Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 26

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 26.1. Halbiere die 1 im Dezimalsystem zehnmal hintereinander.

Übungsaufgaben

Aufgabe 26.2. Welche der folgenden Zahlen sind Dezimalbrüche?

$$\frac{3}{6},\ \frac{2}{6},\ \frac{2}{6} \cdot 15,\ 2^{-3} \cdot 7 \cdot 11,\ 2^{-3} \cdot 7 \cdot 11^{-1},\ \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n}\,.$$

Aufgabe 26.3. Berechne $0{,}5 \cdot 0{,}2$.

Aufgabe 26.4. Berechne

$$0{,}000000000000000007 \cdot 0{,}0000000000000006\,.$$

Aufgabe 26.5. Berechne $1{,}0205 \cdot 0{,}0073$.

Aufgabe 26.6.*

Was ist das kleinste ganzzahlige Vielfache von $\frac{1}{84}$, das ein Dezimalbruch ist.

Aufgabe 26.7. Zeige, dass das arithmetische Mittel von zwei Dezimalbrüchen a_1 und a_2 wieder ein Dezimalbruch ist. Gilt dies auch für das arithmetische Mittel von drei Dezimalbrüchen?

Aufgabe 26.8.*

(1) Bestimme die Stammbrüche, die zugleich Dezimalbrüche und größer als $\frac{1}{100}$ sind, und liste sie in absteigender Reihenfolge auf.
(2) Wie viele rationale Zahlen, die sowohl Stammbrüche als auch Dezimalbrüche sind, gibt es zwischen $\frac{1}{1000}$ und 1 (einschließlich).

Aufgabe 26.9. Berechne
$\left(3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}\right) \cdot \left(5 \cdot 10^{2} + 9 \cdot 10^{1} + 5 \cdot 10^{0} + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-3}\right).$

Aufgabe 26.10. Berechne
$$6{,}9 \cdot 10^{-4} \cdot 7{,}3 \cdot 10^{-9}\,.$$

Aufgabe 26.11. Berechne
$$4{,}3 \cdot 10^{-6} + 6{,}4 \cdot 10^{-5}\,.$$

Aufgabe 26.12.*

Berechne
$$0{,}00000029 \cdot 0{,}00000000037\,.$$
Das Ergebnis soll in einer entsprechenden Form angegeben werden.

Aufgabe 26.13.*

Ist die Zahl
$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n}\,.$$
ein Dezimalbruch?

Aufgabe 26.14.*

Zeige, dass eine rationale Zahl genau dann ein Dezimalbruch ist, wenn in der gekürzten Bruchdarstellung der Nenner die Form $2^i \cdot 5^j$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ besitzt.

Aufgabe 26.15.*

Wir betrachten die Abbildung φ, die einen im Zehnersystem gegebenen Dezimalbruch
$$z = \sum_{i=m}^{n} a_i 10^i$$
auf
$$\varphi(z) = \sum_{i=m}^{n} a_i 10^{-i}$$
abbildet. Bei $\varphi(z)$ bezieht sich also die Ziffer a_i nicht mehr auf 10^i, sondern auf 10^{-i}.

(1) Berechne $\varphi(514, 73)$.
(2) Welche Dezimalbrüche werden unter φ auf sich selbst abgebildet?

(3) Gilt

$$\varphi(z+w) \;=\; \varphi(z)+\varphi(w)?$$

(4) Zeige, dass die Beziehung

$$\varphi(10^k \cdot z) \;=\; \frac{1}{10^k} \cdot \varphi(z)$$

für alle Dezimalbrüche z und ganze Zahlen k gilt.

(5) Ist φ bijektiv? Was ist gegebenenfalls die Umkehrabbildung?

AUFGABE 26.16. Eine rationale Zahl $z \neq 0$ sei in der Form

$$\pm \prod_{p \text{ Primzahl}} p^{\nu_p(z)}$$

gegeben. Woran erkennt man, ob es sich um einen Dezimalbruch handelt oder nicht?

AUFGABE 26.17. Berechne im 7er-System

$$0{,}026 \cdot 3{,}605\,.$$

AUFGABE 26.18. Berechne im 5er-System

$$0{,}0230241 \cdot 32{,}1102 + 4{,}301 \cdot 2{,}133\,.$$

AUFGABE 26.19.*

Es seien $a \neq b$ Basen zu einem Stellenwertsystem (a-er System und b-er System). Es sei z eine rationale Zahl, die im Stellenwertsystem zur Basis a eine abbrechende Darstellung als Kommazahl besitzt. Gilt dies dann auch im Stellenwertsystem zur Basis b?

Eine Teilmenge $S \subseteq R$ eines kommutativen Ringes R heißt *Unterring*, wenn $0, 1, -1 \in S$ ist und wenn S unter der Addition und der Multiplikation abgeschlossen ist.

AUFGABE 26.20. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ eine fixierte positive natürliche Zahl. Zeige, dass die Menge aller rationalen Zahlen, die man mit einer Potenz von n als Nenner schreiben kann, einen Unterring von $\mathbb{Q}$ bildet.

Aufgabe 26.21. Es sei $T \subseteq \mathbb{P}$ eine Teilmenge der Primzahlen. Zeige, dass die Menge

$$\begin{aligned} R_T = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q & \text{ lässt sich mit einem Nenner schreiben,} \\ & T \text{ in dem nur Primzahlen aus vorkommen} \} \end{aligned}$$

ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist. Was ergibt sich bei $T = \emptyset$, $T = \{3\}$, $T = \{2,5\}$, $T = \mathbb{P}$?

Aufgabe 26.22. Bestätige die Abschätzungen

$$0{,}428571428 < \frac{3}{7} < 0{,}428571429$$

aus Beispiel 26.10 durch Multiplikation der Abschätzungen mit 7.

Aufgabe 26.23. Approximiere die rationale Zahl $\frac{7}{3}$ durch einen Dezimalbruch mit einem Fehler von maximal 10^{-4}.

Aufgabe 26.24. Approximiere die rationale Zahl $\frac{1}{6}$ durch einen Dezimalbruch mit einem Fehler von maximal 10^{-2}.

Aufgabe 26.25.*

Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ der Dezimalbruch

$$\sum_{i=1}^{k} 3 \cdot 10^{-i}$$

die rationale Zahl $\frac{1}{3}$ mit einem Fehler von maximal 10^{-k} approximiert (von unten).

Aufgabe 26.26. Runde die folgenden Zahlen auf zwei Stellen nach dem Komma.

$$7{,}874802,\ \frac{4}{9},\ \frac{3}{13},\ 4 \cdot 5^{-1} \cdot 6^{-1}\,.$$

Aufgabe 26.27.*

Bei der Onlinepartnervermittlung „e-Tarzan meets e-Jane“ verliebt sich alle elf Minuten ein Single. Wie lange (in gerundeten Jahren) dauert es, bis sich alle erwachsenen Menschen in Deutschland (ca. 65000000) verliebt haben, wenn ihnen allein dieser Weg zur Verfügung steht.

Aufgabe 26.28. Halbiere den Dezimalbruch 297,0752209.

Aufgabe 26.29.*

Bestimme vom achten Teil des Dezimalbruches

$$760982393473{,}90354771045729$$

die dritte Nachkommaziffer.

Aufgabe 26.30. Berechne den fünften Anteil des Dezimalbruches

$$7601{,}4550738\,.$$

Aufgabe 26.31. Begründe, dass sich bei der Halbierung (und bei der Fünftelung) eines Dezimalbruches die Anzahl der Nachkommastellen um höchstens 1 erhöht.

Aufgabe 26.32.*

Zeige, dass der Algorithmus zur Berechnung des fünften Anteils eines Dezimalbruches korrekt ist.

Aufgabe 26.33. Die Schüler sollen die 1 im Dezimalsystem zehnmal hintereinander halbieren. Heinz Ngolo wundert sich über Gabi Hochster, die anfängt, die Potenzen der 5, also $5^1, 5^2, 5^3, \ldots$ auszurechnen. Er sagt: „Hast du wieder nicht aufgepasst“? Sie sagt: „Doch, das ist doch das gleiche“. Wer hat recht?

Man nennt einen Algorithmus *parallelisierbar*, wenn man ihn in einfachere Teilalgorithmen aufspalten kann, die in dem Sinne voneinander unabhängig sind, dass sie nicht die Ergebnisse voneinander benötigen (es entstehen also keine Wartezeiten).

Aufgabe 26.34. Die Klasse soll den fünften Teil einer Zahl ausrechnen, die im Zehnersystem durch 27 Ziffern gegeben ist. In der Klasse gibt es 28 Kinder. Wie teilt Gabi Hochster die Aufgabe auf?

Inwiefern ist die Halbierung (Fünftelung) eines Dezimalbruches parallelisierbar?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.35. (2 Punkte)

In den Klassenarbeiten hat Mustafa Müller eine 3 plus (= 2,7), eine 1 minus (= 1,3), eine 3 und eine 2 plus geschrieben. Berechne seinen Notendurchschnitt als Bruch, und runde das Ergebnis.

Aufgabe 26.36. (2 Punkte)

Berechne $401{,}0013507 \cdot 0{,}002056$.

Aufgabe 26.37. (2 Punkte)

Approximiere die rationale Zahl $\frac{1}{7}$ durch einen Dezimalbruch mit einem Fehler von maximal 10^{-6}.

Aufgabe 26.38. (2 Punkte)

Halbiere den Dezimalbruch $30437{,}09134508902$.

Aufgabe 26.39. (3 Punkte)

Bestimme vom achten Teil des Dezimalbruches

$$876059301193674{,}2903347310459901$$

die fünfte Nachkommaziffer.

Abbildungsverzeichnis