondaj mora biti med dvema sosednima potencama, n. pr. med p^n in $(p+1)^n$, tedaj $\sqrt[n]{a}$ med p in $p+1$; celo število torej $\sqrt[n]{a}$ ni. Toda $\sqrt[n]{a}$ tudi ulomek ne more biti; kajti ako bi bil jednak, recimo, ulomku $p+\frac{r}{s}=\frac{ps+r}{s}$, kjer sta r in s relativni praštevili, ondaj bi morala $n$tna potenca tega ulomka, imajočega najjednostavnejšo obliko, jednaka biti celemu številu a, kar ni mogoče.

b) Vender ima izraz $\sqrt[n]{a}$ tudi v tem slučaji prav določen pomen. Med celi števili p in $p+1$ uvrstimo namreč lahko ulomke z imenovalcem m. Ako vzmnožimo števila

$$p,\ p+\frac{1}{m},\ p+\frac{2}{m},\ \ldots\ p+\frac{c}{m},\ p+\frac{c+1}{m},\ \ldots\ p+1$$

na $n$tno potenco, ondaj je število a med dvema sosednima takima potencama, n. pr. med $\left(p+\frac{c}{m}\right)^n$ in $\left(p+\frac{c+1}{m}\right)^n$, tedaj $\sqrt[n]{a}$ med številoma $p+\frac{c}{m}$ in $p+\frac{c+1}{m}$, katerih diferenca je $\frac{1}{m}$.

Ako vzamemo tedaj za $\sqrt[n]{a}$ število $p+\frac{c}{m}$ ali pa $p+\frac{c+1}{m}$, potem je pogrešek manjši od $\frac{1}{m}$. Ker pa vzamemo lahko m takó velik, torej $\frac{1}{m}$ takó majhen, kakor le hočemo, zato je môči $\sqrt[n]{a}$ takó natančno določiti, kakor le hočemo.

$p+\frac{c}{m}$ imenujemo spodnjo, $p+\frac{c+1}{m}$ zgornjo približno vrednost izraza $\sqrt[n]{a}$.

N. pr. Recimo, da nam je določiti $\sqrt{2}$. Ker je 2 med $1^2=1$ in $2^2=4$, zato je $\sqrt{2}$ med 1 in 2. Dalje je 2

med	$1{\cdot}4^2 = 1{\cdot}96$	in	$1{\cdot}5^2 = 2{\cdot}25$,
»	$1{\cdot}41^2 = 1{\cdot}9881$	»	$1{\cdot}42^2 = 2{\cdot}0164$,
»	$1{\cdot}414^2 = 1{\cdot}999396$	»	$1{\cdot}415^2 = 2{\cdot}002225$, i. t. d.

Zaradi tega je $\sqrt{2}$ med $1{\cdot}4$ in $1{\cdot}5$,
» $1{\cdot}41$ » $1{\cdot}42$,
» $1{\cdot}414$ » $1{\cdot}415$, i. t. d.

Iz tega je razvidno, da je $\sqrt{2}$ med dvema številoma, kateri je môči takó zbližati, kakor le hočemo, da ima torej $\sqrt{2}$ določeno vrednost; te vrednosti ne moremo sicer s popolno natančnostjo določiti, a določimo jo lahko s toliko natančnostjo, s kolikoršno jo le hočemo.

§ 191.

Števila, katerih ni môči niti s celimi števili niti z ulomki natančno izraziti, a z ulomki približno takó natančno, kakor le hočemo, imenujemo iracijonalna števila *(irrationale Zahlen)* v nasprotje celim in ulomljenim številom, katera zovemo racijonalna števila *(rationale Zahlen)*.

Z iracijonalnimi števili računati, pravi se, z njih približnimi vrednostimi računati. Ker so pa te približne vrednosti racijonalna števila, veljajo vsi občni izreki, katere smo o racijonalnih številih dokazali, tudi o iracijonalnih številih.

§ 192.

Ulomek, čegar imenovalec je iracijonalen monom ali binom, pretvorimo lahko, ne da bi mu izpremenili vrednosti, na takega, ki ima racijonalen imenovalec; v ta namen treba le števec in imenovalec s primernim faktorjem pomnožiti. Ulomek iracijonalnega imenovalca oprostiti, pravi se, imenovalec poracijonaliti *(den Nenner rational machen)*.

Tu se hočemo pečati le z nekaterimi lažjimi slučaji.

1.) Ako hočemo dati ulomku, imajočemu obliko $\frac{Z}{\sqrt[n]{a^m}}$, kjer je $n > m$, racijonalen imenovalec, treba le števec in imenovalec z $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ pomnožiti. Kajti

$$\frac{Z}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{Z\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}\,.\,\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{Z\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{Z\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

N. pr. $\frac{m}{\sqrt[3]{a}} = \frac{m\sqrt[3]{a^2}}{a}$; $\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{3\sqrt{a}\,.\,\sqrt[5]{a^2}}{a} = \frac{3\sqrt[10]{a^9}}{a}$.

2.) Ako nam je pretvoriti ulomek, imajoč obliko $\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}}$ ali $\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, na takega, ki ima racijonalen imenovalec, treba le števec in imenovalec z $a \mp \sqrt{b}$ ali $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ pomnožiti. Kajti

$$\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{Z(a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})(a \mp \sqrt{b})} = \frac{Z(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b};$$

$$\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{Z(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{Z(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

N. pr. $$\frac{3}{5 - \sqrt{2}} = \frac{3(5 + \sqrt{2})}{5^2 - 2} = \frac{15 + 3\sqrt{2}}{23}.$$

$$\frac{15}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{15(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = 5(\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

§ 193.

Ako se nahaja v jednačbi neznanka pod korenjim znakom, môči je koren odpraviti. V ta namen treba le jednačbo takó urediti, da stoji koren, katerega hočemo odpraviti, sam na jedni strani in potem oba jednačbina dela s korenjim eksponentom vzmnožiti. V jednačbi neznanko korenjega znaka oprostiti, pravi se, jednačbo poracijonaliti *(die Gleichung rational machen).*

Recimo, da nam je poracijonaliti n. pr. jednačbo $\sqrt{2x + 3} = 5$. Jednako z jednakim vzmnoženo dá jednako. Vzmnoživši oba dva dela dane jednačbe na kvadrat, dobimo racijonalno jednačbo $2x + 3 = 25$, katero prav lahko razrešimo.

Kakó je izračunavati kvadratni koren.

§ 194.

Iz zakona (§ 178.), po katerem so sestavine polinoma v njega kvadratu sestavljene, je razvidno, da je kvadratni koren urejenega polinoma takó-le računati:

1.) Prvi člen urejenega polinoma je kvadrat prvega korenovega člena. Da dobiš torej prvi korenov člen, izračunaj kvadratni koren prvega radikandovega člena, potem pa njega kvadrat od radikanda odštej.

2.) Prva dva člena v ostanku imata oni dve sestavini, kateri dá naslednji korenov člen v kvadratu, in sicer je prvi člen v ostanku produkt iz dvojnega že najdenega korena in naslednjega korenovega člena. Ako razdeliš tedaj prvi člen ostanka z dvojnim že znanim korenom, dobiš naslednji korenov člen. Sedaj izračunaj sestavini, kateri dá ta novi korenov člen v kvadratu; v ta namen prištej ta novi člen (§ 179., dostav. 1.) k dvojnemu že prej znanemu korenu, to vsoto pomnoži z ravno tem členom, dobljeni produkt pa odštej od polinomovega ostanka.

3.) Takisto nadaljuj. Ako ne dobiš slednjič nikakeršnega ostanka, ondaj je dani polinom popoln kvadrat in kvadratni koren racijonalen; ako dobiš pa ostanek, ondaj je koren iracijonalen.

N. pr.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 25} = x^2 + 3x - 5 \\
\underline{-\,x^4} \\
\quad + 6x^3 - x^2 \qquad\qquad : (2x^2 + 3x) \,.\, 3x \\
\quad \underline{\pm 6x^3 \pm 9x^2} \\
\qquad\quad - 10x^2 - 30x + 25 : (2x^2 + 6x - 5) \,.\, -5 \\
\qquad\quad \underline{\mp 10x^2 \mp 30x \pm 25} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

§ 195.

Prav takó izvira iz zakona (§ 179.), po katerem so sestavine posamičnih korenovih številk v kvadratu sestavljene, da je **kvadratni koren celega dekadnega števila** takó-le računati:

1.) Število razdeli, pri jednicah začenši, na razdelke po dve številki; prvi razdelek na levi more imeti tudi le jedno številko. Potem poišči največje številke, katere kvadrat ima prvi razdelek na levi v sebi; to zapiši kot prvo številko v koren. To številko vzmnoži na kvadrat in tega odštej od prvega razdelka.

2.) K ostanku pripiši naslednji radikandov razdelek. Na ta način dobljeno število brez zadnje številke razdeli z dvojnim že znanim korenom in kvocijent zapiši kot novo številko v koren, ob jednem pa tudi k divizorju. Takó izpremenjeni divizor pomnoži s to novo korenovo številko, produkt pa odštej od dividenda, h kateremu pa treba privzeti prej izpuščeno številko.

3.) Takó nadaljuj, dokler nisi vzel vseh radikandovih razdelkov v račun.

Ako dobiš slednjič ostanek, ondaj je kvadratni koren danega števila iracijonalno število. Da to približno določiš, pripiši k zadnjemu in vsakemu naslednjemu ostanku po dve ničli, sicer pa računaj kakor prej; v kvadratnem korenu postavi decimalno točko, predno vzameš prvi dve ničli v račun.

N. pr.

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{3|76|36} = 194 \\
 & 1 \\
 & 27,6 \quad : 2 \ldots 2.1 \\
29.9 \ldots & 261 \\
 & 153,6 : 38 \ldots 2.19 \\
384.4 \ldots & 1536 \\
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\sqrt{23|61} = 48\cdot59 \ldots & \\
16 & \\
76,1 & : 8_8 \\
704 & \\
570,0 & : 96_5 \\
4825 & \\
8750,0 & : 970_9 \\
87381 & \\
119 &
\end{array}
$$

Produkt iz vsakokratnega izpremenjenega divizorja in nove številke moreš tudi takój, ko množiš, od dividenda odštevati. Prejšnja dva primera bi dobila potem tó-le obliko:

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{3|76|36} = 194 & \\
27,6 & : 2_9 \\
153,6 & : 38_4 \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\sqrt{23|61} = 48\cdot59 \ldots & \\
76,1 & : 8_8 \\
570,0 & : 96_5 \\
8750,0 & : 970_9 \\
119 &
\end{array}
$$

§ 196.

1.) Kvadratni koren decimalnega ulomka je prav takó računati kakor kvadratni koren celega števila: le treba decimalni ulomek od decimalne točke proti levi in proti desni na razdelke po dve mesti razdeliti ter v korenu decimalno točko postaviti, predno se vzame prvi razdelek decimalk v račun. Kadar ima zadnji razdelek decimalk na desni le jedno številko, tedaj pripiši mu ničlo, da bode število decimalk sodo.

N. pr.

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{1|52\cdot27|56} = 12\cdot34 & \\
52 & : 2_2 \\
82,7 & : 24_3 \\
985,6 & : 246_4 \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\sqrt{0\cdot68|30} = 0\cdot8264 \ldots & \\
43,0 & : 16_2 \\
1060,0 & : 164_6 \\
7240,0 & : 1652_4 \\
6304 &
\end{array}
$$

2.) Ako je izračunati kvadratni koren navadnega ulomka, ondaj izračunaj kvadratni koren njegovega števca in imenovalca; ali pa pretvori navadni ulomek na decimalnega ter potem izračunaj kvadratni koren tega.

N. pr.

$$\sqrt{\frac{144}{529}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{529}} = \frac{12}{23}.$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{8}} = \sqrt{0\cdot625} = 0\cdot7905 \ldots$$

§ 197.

Račun je môči izdatno prikrajšati, ako se zahteva v kvadratnem korenu le določeno število decimalk. V tem slučaji izračunaj na navadni način polovico korenovih števil in še jedno, k ostanku pa ne pripiši novega razdelka, nego v novem divizorji izpusti zadnjo številko, potem pa izračunaj naslednje korenove številke, uporabljajoč okrajšano delitev.

Ako bi hotel določiti n. pr. $\sqrt{138}$ na 5 decimalk natančno, tedaj vsega skupaj na 7 veljavnih števil, izračunal bi prve 4 številke na navadni način, zadnje 3 pa z okrajšano delitvijo. Dobil bi:

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{1|38} = & 11{\cdot}74734\,.\,. \\
38 & :2_1 \\
1\,700 & :22_7 \\
11\,100 & :234_4 \\
1724 & :234|8 \\
80 & \\
10 & \\
1 &
\end{array}
$$

Kakó je izračunavati tretji koren.

§ 198.

Iz tvorbnega zakona za tretjo potenco mnogočlenskega izraza (§ 180.) izvira obratno, da je računati tretji koren urejenega polinoma takó-le:

1.) Za prvi člen iskanega korena vzemi tretji koren prvega radikandovega člena ter njega tretjo potenco od radikanda odštej.

2.) Prvi člen ostalega polinoma razdeli s trojnim kvadratom že znanega korena; kvocijent je naslednji korenov člen. Potem izračunaj one sestavine, katere dá ta novi korenov člen v kubu, namreč trojni kvadrat prej že znanega korena, pomnožen s tem členom, trojni prejšnji del korena, pomnožen s kvadratom tega člena in kub tega člena; vsoto vseh teh sestavin odštej od prejšnjega radikandovega ostanka.

3.) Takisto nadaljuj. Ako ne dobiš slednjič nikakeršnega ostanka, ondaj je tretji koren racijonalen, sicer pa iracijonalen.

N. pr.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt[3]{[y^6 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 + 63y^2 - 54y + 27]} = y^2 - 2y + 3 \\
-y^6 \\
\hline
\quad - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 \qquad\qquad 3y^4 \\
\quad \mp 6y^5 \pm 12y^4 \mp 8y^3 \\
\hline
\qquad + 9y^4 - 36y^3 + 63y^2 - 54y + 27 : (3y^4 - 12y^3 + 12y^2) \\
\qquad \pm 9y^4 \mp 36y^3 \pm 36y^2 \\
\qquad\qquad\qquad \pm 27y^2 \mp 54y \pm 27 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

§ 199.

Iz tvorbnega zakona za kub celega dekadnega števila (§ 181.) je razvidno, da treba tretji koren dekadnega celega števila takó-le računati:

1.) Število razdeli, pri jednicah začenši, proti levi na razdelke po tri številke; prvi razdelek na levi sme imeti tudi le dve ali le jedno številko. Potem poišči največje številke, katere tretja potenca ne presega števila v prvem razdelku; le-tó zapiši kot prvo številko v koren, potem pa jo vzmnoži na tretjo potenco in to odštej od prvega radikandovega razdelka.

2.) K ostanku pripiši naslednji razdelek; na ta način dobljeno število brez zadnjih dveh številk razdeli potem s trojnim kvadratom že znanega korena, kvocijent pa zapiši kot novo številko v koren. Potlej izračunaj one sestavine, katere dá ta nova korenova številka v kubu, namreč trojni kvadrat že prej znanega korena, pomnožen s to številko, trojni prej znani koren, pomnožen s kvadratom te številke in kub te številke; prvo sestavino zapiši pod dividend, vsako naslednjo pa za jedno mesto dalje proti desni, potem pa odštej vsoto vseh treh sestavin od dividenda, privzemši njega prej izpuščeni dve številki.

3.) Takó nadaljuj, dokler nisi vzel vseh radikandovih razdelkov v račun.

Ako dobiš slednjič ostanek, ondaj je tretji koren iracijonalen, izračunaš pa ga lahko takó natančno, kakor le hočeš. V ta namen postavi v korenu decimalno točko, potem pa pripiši k zadnjemu in vsakemu naslednjemu ostanku po tri ničle, sicer pa računaj kakor prej.

N. pr.

	$\sqrt[3]{76\vert 765\vert 625} = 425$	$\sqrt[3]{10} = 2\cdot 15 \ldots$
$4^3 \ldots$	64	8
	12 7,65 : 48 . . . 3.4^2	20,00 : 12
$3.4^2.2 \ldots$	9 6	12
$3.4.2^2 \ldots$	4 8	6
$2^3 \ldots$	8	1
	2 6 77 6,25 : 5292. . 3.42^2	7 390,00 : 1323
$3.42^2.5 \ldots$	2 6 46 0	6 615
$3.42.5^2 \ldots$	31 5 0	157 5
$5^3 \ldots$	1 25	1 25
	0	616 25

§ 200.

1.) Prav takó je računati tudi tretji koren decimalnega ulomka; le treba decimalni ulomek od decimalne točke proti levi in proti desni na razdelke po tri številke razdeliti ter v korenu decimalno točko postaviti, predno se vzame prvi razdelek decimalk v račun.

N. pr.

$\sqrt[3]{13\cdot 144\vert 256} = 2\cdot 36$	$\sqrt[3]{0\cdot 002\vert 360} = 0\cdot 133 \ldots$
8	1
5 1,44 : 12	1 3,60 : 3
3 6	9
5 4	2 7
27	27
9 77 2,56 : 1587	16 30,00 : 507
9 52 2	15 21
24 8 4	35 1
2 16	27
0	73 63

2.) Tretji koren navadnega ulomka najdeš, ako izračunaš tretji koren njegovega števca in imenovalca, ali ako navadni ulomek pretvoriš na decimalen ulomek ter tega tretji koren izračunaš. N. pr.

$$\sqrt[3]{\frac{64}{343}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{4}{7}.$$

$$\sqrt[3]{5\tfrac{2}{3}} = \sqrt[3]{5\cdot 666666 \ldots} = 1\cdot 7828 \ldots$$

§ 201.

Račun je môči izdatno **prikrajšati**, ako treba v tretjem korenu le določeno število številk izračunati. V ta namen izračunaj polovico zahtevanih korenovih številk na navadni način; druge številke dobiš s pomočjo okrajšane delitve, in sicer vzemi zadnji ostanek za dividend, trojni kvadrat že najdenega korena brez zadnje številke pa za divizor.

Ako treba n. pr. $\sqrt[3]{3}$ na 5 decimalk izračunati, dobiš

$$\sqrt[3]{3} = 1 \cdot 44225$$

```
1
―――――
20,00 : 3
12
 48
  64
――――――――――
 2560,00 : 588
 2352
   672
    64
――――――――――
  14016 : 62,2,0|8
   1574
    330
     19
```

Naloge.

1. $\sqrt{4\,.\,49}$. 2. $\sqrt{9\,.\,16}$. 3. $\sqrt[3]{27\,.\,125}$.

4. $\sqrt[3]{8a^3x^3}$. 5. $\sqrt[4]{16a^4b^4}$. = 2 ab 6. $\sqrt[5]{32(a+b)^5}$.

7. $\sqrt{4a}$. 8. $\sqrt[3]{16}$. 9. $\sqrt[4]{x^5}$.

10. $x\sqrt{y^3z^3}$. 11. $\sqrt{9a^3b}$. 12. $\sqrt[3]{x^3y^5z^4}$.

13. $\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}$. 14. $\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{48}$.

15. $\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{128}$. 16. $9\sqrt{48}-3\sqrt{75}-2\sqrt{12}$.

17. $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{125}$. 18. $4\sqrt{28}+5\sqrt{63}-3\sqrt{175}$.

19. $\sqrt{a^3}-\sqrt{a}$. 20. $\sqrt{a^2x}+2\sqrt{b^2x}+3\sqrt{c^2x}$.

21. $5\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}$. 22. $4\sqrt[3]{3x}-2\sqrt[3]{24x}+\sqrt[3]{192x}$.

23. $\sqrt{8}\,.\,\sqrt{2}$. 24. $\sqrt[3]{9}\,.\,\sqrt[3]{9}$. 25. $\sqrt[5]{2}\,.\,\sqrt[5]{16}$.

26. $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a}$. **27.** $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}$. **28.** $\sqrt{x} \cdot \sqrt{xy}$.

29. $3\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} - 2\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{32}$. **30.** $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[4]{xy}$.

31. $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{6b} \cdot \sqrt{3ab}$. **32.** $\sqrt{ab}\sqrt{\frac{x}{a}} \cdot \sqrt{\frac{y}{b}}$.

33. $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$. **34.** $(8 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})$.

35. $(\sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{15} + \sqrt{20})$. **36.** $(\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{48})(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})$.

37. $(2 + \sqrt{3})^2$. **38.** $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$.

39. $(2\sqrt{8} - 6\sqrt{18} + 3\sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$.

40. $(3\sqrt{8} - 5\sqrt{32}) : \sqrt{2}$.

Spravi pri téh-le korenih faktor pod korenj znak:

41. $3\sqrt{5}$. **42.** $2\sqrt{\frac{3}{4}}$. **43.** $3\sqrt{1\frac{7}{9}}$.

44. $4\sqrt{5a}$. **45.** $4x\sqrt[3]{x}$. **46.** $\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$.

47. $\frac{x^2y}{a^2b}\sqrt{\frac{a^3b}{x^3y}}$. **48.** $(x - y)\sqrt{\frac{x + y}{x - y}}$.

---

49. $\sqrt{\frac{49}{64}}$. **50.** $\sqrt{2\frac{7}{9}}$. **51.** $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

52. $\sqrt{2\frac{1}{4}a}$. **53.** $\sqrt[3]{\frac{8a^4b}{27c^4}}$. **54.** $\sqrt[4]{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt[4]{\frac{8}{9}}$.

55. $\sqrt{\frac{25}{16} + \frac{3}{2}}$. **56.** $\sqrt{\frac{49}{16} - \frac{5}{2}}$. **57.** $\sqrt{\frac{a^6b^3}{x^3y^7}} \cdot \sqrt{\frac{xy^3}{a^4b^3}}$.

58. $\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{c^4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{a^4c}{b}} \cdot \sqrt[5]{\frac{b^4}{ac^2}}$. **59.** $\left(\sqrt{\frac{b^4}{a^3}} - \sqrt{\frac{a^2}{b}}\right) \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$.

60. $\sqrt{128} : \sqrt{8}$. **61.** $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3}$. **62.** $\sqrt[3]{48x} : \sqrt[3]{6x}$.

63. $\sqrt{87\frac{1}{2}} : \sqrt{3\frac{1}{2}}$. **64.** $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$. **65.** $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a - b}}$.

66. $\frac{\sqrt[3]{a^5b^9x}}{\sqrt[3]{a^2b^6x^4}}$. **67.** $\sqrt[5]{\frac{a^3b^4c^7}{x^4y^8}} : \sqrt[5]{\frac{c^2x}{a^2by^3}}$.

---

68. $\sqrt[3]{8^2}$. **69.** $\sqrt{25^3}$. **70.** $\sqrt[6]{64^5} - \sqrt[4]{16^3}$

71. $\sqrt{(a^2)^3} + a\sqrt[3]{(a^3)^2}$. **72.** $\sqrt{(x^2 - 2xy + y^2)^3}$.

73. $\sqrt{5^4}$. **74.** $\sqrt[3]{a^6}$. **75.** $\sqrt{2^6} + \sqrt[4]{2^8}$.

76. Pretvori na korene ter izračunaj:

a) $25^{\frac{1}{2}}$, *b)* $16^{\frac{1}{4}}$, *c)* $8^{\frac{2}{3}}$, *d)* $32^{\frac{2}{5}}$;

e) $48^{0\cdot5}$, *f)* $81^{0\cdot25}$, *g)* $64^{1\cdot5}$, *h)* $16^{1\cdot75}$,

i) $9^{-\frac{1}{2}}$, *k)* $125^{-\frac{1}{3}}$, *l)* $(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}}$, *m)* $(\frac{27}{64})^{-\frac{2}{3}}$.

77. $x^{\frac{2}{3}} \,.\, x^{\frac{3}{4}}$. **78.** $a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{2}{3}}$. **79.** $3^{\frac{3}{4}} \,.\, 27^{\frac{3}{4}}$.

80. $243^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{2}{3}}$. **81.** $x^{\frac{5}{4}} : x^{\frac{4}{5}}$. **82.** $x^{\frac{m}{n}} \,.\, x^{\frac{1}{n}} : x^{\frac{m-1}{n}}$.

83. $(\sqrt{2})^3$. **84.** $(\sqrt{a^3})^2$. **85.** $(\sqrt[4]{ab^2c^3})^3$.

86. $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a}}\right)^3$. **87.** $(\sqrt{a})^3 \,.\, \sqrt{a}$. **88.** $(\sqrt[7]{a})^5 \,.\, (\sqrt[7]{a})^2$.

89. $(2 + \sqrt{3})^2$. **90.** $(a - \sqrt{b})^2$. **91.** $(2\sqrt{8} - 3\sqrt{2})^2$.

92. $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^3$. **93.** $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt{a})^3$. **94.** $(4a\sqrt[3]{b} - 3b\sqrt[3]{a})^3$.

95. $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$. **96.** $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$. **97.** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{10}}}$.

98. $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$. **99.** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$. **100.** $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$.

101. $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}\right)^6$. **102.** $\sqrt{x\sqrt{x}}$. **103.** $\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}}$

104. Okrajšaj té-le korene:

a) $\sqrt[4]{x^2}$, *b)* $\sqrt[9]{a^{12}}$, *c)* $\sqrt[18]{x^{15}}$, *d)* $\sqrt[2n]{a^{3n}}$.

105. Pretvori té-le korene na skupen korenj eksponent:

a) $\sqrt{x}$ in $\sqrt[3]{x^2}$; *b)* $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{b^3}$ in $\sqrt[6]{c^5}$.

106. $\sqrt[8]{16} \,.\, \sqrt{2}$. **107.** $\sqrt[6]{a} \,.\, \sqrt[3]{a}$. **108.** $2\sqrt{2} \,.\, \sqrt[3]{3}$.

109. $\sqrt[3]{ab^2} \,.\, \sqrt[4]{a^2b}$. **110.** $\sqrt{x} \,.\, \sqrt[3]{x^2} \,.\, \sqrt[6]{x^5}$.

111. $\sqrt[3]{9} : \sqrt{3}$. **112.** $\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[3]{a^2}$. **113.** $(\sqrt{2} \,.\, \sqrt[3]{4}) : \sqrt[6]{2}$.

Pretvori té-le ulomke na take, ki imajo racijonalen imenovalec

114. $\frac{2}{\sqrt{2}}$. **115.** $\frac{8}{\sqrt{24}}$. **116.** $\frac{9}{\sqrt{\frac{3}{5}}}$.

117. $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$. **118.** $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt[5]{a^2}}$. **119.** $\frac{2+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$.

120. $\frac{2}{5+\sqrt{2}}$. **121.** $\frac{6\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}}$. **122.** $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

123. $\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$. **124.** $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$.

125. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$.

Poracijonali té-le jednačbe, potem pa jih razreši:

126. $3\sqrt{x-1} = 4$. **127.** $\sqrt{x} - 3 = 5$.

128. $17 - 2\sqrt{x} = 15$. **129.** $5\sqrt{x} - 14 = 4 + 3\sqrt{x}$.

130. $3\sqrt{6x+7} = 5\sqrt{5x-6}$. **131.** $\sqrt{x+1} = 5 - \sqrt{x-1}$.

132. $4 - \sqrt{x} = \sqrt{4+x}$. **133.** $\frac{4}{\sqrt{x-4}} = \frac{3}{\sqrt{x-7}}$.

---

134. $\sqrt{(4a^2 - 12ab + 9b^2)}$. **135.** $\sqrt{(9m^4 - 12m^2n^2 + 4n^4)}$.

136. $\sqrt{(x^4 - 6ax^3 + 11a^2x^2 - 6a^3x + a^4)}$.

137. $\sqrt{(16m^6 + 16m^5 + 4m^4 - 16m^3 - 8m^2 + 4)}$.

138. $\sqrt{(16a^6 - 24a^5 + 25a^4 - 20a^3 + 10a^2 - 4a + 1)}$.

139. $\sqrt{(9y^6 - 12y^5 + 10y^4 - 28y^3 + 17y^2 - 8y + 16)}$.

140. $\sqrt{(25 - 70a + 139a^2 - 236a^3 + 235a^4 - 198a^5 + 121a^6)}$.

141. $\sqrt{\left(\frac{x^4}{9} - \frac{x^3}{3} + \frac{11x^2}{12} - x + 1\right)}$.

142. $\sqrt{1296}$. **143.** $\sqrt{7056}$. **144.** $\sqrt{11664}$.

145. $\sqrt{135424}$. **146.** $\sqrt{556516}$. **147.** $\sqrt{226576}$.

148. $\sqrt{1920996}$. **149.** $\sqrt{26956864}$. **150.** $\sqrt{53993104}$.

151. $\sqrt{395850816}$. **152.** $\sqrt{422220304}$. **153.** $\sqrt{54782211136}$.

154. $\sqrt{1406 \cdot 25}$. **155.** $\sqrt{27 \cdot 973521}$. **156.** $\sqrt{0 \cdot 00178929}$.

157. $\sqrt{785 \cdot 6809}$. **158.** $\sqrt{0 \cdot 97535376}$. **159.** $\sqrt{44105 \cdot 040144}$.

160. $\sqrt{\frac{676}{1681}}$. **161.** $\sqrt{\frac{178929}{797449}}$. **162.** $\sqrt{485380\frac{29}{169}}$.

163. $\sqrt{\sqrt{29986576}}$. **164.** $\sqrt[4]{362673936}$. **165.** $\sqrt[8]{1475789056}$.

Izračunaj té-le iracijonalne korene na 5 decimalk:

166. $\sqrt{28}$. ***167.*** $\sqrt{320}$. ***168.*** $\sqrt{6584}$. ***169.*** $\sqrt{552747}$.

170. $\sqrt{3 \cdot 92}$. ***171.*** $\sqrt{0 \cdot 101}$. ***172.*** $\sqrt{8 \cdot 376}$. ***173.*** $\sqrt{0 \cdot 07854}$.

174. $\sqrt{0 \cdot 123457}$. ***175.*** $\sqrt{55 \cdot 25734}$. ***176.*** $\sqrt{19 \cdot 383838}$.

177. $\sqrt{\frac{57}{3}} = \sqrt{\frac{171}{9}} = ?$ ***178.*** $\sqrt{\frac{591}{67}}$. ***179.*** $\sqrt{251\frac{7}{12}}$.

---

180. $\sqrt[3]{(a^3x^6 - 3a^2bx^4y^2 + 3ab^2x^2y^4 - b^3y^6)}$.

181. $\sqrt[3]{(8x^6 - 36x^5 + 78x^4 - 99x^3 + 78x^2 - 36x + 8)}$.

182. $\sqrt[3]{(64x^6 - 144ax^5 + 204a^2x^4 - 171a^3x^3 + 102a^4x^2 - 36a^5x + 8a^6)}$.

183. $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{8b^3} - \frac{a^2c}{b^2d} + \frac{8ac^2}{3bd^2} - \frac{64c^3}{27d^3}\right)}$.

184. $\sqrt[3]{5832}$. ***185.*** $\sqrt[3]{12167}$. ***186.*** $\sqrt[3]{59319}$.

187. $\sqrt[3]{262144}$. ***188.*** $\sqrt[3]{1259712}$. ***189.*** $\sqrt[3]{8615125}$.

190. $\sqrt[3]{746142643}$. ***191.*** $\sqrt[3]{1767172329}$. ***192.*** $\sqrt[3]{627881709547}$.

193. $\sqrt[3]{0 \cdot 778688}$. ***194.*** $\sqrt[3]{474 \cdot 552}$. ***195.*** $\sqrt[3]{78 \cdot 402752}$.

196. $\sqrt[3]{\frac{704969}{1601613}}$. ***197.*** $\sqrt[3]{32 \cdot 856}$. ***198.*** $\sqrt[3]{0 \cdot 00008427}$.

Izračunaj té-le iracijonalne korene na 5 decimalk:

199. $\sqrt[3]{100}$. ***200.*** $\sqrt[3]{5213}$. ***201.*** $\sqrt[3]{8135}$. ***202.*** $\sqrt[3]{47838}$.

203. $\sqrt[3]{0 \cdot 3}$. ***204.*** $\sqrt[3]{25 \cdot 643}$. ***205.*** $\sqrt[3]{0 \cdot 0957}$. ***206.*** $\sqrt[3]{0 \cdot 12345}$.

207. $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{\frac{180}{216}} = ?$ ***208.*** $\sqrt[3]{\frac{37}{70}}$. ***209.*** $\sqrt[3]{8\frac{7}{12}}$.

III. Naloge v ponavljanje.

1.* Razstavi v razmerji $3 : 5$ števila:

a) 20, *b)* 28, *c)* 35, *d)* $\frac{1}{5}$, *e)* $0 \cdot 32$.

2.* Trgovec je imel kos sukna; ko ga je prodal $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ in $\frac{1}{10}$, ostalo mu je še 9 *m* sukna. Koliko *m* je imel kos?

3. Kateri kapital narase v 5 letih s 5% prostimi obrestimi na 2000 gl.?

4. Koliko obrestij dá

a) 1800 gl. po 5 % od dne 1. januvarja do dne 20. februvarja?

b) 6400 mark po 4 % od dne 1. februvarja do dne 18. maja?

c) 5600 frankov po $4\frac{1}{2}$ % od dne 1. novembra do dne 24. januvarja?

5. Koliko velja 12 sodov rumenega voska, imajočih 6767 *kg* nečiste teže in 636 *kg* tare, ako se računa 100 *kg* čiste teže po 195·48 gl. in dovoli $2\frac{1}{3}$ % skonta?

6. $660 : (23 - 2\frac{3}{8})$. ***7.*** $\{[(10\frac{1}{6} - 9\frac{3}{4}) \cdot 3\frac{1}{5}] + 4\frac{2}{3}\} : \frac{3}{5}$.

8. $\left(\frac{2a^2x^2}{3by^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{6ax^2}{5b^2y}\right)^2 \cdot \left(\frac{5b^2}{3a^2}\right)^4$. ***9.*** $\left[\frac{(2xy^2)^5 \cdot (3x^2z^2)^4 \cdot (5y^3z)^3}{(10x^3y^2)^2 \cdot (6y^2z^4)^3}\right]^2$.

10. Trgovec je prodal za svojega poverítelja blaga za 2930 gl. 70 kr. ter imel pri prodaji 52 gl. 40 kr. stroškov; koliko mora poverítelju poslati, ako računa 3 % provizije?

11.* Ako odšteješ od nekega števila polovico in od ostanka zopet polovico, odštel si 150. Katero število je to?

12.* Katero število treba s $\frac{5}{4}$ pomnožiti, da se poveča za $\frac{5}{4}$?

13. Iz mesta *A* odpotuje v mesto *B* sel, kateri potrebuje za vso pot 10 dnij. Drug sel pa gre iz mesta *B* v mesto *A* ter prehodi vso pot v 15 dneh. V koliko dneh se bosta sla srečala, ako oba ob jednem odpotujeta?

14. $x^{m+3} \cdot x^{m-5} \cdot x^{4-m}$. ***15.*** $(x^2y^2 - 2abxy + a^2b^2)^2$.

16. $(2a^2b\sqrt[4]{ab^2x})^2$. ***17.*** $(\sqrt{4x} + \sqrt{5y})(\sqrt{4x} - \sqrt{5y})$.

18. Trgovec je plačal za 2734 *kg* mandelnov in 2891 *kg* kave 121 gl. 95 kr. vozarine; koliko vozarine je plačal za mandelne in koliko za kavo?

19. Za kurjavo šolske sobe se je potrebovalo vsako zimo 18 m^3 bukovega lesa; v prihodnje hočejo pa s premogom kuriti. Koliko *kg* premoga bode treba, ako tehta 1 m^3 bukovega lesa 376 *kg* in ima premog za 70 % večjo kurilno moč nego bukov les iste teže?

20. Koliko zlata, imajočega po 720 tisočnin čistine, treba zliti s 3 *kg* po 900 tisočnin čistine, da bode imela zlitina po 840 tisočnin čistine?

21. Gozd ima sedaj 80000 m^3 lesú. *a)* Koliko ga je imel pred 10 leti, *b)* koliko ga bode imel v 10 letih, ako ga vsako leto po 2 % priraste?

22. Izračunaj, na okrajšani način deleč, na 3 decimalke:

a) 83·422 : 31·586, *b)* 345·6352 : 0·789,

c) 6·54728 : 15·23, *d)* 0·47 : 16·982.

23.* A in B razdelita 585 gl. takó med seboj, da je razmerje med njiju deležema kakor $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$; koliko dobi vsak?

24. V Hamburgu velja funt Portorico-kave 91 pfenigov, stroškov je ondi 3 %, provizije 2 %; vozarine do Dunaja, carine, i. t. d. je 14 %. Koliko velja 1 *kg* te kave na Dunaji, ako je 100 mark = 56·8 gl. a. v. in 1 kg = 2 fnt.?

25. $7(3x - 6) + 5(x - 3) + 4(17 - x) = 11.$

26. $\frac{a - bx}{b} = \frac{ax - b}{a}.$ ***27.*** $\frac{ax - 2a}{ax - 2b} = \frac{ax - 2b}{ax + 2a}.$

28. $5 + \sqrt{2x} = 7.$ ***29.*** $2\sqrt{x} + 3 = 7(2\sqrt{x} - 3).$

30. Nekdo je izposodil dne 1. maja 1550 gl. po 4 %; ko se mu je denar povrnil, iznašal je kapital z obrestimi vred $1619\frac{3}{4}$ gl.; kedaj se mu je kapital povrnil?

31. Kaj je ugodnejše, kupiti avstr. papirne rente (obrestij po $4\frac{1}{5}$ %) ali zlate rente (obrestij po 4 % v zlatu), ako je kurz prve 73 in druge 88 in ima zlato nasproti papirnatemu denarju 17 % ažije?

32. $\sqrt{119025}.$ ***33.*** $\sqrt{46335249}.$ ***34.*** $\sqrt{9820611801}.$

35. $\sqrt[3]{857375}.$ ***36.*** $\sqrt[3]{156590819}.$ ***37.*** $\sqrt[3]{829789013773}.$

38.* Kapital, kateri je bil do sedaj po 4 % izposojen, naloži se po 6 % in vsled tega dá 52 gl. obrestij več na leto; kolik je kapital?

39.* Koliko časa treba 100 gl. *a)* po 2 %, *b)* po 4 %, *c)* po 5 % na obresti naloženih imeti, da bodo proste obresti kapitalu jednake?

40. Od $10\frac{1}{2}$ milijona državnega dolga se plačuje vsako leto po 367500 gl. obrestij; koliko % iznašajo obresti?

41. $86\frac{1}{4}$ *km* dolga železnica dá prvo leto 212652 gl. čistega dobička in vsled tega nese kapital, ki se je za nje zidanje potreboval 3 % obrestij. Koliko je veljal poprek 1 *km* te železnice?

42. $(16x^4 - 48x^3y + 108x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4)(4x^2 + 12xy + 9y^2).$

43. $(64a^6 - 432a^3b^3 + 729b^6) : (4a^2 - 12ab + 9b^2).$

44.* Ako odšteješ neko število od števila 80, ostane ti še 20 več nego si odštel. Katero število je to?

45.* Dvema delavcema treba 665 *m* dolg prekop blata osnažiti; prvi izgotovi po 45 *m*, drugi po 50 *m* na dan. Kedaj bode vse delo gotovo?

46. Neki kapital je po 4 % izposojen. Ako razdeliš petino kapitala z letnimi obrestimi vsega kapitala, h kvocijentu pa 75 prišteješ, dobiš prav toliko goldinarjev, kolikor dá ves kapital obrestij na leto. Kolik je kapital?

47. Ako odšteješ od nekega števila 10, ostanek pomnožiš s 3, iz produkta izračunaš kvadratni koren in od tega odšteješ 17, dobiš 1. Koliko je ono število?

48. Ako prišteješ h kvadratnemu korenu iz nekega za 1 povečanega števila kvadratni koren iz istega za 1 zmanjšanega števila, dobiš 2 za vsoto. Katero število je to?

49. *A*, *B* in *C* so izgubili pri nekem skupnem podjetji 20 %. Razmerje med vlogami je bilo 9 : 8 : 7, in kapitala je ostalo po odbitku izgube še 22480 gl. 80 kr. *a)* Koliko je dobil vsak nazaj, *b)* koliko je vsak vložil, *c)* koliko je vsak izgubil?

50. Nekdo si izposodi 1200 gl. ter plača na račun 5 % obrestnih obrestij in dolga koncem vsacega leta po 100 gl.; *a)* koliko bode še čez 10 let dolžán, *b)* koliko je ta dolg sedaj vreden?

Deveti oddelek.

O jednačbah prve stopinje z več neznankami.

I. Kakó je razreševati jednačbe z dvema neznankama.

§ 202.

J e d n a s a m a jednačba dveh neznank n e d o l o č u j e; kajti brezštevilno je vrednostij, katere jednačbi zadostujejo, ako jih za neznanki v jednačbo postaviš. Ako vzamemo n. pr. jednačbo $2x + 5y = 26$, dobimo, če smatramo za sedaj x za neznanko, y pa za znano število, $x = \frac{26 - 5y}{2}$. Kolikor različnih vrednostij vzamemo za y, toliko različnih vrednostij dobimo za x; ker pa vzamemo lahko za y brez števila različnih vrednostij, dobimo jih tudi za x brez števila; razrešitev je tedaj nedoločena. Da je môči x in y po polnem natanko določiti, treba še d r u g e jednačbe, izražujoče odnošaj med x in y, da nedoločeno razrešitev prve odpravi; druga jednačba mora biti od prve bistveno različna, pa nasprotovati ji tudi ne sme.

Da razrešimo dve jednačbi z dvema neznankama, treba iz obeh jednačeb napraviti tretjo, imajočo le j e d n o neznanko. O drugi neznanki pravimo, da jo i z t r e b i m o *(eliminieren)*.

§ 203.

Rabijo nam posebno trije i z t r e b l j e v a l n i n a č i n i.

1.) P r i m e r j a l n i n a č i n *(Comparationsmethode)*. Vrednost jedni neznanki se določi iz obeh jednačeb, te dve vrednosti se izjednačita in potem se dobljena jednačba, imajoča le drugo neznanko, razreši. N. pr.

$$2x + 5y = 26 \;.\;.\;.\; 1.) \text{ in } 3x - 2y = 1 \;.\;.\;.\; 2.)$$

Iz 1.) dobimo $x = \frac{26 - 5y}{2}$,

iz 2.) dobimo $x = \frac{1 + 2y}{3}$,

tedaj $\frac{26 - 5y}{2} = \frac{1 + 2y}{3}$,

in odtod $y = 4$. Ako postavimo to vrednost za y v 1.) dobimo $2x + 5 \,.\, 4 = 26$, in odtod $x = 3$.

2.) Zamenjevalni način *(Substitutionsmethode).* Vrednost jedni neznanki se določi iz jedne jednačbe in ta vrednost se postavi v drugo jednačbo; na ta način dobljena jednačba ima le jedno neznanko in ta se potem določi. N. pr.

$x + 2y = 8 \;...\; 1.)$ in $6x - 5y = 14 \;...\; 2.)$

Iz 1.) dobimo $x = 8 - 2y$.

Ako postavimo to vrednost v 2.), dobimo

$$6(8 - 2y) - 5y = 14,$$

in odtod $y = 2$. Zamenjavši v 1.) y s to vrednostjo, dobimo $x = 4$.

3.) Način jednakih koeficijentov *(Methode der gleichen Coëfficienten).* Neznanki, katero je iztrebiti, priskrbi se v obeh jednačbah isti koeficijent, kar se doseže, ako se pomnoži vsaka jednačba s primernim faktorjem; takó izpremenjeni jednačbi se potem seštejeta ali odštejeta, kakor imata ta dva koeficijenta nejednak ali jednak predznak; na ta način dobljeno jednačbo z jedno neznanko treba potem razrešiti. N. pr.

$4x - 3y = 9 \;...\; 1.)$ in $6x + 5y = 61 \;...\; 2.)$

Najmanjši skupni mnogokratnik števil 4 in 6 je 12. Pomnoživši tedaj prvo jednačbo s 3 in drugo z 2, dobimo

$$\begin{aligned} 12x - 9y &= 27, \\ 12x + 10y &= 122. \end{aligned}$$

Odštevši prvo od druge, dobimo

$$19y = 95,$$

in odtod $y = 5$. Ako zamenjamo s to vrednostjo y v 1.), dobimo $x = 6$.

Dostavek. Kateri izmed teh treh iztrebljevalnih načinov je v vsakem posamičnem slučaji najugodnejši, ravna se po tem, kakšne koeficijente imajo neznanke. Navadno se določi le vrednost jedne neznanke na jeden ali drug prej navedeni način, dobljena vrednost se postavi potem v jedno izmed danih jednačeb in odtod se dobi vrednost druge neznanke.

§ 204.

Da je môči iz dveh jednačeb z dvema neznankama vrednosti teh neznank določiti, treba, da sta te dve jednačbi po polnem druga od druge nezavisni in tudi nasprotovati si ne smeta, kakor je iz téh-le primerov razvidno.

1.) $4x - 3y = 9$ in $\frac{8x}{3} - 2y = 6$.

Druga jednačba je od prve zavisna, kajti dobili smo jo iz prve, pomnoživši le-tó z $\frac{2}{3}$. Uporabivši za razrešitev teh dveh jednačeb primerjalni način, dobimo

$$\frac{9 + 3y}{4} = \frac{18 + 6y}{8}$$
$$18 + 6y = 18 + 6y$$
$$0 = 0.$$

Za y ne dobimo tedaj nikakeršne vrednosti.

2.) $4x - 3y = 9$ in $8x - 6y = 15$.

Druga jednačba nasprotuje prvi, kajti nje prvi del je 2kratnik prvega dela prve jednačbe, 15 pa ni 2kratnik števila 9. Ako uporabimo za te dve jednačbi način jednakih koeficijentov, dobimo

$$\begin{array}{rcl} 8x - 6y &=& 18 \\ 8x - 6y &=& 15 \\ - \quad + & & - \\ \hline 0 &=& 3. \end{array}$$

Razrešitev danih jednačeb daje torej protislovje.

Naloge.

1. $x + y = 11,\quad x - y = 3.$

2. $2x + y = 12,\quad x + 4y = 12.$

3. $2x - y = 4,\quad 4x + 3y = 18.$

4. $3x + y = 19,\quad 3x - 2y = 7.$

5. $7x - 2y = 12,\quad 3x + 2y = 8.$

6. $4x + 5y = 22,\quad 5x - 4y = 7.$

7. $8x - 5y = 25,\quad 3x + 7y = 36.$

8. $3x + 4y = 4,\quad 12x - 6y = 5.$

9. $16y - 25z = 7,\quad 5z - 24y = 9.$

10. $28x + 6y = 9,\quad 9y - 4x = 2.$

11. $3x + 7 = 4y + 3,\quad 4x - 8 = 5y - 10.$

12. $3{\cdot}7x - 16{\cdot}6 = 4{\cdot}5y,\quad 1{\cdot}5x - 2{\cdot}7 = 2{\cdot}4y.$

13. $x + y = 20,$
$\frac{x}{3} = y.$

14. $y = 3x - 33,$
$\frac{y}{4} = \frac{x}{3} + 8.$

15. $x - y = 12,$
$\frac{x}{9} - \frac{y}{8} = 1.$

16. $x + 2y = 30,$
$\frac{3x}{5} + \frac{y}{2} = 11.$

17. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y = 2,$
$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 4.$

18. $\frac{5}{8}x - \frac{4}{9}y = 4,$
$\frac{1}{7}x - \frac{1}{4}y = 3.$

19. $\frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = 17,$
$\frac{5x}{4} + \frac{5y}{8} = 27.$

20. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{3}{4},$
$\frac{4}{5}x + \frac{5}{6}y = \frac{6}{7}.$

21. $\frac{x+7}{y} = \frac{4}{5},$
$\frac{x}{y+4} = \frac{1}{2}.$

22. $\frac{x+y}{2} - \frac{x+y}{3} = 4,$
$\frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{3} = 1.$

23. $\frac{12x-1}{11} + 7y = 22,$
$\frac{y+1}{2} - x = 1.$

24. $\frac{x}{0 \cdot 3} = \frac{y}{0 \cdot 2},$
$\frac{x}{0 \cdot 9} = 10 + \frac{y}{0 \cdot 9}.$

25. $x + y = 36,$
$x : y = 3 : 2.$

26. $x : y = 4 : 1,$
$(x - 6) : (y + 6) = 1 : 4.$

27. $(2x + y - 1) : (3x + 2y + 11) = 1 : 2,$
$(5x - 3y + 4) : (6x - 3y + 3) = 3 : 4.$

28. $(x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4),$
$(x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1).$

29. $\frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3,$
$\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4.$

30. $\frac{28}{x} + \frac{6}{y} = 9,$
$\frac{9}{y} - \frac{4}{x} = 2.$

31. $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{3}{4},$
$\frac{6}{x} - \frac{2}{y} = \frac{3}{10}.$

32. $\frac{1 \cdot 6}{x} = \frac{2 \cdot 7}{y} - 1,$
$\frac{0 \cdot 8}{x} = \frac{3 \cdot 6}{y} - 5.$

33. $ax + y = m,$
$x + by = n.$

34. $nx - my = m - n,$
$mn(x + y) = m^2 + n^2.$

35. $ax - by = a^2 + b^2,$
$bx + ay = a^2 + b^2.$

36. $(a + c)x + (a - c)y = 2bc,$
$(b - c)x + (b + c)y = 2ac.$

37. $\frac{a}{x} = \frac{b}{y},$
$x - y = c.$

38. $\frac{x - a + 2b}{b} + \frac{y}{c} = \frac{b}{c},$
$\frac{x}{ab} + \frac{y}{bc} = \frac{x+y}{ac}.$

39. $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$,
$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}$.

40. $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2$,
$\frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$.

---

41. $\sqrt{x} : \sqrt{x+y} = 4 : 5$,
$x + y = 25$.

42. $x = 1 + \sqrt{y}$,
$y = 4 - 3x + x^2$.

43. $2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5$,
$\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 20$.

44. $3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 9$,
$2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1$.

45. $\frac{3}{\sqrt{32+x}} = \frac{1}{\sqrt{12-y}}$,
$\frac{4}{\sqrt{20-x}} = \frac{3}{\sqrt{1+y}}$.

46. $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = 6$,
$\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{y}} = 1$.

II. Kakó je razreševati jednačbe s tremi ali več neznankami.

§ 205.

Za določitev treh ali več neznank je treba prav toliko jednačeb; le-té ne smejo biti med seboj v nikakem nasprotji in druga mora biti od druge po polnem nezavisna.

V razrešitev več skupaj spadajočih jednačeb s prav toliko neznankami se uporabljajo isti načini, katere smo navedli v § 203. za razrešitev dveh jednačeb z dvema neznankama. Iz danih jednačeb se iztrebi namreč jedna neznanka, na kar se dobi jedna neznanka in jedna jednačba menj; iz teh novih jednačeb se odpravi zopet druga neznanka in to se ponavlja, dokler ne dobimo slednjič le jedne jednačbe z jedno neznanko, iz katere je môči vrednost te neznanke določiti.

Dobljena vrednost se postavi v jedno izmed prejšnjih dveh jednačeb; na ta način se določi druga neznanka. Potem se postavita obe te dve vrednosti v jedno izmed prejšnjih treh jednačeb, i. t. d.; na ta način se določijo zaporedoma vrednosti vseh neznank.

Primeri.

1.) $8x + 5y + 2z = 24$
$6x - 3y + z = 3$
$4x + 9y - 6z = 4$.

Uporabljajoč primerjalni način, dobimo

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{24-5y-2z}{8} \\ x &= \frac{3+3y-z}{6} \\ x &= \frac{4-9y+6z}{4} \end{aligned}\right\}, \text{ tedaj } \left\{\begin{aligned} \frac{24-5y-2z}{8} &= \frac{3+3y-z}{6}, \\ \frac{3+3y-z}{6} &= \frac{4-9y+6z}{4}. \end{aligned}\right.$$

Določivši iz zadnjih dveh jednačeb y, dobimo

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{60-2z}{27} \\ y &= \frac{6+20z}{33} \end{aligned}\right\}, \text{ tedaj } \frac{60-2z}{27} = \frac{6+20z}{33},$$

in odtod $z = 3$.

Ako postavimo vrednost za z v kateri koli prejšnji izraz za y, n. pr. v $y = \frac{60-2z}{27}$, dobimo

$$y = \frac{60-2\,.\,3}{27} = 2.$$

Ako postavimo slednjič vrednosti za y in z v kateri koli prej dobljeni izraz za x, n. pr. v $x = \frac{3+3y-z}{6}$, dobimo

$$x = \frac{3+3\,.\,2-3}{6} = 1.$$

Preskušnja.
$$\begin{aligned} 8\,.\,1+5\,.\,2+2\,.\,3 &= 24, \\ 6\,.\,1-3\,.\,2+3 &= 3, \\ 4\,.\,1+9\,.\,2-6\,.\,3 &= 4. \end{aligned}$$

2.) $$\left.\begin{aligned} 3x+y+z &= 18 \\ 2x+3y+2z &= 28 \\ 5x+2y+3z &= 38 \end{aligned}\right\} \text{ zamenjevalni način.}$$

Iz prve jednačbe je $x = \frac{18-y-z}{3}$. Ako postavimo to vrednost v drugo in tretjo jednačbo, dobimo

$$2 \times \frac{18-y-z}{3} + 3y + 2z = 28, \text{ ali } 7y + 4z = 48,$$
$$5 \times \frac{18-y-z}{3} + 2y + 3z = 38, \text{ ali } y + 4z = 24.$$

Iz zadnje jednačbe dobimo $y = 24 - 4z$ ter, ako postavimo to vrednost v predzadnjo jednačbo

$$7(24-4z) + 4z = 48,$$

in odtod $z = 5$.

Zamenjavši z z njega vrednostjo v $y = 24 - 4z$, dobimo

$$y = 24 - 4\,.\,5 = 4.$$

Ako postavimo slednjič vrednosti za y in z v izraz

$$x = \frac{18 - y - z}{3},$$

dobimo

$$x = \frac{18 - 4 - 5}{3} = 3.$$

3.) $$\left.\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 8 \\ 2x + 5y - 2z &= 18 \\ 4x - y + 2z &= 14 \end{aligned}\right\} \text{način jednakih koeficijentov.}$$

Da iztrebiš iz prvih dveh jednačeb x, pomnoži prvo z 2, drugo s 3; na ta način dobiš

$$\left.\begin{aligned} 6x - 4y + 10z &= 16 \\ \underset{-}{6x} \underset{-}{+ 15y} \underset{+}{- 6z} &= \underset{-}{54} \end{aligned}\right\} \text{odštev.}$$

$$a) \quad -19y + 16z = -38$$

Da iztrebiš iz druge in tretje jednačbe x, treba le drugo z 2 pomnožiti, ter potem odšteti, tedaj

$$\begin{aligned} 4x + 10y - 4z &= 36 \\ \underset{-}{4x} \underset{+}{-} \underset{-}{y + 2z} &= \underset{-}{14} \end{aligned}$$

$$b) \quad 11y - 6z = 22.$$

Jednačbi *a)* in *b)* imata le neznanki y in z. Da iztrebiš iz njiju y, pomnoži *a)* z 11 in *b)* z 19. Tedaj

$$\left.\begin{aligned} -209y + 176z &= -418 \\ 209y - 114z &= 418 \end{aligned}\right\} \text{seštev.}$$

$$62z = 0; \text{ torej } z = 0.$$

Ako postaviš vrednost za z v jednačbo $11y - 6z = 22$, dobiš $11y = 22$, tedaj $y = 2$.

Ako postaviš slednjič vrednosti za y in z v katero koli izmed danih jednačeb, n. pr. v jednačbo $3x - 2y + 5z = 8$, dobiš $3x - 2 . 2 = 8$, in odtod $x = 4$.

Naloge.

1. $x + y = 12,$
$x + z = 10,$
$y + z = 8.$

2. $x + y = 30,$
$3y - 2z = 25,$
$x - 2z = 3.$

3. $x + 3y = 30,$
$3x + 2z = 25,$
$4y - 3z = 12.$

4. $3x - 4y = 6,$
$2x + 3z = 26,$
$5y - 6z = 18.$

5. $2x - 3y + 4z = -2,$
$5x + 2y = 32,$
$3y - 5z = 8.$

6. $5x + 3y + 2z = 217,$
$5x - 3y = 39,$
$3y - 2z = 20.$

7. $8x - 3y + z = 25,$
$5x + 6y - 9z = 20,$
$10x - 9y = 13.$

8. $3x + 2y - 6z = 12,$
$5x - 4y + 2z = 0,$
$6x + z = 26.$

9. $3x + y + 2z = 13,$
$x + 2y + 3z = 17,$
$2x + 3y + z = 12.$

10. $6x - 4y + 3z = 28,$
$4x - y - 3z = 7,$
$2x - 3y + 4z = 13.$

11. $7x - 2y + 7z = 60,$
$3x + 4y + 2z = 20,$
$5x - 8y - 3z + 2 = 0.$

12. $4x + 3y - 5z = 13,$
$3x - 4y + z = 2,$
$-2x + 7y + 3z = 11.$

13. $4x - 2y + 3z = 8,$
$7x + 8y - z = 59,$
$10x + 3y - 2z = 49.$

14. $x - 3y + z = 2,$
$20x - y - 2z = 7,$
$7x + 9y - 4z = 3.$

15. $x + y + z = 100,$
$x : y = 5 : 3,$
$y : z = 3 : 2.$

16. $0{\cdot}4x + 0{\cdot}5y + 0{\cdot}7z =$ [illegible]
$0{\cdot}3x + 0{\cdot}4y + 0{\cdot}5z =$ [illegible]
$0{\cdot}2x + 0{\cdot}3y + 0{\cdot}4z =$ [illegible]

17. $\frac{x}{5} + \frac{3y}{4} + \frac{7z}{15} = 18,$
$\frac{2x}{5} + \frac{5y}{12} + \frac{2z}{3} = 19,$
$\frac{x}{10} + \frac{5y}{6} + \frac{4z}{5} = 23.$

18. $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 612,$
$\frac{x}{3} + y + \frac{z}{3} = 612,$
$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + z = 612.$

19. $y + \frac{1}{2}x = 112,$
$\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}z = 36,$
$\frac{2y - z}{z - y} = 3.$

20. $\frac{x + 1}{y + 1} = 2,$
$\frac{y + 2}{z + 1} = 4,$
$\frac{z + 3}{x + 1} = \frac{1}{2}.$

21. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 13,$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{8} + \frac{z}{5} = 10,$
$3x - y - z = 10.$

22. $\frac{x + y}{2} + \frac{y + z}{3} = 5,$
$\frac{x + z}{3} + \frac{y + z}{3} = 6,$
$2x + 2y - 5z = 6.$

23. $\frac{5}{3x - 1} = \frac{7}{3y + 4},$
$\frac{3}{5x - 7} = \frac{2}{3z - 5},$
$\frac{2}{3z + 1} = \frac{3}{5y + 7}.$

24. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = 11,$
$-\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{8}{z} = 25,$
$\frac{7}{x} + \frac{4}{y} - \frac{6}{z} = -19.$

25. $x + y + z = a,$
$x - y + z = b,$
$x + y - z = c.$

26. $ax + by = m,$
$ax + cz = n,$
$by + cz = p.$

27. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = m,$
$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = n.$
$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = p.$

28. $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a,$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b,$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c.$

29. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5,$
$\sqrt{x} + \sqrt{z} = 6,$
$\sqrt{y} + \sqrt{z} = 7.$

30. $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} = 4,$
$\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} = 6,$
$-\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 8.$

31. $u + x = 15,$
$u + y = 14,$
$x + y = 13,$
$x + z = 12.$

32. $3u + 5x + y + 2z = 37,$
$u + 3x + 3y + 4z = 47,$
$4u + 3x + y + z = 26,$
$2u + 4x + 2y + 3z = 42.$

33. $3u - x + y + 2z = 20,$
$2u + 3x - y + z = 17,$
$u + 2x + 3y - z = 21,$
$-u + x + 2y + 3z = 12.$

34. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 6,$
$\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}u = 5,$
$\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}u = 4,$
$\frac{1}{3}y + \frac{1}{5}z - \frac{1}{4}u = 3.$

III. Kakó je uporabljati jednačbe z več neznankami v razreševanje nalog.

§ 206.

Kadar ima naloga dvoje ali več neznanih števil, ondaj treba v njih določitev iz pogojev naloge prav toliko jednačeb sestaviti, kolikor je neznank. Razrešivši te jednačbe, dobimo potem vrednosti neznank.

Dostikrat je môči tako nalogo razrešiti s pomočjo le jedne jednačbe z jedno neznanko; v ta namen treba le vse druge s to neznanko in danimi znanimi števili izraziti.

Ako treba razstaviti n. pr. število 40 na dva dela, zadostujoča danemu pogoju, ondaj zaznamenujemo lahko iskana dela z x in y in jedna jednačba je potem $x + y = 40$; drugo sestavimo iz danega pogoja. Zaznamenujemo pa lahko tudi jeden del z x in druzega, ker je vsota obeh 40, s $40 - x$; uporabivši drugi dani pogoj, dobimo potem jednačbo z le jedno neznanko.

Jednostavnejše naloge je môči tudi tu na pamet razrešiti.

Primeri.

1.) Mislim si dve števili, katerih prvo je za 3 manjše od druzega; ako pomnožim prvo s 4 ter od produkta odštejem 18, dobim drugo. Kateri števili sem si mislil?

a) Na pamet. Za 18 zmanjšano četverno prvo število je jednako druzemu, t. j. za 3 večje od prvega; tedaj je za 21 zmanjšani 4kratnik prvega števila jednak temu številu samemu; razlika med 4kratnikom tega števila in številom samim, t. j. 3kratnik tega števila je torej 21, tedaj prvo število 7. Drugo število je za 3 večje od prvega, tedaj 10.

b) Algebrajsko s pomočjo dveh jednačeb z dvema neznankama. Recimo, da sta x in y iskani števili. Ker je prvo za 3 manjše od druzega, velja

$$x = y - 3.$$

Vsled druzega pogoja je 4kratnik prvega števila, za 18 zmanjšan, jednak druzemu številu; tedaj

$$4x - 18 = y.$$

Razrešivši te dve jednačbi, dobimo $x = 7$ in $y = 10$.

c) Algebrajsko s pomočjo le jedne jednačbe z jedno neznanko. Ako imenujemo prvo število x, ondaj je drugo $x + 3$. Po pogojih naloge je tedaj

$$4x - 18 = x + 3,$$

in odtod $x = 7$ ter $x + 3 = 10$.

Preskušnja. Drugo število 10 je res za 3 večje nego prvo 7; dalje je razlika med 4kratnikom števila 7 in pa številom 18 število 10, t. j. drugo iskano število.

2.) Oče ima sedaj 2krat toliko let kakor njegov sin; pred 15 leti pa jih je imel 5krat toliko kakor sin. Koliko let ima oče, koliko sin?

Ako vzamemo, da ima sin x let, potem ima oče $2x$ let; pred 15 leti je imel torej oče $2x - 15$ in sin $x - 15$ let. Tedaj velja jednačba

$$2x - 15 = 5(x - 15),$$

iz katere dobimo $x = 20$, $2x = 40$. Oče ima tedaj 40, sin pa 20 let.

Razreši to nalogo tudi s pomočjo dveh jednačeb z dvema neznankama.

3.) Nekdo razdeli 100 gl. takó med tri osebe, da dobi B dvakrat toliko kakor A, in C 10 gl. več nego polovico tega, kar dobita A in B skupaj. Koliko dobi vsaka oseba?

a) S pomočjo treh jednačeb. Vzemimo, da dobé A, B, C, oziroma x, y, z goldinarjev, potem je

$$x + y + z = 100.$$

Ker dobi B dvakrat toliko kakor A, velja

$$y = 2x.$$

In ker dobi slednjič C 10 gl. več nego polovico tega, kar dobita A in B skupaj, imamo

$$z = \frac{x + y}{2} + 10.$$

Razrešivši te tri jednačbe, dobimo $x = 20$, $y = 40$, $z = 40$.

b) S pomočjo le jedne jednačbe.

Vzemimo, da dobi A x goldinarjev
potem » B $2x$ »
» » C $\frac{x + 2x}{2} + 10$ »

tedaj

$$x + 2x + \frac{x + 2x}{2} + 10 = 100,$$

in odtod $x = 20$.

A dobi torej $x = 20$ goldinarjev,
B » $2x = 40$ »
C » $\frac{3x}{2} + 10 = 40$ »

4.) Dve telesi, katerih specifična teža je oziroma s_1 in s_2, treba v novo telo takó spojiti, da bode imelo le-tó specifično težo s in bode tehtalo p kilogramov; koliko *kg* vsacega telesa treba za to vzeti?

Ako zaznamenujemo z x in y število kilogramov, katere treba vzeti od prvega, oziroma druzega telesa, ondaj je prostornína prvega telesa $\frac{x}{s_1}$, in druzega $\frac{y}{s_2}$, $\frac{p}{s}$ pa prostornina spojine.

Ker morata imeti obe sestavini skupaj prav tisto absolutno težo kakor spojina, velja

$$x + y = p.$$

Ker morata biti tudi prostornini obeh sestavin skupaj jednaki prostornini spojine, dobimo

$$\frac{x}{s_1} + \frac{y}{s_2} = \frac{p}{s},$$

in odtod

$$x = \frac{s_1 p (s - s_2)}{s (s_1 - s_2)} \quad \text{in} \quad y = \frac{s_2 p (s_1 - s)}{s (s_1 - s_2)}.$$

Naloge.

*1.** Vsota dveh števil je 47, njiju diferenca 9; kateri števili sta to?

*2.** Katerih dveh števil je ne le vsota nego tudi kvocijent 3?

*3.** Diferenca dveh števil je 12, 3kratnik prvega pa je jednak 5kratniku druzega; kateri števili sta to?

4. Polovica nekega števila je za 18 večja nego petina druzega števila; dvojno drugo število pa je za 32 večje od prvega. Kateri sta te dve števili?

5. Mislim si dve števili, kateri sta za 1 različni. Ako razdelim večje s 4 in manjše s 5, različna sta tudi kvocijenta za 1; kateri števili sem si mislil?

6. Diferenca dveh števil je 10; ako odštejem večje od 135, manjše od 105, imata se ostanka kakor 9 : 7. Kateri števili sta to?

7. Razmerje med dvema številoma je 2 : 3; ako prišteješ k vsakemu 16, ondaj je razmerje med vsotama kakor 10 : 13. Kakó se zoveta števili?

8. Ako povečaš prvo izmed dveh števil za 10, ondaj je 4krat toliko kakor drugo; ako povečaš pa drugo za 16, potem je 3krat toliko kakor prvo. Kateri števili zadostujeta tema dvema pogojema?

*9.** Razstavi število 50 takó na dva dela, da bode prvi za 6 manjši od druzega.

10. Razstavi število 32 takó na tri dele, da bode prvi za 5, drugi za 3 večji od tretjega; kateri so ti trije deli?

11. Razstavi število 48 takó na tri dele, da bode razmerje med njimi kakor 4 : 5 : 7.

12. Število 76 razstavi takó na dva dela, da bode, ako razdeliš večjega z 11 in manjšega s 7, vsota teh kvocijentov 8.

*13.** Mislim si ulomek. Vsota iz števca in imenovalca je 16; ako pa števec za 2 povečaš in imenovalec za 2 zmanjšaš, dobiš recipročno vrednost onega ulomka. Kateri ulomek sem si mislil?

14. Kateri ulomek se izpremeni na ulomek $\frac{1}{4}$, ako odštejeǯ od njega števca in imenovalca 3; in na ulomek $\frac{1}{2}$, ako prišteješ k njega števcu in imenovalcu 5?

15. Izmed treh števil je prvo jednako polovici vsote iz druzih dveh, drugo tretjini vsote iz prvega in tretjega, tretje pa je za 10 manjše od vsote prvih dveh. Katera so ta števila?

16. Poišči tri števila, katera imajo tá-le svojstva: Ako zmanjšaš vsako izmed prvih dveh za 3, ondaj se imata ostanka kakor 1 : 2; ako zmanjšaš prvo in tretje vsako za 4, dobiš ostanka, katera se imata kakor 1 : 3; ako povečaš drugo in tretje vsako za 5, potem je razmerje med vsotama 3 : 4.

*17.** V nekem deželnem zboru se je vzprejel neki predlog z večino 10 glasov. Koliko poslancev je glasovalo za in koliko zoper predlog, ako jih je 64 sploh glasovalo?

*18.** Sredi maja je nekje dan za 6 ur 15 minut daljši od noči; kakó dolg je dan, kakó dolga noč?

*19.** Neki deček pravi: Jaz in moj oče imava skupaj 40 let; a moja leta so le 5i del očetovih let. Koliko let ima oče, koliko sin?

20. Oče, ki ima 25 let več od sina, bode jih imel čez 5 let dvakrat toliko kakor sin. Koliko let ima oče, koliko sin?

21. Oče, kateri ima sedaj 3krat toliko let kakor njegov sin, bode jih imel čez 12 let le dvakrat toliko kakor sin. Koliko let ima oče, koliko sin? $y = 12$, $x = 36$

22. Tri osebe razdelé med seboj 350 gl., in sicer takó, da dobi *B* 18 gl. več kakor *C*, in *A* 14 gl. več kakor *B*; koliko dobi vsaka oseba? $X = 132$, $Y = 118$ $Z = 100$

23. Med tri osebe se razdeli neka vsota takó, da dobi *B* 20 gl. menj nego *A*, in *C* 20 gl. menj nego *B*; vsota sama je za 25 gl. večja nego četverni *C*-jev delež. Koliko dobi vsak?

24.* *A* ima v dveh mošnjah 206 gl., in sicer v prvi 44 gl. več nego v drugi; koliko ima v vsaki?

25. Dve osebi imata vsaka nekaj denarja. Ako bi dal *A* *B*-ju 4 gl., imela bi oba jednako; ako bi dal pa *B* *A*-ju 5 gl., potem bi imel *A* dvakrat toliko kakor *B*. Koliko denarja ima vsak?

26. Na mizi leži nekaj denarja. *A* pravi: Jaz imam dvakrat toliko denarja; *B*, jaz ga imam 3krat toliko; *C*, jaz ga imam le na pol toliko, kolikor ga imata *A* in *B* skupaj. Vsi skupaj imajo 240 gl.; koliko denarja je na mizi in koliko ga ima vsak?

27.* V neki družbi je 88 oseb, gospodov in gospá, in sicer je razmerje med številom gospodov in gospá 5 : 6. Koliko gospodov in koliko gospá je v družbi?

28. V neki družbi je bilo 3krat toliko gospodov kakor gospá; pozneje pa so prišli še 3 gospodje s 4 gospémi in potem je bilo 2krat toliko gospodov kakor gospá; koliko gospodov in gospá je bilo s prva v družbi?

29. V neki družbi je bilo 2krat toliko možkih kakor žensk; ko je pa 6 gospodov s svojimi gospémi odšlo, ostalo je 5krat toliko možkih kakor žensk. Koliko možkih in koliko žensk je bilo s prva v družbi?

30.* Neki kapital daje na leto 420 gl. obrestij; ako bi bil po 1 % več naložen, dajal bi 84 gl. obrestij več. Kolik je kapital, koliki so procenti?

31. Nekdo ima izposojena dva kapitala, prvega po 4 %, druzega po 5 %; oba dva skupaj mu neseta na leto 1000 gl. obrestij. Ako bi bil pa vsak kapital po 1 % več izposodil, dobil bi vsako leto 220 gl. več obrestij. Kolika sta kapitala?

32. Dva zidarja zidata zid; ako delata oba, sezidala bosta zid v 12 dneh; ako dela pa A 2 in B 3 dni, potem sezidata v tem času 5i del vsega zidú. V koliko dneh dovršil bi delo vsak sam? y=30,

33. Za neko skupno podjetje je dal A 10000 gl., B 12000 gl. Ko sta razdelila dobiček, dobil je A 800 gl. menj nego B. Koliko dobička je imel vsak?

u/2 ***34.*** Hieron, kralj Sirakuški, je imel krono od zlata in srebra, tehtajočo 20 funtov, pod vodo pa le $18\frac{8}{9}$ funta; koliko zlata in koliko srebra je bilo v kroni, ako izgubi v vodi na videz zlato $\frac{1}{19}$ in srebro $\frac{1}{10}$ svoje teže?

35. Nekdo ima dvoje vino. Ako zmeša 12 litrov boljšega in 4 litre slabšega vina, velja 1 liter zmesi 52 kr.; ako zmeša pa 6 litrov boljšega in 10 litrov slabejšega vina, stane liter zmesi 46 kr. Po čem je liter vsakega vina?

36. V dveh sodih je 351 litrov vina; ako ga vzameš iz prvega šestino in iz druzega tretjino, ostane ti ga v obeh sodih jednako. Koliko litrov vina je v vsakem sodu? x=156, y=195

u/2 ***37.*** V dveh sodih je v vsacem nekaj vina. Ako izliješ iz prvega toliko v druzega, kolikor ga je že v njem; potem iz druzega v prvega toliko, kolikor ga je sedaj notri; potlej zopet iz prvega v druzega toliko, kolikor ga je bilo prej v njem ostalo: ondaj ga je v obeh sodih jednako, namreč po 72 litrov. Koliko litrov je bilo s prva v vsacem sodu?

38. Izmed dveh cevij daje prva v 10 minutah 17 litrov menj vode nego druga v 9 minutah; obe dve dasta v 5 minutah 305 litrov. Po koliko litrov daje vsaka v jedni uri?

39. V vodnjak priteka voda iz dveh cevij. Ako je odprta prva 2, druga $1\frac{1}{2}$ ure, nateče se $25\frac{1}{2}$ hektolitra vode; ako je pa prva $1\frac{3}{5}$, druga pa $1\frac{1}{3}$ ure odprta, ondaj $3\frac{9}{10}$ hektolitra menj. Po koliko litrov vode daje vsaka cev v jedni uri? x=6, y=9

40. Dva popotnika sta 9 kilometrov drug od druzega oddaljena. Ako si gresta naproti, snideta se v 1 uri; ako gresta pa v isto mer, doide hitrejši druzega v 5 urah. Po koliko kilometrov prehodi vsak v jedni uri?

IV. Naloge v ponavljanje.

1.* *a)* 5krat $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{8}$, $2\frac{3}{5}$, $12\frac{7}{10}$, $27\frac{3}{4}$, $55\frac{4}{9}$, $138\frac{9}{16}$;
b) 8krat $\frac{7}{16}$, $1\frac{5}{8}$, $7\frac{3}{4}$, $15\frac{4}{5}$, $48\frac{9}{10}$, $61\frac{17}{24}$, $104\frac{5}{12}$
je koliko?

2. $(11\frac{7}{12} + 9\frac{14}{15} + 7\frac{5}{8}) \,.\, 64 - (2\frac{5}{6} + 8\frac{7}{10} + 13\frac{13}{18}) \,.\, 54.$

3.* Koliko obrestij dá

a) 350 gl. po 4 % v 3 letih? *b)* 375 gl. po 6 % v 2 letih?
c) 780 » » 5 % » 4 » *d)* 1600 » » $4\frac{1}{2}$ % » 3 »

4.* Kateri kapital dá po $3\frac{1}{3}$ % $62\frac{1}{2}$ gl. obrestij na leto?

5.* Neki kapital dá po 4 % 321 gl. obrestij na leto; v koliko letih dá kapital po $3\frac{1}{2}$ % prav tiste obresti?

6. *A* ponuja za neko hišo 8850 gl. v gotovini, *B* pa 9000 gl., in sicer hoče polovico takój, drugo polovico čez 6 mesecev plačati. Kateri ponuja več, ako se računa 6 % obrestij?

7. Menica za 2345 gl., izplačna sredi novembra, diskontuje se dne 5. septembra po 6 %; koliko dobi prodajalec zanjo?

8. Hamburšk trgovec plača za Dunajčana 12820 mark in za ta iznesek izda na Dunajčana menico, računajoč sebi $\frac{1}{2}$ % provizije in 1 ‰ senzarije ter 178 mark po 100 gl. a. v. Za koliko gl. a. v. izda tedaj menico?

9. Koliko gl. papirnatega denarja treba plačati za 3248 gl. v zlatu, ako ima zlato $16\frac{1}{2}$ % ažije?

10. Koliko % ima zlato ažije, ako dobiš za 1102 gl. v papirji 950 gl. v zlatu?

11.* Krčmar ima pri *hl* vina 9 gl. ali 25 % dobička; po čem je kupil *hl*?

12. Trgovec dobi 1400 *kg* blaga, po 12 gl. 100 *kg*, in 1225 *kg*, po $15\frac{1}{2}$ gl. 100 *kg*; stroškov je 12 gl. 75 kr. Koliko % bode imel dobička, ako proda *kg* po 20 kr.?

13. $8\frac{1}{4}x - 4\frac{2}{5}x - 3\frac{2}{3}x + 1 = 0.$ ***14.*** $\frac{2 + x}{3 + 2x} - \frac{3}{2} = \frac{3 - x}{3 + x}.$

15. $\frac{a - x}{b - x} = \frac{a + x}{b + x}.$ ***16.*** $\frac{ax - 2a}{ax - 2b} = \frac{ax - 2b}{ax + 2a}.$

17. $\sqrt{x} + \sqrt{3x} = 2.$ ***18.*** $2\sqrt{3x - 1} = \frac{5x + 8}{\sqrt{3x - 1}}.$

19.* Katerega števila 8kratnik je za 6 manjši od števila 50?

20.* Od katerega števila treba njega desetino odšteti, da dobiš število 77?

21. Mislim si število. Ako je pomnožim z 2, na desni pripišem številko 5, potem z 11 razdelim ter kvocijent za 1 povečam, dobim dvakrat toliko število, kakor sem si je mislil. Katero število je to?

22. Iz nekega mesta se odpošlje kurir, kateri potrebuje za vsacih 54 *km* po 5 ur; 4 ure pozneje se pošlje za njim drug kurir, kateri potrebuje za vsacih 42 *km* 3 ure. V koliko urah bode drugi kurir prvega dohitel?

23.* 15 *m* velja 64 gl.; koliko velja 40 *m*?

24.* Izmed dveh cevij dáje prva v 1 uri po $6\frac{2}{3}$ *hl* vode, druga pa v istem času po $7\frac{1}{2}$ *hl*; v koliko urah se bode nateklo $77\frac{11}{12}$ *hl* vode, ako sta obe cevi odprti?

25. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + 2\sqrt{50}$. ***26.*** $5\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{135}$.

27. $\sqrt{4x^3y} - 5y\sqrt{xy} - x\sqrt{4xy} + \sqrt{25xy^3}$.

28. $\sqrt[4]{4} \,.\, \sqrt[6]{8}$. ***29.*** $(\sqrt{a} + \sqrt[4]{a^3})(\sqrt{a^3} - \sqrt[4]{a^7})$.

30. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a}\sqrt{b})^2$. ***31.*** $(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$.

32. $1 : \sqrt{0 \cdot 25}$. ***33.*** $3\sqrt[3]{8} : 2\sqrt{2}$.

34. $\frac{7}{\sqrt{8}} : \sqrt{\frac{7}{8}}$. ***35.*** $\sqrt{\frac{3}{5}} : \frac{\sqrt{3}}{5}$.

36. Razstavi tá-le števila na njih prafaktorje: 240, 356, 540, 1536, 4158, 5250, 6048.

37. $\frac{1}{3}$ nekega dolga treba izplačati dne 15. januvarja, $\frac{1}{4}$ dne 31. januvarja, $\frac{1}{6}$ dne 28. februvarja in ostanek dne 31. marcija. Kedaj bi se poplačal lahko ves dolg kar ob jednem?

38.* Tri osebe razdelé 360 gl. takó med seboj, da dobi *B* dvakrat toliko kakor *A*, in *C* 3krat toliko kakor *A*; koliko dobi vsaka oseba?

39. Tri osebe razdelé 688 gl. takó med seboj, da dobi *A* tolikokrat po 2 gl. kakor *B* po 3 gl., in *C* tolikokrat po 6 gl. kakor *B* po 5 gl.; koliko dobi vsak?

40. Nekdo je zapustil 15650 gl., določivši, da naj razdelé njegovi štirje dediči to imenje takó-le med seboj: *B* naj dobi 250 gl. več nego *A*, *C* 300 gl. menj nego *A* in *B* skupaj, *D* pa 750 gl. menj nego *A*, *B* in *C* skupaj. Koliko bode vsak dobil?

41. $\sqrt{269361}$. ***42.*** $\sqrt{646 \cdot 1764}$. ***43.*** $\sqrt{1292114916}$.

44. $\sqrt[3]{592704}$. ***45.*** $\sqrt[3]{125751501}$. ***46.*** $\sqrt[3]{2 \cdot 918076589}$.

*47.** Nekdo zmeša 5 l po 36 kr. in 7 l po 48 kr.; koliko bode veljal 1 l zmesi?

48. Nekdo kupi papirne rente, katera daje po $4\frac{1}{5}$ % obrestij, po $73\frac{1}{2}$; po koliko % je naložil svoj kapital?

49. Koliko treba plačati za 3500 gl. 5% zastavnih pisem av. zemljiščnega kreditnega zavoda po $117\frac{3}{4}$ z obrestimi za 136 dnij vred?

50. Ako se računa 1 kg čistega zlata po 1395 gl., koliko velja potem $4\frac{1}{2}$ kg zlata po 900 tisočnin čistine?

51. Koliko gl. a. v. velja $95\frac{1}{2}$ m, ako velja $68\frac{1}{2}$ angl. yarda $17\frac{1}{2}$ funta sterlinga, in je 17 yard. = 16 m, 10 funt. sterl. = 118 gl. a. v.?

52.
$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z - 5u + 6w &= 6, \\ 3x + y - 5z + u - 3w &= 3, \\ -x + 4y + 2z - 5u + 3w &= 8, \\ x - y + z - u + w &= 3, \\ x + y + z + u + w &= 15. \end{aligned}$$

*53.** Razstavi število 150 takó na dva dela, da bode prvi jednak $\frac{2}{3}$ druzega.

54. 1200 gl. treba takó med tri osebe razdeliti, da dobi druga 3krat toliko kakor prva menj 20 gl., tretja 4krat toliko kakor druga in še 20 gl. Koliko dobi vsaka oseba?

55. Mislim si dva ulomka, ki imata isti imenovalec; njiju diferenca je jednaka $\frac{3}{4}$, razmerje med njiju števcema pa je 5 : 1; ako zmanjšam večji števec za 12, in povečam manjšega za 12, ondaj velja obratno razmerje 1 : 5. Katera dva ulomka sem si mislil?

56. Nekdo ima dva soda in v vsakem nekaj vina. Ako ga izlije iz prvega $\frac{1}{5}$ v druzega, in potem iz tega $\frac{1}{5}$ v prvega, potlej ga je v vsakem sodu 80 l. Koliko l ga je bilo s početka v vsakem sodu?

57. Krčmar ima dvoje vino, hl po 40 gl. in hl po 60 gl., in iz tega dvojega vina hoče namešati 15 hl po 48 gl. Koliko mora vsacega vina za to vzeti?

58. Nekdo naloži v hranilnico početkom vsacega leta po 2000 gl. po 5 % na obrestne obresti; koliko mu bode morala koncem tretjega leta hranilnica izplačati?

59. Koliko je vrednih 7520 gl., izplačnih v 8 letih, sedaj, ako se računa 5 % obrestnih obrestij?

60. Za neko skupno podjetje vloži: A 3000 gl. takój in čez 1 leto še 2000 gl.; B 2000 gl. takój in čez $1\frac{1}{2}$ leta še 2400 gl.; C 4000 gl. takój in čez 2 leti še 1600 gl. Podjetje traja 3 leta ter dá 9050 gl. dobička. Koliko tega dobička bode dobil vsak družabnik?

Deseti oddelek.

O jednačbah druge stopinje z jedno neznanko.

I. Kakó je razreševati jednačbe druge stopinje.

§ 207.

Jednačbo, v kateri je po odpravi imenovalcev, korenov ter oklepajev druga potenca neznanke najvišja, imenujemo jednačbo druge stopinje ali kvadratno jednačbo *(Gleichung des zweiten Grades, quadratische Gleichung).*

Kvadratne jednačbe delimo na čisto in mešano kvadratne. Čisto kvadratna jednačba je ona, v kateri se nahaja neznanka le v drugi potenci; n. pr. $x^2 = 5$, $x^2 - a = b$. Mešano kvadratna jednačba pa je ona, katera ima neznanko v drugi in prvi potenci; n. pr. $2x^2 = 5x - 9$, $x^2 + ax = b$.

§ 208.

Vsaki čisto kvadratni jednačbi damo lahko obliko

$$x^2 = a,$$

kjer pomenja a pozitivno ali negativno število. V ta namen treba le pravila, navedena v § 113. uporabiti ter, ako ima jednačba tudi korene, le-té odpraviti (§ 193.)

Recimo, da je n. pr. dana čisto kvadratna jednačba $x^2 = 9$.

Ako jednako z jednakim razkorenimo, dobimo zopet jednako. Vzemši tedaj od obeh dveh jednačbinih delov kvadratni koren, dobimo

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}, \quad \text{ali} \quad x = \pm 3.$$

Neznanka x ima torej dvojno vrednost, namreč $+ 3$ ali $- 3$, kajti $(+ 3)^2 = 9$, in tudi $(- 3)^2 = 9$.

Ako nam je v obče jednačbo $x^2 = a$ razrešiti, ondaj dobimo, poiskavši iz obeh dveh delov kvadratni koren,

$$x = \pm\sqrt{a}.$$

Vsaka čisto kvadratna jednačba ima tedaj **dva** korena; le-tá imata isto absolutno vrednost, a nasprotna predznaka.

Korena sta ali oba realna ali oba imaginarna, kakor je a pozitivno ali negativno število.

Primeri.

1.) $x^2 = 36$
$x = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$

2.) $x^2 = -36$
$x = \pm\sqrt{-36}.$

3.) $\frac{x-4}{2x+1} = \frac{1}{x+6}$
$(x-4)(x+6) = 2x+1$
$x^2 - 4x + 6x - 24 = 2x + 1$
$x^2 = 25$
$x = \pm 5.$

4.) $\sqrt{33+2x-x^2} = x+1$
$33 + 2x - x^2 = (x+1)^2$
$33 + 2x - x^2 = x^2 + 2x + 1$
$-2x^2 = -32$
$x^2 = 16$
$x = \pm 4$

§ 209.

Občna oblika urejene **mešano kvadratne jednačbe** je

$$x^2 + ax = b.$$

Vzemimo, da nam je razrešiti n. pr. mešano kvadratno jednačbo $x^2 + 8x = 20$.

Prvi del jednačbe ni kvadrat monoma, ker ima dva člena; a tudi popolni kvadrat binoma ni, kajti le-tá ima po znani formuli $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ tri člene. Da bode môči tedaj kvadratni koren prvega dela najti ter takisto neznanko določiti, treba k obema deloma tako število prišteti, da bode prvi del popoln kvadrat binoma.

Ako smatramo x^2 za kvadrat prvega člena, tedaj x za prvi člen binoma, dalje $8x$ za dvojni produkt, tedaj $4x$ za produkt obeh členov, ondaj je 4 drugi binomov člen; da bode tedaj prvi jednačbin del popoln kvadrat binoma $x + 4$, treba še kvadrata druzega člena, namreč 16. Prištevši tedaj k obema jednačbinima deloma 16, dobimo

$$x^2 + 8x + 16 = 20 + 16, \text{ ali}$$
$$(x+4)^2 = 36,$$

in, ako vzamemo od obeh jednačbinih delov drugi koren,

$$x + 4 = \pm\sqrt{36}, \text{ ali } x + 4 = \pm 6, \text{ tedaj}$$

ali $x = -4 + 6 = +2,$

ali $x = -4 - 6 = -10.$

Preskušnja. $(+2)^2 + 8 \,.\, +2 = 4 + 16 = 20$,
in prav takó $(-10)^2 + 8 \,.\, -10 = 100 - 80 = 20$.

Ako imamo v obče jednačbo

$$x^2 + ax = b,$$

ondaj treba prvi del v popoln kvadrat dopolniti ter v ta namen k obema deloma prišteti polovico koeficijenta neznanke x, t. j. $\frac{a^2}{4}$. Na ta način dobimo

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b, \text{ ali}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b,$$

in, ako vzamemo od obeh dveh delov kvadratni koren,

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} + b}, \quad \text{tedaj}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Jednačba ima torej tá-le dva korena:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \quad \text{in} \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Odtod izvajamo:

V urejeni mešano kvadratni jednačbi je tedaj neznanka jednaka polovici koeficijenta prve potence z nasprotnim predznakom, povečani ali zmanjšani za kvadratni koren iz algebrajske vsote iz kvadrata one koeficijentove polovice in znanega člena.

Ako je b pozitivno število, sta oba korena realna, kajti $\frac{a^2}{4}$ je vsikdar pozitivno število.

Kadar je b negativno število, sta korena le tedaj realna, ako je $\frac{a^2}{4} > b$; za $\frac{a^2}{4} = b$ postane v tem slučaji količina pod korenjim znakom ničli jednaka in korena sta jednaka in realna; za $\frac{a^2}{4} < b$ pa sta oba korena imaginarna.

Primeri.

1.) $x^2 + 6x = 112$
$x = -3 \pm \sqrt{9 + 112}$
$= -3 \pm \sqrt{121}$
$= -3 \pm 11$
$x_1 = 8,\ x_2 = -14.$

2.) $x^2 - 12x = -35$
$x = 6 \pm \sqrt{36 - 35}$
$= 6 \pm \sqrt{1}$
$= 6 \pm 1$
$x_1 = 7,\ x_2 = 5.$

3.) $8x^2 - 10x = 3$

$$x^2 - \tfrac{10}{8}x = \tfrac{3}{8}$$
$$x = \tfrac{5}{8} \pm \sqrt{\tfrac{25}{64} + \tfrac{3}{8}}$$
$$= \tfrac{5}{8} \pm \sqrt{\tfrac{49}{64}}$$
$$= \tfrac{5}{8} \pm \tfrac{7}{8}$$
$$x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = -\frac{1}{4}$$

4.) $\sqrt{3x-2} - 1 = \sqrt{4x-7}$

$$3x - 2 - 2\sqrt{3x-2} + 1 = 4x - 7$$
$$-x + 6 = 2\sqrt{3x-2}$$
$$x^2 - 12x + 36 = 4(3x-2)$$
$$x^2 - 24x = -44$$
$$x = 12 \pm \sqrt{144 - 44}$$
$$= 12 \pm \sqrt{100}$$
$$= 12 \pm 10$$
$$x_1 = 22,\ x_2 = 2.$$

5.) $x^2 + (3a - 2b)x = 6ab$

$$x = -\frac{3a-2b}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(3a-2b)^2}{4} + 6ab\right]}$$
$$= -\frac{3a-2b}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{9a^2 + 12ab + 4b^2}{4}\right]}$$
$$= -\frac{3a-2b}{2} \pm \frac{3a+2b}{2}$$
$$x_1 = 2b,\ x_2 = -3a.$$

§ 210.

O odnošajih med znanimi števili urejene mešano kvadratne jednačbe in nje korenoma je tó-le pomniti:

1.) Vsota obeh korenov je jednaka koeficijentu prve neznankine potence, vzetemu z nasprotnim predznakom.

2.) Produkt obeh dveh korenov je jednak členu brez neznanke, vzetemu z nasprotnim predznakom.

Dokaz. Ako zaznamenujemo korena jednačbe $x^2 + ax = b$ z x_1 in x_2, ondaj je

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$
$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b};$$

tedaj

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = -a, \text{ in}$$

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - b = -b.$$

N. pr. Iz $x^2 - 6x = 16$ izvira $x_1 = 8$ in $x_2 = -2$; tedaj

$$x_1 + x_2 = 6, \qquad x_1 x_2 = -16.$$

S pomočjo prejšnjih dveh izrekov je môči takój jednačbo napisati, ako sta dana nje korena.

Ako sta dana n. pr. korena 4 in — 6, ondaj je

$$x_1 + x_2 = -2, \qquad x_1 x_2 = -24;$$

tedaj

$$x^2 + 2x = 24$$

jednačba, katere korena sta 4 in — 6.

Naloge.

1. $x^2 = 49$. *2.* $x^2 - 64 = 0$. *3.* $x^2 = 56169$.

4. $x^2 - 0{\cdot}0729 = 0$. *5.* $\frac{1}{6}x^2 = 54$. *6.* $3 : x = x : 12$.

7. $5x^2 - 1 = 2 + 4x^2$. *8.* $3x^2 - 4093 = x^2 + 139$.

9. $(2x - 3)(2x + 3) = 7$. *10.* $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$.

11. $\frac{x}{150} = \frac{3}{2x}$. *12.* $\frac{4}{x} + \frac{x}{2} = \frac{12}{x}$.

13. $\frac{x - 8}{x + 8} = \frac{32 - x}{32 + x}$. *14.* $\frac{4x + 3}{5(x + 2)} = \frac{7x + 2}{16x + 13}$.

15. $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{5}{2}$. *16.* $\frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{3x^2 - 7}{x^2 - 1}$.

17. $\sqrt{\frac{x + 2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{x - 2}}$. *18.* $\sqrt{\frac{9 + x}{9 - x}} = 1 + \frac{10}{\sqrt{9 - x}}$.

19. $x^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$. *20.* $(a + x)(a - x) = 2ab$.

21. $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x - a}{x + a} = 0$. *22.* $\frac{a - x}{1 - ax} = \frac{1 - bx}{b - x}$.

23. $\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x} = \sqrt{2a}$.

24. $2x\sqrt{a^2 + x^2} + 2(a^2 + x^2) = 5a^2$.

---

25. $x^2 - 4x = 21$. *26.* $x^2 - 12x = -35$.

27. $x^2 + 12x = 45$. *28.* $x^2 - 16x + 63 = 0$.

29. $x^2 - 4x = -4$. *30.* $x^2 - 2x = 15$.

31. $x^2 - 6x + 7 = 0$. *32.* $x^2 + 20x = 96$.

33. $x^2 + 3x = 10$. *34.* $x^2 + x = 56$.

35. $x^2 + 5x - 36 = 0$. *36.* $x^2 + 17x = -70$.

37. $5x^2 + 7x = 24$. *38.* $8x^2 + 26x = -21$.

39. $12x^2 = 20x - 3$. *40.* $5x^2 + 13x = -17$.

41. $x^2 + 0{\cdot}3x = -0{\cdot}02$. *42.* $25x^2 - 4{\cdot}5x = 7{\cdot}36$.

43. $x^2 - \frac{3x}{2} = -\frac{11}{16}$. *44.* $x^2 - \frac{5x}{6} = -\frac{1}{6}$.

45. $\frac{x^2}{4} + 2x = 8\frac{1}{4}$. *46.* $\frac{5x^2}{6} - \frac{x}{2} = 9$.

47. $x + \frac{1}{x-2} = 3.$ **48.** $\frac{10x+3}{3x+2} = x.$

49. $\frac{6x+5}{2x-3} = 4x - 15.$ **50.** $\frac{13x+42}{9x-4} = \frac{11(x+2)}{7x-4}.$

51. $\frac{x+2}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = 5.$ **52.** $\frac{6}{x+3} - \frac{3}{x+1} = \frac{1}{4}.$

53. $\frac{3x-4}{x-4} - 9 = \frac{2-x}{2}.$ **54.** $\frac{x+1}{x+2} - \frac{2x-3}{3x-4} = 5.$

55. $(x+3)^2 + (x+5)^2 = 514.$

56. $(x+3)(x+4) + (x-3)(x-1) = x(x+11).$

57. $\frac{x+11}{x} + \frac{4x+50}{x^2} = 6.$ **58.** $\frac{5}{x} - \frac{5}{x+1} = \frac{12}{x+2}.$

59. $\frac{4x+3}{7} - \frac{4(x-3)}{5} = \frac{19-2x}{x-5}.$

60. $\frac{3}{x-8} - \frac{2}{x-9} = \frac{2}{x+12}.$

61. $\frac{7x-2}{3x+2} + \frac{x+2}{3x-2} = \frac{6x^2+9x+5}{9x^2-4}.$

62. $x + 7\sqrt{x} = 30.$ **63.** $2x - 3\sqrt{x-1} = 4.$

64. $\sqrt{7x-13} - 12 = \sqrt{5x+1}.$

65. $\sqrt{8x-7} + 3 = \sqrt{15x+4}.$

66. $\sqrt{6x+25} = \sqrt{6x-24} + \sqrt{x-99}.$

67. $\sqrt{4x-11} + \sqrt{5x+25} = \sqrt{18x+19}.$

68. $\sqrt{2(7x+30)} + 2\sqrt{4x+25} = 2\sqrt{15x+79}.$

69. $x^2 - (a+b)x + ab = 0.$ **70.** $x^2 - (a-b)x = ab.$

71. $x^2 - 4ax = 9b^2 - 4a^2.$ **72.** $4x^2 - 4ax = b^2 - a^2.$

73. $\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(1-x)^2}.$ **74.** $\frac{ab}{x} + abx = a^2 + b^2.$

75. $\frac{x}{x^2+1} = \frac{ab}{a^2+b^2}.$ **76.** $\frac{x^2+1}{a^2+b^2} = \frac{2x}{a^2-b^2}.$

77. $x + \frac{1}{abx} = \frac{a+b}{ab}.$ **78.** $\frac{1}{x-a} + \frac{x+2a}{a} = 4 + \frac{1}{a}.$

79. $ax - b\sqrt{x} = c.$ **80.** $\sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b}.$

Napiši jednačbe, ki imajo naslednje korene:

81. $+5$ in $-5.$ **82.** $+3\sqrt{2}$ in $-3\sqrt{2}.$

83. -3 in $+7.$ **84.** 12 in $7.$

85. 10 in $-1.$ **86.** -9 in $-13.$

87. $\frac{3}{2}$ in $\frac{11}{2}.$ **88.** $\frac{7}{3}$ in $-\frac{2}{3}.$

89. $0 \cdot 7$ in $-2 \cdot 4.$ **90.** $1 \cdot 36$ in $0 \cdot 75.$

91. $1 + \sqrt{2}$ in $1 - \sqrt{2}.$ **92.** $\frac{a+b}{2}$ in $\frac{a-b}{2}.$

II. Kakó je uporabljati jednačbe druge stopinje v razreševanje nalog.

§ 211.

Ako dadé pogoji katere koli naloge, izraženi z algebrajskimi znaki, jednačbo, imajočo neznanko v drugi potenci, ondaj določimo vrednost tej neznanki, akó kvadratno jednačbo razrešimo. Na ta način dobimo vselej dve vrednosti, kateri imata v aritmetičnem oziru prav tisto pravico; pri uporabnih nalogah pa je vender vselej še preiskavati, zadostujeta li obe ali le jedna vrednost pogojem dane naloge.

Primeri.

1.) Katero število dá, s svojo tretjino pomnoženo, 972 za produkt?

Ako imenujemo iskano število x, potem je njega tretjina $\frac{x}{3}$, tedaj po pogojih naloge

$$x \cdot \frac{x}{3} = 972, \text{ ali } x^2 = 2916,$$

$$\text{in odtod } x = \pm 54.$$

2.) Dva kosa sukna veljata vsak po 120 gl.; v druzem kosu je 6 metrov sukna več nego v prvem, a vsak meter prvega sukna velja 1 gl. več nego vsak meter druzega. Koliko metrov ima vsak kos?

Ako ima prvi kos x metrov, ima jih drugi $x+6$; 1 meter prvega velja $\frac{120}{x}$ gl., 1 meter druzega $\frac{120}{x+6}$ gl. Po pogojih naloge dobimo tedaj jednačbo

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{x+6} + 1,$$

ali, ako to jednačbo uredimo

$$x^2 + 6x = 720,$$

n odtod $x = 24$ ali $x = -30$.

Negativna vrednost nima v tej nalogi nikakeršnega pomena. Zaradi tega ima

$$\begin{array}{ll} \text{prvi kos} & x = 24\ m, \\ \text{drugi »} & x + 6 = 30\ \text{»} \end{array}$$

3.) Koliko sekund potrebuje telo, katero smo z brzino 200 m vertikalno kvišku zagnali, da pride 400 m visoko, ako preleti prosto padajoče telo v prvi sekundi $4 \cdot 9$ m?

V x sekundah prišlo bi telo, imajoče brzino 200 m, $200x$ m visoko, a v istem času bi padlo vsled teže, kakor uči fizika, za $4 \cdot 9 x^2$ m. Da tedaj v resnici višino 400 m doseže, velja

$$200x - 4 \cdot 9 x^2 = 400,$$

tedaj $x = 38 \cdot 7$ ali $x = 2 \cdot 12$.

Obe vrednosti zadostujeta nalogi, kajti telo bode dvakrat 400 *m* visoko, namreč čez 2·12 sekunde, ko še kvišku leti, in čez 38·7 sekund, ko pada.

Ako zaznamenujemo v tej nalogi v obče prvotno brzino, višino, čas v sekundah in pot pri padanji v prvi sekundi oziroma s c, v, t in $\frac{g}{2}$, dobimo jednačbo

$$ct - \frac{gt^2}{2} = v,$$

iz katere je môči vselej četrto količino določiti, ako so znane druge tri.

Ako je med znanimi tremi količinami tudi čas t, določimo, c, v ali g s pomočjo jednačbe prve stopinje.

Naloge.

1. Produkt iz četrtine in petine nekega števila je 180. Koliko je ono število?

2. Pomnoživši 5kratnik nekega števila z njega četrtino, dobimo 480. Koliko je število?

3. Ako razdeliš 192 z nekim številom, dobiš njega 3kratnik. Kakó se zove število?

4. Katero število treba za 6 povečati in za 6 zmanjšati, da bode produkt teh novih dveh števil 325?

5. Kolika je srednja geometrijska proporcijonala števil 48 in 363?

6. Ako povečaš 12kratnik nekega števila za 45, dobiš njega kvadrat. Koliko je število?

7. Ako prišteješ k nekemu številu 40 ter to vsoto z neizpremenjenim številom razdeliš, ondaj je kvocijent za 2 manjši nego prvotno število. Koliko je to?

8. Ako vzameš vsoto in diferenco iz nekega števila in pa 5, ondaj je vsota kvadratov dobljenih števil 178. Koliko je ono število?

9. Razstavi število 53 takó na dva sumanda, da bode njiju produkt 612.

10. Razstavi število 15 takó na dva dela, da bode vsota njiju kvadratov 113.

11. Razstavi število 15 takó na dva dela, da bode razmerje med njiju kvadratoma 4 : 9.

12. Katero število je za 19 manjše nego kvadrat prejšnjega števila?

13. Od katerega števila treba njega recipročno vrednost odšteti, da dobiš $2\frac{1}{10}$?

14. Števec in imenovalec nekega ulomka iznašata skupaj 33. Ako bi bil števec za 39 in imenovalec za 20 večji, bil bi ulomek dvakrat tolik. Kateri je oni ulomek?

15. Diferenca dveh ulomkov je $\frac{5}{84}$ in števec jednega je na pol tolik kakor imenovalec druzega; imenovalec vsacega ulomka pa je za 1 večji od števca. Katera ulomka sta to?

16. Prosto padajoče telo preleti v prvi sekundi $4 \cdot 9$ *m*, poti pa rastejo kakor kvadrati časov. Koliko sekund potrebuje telo, da pade z višine 150 *m*?

17. *A* kupi za 117 gl. pšenice, in sicer plača za vsak *hl* 4 gl. menj nego je *hl*; koliko *hl* pšenice je *A* kupil?

18. Nekdo kupi njivo, katero potem kot stavben prostor zopet za 816 gl. proda. Pri prodaji ima prav toliko $^0/_0$ dobička, kakor je za njivo goldinarjev dal. Za koliko je bil njivo kupil?

19. Oče zapusti svojim otrokom 14400 gl., katere naj bi na jednake dele med-se razdelili; kmalo po njegovi smrti umrjeta dva izmed njih in vsled tega dobi vsak izmed ostalih 1200 gl. več nego bi bil sicer dobil. Koliko otrôk je zapustil oče?

20. Med več ubožcev treba 110 gl. na jednake dele razdeliti. Ker pa jih pride k razdelitvi 5 več nego se je pričakovalo, dobi vsak $\frac{1}{5}$ gl. menj nego je bilo s početka določeno. Med koliko ubožcev se je razdelila ona vsota?

21. Trgovec naroči za 1080 gl. kave. Ker pa je med tem cena kavi poskočila, in sicer za 18 gl. pri vreči, dobi trgovec 2 vreči menj nego je pričakoval. Koliko vreč tedaj dobi?

22. Nekdo kupi za 400 gl. sukna; ako bi bil veljal *m* 1 gl. menj, dobil bi ga bil za oni denar 20 *m* več. Koliko *m* sukna je kupil?

23. Voznik ima nalogo, 15000 *kg* sena v mesto zvoziti. Ker naloži vsakokrat po 100 *kg* več nego je bilo s prva določeno, treba mu je 5krat menj peljati nego je prej mislil. Kolikokrat bi bil moral peljati?

24. Trgovec je imel v dveh letih zaporedoma isto toliko $^0/_0$ dobička in na ta način je povečal svoj kapital od 12000 gl. na 15870 gl. Koliko $^0/_0$ je imel dobička?

25. Izmed dveh popotnikov potrebuje prvi za 520 *km* 3 dni več nego drugi, ker prehodi ta po 12 *km* več na dan nego prvi. Koliko dnij potrebuje vsakteri za ono pot?

26. Poštni vlak pride v nekem času 100 *km* daleč; brzovlak pa potrebuje za isto daljavo 1 uro menj, ker predirja vsake 3 ure po 25 *km* več. Koliko *km* preleti poštni vlak vsako uro?

27. Drevesnica ima obliko pravokotnika, v katerem stoji 560 dreves v jednakih razdaljah; v vsaki vrsti po dolzem je 8 dreves več nego v vsaki po čez. Koliko dreves je v vsaki vrsti?

28. Pri nekem vozu ima zadnje kolo 2 *m* več v obsegu nego sprednje. Na poti, 6000 *m* dolgi, zavrti se sprednje kolo 500krat več nego zadnje. Kolik obseg ima sprednje kolo?

29. Iz soda, v katerem je bilo 144 *l* vina, odtočilo se ga je nekaj *l* ter prav toliko vode pritočilo; potem se je odtočilo prav toliko *l* zmesi ter z nova toliko vode pritočilo. V zmesi je bilo sedaj še 121 *l* čistega vina. Koliko *l* se je vsakokrat odtočilo?

30. Kakšen rezultat dobiš, ako postaviš v prejšnji nalogi za števili 144 in 121 občni števili *a* in *b*?

III. Naloge v ponavljanje.

1.* Koliko je

a) 2 % od 700, 40, 120, 260, 475, 580, 1425?

b) 5 % od 500, 20, 380, 540, 660, 810, 1250?

2.* Pri 100 gl. je $12\frac{1}{2}$ gl. dobička; koliko ga je pri 324 gl.?

3.* Pri 40 gl. je $3\frac{1}{2}$ gl. dobička; koliko ga je pri 100 gl.?

4.* Lokomotiva, katera predirja vsako uro po 30 *km*, pride v 6 urah od *A* do *B*; koliko *km* bi morala vsako uro predirjati, da bi prišla od *A* do *B* v 5 urah?

5. Koliko vrednost ima *x* v naslednjih sorazmerjih:

a) $12\frac{3}{4} : x = 8\frac{1}{2} : 28$, *b)* $x : 63\frac{3}{4} = 6 : 76\frac{1}{2}$,

c) $x : 21\frac{1}{8} = 12\frac{3}{5} : 18\frac{1}{2}$, *d)* $3\frac{3}{8} : 5\frac{1}{2} = x : 73\frac{1}{2}$,

e) $x : 50 = 0{\cdot}24 : 0{\cdot}64$, *f)* $78{\cdot}8 : 18{\cdot}5 = 154{\cdot}78 : x$?

6. Koliko zlata po 900 tisočnin čistine je v 12 *kg* 25 *dkg* zlata po 800 tisočnin čistine?

7. Parni stroj 4 konjskih sil vzdigne v 5 sekundah 1500 *kg* 1 *m* visoko; koliko *kg* bi vzdignil stroj 6 konjskih sil v 12 sekundah prav takó visoko?

8. 20 delavcev izvrši neko delo v 18 dneh; v koliko dneh bode delo končano, ako odide čez 4 dni 12 delavcev, čez 11 dnij pa jih pride zopet 8 nazaj?

9.* Pšenici padla je cena za 6 %; koliko velja sedaj 1 *hl*, ako je veljal dosedaj 9 gl. 50 kr.?

10.* Katera vsota dá po $1\frac{1}{2}$ % 78 gl. 60 kr. provizije?

11. Pri nekem konkurzu dobi *A* za 5760 gl., katere ima terjati, le 3840 gl.; koliko % ima izgube?

12. Trgovec kupi 600 *kg* blaga za 421·05 gl., čez 8 mesecev pa je proda po 80 kr. *kg*; koliko % dobička ima na leto?

13. Neko blago ima 430 *kg* nečiste teže ter velja 480 gl.; tare je 30 *kg*, provizije 2 %, vozarine 54 gl. Po čem se mora *kg* prodati, da bode $16\frac{1}{2}$ % dobička?

14. Nekdo kupi sukna ter plača za vsake $4\frac{2}{5}$ *m* po $15\frac{2}{5}$ gl., proda pa sukno po 4 gl. *m*. Koliko *m* je kupil, ako ima pri vsem suknu 428 gl. dobička?

15. $x - \frac{x-2}{3} = 7 + \frac{3x-11}{8}$. ***16.*** $\frac{10+4y}{11} + \frac{8y-28}{13} = y - 2$.

17. $2\sqrt{x-7} = \sqrt{3x-17}$. ***18.*** $\sqrt{10 + 2\sqrt{x-1}} = 4$.

19.* Od katerega števila treba 20 odšteti, da ti ostane še njega šestina?

20. Za katero število treba v produktih 32 . 26 in 36 . 24 vsak faktor zmanjšati, da bodeta nova produkta jednaka?

21. Deček dá najstarejšemu bratu polovico svojih orehov menj 8, druzemu polovico ostanka menj 8, tretjemu zopet 8 menj nego polovico sedanjega ostanka, in prav takó četrtemu 8 menj nego polovico novega ostanka; njemu pa jih ostane še 20. Koliko orehov je imel deček s prva in koliko jih je dal vsakemu bratu?

22. S katero početno hitrostjo treba telo vertikalno kvišku zagnati, da bode dospelo v 4 sekundah 500 *m* visoko, ako pade telo v prvi sekundi za 4·9 *m*?

23.* Koliko velja

a) 28 *l* po 48 kr.? *b)* 16 *m* po 3 gl. 35 kr.?

24.* $1\frac{3}{4}$ *kg* velja 2 gl. 24 kr.; koliko velja 1 *kg*?

25.* $2\frac{1}{2}$ *m* veljata $9\frac{1}{2}$ gl.; koliko velja 1 *m*?

26. Poišči najm. sk. mnogokratnik števil

a) 6 in 15, *b)* 12 in 18, *c)* 16 in 24, *d)* 20 in 25.

27. Poišči najm. sk. mnogokratnik števil

a) 4, 5, 10, 12, 15, 36; *b)* 2, 5, 8, 11, 15, 21, 72.

28. Koliko obrestij dá

a) 3210 gl. po 3 % od dne 5. februvarja do dne 30. junija?
b) 2545 » » 4 % » » 17. maja do dne 28. oktobra?
c) 4080 » » $5\frac{1}{2}$% » » 26. marcija do dne 9. julija?

29. Nekdo je kupil hišo, katera daje po 680 gl. čistih dohodkov na leto, za 10120 gl.; po koliko % je naložil svoj kapital?

30. Dva kapitala, katerih vsota je 3600 gl., dasta 168 gl. obrestij na leto. Kolik je vsak kapital, ker je prvi po 5 %, drugi po 4 % izposojen?

31. Kolik je dolg, izplačen v 3 letih 9 mesecih, ako je njega gotova vrednost po odbitku 4 % diskonta 1080 gl.?

32. Nekdo bi moral 960 gl. v 6 letih plačati, a on plača ta dolg takój; koliko je gotovo plačilo, ako se računa 5 % diskonta?

33. $\dfrac{1814\frac{1}{2} \, . \, 100}{5\frac{1}{2} \, . \, 5737\frac{11}{20}}$. ***34.*** $\dfrac{43\frac{3}{4} \, . \, 32 \, . \, 12\frac{1}{2}}{28\frac{3}{4} \, . \, 28}$.

35. *A* porabi $\frac{2}{3}$ svojih letnih dohodkov za hrano in obleko, $\frac{1}{8}$ za stanovanje, kurjavo in svečavo, $\frac{1}{12}$ za druge potrebščine, 349 gl. 25 kr. pa si prihrani. Koliko dohodkov ima na leto?

36. $\dfrac{(3a^3b^2)^3}{(4x^2y^3)^2} \, . \, \dfrac{(2x^3y^2)^2}{(3a^2b^3)^3}$. ***37.*** $\left(\dfrac{3a^2x^4}{2b^3y^3} - \dfrac{5b^2y^4}{9a^3x^3}\right)^2$.

38. $\sqrt[3]{\sqrt{16^3 \, . \, 81^3}}$. ***39.*** $3\sqrt[3]{b^2} \, . \, 5\sqrt[4]{b^3} \, . \, \sqrt[12]{b}$.

40. $(2\sqrt{6} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{2})(\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$.

41. $\dfrac{13}{5 + 2\sqrt{3}}$. ***42.*** $\dfrac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$. ***43.*** $\dfrac{B - b}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$.

44.* Koliko gl. a. v. treba plačati oziraje se na notranjo vrednost za

a) 136 mark, *b)* 1315 mark, *c)* 83 mark 72 fenig.?

45. Koliko gl. v bankovcih dobiš za

a) 600 gl., *b)* 368 gl., *c)* 1820 gl., *d)* 736·25 gl. v zlatu, ako je 16 % ažije?

46. Koliko gl. v zlatu bodeš dobil za

a) 316 gl., *b)* 578 gl., *c)* 950 gl., *d)* 2340 gl. papirnatega denarja, ako ima zlato $16\frac{1}{2}$ % ažije?

47. Koliko tisočnin čistine ima zlitina, ako je v 20 *kg* zlitine *a)* 5 *kg*, *b)* 8 *kg*, *c)* 15 *kg* čistega srebra?

48. Sreberna šibika tehta $4\frac{1}{2}$ *kg* in nje srebro ima po 750 tisočnin čistine; koliko je vsa šibika vredna, ako velja 1 *kg* čistega srebra 90 gl.?

49. *A* proda na Dunaji té-le menice:

a) za 3416 mark v Berolin po 57·2,
b) za 5204 franke v Pariz po 45·8,
c) za 837 funtov sterl. v London po 117·75;

koliko iztrži za vse, ako računa $\frac{1}{2}$ ‰ senzarije?

50. Nekdo kupi dne 12. decembra 1500 gl. k. v. českih zemljiščnih odveznih obligacij po $103\frac{1}{4}$; koliko mora zanje plačati? (5% obresti od dne 1. novembra, dohodarine 10%.)

51. $\frac{x+12}{3y} = 1\frac{1}{3}$, $\frac{9y-3x}{7} = 3$.

52. $\frac{2x+8}{3y-4} = 3$, $\frac{2x-12}{7y+4} = 1$.

53.* Vsota treh števil je 300; drugo je dvakrat toliko kakor prvo, tretje dvakrat toliko kakor drugo. Katera so ta števila?

54. Iz dveh mest, kateri sta za 81 *km* drugo od druzega oddaljeni, gresta si A in B nasproti. Ako odide A 3 ure prej z doma nego B, srečata se v 7 urah; ako odide pa B 3 ure prej, srečata se še le v 8 urah. Koliko *km* prehodi vsak v jedni uri?

55. Tri števila imajo to svojstvo, da je vsota prvega in druzega 66, vsota prvega in tretjega 70, in vsota druzega in tretjega 76. Koliko je vsako?

56. Poišči tri števila, katera imajo tá-le svojstva: Ako prišteješ prvo k trojni vsoti druzih dveh, dobiš 115; ako prišteješ drugo k četverni vsoti druzih dveh, dobiš 135; ako prišteješ slednjič tretje k peterni vsoti druzih dveh, dobiš 145.

57. Kakšna bode razrešitev prejšnje naloge, ako postaviš za števila 3, 4, 5, 115, 135, 145 občna števila m, n, p, a, b, c?

58. Pluta ima spec. težo 0·25, železo pa 7·9. Koliko *kg* plute treba spojiti z 12 *kg* železa, da bode spoj plaval, t. j., da bode njega spec. teža 1?

59. Pretvori té-le perijodne decimalne ulomke na navadne:

a) $0{\cdot}\dot{3}\dot{6}$, *b)* $2{\cdot}\dot{0}\dot{2}$, *c)* $0{\cdot}\dot{3}7\dot{2}$, *d)* $6{\cdot}\dot{5}14\dot{8}$;

e) $0{\cdot}8\dot{6}$, *f)* $0{\cdot}0\dot{3}$, *g)* $4{\cdot}35\dot{2}\dot{7}$, *h)* $0{\cdot}679\dot{5}\dot{4}$.

Izračunaj na okrajšani način na 3 decimalke:

60. 9·5074 . 0·3487. ***61.*** 4·9728 . 0·04725.

62. 0·79596 . 73·804. ***63.*** 256·8735 . 0·09276.

64. 27·942 : 8·5674. ***65.*** 37·8268 : 0·8927.

66. 5·72876 : 0·0275. ***67.*** 242·87 : 17·384.

68.* Koliko vode treba k 8 *l* jesiha po 18 kr. priliti, da bode *l* zmesi še 16 kr. vreden?

69. Trgovec hoče namešati iz dvojega špirita 640 *l* špirita po 75 stopinj; za zmes vzame 460 *l* po 40 stopinj. Koliko stopinj mora imeti drugi špirit, katerega za zmes uporabi?

70. Nekega skupnega podjetja se je udeleževal A s 1250 gl. 4 mesece, B z 2380 gl. 5 mesecev, C s 3000 gl. 3 mesece in D z 2710 gl. 10 mesecev; dobička je bilo 2188 gl. 48 kr.; koliko tega dobička dobi vsak?

71. $\sqrt{198025}$. **72.** $\sqrt{1292 \cdot 114916}$. **73.** $\sqrt{3163725009}$.

74. $\sqrt[3]{91125}$. **75.** $\sqrt[3]{49027896}$. **76.** $\sqrt[3]{0 \cdot 428661064}$.

77. $\sqrt{(a^6 - 6a^5 + 11a^4 - 16a^3 + 31a^2 - 10a + 25)}$.

78. $\sqrt[3]{(8x^6 - 36x^5 + 66x^4 - 63x^3 + 33x^2 - 9x + 1)}$.

79. A mora plačati 500 gl. takój, 500 gl. v 6 mesecih in 500 gl. v 1 letu; plača pa 300 gl. čez 1 mesec, 200 gl. čez 2 meseca in 100 gl. čez 3 mesece. Kedaj bode moral plačati ostanek?

80. A ponuja za neko hišo 20000 gl., katere hoče pa še le čez 4 leta plačati. Kolika je gotova vrednost te ponudbe, ako se računa 5 % obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

81. Neko blago se je kupilo za 1573 gl. 20 kr. Koliko velja blago v resnici, ako je bilo 2 % skonta, $\frac{1}{4}$ % senzarije (od kupnine), 216 gl. 50 kr. druzih stroškov in 2 % provizije (od vsega izneska)?

82. $\frac{5}{x+4} - \frac{2}{x-5} = \frac{1}{4}$. **83.** $\frac{x}{6} + \frac{14}{3x} = \frac{2(x-1)}{x} + \frac{1}{6}$.

84. $\frac{x+4}{3} - \frac{4x+7}{9} = \frac{7-x}{x-3} - 1$.

85. $\sqrt{x + 2a(a+b)} - 2a = \frac{x}{a+b}$.

86. Več oseb je potrošilo potujoč 432 gl.; ker dve osebi nista ničesar plačali, plačati je morala vsaktera ostala oseba 3 gl. več. Koliko je bilo vseh oseb?

87. Dva sla odpotujeta ob istem času iz dveh za 84 *km* oddaljenih mest ter si gresta nasproti; jeden potrebuje za vsak *km* $2\frac{1}{12}$ minute več nego drugi. V koliko minutah prehodi vsakteri 1 *km*, ker se srečata v 5 urah?

88. A in B sta prodala skupaj 100 *m* blaga, in sicer jeden več nego drugi, iztržila pa sta vender oba jednako. Ako bi bil imel A toliko *m* kakor B, iztržil bi bil 63 gl.; ako bi bil pa B toliko *m* imel kakor A, iztržil bi bil le 28 gl. Koliko *m* je prodal A, koliko B?

Jednajsti oddelek.

O logaritmih.

I. O logaritmih v obče.

§ 212.

Račun, kateri uči, kakó je najti potenčni eksponent iz vrednosti potence in nje podloge, imenujemo logaritmovanje *(Logarithmieren)*.

Število a s številom b logaritmovati se pravi, iskati potenčnega eksponenta, s katerim treba podlogo b vzmnožiti, da dobimo a kot potenco. Število b je podloga, dano število a, katero za potenco smatramo, imenujemo pa logaritmand ali kar s kratka število *(numerus)* in iskani potenčni eksponent logaritem *(Logarithmus)*. Ako je $b^n = a$, ondaj je n logaritem števila a za podlogo b in to zaznamenujemo takó-le:

$$n = log_b\, a.$$

Ako veljajo vsi logaritmi za jedno in isto podlogo b, pišemo krajše $n = log\, a$, misleč si podlogo b znano.

N. pr. $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$; $10^{-1} = 0 \cdot 1$, $10^{-2} = 0 \cdot 01$, . . .

Vzemši 10 za podlogo, dobimo

$$log\ 1 = 0,\ log\ 10 = 1,\ log\ 100 = 2,\ log\ 1000 = 3,$$
$$log\ 0 \cdot 1 = -1,\ log\ 0 \cdot 01 = -2, \ldots$$

Logaritmand in podloga morata biti vsikdar neimenovani števili. Logaritmovanje je drugi obrat vzmnoževanju. Da ima vzmnoževanje dva bistveno različna obrata, razkorenjevanje in logaritmovanje, a seštevanje in množenje le po jednega, temu je vzrok ta, da se izpremeni pri vzmnoževanji vrednost, ako dani dve števili med seboj zamenjamo, da je tedaj izraz a^b različen od b^a.

§ 213.

Iz pojma o logaritmu je razvidno:

1.) Logaritem vsake podloge za to podlogo jednak 1. Ako je b podloga, ondaj je $log\, b = 1$, kajti $b^1 = b$.

2.) Logaritem števila 1 je za vsako podlogo jednak 0. Kajti $b^0 = 1$, tedaj $log\, 1 = 0$.

3.) Za jedno in isto podlogo imajo jednaka števila tudi jednake logaritme; in obratno; k jednakim logaritmom spadajo tudi jednaka števila.

4.) Za podlogo, večjo od 1, ima večje število tudi večji logaritem; in obratno: čim večji je logaritem, tem večje število.

§ 214.

Logaritme vseh števil naravne številne vrste za jedno in isto podlogo skup zovemo logaritemski sistem.

Negativno število ne more biti podloga logaritemskemu sistemu, kajti njega potence ne dadé vseh mogočih števil. Ako bi vzeli n. pr. -10 za podlogo, dobili bi

$$
\begin{array}{llll}
(-10)^0 = 1, & & (-10)^1 = -10, \\
(-10)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-10}, & & (-10)^2 = 100, \\
(-10)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2}, & & (-10)^3 = -1000, \\
(-10)^{\frac{7}{9}} = -\sqrt[9]{10^7}, & & (-10)^4 = 10000;
\end{array}
$$

i. t. d.

Eksponenti so čedalje večji in večji, a dotične potence nimajo nikakeršnega tvorbnega zakona; one so sedaj pozitivne, sedaj negativne, nekatere realne, druge imaginarne; tudi to je razvidno, da nekaterih števil n. pr. 10, 1000, . . . z nikakeršno potenco števila -10 izraziti ne moremo.

Tudi jednota ne more biti podloga logaritemskemu sistemu, kajti vsaka nje potenca je zopet 1.

Podloga logaritemskemu sistemu more biti tedaj le tako pozitivno število, ki je večje od 1.

Ker pa je vsaka cela ali ulomljena, pozitivna ali negativna potenca pozitivnega števila vselej pozitivno število, zato ne morejo biti logaritmi negativnih števil realni, ampak oni so imaginarni. Kadar imajo tedaj računi, katere treba s pomočjo logaritmov izvršiti, tudi negativna števila, treba le-tá med računanjem za absolutna števila smatrati ter njih predznake še le v pošte jemati, določujoč rezultatu predznak.

Uporabljata se samo dva logaritemska sistema, namreč navadni ali Briggov za podlogo 10, in naravni ali Neperjev za iracijonalno podlogo 2·718281828 . . .

Občni izreki o logaritmih.

§ 215.

1.) Logaritem produkta je jednak vsoti iz logaritmov posamičnih faktorjev.

Dokaz. Vzemimo, da je b podloga in

$$\begin{aligned} M &= b^m, & \text{tedaj} \quad \log M &= m, \\ N &= b^n, & \text{»} \quad \log N &= n, \\ P &= b^p, & \text{»} \quad \log P &= p. \end{aligned}$$

Pomnoživši vse jednáčbe na levi drugo z drugo, dobimo

$$MNP = b^{m+n+p}.$$

Da dobimo tedaj število MNP, treba podlogo b vzmnožiti na potenco $m + n + p$, ali $m + n + p$ je logaritem števila MNP, tedaj

$$\log MNP = m + n + p$$

ali, ako postavimo za m, n, p njih vrednosti,

$$\log MNP = \log M + \log N + \log P.$$

N. pr. $\log 3ab = \log 3 + \log a + \log b.$
$\log 6 = \log 2 + \log 3$
$\log 15 = \log 3 + \log 5.$
$\log 30 = \log 2 + \log 3 + \log 5.$

2.) Logaritem ulomka (kvocijenta) je jednak logaritmu števca, zmanjšanemu za logaritem imenovalca.

Dokaz. Vzemimo, da je b podloga in

$$\begin{aligned} M &= b^m, & \text{tedaj} \quad \log M &= m, \\ N &= b^n, & \text{»} \quad \log N &= n; \end{aligned}$$

tedaj $\frac{M}{N} = b^{m-n},$

zatorej $\log \frac{M}{N} = m - n = \log M - \log N.$

N. pr. $\log \frac{29}{31} = \log 29 - \log 31.$

$$\log 35{\cdot}29 = \log \frac{3529}{100} = \log 3529 - \log 100.$$

$$\log \frac{a+b}{a-b} = \log (a+b) - \log (a-b).$$

3.) Logaritem potence je jednak logaritmu podloge, pomnoženemu s potenčnim eksponentom.

Dokaz. Vzemimo, da je b podloga in $M = b^m$, tedaj $\log M = m$. Vzmnoživši prvo jednačbo na $p$tno potenco, dobimo $M^p = b^{mp}$, tedaj

$$\log M^p = mp = p \log M.$$

N. pr. $\log 5^3 = 3 \log 5.$

$$\log (2a)^3 = 3 \log 2a = 3 (\log 2 + \log a).$$

$$\log 2a^3 = \log 2 + \log a^3 = \log 2 + 3 \log a.$$

4.) Logaritem korena je jednak logaritmu radikanda, razdeljenemu s korenjim eksponentom.

Dokaz. Recimo, da je b podloga in $M = b^m$, tedaj $\log M = m$. Ako razkorenimo prvo jednačbo s številom p, dobimo $\sqrt[p]{M} = \sqrt[p]{b^m} = b^{\frac{m}{p}}$, tedaj

$$\log \sqrt[p]{M} = \frac{m}{p} = \frac{\log M}{p}.$$

N. pr. $\log \sqrt[3]{75} = \frac{\log 75}{3}.$

$$\log \sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\log \frac{a}{b}}{5} = \frac{\log a - \log b}{5}.$$

$$\log \frac{a\sqrt[3]{x^2}}{y} = \log a + \tfrac{2}{3} \log x - \log y.$$

Naloge.

1. $\log 3xyz.$ 2. $\log 6ax(a+x).$ 3. $\log (a^2 - b^2).$

4. $\log \frac{2ax}{b}.$ 5. $\log \frac{1}{3xy}.$ 6. $\log \frac{xy}{a(b+1)}.$

7. $\log \frac{5mx}{1-m^2}.$ 8. $\log \frac{x^2-y^2}{2xy}.$ 9. $\log \frac{3(a^2-b^2)x}{(3a+2b)y}.$

10. $\log a^4.$ 11. $\log ax^3.$ 12. $\log (ax)^3.$

13. $\log 5a^2x^2.$ 14. $\log 2^3x^2(a^2-b^2).$ 15. $\log a^2m^3 . (3nx^2)^3.$

16. $\log \frac{m^2n^3}{p^3r^2}.$ 17. $\log \left(\frac{a^3}{x^2} \cdot \frac{b^2}{y^2}\right).$ 18. $\log \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$

19. $\log \sqrt{xy}$. **20.** $\log 3a^2 \sqrt[3]{bx^2}$. **21.** $\log x^3 \sqrt[5]{x^2y^3}$.

22. $\log \sqrt[5]{\frac{a^3}{b^4}}$. **23.** $\log \frac{2-a}{3\sqrt[3]{r}}$. **24.** $\log \frac{x^2\sqrt[3]{a}}{5by^3}$.

25. $\log \sqrt{\frac{x^3y^3}{z^5}}$. **26.** $\log \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **27.** $\log \frac{a^2\sqrt[5]{a^2b^3}}{b^2\sqrt[3]{a^2b}}$.

28. $\log 3 \,.\, 100$. **29.** $\log 3500$. **30.** $\log 123000$.

31. $\log \frac{7}{10}$. **32.** $\log 0{\cdot}13$. **33.** $\log 0{\cdot}0834$.

34. $\log \frac{3^4}{2^5}$. **35.** $\log \left(\frac{567}{678}\right)^3$. **36.** $\log \frac{1}{15^2 \,.\, 8^3}$.

37. $\log \sqrt[5]{\left(\frac{23}{37}\right)^3}$. **38.** $\log \sqrt[4]{\frac{2}{3}\sqrt{b}}$. **39.** $\log \sqrt{\frac{3^4 \,.\, \sqrt{17} \,.\, 13}{7 \,.\, 14^2 \,.\, \sqrt[3]{69}}}$.

II. O Briggovih logaritmih.

§ 216.

Briggov logaritem katerega koli števila imenujemo oni potenčni eksponent, s katerim treba podlogo 10 vzmnožiti, da dobimo ono število kot potenco.

V Briggovem sistemu je

$10^0 = 1$, tedaj $\log 1 = 0$;
$10^1 = 10$, » $\log 10 = 1$;
$10^2 = 100$, » $\log 100 = 2$;
$10^3 = 1000$, » $\log 1000 = 3$, i. t. d.;
$10^{-1} = 0{\cdot}1$, » $\log 0{\cdot}1 = -1$;
$10^{-2} = 0{\cdot}01$, » $\log 0{\cdot}01 = -2$;
$10^{-3} = 0{\cdot}001$, » $\log 0{\cdot}001 = -3$, i. t. d.

Iz tega je razvidno:

1.) V Briggovem sistemu so le logaritmi dekadnih jednot (celih potenc števila 10) cela števila. Logaritmi vseh druzih števil so med 0 in 1, med 1 in 2, 2 in 3, i. t. d. ter so iracijonalna števila; približno jih izražujemo z decimalnimi ulomki. Briggov logaritem je sestavljen tedaj v obče iz celot in decimalk; celote imenujemo njega karakteristiko ali značajko *(Charakteristik, Kennziffer)*, decimalke pa mantiso *(Mantisse)*.

2.) Karakteristika vsacega celega števila je za 1 manjša od števila njegovih številk.

Vsako jednoštevilčno število je namreč večje od 1 in manjše nego 10; logaritem števila 1 je 0, logaritem števila 10 je 1; logaritem katerega koli jednoštevilčnega števila je torej večji od 0 in manjši od 1, tedaj ima 0 celot in nekaj decimalk; njega karakteristika je tedaj 0. Vsako dvoštevilčno število je večje od 10 in manjše nego 100; $log\ 10 = 1$, $log\ 100 = 2$; logaritem vsacega dvoštevilčnega števila je torej med 1 in 2, njega karakteristika tedaj 1, i. t. d.

3.) Vsa števila, ki so večja od 1, imajo pozitivne logaritme; logaritmi vseh pozitivnih števil, ki so manjša od 1, so pa negativni, in sicer sta negativni karakteristika in mantisa. Logaritme z negativnimi mantisami pretvarjamo navadno na take, ki imajo pozitivno mantiso in negativno karakteristiko; v ta namen odštejemo negativni logaritem od števila, ki je za 1 večje od karakteristike, na ta način dobljeni pozitivni mantisi pa zadaj dodamo kot negativno karakteristiko ono za 1 večje število. N. pr.

$$
\begin{aligned}
-2\cdot34567 &= 3 - 2\cdot34567 - 3 \\
&= 0\cdot65433 - 3.
\end{aligned}
$$

§ 217.

V Briggovem logaritmu katerega koli števila se izpremeni le karakteristika, mantisa pa ostane neizpremenjena, ako število s katero koli potenco števila 10 pomnožimo ali razdelimo.

Dokaz. Kakor znano, je

$$
\begin{aligned}
log\,(a\,.\,10^n) &= log\ a + log\ 10^n = log\ a + n, \\
log\,\frac{a}{10^n} &= log\ a - log\ 10^n = log\ a - n.
\end{aligned}
$$

V prvem slučaji postane tedaj logaritem števila a za celo število n večji, v druzem manjši, t. j. dobi drugo karakteristiko, a mantisa ostane neizpremenjena.

N. pr. $log\ 3946 = 3\cdot59\ 616$; tedaj

$$
\begin{aligned}
log\ 39460 &= log\ 3946 + log\ 10 = 3\cdot59\ 616 + 1 \\
&= 4\cdot59\ 616; \\
log\ 394600 &= log\ 3946 + log\ 100 = 3\cdot59\ 616 + 2 \\
&= 5\cdot59\ 616;
\end{aligned}
$$

in prav takó

$$\begin{aligned}
log\ 394{\cdot}6 &= log\ 3946 - log\ 10 &&= 3{\cdot}59\ 616 - 1\\
&&&= 2{\cdot}59\ 616;\\
log\ 39{\cdot}46 &= log\ 3946 - log\ 100 &&= 3{\cdot}59\ 616 - 2\\
&&&= 1{\cdot}59\ 616;\\
log\ 3{\cdot}946 &= log\ 3946 - log\ 1000 &&= 3{\cdot}59\ 616 - 3\\
&&&= 0{\cdot}59\ 616;\\
log\ 0{\cdot}3946 &= log\ 3946 - log\ 10000 &&= 3{\cdot}59\ 616 - 4\\
&&&= 0{\cdot}59\ 616 - 1;\\
log\ 0{\cdot}03946 &= log\ 3946 - log\ 100000 &&= 3{\cdot}59\ 616 - 5\\
&&&= 0{\cdot}59\ 616 - 2.
\end{aligned}$$

Tu je mantisa zmerom jedna in ista, izpremina se le karakteristika, in sicer je le-tá za vsako število jednaka redovnemu eksponentu njegove najvišje veljavne številke. Odtod izvira:

1.) Logaritem vsacega števila ima za karakteristiko redovni eksponent njegove najvišje veljavne številke.

2.) Logaritmova mantisa je zavisna le od razvrstitve številk v danem številu, nikakor pa ne od njih mestne vrednosti, zategadelj imajo isto mantiso vsa števila, ki se le v tem razločujejo, da stoji decimalna točka na različnem mestu.

O logaritmovniku.

§ 218.

Logaritme vseh celih števil od 1 do 10000, ali od 1 do 100000 nahajamo zbrane v posebnih tabelah in to na 5, 6 ali 7 decimalk; tako zbirko imenujemo logaritmovnik *(Logarithmentafeln)*. V logaritmovniku so le mantise logaritmov, kajti karakteristika se določi v vsakem slučaji lahko po § 216., 1.

Manjši logaritmovniki imajo le mantise četveroštevilčnih števil in te na pet ali šest decimalk. Logaritmi s petimi decimalkami zadostujejo pri navadnih praktičnih računih po polnem.

S pomočjo tacega logaritmovnika je môči najti na prav priprost način, katerega natančneje logaritmovnikov uvod opisuje, vsakemu številu njegov logaritem in obratno število, spadajoče k danemu logaritmu.

1.) Kakó je najti logaritem danemu številu.

V logaritmovniku poišči mantiso danega števila, za karakteristiko pa vzemi redovni eksponent najvišje veljavne številke.

a) Ako je število četveroštevilčno, poišči prve tri števílke v prvem razpredelku na levi in od ondod pojdi v isti vrsti v oni razpredelek, kateri ima zgoraj in spodaj četrto števílko za nadpis; tu najdeš zadnje tri števílke mantise. Prvi dve števílki stojita v razpredelku, z 0 zaznamenovanem, in sicer v isti vrsti, ali nekoliko bolj zgoraj, ali pa tudi v naslednji spodaj in to tedaj, kadar stoji pred zadnjimi tremi števílkami mantise zvezdica. Takó je n. pr.

$$\log 5134 = 3 \cdot 71046 \qquad \log 0 \cdot 5375 = 0 \cdot 73038 - 1$$
$$\log 528 \cdot 9 = 2 \cdot 72337 \qquad \log 0 \cdot 05497 = 0 \cdot 74013 - 2$$

b) Ako ima dano število menj nego štiri števílke, ondaj si mislimo toliko ničel pripisanih, da dobimo četveroštevilčno število. Ako treba n. pr. logaritma števila 38 poiskati, poišči mantiso za 3800.

c) Ako ima dano število pet ali šest števílk, ondaj poišči najprej kakor zgoraj pod *a)* v logaritmovniku mantiso prvih štirih števílk in pa diferenco med to in naslednjo večjo mantiso, ki je v logaritmovniku. Potem vzemi iz one pomočne tablice na desni, katera ima to diferenco na čelu, proporcijonalne dele za peto in šesto števílko in te prištej k mantisi prvih štirih števílk. N. pr.

$$\begin{array}{llr} \log 215 \cdot 87 & = & 2 \cdot 33405 \\ \text{dif. } 20 & 7 \ldots . & 14 \\ \hline & & 2 \cdot 33419 \end{array} \qquad \begin{array}{llr} \log 7 \cdot 24638 & = & 0 \cdot 86010 \\ \text{dif. } 6 & 3 \ldots . & 18 \\ & 8 \ldots & 05 \\ \hline & & 0 \cdot 86012 \end{array}$$

2.) Kakó je najti število k danemu logaritmu.

V logaritmovniku poišči števílk, ki spadajo k dani mantisi in le-tém določi potem mestno vrednost; v ta namen daj najvišji števílki ono mestno vrednost, katero zahteva karakteristika.

Prvih dveh mantisinih števílk išči v razpredelku, z 0 zaznamenovanem, zadnjih treh pa v isti ali kateri naslednji vrsti, ali pa tudi med z zvezdicami zaznamenovanimi prejšnje vrste.

a) Ako najdeš vse mantisine števílke v logaritmovniku, ondaj vzemi prve tri števílke iskanega števila iz prvega razpredelka na levi in to v oni vrsti, v kateri si našel zadnje tri mantisine števílke, četrto števílko pa iz najzgornje ali najspodnje vrste onega razpredelka, v katerem so one mantisine števílke. N. pr.

$$\log x = 2 \cdot 91046 \qquad \log y = 0 \cdot 90811 - 2$$
$$x = 813 \cdot 7 \qquad y = 0 \cdot 08093.$$

b) Ako pa ne najdeš dane mantise natančno v logaritmovniku, ondaj poišči najbližjo manjšo, ki je v logaritmovniku, in k tej četveroštevilčno število kakor pod *a)*; to dá prve štiri številke iskanega števila. Potem izračunaj diferenco onih dveh v logaritmovniku nahajajočih se mantis, med katerima je dana mantisa, in tudi diferenco med dano in ono manjšo mantiso, iz te diference pa določi, uporabljajoč ono pomočno tablico, katera ima prvo diferenco na čelu, peto in šesto številko.

$log\ a = 0{\cdot}88016 - 1$		$log\ b = 2{\cdot}50729$		
	013 . . . 7588		718 . . 3215	
dif. 5	3 6	dif. 14	11	
	$a = 0{\cdot}75886$		98 7	
			12 9	
			$b = 321{\cdot}579.$	

Kakó je z logaritmi računati.

§ 219.

V obče veljajo za računanje z logaritmi ista pravila kakor za dekadna števila; pomniti je le še tó-le:

1.) Ako dobiš pri seštevanji logaritmov dve karakteristiki, pozitivno in negativno, ondaj ji skrči. N. pr.

$$\begin{array}{l} 2{\cdot}27056 \\ 0{\cdot}08341 - 1 \\ 0{\cdot}62279 - 2 \\ \hline 2{\cdot}97676 - 3 = 0{\cdot}97676 - 1. \end{array}$$

2.) Ako je pri odštevanji minuend manjši od subtrahenda, ondaj prištej, da ne bode mantisa negativna, k minuendu toliko pozitivnih jednot, da bode večji nego je subtrahend, a potem vzemi za karakteristiko v ostanku prav toliko negativnih jednot. N. pr.

$$\begin{array}{l} +2 \qquad -2 \\ 2{\cdot}65\ 348 \\ 4{\cdot}07\ 513 \\ \hline 0{\cdot}57\ 835 - 2. \end{array}$$

3.) Ako si pomnožil logaritem, ki ima negativno karakteristiko, s katerim koli številom, skrči negativno karakteristiko in pa pozitivno, katero si morebiti dobil. N. pr.

$$\begin{aligned} (0{\cdot}93115 - 2) \times 5 &= 4{\cdot}65575 - 10 \\ &= 0{\cdot}65575 - \ 6. \end{aligned}$$

4.) Ako je razdeliti logaritem, ki ima negativno karakteristiko, s kakim številom, treba negativno karakteristiko, ako ni razdelna z onim številom, za toliko jednot povečati, da bode razdelna; prav toliko jednot moraš pa tudi k celotam pozitivne mantise prišteti. Na ta način se izogneš ulomljeni karakteristiki. N. pr.

$$\begin{aligned} \overset{+1}{(0{\cdot}47\ 532} - \overset{-1}{3)} : 4 &= (1{\cdot}47\ 532 - 4) : 4 \\ &= 0{\cdot}36\ 883 - 1. \end{aligned}$$

Kakó je uporabljati Briggove logaritme.

§ 220.

Uporabljajoč občne izreke § 215., izpremeniš lahko množenje na seštevanje, deljenje na odštevanje, vzmnoževanje na množenje in razkorenjevanje na deljenje.

1.) Ako treba dvoje ali več števil drugo z druzim pomnožiti, vzemi njih logaritme ter jih seštej; vsota je logaritem produkta; ako poiščeš tedaj k onemu logaritmu število, je le-tó zahtevani produkt. N. pr.

$$\begin{aligned} x &= 2{\cdot}1345 \,.\, 3{\cdot}8902 \,.\, 0{\cdot}7849. \\ \log 2{\cdot}1345 &= 0{\cdot}32\ 930 \\ \log 3{\cdot}8902 &= 0{\cdot}58\ 997 \\ \log 0{\cdot}7849 &= \underline{0{\cdot}89\ 481 - 1} \\ \log x &= 0{\cdot}81\ 408 = \log 6{\cdot}5174 \\ x &= 6{\cdot}5174. \end{aligned}$$

2.) Ako je dvoje števil s pomočjo logaritmov drugo z druzim razdeliti, odštej divizorjev logaritem od logaritma dividendovega; ostanek je logaritem kvocijentov. Število, spadajoče k temu logaritmu, je zahtevani kvocijent. N. pr.

$$\begin{aligned} a) \qquad x &= 7{\cdot}6912 : 218{\cdot}87 \\ & \quad +2 \qquad\quad -2 \\ \log 7{\cdot}6912 &= 0{\cdot}88\ 594 \\ \log 218{\cdot}87 &= \underline{2{\cdot}34\ 019} \\ \log x &= 0{\cdot}54\ 575 - 2 = \log 0{\cdot}03514 \\ x &= 0{\cdot}03514. \end{aligned}$$

b) $$x = \frac{3\cdot4156 \,.\, 4\cdot023}{1\cdot2378 \,.\, 5\cdot8709}.$$

$$\begin{aligned}
\log x &= \log 3\cdot4156 + \log 4\cdot023 - (\log 1\cdot2378 + \log 5\cdot8709)\\
\log 3\cdot4156 &= 0\cdot53\ 347\\
\log 4\cdot023 &= \underline{0\cdot60\ 455}\\
&\ 1\cdot13\ 802\\
\log 1\cdot2378 &= 0\cdot09\ 265\\
\log 5\cdot8709 &= \underline{0\cdot76\ 871}\\
\log x &= 0\cdot27\ 666 = \log 1\cdot8909\\
x &= 1\cdot8909.
\end{aligned}$$

3.) Kadar treba število na katero koli potenco vzmnožiti, poišči logaritem onega števila ter ga pomnoži s potenčnim eksponentom; produkt je logaritem iskane potence; potenco samo dobiš, ako poiščeš k onemu logaritmu število. N. pr.

$$\begin{aligned}
x &= 1\cdot05^{20}.\\
\log 1\cdot05 &= \underline{0\cdot02119}\ \times 20\\
\log x &= 0\cdot42\ 380 = \log 2\cdot6533\\
x &= 2\cdot6533.
\end{aligned}$$

4.) Da izračunaš določeni koren katerega koli števila, poišči njega logaritem in tega razdeli s korenjim eksponentom; kvocijent je logaritem zahtevanega korena; koren dobiš, ako poiščeš k temu logaritmu števila. N. pr.

a) $$\begin{aligned}
x &= \sqrt[6]{50}.\\
\log 50 &= \underline{1\cdot69\ 897}\ : 6\\
\log x &= 0\cdot28\ 316 = \log 1\cdot9194\\
x &= 1\cdot9194.
\end{aligned}$$

b) $$x = \sqrt[9]{\frac{1\cdot052^2 \,.\, \sqrt{23}}{2\sqrt[3]{18}}}.$$

$$\log x = \tfrac{1}{9}\,[2 \log 1\cdot052 + \tfrac{1}{2} \log 23 - (\log 2 + \tfrac{1}{3} \log 18)]$$

$$\begin{aligned}
\log 1\cdot052 &= 0\cdot02\ 202\\
2 \log 1\cdot052 &= 0\cdot04\ 404\\
\log 23 &= 1\cdot36\ 173\\
\tfrac{1}{2} \log 23 &= \underline{0\cdot68\ 086}\\
&\ 0\cdot72\ 490\\
\log 2 &= 0\cdot30\ 103\\
\log 18 &= 1\cdot25\ 527\\
\tfrac{1}{3} \log 18 &= \underline{0\cdot41\ 842}\\
&\ \underline{0\cdot00\ 545}\ : 9\\
\log x &= 0\cdot00\ 061 = \log 1\cdot0014\\
x &= 1\cdot0014.
\end{aligned}$$

§ 221.

Prav ugodno se dadé logaritmi uporabiti pri obrestno-obrestnih računih.

Ako je e končna vrednost, na katero naraste po p procentov naložen kapital a pri celoletnem kapitalizovanji v m letih, ondaj je po § 149.

$$e = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m.$$

Ako logaritmujemo obe strani te jednačbe, dobimo

$$log\, e = log\, a + m\, log\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

in odtod

$$log\, a = log\, e - m\, log\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

$$log\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{log\, e - log\, a}{m},$$

$$m = \frac{log\, e - log\, a}{log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

S pomočjo teh jednačeb je môči, ako so izmed količin a, e, p, m tri znane, četrto izračunati. Kadar se obresti poluletno kapitalizujejo, treba mesto p in m oziroma $\frac{p}{2}$ in $2m$ postaviti.

Primeri.

1.) Na koliko narase kapital 1300 gl. v 25 letih, ako se računa 4 % obrestnih obrestij?

$$\begin{aligned} e &= 1300 \,.\, 1{\cdot}04^{25} \\ log\, 1{\cdot}04 &= 0{\cdot}01\ 703 \\ 25\, log\, 1{\cdot}04 &= 0{\cdot}42\ 575 \\ log\, 1300 &= 3{\cdot}11\ 394 \\ \hline log\, e &= 3{\cdot}53\ 969 = log\, 3465 \\ e &= 3465 \text{ gl.} \end{aligned}$$

2.) Kateri kapital narase v 10 letih pri poluletnem kapitalizovanji in 5% obrestnih obrestih na 2000 gl.?

$$\begin{aligned} a &= \frac{2000}{1{\cdot}025^{20}}. \\ log\, 2000 &= 3{\cdot}30\ 103 \\ log\, 1{\cdot}025 &= 0{\cdot}01\ 072 \\ 20\, log\, 1{\cdot}025 &= 0{\cdot}21\ 440 \\ \hline log\, a &= 3{\cdot}08\ 663 = log\, 1220{\cdot}75 \\ a &= 1220{\cdot}75 \text{ gl.} \end{aligned}$$

3.) Po koliko % treba 614 gl. 19 let na obrestne obresti naložiti, da narastejo na 1859 gl.?

$$\log\left(1+\frac{p}{100}\right)=\frac{\log 1859-\log 614}{19}$$

$$\begin{aligned} \log 1859 &= 3\cdot 26\,928 \\ \log 614 &= 2\cdot 78\,817 \\ & \quad 0\cdot 48\,111 : 19 \end{aligned}$$

$$\log\left(1+\frac{p}{100}\right)=0\cdot 02\,532=\log 1\cdot 06$$

$$1+\frac{p}{100}=1\cdot 06,\ \text{tedaj}\ p=6\ \%.$$

4.) Koliko let treba 2518 gl. po 5 % na obrestne obresti naložiti, da narastejo na 4522 gl.?

$$n=\frac{\log 4522-\log 2518}{\log 1\cdot 05}.$$

$$\begin{aligned} \log 4522 &= 3\cdot 65\,553 \qquad \log 1\cdot 05 = 0\cdot 02\,119 \\ \log 2518 &= 3\cdot 40\,106 \\ & \quad 0\cdot 25\,447 : 0\cdot 02119 = 12\ \text{let.} \end{aligned}$$

Naloge.

Poišči v logaritmovniku logaritme téh-le števil:

1. *log* 7. **2.** *log* 58. **3.** *log* 312. **4.** *log* 993.
5. *log* 3905. **6.** *log* 1358. **7.** *log* 4850. **8.** *log* 9499.
9. *log* 6458. **10.** *log* 3094. **11.** *log* 5759. **12.** *log* 7766.
13. *log* 12345. **14.** *log* 50736. **15.** *log* 83925.
16. *log* 46357. **17.** *log* 13088. **18.** *log* 74613.
19. *log* 525729. **20.** *log* 683744. **21.** *log* 807625.
22. *log* 290537. **23.** *log* 426853. **24.** *log* 109307.
25. *log* 4·9. **26.** *log* 72·85. **27.** *log* 0·7839.
28. *log* 7·0843. **29.** *log* 0·07072. **30.** *log* 1·0001.
31. *log* 349·008. **32.** *log* 6·0606. **33.** *log* 1·000939.

Poišči k tém-le logaritmom števila:

34. 3·59 605. **35.** 3·15 594. **36.** 2·94 468.
37. 0·76 027. **38.** 0·64 018 — 1. **39.** 0·97 007 — 2.
40. 1·36 544. **41.** 2·60 555. **42.** 0·46 318 — 1.
43. 3·89 763. **44.** 0·39 094 — 2. **45.** 0·88 226.
46. 2·30 852. **47.** 0·73 280 — 1. **48.** 1·07 365.
49. 0·41 582. **50.** 1·66 246. **51.** 0·01 923.
52. 4·38 368. **53.** 0·72 421 — 2. **54.** 1·83 378 — 3.

Izračunaj s pomočjo logaritmov té-le izraze:

55. $1 \cdot 2345 \,.\, 1 \cdot 5432$. ***56.*** $8 \cdot 57353 \,.\, 0 \cdot 72985$.

57. $1 \cdot 025 \,.\, 1 \cdot 079 \,.\, 0 \cdot 5628$. ***58.*** $37 \cdot 8946 \,.\, 0 \cdot 01897 \,.\, 0 \cdot 5764$.

59. $\frac{4 \cdot 789}{5 \cdot 457}$. ***60.*** $\frac{1}{3 \cdot 14159}$. ***61.*** $\frac{0 \cdot 36979}{0 \cdot 39846}$.

62. $\frac{2 \cdot 3456 \,.\, 5 \cdot 2193}{760 \,.\, 0 \cdot 12345}$. ***63.*** $\frac{413 \,.\, 5124 \,.\, 21358}{425 \,.\, 4998 \,.\, 76231}$.

64. $\frac{0 \cdot 765473}{8 \cdot 9376 \,.\, 0 \cdot 93457}$. ***65.*** $\frac{5 \cdot 20408 \,.\, 0 \cdot 058926}{0 \cdot 001975 \,.\, 92 \cdot 8407}$.

66. $(1 \cdot 05)^{10}$. ***67.*** $(1 \cdot 025)^{24}$. ***68.*** $(1 \cdot 045)^{16}$.

69. $\left(\frac{435}{417}\right)^9$. ***70.*** $\left(\frac{5196}{6913}\right)^8$. ***71.*** $\left(\frac{53 \cdot 139}{53 \cdot 708}\right)^7$.

72. $(30146)^{\frac{4}{5}}$. ***73.*** $\left(\frac{98 \cdot 562}{12 \cdot 34}\right)^8 \cdot \left(\frac{2 \cdot 01}{7 \cdot 865}\right)^{10}$.

74. $\frac{2035 \,.\, 0 \cdot 00876^2}{3164 \,.\, 0 \cdot 00592^5}$. ***75.*** $\frac{3 \cdot 9025^3 \,.\, 1 \cdot 07938^4}{0 \cdot 8596^2 \,.\, 1 \cdot 0725^3}$.

76. $\sqrt{26}$. ***77.*** $\sqrt[3]{11}$. ***78.*** $\sqrt[3]{918}$.

79. $\sqrt[4]{793}$. ***81.*** $\sqrt[5]{113 \cdot 5}$. ***82.*** $\sqrt[6]{1 \cdot 8354}$.

82. $\sqrt{\frac{126}{113}}$. ***83.*** $\sqrt[3]{\frac{2294}{5315}}$. ***84.*** $\sqrt[5]{723\frac{5}{9}}$.

85. $\sqrt[12]{\left(\frac{795}{629}\right)^5}$. ***86.*** $\sqrt[5]{\frac{2 \cdot 378^3}{3 \cdot 059^2}}$. ***87.*** $\sqrt[8]{\frac{9}{13}\sqrt[3]{6}}$.

88. $\frac{207}{713}\sqrt{\frac{92}{105}}$. ***89.*** $\frac{3 \cdot 578}{8 \cdot 357}\sqrt[3]{\frac{0 \cdot 035}{2 \cdot 317}}$. ***90.*** $1 \cdot 208^3 \sqrt[6]{\frac{2 \cdot 7\sqrt{10}}{7\sqrt{7}}}$.

91. $\sqrt{\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{bc}}$ za $a = 3 \cdot 058$, $b = 2 \cdot 793$, $c = 3 \cdot 159$.

92. $\frac{\sqrt{1 \cdot 037^3} \,.\, \sqrt[3]{9 \cdot 234^2}}{15 \cdot 735}$. ***93.*** $\frac{\sqrt{10 + \sqrt{10}}}{2}$.

94. $\sqrt[5]{\frac{83 \,.\, \sqrt{9103}}{37 \cdot 26^2}}$. ***95.*** $\sqrt[4]{\frac{5\sqrt{0 \cdot 57} \,.\, \sqrt[3]{19}}{0 \cdot 045 \,.\, 4 \cdot 16^2}}$.

---

96. Na koliko narase 860 gl. kapitala v 15 letih, ako se po $4\frac{1}{2}$ % na obrestne obresti naložijo? 1664'6[illegible]

97. Nekdo naloži 1600 gl. v hranilnici, katera plačuje 5 % obrestij ter te poluletno kapitalizuje; koliko mu bode morala hranilnica čez 10 let izplačati? 2621·31

98. V gozdu je sedaj 35800 m^3 lesú; na leto ga priraste po $2\frac{1}{2}$ %. Koliko lesú bode imel gozd čez 12 let?

99. Brezobresten kapital 9000 gl. je čez 10 let izplačen; kolika je njega gotova vrednost, ako se računa 5 % obrestnih obrestij?

100. Kateri kapital narase v 9 letih, po $4\frac{1}{2}$ % na obrestne obresti naložen, na 5234 gl.?

101. Neko mesto ima sedaj 36230 prebivalcev; koliko je imelo prebivalstva pred 30 leti, ako ga je vsako leto po 2 % prirastlo?

102. Na obrestne obresti naložen kapital 7537·8 gl. narase v 20 letih na 20000 gl.; po koliko % je naložen?

103. *A* posodi *B*-ju 250 gl. za 3 leta brez obresti, zato mu dá pa *B* dolžno pismo o 300 gl. Koliko % je dobil *A*, ako se računajo obrestne obresti?

104. V koliko letih narase kapital 500 gl. na 3041 gl., ako je po 5 % na obrestne obresti naložen?

105. V koliko letih se podvoji po $4\frac{1}{2}$ % na obrestne obresti naložen kapital pri poluletnem kapitalizovanji?

III. Naloge v ponavljanje.

1.* Za koliko je 3kratnik števila $5\frac{3}{4}$ manjši od 5kratnika števila $7\frac{1}{4}$?

2.* 15 *m* velja 69 gl.; koliko velja 65 *m*?

3. Poišči najv. sk. mero in najm. sk. mnogokratnik števil:

a) 465 in 589, *b)* 612 in 1080, *c)* 6579 in 9159,
d) 93345 in 165375, *e)* 168, 312 in 504.

4. $53 \,.\, (\frac{1}{2} + 1\frac{5}{6}) : [4 - 2\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2} - (\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2}) + \frac{1}{3} : 2]$.

5. $\left(\dfrac{1\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{1\frac{1}{2} \,.\, (2 - 1\frac{1}{4})} - \dfrac{8 : 1\frac{1}{3}}{(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}) : \frac{1}{4}} + \dfrac{2\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}}\right) : \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{3\frac{1}{8} + \frac{1}{4}}$.

6. Dunaj ima $14^0\ 2'\ 36''$, Berolin pa $11^0\ 2'\ 30''$ vzhodne dolžine od Pariza; koliko je ura na Dunaji, kadar je v Berolinu poldan?

7. 250 delavcev izkoplje 15000 *m* dolg in 8 *m* širok prekop v 24 dneh, ako delajo po 12 ur na dan; koliko delavcev je treba, da izkopljejo 9000 *m* dolg in $7\frac{1}{3}$ *m* širok prekop v 18 dneh, ako delajo po 11 ur na dan in je delo še jedenkrat tekó težavno kakor v prvem slučaji?

Izračunaj té-le izraze na 3 decimalke, uporabljajoč *a)* okrajšano množenje ali deljenje, *b)* logaritme:

8. 5·4832 . 7·519. ***9.*** 6·9754 . 0·2844.

10. 304·279 . 0·0532. ***11.*** 1·065 . 1·052 . 1·0475.

12. $\frac{83 \cdot 423}{31 \cdot 586}$. ***13.*** $\frac{3 \cdot 7936}{13 \cdot 859}$. ***14.*** $\frac{0 \cdot 8464}{0 \cdot 00163}$.

15. $\frac{3478 \,.\, 0 \cdot 07643}{4019 \,.\, 0 \cdot 08251}$. ***16.*** $\frac{403 \,.\, 7 \cdot 19 \,.\, 12 \cdot 0795}{378 \,.\, 8 \cdot 23 \,.\, 15 \cdot 6324}$.

17.* Ako bi izdal polovico svojega denarja in pa četrtino, ostalo bi mi še 15 gl. Koliko denarja imam tedaj?

18. $8\frac{1}{2} + \frac{19 - x}{3} = 2\frac{2}{9}x - \frac{2x - 3}{10} + \frac{2}{5}$.

19. $\left(\frac{x+1}{6} + 3\right) - \left(\frac{3x-1}{2} - 3\right) = \frac{3x+3}{2} - \frac{5x+2}{3}$.

20. $\frac{8x+2}{x-2} - 10 = \frac{2x-1}{3x-6} - \frac{3x+2}{5x-10}$.

21. $\frac{5x+5}{x+2} + 1 = \frac{6x+12}{x+3}$. ***22.*** $\frac{5}{7} \cdot \frac{2x-5}{3x-7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5x-2}{7x-3}$.

23. $\sqrt{2x} + \sqrt{8x} = 6$. ***24.*** $\sqrt{4x-3} + 2 = x\sqrt{3}$.

25.* Štiri osebe razdelé 2000 gl. takó med seboj, da dobi *A* na pol toliko kakor *B*, *C* $\frac{3}{4}$ tega, kar *D*, in *D* $\frac{2}{5}$ one vsote. Koliko dobi vsak?

26. Izmed dveh igralcev je imel prvi 4krat toliko denarja kakor drugi. Ko je pa drugi od prvega 5 gl. dobil, imel je prvi le še 3krat toliko denarja kakor drugi. Koliko denarja je imel vsak pred igro?

27. Številčna vsota nekega dvoštevilčnega dekadnega števila je jednaka njega četrtini. Ako k omenjenemu številu prišteješ število 18, dobiš število, katero ima prav tisti dve številki, pa v obratnem redu. Katero število je to?

28. Ako ima pšenica za 28 % višjo ceno nego rež, za koliko % ima potem rež nižjo ceno nego pšenica?

29. Krčmar kupi 70 *hl* vina, *hl* po 29 gl., s pogojem, da bode plačal kupnino v 2 mesecih; koliko mora v gotovini plačati, ako se računa $6\frac{1}{2}$ % diskonta za 1 leto?

30. Trgovec kupi nekega blaga 756 *kg* nečiste teže; tare se računa 10 %, 100 *kg* čiste teže po 75·5 gl., stroškov 14·03 gl., senzarije $\frac{1}{2}$ %, provizije 2 %. *a)* Koliko ga stane blago, *b)* koliko % ima dobička, ako iztrži za vsacih 100 *kg* po 87·45 gl.?

31. Nekdo izposodi 480 gl. po 5 % ter obresti za 1 leto precej odtegne. Za koliko je dolžnik na škodi?

32. Krčmar zmeša troje vino, namreč 16 *hl* po 60 gl., 2 *hl* po 44 gl. in 2 *hl* tretjega vina in *hl* zmesi velja 56 gl. Po čem je *hl* tretjega vina?

33. Trije mojstri so dobili za neko delo skupaj 1312 gl. *A* je imel 12 pomagačev in ti so delali 10 tednov po 5 dnij na teden; *B* je imel 8 pomagačev, kateri so delali 11 tednov po 6 dnij na teden, *C* pa 40 pomagačev, kateri so delali 3 tedne po 7 dnij na teden. Vsak mojster je naložil svoj delež 5 let na obresti in koncem te dobe je dobil *A* 500 gl., *B* 492·8 gl., *C* 728 gl. Kolik je bil delež vsacega mojstra in po koliko % ga je bil vsak na obresti naložil?

34. Nekdo dobiva od svojega kapitala 2392 gl. obrestij na leto; $\frac{4}{5}$ kapitala ima naložene po 5 %, $\frac{1}{5}$ po 6 %. Kolik je ves kapital?

35. Dolžnik plača neki dolg, katerega bi moral še le čez 4 leta plačati, takój; kolik je dolg, ako odtegne zaradi gotovega plačila dolžnik upniku 144 gl., računajoč 6 % diskonta?

36. $\left(\frac{9a^2}{25x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$. ***37.*** $\left(\frac{a^4b^5c^3}{x^2y^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x^5y^4}{a^5b^7c^4}\right)^3$. ***38.*** $\left(\frac{x^2-a^2}{y^2-b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{y+b}{x-a}\right)^3$.

39. $\sqrt{7\frac{282}{361}}$. ***40.*** $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[4]{2x}}$. ***41.*** $\frac{\sqrt[3]{x^2}\,.\,\sqrt[4]{x^3}\,.\,\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt{x}\,.\,\sqrt[4]{x}}$.

42. $(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{15})^2$. ***43.*** $(1-2\sqrt{2}+3\sqrt{8})^2$.

44. $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. ***45.*** $\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$.

46. Trije kapitali, namreč 2400 gl., 1240 gl., 4260 gl. so bili oziroma po $5\frac{1}{2}$ %, 5 % in 4 % prav toliko časa na obresti naloženi ter dali skupaj 546·6 gl. obrestij. Koliko obrestij je dal vsak kapital in koliko časa je bil vsak izposojen?

47. *A* mora plačati 225 gl. v 4 mesecih, 150 gl. v 6 mes., 300 gl. v 9 mes. in še četrti iznesek v 1 letu. Kolik je poslednji iznesek, ako se plačajo lahko vsi izneski ob jednem v 8 mesecih?

48. Ako proda trgovec neko blago za 120 gl., ima 15 % izgube; za koliko je mora prodati, da bode imel 15 % dobička?

49. $\sqrt{\left(\frac{9x^6}{16y^6}-\frac{x^5}{2y^5}-\frac{26x^4}{9y^4}+\frac{53x^3}{6y^3}+\frac{2x^2}{3y^2}-\frac{20x}{y}+25\right)}$.

50. $\sqrt[3]{\left(1+\frac{6x}{a}+\frac{15x^2}{2a^2}-\frac{10x^3}{a^3}-\frac{45x^4}{4a^4}+\frac{27x^5}{2a^5}-\frac{27x^6}{8a^6}\right)}$.

Izračunaj na 4 decimalke *a)* na okrajšani način razkorenjujoč, *b)* uporabljajoč logaritme, té-le korene:

51. $\sqrt{2}$. **52.** $\sqrt{2\cdot 5}$. **53.** $\sqrt{578}$. **54.** $\sqrt{38\frac{1}{2}}$.

55. $\sqrt[3]{5}$. **56.** $\sqrt[3]{0\cdot 08}$. **57.** $\sqrt[3]{72\cdot 9}$. **58.** $\sqrt[3]{\frac{15}{7}}$.

59. 1800 gl. treba med 3 osebe takó razdeliti, da dobi A $\frac{3}{8}$ in še $1\frac{1}{2}\,\%$, B $\frac{5}{12}$ in $\frac{1}{2}\,\%$, C pa ostanek; koliko bode dobil vsak?

60. Štiri osebe so razdelile neki iznesek takó med seboj, da je bilo razmerje med A-jevim in B-jevim deležem kakor $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$, med B-jevim in C-jevim kakor $\frac{3}{4} : \frac{4}{5}$, med C-jevim in D-jevim pa kakor $\frac{5}{6} : \frac{3}{8}$. Koliko sta dobila B in C, in kolik je bil ves iznesek, ako sta dobila A in D skupaj 922·5 gl.?

61. Trije trgovci so nekaj časa skupno trgovali ter pridobili 3311 gl. Kakó je ta dobiček med-nje razdeliti, ako je bilo razmerje med njih vlogami kakor $\frac{3}{5} : \frac{7}{10} : \frac{11}{20}$ in je udeležba trajala v razmerji 6 : 7 : 8?

62.* V katerem razmerji treba zmešati špirit po 60 stopinj in po 45 stopinj, da bode imela zmes 50 stopinj?

63. Koliko vode treba priliti k špiritu po 60 stopinj, da bode imela zmes le 6 stopinj?

64. Mlinar hoče namešati od pšenice in reži 27 *hl* take zmesi, da bode tehtal *hl* po 76 *kg*; koliko *hl* vsacega žita mora vzeti, ako tehta 1 *hl* pšenice 78 *kg*, 1 *hl* reži pa 72 *kg*?

65.
$$6x + 14y - 7z = 13,$$
$$5x + 3y = 11.$$
$$\frac{x-y+z}{2} - \frac{2x-2}{3} + z = \frac{5y+4z-2x}{5},$$

66. $a(x-y) + b(x+y) = 0,$
$(x+y)(a^2-b^2) = 2a.$

67. Ded in oče imata skupaj 112 let, oče in sin 46, ded in sin 82. Koliko let ima vsak?

68. Vsota treh števil je 85. Drugo s prvim razdeljeno dá 2 za kvocijent in 7 za ostanek, tretje z druzim razdeljeno pa dá 2 za kvocijent in 1 za ostanek. Katera so ta tri števila?

69. A, B, C so naložili vsak svoje imenje na obresti, in sicer A po 5 %, B po $5\frac{1}{2}\,\%$ in C po $4\frac{2}{3}\,\%$. A in B dobivata skupaj na leto 530 gl. obrestij, B in C 750 gl., A in C pa 620 gl. Koliko je vsak izposodil?

70. Kapital naraste v $3\frac{1}{5}$ leta z jednostavnimi obrestimi vred na 2814·24 gl.; v 5 letih pa bi narastel na 3013·5 gl. Kolik je kapital in po koliko % je na obresti naložen?

71. Nekdo ima dvoje srebro. Ako zlije $7\frac{1}{2}$ *kg* prvega in $2\frac{1}{2}$ *kg* druzega, dobi srebro po 880 tisočnin čistine; ako pa zlije $4\frac{1}{2}$ *kg* prvega in $5\frac{1}{2}$ *kg* druzega srebra, ondaj ima zlitina po 850 tisočnin čistine. Po koliko tisočnin čistine ima vsako srebro?

72. Vlak predirja neko daljavo v določenem času. Ako bi predirjal vsako uro po $3\frac{1}{3}$ *km* več, potreboval bi za ono daljavo $\frac{1}{2}$ ure menj; ako bi pa vsako uro po $1\frac{1}{2}$ *km* menj predirjal, potreboval bi $\frac{1}{4}$ ure več. Kolika je daljava in koliko časa potrebuje vlak, da jo predirja?

73. Narodna banka diskontuje dne 18. junija po 5 %

menico za 985 gl., izplačno zadnjega junija;
» » 556 » » sredi julija;
» » 1320 » izdano dne 28. aprila 3 mesece *a dato;*
» » 1084 » izplačno 31 dnij po pokazu ter vzprejeto dne 8. junija;

koliko mora za vse plačati?

74. Dunajčan ima plačati v Londonu 425 funtov sterl. V ta namen kupi menico v Amsterdam po 98 (100 hol. gl. = 98 gl. a. v.) ter jo pošljê v London, kjer se mu za vsacih 11·75 hol. gl. 1 funt sterl. na korist zapiše. Koliko plača za oni dolg?

75. Nekdo kupi dne 13. januvarja 3500 gl. zastavnih pisem d. a. hranilnice po $100\frac{3}{4}$; koliko mora zanje plačati? (Zaostale $5\frac{1}{2}$% obresti od dne 1. novembra.)

76. $\left(\frac{x}{4}+2\right)\left(\frac{x}{4}+1\right)=\frac{x-2}{3}\cdot\left(\frac{x}{2}+2\right)$.

77. $\frac{x+3}{x-3}=\frac{12+x}{12-x}$. **78.** $\frac{cx}{a+b}=\frac{a-b}{cx-2b}$.

79. $\frac{x}{x-6}+1=\frac{60}{x+4}$. **80.** $\frac{(x-a)^2}{2ax}+\frac{3a^2-b^2}{2ax}=1$.

81. Trgovec ima pri prodaji nekega blaga prav toliko % dobička, kolikor je bil za blago goldinarjev dal. Za koliko je bil blago kupil, ako ima 4 gl. dobička?

82. Dve cevi napolnita skupaj vodnjak v 3 urah; prva ga napolni sama $3\frac{1}{2}$ ure prej nego druga. V koliko urah napolni vsaka posamična cev vodnjak?

83. Neko mesto je imelo leta 1850. 35846 prebivalcev; koliko jih je imelo leta 1875., ako se je pomnožilo prebivalstvo vsako leto za $2\frac{1}{2}$ %?

84. Nekdo je 10000 gl. dolžán; koliko bode še čez 10 let dolžán, ako odplača čez 3 leta 2500 gl., čez 6 let 1000 gl. in se računa 5 % obrestnih obrestij?

85. *A* mora plačevati *B*-ju, dokler ta živi, vsako leto po 320 gl.; *B* pa želi, da mu izplača *A* vse izneske takój; koliko mu bode *A* izplačal, ako vzamemo, da bode *B* še 12 let živel in se računa 5 % obrestnih obrestij ter celoletno kapitalizovanje? (Uporabi tablico v § 150.)

86. *A* dobi iz Lyona 350 *m* svilene robe, *m* po $4\frac{3}{4}$ franka; skonta se mu dovoli 2 %, carina iznaša 20 %, vozarina in drugi stroški 4 % kupnine. Po koliko gl. mora prodajati *m*, ako hoče imeti 20 % dobička, in se računa 100 frankov po 46 gl.?

87. Dunajčan dobi iz Trsta 12 vreč milanskega riža, nečiste teže 2110 *kg*, tare 15 *kg*, 100 *kg* čiste teže po $24\frac{1}{2}$ gl. Stroškov je v Trstu 5 gl. 25 kr., provizije 2 %, vozarine po $2\frac{3}{5}$ gl. od 100 *kg*, carine po 80 kr. od 50 *kg* nečiste teže, stroškov na Dunaji 7 gl. 47 kr. Koliko ga stane 100 *kg* čiste teže na Dunaji?

Izračunaj, uporabljajoč logaritme:

88. $\sqrt[5]{15}$. ***89.*** $\sqrt[10]{1\cdot 25}$. ***90.*** $\sqrt[7]{7\frac{1}{7}}$.

91. $\sqrt{\frac{59}{85}} \cdot \sqrt[3]{\frac{481}{592}}$. ***92.*** $\left(\frac{2109}{1934}\right)^{0\cdot 03} \cdot \left(\frac{1245}{2456}\right)^{0\cdot 07}$.

93. $\frac{\sqrt[4]{1\cdot 357^3} \cdot \sqrt[3]{8\cdot 25^2}}{6\cdot 8315}$. ***94.*** $\sqrt[5]{\frac{5076}{7381}\sqrt{183}}$.

95. Koliko časa treba kapital po 4 % na obrestne obresti naložiti, da se potroji, ako se računa *a)* celoletno, *b)* poluletno kapitalizovanje?

96. V gozdu se je pomnožil les v 12 letih od 27000 m^3 na 35000 m^3; po koliko % ga je vsako leto priraslo?

97. Po koliko % treba 2525 gl. na obrestne obresti naložiti, da bode ta kapital v 10 letih na prav toliko narasel, na kolikor narase kapital 2518 gl. v 12 letih, ako se po 5 % na obrestne obresti naloži?

Dodatek.

O jednostavnem knjigovodstvu.

Občna pojasnila.

§ 1.

Trgovci in obrtniki morajo vse dogodke, ki se tičejo njih trgovskega imenja in njegovih izpremememb, zapisavati v knjige, v to odločenė, in to zaradi tega, da vsak čas natanko vedó, kakó je z njih trgovino ali obrtom, koliko imajo terjati in koliko so dolžni ter koliko je vsega njih imenja. To zapisavanje imenujemo knjigovodstvo *(Buchführung, Buchhaltung).*

§ 2.

Pri vsacem knjigovodstvu je treba najprej vedeti, koliko je bilo imenja takrat, ko se je začela trgovina ali obrt.

K imenju v širjem zmislu spada ne le vsa premičnina in neprimičnina, ki jo ima kdo v svoji lasti, nego tudi vse iz te posesti izvirajoče, še ne izpolnjene zaveze; v ožjem zmislu razločujemo trojno imenje: aktivno, pasivno in čisto imenje.

K aktivnemu imenju spadajo denarji in vse druge, denarno vrednost imajoče stvari, katere ima kdo ali v svoji posesti ali od drugih terjati, ne gledé na to, ali so vse te stvari njegova prosta, popolna lastnina, ali pa so zadolžene. V aktivno imenje trgovca spadajo tedaj denarji, državni papirji, blago, menice, ki se mu imajo izplačati, terjatve (aktivni dolgovi), premičnina (hišna oprava, orodje, i. t. d.) in neprimičnina (poslopja, zemljišča, i. t. d.)

Pasivno imenje pa imenujemo vse, kar imajo drugi od trgovca ali obrtnika terjati. Semkaj spadajo menični in drugi dolgovi, katere ima poplačati (pasivni dolgovi).

Kar preostane, ako pasivno imenje od aktivnega imenja odštejemo, imenujemo čisto imenje.

Popis in ocenitev vseh posamičnih sestavin aktivnega in pasivnega imenja imenujemo inventar ali inventuro; posamične sestavine treba v ta namen res prešteti, izvagati ali izmeriti.

§ 3.

Vsak dogodek, kateri sestavine trgovskega imenja izpremeni, zovemo poslovni dogodek *(Geschäftsfall)*. Poslovni dogodek je n. pr., ako se blago proti gotovemu plačilu proda, kajti na ta način se zmanjša zaloga, a gotovina se poveča.

Da bode môči poslovne dogodke v posamične knjige prav zapisavati, treba pred vsem natanko razločevati, kdo je dolžnik, kdo upnik. Vsak, ki od trgovca (obrtnika) kaj prejme, ne da bi mu zato kaj dal, postane njegov **dolžnik** *(debitor, Schuldner)*. Vsak, ki trgovcu (obrtniku) kaj dá, ne da bi za to od njega kaj prejel, postane njegov **upnik** *(creditor, Gläubiger)*. Dolžnika zaznamenujemo v knjigovodstvu z «debet» ali «ima dati» *(debet, Soll)*, upnika pa s «credit» ali «ima dobiti» *(credit, Haben)*. Koga za dolžnika zapisati, pravi se tudi: mu kaj v dolg zapisati *(ihn debitieren, ihn belasten)*; koga za upnika zapisati, pravi se tudi: mu kaj na korist (v imetek) zapisati *(ihn creditieren, ihm gutschreiben)*.

Pri meničnih plačilih velja tó-le:

Vsak, ki menico izda, postane trasatov dolžnik za menični iznesek. Vsak, ki menico vzprejme, postane trasantov upnik. Vsak, ki nam menico pošlje, postane naš upnik za menični iznesek. Vsak, ki rimeso prejme, postane pošiljateljev dolžnik.

§ 4.

Poslovne dogodke zapisujemo v različne knjige ali po vrsti, kakor se ravno kateri pripeti, ali pa istovrstne skupaj v oddelke za to odločene.

Knjigo, v katero se zapisujejo najprej vsi oni poslovni dogodki, pri katerih se ne plačuje v gotovini, po vrsti, kakor se godé, zovemo dnevnik *(Tagebuch, Journal, Prima-Nota)*.

V blagajniško knjigo *(Cassabuch)* zapisujemo prejemke in izdatke v gotovini, tudi po vrsti, kakor prihajajo.

Knjigo, v katero zapisujemo naših trgovskih prijateljev dolgove in terjatve, po osebah razvrščene, imenujemo glavno knjigo *(Hauptbuch).*

Knjige, ki one poslovne dogodke, katerih dnevnik le kratko omenja, natančnejše opisujejo, ali prejem in oddajo onih stvarij obširneje popisujejo, katere so v blagajniški in glavni knjigi le posredno zaračunane, zovemo postranske ali pomočne knjige *(Neben- oder Hilfsbücher).* Njih število se ravna po tem, kaka in kolika je trgovina. Najvažnejše so: pismovni prepisnik *(Briefcopierbuch),* fakturna knjiga *(Facturenbuch),* skontrovne knjige *(Scontrobücher),* in sicer blagovni skontrovnik ali blagovnik *(Waren-Scontro, Warenbuch),* menični skontrovnik ali meničnik *(Wechsel-Scontro),* skontrovnik za vrednostne papirje *(Effecten-Scontro)* in dospetnik *(Verfallsbuch).*

§ 5.

Račun, v katerega zapisujemo vse poslovne dogodke, ki se tičejo jedne in iste osebe ali stvari, imenujemo konto *(Conto).* Konti so dvoji: osebni konti in stvarni konti; prvi pojasnjujejo računska razmerja z osebami, drugi računska razmerja neživih sestavin imenja.

Vsak konto ima dve nasprotni strani. Na levo, z «debet» ali «ima dati» zaznamenovano stran se zapisujejo oni postavki *(Posten),* za katere postane oseba ali stvar dolžnik trgovine ali obrta, na desno s «credit» ali «ima dobiti» zaznamenovano stran pa oni, za katere postane oseba ali stvar upnik.

§ 6.

Da iz knjig ni le razvidno, koliko je dolgov in terjatev, nego tudi koliko je pri vsakaterem blagu dobička ali izgube, zapisuje se vsak postavek po dvakrat, namreč pod «debet» jednega in ob jednem pod «credit» druzega konta, takó da sta si «debet» in «credit» različnih kontov vedno jednaka. Táko zapisavanje služi tudi v kontrolo, ali se je res vse prav vknjižilo. To vknjiževanje imenujemo dvojno knjigovodstvo *(doppelte Buchführung).*

Poslovni dogodki se pa vknjižujejo lahko tudi takó, da je razvidno pred vsem računsko razmerje s trgovskimi prijatelji. Táko vknjiževanje zovemo jednostavno knjigovodstvo *(einfache Buch-*

führung). A tudi iz jednostavnega knjigovodstva se dá vspeh trgovine (obrta) v obče razvideti.

Jednostavno knjigovodstvo je pripravno osobito za manjše trgovine, za obrte in rokodelstva.

Tu se hočemo pečati le z jednostavnim knjigovodstvom.

§ 7.

Kakó je posamične knjige voditi, določuje deloma zakon, deloma pa veljajo občna načela in oblike, kakor so se v trgovskem prometu s časom razvile.

V prvem oziru določuje občni trgovski zakonik z dne 17. dec. l. 1862. tó-le:

Člen 28.: «Vsak trgovec je dolžán knjige voditi, iz katerih je razvidna njega trgovina in stan njegovega imenja.

On je dolžán prejeta trgovska pisma hraniti in od odposlanih prepise (odtise) pridržavati ter po vrsti, kakor gredó, v pismovni prepisnik vpisavati.»

Člen 29.: «Vsak trgovec mora tedaj, ko začne trgovati, natanko popisati vsa svoja zemljišča, svoje terjatve in dolgove, svojo gotovino in vse drugo svoje imenje, ob jednem tudi povedati, koliko so posamični deli imenja vredni ter ta popis takó skleniti, da je razmerje med imenjem in dolgovi razvidno; tak inventar in tako bilanco mora izdelati vsako leto.»

Člen 30.: «Inventar in bilanco mora trgovec svojeročno podpisati. Ako je več družbenikov, ki so vsak zá-se porok, ondaj morajo vsi podpisati.

Inventar in bilanca se zapisujeta lahko v knjigo, za to odločeno, ali pa se sestavita vsakokrat vsak posebej. V zadnjem slučaji se morajo inventarji in bilance po vrsti urejevati ter hraniti.»

Člen 31.: «Sestavljaje inventar in bilanco treba postaviti vsem delom imenja in terjatvam ceno, ki jo ob popisu res imajo.

Dvomnim terjatvam je postaviti verjetno ceno, one pa, ki se ne dadé izterjati, je treba odpisati.»

Člen 32.: «Pri vknjiževanji v trgovske knjige in pri druzih potrebnih zapiskih se mora posluževati trgovec katerega živečega jezika in njega pismen.

Knjige morajo biti vezane in list za listom mora imeti zaporedoma tekoče število.

Na prostoru, ki se navadno popisuje, ne sme ostati praznih mest. Kar se je s prva zapisalo, se ne sme s prečrtavanjem ali na kak drug način takó predrugačiti, da bi se ne moglo čitati; strgati *(radieren)* se ne sme nič in tudi ne takó predrugačiti, da bi se potem ne vedelo, ali je bilo s prva takó, ali se je še le pozneje takó naredilo.»

Člen 33.: «Trgovci morajo trgovske knjige deset let hraniti, računajoč od dne, katerega se je zadnjič kaj vanje zapisalo.

Prav tisto velja o prejetih trgovskih pismih, o inventarjih in bilancah.»

Člen 34.: «Trgovske knjige, katere so se pravilno vodile, veljajo trgovcem pri pravdah o trgovskih stvareh za nepopoln dokaz, katerega je môči s prisego ali drugimi dokazili popolniti.»

Člen 35.: «Koliko se je môči na trgovske knjige, katere so se nepravilno vodile, kot dokazilo ozirati, ravna se po tem, kakšna in kakó važna je nepravilnost in vsa stvar sploh.»

Člen 36.: «V trgovske knjige zapisujejo lahko tudi trgovski pomočniki, ne da bi se zmanjšala s tem njih dokazilna moč.»

I. O jednostavnem trgovskem knjigovodstvu.

1. Bistvene knjige.

§ 8.

Bistvene knjige jednostavnega knjigovodstva so: inventarna knjiga, ako se inventure vsaka posebej ne pišejo in spravljajo, dnevnik, blagajniška knjiga in glavna knjiga.

O inventuri ali popisu.

Pri popisovanji imenja (§ 2.) se našteje najprej aktivno imenje. Začne se z gotovino, katera se prešteje. Potem se popišejo vrednostni papirji in menice v tuja mesta ter njih vrednost določi na podlogi dnevnega kurza. Na to se določi vrednost onim mestnim menicam, katere se nam bodo izplačale — diskont se navadno odšteva. Potem pride na vrsto zaloga blaga; to se v resnici izvaga, izmeri ali prešteje ter navadno po isti ceni zaračuna, kakor je bilo kupljeno. Ako je še kaj druzega, k trgovini spadajočega premičnega ali nepremičnega imenja, oceni in popiše se tudi to. Slednjič se naštejejo še dolžniki vsak posebej s svojim dolgom; ti se izpišejo iz glavne knjige. Vsota vseh teh izneskov kaže, koliko je aktivnega imenja.

Potem se popiše pasivno imenje. K temu spadajo najprej trate, katere bode treba plačati; tudi pri teh se diskont navadno odšteva. Potlej se navedejo posamič vsi upniki s svojimi terjatvami. Ako se vsi ti izneski seštejejo, dobode se vse pasivno imenje.

Ako se od aktivnega imenja odšteje pasivno, kaže diferenca čisto imenje.

Ako se koncem kake dobe zopet imenje popiše ter čisto imenje prvotne inventure primerja s čistim imenjem te inventure (bilance) ondaj kaže diferenca med obema, koliko je bilo v tem času dobička ali izgube, kakor je zadnje imenje večje ali manjše od prejšnjega.

Natančnejša uredba inventure razvidna je iz naslednjega primera.

Inventura

sestavljena dne 30. junija 1882. leta.

Število, zaporedoma tekoče		gl.	kr.	gl.	kr.
	Aktivno imenje.				
1.	Gotovine			2580	—
2.	Vrednostnih papirjev:				
	4000 gl. papirne rente po 68	2720	—		
	obresti od dne 1. februvarja	70	—	2790	—
3.	Mestnih menic:				
	Na *K. Kovača tukaj* v dan 25. julija . . .	875	—		
	» *J. Lukana* v *Kamniku* v dan 15. avgusta	622	58		
	» *M. Čuka tukaj* v dan 20. avgusta . . .	730	—	2227	58
4.	Blaga:				
	Kakor blagovnik izkazuje			10780	—
5.	Premičnine po odbitku 5 %			855	—
6.	Terjatev:				
	Pri *J. Bizjaku tukaj*	587	50		
	» *A. Lisjaku tukaj*	705	—		
	» *G. Jakliču* v *Postojini*	844	20		
	» *A. Klembasu* v *Celji*	280	—	2416	70
	Vsega aktivnega imenja skupaj . .			21649	28
	Pasivno imenje.				
1.	Trat:				
	Po naredbi *J. Kluna* v dan 10. julija . . .	850	—		
	» » *A. Goloba* v dan 31. julija . .	485	80		
	» » *M. Ranta* v dan 10. avgusta .	592	—	1927	80
2.	Dolgov:				
	F. Tomcu v *Trstu*	972	35		
	R. Zupančiču tukaj	615	—		
	G. Lenarčiču tukaj	1330	—	2917	35
	Vsega pasivnega imenja skupaj . .			4845	15
	Rekapitulacija.				
	Aktivnega imenja			21649	28
	Pasivnega imenja			4845	15
	Ostane čistega imenja 30. junija 1882. l. .			16804	13
	V Ljubljani dné 30. junija 1882. l.				
	Josip Kos, s. r.				

O dnevniku.

§ 9.

Dnevnik je v to odločen, da se vánj najprej jasno in natančno zapisujejo vsi oni poslovni dogodki, kateri provzročujejo dolg ali terjatev in to po vrsti, kakor prihajajo.

V dnevniku se zaznamenujejo strani z zaporedoma tekočimi števili.

Vsakemu postavku se dostavi datum, ime in bivališče trgovskega prijatelja, ob jednem se kratko in jasno pove, zakaj je postal naš dolžnik ali upnik, in slednjič iznesek; le-tá se zapiše pri dolžnikih v razpredelek, z «debet» zaznamenovan, pri upnikih pa v onega, ki je s «credit» zaznamenovan. Najprej se zapišejo v dnevnik terjatve in dolgovi, navedeni v inventuri.

V pojasnilo služi naj naslednji primer:

Dnevnik.

Julija 1882. l.

			Debet gl.	Debet kr.	Credit gl.	Credit kr.
G. 1.	1.	*J. Bizjak tukaj* za saldo od prejšnjega računa	587	50		
G. 2.	1.	*A. Lisjak tukaj* za saldo od prejšnjega računa	705	—		
G. 3.	1.	*G. Jaklič v Postojini* za saldo od prejšnjega računa	844	20		
G. 4.	1.	*A. Klembas v Celji* za saldo od prejšnjega računa	280	—		
G. 5.	1.	*F. Tomec v Trstu* za saldo od prejšnjega računa			972	35
G. 6.	1.	*R. Zupančič tukaj* za saldo od prejšnjega računa			615	—
G. 7.	1.	*G. Lenarčič tukaj* za saldo od prejšnjega računa			1330	—
G. 8.	2.	*F. Rak v Litiji* poslal sem mu, 2 meseca na up: 2 soda Rio-kave št. 54., 55. čiste teže 520 *kg* po 135 . 702 gl. — kr. 2 soda cukra št. 30., 31. čiste teže 915 *kg* po 43 . 393 » 45 »	1095	45		
G. 2.	3.	*A. Lisjak tukaj* za svojo rimeso na *F. Breganta tukaj* v dan 20. julija			600	—

			Debet gl.	Debet kr.	Credit gl.	Credit kr.
G. 5.	3.	*F. Tomec v Trstu* za svojo trato po naredbi *P. Lasnika tukaj* v dan 31. julija	960	—		
G. 9.	4.	*J. Lukman tukaj* kupil sem od njega 4 sode cukra št. 1., 2., 3., 4. neč. teže 474, 478, 482, 485 *kg* tare 23, 26, 26, 27 *kg* č. teže 451, 452, 456, 458 *kg* 1817 *kg* po 44			799	48
G. 1.	6.	*J. Bizjak tukaj* prodal sem mu na up 528 *kg* Rio-kave po 135	712	80		
G. 1.	6.	*J. Bizjak tukaj* za svoj akcept v dan 5. avgusta			950	—
G. 5.	7.	*F. Tomec v Trstu* poslal mi je po železnici 4 vreče Rio-kave in 1 sod zabelnega olja kakor izkazuje fakturna knjiga . . .			923	70
G. 5.	7.	*F. Tomec v Trstu* za poslano mu rimeso na *K. Porento,* 2 meseca a dato	850	—		
G. 3.	9.	*G. Jaklič v Postojini* poslal mi je po železnici 5 hektolitrov špirita po 39			195	—
G. 4.	10.	*A. Klembas v Celji* poslal sem mu po železnici 2 vreči Rio-kave, 502 *kg* po 135 . . .	677	70		
G. 7.	12.	*G. Lenarčič tukaj* za moj akcept v dan 25. julija	1000	—		
G. 7.	14.	*J. Bizjak tukaj* prodal sem mu na up 375 *kg* cukra po 43 . . 161 gl. 25 kr. 100 *kg* grozdjiča po 30 . 30 » »	191	25		

O blagajniški knjigi.

§ 10.

V blagajniško knjigo se zapisujejo vsi dohodki in razhodki v gotovini, in sicer vsak dan sproti.

V blagajniški knjigi se zaznamenujeta po dve nasprotni strani z istim številom. Leva stran dobiva nadpis «debet» ali «dohodki», desna «credit» ali «razhodki». Na levi strani se zabeležuje prejeti, na desni izdani denar. Vsakemu postavku se dostavlja 1.) leto, mesec in dan; 2.) kratko pojasnilo, od koga in zakaj se je denar prejel, ali komu se je dal in zakaj; 3.) iznesek.

Kadar je jedna stran polna, seštejejo se izneski dohodkov in razhodkov in vsoti se preneseta na naslednji dve strani.

Blagajniška

1

Debet (dohodki) Julija

			gl.	kr.
	1.	Gotovine kakor inventura izkazuje	2580	—
G. 3.	2.	Od *G. Jakliča* v *Postojini*	750	—
	5.	Za prodano rimeso na *M. Čuka* . . gl. 730 kr. —		
		6 % diskonta do 20. avgusta . . » 5 » 60	724	40
G. 8.	16.	Od *F. Raka* v *Litiji*	500	—
	20.	Za *J. Perdanu tukaj* prodani cuker	168	28
	20.	» rimeso na *F. Berganta*	600	—
	25.	» » » *K. Kovača*	875	—
G. 4.	28.	Od *A. Klembasa* v *Celji*	800	—
G. 1.	30.	» *J. Bizjaka tukaj*	350	—
			7347	68
		Avgusta 1882. l.		
	1.	Ostanek v blagajnici od prejšnjega meseca	3070	29

Koncem vsacega meseca se račun blagajniške knjige sklene. V ta namen se seštejejo dohodki in razhodki, potem se zadnja vsota od prve odšteje in diferenca, saldo imenovana, se postavi kot ostanek v blagajnici *(Cassabestand)* na stran razhodkov; vsled tega postaneta vsoti na obeh straneh jednaki. Te vsoti se zapišeta pod črti, kateri sta se prej v razpredelkih za izneske potegnili, in pod vsako se potegne nekoliko nižje potem še črta sklepovnica. Slednjič se prenese saldo pod prvi dan naslednjega meseca kot prejemek na nov račun in to zaradi tega, da je razvidno, koliko je v blagajnici denarja.

V pojasnilo pridejan je v naslednjem obrazec blagajniške knjige.

knjiga.

1882. I. Credit (razhodki) 1

			gl.	kr.
	1.	Za domače potrebe	160	—
G. 6.	2.	*R. Zupančiču tukaj*	600	—
	3.	Za različne trgovske stroške	48	60
	7.	» vozarino in druge stroške ob prejemu od *F. Tomca* v *Trstu* poslanega blaga.	128	82
	10.	Plačal trato po naredbi *J. Kluna*	850	—
	15.	» dobitkovine	50	—
	20.	Za vozarino in druge stroške ob prejemu od *F. Tomca* v *Trstu* poslanega blaga	98	37
	25.	Plačal svoj danes izplačni akcept	1000	—
G. 9.	27.	*J. Lukmanu tukaj*	650	—
G. 3.	30.	*G. Jakliču* v *Postojini*.	100	80
	31.	Za trato po naredbi *A. Goloba*	485	80
	31.	Trgovskim pomočnikom	105	—
	31.	Saldo (ostanek v blagajnici)	3070	29
			7347	68

O glavni knjigi.

§ 11.

Namen glavni knjigi je, da nam pojasnjuje, koliko nam je vsaka oseba, s katero smo v trgovski zvezi, dolžna, ali koliko ima od nas terjati.

V njej ima vsak trgovsk prijatelj svoj račun *(konto);* le-tá ima dve nasprotni, z istim številom zaznamenovani strani, zgoraj v sredi pa kot nadpis ime in bivališče trgovskega prijatelja. Na levo, z «debet» zaznamenovano stran se zapisujejo vsi oni postavki, za katere je postal trgovski prijatelj naš dolžnik, na desno, s «credit» zaznamenovano stran pa vsi oni, za katere je postal naš upnik.

Na jeden in isti folij *(folium)* pa postavimo lahko tudi dva ali tri račune, ako že najprej vemo, da bodo posamič le malo prostora potrebovali.

Na konci se doda glavni knjigi abecedno urejen imenik vseh onih oseb, katerim so se računi zapisali in k vsakemu imenu se dostavi število folija, na katerem je dotični račun.

V glavno knjigo se prepisujejo postavki iz dnevnika in blagajniške knjige.

Iz dnevnika se morajo prepisati vsi postavki v glavno knjigo, kajti v njem so zabeleženi le taki dogodki, ki provzročujejo dolg ali terjatev, in sicer pod «debet» ali pod «credit» dotičnega računa, kakor so v dnevniku pod «debet» ali pod «credit» zapisani.

Iz blagajniške knjige pa se prepišejo v dotične račune glavne knjige le oni postavki, kateri so se prejeli (izdali) v ta namen, da se kaka terjatev (dolg) ali deloma ali po polnem poplača. Tudi prepisujejo se tu postavki drugače nego iz dnevnika. Dohodki so v blagajniški knjigi pod «debet» zapisani; a ker se morajo plačevalcu na korist zapisati, treba jih je postaviti v njegovem računu v glavni knjigi pod «credit». Obratno pa je treba razhodke, kateri so v blagajniški knjigi pod «credit» zapisani, prejemniku v dolg zapisati, torej jih v njegov račun v glavni knjigi pod «debet» zapisati.

Prepisujoč posamične postavke v dotični račun glavne knjige zapiši na dotično stran: 1.) datum, 2.) stran dnevnika ali blagajniške knjige, na kateri je zapisan dotični postavek, 3.) kratko pojasnilo, zakaj je postala ona oseba naš dolžnik ali upnik in 4.) iznesek.

— Vsakemu postavku je v glavni knjigi posebna vrsta odločena; vrste naj bodo druga od druge jednako oddaljene, da ne bode môči pozneje kaj med nje zapisati.

V znamenje, da si postavek v glavno knjigo prepisal, zapiši v takó zvani kazalni razpredelek *(Bezugscolonne)* dnevnika ali blagajniške knjige pred prepisani postavek število folija glavne knjige.

§ 12.

Ako treba glavno knjigo koncem katere koli dobe skleniti, seštejejo se izneski vsacega računa pod «debet» in pod «credit», potem pa se manjša vsota od večje odšteje; razliko imenujemo saldo. Ako je vsota vseh posamičnih izneskov pod «debet» večja od vsote pod «credit», ondaj nam je oseba, za katero račun velja, več dolžna nego ima od nas terjati; ona je tedaj v resnici naš dolžnik, in saldo kaže, koliko nam je dolžna. Ako pa je pod «credit» večja vsota nego pod «debet», ondaj ima oseba več od nas terjati nego nam je dolžna, in saldo kaže, koliko ima sploh od nas terjati.

Ako se zapiše saldo na ono stran, kjer se je dobila manjša vsota, postaneta obe vsoti jednaki. Pod tema jednakima vsotama se potegnejo potem sklepovne črte, prazni prostor pa se preseče s prečno črto. Ako je na vsaki strani le po jeden postavek tudi potem, ko se je saldo zapisal, treba le črte sklepovnice potegniti.

Ker se zapisuje saldo le zaradi tega na ono stran, kjer je manjša vsota, da postaneta obe vsoti jednaki, zato je treba, da se pravi prejšnji račun spozna, isti saldo v novem računu na nasprotno stran zapisati. Ker se je postavil saldo jedenkrat pod «debet», drugikrat pa pod «credit», izpremenil se ni račun prav nič; a doseglo se je to, da je prejšnji račun poravnan, in da izražuje v novi račun prepisani saldo rezultat prejšnjega računa.

V pojasnilo so sestavljeni v naslednjem trije računi glavne knjige.

Glavna

1

Debet J. Bizjak

1882. l.				gl.	kr.
Julija	1.	D. 1.	Za saldo od prejšnjega računa	857	50
»	6.	D. 2.	» prodano mu kavo	712	80
»	14.	D. 2.	» » » blago	191	25
				1761	55
Avgusta	1.		Za saldo od prejšnjega računa	461	55

3

Debet G. Jaklič

1882. l.				gl.	kr.
Julija	1.	D. 1.	Za saldo od prejšnjega računa	844	20
»	30.	B. 1.	» moje gotovo plačilo	100	80
				945	—

5

Debet F. Tomec

1882. l.				gl.	kr.
Julija	3.	D. 1.	Za svojo trato po naredbi *P. Lasnika* . .	960	—
»	7.	D. 2.	» mojo rimeso na *K. Porento*	850	—
»	31.		» saldo na nov račun	842	28
				2652	28

knjiga.

1

tukaj. Credit

1882. l.				gl.	kr.
Julija	6.	D. 2.	Za svoj akcept	950	—
»	30.	B. 1.	» svoje gotovo plačilo	350	—
»	31.		» saldo na nov račun	461	55
				1761	55

3

v Postojini. Credit

1882. l.				gl.	kr.
Julija	2.	B. 2.	Za svoje gotovo plačilo	750	—
»	9.	D. 2.	» poslani mi špirit	195	—
				945	—

5

v Trstu. Credit

1882. l.				gl.	kr.
Julija	1.	D. 1.	Za saldo od prejšnjega računa	972	35
»	7.	D. 2.	» poslano mi blago	923	70
»	20.	D. 3.	» » » kavo	756	23
				2652	28
Avgusta	1.		Za saldo od prejšnjega računa	842	28

2. O postranskih ali pomočnih knjigah.

O pismovnem prepisniku.

§ 13.

Knjigo, v katero se prepisujejo trgovska pisma, katera piše trgovec svojim trgovskim prijateljem, zovemo pismovni prepisnik.

V pismovnem prepisniku se zaznamenujejo strani z zaporedoma tekočimi števili. Pri vsakem prepisu se zapiše v prvo vrsto na levo kraj, kamor je pismo namenjeno; v sredo ime trgovskega prijatelja, kateremu smo pisali, in na desno datum. Potem se začne v drugi vrsti prepis pisma od besede do besede. Končni poklon se kot nebistvena reč izpušča. Pod prepis se potegne še prečnica.

Pismovni prepisnik ima na konci abecedni imenik vseh trgovcev, katerim so se pisma odposlala; v ta imenik treba precej, ko se je pismo prepisalo, zapisati stran, na kateri se prepis nahaja.

O fakturni knjigi.

§ 14.

V to knjigo se prepisujejo od vnanjih trgovcev prejete fakture od besede do besede; ob jednem se spodaj dostavlja vozarina in drugi stroški, navadno tudi kalkulacija.

Za blago, katero se doma kupi ali proda, ni treba posebne postranske knjige, ako so dotični računi v dnevniku in blagajniški knjigi natanko zabeleženi.

O skontrovnih knjigah.

§ 15.

Skontrovne knjige imenujemo one knjige, v katere se zapisuje prejem ali oddaja blaga, s katerim trgujemo.

V skontrovni knjigi ima vsako posamično blago svoj poseben račun (konto). Vsak tak konto ima dve nasprotni strani; na levi strani dobi nadpis «debet» ali «prejem», na desni «credit» ali «oddaja», v sredo pa se zapiše ime blaga. Vsak prejem se vknjiži z vsemi bistvenimi okoliščinami z izneskom vred na levo, vsaka oddaja prav takó na desno stran.

Najvažnejši skontrovniki so ti-le:

1.) Blagovni skontrovnik ali blagovnik. Iz blagovnika ni le vsak čas razvidno, kolika je zaloga, nego tudi, kedaj, kaj in po čem smo kupili ali prodali; od koga smo kupili ali komu smo prodali; blagovnik kaže slednjič tudi, koliko dobička ali izgube je bilo pri vsakaterem blagu.

Vsakemu posamičnemu blagu se odmeni poseben račun in v tem se nahaja: 1.) leto, mesec in dan, 2.) prodajalčevo ali kupčevo ime, 3.) mera in teža, 4.) cena, 5.) iznesek.

2.) Menični skontrovnik. V to knjigo se zapisujejo one menice, katere prejemamo, in katere se nam imajo ali ob dospetku izplačati ali s katerimi smemo drugače ukreniti. Pri vsaki menici treba povedati iznesek in dospetek, kje in kedaj se je izdala, kdo je akceptant, po čegavi naredbi, i. t. d.

Kadar se kaka menica izkupi ali proda, treba to zabeležiti v razpredelku za to odmenjenem, iznesek in dospetek pa prečrtati.

3.) Skontrovnik za vrednostne papirje; vánj se zapisujejo kupljeni in prodani vrednostni papirji.

Vsake vrste vrednostni papir ima svoj račun, v katerem treba pri vsakem postavku navesti: 1.) leto, mesec in dan, 2.) prodajalčevo ali kupčevo ime, 3.) število obligacije, 4.) nominalno vrednost, 5.) kurz, 6.) iznesek.

Kdor z državnimi papirji le po malem trguje, temu ni treba zato posebnega skontrovnika, nego dotične račune naj kar v blagovnik zapiše.

§ 16.

Kadar hočemo račun v blagovniku ali skontrovniku za vrednostne papirje skleniti, treba le zalogo, katero je inventura izkazala, s ceno in izneskom vred na stran oddaje zapisati, kakor bi se bilo blago v resnici prodalo. Potem se seštejejo izneski na obeh straneh; vsota na levi strani kaže, koliko se je za prejeto blago izdalo; vsota na desni strani pa pové, koliko se je za prodano blago v resnici izkupilo in koliko bi se za zalogo še izkupilo. Ako se jedna vsota od druge odšteje, kaže ostanek dobiček, ako je vsota na strani oddaje večja, v nasprotnem slučaji izgubo. Da se račun izjednači, postavi se ostanek kot dobiček na levo, kot izguba na desno stran.

Potem se potegnejo pod vsotami tež (mer) in izneskov, katere vsote morajo na levi in desni strani jednake biti, sklepovne črte. Slednjič se postavi še zaloga s ceno in izneskom vred na levo stran v novi račun.

Menični skontrovnik ne potrebuje sklepa; zaloga se kar v novi račun prepiše.

V pojasnilo naj služi naslednji račun iz blagovnika.

Blagov-

1

Prejem

Račun o

1882. l.			*kg*	po	gl.	kr.
Julija	1.	Zaloge:				
		4 sode	1835	44	807	40
		7 sodov	3080	40	1232	—
»	4.	Od *J. Lukmana tukaj*				
		4 sode	1817	44	799	48
»	15.	Od *J. Lukmana tukaj*				
		3 sode	1348	44	539	12
		8 sodov	3653	40	1461	20
»	20.	Od *G. Lenarčiča tukaj*				
		5 sodov	2275	40	910	—
»	31.	Dobička			257	41
			14008		6060	61
Avgusta	1.	Zaloge: 5 sodov	2215	44	974	60
		9 sodov	4141	40	1656	40

O dospetniku.

§ 17.

Namen dospetniku je ta, da trgovec iz njega vsak čas lahko razvidi, katere menice bode moral plačati in kedaj, za katere menice bode denar prejel in kedaj se bode to zgodilo; v prvem slučaji mora pripraviti potrebni denar, v drugem pa lahko že naprej določi, kaj bode s prejetim denarjem počel. V dospetniku se odloči vsakemu mesecu po jeden folij; na levo stran se zapisujejo rimese, na desno trate.

O odpravni ali spedicijski knjigi.

§ 18.

V to knjigo se zapisuje vse ono vozno blago, katero se dalje pošilja.

nik.

1

cukru. Oddaja.

1882. l.			kg	po	gl.	kr.
Julija	2.	*F. Raku* v *Litiji*				
		2 soda	915	43	393	45
»	14.	*J. Bizjaku tukaj*				
		1 sod	375	43	161	25
»	16.	*A. Klembasu* v *Celji*				
		1 sod	445	48	213	60
		2 soda	914	43	393	2
»	21.	*A. Lisjaku tukaj*				
		3 sode	1328	43	571	4
»	26.	*M. Dolinšku* v *Šiški*				
		2 soda	992	48	476	16
		3 sode	1335	43	574	5
»	27.	*J. Ramovšu tukaj*				
		3 sode	1348	48	647	4
»	31.	Zaloge:				
		5 sodov	2215	44	974	60
		9 sodov	4141	40	1656	40
			14008	—	6060	61

V odpravni knjigi sta odločeni vsakemu dogodku dve nasprotni strani; na levo se zapiše prejem voznega blaga, na desno njega odposlatev. Na levo stran se zapiše tedaj ime in bivališče onega, ki je blago izročil ali poslal, dan naznanila, ime voznika, ki je blago pripeljal, čas, v katerem se ima blago oddati in vozarina; ime in bivališče onega, kateremu je blago namenjeno, in kakó se bodo stroški plačali, ali se namreč povzamejo ali pa na pošiljateljev račun zapišejo; slednjič se dostavi dan, katerega se je blago prejelo in koliko je bilo stroškov pri prejemu in do odposlatve. Na desno stran se zapiše ime onega, komur se je blago poslalo, ime voznika, čas, v katerem mora blago oddati in vozarina, natančni popis voznega blaga in stroškovni račun; slednjič se še dostavi, ali so se stroški povzeli, ali na čegav račun so se zapisali.

3. Kakó je izkazati vspeh pri jednostavnem knjigovodstvu.

§ 19.

Sklep glavne knjige kaže, koliko ima trgovec terjati in koliko je dolžen. Da dobimo vspeh vsega trgovanja, treba vse imenje popisati in k temu še dodati terjatve in dolgove, kakor jih kažejo saldi glavne knjige. Iz tega je môči določiti končno čisto imenje. Primerjajoč to čisto imenje s prvotnim, zvemo, koliko dobička ali izgube je dala trgovina v tej dobi.

O resničnosti na ta način najdenega vspeha se prepričamo, ako, sklenivši skontrovne knjige, iz njih in iz dnevnika posamične dobičke in izgube izpišemo ter skupaj sestavimo. Ako potem vse dobičke in vse izgube seštejemo ter manjšo vsoto od večje odštejemo, mora se pokazati isti vspeh, katerega je inventura izkazala.

II. O jednostavnem obrtniškem knjigovodstvu.

1. Za večje obrte.

§ 20.

Pri večjih obrtih so knjige prav takó urejene kakor pri trgovskem knjigovodstvu in se tudi prav takó vodijo. Inventarna knjiga, dnevnik, blagajniška in glavna knjiga so tudi tu bistvene knjige; kot pomočne knjige pa nam rabijo: pismovni prepisnik, fakturna knjiga, materijalna knjiga (zapisnik neizdelanega tvoriva, *Materialienbuch),* blagovna ali skladiščna knjiga *(Lagerbuch),* naročilna knjiga *(Bestellungsbuch),* menični skontrovnik in dospetnik.

V inventarno knjigo se prepisujejo inventure (§ 8.)

V dnevnik (§ 9.) se zapisujejo oni poslovni dogodki, ki se na up vršé, in sicer po redu kakor prihajajo.

V blagajniški knjigi (§ 10.) se zaračunavajo dohodki in razhodki v gotovini; prvi se vknjižujejo na levi, drugi na desni strani in to vsak dan sproti; sklepajo pa se računi vsak mesec.

Gledé uredbe glavne knjige in vpisavanja vanjo velja, kar smo v §§ 11. in 12. povedali. Ako se v blagajniško knjigo in dnevnik posamični poslovni dogodki natanko vpisujejo, ondaj jih je treba v glavni knjigi le ob kratkem omenjati, kajti v kazalnem razpredelku zapisana stran kaže, kje so v onih knjigah natančno zabeleženi.

Fakturne knjige je treba le tedaj, kadar obrtnik tvorivo s tujih trgovišč naroča in o njem račune dobiva.

Pri večjih obrtih je treba posebnega zapisnika za neizdelano tvorivo (materijalne knjige); na levo stran se zapisuje kupljeno, na desno v délovnico oddano tvorivo. Koristna je pri takih obrtih tudi skladiščna knjiga; urejena je nekako takó kakor blagovna knjiga pri jednostavnem trgovskem knjigovodstvu. Na levo stran zapiše se vsako skladišču oddano, izgotovljeno delo z izdelovanjsko ceno vred; kadar se pa proda, zapiše se zopet na desno z dostavkom, za koliko se je prodalo.

Naročena dela se zapisujejo v naročilno knjigo; le-tá ima té-le razpredelke: 1.) za datum naročila, 2.) za ime in stanovanje naročnikovo, 3.) za natančen popis naročenih stvarij in 4.) za opazko, da se je naročilo izvršilo.

Obrtnikom, ki imajo le po malem z menicami opraviti, meničnega skontrovnika ni treba; menice, ki jim pridejo kedaj v roke, zabeležujejo lahko v dospetniku.

2. Za manjše obrte.

§ 21.

Trgovsko knjigovodstvo je môči le pri večjih obrtih uporabljati. Mali obrtnik nima časa za tako zamudno zapisavanje; on hoče iz svojih zapiskov le razvideti, kaj njegov obrt bistveno pospešuje. A misliti mu je pri tem vender tudi na to, da si zagotovi za slučaj kake pravde s svojim knjigovodstvom važno dokazilo.

Da veljajo po § 121. občnega sodnjega reda rokodelcu knjige za pol dokaza, treba, da ima svoj dnevnik v redu; v tega mora natanko zapisavati vse, kar je dolžen in kar ima terjati, leto, dan ter tudi osebe, za katere je kako delo izgotovil, ali katere so mu kako delo izgotovile.

Da rokodelec tej zakoniti določbi zadostuje, in da vsak čas lahko pozvé, koliko je vsega njegovega imenja, za to mu je treba najprej dnevnika, v katerega mora kratko in jasno zapisavati vse obrtne dogodke, bodi si da se vršé proti gotovemu plačilu ali na up, in to po redu, kakor se vršé.

Obrtnik mora vse one poslovne dogodke, ki se na up vršé, iz dnevnika v naročniško knjigo *(Kundenbuch)* prepisati ter jih tu po osebah urediti in to zato, da vsak čas ve, kaj je vsaki posamični osebi na up dal ali od nje na up prejel.

Dnevnik in naročniška knjiga sta bistveni knjigi vsacega malega obrtnika.

Dnevnik dobi za nadpis mesec in leto, v njega posamične razpredelke pa se zapisuje:

1.) Stran naročniške knjige, na katero so se prepisali iz dnevnika oni poslovni dogodki, ki so se na up vršili. — 2.) Dan. — 3.) Poslovni dogodek z vsemi bistvenimi okoliščinami. Pri postavkih, ki pouzročujejo dolg ali terjatev, zapiše se najprej ime in bivališče osebe, kateri se je kaj na up dalo ali od katere se je kaj na up prejelo in potem še le poslovni dogodek. — 4.) Iznesek. Le-tá se zapiše pri poslovnih dogodkih, ki se proti gotovemu plačilu vršé, pod «dohodke» ali «razhodke» četrtega (gotovinskega), pri onih na up pa pod «debet» ali «credit» petega (upnega) razpredelka.

Kadar se katero koli na up prodano ali kupljeno blago plača, prečrta se iznesek v upnem razpredelku ter dostavi, kedaj se je to zgodilo, potem pa se isti iznesek v gotovinski razpredelek pod «dohodke» ali «razhodke» zapiše.

Kadar je katera stran popisana, preneseta se vsoti dohodkov in razhodkov na naslednjo stran.

V naročniški knjigi ima vsak naročnik svoj račun; le-tá ima za nadpis naročnikovo ime in bivališče, v posamične razpredelke pa se zapisuje:

1.) Datum. — 2.) Stran dnevnika, s katere se je dotični postavek semkaj prepisal. — 3.) Stvar, katera se je prodala ali kupila. — 4.) Iznesek, kateri se zapiše pod «debet» ali pod «credit».

Ako se pošlje naročniku račun, treba to v naročniški knjigi zabeležiti.

Iz naročniške knjige izpiše obrtnik lahko koncem vsake dobe svoje terjatve in dolgove. Da zve vspeh svojega obrta, treba mu je le gotovino prešteti (le-tá se mora vjemati z diferenco prejemkov in izdatkov, zabeleženih v dnevniku), vrednost blagu in izdelkom določiti ter inventuro sestaviti. Primerjajoč zadnjo inventuro s prvotno zvedel bode, koliko je imel v dotični dobi dobička ali izgube.

Dobro je, ako ima mali obrtnik razven ravnokar omenjenih dveh bistvenih knjig tudi naročilno knjigo (§ 20.) in dospetnik. V prvo naj zabeležuje naročena dela, v drugi pa naj zapiše k dotičnemu dnevu račune ali menice, za katere bode denar prejel ali katere bode moral plačati. Dospetnik nadomestuje lahko tudi pratika.

III. Dve nalogi v praktično uporabo jednostavnega knjigovodstva.

1. Načrt jednomesečne trgovine.

Josip Leban v *Ljubljani* si omisli za svojo trgovino na podlogi inventure dne 1. julija l. 18 . . nove knjige.

Kakó je tekla kupčija meseca julija l. 18 . .

Dne 1. julija. Kakor inventura izkazuje, sem imel aktivnega in pasivnega imenja:

1.) Gotovine 1992 gl.

2.) Rimes:

za	720	gl.	na	*A. Vičiča*	v dan	12. julija,
»	490	»	»	*B. Kočevarja*	» »	15. julija,
»	1260	»	»	*M. Pavliča*	» »	10. avgusta.

3.) Blaga:

1256	*kg*	Java-kave	po	178,
1470	»	Rio-kave	»	164,
875	»	cukra	»	46,
1613	»	»	»	42,
428	»	zabelnega olja	»	74,
315	»	grozdjiča	»	25,
528	»	riža	»	24.

4.) Blaga v prodajalnici:

Kakor prodajalniška inventura izkazuje za 476 gl.
Terjatev 178 gl., a od teh treba odbiti 3 $^0/_0$.

5.) Premičnine in pohištva za 960 gl.

6.) Terjatev:

pri	*G. Lozarji*	v *Kranji*	760	gl.
»	*F. Kosu*	» *Loki*	450	»
»	*J. Golobu*	» *Kamniku*	816	»
»	*K. Končanu*	» *Borovnici*	210	»
»	*M. Vovku tukaj*		270	»

7.) Trat:

za	674	gl.	po naredbi	*S. Čeha*	v dan	9. julija,
»	880	»	» »	*P. Novaka*	» »	15. julija,
»	519	»	» »	*A. Kralja*	» »	25. avgusta.

8.) Dolgov:

A. Pasiniju	v *Trstu*	850	gl.
N. Finku	» *Brnu*	726	»
K. Bregarju	*tukaj*	535	»

Za domače potrebe sem dal 180 gl., trgovskim pomočnikom 120 gl.

Prodajalnica je iztržila 95 gl.

Dne 3. julija. Prodajalnici sem dal za prodajo na drobno:

150 *kg*	Java-kave	po	178,	300 *kg*	Rio-kave	po	164,
100 »	cukra	»	46,	400 »	cukra	»	42,
100 »	zabeln. olja	»	74,	50 »	grozdjiča	»	24,
100 »	riža	»	24.				

G. Lozar v *Kranji* je poslal 300 gl. v gotovini in rimeso za 410 gl. na *M. Turka* v dan 10. julija, na up pa je prejel:

200 *kg*	Java-kave	po	180,	350 *kg*	Rio-kave	po	168,
150 »	cukra	»	47,	500 »	cukra	»	43.

Stroškov za zaboje i. t. d. sem računal 18 gl. 50 kr.

Prodajalnica je iztržila 81 gl.

Dne 4. julija. Izplačal sem trato za 674 gl. po naredbi *S. Čeha* v dan 9. julija s 6 $^0/_0$ diskonta.

Kupil sem od *K. Bregarja tukaj* proti svojemu akceptu v dan 20. julija 663 *kg* cukra po 40.

Prodajalnica je iztržila 67 gl.

Dne 5. julija. *F. Kosu* v *Loki* sem poslal na njegovo naročilo:

120 *kg*	Java-kave	po	180,	100 *kg*	cukra	po	47,
350 »	cukra	»	43,	50 »	zabel. olja	»	82.

Prodajalnica je iztržila 102 gl.

Dne 6. julija. Prejel sem od *K. Goloba* v *Kamniku* 600 gl. v gotovini ter mu prodal na up:

100 *kg*	Java-kave	po	180,	100 *kg*	cukra	po	47,
200 »	cukra	»	43,	100 »	riža	»	25.

Prodajalnica je iztržila 81 gl.

Dne 7. julija. Kupil sem menico za 800 gl. na *J. Kluna* v *Trstu* v dan 31. julija s 6 $^0/_0$ diskonta ter jo poslal *A. Pasiniju* v *Trst*.

Prodajalnica je iztržila 78 gl.

Dne 8. julija. Prejel sem vsled naročila od *N. Finka* v *Brnu* na up:

1 sod	cukra,	nečiste teže	435 *kg*,	tare	24 *kg*,	po	43,
3 sode	»	»	1336 »	»	73 »	»	39

ter plačal za vozarino in druge stroške 16 gl. 74 kr.

Prodajalnica je iztržila 93 gl.

Dne 10. julija. Za rimeso na *M. Turka* sem prejel 410 gl.

Prodal sem *J. Končanu* v *Borovnici*:

200 *kg* Rio-kave po 168 in 300 *kg* cukra po 43.

Prodajalnica je iztržila 88 gl.

Dne 11. julija. *M. Vovk tukaj* mi je plačal v gotovini 250 gl. ter prejel:

100 *kg* cukra po 47 in 200 *kg* cukra po 43.

Kupil sem menico za 1000 gl. na *A. Simona* v *Brnu* v dan 10. avgusta ter jo poslal *N. Finku* v *Brn.*

Prodajalnica je iztržila 80 gl.

Dne 12. julija. *A. Pasini* v *Trstu* mi je poslal na moje naročilo fakturo o

2 sodih	Java-kave,	neč. teže	497 *kg*,	tare 38 *kg*,	po 160,
3 »	Rio-kave,	» »	728 »	» 52 »	» 136,
2 »	zabel. olja	» »	532 »	» 65 »	» 61,
1 zaboji	grozdjiča,	» »	271 »	» 27 »	» 18.

Stroškov je računal 18 gl. 46 kr., za ves iznesek pa potegnil name menico po naredbi *G. Funteka* v dan 12. septembra.

Za rimeso na *A. Vičiča* sem prejel 720 gl.

Prodajalnica je iztržila 112 gl.

Dne 13. julija. Prodal sem *B. Sirku tukaj* proti njega jednomesečnemu akceptu:

200 *kg* Java-kave	po 180,		200 *kg* cukra	po 47,	
100 » zabel. olja	» 82,		50 » grozdjiča	» 27.	

Prodajalnica je iztržila 74 gl.

Dne 14. julija. Kupil sem od *J. Perdana tukaj* proti gotovemu plačilu:

350 *kg* riža po 23.

Prodajalnica je iztržila 70 gl.

Dne 15. julija. Za rimeso na *B. Kočevarja* se mi je izplačalo 490 gl.

Izplačal sem 880 gl. za danes izplačno trato po naredbi *P. Novaka.*

Prodajalnica je iztržila 95 gl.

Dne 17. julija. Dobil sem gori naznanjeno blago od *A. Pasinija* v *Trstu* ter plačal za vozarino in druge stroške 129 gl. 22 kr.

Prodajalnica je iztržila 78 gl.

Dne 18. julija. Dal sem prodajalnici za prodajo na drobno:

100 *kg* Java-kave	po 178,	420 *kg* Rio-kave	po 164,
150 » cukra	» 46,	500 » cukra	» 42,
150 » zabel. olja	» 74,	100 » grozdjiča	» 24,
200 » riža	» 24.		

Prodajalnica je iztržila 91 gl.

Dne 19. julija. *F. Kos* v *Loki* je poslal rimeso za 750 gl. na *A. Kuglerja* v *Brnu* v dan 20. avgusta ter prejel na up:

200 *kg* Rio-kave po 168, 250 *kg* cukra po 43,
100 » zabeln. olja » 82, 100 » grozdjiča » 27.

Prodajalnica je iztržila 85 gl.

Dne 20. julija. Izplačal sem za svoj danes dospeli akcept 265 gl. 20 kr.

Prodajalnica je iztržila 78 gl.

Dne 21. julija. Prejel sem od *N. Finka* v *Brnu:*

1 sod cukra, neč. teže 412 *kg*, tare 23 *kg*, po 44,
2 soda » » » 883 » » 47 » » 39,

ter mu poslal rimeso za 750 gl. na *A. Kuglerja* v *Brnu* v dan 20. avgusta.

Stroškov sem plačal ob prejemu blaga 12 gl. 25 kr.

Prodajalnica je iztržila 83 gl.

Dne 22. julija. Plačal sem *K. Bregarju tukaj* 500 gl. v gotovini ter prejel:

200 *kg* cukra po 44, 500 *kg* cukra po 40.

Prodajalnica je iztržila 98 gl.

Dne 24. julija. *J. Končan* v *Borovnici* je poslal 450 gl. v gotov.

Prodajalnica je iztržila 86 gl.

Dne 25. julija. Prodal sem *M. Vovku tukaj* na up:

100 *kg* cukra po 47 in 200 *kg* cukra po 44.

Prodajalnica je iztržila 87 gl.

Dne 26. julija. Prodal sem *J. Kovaču tukaj* proti gotovemu plačilu: 50 *kg* Java-kave po 178, 100 *kg* zabeln. olja po 74,
100 » riža » 24, 50 » grozdjiča » 27.

Prodajalnica je iztržila 116 gl.

Dne 27. julija. Izplačal sem trato za 519 gl. po naredbi *A. Kralja,* izplačno dne 25. avgusta, s 6 % diskonta.

Prodajalnica je iztržila 84 gl.

Dne 28. julija. *A. Pasini* v *Trstu* mi je poslal na moje naročilo na up: 2 soda Java-kave, neč. teže 478 *kg*, tare 39 *kg*, po 160,
3 sode Rio-kave, » » 725 » » 51 » » 136.

Za vozarino in druge stroške sem plačal 77 gl. 91 kr.

Prodajalnica je iztržila 93 gl.

Dne 29. julija. *G. Lozar v Kranji* mi je poslal 100 ces. zlatnikov, katere sem za njegov račun po 5 gl. 28 kr. prodal; senzarije sem plačal $\frac{1}{2}$ %.

Prodajalnica je iztržila 133 gl.

Dne 30. julija. V prodajalnici je bilo meseca julija 28 gl. stroškov; danes pa je iztržila 98 gl. ter izkazuje:

Blaga za 539 gl.

Dolgov 205 gl., od teh treba 3 % odbiti.

Dne 31. julija se sklenejo knjige in sestavi inventura in recimo, da se vjema ostanek v blagajnici s saldom blagajniške knjige, in da je v zalogi toliko blaga, kolikor ga izkazuje blagovnik. Premičnina in pohištvo naj se postavita v račun po njiju prvotni vrednosti z 1 % odbitka.

a) Koliko je sedanje aktivno, pasivno in čisto imenje?

b) Kolik je vspeh jednomesečne trgovine?

2. Načrt jednomesečnega mizarskega obrta.

Janez Grm v *Ljubljani* je začel dne 1. avgusta l. 18 . . mizariti.

Poslovni dogodki meseca avgusta l. 18 . .

Dne 1. avgusta. Gotovine sem imel 1000 gl. Od teh sem izdal 250 gl. za opravo mizarnice, 70 gl. sem dal za domače potrebe, 72 gl. 50 kr. pa sem plačal četrtletne najmarine od mizarnice in magazina.

Dne 2. avgusta. Kupil sem od *Antona Jazbeca,* trgovca z lesom *tukaj,* orehovih in hrastovih hlodov, furnirjev in različnih desek, kakor račun izkazuje, za 350 gl. ter mu plačal na račun 100 gl.

Dne 3. avgusta. Krčmar *Josip Strehar tukaj* je naročil 8 miz in 40 stolov ter plačal na račun 40 gl.

Dne 4. avgusta. Nakupil sem ključavnic za omare, kleja in druzega tvoriva ter plačal za vse 25 gl. 40 kr.

Dne 6. avgusta. Pomagačem sem plačal 40 gl.

Dne 8. avgusta. Trgovcu *Jarneju Jugu tukaj* sem prodal proti gotovemu plačilu 1 omaro za 30 gl.

Dne 10. avgusta. *Andreju Stroju tukaj* sem plačal za strugarska dela 8 gl. 50 kr.

Dne 13. avgusta. Pomagačem sem plačal 40 gl.

Dne 14. avgusta. Kupil sem zelenega sukna za igralne in pisalne mize ter plačal v gotovini 12 gl.

Dne 16. avgusta. Prodal sem proti gotovemu plačilu 2 postelji po 30 gl. in 1 kuhinjsko omaro za 15 gl.

Dne 17. avgusta. Krčmarju *Josipu Streharju tukaj* oddal sem dne 3. t. m. naročenih 8 miz in 40 stolov, vrednih 175 gl.

Dne 19. avgusta. *Antonu Jazbecu tukaj* sem plačal na račun 250 gl., od njega pa prejel mahagonovine za 170 gl.

Dne 20. avgusta. Pomagačem sem plačal 35 gl.

Dne 20. avgusta. *Josip Strehar*, krčmar *tukaj*, mi je plačal na račun 65 gl.

Dne 21. avgusta. Prodal sem proti gotovemu plačilu kavarnarju *Matevžu Kosu tukaj* 3 igralne mize po 18 gl.

Dne 23. avgusta. Od krčmarja *Josipa Streharja tukaj* sem vzel na račun 50 *l* vina po 32 kr.

Dne 25. avgusta. Za mednino in železnino sem plačal 25 gl. 60 kr.

Dne 27. avgusta. Pomagačem sem plačal 40 gl.

Dne 28. avgusta. *Antonu Jazbecu tukaj* sem prodal 2 mizi iz mahagonovine po 60 gl. in 1 predalno omaro za 30 gl.

Dne 29. avgusta. Prodal sem proti gotovemu plačilu 1 pisalno mizo za 32 gl. in 12 stolov po 1 gl. 40 kr.

Dne 31. avgusta. Od *Antona Jazbeca tukaj* sem kupil za 154 gl. desek ter mu plačal na račun 120 gl.

Dne 31. avgusta se sklenejo knjige in sestavi inventura, in recimo, da se vjema gotovina v blagajnici s saldom blagajniške knjige. O neizdelanem tvorivu in o blagu v magazinu se napravijo izkazi; vzemimo, da je prvega za 450 gl., druzega za 117 gl. 70 kr. Določujoč vrednost opravi v mizarnici odbij 1 % od prvotne cene.

Popravki.

Na str. 24.	v 12. vrsti	od spodaj	ne čitaj:	$a(b+c)=ab+bc$	ampak:	$a(b+c)=ab+ac$.
» » 32.	» 15.	» »	» »	$\frac{417260}{3755340} \times$	»	$\frac{417260}{3755340} \times 9$
» » 37.	» 10.	» »	» »	$a^{m-n} = a^0$	»	$a^{m-m} = a^0$.
» » 46.	» 9.	» zgoraj	» »	prej kakor *A*	»	prej kakor *B*
» » 46.	» 10.	» »	» »	— 46	»	— 246
» » 67.	» 2.	» spodaj	» »	*b*ejni	»	*b*etni
» » 67.	» 15.	» »	» »	*b*ejnina	»	*b*etnina
» » 76.	» 9.	» zgoraj	» »	3	»	5
» » 85.	» 1.	» spodaj	» »	$\frac{a}{10^{m+n}}$	»	$\frac{ab}{10^{m+n}}$.