$$BD=EF$$

$$A\hat{D}B[=2\hat{R}-A\hat{D}E]=A\hat{E}F[=2\hat{R}-A\hat{E}D]$$

ナルユエ　$\triangle ADB\equiv\triangle AEF$,

從ヒテ　$B\hat{A}E=D\hat{A}F$

$=C\hat{B}D$ [同ジ弧 CF ノ上ニ立ツ角]

尙　$A\hat{E}B=A\hat{D}E=B\hat{D}C$.

依リテ二ツノ三角形 ABE, BCD ハ二角ガソレゾレ相等シキユエ互ニ相似ナリ,

即チ　$\triangle ABE\backsim\triangle BCD$.

(II) 次ニ上ノ二ツノ三角形ガ相似ナルユエ其ノ面積ノ關係トシテ

$$\overline{AB}^2:\overline{BC}^2=\triangle ABE:\triangle BCD,$$

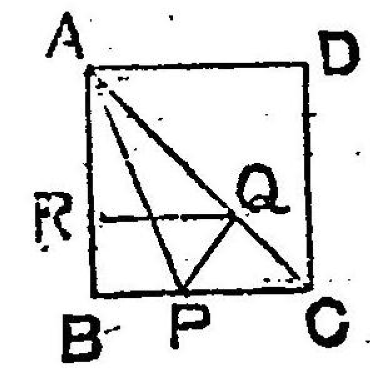
然ルニ　AD=DC ナルユエ　$=\triangle ABE:\triangle ABD$

$=BE:BD$.

62. 正方形 ABCD アリ,對角線 AC ガ邊 AB ト爲ス角 BAC ノ二等分線 AP ヲ引キ,之ト BC トノ交點 P ヨリ AC ヘ垂線 PQ ヲ下シ,更ニ Q ヨリ AB ヘ垂線 QR ヲ引ク,然ルトキハ QR ノ上ノ正方形ハ原正方形ノ幾部分ナルカ.　[42. 商船]

解 二ツノ三角形 ABP, AQP ヲ比較スルニ

$A\hat{B}P[=\hat{R}]=A\hat{Q}P$　[假設]



$B\hat{A}P=Q\hat{A}P$　[假設]

AP ハ共通,

故ニ　$\triangle ABP\equiv\triangle AQP$

ニシテ　$AB=AQ$.

リテ RQ ハ BC ニ平行ナルユエ

$$\overline{QR}^2:\overline{BC}^2=\overline{AQ}^2:\overline{AC}^2=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$$

$$=\overline{AB}^2:\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$$

$$=\overline{AB}^2:2\overline{AB}^2=1:2,$$

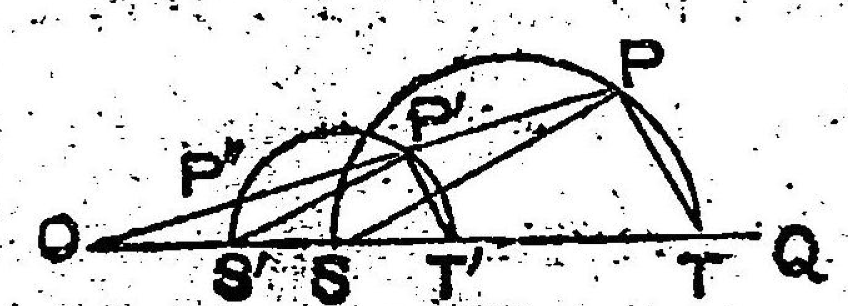
故ニ　$\overline{QR}^2=\frac{1}{2}\overline{BC}^2$.

即チ QR ノ上ノ正方形ハ原正方形ノ半分ニ等シ.

63. OQ ハ點 O ヲ過ル與ヘラレタル直線ニシテ P ハ此ノ直線上ニアラザル與ヘラレタル點ナルトキ,點 P ヲ過リ OQ 上ニ中心ヲ有スル圓ヲ畫キテ OQ ト S, T ニ於テ交ラシメ,OS ト OT トノ比ヲ與ヘラレタル比ニ等シクナル樣ニセヨ.

[41. 東. 高. 工.]

解析 與ヘラレタル比ヲ $m:n$ トシ,所要ノ點ノ一組 S, T ヲ得タリト假定ス,即チ



$OS:OT=m:n,\ S\hat{P}T=\hat{R}$

ナリトセン.

今 OP 上ニ任意ノ一點 P′ ヲ取リ, P′ ヲ過リテ PS, PT ニ平行ニソレゾレ P′S′, P′T′ ヲ引キ OQ トノ交點ヲ S′, T′ トセヨ.

然ルトキハ　$OS' : OS = OP' : OP = OT' : OT$,

即チ　$OS' : OS = OT' : OT$,

或ハ　$OS' : OT' = OS : OT = m : n$.

且 $S'\hat{P'}T'$ ノ二邊ト $S\hat{P}T$ ノ二邊トハ作圖ニ依リテソレゾレ相平行シ, 且何レモ同ジ方向ヲ有ツユヱ　$S'\hat{P'}T' = S\hat{P}T = \hat{R}$.

依リテ次ノ作圖法ヲ得.

作圖 OQ 上ニ任意ノ一點 S′ ヲ取リ, 又

$$OS' : OT' = m : n$$

ナル如ク第二ノ點 T′ ヲ矢張リ OQ ノ上ニ取ル. 次ニ S′T′ ヲ徑トシテ圓ヲ畫キ, OP トノ交點ノ一ツヲ P′ トシ, P′S′, P′T′ ヲ結ビ付ケヨ.

而シテ P ヲ過リテ P′S′ ニ平行ニ PS ヲ, P′T′ ニ平行ニ PT ヲ引キ, OQ トノ交點ヲソレゾレ S, T トスレバ S, T ハ所要ノ點ノ一組ナルベシ.

證 先ヅ　$S\hat{P}T = S'\hat{P'}T' = \hat{R}$

ニシテ ST ヲ徑トスル圓 [即チ其ノ中心ハ ST

ノ中點ナルユヱ OQ 上ニアリ] ハ點 P ヲ過ルコト明カナリ.

而シテ作圖ニ依リテ P′S′, P′T′ ハソレゾレ PS, PT ト相平行スルユヱ

$$OS : OS' = OP : OP' = OT : OT',$$

故ニ　$OS : OT = OS' : OT' = m : n$,

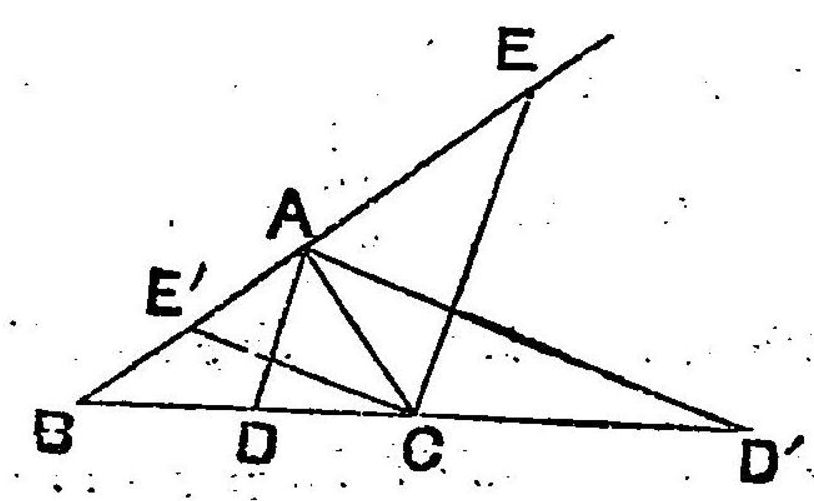
即チ S, T ハ所要ノ點ノ一組ナリ.

吟味 圓 S′T′ ガ OP ト他ノ一點 P″ ニ於テ交ルトキハ P″ ニ對應スル點 S, T モ亦要件ニ適スルモノナルコトヲ證シ得ベシ. 故ニ圓 S′T′ ガ OP ト交レバ二ツノ解アリ, 切スレバ一ツノ解アリ, 交ラザレバ解ナシ.

64. 三角形ノ頂角ヲ二等分スル直線ハ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分スルコトヲ證セヨ.

[39. 海. 機]

三角形 ABC ノ頂角 A ヲ二等分スル直線 AD ガ底邊 BC ヲ分ツ二部ヲ DB, DC トスレバ



$$DB : DC = AB : AC$$

ナルベシ.

證 DA ニ平行ニ CE ヲ引キ, BA ノ延線ト E ニ於テ交ラシメヨ.

然ルトキハ $\hat{ACE}=\hat{CAD}$, [錯角]

$\hat{AEC}=\hat{BAD}$. [同位角]

然ルニ $\hat{CAD}=\hat{BAD}$. [假設]

故ニ $\hat{ACE}=\hat{AEC}$,

依リテ AE=AC.

而シテ三角形 BCE ニ於テ DA ハ CE ニ平行ナルユエ DB:DC=AB:AE=AB:AC.

注意 尙 $\hat{A}$ ノ外角ヲ二等分スル直線ガ BC ノ延線ヲ D′ ニ於テ截ルトスレバ

D′B:D′C=AB:AC

ナルベシ.

如何トナレバ D′A ニ平行ニ CE′ ヲ引キ AB トノ交點ヲ E′ トスレバ前ニ云ヘルコトト同理ニ依リテ AE′=AC.

而シテ D′B:D′C=AB:AE′=AB:AC.

65. 一直線上ニ順次ニ取リタル四點 A, B, C, D ガ調和列點ナルトキハ此ノ四點間ニ如何ナル關係アルカ. [37. 陸.士.]

答 定義ニ依リテ

AB:BC=AD:CD ... ... (1)

卽チ AB:AC−AB=AD:AD−AC,

合比ノ理ニ依リ AB:AC=AD:2AD−AC,

更迭ノ理ニ依リ AB:AD=AC:2AD−AC,

又合比ノ理ニ依リ

AB:AB+AD=AC:2AD,

卽チ AC.(AB+AD)=2AB.AD,

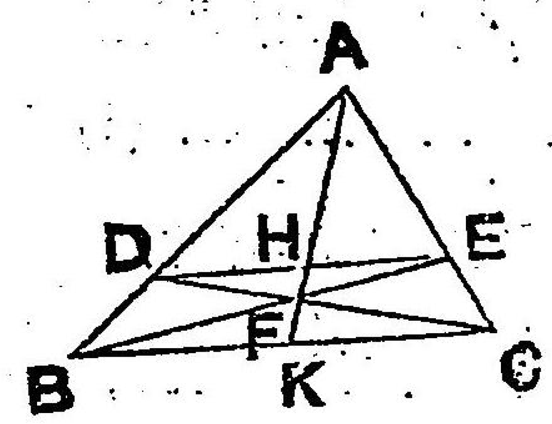
等ナル關係アリ.

注意 比例 (1) ヨリ導キ得ベキ關係ハ皆四點間ノ關係トシテ答ヘ得ベシ. 然レドモ上ノ比例式ハ根本的關係ナルガ故ニ之ヲ答フレバ足ルベシ.

66. 三角形ABCノ底BCニ平行ナル直線DEヲ引キ; AB, AC トソレゾレ D, E ニ於テ交ラシメ; D, C及ビ B, E ヲ結ビ付ケテ其ノ交點ヲ F トナシ, AF ヲ結ビ付ケ, 之ヲ引キ延バシテ DE 及ビ BC ト H及ビ K ニ於テ相交ラシムルトキハ A, H, F, K ハ調和列點ナルコトヲ證セヨ. [37. 陸.士.]

證　H, K ハソレゾレ DE, BC ノ中點ナリ.

[C. 17 題]



故ニ相似三角形ニ依リテ

$$FH : FK = HE : BK$$
$$= DH : BK = AH : AK,$$

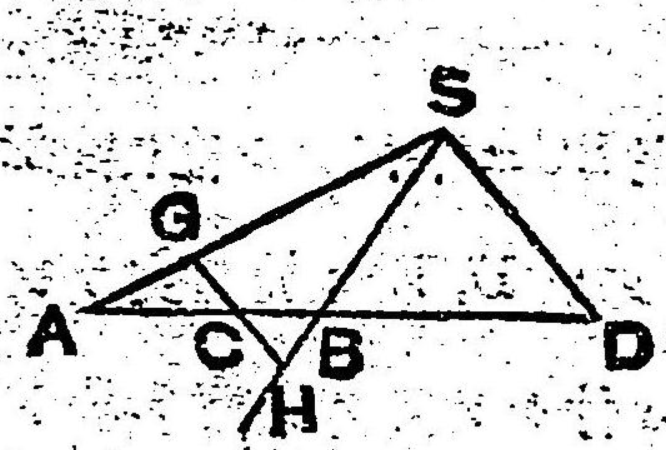
即チ直線 KH ハ F 及ビ A ニ於テ相等シキ比ニ内分及ビ外分セラル.

故ニ定義ニ依リテ A, F, H, K ハ調和列點ナリ.

67. 調和列點 A, B, C, D ヲ含ム直線外ノ一點ヲ S トシ, C ヲ過リ SD ニ平行ニ一直線ヲ引キ, SA, SB トソレゾレ點 G, H ニ於テ相交ラシムルトキハ GC=CH ナルコトヲ證セヨ. [38. 大. 高. 工.]

證　假設ニ依リテ GCH ハ SD ニ平行ナルユエ

$$GC : SD = AC : AD.$$



及ビ $CH : SD = BC : BD.$

然ルニ A, B, C, D ハ調和列點ナルユエ

$$AC : BC = AD : BD,$$

或ハ　$AC : AD = BC : BD.$

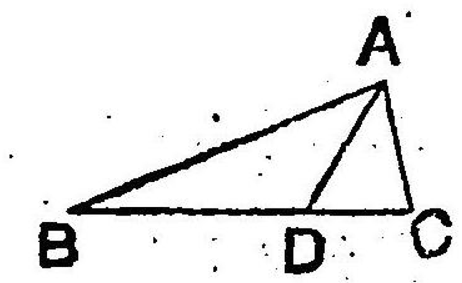
故ニ始ノニツノ比例ニ於ケル右邊ハ相等シ.

従ヒテ　$GC : SD = CH : SD,$

即チ　$GC = CH.$

68. 三角形 ABC ニ於テ角 A ノ二等分線 AD ガ對邊 BC ト D ニ於テ交リ, BD ハ CD ノ 3 倍ナリト云フ, 然ラバ邊 AB ハ邊 AC ノ幾倍ニ相當スルカ. [32. 海. 兵.]

解　假設ニ依リテ AD ハ $B\hat{A}C$ ノ二等分線ナルユエ



$$AB : AC = BD : CD$$
$$= 3 : 1,$$

故ニ　$AB \times 1 = AC \times 3,$

即チ　$AB = 3AC.$

即チ AB ハ AC ノ 3 倍ナリ.

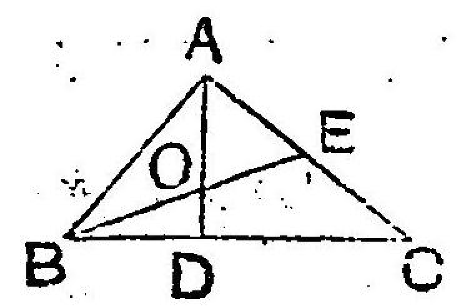
69. 直角三角形 ABC アリ, 直角頂 A ヨリ對邊 BC ニ垂線 AD ヲ引キテ, BC ニ D ニ於テ出會ハシメ, 又角 B ノ二等分線ヲシテ對邊 AC ニ E ニ於テ出會ハシメ AD ト BE トノ交點ヲ O トセバ

$$DO : OA = AE : EC$$

ナルコトヲ證セヨ. [33. 海. 機.]

證　DO, OA ハ三角形 BAD ノ頂角 B ノ二等分線 BO ガ底邊 AD ヲ分ツ二部ナルユエ其ノ比ハ BD, BA ノ比ニ等シ.

即チ　　$DO:OA=BD:BA.$



同様ニ三角形 BAC ニ就キテ

$$AE:EC=BA:BC,$$

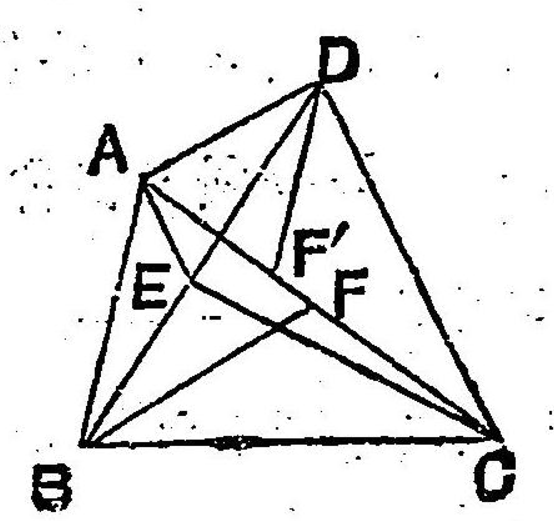
然ルニ $\hat{B}$ ヲ共有スル二ツノ直角三角形 ABD, CBA ガ互ニ相似ナルコトヨリ

$$BD:BA=BA:BC,$$

故ニ　　$DO:OA=AE:EC.$

70. 四邊形ノ一双ノ對角ヲ二等分スル二直線ガ若シ對角線ノ一ツノ上ニテ出會フトキハ他ノ一双ノ對角ヲ二等分スル二直線ハ他ノ對角線ノ上ニテ出會フコトヲ證セヨ.　[31. 海. 機.]

四邊形ヲABCDトシ,一双ノ對角,例ヘバA, Cヲ二等分スル直線ガBD上ノ一點Eニ於テ交ルトキハ他ノ一双ノ對角B, Dノ二等分線ハAC上ノ一點ニ於テ相交ルベシ.



證　B, Dノ二等分線ガACト交ル點ヲソレゾレF, F'トセン.

然ルトキハ　$AB:AD=BE:DE,$

及ビ　$BC:CD=BE:DE.$

故ニ　$AB:AD=BC:CD,$

或ハ　$AB:BC=AD:CD,$

而シテ　$AB:BC=AF:CF,$

$AD:CD=AF':CF'.$

故ニ　$AF:CF=AF':CF'.$

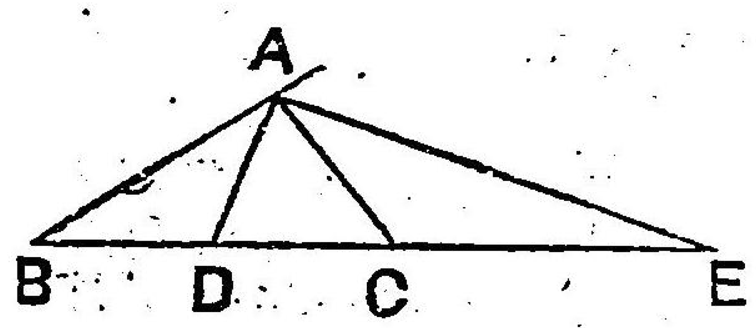
然ルニ直線 AC ヲ同ジ比ニ内分スル點ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル,即チ F ト F' トハ相合セザルベカラズ. 換言スレバ $\hat{B}$, $\hat{D}$ ノ二等分線ハ AC 上ノ一點 F ニ於テ相交ル.

71. 三角形ABCノ頂角A及ビ其ノ外角ノ二等分線ト底邊 BC トノ交點ヲソレゾレ D, E トスレバ

$$\frac{1}{BD}+\frac{1}{BE}=\frac{2}{BC}$$

ナルコトヲ證セヨ.　[37. 商船.]

證　先ヅ二邊 AB ト AC トハ不等ナルコト明カナリ. 如何トナレバ若シ AB=AC ナリトスルトキハ $B\hat{A}C$ ノ外角ノ二等分線 AE ハ BC ニ平行スルユヱ,之ト交ラザレバナリ.



依リテ例ヘバ $AB>AC$ ナリトセヨ.

然ルトキハ D ハ BC ノ上ニアリ, E ハ BC ノ延線

上ニアリ.

而シテ　$BD:CD=AB:AC=BE:CE,$

故ニ　$BD.CE=BE.CD.$

或ハ　$BD(BE-BC)=BE(BC-BD),$

或ハ　$BD.BE-BD.BC=BE.BC-BE.BD.$

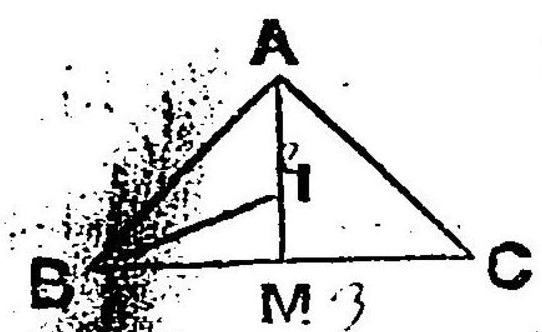
此ノ兩邊ヲ $BC.BD.BE$ ニテ除スレバ

$$\frac{1}{BC}-\frac{1}{BE}=\frac{1}{BD}-\frac{1}{BC},$$

卽チ
$$\frac{2}{BC}=\frac{1}{BD}+\frac{1}{BE}.$$

72. 二等邊三角形アリテ底邊ノ高サニ於ケルハ3ノ2ニ於ケルガ如クナルトキ内心ニテ分タレタル高サノ二部分ノ比如何. [39. 海. 機.]

解 $AB=AC$ ナル二等邊三角形 ABC ヲ所題ノ三角形トセン, 卽チ高サ AM ヲ引ケバ $BC:AM=3:2$ ナルモノトス.



サテ二等邊三角形ニ於テハ頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ハ頂角及ビ底邊ヲ二等分スルユエ, $\hat{B}$ ノ二等分線ト AM トノ交點ヲ I トスレバ I ハ三角形 ABC ノ内心ナリ.

而シテ與ヘラレタル關係ヨリ

$$BC=\frac{3}{2}AM.$$

故ニ
$$BM=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{4}AM.$$

依リテ
$$AB=\sqrt{(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)}$$
$$=\sqrt{\{(\tfrac{3}{4}AM)^2+\overline{AM}^2\}}$$
$$=\sqrt{\frac{25\overline{AM}^2}{4^2}}=\frac{5}{4}AM.$$

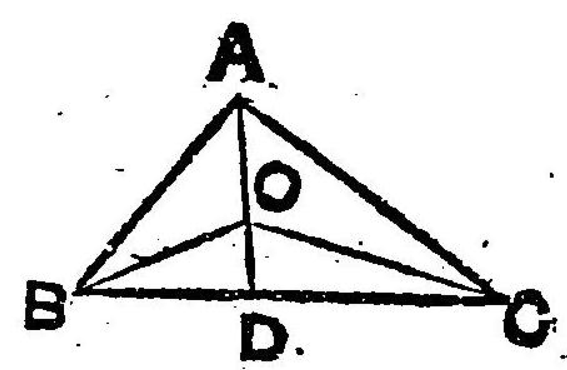
BI ハ三角形 BAM ニ於テ $\hat{B}$ ノ二等分線ナルコトヨリ

$$IA:IM=BA:BM$$
$$=\frac{5}{4}AM:\frac{3}{4}AM=5:3.$$

73. 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ニ交ル點ヲ D, 又内心ヲ O トセバ底邊ト他ノ二邊ノ和トノ比ハ DO ト OA トノ比ニ等シ.

[35. 海. 機.]

證 I. OB, OC ヲ結ビ付ケヨ.



然ルトキハ假設ニ依リテ O ハ内心ナルユエ BO, CO ハソレゾレ $\hat{B}, \hat{C}$ ノ二等分線ナリ.

依リテ
$$\frac{BD}{BA}=\frac{DO}{OA},$$

及ビ
$$\frac{CD}{CA}=\frac{DO}{OA}.$$

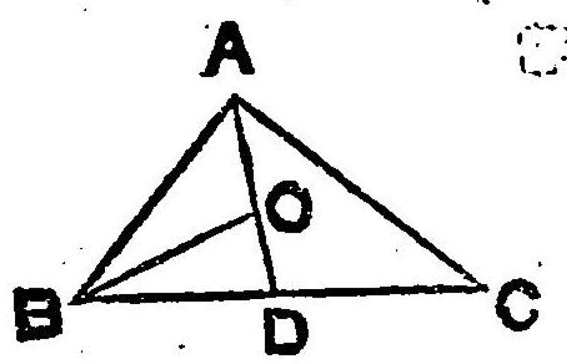
故ニ
$$\frac{BD}{BA}=\frac{CD}{CA}=\frac{DO}{OA}.$$

加比ノ理ヲ適用スレバ

$$\frac{BD+CD}{BA+CA}=\frac{DO}{OA},$$

或ハ
$$\frac{BC}{AB+AC}=\frac{DO}{OA}.$$

證 II, OB ヲ結ビ付ケヨ.



∵ O ハ內心ナルユエ BO ハ $\hat{B}$ ノ二等分線ナリ.

故ニ
$$\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB},$$

合比ノ理ニ依リテ

$$\frac{BD+DC}{DB}=\frac{AC+AB}{AB},$$

即チ
$$\frac{BC}{DB}=\frac{AC+AB}{AB},$$

倚更迭ノ理ニ依リテ

$$\frac{BC}{AC+AB}=\frac{DB}{AB}.$$

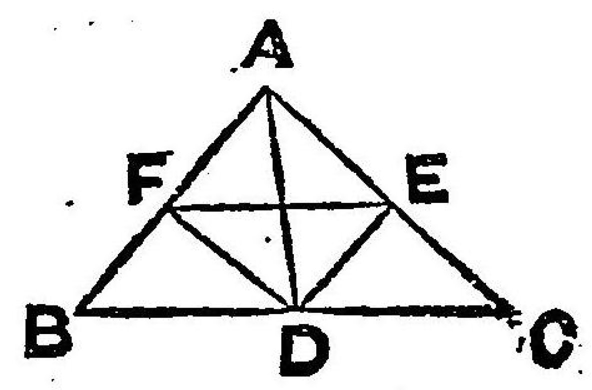
然ルニ
$$\frac{DB}{AB}=\frac{DO}{OA},$$

故ニ
$$\frac{BC}{AC+AB}=\frac{DO}{OA}.$$

74. 三角形 ABC ノ底邊 BC ヲ D ニ於テ二等分シ, 角 ADC 及ビ角 ADB ヲ二等分スル直線ヲ邊 AC 及ビ邊 AB トソレゾレ點 E 及ビ F ニ於テ出會ハシムルトキハ直線 EF ハ BC ニ平行ナルコトヲ證セヨ.

[35. 大. 高. 工., 36. 商船., 40. 盛. 高. 農.]

證 假設ニ依リテ DE ハ三角形 DAC ノ頂角 ADC ノ二等分線ナルユエ



$$EA:EC=DA:DC,$$

同樣ニ三角形 DAB ヨリ

$$FA:FB=DA:DB$$

然ルニ再ビ假設ニ依リテ DC=DB ナルユエ, 上ノ二ツノ比例ノ右邊ハ相等シ.

從ヒテ $EA:EC=FA:FB,$

即チ直線 EF ハ三角形 ABC ノ二邊 AC, AB ヲ相等シキ比ニ內分ス.

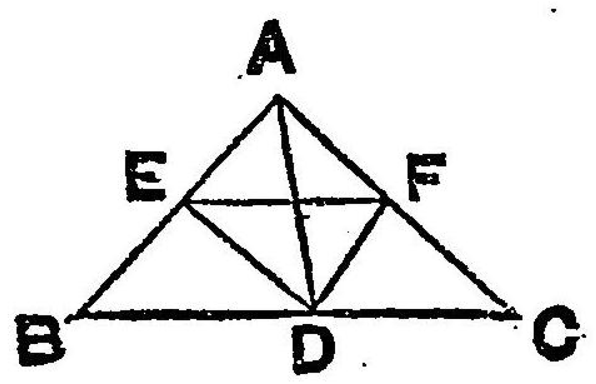
故ニ EF ハ BC ニ平行ナリ.

75. 三角形 ABC ノ底邊 BC ニ平行ナル一ツノ直線 EF ヲ引キ, 二邊 AB, AC トソレゾレ點 E, F ニ於テ交ラシメ, 而シテ E ヲ底邊ノ中點 D ニ結ビ付クルトキハ直線 ED ガ角 ADB ヲ二等分スレバ直線 FD ハ角 ADC ヲ二等分スルコトヲ證セヨ.

[38. 海. 機.]

證 三角形 DAB ニ於テ DE ハ $\hat{D}$ ヲ二等分ス

ルユエ　　$EA:EB=DA:DB.$



假設ニ依リテEFハBCニ平行ナルユエ

$$EA:EB=FA:FC,$$

尙DガBCノ中點ナリト云ヘバ　　$DA:DB=DA:DC,$

故ニ始ノ比例ヲ書キ換フレバ

$$FA:FC=DA:DC.$$

トナル.

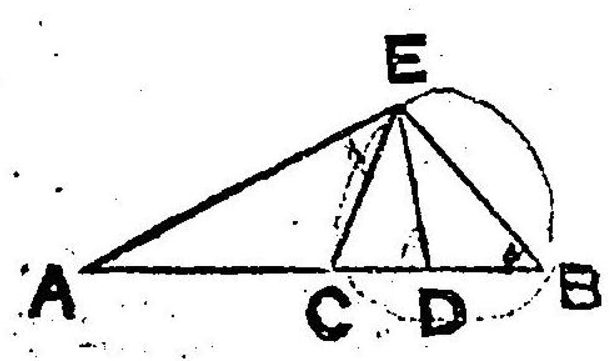
依リテ三角形DACニ就キテDFハ$A\hat{D}C$ヲ二等分ス.

76. 直線AB上ニ二點C, Dヲ設ケテ

$$AB:AD=AD:AC$$

ナラシメ, Aヨリ任意ノ方向ニ一直線AEヲ引キテ之ヲADニ等分シク取リ; BE, CE, DEヲ結ビ付ケタルトキハDEハ$B\hat{E}C$ヲ二等分スルコトヲ證セヨ.　　[38. 商船.]

證 I.　$AB:AD=AD:AC,$



而シテ假設ニ依リテ$AE=AD$ナルユエ

$$AB:AE=AE:AC,$$

然ルニ是等ノ邊ハ頂角Aヲ共有スル二ツノ三角形ABE, AECニ於テ各其ノ頂角ヲ夾ム邊ナリ.

故ニ　　$\triangle ABE \backsim \triangle AEC.$

依リテ　　$\dfrac{EC}{BE}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AC}{AE}$

$$=\frac{AE-AC}{AB-AE}=\frac{AD-AC}{AB-AD}=\frac{DC}{DB}.$$

故ニ EDハ$C\hat{E}B$ヲ二等分ス.

證 II.　假設ニ依リテ

$$AB.AC=\overline{AD}^2=\overline{AE}^2,$$

故ニ AEハCEBヲ過ル圓ニEニ於テ切ス.

依リテ　　$A\hat{E}C=E\hat{B}D,$

又　　$A\hat{E}C+C\hat{E}D=A\hat{E}D$

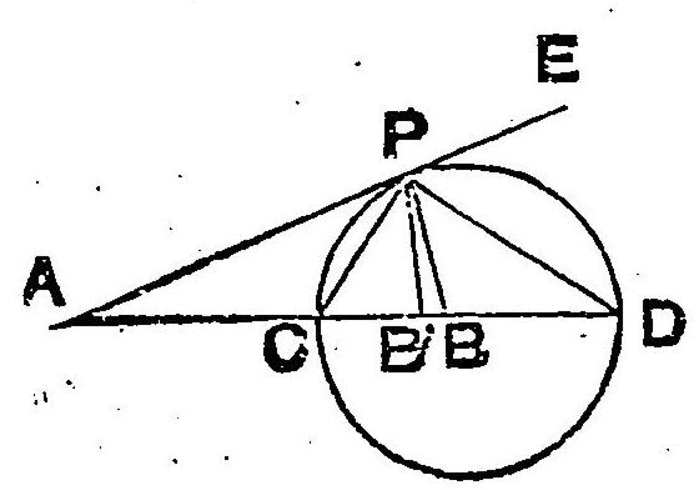
$$=A\hat{D}E=E\hat{B}D+D\hat{E}B,$$

故ニ　　$C\hat{E}D=D\hat{E}B.$

79. 與ヘラレタル二ツノ點ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡如何.

[38. 海. 兵., 山. 高. 商., 39. 商船.]

與ヘラレタル二點A, Bヨリノ距離ガ與ヘラレタル比 $m:n$ $[m>n]$ ニ等シキ如キ點ノ軌跡ヲ求メントス.



解　ABヲC及ビ

Dニ於テソレゾレ內分及ビ外分シ,

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}$$

ナラシムレバC, Dハ何レモ所要ノ軌跡上ノ點ニシテ且定點ナリ.

サテ直線ABノ外ニアル一點Pガ $\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$ ナル要件ニ適ストスレバ

$$\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ
$$\frac{PA}{PB}=\frac{AD}{BD}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルユエ(1)ニ依リテPCハ$\hat{APB}$ヲ二等分シ, (2)ニ依リテPDハ$\hat{APB}$ノ外角EPBヲ二等分ス.

故ニ $\hat{CPD}=\hat{R}$,

從ヒテPハCDヲ徑トスル圓周上ニアリ.

逆ニCDヲ徑トスル圓周上ノ一點ヲPトセヨ. PガC或ハDト一致スルトキハ所題ノ要件ニ適スルコト既ニ明カナリ.

故ニPハC, Dノ外ナル點トス.

然ルトキハ $\hat{CPD}[=\hat{R}]>\hat{PCD}>\hat{APC}$

ナルユエ$\hat{CPB'}=\hat{APC}$ナル如キ直線PB'ヲPCニ關シテPAト反對ノ側ニ引クコトハPB'ガ$\hat{CPD}$內ヲ過リ, CDト或點ニ於テ交ル, 之ヲB'トセン.

依リテ $\frac{PA}{PB'}=\frac{AC}{B'C}$.

且又 $\hat{APC}+\hat{EPD}=\hat{CPD}$ [各ニ$\hat{R}$]

而シテ $\hat{APC}=\hat{CPB'}$, 【作圖】

故ニ $\hat{EPD}=\hat{DPB'}$,

依リテ $\frac{PA}{PB'}=\frac{AD}{B'D}$.

上ノ二ツノ比例式ヨリ

$$\frac{AC}{B'C}=\frac{AD}{B'D},$$

或ハ
$$\frac{AC}{AD}=\frac{B'C}{B'D}\cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ作圖ニ依リテ

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3), (4)ヨリ
$$\frac{B'C}{B'D}=\frac{BC}{BD}.$$

即チ直線CDハ二點B, B'ニ於テ相等シキ比ニ內分セラレタリ.

而シテ此ハB, B'ガ一致スルニアラザレバ不合理ナリ.

然ラバB, B'ハ一致シ, PCハ$\hat{APB}$ノ二等分線ニシテ $\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}$,

即チPハ要件ニ適スル點ナリ.

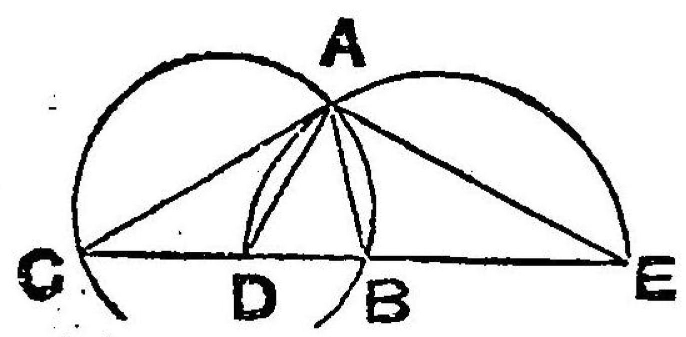
故ニ所要ノ軌跡ハABヲ與ヘラレタル比ニ內分

及ビ外分スル點C,Dヲ結ビ付クル直線ヲ徑トスル圓周ナリ.

注意 $m:n=1$ ナル場合ハ既ニ直線ノ部ニ於テ論ジタルモノニシテ所要ノ軌跡ハ卽チ AB ノ垂直二等分線ナリ.

78. 底邊,頂角及ビ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作レ. [35. 商船.]

解 頂角 A, 底邊 a, 及ビ他ノ二邊ノ比 $b:c$ ヲ知リテ三角形ABCヲ作ラントス.

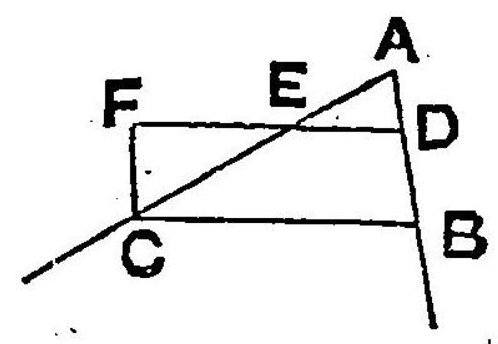


作圖 I. 任意ノ直線 BC ヲ引キ,之ヲaニ等シク取リ, BC ヲ弦トシ $\hat{A}$ ヲ含ム弓形ノ弧 BAC ヲ畫キ, 又 BC ヲ D 及ビ E ニ於テ $b:c$ ナル比ニ內分及ビ外分シ DE ヲ徑トスル圓 DAEヲ作リ前ノ弓形ノ弧ト交ル點ヲ A トスレバ三角形 ABC ハ所要ノモノナルベシ.

證 作圖ニ依リテ BC ハ與ヘラレタル底邊 a ニ等シク,頂角ハ弓形 BAC 內ノ角ニシテ與ヘラレタル角ニ等シク, 又頂點 A ハ圓 DAE, 卽チ二點 C, B ヨリノ距離ノ比ガ $b:c$ ナル點ノ軌跡上

ニアルユヱ AC:AB$=b:c$ ナレバナリ.

作圖 II. 任意ノ位置ニ $\hat{A}$ ニ等シキ角 DAE ヲ作リ, 其ノ一邊ノ上ニ任意ノ一點ヲ取リ, 又他ノ邊ノ上ニ點 D ヲ



AE:AD$=b:c$

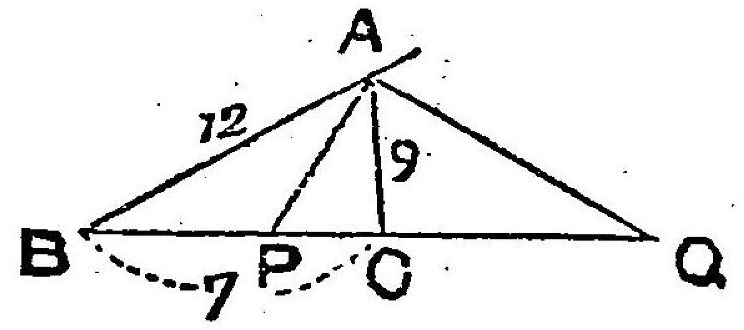
ナル如ク取リ,DE ヲ結ビ付ケ,DE 或ハ其ノ延線上ニ一點 F ヲ DF$=a$ ナル如ク取リ,F ヲ過リテ AD ニ平行ナル直線ヲ引キ, AE 或ハ其ノ延線トノ交點ヲ C トシ, C ヲ過リ ED ニ平行ナル直線ヲ引キ,AD 或ハ其ノ延線トノ交點ヲ B トスレバ三角形 ABC ハ所要ノモノナルベシ.

證 作圖ニ依リテ三角形 ABC ノ頂角 A ハ與ヘラレタル頂角ニ等シク, 且底邊 BC ハ四邊形 DFCB ガ平行四邊形ナルコトヨリ DF, 卽チ a ニ等シク, 且二邊ノ比 AC:AB ハ ED ト CB トガ相平行スルコトヨリ AE:AD, 卽チ $b:c$ ニ等シケレバナリ.

79. 三角形 ABC ノ三ツノ邊AB, BC, CA ノ長サヲソレゾレ1尺2寸,7寸,9寸トシ,又角BAC 及ビ其ノ外角ノ二等分線ガ對邊及ビ其ノ延線ニ

交ル點ヲソレゾレ P, Q トスレバ PQ ノ長サ幾何ナルカ. [32. 海. 機.]

解 三角形ノ一ツノ角及ビ其ノ外角ヲ二等分スル直線ハ對邊ヲ其ノ角ヲ夾ム二邊ニ比例スル如ク分ツコトハ既ニ知レル所ノ定理ナリ.



是ニ依リテ　$PC:PB=AC:AB$

$=9:12=3:4,$

或ハ　$PC:PC+PB=3:3+4,$

即チ　$PC:7=3:7,$

故ニ　$PC=3.$

又　$CQ:BQ=AC:AB=3:4,$

或ハ　$CQ:BQ-CQ=3:4-3,$

即チ　$CQ:7=3:1,$

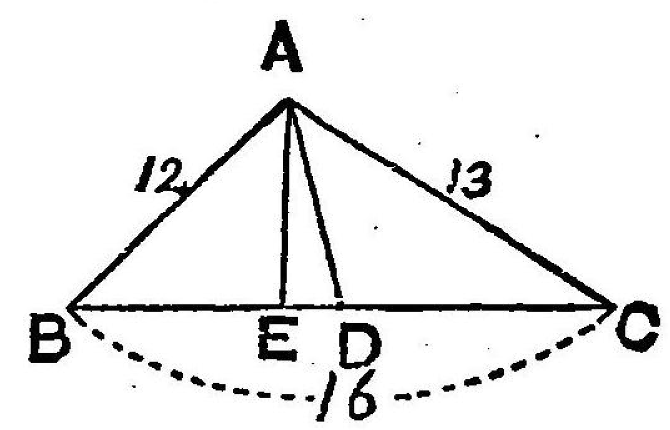
故ニ　$CQ=21,$

依リテ　$PQ=PC+CQ=3+21$

$=24,$ 即チ 2尺4寸ナリ.

80. 三角形ABCノ邊BCノ中點ヲDトシ, 角Aノ二等分線ガBCニ交ル點ヲEトシ; AB, BC, CAノ長サヲソレゾレ12寸, 16寸, 13寸トシテAD,AEノ長サヲ分位マデ計算スベシ. [41. 商船.]

解 D ハ BC ノ中點ナルユヱ



$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{DB}^2)$$ [C. 41 題]

故ニ

$$\overline{AD}^2=\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{BD}^2)$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{12}^2+13^2-2\times 8^2)=\frac{1}{2}\times 185.$$

依リテ　$AD=\sqrt{92.5}\fallingdotseq 9.61,$

即チ 9寸6分[强]ナリ.

次ニ AE ハ $\hat{A}$ ノ二等分線ナルユヱ

$$AB.AC=BE.EC+\overline{AE}^2$$ [35 題]

或ハ　$\overline{AE}^2=AB.AC-BE.EC$

$=12\times 13-BE.EC$ ... ...(1)

然ルニ　$BE:EC=AB:AC,$

或ハ　$BE:BC=AB:AB+AC,$

即チ　$BE:16=12:25$

ヨリ　$BE=\frac{16\times 12}{25},$

同理ニ依リテ　$EC=\frac{16\times 13}{25}.$

BE, EC ノ値ヲ (1) ニ代入スレバ

$$\overline{AE}^2=12\times13-\frac{16\times12}{25}\times\frac{16\times13}{25}$$

$$=\frac{12\times13}{25^2}(25^2-16^2)$$

$$=\frac{12\times13}{25^2}\times369$$

$$=\frac{6^2}{25^2}\times3\times13\times41,$$

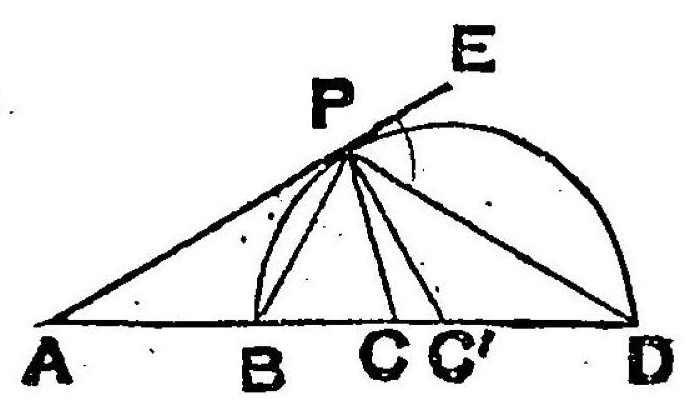
故ニ　$AE=\frac{6}{25}\times\sqrt{1599}\fallingdotseq\frac{6}{25}\times39.989$

$\fallingdotseq9.59$, 卽チ 9寸6分[弱]ナリ.

81. 一直線上ニ三點 A, B, C アリ, 今角 APB ト BPC トガ相等シキ如キ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

[39. 岡. 醫. 專.]

解 (I)　$AB\neq BC$ ナルトキ, 例ヘバ $AB>BC$ トス.



要件ニ適スル點ヲ P トシ; PA, PB, PC ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ三角形 APC ニ於テ $A\hat{P}B=C\hat{P}B$

ナルユヱ　$AP:CP=AB:CB$

$=$(一定ノ比).

故ニ今 AC ヲ D ニ於テ AB:BC ナル比ニ外分スルトキハ P ハ BD ヲ徑トスル圓周上ニアリ.

逆ニ此ノ圓周上ノ任意ノ點ヲ P トシ, P ヲ A, B, C, D ノ各點ニ結ビ付ケ, 又 PB ニ關シテ PA ト反對ノ側ニ $C'\hat{P}B=A\hat{P}B$ ナル如キ直線 PC' ヲ作レ. 然ルトキハ

$$C'\hat{P}B=A\hat{P}B<P\hat{B}C<B\hat{P}D[=\hat{R}]$$

ナルユヱ C'P ハ $B\hat{P}D$ 內ヲ通リ, BD ト交ル, 今其ノ交點ヲ C' トスレバ

$$AP:C'P=AB:C'B\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(1)$$

サテ AP ヲ E ニ引キ延バストキハ

$$A\hat{P}B+E\hat{P}D=\hat{R},$$

及ビ　$B\hat{P}C'+C'\hat{P}D=\hat{R}.$

作圖ニ依リテ　$A\hat{P}B=B\hat{P}C'$

ナルユヱ　$E\hat{P}D=C'\hat{P}D.$

故ニ　$AP:C'P=AD:C'D\quad\ldots\quad\ldots\quad(2)$

(1), (2) ヲ比較シテ

$$AB:C'B=AD:C'D,$$

或ハ　$AB:AD=C'B:C'D\quad\ldots\quad\ldots\quad(3)$

又前ノ作圖ニ依リテ

$$AB:CB=AD:CD,$$

或ハ　$AB:AD=CB:CD\quad\ldots\quad\ldots\quad(4)$

(3), (4) ヲ比較シテ

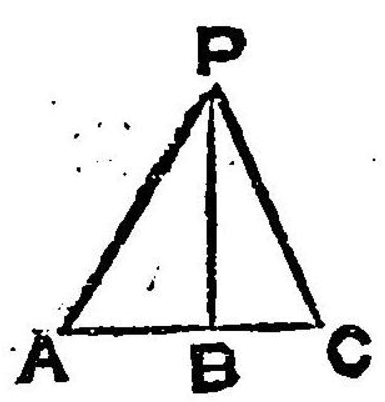
$$C'B : C'D = CB : CD.$$

故ニ C ト C′ トハ相合シ，從ヒテ PC′ ト PC トハ相一致シ $A\hat{P}B = C\hat{P}B$ ナリ．即チ BD ヲ徑トスル圓周上ノ任意ノ點ハ要件ニ適ス．

是ニ依リテ所要ノ軌跡ハ AD ヲ AB : CB ナル比ニ內分及ビ外分スル點 B, D ヲ結ビ付クル直線ヲ徑トスル圓周ナリ．

注意 角 APB ガ角 BPC ニ等シキ如キ點ノ軌跡ハ比 AP : CP ガ一定ナル如キ點ノ軌跡ニ等シキユエ 74 題ヲ引用スレバ本題ノ此ノ場合ハ直チニ明カナリ．

(II) AB=BC ナルトキ．



要件ニ適スル點ヲ P トシ，P ヲ A, B, C ノ各點ニ結ビ付クレバ

$$PA : PC = AB : BC.$$

然ルニ假設ニ依リテ AB=BC ナルユエ PA=PC.

故ニ點 P ハ A, C ヨリ等距離ナル點ノ軌跡，即チ AC ノ中點 B ニ於テ之ニ垂直ナル直線 BP 上ニアリ．

逆ニ BP 上ノ任意ノ一點ヲ P トシ；PA, PC ヲ

結ビ付ケヨ．

然ルトキハ二ツノ三角形 APB, CPB ニ於テ

$$\begin{cases} AB = CB & \text{[假設]} \\ PB \text{ ハ共通} & \\ A\hat{B}P[=\hat{R}] = C\hat{B}P & \end{cases}$$

故ニ $\triangle APB \equiv \triangle CPB$

ニシテ $A\hat{P}B = C\hat{P}B,$

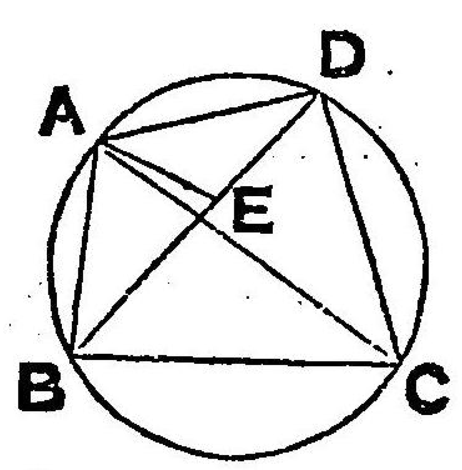
即チ BP 上ノ任意ノ點ハ要件ニ適ス．

依リテ AC ニ垂直ナル直線 BP ハ所要ノ軌跡ナリ．

注意 此ノ場合ハ AP=CP ナル如キ點 P ノ軌跡ニ同ジキユエ A.19 題ヲ引用スレバ本題ハ直チニ明カナリ．

82. 圓ニ內接シ得ベキ四邊形ノ對角線ノ包ム矩形ハ相對スル二邊ノ包ム矩形ノ和ニ等シキコトヲ證セヨ． [30. 一高., 39. 海. 兵.]

圓ニ內接シ得ベキ四邊形ヲ ABCD トスレバ



$$AC.BD = AD.BC + AB.CD$$

ナルベシ．

證 $B\hat{A}C$ ハ $D\hat{A}B$ ノ部分ナルユエ今 $D\hat{A}E = B\hat{A}C$ ナル如キ直線 AE ヲ AD ニ關シテ AB ト同ジ側ニ

引クトキハ AE ハ $B\hat{A}D$ 內ヲ過リ BD ト交ル，其ノ交點ヲ E トス．然ルトキハ二ツノ三角形 ABC, AED ニ於テ A ニ於ケル角ハ相等シク，D, C ニ於ケル角ハ四邊形 ABCD ノ外接圓ヲ畫ケバ同弧上ノ角トシテ相等シ，即チ

△ABC∽△AEDナリ．故ニ對應邊ノ關係トシテ

$$AC : BC = AD : ED,$$

或ハ $$AC.ED = AD.BC.$$

尙二ツノ三角形 ABE, ACD ニ於テ $B\hat{A}E$, $D\hat{A}C$ ハ相等シキ角 BAC, DAE ニ同一ノ角 EAC ヲ共ニ加ヘタルカ,或ハ之ヲ共ニ減ジタルモノナルコト相等シク; $\hat{B}$, $\hat{C}$ ハ同弧上ノ角トシテ相等シ．

故ニ又 $$\triangle ABE \backsim \triangle CAD$$

ニシテ $$AC : CD = AB : BE,$$

或ハ $$AC.BE = AB.CD.$$

依リテ $$AC.ED + AC.BE = AD.BC + AB.CD,$$

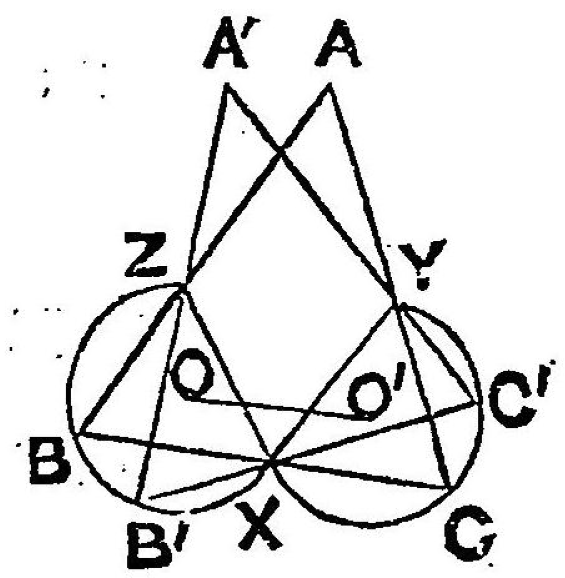
此ノ左邊ハ $$AC(ED+BE) = AC.BD$$

ナルコト $$AC.BD = AD.BC + AB.CD.$$

83. 與ヘラレタル三ツノ點ノ一ツヅツヲ過ル邊ヲ有スル最大ナル等邊三角形ヲ作レ．

[32. 東. 高. 工.]

與ヘラレタル三ツノ點ヲ X, Y, Z トシ; X Y, Z ヲ一ツヅツ過ル邊ヲ有スル最大ナル等邊三角形ヲ作ラントス．



先ヅ所要ノ三角形ノ三邊ハ一ツヅツ X, Y, Z ヲ過ルコト X, Y, Z ハ一直線上ニアルベカラザルコトハ勿論ナリ．

解析 所要ノ三角形 ABC ヲ作リ得タリトセヨ 但 BC ハ X ヲ, CA ハ Y ヲ, AB ハ Z ヲ過ルモノトス．然ルトキハ B, C ハソレゾレ ZX, XY ニ關シテ Y, Z ト反對ノ側ニ ZX, XY ヲ弦トシ $\frac{2}{3}\hat{R}$ ヲ張ル弓形ノ弧ノ上ニアリ．

尙弓形 ZBX, YCX ノ中心ヲソレゾレ O, O′ トスレバ BC ハ二ツノ圓 O, O′ ノ交點 X ヲ過ル倍弦ノ最大ナルモノナルベシ．

故ニ BC ハ OO′ ニ平行ス． [B. 39 題]

而シテ ABC ハ等邊三角形ナルコトヨリ一邊 BC ヲ定メ得バ本形ヲ作リ得ルコト明カナリ．

即チ次ノ作圖法ヲ得．

作圖 ZX, XY ニ關シテソレゾレ Y, Z ト反對

ノ側ニ ZX, XY ヲ弦トシ $\frac{2}{3}\hat{R}$ ヲ張ル弧 ZBX, YCX ヲ作リ，各弓形 ZBX, YCX ノ中心ヲソレゾレ O, O′ トセヨ.

X ヲ過リ OO′ ニ平行ナル直線 BXC ヲ二ツノ弧ノ間ニ引キ BZ, CY ヲ結ビ付ケ，各ヲ引キ延バシテ其ノ交點ヲ A トス.

然ルトキハ三角形 ABC ハ所要ノモノナルベシ.

證　作圖ニ依リテ B, C ニ於ケル角ハ各 $\frac{2}{3}\hat{R}$ ニ等シキユヱ BZ, CY ヲ引キ延バセバ必ズ相交ルベク，且其ノ交點 A ニ於ケル角モ亦 $\frac{2}{3}\hat{R}$ ニシテ三角形 ABC ノ等邊三角形ナルコト明カナリ.

サテ X ヲ過リ圓 O, O′ ノ間ニ BC ト一致セザル倍弦 B′XC′ ヲ作リ; B′Z, C′Y ヲ結ビ付ケ，是等ヲ引キ延バシ其ノ交點ヲ A′ トスレバ三角形 A′B′C′ モ亦前ト同理ニ依リテ等邊三角形ナレドモ其ノ一邊 B′C′ ハ三角形 ABC ノ一邊 BC ヨリ小ナリ.

然ルニ總テノ等邊三角形ハ皆互ニ相似ナルユヱ

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2.$$

茲ニ　$BC > B'C'$,

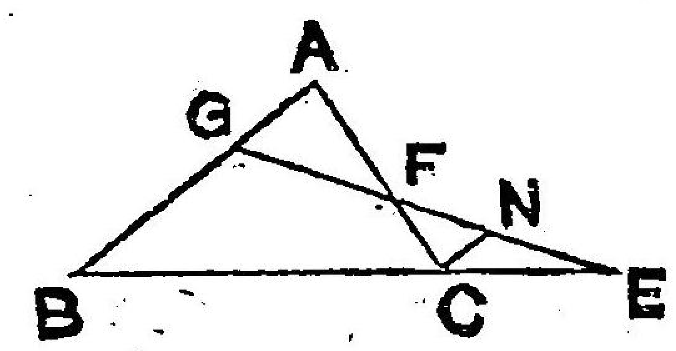
從ヒテ　$\overline{BC}^2 > \overline{B'C'}^2$.

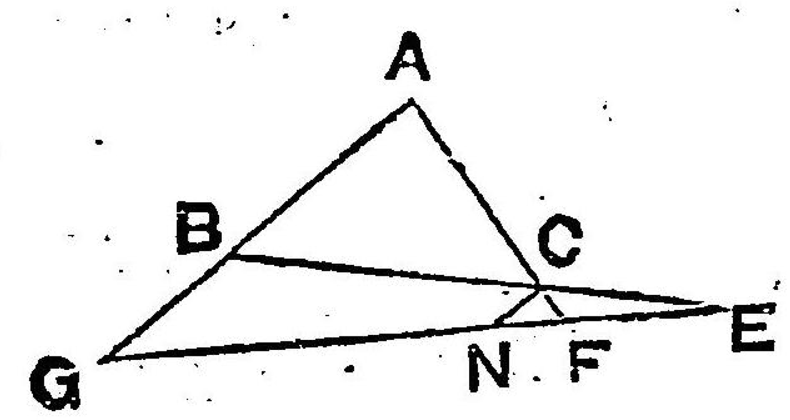
故ニ　$\triangle ABC > \triangle A'B'C'$.

依リテ三角形 ABC ハ所要ノ等邊三角形ナリ.

84. 一ツノ直線ガ三角形 ABC ノ三ツノ邊 BC, CA 及ビ AB ヲ各 E, F 及ビ G ナル三ツノ點ニテ截ルトキハ $\frac{BE}{CE}\cdot\frac{CF}{AF}\cdot\frac{AG}{BG}=1$ ナルコトヲ證セヨ.　[31. 二高.]

證　AB ニ平行ニ CN ヲ引キ，截線トノ交點ヲ N トセヨ.





然ルトキハ相似三角形ニ依リテ

$$\frac{BE}{CE}=\frac{BG}{CN},$$

及ビ $\frac{CF}{AF}=\frac{CN}{AG}$.

此ノ兩式ヲ邊々相乘スレバ

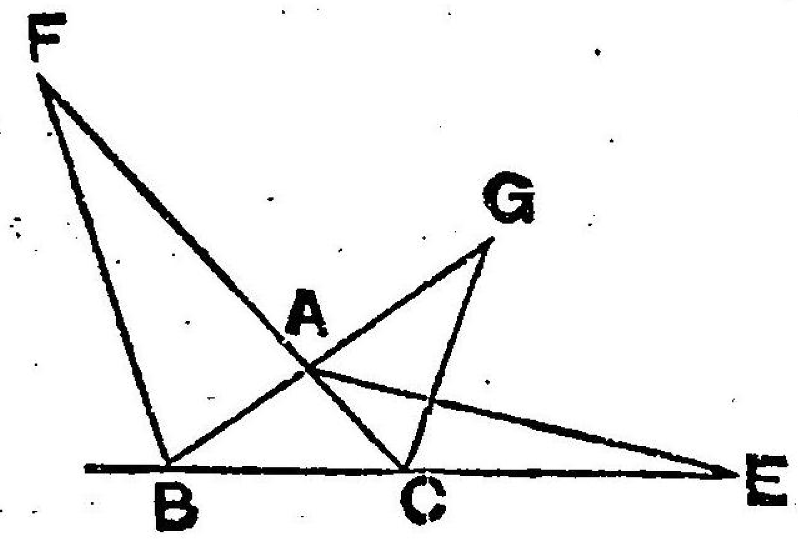
$$\frac{BE}{CE}\cdot\frac{CF}{AF}=\frac{BG}{AG},$$

或ハ　$\frac{BE}{CE}\cdot\frac{CF}{AF}\cdot\frac{AG}{BG}=1.$

85. 三角形ノ各頂角ノ外角ヲ二等分スル直線ガ邊ノ延線ト交ル三ツノ點ハ一直線上ニアルコトヲ證セヨ.　[41. 盛. 高. 農.]

三角形 ABC ノ三ツノ外角ヲ二等分スル直線ヲ

作リ，ソレゾレ邊 BC, CA, AB ノ延線トノ交點ヲ E, F, G トスレバ E, F, G ハ一直線上ニアルベシ.



證 $$\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AC},$$ [64 題注意]
$$\frac{CF}{AF}=\frac{BC}{AB},$$
$$\frac{AG}{BG}=\frac{AC}{BC}.$$
故ニ $$\frac{BE}{CE}\cdot\frac{CF}{AF}\cdot\frac{AG}{BG}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1.$$
故ニめねらすノ定理[84題]ノ逆ニ依リテ E,F,G ハ一直線上ニアリ.

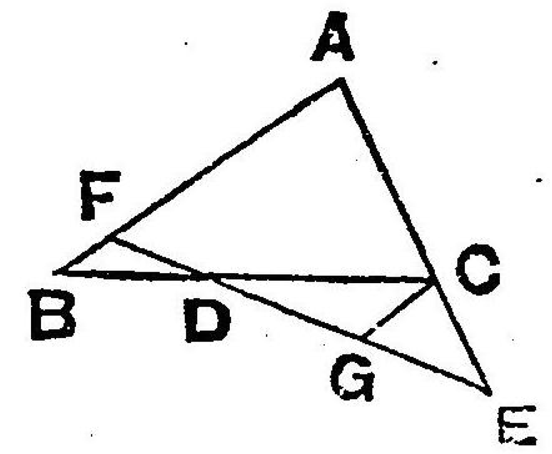
86. 一直線 DEF ガ三角形ノ邊 BC, CA, AB トソレゾレ D,E,F ニ於テ交リ AB 及ビ AC ト相等シキ角ヲナストキハ

BD : CD = BF : CE

ナルコトヲ證セヨ. [37. 海. 兵.]

證 C ヲ通リテ AB ニ平行ナル直線 CG ヲ引キ EF トノ交點ヲ G トスレバ

$$C\hat{G}E=A\hat{F}E$$

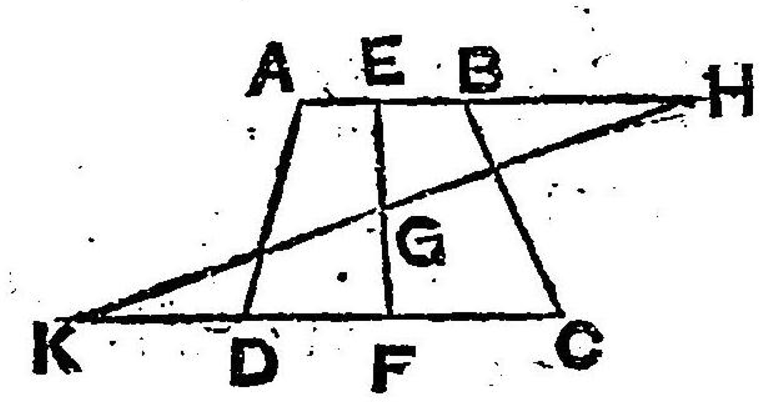


$$=A\hat{E}F \quad \text{[假設]}$$
$$=C\hat{E}G$$
ナルユヱ CG=CE,
故ニ相似三角形ニ依リテ

BD : CD = BF : CG = BF : CE.

87. 梯形 ABCD ノ平行ナル二邊 AB, CD ヲソレゾレ H, K ニ引キ延バシ BH=CD, DK=AB ナラシメ; H,K ヲ結ビ付ケ; AB, CD ノ中點 E, F ヲ結ビ付ケタル直線ト G ニ於テ交ラシムルトキ AB=7, CD=9, EF=8 ナラバ EG ノ長サ如何. [38. 商船.]

解 假設ニ依リテ ABH ∥ CDK ナルユヱ二ツノ三角形 EHG,FKG ハ等角ニシテ, 從ヒテ互ニ相似ナルコト明カナリ.



故ニ EH : FK = EG : GF,
或ハ EH : EH+FK = EG : EG+GF
= EG : EF.

與ヘラレタル數ニ依リテ

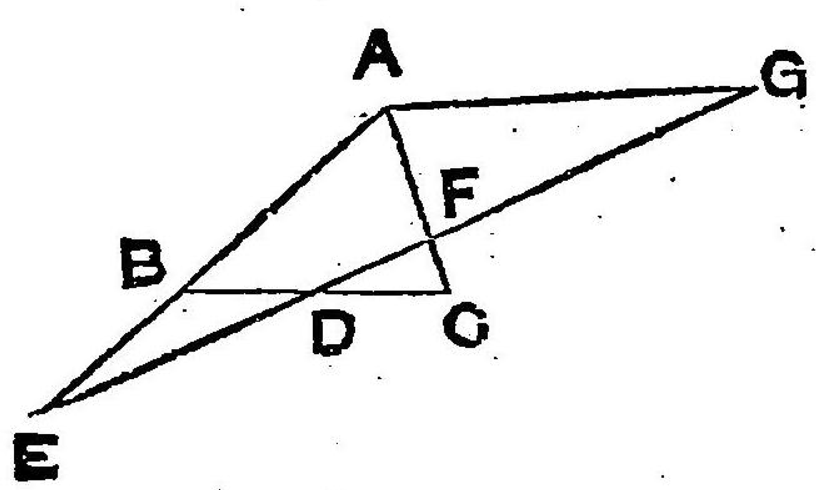
$$EH=EB+BH=\frac{AB}{2}+CD$$
$$=\frac{7}{2}+9=\frac{25}{2}.$$
及ビ $$FK=FD+DK=\frac{CD}{2}+AB$$
$$=\frac{9}{2}+7=\frac{23}{2}.$$
又 $$EF=8.$$
故ニ上ノ比例ハ次ノ如クナルベシ.

即チ $$\frac{25}{2}:\frac{25}{2}+\frac{23}{2}=EG:8,$$
之ヨリ $$EG=4\frac{1}{6}$$
ヲ得.

88. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ中點 D ヲ過リテ直線 EDFG ヲ引キ; AB, BC, 若シクハ其ノ延線ト E, F ニ於テ交ラシメ BC ニ平行ナル直線 AG ト G ニ於テ交ラシムルトキハ

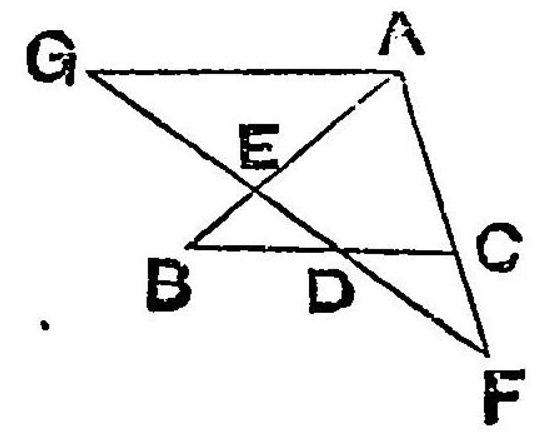
$$EG:ED=FG:FD$$

ナルコトヲ證セヨ. [37. 商船.]



證 相似三角形ニ依リテ

$$EG:ED$$
$$=AG:BD$$
$$=AG:CD$$



[假設ニ依リテ

$$BD=CD$$

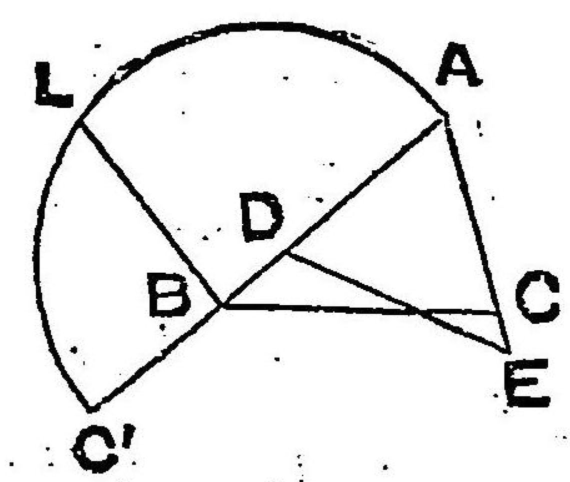
ナルニヨ]

$$=FG:FD.$$

89. 任意ノ三角形ヲ與ヘ，之ト等シキ面積ヲ有シ且頂角ハ其ノ三角形ノ一ツノ角ト相等シキ如キ二等邊三角形ヲ作レ.

[39. 名.高.工., 42. 陸.士.候.]

任意ノ三角形ヲ ABC トシ, 之ト等シキ面積ヲ有シ, 且頂角ハ三角形 ABC ノ一ツノ角 A ニ等シキ如キ二等邊三角形ヲ作ラントス.



作圖 AB, AC ノ中, 一邊, 例ヘバ AB ヲ C′ ニ引キ延バシテ BC′=AC ナラシメ, AC′ ヲ徑トシテ半圓ヲ畫キ, B ニ於テ AC′ ニ垂線 BL ヲ引キ, 半圓ト L ニ於テ交ラシメヨ. 而シテ AB, AC [必要ナラバ其ノ延線] 上ニソレゾレ點 D, E ヲ AD=AE=BL ナル如ク取リ, DE ヲ結ビ付クレバ三角形 ADE ハ所要ノ三角形ナルベシ.

證　先ヅ三角形 ADE ハ AD=AE ナル二等邊三角形ニシテ，且其ノ頂角 A ハ三角形 ABC ノ一角ト共通，卽チ相等シ．而シテ一角ガ相等シキ二ツノ三角形ノ比ハ其ノ角ヲ夾ム二邊ノ積ニ比例スルユヱ

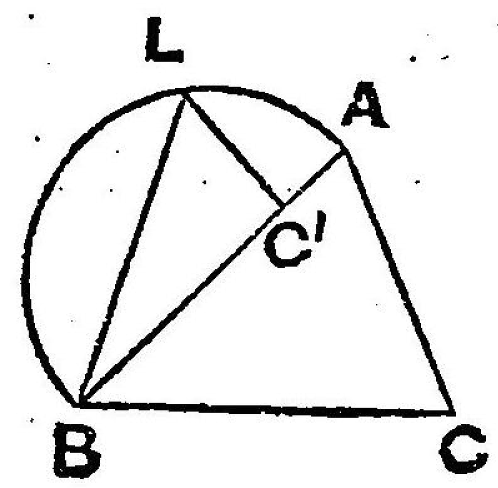
$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{AD.AE}{AB.AC}=\frac{BL.BL}{AB.AC}=\frac{\overline{BL}^2}{AB.AC}.$$

然ルニ　　$\overline{BL}^2=AB.BC'$,

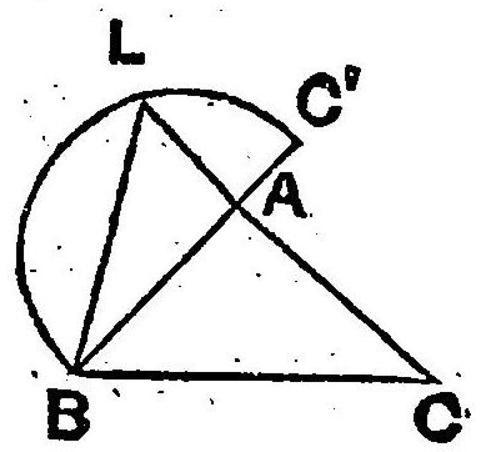
故ニ　　$\triangle ADE=\triangle ABC$.

卽チ三角形 ADE ハ所要ノ三角形ナリ．

注意　BL ヲ求ムルニ AB>AC ナルトキハ



BC′ ヲ BA ノ上ニ取リ，C′ ニ於テ AB ニ垂線 C′L ヲ引キ，AB ヲ徑トスル圓ト L ニ於テ交ラシメ，BL ヲ結ビ付クレバ可ナリ．



又 AB<AC ナルトキハ BA ノ延線上ニ C′ ヲ取リ，A ニ於テ BC′ ニ垂線 AL ヲ引キ，BC′ ヲ徑トスル半圓周ト L ニ於テ交ラシメ，BL ヲ結ビ付クルモ可ナリ．[C. 24題ヲ見ヨ].

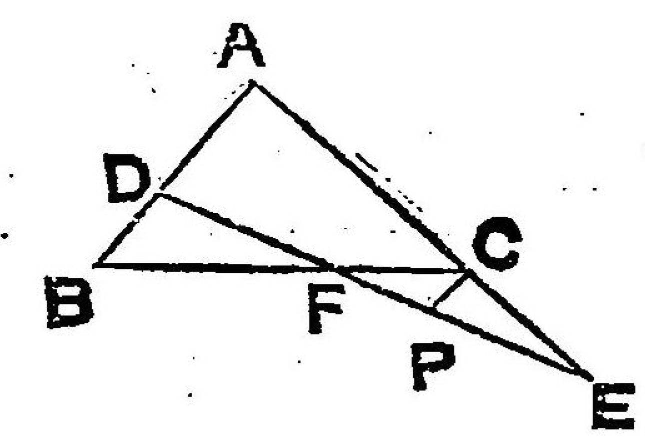
90.　三角形 ABC ノ邊 AB 上ニ點 D，AC ノ

延線上ニ點 E ヲ取リ，C ヲ過リ AB ニ平行ニ CP ヲ引キ DE ト點 P ニ於テ相交ラシメ

$$AB:BD=AD:CP$$

ナル關係ヲ有セシムルトキハ三角形 ADE ハ ABC ニ等シキコトヲ證セヨ．　[36. 商船.]

證　二ツノ三角形ニ於テ其ノ一角ガ相等シケレバ二ツノ三角形ノ面積ハ其ノ角ヲ夾ム二邊ノ積ニ比例スト云フコトハ既ニ知レル所ノ定理ナリ．是ニ依リテ



$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{AD.AE}{AB.AC}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{AE}{AC}.$$

然ルニ與ヘラレタル關係，及ビ CP ガ AB ニ平行ナルコトニヨリ　$\frac{AB}{BD}=\frac{AD}{CP}=\frac{AE}{CE}$,

或ハ　$$\frac{AB}{AB-BD}=\frac{AE}{AE-CE}.$$

卽チ　$$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}.$$

故ニ上ノ比例ハ

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{AB}{AD}=1$$

トナル．卽チ　$\triangle ADE=\triangle ABC$.

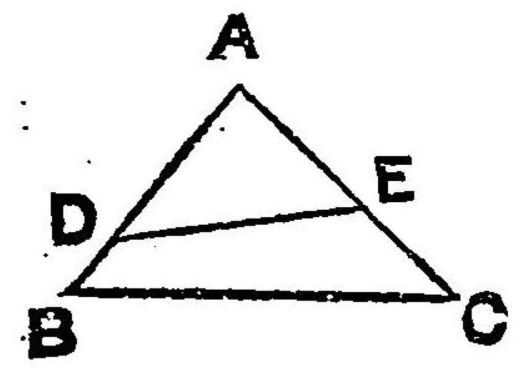
91. 三角形ABCノ二邊AB, ACノ上ニ

$$BD=\frac{1}{4}AB,\quad CE=\frac{2}{5}AC$$

ノ如ク,ソレゾレ點D, Eヲ取リテ之ヲ結ビ付クルトキハ三角形ABCト四角形BCEDトノ面積ノ比如何.　[41. 商船.]

解　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\frac{AB.AC}{AD.AE}$$

$$=\frac{AB.AC}{\frac{3}{4}AB.\frac{3}{5}AC}=\frac{20}{9}.$$



而シテ四邊形BCED

$$=\triangle ABC-\triangle ADE$$

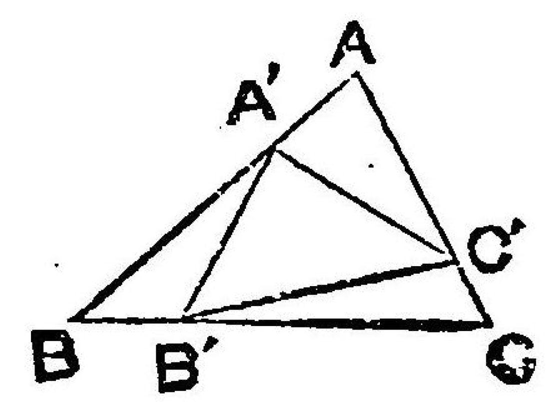
ナルユエ　$$\frac{\triangle ABC}{四邊形BCDE}=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC-\triangle ADE}$$

$$=\frac{20}{20-9}=\frac{20}{11}.$$

92. 三角形ABCノ邊AB上ニ$\frac{1}{3}$ABニ等シクAA'ヲ取リ,邊BC上ニ$\frac{1}{4}$BCニ等シクBB'ヲ取リ,邊CA上ニ$\frac{1}{5}$CAニ等シクCC'ヲ取リテ三角形A'B'C'ヲ作ルトキ,三角形A'B'C'ト三角形ABCトノ面積ノ比ヲ求メヨ.　[42. 東.高.工.]

解　$$\frac{AA'}{AB}=\frac{1}{3},\quad \frac{AC'}{AC}=\frac{AC-CC'}{AC}=\frac{4}{5}.$$

ナルユエ　$$\frac{\triangle AC'A'}{\triangle ABC}=\frac{AA'.AC'}{AB.AC}$$



$$=\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}=\frac{16}{60},$$

同樣ニ　$$\frac{\triangle BA'B'}{\triangle ABC}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}=\frac{10}{60},$$

及ビ　$$\frac{\triangle CB'C'}{\triangle ABC}=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}=\frac{9}{60}.$$

邊々相加フレバ

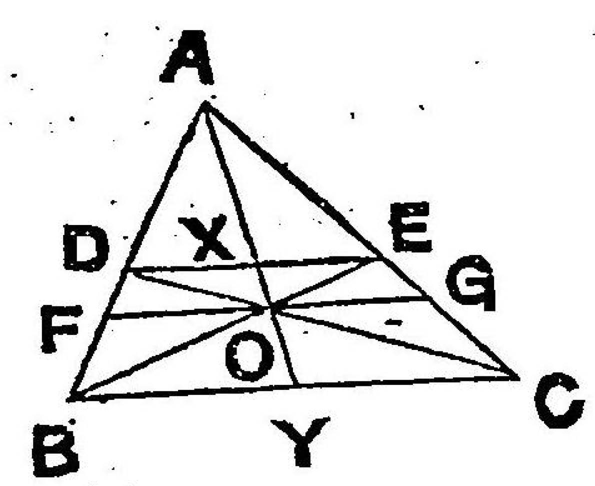
$$\frac{\triangle AC'A'+\triangle BA'B'+\triangle CA'C'}{\triangle ABC}=\frac{16+10+9}{60}=\frac{7}{12},$$

故ニ　$$\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{\triangle ABC-\Sigma\triangle AC'A'}{\triangle ABC}$$

$$=\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12}.$$

93. Dハ三角形ABCノ邊AB上ノ點,EハAC上ノ點ナリ. 今D, EガAB, ACヲ何レモ比3:2ニ分ツトキハBE, CDハ各他ヲ比5:3ニ分ツコトヲ證セヨ.　[37. 水.講.]

證　直線DEハ三角形ABCノ二邊AB, ACヲ同ジ比3:2ニ分ツユエDEハBCニ平行ス. 又BE, CDノ交點ヲOトシ, AOヲ結ビ付ケ; DE, BCトノ交點ヲソレゾレX, Yトシ, 先ヅX, YハソレゾレDE, BCノ



中點ナルコトヲ證セン.

サテ O ヲ過リ BC ニ平行ナル直線 FOG ヲ AB, AC ノ間ニ引ケ. 然ルトキハ DE, FG, BC ハ作圖及ビ假設ニ依リテ皆相平行スルユヱ

$$FO:BC=DF:DB$$
$$=EG:EC$$
$$=GO:BC,$$

故ニ　$FO=GO.$

而シテ　$FO:DX=AO:AX=GO:EX$

ヨリ　$DX=EX.$

同樣ニシテ　$BY=CY.$

次ニ　$\triangle BOY \backsim \triangle XOE$

ナルユヱ　$BO:OE=BY:EX=CY:EX$

$$=AC:AE=3+2:3=5:3.$$

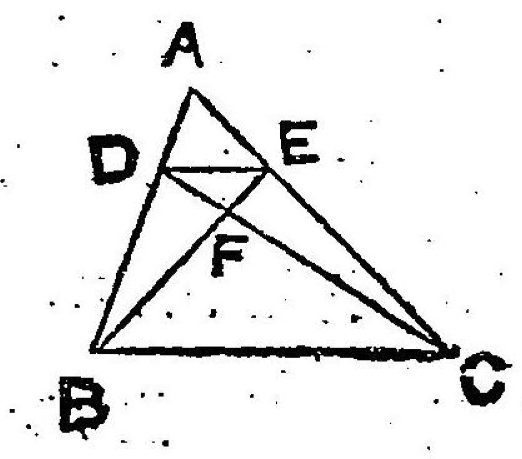
同樣ニシテ　$CO:OD=5:3$

ナルコトヲ證シ得ベシ.

94. 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ二點 D, E ヲ取リ; AD, AE ヲソレゾレ AB, AC ノ三分ノ一ニ等シクスルトキハ BE, CD ハ互ニ其ノ四分ノ一ノ點ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ.

[35. 商船.]

證 BE, CD ノ交點ヲ F トシ, DE ヲ結ビ付ケヨ. 假設ヨリシテ



$AD:DB=1:2=AE:EC$

ナルユヱ DE ハ BC ニ平行ス.

故ニ　$\triangle DFE \backsim \triangle CFB.$

依リテ　$FE:FB=DE:BC$

$$=AD:AB=1:3,$$

或ハ　$FE:FE+FB=1:1+3,$

即チ　$FE:BE=1:4,$

故ニ　$FE=\frac{1}{4}BE.$

從ヒテ　$FD=\frac{1}{4}CD$

ナルコト明カナリ.

95. 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ノ上ニソレゾレ D, E ナル點ヲ取リテ

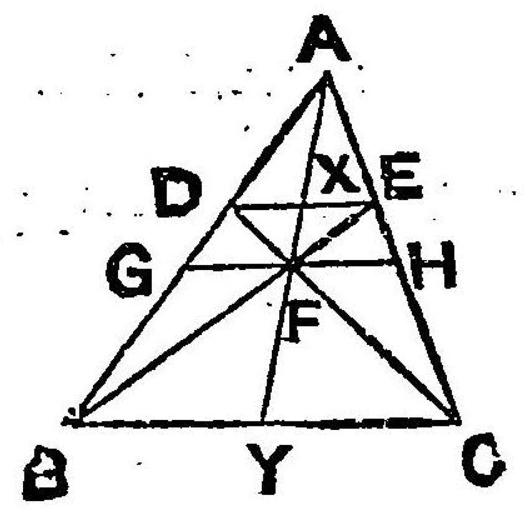
$$AD:DB=AE:EC=1:2$$

ナラシメ; CD, BE ヲ結ビ付ケテ其ノ交點ヲ F トシ, F ヲ過リテ底邊 BC ニ平行シテ GH ヲ二邊ノ間ニ引クトキハ　$GF=FH,$

且 G, H ハソレゾレ AB, AC ノ中點ナリ.

[39. 商船.]

證 DEハ三角形ABCノ二邊AB, ACヲ同ジ比1:2ニ分ツユヱ第三邊BCニ平行ナリ，即チDE, GH, BCハ皆相平行ス．故ニ相似三角形ニ依リテ



$$GF:BC=DF:DC$$
$$=EH:EC=FH:BC,$$

故ニ $GF=FH.$

尙又 $DX:GF=XE:FH$

ヨリ $DX=XE$

ナルコト明カナリ．

依リテ $BG:GD=BF:FE=BY:XE$
$$=BY:DX=AB:AD$$
$$=1+2:1=3:1,$$

或ハ $BG:BG+GD=3:3+1,$

即チ $BG:BD=3:4,$

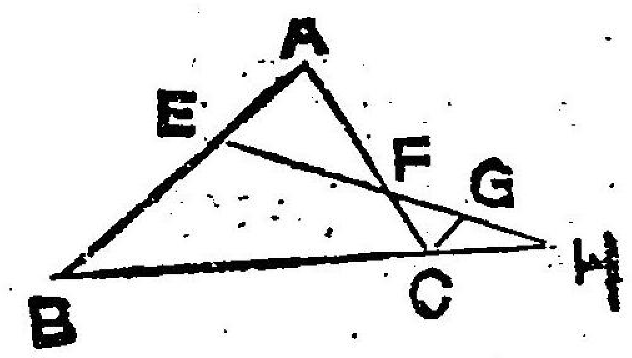
或ハ $BG=\frac{3}{4}BD$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{2+1}AB=\frac{1}{2}AB,$$

即チGハABノ中點ナルユヱ，GHガBCニ平行ナルコトヨリHハACノ中點ナリ．

96. 三角形ABCノ二邊AB, ACノ上ニソレ

ゾレニ點E, Fヲ取リBEハEAノ二倍，AFハFCノ二倍ナラシメヨ．EF及ビBCノ延線ガ相交ル點ヲHトセバBHノCHニ於ケル比如何． [40. 海. 機.]

解 Cヲ過リテBAニ平行ナル直線ヲ引キ，FHトノ交點ヲGトセヨ．然ルトキハ相似三角形ニ依リテ

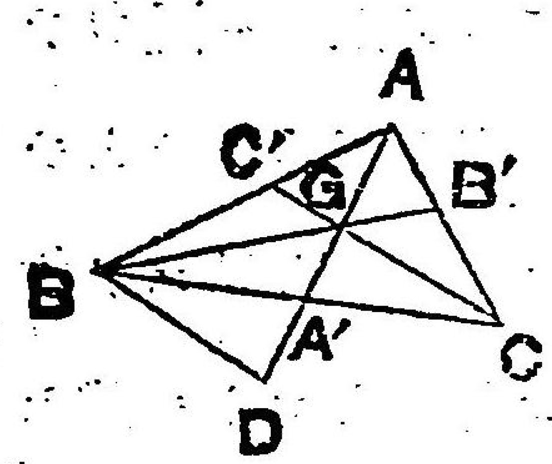


$$BH:CH=BE:CG$$
$$=2EA:CG \quad \text{[假設]}$$
$$=2AF:CF=2(2CF):CF$$
$$=4:1.$$

97. 一ツノ三角形ト其ノ三ツノ中線ヲ邊トシテ作レル三角形トノ面積ノ比ヲ求メヨ．

[37. 東. 高. 工.]

解 三角形ヲABC, 其ノ三ツノ中線ヲAA', BB', CC'トシ，三角形ABCト此ノ三ツノ中線ヲ邊トスル三角形Mトノ面積ノ比ヲ求メントス．



三ツノ中線AA', BB', CC'ノ交點ヲGトシ，GA'

ヲ D ニ引キ延バシテ A'D＝GA' ナラシメ, BD ヲ結ビ付ケヨ．然ルトキハ

$$\triangle BA'D \equiv \triangle CA'G \qquad [二邊ト夾角]$$

ニシテ　$BD=CG.$

是ニ依リテ　$\triangle GBD=\triangle GBC,$

而シテ三角形 GBD ノ三邊ハ三角形 ABC ノ三ツノ中線ノ各三分ノ二ニ等シキコト明カナリ．

故ニ三角形 GBD ハ三角形 M ニ相似ニシテ

$$\frac{\triangle GBD}{\triangle M}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:1^2=\frac{2^2}{3^2}.$$

又三角形 ABC ト三角形 GBD ニ等シキ三角形 GBC トヲ比較スルニ底邊 BC ハ共通ニシテ, 頂點 A, G ヨリノ高サノ比ハ AA' ト GA' トノ比, 即チ 3:1 ニ等シ

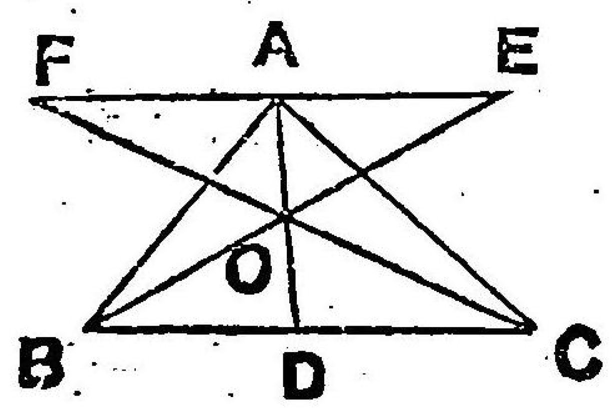
故ニ　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle GBD}=\frac{3}{1}.$$

依リテ　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle GBD}\cdot\frac{\triangle GBD}{\triangle M}=\frac{3}{1}\cdot\frac{2^2}{3^2},$$

即チ　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle M}=\frac{4}{3}.$$

98. 三角形 ABC ノ中線 AD ノ上ニ一點 O ヲ取リ; BO, CO ヲ結ビ付ケ, 之ヲ引キ延バシテ A ヲ通リ BC ニ平行ナル直線 EAF ト點 E, F ニテ交ラシムルトキハ AE ハ AF ニ等シキコトヲ證セヨ．　[36. 商船.]

證 相似三角形ニ依リテ



$$BD:AE=DO:OA$$
$$=CD:AF.$$

假設ニ依リテ $BD=CD$ ナルユヱ $AE=AF.$

99. 任意ノ三角形アリテ其ノ各邊ノ中點ヲ聯結シテ中點三角形ヲ作リ, 又此ノ中點三角形ノ各邊ノ中點ヲ聯結シテ中點三角形ヲ作リ, 順次ニ此ノ方法ヲ繰返シテ中點三角形ノ數ガ無窮大トナルトキハ總テノ三角形ノ面積ノ和ハ幾何ナルカ．　[42. 大. 高. 工.]

解 任意ノ三角形ノ中點三角形ノ面積ハ元ノ三角形ノ面積ノ四分ノ一ニ等シ [A. 42題注意] 依リテ始ノ三角形ヲ面積ノ單位, 即チ 1 トスレバ次第ニ續ク中點三角形ハ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{4^3}$,……ニテ表ハサル, 即チ $\frac{1}{4}$ ヲ公比トスル等比級數ナリ．故ニ其ノ無窮項ノ和ハ

$$\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3},$$

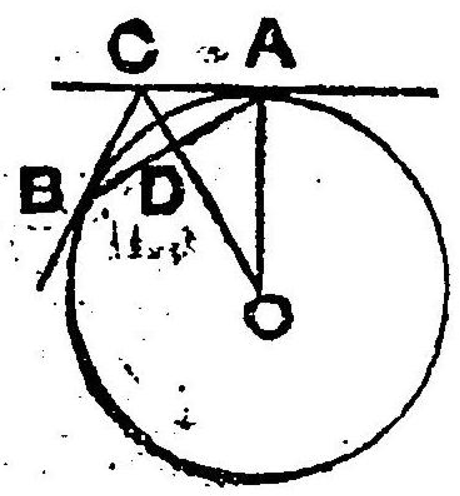
即チ所要ノ和ハ始ノ三角形ノ $1\frac{1}{3}$倍ニ等シ．

100. 圓ニ內接スル正六角形ノ周圍ト外切スル正六角形ノ周圍トヲ其ノ圓ノ徑ニ比較スベシ．

[39. 商船.]

解 半徑rナル圓ニ內接スル正六角形ノ一邊ハ矢張リrナルユヱ內接正六角形ノ周圍ト圓ノ徑トノ比ハ　$6r:2r=3:1.$

次ニ半徑rナル圓ニ外切スル正六角形ノ一邊ヲ求メントス.



サテ此ノ圓ノ中心ヲOトシ，內接正六角形ノ一邊ABノ兩端A, Bニ於ケル切線ノ交點ヲCトスレバACハ外切正六角形ノ一邊ノ半分ニ等シキコト明ナリ.

今OA, OCヲ結ビ付ケ，OCトABトノ交點ヲDトスレバ$AD=\frac{1}{2}r$ニシテ$OD=\frac{\sqrt{3}}{2}r.$

然ルニ相似三角形ニ依リテ

$$AC:AO=AD:OD=1:\sqrt{3}$$

ナルユヱ　$AC=\frac{1}{\sqrt{3}}r,$

故ニ外切正六角形ノ一邊ハ$\frac{2}{\sqrt{3}}r$ナリ.

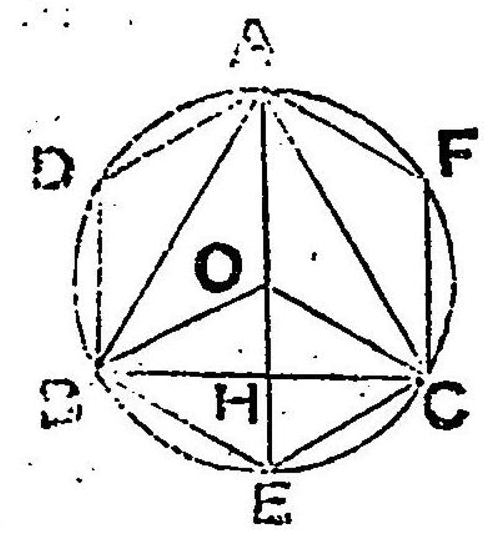
故ニ外切正六角形ノ周圍ト圓ノ徑トノ比ハ

$$\frac{2}{\sqrt{3}}r\times 6:2r=2\sqrt{3}:1.$$

101. 同一ノ圓ニ內接セル六邊形ト正三角形

トノ一邊上ニ作レル二ツノ正方形ノ面積ヲ比較セヨ.　[34. 海. 兵.]

解 圓ノ中心ヲOトス. 圓周上ノ任意ノ一點Aヨリ始メ，順次ニ半徑ニ等シキ長サノ弦AD, DB, BE, EC, CFヲ引キ，FAヲ結ビ付クレバFAモ亦半徑ニ等シキ弦ニシテADBECFハ內接正六角形ナルコトハ既ニ知ル所ナリ. 從ヒテABCハ內接正三角形ナルコト明カナリ.



サテAEヲ結ビ付クレバAEハ此ノ圓ノ徑ニシテOBECハ各邊ガrニ等シキ四邊形，即チ菱形ナルユヱOEトBCトノ交點ヲHトスレバHハOEノ中點ニシテAOHハBCニ垂直ナリ.

故ニAHハ三角形ABCノ高サニシテ

$$AO+OH=r+\frac{r}{2}=\frac{3}{2}r.$$

又$A\hat{B}E=\hat{R}$ナルユヱ

$$\overline{AB}^2=AE.AH=2r.\frac{3}{2}r=3r^2.$$

依リテ內接正六邊形ト正三角形トノ一邊上ニ作レル二ツノ正方形ノ比ハ

$$r^2:3r^2=1:3.$$

注意 ABE ガ半圓ナルコトヨリ $\hat{ABE}=\hat{R}$,

故ニ $\overline{AB}^2=(2r)^2-r^2=3r^2$.

102. 等圓ニ內接スル正三角形ト正六角形トノ面積ノ比ヲ求メヨ. [36. 商船.]

解 前題ノ圖ニ於テ OADB, OBEC, OCFA ハ皆各邊ガ圓ノ半徑ニ等シキ菱形ナルユエ

$$\text{正三角形 ABC}=\Sigma\triangle OAB=\frac{1}{2}\Sigma\square OADB$$
$$=\frac{1}{2}(\text{正六角形 ADBECF}),$$

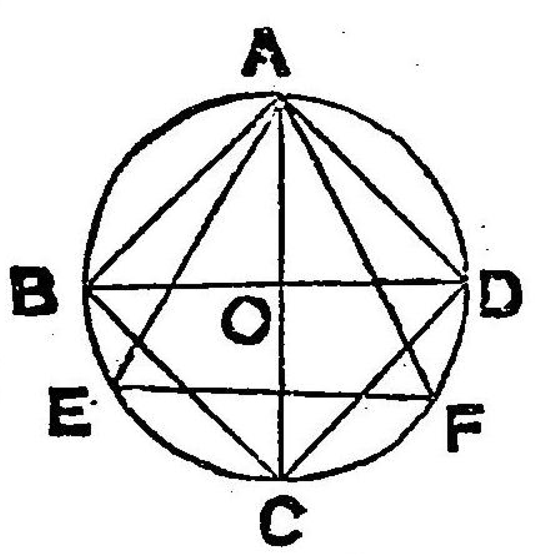
故ニ

$$\text{正三角形 ABC}:\text{正六角形 ADBECF}=1:2.$$

103. 正方形及ビ等邊三角形ヲ同ジ圓ニ內接シテ作ルトキ正方形ノ一邊ノ長サヲ10尺トスレバ等邊三角形ノ一邊ノ長サ幾尺ナルカ.

[34. 陸. 士., 37. 盛. 高. 農.]

解 圓Oニ內接スル正方形ヲABCD, 等邊三角形ヲ AEF [但AOC⊥EF] トシ, AB=10尺 ナルトキ AE ノ長サヲ求メントス.



サテ三角形 AOB ニ於テ O ニ於ケル角ハ直角ナルユエ $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$, 即チ $2(\text{半徑})^2=10^2$,

或ハ $(\text{半徑})^2=5^2\times2$,

故ニ前題ノ證ニ依リテ

$$\overline{AE}^2=3\,(\text{半徑})^2=3\times5^2\times2,$$

或ハ $AE=5\sqrt{6}\fallingdotseq5\times2.449$

$=12.245$, 即チ約1丈2尺2寸5分ナリ.

104. 圓ノ面積及ビ周圍ヲソレゾレ其ノ內接正六角形ノ面積及ビ周圍ニ比較スベシ.

[41. 商船.]

解 半徑 R ナル圓ノ面積ハ πR^2 ニシテ, 其ノ周ハ $2\pi R$ ナリ.

又內接正六邊形ノ面積ハ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R\,.\,\frac{R}{2}\,.\,6=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$$

ニシテ其ノ周圍ハ 6R ナリ.

故ニ圓ノ面積ト其ノ內接正六邊形ノ面積トハ

$$\pi R^2:\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2,\ \text{即チ}\ 2\pi:3\sqrt{3}$$

ノ如ク, 周圍ニ就キテハ

$$2\pi R:6R,\ \text{即チ}\ \pi:3$$

ノ如シ.

105. 同ジ圓ニ內接スル正方形ト, 正六邊形トノ面積ノ比ヲ求メヨ. [42. 水. 講.]

解　半徑 r ナル圓ニ內接スル正方形ノ面積ハ

$$2r.r=2r^2$$

ニシテ, 正六邊形ノ面積ハ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}r.\frac{r}{2}.6=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$$

ナリ. 故ニ所要ノ比ハ

$$2r^2:\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2=4:3\sqrt{3}.$$

106.　周圍 22 糎ナル圓ニ內接スル正方形ノ面積ヲ求メヨ.　[36. 海. 兵.]

解　與ヘラレタル圓ノ半徑ヲ r 糎トスレバ其ノ周圍ハ $2\pi r$ 糎ナルユヱ

$$2\pi r=22,$$

之ヨリ

$$r=\frac{11}{\pi}.$$

而シテ此ノ圓ニ內接スル正方形ノ面積ハ

$$2r^2=2\left(\frac{11}{\pi}\right)^2\fallingdotseq\frac{2\times11\times11}{3.1416\times3.1416}$$

$$\fallingdotseq24.52,\ \text{即チ約 24平方糎.52}$$

ナリ.

107.　半徑 1 尺ノ圓ニ外切スル正六角形ト同ジ圓ニ內接スル正六角形トノ面積ノ差ヲ計算セヨ.　[30. 東. 高. 師.]

解　一般ニ半徑ヲ r トスレバ 100 題ニ依リ

外切正六角形ノ面積 $=\frac{2}{\sqrt{3}}r^2\times\frac{1}{2}\times6=2\sqrt{3}r^2.$

內接正六角形ノ面積

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}r^2\times\frac{1}{2}\times6=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2.$$

故ニ $r=1$ [尺單位] トシテ二ツノ面積ノ差ヲ求ムレバ

$$2\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\fallingdotseq\frac{1.732}{2}$$

$$=0.866,\ \text{即チ 0平方尺.866 [約] ナリ.}$$

108.　圓ノ內接及ビ外切正六角形ノ面積ノ比ハ 3 : 4 ナルコトヲ證セヨ.　[33. 商船.]

證　前題ニ云ヘルコトニ依リテ

$$\text{內接正六角形 : 外切正六角形}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2:2\sqrt{3}r^2=3:4.$$

109.　同一ノ圓ニ內接セル正六邊形ノ面積ト正方形ノ面積トノ差ヲ知リテ其ノ半徑ヲ計算セヨ.　[35 海 兵.]

解　與ヘラレタル面積ヲ m^2, 所要ノ圓ノ半徑ヲ r トスレバ內接正六邊形ノ面積ハ $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$ [107 題], 內接正方形ノ面積ハ $2r^2$ [105 題] ナリ.

故ニ題意ニ依リテ　$\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2-2r^2=m^2,$

或ハ　$r^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-2\right)=m^2,$

或ハ　$r^2=\frac{m^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}-2}$

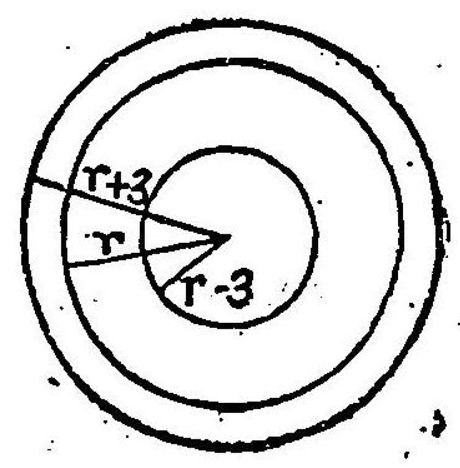
$$=\frac{2(3\sqrt{3}+4)}{(3\sqrt{3}-4)(3\sqrt{3}+4)}m^2$$

$$=\frac{2(3\sqrt{3}+4)}{11}m^2,$$

故ニ $$r=m\sqrt{\frac{2(3\sqrt{3}+4)}{11}}.$$

110. 内外二重ノ柵ヲ有スル圓形ノ競馬場アリ. 兩柵ノ間隔6間ニシテ中央ニ於ケル周1里ナルトキ各柵ノ長サ如何. [42. 海. 兵.]

解 題意ニ依リテ兩柵ノ中央ニ又一ツノ柵ヲ設ケタリト假定スレバ, 三ツノ柵ヲナス圓ノ半徑ハ間ヲ長サノ單位トシテ內側ヨリ順次ニ $r-3,\ r,\ r+3$ ニテ表ハスコトヲ得.



而シテ $1^{里}=2160^{間}$

ナルユヱ中央ノ柵ニ就キテ r ノ値ヲ與フル次ノ方程式ヲ得. $2\pi r=2160,$

故ニ $$r=\frac{1080}{\pi}.$$

依リテ內側ノ柵ノ長サハ

$$2\pi(r-3)=2\pi\left(\frac{1080}{\pi}-3\right)$$

$$=2160-6\pi \fallingdotseq 2160-6\times 3.1416$$

$=2141.1504$, 即チ約 $35^{町}\ 41^{間}.1.$

外側ノ柵ノ長サハ

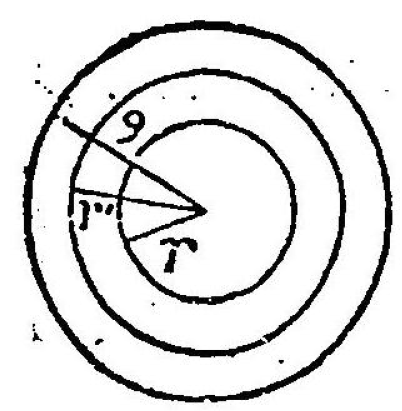
$$2\pi(r+3)=2\pi\left(\frac{1080}{\pi}+3\right)$$

$$=2160+6\pi \fallingdotseq 2160+6\times 3.1416$$

$=2178.8496$, 即チ約 $1^{里}\ 18^{間}.8$ ナリ.

111. 半徑9尺ナル圓アリ, 其ノ面積ヲ三等分スル同心圓ノ半徑ヲ計算セヨ. [34. 海. 兵.]

解 所要ノ二ツノ圓ノ半徑ヲ, 內側ヨリ順次ニ r, r' トスレバ, 圓ノ面積ハ半徑ノ平方ニ比例スルユヱ



(半徑9尺ノ圓):

(半徑 r 尺ノ圓)

$=3:1=9^2:r^2,$

之ヨリ $r=3\sqrt{3}\fallingdotseq 3\times 1.732=5.196,$

即チ 5寸2分 [約] ナリ.

又 (半徑9尺ノ圓):(半徑 r' 尺ノ圓)

$=3:2=9^2:r'^2,$

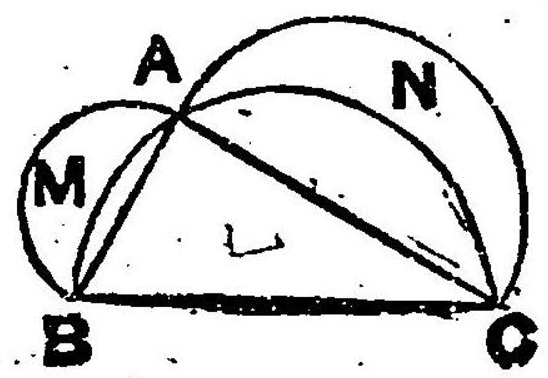
之ヨリ $r'=3\sqrt{6}\fallingdotseq 3\times 2.449$

$=7.347$, 即チ 7尺3寸5分 [約] ナリ.

注意 本題ニ就キテ尙悉シクハ初等數學ノ雜誌 "XY" 第七卷第一號ヲ見ヨ.

112. 直角三角形ノ三ツノ邊ヲ徑トシテ斜邊ノ同ジ側ニ三ツノ半圓周ヲ作ルトキ斜邊ヲ徑トスル圓弧ト他ノ邊ヲ徑トスル半圓周トニテ成ル二ツノ新月形ノ面積ノ和ヲ求メヨ．[34.東.高.工.]

解 三角形ABCニ於テAヲ直角トシ，斜邊BC，及ビ二ツノ邊AB, ACノ上ニBCニ關シテAト同ジ側ニ三ツノ半圓周ヲ作ルトキ半圓周BCト半圓周AB, 及ビ半圓周ACトノ間ニ二ツノ新月形M, Nヲ生ズ．



今MトNトノ和ヲ求メンニ，此ノ和ハ半圓AB, 半圓AC, 及ビ直角三角形ABCナル三ツノ圖形ノ和ヨリ半圓BCヲ減ジタルモノナルコト明カナリ．

即チ

$$M+N=\frac{1}{8}\pi\overline{AB}^2+\frac{1}{8}\pi\overline{AC}^2+\triangle ABC-\frac{1}{8}\pi\overline{BC}^2$$

$$=\triangle ABC+\frac{1}{8}\pi(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2)$$

然ルニ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

ナルユヱ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=0,$

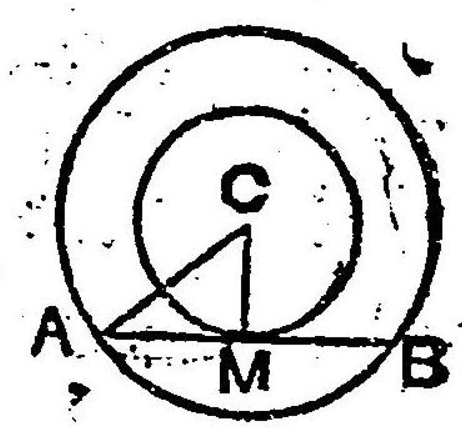
故ニ $M+N=\triangle ABC,$

即チ二ツノ新月形ノ和ハ三角形ABCノ面積ニ

等シ．

113. 二ツノ同心圓ニテ圍ミタル圓輪ノ面積ハ內圓ニ切スル外圓ノ弦ヲ徑トスル圓ノ面積ニ等シキコトヲ證セヨ． [40. 商船]

證 二ツノ同心圓ノ中心ヲC, 內圓ニMニ於テ切スル外圓ノ弦ヲABトシ，CA, CMヲ結ビ付ケヨ．然ルトキハCMハABニ垂直ナリ．



而シテ圓輪ノ面積ハ圓CAト圓CMトノ差ナルユヱ

$$\pi.\overline{CA}^2-\pi.\overline{CM}^2=\pi(\overline{CA}^2-\overline{CM}^2)=\pi\overline{AM}^2.$$

即チAMヲ半徑トスル圓，或ハABヲ徑トスル圓ニ等シ．

114. 徑10吋及ビ7吋ナル同心圓アリ，此ノ二ツノ圓周ニテ圍メル圓輪ト相等シキ面積ヲ有スル圓ノ徑ヲ吋ノ小數三桁マデ計算スベシ． [42. 商船]

解 前題ニ於テ CA=10吋÷2=5吋,

CM=7吋÷2=3吋.5

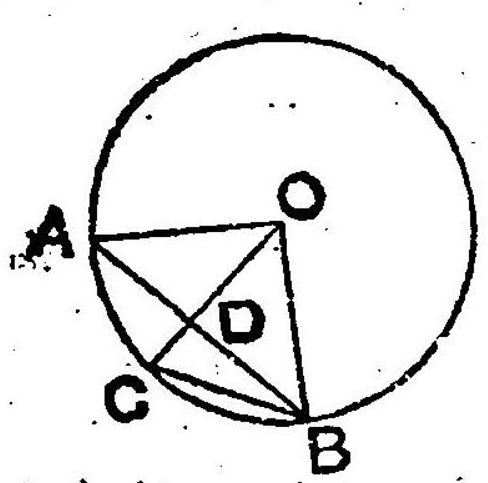
トスレバ $\overline{AB}^2=(2AM)^2=4\overline{AM}^2$

$=4\sqrt{5^2-3.5^2}\doteqdot\sqrt{16\times 37.25}$

$=\sqrt{596}\doteqdot 24.413$, 即チ 24吋.413.

115. 半徑 r 尺ノ圓ニ內接スル正八角形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ。　[33. 陸. 士., 40. 海. 機.]

解 半徑 r 尺ナル圓ノ中心ヲOトシ, 互ニ垂直ナル二ツノ半徑 OA, OB ヲ引キABヲ結ビ付ケ, 又 AB ニ垂直ナル半徑 OC ヲ引キ BO ヲ結ビ付ケ, OC ト AB トノ交點ヲ D トスレバ, AB ハ內接正方形ノ一邊ニシテ, BC ハ內接正八角形ノ一邊ナルコト明カナリ.



而シテ二等邊三角形 OCB ニ於テ O ハ銳角, BD ハ OC ニ垂直ナルユヱ定理 [C. 40 題] ニ依リテ

$$\overline{BC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-2OC.OD=2r^2-2r.OD.$$

然ルニ　$\overline{OD}^2+\overline{BD}^2=\overline{OB}^2$

或ハ　$2\overline{OD}^2=r^2$,

即チ　$OD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r.$

故ニ　$\overline{BC}^2=2r^2-2r.\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$

$=2r^2-\sqrt{2}r^2=r^2(2-\sqrt{2})$.

依リテ　$BC=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 尺.

E. 空間に於ける線及び面

1. 空間ニ於ケル二直線ノ位置ノ關係ヲ列擧セヨ。　[35. 東. 高. 師.]

解 空間ニ於ケル二直線ノ位置ノ關係ハ必ズ次ノ三ツノ中, 何レカ一ツニ屬スベシ.

(1) 相平行ス. 或ハ (2) 相交ル. 又ハ

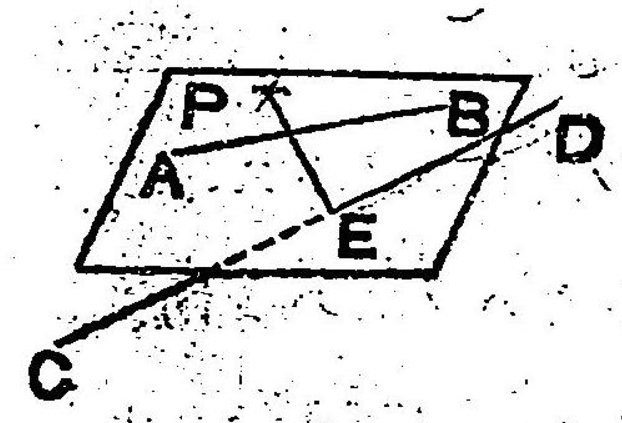
(3) 相交ルコトナク, 相平行スルコトナシ.

而シテ (1), (2) ニ於テハ二直線ハ同一ノ平面上ニアリ, (3) ニ於テハ同一ノ平面上ニアラズ.

2. 一ツノ點ヲ過リ同ジ平面ノ上ニアラザル二ツノ直線ニ出會フ直線ノ位置ヲ求メヨ。

[38. 一高.]

一ツノ點ヲ P トシ, 同ジ平面上ニアラザル二ツノ直線ヲ AB, CD トスルトキ, P ヲ過リ AB, CD ニ出會フ直線ノ位置ヲ求メントス.



作圖 P ト二ツノ直線ノ中, 一ツ, 例ヘバ AB トヲ含ム平面ヲ決定シ, 其ノ CD ヲ截ル點ヲ E トシ,

且 P, E ヲ結ビ付クル直線ガ AB ニ平行ナラズトスレバ PE ハ所要ノ直線ノ位置ナルベシ.

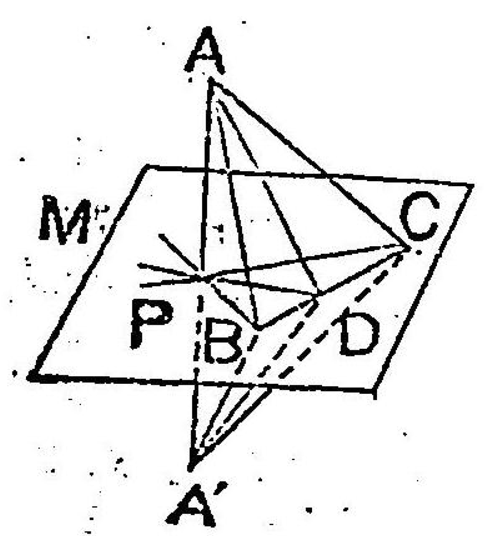
證　PE ハ CD ト交リ, 且平面 PAB 上ニアリテ AB ニ平行ナラザル直線ナルユエ AB トモ交ル, 卽チ PE ハ AB, CD ト交ル直線ナリ.

故ニ PE ノ位置ハ所要ノ位置ナリ.

吟味　平面 PAB ガ CD ト平行ナルトキハ不能ナリ, 又平面 PAB ガ CD ト E ニ於テ交ルトモ PE ガ AB ニ平行ナレバ不能ナリ. 若シ又 P ガ二ツノ直線ノ中何レカノ上ニアルトキハ所要ノ直線ハ無數ニアルコト明カナリ.

3. 相交ル二ツノ直線ノ何レニモ垂直ナル直線ハ其ノ二ツノ直線ヲ含ム平面ニ垂直ナルコトヲ證セヨ.　[37. 東. 高. 師., 41. 農. 大. 實]

證　先ヅ二ツノ直線 PB, PC ノ交點 P ニ於テ此ノ二ツノ直線ノ各ニ垂直ナル直線ヲ AP トス.



然ルトキハ AP ハ PB, PC ノ定ムル平面 M ニ垂直ナルベシ.

點 P ヲ過ル任意ノ直線 PD ヲ平面 M 上ニ引キ, 又

任意ノ直線 BDC ヲ引キ; PB, PD, PC トノ交點ヲソレゾレ B, D, C トス.

次ニ AP ノ延線上ニ點 A′ ヲ A′P＝PA ナルヤウニ取リ, A 及ビ A′ ヲ B, D, C ノ各ニ結ビ付クレバ BP ハ AA′ ノ垂直二等分線ナルユエ BA＝BA′,

同樣ニ　CA＝CA′.　故ニ　△ABC≡△A′BC,

依リテ三角形 ABC ヲ, 底 BC ヲ折目トシテ折リ返シ, 三角形 A′BC ニ重ヌルトキハ A ハ A′ ノ上ニ落ツベシ, 而シテ D ハ不動ナルヲ以テ AD ハ全ク A′D ト重ナル.　依リテ　AD＝A′D.

故ニ DP ハ A′A ニ垂直ナリ.

依リテ AP ハ P ヲ過ル平面 M 上ノ總テノ直線ニ垂直ナリ.　故ニ AP ハ平面 M ニ垂直ナリ.

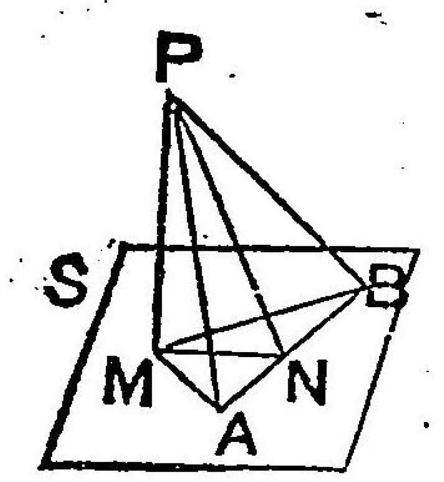
而シテ二ツノ直線 PB, PC ノ何レニモ垂直ナル直線ハ AP ニ平行ス.

故ニ其ノ直線ハ平面 M ニ垂直ナリ.

4. 一ツノ點 P ヨリ一ツノ平面ニ下セル垂線ノ趾ヲ M トシ, 又 M ヨリ同ジ平面內ノ一ツノ直線 AB ヘ下セル垂線ノ趾ヲ N トスルトキハ PN ハ AB ニ垂直ナルコトヲ證セヨ.

[32. 一高., 39. 長. 高. 商.]

證　平面ヲSトス．直線AB上ニ二ツノ點A, Bヲ $AN=NB$ ナル如ク取リ；MA, MB, PA, PB ヲ結ビ付クレバ MN ハ AB ノ垂直二等分線ナルユエ



$$MA=MB,$$

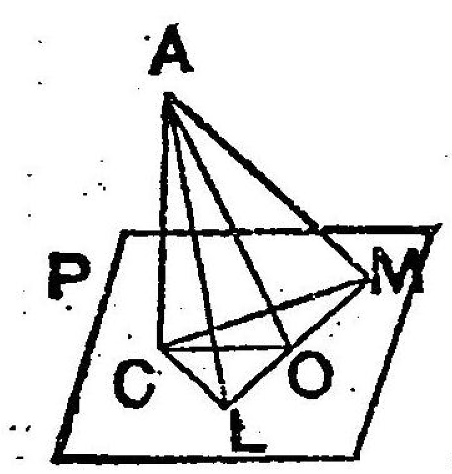
從ヒテ二ツノ直角三角形 PMA, PMB ハ全等形ナルユエ

$$PA=PB,$$

故ニ APB ハ二等邊三角形ニシテ N ハ底 AB ノ中點ナリ．從リテ PN ハ AB ニ垂直ナリ．

5. LM ハ平面 P 上ノ直線ニシテ A ハ此ノ平面外ノ一點ナリ．A ヨリ平面P及ビ直線LMヘ垂線AC, AO ヲ引クトキハ CO ハ LM ニ垂直ナルコトヲ證セヨ．　[39. 名. 高. 工.]

證　LM 上ニ二ツノ點L, M ヲ取リ，$LO=OM$ ナラシメ；CL, CM, AL, AM ヲ結ビ付クレバ $AO \perp LM$ ナルヲ以テ $AL=AM$,



從ヒテ二ツノ直角三角形 ACL, ACM ハ全等ナルユエ

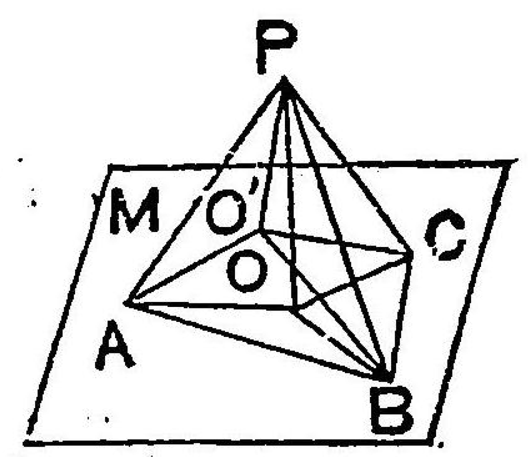
$$CL=CM,$$

故ニ CLM ハ二等邊三角形ニシテ，O ハ LM ノ中點ナリ．故ニ CO ハ LM ニ垂直ナリ．

注意　前題及ビ本題ヲ三垂線ノ定理ト稱ス．

6. 與ヘラレタル平面外ノ一點ヲ過リ其ノ平面ニ垂線ヲ作ル方法ヲ示セ．　[30. 東. 高. 師.]

解　與ヘラレタル平面ヲ M；M ノ外ニアル一點ヲ P トシ，P ヲ過リ M ニ垂線ヲ作ラントス．



作圖 I.　P ヨリ平面 M ニ至ル任意ノ斜線 PA ヲ引キ，又 M 上ニ於テ PA ト斜交スル任意ノ直線 AB ヲ引キ，平面 PAB 上ニ於テ P ヲ中心トシ PA ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケ．而シテ圓 PA ガ直線 AB ト再ビ交ル點ヲ B トスレバ A, B ハ平面 M 上ニ於テ P ヨリ等距離ナル二點ナリ．

同樣ニシテ $PA=PB=PC$ ナル如キ第三ノ點 C ヲ平面 M 上ニ求メヨ．

サテ A, B, C ノ三點ヲ過ル圓ノ中心 O ヲ求メ，PO ヲ結ビ付クレバ PO ハ所要ノ垂線ナルベシ．

證　今 PO ハ平面 M ニ垂直ナラズトスレバ PO′ ヲ所要ノ垂線ナリト假定シ，O′ ヲ A, B, C ノ各

ニ結ビ付ケヨ.

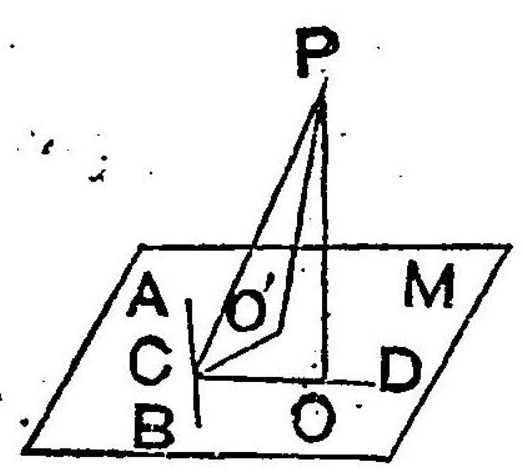
然ルトキハ作圖ニ依リテ PA=PB=PC ナルコトヨリ　$O'A=O'B=O'C$.

又　$OA=OB=OC$.

即チ平面 M 上ニ於テ三點 A, B, C ヨリ等距離ナル二ツノ點アルコトトナル，コレ平面幾何學ノ定理ニ依リテ背理ナリ.

故ニ PO ハ平面 M ニ垂直ナラザルベカラズ. 即チ PO ハ所要ノ垂線ナリ.

作圖 II. 平面 M 上ニ任意ノ直線 AB ヲ引キ，



平面 PAB 上ニ於テ P ヨリ AB ニ垂線 PC ヲ引ケ；而シテ平面 M 上ニ於テ AB ニ垂線 CD ヲ引キ，平面 PCD 上ニ於テ P ヨリ CD ニ垂線 PO ヲ引ケバ PO ハ所要ノ垂線ナルベシ.

證 若シ PO ヲ平面 M ニ垂直ナラズトセバ PO′ヲ以テ其ノ垂線ト假定シ，CO′ヲ結ビ付ケヨ.

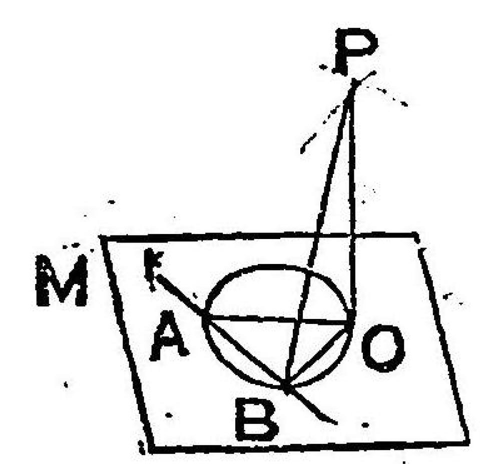
然ルトキハ作圖ニ依リテ PC ハ AB ニ垂直ナルユエ三垂線ノ定理ニ依リテ CO′ ハ AB ニ垂直ナリ. 然ルニ CD, 即チ CO ハ AB ニ垂直ナリ.

故ニ平面 M 上ニ於テ直線 AB 上ノ一點 C ヲ過リ，之ニ垂直ナル二ツノ直線 CO, CO′ ヲ引キ得ルコトトナル，コレ固ヨリ背理ナリ.

故ニ PO ハ M ニ垂直ナラザルベカラズ. 即チ PO ハ所要ノ垂線ナリ.

07. 平面外ノ一定點ヨリ此ノ平面上ノ一定點ヲ過リテ此ノ平面上ニアル直線ニ下セル垂線ノ趾ノ軌跡ヲ求メヨ.　[39. 東. 高. 商., 42. 各高等.]

解 平面 M 外ノ一定點 P ヨリ平面 M 上ノ一



定點 A ヲ過ル平面 M 上ニアル任意ノ直線 AB ニ下セル垂線 PB ノ趾 B ノ軌跡ヲ求メントス.

P ヨリ平面 M ニ垂線 PO ヲ下シ；OA, OB ヲ結ビ付クレバ　$PB \perp AB$

ナルユエ　$OB \perp AB$.　[5 題]

而シテ O ハ定點ナリ.

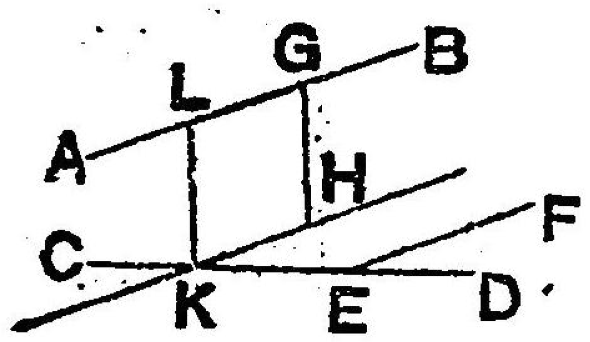
故ニ點 B ノ軌跡ハ平面 M 上ニアリテ，AO ニ對シテ直角ヲ張ル如キ點ノ軌跡ト同樣ナリ.

依リテ所要ノ軌跡ハ AO ヲ徑トシテ平面 M 上ニ畫ケル圓周ナリ.

注意　點 O ガ A ト合スルトキハ圓 AOB ハ點 A トナル.

(8.) 相交ラザル二直線ニ出會ヒ且双方ニ垂直ナル直線ヲ引ケ.　[39. 東.高.師.]

解　茲ニ相交ラザル二直線ガ平行ナルトキハ其ノ各ニ垂直ナル直線ハ平面幾何學ニ依リテ直チニ之ヲ引キ得ベシ. 故ニ所題ノ相交ラザル二直線ハ平行セザルモノトス.



今是等ノ二直線ヲ AB, CD ト名ヅケ, 此ノ双方ニ垂直ナル直線ヲ作ラントス.

作圖　CD 上ノ任意ノ一點 E ヲ過リ, AB ニ平行ナル直線 EF ヲ引キ, 又 AB 上ノ任意ノ一點 G ヨリ相交ル二直線 EF, CD ノ定ムル平面ニ垂線ヲ下シ, 其ノ趾ヲ H トス.

次ニ H ヲ過リテ FE ニ平行ナル直線 HK ヲ引キ, CD トノ交點ヲ K トシ, K ヲ過リ, HG ニ平行ナル直線 KL ヲ引キ, AB トノ交點ヲ L トスレバ LK ハ所要ノ直線ナルベシ.

證　作圖ニ依リテ AB ハ平面 FCD 上ノ一直線 EF ニ平行ナルユヱ AB ト平面 FCD トハ相平行ス. 又 GH ハ平面 FCD ニ垂直ナルユヱ此ノ平面上ノ直線 HK ニ垂直ナリ.

然ルニ HK ハ EF ニ平行ニシテ EF ハ AB ニ平行ナルユヱ, HK モ亦 AB ニ平行ナリ.

故ニ HK ニ垂直ナル直線 GH ハ AB ニモ亦垂直ナリ.

而シテ EF ハ CD ト交ル直線ナルユヱ平面 FCD 上ノ一點 H ヲ過リテ FE ニ平行ナル直線 HK ハ K ニ於テ CD ト交ル. 又 AB, HK ハ相平行スルユヱ一ツノ平面ヲ決定シ, 此ノ平面上ニ於テ此ノ二直線ト交ル直線 GH ニ平行ニ引ケル直線 KL ハ AB ト L ニ於テ交ル.

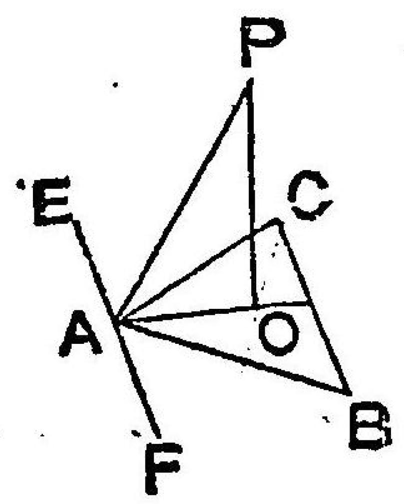
且 GH ハ AB 及ビ平面 FCD ニ垂直ナルユヱ LK モ亦 AB 及ビ平面 FCD ニ垂直, 卽チ AB 及ビ平面 FCD 上ノ直線 CD ニ垂直ナリ. 卽チ LK ハ AB, CD ト出會ヒテ, 其ノ各ニ垂直ナル直線ナリ.

故ニ LK ハ所要ノ直線ナリ.

9. 三角形 ABC ノ垂心 O ヨリ其ノ平面ニ垂線 OP ヲ引ケバ直線 PA ハ A ヲ過リテ BC ニ平行ナル直線ニ垂直ナルコトヲ證セヨ.

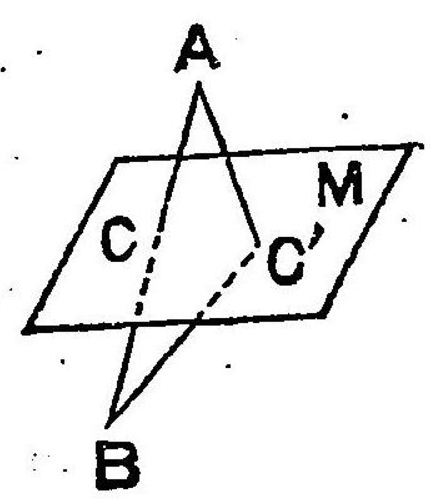
[35. 大.高.工., 42. 山.高.商.]

證 A ヲ過リテ BC ニ平行ナル直線ヲ EF トスレバ O ハ三角形 ABC ノ垂心ナルユエ AO ハ BC ニ垂直ナリ. 從ヒテ EF ハ AO ニ垂直ナリ. 故ニ PA ハ EF ニ垂直ナリ. [4 題]



10. 一平面ノ兩側ニ於テ與ヘラレタル二點ヨリ其ノ平面內ノ一點ニ至ル距離ノ和ガ最小ナル如キ點ヲ求メヨ. [40. 東.高.商.]

解 一平面 M ノ兩側ニアル與ヘラレタル二點ヲ A, B トシ; A, B ヨリ M 上ノ一點 C ニ至ル距離ノ和 $AC+CB$ ガ最小ナル如キ點 C ヲ求メントス.



作圖 AB ヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ AB ガ M ト交ル點 C ハ所要ノ點ナルベシ.

證 先ヅ A ト B トハ假設ニ依リテ平面 M ノ兩側ニアル點ナルユエ AB ハ必ズ M ト一點 C ニ於テ相交ルコト明カナリ.

今平面 M 上ニ於テ C ノ外ナル任意ノ一點 C' ヲ取リ C'A, C'B ヲ結ビ付クレバ C'A, AB, BC' ナル三ツノ直線ハ二ツヅツ相交ルモノナルユエ一ツノ平面ヲ決定シ, 而シテ圖形 ABC' ハ其ノ平面上ニ於ケル三角形ナリ. 故ニ $AB<AC'+BC'$,

或ハ $AC+BC<AC'+BC'$,

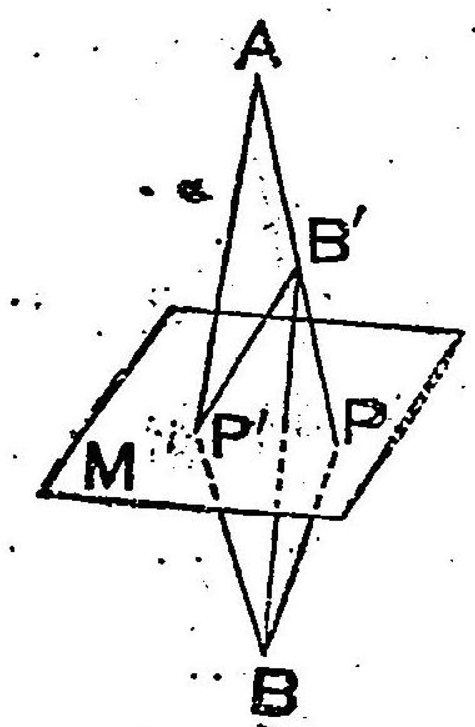
即チ A, B ヨリ C ニ至ル距離ノ和ハ平面 M 上ノ他ノ任意ノ一點 C' ニ至ル距離ノ和ヨリ小ナリ. 故ニ $AC+BC$ ハ最小ニシテ C ハ所要ノ點ナリ.

11. 一ツノ平面ノ兩側ニアル二ツノ點 A, B ヨリ平面內ノ一ツノ點 P マデノ距離 AP, BP ノ差ガ最大ナル點 P ノ位置ヲ求メヨ. [33. 二高.]

解 所題ノ平面ヲ M ト名ヅケ, 平面 M 上ノ或一ツノ點ヲ P, P ノ他ナル任意ノ點ヲ P' トスルトキ

$$AP\sim BP<AP'\sim BP'$$

ナル如キ點 P ノ位置ヲ求メントス.



作圖 平面 M ニ關シテ點 B ノ對稱點 B' ヲ求メ AB' ヲ引キ延バシテ平面 M ト P ニ於テ交ラシムレバ其ノ點 P ハ所要ノ位置ナルベシ.

證 平面 M ハ BB′ ヲ垂直ニ二等分スルユヱ

$$BP=B'P,\quad BP'=B'P'.$$

故ニ $AP\sim BP=AP\sim B'P=AB'.$

及ビ $AP'\sim BP'=AP'\sim B'P'.$

然ルニ直線 AB′ ハ平面ト唯一點 P ニ於テ交ルノミナルユヱ平面 M ノ上ニアリテ P ノ外ナル任意ノ點 P′ ハ直線 AB′ ノ外ニアリ.

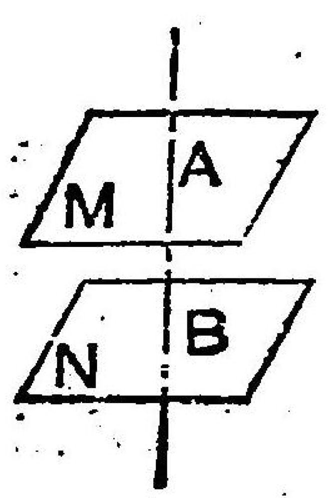
依リテ AB′, B′P′, AP′ ハ三角形ノ三邊ヲナス.

故ニ $AB'<AP'\sim B'P'$,

即チ $AP\sim BP<AP'\sim BP'$.

吟味 B′A ガ平面 M ニ平行ナルトキハ點 P ノ位置ハ A, B ヨリ無窮ニ遠ザカリ; B′, A ガ一致スルトキハ M 上ノ總テノ點ハ何レモ A, B ヨリ等距離トナル.

12. 同一ノ直線ニ垂直ナル二ツノ平面ハ互ニ平行ナルコトヲ證セヨ. [39. 陸. 士.]



證 二ツノ平面 MN ヲ同一ノ直線 AB ニ垂直ナリトス.

然ルトキハ二ツノ平面 M, N ハ互ニ平行ナルベシ.

如何トナレバ若シ M, N ガ互

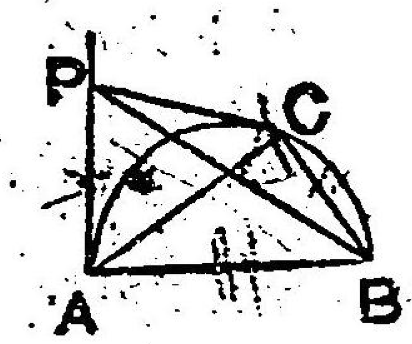
ニ平行ナラズ, 即チ相交ルトスレバ其ノ交リノ上ノ任意ノ一點ヲ過リ同一ノ直線 AB ニ垂直ナル二ツノ平面ヲ作リ得ルコトトナル; コレ不合理ナリ.*

故ニ M, N ハ相交ラズ, 即チ平行ナリ.

注意 *直線外ノ一點ヲ過リテ此ノ直線ニ垂直ナル平面ハ唯一ツアリ.

13. 徑 AB ナル半圓周上ノ一點ヲ C トシ, A ヨリ圓ノ平面ヘ垂線 AP ヲ立テ之ヲ弦 BC ニ等シク取レバ △PCB=△PAB ナルコトヲ證セヨ. [42. 專. 入. 檢.]

證 AC ヲ結ビ付クレバ $A\hat{C}B$ ハ半圓ニ於ケル角ナルヲ以テ直角ナリ.



故ニ PC ハ BC ニ垂直ナリ. [4 題]

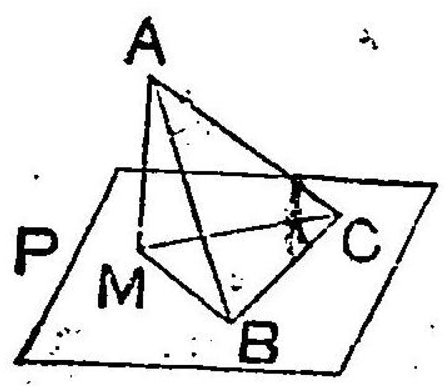
依リテ二ツノ直角三角形 PAB, BCP ニ於テ PB ハ共通; PA, BC ハ作圖ニ依リテ相等シキユヱ此ノ二ツノ三角形ハ全等ナリ.

故ニ △PAB=△BCP.

14. 直角三角形ノ直角ノ一邊ヲ含ム平面上ニ於ケル此ノ直角三角形ノ正射影ハ直角三角形

ナルコトヲ證セヨ. [34. 東. 高. 工.]

直角三角形ABCノ直角頂ヲCトシ,邊BCヲ含ム平面ヲPトスレバ,△ABCノ平面Pニ於ケル正射影ハ直角三角形ナルベシ.

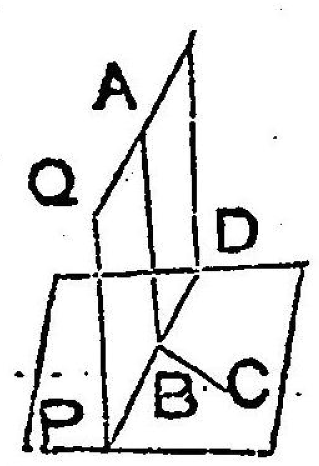


證 點Aヨリ平面Pニ下セル垂線ノ趾ヲMトシ; MB, MCヲ結ビ付クルトキハ△MBCハ△ABCノ平面Pニ於ケル正射影ナリ. 而シテ $\hat{ACB}$ ハ假設ニ依リテ直角ナルユエ, MCハBCニ垂直ナリ [5題]. 即チ△MBCハ $\hat{C}$ ヲ直角トスル直角三角形ナリ.

注意 平面ABCガ平面Pニ垂直ナルトキハMCニ合シ三角形MBCハ直線BCトナル.

15. 一ツノ平面Pニ垂直ナル直線ABヲ含ム平面Qハ平面Pニ垂直ナルコトヲ證セヨ.

[38. 東. 高. 工.]



證 垂線ABノ趾Bヲ過リテ平面P上ニ於テ二ツノ平面ノ交リBDニ垂線BCヲ引ケバABハ平面Pニ垂直ナルユエ

$\hat{ABD}=\hat{R}$,

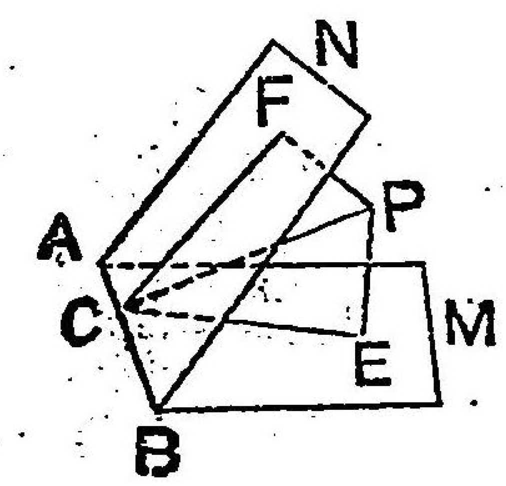
又 $\hat{DBC}=\hat{R}$, [作圖]

依リテABCハ平面P,Qノナス二面角ノ平面角ナリ. 而シテ $\hat{ABC}=\hat{R}$,

故ニ平面Qハ平面Pニ垂直ナリ.

16. 與ヘラレタル點ノ相交ル二ツノ平面上ニ於ケル正射影ヨリ其ノ二ツノ平面ノ交リヘ垂線ヲ引クトキハ二ツノ垂線ハ二ツノ平面ノ交リト同ジ點ニ於テ出會フコトヲ證セヨ. [32. 東. 高. 師.]

證 點Pノ相交ル二ツノ平面M,Nニ於ケル正射影ヲソレゾレE,Fトシ,Eヨリ平面M,Nノ交リABニ垂線ECヲ下シ,FCヲ結ビ付クレバ



$FC \perp AB$ ナルベシ.

如何トナレバPCヲ結ビ付クルトキハ

$PC \perp AB$, [4題]

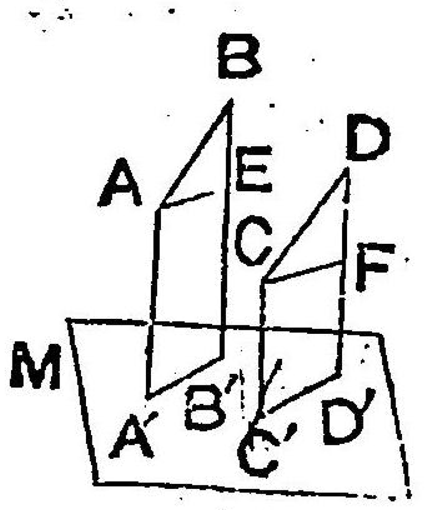
然ルニABハ平面Nノ上ニアルヲ以テ

$FC \perp AB$. [5題]

17. 相等シク且互ニ平行ナル二ツノ直線ハ任意ノ平面上ニ相等シク且相平行スル正射影ヲ投ズ. [40. 海. 機.]

相等シク且相平行スル二ツノ直線AB, CDノ

平面 M ニ投ズル正射影ヲソレゾレ $A'B'$, $C'D'$ トス.



然ルトキ $A'B'$, $C'D'$ ハ相等シク且相平行スベシ.

證 AA', CC' ハ何レモ平面 M ニ垂直ナルユヱ平面 AB', CD' ハ何レモ平面 M ニ垂直ナリ. [15 題]

依リテ　　平面 $AB' \parallel$ 平面 CD'.*

故ニ $A'B'$, $C'D'$ ハ相交ラズ, 且同一平面上ニアリ.

故ニ　　$A'B' \parallel C'D'$.

次ニ A,C ヲ過リソレゾレ $A'B'$, $C'D'$ ニ平行ニ AE, CF ヲ引キ BB', DD' トノ交點ヲ E, F トスレバ

$$AE = A'B',\quad CF = C'D',$$

然ルニ △ABE, △CDF ニ於テ

$$AB \parallel CD,\ AE \parallel CF,\ BE \parallel DF,$$

ニシテ且　　$AB = CD$

ナルユヱ　　$\triangle ABE \equiv \triangle CDF,$

依リテ　　$AE = CF,$

從ヒテ　　$A'B' = C'D'.$

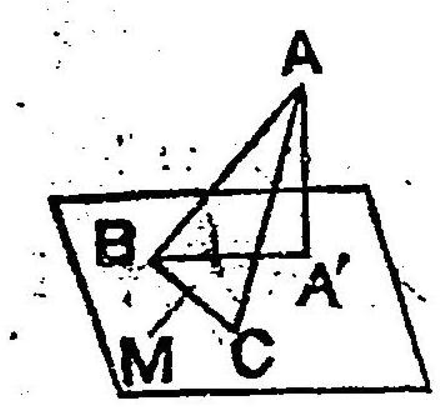
注意 I. AB, CD ノ各射影面ガ相合スルトキハ $A'B'$, $C'D'$ ハ相合シ, 又 AB, CD ガ平面 M ニ垂直ナルトキハ $A'B'$, $C'D'$ ハ共ニ一ツノ點トナル.

注意 II. *二ツノ平面ガ平行ナル二ツノ直線ノ各一ツヲ過リ且他ノ一ツノ平面ニ垂直ナルトキハ其ノ二ツノ平面ハ互ニ平行ナリ.

18. 平面ニ斜交スル一直線ガ此ノ面上ニアリテ其ノ趾ヲ過ル諸直線トナス角ノ中, 其ノ正射影トナス鋭角ガ最小ナルコトヲ證セヨ.

[42. 海兵]

平面 M ニ斜交スル直線 AB ノ趾ヲ B; AB ノ平面 M ニ於ケル正射影ヲ BA' トシ, B ヲ過ル平面 M 上ノ任意ノ直線ヲ BC トスレバ,



$\hat{ABA'} < \hat{ABC}$ ナルベシ.

證 AB 上ノ一點 A ノ平面 M ニ於ケル正射影ヲ A' トシ, BC ノ上ニ $BC = BA'$ ナル點 C ヲ取リ; AA', AC ヲ結ビ付クレバ △ABA', △ABC ニ於テ AB ハ共通, $BA' = BC$, $AA' < AC$,*

故ニ　　$\hat{ABA'} < ABC.$

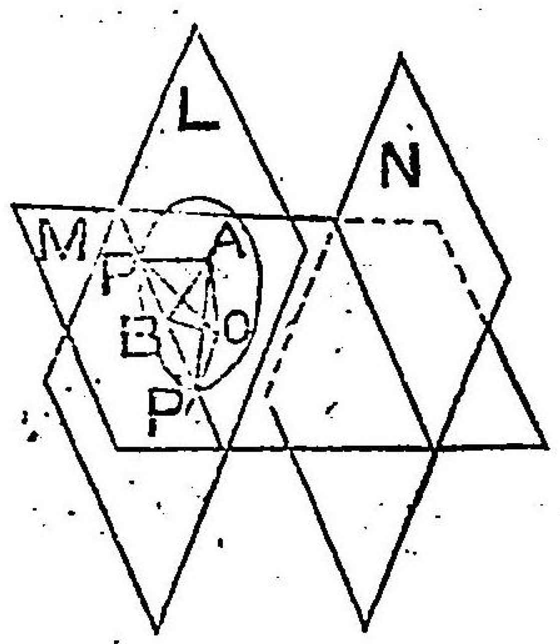
注意 *平面外ノ一點ヨリ其ノ平面ヘ引ケル直線ノ中, 垂線ハ最短ナリ.

19. 二ツノ平面 M 及ビ N ヲ與ヘ, 與ヘヲ

レタル點 A ヲ通過シテ平面 N ニ平行ニシテ平面 M ト與ヘラレタル角ヲナス直線ヲ引ケ.

[42. 名.高.工.]

先ヅ題意ニ依リテ點Aハ平面Mノ外ニアルコトヲ要ス. 又MトNトガ平行ナルトキハ問題ハ不能ナルコト明カナリ. 如何トナレバ A ヲ過リ N ニ平行ナル直線ハ總テ M ニ平行スベク, 依リテ此ノ直線ハ M ト與ヘラレタル角ヲナスコト能ハザレバナリ. 故ニ點 A ハ M ノ外ニアリ; M ト N トハ相交ルモノトス.



解析 平面 M ト點 P ニ於テ交ル如ク, 所要ノ直線 AP ヲ引キ得タリトスレバ AP ハ N ニ平行ナル平面 L ノ上ニアリ.

倘 A ヨリ M ニ垂線 AO ヲ下シ, OP ヲ結ビ付クレバ直角三角形 AOP ニ於テ AO ハ一定, $\widehat{APO}$ ハ AP ト其ノ M 上ニ於ケル正射影トノナス角, 卽チ與ヘラレタル角或ハ其ノ補角ナルユヱ既知ニシテ, 從ヒテ此ノ三角形ハ定マリタルモノナリ.

故ニ AP ノ長サハ一定ニシテ P ハ平面 L 上ニ於テ A ヲ中心トシ AP ヲ半徑トスル圓周上ニアリ. 依リテ次ノ作圖法ヲ得.

作圖 A ヲ過リ N ニ平行ナル平面 L ヲ作リ, 又 A ヨリ M ニ垂線 AO ヲ下シ, AO ヲ直角ノ一邊 $\widehat{APO}$ ヲ與ヘラレタル角或ハ其ノ補角トスル直角三角形 APO ノ斜邊 AP ヲ求メ, 次ニ平面 L 上ニ於テ A ヲ中心トシ AP ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, L ト M トノ交リト此ノ圓周トノ交點ヲ P, P′ トスレバ AP 及ビ AP′ ハ所要ノ直線ナルベシ.

證 AP 及ビ AP′ ハ平面 N ニ平行ナル平面 L ノ上ニアルユヱ又平面 N ニ平行ス.

且 $\widehat{APO}$ 及ビ $\widehat{AP'O}$ ハ與ヘラレタル角或ハ其ノ補角ニ等シキコトハ作圖ニ依リテ容易ニ證シ得ベシ. 而シテ P, P′ ハ L ト M トノ交リノ上ニ, 卽チ M ノ上ニアリ. 故ニ AP 及ビ AP′ ハ所要ノ直線ナリ.

吟味 O ヨリ PP′ ニ垂線 OB ヲ下シ, AB ヲ結ビ付クレバ $AB \perp PP'$ ニシテ, $\widehat{ABO} \geqq \widehat{APO}$,

從ヒテ $\widehat{2R} - \widehat{ABO} \leqq \widehat{2R} - \widehat{APO}$,

是ニ依リテ $2\hat{R}-A\hat{B}O<$(與ヘラレタル角)

ナルカ，或ハ $A\hat{B}O>$(與ヘラレタル角)

ナルトキハ AP>AB ニシテ，A ヲ中心トシ AP ヲ半徑トスル圓ハ L ト M トノ交リヲ截ル，依リテ此ノ場合ニハ二ツノ解アリ．

$2\hat{R}-A\hat{B}O=$(與ヘラレタル角)，

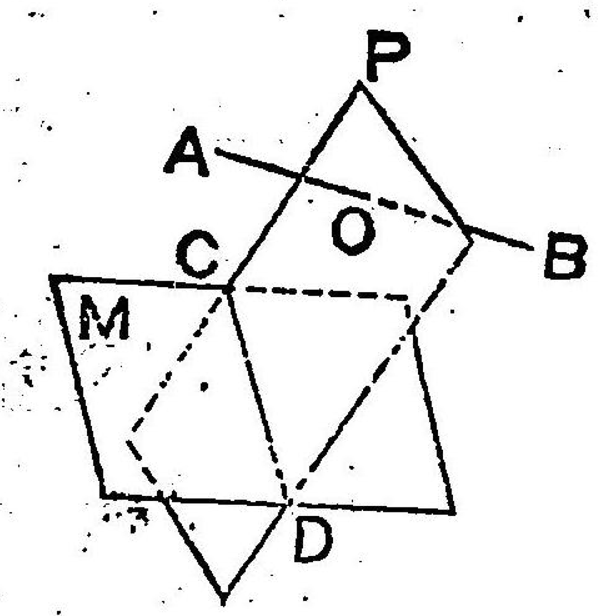
或ハ $A\hat{B}O=$(與ヘラレタル角)

ナルトキハ AP=AB ニシテ，圓ハ L ト M トノ交リニ切ス，依リテ一ツノ解アリ．

$2\hat{R}-A\hat{B}O>$(與ヘラレタル角)$>A\hat{B}O$

ナルトキハ AP<AB ニシテ，圓ハ L ト M トノ交リト出會ハズ，故ニ解ナシ．

20. 一平面ノ外ニアル二ツノ定點 A, B ヨリ等距離ニシテ且此ノ平面上ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ． [34. 一高.]



解 與ヘラレタル平面 M 外ノ與ヘラレタル二ツノ點 A, B ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ平面 M 上ニ求メントス．

AB ヲ結ビ付ケ，其ノ中點 O 過リ，AB ニ垂直ナル平面 P ヲ作レバ P ハ二ツノ點 A, B ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ナリ．

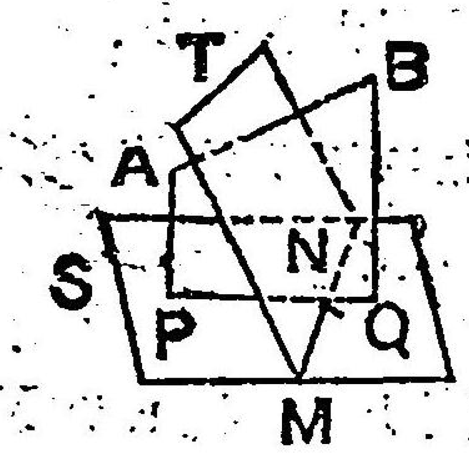
故ニ此ノ平面上ノ點ハ總テ A, B ヨリ等距離ニシテ，平面以外ノ點ハ要件ニ適セズ．

而シテ本題ニ於テハ，平面 M 上ニアラザルベカラズ．依リテ此ノ二ツノ平面 P, M ノ交リヲ CD トスレバ，CD ハ所要ノ軌跡ナリ．

注意 平面 P, M ガ互ニ平行ナルトキハ解ナク，相合スルトキハ平面 M ハ所要ノ軌跡ナリ．

21. 二點 A, B ヨリ平面 S ヘ垂線 AP, BQ ヲ引キ，又直線 AB ニ垂直ナル平面 T ヲ作リ，平面 S ト直線 MN ニ於テ交ラシム，然ルトキハ MN ハ PQ ニ垂直ナリ．之ヲ證セヨ． [42. 七高.]

證 AP, BQ ハ同一ノ平面 S ニ垂直ナルユヱ



互ニ平行ナリ.* 故ニ AP, BQ ハ同一ノ平面上ニアリ．又 AP ハ平面 S ニ垂直ナルユヱ AP ヲ過ル平面 AQ ハ平面 S ニ垂直ナリ． [15 題]

同樣ニ AB ハ平面 T ニ垂直ナルユエ平面 AQ ハ平面 T ニ垂直ナリ.

故ニ MN ハ平面 AQ ニ垂直ナリ.†

從ヒテ MN ハ PQ ニ垂直ナリ.

注意 *同一平面ニ垂直ナル二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ.

†相交ル二ツノ平面ノ各ガ第三ノ平面ニ垂直ナルトキハ其ノ二ツノ平面ノ交リハ又第三ノ平面ニ垂直ナリ.

22. 直線 AB ノ平面 S ニ投ズル正射影ト直角ヲナシ且其ノ平面 S ノ中ニアル任意ノ直線ハ直線 AB ト直角ヲナスコトヲ證セヨ.

[40. 東.高.師.]

前題ノ圖ニ於テ直線 AB ノ平面 S ニ投ズル正射影ヲ PQ トシ, 平面 S ノ上ニアリテ PQ ニ垂直ナル直線ヲ MN トス.

然ルトキハ MN ハ AB ニ垂直ナルベシ.

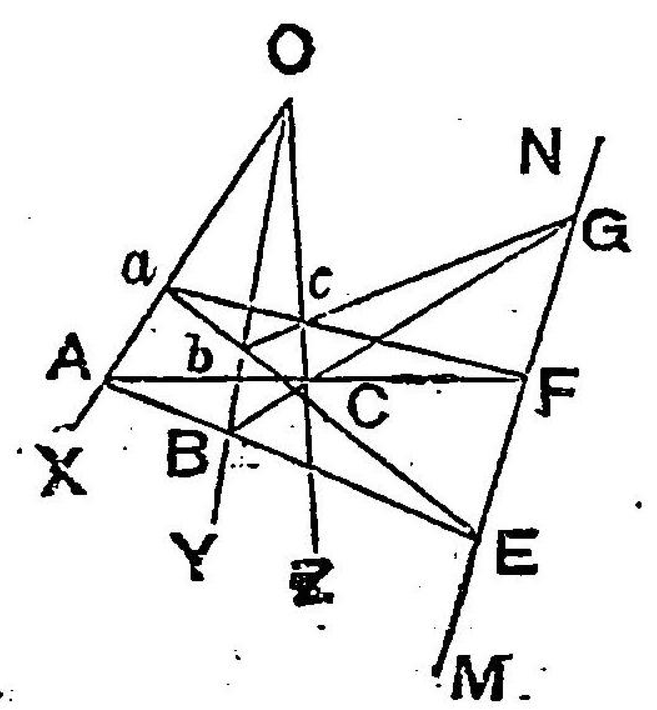
證 AB, PQ ハ同一平面上ニアリテ此ノ平面ハ平面 S ニ垂直ナルコト明カナリ.

依リテ MN ハ平面 AQ ニ垂直ナリ. 從ヒテ MN ハ平面 AQ 上ニアル直線 AB ニ垂直ナリ.

23. 空間ニ三ツノ直線 OX, OY, OZ アリテ一點 O ニ於テ相交ル. 又二ツノ三角形 ABC, abc アリテ其ノ角頂 A 及ビ a ハ OX 上ニ, B 及ビ b ハ OY 上ニ, c 及ビ C ハ OZ 上ニアリ. BC 及ビ bc, CA 及ビ ca, AB 及ビ ab ノ交點或ハ是等ノ邊ノ延線ノ交點ハ同一ノ直線上ニアルコトヲ證セヨ.

[40. 東.高.工.]

BC, bc; CA, ca; AB, ab ノ交點, 或ハ其ノ延線ノ交點ヲソレゾレ G, F, E トス.



然ルトキハ E, F, G ハ同一直線上ニアルベシ.

證 E ハ AB 上ノ點ナルヲ以テ平面 ABC ノ上ニアリ.

又 ab 上ニアルヲ以テ平面 abc ノ上ニアリ.

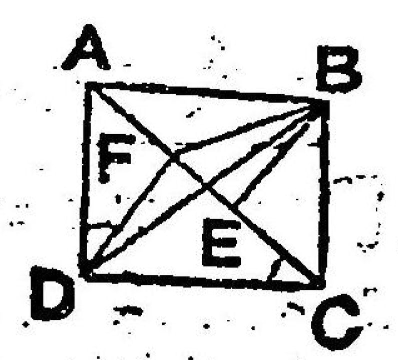
依リテ E ハ二ツノ平面 ABC, abc ノ交リ MN ノ上ニアリ. 同樣ニ F, G モ亦 MN ノ上ニアリ.

故ニ E, F, G ハ同一ノ直線上ニアリ.

24. 矩形ノ紙 ABCD アリ, AB ハ 4 尺, BC ハ 3 尺ナリ, 之ヲ對角線 AC ニ沿ヒテ折リ平面

ABC ト CDA トヲシテ互ニ垂直ナラシムルトキ, BD ノ距離ヲ計算セヨ. [39. 東.高.工.]

解 B, D ヨリ AC ニ垂線 BE, DF ヲ下セバ



$$AF=CE=\frac{\overline{AD}^2}{AC}=\frac{\overline{BC}^2}{\sqrt{(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)}}=\frac{3^2}{\sqrt{(4^2+3^2)}}=\frac{9}{5},$$

故ニ $EF=AC-2AF=5-\frac{9}{5}\times 2=\frac{7}{5}.$

又 $\overline{DF}^2=AF.FC=AF.(AC-AF)$

$$=\frac{9}{5}\times\frac{16}{5}=\frac{144}{25}.$$

而シテ平面 ABC ト ADC トガ互ニ垂直ナルトキハ $B\hat{F}D=\hat{R}$ ナルコト明カナリ.

故ニ

$$\overline{BD}^2=\overline{DF}^2+\overline{BF}^2$$
$$=\overline{DF}^2+\overline{BE}^2+\overline{FE}^2$$
$$=2\overline{DF}^2+\overline{FE}^2$$
$$=\frac{288}{25}+\frac{49}{25}=\frac{337}{25},$$

故ニ $BD=\frac{1}{5}\sqrt{337}\fallingdotseq 3.67,$

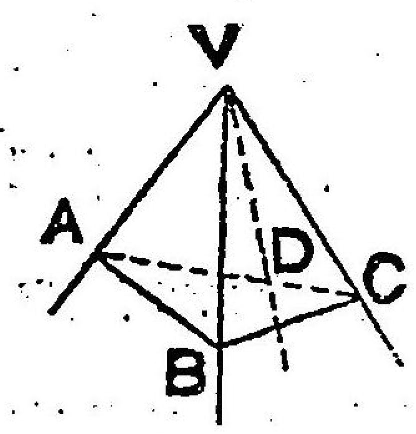
即チ約3尺6寸7分ナリ.

F. 多面角

1. 三面角ノ三ツノ平面角ハ何レノ二ツヲ取ルモ其ノ和ハ他ノ一ツヨリ大ナルコトヲ證セヨ.

[39. 京.醫.專., 42. 海.機.]

本定理ハ三ツノ平面角ノ中, 最大ナルモノガ他ノ二ツノ平面角ノ和ヨリ小ナルコトヲ證スレバ可ナリ. 即チ三面角 V-ABC ニ於テ平面角 AVC ヲ最大ナリトス.



然ルトキハ $A\hat{V}C<A\hat{V}B+B\hat{V}C$ ナルコトヲ證セントス.

證 面 VAC 内ニ於テ直線 VD ヲ $A\hat{V}D=A\hat{V}B$ ナル樣ニ引キ, VD 上ノ任意ノ點 D ヲ過リ直線 ADC ヲ引キ; VA, VC ヲソレゾレ A, C ニ於テ截ルトキハ $A\hat{V}C>A\hat{V}B$ ナルユヱ D ハ A ト C トノ間ニアリ. 次ニ VB ヲ VD ニ等シク取リ; AB, BC ヲ結ビ付クレバ $\triangle AVD\equiv\triangle AVB$,

故ニ $AD=AB,$

又 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB+BC>AC,$

依リテ兩邊ヨリ相等シキ AB, AD ヲ減ズレバ

$$BC > DC,$$

故ニ △BVC, △DVC ニ於テ

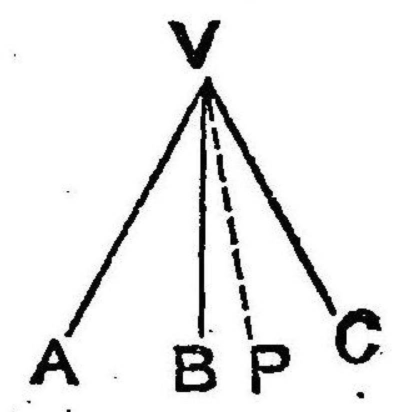
$$B\hat{V}C > D\hat{V}C,$$

此ノ兩邊ニ相等シキ $A\hat{V}B$, $A\hat{V}D$ ヲ加フレバ

$$A\hat{V}B + B\hat{V}C > A\hat{V}C.$$

2. 三面角ノ三ツノ二面角ヲ二等分スル三ツノ平面ハ同一ノ直線ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ.　[39. 東. 高. 師.]

三面角 V-ABC ノ各二面角ヲ二等分スル三ツノ平面ハ同一直線ニ於テ相交ルベシ.



證　二ツノ二面角 VA 及ビ VB ヲ二等分スル二ツノ平面ガ相交ルコトハ點 V ガ此ノ二ツノ平面上ニアリテ且二ツノ平面ハ一致セザルヲ以テ明カナリ.

而シテ其ノ交リヲ VP トスレバ此ノ交リノ上ノ點ハ總テ三ツノ面 VAB, VBC, VCA ヨリ等距離ニアリ,* 且三面角ノ內部ニアリ.

故ニ VP 上ノ總テノ點ハ二面角 VC ヲ二等分スル平面上ニアリ.†

卽チ二面角 VC ヲ二等分スル平面ハ VP ヲ過ル,

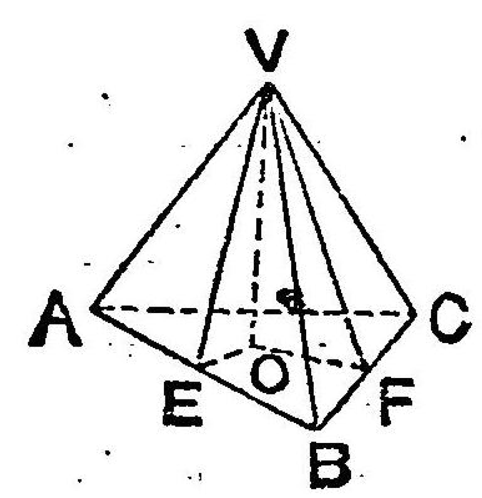
故ニ三ツノ二等分面ハ同一ノ直線ヲ過ル.

注意　*二面角ヲ二等分スル平面上ノ總テノ點ハ其ノ二面角ノ各ノ面ヨリ等距離ニアリ.

†相交ル二ツノ平面ノ各ニ至ル距離ノ相等シキ如キ點ハ此ノ二ツノ面ノナス二面角ヲ二等分スル平面上ニアリ.

3. 三面角ノ三ツノ稜ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.　[35. 一高.]

解　三面角ヲ V-ABC トシ, 此ノ三ツノ稜 VA, VB, VC ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メントス.



二ツノ稜 VA, VB ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ角 AVB ヲ二等分スル直線 VE ヲ含ミ且其ノ面 AVB ニ垂直ナル平面 P ナリ.

同樣ニ VB, VC ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ角 BVC ノ二等分線 VE ヲ過リ其ノ面ニ垂直ナル平面 Q ナリ.

依リテ三ツノ稜ヨリ等距離ナル點ハ此ノ二ツノ平面 P, Q ノ何レノ上ニモアラザルベカラズ.

依リテ其ノ交リノ上ニアリ.

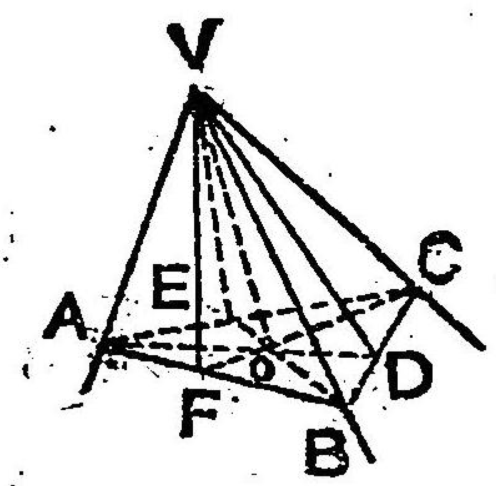
而シテ此ノ交リノ上ノ點ハ總テ三ツノ稜ヨリ等距離ニアリ，依リテ所要ノ軌跡ハ此ノ交リ VO ナリ.

注意 若シ此ノ稜ヲ頂點 V ノ反對ノ側ニ引キ延バシ得ルモノトセバ軌跡ハ三ツノ直線トナル.

4. 三面角ノ稜ヲ過リ對面ニ垂直ナル三ツノ平面ハ一直線ニテ相交ルコトヲ證セヨ.

[38. 水. 講.]

證 三面角ヲ V-ABC トシ，次ノ三ツノ場合ニ分ツベシ.



(I) 二ツノ平面角，例ヘバ $A\hat{V}B$, $A\hat{V}C$ ハ直角ナラズトス.

然ルトキハ VA ニ垂直ナル平面 ABC ヲ作リ各稜ヲ A, B, C ニ於テ截ラシメ，VA ヲ含ミ，平面 VCB 垂直ナル平面 VAD ヲ作ルトキハ 直線VA⊥平面ABC,

故ニ 平面VAD⊥平面ABC,

依リテ二ツノ平面 ABC, VCB ノ交リナル直線 BDC ハ平面 VAD ニ垂直ナリ. 故ニ AD⊥BC.

次ニ VB ヲ含ミテ平面 VCA ニ垂直ナル平面 VBE ヲ作レバ 平面ABC⊥平面VAC,

及ビ 平面VBE⊥平面VAC,

故ニ二ツノ平面 ABC, VBE ノ交リナル直線 BE ハ平面 VAC ニ垂直ナリ. 故ニ BE⊥AC.

同樣ニシテ VC ヲ含ミテ VAB ニ垂直ナル平面ハ平面 ABC ト AB ニ垂直ナル CF ニ於テ相交ル. 故ニ AD, BE, CF ハ三角形 ABC ノ垂心 O ニ於テ相交ル，即チ各稜ヲ含ミ相對スル面ニ垂直ナル平面ハ頂點 V ノ外，點 O ニ於テ相交ル，而シテ此ノ三ツノ平面ハ一致スルコトナシ，故ニ三ツノ平面ハ一直線 VO ニ於テ相交ル.

(II) $A\hat{V}B = B\hat{V}C = \hat{R}$ トス.

然ルトキハ VA, VC ヲ含ミテ相對スル面ニ垂直ナル平面ハ VAC ト合シ，VB ヲ含ム平面ハ其ノ面ニ垂直ナルユヱ平面 VAC ノ上ノ任意ノ一直線ニテ之ヲ交ラシムルコトヲ得.

(III) $A\hat{V}B = B\hat{V}C = C\hat{V}A = \hat{R}$ トス.

然ルトキハ各稜ヲ過ル任意ノ平面ハ其ノ相對スル面ニ垂直ナルユヱ V ヲ過ル總テノ直線ニ於テ交ル樣ニ相對スル面ニ垂直ナル平面ヲ作ルコト

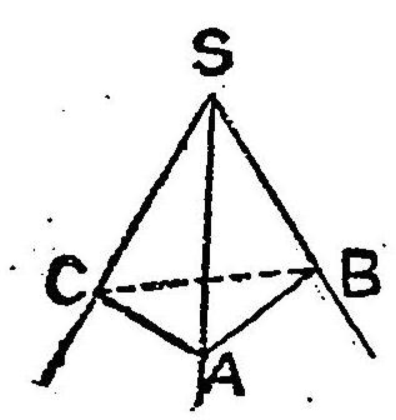
ヲ得ベシ.

然レドモ其ノ逆ナル本題ハ成立セズ.

5. 三面角 S-ABC ノ一ツノ稜 SA ニ於テナス二面角ガ直角ナルトキ SB ナル稜ニ垂直ナル平面ニテ此ノ三面角ヲ截レバ其ノ截口ハ直角三角形ナルコトヲ證セヨ. [34. 大. 高. 工.]

證 稜 SB ニ垂直ナル截口ヲ ABC トス.

然ルトキハ SB ヲ含ム平面 SAB ト平面 ABC トハ互ニ垂直ナリ [E. 15 題],



又 平面SAC$\perp$平面SAB,

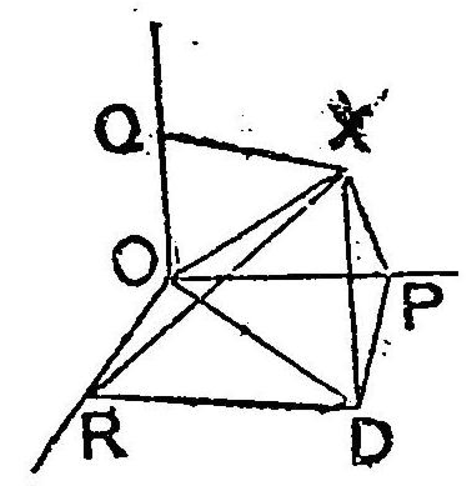
依リテ CA$\perp$平面SAB [E. 21 題注意]

故ニ $C\hat{A}B=\hat{R}$.

即チ ABC ハ直角三角形ナリ.

6. O ヲ頂點トスル三面角ノ三ツノ平面角ガ皆直角ナルトキハ任意ノ一點 X ヨリ三ツノ稜ニ垂線 XP, XQ, XR ヲ引クトキ次ノ關係アルコトヲ證セヨ. $\overline{OX}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2+\overline{OR}^2$. [41. 海. 機.]

證 點 X ヨリ平面 POR ヘ垂線 XD ヲ下シ, DP, DR ヲ結ビ付クルトキハ XDOQ, DPOR ハ矩形ナルコト明カナリ. 故ニ QX=OD, PD=OR,

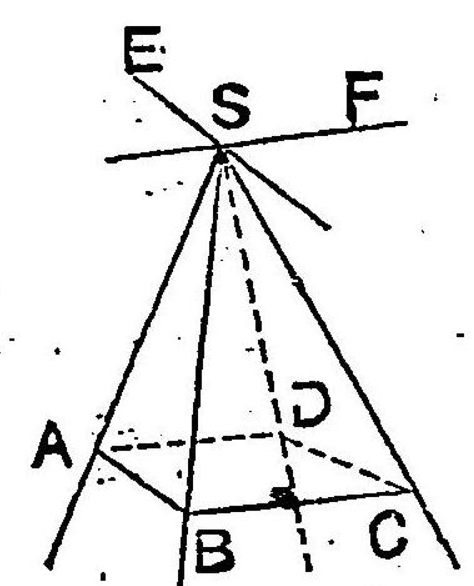


依リテ

$$\begin{aligned}\overline{OX}^2&=\overline{OQ}^2+\overline{QX}^2\\&=\overline{OQ}^2+\overline{OD}^2\\&=\overline{OQ}^2+\overline{OP}^2+\overline{PD}^2\\&=\overline{OQ}^2+\overline{OP}^2+\overline{OR}^2.\end{aligned}$$

7. 四面角ヲ一ツノ平面ニテ截リ, 其ノ截面ヲシテ平行四邊形ナラシメヨ. [35. 陸. 士.]

四面角ヲ S-ABCD トシ, 一ツノ平面ニテ之ヲ截リ, 其ノ四ツノ側面ノ間ニ夾マルル部分, 即チ截面ヲシテ平行四邊形ナラシメントス.



作圖 I. 四面角ヲナス四ツノ平面ノ中, 相對スル二ツノ面 SAB, SCD ノ交リヲ SE, 他ノ相對スル二ツノ面 SBC, SAD ノ交リヲ SF トセヨ.

而シテ SE, SF ハ一ツノ平面ヲ定ムルユヱ, 此ノ平面ニ平行ナル任意ノ平面ヲ作リテ, 四面角ヲ截リ, 其ノ截面ヲ ABCD トスレバ ABCD ハ所要ノ截面, 即チ平行四邊形ナルベシ.

證 平面SABト二ツノ平行ナル平面ESF, ABCDトノ交リハソレゾレES, ABナルユヱESトABトハ相平行ス.

同様ニESトCDトモ亦相平行ス.

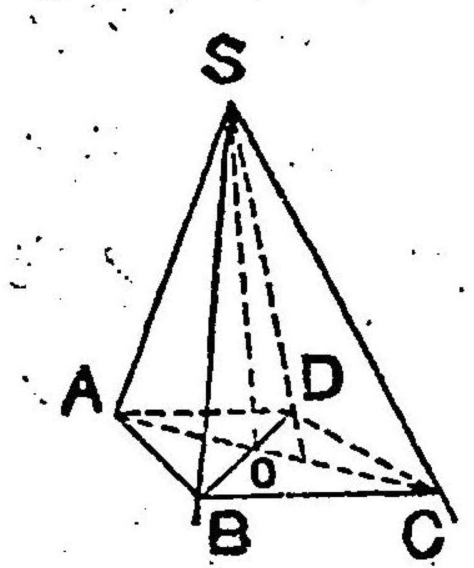
故ニABトCDトハ同一ノ直線ESニ平行ナルユヱ相平行ス.

同理ニ依リテBCトADトモ亦相平行スルコトヲ證シ得ベシ.

故ニABCDハ平行四邊形ナリ.

吟味 平面ABCDハ唯平面ESFニ平行ナレバ可ナルユヱ本題ニハ無數ノ解アリ.

作圖 II. 相對スル稜SA, SCノ定ムル平面トSB, SDノ定ムル平面トノ交リヲSOトシ, SO上ノ任意ノ點Oヲ過リテ平面SAC上ニ一ツノ直線AOCヲ引キ, 而シテ此ノ直線ノSA, SCノ間ニ夾マルル部分ヲシテ點Oニ依リテ二等分トナラシメヨ.



同様ニSB, SDノ間ニ直線BODヲ引キテBO=ODナラシメヨ.

然ルトキハAOC, BODノ定ムル平面ガ四面角ヲ截リタル截面ABCDハ所要ノモノナルベシ.

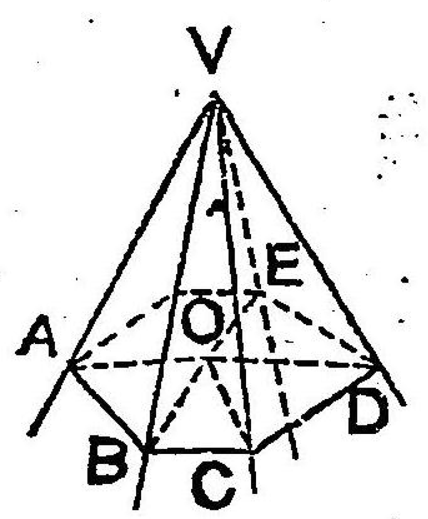
證 四邊形ABCDハ相交ル二直線AOC, BODノ定ムル平面上ニアリ, 卽チ平面圖形ニシテ且作圖ニ依リテ二ツノ對角線ハOニ於テ互ニ二等分セラル.

故ニABCDハ平行四邊形ニシテ, 此ハ四面角S-ABCDノ截面ナルユヱ所要ノモノナリ.

吟味 Oハ平面SACト平面SBDトノ交リノ上ノ任意ノ點ナルユヱ本題ニハ無數ノ解アリ.

8. 凸多面角ノ平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナルコトヲ證セヨ. [35. 大. 高. 工., 36. 一高.]

證 凸多面角Vヲ一ツノ平面ニテ截リ, 其ノ截面ヲABCDE......トス.



然ルトキハABCD......ハ凸多角形ナリ.

今此ノ凸多角形內ニ一點Oヲ取リ; OA, OB, OC, OD, OE,...ヲ結ビ付クレバ頂點Vヲ共有スル多クノ三角形VAB, VBC, VCD,......ノ總テノ內角ノ和ハOヲ共有スル前ト同ジ數ノ三角形OAB, OBC, OCD, [illegible]ノ總テノ内角ノ和ニ等シ.

然ルニ多面角ノ二ツノ面ト截面トニテナス三面角 A, B, C,……ニ於テ

[illegible] $V\hat{B}A+V\hat{B}C>A\hat{B}C,$ [1 題]

[illegible] $V\hat{C}B+V\hat{C}D>B\hat{C}D,$

……………………

故ニ是等ノ不等式ヲ邊々相加フルトキハ頂點 V ヲ共有スル總テノ三角形ノ底角ノ和ハ O ヲ共有スル總テノ三角形ノ底角ノ和ヨリ大ナリ.

從ヒテ頂點 V ニ於ケル頂角ノ和ハ O ニ於ケル頂角ノ和, 卽チ四直角ヨリ小ナリ.

G. 多面角

角壔角錐

9 1. 正多面體ハ幾種アルカ. 又其ノ各種ノ面ノ數及ビ稜ノ數ヲ問フ.

[30. 東.高.商., 63. 東.高.師.]

解 多面體ノ各面ノ邊數ガ何レモ m ニシテ, 各頂點ニ於ケル稜ノ數ガ何レモ n ナルトキハ多面體ノ面, 稜, 頂點ノ數ヲソレゾレ F, E, V トスレバ, 多面體ノ各面ニ於ケル邊ノ數ヲ總テ計フルトキハ其ノ數ハ mF ニシテ, 此ハ稜ノ數ヲ二度計ヘタル數ニ等シカルベシ.

故ニ $m\mathrm{F}=2\mathrm{E},$

同様ニ $n\mathrm{V}=2\mathrm{E},$

故ニ
$$\frac{\mathrm{F}}{2n}=\frac{\mathrm{V}}{2m}=\frac{\mathrm{E}}{mn}=\frac{\mathrm{F}+\mathrm{V}-\mathrm{E}}{2(m+n)-mn}$$
$$=\frac{2}{2(m+n)-mn},*$$

卽チ
$$\mathrm{F}=\frac{4n}{2(m+n)-mn},$$
$$\mathrm{E}=\frac{2mn}{2(m+n)-mn},$$

而シテ m, n ハ何レモ 3 ヨリ小ナルコト能ハザルヲ以テ, $m=3$ トスレバ

$$\mathrm{F}=\frac{4n}{6-n},\quad \mathrm{E}=\frac{6n}{6-n}.$$

然ルニ F, E ノ値ハ正ノ整數ナルベキヲ以テ

$$6-n>0,\ 卽チ\ 6>n,$$

故ニ
$$n=3,\ \mathrm{F}=4,\ \mathrm{E}=6;$$
$$n=4,\ \mathrm{E}=8,\ \mathrm{E}=12;$$
$$n=5,\ \mathrm{F}=20,\ \mathrm{E}=30$$

ナル三ツノ場合アリ.

又 $m=4$ トスレバ $\mathrm{F}=\dfrac{2n}{4-n},\ \mathrm{E}=\dfrac{4n}{4-n}.$

ニシテ $4-n>0,$ 卽チ $4>n,$

故ニ　　$n=3,\ F=6,\ E=12$

ナル一ツノ場合アルノミ.

次ニ $m=5$ トスレバ $F=\dfrac{4n}{10-3n},\ E=\dfrac{10n}{10-3n}$

ニシテ　$10-3n>0$, 即チ $\dfrac{10}{3}>n$,

故ニ　　$n=3,\ F=12,\ E=30$

ナル一ツノ場合ノミ成立ス.

次ニ $m=6$ トスレバ　$F=\dfrac{n}{2-n}$

ニシテ　$3-n>0$, 即チ $3>n$

トナル, 然ルニ n ハ 3 ヨリ小ナルコト能ハズ.

依リテ m ハ 6 以上ナルトキハ不能ナルコトヲ知ル. 故ニ多面體ノ各面ガ同數ノ邊ヲ有チ, 各多面角ガ同數ノ面ヲ有ツ所ノ多面體ハ上ニ云ヘル五種ノミ成立ス, 而シテ各面ガ正多角形ナルトキハ正多面體ナルコト明カナリ.

依リテ正多面體ハ各面ガ正三角形ナル正四面體, 正八面體, 正二十面體; 各面ガ正方形ナル正六面體; 各面ガ正五角形ナル正十二面體ノ五種アリ. 而シテ其ノ面ノ數及ビ稜ノ數ハソレゾレ

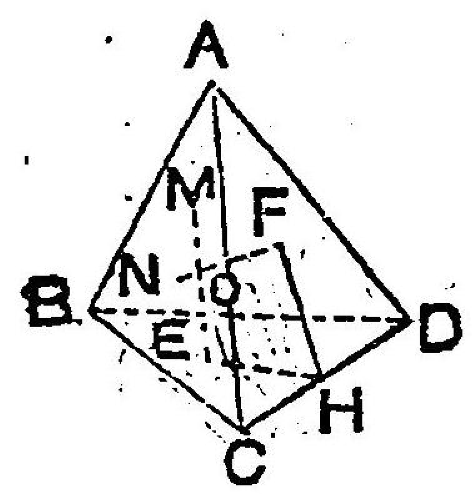
4, 8, 20, 6, 12; 及ビ 6, 12, 30, 12, 30

ナリ.

注意　$^*E+2=V+F$.　　[おいれる ノ定理]

2. 四面體ノ各角頂ヨリ等距離ナル點ヲ求メヨ.　　[70. 東.高.商.]

四面體ヲ A-BCD トシ, 其ノ四ツノ頂點 A, B, C, D ヨリ等距離ナル點ヲ求メントス.



作圖　四面體ノ任意ノ二ツノ面, 例ヘバ BCD, ACD ヲ取リ, 之ニ外接スル圓ノ中心ヲソレゾレ E, F トシ, 是等ノ二ツノ面ニソレゾレ垂線 EM, FN ヲ作リ, 其ノ交點ヲ O トスレバ, O ハ所要ノ點ナルベシ.

證　先ヅ EM 上ノ任意ノ點ハ B, C, D ヨリ等距離ニシテ, FN 上ノ任意ノ點ハ A, C, D ヨリ等距離ナリ.

次ニ二ツノ垂線 EM, FN ハ相交ル.

如何トナレバ CD ノ中點ヲ H トシ; EH, FH ヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ EH 及ビ FH ハ何レモ CD ニ垂直ナルユヱ EH, FH ノ定ムル平面ハ BC ニ垂直ナリ, 従ヒテ此ノ平面ハ二ツノ平面 BCD, ACD ノ各ニ垂直ナリ. 依リテ垂線 EM, FN ハ同一ノ平面 EHF ノ上ニアリ.

且二ツノ平面 BCD, ACD ハ相交ルモノナルユヘ此ノ各ニ垂直ナル EM, FM ハ互ニ平行ナルコト能ハズ.

故ニ EM ト FN トハ一點 O ニ於テ相交ル.

而シテ O ハ EM ト FN トノ上ニアルユヘ B, C, D ヨリ等距離ニシテ; 又 A, C, D ヨリ等距離ナリ.

故ニ O ハ A, B, C, D ヨリ等距離ナリ.

即チ O ハ所要ノ點ナリ.

吟味　所要ノ點ハ EM 及ビ FN ノ上ニアラザルベカラズ, 而シテ EM ト FN トノ交點ハ唯一ツアルノミナルユヘ, 要件ニ適スル點ハ唯一ツアルノミ.

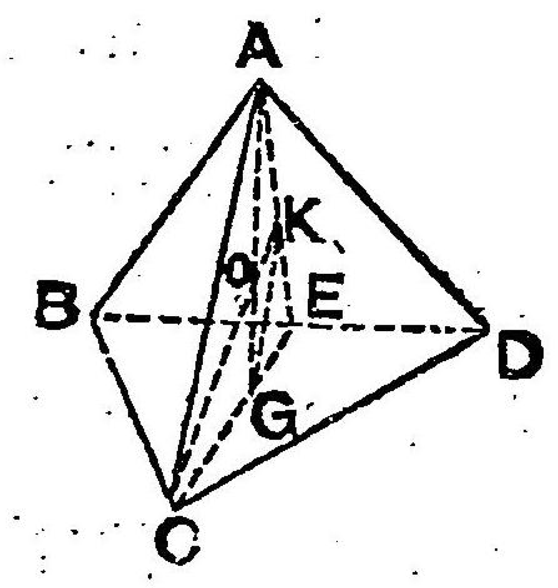
注意　I. 4 題ヲ參照スベシ.

3.　四面體ノ各ノ角頂ヲ之ニ對スル面ノ重心ニ結ビ付クレバ其ノ直線ハ同一ノ點ヲ過リ, 且各ノ直線ハ此ノ點ニ於テ 3:1 ノ比ニ分タルルコトヲ證セヨ.　[34. 陸.士.]

證　四面體 ABCD ノ各角頂ト之ニ對スル面ノ重心トヲ結ビ付クル直線 AG, BI, CK, DL ハ同一ノ點ヲ過リ, 且其ノ點ニ於テ比 3:1 ニ分タルベシ. BD ノ中點ヲ E トスレバ K ハ △ABD

ノ重心ナルユヘ AE ノ上ニアリ.

同樣ニ G ハ CE ノ上ニアリ.



依リテ AG, CK ハ平面 ACE ノ上ニアリ, 而シテ

$$CG:GE=2:1=AK:KE,$$

故ニ　$AC \parallel KG$

ナルユヘ AG ト CK トハ相交ル, 今ソノ交點ヲ O トスレバ

$$\triangle GOK \backsim \triangle AOC,$$

故ニ　$AO:OG=CO:OK=AC:GK$

$$=AE:KE=3:1,$$

依リテ CK ハ AG ト交リ, 且互ニ比 3:1 ニ內分セラル.

同樣ニ BI, DL モ亦 AG ト交リ, 且互ニ比 3:1 ニ內分セラル.

然ルニ AG ヲ 3:1 ノ比ニ內分スル點ハ O ノ外ニナシ.

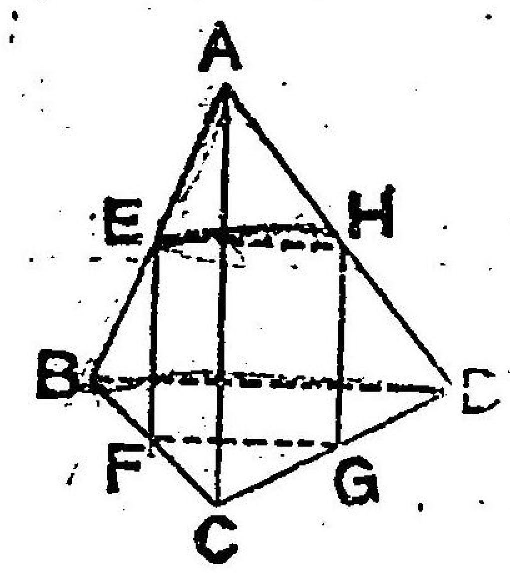
故ニ AG, BI, CK, DL ハ點 O ヲ過リ, 且互ニ比 3:1 ニ分タル.

注意　此ノ交點ヲ四面體ノ重心ト云フ.

4. 一ノ四面體ニ於テ相對スル二稜相等シキトキハ其ノ二邊ニ平行ナル平面ニテノ截口ハ周邊ノ和ガ一定セル平行四邊形ナルコトヲ證セヨ.

[40. 長.高.商.]

四面體 ABCD ノ相對スル稜 AC, BD ヲ相等シトシ, AC 及ビ BD ニ平行ナル平面ニテノ截口ヲ EFGH トスレバ EFGH ハ平行四邊形ニシテ且其ノ周圍ハ一定ナルベシ.



證　　面 $EG \parallel AC$

ナルユヱ　　$EF \parallel GH$,*

同様ニ　　$EH \parallel FG$,

故ニ EFGH ハ平行四邊形ナリ.

而シテ　　$EH \parallel BD$,　$EF \parallel AC$

ナルユヱ　　$EH : BD = AE : AB$,

及ビ　　$EF : AC = BE : AB$,

然ルニ AC=BD ナルユヱ

$$EH+EF : AC = AE+BE : AB$$

$$= AB : AB,$$

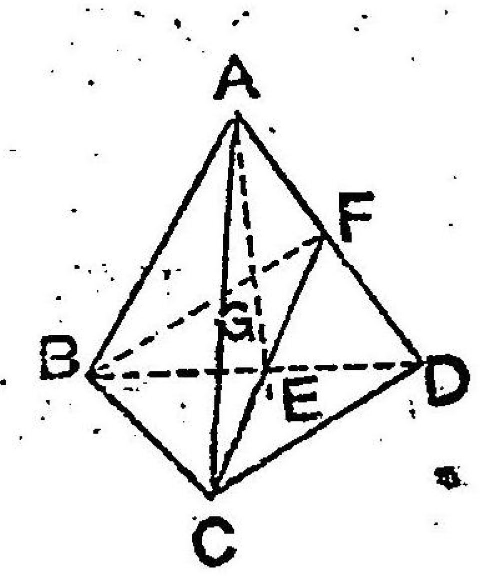
故ニ　　$EH+EF=AC$ (=定量).

而シテ EH+EF ハ四邊形 EFGH ノ周圍ノ半分ナルユヱ EFGH ノ周圍モ亦一定ナリ.

注意　*一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ平行ナルトキ其ノ直線ヲ過ル多クノ平面ト原ノ平面トノ交リハ其ノ直線ニ平行ニシテ且互ニ平行ナリ.

5. 四面體ノ各二面角ヲ二等分スル平面ハ同一ノ點ヲ過ルコトヲ證セヨ.　　[33. 三高.]

證　四面體 ABCD ノ A ニ於ケル三面角ノ各二面角ヲ二等分スル三ツノ平面ハ同一直線ヲ過ル [F. 2題] 其ノ直線ヲ AE トス.



而シテ其ノ直線ハ底 BCD ニ交ルコト明カナリ.

次ニ二面角 BC ヲ二等分スル平面ヲ BFC トス. 然レバ此ノ平面ハ二ツノ面 ABC, BCD ノ間ニアリ. 依リテ直線 AE ト面 BFC トハ相交ル, 其ノ交點ヲ G トス.

サテ G ハ直線 AE 上ニアルヲ以テ二ツノ面 ABC, ACD ヨリ等距離ニアリ.

又 G ハ面 BFC 上ニアルヲ以テ二ツノ面 ABC,

BCD ヨリ等距離ニアリ

依リテ G ハ二ツノ面 ACD, BCD ヨリ等距離ニアリ.

故ニ G ハ二面角 CD ノ二等分面ノ上ニアリ.

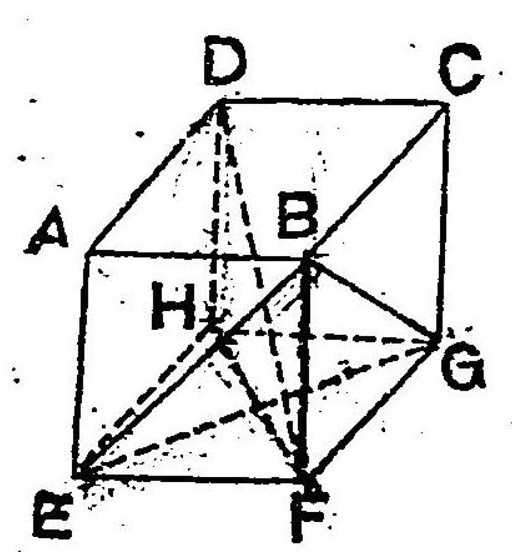
[F. 2 題注意]

同樣ニ G ハ二面角 BD ノ二等分面ノ上ニアリ.

依リテ G ハ四面體ノ各二面角ノ二等分面上ニアリ; 即チ四面體ノ各二面角ノ二等分面ハ一點 G ヲ過ル.

6. 立方體 ABCDEFGH ニ於テ三ツノ頂點 B, E, G ヲ含ム平面ハ對角線 DF ニ垂直ナルコトヲ證セヨ. [37. 五高.]

證 EG, HF ハ正方形ノ對角線ナルユエ互ニ垂直ナリ.



又 DH ハ面 HF ニ垂直ナルユエ　$DH \perp EG$,

故ニ　$EG \perp$ 面 DF,

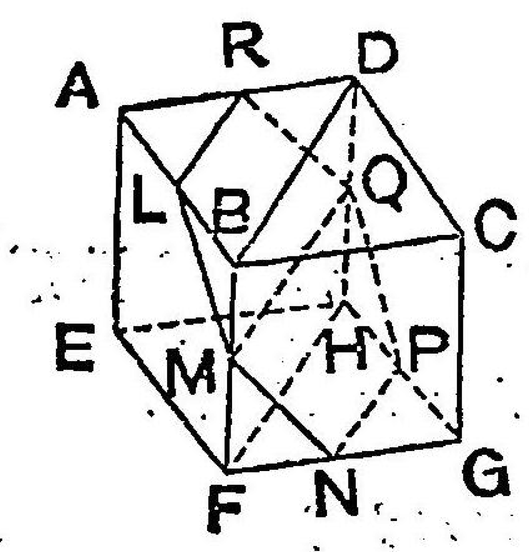
依リテ　$EG \perp DF$,

同樣ニ　$BE \perp DF$,

故ニ DF ハ BE, EG ノ定ムル平面, 即チ B, E, G ヲ含ム平面ニ垂直ナリ.

7. 正六面體[立方體]ヲ一ノ平面ニテ截リ其ノ截口ヲ正六邊形ナラシメヨ. [39. 大. 高. 工.]

與ヘラレタル正六面體ヲ ABCD-EFGH トシ, 一ツノ平面ニテ之ヲ截リ, 其ノ截口ヲシテ正六邊形ナラシメントス.



作圖　六ツノ稜 AB, BF, FG, GH, HD, DA ノ中點ヲソレゾレ L, M, N, P, Q, R トシ, 六邊形 LMNPQR ヲ作レバ, コレ所要ノ正六邊形ナルベシ.

證　先ヅ此ノ六邊形ハ平面形ナリ.

如何トナレバ MQ ヲ結ビ付クルトキハ此ハ平行四邊形 BFHD ノ對邊ノ中點ヲ結ビ付クルモノナルユエ他ノ邊 BD ニ平行ニシテ, LR モ亦 BD ニ平行ナルユエ [A. 43 題] LR ト MQ トハ相平行シ, 從ヒテ一ツノ平面ヲ決定ス, 依リテ QR, RL, LM ハ同一ノ平面上ニアリ.

同樣ニシテ RL, LM, MN, 等任意ノ相隣レル三ツノ邊ハ同一平面上ニアルコトヲ證シ得ベシ.

故ニ此ノ六邊形ノ各邊ハ同一平面上ニアリ, 即チ此ノ六邊形ハ平面圖形ナリ. 次ニ此ノ六邊形

ハ等邊ナリ. 如何トナレバ RL, LM,……ハソレゾレ BD, AF, ……ノ半分ニ等シク; BD, AF,……ハ相等シキ正方形ノ對角線ナルユヱ皆相等シケレバナリ.

尙此ノ六邊形ハ等角ナリ.

如何トナレバ前ニ云ヘルコトニ依リテ梯形 LRQM ニ於テ RQ=LM ナルユヱ $\hat{R}=\hat{L}$, 同樣ニ $\hat{L}=\hat{M}$, $\hat{M}=\hat{N}$,……ナレバナリ.

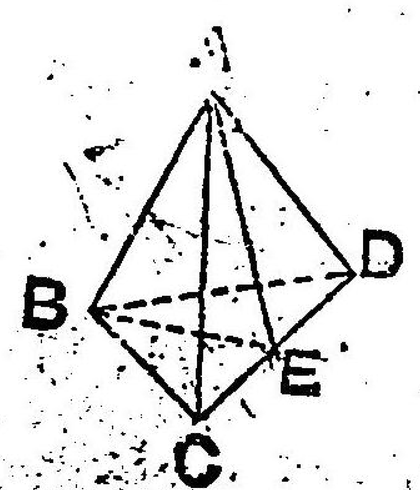
斯ノ如ク六邊形 RLMNPQ ハ平面形ニシテ等邊等角ナルヲ以テ此ハ正六邊形ナリ.

卽チ RLMNPQ ヲ過ル平面ニテノ截口ハ所要ノモノナリ.

8. 四面體ノ二面角ヲ二等分スル平面ハ其ノ對稜ヲ二ツノ部分ニ分チ其ノ部分ハ此ノ二面角ノ二ツノ側面ノ面積ニ比例スルコトヲ證セヨ.

[37. 大.高.工.]

四面體 ABCD ノ二面角 AB ヲ二等分スル平面 AEB ハ對稜 CD ヲ △ABC:△ABD ノ比ニ分ツベシ.



證 平面 AEB ハ平面 ABC ト ABD トノ間ニアルヲ以テ平面

ABC ト ABD ノ何レニモ交ル直線 CD ト交ルベシ. 其ノ交點ヲ E トス. 然ルトキハ

角錐 A-BCE : 角錐 A-BED = △BCE : △BED*

= CE : ED.

次ニ E ハ二面角 AB ヲ二等分スル平面上ノ點ナルユヱ E ハ二ツノ面 ABC, ABD ヨリ等距離ナリ. [F. 2題注意]

依リテ二ツノ角錐 A-BCE, A-BED ニ於テ E ヲ共通ノ頂點トスルトキハ二ツノ角錐ハ相等シキ高サヲ有ツユヱ

A-BCE : A-BED = △ABC : △ABD,

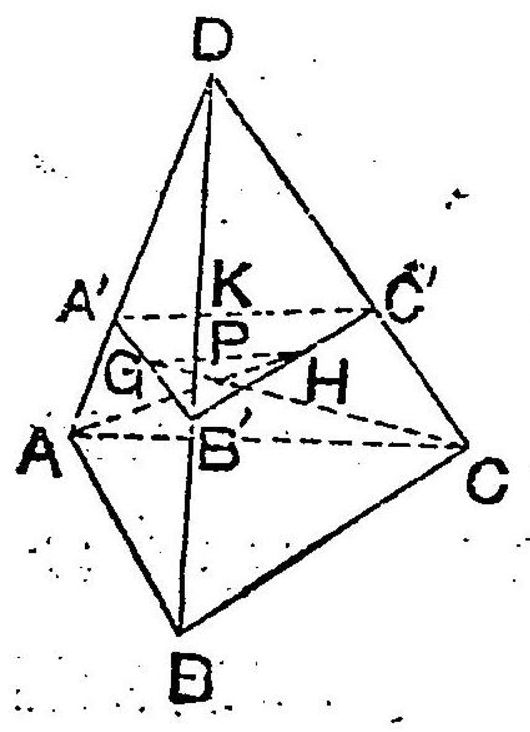
故ニ CE : ED = △ABC : ABD.

注意 I. *相等シキ高サヲ有スル角錐ハ其ノ底ニ比例ス.

注意 II. 若シ二面角 AB ノ外角ヲ二等分スルトキハ CD ヲ △ABC : △ABD ニ外分スベシ.

9. 四面體 ABCD ノ底面 ABC ニ平行ナル截面ヲ作リ, 此ノ截面ノ邊ノ中點 G, H, K ト底面ノ對角頂 C, A, B トヲ結ビ付クル三ツノ直線 GC, HA, KB ハ同一ノ點ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ. [38. 專.入.檢.]

證 底ABCニ平行ナル截面ヲ$A'B'C'$トス.



GHヲ結ビ付クレバ

$$GH \parallel A'C',$$

然ルニ $A'C' \parallel AC,$

故ニ $GH \parallel AC,$

依リテ GC, HA ハ相交ハリ,

其ノ交點ヲPトスレバ

$$\triangle PGH \backsim \triangle PCA$$

ナルユエ $PG:PC=PH:PA$

$$=GH:AC=A'C':2AC,$$

同樣ニGKヲ結ビ付ケ; GC, KBノ交點ヲP'トスレバ $P'G:P'C=P'K:P'B=GK:BC$

$$=B'C':2BC,$$

然ルニ $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$*

ナルユエ $A'C':AC=B'C':BC,$

故ニ $A'C':2AC=B'C':2BC,$

從ヒテHA, KBハGCヲ相等シキ比ニ内分ス.

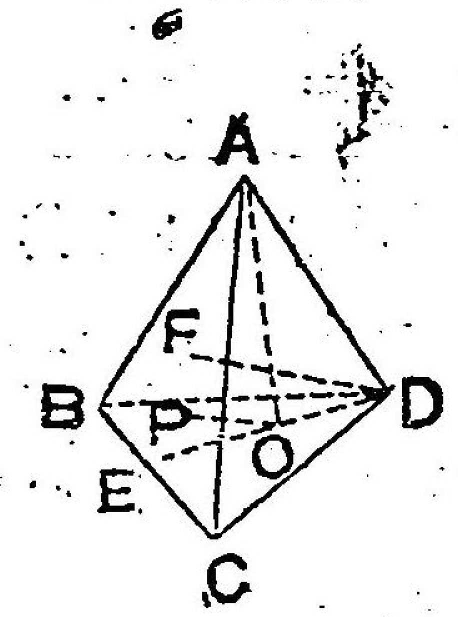
故ニPトP'トハ相合シ三ツノ直線ハ同一ノ點Pヲ過ル.

注意 *角錐ヲ底ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ其ノ截口ハ底ニ相似ナリ.

10. 正四面體ノ一ツノ角頂ヨリ底面ノ三ツノ中線ノ交點ニ引ケル直線ハ其ノ交點ヨリ一ツノ側面ニ引ケル垂線ノ三倍ナルコトヲ證セヨ.

[37. 一高.]

正四面體ABCDノ一ツノ角頂Aヨリ底面BCDノ重心Oニ引ケル直線AOハOヨリ一ツノ側面, 例ヘバABCニ引ケル垂線OPノ3倍ナルベシ.



證 DOヲ結ビ付ケ其ノ延線ガBCト交ル點ヲEトスレバ $3OE=DE.$

次ニDヨリ面ABCニ垂線DFヲ下セ. ABCDハ正四面體ナルユエAOハ底BCDニ垂直ナリ

故ニ $DF=AO,$

而シテ $\triangle DEF \backsim \triangle OEP$

ナルユエ $OP:DF=OE:DE=1:3,$

依リテ $3OP=DF=AO.$

11. 正四面體ニ於テ高サハ其ノ趾ヨリ一ツノ面ヘ引ケル垂線ノ3倍ニ等シ. 又此ノ線ノ長サヲlトシテ體積ヲ計算セヨ. [39. 專.入.檢.]

解 本題ノ始ノ部分ハ前題ニ同ジ.

次ニ此ノ長サヲ l, 一ツノ稜ノ長サヲ a トスレバ

前題ト同樣ニシテ $3l=\sqrt{\frac{3}{2}}a$, $\sqrt{\frac{2}{3}}a$

故ニ $a=3\sqrt{\frac{3}{2}}l$,

故ニ體積ハ $\frac{1}{3}\times 3l\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$$=l\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{27}{2}l^2=\frac{27\sqrt{3}}{8}l^3.$$

12. 立方體ノ全面積 937平方寸.5 ナルトキ其ノ體積ハ幾何ナルカ. [39. 陸. 士.]

解 立方體ノ一稜ヲ a 寸トスレバ全面積ハ $6a^2$ 平方寸, 體積ハ a^3 立方寸ナリ.

故ニ $6a^2=937.5$,

故ニ $a^2=156.25$,

從ヒテ $a=\sqrt{156.25}=12.5$,

故ニ $a^3=156.25\times 12.5$

$=1953.125$, 卽チ 1953立方寸.125.

13. 直六面體ノ一ツノ角頂ニ於テ出會フ三ツノ面ノ面積ヲソレゾレ 3510 平方寸, 3942 平方寸, 4745 平方寸ナリトスレバ各稜ノ長サ幾何ナルカ. [38. 陸. 士.]

解 直六面體ノ一ツノ角頂ニ於テ出會フ三ツノ稜ヲ a, b, c トスレバ題意ニ依リ

$$ab=3510=2\times 3^3\times 5\times 13 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$bc=3942=2\times 3^3\times 73 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$ca=4745=5\times 13\times 73 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

此ノ三ツノ式ヲ邊々相乘シテ平方ニ開ケバ

$$abc=2\times 3^3\times 5\times 13\times 73 \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(4) ノ兩邊ヲ (2), (3), (1) ニ除スレバソレゾレ

$a=5\times 13=65$,

$b=2\times 3^3=54$,

$c=73$

ヲ得, 卽チ三ツノ稜ハ 65 寸, 54 寸, 73 寸 ナリ.

41. 高サ 2 寸 5 分ナル直角壔アリ, 其ノ底面ハ正六角形ニシテ底面ノ一邊ハ 1 寸 2 分ナリト云フ, 然ラバ此ノ角壔ノ全面積及ビ體積ハ各幾何ナルカ [42. 陸. 士.]

解 正六角形ノ一邊ヲ a 分トスレバ其ノ面積ハ平方分ヲ單位トシテ

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 12^2=216\sqrt{3}.$$

又直角壔ノ全面積ハ底ノ周, 面積及ビ高サヲソレゾレ a' 分, A 平方分, 及ビ h 分トスレバ

$$a'h+2A=12\times 6\times 25+2\times 216\sqrt{3}$$

$$=1800+748.2\ldots\ldots\doteqdot 2548,$$

$\doteqdot 2548$, 即チ約2548 平方分.

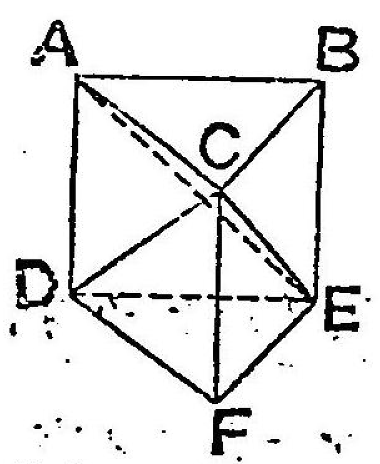
又體積ハ立方分ヲ單位トシテ

$Ah = 216\sqrt{3} \times 25 = 5400\sqrt{3}$

$\doteqdot 9353$, 即チ約9353 立方分.

15. 三角壔ハ三ツノ相等シキ三角錐ニ分チ得ルコトヲ證セヨ. [33. 六高.]

證 三角壔ヲ ABC-DEF トシ; DC, CE ヲ過ル平面及ビ AC, CE ヲ過ル平面ヲ作レバ三角壔ハC-DEF, C-ABE, C-ADE ナル三ツノ三角錐ニ分タルベシ.



而シテ三ツノ三角錐C-ABE, C-ADE ニ於テ高サハ共通ニシテ底 ABE, ADE ハ ABED ガ平行四邊形ナルコトヨリ相等シ.*

又三角錐 C-DEF, C-ABE, 即チ E-ABC ハ等底等高ナルコト明カナルユエ相等シ.

依リテ三ツノ三角錐 C-DEF, C-ABE C-ADE ハ相等シ, 即チ三角壔ハ三ツノ相等シキ三角錐ニ分タルベシ.

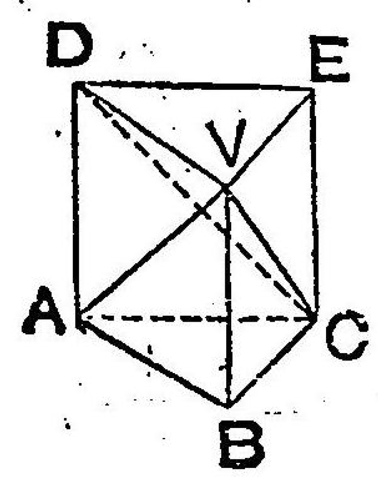
注意 I. *等底等高ノ三角錐ハ等積ナリ.

注意 II. 一ツノ三角壔ヲ三ツノ相等シキ三角錐ニ分ツニ六ツノ方法アリ.

16. 三角錐ノ體積ハ等底等高ノ三角壔ノ體積ノ $\frac{1}{3}$ ナルコトヲ證セヨ.

[34. 農. 大. 實., 38. 山. 高. 商., 39. 商船.]

V-ABC ヲ三角錐トスレバ此ノ體積ハ ABC ト等シキ底及ビ此ノ角錐ト等高ナル三角壔ノ體積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シカルベシ.



證 底ノ稜 AC ヲ過リ對稜 VB ニ平行ナル平面 ACED ヲ作リ, 又頂點 V ヲ過リテ底 ABC ニ平行ナル平面 VDE ヲ作ルトキハ三角壔 ABC-DVE ヲ得ベシ. 次ニ稜 VD, VC ノ定ムル平面ヲ作ルトキハ三ツノ角錐 V-ABC, V-ACD, V-DCE ハ其ノ體積相等シ [15 題].

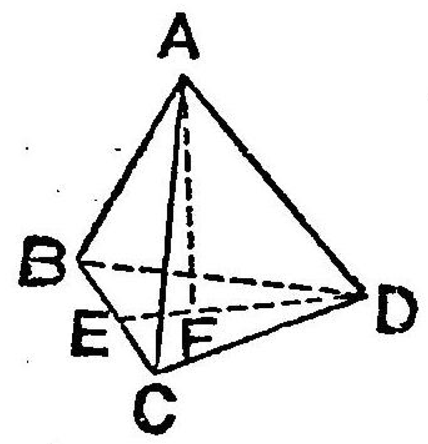
故ニ三角錐 V-ABC ノ體積ハ三角壔 ABC-DVE ノ體積ノ三分ノ一ナリ.

然ルニ等底等高ノ三角壔ハ總テ等積ナリ.

故ニ題言ノ如シ.

17. 各稜ノ長サ 1 尺ナル正四面體ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ. 又各稜ノ長サ 2 尺ナルトキハ如何. [35. 東. 高. 工.]

正四面體ABCDノ高サヲAF, 底ノ高サヲDE, 一ツノ稜BC$=a$トスレバ



$$DE=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$
$$AF=\sqrt{(\overline{AD}^2-\overline{DF}^2)}$$
$$=\sqrt{\left\{\overline{AD}^2-\left(\frac{2}{3}DE\right)^2\right\}}$$
$$=\sqrt{a^2-\tfrac{1}{3}a^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a,$$

故ニ體積ハ $\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{2}{3}}a\times\triangle BCD$
$$=\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{2}{3}}a\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3,$$
又全面積ハ $4\times\triangle BCD=\sqrt{3}a^2,$

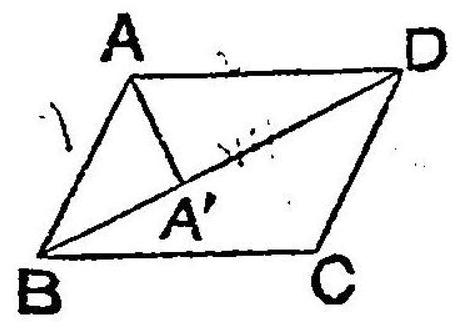
依リテ $a=1$, 或ハ 2 トスレバ全面積及ビ體積ハ $\sqrt{3}\fallingdotseq1.732$, 及ビ $\frac{\sqrt{2}}{12}\fallingdotseq0.118$, 或ハ $4\sqrt{3}\fallingdotseq6.928$, 及ビ $8\times\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\fallingdotseq0.943$, 即チ 1平方尺.732, 0立方尺.118, 又ハ 6平方尺.928, 0立方尺.943 ナリ.

注意 正四面體ハ皆互ニ相似ナリ. 而シテ相似多面體ノ面積及ビ體積ノ比ハソレゾレ一稜ノ二乘比及ビ三乘比ニ等シ, 故ニ本題ニ於テ始ノ面積及ビ體積ヲ知ルトキハ後ノモノハ其ノ各ニ 2^2, 2^3 ヲ乘ジタルモノニ等シ.

18. 體積1立方寸ナル角錐アリ, 底面ハ平行四邊形ニシテ其ノ二邊及ビ對角線ガソレゾレ1寸, 2寸, $\sqrt{7}$寸ナルトキハ高サ何寸ナルカ.

[39. 名. 高. 工.]

解 角錐ノ底ヲ平行四邊形ABCDトシ; AB, AD, BDヲソレゾレ1寸, 2寸, $\sqrt{7}$寸トス. AヨリBDニ垂線AA′[$=x$]ヲ作レバ



$$BA'=\sqrt{(\overline{AB}^2-\overline{AA'}^2)}$$
及ビ
$$A'D=\sqrt{(\overline{AD}^2-\overline{AA'}^2)},$$
故ニ
$$BA'+A'D=BD=\sqrt{(\overline{AB}^2-\overline{AA'}^2)}+\sqrt{(\overline{AD}^2-\overline{AA'}^2)},$$
即チ
$$\sqrt{7}=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-x^2},$$
兩邊ヲ平方シテ簡單ニスレバ
$$\sqrt{7(1-x^2)}=2,$$
之ヨリ
$$x=\sqrt{\frac{3}{7}}.$$
ABCDノ面積ハ $\sqrt{7}\times\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{3},$

依リテ角錐ノ高サヲhトスレバ其ノ體積ハ
$$\frac{1}{3}\sqrt{3}h=1,$$
故ニ
$$h=\sqrt{3}\fallingdotseq1.732,$$
即チ約1寸.732ナリ.

注意 三角形ノ面積ノ公式
$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ヲ用フレバ簡單ニ解キ得ベシ.

H. 圓壔

圓錐

1. 直圓錐ノ半徑 r 及ビ母線ノ長サ h ヲ知リテ

(I) 直圓錐ノ側面積,

(II) 直圓錐ノ體積

ヲ表ハス公式如何. [36. 陸. 士.]

答 (I) πrh. (II) $\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{h^2-r^2}$.

2. 高サ 2 尺 4 寸,底面ノ徑 1 尺 4 寸ナル直圓錐アリ,其ノ體積及ビ表面積各幾何.

[38. 東. 高. 商.]

解 直圓錐ノ體積ハ底ノ半徑及ビ高サヲソレゾレ r, h トスレバ

$$\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{14}{2}\right)^2\times 24$$

$$=392\pi\fallingdotseq 1231.5,$$

即チ約1231立方寸.5ニシテ,

表面積ハ $\pi r(\sqrt{h^2+r^2}+r)$

$$=\pi\times 7(\sqrt{24^2+7^2}+7)$$

$$=224\pi\fallingdotseq 703.7,$$

即チ約703平方寸.7ナリ.

3. 直圓錐ノ體積ヲ知ルトキハ圓臺ノ體積ハ其ノ高サヲ h, 上下兩底ノ半徑ヲ R, r トスレバ $\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$ ナルコトヲ證セヨ.

[36. 陸. 士.]

證 圓臺ハ二ツノ圓錐ノ差トシテ表ハシ得ベク,圓錐ハ高サ及ビ底ノ半徑相等シキ直圓錐ニ等シキヲ以テ圓臺ハ二ツノ直圓錐ノ差トシテ表ハシ得ベシ.

今直圓錐ノ體積ハ高サヲ H, 底ノ半徑ヲ R トスルトキハ $\frac{1}{3}\pi R^2H$

ナルコトヲ知レリトスレバ圓臺ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi r^2(H-h)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\{(R^2-r^2)H+r^2h\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left\{(R^2-r^2)\frac{Rh}{R-r}+r^2h\right\}^{*}$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\{(R+r)R+r^2\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2).$$

但* $H:H-h=R:r$,

故ニ　$H : h = R : R - r,$

故ニ　$H = \dfrac{Rh}{R-r}.$

4. 圓臺ノ下底面ノ半徑ハ2尺8寸，上底面ノ半徑ハ2尺ニシテ高サハ5尺7寸ナリ，體積如何．　[36. 農. 大. 實.]

解 圓臺ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2) \qquad [3\ 題]$$

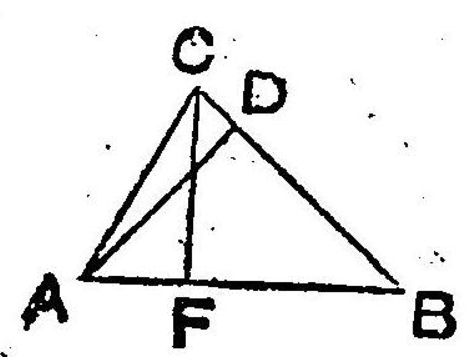
$$=\frac{1}{3}\pi\times 57\times(28^2+28\times 20+20^2)$$

$$=33136\pi \doteqdot 104099.8,$$

即チ約104099立方寸.8ナリ．

5. 三角形ABCノ AB ヲ軸トシテ旋轉シ生ズル所ノ體ノ體積ハ角頂Aヨリ對邊BCマデノ距離ニ邊BCノ軸AB上ニ旋轉シテ成ル所ノ表面積ヲ乘セシモノノ三分ノ一ニ等シキコトヲ證セヨ．　[42. 陸. 主. 候.]

證 三角形ABCガABヲ軸トシテ廻轉シテ生ズル體ノ體積ハ高サヲ AF, BFトシ，底ノ半徑ヲCFトスル二ツノ直圓錐ノ和ニ等シ．



故ニ其ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\pi\overline{CF}^2.AF+\frac{1}{3}\pi\overline{CF}^2.BF$$

$$=\frac{1}{3}\pi\overline{CF}^2(AF+BF)=\frac{1}{3}\pi\overline{CF}^2.AB.$$

又AヨリBCマデノ距離ADニ邊BCノ軸AB上ニ旋轉シテ成ル表面積ヲ乘ジタルモノノ$\frac{1}{3}$ハ

$$\frac{1}{3}AD.(\pi CF.CB)=\frac{1}{3}\pi CF.AD.CB,$$

而シテ CF.AB, AD.CB ハ何レモ △ABC ノ 2 倍ヲ表ハスヲ以テ相等シ．

依リテ題言ノ如シ．

注意 上ニ述ベタル證明ハ$\hat{A}$及ビ$\hat{B}$ヲ共ニ鋭角ナリト假定シタル場合ニシテ，若シ此ノ二ツノ角ノ中，何レカガ直角ナルトキハFハA或ハBト一致スルユヱ二ツノ直圓錐ノ中，一ツハ消失スベシ，又此ノ二ツノ角ノ中何レカガ鋭角ナルトキハFハAB，或ハBAノ延線上ニ落ツルユヱ前ニ云ヘル二ツノ直圓錐ノ和ニ代フルニ差ヲ以テスルコトヲ要ス．而シテ何レノ場合ニ於テモ本定理ハ眞ナリ．

6. 三邊ノ比3：4：5ナル直角三角形ノ各邊ヲソレゾレ軸トシテ廻轉セシメ，依リテ生ズル立體ノ體積ヲ比較セヨ．　[41. 仙. 高. 工.]

解 直角三角形ノ各邊ヲ a, b, c トシ，

$$a:b:c=3:4:5$$

トス．然ルトキハ a ヲ軸トシ廻轉シテ生ズル體ノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi b^2 a$,

b ヲ軸トスルトキハ $\frac{1}{3}\pi a^2 b$,

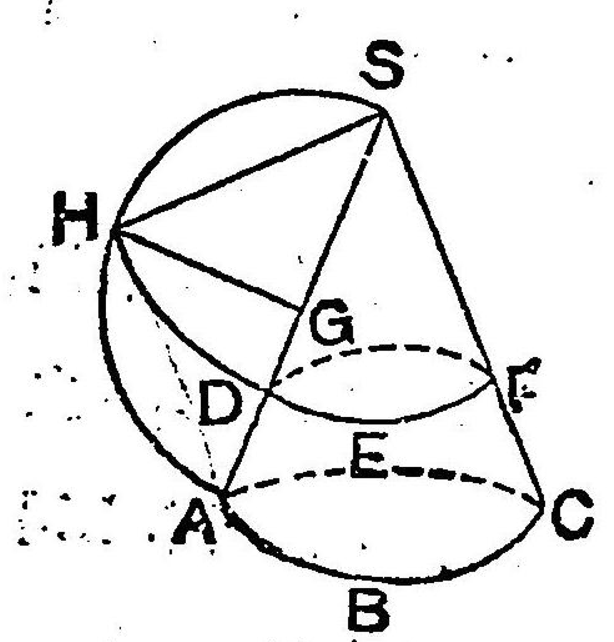
c ヲ軸トスルトキハ直角頂ヨリノ高サヲ h トシテ $\frac{1}{3}\pi h^2 c=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2b^2}{c}$ [$\because hc=ab$]

故ニ其ノ體積ノ比ハ

$$\frac{1}{3}\pi b^2 a : \frac{1}{3}\pi a^2 b : \frac{1}{3}\pi\frac{a^2b^2}{c}$$
$$=b:a:\frac{ab}{c}$$
$$=bc:ca:ab$$
$$=20:15:12.$$

7. 直圓錐ノ底面ニ平行ナル截面ヲ作リ其ノ側面積ヲ二等分セヨ． [30. 陸 士]

直圓錐ヲ S-ABC トシ，底面 ABC ニ平行ナル截面ヲ作リテ其ノ側面積ヲ二等分セントス．



解析　所要ノ截面DEFヲ作リ得タリトスレバ二ツノ直圓錐S-DEF,S-ABCハ互ニ相似ナルユヱ

(側面積 S-DEF):(側面積 S-ABC)$=\overline{SD}^2:\overline{SA}^2$,

或ハ　　$=1:1+1=1:2$,

即チ截面 DEF ハ與ヘラレタル直圓錐ノ母線 SA ヲ D ニ於テ $\overline{SD}^2:\overline{SA}^2=1:2$ ナル如ク內分ス．[換言スレバ SD ハ SA ヲ斜邊トスル直角二等邊三角形ノ一邊ナリ]．依リテ次ノ作圖法ヲ得．

作圖　任意ノ母線 SA ヲ含ム平面上ニ於テ SA ヲ徑トスル半圓周 SHA ヲ畫キ，SA ノ中點，即チ此ノ半圓ノ中心 G ヨリ SA ニ垂直ナル直線 GH ヲ引キ，半圓周ト H ニ於テ交ラシメ，SH ヲ結ビ付ケヨ．而シテ SA ノ上ニ SD=SH ナル如キ點 D ヲ取リ，D ヲ過リテ，底面 ABC ニ平行ナル平面ヲ作リテ直圓錐ヲ截ラシムレバ其ノ截面 DEF ハ所要ノモノナルベシ．

證　作圖ニ依リテ直圓錐 S-DEF ト S-ABC トハ互ニ相似ナルユヱ

(側面積 S-DEF):(側面積 S-ABC)

$$=\overline{SD}^2:\overline{SA}^2=\overline{SH}^2:\overline{SA}^2$$
$$=SG.SA:SA.SA$$
$$=SG:SA=1:2.$$

故ニ側面積 S-ABC ヨリ側面積 S-DEF ヲ除キタル部分 DEF-ABC モ亦側面積 S-ABC ニ對スル

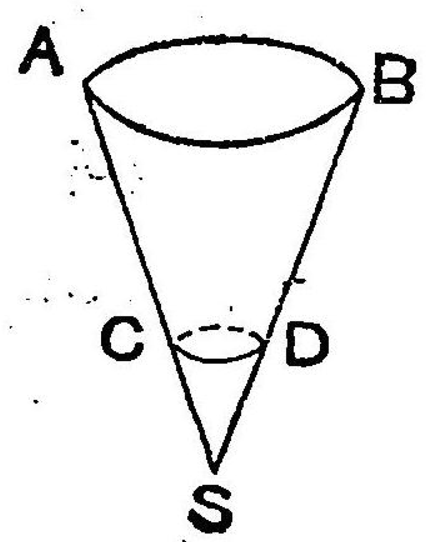
比ガ 1:2 ナリ.

依リテ　側面積 S-DEF ＝側面積 DEF-ABC.

故ニ截面 DEF ハ所要ノモノナリ

8. 斜高 a 寸, 上口徑 $2b$ 寸 [下口徑ハ甚ダ小ナルユヱ無キモノト見做ス] ノ漏斗アリ, 斜高ニ沿ヒ n 個ノ刻ミヲ付シ相隣レル刻ミ間ニ於ケル漏斗ノ容量ヲ相等シカラシムルニハ如何ナル間隔ニ刻ミヲ附スベキカ.　[40. 金. 醫. 專.]

解 本題ハ直圓錐ヲ底ニ平行ナル平面ニテ $n+1$ 等分スルコト同樣ナリ.



今直圓錐 AB-S ノ斜高 SA ヲ a 寸, 底ノ徑 AB ヲ $2b$ 寸トス. 而シテ頂 S ニ最モ近キ刻ミヲ CD トスレバ

$$\text{AB-S} : \text{CD-S} = n+1 : 1$$
$$= \overline{AS}^3 : \overline{CS}^3 = a^3 : \overline{CS}^3,$$

故ニ
$$CS = a\sqrt[3]{\frac{1}{n+1}}.$$

同樣ニシテ順次ニ刻ミト S トノ斜高ニ沿ヒテ測リタル距離 $a\sqrt[3]{\frac{2}{n+1}}$, $a\sqrt[3]{\frac{3}{n+1}}$, ……, $a\sqrt[3]{\frac{n-1}{n+1}}$, $a\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}$ ヲ得.

9. 直圓壔ノ高サ 1 米突ニシテ其ノ全面積ハ半徑 2 米突ナル圓ノ面積ニ等シト云フ. 圓壔ノ半徑及ビ其ノ體積如何.　[38. 陸. 士.]

解 直圓壔ノ全面積ハ半徑及ビ高サヲ r, h トスレバ　$2\pi r(h+r)=2\pi r(1+r)$.

圓ノ面積ハ半徑ヲ R トスレバ

$$\pi R^2=4\pi,$$

故ニ　$2\pi r(1+r)=4\pi$,　故ニ　$r(1+r)=2$,

之ヨリ　$r=1$, 卽チ 1 米突.

依リテ直圓壔ノ體積ハ

$$\pi r^2 h=\pi,\ \text{卽チ}\ \pi\ \text{立方米突}.$$

10. 半徑 R ナル水槽アリ, 今活塞ノ通路ノ長サ l ニシテ其ノ內半徑 r ナルぽんぷヲ使用シテ此ノ水ノ深サヲ l ダケ減ゼントス, 幾回活塞ヲ上下スベキカ.　[42. 海. 兵.]

解 水槽及ビぽんぷハ圓壔形ナルベシ.

然ルトキハぽんぷノ活塞ヲ一回上下スルトキハ水ハ活塞ノ通路ノ容積, 卽チ $\pi r^2 l$ ダケ減ズベシ.

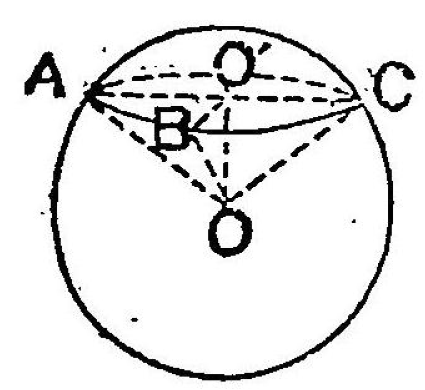
又水槽ノ深サ l ダケノ水ノ容積ハ $\pi R^2 l$ ナリ.

故ニ　所要ノ回數ハ　$\dfrac{\pi R^2 l}{\pi r^2 l}=\dfrac{R^2}{r^2}$.

I. 球

1. 球面ト平面トノ交リハ圓周ナルコトヲ證セヨ. [32. 五高.]

證 球ト平面トノ交リヲABCトシ,球ノ中心ヲOトス. 然ルトキハ截口ノ周上ノ總テノ點ト球ノ中心トヲ結ビ付クル直線ハ何レモ球ノ半徑ナルユヱ相等シ.



即チ OA＝OB＝OC＝........,

依リテ A, B, C,........等ハ平面ABCノ外ナル一點ヨリ其ノ平面ニ引クル等長ノ直線ノ端ナルヲ以テOヨリ平面ABCヘ下セル垂線ノ趾O′ヨリ等距離ニアリ. 故ニABCハ圓ナリ.

注意. 點Oガ平面ABCノ上ニアルトキハ截口ABCハ球Oノ大圓トナル.

2. 一ツノ直線ハ一ツノ球面ト二ツヨリ多クノ點ニ於テ出會フ能ハザルコトヲ證セヨ. [42. 仙. 高. 工.]

證 一ツノ直線ガ球面ト交ルトキハ其ノ交點

ハ二ツヨリ多カラザルベシ.

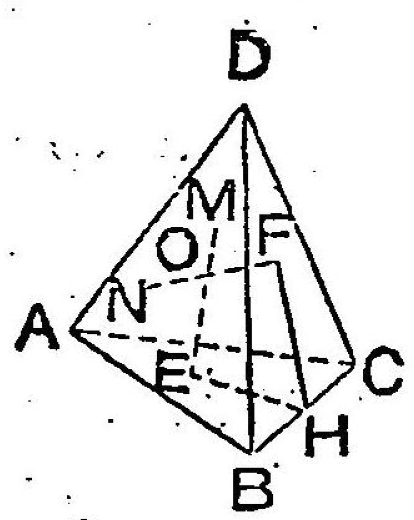
如何トナレバ其ノ直線ヲ過ル任意ノ平面ヲ作ルトキハ其ノ平面ト球トノ交リハ圓ナリ[1題]. 而シテ直線ハ其ノ圓周ト二ツヨリ多クノ點ニ於テ交ラズ,且球ト直線トノ交點ハ其ノ截口ナル圓周ト直線トノ交點ナレバナリ.

3. 球ニ切スル平面ハ其ノ切點ニ引ケル半徑ニ垂直ナルコトヲ證セヨ. [33. 一高., 33. 東. 高. 商.]

證 切面上ノ切點ヲ除ク總テノ點ハ皆球ノ外ニアルヲ以テ,ソレ等ノ諸點ト球ノ中心トノ距離ハ半徑ヨリ大ナリ,即チ球ノ切面ノ切點ニ至ル半徑ハ球ノ中心ヨリ其ノ切面ニ至ル最短距離ナリ. 故ニ其ノ半徑ハ其ノ切平面ニ垂直ナリ.

4. 同シ平面上ニ在ラザル四ツノ點ヲ過ル球ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ルコトヲ證セヨ. [36. 一高.]

證 同一ノ平面上ニアラザル四ツノ點ヲA, B, C, Dトシ,此ノ四ツノ點ヲ各角頂トスル四面體ヲ作リ,三角形ABCノ外心Eヲ過リ,其ノ面ニ垂線EMヲ引ケバ直線EM上ノ總テノ點ハ三點A, B, Cヨリ等距離ナリ.



次ニ三角形BCDノ外心Fヲ過リ其ノ平面ニ垂線FNヲ引クトキハFN上ノ總テノ點ハ三點B, C, Dヨリ等距離ニシテ且EM, FNハ相交ルベシ.

如何トナレバBCノ中點ヲHトスレバEH, FHハ共ニBCニ垂直ナリ. 從ヒテ平面EHFハBCヲ含ム平面ABC, BCDノ各ニ垂直ナリ[32題].

故ニEM, FNハ共ニ平面EHFノ上ニアリ.

而シテABC, BCDハ平行ナラズ, 又同一平面ナラザルユヱEM, FNハ平行ナラザレバナリ.

今其ノ交點ヲOトスレバOハ四點A, B, C, Dヨリ等距離ニアリ.

依リテOヲ中心トシOAヲ半徑トスル球ハA, B, C, Dヲ過ル.

次ニA, B, Cナル三點ヨリ等距離ナル點ハ直線EM上ニアラザルベカラズ.

同樣ニ三點B, C, Dヨリ等距離ナル點ハ直線FNノ上ニアラザルベカラズ.

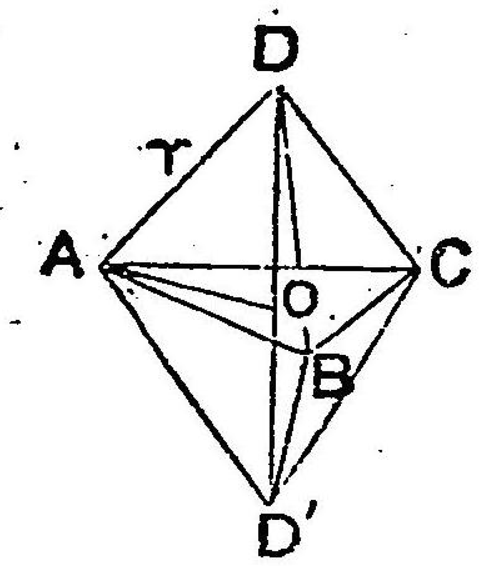
依リテ四點A, B, C, Dヨリ等距離ナル點ハ直線

EM, FNノ各ノ上ニアラザルベカラズ, 然ルニEMトFNトノ交點ハ一點Oノミナリ.

故ニA, B, C, Dヲ過ル球ハ一ツアリテ唯一ツニ限ル.

5. 與ヘラレタル三ツノ點ヲ過リ且與ヘラレタル半徑ノ球ヲ畫ケ. [33. 陸士]

與ヘラレタル三ツノ點ヲA, B, Cトシ, 與ヘラレタル半徑ヲrトスルトキA, B, Cヲ過リrヲ半徑トスル球ヲ畫カントス.



作圖 三ツノ點A, B, Cノ定ムル平面上ニ於テA, B, Cヲ過ル圓ノ中心ヲOトシ, 此ノ平面ニ垂線DOD′ヲ引ケ. 而シテAO, DOD′ノ定ムル平面上ニ於テAヲ中心トシrヲ半徑トスル圓ヲ畫キDOD′トノ交點ヲD, D′トスレバD, D′ヲ中心トシ, rヲ半徑トスル球ハ所要ノモノナルベシ.

證 作圖ニ依リテDOD′ハ三ツノ點A, B, Cヨリ等距離ナル點ノ軌跡ナリ.

故ニD, D′ハ何レモA, B, Cヨリ等距離ナリ.

而シテ $DA=r=D'A$.

依リテ D, D′ ヲ中心トシ, r ヲ半徑トスル球ハ A ヲ過リ, 從ヒテ B, C ヲモ過ル.

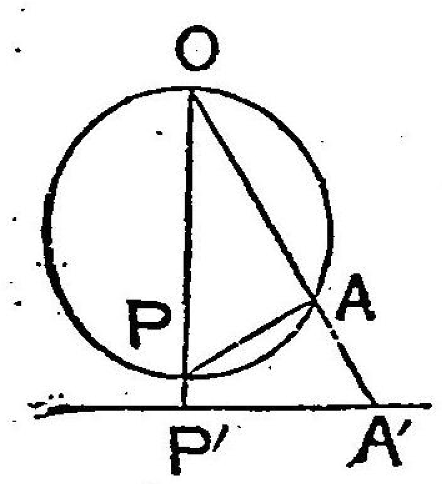
吟味 A ヲ中心トシ r ヲ半徑トスル圓ハ, $r>AO$ ナルトキハ DOD′ ト二點ニ於テ交ル. 故ニ二ツノ解アリ; $r=AO$ ナルトキハ DOD′ ト一點 O ニ於テ切ス, 故ニ一ツノ解アリ; $r<AO$ ナルトキハ DOD′ ト出會ハズ, 故ニ解ナシ.

6. 與ヘラレタル球面上ノ一定點 O ヲ過ル任意ノ直線ヲ引キ球面ト點 A ニ於テ出會ハシメ此ノ直線上ニ一點 A′ ヲ取リ, 矩形 OA, OA′ ヲ一定ナラシムルトキ點 A′ ノ軌跡ヲ求メヨ.

[42. 海.機.]

解 球ノ徑 OP ヲ作リ其ノ上ニ點 P′ ヲ

$$OA.OA'=OP.OP'$$



ナル樣ニ取リ; AP, A′P′ ヲ結ビ付クレバ

$$OP':OA'=OA:OP$$

ナルユエ

$$\triangle OP'A' \backsim \triangle OAP,$$

故ニ $\widehat{OP'A'}=\widehat{OAP}=R$,

故ニ P′A′ ハ OP ニ P′ ニ於テ垂直ナル平面上ニ

アリ.

逆ニ此ノ平面上ニ點 A′ ヲ取リ, OA′ ヲ結ビ付ケ, 球ト交ル點ヲ A トシ, PA ヲ結ビ付クレバ

$$\triangle OP'A' \backsim \triangle OAP,$$

故ニ $OP':OA'=OA:OP$,

即チ $OP.OP'=OA.OA'$,

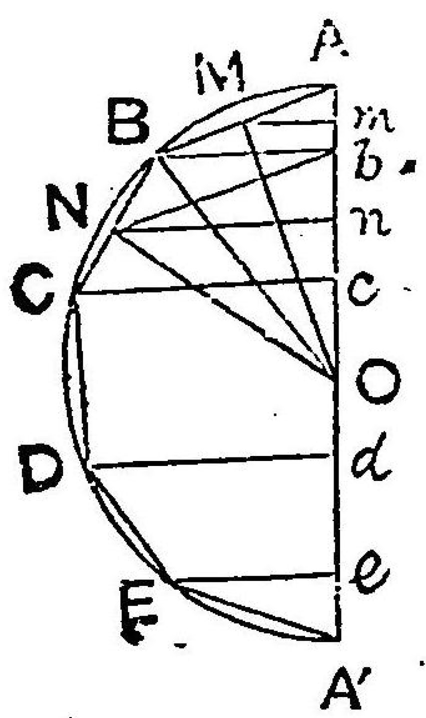
故ニ A′ ハ要件ニ適ス.

依リテ所要ノ軌跡ハ P′ ヲ過リテ OP′ ニ垂直ナル平面ナリ.

注意 A′ ヲ OA ノ反對ノ側ニモ取ルトキハ軌跡トシテ今一ツノ平面ヲ得ベシ.

7. 半徑 r ナル球ノ面積ハ $4\pi r^2$ ナルコトヲ證セヨ. [32. 二高.]

證 半徑 r ナル半圓 ABA′ ヲ其ノ徑 AOA′ ヲ軸トシテ廻轉スルトキハ半徑 r ナル球ヲ得ベシ.



今半圓ノ周 ABA′ ヲ B, C, D, E, 等ニ於テ若干等分シ; AB, BC, CD, ..., 等ヲ結ビ付ケ; B, C, D, E, ..., 等ヨリ徑 AA′ ニ垂線 Bb, Cc, Dd, ..., 等ヲ下セバ半圓

ABA′ ガ廻轉シテ球ヲ生ズルトキ折線 ABCD...ハ二ツノ直圓錐及ビ多クノ直圓臺ノ側面ヲ生ズベシ，而シテ其ノ斜高ハ $AB=BC=CD$.........ニシテ,其ノ底ノ半徑ハ Bb, Bb 及ビ Cc, Cc, 及ビ Dd, ... 等ナリ．故ニ其ノ側面積ノ和ハ

$$S=\pi AB.Bb+\pi BC(Bb+Cc)+\pi CD(Cc+Dd)+\ldots\ldots$$
$$=\pi AB\{Bb+(Bb+Cc)+(Cc+Dd)+\ldots\ldots\},$$

而シテ AB, BC, ..., 等ノ中點 M, N, ..., 等ヨリ AA′ ニ垂線 Mm, Nn, ..., 等ヲ下セバ

$$2Mm=Bb,\ 2Nn=Bb+Cc,\ \ldots\ldots,$$

故ニ $$S=\pi AB(2Mm+2Nn+\ldots\ldots)$$
$$=2\pi AM(2Mm+2Nn+\ldots\ldots),$$

次ニ OM, ON, Nb ヲ結ビ付クレバ

$$\triangle AMm \backsim \triangle AOM,$$

及ビ $$\triangle bNn \backsim \triangle BON,$$

[如何トナレバ四邊形 $BNOb$ ノ圓ニ内接スレバナリ].

故ニ $$AM.Mm=Am.OM,$$

及ビ $$BN.Nn=bn.ON,$$

即チ $$AM.Nn=bn.OM,$$

他モ亦同様ナルヲ以テ

$$S=2\pi OM(2Am+2bn+\ldots\ldots)$$
$$=2\pi OM(Ab+bc+\ldots\ldots)$$
$$=2\pi OM.2OA$$
$$=4\pi r.OM,$$

而シテ B, C, D, ..., 等ノ數ヲ次第ニ大キク取ルトキハ AB, BC, ..., 等ハ次第ニ小サクナリ，OM ハ次第ニ r ニ近ヅクベシ．

今 B, C, D, ..., 等ノ數ヲ限リナク多クスルトキハ折線 ABCD...... ハ半圓周 ABA′ トナリ，S ハ球ノ表面積トナリ，OM ハ r トナル．

故ニ半徑 r ナル球ノ表面積ハ $4\pi r^2$ ナリ．

8. 半徑 21 糎ナル球ノ面積及ビ體積ヲ求メヨ．但 π ヲ $\frac{22}{7}$ トシテ計算セヨ．[37. 仙. 醫. 專.]

解 面積ハ $$4\pi r^2=4\times\frac{22}{7}\times 21^2$$
$$=5544,\ 即チ\ 5544\ 平方糎.$$

體積ハ $$\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 21^3$$
$$=38808,\ 即チ\ 38808\ 立方糎.$$

9. 直圓錐ノ底ノ周圍ハ 32 尺ニシテ其ノ體積ハ半徑 5 尺ノ球ノ體積ニ等シ，此ノ圓錐ノ高サヲ求メヨ． [42. 海. 機.]

解 直圓錐ノ底ノ半徑及ビ高サヲソレゾレ r, h トスレバ $2\pi r=32$, 故ニ $r=\dfrac{16}{\pi}$,

依リテ體積ハ $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

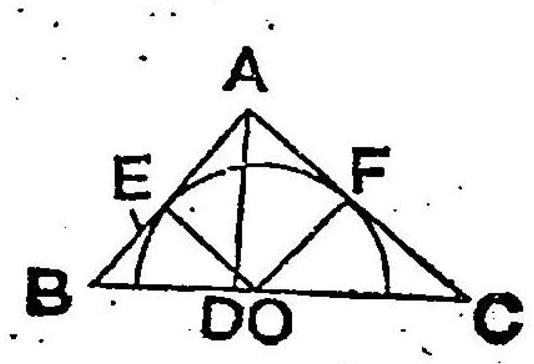
$$=\frac{1}{3}\pi\times\frac{16^2}{\pi^2}\times h=\frac{4}{3}\pi\times 5^3,$$

故ニ $h=\dfrac{125}{64}\pi^2\fallingdotseq 19.27$,

即チ 約19尺.27 ナリ.

10. 直角三角形ノ直角ニ隣レル二邊ガソレゾレ4尺, 5尺ナルトキ斜邊ヲ軸トシテ此ノ三角形ヲ廻轉シテ生ズル立體ノ體積及ビ此ノ立體ニ内切スル球ノ體積ヲ計算セヨ. [36. 東. 高. 工.]

解 三角形ABCニ於テ AB=4, AC=5 トシ, AヨリBCニ下セル垂線ヲADトス. 然レバ斜邊BCヲ軸トシ廻轉シテ生ズル體ノ體積ハ



$$\frac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.BC=\frac{1}{3}\pi\frac{(AD.BC)^2}{BC}$$

$$=\frac{1}{3}\pi\frac{(AB.AC)^2}{\sqrt{(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)}}=\frac{1}{3}\pi\times\frac{4^2\times5^2}{\sqrt{4^2+5^2}}$$

$$=\frac{400}{3\times\sqrt{41}}\pi=\frac{400\sqrt{41}}{123}\pi$$

$\fallingdotseq 65.42$, 即チ 約65立方尺.42.

次ニ直角三角形ABCニ内接スル半圓Oヲ作レバ圓Oノ半徑ハ所要ノ球ノ半徑ナリ.

今圓OガAB, ACニ切スル點ヲE, Fトスレバ AEOFハ正方形ナルコト明カナリ.

依リテ BE : EO = BA : AC,

即チ AB−EO : EO = BA : AC,

故ニ AB : EO = BA+AC : AC,

即チ 4 : EO = 4+5 : 5 = 9 : 5,

依リテ $EO=\dfrac{20}{9}$.

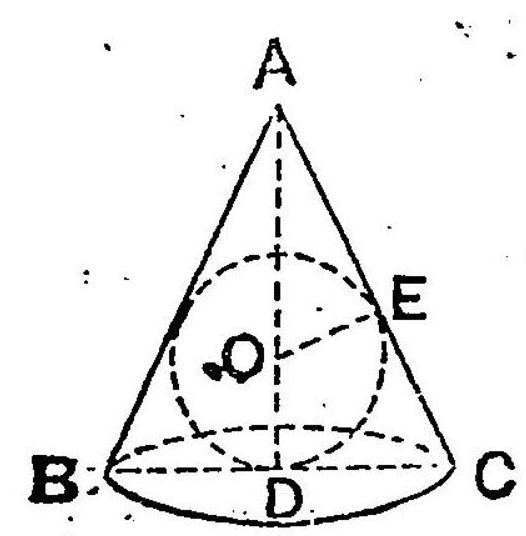
從ヒテ所要ノ球ノ體積ハ

$$\frac{4}{3}\pi\overline{OE}^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{20}{9}\right)^3=\frac{3200}{2187}\pi$$

$\fallingdotseq 46.42$, 即チ 約46立方尺.42.

11. 球ニ外切スル直圓錐ノ高サガ其ノ球ノ徑ノ二倍ナルトキハ直圓錐ノ全面積ハ球ノ面積ノ2倍ニ等シキコトヲ證セヨ. [40. 陸. 士.]

證 直圓錐ABCヲ球Oニ外切シ, 其ノ高サADハ球ノ徑ノ2倍ニ等シトス.



然レバADハ球ノ中心ヲ過リDハ底ノ中心ナリ.

次ニEヲ圓錐ノ側面ガ球

ニ切スル切點ノ一ツトス.

然ルトキハ二ツノ直角三角形 AOE, ACD ハ互ニ相似ナルユエ $AO:OE=AC:CD$.

然ルニ　　$AO:OE=AO:OD=\cancel{3:1}$ 2:1

故ニ　　$AC:CD=3:1$, 即チ $AC=3CD$. 2CD

又　　$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$,

即チ　　$9\overline{CD}^2=16\overline{OD}^2+\overline{CD}^2$,

或ハ　　$\overline{CD}^2=2\overline{OD}^2$,

而シテ　圓錐ノ全面積ハ $\pi CD.(CD+AC)$

$$=4\pi\overline{CD}^2,$$

即チ球ノ面積 $4\pi\overline{OD}^2=2\pi\overline{CD}^2$ ノ 2 倍ナリ.

12. 球ノ體積ハ外切圓壔ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シキコトヲ證セヨ.　　[33. 農.大.實.]

證　球ノ半徑ヲ r トスレバ其ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$, 其ノ外切圓壔ハ底ノ半徑 r, 高サ $2r$ ナルユエ體積ハ　$\pi r^2\times 2r=2\pi r^3$,

故ニ球ノ體積ハ外切圓壔ノ體積ノ

$$\frac{4}{3}\pi r^3\div 2\pi r^3=\frac{2}{3}.$$

13. 球ノ體積ヲ V トシ內接正六面體ノ稜ヲ a トスレバ　　$V=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$

ナルコトヲ證セヨ.　　[32. 陸.士.]

證　球ニ內接スル正六面體ノ對角線ハ球ノ徑ナルコトハ容易ニ知リ得ベシ. 故ニ其ノ正六面體ノ稜ヲ a トスレバ其ノ對角線, 即チ球ノ徑ハ $\sqrt{3}a$, 故ニ $V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$.

14. 球ノ半徑 r ヲ知ルトキ

(I) 球ノ面積,　　(II) 球ノ體積

ヲ表ハス公式如何.　　[36. 陸.士.]

答 (I) $4\pi r^2$.　　(II) $\frac{4}{3}\pi r^3$.

15. 球, 直圓壔, 直圓錐ノ全面積並ニ體積ヲ與フル式ヲ記ルセ.　　[33. 二高.]

答　球ハ前題ニ同ジ.

直圓壔ノ半徑ヲ r, 高サヲ h トスレバ

全面積ハ　　$2\pi r(h+r)$,

體積ハ　　πr^2h

直圓錐ノ半徑ヲ r, 高サヲ h トスレバ

全面積ハ　　$\pi r(\sqrt{h^2+r^2}+r)$,

體積ハ　　$\frac{1}{3}\pi r^2h$.

補

A. 55. **注意** 倘 QR ヲ對角線トスル正方形ニ於テ P ノ對角頂ヲ P′ トスレバ上ニ述ベタルコトト同樣ニシテ P ガ MOM′ ノ上ニアルトキハ P′ ハ NON′ ノ上ニアルコトヲ證シ得ベシ. 即チ P ガ MOM′ ノ上ヲ移動スルトキ P′ ハ NON′ ノ上ヲ移動ス.

A. 59. **注意** 平行四邊形ニ於テハ相對スル角ハ相等シク, 相隣ノ角ハ互ニ補角ヲナス. 故ニ所題ノ一角ヲ何レトナスモ結局リ $A\hat{B}C=E\hat{F}G$ トナセル上ノ證ニ歸ス.

A. 63. 本題ノ逆ハ"二等邊三角形ノ二ツノ中線ハ相等シ"ニシテ, コレ亦眞ナルベシ.

如何トナレバ三角形 ABC ニ於テ AB=AC トシ, 二ツノ中線 BD, CE ヲ引クトキハ △ABD, △ACE ニ於テ

$$AB=AC,$$

$$AD=AE\left(=\frac{1}{2}AB \text{ 或ハ } \frac{1}{2}AC\right),$$

$\hat{A}$ ハ共通,

故ニ $$\triangle ABD\equiv\triangle ACE,$$

從ヒテ $$BD=CE.$$

A. 71. **注意** 本題ニ於テ"相隣レル二角"ト云ヘルヲ"相對スル二角"ト改ムレバ"他ノ二ツノ角ノ差ノ半分ニ等シ"ト云フ定理ヲ得ベシ.

A. 72. **注意** 平行四邊形ガ矩形ナルトキハ四ツノ二等分線ニテ生ズル形ハ正方形トナリ,又正方形若シクハ菱形ナルトキハ四ツノ二等分線ハ二ツヅツ相合シテ四邊形 EFGH ヲ成サズ.

A. 81. **別證** 比例ニ依リテノ證ハ次ノ如シ.

88頁ノ圖ニ於テ BC ノ中點ヲ E トシ, E ヨリ同樣ナル平行線 EE′ ヲ引キ, 而シテ AE ヲ結ビ付クレバ, D ハ AE ヲ AD:DE=2:1 ニ分チ E ハ BC ヲ BE:EC=1:1 ニ分ツ.

故ニ $$DD'\times(1+2)=AA'\times1+EE'\times2,^{*}$$

及ビ $$EE'\times(1+1)=BB'+CC'$$

故ニ $$3DD'=AA'+BB'+CC'.$$

注意 *一般ニ有限直線 LN ヲ M ニ於テ

$$LM:MN=m:n$$

ナル比ニ內分シ, LM ヲ截ラザル無限直線 XY ニ平行線 LL′, MM′, NN′ ヲ作レバ

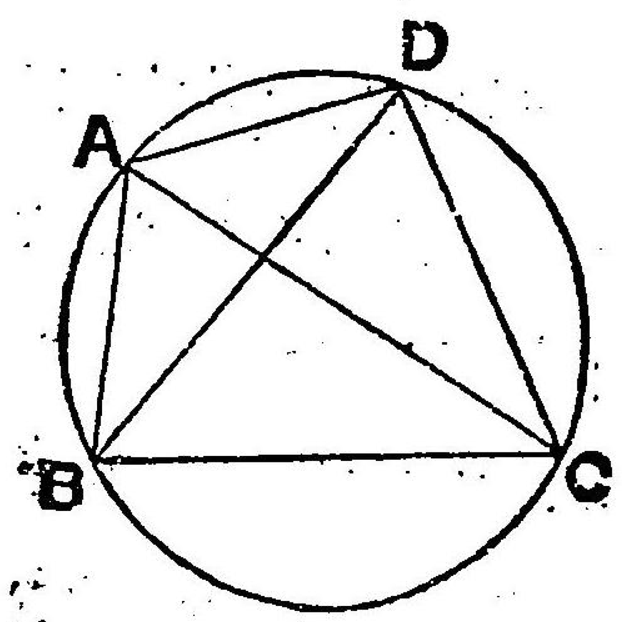
$$MM'\times(m+n)=LL'\times n+NN'\times m.$$

又若シ XY ガ LM ヲ截ルトキハ

$$MM'\times(m+n)=LL'\times n\sim NN'\times m.$$

尙本題ニ就キテ他ノ一二ノ證明ヲ見ント欲スル人ハ雜誌えつくすわい第六卷 114 頁ヲ參照スベシ.

B. 13. 證 II. AC, BD ヲ結ビ付ケヨ.



然ルトキハ $B\hat{D}C$, $B\hat{A}C$ ハ同ジ弓形 BADC 內ニ於ケル角ナルユヱ相等シ. 同樣ニ

$$B\hat{D}A=B\hat{C}A.$$

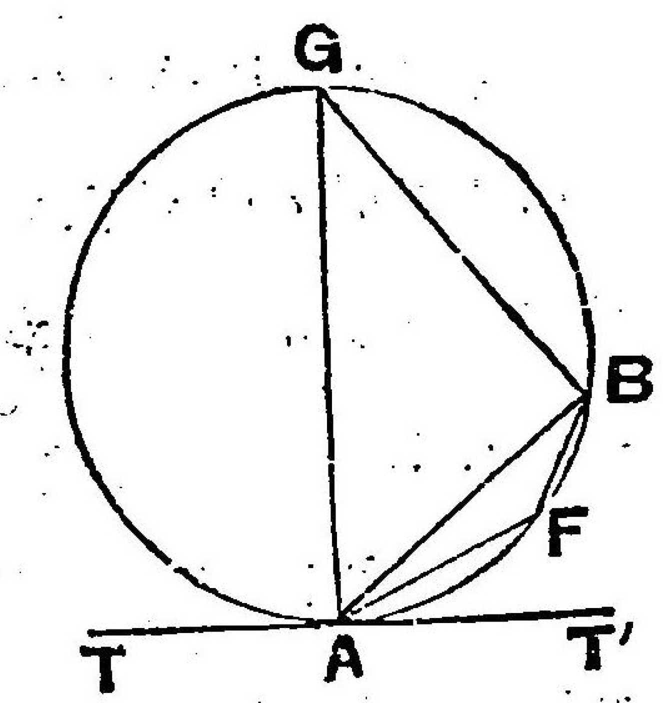
故ニ $$A\hat{B}C+A\hat{D}C$$
$$=A\hat{B}C+B\hat{D}C+B\hat{D}A$$
$$=A\hat{B}C+B\hat{A}C+B\hat{C}A$$
$$=\triangle ABC \text{ ノ內角ノ和 } =2\hat{R}.$$

注意 前ニ揭ゲタル證明ハ"圓周角ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ"ト云フ定理ヲ基本トシ, 此處ニ示セル證明ハ通例前ノ定理ノ系ト見做セル"同ジ弓形ニ於ケル角ハ相等シ"ヲ基本トセリ.

B. 42. 注意 若シ頂點 C ガ AB ニ關シテ

他ノ側ニ移動スルコトヲ許ストキハ, AB ニ關シテ M ノ對稱點 M′ ハ第二ノ定點ナリ. 尙本題ト同樣ノコトヲ外角ノ二等分線ニ就キテモ亦證シ得ベシ.

B. 48. 證 II. 圓ノ切線ヲ TAT′, 其ノ切點 A ヲ過ル弦ヲ AB トス.



今徑 AG ヲ引キ, 弧 AB 上ニ任意ノ一點 F ヲ取リ, FA, FB ヲ結ビ付クレバ [但圖ニ於テハ AG ニ關シテ B, F, T′ ト T トハ互ニ反對ノ側ニアルモノトス].

$$\hat{G}+\hat{F}=2\hat{R} \qquad \text{[B. 13 題]}$$

又 $$A\hat{B}G=\hat{R}=G\hat{A}T$$

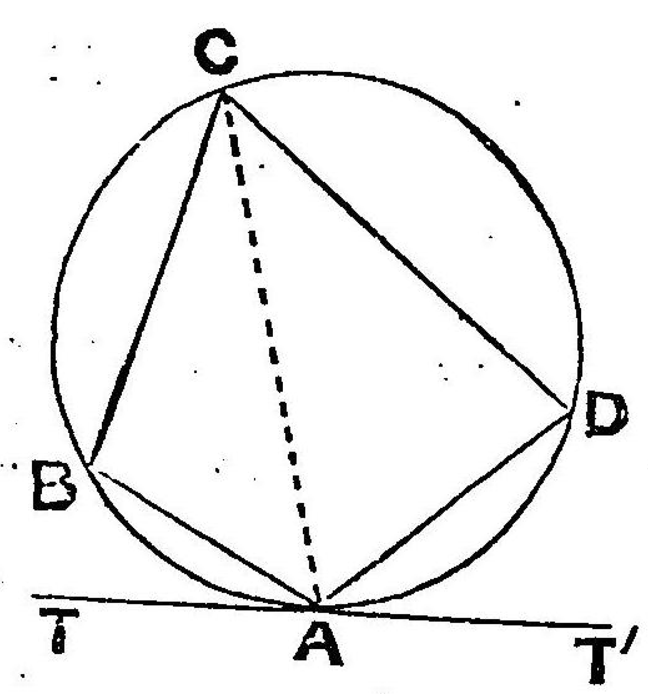
ナルユヱ $$\hat{G}+A\hat{B}G+B\hat{A}G\ (=2\hat{R})$$
$$=\hat{G}+G\hat{A}T+B\hat{A}G=\hat{G}+B\hat{A}T.$$

故ニ $B\hat{A}T$ ト $\hat{F}$ トハ共ニ $\hat{G}$ ノ補角ナルユヱ相等シ. 云々.

證 III 圓ニ內接スル四邊形ヲ ABCD, A ニ於ケル切線ヲ TAT′, BA ノ延線ヲ AE トセヨ [但

圖ニ於テ CA ヲ結ビ付クル直線ニ關シテ B ト T, D ト T′ トハソレゾレ同ジ側ニアルモノトス].

然ルトキハ内接四邊形 ABCD ノ一外角トシテ $D\hat{A}E$ ハ恒ニ内對角 BCD ニ等シ.



今四邊形ノ頂點ノ中, B ノ位置ノミヲ移動セシメテ次第ニ A ニ接近セシムルトキハ $B\hat{A}T$ ハ次第ニ減少シ, B ガ A ニ近迫シタル極限ノ位置ニ於テハ BAE ハ TAT′ ト一致シ, CB ハ CA ト一致スルユヱ, $D\hat{A}E$ ハ $D\hat{A}T'$ ト合シ, $B\hat{C}D$ ハ $A\hat{C}D$ ト合ス.

是ニ依リテ　　$D\hat{A}T'=A\hat{C}D$

ナラザルベカラズ. 云々.

C. 5. 注意 差ノ場合ニ於テ, 若シ E ガ AB ト CD トノ交點ト一致スルトキハ △ABE ハ消失ス. 換言スレバ CD ガ AB ニ依リテ二等分セラルルトキハ　△ABC=△ABD.

而シテ逆ニ　△ABC=△ABD

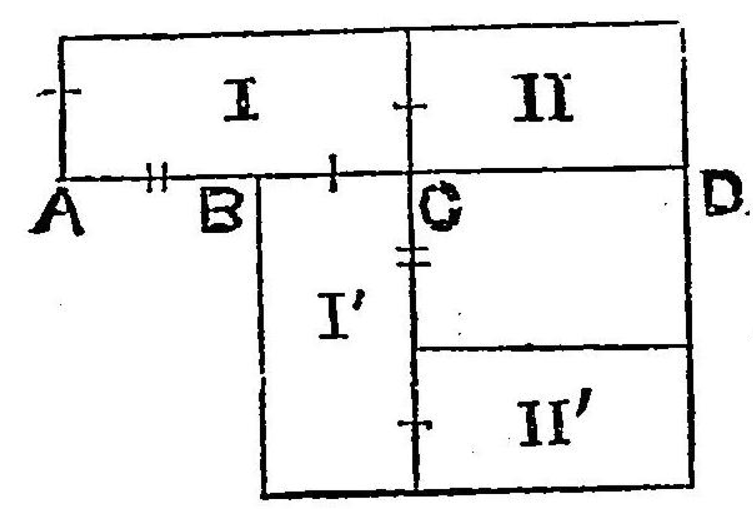
ナルトキハ CD ハ AB ニ依リテ二等分セラルルコトヲ推知スベシ.

C. 51. 注意 始ノ證ハ直接ノモノナレドモ, 若シ圓ノ方羃ニ關スル定理ヲ借リ來レバ本題ノ定理ハ直チニ證明セラルベシ.

卽チ PC ヲ引キ延バシテ再ビ圓周ト交ル點ヲ D トスレバ, AB ハ圓ノ徑ナルユヱ PC=CD,

而シテ　$AC.CB=DC.CP=\overline{CP}^2$.

C. 54. 注意 I. 本題ハ又次ノ圖ノ如ク各矩形ヲ畫キテモ證シ得ベシ.



卽チ I ト I′, II ト II′ トノ相等シキコトニ注意スベシ.

注意 II. 本題ノ定理ヲおいれるノ定理ト云フ.

C. 64. 吟味 所要ノ圓ヲ畫キ得ベキ爲ニハ P, Q, X ガ同一直線上ニアラザルコト, 從ヒテ P, O, O′ ガ同一直線上ニアラザルコトヲ要ス. 而シテ一般ニ唯一ツノ解アリ.

D. 3. **注意** 尙本題ノ定理ハ各三角形ニ於テ頂點ヨリノ垂線 A'H', AH ヲ作リ相似三角形ヲ適用シテ證明スルコトヲ得ベシ.

D. 6. **注意** 解 I ニ於テ若シ AC ヲ徑トスル半圓ノ代リニ AC ヲ弦トスル任意ノ圓ノ弧ヲ畫クトキハ, 中心 O ト B トヲ結ビ付ケ, OB ニ垂線 BD ヲ作リ, 其ノ弧ト D ニ於テ交ラシムレバ BD ハ所要ノ直線ナルベシ, 如何トナレバ DB ノ延線ガ再ビ圓周 O ト交ル點ヲ D' トスレバ BD=BD'. 而シテ $AB.BC=BD.BD'=\overline{BD}^2$ ナレバナリ.

D. 11. **證 II.** OC ハ切線ナルユヱ

$$\overline{OC}^2=OA.OB,$$

或ハ $OC:OA=OB:OC.$

依リテ二ツノ三角形 OBC, OCA ハ一角 O ガ相等シク, $\hat{O}$ ヲ夾ム邊ガ比例ヲナス.

故ニ $\triangle OBC \backsim \triangle OCA.$

D. 14. **證 II.** D 及ビ E ニ於ケル角ガ直角ナル直角三角形 ABD, CBE ハ $\hat{B}$ ヲ共有ス, 故ニ互ニ相似ナリ.

依リテ $BD:BE=AB:BC.$

從ヒテ二ツノ三角形 DEB, ABC ハ $\hat{B}$ ヲ共有シ, 且之ヲ夾ム二邊ガ比例ヲナス, 故ニ又互ニ相似ナリ.

注意 此ノ證 II ヲ適用スレバ B. 71 題ノ別證ヲ得ベシ, 卽チ其ノ圖ニ於テ三角形 XZB, XYC ガ何レモ三角形 ABC ニ相似ナルユヱ, 又互ニ相似ニシテ $Z\hat{X}B=C\hat{X}Y,$

是等ノ角ノ餘角ヲ取レバ

$$A\hat{X}Z=A\hat{X}Y.$$

D. 17. **證 II.** 前ノ證ニ云ヘル如ク

$$\triangle OEH \backsim \triangle OAD,$$

$$\triangle OEF \backsim \triangle OCD,$$

....

今四邊形 EFGH ヲ裏返シニスルトキハ △OEH ト △OAD, △OEF ト △OAB, △OFG ト △OBC, △OGH ト △OCD トハソレゾレ相似ニシテ相似ノ位置ニ置カレタルモノナルコト明カナリ. 故ニ四邊形 EFGH ハ平行四邊形 ABCD ニ相似ナリ.

D. 26. **證 III.** 與ヘラレタル關係ヨリ

$$\overline{AD}^2=BD.DC.$$

而シテ直角三角形 ABD ヨリ

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=BD.DC+\overline{BD}^2$$
$$=BD(DC+BD)=BD.BC.$$

依リテ BA ハ △ADC ノ外接圓ニ點 A ヒ於テ切ス.

故ニ $$B\hat{A}D=A\hat{C}D.$$

從ヒテ $B\hat{A}D+O\hat{A}D=A\hat{C}D+C\hat{A}D=\hat{R}.$

D. 39. 別證 先ヅ OPO′ ハ同一ノ直線上ニアリ. サテ二ツノ圓ガ相等シキトキハ

$$\triangle CAB\equiv\triangle DBA$$

ナルユエ $CA:AB=AB:BD$

ナルコトハ甚ダ明瞭ナリ.

依リテ, 例ヘバ 圓O′>圓O

トスレバ $BO'>AO,$

故ニ O ヨリ BD ニ垂線 DE ヲ引クトキハ其ノ趾ハ B ト O′ トノ間ニアリ.

而シテ $\overline{OE}^2=\overline{OO'}^2-\overline{O'E}^2$

$$=(OO'+O'E)(OO'-O'E),$$

然ルニ $OO'=OP+O'P=AO+O'D$

$=BE+O'D$ [∵OABE ハ矩形]

ナルユエ $OO'+O'E=BD,$

同樣ニシテ $OO'-O'E=AC.$

故ニ $\overline{OE}^2=AC.BD.$

或ハ $\overline{AB}^2=AC.BD.$

D. 41. 注意 本題ノ別證ニ就キテハ C. 67 題ヲ見ヨ.

D. 45. (1) 證 II ノ終ニ次ノ注意ヲ加フ.

注意 本證ハ一般ニ $\hat{C}\neq\hat{R}$ ナルトキニシテ, 若シ $\hat{C}=\hat{R}$ ナル特別ノ場合ニハ D, E ハ C ト一致スルユエ AC>BC ナルコトヨリ直チニ AD>BE ナリ.

(2) 證ノ終ニ次ノ注意ヲ加フ.

注意 本證ニ於テハ $\hat{C}\neq\hat{R}$ ト假定セリ, 若シ $\hat{C}=\hat{R}$ ナルトキハ不等式ハ等式トナル.

D. 65. 注意 II. 但場合ニ依リテハ次ノ如ク敷衍スル必要モアルベシ.

I. AC ハ B, D ニ依リテ調和ニ分タレ, BD ハ A, C ニ依リテ調和ニ分タル.

如何トナレバ (1) ヨリ

$$AB:AD=BC:CD,$$

或ハ $BC:CD=AB:AD$ ... ... (2)

即チ (1) ハ始ノ關係ヲ示シ, (2) ハ後ノ關係ヲ示

22 イ

セバナリ．[而シテBトDトヲACニ關シテ調和共軛點ト云ヒ，AトCトヲBDニ關シテ調和共軛點ト云フ．又AB：BC=AD：CDナル比ヲ調和比ト云フ]．

II. 四ツノ調和列點ノ中，任意ノ二ツト調和比トヲ與フレバ他ノ二ツハ決定セラル．

證 略ス．

故ニ又四ツノ調和列點ノ中，任意ノ三ツヲ與フレバ他ノ一ツヲ知ルコトヲ得ベシ．

E. 23. 別證 直線ABEハ三角形Oabノ截線ナルユヱめねらすノ定理[D. 48題]ニ依リテ

$$(AE:EB)(Bb:bO)(Oa:aA)=1,$$

同様ニ $(BG:GC)(Cc:cO)(Ob:bB)=1,$

$$(CF:FA)(Aa:aO)(Oc:cC)=1.$$

是等ノ三ツノ複比ヲ相乘シテ，互ニ逆數ナル比ヲ省略スレバ $(AE:EB)(BG:GC)(CF:FA)=1.$

故ニE, F, Gハ同一ノ直線上ニアリ．

D. 45. (2) 別證 削除ス．

371頁10行乃至13行ハ削除シテ"而シテ本題ニハ概シテ六ツノ解アリ"ト改ム．

16