高中複習叢書

解析幾何學

董滌塵編

改訂本

商務印書館發行

高中複習叢書

解析幾何學

董滌塵編

商務印書館發行

中華民國二十四年五月初版
中華民國二十四年八月改訂三版
中華民國二十五年四月改訂五版

高中複習叢書 解析幾何學一冊 (52420·2)

每冊定價國幣叁角
外埠酌加運費匯費

編著者 董滌塵
發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者 胡達聰 袁秉美)

高中復習叢書編輯大意

一、本叢書係根據最近教育部頒佈之高級中學課程標準，及本館高中復興教科書分科編輯而成。

二、本叢書編著綱要，表解與圖解並用，務使讀者對於每一科的基本知識，有具體的了解。

三、本叢書搜集近年來全國各省市高中會考試題，按題作答，分析清楚，更可幫助讀者對升學會考作相當的準備。

四、本叢書除參考各教科書編纂外，更於東西文參考書中搜求新穎的解題方法，故益完備。

五、本叢書爲供讀者需要，匆促出版，內容或有忽略脫漏之處，如蒙讀者來函更正，尤所歡迎。

目　次

高中複習叢書

解析幾何學

第一章　點及坐標

[提　要]

(1) 兩點的距離：設 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 爲任意兩點，d 表兩點間的距離，則

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 1)^*$$

推論：任意一點 $P(x, y)$ 與原點 (Origin) 的距離爲

$$d=\sqrt{x^2+y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 2)$$

[因原點的坐標爲 $(0, 0)$]

(2) 兩點聯線間的分點：設 $P(x, y)$ 爲所設二點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 間的一點，而分 P_1P_2 爲兩線段的比，如 $P_1P : PP_2=a$, 則 P 點的坐標爲

---

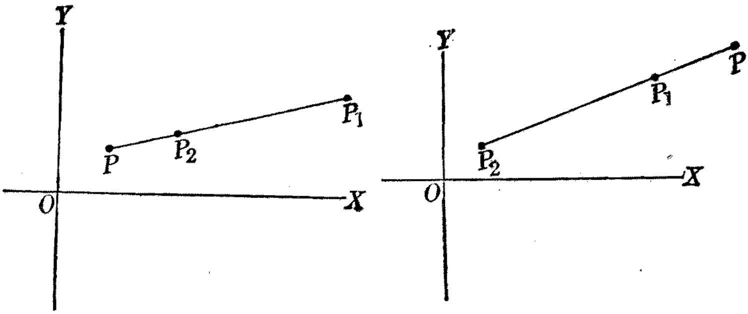
* 凡各種定理之證明，及各種名詞之解釋，本書一概從略，讀者可參閱下列各書：

(1) 商務印書館出版之高中解析幾何學教科書.
(2) Smith, Gale: Elements of Analytic Geometry.
(3) Smith, Gale, Neelley: New Analytic Geometry.

$$x=\frac{x_1+\alpha x_2}{1+\alpha},\ y=\frac{y_1+\alpha y_2}{1+\alpha} \quad \text{(公式 3)}$$

推論1: 若P點外分P_1P_2,如$P_1P:PP_2$(圖1或圖2),則因P_1P與PP_2的方向相反,故$P_1P:PP_2=-\alpha$,由是公式3變成

$$x=\frac{x_1-\alpha x_2}{1-\alpha},\ y=\frac{y_1-\alpha y_2}{1-\alpha} \quad \text{(公式 4)}$$



推論2: 若P為P_1P_2的中點,則$P_1P:PP_2=1$,即$\alpha=1$,由是公式3變成

$$x=\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2) \quad \text{(公式 5)}$$

(3) 線坡(Slope). 通過$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$兩點之直線,若與x軸所成之角為α,則此直線之線坡為

$$m=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{(公式 6)}$$

注意: 當$0°<\alpha<90°$時,m為正,

當 $90° < \alpha < 180°$ 時, m 爲負.

當 $\alpha = 0$ 時, $m = 0$, 直線與 x 軸平行.

當 $\alpha = 90°$ 時, $m = \infty$, 直線與 y 軸平行.

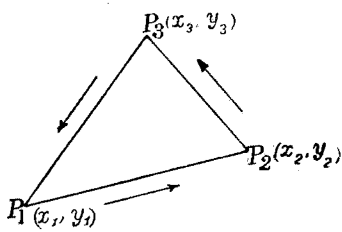
(4) 兩直線的線坡關係: 設 m_1, m_2 爲兩直線之線坡, 則 (a) 若兩直線平行, 則 $m_1 = m_2$; (b) 若兩直線互相垂直, 則

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= -\frac{1}{m_2} \\ m_2 &= -\frac{1}{m_1} \end{aligned}\right\} \text{或 } m_1 m_2 = -1 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式 7)}$$

(5) 三角形的面積: 設 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 爲三角形 $P_1 P_2 P_3$ 的頂點, A 表這三角形的面積, 則

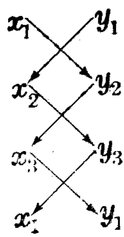
$$A = \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} \cdots\cdots\text{(公式 8)}$$

注意: 計算面積時, 依反鐘方向旋轉, 卽得正量; 如右圖.



爲便於計算起見, 可照下列幾個步驟:

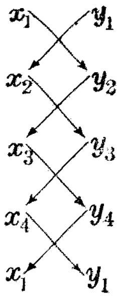
a. 把各頂點之坐標, 照反鐘向的次序寫成兩行, 如右式:



b. 以前行之各橫坐標各與後行下一列之縱坐標相乘 (如 $x_1 y_2, \cdots$) 而加其各積: $x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1$.

又以後行之各縱坐標各與前行下一列之橫坐標相乘(如 $x_2 y_1, \cdots$)而加其各積: $x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3$.

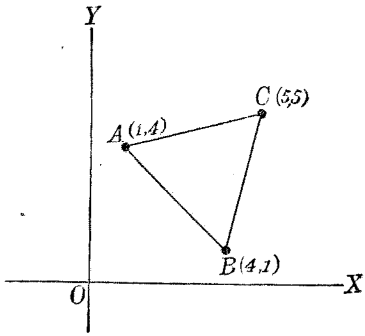
c. 從前一和減去後一和,再除以 2, 卽爲三角形之面積.



推論: 設 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ 爲照反鐘方向次序之四邊形之頂點,則此四邊形之面積,可從右式照上法求出.

[舉　　例]

1. 證明 (1,4), (4,1), (5,5) 爲一等腰三角形之頂點.



〔解〕 從公式 1:

$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-4)^2}$

$= \sqrt{17}$

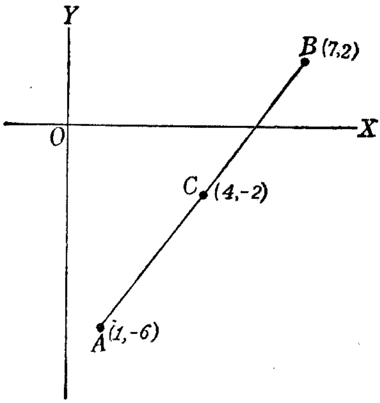
$BC = \sqrt{(5-4)^2 + (5-1)^2}$

$= \sqrt{17}$

故 $\triangle ABC$ 爲等腰三角形.

2. 證明 (7, 2) 及 (1, −6) 二點在一圓周上,圓心爲 (4, −2); 幷求他的半徑長.

〔解〕 從公式1:



$CA=\sqrt{(4-1)^2+(-2+6)^2}$

$=\sqrt{25}=5$

$CB=\sqrt{(7-4)^2+(2+2)^2}$

$=\sqrt{25}=5$

故以C為圓心,5為半徑作圓,必過A,B兩點.

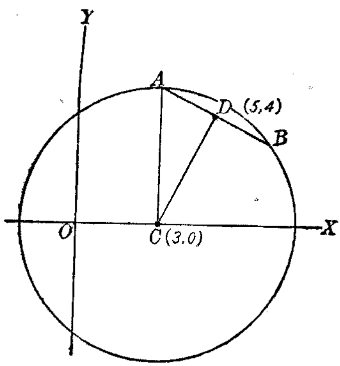
3. 已知$(6,2)$與$(3,k)$間之距離為5,決定k之數值.

〔解〕 從公式1: $\sqrt{(6-3)^2+(2-k)^2}=5,$

即 $9+4-4k+k^2=25,\ k^2-4k-12=0$

$(k-6)(k+2)=0,\quad \therefore\ k=6$ 或 $k=-2.$

4. 若一圓的圓心在$(3,0)$,長為4之一弦的中點為$(5,4)$,求這圓的半徑.



〔解〕 $CD\perp AB$ (通過一弦中點的半徑必垂直於這弦).

$\therefore\ CA=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{AD}^2}$

$\because\ \overline{CD}^2=(5-3)^2+4^2$………

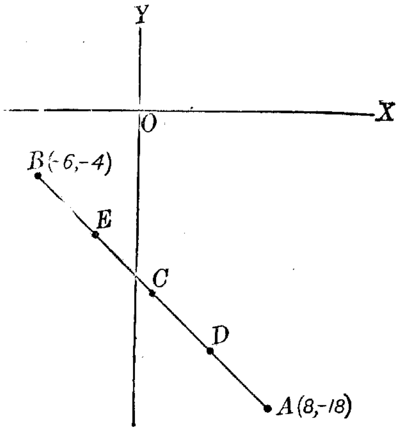
…………(從公式1)

$=20$

$$\overline{AD}^2 = 2^2 = 4,$$

$$\therefore \quad CA = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

5. 試將自 $(8, -18)$ 至 $(-6, -4)$ 二點間之距離平分爲四，求其分點 (滬，二十二年).



〔解〕 設 $C(x_1, y_1)$ 爲 AB 中點，$D(x_2, y_2)$, $E(x_3, y_3)$ 各爲 AC, CB 中點，從公式 5:

$$C: \quad x_1 = \frac{8-6}{2} = 1,$$

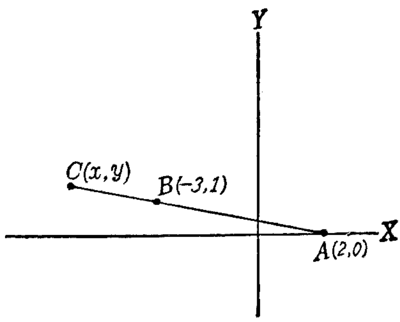
$$y_1 = \frac{-18-4}{2} = -11;$$

$$D: \quad x_2 = \frac{8+1}{2} = 4\frac{1}{2},$$

$$y_2 = \frac{-18-11}{2} = -14\frac{1}{2};$$

$$E: \quad x_3 = \frac{1-6}{2} = -2\frac{1}{2}, \quad y_3 = \frac{-11-4}{2} = -7\frac{1}{2}.$$

6. 延長 AB 至 C，使 $AC = 3(BC)$，設 A 的坐標爲 $(2, 0)$，B 的坐標爲 $(-3, 1)$，求 C 點的坐標.



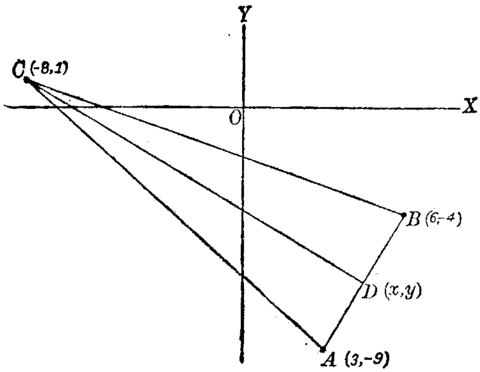
〔解〕 因 C 點外分 AB，故從公式 4:

$$C:\quad x=\frac{2-3(-3)}{1-3}=\frac{11}{-2}=-5\frac{1}{2},$$

$$y=\frac{0-3\cdot 1}{1-3}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

7. 一等腰三角形底邊的兩端爲$(3,-9)$, $(6,-4)$,頂點爲$(-8,1)$;求底邊上的高.

〔**解**〕 設D爲底邊AB中點,從公式5:



$$D:\quad x=\frac{6+3}{2}=4\frac{1}{2},\ y=\frac{-4-9}{2}=-6\frac{1}{2};$$

又從公式1: $$CD=\sqrt{\left(-8-\frac{9}{2}\right)^2+\left(1+\frac{13}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2}$$

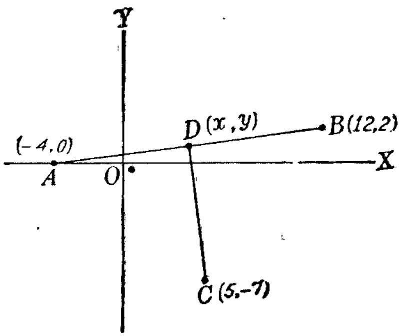
$$=\frac{1}{2}\sqrt{25^2+15^2}=\frac{5}{2}\sqrt{34}$$

8. 證明 $(-4, 0)$, $(12, 2)$ 兩點聯線的垂直平分線,必通過 $(5, -7)$ 一點.

〔解〕 設 $D(x, y)$ 為 AB 中點,從公式5:

$$D:\ x = \frac{-4+12}{2} = 4,$$

$$y = \frac{2}{2} = 1;$$



又從公式6:

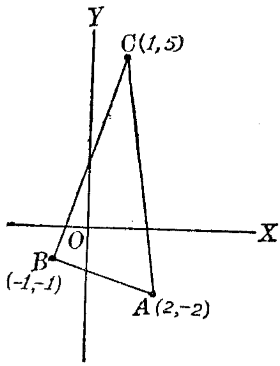
$$^{*}m_{AB} = \frac{2-0}{12-(-4)}$$

$$= \frac{2}{16} = \frac{1}{8},$$

$$m_{CD} = \frac{-7-1}{5-4} = -8.$$

故從公式7, $CD \perp AB$, 即 AB 的垂直平分線,通過 C 點.

9. 設三角形之三頂點為 $(2, -2)$, $(-1, -1)$, $(1, 5)$. 證此三角形為一直角三角形. (滬,二十二年).



〔解〕 從公式6:

$$m_{AB} = \frac{-2+1}{2+1} = -\frac{1}{3},$$

$$m_{BC} = \frac{-1-5}{-1-1} = \frac{6}{2} = 3,$$

---

* m_{AB} 表直線 AB 之線坡.

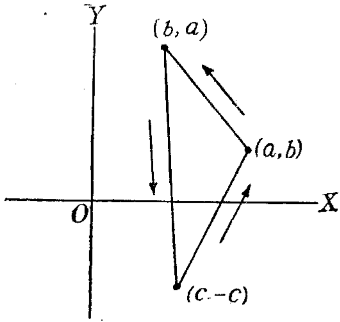
故從公式7,知 $AB\perp BC$, $\therefore$ ABC 爲直角三角形.

10. 三角形的三個頂點爲 (a, b), (b, a), $(c, -c)$, 求他的面積.

〔解〕 面積 $=\frac{1}{2}\left[a^2-bc+bc-(b^2+ac-ac)\right]$.

$$=\frac{1}{2}(a^2-b^2).$$

$$\left|\begin{array}{cc} a & b \\ b & a \\ c & -c \\ a & b \end{array}\right|$$

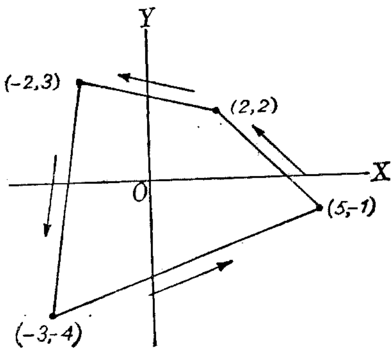


11. 四邊形的頂點爲 $(-2, 3)$, $(-3, -4)$, $(5, -1)$, $(2, 2)$; 求他的面積.

〔解〕 面積 $=\frac{1}{2}\left[6+8+3+10-(-4-9-20-2)\right]$

$$=\frac{1}{2}(27+35)=\frac{1}{2}\times 62=31.$$

$$\left|\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ -2 & 3 \\ -3 & -4 \\ 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{array}\right|$$

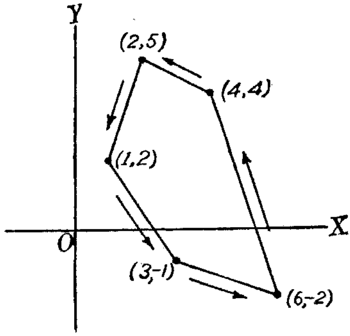


12. 一個五邊形的頂點爲$(1,2)$, $(3,-1)$, $(6,-2)$, $(2,5)$, $(4,4)$, 求他的面積.

〔解〕 面積$=\frac{1}{2}[4-1-6+24+20-(5+6-6-8+8)]$.

$$=\frac{1}{2}(41-5)=\frac{1}{2}\times 36=18.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 6 & -2 \\ 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

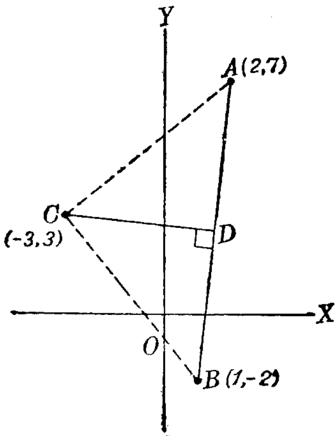


13. 求從一點$(-3,3)$至兩點$(2,7)$, $(1,-2)$聯線之距離.

〔解〕 連結三點成一三角形,他的面積$=\frac{1}{2}[6+6+7-(-21+3-4)]$

$$=\frac{1}{2}\times 41=\frac{41}{2}\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$



$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(7+2)^2}=\sqrt{82},\ \text{又}\ CD\perp AB,$$

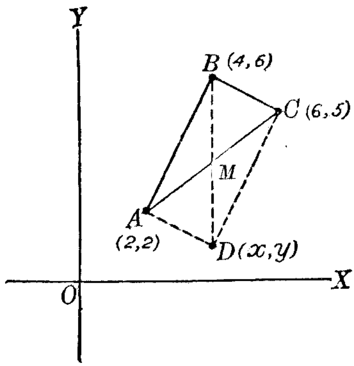
而三角形面積 $=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD=\dfrac{\sqrt{82}}{2}CD$……………………$(b)$

從 $(b),(a)$ 得 $\dfrac{41}{2}=\dfrac{\sqrt{82}}{2}CD$, $\therefore\ CD=\dfrac{41}{\sqrt{82}}=\dfrac{41}{82}\sqrt{82}=\dfrac{1}{2}\sqrt{82}.$

14. 一長方形的三個頂點為 (2, 2), (6, 5), (4, 6). 求這長方形的面積.

〔解〕 三角形 ABC 的面積 $=\dfrac{1}{2}[10+36+8-(12+20+12)]=\dfrac{1}{2}(54-44)=\dfrac{10}{2}=5.$

$$\left|\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{array}\right|$$



$\because\ \square ABCD=2\triangle ABC,\quad \therefore\ \square ABCD=2\cdot 5=10.$

15. 求上題中第四個頂點的坐標.

〔解〕 如上圖: $m_{AB}=\dfrac{6-2}{4-2}=\dfrac{4}{2}=2,\ m_{BC}=\dfrac{6-5}{4-6}=-\dfrac{1}{2}.$

$\therefore\ AB\perp BC,\quad \therefore\ B$ 為直角, 故 AC 為對角線.

設 $M(x_1, y_1)$ 爲 AC 中點 則

$$M:\quad x_1=\frac{2+6}{2}=4\quad y_1=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}.$$

又延長 BM 至 $D(x,y)$ 使 $MD=BM$, 則因 $BD=2MD$, D 爲 BM 之外分點.

$$\therefore\quad D:\quad x=\frac{4-2\cdot 4}{1-2}=4,\quad y=\frac{6-2\cdot\frac{7}{2}}{1-2}=1.$$

故第四個頂點的坐標爲 $(4,1)$.

[習　題]

(1) 上面例7, 試用另一方法去求.

[提示] 1. 用面積關係, 如例13.

2. 或用勾股弦定理: $\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$,

(2) 上面例9, 試用另一方法去求.

[提示] 1. 用勾股弦定理證明 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$,

2. 或用面積關係證明三角形 ABC 的面積 $=\frac{1}{2}AB\cdot BC$.

(3) 上面例15, 試用另一方法去求.

[提示] 用面積關係.

(4) 證明三點 $A(4,2)$, $B(6,-3)$, $C(10,-13)$ 在一直線上.

[提示] 1. 用距離公式: 證明 $AB+BC=AC$.

2. 或用線坡公式: 證明 $m_{AB}=m_{BC}$

3. 或用面積公式: 證明 $\triangle ABC=0$.

(5) 一平行四邊形的三個頂點爲 $(-2,0)$, $(-7,4)$, $(3,3)$, 求他的面積.

[提示] 同例14.　　(35)

(6) 證明 $C(14, 6)$ 在以 $A(6, -2)$, $B(10, 10)$ 爲直徑兩端的圓周上.

[提示] 1. 先求圓心 O 的坐標,再用距離公式證明 $OA=OB=OC$.

2. 或用線坡公式證明 $m_{AC} \cdot m_{BC}=-1$.

3. 或用面積關係,證明 $\triangle ABC$ 的面積 $=\frac{1}{2}AC \cdot BC$.

(7) 證明 $(2, 2)$, $(3, 6)$, $(5, -1)$, $(4, -5)$ 爲平行四邊形的四頂點.

[提示] 1. 用線坡公式證明兩對對邊平行.

2. 或用距離公式證明兩對對邊相等.

3. 或證明兩對角線的中點的坐標合一.

第二章　軌跡與方程式

[提　　要]

(6) 已知軌跡 (Locus) 的條件, 求作軌跡方程式之方法:

a. 設 $P(x, y)$ 爲適合於條件的軌跡上的任意一點.

b. 寫出軌跡的條件.

c. 從這軌跡的條件, 和已知的公式或定理等, 列出一個包含 x, y 的方程式, 再化成簡單, 就　所求的軌跡方程式.

(7) 已知一個方程式, 求這方程式所代表的軌跡 (平面上的軌跡卽曲線*) 之方法:

a. 解出方程式中的一個未知數用他一個未知數表出. (如 $y=?x+k$, 則 x 爲自變數, y 爲倚變數).

b. 使自變數等於種種數值, 計算倚變數的種種對應數值.

---

*直線亦包括在內.

c. 在坐標紙上描出*b*中x,y各對對應數值所代表的坐標點.

d. 過*c*中各點,描一曲線,就是所設方程式所代表的軌跡.

(8) 考察曲線性質的方法:

a. 曲線是否通過原點?

方法: 方程式中若無常數項,他所代表的曲線必過原點.

b. 曲線在x,y軸上的截距(Intercept)是什麼?

方法: I. 使$x=0$,求出y的值,就是y軸上的截距.

II. 使$y=0$,求出x的值,就是x軸上的截距.

c. 曲線是否依坐標軸或原點對稱?

方法: I. 若方程式中y的指數沒有奇數的,他所代表的曲線必依x軸對稱.

II. 若方程式中x的指數沒有奇數的,他所代表的曲線必依y軸對稱.

III. 若方程式中除常數項外,各項都是偶次項,他所代表的曲線必依原點對稱.又方程式中,若沒有常數項,而各項都是奇次項,他所代表的曲線亦必依原點對稱.

d　x, y 在何種區域以外之數應該除去?(這可看出曲線是否爲閉曲線或可無限擴張).

方法:　若一變數之值代入方程式能令他一變數之值爲虛數的,都應除去.*

e.　若曲線無限擴張時,是否有漸近線†(Asymptotes)?

方法:　(平行於兩軸的漸近線之求法).

I.　解出方程式中之 y, 使 y 等於 x 之一分數式,而分母有 $x+a$ 之因子,則 $x+a=0$ 代表平行於 y 軸之一漸近線.

II.　再解方程式中之 x, 使 x 等於 y 之一分數式,而分母有 $y+b$ 之因子,則 $y+b=0$ 代表平行於 x 軸之一漸近線.

(又,斜傾漸近線參考後面圓錐曲線章).

(9)　曲線之幾種特例的作法:

a.　直線:‡　照上面 (8) b 的方法求兩軸上的截距,過兩截點作一直線就得.若兩截點之距離太小,或有一截點太遠,或至無窮遠,可由所設方程式更求一適宜之點.

b.　可分解的方程式:　若方程式之各項集於一

---

*參考商務印書館新制高中解析幾何. *p* 28, § 7.

†參考商務印書館新制高中解析幾何. *p*. 29, § 8.

‡凡是 x, y 的一次方程式所代表的都是直線(參考後面第三章12節推論2).

邊，可分解爲幾個因子的積，而他一邊等於 0，則可作各因子的曲線，就是所設方程式所代表的軌跡.

c. 圓，橢圓，拋物線，雙曲線，各有簡便作法，見後面"圓"及"圓錐曲線"各章.

(**10**) 已知兩方程式求其所代表的兩曲線之交點的方法：

a. 用代數解法，解這一組聯立方程式.

b. 在 *a* 中解得之 x, y 的各組實數值，就是兩曲線的各交點的坐標.

c. 再用前面描曲線法，作出所設兩方程式的曲線.

注意： I. 在代數解法中有幾對實數值，兩曲線就有幾個交點.若沒有實數值而祇有虛數值，兩曲線就沒有交點.

II. 兩曲線的交點的個數不能多於兩方程式中兩個最高次項的指數之積.

〔舉　例〕

1. 圓心之坐標爲 $(5, -4)$，圓周通過 $(-2, 3)$ 點，其方程式若何？(漢)

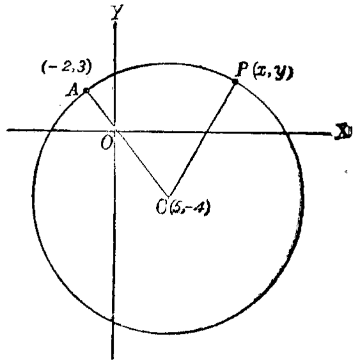
〔**解**〕 I. 設 $P(x, y)$ 爲圓周上的任意一點.

II. $CP = CA =$ 半徑，從公式 1：

$CA=\sqrt{(5+2)^2+(-4-3)^2}$

$=\sqrt{49+49}=\sqrt{49\times 2}$

$=7\sqrt{2}.$



III. $\therefore\ CP=7\sqrt{2}$,

即 $\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}=7\sqrt{2}$,

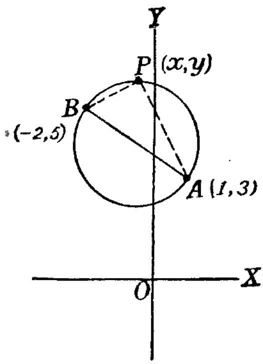
即 $(x-5)^2+(y+4)^2=98$,

化簡即得

$x^2+y^2-10x+8y-57=0$……就是所求的方程式.

2. 求以二點 $(1, 3)$, $(-2, 5)$ 之聯線爲直徑之圓周方程式.(川,一屆).

〔解〕 I. 設 $P(x, y)$ 爲圓周上的任意一點.



II. $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2$.

III. ∴ 從公式1:

$[(x-1)^2+(y-3)^2]+[(x+2)^2+(y-5)^2]=(1+2)^2+(3-5)^2$

化簡即得 $2x^2+2y^2+2x-16y+26=0$,

即 $x^2+y^2+x-8y+13=0$……就是所求的軌跡方程式

又法: I. 同上I.

II. $\because\ PA\perp PB$,

III. $\therefore\ m_{PA}\cdot m_{PB}=-1$, 從公式6:

$$m_{PA}=\frac{y-3}{x-1},\ m_{PB}=\frac{y-5}{x+2}.$$

$\therefore\ \dfrac{y-3}{x-1}\cdot\dfrac{y-5}{x+2}=-1$, 即 $(y-3)(y-5)+(x-1)(x+2)=0.$

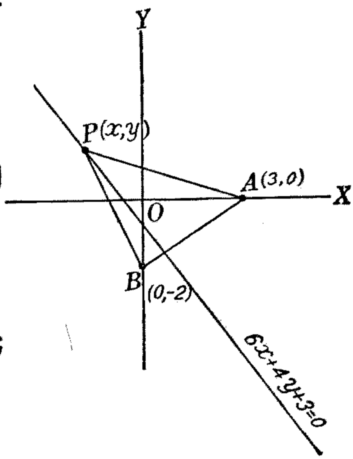
化簡即得:　$x^2+y^2+x-8y+13=0.$

3. 一點移動時,與 $(3,0)$ 及 $(0,-2)$ 二點距離之平方差恆等於8;求其軌跡方程式,并作圖.

〔解〕 I. 設 $P(x,y)$ 爲軌跡上的任意一點;

II. $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=8.$

III. 即 $[(x-3)^2+y^2]-[x^2+(y+2)^2]=8.$



化簡得 $6x+4y+3=0$····爲所求的軌跡方程式.

從此方程式,令 $x=0$,

則 $y=-\dfrac{3}{4}$, 故 y 軸上的截距爲 $-\dfrac{3}{4}$

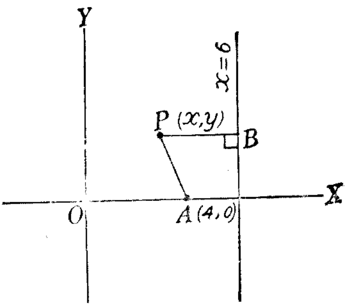
令 $y=0$, 則 $x=-\dfrac{1}{2}$, 故 x 軸上的截距爲 $-\dfrac{1}{2}$.

此兩截點太近,過此兩點所畫之直線難求其準確,

試以 -3 代 x, 求得 $y=3\frac{3}{4}$, 於圖上畫出$\left(-3, 3\frac{3}{4}\right)$之點,過此點與兩截點畫一直線,即爲動點之軌跡（參考本章 § 9(a) 及註)

4　一動點與 $(4, 0)$ 點之距離,等於與 $x=6$ 直線之距離之 $\frac{4}{5}$, 求其軌跡.

〔解〕 I.　設 $P(x, y)$ 爲軌跡上的任意一點.



II.　$PA=\frac{4}{5}PB.$

III　即 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}$

$$=\frac{4}{5}(6-x)$$

$$(x-4)^2+y^2=\frac{16}{25}(36-12x+x^2)$$

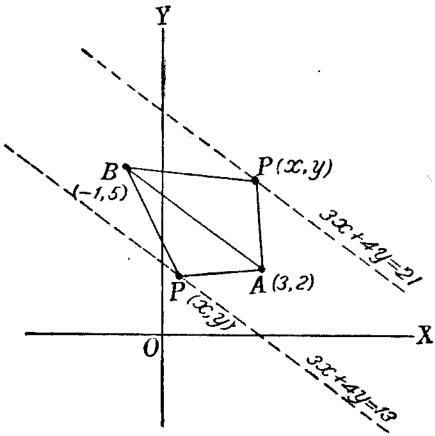
化簡得 $9x^2+25y^2-8x-176=0$……即爲動點之軌跡方程式.

5.　一動點與二定點 $(3, 2)$, $(-1, 5)$ 所成之三角形之面積恆等於 2; 求此動點之軌跡方程式.

〔解〕 I.　設 $P(x, y)$ 爲軌跡上的任意一點.

II.　$\triangle PAB=2.$

III.　從三角形面積公式:



$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ -1 & 5 \\ 3 & 2 \\ x & y \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(5x-2+3y+y-15-2x).$$

即　$\frac{1}{2}(3x+4y-17)=2$,　$\therefore$ $3x+4y=21$……爲所求的軌跡方程式.

從初等幾何學面積定理,知同底等積之三角形頂點之軌跡,爲平行於底邊之直線.

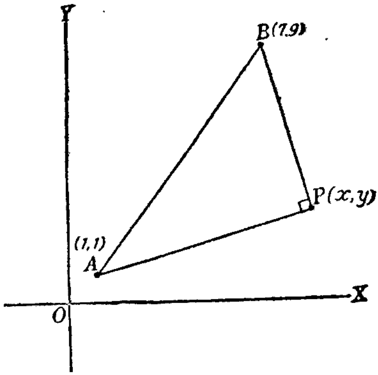
若 $P(x,y)$ 在底邊 AB 的下面,則

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ x & y \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(2x+15-y-3y+2-5x).$$

即 $\frac{1}{2}(-3x-4y+17)=2$, $\therefore$ $3x+4y=13$……亦為所求的軌跡方程式.

6. 一直角三角形斜邊的兩端點為(1, 1), (7, 9); 求直角頂的軌跡方程式.

〔解〕 I. 設 $P(x,y)$ 為軌跡上的任意一點.



II. $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2$,

III. 從公式1:

$\overline{PA}^2=(x-1)^2+(y-1)^2$

$\overline{PB}^2=(x-7)^2+(y-9)^2$,

$\overline{AB}^2=(7-1)^2+(9-1)^2=36+64=100.$

$\therefore$ $(x-1)^2+(y-1)^2+(x-7)^2+(y-9)^2=100$,

即 $x^2+y^2-8x-10y+16=0$……為所求的軌跡方程式.

又法: 因 $PA\perp PB$, 故從公式7: $m_{PA}\cdot m_{PB}=-1$,

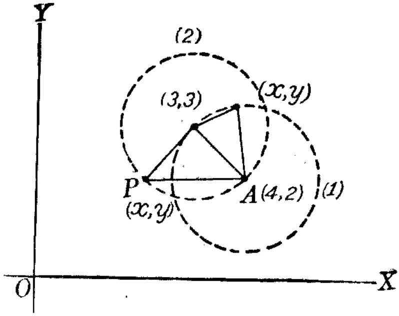
$m_{PA}=\frac{y-1}{x-1}$, $m_{PB}=\frac{y-9}{x-7}$, $\therefore\left(\frac{y-1}{x-1}\right)\left(\frac{y-9}{x-7}\right)=-1$,

即 $(x-1)(x-7)+(y-1)(y-9)=0$,

$\therefore$ $x^2+y^2-8x-10y+16=0.$

7. 等腰三角形一腰的兩端爲 $(4,2)$ 與 $(3,3)$, 求此三角形第三個頂點的軌跡.

〔解〕 此題有兩解:



(a) 先以 $A(4,2)$ 爲等腰三角形的頂點.

I. 設 $P(x,y)$ 爲軌跡上的任意一點.

II. $AP=AB$.

III. 從公式 1:

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(4-3)^2+(2-3)^2},$$

即 $x^2+y^2-8x-4y+18=0$....(1), 爲所求的軌跡方程式.

(b) 再以 $B(3,3)$ 爲等腰三角形的頂點, 則 $BP=BA$, 同樣得

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(4-3)^2+(2-3)^2}$$

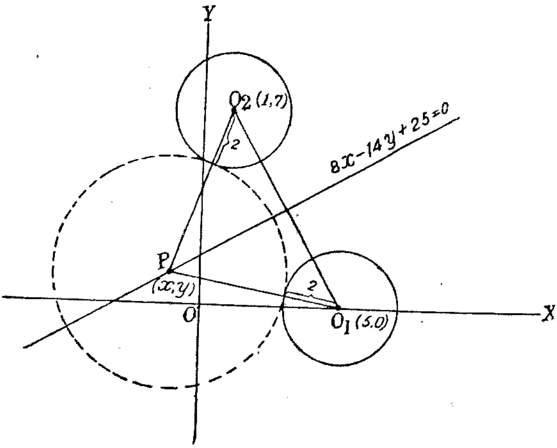
即 $x^2+y^2-6x-6y+16=0$....(2); 亦爲所求的軌跡方程式.

8. 一動圓恆與兩定圓相切; 兩定圓的圓心各爲 $(5,0)$, $(1,7)$, 半徑都是 2, 求這動圓圓心的軌跡, 幷作圖.

〔解〕 I. 設 $P(x, y)$ 爲軌跡上的任意一點.

II. 因 O_1, O_2 兩定圓半徑相等,且與動圓相切,故 $PO_1 = PO_2$.

III. 從公式 1: $\sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}$



化簡即得 $8x-14y+25=0$····爲所求之軌跡方程式.

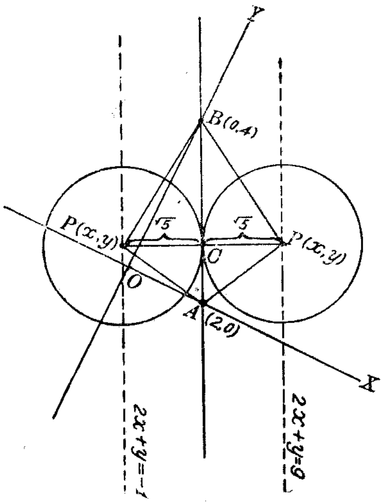
從初等幾何學定理知 P 點之軌跡爲 O_1O_2 之中垂線.

9. 半徑爲 $\sqrt{5}$ 的一個動圓,常與通過 (2, [illegible]), (0, 4) 兩點之直線相切,求這動圓圓心的軌跡,並作圖.

〔解〕 此題有兩解: (a) 先設圓心在直線的右面;

I. 設 $P(x, y)$ 爲軌跡上的任意一點.

II. 因動圓與直線 AB 相切,故從初等幾何學定理,知圓心與切點聯結之半徑必垂直於直線 AB.



III. $\triangle PAB$

$$=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot PC,$$

$$\because\ AB=\sqrt{2^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}, PC=\sqrt{5},$$

$$\therefore\ \triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5.$$

因此三角形的底邊一定,高一定,他的頂點 P 的軌跡爲平行於底邊的直線.又從三角形面積公式:

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}=5,\ \text{即}\ \frac{1}{2}(4x+2y-8)=5,$$

$\therefore$ $\underline{2x+y=9}$……爲所求的軌跡方程式.

(b) 再設圓心在直線左面,則同樣可得

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ x & y \end{vmatrix}=5,\ 卽\ \frac{1}{2}(8-2y-4x)=5,$$

$\therefore\ 2x+y=-1\cdots\cdots$亦爲所求的軌跡方程式.

10. 設一點$P(x,y)$移動時與$(3,0)$及$(-3,0)$二點之距離之平方之和恆等於68,求其軌跡方程式(河北,二十二年度).

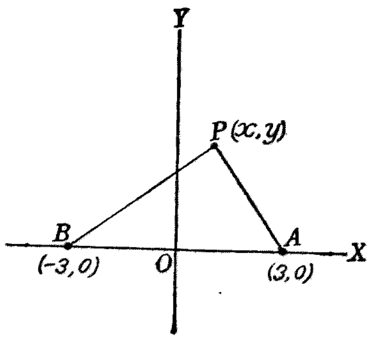
〔解〕 I. 設$P(x,y)$爲軌跡上的任意一點.

II. $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=68$

III. 從公式1:

$(x-3)^2+y^2+(x+3)^2+y^2=68$

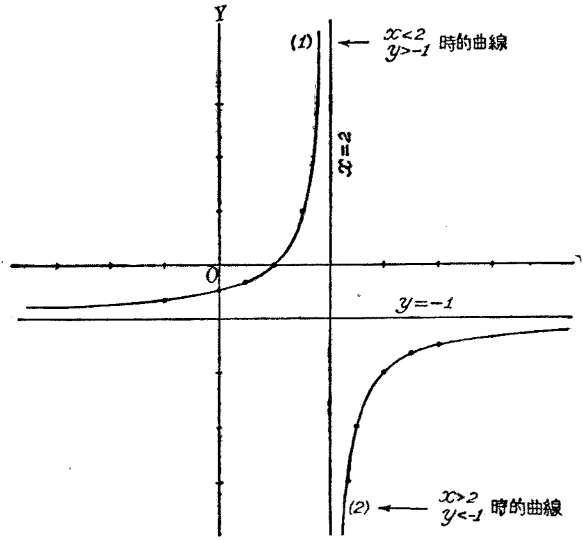
化簡卽得 $x^2+y^2=25\cdots\cdots$卽爲所求的軌跡方程式.



11. 繪畫下列曲線: (c) $y=\frac{1-x}{x-2}$. (尙有a和b,見後面圓及圓錐曲線章).(粵)

〔解〕 從 $y=\frac{1-x}{x-2}$, 知x不能等於2,

而$x\gtrless 2$時,曲線可無限擴張.



再解出此方程式中之x,得

$$x=\frac{2y+1}{y+1}.$$

知y不能等於-1,而$y\gtrless -1$時曲線可無限擴張.

從本章第八節(e)知$x=2$,及$y=-1$代表此曲線之漸近線.

若$x<2$時:

x	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	…
y	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	…

描點畫曲線如圖中(1).

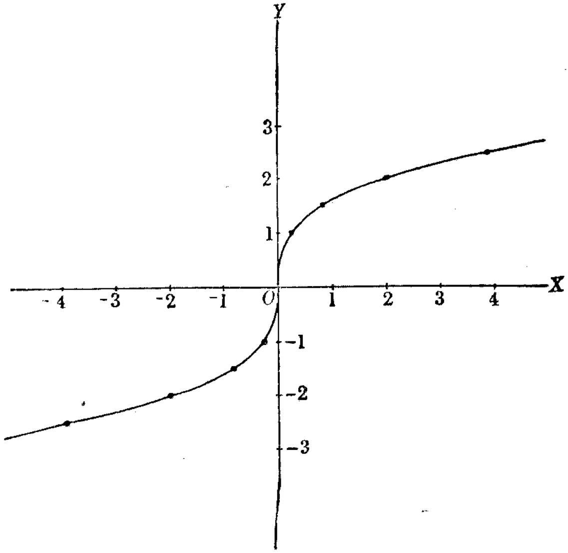
若$x>2$時:

x	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	…
y	-4	-3	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{3}{2}$	…

描點畫曲線如圖中(2).

(這曲線是雙曲線,參考後面圓錐曲線章).

12. 描方程式 $4x-y^3=0$ 所代表的的曲線.



〔解〕 把原方程式改變為

$$x=\frac{1}{4}y^3$$

從本章(8) a,知此曲線必通過原點;

又從本章(8) c 方法III,知此曲線必依原點對稱;

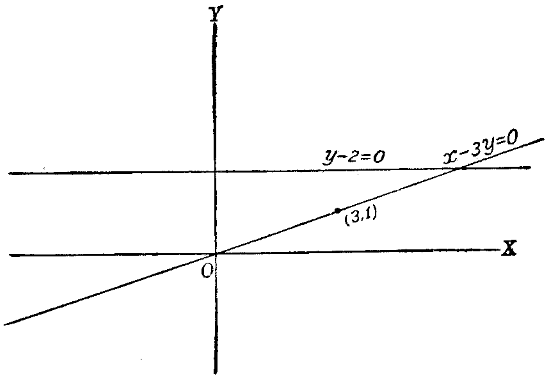
x, y 之值沒有限制,故曲線可無限擴張;但 x, y 絕對值的增加的速度,x 較快,y 較慢.

今設 y 為自變數,x 為倚變數,計算他的幾個對應數值如下:

y	0	± 1	$\pm 1\frac{1}{2}$	± 2	$\pm 2\frac{1}{2}$	± 3	…
x	0	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{27}{32}$	± 2	$\pm 3\frac{29}{32}$	$\pm 6\frac{3}{4}$	…

描點作曲線,如上圖.

13. 描方程式 $xy-3y^2-2x+6y=0$ 所代表的曲線



〔解〕 原方程式可分解因數:

$$x(y-2)-3y(y-2)=0,$$

即

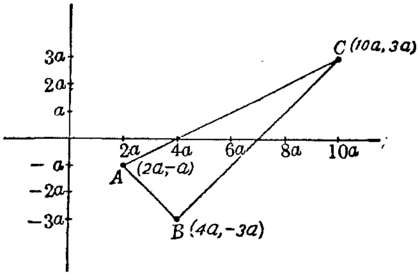
$$(y-2)(x-3y)=0.$$

$$\therefore\quad y-2=0,\text{或}\ x-3y=0.$$

作此二方程式所代表之軌跡爲二直線如上圖,即爲原方程式所代表之曲線.

14. 若三角形三邊之方程式爲 $x+y=a,\ x-2y=4a,\ y-x+7a=0$; 求這三角形的面積.

〔解〕 用代數解法,



解 $\begin{cases} x+\ \ y=a \\ x-2y=4a \end{cases}$

兩方程式,得

$\begin{cases} x=\ \ 2a \\ y=-a \end{cases}$

故此三角形的一個頂點為 $A(2a,\ -a)$.

再解 $\begin{cases} x+y=a \\ y-x=-7a \end{cases}$ 兩方程式,得

$\begin{cases} x=4a \\ y=-3a \end{cases}$. 故此三角形的第二個頂點為

$B(4a,\ -3a)$.

再解 $\begin{cases} x-2y=4a \\ y-\ \ x=-7a \end{cases}$ 兩方程式,得

$\begin{cases} x=10a \\ y=3a \end{cases}$. 故此三角形的第三個頂點為

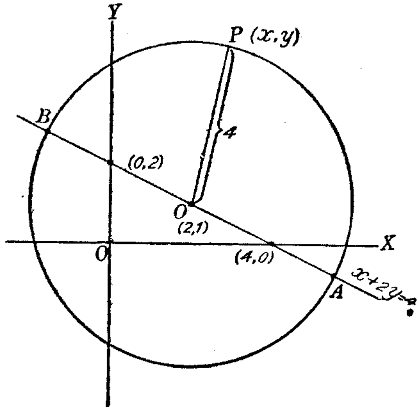
$C(10a,\ 3a)$.

故從三角形面積公式.

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & -a \\ 4a & -3a \\ 10a & 3a \\ 2a & -a \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(-6a^2+12a^2-10a^2+4a^2$$

$$+30a^2-6a^2)=\frac{1}{2}\times 24a^2=12a^2.$$

15. 半徑爲4圓心爲(2,1)之圓周與直線$x+2y=4$相交,求此直線爲圓所截之弦之長.



〔解〕 設$P(x,y)$爲圓周上的任意一點,則得圓方程式爲

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=4,$$

即
$$(x-2)^2+(y-1)^2=16.$$

於是解此圓周與直線的兩個方程式:

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ (x-2)^2+(y-1)^2=16 \end{cases}$$

得兩對答數: $\begin{cases} x=\dfrac{10+8\sqrt{5}}{5} \\ y=\dfrac{5-4\sqrt{5}}{5}, \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{10-8\sqrt{5}}{5} \\ y=\dfrac{5+4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

故圓周與直線之交點爲 $A\left(\dfrac{10+8\sqrt{5}}{5}, \dfrac{5-4\sqrt{5}}{5}\right)$,

$$B\left(\frac{10-8\sqrt{5}}{5}, \frac{5+4\sqrt{5}}{5}\right),$$

從公式1:

$$AB=\sqrt{\left(\frac{10+8\sqrt{5}}{5}-\frac{10-8\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{5-4\sqrt{5}}{5}-\frac{5+4\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{16\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{-8\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{256}{5}+\frac{64}{5}}$$

$$=\sqrt{\frac{320}{5}}=\sqrt{64}=8.$$

[習　題]

(1) 上面例六,試用另一方法去求.

[提示] 先用公式5,求斜邊 AB 中點 D 的坐標.再用公式1,使 $DP=\frac{1}{2}AB$ (根據初等幾何學定理:三角形一邊上的中線若等於這邊的一半,則這邊所對的角爲一直角).

(2) 一動點與二定點 $(0, 0)$, $(0, 2)$ 之距離之和恆等於3,求這動點的軌跡方程式.

[提示] 把軌跡的條件列出一個恆等式,再用公式代入,即得
$(36x^2+20y^2-40y=25)$.

(3) 一直角三角形直角的頂點爲 $(4, 8)$, 另一頂點爲 $(0, 2)$; 求第三個頂點的軌跡.

[提示] 可用上面例六的兩個方法去求.
$(2x+3y=32)$

(4) 上面例二試用另一方法去求.

[提示] 先求 AB 的中點 C 即圓心的坐標,於是 $CP=\frac{1}{2}AB$, 用公式1代進去即得.

(5) 三角形三邊的方程式爲 $x+7y+11=0$, $3x+y-7=0$, $x-3y+1=0$; 試求三邊上的中線的長.

[提示] 先照上面例14的方法求出這三角形的三個頂點的坐標;次用公式5,求出三邊中點的坐標;再用公式1,求出各中線的長.
$\left(2\sqrt{5},\ \frac{5}{2}\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{170}\right)$.

第三章　直　線

[提　　要]

(11)　平行於坐標軸的直線:

a.　若一直線平行於 y 軸,與 y 軸的距離爲 a,則此直線方程式爲　$x=a$……………………………(公式 9)

b.　若一直線平行於 x 軸,與 x 軸的距離爲 a,則此直線方程式爲　$y=a$……………………………(公式 10)

推論:　x 軸的方程式爲 $y=0$; y 軸的方程式爲 $x=0$.

(12)　線坡式的直線方程式:　若一直線的線坡爲 m,在 y 軸上的截距爲 b,則此直線方程式爲

$y=mx+b$……………………(公式 11)

推論 1:　凡普通兩元一次方程式 $Ax+By+C=0$ 所代表的軌跡的線坡爲 $-\frac{A}{B}$,在 Y 軸上的截距爲 $-\frac{C}{B}$.

因　　$Ax+By+C=0$ 可變爲 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$.

推論 2:　凡兩元一次方程式所代表之軌跡爲一直線.

因從推論1,知$Ax+By+C=0$可化成$y=mx+b$之形式,從公式11,知$y=mx+b$為直線方程式.

推論3: 兩方程式,如$Ax+By+C=0$和$Ax+By+C'=0$,為平行直線.

推論4: 兩方程式,如$Ax+By+C=0$和$Bx-Ay+C'=0$,或如$Ax+By+C=0$和$-Bx+Ay+C'=0$,為互相垂直的兩直線.

推論5: 兩方程式$Ax+By+C=0$和$A'x+B'y+C'=0$若代表同一直線,則必$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$.

(13) 點坡式的直線方程式: 若一直線的線坡為m,且通過一點$P_1(x_1, y_1)$,則此直線方程式為

$$y-y_1=m(x-x_1) \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 12)$$

(14) 兩點式的直線方程式: 若一直線通過兩點$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$,則此直線方程式為

$$\frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 13)$$

(15) 截距式的直線方程式: 若一直線在x軸上的截距為a,在y軸上的截距為b,則此直線方程式為

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 14)$$

(**16**) 法線式(Normal form)的直線方程式: 若一直線與原點的距離爲 p, 於其上以量距離的法線,其與 X 軸所成的角爲 ω, 則此直線方程式爲

$$x\cos\omega+y\sin\omega=p\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }15)$$

(p 常爲正量, ω 常小於 2π).

注意: 若 $p=0$, 則此直線必通過原點,此時我們常假定法線以向上之方向爲正,故 ω 小於 π.

(**17**) 變普通直線方程式爲法線式之方法: 設普通直線方程式爲

$$Ax+By+C=0$$

則 $$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0\cdots\cdots(\text{公式 }16)$$

卽爲所變成的法線式. 在 $\sqrt{A^2+B^2}$ 前之符號,須與 C 之符號相反.

若 $C=0$, 則 $\sqrt{A^2+B^2}$ 前之符號,應與 B 同號.

(**18**) 求兩平行直線間的距離的方法:

a. 先將兩所設方程式都化成法線式;

b. 若兩直線在原點的同旁,則取兩法線的差,若在原點的異旁,則取兩法線的和,就是所求的距離.

(**19**) 從一直線到一點的距離: 若一直線方程式

爲 $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$, 一點爲 $P_1(x_1, y_1)$, 則從直線到 P_1 點之距離爲

$$d=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-p \cdots\cdots\cdots\cdots (公式 17)$$

若所設直線方程式爲 $Ax+By+C=0$, 則其與 P_1 點的距離爲

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (公式 18)$$

在 $\sqrt{A^2+B^2}$ 之符號, 須與 C 之符號相反.

注意: *若 P_1 點與原點在直線的異旁, 則距離爲正.

若 P_1 點與原點在直線的同旁, 則距離爲負.

(20) 兩直線的交角: 若一直線

$$L_1:\quad A_1x+B_1y+C_1=0.$$

與他一直線 $\quad L_2:\quad A_2x+B_2y+C_2=0.$

所成之角爲 θ, 則 $\tan\theta=\dfrac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2} \cdots\cdots\cdots (公式 19)$

推論: 若 m_1, m_2 各爲直線 L_1, L_2 之線坡, 則

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} \cdots\cdots\cdots\cdots (公式 20)$$

---

* 參考 Smith, Gale 解析幾何 P. 105, § 49.

(21 三直線通過一點的條件 設三直線為

L_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$, L_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$, L_3: $A_3x+B_3y+C_3=0$. 若 L_1, L_2, L_3 都通過一點, 則必

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

(22) 直線系:

a. 線坡爲一定數的直線系,其方程式爲:

$$y=mx+k.$$

(m 爲一定數,k 爲未定常數,即參變數 parameter).

或爲: $Ax+By+k=0$ (A, B 爲定數, k 爲參變數).

b. 通過一定點的直線系,其方程式爲:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(x_1, y_1 爲定點的坐標, m 爲參變數).

c. 通過兩定直線交點的直線系,其方程式爲:

$$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

($A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ 爲二定直線).

[舉　例]

1. 一直線之斜度(即線坡)爲 $-\frac{1}{4}$, 並經過兩直線 $x+y-9=0$ 與 $2x-y-3=0$ 之交點; 求此直線方程式,並

求其在 x 軸與 y 軸上之截部(卽截距).(河北二十二年度)

〔解〕 先用代數解法,解聯立方程式

$$\begin{cases} x+y-9=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$$ 卽兩直線交點的坐標爲(4,5).

從公式12,得所求的直線方程式爲

$$y-5=-\tfrac{1}{4}(x-4),$$

化簡得 $$x+4y-24=0$$

在此方程式裏,令 $y=0$, 則 $x=24$. 卽此直線在 x 軸上的截距爲24.

再令 $x=0$, 則 $y=6$. 卽此直線在 y 軸上之截距爲6.

2. 求直線之方程式,其線通過(4,3)點而具45°之斜度.(北平,二十三年)

〔解〕 因 $m=\tan 45°=1$, 故從公式12,得所求直線方程式爲

$$y-3=1(x-4), \text{ 卽 } x-y=1.$$

3. 傾斜角爲135°,且通過點 $P_1(4,-1)$ 之直線,試求其方程式.(漢)

〔解〕 此與上第2例相同,惟線坡

$$m=\tan 135°=\tan(180°-45°)$$

$$=-\tan 45°=-1.$$

故所求方程式爲$y+1=-1(x-4)$，即$x+y=3$.

4. 一直線通過點$(4, 5)$，且與XX'軸成$45°$. 求其方程式.（湘，四屆）

〔解〕此與上第2例相同，讀者可自行解答.

5. 一直線通過$(-3, 2)$，且與$X'X$軸成$135°$之角，求其方程式.（湘，五屆）

〔解〕此題與上面第3題相同，讀者可自行解答.

6. 求與直線$3x+2y-6=0$平行，並過一點$(-2, 3)$之直線方程式.（浙，二十一年度二期）

〔解〕從本章12節推論1，知所設直線$3x+2y-6=0$之線坡爲$-\frac{3}{2}$，又從第一章4節a，知所求直線之線坡亦爲$-\frac{3}{2}$，故從公式12，得所求之直線方程式爲

$$y-3=-\frac{3}{2}(x+2),\quad 即\ 3x+2y=0.$$

又法：從本章12節推論3，知所求直線方程式必爲

$$3x+2y+k=0,$$

因此直線通過$(-2, 3)$一點，故此點之坐標，必適合於此方程式.

$$\therefore\quad 3(-2)+2\times3+k=0,\qquad \therefore\ k=0,$$

故得　$3x+2y=0.$

7. 求過 $2x+y+1=0$ 及 $x-2y+1=0$ 之交點，並平行於 $4x-3y-7=0$ 之直線方程式.（浙，二十二年度一期）

〔解〕 用代數解法解聯立方程式：

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\x-2y+1=0,\end{cases}\qquad 得\ \begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{1}{5}\end{cases}$$

故所設二直線交點的坐標為 $\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$.

又因所求直線平行於所設直線 $4x-3y-7=0$，故其線坡為 $\dfrac{4}{3}$，從公式 12，得所求之直線方程式為

$$y-\frac{1}{5}=\frac{4}{3}\left(x+\frac{3}{5}\right).$$

化簡得 $4x-3y+3=0$.

8. 有一直線通過 $2x+3y-9=0$ 及 $x-y-4=0$ 兩直線之交點，并與直線 $6x+7y-13=0$ 相垂直，求此直線之方程式.（蘇，第二次）

〔解〕 先解聯立方程式：

$$\begin{cases}2x+3y-9=0\\\ \ x-\ \ y-4=0,\end{cases}\qquad 得\ \begin{cases}x=\frac{21}{5}\\y=\frac{1}{5}\end{cases}$$

故此二直線交點之坐標為 $\left(\dfrac{21}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$；

又因所求直線與所設直線 $6x+7y-13=0$ 垂直，故從公式 7 知所求直線之線坡為 $\dfrac{7}{6}$，於是從公式 12，得所求直線方程式為

$$y-\frac{1}{5}=\frac{7}{6}\left(x-\frac{21}{5}\right),$$

化簡得 $\qquad 35x-30y-141=0.$

又法：從本章12節推論4；知所求方程式必爲

$$7x-6y+k=0,$$

因此直線通過 $2x+3y-9=0$ 及 $x-y-4=0$ 之交點 $\left(\frac{21}{5},\frac{1}{5}\right)$，故

$$7\times\frac{21}{5}-6\times\frac{1}{5}+k=0,\qquad\therefore\quad k=-\frac{141}{5},$$

故所求方程式爲 $7x-6y-\frac{141}{5}=0$，即

$$35x-30y-141=0.$$

9. 求過 $(5,-1)$，$(2,-2)$ 兩點直線之方程式.(晉,二十二年)

〔解〕從公式13,所求的直線方程式爲

$$\frac{x-5}{y+1}=\frac{2-5}{-2+1},\quad\text{即}\ x-3y=8.$$

10. 在 xoy 平面上，有 $A(1,0)$，$B(0,2)$，$C(4,5)$ 三點；試求 ABC 三角形之面積，及其各邊之方程式.(粵)

〔解〕 $a.$ $\triangle ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&0\\4&5\\0&2\\1&0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(5+8-2)=\frac{11}{2}.$

b. AB: $\dfrac{x-1}{y-0}=\dfrac{0-1}{2-0}$,

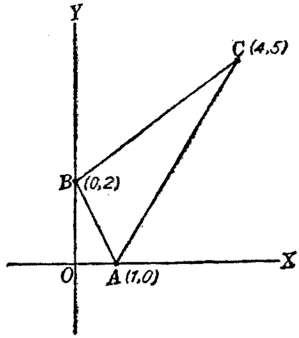
即 $2x+y=2$.

BC: $\dfrac{x-0}{y-2}=\dfrac{4-0}{5-2}$,

即 $3x-4y+8=0$.

AC: $\dfrac{x-1}{y-0}=\dfrac{4-1}{5-0}$,

即 $5x-3y=5$.



11. 三角形之頂點為 $(2,3)$, $(4,-5)$, $(-3,-6)$；求各邊之方程式.(贛,二十三年)

〔解〕 與上面第10題 b 相同,讀者可自己解出.

12. 求過二直線 $2x-3y+4=0$, $x+y-2=0$ 之交點與點 $(2,3)$ 之直線方程式.(贛,二十二年)

〔解〕 先解聯立方程式 $\begin{cases}2x-3y+4=0\\ x+\ y-2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{2}{5}\\ y=\frac{8}{5}\end{cases}$

再從公式13,得所求的方程式為

$$\frac{x-\frac{2}{5}}{y-\frac{8}{5}}=\frac{2-\frac{2}{5}}{3-\frac{8}{5}},\quad \frac{5x-2}{5y-8}=\frac{8}{7}.$$

即 $$7x-8y+10=0.$$

又法: 從本章22節(c),知所求之直線屬於

$$2x-3y+4+k(x+y-2)=0.$$

所代之直線系.次因此直線通過(2, 3)點,故

$$2\times2-3\times3+4+k(2+3-2),$$

$$\therefore\quad k=\tfrac{1}{3},$$

代入上直線系方程式,得 $2x-3y+4+\frac{1}{3}(x+y-2)=0$,

即　　　　$\underline{7x-8y+10=0.}$

13. 問直線 $x+y=1$ 能否通過原點?如不能通過,試求此線與原點之距離.(閩)

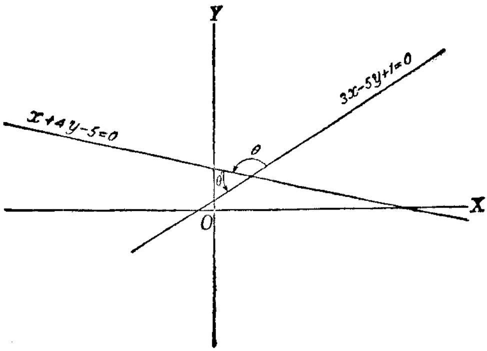
〔解〕 *a*. 因此方程式中有常數項,故此直線不通過原點.

b. 從公式16,把 $x+y-1=0$ 化成法線式

$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

故此直線與原點之距離為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. 求 $x+4y-5=0$,$3x-5y+1=0$二直線相交所成之角.



〔解〕 L_1:　$x+4y-5=0$

L_2:　$3x-5y+1=0$

從公式19:　$\tan\theta=\dfrac{12+5}{3-20}=-1,$

$\therefore\quad \theta=135°,\ \theta'=180°-135°=45°.$

15. 求平行於 $2x-3y=0$, 於 y 軸上的截距爲 -2 之直線方程式.

〔解〕 從公式11:　$y=mx+b,\ m=\frac{2}{3},\ b=-2,$

故所求直線方程式爲 $y=\frac{2}{3}x-2$, 即 $2x-3y=6$.

16. 設平行四邊形之二邊爲 $2x+3y-7=0$ 及 $x-3y+4=0$, 其一角頂爲 $(3,2)$, 求其餘二邊之方程式.

〔解〕 設 L_1: $2x+3y-7=0$,　L_2:　$x-3y+4=0$;

因 L_1 與 L_2 之線坡不同, 故 L_1, L_2 必爲平行四邊形之二隣邊; $(3,2)$ 不適合於所設之兩方程式, 故 $(3,2)$ 完全不在 L_1 與 L_2 之上而爲其他二邊之交點.

又設 L_3, L_4 爲所求之二邊, $L_3\parallel L_1$, $L_4\parallel L_2$;

$\therefore$ L_3:　線坡爲 $-\frac{2}{3}$, 且通過 $(3,2)$ 點 (即所設之角頂), 故其方程式爲 $y-2=-\frac{2}{3}(x-3)$,

即　　$2x+3y=12$.

L_4:　線坡爲 $\frac{1}{3}$, 且通過 $(3,2)$ 點, 故其方程式爲 $y-2=\frac{1}{3}(x-3)$, 即 $x-3y+3=0$.

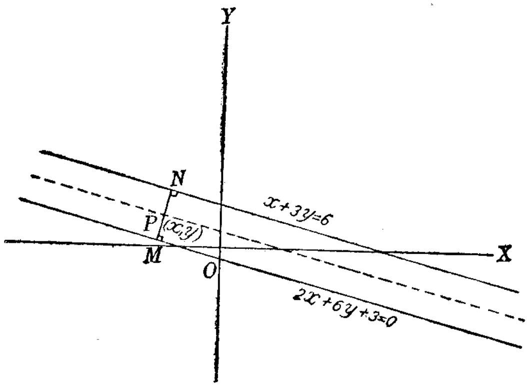
17. 若一直線 $\frac{x}{a}-\frac{y}{5}=1$ 與他直線 $2x+3y=8$ 直交，試求 a 之值.

〔解〕　$\frac{x}{a}-\frac{y}{5}=1$ 之線坡為 $\frac{5}{a}$，

$2x+3y=8$ 之線坡為 $-\frac{2}{3}$，

從公式 7：$\frac{5}{a}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$，　$\therefore\ a=\frac{10}{3}$.

18. 一動圓常與二直線 $x+3y=6$, $2x+6y+3=0$ 相切，試求此動圓圓心的軌跡.



〔解〕 設 $P(x,y)$ 為軌跡上的任意一點，則 $MP=NP$；

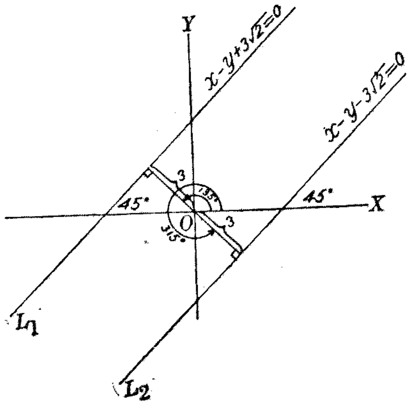
從公式 18：
$$MP=\frac{2x+6y+3}{-2\sqrt{10}},$$

$$NP=\frac{x+3y-6}{\sqrt{10}},$$

$$\therefore \quad \frac{2x+6y+3}{-2\sqrt{10}}=\frac{x+3y-6}{\sqrt{10}},$$

化簡,即得所求之軌跡方程式爲 $4x+12y=9$.

19. 一直線與 x 軸所成之角爲 45°, 與原點之距離爲 3, 求此直線方程式.



〔解〕此題有兩解: 如圖, L_1 的法線與 x 軸所成之角爲 135°, 故從公式 15, 得方程式

$x\cos 135°+y\sin 135°=3,$

即 $$-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=3, \quad \text{即} \quad x-y+3\sqrt{2}=0.$$

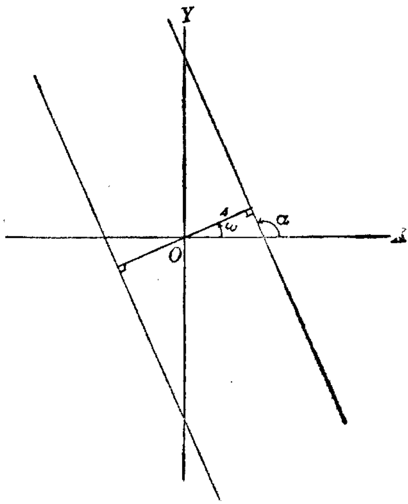
又如 L_2 的法線,與 x 軸所成之角爲 315°, 故從公式 15, 得方程式

$$x\cos 315°+y\sin 315°=3, \quad \text{即} \quad \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}=3,$$

即 $$x-y-3\sqrt{2}=0.$$

20. 一直線與原點之距離爲 4, 其線坡爲 −5; 求此直線方程式.

〔解〕 設法線與 x 軸所成之角爲 ω, 所求直線與 x 軸成 α 角, 則



$$\tan\omega=\tan(\alpha-90^\circ)$$

$$=-\tan(90^\circ-\alpha)$$

$$=-\cot\alpha=-\frac{1}{\tan\alpha}$$

$$=\frac{1}{5}.$$

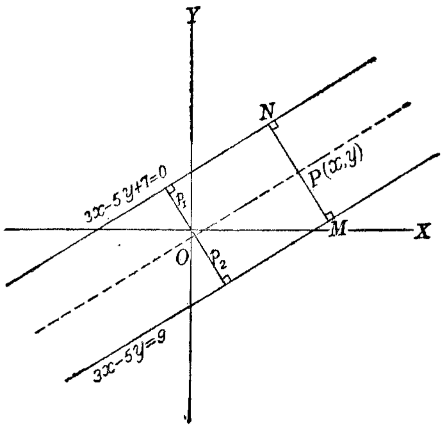
$$\therefore\quad \cos\omega=\frac{5}{\pm\sqrt{26}}$$

$$\sin\omega=\frac{1}{\pm\sqrt{26}}$$

得所求直線方程式爲 $x\cos\omega+y\sin\omega=4$,

即 $\dfrac{5x}{\pm\sqrt{26}}+\dfrac{y}{\pm\sqrt{26}}=4$, 即 $5x+y=\pm4\sqrt{26}$.

21. 一動圓常與兩定直線 $3x-5y+7=0$, $3x-5y=9$ 相切; 試求此動圓圓心的軌跡, 及其半徑之長.



〔解〕 設 $P(x,y)$ 爲軌跡上的任意一點, 則

從公式 18: $MP=\dfrac{3x-5y-9}{\sqrt{34}}$

$$NP=\frac{3x-5y+7}{-\sqrt{34}}$$

$$\because\quad MP=NP,\quad\therefore\quad \frac{3x-5y-9}{\sqrt{34}}=\frac{3x-5y+7}{-\sqrt{34}},$$

化簡,即得所求的軌跡方程式為 $3x-5y=1$.

再求 p_1 與 p_2: 從公式 15, 把 $3x-5y+7=0$ 改成法線式,得

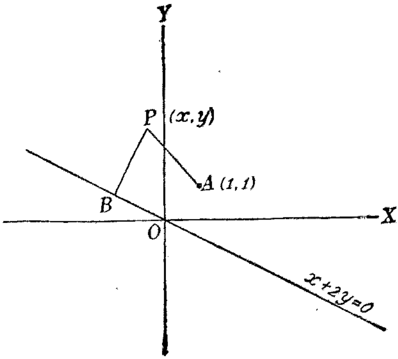
$$\frac{3x}{-\sqrt{34}}+\frac{5y}{\sqrt{34}}-\frac{7}{\sqrt{34}}=0,\quad 故\quad p_1=\frac{7}{\sqrt{34}}.$$

把 $3x-5y=9$, 改成法線式,得 $\dfrac{3x}{\sqrt{34}}-\dfrac{5y}{\sqrt{34}}-\dfrac{9}{\sqrt{34}}=0$,

故 $p_2=\dfrac{9}{\sqrt{34}}$, $p_1+p_2=\dfrac{16}{\sqrt{34}}$, 故所求動圓的半徑 $=\dfrac{p_1+p_2}{2}$

$$=\frac{8}{\sqrt{34}}=\frac{4}{17}\sqrt{34}.$$

22. 一動點與定直線 $x+2y=0$ 之距離,恆等於與定點(1,1)之距離,求此動點之軌跡方程式.



〔解〕 設 $P(x, y)$ 為軌跡上的任意一點,

則因 $AP=BP$, 從公式 1:

$$AP=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

從公式 18:　$BP=\dfrac{x+2y}{\sqrt{5}}$,

$$\therefore\quad \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{x+2y}{\sqrt{5}},$$

即
$$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{x^2+4xy+4y^2}{5},$$

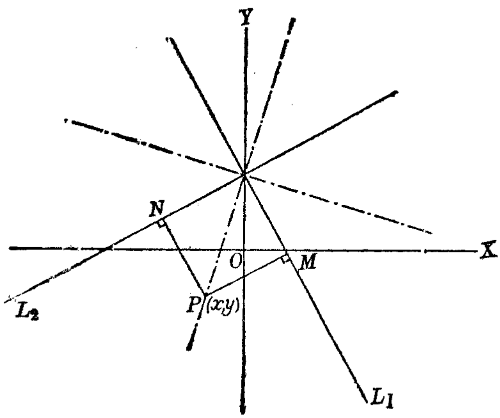
化簡卽得所求的軌跡方程式爲

$$\underline{4x^2-4xy+y^2-10x-10y+10=0.}$$

23. 求兩直線 $2x+y-2=0$ 與 $x-2y+4=0$ 交角之平分線.

〔解〕 L_1:　$2x+y-2=0$;

L_2:　$x-2y+4=0$;



設 $P(x,y)$ 爲 L_1 與 L_2 交角的平分角線上的任意一點,則從

公式 18: $$MP=\frac{2x+y-2}{\sqrt{5}}$$

$$NP=\frac{x-2y+4}{-\sqrt{5}}$$

$\because\ MP=NP,\ \therefore\ \dfrac{2x+y-2}{\sqrt{5}}=\dfrac{x-2y+4}{-\sqrt{5}}$

化簡,卽得一個平分角線的方程式爲 $3x-y+2=0.$

又一平分角線的方程式爲 $\dfrac{2x+y-2}{\sqrt{5}}=-\left(\dfrac{x-2y+4}{-\sqrt{5}}\right)$

化簡卽得 $x+3y-6=0.$

24 求通過一點 $(6,-2)$ 而與直線 $x+6y+5=0$ 成角 $\phi=\tan^{-1}3$ 之直線方程式.

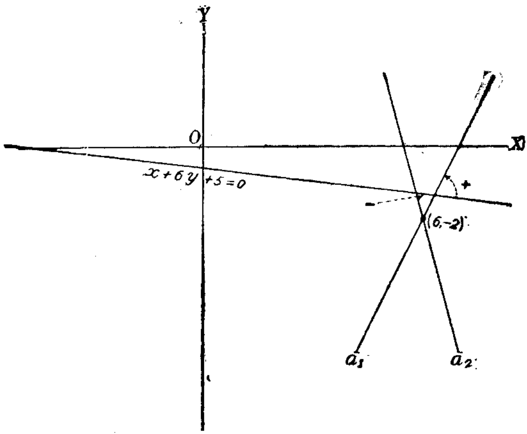
〔解〕 因 $\phi=\tan^{-1}3,\ \therefore\ \tan\phi=3,$

a. ϕ 取正角,則從公式 20:

$$3=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

而 m_1 爲所求直線之線坡, m_2 爲所設直線 $x+6y+5=0$ 之線坡,等於 $-\dfrac{1}{6}$, 故

$$3=\frac{m_1+\frac{1}{6}}{1-\frac{m_1}{6}},\ \text{解之,得}\ m_1=\frac{17}{9},$$



從公式12, 得 a_1: $y+2=\frac{17}{9}(x-6)$,

即 $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{17x-9y-120=0}$.

b. 次設ϕ取負角,則同樣得

$$3=\frac{-\frac{1}{6}-m_1}{1-\frac{m_1}{6}},\quad \text{解之, 得}\quad m_1=-\frac{19}{3},$$

從公式12,得 a_2: $y+2=-\frac{19}{3}(x-6)$,

即 $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{19x+3y-108=0}$.

25. 求通過(9, −6)點,而與(4, −1)點之距離爲1之直線方程式.

〔解〕 設所求直線之線坡爲 m, 則從公式 12, 知所求的直線方程式,應爲

$$y+6=m(x-9) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

卽 $$mx-y-(9m+6)=0.$$

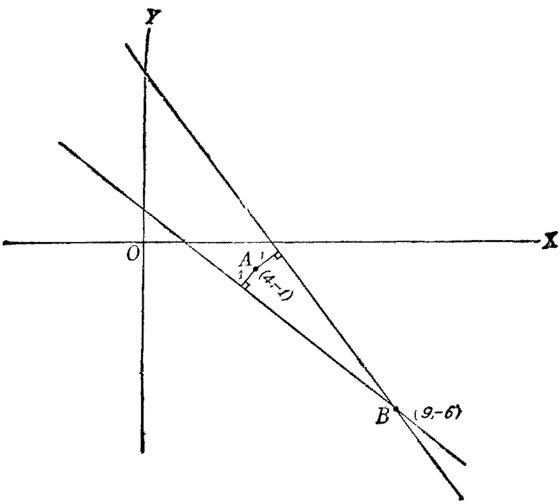
從公式 18, 知此直線與點 $(4, -1)$ 的距離爲

$$\frac{4m+1-(9m+6)}{\sqrt{1+m^2}},$$

但已知此距離等於 1, 故 $\dfrac{4m+1-(9m+6)}{\sqrt{1+m^2}}=1,$

$$-5(m+1)=\sqrt{1+m^2},$$

$$25(m^2+2m+1)=1+m^2,$$



$$24m^2+50m+24=0,$$

$$(3m+4)(8m+6)=0,$$

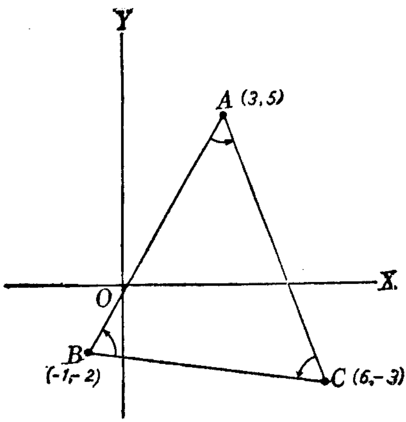
$$\therefore \quad m=-\frac{4}{3}, \text{ 或 } m=-\frac{3}{4}.$$

代入(A)式中得所求的直線方程式爲

$$y+6=-\frac{4}{3}(x-9) \text{ 及 } y+6=-\frac{3}{4}(x-9)$$

即 $4x+3y-18=0$ 及 $3x+4y-3=0$.

26. 設三角形的三個頂爲$(3, 5)$, $(-1, -2)$, $(6, -3)$；求(1)三邊的方程式；(2)三中垂線的方程式；(3)三中線的方程式；(4)於其上以量高的三個直線的方程式；(5)三個高的長；(6)三個內角.



〔解〕 (1) AB: 從公式13,

$$\frac{x+1}{y+2}=\frac{3+1}{5+2},$$

即 $7x-4y-1=0$.

AC: $\dfrac{x-3}{y-5}=\dfrac{6-3}{-3-5}$,

即 $8x+3y-39=0$.

BC: $\dfrac{x+1}{y+2}=\dfrac{6+1}{-3+2}$, 即 $x+7y+15=0$.

(2) AB的中垂線： AB的中點坐標爲

$x=\frac{3-1}{2}=1,\ y=\frac{5-2}{2}=\frac{3}{2}$, 卽$\left(1,\frac{3}{2}\right)$. AB的中垂線的線坡爲$-\frac{4}{7}\left(\because\ AB\text{的線坡爲}\frac{7}{4}\right)$, 故其方程式爲

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{4}{7}(x-1),$$

卽 $$8x+14y-29=0.$$

AC的中垂線： AC的中點坐標爲$x=\frac{3+6}{2}=\frac{9}{2}$, $y=\frac{5-3}{2}=1$, 卽$\left(\frac{9}{2},1\right)$. AC的中垂線的線坡爲$\frac{3}{8}$ $\left(\because\ AC\text{的線坡爲}-\frac{8}{3}\right)$, 故其方程式爲

$$y-1=\frac{3}{8}\left(x-\frac{9}{2}\right)$$

卽 $$6x-16y-11=0.$$

BC的中垂線： BC的中點坐標爲 $x=\frac{6-1}{2}=\frac{5}{2}$, $y=\frac{-2-3}{2}=-\frac{5}{2}$, 卽$\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$. BC的中垂線的線坡爲7. $\left(\because\ BC\text{的線坡爲}-\frac{1}{7}\right)$, 故其方程式爲

$$y+\frac{5}{2}=7\left(x-\frac{5}{2}\right),$$

卽 $$7x-y-20=0.$$

(3) AB上的中線： 因通過$(6,-3)$, $\left(1,\frac{3}{2}\right)$兩點.

$$\therefore\ \frac{x-6}{y+3}=\frac{1-6}{\frac{3}{2}+3},$$

即 $$9x+10y-24=0.$$

<u>AC 上的中線:</u> 因通過 $(-1,-2)$, $\left(\frac{9}{2},1\right)$ 兩點,

$$\therefore \quad \frac{x+1}{y+2}=\frac{\frac{9}{2}+1}{1+2},$$

即 $$6x-11y-16=0.$$

<u>BC 上的中線:</u> 因通過 $(3,5)$, $\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$ 兩點,

$$\therefore \quad \frac{x-3}{y-5}=\frac{\frac{5}{2}-3}{-\frac{5}{2}-5},$$

即 $$15x-y-40=0.$$

(4) <u>過 C 點的 AB 的垂線:</u> 因通過 $(6,-3)$ 點,線坡為

$-\frac{4}{7}$ (因 AB 的線坡為 $\frac{7}{4}$).

$$\therefore \quad y+3=-\frac{4}{7}(x-6).$$

即 $$4x+7y-3=0.$$

<u>過 B 點的 AC 的垂線:</u> 因通過 $(-1,-2)$ 點,線坡

為 $\frac{3}{8}$ (因 AC 的線坡為 $-\frac{8}{3}$).

$$\therefore \quad y+2=\frac{3}{8}(x+1).$$

即 $$3x-8y-13=0.$$

<u>過 A 點的 BC 的垂線:</u> 因通過 $(3,5)$ 點,線坡

為 7 (因 BC 的線坡為 $-\frac{1}{7}$).

$$\therefore \quad y-5=7(x-3),$$

即 $$7x-y-16=0.$$

(5) AB 上的高: 從公式 18, 知 AB 到 $C(6,-3)$ 的距離爲

$$\frac{7\cdot 6-4\cdot(-3)-1}{\sqrt{65}}=\frac{53}{\sqrt{65}}=\frac{53}{65}\sqrt{65}.$$

AC 上的高: AC 到 $B(-1,-2)$ 點的距離爲

$$\frac{8\cdot(-1)+3\cdot(-2)-39}{\sqrt{73}}=-\frac{53}{\sqrt{73}}=-\frac{53}{73}\sqrt{73}.$$

(因 B 點與原點都在 AC 線的同旁, 故得負號, 參考本章 19 節的注意).

BC 上的高: BC 到 $A(3,5)$ 點的距離爲

$$\frac{3+7\cdot 5+15}{-\sqrt{50}}=-\frac{53}{\sqrt{50}}=-\frac{53}{50}\sqrt{50}.$$

(6) A 角: 從公式 19, AB 爲 L_2: $7x-4y-1=0$.

AC 爲 L_1: $8x+3y-39=0$.

$$\therefore \quad \tan A=\frac{7\cdot 3-8(-4)}{8\cdot 7+3(-4)}=\frac{21+32}{56-12}=\frac{53}{44}.$$

$$\therefore \quad A=\tan^{-1}\frac{53}{44}.$$

B 角: BC 爲 L_2: $x+7y+15=0$.

AB 爲 L_1: $7x-4y-1=0$.

$$\therefore \quad \tan B=\frac{1(-4)-7\cdot 7}{7\cdot 1+(-4)7}=\frac{-4-49}{7-28}=\frac{53}{21}.$$

$$\therefore \quad B=\tan^{-1}\frac{53}{21}.$$

C 角: BC 爲 L_1: $x+7y+15=0.$

AC 爲 L_2: $8x+3y-39=0.$

$$\therefore \quad \tan C=\frac{8\cdot 7-1\cdot 3}{1\cdot 8+7\cdot 3}=\frac{56-3}{8+21}=\frac{53}{29}.$$

$$\therefore \quad C=\tan^{-1}\frac{53}{29}.$$

[習 題]

(1) 求從兩直線 $3x+2y=5$ 與 $x+y+3=0$ 之交點處,作一垂直於 $3x+2y=5$ 之直線方程式.

[提示] 先求交點的坐標,再應用公式 12. $(2x-3y=64)$

(2) 一直線在 y 軸上的截距等於其在 x 軸上的截距的 2 倍,且通過 $(7, 3)$ 點,求此直線方程式.

[提示] 先應用公式 14, 得 $\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1$, 再將已知點之坐標代入,求出 a 值即得. $(2x+y=17)$.

(3) 一直線平行於一所設直線 $x+3y+2=0$, 且與原點之距離爲 3.

[提示] 所求直線的線坡爲 $-\frac{1}{3}$,因此求其法線的線坡 $\tan\omega=3$, 再求 $\cos\omega$ 與 $\sin\omega$ 之值,代入公式 15 即得. $(x+3y=\pm 3\sqrt{10})$

(4) 一動圓常與定直線 $3x-y=6$ 相切,且通過 $(1, 1)$ 點,求此動圓圓心的軌跡方程式.

[提示] 1. 設 $P(x, y)$ 爲軌跡上的任意一點,

2. 從公式1, 求P點與(1, 1)點的距離;

3. 從公式18, 求$3x-y=6$到P點的距離;

4. 使此兩個距離相等,再化簡即得所求的軌跡方程式.

$$(x^2+6xy+9y^2+16x-32y-16=0)$$

(5) 設三角形三邊之直線方程式爲 $8x+y+34=0$, $x-y+2=0$, 及 $x+2y=7$, 證其外心,重心及垂心在一直線上.

[提示] 1. 先用聯立方程式,求三角頂的坐標;

2. 求出兩邊的中點的坐標;

3. 求這兩邊的中垂線的方程式; (應用公式12)

4. 求兩中垂線方程式的交點(即外心)的坐標;

5. 求這兩邊上的中線的方程式; (應用公式13)

6. 求這兩中線方程式的交點(即重心)的坐標;

7. 求過對角頂點的兩邊的垂線的方程式; (應用公式12)

8. 求這兩個垂線的方程式的交點(即垂心)的坐標;

9. 再用三角形面積公式或線坡公式證這三個心在一直線上.

(6) 設三角形的三邊的方程式爲 $4x-3y=12$, $5x-12y=4$, 及 $12x-5y=13$, 求其三內角的平分線的方程式.

[提示] 應用公式18.(參考例23).

第四章 圓

[提　要]

(23) 圓方程式的標準形式：設圓心爲 (a, b)，半徑爲 r，則此圓方程式爲

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 21)$$

推論： 若圓心在原點，半徑爲 r，則圓方程式爲

$$x^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 22)$$

(24) 圓方程式的普通形式：展開公式 21：

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

令 $D=-2a$，$E=-2b$，$F=a^2+b^2-r^2$，得圓的普通方程式爲

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 23)$$

(25) 圓的判別式：公式 23 可寫成

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F)$$

此式與公式 21 比較，知圓心爲 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$，半徑爲

$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$, 而根號內的 D^2+E^2-4F 稱爲圓的判别式.

a. $D^2+E^2-4F>0$, 則公式 23 代表一圓, 其圓心爲 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, 半徑爲 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

b. $D^2+E^2-4F=0$, 則半徑等於 0, 公式 23 代表一點圓 (point-circle), 卽 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

c. $D^2+E^2-4F<0$, 則半徑爲虛值, 公式 23 代表一虛圓 (imaginary circle).

推論: 公式 23 中, 若 $D=0$, 則圓心在 y 軸上; 若 $E=0$, 則圓心在 x 軸上.

(26 兩元二次方程式的一般形式: 爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 24)$$

若式中 $B=0$, $A=C\neq0$, 則公式 24 變成

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$$

爲一圓方程式, 因以 A 除各項, 得

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0.$$

與公式 23 的形式相同.

(27) 圓系:

a. 設有兩圓:

$$C_1:\quad x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

$$C_2:\quad x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

則 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1$

$$+K(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0 \cdots\cdots(\text{公式 }25)$$

也是個圓方程式. 若 $K=-1$, 則公式 25 變成

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0\cdots\cdots(\text{公式 }26)$$

爲一直線, 稱爲 C_1, C_2 兩圓的根軸 (radical axis).

推論 1: 公式 25 的圓心在 C_1, C_2 兩圓的連心線 (line of centers) 上, 且分此連心線的比, 就等於 K.

推論 2: C_1, C_2 兩圓的根軸 (卽公式 26 之所代表), 同這兩圓的連心線互相垂直.

b. 若兩圓 $C_1:\quad x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

$$C_2:\quad x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

相交於 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 兩點, 則

$$C_k:\ x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+K(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

爲代表通過 P_1, P_2 的圓系.

推論 1: 相交兩圓的根軸, 就是這兩圓的公共弦.

推論 2: 若 C_1, C_2 兩圓相切於 P_1 點, 則 C_k 爲代表切 C_1, C_2 於 P_1 點的圓系.

c. 若兩圓 C_1, C_2 的連心線在 x 軸上，根軸為 y 軸，則公式 25 變成

$$x^2+y^2+K'x+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 27)$$

K' 為參變數，等於 $\dfrac{D_1+KD_2}{1+K}$，而 $F=F_1=F_2$.

推論： 公式 27 所代表的圓系，其圓心在 x 軸上.

d. 若 r' 為圓系 $x^2+y^2+K'x+F=0$ 中一圓的半徑，圓心為 $(a', 0)$，則

$$r'^2=a'^2-F \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 28)$$

推論 1： 若 $F<0$，則 r' 為以 a' 與 $\sqrt{-F}$ 做直角兩邊的一個直角三角形的斜邊.

推論 2： 若 $F=0$，則 $r'=a'$.

推論 3： 若 $F>0$，則 a' 為以 r' 與 $\sqrt{F}$ 做直角兩邊的一個直角三角形的斜邊(但必須 $a'>\sqrt{F}$).

e. 公式 27 所代表的圓系，其圓心在 x 軸上，且

I. 若 $F<0$，則皆與 y 軸交於 $(0, +\sqrt{-F})$ 及 $(0, -\sqrt{-F})$ 兩點.

II. 若 $F=0$，則皆與 y 軸切於原點.

III. 若 $F>0$，則皆與圓 $x^2+y^2=F$ 直交.

(28) 切線的長.

a. 從圓外一點 $P_1(x_1, y_1)$ 到圓周

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

所作切線的長為 t, 則

$$t^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 29)$$

若圓方程式為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, 則切線長的平方為

$$t^2=x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 30)$$

b. *從圓周 C_k: $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+K\ (x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$ 上任意一點到兩圓.

$$C_1: \quad x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

$$C_2: \quad x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

所作切線長的平方比為常數,即等於 $-K$.

c. 若一動點到兩圓 C_1, C_2 所作切線長的平方比等於 $-K$, 則此動點的軌跡為 C_k.

d. 若一動點到兩圓 C_1, C_2 所作切線為等長, 則此動點的軌跡, 即為 C_1, C_2 兩圓的根軸.

(29) 圓切線的方程式.

a. 設 $P_1(x_1, y_1)$ 為 $x^2+y^2=r^2$ 圓周上的一點;則從 P_1 點所作此圓切線的方程式為

* 參考 Smith, Gale 解析幾何 p. 145.

$$x_1x+y_1y=r^2 \quad \text{(公式 31)}$$

b. 已知 m 爲圓 $x^2+y^2=r^2$ 的切線的線坡，則此切線方程式爲

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2} \quad \text{(公式 32)}$$

(30) *圓法線的方程式: 設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲圓 $x^2+y^2=r^2$ 上的一點，則此圓的法線方程式爲

$$y_1x-x_1y=0 \quad \text{(公式 33)}$$

注意 圓的法線與半徑相合.

[舉 例]

1. 已知圓心坐標爲 (4, 0), 半徑爲 4, 求作圓之方程式.(蘇, 第一次補)

〔解〕 從公式 21, 得所求圓方程式爲

$$(x-4)^2+y^2=4^2,$$

即 $$x^2+y^2-8x=0.$$

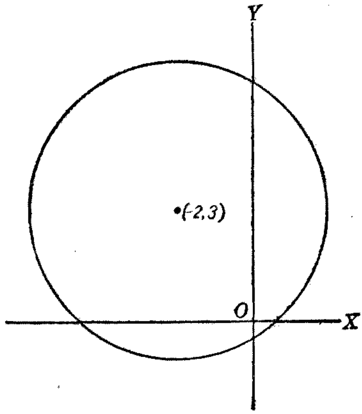
2. 圓心之坐標爲 $(-3, 4)$, 半徑爲 5; 求此圓之方程式.(浙, 二十一年度覆試)

解法與上題相同，讀者可自行解出.

---

*垂直於圓的切線於切點的直線稱爲圓的法線 (Normal of the circle).

3. 已知圓之方程式爲 $x^2+y^2+4x-6y-3=0$，求此圓之半徑及圓心，幷作其圖.（湘，四屆）



〔解〕從本章25節，知 $D=4, E=-6, F=-3$,

$\therefore$ 圓心爲 $(-2,3)$

半徑爲 $\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2-4(-3)}=\frac{1}{2}\sqrt{64}=4.$

故以 $(-2,3)$ 點爲圓心，4 爲半徑作圓，卽爲所設圓方程式之圖.

4. 已知圓之方程式爲 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$，求此圓之中心及半徑，並作其圖.（湘，五屆）

解法與上面例 3 相同，讀者可自行解出.

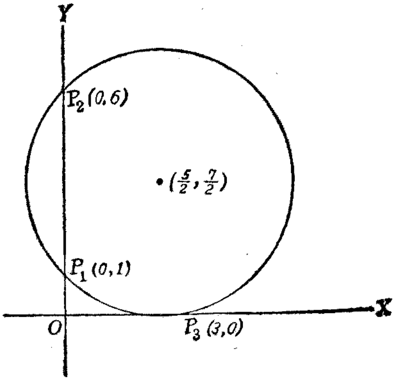
5. 決定 $x^2+y^2-6x+4y+4=0$ 之中心及半徑.（贛，二十三年）

解法與上面例3，4相同，讀者可自行解出.

6. 求 $x^2+y^2-2x-3=0$ 之圓心坐標及半徑之長.（浙，二十一年度二期）

7. 求經過三點 $P_1(0,1)$, $P_2(0,6)$, 與 $P_3(3,0)$ 之圓之方

程式,並求其圓心與半徑.(河北,二十二年度,又晉二十二年)



〔解〕 圓心必在P_1P_2的中垂線上,其方程式為

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y-6)^2}$

化簡即為$2y=7$………(A)

又圓心必在P_1P_3的中垂線上,其方程式為

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

化簡即為$3x-y=4$….(B)

解聯立方程式(A),(B),得其交點為$(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$,故得圓心的坐標為$(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$;又從公式1,求得圓心到$P_1$或$P_2$,$P_3$的距離為$\frac{5\sqrt{2}}{2}$,即半徑為$\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

故從公式21,知所求之圓方程式為

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

即 $$x^2-5x+\frac{25}{4}+y^2-7y+\frac{49}{4}=\frac{50}{4},$$

即 $$x^2+y^2-5x-7y+6=0.$$

又法: 設所求圓方程式為

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

因此圓通過 $P_1(0,1)$ 點，故

$$0+1+0+E+F=0,\ \text{即}\ F+E=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

又此圓通過 $P_2(0,6)$ 點，故

$$0+36+0+6E+F=0,\ \text{即}\ 6E+F=-36 \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

又此圓通過 $P_3(3,0)$ 點，故

$$9+0+3D+0+F=0,\ \text{即}\ 3D+F=-9 \cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

解聯立方程式 $(A),(B),(C)$，得 $D=-5, E=-7, F=6.$

代入圓方程式得 $\underline{x^2+y^2-5x-7y+6=0.}$

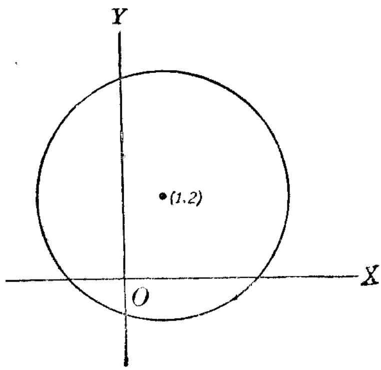
從本章25節，知圓心爲 $\underline{(\frac{5}{2},\frac{7}{2})}$，半徑爲

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+(-7)^2-4\cdot 6}=\underline{\frac{5\sqrt{2}}{2}}.$$

8. 繪畫下列曲線：(學)

(a) $(x-1)^2+(y-2)^2=9.$ [(b) 見圓錐曲線章，(c) 見第二章例11]

[解] 從公式21，知此方程式的軌跡爲一圓，其圓心爲 $(1,2)$，半徑爲3，故得右圖.



9. 一點 P 與二直線 $x-2y=0,\ 2x+y-10=0$ 之

距離之平方和爲4,試證P點之軌跡爲一圓,並求其圓心及半徑.(成都)

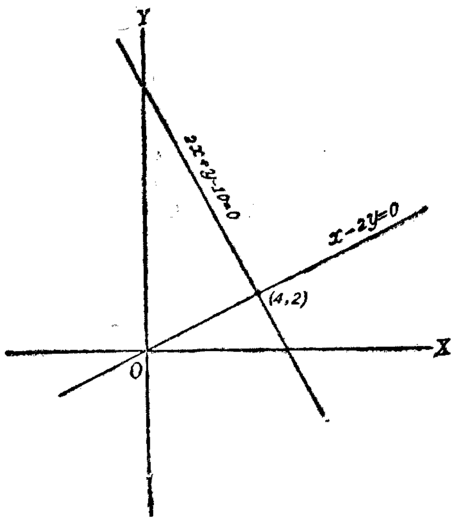
〔解〕 設$P(x,y)$爲軌跡上的任意一點,則從公式18:

從$x-2y=0$到P點的距離爲 $\dfrac{x-2y}{-\sqrt{5}}$

從$2x+y-10=0$到P點的距離爲 $\dfrac{2x+y-10}{\sqrt{5}}$

從題意: $\left(\dfrac{x-2y}{-\sqrt{5}}\right)^2+\left(\dfrac{2x+y-10}{\sqrt{5}}\right)^2=4.$

即 $\dfrac{x^2-4xy+4y^2}{5}+\dfrac{4x^2+y^2+100+4xy-40x-20y}{5}=4,$



化簡即得　$x^2+y^2-8x-4y+16=0.$

從公式23知此方程式的軌跡為一圓,

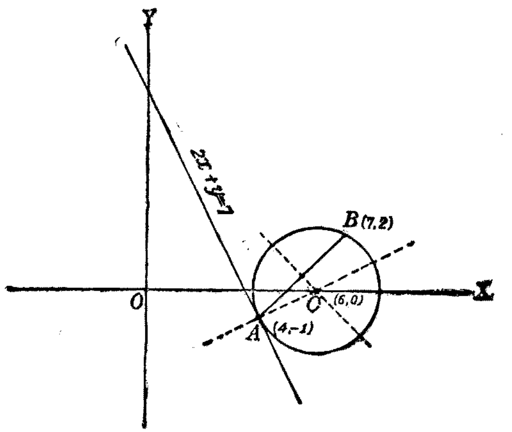
其圓心為$\left[-\left(-\frac{8}{2}\right),\ -\left(-\frac{4}{2}\right)\right]$即$(4, 2)$.

半徑為$\frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2+(-4)^2-4\times 16}=\frac{1}{2}\sqrt{64+16-64}=2.$

10. 有一圓經過$(7, 2)$一點,又與直線$2x+y=7$在$(4, -1)$點相切,求此圓之方程式.(滬,二十二年)

〔解〕命切點$(4, -1)$為A,圓周上的他一已知點$(7, 2)$為B.

因圓周切直線$2x+y=7$於A點,故其圓心必在垂直於此直線於A點的一直線上,其方程式為(公式12).



$y+1=\frac{1}{2}(x-4)$,〔因通過$(4,-1)$點,其線坡等於$2x+y=7$之線坡之負倒數〕

即 $x-2y=6$ ……………………(A)

又圓心必在AB的中垂線上,

AB的方程式(公式13):$\dfrac{x-4}{y+1}=\dfrac{7-4}{2+1}$,即 $x-y=5$.

AB中點的坐標$x=\dfrac{7+4}{2}=\dfrac{11}{2}$, $y=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$,

AB中垂線的方程式(公式12):

$y-\dfrac{1}{2}=-1\left(x-\dfrac{11}{2}\right)$…(因直線$AB$的線坡為1)

即 $x+y=6$ ……………………(B)

解聯立方程式(A),(B),得圓心坐標:$C(6,0)$

又半徑 $CA=\sqrt{(6-4)^2+(0+1)^2}=\sqrt{5}$.

故得所求的圓方程式為$(x-6)^2+y^2=5$.

11. 設圓與直線$3x+4y-8=0$相切,其心為兩直線$2x-3y=4$, $x+7y=19$之交點.問圓之方程式為何?(皖)

〔解〕 解聯立方程式

$$\begin{cases}2x-3y=4\\ x+7y=19\end{cases}$$

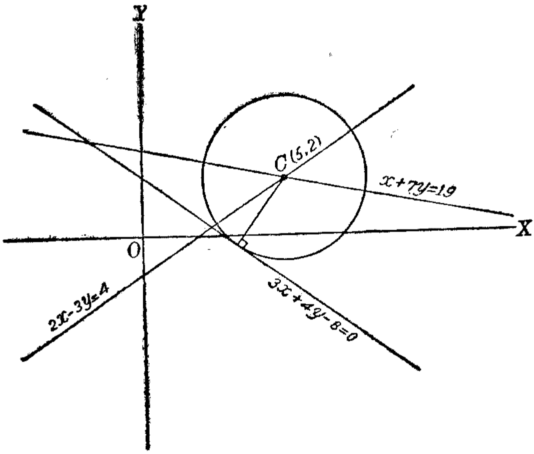
得交點即圓心的坐標為$C(5,2)$,

從直線 $3x+4y-8=0$ 到圓心 $(5,2)$ 的距離——卽半徑——爲(公式18):

$$\frac{3\cdot5+4\cdot2-8}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=\underset{\sim}{3}$$

故得所求的圓方程式爲

$$(x-5)^2+(y-2)^2=9.$$



12. 設圓 $x^2+y^2+2ax=0$ 與直線 $y=x+1$ 相切,問 a 之值爲何?(滬,二十三年)

〔解〕 以直線方程式 $y=x+1$ 代入圓方程式 $x^2+y^2+2ax=0$,得

$$x^2+(x+1)^2+2ax=0,\text{ 卽 }2x^2+(2+2a)x+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

因直線與圓相切,故僅有一個解答,即方程式 (A) 必有等根, $\therefore\ b^2-4ac=0$, 即

$$(2+2a)^2-4\cdot2\cdot1=0,$$

化簡 $a^2+2a-1=0,\quad \therefore\ a=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+4}}{2}=-1\pm\sqrt{2}.$

13. 證明兩圓 $x^2+y^2-4y-4=0$, $x^2+y^2+2x+10y+8=0$, 爲相互外切.

〔解〕 設 C_1: $x^2+y^2-4y-4=0.$

C_2: $x^2+y^2+2x+10y+8=0.$

C_1 之圓心爲 $(0,2)$, 半徑爲 $r_1=\frac{1}{2}\sqrt{16+16}=2\sqrt{2}$;

C_2 之圓心爲 $(-1,-5)$, 半徑爲 $r_2=\frac{1}{2}\sqrt{4+100-32}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{72}=3\sqrt{2}.$ $(0,2)$ 與 $(-1,-5)$ 兩點的聯線爲 $\sqrt{1+49}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$

又 $$r_1+r_2=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}.$$

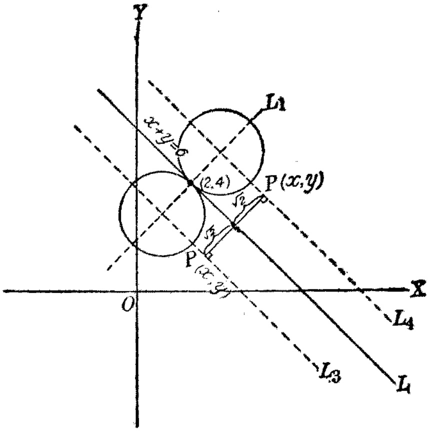
即 C_1, C_2 兩圓之連心線等於其兩半徑之和,故此兩圓爲互相外切.

14. 一圓與直線 $x+y=6$ 切於 $(2,4)$ 點,其半徑爲 $\sqrt{2}$, 試求此圓方程式.

〔解〕 設 L: 表已知的切線.

L_1: 表通過切點 $(2,4)$ 又垂直於 L 的直線.

L_3 與 L_4 表距 L 爲 $\sqrt{2}$ 的兩平行直線.



由是已知

$$L:\ x+y=6,$$

(a) 先求得 L_1: $y-4=x-2$, [∵ 通過(2,4)點, 又 L 之線坡爲 -1, 故 L_1 之線坡爲 1]

即 $\underline{x-y=-2.}$

(b) 再求 L_3: 設 $P(x,y)$ 爲 L_3 上任意一點, 從公式 18, 知從 L 到 P 點的距離爲 $\dfrac{x+y-6}{\sqrt{2}}$, 但已知此距離爲 $\sqrt{2}$, 故得 L_3 之方程式爲

$$^{*}-\frac{x+y-6}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

化簡卽得 $\underline{x+y=4.}$

(c) 同理可求得 L_4: $\dfrac{x+y-6}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

化簡卽得 $\underline{x+y=8.}$

(d) 解聯立方程式 L_1 與 L_3, 得 $x=1, y=3$,

---

* 參考第三章 19 節注意.

卽圓心坐標爲(1,3),故所求的圓方程式爲

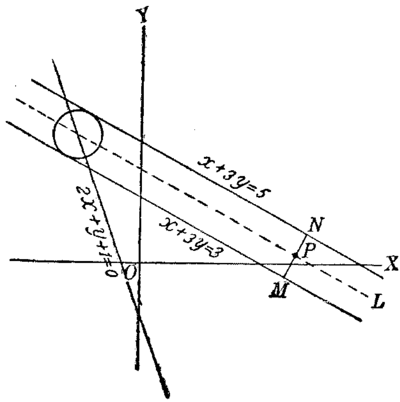
$$(x-1)^2+(y-3)^2=2.$$

再解聯立方程式L_1與L_4,得$x=3, y=5$.

卽圓心坐標爲(3,5),故又得圓方程式爲

$$(x-3)^2+(y-5)^2=2.$$

15. 一圓與兩平行直線$x+3y=5, x+3y=3$相切,其圓心又在直線$2x+y+1=0$上,求此圓方程式.



〔解〕 從初等幾何學定理,知所求圓的圓心必在與所設兩平行線等距離的一平行線L上;

設$P(x, y)$爲L上的任意一點,則

$$MP=\frac{x+3y-3}{\sqrt{10}},\quad NP=\frac{x+3y-5}{\sqrt{10}},$$

因$MP=-NP$,故得直線L的方程式爲

$$\frac{x+3y-3}{\sqrt{10}}=-\frac{x+3y-5}{\sqrt{10}},$$

化簡得 $$x+3y-4=0.$$

又因圓心在直線 $2x+y+1=0$ 上，故解聯立方程式

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\x+3y-4=0\end{cases} \text{得} \begin{cases}x=-\dfrac{7}{5}\\y=\dfrac{9}{5}\end{cases}$$

卽圓心的坐標爲 $\left(-\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$，從圓心到直線 $x+3y=3$ 的距離（卽半徑）爲

$$\frac{-\frac{7}{5}+3\cdot\frac{9}{5}-3}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}。$$

故得所求圓的方程式爲

$$\left(x+\frac{7}{5}\right)^2+\left(y-\frac{9}{5}\right)^2=\frac{1}{10}.$$

16. 設三角形的三邊爲 L_1: $3x-4y=5$, L_2: $4x-3y=-10$, L_3: $y=2$；求此三角形內切圓的方程式.

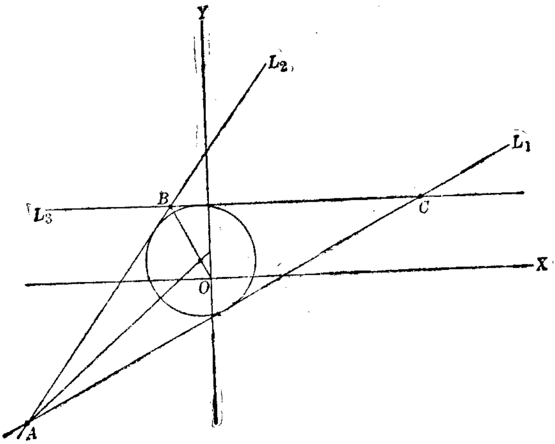
〔解〕 A 角平分線的方程式爲

$$\frac{3x-4y-5}{\sqrt{9+16}}=\frac{4x-3y+10}{-\sqrt{9+16}},$$

卽
$$\frac{3x-4y-5}{5}+\frac{4x-3y+10}{5}=0.$$

$$\therefore\quad 7x-7y+5=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

又 B 角平分線的方程式爲



$$\frac{4x-3y+10}{-5}=y-2,\ 卽\ 2x+y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

解聯立方程式 $(A), (B)$, 得 $x=-\frac{5}{21}$, $y=\frac{10}{21}$.

卽圓心的坐標爲 $\left(-\frac{5}{21}, \frac{10}{21}\right)$, 半徑爲 $\frac{32}{21}$.

故得所求之圓方程式爲

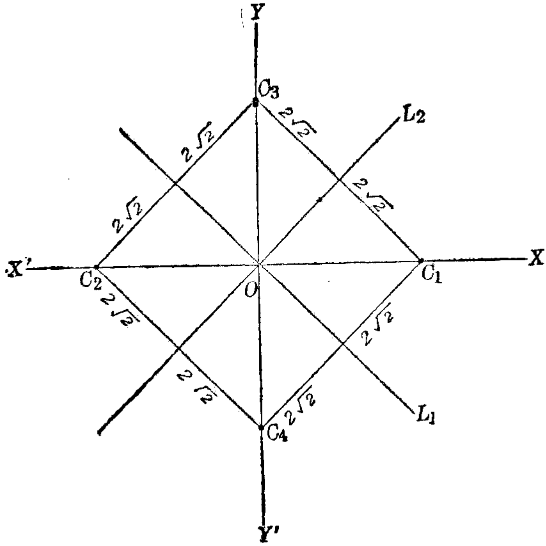
$$\left(x+\frac{5}{21}\right)^2+\left(y-\frac{10}{21}\right)^2=\left(\frac{32}{21}\right)^2.$$

17. 一圓與兩直線 L_1: $x+y=0$, L_2: $x-y=0$ 相切,其半徑爲 $2\sqrt{2}$, 求此圓方程式.

〔解〕 因 L_1 爲第二,第四兩象限的平分角線, L_2 爲第一,第三兩象限的平分角線,故 x 軸與 y 軸都是 L_1, L_2 兩直線交角的平分線,卽圓心 C_1, C_2 與 C_3, C_4 必各在

x 軸與 y 軸上.

求 C_1 的圓心: 距 L_1 爲 $2\sqrt{2}$ 的一平行直線的方程式爲



$$\frac{x+y}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2},\quad 即\quad x+y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

因 C_1 在 x 軸上, 故 $y=0$, 代入 (A) $\therefore\ x=4.$

故 C_1 的坐標爲 $(4, 0)$

$\therefore$ C_1 圓的方程式爲

$$(x-4)^2+y^2=8.$$

求 C_2 的圓心:距 L_1 爲 $2\sqrt{2}$ 的又一平行直線方程式爲

$$-\frac{x+y}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2},\quad 即\quad x+y=-4\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

因圓心在 (B) 與 x 軸的交點上,故得 $y=0, x=-4$,

即 C_2 的坐標爲 $(-4, 0)$,

$\therefore$ C_2 圓的方程式爲

$$(x+4)^2+y^2=8.$$

同樣: C_3, C_4 的坐標各爲 $(0, 4), (0, -4)$

故得 C_3: $x^2+(y-4)^2=8.$

C_4: $x^2+(y+4)^2=8.$

18. 一圓通過 $(4, -1)$ 點,且與一所設圓 $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 切於 $(1, 2)$ 點;試求此圓方程式.

〔解〕 所設圓之圓心爲 $(-1, 3)$;

因所求圓的圓心必在 $(-1, 3)$ 與 $(1, 2)$ 兩點聯線的延線上(兩圓相切,其聯心線必過切點),此兩點聯線的方程式爲

$$\frac{x+1}{y-3}=\frac{1+1}{2-3},\quad 即\quad x+2y=5\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

又因所求圓通過 $(4, -1), (1, 2)$ 兩點,故其圓心必又在此兩點聯線的中垂線上;

過 $(4, -1), (1, 2)$ 兩點的方程式爲

$$\frac{x-4}{y+1}=\frac{1-4}{2+1}, \text{ 即 } x+y=3$$

$(4, -1)$ 與 $(1, 2)$ 兩點的中點坐標爲 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{1}{2}$,

故得 $(4, -1), (1, 2)$ 兩點聯線的中垂線的方程式爲

$$y-\frac{1}{2}=1\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right),$$

即 $$x-y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

解聯立方程式 $(A), (B)$, 得圓心的坐標爲 $(3, 1)$, 其半徑爲 $(3, 1)$ 與 $(1, 2)$ 兩點間的距離, 即 $\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2} =\sqrt{5}$.

故得所求的圓方程式爲 $(x-3)^2+(y-1)^2=5$.

19. 一圓通過 $(2, -2)$ 點, 且通過兩圓 $x^2+y^2-6x=0$ 與 $x^2+y^2-4=0$ 的交點, 求此圓方程式.

〔解〕 從本章 27 節 (b) 知所求的圓方程式必爲

$$x^2+y^2-6x+k(x^2+y^2-4)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

因此圓通過 $(2, -2)$ 點, 故得

$$2^2+(-2)^2-6\cdot 2+k[2^2+(-2)^2-4]=0, \quad \therefore k=1,$$

代入 (A) 中, 即得所求的圓方程式爲

$$x^2+y^2-6x+(x^2+y^2-4)=0, \text{ 即 } x^2+y^2-3x-2=0.$$

20. 在圓系 $x^2+y^2-4x-3+k(x^2+y^2-4y-3)=0$ 中有

一圓的圓心在直線$x-y-4=0$上,求此圓之方程式.

〔解〕 設 C_1: $x^2+y^2-4x-3=0$,

C_2: $x^2+y^2-4y-3=0$,

C_k: $x^2+y^2-4x-3+k(x^2+y^2-4y-3)=0$.

因C_1的圓心爲$(2, 0)$, C_2的圓心爲$(0, 2)$, 此兩心聯結線的方程式爲 $\dfrac{x-2}{y}=\dfrac{-2}{2}$, 即 $x+y-2=0$……(A)

從本章27節(a)推論1: 知C_k的圓心必在直線(A)上,但又知此圓心在直線$x-y-4=0$上,故所求圓的圓心必爲此兩直線的交點;解聯立方程式

$$\begin{cases}x-y-4=0\\x+y-2=0\end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$$

即得圓心之坐標爲 $(3, -1)$……(B)

又C_k圓的方程式也可寫成

$$x^2+y^2-\frac{4}{1+k}x-\frac{4k}{1+k}y-3=0,$$

其圓心爲$\left[\dfrac{4}{2(1+k)}, \dfrac{4k}{2(1+k)}\right]$……(C)

比較(B), (C), 知 $\dfrac{4}{2(1+k)}=3$ 或 $\dfrac{4k}{2(1+k)}=-1$, $\therefore k=-\dfrac{1}{3}$.

代入C_k中,即得所求的圓方程式爲

$$x^2+y^2-6x+2y-3=0.$$

21. 一圓的半徑爲4,且通過兩圓 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2+2x-3=0$ 之交點,試求此圓方程式.

〔解〕 從本章27節(b),知通過所設兩圓交點的圓系爲

$$C_k:\quad x^2+y^2-4+k(x^2+y^2+2x-3)=0,$$

即
$$x^2+y^2+\frac{2k}{1+k}x-\frac{3k+4}{1+k}=0,$$

此圓系的半徑爲 $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2k}{1+k}\right)^2-4\left(-\frac{3k+4}{1+k}\right)}$

但已知其中一圓的半徑爲4,故

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4k^2}{(1+k)^2}+\frac{4(3k+4)}{1+k}}=4,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4k^2+4(3k+4)(k+1)}{(1+k)^2}}=4,$$

$$\frac{1}{1+k}\sqrt{4k^2+7k+4}=4,$$

$$\sqrt{4k^2+7k+4}=4(1+k),$$

$$4k^2+7k+4=16(1+2k+k^2),$$

$$12k^2+25k+12=0,$$

$$(3k+4)(4k+3)=0.$$

$$\therefore\quad k=-\frac{4}{3}\ 或\ k=-\frac{3}{4}.$$

代入C_k中,得所求的圓方程式為

$$x^2+y^2-4-\frac{4}{3}(x^2+y^2+2x-3)=0$$

及 $$x^2+y^2-4-\frac{3}{4}(x^2+y^2+2x-3)=0$$

即 $$\underline{x^2+y^2+8x=0.}$$

及 $$\underline{x^2+y^2-6x-7=0.}$$

22. 若已知圓$2x^2+2y^2=13$之切線為平行於一所設直線$x-5y=1$,求此切線方程式.

〔解〕 把所設圓改寫為$x^2+y^2=\frac{13}{2}$,其半徑$r=\sqrt{\frac{13}{2}}$,

把已知直線改寫為$y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}$,其線坡$m=\frac{1}{5}$,

故用公式32,得所求的切線方程式為

$$y=\frac{1}{5}x\pm\sqrt{\frac{13}{2}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2},$$

$$y=\frac{1}{5}x\pm\sqrt{\frac{13}{2}}\cdot\sqrt{\frac{26}{25}},$$

$$y=\frac{1}{5}x\pm\frac{13}{5},$$

即 $\underline{x-5y+13=0}$ 及 $\underline{x-5y-13=0.}$

23. 設圓$2x^2+2y^2=y$之切線與x軸所成之角為$45°$,求此切線方程式.

〔解〕 因切線之線坡爲 $m=\tan 45^\circ=1$, 故此切線爲

$$y=x+k, \ (k\text{ 爲參變數})$$

代入圓方程式: $2x^2+2(x+k)^2=x+k,$

$$4x^2+(4k-1)x+2k^2-k=0.$$

因直線與圓相切,僅有一個交點,故此方程式有等根,即必 $b^2-4ac=0,\quad \therefore\quad (4k-1)^2-4\cdot 4(2k^2-k)=0,$

即 $$16k^2-8k-1=0,$$

$$\therefore\quad k=\frac{8\pm\sqrt{64+64}}{32}=\frac{8\pm 8\sqrt{2}}{32}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{4}.$$

把這個 k 的值代入上面切線方程式,得

$$y=x+\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{2}),$$

即 $$\underline{4x-4y+1+\sqrt{2}=0.}$$

與 $$\underline{4x-4y+1-\sqrt{2}=0.}$$

24. 設圓 $x^2+y^2-4x+6y-4=0$ 的切線,垂直於一所設直線 $4x+y=0$, 求此切線方程式.

〔解〕 因所設直線的線坡爲 -4, 則所求的切線的線坡爲 $\frac{1}{4}$, 故所求的切線方程式必爲

$$y=\frac{1}{4}x+k \ (k\text{ 爲參變數})$$

解法與上例同,讀者可自行解出.

答案 $\begin{cases} \underline{x-4y+3\ \ =0,} \\ \underline{x-4y-31=0.} \end{cases}$

25. 求切一圓 $9x^2+9y^2=5$ 於一點 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 的切線方程式.

〔解〕 把所設圓改寫爲 $x^2+y^2=\frac{5}{9}$, 半徑 $r^2=\frac{5}{9}$, 圓周上的一點 (x_1, y_1) 爲 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 故從公式 31, 得所求的切線方程式爲

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=\frac{5}{9}$$

即 $$\underline{3x+6y=5.}$$

26. 求切一圓 $x^2+y^2+2x-6y+2=0$ 於一點 $(1,1)$ 的切線方程式.

〔解〕 所設圓的圓心爲 $(-1,3)$; 聯結兩點 $(-1,3)$ 與 $(1,1)$ 的半徑的直線方程式爲 $\frac{x+1}{y-3}=\frac{1+1}{1-3}$,

即 $$\underline{x+y=2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

因所求的切線爲通過切點而垂直於過切點的半徑 (A), 故其方程式爲

$$y-1=1\cdot(x-1),\quad \text{即}\quad \underline{x-y=0.}$$

27. 求從一點$(4,2)$到圓$x^2+y^2-4x+4y-2=0$所作的切線方程式,並此切線的長.

〔解〕從第三章22節(b),知通過定點$(4,2)$的直線系為

$$y-2=m(x-4)$$

即
$$y=mx-4m+2 \quad \cdots\cdots(A)$$

因所求直線與所設圓相切,故方程式(A)與圓方程式

$$x^2+y^2-4x+4y-2=0 \quad \cdots\cdots(B)$$

必定有一公共解答,把(A)代入(B)中:

$$x^2+(mx-4m+2)^2-4x+4(mx-4m+2)-2=0,$$

$$x^2+m^2x^2+16m^2+4-8m^2x+4mx-16m-4x$$
$$+4mx-16m+8-2=0,$$

$$(1+m^2)x^2-4(2m^2-2m+1)x+(16m^2-32m+10)=0.$$

因此方程式須有等根,即$b^2-4ac=0$,

$$\therefore\quad 16(2m^2-2m+1)^2-4(1+m^2)(16m^2-32m+10)=0,$$

化簡,得
$$3m^2+8m-3=0,$$

$$\therefore\quad (3m-1)(m+3)=0,\quad \therefore\quad m=\frac{1}{3} \text{ 或 } m=-3.$$

代入方程式(A)得　$y-2=\dfrac{1}{3}(x-4)$

與　　　　$y-2=-3(x-4)$,

卽　　　　$x-3y+2=0$.

與　　　　$3x+y-14=0$.

又從公式30,得切線長 $=\sqrt{4^2+2^2-4\cdot 4+4\cdot 2-2}$

$$=\sqrt{10}.$$

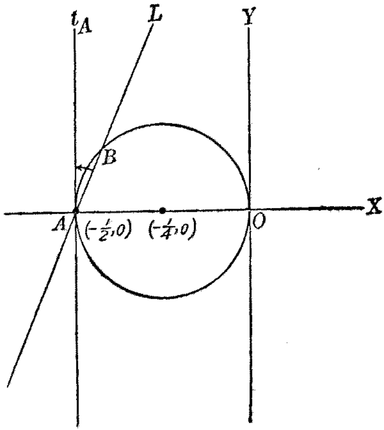
28.　求直線 $4x-y+2=0$ 與圓 $2x^2+2y^2+x=0$ 的交角.

〔解〕　解聯立方程式

$$\begin{cases}4x-y+2=0\\ 2x^2+2y^2+x=0,\end{cases}$$

得交點爲 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$,

$$B\left(-\frac{8}{17},\frac{2}{17}\right).$$



因圓心爲 $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ 在 x 軸上,故 A 點的切線 t_A 垂直於 x 軸,其方程式爲 $x=-\frac{1}{2}$, 卽 $2x+1=0$.

又切線 t_A 與所設直線 L: $4x-y+2=0$ 的交角爲(公式19).

---

* 直線與曲線的交角卽爲從交點所作曲線的切線與直線所成的角.

$$\tan\theta=\frac{4\cdot 0-2(-1)}{2\cdot 4+0(-1)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},$$

故得所求的交角 $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{4}$.

在 B 點的交角亦與 A 點的交角相等.

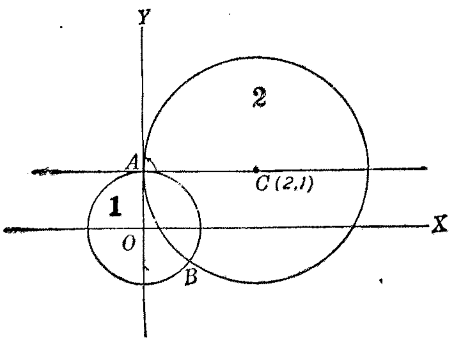
29. 求兩圓 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 的交角.*

〔解〕 設 C_1: $x^2+y^2=1$,

C_2: $x^2+y^2-4x-2y+1=0$.

C_1 的圓心為原點, 半徑為 1,

C_2 的圓心為 (2, 1), 半徑 2.



解 C_1, C_2 兩聯立方程式得交點 $A(0,1)$, $B\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

在 A 點 C_1 圓的切線為 $y=1$, C_2 圓的切線為 $x=0$ (即 y 軸).

* 曲線與曲線的交角, 即為在交點所作兩曲線的切線的交角.

此兩切線的交角為90°,故所設兩圓為直交圓.

30. 求兩圓 C_1: $2x^2+2y^2+3x+5y-9=0$, C_2: $6x^2+6y^2+11x+13y-23=0$, 的公共弦的方程式.

〔解〕 從本章27節(b)推論1,知相交兩圓的公共弦就是他們的根軸;依27節定理(a),知所求的方程式為 $C_1-C_2=0$.

$$\text{即}\quad x^2+y^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}-\left(x^2+y^2+\frac{11}{6}x+\frac{13}{6}y-\frac{23}{6}\right)=0,$$

$$\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}-\frac{11}{6}x-\frac{13}{6}y+\frac{23}{6}=0$$

化簡 $x-y+2=0.$

[習 題]

(1) 設一圓與直線 $2x+5y=15$ 相切,其圓心為 $(3, -4)$;求此圓之方程式.

[提示] 先求半徑的長,即從切線到圓心的距離(用公式18),再代入公式21卽得. $[(x-3)^2+(y+4)^2=29]$

(2) 一動點與定點 $(1, 0)$ 的距離,恆等於與定點 $(3, 5)$ 的距離的2倍,求此動點的軌跡方程式,並作圖.

[提示] 假定動點為 $P(x, y)$;應用兩點間的距離公式卽得.

$(3x^2+3y^2-22x-40y+135=0)$

(3) 一圓的半徑為 $\sqrt{5}$,與直線 $2x+y=3$ 切於 $(2, -1)$ 點,求此圓的方程式.

［提示］解法與上面例14相同.　$\begin{cases}(x-4)^2+y^2=5\\x^2+(y+2)^2=5\end{cases}$

(4) 設圓 $x^2+y^2+2x=0$ 的切線，垂直於所設直線 $x-2y=6$，求此切線方程式.

［提示］因所設直線 $x-2y=6$ 的線坡爲 $\frac{1}{2}$，故切線的線坡爲 -2；假定切線方程式爲 $y=-2x+k$，再代入圓方程式中決定 k 的值卽得.　$\begin{cases}2x+y+2+\sqrt{5}=0\\2x+y+2-\sqrt{5}=0\end{cases}$

(5) 一圓的圓心爲 $(1, -2)$，與所設圓 $x^2+y^2=45$ 相切，求此圓的方程式.

［提示］1. 求所設圓的圓心；

2. 求兩圓聯心線的方程式；

3. 求此聯心線與所設圓的交點；

4. 求所求圓的半徑長.

$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=20\\(x-1)^2+(y+2)^2=80\end{cases}$

(6) 設三圓 C_1: $x^2+y^2+x+2y-6=0$, C_2: $x^2+y^2=1$, C_3: $x^2+y^2+2x-3y-4=0$；證此三圓的三個根軸交於一點（稱爲根心），並求其根心.

［提示］從27節定理 (a)，求此三圓中兩兩的根軸，得三個根軸方程式；證此三直線交於一點.　$(3, 1)$

第五章 圓錐曲線

[提　　要]

(31) 圓錐曲線的種類: 一動點與一定點的距離對於與一定直線距離的比爲一定數,則此動點的軌跡爲圓錐曲線.此定點稱爲焦點 (focus), 定直線稱爲準線 (directrix), 定比稱爲離心率 (eccentricity). 設離心率爲 e, 則

a. 若 $e=1$, 軌跡爲拋物線(parabola);

b. 若 $e<1$, 軌跡爲橢圓(ellipse);

c. 若 $e>1$, 軌跡爲雙曲線(hyperbola).

(32) 圓錐曲線的普通方程式: 設焦點爲 (i,j), 準線爲 $x\cos\omega+y\sin\omega=p$, 離心率爲 e, 則得圓錐曲線的普通方程式爲

$$(x-i)^2+(y-j)^2=e^2(x\cos\omega+y\sin\omega-p)^2 \cdots\cdots (公式\ 34)$$

I. 拋物線

(33) 拋物線方程式的標準形式: a. 若拋物線的軸*

---

*通過焦點而垂直於準線的直線,稱爲圓錐曲線的軸,常爲圓錐曲線之對稱軸.

爲x軸,頂點在原點,焦點爲$(p, 0)$,準線爲$x=-p$,則拋物線方程式爲

$$y^2=4px \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (公式 35)$$

x與p須同號(否則y得虛值):若p爲正數,則x祇能取正値,而x之增也緩,對應的正負y之絕對値之增也急,是以曲線向右無限展開;若p爲負數,則x祇能取負値,而曲線向左無限展開.

b. 若拋物線的軸爲y軸,頂點在原點,焦點爲$(0, p)$,準線爲$y=-p$,則拋物線方程式爲

$$x^2=4py \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (公式 36)$$

y與p須同號:若p爲正數,則曲線向上無限展開;若p爲負數,則曲線向下無限展開.

(34) 通徑: 在曲線間通過焦點而垂直於軸的線段,稱爲通徑(Latus rectum).拋物線的通徑長等於頂點與焦點間距離的4倍,即

$$l=4p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (公式 37)$$

(35) 拋物線方程式的普通形式: 在前面公式24中,若$B=0$, $A=0$,則成

$$Cy^2+Dx+Ey+F=0 \cdots\cdots\cdots (公式 38)$$

或$B=0, C=0$,則成

$$Ax^2+Dx+Ey+F=0 \cdots\cdots\cdots (公式 39)$$

都是代表拋物線的方程式

公式38可化成 $(y-k)^2=4p(x-h)$…………(公式40)

代表頂點在(h, k),曲線軸平行於x軸的拋物線.

公式39可化成 $(x-h)^2=4p(y-k)$…………(公式41)

代表頂點在(h, k),曲線軸平行於y軸的拋物線.

II. 橢圓

(36) 橢圓方程式的標準形式: a. 若橢圓中心在原點,兩焦點$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$在x軸上,長軸為$2a$,短軸為$2b$,即曲線在x軸上的交點為$A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$,在y軸上的交點為$B(0, b)$, $B'(0, -b)$,則此橢圓方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{…………………………(公式42)}$$

注意1: 設P為橢圓上的任意一點,則

$$PF+PF'=2a.$$

a恆大於b.

注意2: 設e為橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的離心率,其值小於1,則

I. $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$.

II. 焦點的橫坐標為 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2e^2}=ae$

III. 半短軸 $b=a\sqrt{1-e^2}=\sqrt{a^2-c^2}$.

IV. 準線方程式為$x=\pm\frac{a}{e}$.

b. 若橢圓的長軸在 y 軸上,則同樣得橢圓方程式.

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }43)$$

(37) 橢圓通徑: 橢圓的通徑長為

$$l=\frac{2b^2}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }44)$$

(38) 橢圓方程式的普通形式: 在前面公式 24 中,若 $B=0$, A 與 C 為同號,則成

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }45)$$

為代表橢圓的方程式.此式可化成

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }46)$$

為中心在 (h, k), 長軸平行於 x 軸的橢圓.或化成

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }47)$$

為中心在 (h, k), 長軸平行於 y 軸的橢圓(假設 $a>b$).

推論: 把公式 45 化成

$$A(x-h)^2+C(y-k)^2=G$$

則 I. 若 A, C, G 為同號, 則此式為橢圓祇成 (h, k) 之一點.

II. 若 A, C 同號, $G=0$, 則此式為點橢圓.

III. 若 A, C 同號, G 為異號, 則此式為虛橢圓無實跡.

III. 雙曲線

(39) 雙曲線方程式的標準形式: a. 若雙曲線的中心在原點,兩焦點 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 在 x 軸上,頂點爲 $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, 即主軸爲 $2a$, 屬軸 (conjugate axis) 爲 $2b$, 此雙曲線方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 48)$$

注意 1: 設 P 爲雙曲線上的任意一點,則

$$PF \sim PF' = 2a.$$

a 較 b 或大或小或等皆可.

注意 2: 設 e 爲雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的離心率其值大於1, 則

I. $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}$.

II. 焦點的橫坐標爲 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2e^2}=ae$.

III. 半屬軸爲 $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

IV. 準線方程式爲 $x=\pm\frac{a}{e}$.

b. 若雙曲線的主軸在 y 軸上,則同樣得雙曲線的方程式爲

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 49)$$

主軸爲 $2a$, 屬軸爲 $2b$.

或 $$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad\text{(公式 50)}$$

主軸為 $2b$, 屬軸為 $2a$, 且 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{b^2e^2}=be$.

$a=\sqrt{c^2-b^2}$, 準線自曲線中心之距離 $=\pm\frac{b}{e}$.

〔此為公式(48)所代表的雙曲線之共軛曲線〕

(40) 雙曲線通徑: 雙曲線的通徑長為

$$l=\frac{2b^2}{a} \quad\text{(公式 51)}$$

(41) 漸近線: 雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的漸近線為

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

即 $$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\end{aligned}\right\} \quad\text{(公式 52)}$$
與

推論: 設雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 在主軸上的兩頂點為 A, A', 屬軸上的兩虛頂點(即其共軛曲線之頂點)為 B, B', 則從 A, A'; B, B' 作各軸的平行線所成矩形的對角線的延線, 就是這雙曲線的漸近線, 其交點就是這雙曲線的中心.

(42) 雙曲線方程式的普通形式: 在前面公式 24 中, 若 $B=0$, A 與 C 前為異號, 則

$$Ax^2-Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad\text{(公式 53)}$$

爲代表雙曲線的方程式.此式可化成

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 54)$$

爲中心在(h, k),主軸平行於x軸的雙曲線.或化成

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 55)$$

爲中心在(h, k),主軸平行於y軸的雙曲線.

推論 1: 把公式53化成$A(x-h)^2-C(y-k)^2=G$,則

I. 若$G\neq 0$,則此式爲雙曲線.

II. 若A, C相等,$G\neq 0$,則此式爲正雙曲線(參考44節).

III. 若$G=0$,則此式爲相交二直線.

推論 2: 雙曲線$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$的漸近線爲

$$\left[\frac{x-h}{a}+\frac{y-k}{b}\right]=0,\ \text{與}\left[\frac{x-h}{a}-\frac{y-k}{b}\right]=0.$$

(43) 共軛雙曲線: 若一雙曲線的主軸和屬軸,各等於他一雙曲線的屬軸和主軸,如

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{和} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

稱爲共軛雙曲線(conjugate hyperbola).

推論 1: 共軛雙曲線有公共的漸近線.

推論2: 共軛雙曲線的焦點自中心之距離都等於 $\sqrt{a^2+b^2}$.

(44) 正雙曲線

a. 若雙曲線的主軸與屬軸相等,即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ 或 } x^2-y^2=a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }56)$$

就是正雙曲線(equilateral hyperbola).

推論1: 正雙曲線 $x^2-y^2=a^2$ 的共軛雙曲線爲

$$-x^2+y^2=a^2.$$

推論2: 正雙曲線 $x^2-y^2=a^2$ 的漸近線爲

$$x\pm y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }57)$$

兩漸近線互相直交,故正雙曲線又稱直交雙曲線(rectangular hyperbola).

推論3: 公式53中,若 $C=A$, 則爲正雙曲線.

b. 公式24中,若 $A=C=D=E=0$, 則成

$$Bxy+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }58)$$

也是代表正雙曲線,他的漸近線就是兩坐標軸.*

c. 公式24中,若 $A=C=0$, 則成

$$Bxy+Dx+Ey+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 }59)$$

---

* 參考 Smith, Gale, Neelley 解析幾何 *p*. 127, § 65.

也是代表正雙曲線,他的漸近線爲平行於坐標軸的兩直線.

IV 切線與法線

(45) 已知切點的切線方程式: 設已知 $P_1(x_1, y_1)$ 爲切點,則

	曲線	切線	
a. 拋物線:	$y^2=4px,$	$y_1y=2p(x+x_1)$	……(公式 60)
b. 橢圓:	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$	$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$	……(公式 61)
c. 雙曲線:	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$	$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$	……(公式 62)

d. 普通二次曲線: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

切線: $$Ax_1x+B\frac{y_1x+x_1y}{2}+Cy_1y+D\frac{x+x_1}{2}+E\frac{y+y_1}{2}+F=0 \quad \text{……(公式 63)}$$

(46) 法線方程式:

	曲線	法線	
a. 拋物線:	$y^2=4px,$	$2p(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0$	……(公式 64)
b. 橢圓:	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$	$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$	……(公式 65)
c. 雙曲線:	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$	$\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2+b^2$	……(式公 66)

(**47**) 次切線及次法線:* 設曲線如上節 a, b, c 三曲線方程之所代,在其上 $P_1(x_1, y_1)$ 點之切線之線坡為 m,則次切線 $=-\frac{y_1}{m}$, 次法線 $=my_1$.

(**48**) 已知線坡的切線方程式: 設已知 m 為切線的線坡,則

	曲線	切線	
a. 拋物線:	$y^2=4px$,	$y=mx+\frac{p}{m}$	………………(公式 67)
b. 橢圓:	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$	(公式 68)
c. 雙曲線:	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$	(公式 69)

(**49**) 圓錐曲線的特性:

a. 拋物線:

1. 設 $P_1(x_1, y_1)$ 為拋物線 $y^2=4px$ 上切線的切點,則次切線 $=2x_1$, 為拋物線的頂點所二等分.次法線 $=2p$, 即等於準線與焦點間之距離.
2. 在 P_1 點的切線與法線各平分 P_1 點的焦點半徑與過 P_1 點所作 x 軸的平行線所成的兩個補隣角.
3. 從焦點向切線所作垂線的垂足,必在頂點的切線上.

* 參考 Smith, Gale, Neelley 解析幾何 p. 137.

b 橢圓: 橢圓上任意一點 P_1 的法線與切線各平分 P_1 點的兩焦點半徑所成的內外角.

c. 雙曲線: 雙曲線上任意一點 P_1 的切線與法線各平分這 P_1 點的兩焦點半徑所成的內外角.

[舉 例]

1. 就以下各方程式, 分別說明圓錐曲線之種類: (蘇, 第一次補)

(a) $x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$ (b) $x^2=4ay.$

(c) $a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2.$ (d) $a^2x^2-b^2y^2=a^2b^2.$

〔答〕 (a) x 與 y 之二次項係數相同而無 xy 之連乘項, 若 $a^2+b^2-c>0$, 則代表一圓.

(b) 高次項中僅有 x 之二次項而有他一坐標 y 之一次項, 如是之方程式若 $a\neq 0$, 常能代表一拋物線.

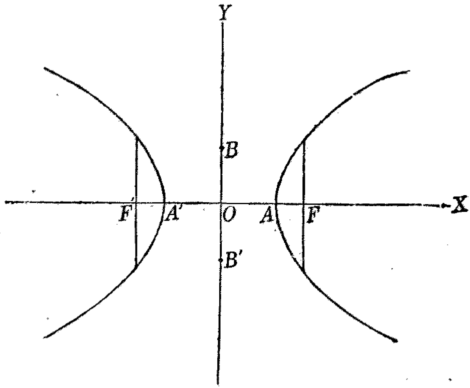
(c) x 與 y 之二次項係數相異而同號, 且無 xy 之連乘項, 常數項在方程式之他邊而常能為正(平方數), 是以此方程式若 a 與 b 皆不等於零, 常能代表一橢圓.

(d) x 與 y 之二次項係數值相異而號相反, 將常數項移至左邊, 全式不能劈為二有理整式因子, 是以此方程式, 若 a, b 皆不等於零, 常能代表一雙曲線.

2. 描出下列方程式之軌跡及其焦點.(滬,廿三年)

(a)　$5x^2-4y^2=20.$

(b)　$x^2=-4y.$



〔解〕(a)　原方程式可改寫爲.

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$$

比較公式48,知 $a=2,\ b=\sqrt{5}.$

故此雙曲線之兩頂點爲 $A(2,0),\ A'(-2,0).$

卽主軸 $AA'=4$,屬軸 $BB'=2\sqrt{5}.$

又　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3$,故兩焦點爲

$$F(3,0), F'(-3,0).$$

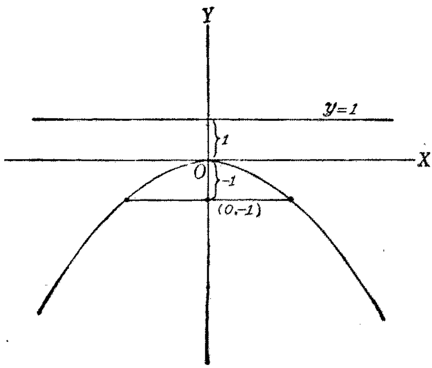
通徑 $=\dfrac{2b^2}{a}=5.$ 再把原式改寫爲

$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{x^2-4}$,得 x,y 的對應值:

x	±4	±5	±6
y	±3.9	±5.1	±6.3

描點如上圖.

(b)　$x^2=-4y$,比較公式36,知此拋物線的頂點在原點,$p=-1$,曲線向下;準線爲 $y=1$,焦點爲(0,−1),通徑爲4,通徑的兩端點爲(±2,−1)



x	± 1.4	± 3.2	± 3.5	± 4
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-3	-4

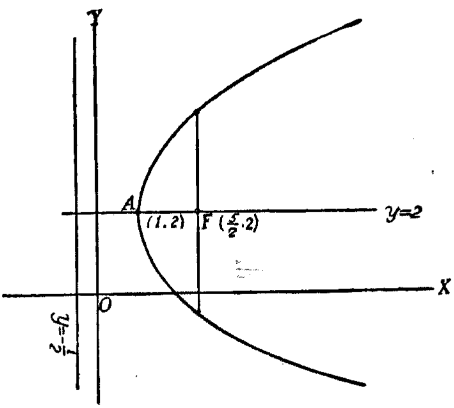
描點如前圖.

3. 求下列拋物線之軸,焦點,頂點,軌線(卽準線),並作圖.(河北,二十二年度)

$$y^2-4y-6x+10=0.$$

〔解〕 原式可改寫爲 $(y-2)^2=6(x-1)$, 比較公式40,知此拋物線之軸爲 $y=2$; 頂點爲 $A(1,2)$; $6=4p$,

$\therefore\ p=\dfrac{3}{2}$, 焦點爲 $F\left(2\dfrac{1}{2},2\right)$, 通徑爲6, 通徑的兩端點爲 $\left(\dfrac{5}{2},5\right)$, $\left(\dfrac{5}{2},-1\right)$, 準線爲 $y=-\dfrac{1}{2}$.



x	2	3	4
y	4.4 $-.4$	5.5 -1.5	6.2 -2.2

描點如上圖.

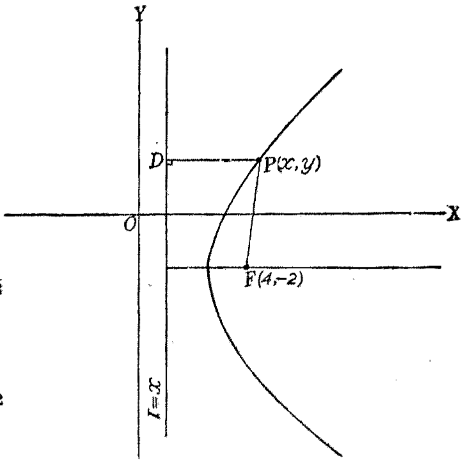
4. 求拋物線的方程式,其焦點爲 $(4,-2)$, 其準線爲 $x=1$. (北平,二十三年)

〔解〕 設 $P(x, y)$ 為拋物線上任意一點,則從本章31節(a),知

$$FP=DP,$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}=x-1,$$

$$(x-4)^2+(y+2)^2=(x-1)^2.$$

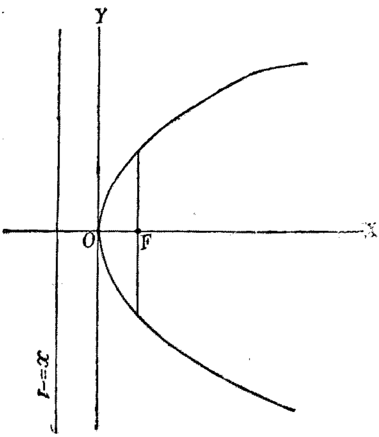


即 $y^2+4y-6x+19=0$ 為所求的拋物線方程式.

5. 繪畫下列曲線:(粵)

(b) $y^2=4x$ (a 見第四章例8, c 見第二章例11)

〔解〕 此代表一拋物線,其軸為 x 軸,頂點在原點, p (即焦點與頂點的距離) 為1,故焦點為 $F(1,0)$,準線為 $x=-1$,通徑為4,通徑的兩端點為 $(1,\pm 2)$.



x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3
y	±1.4	±2.4	±2.8	±3.4

描點如前圖.

6. 求雙曲線$x^2-4y^2=16$之漸近線.(湘,四屆)

〔解〕 從本章41節,知雙曲線$x^2-4y^2=16$的漸近線方程式爲

$$x^2-4y^2=0,$$

即 $x+2y=0$ 和 $x-2y=0$ 所代表的兩直線.

7. 已知橢圓之方程式爲$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$,求其焦點,離心率,半長軸及半短軸.(湘,五屆)

〔解〕 從本章36節,知此橢圓之半長軸爲$a=5$,半短軸爲$b=4$,即在x軸上的交點爲$(\pm5,0)$,在y軸上的交點爲$(0,\pm4)$.

又$c=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$,故焦點爲$F(3,0)$和$F(-3,0)$.

又因$c=ae$,故$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$.

8. 求過雙曲線$5x^2-6y^2+19=0$上一點$(1,2)$之切線及法線方程式.(成都)

〔解〕 原方程式可化爲$\frac{y^2}{\frac{19}{6}}-\frac{x^2}{\frac{19}{5}}=1$.

a. 從公式62, 切點(x_1, y_1)爲$(1, 2)$, 故得切線方程式爲

$$\frac{2y}{\frac{19}{6}}-\frac{x}{\frac{19}{5}}=1, \text{ 即 } \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{5x-12y+19=0.}$$

或直接從公式63: 知所求的切線方程式爲

$$5x_1x-6y_1y+19=0,$$

以$(1, 2)$代(x_1, y_1), 得 $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{5x-12y+19=0.}$

b. 因切線的線坡爲 $\frac{5}{12}$, 故所求法線的線坡爲 $-\frac{12}{5}$, 且通過$(1, 2)$點, 故得法線方程式爲

$$y-2=-\frac{12}{5}(x-1),$$

即 $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{12x+5y-22=0.}$

或直接用公式66: $\dfrac{\frac{19}{6}y}{2}+\dfrac{\frac{19}{5}x}{1}=\dfrac{19}{6}+\dfrac{19}{5}$,

化簡即得 $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{12x+5y-22=0.}$

9. 求橢圓$3x^2+4y^2=12$之長軸, 短軸, 及焦點距離. (川, 第一次)

〔解〕 原方程式可改寫爲$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

從公式42, 知$a=2$ $b=\sqrt{3}$, 故長軸$AA'=2a=\underset{\sim}{4}$,

短軸 $BB'=2b=\underset{\sim}{2\sqrt{3}}$, 又 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-3}=\underset{\sim}{1}$.

故兩焦點間的距離爲 $FF'=2c=\underset{\sim}{2}$.

10. $P_1(2,4)$ 爲拋物線 $y^2=8x$ 上之一點,求在 P_1 點之切線方程式.(浙,二十一年度覆試)

〔解〕 原方程式可改寫爲 $y^2=4\cdot 2x$

從公式 60, 以 (2,4) 代 (x_1, y_1), 則得所求的切線方程式爲

$$4y=2\cdot 2(x+2),\ 即\ \underset{\sim\sim\sim\sim}{x-y+2=0}.$$

或直接用公式 63, 知所求的切線方程式

$$y_1y=8\cdot\frac{x+x_1}{2},$$

以 (2, 4) 代 (x_1, y_1), 即得 $4y=4(x+2)$, 即 $\underset{\sim\sim\sim\sim}{x-y+2=0}$.

11. 有一直線,切曲線 $2x^2-5xy+y^2-4x-3y+30=0$ 於點 (2, 3), 試求其方程式.(蘇, 第二次)

〔解〕 從公式 63, 得所求的切線方程式爲

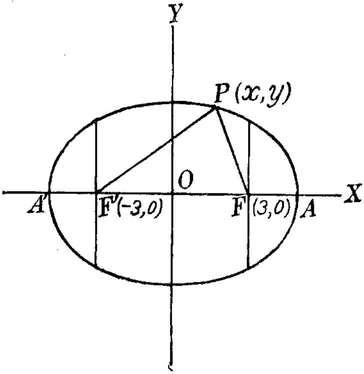
$$2x_1x-5\frac{y_1x+x_1y}{2}+y_1y-4\cdot\frac{x+x_1}{2}-3\cdot\frac{y+y_1}{2}+30=0,$$

以 (2, 3) 代 (x_1,y_1):

$$4x-\frac{5(3x+2y)}{2}+3y-2(x+2)-\frac{3(y+3)}{2}+30=0,$$

化簡即得 $\underset{\sim\sim\sim\sim}{11x+7y-43=0}$.

12. 求一點移動時,與 $(3,0)$ 及 $(-3,0)$ 二點距離和恆等於10之方程式,並說明其為何種曲線及畫出其圖(浙,二十二年度)



〔解〕 設 $P(x,y)$ 為動點,則

$$PF=\sqrt{(x-3)^2+y^2},$$

$$PF'=\sqrt{(x+3)^2+y^2},$$

$$\because\quad PF+PF'=10,$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10,$$

$$(x-3)^2+y^2+(x+3)^2+y^2+2\sqrt{[(x-3)^2+y^2][(x+3)^2+y^2]}=100,$$

$$\sqrt{[(x-3)^2+y^2][(x+3)^2+y^2]}=41-x^2-y^2,$$

$$(x^2-9)^2+y^2(x+3)^2+y^2(x-3)^2+y^4=(41-x^2-y^2)^2,$$

化簡,得　$16x^2+25y^2=400$, 即 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$

此方程式為代表一個橢圓,兩定點 $(3,0)$, $(-3,0)$ 就是焦點;曲線在 x 軸上的兩交點為 $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, 在 y 軸上的交點為 $B(0,4)$,$B'(0,-4)$;即長軸 $AA'=2a=10$, 短軸 $BB'=2b=8$. 又通徑 $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot16}{5}=6\frac{2}{5}$, 其一通徑的兩端為 $\left(+3,\ \pm3\frac{1}{5}\right)$; 其他通徑的兩端為 $\left(-3,\ \pm3\frac{1}{5}\right)$.

x	± 1	± 2	± 4
y	± 3.9	± 3.7	$\pm 2\frac{3}{5}$

描點得上圖.

13. 求證若二拋物線之軸互相平行,則此二拋物曲線有二個無限遠的交點.(滬,二十二年)

〔解〕 假定所設二拋物線之軸皆平行於 x 軸, 則此二個拋物線方程式應爲:

$$y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad (1)$$

$$y^2+a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad (2)$$

解這兩個二次方程式:

(1)−(2) $\qquad (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0,$

$$x=\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2}y+\frac{c_2-c_1}{a_1-a_2}.$$

代入(1) [或(2)] $y^2+a_1\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2}y+a_1\frac{c_2-c_1}{a_1-a_2}+b_1y+c_1=0,$

即 $\qquad (a_1-a_2)y^2+(a_1b_2-a_2b_1)y+(a_1c_2-a_2c_1)=0.$

此爲二次方程式,僅有二個根(或虛或實),即此二個曲線至多止有二個交點.

但二個二次曲線應有四個交點,故其餘二個交點在無窮遠處.*

---

*一個 m 次曲線與一個 n 次曲線相交,其交點有 mn 個; 若解此聯立方程式所得之解答(包含虛值在內), 少於 mn 個, 則所少之解答, 即爲無限遠的交點.

14. 拋物線之頂點在 y 軸上，其軸平行於 x 軸，且通過 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $(2, 4)$ 兩點，求此拋物線之方程式.

〔解〕 因所求拋物線的軸平行於 x 軸，頂點在 y 軸上，故此拋物線的方程式爲

$$(y-k)^2=4px \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

$$\left.\begin{aligned} &\because \text{ 通過 } \left(\tfrac{1}{2}, 3\right) \text{ 點}, &&\therefore\ (3-k)^2=4p\cdot\frac{1}{2} \\ &\because \text{ 通過 } (2, 4) \text{ 點}, &&\therefore\ (4-k)^2=4p\cdot 2 \end{aligned}\right\}$$

即
$$\left.\begin{aligned} (3-k)^2&=2p \\ (4-k)^2&=8p \end{aligned}\right\}$$

解此聯立方程式得 $\begin{cases} k=2 \\ p=\frac{1}{2} \end{cases}$ 及 $\begin{cases} k=\frac{10}{3} \\ p=\frac{1}{18} \end{cases}$

以 k, p 之值代入 (A) 式，即得

$$\underline{(y-2)^2=2x} \text{ 及 } \underline{\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{2}{9}x}.$$

15. 一動圓常與一定圓 $x^2+y^2=16$ 及一定直線 $x=6$ 相切，求此動圓圓心的軌跡，幷說明其爲何種曲線.

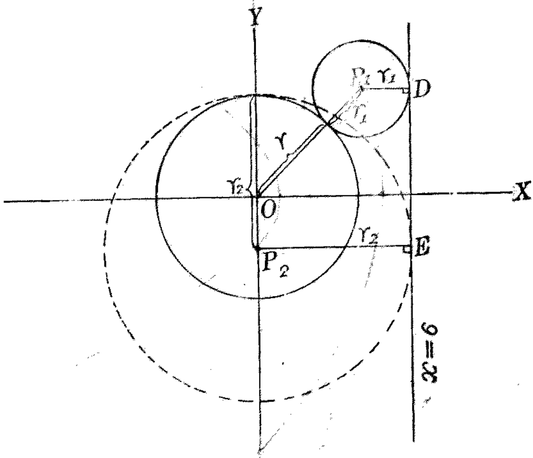
〔解〕 (a) 設 $P_1(x, y)$ 爲動圓的心，又設定圓的半徑爲 r，動圓的半徑爲 r_1，則

$$r=4,$$

$$r_1=P_1D=6-x,$$

又聯心線　　$OP_1=\sqrt{x^2+y^2}$,

但　　$OP_1=r+r_1=4+6-x=10-x$,



$\therefore\quad \sqrt{x^2+y^2}=10-x,\ x^2+y^2=100-20x+x^2,$

$\therefore\quad \underline{y^2=100-20x}$ 或寫做 $\underline{y^2=-4\cdot5(x-5)}$.

此方程式的軌跡爲一拋物線,其軸爲 x 軸,頂點爲 $(5,0)$,焦點爲原點,準線爲 $x=10$.

(b) 又設動圓的心爲 $P_2(x,y)$ 半徑爲 r_2,

則　$r_2=P_2E=6-x$,聯心線 $OP_2=\sqrt{x^2+y^2}$,

但　$OP_2=r_2-r=6-x-4=2-x$,

$\therefore\quad \sqrt{x^2+y^2}=2-x,\ x^2+y^2=4-4x+x^2,$

$\therefore\quad \underline{y^2=4-4x}$ 或寫做 $\underline{y^2=-4(x-1)}$.

此方程式的軌跡亦爲拋物線，其軸爲 x 軸，頂點爲 $(1, 0)$，焦點爲原點，準線爲 $x=2$.

16. 若拋物線 $y^2-6x+5y+1=0$ 之切線垂直於直線 $x+3y=5$，求此切線方程式.

〔解〕 設所設切線之切點爲 (x_1, y_1)，則從公式63，知所求的切線方程式，爲

$$y_1y-6\cdot\frac{x+x_1}{2}+5\cdot\frac{y+y_1}{2}+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

化簡：
$$(2y_1+5)y=6x+(6x_1-5y_1-2)$$

此切線的線坡爲 $\frac{6}{2y_1+5}$，但已知此切線垂直於 $x+3y=5$ 直線，故其線坡爲 3，$\therefore\ \frac{6}{2y_1+5}=3$，$\therefore\ y_1=-\frac{3}{2}$.

因切點在拋物線上，$\therefore\ y_1{}^2-6x_1+5y_1+1=0 \cdots\cdots(B)$

以 $y_1=-\frac{3}{2}$ 代入 (B) 式，得 $x_1=-\frac{17}{24}$，故切點爲

$$\left(-\frac{17}{24},\ -\frac{3}{2}\right).$$

代入 (A) 式 $\left(-\frac{3}{2}\right)y-6\cdot\frac{x-\frac{17}{24}}{2}+5\cdot\frac{y-\frac{3}{2}}{2}+1=0,$

化簡即得所求的切線方程式爲

$$24x-8y+5=0.$$

17. 已知拋物線 $2x^2-4xy+2y^2=x$ 之切線通過 $(-2,-2)$ 點，求此切線方程式.

〔解〕 設此切線切拋物線於 (x_1,y_1) 點，則從公式63，知此切線方程式為 $2x_1x-4\dfrac{y_1x+x_1y}{2}+2y_1y=\dfrac{x+x_1}{2}$

即 $$4x_1x-4y_1x-4x_1y+4y_1y=x+x_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

因此切線通過 $(-2,-2)$ 點，則 $(-2,-2)$ 之坐標值必適合於 (A) 中之 x,y，　$\therefore\ -8x_1+8y_1+8x_1-8y_1=-2+x_1$

$$\therefore\quad x_1=2.$$

又因切點 (x_1,y_1) 在拋物線上，

$$\therefore\quad 2x_1^2-4x_1y_1+2y_1^2=x_1$$

以 $x_1=2$ 代入此式：$8-8y_1+2y_1^2=2$，

即 $$y_1^2-4y_1+3=0,$$

$$(y_1-3)(y_1-1)=0,\quad \therefore\quad y_1=1 \text{ 及 } 3.$$

故得切點之坐標為 $(2,1)$ 及 $(2,3)$ 代入 (A) 式，得所求之切線方程式為 $3x-4y-2=0$ 及 $5x-4y+2=0$.

18. 設拋物線之軸平行於 x 軸，其頂點為 $(2,1)$，且與直線 $y=x+1$ 相切，求此拋物線方程式.

〔解〕 因拋物線軸平行於 x 軸，其頂點為 $(2,1)$，故從公式40，知此拋物線的方程式，為

$$(y-1)^2=4p(x-2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

即　　$y^2-2y-4px+8p+1=0.$

假定切線 $y=x+1$ 切拋物線的切點爲 (x_1, y_1), 則從公式63, 知此切線方程式應爲

$$y_1y-2\cdot\frac{y+y_1}{2}-4p\cdot\frac{x+x_1}{2}+8p+1=0,$$

即　　$(y_1-1)y=2px+y_1+2px_1-8p-1=0.$

但已知此切線方程式爲 $y=x+1$,

故此二方程式的線坡應相同, 即 $\dfrac{2p}{y_1-1}=1$,

$$\therefore\quad p=\frac{y_1-1}{2}.$$

因切點 (x_1, y_1) 在拋物線上,

$$\therefore\quad (y_1-1)^2=4p(x_1-2),$$

即　　$(y_1-1)^2=2(y_1-1)(x_1-2)\cdots\cdots(B)\ \left(\because\ p=\dfrac{y_1-1}{2}\right)$

又因切點 (x_1, y_1) 在切線 $y=x+1$ 上,

$$\therefore\quad y_1=x_1+1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

解聯立方程式 (B), (C), 得: $y_1=1$ 與 5,

若 $y_1=1$, 則 $p=0$, 不適合; 若 $y_1=5$, 則 $p=2$ 代入 (A) 式, 則得所求的拋物線方程式, 爲

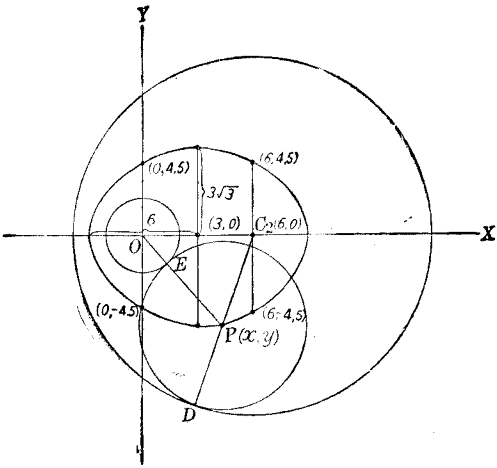
$$(y-1)^2=8(x-2).$$

19. 一動圓與兩定圓 C_1: $x^2+y^2=4$, C_2: x^2+y^2-12x

$-64=0$ 相切,求此動圓圓心的軌跡,并說明其爲何種曲線,且畫出其圖.

〔解〕 圓 C_1 的心在原點,半徑爲 2;圓 C_2 的心在 $(6,0)$,半徑爲 10;設 $P(x_1, y_1)$ 爲動圓的圓心,則如圖:

動圓半徑 $PD=(C_2$ 圓半徑 $C_2D)-C_2P$,動圓半徑 $PE=PO-(C_1$ 圓半徑 $OE)$.



$$\therefore \quad PD=10-\sqrt{(x-6)^2+y^2}, \quad PE=\sqrt{x^2+y^2}-2.$$

$$\therefore \quad 10-\sqrt{(x-6)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}-2.$$

解此方程式,得:$3x^2+4y^2-18x=81$ 爲所求的軌跡方程式.

此式可寫成　$\dfrac{(x-3)^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1.$

故此軌跡爲一橢圓,其中心爲 $(3,0)$. 長軸 $AA'=2a=2\cdot6=12$. 短軸 $BB'=2b=2\cdot\sqrt{27}=6\sqrt{3}$. 長軸的兩端點爲 $A(9,0)$, $A'(-3,0)$. 短軸的兩端點爲 $B(3,3\sqrt{3})$, $B'(3,-3\sqrt{3})$ 焦點爲兩定圓圓心 $F(6,0)$, $F'(0,0)$ 通徑 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot27}{6}=9$. 通徑的兩端點爲 $\left(6,\pm4\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(0,\pm4\dfrac{1}{2}\right)$. 描點得如前圖.

20. 若橢圓 $x^2-2y^2+x-5y-3=0$ 之切線垂直於直線 $x-y=1$, 求此切線方程式.

〔解〕 設所求切線之切點爲 (x_1,y_1), 則從公式 63, 此切線方程式應爲

$$x_1x-2y_1y+\frac{x+x_1}{2}-5\cdot\frac{(y+y_1)}{2}-3=0$$

即　$(4y_1+5)y=(2x_1+1)x+x_1-5y_1-6$ ………………(A)

此切線之線坡爲 $\dfrac{2x_1+1}{4y_1+5}$, 但已知此切線垂直於直線 $x-y=1$, 故其線坡又爲 -1,　$\therefore\ \dfrac{2x_1+1}{4y_1+5}=-1,$

$$\therefore\quad x_1=-(2y_1+3) \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

因切點 (x_1y_1) 在橢圓上,故適合於橢圓方程式之 x,y

$$\therefore\quad x_1^2-2y_1^2+x_1-5y_1-3=0 \cdots\cdots\cdots (C)$$

解聯立方程式 (B), (C), 得切點的坐標爲

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{與} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

代入 (A) 式卽得所求的切線方程式爲

$$x+y+2=0 \text{ 和 } 2x+2y+3=0.$$

21. 若雙曲線 $x^2-xy-y^2+x+2y=0$ 之切線通過 $(-2,1)$ 點,求此切線方程式.

〔解〕 因所求切線通過 $(-2,1)$ 點,故其方程式應爲

$$y-1=m(x+2) \quad (m \text{ 爲參變數})$$

卽 $$y=mx+2m+1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

代入雙曲線方程式:

$$x^2-x(mx+2m+1)-(mx+2m+1)^2+x+2(mx+2m+1)=0,$$

卽 $$(1-m-m^2)x^2-2m(2m+1)x-(4m^2-1)=0.$$

因直線與曲線相切,故祇有一交點,卽此方程式有等根,其條件爲 $b^2-4ac=0$,

$$\therefore \quad [-2m(2m+1)]^2+4(1-m-m^2)(4m^2-1)=0,$$

化簡,得 $6m^2+m-1=0$, 卽 $(3m-1)(2m+1)=0$,

$\therefore \quad m=\dfrac{1}{3}$ 和 $m=-\dfrac{1}{2}$ 代入 (A) 式,化簡,得

所求的切線方程式爲 $x-3y+5=0$, 和 $x+2y=0$.

22. 求雙曲線$x^2-4y^2+2x+8y=0$之兩漸近線.

〔解〕 原方程式可改寫為$\frac{4(y-1)^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{3}=1.$

從本章42節推論2，知所求的漸近線為

$$\frac{4(y-1)^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{3}=0,$$

$$\left[\frac{2(y-1)}{3}-\frac{x+1}{3}\right]\left[\frac{2(y-1)}{3}+\frac{x+1}{3}\right]=0,$$

即　$2(y-1)-(x+1)=0$和$2(y-1)+(x+1)=0.$

即　$x-2y+3=0$和$x+2y-1=0.$

23. 若雙曲線通過原點(0, 0)，其漸近線為
$2x-4y+7=0$和$x+2y-2=0$,求此雙曲線的方程式.

〔解〕 從本章42節推論2，知所求的雙曲線方程式為

$$(2x-4y+7)(x+2y-2)=K.$$

因此雙曲線通過(0, 0)，代入此式，得$K=-14$,

$$\therefore\quad (2x-4y+7)(x+2y-2)=-14.$$

即　$$2x^2-8y^2+3x+22y=0.$$

24. 若圓錐曲線之焦點為$(-6, 0)$，準線為$3x-2y+1=0$，其離心率為3；求此曲線方程式.

〔解〕 設$P(x, y)$為曲線上的任意一點，則P點與焦

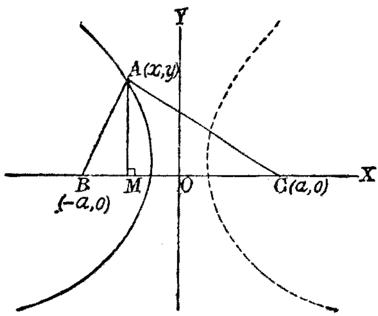
點 $F(-6,0)$ 的距離為 $\sqrt{(x+6)^2+y^2}$, 與準線的距離為 $\dfrac{3x-2y+1}{-\sqrt{13}}$, e 為 3, 故從公式 34, 知所求的曲線方程式為

$$(x-6)^2+y^2=9\left(\frac{3x-2y+1}{-\sqrt{13}}\right)^2$$

化簡, 即得 $68x^2-108xy+23y^2-102x-36y-459=0$.

25 設三角形底邊 BC 一定, B 為 $(-a,0)$, C 為 $(a,0)$, 且 $\angle B=2\angle C$, 求頂點 A 的軌跡.

〔解〕 設頂點 A 的坐標為 (x,y), 則因 $\angle B>\angle C$, 故動點 A 必在 y 軸的左邊. 作 $AM\perp x$ 軸, 則



$$\tan B=\frac{MA}{BM}=\frac{y}{a+x}\cdots\cdots(A)$$

$$\tan C=\frac{MA}{MC}=\frac{y}{a-x}\cdots\cdots(B)$$

$$\because\quad \tan B=\tan 2C=\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

以 (A), (B) 代入 (C) 式的兩端:

$$\frac{y}{a+x}=\frac{2\cdot\dfrac{y}{a-x}}{1-\dfrac{y^2}{(a-x)^2}},$$

$$\frac{y}{a+x}=\frac{2y(a-x)}{(a-x)^2-y^2},$$

化簡,卽得所求的軌跡方程式,爲

$$3x^2-y^2-2ax-a^2=0.$$

此方程式所代表的軌跡爲雙曲線,若化成標準形式則如下:

$$3\left(x-\frac{a}{3}\right)^2-y^2=\frac{4a^2}{3},$$

卽
$$\frac{\left(x-\frac{a}{3}\right)^2}{\frac{4a^2}{9}}-\frac{y^2}{\frac{4a^2}{3}}=1.$$

因動點 A 須在 y 軸的左方,故所求的軌跡爲 y 軸左邊的一支雙曲線.

[習　題]

(1) 一動點與直線 $x=8$ 的距離,等於其與 $(2, 0)$ 點的距離的 2 倍,求此動點的軌跡,并說明其爲何種曲線,且畫出其圖.

[提示] 應用公式 34.　$\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\right)$.

(2) 求下列雙曲線的中心,頂點,焦點,通徑,通徑的端點,及漸近線:

$$9x^2-16y^2-36x+96y+36=0.$$

[提示] 先化成標準形式如公式 54, 或 55.

(3) 若拋物線的軸平行於 x 軸, 且通過 $(-1, 1)$, $(8, 2)$, $(-4, -2)$ 三點. 求此拋物線方程式.

[提示] 先寫成如公式 40, 再用已知點代入. $(2y^2-x+3y-6=0)$.

(4) 設拋物線 $2y^2-3x+4y+3=0$ 的切線通過 $(11, 4)$ 點，求此切線方程式.

[提示] 可照例題 17 的方法;

或先假定所求直線為 $y-4=m(x-11)$，再決定 m 之值.

$(3x-8y-1=0,\ 3x-22y+55=0)$.

(5) 若橢圓 $x^2+4y^2+4x+6y=0$ 之切線平行於直線 $2x+3y=1$，求此切線方程式.

[提示] 假定 (x_1, y_1) 為切點，應用公式 63，寫出所求的切線方程式，其線坡與已知直線的線坡相同，因此求出 (x_1, y_1) 的值即得.

$(2x+3y=0,\ 4x+6y+25=0)$.

(6) 若已知雙曲線的兩漸近線為 $x-y+4=0$ 和 $y+4=0$，且通過 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 點，求此雙曲線方程式.

[提示] 可照例題 23 的方法去解. $(xy-y^2+4x-6=0)$.

第六章 移軸法

[提　要]

(50) 平移法: 若平移坐標軸到新原點 (h, k), 則曲線上任意一點 P 的舊坐標 (x, y) 和新坐標 (x', y') 的關係爲

$$\left.\begin{array}{l} x=x'+h \\ y=y'+k \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (公式 70)$$

(51) 轉移法: 若原點的位置不動, 僅轉移坐標軸一 θ 角, 則曲線上任意一點 P 的舊坐標 (x, y) 和新坐標 (x', y') 的關係爲

$$\left.\begin{array}{l} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (公式 71)$$

(52) 用轉移法消去 xy 項: 若欲消去普通方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

中的 xy 項, 則須轉移坐標軸一 θ 角, 使

$$\tan 2\theta=\frac{B}{A-C} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (公式 72)$$

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}} \\ \sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}, \quad \cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}} \end{bmatrix}$$

(53) 普通移軸法: 若平移坐標軸到新原點(h, k),且依新原點轉一θ角,則曲線上任意一點P的舊坐標(x, y)和新坐標(x', y')的關係為

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta + h \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta + k \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 } 73)$$

(54) 普通二次曲線種類之鑑別法:

在二次曲線的普通方程式

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

中: (a) 若$B^2-4AC<0$,則曲線為橢圓;

(b) 若$B^2-4AC=0$,則曲線為拋物線;

(c) 若$B^2-4AC>0$,則曲線為雙曲線.

推論: 在二次曲線的普通方程式中,若三個二次項成完全平方,則此方程式代表一拋物線.

[舉 例]

1. 問方程式$x^2+2xy+y^2+2x-y-1=0$為表何種圓錐曲線?如何移去此式中之xy項?移去後之方程式為何?(蘇,第一次)

〔解〕 因原方程式中之二次項 $x^2+2xy+y^2$ 爲完全平方 $(x+y)^2$, 故原方程式爲代表一拋物線(本章54節推論).

從公式72: $A=1,\ B=2,\ C=1,$

使坐標軸依原點轉移一 θ 角, 使 $\tan 2\theta=\frac{2}{1-1}=\infty,$

$$\therefore\quad \theta=45°,$$

$$\therefore\quad x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\ (\text{公式}\ 71).$$

代入原方程式: $$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$+2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)-1=0,$$

化簡, 卽得 $\underline{4x'^2+\sqrt{2}x'-3\sqrt{2}y'-2=0}.$

爲使坐標軸轉移45°後所得之新方程式.

2. 若曲線 $7x^2+8y^2-28x+80y+172=0$ 的坐標軸平移到新原點 $(2,-5)$, 求此曲線的新方程式.

〔解〕 從公式70, 知曲線上任意一點 P 的舊坐標 (x,y) 和新坐標 (x',y') 的關係爲

$$x=x'+2$$

$$y=y'-5$$

代入原方程式

$$7(x'+2)^2+8(y'-5)^2-28(x'+2)+80(y'-5)+172=0$$

化簡即得新方程式： $\underset{\sim\sim\sim}{7x'^2+8y'^2=56}$.

3. 移去方程式 $5x^2-4y^2+20x-24y=36$ 中之 x, y 的一次項，並求新原點.

〔解〕 設曲線上任意一點 P 的舊坐標為 (x, y)，新坐標為 (x', y')，則從公式 70：

$$x=x'+h$$

$$y=y'+k$$

代入原方程式

$$5(x'+h)^2-4(y'+k)^2+20(x'+h)-24(y'+k)=36,$$

即 $$5x'^2-4y'^2+(10h+20)x'-(8k+24)y'$$
$$+(5h^2-4k^2+20h-24k)=36,$$

令 x', y' 的一次項的係數為 0，即

$$10h+20=0 \text{ 和 } 8k+24=0,$$

$\therefore$ $h=-2$, $k=-3$, 即新原點為 $\underset{\sim\sim\sim}{(-2, -3)}$

代入上式，得新方程式 $\underset{\sim\sim\sim}{5x'^2-4y'^2=20}$.

又法： 把原方程式 $5x^2-4y^2+20x-24y=36$.

配成平方： $5(x^2+4x+4)-4(y^2+6y+9)=36+20-36$

即 $$5(x+2)^2-4(y+3)^2=20,$$

令 $x'=x+2$, $y'=y+3$, 即 $x=x'-2$, $y=y'-3$.

故新原點爲$(-2,-3)$,新方程式爲

$$5x'^2-4y'^2=20.$$

4. 設橢圓的半長軸$a=4$,焦點爲$(5,2),(-1,2)$,求此橢圓方程式.若把坐標軸的原點移到橢圓中心,則方程式若何?

〔解〕 設$P(x,y)$爲橢圓上的任意一點,則從36節注意1:

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=2\times4,$$

化簡此方程式,得所求的橢圓方程式爲

$$7x^2+16y^2-28x-64y-20=0.$$

若改寫成標準形式,得

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{7}=1.$$

故橢圓中心爲$(2,2)$.

把坐標軸的原點移到橢圓中心,則令

$$x'=x-2,\ y'=y-2,\ 即\ x=x'+2,\ y=y'+2,$$

故得新方程式　$\dfrac{x'^2}{16}+\dfrac{y'^2}{7}=1.$

又法: 因焦點爲$(5,2),(-1,2)$,故橢圓中心的坐標爲

$$x=\frac{5-1}{2}=2,\quad y=\frac{2+2}{2}=2,\quad 即\ (2,2).$$

從中心到焦點的距離 $c=\sqrt{(5-2)^2+(2-2)^2}=3$,

半短軸 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$,

故從公式 46, 中心 (h, k) 爲 $(2, 2)$, $a=4$, $b=\sqrt{7}$, 所求的橢圓方程式爲

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{7}=1.$$

5. 設雙曲線的屬軸爲 4, 兩焦點爲 $(0, 2)$, $(0, -10)$, 求此雙曲線方程式; 若平移坐標軸, 以雙曲線的中心爲新原點, 則方程式若何?

〔解〕 因兩焦點爲 $(0, 2)$, $(0, -10)$, 故中心爲 $(0, -4)$, 從中心到焦點的距離爲 $c=6$; 又 $2b=4$, $\therefore$ $b=2$, $\therefore$ $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{36-4}=4\sqrt{2}$, 因主軸在 y 上, 故從公式 55, 知所求的方程式爲

$$\frac{(y+4)^2}{(4\sqrt{2})^2}-\frac{x^2}{2^2}=1, \quad 即 \quad \frac{(y+4)^2}{32}-\frac{x^2}{4}=1.$$

若坐標軸平移到新原點, 則 $x'=x$, $y'=y+4$, 故得新方程式爲

$$\frac{y'^2}{32}-\frac{x'^2}{4}=1.$$

6 若坐標軸轉移一 45° 之角, 原點之位置不動, 則曲線 $2xy=a^2$ 的方程式若何?

〔解〕 設曲線上任意一點 P 的新坐標爲 (x', y')，則從公式 71:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos 45^\circ - y'\sin 45^\circ \\ y &= x'\sin 45^\circ + y'\cos 45^\circ \end{aligned}\right\} \quad \text{即} \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}$$

代入原方程式:

$$2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) = a^2,$$

$$\therefore \quad x'^2 - y'^2 = a^2.$$

即爲所求的新方程式.

7. 若坐標軸依原點轉移一 θ 角等於 $\arctan 2$，求曲線 $4xy - 3x^2 = 10$ 關於新坐標軸的方程式.

〔解〕 設曲線上任意一點 P 的舊坐標爲 (x, y)，新坐標爲 (x', y')，則因 $\tan\theta = 2$,

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

代入公式 71: $$x = \frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}} = \frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}} = \frac{2x+y'}{\sqrt{5}}.$$

代入原方程式:

$$4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)-3\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)^2=10$$

化簡即得新方程式: $x'^2-4y'^2=10.$

8. 決定方程式 $3x^2+2\sqrt{3}\,xy+y^2-8x+8\sqrt{3}\,y+4=0$ 爲何種曲線? 若移去 xy 項, 則新方程式若何?

〔解〕 從本章 54 節: $A=3,\ B=2\sqrt{3},\ C=1,$

$$B^2-4AC=12-4\cdot3=0.$$

故此方程式代表一拋物線.

又轉移坐標軸, 使 $\tan 2\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3-1}=\sqrt{3},\quad \therefore\ \theta=30^\circ.$

$$\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3},\quad \sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

從公式 71: $$x=\frac{x'}{2}\sqrt{3}-\frac{y'}{2}=\frac{\sqrt{3}\,x'-y'}{2}$$

$$y=\frac{x'}{2}+\frac{y'}{2}\sqrt{3}=\frac{x'+\sqrt{3}y'}{2}$$

代入原方程式:

$$3\left(\frac{\sqrt{3}\,x'-y'}{2}\right)^2+2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}\,x'-y'}{2}\right)\left(\frac{x'+\sqrt{3}\,y'}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{x'+\sqrt{3}\,y'}{2}\right)^2-8\left(\frac{\sqrt{3}\,x'-y'}{2}\right)+8\sqrt{3}\left(\frac{x'+\sqrt{3}\,y'}{2}\right)+4=0,$$

化簡即得所求的新方程式, 爲

$$x'^2+4y'+1=0.$$

[習　題]

(1) 若坐標軸平移到新原點$(-4, 3)$，則曲線$x^2-4y^2+8x+24y-20=0$的新方程式若何？

[提示] 應用公式70. $(x'^2-4y'^2=0)$

(2) 方程式$x^2+4xy+y^2=16$表何種曲線？若坐標軸依原點轉移$\frac{\pi}{4}$角，則新方程式若何？

[提示] 應用§54，及公式71. $(3x'^2-y'^2=16)$

(3) 若移去方程式$x^2+4y^2-16x+24y+84=0$中x, y一次項，則新方程式若何？

[提示] 用例3的方法. $(x'^2+4y'^2=16)$

(4) 移去方程式$6x^2+20\sqrt{3}xy+26y^2=324$中的$xy$項，並從新坐標的關係，描出圖形.

[提示] 應用公式72，及71. $(9x'^2-y'^2=81)$

(5) 若拋物線的軸為x軸，頂點為$(6, 0)$，且通過$(0, 4)$點，求此拋物線的方程式；若把坐標軸的原點移到拋物線的頂點而兩軸之方向不變，則此方程式若何？

[提示] 先從公式40決定p之值，再應用移軸法. $(3y'^2+8x'=0)$

(6) 若橢圓的頂點為$(-2, 0)$，$(8, 0)$，半短軸為$b=\sqrt{7}$，求此橢圓方程式；若坐標軸的原點移到橢圓中心而兩軸之方向不變，則方程式若何？

[提示] 從公式46決定a之值；再應用移軸法. $\left(\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{7}=1\right)$

第七章 極坐標

[提　要]

(55) 極坐標和正坐標的關係： 若極坐標的極點和正坐標的原點相合，極軸與橫軸相合，則任意一點 P 的正坐標 (x, y) 和極坐標 (ρ, θ) 的關係爲

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta \\ y&=\rho\sin\theta \\ x^2+y^2&=\rho^2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\text{(公式 74)}$$

(56) 直線的極坐標方程式： 設正坐標的直線普通方程式爲 $Ax+By+C=0$，則其極坐標方程式爲

$$\rho(A\cos\theta+B\sin\theta)+C=0 \cdots\cdots\text{(公式 75)}$$

推論 1: 若直線平行於極軸，且與極軸之距離爲 a，則其方程式爲

$$\rho\sin\theta=a \cdots\cdots\text{(公式 76)}$$

推論 2: 若直線垂直於極軸，且與極點之距離爲 a，則其方程式爲

$$\rho\cos\theta=a \cdots\cdots\text{(公式 77)}$$

(57) 圓的極坐標方程式: 設正坐標的圓方程式爲 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

則其極坐標方程式爲

$$\rho^2+\rho(D\cos\theta+E\sin\theta)+F=0 \cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 78)$$

推論1: 若圓心在極軸上直徑爲 $2r$, 且圓周通過極點,則其方程式爲

$$\rho=2r\cos\theta \cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 79)$$

推論2: 若圓周切極軸於極點半徑爲 r, 則其方程式爲

$$\rho=2r\sin\theta \cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 80)$$

(58) 圓錐曲線的極坐標方程式: 若圓錐曲線的主軸在極軸上,焦點在極點,則其極坐標方程式爲

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta} \cdots\cdots\cdots (\text{公式 } 81)$$

(e 爲離心率, p 爲從準線到焦點的距離).

〔舉　例〕

1. 試將極坐標方程式 $r=a\sin 2\theta$ 變換爲直角坐標方程式. (滬, 二十二年)

〔解〕 $\because$ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$, 故原方程式爲

$$r=2a\sin\theta\cos\theta.$$

從公式 74: $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $r^2=x^2+y^2$,

$$\therefore \quad \underset{\sim\sim}{r}=2a\cdot\frac{y}{r}\cdot\frac{x}{r}=\frac{2axy}{r^2}.$$

即 $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{2axy}{x^2+y^2}$, 即 $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$.

2. 試將正坐標方程式 $x^2-y^2=a^2$ 變換爲極坐標方程式.

〔解〕 原方程式可改寫爲 $x^2+y^2-2y^2=a^2$,

從公式74: $\rho^2-2(\rho\sin\theta)^2=a^2$,

即 $\rho^2(1-2\sin^2\theta)=a^2$,

即 $\rho^2\cos 2\theta=a^2$.

3. 求兩曲線 $\rho=4(1+\cos\theta)$ 與 $\rho(1-\cos\theta)=3$ 的交點的坐標.

〔解〕 解聯立方程式 $\begin{cases}\rho=4(1+\cos\theta) \cdots\cdots\cdots (A)\\ \rho(1-\cos\theta)=3 \cdots\cdots\cdots (B)\end{cases}$

$(A)\div(B)$ $\dfrac{\rho}{\rho(1-\cos\theta)}=\dfrac{4(1+\cos\theta)}{3}$, $4(1-\cos^2\theta)=3$,

$$\therefore \cos\theta=\pm\frac{1}{2}, \quad \therefore \theta=\pm 60^\circ, \pm 120^\circ.$$

若 $\theta=\pm 60^\circ$, 代入 (A) 或 (B) 得 $\rho=6$, 故交點爲 $(6,\pm 60^\circ)$.

若 $\theta=\pm 120^\circ$, 代入 (A) 或 (B) 得 $\rho=2$, 故交點爲 $(2,\pm 120^\circ)$.

4. 試將極坐標方程式 $\rho^2-2\rho(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)+3=0$ 變換爲正坐標方程式, 并作圖.

〔解〕 $\because \cos\theta=\dfrac{x}{\rho}, \sin\theta=\dfrac{y}{\rho}$,

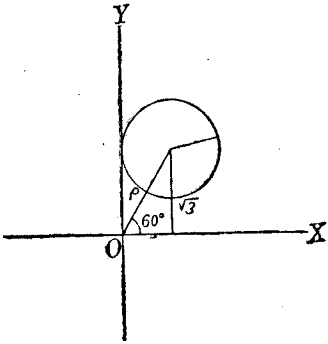
代入原方程式.

$$\rho^2-2(x+\sqrt{3}\,y)+3=0,$$

即 $x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}\,y+3=0.$

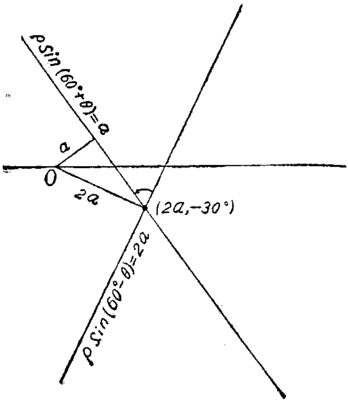
或改寫爲標準形式:

$$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1.$$



此方程式代表一圓,圓心爲 $(1,\sqrt{3})$,其極坐標爲 $(2,60°)$ 半徑爲1,如上圖.

5. 求兩直線 $\rho\sin(60°-\theta)=2a$, $\rho\sin(60°+\theta)=a$ 之交點及交角.



〔解〕 a. 解聯立方程式

$$\begin{cases}\rho\sin(60°-\theta)=2a\cdots\cdots(A)\\ \rho\sin(60°+\theta)=\ \ a\cdots\cdots(B)\end{cases}$$

$(A)\div(B)$ $\quad \dfrac{\sin(60°-\theta)}{\sin(60°+\theta)}=2,$

$$\frac{\sin 60°\cos\theta-\cos 60°\sin\theta}{\sin 60°\cos\theta+\cos 60°\sin\theta}=2,$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta}=2,\ 化簡得\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\sqrt{3},$$

即 $\cot\theta=-\sqrt{3}$, $\therefore\ \theta=-30°$.

代入(A)或(B)得$\rho=2a$,故交點爲$(2a,\ -30°)$.

b. 把(A)變換爲正坐標方程式,得$\sqrt{3}\,x-y=4a$,

把(B)變換爲正坐標方程式,得$\sqrt{3}\,x+y=2a$,

從公式19,知此二直線之交角,爲

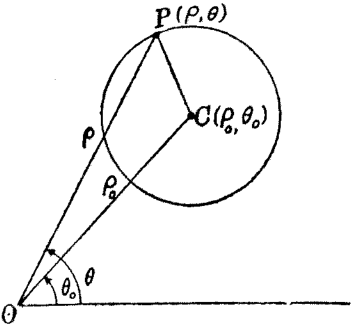
$$\tan\phi=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}(-1)}{3-1}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},\quad \therefore\ \phi=60°.$$

6. 若圓心爲$C(\rho_0,\theta_0)$,半徑爲a,求此圓之極方程式.

〔解〕 設$P(\rho,\theta)$爲圓周上的任意一點,則

從三角法餘弦公式,在三角形OCP中:

$\overline{OC}^2+\overline{OP}^2-2\overline{OC}\cdot\overline{OP}\cdot\cos\angle COP=\overline{CP}^2.$



即 $\rho^2+\rho_0{}^2-2\rho\rho_0\cos(\theta-\theta_0)=a^2$……就是所求圓的極方程式.

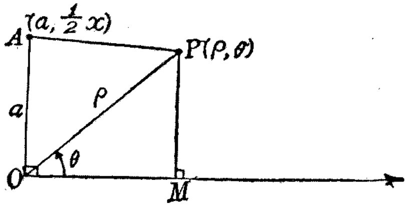
7. 一動點與極軸的距離等於與定點$\left(a,\ \frac{1}{2}\pi\right)$的距離,求此動點的軌跡方程式.

〔解〕 設動點為 $P(\rho, \theta)$，如下圖：

$$MP = \rho \sin \theta,$$

$$AP = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right)},$$

(餘弦公式)



$\because \quad MP = AP, \quad \therefore \quad \rho^2 \sin^2\theta = \rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$\rho^2(1 - \sin^2\theta) - 2\rho a \sin\theta + a^2 = 0,$$

即 $$\rho^2 \cos^2\theta - 2\rho a \sin\theta + a^2 = 0.$$

[習　題]

1. 變換直線方程式的法線式 $x \cos\omega + y \sin\omega - p = 0$ 為極方程式.

[提示] 應用公式 74.　　　　$[\rho \cos(\theta - \omega) - p = 0]$

2. 變換極方程式 $\rho + 6 \cot\theta \csc\theta = 0$ 為正坐標方程式.

[提示] 應用公式 74.　　　　$(y^2 + 6x = 0)$

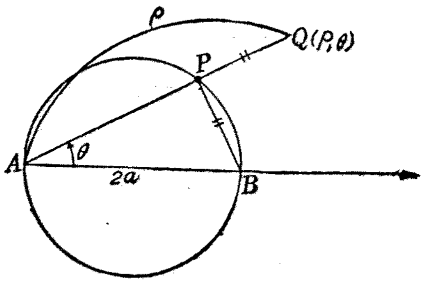
3. 求兩曲線 $\rho^2 = \sin 2\theta$ 與 $\rho = \sqrt{2} \sin\theta$ 的交點.

[提示] 解聯立方程式. 消去 ρ.　　　　[(1, 45°), 亦即 (−1, 225°)]

4. 若 AB 爲定圓的定直徑，在圓周上任意取一點 P，連結 AP，並延長到 Q，使 $PQ=BP$；試求 Q 點的軌跡方程式，並變換爲正坐標方程式.

[提示] 令 AB 在極軸上，A 點與極點相合如右圖，

則 $\rho=AP+PQ=AP+BP$.



$$\begin{bmatrix}\rho=2a(\sin\theta+\cos\theta)\\ x^2+y^2=2a(x+y)\end{bmatrix}$$