平面幾何學講義

中央陸軍軍官學校編印

民國二十五年八月

平面幾何學講義

目　次

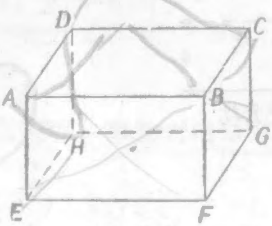
平面幾何學講義

第一編　緒論

第一章　緒　論

1.　幾何學是研究物體之形狀大小及位置之科學，爲算學之一分科.

2.　物體在空間占有的一部分曰立體．如圖在幾何學中稱爲直六面體，是立體之一種；其他如球，角錐，柱體，圓錐等，皆爲有規則之立體.



直六面體

3.　直六面體有三個方向發展，就是：

(i)　由A至B,

(ii)　由A至D,

(iii)　由A至E.

稱爲直六面體之長，闊，厚(或高)；此長，闊，厚各名曰向度，故立體普通有三個向度.

4.　立體之界曰面，面有長闊二個向度；面之界曰線，線僅有長一個向度；線之界曰點，點祇有位置而無向度.

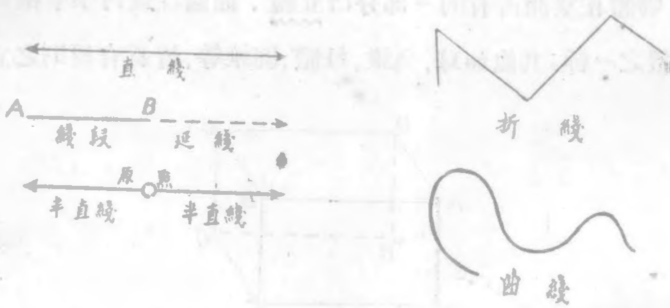
【問題1】　直六面體爲幾個面所界成？每面爲幾條線所界成？每線由幾點所界成？

5. 兩線相交之處曰點,或稱交點;線又可分直線,曲線兩種.

線之方向處處皆同者曰直線.直線之全體,其長無限;其有限之一部分曰線段,在外之一部分曰延長線,或簡稱延線,在無限直線上取一點,分直線爲二部份,每份曰半直線,其點曰原點.

將若干不同在一直綫上之直線段,聯接而成之線曰折線.

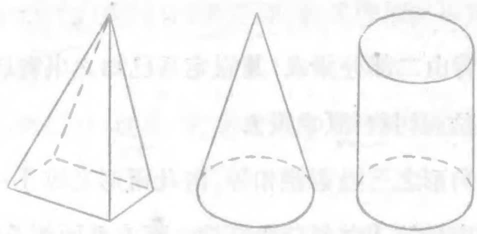
線之方向處處皆變者曰曲線.在初等幾何學中所研究者,僅有圓一種曲線.



6. 一曲線圍成之平面形,此曲線與形內某點之距離皆相等者曰圓;某點曰圓心,曲線曰圓周,圓周上之任一部分曰弧,圓周上一點至圓心之距離曰半徑.

7. 面可分平面,曲面兩種.

聯面中任何二點之直線,全在面中者,則名此面曰平面,否則曰曲面.如直六面體,角錐之面爲平面,圓柱體,圓錐之側面爲曲面.



角　錐　　圓　錐　　圓柱體

8. 一個或數個立體,面,線,點之集合曰圖形.

9. 研究在同一平面內圖形之性質者曰平面幾何學；研究不在同一平面內圖形之性質者曰立體幾何學,或稱空間幾何學.

幾何學中之名詞:—

10. 命辭： 以語言說明一事物者曰命辭, 如定理, 作圖題等皆稱命辭.

11. 定義： 以語言說明一名詞之意義, 幷限制其意義, 使與別個名詞相區別者曰定義.

12. 證： 依論理之方法,推定其事理之眞僞者曰證.

13. 公理： 理之不待證明, 而由吾人之經驗, 得認知其爲眞確者曰公理.

14. 定理： 理之得由已知之命辭,證明其爲眞確者曰定理.

15. 系： 理之可由已經證明之定理,容易直接推得者曰系.

16. 公法： 可不加證明而人人所公認其爲可能之法曰公法.

17. 作圖題： 研求適合於已知條件之圖形, 及其作圖之方法曰作圖題.

定理之種類:—

18. 凡定理皆由二部分組成:其假定爲已知之事實曰假設(已知);其由假設而斷定之結論曰終結(求證).

例如「兩三角形之三邊對應相等,則此兩形全等」一定理中,其「兩三角形之三邊對應相等」之部分爲假設,而「此兩形全等」之部分爲終結.

19. 凡定理皆可依下列(1)式敍述之,而與(1)聯屬者復有(2),(3),(4)三形式之定理.卽

若爲A,則爲B.……………【例】……凡馬皆爲四足獸…………(1)

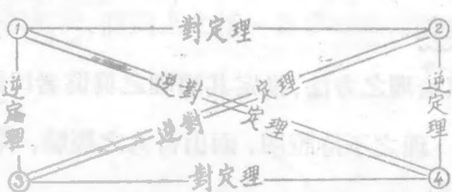
若非A,則非B.…………………………非馬則非四足獸…………(2)

若爲B,則爲A.…………………………凡四足獸皆爲馬…………(3)

若非B,則非A.…………………………非四足獸則非馬…………(4)

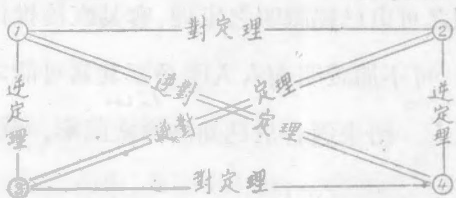
更以圖表顯明之如次:

若爲A,則爲B.　　　　若非A,則非B.



若爲B,則爲A.　　　　若非B,則非A.

例　凡馬皆爲四足獸.　　　　非馬則非四足獸.



凡四足獸皆爲馬.　　　　非四足獸則非馬.

上述之(1)與(2),(3)與(4)曰對定理,對定理卽將原定理之假設與結論各改為否定語卽得.

(1)與(3),(2)與(4)曰逆定理,逆定理卽將原定理之假設與結論互換卽得.

(1)與(4),(2)與(3)曰逆對定理,逆對定理卽將原定理之假設與結論互換,且各改為否定語卽得.

凡為逆對定理之二定理必同時俱眞或同時俱僞,故凡此二定理中,若能證明其一為眞,則其逆對定理可不待證明而必知其為眞.但原定理眞時,其逆定理對定理未必為眞.故幾何學中通常皆取其不成逆對定理之二定理如(1)與(2)或(1)與(3)證明之卽可.

【問題 2】 設有定理「中國人以米為常食」.試寫出其對定理,逆定理及逆對定理;並確定其孰為眞孰為僞?

【問題 3】 如曰「某甲居住鎮江,則為江蘇省內居民」,試述其對定理,逆定理及逆對定理;併確定其孰是孰非?

20. 普通公理:—

(1) 等量加法公理: 等量加等量,其和相等.

(2) 等量減法公理: 等量減等量,其差相等.

(3) 等量乘法公理: 等量以同數或等數倍之,其積仍相等.

(4) 等量除法公理: 等量以同數或等數等分之,其商仍相等.

(5) 全量大于分量公理: 全量大於其各分量.

(6) 分量總和公理: 全量等於其各分量之和.

(7) 等量遞等公理: 等於同量或等量之量相等.

(8) 二量關係公理: 若 a 與 b 為同類量,則下列三種關係中必有

一種且僅有一種能成立：

$$(\text{i})\ a=b,\qquad (\text{ii})\ a>b,\qquad (\text{iii})\ a<b.$$

(9) 三量比較公理：若$a>b$, $b\geqq c$或$a\geqq b$, $b>c$, 則$a>c$.

(10) 不等量加減等量公理：若$a>b$, 則$a\pm x>b\pm x$.

(11) 等量乘除不等量公理：若$a>b$, $m=n$, 則$m\cdot a>n\cdot b$, $\frac{a}{m}>\frac{b}{n}$.

(12) 不等量加不等量公理：若$a>b$, $c>d$, 則$a+c>b+d$.

(13) 等量減不等量公理：若$a=b$, $c>d$, 則$a-c<b-d$.

(14) 不等量乘不等量公理：若$a>b$, $c>d$, 則$a\cdot c>b\cdot d$.

(15) 不等量除等量公理：若$a=b$, $c>d$, 則$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

(16) 替代公理：在等式或不等式中，一量可用其等量去替代.

【問題4】設$a+b=15$, $a+b=c$, 則c之值如何？

【問題5】設$a+b>c$, 則$c-b$與a孰大？

【問題6】設$x=2y+b$, $x=3y-1$, 試寫出不含x之等式併求出y之值.

【問題7】設$x>y$, $m<n$, 則能確定mx與ny之關係否？

21. 公法：—

(1) 作直線公法：過二點可作一直線.

(2) 直線延長公法：凡直線可以任意延長.

(3) 畫圓公法：任意一點為圓心，任意線段為半徑，可作一圓.

22. 幾何學公理：—

(1) 移形公理：圖形可變更其位置，而不變更其形狀大小.

(2) 疊合公理：兩圖形相疊，若處處相合時，則兩圖形全等.

(3) 兩點距離公理：直線為兩點間最短線段.

(4) 直線確定公理: 過兩點僅有一直線; 故兩直線若有二點或一部分相合,則兩直線全相合?

(5) 直線交點公理: 兩直線相交,僅有一交點.

【問題 8】 A,B,C為任意三點,AB+BC與AC是否相等?何時方能相等.

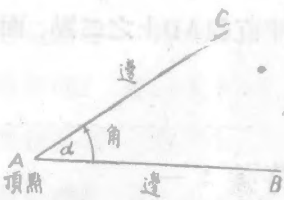
【問題 9】 B,C為半直線AD上之二點,而有 AB=AC 之關係,則此二點應如何?

23. 幾何學中之符號:—

≌或≡	(全等)	≠	(不等於)
>	(大於)	<	(小於)
≧	(大於或等於)	≦	(小於或等於)
～	(差)	∽	(相似)
∠	(角)	∠s	(諸角)
rt∠, ∠R	(直角)	rt∠s, ∠sR	(諸直角)
st∠	(平角)	st∠s	(諸平角)
∥	(平行)	⊥	(垂直)
△	(三角形)	△s	(諸三角形)
rt△	(直角三角形)	rt△s	(諸直角三角形)
▱	(平行四邊形)	▱s	(諸平行四邊形)
▭	(矩形)	▭s	(諸矩形)
□	(正方形)	□s	(諸正方形)
⊙	(圓)	ⓢ	(諸圓)
∵	(因為)	∴	(所以)

第二章　直線角

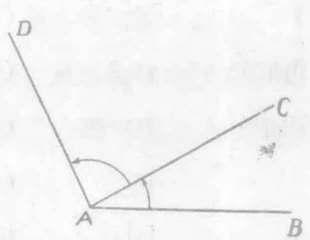
24.（定義） 如圖，一半直線AB，繞原點A旋轉至AC，其所經平面部分曰角，其原點A曰角之頂點．其半直線在前後兩位置AB，AC曰角之邊．



25. 角之大小即以半直線旋轉之大小來測定，與邊之長短無關．

26. 角之記法有三：(i)以頂點之文字置在二邊上他端二文字間而記之，如∠BAC或∠CAB．(ii)如不致與他角混淆時，可僅以頂點之文字記之，如∠A．(iii)於兩邊間近頂點處，寫一符號（文字，數字均可）而記之，如∠α或∠1等．

27.（定義） 共一頂點及一邊，且分列在共有邊之兩側之二角，互稱爲鄰角，或曰倚角，其不公共之二邊曰外邊，如圖，∠BAC與∠CAD互爲鄰角，AB與AD爲外邊．

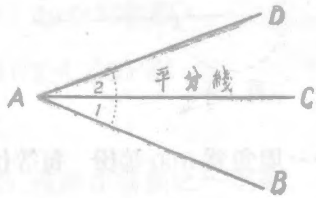


【註】　此時角之記法，不可用∠A，因所指爲∠BAC，抑爲∠CAD，不能分明故也．

28.（定義） 平分一線段成爲相等二部之點，曰線段之中點；平分

一角爲相等二鄰角之直線，曰角之平分線或稱二等分線.

每一線段只有一中點，每角祇有一平分線.



【問題10】 叠合兩相等之角，其邊無論如何延長，是否均能相合？

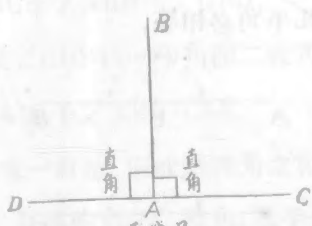
29. （定義） 角之兩邊在頂點兩側成一直線者曰平角.

如圖；AB，AC成一直線，則∠BAC及∠CAB皆爲平角.

30. （定義） 平分一平角所成之角曰直角.

故直角爲平角之半，二直角等於一平角.

31. （定義） 兩直線交成之角爲直角，則此二直線互相垂直，互稱爲垂線或曰正交，其交點曰垂線足，又垂線足在一線段之中點，則另一線段稱爲此線段之垂直平分線.



32.（定義） 一半直線在平面內繞原點旋轉，而囘至原處所成之角曰周角.

故一周角等於二平角或四直角.

周角

33.（定義） 分一周角爲 360 等份，每等份稱爲一度；每度又分爲60等份，每等份稱爲一分；每分又分爲60等份，每等份稱爲一秒.

度,分,秒之符號，以"°"，"′"，"″"記之，如53度40分25秒記爲$53°40'25''$.

因此，角之大小可以度分秒記之，而一平角$=180°$，一直角$=90°$.

34.（定義） 小於直角之角曰銳角，大於直角而小於平角之角曰鈍角；又小於平角之角曰劣角，大於平角之角曰優角.

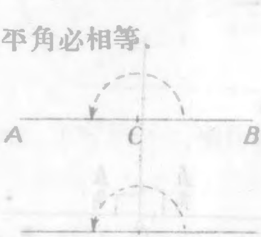
35.（定義） 二角之和爲一直角者互稱爲餘角，爲一平角者互稱爲補角，爲一周角者互稱爲共軛角.

【問題11】 一角小於其餘角，問此角小於若干度？如小於其補角，應爲何種角？如小於其共軛角，應爲何種角？

【問題12】 二角互爲餘角，其補角之和應爲若干度？

【問題13】 若$\angle 1+\angle 2=90°$，$\angle 1\leqq 35°$，則$\angle 2$應如何？

36.（定理 1） 凡平角必相等.



設 $\angle$s ACB, DFE 爲二平角.

求證 $\angle ACB=\angle DFE$.

【證】 置$\angle ACB$在$\angle DFE$上, 令頂點C落於頂點F, 邊CB在FE上, 則CA與FD相合.

(因ACB與DFE皆爲直線) (§22,(4))

$\therefore$ $\angle ACB=\angle DFE$. (§22,(2))

系1. 凡直角必相等.

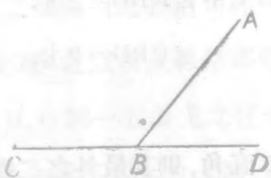
系2. 於直線上之一點, 僅能作其線之一垂線.

若能作二垂線, 則有大小不等之二直角, 此爲不可能, 因與本定理系1相矛盾, 故祇能作一垂線.

系3. 同角或等角之餘角必相等.

系4. 同角或等角之補角必相等.

37. (定理2) 二直線相交, 其所成二隣角之和爲二直角.



設 直線AB與CD相交於B, 成ABD, ABC二隣角.

求證 $\angle ABC+\angle ABD=2\angle R$.

【證】 $\because$ $\angle ABC+\angle ABD=\angle CBD$, (§20.(6))

而CBD爲一直線, 故$\angle CBD$爲一平角卽二直角. (§29;§30)

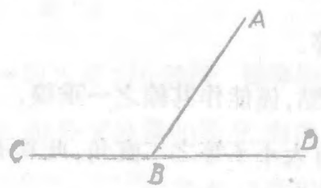
$\therefore$ $\angle ABC+\angle ABD=2\angle R$. (§20,(16))

系. 諸隣角之外邊成一直線, 則此諸隣角之和爲二直角.

【問題14】 證明:互爲補角之二隣角, 其平分線互相垂直.

【問題15】 證明:過一角頂點且垂直其平分線之直線,必平分其補鄰角.(二隣角互爲補角曰補隣角.)

38. (定理3) 二鄰角之和等於二直角,則其外邊成一直線(此定理爲定理2之逆定理),



設 $\measuredangle$s ABC, ABD爲二隣角,且∠ABC+∠ABD=2$\measuredangle$R.

求證　　CBD成一直線.

【證】　∵　∠ABC+∠ABD=∠CBD,　　(§20,(6))

又　　∠ABC+∠ABD=2$\measuredangle$R.　　(假設)

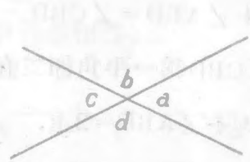
∴　　∠CBD=2$\measuredangle$R.　　(§20,(7))

故 CBD 成一直線.　　(§29)

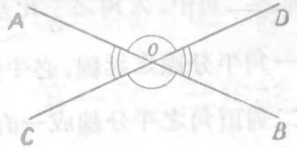
系. 諸隣角之和等於二直角,則其最外之二邊成一直線.

39. (定義) 兩直線交成之四角中,其相對之二角,互稱爲對頂角.

如圖a, c二角互爲對頂角;b, d二角亦然.



40. (定理4) 對頂角必相等.



設 二直線AB與CD相交於O點，

求證 $\angle AOC=\angle BOD$; $\angle AOD=\angle BOC$.

【證】 $\because$ $\angle AOC+\angle BOC=2\angle R$ (§37)

$\angle BOC+\angle BOD=2\angle R$, (,,)

故 $\angle$s AOC, BOD皆為$\angle BOC$之補角, (§35)

$\therefore$ $\angle AOC=\angle BOD$. (§36, 系4)

同理得證 $\angle COB=\angle AOD$.

【問題16】 證明：二餘隣角(即二隣角互為餘角)之對頂角，亦互為餘角.

【問題17】 證明：二補隣角之對頂角亦互為補角.

【問題18】 寫出定理4之假設及終結部分，

【問題19】 設A, B, C為一直線上之任意三點，而AB之中點為M, BC之中點為N：(1)若三點之順序為A, B, C時，證明：$MN=\frac{1}{2}(AB+BC)$, (2)若三點之順序為A, C, B時，證明：$MN=\frac{1}{2}(AB-BC)$.

【問題20】 設OP為$\angle AOB$之平分線，自O引任意直線OX：(1)若OX在兩邊之外，證明：$\angle POX=\frac{1}{2}(\angle AOX+\angle BOX)$. (2)若OX在兩邊之內，證明：$\angle POX=\frac{1}{2}(\angle AOX\sim\angle BOX)$.

【問題21】 有$\left(\frac{2x}{3}\right)^\circ$與$(x+40)^\circ$之二角互相補，試求之.

【問題22】 互相補之二角中，大角之$\frac{2}{3}$比小角之$\frac{3}{2}$少$10°$，求二角，

【問題23】 證明：一角平分線之延線，必平分其對頂角．

【問題24】 證明：二對頂角之平分線成一直線．

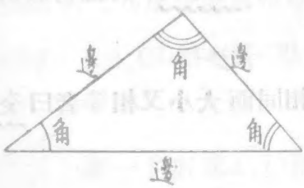
【問題25】 從O點順次引半直線 OA, OB, OC, OD，若 $\angle AOB = \angle COD$及AO, CO成一直線，則OB, OD亦必成一直線．

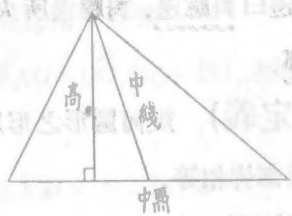
第二編 直線形

第一章 三角形

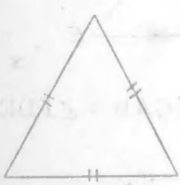
41.（定義） 三直線所圍成之平面圖形,曰三角形;其直線段曰三角形之邊;三邊之和曰三角形之周界;二邊所夾之角曰三角形之角,角之頂點曰三角形之頂點.

42.（定義） 三角形可以任一邊爲底,對底邊之角曰頂角,自頂點至對邊之垂線曰高,自頂點至對邊中點之線段曰中線.



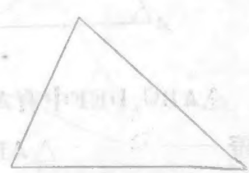


43.（定義） 三角形可以邊分類:三邊相等者曰等邊三角形(或正三角形);二邊相等者曰等腰三角形(或二等邊三角形);等腰三角形之相等二邊曰腰,其他一邊曰底,底兩端之角曰底角,底邊之相對角爲頂角;三邊不相等者曰不等邊三角形;但平常所謂三角形皆指不等邊三角形而言.



等邊三角形

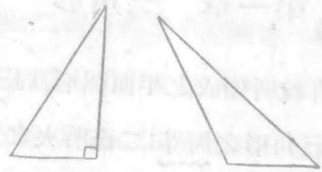
等腰三角形



不等邊三角形

44.（定義） 三角形可以角分類:三角形中有一角爲直角者曰直角三角形;有一角爲鈍角者曰鈍角三角形;三角都爲銳角者曰銳角三角

形;三角皆相等者曰等角三角形(或正三角形);直角三角形中夾直角之兩邊曰股,對直角之邊曰斜邊(或弦).

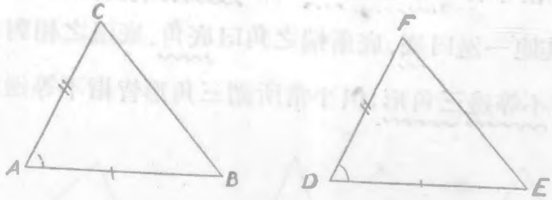


直角三角形　　鈍角三角形

45. (定義) 兩三角形之角彼此相等者曰對應相等,相等之角曰對應角,對應角所夾之邊曰對應邊;又兩三角形之邊彼此相等者曰對應相等,相等之邊曰對應邊,對應邊所夾之角曰對應角;對應角與對應邊共稱之曰對應部.

46. (定義) 幾何圖形之形狀相同而大小又相等者曰全等形.全等形之對應部皆相等.

47. (定理5) 兩三角形有兩邊及其夾角對應相等,則此兩形全等.



設　$\triangle$ABC,DEF中有AB=DE,AC=DF及$\angle$CAB=$\angle$FDE.

求證　　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

【證】 將$\triangle$ABC疊合於$\triangle$DEF上,使A點和D點疊合,AB和DE疊合.　(§22,(1))

$\because$　　AB=DE,　　(假設)

∴ B點亦和E點重合. (§22,(2))

∵ ∠BAC=∠EDF, (假設)

∴ AC與DF重合. (§22,(2))

又因 AC=DF, (假設)

∴ C點亦和F點重合. (§22,(2))

故BC不得不與EF重合. (§22,(4))

∴ △ABC≡△DEF, (§22,(2))

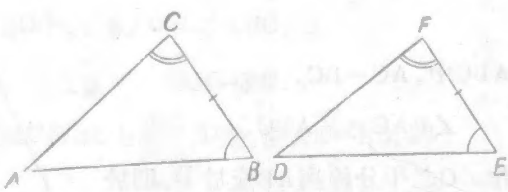
【註】 此定理簡記之爲(s.a.s.)

系. 兩直角三角形有兩股相等,則此兩形全等.

【問題26】 AB,CD相交於O點,設AO=CO;BO=DO,求證△AOD≡△BOC.

【問題27】 設一角頂爲A,於兩邊上取B,C二點,令AB=AC,則此角之平分線上任取一點P至B,C之距離必相等,試證之.

48.(定理6) 兩三角形有二角及其夾邊對應相等,則此兩形全等.



設 △ABC,與DEF中有∠ABC=∠DEF,∠BCA=∠EFD及BC=EF.

求證 △ABC≡△DEF.

【證】 將△ABC叠合於△DEF上,使BC與EF重合 (§22,(1))

∵　$\angle ABC = \angle DEF$,　$\angle BCA = \angle EFD$.　(假設)

∴　AB與DE重合,　AC與DF重合.　(§22.(2))

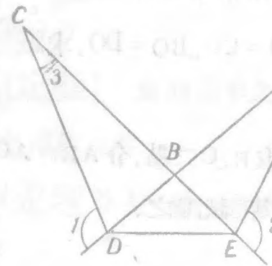
∴　A點必與D點重合.　(§22.(5))

∴　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.　(§22.(2))

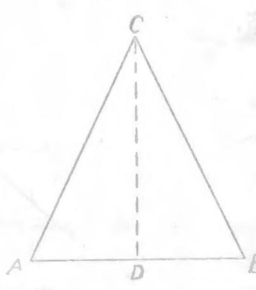
【註】此定理簡記之爲(a.s.a.)

【問題28】如圖,設$\angle 1 = \angle 2$, $BD = BE$;求證(i)$AB = CB$.(ii)$AD = CE$.

【問題29】如前圖,設$\angle 3 = \angle 4$, $AB = CB$求證(i)$CD = AE$,
(ii)$AD = CE$.



49.（定理7） 等腰三角形之兩底角相等.



設　在$\triangle ABC$中, $AC = BC$.

求證　$\angle BAC = \angle ABC$.

【證】作$\angle C$之平分線與AB交於D,則於$\triangle ACD$, $\triangle BCD$內,有

$\angle ACD = \angle BCD$,　(§28)

$AC = BC$,　(假設)

及　$CD = CD$.　(公用)

$\therefore$　　　$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$.　　　(s.a.s.)

從而　　　$\angle BAC = \angle ABC$.　　　(§46)

系1. 等邊三角形之各角相等.

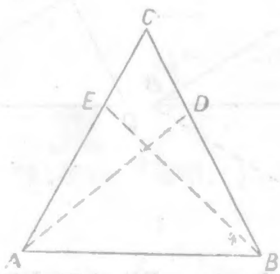
系2. 平分等腰三角形頂角之線段必垂直平分其底邊.

【問題30】 三角形自頂點至底邊引垂線,若平分其底邊,則此形爲等腰三角形.

【問題31】 設三角形ABC中之AC=BC,在AC上取E,BC上取D,令CE=CD,證明AD=BE,并由此證定理7.

【問題32】 證明:等腰三角形兩腰上之中線相等.

50.(定理8) 三角形中若有二角相等,則此形爲等腰三角形.



設　在$\triangle ABC$中,$\angle BAC = \angle ABC$.

求證　　　$AC = BC$.

【證】 在AC與BC上取E,D點,使AE=BD,則

$\triangle ABE \equiv \triangle BAD$.　　　(s.a.s.)

$\therefore$　　$\angle AEB = \angle ADB$,　$\angle DAB = \angle EBA$,　　(§46)

及　　　$AD = BE$.　　　(§46)

$\therefore$　　$\angle BEC = \angle ADC$,　$\angle DAC = \angle EBC$.　　(§20,(2))

$\therefore$　　　$\triangle ADC \equiv \triangle BEC$.　　　(a.s.a)

∴ $AC=BD$, (§46)

卽△ABC爲等腰三角形. (§34)

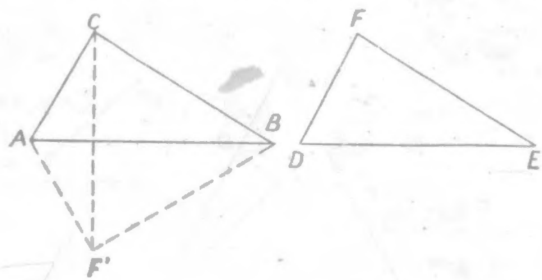
系 等角三角形之各邊相等.

【問題33】 等腰三角形中兩腰上中線相交,成一等腰三角形.

【問題34】 △ABC中, ∠B=2∠A, ∠B之平分線交AC於D點, 試證△ABD爲等腰三角形.

【問題35】 在△ABC中, BC=AC, 於AB上取D, E兩點, 令AD=BE, 則△CDE爲等腰三角形.

51. (定理9) 兩三角形若各邊對應相等,則此兩形全等.



設 △ABC與△DEF中, AB=DE, AC=DF, BC=EF.

求證 △ABC≡△DEF.

【證】 置△DEF於△ABF′之地位,DE與AB重合,頂點F′在C點之對側,聯結CF′. (§22.(1)),(§21(1)).

因 $DF=AC$. (假設)

∴ $AC=AF'$. (§22,(I))

∴ $\angle ACF'=\angle AF'C$. (定理7)

同理 $\angle BCF'=\angle BF'C$. (定理7)

∴ $\angle ACF'+\angle BCF'=\angle AF'C+\angle BF'C$. (§20.(1))

即　　$\angle ACB=\angle AF'B.$　　(§20.(6))

∴　　$\angle ACB=\angle DFE.$

∴　　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF.$　　(s.a.s.)

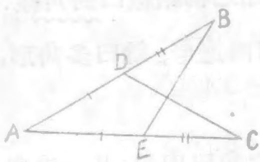
【註】　此定理簡記之爲(s.s.s.)

【問題36】　等腰三角形底邊上之中線,必平分其頂角.

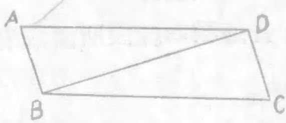
【問題37】　兩三角形若有兩邊及其一邊上之中線對應相等,則此兩形全等.

【問題38】　如圖(1):設AB,AC是直線,$AD=AE$,$BD=EC$,求證$\angle B=\angle C$,$BE=DC$.

圖(1)



圖(2)

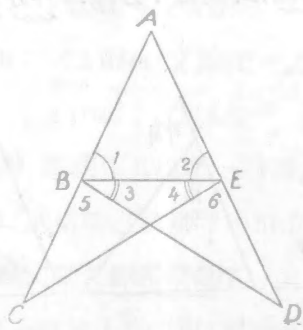


【問題39】　如圖(2):在BD之兩側,引$AB\perp BD$,$DC\perp BD$及$AB=CD$,求證$AD=BC$,$\angle A=\angle C$.

【問題40】　如下圖:設$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,求證(1)$EC=BD$,

(2)$\angle C=\angle D$,

(3)$AC=AD$.



【問題41】　如前圖:設$AC=AD$,$\angle C=\angle D$,求證(1)$BC=DE$, (2)$\angle 3=\angle 4$,(3)$\angle 1=\angle 2$

【問題42】 證明:等腰三角形兩底角之平分線相等.

【問題43】 順次延長等邊三角形ABC之各邊,并於延線上取 $AE=BD=CF$,則$\triangle DEF$亦爲等邊三角形.

【問題44】 兩等腰三角形之腰及其兩腰中點之聯線相等,則兩形全等.

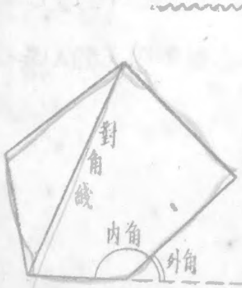
【問題45】 於$\triangle ABC$之BC邊上取G,D兩點,并引$DE\perp AB$,$GF\perp AC$;若$AD=AF$,$GF=DE$,則$\triangle ABC$爲等腰.

52.(定義) 在一平面上,四條或四條以上直線所圍成之圖形曰多角形(亦稱多邊形,)各線段曰多角形之邊;各邊之總和曰多角形之周界;角之頂點曰多角形之頂點;不相鄰兩頂點之聯結線曰對角線.

【註】 普通稱四線段所圍成者曰四邊形,餘曰多角形,如三角形,五角形等.

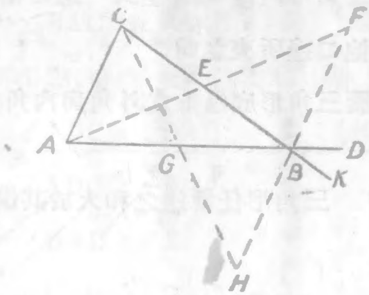
53.(定義) 多角形二隣邊所夾之角曰內角;其一邊與一隣邊之延線所成之角曰外角.

54.(定義) 三角形相隣外角之內角曰內隣角;其他二角曰內對角;內角之平分線曰內分角線;外角之平分線曰外分角線.



多角形

55.(定理10) 三角形之外角大於其任一內對角.



設　∠DBC是△ABC之外角.

求證　(1)∠DBC>∠ACB; (2)∠DBC>∠CAB.

【證】 (1)取BC之中點E,聯AE,幷延長之,使EF=AE,聯BF,則

∵　CE=BE, AE=EF,　(作圖)

及　∠AEC=∠FEB.　(定理4)

∴　△AEC≡△FEB.　(s.a.s.)

∴　∠ACE=∠EBF.　(§46)

而　∠DBC>∠EBF,　(§20(5))

∴　∠DBC>∠ACB.　(§20(16))

同理　於AB上取中點G,延長CG至H,使HG=CG,得證

∠BAC=∠ABH;

∠ABK>∠ABH; ∠DBC=∠ABK;

∴　∠DBC>∠BAC.

系. 於線外一點,祇能作其線之一垂線.

設有二垂線可作,則結論必與定理10相矛盾.

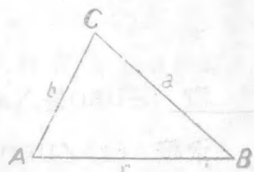
【註】 此種證法,稱爲歸謬證法.

【問題46】 在一直線上取二點,作此直線之垂線,問此二垂線能否相交於一點?

【問題47】 自三角形內任一點至其一邊之兩端引二直線，則此二直線所夾之角大於其他二邊所夾之角.

【問題48】 等腰三角形底邊上之外角與內角孰大？

56. (定理11) 三角形任兩邊之和大於其第三邊，任兩邊之差小於其第三邊.



設△ABC中，AB＝c，BC＝a，AC＝b.

求證 (1)$a+b>c$，(2)$c-a<b$.

【證】 (1)　　$a+b>c$.　(§22(3))

(2).(1)之兩邊各減以a，則$b>c-a$，　(§20.(10))

即　　$c-a<b$.

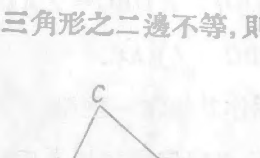
【註】 在幾何學中；常以相同之小寫字母記角之對邊.

【問題49】 自三角形內任一點至其一邊之兩端引兩線段，則此二線段之和小於其他二邊之和.

【問題50】 在三角形之外分角線AD上任取一點P，則$PB+PC>AB+AC$.

【問題51】 在多角形內另作一多角形，則後者之周界較前者之周界要小.

57. (定理12) 三角形之二邊不等，則大邊所對之角亦大.



設 △ABC中，BC＞AC，

求證　　　$\angle BAC > \angle ABC$.

【證】　於BC上取D點，令CD＝AC；聯AD，則

$\angle ADC = \angle CAD$,　　　(定理7)

及　　　$\angle ADC > \angle B$.　　　(定理10)

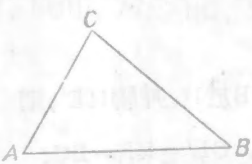
∴　　　$\angle DAC > \angle B$.　　　(§20.(16))

但　　　$\angle CAB > \angle DAC$,　　　(§20.(5))

∴　　　$\angle CAB > \angle ABC$.　　　(§20.(9))

【問題52】　四邊形ABCD內，AB爲最大，CD爲最小；求證$\angle C > \angle A$, $\angle D > \angle B$.

58. (定理13) 三角形之二角不等，則大角所對之邊亦大.



設　$\triangle ABC$中，$\angle A > \angle B$，及$BC = a$, $AC = b$.

求證　　　$a > b$.

【證】　假定　　$a = b$，則$\angle A = \angle B$.　　　(定理7)

又若　　　$a < b$，則$\angle A < \angle B$.　　　(定理12)

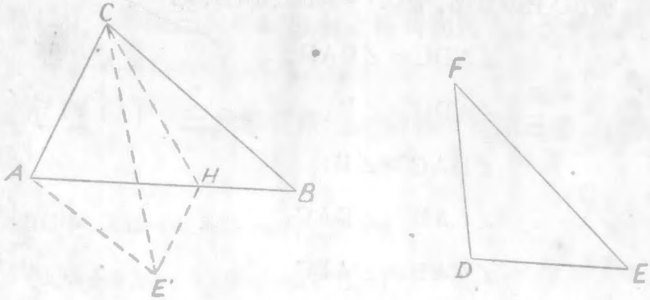
但此二結論，皆與假設不合，故$a > b$.　　　(§20,(8))

【註】　此種證法稱爲擯棄證法.

【問題53】　CD是$\triangle ABC$中$\angle C$之內分角線，試證$AC > AD$, $BC > BD$.

【問題54】　由等腰三角形ABC之底角頂點B至對腰AC上任一點D引聯線，試證$BD > AD$.

59. (定理14)　兩三角形若有二邊對應相等，而其夾角不等，則第三邊亦不等，對大角之第三邊亦大.



設　△ABC，DEF中，AC=DF，BC=EF，∠C>∠F.

求證　　AB>DE.

【證】　置△DEF於△ABC上，使DF與AC重合，EF在∠ACB內而落於CE'，　　(§22.(1))

作CH平分∠E'CB交AB於H，并聯HE'，則　　(§21.(1))

∵　$CE'=EF=BC$，　　(假設)

及　$CH=CH$，　　(公用)

$\angle E'CH=\angle BCH$，　　(作圖)

∴　$\triangle E'CH\equiv\triangle BCH$.　　(s.a.s)

∴　$HE'=HB$.　　(§46)

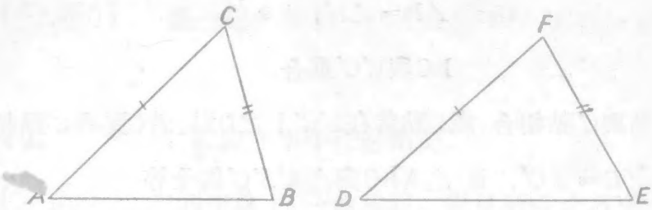
∴　$AB=AH+HB=AH+HE'$.　　(§20.(1))

但　$AH+HE'>AE'$.　　(定理11)

故　$AB>AE'$，即 $AB>DE$.　　(§20.(16))

【問題55】　設AD爲△ABC之中線，∠ADC爲銳角，證AB>AC.

60. (定理15)　兩三角形，若有二邊對應相等，而第三邊不等，則其夾角亦不等，對大邊之夾角亦大.



設 △ABC, DEF中, AC=DF, BC=EF, 而AB<DE.

求證 ∠F>∠C.

【證】 假定 ∠F=∠C, 則△DEF≡△ABC, (s.a.s.)

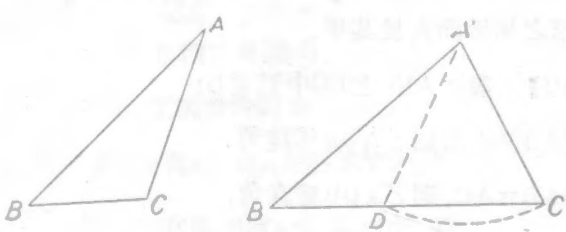
∴ DE=AB. (§46)

又若 ∠F<∠C, 則DE<AB. (定理14)

此二結論, 皆與假設不符, 故∠F>∠C.

【問題56】 設△ABC中, AC>BC, 又E爲中線CD上之任一點, 試證AE>BE.

61. (定理16) 兩三角形若有兩邊及一邊之對角對應相等, 則另一邊的對角相等或相補, 若相等, 則兩形就全等.



設 △ABC, A'B'C'中之AB=A'B', AC=A'C'及∠B=∠B'.

求證 ∠C=∠C'而△ABC≡△A'B'C'; 或∠C+∠C'=2∟.

【證】 把△ABC置於△A'B'D'之上, 使AB與A'B'重合, A點落在A'點, C點與C'點在A'B'之同側. (§22.(1))

∵　$\angle B=\angle B'$,　（假設）

∴　BC與B'C'重合.

故C點與C'點相合,或C點落在B'C'上之D點,若C點與C'點相合,則

$\angle C=\angle C'$, 且 $\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$就全等　(§22.(2))

又若C點在B'C' 上之D點,則聯A'B',$\triangle ADC$是成爲等腰三角形.

∴　$\angle A'DC'=\angle C'$.　（定理7）

但　$\angle A'DC'$是$\angle ADB'$之補角.

∴　$\angle C'$是$\angle A'DB'$之補角,即$\angle C$與$\angle C'$是相補.

【問題57】　由等腰三角形ABC頂點C至底邊AB上任一點D相聯結,若$\angle BCD>\angle ACD$,試證$BD>AD$.

【問題58】　聯三角形頂點至對邊上任一點之線段較其他二邊中之長者要小.

【問題59】　在$\angle XOY$兩邊上取$OA=OB$,又於其內取一點P,作$\triangle APB$:設$\angle ABP>\angle BAP$,試證$\angle BOP$小於$\angle AOP$.

【問題60】　自三角形內一點至各頂點引三線段,則此三線段之和小於原三角形之周界而大於其半.

【問題61】　設$\triangle ABC$之BC中點爲D:

試證(1)$AB>AC$,則$\angle ADB$爲鈍角.

(2)$AB=AC$,則$\angle ADB$爲直角.

(3)$AB<AC$,則$\angle ADB$爲銳角.

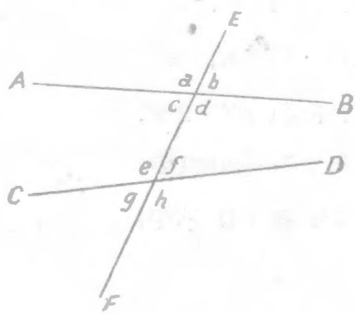
第二章　平行線

62.（定義） 在一平面內之二直線.任何引長而不相交者曰平行線.

63．(公理6)　過一已知點與一已知直線平行，必有一線，且祗限於一．

64．(公理7)　二直線如不平行必相交．

65．(定義)　在同平面上，一直線截二直線所成之八角特稱之如次：



如上圖　a,b,g,h稱爲外角．

c,d,e.f稱爲內角．

a與h,b與g,互稱爲外錯角．

c與f,d與e,互稱爲內錯角．

a與e,b與f,c與g,d與h互稱爲同位角．

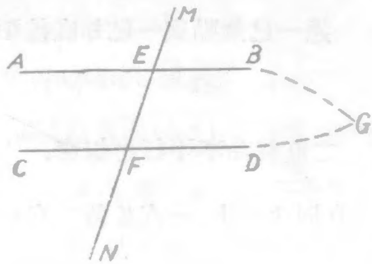
66．(定理17)　二直線與他一直線相交，若

(1)　內錯角相等，

(2)　同位角相等，

(3)　同側內角互相補，

則此二直線必平行．



設　AB, CD與MN相交於E, F兩點, 若

(1)　$\angle AEF=\angle DFE$,

(2)　$\angle AEF=\angle CFN$,

(3)　$\angle AEF+\angle CFE=2\angle R$.

求證　　$AB\parallel CD$.

【證】(1)若 AB 與 CD 不平行，必相交於一點 G，則成 $\triangle EFG$.　　(公理7)

∴　　$\angle AEF>\angle EFG$.　　(定理10)

是與假設$\angle AEF=\angle EFG$相矛盾.

故　　$AB\parallel CD$.

(2)　因　　$\angle CFN=\angle EFD$,　　(定理4)

及　　$\angle AEF=\angle CFN$.　　(假設)

∴　　$\angle AEF=\angle EFD$.　　(§20.(7))

∴　　$AB\parallel CD$.　　(本定理(1))

(3)　因　　$\angle CFE+\angle EFD=2\angle R$.　　(定理2)

及　　$\angle AEF+\angle EFC=2\angle R$.　　(假設)

∴　　$\angle CFE+\angle EFD=\angle AEF+\angle EFC$.　　(§20.(7))

∴　　$\angle EFD=\angle AEF$.　　(§20.(2))

∴　　$AB\parallel CD$.　　(本定理(1))

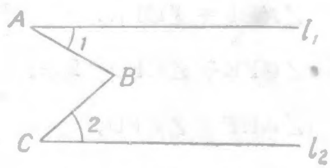
系1. 兩直線各與他一直線平行,則此兩直線平行.

系2. 兩直線同為一直線之垂線,則此兩直線平行.

【問題62】 設AB,CD二線段互相平分於O點,則AC∥BD

【問題63】 如下圖:∠1+∠2=∠ABC,

求證 $l_1 \parallel l_2$.

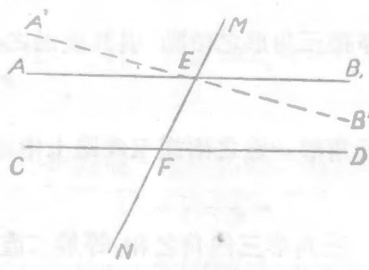


67. (定理18) 二平行線與他一直線相交,則其所成之

(1)錯角相等.

(2)同位角相等.

(3)同側內角互相補.



設 MN與二平行線AB,CD.相交於E,F兩點.

求證 (1) ∠AEF=∠EFD,

(2) ∠AEF=∠CFN.

(3) ∠AEF+∠EFC=2∟R.

【證】 (1) 若∠AEF≠∠EFD.則過E點必可引A'B',使∠A'EF=∠EFD,

則 A'B'∥CD. (定理17)

但　　AB∥CD.　　(假設)

是過E點可引二直線與CD相平行,於理不合,即A′B′當與AB重合.

∴　　∠AEF=∠EFD.

(2) ∵　　∠CFN=∠EFD,　　(定理4)

及　　∠AEF=∠EFD,　　(本定理(1))

∴　　∠AEF=∠CFN.　　(§20.(7))

(3) 因　　∠CFE+∠EFD=2∟,　　(定理2)

但　　∠AEF=∠EFD,　　(本定理(1))

∴　　∠CFE+∠AEF=2∟.　　(§20(16))

系1. 一直線垂直於二平行線之一,亦必垂直於其他直線.

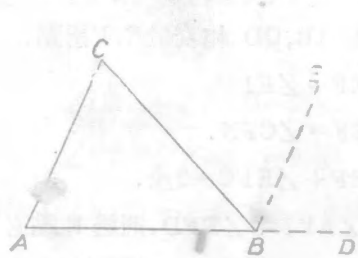
系2. 二角之各邊,彼此平行,則此二角相等或相補.

【問題64】 二平行線被一截線相截,其一組錯角之平分線互相平行.

【問題65】 過等腰三角形之頂點,引其底邊之平行線,必平分其頂角之外角.

【問題66】 由三角形一邊之兩端至此邊上中線之垂線相等.

68.(定理19) 三角形三內角之和,等於二直角.



設 ∠A, ∠ABC, ∠C是△ABC之三內角.

求證　　　　$\angle A+\angle ABC+\angle C=2\angle R$.

【證】　延長AB至D,并過B點引BE∥AB,則　　(§21.(2))(公理6)

$\angle A=\angle DBE,\quad \angle C=\angle CBE.$　　(定理18.(1),(2))

$\therefore\quad \angle A+\angle ABC+\angle C=\angle DBE+\angle ABC+\angle CBE.$　　(§20.(1))

$\therefore\quad \angle A+\angle ABC+\angle C=2\angle R.$　　(定理2系)

系1.　三角形之外角等於其內對角之和.

系2.　三角形之各角中,僅有一鈍角,或一直角.

系3.　直角三角形中之二銳角之和等於一直角.

系4.　二角之各邊彼此垂直,則此二角相等或相補.

系5.　兩三角形有二角對應相等,則第三角亦等.

系6.　兩三角形有二角及一角之對邊對應相等,則此兩形全等.

【問題67】　定理16之一對相等角,若爲鈍角或直角,則此兩形當全等.

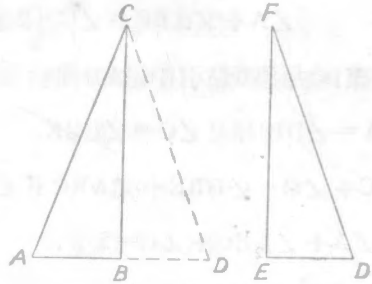
【問題68】　定理16之另一相等邊之對角若爲鈍角或直角,則此兩形又當如何?

【問題69】　二平行線被一直線相截,則其同側內角或外角之平分線互相垂直.

【問題70】　延長直角△ABC之斜邊AB之兩端,取AD=AC,BE=BC.求∠ECD之値?

【問題71】　△ABC,ADE之A角互爲對頂角,∠C及∠E之平分線相交於F,且E,A,B在一直線上,試證$\angle F=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.

69.(定理20)　兩直角三角形有一股及一弦對應相等,則此兩形全等.



設 rt△ABC, DEF中的 ∠ABC＝∠FED＝$\angle R$，及 BC＝EF, AC＝DF.

求證 △ABC≡△DEF.

【證】 置△DEF於△D′BC之地位，使EF與BC重合，頂點D′與A相對，則

因 ∠ABC＋∠CBD＝2$\angle R$， (假設)

∴ AB與BD′成一直線. (定理3)

但 AC＝DF＝D′C， (假設)

∴ ∠A＝∠D′＝∠D. (定理7)

故 △ABC≡△DEF. (定理19.系6)

【問題72】 自三角形一底邊之兩端向對邊作垂線，若此兩垂線相等，則原三角形為等腰三角形.

【問題73】 兩等腰三角形有腰及其頂角之平分線相等，則此兩形全等.

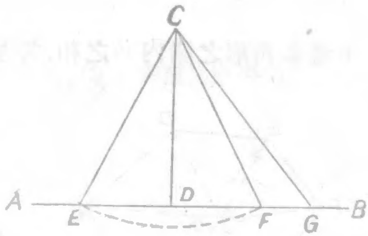
【問題74】 兩三角形若其底及此底上之高並中線對應相等，則此兩形全等.

70. (定理21) 自直線外一點至此直線上所引諸線之中：

(1) 垂線最短.

(2) 與垂線成等角之線段相等.

(3) 與垂線成大角之線段亦大.



設 自直線 AB 外一點 C, 引直線 CD, CE, CF, CG 與 AB 交於 D, E, F, G四點,

(1) 已知$CD \perp AB$, 求證$CD < CE$;

(2) 已知$\angle ECD = \angle FCD$, 求證$CE = CF$;

(3) 已知$\angle GCD > \angle FCD$, 求證$CG > CF$.

【證】 (1)於$\triangle ECD$中, $\angle EDC = rt\angle$, (§30)

∴ $\angle ECD + \angle DEC = rt\angle$. (定理19.系3)

∴ $\angle EDC > \angle CED$. (§20.(5))

∴ $CE > CD$. (定理13)

(2) 因 $\angle ECD = \angle FCD$, (假設)

∴ $\angle CED = \angle CFD$. (定理1.系3)

∴ $CE = CF$. (定理8)

(3) 因 $\angle GFC = \angle CDF + \angle DGF$, (定理19.系1)

∴ $\angle GFC > rt\angle$, 但$\angle CGF < rt\angle$.

∴ $\angle GFC > \angle CGF$. (§20.(9))

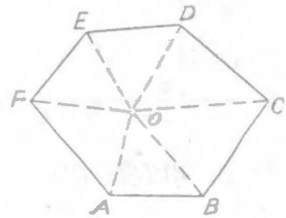
∴ $CG > CF$. (定理13)

【問題75】 自直線XY外一點P, 引垂線PD, 斜線PA, PB: 試證(1)

若AD大於BD,則PA>PB;(2)若PA大於PB,則AD>BD.

【問題76】 試證自直線外一點,只能引二相等斜線至此直線.

71. (定理22) n邊多角形之諸內角之和,等於(2n—4)rt∠s.



設 ABCDE……爲n邊多角形.

求證 ∠A+∠B+∠C+∠D+……=(2n—4)rt∠s.

【證】 自形內任一點O至各頂點引直線,則分原形爲n個三角形.

則此多角形內角之和等於n個三角形諸底角之和,而此n個三角形諸內角之和爲2nrt∠s. (定理19)

又此n個三角形諸頂角之和爲4rt∠s. (§32)

故此多角形諸內角之和爲

2nrt∠s—4rt∠s=(2n—4)rt∠s. (§20.(2)

∴ ∠A+∠B+∠C+∠D+……=(2n—4)rt∠s.

系 順次延長任何多角形之各邊,則諸外角之和等於四直角.

【問題77】 多角形內角之和若爲540°,求其邊數.

【問題78】 多角形之各內角相等,若其一外角爲60°,求其邊數.

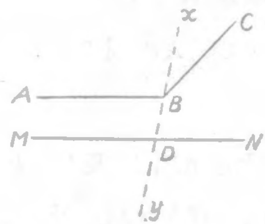
72. (三點在一直線上之證法) 證三點在一直線上之方法,可分下列四種:

(1) 證C點在AB之延線上;證AB與AC相重合;證AC過B點.

(2) 證聯結AB,BC所成角ABC等於一平角.

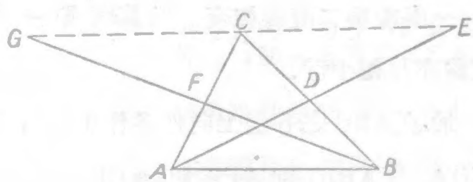
(3) 證聯結AB, BC并與通過 B 點之直線XY所成之角ABX, CBY相等.

(4) 證聯結AB,BC直線都與MN相平行.



【註】 在一直線上之三點曰共線點.

【例題】 延長△ABC之中線AD至E,令DE=AD;又延長另一中線BF至G,令FG=BF;則E,C,G爲共線點.



設　E,G是在中線AD,BF之延線,且ED=AD.FG=BF.

求證　E,C,G三點在一直線上.

【證】 聯結EC,則△CDE,BDA中有

CD=BD,　AD=DE,　(假設)

及　∠CDE=∠BDA.　(定理4)

∴　△CDE≡△BDA.　(s.a.s.)

∴　∠DCE=∠DBA.　(§46)

同理　聯結CG,則　△FCG≡△AFB.　(s.a.s.)

$\therefore$　　$\angle FCG=\angle FAB$.　　(§46)

$\therefore$　　$\angle GCE=\angle GCF+\angle ACB+\angle BCE$　　(§20.(6))

$=\angle A+\angle ACB+\angle B$　　(§20.(16))

$=2\angle R$.　　(定理19)

故　G,C,E三點在一直線上.　　(定理3 系)

【註】 或由 $CE\parallel AB$, $CG\parallel AB$ (定理17(1)),則 E,C,G 在一直線上(公理6).

【問題79】 $\triangle ABC$之邊AB,AC及BC上之中線DA,各向A方引長至B',C'及D',若$BA=AB$, $C'A=AC$, 及$D'A=AD$;則

B',D',C'在一直線上.

【問題80】 三角形若有一外角之平分線與其底邊平行，則此形爲等腰三角形.

【問題81】 一直線與二直線相交，若其所成一組錯角之平分線互相平行,則原二直線亦互相平行.

【問題82】 於$\triangle ABC$之各邊上向外各作正三角形

$\triangle BPC$, $\triangle CQA$, $\triangle ARB$; 則 $AP=BQ=CR$.

【問題83】 四邊形ABCD中$\angle B=2\angle A$, $\angle C=3\angle A$, $\angle D=4\angle A$, 求各角之度數.

【問題84】 在$\triangle ABC$中，$\angle C=60°$, $AC>BC$, 則 $\angle B>60°>\angle A$.

【問題85】 在四邊形 ABCD 內取一點 E, 作 EA,EC,若

$\angle EAD+\angle ECD+\angle D=\angle EAB+\angle ECB+\angle B$,則A,E,C在一直線上.

【問題86】 在$\triangle ABC$內, $\angle A$, $\angle B$之外分角線所成之角與半C角互爲餘角.

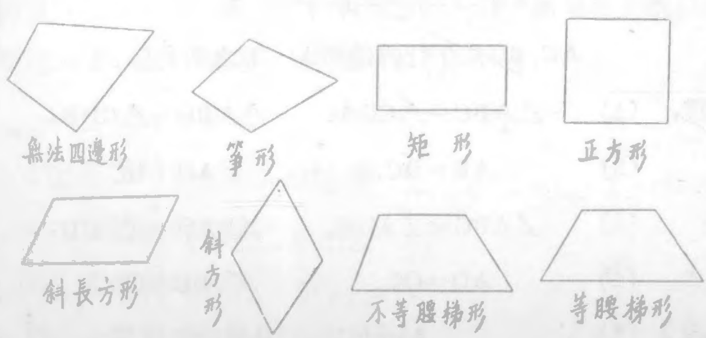
【問題87】 於等腰三角形 ABC 之兩腰 AB 及 AC 上,取二等線段 BD 及 CE,而 E 在 AC 之延線上,則 DE 必為底 BC 所平分.

【問題88】 在三角形 ABC 中, AB=AC, D 為 AC 上之一點,若 BD=BC=DA;則$\angle A=36°$.

第三章 平行四邊形

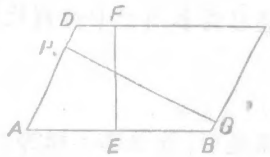
73. 四邊形之分類: 四邊形為多角形中性質比較特別者,其類很多,分別如下表:

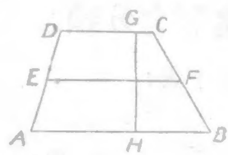
- 四邊形
  - 不平行四邊形(兩雙對邊都不平行)
    - 無法四邊形(各邊都不相等).
    - 箏形(兩雙相隣邊各自相等).
  - 平行四邊形(兩雙對邊都平行)
    - 長方形即矩形(相隣邊不相等,各角為直角).
    - 正方形(相隣邊都相等,各角為直角).
    - 斜長方形(角都不是直角,相隣邊都不相等),(即普通所謂平行四邊形).
    - 斜方形即菱形(無一角是直角,邊都相等).
  - 梯形(只有一雙對邊平形)
    - 不等腰梯形(不平行的一雙對邊不相等).
    - 等腰梯形(不平行的一雙對邊相等).



74. (定義)　平行四邊形之兩雙對邊，都可以做底，每雙對邊所夾之公共垂線曰高；如圖(1)▱ABCD之AB，CD爲底時，EF爲高；又AD，BC爲底時，GH爲高.

梯形是平行之兩邊爲底，不平行兩邊曰腰；兩底之公共垂線曰高，兩腰中點之聯線曰中線；如圖(2) AB，CD 爲底，AD，BC爲腰，GH爲高，EF爲中線.


(1)


(2)

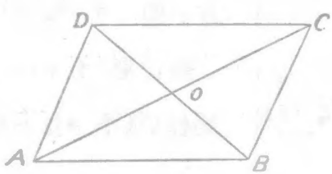
75. (定理23)　一平行四邊形中：

(1) 各對角線分原形爲全等之兩三角形，

(2) 各對邊相等，

(3) 各對角相等，

(4) 對角線互相平分.



設　　AC，BD爲平行四邊形ABCD之對角線.

求證，(1)　$\triangle ABC=\triangle CDA$，　$\triangle ABD=\triangle CDB$；

(2)　$AB=DC$，　$AD=BC$；

(3)　$\angle ABC=\angle ADC$，　$\angle BAD=\angle DCB$；

(4)　$AO=OC$，　$BO=OD$.

【證】(1) ∵　　$AD\parallel BC$.　　(假設)

$\therefore$ $\angle DAC=\angle ACB.$ (定理18,(1))

同理 $\angle ACD=\angle CAB.$ (定理18,(1))

又$\because$ $AC=AC,$ (公用)

$\therefore$ $\triangle ADC\equiv\triangle ABC.$ (a,s,a)

同理 $\triangle ABD\equiv\triangle BCD.$ (a,s,a)

(2) $AB=CD,$ $AD=BC,$ (§46)

(3) $\angle ABC=\angle ADC,$ $\angle BAD=\angle BCD.$ (§46)

(4) 於 $\triangle AOB$, $\triangle COD$中有

$\angle OAB=\angle OCD,$ $\angle OBA=\angle ODC,$ (定理18,(1))

及 $AB=CD,$ (本定理(2))

$\therefore$ $\triangle AOB\equiv\triangle COD.$ (a.s.a.)

$\therefore$ $AO=OC,$ $BO=OD.$ (§46)

系 1. 平行四邊形之相隣二角互爲補角.

系 2. 界於二平行線間之各平行線段相等.

系 3. 二平行線間之距離處處相等.

【問題89】 平行四邊形中,若有一角爲直角,則此形爲矩形.

【問題90】 平行四邊形中,若有二相隣邊相等,則此形爲菱形.

【問題91】 自平行四邊形相對角頂點至另一對角線之垂線相等.

【問題92】 菱形(或箏形)之對角線互相垂直

76. (定理24) 一四邊形中,若

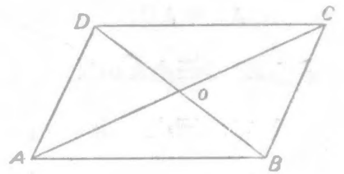
(1) 兩雙對角相等,

(2) 兩雙對邊相等,

(3) 一雙對邊相等且平行,

(4) 對角線互相平分，

則此形為平行四邊形.



設 四邊形ABCD中有

(1) $\angle DAB=\angle DCB$, $\angle ABC=\angle ADC$;

(2) $AB=DC$, $AD=BC$;

(3) $AB=DC$, 及 $AB \parallel DC$;

(4) $AO=OC$, $BO=OD$.

求證 ABCD為平行四邊形.

【證】 (1) $\angle DAB+\angle ABC=\angle DCB+\angle ADC$ (§20.(1))

$=\frac{1}{2}(2\times4-4)\text{rt}\measuredangle s$ (定理22)

$=2\text{rt}\measuredangle s$.

∴ $AD \parallel BC$. (定理17.(2))

同理 $AB \parallel DC$. (定理17.(2))

(2) $AB=CD$, $AD=BC$, (假設)

及 $BD=BD$, (公用)

∴ $\triangle ABC\equiv\triangle BCD$. (s.s.s.)

故 $\angle ABD=\angle BDC$, (§46)

及 $\angle ADB=\angle DBC$. (§46)

∴ $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. (定理17.(1))

(3) ∵ $AB \parallel DC$, (假設)

∴　$\angle BAC=\angle ACD$.　(定理18.(1))

又因　$AB=DC$,　(設假)

及　$AC=AC$,　(公用)

∴　$\triangle BAC\equiv\triangle ACD$.　(s.a.s.)

∴　$\angle ACB=\angle CAD$.　(§46)

∴　$AD\parallel BC$.　(定理17.(1))

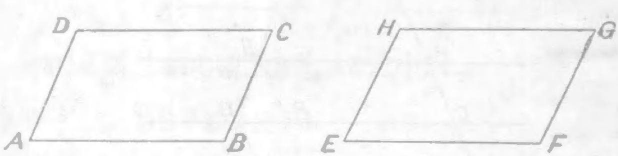
(4) 學者自行試證.

【問題93】 在▱ABCD對邊上,取BE=DF,則AECF亦爲平行四邊形.

【問題94】 過▱ABCD之對角線交點O,引兩直線,一線交兩邊於E,F;又一線交另一雙對邊於G,H;試證EGFH亦爲平行四邊形.

【問題95】 在▱ABCD對角線AC上,取AE=CF,則BEDF亦爲平行四邊形.

77.(定理25) 兩平行四邊形若有二隣邊及夾角對應相等,則此兩形全等.



設　▱ABCD,EFGH中,$AB=EF$,$AD=EH$,及$\angle A=\angle E$.

求證　▱ABCD≡▱EFGH.

【證】 置▱ABCD於▱EFGH上,令AB合於EF,且A點令合於E點上,　(§22.(1))

∵　$AB=EF$,　$\angle A=\angle E$.　(假設)

故　B點與F點重合.　(§22.(2))

又因　$AD=EH$,　(假設)

故　D點與H點重合.　(§22.(2))

又因　$FF \parallel GH$ (即 $\parallel CD$),　(§73)

且D點與H點相合,故CD與GH重合.　(公理6)

同理,　BC亦與FG重合,故C點與G點重合.　(§22.(5))

$\therefore$　$\square ABCD \equiv \square EFGH$.　(§22,(2))

系1.　兩矩形若有二隣邊對應相等,則此兩形全等.

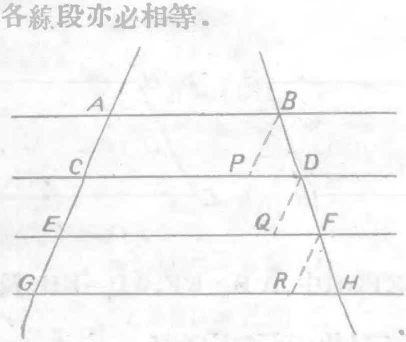
系2.　兩菱形若有一邊及有一角對應相等,則此兩形全等.

【問題96】　兩全等平行四邊形中之對應高及對角線相等.

【問題97】　兩平行四邊形,若兩對角線及其夾角對應相等,則此兩形全等.

【問題98】　兩平行四邊形中之四邊對應相等,則此兩形是否全等?

78. (定理26)　一直線截數平行線,若其所截各線段相等,則他線為此數平行線所截各線段亦必相等.



設　AG, BH各與平行線AB, CD, EF………截於A, C, E, G,………, B, D, F, H,………,若 $AC=CE=EG=\cdots\cdots$

求證　$BD=DF=FH=\cdots\cdots$

【證】　引BP, DQ, FR,等各平行於AG,則

$BP \parallel DQ \parallel FR \parallel \cdots\cdots$ (定理17.系1)

∴　$\angle DBP = \angle FDQ = \angle HFR = \cdots\cdots$ (定理17.(2))

及　$\angle BDP = \angle DFQ = \angle FHR = \cdots\cdots$ (定理17.(2))

又　$AC = BP, CE = DQ, EG = FR, \cdots\cdots$ (定理23,(2))

但　$AC = CE = EG = \cdots\cdots$ (假設)

∴　$BP = DQ = FR = \cdots\cdots$ (§20,(7))

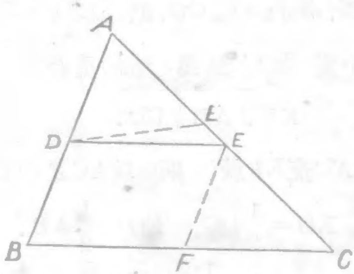
∴　$\triangle BPD \equiv \triangle DQF \equiv \triangle FRH \equiv \cdots\cdots$ (定理19.系6)

∴　$BD = DF = FH = \cdots\cdots$

系1. 過三角形一邊之中點且與其底邊平行之直線必平分其他邊.

【提示】 過頂點引一線與底邊平行,即可用本定理證明.

系2. 過三角形兩邊中點之線段,必與其底平行,且等於其底之半.



設　D,E 爲 $\triangle ABC$ 兩邊 AB, AC 之中點.

求證　$DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

【證】 假定DE不與BC平行,則過D點必可引 $DE' \parallel BC$, (公理6)

故　E′ 爲 AC 之中點. (本定理系1)

但　E 亦爲 AC 之中點,故 E′ 點必與 E 點相一致. (§28)

∴　$DE \parallel BC$.

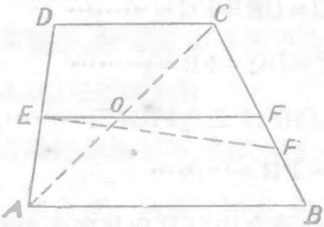
又由 E 引 $EF \parallel AB$, 則 F 爲 BC 之中點. (本定理系1)

∴　EFBD爲平行四邊形. (§73)

∴ $DE=BF=\frac{1}{2}BC.$

系3. 過梯形一腰之中點且與其底平行之直線,必平分其另一腰.

系4. 聯梯形兩腰中點之線段,必與其底平行,且等於其兩底和之半.



設 E,F 爲梯形兩腰 AD,BC 之中點.

求證 $EF \parallel AB \parallel DC$, 且$EF=\frac{1}{2}(AB+DC)$.

【證】 假定EF不平行AB,CD,則過E點必可引$EF' \parallel AB$. (§63)

故 F′ 爲BC之中點,故F′ 點與F點相重合. (本定理系3),(§28).

∴ $EF \parallel AB \parallel CD.$ (定理17系1)

又 聯結對角線AC交EF於O,則O爲AC之中點. (本定理系1)

∴ $EO=\frac{1}{2}DC,\quad FO=\frac{1}{2}AB.$ (本定理系2)

∴ $EF=\frac{1}{2}(AB+CD).$ (§20(1))

【問題99】 聯結四邊形相鄰二邊中點之線段,必成一平行四邊形.

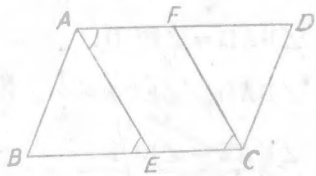
【問題100】 聯結梯形兩對角線中點之線段,必與其底平行,且等於其兩底差之半.

【問題101】 在 △ABC之一中線AM上,取中點N,聯BN交 AC 於 P 點,證明$AP=\frac{1}{3}AC$.

79. 綜合法與解析法 幾何證題之方法,最通用者,不外乎綜合

法與解析法兩種，綜合法是順證法，就是根據已知眞理，從假設推到結論，以前許多定理的證法，大都是應用綜合法．解析法亦稱逆證法，是暫認結論爲眞確，只因結論和假設中間，包含許多步驟，所以吾人從結論根據眞理，次第逆推，至得到假設爲止；如果將此步驟再倒過來，就可證明結論是眞確，故解析法實與綜合法相反，在不便用綜合法時，常可採用解析法．

【例題】　平行四邊形相對角之平分線是互相平行．



設　AE，CF 是 ▱ABCD 相對角之平分線．

求證　　　　$AE \parallel CF$．

【解析】　今由解析法，暫認此結論 $AE \parallel CF$ 爲眞確，然要證明兩直線互相平行，必須先知兩直線平行之條件，照已知

(1) 平行四邊形之對邊，

(2) 錯角相等，

(3) 同位角相等，

(4) 同側內角互相補．

今設依(3)證明之：

要證明 $AE \parallel CF$，須先證明 $\angle AEB = \angle ECF$ 方可．

由假設　　$AD \parallel BC$，則有

$\angle AEB = \angle EAF$，

故欲證明　　$\angle AEB = \angle ECF$，

須證明　　$\angle EAF = \angle ECF$ 方可．

然由假設　　$\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$，$\angle ECF = \frac{1}{2}\angle BCD$，

故欲證明 $\angle EAF=\angle ECF$,

只須證明 $\angle BAD=\angle BCD$,

但此乃已知之條件,故上述定理就容易證明.

凡是求定理證明之方法,都可如此例用解析法去探究,及至發見證明方法以後,就照探究所得逆推以記述之卽得.

【證】 因ABCD爲平行四邊形,故

$\angle BAD=\angle BCD$. (定理23.(3))

但 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$, $\angle ECF=\frac{1}{2}\angle BCD$, (假設)

∴ $\angle EAF=\angle ECF$. (§20.(7))

又因 $\angle EAF=\angle AEB$ (定理18.(1))

∴ $\angle AEB=\angle ECF$. (§20.(7))

∴ $AE \parallel CF$ (定理17 (2))

80. 證題之步驟 依前節之例,得證明之步驟如下:

(1) 先將命題詳細研究,分別何者爲假設,何者爲結論.

(2) 依題作圖 必須準確而普遍.

(3) 作圖以後,將假設與求證部份,分別寫出.

(4) 根據已知之定理,用綜合法求得結論,若綜合法不便用時,可用解析法探得,再遇必要時,可於原形內作補助線,使證法簡明.

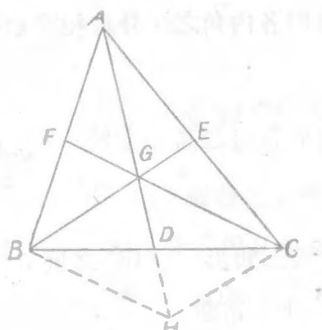
上列四步驟,任何命題 均可依此證出 至於證明時根據之理論,皆是已知之定理,假如要證明兩線段相等,可證明此兩線段是 (1)全等形之對應邊,(2)等腰三角形之兩腰,(3)平行四邊形之對邊等;要證明兩角相等,(1)全等形之對應角,(2)等腰三角形之兩底角,(3)平行四邊形之相對角等,學者如能熟習定理,必能舉一反三,迎刃而解.

81. (三直線交於一點之證法) 此項命題之證法,可先假定

已知條件下二直線相交於某點，次證通過某點之第三直線亦適合於已知條件即得.

【註】 如此三線曰共點線.

【例題】 三角形之三中線相交於一點.



設　ABC 爲任意三角形.

求證　AB, BC, CA 各邊上之中線相交於一點.

【證】 先引BE, CF二中線，則BE, CF必相交於一點，設爲G，次聯結AG并引長之，交BC於D；能證明D點爲BC之中點即得.

今又由 B 引 BH ∥ FC 交 AG 之延線於H點，則

AG＝GH.　(定理26.系1)

(∵△ABH 中有 AF＝BF, FG ∥ BH)

∴　HC ∥ BE.　(定理26,系2)

(∵△ACH 中有 AG＝GH, AE＝EC)

故　BHCG 爲平行四邊形.　(§37)

故此形對角線之交點 D，乃BC之中點.

即　三中線相交於一點.

【問題102】 三角形中線之交點至各頂點之距離等於各中線之三分之二.(其三中線之交點曰三角形之重心).

【問題103】　三角形之二邊不等,則大邊上之中線,較小於其小邊上者.

【問題104】　三角形各邊之垂直平分線相交於一點.『此交點曰三角形之外心』

【問題105】　三角形各內角之平分線相交於一點.(此交點曰三角形之內心)

【問題206】　三角形各邊之高相交於一點.(此交點曰三角形之垂心亦稱高心)

【問題107】　自等腰三角形 $\triangle ABC$ 之底 AB 上任一點 D,作 $DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$,試證 $DE+DF=$ 常數.

【註】　常數或云一定,卽一不變之數;在幾何學上凡是已知圖形內之線段,角等皆爲常數,如上題是等於等腰三角形之一腰,故云等於常數.

【問題108】　自正三角形內任一點至各邊作垂線之和是一定.

【問題109】　從三角形一頂點,至其垂心之距離,等於外接圓心與其對邊距離之二倍.

【問題110】　三角形一角之內分角線與其他二角之外分角線相交於一點.(此交點曰三角形之傍心)

【問題111】　四邊形之對角線若互相垂直平分,則爲菱形.

【問題112】　梯形之對角線若相等,則爲等腰梯形.

【問題113】　兩平行四邊形,若有兩高及其夾角對應相等,則此兩形全等.

【問題114】　直角三角形弦之中點與各頂點距離相等.

【問題115】　直角三角形中若有一銳角倍於他銳角,則其斜邊等於小邊之二倍.

【問題116】 試證問題114,115之逆定理.

【問題117】 三角形中之外心,垂心,重心爲共線點.

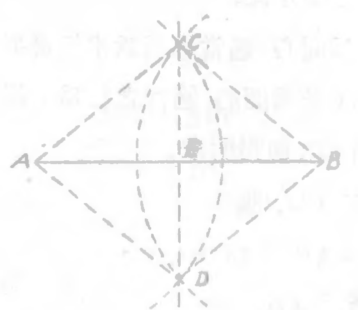
【問題118】 於四邊形 ABCD 內,引 DE 線段與 AB邊平行而相等(且同方向),求證 CE 與連結四邊形兩對角線中點 M 及 N 之直線平行,且 CE=2MN.

第四章 作圖題及對稱,軌跡

82. 解作圖題之步驟 作圖題之定義及圖形之正確與證明命題關係之重要,在 § 17, § 80 已詳述之, 但其步驟可分爲四, (1) 何者爲已知之條件; (2)何者爲所求之圖形;(3)所作圖形是否合於已知之條件;(4)討論作圖之方法.

【註】 幾何學理想中之作圖,祇限於用圓規與直尺兩件儀器.

83. (作圖題 1) 求平分一已知線段.



設 AB爲已知線段.

求作 AB之中點.

【作法】1.以A,B各爲圓心,大於AB之半爲半徑畫弧,得交點C,D.

2.聯結CD與AB交於E,則E點卽合所求.

【證】 聯結AC,BC,AD,BD,則

AC＝BC＝AD＝BD. (§6)

∴ △ACD≡△BCD. (s.s.s.)

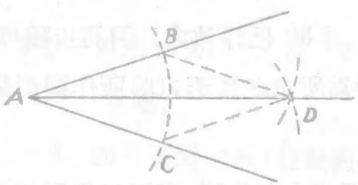
∴ ∠ACE＝∠BCE. (§46)

∴ AE＝BE. (定理7系2)

系. 求作一已知線段之垂直平分線亦用此法.

【問題119】 求分一已知線段爲4等分,8等分.

84. (作圖題2) 求作已知角之平分線.



設　　∠A爲已知角.

求作　　∠A之平分線.

【作法】1.以A爲圓心,適當之長爲半徑畫弧交∠A之兩邊于B,C.

2.以B,C各爲圓心,適當之長爲半徑畫弧得交點D.

3.聯結AD,即得所求.

【證】 聯結BD,CD.則

∵ AB＝AC, BD＝CD. (§6)

及 AD＝AD. (公用)

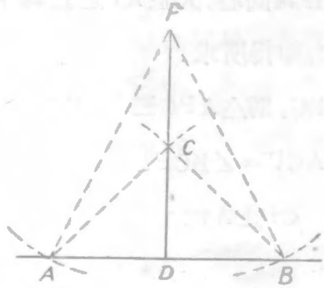
∴ △ABD≡△ACD. (s.s.s.)

∴ ∠BAD＝∠CAD.

故AD即爲∠A之平分線.

【問題120】 求分一已知角爲4等分,8等分.

85.（作圖題 3） 求自已知線外一點,作其線之垂線.



設 P爲已知線段AB外一點.

求作 自P至AB之垂線.

【作法】1.以P爲圓心.適當之長爲半徑畫弧交AB於A,B兩點.

2.以A,B各爲圓心,大於AB之半爲半徑畫弧得交點C.

3.聯結PC或引長之交AB於D,則PD卽合所求.

【證】 聯結AP,AC,BP,BC,則

AP＝PB, AC＝BC, (§6)

及 PC＝PC. (公用)

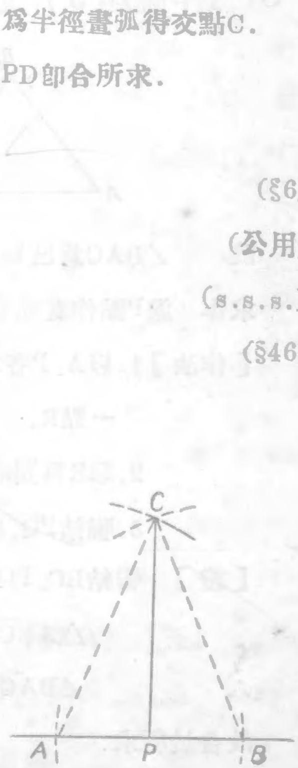
∴ △APC≡△BPC. (s.s.s.)

∴ ∠APC＝∠BPC (§46)

∴ PD⊥AB.

故 PD合於所求.

86.（作圖題 4） 作過已知線上一點之垂線.



設 P爲已知線上之已知點.

求作 過P點作AB之垂線.

【作法】1.以P爲圓心,適當長爲半徑畫弧交AB於A,B兩點.

2.以A,B各爲圓心,大於AP之長爲半徑畫弧,得交點C.

3.聯結PC,即得所求.

【證】 聯結AC,BC,則△APC≡△BPC. (s.s.s.)

∴ ∠ACP=∠BCP. (§46)

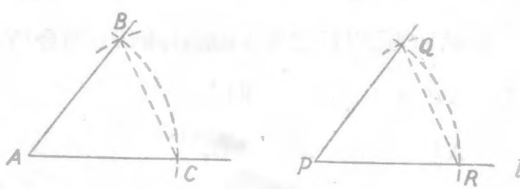
∴ CP⊥AB. (定理7系2)

即CP合於所求.

【問題121】 已知正方形之周界,求作此形.

【問題122】 試述用三角板作垂線之各種方法,并加證明.

87.(作圖題5) 求過已知線上之一點,作一直線與已知角成等角.



設 ∠BAC爲已知角,P爲已知線l上一點.

求作 過P點作直線令與∠BAC成相等之角.

【作法】1.以A,P各爲圓心,同半徑畫弧交∠A之兩邊於B,C及l上一點R.

2.以R爲圓心,BC之長爲半徑畫弧得交點Q.

3.聯結PQ,則∠QPR=∠BAC,即合所求.

【證】 聯結BC,PQ,則

△ABC≡△PQR. (s.s.s.)

∴ ∠BAC=∠QPR. (§46)

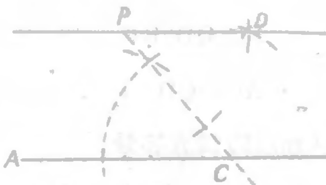
故合於所求.

【問題123】 求作60°,30°,120°,45,°75°之角.

88. (作圖題6) 求過一已知線外一點作一線與已知線平行.

設　P爲已知線AB外之一點.

求作　過P點引一直線與AB平行.



【作法】1.過P點任引一直線與AB交於C點.

2.過P點作∠DPC=∠ACP.　(作圖題5)

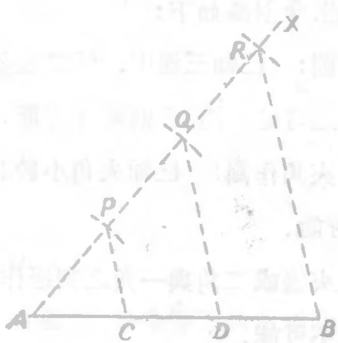
則PD即爲所求之平行線.

【證】 ∵ ∠DPC=∠ACP.　(作圖)

∴ PD∥AB.　(定理17.(1))

故PD合於所求之平行線.

89. (作圖題7) 求分一已知線段爲任意等分.



設　AB爲已知線段.

求作　分AB爲三等分.

【作法】1.由A點任引半直線AX.

2.由A點以適當長在AX上,截取AP＝PQ＝QR.

3.聯結BR,并由P,Q各引PC,QD平行於BR交AB於C,D兩點,則AC＝CD＝DB,即得所求.

【證】 ∵ AP＝PQ＝QR,及PC,QD各平行於BR, (作圖)

∴ PC∥QD∥RB. (定理17系1)

∴ AC＝CD＝DB. (定理26)

【問題124】 求分已知線段爲五等分.

【問題125】 試述用三角板作平行線之方法,并加證明.

【問題126】 已知三角形之兩邊及夾角,求作此三角形.

【問題127】 已知三角形之兩角及夾邊,求作此三角形.

90. 作圖題之討論 以上(1)至(7)爲幾何學之基本作圖題,在任何場合都是可能,故對第四步驟討論可以省略,但有時依已知條件作圖,常發生不可能之場合,故對討論又爲必要,如依已知條件作三角形,有時爲可能,有時爲不可能,今討論如下:

(一) 已知三邊作圖: 已知三邊中,任二邊之和大於其第三邊,或任二邊之差小於其第三邊時是可能,否則就不可能.

(二) 已知二邊及夾角作圖: 已知夾角小於2rt∠s時是可能,若等於或大於2rt∠s時是不可能.

(三) 已知二角及夾邊或二角與一角之對邊作圖:此場合,二角之和必須小於2rt∠s,否則就不可能.

(四) 已知三角作圖: 在此場合,三角之和必須等於2rt∠s,固是一條件;但此等三角形可以作無數個,形狀相似而大小却各不相同;在幾何

學中，名此等三角形曰相似三角形.

（五）　已知二邊與一邊之對角作圖：　在此場合，已知的所對角不能等於或大於 2 at∠s，固是一條件：但已知的所對角是銳角，直角，鈍角與已知二邊之大小亦有種種之關係如下：

先由C作CD⊥AB，以h表CD，則

(1)　∠A＜90°時：

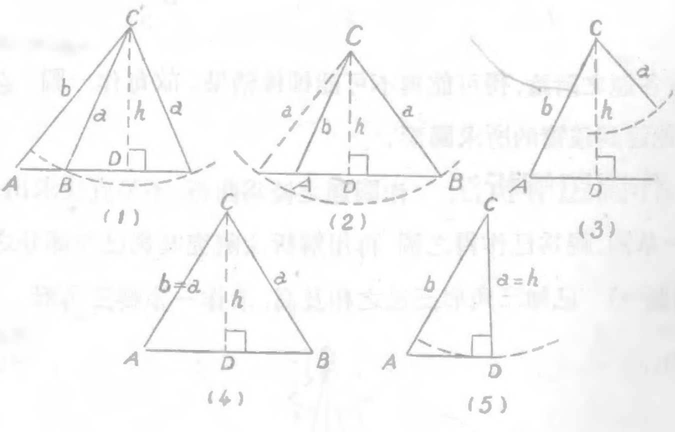
（i）　h＜a＜b，如圖(1)得二個三角形.

（ii）　h＜b＜a，如圖(2)得一個三角形.

（iii）　a＜h＜b，如圖(3)不可能.

（iv）　h＜a＝b，如圖(4)一個等腰三角形.

（v）　h＝a＜b，如圖(5)一個直角三角形.

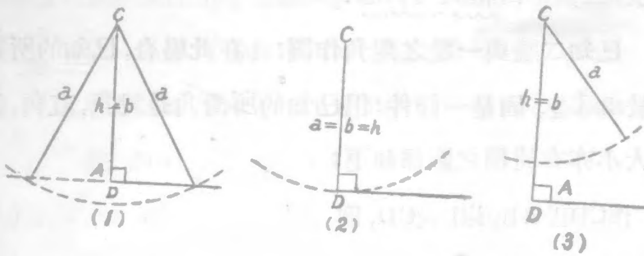


(2)　∠A＝90°，此時h＝b.

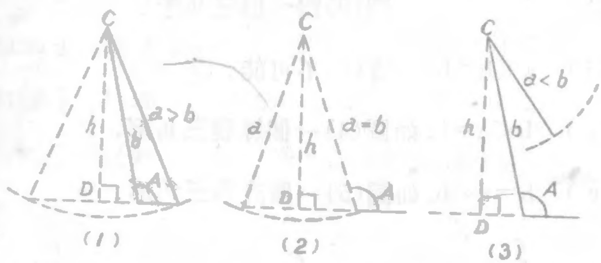
（i）　a＞b，如圖(1)得全等三角形兩個.

（ii）　a＝b，如圖(2)不可能，

（iii）　a＜h，如圖(3)不可能.



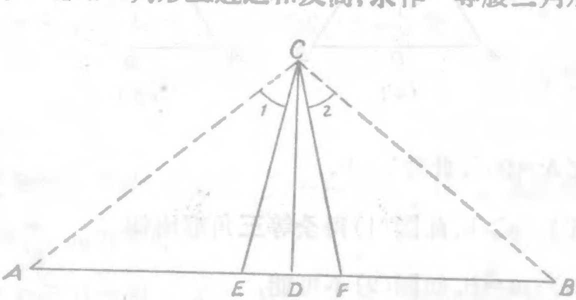
(3)　$90°<A<180°$，此時∠A之對邊a不能小於b，若$a\leqq b$，就是不可能，如下列三圖：



由上各題之討論，得可能與不可能種種結果，故每作一圖，必須加以討論，方能達到確實的所求圖形.

91. 作圖題解析法　作圖題之較爲曲折，不易直接求出作法時，可先作一草圖，視爲已作得之圖，再用解析法研究其與已知部分之關係.

（例題一）　已知三角形三邊之和及高，求作一等腰三角形.



設　　AB是已知三邊之和，CD是已知高.

求作　等腰三角形.

【解析】 作AB之垂直平分線CD等於已知之高, 假定△CEF是所求之等腰三角形, 則CE＝AE, CF＝BF; 聯結AC, BC, 則△AEC, △BFC, 皆爲等腰三角形.

∴　$\angle A=\angle 1$, $\angle B=\angle 2$.　(定理7)

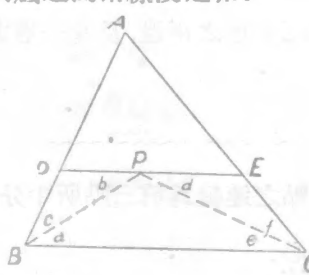
但　∠A與∠B是易求得, 故∠1與∠2從而CE與CF均易作矣.

【作法】1. 作AB之垂直平分線CD, 令等於已知高.

2. 連結AC, BC.

3. 從C作$\angle 1=\angle A$, $\angle 2=\angle B$, 即得所求之等腰△CEF.

(例題二) 在三角形內作一線與底平行且分其餘二邊各爲兩段, 並使所作之線等於該線與底邊間兩線段之和.



設　ABC爲已知三角形.

求作　DE∥BC, 使DE＝BD＋CE.

【解析】 假定DE是已得之線段, 則DE＝BD＋CE, 今於DE上取一點P, 令DP＝DB, 則EP＝EC.

∴　$\angle b=\angle c$, $\angle d=\angle f$.　(定理7)

但　DE∥BC,　(作　圖)

∴　$\angle b=\angle a$, $\angle d=\angle e$.　(定理18.(1))

∴　$\angle a=\angle c$, $\angle e=\angle f$.　(§20.(7))

故知BP與PC是∠B, ∠C之平分線.

從而P點易求矣.

【作法】1.作∠B, ∠C之平分線,得交點P.

2.過P點作DE∥BC,卽得所求.　(作圖題6)

(注意) 凡由解析法所作得之圖,皆爲眞確,故證明可略.

【問題128】 分直角爲三等分,六等分.

【問題129】 已知三角形之二角及其三邊之和,求作此三角形.

【問題130】 A,B爲CD直線同側之二點,求CD上一點P,令AP+BP爲最小.

【問題131】 已知三角形之頂角,及此角之平分線與高,求作此三角形.

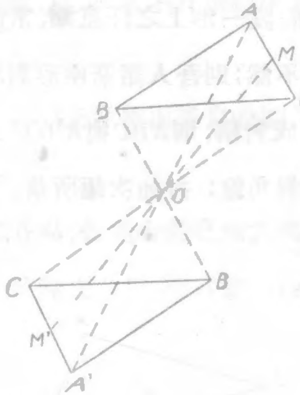
【問題132】 已知三角形之兩邊,及其一邊上之中線(或高),求作此三角形.

92. (定義) 設兩點之連線爲第三點所平分,則此兩點對於平分點爲對稱,此平分點曰對稱心.

例如C爲AB之中點,則A,B對於C爲對稱點,C爲A,B之對稱心.

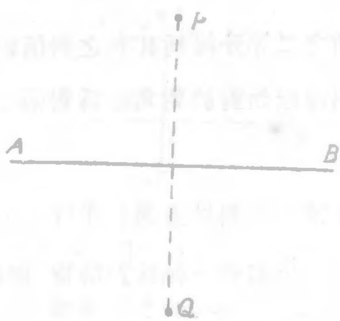
故任何兩點,可有一點爲對稱心,且只限於一;反之,任一點對於其對稱心可有一對稱點,亦只限於一.

廣言之,一幾何圖形上之各點,若能與他形上一點對稱於一已知心,則吾人謂斯二形對於已知心爲心對稱,兩對稱形(平面的)必全相等,可以其對稱心爲心,旋轉而使之相合也.



例如A,A';B,B';C,C'均對於O而對稱,則ABC與A'B'C'對於O而成對稱,他如平行四邊形,心對稱於其對角線之交點;圓,心對稱於其圓心;如是者皆所謂心對稱形也.

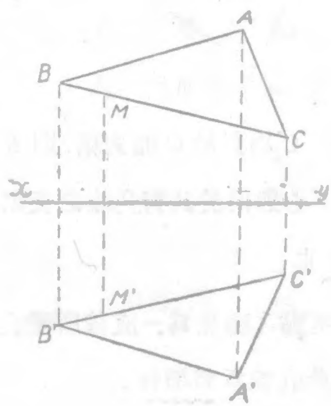
93. (定義) 設兩點之聯線爲一直線所垂直平分,則此兩點對於其垂直平分線爲對稱,稱此直線爲對稱軸.



例如P,Q之聯線爲AB直線所垂直平分,則P,Q對於AB爲對稱點,AB爲對稱軸.

故任兩點可有一對稱軸,而只限於一;反之,任一點對於某直線爲對稱點,亦只限於一.

對於幾何學圖形亦然，設一形上之任意點，常能與他形上之相當點對稱於一已知軸，反之亦莫不然；則吾人謂斯兩形對該軸而成對稱．例如A，A′；B，B′；C，C′均對XY而成對稱，則ABC與A′B′C′對XY軸而成對稱；他如正方形．菱形軸對稱於其對角線；并如次編所講，圓，軸對稱於任何直徑；如是者皆所謂軸對稱形也．



【問題133】　角之二等分線爲其角之對稱軸．

【問題134】　四邊形如對於對角線爲對稱時，則此形爲菱形或正方形．

【問題135】　等腰梯形對於通過其平行二邊中點之軸爲對稱．

【問題136】　二三角形於一軸爲對稱時，則延長各對應邊所得之三交點，位於其軸上．

94．（定義）一圖形上所有之點，皆有某種性質，凡有此性質之點，皆在此圖形上，則稱此圖形爲滿足此性質之點之軌跡．

例如距二點等距離之點，皆在二點聯線之垂直平分線上，而垂直平分

線上之點，皆距二點等距離；反之，若不在垂直平分線上之點，皆非距二點等距離.

故欲證明一軌跡題，必須正逆兩面各自證明，蓋因一定理之逆定理未必同時成立也，故應證明

(1)在圖形內之各點，皆適合於已知之條件.

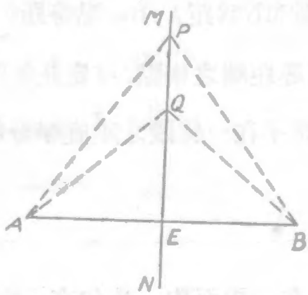
(2)適合於已知條件之各點，皆在圖形內.

或當證明.

(1)在圖形內之各點，皆適合於已知之條件.

(2)不在圖形內之各點，不適合於已知之條件.

95. (定理27)　一線段之垂直平分線，爲與此線段兩端等距離點之軌跡.



設　MN爲定線段AB之垂直平分線.

求證　MN爲與A，B等距離點之軌跡.

【證】　(1)設P是MN上之任意點，聯結AP，BP，則

∵　AE＝EB，　(假設)

PE＝PE，　(公用)

∴　rt，△APE≡rt△BPE，　(定理5系)

∴　$AP=BP$.　(§46)

(此卽在圖形內之各點,皆適合於已知之條件)

(2)又若Q爲距A,B等距離之點,聯結AQ,BQ,幷自Q至AB之中點E作聯線,則

∵　$AQ=BQ$, $AE=BE$,　(假設)

及　$EQ=EQ$.　(公用)

∴　$\triangle AQE\equiv\triangle BQE$.　(s.s.s.)

∴　$\angle AEQ=\angle BEQ$.　(§46)

∴　$QE\perp AB$.

故QE與MN重合,卽Q點在MN上.

(此卽適合於條件之各點,皆在圖形內)

故AB之垂直平分線MN爲距A,B兩點等距離點之軌跡

系　自一線段兩端等距離之兩點,可定此線段之垂直平分線.

【問題137】　試證不在一線段之垂直平分線上之點,必距二點不等遠.

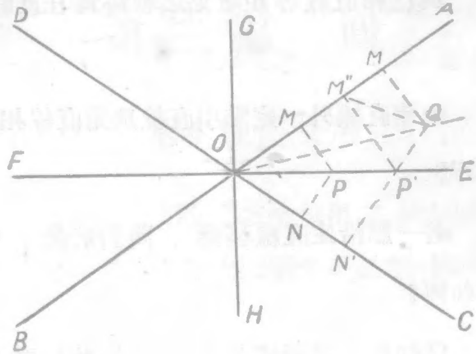
96.(定理28)　在一平面內,與相交二直線等距離點之軌跡爲二直線相交所成兩組對頂角之平分線.

設　EOF,GOH爲AOB,COD二直線相交所成兩組對頂角之平分線.

求證　EOF,GOH皆爲與AOB,COD等距離點之軌跡.

【證】　(1)設P爲在EOF上之任意一點,由P作$PM\perp AB$, $PN\perp CD$;則

∵　$\angle EOM=\angle EON$,　(假設)



$OP=OP$,　(公用)

及　$\angle PMO=\angle PNO=\angle R$,　(作圖)

∴　$\triangle PMO\equiv\triangle PNO$.　(定理19系6)

∴　$PM=PN$.　(§46)

(此卽在圖形內之各點,皆適合於已知之條件).

(2)設Q爲不在EOF上之點,由Q引$QM'\perp AB$,$QN'\perp CD$,而QN'與EOF交於P′點,并由P′引$P'M''\perp AB$,則

$\triangle P'OM''\equiv\triangle P'ON'$.　(定理19系6)

∴　$P'M''=P'N'$.　(§46)

但　$P'Q+P'M''>M''Q$,　(定理11)

而　$M''Q>M'Q$.　(定理13)

∴　$QN'>QM'$.　(§20.(9),(16))

(此卽不在圖形內之各點,皆不適合於已知之條件,)

故對頂角之平分線EOF爲與AB,CD等距離點之軌跡.

同理可證　GOH亦爲AB,CD等距離點之軌跡.

【問題138】　應用定理27,28證明問題104,105.

【問題139】　與已給直線等距離點之軌跡爲在此直線兩側之平行線.

【問題140】　由定直線外一定點引直線與定直線相交,求定點與交點間線段中點之軌跡.

【問題141】　若一點沿定直線移動，問對於此線平行或相交之直線,其對稱之軌跡如何?

【問題142】　已知梯形之兩底及兩腰,求作此梯形.

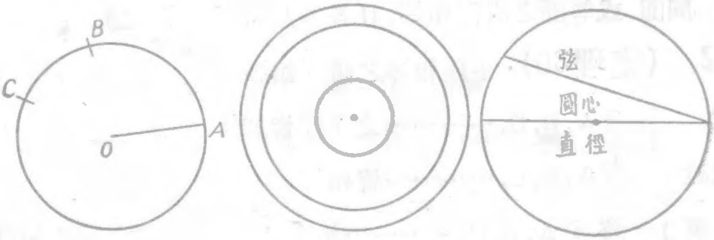
【問題143】　已知三角形之二邊與第三邊上之中線（或高）求作此三角形.

【問題144】　已知三角形之底邊,及高與一底角,求作此三角形.

第三編　圓

第一章　基本性質及角,弧,弦.

97. 圓之記法　圓可用圓心之字母稱之,例如圓心 O 之圓名曰圓 O,亦可用半徑兩端之字母或圓周上三個字母記之,例如圓OA或圓ABC.



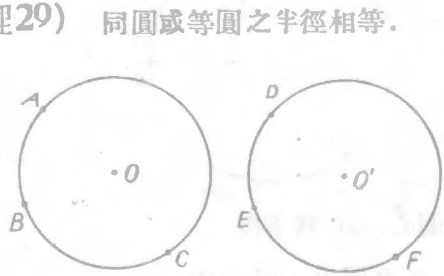
98. (定義)　同一圓心而半徑不相等之諸圓曰同心圓.

99. (定義)　聯結圓周上兩點之線段曰弦,通過圓心之弦曰直徑.

100. (定義)　圓之一半曰半圓,半圓之半曰象限,亦曰四分圓.大於半圓之弧曰優弧,小於半圓之弧曰劣弧,一圓周所分兩弧曰共軛弧.

【註】 普通所稱弧,皆指劣弧而言.

101. (定理29)　同圓或等圓之半徑相等.



設　　　$\odot O=\odot O'$.

求證　(1)$\odot O$之半徑皆相等,　(2)$\odot O$與$\odot O'$之半徑相等.

【證】 (1)因圓心至圓周之距離皆相等,故同圓內之半徑相等.

(2)把⊙O置於⊙O′之上,令圓心 O 與圓心 O′ 相重合.

因 ⊙O=⊙O′.

故圓周 ABC 與圓周 DEF 相重合, (§22.(2))

但由 O 點至圓周上各點之距離皆相等,

故二圓之半徑相等.

系 同圓,或等圓之直徑相等,且各爲其圓半徑之二倍.

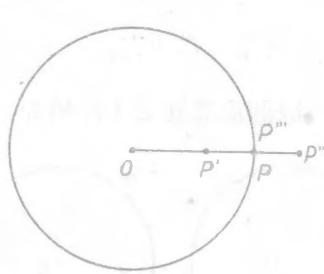
102. (定理30) 半徑相等之諸圓相等.

設 ⓈA,B,C,…………之半徑皆相等.

求證 ⓈA,B,C,…………皆相等.

【證】 將ⓈA,B,C,…………相合,而令其諸圓之圓心相合,因各圓之半徑皆相等,故諸圓周上至重合圓心之距離皆相等,故諸圓周處處符合,即諸圓皆相等.

103. (定理31) 點與圓心之距離,若點在圓內,比半徑小;在圓外,比半徑大;在圓周上,等於半徑.



設 O爲圓心,OP爲半徑.

求證 (1) P′在圓內,OP′<OP;

(2) P′在圓外.OP″>OP;

(3) P‴在圓周上,OP‴=OP.

【證】（1）聯結OP′并引長之,交圓周於P點,故P′點在OP線段上.

∴　　$OP'<OP$.　　(§20.(5))

（2）聯結 OP″ 與圓周交於 P 點,故 P″點在 OP 之延線上.

∴　　$OP''>OP$.　　(§20.(5))

（3）P‴在圓周上,聯結 OP‴即爲半徑.

∴　　$OP'''=OP$.　　(定理29)

系. 本定理之逆亦成立.

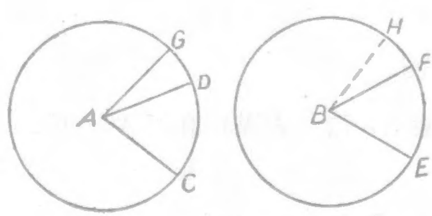
【問題145】　試證一圓只有一圓心.

【問題146】　圓周爲與圓心等距離(半徑)之點之軌跡.

104.（定義） 一圓之二半徑所夾之角曰圓心角,又圓心角與其所夾之弧曰相對.

105.（定理32） 同圓或等圓中:

（1）圓心角等,其所對之弧亦等;圓心角不等,則大角所對之弧較大.



（2）【逆】兩弧相等,對弧之圓心角亦等;兩弧不等,則大弧所對之圓心角亦較大.

（1）設　⊙A=⊙B,及（i）　$\angle CAD=\angle EBF$;

（ii）　$\angle CAG>\angle EBF$.

求證　（i）$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{EF}$;　（ii）$\overset{\frown}{CG}>\overset{\frown}{EF}$.

【證】 置⊙A於⊙B之上,令AC合於BE. (§22.(2))

(i) $\because$ $\angle CAD=\angle EBF$, (假設)

且 $AC=BE$, $AD=BF$, (定理29)

$\therefore$ C與E, D與F相重合, (§22,(2))

$\therefore$ $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{EF}$. (§46)

(ii) $\because$ $\angle CAG>\angle EBF$, (假設)

故G在$\overset{\frown}{EF}$之外,如H之位置,即$\overset{\frown}{EH}>\overset{\frown}{EF}$. (§20.(5))

故 $\overset{\frown}{CG}>\overset{\frown}{EF}$. (§20.(16))

(2)【逆】設⊙A=⊙B,及(i)$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{EF}$; (ii)$\overset{\frown}{CG}>\overset{\frown}{EF}$.

求證 (i)$\angle CAD=\angle EBF$; (ii)$\angle CAG>\angle EBF$.

【證】(i)假定 $\angle CAD\neq\angle EBF$,則必

$\angle CAD>\angle EBF$或$\angle CAD<\angle EBF$, (§20.(8))

但 $\angle CAD>\angle EBF$,則$\overset{\frown}{CD}>\overset{\frown}{EF}$. (本定理(1))

又若 $\angle CAD<\angle EBF$,則$\overset{\frown}{CD}<\overset{\frown}{EF}$. (")

均與假設不符,故$\angle CAD=\angle EBF$.

(ii) 同樣可證 $\angle CAG>\angle EBF$.

系. 直徑平分其圓.

【問題147】 自AB弦之A點作直徑AC,則與AB平行之半徑平分$\overset{\frown}{BC}$.

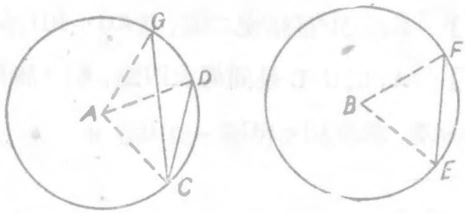
【問題148】 自$\overset{\frown}{AB}$之中點C,作OC半徑,證明OC垂直平分AB.

【問題149】 設C為O圓周上$\overset{\frown}{AB}$之中點,求證C至半徑OA,OB之距離相等.

106. (定理33): 同圓或等圓中:

(1)等弧所對之弦相等;若兩弧不等,則大弧所對之弦亦大.

(2)【逆】等弦所對之弧相等;若兩弦不等,則大弦所對之弧亦大.



(1)設　⊙A=⊙B及(i) $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{EF}$; (ii) $\overset{\frown}{CG}>\overset{\frown}{EF}$.

求證　(i)　CD=EF;　(ii)CG>EF.

【證】　(i)　連結AC, AD, BE, BF等半徑,則

∵　$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{EF}$,　(假設)

∴　∠CAD=∠EBF,　(定理32,(2))

又∵　AC=BE, AD=BF,　(定理29)

∴　△CAD≡△EBF.　(s.a.s.)

∴　CD=EF.　(§46)

(ii)∵　$\overset{\frown}{CG}>\overset{\frown}{EF}$,　(假設)

∴　∠CAG>∠EBF.　(定理32.(2))

∴　CG>EF.　(定理14)

(2)【逆】設⊙A=⊙B,及(i) CD=EF;

(ii) CG>EF.

求證　(i)　$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{EF}$;　(ii)　$\overset{\frown}{CG}>\overset{\frown}{EF}$.

【證】　(i)　假定 $\overset{\frown}{CD}\neq\overset{\frown}{EF}$.則必

$\overset{\frown}{CD}<\overset{\frown}{EF}$,　或　$\overset{\frown}{CD}>\overset{\frown}{EF}$,　(§20.(8))

∴　CD<EF,　或　CD>EF.　(本定理(1))

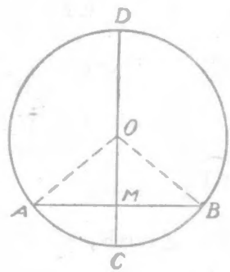
是與假設相矛盾，故 $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{EF}$.

同理可證 $\overset{\frown}{CG}>\overset{\frown}{EF}$.

【問題150】 AB，CD是相交二弦，且AC＝BD，試證AB＝CD.

【問題151】 A，B，C，D是圓周上四點，順次聯結相鄰二點，則成一四邊形，若AB＝CD，求證AD∥BC.

107.（定理34） 垂直於弦之直徑，必平分此弦及其所對之弧.



設 ⊙O之直徑CD⊥AB弦.

求證 (1) $AM=BM$; (2) $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

【證】 (1) 連結OA，OB二半徑，則

$\because$ $OA=OB$, $OM=OM$, （定理29）

$\therefore$ $rt\triangle AOM \equiv rt\triangle BOM$. （定理20）

$\therefore$ $AM=BM$, （§46）

及 $\angle AOC=\angle BOC$. （§46）

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$. （定理32(1)）

(2) $\overset{\frown}{CAD}=\overset{\frown}{CBD}$. （定理32系）

$\therefore$ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$. （§20.(2)）

系 1. 平分弦之直徑，必垂直於此弦.

系 2. 弦之垂直平分線，必過圓心，且平分此弦所對之弧.

系 3. 一直線與圓周相交,至多爲二點.

【問題152】 平分一弦及其所對弧之直線,必經過圓心.

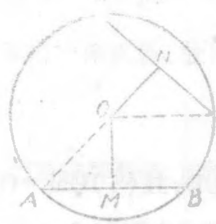
【問題153】 在⊙O中,兩弦AB=AC,OE⊥AB,OF⊥AC,證明△AOE≡△AOF.

【問題104】 A,B,C是在一圓周上之三點,求證AB,BC之垂直平分線必過圓心.

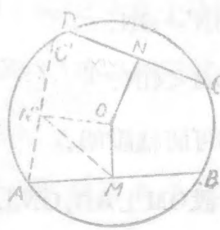
103. (定理35) 同圓或等圓中:

(1)等弦距離圓心亦等;若兩弦不等,大弦距離圓心較近.

(2)【逆】距離圓心相等之弦亦等;若距離不等,則距離近之弦較大.



(1)



(2)

(1)設在⊙O之OM⊥AB,ON⊥CD,且(i)AB=CD: (圖(1))

(ii)AB>CD. (圖(2))

求證 (i) OM=ON; (ii) OM<ON.

【證】 (i) 於圖(1)聯OA,OC兩半徑,則因

$$OA=OC, \quad \text{(定理29)}$$

及

$$AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD=CN, \quad \text{(定理34)}$$

(∵假設AB=CD)

∴ $rt\triangle OAM \equiv rt\triangle OCN$. (定理20)

∴ $OM=ON$. (§46)

(ii) 於圖(2),作$AC'=CD$及引$ON'\perp AC'$,則

因 $AM=\frac{1}{2}AB, AN'=\frac{1}{2}AC'$, (?)

但 $AB>AC'$, (?)

故 $AM>AN'$. (§20.(11))

故於$\triangle AMN'$內, $\angle AN'M>\angle AMN'$, (?)

∴ $\angle ON'M<\angle OMN'$, (§20.(13))

故於$\triangle OMN'$內, $OM<ON'$. (?)

然 $ON'=ON$. (本定理(1)(i))

∴ $OM<ON$. (§20.(16))

關於等圓時亦可同樣證明.

(2)【逆】 設$OM\perp AB, ON\perp CD$,且(i)$OM=ON$; (圖(1))

(ii)$OM<ON$. (圖(2))

求證 (i)$AB=CD$; (ii) $AB>CD$.

【證】 可用【擯棄證法】如定理32之(2)同樣證明.

【註】 上證中有(?)者,要讀者記入應用之公理或定理以資温習.

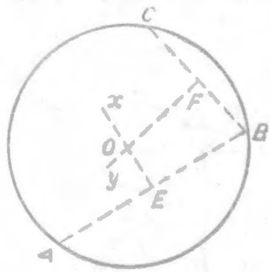
【問題155】 過AB, CD兩弦交點之直徑,若平分其交角,則$AB=CD$.

【問題156】 過A點之直徑,若不平分AB, AC兩弦所成之角.則$AB\neq AC$.

【問問 157】 在兩同心圓中,外圓的等弦被內圓截取相等之弦.

【問題 158】 過直徑兩端之弦若相等,則與直徑所成之角亦等.

109. (定理36) 過不在一直線上之三點,可作唯一之圓.



設 A,B,C為不在一直線上之三點.

求證 過A,B,C可作唯一之圓.

【證】 連結 AB,BC 及引 AB,BC 之垂直平分線 EX,FY.

因 AB,BC 爲相交兩直線,故EX,FY亦必相交於一點O.

(定理17系2之逆

但O爲 AB 之垂直平分線上之一點,故與 A,B 之距離相等.

同理 O與C,B之距離亦相等.

∴ $OA=OB=OC$.

故以O爲圓心,OA爲半徑畫圓,則必過A,B,C三點,

又因 AB,BC 之垂直平分線各只限於一,及 EX,FY之交點亦只限於一;故以O爲圓心,OA爲半徑能過 A,B,C 三點之圓亦爲唯一.

系 1. 同過三點之諸圓必全相合.

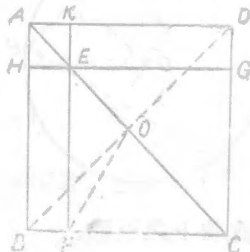
系 2. 兩圓相交只限於二點.

【問題 159】 已知弧,則如何可完成一圓周.

【問題160】 過圓內一定點之諸弦中，與過此點之直徑垂直者爲最小.

【問題161】 AB,CD兩等弦相交於P點，則AP＝DP, BP＝CP.

【問題162】 多角形各邊之垂直平分線若相交於一點，則其各頂點必在一圓周上.



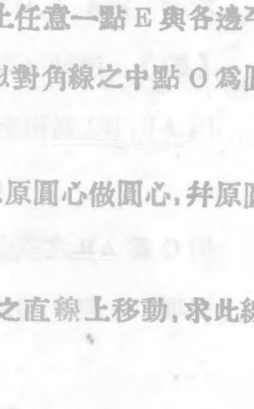
【問題163】 從正方形ABCD對角線AC上任意一點E與各邊平行作二直線KF, GH與各邊交於F, G, K, H，皆在以對角線之中點O爲圓心，OF爲半徑之圓周上.

【問題164】 許多相等弦中點之軌跡，爲以原圓心做圓心，并原圓心至一弦中點之距離做半徑之一圓.

【問題165】 定長線段之兩端在互相垂直之直線上移動，求此線段中點之軌跡.

第二章 弓形，切線及二圓關係

110. (定義) 兩半徑所夾圓之部分曰扇形，

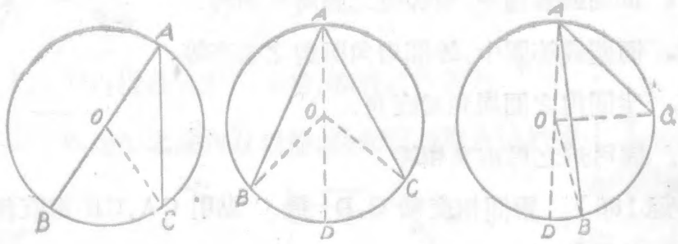


111.（定義） 圓之部分以弧與其所對之弦爲界者曰弓形.

112.（定義） 從圓周上一點引兩弦所成之角曰圓周角,圓周角之兩邊通過弓形之弦之兩端者亦稱弓形角.

113.（定義） 與圓周相交於二點之無限直線曰割線;與圓周只有一點相遇之無限直線曰切線,相遇之點曰切點.

114.（定理37） 圓周角等於同弧上圓心角之半.



設　$\angle BAC$ 爲 $\overset{\frown}{BC}$ 所對之圓周角. $\angle BOC$ 爲其同弧上之圓心角,

求證　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

【證】 (1)圓心O在 $\angle BAC$ 之AB邊上,(如圖(1)).

則　$\angle BOC$ 爲 $\triangle AOC$ 之外角,

∴　$\angle BOC=\angle BAC+\angle ACO$.　(定理19系1)

但　$\angle BAC=\angle ACO$,　(?)

∴　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

(2)圓心O在 $\angle BAC$ 之內或外.(如圖(2),(3)),由A引直徑AD,則

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD,$$

$$\angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC.$$

故於圖(2),則　$\angle DAC+\angle DAB=\frac{1}{2}\angle DOC+\frac{1}{2}\angle BOD$,

(§20,(1))

∴　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

又在圖(3),則　$\angle DAC-\angle DAB=\frac{1}{2}\angle DOC-\frac{1}{2}\angle BOD$,

∴　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

系 1. 同圓或等圓中,對等弧之圓周角相等.

系 2. 同圓或等圓中,等圓周角所對之弧亦等.

系 3. 半圓內之圓周角為直角.

系 4. 同弓形之弓形角相等.

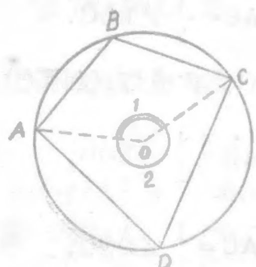
【問題166】 兩圓相交於 C,D; 過 C 點引 CA,CB 兩直徑,求證 A,D,B在一直線上.

【問題167】 圓周角是銳角或直角時,其所對之弦是小於或等於直徑.

【問題168】 二平行線截取一圓周上之二弧相等.

115. (定義) 多角形之各頂點在同一圓周上,則此多角形曰接內多角形,圓曰多角形之外接圓.

116. (定理38) 圓內接四邊形之對角互為補角.



設　ABCD 為⊙O之內接四邊形.

求證　$\angle ABC+\angle ADC=2rt\angle s$ 及 $\angle BAD+\angle BCD=2rt\angle s$.

【證】聯結半徑 AO, CO, 則

$$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle 2,\qquad \angle ADC=\frac{1}{2}\angle 1,\qquad (?)$$

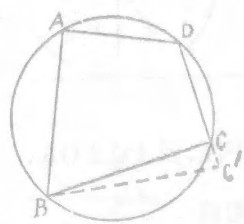
$$\therefore\quad \angle ABC+\angle ADC=\frac{1}{2}(\angle 2+\angle 1)$$

$$=2rt\angle s.$$

同理　$\angle BAD+\angle BCD=2rt\angle s$.

系 1. 圓內接四邊形之外角,等於其內對角.

系 2. 四邊形之對角互相補,則此四邊形內接於圓.



設　四邊形 ABCD 之 $\angle DAB+\angle DCB=2rt\angle s$.

求證　A, B, C, D 四點在一圓周上.

【證】過 A, B, D 三點可作一圓, 假定此圓周不過 C 點而交 DC 或 DC 之延線於 C′ 點, 連結 BC′, 則

$$\angle DAB+\angle DC'B=2rt\angle s.\qquad (?)$$

但　$\angle DAB+\angle DCB=2rt\angle s$,　(假設)

$$\therefore\quad \angle DC'B=\angle DCB.$$

此與(定理 10)相矛盾, 即此圓周不得不過 C 點.

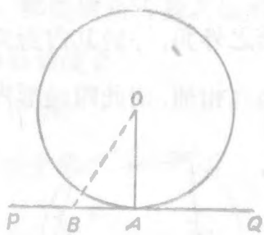
故四邊形 ABCD 內接於圓.

【註】 如此之 A, B, C, D 稱曰共圓點.

【問題 169】 平行四邊形之各頂點.若是共圓點,則此平行四邊形爲矩形.

【問題 170】 ABCD 爲平行四邊形,過相鄰兩頂點 A, B 作圓交 AD, BC 或其延線於 E, F 兩點,則 E, C, D, F 爲共圓點.

117. (定理39) 過半徑端點所引之垂線,是圓之切線.



設　OA 是⊙O 之半徑,及 PQ⊥OA.

求證　PQ 是⊙O 之切線.

【證】 於 PQ 上任取一點 B,聯結 OB,則

∵　OA⊥PQ.　(假設)

∴　OB>OA.　(?)

故 B 點在圓外　(?)

即 PQ 直線除一點 A 與圓周相遇外,其餘各點皆在圓外,故 PQ 與圓周只有一點公有.即 PQ 爲⊙O 之切線.

系 1. 過切點之半徑,是與切線相垂直.

【證】 由上圖,若 OA 不與 PQ 垂直,則由 O 引 OB⊥PQ.

∵　OB<OA,

故 B 點在圓內,是 PQ 與圓當有二點相交,故與假設相背.

$\therefore$　　　　$OA \perp PQ$.

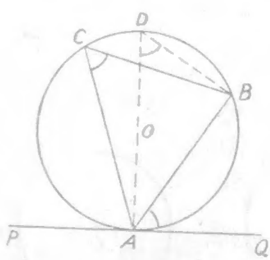
系 2. 過切點與切線相垂直之直線,必通過圓心.

【問題 171】　兩切線若互相平行,則兩切點之聯線爲直徑.

【問題 172】　兩同心圓中,與內圓相切之外圓諸弦皆等長.

【問題 173】　求半徑一定且切於定直線諸圓圓心之軌跡.

118. (定理40) 切線與過切點之弦所成之角,等於截弧所對之圓周角.



設　$\angle BAQ$ 爲切線 PQ 與弦 AB 所成之角, $\angle C$ 是截弧 AB 所對之圓周角.

求證　　　　$\angle BAQ = \angle ACB$.

【證】　引直徑 AD 及聯結 BD,則

$$\angle DBA = rt\angle. \qquad (?)$$

$\therefore$　　$\angle BDA + \angle BAD = rt\angle$.　　(?)

但　　$\angle DAQ = \angle DAB + \angle BAQ$

$= rt\angle$.

$\therefore$　　$\angle BDA + \angle DAB = \angle DAB + \angle BAQ$.　　(§20.(7))

∴　　$\angle BDA=\angle BAQ$.

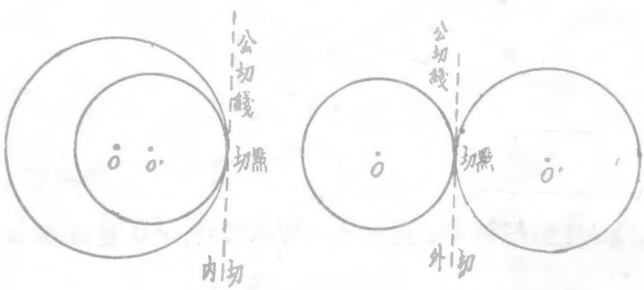
但　　$\angle BCA=\angle BDA$,　　(?)

∴　　$\angle BAQ=\angle BCA$.　　(?)

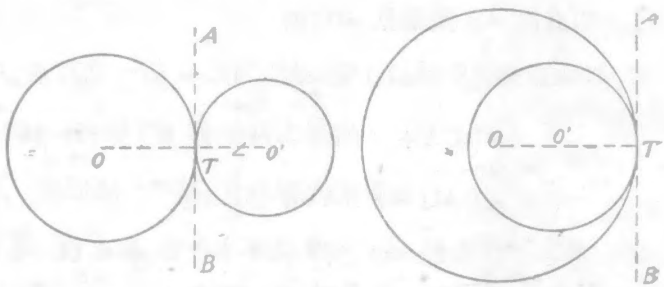
【問題174】 過切點引圓之兩弦，若與切線成等角，則此兩弦相等.

【問題175】 一弦相對弧之中點，距此弦及過弦一端之切線之距離相等.

119.（定義） 兩圓各與同一直線上之一點相切者曰兩圓相切，一圓在他圓之內者曰內切；一圓在他圓之外者曰外切. 又此直線曰公切線；切點曰公切點.



120.（定理41） 兩圓相切，則兩圓心與切點為共線點.



(1)　　　(2)

設　ⓈO與O'相切於T點.

求證　O,T,O'爲共綫點.

【證】　過T點引公切線AB,及聯結半經$OT,O'T$,則

$$\angle ATO=rt\angle,\quad \angle ATO'=rt\angle.\qquad (?)$$

故圖(1),則　$\angle ATO+\angle ATO'=2rt\angle s.$

$\therefore$　O,T,O'爲共線點.　(§72)

又於圖(2),則$OT,O'T$是重合爲一直線.　(定理1系2)

$\therefore$　O,T,O'爲共線點.　(§72)

【問題176】　兩圓O,O'相切於T點,過T點任引直線交ⓈO,O'周於A,B兩點,求證$OA\parallel O'B$.

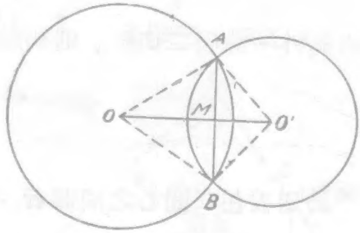
【問題177】　過兩圓之切點引AB,CD兩直線,交一圓周於A,C;另一圓周於B,D;則$AC\parallel BD$.

121. (定義) 兩圓交點之聯線曰公弦;其圓心之聯線曰連心線.

122. (定理42) 兩圓相交,其聯心線垂直平分其公弦.

設　ⓈO,O'相交於A,B兩點.

求證　OO'垂直平分AB.



【證】　連結$OA,OB,O'A,O'B$半徑,則

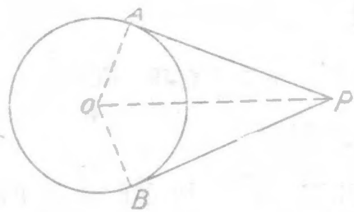
$$OA=OB,\ O'A=O'B.\qquad (?)$$

故 O, O′ 皆爲 AB 兩端等距離之點，從而 OO′ 垂直平分 AB.

（定理27系）

【問題178】　相交兩等圓之圓心與交點可成一菱形試證之.

123.（定理43） 自圓外一點至圓之兩切線相等，且與聯此點及圓心之線成等角.



設　P 爲 ⊙O 外一點，PA, PB 爲自 P 點至圓之二切線.

求證　　(1) PA = PB；　(2) ∠APO = ∠BPO.

【證】　聯結半徑 OA, OB, 及 OP 線段，則

$$\angle PAO = \angle PBO = rt\angle. \qquad (?)$$

及　　$OA = OB, \quad OP = OP.$

∴　　$\triangle OPA \equiv \triangle OPB. \qquad (?)$

∴(1)　　$PA = PB. \qquad (§46)$

(2)　　$\angle APO = \angle BPO. \qquad (§46)$

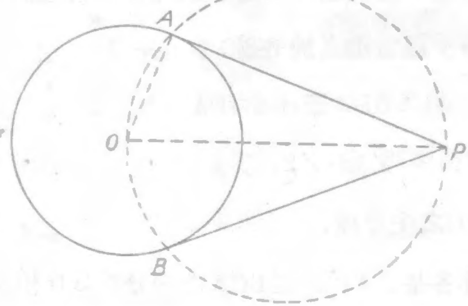
【問題179】　自圓外一點引二切線，則切點之聯線被此點及圓心之聯線所垂直平分.

124.（定義） 公切線在二圓心之同側者，曰外公切線，異側者曰內公切線.

125.（定義） 多角形各邊外切於一圓者，曰外切多角形. 此圓曰

多角形之內切圓.

126.【作圖題 8】 自圓外一已知點作圓之切線.



設　P爲已知⊙O外之已知點.

求作　自P至⊙O之切線.

【作法】 1. 聯結OP直線.

2. 用OP爲直徑畫圓交⊙O於A.B兩點.

3. 聯結AP,BP卽得所求之二切線.

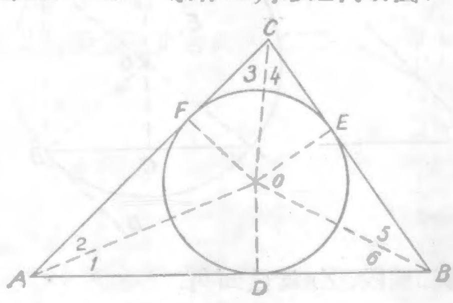
【證】 聯結OA,則∠PAO=rt∠.　(?)

故　PA爲⊙O之切線.　(?)

同理可證PB亦爲⊙O之切線.

故　PA,PB合於所求之切線.

127.【作圖題 9】 求作三角形之內切圓.



設　△ABC爲已知三角形.

求作　△ABC之內切圓.

【解析】 假定上圖爲已得之圓，及⊙O切各邊於D,E,F, 故聯結OD,OE,OF各半徑當垂直於各邊.

∴　　rt△ODA≡rt△OFA.　　(定理20)

∴　　∠1=∠2.

故OA是∠BAC之平分線.

同理OB,OC亦各是∠ABC, ∠BCA之平分線；且相交於一點O,故此圓就易作.

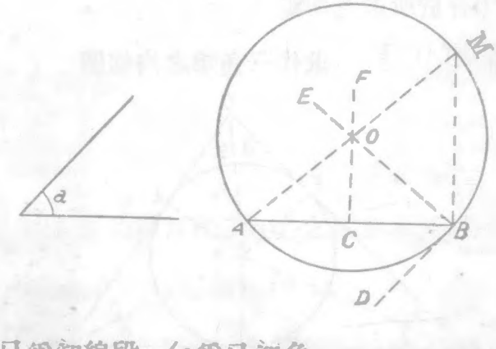
【作法】 1.作∠A, ∠B之平分線,相交於一點O.

2.由O作OD⊥AB.

3.以O爲圓心,OD爲半徑畫圓卽得所求.

【問題180】 求作已知三角形之傍切圓.

128.(作圖題10) 在一定線段上作一弓形,使其所含之角等於已知角.



設　AB已爲知線段,∠a爲已知角.

求作　以AB爲弦作弓形，令所含角等於∠a.

【作法】1.由AB一端B引BD，令∠DBA＝∠a.　(作圖題5)

2.由B作BE⊥BD.　(作圖題4)

3.作AB之垂直平分線FC，與BE交於O點.　(作圖題1)

4.以O爲圓心，OB爲半徑畫圓，即得所求之弓形.

【證】聯結AO幷延長之，交圓周於M點，再聯結MB，則

因　OC是AB之垂直平分線.

故　OA＝OB.

故以O爲圓心，OB爲半徑之弓形過A點.　(？)

又因　OB⊥BD，

故BD是⊙O之切線.　(？)

∴　∠ABD＝∠AMB.　(？)

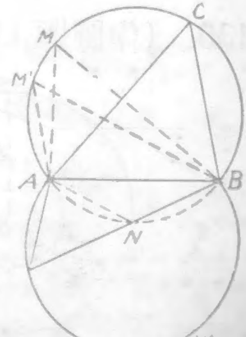
但　∠ABD＝∠a，

∴　∠AMB＝∠a.

故弓形AMB合於所求.

【問題181】已知底邊，頂角及高，求作此三角形.

129. (定理44)　對一定線段之已知角頂點之軌跡，爲此線段做弦與含此角之二弓形.



設　AB為一定線段，及$\angle C$為一定角．

求證$\overset{\frown}{AMB}$及與$\overset{\frown}{AN'B}$是以AB為弦與合$\angle C$頂點之軌跡．

【證】（1）於軌跡上任取一點M，聯結AM，MB，則

$$\angle AMB=\angle ACB. \qquad (?)$$

（即在圖形內之各點，皆適合於已知之條件．）

（2）又在AB同側取M′點，令$\angle AM'B=\angle ACB$，

并在AB反側弧上取N點，則

$$\angle ACB+\angle ANB=2rt\angle s. \qquad (?)$$

$$\therefore \qquad \angle AM'B+\angle ANB=2rt\angle s. \qquad (?)$$

故　A，N，B，M′是共圓點．（?）

但　A，N，B，C是共圓點．（?）

即　M′點在AMB弧上．

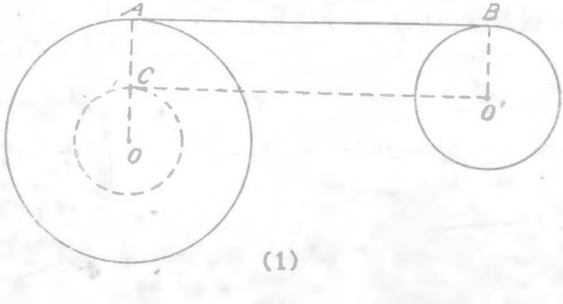
（即適合於已知條件之各點，皆在圖形上．）

故　AMB弧是$\angle C$頂點之軌跡．同理可證AN′B亦是所求之軌跡．

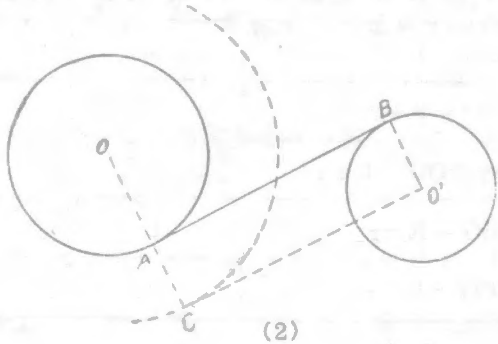
【問題182】　已知線段為斜邊之直角三角形直角頂點之軌跡，為此線段做直徑之一圓．

【問題183】　平行四邊形之底之位置及長為一定，並已知其隣邊之長，求其對角線之交點之軌跡．

130．（作圖題11） 求作不相交二圓之公切線．



（1）



(2)

設 O,O 爲不相交二圓,R,r爲半徑,且R>r.

求作　ⓈO,O′之公切線.

【解析】　假定AB爲已得之公切線,A,B是二切點,聯結OA,O′B及從O′點引直線O′C∥AB交OA或其延線於C點.

故O′C爲與中心O,半徑OC之圓相切,而此圓之半徑,在AB是外公切線時,等於R—r(圖(1));在AB是內公切線時,等於R+r(圖(2)).故得作圖如下:

【作法】　1. 用大圓之圓心爲圓心,R—r與R+r各爲半徑作圓.

2. 從O′點引此圓之切線O′C.

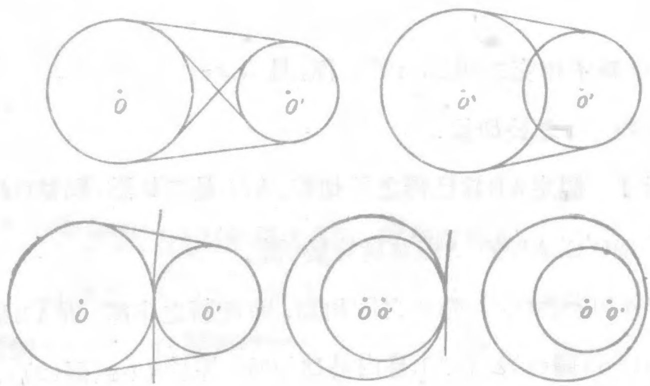
3. 聯結OC或延長之與O圓周交於A點.

4. 引O′B與OA平行,并與O′圓交於B點.

5. 聯結AB,即得所求.

【討論】外公切線之數,是與O′點引到圓心O,半徑R—r之圓之切線數相等,內公切線之數,是與O′引到圓心O,半徑R+r之圓之切線數相等,故得結果如下:

心距與半徑之和差關係	外公切線	內公切線
$OO'>R+r$	2	2
$OO'=R+r$	2	1
$R-r<OO'<R+r$	2	0
$OO'=R-r$	1	0
$OO'<R-r$	0	0



【問題 184】 畫月蝕時之圖(卽太陽被地球所遮之陰影圖).

【問題 185】 作相等二圓之公切線.

【問題 186】兩圓外切於A點,幷一公切線爲 CD, 求證 $\angle CAD=rt\angle$.

【問題 187】 一切線及其一平行線截一圓上之二弧相等.

【問題 188】 二弦相交於圓內之一夾角,等於此角與其對頂角所含弧所對圓心角和之半.

【問題 189】 兩弦,或兩切線,或一弦一切線相交於圓外之夾角,

等於其所截弧所對圓周角之差.

【問題 190】一定線段與一直線平行，且其一端沿一圓周上移動，求他端之軌跡.

【問題191】A,B,C,D 是圓周上順次四點；P,Q,R,S是$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{CD}$,$\overset{\frown}{DA}$之中點，求證$PR\perp QS$.

【問題 192】圓之外切四邊形，其兩組相對邊之和相等.

【問題 193】兩圓相切於P點，一任意割線與二圓交於 A,B,C,D；則$\angle APD+\angle BPC=2rt\angle s$.

【問題 194】兩圓相交於A,B兩點，過A,B任引CD,EF二直線，被二圓周所截於C,D,E,F,四點，則CE,DF常相平行.

【問題 195】已知半徑，求作外切於二外切圓之圓.

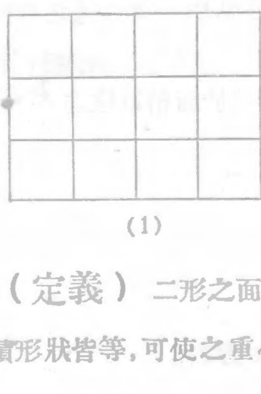
【問題 196】過弧上已知點引弦，令被已知弦分為二等分.

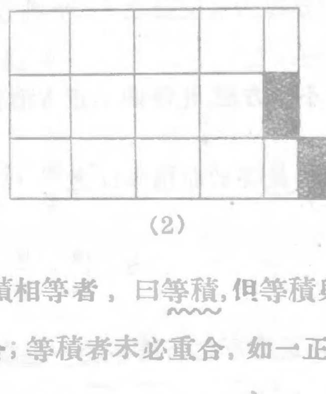
第四編　面　積

第一章　直線形面積

131.（定義） 以單位長度爲邊之正方形爲面之單位；一平面形所含此單位之倍數曰面積.

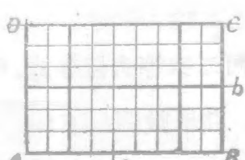
例如底爲 4 公分，高爲 3 公分之矩形，可分爲12個邊爲 1 公分之單位正方形(如下圖1)，故其面積爲12平方公分，或簡稱12方公分．又如底爲4.5公分，高爲 3 公分之矩形可分爲 12 個正方形，又 3 個小矩形(如下圖 2)．但合 2 個小矩形可得 1 個單位正方形，即 1 小矩形爲單位之半，故此矩形之面積爲13.5方公分.


(1)


(2)

132.（定義） 二形之面積相等者，曰等積，但等積與全等不同，全等是面積形狀皆等，可使之重合；等積者未必重合．如一正方形可與一矩形等積.

133.（定理45） 矩形面積等於其相隣二邊之相乘積.



設ABCD爲矩形，其面積及邊AB，BC各以S，a，b表之.

求證 $S=ab$.

【證】 (1)a與b皆爲單位平方邊之整數倍量.

等分AB爲a等分，BC爲b等分，自各分點引相鄰二邊之平行線，將矩形ABCD分爲ab個小正方形，此每個小正方形，即爲面積單位，故ABCD含有ab個面積單位.

$$\therefore \qquad S=ab.$$

(2) a與b皆爲單位平方邊之分數倍量.

假定 $a=\frac{m}{p}$, $b=\frac{n}{p}$.

分AB爲m等分，BC爲n等分.

此各部分等於單位長之$\frac{1}{p}$，今過各分點引相鄰二邊之平行線，將矩形分爲m n個小正方形，此每個小正方形皆等於面積單位之$\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}$.

故ABCD是等於面積單位之$\frac{m}{p}\cdot\frac{n}{p}$倍.

$$\therefore \qquad S=\frac{m}{p}\cdot\frac{n}{p}=ab.$$

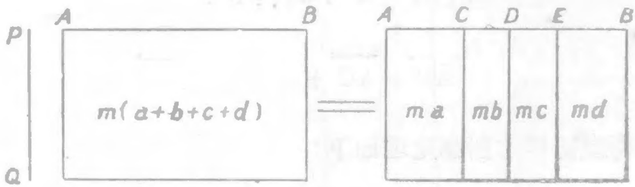
系1. 正方形之面積等於一邊之平方.

系2. 等底等高之矩形必等積.

【問題197】 等底(或高)等積之矩形必等高(或底).

134. 代數學中之任何二次等次恆等式，可以表此式二邊面積相等之幾何平面圖形表示之. 茲舉數例如下：

(一) $m(a+b+c+\cdots\cdots)=ma+mb+mc+\cdots\cdots$



【解】　將AB分爲AC, CD, DE, EB幾線段, PQ是另一線段.

以a, b, c, d表AC, CD, DE, EB; m表PQ, 則a+b+c+d表AB.

故　$m(a+b+c+d)$表矩形PQ·AB之面積; 及ma, mb, mc, md, 表矩形PQ·AC, PQ·CD, PQ·DE, PQ·EB之面積, 即

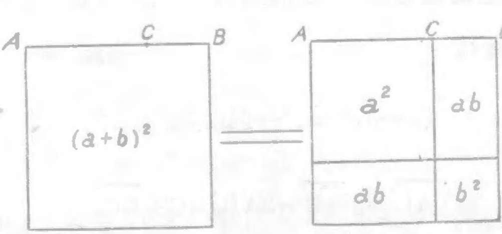
$$m(a+b+c+d)=ma+mb+mc+md.$$

$$\therefore \quad PQ\cdot AB=PQ\cdot AC+PQ\cdot CD+PQ\cdot DE+PQ\cdot EB.$$

從而得幾何學之對應定理如下:

二線段所包之矩形, 等於一線段與另一線段分得諸部分所包矩形之和.

(二)　　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$



【解】　將AB分爲AC, CB二部分, 以a, b表AC, CB, 則(a+b)表AB.

故　$(a+b)^2$表正方形$\overline{AB}^2$之面積, 而a^2, b^2, ab表正方形$\overline{AC}^2$, $\overline{CB}^2$及矩形AC·CB之面積.

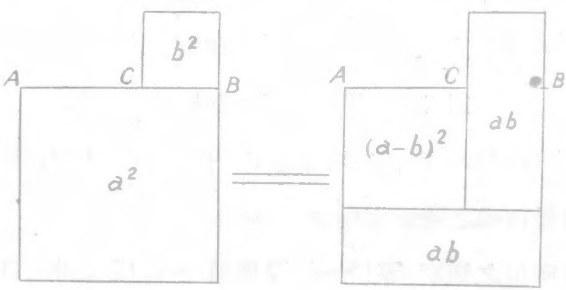
即　　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$$\therefore\quad \overline{AB}^2=\overline{AC}^2+2AC\cdot CB+\overline{CB}^2.$$

從而得幾何學之對應定理如下:

二線段和上之正方形,等於各線段上正方形之和,加二線段所包矩形之二倍.

(三)　　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.



【解】 線段AC爲AB與BC之差,以a,b表AB,BC,則$(a-b)$表AC.

故$(a-b)^2$是表正方形$\overline{AC}^2$之面積,而a^2b^2,ab是表正方形$\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$及矩形AB·BC之面積.

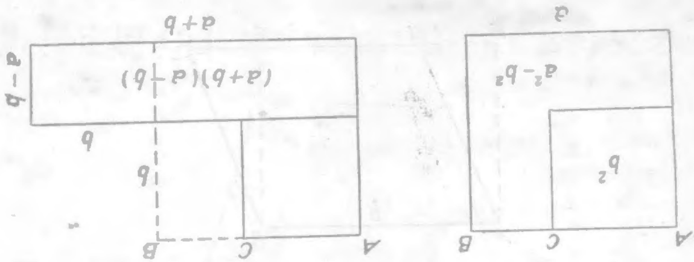
即　　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$$\therefore\quad \overline{AC}^2=\overline{AB}^2-2AB\cdot BC+\overline{BC}^2.$$

從而得幾何學之對應定理如下:

二線段差上之正方形,等於各線段上正方形之和,減去二線段所包矩形之二倍.

(四)　　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.



【解】　線段AB上取一點C，以a，b表AB，AC，則(a+b)表AB+AC，(a−b)表AB−BC．

故(a+b)(a−b)是表AB，AC之和與差所包矩形之面積，而a^2，b^2是表正方形$\overline{AB}^2$，$\overline{AC}^2$之面積．

即　$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)\cdot$$

$$\therefore\quad \overline{AB}^2-\overline{AC}^2=(AB+AC)(AB-AC)\cdot$$

從而得幾何學之對應定理如下：

二線段上正方形之差，等於二線段之和與差所包矩形之面積．

【問題 198】　由次之代數恆等式，導出幾何學之對應定理．

(i)　$a(b-c)=ab-ac.$

(ii)　$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2).$

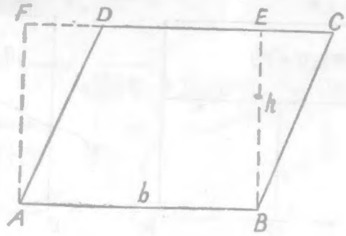
(iii)　$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$

【問題 199】　M是AB之中點，P是AB上之另一點，求證

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MP}^2),$$

并述一般的定理．

135.（定理 46）平行四邊形之面積，等於其底與高之相乘積．



設 ▱ABCD之底爲b,高爲h.

求證 ▱ABCD＝bh.

【證】 作BE⊥AB,AF⊥AB 交CD及其延長線於E及F,

則 $\angle ADF=\angle BCF$, (?)

$AD=BC$, (?)

∴ rt△AFD≡rt△BEC. (定理19系6)

∴ ▱ABCD＝▭AE. (§20.(1))

但 ▭AE＝bh. (定理45)

∴ ▱ABCD＝bh.

【註】 平行四邊形,矩形,正方形亦可以對角上二文字記之,如矩形ABCD記爲▭AC或▭BD.

系1. 等底等高之平行四邊形等積.

系2. 三角形之面積等於其底與高相乘積之半

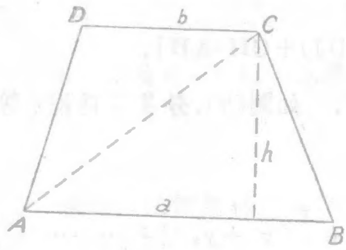
系3. 等底等高之三角形等積.

【問題 200】 等底(或高)等積之三角形必等高(或底).

【問題 201】 三角形之三中線,分原形爲6個等積三角形.

【問題 202】 底邊與面積一定,三角形頂點之軌跡,爲與底邊平行之二直線.

136. (定理 47) 梯形之面積,等於兩底和之半與高之相乘積.



設 a, b表梯形 ABCD之兩底, h表高.

求證 梯形ABCD$=\frac{1}{2}(a+b)h$.

【證】 聯結對角線AC, 則

$\triangle ABC=\frac{1}{2}ah$, $\triangle ADC=\frac{1}{2}bh$. (?)

∴ 梯形ABCD$=\triangle ABC+\triangle ADC$ (?)

$=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(a+b)h$. (§10.(1))

系. 梯形之面 等於高與中線之相乘積.

【問題 203】 M, N為梯形ABCD上下兩底AB, CD之中點,

求證 (1) $\triangle AMN=\triangle BMN$; (2) $\triangle ADN=\triangle BCN$

【問題 204】 P是梯形ABCD中線EF上一點, 若AB, CD為兩底, 及EP$=3$PF, 求證 $\triangle APD=3\triangle BPC$.

137. 應用三角形, 梯形之定理, 求任意多角形及曲線形面積之方法.

(一) 任意多角形. 取一適宜之對角線為基線, 并求其他諸頂點至基線之距離, 則如圖(1)

ACDBFE $=\triangle AEG+$ ◻EGIF $+\triangle BIF+\triangle BJD+$ ◻JDCH $+\triangle HCA$

$$=\frac{1}{2}[EG\cdot AG+GI(EG+FI)+FI\cdot BI+BJ\cdot DJ+HJ(CH+DJ)+CH\cdot AH].$$

（二） 曲線形面積． 如圖(2)，分基線爲若干等分．則面積之近似值爲

$$\frac{1}{2}(y_0+y_1)d+\frac{1}{2}(y_1+y_2)d+\cdots\cdots+\frac{1}{2}(y_4+y_5)d+$$

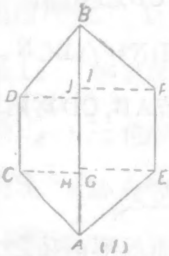
$$\frac{1}{2}(y_5+y_6)d=\frac{d}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots\cdots+2y_5+y_6).$$

（三） 辛普孫(Simpson)氏法則． 如圖(3)，分基線爲偶數等分，則其面積之近似值爲

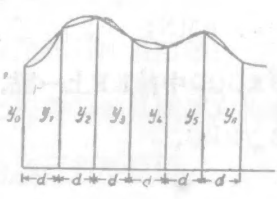
$$\frac{1}{2}(y_0+y_1)\frac{2d}{3}+\frac{2}{3}y_1d+\frac{1}{2}(y_1+y_2)\frac{2d}{3}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{d}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots\cdots+4y_{n-2}+2y_{n-1}+y_n)$$

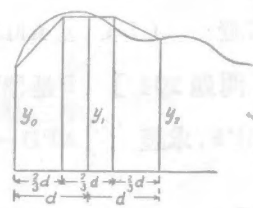
$$=\frac{d}{3}\left\{(y_0+y_n)+4(y_1+y_3\cdots)+2(y_2+y_4\cdots)\right\}.$$



(1)



(2)



(3)

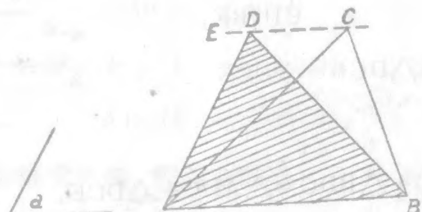
【註】 上之計算皆須實測，而所得之值皆爲近似面積；故所取基線分成之等分愈小，則所得之值愈近準確．

【問題205】 已知圖(1)中，AG=7.4市丈，GH=5.4市丈，HJ=6.5市丈，JI=4.2市丈，IB=6.9市丈，EG=10.9市丈，CH=10.5

市丈，DJ＝9.3 市丈，FI＝7.0 市丈，求其面積.

【問題 206】　已知圖（2）中，$y_0=1.5$，$y_1=2.1$，$y_2=2.3$，$y_3=2.0$，$y_4=1.8$，$y_5=2.1$，$y_6=1.7$ 及 $d=0.4$：求其面積，并用辛普孫法求之.

138.（作圖題12） 求作以已知角爲一底角，并與已知三角形同底等積之三角形.



設　△ABC及∠a 爲已知.

求作　以∠a 爲一底角，及 AB 爲底與△ABC 等積之三角形.

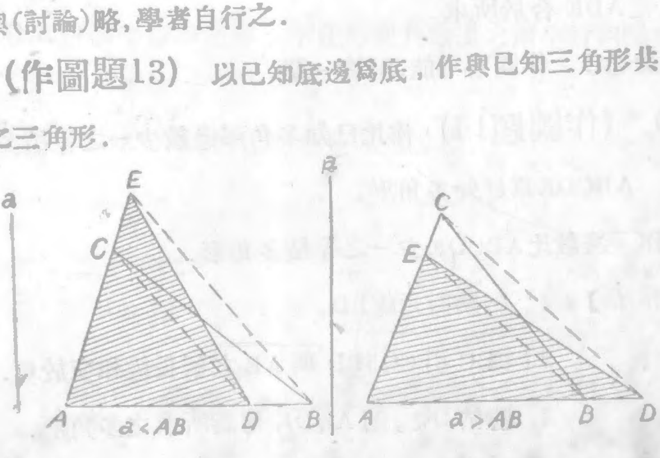
（作法）　1．由 C 引 CE∥AB.

2．在 A 端作 ∠DAB＝∠a.

3．聯結 BD，則△ABD 即爲所求之三角形.

（證）與（討論）略，學者自行之.

139.（作圖題13） 以已知底邊爲底，作與已知三角形共有一底角且等積之三角形.



設 a 爲已知邊，$\triangle ABC$ 爲已知三角形.

求作 以 a 爲底，作與 $\triangle ABC$ 共有一角之等積三角形.

【作法】 1. 在 AB 或 AB 之延長線上取 D 點，令 $AD=a$.

2. 聯結 CD.

3. 由 B 引 $BE \parallel CD$，與 AC 或 AC 之引長線交於 E 點.

4. 聯結 DE 卽得所求之三角形 ADE.

【證】 $CD \parallel BE$, (作圖)

$\therefore$ $\triangle DCB = \triangle DCE$ (定理46系3)

於圖(1)，則

$\triangle ADC + \triangle BDC = \triangle ADC + \triangle DCE$, (?)

$\therefore$ $\triangle ABC = \triangle ADE$

於圖(2)，則

$\triangle ADC - \triangle DCB = \triangle ADC - \triangle DCE$ (?)

$\therefore$ $\triangle ABC = \triangle ADE$

且 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ABC$ 共有一底角 A 與底邊等於 a.

故 $\triangle ADE$ 合於所求.

【討論】 作圖常可能，解答一個.

140. (作圖題14) 作比已知多角形邊數少一之等積多角形.

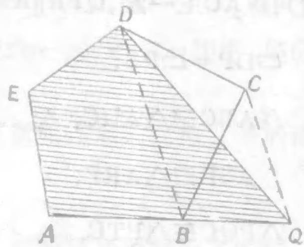
設 ABCDE 爲已知多角形.

求作 邊數比 ABCDE 少一之等積多角形.

【作法】 1. 聯結對角線 BD.

2. 由 C 引 $CQ \parallel BD$ 與 AB 之延長線相交於 Q.

3. 聯結 DQ，則 AQDE 卽爲所求之多角形.



【證】∵　BD∥CQ.

∴　△BCD＝△BQD.　(作圖)

∴　⌂ABDE＋△BCD＝⌂ABDE＋△BQD.　(？)

∴　⌂ABCDE＝⌂AQDE.

【討論】 作圖常可能，解答有數種.

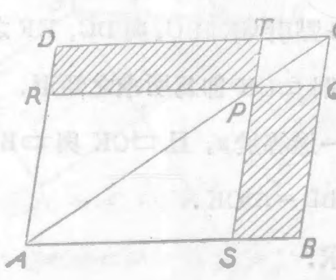
系. 可作一三角形，與一已知多角形等積.

【問題 207】 已知一角與一邊，求作一平行四邊形與一已知三角形等積.

【問題 208】 作一三角形與已知五角形 ABCDE 等積.

141.（定義） 過平行四邊形對角線上一點作與相鄰二邊之平行線，將原形分爲四個平行四邊形，不在原對角線上之兩平行四邊形曰餘形.

142.（定理48） 平行四邊形之兩餘形等積.



設 P為▱ABCD對角線AC上一點,QPR∥AB,TPS∥BC.

求證 ▱DP=▱PB,

【證】 ∵ △ABC≡△ADC, (?)

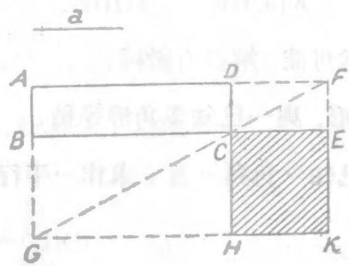
及 △ASP≡△ARP, (?)

△PQC≡△PTC, (?)

∴ △ABC−△ASP−△PQC=△ADC−△ARP−△PTC. (?)

∴ ▱DP=▱PB.

143. (作圖題15) 已知一邊,作一矩形與已知矩形等積.



設 a是已知綫段, BD是已知矩形.

求作 一矩形以a為一邊與矩形BD等積.

【作法】 1. 延長BC至E, 令CE=a.

2. 過E點,引EF∥DC與AD之延長線相交於F點.

3. 引CF與AB之延長線交於G.

4. 過G點引GK∥BC,與DC, EF之延長線相交於H, K點;則▭CK即為所求之矩形.

【證】 ▭CK之一邊等於a, 且▭CK與▭BD是▭AK之餘形.

∴ ▭BD=▭CK. (定理48)

故 ▭CK合於所求.

【討論】 常得一解答.

【問題 209】 已知一邊,求作一矩形,與已知平行四邊形等積.

【問題 210】 任意四邊形之面積,等於兩對角線爲邊及其夾角爲角之平行四邊形之半.

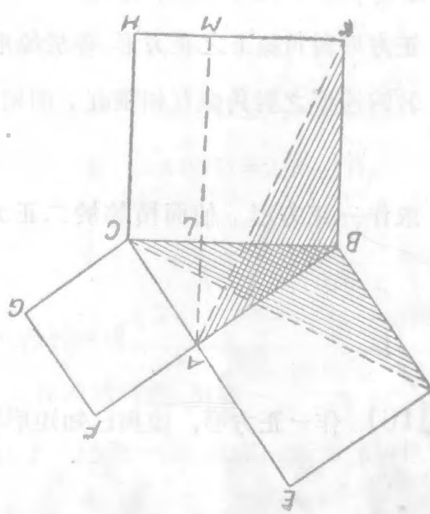
【問題 211】 直角三角形兩股之乘積,等於其斜邊與斜邊上高之乘積.

【問題 212】 已知一邊求作一三角形,與已知四邊形等積.

第二章 畢氏定理及其應用

畢氏定理因係畢他哥拉斯 (Pythagoras) 所發見故名,氏爲希臘哲學家,西曆紀元前六世紀時人.此定理在幾何學中極有價値,研究之人,亦較多,故其證法,不祇一種.我國在極古時,已知其關係,卽所謂勾股弦之關係,並稱直角三角形爲勾股形.下節所述爲一通常之證法.

144. (定理49) 直角三角形斜邊上之正方形,等於兩股上正方形之和.



設 BC 是 rt$\triangle ABC$ 之斜邊，AB, AC 爲兩股．

求證 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$.

【證】 在 AB, AC, BC 上各作正方形 BE, AG, CK. 並由 A 引 AM$\parallel$BK，再聯結 AK, DC；則$\triangle BDC$, $\triangle ABK$ 中，有

$$BD=AB,\ BC=BK,$$

$$\angle DBC=\angle ABK, \qquad (?)$$

$\therefore$ $\triangle BDC\cong\triangle ABK.$ (s.a.s.)

但 $\square BE=2\triangle BDC,\ \square BM=2\triangle ABK,$ (?)

$\therefore$ $\square BE=\square BM.$ (?)

同理 $\square AG=\square CM.$

$\therefore$ $\square CK=\square BE+\square AG.$ (?)

即 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2.$ (?)

系1. 直角三角形一股之平方，等於斜邊之平方與他股之平方之差．

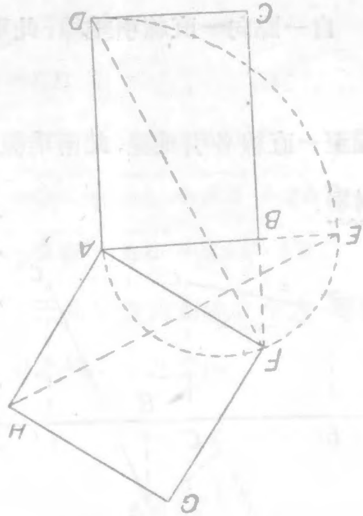
系2. 本定理之逆亦成立．

【問題 213】 正方形對角線上之正方形，等於原形之二倍．

【問題 214】 若四邊形之對角線互相垂直，則相對二邊平方之和相等．

【問題 215】 求作一正方形，使面積等於二正方形面積之和或差．

145. (作圖題16) 作一正方形，使與已知矩形等積．(應用畢氏定理證法)．



設　ABCD爲已知矩形.

求作　一正方形與▭ABCD等積.

【作法】　1. 延長AB至E,令AE＝AD.

2. 以AE爲直徑畫半圓,與BC之延長線交於F.

3. 聯結AF,并在AF上作正方形AFGH卽合所求.

【證】聯結EH,DF,則

△AFD≡△AHE.　(S.a.S.)

但　▭ABCD＝2△AFD,　(?)

及　□AG＝2△AHE.　(?)

∴　□AG＝▭ABCD.

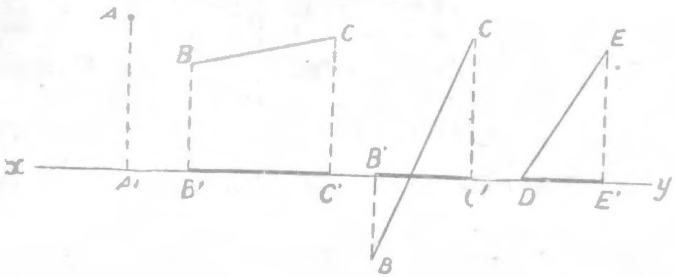
卽　□AG合於所求.

【討論】　作圖常可能,解答一.

【問題216】　已知一邊,求作一矩形等於已知正方形.

146. (定義) 自一點向一直線引垂線，此垂線之足名曰此點在該直線上之正射影.

自一線段之兩端至一直線各引垂線，此兩垂線足中間之線段，曰原線段在該直線上之正射影.



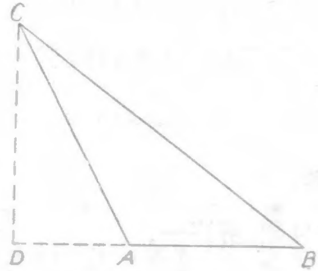
例如在XY上，A點之正射影爲A'；BC，DE之正射影爲B'C'，DE'.

【註】正射影亦稱垂直射影，其他尚有多種射影，但本書中僅用正射影一種，故以後用射影時卽指正射影而言.

147. (定理50) 三角形鈍角對邊之平方，等於他兩邊之平方和，加一邊與他邊在此邊上射影相乘積之二倍.

設 $\angle A$是$\triangle ABC$中之鈍角，AD是AC在AB延長線上之射影.

求證 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AB\cdot AD$.



【證】 因AD是AC在AB上之射影，

$\because$ $CD \perp AD$.

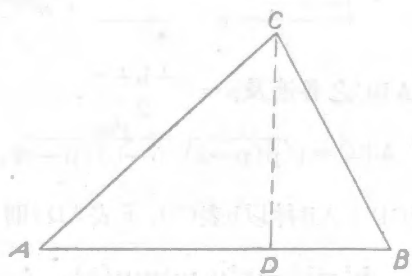
$\therefore$ $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$ (?)

$= \overline{CD}^2 + (DA + AB)^2$

$= \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB \cdot AD$

$= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB \cdot AD$.

148. (定理51) 三角形銳角對邊之平方,等於他兩邊之平方和,減一邊與他邊在此邊上射影相乘積之二倍.



設 ∠A是△ABC中之銳角,AD是AC在AB上之射影.

求證 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \cdot AD$.

【證】 $\because$ $CD \perp AB$, (?)

$\therefore$ $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$ (?)

$= \overline{CD}^2 + (AB - AD)^2$

$= \overline{CD}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2AB \cdot AD$

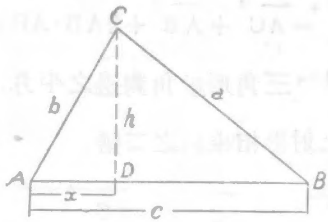
$= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \cdot AD$.

系. 三角形二邊之平方和,等於第三邊一半之平方與其中線之平方和之二倍.

【問題217】 設M是△ABC底邊AB上之中點,求證

$$4\overline{CM}^2 = 2\overline{BC}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2.$$

149. **(定理52)** 設a, b, c表△ABC之各邊, 2p表a, b, c之和, 則 $\triangle ABC=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.



設 a, b, c表△ABC之各邊及$p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

求證 $\triangle ABC=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

【證】 由C引CD⊥AB并以h表CD, x表AD; 則

$$h^2=b^2-x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \qquad (?)$$

及 $$a^2=b^2+c^2-2cx. \qquad (?)$$

∴ $$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}.$$

代入(1), 則

$$h^2=b^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}$$

$$=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}$$

$$=\frac{\left\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\right\}\left\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\right\}}{4c^2}$$

$$=\frac{\left\{a^2-(b-c)^2\right\}\left\{(b+c)^2-a^2\right\}}{4c^2}$$

$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c+a)(b+c-a)}{4c^2}\cdots(2)$$

但 $\left.\begin{aligned} a+b+c=2p,\ 則b+c-a&=2(p-a),\\ a-b+c&=2(p-b),\\ a+b-c&=2(p-c),\end{aligned}\right\}$ 代入(2)

$$\therefore\qquad h^2=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}.$$

即 $$h=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\therefore\qquad \triangle ABC=\frac{1}{2}hc$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

【問題218】 三角形之三邊長爲7, 8.5, 4.7; 求此形之面積.

【問題219】 等邊三角形之一邊爲a,求面積.

【問題220】 E,F是▱ABCD之相鄰兩邊AB,AD之中點,求證

$$\triangle AEF=\frac{1}{8}\square ABCD.$$

【問題221】 延長等腰直角三角形PQR之底邊QR至S,使RS=QR,求證 $\overline{PS}^2=\overline{PR}^2+2\overline{QR}^2$.

【問題222】 O是矩形ABCD內或外之任意一點,聯結OA,OB,OC,OD,求證 $\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OD}^2$.

【問題223】 作一正方形等於已知正方形之三倍.

【問題224】 等腰三角形之底爲a,腰爲b,面積爲s,求證

$$S=\frac{a}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}.$$

【問題225】 動點 P 至一線段兩端距離平方之差爲一定，求其軌跡.

【問題226】 三角形之底邊一定，他二邊之平方和亦一定時，求頂點之軌跡.

【問題227】 梯形之上底CD＝5公分，一腰BC＝4公分，∠A＝45°，∠B＝30°. 求此梯形之面積.

【問題228】 一三角形之二邊有定長，求其最大時之面積.

第五編　比例及相似形

第一章　比及比例

150. (定義)　比較同類二量之大小曰比，如XY，PQ二線段以同一單位測之，得單位之 a，b倍，則 XY 為 PQ之$\frac{a}{b}$倍，或PQ為XY之$\frac{b}{a}$倍，又XY對PQ之比，即a與b之比；以式表之，則為 $a:b$ 或$\frac{a}{b}$；a 曰比之前項，b 曰比之後項，而$\frac{a}{b}$曰比值．

然二量之比，對於所用單位之大小無關；例如5尺與2尺，50寸與20寸之比俱為5:2．

151. (定義)　兩等比所成之等式曰比例，以 $a:b=c:d$ 或$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$表之；a，d曰外項，b，c曰內項，d曰a，b，c之第四比例項．

152. (定義)　設$a:b=b:c$，則b 曰 a與c之比例中項，c曰 a，b 之第三比例項．

153. (定理53) 設$a:b=c:d$，則

(i) $ad=bc$；　(ii) $a:c=b:d$(更理)；

(iii) $b:a=d:c$(反理)；　(iv) $a+b:b=c+d:d$(合理)；

(v) $a-b:b=c-d:d$(分理)；

(vi) $a+b:a-b=c+d:c-d$(分合理)；

(vii) $a^n:b^n=c^n:d^n$(n乘比)．

系1.　設 $ad=bc$，則$a:b=c:d$.

系2.　設 $a:b=b:c$，則$b^2=ac$.

系3.　設 $a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots\cdots$，

則 $a:b=(a+c+e+\cdots\cdots):(b+d+f+\cdots\cdots)$.

系4.　設 $a:b=c:d$，又$a=c$，則$b=d$.

【註】　證明已詳代數中，故略.

【問題229】　(i) 若 $x+y:x-y=a:b$，求$x:y$.

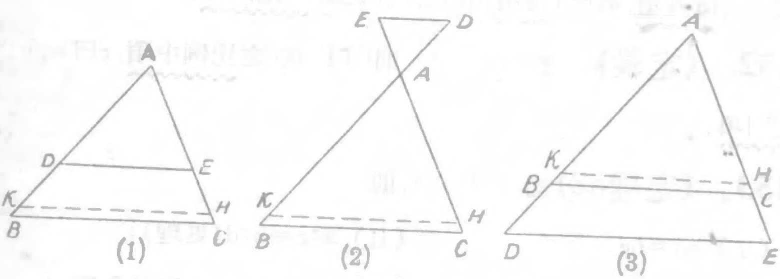
(ii) 若 $x:a=y:b=z:c$，求$x+y+z:z$.

【問題230】　若 $x^2:4a^2=y^2:9b^2$，求$x^3:y^3$.

【問題231】　若二三角形之底及高成比例，一三角形之底及高爲內項，他三角形之底及高爲外項，則此二形等積.

154. (定義)　在一線段內取一點，曰內分；如在延長線上取一點，曰外分；所分成之線段，曰內線段及外線段.

155. (定理54)三角形底之平行線，必分其兩邊成比例.



(1)　　(2)　　(3)

設　$DE \parallel BC$且交$\triangle ABC$之邊AB，AC或其延長線於D，E兩點.

求證　　　$AD:BD=AE:CE$.

【證】　設同以BK爲單位測得AD，BD，爲BK之m，n倍，

$\therefore$　　　$AD:BD=m:n$.

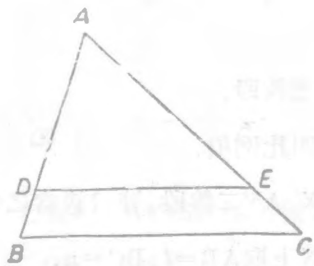
今由AD，BD被BK所分之各分點，引諸線段與BC平行，亦分AE，CE爲m，n等分，其一等分爲CH．　(?)

$\therefore$　$AE=m\cdot CH,\quad CE=n\cdot CH.$

$\therefore$　$AE:CE=m:n.$

$\therefore$　$AD:BD=AE:CE.$　(?)

系1．　一線截三角形之兩邊，且與第三邊平行，則任何兩對之對應線段皆成比例．



設　△ABC中，DE∥BC．

求證　(1) $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$．　(2) $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$．

(3) $\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{BD}{EC}$．　(4) $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$．

(5) $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}$．　(6) $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CE}$．

【證】 (1) $\because$ $AD:DB=AE:EC$．

$\therefore$　$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$．

(2) $\because$ $\dfrac{AD+DB}{DB}=\dfrac{AE+EC}{EC}$，(合理)

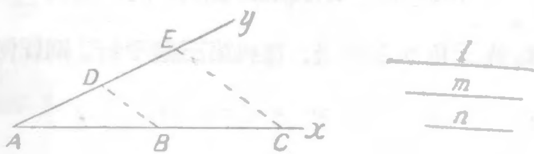
$\therefore$　$\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$．

(3),(4),(5),(6)可用比例之性質,同樣證明.

【注意】本定理在(2),(3)圖中俱能成立.

系2. 若兩線被二平行線所截,則其對應線段成比例.

156.(作圖題17) 求已知三線段之第四比例項.



設 l,m,n為已知三線段,

求作 l,m,n之第四比例項.

【作法】 1.引AX,AY二線段,等於適當之長,並成適宜之角.

2.於AX上取AB=l,BC=n.

3.於AY上取AD=m.

4.聯結BD.

5.由C引CE∥BD交AY於E點,則DE卽爲所求之線段.

【證】 ∵ BD∥CE.

∴ AB:AD=BC:DE. (?)

卽 l:m=n:DE.

故DE合於所求.

系. 求已知二線段之第三比例項.

【作法】如上圖,令m=n卽得.

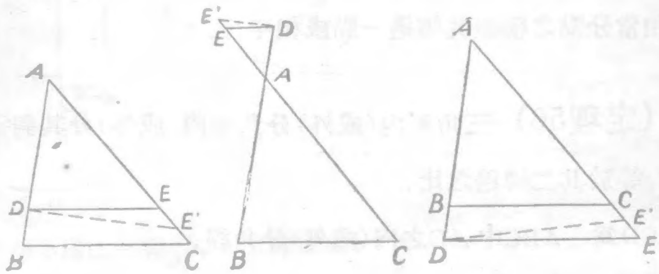
【問題232】 自三角形ABC之AB上一點D,引DE∥BC,

求證 DE:BC=AD:AB.

【問題233】 二平行線被共過一點之諸直線相截，則在此二直線上之對應線段成比例.

【問題234】 分一線段爲三部分，令與已知線段l, m, n成比例.

157.(定理55) 分三角形兩邊成比例之直線，必與第三邊平行.



設 DE截△ABC之邊AB, AC或其延長線於D, E兩點，且

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

求證 $DE \parallel BC$.

【證】 由D引$DE' \parallel BC$，則

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}. \qquad (?)$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE'}. \qquad (?)$$

但 $$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}, \qquad (設假)$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{AE}=\frac{AC}{AE'}. \qquad (?)$$

$$\therefore \quad AE=AE'. \qquad (?)$$

故 E'與E重合.

$$\therefore \quad DE \parallel BC. \qquad (?)$$

系．一線截三角形之兩邊，若其各對之對應線段成比例，則此線與第三邊平行．

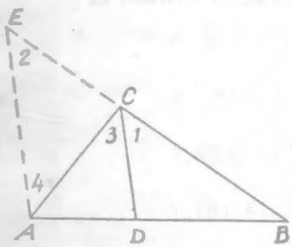
【問題235】 DE交△ABC兩邊AB, AC於D, E．若AD:AE＝AB:AC，則DE與BC當如何？又如AD:AE＝AC:AB，則又當如何？

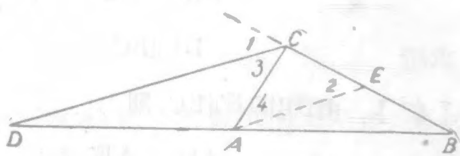
【問題236】 在二平行線上各取若干點，使其所分成之對應線段有定比，則相當分點之聯線共經過一點或相平行．

158.（定理56） 三角形內（或外）分角線內（或外）分其對邊所成二線段之比，等於其二隣邊之比．

設　CD為△ABC中∠C之內（或外）分角線．

求證　　$AD:BD=AC:BC$.





【證】 過A點引CD之平行線，與BC或其延長線交於E．

則　　$\angle 1=\angle 2,\quad \angle 3=\angle 4.$　　(?)

但　　$\angle 1=\angle 3,$

∴　　$\angle 2=\angle 4.$　　（假設）

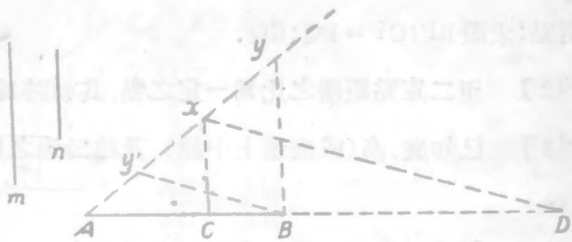
∴　　$AC=CE.$

∴　　$AD:DB=EC:BC.$　　(?)

即　　$AD:BD=AC:BC.$　　(?)

【問題237】 D是△ABC邊BC之中點，DE，DF是∠ADB，∠ADC之平分線，交AB，AC於E，F點，求證EF∥BC．

159．(作圖題18)　求內分及外分一已知線段爲定比．



設　AB爲已知線段，m:n爲定比．

求作　內分及外分AB使等於m:n．

【作法】 1．過A點引AY，使AY＝m＋n．

2．在AY上取X，Y′點，使XY＝XY′＝n．

3．聯結BY，BY′．

4．由X點引XC∥BY，XD∥BY′交AB及其延長線於C，D兩點，即得所求．

【證】 於△ABY中，　CX∥BY．

∴　AC:CB＝AX:XY＝m:n．

同理　AD:DB＝AX:XY＝m:n．

故C，D爲分AB爲定比m:n之內外分點．

【問題238】 已知二線段之和或差，及比，求二線段．

【問題239】 △ABC之三邊爲a，b，c．求∠A之內角與外角之平分

線所分對邊BC兩線段之長.

【問題240】 P爲∠ABC內一定點, 過P點引一直線交AB,BC於X,Y兩點,使XP:PY等於定比.

【問題241】 △ABC內∠A之平分線,內分及外分對邊BC或其延長線於P,Q兩點;求證BP:CP=BQ:CQ.

【問題242】 至二定點距離之比爲一定之點,其軌跡爲一圓.

【問題243】 已知底,高(或底邊上中線),及他二邊之比,求作此三角形.

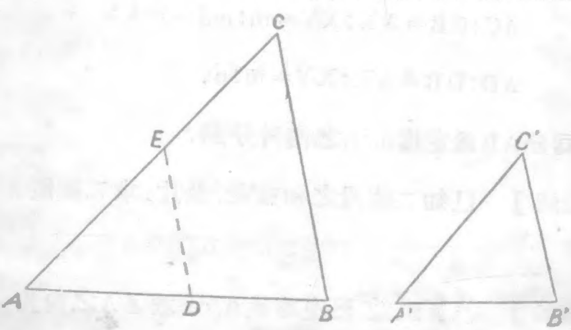
第二章 相似形

160.(定義) 多角形之諸對應角相等,諸對應邊成比例者,曰相似多角形.故證明兩形相似:(1)對應角相等,(2)對應邊成比例;如已知(1)則證明(2);已知(2)則證明(1);若二者俱非已知,則並證之;若(1),(2)兩條件中,僅有一個,仍不能決定其爲相似.

161.(定理57) 二相似多角形周界之比,等於其對應邊之比.(學者自證之.)

162.(定理58) 相似於一多角形之兩多角形相似.(學者自證之.)

163.(定理59) 兩三角形之各角對應相等,則此兩形相似.



設　$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$.

求證　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

【證】　在AB，AC邊上取D，E點，使$AD=A'B'$，$AE=A'C'$，

則　$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$.　(?)

∴　$\angle ADE=\angle B'$.　(?)

∴　$\angle ADE=\angle B$.　(?)

∴　$DE \parallel BC$.　(?)

∴　$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.　(定理54，系1)

即　$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$　(?)

同理　$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

∴　$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

∴　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.　(§160)

系1.　兩三角形中，若有兩角對應相等，則兩形相似.

系2.　兩相似三角形中，對應高之比，等於對應邊之比.

系3.　三角形底之平行線及兩邊所成之三角形與原三角形相似.

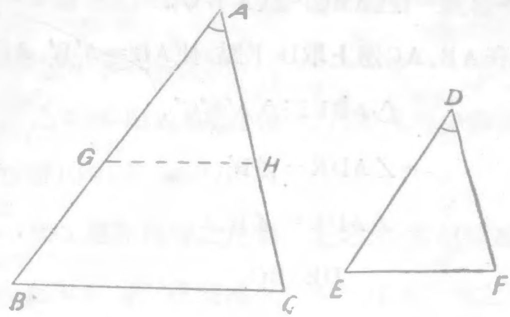
【問題244】　兩三角形之各邊，兩兩平行或垂直，則此兩形相似.

【問題245】　兩等腰三角形之頂角(或一底角)相等，則此兩形相似.

【問題246】　梯形之二對角線，互分爲比例線段.

164.（定理60）　兩三角形若有一角對應相等，且夾此兩角之邊成

比例,則此兩形相似.



設 在$\triangle ABC$,$\triangle DEF$中,$\angle A=\angle D$,及$AB:DE=AC:DF$.

求證 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

【證】 於AB上取$AG=DE$,AC上取$AH=DF$,聯結GH,則

$\triangle AGH\equiv\triangle DEF$. (s.a.s.)

又因 $AB:DE=AC:DF$. (假設)

∴ $AB:AG=AC:AH$. (?)

∴ $GH\parallel BC$. (?)

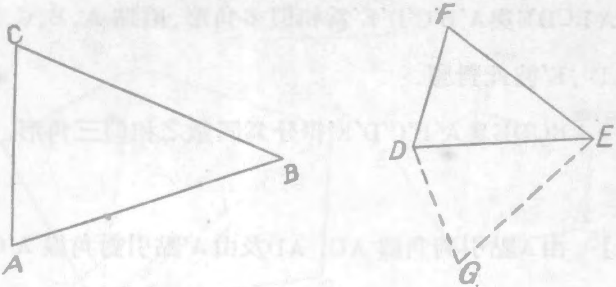
∴ $\triangle ABC\backsim\triangle AGH$. (定理59,系3)

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$. (定理58)

【問題247】 在一四角形中,二對角線互相分成之線段若成比例,則此形爲梯形.

【問題248】 兩相似三角形對應角平分線之比,等於其對應中線之比.

165.(定理61) 兩三角形若各對應邊成比例,則此兩形相似.



設 △ABC與△DEF中, AB:DE＝AC:DF＝BC:EF.

求證 △ABC∽△DEF.

【證】 作∠GDE＝∠A, ∠DEG＝∠B, 并使G與F在DE之異側.

則 △ABC∽△DEG. (?)

∴ AB:DE＝AC:DG＝BC:EG. (§160)

但 AB:DE＝AC:DF＝BC:EF, 假設

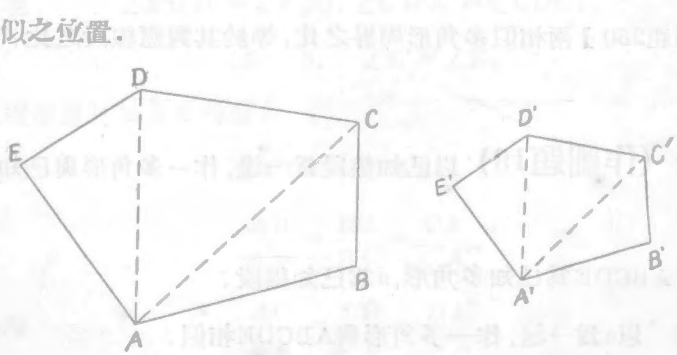
∴ DF＝DG, EF＝EG. (?)

∴ △DEF≡△DEG (?)

∴ △ABC∽△DEF. (定理58)

【問題249】 兩直角三角形,其一之弦與一股之比與他者之弦與一股之比相等,則此兩形相似.

166.(定理62) 兩相似多角形,可分爲同數之三角形,彼此相似,且在相似之位置.



設 ABCDE與A′B′C′D′E′爲相似多角形,頂點 A,B,C,D,E與頂點 A′,B′,C′,D′,E′彼此對應.

求證 ABCDE與A′B′C′D′E′得分爲同數之相似三角形,且在相似之位置.

【證】 由A點引對角線 AC, AD及由A′點引對角線 A′C′,A′D′, 則分爲同數三角形.

$\because$ $\angle B=\angle B'$, (假設)

及 $AB:A'B'=BC:B'C'$, (?)

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, (定理60)

又因 $\angle BCD=\angle B'C'D'$, (§160)

及 $\angle ACB=\angle A'C'B'$, (″)

$\therefore$ $\angle ACD=\angle A'C'D'$, (§20,(2))

但 $CD:C'D'=BC:B'C'=AC:A'C'$.

$\therefore$ $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$ (?)

同理,可證 $\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$.

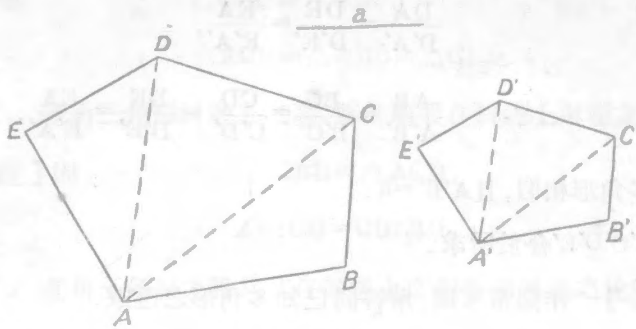
故 ABCDE 與 A′B′C′D′E′得分爲同數之相似三角形, 且在相似之位置.

【問題250】兩相似多角形周界之比,等於其對應線段之比.

167. (作圖題19) 以已知線段爲一邊, 作一多角形與已知多角形相似.

設 ABCDE爲已知多角形,a爲已知線段.

求作 以a爲一邊, 作一多角形與ABCDE相似.



【作法】 1.由A引對角線AD,AC.

2.作A′B′=a.

3.在A′B′上作△A′B′C′與△ABC等角.

4.在A′C′上作△A′C′D′與△ACD等角.

5.在A′D′上作△A′D′E′與△ADE等角,則多角形A′B′C′D′E′與ABCDE相似.

【證】∵ $\angle B'A'C'=\angle BAC$, (作圖)

$\angle D'A'C'=\angle DAC$, (″)

$\angle D'A'E'=\angle DAE$, (″)

∴ $\angle B'A'E'=\angle BAE$. (§20, 1)

同理 $\angle B'C'D'=\angle BCD$, $\angle C'D'E'=\angle CDE$.

且 $\angle B'=B$, $\angle E'=\angle E$. (作圖)

故兩形是互等角多角形.

又因 $\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$, (§163)

∴ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'},$$ (§160)

同理 $$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'},$$ (§160)

及 $$\frac{DA}{D'A'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'},\qquad(\S160)$$

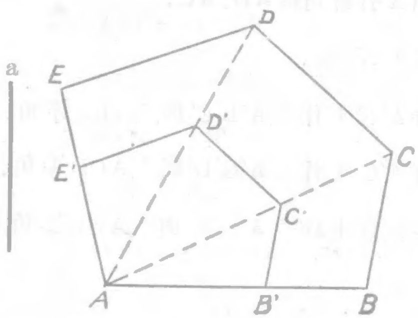
∴ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}.\qquad(\S20(7))$$

故兩多角形相似，且$A'B'=a$.

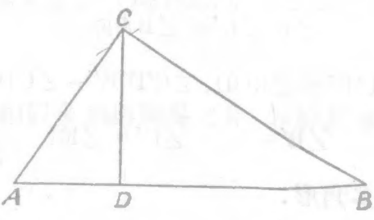
故$A'B'C'D'E'$合於所求.

【討論】 作圖常可能，解答同已知多角形之邊數.

【問題251】 本作圖題，試照下圖再作，并加證明與討論，



168.（定理63） 直角三角形斜邊上之高所分成之三角形，各與原三角形相似，且彼此相似，



設 在△ABC中，∠ACB＝$\angle_R$，及$CD\perp AB$.

求證 △ACD∽△ABC∽△CBD.

【證】 因rt$\triangle$ACD與ABC中，有銳角A公用，

∴ △ACD∽△ABC， （定理59系1）

同理　$\triangle CBD \backsim \triangle ABC$,　(定理59系1)

$\therefore$　$\triangle ACD \backsim \triangle ABC \backsim \triangle CBD$.　(定理58)

系1. 直角三角形斜邊上之高,爲其兩股在斜邊上射影之比例中項.

【證】因　$\triangle CBD \backsim \triangle ACD$.　(本定理)

$\therefore$　$AD:CD=CD:BD$.　(§160)

系2. 直角三角形之股爲其在斜邊上之射影與斜邊之比例中項.

【證】$\because$　$\triangle CBD \backsim \triangle ABC \backsim \triangle ACD$,　(本定理)

$\therefore$　$AD:AC=AC:AB$,　(§160)

及　$BD:BC=BC:AB$.

系3. 直角三角形兩股上平方之比,等於其在斜邊上射影之比.

【證】$\because$　$\overline{AC}^2=AD\cdot AB$,　$\overline{BC}^2=BD\cdot AB$　(本定理系2)

$\therefore$　$\overline{AC}^2:\overline{BC}^2=AD\cdot AB:BD\cdot AB$

$=AD:BD$.

【問題252】　CD爲rt$\triangle ABC$斜邊AB上之高,與$\angle A$之內分角線AE相交於E,求證$DF:FC=CE:EB$.

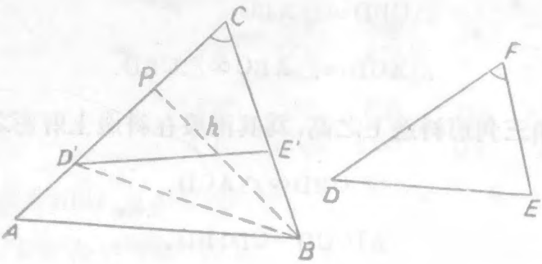
【問題253】　$\triangle ABC$中,若由C引$CD\perp AB$,而$BD:DC=DC:DA$,求證此形爲直角三角形.

169. (定理64)　兩三角形有一角相等,則其面積之比,等於此相等角夾邊乘積之比.

設　在$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中,$\angle C=\angle F$.

求證　$\triangle ABC:\triangle DEF=AC\cdot BC:DF\cdot EF$.

【證】　於AC上取$CD'=DF$,BC上取$CE'=FE$,并聯結$D'E'$,則



$$\triangle D'CE' \equiv \triangle DEF. \qquad (S.a.S.)$$

又聯結BD′及引BP⊥AC，則

$$\triangle ABC:\triangle D'BC=\frac{1}{2}AC\cdot PB:\frac{1}{2}D'C\cdot PB=AC:D'C.$$

同理　$\triangle D'BC:\triangle D'E'C=BC:CE'.$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{\triangle ABC}{\triangle D'BC}\cdot\frac{\triangle D'BC}{\triangle DEF}=\frac{AC}{D'C}\cdot\frac{BC}{CE'}$$

$$=\frac{AC\cdot BC}{DF\cdot EF}.$$

$\therefore \quad \triangle ABC:\triangle DEF=AC\cdot BC:DF\cdot EF.$

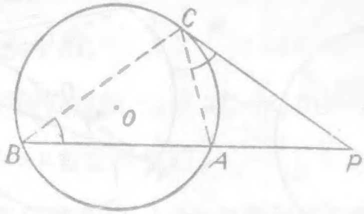
系. 兩相似三角形面積之比，等於其任何對應邊平方之比.

【問題254】　兩相似三角形面積之比，等於其對應高(或中線)平方之比.

---

170. 圓之割線及切線雖爲無限長之直線，但自圓外一點至圓之割線常指自此點至圓之第二交點間之線段，並稱其在圓外之部分爲割線之圓外線段；自圓外一點至圓之切線，常指自此點至切點間之線段.

171. (定理65)　自圓外一定點引一切線及一割線，則此切線上之平方，等於此割線上之弦被此點所外分之二線段之乘積.



設　⊙O之AB弦為切線PC外分於P點.

求證　$PB \cdot PA = \overline{PC}^2$.

【證】 聯結AC, BC二弦,則

$\angle ACP = \angle PBC$,　(定理40)

及　$\angle P = \angle P$.　(公用)

∴　$\triangle PBC \backsim \triangle PCA$,　(定理59系1)

∴　$PB:PC = PC:PA$　(§160)

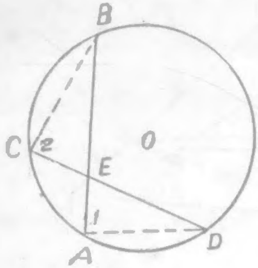
∴　$PB \cdot PA = \overline{PC}^2$.

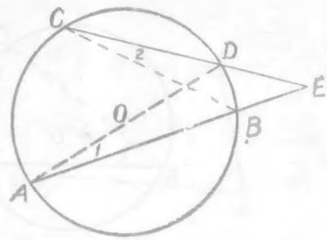
本定理亦可改述如下: 自圓外一定點引一切線及一割線,則切線為割線及其圓外線段之比例中項.

系. 自圓外一點所引至一圓之任何割線,所含之弦被此點所分二線段之乘積有定值.

【問題255】 自公弦之延長線上任一點,所引至圓之切線相等.

172. (定理66) 一圓之二弦或其延長線之交點內分或外分此二弦,所成二線段之積相等.





設 ⊙O內之二弦AB, CD或其延長線相交於E點.

求證 $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

【證】 聯結AD, BC, 則△AED, △CEB內, 有

$\angle 1 = \angle 2$, (?)

及 $\angle AED = \angle CEB$. (?)

∴ $\triangle AED \sim \triangle CEB$. (定理59, 系1)

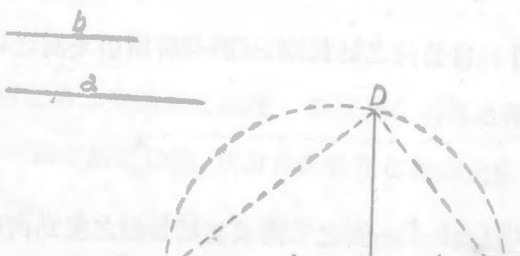
∴ $AE : CE = ED : EB$. (§160)

∴ $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

【問題256】 三圓相交, 則三公弦相遇於一點.

【問題257】 AB, CD 二線段或其延長線, 交於 E 點, 若$AE \cdot EB = CE \cdot ED$, 則A, B, C, D是共圓點.

173. (作圖題20) 求作已知二線段之比例中項.



設 a,b爲已知線段.

求作 a,b之比例中項.

【作法】 1.於任意直線上,取AC=a,BC=b.

2.以AB爲直徑畫圓.

3.過C點作CD⊥AB交圓周於D點,則CD卽爲所求之比例中項.

【證】 聯結AD,BD,則∠ADB=∠R. (?)

又 CD⊥AB, (作圖)

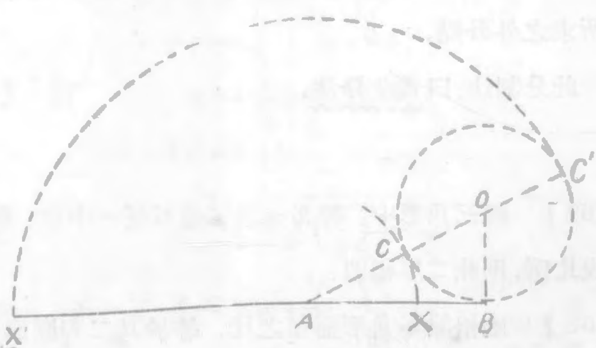
∴ a:DC=DC:b. (定理63,系1)

系. 求作一正方形與已知平行四邊形等積.

【作法】 如上圖,以平行四邊形之底與高爲a,b則DC爲所求正方形之一邊.

【問題258】 作一正方形,令其面積爲已知三角形之3倍,4倍,或$\frac{1}{5}$倍.

174.(作圖題21) 內外分定線段爲二份.使一份與全線所包矩形,等於他份上之正方形.



設　AB爲已知線段.

求作　AB或其延長線上一點，使AB與一份所包矩形等於其他份上之正方形.

【作法】　1. 過B點引$OB \perp AB$，并使$OB=\frac{1}{2}AB$.

2. 以O爲心，OB爲半徑作圓，交AO或其延長線於C，C′點.

3. 以A爲心，AC或AC′爲半徑作圓交AB或其延長線於X，X′點，則X，X′卽爲所求之分點.

【證】

$$\overline{AB}^2=AC\cdot AC'=AC(AC+CC')$$

$$=AC(AC+AB)=\overline{AC}^2+AC\cdot AB$$

$$=\overline{AX}^2+AX\cdot AB.$$

故　$\overline{AX}^2=\overline{AB}^2-AB\cdot AX=AB(AB-AX)=AB\cdot BX.$

卽X爲所求之內分點.

又　$\overline{AB}^2=AC\cdot AC'=(AC'-CC')AC'$

$$=(AC'-AB)AC'=\overline{AC'}^2-AC'\cdot AB$$

$$=\overline{AX'}^2-AX'\cdot AB.$$

故　$\overline{AX'}^2=\overline{AB}^2+AX'\cdot AB=AB(AB+AX')=AB\cdot BX'.$

卽X′爲所求之外分點.

【註】　此分割法，曰黃金分法.

【問題262】　兩三角形中，若其一之二邊及任一中線，與他形之對應邊及中線成比例，則此二形相似.

【問題263】　兩相似多角形面積之比，等於其二對應邊平方之比.

【問題264】　兩相似多角形面積之比,等於其內切(或外接)圓半徑之平方之比.

【問題265】　在直角三角形各邊上,作相似多角形,則斜邊上之多角形等於兩股上者之和.

【問題266】　兩圓外切或相交,從一點 P 至此二圓所引之切線相等,求P點之軌跡.

【問題267】　有二圓不相交,求合上條件之軌跡.

【問題268】　三角形之各垂線,被垂心分爲二部分,其各二部所包之矩形等積.

【問題269】　設半徑爲 r,求圓之內接正三角形之面積.

【問題270】　分一已知線段爲二份,使此二份之平方之比,等於已知之比.

【問題271】　求在半圓內作一正方形,使頂點在圓周與直徑上.

【問題272】　求在已知三角形內,作一內接正方形.

【問題273】　求在△ABC之AB邊上取D點,引DE∥BC,且使△ADE=□BCED.

【例題】　用作圖法解下列聯立方程式:

$$x+y=a,\qquad xy=b.$$

【解】　由　　$y=a-x$ 代入,則

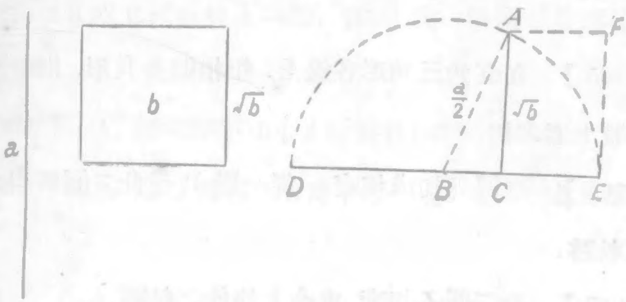
$$x^2-ax+b=0.$$

$$\therefore\qquad x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b},$$

及

$$y=\frac{a}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}.$$

【作圖】



1. 作直線DE＝a.

2. 以DE之中點B爲圓心，BE爲半徑畫圓.

3. 過E點作EF⊥DE，幷令EF＝$\sqrt{b}$，又由F引FA∥DE交圓周於A.

4. 由A引AC⊥DE，卽得.

【證】∵ $BC=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$,

∴ $DC=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$,

及 $CE=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$.

【問題274】 用圖解法，解下列聯立方程式：

$x-y=a,\qquad xy=b.$

【問題275】 用解圖法，求下列二次方程式之根：

$ax^2+bx+c=0.$

第六編　正多角形與圓

第一章　正多角形與圓

175.（定義）多角形之各邊相等，而各角亦相等者，曰正多角形.

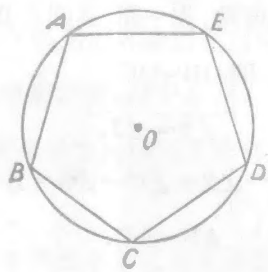
176.（定理 67）正 n 角形之內角，各等於$\frac{1}{n}(n-2)2\angle R$.

學者自證之.

177.（定理 68）邊數相等之正多角形必相似.

學者自證之.

178.（定理 69）圓之內接等邊多角形，必為正多角形.



設　ABCDE 為⊙O之內接等邊多角形.

求證　ABCDE 是正多角形.

【證】　∵　$AB=BC=CD=\cdots\cdots=EA$,

∴　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\cdots\cdots=\overset{\frown}{EA}$.　（定理33(2)）

∴　$\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{BCD}=\overset{\frown}{CDE}\cdots\cdots=\overset{\frown}{EAB}$.　（§20(1)）

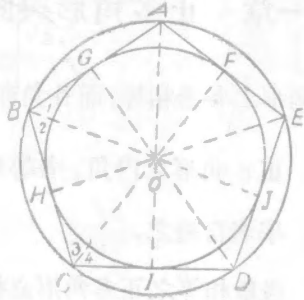
∴　$\angle ABC=\angle BCD=\cdots\cdots=\angle EAB$.　（定理37系1）

即 ABCDE 為正多角形.

【問題 276】　下列各形中，孰為正多角形？(i) 等邊三角形；(ii) 菱

形；(iii) 正方形；(iv) 矩形；(v) 梯形.

179.（定理 70） 任何正多角形,必可畫一外接圓與一內切圓.



設　ABCDE 爲正多角形.

求證　ABCDE 必可畫 (1) 一外接圓, (2) 一內切圓.

證　(1) 過 A, B, C 三頂點,作一圓,其圓心爲 O.

聯結 OA, OB, OC, OD, 則 OB＝OC.　　(?)

∴　$\angle 2 = \angle 3$.　　(?)

∴　$\angle 1 = \angle B - \angle 2 = \angle C - \angle 3 = \angle 4$.　　(§20.(2))

又　AB＝DC.

∴　$\triangle OAB \equiv \triangle ODC$.　　(s.a.s.)

∴　OA＝OD.

故 D 在 ⊙O 上,同理可證其餘諸頂點亦然,故得畫一外接圓.

(2) 自 O 作至諸邊之垂線 OF, OG, OH, ……, 則

因　AB＝BC＝CD＝DE＝EA.　　(§175)

∴　OG＝OH＝OF…………　　(定理35, (1))

故以 O 爲圓心, OG 爲半徑作一圓,必過 F, H…… 諸點.

且因　$OG \perp AB$ 等等,故 AB 等爲切線.　　(定理39)

故得畫一內切圓.

系1.　正多角形外接圓心,至各頂點之半徑平分各內角;并分此形爲若干全等之等腰三角形.

系2.　正多角形之面積,等於其內切圓之半徑與其周界之乘積之半.

【證】　如本定理之圖,正多角形 ABCDE 之面積等於

$$\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COD+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot OG+\frac{1}{2}BC\cdot OH+\frac{1}{2}CD\cdot OI+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}(AB+BC+CD\cdots\cdots)OG.$$

即爲其周界與內切圓半徑之乘積之半.

【問題 277】　若一多角形之外接圓與內切圓爲同心,則必爲一正多角形.

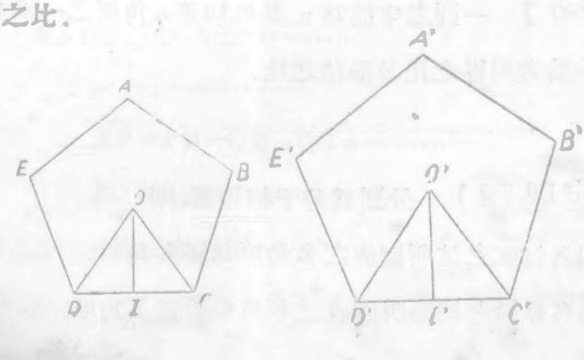
180.（定義）　正多角形外接圓與內切圓之共有心稱爲中心;過一邊兩端之外接圓半徑所夾之角,曰中心角.

181.（定義）　正多角形外接圓之半徑,曰頂心距;內切圓之半徑,曰邊心距.

【問題 278】　正多角形之中心角各相等且與其內角相補.

【問題 279】　二相似正多角形之中心角必等.

182.（定理 71）　二相似正多角形周界之比,等於其二頂心距或二邊心距之比.



設 p, p′ 表二相似正多角形ABCDE, A′B′C′D′E′之周界;OC, O′C′ 爲其頂心距;OI, O′I′ 爲其邊心距.

求證 $p : p' = OC : O'C' = OI : O'I'$.

【證】 ∵ $\angle OCD = \angle ODC = \frac{1}{2}\angle BCD'$.

及 $\angle O'C'D' = \angle O'D'C' = \frac{1}{2} B'C'D'$. (定理70系1)

但 $\angle BCD = \angle B'C'D' = \frac{1}{n}(n-2)2\angle R$. (定理67)

∴ $\angle OCD = \angle O'C'D'$, $\angle ODC = \angle O'D'C'$. (§20(7))

∴ $\triangle OCD \backsim \triangle O'C'D'$. (§163)

∴ $DC : D'C' = OC : O'C'$ (?)

$= OI : O'I'$.

∴ $p : p' = DC : D'C'$

$= OC : O'C'$

$= OI : O'I'$.

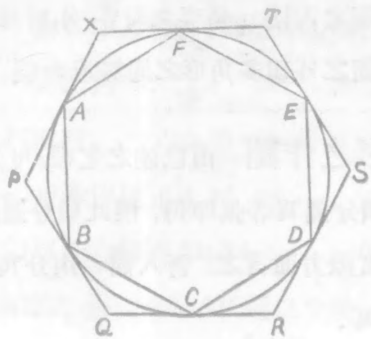
系. 二相似正多角形面積之比,等於其頂心距或邊心距平方之比.

【問題 280】 一圓之半徑爲 r, 其外切正 n 角形之一邊爲 a, 求其內接正 n 角形與前者周界之比及面積之比.

183. (定理 72) 分圓爲若干相等弧,則

(1) 對各等弧之弦所圍成之多角形爲正多角形.

(2) 過各分點之切線所圍成之多角形爲正多角形.



設　A,B,C,D 等點各分圓周爲相等弧；AB,BC,CD 各爲對等弧之弦；及 XP,PQ,QR 等爲過 A,B,C 等點之切線.

求證　(1) 多角形 ABCD……爲正多角形.

(2) 多角形 PQRS……爲正多角形.

【證】 (1)　∵　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\cdots\cdots$　(假設)

∴　$AB=BC=CD=\cdots\cdots$　(定理33(1))

故　ABCD……爲正多角形.　(定理69)

(2)　∵　$PA=PB$,　$QB=QC\cdots\cdots$　(定理43)

∴　$\angle PAB=\angle PBA$, $\angle QBC=\angle QCB$.　(?)

且　$\angle PAB=\angle PBA=\angle QBC=\cdots\cdots$　(定理40)

(因各等於等弧上之圓周角)

及　$AB=BC,=\cdots\cdots\cdots\cdots$

∴　$\triangle PAB\equiv\triangle QCB\equiv\cdots\cdots\cdots\cdots$

∴$\angle P=\angle Q=\cdots\cdots\cdots\cdots$

及　$AP=PB=QB=QC=\cdots\cdots\cdots\cdots$

卽　$PQ=QR=RS=\cdots\cdots\cdots\cdots$

故　PQRS……爲正多角形.

【問題 281】　圓之外切 n 角形之周界, 大於其 2n 角形之周界.

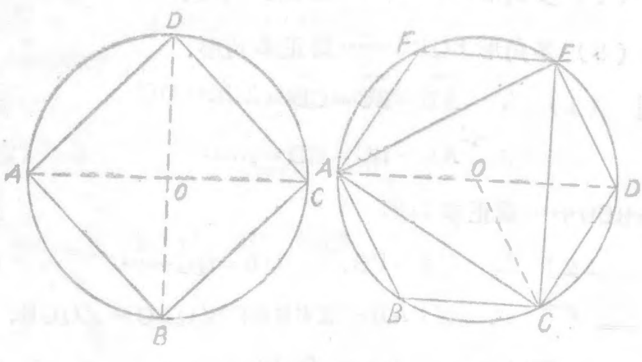
【問題 282】 圓之內接 n 角形之周界，小於其 2n 角形之周界.

【問題 283】 圓之外切多角形之周界或面積，均較大於其內接者.

184. 正多角形之作圖 由已述之定理，可知欲作已知圓之內接及外切正多角形，只須分圓爲等弧卽得，但此種分圓問題，不能皆藉圓規直尺作圖解決；然就實際方面言之，吾人固可用分角器或其他近似法，不過所得之圖形爲近似耳.

單用無度直尺及圓規，能作 120°, 90°, 72°, 60°，等諸角，故圓之內接及外切正 3, 4, 5, 6 角形等皆可作得，今作幾個正多角形如下：

185. (作圖題 22) 求作已知圓之內接正 3, 4, 6 角形.



設 ⊙O 爲已知圓.

求作 ⊙O 之內接正 3, 4, 6 角形.

【作法】 (一) 1. 作二垂直直徑 AC 及 BD. (作圖題4)

2. 聯結 AB, BC, CD, DA 卽得內接正四角形.

(二) 1. 作直徑 AD，幷以 A, D 各爲圓心，原半徑 OA 爲半徑畫弧交圓周於 B, C, E, F.

2. 聯結 AB, BC, CD, DE, EF, FA 卽得所求之內接正六角形.

（三）　由（二）之圖中，聯結 AC，CE，EA 即得所求之內接正三角形．

【證】　學者自行試證．

【討論】　由（一）可作內接正 8，16，32，……等角形．

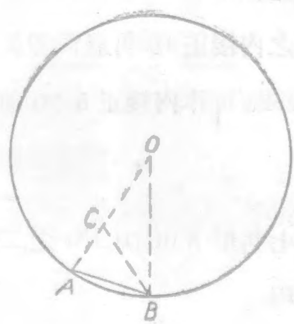
由（二）可作內接正 12，24，48 ……等角形．

系．　內接正六角形之邊等於其外接圓之半徑．

【問題 284】　求作圓之外切正 3，4，6，角形．

【問題 285】　求（1）正方形，（2）正三角形，二者一邊各與其內切圓或外接圓半徑之比．

186．（作圖題 23）　求作已知圓之內接正 10 角形．



設　⊙O 爲已知之圓．

求作 ⊙O 之內接正 10 角形．

【解析】　假定 AB 爲所求正 10 角形之一邊，聯結 AO，BO，則

$\angle AOB=36°$．

$\therefore\quad \angle OAB=\angle OBA=72°$．

故引　$\angle OBA$ 之二等分線 BC 交 AO 於 C，則

$\angle ABC=36°$．

∴　$\triangle ABO \backsim \triangle ACB$.　(定理59)

∴　$OA : AB = AB : AC$.

∴　$\overline{AB}^2 = OA \cdot AC$.

但　$AB = BC = OC$.　(定理8)

∴　$\overline{OC}^2 = OA \cdot AC$.

卽 C 爲 OA 之內分點,故此圖得作出如次:

【作法】 1. 引半徑 OA.

2. 在 OA 上取一點 C,令 $\overline{OC}^2 = OA \cdot AC$　(作圖題21)

3. 作 AB 弦,令與 OC 相等,則 AB 卽爲所求內接正 10 角形之一邊.

【證】 學者自行試證.

【問題 286】 作圓之內接正 15 角形.

【註】 由作圖題 22,23 可作內接正 5,20,40……及 15,30,60……等角形.

【問題 287】 設正七角形 ABCDEFG 之二對角線 AC 及 BE 相交於 P,則 AP × PC = BP × PE.

【問題 288】 圓之外切等角多角形,必爲正多角形.

【問題 289】 求正多角形之頂心距,邊心距,邊長三者之關係,幷求以一邊長表正五角形之面積.

【問題 290】 如何剪去一已知正方紙之四角,使成一正八角形.

【問題 291】 試求下列正多角形之邊心距,頂心距及面積:

(1) 每邊長爲 4 或 a 之正方形.

(2) 每邊長爲 2 或 a 之正六角形.

【問題 292】　作一正多角形，令與一定正多角形相似，而面積倍之.

第二章　圓及圓周率之計算

187. 本節以前所述之長度及面積，皆以直線形為限，今欲述圓周與圓面積之定義及圓周率之計算，須先注意下列二事：

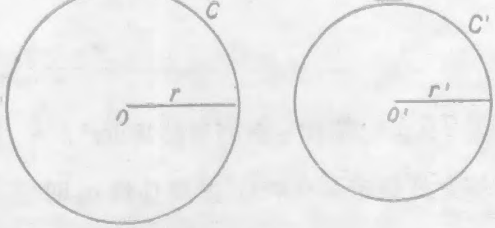
（一）圓之內接正多角形之邊數倍增，則周界漸長，但終小於其外切正多角形之周界.（見問題 282, 283）

（二）圓之外切正多角形之邊數倍增，則面積漸減，但終大於其內接正多角形之面積.（見問題 283）

188.（定義）圓之內接正多角形之邊數倍增時，其周界漸增而與一定長相近，此定長稱為圓周長，簡稱圓周.

189.（定義）圓之外切正多角形之邊數倍增時，其面積漸減，而與一定積相近，此定積曰圓面積.

190.（定理 73）二圓周長之比，等於其半徑之比.



設　O, O′ 二圓之半徑各為 r, r′；周長為 c, c′.

求證　　　$c : c' = r : r'$.

【證】　於各圓內畫同邊數之正多角形，假定其周界為 p, p′，然此二

內接正多角形爲相似。

$\therefore \qquad p:p'=r:r'.$ (定理71)

又此二內接正多角形之邊數增至無限多，則 p 及 p' 可與圓周 c 及 c' 相一致，故

$$c:c'=r:r'.$$

系1. 二圓周之比，等於其直徑之比.

系2. 任何圓周與其直徑之比，常爲一定.

191.（定義） 圓周長與直徑所成定比，稱爲圓周率，常以希臘字母 π 表之.

192.（定理 74） 一圓之直徑爲 d，周長爲 c，則 $c=\pi d$.

【證】 由 191 節，則 $\frac{c}{d}=\pi$， $\therefore c=\pi d$.

系. $\qquad c=2\pi r.$

【問題 288】 在一圓直徑取若干點爲中心作圓，使其彼此相外切，且兩端與原有之圓相內切，求所作諸圓周之和.

【問題 289】 在半徑爲 r 之圓中，圓心角 $m°$ 所對之弧長等於 $\frac{m}{360}\times 2\pi r$.

193.（定理 75） 半徑 r 之圓面積爲 πr^2.

【證】 作圓之外切正多角形 Q，其周長爲 q，則

$$Q=\frac{1}{2}qr. \qquad \text{(定理70系2)}$$

此關係對於 Q 之邊數漸次倍增，無論至任何程度，常得成立.

然 Q 之邊數增至無限多時，q 當與圓周及 Q 當與圓相一致.

故　　半徑 r 之圓面積 $=\frac{1}{2}cr$

$$=\frac{1}{2}2\pi r\cdot r$$

$$=\pi r^2.$$

系。二圓面積之比,等於其半徑平方之比.

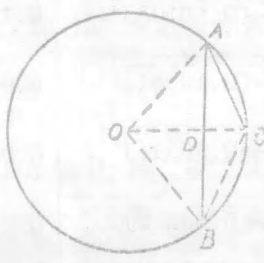
【問題 295】　圓心角 $m°$ 之扇形之面積等於 $\frac{m}{360}\times\pi r^2$.

【問題 296】　二相似扇形之面積之比,等於其半徑平方之比.

【註】　圓心角相等之扇形稱爲相似扇形.

194. 圓周率值求法

設 ⊙O 之半徑爲單位,則 $OA=OB=1$,而 AB 爲內接正 n 角形之一邊;平分 $\overparen{AB}$ 於 C,則 AC 爲內接正 2n 角形之一邊.



因 $OA=OB$, $CA=CB$, 故 OC 爲 AB 之垂直平分線.　　(定理27系)

即　AD 爲 △AOC 之高.

但 $\overline{AO}^2=\overline{AC}^2+\overline{OC}^2-2OC\cdot DC$,　　而　$OC=1$.

$\therefore\quad DC=\frac{\overline{AC}^2}{2}$.

$$\therefore\quad \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DC}^2$$

$$= \overline{AC}^2 - \frac{\overline{AC}^4}{4}.$$

$$\text{即}\quad \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \frac{\overline{AC}^4}{4}.$$

$$\therefore\quad AC = \sqrt{2-\sqrt{4-\overline{AB}^2}}.$$

又由作圖題22系，知⊙O內接正六角形一邊之長等於半徑，即爲1，令 AB = 1，代入上式，繼續推求，即得．

邊數	計算公式	一邊之長	周界
12	$\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}$	0.51764	6.21166
24	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.51764)^2}}$	0.26105	6.26526
48	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.26105)^2}}$	0.13081	6.27870
96	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.13081)^2}}$	0.06544	6.28206
192	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.06544)^2}}$	0.03272	6.28291
384	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.03272)^2}}$	0.01636	6.28312
768	$\sqrt{2+\sqrt{4-(0.01636)^2}}$	0.00818	6.28317

用正768角形周界之長爲圓周近似值，即得 $\pi = 3.14159$．

【問題297】　已知直徑爲一之圓，外切正 n 角形周界爲 p，內接者爲 q，外切正2n角形爲 p′，內接者爲 q′，試證

$$p' = 2pq\sqrt{(p+q)},\qquad q' = \sqrt{p'q}.$$

【問題 298】　作一直角三角形之外接半圓，及以二股爲直徑，作二半圓，則在外接半圓之外二眉月形面積之和，與三角形面積相等．

【問題 299】　求作一圓，使(1)其周長爲二已知圓周長之和，(2)二者之差；(3)其面積爲二已知圓面積之和，(4)二者之差．

【問題 300】　用同心圓分一圓之面積爲 n 等分．

【問題 301】　有扇形 AOB，作過 A 點之切線與 OB 之延線交於 C 點，證明 $AC>\overset{\frown}{AB}>AB$．

【問題 302】　大小二輪之半徑各爲 9 公尺與 2 公尺，輪心距爲14公尺，以皮帶繞二輪上，而不相交叉；(1)大輪每分鐘旋轉 40 次，問小輪同時轉若干次？(2)求皮帶之長．

【問題 303】　有一弓形，已知其弦爲 $20+10\sqrt{3}$ 寸，矢 5 寸，求其弧長及面積．

【註】　矢即劣弧中點至弦之距離．

【問題 304】　有二同心圓，其直徑各爲D及d，試證二圓所成環形面積爲 $A=\pi\frac{D-d}{2}\cdot\frac{D+d}{2}$．

【問題 305】　設 302 題中，繞二輪之皮帶若相交叉；又大輪之半徑減短 4 公尺，則二輪每分鐘當各旋轉幾次？幷求皮帶之長．

【問題 306】　互通過圓心而相等兩交圓，若半徑爲 r，求其重合部分之面積．