ACTA

SOCIETATIS SCIENTIARUM

FENNICÆ.

TOMUS XVI.

HELSINGFORSIÆ.
Ex officina typographica Societatis litterariae fennicae
MDCCCLXXXVIII.

U.32

TABLE
DES
ARTICLES CONTENUS DANS CE TOME.

A ce tome appartiennent 17 planches.

ETAT DU PERSONNEL
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE FINLANDE

AU 1 AVRIL 1888.

MEMBRES HONORAIRES RUSSES ET FINLANDAIS.

M. VICTOR BOUNIAKOFSKI, Conseiller privé actuel, Vice-Président de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.

M. OTTO BÖTHLING, Conseiller d'état actuel, Membre de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.

M. AXEL GADOLIN, Lieutenant général, D:r en minéralogie, Membre de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.

M. ADOLPHE-EDOUARD ARPPE, D:r en phil., Conseiller d'état actuel, Chef de la Direction de l'industrie en Finlande.

MEMBRES HONORAIRES ÉTRANGERS.

M. ERIC EDLUND, D:r en phil., Professeur de physique à l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.

M. le Baron NICOLAS-ADOLPHE-ERIC NORDENSKIÖLD, D:r en phil., Professeur de minéralogie à l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.

M. CHARLES WEIERSTRASS, Professeur à l'Université et Membre de l'Académie Royale des Sciences de Berlin.

M. Charles Hermite, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Académie des Sciences de l'Institut de France.

M. Jean-Auguste-Hugo Gyldén, D:r en phil., Professeur à l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.

M. Jean-Daniel-Charles Lieblein, Professeur à l'Université de Christiania. (Élu le 13 Avril 1885).

M. Charles-Hermann-Amandus Schwarz, Professeur à l'Université de Gottingue. (Élu de 12 Avril 1886).

M. Christophe-Henry-Ditrich Buys-Ballot, Directeur de l'Institut météroologique d'Utrecht. (Élu le 14 Novembre 1887).

MEMBRES ORDINAIRES.

I. Section des sciences mathématiques et physiques.

M. Henry-Gustave Borenius, D:r en phil., Professeur-adjoint émérite de mathématiques et de physique.

M. Adolphe Moberg, D:r en phil., Conseiller d'état, ancien professeur de physique à l'Université Alexandre.

M. Laurent-Léonard Lindelöf, D:r ès sciences, Conseiller d'état actuel, Directeur général de l'Administration supérieure des écoles, ancien professeur de mathématiques à l'Université Alexandre. (Secrétaire perpétuel de la Société.).

M. Adalbert Krueger, D:r en phil., Directeur de l'Observatoire de Kiel, ancien professeur d'astronomie à l'Université Alexandre.

M. Jean-Jacques Chydenius, D:r en phil., ancien professeur de chimie à l'Université Alexandre.

M. Frédéric-Jean Wiik, D:r en phil., Professeur de minéralogie à l'Université Alexandre.

M. Gustave Mittag-Leffler, D:r en phil., Professeur de mathématiques à l'Université de Stockholm.

M. Charles-Sélim Lemström, D:r en phil., Professeur de physique à l'Université Alexandre.

M. Nicolas-Charles Nordenskiöld, Directeur de l'Institut météorologique central de Helsingfors. (Président de la Société 1886—1887).

M. Auguste-Frédéric Sundell, D:r en phil., Professeur extraordinaire de physique à l'Université Alexandre.

M. Edouard-Immanuel Hjelt, Professeur de chimie à l'Université Alexandre. (Élu e 23 Novembre 1885).

II. Section d'histoire naturelle.

M. Evert-Jules Bonsdorff, D:r en méd., Conseiller d'état, Professeur émérite à l'Université Alexandre.

M. Canut-Félix de Willebrand, D:r en méd., Conseiller d'état actuel, Professeur émérite, Directeur général des établissements sanitaires en Finlande.

M. Guillaume Nylander, D:r en méd., ancien professeur de botanique à l'Université Alexandre.

M. Otto-Edouard-Auguste Hjelt, D:r en méd., Archiâtre, ancien professeur d'anatomie pathologique à l'Université Alexandre.

M. François-Josèphe de Becker, D:r en méd., Conseiller d'état, ancien professeur de chimie physiologique et de pharmacologie à l'Université Alexandre.

M. Sexte-Otto Lindberg, D:r en méd., Professeur de botanique à l'Université Alexandre.

M. André-Jean Malmgren, D:r en phil., Professeur extraordinaire, Inspecteur des pêcheries en Finlande.

M. Jean-Martin-Jacques de Tengström, Maître en chirurgie, Médecin provincial à Lojo.

M. Odo-Morannal Reuter, D:r en phil., Professeur extraordinaire de zoologie à l'Université Alexandre.

M. Pierre-Adolphe Karsten, D:r ès sciences, Professeur de botanique à l'Institut d'agriculture de Mustiala.

M. Conrad-Gabriel Hällstén, D:r en méd., Professeur de physiologie à l'Université Alexandre. (Élu le 23 novembre 1885. Président actuel de la Société).

III. Section d'histoire et de philologie.

M. Jean-Jacques-Guillaume Lagus, D:r en phil., Conseiller d'état, Ancien professeur de littérature grecque à l'Université Alexandre.

M. Auguste-Enguelbrecht Ahlquist, D:r en phil., Conseiller d'état, Professeur de langue et littérature finnoises à l'Université Alexandre.

M. George-Zacharie Yrjö-Koskinen, D:r en phil., Sénateur, ancien professeur d'histoire à l'Université Alexandre.

M. Charles-Gustave Estlander, D:r ès lettres, Professeur d'esthétique et de littérature moderne à l'Université Alexandre.

M. Jean-Gustave Frosterus, D:r ès lettres, Professeur, Inspecteur général des écoles.

M. Sven-Gabriel Elmgren, D:r ès lettres, Professeur extraordinaire, Vice-bibliothécaire à la bibliothèque de l'Université Alexandre.

M. Otto Donner, D:r en phil., Professeur extraordinaire de sanscrit et de linguistique comparée à l'Université Alexandre. (Président de la Société 1885—1886).

M. Axel-Olof Freudenthal, D:r en phil., Professeur extraordinaire de langue et de littérature suédoises à l'Université Alexandre.

M. Charles-Emile-Ferdinand Ignatius, D:r en phil., Sénateur.

M. Jean-Rénaud Aspelin, D:r en phil., Professeur extraordinaire d'Archéologie à l'Université Alexandre.

M. Charles Synnerberg, D:r en phil., Inspecteur général des écoles.

M. Charles-Constantin Tigerstedt, D:r en phil., Professeur d'histoire au lycée d'Åbo.

DÉCÉDÉS DEPUIS LE 1 MARS 1885.

Membre honoraire:

M. Ferdinand Wiedemann, † le 30 Décembre 1887.

Membre ordinaire:

M. Nicolas-Abraham Gyldén, † le 28 Février 1888.

LISTE

des

Corps savants et des Établissements scientifiques en Russie et à l'étranger auxquels la Société des Sciences de Finlande envoie ses publications.

RUSSIE.

Dorpat. Société des Naturalistes.
Société scientifique Este.

Iékaterinenbourg. Société Ouralienne d'amateurs des sciences naturelles.

Kiew. Société des Naturalistes.

Moscou. Société Impériale des Naturalistes.
Société mathématique.
Société Impériale d'amateurs des sciences naturelles, d'anthropologie et d'ethnographie.

St.-Pétersbourg. Académie Impériale des sciences.
Observatoire astronomique central de Poulkova.
Observatoire physique central.
Société minéralogique.
Société Impériale de géographie.
Bibliothèque publique Impériale.
Jardin Impérial de botanique.
Comité géologique.

Tiflis. Observatoire météorologique.

Les Universités Impériales de Charkow, Dorpat, Kasan, Kiew, Moscou, Odessa et de St.-Pétersburg.

SUÈDE et NORVÈGE.

Bergen. Bergens Museum.

Christania. Université Royale.

Gotenbourg. Société Royale des sciences et des lettres.

Lund. Université Royale.

Stockholm.
- Académie Royale des sciences.
- Académie Royale Suédoise.
- Académie Royale des belles-lettres, de l'histoire et des antiquités de Suède.
- Bibliothèque Royale.
- Bureau des recherches géologiques de la Suède.
- Bureau Nautique Métérologique.
- Université (Stockholms Högskola).

Tromsö. Tromsö Museum.

Throndhjem. Société Royale des sciences.

Upsal.
- Université Royale.
- Société Royale des sciences.

DANEMARK.

Copenhague.
- Université Royale.
- Société Royale des sciences.

ALLEMAGNE et AUSTRICHE.

Agram.
- Société archéologique Croate.
- Société d'histoire naturelle croate.

Augsburg. Historischer Verein für Schwaben und Neuburg.

Bamberg. Naturforschender Verein.

Berlin.
- Königliche Akademie der Wissenschaften.
- Hydrographisches Amt der Kaiserlichen Marine.
- Königlich Preussisches Meteorologisches Institut.

Bistritz. Gewerbeschule.

Bonn. Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.

Braunschweig. Verein für Naturwissenschaft.

Bremen. Naturwissenschaftlicher Verein.

Brünn. Naturforschender Verein.

Budapest. Ungarische Akademie.

Cassel. Verein für Naturkunde.

Chemnitz. Verein für Chemnitzer Geschichte.

Dürkheim. Pollichia, ein Naturwissenschaftlicher Verein der Rheinpfaltz.

Dresden. { Kaiserl. Leopoldino-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.
Königliche Oeffentliche Bibliothek.

Elberfeld. Naturhistorischer Verein.

Erlangen. Physikalisch-medicinische Societät.

Freiberg. Alterthums Verein.

Görlitz. Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingen. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Giessen. Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.

Grätz. Historischer Verein für Steiermark.

Greifswald. Naturwissenschaftlicher Verein von Neuvorpommern und Rügen.

Halle. Naturforschende Gesellschaft.

Hamburg. { Verein für Naturwissenschaftliche Unterhaltung.
Deutsche Seewarte.

Jena. Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.

Königsberg. Königl. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft.

Klagenfurt. Naturhistorisches Landesmuseum von Kärnthen.

Leipzig. { Königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.
Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft.
Astronomische Gesellschaft.
Verein für Erdkunde.

München. Königl. Bayerische Akademie der Wissenschaften.

Nürnberg. Germanisches Museum.

Offenbach. Verein für Naturkunde.

Potsdam. Observatoire astrophysique.

Prag. Königl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.

Presburg. Verein für Naturkunde.

Regensburg. Zoologisch-mineralogischer Verein.

Strassburg. L'Université.

Triest. { Società Adriatica di scienze naturali.
K. K. Handels- und Nautische Akademie.

Ulm. Verein für Kunst und Alterthümer in Ulm und Oberschwaben.

Wien. { Kaiserl. Akademie der Wissenschaften.
K. K. geologische Reichsanstalt.
K. K. geographische Gesellschaft.
Zoologisch-botanischer Verein.
Anthropologische Gesellschaft.
Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.
K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.

Wien. Naturhistorisches Hofmuseum.
Wiesbaden. Verein für Naturkunde.
Würzburg. Physikalisch-medicinische Gesellschaft.

SUISSE.

Genève. Société de physique et d'histoire naturelle.
Zürich. Naturforschende Gesellschaft.
Zürich. Die Schweizerische Meteorologische Commission.

PAYS-BAS et BELGIQUE.

Amsterdam. Académie Royale des sciences.
Amsterdam. Kon. Zoologisch Genootshap „Natura artis magistra".
Bruxelles. Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.
Bruxelles. Société malacologique de Belgique.
Bruxelles. Société entomologique de Belgique.
Bruxelles. Observatoire Royal.
Delft. L'école Polytechnique.
Harlem. Fondation de P. Teyler van der Hulst.
Liége. Société Royale des sciences.
Liége. Société géologique de Belgique.
Utrecht. L'institut Royal météorologique des Pays-Bas.

FRANCE et ITALIE.

Bordeaux. Société des sciences physiques et naturelles.
Caen. Société Linnéenne de Normandie.
Cherbourg. Société des sciences naturelles.
Lyon. Académie des sciences, belles-lettres et arts.
Lyon. Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles.
Lyon. Société Linnéenne.
Montpellier. Académie des sciences et lettres.
Nancy. Société des sciences naturelles.
Paris. Académie des sciences de l'Institut de France.
Paris. Société mathématique de France.
Paris. École Polytechnique.
Paris. Musée Guimet.
Paris. Société de géographie.

Pisa. École normale supérieure.
Rome. Reale Accademia dei Lincei.
Turin. Académie Royale des sciences.

GRANDE-BRETAGNE et IRLANDE.

Cambridge. Philosophical Society.
Dublin. { Royal Irish Academy.
Royal Society of Dublin. }
Edimbourg. Royal Society of Edinburg.
Liverpool. Litterary and philosophical Society.
Londres. { Royal Society of London.
Royal astronomical Society of London.
Zoological Society.
Meteorological Office.
The Patent Office Library. }
Manchester. Litterary and philosophical Society.
Oxford. Bodleian Library.

ÉTATS UNIS DE L'AMÉRIQUE DU NORD.

Baltimore. Johns Hopkins University.
Boston. { American Academy of Arts and Sciences.
Society of Naturalhistory. }
Cambridge, Mass. Museum of Comparative Zoology at Harvard College.
Madison. Wisconsin agricultural Society.
New-Haven. Connecticut Academy of Arts and Sciences.
New-Orleans. Academy of Natural Sciences.
Philadelphia. Academy of Natural Sciences.
St.-Francisco. California Academy of Natural Sciences.
Washington. { Smithsonian Institution.
Département d'agriculture des États-Unis.
The Office U. S. Geological Survey of the Territories.
U. S. Naval Observatory.
Anthropological Society.
Bureau of Education. }

CANADA.

Toronto. Canadian Institute.

LA RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Córdova. Academia Nacional de ciencias de la Republica Argentina.

INDES ORIENTALES.

Calcutta. The Asiatic Society of Bengal.
Madras. Madras Litterary Society.
Singapore. The Straits Branch of the Royal Asiatic Society.

JAPON.

Tokio. College of Science. Imperial University.
Yokohama. The Asiastic Society of Japan.

AUSTRALIE.

Sidney. { Royal Society of New South Wales.
Linnean Society of New South Wales. }
Wellington. Colonial Museum of New Zealand.

SENECA'S CHARACTER

UND

POLITISCHE THÄTIGKEIT

AUS SEINEN SCHRIFTEN BELEUCHTET

VON

I. A. HEIKEL.

Senecas Character und politische Thätigkeit aus seinen Schriften beleuchtet.

Senecas Character und Auftreten als politische Persönlichkeit ist schon seit alter Zeit in verschiedener Weise beurtheilt worden. Die Ansichten des Tacitus und des Dio lassen sich nicht gut vereinigen. Je nachdem die Neueren sich diesem oder jenem angeschlossen haben, aber auch bei hauptsächlicher Benutzung von Tacitus als dem zuverlässigeren Gewährsmanne [1]) sind ihre Beurtheilungen mehr oder weniger zu Senecas Gunsten ausgefallen.

Ehe das Urtheil in dieser Frage gesprochen wird, ist es billig, dass man noch eine andere Stimme hört, nämlich die des Angeklagten. Dies ist bisher gar zu wenig der Fall gewesen [2]), und so ist es geschehen, dass man ihn einerseits gegen Ansichten vertheidigt, die er doch selbst ausspricht, und andererseits ihn einer Heuchelei und eines Widerspruches zwischen Lehren und Leben beschuldigt, der in Wahrheit sich nicht begründen lässt. In jener Hinsicht versündigt sich am meisten Diderot in seinem beredten *Essai sur les règnes de Claude et de Neron et sur la vie et les écrits de Sénèque* (Oeuvres complètes de Diderot par J. Assézat, Paris 1875. Tome III). In dieser Hinsicht findet sich viel Ungerechtes und Uebertriebenes besonders bei H. Schiller, *Geschichte des römischen Kaiserreichs unter der Regierung Nero's, Berlin 1872.*

Dass alle die streitigen Fragen durch die Bezugnahme auf Senecas Aeusserungen erledigt werden, ist nicht zu erwarten. Senecas Schriften befassen sich fast alle mit theoretischen Erörterungen und geben nur selten über politische oder geschichtliche Fragen Aufschluss. Doch werden hie und da Aeusserungen laut, die sich so deutlich auf die Zeitverhältnisse beziehen, dass man

---

[1]) Tacitus führt uns Seneca in bestimmten Fällen handelnd vor; die Beurtheilungen des Dio (oder Xiphilinos) sind allgemeiner gehalten und bisweilen (wie LXI, 4 und 10) fast deklamatorisch.

[2]) E. Probst's Aufsatz: Seneca aus seinen Schriften, Basel 1879, kommt als sehr unvollständig und ganz populär gehalten auch kaum in Betracht.

annehmen muss, dass der Verfasser sich mit bestimmter Absicht ausgesprochen hat. Andere Aeusserungen aber kann man nur als einen nicht völlig bewussten Wiederhall der jedesmaligen Stimmung des Verfassers betrachten. In solchen Fällen ist grosse Vorsicht geboten, damit man nicht dem allgemein Theoretischen eine individuelle Farbe gebe. Vor allen Dingen aber darf man nicht die Aeusserungen hier und da herauslesen, ohne die Zeitverhältnisse, in welchen sie ausgesprochen worden sind, zu berücksichtigen. Die chronologische Reihenfolge der Schriften wird also hier eine wichtige Frage. Sie ist behandelt worden von Lehmann, *Claudius und Nero und ihre Zeit, Gotha 1858.* Jonas, *de ordine librorum L. Annaei Senecae philosophi*, *Berol. 1871.* Martens, *de L. Annaei Senecae vita et de tempore quo scripta eius philosophica quae supersunt composita sint*, *Altonae 1871.* Alle Gesichtspunkte, die hierbei von einiger Bedeutung sind, scheinen von ihnen hervorgehoben worden zu sein. Aber da diese Gesichtspunkte meistens jedem, der die betreffenden Schriften mit Aufmersamkeit durchliest, sich von selbst ergeben, und eine Modificirung der verschiedenen Ansichten oft nöthig wurde, war es im Folgenden nicht möglich in den einzelnen Fällen auf die schon genannten Schriften nochmals hinzuweisen.

Was in der eigentlichen Beurtheilung von Seneca diesem oder jenem Verfasser gebührt, ist bei dem schon so oft behandelten Stoffe nicht mehr leicht zu bestimmen. Wir wollen daher meistens auf solchen Angaben verzichten, zumal da die Citate aus den Alten, worauf die von uns ausgesprochenen Ansichten sich gründen, jedesmal beigefügt werden.

L. Annaeus Seneca (über den Namen: De benef. IV, 8, 3), in Corduba geboren (Epigr. IX, 3 u. 13), wurde später, wie er selbst sagt (Consol. ad Helv. XIX, 2), auf den Armen seiner Tante nach Rom getragen. Dort widmete er sich mit grossem Eifer der Philosophie (Ep. 108, 3 u. 17), welche ihm seitdem während seines ganzen Lebens theuer blieb. — Um das Jahr 18 n. Chr. und wahrscheinlich schon früher (Ep. 49, 2) finden wir ihn mit philosophischen Studien beschäftigt (vgl. Ep. 108, 22 und Tac. Ann. II, 85). Aus dem eben genannten Briefe lernt man schon in Seneca den Mann kennen, der den Zeitverhältnissen sich unschwer anpasst. Der Philosoph Attalus hatte durch seine Vorträge ihn für Mässigkeit und Enthaltsamkeit begeistert, aber, sagt er (15): *deinde ad civitatis vitam reductus ex bene coeptis pauca servavi*; was sehr charakteristisch für Seneca ist, der durch und durch ein Mann seiner Zeit war. Eben dieselbe Leichtigkeit sich in den Verhältnissen zu finden und Unannehmlichkeiten auszuweichen, bezeugt ein anderer Vorfall, der in derselben Epistel erwähnt wird (22). Der Pythagoreer Sotion hatte Seneca veranlasst sich animalischer Speisen zu enthalten, welchem Vorsatz er auch ein ganzes Jahr treu blieb —; *quaeris quomodo desierim? in Tiberii Caesaris principatum iuventae tempus inciderat. Alienigena tum sacra movebantur, sed inter argumenta superstitionis ponebantur quorumdam animalium abstinentia. Patre itaque meo rogante, qui non calumniam timebat sed philosophiam oderat, ad pristinam consuetudinem redii; nec difficulter mihi, ut inciperem melius coenare, persuasit.* Diese Züge aus der Jugendzeit, wenn auch anscheinend unbedeutend, deuten doch den künftigen Mann an, der seine guten Vorsätze nach den Verhältnissen modificiren zu müssen glaubte.

Später widmete er sich dem Berufe eines Anwaltes (Ep. 49, 2): *Modo amisisse te videor. Quid enim non modo est, si recorderis? Modo apud Sotionem philosophum puer sedi, modo causas agere coepi.* Hiedurch wie durch seine philosophischen Einsichten hatte er sich ein bedeutendes Ansehen erworben. Consol. ad Helv. V, 4: *Numquam ego fortunae credidi, etiam cum videretur pacem agere. Omnia illa, quae in me indulgentissime conferebat, pecuniam, honores, gratiam eo loco posui, unde posset sine motu meo repetere.* Auch die Quaestur verwaltete er (Consol. ad Helv. XIX, 2.)

Die eben angeführten Worte über sein Misstrauen in das Glück schrieb Seneca im Exil, jenem bedeutenden Einschnitte in seinem Leben, welcher ihn in dem ersten Regierungsjahre des Claudius traf. Als Ursache dazu wird angegeben, dass er in dem Ehebruche Julias, der Tochter des Germanicus verwickelt gewesen sei (Dio Cass. LX, 8, Juvenal V, 109, Schol.). Von dem notorischen Delator Suilius (vgl. Diderot S. 86 ff.) wird er später geradezu des Ehebruches mit ihr beschuldigt, und daher mag auch die Angabe des Dio oder Xiphilinos LXI, 10 herrühren. Hierüber etwas gewisses zu sagen bleibt schwierig; indessen kann man hieraus ersehen, dass Seneca schon zu dieser Zeit mit dem Hofe des Princeps in Verkehr stand, und so ist es nicht unwahrscheinlich, was er selbst in den Epigrammen, die sichtbar (vgl. z. B. Epigr. 9, 16) sogleich nach seiner Ankunft in Corsica verfasst sind, anzudeuten scheint, dass er durch den Hass seiner Neider verbannt worden sei. Er sagt Epigr. III vv. 1—2 (die Aechtheit voraussetzt):

Occisi iugulum quisquis scrutaris amici,
Tu miserum necdum me satis esse putas?

und in dem folgenden:

Quisquis es, — et nomen dicam: dolor omnia cogit —
Qui nostrum cinerem nunc, inimice, premis
Et non contentus tantis subitisque ruinis
Stringis in exstinctum tela cruenta caput.
— — — — — — — — — — — —
Ipsos crede deos hoc nunc tibi dicere, livor.

Übrigens hatte dieser plötzliche Schlag Seneca sehr hart betroffen, wie aus den schon angeführten Versen hervorgeht, noch mehr aus einigen anderen, worin er sich als todt — bürgerlich todt ist ja der Verbannte — bezeichnet. So Epigr. I, vv. 7—8 (*ad Corsicam*):

Parce relegatis, hoc est, iam parce sepultis:
Vivorum cineri sit tua terra levis.

womit zu vergleichen sind III, 3; IV, 6; VIII, 2; IX. Diese Aeusserungen sind an und für sich nicht so wichtig, sie geben uns aber den Aufschluss zum richtigen Verständniss der *Consolatio ad Polybium*, die jedenfalls von Seneca herrührt, und worauf, meiner Meinung nach, auch die bekannte Erzählung Dios (LXI, 10) sich bezieht, dass Seneca von der Insel Corsica aus der Messalina und den Freigelassenen des Claudius ein Buch zugesandt hätte, voll von Schmeicheleien, warum er auch später aus Scham diese Schrift unterdrückte. Eben aus diesem letzten Umstande lässt sich, wie mir scheint, sehr gut erklären, dass Dio von Messalina und mehreren Freigelassenen (*τοὺς Κλαυδίου ἐξελευθέρους*) spricht, obgleich in der Consolatio nur von Polybius die Rede ist. Die Arbeit war dem Publicum wie dem Dio nur durch das Gerücht bekannt, das im Laufe der Zeiten etwas hinzuzufügen nicht Anstand genommen hatte. Aus dieser doch nicht ganz gelungenen Unterdrückung erklärt sich auch am besten, warum die Consolatio ad Polybium in der Mediol. Handschrift nicht enthalten ist. — Durch diese Schrift, die gewiss vor dem Jahre 44 abgefasst worden ist (vgl. 13, 2: *hic* (Claudius) *Germaniam pacet, Britanniam aperiat*, und Dio LX, 21), sucht Seneca, wie aus Cap. 13 deutlich hervorgeht, seine Zurückberufung zu bewirken. Claudius zeigte sich, wie man aus Sueton ersieht, im Anfang seines Principats gar nicht untüchtig und grausam, und besonders scheint Seneca mit vollem Rechte seine Milde preisen zu können, wenn sein Betragen bei der Verurtheilung von Seneca wirklich so war, wie es Seneca beschreibt — und das zu bezweifeln haben wir kein Recht. Seneca sagt (Cap. 13, 2): *Hic Germaniam pacet, Britanniam aperiat et patrios triumphos ducat et novos. Quorum me quoque spectatorem futurum, quae ex virtutibus eius primum obtinet locum, promittit clementia. Nec enim sic me deiecit, ut nollet erigere, immo ne deiecit quidem, sed impulsum a fortuna et cadentem sustinuit et in praeceps euntem leniter divinae manus usus moderatione deposuit. Deprecatus est pro me senatum et vitam mihi non tantum dedit sed etiam petiit.* — Übrigens wird Claudius durch die ganze Schrift übermässig geschmeichelt (vgl II, 2; III, 5; VI, 5 *princeps maximus*; VII, 4; VIII, 1 *numen*; XII, 3 *maximum et clarissimum numen*; XIII, 1 *sidus hoc, quod praecipitato in profundum et demerso in tenebras orbi refulsit, semper luceat*; XVII, 1 und öfters). Da das Büchlein nicht den erwünschten Erfolg hatte und Claudius sich noch überdies bald verhasst und lächerlich machte, konnte Seneca natürlich nicht gerne sehen, dass die Schrift, welche unter dem Drucke der Verbannung entstanden war (Cap. 18, 9 *haec, utcumque potui, longo iam situ obsoleto et hebetato animo composui*) in das Publicum kommen würde. Des Verbrechens erklärt er sich unschuldig, Cap. 13, 3: *Viderit* (Claudius) *qualem volet esse et aestimet causam meam: vel iustitia eius bonam perspiciat vel clementia faciat bonam: utrumque in aequo mihi eius beneficium erit, sive innocentem me scierit esse sive voluerit.* Die Alternative sind wieder sehr bezeichnend für Seneca, wie er sich den Verhältnissen leicht anbequemen konnte. Dass der Neid ihn gestürzt hatte, scheint er auch hier (Cap. 9, 5) anzudeuten. — Bemerkenswerth ist, dass Seneca schon in dieser Schrift, wenn auch in schmeichelhafter Weise, den Satz aufstellt, den er später noch genauer einzuschärfen versucht, dass der Staat nicht da sei des Fürsten wegen, sondern der Fürst des Staates wegen. Er sagt nämlich Cap. 7, 2: *Caesari quoque ipsi, cui omnia licent, propter hoc ipsum multa non licent: omnium somnos illius vi-*

gilia defendit, omnium otium illius labor, omnium delicias illius industria, omnium vacationem illius occupatio. Ex quo se Caesar orbi terrarum dedicavit, sibi se eripuit. Freilich, das ist ihm auch eine unumstössliche Wahrheit: *Caesari omnia licent,* und das mag auch das wirkliche Verhältniss gewesen sein, obgleich dem Namen nach eine Dyarchie bestand.

Aus der Verbannung stammt auch die *Consolatio ad Helviam matrem*, die vielleicht schon früher verfasst wurde als die Consolatio ad Polybium. Man vergleiche die Aeusserungen Cap. 1, 1: *Deinde plus habiturum me auctoritatis non dubitabam ad excitandam te, si prior ipse consurrexissem*; und 3: *quid quod novis verbis nec ex volgari et cotidiana sumptis adlocutione opus erat homini ad consolandos suos ex ipso rogo caput adlevanti*, mit den schon citirten Worten in den Epigrammen, und man wird den Eindruck bekommen, dass die Trostschrift an die Mutter doch nicht lange nach den Epigrammen geschrieben worden ist. Für die Beurtheilung von Seneca als öffentliche Persönlichkeit giebt die durch Milde und Ergebung in den Willen des Schicksals (XVIII, 6 *in me omnis fatorum crudelitas lassata consistat*) ausgezeichnete Schrift, die überdiess uns ein sehr zartes Familienleben vorführt (Capp. XVIII und XIX), keine besondere Auskunft. Auf beanspruchte Unschuld sind wohl die Aeusserungen XIII, 4, 6, 8 zu deuten.

Die Verhältnisse in Rom aber veränderten sich. Messalina wurde getödtet und an ihre Stelle trat Agrippina als Gemahlin des Princeps. Nun aber, wie Tacitus uns erzählt (Annal. XII, 8), *Agrippina, ne malis tantum facinoribus notesceret, veniam exilii pro Annaeo Seneca, simul praeturam impetrat, laetum in publicum rata ob claritudinem studiorum eius, utque Domitii pueritia tali magistro adolesceret et consiliis eiusdem ad spem dominationis uteretur, quia Seneca fidus in Agrippinam memoria beneficii et infensus Claudio dolore iniuriae credebatur.* Dies geschah im Jahre 49 (vgl. Tac. Ann. XIV, 53). Von dieser Zeit an bis zu einigen Jahren vor seinem Tode hat Seneca dem Nero zur Seite gestanden, zuerst als Erzieher, sodann als Rathgeber und Minister.

Sich unter jenem Fürsten und unter so misslichen Zeitverhältnissen so lange Zeit aufrecht halten zu können, erheischte eine kluge und biegsame Natur; und dass es bei Seneca an einer solchen nicht gefehlt hat, ersehen wir, um Dios Zeugniss ganz zu übergehen, sowohl aus Tacitus Darstellung als aus Senecas eigenen Aeusserungen.

Zu der Zeit unmittelbar nach oder doch nicht lange nach der Wiederkehr aus dem Exil kan man wohl die drei Bücher *De ira ad Novatum* verlegen. Dass sie nach Caligulas Tod (im Jahre 41) geschrieben worden sind, geht aus I, 20, 8 u. 9 deutlich hervor. Aus III, 36, 3 (*cum sublatum e conspectu lumen est et conticuit uxor, moris mei iam conscia*) können wir schliessen, dass er sich kurze Zeit vorher verheirathet hatte; er war aber zwei Male verheirathet. Als er aus dem Exil die Trostschrift an seine Mutter schrieb, war die erste Gattin doch ganz gewiss todt (vgl. besonders 18, 6 und Ep. 50, 2); dass er sie doch schon früher als im Jahre 41 geehelicht hatte, geht deutlich daraus hervor, dass der Sohn Marcus bei der Abfassung der Consolatio ad Helviam (im Jahre 41 od. 42) gewiss schon vier bis fünf Jahre alt war (vgl. 18, 4 u. 5). Also muss man die oben citirten Worte auf die spätere Gattin beziehen, die er natürlich erst nach dem Exil heirathen konnte. Aus den später anzuführenden Citaten ersieht man auch, dass er schon einige Zeit beim Hofe verkehrt und einige bittere Erfahrungen gemacht haben muss, ohne dass der Inhalt andererseits auf eine bedeutend spätere Zeit zu schliessen Anhalt giebt.[1])

Es scheint als ob Seneca sich in diesem Dialoge gerade ein Programm für sein Auftreten an dem Fürstenhofe aufgestellt hätte. Auch mag es der Fall gewesen sein, dass Seneca in Claudius das am meisten abschreckende Beispiel eines zum Zorn geneigten Menschen hatte (Suet. Claud. 34), das er seinem Schüler warnend vorführen wollte.

Es lautet gerade als eine Aufforderung, wenn er Lib. I, 6, 3 sagt: *Ita legum praesidem civitatisque rectorem decet, quamdiu potest, verbis et his mollioribus ingenia curare, ut facienda suadeat cupiditatemque honesti et aequi conciliet animis faciatque vitiorum odium, pretium virtutum. Transeat deinde ad tristiorem orationem, qua moneat adhuc et exprobret. Novissime ad poenas et has adhuc leves et revocabiles decurrat. Ultima supplicia sceleribus ultimis ponat, ut nemo pereat, nisi quem perire etiam pereuntis intersit.* — Auch finden wir hier einen Gedanken, der in Senecas Tragödien öfters wiederkehrt, dass die Macht des ungerechten Fürsten nicht bestehen kann: Lib. III, 16, 2 *Sed cum utilis sit servientibus adfectuum suorum et huius praecipue rabidi atque effreni continentia, utilior est regibus: perierunt omnia, ubi quantum ira suadet, fortuna permittit, nec diu potest quae multorum malo exercetur potentia stare. Periclitatur enim, ubi eos qui separatim gemunt communis metus iunxit. Plerosque itaque modo singuli mactaverunt, modo universi, cum illos conferre in unum iras publicus dolor coegisset.* Dies sind doch bedeutsame Worte von einem Manne, der in dem Dienste eines Fürsten, wie Claudius, war. Aber

[1]) Ich habe mich bei dieser Untersuchung etwas länger aufhalten müssen, da die von Anderen vorgebrachten Beweise für die Abfassungszeit lange nicht genügend schienen.

Seneca wusste auch aus Erfahrung sehr gut, *quid servientibus utile esset* (vgl. oben). Lib. II, 33, 1 sagt er: *Potentiorum iniuriae hilari voltu, non patienter tantum ferendae sunt. Facient iterum, si se fecisse crediderint. Hoc habent pessimum animi magna fortuna insolentes: quos laeserant et oderunt.* Wir irren wohl nicht, wenn wir annehmen, dass Senecas Verhältniss zu Claudius zu jenen Worten Veranlassung gegeben hat. — Noch andere Aeusserungen: Lib. II, 30, 1 *Rex est: si nocentem punit, cede iustitiae, si innocentem, cede iniuriae*, und Lib II, 34, 1: *Ergo ira abstinendum est, sive par est qui lacessendus est sive superior sive inferior. Cum pare contendere anceps est, cum superiore furiosum, cum inferiore sordidum.* Doch so weit geht Seneca nicht — und das darf man nicht vergessen —, dass er es gutheisse die Fürsten wegen schändlicher Thaten zu loben und ihnen zu schmeicheln. Nein, lieber den Tod! Er erzählt Lib. III, Cap. 14, Praexaspes habe, als Cambyses das Herz seines Sohnes durchschossen hatte, geäussert, dass Apollo es nicht besser hätte thun können — und fügt hinzu: *Di illum male perdant animo magis quam condicione mancipium; eius rei laudator fuit, cuius nimis erat spectatorem fuisse.* Dass dies nicht eine blosse rhetorische Phrase ist, zeigen die Reflexionen, mit denen er im folgenden Capitel die bekannte Aeusserung von Harpagus: „*apud regem omnis coena iucunda est*" begleitet. Er giebt zu: *Necessaria ista est doloris refrenatio, utique hoc sortitis vitae genus et ad regiam adhibitis mensam: sic estur apud illos, sic bibitur, sic respondetur, funeribus suis arridendum est.* Aber er sagt auch: *An tanti sit vita videbimus: alia ista quaestio est. Non consolabimur tam triste ergastulum, non adhortabimur ferre imperia carnificum: ostendemus in omni servitute apertam libertati viam.* Dieses Mittels hat sich auch Seneca selbst bedient, freilich doch, als kein anderes ihm mehr übrig war. Ein gelinderes Auskunftsmittel hatte ihm bis zu jener Zeit durchgeholfen: Lib III, 16, 1 *Quamdiu quidem nihil tam intolerabile nobis videtur, ut nos expellat e vita, iram, in quacunque erimus statu, removeamus . . Unum est levamentum malorum ingentium pati et necessitatibus suis obsequi.*

In diese Zeit verlegt man auch mit einiger Wahrscheinlichkeit die *Consolatio ad Marciam;* jedoch sind die Beweise keineswegs bindend. Es sind hauptsächlich folgende: Der Dialog ist in Rom geschrieben (16, 2), im dritten Jahre nach dem Tode des Sohnes der Marcia (1, 7). Seneca sagt 1, 8: *Cupissem primis temporibus ad istam curationem accedere,* (er war aber verhindert durch das Exil?). Ferner die Erwähnung 10, 1 von *clara, nobilis aut formosa coniux* (vgl. Ep. 104, im Anfang) sei auf die spätere Frau Paulina zu beziehen, mit der er sich erst nach dem Exil vermählt hatte (oben zu S. 9).

Wie dem auch sei, für unsere Untersuchung hat die Schrift keine besondere Bedeutung. Doch sind zu beachten die Worte, die Seneca den Philosophen Areus zu Livia, der Gemahlin des Augustus, sprechen lässt: 4, 4 *Nec id in maioribus modo observasti sed in minimis, ne quid faceres, cui famam, uberrimam principum iudicem, velles ignoscere. Nec quicquam pulchrius existimo quam in summo fastigio collocatas multarum rerum veniam dare, nullius petere.* Ungefähr dieselben Gedanken, die Selbstbeschränkung und Mässigkeit des Fürsten verlangen, sind uns schon oben begegnet. — Dass ein Tyrann wie Dionys, *libertatis, iustitiae, legum exitium* (17, 5), streng getadelt wird, ist hiermit ganz übereinstimmend. — Mit der Freiheit, womit es über die frühere Zeit und die früheren Principes zu urtheilen gestattet war — wenigstens hat Seneca es, wie wir sehen werden, öfters gethan — spendet er auch dem freimüthigen Cremutius Cordus, dem Vater der Marcia, sein gebührendes Lob. Durch die Aufbewahrung und spätere Bekanntmachung der Schriften des Vaters hatte Marcia es möglich gemacht den freien Mann kennen zu lernen: (1, 3), *quid sit vir Romanus, quid subactis iam cervicibus omnium et ad Seianianum iugum adactis indomitus, quid sit homo ingenio, animo, manu liber. Magnum mehercule detrimentum respublica ceperat, si illum ob duas res pulcherrimas in oblivionem coniectum, eloquentiam et libertatem, non eruisses: legitur, floret, in manus hominum, in pectora receptus vetustatem nullam timet: at illorum carnificum cito scelera quoque, quibus solis memoriam meruerunt, tacebunt.* Eine wahre republikanische Begeisterung scheint Seneca bei diesem Gegenstande erfasst zu haben (vgl. noch 22, 4 ff.), gerade wie wenn er von Cato spricht, wovon später die Rede sein wird.

In das Jahr 49 setzt man auch den Dialog De brevitate vitae (vgl. 13, 8 *hoc scire magis prodest, quam Aventinum montem extra pomoerium esse,* mit Tac. XII, 23), der doch, mit Ausnahme einiger Aeusserungen über die früheren Fürsten, nichts was für unseren Zweck von Wichtigkeit ist bietet.

Nun als wir Seneca im Begriffe finden seine öffentliche Wirksamkeit zu beginnen, ist es wohl am Platze einige Worte anzuführen, die Lactantius aus Senecas Exhortationes citirt (bei Haase Fragm. N:o 19). Sie geben uns einen werthvollen Aufschluss für die richtige Auffassung von Seneca. *Faciet sapiens, inquit idem Seneca, etiam quae non probabit, ut etiam ad maiora transitum inveniat, nec relinquet bonos mores sed tempori aptabit, et quibus alii utuntur in gloriam aut voluptatem, utetur agendae rei causa.* Dass dieser Satz, öfters die stillschweigende Voraussetzung älterer und neuerer Diplomatie, von Seneca in den Wirren der Neronischen Zeit befolgt worden ist, darf uns weniger verwundern, als dass er denselben so unverhohlen ausspricht. Obgleich der

Satz in den Stoischen Lehren einen Anhaltspunkt hat (vgl. Zeller, Die Philosophie der Griechen, 1880, III Abth. 1, S. 244, 280 ff.), bleibt er doch in dieser Form für jene Zeit und für Seneca sehr characteristisch.

Claudius wurde im Jahre 54 durch seine Gemahlin Agrippina vergiftet, die um jeden Preis ihrem Sohne Nero die Thronfolge zusichern wollte. Der äussere Schein wurde doch bewahrt. Göttliche Ehre wurde dem Verstorbenen bestimmt und die übliche Leichenrede wurde von dem jungen Princeps gehalten. Ueber diese Rede bemerkt Tacitus (XIII, 3): *postquam ad providentiam sapientiamque flexit, nemo risui temperare, quamquam oratio a Seneca composita multum cultus praeferret.* — Was konnte wohl Seneca bewegen diese Eigenschaften, die bei Claudius doch gar nicht zu finden waren, zu berühren? Glaubte er wohl, dass man der ersten Regierungszeit des Claudius dieses Lob schuldig war, einer Zeit die doch längst aus der Erinnerung des Volkes geschwunden war (Diderot S. 55), oder meinte er dem Vergötterten diese Eigenschaften zuschreiben zu müssen? Doch in der Stimmung des Publicums hatte er sich getäuscht, und so ist es wahrscheinlich, dass Seneca sich mit der öffentlichen Meinung zurecht zu setzen versuchte durch die Satire über den Tod des Claudius (F. Bücheler *Divi Claudii Ἀποκολοκύντωσις* in *Symbol. Phil. Bonnens.* Pag. 31 ff.). Dass die von Dio LX, 35 erwähnte *ἀποκολοκύντωσις* identisch ist mit dem von den Handschriften überlieferten *Ludus de morte Claudii Caesaris* ist nicht zu bezweifeln (Bücheler a. a. O.). Die sichtlich in sehr frischer Erinnerung an den Ereignissen geschriebene Satire legt in schonungslosester Weise alle Schwachheiten und Erbärmlichkeiten des Claudius bloss. Wenn sie somit als ein Ausdruck des Hasses und der Verachtung gelten muss, bleibt sie immerhin eine Persiflierung der von dem Nachfolger und seiner Mutter veranstalten Apotheose, wenn auch nach Senecas Art direkte Angriffe fehlen, — freilich auch eine Persiflierung der Leichenrede, deren Verfasser Seneca selbst war. Dieser Auffassung aber wollte er, wie oben gesagt wurde, eben nicht vorbeugen. — Die Lobsprüche, die dem jungen Nero ertheilt werden, der als ein aufgehender Morgenstern, eine Sonne u. d. gl. begrüsst wird (4, 25 ff., vergleiche überdiess 1, 1; 3, 2 und das ganze vierte Cap.), vertragen sich, streng genommen, nicht mit Senecas sonstigen Aeusserungen aber sind aus dem Character des Ludus zu erklären. Sie sind nämlich eben so übermässig und phantastisch, wie der Spott über Claudius es ist. Sie sind nicht berechnet dem Seneca die Gunst des jungen Fürsten zu erwerben — Seneca brauchte bei seinem Einflusse nicht solche Mittel — sondern beabsichtigten wohl die besseren Gefühle des Nero zu erwecken und anzuspornen. Ob dies die richtige pädagogische Methode war, ist freilich zweifelhaft. Einem Fürsten gegenüber ist es aber vielleicht schwer eine andere in Anwendung zu bringen.

Gar ernste Mahnungen hat Seneca auch nicht gescheut. Das beweist die interessante Abhandlung *De Clementia ad Neronem Caesarem*, die in dem zweiten Regierungsjahre des Nero abgefasst worden ist (vgl. I, 9, 1 und Suet. Nero 6). — Ob eine besondere Veranlassung diese Schrift hervorgerufen hat, ist nicht entschieden zu bestimmen, aber gegenüber der Vergiftung des Britannicus (Tac. XIII, 16) und der von Tacitus XIII, 20 bezeugten Begierde, die Mutter auf Grund einer unerwiesenen Anschuldigung tödten zu lassen, klingen Lobsprüche, wie die folgenden, gar wie Warnungen und Ausdrücke der Besorgniss. Lib. I, 1, 6 ff.: *Sed ingens tibi onus imposuisti: nemo iam divum Augustum nec Tiberii Caesaris prima tempora loquitur. Nemo quod te imitari velit exemplar extra te quaerit . . . Difficile hoc fuisset, si non naturalis tibi ista bonitas esset sed ad tempus sumpta. Nemo enim potest personam diu ferre. Ficta cito in naturam suam recidunt. Quibus veritas subest, quaeque, ut ita dicam, ex solido enascuntur, tempore ipso in maius meliusque procedunt. Magnam adibat aleam populus Romanus, cum incertum esset, quo se ista tua nobilis indoles daret: iam vota publica in tuto sunt. Nec enim periculum est, ne te subita tui capiat oblivio. Facit quidem avidos nimia felicitas nec tam temperatae cupiditates sunt umquam, ut in eo, quod contingit, desinant. Gradus a magnis ad maiora fit et spes improbissimas complectuntur insperata adsecuti: omnibus tamen nunc civibus tuis et haec confessio exprimitur, esse felices, et illa, nihil iam his accedere bonis posse, nisi ut perpetua sint.* Dies eben, dass die guten Eigenschaften nur angenommen wären und nicht beständig bleiben würden, fürchteten Alle und am meisten Seneca.

Wenn wir bei Tacitus XIII, 25 lesen, wie Nero — es geschah im Jahre 56 — des Nachts verkleidet durch die Strassen zog, Unziemlichkeiten und Gewaltthaten verübte und somit die allgemeine Ruhe und Sicherheit, aber auch sein eigenes Leben gefährdete, können wir nicht umhin anzunehmen, dass damit folgende Worte von Seneca im Zusammenhang stehen: Lib. I, 3, 3: *Illius demum (principis) magnitudo stabilis fundataque est, quem omnes tam supra se esse quam pro se sciunt, cuius curam excubare pro salute singulorum atque universorum cotidie experiuntur, quo procedente non, tamquam malum aliquod aut noxium animal e cubili prosilierit, diffugiunt, sed tamquam ad clarum ac beneficum sidus certatim advolant, obicere se pro illo mucronibus insidiantium paratissimi et substernere corpora sua, si per stragem illi humanam iter ad salutem struendum sit. Somnum eius nocturnis excubiis muniunt.*

Dass die Monarchie nothwendig sei, stand bei Seneca fest. Er sagt (Lib. I, 4, 1 ff.): *Ille (imperator) est vinculum, per quod respublica cohaeret, ille spiritus vitalis, quem haec tot milia trahunt, nihil ipsa per se futura nisi onus et praeda, si mens illa imperii subtrahatur.*

Rege incolumi mens omnibus una;
amisso rupere fidem.

Hic casus Romanae pacis exitium erit, hic tanti fortunam populi in ruinas aget. Tamdiu ab isto periculo aberit hic populus, quamdiu sciet ferre frenos, quos si quando abruperit vel aliquo casu discussos reponi sibi passus non erit, haec unitas et hic maximi imperii contextus in partes multas dissiliet, idemque huic urbi dominandi finis erit qui parendi fuerit. — Der Princeps hat unbeschränkte Macht, er ist Herrscher von Gottes Gnaden. Seneca sagt dem jungen Fürsten (Lib. I, 1, 1 ff.): *Iuvat . . . ita loqui secum: Egone ex omnibus mortalibus placui electusque sum, qui in terris deorum vice fungerer? ego vitae necisque gentibus arbiter? qualem quisque sortem statumque habeat in manu mea positum est? . . . .* Aber diese unbeschränkte Macht, welche die des Gottes vertritt, stellt auch grosse Forderungen an den Inhaber. Er muss sagen können (§ 3): *In hac tanta facultate rerum non ira me ad iniqua supplicia compulit, non iuvenilis impetus, non temeritas hominum et contumacia.* Er steht nicht über, sondern unter den Gesetzen (§ 4): *Sic me custodio tamquam legibus, quos ex situ ac tenebris in lucem evocavi, rationem redditurus sim . . . Hodie dis immortalibus, si a me rationem repetant, adnumerare genus humanum paratus sum.* Und an einer anderen Stelle sagt er (Lib. I, 7, 1): *Quoniam deorum feci mentionem, optime hoc exemplum principi constituam, ad quod formetur, ut se talem esse civibus quales sibi deos velit.* — Er giebt freilich zu (Lib. I, 3, 5): *Quemadmodum totum corpus animo deservit . . . . sic haec immensa multitudo unius animae circumdata illius (principis) spiritu regitur, illius ratione flectitur pressura se ac fractura viribus suis, nisi consilio sustineretur.* — Aber eben darum muss er Milde üben (5, 1): *Si, quod adhuc colligitur, tu animus reipublicae tuae es, illa corpus tuum, vides, ut puto, quam necessaria clementia sit: tibi enim parcis, cum videris alteri parcere.* — Mit Beziehung auf die Beschränkungen, die sich der Fürst auflegen muss, wird das Verhältniss zwischen diesem und seinen Unterthanen geradezu das umgekehrte. Lib. I, 8, 1: *Quid tu non experiris istud (imperium) esse nobis, tibi servitutem?* Wir finden also hier wie ein Vorspiel des anscheinend modernen Gedankens: der König ist der erste Diener des Staates! In der That aber ist dieser Gedanke ein Nachklang aus der republikanischen Zeit mit ihrer Amtsgewalt.

Die beste Wehr des Königs ist die Liebe der Bürger (Lib. I, 19, 6).

Seneca trägt kein Bedenken dem Fürsten offen zu sagen (Lib. I, 26, 1): *Crudelitatem privatorum serviles quoque manus sub certo crucis periculo ultae sunt: tyrannorum gentes populique et quorum erat malum et hi, quibus imminebat, exscindere adgressi sunt.*

So hat Seneca die Principien einer durch das Gesetz der Gerechtigkeit beschränkten Monarchie in ihren Umrissen dargestellt (vgl. L. Ranke: Weltgesch. Th. III, Pag. 133), und dass er diese Sätze einem Nero zur Erwägung vorgelegt hat, zeugt doch für die edlen Intentionen des Mannes. Und so dürfen wir ihm auch glauben, wenn er (Lib. II, 2, 2) sagt: *Diutius me morari hic* (bei deinen Verdiensten) *patere, non ut blandiar auribus tuis. Nec enim hic mihi mos est. Maluerim veris offendere quam placere adulando.*

Mit den jetzt dargestellten Ansichten Senecas stimmt vortrefflich die Characteristik, die Tacitus XIII, 2 über Senecas Auftreten an der Seite des Nero giebt: *Ibaturque in caedes, nisi Afranius Burrus et Annaeus Seneca obviam issent. Hi rectores imperatoriae iuventae et, rarum in societate potentiae, concordes, diversa arte ex aequo pollebant, Burrus militaribus curis et severitate morum, Seneca praeceptis eloquentiae et comitate honesta, iuvantes in vicem, quo facilius lubricam principis aetatem, si virtutem aspernaretur, voluptatibus concessis retinerent. Certamen utrique unum erat contra ferociam Agrippinae.*

So ist es erklärlich und mit Senecas Ansichten ganz vereinbar, dass er sich dem Verhältnisse des Nero zu Acte nicht widersetzte, *ne (hic) in stupra feminarum inlustrium prorumperet, si illa libidine prohiberetur* (Tac. XIII, 12). Und weiter: obgleich Seneca und Burrus Anfangs Neros in aufgeregter Stimmung ertheiltem Befehle die Mutter zu tödten entgegentraten (Tac. XIII, 20, 21), sind sie doch später, nach einem mehrjährigen Kampfe mit Agrippina, dem nächstens durch Poppaea angeregten Versuche des Nero die Mutter bei einer Seefahrt zu morden vielleicht nicht völlig fremd gewesen (Tac. XIV, 3). Sicher aber ist, dass sie, als dieser Versuch den von Nero erwünschten Erfolg nicht gehabt hatte, nicht mehr, da das Leben des Nero vielleicht gefährdet war, die Ermordung in irgend einer Weise zu verhindern suchten (Tac. XIV, 7). Als die That vollbracht war, schrieb Seneca in Neros Namen an den Senat einen Brief, worin er das Verbrechen in möglichst annehmlicher Weise entschuldigte. Dieser ganzer Vorfall hatte doch grosse Ansprüche gestellt auf die Nachgiebigkeit, wozu Seneca sich gegenüber dem Fürsten verpflichtete. Vielleicht hätte er kräftigeren Wiederstand geleistet; die Wegräumung der intriguanten Agrippina schien aber so sehr mit dem — man muss das zugeben — von ihm vertretenen Wohle des Staates verbunden, so dass auch dies seine Bedenklichkeiten vermindern musste.

Nach dem Tode der Mutter vermehrten sich die Ausschweifungen Neros (Tac. XIV, 13). Seine Leidenschaft, öffentlich vor dem Volke aufzutreten, konnten Seneca und Burrus nicht mehr verhindern. Es scheint, Nero hatte in Seneca ein Gegengewicht gegen die Mutter gesucht und gehabt. Jetzt macht er sich von Senecas Einfluss los; den Tod des Burrus im Jahre 62 bezeichnet Tacitus (XIV, 52) als einen schweren Schlag für Senecas Macht. Nero wandte sich zu schlechteren Rathgebern (Tac. a. a. O.), die an seinen Ausschweifungen Theil nahmen und denselben Vorschub leisteten. Hierin wollte Seneca mit ihnen natürlich nicht wetteifern, und so wurde er von ihnen verleumdet und verlor allmählig seinen Einfluss auf Nero. — Zu der richtigen Beurtheilung dieser Verhältnisse geben uns Senecas Schriften keine eigentliche Anleitung. Welche Arbeiten in der Zeit zwischen 56—62 verfasst worden sind, lässt sich nur mit Schwierigkeit bestimmen.

Was zuerst die ausführliche Abhandlung De Beneficiis betrifft, kann man nur das mit Sicherheit sagen, dass sie nach dem Tode des Claudius (vgl. I, 15, 5) und vor der Epistel 81 (vgl. 3) abgefasst worden ist. Folgende Auszüge aus derselben mögen hier Platz finden. — Auf Poppaea will man folgende Worte (III, 16, 2) beziehen: *Numquid iam ulla repudio erubescit, postquam illustres quaedam ac nobiles feminae non consulum numero sed maritorum annos suos computant et exeunt matrimonii causa, nubunt repudii?* Sei es dass dies nach dem Jahre 58 geschrieben worden ist, als Neros Verhältniss zu Poppaea anfing (Tac. XIII, 45 ff.), oder nach dem Jahre 62, als er sich mit ihr vermählte (Tac. XIV, 60), jedenfalls lag es nahe, die Worte auf jenes Verhältniss zu deuten. Seneca wäre also als ein Freund der Octavia zu betrachten, was seiner Gunst bei Nero natürlich weiteren Eintrag thun musste. — Dass Seneca, trotz seines Satzes: *Caesari omnia licent*, doch zwischen dem Besitzthum des Staates und dem des Fürsten einen bestimmten Unterschied bestehen lässt, ist selbstverständlich und braucht kaum belegt zu werden (VII, 6, 3). — Mit der Aeusserung Senecas zu Nero, als er diesen um seinen Abschied bat (Tac. XIV, 53 *una defensio occurrit quod muneribus tuis obniti non debui*), stimmen folgende Worte überein II, 18, 6: *Aliquando beneficium accipiendum est et invito: dat tyrannus crudelis et iracundus, qui munus suum fastidire te iniuriam iudicaturus est. Non accipiam? Eodem loco latronem pone, piratam, regem animum latronis ac piratae habentem. „Quid faciam? Parum dignus est, cui debeam“. Cum eligendum dico, cui debeas, vim maiorem et metum excipio, quibus adhibitis electio perit.* Wir können nur annehmen, dass Senecas grosses Vermögen, das man ihm so oft zum Vorwurfe gemacht hat, zum grössten Theil durch solche Gaben zu Stande gekommen ist.

Solche aufgezwungene Wohlthaten verpflichten aber nicht zu Dankbarkeit: *nemo in id accipiendo obligatur, quod illi repudiare non licuit* (II, 18, 7). Einem Tyrannen, der wider alle menschlichen Rechtsbegriffe handelt, ist man keinen Dank schuldig: *Quicquid erat, quo mihi cohaereret, intercisa iuris humani societas abscidit. Si praestitisset quidem aliquid mihi, sed arma patriae meae inferret: quicquid meruerat perdidisset, et referre illi gratiam scelus haberetur . . . prior mihi ac potior eius officii ratio est, quod humano generi quam quod uni homini debeo* (VII, 19, 8 und 9). Man muss es zugeben: diesem Gedanken liegt eine revolutionäre Idee zu Grunde. Seneca scheut sich auch nicht daraus die letzte Consequenz zu ziehen VII, 20, 3: *Si ex toto eius (tyranni) sanitas desperata fuerit, eadem manu beneficium omnibus dabo, illi reddam: quoniam ingeniis talibus exitus remedium est, optimumque est abire ei, qui ad se numquam rediturus est.* In welcher Beziehung Seneca zu der Pisonischen Verschwörung gestanden hat, ist nicht zu entscheiden. Fremd war dieselbe ihm doch wohl nicht, und wie wir aus dem Obigen ersehen, seinen Ansichten nicht widerstrebend. — Es ist zu bedauern, dass wir die Abfassungszeit dieser Schrift nicht genauer bestimmen können; jene freien Aeusserungen, die in Bezug auf Nero als Warnungen gelten können, deuten doch auf die Zeit vor dem Jahre 62, denn nachher hat Seneca sichtbar nicht mehr als *magister* (Tac. XIV, 52) auftreten wollen.

Der Dialog de Constantia oder Nec iniuriam nec contumeliam accipere sapientem wird wegen seines ganzen Inhaltes (bes. Cap. 19) als von den Beschuldigungen des Suillius (Tac. XIII, 42) veranlasst betrachtet und darum ins Jahr 58 verlegt, was sich jedoch streng genommen weder widerlegen noch beweisen lässt. — Seneca ermahnt wieder einmal zu Zurückhaltung den Mächtigen gegenüber 19, 2: *Aliquando etiam obirati potentibus detegemus hunc adfectum intemperanti libertate. Non est autem libertas nihil pati. Fallimur. Libertas est animum superponere iniuriis et eum facere se, ex quo solo sibi gaudenda veniant.*

Derselben Zeit gehört auch der Dialog De vita beata. Capp. 17, 18 und 23 scheinen sich wieder auf die Beschuldigungen von Suillius zu beziehen; wenigstens bekommt man den Eindruck, dass Seneca in eigener Sache spricht.

Einige Wahrscheinlichkeit hat es auch für sich, dass in diesen Jahren, 58—62, die Tragödien geschrieben worden sind. Unter den Beschuldigungen, die im Jahre 62 gegen Seneca gemacht wurden, war auch die, dass er öfter Gedichte schreibe, seitdem Nero Neigung gezeigt hatte sich auch auf diesem Gebiete auszuzeichnen (Tac. XIV, 52). Damit aber hatte sich Nero, nach

Tac. XIV, 16, seit dem Jahre 59 befasst. Da die Tragödien die weitaus bedeutendsten von Senecas poetischen Leistungen gewesen sein müssen, ist es wahrscheinlich, dass eben sie gemeint sind. Damit ist nicht ausgeschlossen, dass auch nicht früher einige verfasst worden sind; später aber als in's Jahr 62 wollten wir sie nicht verlegen, da Seneca seit jener Zeit auf Ermahnungen an den Fürsten augenscheinlich Verzicht leistete. [1]) Die Tragödien aber zeichnen sich eben durch diese offnen Aufforderungen zu Mässigung im Gebrauche der Fürstengewalt aus: die Aeusserungen sind offenbar von den Zeitverhältnissen hervorgerufen. Wir wollen nur einen kleineren Theil davon anführen.

Medea:

Medea 196 Iniqua numquam regna perpetuo manent.

Troades:

Pyrrhus 344 Quodcumque libuit facere victori licet.
Agam. 345 Minimum decet libere cui multum licet.

Oedipus:

Oedipus 716 Odia qui nimium timet
regnare nescit: regna custodit metus.
Creon 718 Qui sceptra duro saevus imperio regit
timet timentes: metus in auctorem redit.

Hercules furens:

Theseus 741 Vidi cruentos carcere includi duces
et impotentis terga plebeia manu
scindi tyranni; quisquis est placide potens
dominusque vitae servat innocuas manus
et incruentum mitis imperium regit
animoque parcit, longa permensus diu
felicis aevi spatia, vel caelum petit
vel laeta felix nemoris Elysii loca,
iudex futurus. Sanguine humano abstine
quicumque regnas: scelera taxantur
modo maiore vestra — — — — —
— — — — — — — — — — —
Hercules 926 — — — — victima haut ulla amplior
potest magisque opima mactari Iovi
quam rex iniquus.

---

[1]) Wir können also nicht der Ansicht von G. Boissier, *L'opposition sous les Césars, Paris, 1885* (Seite 88) beitreten, dass ein grosser Theil der Tragödien wahrscheinlich nachdem Seneca in Ungnade gefallen war und kurz vor dem Tode desselben verfasst und gelesen worden seien. — Sonst finden wir in der interessanten Arbeit — die uns bekannt wurde, als vorliegender Aufsatz schon im Drucke war — wo es von Seneca die Rede ist, in der Hauptsache eine Bestätigung der von uns ausgesprochenen Ansichten.

Thyestes:

Satelles 204 Fama te populi nihil
adversa terret? Atreus: Maximum hoc regni bonum est,
quod facta domini cogitur populus sui
tam ferre quam laudare. Sat. Quos cogit metus
laudare, eosdem reddit inimicos metus;
at qui favoris gloriam veri petit
animo magis quam voce laudari volet.
Atreus Laus vera et humili saepe contingit viro,
non nisi potenti falsa: quod nolunt velint.
Sat. Rex velit honesta: nemo non eadem volet.
Atreus Ubicumque tantum honesta dominanti licent
precario regnatur. Sat. Ubi non est pudor
nec cura iuris sanctitas pietas fides
instabile regnum est. Atreus: Sanctitas pietas fides
privata bona sunt; qua iuvat reges eant.

Es war natürlich, dass solche Aeusserungen auf die Zeitverhältnisse gedeutet wurden, und Nero konnte darin unschwer Beziehungen auf sich erkennen. Mit kluger Berechnung wurden zu derselben Zeit Anklagen bei Nero über Seneca vorgebracht, *quod studia civium in se verteret .... certe finitam Neronis pueritiam et robur iuventae adesse: exueret magistrum* (Tac. XIV, 52). Seneca wollte seine Reichthümer aufgeben und begehrte seine Entlassung, was ihm doch nicht bewilligt wurde. Die Vormundschaft des Seneca war dem Nero natürlich nicht lieb; so offen aber konnte er nicht mit dem vom Volke beliebten Manne brechen oder sich von einem Einflusse, der so lange gedauert hatte, so plötzlich freimachen. Seneca fand es doch für rathsam sich so weit als möglich von Allem fernzuhalten, was als Machtbegierde gedeutet werden konnte; in der Stadt hielt er sich nur selten auf (Tac. XIV, 56). Alle Verbindung mit Nero oder aller Einfluss bei ihm hatte doch nicht aufgehört. Am Ende desselben Jahres sehen wir Seneca sich wegen einer Beschuldigung, dass er mit dem schon damals verdächtigen Piso in Verbindung stehe, mit Glück vertheidigen (Tac. XIV, 65). Im folgenden Jahre hatte Nero auch noch Umgang mit ihm (XV, 23), und dass wenigstens das Publicum der Meinung war, dass Seneca fortdauernd bei dem Fürsten etwas gelte, beweist der Umstand, dass Seneca, als Nero im Jahre 64 nach dem grossen Brande in Rom die Provinzen auszuplündern anfing, um nicht der Theilnahme daran beschuldigt zu werden wieder auf's Land zu gehen verlangte, was abermals nicht gestattet wurde. Nun brach Seneca alle Verbindung mit Nero ab. *Ficta valetudine, quasi aeger nervis, cubiculum non egressus,* berichtet uns Tacitus XV, 45. Es ist befremdend, dass Tacitus hier wie bei dem Vorfalle im Jahre 62 von einer erdichteten Krankheit erzählt. An dem zuletzt genannten Orte sagt er (XIV, 56): *Rarus per urbem quasi valetudine infensa aut sapientiae studiis domi adtineretur.* Dass Seneca in der That krank war, kann man nicht bezweifeln nach den Aeusserungen Epist. 54, 1, 2; 65, 1; 77, 9; 104, 1—6. Dass es auch mit seinen philosophischen Beschäftigungen Ernst war, ersehen wir aus den zahlreichen Arbeiten, die gerade in dieser Zeit entstanden sind. Wie einst Cicero, benutzte Seneca seine Musse um seinen Mitbürgern durch philosophische Erörterungen zu nützen. Eine bestimmte Reihenfolge unter den Schriften festzustellen ist schwierig.

Der Dialog De Tranquillitate animi ist an Serenus gerichtet, dessen Tod in Epistel 63, 14 erwähnt wird. Vor jener Epistel ist also die Schrift abgefasst worden. Wenn man den ganzen Inhalt der Schrift betrachtet, gewinnt man unwillkürlich den Eindruck, dass Seneca mit dem Gedanken umgeht sich vom öffentlichen Leben zurückzuziehen. Man kann daher, scheint es mir, die Schrift ins Jahr 62 verlegen und zwar vor dem Gespräche mit Nero. Seneca will sich selbst und Andere mit dem Gedanken an seinem Zurücktreten vertraut machen. Dies scheinen mehrere Aeusserungen zu beweisen. So sagt er 4, 1 *Mihi nimis videtur submisisse temporibus se Athenodorus, nimis cito refugisse. Ne ego negaverim aliquando cedendum sed sensim relato gradu et salvis signis salva militari dignitate: sanctiores tutioresque sunt hostibus suis, qui in fidem cum armis veniunt. Hoc puto virtuti faciendum studiosoque virtutis. Si praevalebit fortuna et praecidet agendi facultatem, non statim aversus inermisque fugiat latebras quaerens . . . sed parcius se inferat officiis et cum delectu inveniat aliquid, in quo utilis civitati sit.* In eben dieser Weise zog sich ja Seneca zurück. Und weiter sagt er in demselben Capitel § 8: *Longe itaque optimum est miscere otium rebus, quotiens actuosa vita impedimentis fortuitis aut civitatis condicione prohibebitur.* Und noch in demselben Sinne 5, 4: *Utcumque ergo se respublica dabit, utcumque fortuna permittet, ita aut explicabimus nos aut contrahemus: utique movebimus nec adligati metu torpebimus.* Sehr bezeichnend und gerade mit Senecas Verfahren, wie es von Tacitus XIV, 56 dargestellt wird, übereinstimmend sind die Worte 10, 6: *Illi rursus, quos sors iniqua in ancipiti posuit, tutiores erunt superbiam detrahendo rebus per se superbis et fortunam suam, quam maxime poterunt, in planum deferendo.* An diese Worte schliessen sich noch einige Aeusserungen über die, *quibus necessario haerendum sit in fastigio suo, ex quo non possunt nisi cadendo descendere.* Die an diese gerichteten Ermahnungen zu Mässigkeit kann man vielleicht als die letzten Ermahnungen Senecas an Nero betrachten. — In den letzten Jahren seines Lebens scheint

Seneca sich gerne mit dem Gedanken an der Weltrepublik der Stoiker zu beschäftigen. So sagt er 4, 4: *Magno animo nos non unius urbis moenibus inclusimus, sed in totius orbis commercium emisimus patriamque nobis mundum professi sumus, ut liceret latiorem virtuti campum dare.*

Die im vorigen Dialog ausgesprochenen Gedanken finden einen noch bestimmteren Ausdruck in der gleichfalls an Serenus didicirten verstümmelt erhaltenen Abhandlung De otio, die wir doch in eine etwas spätere Zeit verlegen müssen. Hier (Cap. 4) wird die Idee der Weltrepublik ausführlich geschildert, und als Hauptsatz wird (Cap. 5) aufgestellt: *natura nos ad utrumque genuit et contemplationi rerum et actioni.* Als gültige Gründe für den Weisen sich von dem Staatsleben abzuhalten werden folgende angegeben (3, 3): *Si respublica corruptior est quam ut adiuvari possit, si occupata est malis, non nitetur sapiens in supervacuum nec se nihil profuturus impendet, si parum habebit auctoritatis aut virium nec illum erit admissura respublica, si valetudo illum impediet.* Seneca scheint hier wieder seine eigene Sache zu führen. Eine grosse Verstimmung giebt sich in folgenden Worten Ausdruck 8, 3: *Si percensere singulas (respublicas) voluero, nullam inveniam quae sapientem aut quam sapiens pati possit. Quodsi non invenitur illa respublica, quam nobis fingimus, incipit omnibus esse otium necessarium, quia quod unum praeferri poterat otio, nusquam est.*

Um jetzt zu den letzten Arbeiten Senecas zu übergehen, kann man mit Bestimmtheit sagen, dass von den Naturalium Quaestionum libri VII wenigstens das sechste (und siebente) Buch nach dem Anfange des Jahres 63 geschrieben ist, denn VI, I, 1 und 2 wird erwähnt, dass ein Erdbeben in Campanien am fünften Februar im Jahre 63 stattgefunden hat. Es ist wahrscheinlich, dass die übrigen Bücher nicht viel früher verfasst worden sind, und jedenfalls seitdem Seneca sich vom öffentlichen Leben so viel wie möglich zurückgezogen hatte. Das beweist der Anfang der Praefatio zum dritten Buche (§ 2): *Premat igitur senectus et obiciat annos inter vana studia consumptos: tanto magis urgeamus et damna aetatis male exemptae labor sarciat . . . Patrimonii longe a domino iacentis cura solvatur, . . . Quicquid amissum est, id diligenti usu vitae praesentis recolliget (animus). Fidelissimus est ad honesta ex poenitentia transitus.* Dies ist eben zu bemerken, dass Seneca in den letzten Jahren seines Lebens Reue über sein früheres Leben ausspricht. Damit will er wohl nicht so viel allen Verdacht von der Seite Neros von sich entfernen, als eine wirkliche Stimmung ausdrücken: die Hauptafgabe war ja verfehlt, da Nero ein Tyrann geworden war. — Wie Seneca sich selbst aus dem Gewühle der Menge zurückgezogen hatte, giebt er dem Lucilius den

Rath (IV praef. 3): *Fac ergo, mi Lucili, quod facere consuesti: a turba te, quantum potes, separa, ne adulatoribus latus praebeas: artifices sunt ad captandos superiores.*

Jene Stimmungen und Ansichten kommen zu einem vollen und deutlichen Ausdruck in den Epistulae Morales ad Lucilium, die offenbar zu Senecas letzten Lebensjahren gehören. Dass sie zu Veröffentlichung bestimmt sind, giebt der allgemeine Inhalt kund, und es lässt sich ohnediess aus einzelnen Ausführungen wie 21, 5 (vgl. Haases praef.) schliessen. Aus mehreren Aeusserungen ersieht man, dass Seneca zu dieser Zeit alt war und sein früheres Leben als ein verlorenes betrachtete, wie 12, 1; 19, 1: *Satis multum temporis sparsimus: incipiamus vasa in senectute colligere. Numquid invidiosum est? in freto viximus, moriamur in portu;* 26, 1; 28, 7; 34, 1. 61, 1 ff.: *Desinamus, quod voluimus, velle. Ego certe id ago senex: eadem velle quae puer volui. In hoc unum eunt dies, in hoc noctes, hoc opus meum est, haec cogitatio: inponere veteribus malis finem. . . . Ante senectutem curavi ut bene viverem, in senectute ut bene moriar;* 67, 2; 77, 3 und öfters. — Er will sich philosophischen Beschäftigungen widmen; das öffentliche Leben hat er verlassen: 8, 2 *Secessi non tantum ab hominibus sed a rebus, et inprimis a rebus meis: posterorum negotium ago. Illis aliqua, quae possint prodesse, conscribo. . . . Rectum iter, quod sero cognovi et lassus errando, aliis monstro. Clamo: vitate quaecumque volgo placent, quae casus adtribuit.* Die Gunst des grossen Haufens muss man geringe schätzen: 7, 12 *Ista, mi Lucili, condenda in animum sunt, ut contemnas voluptatem ex plurium adsensione venientem.* 29, 12 *Ceterum, si te video celebrem secundis vocibus volgi, si intrante te clamor et plausus et pantomimica ornamenta obstrepuerint, si tota civitate te feminae puerique laudaverint, quidni ego tui miserear, cum sciam, quae via ad istum favorem ferat.* 68, 10: *Pulsare superbas potentiorum fores, digerere in literam senes orbos, plurimum in foro posse invidiosa potentia ac brevis est, et, si verum aestimes, sordida.* — Von dem zerrütteten Zustande der Republik blickt Seneca zu dem Weltbürgerthum hinüber: *Cum hac persuasione vivendum est: non sum uni angulo natus, patria mea totus hic mundus est* (28, 4). Wie in der Schrift De Otio vertheidigt er auch Ep. 68, 1 ff. diese Zurückziehung aus dem öffentlichen Leben: *Consilio tuo accedo: absconde te in otio et ipsum otium absconde. . . . Nec ad omnem rempublicam mittimus nec semper nec sine ullo fine: praeterea, cum sapienti rempublicam ipso dignam dedimus, id est mundum, non est extra rempublicam, etiamsi recesserit.*

Durch philosophische Beschäftigung wollte sich Seneca gegen Neros Verdacht schützen. So berichtet Tacitus XIV, 56, und dasselbe thut uns auch

Seneca kund, wenn er dem Lucilius sagt 103, 4: *Quantum potes autem, in philosophiam secede: illa te sinu suo proteget. In huius sacrario eris tutus aut tutior.* Doch ist noch immer grosse Vorsicht geboten, und um jede Missdeutung vorzubeugen, setzt er noch hinzu: *Ipsam philosophiam non debebis iactare: multis fuit periculi causa insolenter tractata et contumaciter: tibi vitia detrahat, non aliis exprobret. Non abhorreat a publicis moribus nec hoc agat, ut quicquid non facit damnare videatur.* Wir sehen, dass Seneca seinem alten Grundsatze treu bleibt: nichts Auffallendes oder Anstössiges sich zu erlauben ohne sich andererseits zu Schmeicheleien herabzulassen. Dies spricht er mehrmals aus (14, 7): *Demus itaque operam, abstineamus offensis. Interdum populus est, quem timere debeamus. Interdum si ea civitatis disciplina est, ut plurima per senatum transigantur, gratiosi in eo viri. Interdum singuli, quibus potestas populi et in populum data est. Hos omnes amicos habere operosum est: satis est inimicos non habere. Itaque sapiens numquam potentium iras provocabit. Immo declinabit, non aliter quam in navigando procellam.* Und Ep. 73, 1 ff. sagt er: *Errare mihi videntur, qui existimant philosophiae fideliter deditos contumaces ac refractarios et contemptores magistratuum ac regum eorumve, per quos publica administrantur.* Diese Ansichten warf man nähmlich, wohl nicht ganz mit Unrecht, den selbstvergnügten Stoikern mit ihren schroffen Ansichten vor. Seneca aber versichert a. a. O., dass die Philosophen den Urheber der öffentlichen Ruhe als einen Vater ehren. Man kann es nicht verkennen, dass solche Aeusserungen in Zusammenhange stehen mit Senecas Besorgniss Neros Verdacht auf sich zu laden. Alle Aeusserungen, die als Ermahnungen an den Fürsten gelten könnten, hat Seneca vermieden. Er hätte damit nur Unwillen erregt; sein Einfluss war ja verloren.

Da nämlich Nero sich immer mehr zum Schlechten hinneigte, musste der ernsthafte Mann, der vorher Neros Leidenschaften einigermassen zu zügeln versucht hatte, ihm um so verhasster scheinen, und je grösseres Vertrauen Seneca vorher genossen hatte, desto grösseres Misstrauen erregte er jetzt. Da Seneca der Theilnahme an der Pisonischen Verschwörung beschuldigt wurde (im Jahre 65), benutzte Nero gerne die Gelegenheit um sich seines früheren Lehrers zu entledigen (Tac. XV, 60 ff.).

Ehe wir diesen Vorfall näher berühren und damit die Untersuchung abschliessen, müssen wir noch mit einigen Worten die Stellung andeuten, die Seneca in der Beurtheilung der letzten Zeiten der Republik und der ersten Principes einnahm. Davon war natürlich seine Beurtheilung der eigenen Zeit und sein Auftreten abhängig. Die hierher gehörigen Aeusserungen finden sich hauptsächlich in den späteren Schriften und können daher füglich hier zusammengefasst werden.

Es schmerzt Seneca, dass die Freiheit untergeht, aber er findet, dass es eine natürliche Entwickelung der Verhältnisse ist. Den Anfang machte Marius (Epp. 51, 11; 94, 66); gegen ihn nimmt Seneca Partei für die politischen Massregeln Sullas (Cons. ad Marciam 12, 6; De Ben. V, 16, 3). Auch ist er ein Freund der Pompeianischen Partei (Ep. 71, 9) und des Pompeius (Cons. ad M. 20, 4; 22, 5); findet aber doch, dass sowohl Pompeius als Caesar Feinde der Freiheit waren (De Ben. V, 16, 4; Epp. 14, 12 ff.; 94, 65; 95, 70; 104, 29). Der trotzige, halsstarrige Stoiker Cato musste natürlich auf eine schwache Zeit gewaltig imponiren, und so wird er auch von Seneca übermässig gepriesen (ausser an den zuletzt genannten Stellen noch öfters, wie De const. 1, 3; 2, 1 ff.; De tranqu. 16, 1; De prov. 2, 9 ff.; Ep. 71, 11). Doch war der Streit selbst eines Catos vergeblich, denn die Bedingungen der Freiheit waren schon längst nicht mehr da: De const. 2, 2: *Cato adversus vitia civitatis degenerantis et pessum sua mole sidentis stetit solus et cadentem rempublicam, quantum modo una retrahi manu poterat, tenuit.* Ep. 14, 13: *Potest aliquis disputare an illo tempore capessenda fuerit sapienti respublica. Quid tibi vis M. Cato? iam non agitur de libertate: olim pessumdata est.* Ep. 71, 12 ff.: *Quidni ille (Cato) mutationem reipublicae forti et aequo pateretur animo? quid enim mutationis periculo exceptum.... Certis eunt cuncta temporibus: nasci debent, crescere, exstingui.* — Für Senecas klare Auffassung der Verhältnisse sehr bezeichnend sind folgende Worte (De Ben. II, 20, 1 ff.): *Disputari de M. Bruto solet, an debuerit accipere a divo Iulio vitam, cum occidendum eum iudicaret. Quam rationem in occidendo secutus sit, alias tractabimus. Mihi enim, cum vir magnus fuerit in aliis, in hac re videtur vehementer errasse nec ex institutione Stoica se egisse: qui aut regis nomen extimuit, cum optimus civitatis status sub rege iusto sit aut ibi speravit libertatem futuram, ubi tam magnum praemium erat et imperandi et serviendi, aut existimavit civitatem in priorem formam posse revocari amissis pristinis moribus futuramque ibi aequalitatem civilis iuris et staturas suo loco leges, ubi viderat tot milia hominum pugnantia, non an servirent sed utri.*

Mit diesen Ansichten ist es durchaus übereinstimmend, dass Seneca sich über die Principes nur so weit mit Missbilligung ausspricht, als sie ihre Macht zu Grausamkeit und Ueberhebung benutzten. — Augustus, dessen Macht als unbeschränkt bezeichnet wird (De brev. 4, 2 u. 4), wird von Seneca wegen seiner Milde gelobt (De ira III, 23 u. 24; [De clem. I, 10]); über Tiberius äussert er sich mehrmals missbilligend (De Ben. II, 7 u. 8; III, 26; V, 25, 2); über C. Caesar spricht er in den stärksten Ausdrücken seine Abscheu aus wegen dessen Tyrannei (De Ben. II, 12, 2 *homo natus in hoc ut mores liberae* *civitatis Persica servitute mutaret*) und Grausamkeit (z. B. De ira III, 18, 19; Consol. ad Helviam 10, 4; De brev. 18, 5; De const. 18, 1 ff.; De tranqu. 14, 4 ff.; De ben. IV, 31, 2 u. öfters). Claudius wird, wenn wir von dem Ludus de morte Claudii und der Consolatio ad Polybium (sammt N. Q. VII, 17, 2; 21, 3) absehen, nur ein Mal erwähnt (De ben. I, 15, 5: seine Urtheilslosigkeit).

Fassen wir also dieses mit dem Vorigen zusammen, finden wir, dass Seneca nicht die Idee des Principats, immer aber die Tyrannei angegriffen hat. Es ist daher nicht mehr als die Wahrheit, was Seneca dem Nero sagte, als er am Ende seines Lebens stand (Tac. XV, 61): *non sibi promptum in adulationes ingenium, idque nulli magis gnarum quam Neroni, qui saepius libertatem Senecae quam servitium expertus esset.* — Seneca scheint hiemit andeuten zu wollen, dass er wegen seiner Freimüthigkeit büssen musste. Dass die Tyrannengewalt immer bedroht ist, das hatte er mehrmals dem Nero vorgehalten. Es ist nicht zu bezweifeln, dass Seneca von der Verschwörung Kundschaft hatte; er verneint es auch selbst nicht (Tac. XV, 61). Einen thätigeren Antheil hat er daran nicht genommen, obgleich er sich als von allen Verpflichtungen dem Tyrannen gegenüber entlöst betrachtete (zu Seite 17). — Es wird berichtet (Tac. XV, 65), man hätte die Absicht später auch Piso zu tödten und die Regierung dem Seneca zu übertragen. Ob Seneca bei seinem hohen Alter, seiner Krankheit und seinen eifrigen wissenschaftlichen Beschäftigungen (auf dieselben sich zu beschränken hatte aber hauptsächlich die missliche Lage in dem Staate ihn gezwungen) die fürstliche Gewalt — die er principiel billigte — angenommen hätte, ist fraglich. Wegen seiner Tugenden (Tac. XV, 65) wollte man ihn zu dieser höchsten Gewalt erheben, und unzweifelhaft ist, dass er zu seiner Zeit der würdigste war dieselbe zu bekleiden.

Wir wollen die Hauptergebnisse der Untersuchung auch hinsichtlich Senecas Character kurz zusammenfassen. Seneca war kein Heuchler; seine Worte stimmen mit seinen Handlungen völlig überein. Aber von dem Standpunkte seiner Schule aus hätte er solche Aeusserungen nicht aussprechen sollen, wie wir sie thatsächlich in seinen Schriften finden. Seine den Zeitverhältnissen gemachten Concessionen sind gross und auffallend. Ueberhaupt aber war er in seinen Aussprüchen frei und seine Auffassung von der Gewalt des Princeps ist edel. Der Fürst soll der Diener des Staates sein, er soll sich den Gesetzen unterordnen. Andernfalls ist er seines Lebens nicht sicher. — Wie Seneca die letzten Zeiten der Republik und die Principes beurtheilt hat, anders wird die Geschichte sie auch nicht beurtheilen.

UEBER DIE SOGENANNTE

ΒΟΥΛΕΥΣΙΣ

IN

MORDPROCESSEN.

Von

I. A. HEIKEL.

Ueber die sogenannte βούλευσις in Mordprocessen.

Die Hauptquelle für unsere Kunde von den Atheniensischen Blutgerichtshöfen ist bekanntlich die Rede des Demosthenes gegen Aristokrates. Da wird § 22 das Gesetz Drakons über die Gerichtsbarkeit des Areopags ausdrücklich citirt und von Demosthenes kommentirt. Der Gesetz lautet: *δικάζειν δὲ τὴν βουλὴν τὴν ἐν Ἀρείῳ πάγῳ φόνου καὶ τραύματος ἐκ προνοίας καὶ πυρκαϊᾶς καὶ φαρμάκων, ἐάν τις ἀποκτείνῃ δούς.*

Dass somit jede Art von *absichtlicher* Tödtung wie auch Verwundung in tödtlicher Absicht vor den Areopag gehörte, kann man jetzt, besonders nach den Erörterungen von Philippi (Der Areopag und die Epheten, Pag. 23 ff.), als abgemacht betrachten.

Weiter müssen wir aus derselben Rede den Abschnitt 65—81 in Betracht ziehen. Da erfahren wir § 71 ff., dass über *unvorsätzliche* Tödtung (*φόνος ἀκούσιος*) am Palladion gerichtet wurde. Dieselben Angaben finden wir bei den Lexikographen mit Einschluss von Pollux wieder. Nur Harpokration äussert sich anders. Unter *ἐπὶ Παλλαδίῳ* heisst es: *Δημοσθένης ἐν τῷ κατ' Ἀριστοκράτους δικαστήριόν ἐστι οὕτω καλούμενον ὡς καὶ Ἀριστοτέλης ἐν Ἀθηναίων ποκιτείᾳ, ἐν ᾧ δικάζουσιν ἀκουσίου φόνου καὶ βουλεύσεως οἱ Ἐφέται.* — Was mit *βούλευσις* gemeint wird, erklärt Harpakration unter diesem Worte folgendermassen: *βουλεύσεως ἐγκλήματος ὄνομα ἐπὶ δυοῖν ταττόμενον πραγμάτων. τὸ μὲν γάρ ἐστιν ὅταν ἐξ ἐπιβουλῆς τὶς τινὶ κατασκευάσῃ θάνατον, ἐάν τε ἀποθάνῃ ὁ ἐπιβουλευθείς, ἐάν τε μή· τὸ δε ἕτερον* (gehört nicht hierzu) . . . . *τοῦ μὲν οὖν προτέρου μάρτυς Ἰσαῖος ἐν τῷ πρὸς Εὐκλείδην, ἐπὶ Παλλαδίῳ λέγων εἶναι τὰς δίκας, Δείναρχος δὲ ἐν τῷ κατὰ Πιστίου ἐν Ἀρείῳ πάγῳ. Ἀριστοτέλης δὲ ἐν τῇ Ἀθηναίων πολιτείᾳ τῷ Ἰσαίῳ συμφώνει.*

Etwas ähnliches findet man auch bei dem Schol. zu Aeschines de falsa leg. § 87. *Ἐπὶ Παλλαδίῳ· ἐπὶ τούτῳ ἐκρίνοντο οἱ ἀκούσιοι φόνοι. Οἱ* *δὲ ἐν τούτῳ τῷ δικαστηρίῳ δικάζοντες ἐκαλοῦντο ἐφέται, ἐδίκαζον δὲ ἀκουσίου φόνου καὶ βουλεύσεως καὶ οἰκέτην ἢ μέτοικον ἢ ξένον ἀποκτείναντι.*

Auf Grund dieser Aeusserungen und besonders der des Harpokration hat man *βούλευσις* als einen besonderen Fall von Blutsverbrechen aufgestellt. Dabei hat man sich grosse Mühe gegeben die Worte des Harpokration richtig zu erklären und der *βούλευσις* die gehörige Stellung in dem Systeme von Verbrechen, wie sie zu den besonderen Gerichtshöfen gehören, zu geben und vor Allem in Uebereinstimmung zu bringen mit den durch die Redner bezeugten Fällen.

Es gilt zuerst den bei Harp. noch unbestimmten Begriff der *βούλευσις* festzustellen. Wenn wir die Redner zu Rathe ziehen, werden wir in Beziehung auf den Gebrauch des Wortes *βούλευσις* zu wesentlich demselben Resultat kommen wie Matthiae, der (de iudiciis Athen. in Misc. Phil. Pag. 149 ff.) über das Palladion sich so äussert: Cognoscebatur ibi in universum de caedibus inconsulto factis, etiam *de insidiis et de morte plagas inflictas consecuta.* Doch hätte er nicht nur von dem Tode sprechen sollen, der auf einen *Schlag* folgt. Mit Bezug auf das Forum sagt er, es scheint als ob die Sache vor den Areopag gehört hätte, wenn der Erfolg der Absicht zu tödten entsprach, vor dem Palladion aber wurde über die erfolglose Absicht verhandelt. Wozu er doch hinzusetzt: sed obstat Harpocration. Boeckh in Berliner Index 1826/27 S. 8 ist auch der Ansicht, dass *βούλευσις* mit *tödtlichem* Erfolg auf dem Areopag, *ohne tödtlichen* Erfolg am Palladion gerichtet wurde.

Nach Schömann (Antiqu. iur. publ. Pag. 290, und Griech. Alterthümer [2] Pag. 486) lag *βούλευσις* vor „wenn einer beschuldigt wurde einen Mord zwar nicht selbst aber *durch Andere* von ihm Angestiftete *verübt* oder doch *bezweckt* zu haben“. Nach Schömann entschied der Gerichtshof am Palladion über diese Klage.[1]) Die von Schömann aufgestellte Definition verträgt sich gut mit den Worten des Harpokration, und entspricht auch dem Sprachgebrauche der Redner. Nur hat der Begriff von *βούλευσις* somit einen so weiten Umfang erhalten, dass daraus eine bestimmte Rechtskategorie sich nicht ergiebt.

Einen anderen Weg hat Forchhammer (De Areopago etc. Kiel 1828. Pag. 30) eingeschlagen. Er beschränkt *βούλευσις* auf den Fall, dass jemand, „der intellectuelle Urheber“, einem Anderen *durch einen dritten* den Tod zu geben versucht. Ihm folgt Philippi (a. a. O. Pag. 29), der zugleich die weitere Bedeutung von *βούλευσις* erwähnt, da dieser Ausdruck auch gebraucht wird „zur Bezeichnung dessen, was das Subject beabsichtigte, im Gegensatze

---

[1]) Doch stellt er auch die Vermuthung auf, dass wenn der Anschlag gelungen war, sei der Areopag, in anderem Falle das Palladium die competente Behörde gewesen.

zu dem, was es als Erfolg seiner Handlung erreichte". Sowohl nach Forchhammer als Philippi, von denen der letzgenannte die Sache einer genauen Prüfung unterworfen hat, gehört βούλευσις im engeren Sinne (die intellectuelle Urheberschaft) vor den Gerichtshof am Palladion. Diese Ansicht weicht nun bedeutend von der des Harpokration ab, und findet auch nicht ohne gezwungene Erklärungen bei den Rednern ihre Bestätigung. [1])

Nach jener Ansicht irrt Harpokr. erstens darin, dass er den Areopag einmischt, weiter darin, dass er immer eine *Absicht* voraussetzt (so müssen wohl die Worte: ὅταν ἐξ ἐπιβουλῆς τίς τινὶ κατασκευάσῃ θάνατον verstanden werden), endlich auch darin, dass er den Erfolg als gleichgültig hinstellt, denn beabsichtigte Tödtung ohne Erfolg ist τραῦμα ἐκ προνοίας (vgl. K. Fr. Hermann, Lehrb. der griech. Antiqu.; zw. Band. Die griech. Rechtsalterth. von Thalheim). Wenn Harpokrations Angaben sich so unzuverlässig zeigen, dass endlich nur der Ausdruck βούλευσις übrig bleibt, fragt es sich, ob man nicht einen Schritt weiter thun muss, und die Aufstellung überhaupt von einer Rechtskategorie βούλευσις als einen Irrthum betrachten muss. Harpokrations Quellen sind uns nicht mehr zugänglich, aber bei einer Untersuchung von βούλευσις und gleichartigen Ausdrücken (wie βουλεύειν, ἐπιβουλεύειν) in noch vorhandenen Reden gewinnen wir genau dasselbe Resultat wie Harpokration, wir gewinnen aber einen Begriff, der sich in das sonst bezeugte System nicht einfügen lässt, sondern sich als theils zu eng theils zu weit zeigt. Harpokration kann somit keine ausdrücklige Zeugnisse von einem Verbrechen βούλευσις weder bei den Rednern noch bei Aristoteles vorgefunden haben, sondern er hat durch falsche Abstraction sich selbst diesen Begriff gebildet. Woher die Angabe bei dem Schol. zu Aesch. stamme, kann ich nicht sagen, aber sie deutet doch auf einen ähnlichen Ursprung wie die des Harpokration. [2]) Es fragt sich, ob unter solchen Umständen diesen Angaben einen Werth zuzumessen ist gegenüber den sowohl positiven als negativen Zeugnissen der sonstigen Ueberlieferung. Wir können nicht anders als diese Frage verneinend beantworten.

Dass Demosthenes in der Rede gegen Aristokrates nirgends der βούλευσις Erwähnung thut, muss schon verdächtig scheinen. Besonders in Beziehung auf Aristokrates war eine βούλευσις annehmbar, aber dennoch findet

---

[1]) Die Ansicht von Philippi wird von J. H. Lipsius bei einer Recension von Philippis Arbeit (Bursians Jahresb. 15, 1878 (3) S. 289 ff.) auch nicht angenommen. Lipsius schliesst sich der Ansicht an, die die Fälle auf den Areopag und das Palladion vertheilt.

[2]) Der Zusatz: καὶ οἰκέτην ἢ μέτοικον ἢ ξένον ἀποκτείναντι könnte aus folgenden Stellen abstrahirt sein: Dem. Aristokr. § 23 (628), Neaira 1348, (Euerg. 1160), Isokr. 1 Kallim. 52.

man bei Demosthenes keine Andeutung davon, offenbar weil sie keine bestimmte Rechtskategorie war. Ebenso ist bei der Besprechung von dem Gerichtshofe am Palladion (§ 71 ff.) davon gar nicht die Rede, sondern nur von *φόνος ἀκούσιος*. Dasselbe ist der Fall bei Pausanias I, 28, 9 und, wie schon oben gesagt wurde, bei sämmtlichen Lexikographen mit Ausnahme von Harpokration.

Aber andererseits ist der Fall ganz denkbar und ist thatsächlich oft vorgekommen, dass jemand nicht selbst mit eigener Hand sondern nur als intellectueller Urheber den Tod eines Menschen verursacht hat. Wie ist gerichtlich mit einem solchen verfahren? Straflosigkeit ist natürlich nicht denkbar.

Darüber giebt uns Andokid Myster. 94 Auskunft: *καίτοι οὗτος ὁ νόμος καὶ πρότερον ἦν καὶ ὡς καλῶς ἔχων καὶ νῦν ἔστι, καὶ χρῆσθε αὐτῷ, τὸν βουλεύσαντα ἐν τῷ αὐτῷ ἐνέχεσθαι καὶ τὸν τῇ χειρὶ ἐργασάμενον.* Bei einem solchen Gesetze kann kaum von einer besonderen Klage wegen *βούλευσις* die Rede sein, und so finden wir, dass die Redner überall das *ἐπιβουλεύειν* in rechtlicher Hinsicht mit dem thatsächlichen Ausführen gleichstellen. Antiphon lässt den Kläger Tetr. I, *γ*, 5 sagen: *εἰ γὰρ ἀπεγένετο* (wenn der wegen Mordes Angeklagte nicht dabei gewesen wäre), *τὸν μὲν κίνδυνον τὸν αὐτὸν ἔμελλε καὶ παρὼν κινδυνεύειν, πᾶς γὰρ αὐτῶν ληφθεὶς τοῦτον ἂν τὸν ἐπιβουλεύσαντα ἤλεγχεν.* Und Tetr. III, *β*, 5 heisst es: *ὁ νόμος . . . τὸν ἐπιβουλεύσαντα κελεύει φονέα εἶναι.* — Weiter ist zu beachten, dass in dem Gesetze Dem. Arist. 37 (632) *βούλευσις* nicht erwähnt wird, was doch hätte geschehen müssen, wenn *βούλευσις* der technische Ausdruck war für die intellectuelle Urheberschaft des Todes. Der Tödtende und der Urheber des Todes werden aber beide mit *ὁ κτείνας* zusammengefasst: *ἐὰν δέ τις τὸν ἀνδροφόνον κτείνῃ ἢ αἴτιος ᾖ φόνου . . . . ὥσπερ τὸν Ἀθηναῖον κτεῖναντα ἐν τοῖς αὐτοῖς ἐνέχεσθαι.*

Wenn man *βούλευσις* als eine bestimmte Rechtskategorie annimmt, die vor das Palladion gehörte, kommt man zu dem von Philippi freilich vertheidigten Resultat, dass *βούλευσις ἐκ προνοίας*, die denselben Strafbestimmungen unterlag wie *φόνος ἐκ προνοίας*, vor das Palladion gehörte, während das letzgenannte Verbrechen auf dem Areopag gerichtet wurde. Nehmen wir wieder an, was Sauppe oratores attici II 235 gethan hat, dass *βούλευσις ἐκ προνοίας* vor den Areopag, *βούλευσις* ohne *πρόνοια* vor das Palladion gehörte, so haben wir nur andere Benennungen für *φόνος ἐκ προνοίας* und *φόνος ἀκούσιος*, aber keineswegs andere Rechtsfälle. Eine Anklage auf *βούλευσις* hatte in solchem Falle keinen Zweck, und ist wohl thatsächlich auch nie vorgekommen; sonst würden wir solche Ausdrücke wie *βούλευσις ἐκ προνοίας* (oder *ἑκουσία*), *βού-*

λευσις ἀκουσία, ἐκ προνοίας ἐπιβουλεύειν, ἀκουσίως ἐπιβουλεύειν u. s. w. finden. Solche kommen aber gar nicht vor. — Eine Anklage wegen βούλευσις schlechterdings ohne Zusatz ist, da die Strafe ganz davon abhing, ob die Absicht des Tödtens vorhanden war oder nicht, nicht denkbar.

Unsere Ansicht ist also folgende: βούλευσις war keine bestimmte Klageform, sondern dieser und ähnliche Ausdrücke bezeichnen in Processen über Tödtung überall die Vorbereitungen und Anschläge im Gegensatz zu dem erreichten Erfolge. In Falle von Tödtung, wovon hier ausschliesslich die Rede ist, wurde Anschlag und Tödtung mit eigener Hand gleich geachtet. Die Anklage lautete daher auf φόνος ἑκούσιος oder φόνος ἀκούσιος.

Dies wollen wir bei den vornehmsten Reden über Tödtungsfälle darlegen, und müssen wir dabei nicht nur die bisher als βούλευσις bezeichneten Fälle sondern auch diejenigen, wo nach allgemeiner Ansicht die Klage auf φόνος lautete, in Betracht ziehen.

In Antiphons Tetr. I wird der Fall fingirt, dass ein Mann Nachts mit seinem Sclaven von einem Feinde überfallen und getödtet worden sei. Der Kläger sagt α 3: πειρασόμεθα ὑμῖν δηλοῦν, ὡς ἀπέκτεινε τὸν ἄνδρα.

Dann heisst es § 5: αὐτός ὁ θάνατος ἐξ ἐπιβουλῆς ἀποθανόντα μηνύει αὐτόν. Hier haben wir genau denselben Ausdruck (ἐξ ἐπιβουλῆς) wie bei Harpokration. Es ist doch Niemandem eingefallen hier von einer Klage wegen βούλευσις zu reden. Doch war es offenbar eine βούλευσις in Harpokrations Sinne.

§ 6. εἰκότως ἐπεβούλευσεν, εἰκότως δ' ἀμυνόμενος τὴν ἔχθραν ἀπέκτεινε τὸν ἄνδρα.

β, 10 sagt der Angeklagte: εἰ καὶ εἰκότως μὲν, ὄντως δὲ μὴ ἀπέκτεινα τὸν ἄνδρα.

γ, 5 spricht der Kläger die schon oben angeführten Worte: εἰ γὰρ ἀπεγένετο, τὸν μὲν κίνδυνον τὸν αὐτὸν ἔμελλε καὶ παρὼν κινδυνεύειν, πᾶς γὰρ αὐτῶν ληφθεὶς τοῦτον ἂν τὸν ἐπιβουλεύσαντα ἤλεγχεν.

§ 8 εἰκότως μὲν ἀνοσίως δὲ ἀπέκτεινε τὸν ἄνδρα.

Hier wurden also ἀποκτείνειν und ἐπιβουλεύειν abwechselnd gebraucht, da in rechtlicher Beziehung daraus kein Unterschied entstand.

Die geforderte *Strafe* war der *Tod*, der durch freiwillige Flucht entgangen werden konnte (β, 9). Die *Richter* werden mit ὦ ἄνδρες (β, 13) angeredet. — Wir haben hier offenbar eine Anklage wegen φόνος ἐκ προνοίας vor dem Areopag.

In Antiphons zweiter Tetralogie wird ein Jüngling verklagt, weil er beim Speerwurfe im Gymnasium einen anderen Jüngling aus Versehen getödtet hätte.

Er wird von seinem Vater vertheidigt. Die Vorbereitungen zur Handlung kommen nicht in Betracht, und daher finden wir in dieser Rede keinen solchen Ausdruck wie ἐπιβουλεύειν. Die Rede ist aber dadurch interessant, dass sie uns einen einfachen und deutlichen Fall von φόνος ἀκούσιος vorführt.

Der Kläger α, 1: ἑκόντα μὲν οὖν οὐκ ἐπικαλῶ ἀποκτεῖναι, ἀκόντα δέ.

Dies giebt aber der Vertheidiger nicht zu. Ein φόνος ἀκούσιος liegt wohl vor (β, 6), aber der darf seinem Sohne nicht zur Last gelegt werden. οἵ τε γὰρ ἁμαρτάνοντες ὧν ἂν ἐπινοήσωσί τι δρᾶσαι, οὗτοι πράκτορες τῶν ἀκουσίων εἰσίν. — 8. ἀκουσίως δὲ ἁμαρτὼν (der Getödtete) εἰς ἑαυτὸν οἰκείαις συμφοραῖς κέχρηται. — 9. ὑπὸ μὲν γὰρ τῆς αὐτοῦ τοῦ τεθνεῶτος ἁμαρτίας ὅδε ἀπολύεται μηδὲ ἀκουσίως ἀποκτεῖναι αὐτὸν (dass er nicht einmal unfreiwillig . . .).

Wir könnten noch mehrere gleichartige Wendungen anführen, aber aus dem Gesagten, besonders β, 6, ist schon klar, dass das Wesen der unfreiwilligen Tödtung in eine ἁμαρτία bei Ausführung von einer anderen (freiwilligen) Handlung verlegt wird. Diese Erklärung trifft auf alle Fälle von φόνος ἀκούσιος zu, und ist von Wichtigkeit bei der Beurtheilung der dritten Trilogie.

Als *Strafe* wird die *Verbannung* des Angeklagten gefordert (α, 2, womit β, 10 nur scheinbar streitet). *Richter:* α, 1: ὦ ἄνδρες πολῖται, β, 2 ὦ ἄνδρες δικασταί. Der Fall gehörte vor das Palladion.

In der dritten Tetralogie wird der Fall behandelt, dass ein junger Mann bei einem Schmause einen älteren Mann so geschlagen hatte, dass dieser, laut der Klage, davon später gestorben war. Die Behandlung dieser Frage ist sehr verwickelt. Unsere Ansicht von der Beweisführung ist folgende.[1] Da die Vorbereitungen und der Erfolg nicht zusammenfallen, ist das ἐπιβουλεύειν hier von besonderer Gewicht. — Die erste Beschuldigung des Klägers geht auf φόνος ἑκούσιος. Er sagt nämlich α, 6: εἰ μὲν γὰρ ἄκων ἀπέκτεινε τὸν ἄνδρα, ἄξιος ἂν ἦν συγγνώμης τυχεῖν τινός . . . . ὡς μὲν ἀποκτείνας τοῦ φόνου τοῖς ἐπιτιμίοις ἔνοχός ἐστιν.

Die Bemühung des Angeklagten zielt darauf hin zu zeigen, wer ὁ ἐπιβουλεύσας, oder was damit unter Umständen dasselbe ist, wer ὁ αἴτιος ist, und zwar, dass nicht er sondern der Getödtete selbst (oder der Arzt) das ist: (β, 5) τον ἐπιβουλεύσαντα κελεύει (ὁ νόμος) φονέα εἶναι.

β, 1: . . . πρᾶγμα, οὗ ὁ ἀποθανὼν αὐτῷ αἴτιος καὶ μᾶλλον ἢ ἐγὼ ἐγένετο.

§ 3. ἐγὼ δὲ δεύτερον καὶ τρίτον οὐκ ἀποκτεῖναί φημι.

---

[1]) Vgl. damit die abweichende Auffassung bei Blass (Attische Beredsamkeit S. 154 ff.) und Philippi (a. a. O. S. 24 ff.).

§ 4 von dem Arzte: διὰ γὰρ τοῦ ἰατροῦ μοχθηρίαν καὶ οὐ διὰ τὰς πληγὰς ἀπέθανεν.

§ 5. σαφὲς ὅτι τὰ αὐτὰ ἐπεβούλευσα καὶ ἐπεβουλεύθην.

§ 6. διὰ τὸν ἄρξαντα αἱ πληγαὶ γενόμεναι τοῦτον (den Getödteten) αἴτιον τοῦ θανάτου καὶ οὐκ ἐμὲ ἀποφαίνουσιν ὄντα.

Gegenüber dieser Behauptung, dass wer begonnen hat (ὁ ἄρξας) ὁ αἴτιος sei, versucht der Kläger (γ, § 2 ff.) zuerst darzuthun, dass der Getödtete nicht begonnen hatte, aber da sein Beweis dafür doch sehr schwach ist, versucht er seine Anklage dadurch zu erhärtern, dass er den Begriff von ὁ βουλευτὴς (= ὁ αἴτιος) genauer erörtert (§ 4). Der Getödtete ist nur βουλευτὴς der Schläge, ὁ μὲν πατάξας καὶ μὴ ἀποκτείνας τῆς πληγῆς βουλευτὴς ἐγένετο; der Angeklagte aber ist βουλευτὴς des Todes, ὁ δὲ θανασίμως τύπτων τοῦ θανάτου.

Nun aber giebt der Kläger seine erste Behauptung auf und behauptet nur, dass φόνος ἀκούσιος stattfinde. Daher kommt von jetzt an der Ausdruck ἁμαρτία mit in die Erörterung. γ, 4: ὁ μὲν (der Getödtete) γὰρ ἐξ ὧν ἔδρασεν ἐκεῖνος διαφθαρεὶς οὐ τῇ ἑαυτοῦ ἁμαρτίᾳ ἀλλὰ τῇ τοῦ πατάξαντος χρησάμενος ἀπέθανεν· ὁ δὲ (der Angeklagte) μείζω ὧν ἤθελε πράξας, τῇ ἑαυτοῦ ἀτυχίᾳ ὃν οὐκ ἤθελεν ἀπέκτεινεν.

Der Vertheidiger des Angeklagten kommt (δ) auf τὸν ἄρξαντα τῆς πληγῆς (§ 2 und 3) zurück, den er (also den Getödteten) als den Schuldigen bezeichnet. — Dann kommt er (§ 4) zu ὁ ἐπιβουλεύσας und der ἁμαρτία: νῦν δὲ καὶ ὁ ἀμυνόμενος τύπτειν καὶ οὐκ ἀποκτεῖναι διανοηθεὶς[1]) ἥμαρτεν εἰς ἃ οὐκ ἠβούλετο πατάξας. Vorläufig wird also die ἁμαρτία und somit die φόνος ἀκούσιος in vorsichtigen Worten zugegeben. — Aber, setzt er fort, da der Angeklagte gegen seinen Willen schlagen musste (ἀκουσίως ἐπάταξεν), folgt, dass *auch* die ἁμαρτία mehr dem, der anfing, als dem, der sich vertheidigte, zukommt. Und, setzt er etwas spitzfindig hinzu, da somit der Getödtete die Ursache ist sowohl der eigenen ἁμαρτία als der des Angeklagten, ist er selbst der eigentliche Tödter.

In § 8 werden die Beweise noch zusammengefasst. Der Mann ist nicht in Folge der Wunden sondern der schlechten ärztlichen Behandlung gestorben. Wer begonnen hat trägt die Schuld. Die ἁμαρτία ist, wenn φόνος ἀκούσιος vorliegt, ganz bei dem Getödteten.

Als *Strafe* wird der *Tod* des Angeklagten gefordert (α, 7; γ, 7; δ, 10).[2])

---

[1]) Zu tetr. 2.

[2]) Nach dem Zugeständnisse γ, 4 war der Kläger, streng genommen, nicht mehr berechtigt den Tod des Verklagten zu fordern.

Eine Anrede der *Richter* kommt nicht vor. — Der Fall ist *φόνος ἑκούσιος* vor dem Areopag.

Jetzt können wir zu denjenigen Reden des Antiphon übergehen, die nach den Ansichten einiger (besonders Philippis) über *βούλευσις* gehalten worden sind. — In der Rede über den Choreuten vertheidigt sich ein angesehener Atheniensischer Mann, der verklagt wurde, weil er, der einen Chor einüben liess, einem Knaben ein Getränk hätte geben lassen, wovon dieser gestorben war.

§ 16 sagt der Angeklagte: *διωμόσαντο δὲ οὗτοι μὲν ἀποκτεῖναί με Διόδοτον βουλεύσαντα τὸν θάνατον, ἐγὼ δὲ μὴ ἀποκτεῖναι, μήτε χειρὶ ἐργασάμενος μήτε βουλεύσας*. Aus den Ausdrücken selbst geht es hervor, dass die Anklage auf *Tödtung* (*φόνος*) lautete. Die beigefügten Participia drücken nur die Art des Tödtens etwas näher aus. *βουλεύειν* ist in wesentlich demselben Sinne gebraucht wie in den vorher behandelten Reden. — Auch § 21 tritt der Begriff des Tödtens als die Hauptsache und der Gegenstand der Anklage hervor: *ἔλεξε μὲν γὰρ Φιλοκράτης οὑτοσὶ ἀναβὰς εἰς τὴν ἡλιαίαν τὴν τῶν θεσμοθετῶν . . . ., ὅτι ἀδελφὸν αὐτοῦ ἀποκτείναιμι ἐγὼ ἐν τῷ χορῷ, φάρμακον ἀναγκάσας πιεῖν*. — Ebenso in § 19, wo der *φόνος* als ein unfreiwilliger bezeichnet wird: *ὁμολογοῦσι μὴ ἐκ προνοίας μηδ᾽ ἐκ παρασκευῆς γενέσθαι τὸν θάνατον τῷ παιδί*.

Als *Strafe* wird *Verbannung* gefordert (§ 4 und 7). — Die *Richter* werden mit folgenden Ausdrücken angeredet: § 1: *ὦ ἄνδρες δικασταί*; 3 *ὑμῖν τοῖς δικασταῖς*; *ὦ ἄνδρες* 7, 25, 28.

Wir haben hier einen Fall von *φόνος ἀκούσιος* vor dem Palladion.

In der Rede gegen die Stiefmutter wird dagegen ein Fall von *φόνος ἐκ προνοίας* behandelt. Eine Frau hatte durch Vermittelung einer anderen Frau mittels eines Getränks ihren Mann vergiften lassen und wird desswegen von ihrem Stiefsohne verklagt. Obgleich hier kein *χειρὶ ἐργάσασθαι* vorliegt, werden Ausdrücke des Tödtens sehr häufig gebraucht, was nicht thunlich oder nöthig wäre, wenn nicht die Klage auf *φόνος* gerichtet wäre. [1])

Der Kläger spricht § 3: *ἐὰν ἀποδείξω ἐξ ἐπιβουλῆς καὶ προβουλῆς τὴν τούτων μητέρα φονέα οὖσαν*. Der Ausdruck *ἐξ ἐπιβουλῆς* ist hier nicht anders gebraucht als Tetr. I, *α*, 5.

[1]) An eine Klage *φαρμάκων* giebt uns kein Ausdruck — mit Ausnahme des Titels, der nicht als Zeugniss gelten kann — Berechtigung zu denken. Als ein Zeugniss gegen eine solche Ansicht möchte ich aber nicht, was mehrere gethan haben (vgl. Philippi, S. 41), die Gesetzesworte (vgl. Pag. 3): *φαρμάκων, ἐάν τις ἀποκτείνῃ δούς* anführen. In *δούς* liegt nicht, dass das Gift *eigenhändig* gegeben werden muss; *δούς* ist hinzugefügt, weil ohne *δούς* der Ausdruck sehr hart und fast unverständlich wäre.

§ 5. τοῦ μὲν ἐκ προβουλῆς ἀκουσίως ἀποθανόντος, τῆς δὲ ἑκουσίως ἐκ προνοίας ἀποκτεινάσης.

§ 20. Die Frau, die als Vermittlerin diente, wird als ἡ διακονήσασα καὶ χειρουργήσασα bezeichnet, im Gegensatz zu ἡ αἰτία καὶ ἐνθυμηθεῖσα.

§ 22. ὑπὲρ δὲ τῆς ἀποκτεινάσης δεήσεται (der Vertheidiger) . . . αὐτὴ ἑαυτὴν οὐκ ἔπεισε μὴ κακοτεχνῆσαι. ὑμεῖς δ' οὐ τῶν ἀποκτεινάντων ἐστὲ βοηθοί, ἀλλὰ τῶν ἐκ προνοίας ἀποθνησκόντων.

§ 25. καίτοι πότερον δικαιότερον τὸν ἐκ προνοίας ἀποκτείναντα δοῦναι δίκην ἢ μή . . . ., ὥσπερ κἀκεῖνον . . . . αὕτη ἀπώλεσεν.

§ 26. ἡ μὲν γὰρ ἑκουσίως καὶ βουλεύσασα τὸν θάνατον [ἀπέκτεινεν].

§ 28. οὐ γὰρ δή που μαρτύρων γ' ἐναντίον οἱ ἐπιβουλεύοντες τοὺς θανάτους τοῖς πέλας μηχανῶνται . . . .

Wenn wir die oben gebrauchten Ausdrücke mit den entsprechenden in Tetr. I und III vergleichen, finden wir, dass nichts hindert hier eine Anklage wegen φόνος ἐκ προνοίας anzunehmen.

Als *Strafe* wird *der Tod* der Stiefmutter beantragt (§ 25). — Die *Richter* werden, wie in der ersten Tetralogie β, 13, mit dem Ausdrucke ὦ ἄνδρες angeredet § 1, 3, 13, 30. ὦ δικάζοντες kommt an einer sehr verdächtigen Stelle (§ 7) vor, und ist an und für sich als Anrede nicht möglich. — Alles deutet also darauf hin, dass wir es mit einer Klage wegen φόνος ἐκ προνοίας vor dem Areopage zu thun haben.

In der zwölften Rede klagt Lysias Eratosthenes, einen der Dreissig, als Mörder seines Bruders Polemarchos an, weil Eratosthenes den Bruder auf Befehl der Dreissig hatte verhaften lassen. — Obgleich Eratosthenes den Mord nicht selbst vollzogen hatte (§ 17 Πολεμάρχῳ δὲ παρήγγειλαν οἱ τριάκοντα τὸ ὑπ' ἐκείνων εἰθισμένον παράγγελμα, πίνειν κώνειον), wird von ihm überall der Ausdruck ἀποκτείνειν gebraucht (§ 23, 26, 34); ἐπιβουλεύειν oder gleichbedeutende Ausdrücke kommen nirgends vor. Dies ist wieder ein Zeugniss wider die Annahme einer Klageform βούλευσις, selbst wenn wir nicht entscheiden können, vor welchem Gerichtshofe oder bei welcher Gelegenheit die Rede gehalten worden ist.

Als Strafe wird *der Tod* des Angeklagten beantragt. Dies nebst dem Umstande, dass das Verbrechen offenbar als absichtliche Tödtung dargestellt wird, deutet freilich auf den Areopag hin, aber die Weise, in welcher die Richter angeredet werden, macht eine solche Annahme unmöglich. Abgesehen von der Anrede ὦ ἄνδρες δικασταί (§ 1, 3, 11, 24, 34, 37, 49, 71), die von dem Areopag nicht gebraucht wird, werden die Richter öfters als Repräsentanten des Athenienschen Volkes betrachtet, besonders § 69 (ὦ ἄνδρες Ἀθηναῖοι), woselbst die Erwähnung des Areopags in solcher Weise geschieht, dass sie vor dem Areopag selbst nicht möglich war. Wir müssen nothwendig an die Heliasten denken. Da von einer εὐθύνη nirgendswo die Rede ist, und da Lysias als nicht-Bürger in einer solchen Sache, aller Wahrscheinlichkeit nach, nicht als Kläger auftreten durfte, können wir nicht, wie zuletzt Blass (Attische Beredsamkeit I, 540), einen Process bei der Rechenschaftsablegung annehmen, sondern einen wirklichen Mordprocess (so Rauchenstein Philologus X, Seite 598 ff. und Frohberger in der Einl. zu der Rede gegen Eratosth. S. 21). Darin aber möchten wir Blass beitreten, dass die Klage nicht vor dem Delphinion behandelt wurde (wie Frohberger annimmt), da Eratosthenes jedenfalls keine von den Entschuldigungen vorbringen konnte, die Dem. Aristokr. 637 erwähnt werden. Da auch nicht φόνος ἀκούσιος vorlag, kann vom Palladion eben so wenig die Rede sein. Wir müssen also einen gewöhnlichen heliastischen Gerichtshof annehmen, vielleicht an demselben Ort, wo die Heliasten auch sonst (bei ἀπαγωγή) über Mord richteten.

Ein solcher Process, nach erfolgter ἀπαγωγή, ist der Gegenstand der folgenden (13) Rede von Lysias. Ein gewisser Agoratos wird nämlich verklagt, weil er durch seine Anzeige bei den Dreissig verursacht hatte, dass der Schwager von dem Sprecher der Rede durch die Dreissig getödtet wurde.

Die im Athenischen Rechte bestehende Gleichstellung dessen, der den Tod verursacht hatte, mit dem Thäter selbst, hat dem Kläger Anlass gegeben den Agoratos nicht nur als Mörder sondern sogar als einen auf frischer That (ἐπ' αὐτοφώρῳ § 87) ertappten Mörder zu verklagen.

Es muss zugegeben werden, dass die Beweisführung etwas spitzfindig und gekünstelt ist, aber ein solcher Fall wie der vorliegende wäre überhaupt kaum denkbar, wenn in dem Athenischen Rechte ein bestimmter Unterschied zwischen βούλευσις och φόνος bestanden hätte. ἐπιβουλεύειν oder andere Ausdrücke von demselben Stamme kommen gar nicht vor. ἀποκτείνειν und αἴτιος τοῦ θανάτου wechseln mit einander, doch so, dass der Ausdruck für Tödten, worauf es vor Allem ankam, meistens gebraucht wird.

In der zehnten Rede von Lysias sagt der Sprecher von sich selbst § 31: ὃς μόνος (allein unter den Brüdern, nach Frohberger), ἐπειδὴ τάχιστα ἐδοκιμάσθην, ἐπεξῆλθον τοῖς τριάκοντα ἐν Ἀρείῳ πάγῳ. — Man kann hierunter kaum etwas anders verstehen als eine Anklage wegen sogenannter βούλευσις. Dass sie vor dem Areopag abhängig gemacht wird, spricht gegen die gewöhnliche Ansicht, nach der die βούλευσις immer vor das Palladion gehörte. Wir nehmen hier einen Fall wegen φόνος ἐκ προνοίας an (vgl. doch Philippi a. a. O. S. 49 Anm.).

In der 54 Demosthenischen Rede wird ein gewisser Konon wegen Misshandlung (§ 1 *τῆς αἰκίας*) angeklagt. — § 28 sagt der Kläger: .... *τοτ' ἂν τοὺς οἰκέτας παρεδίδου καὶ τῶν ἐξ Ἀρείου πάγου τινὰς παρεκάλει· εἰ γὰρ ἀπέθανον, παρ' ἐκείνοις ἂν ἦν ἡ δίκη.* Die Möglichkeit einer Anklage wegen *φόνος ἐκ προνοίας*, falls der Mann gestorben wäre, ist nicht gerade ausgeschlossen (fast ähnlich ist der von Antiphon Tetr. III fingirte Fall), aber dass der Kläger damit durchgedrungen wäre, ist weniger annehmbar, da Tödtungsfälle in Folge zugetheilter Schläge gewöhnlich vor das Palladion gebracht wurden (Isokr. Kallim. 52 ff.; Dem. in Euerg. 1160 und contra Neaeram 1348).

Der § 25 erwähnte Fall: *τὸν γοῦν τῆς Βραυρωνόθεν ἱερείας πατέρα ὁμολογουμένως οὐχ ἁψάμενον τοῦ τελευτήσαντος, ὅτι τῷ πατάξαντι τύπτειν παρεκελεύσατο, ἐξέβαλεν ἡ βουλὴ ἡ ἐξ Ἀρείου πάγου* — kann sich auf einen *φόνος ἐκ προνοίας* vor dem Areopag beziehen, — wobei doch der Tod als Strafe verhängt wurde — wenn wir annehmen, dass die Richter nur über *φόνος ἀκούσιος* das Urtheil sprachen oder den Angeklagten veranlassten sich durch freiwillige Verbannung der Todesstrafe zu entziehen. Andererseits kann die Erklärung nicht mit Bestimmtheit zurückgewiesen werden, dass *ἐξέβαλεν* gebraucht wird um zu bezeichnen, dass der Priester als ein Areopagit aus dem Collegium ausgestossen worden ist (Philippi S. 47, 48). Jene Erklärung stimmt doch besser zu der Absicht des Redners.

Ziehen wir das Resultat aus der Untersuchung, so finden wir, dass die Annahme einer Klageform *βούλευσις* durch vorhandene Zeugnisse (mit Ausnahme von dem des Harpokr.) nicht bewiesen wird, dass im Gegentheil mehrere Reden und Ausdrücke erst, wenn wir eine solche Annahme fallen lassen, verständlich werden oder sich einfach erklären lassen.

Dass die Athener keinen Unterschied zwischen den intellectuellen Urheber und den thatsächlichen Verüber des Verbrechens aufstellten, ist wieder ein Beweis für den schon öfters ausgesprochenen Satz, dass die Athener kein Volk waren für die Ausbildung der Rechtswissenschaft. — Die vage Bedeutung des Wortes *ἐπιβουλεύειν* und ähnlicher in Mordprocessen vorkommenden Ausdrücke zeigen ihrerseits, dass es an einer streng festgestellten juristischen Kunstsprache fehlte (vgl. Platner Der Process und die Klagen bei den Attikern. Darmstadt 1824. I, 5 ff.).

DIE

INTRAMOLECULARE WASSERABSPALTUNG

BEI

ORGANISCHEN VERBINDUNGEN.

MONOGRAPHISCH DARGESTELLT

VON

EDV. HJELT.

Seitdem die Theorie der Atomverkettung einen Einblick in die innere Zusammensetzung der Molecüle eröffnet hat, haben die intramolecularen Reactionen, besonders bei den Kohlenstoffverbindungen die Aufmerksamkeit der Chemiker sich zugezogen. Die Atomumlagerungen im Molecüle, welche die statischen Verhältnisse in diesem verändern, gehören zu den interessantesten chemischen Reactionen und in nicht geringerem Grade gilt dieses von den inneren Condensationen, die Vorgänge, bei welchen durch Austritt von einem Molecüle zugehörigen Atome Veränderungen in den Verkettungs- und Stabilitätsverhälthältnissen stattfinden. Diese Reactionen gewinnen an Interesse dadurch, dass sie oft ohne äussere chemische Einwirkung oder Einfluss höherer Temperatur zu Stande kommen, und dass die entstehenden Verbindungen meistens sehr beständig sind.

Besonders in den letzten Jahren sind zahlreiche Beobachtungen auf dem Gebiete der inneren Condensationen gemacht worden. Eine genügende Menge verschiedener Reactionen sind bekannt um eine systematische und monographische Behandlung derselben zu rechtfertigen und nach meiner Meinung sogar nöthig zu machen.

Ich habe versucht alle in der Litteratur zugänglichen Angaben über innere Condensationen, insofern sie unter Wasserabspaltung (resp. Schwefelwasserstoff- und Halogenwasserstoffabspaltung) verlaufen, zu sammeln und die verschiedenen beobachteten Reactionen in Gruppen zu ordnen um dadurch eine bessere Uebersicht des Materials zu geben.

Bei einer Gruppirung der Reactionen können verschiedene Principien sich geltend machen und ich will nicht behaupten, dass ich die natürlichste Eintheilung derselben getroffen habe. Die Eintheilung ist in mancher Hinsicht artificiell. Dieses hat aber theilweise seinen Grund darin, dass ich die Anzahl der verschiedenen Gruppen möglichst einschränken wollte. Alle einzelnen beobachteten Reactionen sind nicht in der Abhandlung erwähnt, sondern habe ich, wenn mehrere Reactionen ganz analog verlaufen, nur eine oder einige als Beispiel angeführt.

Dass einige Abschnitte, z. B. Abschn. III (Lactonbildung), ausführlicher und mehr eingehend behandelt worden sind, beruht nicht darauf, dass ich die in diesen erwähnten Reactionen für wichtiger als die übrigen diesem Gebiete angehörenden ansehe, sondern darauf, dass sie in der That gründlicher und namentlich mehr systematisch studirt sind.

Die Abhandlung umfasst folgende Abschnitte:

I.

Wasserabspaltung zwischen zwei an demselben Kohlenstoffatome gebundenen Hydroxylgruppen.

Dass Verbindungen, welche zwei oder mehrere an demselben Kohlenstoffatome gebundene Hydroxylgruppen enthalten, sehr leicht Wasser abgeben, ist eine längst bekannte Erscheinung. Man hat sogar den Satz aufstellen können, dass ein Kohlenstoffatom der Regel nach *nur eine* Hydroxylgruppe binden kann. Die zweifach hydroxylirten Verbindungen gehen unter Wasserabspaltung in *Aldehyde* oder *Ketone*, die dreifach hydroxylirten in *Metacarbonsäuren* über.

Aldehyd und Ketonbildung. Die allgemeine Formel für diese Art von Wasserabspaltung ist:

$$\begin{matrix} R \\ R_1 \end{matrix} > C \begin{matrix} OH \\ OH \end{matrix} = \begin{matrix} R \\ R_1 \end{matrix} > CO + H_2O.$$

Dass bei vielen Processen, welche zur Bildung von Aldehyde und Ketone führen, intermediär die Dihydrate entstehen, liegt ausser Zweifel. So z. B. bei Behandlung der entsprechenden Chloride oder Bromide mit Wasser:

$$\begin{matrix} R \\ R_1 \end{matrix} > C\,Cl_2 + H_2O = \begin{matrix} R \\ R_1 \end{matrix} > C < \begin{matrix} OH \\ OH \end{matrix} + 2\,HCl$$

$$\begin{matrix} R \\ R_1 \end{matrix} > C \begin{matrix} OH \\ OH \end{matrix} = \begin{matrix} R \\ R_1 \end{matrix} > O + H_2O.$$

Die Ester dieser Hydrate sind beständig, wenn man sie aber verseift, resultiren nicht die freien Hydrate, sondern deren Anhydride (Aldehyde, Ketone) z. B.:

$$\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CH \end{matrix} \begin{matrix} OC_2H_3O \\ OC_2H_3O \end{matrix} + 2K\,OH = \begin{matrix} CH_3 \\ | \\ C\,HO \end{matrix} + 2KC_2H_3O_2 + H_2O.$$

Die Oxidation der Kohlenstoffderivate kann man sich im Allgemeinen so vor sich gehend denken, dass Sauerstoff zwischen Kohlenstoff und Wasserstoff eintritt, wobei Hydroxyl entsteht. Ein primärer oder secundärer Alkohol giebt dabei ein Dihydrat, aus dem dann durch spontane Wasserabspaltung Aldehyd, resp. Keton entsteht.

Die in Wasser löslichen Aldehyde lösen sich unter Erwärmung und Contraction. Wahrscheinlich entstehen hierbei die Aldehydhydrate. Diese können aber nicht isolirt werden.

Die Neigung zur Wasserabspaltung ist indessen viel geringer bei den Hydraten, in welchen benachbarte Kohlenstoffatome negative Atome (Halogen, Sauerstoff) binden. Bei solchen Verbindungen sind die Hydrate bei gewöhnlicher Temperatur und manche sogar bei hoher Temperatur beständig. Ein längst bekanntes Beispiel dieser Art ist das Chloralhydrat $\begin{matrix} CCl_3 \\ | \\ CH \end{matrix}\begin{matrix} OH \\ OH \end{matrix}$, welches bei 96—98° in Wasser und Chloral zerfällt.[1]) Auch Dichloraldehyd[2]), Dibrom- und Tribromaldehyd,[3] sowie Butylchloral[4]) und Tri-, Tetra-, Penta- und Hexachloraceton bilden existensfähige Hydrate. Ebenso verhalten sich viele Aldehyd- und Ketonsäuren. Ob die Glyoxylsäure, die mit einem Mol. Wasser krystallisirt, als Dioxyessigsäure aufzufassen, oder ob das Wasser nur als Krystallwasser vorhanden ist, ist nicht sicher entschieden,[5]) doch scheint das erstere wahrscheinlicher. Zu beachten ist, dass alle ihre Salze, mit Ausnahme des Ammoniumsalzes mit Wasser krystallisiren.

Die Brenztraubensäure, $CH_3 \cdot CO \cdot CO_2 H$, bildet, soweit bekannt, kein Hydrat (die syrupförmige, nichtflüchtige Modification dieser Säure kann nicht als solches angesehen werden) und ihre Homologen auch nicht,[6]) wohl aber ihre Halogensubstitutionsprodukte, wie Dibrom-, Tribrombrenztraubensäure, welche mit Wasser krystallisiren.

Das Hydrat der Mesoxalsäure, die Dioxymalonsäure $CO_2H-C(OH)_2 \cdot CO_2H$, schmilzt bei 115° ohne Wasser zu verlieren.

Die früher als Carboxytartronsäure gehaltene, von Kekulé[7]) als Dioxy-

---

[1]) Untersuchungen über Chloralhydratdampf haben nämlich gezeigt, dass derselbe in Chloral und Wasser dissociirt ist.

[2]) Friedrich, Ann. d. Ch. 206, 251.

[3]) Pinner, Ann. d. Ch. 179, 67; Schäffer, Ber. d. d. ch. Ges. IV, 366.

[4]) Krämer u. Pinner, Ber. d. d. ch. Ges. III, 383.

[5]) Siehe Otto u. Beckurts, Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 1616, u. A.

[6]) Eine Ausnahme macht vielleicht die γ-Acetobuttersäure, welche nach Wolff (Ann. d. Ch. 216, 129) leicht ein Mol. Wasser aufnimmt, welches es doch schon über Schwefelsäure wieder abgiebt.

[7]) Ann. d. Ch. 221, 230.

weinsäure bezeichnete Verbindung ist als ein Hydrat eines doppelten Ketons aufzufassen

$$\begin{array}{l} C(OH)_2 \cdot CO_2H \\ | \\ C(OH)_2 \cdot CO_2H \end{array}$$

Ihr Verhalten ist ganz das einer Ketonsäure. Sie geht z. B. bei der Reduction in Weinsäure über, mit Orthoamine bildet sie wie die Diketonen Chinoxalinderivate.[1]) Es wird bei diesen Reaktionen zuerst Wasser abgespalten.

Die Phenylglyoxylsäure

$$C_6H_5 \cdot CO \cdot CO_2H$$

scheidet sich aus ihren Salzen in Form eines Oeles ab, welches wahrscheinlich das Hydrat darstellt und auch ihr Amid bildet ein Hydrat, welches jedoch schon über Schwefelsäure Wasser verliert und in den gewöhnlichen Amid übergeht (Claisen).[2]) Die Ortho-nitrophenylglyoxylsäure scheidet sich auch aus ihren Salzen in Form von Hydrat aus, welches krystallisirt ist (Shadwell).[3])

Die Chlorhydrate, in welchen Chlor und Hydroxyl an denselben Kohlenstoffatom gebunden sind, verhalten sich eben sowie die entsprechenden Dihydrate. Sie sind nicht beständig, sondern geben Chlorwasserstoff ab:

$$\begin{matrix} R \\ R_1 \end{matrix} > C \begin{matrix} Cl \\ OH \end{matrix} = \begin{matrix} R \\ R_1 \end{matrix} > CO + HCl.$$

Auf dieser Reaction beruht wohl die Bildung von *Aldehyde* bei Einwirkung von Chlor auf primäre Alkohole (Chloralbildung).

Bildung der Metacarbonsäuren aus Orthocarbonsäuren. Die Reaktion geht nach folgender Formel von Statten:

$$R - C \begin{matrix} -OH \\ -OH \\ -OH \end{matrix} = H_2O + R - C \begin{matrix} =O \\ -OH \end{matrix}.$$

Die Trihydrate, die sogen. Orthocarbonsäuren, sind noch weniger beständig als die Dihydrate. Einige sind in Form von Estern bekannt, diese gehen bei Verseifung in die Anhydrosäuren, die gewöhnlichen (Meta-) Carbonsäuren, über. Z. B. Orthoameisensäureester giebt die gewöhnliche Ameisensäure:

---

[1]) Hinsberg, Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 1228.
[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XII, 632.
[3]) Ber. d. d. ch. Ges. XII, 634.

$$HC\begin{matrix}-OC_2H_5\\-OC_2H_5\\-OC_2H_5\end{matrix} + 2H_2O = HC\begin{matrix}=O\\-OH\end{matrix} + 3C_2H_5 \cdot OH.$$

Aus den entsprechenden Trichloriden erhält man bei Verseifung ebenfalls die Metasäuren. Chloroform giebt mit Alkali Ameisensäure, Trichlormilchsäure giebt Tartronsäure[1]), aus Benzotrichlorid erhält man Benzoesäure u. s. w. Ohne Zweifel entstehen auch hier intermediär die unbeständigen Orthosäuren.

Die Orthokohlensäure

$$C(OH)_4$$

ist in Form von Estern bekannt. Beim Verseifen mit Alkali geben diese Salze der Metakohlensäure

$$C\begin{matrix}=O\\(OH)_2\end{matrix}.$$

Auch diese kann, wie bekannt, nicht in freiem Zustande existiren. Vielleicht ist das unbeständige Hydrat doch in der Wasserlösung des Kohlendioxids vorhanden.[2])

Oxalsäure krystallisirt mit 2 Mol. Wasser, welche ungefähr bei 100^0 abgegeben werden. Die krystallisirte Säure ist vielleicht die doppelte Ortosäure:

$$\begin{matrix}C(OH)_3\\|\\C(OH)_3\end{matrix}.$$

Ein gegenseitiger Einfluss der negativen Gruppen in der Säure könnte die Existens dieses Hydrats bedingen. Bei Einwirkung von Basen bildet sie aber Salze der Metasäure.

---

[1]) PINNER, Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 752.
[2]) BALLO, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 3003.

II.

Wasserabspaltung zwischen zwei an verschiedenen Kohlenstoffatomen gebundenen alkoholischen Hydroxylen.

Der allgemeine Ausdruck dieser Art von Wasserabspaltung ist folgender:

$$\underset{OH}{\overset{|}{C}} - (R) - \underset{OH}{\overset{|}{C}} \;=\; \underbrace{C - (R) - C}_{O} + H_2O.$$

Die Verbindungen, welche durch einen derartigen Process entstanden sind oder entstanden gedacht werden können, sind die *Alkylenoxyde*, die *Glycidverbindungen* und ihnen analog zusammengesetzte Körper.

Die directe Wasserabspaltung zwischen zwei alkoholischen Hydroxylen ist indessen selten beobachtet worden. Man kennt zwar eine Menge einfacher Alkylenoxyde, sowie mehrere Glycidverbindungen, aber sie entstehen meistens aus den entsprechenden Chlorhydrinen durch Einwirkung von Alkali (siehe unten).

Wasserentziehende Mittel wirken auf die bis jetzt in dieser Beziehung untersuchten Di- oder Polyhydrate, in welchen die Hydroxyl bindenden Kohlenstoffatome in direkter Bindung miteinander stehen, unter Bildung von Aldehyde und Ketone. Die eigentlichen *Pinakone*, die zweiwerthigen Alkohole, in welchen die Hydroxyle an zwei benachbarten tertiären Kohlenstoffatomen gebunden sind, gehen bei Behandlung mit Säuren, Acetylchlorid u. s. w., in Ketone über (*Pinakolinbildung*), z. B.:

$$(CH_3)_2 \cdot C(OH) \cdot C(OH)(CH_3)_2 = (CH_3)_3 \cdot CO \cdot CH_3 + H_2O.$$

Der Verlauf des Processes ist nicht ganz klargestellt. In einigen Fällen, wie bei Benzpinakon und Tolylphenylpinakon sind intermediäre Körper isolirt worden (α-Pinakoline).[1] Diese sind anhydridartige Verbindungen, ob sie aber

[1] Thörner u. Zincke. Ber. d. d. ch. Ges. X, 1473; XI, 65 u. 1396 u. A.

einfache Anhydride sind, ist nicht bekannt. Breuer und Zincke[1]), dehnen den Begriff Pinakon auf alle Dihydrate aus, welche Hydroxyle an zwei benachbarte Kohlenstoffatome enthalten, und betrachten ihr Verhalten bei Einwirkung von wasserentziehenden Mitteln als das der Pinakolinbildung ganz analog. Die Bildung von Aldehyde und Ketone aus ihnen lässt aber eine einfachere Deutung zu, indem angenommen werden kann, dass zuerst ungesättigte Alkohole entstehen, welche thatsächlich unbeständig sind (siehe Abschnitt V). Ein leichter Uebergang der gewöhnlichen Alkylenoxide oder aetherartigen Verbindungen in Aldehyde oder Ketone ist nicht bewiesen.

Nur ein bekanntes einfaches Alkylenoxyd scheint durch directe Wasserabspaltung aus einem Glycol zu entstehen. Es ist dies das *Hexylenpseudoxyd*:

$$CH_3 \cdot \underset{\diagdown\!\!\underset{O}{}\!\!\diagup}{CH \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH} \cdot CH_3.$$

Würtz[2]) erhielt nämlich dieses durch Einwirkung von Silberoxyd auf das entsprechende Jodid (aus Diallyl und Jodwasserstoff). Jekyll[3]) bekam dieselbe Verbindung aus Diallyl durch Einwirkung von Schwefelsäure und Destillation mit Wasserdampf. Im Gegensatz zu den anderen Alkylenoxyden zeigt dieses eine grosse Beständigkeit gegen Wasser.

Nach dem was über die Lactonbildung (siehe Abschnitt III) bekannt ist, scheint es wahrscheinlich, dass, wie auch schon von Erdmann[4]) hervorgehoben worden ist, eine Wasserabspaltung bei den Glycolen leicht stattfindet, in welchen die Hydroxylgruppen, durch eine Kette von *vier* Kohlenstoffatomen getrennt sind und also die Gruppe

$$\begin{array}{cccc} C - & C - & C - & C \\ | & & & | \\ OH & & & OH \end{array}$$

enthalten.

Diese Stellung ist in dem Hexylenpseudoxyd zu Grunde liegenden Glycol vorhanden. Als ein Derivat eines solchen Dihydrats ist auch das von Erdmann[5]) aus Isocaprolacton dargestellte Isocaprolactoid anzusehen, welches zugleich als Lacton und Alkylenoxyd zu betrachten ist:

---

[1]) Annal. d. Ch. 198, 141.
[2]) Jahresb. 1864, 515.
[3]) Zeitschr. f. Ch. 1871, 36.
[4]) Annal. d. Ch. 228, 197.
[5]) Annal. d. Ch. 228, 183.

$$
\begin{array}{l}
(CH_3)_2 = \overset{}{C} \cdot CH_2 \cdot CH_2 \\
\qquad\qquad\;\; | \qquad\qquad\;\; | \\
\qquad\qquad\;\; O \underline{\qquad\quad} C \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \| \\
(CH_3)_2 = C \cdot CH_2 \cdot C \\
\qquad\qquad\;\; | \qquad\qquad\;\; | \\
\qquad\qquad\;\; O \underline{\qquad\quad} CO
\end{array}
$$

Die durch Einwirkung von Alkali auf Isocaprolactoid erhaltene Oxysäure enthält im freien Zustande ½ Mol. Wasser, welches doch schon im Exsiccator abgegeben wird. Es deutet dies darauf, dass bei Bildung der Säure auch die alkylenoxydartige Bindung zum Theil gesprengt wird, dass aber das entstandene Dihydrat wieder leicht Wasser verliert.

Die Annahme, dass die Glycole, welche die Gruppe $\underset{OH}{\underset{|}{C}} - C - C - \underset{OH}{\underset{|}{C}}$ enthalten, besonders leicht Wasser verlieren, findet eine Bestätigung in der Existenz und Stabilität der *Furfuran-* und *Thiophenverbindungen.* Nach der jetzigen Auffassung ihrer Constitution können Furfuran und Thiophen[1]) als Anhydride eines Tetracarbonidglycols, resp. Thioglycols angesehen werden.

$$
\begin{array}{l}
CH = CH \qquad\qquad CH = CH \cdot OH \\
| \qquad\qquad\;\; > O = \; | \qquad\qquad\qquad\quad - H_2O \\
CH = CH \qquad\qquad CH = CH \cdot \underline{OH}
\end{array}
$$

Furfuran

$$
\begin{array}{l}
CH = CH \qquad\qquad CH = CH \cdot SH \\
| \qquad\qquad\;\; > S = \; | \qquad\qquad\qquad\quad - H_2S. \\
CH = CH \qquad\qquad CH = CH \cdot \underline{SH}
\end{array}
$$

Thiophen

Die Bildung verschiedener Furfuran- und Thiophenderivate gereicht auch dieser Auffassung zur Stütze.

Paal[2]) erhielt durch Einwirkung von Essigsäureanhydrid oder rauchender Salzsäure auf Acetophenonaceton Phenylmethylfurfuran. Man muss sich den Vorgang so denken, dass aus dem Keton zuerst die isomere labile Modification, der ungesättigte Glycol entsteht, welcher dann ein Mol. Wasser verliert:

$$
\begin{array}{l}
CH_3 \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CO \cdot C_6H_5 = \\
CH_3 \cdot \underset{\underline{OH}}{\underset{|}{C}} = CH - CH = \underset{\underline{OH}}{\underset{|}{C}} - C_6H_5 =
\end{array}
$$

---

[1]) Die Entdeckung eines dritten Thiotolens stellt allerdings die Richtigkeit der ursprünglichen V. Meyr'schen Thiophenformel in Frage, doch beziehen sich die Zweifel wohl nur auf die Gruppirung der Wasserstoffatome, nicht auf die Kohlenstoff-Schwefel-Verkettung.

[2]) Ber. d. d. ch Ges. XVII, 913 u. 2756.

$$CH - CH$$

$$CH_3 \cdot C - O - C \cdot C_6H_5 + H_2O.$$

Ganz analog entsteht aus Acetophenonacetoncarbonsäure,

$$\begin{array}{c} \quad CO_2H \\ / \\ CH_3 \cdot CO \cdot CH - CH_2 \cdot CO \cdot CaH_5, \end{array}$$

Phenylmethylfurfurancarbonsäure

$$\begin{array}{c} CO_2H \\ / \\ C - CH \\ \\ CH_3 \cdot C - O - C \cdot C_6H_5. \end{array}$$

Acetonylacetessigester giebt mit rauchender Salzsäure Pyrotritarsäureester, welcher wahrscheinlich eine Furfuranverbindung ist.[1])

$$\begin{array}{c} CO_2(H) \\ / \\ CH - CH_2 \\ / \qquad \backslash \\ CH_3 \cdot CO \qquad CO \cdot CH_3 \end{array} = \begin{array}{c} CO_2(H) \\ / \\ C - CH \\ / \qquad \backslash \\ CH_3 \cdot C - O - C \cdot CH_3 + H_2O. \end{array}$$

Diese Pyrotritarsäure, welche früher als Lactonsäure aufgefasst wurde, entsteht auch beim Erhitzen der Carbopyrotritarsäure, welche aus Diacetsuccinsäure(ester) durch Kochen mit verdünnter Schwefelsäure (Harrow[2]) oder anderen wasserentziehenden Mitteln (Knorr[3]) dargestellt ist. Der Process wäre dem obigen ganz analog:

$$\begin{array}{c} CO_2(H) \quad CO_2(H) \\ / \qquad\quad / \\ CH_3 \cdot CO \cdot CH - CH \cdot CO \cdot CH_3 = \end{array}$$

$$\begin{array}{c} CO_2(H) \quad CO_2(H) \\ / \qquad\quad / \\ C \text{———} C \\ \\ CH_3 \cdot C \text{———} O \text{———} C \cdot CH_3 + H_2O. \end{array}$$

Aus Dibenzoylsuccinsäureester erhielten Perkin jun. und Baeyer[4]) durch

---

[1]) Nach einer Mittheilung in Ber. d. d. ch. Ges. 1885, S. 3410 liegt Fittig eine andere Auffassung über die Constitution den Pyrotritarsäure (siehe Abschn. V).

[2]) Annal. d. Ch. 201, 141.

[3]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 2863.

[4]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 61.

Einwirkung von verdünnter Schwefelsäure einen Körper $C_{18}H_{12}O_5$, welchen sie als einen Monolacton der Dibenzoylbernsteinsäure ansahen. Ohne Zweifel ist diese Verbindung, wie auch Knorr hervorhebt, als eine Diphenylfurfurancarbonsäure zu betrachten. Sie verhält sich in der That ganz wie eine zweibasische Säure:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & CO_2(H) & & CO_2(H) & \\
 & | & & | & \\
 & CH & — & CH & \\
C_6H_5 \cdot CO & & & & CO \cdot C_6H_5 - H_2O = \\
 & CO_2(H) & & CO_2(H) & \\
 & & & | & \\
 & C & — & C & \\
C_6H_5 \cdot C & & —O & & C \cdot C_6H_5.
\end{array}
$$

Durch Einwirkung von Phosphorsulfid auf Acetophenonaceton entsteht, wie Paal[1]) gezeigt hat, Phenylmetylthiophen. Der Vorgang entspricht ganz der Bildung des Phenylmethylfurfurans:

$$
C_6H_5 \cdot CS \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CS \cdot CH_3 =
$$

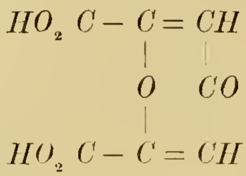
$$
\begin{array}{ccccc}
 & CH & — & CH & \\
C_6H_5 \cdot C & — & S & — & C \cdot CH_3 + H_2S.
\end{array}
$$

Auffallend ist, dass Erythrit und Schleimsäure, welche Hydroxyle enthalten, die durch vier Kohlenstoffatome von einander getrennt sind, nicht durch einfache Wasserabspaltung Alkoholanhydride geben. Dies beruht vielleicht darauf, dass die Hydrate beständiger sind, weil die benachbarten Kohlenstoffatome Sauerstoff binden, ganz wie negative Gruppen die Beständigkeit der Hydrate bedingen, in welchen zwei Hydroxyle an demselben Kohlenstoffatome verkettet sind. Zu bemerken ist indessen, dass die Schleimsäure beim Erhitzen einen Furfuranderivat (Brenzschleimsäure) giebt und dass sowohl Erythrit mit Phosphorsulphid Thiophen[2]) als Schleimsäure mit Schwefelbaryum Thiophencarbonsäure[3]) geben. Es werden zwei Hydroxylgruppen als Wasser abgespalten und wahrscheinlich hierdurch die Anhydridbildung erleichtert.

Wie es scheint, findet eine Wasserabspaltung auch leicht bei den Verbindungen statt, in welchen zwei alkoholische Hydroxyle durch *fünf* Kohlen-

[1]) Ber. d. d. ch. Ges. XVIII. 367.
[2]) Paal, Ber. d. ch. Ges. XVIII. 688.
[2]) Paal u. Tafel, Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 456.

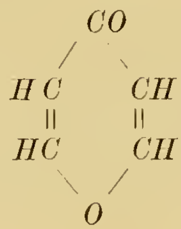
stoffatome getrennt sind. Lieben und Haitinger[1]) haben durch ihre ausführlichen und interessanten Untersuchungen über die Chelidonsäure, für diese Säure folgende Constitution höchst wahrscheinlich gemacht:



Mit Basen bildet sie Salze einer um ein Mol. wasserreicheren Säure, die Xanthochelidonsäure, welche die entsprechende tetrahydrische Säure darstellt. Wird diese aus den Salzen freigemacht, so spaltet sie gleich Wasser ab und geht in Chelidonsäure über.

Die Atomverkettung:

welche durch diese Wasserabspaltung entsteht, kommt wahrscheinlich auch in der Komansäure und der von Ost[2]) entdeckten Pyrokoman vor. Diese Verbindungen entstehen nämlich auch durch successive Kohlensäureabspaltung aus der Chelidonsäure. Lieben und Haitinger geben dem Pyrokoman folgende Formel:



und bezeichnen es *Pyron*. Es enthält ein Kohlenstoffatom mehr als Furfuran und kann als Anhydrid eines Pentacarbonidglycols betrachtet werden[3]).

---

[1]) Monatsschr. f. Ch. V, 339; VI, 279.

[2]) Journ. f. pr. Ch. 29, 63.

[3]) Durch Einwirkung von Kohlenoxychlorid auf Kupferacetessiggester haben Conrad und Guthzeit (Ber. d. d. ch. Ges. XIX, 19) ganz neulich eine Verbindung bekommen, welche als ein zweifach carboxylirtes Dimethylpyron aufzufassen ist.

Dieselbe Atomgruppirung ist wahrscheinlich auch in der Hydracetsäure vorhanden (PERKIN[1]), HAITINGER[2])[3]).

Eine Wasserabspaltung zwischen zwei an *demselben Benzolkern* gebundenen Hydroxylen ist nicht beobachtet. In Hydrochinon und den übrigen *p*-Dioxyverbindungen sind indessen die Hydroxyle (nach KEKULÉ's Benzolformel) durch vier Kohlenstoffatome getrennt.

Durch Destillation von *Phenole* mit Bleioxyd entstehen aber Oxyde von zweiwerthigem Phenole mit den Hydroxylen an *verschiedenen* Benzolkernen gebunden. Gewöhnliches Phenol giebt Diphenylenoxyd:

$$\begin{matrix} C_6H_4 \\ | \\ C_6H_4 \end{matrix} > O,$$

welches wahrscheinlich aus einem zuerst gebildeten Diphenylendiphenol durch Wasserabspaltung entsteht.

Andere aus resp. Phenole dargestellte Oxyde derart sind:

$$\alpha\text{- u. }\beta\text{-Naphtylenoxyd } \begin{matrix} C_{10}H_6 \\ | \\ C_{10}H_6 \end{matrix} > O\,^{4}),$$

sowie

$$\alpha\text{- u. }\beta\text{-Naphtylenphenylenoxyd } \begin{matrix} C_6H_4 \\ | \\ C_{10}H_6 \end{matrix} > O\,^{5}).$$

Diese Verbindungen sind sehr beständig. Die Stellung des Sauerstoffs ist nicht bei allen sicher festgestellt, aber wahrscheinlich ist sie, wie im Diphenylenoxyd, auch in den übrigen Orthostellung. Diese Oxyde entsprechen vollständig den Furfuranen:

---

[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 218, 682.

[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 452.

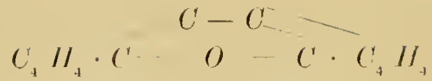
[3]) Als diese Abhandlung schon abgeschlossen war, empfing ich die Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, Heft 18, worin ein Aufsatz von LIPP „Ueber δ-Hexylenglycol und sein Anhydrid" zu lesen ist. LIPP hat den Glycol

$$\begin{matrix} CH_3\,.\,CH & - CH_2\,.\,CH_2\,.\,CH_2\,.\, & CH_2 \\ | & & | \\ OH & & OH \end{matrix}$$

dargestellt, und dieses giebt, wie vorauszusehen war, ein Anhydrid. Es entsteht indessen nicht bei gewöhnlicher Temperatur oder beim blossen Erwärmen, sondern beim Kochen mit Schwefelsäure (2:1). Das Anhydrid zeigt grosse Beständigkeit bei Einwirkung von Wasser und unterscheidet sich also dadurch von den gewöhnlichen Alkylenoxyden.

[4]) GRAEBE, Annal. d. Ch. 209, 132.

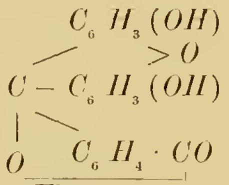
[5]) v. ARX, Ann. d. Ch. 209, 141.



Diphenylenoxyd.

Das analoge Diphenylensulfid $\begin{matrix} C_6H_4 \\ | \\ C_6H_4 \end{matrix} > S$ entspricht das Thiophen (und Carbazol $\begin{matrix} C_6H_4 \\ | \\ C_6H_4 \end{matrix} > NH$ das Pyrrol).

Eine Wasserabspaltung zwischen zwei an verschiedenen Benzolkernen gebundenen Phenolhydroxylgruppen tritt auch leicht bei dem aus mehrwerthigen Phenole und Phtalsäureanhydrid durch Einwirkung von Schwefelsäure entstehenden *Phtaleine* ein. So bei Resorcinphtalein (Fluorescein), Pyrogallolphtalein (Gallein) u. s. w.



Fluorescein.

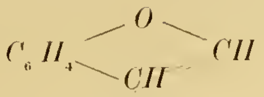
Ein hierhergehöriger Process ist auch die bei Bildung der *Aurine* stattfindende Wasserabspaltung. Die Leukaurine gehen bekanntlich bei Oxydation in Aurine über. Hierbei entstehen zuerst Carbinole, aus welchen dann zwischen dem alkoholischen Hydroxyl und einem Phenolhydroxyl Wasser spontan sich abspaltet; z. B.:

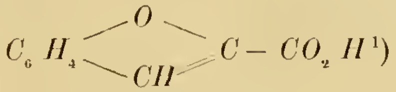
$$\begin{matrix} HO\cdot C_6H_4 \\ HO\cdot C_6H_4 \end{matrix} > C < \begin{matrix} C_6H_4\cdot OH \\ OH \end{matrix} = \begin{matrix} HO\cdot C_6H_4 \\ HO\cdot C_6H_3 \end{matrix} > C \begin{matrix} C_6H_4\cdot O \\ \end{matrix} + H_2O$$

Trioxytriphenylmethancarbinol. Aurin.

Die Hydroxyle stehen zu der Bindungsstelle des Methankohlenstoffs in *p*-Stellung und die auf einander reagirenden Hydroxyle sind somit von *fünf* Kohlenstoffatomen getrennt.

Das *Cumaron*, die Cumarilsäure und Hydrocumarilsäure, sind als Oxyde zu betrachten, welche durch Wasserabspaltung zwischen Phenolhydroxyl und alkoholischem Hydroxyl entstanden sind.


Cumaron.


Cumarilsäure.

Die ringförmige Atomverkettung in diesen Verbindungen enthält *vier* Kohlenstoffatome und ein Sauerstoffatom; sie wäre also dieselbe wie in den Furfuranverbindungen.

Die Cumarilsäure entsteht durch Einwirkung von Alkali auf Dibromcumarin.

Abspaltung von Halogenwasserstoff in den Halogenhydrinen.

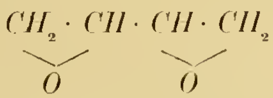
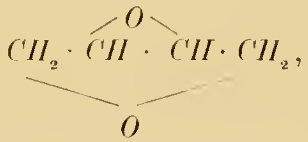
Die meisten bekannten Alkylenoxide und Glycidverbindungen haben den Anhydridsauerstoff an benachbarten Kohlenstoffatomen gebunden. Sie entstehen, wie schon oben bemerkt ist, durch Einwirkung von Alkali auf die entsprechenden Chlor- oder Bromhydrinen, wobei Halogenwasserstoff abgespaltet wird; z. B.:

$$\begin{array}{l} CH_2\,\underline{Cl} \\ | \\ CH_2\,O\underline{H} \end{array} = \begin{array}{l} CH_2 \\ | \\ CH_2 \end{array} > O + HCl.$$

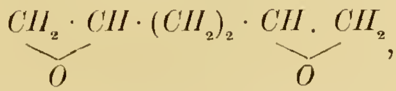
Man kennt eine Menge auf diese Art dargestellter Alkylenoxyde.

Ausser dem einfachsten Aethylenoxyd sind bekannt: Propylenoxyd, Butylenoxyde, mehrere Amylen- und Hexylenoxyde[2]) u. s. w. Einige früher als Alkylenoxyde betrachtete Verbindungen haben sich als Ketone erwiesen.

Zwei doppelte Alkylenoxyde sind von PRZYBYTEK[3]) dargestellt. Das eine ist das zweite Anhydrid des Erythrits:


oder vielleicht


welches aus Erythritdichlorhydrin entsteht. Bei gewöhnlicher Temperatur geht es in Wasserlösung langsam, beim Erwärmen schnell in Erythrit über. Die zweite Verbindung ist aus dem Chlorhydrin, welches bei Einwirkung von unterchloriger Säure auf Diallyl entsteht, dargestellt. PRZYBYTEK giebt ihm folgende Formel:



welche doch nicht als sicher angesehen werden kann.

---

[1]) FITTIG u. EBERT, Ann. d. Ch. 216, 170.

[2]) Siehe ELTEKOW, Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 395 u. A.

[3]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 1091, u. XVIII, 1350.

Von anderen auf nämliche Art entstehenden Körpern mögen folgende als Beispiel angeführt werden:

Epichlorhydrin . . . . . . $\underbrace{CH_2 \cdot CH_2}_{O} \cdot CH_2 \cdot Cl$

Glycid . . . . $\underbrace{CH_2 \cdot CH}_{O} \cdot CH_2 \cdot OH$

Glycidsäure . . . . $\underbrace{CH_2 \cdot CH}_{O} \cdot CO_2\,H$

Butylglycidsäure . . . . . $\underbrace{CH_2 \cdot CH}_{O} \cdot CH_2 \cdot CO_2\,H$[1])

Propylenoxydcarbonsäure . $CH_3 \cdot \underbrace{CH \cdot CH}_{O} \cdot CO_2\,H$[2])

Phenylglycidsäure . . . . $C_6\,H_5 \cdot \underbrace{CH \cdot CH}_{O} \cdot ClO_2\,H$[3])

Salicylglycidsäure . . . . . $C_6\,H_4 < \begin{matrix} OH \\ \underbrace{CH \cdot CH}_{O} \cdot CO_2\,H \end{matrix}$[4])

u. s. w.

Von Verbindungen, in welchen die sauerstoffbindenden Kohlenstoffatome durch einen Kohlenstoffatom getrennt sind, sind nur wenige bekannt, nämlich:

β-Propylenoxyd $\underbrace{CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2}_{O}$

und das aus Aldol dargestellte

Dialdan $CH_3 \cdot \underbrace{CH \cdot CH_2 \cdot CH}_{O} \cdot C_3\,H_5 \cdot (OH) \cdot CHO,$

sowie der entsprechende Dialdanalkohol[5]).

Es sind also eine Menge Oxyde von zweiwerthigen Alkoholen bekannt, aber nur die γ- und δ-Verbindungen entstehen durch direkte Wasserabspaltung. Die übrigen Alkylenoxyde gehen umgekehrt leicht in Glycole über. Einige nehmen schon bei gewöhnlicher Temperatur Wasser auf, andere thun

---

[1]) Patschke, J. pr. [2] 1, 82.
[2]) Melikow, Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 420.
[3]) Plöchl, Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 2815.
[4]) Plöchl u. Wolfrum, Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 1185.
[5]) Würtz, Compt. rend. 92, 1271.

es erst beim Erhitzen. Eltekow[1]), welcher eine Menge Alkylenoxyde in dieser Beziehung untersucht hat, spricht den Satz aus, dass die Oxyde, in welchen der Sauerstoff an einem *tertiären* Kohlenstoffatom gebunden ist, Wasser leichter aufnehmen, als die, in welchen Sauerstoff in unmittelbarer Bindung mit nur primären und sekundären Kohlenstoffatomen sich befindet.

[1]) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 395.

III.

Wasserabspaltung zwischen Hydroxyl und Carboxyl.

Die bei Oxysäuren oft stattfindende Wasserabspaltung zwischen Hydroxyl und Carboxyl kann durch folgende allgemeine Formel ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{ccccccccccc} C & - & (R) & - & CO & - & H_2O & = & C & - (R) - & CO \\ | & & & & | & & & & | & & | \\ OH & & & & OH & & & & O & \text{———} & \end{array}.$$

Die so entstehenden Anhydride sind die s. g. *Lactone.* Wie die Alkylenoxyden als innere Aether zu betrachten sind, können die Lactone als innere Ester aufgefasst werden. Schon lange waren derartige innere Anhydride von Oxysäuren bekannt und als Esteranhydride oder lactidartige Anhydride bezeichnet. Sie wurden von den eigentlichen Lactiden, welche aus zwei Molecülen Säure entstehen, nicht scharf geschieden. Erst durch die im Jahre 1880 und später von Fittig und seinen Schülern ausgeführten Untersuchungen wurden sie als eine besondere Körperklasse aufgestellt und characterisirt. Das zuerst dargestellte und genauer untersuchte einfache Lacton in der Fettgruppe war das Lacton der Oxyisocapronsäure, das Isocaprolacton[1]), welches durch trockene Destillation der Terebinsäure erhalten wurde.

Es war anzunehmen, dass die leichte Wasserabspaltung und Lactonbildung bei einigen Oxysäuren von einer bestimmten Stellung des Hydroxyls zu Carboxyl abhängig war. Fittig[2]) äusserte die Ansicht, dass diese die s. g. γ-Stellung war, d. h. dass die Oxysäuren, welche die Hydroxylgruppe am dritten Kohlenstoffatome, von dem Carboxyle aus gerechnet, enthalten, leicht in Lactone übergehen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} C & - C - & C & - & CO & - & H_2O & = & C & - & C & - & C \\ | & & & & | & & & & | & & & & | \\ OH & & & & OH & & & & O & \text{———} & & & CO. \end{array}$$

---

1) Bredt u. Fittig, Ann. d. Ch. 200, 58.

2) Ann. d. Ch. 208, 111.

Die γ-Stellung wurde bei vielen Lactonen bewiesen. So z. B. bei Isocaprolacton, welches durch Oxydation von Isocapronsäure entsteht[1]); bei Valerolacton, welches durch Einwirkung von Wasserstoff auf Lävulinsäure (Acetopropionsäure) erhalten wurde[2]):

$$CH_3 \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CO_2 H + H_2 = CH_3 \cdot \underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}} \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CO_2 H$$

$$= CH_3 . \underset{\displaystyle O}{\underset{|}{CH}} . CH_2 \cdot \underset{\displaystyle CO}{\underset{|}{CH_2}} \qquad \gamma\text{-Oxyvaleriansäure}$$

Valerolacton;

bei normalem Caprolacton, welches bei der Oxydation Bernsteinsäure giebt[3]); bei Butyrolacton, welches bei Reduction von Succinylchlorid gebildet wird[4]) u. s. w. Es zeigte sich im Verlauf der Untersuchungen, dass alle syntetisch dargestellten Oxysäuren, in denen die Hydroxylgruppe die γ-Stellung einnimmt, wie vorausgesehen war, Wasser verlieren und in Lactone übergehen. Der anhydrisch gebundene Sauerstoff in Phtalid und den Phtaleinen nimmt dieselbe Stellung ein, und ihr Verhalten ist auch ganz das der Lactone. Es kann somit als *bewiesen* angesehen werden, dass eine besondere Neigung zur Wasserabspaltung bei Verbindungen, welche die erwähnte Atomgruppirung enthalten, sich vorfindet. Spätere Untersuchungen haben aber dargethan, dass auch anders constituirte Oxysäuren Lactone geben, wovon unten die Rede sein wird.

Von einbasigen γ-Oxysäuren in der Fettreihe, welche unter Wasserabspaltung Lactone geben, sind folgende sicher bekannt:

Oxybuttersäure giebt Butyrolacton $C_4 H_6 O_2$[5]);
Normale Oxyvaleriansäure giebt Valerolacton $C_5 H_8 O_2$[6]);
Oxyangelicasäure giebt α- u. β-Angelicalacton $C_5 H_6 O_2$[7]);
Normale Oxycapronsäure giebt Caprolacton $C_6 H_{10} O_2$[8]);
Oxyisocapronsäure giebt Isocaprolacton $C_6 H_{10} O_2$[9]);
α-Aethyl-Oxybuttersäure giebt α-Aethylbutyrolacton $C_6 H_{10} O_2$[10]);

---

1) Bredt, Ber. d. d. ch. Ges. XIII, 748.
2) Wolff, Ann. d. Ch. 208, 104.
3) Fittig u. Hjelt, Ann. d Ch. 208, 67.
4) Saytzeff, Ann. d. Ch. 171, 258. Ber. d. d. ch. Ges. XIII, 1061.
5) Saytzeff, Ann. d. Ch. 171, 258. Chanlaroff, Ann. d. Ch. 226, 325.
6) Messerschmidt, Ann. d. Ch. 208, 92.
7) Wolff, Ann. d. Ch. 229, 249.
8) Fittig u. Hjelt, Ann. d. Ch. 208, 67.
9) Bredt u. Fittig, Ann. d. Ch. 200, 58.
10) Chanlaroff, Ann. d. Ch. 226, 325.

α-Methyl-Oxyvaleriansäure giebt α-Methylvalerolacton $C_6H_{10}O_2$[1]);
β-Methyl-Oxyvaleriansäure giebt β-Methylvalerolacton $C_6H_{10}O_2$[2]);
α-Aethyl-Oxyvaleriansäure giebt α-Aethylvalerolacton $C_7H_{12}O_2$[3]);
Oxyheptylsäure giebt Heptolacton $C_7H_{12}O_2$[4]);
α-Aethyl-Oxyangelicasäure giebt α-Aethylangelicalacton $C_7H_{10}O_2$[5]);
α-Aethyl-β-Methyl-Oxyvaleriansäure giebt α-Aethyl-β-Methyl-Valerolacton $C_8H_{14}O_2$[6]);
Oxysäure $C_9H_{16}O_3$ (unbek. Const.) giebt Campholacton $C_9H_{14}O_2$[7]);
Saccharinsäure und Isosaccharinsäure geben Saccharin und Isosaccharin $C_6H_{10}O_5$[8]).

Ausser diesen neutralen Lactonen kennt man mehrere Lactonsäuren, welche aus mehrbasischen γ-Oxysäuren entstehen. Solche sind:

Paraconsäure $C_5H_6O_4$ (Lacton der Itamalsäure);
Aconsäure $C_5H_4O_4$ (Lacton der Oxyitaconsäure);
α-Carbovalerolactonsäure $C_6H_8O_4$ (Lacton der Oxypropylmalonsäure)[9]);
γ-Carbovalerolactonsäure $C_6H_8O_4$ (Lacton der Methyloxyglutarsäure)[10]);
Terebinsäure $C_7H_{10}O_4$ (Lacton der Diaterebinsäure);
Carbocaprolactonsäure $C_7H_{10}O_4$ (Lacton der Oxypropylbernsteinsäure)[11]);
Terpenylsäure $C_8H_{12}O_4$ (Lacton der Diaterpenylsäure)[12]);
Saccharon $C_6H_8O_6$ (Lacton der Saccharonsäure)[13]) u. A.

Von Lactonen, welche den Lactonring zwei Mal enthalten, ist in der Fettreihe nur eins bekannt, nämlich ein

Nonodilacton $C_9H_{12}O_4$, sowie dessen Dibromsubstitutionsprodukt[14]).

Unter den aromatischen Verbindungen sind nur die als wahre Lactone zu betrachten, in welchen die Wasserabspaltung zwischen Carboxyl und Hydroxyl in der Seitenkette stattgefunden hat. Das einfachste aromatische Lacton ist das

---

1) Gottstein, Ann. d. Ch. 216, 30.
2) Gottstein, Ann. d. Ch. 216, 35.
3) Young, Ann. d. Ch. 216, 38.
4) Fittig u. Krafft, Ann. d. Ch. 208, 71.
5) Thorne, Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 2263.
6) Young, Ann. d. Ch. 216, 43.
7) Woringer, Ann. d. Ch. 227, 1.
8) Kiliani, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2954, XVIII, 631.
9) Hjelt, Annal. d. Ch. 216, 52.
10) Bredt, Ann. d. Ch. 208, 62.
11) Hjelt, Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 333.
12) Fittig u. Krafft, Ann. d. Ch. 208, 71.
13) Kiliani, Ann. d. Ch. 218, 363.
14) Hjelt, Ann. d. Ch. 216, 67.

Phtalid $C_6H_4 < \genfrac{}{}{0pt}{}{CH_2}{CO} > O$ (Lacton der *o*-Oxymethylbenzoesäure).

Phtalofenon (= Diphenylphtalid) und die Phtaleine, in der Seitenkette substituirte Phtalide, sind gleichfalls Lactone. Auch Phenylphtalid (Anhydrid der Benzhydrylbenzoesäure)[1]) und Methylphtalid[2]) sind bekannt.

Von übrigen aromatischen γ-Lactonen führe ich folgende als Beispiel an:

Phenylbutyrolacton $C_6H_5 \cdot C_4H_5O_2$[3]);

Benzyl-Phenylbutyrolacton $C_6H_5 \cdot C_4H_4O_2 \cdot CH_2 \cdot C_6H_5$[4]) (Dihydrocorniculariacton).

Von aromatischen Lactonsäuren mögen folgende erwähnt werden:

Phenylparaconsäure $C_6H_5 \cdot C_5H_5O_4$[5]);

Penylhomoparaconsäure $C_6H_5 \cdot C_6H_7O_4$[6]);

Phtalylessigsäure $C_6H_4 < \genfrac{}{}{0pt}{}{C : CH \cdot CO_2H}{CO} > O$[7]);

Phtalid-β-propionsäure $C_6H_4 < \genfrac{}{}{0pt}{}{CH \cdot CH_2\, CH_2 \cdot CO_2H}{CO} > O$[8]).

Auch einige aromatische Dilactone sind dargestellt:

Diphtalyl $C_{14}H_8O_4$[9]);

Hydrodiphtalyl $C_{14}H_{10}O_4$[10]);

Lacton $C_6H_4 < \begin{array}{l} C - CH_2 \cdot CH_2 \\ \;/\backslash \qquad\quad | \\ CO \cdot O\;\; O \text{——} CO \end{array}$[11]);

Pulvinsäureanhydrid $C_{18}H_{10}O_4$[12]) u. einige Andere.

Alle die angeführten Lactone sind Anhydride von γ-Oxysäuren. Fittig liess aber Versuche anstellen, welche zu erforschen bezweckten, ob auch andere Stellungen als die γ-Stellung Lactonbildung bedingen können.

---

1) Zincke u. Rotering, Ber. d. d. ch. Ges. IX, 631.
2) Gabriel u. Michael, Ber. d. d. ch. Ges. X, 2205.
3) Jayne, Ann. d. Ch. 216, 97.
4) Spiegel, Ann. 219, 27.
5) Jayne, Ann. d. Ch. 216, 108.
6) Penfield, Ann. d. Ch. 216, 119.
7) Gabriel u. Michael, Ber. d. d. ch. Ges. X, 1551.
8) Roser, Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 2773.
9) Graebe u. Schmalzigaug, Ann. d. Ch. 228, 126.
10) Wislicenus, Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 2178.
11) Roser, Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 2770.
12) Spiegel, Ann. 219, 50.

Wolff[1]) stellte in Fittigs Laboratorium die γ-Acetobuttersäure dar, liess Natriumamalgam darauf einwirken und erhielt einen neutralen Körper, welcher ein *δ-Caprolacton* sein musste:

$$\begin{array}{l} CH_3 - \underset{\displaystyle O\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-}{\underset{|}{CH}} \cdot CH_2 \cdot CH_2 - \underset{\displaystyle CO.}{\underset{|}{CH_2}} \end{array}$$

Dieses zeigt die Eigenschaften der γ-Lactone, doch nimmt es leichter Wasser auf, als die γ-Lactone es überhaupt thun.

In seinen schönen Untersuchungen über die Condensationsproducte des Acetessigäthers berichtet Hantsch[2]) über einige Lactone, wie Mesitenlacton $C_6H_8 < \overset{O}{\underset{CO}{}} >$, Mesitenlactoncarbonsäure u. s. w., welche allem Anscheine nach ebenfalls δ-Lactone sind. Das Mesitenlacton verhält sich dem δ-Caprolacton in der That sehr ähnlich.

Inzwischen hatte auch Einhorn[3]) ein *β-Lacton* dargestellt, nämlich das Lacton der o-Nitrophenylmilchsäure:

$$C_6H_4 < \begin{array}{l} NO_2 \\ \underset{\displaystyle O\!-\!-}{\underset{|}{CH}} \cdot \underset{\displaystyle CO}{\underset{|}{CH_2}}. \end{array}$$

Basler[4]) stellte die entsprechende Para- und Prausnitz[5]) die Metaverbindung dar. Diese Lactone entstehen durch Einwirkung von Sodalösung auf die Nitrophenylbrompropionsäuren. Wirkt Natriumcarbonat auf die unsubstituirte Phenyl-β-brompropionsäure entsteht Styrol und Kohlendioxid. Erlenmeyer[6]) hatte schon früher diesen Process auf die intermediäre Bildung eines unbeständigen Lactons zurückgeführt:

$$C_6H_5 \cdot \underset{Br}{CH} \cdot \underset{\displaystyle CO \cdot OH}{\underset{|}{CH_2}} = HBr + C_6H_5 \cdot \underset{\displaystyle O\!-\!-}{\underset{|}{CH}} \cdot \underset{\displaystyle CO}{\underset{|}{CH_2}} = C_6H_5 \cdot CH : CH_2 + CO_2.$$

1) Ann. d. Ch. 216, 133.
2) Annal. d. Ch. 222, 1.
3) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 2208.
4) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 3001.
5) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 595.
6) Ber. d. d. ch. Ges. XIII, 303.

Diese Hypothese, welche auf die Bildung von ungesättigtem Kohlenwasserstoff aus β-halogen substituirten Säuren überhaupt ausgedehnt werden kann, findet durch EINHORN's, BASLER's und PRAUSNITZ' Untersuchungen ihre Bestätigung. Die Nitrogruppe erhöht die Beständigkeit des zuerst gebildeten Lactones. Diese Nitrolactone werden indessen leicht beim Kochen mit Wasser in Nitrostyrole und Kohlensäure gespalten, und gehen auch leicht in Oxysäuren über. Ob andere Substituenten wie die Nitrogruppe wirken, ist noch zu entscheiden. Hier muss auch bemerkt werden, dass die β-Lactone nicht aus den entsprechenden Oxysäuren, sondern nur aus den bromsubstituirten Säuren entstehen.

Alle die von Kohlensäureabspaltung begleiteten Zersetzungen der β-halogensubstituirten Säuren beruhen wohl auf eine zuerst stattfindende Halogenwasserstoffabspaltung, in welcher Carboxylwasserstoff theilnimmt, wobei unbeständige Lactone entstehen. So z. B. die Bildung von Glyoxalderivaten bei Einwirkung von Ammoniak, Hydroxylamin u. s. w. auf Trichlormilchsäure (PINNER[1]):

$$\underset{\underline{Cl}}{C\,Cl_2} \cdot CH(OH)\,CO_2\underline{H} = H\,Cl + \underset{O\text{———————}}{C\,Cl_2 \cdot CH(OH)\,CO} = CO_2 +$$

$$C\,Cl_2 : CH \cdot OH = CHCl_2 . CHO.$$

PINNER[2]) hat eine Verbindung $C_7\,H_{10}\,O_2$ dargestellt, welche durch Wasserabspaltung bei hoher Temperatur aus Mesitonsäure $C_7\,H_{12}\,O_3$ entsteht und betrachtet sie als ein *α-Lacton.*

Auch H. KILIANI[3]) beschreibt einen durch Reduktion des Isosaccharins erhaltenen Körper, welchen er als α-Lacton der Methoxyvaleriansäure annimmt:

$$O \lt \begin{matrix} OC \\ CH_2 \end{matrix} \gt CH \cdot CH_2 . CH_2 . CH_3 .$$

Diese beiden ganz beständigen Verbindungen sind fest. Die letztere schmilzt bei 137° und zeigt durch diesen hohen Schmelzpunkt ein von den übrigen Lactonen abweichendes Verhalten. Da bei den vielen gut untersuchten α-Oxysäuren keine Neigung zur Lactonbildung sich vorfindet, ist man vorläufig berechtigt die Richtigkeit der Auffassung dieser Verbindungen als α-Lactone zu bezweifeln. Die Natur der Mesitonsäure als Oxysäure ist nicht

[1]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 1997.
[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XV, 579.
[3]) Ber. d d. ch. Ges. XVIII, 631.

ganz sicher bewiesen. Sie könnte eine γ-Ketonsäure sein, welche durch Wasserabspaltung bei hoher Temperatur γ-Lacton giebt.

Nach den bis jetzt vorliegenden Untersuchungen kann also Lactonbildung bei verschiedenen intramoleculären Stellungen (wenigstens β-, γ- u. δ-Stellung) stattfinden; doch geht sie am leichtesten vor sich, wenn die aufeinander reagirenden Atome durch eine Kette von vier Kohlenstoffatomen getrennt sind (γ-Stellung).

Als eine besondere Gruppe von Lactonen können die inneren Anhydride aufgestellt werden, bei deren Bildung ein Phenolhydroxyl statt Alkoholhydroxyl sich betheiligt hat. Man könnte diese Verbindungen als *Phenolactone* bezeichnen. Es sind sowohl γ- als δ-Phenolactone bekannt, aber alle sind zugleich *Orthoverbindungen*. Der einzige bis jetzt sicher bekannte Representant der ersten Art von Lactonen, ist das Lacton der *o*-Oxyphenylessigsäure:

$$C_6H_4\overset{\diagup O \diagdown}{-\;CH_2\;.\;CO}$$ [1])

Es entsteht nicht bei gewöhnlicher Temperatur sondern erst bei Destillation der Oxysäure. (In einer vorläufigen Mittheilung bespricht Plöschl[2]) die Salicylglycolsäure $C_6H_4\overset{\diagup OH}{-\;CH(OH)CO_2H}$ und erwähnt die Bildung des inneren Anhydrides dieser Säure. Ich habe in der Litteratur keine weiteren Angaben über diese Verbindung gefunden.) Als δ-Phenolactone sind die Cumarine zu betrachten (das gewöhnliche Cumarin, Umbelliferon, Daphnetin u. A.), so auch Melilotsäureanhydrid, und das innere Anhydrid der Salicylglycidsäure. Das Cumarin $C_6H_4\overset{\diagup O \text{———}}{-\;CH = CH \cdot CO}$, zeigt nun in mehrerer Hinsicht ein von den gewöhnlichen Lactonen abweichendes Verhalten. Es löst sich in Baryumhydrat, kann aber aus dieser Lösung schon mit Kohlensäure ausgefällt werden, löst sich auch in Alkalicarbonaten ohne Entwicklung von Kohlensäure[3]), beim Erwärmen mit stärkeren Alkalien geht es in Salze der Orthocumarsäure über, aus welcher es aber nur auf Umwegen wieder zu erhalten ist. Dass sein abweichendes Verhalten indessen nicht auf den am Benzolkern gebundenen Sauerstoff zurückzuführen ist, geht aus den Eigenschaften anderer Phenolactone hervor. Das Melilotsäureanhydrid

---

[1]) Baeyer u. Fritsch, Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 973.
[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 1316.
[3]) Ebert u. Fittig, Ann. d. Ch. 216, 139.

$$\overbrace{C_6H_4 - CH_2 - CH_2 \cdot CO}^{O}$$

verhält sich dem δ-Caprolacton sehr ähnlich, nur ist die Melilotsäure etwas beständiger als die δ-Oxycapronsäure[1]). Die Salicylglycidsäure[2])

$$\underset{\diagdown OH}{C_6H_4} - \overbrace{CH - CH}^{O} \cdot CO_2H$$

geht beim Erwärmen mit verdünnten Mineralsäuren in Lacton über, welches sich mit Wasser theilweise wieder in Oxysäure umsetzt. Abgesehen von Cumarin zeigen also die Phenolactone keine bemerkenswerthe Verschiedenheit von den Lactonen der Fettgruppe.

Lifschütz[3]) beschreibt ein Anhydrid der Erytrooxyantrachinonsulfosäure $C_6H_4(CO)_2 \cdot C_6H_2 \left< \begin{matrix} O \\ SO_2 \end{matrix} \right>$, welches, wenn es diese einfache Zusammensetzung besitzt, ein Lacton einer *Oxysulfosäure* wäre. Möglicherweise ist diese Verbindung doch ein lactidartiger Körper, dem Salicylid analog.

Die hier in Betracht kommenden Bildungsweisen der Lactone sind folgende:

1) Lactone entstehen durch Wasserabspaltung aus Oxysäuren, sowie Alkoholabspaltung aus Oxysäureestern[4]) (inclusive Behandlung gewisser Ketonsäuren mit Natriumamalgan).
2) Lactone entstehen beim Erwärmen von ungesättigten Säuren mit verdünnter Schwefelsäure[5]). Intermediär bilden sich wahrscheinlich Oxysäuren.
3) Lactone entstehen durch Halogenwasserstoffabspaltung aus halogensubstituirten Säuren.
4) Ungesättigte Lactone entstehen beim Erhitzen von Ketonsäuren. Die Reaction ist wahrscheinlich für die γ-Ketonsäuren allgemein. Diese Säuren reagiren hierbei als die isomeren ungesättigten Oxysäuren. Z. B.:

---

[1]) Hochstetter, Ann. d. Ch. 226, 355.
[2]) Plöchl u. Wolfrum, Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 1187.
[3]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 899.
[4]) Neugebauer, Ann. d. Ch. 227, 97.
[5]) Fittig, Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 373.

$$\begin{array}{l} CH_3 \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CO \cdot OH = CH_3 \cdot \underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{C}} : CH \cdot CH_2 \cdot CO \cdot \underline{OH} \\ \text{Lävulinsäure.} \end{array}$$

$$= CH_3 \cdot \underset{\displaystyle O}{\underset{|}{C}} : CH \cdot \underset{\displaystyle CO}{\underset{|}{CH_2}} + \overline{H}_2\, O$$ [1].

Auf einer ähnlichen Reaction beruht die Bildung von Ketolactonsäure aus β-Aethylacetobernsteinsäureester durch Abspaltung von Alkohol [2].

5) Durch Wasserabspaltung aus einer zweibasischen Ketonsäure entsteht ein Dilacton. Die Ketonsäure reagirt als Dioxysäure:

$$\begin{array}{l} C_6H_4 - C\underline{O} \cdot CH_2 \cdot \underset{\displaystyle CO \cdot \underline{OH}}{\underset{|}{CH_2}} = H_2O + C_6H_4 - C \cdot CH_2 \cdot CH_2 \\ \quad \diagdown \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \diagdown \quad \diagup \diagdown \qquad | \\ \qquad CO \cdot \underline{OH} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad CO \cdot O \quad O \quad\; CO \end{array}$$ [3]

Die Leichtigkeit der Wasserabspaltung bei γ-Oxysäuren ist bei verschiedenen Säuren eine verschiedene. Einige verlieren Wasser schon bei gewöhnlicher Temperatur, manche existiren überhaupt nicht in Form freier Säuren. Andere bedürfen Erwärmung mit Wasser um in Lactone überzugehen [4]. Die Oxybuttersäure, Oxyvaleriansäure, Oxycapronsäure, Oxyisocapronsäure, Itamalsäure, Diaterebinsäure, Saccharinsäure, Phenylitamalsäure u. s. w. verlieren Wasser schon bei gewöhnlicher Temperatur, jedoch mehr oder weniger leicht. Die freie o-Oxymethylbenzoesäure [5] und Phenyloxybuttersäure [6] sind dagegen ganz beständig bei gewöhnlicher Temperatur. Sie verlieren Wasser erst beim Erhitzen für sich oder mit Wasser.

Auch die Halogenwasserstoffabspaltung bei den γ-halogensubstituirten Säuren findet mit verschiedener Leichtigkeit statt. Die Brenzterebinsäure, Diallylessigsäure, Diallylmalonsäure, Allylbernsteinsäure gehen in Lactone über schon bei Behandlung mit conc. Bromwasserstofflösung. Die entsprechenden Bromsäuren sind nicht beständig. Aus der Allylessigsäure, Hydrosorbinsäure und Itaconsäure können dagegen die Bromwasserstoffadditionsprodukte isolirt werden. Sie gehen in Lactone über bei Behandlung mit Natriumcarbonat oder beim Kochen mit Wasser. Ueber die Ursachen dieser Verschiedenheit lässt sich vorläufig nichts sagen.

---

[1]) Wolff, Annal. d. Ch. 229, 249.
[2]) Young, Annal. d. Ch. 216, 45.
[3]) Roser, Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 2770.
[4]) Das Vorhandensein von ein wenig Salzsäure erleichtert sehr die Reaktion.
[5]) Hessert, Ber. d. d. ch. Ges. X, 1446.
[6]) Jayne, Ann. d. Ch. 216, 105.

Der umgekehrte Process, die Sprengung des Lactonringes, wird bei allen Lactonen durch Behandlung mit Alkalien oder Barythydrat erreicht. Die meisten Lactone sind gegen Carbonaten indifferent. Einige, wie Paraconsäure, und γ-Methylvalerolactonsäure, bilden aber bei Einwirkung von Calciumcarbonat Salze der Oxysäuren. Es wird also der Lactonring bei ihnen sehr leicht gesprengt, und doch sind die freien Oxysäuren ganz unbeständig.

Eine partielle Umwandlung des Lactones in die Oxysäure resp. halogensubstituirte Säure kann auch durch Wasser resp. Halogenwasserstoff bewirkt werden. Bei verschiedenen Lactonen geht der Process mit verschiedener Intensität vor sich. Einige werden von Bromwasserstoff leicht in die resp. bromsubstituirten Säuren übergeführt, andere bleiben hierbei mehr oder weniger intact[1]). Mit Wasser scheinen alle oder die meisten Lactone zu reagiren, insofern als bei längerer Berührung mit Wasser ein Theil des Lactones in Oxysäure übergeführt wird. Caprolacton mit der zehnfachen Menge Wasser versetzt, zeigte nach 30 Tagen eine Säurebildung entsprechend 1,95% Lacton. Von Isocaprolacton ging in gleicher Zeit 1,85% in Oxysäure über[2]). Butyrolacton ist in dieser Hinsicht von Chanlaroff[3]) untersucht. Er kochte dieses Lacton mit 100-facher Menge Wasser. Binnen 12 Stunden nahm die Säurebildung bis zu 20% zu. Es war dann der Gleichgewichtszustand zwischen Säure und Lacton eingetreten. Rühlmann und Fittig[4]) fanden, dass bei Valerolacton der Gleichgewichtszustand eintrat, wenn 6,6% Lacton in Säure umgewandelt waren. Bei δ-Caprolacton hat Wolff[5]) den Gleichgewichtszustand bei 35% Oxysäure und 65% Lacton gefunden.

Welchen Einfluss auf die Intensität der Lactonbildung und die Beständigkeit der Lactone es ausübt, ob die innerhalb des Lactonringes befindlichen Kohlenstoffatome nur mit Wasserstoff oder mit anderen Atomen oder Atomgruppen verbunden sind, ist noch nicht eingehender untersucht. Alkylgruppen üben in dieser Hinsicht gewiss keinen schwächenden Einfluss. Aus der Leichtigkeit der Bildung und der Stabilität der Terebinsäure, Carbocaprolactonsäure, Dicarbocaprolactonsäure u. A. könnte man denselben Schluss betreffend des Carboxyls ziehen. In einigen Fällen scheint das Carboxyl sogar die Unbeständigkeit der Oxysäuren zu erhöhen. Man vergleiche z. B. die Phenylpara-

---

[1]) Bei Isocaprolacton bewirkt eine Lösung von Halogenwasserstoff in Alkohol die Bildung von halogensubstituirten Säureestern, obgleich es der Einwirkung von sowohl wässrigem als gasförmigem Halogenwasserstoff widersteht (Bredt, Ber. d. d. ch. Ges. XIX, 513).

[2]) Hjelt, Ber. d. ch. Ges. XV, 617.

[3]) Ann. d. Ch. 226, 325.

[4]) Annal. d. Ch. 226, 343.

[5]) Annal. d. Ch. 216, 127.

consäure und das Phenylbutyrolacton und ihre entsprechenden Oxysäuren[1]. In Paraconsäure und γ-Carbovalerolactonsäure wird dagegen die Lactonbildung leichter gelöst (bei Bildung von Salzen der Oxysäuren) als bei den carboxylfreien Verbindungen.

Welchen Einfluss Hydroxyle und Halogenatome an benachbarten Kohlenstoffatomen auf die Beständigkeit der Oxy- resp. Halogensäuren und die entsprechenden Lactone ausüben, ist noch zu entscheiden. Hervorgehoben werden kann, dass die Dibromisocapronsäure[2]) und Dibrompropylmalonsäure[3]) beständiger sind, als die entsprechenden Monobromverbindungen. Die Untersuchung über Oxy- und Dioxypropylmalonsäure zeigt, dass letztere die beständigere ist. Es ist auch nicht ausser Betracht zu lassen, dass einige Polyoxysäuren, wie Schleimsäure u. A., keine Lactone geben, obgleich die lactonbedingende γ-Stellung in ihnen vorhanden ist. Wenn die Erscheinung, dass Hydroxyle und Halogene (an benachbarten Kohlenstoffatomen) die Beständigkeit der lactongebenden Säuren erhöhen, eine allgemeine ist, wäre sie ganz analog der bei Aldehyd- und Ketonhydraten beobachteten verhältnissmässig grossen Beständigkeit, durch Einfluss benachbarter negativer Atomgruppen. Zu bemerken ist indessen, dass die Saccharinsäuren, obgleich Tetraoxysäuren, doch beim Freiwerden sofort in Lactone (Saccharine) übergehen.

Oxylactone, in denen Hydroxyl- und Anhydrid-Sauerstoff an demselben Kohlenstoffetome gebunden sind, sind nicht sicher bekannt (siehe Abschn. IV).

Als eine besondere Art von Lactonen müssen die von Gabriel[4]) durch Einwirkung von Hydroxylamin auf *o*-Ketoncarbonsäuren erhaltenen Verbindungen betrachtet werden. Aus den zuerst entstehenden Acetoximen spaltet sich Wasser zwischen Carboxyl und an *Stickstoff* gebundenen Hydroxyl ab. Z. B.:

$$C_6H_4 \genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup C(N \cdot \underline{OH}) \cdot CH_2 \cdot CO_2H}{\diagdown CO \cdot O\underline{H}} = C_6H_4 \genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup C(N) \cdot CH_2 \cdot CO_2H}{\diagdown CO \diagup} O.$$

Diese Verbindungen entsprechen den δ-Lactonen. Ihre Bildung aus den Säuren folgt spontan. Man könnte sie *Oximidlactone* nennen.

Hierher müssen auch die *Betaine* geführt werden. Sie unterscheiden sich von den Oximidlactonen dadurch, dass sie innere *Salze* sind, entstanden durch Wasserabspaltung zwischen Carboxyl und Ammoniumhydrathydroxyl. Z. B.:

---

[1]) Jayne, Annal. d. Ch. 216, 97.
[2]) Geisler, Annal. d. Ch. 208, 45.
[3]) Hjelt, Annal. d. Ch. 216, 52.
[4]) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 1992 u. XVIII, 1257.

$$(CH_3)_3\,N \begin{array}{l} \diagup CH_2 \cdot CO \cdot O\underline{H} \\ \diagdown \underline{OH} \end{array} = (CH_3)_3\,N \begin{array}{c} CH_2 \\ < \quad > \\ O \end{array} CO + H_2\,O$$

Betain,

$$C_9\,H_7\,N \begin{array}{l} \diagup CH_2 \cdot COO\underline{H} \\ \diagdown \underline{Cl} \end{array} = C_9\,H_7\,N \begin{array}{c} CH_2 \\ < \quad > \\ O \end{array} CO + HCl$$

Chinolinbetain.

Der ausgeprägte chemische Gegensatz der beiden salzbildenden Gruppen bedingt wohl hier die Reaction. Die beiden Hydroxyle sind nur durch zwei Kohlenstoff- und ein Stickstoffatom von einander getrennt.

IV.

Wasserabspaltung zwischen zwei Carboxylgruppen.

Wenn zwei- oder mehrbasische Säuren Wasser verlieren, kann dieses zwischen zwei Carboxylgruppen stattfinden:

$$R<\begin{array}{l}CO \cdot OH\\ \\ CO \cdot OH\end{array} = R<\begin{array}{l}CO\\ \\ CO\end{array}>O + H_2\,O.$$

Die entstehenden Verbindungen sind *Säureanhydride*. Es sind derer zahlreiche bekannt. Sie entstehen theils durch Einwirkung wasserentziehender Mittel auf die freien Säuren, theils beim Erhitzen dieser Säuren; einige Anhydride bilden sich schon bei gewöhnlicher Temperatur durch spontane Wasserabspaltung.

Die innere Säure-Anhydridbildung findet nur bei den Säuren statt, in welchen die beiden Carboxyle durch *zwei* oder *drei* Kohlenstoffatome getrennt sind. So z. B. bei der Bernsteinsäure:

$$\begin{array}{l}CH_2 \cdot CO \cdot OH\\ |\\ CH_2 \cdot CO \cdot CH\end{array} = H_2\,O + \begin{array}{l}CH_2 \cdot CO\\ |\\ CH_2 \cdot CO\end{array}>O$$

und den substituirten Bernsteinsäuren; bei der Phtalsäure und den übrigen Orthodicarbonsäuren, sowie bei der normalen Brenzweinsäure:

$$\begin{array}{l}CH_2 \cdot CH_2 \cdot CO \cdot OH\\ |\\ CH_2 \cdot CO \cdot OH\end{array} = H_2\,O + \begin{array}{l}CH_2 - CH_2 \cdot CO\\ |\\ CH_2 - CO\end{array}>O$$

u. a. analog zusammengesetzte Dicarbonsäuren. Aehnlich constituirte Polycarbonsäuren geben auch Anhydride. Die vierbasische Pyromellithsäure $C_6\,H_2\,(CO_2\,H)_4$, eine doppelte Orthoverbindung, giebt ein doppeltes Anhydrid[1].

$$C_6\,H_2\begin{array}{l}-CO\\ -CO\end{array}>O \quad \begin{array}{l}-CO\\ -CO\end{array}>O.$$

[1]) Baeyer, Annal. d. Ch. Spl. 7, 37.

Adipinsäure und die höheren normalen Dicarbonsäuren geben dagegen keine Anhydride.

In Betreff der Stellung der Carboxyle macht nur die *Diphensäure*[1]) eine Ausnahme. In ihr sind die Carboxyle durch *vier* Kohlenstoffatome getrennt:

Diese Anhydride entsprechen ganz den Lactonen, worauf schon früher Roser[2]) und ich[3]) aufmerksam gemacht haben. In der Bernsteinsäure, Phtalsäure u. s. w. sind die Hydroxyle in derselben intramolecularen Stellung wie in den γ-Oxysäuren, in der normalen Brenzweinsäure wie in den δ-Oxysäuren. Diese Säureanhydride können als *oxydirte Lactone* betrachtet werden. Zwischen ihnen und den gewöhnlichen Lactonen liegen die Oxylactone:

$$\begin{array}{l} CH_2 \cdot CH_2 \\ \qquad\quad > O \\ CH_2 \cdot CO \end{array} \qquad \begin{array}{l} CH_2 \cdot CH(OH) \\ | \qquad\quad > O \\ CH_2 \cdot CO \end{array} \qquad \begin{array}{l} CH \ \cdot CO \\ | \qquad\quad > O \\ CH_2 \cdot CO \end{array}$$

Butyrolacton. Oxybutyrolacton (hypotetisch). Bernsteinsäureanhydrid.

Wie die gewöhnlichen Lactone aus Alkoholsäuren entstehen und die Säureanhydride aus zweibasischen Säuren entstehen, bilden sich Oxylactone wahrscheinlich aus den Aldehydsäuren. Der s. g. Halbaldehyd der Fumarsäure (Limpricht) ist vielleicht ein Oxylacton[4]) (nur in Substitutionsproducten bekannt)[5]).

Die zweibasischen Säuren geben überhaupt nicht so leicht Wasser ab, wie die entsprechenden Oxysäuren. Doch gehen einige schon bei gewöhnlicher Temperatur in Anhydride über. Diese Säuren sind Pyrocinchonsäure, Xeronsäure und eine Stilbendicarbonsäure. Sie sind alle als substituirte Fumarsäuren (Maleinsäuren) erkannt. Pyrocinchonsäure ist Dimethylfumarsäure[6]), Xeronsäure ist Diaethylfumarsäure[7]) und die dritte Säure Diphenylfumarsäure (Maleinsäure)[8]). Diese Verbindungen existiren nur in ihren Salzen; bei der Zersetzung dieser mittelst stärkerer Säuren, zerfallen sie sofort in Wasser und den Anhydriden. Bei der Pyrocinchonsäure ist die Neigung zur Anhydrid-

---

[1]) Schultz, Annal. d. Ch. 196, 1.

[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XV, 1322.

[3]) Hjelt, Laktoner och Laktonbildning. Akad. afh. 1882, s. 83.

[4]) Roser Ber. d. d. ch. Ges. XV, 1322.

[5]) Iwig u. Hecht (Ber. d. d. ch. Ges. XIX, 478) sprechen die Ansicht aus, dass die Erythritsäure möglicherweise der Halbaldehyd der Weinsäure ist. Es scheint nicht unwahrscheinlich, dass sie ein Oxylacton ist. Dafür spricht ihr Verhalten beim Neutralisiren mit Calciumcarbonat.

[6]) Roser, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 1318. Otto u. Beckurts, Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 830.

[7]) Roser, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 1318.

[8]) Reimer, Ber. d. d. ch. Ges. XIII, 743. Rügheimer, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 1625.

bildung so gross, dass das saure Natriumsalz sich in Anhydrid und neutrales Salz umsetzt.

Uebrige anhydridbildende zwei- oder mehrbasische Säuren verlieren Wasser erst beim Erhitzen oder bei Einwirkung wasserentziehender Mittel. Die ungesättigten Säuren, Maleinsäure und Citraconsäure, bilden leichter Anhydride als die gesättigten Säuren. Ein Vergleich des Verhaltens der Bernsteinsäure und der *alkylsubstituirten* Bernsteinsäuren zeigt, dass bei den letzteren Anhydridbildung leichter folgt. Die Ueberführung der Bernsteinsäure in ihr Anhydrid ist auch beim anhaltenden Erhitzen keine vollständige. Die Brenzweinsäure (Methylbernsteinsäure) und Pimelinsäure (Propylbernsteinsäure) dagegen gehen beim Destilliren leicht in Anhydride über. Die unsymmetrische α-Dimethylbernsteinsäure (?) verliert ein Mol. Wasser schon bei 190°[1] und die entsprechende symmetrische Verbindung bei 200° vollständig. Aus letzterer Säure entsteht das Anhydrid der Isodimethylbernsteinsäure[2].

Die Glutarsäure oder normale Brenzweinsäure (δ-Stellung) geht sehr schwer in Anhydrid über. Die Säure destillirt fast unzersetzt bei 303—305°[3]. Die Methyl- und Aethylglutarsäuren sind weniger beständig als jene Säure[4]. Zu bemerken ist noch, dass die Diphensäure sehr beständig ist. Sie sublimirt unzersetzt.

Bei der Darstellung von Anhydriden zweibasischer Säuren sind als wasserentziehende Mittel benutzt worden, Phosphorpentachlorid, Phosphorsulfid, Essigsäureanhydrid[5], Acetylchlorid (Benzoylchlorid[6]). Ob diese Verbindungen einfach wasserabspaltend wirken, ist sehr fraglich. Was speciell die Einwirkung von ein Mol. Phosphorchlorid betrifft, wobei Anhydride entstehen, kann man sich die Reaction derart vorstellen, dass zuerst die Hälfte der Säuremenge in Chlorid übergeführt wird, welcher dann auf die unveränderte Säure wirkt, oder dass ein Halbchlorid entsteht, aus dem Halogenwasserstoff abgespalten wird, z. B. bei der Bernsteinsäure:

$$1)\quad C_2H_4<\begin{matrix}CO\,Cl\\CO\,Cl\end{matrix} + C_2H_4\begin{matrix}CO\cdot OH\\CO\cdot OH\end{matrix} = 2C_2H_4<\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}>O + 2H\,Cl.$$

$$2)\quad C_2H_4<\begin{matrix}CO\,\underline{Cl}\\CO\cdot O\underline{H}\end{matrix} = C_2H_4<\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}>O + H\,Cl.$$

---

[1]) Pinner, Ber. d. ch. Ges. XV, 582.
[2]) Otto u. Beckurts, Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 843.
[3]) Markownikoff, Annal. d. Ch. 182, 341.
[4]) Kommenos, Annal. d. Ch. 218, 145.
[5]) Anschütz, Ber. d. d. ch. Ges. X, 1883.
[6]) Gerhardt u. Chiozza, Annal. d. Ch. 87, 293. Anschütz, Annal. d, Ch. 226, 1.

Ich bin geneigt, die letztere Reaction als die wahrscheinlichere anzusehen. Ich habe eine Menge Versuche mit Bernsteinsäure, Brenzweinsäure und Camphersäure gemacht, welche bezweckten, einen bei Einwirkung von Phosphorchlorid etwa entstehenden intermediären Körper zu isoliren. Dieses Agens wirkt schon bei gewöhnlicher Temperatur ein und einmal eingetreten, setzt sich die Reaction sogar beim Abkühlen fort. Es gelang allerdings nicht einen Halbchlorid aus der Reactionsmasse zu isoliren, aber diese enthielt immer Anhydrid. Die Umsetzung zwischen Bernsteinsäure und Succinylchlorid bedarf aber einer höheren Temperatur. Die obige Reaction 2 wäre also wahrscheinlicher; sie ist dann ganz analog der bei Einwirkung von Phosphorchlorid auf Säureamiden stattfindenden Reaction (siehe Abschn. X).

Das Vortheilhafteste von den oben erwähnten wasserentziehenden Mitteln ist Acetylchlorid. Unter Anwendung von diesem Agens hat Anschütz[1]) eine Menge Anhydride dargestellt.

Eine andere vortheilhafte Methode zur Darstellung der Anhydride hat Anschütz[2]) in der Einwirkung von entwässerter Oxalsäure auf die Chloride der Säuren gefunden.

---

[1]) Annal. d. Ch. 226, 1.

[2]) Annal. d. Ch. 226, 16.

V.

Wasserabspaltung zwischen Sauerstoff und an Kohlenstoff gebundenen Wasserstoff.

1. Wenn Wasserabspaltung zwischen Hydroxyl und am *benachbarten* Kohlenstoffatom gebundenen Wasserstoff stattfindet, entstehen *ungesättigte Verbindungen*:

$$\begin{array}{l} \;\;| \\ -C-OH \\ \;\;| \\ -CH \\ \;\;| \end{array} = \begin{array}{l} \;\;| \\ -C \\ \;\;\| \\ -C \\ \;\;| \end{array} + H_2O.$$

Auf dieser schon lange bekannten Reaction beruht die Darstellung ungesättigter Verbindungen aus Oxyverbindungen. Es tritt hierbei der Hydroxyl mit dem Wasserstoff einer CH- oder CH_2-gruppe aus. Die CH_3-gruppe betheiligt sich in der Reaction nur dann, wenn keine wasserstoffärmere Gruppe benachbart ist. Von den Oxyfettsäuren sind es namentlich die β-*Verbindungen*, welche ungesättigte Säuren liefern.

β-Oxybuttersäure giebt die gewöhnliche Crotonsäure:

$$CH_3 \cdot CH(OH) \cdot CH_2 \cdot CO_2H = CH_3 \cdot CH : CH \cdot CO_2H + H_2O.$$

β-Oxyisovaleriansäure giebt Dimethylacrylsäure[1]):

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array}\!\!> C(OH) \cdot CH_2 \cdot CO_2H = \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array}\!\!> C : CH \cdot CO_2H + H_2O.$$

Oxyisopropylbenzoesäure giebt Propenylbenzoesäure[2]):

$$C_6H_4 < \begin{array}{l} C \begin{array}{l} \diagup CH_3 \\ -CH_2H \\ \diagdown OH \end{array} \\ CO_2H \end{array} = C_6H_4 < \begin{array}{l} C \begin{array}{l} \diagup CH_3 \\ = CH_2 \end{array} \\ CO_2H \end{array} + H_2O \text{ u. s. w.}$$

---

[1]) SEMLJANITZIN u. SAYTZEFF, Annal. d. Ch. 197, 72.

[2]) MEYER u. ROSICKI, Annal. d. Ch. 219, 270.

Durch Condensation von zwei Mol. gewöhnlichem *Aldehyd* entsteht der ungesättigte Aldehyd, Crotonaldehyd. Wie Würtz zuerst nachgewiesen hat, geht indessen die Bildung einer Oxyverbindung, *Aldol*, voraus, aus der sich dann Wasser ausscheidet:

$$CH_3 \cdot CH(OH) \cdot CH_2 \cdot CHO = CH_3 \cdot CH : CH \cdot CHO + H_2\,O.$$

Auch die s. g. *Perkinsche Reaction*, wobei durch Condensation von Aldehyden mit Fettsäuren ungesättigte Säuren entstehen, beruht auf einer vorhergehenden Bildung von Oxysäure (Fittig[1]). Z. B.:

$$\begin{aligned} C_6\,H_5 \cdot CH : O + CH_3 \cdot CO_2\,H &= C_6\,H_5 \cdot CH(OH) \cdot CH_2 \cdot CO_2\,H \\ &= C_6\,H_5 \cdot CH : CH \cdot CO_2\,H + H_2\,O. \end{aligned}$$

Wahrscheinlich bilden sich bei *allen* Reactionen, wo Aldehyde und Ketone in *ein* anderes Molecül eingreifen, zuerst Oxyverbindungen und secundär ungesättigte Verbindungen. Es sind eine Menge derartiger Reactionen bekannt.

Die Bildung von Aldehyd aus Glycol[2]), von Acrolein aus Glycerin, von Brenztraubensäure aus Glycerinsäure und Weinsäure[3]), sowie überhaupt von Aldehyden und Ketonen aus *mehratomigen Hydroxylverbindungen* durch Einwirkung wasserentziehender Mittel, beruht wahrscheinlich auf Wasserabspaltung zwischen Hydroxyl und am benachbartem Kohlenstoffatom gebundenen Wasserstoff. Es entstehen zuerst ungesättigte Verbindungen, welche aber nicht beständig sind, sondern in Aldehyde und Ketone sich umlagern (Erlenmeyer[4]).

$$\begin{array}{l} CH_2 \cdot OH \\ | \\ CH_2 \cdot OH \end{array} - H_2\,O = \begin{array}{l} CH_2 \\ \| \\ CH \cdot OH \end{array} = \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH : O \end{array}$$

$$\begin{array}{l} CH_2 \cdot OH \\ | \\ CH \cdot OH \\ | \\ CO\,.\,OH \end{array} - H_2\,O = \begin{array}{l} CH_2 \\ \| \\ CH \cdot OH \\ | \\ CO \cdot OH \end{array} = \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CO\,.\,OH. \end{array}$$

Wie schon im Abschn. II hervorgehoben ist, nimmt Zincke bei diesen Reactionen eine indermediäre Bildung von Oxyden an, und fasst also die Wasserabspaltung anders als oben dargelegt ist auf.

Die Art von Wasserabspaltung, welche die Bildung ungesättigter Verbindungen bedingt, findet nie von selbst bei gewöhnlicher Temperatur statt.

---

[1]) Fittig u. Jayne, Annal. d. Ch. 216, 115 u. A.

[2]) Würtz, Annal. d. Ch. u. Ph. 108, 86.

[3]) Erlenmeyer, Ber. d. d. ch. Ges. XIV. 320.

[4]) Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 320.

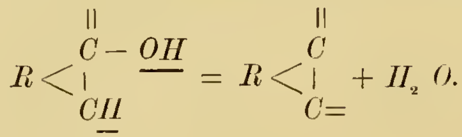
Gewöhnlich werden wasserentziehende Mittel benutzt und zwar Schwefelsäure (saures Kaliumsulfat), Chlorzink und Phosphortrichlorid (Einwirkung auf die Ester der Oxysäuren). Bei der Aldehyd- und Ketoncondensation werden ausserdem Salzsäure, Eisessig und Essigsäureanhydrid benutzt. Eigenthümlicher Weise ist bei der Condensation von Aldehyden mit Ketonen verdünnte Natronlauge besonders vortheilhaft[1]. In vielen Fällen findet die Umwandlung einer Oxyverbindung in ungesättigter Verbindung durch blosses aber starkes Erhitzen statt. So geht z. B. Cetylalkohol bei stärkerem Erwärmen in den ungesättigten Kohlenwasserstoff Ceten über; Aepfelsäure giebt Fumar- und Maleinsäure u. s. w.

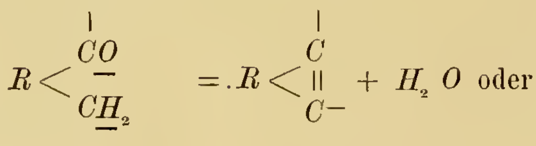
Eine mit dieser Art von Wasserabspaltung ganz analoge Abspaltung von *Halogenwasserstoff* findet bei Einwirkung von Alkali auf halogensubstituirte Kohlenwasserstoffe statt. Z. B. Aethylchlorid geht in Aethylen über. So auch bei anderen Halogenverbindungen. Dijodpropylalkohol verliert Jodwasserstoff und geht in Jodallylalkohol über[2]. Diese letztgenannte Reaction findet auch durch blosses Erwärmen ohne Anwendung alkalischer Mittel statt.

Bei den halogensubstituirten Fettsäuren sind es namentlich die *β-Verbindungen*, welche mit Alkali ungesättigte Säuren (neben anderen Producten) geben. Auch α- und γ-Verbindungen geben oft geringe Mengen von ungesättigter Säure. Der Verlauf der Halogenwasserstoffabspaltung ist bei den halogensubstituirten Säuren zum Theil von der Natur des einwirkenden Agenses abhängig[2].

2. Wenn Wasserabspaltung zwischen Sauerstoff und Wasserstoff, welche an *nicht benachbarte* Kohlenstoffatome gebunden sind, stattfindet, tritt *ringförmige Schliessung der Kohlenstoffkette* ein.

Eine derartige Wasserabspaltung kann entweder zwischen Hydroxyl und Wasserstoff oder zwischen Carbonylsauerstoff und Wasserstoff stattfinden:

1) 

2) 

[1] Claisen, Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 2468. Baeyer u. Drewsen, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2856.
[2] Siehe Erlenmeyer, Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 1318.

$$R<\begin{matrix} CO - CH \\ CH \end{matrix} = R<\begin{matrix} C = C \\ | \\ C = \end{matrix} + H_2O.$$

Die entstehenden Verbindungen sind natürlich verschiedener Natur je nach der Natur des Ausgangsmaterials.

Eine der am zeitigsten beobachteten Reactionen der ersten Art ist die Bildung von *Anthrachinon* aus *o*-Benzoylbenzoesäure durch Einwirkung von Schwefelsäure:[1])

$$C_6H_4<\begin{matrix} CO\cdot C_6H_4\underline{H} \\ CO\cdot \underline{OH} \end{matrix} = C_6H_4<\begin{matrix} CO \\ CO \end{matrix}>C_6H_4 + H_2O.$$

Ganz analog verläuft die *Pthalidincondensation*[2]), wobei auch durch Schliessung der Kohlenstoffkette Anthracenderivate entstehen:

$$C_6H_4<\begin{matrix} CH<\begin{matrix} C_6H_4OH \\ C_6H_3\cdot OH \\ \underline{H} \end{matrix} \\ CO\cdot \underline{OH} \end{matrix} = C_6H_4<\begin{matrix} CH.C_6H_4OH \\ CO \end{matrix}>C_6H_3\cdot OH + H_2O.$$

Bei beiden angeführten Reactionen greift die Carboxylgruppe in eine Benzolgruppe ein, indem die Hydroxylgruppe mit einem am Benzolkern in Orthostellung gebundenen Wasserstoffatom als Wasser austritt.

Die Bildung von *Chinizin*-Derivaten bei Einwirkung von Hydrazinen auf Acetessigester (Knorr[3]), alkylirten Acetessigester (Knorr u. Blank[4]), Diacetbernsteinsäureester (Knorr u. Bülow[5]) u. s. w., beruht auf einer Abspaltung von *Alkohol* zwischen Aethoxyl und am Benzolkern gebundenen Wasserstoff in den zuerst entstehenden Condensationsprodukten.

$$\begin{matrix} C_6H_4 - N - N \\ \underline{H} \qquad \diagdown\diagup \\ \qquad\quad C - CH_3 \\ \underline{C_2H_5O}\cdot CO\cdot CH_2 \end{matrix} = C_6H_4\begin{matrix} \diagup N - N \\ \qquad \diagdown\diagup \\ \qquad C - CH_3 \\ \diagdown \qquad | \\ CO - CH_2 \end{matrix} + H_2O.$$

Verb. aus Acetessigester u. Phenylhydrazin. Oxymethylchinizin.

[1]) Behr u. van Dorp, Ber. d. d. ch. Ges. VII, 578.

[2]) Baeyer. Ber. d. d. ch. Ges. XII, 645.

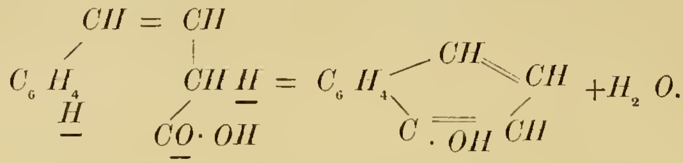
[3]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 546.

[4]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 2049.

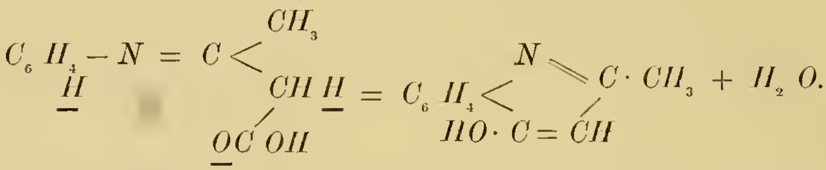
[5]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 2057.

Wenn Carbonylsauerstoff in der Reaction sich betheiligt, treten, wie durch oben gegebene Formeln angedeutet ist, zwei entweder an demselben oder an verschiedene Kohlenstoffatome gebundene Wasserstoffatome aus.

In den Producten, welche beim Erhitzen von Phenylparaconsäure entstehen, haben FITTIG und ERDMANN[1]) *α-Naphtol* gefunden. Dieser verdankt seine Entstehung der zuerst gebildeten Phenylisocrotonsäure:

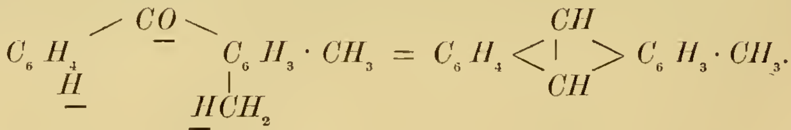


Ganz analog ist die *Oxychinolin*-Bildung aus Acetessigester und Anilin (KNORR[1]). Es bildet sich zuerst Anilinacetessigsäure, deren Carboxyl mit den Benzolkern in Reaction tritt:



Aehnlich wie Anilin reagiren andere primäre aromatische Amine[2]). Andererseits scheint aber die Reaction für die Carboketonsäureestern keine allgemeine zu sein. Mit Diacetbernsteinsäureester und Benzoylacetessigester reagiren nämlich die Amine anders[4]).

Durch langes Kochen von *p*-Xylylphenylketon entsteht eine geringe Menge *Methylanthracen*[5]):



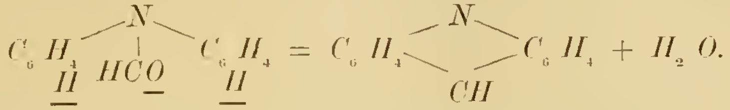
Diese Reaction ist indessen für derartige Ketone keine allgemeine[6]).

Die interessanten *Acridin*-Synthesen von BERNTHSEN und BENDER[7]) sowie

---

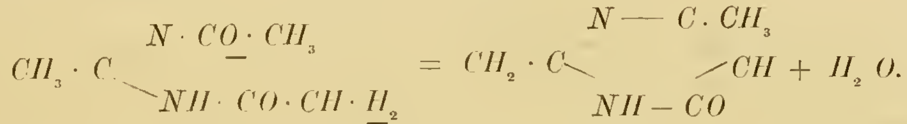
[1]) Ann. d. Ch. 227, 242.
[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 2593.
[3]) KNORR, Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 540.
[4]) KNORR, Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 299 u. A.
[5]) ELBS u. LARSEN, Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 2847.
[6]) CLAUS u. ELBS Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 1797.
[7]) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 767; 1802 u. A.

von Besthorn und O. Fischer[1]) gehören auch hierher. Das Acridin entsteht nämlich durch Einwirkung von Chlorzink auf Formyldiphenylamin:



Diphenylamin und Eisessig geben analog Methylacridin.

Die von Pinner[2]) durch Einwirkung von Essigsäureanhydrid auf Acetamidin dargestellte Verbindung $C_6 H_8 N_2 O_2$ ist wahrscheinlich durch innere Condensation nach folgender Formel entstanden:

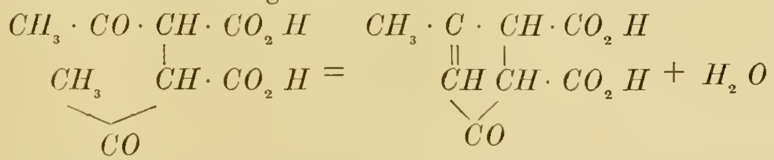


Noch manche andere innere Condensationen verlaufen wie die obigen. Es genügen aber die angeführten Beispiele.

Bemerkt kann noch werden, dass einige Synthesen von Verbindungen mit geschlossenen Kohlenstoffketten aus solchen mit offenen Ketten, deren Verlauf aber nicht näher bekannt ist, wohl auch hierher gehören; so z. B. die Bildung von Chinon bei Oxydation von Quercit[3]) u. A.

Bei allen diesen Reactionen sind die Kohlenstoffatome, welche bei der Condensation sich vereinigen, durch vier andere Atome getrennt und es entstehen somit sechsgliedrige Atomverkettungen. Diese können entweder alle Kohlenstoffatome sein, wobei Benzolkerne gebildet werden (Bildung von Naphthalin und Anthracenderivaten) oder einer von ihnen ist ein Stickstoffatom, wobei Pyridinkerne entstehen (Chinolin-, Chinizin- und Acridin-Synthesen), oder zwei sind Stickstoffatome (angef. Reaction von Pinner).

Fittig hat ganz neulich[4]) eine Ansicht über die Constitution der Carbopyrotritarsäure ausgesprochen, nach welcher diese einen *fünf*-gliedrigen Kohlenstoffkern enthält, welcher durch innere Condensation zwischen Carbonylsauerstoff und an Kohlenstoff gebundenen Wasserstoff entstanden wäre:



Diacetbernsteinsäure. Carbopyrotritarsäure.

[1]) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 68; 1820 u. A.
[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 177.
[3]) Prunier, Compt. rend. 82, 1113.
[4]) Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 3410.

Wenn diese Auffassung richtig ist, was wohl durch weitere Untersuchungen entschieden wird, wäre hier das erste Beispiel einer durch innere Condensation entstehenden fünfgliedrigen reinen Kohlenstoffverkettung (*Tetrylonring*)[1].

3. Der in Reaction tretende Sauerstoff kann auch an Stickstoff gebunden sein. Der austretende Wasserstoff ist entweder am selben Kohlenstoffatom als Stickstoff oder an einem anderen Kohlenstoffatom gebunden.

Die *Aldoxime* gehen durch Abspaltung von Wasser, bei Einwirkung von Essigsäureanhydrid und Acetylchlorid in *Nitrile* über[2]. Z. B.:

$$C_6 H_5 \cdot C\underline{H} : N \cdot \underline{OH} = C_6 H_5 . CN + H_2 O.$$

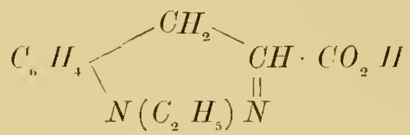
Die Reaction ist der Bildung ungesättigter Verbindungen ganz analog.

Wenn Stickstoff und in Reaction tretender Wasserstoff an *verschiedenen* Kohlenstoffatomen gebunden sind, entsteht *ringförmige* Atomverkettung, indem Stickstoff und Kohlenstoff in directe Bindung mit einander treten.

Die *Cinnolin*derivate entstehen durch eine Condensation dieser Art. Durch Einwirkung von salpetriger Säure auf Amidopropenylbenzoesäure hat WIDMAN[3] Methylcinnolincarbonsäure erhalten. Es bildet sich zuerst Diazopropenylbenzoesäure, aus der durch Wasserabspaltung Methylcinnolincarbonsäure entsteht.

$$HO \cdot OC \cdot C_6 H_3 < \begin{array}{l} C \begin{array}{l} - CH_3 \\ = CH\ \underline{H} \end{array} \\ N : N \cdot O\underline{H} \end{array} = HO \cdot OC \cdot C_6 H_3 < \begin{array}{l} C \begin{array}{l} - CH_3 \\ = CH \end{array} \\ N : N \end{array} + H_2 O.$$

Die von E. FISCHER und KUZEL[4] aus Nitroso-Aethyl-*o*-Amidozimmtsäure bei Reduction erhaltene s. g. Aethylchinazolbcarbonsäure:



ist durch eine analoge Reaction entstanden.

V. v. RICHTER[5] hat eine Cinnolincarbonsäure durch Einwirkung von Wasser auf den Diazochlorid der *o*-Amidophenylpropiolsäure dargestellt. Es addirt sich zuerst Wasser an, wonach Chlorwasserstoff sich abspaltet.

---

[1]) Es sind wohl andere Verbindungen bekannt, welche eine fünfgliedrige Kohlenstoffkette enthalten, sie entstehen aber nicht durch innere Condensation. Solche sind die Hydrindonaphtenverbindungen (BAEYER u. PERKIN, Ber. d d. ch. Ges. XVII, 122), sowie das Fluoren und seine Derivate.

[2]) GABRIEL, Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 2338; LACH, Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 1571.

[3]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 722.

[4]) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 653

[5]) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 677.

$$C_6H_4 < \begin{matrix} C = C \cdot CO_2H \\ N = NCl \end{matrix} + H_2O = C_6H_4 < \begin{matrix} C(OH) = C\underline{H} \cdot CO_2H \\ N = N\underline{Cl} \end{matrix} =$$

$$C_6H_4 < \begin{matrix} C(OH) = C \cdot CO_2H \\ \quad\quad\quad\quad\;\, | \\ N \text{———} N \end{matrix} + HCl.$$

Die Cinnolin- (und Chinazol-) Verbindungen enthalten ebenso wie Pyridin und Chinolin eine Verkettung von *sechs* Atomen, von diesen sind aber *zwei* Stickstoffatome.

VI.

Wasserabspaltung zwischen Amidwasserstoff und alkoholischem Hydroxyl oder Aldehyd- und Ketonsauerstoff.

Viele Condensationserscheinungen bei *aromatischen* Stickstoffderivaten sind von einer Wasserabspaltung zwischen Amid- resp. Imidwasserstoff und Hydroxyl oder Keton- und Aldehydsauerstoff bedingt.

Es können auch hier der Sauerstoff und Stickstoff am selben oder an verschiedenen Kohlenstoffatomen gebunden sein.

Wenn Aldehyde oder Diketone auf *Ortho*-Diamine einwirken, entstehen Condensationsproducte, im ersten Falle *Aldehydinbasen*[1]), im zweiten *Chinoxaline*[2]). Der Process ist der gewöhnlichen Aldehydcondensation analog. Es entstehen zuerst Hydroxylverbindungen, aus denen Wasser zwischen Hydroxylgruppe und Imidwasserstoff austritt, wobei doppelte Bindung zwischen Kohlenstoff und Stickstoff entsteht:

$$C_6H_4{<}\begin{matrix} NH_2 \\ NH_2 \end{matrix} + \begin{matrix} OCH \cdot C_6H_5 \\ OCH \cdot C_6H_5 \end{matrix} = C_6H_4{<}\begin{matrix} NH \cdot CH(OH) \cdot C_6H_5 \\ NH \cdot CH(OH) \cdot C_6H_5 \end{matrix} =$$

$$C_6H_4{<}\begin{matrix} N = CH \cdot C_6H_5 \\ N = CH \cdot C_6H_5 \end{matrix} + 2H_2O$$

Aldehydinbase.

$$C_6H_4{<}\begin{matrix} NH_2 \\ \\ NH_2 \end{matrix} + \begin{matrix} CH : O \\ | \\ CH : O \end{matrix} = C_6H_4{<}\begin{matrix} NH \cdot CH \cdot OH \\ | \\ NH \cdot CH \cdot OH \end{matrix} =$$

$$C_6H_4{<}\begin{matrix} N = CH \\ | \\ N = CH \end{matrix} \; 2H_2O$$

Chinoxalin.

---

[1]) Ladenburg, Ber. d. d. ch. Ges. XI, 590.

[2]) Hinsberg, Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 319.

Ob die *Ketinbildung* (aus Nitrosoketonen) auf einer Wasserabspaltung zwischen Imidwasserstoff und Hydroxyl (bei vorhergegangener Pinakolinbildung) beruht, ist zweifelhaft. Die angenommene Constitution der Ketine ist vorläufig unsicher[1]).

Das *Pyrrol* kann als ein inneres Condensationsprodukt eines Hydratamins, in welchem Hydroxyl und Amidogruppe durch vier Kohlenstoffatome getrennt sind, betrachtet werden.

$$\begin{matrix} CH = CH \cdot O\underline{H} \\ CH = CH \cdot NH\underline{H} \end{matrix} = \begin{matrix} CH = CH \\ | \\ CH = CH \end{matrix} > NH + H_2O.$$

Weder bei Pyrrol selbst, noch bei den übrigen Pyrrolverbindungen ist indessen ein entsprechendes Hydratamin bekannt.

Haitinger[2]) hat beobachtet, dass Glutaminsäure beim Erhitzen in Pyroglutaminsäure übergeht, welche bei noch stärkerem Erhitzen Pyrrol giebt. Hier findet also offenbar zuerst Wasserabspaltung zwischen Carboxyl und Amidogruppe statt, und aus der entstandenen Verbindung bildet sich dann durch weitere Zersetzung Pyrrol.

Durch Einwirkung von Ammoniak und Amine auf Diacetbernsteinsäureester entstehen Pyrrolverbindungen (Knorr[3]). Die Zusammensetzung der zuerst entstehenden intermediären Producte ist indessen nicht bekannt. Sie sind aber wahrscheinlich Hydratamine. Der Process ist übrigens der Bildung von Furfuran- und Thiophenverbindungen aus Diketonen analog (Abschn. II).

Bei seinen eingehenden Untersuchungen über die Condensation des Acetons hat Pinner eine Säure $C_8H_{13}NO_3$ dargestellt, die er Mesitylsäure nennt. Nach seiner Auffassung entsteht diese durch Wasserabspaltung aus einem intermediär entstehenden Hydratamid:

$$\begin{matrix} (CH_3)_2 \cdot C - CH_2 - C < {CH_3 \atop CO_2H} \\ | \qquad\qquad\quad | \\ CO \cdot NH\underline{H} \;\; \underline{OH} \end{matrix} = \begin{matrix} (CH_3)_2 \cdot C - CH_2 - C < {CH_3 \atop CO_2H}. \\ | \qquad\quad / \\ CO \cdot NH \end{matrix}$$

In dieser sehr beständigen Verbindung wäre dann dieselbe von vier Kohlenstoffatomen und ein Stickstoffatom bestehende Atomverkettung wie im Pyrrol.

Das dem Pyrrol analog zusammengesetzte *Indol* wurde, wenn auch nicht

---

[1]) Siehe über Ketine: Treadwell, Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 1461; v. Meyer, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 1047; Wleügel, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 1050.

[2]) Monatsh. f. Ch. III, 228.

[3]) Ber. d. ch. Ges. XVIII, 299.

aus dem entsprechenden Hydrat, doch aus dem entsprechenden Chlorid, durch Einwirkung von Natriumaethylat erhalten:

$$C_6H_4 < \begin{array}{l} CH\,CH\underline{Cl} \\ N\underline{H}H \end{array} = C_6H_4 < \begin{array}{l} CH \\ \\ NH \end{array} \!\!\! > CH + HCl.$$

Die freien Basen der *Amidotriphenylmetan-Farbstoffe* verlieren bei Einwirkung von Säuren Wasser unter Bildung von Salzen der *Anhydrobasen* (sauerstofffreie). Es tritt hierbei Hydroxyl und an Stickstoff gebundenen Wasserstoff aus.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{l} NH_2 \cdot C_6H_4 \\ NH_2 \cdot C_4H_4 \end{array} > C < \begin{array}{l} C_6H_4 \cdot NH\underline{H} \\ \underline{OH} \end{array} \\ \text{Triamidotriphenylcarbinol.} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{l} NH_2 \cdot C_6H_4 \\ NH_2 \cdot C_6H_4 \end{array} > C \begin{array}{l} \diagup C_6H_4 \cdot NH \\ \underline{\qquad\qquad\quad} | \end{array} \\ \text{Pararosanilin.} \end{array}$$

Die Bildung dieser Anhydrobasen entspricht ganz der der Aurine (siehe S. 56).

Bei aromatischen *Orthoverbindungen*, in welchen die eine Seitenkette eine *Amidogruppe*, die andere *Keton-* oder *Aldehydsauerstoff* enthält, findet, wenn die aufeinander reagierenden Atome durch eine gewisse Anzahl von Kohlenstoff-, resp. Stickstoffatomen getrennt sind, Wasserabspaltung statt, unter ringförmiger Schliessung der Atomenkette. Diese Reaction ist beobachtet bei Amidoaldehyden und wahren Amidoketonen, sowie bei acidoxylsubstituirten Orthodiaminen.

Aus dem einfachsten *o*-Amidoaldehyd, *o*-Amidobenzaldehyd, spaltet sich Wasser *nicht* ab[1]), und ebensowenig aus dem *o*-Amidoacetophenon. In diesen Verbindungen sind Sauerstoff und Wasserstoff durch vier andere Atome getrennt.

Wenn *Aldehyde* und *Ketone* auf *o-Amidobenzaldehyd* bei Gegenwart von verdünnter Natronlauge einwirken, entstehen zuerst durch gewöhnliche Aldehydcondensation neue Amidoaldehyde und Ketone. Aus diesen findet aber Wasserabspaltung unter Bildung von *Chinoline*[2]) statt. *o*-Amidobenzaldehyd und gewöhnlicher Aldehyd geben zuerst *o*-Amidozimmtaldehyd, aus dem durch Wasserabspaltung Chinolin entsteht:

$$C_6H_4 < \begin{array}{l} CH = CH \cdot CH\underline{O} \\ N\underline{H_2} \end{array} = C_6H_4 < \begin{array}{l} CH = CH \\ N \;=\; \overset{|}{C}H \end{array} + H_2O.$$

---

[1]) RUDOLPH, Ber. d. d. ch. Ges. XIII, 310. FRIEDLÄNDER u. HENRIQUES, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2105.

[2]) FRIEDLÄNDER, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2573. FRIEDLÄNDER u. GOHRING, Ber. d. d. ch. Ges XVI, 1833.

Aceton- und *o*-Amidobenzaldehyd geben analog α-Methylchinolin:

$$C_6H_4 < \begin{array}{l} CH = CH \cdot CO \cdot CH_3 \\ NH_2 \end{array} = H_2O + C_6H_4 < \begin{array}{l} CH \\ \qquad \diagup CH \\ N = C \cdot CH_3. \end{array}$$

Acetophenon und *o*-Amidobenzaldehyd geben α-Phenylchinolin u. s. w.

Das *o-Amidophenylaceton* geht unter Wasserabspaltung in *Methylketol* über.[1]). Die Reaction ist indessen nicht so einfach wie bei obigen Condensationsvorgängen. Das Metylketol hat nämlich nicht die Zusammensetzung:

$$C_6H_4 < \begin{array}{l} CH_2 \\ N \end{array} > C \cdot CH_3$$

sondern

$$C_6H_4 < \begin{array}{l} CH \\ NH \end{array} \diagup C \cdot CH_3.$$

Es tritt ein Wasserstoff der Amidogruppe und ein der benachbarten Methylengruppe aus. Man kann sich den Reactionsverlauf folgendermassen denken:

$$C_6H_4 < \begin{array}{l} CH_2 \cdot CO \cdot CH_3 \\ NH_2 \end{array} = C_6H_4 < \begin{array}{l} CH_2 \cdot C(OH) \cdot CH_3 \\ NH \diagup \end{array} =$$

$$H_2O + C_6H_4 < \begin{array}{l} CH \\ NH \end{array} \diagup C \cdot CH_3.$$

Wahrscheinlicher ist indessen, dass der Keton wie der isomere (tautomere) ungesättigte Alkohol reagirt, ein Verhalten, welches ja viele Analogien hat.

Das homologe Phenaetyl-Methylketon verhält sich ganz analog. Es entsteht Hydromethylchinolin:

$$C_6H_4 < \begin{array}{l} CH_2 \cdot CH_2\, CO \cdot CH_3 \\ NH_2 \end{array} = C_6H_4 < \begin{array}{l} CH_2 \diagdown CH \\ \qquad\quad \| \\ NH - C \cdot CH_3. \end{array} + H_2O.$$

Diese Verbindung nimmt aber gleich Wasserstoff auf und geht in Tetrahydromethylchinolin über.

Das Ketol und das Chinolin entstehen durch spontane Wasserabspaltung.

[1]) Baeyer u. Jackson, Ber. d. d. ch. Ges. XIII, 187. Jackson, Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 859.

Sie bilden sich nämlich schon bei Reduction der entsprechenden Nitroverbindungen.

Wie die Amidoketone verhalten sich auch die *acidoxylsubstituirten o-Diamine.* Sie spalten Wasser ab unter Bildung von *Anhydrobasen* (Hobrecher und Hübner[1]); z. B.:

$$C_6H_5<\begin{array}{l}NH\cdot CO\cdot CH_3\\ NH_2\end{array} = C_6H_4<\begin{array}{l}NH\\ N\end{array}>C\cdot CH_3 + H_2O.$$

Viele andere ähnlich zusammengesetzte Verbindungen sind dargestellt. Sie entstehen entweder durch Erhitzen der *o*-Diamine mit Säuren oder direct bei Reduction der *o*-Nitrosäureaniliden.

Weniger leicht findet die Reaction statt bei der von Hinsberg[2]) dargestellten Oxalyldiamidotoluol. Diese Verbindung, welche bei gewöhnlicher Temperatur beständig ist, verliert *einen* Mol. Wasser bei 130°, und den zweiten erst bei ung. 300°, wobei die eigentliche Anhydrobase entsteht.

$$CH_3\cdot C_6H_3<\begin{array}{ccc}N & & NH_2\\ NH\cdot C & - & CO\cdot NH\end{array}>C_6H_3\cdot CH_3 =$$

Halbanhydrobase.

$$CH_3\cdot C_6H_3<\begin{array}{ccc}N & & N\\ NH\cdot C & - & C\cdot NH\end{array}>C_6H_3\cdot CH_3 + H_2O$$

Anhydrobase.

In diese Gruppe von Reactionen gehört wohl auch die Bildung von *Pyrazolverbindungen*, durch Einwirkung von Phenylhydrazin auf Benzoylacetessigester (Knorr u. Blanck[3]). Auch an Kohlenstoff gebundener Wasserstoff betheiligt sich hier an der Reaction. Benzoylacetessigester reagirt mit Phenylhydrazin wohl zuerst unter Bildung folgender Verbindung:

$$\begin{array}{lll} & & NH\cdot C_6H_5\\ & N & CO - CH_3\\ & \| & |\\ C_6H_5\cdot & C - & CH\cdot CO\cdot OC_2H_5,\end{array}$$

welche dann durch Verlust von Wasser in die Pyrazolverbindung übergeht:

[1]) Ann. d. Ch. 209, 319.
[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2690.
[3]) Ber. d. ch. Ges. XVIII, 311.

$$\begin{array}{ccc} & N - C_6H_5 & \\ & \diagup\;\diagdown & \\ N & & C - CH_3 \\ \| & & \| \\ C_6H_5 \cdot C & — & C\,.\,CO \cdot OC_2H_5. \end{array}$$

Die Reaction wäre dann der Bildung von Methylketol (siehe S. 87) analog. Der Keton reagirt wie ungesättigter Alkohol.

Die Constitution dieser Verbindung ist indessen nicht sicher bewiesen, sondern nur als wahrscheinlich angenommen.

Eine Wasserabspaltung zwischen Amidwasserstoff und an *Stickstoff* gebundenem Hydroxyl findet bei Bildung der *Azimidverbindungen*[1]) statt, bei Einwirkung von salpetriger Säure auf *o*-Diamine (Ladenburg[1]), Griess[2]). Aus den zuerst gebildeten Diazoverbindungen spaltet sich Wasser ab.

$$C_6H_4 < \begin{matrix} NH\overline{H} \\ N = N \cdot \underline{OH} \end{matrix} = H_2O + C_6H_4 < \begin{matrix} NH \\ N \end{matrix} > N \text{ oder } C_6H_4 < \begin{matrix} N \\ | \\ N \end{matrix} > NH.$$

Bei oben angeführten Condensationserscheinungen findet also Wasserabspaltung zwischen Atomen statt, die durch eine Kette von *fünf* oder *sechs* Atomen von einander getrennt sind. Enthält diese Atomverkettung nur ein Stickstoffatom, so entstehen im ersten Falle Indolverbindungen, im zweiten Chinolinverbindungen. Die aus den Orthodiaminen entstehenden Anhydrobasen sowie die Pyrazolverbindungen enthalten eine geschlossene Kette von drei Kohlenstoff- und zwei Stickstoffatomen. Die Azimidverbindungen enthalten eine ringförmige Atomverkettung von zwei Kohlenstoff- und drei Stickstoffatomen.

---

[1]) Ber. d. d. ch. Ges. IX, 2220.
[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XV. 1878 u. A.

VII.

Wasserabspaltung zwischen Amidogruppe und Carboxylgruppe in Amidosäuren.

Schon lange kennt man innere Anhydride von Amidosäuren. Ihre wahre Natur ist indessen erst in den letzteren Jahren, hauptsächlich durch die Untersuchungen von Baeyer, klargestellt worden. Er hat für diese Verbindungen, je nach ihrer Zusammensetzung, die Benennungen *Lactame* und *Lactime* eingeführt[1].

Die Wasserabspaltung bei Amidosäuren kann nämlich auf zweierlei Art vor sich gehen. Entweder tritt der Hydroxyl des Carboxyls oder der Carbonylsauerstoff mit der Amidogruppe in Reaction:

$$R<\begin{matrix}CO\cdot \underline{OH}\\ N\underline{H}H\end{matrix} = R<\begin{matrix}CO\\ NH\end{matrix}> + H_2O.$$

Lactam.

$$R<\begin{matrix}C\underline{O}\cdot OH\\ N\underline{H}_2\end{matrix} = R<\begin{matrix}C\cdot OH\\ \| \\ N\end{matrix} + H_2O.$$

Lactim.

Unter den aromatischen Amidosäuren sind es wieder nur die Orthoverbindungen, welche diese Reactionen zeigen. Die Lactame entsprechen vollständig den Lactonen, die Lactime sind den aus den *o*-Amido-Aldehyden und Ketonen entstehenden Anhydroverbindungen analog, obgleich sie natürlich keine basischen Eigenschaften besitzen.

Das Oxindol, das längst bekannte Lactam, ist das innere Anhydrid der *o*-Amidophenylessigsäure[2]:

---

[1]) Baeyer u. Oeconomides, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2102.

[2]) Baeyer, Ber. d. d. ch. Ges. XI 583 u. A.

$$C_6H_4{<}\begin{matrix}CH_2\cdot CO\cdot OH\\ NH_2\end{matrix} = C_6H_4{<}\begin{matrix}CH_2\cdot CO\\ \diagup\\ NH\end{matrix} + H_2O.$$

o-Amidophenylessigsäure. Oxindol.

Die Säure ist überhaupt nicht beständig, sondern verliert Wasser schon bei ihrer Bildung. Dasselbe gilt der Amidomandelsäure und Diamidophenylessigsäure, welche in Dioxindol[1]), resp. Amidooxindol[2]) übergehen.

Das *o*-Amidoderivat der mit Phenylessigsäure homologenen *o*-Phenylpropionsäure geht gleichfalls in Lactam, nämlich *Hydrocarbostyril* über[3]):

$$C_6H_4{<}\begin{matrix}CH_2\cdot CH_2\cdot CO\cdot OH\\ NH_2\end{matrix} = C_6H_4{<}\begin{matrix}CH_2\cdot CH_2\\ NH\end{matrix}{>}CO + H_2O.$$

Als ein Lactam ist auch *Anthranil* zu betrachten:

$$C_6H_4{<}\begin{matrix}CO\ (1)\\ |\\ NH\ (2).\end{matrix}$$

Es entsteht *nicht* direkt aus der entsprechenden Anthranilsäure, welche ziemlich beständig ist und beim Erhitzen in Kohlendioxid und Anilin zerfällt. Es bildet sich bei Einwirkung von Zink und Eisessig auf *o*-Nitrobenzaldehyd[4]).

Ein Lactam von etwas abweichender Constitution ist die von Plöchl[5]) beschriebene, bei Einwirkung von Cyanwasserstoff und Salzsäure auf Benzaldehyd entstehende Verbindung. Sie hat wahrscheinlich folgende Zusammensetzung:

$$\begin{matrix}C_6H_5\cdot CH - NH\\ \quad{>}NH\\ C_6H_5\cdot CH\\ |\\ CO.\end{matrix}$$

Nicht nur Amido- sondern auch *Hydrazinsäuren* geben Lactame (E. Fischer); z. B. *o*-Hydrazinbenzoesäure[6]):

---

[1]) Baeyer Ber. d. d. ch. Ges. XII, 1309.

[2]) Gabriel u. Meyer, Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 823.

[3]) Gabriel u. Zimmermann, Ber. d. d. ch. Ges. XIII, 1680. Friedländer u. Weinberg, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2103.

[4]) Friedländer u. Henriques, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2105.

[5]) Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 1139.

[6]) Ber. d. d. ch. Ges. XIII, 679.

$$C_6H_4<\begin{matrix}CO\cdot OH\\ NH\cdot NH_2\end{matrix} = C_6H_4<\begin{matrix}CO\\ NH\cdot NH\end{matrix} + H_2O,$$

und o-Hydrazinzimmtsäure[1]):

$$C_6H_4<\begin{matrix}CH=CH\cdot CO\cdot OH\\ NH\cdot NH_2\end{matrix} = C_6H_4<\begin{matrix}CH=CH\\ N-NH_2\end{matrix}>CO + H_2O.$$

Die Lactambildung findet bei der Hydrazinbenzoesäure erst beim Erhitzen bis 230^0 oder beim Kochen mit Essigsäure statt, bei der Hydrazinzimmtsäure theilweise schon bei gewöhnlicher Temperatur.

Mit den Hydrazinlactamen analog zusammengesetzt sind ohne Zweifel die Verbindungen, welche Roser[2]) durch Einwirkung von Phenylhydrazin auf o-Ketoncarbonsäuren dargestellt hat. Benzoylessigcarbonsäure

$$C_6H_4<\begin{matrix}CO\cdot CH_2\cdot CO_2H\\ COOH\end{matrix} \text{ giebt } C_6H_4<\begin{matrix}C(N_2\cdot C_6H_5)\cdot CH_2\cdot CO_2H\\ CO.\end{matrix}$$

Andere aus Phtalsäure derivirende Ketonsäuren reagiren ähnlich. Die Constitution der entstehenden Verbindungen ist nicht ganz klargestellt, weil es unbestimmt ist, welche Wasserstoffatome aus dem Phenylhydrazin mit Carbonylsauerstoff austreten.

Andere Amidosäuren geben Lactime. Das längst bekannte Lactim ist das *Isatin*, welches aus o-Amidobenzoylameisensäure (Isatinsäure) beim Erwärmen ihrer Lösung entsteht.

$$C_6H_4<\begin{matrix}CO\cdot CO\cdot OH\\ NH_2\end{matrix} = C_6H_4<\begin{matrix}CO\cdot C\cdot OH\\ N\end{matrix} + H_2O.$$

Dessen Constitution wurde von Baeyer und Oeconomides[3]) bewiesen. Das Lactam der Isatinsäure ist nicht beständig, wohl aber dessen Acetylverbindung.

Die Chinisatinsäure verhält sich beim Erhitzen analog. Es entsteht das Lactim, *Chinisatin*[4]):

$$C_6H_4<\begin{matrix}CO\cdot CO\cdot CO\cdot OH\\ NH_2\end{matrix} = C_6H_4<\begin{matrix}CO\cdot CO\\ N\end{matrix}>C\cdot OH + H_2O.$$

[1]) Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 478.
[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 802.
[3]) Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2100.
[4]) Baeyer u. Homolka, Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 2216; XVII, 985.

Das Lactim der *o*-Amidophenylacrylsäure ist das s. g. *Carbostyril*:

$$C_6H_4<\begin{matrix}CH=CH\cdot CO\cdot OH\\ NH_2\end{matrix} = C_6H_4<\begin{matrix}CH=CH\\ |\\ N - C\cdot OH\end{matrix} + H_2O.$$

Diese Zusammensetzung des Carbostyrils wurde durch die Untersuchungen von Friedländer und Ostermaier[1]), sowie Weinberg[2]) klargestellt.

Das Carbostyril entsteht nicht sehr leicht aus der Amidozimmtsäure. Erhitzt für sich verliert die Säure nicht Wasser, wohl aber beim Erhitzen ihrer Acetylverbindung[3]). Auch beim Erwärmen der entsprechenden Nitrosäure mit Schwefelammonium bildet sich Carbostyril[4]).

Auf einer Lactimbildung beruht auch das Entstehen von Carbostyrilverbindungen aus *o*-Amidophenylpropiolsäure beim Erwärmen mit Säuren (Baeyer u. Bloem[5]). Hierbei findet doch zuerst Addition von Halogenwasserstoff oder Wasser zu der Säure statt.

Als Lactim ist wohl auch die von Hinsberg[6]) durch Reduction des *m*-Nitro-*p*-Oxalyltoluidsäure erhaltene Anhydroverbindung zu betrachten. Sein Verhalten deutet darauf.

$$C_6H_4\begin{matrix}\diagup CH_3\\ -NH_2\\ \diagdown NH\cdot CO\cdot COOH\end{matrix} = C_6H_4\begin{matrix}\diagup CH_3\\ N \\ \diagdown NH\cdot CO\cdot C\cdot OH\end{matrix} + H_2O.$$

Die von Aschan[7]) aus *o*-Nitrooxanilsäure durch eine ganz ähnliche Reaction erhaltene Anhydroverbindung (Dioxychinoxalin) ist ohne Zweifel dieser Verbindung analog zusammengesetzt.

Bei Reduction von *o*-Nitrophenyl- und *o*-Nitrotolylglycin hat in jüngster Zeit Plöchl[8]) Chinoxalinverbindungen erhalten, welche wahrscheinlich Lactime sind.

Lactam- und Lactimbildung ist bis jetzt eigentlich nur in der aromatischen Reihe sicher beobachtet. Es beruht dieses wohl nur darauf, dass die γ- oder δ-Amidofettsäuren nicht bekannt sind. Sie würden sich gewiss wie die entsprechenden aromatischen Verbindungen verhalten. Bemerkt muss doch

---

1) Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 1916; XV, 332.
2) Ber. d. d. ch. Ges. XV, 1421, 2103.
3) Baeyer u. Jackson, Ber. d. d. ch. Ges. XIII, 115; Tiemann u. Oppermann, Ber. d. d. ch Ges. XIII, 2070.
4) Friedländer u. Ostermaier, Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 1916
5) Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2147.
6) Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2690.
7) Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 2936.
8) Ber. d. d. ch. Ges. XIX, 6.

hier werden, dass die zweibasische Glutaminsäure (Amidoglutarsäure) zugleich α- und γ-Amidosäure ist. Sie giebt in der That beim Erhitzen unter Wasserabspaltung eine einbasische Säure, Pyroglutaminsäure[1]), welche vielleicht das Lactam dieser Säure darstellt. Durch stärkeres Erhitzen entsteht Pyrrol (siehe S. 85).

Eine andere in der Fettreihe bekannte Reaction beruht wahrscheinlich auf Lactimbildung. Es ist dies die von v. Pechmann[2]) entdeckte Bildung von Pyridinderivaten aus Aepfelsäure. Aepfelsäure giebt mit conc. Schwefelsäure die s. g. Cumalinsäure (nach v. Pechmann entstanden durch Condensation von 2 Mol. Halbaldehyd der Malonsäure). Diese Säure giebt mit Ammoniak sofort Oxynicotinsäure. Wenn man die von v. Pechmann angenommene Formel der Cumalinsäure als richtig annimmt, und es spricht vieles für diese Zusammensetzung der Säure, wäre der Vorgang folgendermassen zu interpretiren:

$$\begin{array}{l} CO_2H \\ | \\ C : CH - O \\ | \qquad\quad\; | \\ CH : CH \cdot CO \end{array} + NH_3 = \begin{array}{l} CO_2H \\ | \\ C : CH \cdot N\underline{H}_2 \\ | \\ CH : CH \cdot C\underline{O} \cdot OH \end{array} =$$

$$H_2O + \begin{array}{l} CO_2H \\ | \\ C = CH \cdot N \\ | \\ CH = CH \,.\, C \cdot OH. \end{array}$$

Die α-Oxypyridine können überhaupt, wie die entsprechenden Chinolinverbindungen, als Lactime und zwar als Lactime von δ-Amidofettsäuren betrachtet werden.

Die Lactame und Lactime entstehen meistens, wenn auch nicht immer durch spontane Wasserabspaltung und bilden sich desswegen, wie bei einigen Beispielen erwähnt ist, unmittelbar bei der Reduction der entsprechenden Nitrosäuren. Warum einige Säuren Lactame, andere Lactime geben, lässt sich noch nicht erklären. Bei der Bildung des Carbostyrils scheint die Möglichkeit der Entstehung des sehr stabilen Chinolinmoleculs direct aus der Amidozimmtsäure von entscheidendem Einfluss zu sein[3]).

Diese aus den Amidosäuren entstehenden inneren Anhydride enthalten eine geschlossene Kette von *fünf* oder *sechs* Atomen, wovon einer wenigstens ein Stickstoffatom ist. Die mit einer Verkettung von vier Kohlenstoffatomen

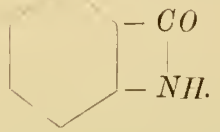
---

[1]) Haitinger, Monatsh. III, 228.

[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 2384.

[3]) Friedländer u. Weinberg, Ber. d. d. ch. Ges. XV, 2104.

und ein Stickstoffatom (Oxidol, Isatin u. s. w.) sind Indolkörper. Sie entsprechen den γ-Lactonen und enthalten denselben Kern wie die Pyrrolverbindungen. Die, welche fünf Kohlenstoffatome und ein Stickstoffatom enthalten (Pyridinkern), sind Chinolinverbindungen. Sie entsprechen den δ-Lactonen. Nur ein Lactam ist bekannt, welcher sich den β-Lactonen anschliesst, nämlich Anthranil:



Es ist unbeständiger als die übrigen Lactame und Lactime.

Baeyer[1]) hatte 1880 die Ansicht ausgesprochen, dass in den Orthoamidosäuren die Amidogruppe sich leicht nur mit dem zweiten oder dritten Kohlenstoffatom der Seitenkette verbindet, aber nicht mit entfernteren. Diese Annahme, dass nur fünf- oder sechsgliedrige Kohlenstoff-Stickstoffringe durch innere Condensation entstehen können, schien durch später ausgeführte Untersuchungen bestätigt. Z. B. aus der Hydrazinzimmtsäure könnte eine siebengliedrige Atomverkettung entstehen. E. Fischer[2]) hat aber gezeigt, dass die Wasserabspaltung hier nicht in der Weise stattfindet. Es bildet sich:

$$C_6H_4<\begin{array}{l}CH=CH\cdot CO\\ N-NH_2\end{array} \quad \text{und nicht} \quad C_6H_4<\begin{array}{l}CH=CH \quad CO\\ NH\cdot NH.\end{array}$$

Später haben E. Fischer und Kuzel[3]) die Aethylhydrazinhydrozimmtsäure dargestellt und gefunden, dass diese Wasser abspaltet und einen Anhydrid (Hydrazinlactam) giebt, welches Aethyl-Hydrocarbazostyril sein muss.

$$C_6H_4<\begin{array}{l}CH_2 - CH_2\\ N(C_2H_5)\cdot NH\end{array}>CO.$$

Es *kann* also eine siebengliedrige Kohlenstoff-Stickstoffkette entstehen. Dieser Anhydrid ist indessen gegen Säuren viel *weniger beständig* als die bisher bekannten Lactame und Lactime mit fünf- oder sechsgliedrigen geschlossenen Ketten. Ob ein siebengliedriger Ring von sechs Kohlenstoffatomen und *ein* Stickstoffatom entstehen kann, ist nicht entschieden.

Die s. g. *Lactimiden* sind wahrscheinlich, analog den Lactiden, aus zwei Mol. Amidosäure entstanden und gehören also nicht hierher.

[1]) Ber. d. d. ch. Ges. XIII. 123.
[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 478.
[3]) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 1449.

VIII.

Wasserabspaltung zwischen Sauerstoff und sowohl Hydroxyl- als Amidwasserstoff.

Die acidoxylsubsituten *o-Amidophenole* geben Condensationsproducte (Ladenburg[1]), indem Wasser zwischen Carbonylsauerstoff, Hydroxyl- und Amidwasserstoff sich abspaltet. Die einfachste Anhydroverbindung dieser Art ist das s. g. Methenyl-*o*-Amidophenol, welches aus Formyl-Amidophenol entsteht:

$$C_6H_4 < \begin{matrix} NH\underline{H}CO\underline{H} \\ O\underline{H} \end{matrix} = H_2O + C_6H_4 < \begin{matrix} N \\ O \end{matrix} > CH.$$

Aus *o*-Acetylamidophenol entsteht Aethenyl-Amidophenol, aus *o*-Propionylamidophenol Propenylamidophenol[2]) u. s. w. Diese Anhydroverbindungen entstehen direct bei Einwirkung der Säuren, Säureanhydriden oder Chloriden auf die Amidophenole.

Die von Roemer[3]) durch Einwirkung von Essigsäureanhydrid auf β-Amidoalizarin erhaltene Verbindung entspricht ganz Ladenburg's Anhydrobasen.

Wie die *o*-Amidophenole geben auch die *o*-Thioamidophenole mit Säuren Anhydroverbindungen (A. W. Hofmann[4]); z. B.:

$$C_6H_4 < \begin{matrix} N\underline{H}\cdot C\underline{O}\cdot CH_3 \\ S\underline{H} \end{matrix} = C_6H_4 < \begin{matrix} N \\ S \end{matrix} > C\cdot CH_3.$$

Wie in den Lactonen findet die Ringschliessung hier zwischen Sauerstoff (Schwefel-) und Kohlenstoff statt. Diese Verbindungen entsprechen ganz den aus Orthodiaminen erhaltenen Anhydrobasen (s. S. 88), nur dass sie ein Sauerstoffatom (Schwefelatom) statt einer Imidgruppe enthalten.

---

[1]) Ber. d. d. ch. Ges. IX, 1524, X, 1123.
[2]) Hjelt, Öfvers. af Vet. soc. förh. H. 18.
[3]) Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 1666.
[4]) Ber. d. d. ch. Ges. XII, 2365.

Aehnlich constituirte Verbindungen sind die von Widman[1]) entdeckten *Cumazon*verbindungen. Die Methylcumazonsäure entsteht durch Wasserabspaltung aus Acetamidooxypropylbenzoesäure:

$$HO \cdot CO \cdot C_6 H_3 < \begin{array}{l} C < \begin{array}{l}(CH_3)_2 \\ OH\end{array} \\ NH \cdot CO \cdot CH_3 \end{array} = HO \cdot CO \cdot C_6 H_3 < \begin{array}{l} C < \begin{array}{l}(CH_3)_2 \\ O\end{array} \\ \qquad | \\ N = C \cdot CH_3 \end{array} + H_2 O.$$

Man kann sich, wie auch Widman es thut, die Wasserabspaltung so vor sich gehend denken, dass Hydroxyl- und Amidwasserstoff austreten, wonach der Carbonylsauerstoff in die Propylgruppe eingreift. Bei den von Ladenburg entdeckten Anhydroverbindungen ist aber eine analoge Deutung des Processes nicht zulässig. Die Zusammensetzung der Verbindungen aus Thioamidophenolen zeigt, dass der *Carbonyl*sauerstoff austritt.

Auf einer ähnlichen Art von Wasser- (resp. Alkohol-) Abspaltung beruhend ist die Bildung der von Grönvik[2]) entdeckten und von ihm als Oxycarbanil aufgefassten, von Kalckhoff[3]) als Oxycarbamidophenol erkannten Verbindung aufzufassen, welche bei Destillation von Oxyphenylurethan entsteht:

$$C_6 H_4 < \begin{array}{l} NH \cdot CO \cdot CO_2 H_5 \\ OH \end{array} = C_6 H_4 < \begin{array}{l} N \\ O \end{array} > C \cdot OH + C_2 H_5 \cdot OH.$$

Eine ähnlich constituirte schwefelhaltige Verbindung haben Dünner[4]) und Bendix[5]), durch Einwirkung von Schwefelkohlenstoff auf *o*-Amidophenol, und Kalckhoff[6]) durch Einwirkung von xanthogensaurem Kalium auf salzsaures Amidophenol erhalten:

$$C_6 H_4 < \begin{array}{l} N \\ O \end{array} > C \cdot SH$$

Thiocarbamidophenol.

Alle diese Anhydroverbindungen (incl. Cumazonverbindungen) enthalten eine geschlossene Atomkette von *fünf* oder *sechs* Atomen, darunter ein Stickstoffatom und ein Sauerstoff- oder Schwefelatom.

---

1) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 2576; Studien in der Cuminreihe. Upsala 1885.

2) „Om Chlorkolsyreethers inverkan på Amidophenol. Akad. afh. Helsingfors 1875. Bull. soc. chim. N. S. 125, 178.

3) Ber. d. d. ch. Ges. XVI, 1828.

4) Ber. d. d. ch. Ges. IX, 465.

5) Ber. d. d. ch. Ges. XI, 2264.

6) Loc. cit.

IX.

Wasserabspaltung zwischen Amidogruppe und Carboxyl in Aminsäuren.

Ebenso wie die zweibasischen Säuren in Anhydride übergehen, können auch die Aminsäuren Wasser verlieren, wobei *Säureimide* entstehen. Aus Succinaminsäure entsteht Succinimid:

$$\begin{array}{l} CH_2 . CO \cdot NH_2 \\ | \\ CH_2 \cdot CO \cdot OH \end{array} = \begin{array}{l} CH_2 \cdot CO \\ | \\ CH_2 \cdot CO \end{array}\!\!> NH + H_2 O.$$

Phtalaminsäure giebt Phtalimid:

$$C_6 H_4 < \begin{array}{l} CO \cdot NH_2 \\ \\ CO \,.\, OH \end{array} = C_6 H_4 < \begin{array}{c} CO \\ \\ CO \end{array} > NH + H_2 O.$$

Von der sechsbasischen Mellithsäure derivirt sich ein dreifaches Imid (Mellimid):

$$C_6 < \left(\begin{array}{c} CO \\ \\ CO \end{array} > NH \right)_3,$$

welches mit Alkalien in das zweifache Imid, die Euchronsäure

$$C_6 < \begin{array}{l} (CO_2 H)_2 \\ \left(\begin{array}{c} CO \\ \\ CO \end{array} > NH \right)_2 \end{array}$$

übergeht.

Mit Basen werden aus den Imiden die resp. Aminsäuren regenerirt.

Diese Imide entsprechen ganz den Säureanhydriden. Dieselben Säuren, welche Säureanhydride geben, (siehe Abschnitt IV) bilden auch Imide. Sie stehen zu den Lactamen in derselben Beziehung wie diese Säureanhydride zu den Lactonen.

Die imidbildenden Aminsäuren sind überhaupt beständiger als die entsprechenden Amidosäuren, gerade wie die zweibasischen Säuren weniger leicht als die lactongebenden Oxysäuren sich anhydridisiren.

Die Imide werden gewöhnlich durch Erhitzen der sauren Ammoniumsalze der Säuren dargestellt, wobei intermediär die Aminsäuren entstehen. Auch die Estern der Aminsäuren bilden Imide unter Austritt von Alkohol. Schiller-Wechsel[1]) erhielt aus Anilidobrenzweinaminsäureaethylester beim Erhitzen mit Wasser, Alkohol, Ammoniak und Säuren, den beständigen Imid dieser Säure.

Ein *Sulfonsäureimid* ist von Fahlberg[2]) dargestellt. Das α-Toluoldisulfosäureamid giebt bei Oxydation direct das Imid:

$$NH_2 \cdot O_2S \cdot C_6H_3 \overbrace{- SO_2}^{CO} NH$$

Die entsprechende freie Toluoldisulfaminbenzoesäure ist nicht beständig.

Die *Hydantoine* sind den Imiden analog zusammengesetzt. Durch Alkalien werden sie in die den Aminsäuren entsprechenden Hydantoinsäuren übergeführt. Diese sind überhaupt ziemlich beständig, doch gehen die meisten bei höherer Temperatur unter Wasserabspaltung in die Hydantoine über; z. B.:

$$\begin{array}{lll} CH_2 - N \cdot CH_3 & & CH_2 - N \cdot CH_3 \\ \mid \qquad\quad \diagdown & & \mid \qquad\quad \diagdown \\ \mid \qquad\qquad CO & = & \mid \qquad\qquad CO \quad + H_2O. \\ \mid \qquad\quad \diagup & & \mid \qquad\quad \diagup \\ CO \cdot OH\, NH_2 & & CO \text{——} NH \end{array}$$

Methylhydantoinsäure. Methylhydantoin.

Diese Umwandlung findet beim Abdampfen der conc. wässrigen Lösung statt. Noch leichter erfolgt der Process beim Kochen mit Baryum- oder Bleicarbonat. Die homologe Lacturaminsäure verliert Wasser bei 140°.

Die entsprechenden Schwefelverbindungen kommen in zwei Formen vor; z. B.:

$$\begin{array}{ll} CH_2 - N \cdot C_6H_5 & CH_2 - S \\ \mid \qquad\qquad > CS & \mid \qquad\qquad > C = NH. \\ CO - NH & CO - N \cdot C_6H_5 \end{array}$$

Phenyl*sulf*hydantoin. Phenyl*thio*hydantoin.

Sie entstehen verhältnissmässig leicht aus den entsprechenden Thio- resp. Sulfhydantoinsäuren. Die von Aschan[3]) dargestellten Sulfhydantoinsäuren verlieren spontan Wasser bei gewöhnlicher Temperatur.

---

[1]) Ber. d. d. ch. Ges. XVIII, 1037.
[2]) Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 1205.
[3]) Ber. d. d. ch. Ges. XVII, 420.

Die gewöhnliche Thiohydantoinsäure geht beim Kochen mit Salzsäure in ihr Hydantoin über. Die *o*-Phenylthiohydantoinsäure spaltet Wasser ab beim Kochen mit Eisessig oder conc. Ammoniaklösung[1]).

Wie in den imidbildenden Aminsäuren sind in den Hydantoinsäuren die aufeinander reagirenden Hydroxyl- und Amidogruppen durch eine Kette von *vier* Atomen von einander getrennt. Von diesen sind zwei Stickstoffatome oder ein Stickstoff- und ein Schwefelatom.

Den Hydantoinen analog zusammengesetzt sind die Ureide der zweibasischen Säuren, wie Parabansäure, Alloxan u. s. w. Sie geben mit Alkalien die Salze der entsprechenden freien Säuren. Diese gehen überhaupt nicht wieder in die Ureide über, sondern zersetzen sich beim Erwärmen oder Behandeln mit Säuren. Aus Oxalursäure ist es gelungen beim Erhitzen mit Phosphoroxychlorid auf 200° die Parabansäure zu regeneriren (Grimaux[2]). Diese Ureide enthalten eine geschlossene Atomverkettung von fünf oder sechs Atomen.

Der Hydantoinbildung schliesst sich die *Cyamidin-* oder *Kreatininbildung* an.

Das Glycocyamin geht beim Erhitzen mit Salzsäure zu 160° in Glycocyamidin über:

$$\left.\begin{array}{l}CH_2\cdot NH\\ \mid\\ COOH\;NH_2\end{array}\right\rangle C=NH = \left.\begin{array}{l}CH_2-NH\\ \mid\\ CO-NH\end{array}\right\rangle C=NH+H_2O.$$

Analog folgt die Kreatininbildung aus Kreatin:

$$\left.\begin{array}{l}CH_2-N(CH_3)\\ \mid\\ CO\;OH\;NH_2\end{array}\right\rangle NH = \left.\begin{array}{l}CH_2-N(CH_3)\\ \mid\\ CO-NH\end{array}\right\rangle NH+H_2O.$$

Bei vielen der Reactionen, welche synthetische Darstellung von Hydantoine sowie Kreatinine bezwecken, muss man eine vorhergehende Bildung der entsprechenden Säuren annehmen, aus welchen dann secundär Wasser abgespalten wird.

---

[1]) P. Meyer, Ber. d. d. ch. Ges. XIV, 1659.
[2]) Annal. d. ch. et ph. [5], 11, 367.

X.

Wasserabspaltung bei Ammoniumsalzen und Säureamiden.

Die Ammoniumsalze der organischen Säuren verlieren beim starken Erhitzen Wasser, wobei *Amide* entstehen:

$$\begin{array}{l} R \\ | \\ CO\cdot \underline{O}NH_2\underline{H_2} \end{array} = \begin{array}{l} R \\ | \\ CO\cdot NH_2 \end{array} + H_2O.$$

Es beruht hierauf eine allgemeine Methode zur Darstellung der Säureamide.

Die Amide können durch Entziehung von einem weiteren Mol. Wasser in *Nitrile* übergehen:

$$\begin{array}{l} R \\ | \\ C\underline{O}\,N\underline{H_2} \end{array} = \begin{array}{l} R \\ | \\ CN \end{array} + H_2O.$$

Diese Reaction findet statt bei Einwirkung von Phosphorsäureanhydrid oder Phosphorchlorid. Die Einwirkung dieses letzteren Reagenses ist namentlich von Wallach[1]) untersucht worden. Es findet keine direkte Wasserabspaltung statt, sondern es entstehen zuerst Amidchloride:

$$R\cdot CONH'R' + PCl_5 = R\cdot CCl_2\cdot NHR' + POCl_3.$$

Diese verlieren Chlorwasserstoff und gehen in Imidchloride über:

$$R\cdot CCl_2\cdot NHR' = RCl : NR' + HCl.$$

Bei stärkerem Erwärmen verlieren die Imidchloride, in welchen $R' = H$, noch ein Mol. Halogenwasserstoff, wobei die Nitrile resultiren.

---

[1]) Ann. d. Ch. 184, 1.

Die Formanilide geben bei Destillation mit conc. Salzsäure ebenfalls Nitrile. Hierbei entstehen doch zuerst Isocyanide, welche sich zu Nitrilen umlagern:

$$C_6H_5 \cdot N\underline{H} \cdot C\underline{H}\,\underline{O} = C_6H_5 \cdot NC + H_2O.$$

Thioformanilid giebt bei blossem Erhitzen Phenylisocyanid unter Abspaltung von Schwefelwasserstoff:

$$C_6H_5 \cdot N\underline{H} \cdot C\underline{HS} = C_6H_5 \cdot NC + H_2S.$$

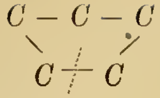
Schlusskapitel.

Die allgemeinen Bedingungen für die innerhalb eines Moleciiles stattfindende Wasserabspaltung treten aus den hierher gehörenden Reactionen, welche Gegenstand der Untersuchung gewesen sind, noch nicht mit voller Evidenz hervor. Die Stellung in der Atomverkettung, welche die Sauerstoff- und Wasserstoffatome einnehmen, die in Reaction treten, ist indessen hierbei von grösstem Einfluss. Es kommt viel weniger auf die Natur der Verbindungen, als auf die Stellung der aufeinander reagirenden Atome an. Die Verbindungen, welche Wasser abgeben, können Glycole, Oxysäuren, mehrbasische Säuren, Amidosäuren, Aminsäuren, Amidoaldehyde u. s. w. sein. Abgesehen von dem Fall, wenn zwei Hydroxylen am selben Kohlenstoffatom gebunden sind, findet aber bei allen diesen Verbindungen Reaction *mit Leichtigkeit* nur dann statt, wenn Sauerstoff und Wasserstoff durch *fünf* oder *sechs* andere Atome getrennt sind. Wasserabspaltung *kann* auch unter anderen Verhältnissen als diesen stattfinden, aber entweder fordert sie eine kräftige chemische Action (Bildung ungesättigter Verbindungen u. s. w.), oder die entstehenden Verbindungen sind sehr unbeständig (β-Lactone, Anthranil, Aethylcarbazostyril). Diese fünf oder sechs Atome können alle Kohlenstoffatome sein oder zum Theil durch Sauerstoff-, Schwefel- oder Stickstoffatome ersetzt sein. Die Wasserabspaltung bedingt unter diesen Verhältnissen eine ringförmige Schliessung der fünf- oder sechsgliedrigen Atomkette. Der Regel nach können nur zwei dieser Kohlenstoffatome demselben Benzolkern angehören[1]), d. h. bei aromatischen Verbindungen sind es nur die *Ortho*derivate, welche innere Condensation erleiden. Nur die Aurine und Rosaniline, welche Paraverbindungen sind, machen eine Ausnahme.

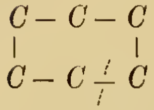
Im Folgenden wird eine Zusammenstellung der durch innere Wasserababspaltung entstehenden geschlossenen fünf- und sechsgliedrigen Atomverkettungen gegeben.

---

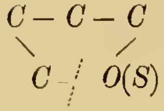
[1]) Diese Auffassung bezieht sich natürlich auf das Kekulé'sche Benzolschema. Geht man von der Prismenformel aus, so sind die durch innere Condensation bei aromatischen *o*-Verbindungen entstehenden Atomverkettungen denen der entsprechenden Fettverbindungen nicht ganz analog.

 [1]

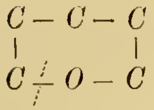
Tetrylon (V)[2].



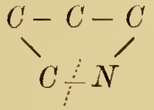
Benzol (Naphtalin, Anthracen) (V).



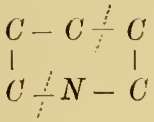
Furfuran (Thiophen) (II), γ-Lacton (III), Säureanhydrid (IV).



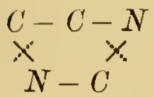
Pyronverbindungen (II), δ-Lacton (III), Säureanhydrid (IV), Aurin (II).



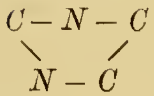
Pyrrol (VI), Lactam, Lactim (Indolkörper) (VII), Säureimid (IX).



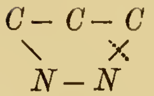
Chinolin, Acridin (Pyridinkern), Chinizin (V, VII), Lactam, Lactim (VII), Rosanilin etc. (VI).



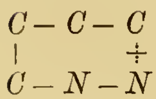
Anhydrobasen von Hübner u. Hobrecher etc. (VI), Hydantoin, Cyamidin (IX).



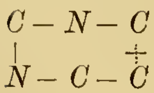
Verb. v. Plöchl (VII).



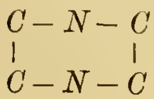
Hydrazinlactam (VII), Pyrazolverb. (VI).



Cinnolin (V).



Verb. v. Pinner (V).

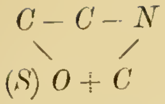


Anhydroverb. v. Hinsberg u. A. (Chinoxalin) (VII).

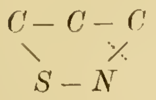
---

[1]) Die Striche bezeichnen die Stellen in der Verkettung, an welchen Schliessung der Kette stattgefunden hat.

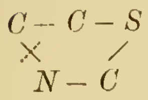
[2]) Die römischen Ziffern beziehen sich auf die Abschnitte dieser Abhandlung.



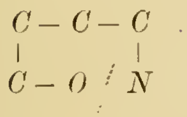
Anhydroverb. v. Ladenburg etc. (VIII).



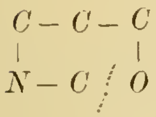
Sulfonsäureimid (IX).



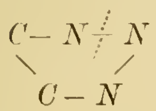
Thiohydantoin (IX).



Oximidlacton (III).



Cumazonverb. (VIII).



Azimidverb. (VI).

Es ist also thatsächlich eine besondere Neigung zu inneren Condensationen bei den Verbindungen vorhanden, in welchen Sauerstoff und Wasserstoff eine solche Stellung einnehmen, dass bei ihrem Austreten fünf- oder sechsgliedrige Atomverkettungen entstehen können. Auch viele andere als die hier behandelten Reactionen, welche zum Schliessen offener Atomketten führen, bestätigen, dass die organischen Verbindungen überhaupt Neigung zeigen, geschlossene Ketten von fünf oder sechs Atomen zu bilden. Auffallend ist, dass eine gewisse Entfernung in der Atomverkettung nöthig ist, um diese intramoleculare Reaction zu Stande zu bringen oder sie wenigstens wesentlich zu erleichtern. Man könnte die Ursache dieser Erscheinung darin suchen, dass der chemische Gegensatz der aufeinander reagirenden Atome grösser wird bei grösserer Entfernung in der Atomverkettung und dass die Reaction zwischen ihnen desswegen leichter stattfindet. Dagegen spricht aber der Umstand, dass das Entstehen von mehr als sechsgliedrigen Atomverkettungen nur in vereinzelten Fällen beobachtet wurde und die Beständigkeit solcher Verkettungen eine verhältnissmässig geringe ist. Diese Erscheinung muss auf räumlichen Verhältnisse im Molecüle beruhen. Die Annahme ist wohl nicht unberechtigt, dass die Reactionssphären der Atome, welche durch fünf oder sechs andere Atome getrennt sind, einander besonders nahe kommen.

Die Natur der verketteten Atome ist doch nicht ohne Einfluss auf die Leichtigkeit, mit der die innere Condensation stattfindet. Eine reine Kohlenstoffkette hat grössere Neigung sich durch Condensation zu schliessen, wenn sie sechs Atome, als wenn sie fünf Atome enthält. Dagegen entsteht eine Verkettung von vier Kohlenstoffatomen und einem Sauerstoff- oder Stickstoffatom leicht, im ersten Falle leichter als eine aus fünf Kohlenstoffatomen und einem Sauerstoffatom bestehende Kette u. s. w.

Aber auch andere Umstände, z. B. die Natur der an der Kette gebundenen Atome, sind bei dieser Reaction von Einfluss. Dieses geht z. B. aus einem Vergleich der Lactone und Säureanhydride mit einander und unter sich hervor. Ich verweise auf die resp. Abschnitte in der Abhandlung.

Unsere Kenntnisse von den chemischen Bedingungen der inneren Condensation sind noch ziemlich aphoristisch. Ein systematisches Studium dieser Vorgänge wird aber gewiss diese Bedingungen deutlicher hervortreten lassen, sowie überhaupt unseren Einblick in die chemische Statik der organischen Verbindungen wesentlich erweitern.

UEBER DIE

ELECTRICITÄTSLEITUNG DER GASE

VON

THEODOR HOMÉN.

I.

Ueber die Electricitätsleitung der Gase. I.

§ 1.

In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich gezeigt, dass bei Leitung der Electricität durch verdünnte Luft der Widerstand im Luftraume in zwei Theile getheilt werden kann, von welchen der eine Theil dem Abstande zwischen den Electroden proportional, der andere Theil von demselben unabhängig ist. Der erstere Theil wurde dem Widerstande des Gases selbst, der letztere einem Uebergangswiderstande an den Electroden zugeschrieben.

Schon durch frühere Untersuchungen, speciell von Hittorf,[2]) wurde das Vorhandensein eines besonderen Widerstandes an den Electroden gegen den Uebergang der Electricität von diesen in das Gas gezeigt. Weiter fand Edlund[3]), dass bei Entladung durch verdünnte Luft, ebenso wie im electrischen Lichtbogen,[4]) eine electromotorische Gegenkraft wirksam ist; dass also wahrscheinlich der erwähnte Uebergangswiderstand an den Electroden von einer solchen, während der Entladung thätigen electromotorischen Kraft ausgeübt wird. Im Folgenden behalte ich doch der Kürze wegen den Namen Uebergangswiderstand bei, welcher nicht ausschliesst, dass dieser Widerstand von einer electromotorischen Gegenkraft ausgeübt werden kann.

Bei meinen erwähnten Versuchen fand ich, dass der Widerstand der Luft dem Drucke proportional oder wenigstens nahezu proportional ist, dass er also mit abnehmendem Drucke stetig abnimmt, dass aber der Uebergangs-

---

[1]) Undersökning om elektriska motståndet hos förtunnad luft. Helsingfors 1883. Wied. Ann. Bd. 26, p. 55, 1885.

[2]) Hittorf, Pogg. Ann. Bd. 136, p. 1 u. 197, 1869.

[3]) Edlund, K. Sv. Vet. Akad. Handl. Bd. 20. Nr. 1, 1882; Ann. de chim. et de phys. Ser. 5, Bd. 27, p. 114, 1882.

[4]) Edlund, Öfversigt af K. Sv. Vet. Akad. Förh. für 1867, p. 95 und 637; für 1868 p. 3, 327 u. 457; f. 1869 p. 691; Pogg. Ann. Bd. 131, p. 586. 1867; Bd. 133, p. 353. 1868; Bd. 134, p. 250 u. 337. 1868; Bd. 139, p. 353, 1870.

widerstand an den Electroden bei grosser Verdünnung mit dieser schnell wächst. Diese Resultate standen also in Uebereinstimmung mit der Annahme Edlund's,[1]) dass das Vacuum für sich ein guter Leiter für Electricität ist, und dass die Schwierigkeit, die Electricität bei grosser Verdünnung zum Durchströmen zu bringen, nur auf dem grossen Uebergangswiderstand an den Electroden beruht.

Die erwähnten Versuche wurden mit Anwendung von Induktionsströmen ausgeführt. Die gesuchten Widerstände wurden dabei auf eine ganz specielle Weise berechnet. (Sie können nähmlich nicht auf dieselbe Weise wie der Widerstand bei festen Leitern berechnet werden, worüber weiterhin mehr.) Auf die Frage über die Natur dieser Widerstände brauchte ich doch nicht weiter einzugehen, als insofern sie den Umstand berührte, ob diese Widerstände quantitativ mit einander vergleichbar sind. Die Experimente zeigten, dass dies wenigstens annäherungsweise der Fall war. Aus einigen in meiner Abhandlung erwähnten Untersuchungen mit Anwendung von constanten galvanischen Strömen konnte man auch dasselbe schliessen. Spätere Untersuchungen von Hittorf[2]) widersprechen doch diesem, wenigstens für gewisse Fälle, ganz bestimmt.

Ich wollte jetzt mit Anwendung von constanten galvanischen Strömen die Gaswiderstände näher studiren mit besonderer Rücksicht, sie rationell messen zu können.

§ 2.

Es leuchtet sofort ein, dass sich der Widerstand bei Gasen wesentlich anders verhält, als der Widerstand bei festen Leitern. Während bei den letzteren auch die kleinste electromotorische Kraft einen Strom erzeugen kann, ist bei Gasen eine gewisse Spannung an den Electroden erforderlich, ehe die Electricität durchgehen kann.

Wie doch die Fortpflanzung der Electricität durch Gase vermittelt wird, und wie der hierbei auftretende Widerstand gegen den Durchgang der Electricität zu messen ist, darüber sind die Ansichten verschieden. G. Wiedemann sagt sogar in dem neu erschienenen IV. Bande seiner „Lehre von der Electricität", dass man bei den Gasen nicht von einem electrischen Leitungswiderstande in engerer Beziehung sprechen kann, sondern nur in verschiedenen Fällen die Potentialdifferenz an den Electroden bestimmen, die zur Einleitung

---

[1]) Edlund, K. Sv. Vet. Akad. Handlingar. Bd. 19, N:o 2, 1881; Wied. Ann. Bd. 15 p. 514, 1882.
[2]) Hittorf, Wied. Ann. Bd. 20, p. 705, 1883 u. Bd. 21, p. 90, 1884.

einer Entladung nöthig ist. (Jedoch verneint er nicht, dass die Wärmeproduktion, die Arbeitsleistungen, welche der durchgehende Strom im Gase ausführt, ein Mass des „so genannten Widerstandes“ im Gase bildet.) Es sind die prachtvollen und mannigfache Formen darbietenden Lichterscheinungen bei der Entladung, welche schon seit den ältesten Zeiten, in welchen man sich mit electrischen Entladungserscheinungen beschäftigt hat, den beinahe grössten Theil der Aufmerksamkeit der Physiker auf sich gezogen und zu einer ungeheuer grossen Menge von Beobachtungen, Erklärungen und Hypothesen Anlass gegeben haben. Ich will hier von den Arbeiten neuester Zeit ausser denen von Hittorf, nur die Untersuchungen und Hypothesen von Crookes, Goldstein und E. Wiedemann erwähnen.

Diese Lichterscheinungen hat man bis zum heutigen Tage in den innigsten Zusammenhang mit der Fortführung der Electricität selbst gestellt, wodurch die Auffassung von anderen Verhältnissen bei Gasentladungen gar nicht vereinfacht wurde. Wie man jetzt im Gegensatz zu der älteren Ansicht von G. Wiedemann und Rühlmann [1]) annehmen muss, dass die Fortpflanzung der Electricität durch Gase ohne jede translatorische Bewegung der Gasmolecule vor sich geht, so darf man auch [2]) annehmen können, dass die Lichterscheinungen z. B. die Kathodenstrahlen bei grösserer Verdünnung ein der Entladung nur begleitender Umstand sind und keineswegs den Weg der durchgehenden Electricität bezeichnen.

Was nun direkt die Widerstandsverhältnisse betrifft, so spricht Edlund [3]) ohne weiteres von einem electrischen Leitungswiderstande bei den Gasen, welcher jedoch von ganz verschiedener Natur und auf andere Weise zu messen ist, als der Widerstand bei festen Leitern. Dass ich mich dieser Ansicht anschliesse, geht aus meiner oben erwähnten Abhandlung hervor. Die Edlund'sche Auffassung stützt sich auf Beobachtungen über die Potentialdifferenz zwischen den Electroden in Geissler'schen Röhren bei durchgehendem galvanischen Strome. So wenige und isolirt diese Versuche auch noch sind, haben sie doch sehr interessante Resultate geliefert.

So fanden Warren de la Rue und Hugo Müller [4]) bei einigen Versuchen mit ihrer berühmten Chlorsilberbatterie die Potentialdifferenz zwischen den Electroden in Geissler'schen Röhren, durch welche der Strom geleitet wurde,

---

[1]) G. Wiedemann u. Rühlmann, Pogg. Ann. Bd. 145 p. 235 u. 364. 1872.

[2]) Hertz, Wied. Ann. 19, p. 782. 1883.

[3]) Edlund, Bihang till K. Sv. Vet. Akad. Handl. Bd. 6 N:o 7, 1881; Wied. Ann. Bd. 15, p. 165. 1882.

[4]) Warren de la Rue u. H. Müller, Phil. Trans. Bd. 169, p. 155. 1878.

constant, seblst wenn die Stromstärke, wie es einmal geschah, 135 Mal vergrössert wurde. Hittorf [1]) fand ebenfalls die Ladung eines Condensators, dessen Platten mit den Electroden einer Entladungsröhre mit Wasserstoffgas von 3 mm. Druck vereinigt waren, constant, wenn die Stromstärke 35 Mal vergrössert wurde. Wenn man also den Widerstand bei Gasen auf dieselbe Weise misst, wie bei festen Leitern (d. h. wenn man ihn dem Rheostatwiderstande, der ihn in jedem Falle compensirt, gleich setzt) würde also der Widerstand bei Gasen in umgekehrtem Verhältnisse zur Stromstärke stehen. In Analogie mit dem Ohmschen Gesetz würden wir also die Formel

$$i = \frac{E}{R + \frac{r}{i}}$$

erhalten, wobei i die Stromstärke, E die electromotorische Kraft, R den Widerstand in der festen Leitung, und r den Widerstand des Gases bei der Stromstärke 1 bezeichnen. Die angeführte Formel ist identisch mit:

$$i = \frac{E - r}{R}$$

In dieser Form wird die Formel durch zwei wenig bekannte Versuche von Varley [2]) mit einer Geissler'schen Röhre mit Wasserstoffgas und Aluminiumringen als Electroden bestätigt. Die Intensität des durchgehenden Stromes war der Formel

$$\frac{(P + n) - P}{R}$$

proportional, wobei P die kleinste Anzahl von Elementen bezeichnet, die (bei den erwähnten Versuchen 307 und 304 Daniel'sche Elemente) den Strom durchzutreiben im Stande war, $P + n$ die bei dem Versuche vorhanden gewesene Anzahl der Elemente, R den Widerstand in der Leitung ausserhalb des Gases. Es scheint also diesen Untersuchungen nach, dass der Widerstand bei Gasen auf ganz andere Weise gemessen werden muss, als derselbe bei festen Leitern.

Auf einfache und natürliche Weise erklärt Edlund [3]) diese Thatsache nach seiner unitarischen Aethertheorie. Ich komme hierauf, nachdem die Resultate

---

[1]) Hittorf, Wied. Ann. Bd. 7, p. 553. 1879.

[2]) Varley, Proc. Roy. Soc. Bd. 17, p. 236. 1871.

[3]) Edlund, l. c.

vorliegender Untersuchung dargelegt sind, zurück, will aber hier eine Frage von fundamentaler Wichtigkeit für die richtige Beurtheilung der Resultate der Entladungsversuche mit galvanischen Strömen beachten, die Frage, ob es wohl möglich ist, einen wirklich continuirlichen electrischen Strom durch einen Gasraum zu erhalten.

§ 3.

Als Hittorf im Herbste 1876 bei einer Zusammenkunft deutscher Physiker seine Ansicht aussprach, dass man mit einer galvanischen Batterie eine continuirliche Entladung durch verdünnte Gase erhalten konnte, stand er mit seiner Ansicht allein da. Gassiot hatte,[1]) als der erste, mit einer Batterie von 3,520 Elementen, die aus Zink, Kupfer und Regenwasser bestanden und später mit einer Batterie von 400 Grove'schen Elementen, ganz dieselben Erscheinungen, die sogenannte Glimmentladung, in verdünnten Gasen hervorgerufen, welche früher mit Electrisirmaschinen oder Inductorien erhalten wurden. Als er hierbei das scheinbar vollkommen kontinuirliche Bild der Glimmentladung der beiden Säulen im rotirenden Spiegel betrachtete, fand er, dass sich dieselbe in eine Reihe sehr rasch aufeinanderfolgender Partialentladungen zerlegen liess. Hiernach haben, wie Gassiot selbst, die meisten Physiker angenommen, dass eine geschichtete Entladung, wie die sogenannte Glimmentladung, niemals continuirlich sein könne. Dem widersprach, wie oben erwähnt, Hittorf. Dass die Glimmentladung bei Gassiots Versuchen discontinuirlich war, beruht seiner Ansicht nach auf dem grossen Widerstand in der Wasserbatterie. Wenn nur der Uebergangswiderstand an der Kathode und der übrige Widerstand in der Leitung hinreichend vermindert wurde, wodurch die Electricität schneller zu den Electroden fliessen konnte, so sollte die Entladung continuirlich sein. Die Richtigkeit dieser Ansicht ist bekräftigt.

Im Jahre 1879 fand Hittorf[2]) bei Versuchen mit einer Chromsäurebatterie von 1,600 Elementen, dass die Glimmentladung, welche bei sehr grossem Widerstande in der Leitung intermittirend war, bei vermindertem Widerstande plötzlich continuirlich erschien. Auf einmal wurden nämlich die Spiegelbilder im rotirenden Spiegel continuirlich, ein Condensator, dessen Platten mit den Electroden im Entladungsrohr verbunden waren, hörte auf, sich zu entladen (die wechselweisen Ladungen und Entladungen des Condensators bei

---

[1]) Gassiot, Phil. Trans. 1844, p. 32; Pogg. Ann. Bd. 119, p. 131. 1863.

[2]) Hittorf, Wied. Ann. Bd. 7, p. 553. 1879.

intermittirendem Strom hatten ein Tönen des Condensators hervorgebracht, welches jetzt aufhörte) und die Lichterscheinungen schienen durch die Influenz eines genäherten Leiters im Aussehen nicht verändert und überhaupt sehr constant und ruhig zu sein.

Hier kann man doch einwerfen, wie E. Wiedemann[1]) es gethan hat, dass, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit des Spiegels vermehrt würde, das continuirliche Lichtbild sich möglicherweise in discontinuirliche Streifen auflösen würde, dass also ein rotirender Spiegel niemals einen Beweis für absolute Continuität der Entladung liefern kann. Auch meinen Warren de la Rue und Hugo Müller,[2]) dass sie durch andere Methoden gefunden haben, das die Entladungen der Chlorsilberbatterie stets discontinuirlich waren. Hierauf zog Hittorf[3]) neue Argumente für die Continuität hervor. Ein in die Leitung eingeführtes Telephon, welches tönte, so lange die Entladung disconttnuirlich war und zugleich durch die Tonhöhe die Anzahl der Partialentladungen angab, hörte auf zu tönen in demselben Augenblicke als die früher erwähnten Zeichen Continuität des Stromes angaben; ein in die Verbindungsleitung des Condensators mit den Electroden eingeführtes Electrodynamometer, welches starke Ablenkungen für die alternirenden Ladungen und Entladungen des Condensators bei intermittirendem Strom gab, wurde dann auch ganz ruhig. Schon früher hatte Hertz[4]) mit grossem Scharfsinn eine Menge von Versuchen angestellt, die alle für Continuität der Entladung des galvanischen Stromes sprechen und besonders die Erwägungen von Warren de la Rue und H. Müller widerlegen. Es würde doch zu weit führen, diese Versuche hier zu beschreiben. Ein Resultat will ich doch nennen. Es lässt sich denken, dass, obgleich der Strom im festen Theil der Leitung, wie durch Telephon zu entscheiden, continuirlich ist, die Entladung im Gase doch aus einzelnen Partialentladungen bestehe, welche so schnell auf einander folgen, dass die denselben entsprechenden electrischen Wellen die feste Leitung bis zum Observationspunkte in der Zwischenzeit nicht mehr durchzusetzen vermögen. Hertz untersuchte nun, um hierüber entscheiden zu können, die Constanz des Stromes in unmittelbaren Nähe der Kathode durch Observation der Erwärmung eines 8 cm langen Silberdrahtes in Contact mit der Kathode einerseits und der einen Platte eines Condensators andererseits. Keine Erwärmung konnte observirt werden. Als der Strom dagegen deutlich discontinuirlich war, wurde der Ausschlag für die Erwärmung gross genug.

---

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. Bd. 10, p. 241. 1880.
2) Warren de la Rue u. Hugo Müller, Phil. Trans. Bd. 169, p. 155, 1878. Bd. 171, p. 65, 1879.
3) Hittorf, Wied. Ann. Bd. 20, p. 705. 1883.
4) Hertz, Wied. Ann. Bd. 19, p. 782. 1883.

Er wirft nun die Frage auf, ob es wohl wahrscheinlich ist, „dass der electrische Strom als vollständig ausgebildete Partialentladung mit allen Schichten ein 20 cm langes Gasrohr zu durchdringen vermag, in einer Zeit, in welcher er unfähig ist 8 cm eines guten metallischen Leiters gleichförmig zu durchsetzen“. Durch approximative Berechnung findet er ferner, dass, wenn die Entladung immer intermittirend wäre, die Zahl der Partialentladungen, damit die electrischen Wellen den Silberdraht nicht zu durchsetzen vermöchten, wenigstens über Tausende von Millionen, vielleicht etwa zu zwei Billionen in der Secunde steigen müsste. Also würde die Zahl der Partialentladungen, während sie bei vermindertem Widerstande erst allmählich und langsam wächst, dann von einigen Hunderten oder Tausenden, wie z. B. durch die Höhe des Tones im Telephon zu entscheiden ist, plötzlich zu Tausenden von Millionen hinaufspringen, in der That ein sehr unnatürlicher Sprung.

Man muss also nach den Versuchen von Hittorf und Hertz annehmen, dass die Entladung einer galvanischen Säule continuirlich sein kann, dass z. B. bei den Versuchen von Hittorf und Hertz die Entladungsströme continuirlich waren. Dies giebt auch G. Wiedemann in seiner „Lehre von der Electricität“ zu. Für eine entgegengesetzte Auffassung giebt es übrigens keinen einzigen positiven Grund.

Wir können nun auf die in § 2 erwähnten Versuche mit galvanischen Strömen bauen. Lassen wir auch die Versuche von Warren de la Rue und H. Müller ausser Rechnung, da diese Forscher selbst behaupten, dass die Ströme discontinuirlich waren, und ebenso die Versuche Varleys, bei welchen keine Probe über die Continuität des Stromes vorliegt, so haben wir noch die Resultate Hittorfs übrig. Später hat auch Hittorf[1]) neue mehr umfassende Untersuchungen zu den früheren hinzugefügt. Er fand bei den späteren Versuchen, dass nur im positiven Lichte der Entladungsbahn die Potentialdifferenz zwischen verschiedenen Punkten in derselben constant, von der Stromstärke unabhängig war, dass aber die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und einem Punkte vor derselben mit der Stromstärke etwas zunahm, wenn die Kathode nicht lang genug war, um es dem Glimmlichte zu erlauben, bei wachsender Stromstärke sich frei über eine immer grössere Fläche auszubreiten. Diese Resultate sind von den früher erwähnten ein wenig verschieden. Ich gehe hier zur Beschreibung meiner Versuche über. Diese sind im physikalischen Laboratorium der hiesigen Universität gemacht, dessen Vorstand, Herrn Professor Lemström, ich hierfür meinen besten Dank ausspreche. Die Versuche sind

[1]) Hittorf, Wied. Ann. Bd. 20, p. 705, 1883 u. Bd. 21, p. 90, 1884.

übrigens nur durch die Freigebigkeit der akademischen Verwaltung ermöglicht worden, welche im Herbst 1883 die Mittel zur vorliegenden Untersuchung zu meiner Verfügung stellte.

§ 4.

Als Electricitätsquelle diente eine Tauchbatterie von 1248 BUNSEN'schen Chromsäureelementen, auf sechs grossen hölzernen Gestellen (siehe Fig. 1) aufgestellt. Die Gefässe waren 25 cm hoch und etwas über 5 cm im inneren Durchmesser. Die Kohlenplatten, aus möglichst fester Retortenkohle ausgeschliffen, waren 10,5 cm lang, 2 cm breit, die Zinkplatten mit ellipsenförmiger Durchschnittsfläche von ca 1,8 und 1,4 cm Durchmesser, waren 10 cm lang.

Die Kohlen und Zinke waren mit ca 12 cm langen Kupferstreifen an einander gelöthet (die Enden der Kohlenplatten waren galvanisch verkupfert) und über horizontale Glasröhren (*AA*) gehängt, welche wie die Sprossen einer Leiter in einem hölzernen Rahmen (*BB*) eingepasst waren. Dieser Rahmen konnte mit einer Hebelvorrichtung (*CC*) gehoben und gesenkt, die Platten also schnell und bequem in die Säure getaucht oder über dieselbe erhoben werden. Zu jedem Rahmen gehörten 104 ($= 13 \times 8$) Elemente. Die Säule bestand aus 12 solchen Complexen, zwei und zwei auf demselben Gestell. Die Isolation war bei der erwähnten Vorrichtung sehr vollständig. Die Glasröhren und Kupferstreifen, sowie der untere Theil der Aussenseite der Gefässe waren mit Asfaltlack gefirnisst. Die Batteriegestelle hatten Glasfüsse. Alles Glas war Kaliglas.

Weil die Zinke von der Chromsäurelösung verzehrt werden, auch wenn die Leitung offen ist, so waren sie, um ein allzu schnelles Verbrauchen zu verhindern, zum grössten Theil mit Paraffin überzogen. Nur die Unterseite und der unterste Theil der Vorderseite waren unbedeckt und gut amalgamirt. In die Flüssigkeit wurde auch ein wenig Quecksilbersulphat zugesetzt, um die Amalgamirung der Zinke zu bewahren. Von den Elementen konnte ausser einem ganzen Komplexe von 8×13 Elementen auch eine Reihe von je 13 entfernt oder eingeschaltet werden. Alle Kontakte wurden durch Quecksilber in Ebonitnäpfchen (*DD*) vermittelt.

Bei Anwendung zeigte sich, dass die Batterie sehr gut funktionirte. Ich habe sie schon ziemlich viel angewandt und die electromotorische Kraft ist kaum vermindert. Sie beträgt etwa 1,95 Volt in jedem Element, wird jedoch immer bei längerer ununterbrochener Anwendung ein wenig vermindert. Uebrigens kann ein solches Element, wenn nur schwache Ströme (grosse Widerstände) angewandt werden, wie ich es bei meinen Versuchen hatte, sehr lange funktioniren. Bei einigen Vorversuchen mit verschiedenen solchen Elementen, wobei die Zinkplatten ungleich grosse Flächen unbedeckt hatten, konnten Elemente von derselben Beschaffenheit wie die obenbeschriebenen viele Hundert Stunden in Thätigkeit sein ohne allzu viel schwächer zu werden. Die electromotorische Kraft eines solchen Elementes, anfangs gleich 2,0 Volt gesetzt, (die Reduktion zu Volt war nicht ganz zuverlässig) betrug, nachdem das Element durch eine Leitung von 510 Ohm Widerstand in 50, 100, 200, 300, 400 Stunden geschlossen, 1,85, 1,76, 1,64, 1,45, 1,30 Volt. Hierbei wurden doch die Zinke bisweilen aus der Flüssigkeit gehoben und die Flächen gereinigt, wodurch die Stromstärke immer vergrössert wurde. Nach längerem Gebrauch werden nämlich die Elemente ziemlich inconstant, so dass, wenn die Elemente ununterbrochen geschlossen gewesen wären, die Stromstärke schwächer als hier oben angegeben wäre. Die zwei letzten Beobachtungen sind besonders nicht lange nach dem Schliessen des Stromes gemacht. Gleich nach dem Schliessen ist der Strom stärker, dann aber schwächer als hier oben angegeben. Ein Nachtheil bei den Elementen, von der Kleinheit der Zinkoberfläche herrührend, ist, dass der Widerstand nach längerem Gebrauch sehr gross wird. Von weniger als 1 Ohm in einem frischen Element wächst der Widerstand nach längerem Gebrauche, besonders wenn die Zinke nicht gereinigt werden zu 20 und 30 Ohm. Die Zinke waren übrigens nicht gut gegossen. Sie waren nicht in allen Theilen fest genug.

In den Entladungsröhren, welche aus Glas bestanden, versuchte ich den Abstand zwischen den Electroden bei unverändertem Druck verändern zu können. Bei früheren Untersuchungen[1]) hatte ich denselben Zweck dadurch erreicht, dass die drahtförmigen Electroden durch zwei an den Enden der Röhre, zwischen zwei Korken liegenden Oelräume in die Röhre eingeschoben werden konnten. Jetzt wollte ich doch das Oel vermeiden. Ich hatte daher (siehe Fig. 2) die Anode (*a*) mit einem spiralförmigen, übersponnenen, weichen Kupferdraht (*b*) verbunden, durch welchen der Strom eingeleitet wurde. Um die Anode war weiter eine cylindrische Ebonitpiece (*d*) von einem etwas kleineren Durchmesser als der innere Durchmesser der Röhre gepasst. Auf der Mantelfläche des Ebonitcylinders war ein weiches Eisenstück eingepasst. Wenn die Seite mit dem Eisenstück nach oben gerichtet war, so konnte jetzt mit einem Hufeisenmagnet von aussen der ganze Cylinder mit der Anode hin und her geschoben werden, ohne dass man den Luftdruck auf die mindeste Weise veränderte. Von zwei an die Röhre angeklebten Papierscalen konnte der

[1]) Homén, Wied. Ann. Bd. 26, p. 55. 1885.

Abstand zwischen den Electroden genau abgelesen werden. Aus später angegebenen Gründen wurden zwei Entladungsröhren mit ungleichen Electroden gleichzeitig in Verbindung mit der Luftpumpe gesetzt. In der einen bestanden die Electroden aus Aluminiumdraht, spiralförmig zu einer Scheibe (*a* und *c*) aufgewickelt. Der hintere, gerade Theil des Electrodendrahtes war von einem feinen Glasrohr umgeben, so dass die Electricität ausschlieslich von dem plattenförmigen, vorderen Theil der Electroden ausströmte. In dem zweiten Rohr bestanden die Electroden aus zum grössten Theil von umhüllenden Glasröhren bedeckten 0,7 mm dicken Platindrähten. Nur 1 mm der Drahtenden war unbedeckt. Der innere Durchmesser der Entladungsröhren war etwa 1,6 cm.

Die Luftpumpe war eine Töpplersche Quecksilberpumpe von BESSEL-HAGENS Construktion[1]). Hähne wurden nicht angewandt. Um Luft oder ein anderes Gas in die Pumpe einführen zu können, war eine von BESSEL-HAGEN, in oben citirter Abhandlung beschriebene specielle Vorrichtung mit der Rohrleitung vereinigt. Ein Druck unter 1,8 mm in der Pumpe konnte auf die von BESSEL-HAGEN angegebene Weise sehr genau bestimmt werden. Höhere Drucke wurden durch Ablesen des Quecksilberstandes in dem barometerähnlichen 7,8 mm weiten Schenkelrohr der obenerwähnten Gaseinlass-Vorrichtung bestimmt.

Zur Messung der Stärke des durch das Entladungsrohr geführten galvanischen Stromes diente ein gewöhnliches Galvanometer mit astatischer Nadel und 3 ziemlich dicken, aufgewickelten Kupferdrähten, in 40 Windungen jeder. Das Ablesen geschah mit Spiegel, Tubus und Scala und wurde die Stromstärke dann in Ampère reducirt. Die Scala war in Millimeter eingetheilt und die Entfernung derselben vom Spiegel bei den meisten Versuchen 2115 mm. Wenn nur eine Drahtleitung benutzt wurde, so entsprach einem Ausschlag von 1 Scalentheil eine Stromstärke von 321×10^{9} Ampère, wie dies durch Versuch mit einem DANIELL'schen Normalelement geprüft wurde. Bei zu grosser Stromstärke wurden Brücken vor dem Galvanometer angewandt, und die Stromstärke wieder in Ampère reducirt.

Zum Rheostatenwiderstand wurde eine Lösung von Jodcadmium in Amylalkohol angewandt. Diese Lösung, 1 Theil Jodcadmium auf 10 Theile Amylalkohol, wird von HITTORF[2]), der sehr umfassende electrolytische Untersuchungen gemacht hat, besonders empfohlen, wenn es sich darum handelt, sehr grosse Widerstände hervorzubringen. Ich fand auch die Lösung ganz vortrefflich. Ich hatte 5 Glasröhren (*AA*, siehe Fig. 3) von ca 85 cm länge und respek-

---

[1]) BESSEL-HAGEN, Wied. Ann. Bd. 12, p. 425. 1881.

[2]) HITTORF, Pogg. Ann. Bd. 106, p. 554. 1859; Wied. Ann. Bd. 7, p. 553. 1879.

tive 28,1, 18,1, 11,0, 7,1 und 4,6 mm Durchmesser. Der Widerstand war sehr bedeutend und betrug in einer Säule von nur 1 mm Länge in dem weitesten Rohr 498 Ohm in den übrigen 1199, 3149, 7750, 18568 Ohm. Als Electroden dienten Cadmiumplatten (*a* und *c*) von beinahe demselben Durchmesser wie die Röhren. Die untere Platte (*c*, die Röhren standen vertikal), als Kathode dienend, war fest, die obere beweglich. In einem schmalen, kegelförmigen Vorsprung auf der Hinterseite der Platten waren bei den unteren Platindrähte, bei den oberen lange Kupfer- oder bei den zwei kleinsten Röhren Cadmiumdrähte eingepresst. Die Platin- und Kupferdrähte waren von feinen passenden Glasröhren umgeben. Der Platindraht der unteren Platte war in den Boden des Rheostatenrohres eingeschmolzen. Die Röhren steckten mit diesen Enden in kleinen Ebenitnäppchen (*dd*) mit Quecksilber, in welches der Platindraht eintauchte und durch welches der Strom eingeleitet wurde. Die obere Electrode konnte durch ein Kautschukhäutchen, das als Deckel der Rheostatenröhre diente, hin und her geschoben werden. Die Klotze *B* mit dem Ebenitnäppchen *e* war zu diesem Zwecke beweglich. Die Rheostatenröhren wurden durch eine Ebenitplatte *C* mit fünf Löchern aufrecht erhalten. Die Polarisation in diesen Röhren war sehr gering, nur einige Hunderstel eines Volts.

Um die Continuität des Stromes zu prüfen wurde ein Telephon in die Leitung eingeführt.

§ 5.

Ich wollte untersuchen wie der Gaswiderstand zu messen ist, und zuerst, ob die in § 2 angegebene Formel für die Stromstärke bei continuirlicher Gasentladung

$$i = \frac{E - r}{R},$$

wobei i die Stromstärke, E die electromotorische Kraft, R den Widerstand in fester Leitung und r den Widerstand in der Entladungsröhre bezeichnet, richtig ist. Hierfür wurde bei den Versuchsreihen sowohl die electromotorische Kraft (die Zahl der Elemente in der Batterie) als auch der Rheostatenwiderstand verändert, und die entsprechende Stromstärke beobachtet, wobei geprüft worden ist, ob die Quantität $r = E - iR$ constant erscheint. Die Versuche wurden mit Luft bei drei verschiedenen Drucken 0,089, 0,25 und 1,69 mm mit beiden Entladungsröhren, dem mit Aluminium-Electroden und dem mit solchen von Platina vorgenommen. (Bei einem niedrigeren Druck 0,048 mm konnten 1248 Elemente in Folge des grossen Widerstandes an den Electroden durch keine von den beiden Entladungsröhren einen Strom treiben). Observationsreihen wurden bei Abständen von 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 cm zwischen den Electroden, am vollständigsten bei 4, 13, 19 cm gemacht. Die Stromstärke wurde durch Ablesen von drei auf einander folgenden Umkehrpunkten der Galvanometernadel bestimmt. Die Observationen wurden bei den meisten Reihen wiederholt. Die beiden Beobachtungsresultate weichen jedoch nur selten über 2% von dem Mittelwerthe ab, so dass ich in den untenstehenden Tabellen nur diese Mittelwerthe angebe. Vor und nach jedem Versuch wurde die electromotorische Kraft der 208 Elemente eines jeden Batteriegestelles bestimmt, und zwar durch Observation der Stromstärke bei bekanntem, grossem Widerstande in der Leitung. Ebenso musste der Widerstand in der Batterie bestimmt werden. Er war nämlich, wie oben erwähnt, so gross, dass er, obgleich die Rheostatenwiderstände in der Leitung sehr bedeutend waren, doch nicht ganz versäumt werden konnte. Ich führe hier zuerst die Resultate der Versuche mit Alumium-Electroden an. In den Fällen, wo ein $\vee$ vor die Zahlen gesetzt ist, war der Strom discontinuirlich, was durch das Tönen des Telephons und die Beschaffenheit des Lichtphänomens zu entscheiden war. Wenn die electromotorische Kraft nur wenig grösser war, als die kleinste solche, die einen Strom durchzusenden vermag, musste die Entladung erst durch fremde Hülfsmittel eingeleitet werden. Zu solcher Einleitung ist bisweilen nur die Annäherung des Fingers zur Röhre nöthig. In anderen Fällen musste ich die Entladung einer Electrisirmaschine durch die Röhre leiten, oder einen Funken auf einen an die Röhre gelegten Leiter überspringen lassen. In den Fällen, wo sich ein $\smile$ in den Tabellen findet, dauerte der Strom nur einen Moment nach der Einleitung fort und konnte nicht gemessen werden. In den Tabellen sind nicht nur die direkten Beobachtungsresultate angegeben, sondern auch neben diesen die nach der oben angegebenen Formel $i = \frac{E - r}{R}$ hieraus berechneten Werthe für den Widerstand r im Entladungsrohr. Die Stromstärke i ist hierbei in Ampère, die electromotorische Kraft E in Volt und der Widerstand R in Ohm gemessen. Es wurden folgende Resultate erzielt.

Spannkraft der Luft 0,089 mm. Temperatur 16,5° C.
Rheostatenwiderstand 1833000 Ohm. Aluminium-Electroden.

Zahl der Elemente.	Electro-motorische Kraft.	Stromstärke in 10^{-6} Ampère bei			Berechneter Widerstand (r) im Entladungsrohr bei		
		4 cm Abstand zw. d Electroden.	13 cm Abstand zw. d. Electroden.	19 cm Abstand zw. d. Electroden.	4 cm. Abstand zw. d. Electroden.	13 cm Abstand zw. d. Electroden.	19 cm Abstand zw. d. Electroden.
6 × 104	1175 Volt.	⌣	0	0			
7 × 104	1360 „	140	117	94	1099	1142	1185
8 × 104	1545 „	190	175	155	1190	1218	1255
10 × 104	1910 „	310	310	280	1329	1329	1385
12 × 104	2280 „	430	420	398	1470	1489	1530

Spannkraft der Luft 0,089 mm. Temp. 16,5° C.

Widerstand in der Leitung mit 7 × 104 Elementen eingeschaltet.	Stromstärke in 10^{-6} Ampère bei					Berechneter Widerstand (r) im Entladungsrohr bei				
	4 cm Abst. zw. d. Electroden u. 10.104 Elem.	4 cm Abst. zw. d. Electroden u. 7.104 Elem.	13 cm. Abst. zw. d. Electr. u. 10.104 Elem.	19 cm Abst. zw. d. Electroden u. 10.104 Elem.	19 cm Abst. zw. d. Electroden u. 7.104 Elem.	4 cm Abst. zw. d. Electroden u. 10.104 Elem.	4 cm Abst. zw. d. Electroden u. 7.104 Elem.	13 cm Abst. zw. d. Electr. u. 10.104 Elem.	19 cm Abst. zw. d. Electroden u. 10.104 Elem.	19 cm Abst. zw. d. Electroden u. 7.104 Elem.
332000 Ohm	710	285	665	695	184	1665	1265	1681	1670	1299
767000 „	450	202	435	430		1559	1205	1570	1570	
1870000 „	310	140	310	280	94	1327	1099	1327	1384	1184
4590000 „	145	75	135	130		1243	1016	1289	1312	
12720000 „	65	36	65	63	∨ 15	1083	902	1083	1108	∨ 1170

Die Lichterscheinung war bei diesem wie bei den höheren Drucken sehr intensiv, sogar am hellen Tage stark hervortretend. Sie zeigte die Gestalt einer Glimmentladung, war übrigens ziemlich verschieden bei continuirlichem und discontinuirlichem Strome. Ich gebe hier zuerst eine skizzirte Zeichnung von derselben bei continuirlichem Strome.

Das Licht *a* bei der Kathode ist gelbviolett, *b* dunkelblau, mattleuchtend, *c* hellblau, hellleuchtend, *d* hellblau, mattleuchtend und immer dunkler gegen die positive Seite hin; *e* ist das scharf geschichtete, rosenfarbige, sehr hellleuchtende positive Licht.[1]) Das Licht ist ganz unempfindlich für einen genäherten Leiter, nur die Spitze des positiven Lichtes bewegt sich bisweilen, doch kaum merkbar vorwärts, wenn ihm z. B. der Finger bis dicht an die Röhre genähert wird.

Ein Verhältniss, dass ich nicht früher in der Litteratur gefunden habe, ist, dass das positive Licht sich immer ein wenig verlängerte, wenn die Stromstärke vermindert wird. So ist z. B.

bei einer Stromstärke von	695,	430,	280,	130,	65×10^{-6} A. E.[2])
Abst. zw. d. pos. Licht und der Kathode bei { 19 cm Schlagw. =	13,4[3])	12,6	12,0	11,2 cm	disc. Entl.
13 „ „	(kein pos. Licht)	12,6	11,9	11,0	9,2 cm.

Bei diesen Veränderungen bewegt sich das ganze positive Licht (alle Schichten) vorwärts, so dass die bei Stromstärke 695×10^{-6} A. E. unvollständige, vierte Schicht an der Anode (siehe obige Zeichnung), bei Stromstärke 430 vollständig wird, und dass bei den Stromstärken 280 und 130.10^{-6} ampère Theile von einer fünften Schicht herauskommen. Dagegen behalten die Schichten ihren Platz unverändert, wenn die Anode, wie ich es unter bestehendem Strome versucht, vorwärts oder rückwärts geschoben wird. Nur verschwinden hierbei Schichten oder es treten neue an der Anode hervor. Wir finden auch in der obigen Zusammenstellung die Spitze des positiven Lichtes bei 13 cm Schlagweite auf demselben Abstande von der Kathode entfernt, wie bei 19 cm Schlagweite bei entsprechender Stromstärke.

Bei intermittirender Entladung hatte das Kathodenlicht ungefähr dasselbe Aussehen wie bei continuirlicher, war aber mehr veränderlich und sehr empfindlich für einen genäherten Leiter. Das positive Licht war dagegen verschieden. Die nachstehende Zeichnung giebt die gewöhnlichste Form desselben an.

---

[1]) Einen kleinen dunklen Raum am nächsten um die Kathode wie E. WIEDEMANN bei Versuchen mit einer HOLTZ'schen Maschine es beobachtet hat, habe ich weder bei diesem noch bei höheren Drucken beobachtet.

[2]) Bei 13 cm Schlagweite hat die Stromstärke von diesen ein wenig abweichende Werthe. (Siehe die Tabelle.)

[3]) Wie in obiger Zeichnung.

Beim Annähern eines Leiters fliessen oft die beiden birnförmigen Theile des violetten, mattleuchtenden positiven Lichtes zusammen und verlängern sich über den grössten Theil der Röhre. Wenn so dieses Licht nahe der Kathode kommt, so erlöscht oft das ganze Lichtphänomen und die Entladung hört auf.

Spannkraft der Luft 0,25 mm. Temp. 18,0° C.
Rheostatenwiderstand 733000 Ohm. Aluminium-Electroden.

Zahl der Elemente.	Electromotorische Kraft.	Stromstärke in 10^{-6} Ampère bei			Berechneter Widerstand (r) im Entladungsrohr bei		
		4 cm Abstand zw. d. Electroden.	13 cm Abstand zw. d. Electroden.	19 cm Abstand zw. d. Electroden.	4 cm Abstand zw. d. Electroden.	13 cm Abstand zw. d. Electroden.	19 cm Abstand zw. d. Electroden.
$2\frac{1}{2} \times 104$	473 Volt.	77			416		
$3 \times$ „	566 „	176	0		436		
$3\frac{1}{2} \times$ „	659 „	272	129	0	457	564	
$4 \times$ „	750 „	367	219	135?	478	587	650
$4\frac{1}{2} \times$ „	843 „		309			613	
$5 \times$ „	936 „	555	400	313	521	637	701
$5\frac{1}{2} \times$ „	1029 „	648			544		
$6 \times$ „	1122 „	747	587	479	559	679	761
$6\frac{1}{2} \times$ „	1214 „	841	683		578	698	
$7 \times$ „	1307 „	938	772	680	596	722	792
$7\frac{1}{2} \times$ „	1399 „	1036	872		611	737	
$8 \times$ „	1492 „	1122	979	891	638	747	824
$9 \times$ „	1674 „	1317		1082	666		856
$10 \times$ „	1856 „	1518		1270	690		880
$11 \times$ „	2039 „	1714		1469	715		905
$12 \times$ „	2223 „	1917		1659	735		935

Spannkraft der Luft $0{,}25$ mm. Temp. $18{,}0^0$ C.
Aluminium-Electroden.

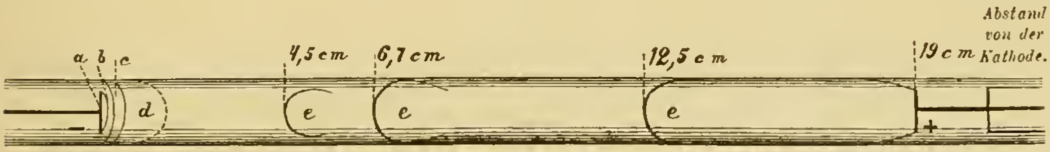
Widerstand in der Leitung mit 5×10^4 Elem. eingeschlossen.	Stromstärke in 10^{-6} Ampère bei			Berechneter Widerstand (r) im Entladungsrohr bei		
	4 cm Abst. zw. d. Electr. u. 4.10^4 Elem. (750 Volt.)	13 cm Abst. zw. d. Electr. u. 5.10^4 Elem. (930 Volt.)	19 cm Abst. zw. d. Electr. u. 6.10^4 Elem. (1115 Volt.)	4 cm Abst. zw. d. Electr. u. 4.10^4 Elem.	13 cm Abst. zw. d. Electr. u. 5.10^4 Elem.	19 cm Abst. zw. d. Electr. u. 6.10^4 Elem.
310000 Ohm.	699	741	965	536	700	812
745000 „	368	381	474	477	646	760
1845000 „	165	179	227	445	599	695
4570000 „	71	∨ 70	106	425	∨ 610	630
12700000 „	∨ 23	∨ 15	0	∨ 454	∨ 740	

Das Lichtphänomen kann als eine Modifikation desselben beim vorigen Druck betrachtet werden, indem es mehr nur durch die ungleiche Ausdehnung der einzelnen Lichttheile von diesem verschieden ist. Das ganze Kathodenlicht war verkürzt, das positive Licht dagegen verlängert. Folgende Zeichnung giebt ein Bild des Lichtes bei continuirlicher Entladung bei 19 cm. Abstand zwischen den Electroden und einer Stromstärke von $810.\ 10^{-5}$ Ampère.

Die Lichte *a, b, c, d* sind gleich den betreffenden bei $0{,}089$ mm Druck. Das positive Licht *e* ist weniger scharf geschichtet als bei dem erwähnten Druck; beinahe immer konnten doch fünf scharf markirte Schichten an dem Ende des positiven Lichtes gerechnet werden. Gewöhnlich war auch das ganze Licht wenigstens schwach geschichtet, und wurden dann bei 19 cm Schlagweite 11 Schichten gerechnet. Uebrigens ist das Licht unempfindlich für einen genäherten Leiter; beim Zunehmen der Stromstärke rückt dagegen das positive Licht, wie bei 0,089 mm Druck ein wenig zurück, weiter von der Kathode, ist aber unbeweglich bei Verschiebung der Anode, wenn nur die Stromstärke hierbei unverändert beibehalten wird. In der Versuchsreihe, wo die electromotorische Kraft verändert wurde (siehe die Tabelle) war also

bei einer Stromstärke v. 1556, 1375, 1185, 992, 810, 620, 424, 255, 121×10^{-6} A. E.
d. Abst. zw. d. Kathode u. dem pos. Lichte gleich 7,3 7,1 6,9 6,8 6,6 6,4 6,4 6,2 cm. disc. Entl.

Bei discontinuirlicher Entladung war das Kathodenlicht kleiner als bei continuirlicher. Das positive hatte sehr verschiedene Formen, bestand gewöhnlich aus zwei oder drei ziemlich mattleuchtenden Theilen. In dem obenerwähnten Fall von discontinuirlicher Entladung bei 19 cm Schlagweite bestand es z. B. aus drei abgebrochenen Theilen, wie es die folgende Zeichnung angiebt.



Die gegen die Kathode geneigte Seite der positiven Lichttheile ist schärfer begrenzt und heller leuchtend als die entgegengesetzte. Uebrigens verändert sich das Lichtphänomen sehr beim Annähern eines Leiters. Das positive Licht fliesst zusammen und dehnt sich aus, wobei die Entladung oft erlöscht.

Spannkraft der Luft 1,69 mm. Temp. 18° C.
Aluminium-Electroden.

Zahl der Elemente.	Electro-motorische Kraft.	Stromstärke in 10^{-6} Ampère bei					
		4 cm Abst. zw. d. Electroden und einem Rheostatenwiderstand von		10 cm Abst. zw. d. Electroden und einem Rheostatenwiderstand von		19 cm Abst. zw. d. Electroden und einem Rheostatenwiderstand von	
		298000 Ohm.	733000 Ohm.	298000 Ohm.	733000 Ohm.	298000 Ohm.	733000 Ohm.
3 × 104	579 Volt.	⌣	0				
4 × „	768 „	999	372				
5 × „	954 „	1525	652				
6 × „	1140 „	2019	863	1161	⌣	⌣	
8 × „	1509 „	3040	1302	2191	954	833	⌣
10 × „	1868 „	3975	1745	3179	1393	1946	872
12 × „	2230 „		2178	4113	1837	2905	1317

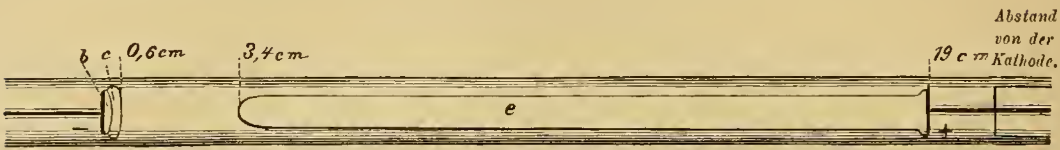
Zahl der Elemente.	Electro-motorische Kraft.	Berechneter Widerstand (r) im Entladungsrohr bei					
		4 cm. Abst. zw. d. Electroden und einem Rheostatenwiderstand von		10 cm Abst. zw. d. Electroden und einem Rheostatenwiderstand von		19 cm Abst. zw. d. Electroden und einem Rheostatenwiderstand von	
		298000 Ohm.	733000 Ohm.	298000 Ohm.	733000 Ohm.	298000 Ohm.	733000 Ohm.
3 × 104	579 Volt.						
4 × „	768 „	452	489				
5 × „	954 „	466	462				
6 × „	1140 „	493	484	763			
8 × „	1509 „	490	506	774	774	1230	
10 × „	1868 „	505	510	777	784	1200	1190
12 × „	2230 „		518	786	786	1210	1195

Spannkraft der Luft 1,69 mm. Temp. 18° C.
Aluminium-Electroden.

Widerstand in der Leitung mit 8 × 104 Elementen eingeschlossen.	Stromstärke in 10^{-6} Ampère bei					
	4 cm Abst. zw. d. Electroden und		10 cm Abst. zw. d. Electroden und		19 cm Abst. zw. d. Electroden und	
	6.104 Elem. 1140 Volt.	8.104 Elem. 1509 Volt.	8.104 Elem. 1509 Volt.	10.104 Elem. 1868 Volt.	8.104 Elem. 1509 Volt.	10.104 Elem. 1868 Volt.
336000 Ohm.	2019	3040	2191	3179	833	1946
771000 „	863	1302	954	1393		872
1870000 „	333	546	392	584		274
4590000 „	√ 126	√ 212	√ 152	√ 250		
12700000 „	√ 44	√ 74	◡	√ 78		

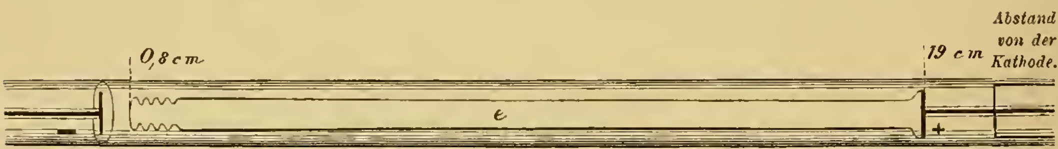
Widerstand in der Leitung.	Berechneter Widerstand (r) im Entladungsrohr bei					
	4 cm Abst. zw. d. Electr. u.		10 cm Abst. zw. d. Electr. u.		19 cm Abst. zw. d. Electr. u.	
	6.104 Elem.	8.104 Elem.	8.184 Elem.	10.104 Elem.	8.104 Elem.	10.104 Elem.
336000 Ohm.	493	490	774	777	1230	1200
771000 „	484	506	773	784		1190
1870000 „	520	488	775	770		1215
4590000 ..	√ 563	√ 536	√ 811	√ 718		
12700000 „	√ 581	√ 570		√ 877		

Das Lichtphänomen war bei diesem Druck von den oben beschriebenen bei niedrigen Drucken ziemlich verschieden. Das Kathodenlicht war noch mehr verkürzt und das gelbe Licht zunächst um die Kathode verschwunden. Das positive Licht war ungeschichtet und seine Farbe zwischen Kupfer und Rosa. Es war sehr verlängert, aber von viel kleinerem Durchmesser als das Entladungsrohr. Folgende Zeichnung giebt die Form des Lichtes bei continuirlicher Entladung bei 19 cm Abstand zwischen den Electroden.



Das Licht *b* war dunkelblau, *c* tief rothviolett, das positive *e* kupferfarbig, bisweilen etwas in Rosa. Der Abstand zwischen Kathode und positivem Lichte war beinahe immer 3,4 cm wie in obiger Zeichnung, niemals darüber; bei schwachen Strömen, wie vorher, kleiner, bis zu 2,8 cm. Bei den stärksten Strömen war die Kathode auf beiden Seiten von Licht bedeckt. Dasselbe war oft auch bei discontinuirlicher Entladung der Fall.

Folgende Zeichnung giebt ein Bild dieser Entladung.



Das Kathodenlicht war blau, das positive blauviolett, matter leuchtend als bei continuirlichem Strome, oft mit vier oder fünf 2 mm langen Schichten, welche sich zunächst der Kathode zeigten. Der Abstand zwischen Kathode und positivem Lichte war 0,7 oder 0,8 cm, veränderte sich beim Nähern eines Leiters, wobei die Entladung oft erlöschte.

Was jetzt die Kriterien für Discontinuität der Entladung, besonders das Tönen des Telephons, betrifft, so wurde im Allgemeinen bei allen Drucken in den Fällen, wo das Aussehen des Lichtes Discontinuität angab, auch ein stärkerer oder schwächerer Ton im Telephon gehört; niemals dagegen, wenn die Entladung continuirlich erschien. Bei dem niedrigsten Druck konnte es bisweilen vorkommen, dass das Aussehen des Lichtes Discontinuität angab, ohne dass das Telephon tönte. Dies kann vielleicht darauf beruhen, dass die Partialentladungen so schnell aufeinander folgen, dass ein vernehmlicher Ton im Telephon nicht entstehen kann. Die Höhe der gehörten Töne wechselt auch sehr; sie war bisweilen ausserordentlich gross. Im Allgemeinen kann man sagen, dass der Ton höher wurde, wenn der Abstand zwischen den Electroden oder der Rheostatenwiderstand in der Leitung vermindert wurde. Es liegt also nichts Unmögliches in der Annahme, dass bisweilen die Entladungen zu schnell aufeinander folgen, um einen vernehmlichen Ton im Telephon hervorzubringen. Uebrigens wechselte beim Annähern eines Leiters an die Röhre die Tonhöhe mit dem Aussehen des Lichtes. Sie wurde höher beim Annähern eines Leiters. Durch wechselweises Anlegen oder Entfernen des Fingers von der Röhre konnte so das Telephon zwei bestimmte Töne spielen. Die Stärke der Töne war auch sehr verschieden. Bisweilen musste das Ohr dicht an das Telephon gelegt werden, um das Tönen zu vernehmen, bisweilen wurde der Ton in Abständen von vielen Metern sehr laut gehört.

§ 6.

Betrachten wir nun die Observationsresultate und besonders die für die Grösse r erhaltenen Werthe bei den verschiedenen Drucken, so tritt klar hervor, wie bei dem höchsten Druck 1,69 mm die Werthe auf r beinahe constant sind, nur sehr wenig mit der Stromstärke wachsen, bei den beiden niedrigen Spannungen 0,25 und 0,089 mm dagegen mit der Stromstärke zunehmen und dies am meisten bei dem niedrigsten Druck. Dies tritt sehr regelmässig bei jeder Versuchsreihe hervor, sowohl bei denen, wo die electromotorische Kraft (die Zahl der Elemente) verändert wurde, als auch bei denen, wo man den Rheostatenwiderstand variirte. Bei den letztgenannten Versuchen ist doch zu bemerken, dass in den Fällen, wo der Strom in Folge des grossen Widerstandes discontinuirlich war, die erhaltenen Werthe auf r für diesen schwächeren Strömen oft grösser als bei den nächst grösseren continuirlichen Strömen sind. So ist es bei jedem Druck der Fall. Dies widerspricht doch in keiner Weise dem obigen Satz, dass der Widerstand im Entladungsrohr mit der Stromstärke wächst, ist vielmehr von der Natur der Sache eine nothwendige Folge, denn: Die Werthe auf r sind ja unter der Annahme berechnet, dass der Strom continuirlich fortdauert, und müssen also, wenn der Strom discontinuirlich wird, sofort zu gross ausfallen.

Weiterhin wachsen beim Drucke 1,69 mm die Werthe auf r mit dem Abstande zwischen den Electroden. Bei 0,25 mm Druck wachsen sie auch, aber weniger, bei dem niedrigsten Drucke kaum merkbar. Uebereinstimmend mit den Resultaten meiner früher erwähnten Untersuchungen zeigt dies, dass bei dem niedrigsten Druck der Widerstand der Luft sehr klein ist und im

Vergleich mit dem Uebergangswiderstande an den Electroden beinahe versäumt werden kann, dass bei 1,69 mm Druck dagegen der Luftwiderstand überwiegt. Da nun bei diesem Druck die Werthe auf r, wie oben erwähnt, beinahe constant sind, bei dem niedrigen Drucke dagegen mit der Stromstärke wachsen, so folgt, dass der Luftwiderstand constant, von der Stromstärke unabhängig ist, dass aber der Uebergangswiderstand an den Electroden mit der Stromstärke wächst. Wenn man also von dem Uebergangswiderstande absieht, so giebt die Formel

$$i = \frac{E - r}{R}$$

wo E die electromotorische Kraft, r den Gaswiderstand und R den übrigen Widerstand in der Leitung bezeichnet, einen exacten Ausdruck für die Stromstärke bei Leitung eines electrischen Stromes durch einen Gasraum.

Was die Zuverlässigkeit der Resultate betrifft, so schienen dieselben bei 0,25 und 1,69 mm Druck in so weit sehr zuverlässig zu sein, dass die für die Grösse r erhaltenen Werthe mit der Stromstärke sehr regelmässig wachsen, so dass, wenn man die Resultate graphisch darstellt, die Curven gar nicht im Zickzack laufen, sondern eine ziemlich gleichförmige Krümmung zeigen. Ich weise z. B. auf die lange Reihe bei 0,25 mm Druck und 4 cm Abstand zwischen den Electroden hin. Bei 1,69 mm Druck und 10 cm Schlagweite ist ebenso die Uebereinstimmung zwischen den erhaltenen Werthen für r schlagend. Möglicherweise ist doch diese letzte Uebereinstimmung in so weit ein wenig illusorisch, als ich kaum behaupten kann, dass nicht mögliche Veränderungen in der Batterie oder den Widerstandsröhren, oder andere Fehlerquellen ausserhalb der Entladungsröhre grössere Schwankungen in den Schlussresultaten als die obenauftretenden hervorgebracht haben können.

Ich will auch erwähnen, dass bei verschiedenen Gelegenheiten die Resultate ein klein wenig verschieden waren. Ich habe drei Mal Versuche bei 0,25 mm Druck gemacht, wobei der Druck zwischen den Versuchen verändert worden war und in den zwei ersteren Fällen den Widerstand in der Entladungsröhre ein wenig grösser gefunden als bei dem letzten hier oben angeführten Versuch. Ob dies auf möglichen Veränderungen bei den Electroden oder in der Luft im Entladungsrohr beruht, oder zum Theil in unsicherer Bestimmung der electromotorischen Kraft der Batterie oder des Widerstandes in Rheostatröhren seine Ursache hat, kann ich jetzt nicht sagen und ist auch für den hier beabsichtigten Zweck nicht nothwendig zu wissen. In allen Fällen treten die im Anfang dieses Kapitels besprochenen Resultate (die bei verschiedenem Druck verschiedenen Variationen der Grösse *r* mit der Stromstärke und dem Abstande zwischen den Electroden) sehr bestimmt hervor.

Für eine rationale Messung der Gaswiderstände ist es also nothwendig, den Uebergangswiderstand vom Gaswiderstande wohl zu trennen. Ich habe auch der Controle wegen Versuche mit einem anderen Entladungsrohr mit anderen Electroden (kleinen Platinspitzen) gemacht (siehe § 7). Es muss auch beachtet werden, ob der Widerstand in allen Theilen der Entladungsbahn derselbe ist. Früher habe ich[1]) in dieser Hinsicht gefunden, dass bei Druck über einige Millimeter der Luftwiderstand dem Abstande zwischen den Electroden proportional war (bei niedrigeren Drucken konnte der Luftwiderstand im Vergleich mit dem sehr grossen Uebergangswiderstande an den Electroden nicht gemessen werden). Hittorf[2]) fand bei niedrigem Druck dagegen die Potentialdifferenz zwischen Punkten in dem dunklen Raum vor dem Kathodenlichte etwas kleiner als im positiven Lichte, wo die Differenz überall gleich war. Ich werde demnächst besondere Beobachtungen in dieser Hinsicht machen, will doch schon jetzt einige diesbezügliche Observationen hier zusammenstellen. Zuerst bei

1,69 mm Druck.

Abstand zw. d. Electroden.		1 cm	4 cm	7 cm	10 cm	13 cm	16 cm	19 cm
Zahl der Elemente		8.104	8.104	8.104	8 104	8.104	10.104	10.104
Stromstärke in 10^{-6} Ampère b. einem Widerstand in der Leitung von	336000 Ohm	3360	3036	2598	2191	1794	—	1946
	771000 Ohm	1473	1302	1128	954	783	—	872
	1870000 Ohm	596	546	472	392	318	429	274
Berechneter Widerstand *r* im Entladungsrohr bei einem Widerstand in der Leitung von	336000 Ohm	380	490	636	774	906	—	1200
	771000 Ohm	373	506	639	773	905	—	1190
	1870000 Ohm	395	488	627	775	915	1062	1215

[1]) Homén, „Elektriska motståndet hos förtunnad luft.“ Helsingfors 1883.

[2]) Hittorf, Wied. Annal. Bd. 30 p. 705, 1883 u. Bd. 21 p. 90, 1884.

Die Differenzen zwischen den Werthen auf r

		Schlagweite					
bei		1 u. 4	4 u. 7	7 u. 10	10 u. 13	13 u. 16	16 u. 19 cm
sind beim Widerst.	336000 Ohm =	110	146	138	132	(147)[1]	(147)
	771000 „ „	133	133	134	132	(142)	(143)
	1870000 „ „	93	139	148	140	147	153

Die Differenzen sind für Schlagweiten über 4 cm einander ziemlich gleich. Der Widerstand im Entladungsrohr wächst also mit gleichen Grössen, wenn die Schlagweite mit gleichen Grössen vermehrt wird. Nur zwischen den Werthen bei 1 und 4 cm ist die Differenz kleiner. Ausser auf einem kleineren Widerstand im dunklen Raume (zwischen 0,6 und 3,4 cm) kann dies darauf beruhen, dass der Uebergangswiderstand wächst, wenn die Anode, wie es bei 1 cm Schlagweite der Fall ist, dicht an das Kathodenlicht genähert wird. Solches habe ich bisweilen bei meiner früheren Untersuchung gefunden und ist auch von Hittorf[2]) und E. Wiedemann[3]) beobachtet worden. Bei 0,25 mm Druck zeigte sich der Widerstand im dunklen Raume zwischen 3,6 und ca. 6,6 cm nicht kleiner als im positiven Lichte. Dagegen nahm der (Uebergangs)-Widerstand zu, wenn die Anode in das Kathodenlicht auf 1 cm Entfernung geführt wurde. Ich lege folgende Beobachtungen dar.

Spannkraft der Luft 0,25 mm.
Rheostatenwiderstand 733000 Ohm.

Abst. zw. d. Electroden.			1 cm	4 cm	7 cm	10 cm	13 cm	16 cm	19 cm
Stromstärke in 10^{-6} Ampère bei	4 × 104	Elementen.	360	367	318	271	219	173	135?
	6 × 104		759	747	691	637	587	529	479
	8 × 104		1139	1122	1077	1024	979	928	891
Berechneter Widerstand r im Entladungsrohr bei	4 × 104	Elementen.	483	478	514	549	587	622	650?
	6 × 104		550	559	601	642	679	723	761
	8 × 104		625	638	672	712	747	786	824

Bei diesem Druck ist zu bemerken, dass die Grösse r mit der Stromstärke wächst, dass also die angegebenen Werthe auf r nicht unter ganz

[1]) Statt die Differenze 2 × 147 zwischen den Werthen auf r bei 13 und 19 cm Schlagweite anzuführen sind der Uebersicht wegen die Zahlen 147 auf die obige Weise angegeben.

[2]) Hittorf, Pogg. Ann. Bd. 136 p. 1 u. 197, 1869.

[3]) E. Wiedemann, Wied. Ann. Bd. 20 p. 756, 1883.

gleichen Bedingungen erhalten sind. Doch darf ein Vergleich der Differenzen zwischen denselben, weil die Zunahme der Stromstärke in derselben Richtung in der ganzen Reihe geht, ein relatives Bild über die Widerstandszunahme, mit dem Abstande zwischen den Electroden geben. Zu näherer Bestimmung muss die Stromstärke constant bei den verschiedenen Abständen gehalten werden, oder vielleicht besser, viele Beobachtungen bei jedem Abstande gemacht und die Resultate graphisch dargestellt, dann die Differenzen zwischen den Werthen auf r bei verschiedener Schlagweite aber unveränderter Stromstärke gesucht und diese Vergleichung bei verschiedener Stromstärke wiederholt. Bei den obigen Beobachtungen konnte man eben so gut die Differenzen zwischen den Stromstärken, wie zwischen den Werthen für r vergleichen; ich führe doch die letzteren hier an. Die Differenzen zwischen den Werthen auf r

	Schlagweite					
bei	1 u. 4	4 u. 7	7 u. 10	10 u. 13	13 u. 16	16 u. 19 cm
sind bei 4 × 104 Elem. =	−5	36	35	38	35	28?
6 × 104 „ „	9	42	41	37	44	38
8 × 104 „ „	13	34	40	35	39	38

Wie ersichtlich sind die Differenzen für Schlagweiten über 4 cm einander ziemlich gleich; die Differenzen zwischen den Werthen bei 4 und 7 cm, zwischen welchen Abständen der dunkle Raum sich befindet, sind nicht kleiner als die übrigen Differenzen. Dasselbe zeigt sich bei den unten folgenden Versuchen mit Platinelectroden. Dagegen ist zwischen 4 und 1 cm die Differenz sehr klein und fällt bei kleinerer Stromstärke sogar in negativer Richtung aus. Der Uebergangswiderstand wächst also, als die Anode in das Kathodenlicht hervorgeschoben wird.

Diese Beobachtungen stehen also im Widerspruch zu den obenerwähnten von Hittorf, dass die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten im dunklen Raume kleiner ist als im positiven Lichte. Ich werde demnächst auf die oben angedeutete Weise Beobachtungen hierüber machen. Im positiven Lichte ist sowohl nach Hittorf als nach meinen Beobachtungen der Widerstand überall gleich. Sieht man also von den Widerstandsverhältnissen an und vor der Kathode ab, so ist der Widerstand in der Entladungsbahn überall gleich, und ich meine dass man diesen Widerstand als den normalen Leitungswiderstand des betreffenden Gases bezeichnen muss. Es ist übrigens nur bei den niedrigsten Drucken, wo das Kathodenlicht und der dunkle Raum vor demselben eine grössere Ausdehnung haben. Wenn der Druck wächst, so zieht sich, wie bei den obigen Versuchen zu ersehen, das Kathodenlicht immer mehr zusammen. Bei meiner oben citirten früher gemachten Untersuchung war auch bei Drucken über einige Millimeter der Luftwiderstand dem Abstande zwischen den Electroden ganz proportional.

§ 7

Wenn. was à priori anzunehmen ist, der Gaswiderstand von den angewandten Electroden unabhängig ist, so kann durch Versuche mit verschiedenen Electroden der Gaswiderstand von dem Uebergangswiderstande an den Electroden wohl getrennt und ganz bestimmt ohne Zusammenhang mit etwas anderem gemessen werden. Um dies zu versuchen und zugleich die obigen Resultate zu controlliren, wurde, wie schon früher angegeben, ein zweites Entladungsrohr mit kleinen Platinelectroden, von welchen die Anode auf dieselbe Weise wie die Aluminiumanode beweglich war, in Verbindung mit dem ersten Rohr gesetzt (siehe Fig. 2) und Beobachtungen bei ganz denselben Drucken gemacht. Der Uebergangswiderstand war, wie zu erwarten[1]), sehr gross; auch wurden wenigere Beobachtungen als bei den Versuchen mit Aluminiumelectroden angestellt. Es wurden folgende Resultate erzielt.

Platinelectroden.
Spannkraft der Luft 0,089 mm. Temp. 17,5° C.

Widerstand in der Leitung mit 10×10^4 Elementen eingeschlossen.	Stromstärke in 10^{-6} Ampère bei					Berechneter Widerstand (r) im Entladungsrohr bei		
	4 cm Abst. zw. d. Electr. u.			13 cm Abst. zw. d. Elect. und		4 cm Abst. zw. d. Electr. und		13 cm Abst. zw. d. Electr. und
	$8 \cdot 10^4$ Elem. 1538 Volt.	$10 \cdot 10^4$ Elem. 1900 Volt.	$12 \cdot 10^4$ Elem. 2270 Volt.	$10 \cdot 10^4$ Elem. 1900 Volt.	$12 \cdot 10^4$ Elem. 2270 Volt.	$10 \cdot 10^4$ Elem.	$12 \cdot 10^4$ Elem.	$12 \cdot 10^4$ Elem.
340000 Ohm	0	24,3	57,0	⌣	⌣	1892	2251	
1870000 „	0	21,3	39,0	⌣	30	1860	2193	2214
12730000 „	0	17,1	24,0	⌣	⌣	1682	1964	

[1]) Vgl. HITTORF, Pogg. Ann. Bd. 136, p. 1 u. 197, 1869. EDLUND, K. Vet. Akad. Handl. Bd. 20, Nr. 1, 1882.

Spannkraft der Luft 0,25 mm. Temp. 17,0° C.
Rheostatenwiderstand 733000 Ohm.

Zahl der Elemente.	Electromotorische Kraft.	Stromstärke in 10^{-6} Ampère bei einem Abst. zw. d. Electr. von		Berechneter Widerst. (r) im Entladungr. bei einem Abstand zw. d. Electr. von	
		4 cm	13 cm	4 cm	13 cm
4 × 104	794 Volt.	0			
4½ × 104	892 „	3		890	
5 × 104	990 „	8,5		926	
6 × 104	1185 „	20		1034	
7 × 104	1380 „	40	0	1350	
8 × 104	1575 „	70	20	1522	1422
10 × 104	1945 „	110	75	1860	1887
12 × 104	2320 „	180	125	2180	2222

Spannkraft der Luft 0,25 mm. Temp. 17,0° C.

Widerstand in der Leitung mit 8 × 104 Element eingeschlossen.	Stromstärke in 10^{-6} Ampère bei		Berechneter Widerstand (r) im Entladungsrohr bei	
	4 cm Abstand zw. d. Electroden und 8.104 Elem. (1575 Volt.)	13 cm Abstand zw. d. Electroden und 12.104 Elem. (2320 Volt.)	4 cm Abstand zw. d. Electroden und 8.104 Elem.	13 cm Abstand zw. d. Electroden und 12.104 Elem.
328000 Ohm	68	138	1553	2273
763000 „	60	125	1529	2223
1863000 „	50	110	1482	2099
4590000 „	40	89	1388	1898
12700000 „	28	V 49	1219	V 1624

Spannkraft der Luft 1,69 mm. Temp. 18,0° C.

Widerstand in der Leitung mit 8 × 104 Element eingeschaltet.	Stromstärke in 10^{-6} Ampère bei 8.104 Elem. (1490 Volt.) in der Leitung und einem Abstand zw. d. Electroden von					
	1 cm	4 cm	7 cm	10 cm	13 cm	16 cm	19 cm
340000 Ohm	556	558	468	387	288	215	114
775000 „		444					85
1875000 „	296	298	240	197	148	104	49
4600000 „		159			79	49	0
12700000 „	70,5	69	54	43	‿		

Widerstand in der Leitung mit 8 × 104 Element eingeschaltet.	Berechneter Widerstand (r) im Entladungsrohr beim Abstand zw. den Electroden von					
	1 cm	4 cm	7 cm	10 cm	13 cm	16 cm	19 cm
340000 Ohm	1301	1300	1331	1358	1322	1417	1451
775000 „		1157					1424
1875000 „	935	931	1035	1121	1213	1295	1398
4600000 „		759			1127	1265	
12700000 „	593	612	803	944			

Bei den niedrigsten Drucken wurde oft ein Knarren in dem Telephon gehört, ebenso ein schwaches Klingen im Entladungsrohr selbst. In den Fällen, wo ein ⋁ vor die Zahlen in der Tabelle gesetzt ist, wurde ein musikalischer Ton im Telephon gehört. Bei 1,69 mm Druck war das Telephon still.

Das Lichtphänomen war in einigen Stücken von den obenbeschriebenen in der Röhre mit Aluminiumelectroden verschieden. Obgleich dieselben Haupttheile desselben auch hier zu finden waren, traten diese nicht so markirt hervor. Das positive Licht fand ich niemals geschichtet; auch war die Farbe desselben mehr violett als rosa. Uebrigens war das Licht, was auf Grund der schwachen Ströme natürlich ist, viel matter leuchtend, als bei den Versuchen mit Aluminiumelectroden. Die kleinen Electrodenspitzen waren hellleuchtend, welcher Umstand schon auf einen grossen Uebergangswiderstand deutet. Die Spitze des positiven Lichtes, doch nicht scharf markirt, stand auf ungefähr denselben Entfernungen von der Kathode wie bei den Versuchen mit Aluminiumelectroden. Ebenso streckte sich das positive Licht, besonders bei 1,69 mm Druck, wo viele und genauere Beobachtungen hierüber gemacht wurden, länger vorwärts, näher an die Kathode, wenn die Stromstärke vermindert wurde. Bei den niedrigeren Drucken war, ungleich dem Verhältniss im Rohre mit Aluminiumelectroden das positive Licht nicht so scharf begrenzt, so dass auch der Abstand zwischen ihm und Kathode nicht so scharf fixirt werden konnte. Dieser Abstand betrug

bei	0,089	mm Druck	11—12 cm
„	0,25	„ „	6—8 cm
„	1,69	„ „	4,0—5,4 cm.

Bei Verschiebung der Anode bewegte sich das positive Licht nicht, wenn die Stromstärke nicht verändert wurde.

§ 8.

Die nach der Formel $i = \frac{E - r}{R}$ auf den Widerstand r im Entladungsrohr mit Platinelectroden erhaltenen Werthe sind sehr gross, viel grösser als in der Röhre mit Aluminiumelectroden. Dies beruht auf dem grossen Uebergangswiderstand bei den Platinspitzen. Ebenso wächst die Grösse r sehr stark mit der Stromstärke, doch bei keinem Druck in Proportion mit dieser. Wäre dies letzte der Fall (und r also gleich $i \times k$, wo k eine constante ist), so könnte der Widerstand vollkommen wie ein gewöhnlicher fester Widerstand berechnet werden. Die Formel $i = \frac{E - ik}{R}$ ist nämlich mit der Formel $i = \frac{E}{R + k}$ identisch.

Mit dem Abstande zwischen den Electroden wachsen die Werthe auf r, wie am besten bei 1,69 mm Druck zu ersehen ist, sehr gleichmässig. Will man doch, was der Hauptzweck der Versuche mit Platinelectroden war, den Luftwiderstand näher zu bestimmen, um ihn mit demselben in dem Entladungsrohr mit Aluminiumelectroden zu vergleichen, so muss man genau auf die Steigerung der Grösse r mit der Stromstärke Rücksicht nehmen und nur solche Werthe auf r mit einander vergleichen, welche bei derselben Stromstärke erhalten sind. Wir wollen solche Bestimmungen versuchen.

Bei 1,69 mm Druck und 19 cm Abstand zwischen den Electroden ist r bei Stromstärke 114 und 85×10^{-6} A. E. gleich 1451 und 1424. Bei 4 cm

Abstand darf r bei entsprechenden Stromstärken gleich ungefähr 685 und 640 gesetzt werden können. Der Widerstand in einer 15 cm langen Luftkolonne kann also gleich etwa 766 bis 784 gesetzt werden. In der Röhre mit Aluminiumelectroden variiren die Differenzen zwischen den Werthen für r bei 19 und 4 cm Schlagweite zwischen 710 und 780. (Die Variationen beruhen darauf, dass die Grösse r bei 4 cm nicht nur relativ, sondern auch absolut mit grösseren Quantitäten bei Verstärkung der Stromstärke als bei 19 cm Abstand zwischen den Electroden wächst). Die auf den Luftwiderstand erhaltenen Werthe sind also in den beiden Entladungsröhren einander ziemlich gleich. Bei den niedrigeren Drucken werden die entsprechenden Bestimmungen weniger zuverlässig.

Dass der Gaswiderstand von der Beschaffenheit der Electroden unabhängig sein muss, ist a priori anzunehmen. Da nun die hier oben berechneten Werthe auf den Luftwiderstand in beiden Entladungsröhren einander gleich sind, so ist dies ein entscheidender Beweis dafür, dass die Annahmen, unter welchen diese Werthe berechnet werden, richtig sind, dass also der Luftwiderstand allein mit dem Abstande zwischen den Electroden wächst, dass aber der Uebergangswiderstand an den Electroden von diesem Abstande unabhängig ist (wenn derselbe nicht allzu klein ist). Also ist der eingeschlagene Weg, die Gaswiderstände zu bestimmen, richtig.

Gemäss der früher angegebenen und für den Gaswiderstand, mit Absehen von dem Uebergangswiderstande an den Electroden, welche mit der Stromstärke ein wenig wächst, als richtig gefundene Formel $i = \frac{E - r}{R}$, wird die Einheit, in welcher der Gaswiderstand zu messen ist, derjenige Widerstand sein, zu dessen Ueberwinden die electromotorische Kraft 1 nothwendig ist. In dieser Einheit gemessen wird z. B. der Widerstand einer 15 cm langen Luftsäule bei 1,69 mm Druck auf Grund der oben angeführten Versuche gleich ungefähr 560 sein, wenn die electromotorische Kraft in Volt gemessen ist. (Die Weite der Entladungsröhre übt hier einen nur kleinen Einfluss auf den

Widerstand aus; der Gaswiderstand ist von der Durchschnittsfläche der Gaskolonne gar nicht oder nur wenig abhängig[1]).

Ueber die theoretische Seite dieser Fragen und besonders die Edlund-sche Auffassung derselben, welche innig mit seiner unitarischen Aethertheorie für die electrischen Erscheinungen zusammenhängt, und überhaupt den interessanten Zusammenhang zwischen derselben und anderen Theilen der Electricitätslehre, werde ich in einer folgenden Abhandlung, nach Darlegen eines grösseren Beobachtungsmaterials näher eingehen. Weiter will ich nebst Beobachtungen über die Widerstände in dem am nächsten an der Kathode liegenden Theil der Entladungsbahn, worüber hier oben gesprochen ist, die Variationen des Uebergangswiderstandes mit der Stromstärke untersuchen, und lasse auch daher, was schon aus den vorliegenden Beobachtungen hierüber entschieden werden konnte, hier unbeachtet. Spektroskopische Beobachtungen sind auch versucht und im positiven und negativen Lichte ungleiche Bandenspectra auf einem schwacherleuchteten continuirlichen Grund observirt, welche bei verschiedenen Drucken ein wenig verschieden waren. Die Bestimmungen waren doch nicht hinreichend genau, um hier angeführt zu werden. Mein Hauptzweck bleibt den electrischen Leitungswiderstand der Gase zu studiren. In der früher citirten Abhandlung habe ich den Gaswiderstand der Spannkraft des Gases proportional, von der Weite der Gaskolonne beinahe unabhängig gefunden. Besondere Untersuchungen in dieser Beziehung machend, werde ich schliesslich den Leitungswiderstand bei verschiedenen Gasen zu bestimmen suchen.

---

[1]) Vergl. meine oben citirte Abhandlung, Wied. Ann. Bd. 26, p. 55, 1885.

LAMOTTES

AFHANDLINGAR OM TRAGEDIN,

GRANSKADE OCH JEMFÖRDA MED LESSING

AF

Dr. ELIEL ASPELIN.

INNEHÅLL.

INLEDNING.

Olika vilkor för kritik af det pseudoklassiska dramat i Tyskland och Frankrike.

Genom sina beundrade verk gjorde Corneille och Racine den pseudoklassiska tragedins form bestående ej blott för sitt eget, utan äfven för följande århundrade. De mer eller mindre begåfvade skalder, hvilka efter de gifna mönstren tillskuro sina arbeten, voro så mycket säkrare på sin sak, som den förre icke nöjt sig med sin diktareverksamhet utan dertill genom sina tre „discours“ om den dramatiska poesin gifvit denna en teori, hvars grundsatser höllos för lika oantastliga som de båda mästarnes sorgespel. Corneille gaf sig ut för att tyda Aristoteles, men hufvudändamålet var nog att försvara sina egna skapelser. I andra delen af sin „Hamburgische Dramaturgie“ har Lessing uppvisat, huru litet den store tragikern var vuxen värfvet att tolka stagiriten. Lessings kritik af Corneilles uppfattning och det pseudoklassiska dramat öfverhufvud blef epokgörande för Tyskland ej blott på grund af sin öfvertygande kraft, utan fastmera för att tiden var mogen samt stora ursprungliga skalder voro redo att gå fram på nya banor. Dertill var Lessings kritik innerst en kamp för nationel sjelfständighet. I Frankrike hade en kritik af det dramatiska systemet under hela det 18:de och nästan en fjerde del af det 19:de seklet icke att räkna på liknande stöd. Under hela den långa perioden framträder icke en enda skald af sådan ursprunglighet, att på honom några anspråk kunnat ställas. Voltaire hade för många jern i elden och hade framförallt för litet af äkta skald i sig, för att bli teaterns omskapare. Oaktadt sin kritiska begåfning och oaktadt bekantskapen med Shakespeare förblef han Corneilles och Racines trogne efterföljare. De framsteg, hvilka kunna spåras i hans tragedier — främst föredömet af fosterländskt historiska gestalters framförande på scenen och tragedins ställande i frambrytande ideers tjenst — härledde sig af allt annat än opposition mot de store föregångarne. Och då Voltaire icke frigjorde sig från traditionerna, hvem skulle då göra det? Föredömet af den, hvilken som skald gälde för Corneilles och Racines jemlike, lade blott större tryck på de mindre. Tidens störste konstkritiker Diderot lyckades väl skjuta bresch på den fasta mur, som de heliga reglerna och „bienséancen“ rest mellan den tragiska scenen och lifvet; men hans „borgerliga tragedi“ öppnade utsigten åt Frankrikes moderna drama, utan att den klassiska tragedin derför vacklade. Fåfängt var äfven anloppet af Shakespeares konst, stympad och omklädd af Ducis. En ständigt fortgående afmattning egde visserligen rum; men först Victor Hugo var man för det afgörande slaget.

Deraf beroende ringaktning för oppositionela tendenser i den franska kritiken.

Under sådana förhållanden kan det ej förvåna, att man jemförelsevis föga uppmärksammat enskilde kritiker, hvilka vågat göra anmärkningar mot den gällande smaken, men icke vunnit gehör hos sin samtid. Som den förste bland dem, hvilka tviflat på den Corneilleska och Racineska tragedins fullkomlighet nämnes vanligen Saint-Évremond. Under en lång vistelse i England lärde han känna detta lands dramatiska litteratur och mottog deraf ett så djupt intryck, att han, en Racines samtida, med hänsyn till sitt eget lands tragedi bland annat yttrade de ofta citerade orden: „Il manque à nos sentiments quelque chose d'assez profond; les passions à demi touchées n'excitent dans nos âmes que de mouvements imparfaits, qui ne savent ni les laisser dans leur assiette, ni les enlever hors d'elles-mêmes“. Det var förnämligast derför, att denne verldsman-filosof var den förste af förmedlarne af det engelska inflytande, som skulle blifva af så stor betydelse för Frankrike, man ihogkommer detta hans yttrande. Deremot har man för sed att alldeles förgäta eller alltför flyktigt omnämna en kritiker af det pseudoklassiska dramat, som säkerligen näst Diderot haft den öppnaste blick för det traditionella systemets svagheter. Jag menar Houdart de Lamotte, den man hvars kritiska verksamhet, såvidt den rör den klassiska tragedin, dessa blad egnas. Lamotte har veterligen aldrig varit i England och kände — såsom slutas kan af några ord, hvilka längre fram skola anföras — den engelska teaterns art endast genom hörsägen. Så mycket större aktning synes man skyldig hans skarpsinne och sunda känsla, som hans kritik är sjelfständig. Att han saknade förmåga att i sina egna diktverk gifva dugande mönster och att den direkta verkan af hans kritik är föga märkbar, kan ej nekas. Men att derför straffa honom med glömska är nog strängt. I vår tid, som med förkärlek iakttager ideernas groning och växande genom tiderna samt deras gång mellan folken, anser man ju äfven de försök af en ny tid att bryta fram, hvilka skenbart qväfvas, värda att studeras. Att Lamotte förtjenar större uppmärksamhet än härtills kommit honom till del, torde det följande ådagalägga.

Lamottes lif och literära produktion.

Antoine Houdart de Lamotte föddes i Paris 1672, intog 1709 Thomas Corneilles plats i franska akademien och dog 1731. Han började sin literära bana som författare af operatexter, hvilka vunno bifall. Den erfarenhet af teatern, som han förvärfvade på denna väg, framträder sedan i hans lära om tragedin. Vidare diktade han en stor mängd fabler, hvilka icke sakna värde, äfvensom ekloger, de der ställas i rang med de förra. Också har han efterlemnat lyriska dikter, men vitna de, liksom hans poetiska verk öfverhufvud, att hans skaldebegåfning var medelmåttig. Utom operatexter skref han för teatern ett par komedier, „*le Magnifique*" och „*l'Amante*", af hvilka isynnerhet den senare fått erkännande, samt slutligen fyra tragedier. Dessa sistnämnda arbeten sågo alla dagen på 1720-talet, nämligen: „*Les Machabées*" (1721), „*Romulus*" (1722), „*Inès de Castro*" (1723) och „*Œdipe*" (1726). Den första uppfördes utan att författaren gifvit sig tillkänna och erfor den oförtjenta äran att tagas för ett posthumt verk af Racine. Styckets framgång stadnade dock dervid. „Romulus" vann större bifall, medan „Œdipe" gjorde fiasco; deremot blef „Inès de Castro" en triumf. Ämnet var lyckligt valdt och utförandet — äfven med afseende å versen, som eljes var Lamottes svaga sida — förträffligt, jemfördt med hans öfriga sorgespel. Publikens bifall synes hafva väckt den unge Voltaires afund, såsom kan läsas mellan raderna af de ord han skrifver i anledning af första representationen: „J'ai été à Inès de Castro, que tout le monde trouve très-mauvaise et très-touchante. On la condamne et on y pleure". [1]) Visst är, att Lamotte äfven i detta arbete, som länge höll sig på scenen, står långt under den ståndpunkt han intager som kritiker af samtidens tragedi. Den största betydelsen af de fyra tragedierna ligger deri, att de gåfvo författaren tillfälle att offentliggöra sina uppsatser angående den tragiska diktningen. Framför hvarje tragedi stälde han nämligen en „discours à l'occasion de" — den och den tragedin. Och det är just i dessa afhandlingar han framställer de nya och sjelfständiga tankar, för hvilka här skall närmare redogöras. Emellertid inskränkte sig Lamottes kritiska och estetiska studier på långt när icke till den dramatiska poesin. Han har derjemte vid särskilda tillfällen och anledningar publicerat en mängd andra uppsatser om poesins olika arter äfvensom andra dithörande ämnen. Bland dem är „Discours sur Homère" mest känd, ehuru ej till sin fördel uppskattad, emedan författaren deri bland annat söker försvara sin totalt misslyckade öfversättning eller rättare bearbetning af Iliaden. Af de öfriga må de vigtigaste uppräknas, nämligen: Discours sur la poésie en général et sur l'ode en particulier, Discours sur l'églogue, Discours sur la fable och Réflexions sur la critique. Stilen och framställningssättet i dessa afhandlingar är särdeles klar och angenäm samt lidelsefri. Villemain yttrar sig derom (i Discours sur les avantages et les in-

---

[1]) Desnoiresterres, Voltaire et la société au XVIII:e siècle. 2:e ed. I, s. 271.

convenients de la critique) som följer: „L'ingenieux Lamotte avait le véritable langage et, pour ainsi dire, les grâces de la critique. Sa censure est aussi polie que sa diction est élégante". Härtill fogade den berömde litteraturhistorikern ännu orden: „Il ne lui manquait que d'avoir raison", vitnande om att han icke heller förstod att göra Lamotte rättvisa.

Lamottes moderne utgifvare. De nyss nämnda kritiska uppsatserna, hvilka jemte Lamottes öfriga arbeten ingå i en i Paris år 1754 tryckt upplaga af hans samlade verk (hvari Théâtre omfattar voll. I—IV), hafva i vår tid blifvit särskildt utgifna i en volym med titeln: *Les Paradoxes littéraires de Lamotte ou discours écrits par cet académicien sur les principaux genres de poëmes réunis et annotés par B. Jullien, Paris 1859.* Denna omständighet synes dock ej härtills nämnvärdt bidragit till att hjelpa dem ur glömskans flod. Orsaken bör främst sökas i att utgifvaren icke varit rätte mannen att uppskatta Lamotte. Oaktadt en representant af vår tid står han dock fast i de klassiska traditionerna. Såsom den citerade titeln angifver äro Lamottes läror för Jullien liksom för XVIII:de seklets poeter och estetiker „paradoxer" och de noter han fogar till texten vitna mer än väl, att hans ståndpunkt i många stycken mera närmar sig den, hvilken kritikern halftannat århundrade tillbaka ville angripa, än våra dagars estetiska betraktelsesätt. Då detta förhållande tyckes stå i strid med det faktum, att Jullien tagit sig före att ånyo utgifva Lamottes afhandlingar, så må det tillåtas mig att till förklaring citera några rader från hans företal. Efter att hafva anmärkt, att Lamotte stundom misstagit sig och att utgifvaren ofta i sina noter angifvit sådant och rättat honom, fortfar han: „Författaren har icke desto mindre förtjensten af att hafva mer än hundra år förut berört frågor, som man åter upptagit vid slutet af första fjerdedelen af detta sekel. Man har i sjelfva verket återhemtat dem från Tyskland, sminkade med germanisk lärdom och drifna till en öfverdrift, som Lamotte otvifvelaktigt alldeles icke skulle hafva godkänt. Men i grunden fans der intet, som ej vår akademiker skulle sagt till först. Sålunda har Frankrike häri liksom på nästan alla banor i verkligheten öppnat vägen; det gjorde i denna oppositionela riktning gentemot traditionela ideer allt som förnuftigtvis kunde göras; och det kan derför icke vara likgiltigt för den som betraktar denna del af vår literära historia, att uppskatta den rol våra landsmän deri spelat, de försök de gjort och den grad af sanning deras påståenden innehöllo". Julliens företag hade således en patriotisk tendens. Han ville visa, att tyskarne i sin opposition mot pseudoklassicismen hade haft en fransk föregångare. Afsigten var så lofvärd som någon; men utgifvaren har tyvärr förfelat sitt mål, derför att han ur sitt arbetes plan uteslutit jemförelsen med den tyska kritiken och ej heller försökt att sållande bearbeta „paradoxerna“ till ett öfverskådligt helt.

Närvarande försök att leda uppmärksamheten på Lamotte afser, som redan antydts, endast dem af hans uppsatser, hvilka gälla den dramatiska poesin. De synas mig vara de vigtigaste, men derför vill jag ej hafva sagt, att ej de öfriga afhandlingarna vitnade om skarpsinne och saknade originela tankar. Tvärtom skulle äfven de påkalla granskning och är det först sedan den är verkstäld författarens plats kan bestämmas i estetikens historia. När denna göres till föremål för jemförande studium skall den gamle smakläraren nog komma till heders. *Närvarande afhandlings plan.*

Då Lamotte i sina särskilda uppsatser vid frågornas upptagande följer en på förhand faststäld ordning, håller jag mig på ett par afvikningar när till denna. För författarens åsigter redogöres så vidt möjligt fullständigt. De i många afseenden upplysande exemplen uteslutas dock för det mesta, emedan deras anförande skulle göra afhandlingen dubbelt längre. På lämpliga ställen afbrytes redogörelsens gång dels för en kritisk uppskattning af författarens uttalanden dels för att jemföra dem med Lessings uppfattning, så vidt samma frågor beröras i „Hamburgische Dramaturgie“. Derjemte observeras på sitt ställe hvad Voltaire polemiskt anfört mot Lamotte. I slutkapitlet anställes efter en hastig blick på den senares egna tragedier en undersökning om Voltaires förhållande till föregångaren och hvilka spår af dennes kritiska verksamhet kunna iakttagas i hans tragiska diktning, hvarpå till sist afhandlingens resultat angifves.

I.

Såsom inledning till sina fyra afhandlingar om den tragiska diktningen har Lamotte stält en kortare sådan med titel: „*Discours sur la tragédie*“. Se här hufvuddragen af dess innehåll.

Huru och af hvad skäl dessa betraktelser öfver tragedin tillkommit.

Lamotte börjar med att tillbakavisa en beskyllning, som hans granskare gjort honom. Emedan han, på samma gång han försökt sig i flere arter af poesi, äfven framstält betraktelser öfver desamma, hade man tillvitat honom anspråket att vilja på engång gifva mönster och vara lagstiftare. Att han nu framlägger sina reflexioner öfver tragedin och lofvar att framdeles äfven yttra sig om komedin och operan [1]) synes väl ej egnadt att fria honom från anklagelsen; men icke destomindre är en sådan förmätenhet fjerran från honom. Såsom vitterlekare har han aldrig hoppats öfverträffa och ej ens likna de store mästarne. Det är de öfverlägsna snillena, hvilka föra konsten till sin högsta fulländning; men andra, hvilka stå under dem, i andra rangen, kunna dock hafva förtjenster i trots af de förstes utmärkthet. Blott man kunde erkänna honom, Lamotte, för en af Quinaults, Lafontaines, Corneilles, Racines skola, så skulle han ej känna sig nedsatt. Hans betraktelser öfver poesins särskilda arter hafva åter framgått ur det naturliga behofvet att söka utreda de grundsatser, hvilka borde vara de ledande vid arbetet. „De flesta af dem, hvilka utmärkt sig i någon riktning, hafva kommit dertill genom ovanlig talang och smak; de hafva nått fulländningen genom instinkt, genom, så att säga, ett oklart omdöme och nästan blott enkel känsla, hellre än genom noggranna och djupa reflexioner“. Deras verk äro visserligen förmer än regler; men det lönar att utforska orsakerna till den njutning de skänka oss. Ty engång utredda och kända kunde de förhjelpa oss till liknande mål. Desse utmärkte skriftställare hafva icke sjelfva kunnat förklara oss den skönhet de skapat, ty de hafva känt, men föga reflekterat. Och om de skulle kunnat det, är det

[1]) Detta löfte blef icke infriadt.

sannolikt att deras verksamhet icke gifvit dem tid att reflektera. Huru det än förhåller sig dermed, så har Lamotte för sin del icke velat blindvis egna sig åt poetisk produktion. Men han har ej blott tänkt utan äfven nedskrifvit sina tankar, „ty man har aldrig väl slutfört sitt tänkande, om man ej kommit till att klart uttrycka det“.

Det är således, för att lära sig sjelf Lamotte nedskrifvit dessa betraktelser och han vill ej, att de skola gälla för annat än försök.

Om man i afseende å det föregående ej har anledning att misstro författarens uppriktighet, så kan man knapt mindre tvifla derpå, när han ytterligare angifver skälet till att han offentliggjort sina reflexioner. Det har ej skett af högmod, men kanske väl af fåfänga, „ty hvilket motiv skulle kunna leda en författare, då han låter trycka arbeten, hvilka endast bero på skarpsinne och fantasi om icke det att hos sina läsare vinna erkännande för qvickhet och talang — de hafva helt säkert icke annat mål än bifall och beröm“ (!) Denna fåfänga finner han i grunden rätt bra, menskligt taladt; ty den bringar många arbeten till stånd och må man ej vara alltför sträng „under väntan på att våra bevekelsegrunder blifva allvarligare“.

Planen för afhandlingarna.

Härefter öfvergår Lamotte till planläggningen för sina afhandlingar och angifver först de skäl, hvilka föranledt honom att offentliggöra dem i samband med sina egna tragedier äfvensom att alltid stöda sina påståenden med exempel, nästan utan undantag, hemtade från Corneille och Racine. Det förra har skett dels af naturligt behof att försvara sig mot falsk kritik dels för att göra framställningen mera personlig och derigenom mera anslående; det senare hufvudsakligen för att enhvar på förhand känner nämnda skalders verk. Då afsigten är att söka utreda, hvarpå såväl skönheten som ofullkomligheten i konsten beror, kommer han att hos båda dessa stora författare framte bevis äfven för det senare. Derför varnar han redan på förhand allmänheten för en blind beundran af mästarne. Deras fulländning, bestående deri att skönheterna äro talrikare än bristerna, är blott relativ och med all beundran böra vi hålla vårt omdöme fritt. Anmärkningarna må göras blygsamt, men man behöfver ej sakna aktning för den störste man, derför att man har blick för hans felsteg.

Den detaljerade plan, som nu följer, kan här förbigås, då den ju framträder i det följande. Vid frågornas upptagande går han „från det allmänna till det enskilda“.

Teatern är den bästa skola för tragikern.

Slutligen yttrar sig Lamotte om det värde hans reflexioner, antaget att de äro riktiga, kunna hafva för tragediförfattare. Han skattar sina egna liksom andras afhandlingar lågt i det hänseendet, ty teatern är den säkraste skolan för dem. Der måste de studera hvad som behagar och hvad som bör behaga: konsten är erfarenhetens dotter. Utom de stora reglerna finnes en mängd små detaljer att iakttaga, hvilka tillhopatagna icke äro mindre vigtiga. De kunna bäst inhemtas genom åskådande af teaterföreställningar. Den, som blott på sin kammare genom tragedier och afhandlingar satt sig in i ämnet, kan ej räkna på samma framgång som en annan, hvilken flitigt besökt teatern samt der studerat och sjelf erfarit alla de intryck, hvilka konsten kan framkalla. Dem, hvilka redan hafva sitt arbete färdigt, råder han att före dess öfverlemnande till teatern uppläsa det för många, för att erfara, hvad intryck det gör och derefter kunna retouchera sitt verk. Lamotte gillar ej Horatii råd att låta arbetet ligga länge, för att sedan med ny uppmärksamhet genomgå det. Tvärtom anser han att ändringarna böra ske, medan den rörelse i känsla och sinne, hvilka ledt till motivets upptagande, ämnet och sysselsättningen dermed framkallat, ännu finnes qvar. Om man låter denna gynsamma tid gå förbi, är fara för att man skall känna det två händer haft del i arbetet. Tänkaren och grammatikern kallna icke såsom skalden.

Korrigera innan stämningen förgått.

Uppskattning af Lamottes principer.

Ur det ofvanstående framgå några omständigheter, hvilka böra antecknas. Lamotte har intet af en reformators kraft och hänsynslöshet i sig. Han är undfallande för förtid och samtid. Häri har man utan tvifvel att se en af orsakerna till den ringa verkan hans uppträdande gjorde. Hvilken skilnad mellan Lessing och den fine, artige fransmannen, som aldrig förifrar sig! Lamotte skrifver för sitt nöje och af fåfänga, som han med älskvärd naivitet sjelf bekänner. Detta sista är särskildt karakteristiskt för mannen från le grand siècle, då hofpoesin florerade. Snart skulle ju äfven i Frankrike allt kännetecknas af tendens, af „motifs plus solides“, något som han för öfrigt synes anat.

Emellertid finnas redan i denna inledning uttalanden, hvilka antyda författarens sunda uppfattning i de frågor han går att behandla. Det är de stora snillena, som föra konsten fram, icke smaklärarne, hvilka blott hafva att studera deras verk. Det är teatern, det sjelfständiga iakttagandet och erfarenheten, hvilka den dramatiske skalden bör hålla sig till; de estetiska afhandlingarna ersätta dem icke. Ty med reflexion kommer ej skalden långt, om han saknar talang och smak, det „oklara omdömet“ och den „enkla känslan“, d. v. s. snillets gåfva, som naturen skänker. Så äfven Lessing, när han (H. Dr. 1), efter att hafva antydt hvad som fordras till en dramatisk dikt, säger: det gör snillet omedvetet, utan att långtrådigt förklara det för sig, medan den blott skarpsinnige förgäfves anstränger sig att göra det efter. Samma tanke ligger slutligen under det sista rådet, att ej uppskjuta arbetets corrigerande, till dess skalden kommit ur stämningen. Detta innebär en begränsning af reflexionens rätt i afseende å den poetiska produktionen — ganska beaktansvärdt med hänsyn till tiden, då reflexionen i sjelfva verket beherskade parnassen. Tyvärr kan ej nekas, att den uppfattning om skaldens verksamhet, som här uttalats, stundom motsäges i det följande, att ej tala om författarens egen diktning.

Det enda djerfva i artikeln är varningen för en alltför blind beundran af Corneille och Racine. Denna erinran var om något af behofvet påkallad. Men huru valda äro ej ordalagen!

II.

Afhandlingen, hvars titel är „Discours à l'occasion des Machabées" (Tome IV, ss. 23—68), upptager till först frågan om valet af handling och söker i sammanhang dermed bestämma uppfinningens gränser.

Valet af handling. En författare, som företager sig att skrifva en tragedi, kan aldrig vara nog uppmärksam, då det gäller *valet af handling.* Handlingen bör för det första ega *nyhetens* förtjenst. Om ämnet är nytt, utgör det för författaren en ymnig källa till nya tankar och nya känslor. Det erfordras ofta mindre begåfning till att med nya detaljer rikta ett originelt motiv, som sjelf angifver dem, än att blott förkläda ett förut behandladt ämne. För det andra bör handlingen ega *storhetens* förtjenst. Denna åter mätes efter betydelsen af de uppoffringar och kraften af de bevekelsegrunder, hvilka dervid komma i fråga. Vi vilja nämligen se följdriktighet och förnuftig grund öfverallt, när vi sjelfva äro utom spelet. Så t. ex. är det faror trotsande modet icke värdt beundran med mindre det stödes af skäl, hvilka stå i proportion till hvad det lider och hvad det vågar. Sålunda är hjelten, som gifver sitt lif för fosterlandet säker om vår beundran, emedan förnuftet säger, att ett folks välfärd är att föredraga framför den enskildes. Likaså anslås vi af den ärelystnes mod, emedan det menskliga högmodet icke anser äran af att befalla för dyrt köpt med de största faror. Till och med hämden kan synas stor, emedan fördomen bjuder hedern att icke fördraga förolämpningar och förnuftet låter oss föredraga hedern framför lifvet. I en hämd utan fara och utan rätt se vi blott låghet och svek. Af kärleken framkallade heroiska handlingar göra intryck af storhet, ifall vi i desamma se en uppfyllelse af trohetens pligt.

Om uppfinningen och dess gränser. Emellertid räcker icke en dylik af historien gifven handling ensam till en tragedi. Skalden måste dertill efter behof uppfinna nya omständigheter, hvilka så att säga mångdubbla en alltför enkel handling och ställa samma karakter och samma dygd på särskilda prof, men ständigt i hufvudhandlingens anda, så att han oafbrutet medels sjelfva omvexlingen underhåller den lidelse han föresatt sig att väcka.

I afseende å uppfinningen föreskrifver sunda förnuftet vissa regler. Den grad af uppfinning hvart ämne tillåter, mätes efter den gifna handlingens större eller mindre ryktbarhet. Grunden härtill ligger i att åskådaren är beredd att taga allt för sannt hvad skalden framställer för honom, ifall han går till en representation utan någon förutfattad föreställning — alldeles på samma sätt som vi antaga, att ett porträtt är likt originalet, då det föreställer en för oss obekant person. När deremot handlingarna och karaktererna äro ryktbara, vilja åskådarne igenkänna de af dem kända originalen. Skalden har derför ej ens rätt att försköna dem på bekostnad af det som känneteckn ar dem och fulländningen af hans konst är att skildra skönt, utan att likheten minskas.

Emellertid medgifva äfven de mest kända ämnen stort rum för uppfinningen, i det man till de gifna hufvudfakta och karaktererna tillägger förberedelser och sannolika följder. Ämnen hemtade ur de heliga böckerna stå dock för sig; strängt taget borde man ej alls röra vid dem. Ty det innebär något vanhelgande att blanda våra uppfinningar med de heliga texterna.

Jemförelse med Lessing.

Lessing berör dessa frågor på flere ställen (H. Dr. 19. 23. 24. 33). Enligt honom utgår skalden från vissa afsigter, hvilka han vill uppnå med sin tragedi och han söker en fabel, som går i hop med dem. Likgiltigt är då, om han tager den från historien eller helt och hållet uppdiktar densamma. Då ämnet väljes ur historien bör hufvudvigten läggas på att karaktern motsvarar afsigten, handlingen är af mindre betydelse — den kan uppfinnas blott den stämmer med karaktern. I afseende å utgångspunkten är Lamottes uppfattning otvifvelaktigt estetiskt riktigare, deri nämligen, att handlingen väljes ur historien med afseende på den konstnärliga verkan, hvartill densamma synes kunna utvecklas och att således något verkligt motiv bör väcka skaldens fantasiverksamhet. Han lägger enligt orden hufvudvigten på att söka en lämplig „handling“, men begagnar ofta uttrycken „les faits“ och „les caractères“ som jembördiga samt visar allt igenom att han förstår att lägga tillbörlig vigt på karaktererna och deras följdriktighet. Sålunda synas åsigterna gå tillsammans, men icke destomindre ligger under de olika uttryckssätten en djupare grund. Lamotte står på den klassiska tragedins grund, i hvilken situationerna spela hufvudrolen; Lessing åter talar från det shakespeareska karaktersdramats synpunkt.

Hvad beträffar de egenskaper, hvilka Lamotte anser nödvändiga för ett godt motiv, var den första vigtig nog att påminna om, ty man hade nästan glömt bort att fordra originalitet i afseende å motiv. Det var alldeles vanligt att periodens skalder behandlade samma ämnen. Så, för att nämna ett exempel, var Voltaires „Œdipe“ (1718) den sjunde franska tragedi af samma namn och Lamottes egen den nionde, medan ämnet behandlats elfva gånger utom Frankrike! [1]) I utläggningen af hvad han förstår med handlingens storhet visar sig Lamotte stå på 17:de seklets moraliskt-ideala ståndpunkt liksom Lessing med talet om „afsigter“ hyllar sin tids tänkesätt, som förenade skaldeverksamheten med moraliskt-reala tendenser.

Angående uppfinningens förhållande till det historiska uttalar Lessing deremot (H. Dr. 23, 33) samma, obestridligt riktiga tankar som Lamotte: det som tilldiktas bör stå i öfverensstämmelse med det gifna och detta bör respekteras i samma grad som det är kändt, ty det som strider mot vår föregående kunskap är stötande.

Tyvärr yttrar sig ej Lamotte utförligare om skaldens förhållande till naturen. Satsen: konstens fulländning är att skildra skönt, utan att likheten minskas, är visserligen i allmänhet taget riktig, men hade gerna tålt flere ord. Lessing (H. Dr. 60) utvecklar denna maxim („getreu und verschönert“) på ett sätt, som visar, att han djupare tänkt sig in i frågan. Vi få dock se, att Lamottes fordran på natur var stor.

Om kärleken i tragedin.

I samband med frågan om valet af handling yttrar sig Lamotte särskildt om *kärleken* i tragedin. Kärleken, säger han, synes vara skaldernas enda ressurs, när det gäller att förlänga handlingen i en dramatisk dikt. Det finnes knapt en enda tragedi, hvars utveckling beror på andra motiv, och utländingarne spara icke på förebråelser öfver deraf härflytande enformighet. Orsaken till att franska författare stundom sammanföra kärleken äfven med ämnen, som mest strida deremot, ligger, enligt författarens förmenande, hufvudsakligast i lusten att behaga damerna. Dessa utgöra en stor del af åskådarne och dertill den del, som drager den andra till teatern. Qvinnorna åter intressera sig ej för annat än kärlek; allt annat är dem fremmande och likgiltigt. (!) Då härtill kommer, att kärleken äfven gör starkt intryck på männen, så manar ju allt skalden att behandla denna känsla, som väl skildrad nära nog försäkrar dem om alla röster.

„Föröfrigt kan kärleken, oberoende af ett köns eller en enskild nations smak, hafva sin del i de flesta tilldragelser, utan att sannolikheten förnärmas; det är en alltför naturlig och alltför allmän lidelse, för att någonstädes vara

[1]) Så uppgifver Père Folard i en dedikationsepistel, som föregår hans „Œdipe“ (den åttonde franska). Med rätta säger han:

C'est Œdipus, celui de tous les Rois
Qui sur la scène est monté plus de fois —

helt och hållet fremmande. Vårt fel ligger derför mindre i att alltid framställa kärleken på scenen, än fastmera i att ej gå till väga med nödig omvexling. I allmänhet skildra vi väl män, som älska, men icke den och den mannen; och derför se vi under särskilda namn i ett stort antal stycken och någongång i ett enda blott samma person i olika situationer. Ett tillvägagående, som åstadkomme omvexling, vore att kombinera kärleken med andra passioner och andra intressen, med särskilda nationela och enskilda karakterer, på så sätt att i hvart och ett fall hos personerna framträdde egenartade rörelser och beslut, hvilka icke endast berodde på kärleken utan på flere med densamma förenade orsaker — med andra ord, *så att man icke skulle se blott en älskare i allmänhet, utan den och den förälskade mannen*". — Jemförande Corneille med Racine anser Lamotte den förre i detta afseende stå mycket öfver den senare.

Lamottes uppfattning om kärleken i tragedin riktig och framom samtiden.

Här kan man säga, att Lamottes skarpsinne första gången framträder, för att peka på en af den pseudoklassiska tragedins svagaste punkter, den schematiska karaktersbehandlingen. Vid tal om Racines sätt att dikta säger Taine:¹) „Il saisit quelque passion simple, la fierté, l'emportement, la jalousie tyrannique, la fidélité conjugale, la pudeur, et en fait une âme; la personnage n'est rien d'autre ni de plus". Detta gäller hela systemet, ehuru den åtskilnad Lamotte gör mellan Corneille och Racine icke saknar skäl för sig. Eljes är försvaret för kärlekens berättigande i tragedin — på grund af denna passions naturlighet och allmännelighet — fullt tillfredsställande och visar att Lamotte i detta fall som i mycket annat — på detta område — stod långt öfver Voltaire. Denne ifrar ständigt mot kärleken och bemödar sig om att skrifva tragedier, hvari ingen kärlekshistoria ingår, medan han å andra sidan ej har annat skäl för sin kärleksflödande „Zaïre", än det som Lamotte angifver som förklaring på att kärleken åter och åter skildras af fransmännen — önskan att behaga publiken och damerna isynnerhet. I sitt ifrande mot kärleken stöder sig Voltaire på Corneille, hvilken som bekant ansåg, att denna diktarts „värdighet fordrade något stort statsintresse eller någon ädlare och manligare passion än kärleken" samt att denna derför, när den förekom, borde nöja sig med andra rangen (Disc. du poeme dramatique). Lamotte uppträder väl ej direkt mot Corneille — här lika litet som annorstädes — men angifver dock den rätta synpunkten.

Om de tre enheterna och intressets enhet.

Så öfvergår Lamotte till den klassiska tragedins kardinalfråga och begynner: „Jag vågar här uttala en paradox, den nämligen, att man bland tea-

¹) H. Taine, Nouveaux essais de critique et d'histoire, Paris, Hachette et C:ie, s. 179.

terns främsta regler nästan glömt den vigtigaste. Man talar vanligen blott om de tre enheterna, rummets, tidens och handlingens, medan jag dertill ville foga en fjerde, utan hvilken alla de tre andra äro onyttiga och hvilken ännu ensam skulle kunna åstadkomma stor verkan. Det är *intressets enhet*, som utgör den verkliga källan för fortfarande rörelse, i stället för att de tre andra vilkoren noggrant fylda icke skulle rädda ett arbete från att vara tröttande.

„*Rummets enhet* är långt ifrån att vara väsentlig, tvärtom gör den vanligen stort intrång på sannolikheten. Det är icke naturligt, att alla delar af en handling försiggå i ett och samma rum eller på en och samma plats. Det är blott med tillhjelp af ständigt upprepade och sannolikgjorda tillfälligheter, på grund af förberedelser man samlar skiljda personer på samma ställe, för att der på ett bestämdt ögonblick, allt efter intrigens behof, göra och säga saker, som borde vara gjorda och sagda annorstädes“. Om man är uppmärksam, så skall man finna, att de största skalder, i trots af alla konstens ressurser stöta det passande, för att följa denna föregifna regel.

Fåfängt är påståendet, att åskådarne, hvilka ej förändra plats, icke skulle kunna antaga, att aktörerne göra det. Erfarenheten gifver fullt tillfredsställande besked. I operan förekomma ofta scenförändringar och det är till och med en regel för detta slags arbeten. Synes handlingen derför mindre sann och känner sig inbillningskraften derför sårad? Tvärtom blir illusionen blott starkare, i stället för att förlora något, och det bevisar, att vi vänja oss vid det som behagar oss och att vi göra oss fantasiprinciper, då vi fördömma i ett slags teaterstycken, hvad vi godkänna i ett annat.

„Jag skulle derför vilja i många fall frisäga de dramatiske författarne från denna tvungna enhet, som ofta beröfvar åskådaren delar af handlingen, hvilka han önskade se och hvilka man kan ersätta endast med berättelser, alltid mindre verksamma än handlingen sjelf“.

Tidens enhet är icke förnuftigare, isynnerhet om man håller lika strängt på densamma som på rummets enhet. I sådant fall borde tiden för handlingen vara densamma som för sjelfva representationen och detta på samma grunder, på hvilka man vill stöda rummets enhet. Och i sanning, om man icke medger, att åskådaren, som behåller sin plats, kan antaga, att aktörerne förändra den, huru vill man då, att han lättare skall antaga, att de tillbringat fem eller sex timmar eller en hel natt utom hans närvaro, medan det för honom ej förflutit mera än några ögonblick? Men som det ej låter tänka sig, att de invecklade intriger, hvilka vi fordra, för att spänna vår uppmärksamhet och nyfikenhet, knyta sig och upplösas under en eller par timmar, har man gifvit tidens enhet större utsträckning än rummets. För skaldernas beqvämlighet har man medgifvit ända till 24 timmar; men det finnes ämnen, hvilka man ej skulle kunna begränsa till detta mått, utan att göra våld på dem.

Hvad skulle man, utropar Lamotte, kunna förebrå smaken hos en nation, som skulle föredraga en utsträckning af tiden, hvilken vore sannolik och stode i förhållande till ämnets natur, framför detta händelsernas brådstörtade lopp, som ej har något sken af sanning? Låt en person hafva blifvit förolämpad i första akten och låt honom i början af den andra komma och säga, att två eller tre dagar passerat efter händelsen, men att han väl användt dem till att förbereda sin hämd; låt en slagtning hafva egt rum mellan två akter och att man ej kunnat veta utgången förrän dagen efter — jag vet, att man skulle löpa stor risk med att taga sig sådana friheter, men jag vet också, att det ej skulle vara verkliga fel. Med liten eftertanke eller vana skulle man lätt gå in på dessa antaganden och man öppnade kanhända derigenom ett vidsträcktare utrymme för tankar och känslor, i det skalden skulle befrias från trycket af förberedelserna, hvilka vanligen taga ett så stort rum i styckena.

Men är det nödigt att uttala förmodanden härom? Vi hafva redan länge fogat oss i dessa antaganden. Äfven tidens enhet, så strängt anbefald för tragedin, är den icke förnärmad i operan, utan att man klagar deröfver? Hjertat är ej slaf under de regler förståndet uttänkt utan dess begifvande och det kostar det intet att göra sig alla de illusioner, som äro nödvändiga för dess njutning.

Skall jag gå längre? Jag vore icke förvånad om ett sundt tänkande, men mindre literärt folk, skulle foga sig i att se Coriolani historia fördelad på flere akter: I första akten denne senator anklagad af tribunerne, försvarad af konsulerne och af de medborgare, hvilka han räddat och slutligen dömd af folket till evig landsflykt; i den andra familjens förtviflan och den dystra, förfärliga smärta, hvarmed han skiljer sig från densamma; i tredje den storsinnade djerfhet han ådagalägger i att föreställa sig för volskernes anförare, som han så många gånger besegrat, och gifva sitt lif i hans händer, ifall han ej ville låna sig till hans hämd samt aktningen som denne anförare har för en så stor man, anseende det för sin ära att med honom dela befälet öfver trupperna; i den fjerde hjelten framför Roms portar, som han belägrar och som han bragt nära undergången — deputationerna af konsuler och prester; samt slutligen bönerna och tårarna af en moder, hvilken erhåller nåd för Rom af en son, den der i det ögonblick han bifaller väl vet, att volskerne skola straffa honom för hans mildhet liksom för ett förräderi.

Denna historia, som läsaren ej vill afbryta sedan han börjat, skulle på samma sätt fängsla vid representationen och utförandet skulle på ett slående sätt framställa för blicken det som reglernas tyranni nödgas att kläda i berättelsens form såsom väsentliga delar af handlingen.

Lamotte vill ej härmed hafva sagt, att dessa regler äro absolut onyttiga. De utgöra dock en konst och deras främsta nytta är att de afskräcka medelmåttiga begåfningar från tragedin. De äro en probersten för den erforderliga talangen. För det andra utgöra de, noggrant iakttagna, en stor del af vår njutning. Styckena behaga oss såsom förnuftsenliga och emedan vi se hurudana svårigheter det gält att öfvervinna. Han har derför ej anspråket att till intet göra dessa regler; han vill blott säga, att man ej borde hålla på dem med sådan vidskepelse, att man ej ville uppoffra dem för väsentligare skönhet.

„*Handlingens enhet* är otvifvelaktigt af mera fundamental natur, och man kunde först tro, att den sammanfaller med intressets enhet. Jag tror dock ej, att det är samma sak. Om flere personer äro på olika sätt intresserade i samma tilldragelse och om de alla äro lika värda att jag tager del i deras lidelser, så förefinnes en handlingens, men icke intressets enhet, emedan jag i detta fall ofta förlorar några ur sigte, för att följa andra, och jag hoppas och fruktar, så att säga, på alltför många håll.

En dam sade en dag om en tragedi, som föreföll henne skön, att hon hade blott en sak att anmärka: den nämligen att deri funnos för många hjeltar. Detta egendomliga yttrande innebar en mycket förståndig tanke: hon menade med hjeltar personer, hvilka gjorde anspråk på hennes beundran och medlidande; och då hon ej visste hvems parti hon skulle taga, saknade det intryck hon erfor af enhvar af dem tillräcklig bestämdhet och kraft för att fästa henne såsom hon önskat.

„Men hvari består konsten af den enhet, hvarom jag talar? Deri, ifall jag ej misstager mig, att man genast från styckets början för förstånd och hjerta angifver det hufvudföremål, hvarmed man vill sysselsätta det ena och röra det andra“; — — „vidare att icke införa andra personer, än sådana hvilka öka faran eller dela den med hjelten; att alltid sysselsätta åskådaren med detta enda intresse, så att det är närvarande i hvarje scen och att man ej deri tillåter något tal, som under förevändning af försköning, kunde draga sinnet från detta föremål; och slutligen att sålunda gå fram ända till upplösningen, hvari man måste använda det högsta mått af fara och den högsta ansträngning af dygden, som besegrar denna. Jag tviflar ej på att tragedins högsta konst består just deri, och att vid för öfrigt lika skönhet den, hvari dessa vilkor äro bäst fylda, står mycket framom andra.

Någongång kunde en författare tro, att han efter några ögonblicks afbrott i afseende å hufvudintressets uppbärande, skulle kunna ersätta skadan genom att snart med större lifaktighet återgå till detsamma; men må han ej förlita sig derpå. Denna eftersträfvade värme af ett återvaknande intresse skulle icke hafva den verkan han hoppas på, ty det gäller att börja från början, om man vill återföra ett engång kallnadt hjerta till en ståndpunkt af rörelse, hvarpå det förut befann sig. Det duger ej att sålunda gifva efter och taga igen, om man vill väcka djupa intryck; i stället för att ständigt slå an på samma ställe, bör man föra det från intryck till intryck till den högsta grad af känslighet, hvaraf det är förmöget.

Lamottes kritik af enhetsreglerna innehåller allt behöfligt. Polemik med Voltaire.

Lamotte hade måhända kunnat vara mera mångordig vid behandlingen af dessa den pseudoklassiska tragedins kardinalregler; men rättvisligen bör medgifvas, att han i hufvudsak anför allt hvad som behöfver sägas och efter honom sagts, för att bevisa deras värdelöshet och oförnuftighet. Men sällan har sundt förstånd talat för döfvare öron.

I företalet till 1730-års upplaga af sin „Œdipe" har Voltaire uppträdt mot Lamotte. Den ton, hvari han utlåter sig om den reformerande kritikern, är synnerligen aktningsfull. „Emedan Lamotte, säger han, vill uppställa regler, helt och hållet stridande mot dem, som ledt våra store mästare, är det tillbörligt att försvara de gamla lagarna, icke derför att de äro gamla, utan emedan de äro goda och nödvändiga och kunde i en man af hans förtjenst hafva en fruktansvärd motståndare". Den aktning, som framträder i dessa ord och äfven annorstädes, hindrar likväl ej Voltaire att försvara enheterna med de gamla falska bevisen — åskådaren *kan ej* uppfatta mera än ett föremål d. ä. en handling i sönder, en handling *kan ej* försiggå på flere ställen och naturligtvis *kan ej* tiden då heller vara mera än en — hvadan ock resultatet blir, att det är den besegrade svårigheten, hvarefter den tragiska diktens värde mätes. „Jag beundrar, att en man har kunnat på ett enda ställe och på en enda dag låta försiggå en enda tilldragelse, som jag med mitt förstånd utan möda fattar och för hvilken mitt hjerta gradvis intresseras. Ju bättre jag inser, huru denna enkelhet varit svår att uppnå, dessmera tjusar den mig (!)" — — Detta är alldeles nog, för att karakterisera den ståndpunkt Voltaire (han hade dock redan varit i England och lärt känna Shakespeare) intager i nämnda uppsats, som Jullien (1857!) kallar: „un morceau qui peut passer pour un chef-d'œuvre de pensée, de style, de bonne critique et de politesse".

Man skulle tro, att Lamottes hänvisning till operan bort väcka Voltaire och andra till eftertanke. I operan hörde det ju till regel att förnärma de lagar, hvilka ansågos oundgängliga för tragedin, och erfarenheten vitnade, att illusionen ej led deraf; men icke desto mindre påstod man, att tragedin ej kunde väcka illusion, ifall ej reglerna respekterades. „Det är, tyckes det mig, säger Voltaire, att vilja reformera en regelbunden styrelse efter föredömet af en anarki". Jullien åter yttrar: „L'exemple de l'opera ne prouve rien du tout, qu'à la condition de faire descendre le mérite de composition d'une tragédie au niveau de celui qu'exige un opéra". Ingendera går till sakens grund. De se icke eller vilja icke se det orimliga i att illusionen skulle bero på olika vilkor vid skilda arter af dramatisk poesi.

Vid åsynen af denna hårdnackenhet och samstämmighet hos klassikern från början af 18:de seklet och medlet af 19:de seklet, må man skänka Lamotte sin beundran. Tager man hänsyn till tidsförhållandena och omgifningen, måste hans skarpsinne och djerfhet skattas dubbelt och man kan ej förvåna sig öfver, att han söker med försonliga ord förmildra det aggressiva i sin kritik.

Men vår författare icke blott bevisar de föreskrifna enheternas gagnlöshet, utan yrkar på „intressets enhet", såsom stående öfver dem och ensam ovilkorligt nödvändig. Voltaire påstod, att intressets enhet var det samma som handlingens, medan Lamotte ansåg densamma vara något särskildt. Båda hade på sitt vis skäl för sig. Det beror på, hvad man förstår med handling. För de franske klassikerne var handlingen egentligen blott en katastrof, en dominerande situation, till hvars förberedande skalden skulle uppfinna så många föregående situationer af småningom stigande betydelse och spänning som akternas femtal fordrade. Så fattad måste handlingens enhet sammanfalla med intressets, men att Lamotte i sjelfva verket syftade till det äkta dramats större frihet finner man af hans utkast till en plan för en tragedi „Coriolanus". I detta utkast ser Voltaire tre handlingar (Jullien icke mindre än fem!), medan Lamotte motiverar dess antaglighet genom den intressets enhet, som deri förefinnes. Den moderna estetiken håller äfven på handlingens enhet, men handlingen fattas ej trångt som på klassicismens tid — dess enhet betingas nämligen just af intressets enhet. Lamotte såg ej häri fullt klart. Äfven han fattade i allmänhet begreppet handling lika trångt som Voltaire och derför ansåg han sig böra hålla på intressets enhet som något skildt för sig. Emedan han ej studerat någon annan dramatisk litteratur än den franska — hvarken den grekiska eller spanska, att ej tala om den engelska omnämnes af honom — hade han svårt att finna det rätta uttrycket; men hans uppfattning framgår tydligt nog. Han ville som sagdt äfven i afseende å handlingen större frihet. I sitt svar på Voltaires redan anförda anmärkning om intressets enhet säger han: „Min åsigt i denna punkt är endast den, att enheten af ett stort intresse skulle kunna behaga ensamt för sig, i stället för att de tre enheterna kort om godt (sèchement) iakttagna icke för sig skulle uppvärma åskådarne“. Som bevis anför han bland annat äfven Corneilles „Cid“, hvari han anser ej blott rummets och tidens utan äfven handlingens enhet saknas, men deri dock intressets enhet herskar.

Som jag redan nämnde, är utkastet till „Coriolanus“ det bästa beviset på att Lamotte verkligen eftersträfvade dramats fullständiga frigörelse. Ur svaret på Voltaires kritik må derför ännu följande rader citeras: „Allt hvad jag härtills anfört bör förklara, huru jag kommit mig till att antaga det „Coriolanus“, såsom jag planlagt den och frigjord från enheterna, skulle kunna behaga ett folk, som är tänkande, men mindre älskar regler. Ni utropar, att ett tänkande folk icke kan låta bli att älska regler. Ja, min herre, i fall reglerna skulle innebära förnuft; men då de icke äro något annat än godtyckliga stadganden, så kan man mycket väl hafva sundt förstånd, utan att hålla på dem“. Det är ju ord och inga visor!

En synnerligen intressant tillfällighet må det kallas, att Lamotte tagit Coriolani saga till motiv, för att hastigt skizzera planen till en tragedi, oberoende af „reglerna“. Planen sammanträffar väl ej fullständigt med Shakespeares tragedi; men emedan båda hållit sig nära till historien, har stor öfverensstämmelse uppstått. Något skäl att antaga det Lamotte kännt till Shakespeares berömda dikt förefinnes ej, ty, såsom redan förut anmärkts, har man ej något bevis på att han skulle gjort bekantskap med den engelska dramatiken.

Öfverensstämmelse mellan Lamotte och Lessing.

Det är i den långa recensionen af Voltaires „Mérope“ Lessing kommer sig att utförligare tala om enheterna (H. Dr. 44, 45, 46). Han uppvisar der, hurudana osannolikheter de förorsakade och huru de franske författarne sökte kringgå svårigheterna, för att nå en regelbundenhet, som i grunden var blott skenbar. I afseende å tidens enhet säger han det ej vara nog med att den fysiska enheten bevaras; dertill måste äfven komma den moraliska enheten, hvars förnärmande är för hvarochen kännbart. Med moralisk enhet förstår han detsamma, som Lamotte menar med sin yrkan på en tidsutsträckning, motsvarande ämnets natur. I det hela sammanfalla Lamottes och Lessings åsigter om dessa två enheter fullkomligt. Med sin större vetenskaplighet går Lessing dock längre i frågans utredning, då han framhåller, att rummets och tidens enhet hos de gamle voro endast så att säga följder af handlingens enhet och svårligen skulle noggrannare observerats, ifall ej tragedins förbindelse med kören kommit dertill. Det tvång, som derigenom lades på tragikerne, förde till största möjliga förenkling af handlingen, hvarigenom äfven sannolikheten bevarades. Fransmännen deremot hade blifvit påverkade af de spanska styckenas „vilda intriger“ och nöjde sig ej med samma enkelhet som de gamle, medan de likväl på samma gång fattade rummets och tidens enhet, icke såsom följd af handlingens, utan som oundgängliga vilkor för föreställningen af en handling. Den tredje enhetsregeln behandlar Lessing icke vidare. Dock framträder hans åsigt derom på flere ställen.

Den tankeföljd, som här kort antydts, slutar Lessing med satsen: „Den strängaste regelbundenhet kan ej uppväga de minsta fel i karaktererna“. Vi hafva förut sett, att Lessing ansåg karaktererna och deras utveckling för hufvudsaken i dramat och derför uppställer han deras följdriktighet såsom en väsentlig fordring gentemot de oväsentliga reglerna. Nedanföre skola vi få se, huru äfven Lamotte lägger all vigt på karakterernas konseqvens, när det gäller att få det intresse till stånd, hvars enhet han håller på. Det kan derför sägas, att Lessings ord i det hela innehålla det samma som Lamotte menar med sin fjerde enhet. På ett annat ställe (H. Dr. 16) falla sig ock orden mera direkt öfverensstämmande, nämligen i satsen: „En tragisk skalds enda oförlåtliga fel är, att han lemnar oss kalla; må han intressera oss och göra med de små mekaniska reglerna hvad han tycker!“ Sålunda se vi att Lamotte i afseende å kritiken af „enheterna“ i det hela framhållit allt hvad Lessing har att säga om dem. Att Lessing är sjelfständig i sitt sätt att bekämpa dem och icke har något undseende för fördomen, förringar ej Lamottes förtjenst.

Slutligen må nämnas, att Lessing (H. Dr. 1) äfven yrkar på de medel, genom hvilka Lamotte anser intressets enhet böra befordras. Sålunda får ej åskådarnes deltagande och beundran fördelas på alltför många. Mot denna regel hade t. ex. den unge skalden Cronegk brutit, då han i en tragedi „Codrus“ låtit utom titelhjelten äfven flere andra personer vara lika beredda att offra sitt lif för fosterlandet. För det andra bör lidelsernas utveckling fortgå utan språng i en så illusorisk stegring, att åskådaren måste intresseras om han vill eller icke. Härom dock mera i annat sammanhang.

Om versifikationen. Den senare hälften af afhandlingen egnas uteslutande åt *versifikationen*, hvilket ord Lamotte gifver en vidsträckt betydelse.

Hvad författaren här yttrar är ej af samma intresse, som det föregående. Emellertid skall jag upptaga hufvuddragen jemte de enskilda partier, hvilka visa Lamotte stående öfver samtiden, ty sådana saknas ej heller.

Versifikationen kan betraktas från två särskilda synpunkter: för det första såsom konsten att binda tanken under ett visst tvång, hvarpå versformen beror; för det andra såsom tal d. ä. med afseende å tankeinnehållet och stilen.

Alexandrinen är antagen för dramat såsom varande närmast prosan. Måhända har man begått ett misstag deri; ty den fria versen är ännu närmare prosan genom att rimmen äro aflägsnare från hvarandra och genom större omvexling i versmåttet, som ej alltid slår örat med en enda ganska trång och ständigt noggrant upprepad symmetri. Emellertid har man vant sig dervid och det vore farligt att försöka något nytt. Då versens få regler följas, fyller poeten, hvad i det hänseendet fordras. I afseende å versifikationen såsom tal äro deremot flere omständigheter att iakttaga.

Anspråken ställas här på: *renhet* i afseende å ordmaterialet, *klarhet* med hänsyn till framställningen, *ädelhet* (noblesse) i tanke och uttryck samt *lämplighet* (convenance). Stilens ädelhet består i att man i tragedin, hvari furstar och konungar tala, använder det valda språk, som är dem eget, samt begagnar det till och med mera oafbrutet än de i verkligheten göra det, emedan man framställer dem på teatern på höjden af det anständiga (dans leur plus grande décence). Med diktionens lämplighet afses, att den bör hafva en ton, som motsvarar ämnet, personernas karakterer och situationerna och deraf härleda sig skiljaktigheter, de der benämnas skiljaktigheter i stil, men hellre borde kallas skiljaktigheter i stämning och idéer: sublimt, heroiskt, patetiskt och enkelt.

Den allmänna lämpligheten, som innefattar allt under sig, är *att vara naturlig, d. v. s. att icke låta personerna tala på annat sätt än naturen skulle ingifva menniskor, hvilka äro i den ställning och upprörda af de lidelser, hvilka man framställer.* Våra skalder hafva länge varit långt aflägsnade från denna princip. Begärliga efter besynnerligheter och mera smickrade af det svåra och bizarra än det lätta och naturliga, tänkte de icke på att skildra, utan att gifva prof på qvickhet. När en dålig smak råder, böjas äfven stora snillen under densamma, ty menniskorna utveckla sig icke ensamma: de födas till lärjungar af allt det som omgifver dem, det som de i sin barndom höra beundras blir föremål för deras täflan. Dertill kommer skaldens begär att vinna bifall, för att afhålla dem från att reformera tidens smak. Corneilles „Cid“, Rotrous „Venceslas“ och Duryers „Scévole“ kunna tjena som bevis. Alla dessa tragedier hafva i flera afseenden bidragit till att fullkomna teatern, men med hänsyn till diktionen lida de af sin tids fel. Må man undersöka de mest genomarbetade scener och man skall finna, att skalderna först haft i hogen grunden till en förståndig tanke, men att de föraktat den under dess naturliga form såsom alltför vanlig och bemödat sig att kläda den i bisarra figurer och aflägsna häntydningar, så att de tagit sig två besvär i stället för ett: det ena att tänka förståndigt och det andra att maskera det som de tänkt i en färdfull figurlek.

Med anslutning till några exempel på ord- och tankelekar fortsätter Lamotte: Skilnaden mellan ord- och tankelekar består deri, att man i de förra missbrukar likheten mellan ord, för att sammanföra idéer, hvilka ej stå i något förhållande till hvarandra, något som alltid måste åtföljas af en viss tomhet i afseende å tanken; i stället för att tankelekarnas fel ligger deri, att det naturliga förnärmas i det man anstränger sig att ordna sina tankar i en glänsande och svår symmetri, fremmande både för lidelsen och det allvarliga tänkandet. Så t. ex. när Ladislas talar till Cassandre:

Sachons si mon hymen ou mon cercueil est prêt.
Impatient d'attendre, entendons mon arrêt.
Parlez, belle ennemie, il est temps de résoudre
Si vous devez lancer ou retenir la foudre.
Il s'agit de me perdre ou de me secourir.
Qu'en avez-vous conclu? faut-il vivre ou mourir?
Qui des deux voulez-vous, ou mon coeur ou ma cendre?
Et quel des deux aurais-je, ou la mort ou Cassandre?
L'hymen à vos beaux jours joindra-t-il mon destin?
Ou si votre refus sera mon assassin?

Dessa ständiga antiteser, hvilka i nya uttryck alltid upprepa samma sak, angifva mycket mera en skald, som drömmer en sonnet, än en älskare, som uttalar sin smärta. I stället för hjertats naturlighet känner man der endast det arbetande förståndet, som anställer en parad med sin smidighet. Ofta äro ej ens de vackraste ställen hos Corneille fria från dessa fel, hvilka samtiden räknade honom till förtjenst. I och för sig äro antiteserna icke förkastliga; tvärtom falla de sig stundom alldeles naturliga. De blifva klandervärda först, när man känner, att de äro sökta och ständigt återkommande. Hos Racine, säger Lamotte, skall det ej vara lätt att finna sådana fel.

I några slutord försvarar sig författaren mot dem, hvilka möjligen invända, att han alltför flyktigt behandlat frågorna om versmåttet och välljudet, medan han ej förbisett något beträffande versifikationen såsom tal, med anmärkningen, att hela den harmoni, hvarom göres så mycket väsen med afseende å skön vers, i sjelfva verket aldrig är något annat än föreningen af allt som hör till talets convenance och noggrant iakttagande af reglerna för versbyggnaden.

Natursanning yrkas. Det är lätt att i denna Lamottes framställning om versifikationen observera, huru fast han i vissa fall hänger vid det gamla, under det han samtidigt kommer fram med modernt klingande, slående anmärkningar och yrkanden. Oberoende af att han ännu utan minsta reservation anser tragedin vara endast konungar och furstar samt deras vederlikar förbehållen, fordrar han under uttrycket versifikationens „convenance“ — en term, som ej låter ana sådant — framförallt sanning och naturlig enkelhet i diktionen. De kritiska anmärkningar han med hänsyn dertill riktar mot äldre skalder äro förträffliga. I jemförelse med Corneille hade han nog skäl att gifva Racine erkännande för större naturlighet; dock synes berömmet för obegränsadt. Emellertid får man ej begära för mycket. Äfven jemförd med Lamottes yngre samtida och efter honom kommande förtjenar Racine detta pris. Den störste af dem, Voltaire, rönte ju långt starkare inflytande af Corneilles diktning och hans tragedier ådagalägga nogsamt, att spelet med antiteser, „tankelekarna“, långt efter Lamottes dagar skattades som den tragiska versens högsta prydnad.

Angående Lamottes i slutorden framträdande uppfattning om verskonsten skall särskildt talas i anledning af hans fjerde afhandling.

III.

Om kritik. Afhandlingen, „Discours à l'occasion de la tragédie de Romulus“ (Tome IV ss. 135—190), inledes med några sidor om kritiker, hvartill författaren funnit anledning i de anmärkningar — för det mesta klandrande — man riktat mot hans egna poetiska verk. För angifvandet af tankegången kan det vara nog att citera följande fromma önskningar, hvilka illa behandlade skriftställare och artister i alla tider pläga upprepa.

Det förnuftiga vore, att endast upplysta och opartiska personer hade rätt att kritisera. I en väl ordnad republik väljer man sådana till censorer. I det litterära samhället borde en likartad polis finnas och då vore kritiken af stor nytta. Upplysta personer skulle ej uppställa andra principer för konsten än sådana, som vore säkra och väl genomtänkta, samt gjorde rättvisa tillämpningar, i det de precis angåfve, hvari felen bestå och medlen att undvika dem. Föröfrigt skulle de såsom opartiska ej rikta retsamma och upprörande förebråelser mot författarne utan grundade anmärkningar i en hänsynsfull form, som gjorde dem öfvertygande och uppmuntrande författaren hjelpte honom att rätta sig, ty denne måste vara bra oskicklig, för att man ej i ett af allmänheten med bifall helsadt stycke skulle finna någon anledning till rättvist beröm“.

En rik handling är att föredraga framför en enkel. När Lamotte härpå åter går till sitt egentliga ämne, tragedin, upptager han till först en fråga, som står i sammanhang med den förut behandlade om valet af handling. Man hade anmärkt mot „Romulus“, att deri förekomma för mycket händelser (incidents) och det ger anledning att undersöka, hvilketdera härvidlag är att föredraga, rikedom eller enkelhet. Denna betraktelse är i det hela så ytlig, att äfven på detta ställe ett enda citat är tillräckligt för att återgifva det hufvudsakliga, praktiska resultatet: Om man frågar, säger författaren, hvilkendera bereder åskådarne större njutning, så erkänner jag, att jag mycket föredrager händelsernas mångfald af det skäl att i en alltför enkel tilldragelse omvexlingen kan blott vara ringa (fine) och grundmotivets enformighet gör sig starkare gällande än omständigheternas olikhet, hvaremot vid mångfalden (under förutsättning att hon alltid hänför sig till ett och samma intresse) förstånd och hjerta röras i hvarje ögonblick genom känbart vexlande taflor och sålunda både nyfikenheten och passionen på engång och säkrare tillfredsställas. Så har t. ex. „Bérénice“, oaktadt sitt öfverflöd på känslor, aldrig kunnat göra annat intryck än det af en elegi och den måste glömmas, för att med nöje återses, medan „Cid“, oaktadt händelsernas mångfald, fortfarande fängslar, så ofta den än åter upptages sedan nära ett sekel tillbaka. Å andra sidan måste medgifvas, att det erfordras långt större kraft att uppehålla ett alltför enkelt ämne genom detaljernas rikedom och skönhet. I det hänseendet är „Berenice“ ett mästerstycke och det är förvånande, att Racine kunnat frambringa „så mycket blommor på ett så trångt fält“.

Om riktigheten af hvad Lamotte här yttrar kunna icke tu tal vara. En nutida läsare tycker blott, att sådant knapt skulle tarfvat någon bevisning. Emellertid kunde det nog behöfvas på den tiden, då man så allmänt behandlade för ett regelrätt fem akters drama ofta ytterst knappa antika tragedimotiven. För öfrigt är Lamottes försvar för en rik handling ett uttryck af den önskan efter större lif och rörelse i tragedin, som senare med mycken bestämdhet uttalas.

Om expositionen.

I förhållande till händelsernas mångfald fordras större skicklighet att lägga sådan grund för dem, att de, ehuru ej förutsedda, dock vid deras inträdande synas vara en naturlig följd af den ställning, hvari man först tänkt sig handlingen och deri deltagande personer. Derför påkallar tragedins begynnande några reflexioner.

Expositionen består i att först lägga grundvalarna för stycket, i det man framställer de föregående tilldragelser, hvilka utgöra en anledning till de kommande. Dervid bör man angifva personernas karakterer och intressen samt framför allt stämma förstånd och hjerta för det hufvudintresse, hvarmed man vill sysselsätta dem. Men enär tragedin är en handling, måste skalden dölja sig från begynnelsen, så att man icke märker, att han gör sina förberedelser och att det är han, som anordnar mer än aktörerne spela.

Expositionen i många af våra tragedier liknar mycket mindre en del af handlingen än de gamles prologer, hvari en skådespelare framträdde, för att för åskådaren förklara den handling, som skulle framställas, i det han helt enkelt berättade de föregående händelser, hvilka lågo till grund derför, så att skalden derigenom slapp ifrån den besvärliga konsten, att, om jag så får säga, förena ställningarna med byggnaden och förvandla dem till ornament.

Corneille erbjuder i „Rodogune“ det förnämsta exemplet på en kall exposition. Deri låter han en ointresserad aktör berätta en för tragedins förstående nödvändig historia och dertill en så lång, att han nödgats dela den på två scener. Samme skald har dock äfven gifvit exempel på en skicklig exposition, redan den en vigtig handling. Det är i „Mort de Pompée", hvari Ptolomaeus rådslår angående den hållning han bör iakttaga efter framgången vid Pharsalus.

Det finnes många nyanser mellan de två nämnda expositionerna, men erkännas måste, att våra flesta tragedier hafva största likhet med den förra och att man sällan tänker på att efterlikna den senare. Skalden drar sig vanligen från saken, så att han låter en aktör relatera åt en annan alla de berättelser, som behöfvas, än under förevändning af att upplysa en person, som ej är inne i affärerna, än påminnande honom om det som han möjligen glömt, någongång också sägande, att han erinrar sig det, liksom om det vore skäl att ånyo upprepa historien.

Deraf härleda sig tvenne svagheter: den ena likformighet, den andra tråkighet. Åskådaren är till den grad van vid detta bruk, att han i början är endast åhörare: han räknar ej på att det redan vore tid att blifva gripen. Reglerna vilja, att han väntar och han afstår första akten och stundom mera dertill för skaldens behof under förhoppning, att denne derigenom skall förskaffa honom stor själsrörelse.

Jag upprepar ännu engång, att *hela tragedin bör vara handling och, om möjligt är, den första scenen lika väl som de öfriga.*

Lamotte på den nya estetikens höjd.

Hos Lessing har jag ej observerat något om dramats exposition; men derför finnes ej anledning att tvifla det han icke skulle varit af samma tanke som Lamotte. Säkert är att denne här står på den moderna estetikens höjd. Ty i hufvudsak är intet att rätta eller tillägga till hvad han sagt. Han vill att äfven expositionen skall vara handling, d. ä. vara „fyld med dramatisk rörelse och utgöra en organisk del i dramats byggnad", såsom Gustav Freytag *) uttrycker sig, samt förbereda det kommande. Den kritik Lamotte från denna ståndpunkt riktar mot de franska tragikernas sätt att begynna sina stycken är i lika grad giltig och bär alltigenom en rent af modern anstrykning. — Om bestämningen, att expositionen bör förbereda, men icke låta förutse det kommande, blir strax nedanföre anledning att tala.

Om situationerna.

Tyvärr visar sig vår författare icke från en lika förmonlig sida vid behandlingen af den härnäst följande frågan om situationerna. Framställningen är likväl alltför karakteristisk för att ej förtjena ett utförligare referat, hvar-

---

*) Die Technik des Dramas, 4 Aufl. Lpzg 1881, s. 101.

utom den har sitt speciela intresse för utredningen af Voltaires förhållande till Lamotte.

Expositionen tjenar till att förbereda situationerna. Af dem beror i främsta rummet verkan af ett stycke och derför erfordra de så mycket större skicklighet och omtanke i afseende å valet.

En situation är ej annat än den ställning personerna i en scen intaga till hvarandra. I denna ursprungliga betydelse äro alla scener i ett stycke, hurudana de än äro, lika många situationer; men man begagnar uttrycket vanligtvis endast i inskränktare mening, för att beteckna sådana situationer, hvilka äro af särskildt intresse. De kunna endast på två vägar nå denna egenskap, antingen genom nyhet eller genom vigten af de intressen, som dervid komma i fråga. Ofta nöja sig författarne, vare sig af bristande uppfinningsförmåga eller af likgiltighet för sin ära, med redan kända situationer; och med undantag af några olikheter, af hvilka stundom namnenas är den ansenligaste, tillegna de sig hvad andra uppfunnit, icke olike desse målare utan fantasi, hvilka endast kopiera efter de stora originalen de vackraste hufvuden och utvaldaste attityder. De lyckas väl sålunda vinna några lätta framgångar, emedan det rörande alltid till en början gör intryck; men knapt har man observerat likheterna, innan man upphör att värdera författaren och intresset svalnar för sjelfva stycket; ty vi äro engång sådana, att bitankar, om också fremmande för saken, stärka eller försvaga vårt intryck.

Men jemte nyheten måste man lägga märke till betydelsen af de intressen, som vid situationen framträda. En väl uttänkt situation af sådan art har en så stor verkan, att ett bifallssorl redan innan personerna tala, höjer sig bland åskådarne, hvilkas nyfikenhet är spänd att få höra, hvad skådespelarne skola säga. Jag vill i förbigående anmärka, att man ej kan i samma stycke anordna flere sådana situationer utan tillhjelp af en mängd händelser, hvilka plötsligt förändra sakernas utseende och försätta personerna i nya och förvånande lägen. Detta nöje förtjenar nog, att man unnar författaren tillfälle till nödiga förberedelser.

Som exempel på en äkta dramatisk situation, „den mest beundransvärda som förekommer på teatern“, anför Lamotte den stora scen i femte akten af Corneilles „Rodogune“, hvari Antiochus i beråd att tömma bröllopsbägaren genom Timagènes ord föranledes att tro, det antingen hans moder eller hans älskarinna, hvilka båda äro närvarande, förgiftat drycken. Han uppräknar de förberedande åtgärder skalden nödgats vidtaga, för att åstadkomma denna situation och yttrar sedan: „Se der i hög grad tvungna förberedelser; men situationen är så skön, att man glömmer dem för detta pris“.

Igenkänningsscenerna äro bland de situationer, hvilka kunna lyckas med minsta grad af nyhet och förtjenst från författarens sida. Dock icke sådana igenkänningar, hvarvid personerna helt enkelt återse hvarandra och scenen efter ett ögonblicks afbrott fortlöper som vanligt — de äro farliga, emedan den första öfverraskningen hastigt sjunker och ledsnad uppstår. Nej, jag menar sådana igenkänningar, hvilka bero på särskild upplysning, i det två för hvarandra kära personer, hvilka aldrig sett hvarandra eller hvilka, skiljda sedan lång tid tillbaka, tro hvarandra vara döda eller åtminstone långt aflägsnade från hvarandra, småningom uppröras genom ömsesidiga frågor och enskildheter, som de meddela hvarandra, samt slutligen vid en afgörande punkt plötsligt igenkänna hvarandra. Ah ma mère! ah mon fils! ah mon frère! ah ma soeur! Endast dessa utrop framkalla nästan ofelbart tårar och, utan att fråga om situationen liknar en annan eller om hon är riktigt motiverad, låter man hänföra sig af personernas rörelse; ty ju starkare rörelsen är desto mindre frihet gifves att reflektera om den är berättigad.

Filosoferne må icke gäckas öfver de aningar och de instinktartade känslor, som vi låta framträda vid dessa möten. Må de t. ex. icke tadla, att en fader i närheten af en okänd son känner en hemlig rörelse, som föregår upptäckten. De skola bevisa, att sådant ej är naturligt, utan inbillning; men sak samma, låt oss fullfölja vårt mål och begagna oss af allmänhetens föreställningar för dess eget nöje. Det som hon tror vara naturligt skall verka på henne såsom natur. — För öfrigt gäller för igenkänningsscenerna, att man ej bör låta en sådan, sedan rörelsen nått sin höjd och igenkännandet egt rum, urarta till ett långt samtal om den närvarande ställningen, åtminstone ej med mindre det kan hållas lika patetiskt, något som svårligen låter göra sig.

Lessing om situationerna och öfverraskningar.

Lamottes tankar om situationernas vigt och betydelse i allmänhet äro nog riktiga. Likaså var anmärkningen om att tragediförfattarne icke sällan anlitade gamla och kända situationer af behofvet påkallad, ty, såsom redan förut erinrats, satte pseudoklassikerne alltför liten ära i att söka originela motiv. Men medgifvet, att värdet af nya och intressanta situationer bör skattas högt, så kan det dock aldrig försvaras, att skalden söker nå dem på det naturligas bekostnad. Den frihet Lamotte i detta afseende synes beredd att medgifva författaren står dessutom i strid med hans egen flerestädes uttalade fordran på naturlig och tillräcklig motivering.

Det är blott i förbigående Lessing talar om situationernas betydelse för tragedin, men då gör han det visserligen med ord, hvilka delvis sammanfalla med Lamottes åsigt i frågan. Till först sker det i kritiken af Thomas Corneilles tragedi „Essex" (H. Dr. 24). Lessing citerar ur Voltaires recension af samma stycke bland annat anmärkningen, att tragedin, oaktadt karaktererna voro förfelade, likväl vunnit publikens ynnest, emedan situationen i och för sig var rörande. Godkännande detta utropar Lessing: Så stor vigt ligger för den tragiska skalden på valet af ämne. Endast derigenom kunna de svagaste och mest orediga stycken göra ett slags lycka. Senare (H. Dr. 51) heter det: i tragedin äro karaktererna mindre väsentliga; skräck (längre fram begagnas ordet fruktan) och medlidande framgå ur situationerna. Det är allt det samma som Lamottes yttrande, att ett styckes verkan i främsta rummet beror af desamma. Att Lessing likväl icke låter gripande situationer gälla som ursäkt för tvungna och onaturliga förberedelser, synes af den långa och dräpande kritik han egnar just den tragedi af Corneille, som Lamotte tagit till föredöme. Resultatet af granskningen är, att Corneille i „Rodogune" behandlat sitt ämne som ett qvickhufvud (ein witziger Kopf), men icke som ett snille, ty det senare älskar enfald, det förra förveckling. Det kan ej falla honom in att anse den af Lamotte berömda och i och för sig visserligen dramatiska situationen som en giltig ursäkt för det onaturliga, han uppvisar i karakterernas teckning och handlingens anordning.

Vid talet om „igenkänningsscenerna" urartar Lamottes framställning till på hans tid vanlig receptskrifning. Åsigterna äro dock förtjenta af att här upptagas ej blott, såsom redan nämndes, för jemförelsen med Voltaire, utan äfven, emedan Lessing omständligt behandlat samma fråga.

Det är Voltaires „Mérope", som gaf anledningen. Voltaire hade, då han skref sin tragedi efter den italienska skalden Maffeis drama af samma namn, äfven accepterat dennes anordning att låta Égisthe vara okänd för sig sjelf och andra ända tills han plötsligen igenkännes i samma ögonblick modern Mérope är i beråd att låta döda honom, såsom sin sons förmodade mördare. I en af Hyginus meddelad berättelse, som sannolikt är fabeln till en tragedi, hvari Euripides behandlat samma ämne, vet den unge prinsen sjelf liksom läsaren (åskådaren) redan före igenkänningsscenen hvem han är. Här uppstår af sig sjelf frågan: hvilketdera är af större dramatisk verkan? Lessing finner svaret hos Diderot, som i sin „Discours de la poésie dramatique" på ett originelt sätt kriticerar de franske klassikernes smak för öfverraskningar och fruktan för att låta åskådaren på förhand ana eller veta af hvad komma skall. Enligt Diderots mening skulle effekten blifva mycket större genom ett motsatt förfarande. „Om personernas ställning är obekant, så kan åskådaren ej intressera sig starkare för handlingen än för personerna. Men åskådarens intresse fördubblas, när han har nog klarhet och känner, att handling och tal skulle vara helt annorlunda, om personerna kände hvarandra. Blott då skall jag knapt kunna vänta, hvad det skall bli af dem, när jag kan jemföra det hvad de i verkligheten äro med hvad de göra eller vilja göra. — I motsatt händelse blir hela dikten en följd af små konstgrepp, hvarigenom man ej förmår frambringa annat än en kort öfverraskning".

Men Lessing stannar ännu icke här. Han kommer att tänka på Euripides' vana att nästan alltid genom prologen låta åskådaren veta ej blott för tragedins förstående nödiga, föregående fakta, utan äfven det mål, hvartill han ville föra dem. Detta hade pseudoklassicismen betecknat som ett fel. Lessing tar den store tragikern i försvar. Han visste, säger han, att hans konst vore mäktig af en långt högre fullkomlighet än att blott grunda sig på nyhet och öfverraskning, han visste att tillfredsställandet af en barnslig nyfikenhet vore det minsta, hvarpå den kunde göra anspråk.

Det förde mig för långt att utförligare referera Lessing. Det anförda är nog, för att ådagalägga, huru långt han i denna punkt hunnit framom Lamotte. I fall Lessing kommit sig att tala om expositionen, så hade han utan tvifvel i denna riktning utvecklat det som Lamotte derom yttrat. Försvaret för Euripides' prologer innebär naturligtvis ej, att han skulle velat föredraga deras form framför den som en organisk del i totalhandlingen ingående expositionen; men väl, att skalden alls icke behöfver frukta att låta åskådaren redan från början förutse hvad som komma skall.

Om karakte-rerna. Jag tillägger ännu, säger Lamotte, att situationernas verkan och egendomliga skönhet bero af karaktererna hos de personer, hvilka taga del i dem, och detta utgör tillräckligt skäl för författarne att ej försumma något i afseende å uppfinningen af karaktererna, de der böra hafva inflytande på allt det öfriga.

Karakter är ej annat än sammanfattningen af de egenskaper, passioner och stämningar (humeurs), hvilka man förenar i en och samma person. Oafsedt nyheten, som jag fordrar öfverallt, åtminstone i någon grad och hvarförutom det ej lönar mödan att skrifva, böra karaktererna vara naturliga, intressanta och konseqventa.

Karaktererna böra vara *naturliga.* Denna princip bjuder uteslutning af alltför bisarra idéer, hvartill ej ansats finnes hos åskådarne sjelfva och hvarom de ej heller eljes hafva någon erfarenhet. *Man vill öfverallt igenkänna det menskliga.* Huru skulle man känna sig tilldragen af inbillade porträtt, hvilka ej likna något, som man känner! Dermed är icke sagdt, att ej i naturen en underbar omvexling skulle förekomma och att ej de mest besynnerliga ideer skulle kunna få rum i ett hufvud; men dessa ytterligheter äro undantag, värdefulla för historien, utan att tragedin någonsin kan godkänna dem.

Emedan man ej skulle tro på dem, skulle de ej skänka den för teatern egendomliga njutning, som beror på imitationen.

Såsom exempel anföres främst Corneilles „Pertharite“. Skalden sjelf skylde styckets fall på att deri behandlades den äktenskapliga kärleken, som då ej mera var på modet i Frankrike; men orsaken låg utan tvifvel i karakterernas och idéernas besynnerlighet.

Ett annat brott mot det naturliga vore att förena känslor som strida mot hvarandra. Så t. ex. är det onaturligt, att Horace, som ömt älskat sin svåger Curiace plötsligt, efter att hafva hört det Alba valt denne och Rom honom sjelf till sin kämpe, afskuddar sig sin känsla och utropar:

Albe vous a nommé; je ne vous connais plus.

Så, ifall man tar versen efter orden. Skådespelaren Baron återgaf dock karakteren sanning, när han framsade versen med vek röst, liksom ville han säga: jag vill ej mera känna dig; jag skall kämpa som om vi ej kände hvarandra.

För det andra böra karaktererna vara *intressanta* och det kunna de blott vara på tre sätt, antingen genom en fullkomlig och oblandad dygd eller genom imponerande egenskaper, vid hvilka fördomen binder en föreställning om storhet och dygd, eller genom en förening af dygder och svagheter, hvilka erkännas för sådana.

De absolut dygdiga karaktererna äro sällsynta, emedan de icke erbjuda vexlingar, ty dygden är en och dess gång är enahanda, hon skall i samma förhållande fatta samma beslut och hon beherskar på lika sätt alla passioner. Derför skulle oaktadt förändrade namn och händelser personerna förbli oförändrade. — Som exempel på en dygdig man på teatern kan titelhjelten i Pradons tragedi „Regulus“ (1688) tjena. Han fattar alltid, utan att tveka, det mest heroiska beslut, hvad det än må kosta honom, och med denna beslutsamhet förenar han en på teatern nästan okänd anspråkslöshet. *De flesta af våra hjeltar öfverdrifva sin egen vigt: de äro alltid sjelf sina främsta panegyrister och det synes som gjorde de aldrig något stort af annat skäl än för att berätta det.* Emellertid medges, att så fullkomliga karakterer sällan äro anslående; de representera själar af en högre ordning, hvilka likna oss för litet för att röra oss.

Det andra sättet, hvarigenom karakterer kunna vara intressanta, är att i dem ingå egenskaper, hvilka, ehuru i och för sig oförnuftiga, dock göra intryck af storhet och dygd. Som exempel härpå uppställes ett par karakterer ur „Romulus“ och främst hufvudpersonen, som drifver tapperheten till öfverdåd och förtroendet till sin egen kraft ända till fanatism (om det tillåtes att med detta ord uttrycka öfverdrift af förtroende).

Slutligen gör man en karakter intressant genom blandning af dygder och svagheter, erkända som sådana, och tror författaren, att denna utväg är den säkraste. Man beundrar mindre, men är mera gripen. Nära stående — d. ä. sådana, hos hvilka vi se våra egna svagheter — hafva större rätt till vårt deltagande än fremlingar. — Vidare hafva dessa blandade karakterer den fördel, att de hålla oss i en ständig oro. Den långa vexlande kampen mellan passioner och dygder bringar vår själ i vexlande rörelse och det är just dessa själsskakningar, som utgöra den njutning tragedin kan skänka.

Med hänsyn till *karakterernas konseqvens* (c. soutenus) skall jag göra en enda reflexion. Man vet i allmänhet nog, att de icke böra förneka sig; att en tapper man icke bör göra sig skyldig till en feg handling, ej heller en vis man till en oförståndig. Men man vet ej lika väl, att *alla en persons handlingar måste vara enliga med karakterens totalitet* och att det ej förslår till att rättfärdiga en enskild handling, att den öfverensstämmer med en af dess egenskaper, men står i strid med karakteren föröfrigt. Man vill ständigt ursäkta vissa dårskaper, som begås af älskande på scenen, med att skylla på kärlekens natur. Det vore rätt, om man blott hade att hålla sig till denna passion ensamt för sig; men alldenstund den hos olika personer sammangår med olika egenskaper och lynnen, måste äfven dess yttringar vara olika. Kärleken hos den brottslige resonnerar icke som hos den dygdige, leder icke den tappre till samma beslut, som den klenmodige o. s. v.

Det är ej af glömska jag ännu icke talat om förhatliga karakterer (c. odieux). Jag har ansett mig böra behandla dem skildt för sig, för att undvika oklarhet. — Karakterer af detta slag kunna vara antingen helt och hållet eller blott delvis förhatliga. De förra böra sällan användas, ty så nödvändiga de än stundom äro, så förorsaka de dock alltid en obehaglig känsla af förtrytelse och afsky, något som konsten bör så litet som möjligt göra sig skyldig till. — Imitationen ensam förslår ej till att behaga: det är lika vigtigt att väl välja föremålen som att skildra dem väl.

Deremot kunna karakterer, som äro endast delvis förhatliga, någongång med framgång vara de dominerande i ett stycke. Som exempel kunna tjena Cléopatre i „Rodogune“ och Medée i tragedin af samma namn. Cleopatra, van vid tronen, kan ej besluta sig för att nedstiga från densamma: hon finner det nedsättande att blifva sin sons undersåte och hon vill hellre förlora allt än afsäga sig makten. Fördomen skall alltid taga denna oförvägna ärelystnad som bevis på en stark själ, och det är detta föregifvet stora motiv, som räddar Cleopatras brott från förakt, om också ej från hat. Medea åter är oändligt olycklig. Den otacksamme, för hvilken hon öfvergifvit allt, förråder och förskjuter henne. Hennes olyckor och de orättvisor hon lidit tjena i viss grad till ursäkt för hennes brott, hvilka, ehuru hon begår dem för att hämnas, väcka mindre förtrytelse än förfäran.

Lamottes uppfattning i grunden riktig. Lessing om karaktererna.

Oaktadt framställningens föråldrade tycke, torde ej kunna nekas, att Lamottes uppfattning om kriterierna för en dramatisk karakter i det stora hela är riktig och delvis före sin tid. Han förkastar bisarra karakterer, som sakna motsvarighet i naturen, varnar för att sammanföra oförenliga drag, anser „absolut dygdiga" helst böra undvikas, emedan åskådaren ej känner igen sig i sådana samt ger företrädet åt dem, i hvilka godt och ondt, dygd och svaghet förenas, ty så beskaffade äro menniskorna mest. Att han äfven varnat för „absolut onda" karakterer kan än mindre förvåna, då för honom konstens mål är blott lust (plaisir). Det vigtigaste är yrkan på *mensklighet* och domen öfver godtyckliga, drömda karakterer utan verklighet (portraits chimèriques), fordran på anspråkslöshet hos förtjensten (ett ord på sin plats för Corneille och hans efterapare!) samt slutligen förklaringen, hvari karakterens konseqvens egentlighet besticker sig. Denna sista punkt innebär ett upprepande af hvad Lamotte redan tidigare antydt vid frågan om kärleken i tragedin. Det är ej nog med att karakteren representerar *en* lidelse. Den bör vara ett helt af „egenskaper, passioner och stämningar" och hvarje handling bör öfverensstämma med denna helhet.

Lessings förut anförda yttrande, att karaktererna äro mindre väsentliga än situationerna i tragedin, må icke missförstås. Det fälles vid en jemförelse mellan tragedin och komedin och meningen är alls icke, att karaktersteckningen finge försummas. Tvärtom. I recensionen öfver „Mérope" (H. Dr. 46) säger han: „den strängaste regelmässighet kan ej uppväga det minsta fel i karaktererna". Och redan förut på annat ställe (H. Dr. 43): „karaktererna måste vara för skalden långt heligare än händelserna (fakta). För det första, emedan de senare icke kunna utfalla stort annorlunda, i fall de förra noga iakttagas; medan deremot ett likartad faktum låter härleda sig ur olika karakterer. För det andra, emedan det lärorika icke består i fakta rätt och slätt, utan i insigten, att sådana karakterer under sådana förhållanden pläga och måste framkalla sådana fakta". Detta är i hufvudsak detsamma som Lamotte menar, då han ålägger skalden att nedlägga omsorg på teckningen af karaktererna, enär allt det öfriga bör rätta sig efter dem.

Äfven i afseende å fordran på karakterens konseqvens eger öfverensstämmelse rum. Så säger Lessing (H. Dr. 2): bevekelsegrunderna till hvarje beslut, till hvarje ändring af de minsta tankar och åsigter, måste noga uppvägas mot hvarandra efter den engång antagna karakterens måttstock och de få aldrig frambringa mera än hvad de kunna i enlighet med den strängaste sanning. Senare (H. Dr. 34) behandlas frågan utförligare och då yrkas att i karaktererna böra framträda öfverensstämmelse och afsigt. Öfverensstämmelse: — i karaktererna får ej finnas något motsägande; de måste alltid vara enahanda (einförmig), alltid förblifva sig sjelfva lika; de få yttra sig än starkare än svagare, allt efter omständigheterna; men inga omständigheter få vara nog mäktiga att ändra dem från svarta till hvita. En turk eller despot måste, äfven om han är förälskad, fortfarande vara turk och despot.

Hvad Lessing menade med sin andra fordran på en dramatisk karakter, få vi se strax nedanföre. — Det här citerade är nog att bevisa, att han tänkte detsamma som Lamotte om karakterernas hufvudkriterium. Dock måste Lessings öfverlägsenhet erkännas, när det gäller att från det naturligas och menskligas ståndpunkt bedöma dramatiska karakterer. Man kan ju säga, att detta utgör en af sidor, hvari hans skarpsinne mest framträder i Hamburgische Dramaturgie. — Som ett bevis må erinras om kritiken af Cleopatra i „Rodogune". Äfven Lessing har liksom Lamotte sammanstält Cleopatra och Medea. Han uppvisar i en lång analys, att den förra karakteren är afgjordt missttecknad och onaturlig. „Hjertat uppreser sig, säger han, mot en qvinna, som af kall stolthet och reflekterad ärelystnad begår missgerningar och skaldens hela konst förmår ej göra henne intressant". Deremot heter det om Medea: en öm, svartsjuk qvinna vill jag förlåta allt; hon är hvad hon bör vara, men blott alltför häftig. Båda kritikerne döma således lika om Medea, medan åsigterna om Cleopatra gå åtskijs. Emellertid får man ej glömma, att Lamotte alldeles icke anser karakteren i grunden försvarlig, utan blott säger, att *fördomen* skall godkänna hennes ärelystnad. Omdömenas olikhet karaktiserar de olika perioder kritikerne tillhörde. Lamottes visserligen oförlåtliga svaghet var, att han tillät „fördomen" gälla. Det var möjligt för en estetiker med hans och tidens föreställning om konstens uppgift.

Tragedin och moralen. „Om man, fortsätter Lamotte, på grund af det som jag anfört, skulle sluta till, att tragedierna icke kunna vara af stort gagn för sederna, så skulle uppriktigheten nödga mig att instämma deri. Vi föresätta oss vanligen icke att upplysa sinnet i afseende å last och dygd; vi tänka blott på att uppröra passionerna genom att blanda det ena med det andra. Vi ställa ofta fördomar på dygdernas plats. Hos de intressanta personerna göra vi svagheterna nästan älskvärda genom glansen af de dygder vi förena med dem. Hos förhatliga personer försvaga vi brottets fasa genom stora ändamål, som upphöja dem, eller stora olyckor, som ursäkta dem. Allt detta bidrar blott mycket indirekt till undervisning och det har föranledt en berömd dam (markisinnan de Lambert) att bland de råd hon gifver sin dotter yttra, det man erhåller i teatern stora lärdomar, men man för med sig intrycket af lasten".

„Dermed är ej sagdt, att vi ej vid upplösningen hade största hänsyn till moralen. Vi se väl till, att de personer, som gå under, gjort sig förtjenta deraf och att samvetsqval straffa förseelser. När brottet triumferar, öfverlemna vi de brottsliga i ett tillstånd af oro och samvetsqval, som utgör deras straff och gör dem tillochmed olyckligare än de, hvilka de bragt till undergång. Vi skulle ej lyckas, om vi i detta personernas sista läge sårade den naturliga rättvisan, som alltid är närvarande i allas sinnen. Omsorgen att foga oss härefter kunde anföras som försvar, men uppriktigt taladt, det går ej an. Denna förbigående hyllning, vi egna det rätta, utplånar ej verkan af passionerna, hvilka vi stält i förmonligt ljus (que nous avons flattées) under tragedins hela förlopp. Vi undervisa ett ögonblick, men vi ha lång tid förfört. Botemedlet är för svagt och kommer för sent".

Dessa tankar utgöra hos Lamotte en slutledning af hvad han haft att säga om karaktererna i tragedin, och granskningen kan derför anknytas vid det resultat, hvartill jag nyss kom vid jemförelsen med Lessings uttalanden om desamma. I deras olika sätt att bedöma Cleopatras karakter återspeglar sig i sjelfva verket en grundväsentlig åtskilnad mellan hvarderas uppfattning om tragedin. Detta framgår tydligt, om man jemför Lamottes naivt uppriktiga utläggning om tragedins moraliska betydelse med Lessings tankar i samma sak. Den förres omdöme om den pseudoklassiska tragedin i detta hänseende kan näppeligen jäfvas. Begagnande pronominet „vi" ställer han sig i samtida skalders led och medgifver derigenom, att han sjelf för sin del ej heller hade något emot att „fördomar" ställdes på dygdernas plats o. s. v. — blott ändamålet, nöje och njutning, vanns dermed.

Vid frågan om valet af handling är redan sagdt, att Lessing höll på att skalden borde hafva en bestämd moralisk afsigt med sin dikt. På ett par ställen (H. Dr. 12 o. 33) säger han visserligen, att det är likgiltigt om den dramatiska skalden låter eller icke låter en allmän sanning framgå ur sin fabel; men annorstädes håller han så bestämdt på den moraliska afsigten, att detta senare måste anses beteckna hans grundåskådning. Särdeles energiskt ger denna sig uttryck (H. Dr. 34) i fordran på att i karaktererna bör jemte öfverensstämmelse en viss *afsigt* framträda. Denna afsigt bör gå ut på att undervisa oss, hvad vi skola göra eller låta bli, att lära oss känna det godas och det ondas, det anständigas och det löjligas kännetecken, att visa oss det förra skönt och lyckligt i alla sina förbindelser och följder tillochmed i olyckan, det senare deremot fult och olyckligt tillochmed i lyckan o. s. v. — Lika vigtigt som detta ställe är ett annat (H. Dr. 83), der Lessing kommer in på denna fråga under det han granskar Corneilles utläggning af Aristoteles. Corneille hade velat försvara sin Cleopatra från ståndpunkten af hvad Lamotte kallar en fördom. „Alla hennes brott, säger skalden, äro dock förbundna med en viss själsstorhet, som har något upphöjdt, så att man på samma gång man fördömer hennes handlingar likväl måste beundra den källa, hvarur de framqvälla". I sanning, ett förderfligare infall kunde Corneille icke hafva haft! utropar Lessing. Följ det och det skall vara slut med tragedins sedliga nytta.

Det falska och omoraliska i Corneilles uppfattning, som Lessing här påpekar, insåg ju äfven Lamotte, ehuru, som sagdt, han ej fördömde det, såsom Lessing. Åtskilnaden beror således ytterst på, att den förre var likgiltig, medan den senare är genomträngd och hänförd af en varm ifver för sedlighetens främjande och deri såg ett hufvudsakligt ändamål för tragedin. Lamottes öppna framhållande af tragedins ringa uppbygglighet i moraliskt hänseende är dock högst anmärkningsvärdt och utgör i grunden en öfvergång till den Lessingska ståndpunkten. Ty när svagheten blottades och ej mera försvarades med skenfagert tal, var blott ett steg till de yrkanden vi sett Lessing göra.

Dermed är likväl ännu icke afgjordt, hvilkendera hade rätten på sin sida. I allmänhet taladt kunde sägas, att tider randats, som gifvit hvardera rätt. Under romantikens dagar förkastades allt hvad tendens heter, såsom fremmande för konsten; medan i närvarande tid särskildt den nordiska naturalismen eller realismen åter vill använda skaldekonsten som medel för nående af bestämda moraliska afsigter. Dock har romantiken i stället för Lamottes ändamål, „le plaisir", stält konsten, „konsten som konst", och den moderna naturalismen, i stället för Lessings välmenande undervisning, samhällets och mensklighetens revolutionerande genom „sanningens" framdragande i ljuset. Att söka utreda, hvilket af dessa fyra olika betraktelsesätt är det rätta, skulle föra mig för långt, så mycket mera som tydligen hvarje uppfattning i viss grad kan försvaras. Längst borta är nu visserligen Lamottes föreställning om konstens mål; men icke desto mindre har den nog ännu i våra dagar det stora publikum för sig. Hvad den begär af konsten, nog är det nöje framför allt annat. Och vill man hålla sig till sanningen, så har han också temligen rätt uti, att konstens direkt sedliga inflytande än i denna dag är ganska chimerisk. Den moderna konsten, räknad från Voltaire, som på poesins område var så god pseudoklassiker, har bevisat, att den har en oskattbar uppgift i mensklighetens utvecklingshistoria, såsom förmedlare och propagator af idéer; men direkt arbete för sedligheten skall man förgäfves begära af densamma.

Lamottes utomordentligt flyktiga sätt att behandla frågorna om skuld och straff i tragedin visar nogsamt, att han ej djupare tänkt sig in i den tragiska diktningens väsende. Derför finnes ej heller någon anledning att ingå på de tragedins grundfrågor, hvilka stå i sammanhang dermed och hvilka Lessing utreder, när han mot slutet af sin Hamb. Dramat. granskar Corneilles uppfattning af Aristoteles lära om dramat.

För att dock bevisa, att Lamotte i sist berörda hänseende icke var så lättvindig som man kunde tro af det legera sätt, hvarpå han talar om tillämpningen af rättvisans bud vid tragediernas upplösning, vill jag redan i detta sammanhang anföra några rader i början af afhandlingen i anledning af hans tragedi „Œdipe“. Denna uppsats inledes nämligen med en utförlig redogörelse af de förändringar författaren vidtagit med Oidipossagan, då han skrifvit sitt drama. Den vigtigaste anmärkning han dervid gör mot det traditionela ämnet är, att Oidipos går under utan egen skuld. Alla de brott han begick skedde utan att han anade hvad han gjorde och hade han derför i sjelfva verket intet att förebrå sig. „Föreställningen om ett ofrivilligt brott innebär en ren motsägelse, emedan i brottets idé innebor en afsigt, något som omöjligt kan förenas med föreställningen om ofrivillighet. Man kan på grund deraf säga, att Oidiposmotivet i sin helhet taget är afskyvärdt och frivolt“. För att göra den olycklige konungen antaglig, har Lamotte framstält honom som öfverdrifvet ärelysten, ehuru eljes „un des plus vertueux hommes du monde“. Ärelystnadens „brott“ åsamkar honom sedan de öfriga. — Det behöfver knapt sägas, att Lamottes försök att göra Oidipos till en modern tragedi-hjelte misslyckats, ej heller är det nödigt att fästa sig vid motsägelsen i att han här betraktar ärelystnaden, låt vara den öfverdrifna, som ett brott, medan denna lidelse enligt hans vanliga sätt att se hellre bort gälla för en af „fördomen“ erkänd dygd — hufvudsaken är, att han höll på den nyare tragedins grundsats, att menniskan sjelf skapar sitt öde.

Om bristen på verklig handling i den franska tragedin.

„Jag skulle önska, att man sträfvade till att gifva tragedin ett slags skönhet, som synes höra till hennes väsende, men hvaraf hon likväl hos oss har föga; jag menar verklig handling med fullständigt utförande (ces actions frappantes qui demandent de l'appareil et du spectacle). Våra flesta stycken äro allenast dialoger och berättelser och hvad som isynnerhet är förvånande är att just den handling, som förmått författaren att välja ämnet, nästan alltid försiggår bakom scenen. Engelsmännen hafva en annan smak. Man säger, att de gå till öfverdrift; det är väl möjligt, ty det finnes visserligen handlingar, hvilka ej äro lämpliga att ställas för åskådaren, vare sig med afseende å svårigheten att utföra dem eller för det fasansfulla i dem. Men antaget att sådant undvikes, huru talrika och vigtiga handlingar finnas ej, hvilka åskådaren ville se och hvilka man beröfvar honom under förevändning af någon regel, endast för att ersätta dem med i jemförelse med handlingen sjelf tråkiga berättelser. Ty, det måste i förbigående sägas, dessa berättelzer gifva skäl till många anmärkningar. Än äro de alltför svulstiga och alltför poetiska, för att ersätta det verkliga åskådandet, och det tyckes då, att skalden reserverat sig detta paradstycke och att han intagit den berättandes plats; än äro de alltför omständliga och noggranna i förhållande till passionen hos den lyssnande, som ej intresserar sig för annat än det som angår honom. Någongång händer det åter, att man, för att inskränka sig till det vigtiga, gör dem kortare än åskådarens deltagande skulle fordra. *Låt handlingarna intaga berättelsernas plats*, blotta närvaron af personerna skall göra större intryck än den mest omsorgsfulla berättelse kan åstadkomma. Horatius har sagt och det är en maxim, som blifvit trivial, att det genom ögat förmedlade intrycket är starkare än det som mottages medels hörseln. Om oss kan sägas, att vi hylla en motsatt maxim, emedan vi undandraga blicken de mest verksamma handlingar, för att nöja oss med förberedelserna och, så att säga, förlita oss på våra öron, när det gäller att slå de stora slagen".

Detta belyses genom flere exempel. Enstaka undantag äro de stora scenerna i „Rodogune", sista akten, och „Athalie", de två sista akterna. Är icke bröllopsscenen i „Rodogune", anordnad inför folken, hvilka Cleopatra tager till vittne, något i hög grad imposant? Denna misstänkta bägare, som förorsakar så olika rörelser hos personerna och som gående från hand till hand framkallar så stora omhvälfningar, är ensamt för sig ett betydande skådespel och folkens närvaro gör det ännu mera intressant. I „Athalie" åter verka hela Joas' kröningsståt, öfverstepresten framför hans fötter, leviterna igenkännande honom o. s. v. helt annorlunda än de vackraste verser. Och då kan man säga, att åskådaren är tillstädes vid händelser och icke endast vid tal, såsom i de flesta stycken.

Oaktadt sina brister, har operan den fördel framför tragedin, att den låter se många handlingar, hvilka tragedin blott vågar berätta. Jag saknar mycket, slutar Lamotte, jag bekänner det, dessa patetiska scener, hvilka vi gå förlustiga i följd af skaldernes vidskepliga hänsyn för rummets enhet. Hvilket beklagansvärdt misstag att gentemot njutningens intresse göra gällande regler, hvilka uppfunnits blott till njutningens fromma!

Här se vi Lamotte åter långt framom sin tid och sällan äro hans ord så varma och öfvertygande. De förebråelser han riktar mot den gällande tragedin för brist på verklig handling äro fullt berättigade och träffa ett lyte af lika väsentlig natur, som karakterernas abstrakthet och enhetsreglerna. Han hänvisar till det engelska dramat — den enda gången i alla dessa afhandlingar — men i ordalag, som synas antyda, att han kände det endast genom hörsägen. Att det är hans egen sunda uppfattning, som ledt Lamotte till de åsigter han uttalar, kan man väl sluta till af den slående karakteristik han gifver af de berättelser, hvarmed skalderna ersatte handlingen. Derjemte antyder jemförelsen med operan, på hvilken väg han kunnat komma till de nya satserna. *Riktig kritik.*

Den anmärkning, utgifvaren af Lamottes „paradoxer" fogar till ett af de bästa partier i dennes uppsatser om dramat, är för kostelig för att icke upptagas: „Ständigt samma villfarelse, utropar herr Jullien. Reglerna skänka mycket större nöje åt åskådaren än för hans ögon framstälda handlingar. Det är just för det man insåg det nöje, som iakttagelsen af dessa regler förorsakade, som man uttänkt dem. Erfarenheten, som lärt det åt våra fäder, visar det dagligen åt klarseende kritiker (!!)".

Att Lessing i närvarande fråga fullkomligt delade Lamottes tankar, behöfver knapt sägas. Det är i sin tolkning af Aristoteles' definition af tragedin han (H. Dr. 77) utlägger detta: den dramatiska handlingen måste framställas för ögat och icke berättas. I stället för att från denna ståndpunkt med egna ord yttra sig om den franska tragedin föredrar han (H. Dr. 80) att citera Voltaire, hvilken åter talar alldeles som Lamotte. Hvar Voltaire kommit sig till insigten om den franska tragedins brist på handling — den frågan skall komma före i sista kapitlet.

IV.

Den tredje uppsatsen — „Discours à l'occasion de la tragédie d'Inès" (Tome IV, ss. 255—314) — börjar med en betraktelse öfver de parodier, hvilka man plägade skrifva och uppföra, såsnart en tragedi gjort lycka. Det framlyser, att Lamotte är förnärmad af att hans „Inès de Castro" parodierats och den dom han fäller öfver parodierna i gemen är följakteligen icke opartisk. Ehuru icke utan intresse med afseende å tidens literära lif och författarens karakteristik, kunna hans uttalanden i denna sak förbigås.

Den äktenskapliga kärleken i tragedin.

Derefter upptages en annan fråga, som likaledes hade specielt intresse då för tiden, men nu är absolut föråldrad, d. ä. frågan om den *äktenskapliga kärlekens* lämplighet för teatern. Lamottes tankar derom måste i korthet anföras.

Fördomen att den äktenskapliga kärleken ej egnade sig för teatern stödde sig på den erfarenheten, att kärleken genom egandet afkyldes. Lamotte bestrider ej detta, men anser det vitna om ett förderfvadt hjerta och föga upplyst förstånd, att påstå det kärlek mellan äkta makar icke finnes eller att man ej skulle kunna väcka deltagande genom att taga det till föremål för framställning. I fall erfarenheten från teatern tyckes bekräfta denna fördom, så är det icke naturen utan skalden, som rår derför. Han har låtit passionen gälla mindre än pligten och denna är visserligen ej tillräcklig. Förena passionens öfverdrift med pligtens trånga bud, må de två personerna på grund af sin känsla vara för hvarandra, hvad pligten bjuder dem att vara, må deras tal och handlingar vara passionerade och förståndiga och verkan skall vara större än den, som ernås genom oordnade och mindre berättigade själsrörelser. — För att verka fullständigt, anser författaren, att kärleken makarne emellan bör vara ömsesidig. Om den ena icke vore älskad, såsom han älskar, skulle han vara i viss grad förnedrad och den andra skulle förefalla orättvis.

De måste båda två vara värdiga det som de göra för hvarandra, och det ömsesidiga vittnesmål de gifva hvarandra blir för åskådaren säkert bevis på det som de ega intressant och aktningsvärdt.

Utan vidare utredning inser läsaren, huru Lamotte, i trots af bättre ansatser, ännu hänger fast vid det abstrakta betraktelsesättet af karaktererna och huru långt han ännu var från den allt omfattande satsen: skildra menniskan och lifvet! Till rådet om kärlekens ömsesidighet blir längre fram anledning att återkomma.

Om intressets stegring.

På tragedin måste vidare ställas den fordran, att handlingen begynnande från början föres fram till höjden af intresse och bör intresset växa oafbrutet ända till slutet, ty med hälften vore här föga vunnet. Skalderna veta nogsamt, att handlingen bör växa; men de tänka ej tillräckligt på, att de böra först och främst väcka deltagande (émouvoir) och att de, ifall de ej göra det i god tid, löpa fara att icke framkalla rörelse ens vid slutet.

Medlidandet har sina grader, isynnerhet på teatern. Om man leder åskådaren från den ena till den andra, så kan han bringas ända till tårar: men om man dröjer för länge med att uppväcka den första rörelsen, blir ej tid öfrig att uppnå stora verkningar. Det finnes tyvärr alltför många tragedier, i hvilka hela akter förloras i förberedelser. — Det uppstälda anspråket synes kanske för stort, men eftergift är ej möjlig. — Det är endast fruktan och medlidande jag anser för tragisk njutning (plaisir tragique), och hvarje akt, som ej väcker dessa känslor, är blott en förlängning af den handling, som bör framkalla dem.

I det följande utvecklar författaren denna tanke, utan att likväl gå djupare. Hufvudsaken är att intresset väckes från början och utan afbrott stegras; fåfängt är att söka genom verssprakt ersätta bristen på intresse och passion. Och det är ej nog att se till, att intresset sålunda växer från akt till akt; detsamma bör likaledes ega rum i hvarje akt för sig, i det man betraktar den enskilda akten som ett stycke för sig och anordnar scenerna, så att det vigtiga och patetiska ständigt tilltager. Ja, ej ens dermed är det nog. Hvarje scen fordrar samma fulländning. Under sjelfva arbetet måste man taga äfven hvarje sådan som ett helt för sig, som skall hafva sin början, sin fortgång och sitt slut. Scenen måste fortskrida såsom stycket och hafva, så att säga, sin exposition, sin knut och sin upplösning. Expositionen är då det läge, hvari personerna befinna sig och hvaröfver de öfverlägga, knuten de intressen eller de känslor, hvilka en person uppställer gentemot andras, och upplösningen slutligen den ställning, hvari lidelsen eller scenen bör lemna dem.

Och bör författaren derefter icke förlora tid till tal, hvilka, huru vackra de än vore, skulle förefalla kalla och onyttiga.

I sammanhang härmed gäller som en af de första regler vid arbetet att se till att hufvudhandlingen låter dela sig i fem särskilda delar, hvilka utgöra lika många skilda taflor, de der ej blanda sig i hvarandra utan förete ett slags enhet för hvarje akt. Detta har med sig två verkningar: det underlättar åskådarens uppmärksamhet, enär det som är sinsemellan närmare förbundet äfven lättare förbinder sig i hans föreställning, och det ökar hans rörelse, emedan han träffas mera oafbrutet på samma ställe.

Reglerna riktiga.

De tekniska regler Lamotte här uppställer för den dramatiska författaren hafva alla plats i den moderna estetiken. Så hvad beträffar intressets stegring i allmänhet och särskildt de enskilda akternas utbildning. Freytag säger t. ex. angående det senare, då han beskrifver, huru det moderna tyska dramat utvecklades: Icke blott akterna, utan äfven mindre delar af handlingen blefvo särskilda bilder, hvilka i färg och stämning skilja sig från hvarandra. Hvarje akt erhöll karakteren af en sluten handling. För hvar och en blef en kort inledning, en starkare framträdande höjdpunkt, en verksam afslutning önskvärd.

På Lamottes tid och äfven efteråt begingo tragikerne ofta de fel, för hvilka han varnar dem. Ett af de vanligaste var att handlingens fördelning i akter var godtycklig och endast motiverad af nödvändigheten att fylla fem sådana. Hans råd voro derför mycket tidsenliga.

Om förtrogna (confidents).

Lamotte anser som en af förtjensterna i sin tragedi „Inès de Castro", att deri ej finnas några „confidents". Alla personerna äro af väsentlig betydelse och genom sina mått och steg liksom genom sina intressen taga de innerligt del i handlingen.

Utan att vilja skryta dermed, säger han, tror jag att det är något nytt för teatern; ty till och med i „Athalie" förekommer en scen af blott och bart förtroende, hvarest Ismael ej har någon annan del än att lyssna till Mathans karakter, uppförande och planer. Men jag menar att det utan afseende på nyheten är en önskvärd fördel hos en tragedi och att, när allt föröfrigt är lika, handlingen i en tragedi alltid är lifligare, när man ej för fram andra än dem, hvilka handla och verkligen äro intresserade deri.

De förtrogna i en tragedi äro öfverflödiga personer, simpla vittnen till hufvudpersonernas känslor och planer. Hela deras göra består i att förskräckas eller röras i anledning af det som man förtror dem och det som tilldrager sig; med undantag af några repliker, hvilka de strö ut i stycket, mera för att låta hjeltarne draga andan än för någon annan nytta, taga de icke större del i handlingen än åskådarne.

Deraf följer att ett stort antal förtrogna i ett stycke i samma grad uppehåller dess gång och förorsakar longörer och ledsnad. Om det i en tragedi, såsom i flere är fallet, finnes fyra handlande personer och lika många manliga och qvinliga förtrogna, så skall halfva antalet scener utgöra en ren förlust för handlingen, hvilken i dem ej ersättes genom annat än mer elegiska än dramatiska klagovisor. Men man får ej blanda det ena med det andra.

Det finnes personer, hvilka äro, så att säga, till hälften förtrogna och till hälften handlande. Sådan är Phénix i „Andromaque", sådan är Œnone i „Phèdre". — Jag talar endast om sådana, som äro uteslutande „confidents". De äro alltid kalla personer, ehuru skalden ofta har svårt att undvara dem. När han t. ex. måste låta åskådaren få veta en persons känslor och planer och denna på grund af styckets byggnad icke kan öppna sitt hjerta för andra hufvudpersoner, då gör den förtrogne god tjenst, i det han tjenar till förevändning för att meddela åskådaren det som han bör känna. *Men är det ej möjligt att vinna allt genom att anlägga stycket så att de förtrogna taga del i handlingen och genom att låta dem hafva någon personlig lidelse, hvilken inverkar på hufvudpersonernas beslut?*

Föröfrigt äro förtroendescenerna (les scènes de confidence) föga annat än maskerade monologer; men de förtjena ej alltid att klandras för långsamhet, emedan skalden kan i desamma gifva framställningen af personens känslor, vare sig de äro lifliga eller delikata, ett lika stort intresse som sjelfva handlingens gång eger. Det måste ännu medges, att de på grund af anförda skäl stundom äro nödvändiga, och jag tillägger, att de alltid äro att föredraga framför monologerna, hvilka äro absolut onaturliga.

Lamottes förkastelsedom rättvis.

Vår författares dom öfver dessa confidents och confidentes, hvilka i de klassiska tragedierna sluta sig till hufvudpersonerna liksom skuggan till vandraren, hedrar hans sunda förstånd. Det enda man kunde anmärka är, att han här som vanligt kläder sina reformdigra tankar i alltför mild form. Att Lessing härutinnan delade Lamottes åsigt framträder på flere ställen, ehuru han icke särskildt tagit frågan till tals. Så t. ex. citerar han (H. Dr. 24) med obetingadt godkännande ur Voltaires kritik öfver Thomas Corneilles „Essex" bland annat följande anmärkning om en af styckets qvinliga personer: „Denna karakter skulle vara mycket skön, om den hade mera lif och toge någon del i intrigen; men hon är ej något annat än en vän och det är icke tillräckligt för teatern".

Om monologerna.

Om något kan bevisa, att vi vänja oss vid allt, och att, oaktadt allt vårt anspråk på att efterlikna naturen, det minsta nöje låter oss ursäkta många oegentligheter, så är det den omständighet, att vi icke störas af monologerna i tragedin, isynnerhet då de äro något långa. Hvar finner man i verkligheten klokt folk, som sålunda tänker högt, som uttalar tydligt och med sammanhang allt det som försiggår i deras inre? Om någon skulle öfverraskas hållande helt ensam så passionerade och utförliga tal, skulle han icke med rätta misstänkas för att vara galen? Och emellertid äro alla våra teaterhjeltar gripna af detta slags sinnesförvirring. De resonnera, de tillochmed berätta, de anordna projekter, de föreställa sig de svårigheter, hvilka för tillfället resa sig mot dem, de afväga särskilda beslut medels motsatta argument och bestämma sig slutligen beroende af deras passioner och intressen. Allt detta som om de icke skulle kunna känna eller öfverlägga, utan att utsäga allt hvad de tänka. Hvar finner man förebilderna till slika pratmakare?

I vår tid användes för monologerna samma versmått som i tragedin för öfrigt och denna stil är då antagen för vanligt språk; men Corneille har stundom begagnat sig af sådana tillfällen, för att dikta ordentliga oder. Så t. ex. i „Polyeucte“ och „Cid“, hvarest personen plötsligen blir skald till profession. — Detta har haft sina beundrare. Många äro ännu hänförda af stancerna i „Polyeucte“ — så sant är det, att vi ej äro så finkänsliga i afseende å det passande och att vanan gifver ofta lika kraft åt falsk skönhet, som naturen kan gifva åt verklig sådan.

Hvad är slutledningen af allt detta? Det att skalderna böra så litet som möjligt använda monologer. Det att de, i de fall då de ej kunna helt och hållet undvara dem, åtminstone göra dem korta; ty de skulle kunna någongång vara så korta, att de icke förnärmade det naturliga. Det händer oss under passionens ögonblick, att vi låta undfalla oss några ord, hvilka vi ställa till oss sjelfva. Dermed medges likväl ej möjligheten af resonnemag och än mindre berättelser. Några afbrutna känsloutbrott, några plötsliga beslut äro ett mera naturligt och förnuftigt innehåll för monologen: väl förstådt, oaktadt allt det sagda, att utsökt skönhet i tankar och känslor är i afseende å verkan att föredraga framför dessa försigtighetsmått. Och detta sista underförstår jag nästan alltid vid de regler jag uttänker för tragedins fulländning.

Lamottes ståndpunkt åter fullt modern.

Här möter oss åter ett af dessa ställen, der Lamottes uppfattning har en fullkomligt modern karakter. Det ges ingen anledning att tro det Lessings anspråk på natur skulle i detta fall hafva gått så långt. Han stödde ju sig på Shakespeare, hvilken icke skjutit monologen åt sidan, såsom Lamotte önskar det. Ja, den tyska estetiken gifver den fortfarande stort berättigande (Freytag a. st. s. 189 ff.). Man kan säga, att först den nyaste naturalistiska riktningen i dramat kommit till samma yrkanden som den gamle smakläraren för mera än halftannat sekel sedan.

Om tragedins anläggning och genomarbetande.

Jag kommer nu till en väsentligare omständighet, som författarne ej kunna nog uppmärksamma. Det är hela arbetets anläggning och den bästa anordning af det ämne man valt.

Jag dröjer ej vid tillräckligt kända regler. Författarne veta väl, ehuru de icke alltid iakttaga det, att man måste fördela handlingen så att scenerna i en akt, bundna vid hvarandra, icke lemna teatern tom; att hvarje person bör hafva ett motiv för att inträda och gå bort från scenen; att hvarje akt då den slutar bör lemna åskådaren i väntan på någon händelse; att det måste fortgå på detta sätt ända till den fullständiga upplösningen, som tydligt afgör hvarje persons öde; och att slutligen stycket bör upphöra, efter det åskådarens nyfikenhet är tillfredsstäld.

Men utom denna triviala konst, som blott distansvis angifver de vägar man bör passera, finnes en annan finare, hvilken på visst sätt bestämmer hvarje steg man bör taga och som ej lemnar något åt sjelfva snillets nycker.

Den består i att ställa allt hvad man har att säga, så att från början till slutet det ena tjenar till att förbereda det andra och att emellertid intet synes någonsin sagdt, för att förbereda något. Det är att hvarje ögonblick vara uppmärksam på att ordna alla omständigheter på deras plats, så att de äro nödvändiga der de förekomma och att föröfrigt alla ömsesidigt förklara och försköna hvarandra; att anordna allt med hänsyn till de verkningar man åsyftar, utan att låta märka afsigten, med ett ord på sådant sätt, att åskådaren alltid ser en handling och aldrig får intryck af arbetet. Ty från den stund författaren söker sig fördelar på bekostnad af den minsta sannolikhet, kan han just derigenom förlora dem. Man ser derefter blott skalden i stället för personerna: och man håller honom så mycket mindre räkning för de sköna partierna, som han vinner dem genom att aflägsna sig från naturen och det skickliga (des convenances).

Låt oss ytterligare klargöra tanken. Skalden arbetar i en viss ordning och åskådaren känner i en annan. Skalden föresätter sig först uppnåendet af några hufvudskönheter, på hvilka han grundar sin framgång. Der är hans utgångspunkt och han föreställer sig derpå, hvad som bör sägas och göras, för att nå målet. Åskådaren deremot utgår från det som han först ser och hör och han skrider derifrån till handlingens utveckling och upplösning såsom till naturliga följder af den första ställning, hvari man framstält sakerna. Derför måste det som skalden godtyckligt uppfunnit, för att framkalla dessa skönheter, blifva för åskådaren nödvändiga grunder, hvarur de framgått. Med ett ord allt är konst å skaldens sida, som anordnar en teatralisk handling; men åskådaren bör intet se deraf. — Effekten af det sköna på teatern förringas alltid i samma grad som afsigten framträder.

Allmän giltiga råd; öfverensstämmelse med Lessing. Äfven här se vi Lamotte gifva skalderne råd af allmän giltig natur. Lagen om fullständig motivering samt kardinalregeln för allt hvad konst heter, att nämligen afsigtlighet och spår af arbetet ej få synas, gälla för alla tider. Hos Lessing se vi samma tankar flerestädes framträda. Redan i första stycket af hans Hamburgische Dramaturgie heter det om lidelserna, att de skola uppstå inför åskådarens ögon och utan språng växa i en så illusorisk beständighet, att han måste sympatisera med eller mot sin vilja. Om detta lika mycket gäller den förut behandlade frågan om intressets stegring, så sluta sig ett par andra ställen direkt till Lamottes ord om att det föregående bör vara tillräcklig grund och förberedelse för det följande. „Snillet kan blott sysselsätta sig med tilldragelser, hvilka äro grundade i hvarandra, blott serier af orsaker och verkningar. Att återföra de senare till de förra, att afväga de förra mot de senare, att öfverallt utesluta det ungefärliga, att låta allt försiggå så att det icke skulle kunna ske annorlunda, det är hans sak, när han arbetar på historiens område“ (H. Dr. 30; uttaladt som en allmän sats, hvilken Corneille icke förverkligat i „Rodogune“). Och på samma sätt, när Lessing (H. Dr. 32) beskrifver, huru en skald går tillväga, när det ämne han valt synes innebära något osannolikt. „Framförallt skall han vara betänkt på att uppfinna en serie af orsaker och verkningar. — Icke nöjd med att grunda möjligheten (af ett sannolikt brott) endast på den historiska trovärdigheten, skall han söka anlägga sina personers karakterer, skall han söka låta de tillfällen, hvilka försätta dessa karakterer i handling, så nödvändigt uppstå den ena ur den andra, skall han söka så noga afmäta passionerna efter hvar och ens karakter, skall han söka genomföra dessa passioner så småningom gradvis, att vi öfverallt icke iakttaga något annat än det naturligaste och mest regelbundna förlopp“ — —

Om dialogen. *Dialogen* är egentligen konsten att föra handlingen fram genom personernas tal, så att enhvar yttrar just det som han bör säga, på det ställe der han bör säga det och såsom han bör säga det; att den som först talar i en scen begynner med det som lidelsen och intresset naturligast angifva och att de andra personerna svara och afbryta honom vid lämpligt tillfälle allt efter deras särskilda ställning. — Alltså är dialogen så mycket fullkomligare som man, noggrant iakttagande denna naturliga ordning, deri ej yttrar något onödigt eller sådant som icke utgör, så att säga, ett steg mot upplösningen.

Lifligheten är en af dialogens största förtjenster och som allt i tragedin bör vara handling, så är lifligheten så mycket nödvändigare. Med undantag af öfverläggningar och rådslag, hvarvid talen böra vara allvarliga och sammanhängande, fordras värme och täta afbrott. Det är icke naturligt, att personerna, midt under det häftiga lidelser uppröra dem, gifva sig tid till att ömsesidigt hålla tal för hvarandra. Det bör vara en strid af känslor, som stöta och triumfera öfver hvarandra. Att vänta tills någon har sagt allt, innan man besvarar honom, öfverensstämmer icke med passionens art och denna bör på teatern efterliknas ända till dess sätt att samtala. I allmänhet taladt följer Corneille härvidlag naturen närmare än Racine. Den senare låter ofta personen tala i en fortsättning allt hvad han har att säga och man svarar på samma sätt, så att en lång scen någongång utgöres af två eller tre repliker. Det är nog sannt, att hvarje tal bildar en praktfull följd af verser, hvilka ytterligare förskönas genom utförligheten. Ordningen, resonnemanget, elegansen äro beundransvärda. Dessa sköna egenskaper göra sig fullt gällande vid läsningen utan utförande och på grund deraf läser man alltid Racine hellre än någon annan; men på teatern blifva scenerna i anledning deraf mindre lifliga och för den som uppmärksammar sådant, mindre naturliga, emedan man, då aktörerna äro tillstädes, ofta känner, att de äro besvärade af sin tystnad. — Jag kan ej för ofta upprepa det, att åskådaren alltid vill hafva handling. I de flesta scener handla personerna endast förmedels sina känslor och deras rol synes afslutad eller uppskjuten, såsnart de dröja för länge med att låta se, hvad de tänka. Man är otålig att få iakttaga de verkningar, som de spelandes yttranden framkalla. De äro, så att säga, en scens händelser, nästan lika intressanta, som de mest framstickande omhvälfningar i stycket och skalden kan icke för mycket mångfaldiga dem. — Dock är det ej alltid nödigt, att den spelande tager till ordet, för att hafva sin del i dialogen; han kan inträda deri genom en rörelse, en blick, ja, blott genom en min, allenast det observeras af den talande och gifver honom anledning till nya tankar och känslor.

Blott en enda reflexion återstår att göra angående detta ämne. Författarne bemöda sig stundom att försköna en tragedi med allmänna maximer och utförliga betraktelser; men det är vanligtvis endast en af ärelystnad föranledd prydnad, hvilken ej tjenar till annat än att göra dialogen mindre naturlig och sann. Tragiska personer äro nästan alltid upprörda af våldsamma lidelser: nåväl, huru skulle de då befatta sig med att framställa allmänna reflexioner, i stället för att lifligt känna det som särskildt vidkommer dem? De förefölle oss då mera endast som tänkare, hvilkas yttranden måste bedömas, än som personer, hvilka man måste beundra eller beklaga. De böra blott uttrycka personliga känslor och tankar, hvilka skalden bör låta åskådaren förallmänliga.

Thomas Corneilles fel var att sålunda förvandla sina personers enskilda tankar till maximer eller hellre det var hans tidehvarfs fel. Den store Corneille hade gifvit honom exempel härutinnan. — Man betraktade då dessa prydnader som utsökta partier, hvari skaldens snille lyste mer än annorstädes, churu det skedde på bekostnad af det naturliga och lämpliga. — Dermed är likväl ej sagdt, att allmänna maximer vore absolut förbjudna i tragedin; men de böra alltid vara korta, om ej tillfället är lugnt, då betraktelser och resonnemang kunna ega rum.

Riktiga grundsatser.

Lamottes föreskrifter om dialogen kunde ej vara bättre. Ty i hufvudsak innefatta de allt hvad derom är vigtigast att säga så kort och klart uttrycket som endast en fransk skriftställare plägar göra det. Jemförelsen mellan Corneille och Racine är nog öfverhufvudtaget riktig; men deraf följer likväl ej, att den förres dialog vore mönstergiltig på långt när. Det beständiga talhållandet var och förblef en af de pseudoklassiska tragedins ledsammaste lyten. Som ett annat sådant dermed nära sammanhängande kan man beteckna diktionens öfvermättnad af betraktelser och maximer. Corneille hade visserligen sjelf varnat för öfverdrift häruti; men det som han — att dömma efter hans egna dramer — ansåg för måtta var i sjelfva verket fortfarande öfverdrift från det naturligas ståndpunkt. Och det var det naturliga, för hvilket Lamotte äfven på detta ställe kämpade.

V.

Redan tidigare har jag refererat början af Lamottes sista afhandling om tragedin „Discours à l'occasion de la tragédie d'Œdipe", hvari han redogör för sin behandling af Oidipossagan. Återstoden af uppsatsen egnas frågan om tragedier i prosaform. Sin sista tragedi hade nämligen författaren ursprungligen skrifvit på prosa, men utan att låta uppföra stycket, innan det öfverflyttats till vers. Som motiv härför angifver han dels publikens vana att höra endast tragedier i bunden stil dels skådespelarnes vana att recitera blott versifierade roller; men tager på samma gång tillfället i akt att plädera för tragediers författande på prosa.

Om versens betydelse och tragedier på prosa.

Det är en fördom, anser Lamotte, att tragedins värdighet beror af den bundna stilen och att ej stora passioner skulle kunna få ett verksamt uttryck den förutan. Tvärtom skulle prosaformen skänka tragedin den väsentliga förtjensten af större sannolikhet och naturlighet. Då man låter personerna handla naturligt, så borde man väl ock låta dem tala så. Ty onaturligt är ju, att de vid allt hvad de yttra noggrant iakttaga versens regler, ja, äfven när deras lidelser äro som våldsammast. Om versen öfvergåfves, skulle personerna och deras känslouttryck förefalla långt verkligare och derigenom blefve äfven handlingen sannare. Hvad komedin beträffar, har man också ofta befriat sig från versens ok samt ernått större lifaktighet och sanning; men med hänsyn till tragedin vill man ej medgifva sådant. Detta är dock icke väl grundadt. Det är visserligen sannt att af tragiska personer fordras ett ädlare och mera vårdadt språk; men de böra ej derför tala mindre naturligt och deras värdighet gör dem icke till skalder.

Vidare skulle frihet i detta hänseende göra det lättare att fullt och riktigt säga, hvad sägas bör. Man vore aldrig tvungen att tillgripa ett oegentligt ord, emedan det visade sig omöjligt att få det rätta väl inpassadt i versen. Man skulle alltid kunna gifva tankeföljden tillbörlig gradation och kraft, i stället för att rimmets nyck ofta nödgar till att blanda in något svagt eller onödigt. Aldrig vore man tvungen att låta inflyta ett medelmåttigt uttryck i stället för ett utmärkt.

„M. Despréaux har sjelf sagt mig, att han egnat tjugu år åt att rätta ett falskt rim. Jag afdrager hvad nödigt är som öfverdrift; men det återstår i hvarje fall tillräckligt, för att man må förvånas öfver menniskornas löjlighet att uppfinna en konst enkom för att sätta sig ur stånd att noggrant uttrycka det som de ville säga eller hvad som är ännu värre, för att uppoffra det som de skulle kunnat uttrycka på det bästa sätt på vilkor, som förnuftet icke föreskrifvit“.

Dessa åsigter om den bundna formens ringa värde voro så litet ett löst hugskott, att Lamotte senare publicerade sida vid sida med den ursprungliga texten en af honom utförd omskrifning till prosa af första scenen af Racines „Mithridate“, för att allmänheten skulle kunna döma. I sammanhang dermed utvecklade han ytterligare de satser, hvilka i hufvudsak refererats.

Öfverflödigt är att här närmare redogöra för dessa betraktelser. Endast följande rader må citeras: „Hvari ligger ett arbetes förtjenst, om ej deri, att tankarna äro på bästa sätt förbundna med hvarandra och riktiga i det att känslorna, som stå i naturligt förhållande till det behandlade, framträda i passande form samt i det att författaren valt uttryck, som äro bäst egnade att hos andra framkalla de idéer, hvilka han vill väcka. Se der det förnuftiga, se der vältaligheten, se der den fullkomliga insigten i språket och dess enda berättigade användning. — När dessa fordringar uppfylts, hvad kan ett arbete erbjuda värdt att skattas i anseende till den andliga sidan? Det är just af dessa sköna egenskaper Racines tragedier ej skulle förlora något, om de öfverflyttades till prosa, såsom jag försökt det med en scen. Hvarför skulle de då synas oss mindre sköna? Hvarför skulle vi skatta dem lägre? Utan tvifvel derför, att vi ej rätt uppfatta deras verkliga förtjenst och att vi ställa för högt versifikationens tillfälliga värde. Men hvari består denna förmodade förtjenst, som vi ställa så högt? I den besegrade svårighetens fåfängliga värde“. — —

Intet af hvad Lamotte anfört i sina afhandlingar om tragedin har ens närmelsevis väckt ett sådant genljud, som hans angrepp på tragedins versform och på samma gång mot den metriskt bundna stilen öfverhufvud. Om han ej gjort sig skyldig till denna förmätenhet, så hade man sannolikt öfver hela hans uppträdande fält en mildare dom. Nu deremot hafva franska författare ända till senaste tid ansett det vara nog att framhålla de paradoxala satserna om versen, för att affärda författaren såsom mer eller mindre otillräknelig och ovärdig vidare uppmärksamhet. Dock måste sanningsenligt antecknas, att Lamottes mest betydande motståndare bland de samtida, Voltaire, äfven med hänsyn till närvarande fråga behandlade honom särdeles aktningsfullt. Af det redan förut omtalade företalet till sin „Œdipe“ egnar nämligen Voltaire andra hälften till att omständligt vederlägga Lamottes förmenanden om versens värdelöshet.

Ehuru nog ett och hvarje kunde sägas om flere af Voltaires anmärkningar liksom i anledning af den långa artikel, hvari Lamotte försvarade sig och ytterligare utlade sina åsigter, så faller dock denna polemik utom planen för min afhandling. Utan att referera något af polemiken, utber jag mig att få foga några betraktelser till det redan sagda.

På två ställen förekommer Lamottes namn i Lessings Hamburgische Dramaturgie, men blott engång nämnes det med afseende å hans afhandlingar om den dramatiska poesin. Lessing fäller då ett omdöme just om Lamottes ståndpunkt i fråga om versen i tragedin (H. Dr. 19). Han gillar icke den franske författarens åsigt, att metern är ett tvång, från hvilket den dramatiska skalden helst borde frigöra sig; men, menar Lessing, man bör ursäkta honom, emedan han hade i tankarna ett språk, hvari poesins versmått blott är till för att kittla örat, utan kunna något bidraga till uttryckets kraft — i vårt (tyska) språk är det deremot mera än så och vi kunna komma långt närmare den grekiska poesin, hvilken genom sina versarters blotta rhythm förmår antyda de passioner, som i dem uttryckas. Den franska versen har ej annat värde för sig, än den besegrade svårighetens och det är i sanning en ganska usel förtjenst.

Som synes gifver Lessing rätt åt Lamotte, såvidt det gäller den franska poesin. Det kan dock ej nekas att under detta medgifvande döljer sig en viss tillfredsställelse att kunna så beqvämt komma åt den franska poesin som här d. ä. endast genom att kort om godt godkänna ett omdöme af en af dess egne idkare. Man kan nämligen ej tvifla på att Lessing, hvilken förstod att uppskatta den metriska formens betydelse för poesin öfverhufvud, äfven hade kunnat uppvisa, hvari Lamottes åsigt var skef; men det låg ej i hans intresse. Han uppställer nog anspråk med afseende å den tyska versen; men låter läsaren, om han så vill, antaga, att franska språket ej ens närmelsevis kan motsvara likartade fordringar.

Dock låtom oss bedöma Lamotte med hänsyn till den tid då han skref och oberoende af huru de samtides granskning föll sig. Tager man saken så, då måste medgifvas, att hans yrkande har ett ganska stort literaturhistoriskt intresse och icke saknar berättigande. Hans angrepp berodde på en riktig känsla för det prosaiska hos den gällande franska skaldekonsten.

Tydligen saknar han sjelf poetiskt sinne, men deri var han blott allmänheten lik. Går man till 17:de seklets störste smaklärare och störste auktoritet i slika frågor, hvars ord Lamotte sjelf citerar, så finna vi som bekant ej andra fordringar i afseende å poesin uppstälda än dem vår författare angifvit och hvilka allmänt erkändes som normer för kritiken.

— Quelque sujet qu'on traite, ou plaisant ou sublime,
Que toujours *le bon sens* s'accorde avec la Rime.
— Aimez donc la *Raison*. Que toujours vos écrits
Empruntent *d'elle seule* et leur lustre et leur prix.
— Tout doit tendre au *Bon sens:* mais pour y parvenir,
Le chemin est glissant et penible à tenir.

Så lärer Boileau i första sången af „l'Art poetique“ och då han i fjerde sången prisar poesins bragder i Grekland, lyder det:

— En mille écrits fameux la *sagesse* tracée,
Fut, à l'aide des Vers, aux Mortels annoncée;
Et partout des Esprits ses préceptes vainqueurs,
Introduits par l'oreille, entrèrent dans les coeurs.

När sådana principer voro de ledande, efter hvilka poesins konst — l'art dangereux de rimer et d'écrire — bedömdes, när sundt förstånd var det enda man fordrade af poesin och visa lärdomars förkunnande var dess högsta mål, då hade Lamotte visserligen full rätt att fråga, hvad det tjenade till att besvära sig med meter och rim. För att nå det mål Boileau ställt för poesin var prosan onekligen mera ändamålsenlig. Lamottes frimodiga uttalande i denna sak jemte de prof*) han uppstälde inneburo i sjelfva verket en rättvis dom öfver den pseudoklassiska diktningen. Och att dess målsmän icke gåfvo honom rätt beror ej på, att de skulle kunnat med fullt giltiga skäl**) bevisa oriktigheten af hans påstående, utan fastmera af bristande konseqvens. Man kan med ett ord säga, att Lamottes förkastande af versen är den logiska slutledningen af Boileaus lära om poesin och som sådan värd att uppmärksammas i den allmänna literaturhistorien.

*) Utom prosaversionen af första scenen af „Mithridate“, publicerade han båda versionerna af sin „Œdipe“ och slutligen en „ode“ på prosa, hvilken sistnämnda vid uppläsning i franska akademien helsades med applåder.

**) Ur Voltaires polemiska afhandling må citeras en enda sats, som yttras med direkt hänsyn till scenen ur „Mithridate“: Il (Lamotte) ne songe pas que le grand mérite des vers est qu'ils soient aussi corrects que la prose; *c'est cette extrême difficulté surmontée qui charme les connaisseurs:* réduisez les vers en prose, il n'y a plus ni mérite ni plaisir. — Senare yttrar han dock att den är galen (fou), som söker besegra en svårighet blott för förtjensten att besegra; men den, hvilken drager skönhet ur sjelfva svårigheten, är en utmärkt man.

Men den djerfva yrkan på tragedins rätt att uppträda i prosaform innebär något utöfver det sagda. Deri döljer sig tillika en framtidstanke. Må man ej förgäta, att han motiverar sin „paradox“ äfven med påståendet, att genom den obundna stilen större naturlighet skulle vinnas. Här återkommer sålunda den fordran på natur, hvarpå Lamotte grundat de flesta af sina föregående reformerande tankar. Att han häri träffat det rätta, det har framtiden visat under dess ständiga sträfvan efter större natursanning. Diderot upptog tanken, ehuru han på samma gång dömde de ämnen, hvilka den klassiska tragedin i regel behandlade; men grunden är för honom ytterst densamma som för Lamotte. Vår tid har sedermera praktiskt genomfört den idé, för hvilken Lamotte först uppträdde. Versen är numera ytterst sällsynt i det franska dramat.

VI.

Blick på Lamottes egna tragedier.

Redan i inledningen har det anmärkts, att Lamotte saknade förmåga att i sina egna tragedier praktiskt tillämpa sina satser. Ja, han icke ens ville det. Han följer sjelf de gamla reglerna så troget som möjligt och yttrar i sin polemiska artikel mot Voltaire: „Det är icke för mig sjelf som jag gör anspråk på att utvidga fältet, det är för mina efterträdare, det är för Eder sjelf, min herre, om ni har mod, då en skönhet af högre art än dessa regler yrkar att Ni bryter mot dem". Vändningen är, som synes, spetsig nog; men höjer ej Lamotte i efterverldens ögon. Under sådana förhållanden vore en analys af hans tragedier minst sagdt öfverflödig. Endast i största korthet må här nämnas de svaga försök till något nytt, som framträda i desamma.

I „Romulus" har författaren velat inlägga särskild förtjenst om handlingen. I fjerde akten låter Romulus öfverstepresten uppresa ett altare i kungliga palatset (ifall ej rummets enhet varit att iakttaga, hade scenen bort passera i ett tempel). Vid detta altare svärja Tatius och Romulus att iakttaga vilkoren för den tvekamp, hvarigenom deras tvist skulle slitas. Detta sker i närvaro af en skara romare och en dito sabinare. Färdiga att begifva sig till stridsplatsen, kommer Tatii dotter och yppar, för att afvända tvekampen, *i folkets närvaro* sin kärlek till Romulus, som hon härtills dolt i sitt hjerta. — Lamotte är icke så litet stolt öfver denna djerfva anordning Kunde jag, frågar han, genom en berättelse, hurudan som helst, åstadkomma den effekt, som denna handling framkallar? Kunde jag på det sättet återgifva de känslor och förhållanden, hvilka deri framträda, och genom versens energi ersätta den imponerande och patetiska scenanordning (appareil), hvaraf blicken här träffas?

I „Inès de Castro", som gjorde storartad lycka, är åter att märka, att i stycket ej förekomma några confidents samt att i sista akten två barn framföras på scenen. Denna senare nyhet bidrar ej blott att göra situationen rörande, utan inverkar äfven på handlingens gång, i det att åsynen af barnen mer än Inès' ord beveker konung Alphonse att förlåta sin son Don Pèdre, Inès' gemål. Dessutom bör antecknas, att i fjerde aktens tredje scen jemte konungen uppträder hela hans råd (Rodrigue, Henrique et les autres grands du Conseil), ehuru blott för att med tystnad och tårar gifva sitt votum. Alphonse säger nämligen:

> Je vois trop vos conseils. Ce silense, ces pleurs
> M'annoncent mon devoir, en plaignant mes malheurs.

I „les Machabées“ och „Œdipe“ finnes intet som förtjenar att särskildt framhållas, om man undantager den redan omtalade förändringen af Oidipos' karakter.

Då sålunda Lamotte sjelf drog sig för att i verk och gerning genomföra sina läror, skulle det i sanning varit förvånande, om andra med ifver egnat sig åt att efterfölja dem. Det är också nogsamt bekant, att de icke åstadkommo någon reform; men icke destomindre kan det ej ifrågakomma att utan vidare tillbakavisa spörsmålet om den inverkan Lamottes uppträdande möjligen haft på pseudoklassikerne. För att finna något svar på denna fråga, måste Voltaires förhållande till Lamotte underkastas en kort granskning.

Voltaires förhållande till Lamotte.

Det är sagdt, att Voltaire i företalet till sin „Œdipe“, hvari han polemiserar med Lamotte, behandlar denne mycket aktningsfullt. Så paradoxal framställningen om enhetsreglernas förkastlighet och versens värdelöshet än tyckes förefalla honom, så uppradar han likväl utan att snäft afvisa den andre alla skäl han möjligen kan finna, för att bevisa det oberättigade i att anfalla dessa tragedins grundvilkor. Dertill kommer, att han föröfrigt blott tillbakavisar Lamottes jemförelse mellan operan och tragedin; men lemnar allt hvad denne eljes anfört oantastadt. Slutorden lyda: „Jag skulle ännu taga mig friheten att tvista med M. de Lamotte om några andra punkter, men det skulle kanske se ut som en önskan att angripa hans person och låta misstänka en illvilja, som är långt borta från mina känslor. Jag föredrar mycket att draga nytta af de skarpsinniga och fina reflexioner, som han framlagt i sin bok, framför att ifrågasätta några, hvilka synas mig mindre sanna än de andra“. Den stora aktning, som uttalar sig i dessa ord, måste hafva varit verklig, och icke blott en tom artighet mot den grånade författaren. Man finner nämligen, att Voltaire långt efter hans död sällan nämner Lamottes namn, utan att tillägga ett vackert epitet. För att ej tala om andra exempel, hänvisar jag endast till Voltaires „Commentaires sur Corneille“ (1764), der Lamotte kallas „homme d'esprit et de genie“ och hvari det vid fråga om dennes „Œdipe“ — öfver hvars framträdande några år efter hans egen Voltaire sin karakter likmätigt rätt väl kunnat känna sig förnärmad — yttras om författaren: „l'un des plus ingénieux auteurs que nous ayons".

Samtidens störste skald stälde således Lamotte högre än han skattats af öfriga samtida och efterverlden. Om någonstädes, måste väl då i Voltaires tragiska diktning spår af inverkan af hans kritik framträda. Utan att inlåta mig på en detaljerad undersökning, hvilken med hänsyn till det stora antalet af hans tragedier blefve alltför tidsödande, hoppas jag dock kunna framte bevis på att Voltaire verkligen tagit ad notam åtskilliga af Lamottes satser.

Med kännedom af den trohet, hvarmed Voltaire hyllade det traditionella systemet, är på förhand klart, att Lamottes vigtigaste reformtankar skulle af honom förbises. Allra begärligast synes han ock hafva accepterat en af de anvisningar, hvilka visa kritikern mest fången i den samtida poesins schematism — jag menar den naiva utläggningen om „igenkänningsscenernas" fördelar. Ingen dramatisk författare hvarken före eller efter torde så oupphörligt slitit på detta triviala medel att „taga" publiken. I tre af Voltaires tragedier, „Eriphyle", „Mérope" och „Sémiramis" förekommer en igenkänningsscen mellan mor och son; i „Olympie" igenkänner en mor sin dotter; i „Zaire" finnes en tredubbel igenkänningsscen, i det Lusignan igenkänner sina äfven sig emellan okända barn Zaire och Nérestan; i „Mahomet" upprepas detta tredubbla igenkännande mellan Zopire, Seide och Palmire; i „Les lois de Minos" igenkänna far och dotter hvarandra; i „Adélaide du Guesclin" sammanträffa oförmodadt tvenne bröder och i „Alzire" åter två förlofvade, hvilka tro sig långt åtskilda o. s. v. Lamotte hade sagt, att utropen: min son! min mor! min broder! min syster! vore nog, för att framkalla tårar — hos Voltaire återljuda dessa utrop och andra liknande i hvartannat stycke och han försummar ingalunda att regelbundet låta hos resp. anförvandter instinktartade känslor och aningar föregå det afgörande ögonblicket, såsom Lamotte beskrifver det.

Af ungefär samma värde är vår författares råd, i hvilken form „den äktenskapliga kärleken" lämpligast bör framställas på scenen. Makarna böra vara på engång passionerade och pligttrogna samt kärleken ömsesidig, för att verkan skall vara fullständig. Detta recept har Voltaire på det noggrannaste följt i „L'Orphelin de la Chine", hvari Zamti och Idamé bilda ett i allo fullkomligt och följakteligen „intressant" äkta par.

Det vore likväl orätt att tro det Lamottes inflytande endast kan varsnas i sådana drag, hvilka äro alldeles betydelselösa för dramats utveckling. Tvärtom finner man äfven en och annan af vår kritikers bästa tankar uppdyka hos

Voltaire, ehuru det i särskilda fall kan tvistas om hvad som beror på inverkan af Lamotte, hvad åter på engelska intryck. Hos de författare, som skrifvit om Voltaires dramatiska diktning icke ens omnämnes möjligheten, att han skulle kunnat hafva något att lära på så nära håll; men i sjelfva verket synes det vara minst sagdt oafgjordt, hurnvida icke just Lamottes råd oftast varit afgörande för hvad som borde eftersträfvas.

Vi hafva ofvanföre sett, huru ifrigt Lamotte i sin andra afhandling yrkar på *des actions d'appareil et de spectacle.* Denna fordran återkommer flerfaldigt hos Voltaire, ehuru mera begränsad och ständigt ledsagad af reservationen, att diktionens glans dock är vigtigare. Bland annat talas derom i den till Bolingbroke dedicerade „Discours sur la tragédie", som åtföljer „Brutus". Voltaire tager liksom Lamotte Racines „Athalie" till föredöme och säger, att han sjelf icke utan räddhoga infört på franska scenen Roms senat, hvilket sker i nämnda, i England påbörjade tragedi. I regel angifves detta drag som en yttring af det engelska inflytandet, men faktiskt är, att Lamotte häri var hans föregångare. Och det icke blott teoretiskt utan äfven praktiskt i „Inès de Castro", såsom nyss berättats; ty det kungliga rådets framförande på scenen kan ganska väl jemföras med Voltaires nyhet. Vid de förnäma korporationernas uppträdande är särskildt att märka den öfverensstämmelse, att såväl de spanske granderne som de romerske senatorerne äro stumma medspelande. Som ytterligare anledning att tro det Voltaire svårligen kunnat undgå att tänka på Lamotte och hans stycke må äfven erinras om situationernas likhet föröfrigt. Liksom Brutus dömer konung Alphonse sin son till döden och han jemför sig sjelf med den oböjlige romaren.

Vidare kan man hänföra till Lamotte Voltaires sträfvan att undertrycka de s. k. förtrogna. Sannt är att han sällan kan undvara dem; men åtminstone yfs han med att i „Oreste" hafva bland annat åstadkommit en tragedi „sans confidents". — Äfven använder han temligen sparsamt och blott undantagsvis längre monologer.

Om det är jemförelsevis sällan Voltaires tragedier visa spår af inverkan af Lamottes läror, så ser man dem så mycket oftare gå igen i hans teoretiska uttalanden. Sådant förekommer alldeles tidigt, såsom t. ex. i företalet till „Marianne" (1725), der han säger, att kända hjeltar böra skildras sådana som publiken föreställer sig dem; men mest i kommentarierna till Corneille. Voltaire klandrar tragedier, som äro mera konversation än handling: tout doit être action dans une tragédie — icke så att hvarje scen bör vara en händelse, men hvarochen bör tjena till att knyta eller upplösa intrigen; han ställer samma fordringar på en exposition som Lamotte och berömmer liksom denne expositionen till „La Mort de Pompée“ såsom mönstergiltig; han yrkar, att skalden icke får synas, icke får låta personerna uttala sina egna d. ä. skaldens tankar (hvem hade oftare brutit häremot än Voltaire sjelf!); han varnar för maximer särdeles i passionerade ögonblick och fordrar, att de skola framträda såsom personernas egna „sentimens“ i det läge, hvari de befinna sig, icke i allmän form o. s. v. Med ett ord en stor del af Lamottes satser utgör norm för kritiken. Ja, om man jemför den riktiga uppfattning om många frågor i afseende å dramat, som framträder i dessa kommentarier, med Voltaires egen skaldeverksamhet, så får man syn på en motsägelse, hvilken endast kan hafva sin grund i att skalden vid sin produktion envisades med att upprätthålla de traditioner, hvilka enligt hans tanke utgjorde vilkoren för den franska tragedins öfverlägsenhet, medan han såsom kritiker icke kunde låta bli att ansluta sig till de sunda principer Lamotte framstält. Man har derför all anledning att betrakta de smickrande epitet han i samma arbete gifver åt denne som en gärd af tacksamhet för den direkta nytta han vid dess författande haft af föregångaren.

Resultat. Planen för närvarande afhandling är härmed genomförd och det återstår blott att i korthet angifva det resultat, hvartill det framstälda leder.

Lamotte var icke reformator utan endast kritiker. Han bröt ej med det gamla och hade ingen sann hog att omskapa det, ehuru han insåg dess brister. Oaktadt han blottar dem alla — de förlamande enhetsreglerna, den schematiska karaktersbehandlingen, de „förtrognas“ ihålighet, bristen på handling, diktionens svulst och onatur — så var han dock ej man att stå på egen botten. Om han varit det, så skulle han ej öfverlemnat åt andra att tillämpa sina läror. Den innersta svagheten var, att han ej fattade något högre mål för skalden än publikens nöje. Denna princip undergräfde hans grundsatser. Han yrkade åter och åter på natur; men tillät stundom äfven medvetet onatur gälla, ifall publiken, tack vare fördomarna, tog det för natur och hade nöje deraf. Med ett ord, blott en ny, högre syn på konstens uppgift skulle inneburit verklig befrielse från traditionerna. Och dock, huru nära var han ej att nå den. Från sådana satser som dessa: man vill öfverallt igenkänna det menskliga; hvarje person bör tala såsom naturen sjelf skulle ingifvit honom i det läge, hvari han befinner sig; vi anslås mest af det som är oss nära och liknar oss — från dem var blott ett steg till en ny princip, men tiden var ej mogen derför. Ej heller Voltaire kom längre. Han uttalar på flere ställen, att han såsom skald hade endast publikens tycke och behag till rättesnöre. Framsteget att välja ämnen utom det vanliga området tog han noga taget af tvång, derför att de grekiska och romerska motiven voro så utnötta*); och då han begagnade tragedin till förkunnande af nya idéer, så var denna för honom blott medel. I sjelfva verket höjde han hvarken det ena eller det andra till ny, befriande princip för dramat.

Hvilken var under sådana förhållanden Lamottes betydelse? Den att bana väg för det nya, som han icke såg, men som likväl skulle komma. Han riktade det första slaget mot den klassiska tragedins auktoritet. Emedan Voltaire och andre med honom fortfarande efterbildade Corneille och Racine, har man antagit, att slaget var förfeladt, men då, såsom vi sett, Lamottes läror gå igen som ledande grundsatser vid senare kritik af systemet, så fordrar rättvisan, att hans namn nämnes med motsvarande heder.

Jemförelsen mellan Lamottes afhandlingar och Lessings „Hamburgische Dramaturgie“ har varit svår att genomföra och kan endast delvis vara tillfredsställande, emedan dessa arbetens plan varit så olika. Ofta är det blott i förbigående och tillfälligt Lessing berört samma sak som Lamotte och särskildt har denne alls icke upptagit de grundfrågor, hvilka den andre så utförligt behandlar i senare hälften af dramaturgin. Lamotte håller sig så godt som uteslutande till tragedins teknik. Emellertid råder mellan de båda författarne öfverensstämmelse i de flesta punkter, der jemförelse kunnat ega rum. Så är fallet i afseende å frågan om uppfinningens förhållande till det historiska, enhetsreglerna, intressets betydelse, karaktersteckningen, handlingens vigt för dramat, förkastligheten af förtrogna samt lagen om fullständig motivering. Nästan allt hvad hos den franske kritikern fått en tillfredsställande utredning återfinnes hos den tyske — sannt nog aldrig i form af citat och sällan i liknande ordalag, men icke desto mindre i grunden öfverensstämmande. Det är med Lessing, liksom stundom med Voltaire i „Commentaires sur Corneille“, att de Lamotteska lärorna visa sig hafva ingått i hans medvetande. Voltaires skuld till Lamotte är utan tvifvel mera direkt, ty Lessings insigter hvilade på ojemförligt djupare och mer omfattande studier; men derför kan man ej helt och hållet förneka dennes förbindelse till honom. Då Lamotte engång funnit ett allmänt giltigt och klart uttryck för många dramatiska frågors lös-

*) Han säger visserligen i anledning af „Zaire“, att engelskt föredöme ledt honom att deri „mettre sur la scène les noms de nos rois et des anciennes familles du royaume“; men beträffande „Alzire“ skrifver han 1736 till abbé le Blanc: „Rome et la Grèce semblent épuisées. Il est temps de s'ouvrir de nouvelles routes“. Dock må äfven erinras om Lamottes ofta upprepade yrkan på „nyhet“ i afseende å motiven.

ning, så kan ju Lessing i dessa fall omöjligen vara eller hafva känt sig som frågornas förste utredare. Huru snillrik kritiker Lessing än var, så kan ej hans förtjenst ligga i annat än att han, upptagande det hållbara hos den föregående kritiken, gick vidare med vidgad blick. Ja, utan att vilja göra intrång på Lessings sjelfständighet eller sätta i fråga hans kritiska skarpsinne, kan man med afseende å förhållandet mellan Lamotte och honom erinra sig hans egna ord (H. Dr. 32): es ist doch gemeiniglich ein Franzose der den Ausländern über die Fehler eines Franzosen die Augen eröffnet. Ty om han också icke „öppnat ögonen" på Lessing, så har Lamotte dock till först och långt före hans tid uppvisat den franska tragedins fel.

Men Lamottes förtjenst går ställvis utöfver den att angripa det gällande systemets auktoritet och bana väg för en literär reform. Han har vid framställningen af några detaljfrågor uttryckt sig så insigtsfullt, att man senare intet väsentligt haft att ändra eller tillägga. Det synes derför icke mer än billigt, att honom gifves ett namn bland dem, som verksamt bidragit att utreda vigtiga frågor på den dramatiska teknikens område. Sådana äro de om expositionen, dialogen, dramats anläggning och genomarbetande, intressets enhet och stegring. Stundom har framställningen en rent af modern pregel och yrkanden göras, såsom i afseende å monologen, hvilka först i våra dagar upprepats.

DEN

HERMITE'SKA DIFFERENTIALEQVATIONEN

AF

ANDRA ORDNINGEN

AF

E. A. STENBERG.

Uti inledningen till sin utmärkta afhandling: „Sur quelques applications des fonctions elliptiques“[1]) omnämner Hermite att den allmänna integralen till differentialeqvationen

$$y'' - \Big[h + n\,(n+1)\,k^2\,sn^2\,x\Big]\,y = 0,$$

der n är ett helt tal och h en *arbiträr* konstant, uttryckes genom formeln

$$y = CF(x) + C_1\,F(-x),$$

hvarest $F(x)$ är en dubbelperiodisk funktion af andra slaget af formen

$$F(x) = D_x^{n-1}\,\Phi(x) - A_1\,D_x^{n-3}\,\Phi(x) + A_2\,D_x^{n-5}\,\Phi(x) - \cdots$$

$$\Phi(x) = \frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}\,e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x}.$$

Emedan det gifves vissa fall, då detta i allmänhet riktiga påstående icke är fullt berättigadt, har jag företagit mig att närmare undersöka ifrågavarande differentialeqvation, och är det resultatet af denna undersökning, som jag nedlagt i föreliggande afhandling. Vid denna framställning kommer jag öfverallt att använda de af Weierstrass införda funktionerna $\sigma(x)$, $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, $\sigma_3(x)$ och $p(x)$[2]), hvarigenom äfven en liten förändring uti den af Mittag-Leffler[3]) gifna definitionen af en Hermite'sk differentialeqvation blir nödvändig.

I det följande kommer jag nemligen att under denna benämning förstå en lineär och homogen differentialeqvation, som har följande egenskaper:

---

[1]) Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris. 15. Octobre 1877.

[2]) Dessas egenskaper finnas sammanstälda i Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.

[3]) Om integrationen af de Hermite'ska differentialeqvationerna etc. Acta Soc. Scient. Fennicae. Tom. XII.

1. dess allmänna integral är en funktion af rationel karakter af variabeln x,
2. dess koefficienter äro dubbelperiodiska funktioner af nämda variabel med fundamentalperioderna 2ω och $2\omega'$, och
3. endast i $x = 0$ och härmed kongruenta ställen kunna dess koefficienter blifva oändliga.

1. I följd af denna definition måste den Hermite'ska differentialeqvationen af andra ordningen enligt Fuchs' undersökningar hafva formen

$$y'' - \Big[a + n(n+1)\,p(x)\Big]\,y = 0, \tag{1}$$

der a är en konstant och n ett positivt helt tal. Å andra sidan är denna differentialeqvation alltid en Hermite'sk af andra ordningen, hvilket konstant värde än a har, och hvilket helt positivt tal än n är, ty det enda vilkor en differentialeqvation af andra ordningen, hvars koefficienter motsvara bestämningarna 2 och 3 här ofvan, är underkastad för att den skall vara en Hermite'sk, är att den skall hafva *en* entydig integral. Har den nemligen det, så har den ock, enligt Picard's och Mittag-Leffler's undersökningar[1]), en partikulär integral y_1, som är en dubbelperiodisk funktion af andra slaget af x och som således i $x = 0$ och härmed kongruenta ställen måste blifva oändlig. Häraf följer att $\int \frac{1}{y_1^2}\,dx$ är regulär i dessa ställen, och följaktligen är den allmänna integralen, som kan skrifvas

$$c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\,dx,$$

en funktion af rationel karakter, ty i alla öfriga ställen måste denna på grund af koefficienternas i differentialeqvationen beskaffenhet, vara regulär. Af ofvanstående synes ock att y_1 endast har nollställen af första ordningen.

2. På grund af Halphen's undersökningar rörande differentialeqvationer med dubbelperiodiska koefficienter[2]), har den Hermite'ska differentialeqvationen af andra ordningen ett fundamentalsystem af integraler $F_1(x)$ och $F_2(x)$, hvilka hafva egenskaperna

---

[1]) Picard, Sur une généralisation etc. Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris. 21. Juillet 1879. Picard, Sur une classe d'équations différentielles linéaires. Comptes rendus etc. 19. Janvier 1880. Mittag-Leffler, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Comptes rendus etc. 16. Février 1880.

[2]) Halphen, Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables. Paris 1883.

$$F_1(x+2\omega)=\mu_1 F_1(x) \quad F_2(x+2\omega)=\mu_2 F_2(x)+cF_1(x)$$
$$F_1(x+2\omega')=\nu_1 F_1(x) \quad F_2(x+2\omega')=\nu_2 F_2(x)+c'F_1(x),$$

der μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, c, c' äro vissa konstanter, af hvilka c och c' samtidigt äro noll, om åtminstone en af likheterna

$$\mu_1=\mu_2 \quad \nu_1=\nu_2$$

icke eger rum. Att detta också är det *enda* fall då c och c' kunna vara noll, synes deraf att eqvationen (1) bör hafva åtminstone en integral $C_1F_1(x)+C_2F_2(x)$, som är regulär i hvarje ändlig punkt och således ej kan vara dubbelperiodisk.

Ofvanstående jemfördt med den omständigheten, att såsnart $F_1(x)$ är en integral till differentialeqvationen i fråga, äfven $F_1(-x)$ är det, föranleder följande slutsats:

den Hermite'ska differentialeqvationen af andra ordningen har alltid då ett fundamentalsystem af integraler $F_1(x)$ och $F_2(x)$, hvilka äro dubbelperiodiska af andra slaget med perioderna 2ω och $2\omega'$, när icke samtidigt

$$\mu_1^2=1 \text{ och } \nu_1^2=1.$$

Äro åter samtidigt $\mu_1^2=1$ och $\nu_1^2=1$ så har differentialeqvationen i fråga icke något fundamentalsystem af integraler, der mer än ett element vore en dubbelperiodisk funktion af andra (eller första slaget) med perioderna 2ω och $2\omega'$.

Detta följer deraf att determinanten

$$\begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) \\ F_1'(x) & F_2'(x) \end{vmatrix}$$

bör vara en konstant.

Jag kommer till först att sysselsätta mig med det senare fallet, och då härvid, emedan $F_1(-x)=CF_1(x)$ och således $F_1(x)=C^2F_1(x)$, $F_1(x)$ är en jemn eller en udda funktion allt efter som n är ett jemnt eller udda tal, vill jag särskildt behandla hvartdera af dessa specialfall.

3. Låt således till först

$$n=2r,$$

der r är ett positivt helt tal >0.

Om differentialeqvationen (1) i detta fall har en integral $F_1(x)$ som är en dubbelperiodisk funktion af första slaget, så har denna enligt föregående § utseendet

$$2)\qquad F_1(x) = c_0 + c_1\,p(x) + c_2\,p^2(x) + \cdots + c_{r-1}\,p^{r-1}(x) + p^r(x).$$

Detta uttryck insatt i differentialeqvationen (1) ger

$$\Big(a + (4n-2)\,c_{r-1}\Big)\,p^r(x) + \Big(\frac{n(n-1)}{4}\,g_2 + a c_{r-1} + (8n-12)\,c_{r-2}\Big)\,p^{r-1}(x) +$$

$$\sum_{\varrho=3}^{\varrho=r}\Big[\frac{(n-2\varrho+4)(n-2\varrho+6)}{4}\,g_3\,c_{r-\varrho+3} + \frac{(n-2\varrho+4)(n-2\varrho+3)}{4}\,g_2\,c_{r-\varrho+2} +$$

$$a c_{r-\varrho+1} + \Big(4\varrho n - 2\varrho(2\varrho-1)\Big)\,c_{r-\varrho}\Big]\,p^{r-\varrho+1}(x) +$$

$$2 g_3\,c_2 + \tfrac{1}{2}\,g_2\,c_1 + a c_0 = 0.$$

De obekanta konstanterna $c_0\,c_1 \cdots c_{r-1}$ bestämmas således genom systemet:

$$3)\quad \begin{cases} 0 = a + (4n-2)\,c_{r-1} \\[4pt] 0 = \dfrac{n(n-1)}{4}\,g_2 + a c_{r-1} + (8n-12)\,c_{r-2} \\[4pt] 0 = \dfrac{(n-2\varrho+4)(n-2\varrho+6)}{4}\,g_3\,c_{r-\varrho+3} + \dfrac{(n-2\varrho+4)(n-2\varrho+3)}{4}\,g_2\,c_{r-\varrho+2} + \\ \qquad a\,c_{r-\varrho+1} + \Big(4\varrho n - 2\varrho\,(2\varrho-1)\Big)\,c_{r-\varrho} \\ \qquad\qquad (\varrho = 3, 4 \cdots r) \\[4pt] 0 = 2 g_3\,c_2 + \tfrac{1}{2}\,g_2\,c_1 + a c_0, \end{cases}$$

hvilket förutsätter att determinanten

$$\text{Ia)}\quad \begin{vmatrix} a & 4n-2 & 0 & 0 & .\,. & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{4}g_2 & a & 8n-12 & 0 & .\,. & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n-2)}{4}g_3 & \dfrac{(n-2)(n-3)}{4}g_2 & a & 12n-3 & .\,. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{(n-2)(n-4)}{4}g_3 & \dfrac{(n-4)(n-5)}{4}g_2 & a & .\,. & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & .\,. & . & . & . \\ . & . & . & . & .\,. & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .\,. & 3g_2 & a & n^2+n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .\,. & 2g_3 & \tfrac{1}{2}g_2 & a \end{vmatrix} = 0,$$

hvilket således är det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att den Hermiteska differentialeqvationen af andra ordningen skall hafva en dubbelperiodisk integral af första slaget för det fall, att n är ett jemnt tal.

4. Låt

$$n = 2r + 1$$

der r är ett positivt helt tal $\geqq 0$.

Om differentialeqvationen (1) i detta fall har en dubbelperiodisk integral af första slaget, har denna på grund af § 2 utseendet

$$F_1(x) = p'(x)\Big[c_0 + c_1\, p(x) + c_2\, p^2(x) + \cdots + c_{r-2}\, p^{r-2}(x) + p^{r-1}(x)\Big], \tag{4}$$

der koefficienterna $c_0\; c_1\; c_2 \cdots c_{r-2}$ bestämmas genom systemet

$$\left\{\begin{aligned}
&0 = a + (4n-2)\, c_{r-2} \\
&0 = \frac{(n-2)(n-3)}{4} g_2 + a c_{r-2} + (8n-12)\, c_{r-3} \\
&0 = \frac{\big(n-(2\varrho-1)\big)\big(n-(2\varrho-3)\big)}{4} g_3\, c_{r-\varrho+2} + \frac{\big(n-(2\varrho-1)\big)\big(n-(2\varrho-2)\big)}{4} g_2\, c_{r-\varrho+1} + \\
&\qquad\qquad a c_{r-\varrho} + \big(4\varrho n - 2\varrho\,(2\varrho-1)\big)\, c_{r-\varrho-1} \\
&\qquad\qquad\qquad (\varrho = 3, 4 \cdots r-1) \\
&0 = 2 g_3\, c_2 + \tfrac{3}{2} g_2\, c_1 + a c_0,
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

och är således

$$\begin{vmatrix}
a & 4n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(n-2)(n-3)}{4} g_2 & a & 8n-12 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(n-3)(n-5)}{4} g_3 & \frac{(n-4)(n-5)}{4} g_2 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{(n-5)(n-7)}{4} g_3 & \frac{(n-6)(n-7)}{4} g_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 5 g_2 & a & (n-3)(n-4) \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2 g_3 & \frac{3}{2} g_2 & a
\end{vmatrix} = 0 \tag{Ib}$$

det nödiga och tillräckliga vilkor, som a i detta fall bör satisfiera.

5. Jag går nu att undersöka när differentialeqvationen (1) har en integral $F_1(x)$ som är en dubbelperiodisk funktion af andra slaget med perioderna 2ω och $2\omega'$ och de multiplicerande faktorerna $1, -1$; $-1, -1$ eller $-1, 1$; hvarvid det enligt § 2, likasom i föregående fall, icke i något fundamentalsystem af integraler kan ingå mer än ett element, som är en dubbelperiodisk funktion.

En sådan funktion $F_1(x)$ kan skrifvas[1])

$$F_1(x) = \gamma_1 f_\nu(x) - \gamma_2 f'_\nu(x) + \frac{\gamma_3}{\underline{|2}} f''_\nu(x) - \cdots + (-1)^{n-2} \frac{\gamma_{n-1}}{\underline{|n-2}} f_\nu^{(n-2)}(x)$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{\underline{|n-1}} f_\nu^{(n-1)}(x)$$

der[2])

$$f_\nu(x) = -\frac{\sigma(x-\omega_\nu)}{\sigma(\omega_\nu)\sigma(x)} e^{\eta_\nu x} = \frac{\sigma_\nu(x)}{\sigma(x)} = \sqrt{p(x) - e_\nu}$$

och ν är ett af talen 1, 2, 3.

Derivatorna af funktionen $f_\nu(x)$ hafva följande egenskaper:

a) hvarje jemn derivata $f_\nu^{(2\mu)}(x)$ är så beskaffad, att produkten

$$f_\nu(x) f_\nu^{(2\mu)}(x)$$

är en hel algebraisk funktion af $(\mu+1)$:te graden af $p(x)$, som försvinner för $p(x) = e_\nu$, och

b) hvarje udda derivata $f_\nu^{(2\mu+1)}(x)$ är så beskaffad, att produkten

$$\frac{f_\nu(x) f_\nu^{(2\mu+1)}(x)}{p'(x)}$$

är en hel algebraisk funktion af μ:te graden af $p(x)$.

Jag låter åter

$$n = 2r.$$

Emedan $f_\nu(x)$ är en udda funktion, har på grund af hvad i § 2 sagts $F_1(x)$ formen

---

[1]) Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Comptes rendus etc. 15. Oct. 1877.

[2]) Rörande dessa formler se Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.

$$F_1(x) = -\gamma_2 f_\nu'(x) - \frac{\gamma_4}{|\underline{3}} f_\nu'''(x) - \cdots - \frac{\gamma_{n-2}}{|\underline{n-3}} f_\nu^{(n-3)}(x) - \frac{1}{|\underline{n-1}} f_\nu^{(n-1)}(x),$$

hvarför den differentialeqvation

$$z'' + \frac{8p^2(x) - 4e_\nu\, p(x) - 4e_\nu^2}{p'(x)} z' - \Big[(n-2)\,(n+3)\,p(x) + a + 3e_\nu\Big] z = 0,$$

hvari den ursprungliga differentialeqvationen (1) genom substitutionen

$$6) \qquad y = \frac{p'(x)}{f_\nu(x)} z$$

öfvergår, har en dubbelperiodisk integral af första slaget

$$7) \qquad z = c_0 + c_1\, p(x) + c_2\, p^2(x) + \cdots + c_{r-2}\, p^{r-2}(x) + p^{r-1}(x)$$

alltid och endast då, när den ursprungliga satisficras af ofvanstående funktion $F_1(x)$.

För bestämmandet af koefficienterna $c_0\, c_1 \cdots c_{r-2}$ erhålles systemet

$$8) \left\{ \begin{aligned} 0 &= a + (2n-1)\, c_\nu + (4n-2)\, c_{r-2} \\ 0 &= \frac{(n-2)\,(n-3)}{4} g_2 + (2n-4)\, e_\nu^2 + \Big(a + (2n-5)\, e_\nu\Big) c_{r-2} + (8n-12)\, c_{r-3} \\ 0 &= \frac{(n-2\varrho+2)(n-2\varrho+4)}{4} g_3\, c_{r-\varrho+2} + \\ &\quad \left[\frac{(n-2\varrho+1)(n-2\varrho+2)}{4} g_2 + (2n-4\varrho+4)\, e_\nu^2\right] c_{r-\varrho+1} + \\ &\quad \Big(a + (2n-4\varrho+3)\, e_\nu\Big)\, c_{r-\varrho} + \Big(4\varrho n - 2\varrho\,(2\varrho-1)\Big)\, c_{r-\varrho-1} \\ &\qquad (\varrho = 3, 4 \cdots r-2) \quad c_{r-1} = 1 \\ 0 &= 2g_3\, c_2 + (\tfrac{1}{2} g_2 + 4e_\nu^2)\, c_1 + (a + 3e_\nu)\, c_0 \end{aligned} \right.$$

och således utgör

$$
\text{IIa)} \quad
\begin{vmatrix}
a+(2n-1)\,e_\nu & 4n-2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(n-2)(n-3)}{4}g_2+(2n-4)\,e_\nu^2 & a+(2n-5)\,e_\nu & 8n-12 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(n-2)(n-4)}{4}g_3 & \frac{(n-4)(n-5)}{4}g_2+(2n-8)\,e_\nu^2 & a+(2n-9)\,e_\nu & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{(n-4)(n-6)}{4}g_3 & \frac{(n-6)(n-7)}{4}g_2+(2n-12)\,e_\nu^2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 3g_2+8e_\nu^2 & a+7e_\nu & (n-2)(n+3) \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 2g_3 & \frac{1}{2}g_2+4e_\nu^2 & a+3e_\nu
\end{vmatrix} = 0
$$

det nödvändiga och tillräckliga vilkor, som konstanten a bör uppfylla för att differentialeqvationen (1) skall hafva en integral af formen (6).

6. I fall

$$n = 2r + 1$$

har $F_1(x)$ utseendet

$$F_1(x) = \gamma_1\, f_\nu(x) + \frac{\gamma_3}{\underline{|2}}\, f_\nu''(x) + \cdots + \frac{\gamma_{n-2}}{\underline{|n-3}}\, f_\nu^{(n-3)}(x) + \frac{1}{\underline{|n-1}}\, f_\nu^{(n-1)}(x)$$

hvarför, om jag substituerar

$$\text{9)} \qquad y = \frac{p(x)-e_\nu}{f_\nu(x)}\, z = z f_\nu(x)$$

den differentialeqvation

$$z'' + \frac{4p^2(x)+4e_\nu\, p(x)+4e_\nu^2-g_2}{p'(x)}\, z' - \Big[(n-1)(n+2)\, p(x) + a - e_\nu\Big]\, z = 0,$$

jag sålunda erhåller, integreras af en dubbelperiodisk funktion af första slaget

$$
10) \qquad z = c_0 + c_1\, p(x) + c_2\, p^2(x) + \cdots c_{r-1}\, p^{r-1}(x) + p^r(x)
$$

när den ursprungliga satisfieras af funktionon $F_1(x)$. Systemet

$$
11)\left\{\begin{aligned}
&0 = a - (2n-1)\, e_\nu + (4n-2)\, c_{r-1} \\
&0 = \frac{n(n-1)}{4} g_2 - (2n-2)\, e_\nu^2 + \Big(a - (2n-5)\, e_\nu\Big)\, c_{r-1} + (8n-12)\, c_{r-2} \\
&0 = \frac{(n-2\varrho+3)(n-2\varrho+5)}{4} g_3\, c_{r-\varrho+3} + \\
&\qquad \left(\frac{(n-2\varrho+3)(n-2\varrho+4)}{4} g_2 - (2n-4\varrho+6)\, e_\nu^2\right) c_{r-\varrho+2} + \\
&\qquad \Big(a - (2n-4\varrho+3)\, e_\nu\Big)\, c_{r-\varrho+1} + \Big(4\varrho n - 2\varrho(2\varrho-1)\Big)\, c_{r-\varrho} \\
&\qquad\qquad\qquad (\varrho = 3, 4 \cdots r) \\
&0 = 2g_3\, c_2 + \left(\tfrac{3}{2} g_2 - 4e_\nu^2\right) c_1 + (a - e_\nu)\, c_0
\end{aligned}\right.
$$

bestämmer härvid konstanterna $c_0\, c_1 \cdots c_{r-1}$ och är således

$$
\text{IIb)} \quad \begin{vmatrix}
a - (2n-1)\, e_\nu & 4n-2 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 & 0 & 0 \\
\frac{n(n-1)}{4} g_2 - (2n-2) e_\nu^2 & a - (2n-5)\, e_\nu & 8n-12 & \cdot\,\cdot & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(n-1)(n-3)}{4} g_3 & \frac{(n-2)(n-3)}{4} g_2 - (2n-6)\, e_\nu^2 & a - (2n-9)\, e_\nu & \cdot\,\cdot & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot\,\cdot & 5g_2 - 8e_\nu^2 & a - 5c_\nu & (n-1)(n+2) \\
0 & 0 & 0 & \cdot\,\cdot & 2g_3 & \frac{3}{2} g_2 - 4e_\nu^2 & a - e_\nu
\end{vmatrix} = 0
$$

det nödvändiga och tillräckliga vilkor, som konstanten a i detta fall är underkastad, för att den Hermiteska differentialeqvationen af andra ordningen skall hafva endast en integral, som är en dubbelperiodisk funktion af andra slaget.

7. Sedan jag numera framstält de vilkor Ia (för $n=2r$) och Ib (för $n=2r+1$), hvilka konstanten a bör satisfiera i det fall, att differentialeqvationen (1) har en dubbelperiodisk integral af första slaget med perioderna 2ω och $2\omega'$, såväl som de vilkor IIa (för $n=2r$) och IIb (för $n=2r+1$) dem a är underkastad, för att differentialeqvationen i fråga skall hafva en dubbelperiodisk integral af andra slaget med samma perioder och de multiplicerande faktorerna $1, -1; -1, -1$ eller $-1, 1$ samt uppstält de system (3), (5) för det förra och (8) och (11) för det senare fallet, medels hvilka en integral $F_1(x)$ bestämmes, vill jag i sammanhang härmed uppsöka en metod att framställa en annan integral $F_2(x)$, som jemte $F_1(x)$ kunde utgöra ett fundamentalsystem af integraler till den nämnda differentialeqvationen. Om jag låter μ och ν vara de multiplicerande faktorerna för $F_1(x)$ sålunda att

$$F_1(x+2\omega)=\mu F_1(x) \qquad F_1(x+2\omega')=\nu F_1(x),$$

bör funktionen $F_2(x)$ hafva egenskapen

$$F_2(x+2\omega)=\mu F_2(x)+cF_1(x) \qquad F_2(x+2\omega')=\nu F_2(x)+c'F_1(x),$$

der c och c' äro vissa konstanter, hvilka icke samtidigt äro noll.

Skrifver jag nu

$$\Phi(x)=\frac{F_2(x)}{F_1(x)} \tag{12}$$

$$\delta=-\frac{1}{\pi i}\begin{vmatrix}\frac{c}{\mu} & \eta \\ \frac{c'}{\nu} & \eta'\end{vmatrix} \qquad \delta_0=\frac{1}{\pi i}\begin{vmatrix}\frac{c}{\mu} & \omega \\ \frac{c'}{\nu} & \omega'\end{vmatrix}$$

$$\Psi(x)=\delta x+\delta_0\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}$$

och

$$\psi(x)=\Phi(x)-\Psi(x),$$

så är $\psi(x)$ en dubbelperiodisk funktion af första slaget med perioderna 2ω och $2\omega'$, hvilken på grund deraf, att $F_2(x)$ endast i $x=0$ och härmed kongruenta ställen kan blifva oändlig och då af samma ordning som $F_1(x)$, och dessutom $F_1(x)$ endast har nollställen af första ordningen (se § 1), har utseendet:

$$\psi(x)=-\delta_0\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n}\gamma_\varrho\frac{\sigma'(x-\alpha_\varrho)}{\sigma(x-\alpha_\varrho)},$$

der $\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ äro ett system icke kongruenta nollställen till $F_1(x)$, och $\gamma_1\, \gamma_2 \cdots \gamma_n$ vissa konstanter, hvilka samtliga äro olika noll och dessutom uppfylla vilkoret $\sum \gamma = \delta_0$.

Att ingen af koefficienterna γ_ϱ kan vara $= 0$ följer deraf, att samtliga ställen α_ϱ äro regulära för koefficienterna i differentialeqvationen (1) och det således enligt Fuchs' undersökningar för hvarje α_ϱ måste finnas en integral

$$c_{\varrho_1}\, F_1(x) + c_{\varrho_2}\, F_2(x),$$

som i omgifningen af $x = \alpha_\varrho$ har utvecklingen

$$a_{\varrho_0} + a_{\varrho_1}\,(x - \alpha_\varrho) + a_{\varrho_2}\,(x - \alpha_\varrho)^2 + \cdots,$$

der a_{ϱ_0} icke är noll, hvaraf framgår att $F_2(\alpha_\varrho)$ icke $= 0$.

Den sökta funktionen $\Phi(x)$ har alltså utseendet

13) $$\Phi(x) = \delta x + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} \gamma_\varrho \frac{\sigma'(x - \alpha_\varrho)}{\sigma(x - \alpha_\varrho)},$$

der konstanterna $\delta\, \gamma_1\, \gamma_2 \cdots \gamma_n$ ännu böra bestämmas.

Jag insätter

$$y = F_1(x) \int z\, dx$$

i differentialeqvationen (1), hvarigenom denna öfvergår uti

14) $$F_1(x)\, z' + 2 F_1'(x)\, z = 0,$$

hvilken på grund af (12) bör integreras af

15) $$z = \Phi'(x) = \delta - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} \gamma_\varrho\, p(x - \alpha_\varrho).$$

Då å andra sidan hvarje integral till (14) har formen

$$c \frac{1}{F_1^2(x)},$$

och $F_1(x)$ antingen är en udda eller jemn funktion, är $\Phi'(x)$ alltid en jemn funktion och har således ett af följande fyra utseenden:

1) om $F_1(x)$ är dubbelperiodisk af första slaget med perioderna 2ω och $2\omega'$, och

a) $n = 2r$

16a) $$\Phi'(x) = \delta - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \delta_\varrho \Big[p(x-\beta_\varrho) + p(x+\beta_\varrho) \Big],$$

b) $n = 2r + 1$

16b) $$\Phi'(x) = \delta - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} \delta_\varrho\, p(x-\omega_\varrho) - \sum_{\varrho=4}^{\varrho=r+2} \delta_\varrho \Big[p(x-\beta_\varrho) + p(x+\beta_\varrho) \Big];$$

2) om $F_1(x)$ är dubbelperiodisk af andra slaget med ofvan nämda perioder, och

a) $n = 2r$

17a) $$\Phi'(x) = \delta - \delta_1\, p(x-\omega_\lambda) - \delta_2\, p(x-\omega_\mu) - \sum_{\varrho=3}^{\varrho=r+1} \delta_\varrho \Big[p(x-\beta_\varrho) + p(x+\beta_\varrho) \Big],$$

b) $n = 2r + 1$

17b) $$\Phi'(x) = \delta - \delta_1\, p(x-\omega_\nu) - \sum_{\varrho=2}^{\varrho=r+1} \delta_\varrho \Big[p(x-\beta_\varrho) + p(x+\beta_\varrho) \Big].$$

I dessa formler betecknar jag med β_ϱ alla de rötter i systemet $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$, hvilka hafva följande egenskap: om β_σ och β_τ äro ett par, hvilka som helst, af rötterna β_ϱ (fallet $\sigma = \tau$ icke uteslutet) så är aldrig β_τ lika eller kongruent med $-\beta_\sigma$. Qvantiteten ω_ν är samma halfperiod, som ingår i funktionen $f_\nu(x)$ i §§ 5 och 6, och ω_λ, ω_μ äro de två öfriga af halfperioderna $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

8. Jag skall med $F(x)$ beteckna den dubbelperiodiska funktion[1]) (af första eller andra slaget allt eftersom $F_1(x)$ är af första eller andra slaget), hvari venstra sidan i eqvationen (14) vid substitutionen $z = \Phi'(x)$ öfvergår, och ännu för ett ögonblick bibehålla det i formeln (15) använda beteckningssättet. Dessutom låter jag $F_1(x)$ i omgifningen af punkten $x = \alpha_\varrho$ hafva utvecklingen

$$F_1(x) = A_{\varrho_1}(x-\alpha_\varrho) + A_{\varrho_2}(x-\alpha_\varrho)^2 + A_{\varrho_3}(x-\alpha_\varrho)^3 + \cdots.$$

Då är funktionen

$$F(x) + \frac{2A_{\varrho_2}\gamma_\varrho}{x-\alpha_\varrho}$$

regulär i omgifningen af samma punkt. Enligt § 7 finnes ett system värden γ_ϱ, hvilka göra $F(x) \equiv 0$ och äro samtliga dessa värden olika noll; häraf följer, att alla $A_{\varrho_2} = 0$, och således är funktionen $F(x)$ regulär i hvarje punkt $x = \alpha_\varrho$, huru koefficienterna $\gamma_1\, \gamma_2 \cdots \gamma_n$ än äro beskaffade.

---

[1]) Med perioderna 2ω och $2\omega'$ likasom öfverallt i det följande, såvida jag icke specielt utsätter perioderna.

De enda punkter, i hvilka $F(x)$ kan blifva oändlig, äro följaktligen de med $x=0$ kongruenta ställena, hvarför jag, då jag vill bestämma koefficienterna $\delta\,\delta_1\,\delta_2\cdots$ så, att

$$F(x) \equiv 0,$$

endast behöfver välja dem på det sättet, att $F(x)$ är regulär i $x=0$, i fall $F_1(x)$ är dubbelperiodisk af andra slaget, och i fall $F_1(x)$ är dubbelperiodisk af första slaget så, att $F(x)$ försvinner i punkten $x=0$.

Å andra sidan bör, emedan

$$z = \frac{c}{F_1^2(x)},$$

i omgifningen af $x=0$

$$z = x^{2n}\left(a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots\right),$$

hvilket, jemfördt med ofvanstående, inskränker uppgiften till bestämmandet af $\delta\,\delta_1\,\delta_2\cdots$ så, att uti utvecklingen af $\Phi'(x)$ i omgifningen af $x=0$,

$$\Phi'(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + C_{n+1} x^{n+1} + \cdots,$$

koefficienterna

$$C_0\; C_1\; C_2\; \cdots\; C_{n-1}\; C_n$$

försvinna, i fall $F_1(x)$ är dubbelperiodisk af andra slaget, och koefficienterna

$$C_0\; C_1\; C_2 \cdots C_{n-1}\; C_{n+1}$$

försvinna, då $F_1(x)$ är dubbelperiodisk af första slaget.

9. Betraktar jag först det senare fallet, det då $F_1(x)$ är en dubbelperiodisk funktion af första slaget, så erhåller jag alltså på grund af formeln (16a), då

a) $n = 2r$

följande system af r lineära eqvationer för bestämmandet af de $r+1$ obekanta storheterna $\delta\,\delta_1\,\delta_2\cdots\delta_r$

$$18\text{a)}\quad \begin{cases} \delta_1\,p(\beta_1) + \delta_2\,p(\beta_2) + \cdots + \delta_r\,p(\beta_r) = \dfrac{\delta}{2} \\ \delta_1\,p''(\beta_1) + \delta_2\,p''(\beta_2) + \cdots + \delta_r\,p''(\beta_r) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_1\,p^{(2\varrho)}(\beta_1) + \delta_2\,p^{(2\varrho)}(\beta_2) + \cdots + \delta_r\,p^{(2\varrho)}(\beta_r) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_1\,p^{(n-2)}(\beta_1) + \delta_2\,p^{(n-2)}(\beta_2) + \cdots + \delta_r\,p^{(n-2)}(\beta_r) = 0, \end{cases}$$

och, på grund af formeln (16b), då

b) $n = 2r + 1$

följande system af $r + 2$ lineära eqvationer, hvilka bestämma de i detta fall $r + 3$ obekanta qvantiteterna $\delta\, \delta_1\, \delta_2 \cdots \delta_{r+2}$

$$
18\mathrm{b})\quad \left\{
\begin{array}{l}
\delta_1 \dfrac{p(\omega_1)}{2} + \delta_2 \dfrac{p(\omega_2)}{2} + \delta_2 \dfrac{p(\omega_3)}{2} + \delta_4\, p(\beta_4) + \delta_5\, p(\beta_5) + \cdots + \delta_{r+2}\, p(\beta_{r+2}) = \dfrac{\delta}{2} \\
\delta_1 \dfrac{p''(\omega_1)}{2} + \delta_2 \dfrac{p''(\omega_2)}{2} + \delta_3 \dfrac{p''(\omega_3)}{2} + \delta_4\, p''(\beta_4) + \delta_5\, p''(\beta_5) + \cdots \delta_{r+2}\, p''(\beta_{r+2}) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_1 \dfrac{p^{(2\varrho)}(\omega_1)}{2} + \delta_2 \dfrac{p^{(2\varrho)}(\omega_2)}{2} + \delta_3 \dfrac{p^{(2\varrho)}(\omega_3)}{2} + \delta_4\, p^{(2\varrho)}(\beta_4) + \delta_5\, p^{(2\varrho)}(\beta_5) + \cdots + \delta_{r+2}\, p^{(2\varrho)}(\beta_{r+2}) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_1 \dfrac{p^{(n+1)}(\omega_1)}{2} + \delta_2 \dfrac{p^{(n+1)}(\omega_2)}{2} + \delta_3 \dfrac{p^{(n+1)}(\omega_3)}{2} + \delta_4{}^{(n+1)}(\beta_4) + \delta_5\, p^{(n+1)}(\beta_5) + \cdots + \delta_{r+2}\, p^{(n+1)}(\beta_{r+2}) = 0.
\end{array}
\right.
$$

I det fall, att $F_1(x)$ är en dubbelperiodisk funktion af andra slaget, erhåller jag på grund af formlerna (17a) och (17b) för bestämmandet af de $r + 2$ obekanta storheterna $\delta\, \delta_1\, \delta_2 \cdots \delta_{r+1}$ följande system af $r + 1$ lineära eqvationer:

a) $n = 2r$.

$$
19\mathrm{a})\quad \left\{
\begin{array}{l}
\delta_1 \dfrac{p(\omega_\lambda)}{2} + \delta_2 \dfrac{p(\omega_\mu)}{2} + \delta_3\, p(\beta_3) + \delta_4\, p(\beta_4) + \cdots + \delta_{r+1}\, p(\beta_{r+1}) = \dfrac{\delta}{2} \\
\delta_1 \dfrac{p''(\omega_\lambda)}{2} + \delta_2 \dfrac{p''(\omega_\mu)}{2} + \delta_3\, p''(\beta_3) + \delta_4\, p''(\beta_4) \cdots + \delta_{r+1}\, p''(\beta_{r+1}) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_2 \dfrac{p^{(2\varrho)}(\omega_\lambda)}{2} + \delta_2 \dfrac{p^{(2\varrho)}(\omega_\mu)}{2} + \delta_3\, p^{(2\varrho)}(\beta_3) + \delta_4\, p^{(2\varrho)}(\beta_4) + \cdots + \delta_{r+1}\, p^{(2\varrho)}(\beta_{r+1}) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_1 \dfrac{p^{(n)}(\omega_\lambda)}{2} + \delta_2 \dfrac{p^{(n)}(\omega_\mu)}{2} + \delta_3\, p^{(n)}(\beta_3) + \delta_4\, p^{(n)}(\beta_4) + \cdots + \delta_{r+1}\, p^{(n)}(\beta_{r+1}) = 0,
\end{array}
\right.
$$

b) $n = 2r + 1$

$$
19\text{b)}\quad \begin{cases}
\delta_1 \dfrac{p(\omega_\nu)}{2} + \delta_2 p(\beta_2) + \delta_3 p(\beta_3) + \cdots + \delta_{r+1} p(\beta_{r+1}) = \dfrac{\delta}{2} \\
\delta_1 \dfrac{p''(\omega_\nu)}{2} + \delta_2 p''(\beta_2) + \delta_3 p''(\beta_3) + \cdots + \delta_{r+1} p''(\beta_{r+1}) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_1 \dfrac{p^{(2\varrho)}(\omega_\nu)}{2} + \delta_2 p^{(2\varrho)}(\beta_2) + \delta_3 p^{(2\varrho)}(\beta_3) + \cdots + \delta_{r+1} p^{(2\varrho)}(\beta_{r+1}) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta_1 \dfrac{p^{(n-1)}(\omega_\nu)}{2} + \delta_2 p^{(n-1)}(\beta_2) + \delta_3 p^{(n-1)}(\beta_3) + \cdots + \delta_{r+1} p^{(n-1)}(\beta_{r+1}) = 0.
\end{cases}
$$

Såsom redan ur formeln (13) framgår, kan en af de obekanta koefficienterna godtyckligt fastställas; såsnart detta är gjordt, äro de öfriga entydigt bestämda medels ett af de ofvan anförda systemen.

10. Det återstår nu att behandla det fall då konstanten a icke satisfierar vilkoren Ia, Ib eller IIa, IIb, d. v. s. då differentialeqvationen (1) har ett fundamentalsystem af integraler $F_1(x)$ och $F_2(x)$ hvilka hvardera äro dubbelperiodiska funktioner af andra slaget med perioderna 2ω och $2\omega'$. Enligt § 2 är i detta fall $F_2(x) = F_1(-x)$ och således den enas multiplicerande faktorer likamed de reciproka värdena till den andras. Emedan det på grund af differentialeqvationens beskaffenhet måste finnas en integral $C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)$, som i omgifningen af $x = 0$ har utvecklingen

$$x^{n+1}[b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots],$$

der b_0 icke är $= 0$, böra, om i omgifningen af samma punkt

$$20)\qquad F_1(x) = \frac{1}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_2}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x} + c_n + c_{n+1} x + c_{n+2} x^2 + \cdots,$$

koefficienterna

$$c_1 = c_3 = c_5 \cdots = c_{2n-3} = c_{2n-1} = 0.$$

I omgifningen af punkten $x = 0$ låter jag dessutom

$$21)\qquad a + n(n+1)p(x) = \frac{n(n+1)}{x^2} + a + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots$$

och

$$22)\qquad F''_1(x) - \Big[a + n(n+1)\,p(x)\Big] F_1(x) = \frac{C_1}{x^{n+1}} - \frac{C_2}{x^n} + \frac{C_3}{x^{n-1}} -$$

$$\frac{C_4}{x^{n-2}} + \cdots + (-)^{n-1}\frac{C_n}{x^2} + (-1)^n \frac{C_{n+1}}{x} + (-1)^{n+1}\, C_{n+2} + \cdots.$$

Här äro $C_1, C_3, C_5 \cdot\cdot$ så beskaffade, att de försvinna, då $c_1 = c_3 = c_5 = \cdot\cdot = 0$, hvaremot de öfriga koefficienterna hafva utseendet

$$23)\qquad C_{2\varrho} = a_{\varrho-1} + a_{\varrho-2}\, c_2 + a_{\varrho-3}\, c_4 + \cdots + a_1\, c_{2\varrho-4} + a\, c_{2\varrho-2} + 2\varrho\,(2n - 2\varrho + 1)\, c_{2\varrho}.$$

De dubbelperiodiska funktionerna af andra slaget, d. v. s. de funktioner, som hafva egenskapen

$$F(x + 2\omega) = e^{\mu}\, F(x) \qquad\qquad F(x + 2\omega') = e^{\mu'} F(x),$$

sönderfalla i två väsendtligt skilda grupper, af hvilka den ena omfattar dem, hvilkas multiplicerande faktorer äro sådana, att det icke finnes några hela tal ν och ν', som göra

$$\omega\mu' - \omega'\mu = 2\pi i\,(\nu\omega + \nu'\omega'),$$

och den andra dem, hvilkas multiplicerande faktorer hafva egenskapen

$$\omega\mu' - \omega'\mu = 2\pi i\,(\nu\omega + \nu'\omega'),$$

der ν och ν' äro vissa hela tal.

En funktion, som hör till den förra gruppen och icke har något oändlighetsställe, är $\equiv 0$.

En funktion, som hör till den senare gruppen och inom periodparallelogrammen endast har ett oändlighetsställe och detta af första ordningen, är en enkelperiodisk funktion af formen $Ce^{\lambda x}$; den försvinner identiskt, om den derjemte har ett nollställe.

På grund häraf är funktionen $F_1(x)$ en integral till differentialeqvationen (1) såsnart den är en dubbelperiodisk funktion af andra slaget, som endast i $x = 0$ och härmed kongruenta ställen blir oändlig och hvars koefficienter i utvecklingen (20) uppfylla ettdera af följande vilkor:

1) om $F_1(x)$ hör till den förra af ofvan nämda grupper:

$$24)\qquad C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = C_n = C_{n+1} = 0$$

och 2) om $F_1(x)$ hör till den senare gruppen:

$$25)\qquad C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = C_n = C_{n+2} = 0.$$

11. Jag vill till först uppsöka det vilkor, konstanten a är underkastad, för att $F_1(x)$ skall höra till den senare gruppen. I detta fall har enligt MITTAG-LEFFLER[1]) denna funktion utseendet

$$26)\qquad F_1(x) = Ce^{\lambda_1 x} + c_{n-1}\varphi(x) - c_{n-2}\varphi'(x) + \frac{c_{n-3}}{\lfloor 2}\varphi''(x) + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n-1}\varphi^{(n-1)}(x),$$

der

$$\varphi(x) = \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}e^{\lambda_1 x}$$

och λ_1 är en rot till eqvationen

$$27)\qquad c_{n-1} - c_{n-2}\lambda + \frac{c_{n-3}}{\lfloor 2}\lambda^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n-1}\lambda^{n-1} = 0.$$

I omgifningen af punkten $x = 0$ har $\varphi(x)$ utvecklingen

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + \lambda + \frac{\lambda^2}{\lfloor 2}x + \frac{\lambda^3}{\lfloor 3}x^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\left[M_\mu x^{2\mu+1} + N_\mu x^{2\mu+2}\right],$$

der

$$M_\mu = \frac{\lambda^{2\mu+2}}{\lfloor 2\mu+2} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mu}\frac{\lambda^{2\mu-2\varrho}}{\lfloor 2\mu-2\varrho}A_\varrho$$

$$N_\mu = \frac{\lambda^{2\mu+3}}{\lfloor 2\mu+3} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mu}\frac{\lambda^{2\mu-2\varrho+1}}{\lfloor 2\mu-2\varrho+1}A_\varrho,$$

och qvantiteterna A_ϱ utgöra koefficienterna i utvecklingen

$$\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{x} + A_1x^3 + A_2x^5 + A_3x^7 + \cdots.$$

Jag vill åter behandla särskildt det fall, då n är ett jemnt, och det, då n är ett udda tal.

Låt a) $n = 2r$.

Ur uttrycket (26) erhålles

---

[1]) MITTAG-LEFFLER, Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Comptes rendus etc. 26. Janvier 1880.

$$c_n = C - c_{n-2}\frac{\lambda^2}{2} - \sum_{\mu=2}^{\mu=r} c_{n-2\mu}\, M_{\mu-1}$$

$$c_{n+2} = C\frac{\lambda^2}{2} - \sum_{\mu=1}^{\mu=r} \mu\,(2\mu+1)\, c_{n-2\mu}\, M_{\mu}.$$

Den förra af dessa eqvationer ger mig C uttryckt i $c_2\, c_4 \cdots c_n$ och λ, hvilket uttryck, insatt i den senare eqvationen lemnar följande likhet i λ:

28) $$\lambda^{n+2} + (n-1)(n+2)\, c_2\, \lambda^n +$$

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=r} \frac{\underline{|n+2}}{\underline{|n-2\tau}} \left[\frac{n-2\tau-1}{n+1}\, c_{2\tau+2} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\tau} \frac{n-2\tau+\varrho}{n+1}\, b_\varrho\, c_{2\tau-2\varrho}\right] \lambda^{n-2\tau} = 0,$$

der jag med b_ϱ betecknar koefficienterna i utvecklingen

$$p\,(x) = \frac{1}{x^2} + b_1\, x^2 + b_2\, x^4 + \cdots.$$

Det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att differentialeqvationen skall hafva en integral af formen (26) är således det, att eqvationerna (27) och (28) hafva en rot λ gemensam, eller på grund af hvad i § 10 yttrats om de multiplicerande faktorerna, att eqvationerna

$$\text{IIIa.}\quad \begin{cases} \lambda^{n+2} + \displaystyle\sum_{\tau=0}^{\tau=r} \frac{\underline{|n+2}}{\underline{|n-2\tau}}\lambda^{n-2\tau} \left[c_{2\tau+2} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\tau} \varrho b_\varrho\, c_{2\tau-2\varrho}\right] = 0 \\[2ex] \lambda^{n-2} + \displaystyle\sum_{\tau=2}^{\tau=r} \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-2\tau+1}}\, c_{2\tau-2}\, \lambda^{n-2\tau} = 0 \end{cases}$$

hafva en rot λ^2 gemensam, sedan koefficienterna c_2, c_4, $c_6 \cdots c_n$, c_{n+2} bestämts med tillhjelp af eqvationerna (25), hvilka enligt (23) äro lineära i nämda storheter.

b) $n = 2r + 1$.

I detta fall är

$$c_n = C + c_{n-1}\,\lambda + \frac{c_{n-3}\,\lambda^3}{\underline{|3}} + \sum_{\mu=2}^{\mu=r} c_{n-2\mu-1}\, N_{\mu-1} = 0$$

$$c_{n+2} = C\frac{\lambda^2}{2} + \frac{c_{n-1}\lambda^3}{\lfloor\underline{3}} + \sum_{\mu=1}^{\mu=r} (\mu+1)(2\mu+1)\, c_{n-2\mu-1} N_\mu = 0,$$

eqvationen (27) har utseendet

$$\lambda^{n-1} + (n-2)(n-1)\, C_2\, \lambda^{n-3} + \ldots + \frac{\lfloor\underline{n-1}}{\lfloor\underline{2}}\, c_{n-3}\lambda^2 + \lfloor\underline{n-1}\, c_{n-1} = 0,$$

och således är vilkoret det, att eqvationerna

$$\text{IIIb.}\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda^{n+1} + \sum_{\tau=0}^{\tau=r} \frac{\lfloor\underline{n+2}}{\lfloor\underline{n-2\tau}}\, \lambda^{n-2\tau-1} \left[c_{2\tau+2} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\tau} \varrho b_\varrho\, c_{2\tau-2\varrho} \right] = 0 \\ &\lambda^{n-1} + \sum_{\tau=2}^{\tau=r+1} \frac{\lfloor\underline{n-1}}{\lfloor\underline{n-2\tau+1}}\, c_{2\tau-2}\, \lambda^{n-2\tau+1} = 0 \end{aligned} \right.$$

hafva en rot λ^2 gemensam.

12. Om konstanten a icke uppfyller något af vilkoren I, II, III har differentialeqvationen (1) ett fundamentalsystem af integraler $F_1(x)$ och $F_2(x)$, hvilka hvardera äro af formen

$$F(x) = c_{n-1} f(x) - c_{n-2} f'(x) + \frac{c_{n-3}}{\lfloor\underline{2}} f''(x) - \cdots + (-1)^{n-2} \frac{c_1}{\lfloor\underline{n-2}} f^{(n-2)}(x) +$$

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{\lfloor\underline{n-1}} f^{(n-1)}(x),$$

der

$$f(x) = -\frac{\sigma(x-\alpha)\, e^{\left(\beta + \frac{\sigma'(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right)x}}{\sigma(\alpha)\,\sigma(x)}.$$

Här bestämmas koefficienterna $c_1, c_2, \cdots c_{n-1}$, hvilka äro desamma för hvardera integralen och af hvilka de med uddatalig index äro $= 0$, medels de $n-1$ första eqvationerna i systemet (24), hvarpå konstanterna α och β bestämmas så, att c_n och c_{n+1} erhålla värden, hvilka satisfiera de två öfriga likheterna $C_n = C_{n+1} = 0$.

Genom elimination öfvergå dessa två eqvationer i ett system af tre likheter af följande utseende:

$$
29) \qquad \begin{cases} \beta^2 + R = 0 \\ p(\alpha) + R_1(\beta) = 0 \\ p'(\alpha) + R_2(\beta) = 0 \end{cases}
$$

der R är en rationel algebraisk funktion af a, g_2 och g_3, samt $R_1(\beta)$ och $R_2(\beta)$ rationela algebraiska funktioner af β af följande beskaffenhet

$$
R_1(-\beta) = R_1(\beta) \qquad R_2(-\beta) = -R_2(\beta) \qquad R_2(0) = 0 \cdot
$$

Detta system (29) ger oss två par värden

$$
\beta_1, \alpha_1 \text{ och } \beta_2, \alpha_2,
$$

hvilka hafva egenskapen

$$
\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -1.
$$

Vid uppställandet af detta system äro följande utvecklingar nödvändiga. Jag skrifver

$$
f(x) = G(x)\frac{1}{\sigma(x)} \qquad\qquad G(x) = -\frac{\sigma(x-\alpha)}{\sigma(\alpha)}^{\left(\beta + \frac{\sigma'(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right)x} .
$$

Emedan

$$
\frac{1}{\sigma(x)} = \frac{1}{x} + B_1 x^3 + B_2 x^5 + B_3 x^7 + \cdots,
$$

der

$$
B_1 = -\frac{A_1}{4} \quad B_2 = -\frac{A_2}{6} \quad B_\varrho = -\frac{1}{2\varrho+2}\left[A_\varrho + \sum_{\tau=1}^{\tau=\varrho-2} A_{\varrho-\tau-1} B_\tau\right]
$$

$$
\varrho > 2
$$

och

$$
G(x) = G(0) + \frac{G'(0)}{\underline{|1}} x + \frac{G''(0)}{\underline{|2}} x^2 + \cdots,
$$

der

$$
\begin{aligned}
G(0) &= 1 \\
G'(0) &= \beta \\
G''(0) &= \beta^2 - p(\alpha) \\
G'''(0) &= \beta^3 - 3\beta\, p(\alpha) + p'(\alpha) \\
G''''(0) &= \beta^4 - 6\beta^2\, p(\alpha) - 3p^2(\alpha) + 4\beta\, p'(\alpha) + \tfrac{1}{2} g_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

erhåller jag

$$f(x) = \frac{1}{x} + \beta + \frac{\beta^2 - p(\alpha)}{\underline{|2}} x + \frac{\beta^3 - 3\beta\, p(\alpha) + p'(\alpha)}{\underline{|3}} x^2 + \frac{G''''(0) + 24\, B_1}{\underline{|4}} x^3 + \cdots.$$

Davos i Mars 1886.

APPLICATIONS

DE LA

THERMODYNAMIQUE

AUX

ACTIONS QUI S'EXERCENT ENTRE LES COURANTS ÉLECTRIQUES.

PAR

P. DUHEM.

Introduction.

L'étude des actions qui s'exercent entre les courants électriques, actions auxquelles sont dûs les phénomènes électrodynamiques et les phénomènes d'induction, n'a cessé d'occuper une place importante dans le domaine de la Physiqe théorique depuis le jour où ces actions ont été mises en évidence. Les résultats de cette étude sont aujourd'hui mis en oeuvre par la Physique appliquée qui en fera sans doute un usage de plus en plus étendu.

Toutefois malgré la place prépondérante qu'occupe cette branche de la Physique, les lois qui la régissent sont loin d'être connues avec une entière certitude. Depuis le jour où Gauss a montré que le problème fondamental de l'Electrodynamique admettait d'autres solutions que celle qu' Ampère avait proposée, d'innombrales travaux, destinés à constituer la théorie des courants électriques, se sont succédés sans relâche. Il suffit de citer les noms des plus célèbres parmi les géomètres qui, après Ampère et Gauss, se sont occupés de cette question, les noms de Grassmann, de F. E. Neumann, de W. Weber, de Riemann, de Maxwell, de Carl Neumann, d'Helmholtz et de Clausius, pour faire comprendre la difficulté du problème et la puissance des tentatives qui ont été faites pour le résoudre.

Les théories qui ont été présentées conduisent souvent à des résultats différents; elles ont provoqué, entre les géomètres, des débats que l'expérience semble impuissante à clore et qui sont encore pendants. Aussi ne chercherons nous à faire ici ni l'exposé des solutions proposées, ni l'histoire des discussions auxquelles elles ont donné lieu.

Les principes adoptes par les auteurs de ces solutions sont assez variés. Ampère a admis le principe de l'égalité de l'action et de la réaction pour deux éléments de courant; M. Helmholtz a admis que les actions mutuelles de deux éléments de courant dépendaient d'un Potentiel; Gauss, W. Weber, Riemann, M. Clausius, ont cherché à expliquer les phénomènes électrodynamiques par des actions que les charges électriques exerceraient les unes sur les autres et qui dépendraient de la vitesse avec laquelle se meuvent ces charges; enfin Maxwell, rejetant l'hypothèse des actions à distance, a tenté de relier les phénomènes électriques aux propriétés du milieu éthéré. Mais il ne semble pas qu'on ait songé jusqu' ici à faire usage des principes de la Thermodynamique pour établir les lois fondamentales de l'Electrodynamique.

Jusqu' ici, il a été fait une seule application des principes de la Thermodynamique aux actions qui s'exercent entre les courants. Cette application a été faite presque en même temps par M. Helmholtz [1]) et par Sir W. Thomson [2]). Elle a pour but de relier les lois de l'induction aux lois des forces électrodynamiques. Grâce à son importance, elle est reproduite aujourd'hui dans tous les traités de Physique, en sorte qu'il est inutile de l'exposer ici. Nous ferons seulement remarquer que cette application des principes de la Thermodynamique est limitée par M. Helmholtz et par Sir W. Thomson aux phénomènes d'induction produits par le mouvement des conducteurs, les phénomènes d'induction dûs aux variations d'intensité des courants étant entièrement laissés de côté; depuis, aucune tentative n'a été faite pour combler cette lacune, non plus que pour acccroître la rigueur des raisonnements proposés par M. Helmholtz et par Sir W. Thomson.

Dans le présent travail, nous nous proposons de déterminer aussi complètement qu'on peut le faire dans l'état actuel de la Physique les lois fondamentales des phénomènes électrodynamiques, en prenant pour point de départ les Principes de la Thermodynamique, et en invoquant seulement des hypothèses adoptées par tous les auteurs qui se sont occupés de ces questions.

La méthode que nous suivrons est celle dont nous avons déjà fait usage pour résondre quelques unes des difficultés que présente l'étude de l'électricité statique et des courants électriques [3]). Nous commencerons par rappeler brièvement cette méthode, en insistant sur quelques propositions dont nous aurons à faire usage dans ce qui va suivre.

Les recherches de M. Clausius sur le Principe de Carnot ont conduit à

---

[1]) H. Helmholtz, *Ueber die Erhaltung der Kraft.* Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 23. Juillet 1847. — Berlin, G. Reimer. 1847. Traduit en Français par Pérard. Paris. G. Masson. Réimprimé dans Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen.* Vol. I. p. 12 et seqq.

[2]) W. Thomson. *On the theory of electromagnetic induction.* Rep. of the British Association for 1848, p. 9.

[3]) P. Duhem, *Le Potentiel Thermodynamique et ses Applications. 3:e Partie.* Paris, Hermann, 1886. *Applications de la Thermodynamique aux Phénomènes Thermoélectriques et Pyro-Electriques.* (Annales Scientifiques de l'Ecole normale Sup:e, 3:e Série. Tome II, p. 405, 1885). — *2:e Partie. Phénomènes Pyroélectriques* (Annales Scientifiques de l'Ecole normale Sup:e, 3:e Série, Tome III, p. 263, 1886).

la notion de *Travail non Compensé* engendré dans une modification d'un système.

Aucune modification isothermique concevable ne peut engendrer une quantité négative de travail non compensé, une modification isothermique réversible n'engendre aucun travail non compensé; une modification isothermique non réversible engendre un travail non compensé positif. Par conséquent l'état d'un système est certainement, à une température donnée, un état d'équilibre stable, si toute modification isothermique virtuelle imposée au système à partir de cet état engendre un travail non compensé négatif.

Lorsque les forces extérieures qui agissent sur le système admettent un Potentiel, le Travail non compensé est la variation changée de signe d'une fonction de l'état du système. Si l'on désigne par W le Potentiel des Forces Extérieures, par U l'énergie interne du système, par S son entropie, par T la température absolue, par E l'équivalent mécanique de la chaleur, la fonction de l'état du système dont la variation changée de signe représente le travail non compensé est la fonction

$$\Omega = E(U - TS) + W.$$

Nous avons proposé de lui donner le nom de *Potentiel Thermodynamique* du système. Cette définition, jointe à la proposition que nous avons démontrée précédemment, entraîne la conséquence suivante: l'état d'un système est certainement un état d'équilibre stable, s'il correspond à un minimum du Potentiel Thermodynamique.

Les phénomènes que peut présenter un système donné, dans des conditions déterminées, sont eux mêmes déterminés si l'on sait calculer la variation que le Potentiel Thermodynamique du système éprouve pour une modification virtuelle quelconque de ce système. La détermination de la forme du Potentiel Thermodynamique s'impose donc comme la première question à résoudre dans l'étude d'un système quelconque.

Considérons en premier lieu un système électrisé sur lequel nous ferons les hypothèses restrictives suivantes:

> Le système est porté, en tous ses points, à la même température; il supporte, en tous les points de sa surface, une pression normale, uniforme et constante, tous les points de ce système sont sans vitesse; enfin les charges électriques qu'il porte sont également sans vitesse.

Le Potentiel Thermodynamique de ce système peut être déterminé au moyen des seules lois expérimentales de Dufay et de Coulomb. La forme à laquelle on parvient pour l'expression de ce Potentiel est la suivante:

$$1) \qquad \Phi = W + \Theta_A q_A + \Theta_B q_B + \cdots\cdots + \Theta_L q_L + E(U - TS) + P\Sigma.$$

Dans cette expression, P est la pression normale, uniforme et constante que supporte le système ; Σ est le volume du système ; E est l'équivalent mécanique de la chaleur ; T est la température absolue ; U et S représentent l'énergie et l'entropie que posséderait le système si tous les corps qui le composent, gardant leur forme, leur volume, leur état physique et chimique, étaient ramenés à l'état neutre ; $A, B \cdots L$ sont des indices qui désignent les divers conducteurs séparément homogènes que renferme le système ; q_K est la quantite d'électricité que porte le conducteur K, enfin W est le Potentiel Electrostatique du système.

Cette dernière quantité est définie de la manière suivante.

Soient dq et dq' deux charges électriques du système ; soit r la distance qui sépare les points où se trouvent ces deux charges ; soit enfin ε une constante telle que la force repulsive F qui s'exerce entre les particules matérielles qui portent ces deux charges soit donnée par la formule

$$F = \varepsilon \frac{dq\, dq'}{r^2}.$$

On a :

$$2) \qquad W = \varepsilon \,\mathrm{S}\, \frac{dq \cdot dq'}{r},$$

le signe S indiquant une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons que l'on peut former avec les charges du système prises deux à deux.

Ces résultats, déduits des lois de Coulomb, embrassent toute l'Electrostatique. Pour pouvoir les appliquer à l'étude des courants, il est nécesaire d'y joindre de nouvelles hypothèses. Voici la première.

Considérons un système dont toutes les parties sont à la même température. Supposons que ce système renferme des conducteurs sur lesquels l'électricité est en équilibre, et d'autres conducteurs traversés par des courants fermés et uniformes. Supposons enfin que dans les modifications isothermiques subies par le système, les courants demeurent constants, et que les conducteurs qu'ils traversent demeurent invariables de forme et de position. Pendant le temps dt, une portion déterminée d'un conducteur est le siège d'une certaine modification, et en même temps elle est traversée par une quantité d'électricité Idt, I étant l'intensité du courant qui parcourt le conducteur. Le travail compensé et le travail non compensé engendrés pendant le temps dt dans cette portion de conducteur sont égaux respectivement au travail compensé et au travail non compensé qui seraient effectués si cette portion du conducteur subissait la même modification et si, en même temps, on déplaçait virtuellement au travers de cette portion du conducteur une charge $dq = Idt$, toutes les autres charges du système demeurant immobiles.

Cette proposition qui est admise implicitement dans toutes les théories relatives aux courants entraine immédiatement une conséquence qui va être le point de départ de ce mémoire.

Le travail non compensé accompli par l'effet d'une modification isothermique d'un système formé de conducteurs immobiles traversés par des courants fermés, uniformes et constants, est égal au signe près à la variation que subit par l'effet de cette modification la quantité Φ définie par l'égalité (1). *Donc le Potentiel Thermodynamique d'un système traversé par des courants fermés et uniformes ne diffère de la quantité Φ que par un terme qui demeure constant lorsque les courants demeurent constants et que les conducteurs demeurent invariables de forme et de position.*

L'hypothèse qui vient d'être indiquée permet de calculer le travail non compensé produit par une certaine modification dans un système composé de conducteurs immobiles traversés par des courants fermés, uniformes et constants. Une autre hypothèse fournit une relation entre l'intensité d'un courant et le travail non compensé engendré dans le conducteur que traverse ce courant. Indiquons comment l'expérience conduit à formuler cette nouvelle hypothèse.

La théorie apprend que lorsqu'un courant traverse un segment de conducteur homogène, dont tous les points sont à la même température, et qui laisse circuler l'électricité sans éprouver d'électrolyse, aucun travail compensé n'est engendré dans ce conducteur; tout la chaleur dégagée dans ce conducteur provient donc du travail non compensé qui y est engendré. Or, la loi expérimentale de Joule nous apprend que la quantité de chaleur dégagée dans un semblable conducteur pendant le temps dt a pour valeur ARI^2dt, A étant l'équivalent calorifique du travail, R la résistance du conducteur, et I l'intensité du courant. Par conséquent, le travail non compensé effectué pendent le temps dt dans un conducteur homogène, dont tous les points sont à la même température, et qui ne subit par d'électrolyse, a pour valeur RI^2dt.

Supposons que les deux bornes M et M' d'une pile électrique soient formées d'un même métal. Soient V et V' les valeurs de la fonction potentielle à ces deux bornes lorsque le circuit est ouvert. La théorie montre que la quantité:

$$\mathcal{E} = \varepsilon(V - V')$$

a une valeur telle que le produit $\mathcal{E}dq$ représente le travail non compensé engendré dans la pile lorsqu'une charge électrique dq parcourt le circuit supposé fermé. Cette quantité $\mathcal{E}$ peut être mesurée. D'autre part, si l'on désigne par R la résistance du circuit fermé et par I l'intensité du courant qui le traverse, l'expérience montre que l'on a :

$$\mathcal{E} = RI,$$

et par conséquent

$$\mathcal{E}Idt = RI^2dt.$$

Or le premier membre est le travail non compensé effectué dans le système pendant le temps dt. On voit donc que pour un conducteur hétérogène renfermant des électrolytes comme pour un conducteur homogène non électrolysable, le travail non compensé effectué pendant un temps dt a pour valeur RI^2dt.

L'étude de la force électromotrice d'une pile thermoélectrique en circuit ouvert et en circuit fermé conduit de la même manière à étendre cette proposition à un conducteur dont les points ne sont pas tous à la même température.

On voit donc que l'on peut remplacer les faits d'expérience que nous venons d'invoquer par une proposition unique susceptible de s'énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'un système est formé de conducteurs immobiles, traversés par des courants fermés, uniformes et constants, le travail non compensé produit pendant un élément de temps dans un segment de conducteur appartenant au système est égal au produit de cet élément de temps par la résistance du segment de conducteur et par le carré de l'intensité du courant.

On peut regarder cette proposition comme l'extension de la loi de JOULE aux conducteurs hétérogènes, électrolysables et dont tous les points ne sont pas à la même température.

Ce qui précède suffit à faire connaître les Principes qui vont nous servir dans l'étude des Actions mutuelles des courants électriques, étude que nous allons maintenant aborder. Dans l'étude des *forces électrodynamiques,* que nous envisagerons tout d'abord dans ce Mémoire, nous n'aurons pas à faire usage de la proposition que l'on obtient en généralisant la loi de JOULE. Elle nous sera seulement utile lorsque nous étudierons ultérieurement les phénomènes d'Induction.

I. PARTIE.

Actions Electrodynamiques des Courants Fermés et Uniformes.

§ 1.

Potentiel Electrodynamique d'un Système de Courants fermés et uniformes.

Considérons un système qui renferme des conducteurs fermés traversés par des courants uniformes. Le Potentiel Thermodynamique d'un semblable système peut s'écrire

$$\text{3)} \qquad \Phi = W + \Theta_A q_A + \Theta_B q_B + \cdots + \Theta_L q_L + E(U - TS) + P\Sigma + \Phi',$$

les diverses lettres qui figurent dans cette égalité ayant la même signification que dans l'égalité (1). D'après ce qui a été dit dans l'Introduction, la quantite Φ' demeure constante si les divers conducteurs qui composent le système demeurent immobiles et si les courants qui traversent ces conducteurs demeurent constants.

Parmi les paramètres dont peut dépendre la quantité Φ' se trouvent les intensités des divers courants et leurs dérivées de tous les ordres par rapport au temps, les coordonnées des divers points des conducteurs et leurs dérivées de tous les ordres par rapport au temps. Il n'est nullement évident à priori que les dérivées par rapport au temps des intensités et des coordonnées ne figurent pas dans l'expression de Φ'; en particulier, les travaux électrodynamiques de Gauss, de W. Weber, de Riemann et de M. Clausius ont assez accoutumé les physiciens à la considération de Potentiels qui renferment, à titre de paramètres définissant l'état d'un système, les vitesse de ses divers points, pour que l'introduction, dans l'expression de Φ', de termes dépendant des vitesses des divers points du système ne puisse sembler paradoxale. Toutefois, comme les autres termes qui figurent dans l'expression de Φ ne renferment aucune dérivée par rapport au temps, on est porté à croire qu'il en est de même de

Φ'; comme nous le verrons, les conséquences de cette hypothèse paraissent d'accord avec tous les faits d'expérience. Nous admettrons donc, au moins comme une approximation suffisante dans l'état actuel de la Physique, l'hypothèse suivante:

La quantité Φ' ne dépend pas des dérivées par rapport au temps des coordonnées des divers points matériels du système, ni des dérivées par rapport au temps des intensités des courants qui traversent le système.

Cette hypothèse entraine une première proposition fondamentale sur la nature de la quantité Φ'.

Parmi les paramètres qui définissent l'état du système se trouvent non seulement la forme et la position des conducteurs qui le composent, non seulement les intensités des courants qui traversent ces conducteurs, mais encore l'état physique et chimique des conducteurs et les charges d'électricité libre qu'ils portent. L'hypothèse précédente entraine cette conséquence:

La quantité Φ' dépend uniquement de la forme et de la position des conducteurs qui composent le système et des intensités des courants qui les traversent.

Soient en effet $\alpha, \beta, \cdots \lambda$, les paramètres qui, joints à la forme et à la position des conducteurs, aux intensités des courants qui les traversent, achèvent de déterminer l'état du système. D'après ce qui a été vu dans l'introduction, la quantité Φ' ne doit pas varier si les paramètres $\alpha, \beta, \cdots \lambda$, varient seuls, en sorte que l'on doit avoir:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \Phi'}{\partial \beta} d\beta + \cdots + \frac{\partial \Phi'}{\partial \lambda} d\lambda = 0$$

quelles que soient les valeurs des variables dont dépend l'état du système, et quelles que soient les valeurs de $d\alpha, d\beta, \cdots d\lambda$. On doit donc avoir, quelles que soient les valeurs des variables dont dépend l'état du système,

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \beta} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \lambda} = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Cette démonstration ne serait plus valable si la fonction Φ' dépendait des dérivées par rapport au temps des coordonnées et des intensités. On ne pourrait plus dire en effet que l'égalité:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \Phi'}{\partial \beta} d\beta + \cdots + \frac{\partial \Phi'}{\partial \lambda} d\lambda = 0$$

a lieu quelles que soient les valeurs des variables dont dépend l'état du système; elle a seulement lieu lorsque les dérivées par rapport au temps des coordonnées et des intensités sont supposées égales à zéro.

La détermination de la quantité Φ' ne saurait être poussée plus avant si l'on n'invoquait l'hypothèse suivante:

La quantité Φ' est de la forme

$$\Phi' = \mathrm{S}\, \varphi \, ds\, ds', \tag{4}$$

ds et ds' étant deux éléments du même conducteur ou de conducteurs différents, et φ étant une quantité qui dépend de la position mutuelle des éléments ds et ds' et des intensités I et I' des courants qui circulent dans ces deux éléments. Le signe S indique une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons distinctes que l'on peut former avec les éléments des divers conducteurs du système pris deux à deux.

Cette hypothèse, qui ramène la quantité Φ' à être simplement une somme de termes dont chacun ne dépend que de deux éléments est une hypothèse du même ordre que celle par laquelle on ramène, dans toutes les théories, l'étude des actions qui s'exercent entre deux courants fermés et uniformes à l'étude des actions élémentaires qui s'exercent entre deux portions infiniment petites de courants. Elle ne semble donc pas susceptible de soulever de difficultés.

On peut écrire sous une forme plus explicite l'expression de Φ' que donne l'égalité (4). Soient 1, 2, ... n, des indices qui représentent les divers courants dont se compose le système. Soient p et q deux quelconques de ces indices. On peut, au lieu de l'égalité (4), écrire:

$$\Phi' = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=n} \iint \varphi \, ds_p \, ds'_p + \sum_{pq} \iint \varphi \, ds_p \, ds_q. \tag{4bis}$$

Dans le premier terme, les deux éléments ds_p et ds'_p appartiennent au même conducteur p; les deux intégrales sont des intégrales curvilignes étendues au circuit p tout entier. Dans le second terme, l'élément ds_p appartient au circuit p et l'élément ds_q à un autre circuit q; l'une des intégrales s'étend au circuit p et l'autre au circuit q; enfin le signe $\sum_{pq}$ indique une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons distinctes que l'on peut former en prenant deux à deux les divers circuits du système.

Nous donnerons à la quantité Φ' le nom de *Potentiel Electrodynamique du système*; l'intégrale double:

$$\iint \varphi \, ds_p \, ds_q$$

sera le *Potentiel Electrodynamique Mutuel des deux circuits p et q.* La quantité:

$$\frac{1}{2} \iint \varphi \, ds_p \, ds'_q$$

sera le *Potentiel Electrodynamique du circuit p sur lui même.*

Nous allons chercher à déterminer la forme de la quantité φ.

Les intensités des courants sont affectées de signe. L'intensité du courant qui traverse l'élément ds est comptée positivement lorsque le courant marche dans le sens où l'arc s est compté; cette intensité est comptée négativement si le courant marche en sens contraire. Moyennant ce choix de signe, on peut démontrer le théorème suivant:

La quantité φ est proportionnelle au produit des intensités I_p et I_q des courants qui traversent les éléments ds_p et ds_q.

Mettons en évidence les intensités I_p, I_q, qui figurent dans φ en écrivant cette quantité $\varphi(I_p, I_q)$. Le Potentiel Electrodynamique mutuel des deux circuits p et q aura pour valeur:

$$\iint \varphi(I_p, I_q) \, ds_p \, ds_q.$$

Supposons que l'intensité I_p du courant que traverse le circuit p soit égale à la somme de deux autres intensités I'_p et I''_p. On pourra remplacer le circuit p traversé par le courant d'intensité I_p par deux circuits infiniment voisins de celui là, traversés l'un par un courant d'intensité I'_p, l'autre par un courant d'intensité I''_p. Cette substitution ne devra pas altérer l'expression de la quantite Φ'. Or, tandis qu'avant cette substitution Φ' renfermait un seul terme dépendant à la fois de la forme et de la position des deux circuit p et q, à savoir le terme:

$$\iint \varphi(I'_p + I''_p, I_q) \, ds_p \, ds_q,$$

après cette substitution, la quantité Φ' renferme deux termes dépendent à la fois de la forme et de la position des deux circuits p et q; ce sont les termes:

$$\int\int \varphi\,(I'_p, I_q)\,ds_p\,ds_q$$

et

$$\int\int \varphi\,(I''_p, I_q)\,ds_p\,ds_q.$$

On doit donc avoir:

$$\int\int \varphi\,(I'_p + I''_p, I_q)\,ds_p\,ds_q = \int\int \varphi\,(I'_p, I_q)\,ds_p\,ds_q + \int\int \varphi\,(I''_p, I_q)\,ds_p\,ds_q,$$

et cela quelles que soient la forme et la position des deux circuits p et q auxquels s'étendent les intégrations. Si donc on pose:

$$\varphi\,(I'_p + I''_p, I_q) - \varphi\,(I'_p, I_q) - \varphi\,(I''_p, I_q) = \omega,$$

l'intégrale:

$$\int\int \omega\,ds_p\,ds_q$$

étendue à deux circuits fermés quelconques sera égale à 0.

Mais puisque le système ne renferme jamais que des circuits fermés parcourus par des courants uniformes, il est évident que l'on peut, sans altérer aucunement l'expression du Potentiel Thermodynamique, ajouter à la quantité φ ou en retrancher une quantité jouissant de la propréte dont, d'après ce qui précède, jouit la quantité ω. On peut donc écrire:

$$\varphi\,(I'_p + I''_p, I_q) = \varphi\,(I'_p, I_q) + \varphi\,(I''_p, I_q).$$

La quantité φ est donc proportionnelle à I_p.

On peut démontrer d'une manière analogue qu'elle est proportionelle à I_q.

La quantité φ est donc, comme nous l'avions énoncé, proportionnelle au produit $I_p\,I_q$; on peut par conséquent écrire:

$$\varphi\,ds_p\,ds_q = I_p\,I_q\,\psi\,ds_p\,ds_q, \tag{5}$$

la quantité ψ dépendant uniquement de la position mutuelle des deux éléments ds_p, ds_q.

La situation mutuelle de deux éléments de conducteur, ds et ds', est complètement déterminée si l'on se donne la distance r d'un point M de l'élément ds à un point M' de l'élément ds', l'angle θ que la direction de l'élément ds fait avec la direction MM', l'angle θ' que la direction de l'élément ds' fait avec la même direction MM', enfin l'angle ω que font entre elles les directions des deux éléments ds et ds'.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du point M, x', y', z' les coordonnées du point M'. Nous aurons:

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Les cosinus des angles que la direction MM' fait avec les trois axes de coordonnées OX, OY, OZ, ont pour valeur:

$$\frac{x' - x}{r}, \quad \frac{y' - y}{r}, \quad \frac{z' - z}{r}.$$

Les cosinus des angles que la direction de l'élément ds fait avec les trois axes de coordonnées OX, OY, OZ, ont pour valeur:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Enfin les cosinus des angles que la direction de l'élément ds' fait avec les trois axes de coordonnées OX, OY, OZ, ont pour valeur:

$$\frac{dx'}{ds'}, \quad \frac{dy'}{ds'}, \quad \frac{dz'}{ds'}.$$

De là il résulte que l'on a:

$$6) \qquad \left\{ \begin{aligned} Cos\, \theta &= \frac{x' - x}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y' - y}{r} \frac{dy}{ds} + \frac{z' - z}{r} \frac{dz}{ds}, \\ Cos\, \theta' &= \frac{x' - x}{r} \frac{dx'}{ds'} + \frac{y' - y}{r} \frac{dy'}{ds'} + \frac{z' - z}{r} \frac{dz'}{ds'}, \\ Cos\, \omega &= \frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'}. \end{aligned} \right.$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$7) \qquad \left\{ \begin{aligned} Cos\, \theta &= - \frac{\partial r}{\partial s} \\ Cos\, \theta' &= \frac{\partial r}{\partial s'} \\ Cos\, \omega &= - \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} - r \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}. \end{aligned} \right.$$

Le demi plan déterminé par l'éléments ds et la droite MM' forme avec le demi plan déterminé par la droite MM' et l'élément ds' un angle ε lié aux angles ω, θ, θ' par la relation

$$\operatorname{Cos}\omega = \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Cos}\theta' + \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\theta' \operatorname{Cos}\varepsilon.$$

Cette relation, jointe aux égalités (7) donne l'égalité:

$$(8) \qquad \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\theta' \operatorname{Cos}\varepsilon = -r \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'}$$

dont nous aurons à faire usage.

Les calculs précédents montrent que la situation mutuelle des deux éléments ds et ds' est fixée par les valeurs des quatre paramètres $r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'}$. La fonction ψ doit donc dépendre uniquement de ces quatre paramètres, en sorte que l'on peut écrire:

$$\psi \, ds \, ds' = F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'}\right) ds \, ds',$$

ou bien, en vertu de l'égalité (5).

$$(9) \qquad \varphi \, ds \, ds' = I I' \, F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'}\right) ds \, ds'.$$

Considérons un élément ds' et un circuit fermé dont fait partie l'élément ds; envisageons l'éxpression

$$I I' \, ds' \int_c F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'}\right) ds,$$

dans laquelle l'intégrale s'étend à tout le circuit auquel appartient l'élément ds.

On peut remarquer en premier lieu que cette intégrale doit nécessairement avoir une valeur finie, afin que le Potentiel mutuel des deux circuit auxquels appartiennent les éléments ds et ds' soit lui même une quantité finie.

En second lieu, si l'on change le sens dans lequel on compte l'arc s sans renverser le courant d'intensité I, comme rien n'est changé à l'état du système, la quantité

$$I I' \, ds' \int F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'}\right) ds$$

doit conserver sa valeur. Or, dans cette operation, I change de signe. L'intégrale

$$\int F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) ds$$

doit donc changer de signe lorsqu'on renverse le sens dans lequel est compté l'arc s.

Appliquons cela en particulier à un contour fermé formé par un segment de ligne parcouru successivement dans un sens et dans l'autre. L'opération précédente ne peut évidemment dans ce cas changer l'intégrale; or elle change son signe; donc l'intégrale est identiquement nulle. Il en résulte immédiatement que *la fonction* $F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right)$ *change de signe si l'on renverse le sens soit de l'élément ds, soit de l'élément ds'.*

Supposons qu'on trace une ligne entre deux points du circuit considéré; on décomposera ainsi le circuit primitif en deux circuits partiels, et il est aisé de voir que l'intégrale

$$\int F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) ds$$

étendue au circuit primitif est la somme des intégrales analogues relatives aux deux circuits partiels supposés décrits l'un et l'autre dans la même sens que le circuit primitif.

En répétant une infinité de fois la décomposition précédente, on remplacera l'intégrale considérée par une somme d'intégrales analogues relatives à des contours infinement petits.

Lorsqu'on passe d'un circuit élémentaire au circuit élémentaire voisin, si l'on suppose que la forme de ces circuits varie d'une manière continue, l'intégrale

$$\int F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) ds$$

devra aussi varier d'une manière continue.

De ces quelques remarques on peut déduire une propriété fondamentale de l'intégrale en question. Si la fonction F était une fonction quelconque, l'intégrale que nous considérons serait en général un infinement petit du même ordre que le contour de l'élément. Nous allons montrer au contraire que *la fonction F est telle que l'intégrale*

$$\int F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) ds,$$

étendue à un contour infiniment petit, soit un infiniment petit du second ordre par rapport à la longueur de ce contour, c'est à dire un infiniment petit du même ordre que l'aire d'une surface terminée à ce contour.

Supposons en effet que pour un certain contour infiniment petit cette intégrale ait un signe déterminé et soit une quantité infiniment petite d'un ordre déterminé; il sera alors possible, autour de l'élément considéré, de tracer une aire finie telle que la même intégrale, étendue au contour de chacun des éléments de cette aire, ait le même signe et soit du même ordre infinitésimal que l'intégrale étendue au premier contour. Dès lors, si toutes ces intégrales n'étaient pas des infiniment petits au plus du même ordre que les aires des éléments auxquels elles se rapportent, leur somme serait infinie, ce qui n'est pas possible, puisqu'elle doit représenter l'intégrale

$$\int F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) ds$$

étendue au contour de l'aire limitée que nous avons tracée[1]).

Le résultat précédent fournit la forme générale de la fonction F au moyen d'un raisonnement déjà employé par M. Bertrand[2]) dans l'étude d'une question analogue.

Les relations:

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{x-x'}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz}{ds},$$

$$\frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = \frac{1}{r}\left(\frac{x'-x}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz}{ds}\right)\left(\frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}\right)$$
$$- \frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right),$$

permettent de donner à l'intégrale

---

[1]) Voir la note à la fin.

[2]) J. Bertrand, *Sur la Démonstration de la Formule qui représente l'Action Elémentaire de deux courants.* Comptes Rendus. T. LXXV, p. 733. 1872.

$$\int F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) ds$$

la forme

$$\int G\left(x, y, z, x', y'\, z', \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}\right) ds.$$

Cette intégrale doit être un infiniment petit du second ordre alorsque

$$\int ds$$

est un infiniment petit du premier ordre.

Les quantités $x', y', z', \frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$, demeurent constantes dans l'intégration; les quantités x, y, z, varient infiniment peu. Si on les remplace par les coordonnées constantes ξ, η, ζ, de l'un des points du contour, l'intégrale devra être encore du second ordre. Mais alors les valeurs de l'intégrale précédente pour deux contours semblables ayant le point ξ, η, ζ, pour centre de similitude sont entre elles comme les dimensions linéaires des deux contours, et leur valeur ne peut être infiniment petite du second ordre, quand ces dimensions sont du premier ordre, que si elle est toujours rigoureusement nulle.

L'expression

$$G\left(\xi, \eta, \zeta, x', y', z', \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}\right) ds,$$

dans laquelle $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sont seuls variables doit être une différentielle totale; il faut et il suffit pour cela que l'on ait:

$$G = P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds},$$

P, Q, R, étant indépendants de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

G étant homogène et linéaire en $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, doit l'être aussi en $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$; on doit donc avoir:

$$G = \frac{dx'}{ds'}\left(P_1\frac{dx}{ds} + Q_1\frac{dy}{ds} + R_1\frac{dz}{ds}\right)$$
$$+ \frac{dy'}{ds'}\left(P_2\frac{dx}{ds} + Q_2\frac{dy}{ds} + R_2\frac{dz}{ds}\right)$$
$$+ \frac{dz'}{ds'}\left(P_3\frac{dx}{ds} + Q_3\frac{dy}{ds} + R_3\frac{dz}{ds}\right)$$

$P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3$ dépendant des coordonnées x, y, z, x', y', z', des éléments, et nullement des directions des éléments.

La fonction G ne doit dépendre de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, que par les quantités $\frac{\partial r}{\partial s}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$. La fonction G est linéaire et homogène en $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; il en est de même de $\frac{\partial r}{\partial s}$ et de $\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$. La fonction G doit donc être linéaire et homogène en $\frac{\partial r}{\partial s}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$. On verrait de même qu'elle doit être linéaire et homogène en $\frac{\partial r}{\partial s}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$. On doit donc avoir

$$G = A\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + B\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

les quantités A et B étant indépendantes de $\frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$.

Mais, ces quantités une fois écartées, une seul variable subsiste dont G puisse dépendre; c'est la variable r; A et B sont donc de simples fonctions de r; si nous posons

$$A = f(r),$$
$$B = g(r).$$

nous aurons finalement

$$F\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right) = f(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + g(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

et, d'après l'égalité (9),

$$(10) \qquad \varphi\, ds\, ds' = I I'\left[f(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + g(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right] ds\, ds'.$$

Transportons ce résultat dans l'expression de Φ' donnée par l'égalité (4_{bis}) Φ' prend la forme suivante:

$$
11) \qquad \Phi' = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=n} I_p^2 \iint \left[f(r)\frac{\partial r}{\partial s_p}\frac{\partial r}{\partial s'_p} + g(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s_p\,\partial s'_p}\right] ds_p\, ds'_p
$$

$$
+ \sum_{pq} I_p\, I_q \iint \left[f(r)\frac{\partial r}{\partial s_p}\frac{\partial r}{\partial s_q} + g(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_q}\right] ds_p\, ds_q,
$$

les sommations et intégrations ayant le même sens que dans l'égalité (4_{bis}). Posons:

$$
12) \qquad L_p = \frac{1}{2}\iint \left[f(r)\frac{\partial r}{\partial s_p}\frac{\partial r}{\partial s'_p} + g(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s_p\,\partial s'_p}\right] ds_p\, ds'_p,
$$

les deux intégrations s'étendant au même circuit p, et

$$
13) \qquad M_{pq} = \iint \left[f(r)\frac{\partial r}{\partial s_p}\frac{\partial s}{\partial s_q} + g(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s_p\,\partial s_q}\right] ds_p\, ds_q,
$$

les deux intégrations s'étendant l'une au circuit p, l'autre au circuit q, et nous pourrons écrire:

$$
14) \qquad \Phi' = \sum_{p=1}^{p=n} L_p I_p^2 + \sum_{pq} M_{pq}\, I_p\, I_q.
$$

La quantité L_p, qui dépend uniquement de la forme du circuit p, se nomme *le coefficient d'induction propre du circuit* p; le coefficient M_{pq}, qui dépend de la forme du circuit p et de la forme du circuit q, se nomme *le coefficient d'induction réciproque des deux circuits* p *et* q; l'étude de l'induction fournira bientôt la raison de ces dénominations.

Ces coefficients sont susceptibles d'être mis sous diverses formes que nous allons indiquer.

Envisageons d'une manière générale l'intégrale double

$$
\Pi = \iint \left[f(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + g(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right] ds\, ds'
$$

dans laquelle les deux intégrations s'étendent soit au même contour fermé, soit à deux contours fermés distincts.

Soit R une fonction continue de la variable r. On a évidemment:

$$
\iint \frac{\partial^2 R}{\partial s\,\partial s'}\, ds\, ds' = 0.
$$

On peut donc, sans modifier la valeur de l'intégrale Π, ajouter à l'élément sous le signe $\iint$ une quantité de la forme $\frac{\partial^2 R}{\partial s\, \partial s'}\, ds\, ds'$. Cette remarque permet de modifier la forme de l'intégrale H.

L'intégrale H peut s'écrire de la manière suivante:

$$H = \iint \left[f(r) - \frac{dg(r)}{dr} \right] \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'}\, ds\, ds'$$

$$+ \iint \left[g(r) \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{dg(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \right] ds\, ds'.$$

Si l'on pose:

$$g(r) = \frac{dG(r)}{dr},$$

le second terme peut s'écrire

$$\iint \frac{\partial^2 G(r)}{\partial s\, \partial s'}\, ds\, ds'.$$

Il est donc identiquement nul. On peut alors, en posant

$$\Theta(r) = \frac{dg(r)}{dr} - f(r)$$

écrire:

$$H = - \iint \Theta(r) \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'}\, ds\, ds',$$

ou bien, en vertu des égalités (7),

15) $$H = \iint \Theta(r) \cos \varepsilon \cos \varepsilon'\, ds\, ds'.$$

Considérons une fontion de r, $H(r)$, définie par la relation

16) $$r \frac{dH(r)}{dr} = f(r) - \frac{dg(r)}{dr} = - \Theta(r)$$

et posons

$$g(r) + r\, H(r) = \frac{dF(r)}{dr}.$$

Nous aurons alors

$$f(r) + H(r) = \frac{d^2 F(r)}{dr^2},$$

et nous pourrons écrire:

$$H = -\iint H(r)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right) ds\,ds'$$
$$+\iint\left[\frac{d^2F(r)}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{dF(r)}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right] ds\,ds'.$$

Le second terme peut s'écrire

$$\iint \frac{\partial^2 F(r)}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds'$$

et est identiquement nul. On peut donc écrire:

$$H = -\iint H(r)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + r\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right) ds\,ds',$$

ou bien, en vertu de l'une des égalités (7),

$$17) \qquad H = \iint H(r)\cos\omega\,ds\,ds'.$$

Les formules (15) et (17) sont équivalentes. On obtiendra une troisième expression de H, équivalente aux deux précédentes, en multipliant les deux membres de l'égalité (15) par $\frac{1-K}{2}$, K étant une constante quelconque, les deux membres de l'égalité (17) par $\frac{1+K}{2}$, et ajoutant ces deux égalités membre à membre. On trouve ainsi:

$$18) \qquad H = \iint\left[\frac{1-K}{2}\,\Theta(r)\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+K}{2}\,H(r)\cos\omega\right] ds\,ds'.$$

A ces trois formes de l'intégrale H correspondent trois formes de la quantité Φ'. Il est trop aisé d'obtenir ces trois formes pour qu'il soit utile de les transcrire ici.

§ II.

Détermination des Fonctions $\Theta(r)$ et $H(r)$.

Il s'agit maintenant de déterminer les deux fontions $\Theta(r)$ et $H(r)$, ou plutôt l'une d'entres elles, car elles sont liées l'une à l'autre par la relation

$$16) \qquad \Theta(r) + r\frac{dH(r)}{dr} = 0.$$

Nous allons chercher par exemple à déterminer $\Theta(r)$.

Ampère, en cherchant à déterminer la fonction inconnue de la distance qui figure dans la formule de l'action mutuelle de deux éléments de courant, Gauss, en cherchant à déterminer la loi suivant laquelle les actions des particules magnétiques varient avec la distance, ont supposé à priori que les fonctions inconnues dont ils s'occupaient étaient de la forme $\frac{1}{r^n}$. Ils ont demandé ensuite à l'expérience la détermination de la valeur de n. Les divers géomètres qui, depuis, ont traité ces questions, ont montré que l'expérience pouvait déterminer ces fonctions inconnues sans qu'il soit nécessaire de faire à priori aucune hypothèse sur leur forme.

Il en est de même de la fonction $\Theta(r)$. Les expériences qui permettent de déterminer la forme de la fonction de la distance qui figure dans la loi d'Ampère, permettent aussi, comme nous le verrons plus loin, de déterminer la forme de la fonction $\Theta(r)$ sans qu'il soit nécessaire de faire à priori aucune hypothèse sur cette forme. Mais, ce que nous voulons seulement démontrer pour le moment, c'est qu'on peut arriver à la connaissance de la fonction $\Theta(r)$ par une voie à priori, à la seule condition de faire sur la forme de cette fonction une hypothèse qui est analogue à celle qu' Ampère et Gauss ont faite sur les fonctions qu'ils avaient à déterminer, et qui est même un peu plus générale que cette dernière.

Voici en quoi consiste cette hypothèse.

Nous admettrons que $\Theta(r)$ soit de la forme suivante:

$$\Theta(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots \cdots + a_n r^n + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \cdots\cdots + \frac{A_p}{r^p}. \tag{19}$$

Considérons un circuit circulaire de rayon R parcouru par un courant d'intensité I. Le Potentiel Thermodynamique du système formé par ce courant aura pour valeur:

$$\Phi = \Omega + \Phi',$$

Ω étant une quantité indépendante de l'intensité I, et Φ' étant le Potentiel Electrodynamique du courant sur lui même.

D'après l'expression de l'intégrale Π donnée par l'égalité (15), on aura

$$\Phi' = \frac{1}{2} I^2 \iint \Theta(r) \cos\theta \cos\theta' \, ds \, ds',$$

l'intégrale double s'étendant deux fois au cercle considéré.

En quelque point M (fig. 1), que soit situé l'élément ds, l'intégrale

$$\int \Theta(r) \cos\theta \cos\theta' \, ds'$$

a la même valeur. On peut donc écrire:

$$\Phi' = \pi R I^2 \int \Theta(r) \cos\theta \cos\theta' \, ds'$$

r étant la distance d'un point fixe M du cercle à une point M' de élément variable ds'; θ l'angle que la tangente MT menée en M au cercle dans le sens des arcs croissants fait avec la droite MM'; θ' l'angle que la tangente $M'T'$ menée en M' au cercle dans le sens des arcs croissants fait avec la même direction MM', et l'intégrale s'étendant à tous les éléments ds' du cercle.

Choisissons θ comme variable indépendante.

Nous avons évidemment $\theta' = \theta$.

L'angle MOM' a pour valeur 2θ. Nous avons donc:

$$r = MM' = 2R \sin\theta.$$

Enfin, nous avons

$$ds' = 2R d\theta.$$

Lorsque θ varie de o à π, le point M' décrit la circonférence entière.

Nous avons donc:

$$\Phi' = 2\pi R^2 I^2 \int_0^{\pi} \Theta(2R \operatorname{Sin} \theta) \operatorname{Cos}^2\theta \, d\theta$$

$$= 4\pi R^2 I^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta(2R \operatorname{Sin} \theta) \operatorname{Cos}^2\theta \, d\theta.$$

Si l'intensité I du courant augmente de dI, le système sera, pendant la durée de cette augmentation, le siège d'un travail non compensé qui surpassera de

$$-\frac{\partial \Phi'}{\partial I} \, dI$$

le travail non compensé dont il eût été le siège pendant le même temps si I était demeuré constant. Cette quantité doit évidemment être une infiniment petit de l'ordre de dI. La quantité $\frac{\partial \Phi'}{\partial I}$ doit donc avoir une valeur finie. Par conséquent l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta(2R \operatorname{Sin} \theta) \operatorname{Cos}^2\theta \, d\theta$$

doit avoir une valeur finie.

D'après l'expression de Θ donnée par l'égalité (19), cette intégrale a pour valeur:

$$\alpha_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}^2\theta \, d\theta + 2R\,\alpha_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}^2\theta \operatorname{Sin}\theta \, d\theta + 4R^2 \alpha_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}^2\theta \operatorname{Sin}^2\theta \, d\theta + \cdots$$

$$\cdots + 2^n R^n \alpha_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}^2\theta \operatorname{Sin}^n\theta \, d\theta$$

$$+ \frac{A_1}{2R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Cos}^2\theta \, d\theta}{\operatorname{Sin}\theta} + \frac{A_2}{4R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Cos}^2\theta \, d\theta}{\operatorname{Sin}^2\theta} + \cdots + \frac{A_p}{2^p R^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Cos}^2\theta \, d\theta}{\operatorname{Sin}^p\theta}.$$

Les intégrales qui ont pour coefficients les quantités $\alpha_0, \alpha_1\, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, sont toutes des quantités finies. Il en est de même de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Cos}^2\theta}{\operatorname{Sin}\theta} \, d\theta$. Mais les intégrales qui ont pour coefficients $A_2 \cdots A_p$ sont des quantités infiniment grandes d'ordre de plus en élevé, en sorte que leur somme est, à coup sûr, infiniment grande, si l'on n'a pas

$$A_2 = 0, \ A_3 = 0, \cdots A_p = 0.$$

Moyennant ces conditions, l'expression de $\Theta(r)$ donnée par l'égalité (19) devient:

$$\Theta(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \cdots + \alpha_n r^n + \frac{A_1}{r}. \tag{20}$$

Dans un segment de longueur l du conducteur circulaire considéré, la variation dI de l'intensité I engendre un travail non compensé:

$$-8\pi R I l dI \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta(2R \, Sin \, \theta) \, Cos^2\theta \, d\theta.$$

Si l'on suppose que, l restant fixe, R augmente au delà de toute limite, cette expression devra avoir pour limite le travail non compensé engendré par une variation d'intensité dI dans un segment de longueur l d'un conducteur rectiligue indéfini. Cette quantité de travail doit être évidemment de l'ordre $l dI$. Par conséquent, lorsque R croît au delà de toute limite, la quantité

$$R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta(2R \, Sin \, \theta) \, Cos^2\theta \, d\theta,$$

quantité qui peut aussi s'écrire

$$\alpha_0 R \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2\theta \, d\theta + 2\alpha_1 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2\theta \, Sin \, \theta \, d\theta + \cdots + 2^n \alpha_n R^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2\theta \, Sin^n\theta \, d\theta$$

$$+ \frac{A_1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cos^2\theta}{Sin \, \theta} d\theta,$$

doit tendre vers une limite finie, ce qui conduit nécessairement à prendre:

$$\alpha_0 = 0, \ \alpha_1 = 0, \cdots, \alpha_n = 0.$$

En reportant ces résultats dans l'égalité (20), on trouve:

$$\Theta(r) = \frac{A_1}{r}. \tag{21}$$

En résumé, la démonstration précédente consiste à montrer que la fonction $\Theta(r)$, qui est une fonction finie, continue et uniforme pour toutes les valeurs réelles et positives de r, doit tendre vers 0 comme $\frac{1}{r}$ lorsque r croît au delà de toute limite, et devenir infiniment grande au plus de l'orde de $\frac{1}{r}$ lorsque r tend vers 0. Si l'on possédait des renseignements analogues pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de r, la fonction $\Theta(r)$ serait assurément de la forme $\frac{A_1}{r}$. Mais comme on ne peut, par la nature même de la question, posséder de renseignements que pour les valeurs réelles et positives de r, les considérations précédentes ne suffisent pas à elles seules pour déterminer la fonction $\Theta(r)$. Il faut nécessairement y joindre une hypothèse analogue à celle que renferme l'égalité (19).

On pourrait généraliser cette hypothèse, en supposant simplement que $\Theta(r)$ est un polynôme en r:

$$\Theta(r) = Ar^{\mu} + A'r^{\mu'} + A''r^{\mu''} + \cdots + A^{(n)}r^{\mu^{(n)}},$$

μ, μ', μ'', $\mu^{(n)}$, étant des constantes quelconques positives ou négatives. La démonstration précédente montrerait encore que

$$\Theta(r) = \frac{A_1}{r}.$$

L'expérience nous permettra, par la suite, de déterminer la valeur de la constante A_1; nous la trouverons négative. Dès lors, il est plus commode de mettre de suite ce signe en évidence, en posant

$$A_1 = -A,$$

ce qui donne à l'égalité (21) la forme

$$\Theta(r) = -\frac{A}{r}. \tag{21$_{bis}$}$$

La fonction $\Theta(r)$ étant connue, il est facile de déterminer la fonction $H(r)$; en effet, entre ces deux fonctions, on a la relation

$$\Theta(r) + \frac{r\,dH(r)}{dr} = 0 \tag{16}$$

qui devient, en vertu de l'égalité (21_{bis})

$$\frac{dH(r)}{dr} = \frac{A}{r^2},$$

ou bien

$$H(r) = -\frac{A}{r^2} + B,$$

B étant une constante.

Cette constante peut être supprimée sans altérer la valeur de H; en effet, si l'on reporte la valeur de $H(r)$ que nous venons d'obtenir dans l'expression de H donnée par l'égalité (17), on aura

$$H = -A \int\int \frac{\cos \omega}{r}\, ds\, ds' + B \int\int \cos \omega\, ds\, ds'.$$

La quantité $\cos \omega\, ds'$ représente la projection de l'élément ds' sur la direction de l'élément ds. L'intégrale

$$\int \cos \omega\, ds'$$

étendue à tous les éléments ds' d'un contour fermé est donc égale à 0. Le terme qui a B pour coefficient dans l'expression de H étant identiquement nul quelque soit B, on peut poser $B = 0$. On a alors:

$$H(r) = -\frac{A}{r}. \tag{22}$$

Si l'on reporte dans les égalités (15), (17) et (18) les expressions de $\Theta(r)$ et de $H(r)$ données par les égalités (21_{bis}) et (22), on a pour H les trois expressions équivalentes:

$$H = -A \int\int \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r}\, ds\, ds' \tag{23}$$

$$H = -A \int\int \frac{\cos \omega}{r}\, ds\, ds' \tag{24}$$

$$H = -A \int\int \left[\frac{1-K}{2} \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r} + \frac{1+K}{2} \frac{\cos \omega}{r}\right] ds\, ds'. \tag{25}$$

Ces trois expressions de H conduisent à trois expressions du Potentiel Electrodynamique d'un système de conducteurs fermés traversés par des courants uniformes.

En partant de l'expression de H donnée par l'égalité (24), on obtient l'expression du Potentiel Electrodynamique à laquelle F. E. Neumann[1]) est par-

[1]) F. E. Neumann. *Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme.* Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 27. Octobre 1845. Berlin, 1846. p. 8.

venu le premier, en prenant la loi d'AMPÈRE pour point de départ de ses recherches.

Peu de temps après la découverte de F. E. NEUMANN, WEBER[1]) donna au Potentiel Electrodynamique une autre forme; c'est la forme que l'on obtient en faisant usage de l'expression de H donnée par l'égalité (23).

Enfin, en faisant usage de l'expression de H donnée par l'égalité (25), on obtient l'expression du Potentiel Electrodynamique que M. HELMHOLTZ a obtenue[2]) en généralisent les formules de F. E. NEUMANN et de WEBER.

Une remarque est nécessaire. La démonstration par laquelle nous venons d'arriver à la détermination des fonctions $\Theta(r)$ et $H(r)$ suppose les conducteurs réduits à de simples lignes. Dans la réalité, les conducteurs sont toujours constitués par des fils d'une certaine épaisseur. La démonstration précédente ne sera donc valable que si la variable r est assujettie à prendre des valeurs incomparablement plus grandes que les dimensions auxquelles un conducteur matériel peut être supposé reduit. Elle ne peut rien nous faire prévoir relativement aux valeurs que prennent ces fonctions pour les très petites valeurs de r.

---

[1]) W. WEBER. *Elektrodynamische Maassbestimmungen.* Leipzig, 1846.

[2]) H. HELMHOLTZ. *Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern.* Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V. p. 86, 1870. — H. HELMHOLTZ. Wissenschaftliche Abhandlungen. T. I, p. 539. — H. HELMHOLTZ, *Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Erste Abhandlung. — Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper.* BORCHARDT's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. LXXII, p. 76. — Wissenschaftliche Abhandlungen. T. I, p. 567.

§ III.

Actions Electrodynamiques entre deux courants fermés et uniformes.

Au lieu de chercher à priori la détermination des fonctions $\Theta(r)$ et $H(r)$, méthode de recherche qui suppose tout d'abord certaines hypothèses faites sur la forme de ces fonctions, on peut laisser provisoirement cette forme dans une complète indétermination que les résultats théoriques auxquels nous allons maintenant parvenir, joints à des faits d'expérience, permettront ultérieurement de lever.

En vertu des égalités (1) et (14), le Potentiel Thermodynamique d'un système de courants fermés et uniformes peut s'écrire

$$(26)\qquad \begin{aligned} \Phi = W + \Theta_A\, q_A + \Theta_B\, q_B + \cdots + \Theta_L\, q_L + E(U - TS) + P\Sigma \\ + \sum_{p=1}^{p=n} L_p\, I_p^2 + \sum_{pq} M_{pq}\, I_p\, I_q. \end{aligned}$$

Dans cette égalité, L_p représente l'une des trois expressions équivalentes:

$$\frac{1}{2}\int\int H(r)\cos\omega\, ds_p\, ds'_p,$$

$$\frac{1}{2}\int\int \Theta(r)\cos\theta\cos\theta'\, ds_p\, ds'_p,$$

$$\frac{1}{2}\int\int\left[\frac{1+K}{2}\, H(r)\cos\omega + \frac{1-K}{2}\,\Theta(r)\cos\theta\cos\theta'\right] ds_p\, ds'_p,$$

les deux intégrales s'étendant au circuit p; tandis que M_{pq} représente l'une des trois expressions équivalentes:

$$\int\int H(r)\cos\omega\, ds_p\, ds_q,$$

$$\int\int \Theta(r)\cos\theta\cos\theta'\, ds_p\, ds_q,$$

$$\int\int\left[\frac{1+K}{2}\, H(r)\cos\omega + \frac{1-K}{2}\,\Theta(r)\cos\theta\cos\theta'\right] ds_p\, ds_q,$$

l'une des intégrales s'étendant, dans chacune de ces expressions, au circuit p, et l'autre au circuit q.

Supposons que les conducteurs traversés par les courants soient des fils flexibles, et extensibles, susceptibles de se déformer de toutes les manière possibles sans rompre leur continuité et cherchons quelles forces il faudra adjoindre à celles qui agissent déjà sur le système pour rendre impossible toute déformation de ces fils.

Voici d'abord un lemme qui va nous servir dans cette détermination.

Concevons qu'aux divers points des conducteurs on applique certaines forces extérieures, sans rien changer à l'état du système; *si dans une déformation virtuelle la quantité* Φ, *déterminée par l'égalité* (26), *varie de* $d\Phi$, *tandis que les forces ajoutées effectuent un travail* $d\mathcal{T}$, *le travail non compensé engendré dans le système durant cette modification a pour valeur*

$$d\tau = - d\Phi + d\mathcal{T}. \tag{27}$$

Cette proposition est aisée à démontrer; soient en effet U l'énergie et S l'entropie du système avant l'addition des nouvelles forces. On a d'après la définition même du Potentiel Thermodynamique,

$$\Phi = E(U - TS) + P\Sigma.$$

L'addition des nouvelles forces, étant supposée ne modifier en rien l'état du système, ne change pas la valeur de U et de S. Si l'on désigne par $d\mathcal{T}'$ le travail des forces extérieures qui agissent sur le système pendant la modification considérée, on a

$$d\tau = - dE(U - TS) + d\mathcal{T}'.$$

Mais les forces extérieures qui agissent sur le système pendant la modification considérée sont, d'une part, la pression normale uniforme et constante P, d'autre part les forces ajoutées. On a donc:

$$d\mathcal{T}' = - Pd\Sigma + d\mathcal{T},$$

et, par conséquent

$$d\tau = - dE(U - TS) - Pd\Sigma + d\mathcal{T},$$

ou bien

$$d\tau = - d\Phi + d\mathcal{T}.$$

ce qu'on voulait démontrer.

Cela étant, supposons que l'on déforme infiniment peu les divers conducteurs qui constituent le système, en maintenant constantes les intensités $I_1, I_2 \cdots I_n$ des courants qui les traversent.

Si parmi les conducteurs que traversent les courants il en est qui peuvent donner lieu à des phénomènes d'électrolyse, pendant la durée dt de la déformation, chacun d'eux éprouvera un changement d'état proportionnel en grandeur à la quantité d'électricité qui le traverse pendant le temps dt, mais indépendant des déplacements que subissent les différentes parties du système La quantité $E(U-TS)+P\Sigma$ éprouvera donc une variation indépendante des déplacements que subissent les différentes parties du système. Nous représenterons cette variation par

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[E(U-TS)+P\Sigma\Big]dt.$$

Tous les conducteurs qui constituent le système sont supposés traversés par des courants uniformes, dont l'intensité peut d'ailleurs se réduire à 0 dans certains d'entre eux. Donc chacune des particules matérielles qui constituent le système reçoit pendant l'unité de temps autant d'électricité qu'elle en perd; sa charge est invariable. Dans la somme

$$\Theta_A\, q_A + \Theta_B\, q_B + \cdots + \Theta_L\, q_L,$$

les quantités $q_A, q_B, \cdots q_L$ doivent être regardées comme constantes. Parmi les quantités Θ, celles qui se rapportent à des corps électrolysables peuvent éprouver des variations indépendantes des déplacement subis par les diverses parties du système, mais proportionelles à la durée dt de la modification. La quantité

$$\Theta_A\, q_A + \Theta_B\, q_B + \cdots + \Theta_L\, q_L$$

éprouvera donc une variation indépendante de la grandeur des déplacements que nous représenterons par

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\Theta_A\, q_A + \Theta_B\, q_B + \cdots + \Theta_L\, q_L\Big]dt.$$

En général, lorsqu'on déforme un corps, la déformation entraîne des changements d'état qui peuvent faire varier les quantités Θ et $E(U-TS)+P\Sigma$ relatives à ce corps. Nous supposerons ici que les parties déformables des conducteurs sont formées par une substance fictive pour laquelle Θ et $E(U-TS)+P\Sigma$ ne varient pas par l'effet d'une déformation. C'est ce que nous entendrons en disant que ces portions de conducteur *n'opposent aucune résistance aux déformations.* Nous reviendrons du reste tout à l'heure sur cette hypothèse, destinée à simplifier les raisonnements.

Chacune des particules matérielles qui constituent le système conservant une charge électrique invariable, la variation subie par le Potentiel Electrostatique W pendant la modification considéré est égale, au signe près, au travail dT_1 effectué, en vertu des déformations imposées au système, par les forces qui agissent conformément aux lois de COULOMB entre les particules électrisées du système.

Enfin, par l'effet des modifications imposées au système, les quantitées L_p varient de dL_p, les quantités M_{pq} de dM_{pq}, en sorte que le Potentiel Electrodynamique du système augmente de:

$$\sum_{p=1}^{p=n} I_p^2 dL_p + \sum_{pq} I_p I_q dM_{pq}.$$

On aura alors, en vertu de l'égalité (26)

$$d\Phi = \frac{d}{dt}\Big[E(U - TS) + P\Sigma + \Theta_A q_A + \Theta_B q_B + \cdots + \Theta_L q_L\Big]dt$$
$$+ \sum_{p=1}^{p=n} I_p^2 dL_p + \sum_{pq} I_p I_q dM_{pq} - d\mathcal{T}_1,$$

et, par conséquent, le travail non compensé $d\tau$ effectué dans la modification considérée aura pour valeur, en vertu de l'égalité (27)

$$(28)\quad d\tau = -\frac{d}{dt}\Big[E(U - TS) + P\Sigma + \Theta_A q_A + \Theta_B q_B + \cdots + \Theta_L q_L\Big]dt$$
$$- \sum_{p=1}^{p=n} I_p^2 dL_p - \sum_{pq} I_p I_q dM_{pq} + d\mathcal{T}_1 + d\mathcal{T}.$$

Les termes qui entrent au second membre de cette égalité se rangent en deux catégories bien distinctes. Tandis que le premier terme dépend de la durée du déplacement imposé aux diverses parties du système et ne dépend pas de la grandeur de ce déplacement, les autres termes dépendent uniquement de la grandeur du déplacement et sont indépendants de sa durée. Or, puisqu'il s'agit d'une modification virtuelle, sa possibilité ne saurait dépendre du temps arbitraire pendant lequel on la suppose effectuée. On peut donc supposer ce temps aussi petit que l'on voudra et, pour discuter la possibilité de la déformation, réduire l'égalité précédente à:

$$d\tau = d\mathcal{T} + d\mathcal{T}_1 - \sum_{p=1}^{p=n} I_p^2 dL_p - \sum_{pq} I_p I_q dM_{pq}.$$

Ce résultat, joint aux propriétés du travail non compensé, nous enseigne que les forces adjointes rendront certainement impossible toute déformation des conducteurs, si le travail élémentaire

$$d\mathcal{T} + d\mathcal{T}_1 - \sum_{p=1}^{p=n} I_p^2 \, dL_p - \sum_{pq} I_p \, I_q \, dM_{pq}$$

n'est positif pour aucune déformation virtuelle compatible avec les liaisons du système. Or c'est précisement le résultat auquel conduirait la Mécanique Rationnelle si l'on cherchait, au moyen du Principe des Vitesses Virtuelles, les forces capables de maintenir en équilibre un système identique à celui que nous considérons sollicité, d'une part, par les forces dont les lois de Dufay et de Coulomb donnent la direction et la grandeur, d'autre part par des forces admettant pour Potentiel la quantité

$$\sum_{p=1}^{p=n} I_p^2 \, L_p + \sum_{pq} I_p \, I_q \, M_{pq},$$

c'est à dire le Potentiel Electrodynamique du système.

Ainsi, *dans un système qui renferme des courants linéaires fermés et uniformes, il s'exerce, entre les conducteurs qui portent ces courants, en dehors des actions dont la grandeur est donnée par les lois de Coulomb, d'autres actions dont la grandeur dépend de l'intensité des courants; ces actions admettent pour Potentiel le Potentiel Electrodynamique du système.*

Nous avons supposé, pour parvenir au résultat précédent d'une manière plus rapide, que les conducteurs ne présentaient aucune résistance à la déformation. L'importance de la proposition peut en faire désirer une démonstration exempte de toute restriction. C'est cette démonstation que nous allons maintenant exposer.

Supposons que la déformation virtuelle imposée aux conducteurs fasse varier de

$$\delta \Big[E(U - TS) + P\Sigma \Big]$$

le Potentiel Thermodynamique du système supposé à l'état neutre, et fasse varier les quantités $\Theta_A, \Theta_B, \cdots \Theta_L$ de $\delta\Theta_A, \delta\Theta_B, \cdots \delta\Theta_L$. Le travail non compensé $d\tau$ accompli durant la modification sera donné non plus par l'égalité (28), mais par l'égalité

$$\begin{aligned} d\tau = &- \frac{d}{dt} \Big[E(U - TS) + P\Sigma + \Theta_A \, q_A + \Theta_B q_B + \cdots + \Theta_L \, q_L \Big] dt \\ &- \delta \Big[E(U - TS) + P\Sigma \Big] - \Big[q_A \, \delta\Theta_A + q_B \, \delta\Theta_B + \cdots + q_L \, \delta\Theta_L \Big] \\ &- \sum_{p=1}^{p=n} I_p^2 \, dL_p - \sum_{pq} I_p \, I_q \, dM_{pq} + d\mathcal{T} + d\mathcal{T}_1, \end{aligned}$$

égalité dans laquelle le terme

$$\frac{d}{dt}\left[E(U-TS)+P\Sigma+\Theta_A q_A+\Theta_B q_B+\cdots+\Theta_L q_L\right]dt.$$

représente la variation que la quantité

$$E(U-TS)+P\Sigma+\Theta_A q_A+\Theta_B q_B+\cdots\Theta_L q_L$$

éprouverait pendant la durée dt de la modification, si le systéme ne subissait aucune déformation.

Pour discuter la possibilité de la modification, on peut, comme dans le cas précédent, supprimer dans l'expression de $d\tau$ tous les termes qui dépendent de la durée de la modification et ne dépendent pas de la grandeur des déformations que subit le système. L'expression de $d\tau$ se réduit ainsi à la suivante:

$$d\tau=-\delta\left[E(U-TS)+P\Sigma\right]-\left[q_A\,\delta\Theta_A+q_B\,\delta\Theta_B+\cdots+q_L\,\delta\Theta_L\right]$$
$$-\sum_{p=1}^{n=n} I_p^2\,dL_p-\sum_{pq} I_p\,I_q\,dM_{pq}+d\mathcal{T}+d\mathcal{T}_1.$$

On sera assuré que toute déformation des conducteurs est devenue impossible si pour toute déformation virtuelle compatible avec les liaisons du système, on a l'inégalité

$$\delta\left[E(U-TS)+P\Sigma\right]+q_A\,\delta\Theta_A+q_B\,\delta\Theta_B+\cdots+q_L\,\delta\Theta_L$$
$$+\sum_{p=1}^{p=n} I_p^2\,dL_p+\sum_{pq} I_p\,I_q\,dM_{pq}-d\mathcal{T}-d\mathcal{T}_1\geqq 0.$$

Supposons que le même système, portant en chaque point les mêmes charges électriques, ne soit traversé par aucun courant. Pour rendre impossible toute déformation du système, il suffira de lui appliquer certaines forces telles que le travail $d\mathcal{T}'$ effectué par ces forces dans une déformation virtuelle quelconque vérifie l'inégalité:

$$\delta\left[E(U-TS)+P\Sigma\right]+q_A\,\delta\Theta_A+q_B\,\delta\Theta_B+\cdots+q_L\,\delta\Theta_L$$
$$-d\mathcal{T}'-d\mathcal{T}_1\geqq 0.$$

Si l'on compare ces deux conditions, on voit immédiatement que la création de courants d'intensité $I_1, I_2, \cdots I_n$ dans le système équivaut au point de vue du problème qui nous occupe à l'application de nouvelles forces ayant pour Potentiel

$$\sum_{p=1}^{p=n} I_p^2 L_p + \sum_{pq} I_p I_q M_{pq}.$$

On retrouve ainsi la proposition que nous avions énoncée.

La démonstration de la proposition précédente ne suppose pas connue la forme des fonctions $\Theta(r)$ et $\Pi(r)$. Une fois cette proposition démontrée, on peut calculer l'action qui s'exerce entre deux courants fermés, en laissant provisoirement indéterminée la forme des fonctions $\Theta(r)$ et $\Pi(r)$; en comparant le résultat du calcul à celui de l'expérience, on pourra déterminer ces fonctions. C'est la méthode inaugurée par Ampère. Elle donne

$$\Theta(r) = \Pi(r) = -\frac{A}{r},$$

A étant une constante positive. Toutefois cette méthode donne lieu à la même remarque que la méthode à priori exposée au § précédent. Le diamètre des conducteurs est toujours supposé négligeable en comparaison des valeurs que peut prendre la quantité r. Or, on ne peut supposer qu'on réalise un conducteur dont le diamètre soit inférieur à toute limite. L'expérience ne peut donc rien nous apprendre sur les valeurs que prennent les fonctions $\Pi(r)$ et $\Theta(r)$ pour les valeurs de r inférieures à une certaine limite.

§ IV.

Action d'un Courant fermé et uniforme sur un élément de Courant uniforme.

La loi suivant laquelle varient les actions électrodynamiques que deux courants fermés et uniformes exercent l'un sur l'autre nous est maintenant connue. Nous savons que ces actions admettent pour Potentiel le Potentiel Electrodynamique du système. On sait qu'il existe une infinité de lois élémentaires des actions électrodynamiques qui sont susceptibles de fournir le même résultat. Si donc on accepte le résultat précédent comme démontré, il s'en faut bien que la loi élémentaire de l'Electrodynamique soit déterminée. La proposition précédente ne suffit même pas complètement à déterminer l'action exercée par un courant fermé et uniforme sur un élément de courant; ainsi la loi d'Ampère et la loi de M. Helmholtz qui, toutes deux, vérifient la proposition précédente, donnent des résultats très différents lorsqu'on les applique au calcul de l'action d'un courant fermé sur un élément de courant; d'après la première de ces lois, cette action se réduit à une force unique appliquée à l'élément, tandis que, d'après la seconde, elle se compose d'une force et d'un couple.

La Thermodynamique permet de déterminer complètement l'action exercée par un système de courants fermés et uniformes sur une portion de conducteur quelconque faisant partie d'un circuit fermé traversé par un courant uniforme, et en particulier sur un élément de courant fermé et uniforme.

Il est évident que pour connaître les forces exercés sur un segment de conducteur quelconque, il suffit de pouvoir calculer le travail effectué par les forces agissant sur ce segment de conducteur lorsqu'il éprouve un déplacement virtuel quelconque. Les considérations suivantes nous permettront d'y parvenir.

Considérons un segment de conducteur AB faisant partie d'un circuit C qui fait lui même partie d'un système traversé par des courants fermés et uniformes. Le conducteur C est traversé par un courant uniforme. Supposons le segment AB entièrement libre de se mouvoir et même de se détacher du conducteur C. Cherchons quelles forces il faut lui appliquer pour le maintenir immobile.

Supposons que, par une modification virtuelle, on l'amène à occuper la position $A'B'$. Les forces qu'on lui a appliquées effectuent dans ce déplacement un travail $d\mathcal{T}$. On ne peut plus écrire que le travail non compensé $d\tau$ est donné par l'égalité.

$$d\tau = - d\Phi + d\mathcal{T},$$

car, à la fin de la modification, le système renfermerait deux circuits non fermés: le segment AB, et ce qui reste du circuit C lorsqu'on en a enlevé ce segment. On ne peut même plus parler de travail non compensé. En effet, la notion de Travail non Compensé, déduite des principes de la Thermodynamique, a, comme ces principes, une origine purement expérimentale; cette notion ne doit être appliquée qu'aux modifications que l'on peut, sans contradiction, supposer réalisées d'une manière expérimentale. Or aucun fait d'expérience ne saurait nous présenter un courant non fermé dont l'intensité ne soit pas nulle aux deux extrémités. En effet, en chacune des extrémités du courant, il arriverait pendant le temps dt une quantité Idt d'électricité positive ou négative; cette quantité n'en serait point enlevée, en sorte qu'au bout d'un temps fini, quelque petit qu'il soit, l'électricité accumulée en ces points aurait une densité infinie.

Néanmoins il est aisé d'imaginer une modification dont la réalisation, plus ou moins difficile, ne soit pas absurde, à laquelle par conséquent les principes de la Thermodynamique puissent s'appliquer, et dont l'étude permette de déterminer $d\mathcal{T}$.

Dans la modification virtuelle précédente, le point A décrit un chemin AA' et le point B un chemin BB' (fig. 2). Imaginons que, le long de ces deux chemins, on ait tendu deux conducteurs électrolysables ou non, ces conducteurs n'étant traversés par aucun courant au début de la modification, et étant supposés à l'état neutre. Imaginons ensuite qu'on impose au circuit AB le déplacement en question; l'extrémité A glissera constamment sur le conducteur AA' et recevra sans cesse le courant par ce conducteur, tandis que l'extrémité B glissera sur le conducteur BB' qui emmènera le courant au circuit C. On pourra alors, en désignant par $d\tau$ le travail non compensé engendré dans cette modification réalisable, par $d\Phi$ la variation subie dans cette modification par le Potentiel Thermodynamique du système, *ce Potentiel Thermodynamique étant calculé en tenant compte des conducteurs* AA', BB', écrire:

$$d\tau = - d\Phi + d\mathcal{T}.$$

Les courants qui traversent le système étant tous uniformes, chaque élément de volume du système conserve une quantité invariable d'électricité. La variation subie par le Potentiel Electrostatique W est donc au signe près le travail $d\mathcal{T}_1$ effectué par les forces qui suivent la loi de Coulomb.

La variation subie par la quantite $E(U-TS)+P\Sigma$ se compose de deux parties; une première partie, due au phénomènes d'électrolyse qui peuvent se produire dans certaines parties du système, est proportionnelle à la durée de la modification, mais indépendante de la grandeur du déplacement donné au segment AB; cela est vrai même si les conducteurs AA', BB' sont électrolysables, car la réaction chinique donc chacun d'eux est le siège pendant la durée dt de la modification, met en jeu des poids de matière proportionnels au produit Idt, mais indépendants de la longueur de ces conducteurs, c'est à dire du chemin décrit par les points A et B; nous désignerons cette première partie de la variation subie par la quantité

$$E(U-TS)+P\Sigma$$

par

$$\frac{d}{dt}\Big[E(U-TS)+P\Sigma\Big]\,dt.$$

Une seconde partie de cette variation dépend de la grandeur de la déformation subie par le segment AB, mais ne dépend pas de la durée de cette déformation, Nous désignerons cette seconde partie par

$$\delta\Big[E(U-TS)+P\Sigma\Big]$$

Dans la somme

$$\Theta_A\, q_A + \Theta_B\, q_B + \cdots + \Theta_L\, q_L,$$

les quantités $q_A, q_B, \cdots q_L$ doivent être envisagées comme des constantes. La variation subie par cette somme se compose encore de deux parties, l'une, due aux phénomènes d'Electrolyse, est proportionnelle à la durée dt de la déformation, et indépendante de sa grandeur; nous désignerons cette première partie par

$$\frac{d}{dt}\Big[\Theta_A\, q_A + \Theta_B\, q_B + \cdots + \Theta_L\, q_L\Big]\,dt;$$

l'autre, due aux changements d'état que peut déterminer la déformation du conducteur AB, est proportionnelle à la grandeur de cette déformation et indépendante de sa durée; nous désignerons cette seconde partie par

$$\delta\left[\Theta_A\, q_A + \Theta_B\, q_B + \cdots + \Theta_L\, q_L\right].$$

Reste à calculer la variation du Potentiel Electrodynamique du système. Or il est aisé de voir que la valeur finale du Potentiel Electrodynamique du système se déduit de sa valeur initiale en remplaçant dans le calcul, le segment de conducteur AB par le segment de conducteur $AA'B'B$; il revient au même d'ajouter à la valeur initiale du Potentiel Electrodynamique du système le Potentiel Electrodynamique du système proposé sur le circuit fermé $AA'B'BA$, supposé décrit, dans le sens qu'indiquent les lettres, par un courant ayant même intensité que le courant qui circule dans le circuit C. Ce Potentiel est une quantité infiniment petite du même ordre que l'aire $ABA'B'$, c'est à dire du même ordre que le produit de la longeur du segment AB par le chemin que décrit un point de ce segment lorsque celui-ci passe de AB en $A'B'$. Désignons par $d\mathcal{P}$ ce Potentiel, et nous aurons

$$\begin{aligned} d\tau = &-\frac{d}{dt}\left[E(U-TS) + P\Sigma + \Theta_A\, q_A + \Theta_B\, q_B + \cdots + \Theta_L\, q_L\right]dt \\ &-\delta\left[E(U-TS) + P\Sigma + \Theta_A\, q_A + \Theta_B\, q_B + \cdots + \Theta_L\, q_L\right] \\ &+ d\mathcal{T}_1 - d\mathcal{P} + d\mathcal{T}. \end{aligned}$$

Le premier terme dépend uniquement de la durée du déplacement et ne dépend pas de sa grandeur; on peut supposer le déplacement assez rapide pour que ce terme devienne négligeable; on a alors, pour discuter la possibilité de la modification virtuelle considérée, l'égalité

$$\begin{aligned} d\tau = &-\delta\left[E(U-TS) + P\Sigma + \Theta_A\, q_A + \Theta_B\, q_B + \cdots \Theta_L\, q_L\right] \\ &+ d\mathcal{T}_1 - d\mathcal{P} + d\mathcal{T}. \end{aligned}$$

Si donc la condition

$$\begin{aligned} &\delta\left[E(U-TS) + P\Sigma + \Theta_A\, q_A + \Theta_B\, q_B + \cdots + \Theta_L\, q_L\right] \\ &+ d\mathcal{P} - d\mathcal{T}_1 - d\mathcal{T} > 0 \end{aligned}$$

est remplie, la modification considérée sera impossible; le segment AB ne pourra se déplacer.

Considérons le même système, portant les mêmes charges électriques, distribuées de la même manière, mais supposons qu'il ne soit traversé par aucun courant. Pour maintenir le segment AB en équilibre il faudra lui appliquer des forces qui, dans la modification virtuelle précédemment considérée, effectueront un travail $d\mathcal{T}'$. On sera assuré de l'immobilité du segment AB si l'on a:

$$\delta\left[E(U-TS)+P\Sigma+\Theta_A q_A+\Theta_B q_B+\cdots+\Theta_L q_L\right]$$
$$-d\mathcal{T}_1-d\mathcal{T}'>0.$$

Si l'on compare ces deux conditions, on voit sans peine que l'existence de courants dans le système équivaut, pour le segment AB, à l'action de forces qui, dans un déplacement virtuel quelconque de ce segment, effectuent un travail égal à $-d\mathcal{P}$. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Un système de courants fermés et uniformes exerce sur une portion de conducteur appartenant à l'un d'entre eux des actions électrodynamiques; dans un déplacement virtuel quelconque imposé à la portion de conducteur considéré, ces forces effectuent un certain travail: ce travail est égal, au signe près, au Potentiel Electrodynamique du système sur un certain courant fermé de même intensité que le courant qui circule dans le portion de conducteur déplacée; ce courant parcourt le contour de l'aire que cette portion de conducteur engendre dans son déplacement virtuel; il le parcourt dans un sens tel que, dans la partie de ce circuit formée par la position finale de la portion de conducteur considérée, sa marche soit celle du courant qui traverse réellement cette portion de conducteur.

Cette proposition, appliquée au cas où la portion de conducteur mobile se réduit à un élément de courant, nous permettra de calculer le travail effectué dans un déplacement virtuel quelconque de cet élément par les actions électrodynamiques qui sollicitent cet élément; les actions électrodynamiques qui sollicitent cette élément peuvent toujours se réduire à une force appliquée au milieu de l'élément, et à un couple; trois translations élémentaires parallèles à des axes retrangulaires, trois rotations élémentaires autour d'axes rectangulaires nous feront connaître la force et le couple qui agissent sur l'élément.

Occupons nous d'abord du couple.

Par le milieu O de l'élément AB (fig. 3), menons trois axes de coordonnées rectangulaires, OX, OY, OZ. Soient L, M, N, les projections de l'axe du couple sur ces trois axes de coordonnées. Si nous donnons à l'élément AB une rotation élémentaire $d\lambda$ autour de OX, le travail effectué par les forces électrodynamique qui sollicitent l'élément AB aura pour valeur $Ld\lambda$. De même un rotation virtuelle $d\mu$ autour de OY leur fera produire le travail $Md\mu$, et une rotation virtuelle $d\nu$ autour de OZ leur fera produire le travail $Nd\nu$.

Supposons que la rotation $d\nu$ autour de OZ ait fait prendre à l'élément AB la position $A'B'$; le travail virtuel $Nd\nu$ effectué par les actions électrodynamiques qui agissent sur l'élément est, au signe près, égal au Potentiel Electrodynamique du système sur le circuit infiniment petit $A'B'BAA'$ parcouru, dans le sens indiqué par l'ordre de lettres, par un courant d'intensité I égal à celui qui parcourt AB de A en B. Ce Potentiel est représenté par l'expression suivante:

$$d\mathscr{P} = I \sum_{p=1}^{p=n} I_p \int_c \int_c H(r) \cos \omega \, ds \, ds_p,$$

la première intégrale s'étendant à tous les éléments ds du circuit $A'B'BAA'$, la seconde à tous les éléments ds_p du circuit p.

Calculons l'intégrale

$$\int_c H(r) \cos \omega \, ds,$$

r étant la distance du milieu de l'élément ds au milieu d'un certain élément ds_p, et ω l'angle des deux éléments ds et ds_p.

Le point O est à la fois le milieu de l'élément AB et le milieu de l'élément $A'B'$. Désignons par ϱ la distance du point O au milieu O' de l'élément ds_p. La distance du point B au milieu de l'élément ds_p sera, en désignant par θ l'angle que l'élément AB fait avec la droite OO':

$$\varrho - \cos \theta \frac{AB}{2}.$$

La distance du milieu de l'élément BB' au point O' sera, en désignant par ϑ l'angle de l'élément BB' avec la droite OO'

$$\varrho - \cos \theta \frac{AB}{2} - \cos \vartheta \frac{BB'}{2}.$$

De même la distance du milieu de l'élément AA' au point O' est:

$$\varrho + \cos \theta \frac{AB}{2} - \cos \vartheta \frac{AA'}{2}.$$

Soit ω_1 l'angle de l'élément AA' avec l'élément ds_p; l'élément BB' fera avec l'élément ds_p un angle ω_2 supplémentaire de ω_1. Nous aurons alors:

$$ds_p \int_c H(r) \cos \omega \, ds = H(\varrho) \, ds_p \int_c \cos \omega \, ds$$

$$+ H'(\varrho) \, ds_p \left[\cos \theta \frac{AB}{2} - \cos \vartheta \frac{AA'}{2} \right] \cos \omega_1 \, AA'$$

$$- H'(\varrho) \, ds_p \left[\cos \theta \frac{AB}{2} + \cos \vartheta \frac{BB'}{2} \right] \cos \omega_2 \, BB'.$$

Mais on a

$$\int_c \cos \omega \, ds = o,$$

car cette intégrale représente la projection du circuit fermé $A'B'BAA'$ sur la direction de l'élément ds_p. On a en outre:

$$AA' = BB',$$

$$Cos \, \omega_1 + Cos \, \omega_2 = 0.$$

On a donc:

$$ds_p \int_c H(r) \cos \omega \, ds = H'(\varrho) \, AA' \, ds_p \, AB \cos \theta \cos \omega_1.$$

Chacun des deux éléments AA', BB' est égal à un arc de cercle dont l'angle au centre est dr et le rayon égal à la demi projection de l'élément AB sur le plan des XY, c'est à dire à $\frac{AB}{2} \cos (AB, OZ)$.

On a donc:

$$ds_p \int_c H(r) \cos \omega \, ds = H'(\varrho) \, ds_p \frac{\overline{AB}^2}{2} \cos \theta \cos \omega_1 \cos (AB, OZ) \, dr.$$

Posons:

$$\mathcal{H} = \frac{I}{2} \sum_{p=1}^{p=n} I_p \int H'(r) \cos \omega_1 \, ds_p,$$

r désignant la distance du milieu O de l'élément AB au milieu O' de l'élément ds_p, ω_1 désignant l'angle que le chemin décrit par le point A, origine de l'élément AB, dans une rotation élémentaire autour de OZ, fait avec l'élément ds_p, et l'intégrale s'étendant à tout le circuit dont fait partie l'élément ds_p. Nous aurons

$$d\mathcal{P} = \mathcal{H} \, \overline{AB}^2 \, Cos \, (AB, OZ) \, dr,$$

et par conséquent

$$N = -\mathcal{N} \operatorname{Cos}(AB, OZ)\, \overline{AB}^2.$$

La quantité $\mathcal{N}$ est une quantité finie. On voit alors que la projection sur OZ de l'axe du couple qui sollicite l'élément AB est un infiniment petit du second ordre lorsque la longueur de cet élément est un infiniment petit du premier ordre; il en serait évidemment de même des projections de l'axe du couple sur OX et sur OY. Nous pouvons donc en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à l'ordre de la longueur de l'élément, écrire

$$(29)\qquad \begin{cases} L = 0, \\ M = 0, \\ N = 0, \end{cases}$$

et énoncer le théorème suivant:

L'action qu'un système de conducteurs fermés parcourus par des courants uniformes exerce sur un élément de courant se réduit à une force appliquée au milieu de l'élément.

Calculons maintenant les composantes de cette force.

Prenons trois axes quelconques de coordonnées rectangulaires, OX, OY, OZ. Soient x, y, z, les coordonnées du milieu de l'élément AB, et X, Y, Z, les composantes de l'action électrodynamique exercée sur cette élément par le système auquel il appartient.

Supposons que nous fassions subir à l'élément AB une translation dx parallèlement à l'axe des x; cet élément viendra $A'B'$ (fig. 4).

Les actions électrodynamiques qui sollicitent cet élément effectueront un travail virtuel Xdx. Désignons par $d\mathcal{P}$ le Potentiel Electrodynamique du système sur le circuit $A'B'BAA'$ supposé parcouru, dans le sens qu'indiquent les lettres, par un courant de même intensité I que le courant qui parcourt l'élément AB de A vers B. Nous aurons

$$Xdx = -d\mathcal{P}.$$

Le Potentiel $d\mathcal{P}$ est donné par l'égalité

$$d\mathcal{P} = I \sum_{p=1}^{p=n} I_p \int ds_p \int H(r) \cos \omega \, ds,$$

l'une des intégrales s'étendant à tous les éléments ds_p du circuit p, l'autre à tous les éléments ds du circuit $A'B'BAA'$.

Calculons la quantité

$$ds_p \int H(r) \cos \omega \, ds.$$

L'intégrale sera la somme de quatre termes, chacun de ces quatre termes étant relatif à l'un des côtés du parallélogramme $A'B'BAA'$.

Soit ω l'angle que l'élément AB, dirigé de A vers B, fait avec l'élément ds_p, et r la distance du milieu de l'élément AB au milieu de l'élément ds_p. Le côté BA fournira à l'intégrale considérée le terme:

$$- H(r) \cos \omega \, AB.$$

L'élément $A'B'$, parallèle à AB, fait aussi l'angle ω avec l'élément ds_p. La distance du milieu de l'élément $A'B'$ au milieu de l'élément ds_p a pour valeur

$$r + \frac{\partial r}{\partial x} dx.$$

L'élément $A'B'$ fournit donc à l'intégrale un terme qui a pour valeur:

$$H(r) \cos \omega \, A'B' + \frac{dH(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \cos \omega \, A'B' \, dx.$$

Soient x', y', z', les coordonnées du milieu de l'élément ds_p. L'élément AA' étant parallèle à l'axe des x, l'angle qu'il forme avec l'élément ds_p a pour valeur $\frac{dx'}{ds_p}$. Le milieu de cet élément AA' est à une distance du milieu de ds_p marquée par

$$r + \cos \omega \frac{AB}{2} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{2}.$$

L'élément AA', donc la longueur est dx fournit donc à l'intégrale un terme qui a pour valeur:

$$H(r) \frac{dx}{ds_p} dx + \frac{dH(r)}{dr} \frac{dx'}{ds_p} \cos \omega \frac{AB}{2} dx + \frac{dH(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx'}{ds_p} \frac{dx}{2}.$$

On verrait de même que l'élément $B'B$ fournit à l'integrale un terme qui a pour valeur:

$$- H(r) \frac{dx'}{ds_p} dx + \frac{dH(r)}{dr} \frac{dx'}{ds_p} \cos \omega \frac{AB}{2} dx - \frac{dH(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx'}{ds_p} \frac{dx}{2}.$$

En faisant la somme des quatre termes ainsi calculés, après les avoir multipliés par ds_p, on trouve:

$$ds_p \int H(r) \cos\omega \, ds = \left[\frac{dH(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \cos\omega + \frac{dH(r)}{dr} \cos\theta \frac{dx'}{ds_p} \right] AB \, . \, ds_p \, dx.$$

Remplaçons maintenant AB par ds, et $\cos\theta$ par $-\frac{\partial r}{\partial s}$, et nous aurons

$$d\mathcal{P} = Ids\,dx \sum_{p=1}^{p=n} I_p \int \left[\frac{\partial H(r)}{\partial x} \cos\omega - \frac{\partial H(r)}{\partial s} \frac{dx'}{ds_p} \right] ds_p.$$

De là on déduit immédiatement la valeur de X. Un calcul analogue donne Y et Z. On obtient ainsi les formules suivantes:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= -Ids \sum_{p=1}^{p=n} I_p \int \left[\frac{\partial H(r)}{\partial x} \cos\omega - \frac{\partial H(r)}{\partial s} \frac{dx'}{ds_p} \right] ds_p, \\ Y &= -Ids \sum_{p=1}^{p=n} I_p \int \left[\frac{\partial H(r)}{\partial y} \cos\omega - \frac{\partial H(r)}{\partial s} \frac{dy'}{ds_p} \right] ds_p, \\ Z &= -Ids \sum_{p=1}^{p=n} I_p \int \left[\frac{\partial H(r)}{\partial z} \cos\omega - \frac{\partial H(r)}{\partial s} \frac{dz}{ds_p} \right] ds_p. \end{aligned} \right.$$

Nous avons vu (égalité [22] p. 28) que, lorsque r n'est pas très petit, on a

$$H(r) = -\frac{A}{r}.$$

Les formules précédentes deviennent alors

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= A \; Ids \sum_{p=1}^{p=n} I_p \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos\omega - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds_p} \right) ds_p, \\ Y &= A \; Ids \sum_{p=1}^{p=n} I_p \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{dy} \cos\omega - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dy'}{ds_p} \right) ds_p, \\ Z &= A \; Ids \sum_{p=1}^{p=n} I_p \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos\omega - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dz'}{ds_p} \right) ds_p. \end{aligned} \right.$$

Ces formules (31) sont précisément celles que l'on obtient pour représenter l'action d'un système de courants fermés et uniformes sur un élément de courant appartenant à l'un d'eux, soit en partant de la loi d'Ampère, soit en partant de la loi de Grassmann. On peut donc énoncer le Théorème suivant.

L'Action d'un système de courants fermés et uniformes sur un élément de courant appartenant à l'un d'entre eux est celle qui résulte de de l'application de la loi d'Ampère.

Cette proposition résoud complètementle problème qui a pour objet de déterminer l'action d'un système de courants fermés et uniformes sur un élément de courant. Il resterait maintenant à déterminer la loi que suit l'action mutuelle de deux éléments de courant. Mais aucun artifice connu ne permet d'isoler l'action exercée par un élément de courant de l'action exercée par les autres éléments du même circuit. La Thermodynamique. fondée sur des principes applicables seulement à des modifications dont la réalisation expérimentale est concevable, ne peut donc fournir aucun renseignement sur ce nouveau problème. Hâtons nous d'ajouter que la cause qui rend impossible la solution de ce nouveau problème, la rend en même temps inutile.

Fin de la 1:e Partie.

NOTE 1.

Sur la Forme du Potentiel Electrodynamique de deux Eléments de Courant.

Ampère a admis que l'action mutuelle de deux éléments de courant, de longueurs ds et ds', traversés par des courants d'intensités I et I', s'obtenait en multipliant la quantité $I I' ds\, ds'$ par un fonction des quatre paramètres suivants:

1° La distance mutuelle des deux éléments;
2° l'angle que l'élément ds fait avec la droite qui joint un des ses points à un point de l'élément ds';
3° l'angle que l'élément ds' fait avec la même droite;
4° enfin l'angle que font entre elles les directions des deux éléments.

Tous les physiciens qui, depuis Ampère, se sont occupés d'Electrodynamique ont admis comme lui que ces seuls paramètres entraient dans l'expression de l'action mutuelle de deux éléments de courant.

D'après l'égalité (4) (1° Partie), le Potentiel Electrodynamique d'un système de courants fermés et uniformes, qui, en vertu des hypothèses faites dépend uniquement des intensités des courants et des formes géométriques des conducteurs, est exprimé de la manière suivante:

$$\Phi = \mathrm{S}\, \varphi\, ds\, ds',$$

φ dépendant seulement des intensités des courants qui traversent les éléments ds et ds' et des paramètres qui fixent les relations géometriques des deux éléments. Relativement à ces derniers, nous avons admis que les quatre paramètres considérés par Ampère entraient seuls dans l'expression de φ.

M. E. Mathieu[1]) a fait remarquer que l'action mutuelle de deux éléments de courant pourrait fort bien dépendre non seulement des paramètres envisagés par Ampère, mais encore des courbures et des torsions des éléments en présence, où même d'autres éléments analogues correspondant à dérivées d'ordre plus élevé de la distance r par rapport aux arcs s et s' des conducteurs. M. Mathieu s'est du reste contenté de signaler l'influence possible de ces variables sans chercher à préciser cette influence.

---

[1]) E. Mathieu. *Réflexions sur les Principes Mathématiques de l'Etrodynamique.* (Annales de l'Ecole Normale Sup:e, 2:e Série. T. IX. p. 187. 1880).

Nous allons montrer que ni la courbure, ni la torsion, ni les autres éléments de même nature ne peuvent intervenir dans les actions exercées par les éléments de courant. L'hypothèse à laquelle Ampère s'est tenu se trouvera ainsi justifiée.

Admettons que la quantité φ dépende des intensités I et I' des courants qui traversent les éléments ds, ds', et de tous les paramètres qui déterminent géométriquement la forme de la figure que composent ces deux éléments. En raisonnant comme nous l'avons fait dans la première partie, nous montrerons:

1° que l'on a

$$\varphi = I I' \psi,$$

ψ dépendant uniquement des paramètres géométriques;

2° que l'intégrale

$$\int \psi \, ds,$$

étendue à un circuit infiniment petit dont fait partie l'élément ds est une quantité infiniment petite dont l'ordre est au moins égal à l'ordre de l'aire embrassée par le circuit infiniment petit sur une surface passant par ce circuit.

Cela étant, considérons un même élément ds' et deux éléments (fig. 5) $AB_1 = ds_1$, $AB_2 = ds_2$, qui ont la même origine A, qui sont tangents l'un à l'autre à cette origine, qui ont la même longueur, $ds_1 = ds_2$, mais qui ont des courbures et des torsions différentes. Nous allons voir que la fonction ψ_1 relative aux deux éléments ds et ds' et la fonction ψ_2 relative aux deux éléments ds_2 et ds' ont la même valeur, ce qui démontrera la proposition que nous avons en vue d'établir.

Considérons pour cela l'intégrale

$$\int \psi \, ds$$

étendue au circuit AB_1B_2A. L'aire de ce circuit étant infiniment petite par rapport à ds_1, l'intégrale est elle même infiniment petite par rapport à ds_1. Si nous ne conservons que les infiniment petits de l'ordre de ds_1, nous aurons

$$\int \psi \, ds = 0.$$

Soit $d\sigma$ la longueur de l'élément $B_1 B_2$. Soit Ψ la fonction ψ qui correspond aux éléments ds' et $d\sigma$. Nous aurons

$$\int \psi\, ds = \psi_1\, ds_1 + \Psi\, d\sigma - \psi_2\, ds_2.$$

Si nous remarquons que les deux éléments AB_1, AB_2, étant tangents en A, $A B_1 B_2$ est infiniment petit par rapport à AB_1, et si nous ne conservons que les infiniment petits de l'ordre de AB_1, nous trouverons sans peine

$$(\psi_1 - \psi_2)\, ds_1 = 0,$$

ou bien

$$\psi_1 = \psi_2,$$

ce qui démontre que la fonction ψ dépend bien, comme nous l'avions supposé, des seuls paramètres envisagés par Ampère.

NOTE 2.

Dans le mémoire précédent, nous avons démontré que l'action d'un courant réalisable quelconque sur un élément de courant se réduisait à une force unique, appliquée au milieu de l'élément, dont nous avons donné l'expression. Mais, dans la démonstration de ce résultat, nous avons supposé que le déplacement virtuel imposé à l'élément ne comportait pas d'allongement, en sorte que nous aurions pu masquer une *tension électrodynamique* du fil parcouru par le courant, dans le cas où il en existerait une. Il est aisé de de démontrer qu'il n'en existe pas.

Considérons un segment de conducteur AB (fig. 6). Le conducteur auquel appartient ce segment est traversé par un courant réalisable quelconque de A en B et est soumis à l'action d'autres courants réalisables quelconques.

Au segment de conducteur AB donnons un déplacement virtuel quelconque. Dans ce déplacement, il balaye une certaine aire. Les actions électrodynamiques qu'il subit effectuent un certain travail. Nous avons vu quelle relation existe entre ce travail et le Potentiel Electrodynamique du système sur un certain courant fermé parcourant le contour de l'aire balayée par le segment AB.

Cette relation est générale.

Supposons d'abord que le segment de conducteur vienne de AB en la position voisine $A'B'$, sans changer de longueur: Les actions électrodynamiques exercées sur AB effectueront un certain travail $d\mathcal{T}$.

Supposons en second lieu que AB, au lieu de venir en $A'B'$, vienne en en $A'B'_1$, de telle sorte que sa longueur croisse de la quantité infiniment petite

$$dl = B'B'_1.$$

Si T désigne la tension électrodynamique du fil au point B, le travail électrodynamique effectué dans cette nouvelle déformation sera

$$d\mathcal{T} - Tdl.$$

Il en résulte que Tdl est égal à la différence des Potentiels Electrodynamiques du système sur les circuits $ABB'A'$ et ABB'_1A'. En autres termes, Tdl est égal au Potentiel électrodynamique du système sur le circuit $BB'B'_1$ parcouru, dans le sens qu'indiquent les lettres, par un courant de même intensité que le courant qui passe en B. Or, ce dernier Potentiel est un infiniment petit du second ordre. On a donc

$$T = 0,$$

comme nous l'avions annoncé.

DEUXIÈME PARTIE.

Actions Electrodynamiques des Courants qui ne sont pas uniformes.

§ I.

Potentiel Thermodynamique d'un Système de Courants Linéaires quelconques.

Dans la première partie de ce travail, nous avons étudié les loi de l'Electrodynamique en nous bornant à considérer des systèmes formés par des conducteurs linéaires et fermés traversés par des courants uniformes.

Cette étude ne peut suffire. Des courants devenus constants sont nécessairement uniformes. Mais en général, pendant la période variable qui précède l'établissement d'un régîme permanent, les courants ne doivent pas au même instant posséder la même intensité en tous les points du conducteur qu'ils traversent. De là la nécessité d'étudier les courants non uniformes.

Comme dans la 1:e Partie, nous commencerons par étudier des courants linéaires. Nous supposerons l'intensité variable d'un point à l'autre d'un tel conducteur. Toutefois, en admettant que l'intensité d'un courant varie d'un point à l'autre du conducteur que traverse ce courant, nous serons obligés d'admettre que *cette intensité varie d'une manière continue.* Supposons en effet qu'en un certain point d'un conducteur linéaire l'intensité du courant présente une discontinuité et admette deux valeurs différentes I et I'. De part et d'autre de ce point, traçons dans le fil deux sections droites infiniment voisines l'une de l'autre; ces sections comprennent entre elles un segment de conducteur infiniment petit. La quantité d'électricité libre qui entre pendant le temps

dt dans ce volume infiniment petit a pour valeur Idt, la quantité qui en sort a pour valeur Idt, la quantité qui en sort a pour valeur $I'dt$, la quantité d'électricité libre qui s'y accumule a pour valeur $(I - I')\,dt$. Donc une quantité finie d'électricité s'accumulerait en un temps fini, quelque petit qu'on le suppose, dans l'élément de conducteur considéré; la densité électrique linéaire en un point de cet élément deviendrait infinie, ce qui est impossible.

Il résulte en particulier de ce qui précède que si un conducteur ouvert est traversé par un courant, l'intensité de ce courant doit être constamment égale à 0 aux deux extrémités de ce conducteur.

Concevons un système formé de conducteurs linéaires fermés ou ouverts traversés par des courants dont l'intensité varie d'une manière continue d'un point à l'autre d'un même conducteur. Supposons ce système soustrait à toute action extérieure, sauf à celle d'une pression normale, uniforme et constante. Le système ainsi composé doit admettre un Potentiel Thermodynamique. C'est l'expression de ce Potentiel que nous nous proposons tout d'abord d'obtenir. Nous y parviendrons de la manière suivante:

Décomposons les conducteurs qui forment ce système en éléments de longueur; désignons ces éléments dont le nombre est très grand, par les indices $1, 2, \ldots . p, \ldots . n$. Désignons par ds_p la longueur de l'élément p, et par I_p l'intensité du courant qui le traverse.

Le Potentiel Thermodynamique du système se compose de deux parties; la première de ces parties est indépendante de l'intensité des courants qui traversent les divers éléments du système; la seconde au contraire dépend de l'intensité de ces courants; elle s'annulle si tous les courants s'annullent.

La première partie nous est connue par nos recherches antérieures. Désignons par E l'équivalent mécanique de la chaleur, par T la température absolue, par P la pression extérieure, par U_p l'énergie interne que possèderait l'élément p s'il était ramené à l'état neutre sans éprouver aucun changement d'état physique ou chimique, par S_p l'Entropie qu'il possèderait dans les mêmes circonstances, par Σ_p le volume de cet élément, par Q_p la charge totale qu'il porte, par Θ_p une constante particulière à la matière qui forme cet élément, par q la charge en un point de cet élément, par V la valeur en ce point de la fonction potentielle des charges électriques réparties sur le système, par ε une constante qui dépend de l'unité choisie pour mesurer les charges électriques, enfin par $\sum\limits_p$ une sommation étendue à toutes les charges q réparties sur l'élément p; la première partie aura pour valeur

$$\begin{aligned}
& E(U_1 - TS_1) + P\Sigma_1 + \Theta_1\, Q_1 + \frac{\varepsilon}{2}\sum_1 qV \\
& + E(U_2 - TS_2) + P\Sigma_2 + \Theta_2\, Q_2 + \frac{\varepsilon}{2}\sum_2 qV \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + E(U_p - TS_p) + P\Sigma_p + \Theta_p\, Q_p + \frac{\varepsilon}{2}\sum_p qV \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + E(U_n - TS_n) + P\Sigma_n + \Theta_n\, Q_n + \frac{\varepsilon}{2}\sum_n qV.
\end{aligned}$$

Toute notre attention doit se porter sur la seconde partie du Potentiel Thermodynamique, partie que nous désignerons par Π.

Pour déterminer la quantité Π, nous commencerons par faire sur cette quantité certaines hypothèses analogues à celles que, dans la première partie, nous avons faites sur la quantité Φ'. Nous supposerons en première lieu que *la quantité Π ne depende ni des dérivées par rapport au temps des coordonnées des divers points du système, ni des dérivées par rapport au temps des courants.*

De cette hypothèse nous déduirons immédiatement, par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait sur la quantité Φ', que *la quantité Π dépend uniquement de la position des divers éléments qui forment le système et des intensités des courants qui traversent ces éléments.*

Outre ces résultats, nous possédons sur la fonction Π le renseignement suivant: lorsque les éléments qui composent le système se groupent de manière à former des conducteurs fermés parcourus par des courants uniformes, la quantité Π se réduit au Potentiel Electrodynamique pris soit sous la forme donnée par F. E. Neumann, soit sous la forme donnée par W. Weber, soit sous la forme donnée par M. Helmholtz, ces trois formes étant, dans ce cas, équivalentes. Si nous adoptons pour ce Potentiel la forme donnée par M. Helmholtz, forme qui renferme les deux autres comme cas particuliers, nous voyons sans peine que l'on doit avoir

$$
\begin{aligned}
1)\quad H = I_1 I_2\, ds_1\, ds_2 &\left[\frac{1-K}{2}\,\Theta(r_{12}) \cos(r_{12}, ds_1) \cos(r_{12}, ds_2)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1+K}{2}\,H(r_{12}) \cos(ds_1, ds_2)\right]\\
+ I_1 I_3\, ds_1\, ds_3 &\left[\frac{1-K}{2}\,\Theta(r_{13}) \cos(r_{13}, ds_1) \cos(r_{13}, ds_3)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1+K}{2}\,H(r_{13}) \cos(ds_1, ds_3)\right]\\
+ \cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+ I_1 I_n\, ds_1\, ds_n &\left[\frac{1-K}{2}\,\Theta(r_{1n}) \cos(r_{1n}, ds_1) \cos(r_{1n}, ds_n)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1+K}{2}\,H(r_{1n}) \cos(ds_1, ds_n)\right]\\
+ I_2 I_3\, ds_2\, ds_3 &\left[\frac{1-K}{2}\,\Theta(r_{23}) \cos(r_{23}, ds_2) \cos(r_{23}, ds_3)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1+K}{2}\,H(r_{23}) \cos(ds_2, ds_3)\right]\\
+ \cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+ I_{n-1} I_n\, ds_{n-1}\, ds_n &\left[\frac{1-K}{2}\,\Theta(r_{n-1,\,n}) \cos(r_{n-1,\,n}, ds_{n-1}) \cos(r_{n-1,\,n}, ds_n)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1+K}{2}\,H(r_{n-1\,n}) \cos(ds_{n-1}, ds_n)\right]\\
&+ F(1, 2, \cdots p, \cdots n).
\end{aligned}
$$

Dans cette égalité, r_{pq} désigne la distance de l'élément p à l'élément q ; (r_{pq}, ds_p) désigne l'angle que l'élément ds_p fait avec la ligne menée de l'élément p à l'élément q ; (r_{pq}, ds_q) désigne l'angle que l'élément ds_q fait avec la même ligne ; (ds_p, ds_q) désigne l'angle que font entre elles les directions des éléments ds_p et ds_q ; K est une constante *arbitraire* ; $F(1, 2, \cdots p, \cdots n)$ est, pour chaque valeur de K, une fonction qui dépend uniquement de la position des éléments $1, 2, \cdots p, \cdots n$, et des intensités des courants qui les traversent ; cette fonction s'annulle lorsque les divers élements du système se groupent de façon à former des courants fermés et uniformes ; à chaque valeur donnée à K correspond une fonction F différente. Pour les valeurs sensibles de r, on a

$$1_{bis})\qquad \Theta(r) = H(r) = -\frac{A}{r}.$$

Pour déterminer F, nous ferons d'abord sur cette fonction l'hypothèse suivante. Désignant par φ_{pq} une quantité qui dépend de la position des deux éléments ds_p, ds_q, et des intensités I_p, I_q, des courants qui les traversent, nous admettrons que l'on ait

$$
\begin{aligned}
2) \quad F(1, 2, \cdots p, \cdots n) = \varphi_{12}\, ds_1\, ds_2 &+ \varphi_{13}\, ds_1\, ds_3 + \cdots + \varphi_{1n}\, ds_1\, ds_n \\
&+ \varphi_{23}\, ds_2\, ds_3 + \cdots + \varphi_{2n}\, ds_2\, ds_n \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \varphi_{n-1\,n}\, ds_{n-1}\, ds_n.
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que *la quantité* φ_{pq} *est proportionelle au produit* $I_p\, I_q$ *des intensités des courants qui traversent les éléments* ds_p *et* ds_q.

Supposons en effet que deux éléments ds_p et ds'_p, tendant à se confondre suivant l'élément $d\sigma_p$, égal en longueur à chacun d'eux, soient traversés l'un par un courant d'intensité I_p, l'autre par un courant d'intensité I'_p. La somme

$$\varphi_{pq}\, ds_p\, ds_q + \varphi'_{pq}\, ds'_p\, ds_q$$

aura pour limite la valeur de la quantité

$$\varphi_{pq}\, d\sigma_p\, ds_q$$

relative au cas où l'élément $d\sigma_p$ est traversé par un courant d'intensité $I_p + I'_p$. On aura donc, en mettant en évidence les intensités dont dépendent les fonctions φ, et en supposant que les éléments auxquels se rapportent ces fonctions soient toujours placés de la même manière

$$\varphi_{pq}\,(I_p, I_q) + \varphi_{pq}\,(I'_p, I_q) = \varphi_{pq}\,(I_p + I'_p, I_q).$$

Cette égalité montre, que φ_{pq} est proportionnel à I_p. On verrait de même que cette quantité est proportionnelle à I_q. Elle est donc, comme nous l'avions annoncé, proportionnelle au produit $I_p\, I_q$, et l'on peut écrire

$$\varphi_{pq}\, ds_p\, ds_q = I_p\, I_q\, \psi_{pq}\, ds_p\, ds_q,$$

ψ_{pq} dépendant de la position mutuelle des deux éléments ds_p, ds_q, mais nullement du sens ou de la grandeur des courants qui les traversent.

Considérons un système formé d'un certain nombre de courants isolés, uniformes ou non. Désignons ces courants par les indices $\alpha, \beta, \cdots \lambda, \mu \cdots \theta$. Soit

$$F_\lambda = \frac{1}{2} \int\!\!\int I_\lambda\; I'_\lambda\; \psi\; ds_\lambda\; ds'_\lambda,$$

les deux intégrations s'étendant à tous les éléments ds_λ, ds'_λ, du circuit λ. Soit

$$F_{\lambda\mu} = \int\int I_\lambda\, I_\mu\, \psi\, ds_\lambda\, ds_\mu,$$

les deux intégrations s'étendant l'une à tous les éléments ds_λ du circuit λ, l'autre à tous les éléments ds_μ du circuit μ. Nous aurons

$$F(1, 2, \cdots p, \cdots n) = F_\alpha + F_\beta + \cdots + F_\theta + F_{\alpha\beta} + \cdots + F_{\lambda\mu} + \cdots$$

Considérons en particulier un système formé par un courant unique. Nous aurons

$$F(1, 2, \cdots p, \cdots n) = \frac{1}{2} \int\int I\, I'\, \psi\, ds'\, ds,$$

les deux intégrations s'étendant à tous les éléments de ce courant. Supposons que ce courant soit fermé et uniforme. Alors le premier membre devra être égal à 0. Le second aura pour valeur:

$$\frac{I^2}{2} \int\int \psi\, ds\, ds'.$$

On voit donc que l'intégrale

$$\int\int \psi\, ds\, ds',$$

étendue deux fois au même circuit fermé, doit être identiquement nulle. Considérons en second lieu un système fermé de deux circuits, α et β. Nous aurons

$$F(1, 2, \cdots p, \cdots n) = F_\alpha + F_\beta + F_{\alpha\beta}.$$

Supposons que les deux circuits soient fermés et traversés par des courants uniformes. Le premier membre sera égal à 0. Au second membre, F_α aura pour valeur

$$\frac{I_\alpha^2}{2} \int\int \psi\, ds_\alpha\, ds'_\alpha,$$

c'est à dire 0, d'après ce qui précède. De même F_β aura pour valeur:

$$\frac{I_\beta^2}{2} \int\int \psi\, ds_\beta\, ds'_\beta,$$

c'est à dire 0. Enfin $F_{\alpha\beta}$ aura pour valeur:

$$I_\alpha\, I_\beta \int\int \psi\, ds_\alpha\, ds_\beta.$$

On doit donc avoir

$$\iint \psi \, ds_\alpha \, ds_\beta = 0.$$

En résumé, *l'intégrale double*

$$\iint \psi \, ds \, ds',$$

étendue à deux circuits fermés différents ou deux fois au même circuit, est égale à 0.

Soient x_p, y_p, z_p, les coordonnées d'un point d'un élément ds_p; soient x_q, y_q, z_q, les coordonnées d'un point d'un autre élément ds_q. On vérifiera la condition précédente si l'on pose:

$$\psi_{pq} = \frac{\partial^2}{\partial s_p \, \partial s_q} \Psi(x_p, y_p, z_p, x_q, y_q, z_q)$$

Ψ étant une fonction uniforme des six coordonnées $x_p, y_p, z_p, x_q, y_q, z_q$.

La fonction ψ_{pq} doit d'ailleurs être indépendante du système d'axes coordonnés auquel le système est rapporté. Il est aisé d'en conclure que la fonction Ψ doit dépendre exclusivement de la distance r_{pq} du point de coordonnées x_p, y_p, z_p, au point de coordonnées x_q, y_q, z_q. On a donc

$$\begin{aligned}
(3) \qquad F(1, 2, \cdots p, \cdots n) = {} & I_1 I_2 \frac{\partial^2 \Psi(r_{12})}{\partial s_1 \, \partial s_2} ds_1 \, ds_2 \\
& + I_1 I_3 \frac{\partial^2 \Psi(r_{13})}{\partial s_1 \, \partial s_3} ds_1 \, ds_3 + \cdots + I_1 I_n \frac{\partial^2 \Psi(r_{1n})}{\partial s_1 \, \partial s_n} ds_1 \, ds_n \\
& + I_2 I_3 \frac{\partial^2 \Psi(r_{23})}{\partial s_2 \, \partial s_3} ds_2 \, ds_3 + \cdots + I_2 I_n \frac{\partial^2 \Psi(r_{2n})}{\partial s_2 \, \partial s_n} ds_2 \, ds_n \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + I_{n-1} I_n \frac{\partial^2 \Psi(r_{n-1,\, n})}{\partial s_{n-1} \, \partial s_n} ds_{n-1} \, ds_n.
\end{aligned}$$

Il suffira de déterminer la fonction $\Psi(r)$ pour que le Potentiel Thermodynamique soit entièrement connu.

§ II.

Détermination de la Fonction $\Psi(r)$.

Pour déterminer la fonction $\Psi(r)$ nous commencerons par transformer l'intégrale double

$$\iint I\, I' \frac{\partial^2 \Psi(r)}{\partial s\, \partial s'}\, ds\, ds'$$

étendue soit deux fois à un même conducteur fermé ou ouvert AB, soit à deux conducteurs fermés ou ouverts quelconques, AB et $A'B'$.

Nous supposerons que $\Psi(r)$ soit une fonction de r admettant par rapport à r des dérivées première et seconde. Nous supposerons que $\Psi(r)$ et ses deux premières dérivées par rapport à r soient des fonctions continues de r. L'égalité

$$\frac{\partial^2 \Psi(r)}{\partial s\, \partial s'} = \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{d\, \Psi(r)}{dr} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'},$$

qui peut aussi s'écrire, en vertu des égalités (7) de la 1e partie,

$$\frac{\partial^2 \Psi(r)}{\partial s\, \partial s'} = -\frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} \cos\theta \cos\theta' - \frac{1}{r} \frac{d\, \Psi(r)}{dr} \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon,$$

montre alors que $\dfrac{\partial^2 \Psi(r)}{\partial s\, \partial s'}$ sera une fonction continue de s et de s' si aucun des deux conducteurs ne présente de point anguleux, ce que nous supposerons. Enfin nous supposerons que I admet une dérivée par rapport à s et I' une dérivée par rapport à s', ce qui entraîne que I est une fonction continue de s et I' une fonction continue de s'. Les deux dérivées $\dfrac{dI}{ds}$, $\dfrac{dI'}{ds'}$ peuvent n'être pas continues.

Soient I_0 la valeur de I au point A et I_1 la valeur de I au point B; soient ρ'_0 la distance de l'élément ds' au point A et ρ'_1 la distance de l'élément ds' au point B. Nous aurons en intégrant par parties:

$$\int_A^B I \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial s' \partial s} ds = I_1 \frac{\partial \psi(\varrho'_1)}{\partial s'} - I_0 \frac{\partial \psi(\varrho'_0)}{\partial s'} - \int_A^B \frac{dI}{ds} \frac{\partial \psi(r)}{\partial s'} ds$$

et par conséquent

$$\int_A^B \int_{A'}^{B'} I I' \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial s \partial s'} ds\, ds' = I_1 \int_{A'}^{B'} I' \frac{\partial \psi(\varrho'_1)}{\partial s'} ds' - I_0 \int_{A'}^{B'} I' \frac{\partial \psi(\varrho'_0)}{\partial s'} ds'$$

$$- \int_A^B \int_{A'}^{B'} I' \frac{dI}{ds} \frac{\partial \psi(r)}{\partial s'} ds\, ds'.$$

Soient I'_0 la valeur de I' au point A' et I'_1 la valeur de I' au point B'. Nous aurons, en intégrant par parties:

$$\int_{A'}^{B'} I' \frac{\partial \psi(\varrho'_1)}{\partial s'} ds' = I'_1 \psi(\overline{BB'}) - I'_0 \psi(\overline{BA'}) - \int_{A'}^{B'} \psi(\varrho'_1) \frac{dI'}{ds'} ds'.$$

$$\int_{A'}^{B'} I' \frac{\partial \psi(\varrho'_0)}{\partial s'} ds' = I'_1 \psi(\overline{AB'}) - I'_0 \psi(\overline{AA'}) - \int_{A'}^{B'} \psi(\varrho'_1) \frac{dI'}{ds'} ds'.$$

Soient ϱ_0 la distance de l'élément ds au point A' et ϱ_1 la distance de l'élément ds au point B'. Nous aurons

$$\int_{A'}^{B'} I' \frac{\partial \psi(r)}{\partial s'} ds' = I'_1 \psi(\varrho_1) - I'_0 \psi(\varrho_0) - \int_{A'}^{B'} \psi(r) \frac{dI'}{ds'} ds',$$

et par conséquent

$$\int_A^B \int_{A'}^{B'} I' \frac{dI}{ds} \frac{\partial \psi(r)}{\partial s'} ds' = I'_1 \int_A^B \psi(\varrho_1) \frac{dI}{ds} ds - I'_0 \int_A^B \psi(\varrho_0) \frac{dI}{ds} ds$$

$$- \int_A^B \int_{A'}^{B} \psi(r) \frac{dI}{ds} \frac{dI'}{ds'} ds\, ds'.$$

En reunissant tous les résultats que nous venons d'obtenir, nous trouvons

$$4) \qquad \int_A^B \int_{A'}^{B'} I I' \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial s \partial s'} ds\, ds' = \int_A^B \int^{B'} \psi(r) \frac{dI}{ds} \frac{dI'}{ds'} ds\, ds'$$

$$+ I_0 \int_{A'}^{B'} \psi(\varrho'_0) \frac{dI'}{ds'} ds' + I' \int_A^B \psi(\varrho_0) \frac{dI}{ds} ds - I_1 \int_{A'}^{B'} \psi(\varrho'_1) \frac{dI'}{ds} ds'$$

$$- I'_1 \int_A^B \psi(\varrho_1) \frac{dI}{ds} ds$$

$$+ I_0 I'_0 \psi(AA') - I_0 I'_1 \psi(AB') - I_1 I'_0 \psi(BA') + I_1 I'_1 \psi(BB').$$

Supposons maintenant que les deux conducteurs soient traversés par des courants isolément réalisables. Alors chacun de ces deux conducteurs est fermé, ou bien, s'il est ouvert, l'intensité du courant est égale à 0 en ses deux extrémités. Dans ces conditions, il est aisé de voir que l'égalité (4) se réduit à la suivante:

$$(5) \qquad \iint_{A\,A'}^{B\,B'} I\, I' \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial s\, \partial s'} ds\, ds' = \iint_{A\,A'}^{B\,B'} \psi(r) \frac{dI}{ds} \frac{dI'}{ds'} ds\, ds'.$$

C'est sous cette forme que nous aurons à employer cette égalité.

Nous admettrons maintenant que la fonction $\psi(r)$ soit de la forme suivante:

$$(6) \qquad \psi(r) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \cdots + A_n r^n + \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \cdots + \frac{\alpha_p}{r^p}.$$

Nous allons chercher quelles valeurs doivent avoir les coefficients $A_0, A_1, A_2 \ldots A_n, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$.

Envisageons un système formé par un conducteur circulaire de rayon ϱ (fig. 7). L'intensité doit varier d'une manière continue lorsqu'on passe d'un point du cercle à un point voisin; elle doit reprendre la même valeur lorsqu'on revient à son point de départ après avoir parcouru le cercle tout entier; l'intégrale $\int \frac{dI}{ds} ds$, étendue au cercle tout entier, doit donc être égale à 0. Nous partagerons le cercle en deux parties égales par un diamètre, et nous supposerons que, aux points du cercle qui sont symétriques par rapport à ce diamètre, $\frac{dI}{ds}$ ait des valeurs égales et de signe contraire. La condition précédente sera ainsi certainement realisée.

Nous considérerons sur ce cercle deux points M et M'. Au voisinage de ces deux points, nous prendrons deux éléments égaux, ayant pour longueur commune ds. Nous supposerons une transformation élémentaire telle que, dans le premier de ces éléments, $\frac{dI}{ds}$ augmente de $d\left(\frac{dI}{ds}\right)$, tandis que, dans le second, $\frac{dI}{ds}$ diminuera de la même quantité. Cette modification est possible, car l'Intégrale $\int \frac{dI}{ds}\, ds$, étendue au cercle tout entier, restera égale à 0.

Cette modification entraînera un certain travail non compensé, égal, au signe près, à la variation subie par le Potantiel Thermodynamique. La variation du Potentiel Thermodynamique se compose de deux sortes de termes. Les uns nous sont complètement connus; ce sont ceux qui proviennent de la partie du Potentiel Thermodynamique qui précède $F(1, 2, \cdots p, \cdots n)$. Il est inutile de nous occuper de ceux là. Il nous suffit de remarquer que ces termes sont de l'ordre de grandeur de $ds \cdot d\left(\frac{dI}{ds}\right)$. Les autres termes proviennent de la quantité $dF(1, 2, \cdots p, \cdots n)$. D'après les égalités (3) et (5), on a

$$F(1, 2, \cdots p, \cdots n) = \frac{1}{2} \int\int \psi(r)\, \frac{dI}{ds} \frac{dI'}{ds'}\, ds\, ds',$$

l'intégration s'étendant deux fois au cercle tout entier.

On aura alors

$$dF(1, 2, \cdots p, \cdots n) = ds \cdot d\left(\frac{dI}{ds}\right) \left[\int_M \psi(r)\, \frac{dI'}{ds'}\, ds' - \int_{M'} \psi(r)\, \frac{dI'}{ds'}\, ds'\right].$$

Chacune des deux intégrales est étendue au cercle tout entier; mais, dans la première, r désigne la distance d'un élément quelconque ds' du cercle au point M, tandis que dans la seconde r désigne la distance du même élément au point M'.

On peut supposer que le point M soit l'une des extrémités du diamètre MN qui sépare le cercle en deux parties pour lesquelles $\frac{dI}{ds}$ a des valeurs égales et de signe contraire. On voit alors que dans l'intégrale

$$\int_M \psi(r)\, \frac{dI'}{ds'}\, ds'.$$

à tout élément ds' pour lequel r et $\frac{dI'}{ds'}$ ont des valeurs déterminées, correspond un autre élément ds' pour lequel r a la même valeur que pour le premier, tandis que $\frac{dI'}{ds'}$ a la même valeur, mais un signe différent. On a donc, en convenant de placer ainsi le point M,

$$\int_M \psi(r) \frac{dI'}{ds'} ds' = 0,$$

et, par conséquent, quelle que soit la position du point M',

$$dF(1, 2, \cdots p, \cdots n) = - ds \cdot d\left(\frac{dI}{ds}\right) \int_{M'} \psi(r) \frac{dI'}{ds'} ds'.$$

Cette quantité peut s'écrire d'une manière un peu différente.

Soit P le point du cercle où se trouve l'élément ds'; prenons pour variable l'angle θ que forme la droite $M'P$ avec la tangente $M'T$ mené au cercle au point M'. Nous aurons

$$r = 2\varrho \sin \theta,$$

$$ds' = 2\varrho \, d\theta,$$

et, par conséquent,

$$dF(1, 2, \cdots p, \cdots n) = - ds \cdot d\left(\frac{dI}{ds}\right) \int_0^\pi \psi(2\varrho \sin \theta) \frac{dI'}{d\theta} d\theta.$$

Supposons maintenant que le point M' soit l'une des extrémités du diamètre $M'N'$ perpendiculaire à MN. Supposons qu'en deux points du cercle symétriques par rapport à $M'N'$, et correspondant par conséquent à deux valeurs θ et $\pi - \theta$ de l'angle θ, $\frac{dI'}{ds'}$ ait la même valeur, hypothèse qui n'est en rien contradictoire avec celles qui ont déjà été faites. L'égalité

$$\frac{dI'}{ds'} = \frac{1}{2\varrho} \frac{dI'}{d\theta},$$

nous montre qu'en ces deux points $\frac{dI'}{ds}$ aura aussi la même valeur. Alors, moyennant cette hypothèse, nous aurons:

$$dF(1, 2, \cdots p, \cdots n) = - 2ds \, . \, d\left(\frac{dI}{ds}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(2\varrho \sin \theta) \frac{dI'}{d\theta} d\theta.$$

Le travail non compensé produit par la modification considérée doit évidemment être du même ordre que $ds \cdot d\left(\frac{dI}{ds}\right)$. La variation de la somme des termes du Potentiel Thermodynamique qui précèdent $F(1, 2, \cdots p, \cdots n)$ est déjà, comme nous l'avons remarqué, de cet ordre de grandeur. Par conséquent la quantité $dF(1, 2, \cdots p, \cdots n)$ doit être de l'ordre de grandeur de $ds \cdot d\left(\frac{dI}{ds}\right)$. On voit ainsi que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(2\varrho \;\sin\;\theta)\, \frac{d\Gamma}{d\theta}\, d\theta$$

doit être finie, $\frac{d\Gamma}{d\theta}$ ayant des valeurs arbitraires lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, et étant seulement assujetti à avoir des valeurs égales et de signe contraire pour les valeurs de θ équidistantes de $\frac{\pi}{4}$.

De là, on déduit tout d'abord les égalités

$$\alpha_1 = 0, \;\; \alpha_2 = 0, \cdots \alpha_p = 0,$$

qui réduisent $\psi(r)$ à la forme

$$\psi(r) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \cdots + A_n r_n.$$

Revenons à l'étude de la quantité

$$dF(1, 2, \cdots p, \cdots n) = -2\, ds \cdot d\left(\frac{dI}{ds}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(2\varrho \;\sin\;\theta)\, \frac{d\Gamma}{d\theta}\, d\theta.$$

L'égalité

$$\frac{dI}{ds} = \frac{1}{2\varrho}\left(\frac{dI}{d\theta}\right)_0,$$

dans laquelle $\left(\frac{dI}{d\theta}\right)_0$ désigne la valeur que prend $\frac{dI}{d\theta}$ pour $\theta = 0$ donne:

$$dF(1, 2, \cdots p, \cdots n) = -\, ds \cdot d\left(\frac{dI}{d\theta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi(2\varrho \;\sin\;\theta)}{\varrho}\, \frac{d\Gamma}{d\theta}\, d\theta.$$

Pour deux points P et p équidistants du point N, $\frac{d\Gamma}{d\theta}$ a des valeurs égales et de signe contraire. Il est alors aisé de voir que l'on a

$$dF(1, 2, \cdots p, \cdots n) = ds \cdot d\left(\frac{dI}{d\theta}\right)_0 \mathrm{S},$$

S étant défini de la manière suivante:

$$\mathrm{S} = \frac{1}{\varrho}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\Psi(2\varrho\cos\theta) - \Psi(2\varrho\sin\theta)\right]\frac{dI}{d\theta}\,d\theta.$$

En remplaçent $\Psi(r)$ par sa valeur, nous trouvons:

$$\mathrm{S} = 2A_1\int_0^{\frac{\pi}{4}}(Cos\,\theta - Sin\,\theta)\frac{dI}{d\theta}\,d\theta + 4A_2\,\varrho\int_0^{\frac{\pi}{4}}(Cos^2\theta - Sin^2\theta)\frac{dI}{d\theta}\,d\theta$$

$$+ \cdots + 2^n A_n\varrho^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(Cos^n\theta - Sin^n\theta)\frac{dI}{d\theta}\,d\theta.$$

Pour les valeurs de θ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, les valeurs de $\frac{dI}{d\theta}$ sont arbitraires. Supposons les toutes positives et finies; toutes les intégrales qui figurent dans l'expression de S seront positives et finies.

Concevons alors que, en laissant fixe la valeur de $\frac{dI}{d\theta}$ qui correspond à chaque valeur de θ, on fasse croître ϱ au delà de toute limite. Le circuit tendra à devenir un circuit rectiligne et indéfini. La quantité $\frac{dI}{ds'}$, qui est égale à $\frac{1}{2\varrho}\frac{dI}{d\theta}$, tendra vers 0, en sorte que le courant tendra à devenir uniforme. La modification qui consiste à faire varier $\frac{dI}{d\theta}$ de $d\left(\frac{dI}{ds'}\right)_0$ dans l'élément ds situé au point M, et d'une quantité égale et de signe contraire dans un autre élément infiniment éloigné, doit encore engendrer un travail non compensé de l'ordre de $ds\,d\left(\frac{dI}{d\theta}\right)_0$, en sorte que la quantité S ne doit pas croître au delà de toute limite en même temps que ϱ. Ceci nous donne:

$$A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ \cdots A_n = 0,$$

et, par conséquent,

$$\Psi(r) = A_0 + A_1 r.$$

Comme d'ailleurs $\Psi(r)$ ne figure dans les formules que par la combinaison

$$\frac{\partial^2 \Psi(r)}{\partial s \, \partial s'},$$

on peut toujours poser $A_0 = 0$. Si l'on pose enfin

$$A_1 = \frac{AK'}{2},$$

A étant la constante positive qui figure dans l'égalité (1_{bis}), on aura

$$\Psi(r) = \frac{AK'}{2} r, \tag{7}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2 \Psi(r)}{\partial s \, \partial s'} = \frac{A}{r} \left[\frac{K'}{2} \cos(r, ds) \cos(r, ds') - \frac{K'}{2} \cos(ds \,.\, ds') \right].$$

L'égalité (3) nous donnera alors

$$\begin{aligned}
(8) \qquad & F(1, 2, \cdots p, \cdots n) \\
= A \Bigg\{ & \frac{I_1 I_2 \, ds_1 \, ds_2}{r_{12}} \left[\frac{K'}{2} \cos(r_{12}, ds_1) \cos(r_{12}, ds_2) - \frac{K'}{2} \cos(ds_1, ds_2) \right] \\
& + \frac{I_1 I_3 \, ds_1 \, ds_3}{r_{13}} \left[\frac{K'}{2} \cos(r_{13}, ds_1) \cos(r_{13}, ds_3) - \frac{K'}{2} \cos(ds_1, ds_3) \right] \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{I_1 I_n \, ds_1 \, ds_n}{r_{1n}} \left[\frac{K'}{2} \cos(r_{1n}, ds_1) \cos(r_{1n}, ds_n) - \frac{K'}{2} \cos(ds_1, ds_n) \right] \\
& + \frac{I_2 I_3 \, ds_2 \, ds_3}{r_{23}} \left[\frac{K'}{2} \cos(r_{23}, ds_2) \cos(r_{23}, ds_3) - \frac{K'}{2} \cos(ds_2, ds_3) \right] \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{I_{n-1} I_n \, ds_{n-1} \, ds_n}{r_{n-1\,n}} \left[\frac{K'}{2} \cos(r_{n-1\,n}, ds_{n-1}) \cos(r_{n-1\,n}, ds_n) - \frac{K'}{2} \cos(ds_{n-1}, ds_n) \right].
\end{aligned}$$

Cette égalité (8), comme les égalités (1_{bis}), et pour la même raison[1]), n'est valable que pour les valeurs sensibles de r. En nous restreignant à la considération de ces valeurs, et en posant

$$K + K' = \lambda,$$

nous pourrons, en vertu des égalités (1), (1_{bis}) et (8), écrire:

[1]) V. la 1:e Partie de ce Mémoire.

$$
\begin{aligned}
9)\quad H = -A \Bigg\{ & \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r_{12}} \left[\frac{1-\lambda}{2} \cos(r_{12}, ds_1) \cos(r_{12}, ds_2) + \frac{1+\lambda}{2} \cos(ds_1, ds_2) \right] \\
& + \frac{I_1 I_3 ds_1 ds_3}{r_{13}} \left[\frac{1-\lambda}{2} \cos(r_{13}, ds_1) \cos(r_{13}, ds_3) + \frac{1+\lambda}{2} \cos(ds_1, ds_3) \right] \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{I_1 I_n ds_1 ds_n}{r_{1n}} \left[\frac{1-\lambda}{1} \cos(r_{1n}, ds_1) \cos(r_{1n}, ds_n) + \frac{1+\lambda}{2} \cos(ds_1, ds_n) \right] \\
& + \frac{I_2 I_3 ds_2 ds_3}{r_{23}} \left[\frac{1-\lambda}{2} \cos(r_{23}, ds_2) \cos(r_{23}, ds_3) + \frac{1+\lambda}{2} \cos(ds_2, ds_3) \right] \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{I_{n-1} I_n ds_{n-1} ds_n}{r_{n-1\,n}} \left[\frac{1-\lambda}{2} \cos(r_{n-1\,n}, ds_{n-1}) \cos(r_{n-1\,n}, ds_n) \right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. + \frac{1+\lambda}{2} \cos(ds_{n-1}, ds_n) \right] \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

La constante λ n'est plus, comme la constante K, une constante arbitraire. A chaque valeur arbitrairement donnée à K correspond une fonction $F(1, 2, \cdots p, \cdots n)$ différente, ainsi que nous l'avons remarqué, c'est à dire une valeur de K' différente, mais la somme $K + K'$ demeure invariable.

§ III.

Actions Electrodynamique exercées sur un conducteur linéaire quelconque.

Pour déterminer les actions électrodynamiques exercées par un système quelconque de conducteurs linéaires, fermés ou ouverts, traversés par des courants uniformes ou non uniformes, mais dont l'intensité varie d'une manière continue d'un point à un autre, nous n'avons qu'à reprendre des raisonnements analogues à ceux que nous avons exposés dans la première partie; ces raisonnements nous conduiront au résultat suivant.

Soit AB un segment de conducteur qui supporte certaines actions que l'on se propose de déterminer. Ce segment de conducteur est traversé de A en B par un courant dont l'intensité est I au point A, I' au point B, et j en un point quelconque M situé entre A et B. Concevons que l'on déplace ce segment infinement peu par une modification virtuelle, et qu'on l'amène en $A'B'$ (fig. 2). Soit M' le point où vient se placer le point M. Traçons les chemins AA', BB', que les points A et B décrivent dans le déplacement considéré. Dans ce déplacement, les actions électrodynamiques exercées par le système tout entier sur le segment AB effectuent un certaine travail virtuel; ce travail virtuel est égal au signe près au Potentiel Electrodynamique du système sur un circuit fermé composé de la manière suivante:

1° Un courant parcourant le segment $A'B'$ de A' en B', ayant en A' une intensité I, en B' une intensité I', et au point M' une intensité j égale à celle du courant qui passait au point M du conducteur AB.

2° Un courant d'intensité I' parcourant le chemin $B'B$ de B' en B.

3° Un courant parcourant le segment BA de B en A, ayant en B une intensité I', en A une intensité I, et en M une intensité j.

4° Un courant d'intensité I parcourant le chemin AA' de A en A'.

Tel est le théorème général qui permet de déterminer les actions électrodynamiques exercées sur un segment de conducteur par un système de courants quelconques.

Le Potentiel du système sur le circuit fictif considéré se compose d'autant de termes qu'il y a de conducteurs dans le système. Chacun de ces termes représente, au signe près, le travail virtuel des actions électrodynamiques exercées sur le segment de conducteur AB par le conducteur auquel il se rapporte.

Le théorème précédant, appliqué au cas où la longueur du conducteur AB est infiniment petite, permet de déterminer les actions exercées par un courant isolément réalisable quelconque sur un élément de courant quelconque. Nous allons exposer cette détermination.

Le conducteur que traverse le courant agissant est fermé ou ouvert. L'intensité du courant varie d'une manière continue d'un point à un autre de ce conducteur. Si le conducteur est ouvert, l'intensité s'annulle en ses deux extrémités.

Soit ds' un des éléments du circuit agissant; soit $d\sigma$ l'un des éléments du circuit fictif. Soit I' l'intensité du courant qui traverse l'élément ds'. Soit j l'intensité du courant qui traverse l'élément $d\sigma$. Le Potentiel que nous voulons calculer sera une somme de termes de la forme

$$-A\frac{j\,I'\,d\sigma\,ds'}{r}\left[\frac{1-\lambda}{2}\cos(r, d\sigma)\cos(r, ds') + \frac{1+\lambda}{2}\cos(d\sigma, ds')\right].$$

Chacun de ces termes peut être écrit de la manière suivante:

$$10)\qquad -A\,j\,I'\,d\sigma\,ds'\left[\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\cdot\partial s'} + \frac{\cos(d\sigma, ds')}{r}\right].$$

L'action exercée par le courant que nous envisageons sur un élément de courant ds peut toujours se réduire à une force appliquée au milieu de l'élément ds, et à un couple. Trois translations virtuelles nous conduiront à la connaissance des composantes de la force. Trois rotations virtuelles nous donneront la valeur des composantes de l'axe du couple. Commençons par calculer ces dernières.

1° COUPLE.

Soit $AB = ds$ l'élément sur lequel s'exerce l'action. Soit Ω son milieu. Soit I l'intensité au point Ω du courant qui le parcourt de A vers B. Au point A, ce courant a pour intensité $\left(I - \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$; au point B, il a pour intensité $\left(I + \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$. Supposons cet élément rapporté à un système de coordonnées rectangulaires OX, OY, OZ, et désignons par L, M, N, les composantes suivant OX, OY, OZ, de l'axe du couple qui sollicite cet élément lorsqu'on a fait la réduction des forces au point Ω.

Par le point Ω, menons un parallèle ΩZ_1 à OZ. Faisons tourner l'élément AB d'un angle $d\alpha$ autour de ΩZ_1, de manière à l'amener en $A'B'$ (fig. 3). Les actions électrodynamiques exercées par le courant considéré sur l'élément AB effectuent dans ces conditions un travail $Nd\alpha$. Ce travail est égal, au signe près, au Potentiel Electrodynamique du courant considéré sur un circuit fictif composé de la manière suivante:

1° L'élément $A'B'$, parcouru de A' en B' par un courant ayant pour intensité $\left(I - \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$ au point A, I au point Ω, $\left(I + \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$ au point B'.

2° L'élément $B'B$, parcouru de B' en B par un courant d'intensité $\left(I + \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$.

3° L'élément BA, parcouru de B en A par un courant ayant pour intensité $\left(I + \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$ au point B, I au point Ω, $\left(I - \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$ au point A.

4° L'élément AA', parcouru de A en A' par un courant d'intensité $\left(I - \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$.

Désignons par ω l'angle de l'élément AB avec l'élément ds', par r la distance de Ω au milieu de ds'. Le troisième élément BA fournira au Potentiel que nous voulons calculer, conformément à l'égalité (10), un terme ayant pour valeur

$$A\, I\, ds \int I' \left[\frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\cos\omega}{r} \right] ds',$$

l'intégrale s'étendant au circuit agissant.

Pour l'élément $A'B'$, $\frac{\cos\omega}{r}$ doit être remplacé par

$$\frac{\cos\omega}{r} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\cos\omega}{r}\, d\alpha;$$

$\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$, doit être remplacé par

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\, d\alpha.$$

L'élément $A'B'$ fournit alors au Potentiel que nous considérons un terme qui a pour valeur

$$-A\, I\, ds \int I' \left[\frac{1-\lambda}{2} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\, d\alpha \right) + \frac{\cos\omega}{r} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\cos\omega}{r}\, d\alpha \right] ds'.$$

La somme des deux termes fournis au Potentiel par les éléments $A'B'$ et BA a lors pour valeur

$$-A\, I\, ds\, d\alpha \int I' \left(\frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\cos\omega}{r} \right) ds'.$$

Calculons les quantités $\frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\partial^2 r}{ds\, ds'}$, et $\frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\cos\omega}{r}$.

Soient x, y, z, les coordonnées du milieu Ω de l'élément ds, et x', y', z', les coordonnées du milieu de l'éléments ds'. Nous avons:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{x-x'}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r} \frac{dy}{ds} + \frac{z-z'}{r} \frac{dz}{ds}.$$

La quantité $\frac{dz}{ds}$ représent le cosinus de l'angle que AB fait avec l'axe des z. Dans la rotation considérée, cet angle ne varie pas. Il en est de même de r, x, y, z, x', y', z'. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{x-x'}{r} \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r} \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{dy}{ds},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} = \frac{\partial \frac{x'-x}{r}}{\partial s'} \frac{\partial \frac{dx}{ds}}{\partial\alpha} + \frac{\partial \frac{y-y'}{r}}{\partial s'} \frac{\partial \frac{dy}{ds}}{\partial\alpha}.$$

La quantité r ne variant pas, on a

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\cos \omega}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \cos \omega}{\partial \alpha}.$$

La projection du circuit fermé $ABA'B'$ sur la direction de l'élément ds' doit être égale à 0. Or les éléments AA' et $B'B$, qui sont parallèles et de même sens, font avec l'élément ds' un certain angle ω_1. Si nous désignons par $d\sigma$ la longueur de l'un quelconque de ces deux éléments, la somme de leurs projections sur ds' aura poir valeur

$$2 \cos \omega_1 \, d\sigma.$$

D'ailleurs la somme des projections sur l'élément ds' des deux éléments $A'B'$ et BA est

$$\frac{\partial \cos \omega}{\partial \alpha} \, d\alpha \, ds.$$

On a donc

$$2 \cos \omega_1 \, d\sigma + \frac{\partial \cos \omega}{\partial \alpha} \, d\alpha \, ds = 0,$$

ou bien

$$\frac{\partial \cos \omega}{\partial \alpha} = -\, 2 \cos \omega_1 \frac{d\sigma}{d\alpha \, ds}.$$

Mais $d\sigma$ est l'arc qui correspond à l'angle au centre $d\alpha$ dans un cercle qui a pour rayon $\frac{ds}{2} \sin (ds, z)$. On a donc

$$d\sigma = \frac{1}{2} \, ds \, d\alpha \sin (ds, z),$$

et

$$\frac{\partial \cos \omega}{\partial \alpha} = -\cos \omega_1 \sin (ds, z).$$

De tous ces calculs, il résulte que les deux éléments $A'B'$ et BA fournisent au Pontentiel que nous voulons évaleur le terme

$$(11) \quad -A\, I \, ds \, d\alpha \int I' \left\{ \frac{1-\lambda}{2} \left[\frac{\partial \frac{x-x'}{r}}{\partial s'} \frac{\partial \frac{dx}{ds}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \frac{y-y'}{r}}{\partial s'} \frac{\partial \frac{dy}{ds}}{\partial \alpha} \right] - \frac{\cos \omega_1 \sin (ds, z)}{r} \right\} ds'.$$

Calculons maintenant les termes fournis au même Potentiel par les éléments AA' et $B'B$.

L'élément AA' a pour longueur

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, ds\, d\alpha\, sin\,(ds, z).$$

La distance du point A au milieu de l'élément ds' est

$$r - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\, ds.$$

La distance du milieu de élément AA' au milieu de l'élémement ds' est par conséquent

$$r - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\, ds + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\, d\sigma.$$

Il fait avec l'élément ds' l'angle ω_1. Il est traversé de A en A' par un courant d'intensité $I - \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}\, ds$. Il fournit donc au Potentiel le terme suivant:

$$-\frac{A}{2}\left(I - \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}\, ds\right) ds\, sin\,(ds, z)\, d\alpha \int I' \left[\frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial s'}\left(r - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\, ds + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\, d\sigma\right)\right.$$
$$\left. + \frac{cos\,\omega_1}{r - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\, ds + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\, d\sigma}\right] ds'.$$

L'élément $B'B$ fournit de même le terme

$$-\frac{A}{2}\left(I + \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}\, ds\right) ds\, sin\,(ds, z)\, d\alpha \int I' \left[\frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial s'}\left(r + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\, ds + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\, d\sigma\right)\right.$$
$$\left. + \frac{cos\,\omega_1}{r + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\, ds + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\, d\sigma}\right] ds'.$$

La somme de ces deux termes, réduite aux infiniment petits principaux, a pour valeur

$$-A\, I\, ds\, sin\,(ds, z)\, d\alpha \int I' \left[\frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial s'} + \frac{cos\,\omega_1}{r}\right] ds'.$$

La quantité $\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial s'}$ peut être remplacée par $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial\sigma\,\partial s'}$, ϱ désignant la distance du point A au milieu de l'élément ds'. Soient ξ, η, ζ. les coordonnées du point A. Nous aurons

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial \sigma\, \partial s'} = \frac{\partial \dfrac{\xi - x'}{r}}{\partial s'} \frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{\partial \dfrac{\eta - y'}{r}}{\partial s'} \frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{\partial \dfrac{\zeta - z'}{r}}{\partial s'} \frac{d\zeta}{d\sigma}.$$

D'ailleurs, nous avons

$$\xi = x - \frac{1}{2} \frac{dx}{ds} ds,$$

$$\eta = y - \frac{1}{2} \frac{dy}{ds} ds,$$

$$\zeta = z - \frac{1}{2} \frac{dz}{ds} ds.$$

L'élément BB' étant perpendiculaire à l'axe des z, nous avons

$$\frac{d\zeta}{d\sigma} = 0.$$

Les formules précédentes donnent:

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \dfrac{dx}{ds}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\sigma} ds,$$

$$\frac{d\eta}{d\sigma} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \dfrac{dy}{ds}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\sigma} ds,$$

Si l'on remarque enfin que

$$d\sigma = \frac{1}{2} \sin (ds, z)\, d\alpha\, ds,$$

on verra sans peine que

$$\sin (ds, z) \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma\, \partial s'} d\alpha\, ds = -\left[\frac{\partial \dfrac{\xi - x'}{r}}{\partial s'} \frac{\partial \dfrac{d\xi}{ds}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \dfrac{\eta - x'}{r}}{\partial s'} \frac{\partial \dfrac{d\eta}{ds}}{\partial \alpha}\right] d\alpha\, ds$$

$$= -\left[\frac{\partial \dfrac{x - x'}{r}}{\partial s'} \frac{\partial \dfrac{dx}{ds}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \dfrac{y - y'}{r}}{\partial s'} \frac{\partial \dfrac{dy}{ds}}{d\alpha}\right] d\alpha\, ds.$$

Les deux éléments AA' et $B'B$ fournissent donc au Potentiel que nous voulons évaluer le terme

$$(12)\quad A\, I\, ds\, d\alpha \int I' \left\{ \frac{1-\lambda}{2} \left[\frac{\partial \frac{x-x'}{r}}{\partial s'} \frac{\partial \frac{dx}{ds}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \frac{y-y'}{r}}{ds'} \frac{\partial \frac{dy}{ds}}{d\alpha} \right] - \frac{\cos \omega_1 \sin (ds, z)}{r} \right\} ds'.$$

Ce terme est égal au terme (11), mais de signe contraire. On voit donc que le Potentiel d'un courant quelconque sur le circuit fermé $A'B'BAA'$ est égal à 0. Donc le travail virtuel effectué dans une rotation autour de OZ par les actions électrodynamiques exercées par le courant considéré sur l'élément AB est égal à 0. Donc aussi on a

$$N = 0.$$

Un raisonnement analogue donnerait

$$L = 0,$$

$$M = 0.$$

Ainsi *les actions électrodynamiques exercées sur un élément de courant quelconque par un conducteur linéaire quelconque se réduisent à une forme unique appliquée au milieu de l'élément.*

Nous allons maintenant déterminer la grandeur et la direction de cette force.

2° FORCE.

Soient X, Y, Z, les composantes de la force qui agit sur l'élément $AB = ds$, et qui est appliquée en son milieu Ω. Si nous déplaçons l'élément AB (fig. 4) de telle façon que chacun de ses points décrive un chemin de longueur dx parallélement à l'axe des x, le travail virtuel des actions électrodynamiques aura pour valeur Xdx. Ce travail est égal au signe près au Potentiel Electrodynamique du système agissant sur un circuit fermé composé de la manière suivante:

1° L'élément $A'B'$, parcouru de A' en B' par un courant dont l'intensité est I au milieu Ω' de $A'B'$, $\left(I - \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$ en A', $\left(I + \frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$ en B'.

2° L'élément $B'B$, parcouru de B' en B par un courant d'intensité $\left(I+\frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$.

3° L'élément BA, parcouru de B en A par un courant dont l'intensité est I au milieu Ω de BA, $\left(I+\frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$ en B, $\left(I-\frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$ en A.

4° Lélément AA', parcouru de A en A' par un courant d'intensité $\left(I-\frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)$.

Soit r la distance du point Ω au milieu de l'élément ds'; soit ω l'angle de l'élément AB avec l'élément ds'. Le troisième élément, l'élément BA, fournit au Potentiel cherché un terme qui a pour valeur:

$$A\, I\, ds \int I' \left[\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\cos\omega}{r}\right] ds'.$$

De même, le premier élément, $A'B'$, fournit à ce Potentiel le terme

$$-A\, I\, ds \int I' \left[\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\, \partial s'}\left(r+\frac{\partial r}{\partial x}dx\right) + \frac{\cos\omega}{r} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos\omega}{r}dx\right] ds'.$$

La somme de ces deux termes a pour valeur

$$-A\, I\, ds\, dx \int I' \left(\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial^2 \frac{\partial r}{\partial x}}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\partial \frac{\cos\omega}{r}}{\partial x}\right) ds'.$$

Si l'on remarquer que l'angle ω ne varie pas lorsque l'élement AB vient dans la position $A'B'$, ceci devient

$$13) \qquad -I\, ds\, dx \int I' \left(\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial^2 \frac{\partial r}{\partial x}}{\partial s\, \partial s'} + \cos\omega\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) ds'.$$

L'élément AA' a pour longueur dx. Il est traversé par un courant d'intensité $\left(I-\frac{1}{2}\frac{dI}{ds}\right)$. Désignons par ϱ la distance du milieu de AA' au milieu de ds', par ω_1 l'angle que AA' fait avec ds'. L'élément AA' fournit au Potentiel cherché le terme

$$-A\left(I-\frac{1}{2}\frac{dI}{ds}ds\right)dx \int I'\left(\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial s'\, \partial x} + \frac{\cos\omega_1}{\varrho}\right) ds'.$$

La distance du milieu Ω de l'élément $B'B$ au milieu de l'élément ds' est

$\varrho + \frac{\partial r}{\partial s} ds$. Cet élément fait avec ds' un angle supplémentaire de l'angle ω_1. Il est traversé B' en B par un courant d'intensité $\left(I + \frac{1}{2}\frac{dI}{ds} ds\right)$. Il fournit au Potentiel cherché le terme

$$A\left(I + \frac{1}{2}\frac{dI}{ds} ds\right) dx \int I' \left(\frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial s' \, \partial x} + \frac{\cos\omega_1}{\varrho}\right) ds'$$

$$+ A\left(I + \frac{1}{2}\frac{dI}{ds} ds\right) dx \, ds \int I' \left(\frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial^2}{\partial s' \, \partial x} \frac{\partial r}{\partial s} + \cos\omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right) ds'.$$

La somme des termes fournis au Potentiel par les deux éléments AA' et BB' est, en se limitant aux infiniment petits principaux,

$$14) \qquad A\, I\, ds\, dx \int I' \left(\frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial s'} \frac{\partial r}{\partial x} + \cos\omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right) ds'$$

$$+ A \frac{dI}{ds} ds\, dx \int I' \left(\frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial^2 r}{ds' \, dx} + \frac{\cos\omega_1}{r}\right) ds'.$$

La somme des quantités (13) et (14):

$$- A\, I\, ds\, dx \int I' \left(\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \cos\omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right) ds'$$

$$+ A \frac{dI}{ds} ds\, dx \int I' \left(\frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial s' \, \partial x} + \frac{\cos\omega_1}{r}\right) ds'$$

nous donne le Potentiel électrodynamique du circuit agissant sur le circuit $A'B'BAA'$.

Remarquons maintenant que nous avons

$$\cos\omega_1 = \frac{dx}{ds};$$

que nous avons d'autre part

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x - x'}{r},$$

en sorte que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s' \, \partial x} = -\frac{1}{r}\frac{dx'}{ds'} + (x - x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'},$$

et nous pourrons écrire de la manière suivante l'expression du Potentiel du système agissant sur lé circuit $A'B'BAA'$:

$$- A\, I\, ds\, dx \int I' \left(\cos\omega\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right) ds'$$

$$+ A \frac{dI}{ds} ds\, dx \int I' \left[\frac{1+\lambda}{2r} \frac{dx'}{ds'} + \frac{1-\lambda}{2} (x - x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\right] ds'.$$

Cette quantité est égale à $-Xdx$. La valeur de X nous est donc connue. Un calcul analogue donne les valeurs de Y et de Z, est c'est ainsi que l'on obtient les formules suivantes:

$$19) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= A\, I\, ds \int I' \left(\cos\omega\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{dx} - \frac{dx'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right) ds' \\ &\quad - A \frac{dI}{ds} ds \int I' \left[\frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dx'}{ds'}}{r} + \frac{1-\lambda}{2} (x - x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\right] ds', \\ Y &= A\, I\, ds \int I' \left(\cos\omega\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{dy'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right) ds' \\ &\quad - A \frac{dI}{ds} ds \int I' \left[\frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dy'}{ds'}}{r} + \frac{1-\lambda}{2} (y - y') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\right] ds', \\ Z &= A\, I\, ds \int I' \left(\cos\omega\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{dz'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right] ds' \\ &\quad - A \frac{dI}{ds} ds \int I' \left[\frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dz'}{ds'}}{r} + \frac{1-\lambda}{2} (z - z') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\right] ds'. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les formules qui font connaître l'action exercée par un conducteur linéaire quelconque sur un élément de courant quelconque.

§ IV.

Comparaison des Formules précédentes avec les autres lois de l'Electrodynamique.

Supposons tout d'abord que l'élément sur lequel agissent les forces données par les formules (15) appartienne à un courant uniforme. Dans ce cas, on a $\frac{dI}{ds} = 0$, et les formules (15) prennent la forme plus simple:

$$16)\qquad \begin{cases} X_1 = A\ I\, ds \int I' \left(\cos\omega\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right) ds', \\ Y_1 = A\ I\, ds \int I' \left(\cos\omega\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{dy'}{ds'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right) ds', \\ Z_1 = A\ I\, ds \int I' \left(\cos\omega\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{dz'}{ds'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right) ds'. \end{cases}$$

Ce sont les formules auxquelles conduirait la loi de Grassmann. En effet la loi de Grassmann consiste à supposer que l'action exercée par l'élément ds' sur l'élément ds se réduit à une force appliquée au milieu de l'élément ds et ayant pour composantes:

$$17)\qquad \begin{cases} \xi = A\ I\ I'\ ds\, ds' \left(\cos\omega\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right), \\ \eta = A\ I\ I'\ ds\, ds' \left(\cos\omega\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{dy'}{ds'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right), \\ \zeta = A\ I\ I'\ ds\, ds' \left(\cos\omega\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{dz'}{ds'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right). \end{cases}$$

La loi de Grassmann représente donc exactement l'action d'un courant linéaire quelconque sur un élément de corrant uniforme.

La loi d'Ampère conduit au même résultat que la loi de Grassmann pour l'action d'un courant uniforme sur un élément de courant. Voyons si la loi d'Ampère peut être substituée à la loi de Grassmann ou à la loi formulée dans ce Mémoire, lorsque le courant agissant est quelconque.

D'après la loi d'Ampère, l'action exercée par l'élément ds' sur l'élément ds est un force répulsive, dirigée suivant la droite qui joint les deux éléments, et ayant pour valeur

$$R = A\, I\, I'\, ds\, ds' \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} \right).$$

Si l'on remarque que les cosinus des angles que la direction de cette force fait avec les axes de coordonnées ont pour valeur

$$\frac{x - x'}{r}, \quad \frac{y - y'}{r}, \quad \frac{z - z'}{r},$$

on voit sans peine que cette force admet pour composantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi' &= A\, I\, I'\, ds\, ds' \left[\frac{x - x'}{r^3} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{2\,(x - x')}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} \right], \\ \eta' &= A\, I\, I'\, ds\, ds' \left[\frac{y - y'}{r^3} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{2\,(y - y')}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} \right], \\ \zeta' &= A\, I\, I'\, ds\, ds' \left[\frac{z - z'}{r^3} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{2\,(z - z')}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} \right]. \end{aligned} \right.$$

L'égalité

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{\cos \omega}{r}$$

permet d'écrire:

$$18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi' &= A\, I\, I'\, ds\, ds' \left[\frac{x - x'}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} - \frac{x - x'}{r^3} \cos \omega \right], \\ \eta' &= A\, I\, I'\, ds\, ds' \left[\frac{y - y'}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} \quad \frac{y - y'}{r^3} \cos \omega \right], \\ \zeta' &= A\, I\, I'\, ds\, ds' \left[\frac{z - z'}{r^2} \frac{\partial^0 r}{\partial s\, \partial s'} - \frac{z - z'}{r^3} \cos \omega \right]. \end{aligned} \right.$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$\frac{x - x'}{r^3} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

$$\frac{y - y'}{r^3} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y},$$

$$\frac{z - z'}{r^3} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

et que, d'autre part,

$$\frac{\partial}{\partial s'} \left[(x - x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} - \frac{x - x'}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'},$$

$$\frac{\partial}{\partial s'} \left[(y - y') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dy'}{ds'} - \frac{y - y'}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'},$$

$$\frac{\partial}{\partial s'} \left[(z - z') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dz'}{ds'} - \frac{z - z'}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'},$$

et nous pourrons écrire:

$$(18_{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi' &= A \, I \, I' \, ds \, ds' \left\{ \cos \omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x - x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \right\}, \\ \eta' &= A \, I \, I' \, ds \, ds' \left\{ \cos \omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{dy'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s'} \left[(y - y') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \right\}, \\ \zeta' &= A \, I \, I' \, ds \, ds' \left\{ \cos \omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{dz'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s'} \left[(z - z') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

Si l'on compare les égalités (17) et (18_{bis}) on voit que l'action excercée par un courant quelconque, auquel appartient l'élément ds', sur l'élément ds, en vertu de la loi de Grassmann, s'obtient en adjoignant à l'action donnée par la loi d'Ampère une force dont les composantes sont:

$$\left\{ \begin{aligned} \Xi &= A \, I \, ds \int I' \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x - x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] ds', \\ H &= A \, I \, ds \int I' \frac{\partial}{\partial s'} \left[(y - y') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] ds', \\ Z &= A \, I \, ds \int I' \frac{\partial}{\partial s'} \left[(z - z') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] ds'. \end{aligned} \right.$$

Une intégration par parties donne:

$$\int I' \frac{\partial}{\partial s'}\left[(x-x')\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right] ds' = \left[I'(x-x')\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right]_0^1 - \int \frac{dI'}{ds'}(x-x')\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\, ds',$$

Mais, ou bien le courant agissant est fermé, ou bien, s'il est ouvert, l'intensité du courant qui le traverse s'annulle aux deux extrémités. On a donc

$$\left[I'(x-x')\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\right]_0^1 = 0,$$

et par conséquent:

$$19)\quad \begin{cases} \Xi = -A\, I\, ds \displaystyle\int \frac{dI'}{ds'}(x-x')\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\, ds', \\ H = -A\, I\, ds \displaystyle\int \frac{dI'}{ds'}(y-y')\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\, ds', \\ Z = -A\, I\, ds \displaystyle\int \frac{dI}{ds'}(z-z')\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\, ds'. \end{cases}$$

Si le courant agissant est un courant fermé et uniforme, on a

$$\frac{dI'}{ds'} = 0,$$

et par conséquent

$$\Xi = 0, \quad H = 0, \quad Z = 0.$$

La loi d'Ampère et la loi de Grassmann sont alors équivalentes. Mais si le courant agissant n'est pas uniforme, les quantités Ξ, H, Z, ne sont pas nulles en général, et les deux lois dont il s'agit ne sont plus équivalentes.

Supposons maintenant que l'élément ds sur lequel s'exerce l'action électrodynamique ne soit plus uniforme. A la force dont les composantes sont données par les égalités (16), il faudra joindre une force ayant pour composantes:

$$20)\quad \begin{cases} X_2 = -A \dfrac{dI}{ds}\, ds \displaystyle\int I' \left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\frac{dx'}{ds'}}{r} + \frac{1-\lambda}{2}(x-x')\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\right] ds', \\ Y_2 = -A \dfrac{dI}{ds}\, ds \displaystyle\int I' \left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\frac{dy'}{ds'}}{r} + \frac{1-\lambda}{2}(y-y')\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\right] ds', \\ Z_2 = -A \dfrac{dI}{ds}\, ds \displaystyle\int I' \left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\frac{dz'}{ds'}}{r} + \frac{1-\lambda}{2}(z-z')\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\right] ds'. \end{cases}$$

Cette nouvelle force dépend de la constante inconnue λ. Il est facile de voir que, quelle que soit la valeur de cette constante, la force dont il s'agit ne s'évanouit pas en général; il suffit évidemment, pour justifier cette proposition, de démontrer qu'elle ne s'évanouit même pas lorsque le courant agissant est uniforme.

On a, d'une manière générale,

$$\frac{1+\lambda}{2}\frac{\frac{dx'}{ds'}}{r}+\frac{1-\lambda}{2}(x-x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}=\frac{1+\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{x'-x}{r}\right)+(x-x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}.$$

On peut donc écrire:

$$X_2=-A\frac{dI}{ds}ds\int\frac{1+\lambda}{2}I'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{x'-x}{r}\right)ds'-A\frac{dI}{ds}ds\int I'(x-x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}ds'.$$

Une intégration par parties donne:

$$\int I'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{x'-x}{r}\right)ds'=\left[I'\frac{x'-x}{r}\right]_0^1-\int\frac{x'-x}{r}\frac{dI'}{ds'}ds'.$$

Le courant agissant est fermé, ou bien, s'il est ouvert, l'intensité du courant qui le traverse s'annulle aux deux extrémités. On a donc

$$\left[I'\frac{x'-x}{r}\right]_0^1=0,$$

et, par conséquent,

$$\int I'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{x'-x}{r}\right)ds'=-\int\frac{x'-x}{r}\frac{dI'}{ds'}ds'.$$

En reportant ce résultat dans l'epression de X_2, et en faisant un calcul analogue sur Y_2 et sur Z_2, on trouve:

$$(20_{bis})\quad\left\{\begin{aligned}X_2&=A\frac{dI}{ds}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)ds\int\frac{x'-x}{r}\frac{dI'}{ds'}ds'+A\frac{dI}{ds}ds\int I'(x'-x)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}ds',\\Y_2&=A\frac{dI}{ds}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)ds\int\frac{y'-y}{r}\frac{dI'}{ds'}ds'+A\frac{dI}{ds}ds\int I'(y'-y)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}ds',\\Z_2&=A\frac{dI}{ds}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)ds\int\frac{z'-z}{r}\frac{dI'}{ds'}ds'+A\frac{dI}{ds}ds\int I'(z'-z)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}ds'.\end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier où le courant agissant est un courant fermé et uniforme, on a $\frac{dI'}{ds'} = 0$, et les formules (20_{bis}) deviennent

$$
(21) \quad \begin{cases}
X_2' = A\, I' \dfrac{dI}{ds}\, ds \displaystyle\int (x' - x) \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\, ds', \\[2ex]
Y_2' = A\, I' \dfrac{dI}{ds}\, ds \displaystyle\int (y' - y) \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\, ds', \\[2ex]
Z_2' = A\, I' \dfrac{dI}{ds}\, ds \displaystyle\int (z' - z) \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\, ds'.
\end{cases}
$$

Les quantités qui figurent sous le signe $\int$ ne sont pas de la forme

$$\frac{\partial U}{\partial s'}\, ds',$$

U étant fonction uniforme des coordonnées de l'élément ds'. Les quantités X_2', Y_2', Z_2', ne peuvent donc s'évanouir que pour certaines formes particulières du circuit agissant. Elles ne peuvent être égales à 0 en général.

Des calculs précédents, nous pouvons déduire les conséquences suivantes:

La loi de GRASSMANN *est applicable à l'action d'un circuit quelconque sur un élément de courant uniforme. Elle n'est pas applicable à l'action d'un circuit même fermé et uniforme sur un élément de courant quelconque. La loi d'*AMPÈRE *n'est applicable qu'à l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant uniforme.*

L'examen des formules (16) et (21) conduit encore à une autre conséquence intéressante: *La valeur de la constante λ n'influe ni sur l'action exercée par un courant quelconque sur un élément de courant uniforme, ni sur l'action exercée par un courant fermé et uniforme sur un élément de courant quelconque. Elle n'influe que sur l'action exercée par un courant non uniforme sur un élément de courant non uniforme.*

Mais les calculs précédents conduisent à une autre conséquence bien plus importante. Si l'on réunit les résultats que renferment les formules (15), (16), (18), (19), (20) et (20_{bis}) on voit sans peine que l'on peut écrire les expressions de X, Y, Z, de la manière suivante:

$$
22)\quad \left\{
\begin{aligned}
X = & -A\, I\, ds \int I' \left[\frac{x'-x}{r^2}\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} - \frac{x'-x}{r^3}\cos\omega\right] ds' + A\, I\, ds \int \frac{dI'}{ds'}\,(x'-x)\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\, ds' \\
& + A\,\frac{dI}{ds}\, ds \int I'\,(x'-x)\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\, ds' + A\,\frac{1+\lambda}{2}\,\frac{dI}{ds}\, ds \int \frac{x'-x}{r}\,\frac{dI'}{ds'}\, ds', \\
Y = & -A\, I\, ds \int I' \left[\frac{y'-y}{r^2}\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} - \frac{y'-y}{r^3}\cos\omega\right] ds' + A\, I\, ds \int \frac{dI'}{ds'}\,(y'-y)\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\, ds' \\
& + A\,\frac{dI}{ds}\, ds \int I'\,(y'-y)\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\, ds' + A\,\frac{1+\lambda}{2}\,\frac{dI}{ds}\, ds \int \frac{y'-y}{r}\,\frac{dI'}{ds'}\, ds', \\
Z = & -A\, I\, ds \int I' \left[\frac{z'-z}{r^2}\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} - \frac{z'-z}{r^3}\cos\omega\right] ds' + A\, I\, ds \int \frac{dI'}{ds'}\,(z'-z)\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\, ds' \\
& + A\,\frac{dI}{ds}\, ds \int I'\,(z'-z)\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\, ds' + A\,\frac{1+\lambda}{2}\,\frac{dI}{ds}\, ds \int \frac{z'-z}{r}\,\frac{dI'}{ds'}\, ds'.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
23)\qquad R = I\, I' \left[\frac{\cos\omega}{r^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right] - \frac{A}{r}\left[I\,\frac{dI'}{ds'}\,\frac{\partial r}{\partial s} + I'\,\frac{dI}{ds}\,\frac{\partial r}{\partial s'}\right]
$$
$$
+ A\,\frac{1+\lambda}{2}\,\frac{dI}{ds}\,\frac{dI'}{ds'},
$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$
23_{bis})\quad R = \frac{A\, I\, I'}{r^2}\,(2\cos\omega - \cos\theta\cos\theta') + \frac{A}{r}\left(I\,\frac{dI'}{ds'}\cos\theta - I'\,\frac{dI}{ds}\cos\theta'\right)
$$
$$
+ A\,\frac{1+\lambda}{2}\,\frac{dI}{ds}\,\frac{dI'}{ds'}.
$$

Nous verrons sans peine que les formules (22) peuvent s'écrire:

$$
24)\qquad \left\{
\begin{aligned}
X &= ds \int \frac{x'-x}{r}\, R\, ds', \\
Y &= ds \int \frac{y'-y}{r}\, R\, ds', \\
Z &= ds \int \frac{z'-z}{r}\, R\, ds'.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules sont celles auxquelles on serait conduit si l'on supposait que l'élément ds' exerce sur l'élément ds une action attractive, dirigée suivant la droite qui joint les milieux des deux éléments, et ayant pour valeur $R\,ds\,ds'$. L'expression de R donnée par l'égalité (23_{bis}) montre d'ailleurs que l'action ainsi exercée par l'élément ds' sur l'élément ds serait égale et directement opposée à l'action exercée par l'élément ds sur l'élément ds'. Par conséquent, *il est possible de ramener l'action d'un courant quelconque sur un élément de courant quelconque à des actions mutuelles des éléments de courant les uns sur les autres, ces actions vérifiait le principe de l'égalité de l'action et de la réaction.*

L'action élémentaire dont on obtient ainsi la formule ne se réduit à l'action donnée par la loi d'Ampère que si les deux éléments agissants appartiennent l'un et l'autre à un courant uniforme.

Les formules (23) et (23_{bis}) nous montrent que, dans le cas général où chacun des deux éléments appartient à un courant non uniforme, l'expression de leur action mutuelle renferme un terme indépendant de la distance des des deux éléments:

$$A\,\frac{1+\lambda}{2}\,\frac{dI}{ds}\,\frac{dI'}{ds'}\,ds\,ds'.$$

C'est là un résultat paradoxal qui a son correspondant dans la théorie des actions électrodynamiques proposée par M. Helmholtz. Ce paradoxe deviendrait une absurdité si l'action mutuelle de deux éléments de courant devait être regardée comme une réalité physique. Mais, ainsi que nous avons déjà eu occasion de le remarquer à plusieurs reprises, l'action mutuelle de deux éléments de courant doit être considérée comme une pure abstraction mathématique. Il n'est donc nullement étonnant que les formules mêmes par lesquelles il serait possible de rèprésenter l'action mutuelle de deux éléments de courant portent la trace de l'impossibilité physique impliquée dans la notion même de cette action.

La seule action réalisable au point de vue physique étant l'action exercée sur un élément de courant quelconque par un courant dont l'intensité varie d'une manière continue d'un point de l'autre du conducteur, et s'annulle aux deux extrémités de ce dernier dans le cas où il est ouvert, il faut et il suffit, pour que le paradoxe présenté par l'action élémentaire indépendante de la distance ne constitue pas une absurdité, que l'action d'un courant réalisable sur un élément de courant ne renferme plus que des termes qui tendent vers 0 lorsque la distance du courant à l'élément croît au delà de toute limite. Or il est aisé de vérifier qu'il en est ainsi.

Admettons en effet que chacun des éléments ds' d'un courant réalisable exerce sur un élément de courant ds une action dirigée suivant la droite qui joint un point de ds à un point de ds' et ayant pour valeur

$$F = A\frac{1+\lambda}{2}\frac{dI}{ds}\frac{dI'}{ds'}\,ds\,ds'.$$

L'action du courant réalisable sur l'élément ds se réduit à une force appliquée à cet élément ds et ayant pour composantes:

$$\left\{\begin{aligned} X &= A\frac{1+\lambda}{2}\frac{dI}{ds}ds\int\frac{x'-x}{r}\frac{dI'}{ds'}ds',\\ Y &= A\frac{1+\lambda}{2}\frac{dI}{ds}ds\int\frac{y'-y}{r}\frac{dI'}{ds'}ds',\\ Z &= A\frac{1+\lambda}{2}\frac{dI}{ds}ds\int\frac{z'-z}{r}\frac{dI'}{ds'}ds'.\end{aligned}\right.$$

Mais on a

$$\int\frac{x'-x}{r}\frac{dI'}{ds'}ds' = \left[\frac{x'-x}{r}I'\right]_0^1 - \int I'\left[\frac{1}{r}\frac{dx'}{ds'} - \frac{x'-x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'}\right]ds'.$$

Or, si le courant agissant est fermé, la quantité $\frac{x'-x}{r}I'$ a la même valeur aux deux limites de l'intégration. S'il est ouvert, I' s'annulle aux deux limites de l'intégration. Dans tous les cas

$$\left[\frac{x'-x}{r}I'\right]_0^1 = 0,$$

et l'on a

$$\left\{\begin{aligned} X &= -A\frac{1+\lambda}{2}\frac{dI}{ds}ds\int I'\left[\frac{1}{r}\frac{dx'}{ds'} - \frac{x'-x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'}\right]ds',\\ Y &= -A\frac{1+\lambda}{2}\frac{dI}{ds}ds\int I'\left[\frac{1}{r}\frac{dy'}{ds'} - \frac{y'-y}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'}\right]ds',\\ Z &= -A\frac{1+\lambda}{2}\frac{dI}{ds}ds\int I'\left[\frac{1}{r}\frac{dz'}{ds'} - \frac{z'-z}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'}\right]ds'.\end{aligned}\right.$$

On voit alors que les quantités X, Y, Z, tendent vers 0 lorsque la distance de l'élément ds au courant agissant augmente au delà de toute limite.

Le terme indépendant de la distance que renferme l'expression de R ne conduit donc à aucune absurdité. Toutefois, s'il était possible de trouver une expression telle pour l'action réciproque de deux éléments de courant que cette action vérifie la loi de l'égalité de l'action et de la réaction et fût débarrassée de tout terme indépendant de la distance mutuelle des deux éléments, une telle expression serait évidemment préférable à celle qui est donnée par l'égalité (23). Par conséquent, nous sommes amenés à nous poser le problème suivant: connaissant l'action qu'un courant réalisable quelconque exerce sur un élément de courant ds, peut on, de plus d'une manière, ramener cette action à des actions exercées par chacun des éléments ds' du courant agissant sur l'élément ds et dirigées chacune suivant la droite qui joint un point de l'élément ds à un point de l'élément ds'?

Gauss[1]) a déjà répondu par la négative à cette question dans le cas où le courant agissant est fermé et uniforme et où l'élément ds appartient à un courant uniforme. Il est aisé d'étendre à tous les cas possibles cette conclusion de Gauss[2]).

Supposons qu'il existe deux solutions distinctes du problème qui nous occupe. Soient

$$\mathcal{X}\, ds\, ds', \quad \mathcal{Y}\, ds\, ds', \quad \mathcal{Z}\, ds\, ds',$$

les composantes de l'action exercée par l'élément ds' sur l'élément ds lorsqu'on adopte la première solution, et

$$\mathcal{X}_1\, ds\, ds', \quad \mathcal{Y}_1\, ds\, ds', \quad \mathcal{Z}_1\, ds\, ds',$$

les composantes de la même action lorsqu'on adopte la seconde solution. Soit l la longueur du courant agissant que nous supposerons fermé. Nous devons avoir

$$\int_{s'=0}^{s'=l} \mathcal{X}\, ds' = \int_{s'=0}^{s'=l} \mathcal{X}_1\, ds',$$

$$\int_{s'=0}^{s'=l} \mathcal{Y}\, ds' = \int_{s'=0}^{s'=l} \mathcal{Y}_1\, ds',$$

$$\int_{s'=0}^{s'=l} \mathcal{Z}\, ds' = \int_{s'=0}^{s'=l} \mathcal{Z}_1\, ds',$$

---

[1]) Gauss' Werke, Bd. V. p. 628.

[2]) La démonstration suivante n'est que la généralisation d'une démonstration déjà publiée de la Proposition de Gauss. (P. Duhem, *Sur la Loi d'Ampère*. Journal de Physique pure et appliquée.

égalités qui expriment que les deux solutions conduisent au même résultat lorsqu'on les emploie au calcul de l'action d'un courant fermé sur un élément de courant. La théorie des intégrales curvilignes montre que ces égalités sont équivalentes aux suivantes:

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \mathscr{X}\, ds' &= \mathscr{X}_1\, ds' + d\mathscr{F}\,(I', x', y', z'),\\ \mathscr{Y}\, ds' &= \mathscr{Y}_1\, ds' + d\mathscr{G}\,(I', x', y', z'),\\ \mathscr{Z}\, ds' &= \mathscr{Z}_1\, ds' + d\mathscr{H}(I', x', y', z'). \end{aligned}\right.$$

$\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}$, étant trois fonctions uniformes, finies et continues des variables $I', x', y'\, z'$, et le symbole d désignant une différentielle totale par rapport à ces quatre variables.

Si, dans l'une comme dans l'autre solution, l'action de l'élément ds' sur l'élément ds est dirigée suivant la droite qui joint ces deux éléments, on aura

$$\left\{\begin{aligned} (y'-y)\,\mathscr{Z} - (z'-z)\,\mathscr{Y} &= 0,\\ (z'-z)\,\mathscr{X} - (x'-x)\,\mathscr{Z} &= 0,\\ (x'-x)\,\mathscr{Y} - (y'-y)\,\mathscr{X} &= 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} (y'-y)\,\mathscr{Z}_1 - (z'-z)\,\mathscr{Y}_1 &= 0,\\ (z'-z)\,\mathscr{X}_1 - (x'-x)\,\mathscr{Z}_1 &= 0,\\ (x'-x)\,\mathscr{Y}_1 - (y'-y)\,\mathscr{X}_1 &= 0. \end{aligned}\right.$$

et par conséquent, en vertu des égalités (25),

$$\left\{\begin{aligned} (y'-y)\, d\mathscr{H}\,(I', x', y', z') - (z'-z)\, d\mathscr{G}\,(I', x', y', z') &= 0,\\ (z'-z)\, d\mathscr{F}\,(I', x', y', z') - (x'-x)\, d\mathscr{H}\,(I', x', y', z') &= 0,\\ (x'-x)\, d\mathscr{G}\,(I', x', y', z') - (y'-y)\, d\mathscr{F}\,(I', x', y', z') &= 0. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned} F\,(I', x', y', z') &= (y'-y)\ \mathscr{H}(I', x', y', z') - (z'-z)\ \mathscr{G}\,(I', x', y', z'),\\ G\,(I', x', y', z') &= (z'-z)\ \mathscr{F}\,(I', x', y', z') - (x'-x)\ \mathscr{H}(I', x', y', z'),\\ H\,(I', x', y', z') &= (x'-x)\ \mathscr{G}\,(I', x', y', z') - (y'-y)\ \mathscr{F}\,(I', x', y', z'). \end{aligned}\right.$$

Les égalités précédentes pourront s'écrire:

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \mathscr{H}(I', x', y', z')\, dy' - \mathscr{G}\,(I', x', y', z')\, dz' &= dF\,(I', x', y', z'),\\ \mathscr{F}\,(I', x', y', z')\, dz' - \mathscr{H}(I', x', y', z')\, dx' &= dG\,(I', x', y', z'),\\ \mathscr{G}\,(I', x', y', z')\, dx' - \mathscr{F}\,(I', x', y', z')\, dy' &= dH\,(I', x', y', z'). \end{aligned}\right.$$

Examinons la première de ces égalités. Le premier membre ne renferme ni terme en dx', ni terme en dI'. La fonction F ne dépend donc ni de I', ni de x'. Comme d'ailleurs cette égalité peut ainsi s'écrire:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad \mathcal{G} = -\frac{\partial F}{\partial z'},$$

on voit que les fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ ne dépendent non plus ni de x' ni de I'. En raisonnant de même sur les deux autres égalités, on arrive aux conclusions suivantes:

$\mathcal{F}$ est une fonction de la seule variable x',

$\mathcal{G}$ est une fonction de la seule variable y',

$\mathcal{H}$ est une fonction de la seule variable z'.

Ecrivons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les premiers membres des égalités (26) soient des différentielles totales. Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathcal{H}}{dz'} + \frac{d\mathcal{G}}{dy'} = 0, \\ &\frac{d\mathcal{F}}{dx'} + \frac{d\mathcal{H}}{dz'} = 0, \\ &\frac{d\mathcal{G}}{dy'} + \frac{d\mathcal{F}}{dx'} = 0. \end{aligned}\right.$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathcal{F}}{dx'} = 0, \\ &\frac{d\mathcal{G}}{dy'} = 0, \\ &\frac{d\mathcal{H}}{dz'} = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit alors que les trois quantités $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, sont des quantités constantes, et si l'on se reporte aux égalités (25), on trouve:

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{X} &= \mathcal{X}_1, \\ \mathcal{Y} &= \mathcal{Y}_1, \\ \mathcal{Z} &= \mathcal{Z}_1. \end{aligned}\right.$$

Ainsi *il n'existe qu'une manière de ramener l'action exercée par un courant réalisable quelconque sur un élément de courant quelconque à des actions dont chacune s'exerce entre deux éléments de courant et soit dirigée suivant la droite* *qui joint les deux éléments.* Ce mode de réduction unique est alors nécessairement représenté par l'égalité (23).

M. Le Cordier[1]) a donné un théorème analogue à celui de Gauss, et susceptible de s'énoncer de la manière suivante: si l'on suppose que les actions mutuelles de deux courants fermés et uniformes admettent un Potentiel identique à celui auquel conduit la loi d'Ampère, et si l'on suppose en outre que l'action exercée par un courant fermé et uniforme sur un élément de courant uniforme se réduise à une force appliquée au milieu de cet élément, cette force est nécessairement égale à celle que donne la loi d'Ampère.

On peut généraliser ce théorème de M. Le Cordier et l'énoncer sous la forme suivante:

Si l'on connaît le Potentiel mutuel de deux courants réalisables quelconques et si l'on sait en outre que l'action d'un courant réalisable quelconque sur un élément de courant quelconque se réduit à une force appliquée au milieu de cet élément, cette force est entièrement déterminée.

Supposons en effet que cette force soit susceptible de deux déterminations. L'une de ces déterminations se déduirait de l'autre par l'application à l'élément considéré ds d'une force dont les projections sur les trois axes auraient pour valeur

$$Xds,$$
$$Yds,$$
$$Zds.$$

Envisageons toutes les forces de cette espèce appliquées au courant auquel appartient l'élément ds. Elles ont un Potentiel identiquement nul. Elles se font donc équilibre d'elles mêmes sur le conducteur que traverse ce courant. Supposons ce conducteur fermé, et désignons par l sa longueur. Nous devrons avoir:

$$\int_{s=0}^{s=l} Xds = 0,$$
$$\int_{s=0}^{s=l} Yds = 0,$$
$$\int_{s=0}^{s=l} Zds = 0.$$

[1]) Paul Le Cordier. *Sur les Actions Electrodynamiques les plus générales qui puissent être observées.* Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 22 Janvier 1883. (Journal de Mathématiques pures et appliquées de Liouville. 3:e Série. T. X, p. 43, 1884).

$$\int_{s=0}^{s=l} (yZ - zY)\, ds = 0,$$

$$\int_{s=0}^{s=l} (zX - xZ)\, ds = 0,$$

$$\int_{s=0}^{s=l} (xY - yX)\, ds = 0.$$

I varie d'une manière continue avec s et reprend la même valeur pour $s = 0$ et $s = l$. Les égalités précédentes peuvent s'écrire:

$$\text{27)} \quad \begin{cases} X ds = d\mathscr{F}\,(I, x, y, z), \\ Y ds = d\mathscr{G}\,(I, x, y, z), \\ Z ds = d\mathscr{H}(I, x, y, z), \end{cases}$$

$$\text{28)} \quad \begin{cases} (yZ - zY)\, ds = d\mathscr{L}\,(I, x, y, z), \\ (zX - xZ)\, ds = d\mathscr{M}(I, x, y, z), \\ (xY - yX)\, ds = d\mathscr{N}(I, x, y, z), \end{cases}$$

$\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$, désignant des fonctions uniformes, finies et continues des variables I, x, y, z.

En tenant compte des égalités (27), les égalités (28) peuvent s'écrire:

$$yd\mathscr{H}(I, x, y, z) - zd\mathscr{G}\,(I, x, y, z) = d\mathscr{L}\,(I, x, y, z),$$
$$zd\mathscr{F}\,(I, x, y, z) - xd\mathscr{H}(I, x, y, z) = d\mathscr{M}(I, x, y, z),$$
$$xd\mathscr{G}\,(I, x, y, z) - yd\mathscr{F}\,(I, x, y, z) = d\mathscr{N}(I, x, y, z);$$

ou bien, en posant

$$F(I, x, y, z) = y\mathscr{H}(I, x, y, z) - z\mathscr{G}\,(I, x, y, z) - \mathscr{L}\,(I, x, y, z),$$
$$G\,(I, x, y, z) = z\mathscr{F}(I, x, y, z) - x\mathscr{H}(I, x, y, z) - \mathscr{M}(I, x, y, z),$$
$$H\,(I, x, y, z) = x\mathscr{G}\,(I, x, y, z) - y\mathscr{F}\,(I, x, y, z) - \mathscr{N}(I, x, y, z),$$

$$\mathscr{H}dy - \mathscr{G}dz = dF,$$
$$\mathscr{F}dz - \mathscr{H}dx = dG,$$
$$\mathscr{G}dx - \mathscr{F}dy = dH.$$

Ces égalités ne sont autre chose que les égalités (26); il en résulte, nous l'avons vu, que $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont trois constantes, et par conséquent que l'on a

$$X = 0,$$
$$Y = 0,$$
$$Z = 0.$$

ce qui démontre la proposition énoncée, et complète ainsi cette étude sur les diverses lois des forces électrodynamiques.

§ V.

Actions Electrodynamiques exercées par les conducteurs non linéaires.

Les actions mécaniques qu'un conducteur linéaire traversé par un courant quelconque exerce sur un élément de courant quelconque nous sont maintenant connues, sauf la valeur de la constante λ que l'expérience n'a pas jusqu' ici appris à déterminer. Pour achever l'étude des actions électrodynamiques, il ne nous reste plus qu'à montrer comment ce qui précède permet de déterminer les actions exercées par un conducteur non plus linéaire, mais étendu dans toutes les directions, et traversé par des courants quelconques.

Considérons un semblable conducteur dans l'état qu'il présente à un instant donné. Traçons à l'interieur de ce conducteur une ligne tangente en tous ses points à la direction de flux électrique en ce point. Une semblable ligne prendra le nom de *ligne de flux*. Par chaque point du conducteur il passe une et une seul ligne de flux. Nous admettrons que la forme de la ligne de flux passant par un point varie d'une manière continue lorsque l'on passe à la ligne de flux passant par un point infiniment voisin.

En un point pris à l'intérieur d'un semblable conducteur, traçons un élément de surface normal à la direction du flux électrique en ce point. Supposons que les dimensions linéaires de cet élément soient infiniment petites par rapport aux longueurs infiniment petites du premier ordre que nous aurons à considérer. Par chacun des points du contour de cet élément, traçons la ligne de flux qui passe par ce point. Le lieu de ces lignes de flux limitera un canal dont la section droite sera, en chaque point un infiniment petit du même ordre que l'élément de surface que nous avons tracé à l'intérieur du conducteur. Soit Ω l'aire de la section droite de ce canal en un certain point, et i la valeur du flux électrique en ce point. Notre canal peut être envisagé comme un conducteur filiforme traversé par un courant dont l'intensité au point considéré a pour valeur Ωi. —

Le système étant ainsi remplacé par un système de courants linéaires, le calcul de son Potentiel Thermodynamique et le calcul des actions exercées sur un élément de volume du système peut immédiatement se déduire des propositions posées dans ce qui précède.

Calculons tout d'abord son Potentiel Thermodynamique.

Soient: E, l'équivalent mécanique de la chaleur,

U, l'énergie interne que posséderait le système s'il était ramené à l'état neutre sans changement de constitution physique ou chimique,

S, l'entropie du système dans les mêmes conditions,

P, la pression qu'il supporte,

Σ, son volume,

T, la température absolue,

Θ, une quantité qui dépend de la constitution du corps au voisinage du point de coordonnés x, y, z,

η, la densité de l'électricité libre en ce point,

W, le Potentiel Electrostatique,

Π, le Potentiel Electrodynamique.

Le Potentiel Thermodynamique Φ sera donné par la formule

$$29)\qquad \Phi = E(U - TS) + P\Sigma + \iiint \eta\, \Theta\, dx\, dy\, dz + W + \Pi,$$

l'intégrale triple s'étendant à tous les éléments de volume $dx\, dy\, dz$ du système.

Ce Potentiel peut s'écrire sous une forme plus explicite.

La quantité $E(U - TS) + P\Sigma$ est la somme des quantités analogues relatives aux divers éléments du système. Si donc on désigne par φ une quantité qui dépend de l'état physique et chimique de l'élément $dx\, dy\, dz$, mais non de son état électrique, on pourra écrire:

$$30)\qquad E(U - TS) + P\Sigma = \iiint \varphi\, dx\, dy\, dz.$$

Si l'on désigne par η' la densité électrique au point de coordonnés x', y', z', par r la distance du point de coordonnées x, y, z, au point de coordonnées x', y', z', enfin par ε une constante dont la valeur dépend de l'unité choisie pour mesurer les charges électriques, on aura

$$31)\qquad W = \frac{\varepsilon}{2} \iiiiiint \frac{\eta\eta'}{r}\, dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Soit V la fonction potentielle au point de coordonnées $x, y, z,$ des charges électriques réparties sur le système. On a:

$$V = \iiint \frac{\eta'}{r}\, dx', dy'\, dz', \tag{32}$$

et, par conséquent,

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \iiint \eta V\, dx\, dy\, dz. \tag{33}$$

Soient ds et ds' les longueurs de deux éléments des courants linéaires en lesquels le système peut être décomposé, comme nous l'avons dit plus haut. Soient I et I' les intensités des courants qui les traversent. Soient r la distance des deux éléments ds et ds'. Soit ω l'angle que font entre elles les directions de ces deux éléments. Soit θ l'angle que la direction de l'élément ds fait avec la droite qui joint un point de l'élément ds à un point de l'élément ds'. Soit θ' l'angle que fait la direction de l'élément ds' avec la même droite. Conservons à A et à λ la signification qu'ont ces lettres dans ce qui précède. Nous aurons:

$$H = -A \, \mathrm{S} \frac{Ids\, I'ds'}{r} \left[\frac{1-\lambda}{2} \cos\theta \cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2} \cos\omega\right], \tag{34}$$

le signe S indiquant une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons que l'on peut former en prenant deux à deux les éléments du système.

Soit i le flux électrique au point M, de coordonnées x, y, z. Soit Ω l'aire de la section droite en ce point du canal formé par les lignes de flux qui passent au voisinage de ce point. On aura

$$I = \Omega i,$$

En donnant à Ω' et i' une signification analogue, on a

$$I' = \Omega' i'.$$

Soient u, v, w, les composantes parallèles aux axes du flux i au point M de l'élément ds. Les cosinus des angles que l'élément ds fait avec les axes de coordonnées ont pour valeur

$$\frac{u}{i}, \frac{v}{i}, \frac{w}{i}.$$

Soient u', v', w', les composantes parallèles aux axes du flux i' au point M' de l'élément ds'. Les cosinus des angles que l'élément ds' forme avec les trois axes de coordonnées ont pour valeur

$$\frac{u'}{i'}, \quad \frac{v'}{i'}, \quad \frac{w'}{i'}.$$

On a alors

$$(35)\quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x'-x}{r}\dfrac{u}{i} + \dfrac{y'-y}{r}\dfrac{v}{i} + \dfrac{z'-z}{r}\dfrac{w}{i}, \\[2ex] \cos\theta' = \dfrac{x'-x}{r}\dfrac{u'}{i'} + \dfrac{y'-y}{r}\dfrac{v'}{i'} + \dfrac{z'-z}{r}\dfrac{w}{i}, \\[2ex] \cos\omega = \dfrac{uu' + vv' + ww'}{ii'}. \end{cases}$$

En vertu de ces égalités, la quantité

$$-A\frac{Ids\,I'ds'}{r}\left[\frac{1-\lambda}{2}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2}\cos\omega\right],$$

devient

$$(36)\qquad A\,\Omega ds\,\Omega' ds' \left\{\frac{1+\lambda}{2r}(uu' + vv' + ww')\right.$$

$$\left. + \frac{1-\lambda}{2r^3}\left[u(x'-x) + v(y'-y) + w(z'-z)\right]\left[u'(x'-x) + v'(y'-y) + w'(z'-z)\right]\right\}.$$

Pour obtenir le Potentiel Electrodynamique Π du système, il faut d'après l'égalité (34), faire la somme de toutes les quantités analogues à la précédente en combinant entre eux deux à deux, de toutes les manière possibles, les éléments des courants qui forment le système.

Considérons, autour du point M' un élément de volume $dx'\,dy'\,dz'$, dont les dimensions linéaires, bien qu'infiniment petites, soient infiniment grandes par rapport à ds', et à fortiori par rapport aux dimensions de Ω'. Il renfermera une infinité d'éléments tels que $\Omega' ds'$ et son volume $dx'\,dy'\,dz'$ sera la somme des volumes $\Omega' ds'$ de ces éléments. Pour ces divers éléments le facteur entre $\{\ \}$ aura des valeurs infiniment peu différentes. La somme des quantités telles que la quantité (36) relatives aux combinaisons de l'élément Ωds avec tous les éléments $\Omega' ds'$ contenus dans l'élément de volume $dx'\,dy'\,dz'$ aura pour valeur

$$-A\,\Omega ds\,dx'\,dy'\,dz' \left\{\frac{1+\lambda}{2r}(uu' + vv' + ww')\right.$$

$$\left. - \frac{1-\lambda}{2r^3}\left[u(x'-x) + v(y'-y) + w(z'-z)\right]\left[u'(x'-x) + v'(y'-y) + w'(z'-z)\right]\right\}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$
37)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{U} = {} & \frac{1+\lambda}{2} \iiint \frac{u'}{r}\, dx'\, dy'\, dz \\
& + \frac{1-\lambda}{2} \iiint \frac{x'-x}{r^3} \Big[u'(x'-x) + v'(y'-y) + w'(z'-z)\Big]\, dx'\, dy'\, dz', \\
\mathfrak{V} = {} & \frac{1+\lambda}{2} \iiint \frac{v'}{r}\, dx'\, dy'\, dz' \\
& + \frac{1-\lambda}{2} \iiint \frac{y'-y}{r^3} \Big[u'(x'-x) + v'(y'-y) + w'(z'-z)\Big]\, dx'\, dy'\, dz', \\
\mathfrak{W} = {} & \frac{1+\lambda}{2} \iiint \frac{w'}{r}\, dx'\, dy'\, dz' \\
& + \frac{1-\lambda}{2} \iiint \frac{z'-z}{r^3} \Big[u'(x'-x) + v'(y'-y) + w'(z'-z)\Big]\, dx'\, dy'\, dz'.
\end{aligned}
\right.
$$

La somme des quantités telles que la quantité (36) obtenues en combinant de toutes les manières possibles l'élément Ωds avec tous les élément $\Omega' ds'$ du système aura pour valeur

$$
- A\, \Omega ds \Big[\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w\Big].
$$

Si l'on fait la somme des quantités analogues à celle ci pour tous les éléments Ωds du système, chaque combinaison de ces éléments deux à deux aura été comptée deux fois. Par conséquent on aura:

$$
\Pi = -\frac{A}{2} \sum \Big[\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w\Big]\, \Omega ds,
$$

le signe $\sum$ indiquant une sommation qui s'étend à tous les éléments Ωds du système. Il est aisé de voir que cette égalité peut s'écrire:

$$
38)\qquad \Pi = -\frac{A}{2} \iiint (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w)\, dx\, dy\, dz.
$$

En réunissant les résultats exprimés par les égalités (29), (30), (33), (38), nous trouvons:

$$
39)\qquad \Phi = \iiint \Big[\varphi + \Big(\frac{\varepsilon}{2} V + \Theta\Big)\eta - \frac{A}{2} (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w)\Big]\, dx\, dy\, dz.
$$

On peut, d'une manière analogue, calculer les actions pondéromotrices exercées. Sur un élément de volume du système que nous étudions. Ces actions sont de deux espèces : les actions électrostatiques, données par la loi de Coulomb, et les actions électrodynamiques.

L'action électrostatique qui sollicite l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ a pour composantes parallèles aux axes :

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} \Xi &= -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\,\eta\,dx\,dy\,dz,\\ H &= -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}\,\eta\,dx\,dy\,dz,\\ Z &= -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z}\,\eta\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

Soient X, Y, Z, les composantes parallèles à OX, OY, OZ, de l'action électrodynamique exercée sur l'élément de volume $dx\,dy\,dz$. Posons

$$X_1 = A \sum I\,ds \sum I' \left(\cos\omega \frac{\partial_r^1}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'}\frac{\partial_r^1}{\partial s}\right) ds',$$

$$X_2 = -A \sum \frac{dI}{ds}\,ds \sum I' \left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\frac{dx'}{ds'}}{r} + \frac{1-\lambda}{2}(x-x')\frac{\partial_r^1}{\partial s'}\right] ds',$$

le premier signe $\sum$, dans chacune de ces deux formules, s'étendant à tous les éléments de courant renfermés dans l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, et le second à tous les éléments de courant du système. En vertu des égalités (15), nous aurons :

$$X = X_1 + X_2.$$

Nous aurons de même

$$Y = Y_1 + Y_2,$$

$$Z = Z_1 + Z_2,$$

Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, ayant des significations aisées à deviner.

On trouve sans peine que l'on a

$$X_1 = -A\,dx\,dy\,dz \iiint \left\{ \left[u(x'-x) + v(y'-y) + w(z'-z)\right]\frac{u'}{r^3} - (uu' + vv' + ww')\frac{x'-x}{r^3} \right\} dx'\,dy'\,dz'.$$

Y_1 et Z_1 sont représentés par des expressions analogues. Si l'on pose:

$$
41) \qquad \begin{cases} P = v'(z'-z) - w'(y'-y), \\ Q = w'(x'-x) - u'(z'-z), \\ R = u'(y'-y) - v'(x'-x). \end{cases}
$$

et

$$
42) \qquad \begin{cases} \mathcal{P} = \iiint \frac{P}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz', \\ \mathcal{Q} = \iiint \frac{Q}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz', \\ \mathcal{R} = \iiint \frac{R}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz', \end{cases}
$$

on aura les formules

$$
43) \qquad \begin{cases} X_1 = A \left[\mathcal{Q}w - \mathcal{R}v \right] dx\, dy\, dz, \\ Y_1 = A \left[\mathcal{R}u - \mathcal{P}w \right] dx\, dy\, dz, \\ Z_1 = A \left[\mathcal{P}v - \mathcal{Q}u \right] dx\, dy\, dz. \end{cases}
$$

Ces formules sont connues depuis longtemps, car, dans la loi de Grassmann, elles représentent les composantes de l'action électrodynamique totale. Dans notre théorie, il faut y joindre l'action qui a pour composantes X_2, Y_2, Z_2.

Pour calculer ces dernières composantes, nous remarquerons que $\frac{dI}{ds} ds\, dt$ représente la diminution pendant le temps dt, de la quantité d'électricité que renferme l'élément Ωds. Cette diminution a aussi pour valeur $-\frac{d\eta}{dt} \Omega ds\, dt$. On a donc

$$
\frac{dI}{ds} = - \Omega \frac{d\eta}{dt}.
$$

D'ailleurs, en vertu d'une démonstration si connue qu'il ne saurait être utile de la rappeler ici, on a

$$
44) \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).
$$

On a donc

$$\frac{dI}{ds}ds = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \Omega ds.$$

Cela posé, il est très facile de voir que l'on a

$$45)\quad \begin{cases} X_2 = -A\mathfrak{U}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz, \\[2ex] Y_2 = -A\mathfrak{V}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz. \\[2ex] Z_2 = -A\mathfrak{W}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz. \end{cases}$$

Ces formules achèvent de donner l'expression des actions électrodynamiques exercées sur un élément de volume du système.

Les considérations développées dans ce qui précède montrent comment les Principes de la Théorie Mécanique de la chaleur permettent de constituer une théorie complète des actions électrodynamiques. Tout n'est pas nouveau parmi les conséquences de cette théorie. Dans le domaine des courants uniformes, l'expérience a si complètement confirmé les vues d'AMPÈRE que vouloir innover dans ce domaine serait se condamner à l'erreur. On ne peut donc dans cette étude rien demander à une théorie, si non une démonstration nouvelle des lois déjà connues. La démonstration donnée dans ce mémoire des lois découvertes par d'AMPÈRE présente le grand avantage d'être affranchie des principes expérimentaux sur lesquels, depuis AMPÈRE, on fait reposer l'établissement de ces lois, principes dont la vérification est soumise au plus grandes difficultés. Dans le domaine même des courants non uniformes, la théorie précédente ne prétend pas tout créer. La forme donnée par M. HELMHOLTZ au Potentiel Electrodynamique, l'idée, due à F. E. NEUMANN, de faire entrer en ligne de compte les chemins décrits par les extrémités d'un conducteur qui se déplacent, avaient déja préparé la voie. Mais cette voie était encombrée par un grand nombre de théories, différentes à la fois par leurs principes et par leurs conséquences. Il ne suffisait même pas de choisir parmi ces théories, puisque les formules auxquelles nous avons été conduits diffèrent de toutes celles qui ont été proposées jusqu'à ce jour.

Nous espérons que cet essai, malgré ses imperfections, contribuera à jeter quelque lumière sur les problèmes encore si obscurs que soulève l'étude de l'Electrodynamique.

10. Mai 1886.

P. Duhem.

Actions qui s'exercent entre les Courants.

1. Partie. — Figures.

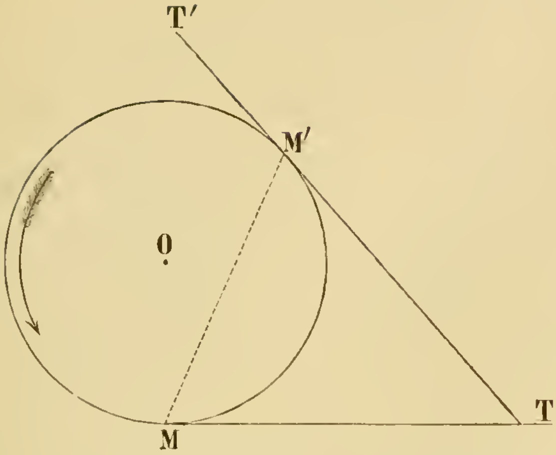


Fig. 1.

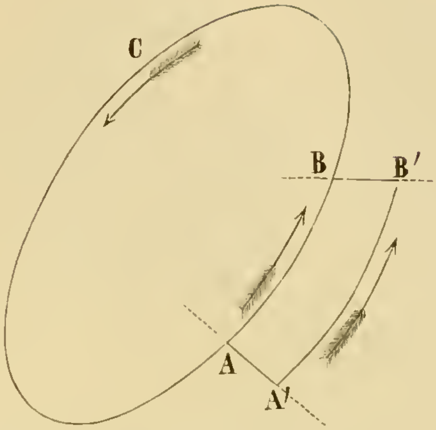


Fig. 2.

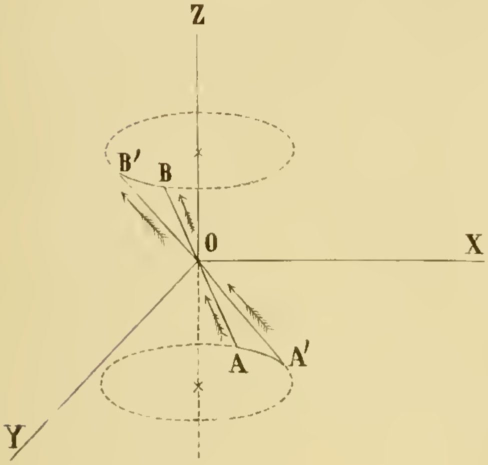


Fig. 3.

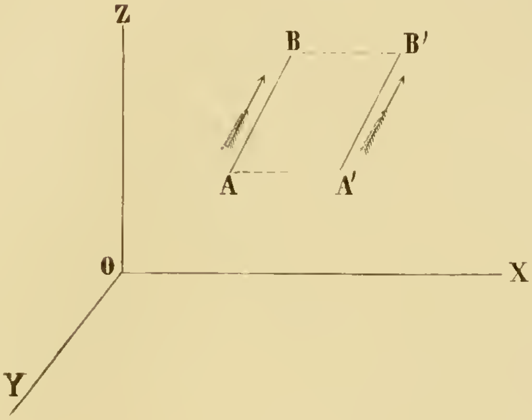


Fig. 4.

Actions exercées par les Courants.

Notes.

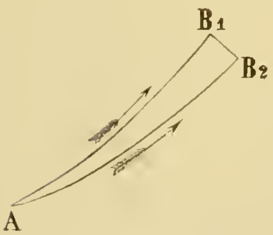


Fig. 5.

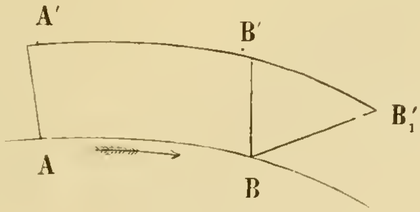


Fig. 6.

Applications de la Thermodynamique aux actions qui s'exercent entre les courants électriques.

2. Partie. — Figures.

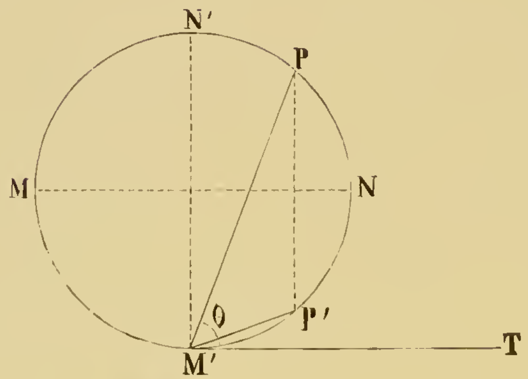


Fig. 7.

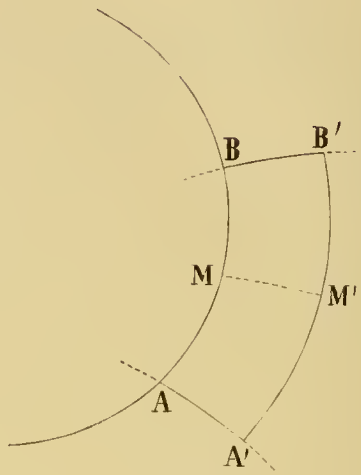


Fig. 8.

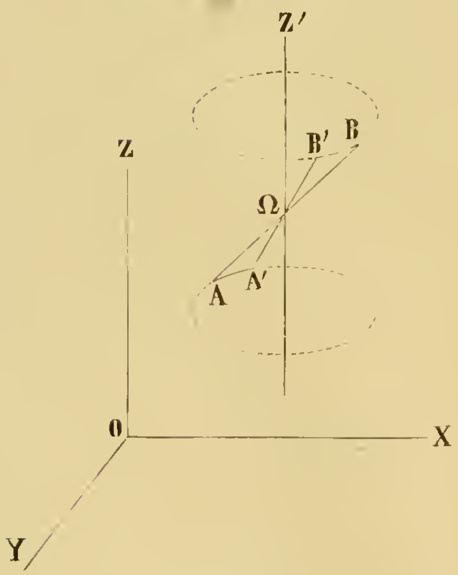


Fig. 9.

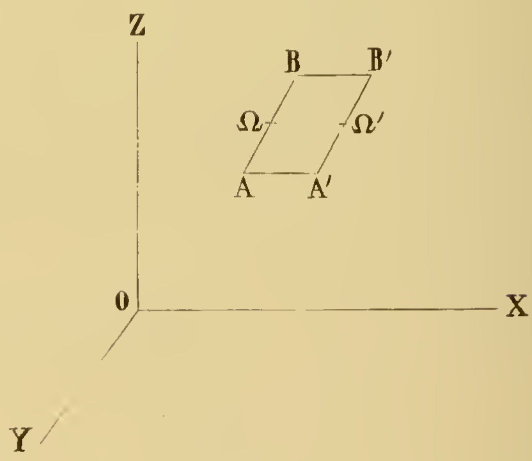


Fig. 10.

Fig. 1.

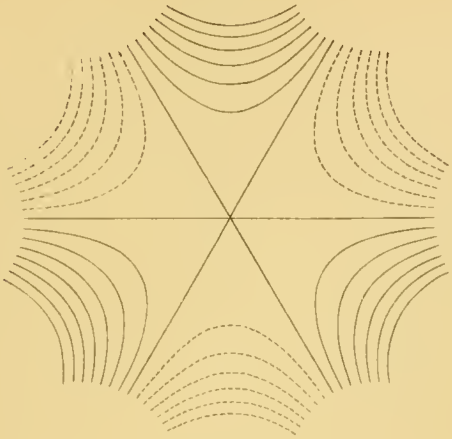


Fig. 2.

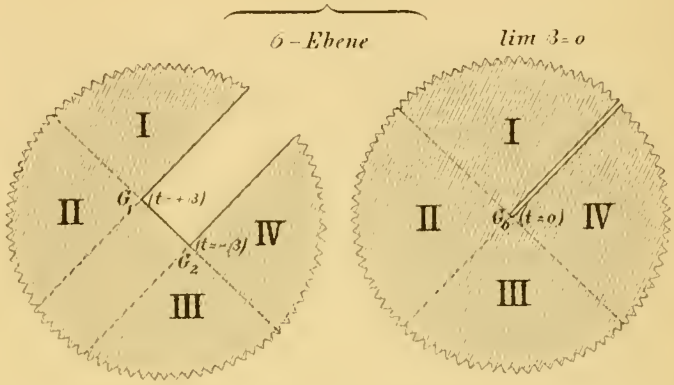


Fig. 3.

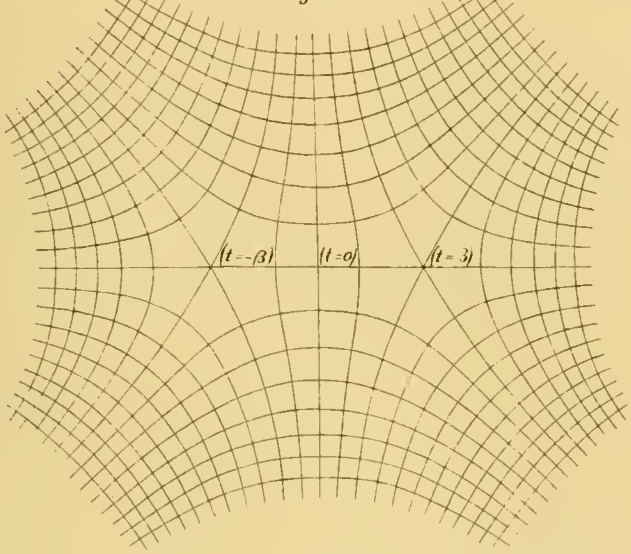


Fig. 4.

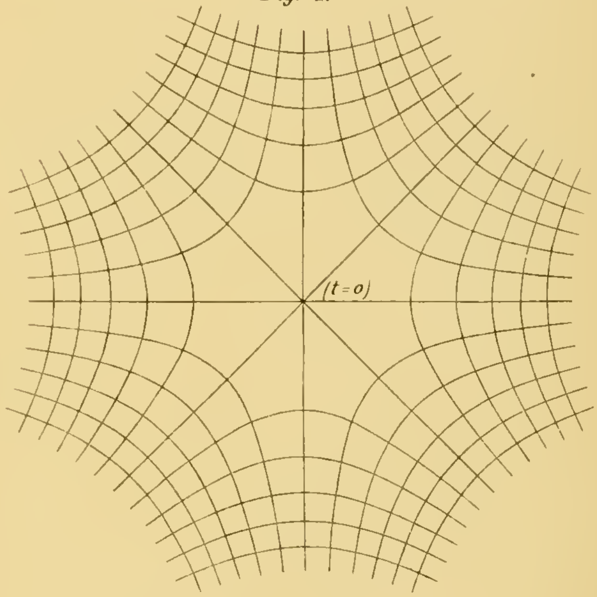


Fig. 5.

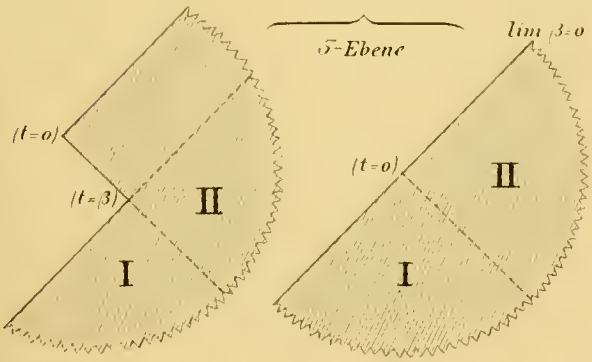


Fig. 6.

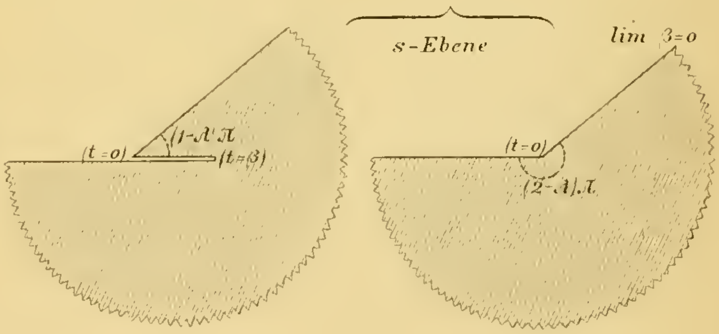


Fig. 7.

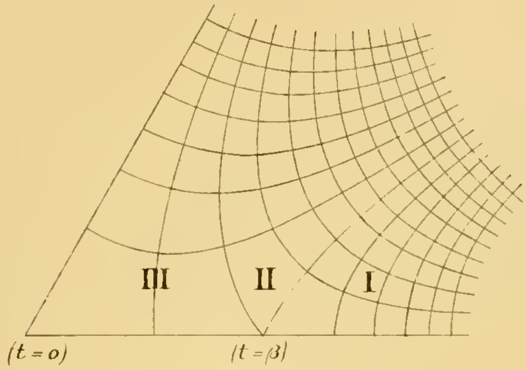


Fig. 8.

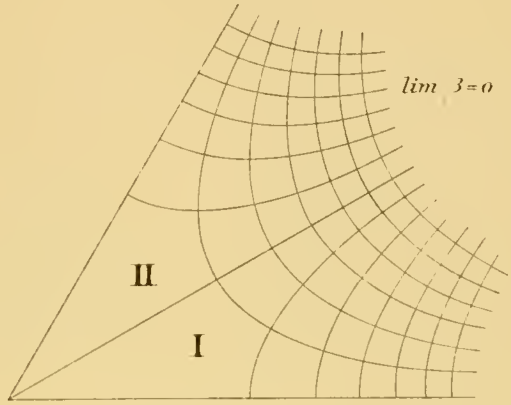


Fig. 9.

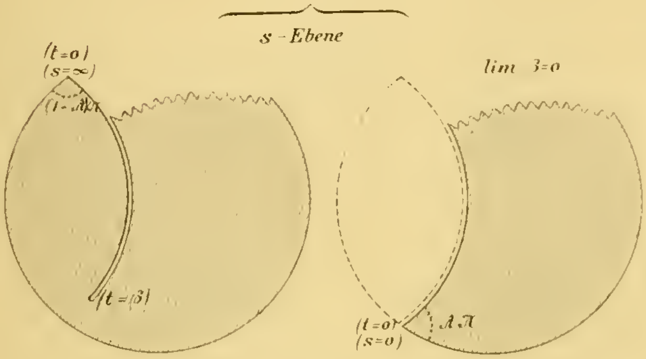


Fig. 11.

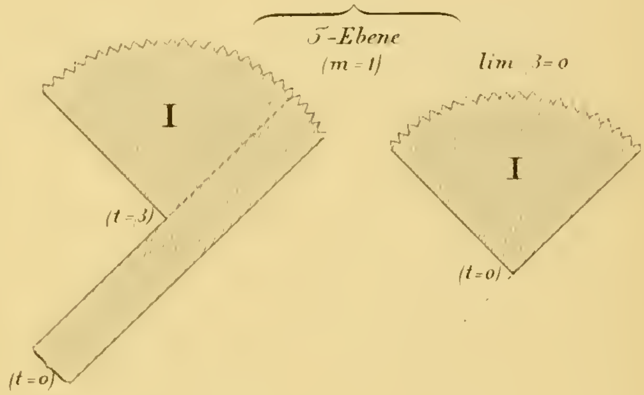


Fig. 10.

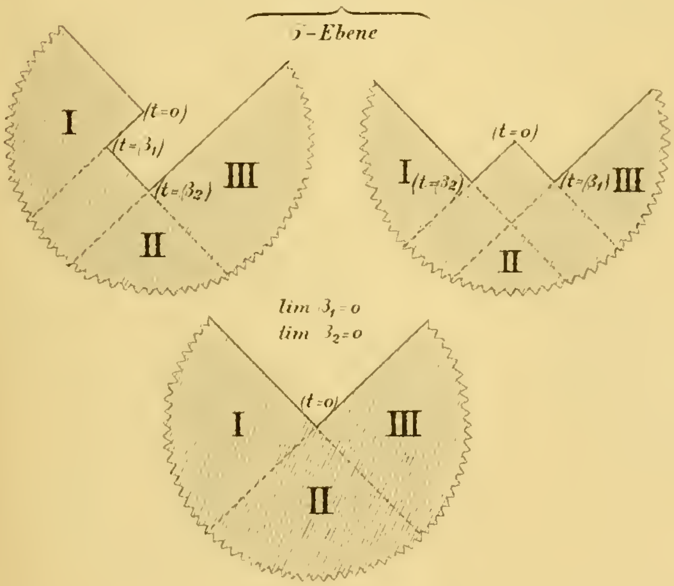


Fig. 12.

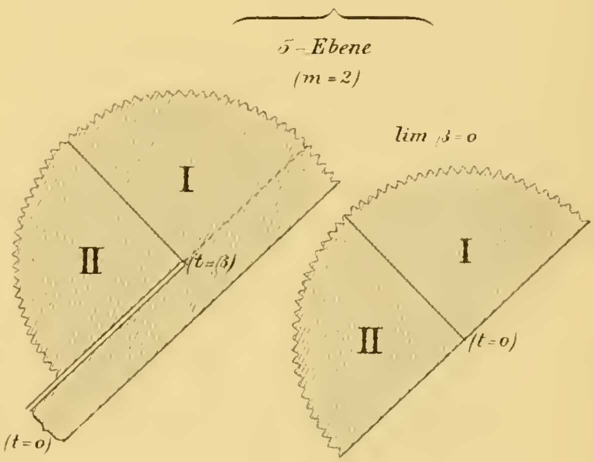


Fig. 1.

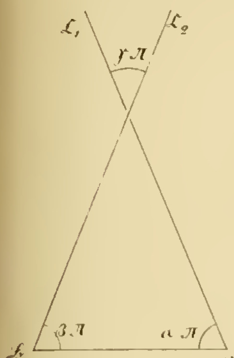


Fig. 2.

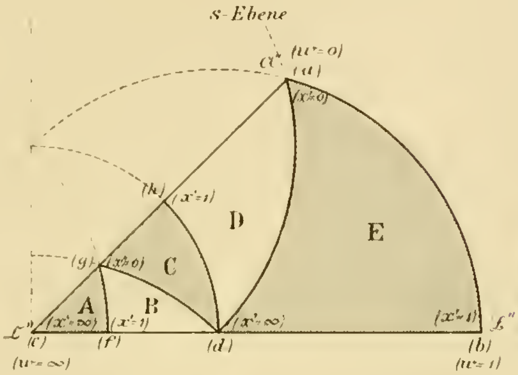


Fig. 3.

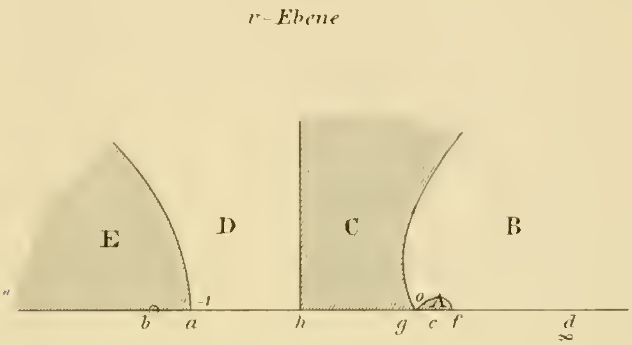


Fig. 4.

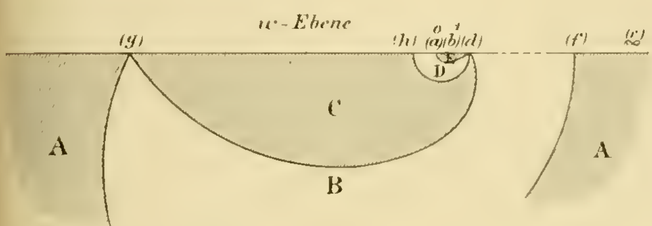


Fig. 5.

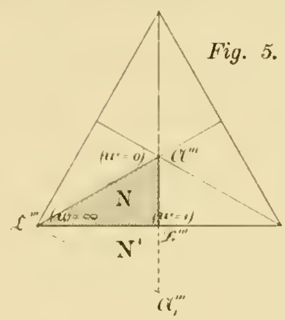


Fig. 6.

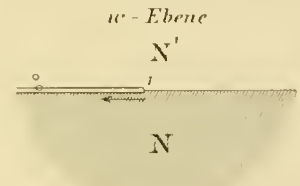


Fig. 7.

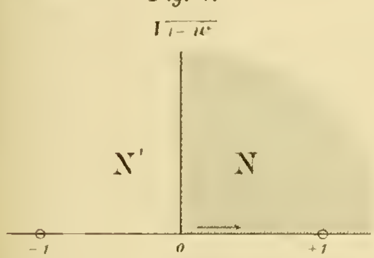


Fig. 8.

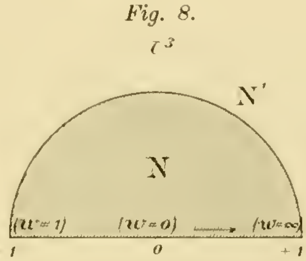


Fig. 9.

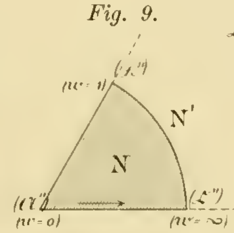


Fig. 11.

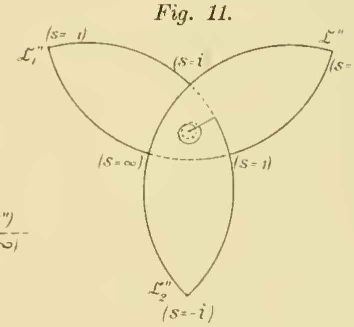


Fig. 10.

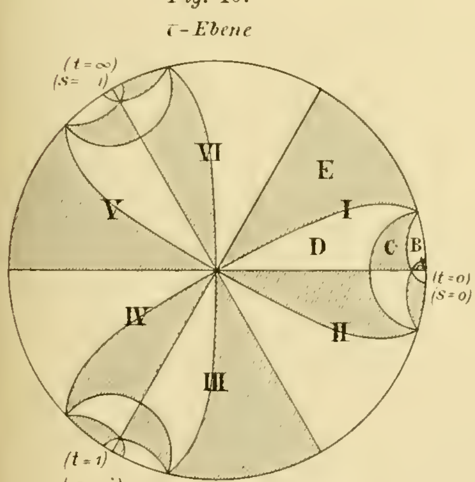
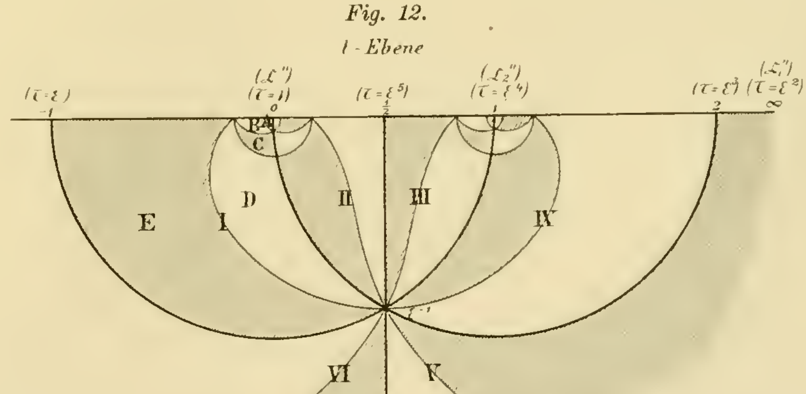


Fig. 12.



DARSTELLUNG

SÄMMTLICHER

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON DER FORM

$$y'' - \Big[a + a_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \alpha_1) - a_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \alpha_2) + n(n+1)$$

$$\Big(p(x - \alpha_1) + p(x - \alpha_2)\Big)\Big] y = 0,$$

WELCHE

NUR EINDEUTIGE INTEGRALE

BESITZEN

VON

E. A. STENBERG.

1. Wenn das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$1)\qquad y'' - \Big[a + a_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \alpha_1) - a_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \alpha_2) + n_1(n_1 + 1)\,p\,(x - \alpha_1)$$
$$+ n_2(n_2 + 1)\,p\,(x - \alpha_2)\Big]\, y = 0,$$

wo a und a_1 gewisse Constanten, n_1 und n_2 zwei positive ganze Zahlen bedeuten, eindeutig ist, kann es immer unter der Form

$$C_1\,F_1(x) + C_2\,F_2(x)$$

geschrieben werden, wo C_1 und C_2 beliebige Constantensind, und die Functionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ nach den Untersuchungen der Hrn. Picard, Mittag-Leffler und Halphen[1]) entweder die Eigenschaft

$$F_1(x + 2\omega) = \mu_1\,F_1(x) \qquad\qquad F_2(x + 2\omega) = \mu_2\,F_2(x)$$
$$F_1(x + 2\omega') = \nu_1\,F_1(x) \qquad\qquad F_2(x + 2\omega') = \nu_2\,F_2(x)$$

oder die folgende

$$F_1(x + 2\omega) = \mu\,F_1(x) \qquad\qquad F_2(x + 2\omega) = \mu\,F_2(x) + cF_1(x)$$
$$F_2(x + 2\omega') = \nu\,F_1(x) \qquad\qquad F_2(x + 2\omega') = \nu\,F_2(x) + c'F_1(x)$$

haben. Da das zweite Glied der linken Seite der Differentialgleichung (1) fehlt, genügen die multiplicirenden Factoren folgenden Bedingungen

$$\mu_1\,\mu_2 = 1 \qquad \nu_1\,\nu_2 = 1 \qquad \mu^2 = 1 \qquad \nu^2 = 1.$$

Im ersten Falle muss wenigstens eine der Functionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ sowohl im Punkte $x = \alpha_1$ wie in $x = \alpha_2$ unendlich werden und zwar im ersteren von der Ordnung n_1 und im letzteren von der Ordnung n_2. Denn hätte

---

[1]) Picard, Sur une généralisation etc. Comptes rendus etc. 21. Juillet 1879. Picard, Sur une classe d'équations différentielles linéaires. Comptes rendus etc. 19. Janvier 1880. Mittag-Leffler, Sur les équations différentielles linéaires etc. Comptes rendus etc. 16. Février 1880. Halphen, Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrales. Paris 1883.

jede nur *eine* Unendlichkeitsstelle im Periodenparallelogramm, müsste die eine der Functionen in $x = \alpha_1$ eine solche von der n_1:ten Ordnung und in $x = \alpha_2$ eine Nullstelle von der $(n_2 + 1)$:ten Ordnung, und die andere in $x = \alpha_1$ eine Nullstelle von der $(n_1 + 1)$:ten Ordnung und in $x = \alpha_2$ eine Unendlichkeitsstelle von der Ordnung n_2 haben, welches aber das gleichzeitige Erfüllen der Bedingungen: $n_1 \geqq n_2 + 1$ und $n_2 \geqq n_1 + 1$ erfordert und somit unmöglich ist.

Im zweiten Falle dagegen kann es vorkommen, dass die Function $F_1(x)$ nur die eine Unendlichkeitsstelle $x = \alpha_1$ im Periodenparallelogramme hat, wenn nämlich $n_1 > n_2$ ist.

2. Wenn die Differentialgleichung (1) ein partikuläres Integral y_1 hat, welches eine eindeutige, doppeltperiodische Function erster oder zweiter Gattung mit den Fundamentalperioden 2ω, $2\omega'$ ist und in $x = \alpha_1$ unendlich von der n_1:ten, in $x = \alpha_2$ unendlich von der n_2:ten Ordnung wird, so ist das allgemeine Integral der genannten Differentialgleichung eindeutig.

Dann ist nämlich $\int \frac{1}{y_1^2}\,dx$ eindeutig in der Umgebung jedes Punktes, der einem der Punkte $x = \alpha_1$ und $x = \alpha_2$ congruent ist, woraus folgt, dass das allgemeine Integral $c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\,dx$ überall eindeutig ist.

Wird die Differentialgleichung (1) in dem Falle dass $n_1 > n_2$ ist von einer doppeltperiodischen Function y_1 mit den Fundamentalperioden 2ω, $2\omega'$ integrirt, deren multiplicirende Factoren μ, ν den Bedingungen $\mu^2 = \nu^2 = 1$ genügen und welche in $x = \alpha_1$ eine Unendlichkeitsstelle n_1:ten Ordnung hat, so ist dennoch das allgemeine Integral eindeutig.

Es müssen nämlich in den Entwickelungen

$$\frac{1}{y_1^2} = \frac{k_{\varrho_1}}{(x - \beta_\varrho)^2} + \frac{k_{\varrho_2}}{x - \beta_\varrho} + k_{\varrho_3} + k_{\varrho_4}(x - \beta_\varrho) + \cdots$$
$$(\varrho = 1, 2 \cdots r)$$

— wenn $\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_r$ ein vollständiges System von incongruenten Nullstellen der Function y_1 bilden — sämmtliche Grössen k_{ϱ_2} gleich Null sein, da $\int \frac{1}{y_1^2}\,dx$ höchstens in der Umgebung des Punktes $x = \alpha_2$ mehrdeutig sein kann. Hieraus folgt aber, weil $\frac{1}{y_1^2}$ eine elliptische Function ist, dass auch in der Entwickelung

$$\frac{1}{y_1^2} = \frac{1}{(x-\alpha_2)^{2n_2+2}} + \frac{k_1}{(x-\alpha_2)^{2n_2+1}} + \cdots + \frac{k_{2n_2+1}}{x-\alpha_2} + k_{2n_2+2} + \cdots$$

der Coefficient k_{2n_2+1} gleich Null sein muss.

3. Es ist somit nachgewiesen, *dass die Differentialgleichung*

$$y'' - yP(x) = 0,$$

wenn $P(x)$ eine doppeltperiodische Function erster Gattung mit den Fundamentalperioden 2ω, $2\omega'$ ist, welche nur in $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$ und den mit diesen congruenten Stellen unendlich wird, immer und nur dann ein eindeutiges allgemeines Integral hat, wenn sie von einer doppeltperiodischen Function erster oder zweiter Gattung mit den Fundamentalperioden 2ω, $2\omega'$ integrirt wird, welche entweder sowohl in $x = \alpha_1$ wie in $x = \alpha_2$ oder auch nur in einem dieser Punkte unendlich wird, wobei im letzteren Falle ihre multiplicirenden Factoren μ, ν den Bedingungen $\mu^2 = \nu^2 = 1$ unterworfen sind.

In der vorliegenden Untersuchung werde ich die Gruppe von Differentialgleichungen, welche in der Form

$$2)\qquad y'' - \Big[a + a_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(x-\alpha_1) - a_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(x-\alpha_2) + n(n+1)\Big(p(x-\alpha_1) + p(x-\alpha_2)\Big)\Big] y = 0$$

enthalten ist, behandeln. Bei diesen Gleichungen kann laut § 1 nur der erstere der oben genannten Fälle eintreten.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung, welcher der Gleichung (2) genügen muss, damit ihr allgemeines Integral eindeutig sei, besteht also darin, dass sie von der Function

$$ce^{\lambda x} + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \frac{(-1)^\varrho}{\underline{|\varrho}} \frac{d^\varrho}{dx^\varrho}\Big[c_{1,\,n-1-\varrho}\, f(x-\alpha_1) + c_{2,\,n-1-\varrho}\, f(x-\alpha_2)\Big]$$

integrirt werden soll, wo $c, c_{1,\,n-1}, c_{1,\,n-2} \cdots c_{1,0}, \; c_{2,\,n-1}, c_{2,\,n-2}, \cdots c_{2,0}$ gewisse Constanten sind, und $f(x)$ entweder die Function

$$-\frac{\sigma(x-\alpha)}{\sigma(\alpha)\,\sigma(x)}\, e^{\left(\lambda + \frac{\sigma'}{\sigma}(\alpha)\right)x}$$

oder

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(x)\, e^{\lambda x}$$

repräsentirt, wobei im ersteren Falle $c = 0$ und im letzteren

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \frac{(-1)^\varrho}{\underline{|\varrho}} \left(c_{1,\,n-1-\varrho}\, e^{-\lambda\alpha_1} + c_{2,\,n-1-\varrho} e^{-\lambda\alpha_2}\right) \lambda^\varrho = 0$$

ist.[1])

4. Um gleichzeitig diese beiden Fälle behandeln zu können, werde ich die Gleichung (2) durch die Substitution

$$y = z\,\frac{\sigma(x-\alpha)}{\sigma(x-\beta)}\, e^{\gamma x}$$

in die folgende

$$3)\qquad z'' + 2\varphi(x)\, z' + \left[\varphi'(x) + \varphi^2(x) - P(x)\right] z = 0$$

transformiren, wo

$$\varphi(x) = \frac{\sigma'}{\sigma}(x-\alpha) - \frac{\sigma'}{\sigma}(x-\beta) + \gamma = \gamma_1 - \frac{1}{2}\,\frac{p'(x-\alpha) + p'(x-\beta)}{p(x-\alpha) - p(x-\beta)}$$

$$\gamma_1 = \gamma - \frac{\sigma'}{\sigma}(\alpha - \beta)$$

$$P(x) = a + a_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(x-\alpha_1) - a_1 \frac{\sigma'}{\sigma}(x-\alpha_2) + n(n+1)\Big(p(x-\alpha_1) + p(x-\alpha_2)\Big)$$

sind.

Die drei Grössen α, β, γ können immer so bestimmt werden, dass die Differentialgleichung (3) von einer elliptischen Function integrirt wird, sobald die Differentialgleichung (2) ein doppeltperiodisches Integral erster oder zweiter Gattung hat, und dass weder α noch β gleich einer der Grössen α_1, α_2 ist. Die im § 3 der Differentialgleichung (2) gestellte Bedingung ist also erfüllt, wenn die Gleichung (3) ein Integral von der Form

$$4)\quad z_1 = k + k_{1,\,n-1} \frac{\sigma'}{\sigma}(x-\alpha_1) + k_{2,\,n-1} \frac{\sigma'}{\sigma}(x-\alpha_2) - (k_{1,\,n-1} + k_{2,\,n-1}) \frac{\sigma'}{\sigma}(x-\alpha) +$$

---

[1]) Siehe hierüber: Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Comptes rendus etc. 15. October 1877. Mittag-Leffler, Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Comptes rendus etc. 26. Janvier 1880.

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-2} \frac{(-1)^\varrho}{\lfloor\varrho+1} \frac{d^\varrho}{dx^\varrho}\Big[k_{1,\,n-2-\varrho}\, p(x-\alpha_1) + k_{2,\,n-2-\varrho}\, p(x-\alpha_2)\Big]$$

$$= C - \frac{k_{1,\,n-1}}{2} \frac{p'(x-\alpha_1)+p'(x-\alpha_2)}{p(x-\alpha_1)-p(x-\alpha_2)} - \frac{k_{1,\,n-1}+k_{2,\,n-1}}{2} \frac{p'(x-\alpha_2)+p'(x-\alpha)}{p(x-\alpha_2)-p(x-\alpha)} +$$

$$+ \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-2} \frac{(-1)^\varrho}{\lfloor\varrho+1} \frac{d^\varrho}{dx^\varrho}\Big[k_{1,\,n-2-\varrho}\, p(x-\alpha_1) + k_{2,\,n-2-\varrho}\, p(x-\alpha_2)\Big]$$

hat, wo

$$C = k - k_{1,\,n-1} \frac{\sigma'}{\sigma}(\alpha_1-\alpha_2) + (k_{1,\,n-1}+k_{2,\,n-1}) \frac{\sigma'}{\sigma}(\alpha-\alpha_2)$$

ist.

Diejenige doppeltperiodische Function $\Phi(x)$, in welche die linke Seite der Differentialgleichung (2) durch die Substitution

$$5)\qquad y = z_1 \frac{\sigma(x-\alpha)}{\sigma(x-\beta)} e^{\gamma x}$$

übergeht, hat höchstens drei incongruente Unendlichkeitsstellen, $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$ und $x=\beta$, von denen die letzte nur dann eine solche sein kann, wenn sie nicht eine Nullstelle der Function z_1 ist. Damit nun $\Phi(x)$ identisch verschwinde, ist es genügend, dass in den Entwickelungen

$$\Phi(x) = \sum_{\varrho=-(n+1)}^{\varrho=\infty} A_\varrho (x-\alpha_1)^\varrho = \sum_{\varrho=-(n+1)}^{\varrho=\infty} B_\varrho (x-\alpha_2)^\varrho$$

die Coefficienten $A_{-(n+1)}, A_{-n}, A_{-(n-1)}, \cdots A_{-1}, A_0, A_1, \cdots A_{n-1}$ $B_{-(n+1)}, B_{-n}$ Null sind und ausserdem die Function z_1 im Punkte $x=\beta$ eine Nullstelle hat, da hierdurch die Ordnungszahl $n-1$ der einzigen incongruenten Unendlichkeitsstelle $x=\alpha_2$ der doppeltperiodischen Function $\Phi(x)$ kleiner wird als die Ordnungszahl ihrer Nullstelle $x=\alpha_1$.

Die $2n+4$ so erhaltenen Gleichungen

$$6)\quad \begin{cases} \text{a)}\ A_{-(n+1)} = A_{-n} = \cdots A_{-1} = A_0 = A_1 = \cdots = A_{n-1} = 0, \\ \text{b)}\ B_{-(n+1)} = B_{-n} = 0, \\ \text{c)}\ C - \dfrac{k_{1,\,n-1}}{2} \dfrac{p'(\beta-\alpha_1)+p'(\beta-\alpha_2)}{p(\beta-\alpha_1)-p(\beta-\alpha_2)} - \dfrac{k_{1,\,n-1}+k_{2,\,n-1}}{2} \dfrac{p'(\beta-\alpha_2)+p'(\beta-\alpha)}{p(\beta-\alpha_2)-p(\beta-\alpha)} + \\ \qquad \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-2} \frac{(-1)^\varrho}{\lfloor\varrho+1} \Big[k_{1,\,n-2-\varrho}\, p^{(\varrho)}(\beta-\alpha_1) + k_{2,\,n-2-\varrho}\, p^{(\varrho)}(\beta-\alpha_2)\Big] = 0 \end{cases}$$

bestimmen die $2n$ Coefficienten der Function z_1 wie die drei Constanten α, β, γ, enthalten aber ausserdem eine Bedingungsgleichung, welche von den Coefficienten der Function $P(x)$ befriedigt wird, sobald das allgemeine Integral der Differentialgleichung (2) eindeutig ist. Um diese Bedingungsgleichung aufzusuchen betrachte ich die $2n+1$ Gleichungen (6a). Es sei in der Umgebung des Punktes $x = \alpha_1$

$$P(x) = \frac{n(n+1)}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{a_1}{x-\alpha} + p_0 + p_1(x-\alpha_1) + p_2(x-\alpha_1)^2 + \cdots$$

$$z_1 \frac{\sigma(x-\alpha)}{\sigma(x-\beta)} e^{\gamma x} = \frac{c_0}{(x-\alpha_1)^n} + \frac{c_1}{(x-\alpha_1)^{n-1}} + \frac{c_2}{(x-\alpha_1)^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x-\alpha_1} + c_n +$$
$$c_{n+1}(x-\alpha_1) + c_{n+2}(x-\alpha_1)^2 + \cdots + c_{2n+1}(x-\alpha_1)^{n+1} + \cdots,$$

so erhalte ich

$$A_{-(n+1)} = -(2nc_1 + a_1 c_0)$$

$$A_n = -\left(2(2n-1)c_2 + a_1 c_1 + p_0 c_0\right)$$

$$A_{-(n-1)} = -\left(3(2n-2)c_3 + a_1 c_2 + p_0 c_1 + p_1 c_0\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{-(n+1)+\varrho} = -\left((\varrho+1)(2n-\varrho)c_{\varrho+1} + a_1 c_\varrho + \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\varrho-1} p_\sigma c_{\varrho-1-\sigma}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{n-2} = -\left(2n c_{2n} + a_1 c_{2n-1} + \sum_{\sigma=0}^{\sigma=2n-2} p_\sigma c_{2n-2-\sigma}\right)$$

$$A_{n-1} = -\left(a_1 c_{2n} + \sum_{\sigma=0}^{\sigma=2n-1} p_\sigma c_{2n-2-\sigma}\right).$$

Durch das Gleichungssystem (6a) werden also die Coefficienten $c_1\, c_2 \cdots c_{2n}$ bestimmt sobald c_0 arbiträr festgestellt ist, wenn die Grösse a_1 eine Wurzel der Bedingungsgleichung $(2n+1)$:ten Grades

$$
7) \qquad \begin{vmatrix}
a_1 & 2n & 0 & 0 & \dots & 0 \\
p_0 & a_1 & 2(2n-1) & 0 & \dots & 0 \\
p_1 & p_0 & a_1 & 3(2n-2) & \dots & 0 \\
p_2 & p_1 & p_0 & a_1 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
p_{2n-2} & p_{2n-3} & p_{2n-4} & p_{2n-5} & \dots & 2n \\
p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & p_{2n-4} & \dots & a_1
\end{vmatrix} = 0
$$

ist. Hieraus folgt auch, dass die Differentialgleichung (2) nur dann ein Integral von der Form (5) und somit ein eindeutiges allgemeines Integral haben kann, wenn die Constante a_1 dieser Bedingung genügt.

5. Nun behaupte ich, dass ihr allgemeines Integral auch immer eindeutig ist, sobald a_1 der Gleichung (7) befriedigt.

Dieses geht aus der folgenden Untersuchung hervor, welche ausserdem die Bestimmung der in den Formeln (4) und (5) vorkommenden, gesuchten Constanten, d. h. die Integration der Differentialgleichung (2) enthalten wird.

Es sei

$$\Psi(x) = \sum_{\varrho=-(n+1)}^{\varrho=\infty} \mathcal{A}_\varrho (x - \alpha_1)^\varrho = \sum_{\varrho=-(n+1)}^{\varrho=\infty} \mathcal{B}_\varrho (x - \alpha_2)^\varrho$$

die elliptische Function, welche durch die Substitution $z = z_1$ in die linke Seite der Differentialgleichung (3) erhalten wird. Da

$$\Phi(x) = \Psi(x) \frac{\sigma(x-\alpha)}{\sigma(x-\beta)} e^{\gamma x}$$

ist, herrscht zwischen dem Gleichungssystem (6a) und dem folgenden

$$8a) \qquad \mathcal{A}_{-(n+1)} = \mathcal{A}_{-n} = \cdots = \mathcal{A}_{-1} = \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \cdots = \mathcal{A}_{n-1} = 0$$

ein solcher Zusammenhang, dass das Erfüllen des einen unmittelbar aus dem des andern folgt. Aehnlich verhalten sich die Systeme (6b) und

$$8b) \qquad \mathcal{B}_{-(n+1)} = \mathcal{B}_{-n} = 0.$$

Schreibe ich nun

$$z_1 = \frac{k_0}{(x-\alpha_1)^n} + \frac{k_1}{(x-\alpha_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{k_{n-1}}{x-\alpha_1} + k_0 + k_{n+1}(x-\alpha_1) + \cdots,$$

wo $k_0, k_1, \cdots k_{n-1}$ statt $k_{1,0}, k_{1,1} \cdots k_{1,n-1}$ stehen, giebt es immer $2n$ Grössen $\frac{k_1}{k_0}, \frac{k_2}{k_0} \cdots \frac{k_{2n}}{k_0}$, welche dem System (8a) Genüge leisten, wenn die Gleichung (7) erfüllt ist.

Da

$$\varphi(x) = \gamma_1 - \frac{1}{2}\,\frac{p'(x-\alpha)+p'(x-\beta)}{p(x-\alpha)-p(x-\beta)}$$

ist, sind die Coefficienten der in $k_0, k_1, \cdots k_{2n}$ linearen Ausdrücke $\mathfrak{A}_\varrho$ von der Form

$$9)\qquad R + p'(\alpha)\,R_1 + p'(\beta)\,R_2 + p'(\alpha)\,p'(\beta)\,R_3,$$

wo R, R_1, R_2, R_3 ganze algebraische Functionen von γ_1 und rationale algebraische Functionen von $p(\alpha)$ und $p(\beta)$ darstellen, und folglich werden auch die oben genannten $2n$ Grössen $\frac{k_1}{k_0}, \frac{k_2}{k_0}, \cdots \frac{k_{2n}}{k_0}$ in derselben Form ausgedrückt, da die Determinante des Systems

$$\mathfrak{A}_{-(n+1)} = \mathfrak{A}_{-n} = \cdots = \mathfrak{A}_{n-2} = 0$$

eine ganze Zahl ist. Andererseits sind sie lineare Functionen von den $2n$ Grössen

$$\frac{k_{1,1}}{k_{1,0}}, \frac{k_{1,2}}{k_{1,0}}, \cdots \frac{k_{1,n-1}}{k_{1,0}}, \frac{k_{2,0}}{k_{1,0}}, \frac{k_{2,1}}{k_{1,0}}, \cdots \frac{k_{2,n-1}}{k_{1,0}}, \frac{C}{k_{1,0}}$$

mit Coefficienten, welche rational in $p(\alpha)$ und $p'(\alpha)$ und unabhängig von γ_1 sind. Hierdurch werden sämmtliche Coefficienten des Ausdruckes (4) der Function z_1 in der Form (9) dargestellt, welche Form somit auch die linken Seiten der drei Gleichungen (8b) und (6c) erhalten. Bei der Elimination der Grösse γ_1 entstehen nun zwei Gleichungen

$$F_1(\alpha, \beta) = 0 \qquad F_2(\alpha, \beta) = 0,$$

wo

$$F_\varrho(\alpha, \beta) = f_{\varrho,1} + p'(\alpha)\,f_{\varrho,2} + p'(\beta)\,f_{\varrho,3} + p'(\alpha)\,p'(\beta)\,f_{\varrho,4} \qquad (\varrho = 1, 2)$$

und $f_{\varrho,1}, f_{\varrho,2}, f_{\varrho,3}, f_{\varrho,4}$ ganze algebraische Functionen von $p(\alpha)$ und $p(\beta)$ sind.

Diese Gleichungen können durch zwei andere

$$G_1(\alpha, \beta) = 0 \qquad G_2(\alpha, \beta) = 0$$

ersetzt werden, deren linke Seiten die Form

$$G_1(\alpha, \beta) = g_{1,1} + p'(\alpha)\, g_{1,2}$$
$$G_2(\alpha, \beta) = g_{2,1} + p'(\beta)\, g_{2,2}$$

haben, wo $g_{1,1}, g_{1,2}, g_{2,1}, g_{2,2}$ ganze algebraische Functionen von $p(\alpha)$ und $p(\beta)$ sind. Solche Functionen werden dann auch die Producte

$$H_1 = G_1(\alpha, \beta) \cdot G_1(-\alpha, \beta) \qquad H_2 = G_2(\alpha, \beta) \cdot G_2(\alpha, -\beta)$$

sein, woher folgt, dass die Gleichungen

$$H_1 = 0 \qquad H_2 = 0$$

wenigstens von einem Paar Werthe $p(\alpha')$, $p(\beta')$ gleichzeitig erfüllt werden. Dann müssen entweder die beiden Werthpaare α', β' und $\alpha', -\beta'$ oder $-\alpha', \beta'$ und $-\alpha', -\beta'$ der Gleichung $G_1(\alpha, \beta) = 0$, und entweder sowohl α', β' wie $-\alpha', \beta'$ oder die beiden Werthpaare $\alpha', -\beta'$ und $-\alpha', -\beta'$ der Gleichung $G_2(\alpha, \beta) = 0$ Genüge leisten.

In jedem Falle giebt es also wenigstens ein Paar Werthe α, β, welche beide diese Gleichungen und somit auch die Gleichungen $F_1(\alpha, \beta) = 0$, $F_2(\alpha, \beta) = 0$ gleichzeitig erfüllen, woraus dann auch folgt, dass es immer, wenn α_1 der Bedingung (7) genügt, ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (3) von der Form (4) giebt.

Dieses mit dem Inhalte der §§ 3 und 4 verglichen, berechtigt mich zu folgendem Ausspruche:

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (2) *ist immer und nur dann eindeutig, wenn die Bedingungsgleichung* (7) *erfüllt wird.*

BIDRAG

TILL KÄNNEDOM

OM FTALIMID OCH FTALAMINSYRA.

AF

OSSIAN ASCHAN.

Enligt LETTS [1]) inverka fettsyror på rodankalium vid upphettning sålunda, att syrornas amider och nitriler samtidigt bildas. Deremot gifva aromatiska syror under samma förhållanden endast motsvarande nitriler. KEKULÉ undersökte något senare [2]) benzoësyrans inverkan på rodankalium och rodanammonium vid högre temperatur och fann att densamma med rodankalium gaf benzonitril, i öfverenstämmelse med LETT's uppgift, medan den vid upphettning med rodanammonium öfvergår i benzamid, utan att benzonitril samtidigt uppkommer.

De syror, hvilka varit föremål för LETT's och KEKULÉS undersökningar, voro samtliga enbasiska. Nu kunde det ega sitt intresse att erfara huru en tvåbasisk syra skulle reagera under liknande förhållanden. Jag företog mig derför undersökningen af (0)-ftalsyrans inverkan på rodanammonium och rodankalium vid högre temperatur.

Lika delar (0)-ftalsyra och rodanammonium pulveriseras tillsamman i en mortel och den likformiga massan införes i en kolf, som upphettas i oljbad. Vid 130° smälter massan och vid stegrad upphettning begynner en liflig gasutveckling. Reaktionen får försiggå mellan 150 och 160°. Efter några minuter stelnar produkten plötsligt till en porös, gulaktig kristallmassa. Nu aflägsnas kolfven från oljbadet och får svalna. Massan öfvergjutes derpå med vatten, som upphettas till kokning, och vattenlösningen, hvilken innehåller öfverskottet af rodansaltet och ftalsyra samt eger en utpräigladt gul färg, affiltreras varm från kristallmassan. Denna operation upprepas härpå ännu engång. Kristallmassan på filtrum är numera endast svagt gulfärgad. Den kristalliseras sedan ur kokande 40—50 % ättiksyra och afsättes härur i tumslånga fina nålar, hvilka ega glasglans och endast visa en svag skiftning i gult. För att erhålla ämnet i ett tillstånd af absolut renhet, måste det ännu omkristalliseras ur en myckenhet vatten, hvilket man försatt med en ringa qvantitet ättiksyra. Eller också löser man det i kokande alkohol och den heta lösningen försättes

[1]) Berichte d. d. ch. Gesellsch. V. 669.
[2]) Berichte d. d. ch. Gesellsch. VI. 112.

med litet silfvernitratlösning, detta ämne sönderdelar den ringa mängd färgande substanser, hvilka envist vidhänga ämnet, det utfaller en flackig fällning, förmodligen silfversulfid, och sedan denna blifvit aflägsnad genom filtrering, erhålles produkten fullkomligt färglös vid lösningens afsvalnande. Den eger en smältpunkt af 228—229°. Elementaranalysen gaf följande resultat:

0.2492 gr. substans gaf 0.5952 gr. CO_2 och 0.0802 gr. H_2O;
0.2177 gr. „ „ 17.8 CCN af 772.5 m. m. tryck och 15.6° temp.

Beräknadt för $C_8H_5NO_2$:		Funnet:	
C — 65.30	proc.	65.13	proc.
H — 3.40	„	3.57	„
N — 9.52	„	9.71	„
O — 21.78	„	21.59	„
100.00		100.00	

Den produkt, som bildats vid smältning af ftalsyra med rodanammonium, utgöres derföre af *ftalimid* $C_8H_5NO_2$. Dess egenskaper och löslighetsförhållanden öfverenstämma äfven fullständigt med ftalimidens. Den löser sig med lätthet i kalilut, och lösningen ger med bariumklorid en kristallinisk fällning, olöslig i vatten. Silfversaltet erhålles i form af små fjäll, om en het alkoholisk lösning af ämnet försättes med några droppar ammoniak, hvarpå silfvernitratlösning tillsättes. Det sublimerar derjemte i glänsande blad. Utbytet af ren ftalimid utgör 92 %.

Till dessa kännetecken, som karakterisera ftalimid och förut blifvit faststälda, vill jag här tillägga några nya. Ftalimid löser sig lätt i kokande, men är nästan olöslig i kall isättika och kristalliserar derur i flata prismer med snedt afstympade ändar. Den är nästan olöslig i benzol och fullkomligt olöslig i ligroin. Vid en längre kokning med konc. saltsyra öfvergår den i en syra, som kristalliserar ur vatten i lancettformiga glänsande blad eller prismer, hvilka smälta vid 204 (okorr.). Följande analys af silfversaltet, erhållet genom tillsats af silfvernitrat till syrans neutrala lösning i ammoniak, identifierar densamma med ftalsyra:

0.2167 gr. subst. gaf 0.1232 gr. Ag.

Beräknadt för $C_6H_4(COO.\,Ag.)_2$:	Funnet:
Ag. — 56.84 proc.	56.85 proc.

Vidare har jag funnit att om ftalimid öfvergjutes med stark ammoniak och får stå dermed i 1—2 timmars tid vid vanlig temperatur, så öfvergår den qvantitativt i en substans, som afsätter sig i form af ett glänsande kristallpulver på kärlets botten. Under mikroskopet visar det sig bestå af idel väl utbildade små romboëdrar, som äro starkt ljusbrytande. Detta ämne är olösligt i vatten och alkohol vid vanlig temperatur samt löser sig med svårighet i kokande vatten och alkohol, härunder öfvergående i ftalimid. Vid kokning med stark saltsyra försiggår denna förvandling lättare och fullständigt. Kall kalilut inverkar icke på ämnet, men vid kokning går det i lösning under utveckling af ammoniak. En analys gaf följande resultat:

0.236 gr. substans gaf 34.8 CCN af 770.7$^{m.\ m.}$ tryck och 16.8^0 temp.

Beräknadt för $C_6 N_4 (CO. NH_2)_2$:	Funnet:
N — 17.07 proc.	17.33 proc.

Såsom synes ger analysen vid handen, att ifrågavarande ämne är *ftalyldiamid*. Denna förening erhölls af VISLECENUS [1]) genom inverkan af öfverskjutande alkoholisk ammoniak på ftalylmalonsyreester såsom ett skimrande kristallpulver, hvilket är mycket svårlösligt i vatten och alkohol, men vid upphettning för sig eller med vatten och alkohol sönderdelas i ftalimid och ammoniak. Såvidt af detta korta referat framgår, originalafhandlingen [2]) har icke stått mig till buds, öfverenstämma dessa egenskaper med dem, som tillkommer det ofvan beskrifna ämnet, hvarföre något tvifvel om dess identitet med ftalyldiamid icke kan ifrågakomma, Jag vill ännu tillägga, att ftalyldiamid icke smälter utan vid c:a 200^0 öfvergår i ftalimid.

Den lätthet, hvarmed ftalimid äfvergår i den genom sin kristallform så karakteristiska ftalyldiamiden, är en egenskap hvarpå man med lätthet kan igenkänna densamma. Gäller det att karakterisera en substans såsom ftalimid, så behöfver man blott öfvergjuta en ringa qvantitet deraf i ett profrör med litet stark ammoniak, uppvärma det hela lindrigt och ställa profröret åsido för $^1/_4$ eller $^1/_2$ timme; efter denna tid har ftalimiden öfvergått i ett tungt pulver, som ligger på bottnen af profröret. Man bringar en del deraf på ett urglas och med tillhjelp af mikroskopet kan man derpå igenkänna de starkt ljusbrytande romboëdrorna af ftalyldiamid. T. o. m. starkt förorenad ftalimid visar denna reaktion med tillbörlig tydlighet.

Slutligen har jag framstält acetylderivatet af ftalimid, hvilket, så vidt jag känner, icke är bekant. Ftalimid utbyter endast med svårighet sitt imidväte emot acetyl. Jag kokade ren ftalimid med ett öfverskott af ättiksyreanhydrid under 12 timmars tid med återloppskylare, och likväl var en del af ämnet oberörd af reaktionen. Vid kallnandet utkristalliserar acetylföreningen ur sin

[1]) Berichte d. d. ch. Gesellsch. XVII. R. 530.

[2]) Sitzungsber. Akad. Wissensch. München 1884. 217—225.

lösning i ättiksyreanhydriden i stora pyramidformiga kristaller. Dessa affiltreras med sugpump och lösas i kokande absolut alkohol. Den filtrerade lösningen afsätter medan den afsvalnar ämnet i stora kristaller, hvilka synas ega prismatisk habitus, men under mikroskopet visa sig bestå af oktaëdrar. För att erhålla det alldeles färglöst och fritt från ftalimid, omkristalliseras det ännu ett par gånger ur absolut alkohol eller isättika. Analysen gaf derpå följande resultat:

0.2145 gr. substans gaf 12.0 CCN af 17.6° temp. och 761.4 m. m. tryck.

Beräknadt för $C_8H_4NO_2 . C_2H_3O$:	Funnet:
N — 7.41 proc.	7.56 proc.

Acetftalimid är en i någon mån obeständig förening. Den sönderdelas sedan af alkalier vid vanlig temperatur i ättiksyra och ftalimid; samma sönderdelning eger rum vid kokning med vatten och t. o. m. med 80—90 % alkohol. Vid upphettning i kapillarrör begynner den vid 130° att smälta och öfvergår vid 135° i flytande tillstånd. Men sedan under en längre upphettning vid 100° aftager den i vigt under sönderdelning. Acetftalimid är olöslig i kallt vatten, men något löslig i kokande, likvisst under sönderdelning, såsom nämndes. I kall alkohol är den nästan olöslig, lättare i kokande. Kokande isättika och benzol upptager den med lätthet, deremot är den svårlöslig i eter samt olöslig i ligroin. Acetftalimid kristalliserar ur benzol eller kall alkohol i glänsande oktaëdrar.

Som jag genom ofvan anförda undersökning af ftalsyrans inverkan på rodanammonium kommit i besittning af en större mängd ren ftalimid, beslöt jag att försöka framställa *ftalaminsyra*, hvilken hittils endast varit bekant i sina salter. Det är nemligen påfallande att detta ämne icke har erhållits i fritt tillstånd, ehuru t. ex. succinaminsyra, som står detsamma mycket nära, blifvit framstäld.

Förut hafva Laurent [1]), Landsberg [2]) och Kuhara [3]) gjort försök i denna riktning. Laurent framstälde ftalaminsyradt ammonium genom att försätta en

1) Jahresber. 1847—48. 549.
2) Annal. d. Chemie. 215. 198.
3) American chem. Journ. III. 29.

lösning af ftalsyreanhydrid i alkohol med ammoniak. För att erhålla den fria syran, fäldes ammoniumsaltets vattenlösning med blyacetat, fällningen blef sönderdelad med svafvelvate och lösningen afdunstades på vattenbad. Härvid erhölls likväl endast surt ftalsyradt ammonium, som bildats genom addition af en molekyl vatten till ftalaminsyra. Landsberg försökte åter framställa fri ftalaminsyra genom att sönderdela silfversaltet med den eqvivalenta mängden saltsyra. Först sedan lösningen under en längre tid fått afdunsta, afskilde sig prismatiska kristaller, hvilka vid vanlig temperatur öfvergjutna med kalilut, utvecklade ammoniak och gåfvo en gul, kristallinisk fällning ammoniumplatiumklorid, då de öfvergjötos med platinaklorid; kristallerna voro ingenting annat än ftalsyradt ammonium. Kuharas afhandling har jag icke lyckats erhålla, men äfven han har misslyckats i att framställa ftalaminsyra.

Såsom af dessa försök framgår, undergår ftalaminsyra lätt en förvandling, men endast i den riktning, att den upptager vatten och öfvergår i ftalsyra, resp. dess salter. Med fästadt afseende härpå måste man vid syrans afskiljande ur dess salter vara betänkt på att icke låta densamma i fritt tillstånd under en längre tid vara i beröring med vatten, allra minst vid högre temperatur. Detta kunde undvikas genom att afskilja syran ur en *koncentrerad* lösning af något af dess salter, så att den genast utfaller och hastigt affiltrerar lösningen innan denna kan utöfva en sönderdelande inverkan på den fria syran. Det har i sjelfva verket visat sig att ftalaminsyrans framställning i fritt tillstånd icke erbjuder synnerliga svårigheter, ifall man utgår från denna synpunkt.

I stället för att först framställa ftalimidkalium och sedan genom ihållande kokning öfverföra det i motsvarande salt af ftalaminsyra, såsom Landsberg [1]) gjort, framstälde ja direkt en koncentrerad lösning af ftalaminsyradt kalium, genom att låta 25 % kalilut inverka på ftalimid. Fullkomligt ren och färglös ftalimid öfvergjutes med ett öfverskott af kaliluten och lösningen får stå i tillkorkadt kärl vid vanlig temperatur ända tills ett prof efter neutralisering med saltsyra ej mera afskiljer ftalimid i långa, fina nålar, utan förblir klart; omsättningen är vanligen slutförd på 1—2 timmar. Till lösningen, som utom öfverskottet af kalilut endast innehåller ftalaminsyradt kali, tillsättes derpå konc. saltsyra i ett ringa öfverskott. Efter ett par minuter begynna de första kristallerna af ftalaminsyra att visa sig på vätskans yta såsom vackra, välutbildade och vattenklara, korta prismer. De tilltaga efterhand i storlek och mängd och inom ett par timmar är kristallisationen slutförd. I fall man mindre lägger

---

[1]) Annal. d. Chemie. 194. 215.

an på preparatets utseende, utan afser att erhålla ämnet i alldeles rent tillstånd, kan man påskynda kristallisationen genom att rifva kärlets väggar med ändan af en glasstaf. På detta sätt afskiljer sig hela qvantiteten af ämnet inom 5 minuters tid såsom ett fint, hvitt kristallpulver. En del deraf förblir ständigt i lösning, emedan ftalaminsyra är något löslig äfven i kallt vatten. Kristallpulvret affiltreras genast och så fullständigt som möjligt från moderluten med tillhjelp af sugpump samt tvättas på filtrum med kallt vatten under sugning, ända tills tvättvattnet ej mera ger reaktion med silfverlösning, hvarpå det torkas väl emellan filtrerpapper och sedermera öfver svafvelsyra i vacuum. Efter torkningen är preparatet rent, såsom följande elementar-analys visar:

0.2084 gr. substans gaf 0.4426 gr. CO_2 och 0.0798 gr. H_2O;
0.2000 „ „ „ 14.8 CCN af 16.0^0 temp. och 758.2 $^{m. m.}$ tryck.

Beräknadt för $C_8 H_7 NO_3$:		Funnet:
C —	58.18 proc.	57.90 proc.
H —	4.24 „	4.25 „
N —	8.48 „	8.60 „
O —	29.10 „	29.25 „
	100.00	100.00

För yttermera visso framstälde jag silfversaltet af syran och analyserade detsamma; den ofvan framstälda syran löstes i sin eqvivalenta mängd ammoniak, lösningen försattes med ett öfverskott af alkohol och derpå med silfvernitratlösning. Inom kort fylles vätskan af en voluminiös massa (förmodligen en vattenhaltigt salt), som likväl strax öfvergår i glänsande åtta-sidiga blad, hvilka till det yttre öfverenstämma med det af Landsberg [1]) framstälda silfversaltet af ftalaminsyra. Analysen gaf följande resultat:

1) 0.2140 gr. subst. gaf 0.0846 gr. Ag:
2) 0.2476 „ „ „ 0.0982 „ „

Beräknadt för $C_8 H_6 NO_3$. Ag:	Funnet: 1)	2)
Ag — 39.70 proc.	39.54 —	39.66 proc,

Ftalaminsyra, som är alldeles beständig i torr luft, smälter vid 148—149^0. Några grader ofvanom smältpunkten afger den vatten och öfvergår i ftalimid. För att utröna detta, upphettades ett prof ftalaminsyra i oljbad vid 155^0 sålänge vatten afgår och ända tills massan fullständigt stelnat. Reaktionen förlöper qvantitativt. Den fasta produkten, som är hvit och består af en

[1]) Annal. d. Chemie 215. 197.

stråligt kristallinisk massa, löstes i kokande alkohol, hvilken vid afsvalnandet afsatte långa nålar af smältpunkten 228—229°. En analys lemnade följande resultat:

0.2614 gr. substans gaf 21.4 CCN af 758.1 m. m. tryck och 14.4° temp.

Beräknadt för $C_8 H_5 NO_2$:	Funnet:
N — 9.52 proc.	9.58 proc.

Den erhållna produkten ger vidare ftalimidens reaktion med konc. ammoniak, och öfvergår sålunda i ftalyldiamid, hvilken med lätthet igenkännes på sin kristallform. Ftalaminsyrans öfvergång i ftalimid åskådliggöres enklast och till full evidens genom upphettning af ett kapillarrör, innehållande ett smältprof af den förstnämnda, i svafvelsyrebad med termometer. Vid 148—149° smälter syran och vid 155 öfvergår den smälta substansen i röret i fast form; upphettar man vidare, så smälter den för andra gången vid 228—229°.

Ftalaminsyra, som kristalliserar i stora vattenklara prismer med mångfaldiga ändytor, löser sig någorlunda lätt äfven i kallt vatten, mycket lätt såväl i kall som kokande alkohol eller isättika, något litet i eter och benzol, men alls icke i ligroin. Intet lösningsmedel egnar sig emellertid för kristallisation af ämnet. Af kokande vatten förvandlas det inom kort i surt ftalsyradt ammonium. Kallt vatten förorsakar denna omsättning långsammare, men lika fullständigt inom loppet af ett par dygn. Alkohol synes äfven inverka på ftalaminsyra i samma riktning. Isättika åter sönderdelar den i ftalsyreanhydrid och ammoniak [1]). Utspädda syror öfverföra ftalaminsyra vid kokning momentant i ftalsyra.

Syran har en rent sur smak och dess vattenlösning reagerar på blått lackmuspapper. Den upplöser sig under värmeutveckling i ammoniak och fixa alkalier. Med anilin förenar den sig vid vanlig temperatur till ett anilinsalt, som kristalliserar ur alkohol i nålar.

Vidare har jag undersökt (0)-ftalsyrans inverkan på rodankalium vid högre temperatur. Lika delar af hvardera ämnet upphettades tillsammans i en kolf uti oljbad. Vid 170° smälter massan och vid c:a 200° begynner en gasutveckling. Efter en längre tids upphettning vid denna temperatur aflägsnades kolfven från oljbadet, reaktionsprodukten utkokades ett par gånger med vatten och kristalliserades derpå ur kokande alkohol; vid kallnandet afskiljer sig den erhållna produkten i något gulfärgade nålar, som ega ftalimidens smältpunkt 228

[1]) Af sålunda erhållen ftalsyreanhydrid erhölls genom upphettning med anilin *ftalanil* af smältpunkten 204°.

—229° och dess öfriga egenskaper. Produkten ger, öfvergjuten med konc. ammoniak, ftalyldiamid.

Vi se sålunda att (0)-ftalsyra vid smältning såväl med rodanammonium som med rodankalium ger ftalimid såsom slutprodukt. Möjligt är att i det senare fallet, d. v. s. vid ftalsyrans upphettning med rodankalium, bildats ftalonitril, men att denna förening är obeständig och öfvergår i ftalimid.

STUDIER

INOM

ANHYDROBASERNAS KLASS.

AF

OSSIAN ASCHAN.

Den första representanten af de s. k. anhydrobaserna framstäldes år 1872 af Hobrecker [1]), som erhöll etenyltoluylendiamin vid reduktion af *(m)*-nitro-*(p)*-acetamidotoluol.

Senare hafva flere kemiker arbetat på samma fält, men isynnerhet Hübners namn är nära förbundet med kännedomen om denna klass af aromatiska föreningar, emedan han och hans lärjungar upptäckt och undersökt de flesta af dem; resultatet af dessa undersökningar finnas samlade i Annalen der Chemie [2]).

Anhydrobaserna, hvilka fullkomligt motsvara amidinerna inom fettserien, leda sitt ursprung från (*o*)-fenylendiamin. På detta ämne inverka såväl fettsyror som aromatiska syror med lätthet under vattenafspjelkning och inre kondensation, hvarvid anhydroföreningarna uppkomma. Reaktionen kan tänkas försiggående sålunda att en atom väte i endera amingruppen ersättes genom syreradikalen. Den härvid uppkommande föreningen kan emellertid icke existera utan öfvergår genast i sin anhydridform. Reaktionen åskådliggöres genom följande formler, som visa ättiksyrans inverkan på (*o*)-fenylendiamin, hvarvid etenylfenylendiamin uppkommer:

$$C_6H_4\begin{cases}NH_2\\NH_2\end{cases} + CH_3\,.\,COOH = C_6H_4\begin{cases}NH.\,CO\,.\,CH_3\\NH_2\end{cases} + H_2\,O,$$

$$C_6H_4\begin{cases}NH.\,CO\,.\,CH_3\\NH_2\end{cases} = C_6H_4\left\{\begin{matrix}NH\\N\end{matrix}\right\}C\,.\,CH_3 + H_2\,O.$$

En annan möjlighet att framställa anhydroföreningar erbjuda syrederivaterna af (*o*)-nitranilin, hvilka genom reduktion öfvergå i motsvarande derivater af (*o*)-fenylendiamin; såsom ofvan anfördes, afspjelka dessa vatten under bildning af anhydrobaser. Som flertalet syreanilider genom direkt nitrering gifva

---

[1]) Hobrecker. Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. 1872. 921.

[2]) Hübner. Annalen der Chemie 208. 278—332, 209. 339—384, 210. 328—396.

syrederivater af (o)-nitranilin, så användes den sistnämnda metoden allmännast för syntes af anhydrobaser.

Den experimentella undersökning, hvarpå följande framställning är grundad, blef företagen i syfte att framställa den anhydroförening, som i enlighet med ofvanstående resonemang borde uppkomma vid reduktion af (o)-nitroxanilsyra. Då detta sistnämnda ämne ännu icke blifvit framställdt, måste jag till en början vara betänkt på att erhålla detsamma.

Till först försökte jag ernå detta genom direkt nitrering af oxanilsyra. För ändamålet införes pulveriserad oxanilsyra i små portioner uti sin 3—4 dubbla mängd rykande salpetersyra, hvilken afkyles medelst isvatten. Sedan en klar orangegul lösning blifvit erhållen, hälles denna i sin dubbla mängd isvatten. Härvid utfaller reaktionsprodukten såsom en kristallinisk fällning, hvilken genast affiltreras med sugpump. Massan på filtrum löses derpå i kokande vatten, hvarur nitroföreningen utkristalliserar i tumslånga, blekgula nålar, hvilka uppfylla hela vätskan. Efter filtrering omkristalliseras ämnet ännu engång ur vatten; den är numera ren och visar en konstant smältpunkt. Elementaranalysen gaf följande resultat:

0,2102 gr. substans gaf 15,45 CCN af 20° temp. och 758,3 m.m. tryck;
0,1737 „ „ „ 0,2677 gr. CO_2 och 0,0571 gr. H_2O;
0,1526 „ „ „ vid upphettning till 110° 0,0121 gr. H_2O.

Ber. för $C_8H_6N_2O_5 + H_2O$:		Funnet:			
C	42,09	42,10	—	—	%
H	3,65	3,51	—	—	„
N	12,24	—	12,28	—	„
H_2O	7,89	—	—	7,92	„

(p)-Nitroxanilsyra.

Af analysen framgår, att det erhållna ämnet var en nitroxanilsyra och, såsom vi genast skola finna, hade nitrogruppen i förhållande till amidogruppen intagit (p)-ställningen. (p)-Nitroxanilsyra, som är svårlöslig i kallt, lättlöslig i hett vatten, ganska löslig i alkohol, kristalliserar ur vatten i långa nålar, hvilka innehålla en molekyl kristallvatten, ur alkohol i korta prismer, samt visar en smältpunkt af 210°. Kristallvattnet afgår redan vid vanlig temperatur i exsiccator.

(p)-Nitroxanilsyrans alkalisalter äro ganska svårlösliga i kallt vatten. Öfvergjutes ämnet med kali-, natron- eller ammoniaklösning, så upplöses det deri, men lösningen afsätter efter ett par minuter de bildade salterna i gulaktiga, fina prismer, hvilka vid sammanpressning visa perlemorglans. Alkalisalterna äro lättlösliga i kokande alkohol, och kunna med fördel omkristalliseras derur, likvisst med undantag af ammonium-saltet, som är lättlösligt äfven i kall alkohol.

Ur ammoniumsaltets lösning utfaller vid tillsats af bariumklorid bariumsaltet i form af runda kristallaggregater, fullkomligt olösliga i vatten. Silfvernitrat åter utfäller silfversaltet såsom fina kristallnålar:

0,2288 gr. af silfversaltet gaf 0,0776 gr. Ag.;

Beräknadt för $C_8\,H_5\,N_2\,O_5\,.\,Ag$.;		Funnet:
Ag	34,09	33,91 %

(p)-Nitroxanilsyra sönderdelas vid kokning med alkalier i nitranilin och oxalsyra. Samma sönderdelning synes långsamt ega rum sedan vid kokning med vatten.

Öfvergjutes ämnet med konc. saltsyra och tillsättes den nödiga qvantiteten tenn, så begynner snart under uppvärmning en liflig gasutveckling och inom kort uppkommer en färglös lösning. Denna afsätter under kallnandet ett tenndubbelsalt i vackra, färglösa prismer. För att isolera den genom reduktionen bildade basen, upplöses tennsaltet i vatten och svafvelväte inledes tills allt tenn utfallit, lösningen befrias genom filtrering från svafveltenn och filtratet afdunstas till en ringa volym. Ur den återstående sura lösningen kristalliserar basens saltsyrade salt i stora, glänsande blad. Detta är svårlösligt i saltsyra men lättlösligt i vatten. Ur saltets vattenlösning fäller platinaklorid sin dubbelförening, hvilken, svårlöslig i vatten, kristalliserar i gula nålar. Den fria basen erhålles endast i minimala mängder, om hydrokloratet öfvergjutes med alkali och lösningen omskakas med eter.

Till sitt yttre öfverensstämma tenndubbelsaltet, det saltsyrade saltet och platinadubbelsaltet fullkomligt med motsvarande salter af (p) fenylendiamin. Följande analyser å tenn- och platinasalterna ådagalägga att en fenylendiamin föreligger:

0,1699 gr. platinasalt gaf 0,0631 Pt.

Beräknadt för $C_6\,H_4\,(NH_2\,.\,HCl)_2\,PtCl_4$:		Funnet:
Pt	37,56	37,14 %

0,2847 gr. tenndubbelsalt gaf 0,1198 Sn.

Beräknadt för $C_6\,H_4\,(NH_2\,.\,HCl)_2\,Sn_2\,Cl_4$:		Funnet:
Sn	42,10	42,22 %

Genom reduktion af ifrågavarande nitroxanilsyra erhölls sålunda (*p*)-fenylendiamin och nitrogruppen står i följd häraf till amidogruppen i (*p*)-ställning.

Som bekant ger acetanilid vid nitrering tvenne derivater, (*o*)- och (*p*)-nitracetanilid, af hvilka den senare bildas i öfvervägande mängd. Med kännedom om den analogi i bildningssätt och sammansättning, som förefinnes emellan acetanilid och oxanilsyra, syntes det mig påfallande att endast (*p*)-nitroxanilsyra bildats vid nitreringen af den sistnämnda. I fall motsvarande (*o*)-derivat uppkommit, så måste det förefinnas i moderluten efter (*p*)-oxanilsyran.

I sjelfva verket erhöll jag vid afdunstande af denna moderlut på vattenbad en produkt, som smälte i kapillarrör vid 128°, under mikroskopet och genom sitt förhållande i öfrigt visade sig vara en blandning af (*p*)-oxanilsyra och ett annat ämne med sura egenskaper. För att isolera den sistnämnda löstes den torra återstoden efter moderlutens afdunstning i 96 % alkohol, och den heta lösningen försattes med stark ammoniakvätska i öfverskott. Under kallnandet kristalliserar ammoniaksaltet af den sökta föreningen i fina, mörkgula nålar med perlemorglans. Efter omkristallisation ur litet alkohol visade det sig enhetligt under mikroskopet.

Som den ringa qvantiteten omöjliggjorde en analys, löstes saltet åter i vatten och lösningen försattes med saltsyra. Härvid utfaller den fria syran i långa, guldgula nålar, hvilka efter filtrering, tvättning på filtrum och torkning öfver svafvelsyra visade sig ega smältpunkten 112°. Denna förening utgjordes i sjelfva verket af (*o*)-nitroxanilsyra, såsom framgår af de iakttagelser, hvilka fått plats i det följande.

Då (*o*)-nitroxanilsyra sålunda icke kunde erhållas i större mängd genom nitrering af oxanilsyra, måste jag vara betänkt på att erhålla den på annat sätt, nemligen genom inverkan af oxalsyra på (*o*)-nitranilin. En intim blandning af 1 del nitranilin och halfannan del vattenfri oxalsyra infördes för detta ändamål i en kolf, som upphettades i paraffinbad. Massan smälter vid c:a 100°, och vid stegrad upphettning begynner en gasutveckling med 130°; ungefär med denna temperatur får reaktionen fortgå, dock bör temperaturen ej öfverstiga 140°. Vatten kondenseras i kolfvens hals, tydande på att reaktionen försiggår i det önskade syftet. Efter en half timme afgår ej mera vatten, hvarföre reaktionen kan anses vara slutförd. Kolfvens innehåll får afsvalna, hvarvid det stelnar till en fast massa, hvilken öfvergjutes med litet vatten och omskakas dermed för att aflägsna öfverskottet af oxalsyra. Derpå löses återstoden i kokande vatten och filtreras från en ringa olöst återstod. Då lösningen svalnar, afsätter sig den nya föreningen i långa guldgula nålar, hvilka affiltreras medan lösningen ännu kännes något ljum; på detta sätt aflägsnas största delen af den nitranilin, som icke deltagit i reaktionen och blifvit upplöst af vattnet. Massan på filtrum löses sedan i litet kokande alkohol, hvarpå vatten tillsättes, då ämnet åter utfaller i gula nålar. För yttermera rening, isynnerhet för att erhålla material till elementaranalysen, tvättades ämnet med kall koncentrerad saltsyra, emedan det annars städse visade sig innehålla spår af nitranilin, hvarpå det befriades från saltsyra medelst sugpump samt tvättades på filtrum med vatten, pressades emellan läskpapper och torkades öfver osläckt kalk och svafvelsyra. Elementaranalysen lemnade följande siffror.

0,3640 gr. substans gaf 0,0890 gr. H_2O och 0,6136 CO_2;
0,2478 „ „ „ 29,2 CCN af 18°,5 temp. och 754,0$^{m.\,m.}$ tryck.

Beräknadt för $C_8H_6N_2O_5$:		Funnet:
C	45,71	45,96 %
H	2,86	2,72 „
N	13,33	13,46 „

(o)-Nitroxanilsyra.

Analysen ger vid handen att den genom smältning af (*o*)-nitranilin med oxalsyra bildade föreningen utgör den sökta (*o*)-nitroxanilsyran. Den kristalliserar utan vatten i långa, guldgula nålar, hvilka visa en smältpunkt af 112°. Utbytet är någorlunda godt, likväl blir äfven om smältningen fortgår under längre tid än en halftimme, ständigt en del nitranilin oberörd af reaktionen; tillika bildas likväl andra produkter, dels lösliga, dels olösliga i vatten, hvilka förringa utbytet, hvarföre smältningen icke bör fortgå för länge.

(*o*)-Nitroxanilsyra är lättlöslig i hett vatten och någorlunda löslig i kallt, nästan olöslig i eter, men lättlöslig i alkohol och ättiksyra. Af alkalier och redan af kokande vatten sönderdelas den i sina komponenter.

Alkalisalterna äro ganska svårlösliga i vatten. Öfvergjutes syran med kali- eller natronlut, eller ammoniak, upplöses den till en början, men de bildade salterna utkristalliserar inom kort i fina, långa prismer af mörkgul färg. De kunna med fördel kristalliseras ur kokande alkohol, i hvilken de äro lösliga, medan kall alkohol icke löser dem. Bariumsaltet, som erhålles vid tillsats af bariumklorid till alkalisalternas vattenlösning, kristalliserar i ljusgula nålar och är lösligt i kokande vatten. Silfversaltet, som erhålles på vanligt sätt, kristalliserar i svagt gulfärgade nålar och är nästan olösligt i vatten.

0,1843 gr. af silfversaltet gaf 0,0626 gr. *Ag*.

Beräknadt för $C_8\ H_5\ N_2\ O_5 . Ag$:	Funnet:
34,09	33,97 %

Då denna del af föreliggande arbete utfördes, hade det undgått mig, att Hübner [1]), gifvande ett referat af en afhandling, utarbetad af v. Herff, beskrifvit en förening, hvilken skulle ega samma sammansättning som de nyssbeskrifna (*o*)-nitroxanilsyra. Jag var sålunda i tillfälle att beriktiga de uppgifter, Hübners referat innehåller.

Enligt detta hade v. Herff, genom smältning af (*o*)-nitranilin med dess tredubbla mängd vattenfri oxalsyra under 12 timmars tid, erhållit tre produkter, hvilka han kallar oxortonitranilid, oxortonitranilsyra och etyletern af den förstnämnda. De egenskaper, han tillägger sin oxortonitranilsyra, afvika i betydlig mån från dem, hvilka på grund af min erfarenhet tillkomma (*o*)nitroxanilsyra. Så kristalliserar den förstnämnda i brungula prismer, hvilka äro svårlösliga i alkohol men lättlösliga i vatten; smältpunkten är icke angifven, men det framgår tydligt, att den ligger vid högre temperatur, åtminstone högre än 112°. Denna olikhet emellan tvenne ämnen, hvilka egentligen borde vara identiska, synes vara svår att förklara. Betraktar man emellertid den tredje af de produkter, hvilka v. Herff erhållit så får man en klar inblick i detta förhållande.

Denna förening skulle enligt v. Herffs åsigt vara etyletern af hans oxortonitranilsyra. Tager man de förhållanden i betraktande, under hvilka föreningen emellan nitranilin och oxalsyra föreligger, så finner man med lätthet, att någon etylradikal icke deltager i reaktionen; ej heller kan en reduktion tänkas försiggående under densamma. Processen fortgår under afspjelkning af vatten. Men förutsatt att en utveckling af fritt väte egde rum under smältningen och vilkoren för en reduktion vore för handen, samt denna reduktion träffade oxalsyran, så kunde denna likväl icke gifva upphof åt etylalkohol, ty så vidt bekant har man icke lyckats förvandla radikalen oxalyl till etyl. I följd af detta resonnemang kan etylalkohol eller någon annan etylförening icke uppkomma under reaktionen. Med detsamma anser jag det bevisadt, att v. Herff icke kunnat erhålla etyletern af sin „oxortonitranilsyra". En möjlighet

[1]) Annalen der Chemie. 209. 367.

för att denna förening skulle kunna bildas är ännu icke utesluten, ehuru äfven den enligt allmänt bevisade förhållanden har liten sannolikhet för sig. Man kan nemligen tänka sig att ifrågavarande eter uppkommit, då smältan efter slutad reaktion löstes i kokande alkohol. Men emot detta antagande talar ordalydelsen i nämnda afhandling. Det heter nemligen här ord för ord: „Laugt man dieselbe (die Schmelze) erst mit Alkohol und dann mit Eisessig aus, so nehmen beide Lösungsmittel 1) Oxorthonitranilsäure und 2) den Aethyläther derselben auf" o. s. v.

Jemför man deremot denna s. k. eter med den af mig framstälda (*o*)-nitroxanilsyran, så finner man att de äro fullkomligt lika. Oafsedt smältpunkten, som hos hvardera ligger vid 112°, så likna de hvarandra i kristallform och löslighets-förhållanden; hvardera sönderdelas vid kokning med alkalier, ja redan vid kokning med vatten i oxalsyra ock nitranilin. Det synes aldeles hafva undgått v. Herff att hans „oxortonitranilsyre-etyleter" har sura egenskaper. Såsom redan nämndes löser sig det ifrågavarande ämnet i alkalier, och dessa lösningar afsätta, blott de äro tillräckligt koncentrerade, inom kort motsvarande salter. I ett enda fall afvika v. Herffs uppgifter dessutom från mina, nemligen i det resultat analysen gifvit. Men äfven här är en förklaring möjlig, om man blott tager i betraktande huru svårt det är att erhålla (*o*)-nitroxanilsyra fri från vidhängande nitranilin; dessa båda ämnen hafva liknande löslighets-förhållanden i vätten och alkohol, hvilka lösningsmedel komma till användning vid nitrosyrans kristallisering. Såsom den enda förklaring hvarföre v. Herff vid sina analyser erhållit en alltför hög kol- och vätehalt, framhåller jag det antagande, att han analyserat en substans, som icke varit fullständigt befriad från (*o*)-nitranilin. Hvilken sammansättning den produkt kan ega, hvilken han tillagt namnet „oxortonitranilsyra", är för mig omöjligt att afgöra; denna fråga är också af ringa intresse för fortgången af föreliggande undersökning.

(*o*)-Nitroxanilsyra öfvergår med stor lätthet i sitt anhydroderivat. Öfvergjutes den med koncentrerad saltsyra, så begynner inom kort efter tillsats af granuleradt tenn en så häftig reaktion, att den tid efter annan måste stäfjas genom lämplig afkylning utifrån. Så snart innehållet i reaktionskärlet erhållit en gråaktig färg och all nitroxanilsyra försvunnit, afhälles lösningen ifrån öfverskottet af tenn och får svalna. Härunder afsätter sig anhydroföreningen i genomskinliga flata prismer, hvilka ofta äro sammanvuxna till rosettformiga aggregater. Lösningen jemte det som kristalliserat afdunstas på vattenbad till torrhet, återstoden öfvergjutes med vatten, i hvilket man inleder svafvelväte, sålänge lösningen ännu innehåller tenn. Lösningen upphettas derpå till kokning och filtreras het. Massan på filtrum utkokades upprepade gånger med vatten och efter filtrering förenas samtliga filtrat. Ur dessa kristalliserar anhydroföreningen i tumslånga, fina nålar, hvilka ega glasglans och äro rent hvita. Efter filtrering och tvättning med vatten, är produkten ren.

Ett annat, beqvämare sätt att erhålla ämnet i rent tillstånd beror derpå, att återstoden, som resulterar efter den vid reduktionen erhållna vätskans afdrifning till torrhet, öfvergjutes med koncentrerad ammoniaklösning under uppvärmning på vattenbad. Till den hvita halfflytande massa, som härvid erhålles, sättes saltsyra i ringa öfverskott, hvarvid tennhydroxiden upplöses. Anhydroföreningen utfaller tillika i något gulfärgade nålformiga kristaller. Efter en enda kristallisation ur kokande vatten är produkten ren. Analysen af det i exsiccator torkade ämnet gaf följande resultat:

0,2181 gr. substans gaf 0,4759 gr. CO_2 och 0,0768 gr. H_2O;
0,1913 „ „ „ 28,6 CCN af 17° temp. och 744,0$^{m.m.}$ tryck.

Beräknadt för $C_8H_6N_2O_2$:		Funnet:
C	59,26	59,51 — %
H	3,70	3,93 — „
N	17,29	— 16,96 „

Detta hade sålunda uppkommit ur den vid (*o*)-nitroxanilsyrans reduktion bildade (*o*)-amidoxanilsyran genom inre kondensation under afspjelkning af vatten. Jag kallar det, anslutande mig till O. Hinsbergs nomenklatur [1]) af ämnen, som stå detta i många hänseenden nära:

Dioxychinoxalin.

Denna förening, hvars smältpunkt ligger öfver 280°, eger sura egenskaper; den löser sig med lätthet i kali- och natronlut, svårare i ammoniak. Alkalisalterna, som kunna utfällas ur sina vattenlösningar genom tillsats af alkohol, äro i hög grad obeständiga; de innehålla ständigt den fria föreningen i större eller mindre mängd. Luftens kolsyra utfäller dioxychinalin ur dess alkaliska lösning. Vid kokning sönderdelas alkalisalternas lösning under rödfärgning. Äfven silfversaltet, som erhålles vid tillsats af silfvernitrat till dioxychinoxalins lösning i ammoniak, innehåller ständigt den fria föreningen. Ett enda salt har jag lyckats erhålla i så sen tillstånd att analys kunde ifrågakomma, nemligen bariumsaltet, som utfaller vid tillsats af bariumklorid till dioxychinoxalins alkali-lösning i form af en hvit kristallinisk massa. Ehuru en

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. 1884. 319.

direkt bestämning å dess halt af kristallvatten icke kunde ifrågakoma, då saltet redan vid upphettning till 110^0 synes undergå sönderdelning, ger analysen vid handen, att det kristalliserar med 2 molekyler vatten:

$0{,}1280$ gr. substans gaf $0{,}0539$ $Ba\,SO_4$;

Beräknadt för $(C_8\,H_5\,N_2\,O_2)_2\,Ba + 2\,H_2\,O$:		Funnet:
Ba	$27{,}69$	$27{,}50$ %

Dioxychinoxalin smälter under ringa sönderdelning vid högre temperatur och sublimerar härvid i vackra sexsidiga blad, hvilka ofta äro sammanvuxna i form af rosetter.

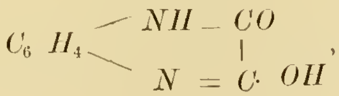
Den löser sig i koncentrerade syror, hvarvid dess egenskap af anhydrobas gör sig gällande. Vid uppvärmning med engelsk svafvelsyra öfvergår den lätt i en sulfosyra, hvilken är lättlöslig i vatten och hvars ammoniumsalt kristalliserar i prismer, som äro svårlösliga i kallt vatten.

Dioxychinoxalin är svårlöslig i vatten; 1 gr. deraf erfordrar c:a 1 liter hett, $0{,}2$ gr. c:a 1 liter kallt vatten till sin lösning. I alkohol och eter är den svårlöslig, samt olöslig i benzol, ligroin och kloroform. Med största lätthet upptages den af kokande isättika; vid kallnandet afskilja sig flata prismer, som innehålla ättiksyra. Denna afgår i mindre mängd redan vid vanlig temperatur, fullständigt vid 110^0.

O. Hinsberg har ur (m)-nitro-(p)-oxtoluidsyra framstält [1]) en homolog till dioxychinoxalin, hvilken han närmare undersökt [2]) och benämner dioxytoluchinoxalin[3]). Såväl i anseende till bildningssättet, som till löslighetsförhållanden, salter m. m. öfverenstämma båda dessa ämnen så fullkomligt med hvarandra, som det beträffande tvenne homologer är möjligt.

I följd af sitt bildningssätt ur (o)-nitroxanilsyra tillkommer dioxychinolin någondera af följande tre konstitutionsformler:

I. 

II. 

III. 

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. 1882. 2692.
[2]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. 1883. 1532.
[3]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. 1884. 319.

Anslutande mig till Hinsbergs antagande beträffande dioxytoluchinoxalin, ger jag företrädet åt formel II, såsom den af alla orsaker antagligaste. I fall dioxychinalin innehölle en karboxyl i enlighet med formel I, så skulle dess salter med all säkerhet vara beständigare. En förening af konstitutionen III skulle åter icke förmå bilda salter. Salternas egenskaper tyda på att föreningen innehåller en phenolhydroxyl, såsom formel II visar, men också endast *en* sådan, derom lemnar analysen af bariumsaltet besked.

Deremot kan jag icke tillägga dioxychinoxalin konstitutionen

$$C_6\ H_4 \begin{array}{l} \diagup N = C \cdot OH \\ \qquad\quad | \\ \diagdown N = C \cdot OH \end{array},$$

i enlighet med den formel, Hinsberg i sin senaste publikation [1]) tillskrifver sin dioxytoluchinoxalin. Denna formel förutsätter en atomvandring, något som i detta fall icke är af nöden påkalladt. Såvida ämnet egde ofvanstående symmetriska konstitution, så skulle den ega tvåbasiska egenskaper och tvenne atomer väte borde kunna ersättas af metall. Nu beskrifver Hinsberg ett natriumsalt med sammansättningen $C_9\ H_7\ N_2\ O_2 \cdot Na$ och dioxychinoxalins bariumsalt har enligt det föregående formeln $(C_6\ H_5\ N_1\ O_2)_2\ Ba + 2\ H_2\ O$; dioxychinoxalin och dioxytoluchinoxalin äro således med all sannolikhet enbasiska. Hinsberg uppger visserligen att dioxytoluchinoxalins silfversalt innehåller 2 atomer silfver, men resultatet af analysen å ifrågavarande salt är sådant, att hvarje på densamma baseradt resonnemang måste blifva ganska otillförlitligt.

Till sist vill jag beskrifva några försök till direkt utrönande af konstitutionen hos dioxychinoxalin, ehuru de gifvit ett negativt resultat i följd af den svårföränderlighet, som utmärker detta ämne: Reduktionsmedel utöfva ingen inverkan på densamma, hvarken i sur eller alkalisk lösning; för ändamålet användes natriumamalgam, zinkstoft i alkalisk och sur lösning samt tenn och saltsyra vid kokningstemperatur. Hvarken acetylklorid, ättiksyra anhydrid eller jodetyl i närvaro af alkali inverka substituerande på dioxychinoxalin. — Vidare har jag underkastat fenyletenyldiamin oxidation med salpetersyra, kromsyra samt kaliumpermanganat i hopp att metylgruppen, som detta ämne innehåller, skulle oxideras till karboxyl enligt formeln:

$$C_6\ H_4 \begin{array}{c} \diagup NH \diagdown \\ \diagdown N \diagup\!\!\!\diagup \end{array} C \cdot CH_3 + 3\ O \ = \ C_6\ H_4 \begin{array}{c} \diagup NH \diagdown \\ \diagdown N \diagup\!\!\!\diagup \end{array} C \cdot COOH + H_2\ O,$$

hvarigenom en isomer till dioxychinoxalin borde uppkomma (se formel I.) Fe-

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. 1884. 319.

nyletenyldiamin emotstod likväl hvarje inverkan af oxiderande agentier. Tillsvidare måste derföre slutordet i fråga om dioxychinoxalins konstitution blifva outtaladt.

(*o*)-Nitroftalanil och (*o*)-nitroftalanilsyra, hvilka blifvit framstälda af mig, men ännu icke äro närmare undersökta, gifva vid reduktion derivater, hvilka utan tvifvel tillhöra anhydroföreningarnas klass. Dessa skola inom kort blifva föremål för vidare meddelanden.

Helsingfors i Mars 1886.

TRAJECTOIRE D'UN CORPS

ASSUJETTI A SE MOUVOIR SUR LA SURFACE DE LA TERRE SOUS L'INFLUENCE DE LA ROTATION TERRESTRE

PAR

L. LINDELÖF.

Trajectoire d'un corps, assujetti à se mouvoir sur la surface de la terre sous l'influence de la rotation terrestre.

Préface.

On rencontre assez souvent, non seulement dans des traités populaires, mais aussi dans des publications scientifiques sérieuses, des notions peu exactes concernant l'influence exercée par la rotation de la terre sur le mouvement des corps à sa surface. En fait des courants athmosphériques, par exemple, on croit expliquer la déviation qu'ils subissent vers l'ouest ou vers l'est du chemin géodésique, suivant qu'ils s'approchent ou qu'ils s'éloignent de l'équateur, en l'attribuant simplement à la variation de la vitesse linéaire de la rotation terrestre aux différentes latitudes, variation à laquelle le courant ne participerait pas. Mais cette explication est loin d'être suffisante et, poursuivie par l'analyse, elle donnerait une idée très inexacte du chemin du courant ou d'un corps en mouvement. Ainsi, suivant elle, il n'y aurait point de déviation pour un courant allant vers l'est ou vers l'ouest, tandis qu'en réalité la déviation ou, pour mieux dire, la courbure horizontale en un point donné de la trajectoire est exactement la même pour tous les azimuts et ne dépend que la vitesse et de la latitude. La même opinion erronée a prévalu dans l'explication d'un autre phénomène également très connu. Plusieurs naturalistes ont cru faire l'observation que les grands fleuves de l'Asie et de l'Amérique qui suivent la direction du méridien, tendent à ronger leur rive droite, mais qu'une pareille tendance n'aurait pas lieu pour les fleuves qui se dirigent vers l'est ou vers l'ouest. Nous ne voulons pas examiner jusqu'à quel point cette opinion préconçue a pu influencer l'observation même. Le fait est que la théorie qu'on en donne généralement, est erronée et qu'il n'y a pas raison pourquoi l'effet dont il s'agit, se produisît plutôt dans le premier cas que dans le second.

Pour élucider ces questions et d'autres du même genre, il paraît utile d'examiner de plus près quel serait, sous l'influence de la rotation, le chemin d'un corps se mouvant librement sur la surface terrestre. C'est ce qui fera l'objet de la présente communication. Toutefois nous y faisons abstraction de la translation de la terre dans l'espace et ne tenons compte que de sa rotation autour de son axe.

Notre étude se divise en quatre parties. Dans la première nous établissons les équations différentielles du mouvement et nous en tirons immédiatement quelques propriétés essentielles de la trajectoire. Dans la seconde nous examinons, par une discussion des mêmes équations, les différentes formes que prend la trajectoire lorsqu'on fait varier les donnés du problème de toutes les manières possibles. La troisième partie est consacrée à l'intégration des équations du mouvement, et dans la quatrième nous faisons une application numérique de notre théorie, en calculant le chemin de l'onde athmosphérique observée à la suite de la grande éruption volcanique de Krakatoa en 1883.

I. Équations différentielles du mouvement. Propriétés générales de la trajectoire.

1. Considérons un corps ou point matériel M, de la masse 1, assujetti à se mouvoir sur la surface terrestre. Soient x, y, z les coordonnées de ce point au temps t dans un système rectangulaire, ayant pour origine le centre de la terre et dont les trois demi-axes positifs sont disposés de manière que l'axe des z est dirigé vers le pôle nord, ceux des x et y vers les points de l'équateur aux longitudes 0 et 90° E. A côté de ce système, qui est lié invariablement à la terre, nous en introduisons un autre X, Y, Z, fixe dans l'espace et avec lequel le premier coïncide à une certaine époque t_0. Nous admettons que le point M est sollicité par les trois forces suivantes: 1) l'attraction terrestre f, 2) une force normale g' égale et opposée à la pression effective du mobile sur la surface terrestre, et 3) une résistance j (provenant soit du frottement, soit de l'action du milieu ambiant), fonction de la vitesse relative v et dirigée en sens contraire d'elle. Au surplus, nous désignons par les mêmes lettres f, g', j, affectées des indices X, Y, Z ou x, y, z, les composantes de ces forces suivant les axes coordonnés correspondants. Cela posé, les équations du mouvement absolu du point M seront:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} = f_X + g'_X + j_X, \\[2ex] \dfrac{d^2Y}{dt^2} = f_Y + g'_Y + j_Y, \\[2ex] \dfrac{d^2Z}{dt^2} = f_Z + g'_Z + j_Z. \end{cases}$$

En désignant par ω la vitesse angulaire de la rotation terrestre, l'angle compris entre les axes des x et des X sera

$$\vartheta = \omega\,(t - t_0)$$

et l'on aura entre les coordonnées de M dans les deux systèmes les relations suivantes:

$$X = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta,$$
$$Y = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta,$$
$$Z = z,$$

d'où l'on tire, par deux différentations successives,

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\vartheta - \frac{d^2y}{dt^2}\sin\vartheta - 2\omega\left(\frac{dx}{dt}\sin\vartheta + \frac{dy}{dt}\cos\vartheta\right) - \omega^2(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta),$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\sin\vartheta + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\vartheta + 2\omega\left(\frac{dx}{dt}\cos\vartheta - \frac{dy}{dt}\sin\vartheta\right) - \omega^2(x\sin\vartheta + y\cos\vartheta),$$
$$\frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Pour obtenir les équations du mouvement relatif, on n'a qu'à porter ces valeurs de X, Y, Z et de leurs dérivées dans les équations (1). Le résultat doit évidemment être indépendant de la position des axes primitifs X, Y, Z et par suite aussi de l'angle ϑ. On pourra donc, pour simplifier le calcul, faire $\vartheta = 0$, c. à d. supposer que les deux systèmes d'axes coïncident entre eux au moment considéré. Par là les valeurs à substituer se réduisent à

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z,$$
$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\frac{dy}{dt} - \omega^2x,$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\frac{dx}{dt} - \omega^2y,$$
$$\frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Et comme les composantes des forces f, g', j suivant les axes fixes coïncident, au moment donné, avec les composantes des mêmes forces suivant les axes mobiles, il sera permis de remplacer en même temps les indices X, Y, Z par les indices x, y, z. En effectuant les substitutions que nous venons d'indiquer, on trouve

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_x + g'_x + j_x + 2\omega\frac{dy}{dt} + \omega^2x,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = f_y + g'_y + j_y - 2\omega\frac{dx}{dt} + \omega^2y,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = f_z + g'_z + j_z.$$

Or, il est facile de voir que les quantités $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, 0 ne sont autre chose que les composantes de la force centrifuge née de la rotation terrestre, force qui combinée avec l'attration f a pour résultante la pesanteur g, dont la direction est, comme on sait, nécessairement normale à la surface. Donc si nous désignons par l, m, n, les cosinus directeurs de la normale intérieure et que nous remplacions les composantes de la résistance par leurs valeurs

$$j_x = -j\frac{dx}{ds} = -\frac{j}{v}\frac{dx}{dt},$$

$$j_y = -j\frac{dy}{ds} = -\frac{j}{v}\frac{dy}{dt},$$

$$j_z = -j\frac{dz}{ds} = -\frac{j}{v}\frac{dz}{dt},$$

ds étant la différentielle de l'arc, nous aurons

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= (g-g')\, l - \frac{j}{v}\frac{dx}{dt} + 2\omega\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= (g-g')\, m - \frac{j}{v}\frac{dy}{dt} - 2\omega\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= (g-g')\, n - \frac{j}{v}\frac{dz}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les équations différentielles qui déterminent le mouvement relatif du point mobile sur la surface terrestre. Elles sont tout à fait générales en ce sens qu'elles n'impliquent aucune hypothèse sur la forme de cette surface. On peut du reste les déduire presque immédiatement en faisant usage du théorème de Coriolis. D'après ce théoreme il est permis faire abstraction du mouvement de la terre, pourvu qu'on ajoute aux forces réelles, qui sont ici l'attration f, la réaction normale g' et la résistance j, deux forces fictives, à savoir: 1) la force centrifuge de la rotation et 2) la force centrifuge composée, dont la valeur est $2v\omega \sin\gamma$, γ étant l'angle compris entre l'élément ds et l'axe du monde. La première de ces forces fictives se combine, comme nous l'avons dit, avec l'attraction pour donner naissance à la pesanteur g; quant à la seconde, elle est perpendiculaire en même temps à la vitesse relative v et à l'axe de rotation, c. à d. aux deux rayons dont les cosinus directeurs sont respectivement $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ et 0, 0, 1, et elle agit en sens opposé de la rotation du premier rayon autour du second. La direction de cette force est donc déterminé par les trois cosinus

$$\frac{\frac{dy}{ds}}{\sin\gamma}, \qquad -\frac{\frac{dx}{ds}}{\sin\gamma}, \qquad 0,$$

de sorte qu'elle a pour composantes sur les axes des x, y, z respectivement

$$2v\omega\frac{dy}{ds}, \qquad -2v\omega\frac{dx}{ds}, \qquad 0.$$

En égalant l'accélération $\frac{d^2x}{dt^2}$ à la somme des composantes suivant l'axe des x de toutes ces forces réelles et fictives, et ainsi des autres, ont parvient sans plus de calcul aux équations (2).

2. On peut déduire des équ. (2), sans faire aucune hypothèse sur la figure du globe terrestre, ni même sur la loi de la résistance, quelques propriétés générales de la trajectoire. En multipliant ces équations respectivement par $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ et les ajoutant ensuite membre à membre, on trouve d'abord, en ayant égard aux relations

$$ldx + mdy + ndz = 0,$$

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^3} + \frac{dz^2}{dt^2},$$

l'expression suivante de la résistance

$$j = -\frac{dv}{dt}$$

et par suite

$$-\frac{j}{v}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{ds},$$

$$-\frac{j}{v}\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dy}{ds},$$

$$-\frac{j}{v}\frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dz}{ds}.$$

On a d'ailleurs, en prenant l'arc s pour variable indépendante,

$$\frac{dx}{dt} = v\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = v^2\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dx}{ds}\frac{dv}{dt},$$

et ainsi des autres. Le système (2), tout en conservant sa généralité, prend alors la forme très simple

$$(3) \qquad \begin{cases} v^2\dfrac{d^2x}{ds^2} = (g-g')\,l + 2v\omega\dfrac{dy}{ds}, \\[2ex] v^2\dfrac{d^2y}{ds^2} = (g-g')\,m - 2v\omega\dfrac{dx}{ds}, \\[2ex] v^2\dfrac{d^2z}{ds^2} = (g-g')\,n. \end{cases}$$

Soit R le rayon de courbure principal de la trajectoire; les cosinus directeurs de ce rayon, compté à partir de la courbe, seront $R\dfrac{d^2x}{ds^2}$, $R\dfrac{d^2y}{ds^2}$, $R\dfrac{d^2z}{ds^2}$. D'autre part, en designant par λ, μ, ν les angles formés avec les axes des x, y, z par la normale horizontale D de la trajectoire, menée du point M vers la droite de la direction du mouvement (regardé d'en haut de la surface), on a

$$\cos\lambda = m\frac{dz}{ds} - n\frac{dy}{ds},$$

$$\cos\mu = n\frac{dx}{ds} - l\frac{dz}{ds},$$

$$\cos\nu = l\frac{dy}{ds} - m\frac{dx}{ds}.$$

Cela posé, si l'on multiplie les trois équations (3) respectivement par ces dernières expressions, il vient après quelques réductions faciles

$$\frac{\cos\theta}{R} = -\frac{2\omega n}{v} = \frac{2\omega\sin\varphi}{v},$$

où θ signifie l'angle compris entre le rayon de courbure R et la normale horizontale D, et φ la latitude géographique, positive dans l'hémisphère boréale et négative dans l'autre. Or $\dfrac{\cos\theta}{R}$ n'est autre chose que la *courbure horizontale*, c'est à dire la courbure de la projection horizontale de la trajectoire, prise avec le signe + ou −, suivant que la déviation du mobile a lieu vers la droite ou vers la gauche. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui a lieu quelles que soient la forme de la surface terrestre et la loi de la résistance éprouvée par le mobile:

> La courbure horizontale en un point quelconque de la trajectoire est en valeur absolue $= \frac{2\omega \sin\varphi}{v}$. La déviation du mobile a constamment lieu vers la droite dans l'hémisphère boréale et vers la gauche dans l'hémisphère australe.

Ainsi la corbure horizontale est, en un point donné, fonction de la vitesse et de la latitude, mais *entièrement indépendante de l'azimut.* La force centripète (pour l'unité de masse), capable de produire une telle courbure, se trouve en multipliant la valeur de celle-ci par v^2. Par suite, le mouvement du point matériel M a lieu comme si, étant assujetti à rester à la surface du globe supposé immobile, il était constamment sollicité par une force latérale $2v\omega \sin\varphi$, perpendiculaire à la direction du mouvement et agissant dans l'hémisphère boréale vers la droite, dans l'autre vers la gauche de celle-ci. C'est ce qui résulte d'ailleurs immédiatement du théorème de Coriolis; car les forces normales étant détruites par la réaction de la surface, il ne reste à considérer que la résistance tangentielle et la composante horizontale de la force centrifuge composée, composante qui a précisement la valeur et la direction de la force latérale dont il s'agit.

Notons en particulier que si la trajectoire coïncidait avec un cercle parallèle de rayon ϱ, la courbure horizontale serait $\frac{\sin\varphi}{\varrho}$ et il faudrait qu'on eût $\frac{2\omega \sin\varphi}{v} = \frac{\sin\varphi}{\varrho}$, ou $v = 2\varrho\omega$. Donc, pour que le mobile suive un parallèle, il doit se mouvoir vers l'est avec une vitesse $2\varrho\omega$, qui est double de celle de la rotation terrestre sur ce parallèle. Si la vitesse, tout en étant dirigée vers l'est, est $< 2\varrho\omega$, le mobile va s'écarter vers la droite, si elle est $> 2\varrho\omega$, il s'écartera au contraire vers la gauche du cercle parallèle.

Les mêmes équations (3), multipliées respectivement par l, m, n et ajoutées ensemble donnent

$$g - g' = \frac{v^2}{R} \sin\theta - 2v\omega \cos\nu.$$

Or, en désignant par R_0 le rayon de courbure de la section normale tangente à la trajectoire au point M et par A l'azimut du mouvement compté du sud vers l'est, on a

$$R = R_0 \sin\theta, \quad \cos r = -\cos\varphi \sin A$$

et par conséquent

$$g - g' = \frac{v^2}{R_0} + 2v\omega\cos\varphi \sin A,$$

ou

$$g' = g - \frac{v^2}{R_0} - 2v\omega\cos\varphi\sin A.$$

On voit par là que, pour une latitude et une vitesse données, la pression normale g' pour unité de masse varie avec l'azimut entre les limites

$$g - \frac{v^2}{R_0} - 2v\omega\cos\varphi \quad \text{et} \quad g - \frac{v^2}{R_0} + 2v\omega\cos\varphi.$$

Le minimum a lieu pour $A = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire lorsque le corps se meut vers l'est, le maximum pour $A = -\frac{\pi}{2}$, ou lorsqu'il se meut vers l'ouest. Dans le méridien on a simplement

$$g' = g - \frac{v^2}{R_0}.$$

La pression g' devient nulle, lorsque v atteint la valeur donnée par l'équation

$$\frac{v^2}{R_0} + 2v\omega\cos\varphi\sin A = g.$$

Pour une vitesse encore plus grande g' devient négatif; le mobile tend alors à s'éloigner de la terre, s'il n'y est pas retenu par une force normale extérieure, égale ou supérieure à g'.

Si la résistance j est nulle, les équations, (2) multipliées resp. par $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ donnent simplement

$$v\frac{dv}{dt} = 0$$

ou

$$v = \text{const.},$$

résultat qui est encore indépendant de la forme attribuée à la surface terrestre.

3. *Cas d'une orbite plane.* — Si la vitesse v est assez petite pour que l'orbite du mobile puisse être considérée comme une courbe plane, ou qu'il ne s'agisse que d'une portion peu étendue de la trajectoire, l'expression trouvée dans l'article précédent de la courbure horizontale suffit pour la déterminer. Désignons par τ l'angle formé par la tangente de la courbe avec une droite horizontale fixe, la courbure horizontale sera dans ce cas

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{1}{v}$$

et l'on aura, par conséquent,

$$d\tau = 2\omega \sin\varphi \,.\, dt.$$

Ainsi la tangente tourne autour de la verticale, toujours dans le même sens, avec une vitesse égale à $2\omega \sin\varphi$. Tant que le mobile ne s'écarte pas beaucoup de sa position initiale, cette vitesse est sensiblement constante; la tangente tourne alors uniformement et sa déviation totale, dans un intervalle de temps t, sera

$$(a) \qquad \tau - \tau_0 = 2\omega t \sin\varphi.$$

Pour determiner complétement la trajectoire, il faut encore connaître la loi de la résistance. En admettant p. ex. que celle-ci soit proportionnelle au carré de la vitesse, en sorte que

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{h},$$

où h est une constante à déterminer par l'expérience, on obtient

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{t}{h},$$

v_0 étant la vitesse initiale correspondante à $t = 0$. Si t' est le temps au bout duquel la vitesse est réduite à $\frac{v_0}{2}$, on a $\frac{1}{v_0} = \frac{t'}{h}$, ou $h = v_0 t'$, d'où l'on voit que la constante h signifie la distance que le corps parcourrait avec sa vitesse initiale, si elle restait constante, dans le temps où il perd effectivement la moitié de cette vitesse.

On en déduit

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{hv_0}{h + v_0 t},$$

$$\frac{s}{h} = \log\left(1 + \frac{v_0 t}{h}\right),$$

et

$$(b) \qquad t = \frac{h}{v_0}\left(e^{\frac{s}{h}} - 1\right),$$

équation qui combinée avec (a) renferme la solution du problème.

En désignant par η la déviation linéaire du mobile, ou sa distance à la tangente initiale, on a

$$\frac{d\eta}{ds} = \sin(\tau - \tau_0) = \sin(2\omega t \sin\varphi).$$

Si ωt est très petit, comme c'est le cas dans les problèmes ordinaires de la ballistique, on peut confondre le sinus avec l'arc et écrire simplement

$$\frac{d\eta}{ds} = 2\omega t \sin\varphi.$$

Eliminant t entre cette équation et (b), il vient

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{2h\omega \sin\varphi}{v_0}\left(e^{\frac{s}{h}} - 1\right),$$

d'où

$$\eta = \frac{2h^2\omega \sin\varphi}{v_0}\left(e^{\frac{s}{h}} - \frac{s}{h} - 1\right)$$

$$= \frac{s^2\omega \sin\varphi}{v_0}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{s}{h} + \frac{1}{3.4}\frac{s^2}{h^2} + \cdots\right).$$

Ainsi l'on a p. ex. pour $s = h$

$$\eta = \frac{2h^2\omega \sin\varphi}{v_0}(e - 2) = 1{,}4366\,\frac{h^2\omega \sin\varphi}{v_0},$$

valeur qui est 1,4366 fois plus grande que celle qu'on trouverait pour la même distance h et la même vitesse initiale v_0, en supposant la résistance nulle.

II. Discussion des équations différentielles, en supposant la résistance nulle. Différentes formes de la trajectoire.

4. Nous allons maintenant examiner plus particulièrement, quel serait le chemin suivi sur la surface terrestre par un corps qui s'y mouvrait sans aucune résistance. Nous admettrons en même temps que la terre est un solide de révolution, convexe et symétrique par rapport à l'équateur, n'ayant qu'un seul plan tangent en chaque point de la surface, en sorte que le rayon ϱ d'un cercle parallèle croît continuellement du pôle vers l'équateur, où il acquiert sa valeur maxima a. Les équations du mouvement (2) deviennent en ce cas

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= (g-g')\,l + 2\omega\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= (g-g')\,m - 2\omega\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= (g-g')\,n, \end{aligned}\right.$$

et l'on a en outre

$$(2)\qquad ly - mx = 0.$$

Les équ. (1) s'intègrent facilement une première fois. En les multipliant respectivement par $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, ou par $-y, x, 0$, et les ajoutant ensuite membre à membre, on trouve en effet, eu égard à la condition (2),

$$v\frac{dv}{dt} = 0,$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{xdx + ydy}{dt},$$

et en intégrant

$$(3)\qquad \begin{cases} v = \text{const.} \\ \dfrac{xdy - ydx}{dt} = \omega\,(k - x^2 - y^2), \end{cases}$$

k étant une une constante arbitraire. Ces deux équations différentielles du premier ordre, jointes à celle de la surface, suffisent pour déterminer la trajectoire, lorsque les conditions initiales du mouvement seront connues. Pour en reconnaître la forme générale, il n'est pas même nécessaire de chercher son équation ou les expressions des coordonnées sous forme finie, ce qui exigerait, même en admettant pour la terre une forme sphérique, comme nous le verrons plus tard, l'emploi de fonctions elliptiques; on y parvient immédiatement en analysant les équations (3).

A cet effet nous écrivons d'abord la seconde de ces équations sous la forme

$$(4)\qquad \varrho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \omega\,(k - \varrho^2),$$

où λ est la longitude, comptée vers l'est, et $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ le rayon du cercle parallèle occupé actuellement par le mobile. En désignant par A l'azimut du mouvement, ou l'angle formé entre la trajectoire et le méridien, compté du sud vers l'est, on a d'ailleurs

$$\varrho \frac{d\lambda}{dt} = v \sin A.$$

Par là, en éliminant $\dfrac{d\lambda}{dt}$, notre équation devient

$$(5)\qquad \varrho^2 + \frac{v}{\omega} \sin A \,.\, \varrho - k = 0.$$

Résolue par rapport à ϱ elle donne les deux valeurs

$$(6)\qquad \varrho = -\frac{v \sin A}{2\omega} \pm \sqrt{\frac{v^2 \sin^2 A}{4\omega^2} + k};$$

mais il faut observer qu'une valeur quelconque de ϱ n'est physiquement admissible qu'autant qu'elle est positive et $\leq a$.

Pour la discussion de ces formules il convient de distinguer trois cas, suivant que le paramètre k est positif, nul ou négatif. Nous allons les traiter séparément.

5. *Premier cas*: $k > 0$. Des deux valeurs de ϱ l'une seule est positive, à savoir

$$\varrho = -\frac{v \sin A}{2\omega} + \sqrt{\frac{v^2 \sin^2 A}{4\omega^2} + k}.$$

Elle décroît constamment lorsque $\sin A$ augmente depuis -1 jusqu'à $+1$, comme on le voit en examinant sa dérivée par rapport à $\sin A$. Nous en concluons que la valeur minima de ϱ correspond à $\sin A = +1$ et la valeur maxima à $\sin A = -1$. En désignant respectivement par ϱ_0 et ϱ_1 ces valeurs extrêmes de ϱ, on aura donc

$$\varrho_0 = -\frac{v}{2\omega} + \sqrt{\frac{v^2}{4\omega^2} + k},$$

$$\varrho_1 = +\frac{v}{2\omega} + \sqrt{\frac{v^2}{4\omega^2} + k},$$

d'où

$$\varrho_1 - \varrho_0 = \frac{v}{\omega}$$

et

$$\varrho_0\varrho_1 = k = \varrho_0\left(\varrho_0 + \frac{v}{\omega}\right) = \varrho_1\left(\varrho_1 - \frac{v}{\omega}\right).$$

Cette dernière formule fait voir qu'on a

$$k \lesseqgtr a^2 + \frac{av}{\omega}, \text{ suivant que } \varrho_0 \lesseqgtr a.$$

et

$$k \lesseqgtr a^2 - \frac{av}{\omega}, \text{ suivant que } \varrho_1 \lesseqgtr a,$$

et réciproquement. Pour une vitesse donnée v les valeurs de ϱ_0 et ϱ_1 dépendent ainsi de la valeur attribuée à la constante k. Les diverses combinaisons qui peuvent se présenter à cet égard, sont les suivantes. On a

$$a)\ \varrho_1 < a, \text{ si } k < a^2 - \frac{av}{\omega};$$

$$b)\ \varrho_1 = a, \text{ ,, } k = a^2 - \frac{av}{\omega};$$

$$c)\quad \varrho_0 < a < \varrho_1, \text{ si } a^2 - \frac{av}{\omega} < k < a^2 + \frac{av}{\omega};$$

$$d)\qquad \varrho_0 = a, \;\; \text{„} \;\; k = a^2 + \frac{av}{\omega};$$

$$e)\qquad \varrho_0 > a, \;\; \text{„} \;\; k > a^2 + \frac{av}{\omega}.$$

De ces combinaisons la dernière est physiquement impossible; à chacune des autres correspond une forme de trajectoire particulière, que nous allons indiquer.

a) Si ϱ_0 et ϱ_1 sont tous les deux inférieurs à a, la trajectoire reste comprise entre les cercles parallèles C_0 et C_1 dont les rayons sont ϱ_0 et ϱ_1. Dans le point de contact du premier cercle on a $A = +90^\circ$ et dans celui du second $A = -90^\circ$, c. à d. que le mobile se meut vers l'est au premier de ces points et vers l'ouest au second.

Au point où $\sin A = 0$, la trajectoire est tangente au méridien et l'on a $\varrho = \sqrt{k} = \sqrt{\varrho_0 \varrho_1}$. Ainsi le rayon du cercle parallèle coupé orthogonalement par la trajectoire est la moyenne proportionnelle entre les rayons des deux parallèles extrêmes.

A chaque valeur donné de ϱ, comprise entre ϱ_0 et ϱ_1, correspondent deux valeurs distinctes de l'azimut A, supplémentaires l'une de l'autre. Par conséquent, un cercle parallèle quelconque intermédiaire entre C_0 et C_1 est traversé par le mobile, en descendant vers l'équateur et en remontant vers le pôle, sous des angles égaux et symétriques. Et comme la courbure horizontale, exprimée par $\frac{2\omega \sin \varphi}{v}$ (p. 10), dépend, pour une vitesse donnée et constante, uniquement de la latitude, il s'ensuit que la trajectoire est symétrique par rapport au méridien passant par un point quelconque de maximum ou de minimum de la latitude.

Il est facile maintenant de se rendre compte de la route suivie par le mobile dans le cas actuel. Supposons qu'il se trouve dans l'hémisphère boréale. Au point de contact m avec le parallèle limite boréal C_0 il se meut vers l'est. Partant de là il décrit, en déviant toujours vers la droite, un arc dont la courbure horizontale diminue à mesure qu'il s'approche de l'équateur, jusqu'à ce qu'il atteint le parallèle limite méridional C_1. Au point de contact n avec celui-ci le mouvement est dirigé vers l'ouest. Passé ce point, le mobile va retourner vers le nord et, en déviant toujours vers la droite, il décrira une nouvelle branche symétrique à la première par rapport au méridien du point n, et atteint de nouveau le parallèle C_0 en un point m', en général différent de m. En ce moment il vient de terminer une oscillation complète et va en recommencer une seconde, toute semblable à la première, et ainsi de suite indéfiniment. Ainsi le mobile continue d'osciller entre les parallèles C_0 et C_1, en décrivant une suite de noeuds tangents alternativement à l'un et l'autre de ces parallèles. Et comme la partie inférieure (méridionale) de chaque noeud est moins courbe que la partie supérieure, il s'ensuit évidemment que les points de contact successifs sur chacun de ces parallèles forment une série de points équidistants procédant vers l'ouest. La trajectoire, en général, n'est pas fermée; elle tournoie indéfiniment autour de la terre. Dans des cas particuliers il peut arriver cependant qu'elle revienne, après une ou plusieurs révolutions, à son point de départ.

Si les latitudes φ_0, φ_1 des parallèles extrêmes, ou leurs rayons ϱ_0, ϱ_1 étaient donnés, on pourrait calculer la vitesse correspondante par la formule

$$v = (\varrho_1 - \varrho_0)\,\omega,$$

qui fait voir que la vitesse du mobile est égale à la différence des vitesses linéaires de la rotation aux parallèles extrêmes. Dans le petit tableau suivant nous donnons la vitesse linéaire de la rotation terrestre, en mètres par seconde, pour différentes latitudes, calculée en tenant compte de l'ellipticité du méridien :

φ	$\varrho\omega$
0°	465.05
10°	458.03
20°	437.17
30°	403.08
40°	356.74
50°	299.51
60°	233.11
70°	159.53
80°	81.02
90°	0.00.

D'après cela on trouve p. ex. que la vitesse qu'il faudrait imprimer au mobile pour le faire osciller entre les latitudes de 50° et 60°, est 299.51 − 233.11 = 66,40 mètres par seconde. Il faudrait une vitesse de 231.94, pour que la trajectoire pût s'étendre depuis 60° de latitude jusqu'à l'équateur, et une vitesse de 465.05, pour que les parallèles limites coïncidassent avec le pôle et l'équateur.

La figure 1 donne une idée de la forme affectée par la trajectoire dans le cas que nous venons d'examiner.

b) Si $\varrho_0 < a$ et $\varrho_1 = a$, le parallèle limite inférieur C_1 se confond avec l'équateur. La trajectoire ne forme alors qu'un seul noeud, tangent au parallèle C_0 et dont les deux branches s'approchent indéfiniment de l'équateur par des spires de plus en plus serrées (fig. 2). En effet, comme la courbure horizontale diminue avec la latitude et tend vers zéro lorsque celle-ci devient nulle, il est évident que la trajectoire ne pourra pas arriver réellement en contact avec l'équateur, mais qu'elle l'aura seulement pour asymptôte.

c) Lorsque $\varrho_0 < a < \varrho_1$, le rayon variable ϱ, qui ne peut plus atteindre la valeur ϱ_1, restera compris entre ϱ_0 et a. La trajectoire rencontre alors l'équateur sous un azimut déterminé par la formule

$$\sin A = \frac{(k - a^2)\,\omega}{av},$$

et qui est positif, nul ou négatif, suivant que k est $> a^2$, $= a^2$ ou $< a^2$. La valeur absolue de $\sin A$ étant dans ce cas toujours < 1, le mobile traverse l'équateur et pénètre dans l'autre hémisphère. Et comme la trajectoire est nécessairement symétrique par rapport à son intersection avec l'équateur, qui forme ainsi un point d'inflexion, elle doit osciller des deux côtés de celui-ci entre deux parallèles équidistants de même rayon ϱ_0. A mesure que v augmente, elle prend successivement les formes représentées par les fig. 3, 4, 5 et 6 (en projection de Mercator).

d) Enfin lorsque ϱ_0 devient $= a$, on a constamment $\varrho = \varrho_0 = a$ et $\sin A = +1$; la trajectoire se confond alors avec l'équateur, qui est parcouru par le mobile vers l'est avec la vitesse constante v.

6. *Deuxième cas*: $k = 0$. L'équation (4) se réduit actuellement à

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\omega$$

et donne

$$\omega dt + d\lambda = dL = 0,$$

d'où

$$L = \text{constante},$$

L étant la longitude dans le mouvement absolu ou par rapport à un méridien fixe dans l'espace. Ainsi le corps suit, dans ce cas, dans son mouvement absolu un arc de méridien, tout en oscillant entre certaines limites, qui peuvent se déterminer par la formule

$$\varrho = -\frac{v}{\omega}\sin A.$$

En effet, ϱ étant nécessairement positif, $\sin A$ ne peut varier qu'entre 0 et -1 et, par conséquent, ϱ restera compris entre 0 et $\frac{v}{\omega}$. Donc si $\frac{v}{\omega} < a$, le mobile oscille entre le pôle et le cercle parallèle au rayon $\frac{v}{\omega}$, c. à d. le parallèle dont la vitesse linéaire de rotation est égale à la vitesse même du mobile. Si $\frac{v}{\omega} = a$, le corps se meut du pôle à l'équateur, dont il s'approche indéfiniment. Enfin si $\frac{v}{\omega} > a$, la trajectoire absolue est une circonférence méridienne complète.

Connaissant le mouvement absolu, on se rend facilement compte du mouvement relatif ou du chemin suivi par le mobile sur la terre en rotation. Si $v < a\omega$; la trajectoire forme une suite de noeuds, tous semblables, ayant pour sommet commun le pôle (nord) et tangents au cercle parallèle dont le rayon est $= \frac{v}{\omega}$ (fig. 7). Pour $v = a\omega$ la trajectoire consiste en un seul noeud, ayant son sommet au pôle et dont les deux branches s'approchent asymptotiquement de l'équateur (fig. 8). Enfin si $v > a\omega$, le mobile oscille indéfiniment d'un pôle à l'autre (fig. 9. La trajectoire est marquée par un trait continu dans l'hémisphère boréale et par une ligne pointillée dans l'autre).

7. *Troisième cas:* $k < 0$. Pour la réalité de l'expression

$$(6) \qquad \varrho = -\frac{v}{2\omega}\sin A \pm \sqrt{\frac{v^2}{4\omega^2}\sin^2 A + k}$$

il faut que la valeur absolue de k n'excède pas $\frac{v^2}{4\omega^2}$. Si l'on avait $|k| = \frac{v^2}{4\omega^2}$, l'équation précédente n'admettrait d'autre solution, ϱ devant être positif, que

$$\sin A = -1, \quad \varrho = \frac{v}{2\omega} = \sqrt{-k}.$$

Le corps serait alors tenu de se mouvoir le long d'un cercle parallèle, au rayon ϱ, avec la vitesse $2\varrho\omega$ vers l'ouest, de sorte qu'il ferait un tour entier dans une demi-journée sidérale.

Lorsque la valeur absolue de k est $< \frac{v^2}{4\omega^2}$, $\sin A$ est constamment négative et ne peut varier qu'entre les limites -1 et $-\frac{2\omega}{v}\sqrt{-k}$. Faisons, pour abréger, $\frac{v}{2\omega}\sin A = x$; nous aurons

$$\varrho = -x \pm \sqrt{x^2 + k}$$

et

$$\frac{d\varrho}{dx} = -1 \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}}.$$

La variable x étant négative, cette expression de $\frac{d\varrho}{dx}$ fait voir que ϱ, considéré comme fonction de x ou de $\sin A$, croît ou décroît, suivant que le second terme est pris avec son signe inférieur ou supérieur. Donc si, en prenant d'abord le signe inférieur dans la formule (6), on fait croître $\sin A$ de -1 jusqu'à $-\frac{2\omega}{v}\sqrt{-k}$, et qu'en prenant ensuite le signe supérieur, on fasse varier $\sin A$ en sens inverse depuis $-\frac{2\omega}{v}\sqrt{-k}$ jusqu'à -1, ϱ coîtra constamment et parcourra toutes ses valeurs réelles et positives. Il en résulte que la plus petite et la plus grande des valeurs positives de ϱ, compatibles avec la formule (6), sont respectivement

$$\varrho_0 = \frac{v}{2\omega} - \sqrt{\frac{v^2}{4\omega^2} + k}$$

et

$$\varrho_1 = \frac{v}{2\omega} + \sqrt{\frac{v^2}{4\omega^2} + k},$$

de sorte qu'on aura entre ces valeurs extrêmes les relations

$$\varrho_0 + \varrho_1 = \frac{v}{\omega}$$

et

$$\varrho_0\,\varrho_1 = -k.$$

Mais pour que ϱ puisse réellement atteindre l'une ou l'autre des valeurs limites ϱ_0, ϱ_1, il faut que celle-ci soit inférieure ou tout au plus égale au rayon a de l'équateur. Remarquons d'abord que si $\frac{v}{\omega} \leqq a$, on aura nécessairement $\varrho_0 < \varrho_1 < a$, et que si $\frac{v}{\omega} \leqq 2a$, on aura encore $\varrho_0 < a$, ϱ_1 pouvant être $\lesseqgtr a$. Mais si $\frac{v}{\omega} > a$ il peut se présenter plusieurs combinaisons différentes. On sait que le produit de deux facteurs positifs, telle que ϱ_0 et ϱ_1, dont la somme $\left(\frac{v}{\omega}\right)$ est donnée, est d'autant plus grand que leur différence est plus petite, d'où il résulte que les quantités positives a et $\frac{v}{\omega} - a$, dont la somme est aussi $= \frac{v}{\omega}$, sont toutes les deux comprises entre ϱ_0 et ϱ_1, ou coïncident avec ces facteurs, l'une avec ϱ_0, l'autre avec ϱ_1, ou enfin les comprennent entre elles, suivant que le produit $a\left(\frac{v}{\omega} - a\right)$ est supérieur, égal ou inférieur au produit $\varrho_0\varrho_1$ ou $|k|$. D'après cela on aura, en supposant $\frac{v}{\omega} > a$,

$$\frac{v}{\omega} - a < \varrho_0 < \varrho_1 < a\,, \quad \text{si } |k| > a\left(\frac{v}{\omega} - a\right) \text{ et } v < 2a\omega\,,$$

$$\varrho_0 = \frac{v}{\omega} - a, \quad \varrho_1 = a\,, \quad \text{si } |k| = a\left(\frac{v}{\omega} - a\right) \text{ et } v < 2a\omega\,,$$

$$\varrho_0 < a < \varrho_1 \qquad\qquad , \quad \text{si } |k| < a\left(\frac{v}{\omega} - a\right),$$

$$\varrho_0 = a, \quad \varrho_1 = \frac{v}{\omega} - a\,, \quad \text{si } |k| = a\left(\frac{v}{\omega} - a\right) \text{ et } v > 2a\omega\,,$$

$$a < \varrho_0 < \varrho_1 < \frac{v}{\omega} - a\,, \quad \text{si } |k| > a\left(\frac{v}{\omega} - a\right) \text{ et } v > 2a\omega\,.$$

La dernière combinaison est physiquement impossible. Les quatre précédentes, auxquelles il faut joindre l'hypothèse $\frac{v}{\omega} \leqq a$, donnent autant de formes différentes de la trajectoire, que nous allons rapidement passer en revue.

a) Si ϱ_0 et ϱ_1 sont tous les deux $< a$, ce qui arrive non seulement lorsque $v \leqq a\omega$, mais aussi lorsque v est compris entre $a\omega$ et $2a\omega$ et qu'en même temps $|k| > a\left(\frac{v}{\omega} - a\right)$, la trajectoire est confinée dans l'une des hémisphères, soit la boréale, entre les deux cercles parallèles C_0 et C_1 dont les rayons sont ϱ_0 et ϱ_1. Le corps, en se mouvant toujours vers l'ouest, oscille entre ces deux parallèles, les touchant alternativement, l'un C_0 extérieurement et l'autre C_1 interieurement (fig. 10). Partant d'un point de contact m sur le cercle C_0, le mobile se dirige d'abord dans l'intérieur de l'angle compris entre le parallèle C_0 et la ligne géodésique tangente à celui-ci en m. Comme la courbure horizontale diminue à mesure que le mobile s'éloigne du pôle, il ne peut atteindre le parallèle limite inférieur C_1 qu'après avoir fait en longitude plus d'un demi-tour de la terre. Arrivé au point de contact n sur le cercle C_1, le mobile remonte vers C_0 par une route symétrique à celle décrite jusque là, et ainsi de suite. Les sommets ou points de contact successifs tant sur C_0 que sur C_1 se succèdent vers l'ouest à des intervalles égaux. Les parallèles intermédiaires entre C_0 et C_1 sont traversés par le mobile obliquement sous un angle variable, qui atteint son maximum sur le parallèle dont le rayon est $= \sqrt{\varrho_0 \varrho_1}$. On y a

$$v \sin A = -2\omega\sqrt{-k}, \text{ ou } \frac{d\lambda}{dt} = -2\omega,$$

ce qui veut dire que la vitesse relative en longitude y est double de celle de la rotation terrestre et dirigée en sens opposé de celle-ci.

b) Si $\varrho_0 < a$ et $\varrho_1 = a$, ce qui a lieu lorsque $a\omega < v < 2a\omega$ et $|k| = a\left(\frac{v}{\omega} - a\right)$, le parallèle limite inférieur se confond avec l'équateur. Mais comme la courbure horizontale diminue et tend vers zéro à mesure que le mobile s'approche de l'équateur, et que l'azimut A tend en même temps vers $-90°$, le mobile dans ce cas, au lieu d'arriver réellement en contact avec l'équateur, s'en s'approche indéfiniment. Il décrit ainsi une espèce de spirale, qui embrasse le cercle C_0, le touchant au sommet m, et dont les deux branches symétriques ont pour asymptôte l'équateur (fig. 11).

c) Soit $\varrho_0 < a < \varrho_1$, ce qui arrive lorsque $v > a\omega$ et $|k| < a\left(\frac{v}{\omega} - a\right)$. Alors le mobile, partant de son point de contact m avec le parallèle C_0 (fig. 12), se dirige vers l'ouest dans l'angle compris entre C_0 et la ligne géodésique tangente, et, s'éloignant toujours du pôle, il atteint l'équateur en un point I sous un azimut déterminé par la formule

$$\sin A = -\frac{a + \frac{|k|}{a}}{\frac{v}{\omega}}$$

qui, dans le cas actuel, donne pour A une valeur comprise entre 0 et $-90°$. Par conséquent le mobile traverse l'équateur et continue son chemin dans l'autre hémisphère, en y décrivant une seconde branche symétrique à la première par rapport au point d'intersection I, qui est ainsi un point d'inflexion. On voit par là que la trajectoire, en tournant toujours sa convexité vers l'équateur, doit osciller de part et d'autre de celui-ci entre deux parallèles équidistants, qu'elle touchera alternativement.

d) Enfin, si $\varrho_0 = a$, ce qui a lieu lorsque $v > 2a\omega$ et $|k| = a\left(\frac{v}{\omega} - a\right)$, le mobile circulera autour de l'équateur avec la vitesse v en sens contraire de la rotation.

8. *Résumé de la discussion précédente.* Nous allons résumer en peu de mots les résultats obtenus dans les articles précédents, en les coordonnant sous un point de vue, qui permettra de mieux saisir leur connexion.

Le mouvement relatif d'un corps libre sur la surface terrestre est, comme nous l'avons vu, suffisamment caractérisé par ces deux propriétés fondamentales: 1) que la vitesse v est constante et 2) que le mobile dévie constamment vers la droite dans l'hémisphère boréale et vers la gauche dans l'hémisphère australe, la courbure horizontale de la trajectoire ayant pour expression $\frac{2\omega \sin\varphi}{v}$, où φ désigne la latitude et ω la vitesse de la rotation terrestre.

A moins que la trajectoire ne passe par le pôle ou qu'elle ne coïncide avec l'équateur, elle doit évidemment avoir pour limite supérieure quelque cercle parallèle C_0, auquel elle sera tangente. En fixant le rayon ϱ_0 d'un tel parallèle et le point de contact m sur celui-ci, nous donnerons un aperçu des différents cas qui peuvent se présenter suivant que le mouvement y est dirigé vers l'est ou vers l'ouest et que la vitesse v est plus ou moins grande. Dans cette classification nous nous aiderons surtout de la relation

$$v = (\varrho_1 + \varrho_0)\,\omega,$$

qui a lieu lorsque la trajectoire est limitée par deux parallèles aux rayons

ϱ_0 et ϱ_1 $(\varrho_1 > \varrho_0)$ dans une même hémisphère et où il faut prendre le signe $+$ ou $-$, suivant que le mobile se meut au sommet m vers l'est ou vers l'ouest.

Supposons d'abord qu'il se meuve vers l'est. Pour $v = \infty$ il suivrait, s'il était retenu à la surface terrestre, la ligne géodésique tangente a C_0 en m. Voyons ce qui se passe, lorsque v diminue successivement.

a) Tant que $v > (a - \varrho_0)\omega$, le corps oscille entre C_0 et le parallèle correspondant de l'autre hémisphère. La trajectoire prend successivement les formes représentées par les fig. 6, 5, 4 et 3, à mesure que la vitesse diminue.

b) Pour $v = (a - \varrho_0)\omega$ la trajectoire forme un seul noeud, ayant son sommet à m, où il est touché extérieurement par le cercle C_0, et dont les deux branches s'approchent indéfiniment de l'équateur (fig. 2).

c) Si $v = (\varrho_1 - \varrho_0)\omega$, ϱ_1 étant compris entre ϱ_0 et a, le mobile tournoie entre les deux parallèles aux rayons ϱ_0 et ϱ_1, les touchant alternativement l'un et l'autre (fig. 1). Il décrit ainsi une suite de noeuds qui se retrécissent de plus en plus, à mesure que v et par suite la différence $\varrho_1 - \varrho_0$ diminue, et tendent à former, pour $v = 0$, un seul cercle infiniment petit.

Admettons maintenant que la vitesse en m change de direction et que le corps s'y meut vers l'ouest. En ce cas v ne peut être $< 2\varrho_0\omega$, puisque la courbure latérale de la trajectoire au point m serait alors plus grande que celle du cercle parallèle C_0, en sorte que le mobile, partant de m, s'approcherait du pôle, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc qu'on ait maintenant, C_0 étant limite supérieure de la trajectoire, $v \geqq 2\varrho_0\omega$.

d) Soit $v = 2\varrho_0\omega$. La trajectoire coïncide avec le parallèle C_0, qui sera parcouru par le mobile deux fois en un jour sidéral, de l'est vers l'ouest.

e) Lorsque $v = (\varrho_0 + \varrho_1)\omega$, ϱ_1, étant compris entre ϱ_0 et a, le mobile circule, toujours vers l'ouest, entre les parallèles aux rayons ϱ_0 et ϱ_1, les touchant alternativement l'un et l'autre, (fig. 10).

f) Pour $v = (\varrho_0 + a)\omega$, la trajectoire forme un seul noeud embrassant le cercle C_0 et dont les deux branches s'approchent indéfiniment de l'équateur (fig. 11).

g) Enfin, si $v > (\varrho_0 + a)\omega$, la trajectoire forme une suite d'ondulations, s'étendant du parallèle C_0 jusqu'au parallèle correspondant de l'autre hémisphère, de manière à être touchée intérieurement tour à tour par l'un et l'autre (fig. 12). Comme cas limite, pour $v = \infty$, on aura de nouveau la ligne géodésique tangente à C_0.

Pour compléter cette énumération, il faut ajouter que si le mobile est lancé de l'un des pôles avec une certaine vitesse v, la trajectoire affectera l'une des formes représentées par les fig. 7, 8, 9, suivant que $v < a\omega$, $v = a\omega$, ou $v > a\omega$, et que, s'il est mis en mouvement le long de l'équateur, il continuera de s'y mouvoir, quels que soient le sens et la grandeur de la vitesse.

Ajoutons quelques mots sur le rôle qui revient au paramètre k dans cette classification. Au sommet m on a

$$\varrho_0 \frac{d\lambda}{dt} = \pm v,$$

où il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, suivant que le mouvement y est dirigé vers l'est ou vers l'ouest. Remettant cette valeur dans l'équ. (4), on en tire

$$k = \varrho_0\left(\varrho_0 \pm \frac{v}{\omega}\right).$$

D'après cela k serait positif, non seulement lorsque le mouvement au point considéré a lieu vers l'est, mais aussi lorsqu'il est dirigé vers l'ouest et qu'en même temps $v < \varrho_0\omega$. Mais ce dernier cas est impossible, puisque le mobile, se mouvant vers l'ouest sur le parallèle C_0, ne saurait avoir ce parallèle pour limite supérieure, à moins que la vitesse ne fût $\geqq 2\varrho_0\omega$. Donc k est positif ou négatif, suivant que le mouvement au sommet supérieur de la trajectoire a lieu vers l'est ou vers l'ouest, et il ne peut être nul que si $\varrho_0 = 0$, c'est à dire si la trajectoire passe par le pôle.

Les deux cas distingués par le signe de la constante k se caractérisent encore par la propriété que voici. Suivant que k est positif ou négatif, la trajectoire tourne au sommet supérieur sa convexité ou sa concavité vers le pôle, de manière à être touchée extérieurement ou intérieurement par le parallèle limite supérieur C_0. C'est ce qu'on pourrait exprimer en disant que la trajectoire appartient au genre *extrapolaire* dans le premier cas et au genre *circumpolaire* dans le second. Le cas intermédiaire entre ces deux genres est celui où la trajectoire passe par le pôle.

III. Intégration des équations du mouvement, la terre étant supposée sphérique.

9. Par une première intégration nous avions déjà obtenu les équations différentielles du premier ordre

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = v^2 = \text{const.} \tag{1}$$

et

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \omega(k - x^2 - y^2), \tag{2}$$

qui, jointes à celle de la surface terrestre, déterminent le mouvement du corps. Afin d'éviter une complication inutile, nous admettrons dès à présent, que la surface de la terre est une sphère, ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,. \tag{3}$$

Il s'agit d'obtenir les coordonnées sphériques de la trajectoire, c'est à dire la latitude φ et la longitude λ, exprimées en fonctions du temps t. Comme $\sin\varphi = \frac{z}{a}$, nous commençons par chercher l'expression de z.

L'équation (3) donne

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0\,.$$

De celle-ci, combinée avec (2), on tire

$$\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)^2 = z^2\frac{dz^2}{dt^2} + \omega^2(k - x^2 - y^2)^2,$$

équation dont le premier membre se réduit à

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right) = (a^2 - z^2)\left(v^2 - \frac{dz^2}{dt^2}\right).$$

On aura, par conséquent,

$$z^2 \frac{dz^2}{dt^2} + \omega^2(k - a^2 + z^2)^2 = (a^2 - z^2)\left(v^2 - \frac{dz^2}{dt^2}\right),$$

d'où l'on déduit successivement

$$\begin{aligned}
a^2 \frac{dz^2}{dt^2} &= (a^2 - z^2)\, v^2 - \omega^2(k - a^2 + z^2)^2 \\
&= -\,\omega^2\left[z^4 + 2\left(k - a^2 + \frac{v^2}{2\omega^2}\right)z^2 + (k - a^2)^2 - \frac{a^2 v^2}{\omega^2}\right] \\
&= \omega^2\left[\frac{v^2}{\omega^2}\left(k + \frac{v^2}{4\omega^2}\right) - \left(z^2 - a^2 + k + \frac{v^2}{2\omega^2}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Pour que le second membre puisse devenir positif ou nul pour des valeurs réelles de z, comme l'exige la réalité de la dérivée $\frac{dz}{dt}$, il faut que

$$k + \frac{v^2}{4\omega^2} \geqq 0\,.$$

Donc si nous faisons

$$c = \sqrt{k + \frac{v^2}{4\omega^2}},$$

la constante c sera dans tous les cas positive ou nulle et l'équation précédente deviendra, en éliminant k,

$$\begin{aligned}
a^2 \frac{dz^2}{dt^2} &= -\,\omega^2\left[\left(z^2 - a^2 + c^2 + \frac{v^2}{4\omega^2}\right)^2 - \frac{c^2 v^2}{\omega^2}\right], \\
&= -\,\omega^2\left[z^2 - a^2 + \left(c + \frac{v}{2\omega}\right)^2\right]\left[z^2 - a^2 + \left(c - \frac{v}{2\omega}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Par la même raison il faut encore que les deux derniers facteurs du second membre soient de signe contraire, l'un positif et l'autre négatif, à moins que l'un ou tous les deux ne s'évanouissent, en sorte que

$$a^2 - \left(c - \frac{v}{2\omega}\right)^2 \geq z^2 \geqq a^2 - \left(c + \frac{v}{2\omega}\right)^2.$$

Des deux quantités entre lesquelles z^2 se trouve ainsi enfermé, la première doit évidemment être positive ou nulle, tandisque la seconde peut, suivant les circonstances, être positive, nulle ou négative. Il sera dont permis de poser

$$(4)\qquad \begin{cases} a^2 - \left(c - \dfrac{v}{2\omega}\right)^2 = \alpha^2, \\ a^2 - \left(c + \dfrac{v}{2\omega}\right)^2 = \pm\beta^2, \end{cases}$$

α et β étant deux nouvelles constantes positives (ou nulles), qui dépendent de c et v ou de k et v et peuvent les remplacer. A ce propos, nous faisons remarquer dès à présent qu'on a

$$k = c^2 - \frac{v^2}{4\omega^2} = \pm\sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 \mp \beta^2)},$$

le signe de k étant le même que celui de la différence $c - \frac{v}{2\omega}$. On trouve de plus, en éliminant c entre les équ. (4),

$$\frac{v}{\omega} = \sqrt{a^2 \mp \beta^2} - \sqrt{a^2 - \alpha^2}, \text{ si } k > 0,$$

et

$$\frac{v}{\omega} = \sqrt{a^2 \mp \beta^2} + \sqrt{a^2 - \alpha^2}, \text{ si } k < 0.$$

Par les substitutions que nous venons d'indiquer, notre équation prend la forme simple

$$a^2 \frac{dz^2}{dt^2} = \omega^2(\alpha^2 - z^2)(z^2 \mp \beta^2)$$

et donne

$$(5)\qquad \omega dt = \pm \frac{a dz}{\sqrt{(\alpha^2 - z^2)(z^2 \mp \beta^2)}},$$

le second membre devant être pris avec le signe + ou − (tout en conservant à β^2 son double signe), suivant que le mobile s'approche ou s'éloigne du pôle nord. En intégrant cette équation entre des limites convenables, on trouvera l'ordonnée z exprimée par une fonction elliptique de t.

Pour obtenir de même une équation différentielle qui puisse servir à déterminer la longitude λ, nous reprenons l'équation (2), et nous en tirons d'abord, en faisant $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\varrho^2(d\lambda + \omega dt) = k\omega dt.$$

On remarquera, en passant, que $d\lambda + \omega dt$ n'est autre chose que la différentielle de la longitude L comptée à partir d'un méridien fixe dans l'espace. L'équation précédente renferme donc cette propriété importante, que dans le mouvement absolu, la projection du rayon vecteur sur le plan de l'équateur décrit des aires égales dans des temps égaux. Et comme l'équation (2) subsiste quelle que soit la forme du méridien terrestre, cette propriété a lieu pour toute surface de révolution.

Remettant pour ϱ^2 sa valeur $x^2 + y^2 = a^2 - z^2$, et ayant égard à l'équ. (5), on trouve

$$(6) \qquad d\lambda + \omega dt = \pm \frac{akdz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(\alpha^2 - z^2)(z^2 \mp \beta^2)}},$$

où le signe du second membre doit être choisi de la même manière que dans l'équ. (5). Quant au signe de β^2 dans ces formules, le choix qu'on en doit faire, dépend, d'après (4) de la valeur attribuée à la constante c, en sorte qu'il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, suivent que $c <$ ou $> a - \frac{v}{2\omega}$, et que $\beta = 0$, si $c = a - \frac{v}{2\omega}$. D'après cela, en intégrant les équations (5) et (6), nous aurons à distinguer trois cas, qui seront traités séparément.

10. *Premièr cas*: $c < a - \frac{v}{2\omega}$. Les équations à intégrer sont

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega dt &= \pm \frac{adz}{\sqrt{(\alpha^2 - z^2)(z^2 - \beta^2)}}, \\ d\lambda + \omega dt &= \pm \frac{akdz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(\alpha^2 - z^2)(z^2 - \beta^2)}}, \end{aligned} \right.$$

α et β étant, l'un et l'autre, $< a$ et $\alpha > \beta$. On voit d'abord que z^2 ne peut varier qu'entre α^2 et β^2. L'ordonnée z elle-même peut être positive ou négative; dans le premier cas elle restera comprise entre α et β, dans le second entre $-\alpha$ et $-\beta$, de sorte que la trajectoire se trouvera toujours enfermée dans l'une des hémisphères. Supposons que ce soit dans l'hémisphèrs boréale; on aura alors constamment

$$\alpha \geqq z \geqq \beta.$$

Posons

$$\frac{\alpha^2 - z^2}{\alpha^2 - \beta^2} = \sin^2\psi;$$

on en déduit successivement:

$$z = +\sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2)\sin^2\psi},$$

$$\alpha^2 - z^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\sin^2\psi, \quad z^2 - \beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\cos^2\psi,$$

$$z dz = -(\alpha^2 - \beta^2)\sin\psi\cos\psi\, d\psi,$$

et par suite

$$\frac{dz}{\sqrt{(\alpha^2 - z^2)(z^2 - \beta^2)}} = \frac{-d\psi}{\sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2)\sin^2\psi}} = \frac{-d\psi}{\alpha\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\psi}},$$

où l'on a fait

$$\varkappa = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}}.$$

La dérivée $\frac{dz}{dt}$ devient nulle pour $z = \alpha$ et $z = \beta$, qui sont les valeurs maxima et minima de z, et change de signe chaque fois que z passe par l'une de ces valeurs. Si l'on compte le temps t à partir du moment où $z = \alpha$, cette dérivée commence par être négative et l'on doit prendre dans chacune des équations (7) le signe inférieur, en sorte qu'on aura, en particulier,

$$\omega dt = \frac{-a dz}{\sqrt{(\alpha^2 - z^2)(z^2 - \beta^2)}} = \frac{a d\psi}{\alpha\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\psi}}.$$

Aux limites de z l'un ou l'autre des facteurs $\cos\psi$ et $\sin\psi$ dans l'expression de $z dz$ devient nul et change de signe, et comme il en est de même de dz, il s'ensuit que $d\psi$ est toujours positif, en sorte que ψ croît constamment avec t. Donc, si l'on fait ψ commencer avec t, ce qui est permis puisque $\sin\psi = 0$ pour $t = 0$, on trouve en intégrant

$$\text{(8)} \qquad \frac{\alpha}{a}\omega t = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\psi}},$$

d'où

$$\psi = \operatorname{am}\left(\frac{\alpha}{a}\omega t\right), \qquad (\text{mod. } \varkappa),$$

et par suite

$$z = \alpha\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi} = \alpha \Delta \operatorname{am}\left(\frac{\alpha}{a}\omega t\right).$$

Désignons par φ_0 et φ_1 les valeurs maxima et minima de la latitude φ, correspondantes à $z = \alpha$ et $z = \beta$, ou aux valeurs

$$\varrho_0 = \sqrt{a^2 - \alpha^2} \text{ et } \varrho_1 = \sqrt{a^2 - \beta^2}$$

de ϱ; on aura $\alpha = a\sin\varphi_0$, $\beta = a\sin\varphi_1$ et

$$\text{(9)} \qquad \sin\varphi = \sin\varphi_0 \Delta \operatorname{am}(\omega t \sin\varphi_0), \quad \left(\text{mod. } \varkappa = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi_1}{\sin^2\varphi_0}}\right),$$

formule qui sert à calculer la latitude du mobile pour un temps quelconque donné. Comme Δam est une fonction périodique, oscillant entre 1 et $\sqrt{1-\varkappa^2} = \varkappa' = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_0}$, φ est de même périodique, ayant pour limites φ_0 et φ_1. En désignant par T la durée d'une demi-oscillation (depuis φ_0 jusqu'à φ_1, ou vice versâ) et faisant

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}},$$

on a, en vertu de (8), $T\omega\sin\varphi_0 = K$, ou

$$T = \frac{K}{\omega \sin\varphi_0}.$$

Pour calculer K, on peut se servir de la série connue

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varkappa^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \varkappa^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \varkappa^6 + \cdots\right].$$

On a aussi, en faisant

$$\varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_0}$$

et

$$\varkappa_0 = \frac{1 - \varkappa'}{1 + \varkappa'} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_1)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1)},$$

les formules

$$q = \frac{1}{4}\varkappa_0 + \frac{1}{16}\varkappa_0^3 + \frac{17}{512}\varkappa_0^5 + \frac{45}{2048}\varkappa_0^7 + \cdots$$

$$K = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{1+\sqrt{\varkappa'}}\right)^2 \cdot (1 + 2q^4 + 2q^{16} + \cdots)^2,$$

lesquelles, à cause de leur convergence rapide, sont à préférer, surtout lorsque $\varkappa$ est peu différent de 1. Si $\varkappa_0$ est assez petit pour qu'on puisse en négliger les puissances supérieures à la troisième, on peut écrire simplement

$$K = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{1+\sqrt{\varkappa'}}\right)^2 = \frac{2\pi a}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2},$$

et l'on trouve ainsi, comme valeur approchée de T,

$$T = \frac{2\pi a}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2\omega} = \frac{2\pi}{(\sqrt{\sin\varphi_0}+\sqrt{\sin\varphi_1})^2 \cdot \omega}.$$

Prenant le jour sidéral pour unité de temps, on a $\omega = 2\pi$ et l'expression précédente se réduit à

$$T = \frac{1}{(\sqrt{\sin\varphi_0}+\sqrt{\sin\varphi_1})^2}.$$

Passons à la seconde équation (7). En y appliquant la substitution déjà employée au sujet de la première équ. (7), elle se transforme en

$$d\lambda + \omega dt = \frac{akd\psi}{\alpha(a^2-\alpha^2+(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\psi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}$$

$$= \frac{ak}{\alpha\varrho_0^2} \cdot \frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}},$$

où

$$n = \frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2-\alpha^2} = \frac{\alpha^2\varkappa^2}{\varrho_0^2} = \varkappa^2\operatorname{tang}^2\varphi_0,$$

et l'on trouve, en intégrant,

$$(10) \qquad \lambda - \lambda_0 + \omega t = \frac{ak}{\alpha\varrho_0^2}\int_0^\psi \frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}.$$

Dans le cas actuel on a (p. 29)

$$k = +\sqrt{(a^2-\alpha^2)(a^2-\beta^2)} = +\varrho_0\varrho_1 = +a^2\cos\varphi_0\cos\varphi_1,$$

$$\frac{v}{\omega} = \sqrt{a^2-\beta^2} \mp \sqrt{a^2-\alpha^2} = \varrho_1 \mp \varrho_0 = a(\cos\varphi_1 \mp \cos\varphi_0);$$

et par suite

$$\frac{ak}{\alpha\varrho_0^2} = \pm\frac{a\varrho_1}{\alpha\varrho_0}.$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, la constante k est positive, lorsque le mouvement initial (à partir du sommet supérieur de la trajectoire) est dirigé vers l'est, et négative dans le cas contraire. Cela résulte d'ailleurs aussi de la formule

$$\varrho^2(d\lambda + \omega dt) = k\omega dt,$$

qui donne, pour le mouvement en longitude au sommet,

$$\varrho_0^2(d\lambda + \omega dt) = \pm\varrho_0\varrho_1\omega dt$$

d'où

$$\varrho_0\frac{d\lambda}{dt} = (-\varrho_0 \pm \varrho_1)\omega.$$

Comme $\varrho_1 > \varrho_0$, cette formule, qui, bien entendu, n'a lieu qu'à la limite supérieure de la trajectoire, montre en effet que la longitude y va en croissant ou en décroissant, suivant que k est positif ou négatif.

Suivant la notation de Legendre nous désignons respectivement par F et Π les intégrales elliptiques de la première et de la troisième espèce contenues dans lés équations (8) et (10), à savoir

$$F(\psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}},$$

$$\Pi(\psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}};$$

et nous écrivons en conséquence

$$\omega t = \frac{a}{\alpha}F(\psi),$$

$$\lambda - \lambda_0 + \omega t = \pm\frac{a\varrho_1}{\alpha\varrho_0}\Pi(\psi),$$

d'où, en éliminant ωt,

$$(11)\qquad \lambda - \lambda_0 = -\frac{a}{\alpha}\Big(F(\psi \mp \frac{\varrho_1}{\varrho_0}\Pi(\psi)\Big),$$

où l'on prendra le signe supérieur ou inférieur, suivant que le mouvement initial est dirigé vers l'est ou vers l'ouest. La même distinction sera observée, en cas de doubles signes, dans les formules qui suivent. Cette équation, qui établit une relation entre les variables λ et ψ, dont la seconde de son côté est liée à la latitude φ par la formule

$$\sin^2\psi = \frac{\alpha^2 - z^2}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{\sin^2\varphi_0 - \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi_0 - \sin^2\varphi_1},$$

peut être regardée comme celle de la trajectoire.

Pour réduire l'intégrale elliptique de la troisième espèce H à la forme normale de Jacobi que nous désignerons par Π, on doit subsituer

$$(12) \qquad n = \varkappa^2 \tan^2\varphi_0 = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} i\eta,$$

η étant une nouvelle constante qui dépend de $\varkappa$ et φ_0. Alors si l'on fait, suivant la notation de Jacobi,

$$u = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}} = \omega t \sin\varphi_0,$$

u n'étant autre chose que l'intégrale désignée plus haut par F, il vient

$$H(\psi) = u + \frac{\operatorname{tang} \operatorname{am} i\eta}{\Delta \operatorname{am} i\eta}\, \Pi(u + i\eta),$$

l'intégrale Π étant de son côté liée aux fonctions Θ et Z de Jacobi par la relation

$$\Pi(u + i\eta) = uZ(i\eta) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u - i\eta)}{\Theta(u + i\eta)}.$$

en sorte qu'on aura

$$(13) \qquad H(\psi) = u + \frac{\operatorname{tang} \operatorname{am} i\eta}{\Delta \operatorname{am} i\eta}\left\{uZ(i\eta) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u - i\eta)}{\Theta(u + i\eta)}\right\}.$$

On a d'ailleurs

$$\sin \operatorname{am} i\eta = i \operatorname{tang} \operatorname{am}(\eta, \varkappa'),$$

$$\cos \operatorname{am} i\eta = \sec \operatorname{am}(\eta, \varkappa'),$$

$$\operatorname{tang} \operatorname{am} i\eta = i \sin \operatorname{am}(\eta, \varkappa'),$$

$$\Delta \operatorname{am} i\eta = \frac{\Delta \operatorname{am}(\eta, \varkappa')}{\cos \operatorname{am}(\eta, \varkappa')},$$

et d'après (12)

$$\sin \operatorname{am} i\eta = i \operatorname{tang} \varphi_0 = i \operatorname{tang} \operatorname{am}(\eta, \varkappa'),$$

d'où

$$\operatorname{am}(\eta, \varkappa') = \varphi_0,$$

c'est à dire

$$\eta = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa'^2 \sin^2\psi}},$$

ce qui donne

$$\frac{\operatorname{tang} \operatorname{am} i\eta}{\varDelta \operatorname{am} i\eta} = i \frac{\sin\varphi_0 \cos\varphi_0}{\sqrt{1 - \varkappa'^2 \sin^2\varphi_0}} = i \frac{\sin\varphi_0 \cos\varphi_0}{\cos\varphi_1} = i \frac{\alpha\varrho_0}{a\varrho_1}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression précédente de H et introduisant ensuite les valeurs de F et H dans l'équation (11), celle-ci devient

$$(14) \qquad \lambda - \lambda_0 = \left(\frac{-\cos\varphi_0 + \cos\varphi_1}{\sin\varphi_0 \cos\varphi_0} \pm iZi\eta\right) u \pm \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(u - i\eta)}{\Theta(u + i\eta)}$$

$$= \pm \left(\frac{av}{\alpha\varrho_0 \omega} + iZ(i\eta)\right) u \pm \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(u - i\eta)}{\Theta(u + i\eta)}.$$

Si l'on fait

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

K et K' étant les intégrales elliptiques complètes de la première espèce relatives aux modules $\varkappa$ et $\varkappa'$, les fonctions Θ et Z peuvent être définies par les séries

$$\Theta(u) = 1 - 2q \cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots \text{ [1]}$$

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1 - q^2} \sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1 - q^4} \sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1 - q^6} \sin\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right). \text{ [2]}$$

L'expression $iZi\eta$ est, malgré sa forme, effectivement réelle, car on a

$$iZ(i\eta, \varkappa) = -\operatorname{tang} \operatorname{am}(\eta, \varkappa') \varDelta \operatorname{am}(\eta, \varkappa') + \frac{\pi\eta}{2KK'} + Z(\eta, \varkappa'). \text{ [3]}$$

Introduisant cette valeur dans l'équ. (14) et observant que

$$\operatorname{tang} \operatorname{am}(\eta, \varkappa') \varDelta \operatorname{am}(\eta, \varkappa') = \operatorname{tang} \varphi_0 \cos\varphi_1,$$

il vient

---

[1] Jacobis gesammelte Werke, herausgeg. von Borchardt, I, p. 231. [2] Ibid. I, p. 187. [3] Ibid. I, p. 215.

$$(15)\qquad \lambda - \lambda_0 = \pm\left(\frac{\cos\varphi_0\cos\varphi_1 \mp 1}{\sin\varphi_0} + \frac{\pi\eta}{2KK'} + Z(\eta, \varkappa')\right)u + \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u-i\eta)}{\Theta(u+i\eta)}\cdot\,^{1)}$$

La fonction Θ a la période réelle $2K$. Ainsi $\lambda - \lambda_0$ se compose de deux parties distinctes, l'une proportionnelle à u ou au temps t, l'autre périodique, accomplissant une demi-oscillation dans le temps $T = \dfrac{K}{\omega\sin\varphi_0}$. Le terme périodique se présente ici encore sous une forme imaginaire; mais cette forme n'est qu'apparente, car on trouve, en développant et désignant par sh et ch des sinus et cosinus hyperboliques,

$$\Theta(u \pm i\eta) = P \pm iQ,$$

où

$$P = 1 - 2q\,\mathrm{ch}\frac{\pi\eta}{K}\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\,\mathrm{ch}\frac{2\pi\eta}{K}\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\,\mathrm{ch}\frac{3\pi\eta}{K}\cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots,$$

$$Q = 2q\,\mathrm{sh}\frac{\pi\eta}{K}\sin\frac{\pi u}{K} - 2q^4\,\mathrm{sh}\frac{2\pi\eta}{K}\sin\frac{2\pi u}{K} + 2q^9\,\mathrm{sh}\frac{3\pi\eta}{K}\sin\frac{3\pi u}{K} - \cdots,$$

et par conséquent

$$\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u-i\eta)}{\Theta(u+i\eta)} = \frac{i}{2}\log\frac{P-iQ}{P+iQ} = \operatorname{arc\,tang}\frac{Q}{P}\cdot$$

Quant au terme non périodique, si nous désignons par $\varDelta$ l'accroissement que prend ce terme dans le temps T ou lorsque u croît de K, on a

$$\varDelta = \pm K\left(\frac{\cos\varphi_0\cos\varphi_1 \mp 1}{\sin\varphi_0} + \frac{\pi\eta}{2KK'} + Z(\eta, \varkappa')\right)\cdot$$

A l'aide de ces notations, l'équation (15) peut s'écrire simplement

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{\varDelta}{K}u \pm \operatorname{arc\,tang}\frac{Q}{P}\cdot$$

La quantité $\varDelta$ est toujours négative. Pour le démontrer et pour se rendre compte en même temps des limites entre lesquelles elle peut varier, le

---

[1]) Si l'on voulait introduire, au lieu de Θ et Z, les fonctions σ de Weierstrass, on n'aurait qu'à employer les formules données par M. Schwarz dans ses „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen", Art. 39.

plus simple est de recourir à la formule (11), qui donne pour $\psi = \frac{\pi}{2}$, en observant que $\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \sqrt{1+n}$,

$$A = -\frac{a}{\alpha}(K \mp J),$$

où

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}},$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+n}\,.\,d\psi}{(1 + n\sin^2\psi)\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}}.$$

Or, on a identiquement

$$\frac{\sqrt{1+n}\,d\psi}{1 + n\sin^2\psi} = \frac{\sqrt{1+n}\,d\,\mathrm{tang}\,\psi}{1 + (1+n)\,\mathrm{tang}^2\psi};$$

donc, si l'on fait

$$\sqrt{1+n}\ \mathrm{tang}\,\psi = \mathrm{tang}\,\chi, \text{ ou } \chi = \mathrm{arc\,tang}\,(\sqrt{1+n}\ \mathrm{tang}\,\psi),$$

en sorte que

$$\frac{\sin\psi}{\sin\chi} = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1+n}\cos\chi} = \frac{1}{\sqrt{1+n\cos^2\chi}},$$

l'intégrale J se transformera en

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2 \sin^2\chi}{1 + n\cos^2\chi}}}.$$

Sous cette forme on voit immédiatement que, pour une valeur donnée de $\varkappa$, J diminue lorsque n augmente, et qu'on a, en général,

$$J < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\chi}} = K,$$

$$J > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{1+n}\sin^2\chi}} > \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $K-J$ est >0 et $K+J>\pi$. Si, en supposant α constant, on fait varier β depuis $\beta=\alpha$ jusqu'à $\beta=0$, $\frac{\varkappa^2}{n}(=\cot^2\varphi_0)$ sera de même constant, tandis que $\varkappa$ variera depuis 0 jusqu'à 1. Par conséquent K et J, qui sont, l'un et l'autre, égaux à $\frac{\pi}{2}$ pour $\varkappa=0$, coîtront simultanement et tendront vers l'infini. Il en est de même de la différence $K-J$, ce qu'on voit immédiatement en lui donnant la forme

$$K-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sqrt{\frac{1-\varkappa^2\sin^2\psi}{1-\frac{\varkappa^2\sin^2\psi}{1+n\cos^2\psi}}}\right)\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}.$$

En effet, chacun des deux facteurs dont se compose ici la fonction à intégrer, croît avec $\varkappa$ et le premier d'entre eux en outre avec n. Pour $\varkappa=1$ cette fonction se réduit à

$$\frac{1}{\cos\psi}\left(1-\sqrt{\frac{1+n\cos^2\psi}{1+n}}\right)$$

et reste ainsi, entre les limites de l'intégrale, constamment supérieure à

$$\frac{1}{\cos\psi}\left(1-\frac{1+\sqrt{n}\cos\psi}{\sqrt{1+n}}\right),$$

d'où il suit qu'on a, pour $\varkappa=1$,

$$K-J>\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+n}}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\cos\psi}-\sqrt{\frac{n}{1+n}}\,\frac{\pi}{2}=\infty\,.$$

D'après cette discussion la trajectoire, qui dans le cas actuel est enfermée dans l'une des hémisphères entre deux parallèles C_0 et C_1 aux distances α et β de l'équateur, a les propriétés suivantes:

Le déplacement total en longitude, accompli pendant une demi-oscillation complète, a toujours lieu vers l'ouest.

Si le mouvement initial, en un point de contact avec le parallèle limite supérieur C_0, est dirigé vers l'est, ce déplacement varie de 0 à ∞, lorsque, C_0 étant fixe, C_1 se transporte successivement de C_0 jusqu'à l'équateur.

Si, contraire, le mouvement initial a lieu vers l'ouest, le mobile avance pendant chaque demi-oscillation vers l'ouest de plus d'une demi-circonférence, le déplacement total en longitude croissant à partir de la valeur minima $\frac{a}{\alpha}\pi$

ou $\frac{\pi}{\sin\varphi_0}$, qu'il atteint lorsque C_1 coïncide avec C_0, et tendant vers ∞ lorsque C_1 s'aproche de l'équateur.

Ainsi se trouve confirmé ce que nous avons dit précédemment [art. 5 et 7] sur la forme générale de la trajectoire dans le cas actuel [voir les fig. (1) et (10)].

Comme illustration des formules générales établies dans cet article, il reste à montrer ce qu'elles deviennent aux limites des constantes α et β.

a) Supposons $\alpha = a$, ou $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire que le mobile passe par le pôle. On a $\varkappa = \cos\varphi_1$, $\varkappa' = \sin\varphi_1$, $\eta = K'$, et l'équ. (15) devient

$$\lambda - \lambda_0 = \left[-1 \pm \frac{\pi}{2K} \pm Z(K', \varkappa')\right] u \pm \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(u - iK')}{\Theta(u + iK')}.$$

Or, on a en général

$$Z(K', \varkappa') = 0,$$

$$\Theta(u + iK') = \frac{i\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}}\, e^{-\frac{i\pi u}{2K}} \sin\operatorname{am} u \,.\, \Theta(u),\text{[1]}$$

$$\Theta(u - iK') = -\frac{i\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}}\, e^{+\frac{i\pi u}{2K}} \sin\operatorname{am} u \,.\, \Theta(u)$$

et par suite

$$\lambda - \lambda_0 = -u \pm (2m + 1)\frac{\pi}{2},$$

m étant un nombre entier arbitraire. Pour $t = 0$ le premier membre se réduit à 0, et le second à $\pm (2m + 1)\frac{\pi}{2}$. Mais on explique facilement cette contradiction en observant que, dans nos formules générales, λ_0 signifie la longitude du sommet ou point de contact de la trajectoire avec le parallèle limite supérieur C_0; passant au cas limite, où le sommet coïncide avec le pôle, il faut donc entendre par λ_0 la longitude d'un méridien normal à celui dans lequel le mobile se meut à partir du pôle. Si, au contraire, on laisse λ_0 signifier la longitude de ce dernier meridien, on aura simplement

[1]) Jacobis g. W. I, p. 216.

$$\lambda - \lambda_0 = -u = -\omega t$$

ou

$$\lambda - \lambda_0 + \omega t = 0.$$

Ainsi le mouvement absolu en longitude est nul, c'est à dire que le mobile suit, dans son mouvemement absolu, un méridien, résultat déjà obtenu p. 20.

La formule (9), qui détermine la latitude du mobile, devient dans ce cas

$$\sin \varphi = \Delta \operatorname{am}(\omega t), \quad (\text{mod.} = \cos \varphi_1).$$

Si $\beta = 0$ en même temps que $\alpha = a$, en sorte que $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi_1 = 0$, on a $\Delta \operatorname{am} \omega t = \cos \operatorname{am} \omega t$ et par suite $\frac{\pi}{2} \quad \varphi = \operatorname{am} \omega t$, ou

$$\omega t = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varphi} \frac{d\psi}{\cos \psi} = \log \cot \frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = e^{-\omega t}.$$

Le mobile s'approche indéfiniment de l'équateur sans jamais l'atteindre.

b) Soit $\beta = \alpha$ ou $\varphi_1 = \varphi_0$. On a $\varkappa' = 1$, $\varkappa = 0$, $K = \frac{\pi}{2}$, $K' = \infty$, $q = 0$, $Z(u, \varkappa) = 0$, $\Theta(u, \varkappa) = 1$,

et l'équation (14) se réduit à

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{\cos \varphi_0 \mp \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0} u.$$

Le signe supérieur donne $\lambda - \lambda_0 = 0$; c'est le cas du repos. Prenant le signe inférieur, on trouve

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{2u}{\sin \varphi_0} = -2\omega t.$$

Pour que la trajectoire coïncide avec un cercle parallèle, il faut donc que le corps se meuve vers l'ouest avec une vitesse double de celle de la rotation terrestre sur la même latitude. Nous retrouvons ainsi le résultat déjà indiqué p. 10.

Il serait facile de déduire de même des équations précédentes les formules relatives au cas où $\beta = 0$, α ayant une valeur quelconque $< a$. Mais comme ce cas entre dans notre classification principale, nous allons le traiter à part.

11. *Deuxième cas* (intermédiaire): $c = a - \frac{v}{2\omega}$. On a $\beta = 0$ et les équations à intégrer deviennent, en y choisissant le signe qui convient au mouvement descendant,

$$(16)\qquad \begin{cases} \omega dt = -\dfrac{adz}{z\sqrt{a^2 - z^2}}, \\[2ex] d\lambda + \omega dt = -\dfrac{akdz}{z(a^2 - z^2)\sqrt{a^2 - z^2}}, \end{cases}$$

où

$$k = \pm a\sqrt{a^2 - \alpha^2} = \pm a\varrho_0 = \pm a^2 \cos\varphi_0,$$

k étant positif ou négatif, suivant que le mouvement initial (à partir du sommet) à lieu vers l'est ou vers l'ouest.

Posons

$$z = a\cos\psi;$$

la premier équ. (16) se réduit à

$$\omega dt = \frac{ad\psi}{a\cos\psi} = \frac{d\psi}{\sin\varphi_0 \cos\psi}$$

et donne

$$\omega t \sin\varphi_0 = \log\sqrt{\frac{1 + \sin\psi}{1 - \sin\psi}},$$

ou

$$\frac{1 + \sin\psi}{1 - \sin\psi} = e^{2\omega t \sin\varphi_0}.$$

On en tire

$$\sin\psi = \frac{e^{2\omega t \sin\varphi_0} - 1}{e^{2\omega t \sin\varphi_0} + 1},$$

$$\cos\psi = \frac{2}{e^{\omega t \sin\varphi_0} + e^{-\omega t \sin\varphi_0}},$$

et par suite

$$(17) \qquad \sin\varphi = \frac{z}{a} = \frac{2\sin\varphi_0}{e^{\omega t\sin\varphi_0} + e^{-\omega t\sin\varphi_0}}.$$

Par la même substitution la seconde équation (16) se transforme en

$$d\lambda + \omega dt = \pm \frac{1}{\sin\varphi_0\cos\varphi_0} \cdot \frac{d\sin\psi}{(1-\sin^2\psi)(1+\operatorname{tang}^2\varphi_0\sin^2\psi)}.$$

Intégrée depuis 0 jusqu'à ψ, elle donne

$$\lambda - \lambda_0 + \omega t = +\cot\varphi_0 \left\{ \log\sqrt{\frac{1+\sin\psi}{1-\sin\psi}} + \operatorname{tang}\varphi_0 \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\varphi_0\sin\psi) \right\},$$

ou, en substituant pour $\sin\psi$ sa valeur en t et faisant, pour abréger, $\omega t\sin\varphi_0 = u$,

$$(18) \qquad \lambda - \lambda_0 = (-1 \pm \cos\varphi_0)\,\omega t \pm \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\operatorname{tang}\varphi_0\right).$$

Les équations (17) et (18) mettent en évidence comment, à mesure que t augmente, la latitude φ diminue constamment et tend vers zéro, tandisque le mouvement en longitude continue indéfiniment et tend à devenir uniforme, sa vitesse limite étant

$$\frac{d\lambda}{dt} = (-1 \pm \cos\varphi_0)\,\omega.$$

Pour de très grandes valeurs de t on a sensiblement

$$\lambda - \lambda_0 = (-1 \pm \cos\varphi_0)\,\omega t \pm \varphi_0.$$

Suivant que le mouvement initial est dirigé vers l'est ou vers l'ouest, la trajectoire, affecte l'une ou l'autre des formes représentées par les fig. 2 et 11.

12. *Troisième cas*: $c > a - \frac{v}{2\omega}$. Les équations qu'il s'agit d'intégrer, sont

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega dt &= -\frac{adz}{\sqrt{(\alpha^2 - z^2)(z^2+\beta^2)}}, \\ d\lambda + \omega dt &= -\frac{akdz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(\alpha^2 - z^2)(z^2+\beta^2)}}, \end{aligned} \right.$$

où

$$k = \pm\sqrt{(a^2-\alpha^2)(a^2+\beta^2)}\cdot$$

En faisant

$$z = \alpha\cos\psi, \quad \sin\varphi = \frac{z}{a}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{\alpha}{a},$$

et

$$\varkappa = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}; \quad \varkappa' = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

on trouve

$$\frac{dz}{\sqrt{(\alpha^2-z^2)(z^2+\beta^2)}} = \frac{-d\psi}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}};$$

par suite la première des équations différentielles ci-dessus donne en intégrant,

$$\omega t = \frac{a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}, \tag{20}$$

d'où

$$\psi = \mathrm{am}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{a}\,\omega t\right) = \mathrm{am}\,\frac{\omega t\sin\varphi_0}{\varkappa}, \quad (\mathrm{mod.}\ \varkappa),$$

et

$$\sin\varphi = \sin\varphi_0\cos\psi = \sin\varphi_0\cos\mathrm{am}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{a}\,\omega t\right). \tag{21}$$

Ainsi la latitude φ est encore une fonction périodique de t, comprise entre φ_0 et $-\varphi_0$. Le corps oscille des deux côtés de l'équateur entre deux parallèles équidistants, correspondants à ces valeurs limites de φ.

Le temps T d'une demi-oscillation s'obtient par la relation

$$\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{a}\,\omega T = 2K,$$

qui donne

$$T = \frac{2aK}{\omega\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

En effectuant les mêmes substitutions dans la seconde des équations (19), on trouve

$$d\lambda + \omega dt = \frac{akd\psi}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,(a^2-\alpha^2)\,(1+\operatorname{tang}^2\varphi_0 \sin^2\psi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}};$$

d'où l'on tire, en intégrant et mettant pour k sa valeur ci-dessus,

$$(22) \qquad \lambda - \lambda_0 + \omega t = \pm \frac{\sqrt{a^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,.\,\cos\varphi_0} \int_0^\psi \frac{d\psi}{(1+\operatorname{tang}^2\varphi_0 \sin^2\psi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$F(\psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}},$$

$$H(\psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{(1+\operatorname{tang}^2\varphi_0 \sin^2\psi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}},$$

on trouve, en éliminant ωt des équations (20) et (22),

$$(23) \qquad \lambda - \lambda_0 = \frac{a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(-F(\psi) \pm \frac{\sqrt{a^2+\beta^2}}{\varrho_0} H(\psi)\right).$$

Observons encore que $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{a}{\varkappa}$ et qu'on a dans le cas actuel, d'après l'art. 9,

$$\frac{v}{\omega} = \sqrt{a^2+\beta^2} \mp \varrho_0,$$

où il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, suivant que k est positif ou négatif. Comme la même distiction doit se faire à l'égard des signes de la formule (23), il s'ensuit qu'on y peut substituer

$$\pm\sqrt{a^2+\beta^2} = \varrho_0 \pm \frac{v}{\omega},$$

en sorte qu'elle pourra s'écrire aussi

$$(24) \qquad \lambda - \lambda_0 = \frac{\varkappa}{\sin\varphi_0}\left(-F(\psi) + \left(1 \pm \frac{v}{\varrho_0\omega}\right) H(\psi)\right).$$

Comme dans le premier cas, la longitude s'exprime ici par deux intégrales elliptiques, l'une de la première et l'autre de la troisième espèce. Pour réduire celle-ci à la forme normale Π de Jacobi, nous posons cette fois

$$u = F(\psi) = \frac{\sin\varphi_0}{\varkappa}\omega t$$

et

$$\operatorname{tang}\varphi_0 = -i\varkappa \sin \operatorname{am} i\eta = \varkappa \operatorname{tang} \operatorname{am}(\eta, \varkappa'),$$

formule qui conduit d'une part aux relations

$$\sin \operatorname{am} i\eta = \frac{i \operatorname{tang}\varphi_0}{\varkappa}, \qquad \operatorname{tang} \operatorname{am} i\eta = \frac{i \operatorname{tang}\varphi_0}{\sqrt{\varkappa^2 + \operatorname{tang}^2\varphi_0}},$$

$$\cos \operatorname{am} i\eta = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi_0}{\varkappa^2}}, \qquad \Delta \operatorname{am} i\eta = \sec\varphi_0,$$

$$\frac{\operatorname{tang} \operatorname{am} i\eta}{\Delta \operatorname{am} i\eta} = \frac{i \sin\varphi_0}{\sqrt{\varkappa^2 + \operatorname{tang}^2\varphi_0}} = \frac{i \sin\varphi_0}{\varkappa}\cdot\frac{\varrho_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{i\sin\varphi_0}{\varkappa\left(\frac{v}{\varrho_0\omega} \pm 1\right)},$$

et de l'autre à celle-ci

$$\operatorname{tang} \operatorname{am}(\eta, \varkappa') = \frac{\operatorname{tang}\varphi_0}{\varkappa} = \operatorname{tang}\gamma,$$

γ étant une nouvelle constante auxiliaire, d'où l'on tire pour déterminer η

$$\operatorname{am}(\eta, \varkappa') = \gamma$$

ou

$$\eta = \int_0^\gamma \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa'^2 \sin^2\psi}}.$$

Nous aurons alors

$$\Pi(\psi) = u + \frac{\operatorname{tang} \operatorname{am} i\eta}{\Delta \operatorname{am} i\eta}\Pi(u, i\eta) = u + \frac{i\sin\varphi_0}{\varkappa\left(\frac{v}{\varrho_0\omega} \pm 1\right)}\Pi(u, i\eta),$$

valeur qui substituée dans (24) donne

$$\lambda - \lambda_0 = \pm\left(\frac{\varkappa}{\sin\varphi_0}\cdot\frac{v}{\varrho_0\omega}u + i\Pi(u, i\eta)\right);$$

ou bien, en passant de la fonction Π au fonctions Θ et Z de Jacobi (voir p. 35),

$$\lambda - \lambda_0 = \pm\left[\left(\frac{\varkappa}{\sin\varphi_0}\,\frac{v}{\varrho_0\omega} + iZ(i\eta)\right)u + \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u - i\eta)}{\Theta(u + i\eta)}\right].$$

Pour débarrasser cette formule des imaginaires, on n'a qu'à suivre le même procédé qu'on a employé à l'égard de la formule correspondante du premier cas (p. 36). Le résultat sera de la forme

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{\Lambda}{K} u \pm \operatorname{arctg} \frac{Q}{P},$$

où Λ signifie le mouvement total en longitude accompli dans le temps où l'argument u croît de K, c'est à dire pendant un quart d'oscillation, soit à partir du sommet jusqu'à l'intersection avec l'équateur. Quant à P et Q, on peut les calculer par les mêmes séries que dans le premier cas (p. 37), en observant, bien entendu, la signification modifiée des constantes $\varkappa$ et η.

Pour étudier de plus près la quantité Λ et ses variations, le mieux est de recourir à l'équation (23). En y supposant $\psi = \frac{\pi}{2}$ et faisant, pour abréger,

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}};$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\varphi_0} \cdot d\psi}{(1 + \operatorname{tang}^2\varphi_0 \sin^2\psi)\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}},$$

elle donne

$$\Lambda = -\frac{\alpha}{\sqrt{a^2 + \beta^2}} K \pm \sqrt{\frac{a^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}} J.$$

Examinons d'abord ce qui arrive lorsque β est soit nul, soit infini, α ayant une valeur finie déterminée, comprise entre 0 et a. Pour $\beta = 0$ on a $\varkappa = 1$ et l'expression de Λ se réduit à

$$\Lambda = -\frac{a}{\alpha}(K \mp J).$$

Or, on peut démontrer, comme p. 39, que pour $\varkappa = 1$ non seulement K et J mais aussi la différence $K - J$ deviennent infinis positifs. Il s'ensuit qu'on a $\Lambda = -\infty$ pour $\beta = 0$, quel que soit le signe de J.

Pour $\beta = \infty$ on a $\varkappa = 0$; K et J se réduisent l'un et l'autre à $\frac{\pi}{2}$. Par suite on obtient alors

$$\Lambda = \pm \frac{\pi}{2},$$

résultat qui est d'ailleurs évident, puisque la trajectoire en ce cas, qui correspond à une vitesse infinie, est un grand cercle tangent au parallèle limite C_0, et qu'un tel cercle évidemment coupe l'équateur à $90°$ de part et d'autre du méridien qui passe par le point de contact m avec le cercle C_0.

Lorsque β croît depuis 0 jusqu'à ∞, $\varDelta$ croît aussi constamment, et cela quelque soit le signe de son second terme. On peut le démontrer au moyen des équations fondamentales (19) de la manière suivante. Par élimination de ωdt, ces équations donnent d'abord

$$d\lambda = \frac{a(a^2 - z^2) \mp a\sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 + \beta^2)}}{(a^2 - z^2)\sqrt{(\alpha^2 - z^2)(z^2 + \beta^2)}}dz$$

ou, si l'on fait

$$\varrho = \sqrt{a^2 - z^2}, \quad \varrho_0 = \sqrt{a^2 - \alpha^2}, \quad h = \sqrt{a^2 + \beta^2},$$

et qu'on intègre depuis $\varrho = \varrho_0$ jusqu'à $\varrho = a$,

$$\varDelta = \int_{\varrho_0}^{a} \frac{a(-\varrho^2 \pm h\varrho_0)\,d\varrho}{\varrho\sqrt{(h^2 - \varrho^2)(a^2 - \varrho^2)(\varrho^2 - \varrho_0^2)}}.$$

Supposons maintenant qu'on fasse croître le paramètre β ou h, en laissant α constant; alors le facteur

$$\frac{-\varrho^2 \pm h\varrho_0}{\sqrt{h^2 - \varrho^2}},$$

qui sous le signe d'intégration seul dépend de h, prendra par rapport à h la dérivée

$$\frac{\varrho^2(h \mp \varrho_0)}{(h^2 - \varrho^2)^{\frac{3}{2}}},$$

expression toujours positive, puisque $h > \varrho_0$. Et comme les autres facteurs de la fonction à intégrer sont essentiellement positifs, chaque élément de l'intégrale et par conséquent $\varDelta$ lui-même croîtra avec h ou avec β.

D'un autre côté, α étant constant, β croît avec la vitesse v, et réciproquement, puisqu'on a dans le cas actuel

$$\frac{v}{\omega} = \sqrt{a^2 + \beta^2} \mp \sqrt{a^2 - \alpha^2}.$$

Nous en concluons que, si le mouvement initial au point de contact avec le parallèle limite supérieur est dirigé vers l'est, $\varDelta$ croîtra continûment depuis

$-\infty$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$, lorsque β croît depuis 0 jusqu'à ∞, et qu'il existera par conséquent une certaine valeur β_0 de β pour laquelle on a $A = 0$. L'intersection de la trajectoire avec l'équateur se trouve en ce cas sur le méridien du sommet et le mobile décrit un double noeud rentrant en lui-même (fig. 4). Si $\beta > \beta_0$, les intersections successives de la trajectoire avec l'équateur procèdent vers l'est (fig. 5 et 6); si $\beta < \beta_0$, elles reculent, au contraire, vers l'ouest (fig. 3). Lorsque le mouvement initial a lieu vers l'ouest, A est toujours négatif et croît entre les limites $-\infty$ et $-\frac{\pi}{2}$, β croissant de 0 à ∞. L'intersection avec l'équateur, qui en ce cas se trouve toujours à l'ouest du méridien initial, s'éloigne sans cesse de celui-ci à mesure que la vitesse augmente (fig. 12). Tout cela s'accorde parfaitement avec les résultats que nous avons déduits dans la II partie de l'examen immédiat des formules différentielles.

IV. Application.

13. Comme application de la théorie exposée dans les articles précédents, nous allons considérer le mouvement de l'onde athmosphérique observée à la suite de la grande éruption de Krakatoa qui eut lieu le 27 Août 1883. Cette onde se fit sentir, parmi d'autres places, à Berlin, où elle fut observée à la Commission Normale des poids et mesures (Kaiserliche Normal-Aichungskommission) à peu près 10 heures après la catastrophe. Une seconde oscillation barométrique arriva environ 16 heures après la première et puis il y eut encore, à certains intervalles, d'autres ébranlements plus faibles.[1])

La propagation d'une telle onde ne suit sans doute pas exactement les mêmes lois que le mouvement d'un point matériel isolé; elle doit subir des actions perturbatrices non seulement des courants athmosphériques, mais aussi des forces moléculaires mises en jeu. Cependant l'influence de la rotation terrestre doit se faire valoir également dans ce cas, comme dans l'autre, par une déviation ou courbure latérale du chemin, en sorte qu'on pourra, au moins approximativement, identifier les trajectoires dans les deux espèces de mouvement.

Cela admis, nous nous proposons de déterminer la trajectoire qu'a du suivre l'onde athmosphérique ou, plus exactement, un point matériel, mu avec la vitesse du son et sans résistance, pour arriver de Krakatoa à Berlin.

Comme positions géographiques de ces lieux nous admettons

	Latitude	Longitude	
Berlin	$+52^0\,32'$	$13^0\,23'$	E. de Greenwich
Krakatoa	$-\;6^0\;\;8'$	$105^0\,28'$	„ „ „
		$=\;92^0\;\;5'$	„ „ Berlin.

[1]) Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie, redigirt von Dr. H. J. Klein in Cöln, 1884, No. 7.

La vitesse du son dans l'air dépend, comme on sait, de la température; à t° C. elle est $= 331{,}7\sqrt{1 + 0{,}003665\,t}$ mètres par seconde. En admettant pour tout le trajet $t = +15^\circ$, on trouve ainsi

$$v = 340{,}7\,; \qquad \operatorname{Log} v = 2{,}532372.$$

A cette donnée nous ajoutons les deux suivantes. Le rayon d'une sphère de même volume que la terre est

$$a = 6371410 \text{ mètres}\,; \qquad \operatorname{Log} a = 6{,}804236.$$

La vitesse angulaire de la rotation terrestre, ou l'arc décrit dans 1 seconde (de temps solaire moyen) par un point à la distance 1 de l'axe, est

$$\omega = 0{,}000072921\,; \qquad \operatorname{Log} \omega = 5{,}862853 - 10.$$

Il en résulte

$$\frac{v}{a\omega} = 0{,}733302\,; \qquad \operatorname{Log} \frac{v}{a\omega} = 9{,}865283.$$

Puisque la trajectoire doit couper l'équateur, c'est notre troisième cas (art. 12) qui a lieu actuellement. Ainsi l'on aura

$$(1) \qquad \frac{v}{\omega} = \sqrt{a^2 + \beta^2} \mp \sqrt{a^2 - \alpha^2}\,;$$

et comme, d'après la valeur numérique ci-dessus, v est $< a\omega$, le signe supérieur est seul admissible tant dans cette formule que dans les équations (22) et suiv. (p. 45). Nous en concluons immédiatement que la trajectoire appartient au genre extrapolaire, c'est à dire que le mouvement au sommet a lieu vers l'est.

Comme il s'agit maintenant d'un mouvement ascendant (vers le nord) ou d'une partie de la demi-oscillation qui précède l'arrivée du mobile au sommet supérieur m, on doit, pourvu qu'on veuille compter l'arc de la trajectoire à partir de ce sommet vers l'ouest, c'est à dire contre le sens du mouvement, remplacer ψ par $-\psi$ dans l'équation (24) qui devient alors

$$(2) \qquad \lambda - \lambda_0 = \frac{\varkappa}{\sin\varphi_0}\Big(F(\psi) - \Big(1 + \frac{v}{\varrho_0\omega}\Big)\Pi(\psi)\Big),$$

où

$$\psi = \arccos\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right).$$

Cette équation contient deux constantes inconnues $\varkappa$ et φ_0 (puisque $\varrho_0 = a\cos\varphi_0$), mais v étant donné, il existe entre celles-ci une relation, qui les fait dépendre l'une de l'autre. En effet, posant

$$\sin\theta = \varkappa = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \beta = \alpha \cot\theta = \frac{a\sin\varphi_0}{\operatorname{tg}\theta},$$

on trouve, d'après (1),

$$\frac{v}{\omega} + a\cos\varphi_0 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = a\sqrt{1+\frac{\sin^2\varphi_0}{\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{a}{\sin\theta}\sqrt{1-\cos^2\theta\cos^2\varphi_0},$$

ou, en réduisant,

$$\cos^2\varphi_0 + \frac{2v\sin^2\theta}{a\omega}\cos\varphi_0 + \frac{v^2\sin^2\theta}{a^2\omega^2} = 1,$$

équation qui, résolue par rapport $\cos\varphi_0$, donne

$$\cos\varphi_0 = -\frac{v\sin^2\theta}{a\omega} \pm \sqrt{1-\frac{v^2\sin^2 2\theta}{4a^2\omega^2}},$$

le choix du signe du radical étant limité par la condition que $\cos\varphi_0$ doit être positif.

Pour calculer φ_0, lorsque θ est donné, il convient d'introduire un angle auxiliaire χ par la formule

$$\cos\chi = \frac{v}{2a\omega}\sin 2\theta. \tag{3}$$

On trouve alors

$$\cos\varphi_0 = \frac{\sin(\chi-\theta)}{\cos\theta}\,[1]. \tag{4}$$

Il s'agit maintenant de trouver une valeur de θ telle, que la courbe représentée par l'équ. (2) passe réellemet par les lieux donnés (Krakatoa et

---

[1] Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ cette formule est en défaut, car elle donne alors $\cos\varphi_0 = \frac{0}{0}$. Mais comme dans ce cas $\beta = 0$, on trouve immédiatement

$$\frac{v}{\omega} = a - \varrho_0 = 2a\sin^2\frac{\varphi_0}{2},$$

d'où

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} = \sqrt{\frac{v}{2a\omega}}.$$

En adoptant pour v la valeur ci-dessus, on obtient comme valeur limite de φ_0 74° 31′,9. C'est là l'extrême latitude qu'un corps, partant de l'équateur avec la vitesse du son, puisse atteindre.

Berlin). Ce problème ne peut être résolu que d'une manière indirecte. On essaie d'abord une valeur de θ, puis une autre, etc., et calculant chaque fois séparement les longitudes $\lambda_a - \lambda_0$ et $\lambda_b - \lambda_0$ qui correspondent aux latitudes données de ces lieux ($\varphi_a = -6^\circ\, 8'$ et $\varphi_b = +52^\circ\, 32'$), on cherche à vérifier la condition

$$\lambda_a - \lambda_b = +92^\circ\, 5'.$$

Tant que cette condition n'est pas remplie, on reprend le calcul avec une nouvelle valeur de θ, choisie de manière à diminuer l'écart observé, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait obtenu l'accord voulu.

Les intégrales F et Π peuvent être évaluées soit par quadrature mécanique, soit par des séries, soit encore par quelque procédé de transformations successives. La première d'entre elles s'obtient aussi immédiatement des tables données par Legendre dans son *Traité des fonctions elliptiques,* tome II.

Parmi ces différentes méthodes nous choisissons d'abord celle qui est fondée sur les transformations de Landen. Dans notre cas le paramètre $\operatorname{tang}^2\varphi_0$ dans l'intégrale Π est $> \varkappa$, puisque la latitude φ_0 du sommet doit être $> 52^\circ\, 32'$, qui est celle de Berlin, et que par suite $\operatorname{tang}\varphi_0 > 1$, et il faut d'abord transformer cette intégrale en une autre de même espèce, ayant un paramètre $n < \varkappa$. Pour cela il suffit de faire

$$n = \frac{\varkappa^2}{\operatorname{tang}^2\varphi_0};$$

on trouve alors, d'après une relation connue,

$$\Pi(\psi) = F(\psi) + \frac{1}{r}\operatorname{arc\,tang}\frac{r\operatorname{tang}\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}} - \int_0^\psi \frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}},$$

où

$$r = \sqrt{(1+n)\left(1+\frac{\varkappa^2}{n}\right)}.$$

Le paramètre n étant $< \varkappa$, on peut maintenant employer le procédé de Landen pour calculer la nouvelle intégrale elliptique de troisième espèce contenue dans cette expression de $\Pi(\psi)$. Sans entrer dans plus de détails, nous mettrons ici sous les yeux le système complet de formules nécessaires pour la solution du problème.[1])

Connaissant les constantes principales v et $\varkappa = \sin\theta$, ainsi que φ_0, qu'on en aura déduit par les équ. (3) et (4), on forme les suites de nouvelles constantes

[1]) Voir: Öfningsexempel för räkning med elliptiska integraler och funktioner, af A. Söderblom, Upsala 1885, p. 104.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, n, n_1, n_2, n_3, \ldots, r, b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, C_1, C_2, C_3, \ldots, A$ et B, qui se rattachent aussi à la trajectoire en général, par les formules suivantes:

$$\sin\theta_1 = \operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}, \quad \sin\theta_2 = \operatorname{tang}^2\frac{\theta_1}{2}, \quad \sin\theta_3 = \operatorname{tang}^2\frac{\theta_2}{2}, \ldots$$

$$n = \sin^2\theta \cot^2\varphi_0, \qquad b_0 = \frac{n}{2(1+n)},$$

$$n_1 = n\frac{1-\dfrac{\cos^2\theta}{1+n}}{(1+\cos\theta)^2}, \qquad b_1 = \frac{b_0}{2}\frac{1+n}{1+n_1}\frac{1-\dfrac{\cos^2\theta}{(1+n)^2}}{(1+\cos\theta)^2},$$

$$n_2 = n_1\frac{1-\dfrac{\cos^2\theta_1}{1+n_1}}{(1+\cos\theta_1)^2}, \qquad b_2 = \frac{b_1}{2}\frac{1+n_1}{1+n_2}\frac{1-\dfrac{\cos^2\theta_1}{(1+n_1)^2}}{(1+\cos\theta_1)^2},$$

$$n_3 = n_2\frac{1-\dfrac{\cos^2\theta_2}{1+n_2}}{(1+\cos\theta_2)^2}, \qquad b_3 = \frac{b_2}{2}\frac{1+n_2}{1+n_3}\frac{1-\dfrac{\cos^2\theta_2}{(1+n_2)^2}}{(1+\cos\theta_2)^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r = \sqrt{(1+n)\left(1+\frac{\varkappa^2}{n}\right)} = \frac{\varkappa}{\sin\varphi_0}\left(1+\frac{v}{\varrho_0\omega}\right), \qquad C_1 = \frac{b_0}{(1+\cos\theta)\sqrt{n_1}},$$

$$A = \sqrt{\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\ldots}{\cos\theta}} \qquad C_2 = \frac{b_1}{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta_1)\sqrt{n_2}},$$

$$B = \frac{1-b_0-b_1-b_2-\ldots}{\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\ldots\right)^2}, \qquad C_3 = \frac{b_2}{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_2)\sqrt{n_3}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pour déterminer la longitude $\lambda - \lambda_0$ correspondante à une latitude donnée φ, on fera ensuite

$$\cos\psi = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}$$

et l'on en déduira successivement les quantités auxiliaires $\Psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \tilde{\psi}$ et $J_1, J_2, J_3, \ldots$ par les formules

$$\Psi = \frac{1}{r}\operatorname{arc\,tang}\frac{r\operatorname{tang}\psi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\psi}},$$

$$\operatorname{tang}(\psi_1-\psi) = \cos\theta\operatorname{tang}\psi, \qquad J_1 = \operatorname{arc\,tang}(\sqrt{n_1}\sin\psi_1),$$

$$\operatorname{tang}(\psi_2-\psi_1) = \cos\theta_1\operatorname{tang}\psi_1, \qquad J_2 = \operatorname{arc\,tang}(\sqrt{n_2}\sin\psi_2),$$

$$\operatorname{tang}(\psi_3-\psi_2) = \cos\theta_2\operatorname{tang}\psi_2, \qquad J_3 = \operatorname{arc\,tang}(\sqrt{n_3}\sin\psi_3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tilde{\psi} = \lim\frac{\psi_\mu}{2^\mu} \quad (\mu = \infty).$$

Cela posé, on aura

$$F(\psi) = A\tilde{\psi}\,, \qquad H(\psi) = A\tilde{\psi} + W,$$

où

$$W = \Psi - B\tilde{\psi} - C_1 J_1 - C_2 J_2 - C_3 J_3 - \ldots,$$

et par suite

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{\sin\theta}{\sin\varphi_0}\frac{v}{\varrho_0\omega}\left(A\tilde{\psi} + \left(1 + \frac{\varrho_0\omega}{v}\right)W\right).$$

Dans le cas actuel nous avons été amenés, par quelques essais préliminaires, à supposer d'abord $\theta = 75^\circ\ 7'$, puis $\theta = 75^\circ\ 4'$. Ces deux hypothèses ont donné respectivement, pour la différence en longitude $\lambda_a - \lambda_b$ entre les extrémités de l'arc en question, les valeurs $92^\circ\ 19'.90$ et $92^\circ\ 5'.84$, d'où nous concluons, par extrapolation, que pour obtenir la différence exacte $92^\circ\ 5'$, il faudra poser

$$\theta = 75^\circ\ 3'\ 49''.$$

Voici les éléments principaux du calcul définitif effectué avec cette valeur corrigée de θ. Valeurs qui portent sur la trajectoire en général:

$\varphi_0 = 72^\circ\ 37'\ 36''$, $\operatorname{Log} n = 8{,}960876$, $b_0 = 0{,}041867$, $\operatorname{Log} C_1 = 9{,}155054$,
$\theta_1 = 36\ 10\ \ 3$, $\operatorname{Log} n_1 = 8{,}734439$, $b_1 = 0{,}012935$, $\operatorname{Log} C_2 = 8{,}854018$,
$\theta_2 = \ 6\ \ 7\ 15$, $\operatorname{Log} n_2 = 7{,}802235$, $b_2 = 0{,}000858$, $\operatorname{Log} C_3 = 8{,}55301$,
$\theta_3 = \ 0\ \ 9\ 50$. $\operatorname{Log} n_3 = 5{,}4481$, $b_3 = 0{,}000003$,

$$\operatorname{Log} v = 0{,}543902\,, \qquad \operatorname{Log}\frac{v}{\varrho_0\omega} = 0{,}390196\,, \qquad \operatorname{Log}\left(1 + \frac{\varrho_0\omega}{v}\right) = 0{,}148355\,,$$

$$\operatorname{Log} A = 0{,}246677\,,$$
$$\operatorname{Log} B = 0{,}221803$$

Valeur spéciales relatives aux lieux données:

	Berlin	Krakatoa
φ	$+ 52^\circ\ 32'\ 0''$	$- 6^\circ\ 8'\ 0''$
ψ	33 43 54	96 25 40
ψ_1	43 29 48	210 2 14
ψ_2	80 56 56	415 33 6
ψ_3	161 50 48	829 57 58
$\tilde{\psi}$	20 13 51	103 44 45
	$= 1213'.85$	$= 6224'.75$
$\operatorname{Log} A\tilde{\psi}$	3.330842	4.040799

	Berlin	Krakatoa
J_1	+ 546.52	− 399.02
J_2	+ 269.82	+ 224.10
J_3	+ 5.67	+ 17.12
C_1J_1	+ 78.10	− 57.02
C_2J_2	+ 19.28	+ 16.01
C_3J_3	+ 0.20	+ 0.61
$\Sigma(CJ)$	+ 97.58	− 40.40
$B\tilde{\psi}$	2022.87	10373.50
	2120.45	10333.10
Ψ	1202.84	1552.29
W	− 917.61	− 8780.81
$\lambda - \lambda_0$	− 2115.45	+ 3409.50

Il en résulte

$$\begin{aligned}
&\text{pour Krakatoa:} && \lambda_a - \lambda_0 = +\,3409'.50 = +\,56^0\,49'.50\,, \\
&\quad\text{„ Berlin:} && \lambda_b - \lambda_0 = -\,2115'.45 = -\,35^0\,15'.45\,, \\
&\text{et par suite:} && \lambda_a - \lambda_b = +\,5524'.95 = +\,92^0\;\;4'.95\,,
\end{aligned}$$

valeur qui s'accorde à $0'.05$ près avec la différence de longitude donnée entre ces lieux. Ainsi les paramètres dont dépend la trajectoire représentée par l'équ. (2), se trouvent déterminés de manière à satisfaire aux conditions du problème.

Pour le temps t employé par le mobile à parcourir l'arc compris entre le sommet et un point donné φ de la trajectoire, on a la formule

$$\omega t = \frac{a\varkappa}{\alpha}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}} = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi_0}\cdot A\psi\,\cdot$$

Calculant cette valeur tant pour Krakatoa que pour Berlin et prenant la différence des résultats, on trouve

$$\omega\varDelta t = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi_0}\,A\,.\,5010'.90\,,$$

où ω doit être exprimé en minutes d'arc par heure de temps, en sorte que $\log\omega = 2{,}955430$. Substituant cette valeur ainsi que celles de θ, φ_0 et A, on trouve $\log\varDelta t = 0{,}996514$ et par suite

$$\varDelta t = 9^h{,}9200\,.$$

C'est le temps employé par l'onde athmosphérique pour passer de Krakatoa à Berlin.

La distance directe entre ces lieux, mesurée suivant un grand cercle, est $= 96^\circ\,7'\,49''$. Avec la vitesse supposée $v = 340^m{,}7$ par seconde, elle serait parcourue en 8,7156 heures. La rotation terrestre fait donc augmenter la longueur de la route suivie par le mobile entre ces points, ainsi que le temps nécessaire pour la parcourir, dans le rapport de $\frac{9{,}9200}{8{,}7156} = 1{,}1382$.

D'après l'observation déja citée, la première oscillation barométrique, provenant de l'éruption de Krakatoa, arriva à Berlin, à peu près 10 heures après la catastrophe. Le résultat que nous venons de trouver, s'accorde donc presque exactement avec cette observation.

Parmi les points singuliers de la trajectoire on peut remarquer, outre le sommet ou le point de contact avec le parallèle limite, deux autres, à savoir le point où la trajectoire est tangente au méridien, et celui où elle traverse l'équateur. Nous allons déterminer leurs coordonnées géographiques.

Dans le premier de ces points, on a $d\lambda = 0$ et par conséquent

$$\varrho^2 = k = \varrho_0 \sqrt{a^2 + \beta^2} = \varrho_0 \left(\frac{v}{\omega} + \varrho_0\right),$$

d'où

$$\cos\varphi = \sqrt{1 + \frac{v}{\varrho_0 \omega}} \cdot \cos\varphi_0 ,$$

ce qui donne d'abord

$$\varphi = 56^\circ\, 18'\, 8''.$$

La valeur correspondante de ψ est $29^\circ\, 20'\, 17''$, et en calculant, avec cette donnée, la valeur de $\lambda - \lambda_0$ par les formules de la p. 55, on trouve pour le point cherché

$$\lambda - \lambda_0 = - 35^\circ\, 42'.63.$$

Au point d'intersection de la trajectoire avec l'équateur on a $\varphi = 0$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\psi_1 = \pi$, $\psi_2 = 2\pi$, $\psi_3 = 4\pi, \ldots$ et par suite $\tilde{\psi} = \frac{\pi}{2}$. De plus, on trouve $J_1 = J_2 = J_3 = \ldots = 0$, $\Psi r = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent l'expression de W se réduit à

$$W = \left(\frac{1}{r} - B\right)\frac{\pi}{2}.$$

En effectuant les calculs numériques, on trouve

$$\lambda - \lambda_0 = + 39^\circ\, 51'.76.$$

L'intersection demandée se trouve donc $39^\circ\, 52'$ à l'est du sommet, c. à d. $75^\circ\, 7'$ à l'est de Berlin, ou $16^\circ\, 58'$ à l'ouest de Krakatoa.

Connaissant les paramètres constitutifs de la trajectoire, on pourrait d'ailleurs, au moyen du système de formules donné plus haut, déterminer autant de points qu'on voudrait de celle-ci. Mais pour essayer aussi une autre méthode et pour obtenir en même temps un contrôle des calculs précédents, nous avons encore employé la quadrature mécanique pour intégrer immédiatement l'équation différentielle de la trajectoire. A cet effet nous avons divisé le champ d'intégration compris entre les limites $\psi = 33^\circ\, 43'\, 54''$ et $\psi = 96^\circ\, 25'\, 40''$ qui correspondent aux extrémités de larc à évaluer (Berlin—Krakatoa), en dix parties égales, chacune de $6^\circ\, 16'\, 10''.6$, en disposant ces parties de manière que chacune des limites tombât à mi-chemin entre deux points de division consécutifs, et cette division à été continuée encore à quelques points extérieurs des deux côtés du champ. Pour les points ainsi déterminés nous avons calculé la valeur de la fonction à intégrer, multipliée par le dixième du champ $\varepsilon = 376',177$, c'est à dire la quantité

$$f(\psi) = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi_0}\left(1 - \frac{1 + \frac{v}{\varrho_0\omega}}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi_0 \sin^2\psi}\right)\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\psi}}.$$

Ensuite nous avons pris les différences successives des valeurs de $f(\psi)$ jusqu'à la cinquième. Cela nous a donné le tableau suivant.

ψ	$f(\psi)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
18° 3′ 27″.5	— 296′.97					
		+ 187.30				
24 19 38.1	— 109.67		— 54.74			
		132.56		+ 21.33		
30 35 48.7	+ 22.89		— 33.41		— 5.34	
		99.15		+ 15.99		+ 0.64
36 51 59.3	+ 122.04		— 17.42		— 4.70	
		81.73		+ 11.29		+ 2.37
43 8 9.9	203.77		— 6.13		— 2.33	
		75.60		+ 8.96		+ 1.99
49 24 20.5	279.37		+ 2.83		— 0.34	
		78.43		+ 8.62		+ 1.25
55 40 31.1	357.80		+ 11.45		+ 0.91	
		89.88		+ 9.53		— 1.37
61 56 41.7	447.68		+ 20.98		— 0.46	
		110.86		+ 9.07		— 12.72
68 12 52.3	558.54		+ 30.05		— 13.18	
		140.91		— 4.11		— 39.47
74 29 2.9	699.45		+ 25.94		— 52.65	
		+ 166.85		— 56.76		— 0.08
80 45 13.5	866.30		— 30.82		— 52.73	
		+ 136.03		— 109.49		+ 166.57
87 1 24.1	1002.33		— 140.31		+ 113.84	
		— 4.28		+ 4.35		— 8.24
93 17 34.7	998.05		— 135.96		+ 105.60	
		— 140.24		+ 109.95		— 162.56
99 33 45.3	857.81		— 26.01		— 56.96	
		— 166.25		+ 52.99		
105 49 55.9	691.56		+ 26.98			
		— 139.27				
112 6 6.5	552.29					

Les traits horizontaux marquent les intervalles dont les milieux sont occupés par les limites inférieure et supérieure de l'intégrale. En prenant la somme des dix valeurs de $f(\psi)$ comprises entre ces limites, on obtient une première valeur approchée de l'intégrale, qui est $= +5535'.33$. Pour corriger cette valeur, on prend la différence des valeurs de Δ_1, Δ_3, Δ_5 correspondantes aux deux limites, à savoir

	Limite infér.	Limite supér.	Diff.
Δ_1	$+99.15$	-140.24	-239.39,
Δ_3	$+15.99$	$+109.95$	$+93.96$,
Δ_5	$+0.64$	-162.56	-163.20,

et l'on multiplie ces différences respectivement par $+\frac{1}{24}$, $-\frac{17}{5760}$, $+\frac{367}{967680}$. La somme des produits, qui est $-9.97 - 0.28 - 0.06 = -10{,}31$, est la correction cherchée*).

On trouve ainsi pour l'intégrale qui exprime la différence en longitude entre les extrémités de l'arc, la valeur

$$\lambda_b - \lambda_a = 5525'.02 = 92^{\circ}\ 5'.02.$$

qui s'accorde presque exactement avec la valeur donnée.

Mais cette dernière méthode, outre quelle est plus expéditive, a encore l'avantage de donner en même temps les coordonnées des neufs points qui divisent le champ de l'intégrale dans les 10 parties égales. Calculant la latitude φ, correspondante à une valeur donnée de ψ, par la formule

$$\sin\varphi = \sin\varphi_0 \cos\psi$$

et la longitude par le procédé de quadrature mécanique appliqué aux différents termes du tableau précédant, nous trouvons les coordonnées des neuf points intermédiaires de la trajectoire. En y joignant celles des extrémités de l'arc et des points singuliers déterminés plus haut, nous arrivons au tableau suivant de points par lesquels passe la trajectoire cherchée:

φ	λ (E. de Berlin)	φ	λ (E. de Berlin)
$-6^{\circ}\ 8'$	$92^{\circ}\ 5'$ [1])	$29^{\circ}\ 37'$	$16^{\circ}\ 3'$
$-0\ \ 9$	75 33	35 29	10 4
0 0	75 7 [2])	41 17	5 25
$+5\ \ 50$	58 57	46 59	2 1
11 48	44 32	52 32	0 0 [3])
17 46	32 49	56 18	$-$ 0 27 [4])
23 43	23 31	72 38	$+$ 35 15 [5]).

La fig. 13 montre la courbe construite d'après ces données.

Une autre route opposée à celle que nous venons d'examiner, satisfait également aux conditions du problème. Elle passe de Krakatoa d'abord vers l'hémisphère australe, où elle accomplit une demi-ondulation, et pénètre ensuite

*) Encke: Ueber mechanische Quadratur. Berliner Jahrbuch 1837. [1]) Krakatoa. [2]) Intersection avec l'équateur. [3]) Berlin. [4]) Point où la trajectoire est tangente au mériden. [5]) Sommet de la trajectoire.

dans l'hémisphère boréale pour arriver à Berlin du côté de l'ouest. L'onde qui suivait cette route fut, observée à ce dernier lieu environ 26 heures après la catastrophe. Et outre ces deux trajectoires il y a évidemment une infinité d'autres, qui, passant par les mêmes points donnés et formant dans l'intervalle qui les sépare, une ou plusieurs ondulations complètes, satisfont également à l'équ. (2). Il ne serait pas difficile, quoique un peu long, d'examiner une quelconque de ces trajectoires; mais nous croyons inutile d'entrer plus loin dans ces détails.

Fig. 1.

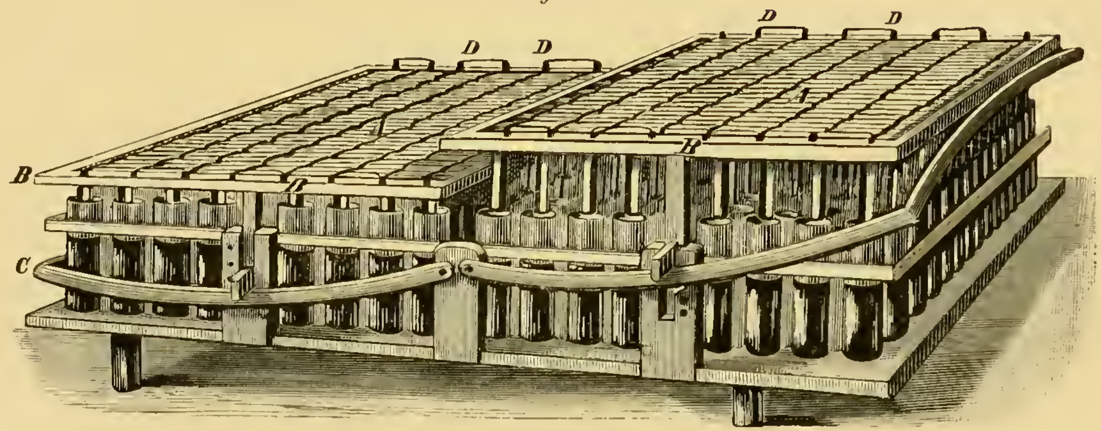


Fig. 2.

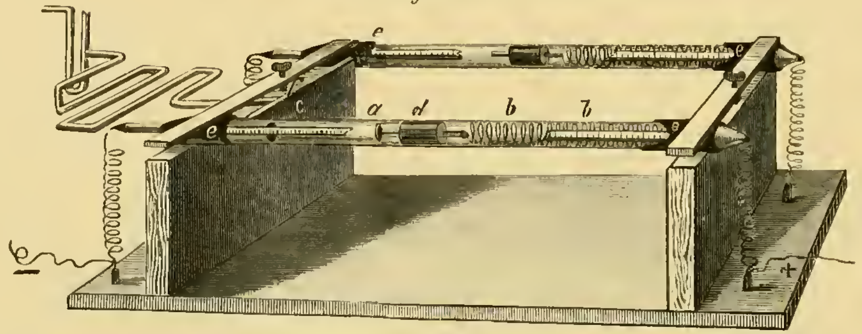
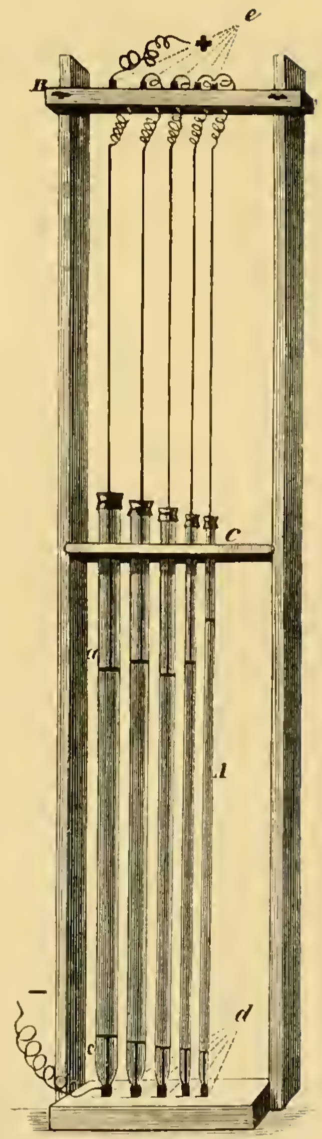


Fig. 3.



Litogr. Aktiebol. i Helsingfors, 1886.

Fig. 1.

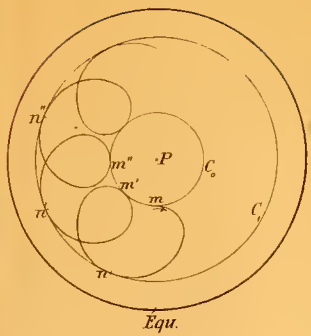


Fig. 2.

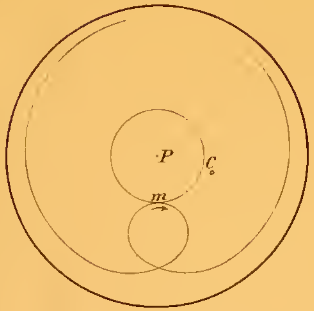


Fig. 3.

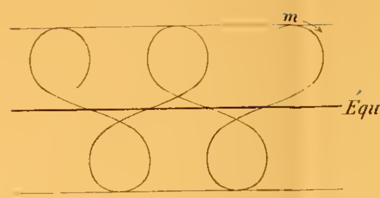


Fig. 10.

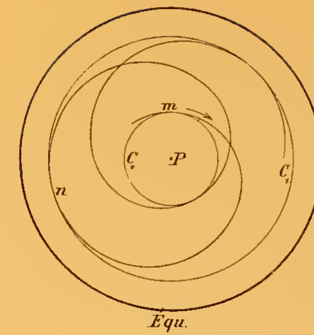


Fig. 11.

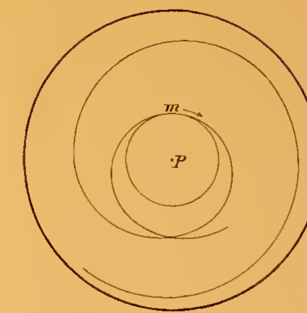


Fig. 12

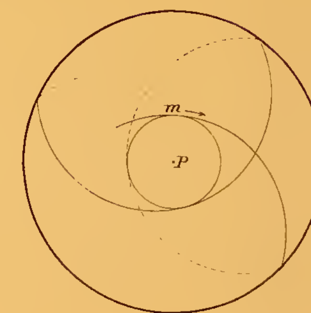


Fig. 4

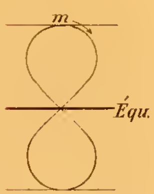


Fig. 5.

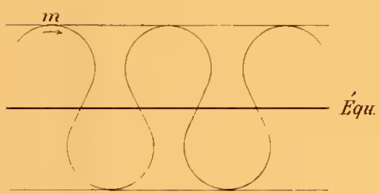


Fig. 6.

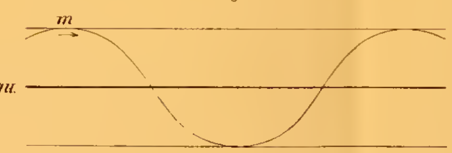


Fig. 13.

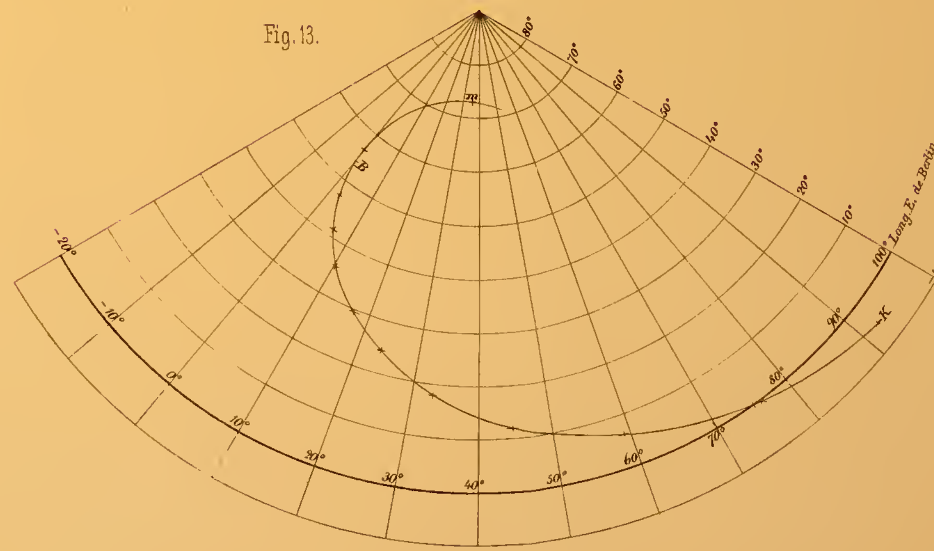


Fig. 7.

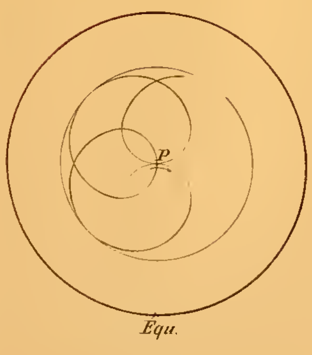


Fig. 8.

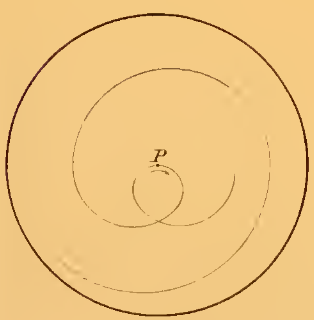
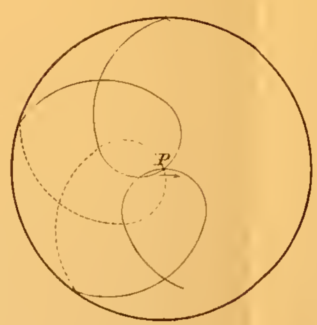


Fig. 9.



BAROMETERVERGLEICHUNGEN

AUSGEFÜHRT IN DEN JAHREN 1886—1887
AN VERSCHIEDENEN METEOROLOGISCHEN CENTRALSTELLEN

VON

A. F. SUNDELL.

MIT EINER TAFEL.

I. Beschreibung des Reisebarometers.

1. Die verhältnissmässig guten Resultate, die ich mit einem von mir im Jahre 1885 construirten ausleerbaren Barometer[1]) erhalten hatte, erregte in mir den Wunsch mit einem ähnlichen Instrument eine Vergleichung der Hauptbarometer einiger Centralstellen für Meteorologie in Europa unternehmen zu können. In dieser Hinsicht reichte ich im Anfang des Jahres 1886 beim Hohen Kanzler der Kaiserl. Alexander-Universität ein Gesuch ein für das nöthige Reisegeld, welches mir auch aus dem für wissenschaftliche Reisen der Universitätslehrer bestimmten Fonde gewährt wurde. Da ausserdem Herr Director N. K. Nordenskiöld, der mit grossem Interesse meinen Plan umfasste, sich bereit erklärte, das nöthige Reisebarometer für die Meteorologische Centralanstalt in Helsingfors anfertigen zu lassen, schien mir das Ausführen des Unternehmens gesichert.

2. Bei der Construction des Reisebarometers stellte ich mir die Aufgabe vor, den Vortheil eines bequemen Füllens und Ausleerens mit irgend einer als gut erkannten Montirung zu vereinigen. Ein jeder, der mit einem sogenannten Controll-Barometer System Wild-Fuess[2]) gearbeitet hat, muss die vortrefflichen Eigenschaften dieses Instrumentes in Hinsicht grosser Solidität und scharfer, oben und unten gleichförmiger Einstellung anerkennen. Es wurde daher beschlossen das Reisebarometer nach diesem Muster aufzubauen mit den Veränderungen, welche das eigenthümliche Röhrensystem erforderte. Der mechanische Theil der Arbeit wurde dem Herrn Mechaniker Fr. Helin in Helsingfors übergeben und ist ziemlich befriedigend ausgefallen. Den Glastheil bereitete ich selbst zu; als Röhre wurde die Reserveröhre eines Wild-Fuess'schen Controll-Barometers angewandt. In dieser Weise entstand folgendes, in den Figuren 1—5 abgezeichnetes Instrument.

---

[1]) Acta Societatis scient. Fenn. T. XV, S. 387.

[2]) Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, T. XXIII, S. 293.

3. An die Barometerröhre (innere Weite oben und unten 11,1 mm.) wurde oben eine Kugel A (Inhalt 110 ccm.) angeschmolzen; zwischen diese Kugel und die Capillarröhre B (Länge 43 cm., Fläche der Oeffnung 1,63 qmm.) wurde eine kleinere Kugel a (Inhalt 5 ccm.) eingeschaltet. Das Reservoir C (Länge 10 cm., innerer Durchmesser 11 mm.) ist oben verengert und umgebogen; dadurch ist dem Hineinfallen fremder Körper aus der Trockenröhre G vorgebeugt. Als Trockenmittel wird etwas Phosphorsäureanhydrid angewandt; die Trockenröhre ist oben mit etwas Glaswolle zugestopft und an C mit einem Korke befestigt, der auswendig mit einer Mischung von Harz und Wachs (Wachskitt) luftdicht gemacht wird. Entsteht beim Transport des Instrumentes irgend ein Riss in diesem Ueberzuge, stellt man ohne Schwierigkeit eine vollkommene Luftdichtheit wieder her, wenn man den Kitt mit einer warmen Stricknadel zum Schmelzen bringt. Nach beendeter Füllung (wovon das Nähere weiter unten) wird auch das untere umgebogene Ende des Trockenrohres mit einem Korke und etwas Wachskitt luftdicht geschlossen. In der Biegung sammelt sich die allmählig entstehende flüssige Phosphorsäure, die man von Zeit zu Zeit mit Fliesspapier entfernen muss, damit nicht die Säure den Kork angreifen und den Verschluss unsicher machen möge.

4. Unten ist an die engere Röhre D eine T-Röhre angeschmolzen und in solcher Weise gebogen, dass die Achse der Röhre LM mit der Achse des offenen Schenkels der Barometerröhre zusammenfällt. Die Enden K und L (Abstand 5 cm.) sind durch einen ziemlich dickwandigen, mit Seide umnähten Kautschuk-Schlauch vereinigt, der durch die Schraube P (Fig. 2, 4 und 5) ein wenig zusammengedrückt werden kann. An M ist der übersponnene Schlauch S (Länge 120 cm., innere Weite 5 mm.) befestigt, durch welchen das Barometerrohr mit dem Reservoire Q (Inhalt 200 cmm.) communicirt. Die Trockenröhre H enthält Chlorcalium.

5. Fig. 2 zeigt das Barometer als ein ganzes. Die umschliessende Messingröhre ist 95 cm. lang und hat eine innere Weite von 35 mm.; die Wand ist 1,4 mm. dick. Die drei Schlitze für die Ablesung der Kuppen und des Thermometers Y sind 12 mm. breit. Der obere Visir-Ring N ist ganz wie beim Wild-Fuess'schen Controll-Barometer eingerichtet mit mikrometrischer Einstellung. Auch das untere Visir R ist nach demselben Muster gemacht und kann durch die Schraube T, Fig. 2 befestigt werden. Für die Reise entfernte ich doch diese Schraube und befestigte das Visir im Rohre durch Anlöthen an den hinteren Schlitzrändern, damit keine Verschiebung eintreten möchte.

Die Barometerröhre vird von oben in die Messingröhre eingeführt, nachdem man die Hülsen für das Thermometer entfernt hat. Das Capillarrohr B

sowie das Reservoir C und die Trockenröhre G bleiben auswendig, wo sie durch die beiden Bügel u und v befestigt werden. Die Kugel A ruht in einer Schale α Fig. 3 von Ebenholz, deren cylindrischer Fuss im oberen Ende des Messingrohres genau hineinpasst und durch einige mit ihren Spitzen ein wenig hineinragende Schrauben $\beta\beta$ festgehalten wird. Diese Schale muss eine ziemlich weite Durchbohrung besitzen um die Ampulle X Fig. 1 (29,4 mm. weit) durchzulassen. In diese Durchbohrung wird die Barometerröhre durch einen (in zwei Hälften zerschnittenen) Kork $\gamma\gamma$ centrisch befestigt. An das untere Ende des Messingrohres befestigt man in gleicher Weise das untere Ende K der Barometerröhre durch Korke $\delta\delta$ Fig. 4. Der übrige Theil liegt ganz frei, wodurch jedoch keine Gefahr entsteht, da das Barometer nur in senkrechter Lage mit Quecksilber benutzt wird.

6. Nachdem die Barometerröhre in die Messingröhre installirt worden ist, wird eine Messinghülse als Verlängerung der Hauptröhre angebracht, wie die Fig. 4 zeigt. In dieser Hülse sitzt die Press-Schraube P, durch deren Drehen ein dünner Messingbogen $\varepsilon\varepsilon$ Fig. 5 das Kautschukrohr KL zusammenpresst. Dem Bogen $\varepsilon\varepsilon$ gegenüber sitzt ein entsprechend ausgeschnittener Kork $\eta\eta$, der als Stütze für die engere Röhre D dient. Der Boden EE der Hülse kann entfernt werden; nach der Befestigung des Schlauches S an das Ende M wird der Boden EE angebracht und dann endlich auch das Reservoir Q an das andere Ende des Schlauches angebunden.

7. Zum Barometer gehört eine Holzscheibe bb (Länge 120 cm., Breite 12 cm., Dicke 25 mm.), die man an eine verticale Wand aufhängen kann. Diese Holzscheibe trägt in verschiedenen Höhen drei Halter g_1 g_2 g_3 für das Reservoir Q. Das Barometer ist oben cardanisch in einer Messinggabel Z aufgehängt. Die Verticaleinstellung geschieht unten durch drei Stellschrauben, die in einem zweiten gabelförmigen, in das Brett eingeschraubten Stücke Z' sitzen. Als Senkloth dient hierbei eine an einem Faden hängende Messingkugel; der Faden ist oben in einem an dem drehbaren Ringe des oberen Visires angebrachten Stückchen befestigt und der Durchmesser der Kugel ist so abgemessen, dass in der richtigen Verticallage des Barometers der Faden den rechten Kanten der Schlitze genau parallel hängt, wenn die Kugel unten die Röhre gerade berührt. Vorher wird der Visir-Ring in die gehörige, durch Marken angegebene Stellung gedreht. Nach dem Einlothen wird die Kugel entfernt. Die unveränderliche Stellung des Barometers wird durch in die Wand auf beiden Seiten des Brettes eingeschlagene Nägel gesichert. Die Gabel Z und Z' haben eine solche Länge, dass das Messingrohr etwa 6 cm. weit vom Brette hängt.

8. Soll das leere Barometer transportirt werden, bringt man zwischen das Brett und das Messingrohr zwei ausgeschnittene, mit dickem Tuche gefutterte Holzscheiben μ Fig. 6, die an das Brett durch angeschraubte Messingplatten rr befestigt werden. Dann wird das Instrument horizontal auf einen Tisch gelegt; das Barometer ruht jetzt in den ausgeschnittenen Holzscheiben und wird in diese durch aufgeschraubte, mit Tuch gefutterte Holzklötze ϱ sicher befestigt[1]). Das Quecksilber wird in einer platten, starken Glasflasche aufbewahrt, die in die Schachtel f Fig. 2 eingelegt und durch einen für den Hals der Flasche durchbohrten Deckel festgehalten wird. Ueber das Ganze wird ein von dünnen Holzscheiben in der Form einer Kiste mit Deckel angefertigtes Futteral gestülpt, das mit Schrauben an die Seiten des Barometerbrettes befestigt wird; das Brett dient somit als Boden der Kiste. Im Futterale hat man auch Raum genug für verschiedene, beim Aufstellen des Barometers nöthige Werkzeuge und Utensilien (Schraubenschlüssel, Stricknadel, Papiertrichter, ein Lichtchen u. s. w.). Der Deckel ist mit einer Handhabe zum Tragen versehen; ich habe es doch bequemer und sicherer gefunden, die Kiste in einem gewöhnlichem ledernen Tragriemen zu tragen. Die Kiste ist auswendig 122 cm. lang, 14,5 cm. breit und 14,5 cm. hoch; das ganze Gewicht ist ungefähr 11,5 kg., wovon 3 kg. auf das Quecksilber kommt. Diese Last kann man ohne grosse Ermüdung ziemlich weit (wenigstens 2 km.) tragen. Der Transport auf Eisenbahn oder mit Dampfschiff geschieht ohne jede Gefahr und die Kiste braucht weiter gar keine Aufsicht, nachdem sie im Netze für das Handgepäck oder einfach auf dem Boden des Wagens oder der Kajüte untergebracht ist. Muss man eine längere Reise auf der Landstrasse machen, kann die Barometerkiste entweder in horizontaler Lage auf dem Boden des Wagens ruhen oder auch (bei beschränktem Raume) in eine Ecke in nahezu verticaler Lage (oberes Ende nach oben) hingestellt werden.

9. Soll das Barometer aufgestellt werden, so entfernt man zuerst das Futteral, hängt das Brett auf die Wand, und befreit dann das Barometer von den stützenden Holzklötzchen. Das Quecksilber wird in das Reservoir Q gebracht. Mit einer Nähnadel wird der mit Wachskitt überzogene Kork am unteren Ende des Trockenrohres G durchgestochen und die Schraube F luftdicht zugeschraubt. Durch langsames Heben der Flasche Q wird die Luft vom ansteigenden Quecksilber allmählig aus dem Rohre, der Kugel A und dem Reservoire C herausgetrieben. Die Höhe des Halters g_3 sowie die be-

[1]) Fig. 6 zeigt das untere Lager, das in der Gegend von F angebracht wird; der Ausschnitt λ ist für den Hals des Reservoires Q bestimmt. Das obere Lager hat besondere Ausschnitte für die Röhren B, C und G.

nutzte Quecksilbermenge ist so abgepasst, dass das Quecksilber gerade C ausfüllt, wenn Q in g_3 gestellt wird. Beim langsamen Senken von Q fliesst das Quecksilber zurück und trockene Luft wird hereingesaugt und füllt die Barometerröhre bis nach unten. Dieses Verfahren wiederholt man zwei oder drei Male. Kann man annehmen, dass das Austrocknen vollendet ist, so füllt man wieder das ganze Röhrensystem mit Quecksilber und stellt Q in g_3. Jetzt erhitzt man eine Stricknadel über der Lichtflamme und schmilzt mit ihr die kleine Oeffnung am Ende des Trockenrohres luftdicht zu. Senkt man jetzt Q, so entleert sich C nur zum Theil, bis dass die daselbst noch rückständige Luft so weit verdünnt ist, dass durch ihre Spannung eine Quecksilbersäule von der Höhe des Capillarrohres B in Gleichgewicht gehalten wird. Dann bricht das Quecksilber oben beim Anfange des Capillarrohres und zieht sich einerseits zurück nach dem verticalen Theile dieses Rohres, sinkt aber andererseits immer mehr in der Kugel A herab, wo jetzt die Torricelli'sche Leere entsteht. Man senkt Q so weit wie möglich herab, um die kleinen Luftblasen, die zuweilen zwischen dem Quecksilber und der Glaswand im oberen Theile der Röhre haften bleiben, loszulösen. Alle noch rückständige Luft wird endlich durch nochmaliges Heben von Q nach C hinübergetrieben, wo sie als eine kleine Blase zwischen dem Quecksilber und der Glaswand haften bleibt. Durch Schattirung ist in Fig. 1 angedeutet, wie das Quecksilber die verschiedenen Theile des Röhrensystemes ausfüllt, wenn das Barometer fertig zum Beobachten gestellt ist.

10. Wie ich in meinem früheren Aufsatze über das transportable Barometer bemerkt habe[1]), bleiben immer im Vacuum Spuren von Wasserdampf zurück. Die Spannung ΔB dieses Dampfes wird nach der Formel

$$1)\qquad \Delta B = \frac{hv}{V-v}$$

berechnet, wo V das Volumen von der Quecksilberfläche im Barometerrohr bis nach der Quecksilberfläche in B ist, v aber das Volumen von der Marke O Fig. 1 zwischen den beiden Kugeln nach der Quecksilberfläche in B, und h endlich die Depression der Quecksilbersäule in B, wenn das Volumen des Gases in der Torricelli'schen Leere von V bis auf v vermindert wird. Für die Messung von h habe ich oben am Capillarrohre einen Papierstreifen mit Millimeterscale in solcher Weise angebracht, dass die Striche die Röhrenlängen vom oberen Anfange der Capillarröhre angeben. Die Grösse der Depression betrug im Allgemeinen circa 5 mm. oder weniger; in einzelnen Fällen stieg sie bis auf 7 mm. Die durch Compression des Gases in der Torricelli'schen

---

[1]) L. c. S. 392.

Leere hervorgebrachte Spannung ist somit (bei gewöhnlicher Zimmertemperatur von etwa 18° C.) hinreichend weit von der Maximalspannung des Dampfes entfernt; eine merkliche Abweichung vom Mariotte'schen Gesetze hat man daher nicht zu befürchten.

Die Formel 1) setzt die Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes für sehr kleine Spannungen voraus. Diese Voraussetzung muss man wohl gegenwärtig als berechtigt ansehen. Meine eigenen Versuche hierüber widersprechen auch nicht bestimmt dieser Annahme. Neben der Marke O Fig. 1 benutzte ich hierzu einige Marken auf der Kugel A (Striche einer Papierscale) und konnte daher verschiedene Grade von Compression herstellen. Ich fand, dass für $\frac{v}{V} = 0{,}04$, 0,06 und 0,12 die Werthe von $\varDelta B$ (nach der Formel 1)) merklich gleich waren, wenn $\varDelta B$ etwas gross ist (0,3 bis 0,5 mm.), dass aber für kleinere Vacuumspannungen $\varDelta B$ für die stärkste Compression einige Hundertstel grösser ausfällt als für die schwächste[1]). Diese Anomalie sehe ich doch nicht als eine Abweichung von dem Mariotte'schen Gesetze an; viel eher beruht sie darauf, das die Depression h, wenn sie unbedeutend ist (bei schwacher Compression), wegen des Anhaftens des Quecksilbers im Capillarrohre etwas zu klein ausfällt. Daher habe ich immer den Werth von h benutzt, welcher durch die grösste Compression (bis zur Marke O) erhalten wird.

Führt man in später zu beschreibenden Weise trockene Luft in das Barometer wieder hinein und evacuirt von Neuem, so fällt im Allgemeinen die Vacuum-Spannung kleiner aus. Man kann in solcher Weise durch wiederholtes Austrocknen $\varDelta B$ auf etwa 0,07 mm. herabbringen. Ich habe unter sonst gleichen Umständen die Vacuum-Spannung von 0,37 bis 0,07 mm. variiren lassen und dabei durch wiederholtes Vergleichen mit anderen Barometern gefunden, dass das Reisebarometer nach dem Anbringen von $\varDelta B$ bis auf eine Constante (wegen verschiedener Instrumentenfehler) die richtige Barometerhöhe angiebt.

12. Die Genauigkeit, mit welcher die Formel 1) die Vacuum-Spannung liefert, kann man nach der Differentialformel

$$2)\qquad d\varDelta B = \frac{v}{V-v}\,dh + \frac{V dv - v dV}{(V-v)^2}\,h$$

[1]) Gerade das Gegentheil hat Herr Dr. P. Schreiber bei der Untersuchung eines Wild-Fuess'schen Controll-Barometers gefunden („Ueber das Arago'sche Verfahren etc." in Repertorium der Physik. Bd. 22, S. 162). Der Product $V\varDelta B$ (= C in Herrn Schreibers Abhandlung) nahm mit steigender Compression stark ab. Eine wahrscheinliche Ursache dieser Anomalie wird von Herrn Dr. Pernet hervorgehoben (Zeitschrift für Instrumentenkunde, VI, 1886, S. 380).

beurtheilen. Der Hauptheil von V, d. h. der Inhalt der Kugel A, ist durch eingefülltes Wasser bestimmt, dessen Volumen mit Maassflasche und Mensurcylinder gemessen wurde. In V ist auch der von Quecksilber leere obere Theil der Barometerröhre einzurechnen, dessen Durchmesser = 11,1 mm., der Querschnitt also = 97 qmm. ist. Den Fehler in V schätze ich zu höchstens 1 ccm. Das Volumen der kleinen Kugel a wurde durch Wägen mit Quecksilber bestimmt und = 4,95 ccm. gefunden mit einem Fehler von höchstens 0,01 ccm. Bei der Compression fiel das Quecksilber in B zu irgend einem Theilstriche zwischen 51 und 59 herab. Der Querschnitt des Rohres, durch Calibriren mit Quecksilber bestimmt, ist = 1,63 qmm.; nimmt man v = Volumen von a + Volumen von B bis zum Striche $55 = 4{,}95 + 0{,}09 = 5{,}04$ ccm., so wird der ganze Fehler in v höchstens $= 0{,}01 + 0{,}006 = 0{,}016$ ccm., was ich auf 0,02 ccm. abrunde. Setze ich als mittlere Werthe $V = 123$ cm. und $h = 5$ mm., so wird der von fehlerhaften Volumina herrührende Fehler in ΔB höchstens = 0,003 mm. und kommt somit gar nicht in Betracht. Etwas grösser fällt der Einfluss eines Fehlers in h aus. Bei gelindem Anklopfen gegen die Röhre B bekommt man in verschiedenen Messungen derselben Vacuum-Spannung Depressionen, die von einander um höchstens 0,2 mm. differiren. Setzt man $dh = 0{,}2$ mm., so wird der zu befürchtende Fehler in $\Delta B = 0{,}008$ mm. Wegen des Anhaftens des Quecksilbers ist doch die von einem Fehler in h verursachte Unsicherheit in ΔB wahrscheinlich etwas grösser, ohne dass sie doch, wie ich glaube, die für Barometer erster Classe geltende Genauigkeitsgränze von $\pm 0{,}025$ mm. erreicht.

Eine möglichst fehlerfreie Depression bekommt man wohl am besten auf folgende Weise. Man füllt auch die kleine Kugel a zur Hälfte mit Quecksilber, wodurch die Depression in B zu gross wird; dann lässt man dass Quecksilber in a langsam bis zur Marke O sinken; in derselben Zeit steigt die Quecksilbersäule in B (bei fortwährendem Anklopfen), bis sie ihre definitive Stellung erhält, welche notirt wird. Dann wird Q unten in g_1 gestellt; A entleert sich und in B steigt das Quecksilber (bei fortwährendem Anklopfen) zu seiner richtigen Anfangshöhe. Die Differenz der beiden Höhen ist die richtige Depression. Gewöhnlich ist die letztgenannte als richtig bezeichnete Stellung der Quecksilbersäule in B ein wenig verschieden von derjenigen, welche vor der Manipulation für Druckmessung vorhanden war. Man thut daher gut, wenn man die Druckmessung wenigstens zwei Male durchführt und im Falle verschiedener Resultate von der ersten Messung nur die Stellung des Quecksilbers nach aufgehobener Compression als eine richtige Anfangsstellung verwerthet. Man hat somit zwei richtige Anfangsstellungen, deren Mittelwerth man mit der deprimirten Lage in der zweiten Messung combinirt. Die Quecksilbersäule ist somit unter andauerndem Steigen[1]) in alle bei der Berechnung der Vacuum-Spannung benutzten Stellungen gekommen, wodurch wenigstens die von der Capillarität verursachten Fehler zwischen möglichst engen Grenzen eingeschränkt werden[2]).

Als Beispiel theile ich hier eine am 19 März 1887 (mit der unten zu erwähnenden Röhre II des Reisebarometers) ausgeführte Messung mit.

	Anfangs-stellung.	Deprimirte Stellung.	Richtige Anfangs-stellung.
1:ste Messung	67,5	72,3	68,1
2:te „	68,1	72,2	68,1.

Die richtige Anfangsstellung ist somit unzweifelhaft 68,1 und die Depression ist $= 72{,}2 - 68{,}1 = 4{,}1$ mm. Würde man die erste Stellung 67,5 benutzen, so bekäme man die offenbar zu grosse Depression 4,8 mm. Dagegen geben die zwei letzten Zahlen der ersten Messung schon eine als richtig zu betrachtende Depression $72{,}3 - 68{,}1 = 4{,}2$ mm.

13. Der Factor $\frac{v}{V-v}$ in 1) schwankt ein wenig mit dem Barometerstand. Ich habe die folgenden Werthe benutzt.

Barometerstand.	$\frac{v}{V-v}$
710	0,0415
720	0,0419
730	0,0422
740	0,0425
750	0,0429
760	0,0433
770	0,0436
780	0,0440.

Die Temperaturveränderungen während einer Vergleichsreihe sind so gering, dass durch dieselben keine messbare Veränderungen in der Vacuum-Spannung hervorgebracht werden. Die Druckmessung wurde am Ende jeder Vergleichsreihe vorgenommen.

14. Die oben angeführte Formel 1) giebt nicht die volle Vacuum-Spannung. Denn einerseit ist die in B gemessene Druckzunahme ein wenig zu klein, da das Quecksilber auch in C etwas steigt, wenn es in B fällt.

---

[1]) Dieses Ansteigen-Lassen des Quecksilbers in allen Barometern vor der Ablesung bezeichnet Herr Director Wild als eine unerlässliche Bedingung um die richtige Barometerhöhe erhalten zu können (Ueber die Bestimmung des Luftdrucks, Repertorium für Meteorologie, T. III, N:o 1, S. 61). Ich denke, dass dasselbe Verfahren auch bei Messungen in Capillarröhren vortheilhaft sei.

[2]) Eine ähnliche Methode habe ich schon früher benutzt um sehr kleine Spannungen zu messen (Ueber eine Modification der Quecksilberluftpumpe, Acta Societatis scient. Fenn., T. XV, S. 179).

Bezeichnet man mit a_1 und a_2 die Querschnitte der Röhren B und C, so bedarf die in B gemessene Depression h der Correction $+\frac{a_1}{a_2}h$. Andererseits nimmt auch die Spannung der Luft in C und G etwas zu, da eine Quecksilbermasse, deren Volumen $=a_1 h$ ist, aus B nach C getrieben wird. Bezeichnen wir mit v_1 und b das Volumen und die Spannung der Luft in C und G, so ist der Zuwachs der Spannung $=\frac{a_1 h}{v_1 - a_1 h}b$, oder angenähert $=\frac{a_1 b}{v_1}h$. Der ganze durch die Volumenverminderung des Vacuums hervorgebrachte Zuwachs der Vacuum-Spannung ist somit

$$h+\frac{a_1}{a_2}h+\frac{a_1 b}{v_1}h\,.$$

Vor der Benutzung der Formel 1) hat man somit h mit $+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1 b}{v_1}\right)h$ zu corrigiren oder auch kann man die mit uncorrigirtem h berechnete Vacuum-Spannung $\varDelta B$ mit $\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1 b}{v_1}\right)\varDelta B$ vermehren.

Für das während der Reise benutzte Rohr ist $a_1=1{,}63$ qmm., $a_2=95$ qmm. (mit dem inneren Durchmesser 11 mm. berechnet); nach dem bei mittlerem Luftdrucke ($B=750$ mm.) ausgeführten Füllen des Barometers steht das Quecksilber in B 335 mm. höher als in C; schätzt man die Capillardepression in B zu 5 mm., so ist $b=340$ mm. Für die Berechnung von v_1 benutzte ich die Gleichung

$$\frac{v_1}{v_1-v_2}=\frac{B}{b} \quad \text{oder} \quad v_1=\frac{B}{B-b}v_2\,,$$

wo v_2 das Volumen von C über dem Quecksilber bei gefülltem Barometer ist (d. h. v_2 ist das Volumen des unschraffirten Theiles von C, Fig. 1). Da die Quecksilberfläche ungefähr 55 mm. unter dem oberen Ende von C steht, so ist $v_2=5{,}22$ ccm. und $v_1=9{,}55$ ccm. Man bekommt also $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1 b}{v_1}=0{,}075$. Dieser Factor ändert sich ein wenig mit dem bei der Füllung des Barometers vorhandenen äusseren Drucke; er ist = 0,076 bei 720 mm. und 0,074 bei 780 mm.

Diese Zahlen gelten für das Ende der Reise. Während der Reise wurde etwas Phosphorsäureanhydrid zu flüssiger Phosphorsäure aufgelöst, die allmählig entfernt wurde. Das von Phosphorsäureanhydrid freie Volumen v_1-v_2 der Trockenröhre war somit zu Anfang der Reise ein wenig (nach Aufschätzung 1 ccm.) kleiner; daher hatte auch der Reductionsfactor einen anderen Werth (ungefähr 0,087). Es genügt völlig, dass man jede während der Reise nach der Formel 1) berechnete Vacuum-Spannung mit 0,08 ihres Betrages vergrössert. Diese Correction steigt höchstens zu 0,03 mm.[1]).

15. Das Reservoir Q ruht gewöhnlich im niedrigsten Halter g_1. Das Quecksilber im offenen Schenkel steht dabei ungefähr 15 mm. unter dem Nullpunkte der auf der Messingröhre angebrachten Millimetertheilung. Soll eine Beobachtung gemacht werden, so wird Q in g_2 gestellt; das Quecksilber steigt dadurch bis nahe dem Nullpunkte. Jetzt wird der Schlauch S ganz nahe dem unteren Ende des Barometerröhres durch den gabelähnlichen Quetschhahn h Fig. 2 zugeklemmt und damit die Verbindung zwischen Q und dem offenen Schenkel aufgehoben. Durch die Schraube P (siehe oben 4 und 6) erhebt man dann die Quecksilberkuppe sehr langsam bis im Visirplane des Nullpunktes. Dabei muss man beachten, dass wegen elastischer Nachwirkung des Kautschukrohres KL die Kuppe nachher etwas fällt; daher darf man die definitive Einstellung der Kuppe nicht eher als etwa zwei Minuten nach der ersten vorläufigen Einstellung vornehmen[2]). Nach der Beobachtung wird erstens die Schraube P zurückgedreht; dann stellt man Q in g_1 und löst den Schlauch S vom Quetschhahne, wobei das Quecksilber im offenen Schenkel wieder unter Null herabfällt.

16. Wünscht man das Barometer auszuleeren, so schliesst man die Schraube F, füllt die Kugel A, sowie a und B mit Quecksilber durch allmähliges Heben von Q und stellt endlich Q in g_3, wobei sich auch C mit Quecksilber füllt. Dann sticht man den Verschluss des Trockenrohres G mit einer Nähnadel durch; beim nachfolgenden Senken von Q zieht sich das Quecksilber aus C, a, A und dem Barometerrohre ganz zurück und das Barometer wird mit trockener Luft gefüllt. Das Quecksilber wird aus Q und dem Schlauche S in seine Flasche ausgeleert und das Barometer ist fertig zum Verpacken (siehe oben 8).

17. Eine Eigenthümlichkeit bei Barometern dieser Art ist noch zu erwähnen. Ich habe schon an mehreren Exemplaren bemerkt, dass die (gewöhnlich positive) Correction eines ganz neuen Instrumentes mit jedem neuen

---

[1]) Die Correction $\frac{a_1 b}{v_1} h$ fällt ganz weg, wenn man die Röhre B etwas länger als eine Barometerhöhe nimmt. Ich habe für das Reisebarometer eine kürzere Röhre gewählt, da mir eine lange, an die Aussenseite der Messingröhre zu befestigende Capillarröhre ihrer Zerbrechlichkeit wegen zu bedenklich schien.

[2]) Eine ganz gleiche Methode für feine Einstellung einer Quecksilberkuppe benutzt Herr Dr. O. Petterson in Stockholm bei seinem absoluten Hygrometer (Fresenius, Zeitschrift für analytische Chemie, XXV, S. 468.)

Evacuiren ein wenig kleiner wird. Erst nach wiederholtem abwechselnden Füllen und völligen Ausleeren kommt das Instrument in einen constanten Zustand. Vier bis fünf Füllungen reichen gewöhnlich hin. Der Grund dieser Erscheinung liegt wahrscheinlich darin, dass das Röhrensystem, welches gewöhnlich nur durch hindurchgetriebene Zimmerluft getrocknet wurde, erst durch die Manipulationen beim Füllen und Ausleeren vollständig trocknet, wobei vielleicht auch Spuren von Feuchtigkeit im Quecksilber allmählig verschwinden. Vielleicht kann auch eine allmählige Oxydation des Quecksilbers zu dieser Erhöhung des Standes etwas beitragen.

18. Ehe ich zu den Vergleichungen übergehe, muss ich einen bemerkenswerthen Uebelstand meines Barometers etwas näher darlegen. Als ich das Reisebarometer als völlig fertig für die Reise betrachtete, machte ich (Juni 13—14) zwischen demselben und einem von mir construirten, unten näher zu beschreibenden Normalbarometer eine Reihe Vergleichungen. Der auf dem Reisebarometer abgelesene, unreducirte Barometerstand schwankte dabei nur zwischen 762,77 und 760,50 mm.; die Differenzen der beiden Barometer gaben keine Veranlassung irgend eine Ungleichförmigkeit der inneren Wand der Röhre zu befürchten. Während der Reise bemerkte ich doch bald, dass die obere Kuppe eine verschiedene Höhe in verschiedenen Theilen der Röhre hatte und dass somit die für den Barometerstand 760—763 gefundene Reduction auf das Normalbarometer wahrscheinlich nicht für alle Theile der Röhre gelten konnte. In der Nähe von 760 war die Kuppe ziemlich flach, wie es bei der bedeutenden Weite der Röhre (11,1 mm.) zu erwarten war, zwischen 740 und 756 dagegen merklich runder; die Einstellung auf der Kuppe war auch hier viel angenehmer und mit der Empfindung grösserer Genauigkeit verbunden. Offenbar hatte sich daher die innere Fläche der Röhre in irgend einer Weise verändert, was man auch bei genauem Ansehen der Röhre davon bemerken konnte, dass die die Röhre berührende Quecksilberfläche nicht vollkommen spiegelte[1]). Ich beschloss mich daher für eine genaue Untersuchung der Röhre nach beendeter Reise.

19. Gleich nach der Rückkehr wurde (August 11—14) mit dem Normalbarometer verglichen und dabei gefunden, dass die Differenz um 0,10 mm. abnahm, wenn die unreducirte Barometerhöhe von 749 auf 762 stieg. Die Vergleichungen wurden jetzt wegen eines vierzehntägigen Aufenthaltes auf dem Lande abgebrochen, am 31 August aber wieder aufgenommen und bis zum 14 October fortgesetzt. Ich erhielt während dieser Zeit directe Vergleichungen

[1]) Dass diese Veränderung aller Wahrscheinlichkeit nach schon vor der Reise vollendet war, werde ich später zeigen.

für Barometerstände zwischen 745,7 und 766,3. Da indessen das Barometer während der Reise einige Male (in Zürich, München und Chemnitz) erheblich tiefer gestanden hatte und da ich nicht hoffen konnte, dass der Luftdruck in Helsingfors in den nächsten Zeiten viel unter 745 sinken würde, sah ich mich gezwungen etwas Luft in das Reisebarometer hineinzuführen, um auch bei gewöhnlichem Luftdrucke einen niedrigeren Stand in demselben hervorzubringen. Bei einem äusseren Luftdrucke von 746–748 mm. und einer Temperatur von $+17^0$ C. war die Reduction auf dem Normalbarometer jetzt $= +22{,}11$ mm. (Mittel aus 5 Vergleichungen); den Instrumentenfehler hatte ich früher bei demselben Barometerstande $= +0{,}25$ mm. gefunden. Die Spannung der eingeführten Luft war somit bei einem Volumen bis zu 747 und einer Temperatur von $+17^0$ C $= 21{,}86$ mm. Für anderen Stand und andere Temperatur wurde die Spannung der Luft im Barometer nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze berechnet und zum beobachteten Stande des Reisebarometers hinzuaddirt, der dann mit dem gleichzeitig abgelesenen Stande des Normalbarometers verglichen wurde. In dieser Weise erhielt ich die Fehler des Reisebarometers bis zu 720 hinab. Sämmtliche benutzte Vergleichungen mit dem Normalbarometer sollen unten mitgetheilt werden.

20. Nach abgeschlossenem Vergleiche wurde das Reisebarometer demontirt. Nachdem die Glasröhre aus der Messingröhre herausgenommen worden war, konnte man die wahre Ursache der Veränderlichkeit in der Differenz gegen das Normalbarometer feststellen. Im oberen Theile der Röhre zeigte sich ein äusserst zarter grauer Beschlag, der von ungefähr 729 bis zu 757 reichte, und besonders deutlich bei 745 hervortrat, also gerade in der Gegend vorhanden war, wo die Kuppe eine stärkere Convexität gezeigt hatte und wo die Depression der Barometerhöhe am grössten war.

Die Röhre wurde jetzt mit concentrirter Salpetersäure gereinigt und nachher mehrmals mit destillirtem Wasser, zuletzt auch mit absolutem Alcohol gewaschen und getrocknet. Der graue Beschlag verschwand hierdurch vollständig. Doch zeigte sich bei auffallendem Lichte in derselben Gegend der Röhre ein eigenthümlicher metallischer Glanz, wovon man in durchfallendem Lichte nichts bemerken konnte. Die Röhre wurde wieder im Barometer eingeführt und mit Quecksilber gefüllt, wobei es sich zeigte, *das der graue Beschlag wiederum im metallglänzenden Theile der Röhre nach ziemlich kurzer Zeit erschien.*

21. Ich beschloss daher die Röhre vorläufig zu verwerfen und für künftige Untersuchung der inneren Wand aufzubewahren. Anstatt derselben bereitete ich für das Reisebarometer eine andere Fuess'sche Röhre (innere Weite 8,5 mm.),

die bei meinem vorigen Barometerversuche gedient hatte. Der obere Theil der Röhre wurde vor dem Anbringen der Kugel A mit einem Balle von feinem Handschuhleder inwendig kräftig frottirt und dadurch von jeder Unreinlichkeit befreit. In gleicher Weise wurde auch der untere Schenkel gereinigt. Die Constanten dieser Röhre, die ich als *Röhre II* bezeichnen werde, sind die folgenden: innerer Querschnitt der Röhre $B = 1,65$ qmm., der der Barometerröhre $= 57$ qmm., Volumen V von 65 in der Capillarröhre bis zu $750 = 120,21$ ccm., v von 70 in der Capillarröhre bis zur Marke $O = 6,07$ cmm. Hiermit bekommt man folgende Tafel für die Berechnung der Vacuum-Spannung.

Röhre II. Barometerstand.	$\frac{V-v}{v}$
720	0,0524
730	0,0526
740	0,0529
750	0,0532
760	0,0534
770	0,0537
780	0,0540.

Die nach 1) berechnete Vacuum-Spannung muss man wegen der Spannungszunahme in C etc. (siehe 14) mit 0,064 ihres Betrages vermehren.

Die Röhre II benutzte ich bei einigen Vergleichungen in Helsingfors sowie während der Reise nach St. Petersburg.

22. Das zum Reisebarometer benutzte Quecksilber wurde mit Eisenchlorid gereinigt und nachher von mir im Wright'schen Destillationsapparat[1]) destillirt. Der Apparat war mit meiner Luftpumpe verbunden; die Spannung überstieg während des Destillationsprocesses nicht 0,01 mm. Das destillirte Quecksilber schien ausserordentlich rein zu sein und hinterlies keine Spuren bei der Passage durch einen Papiertrichter. Allmählig schien es sich doch immer mehr zu oxydiren, da die im Papiertrichter hinterlassenen Spuren mit jeder neuen Füllung immer reichlicher wurden.

Dazu traf meinen Barometer in Berlin ein Missgeschick, das einen Einfluss auf das Quecksilber haben könnte und das ich hier nicht unerwähnt lassen darf. Ich hatte das Barometer am 2 August im Meteorologischen Institute aufgestellt und wollte soeben nachsehen, ob die Vacuum-Spannung hinreichend klein war, als der Schlauch S zersprang in der Nähe der Stelle, wo der Quetschhahn h Fig. 2 angeklemmt wird. Ungefähr die Hälfte der Quecksilbermasse verbreitete sich hierbei auf dem Boden, der mit steinernen Täfelchen gepflastert war. Mit grosser Gefälligkeit erboten mir die Beamten des Institutes

[1]) Zeitschrift für Instrumentenkunde 1882, S. 461.

neues Quecksilber, was ich doch ablehnte, da das vom Boden wieder aufgehobene Quecksilber, nachdem es vom Staube gereinigt worden war, augenscheinlich keine erhebliche Veränderung gelitten hatte und es mir daher richtig schien, die Expedition mit derselben Quecksilbermasse durchzuführen. Ich wollte auch nicht den Schlauch verwerfen, sondern verstärkte ihn nur durch Umnähen mit einem starken Bande. Nachdem das Barometer wieder gefüllt worden war, hatten die Kuppen in beiden Schenkeln dem Augenscheine nach ihre frühere Gestalt; die Capillarität schien also unverändert zu sein. Der beste Beweis aber für den unveränderten Zustand des Barometers gaben die unmittelbar folgenden Vergleichungen mit dem Controllbarometer Wild-Fuess N:o 79, die ungefähr dasselbe Resultat ergaben wie die Vergleichungen mit demselben Instrument in Hamburg an der Seewarte, Juni 28—29.

Wegen der Ursache des Unglücks ist folgendes zu bemerken. Der Schlauch war derselbe, der vom ersten Anfange meiner Barometeruntersuchungen gedient hatte. Als das Reisebarometer vollendet war, konnte ich in Helsingfors keine Schläuche von derselben Güte kriegen; ich zog es daher vor den alten Sclauch zu benutzen, der mir noch hinreichend stark erschien. Er hielt auch später im reparirten Zustande die ganze Zeit aus bis zur Demontirung des Barometers. Nachher habe ich mit dem neuen Rohre auch einen neuen Schlauch angebracht.

Auch das Quecksilber behielt ich unverändert bis zur Demontirung des Reisebarometers. Dann wurde es einfach mit concentrirter Schwefelsäure gereinigt, mit Wasser gewaschen und getrocknet.

23. Das Thermometer des Reisebarometers ist vor einigen Jahren von G. Reinhardt in St. Petersburg angefertigt und in halben Graden Celsius getheilt. Seine Correction für die in Frage kommenden Temperaturen ist $= -0^0{,}45$, wie ich durch Vergleichung mit einem von mir nach den Vorschriften des Herrn Dr. Pernet[1]) untersuchten Normalthermometer gefunden habe. In der Nähe des Nullpunktes ist die Correktion des Thermometers Reinhardt nur $-0{,}^0 2$.

24. Der Maassstab des Barometers wurde besonders untersucht, da die Theilung nicht ganz gelungen erschien. Als Normalmaas wurde hierbei eine auf einem soliden der Meteorologischen Centralanstalt zugehörigen Messingsstab aufgetragene Millimeterscala benutzt, die ich mit dem im physikalischen Laboratorium der Universität aufbewahrten Meter-Etalon F_2[2]) verglichen hatte. Den Abstand 0—800 auf dem Normalmaasse fand ich (bei $+19{,}^0 6$ C.) $= 800{,}104$

[1]) Travaux et Mémoires du Bureau international de poids et mesures, T. I, Seconde Partie.
[2]) S. Lemström, Justering af normalmått, Acta Societatis scient. Fenn. T. XI, S. 75.

(für Theilungsfehler berichtigte) Scalentheile des Etalons; ebenso erwies sich der Abstand 700—800 (bei + 20,°15 C.) = 100,013 Scalentheile. Die Vergleichung zwischen dem Barometer-Maassstabe und dem Normalmaasse geschah bei + 17,°75 C.; nur die Abstände 0—800 und 700—800 auf diesem Maasse wurden benutzt. Dabei ergab sich der Abstand 0—800 = 800,042, sowie 700—800 = 100,009 Scalentheile des Normalmaasses. Da die mögliche Verschiedenheit der Ausdehnungscoefficienten der drei Maasse bei den geringen Temperaturdifferenzen sehr wenig wirkt, kann man annehmen, dass auf dem Barometermaassstabe der Abstand 0—800 = 800,146 und 700—800 = 100,022 Scalentheile einer richtigen Millimeterscala von Messing ist.

Für die Untersuchung der Centimeter zwischen 690 und 790 benutzte ich den Abstand 0—19, sowie für die verschiedenen Millimeter in jedem Centimeter je einen Theil des zwanzigtheiligen Nonius des Reisebarometers als Vergleichs-Etalon. Diese letztgenannten Vergleichungen wurden alle doppelt ausgeführt in solcher Weise, dass die Millimeter zwischen 690 und 700 sowohl mit dem Theile 0—1 als auch mit dem Theile 19—20 des Nonius, weiter die Millimeter 700—710 mit 1—2 und 18—19 der Nonius u. s. w. verglichen wurden. Dadurch wurden auch die Längen der Nonientheile bekannt. Alle Vergleichungen geschahen unter dem Mikrometermikroskope; zwei solche waren an Schlitten befestigt, die zwischen zwei soliden Holzbalken beweglich waren und durch Schrauben in verschiedenen relativen Abständen befestigt werden konnten. Ein Millimeter entsprach ungefähr 10 Undrehungen der in 100 Theile getheilten Mikrometer-Trommeln. Die Resultate habe ich in Tausendstel Millimeter ausgerechnet; wegen der nicht ganz genauen Führung der Mikroskopenschlitten, sowie weil die Striche nicht sehr nett waren, sind doch die Tausendstel nicht ganz sicher. In den folgenden Tafeln, aus denen ich den Maassstabfehler für jede abgelesene Barometerhöhe genommen habe, gebe ich daher nur Hundertstel Millimeter an. Um grosse Correctionen wegen Maassstabfehler zu vermeiden habe ich in der ersten Tafel überall 0,12 mm. abgezogen; die Zahlen geben somit nicht die Abstände der Striche vom Nullstriche an, sondern alle nach den Tafeln bestimmten Höhen sind 0,12 mm. zu klein. In der That wurde auch die Correction des Reisebarometers immer positiv befunden (zwischen 0,15 und 0,30 mm.). Dass diese Correction nicht genau +0,12 mm. ist, beruht theils auf unrichtiger Stellung der Visirplane, theils auf Capillaritätsdifferenzen in den beiden Schenkeln der Barometerröhre.

Tafel I für die Striche des Barometermaassstabes.

690	690,01	710	710,01	730	730,01	750	749,99	770	770,00
1	0,99	1	1,02	1	1,03	1	0,99	1	1,01
2	1,99	2	2,02	2	2,03	2	1,99	2	2,02
3	3,01	3	3,03	3	3,02	3	3,00	3	3,01
4	4,00	4	4,03	4	4,02	4	4,00	4	4,02
5	5,00	5	5,02	5	5,02	5	5,00	5	5,03
6	6,01	6	6,01	6	6,00	6	6,01	6	6,02
7	6,99	7	7,01	7	7,01	7	7,00	7	7,03
8	7,97	8	8,01	8	8,01	8	8,00	8	8,04
9	9,02	9	9,01	9	9,00	9	8,99	9	9,03
700	700,01	720	720,00	740	740,01	760	760,00	780	780,04
1	1,01	1	1,02	1	1,01	1	1,00	1	1,04
2	2,02	2	2,03	2	2,00	2	2,01	2	2,03
3	3,01	3	3,02	3	3,00	3	3,01	3	3,04
4	4,01	4	4,02	4	4,00	4	4,00	4	4,04
5	5,02	5	5,02	5	4,99	5	4,99	5	5,03
6	6,01	6	6,03	6	6,00	6	6,00	6	6,04
7	7,01	7	7,02	7	7,00	7	7,00	7	7,00
8	8,02	8	8,03	8	8,00	8	8,00	8	8,01
9	9,01	9	9,02	9	8,99	9	9,00	9	9,01
710	710,01	730	730,01	750	749,99	770	770,00	790	790,03.

Tafel II für die Striche des Nonius.

0	0,00	10	10,53
1	1,07	11	11,59
2	2,09	12	12,64
3	3,16	13	13,69
4	4,21	14	14,74
5	5,26	15	15,78
6	6,33	16	16,84
7	7,37	17	17,87
8	8,45	18	18,93
9	9,48	19	19,98
10	10,53	20	21,02.

Der Theilungsfehler ist somit nicht ganz klein, besonders im Nonius. Bei der Theilung mussten wir uns auf die Richtigkeit der Schraube der Theilmaschine verlassen. Bei späteren Theilungen haben wir dagegen eine Millimeterscala abcopirt, die nach einem der Aichungs-Commission in Helsingfors zugehörigen, von der „Societé Génévoise" getheilten Millimetermaassstabe getheilt worden war. Diese späteren Theilungen (z. B. das oben erwähnte Normal-Maass der Meteorologischen Centralanstalt sowie der Maassstab meines Normalbarometers) sind sehr gut ausgefallen, da die relativen Theilungsfehler einen Hundertstel eines Scalentheiles kaum erreichen.

25. Schliesslich will ich noch erwähnen, dass die Construction meines Reisebarometers eine mechanische Reinigung des unteren Schenkels erlaubt.

In dieser Hinsicht muss man den Schlauch *KL* Fig. 1 entfernen; dann kann man ohne Schwierigkeit einen auf einem Metalldrathe befestigten Lederball in den Schenkel *KF* einführen und denselben durch Frottiren reinigen. Sollte das nicht genügen, benutzt man anstatt des Lederballes einen mit Salpetersäure getränkten Baumwollwisch. Die Säure wird dann sorgfältig ausgewaschen und zuletzt wird noch mit dem Lederballe frottirt. Während dieser Manipulationen hält man die Oeffnung *L* durch einen Kork verschlossen.

Nach den in 18, 19 und 20 angeführten Erfahrungen wäre auch ein mechanisches Reinigen des oberen Schenkels zuweilen nöthig. Hiezu hat man doch an meinem Barometer keine Gelegenheit. Mann müsste für diesen Zweck das Reisebarometer ganz umconstruiren (etwa nach dem Muster der Köppen-Fuess'schen Barometer N:o 9 und 10 an der Seewarte in Hamburg), damit das Glasröhrensystem für Reinigung leichter zugänglich werden würde. Ich zweifle nicht, dass man mit einer solchen Construction vorzügliche Resultate erhalten würde, wenn man vor jeder Füllung sowohl den unteren als auch den oberen Schenkel mit einem Lederballe kräftig frottirt.

II. Vergleichungen mit dem Normalbarometer.

1. Das Normalbarometer ist nach den von mir in einem früheren Aufsatze[1]) hervorgelegten Principien construirt. Da ich in der nächsten Zeit auf diesen Gegenstand zurückzukommen beabsichtige, gebe ich hier nur eine kurze Beschreibung sowie eine schematische Abbildung (Fig. 7) dieses Normalbarometers.

Das eigentliche Barometer besteht aus zwei Reservoiren *BB* (von 40 mm. innerer Weite) die durch die Glasröhre *R* (äussere Weite 10, innere 8 mm.) verbunden sind. Diese Röhre ist in den Hals des oberen Reservoires bei *K* eingekittet, besitzt bei *O* ein Loch und trägt oben und unten (an der rechten Seite in der Abbildung) eine eingeätzte Millimetertheilung *ss*. Das obere Reservoir ist oben mit der Trockenkugel *T*, die Phosphorsänreanhydrid enthält, sowie mit der Quecksilberluftpumpe *L* (Inhalt der Kugel 193 ccm.) verbunden. Nachdem eine hinreichende Menge reinen, destillirten Quecksilbers in das untere Reservoir eingebracht worden ist, pumpt man die Luft heraus, wobei das Quecksilber in die Röhre *R* hinaufsteigt und endlich durch die Oeffnung *O* in das obere Reservoir hineinfliesst. Die Vacuum-Spannung kann

[1]) Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens förhandlingar, XXVIII, S. 82.

man bis auf 0,005 mm. herabbringen. Das Reservquecksilber befindet sich in einem Seitenreservoir, das mit dem unteren Reservoire verbunden ist; den Taucher N kann man durch die Schraube P in das Quecksilber hineindrücken und dadurch das nöthige Ansteigen des Quecksilbers vor der Beobachtung bewirken. Alle diese Theile des Apparates sind auf einem Brette angebracht, das an der Wand sehr solid befestigt ist.

2. Zur Ablesung dienen die beiden Mikrometermikroskope MM, die von hölzernen Schlitten getragen werden. Diese Schlitten sind zwischen zwei an der Wand befestigten soliden Holzbalken beweglich und können in den für Ablesung des Barometers nöthigen Stellungen festgeklemmt werden[1]. Mit dem Mikrometer misst man den Abstand zwischen einem Striche und seinem von der weiten Quecksilberfläche erzeugten Spiegelbilde; die Hälfte dieses Abstandes würde dem Abstande der Quecksilberfläche von dem betreffenden Striche gleich sein[2], wenn diese Fläche vollkommen eben wäre. Die Weite der Fläche in der Richtung der Visirlinie ist freilich etwa 30 mm.; aber die benutzten Mikroskope haben sehr kleine Objective und können daher nur ein enges Strahlenbündel aufnehmen, in Folge dessen nur der dem Mikroskope nähere, schon ziemlich convexe Theil der Fläche zur Wirksamkeit kommt, wenn der gespiegelte Strich einen etwas grösseren Abstand von der Fläche besitzt. Der unter Annahme eines ebenen Spiegels berechnete Abstand bedarf daher einer Correction, deren Grösse ich durch specielle Messungen bestimmt habe. Das folgende Täfelchen enthält diese Correction für alle Abstände, die in Frage gekommen sind.

Uncorrigirter Abstand.	Correction wegen Krümmung der Fläche.
0,25 Scalenth.	+ 0,001
0,35	0,002
0,45	0,004
0,55	0,006
0,65	0,009
0,75	0,012
0,85	0,016
0,95	0,021
1,05	0,026
1,15	0,032
1,25	0,038
1,35	0,045
1,45	0,053.

[1]) Dieser Mikrometerapparat ist derselbe, der bei den oben I, 24 erwähnten Untersuchungen der Theilung des Reisebarometers benutzt wurde.

[2]) Vergl. M. Thiesen, Ueber die Ablesung von Normalbarometern, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1886, S. 89.

Dieses Täfelchen ist sowohl für die obere als für die untere Ablesung benutzt. Gewöhnlich heben sich also diese beiden Correctionen in der Differenz der beiden Ablesungen einander beinahe auf; sie wurden indessen an alle Messungen angebracht, da sie zuweilen nicht unerheblich (bis mit 0,04 mm.) die abgelesene Höhe ändern. Um die richtige Form der Flächen herzustellen wurde jedesmal vor der Beobachtung das Quecksilber durch den Taucher N langsam gehoben.

3. Das Normalbarometer war in meiner Wohnung, in einem steinernen, auf festem Felsenboden ruhenden Hause aufgestellt. Die Quecksilberflächen hielten sich gewöhnlich sehr ruhig und die Ablesung war im Allgemeinen mit keinen Schwierigkeiten verbunden. Die Strasse wird nicht oft befahren; das Gehen in den nächsten Zimmern wurde bei einer Beobachtung verboten. Nur bei windigem Wetter konnte ich das Normalbarometer nicht ablesen, da die Quecksilbersäule bei jedem Windstosse in starke Oscillationen gerieth. Bei klarem Himmel war das Tageslicht für die Ablesung hinreichend; sonst beleuchtete ich den Maassstab von vorne durch ein Licht, das ich in der linken Hand hielt; mit der rechten stellte ich am Mikroskope ein.

4. Am Normalbarometer sind drei im Jahre 1872 zu Stützerbach in Thüringen verfertigte Thermometer in verschiedenen Höhen angebracht. Das obere und untere Thermometer (neben den Reservoiren BB) sind in Zehntel Grad C. getheilt; leider gehen die Scalen nur zu $+20^0$. Das Thermometer in der Mitte ist in Fünftel Grad C. getheilt und geht bis zu $+25^0$. Innerhalb der benutzten Temperaturgrenzen stimmen diese drei Thermometer *unter einander und mit dem Thermometer Reinhardt des Reisebarometers* beinahe vollkommen überein; ich habe daher für dieselben die Correction $-0,^045$ C. angenommen (I, 23).

Bei der Beobachtung wurden immer die Thermometer zuerst abgelesen. Wenn mit t_1 t_2 t_3 die Ablesungen der Thermometer von unten nach oben bezeichnet werden, so nehme ich $\frac{1}{2}\left[t_2+\frac{1}{2}(t_1+t_3)\right]-0^0{,}45$ als Temperatur des Quecksilbers im Barometer an. In den Fällen, wo die Temperatur über 20^0 C. war (im Juni und August), konnte ich nur das Thermometer in der Mitte benutzen. Bei dieser Wärme war aber die Temperatur im Zimmer sehr gleichmässig; die drei Thermometer differirten unter einander sehr wenig und $\frac{1}{2}(t_1+t_3)$ stimmte bis auf einige Hundertstel mit t_2 überein, wenn die Temperatur sich $+20^0$ C. näherte.

Bei höherer Zimmerwärme ($17-20^0$ C. im Juni, August und September) schwankte der Unterschied $t_3 - t_1$ zwischen 0,°05 und 0,°25, stieg aber im Winter zuweilen bis zu 0,°4. Durch das Heben des Quecksilbers vor der Beobachtung wurde etwa ein Achtel des Quecksilbers aus der Röhre R in das obere Barometerreservoir getrieben und durch etwas kälteres Quecksilber von unten ersetzt. Die hierdurch veranlasste Abkühlung[1]) der Quecksilbersäule kann höchstens 0,°05 betragen und braucht daher kaum berücksichtigt zu werden.

5. Die Vergleichung zwischen dem Maassstabe des Normalbarometers und dem oben (I, 24) erwähnten Normalmaasse der Meteorologischen Centralanstalt ergab folgendes Resultat: Abstand 0—800 auf dem Barometer-Maassstabe = 800,030 Theile des Normalmaasses bei + 18° C. Auf dem Normalmaasse ist 0—800 = 800,104 Theile des Etalons F_2 (Ausdehnungscoefficient = 0,000017734 für 1° C.) bei + 19,°6 C. = 800,383 mm. Da ich die Ausdehnungscoefficienten der Barometerscala und des Normalmaasses weder kenne noch mit gehöriger Genauigkeit bestimmen konnte, habe ich den Ausdehnungscoefficienten des Normalmaasses = 0,000018782 angenommen, weil ich die in SCHUMACHER's *Sammlung von Hülfstafeln*[2]) vorhandenen Reductionstafeln für Barometerhöhen bei allen Reductionen auf 0° angewandt habe. Der Abstand 0—800 auf dem Normalmaasse wäre somit bei + 18° C. = 800,358 mm. und der Abstand 0—800 auf dem Maassstabe des Normalbarometers wäre bei + 18° C. = 800,388 mm. = 800,117 Scalentheile (bei 18° C.) einer bei 0° C. richtigen Millimeterscala von Messing mit dem Ausdehnungscoefficienten 0,000018782. Solche Scalentheile werde ich *Normaltheile* nennen. Die Abstände der in Frage kommenden Striche der Barometerscale vom Striche 0 wurden in solchen Normaltheilen bestimmt und in eine Tafel geordnet, die für die Temperatur + 18° C. gültig ist.

Weiter habe ich die Differenz zwischen den Ausdehnungscoefficienten des Messings und der Barometerscale (Glasröhre) = 0,000010 gesetzt und hiermit alle nach dieser Tafel berechneten Barometerhöhen von + 18° C. auf die vorhandene Temperatur reducirt; diese Reduction übersteigt nie 0,03 Scalentheil und ihre Unsicherheit wegen ungenügender Kenntniss der Ausdehnungscoefficienten bleibt wohl unter allen Umständen kleiner als die für Normalbarometer erforderte Genauigkeit ± 0,01 mm. Nach dem Anbringen dieser Correction und der Vacuum-Spannung wurde die Barometerhöhe auf gewöhnliche Weise und mit der genannten Tafel auf 0° C. reducirt.

Ein Beispiel wird dieses näher beleuchten. Am 11 August 1886 wurde auf dem Normalbarometer die wegen Krümmung der Quecksilberspiegel corri-

---

[1]) J. PERNET, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1886, S. 380.

[2]) Neu herausgegeben von WARNSTORFF, 1845.

girte Höhe 749,307 bei +21,°6 C. abgelesen. Diese Höhe würde 749,412 Normaltheilen entsprechen, falls die Temperatur $= +18^0$ C. wäre, ist also bei +21,°6 C. = 749,412 [1—0,000010 (21,6—18,0)] = 749,385 Normaltheile. Hiezu kommt die Vacuum-Spannung 0,022 (wovon das Weitere unten); die unreducirte Barometerhöhe ist somit = 749,41 und die auf 0^0 C. reducirte ist = 749,41—2,60 = 746,81 mm.

6. Die Vacuum-Spannung wird nach der Arago'schen Methode *mit der Luftpumpe* gemessen, deren Kugel den Inhalt 193 ccm. und deren Capillarrohr den Querschnitt 1,8 qmm. hat. Ich setze daher $V = 193$ ccm.; der grösste in Frage gekommene v ist = 0,2 ccm., die grösste Depression = 22 mm. Der Fehler in h kann höchstens 0,5 mm., in V 1 ccm. und in v 0,01 ccm. betragen, somit erreicht der Fehler der Vacuum-Spannung (nach Gl. 2), I, 12) kaum 0,001 mm. Auch die Correction $\frac{a_1}{a_2} h$ (I, 14) kann vernachlässigt werden, da a_2 hier ungefähr 150 qmm. ist. Die Formel 1) (I, 10) genügt somit völlig für die Berechnung der Vacuum-Spannung.

Die Vacuum-Spannung wurde nicht bei jeder Vergleichung bestimmt, daher erschiene vielleicht ein Anwenden des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes bei den verschiedenen Vergleichungen nöthig. Das ganze Volumen des Vacuums wurde zu 300 ccm., die ganze Volumen-Variation zu 18 ccm. aufgeschätzt; die grösste vorgekommene Temperaturvariation ist 6^0 C. geworden. Somit beträgt die Spannungs-Variation wegen der Volumen-Variation ungefähr $\frac{1}{17}$, wegen der Temperatur-Variation nur $\frac{1}{49}$ der ganzen Spannung. Da nun die Vacuum-Spannung bei längeren Reihen 0,011 mm. nicht überstiegen ist, sind somit keine Berichtigungen derselben wegen Volumen- und Temperaturvariation nöthig. Auch der Umstand kann offenbar vernachlässigt werden, dass bei der Messung der Depression eine Papierscala benutzt wurde.

Das Vacuum erhält sich in ziemlich befriedigender Weise. Vor meiner Reise war die Vacuum-Spannung = 0,011 mm. Bei der Rückkehr, nachdem das Barometer zwei Monate sich selbst überlassen gestanden hatte, war sie = 0,022 mm. Die Zunahme ist wohl der sich allmählig von den Wänden ablösenden Luft zuzuschreiben. Auch der pulverförmige Phosphorsäureanhydrid kann viele absorbirte Luft enthalten, die er nur allmählig abgiebt.

7. Ich gehe jetzt zu den Vergleichungen zwischen dem Normalbarometer und dem Reisebarometer über. Die verschiedenen Einstellungen geschahen in der folgenden Ordnung. Erst liess ich alle Thermometer ab; dann wurde in beiden Barometern die Quecksilbersäule gehörig gehoben. Nach etwa zwei Minuten (welche Zeit mir für die Herstellung der neuen Gleichgewichtslage

des Quecksilbers erforderlich schien) wurden die Einstellungen und Ablesungen gemacht, nämlich 1:o Einstellung des unteren Mikrometers auf den Spiegelbild des nächsten Striches; 2:o Einstellung des oberen Mikrometers auf den Spiegelbild; 3:o eine oder zwei Einstellungen des Reisebarometers; 4:o Einstellung des oberen Mikrometers und 5:o Einstellung des unteren Mikrometers auf den Spiegelbild. Diese Einstellungen nahmen ungefähr drei Minuten Zeit in Anspruch. Dann wurden beide Barometer durch Senken des Quecksilbers in den ursprünglichen Zustand gebracht. Schliesslich stellte ich die Mikrometer auf die nächsten Striche des Maassstabes ein und bestimmte auch, wenn es nöthig angesehen wurde, den Werth eines Trommeltheiles. Für diese sämmtliche Manipulationen reichten zehn bis fünfzehn Minuten hin. Gewöhnlich machte ich eine Vergleichung jede Stunde, nie öfter.

Das Normalbarometer werde ich der Kürze wegen mit *NB*, das Reisebarometer mit *RB* bezeichnen. Ich werde nur die unmittelbaren, uncorrigirten und unreducirten Ablesungen des Reisebarometers anführen, sowie die entsprechenden Differenzen zwischen den corrigirten, auf 0° C. reducirten Höhen der beiden Barometer im Sinne *NB*—*RB*. Diese Differenzen sind somit *die Correctionen* des Reisebarometers an den betreffenden Stellen seiner Röhre.

Vergleichungen Juni 13—14 vor der Reise.

		RB	Correction.
Juni	13	762,65	+ 0,21
„	„	762,77	0,17
„	„	762,75	0,20
„	„	762,50	0,17
„	„	762,45	0,17
„	„	761,54	[0,27]
„	„	761,50	0,14
„	„	761,36	0,24
„	14	761,32	0,15
„	„	761,46	0,17
„	„	761,39	0,16
„	„	761,16	0,17
„	„	760,73	0,22
„	„	750,60	0,21
			Mittel + 0,18.

Mittlere Abweichung vom Mittel $= \pm 0{,}025$.

Die eingeklammerte stark abweichende Zahl ist vom Mittel ausgeschlossen.

8. *Vergleichungen August 11—14 nach der Reise.*

		RB	Correction.
August	11	748,82	+0,24
„	„	748,94	0,29
„	12	751,28	0,23
„	„	752,04	0,23
„	„	752,32	0,22
„	„	753,68	0,16
„	„	754,15	0,20
„	„	754,45	0,22
„	13	755,92	0,20
„	„	756,38	0,19
„	„	756,37	0,18
„	„	756,69	0,15
„	„	756,78	0,17
„	„	756,94	0,17
„	14	757,29	0,19
„	„	760,49	0,17
„	„	761,18	0,12
„	„	761,38	0,20
„	„	761,46	0,14
„	„	762,00	0,21
„	„	761,94	0,15
„	„	762,19	0,16.

Hier tritt der Einfluss des grauen Beschlages im oberen Schenkel des Reisebarometers (I, 20) deutlich hervor. Man erhält nämlich für 749 die Correction +0,26, für 751—754 +0,21 ±0,020, für 756—757 +0.18 ±0,013 und für 761—762 +0,16 ±0,024 mm. Zu bemerken ist, das diese letzte Correction mit 0,02 mm. den Betrag der Correction (+0,18 mm.) *vor der Reise* für dieselbe Stelle der Röhre untersteigt. Diese Differenz betrachte ich nicht als zufällig. Sie entspricht einer Abnahme der Correction von 0,01 mm. für je 90 Einstellungen. Ihren Grund finde ich in der allmählig sich vergrössernden Wölbung der Kuppe im offenen Schenkel wegen Verunreinigung der Glaswand[1]).

9. Für die Richtigkeit dieser Annahme spricht auch der Umstand, dass während der folgenden Reihe (August 31—September 25) eine solche Abnahme der Correction sich gezeigt hat. Im Anfange der Reihe erhielt ich für 759 die Reduction +0,17 (Mittel aus 14 Vergleichungen), am Ende (nach etwa 90 Einstellungen) aber nur +0,14 mm. (5 Vergl.), ebenso für 763—765 im Anfange +0,16 (5 Vergl.), nach 120 Einstellungen aber nur +0,13 mm. (5 Vergl.), was eine Abnahme von 0,01 mm. für je 30 bis 40 Einstellungen ergiebt.

[1]) Vergl. H. F. Wiebe, Das Heberbarometer *N*, Metronomische Beiträge N:o 4, S. 23, sowie J. Pernet, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1886, S. 379.

Es ist daher nöthig alle Vergleichungen auf den Anfang der Reihe zu reduciren. Hierbei habe ich doch eine etwas kleinere Abnahme (0,01 mm. für je 50 Einstellungen) angenommen, da sonst für die meisten Stellen der Röhre eine Ueberreduction deutlich merkbar wurde.

Um den Raum zu sparen, ordne ich die in dieser Reihe gefundenen Correctionen nach den nächsten vollen Millimetern. Eine Vergleichung gerade in der Mitte zwischen zwei Millimetern ist zu beiden gerechnet. Da die Vergleichungen (August 11—14) zu wenige sind um ein selbstständiges Resultat zu liefern, ziehe ich dieselben auch hier (mit cursiven Ziffern) ein.

Vergleichungen August 11—14, August 31—September 25.

RB	Correction.												Mittel und mittlere Abweichung.	
746—748	+ 0.26	0,26	0,25	0,27	0,24	0,24	0,27	0,22					+ 0,25	± 0,014
749—751	+ *0,24*	*0,29*	0,29	0,22	0,23	0,21	0,26	*0,23*	0,27				0,25	0,026
752	+ *0,23*	*0,22*	0,25	0,24	0,29								0,25	0,020
753—754	+ 0,22	*0.16*	*0,20*	*0,22*	0,25	0,27	0,26	0,23	0,24	0,27			0,23	0,026
755	+ 0,24	0,23	0,24	0,23	0,24	0,21							0,23	0,008
756	+ *0,20*	*0,19*	*0,18*	0,18	0,22	0,29	0,22						0,22	0,031
	0,28	0,24	0,22	0,25	0,26	0,20	0,17							
757	+ *0.15*	*0,17*	*0.17*	*0,19*	0,26	0,25	0,23	0,24	0,21	0,24	0,27		0,22	0,035
758	+ 0,22	0,18	0,20	0,20	0,22	0,18	0,20	0,22	0,22	0,20			0,20	0,012
759	+ 0.18	0,16	0,17	0,20	0,18	0,21	0,21	0,17	0,19	0,18	0.16	0,17	0,18	0,018
	0,18	0,15	0,16	0,16	0,14	0,17	0,23	0,18	0,20	0,14	0,15	0,17		
760	+ 0,21	0,18	0,14										0,18	0.023
761	+ *0,17*	*0,12*	*0,20*	*0,14*	0,20	0,16	0,19	0.19	0,16				0,17	0,022
762	+ *0,21*	*0,15*	*0,16*	0,13	0,13	0,17	0,14	0,15					0,15	0,017
	0,12	0,14	0,16	0,15	0,15	0,18	0,12							
763	+ 0,14	0,14	0,18	0,11	0,14	0,18	0,16	0,17					0,15	0,020
764	+ 0,16	0,19	0,17	0,20	0,19	0,14	0,19	0,14					0,16	0,027
	0,13	0,11	0,12	0,19	0,11	0,17	0,15							
765	+ 0,16	0,16	0,20	0,13	0,14	0,15	0,17	0,14	0,16				0,16	0,015
766	+ 0,15	0,16	0.13	0,16	0,16	0,18	0,17						0,17	0,020.
	0,15	0,16	0,21	0,18	0,21	0,21								

Die ganze Variation in der Correction beträgt somit für die Strecke 746—766 0,10 mm. Die Gegenden 746—755 und 762—766 zeigen sich als verhältnissmässig gut. Die mittlere Abweichung ist am grössten bei 756—757. Für 760 habe ich leider nur drei Vergleichungen erhalten, da dieser Barometerstand zufälligerweise sonst nur in der Nacht oder an Stunden, wenn ich wegen des Dienstes nicht zu Hause sein konnte, eingetreten ist.

10. *Vergleichungen mit Luft im Reisebarometer* (siehe oben I, 19), *September 26—October 14.*

RB	Correction.												
720—723	+0,15	0.13	0,15	0,13	0,13	0,13	. . . .					+0,14	±0,010
727—730	+0,20	0,13	0,19	0,16	0,18	0,20	0,19	0,25	. . . .			0,19	0,022
735—736	+0,23	0,19	0,18	0,18	0,15	0,22	0,26	0,18	0,17	0,20	0,22 . . .		0,20	0,025
738—739	+0,26	0,23	0,21	0,22	0,22	0,18	0,22	. . . .				0,22	0,014
740—744	+0,28	0,31	0,29	0,30	0,26	0,25	0,23	0,19	0,24			0,26	0,030
746—748	+0,29	0,24	0,24	0,24	0,26	0,25	. . . .					0,25	0,013.

Die ganze Variation ist hier 0,12 mm.; die grösste mittlere Abweichung zeigt sich bei 740—744. Für 724—726, 731—734, 737 und 745 erhielt ich keine Vergleichungen.

11. Die in 8, 9 und 10 angeführten Vergleichsreihen zeigen deutlich den Zustand der Röhre des Reisebarometers *nach beendeter Reise.* Der erwähnte graue Beschlag bedingt eine grössere Correction (+ 0,25 bis 0,26 mm.) für die Strecke 740—752. Von 740 abwärts sowie von 752 aufwärts nimmt die Correction an Grösse rasch ab und erreicht bei 720—723 und 762—763 einen Werth von + 0,14 bis 0,15 mm.

Den Zustand der Röhre *zu Anfang der Reise* kann man aus folgenden Umständen beurtheilen. Ursprünglich scheint die Röhre überall dieselbe Capillarität gegen Quecksilber gezeigt zu haben, denn die erste Vergleichsreihe April 2—8 mit dem Controllbarometer Wild-Fuess N:o 99 im physikalischen Laboratorium der Universität fiel sehr gut aus, obgleich der Barometerstand zwischen 745 und 771 schwankte. Bald stellten sich doch Unregelmässigkeiten ein, welche eine anfangende Veränderung der Röhre anzeigten. Ich verstand die wahre Ursache dieser Unregelmässigkeiten nicht, sondern nahm an, dass die Montirung des Reisebarometers mangelhaft sei, wesshalb dasselbe verschiedene Male demontirt und in verschiedenen Hinsichten adjustirt wurde. Ich erhielt daher nur kürzere Vergleichsreihen, die ziemlich enge Luftdruckschwankungen umfassten. Nachdem das Normalbarometer brauchbar wurde, hatte ich doch (Mai 26—30) die Gelegenheit eine mehr ausgedehnte Vergleichsreihe zu machen (zwischen 751 und 761). Nachdem ich nunmehr diese Reihe streng berechnet habe, stellt es sich heraus, das die Correction für 751—753 = + 0,44 (mittlere Abweichung ± 0,030), für 754—757 = + 0,40 ± 0,027 und für 761 = + 0,36 ± 0,017 war. Somit scheint die Veränderung der Röhre schon zu dieser Zeit beinahe vollendet gewesen zu sein[1]).

---

[1]) Später wurde das Reisebarometer von neuem demontirt, speciel weil ich den Visir-Ring einer weiteren Ausbesserung bedürftig fand. Die oben angeführte ist daher mit der Reihe Juni 13—14 nicht vergleichbar.

Noch ist zu bemerken, dass der graue Beschlag sich da absetzt, wo die Kuppe eine längere Zeit in Berührung mit der Glaswand verharret[1]). Da nun der mittlere Barometerstand ungefähr 760 mm. ist und da das Quecksilber im Reisebarometer etwa 15 mm. tiefer steht, wenn nicht beobachtet wird, so muss die Wirkung des Quecksilbers in der Gegend von 745 mm. am grössten sein, was auch mit den oben (I, 20) mitgetheilten Wahrnehmungen stimmt. Aus den Beobachtungsjournalen habe ich die Zeiten zusammengerechnet, während welcher die Quecksilberkuppe im oberen Schenkel die verschiedenen Stellen der Röhre berührte, wenn nicht beobachtet wurde. Diese Zeiten waren folgende.

Stelle der Röhre.	Vor der Reise.	Während der Reise.
730	—	18 Stunden
735	168 Stunden	12
740	216	50
745	378	126
750	279	58
755	9	4.

Da nun der graue Beschlag sich ziemlich schnell ausbildet (I, 20)[2]), kann man es nicht bezweifeln, dass der obere Theil der Röhre schon beim Antritte der Reise in einen stabilen Zustand gekommen war.

12. Für die während der Reise gemachten Vergleichsreichen werde ich daher die Reduction des Reisebarometers auf mein Normalbarometer aus den soeben mitgetheilten Resultaten der Vergleichsreihen August 11—14, August 31—September 25 und September 26—October 14 herausnehmen. Die kleine während der Reise entstandene Differenz von 0,02 mm. (II, 8) nehme ich als für alle Stellen der Röhre geltend an und ziehe sie in Berechnung in solcher Weise, dass ich die nach II, 9 und 10 bestimmten Reductionen für die Zeit Juni 17—25 (etwa 45 Einstellungen) mit 0,02 mm., dieselben für Juni 28 —Juli 30 (90 Einstellungen) mit 0,01 mm. erhöhe; die Reductionen für die letzten 45 Einstellungen August 3—6 lasse ich unverändert. In den wenigen Fällen, wenn der Barometerstand über 766 mm. (Utrecht) oder unter 720 mm. (München) war, habe ich dieselbe Reduction wie für 766 oder 720 angewandt, da die Röhre allem Anscheine nach in diesen Gegenden ganz ohne Beschlag war.

[1]) Auch an den in Helsingfors vorhandenen Wild-Fuess'schen Barometern N:o 99 und 129 bemerkt man im oberen Schenkel graue Ringe da, wo das Quecksilber eine längere Zeit gestanden hat. Andererseits ist dagegen eine Fuess'sche Röhre, die ich für einen Stationsbarometer angewandt habe und die jetzt seit einem Jahre in Gebrauch ist, von solchen Ringen ganz frei. Dieses Barometer wurde in derselben Weise wie das Reisebarometer gefüllt.

[2]) Die längste Zeit, während welcher die Kuppe an einer und derselben Stelle nach der oben (I, 20) erwähnten Reinigung gestanden hatte, betrug etwa 90 Stunden.

Die Ungleichförmigkeit der Röhre des Reisebarometers ist wohl sehr zu bedauern; die hieraus entspringende Unsicherheit in den Vergleichsresultaten ist doch nicht zu übertreiben und dürfte in keinem Falle auf 0,05 mm. steigen.

13. Die Röhre II des Reisebarometers (I, 21) zeigte während einer Reihe von 40 Vergleichungen (1887 Januari 11—Februar 17) zwischen 739 und 781 keine besondere Ungleichförmigkeit; ich finde es daher überflüssig diese Reihe hier mitzutheilen. Die sonst für diese Röhre in Frage kommenden Vergleichungen mit dem Normalbarometer werde ich später anführen.

Um den Einfluss des Quecksilbers auf die Wand der Röhre so weit wie möglich zu entkräften, wurde bei der Montirung des Reisebarometers mit der Röhre II der Halter g_3 Fig. 2 etwas tiefer verlegt; das Quecksilber steht jetzt, wenn nicht beobahtet wird, im offenen Schenkel etwa 40 mm. unter Null. Die Stellen der Röhre, welche hauptsächlich benutzt werden, kommen somit nur bei den Einstellungen in Berührung mit der Quecksilberkuppe.

III. Vergleichungen während der Reise 1886 Juni 17—August 6.

Die Reise wurde am 15 Juni angetreten und ging von Helsingfors nach Stockholm mit Dampfschiff, von Stockholm nach Christiania auf Eisenbahn, weiter nach Kopenhagen mit Dampfschiff, über Seeland nach Korsör auf Eisenbahn, von da nach Kiel mit Dampfschiff, weiter auf Eisenbahn über Hamburg, Brüssel und Utrecht nach Rotterdam, dann mit Dampfschiff nach England und zurück nach dem Continente, weiter auf Eisenbahn über Paris, Zürich, München, Wien, Chemnitz, Berlin und Hamburg nach Lübeck, von welcher Stadt die Rückreise nach Helsingfors mit Dampfschiff am 7 August angetreten wurde. Die Barometerkiste erlitt während der ganzen Reise keine besonderen Stösse; ich behielt sie immer bei mir in der Cajüte oder im Coupé. Der Transport in den Städten geschah im Wagen oder durch Träger.

Nachdem das Reisebarometer in irgend einer Anstalt aufgestellt worden war, wurde es eine hinreichende Zeit (nicht weniger als zwei Stunden, oft aber bis zum folgenden Tage) sich selbst überlassen, damit es die Temperatur der Umgebung annehmen möchte. Bei den Vergleichungen stellte ich es immer selbst ein. Die Vacuum-Spannung wurde nach jeder Vergleichsreihe bestimmt. Im Allgemeinen wurde die Höhendifferenz zwischen den Nullpunkten der verglichenen Barometer gemessen; das Reisebarometer wurde auf das andere reducirt mit 0,00088 mm. für jedes Centimeter Höhendifferenz[1]).

Ich kann hier die freundliche Aufnahme nicht unerwähnt lassen, die mir von den Herren Directoren und Beamten der verschiedenen von mir besuchten Anstalten zu Theil geworden ist und für welche ich hiermit meinen warmen Dank ausspreche[2]).

1. **Stockholm. Königl. Academie der Wissenschaften.** Gefäss-Barometer **Pistor-Martins N:o 579.** Dieses Barometer (durch die Vergleichungen der Herren Rykatschew, Hellmann und Chistoni wohl bekannt), ist an einem Pfeiler im physikalischen Cabinete der Academie aufgestellt und dient als Normalbarometer für die meteorologischen Stationen in Schweden. Es ist seit dem Jahre 1863 unverändert beibehalten. Die Röhre scheint noch immer ganz rein zu sein; das Quecksilber im Gefässe ist aber ein wenig oxydirt. Die Einstellung oben (mit Mikroskop auf die Quecksilberkuppe) ist scharf genug, schwieriger aber unten, wo die Berührung einer bogenförmigen Elfenbeinplatte mit der Quecksilberfläche im Gefässe herzustellen ist. Der Maassstab ist in *Pariserlinien* getheilt. Es wurde bemerkt, dass die Drehung des Barometers um etwa 180° die Höhe der Quecksilbersäule ein wenig (im Mittel um 0,04 l.) änderte. Ich machte daher Einstellungen in zwei Lagen, nämlich in der Lage I: Mikroskop gegen die nördlichen Fenster, und in der Lage II: Mikroskop gegen die südlichen Fenster; das Mittel von beiden Einstellungen wurde mit dem Reisebarometer verglichen. Bei den drei ersten Vergleichungen wurde nur in der Lage I eingestellt; für Lage II sind die (cursivirten) Zahlen durch Abziehen von 0,04 l. von der Ablesung in Lage I gebildet.

Das Reisebarometer wurde an denselben Pfeiler aufgehängt; der Nullpunkt war 13 cm. höher als die Queksilberfläche im Gefässe des Pistor-Martins. Jede 15:te Minute wurde eine Vergleichung gemacht. Beide Barometer wurden von mir eingestellt.

Im folgenden beziehen sich die verschiedenen Columnen für beide Barometer auf Temperatur (für das Reisebarometer wegen Fehler des Thermometers berichtigt), directe Ablesung und auf 0° C. (und Millimeter) reducirten Barometerstand (bei dem Reisebarometer für Vacuum-Spannung, Differenz der Höhen der beiden Barometer und Maassstabfehler (I, 24) berichtigt). Als ein Maass

[1]) Vergl. Travaux et Mémoires du Bureau international des pois et mesures, T. III, S. D. 44.

[2]) Vorliegende Arbeit wurde am 16 Mai 1887 der Finnischen Societät der Wissenschaften vorgelegt. Da indessen der Druck derselben erst im September anfing, hatte ich Gelegenheit verschiedene Berichtigungen und Ergänzungen hinzuzufügen, welche auf später erhaltenen Mittheilungen (die Barometer in Sèvres und München betreffend) oder Vergleichungen (mit den Barometern in Helsingfors) beruhen.

für die relative Güte der Vergleichungen ist beim Mittel der Differenzen die *mittlere Abweichung* vom Mittel angegeben.

Juni 17. Beleuchtung schlecht wegen bedeckten Himmels. Vacuum-Spannung im Reisebarometer = 0,16 mm. Reduction wegen Höhendifferenz = + 0,01 mm.

Pistor-Martins N:o 579.				RB			Differenz.	
+ 16°,3 R.	I 334,54 II *334,50*	334,52	751,91	+ 20°,25 C.	754,13	751,84	[+ 0,07]	
16,4	334,65 *334,61*	334,63	752,14	20,25	754,13	751,84	0,30	
16,6	334,60 *334,56*	334,58	752,00	20,3	754,10	751,80	0,20	
16,75	334,64 334,57	334,605	752,03	20,3	754,12	751,81	0,22	
16,8	334,65 334,64	334,645	752,12	20,35	754,25	751,95	0,17	
16,5	334,80 334,74	334,77	752,45	20,4	754,42	752,15	0,30	
16,7	334,79 334,75	334,77	752,41	20,5	754,55	752,28	[0.13]	
							Mittel + 0,24	± 0,050.

Die erste und letzte Vergleichung sind vom Mittel ausgeschlossen, die letzte, weil die Vacuum-Spannung zwischen den beiden letzten Vergleichungen bestimmt wurde, wodurch wahrscheinlich die Temperaturverhältnisse gestört wurden.

Juni 18. Beleuchtung gut. Vacuum-Spannung = 0,17 mm.

+ 16°,4 R.	I 335,732 II 365,700	335,716	754,60	+ 20°,45 C.	756,70	754,44	+ 0,16	
16,8	335,76 335,75	335,755	754,62	20,55	756,77	754,49	0,13	
16,8	335,80 335,76	335,78	754,66	20,75	756,87	754,54	0,12	
16,9	335,83 335,79	335,81	754,73	20,8	756,88	754,56	0,17	
16,95	335,87 335,80	335,835	754,78	20,95	757,02	754,66	0,12	
17,1	335,88 335,84	335,86	754,80	21,0	757,02	754,65	0,15	
17,1	335,90 335,85	335,875	754,84	21,1	757,13	754,74	0,10	
17,25	335,91 335,85	335,88	754,82	21,15	757,13	754,73	[0,09]	
17,3	335,91 335,85	335,88	754,82	21,15	757,15	754,76	[0,06]	
17,4	335,90 335,83	335,865	754,78	21,25	757,13	754,72	[0.06]	
							Mittel + 0,14	± 0,021.

Die drei letzten Vergleichungen sind ausgeschlossen, da das sehr empfindliche Thermometer des Pistor-Martins rasch gestiegen war und wahrscheinlich eine zu hohe Temperatur zeigte.

Juni 19. Beleuchtung mittelmässig. Vacuum-Spannung =0,20 mm.

+ 16°,7 R.	I 336,80 II 336,76	336,78	756,94	+ 20°,85 C.	759,13	756,80	+ 0,14	
17,1	336,81 336,80	336,805	756,94	21,05	759,15	759,80	0,14	
17,2	336,80 336,80	336,80	756,92	21,15	759,10	756,71	0,21	
17,3	336,81 336,79	336,80	756,90	21,25	759,10	756,70	0,20	
17,35	336,84 336,80	336,82	756,94	21,3	759,15	756,78	0,16	
							Mittel + 0,17	± 0,028.

Die Reduction des Reisebarometers auf das Normalbarometer ist für 754 +0,25, für 757 +0,24 und für 759 +0,20. Wir haben somit:

Juni	17	Pistor-Martins	N:o	579	=	NB	—	0,01
„	18	„	„	„	=	„	—	0,10
„	19	„	„	„	=	„	—	0,03.

Geben wir die Vergleichung vom 17 Juni das halbe Gewicht gegen die beiden übrigen, so wird das Resultat:

Pistor-Martins N:o 579 = NB −0,05 mm.

Dieses Barometer ist früher mehrmals mit anderen Barometern verglichen. Herr Rykatschew fand im Jahre 1866

Pistor-Martins N:o 579 = Normal St. Petersburg + 0,125 mm.

und Herr Hellmann im Jahre 1878 ungefähr dieselbe Differenz, oder

Pistor-Martins N:o 579 = Normal St. Petersburg + 0,13 mm.[1])

Dagegen erhielt Herr Chistoni im Jahre 1881

Pistor-Martins N:o 579 = Normal St. Petersburg ± 0,00.[2])

Da mein Normal vom Normalbarometer System Wild des physikalischen Central-Observatoriums zu St. Petersburg um nur 0,01 mm. differirt, wie hier

[1]) Wegen diesen Vergleichungen siehe G. Hellmann, Vergleichung der Normalbarometer etc., Repertorium für Meteorologie von Dr. H. Wild, Bd VI, N:o 8, S. 10, sowie Berichtigung am Ende der Abhandlung.

[2]) C. Chistoni, Il Barometro normale etc., Annali della met. Part. I, 1881.

später gezeigt werden wird, so stimmen die Resultate von Chistoni und von mir ziemlich gut mit einander. Es scheint somit Pistor-Martins in der Periode 1878—1881 irgend eine Veränderung erlitten zu haben, falls man nicht lieber die ungleichen Differenzen der Schwierigkeit bei der Einstellung unten am Pistor-Martins zuschreiben will.

2. **Christiania. Meteorologisches Institut.** Controll-Barometer **Wild-Fuess N:o 214.** Dieses Barometer hängt im meteorologischen Pavillon neben dem Fenster gegen Osten. Mein Barometer wurde in demselben Pavillon neben dem Fenster gegen Norden aufgehängt ungefähr in derselben Höhe über dem Boden. Die Beleuchtung war mittelmässig. Beide Barometer wurden von mir eingestellt. Jede 15:te Minute wurde eine Vergleichung gemacht.

Juni 21. Vacuum-Spannung = 0,23 mm.

Wild-Fuess N:o 214.			RB			Differenz.
+ 18°,3 C.	751,15	748,94	+ 18°,3 C.	750,65	748,72	+ 0,22
18,4	751,10	748,88	18,3	750,60	748,66	0,22
18,65	751,10	748,85	18,5	750,60	748,64	0,21
18,8	751,03	748,76	18,7	750,55	748,57	0,19
19,0	750,98 [1]	748,69	18,95	750,50	748,49	0,20

Eine Stunde später.

18,9	750,78	748,50	19,05	750,30	748,26	0,24

Nach erneutem Austrocknen des Reisebarometers wurde die Vacuum-Spannung 0,10 mm. erhalten. Drei Stunden später.

18,75	749,83	747,57	18,75	749,50	747,37	0,20	
18,95	749,73	747,45	19,0	749,40	747,26	0,19	
					Mittel	+ 0,21	± 0,014.

Juni 22. Vacuum-Spannung = 0,11 mm.

+ 18°,2 C.	745,25	743,07	+ 18°,0 C.	744,90	742,90	+ 0,17	
18,45	745,30	743,09	18,35	744,90	742,86	0,23	
18,6	745,20	742,97	18,55	744,85	742,77	0,20	
18,75	745,22	742,97	18,7	744,80	742,74	0,23	
18,8	745,08	742,82	18,8	744,70	742,60	0,22	
					Mittel	+ 0,21	± 0,020.

Für 749—751 wie auch für 745 ist die Reduction auf das Normalbarometer = + 0,27 mm., daher ist

Juni 21 Wild-Fuess N:o 214 = NB — 0,06
„ 22 „ „ „ = „ — 0,06

[1]) Einstellung von Herrn Professor Mohn.

oder

Wild-Fuess N:o 214 = NB − 0,06 mm.

Zur Zeit wird für Wild-Fuess N:o 214, wie mir Herr Professor Mohn mitgetheilt hat, die Correction + 0,12 mm. angenommen.

3. **Kopenhagen. Meteorologisches Institut.** Controll-Barometer **Wild-Fuess N:o 87.** Mein Barometer wurde im Zimmer mit dem Sprung'schen Barograph aufgestellt; Wild-Fuess N:o 87 befand sich im Nebenzimmer, mit dem Nullpunkte etwa 45 cm. höher. Herr Unter-Director V. Willaume-Jantzen stellte hier gleichzeitig mit mir ein. Die Vergleichungen folgten nach je 10 Minuten.

Juni 24. Vacuum-Spannung = 0,20 mm., Reduction wegen Höhendifferenz = − 0,04 mm.

Wild-Fuess N:o 87.			RB			Differenz.	
+ 20°,0 C.	751,80	749,38	+ 18°,05 C.	751,33	749,33	+ 0,05	
20,0	751,90	749,48	18,2	751,38	749,38	0,10	
20,0	751,95	749,53	18,4	751,45	749,43	0,10	
21,0	752,10	749,56	18,5	751,50	749,46	0,10	
Eine Stunde später; Vacuum-Spannung = 0,21 mm.							
20,2	752,75	750,31	18,15	752,20	750,18	0,13	
20,2	752,50	750,06	18,25	752,10	750,04	[0,02]	
20,2	752,80	750,35	18,35	752,26	750,23	0,12	
					Mittel	+ 0,10	+ 0,017.

Die vorletzte Vergleichung ist ausgeschlossen, weil sie wegen des böischen Wetters unsicher ist. Nach den Vergleichungen wurde das Reisebarometer von neuem ausgetrocknet.

Juni 25. Vacuum-Spannung = 0,08 mm.

+ 19°,7 C.	759,60	757,20	+ 17°,25 C.	759,17	757,11	+ 0,09	
19,7	759,60	757,20	17,55	759,15	757,06	0,14	
19,7	759,58	757,18	17,7	759,15	757,05	0,13	
19,7	759,58	757,18	17,75	759,20	757,08	0,10	
19,7	759,60	757,20	17,9	759,15	757,01	0,19	
					Mittel	+ 0,13	± 0,028.

Reduction auf das Normal = + 0,27 mm. für 751—752, und = + 0,20 für 759, woher

Juni 24 Wild-Fuess N:o 87 = NB − 0,17
„ 25 „ „ „ = „ − 0,07

oder im Mittel

Wild-Fuess N:o 87 = NB − 0,12 mm.

Am Institute wird für Wild-Fuess N:o 87 die Correction −0,15 mm. angenommen. Wegen des grossen Unterschiedes zwischen den Resultaten der beiden Reihen muss meine Vergleichung in Kopenhagen als nicht gut gelungen bezeichnet werden.

4. **Hamburg. Deutsche Seewarte.** Vergleichungen mit dem provisorischen Normalbarometer der Seewarte **Köppen-Fuess N:o 9** (Gefäss-Heber) und mit dem Barometer **Wild-Fuess N:o 79**, von Herrn Doctor Kremser (aus dem meteorologischen Institute in Berlin) während einer Inspectionsreise hier aufgestellt. Alle drei Barometer waren an einem Pfeiler im Barometer-Keller aufgehängt, das meinige mit dem Nullpunkte 9 cm. tiefer als die beiden anderen. An den Vergleichungen waren die Herren Kremser (K), Ambronn (A) und Eylert (E) betheiligt. Je nach einer Stunde wurde eine Doppelvergleichung gemacht, vobei die Beobachter des Köppen-Fuess und Wild-Fuess wechselten. Ich habe daher jede solche Doppelvergleichung als zwei verschiedene berechnet.

Juni 28. Vacuum-Spannung = 0,35 mm., Reduction wegen Höhendifferenz = −0,01 mm.

Köppen-Fuess N:o 9.				Wild-Fuess N:o 79.				RB		
+ 17°,0 C.	766,83	A	764,73	+ 16°,5 C.	766,42	K	764,38	+ 17°,65 C.	766,12	764,28
17,1	766,73	K	764,62	16,8	766,40	A	764,33	17,65	766,05	764,22
17,0	766,28	K	764,18	16,6	765,90	A	763,85	16,95	765,38	763,67
17,1	766,25	A	764,14	16,8	765,88	K	763,81	17,15	765,37	763,63

Juni 29. Vacuum-Spannung = 0,33 mm.

+ 16°,4 C.	766,60	K	764,58	+ 16°,2 C.	766,20	A	764,20	+ 16°,25 C.	765,70	764,06
17,0	766,60	A	764,50	16,8	766,20	K	764,13	16,75	765,65	763,95

Nach erneutem Austrocknen war die Vacuum-Spannung = 0,17 mm.

17,0	766,54	E	764,44	16,8	766,05	K	763,98	16,95	765,75	763,85
17,1	766,44	K	764,33	16,8	765,88	E	763,81	17,15	765,75	763,83
16,7	766,06	K	764,00	16,5	765,78	E	763,75	16,55	765,50	763,65
16,9	766,20	E	764,12	16,5	765,80	K	763,77	16,75	765,50	763,63
17,0	766,20	K	764,11	16,9	765,84	E	763,76	16,95	765,50	763,60
17,1	766,15	E	764,04	16,9	765,82	K	763,74	17,0	765,50	763,60
16,8	765,45	S [1]	763,38					16,4	764,75	762,92
16,95	765,44	S	763,35					16,65	764,70	762,84.

[1]) Einstellungen von mir.

Differenzen.

	Köppen-Fuess N:o 9 — RB.	Wild-Fuess N:o 79 — RB.	Köppen-Fuess N:o 9 — Wild-Fuess N:o 79.
Juni 28	+ 0,45 A	+ 0,10 K	+ 0,35
„ „	0,40 K	0,11 A	0,29
„ „	0,51 A	0,18 A	0,33
„ „	0,51 K	0,18 K	0,33
„ 29	0,52 K	0,14 A	0,38
„ „	0,55 A	0,18 K	0,37
„ „	0,59 E	+ 0,13 K	0,46
„ „	0,50 K	[— 0,02 E]	[0,52]
„ „	[0,35 K]	+ 0,10 E	[0,25]
„ „	0,49 E	0,14 K	0,35
„ „	0,51 K	0,16 E	0,35
„ „	0,44 E	0,14 K	0,30
„ „	0,46 S		
„ „	0,51 S		
Mittel	+ 0,50 ± 0,035.	+ 0,14 ± 0,024.	+ 0,35 ± 0,031.

Da keine persönlichen Ungleichheiten zu bemerken sind, habe ich die Differenzen zu einem Mittel vereinigt, wobei doch die stark abweichenden eingeklammerten Zahlen ausgeschlossen wurden. Da der (unreducirte) Stand 766 auf dem Reisebarometer überwiegt, nehme ich die Reduction + 0,18 mm. auf das Normal an und bekomme somit

Köppen-Fuess N:o 9 = NB + 0,32 mm.
Wild-Fuess N:o 79 = „ − 0,04 „

sowie

Köppen-Fuess N:o 9 = Wild-Fuess N:o 79 + 0,35 mm.

Zum Barometer Köppen-Fuess N:o 9 werde ich später zurückkommen, da es auch am Ende meiner Reise mit dem Reisebarometer verglichen wurde. Für Wild-Fuess N:o 79 fand Herr Kremser vor der Abreise von Berlin die Correction + 0,08, nach seiner Rückkehr aber + 0,10 mm., daher im Mittel + 0,09 mm. Wir haben somit

Köppen-Fuess N:o 9 = Normal Met. Inst. Berlin + 0,26 mm.

5. **Brüssel. Meteorologisches Institut** (in der Sternwarte). Barometer **Tonnelot** (Fortin) im Zimmer mit dem Meteorographe von Rysselberghe, eingestellt von Herrn Hooreman. Das Reisebarometer in demselben Zimmer mit

dem Nullpunkte 10 cm. tiefer. Intervall zwischen den Vergleichungen 10 bis 15 Minuten. Beleuchtung mittelmässig.

Juli 2. Vacuum-Spannung = 0,25, Reduction wegen Höhendifferenz = — 0,01 mm.

Tonnelot.			RB			Differenz.
+ 20°,6 C.	766,10	763,56	+ 20°,8 C.	765,90	763,61	— 0,05
20,7	766,03	763,48	20,95	765,85	763,52	0,04
20,7	766,00	763,45	21,0	765,77	763,46	0,01
						Mittel — 0,03 ± 0,017.

Correction des Reisebarometers = + 0,18 mm., daher

Tonnelot = NB — 0,21 mm.

Für Tonnelot wird zur Zeit die Correction + 0,05 mm. angenommen.

6. **Utrecht. Meteorologisches Institut.** Barometer **Becker** (Heber), vor einem Fenster aufgestellt; das Reisebarometer nebenbei am Fensterpfosten. Beleuchtung gut. Becker wurde von einem Beamten des Institutes abgelesen. Intervall zwischen den Vergleichungen 10 Minuten. Die Höhendifferenz der Barometer wurde nicht notirt, war aber unbedeutend.

Juli 3. Vacuum-Spannung = 0,19 mm.

Becker.			RB			Differenz.
+ 23°,3 C.	771,56	768,67	+ 22°,6 C.	770,67	768,11	+ 0,56
23,3	771,58	768,69	22,75	770,65	768,06	0,63
			Eine Stunde später.			
24,3	771,32	768,31	23,8	770,38	767,66	0,65
24,6	771,30	768,25	24,0	770,32	767,57	0,68
						Mittel + 0,63 ± 0,035.

Correction des Reisebarometers = + 0,18 mm., daher

Becker = NB + 0,45 mm.

7. **Kew Observatory.** Barometer **Newman N:o 34** (Fortin, engl. Zolle), eingestellt von Herrn W. Hugo. Gleichzeitig wurde auch das **Standard Barometer**[1]) von Herrn I. Foster abgelesen. Das Reisebarometer wurde (am 5:ten Juli) in demselben Zimmer installirt, ungefähr in derselben Höhe wie die beiden anderen. Intervall zwischen den Vergleichungen 10 Minuten. Beleuchtung gut. Nur die Ablesungen von Newman wurden von mir aufgezeichnet. Die gleichzeitigen Ablesungen des Standard-Barometers ergaben für Newman

[1]) Philos. Transactions, 1856, S. 507.

die Correction + 0,002 engl. Zoll, die ich an den reducirten Stand desselben vor der Umsetzung in Millimeter angebracht habe.

Juli 6. Vacuum-Spannung = 0,24 mm.

Newman N:o 34.			RB			Differenz.
+ 73°,7 F.	30,212	764,32	+ 23°,15 C.	766,65	764,07	+ 0,25
74,0	30,205	764,12	23,25	766,53	763,94	0,18
74,1	30,205	764,12	23,35	766,45	763,85	0,27
74,2	30,205	764,12	23,45	766,47	763,86	0,26
74,25	30,204	764,09	23,55	766,45	763,83	0,26
74,4	30,201	763,99	23,65	766,40	763,77	0,22
74,5	30,201	763,99	23,65	766,40	763,77	0,22
					Mittel	+ 0,24 ± 0,026.

Hier ist wieder die Correction des Reisebarometer = + 0,18 mm., daher ist

$$\left.\begin{array}{l}\text{Newman N:o 34} + 0{,}002 \\ \text{Standard-Barometer}\end{array}\right\} = \text{NB} + 0{,}06 \text{ mm.}$$

Laut einer langen Reihe von Vergleichungen sollte, wie mir mitgetheilt wurde, die Reduction des Newman N:o 34 auf das Standard-Barometer − 0,003 engl. Zoll betragen.

Herr Chistoni fand im Jahre 1881: Kew Standard = Normal St. Petersburg ± 0,00; nach Herrn Professor Waldo's Vergleichungen im Jahre 1883 [1]), die mir soeben bekannt geworden sind, ist Kew Standard = Normal St. Petersburg + 0,10 mm. Diese Resultate stimmen recht gut mit dem meinigen.

8. **Paris. Bureau central météorologique.** Es wurde mit dem **Etalon Fortin** von Alvergniat und mit **Tonnelot N:o 1572** (Fortin) verglichen; beide wurden von Herrn Dufour abgelesen. Das Reisebarometer wurde in demselben Zimmer aufgehängt; Höhendifferenz unbedeutend, nicht gemessen; Beleuchtung schlecht wegen bedeckten Himmels; schwaches Gewitter während der Vergleichungen; Intervall zwischen den Vergleichungen 15 Minuten.

Juli 9. Vacuum-Spannung = 0,18 mm.

Etalon Fortin.			Tonnelot N:o 1572			RB		
+ 19°,9 C.	761,07	758,64	+ 19,2	760,54	758,19	+ 19,15	760,75	758,62
19,9	761,08	758,65	19,2	760,58	758,23	19,25	760,68	758,55
20,0	761,10	758,66	19,3	760,67	758,31	19,35	760,76	758,60
20,0	761,27	758,82	19,3	760,73	758,37	19,3	760,87	758,72
20,0	761,27	758,82	19,3	760,72	758,36	19,35	760,93	758,77
20,3	761,33	758,85	19,6	760,85	758,45	19,55	761,00	758,79
20,3	761,32	758,84	19,6	760,83	758,43	19,55	760,92	758,74
20,4	761,34	758,84	19,7	760,82	758,41	19,75	761,00	758,77.

[1]) Zeitschrift für Meteorologie XXII, 1887, S. 98.

Differenzen.

Etalon Fortin — RB.	Tonnelot N:o 1572 — RB.
+ 0,02	— 0,43
0,10	0,32
0,06	0,29
0,10	0,35
0,05	0,41
0,06	0,34
0,10	0,31
0,07	0,36
Mittel + 0,07 ± 0,022	— 0,35 ± 0,036.

Da die Correction des Reisebarometers hier + 0,18 mm. ist, so haben wir

Etalon Fortin = NB — 0,11 mm.
Tonnelot N:o 1572 = „ — 0,53 „

Zur Zeit werden diese beiden Barometer auf das **Normalbarometer Regnault** (Collège de France) reducirt, wobei für Etalon Fortin die Reduction — 0,04, für Tonnelot N:o 1572 die Reduction + 0,37 angenommen wird. Hiernach hätten wir

Normal Regnault = NB — 0,15 mm.

Nach Chistoni war im Jahre 1881: Normal Regnault = Normal St. Petersburg — 0,04, nach Waldo war im Jahre 1883 dieser Unterschied = + 0,05 mm. Besonders diese letzte Zahl weicht stark von der meinigen ab.

9. **Sèvres. Pavillon Breteuil, Bureau international des poids et mesures.** Zuerst wurde im kleinen Salon für Wägungen mit dem Barometer **Turrettini** verglichen. Das Reisebarometer wurde an ein solides Holzgestell aufgehängt; die Höhendifferenz der beiden Barometer war unbedeutend (5,5 cm.). Gute Beleuchtung von oben. Intervall zwischen den Vergleichungen 10 Minuten. Turrettini wurde von Herrn Doctor Thiesen abgelesen; neben den von mir in gewöhnlicher Weise reducirten Ständen desselben sind auch die von Herrn Thiesen auf 0^0 C. und auf das **Normalbarometer II, System Wild-Marek** reducirten Stände[1]) in der Columne *Wild-Marek* angeführt.

Juli 10. Vacuum-Spannung = 0,23 mm.; die Angaben des Thermometers von Turrettini wurden um $-0^0,04$ C. corrigirt.

[1]) Die Reduction des Turrettini auf Wild-Marek ist = + 0,09 + 0,0052 (B — 760), bei Benutzung der für Wild-Marek gültigen Tafeln (Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures, T. III, S. D. XIX).

Turrettini.			Wild-Marek	RB		
+ 19°,06 C.	762,37	760,03	760,08	+ 19°,55 C.	762,23	760,07
19,06	762,37	760,03	760,08		762,25	760,10
19,16	762,38	760,03	760,08		762.20	760,03
19,26	762,32	759,96	760,01		762,15	759,97
19,31	762,35	759,98	760,03	19,65	762,13	759,95.

Differenzen.

	Turrettini — RB.	Wild-Marek — RB.
	— 0,04	+ 0,01
	— 0,07	— 0,02
	0,00	+ 0,05
	— 0,01	+ 0,04
	+ 0,03	+ 0,08
Mittel	— 0,02 ± 0,030	+ 0,03.

Juli 12. Nach erneutem Austrocknen wurde die Vacuum-Spannung 0,18 mm. erhalten.

Turrettini.			Wild-Marek.	RB		
+ 19°,01 C.	761,17	758,84	758,89	+ 19°,3 C.	761,02	758,85
19,11	761,10	758,76	758,81	19,35	761,00	758,81
19,26	761,04	758,68	758,73	19,4	760,90	758,74
19,36	760,88	758,51	758,56	19,5	760,80	758,64
19,41	760,85	758,48	758,52	19,55	760,77	758,59.

Differenzen.

	Turrettini — RB.	Wild-Marek — RB.
	— 0,01	+ 0,04
	0,05	0,00
	0,06	— 0,01
	0,13	— 0,08
	0,11	— 0,07
Mittel	— 0,07 ± 0,038	— 0,02.

Das Reisebarometer wurde jetzt in gefülltem Zustande nach dem Salon für die Untersuchung des Luftthermometers übertragen und mit dem **Normalbarometer Chappuis (System Wild-Pernet)** verglichen. Obgleich das Reisebarometer an die Wand gegenüber den Fenstern aufgehängt wurde, war doch die Beleuchtung am oberen Visire mangelhaft wegen des Schattens vom Blechdache über dem Luftthermometer. Das Normalbarometer wurde von Herrn Doctor Chappuis abgelesen, der mir auch die reducirten Stände mittheilte. An diesen Ständen habe ich doch (laut später erhaltener brieflichen Mittheilung) die Correction —0,25 mm. angebracht, da dieselben auf normale Schwere, die Stände der übrigen Barometer aber auf locale Schwere bezogen sind. Die in dieser Weise corrigirten Stände sind hier unten als *Chappuis reducirt* angeführt.

Gleichzeitig wurde auch Turrettini an seinem früheren Platze abgelesen. Der Nullpunkt des Normalbarometers war 13,5 cm. höher als der des Turrettini, 25 cm. höher als der des Reisebarometers; Intervall zwischen den Vergleichungen 10 Minuten.

Juli 12. Vacuum-Spannung = 0,17 mm.; Reduction wegen Höhendifferenz = − 0,01 für Turrettini, und = − 0,02 mm. für das Reisebarometer. Turrettini von Herrn Thiesen abgelesen.

Chappuis	reducirt.	Turrettini.			Wild-Marek.	RB		
+ 20°,93 C.	757,89	—	—	—	—	+ 20°,65 C.	760,20	757,83
20,96	757,85	+ 18°,96 C.	760,03	757,70	757,75	20,85	760,12	757,72
20,89	757,54	19,41	759,90	757,52	757,56	21,0	760,07	757,65
21,06	757,43	19,66	759,90	757,49	757,53	21,15	759,95	757,55
21,04	757,36	20,06	759,88	757,42	757,46	21,25	759,87	757,45.

Differenzen.

	Chappuis—RB.	Chappuis—Turrettini.	Turrettini—RB.
	[+ 0,06]	—	—
	[+ 0,13]	[+ 0,15]	[— 0,02]
	— 0,11	+ 0,02	0,13
	— 0,12	— 0,06	0,06
	— 0,09	— 0,06	0,03
Mittel	— 0,11	— 0,03	— 0,07.

Da hier Wild-Marek—Turrettini = + 0,04 mm. ist, so haben wir auch

Chappuis—Wild-Marek = − 0,07 mm.
Wild-Marek—RB = − 0,03 „

Juli 13. Vacuum-Spannung = 0,18 mm.; Turrettini von Herrn Doctor Kreichgauer eingestellt.

Chappuis	reducirt.	Turrettini.			Wild-Marek.	RB		
+ 19°,59 C.	756,32	+ 18°,63 C.	758,74	756,46	756,52	+ 19°,55 C.	758,75	756,57
19,64	756,25	18,76	758,62	756,32	756,36	19,65	758,65	756,44
19,73	756,22	18,91	758,58	756,26	756,30	19,75	758,57	756,36
19,87	756,05	18,91	758,52	756,20	756,24	19,95	758,40	756,17
19,81	755,93	18,96	758,26	755,94	755,96	20,0	758,30	756,04.

Differenzen.

	Chappuis—RB.	Chappuis—Turrettini.	Turrettini—RB.
	[— 0,25]	[— 0,14]	[— 0,11]
	0,19	0,07	— 0,12
	0,14	0,04	— 0,10
	0,12	[0,15]	[+ 0,03]
	0,11	0,01	— 0,10
Mittel	— 0,14	— 0,04	— 0,11

so wie

$$\begin{aligned} &\text{Wild-Marek—Turrettini} &= +0{,}04 \text{ mm.} \\ &\text{Chappuis—Wild-Marek} &= -0{,}08 \;\;,, \\ &\text{Wild-Marek—RB} &= -0{,}07 \;\;,, \end{aligned}$$

Die Vergleichungen mit dem Normalbarometer des Herrn Chappuis sind aus irgend einer Ursache wenig gut ausgefallen. Im Anfang jeder der beiden Reihen zeigt sich eine starke Anomalie; nur durch das Ausschliessen der zwei ersten Vergleichungen am 12 Juli sowie der ersten Vergleichung am 13 Juli bekommt man Resultate, die mit einander leidlich stimmen. Ich habe daher die genannten Vergleichungen für alle drei Barometer sowie auch die stark abweichende vierte Vergleichung am 13 Juli mit Turrettini von den Mitteln ausgeschlossen. Die Correctionen des Reisebarometers sind: für 758—759 +0,19, für 760—761 +0,18 und für 762 +0,16 mm., somit haben wir

	Turrettini—NB.	Wild-Marek—NB.	Chappuis—NB.
Juli 10	— 0,18	— 0,13	—
„ 12	0,25	0,20	—
„ „	0,25	0,21	— 0,29
„ 13	0,30	0,26	0,33

oder im Mittel

$$\begin{aligned} &\text{Turrettini} &= \text{NB} - 0{,}24 \text{ mm.} \\ &\text{Wild-Marek} &= \;,, \;\; -0{,}20 \;\;,, \\ &\text{Chappuis} &= \;,, \;\; -0{,}31 \;\;,, \end{aligned}$$

Hieraus folgt: Wild-Marek—Chappuis = +0,11 mm.; die directen Vergleichungen Juli 12 und 13 zwischen Turrettini und Chappuis geben den etwas kleineren Unterschied +0,08 mm.

Die Unterschiede der beiden verglichenen Normalbarometer gegen mein Normal sind unerwartet gross. In Betracht des gut ausgefallenen Vergleiches kurze Zeit vorher in Kew scheint mir eine bedeutende aus unbekanntem Grunde herrührende Veränderung meines Reisebarometers sehr unwahrscheinlich. Laut den mir nach beendeten Vergleichungen von Herrn Doctor Chappuis überlieferten reducirten Ständen seines Normalbarometers schien mir die Uebereinstimmung mit meinem Normale befriedigend, da ich noch nicht wusste, dass jene Stände 0,25 mm. zu gross waren.

Was der Stand vom Normalbarometer II Wild-Marek betrifft, wurde von Herrn Waldo gefunden: Wild-Marek = Normal St. Petersburg + 0,20 mm.; dieser Unterschied ist von derselben Grösse wie der von mir gefundene, aber *nach entgegengesetzter Richtung*. Die Vergleichungen waren (laut einer gefälligen brieflichen Mittheilung von Herrn Doctor THIESEN) wie die meinigen durch Turrettini vermittelt.

10. **Zürich. Schweizerische Centralstelle.** Barometer **Wild-Fuess N:o 168** und **Fuess Heber,** eingestellt von Herrn Director BILLWILLER. Alle drei Barometer in demselben Zimmer in ungefähr derselben Höhe; Beleuchtung gut; Intervall zwischen den Vergleichungen etwa 10 Minuten.

Juli 15. Vacuum-Spannung = 0,25 mm.

Wild-Fuess N:o 168.			Fuess Heber.			RB		
+ 21°,2 C.	723,45	720,98	+ 20°,5 C.	723,50	721,12	+ 20°,25 C.	722,95	720,88
21,3	723,47	720,99	21,0	723,55	721,11	20,7	723,02	720,89
21,3	723,48	721,00	21,0	723,56	721,12	20,95	723,10	720,92
21,7	723,57	721,05	21,3	723,65	721,17	21,25	723,22	721,02
21,8	723,63	721,10	21,4	723,69	721,20	21,45	723,26	721,04.

Differenzen.

Wild-Fuess N:o 168—RB	Fuess Heber—RB.	Wild-Fuess N:o 168—Fuess Heber.
+ 0,10	+ 0,24	— 0,14
0,10	0,22	0,12
0,08	0,20	0,12
0,03	0,15	0,12
0,06	0,16	0,10
Mittel + 0,07 ± 0,024.	+ 0,19 ± 0,032.	— 0,12 ± 0,008.

Für 723 ist die Correction des Reisebarometers = + 0,15 mm., folglich haben wir:

Wild-Fuess N:o 168 = NB — 0,08 mm.
Fuess Heber = „ + 0,04 „

Zur Zeit wird an Wild-Fuess N:o 168 die Reduction + 0,10, an Fuess Heber die Reduction — 0,08 mm. angebracht, d. h.

Normalstand Zürich = NB + 0,02 mm.
„ „ = „ — 0,04 „

oder im Mittel

Normalstand Zürich = NB — 0,01 mm.

11. **München. Meteorologisches Institut.** Controllbarometer **Wild-Fuess N:o 43** und Barometer **Wild-Fuess N:o 4,** von Herrn Doctor ERK eingestellt. Alle drei im Barometerzimmer aufgehängt, das Reisebarometer 7 cm. höher als die beiden anderen. Beleuchtung mittelmässig. Intervall zwischen den Vergleichungen 15 Minuten.

Juli 16. Vacuum-Spannung = 0,18 mm., Reduction wegen Höhendifferenz = + 0,01 mm.

Wild-Fuess N:o 43.			Wild-Fuess N:o 4.			RB		
+ 22°,0 C.	716,75	714,21	+ 21°,8 C.	716,85	714,34	+ 21°,15 C.	716,37	714,18
22,0	716,50	713,96	22,0	716,55	714,01	21,5	716,12	713,86
22,2	716,30	713,74	22,1	716,50	713,95	21,7	716,04	713,76
22,2	716,20	713,64	22,1	716,15	713,60	21,85	715,78	713,50
22,3	716,15	713,58	22,1	716,20	713,65	21,95	715,71	713,42.
Eine halbe Stunde später.								
22,1	715,70	713,16	22,0	715,90	713,37	21,8	715,51	713,25
22,2	715,75	713,19	22,1	715,80	713,26	21,85	715,42	713,15
22,3	715,60	713,03	22,2	715,65	713,10	21,95	715,28	712,97
22,3	715,55	712,98	22,2	715,65	713,10	22,05	715,25	712,92
22,4	715,50	712,92	22,3	715,60	713,03	22,1	713,15	712,83.

Differenzen.

Wild-Fuess N:o 43 — RB.	Wild-Fuess N:o 4 — RB.	Wild-Fuess N:o 43 — Wild-Fuess N:o 4.
+ 0,03	+ 0,16	— 0,13
+ 0,10	0,15	0,05
[— 0,02]	0,19	[— 0,21]
+ 0.14	[0,10]	[+ 0,04]
+ 0,16	0,23	— 0,07
[— 0,09]	0,12	[0,21]
+ 0.04	0,11	0,07
0,06	0,13	0,07
0,06	0,18	0,12
0,09	0,20	0,11
Mittel + 0,08 ± 0,037.	+ 0,16 ± 0,032.	— 0,09 ± 0,027.

Die eingeklammerten Zahlen sind ausgeschlossen.

Da hier als Correction des Reisebarometers + 0,15 mm. anzunehmen ist (II, 12), so bekommen wir

Wild-Fuess N:o 43 = NB — 0,07 mm.
„ N:o 4 = „ + 0,01 „

Im Jahre 1883 wurde bei der Vergleichung eines Barometers aus Wien mit den beiden genannten Barometern gefunden, dass diese vollkommen unter einander stimmten, wie mir die bei der Vergleichung betheiligten Herren Doctor Erk und Doctor Liznar (aus Wien) gütigst mitgetheilt haben.

Später habe ich brieflich von Herrn Doctor Erk folgende nähere Auskunft über die betreffenden Barometer erhalten. Im Herbste 1885 wurde Wild-Fuess N:o 4 nach Berlin zur Reparatur geschickt und traf in München am 21 Jan. 1886 wieder ein. Die Reparatur hatte dem relativen Stand der beiden Barometer *nicht* geändert. Die durch die vorliegenden Vergleichungen gefundene Differenz von 0,08 oder 0,09 mm. ist aber von Herrn Erk durch Vergleichungen 30 Juni—6 Juli 1887 völlig bestätigt.

Durch die oben erwähnte Vergleichung in Jahre 1883 wurde gefunden, dass die beiden Wild-Fuess in München vollkommen mit Pistor N:o 279 in Wien stimmten[1]. Wie ich im Folgenden zeigen werde, ist es indessen wahrscheinlich, dass Pistor N:o 279 seit jener Zeit ein wenig gesunken ist. Da aber auch im Jahre 1886 laut meinen Vergleichungen Wild-Fuess N:o 43 ziemlich nahe mit Pistor N:o 279 stimmte, so ist hierdurch angezeigt, dass auch Wild-Fuess N:o 43 in den letzten Jahren seinen Stand ein wenig erniedrigt hat; dagegen hat sich Wild-Fuess N:o 4 wegen der Reparatur besser erhalten.

12. **Wien. Meteorologisches Institut an der Hohen Warte bei Döbling.** Barometer **Pistor N:o 279** (Heber mit Mikroskopen oben und unten, in Pariser Linien). Das Reisebarometer wurde im Barometerzimmer aufgehängt, 22 cm. tiefer als Pistor, das von Herrn Doctor Pernter abgelesen wurde. Beleuchtung gut. Intervall zwischen den Vergleichungen = 20 Minuten.

Juli 19. Vacuum-Spannung = 0,25 mm., Reduction wegen Höhendifferenz = −0,02 mm.

Pistor N:o 279.			RB			Differenz.	
+ 17°,3 R.	331,76	745,55	+ 22°,15 C.	747,80	745,44	+ 0,11	
17,5	331,75	745,51	22,25	747,77	745,40	0,11	
17,6	331,74	745,46	22,35	747,75	745,36	0,10	
					Mittel	+ 0,11	± 0,003.

Juli 20. Vacuum-Spannung = 0,31 mm.

+ 17°,7 R.	332,21	746,52	+ 23°,25 C.	748,83	746,38	+ 0,14	
			Eine Stunde später.				
17,7	332,24	746,59	22,7	748,78	746,41	0,18	
18,0	332,30	746,68	22,8	749,00	746,54	0,14	
18,0	332,37	746,84	22,85	749,13	746,67	0,17	
					Mittel	+ 0,16	± 0,017.

Nach erneutem Austrocknen. Vacuum-Spannung = 0,07 mm.

+ 18°,0 R.	332,32	746,73	+ 22°,85 C.	749,25	746,57	+ 0,16	
18,0	332,32	746,73	22,9	749,27	746,58	0,15	
18,1	332,25	746,54	22,9	749,15	746,46	0,08	
18,1	332,18	746,39	22,8	748,88	746,23	0,16	
					Mittel	+ 0,14	± 0,027.

[1] Liznar, Ueber den Stand des Normalbarometers des meteorologischen Institutes in Wien, Sitzungsberichte der K. Akad. der Wissensch., Bd XCIII, II Abth. 1886, S. 138.

Als Correction des Reisebarometers ist hier +0,26 mm. anzunehmen; folglich ist

Juli	19	Pistor	N:o 279	=	NB	— 0,15	mm.
„	20	„	„ „	=	„	— 0,10	„
„	„	„	„ „	=	„	— 0,12	„

oder im Mittel

Pistor N:o 279 = NB — 0,12 mm.

Das Barometer Pistor N:o 279 ist oft mit anderen Barometern verglichen geworden. Diese Vergleichungen stimmen aber nicht mit den meinigen. Aus der schon oben erwähnten von Herrn Doctor Liznar herausgegebenen Abhandlung: „Ueber den Stand des Normalbarometers des Meteorologischen Institutes in Wien“ entnehme ich folgende Unterschiede, die durch Vergleichungen in den Jahren 1881—1883 gefunden sind. Daneben stelle ich die durch meine Vergleichungen hervorgehenden Unterschiede.

	1881—1883	1886	Differenz.
Pistor N:o 279 — Normal St. Petersburg	+ 0,11	— 0,13 [1])	— 0,24
„ „ „ — Köppen-Fuess N:o 9, Hamburg	— 0,18 [2])	— 0,44	— 0,26
„ „ „ — Pistor-Martins N:o 579, Stockholm	+ 0,17	— 0,07	— 0,24
„ „ „ — Standard, Kew	+ 0,16	— 0,18	— 0,34
„ „ „ — Etalon Fortin, Paris	+ 0,09	— 0,01	— 0,10
„ „ „ — Wild-Fuess N:o 43, München	± 0,00	— 0,05	[— 0,05]
„ „ „ — „ N:o 4 „	± 0,00 [3])	— 0,13	— 0,13.

Wenn wir von der Vergleichung mit Wild-Fuess N:o 43 absehen (siehe oben III, 11), so zeigen die übrigen entschieden auf eine seit dem Jahre 1881 mit Pistor N:o 279 eingetretene Veränderung, durch welche *sein Stand um etwa 0,22 mm. gesunken ist.*

Man könnte wohl gegen diesen Schluss den Einwand erheben, das meine Vergleichungen wegen des Beschlages im Rohre des Reisebarometers (I, 20) sowie wegen des Unglücks in Berlin (I, 22) nicht einwurfsfrei seien. Was den Beschlag betrifft, ist zu bemerken, das die Stelle 748—749 nach den Vergleichungen mit dem Normalbarometer (II, 9 und 10) eine der besten und best gekannten Stellen der Röhre des Reisebarometers ist und das die Röhre in der zwischen den Vergleichungen in Wien und Helsingfors verflossenen Zeit keine erhebliche Veränderung erlitten haben kann (II, 11). Man könnte sich aber vorstellen, dass sämmtliche Correctionen des Reisebarometers vor dem Unglück in Berlin erheblich kleiner gewesen seien, dass somit in Folge dieses

[1]) Das Normal zu St. Petersburg steht 0,01 mm. höher als das meinige (siehe weiter unten).

[2]) Nach Chistoni, Il barometro normale etc.

[3]) Siehe oben III, 11.

Unglückes der Stand des Reisebarometers stark *gesunken* sei. Ein solches Sinken ist aber unerklärlich, da wohl eher ein *Steigen* (in Folge einer möglichen Verunreinigung des Quecksilbers) zu erwarten wäre.

13. **Chemnitz. Sächsisches Meteorologisches Institut.** Controll-Barometer **Wild-Fuess N:o 163,** eingestellt von Herrn Director Schreiber. Beide Barometer im Cathetometer-Zimmer, das Reisebarometer 6 cm. höher als das andere. Intervall zwischen den Vergleichungen = 10 Minuten. Gute Beleuchtung.

Juli 29. Vacuum-Spannung = 0,23 mm., Reduction wegen Höhendifferenz = +0,01 mm.

Wild-Fuess N:o 163.			RB			Differenz.
+20°,3 C.	741,45	739,03	+20°,35 C.	740,93	738,79	+0,24
20,5	741,40	738,95	20,45	740,88	738,73	0,22
20,5	741,42	738,97	20,55	740,85	738,68	0,29
20,5	741,30	738,85	20,65	740,75	738,59	0,26
20,6	741,35	738,89	20,7	740,77	738,60	0,29
					Mittel	+0,26 ±0,024.

Juli 30. Vacuum-Spannung = 0,27 mm.

+20°,4 C.	738,52	736,10	+20°,15 C.	737,92	735,84	+0,26
20,8	738,40	735,93	20,45	737,72	735,63	0,30
20,8	738,25	735,78	20,65	737,60	735,49	0,29
21,0	738,05	735,56	20,75	737,40	735,29	0,27
20,8	737,90	735,43	20,75	737,28	735,15	0,28
					Mittel	+0,28 ±0,012.

Für 741 ist die Correction des Reisebarometers = +0,27, für 738 = +0,23 mm., somit folgt:

Juli 29 Wild-Fuess N:o 163 = NB −0,01
„ 30 „ „ „ = „ +0,05

oder im Mittel

Wild-Fuess N:o 163 = NB +0,02 mm.

Zur Zeit nimmt Herr Director Schreiber die Correction +0,12 mm. an.

14. **Berlin. Preussisches Meteorologisches Institut.** Barometer **Wild-Fuess N:o 79** (dasselbe, mit dem in Hamburg Juni 28—29 verglichen wurde, siehe oben III, 4), eingestellt von Herrn Doctor Kremser. Beide Barometer im Barometerkeller aufgehängt, das Reisebarometer 10 cm. tiefer. Jede Stunde wurde eine Doppelvergleichung gemacht. Ein hier mit dem Reisebarometer passirtes Unglück ist schon oben (I, 22) erwähnt. Gute beleuchtung.

August 3. Vacuum-Spannung = 0,24, Reduction wegen Höhendifferenz = −0,01 mm.

Wild-Fuess N:o 79.			RB			Differenz.
+ 18°,6 C.	754,89	752,63	+ 18°,55 C.	754,50	752,50	+ 0,13
18,8	755,00	752,71	18,65	754,55	752,56	0,15
18,6	755,85	753,59	18,55	755,45	753,45	0,14
18,7	755,93	753,65	18,65	755,48	753,47	0,18
18,8	756,68	754,39	18,65	756,23	754,20	0,19
18,9	756,72	754,42	18,75	756,30	754,27	0,15
18,8	757,37	755,08	18,70	756,95	754,94	0,14
18,85	757,38	755,08	18,75	756,97	754,95	0,13
						Mittel + 0,15 ± 0,016.

August 4. Vacuum-Spannung = 0,24 mm.

+ 18°,7 C.	762,28	759,99	+ 18°,35 C.	761,95	759,96	+ 0,03
„	762,37	760,08	18,55	762,00	759,97	0,11
						Mittel + 0,07.

Correction des Reisebarometers für 755—757 = + 0,22, für 762 = + 0,15 mm., folglich

August 3 Wild-Fuess N:o 79 = NB — 0,07
„ 4 „ „ „ = „ — 0,08

oder

Wild-Fuess N:o 79 = NB — 0,07 mm.

In Hamburg (III, 4) wurde gefunden

Wild-Fuess N:o 79 = NB — 0,04 mm.;

die Uebereinstimmung scheint mir befriedigend zu sein und beweist, dass die Reductionen des Reisebarometers auf das Normalbarometer ziemlich richtig sind. Will man doch den kleinen Unterschied als factisch ansehen, so würde er für Wild-Fuess N:o 79 auf eine Erniedrigung seines Standes um 0,03 mm. hindeuten. Wie Herr Doctor Kremser mir gütigst mitgetheilt hat, wurde bei seiner Rückkehr nach Berlin die Correction für dieses Barometer zu + 0,10 mm. bestimmt (gegen + 0,08 mm. vor der Reise), was auch eine kleine Senkung andeutet. Es ist somit jetzt

Normalstand Institut Berlin = NB + 0,03 mm.[1])

---

[1]) Im Institute scheint das Barometer Wild-Fuess N:o 76 als Normal benutzt zu werden (Liznar, l. c. S. 141). Obiges würde daher mit Herrn Waldo's Angabe: Wild-Fuess N:o 76 = Normal St. Petersburg + 0,04 mm. gut stimmen.

Nach III, 12 folgt für Wien:

Pistor N:o 279 = Normalstand Institut Berlin — 0,15 mm.

Von Herrn Liznar wird (l. c.) dagegen diese Differenz zu — 0,03 mm. angegeben, was auch eine Erniedrigung des Pistor N:o 279 andeutet.

15. **Berlin. Normal-Aichungs-Kommission.** Hier wurde mit dem Controllbarometer **Wild-Fuess N:o 229** sowie auch mit **Wild-Fuess N:o 79** verglichen, das von Herrn Doctor Pernet von dem Meteorologischen Institute nach dem Gebäude der Kommission übertragen wurde. Die Vergleichungen wurden im Sitzungs-Saale gemacht, wo alle drei Barometer in derselben Höhe an einen für solche Zweck bestimmten Schrank aufgehängt wurden. Die Beleuchtung war mittelmässig und die Aufstellung nicht völlig stabil. Jede halbe Stunde wurde eine Doppelvergleichung gemacht mit 5 bis 10 Minuten Zwischenzeit. Herr Pernet liess beide Wild-Fuess ab.

August 5. Erste Reihe. Vacuum-Spannung = 0,13 mm.[1]).

Wild-Fuess N:o 229.			Wild-Fuess N:o 79.			RB		
+ 19°,24 C.	761,67	759,31	+ 19°,3 C.	761,55	759,19	+ 19°,3 C.	761,33	759,12
19,3	761,62	759,26	19,4	761,65	759,28	19,45	761,35	759,12
19,4	761,55	759,18	19,45	761,52	759,14	19,45	761,23	759,00
19,55	761,58	759,19	19,55	761,50	759,11	19,55	761,23	758,99
19,65	761,60	759,20	19,65	761,45	759,05	19,55	761,13	758,86
19,85	761,52	759,09	19,8	761,46	759,04	19,75	761,13	758,84.

Bestimmung der Vacuum-Spannung.

Zweite Reihe. Vacuum-Spannung = 0,14 mm., aus der vorgehenden und der nachfolgenden Bestimmung interpolirt.

+ 19°,8 C.	761,62	759,20	+ 19°,78 C.	761,58	759,16	+ 19°,75 C.	761,20	758,93
19,75	761,57	759,15	19,75	761,57	759,15	19,75	761,17	758,90
19,67	761,50	759,09	19,67	761,43	759,02	19,75	761,14	758,86
19,77	761,50	759,08	19,77	761,45	759,03	19,8	761,14	758,86
19,6	761,37	758,97	19,6	761,33	758,93	19,65	761,00	758,74
19,67	761,35	758,94	19,65	761,28	758,88	19,70	760,95	758,71
19,55	761,25	758,86	19,5	761,23	758,85	19,6	760,89	758,66
19,6	761,20	758,80	19,6	761,15	758,75	19,65	760,81	758,59.

[1]) Bei der Bestimmung der Vacuum-Spannung wurde eine Depression von 1,9 mm. notirt, was einer Spannung von 0,09 mm. entspricht. Da aber fünf Stunden später diese Spannung = 0,15 mm. gefunden wurde und da ich nie in einer so kurzen Zeit eine so bedeutende Veränderung der Vacuum-Spannung beobachtet habe, zweifle ich nicht, dass ich bei der ersten Bestimmung die Depression in Folge eines Ablesungsfehlers 1 mm. zu klein notirt habe; ich nehme sie daher = 2,9 mm. und bekomme so die oben angeführte Spannung.

Dritte Reihe. Vacuum-Spannung = 0,15 mm.

+ 19°,65 C.	761,22	758,82	+ 19°,65 C.	761,13	758,73	+ 19°,7 C.	760,78	758,56
19,7	761,20	758,79	19,7	761,15	758,74	19,75	760,78	758,56
19,65	761,14	758,74	19,6	761,10	758,70	19,75	760,77	758,54
19,75	761,20	758,79	19,7	761,15	758,74	19,8	760,75	758,51
19,65	761,15	758,75	19,65	761,10	758,70	19,7	760,75	758,52
19,75	761,10	758,69	19,7	761,04	758,63	19,8	760,71	758,48
19,65	761,10	758,70	19,65	761,04	758,64	19,75	760,70	758,48
19.75	761,10	758,69	19,7	761,04	758,63	19,8	760,65	758,42.

Bestimmung der Vacuum-Spannung.

Differenzen.

	Wild-Fuess N:o 229 — RB.	Wild-Fuess N:o 79 — RB.	Wild-Fuess N:o 229 — Wild-Fuess N:o 79.
Erste Reihe	+ 0,19	+ 0,07	+ 0,12
	0,14	0,16	— 0,02
	0,18	0,14	+ 0,04
	0,20	0,12	0,08
	0,34	0,19	0,15
	0,25	0,20	0,05
Mittel	+ 0,22 ± 0,053	+ 0,15 ± 0,037	+ 0,07 ± 0,047.
Zweite Reihe	+ 0,27	+ 0,23	+ 0,04
	0,25	0,25	0,00
	0,23	0,19	0,07
	0,22	0,17	0,05
	0,23	0,19	0,04
	0,23	0,17	0,06
	0,20	0,19	0,01
	0 21	0,16	0,05
Mittel	+ 0,23 ± 0,014	+ 0,19 ± 0,025	+ 0,04 ± 0,018.
Dritte Reihe	+ 0,26	+ 0,17	+ 0,09
	0,23	0,18	0,05
	0,20	0,16	0,04
	0,28	0,23	0,05
	0,23	0,18	0,05
	0,21	0,15	0,06
	0,22	0,16	0,06
	0,27	0,21	0,06
Mittel	+ 0,24 ± 0,025	+ 0,18 ± 0,020	+ 0,06 ± 0,010.

Mittel der drei Reihen:

+ 0,23 mm.	+ 0,17 mm.	+ 0,06 mm.

Für 761 ist die Correction des Reisebarometers + 0,17 mm., somit folgt:

Wild-Fuess N:o 229 = NB + 0,06 mm.
„ N:o 79 = „ ± 0,00 „
Wild-Fuess N:o 79 = Wild-Fuess N:o 229 − 0,06 mm.

Hier ergiebt sich für Wild-Fuess N:o 79 einen etwas höheren Stand als an den vorhergehenden Tagen im meteorologischen Institute. Der Unterschied ist doch nicht besonders gross; will man die beiden Vergleichungen in Berlin mit Wild-Fuess N:o 79 als gleichwertig betrachten, so erhält man als Mittelwerth den Unterschied: Wild-Fuess N:o 79 − NB = + 0,04 mm., wie in Hamburg gefunden wurde.

Die genaue Correction von Wild-Fuess N:o 229 ist mir nicht bekannt; ich habe aber Grund anzunehmen, dass sie unbedeutend sei. Eine hinreichende Uebereinstimmung zwischen dem Normalstande in Berlin und meinem Normal (resp. dem Normal in St. Petersburg) ist somit anzunehmen. Dieses Resultat stimmt aber nicht mit dem von Herrn Waldo angegebenen Unterschiede: Normal Fuess = Normal St. Petersburg + 0,25 mm.

16. **Hamburg. Deutsche Seewarte.** Das Reisebarometer wurde an seinem früheren Platze (III, 4) mit **Köppen-Fuess N:o 9** sowie mit **Köppen-Fuess N:o 10** verglichen. Diese Barometer wurden theils von Herrn Ambronn (A), theis von mir (S) abgelesen. Jede halbe Stunde wurde eine Doppelvergleichung gemacht.

August 6. Vacuum-Spannung = 0,16, Reduction wegen Höhendifferenz = − 0,01 mm.

Köppen-Fuess N:o 9.				Köppen-Fuess N:o 10.				RB		
+ 17°,2 C.	760,95	S	758,84	+ 17°,5 C.	760,72	A	758,58	+ 17°,25 C.	760,35	758,41
17,4	760,98	A	758,85	18,0	760,65	S	758,45	17,3	760,30	758,36
17,3	760,81	A	758,69	17,7	760,50	S	758,33	17,3	760,16	758,20
17,7	760,88	S	758,71	17,8	760,51	A	758,33	17,35	760,14	758,18
17,4	760,85	S	758,72	17,75	760,51	A	758,34	17,25	760,10	758,13
17,6	760,78	A	750,63	18,1	760,50	S	758,29	17,25	760,12	758,16
17,2	760,76	A	758,65	17,6	760,40	S	758,25	17,15	760,00	758,05
17,5	760,70	S	758,56	17,7	760,41	A	758,24	17,25	760,00	758,04
17,1	760,50	S	750,41	17,4	760,18	A	758,05	16,95	759,76	757,88
17,3	760,50	A	758,38	18,1	760,24	S	758,03	17,15	759,75	757,84.

Differenzen.

Köppen-Fuess N:o 9 — RB.	Köppen-Fuess N:o 10 — RB.	K.-F. N:o 9 — K.-F. N:o 10.
+ 0,43 S	+ 0,17 A	+ 0,26
0,49 A	0,09 S	0,40
0,49 A	0,13 S	0,36
0,53 S	0,15 A	0,38
0,59 S	0,21 A	0,38
0,47 A	0,13 S	0,34
0,60 A	0,20 S	0,40
0,52 S	0,20 A	0,32
0,53 S	0,17 A	0,36
0,54 A	0,19 S	0,35
Mittel + 0,52 ± 0,039.	+ 0,16 ± 0,032.	+ 0,36 ± 0,029.

Für 760 nehme ich die Correction des Reisebarometers = + 0,18 mm. an und erhalte somit

Köppen-Fuess N:o 9 = NB + 0,34 mm.

Zu Anfange der Reise (Juni 28—29) hatte ich gefunden:

Köppen-Fuess N:o 9 = NB + 0,32 mm.

Hier haben wir somit eine befriedigende Uebereinstimmung, die ich als eine sehr wichtige Controlle für eine hinreichende Unveränderlichkeit des Reisebarometers betrachte. Legt man hinzu die gute Uebereinstimmung mit Wild-Fuess N:o 79 in Hamburg und Berlin so wie vor Allem die oben in Abtheilung II mitgetheilten Vergleichungen mit dem Normalbarometer NB vor und nach der Reise, so muss man wohl zugestehen, dass die von mir ausgeführten Vergleichungen einen gewissen Werth besitzen.

Als definitives Resultat erhalten wir

Köppen-Fuess N:o 9 = NB + 0,33 mm.

oder

Köppen-Fuess N:o 9 = Normal St. Petersburg + 0,32 mm.

Herr Chistoni fand im Jahre 1881 übereinstimmend hiermit:

Köppen-Fuess N:o 9 = Normal St. Petersburg + 0,35 mm.

Dagegen erhielt Herr Waldo den bedeutend grösseren Unterschied

Köppen-Fuess N:o 9 — Normal St. Petersburg = + 0,50 mm., was wieder gut mit dem neuen Normale Fuess der Seewarte stimmt, weil nach den Vergleichungen von Herrn Professor NEUMAYER

Köppen-Fuess N:o 9 — Normal Fuess = + 0,454 mm.

ist[1]).

Oben wurde weiter gefunden:

Köppen-Fuess N:o 10 = Köppen-Fuess N:o 9 — 0,36 mm.,

wogegen nach Herrn CHISTONI

Köppen-Fuess N:o 10 = Köppen-Fuess N:o 9 — 0,13 mm.;

somit hat sich Köppen-Fuess N:o 10 seit dem Jahre 1881 erheblich verändert.

Bezogen auf mein Normalbarometer ist

Köppen-Fuess N:o 10 = NB — 0,02 mm.

IV. Vergleichungen im Jahre 1887 mit der Röhre II im Reisebarometer.

1. **Helsingfors. Physikalisches Laboratorium der Universität.** Controllbarometer **Wild-Fuess N:o 99.**

Februar 19—21. Zwischen 762 und 765.

Wild-Fuess N:o 99 — RB =	+ 0,59
	0,61
	0,60
	0,57
Mittel	+ 0,59 ± 0,012.

2. **Helsingfors** in meiner Wohnung. Vergleichungen mit dem **Normalbarometer.**

[1]) Nach der Notis über Herrn WALDO's Vergleichungen, l. c. S. 99.

		RB	Correction.
Februar	21	761,82	+ 0,27
"	"	761,77	0,27
"	"	761,55	0,32
"	22	760,47	0,25
"	"	761,40	0,24
"	23	760,80	0,30
"	"	754,92	[0,23]
"	"	750,02	0,33
"	24	751,30	[0,39]
"	"	752,39	0,35
"	"	752,22	0,29
"	25	750,50	0,28
"	"	750,30	0,33
"	"	747,50	0,27
"	26	761,41	0,33
"	"	761,77	0,33
			Mittel + 0,30 ± 0,030.

Die eingeklammerten Differenzen sind ausgeschlossen.

3. **Helsingfors. Physikalisches Laboratorium.**

Februar 27—28. Zwischen 759 und 771.

Wild-Fuess N:o 99 — RB = + 0,59
0,65
0,58
0,51
0,51
Mittel + 0,57 ± 0,046.

Laut diesen Vergleichungen ist somit

Wild-Fuess N:o 99 = NB + 0,28 mm.

Im Jahre 1882 wurde für dasselbe Barometer im Physikalischen Central-Observatorium zu St. Petersburg die Correction −0,32 mm. gefunden[1]). Nachher wurde es in Sodankylä bei der finnländischen Polarstation als Normalbarometer benutzt. Die weite Reise von St. Petersburg über Helsingfors nach Sodankylä und zurück scheint somit seinen Stand nicht erheblich geändert zu haben. Doch kann ich die absolute Richtigkeit meiner Vergleichung nicht verbürgen, da der Platz (in einer Ecke zwischen einem grossen Fenster und einer Thüre), wo die Barometer neben einander aufgehängt waren, wenig passend ist. Wahr-

[1]) H. Wild, Neueste Form des Controllbarometers, Bulletin de l'Acad. Imp. de sciences de St. Pétersbourg, T. XXVIII, S. 301. In demselben Jahre wurde eine neue Vergleichung in physikalischen Centralobservatorium gemacht und dabei gefunden: Wild-Fuess N:o 99 = Normal St. Petersburg + 0,28 mm. (Expédition polaire Finlandaise, T. I, S. 6*).

scheinlich wegen irgend eines Luftzuges zeigt das Thermometer des Wild-Fuess etwa $0^0{,}75$ weniger als das des Reisebarometers (beide Thermometer corrigirt). Der offene Schenkel des Wild-Fuess ist schon stark belegt und das Quecksilber sehr oxydirt.

4. **Helsingfors** in meiner Wohnung. Vergleichungen mit dem **Normalbarometer.**

	RB	Correction.
Februar 28	753,13	+ 0,25
März 1	752,30	0,29
,,	751,36	0,29
,,	751,14	0,36
,,	750,32	0,28
,,	745,11	0,25
,,	743,58	0,24
,,	743,14	0,26
,,	743,39	0,27
,,	743,10	0,32
		Mittel + 0,28 ± 0,027.

5. **St. Petersburg. Physikalisches Central-Observatorium.** Die Reise nach St. Petersburg und zurück geschah auf der Eisenbahn. Es wurde mit den Controllbarometern **Wild-Fuess N:o 149** und **Wild-Fuess N:o 165** verglichen, die von Herrn Doctor Schönrock abgelesen wurden. Zwischen den Barometern keine Höhendifferenz. Je nach 20 Minuten wurde eine Doppelvergleichung gemacht; ich ziehe die beiden (beinahe immer identischen) Ablesungen des Reisebarometers zu einem Mittelwerth zusammen.

März 4. Vacuum-Spannung = 0,17 mm.

Wild-Fuess N:o 149.			Wild-Fuess N:o 165.			RB		
+ 19°,3 C.	755,50	753,15	+ 19°,2 C.	757,57	753,23	+ 19°,05 C.	754,93	752,82
19,2	755,50	753,16	19,2	755,53	753,20			
19,2	755,05	752,72	19,2	755,10	752,77	19,3	754,55	752,42
19,3	755,02	752,67	19,3	755,00	752,65			
19,3	754,75	752,40	19,3	754,83	752,48	19,4	754,30	772,13
13,3	754,75	752,40	19,3	754,83	752,48			

März 5. Vacuum-Spannung = 0,19 mm.

+ 19°,2 C.	748,50	746,19	+ 19°,1 C.	748,56	746,26	+ 19,1	748,02	745,92
19,2	748,52	746,21	19,1	748,57	746,27			
19,4	748,58	746,24	19,3	748,65	746,33	19,35	748,14	746,00
19,4	748,60	746,26	13,3	748,65	746,33			
19,3	748,75	746,43	19,3	748,83	746,51	19,35	748,28	746,17
19,3	748,75	746,43	19,3	748,81	746,49			
19,4	748,80	756,46	19,3	748,90	746,58	19,5	748,35	746,21
19,5	748,80	746,45	19,3	748,88	746,56			
19,5	748,86	746,51	19,5	749,00	746,65	19,6	748,40	746,29.
19,7	748,90	746,53	19,5	748,98	746,63			

Als *Normalstand* wird zur Zeit *das Mittel der auf 0° C. reducirten gleichzeitigen Höhen dieser beiden Controllbarometer* angenommen. Wir haben somit folgende Normalstände und entsprechende Correctionen des Reisebarometers.

	Normalstand.		Correction von RB.
März 4	753,19 753,18	753,19	[+ 0,37]
	752,74 752,66	752,70	0,28
	752,44 752,44	752,44	0,31
März 5	746,22 746,24	746,23	0,31
	746,28 746,30	746,29	0,29
	746,47 746,46	746,47	0,30
	746,52 746,50	746,51	0,30
	746,58 746,58	746,58	0,29
			Mittel + 0,30 ± 0,009.

Aus dem Mittel ist die stark abweichende erste Differenz ausgesclossen.

6. **Helsingfors** in meiner Wohnung. Vergleichungen mit dem **Normalbarometer**.

	RB	Correction.
März 8	762,63	+ 0,33
„ „	762,70	0,24
„ „	762,70	0,25
„ „	761,81	0,27
„ „	759,22	0,33
„ „	757,46	0,31
„ 9	749,24	0,35
„ „	748,58	0,30
„ „	748,10	0,31
„ „	747,76	0,32
„ 10	750,20	0,30
„ „	750,40	0,29
„ „	750,40	0,25
„ „	749,75	0,31
„ 11	750,23	0,29
„ „	752,29	0,29
		Mittel + 0,30 ± 0,024.

Nimmt man das Mittel der Correctionen vor und nach der Reise, so erhält man

Normalbarometer St. Petersburg = NB + 0,01 mm.

oder *mein Normalbarometer kann als übereinstimmend mit dem Normalbarometer im Physikalischen Central-Observatorium zu St. Petersburg betrachtet werden*, ein für mich gewiss sehr erfreuliches Resultat.

7. **Helsingfors. Meteorologische Central-Anstalt.** Im grossen Beobachtungs-Saale wurde mit dem Controllbarometer **Wild-Fuess N:o 129**, mit **Casella N:o 1155** („Alpine", System Fortin) sowie mit dem Beobachtungsbarometer **Girgensohn** verglichen. Das Reisebarometer war 10 cm. tiefer als die übrigen. Ich stellte die Barometer selbst ein mit Ausnahme von Girgensohn, das von den Stunden-Beobachtern der Anstalt abgelesen wurde. Ich theile hier nur die Differenzen mit.

	RB	W.-F. N:o 129 — RB.	Clla N:o 1155 — RB.	Ghn — RB.
März 15	764,50	+ 0,30	+ 0,48	+ 0,75
„ „	765,06	0,30	0,46	0,64
„ 16	770,29	0,26	0,47	0,73
„ 17	776,02	0,28	0,52	0,63
„ 18	770,14	0,30	0,42	—
„ 19	763,22	0,27	0,41	—
„ 20	773,75	0,23	0,44	—
	Mittel	+ 0,28 ± 0,020	+ 0,46 ± 0,029	+ 0,69 ± 0,052.

Wenn wir hier die letztgefundene Correction + 0,30 mm. für RB annehmen, so folgt

Wild-Fuess N:o 129 = NB − 0,02 mm.
Wild-Fuess N:o 129 = Normal St. P:burg − 0,03 mm.

Nach einer Mittheilung von Herrn Director Wild[1]) war die Correction für Wild-Fuess N:o 129 in Jahre 1882 = − 0,18 mm.; sein Stand ist somit seitdem um 0,21 mm. gesunken. Es hat einige Jahre als Beobachtungsbarometer an der Station Nikolaistad gedient; der offene Schenkel sowie das Quecksilber darin ist sehr beschmutzt.

Die Vergleichungen in der Centralanstalt nahm ich wieder im September auf und erhielt folgende Differenzen.

	RB	W.-F. N:o 129 — RB.	Clla N:o 1155 — RB.	Ghn — RB.
Sept. 9	766,12	+ 0,20	—	+ 0,77
„ „	766,45	0,22	—	0,78
„ 10	764,47	0,16	—	[0,86]
„ „	763,89	0,24	+ 0,41	[0,92]
„ „	762,70	0,16	0,49	0,72
	Mittel	+ 0,20 ± 0,028.		

Jetzt wurde der offene Schenkel des Wild-Fuess N:o 129 gereinigt, doch

[1]) Neueste Form des Controllbarometers, l. c. S. 301.

nur durch Reiben mit einem Balle von Handschuhleder; dann wurden die Vergleichungen fortgesetzt.

Sept.	12	757,90	+ 0,14	+ 0,36	[+ 0,90]
„	„	758,19	0,15	0,35	[1,01]
„	13	762,61	0,09	0,44	0,74
„	„	763,15	0,17	0,51	0,61
„	14	768,40	0,10	0,49	0,64
		Mittel	+ 0,13 ± 0,028	+ 0,44 ± 0,053	+ 0,71 ± 0,057.

Durch das Reinigen wurde somit Wild-Fuess N:o 129 um 0,07 mm. erniedrigt.

Für Barometer Girgensohn habe ich die Differenzen über 0,80 mm. ausgeschlossen, da dieselben sich beinahe alle auf Einstellungen desselben Beobachters beziehen und daher wohl eine persöhnliche Ungleichheit anzeigen[1]). Die Mittelwerthe für Casella und Girgensohn sind für die ganze Reihe vom 10 resp. 9 September an berechnet.

8. Durch die Vergleichungen Sept. 9—10 ist ein kleines während des Sommers eingetretenes Sinken des Wild-Fuess N:o 129 angedeutet. Wir haben nämlich

März 15—20 Wild-Fuess N:o 129 — RB = + 0,28
Sept. 9—10 „ „ „ „ = + 0,20,

oder wenn man mit Casella N:o 1155 vergleicht:

März 15—20 Wild-Fuess N:o 129 — Casella N:o 1155 = — 0,18
Sept. 9—10 „ „ „ = — 0,24.

Der Unterschied beträgt somit 0,06 bis 0,08 mm. und kann nicht auf eine Veränderung des Reisebarometers beruhen. Um mich davon zu überzeugen transportirte ich am 14 Sept. das Reisebarometer nach der Sternwarte, wo das oben beschriebene Normalbarometer NB jetzt aufgestellt ist. Dort wurden unter Mitwirkung vom Herrn Director Professor Donner folgende Correctionen des Reisebarometers erhalten.

		RB	Correction.
Sept.	14	767,77	+ 0,29
„	„	767,92	0,30
„	„	768,34	0,32
„	15	769,95	0,31
		Mittel	+ 0,30.

Der Unterschied ist somit vollkommen unverändert (siehe IV, 6).

9. Nachdem das Reisebarometer wieder an der Central-Anstalt aufgestellt worden war, erhielt ich noch folgende Differenzen.

[1]) Das Barometer Girgensohn ist ein Fortin mit beweglichem Maassstabe.

		RB	W.-F. N:o 129 — RB.	Clla N:o 1155 — RB.	Ghn — RB.
Sept.	17	770,31	+ 0,13	—	+ 0,67
„	18	767,12	0,11	+ 0,51	0,76
„	„	766,79	0,14	0,38	[0,83]
„	19	758,79	0,11	0,43	[0,90]
„	„	756,60	0,13	0,44	0,78
„	20	748,15	[0,24]	0,46	[0,87]
„	„	748,72	[0,22]	0,41	0,74
„	21	760,74	0,16	0,31	0,80
„	22	761,85	0,15	0,40	[0,85]
„	24	749,22	0,09	0,31	[0,90]
„	„	749,37	0,13	0,41	[0,83]
„	26	754,40	0,14	0,41	—
			Mittel + 0,13 ± 0,015	+ 0,41 ± 0,040	+ 0,75 + 0,036.

Die starke Abweichung der zwei Differenzen am 20 Sept. für Wild-Fuess N:o 129 ist wohl Temperaturanomalien zuzuschreiben; ich habe dieselben vom Mittel ausgeschlossen.

Diese Zahlen stimmen gut mit den Differenzen 12—14 Sept.; ich betrachtete daher ein Fortsetzen der Vergleichungen als zwecklos.

Reducirt man auf das Normalbarometer, so bekommt man:

	Wild-Fuess N:o 129 — NB.	Casella N:o 1155 — NB.	Girgensohn — NB.
März 15—20	—	+ 0,16	+ 0,39
Sept. 12—14	— 0,17	0,14	0,41
„ 17—26	0,17	0,11	0,45

oder im Mittel

Wild-Fuess N:o 129 = NB − 0,17 mm.
Casella N:o 1155 = „ + 0,14 „
Girgensohn = „ + 0,42 „

Laut einem beigelegten Zeugnisse (1883 März) von Kew Observatory ist die Correction von Casella N:o 1155 gegen das Kew Standard = − 0,05 mm.; daraus folgt

Kew Standard = NB + 0,09 mm.,

was nicht übel mit meiner Vergleichung in Kew 1886 Juli 6 stimmt (III, 7).

Das Barometer Girgensohn wurde im Jahre 1878 von Herrn Doctor Hellmann durch ein Reisebarometer mit dem Normalbarometer in St. Petersburg verglichen; dabei wurde gefunden:

Girgensohn = Normal St. Petersburg + 0,58 mm.

[1]) Repertorium für Meteorologie von Dr. H. Wild, Bd. VI, N:o 8, in der Berichtigung.

Demgemäss wird zur Zeit von der Anstalt die Correction −0,6 mm. angebracht[1]). Die oben erhaltene etwas kleinere Correction erklärt sich einfach daraus, dass die Führung des Nonius sehr abgenutzt ist; bei der Herabschiebung des Nonius durch das Zahnrad stellt sich die Visirebene ein wenig schräg, in Folge dessen die Einstellung an der Seite des höchsten Punktes der Kuppe geschieht.

10. Die Vergleichungen in dieser Abtheilung, die bei ungeändertem Zustande des Reisebarometers ausgeführt worden sind, geben einen sichereren Aufschluss über den Werth meiner Vergleichsmethode als die Vergleichungen im Sommer 1886. Wegen der besseren Beschaffenheit der Röhre II des Reisebarometers darf man wohl hier die Methode der kleinsten Quadrate anwenden. Genauer ausgerechnet sind die in dieser Abtheilung für RB erhaltene Correctionen nebst ihren *wahrscheinlichen Fehlern* folgende:

Februar	21—26	+ 0,297 mm.	± 0,006 mm.
„	28—März 1	0,281	0,008
März	8—11	0,296	0,005
Sept.	14—15	0,305	0,004

Diese Zahlen stimmen sehr gut mit einander; selbst die am meisten abweichende Bestimmung Febr. 28—März 1 weicht von den übrigen kaum mit mehr als der Summe der wahrscheinlichen Fehler ab[2]). Jedenfalls ist der Mittelwerth von den zwei ersten Bestimmungen, der für die Vergleichung in St. Petersburg benutzt geworden ist, auf einige Tausendstel sicher. Ich kann somit behaupten, dass sich die absolute Correction des Reisebarometers mit einer Sicherheit von ±0,01 mm. bestimmen lässt. Es erfüllt somit eine der Hauptbedingungen für ein gutes Uebertragungsbarometer[3]).

Als einen Vorzug vor gewöhnlichen Uebertragungsbarometern, die in gefülltem Zustande transportirt werden müssen, darf ich wohl die grössere Sicherheit gegen Brüche hervorheben. Das leere Röhrensystem, welches vielleicht wegen der Capillarröhre *B* Fig. 1 zerbrechlich vorfallen mag, besitzt doch ein gewisse Elasticität und wird wohl manchen starken Stoss ausstehen, bei dem das mit Quecksilber gefüllte Rohr eines gewöhnlichen Barometers schon brechen würde.

Ferner kann bemerkt werden, dass die Furcht vor Eindringen von Luft in das Vacuum, welche man immer beim Transport gewöhnlicher Barometer

---

[1]) Observations faites à l'observatoire mét. central, 1882, S. VI.

[2]) Diese Bestimmung fiel wohl wegen des starken Sinkens des Luftdrucks weniger gut aus.

[3]) Vergl. H. Wild, Ueber Normalbarometer und ihre Vergleichung, Zeitschrift für Meteorologie, XII, S. 429.

zu liegen hat, bei meinem Reisebarometer ganz wegfällt; man kann die Kiste einem Träger überlassen, was man beim Transport eines gewöhnlichen Barometers nicht gern riskirt. Die Bedeutung eines möglichst sorglosen Transportes ist nicht zu unterschätzen; dadurch werden bei derartigen Expeditionen Kräfte erspart, die eine bessere Anwendung für die eigentlichen Beobachtungen finden. Sämmtliche diese Umstände mögen wohl den nöthigen grösseren Zeitaufwand beim Aufstellen (etwa eine halbe Stunde) und Herunternehmen (eine Viertelstunde) meines Reisebarometers aufwiegen.

Der Hauptübelstand ist der Beschlag, der sich im oberen Theile der Röhre absetzt. Auch im Rohre II ist jetzt (November 1887) dieser Beschlag im Theile unter 740 zum Vorschein gekommen. Falls die Versuche mit anderen Sorten von Glasröhren, die jetzt im Gange sind, kein befriedigendes Resultat geben, muss das Reisebarometer in die oben I, 25 angedeutete Richtung umconstruirt werden.

Die Kosten für das Reisebarometer (ohne Quecksilber und Glasröhre) sind auf 180 Francs gestiegen.

V. Resultate.

1. Um die Uebersicht meiner Vergleichungen zu erleichtern setze ich die Hauptresultate in der folgenden Tafel zusammen. Für die verschiedenen Barometer sind die Reduction auf mein Normalbarometer NB angeführt[1]), so wie auch die von den betreffenden Anstalten zur Zeit angenommenen Reductionen, soweit sie mir bekannt geworden sind. Die Reductionen auf NB setzen voraus, dass die Barometerstände (ausgenommen für Barometer Wild-Marek und Chappuis in Sèvres) mit Hülfe der Barometertafeln in „*Schumachers Hülfstafeln*" (II, 5) auf 0^0 C. reducirt werden, wobei (Barometer Turrettini in Sèvres ausgenommen) die Temperatur so angenommen wird, wie sie das am Barometer befestigte Thermometer ohne Correction angiebt.

[1]) Während meiner Reise im Jahre 1886 hinterliess ich an jeder Anstalt ein vorläufiges Resultat der schon ausgeführten Vergleichungen, die Differenzen gegen mein Reisebarometer enthaltend. Diese Differenzen sind im Allgemeinen bedeutend grösser als die definitiven, oben Abth. III mitgetheilten, weil der Stand des Reisebarometers bei der endgültigen Berechnung sich etwas grösser herausstellte in Folge einer strengeren Berechnung der Vacuum-Spannungen, einer grösseren negativen Correction des am Reisebarometer angebrachten Thermometers sowie der im Allgemeinen positiven Fehler des Maassstabes, die erst nach der Rückkehr bestimmt wurden.

Zeit der Vergleichung.	Ort der Vergleichung und Name des Barometers.	Reduction auf NB.	Von der Anstalt zur Zeit angenommene Reduction.
1886 Juni 17—19	Stockholm, Pistor-Martins N:o 579	+ 0,05 mm.	—
„ „ 21—22	Christiania, Wild-Fuess N:o 214	+ 0,06	+ 0,12 mm.
„ „ 24—25	Kopenhagen, Wild-Fuess N:o 87	+ 0,12	— 0,15
„ „ 28—29	Hamburg, Köppen-Fuess N:o 9	— 0,32	—
„ „ „	„ Wild-Fuess N:o 79	+ 0,04	+ 0,08
„ Juli 2	Brüssel, Tonnelot	+ 0,21	+ 0,05
„ „ 3	Utrecht, Becker	— 0,45	—
„ „ 6	Kew, Newman N:o 34 + 0,002 = Standard	— 0,06	—
„ „ 9	Paris, Etalon Fortin	+ 0,11	— 0,04
„ „ „	„ Tonnelot N:o 1572	+ 0,53	+ 0,37
„ „ 10—13	Sèvres, Turrettini	+ 0,24	—
„ „ „	„ Wild-Marek [1])	+ 0,20	—
„ „ „	„ Chappuis	+ 0,31	—
„ „ 15	Zürich, Wild-Fuess N:o 168	+ 0,08	+ 0,10
„ „ „	„ Fuess Heber	— 0,04	— 0,08
„ „ 16	München, Wild-Fuess N:o 43	+ 0,07	—
„ „ „	„ Wild-Fuess N:o 4	— 0,01	—
„ „ 19—20	Wien, Pistor N:o 279	+ 0,12	—
„ „ 29—30	Chemnitz, Wild-Fuess N:o 163	— 0.02	+ 0,12
„ August 3—4	Berlin, M. I., Wild-Fuess N:o 79	+ 0,07	+ 0,10
„ „ 5	„ N. A. K. „ „ „	± 0,00	—
„ „ „	„ „ Wild-Fuess N:o 229	— 0,06	—
„ „ 6	Hamburg, Köppen-Fuess N:o 9	— 0,34	—
„ „ „	„ Köppen-Fuess N:o 10	+ 0,02	—
1887 Februar 19—28	Helsingfors, Wild-Fuess N:o 99	— 0,28	— 0,28
„ März 4—5	St. Petersburg, Normal Wild [2])	— 0,01	—
„ „ 15—20	Helsingfors, Wild-Fuess N:o 129	+ 0,02	— 0,18
„ Sept. 12—26	„ „ „ „	+ 0,17	—
„ März und Sept.	„ Casella N:o 1155	— 0,14	— 0,05
„ „ „ „	„ Girgensohn	— 0,42	— 0,60.

2. Unter diesen Differenzen mag ich noch einmal die in der deutschen Seewarte zu Hamburg und im meteorologischen Institute zu Berlin erhaltenen hervorheben wegen der wichtigen Controllen, welche durch dieselben hergegeben werden. Die beiden für Köppen-Fuess N:o 9 erhaltenen Reductionen differiren nur um 0,02 mm. von einander; für Wild-Fuess N:o 79 steigt wohl die Aenderung auf 0,03 mm.; sie kann aber vielleicht durch eine in der Zwischenzeit eingetretene Senkung seines Standes erklärt werden (III, 14). Weniger befriedigend fiel der Vergleich mit demselben Barometer an der Normal-Aichungs-Kommission aus. Da somit zufällige Umstände eine Vergleichung unsicher machen können, will ich nur behaupten, dass die Unsicherheit der im Jahre 1886 erhaltenen Reductionen nicht auf 0,05 mm. steigt (II, 12). Von den Vergleichungen im Jahre 1887 ist schon oben (IV, 10) gesprochen. Jeden-

[1]) Mittelbare Vergleichung durch Turrettini.

[2]) Mittelbare Vergleichung durch Wild-Fuess N:o 149 und Wild-Fuess N:o 165.

falls liefert die vorhergehende Tafel mit einer gewissen Treue ein Bild des gleichzeitigen Zustandes der Hauptbarometer unseres Welttheiles.

3. Da bei früheren Vergleichen die Hauptbarometer gewöhnlich auf das **Normalbarometer Wild** in St. Petersburg bezogen werden, sezte ich noch die Unterschiede gegen das letztgenannte Normal zusammen, wie sie aus dieser Tafel hervorgehen, *nachdem die in der letzten Verticalreihe angegebenen Correctionen an die betreffenden Barometer angebracht worden sind.*

St. Petersburg	=	Stockholm	+ 0,06 mm.
„	=	Christiania	— 0,05
„	=	Kopenhagen	+ 0,28
„	=	Hamburg	— 0,32 [1])
„	=	Brüssel	+ 0,17
„	=	Utrecht	— 0,44
„	=	Kew	— 0,05
„	=	Paris	+ 0,16 [2])
„	=	Sèvres, Wild-Marek	+ 0,21
„	=	„ Chappuis	+ 0,32
„	=	Zürich	+ 0,02 [3])
„	=	München, W.-F. N:o 43	+ 0,08
„	=	„ W.-F. N:o 4	± 0,00
„	=	Wien	+ 0,13
„	=	Chemnitz	— 0,13
„	=	Berlin. Met. Inst.	— 0,02
„	=	„ N.-A.-K.	— 0,05 [4])
„	=	Helsingfors, NB	+ 0,01
„	=	„ Met. Anst.	— 0,08. [5])

4. In meteorologischer Hinsicht sind die in dieser Tafel für Stockholm, Christiania, Kopenhagen, Brüssel, Kew, Paris, Zürich, München, Chemnitz, Berlin Met. Inst. und Helsingfors Met. Anst. angeführten Differenzen bemerkenswerth, da dieselben angeben, welche Correctionen an die in den betreffenden Ländern gemachten Barometerbeobachtungen noch anzubringen sind, um dieselben auf ein gemeinsames Maass (den Normalstand in St. Petersburg) zurückzuführen. Diese Correctionen würden somit für die Beobachtungen in Schweden, Norwegen, England, in der Schweiz, in Baiern, Preussen und Finnland kleiner als 0,1 mm. sein, in Belgien, Frankreich und Sachsen zwischen 0,1 und 0,2 mm. und in Dänemark etwas grösser als 0,2 mm. Die von der deutschen Seewarte angeordneten Barometerbeobachtungen sind vorläufig auf Köppen-Fuess N:o 9 bezogen und weichen daher mit mehr als 0,3 mm. von

[1]) Mittel der Resultate von Juni 28—29 und August 6.
[2]) Mittel von Etalon Fortin corr. und Tonnelot N:o 1572 corr.
[3]) Mittel von Wild-Fuess N:o 168 corr. und Fuess Heber corr.
[4]) Wild-Fuess N:o 229.
[5]) Casella N:o 1155 corr. wird bei Inspectionsreisen als Normalstand angenommen.

dem Normalstande in St. Petersburg ab. Wegen des in Holland und Oesterreich angenommenen Normalstandes besitze ich keine Auskunft. Man war somit im Jahre 1886 der für meteorologische Zwecke geforderten Genauigkeit mit wenigen Ausnahmen ziemlich nahe gekommen. Ob sich dieser verhältnissmässig gute Zustand von einem Jahre zum anderen erhalten werde, ist doch sehr zu bezweifeln, da es sich vielfach gezeigt hat, dass gewöhnliche Barometer ihren Stand mit der Zeit verändern und daher oft mit eigentlichen Normalbarometern verglichen werden müssen. Man kann somit nicht unterlassen dem von Herrn Director Wild mehrmals ausgesprochenen Wunsche beizustimmen, dass sich die Centralstellen der Meteorologie möglichst bald wirkliche Normalbarometer anschaffen mögen. Will man sich mit der oben Abth. II beschriebenen Modification des Normalbarometers begnügen, so werden die Kosten nicht übermässig gross. Ein solches Barometer mit zwei Mikrometer-Mikroskopen kommt hier (in Helsingfors) ohne Quecksilber (wovon etwa 7 kg. nöthig sind) auf ungefähr 300 Francs. In grösseren Städten, wo die Arbeit der Mechaniker wegen der grösseren Geschicklichkeit theurer ist, würden wohl die Kosten ein wenig höher ausfallen, werden aber immer doch unbedeutend in Betracht der Kosten, welche jetzt die immer nöthigen Vergleiche mit benachbarten Centralstellen mit der Zeit herbeiführen.

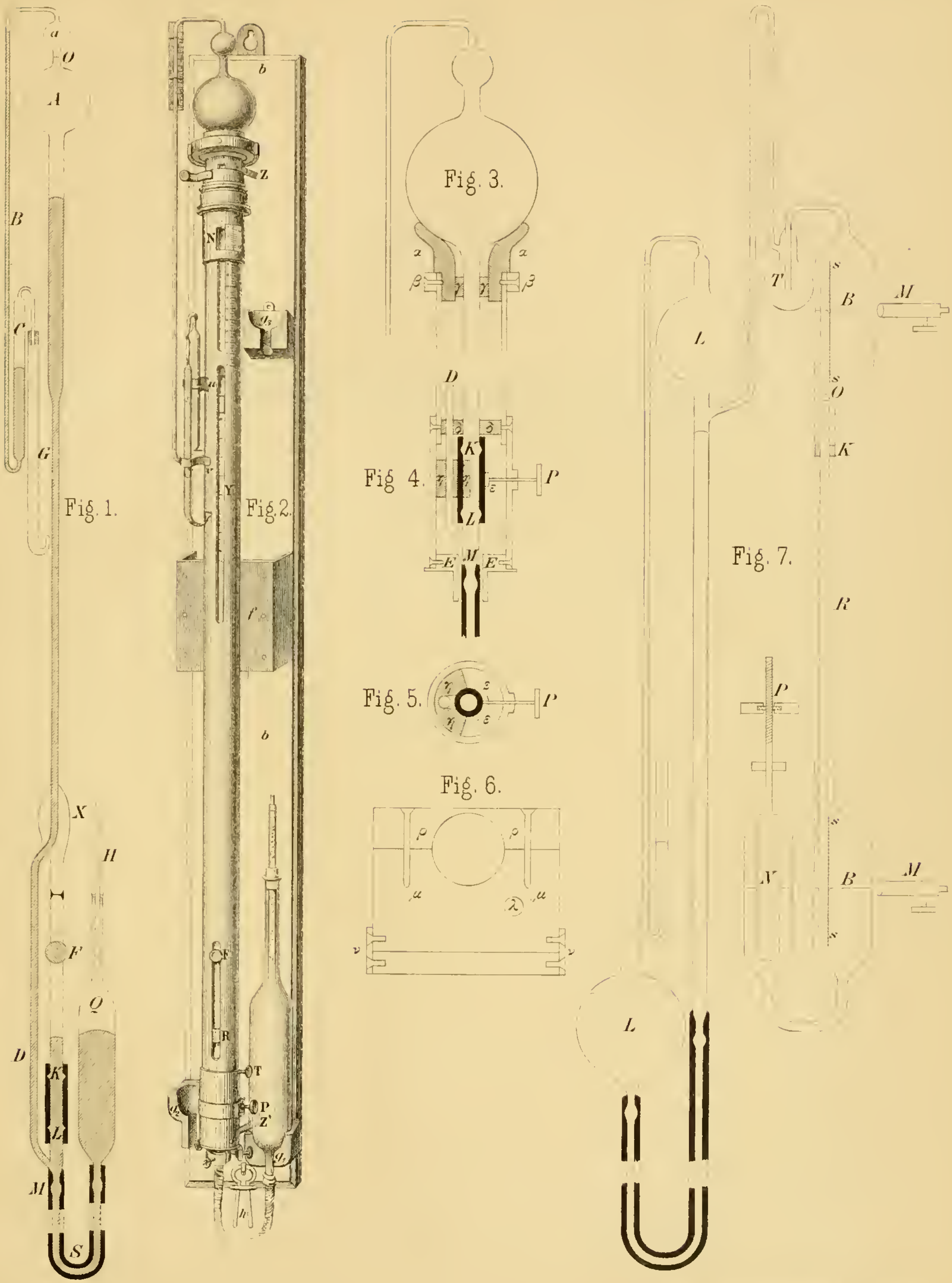


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

ZUR THEORIE

DER

LINEAREN UND HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

MIT

DOPPELTPERIODISCHEN COEFFICIENTEN

VON

E. A. STENBERG.

1. Da jede eindeutige elliptische Function von x durch die zu demselben primitiven Periodenpaare gehörende Function $p(x)$ und deren erste Ableitung $p'(x)$ rational ausdrückbar ist[1]), lässt sich jede lineare und homogene Differentialgleichung

$$\text{I.} \qquad y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \cdots + P_n y = 0\,,$$

deren Coefficienten eindeutige, doppeltperiodische Functionen von x mit demselben primitiven Periodenpaare 2ω, $2\omega'$ sind, in eine andere

$$\text{II.} \qquad \frac{d^n y}{dz^n} + Q_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + Q_2 \frac{d^{n-2} y}{dz^{n-2}} + \cdots + Q_n y = 0\,,$$

deren Coefficienten rationale algebraische Functionen von z und $\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$ sind, transformiren, wenn statt x als unabhängig Veränderliche

$$z = p(x)$$

eingeführt wird. Denn es ist

$$\frac{dy}{dx} = p'(x)\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^\varrho y}{dx^\varrho} = \big(p'(x)\big)^\varrho \left[\frac{d^\varrho y}{dx^\varrho} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varrho-1} R_{\varrho,\lambda}(z)\frac{d^{\varrho-\lambda} y}{dz^{\varrho-\lambda}}\right]$$

$$(\varrho = 2, 3 \ldots)$$

wo die $R_{\varrho,\lambda}(z)$ rationale, algebraische Functionen von z, von denen die

$$R_{\varrho,1}(z) = \frac{\varrho(\varrho+1)}{4}\cdot\frac{12z^2 - g_2}{4z^3 - g_2 z - g_3} \quad (\varrho = 2, 3 \ldots)$$

sind, und

$$\big(p'(x)\big)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3\,.$$

---

[1]) Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Göttingen 1881. Art. 14.

Die drei Wurzeln $z=e_1$, $z=e_2$, $z=e_3$ der Gleichung

$$4z^3-g_2z-g_3=0$$

sind im Allgemeinen Unendlichkeitsstellen der Coefficienten $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ und so beschaffen, dass diese in ihrer Umgebung zweideutig sind, wie schon aus dem Aussehen des ersten Coefficienten

$$Q_1=-\frac{n(n+1)}{4}\cdot\frac{12z^2-g_2}{4z^3-g_2z-g_3}\cdot\frac{P_1}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$$

hervorgeht. Jeder doppelte Umlauf um einen dieser Punkte oder jeder einfache um zwei von ihnen giebt den Coefficienten $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ ihre ursprünglichen Werthe wieder. In der Umgebung von jedem andern endlichen Punkte sind genannte Coefficienten eindeutig.

2. Ich werde im Folgenden eine endliche, einfach zusammenhangende Fläche T der z-Ebene betrachten, welche die drei Punkte e_1, e_2 und e_3 enthält. Wenn ich jeden hier befindlichen singulären Punkt der Coefficienten $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ sowie auch jeden der drei Punkte e_1, e_2 und e_3 mit einem beliebig kleinen, endlichen Kreise umgebe und sämmtliche diese kleinen Flächentheile aus T ausschliesse, benenne ich die übrig bleibende mehrfach zusammenhangende Fläche T_1.

Unter einem $e_{\lambda\mu}$-Umlauf $\begin{pmatrix}\lambda=1,\ 2,\ 3\\ \mu=1,\ 2,\ 3\end{pmatrix}$ werde ich einen in dieser Fläche T_1 verlaufenden, continuirlichen, geschlossenen Weg verstehen, welcher keine andern der oben genannten Punkte als e_λ und e_μ einschliesst und aus folgenden Theilen zusammengesetzt ist:

1. einem in positiver Richtung ausgeführten Umlauf um den Punkt e_λ,
2. einem solchen um e_μ und
3. einer diese beiden Umläufe verbindenden Linie, welche zweimal — nämlich in beiden Richtungen — beschrieben wird.

Wenn $\lambda=\mu$ ist, fällt die verbindende Linie weg, und der Weg reducirt sich zu zwei in positiver Richtung ausgeführten Umläufen um e_λ.

Denke ich mir das Gebiet der Fläche T_1 so umgewandelt, dass es unmöglich ist eine ungerade Anzahl der Punkte e_1, e_2 und e_3 mit einer in sich selbst zurücklaufenden Linie zu umschliessen ohne dass diese eine gerade Anzahl Umläufe um einen oder alle drei dieser Punkte ausführt, erhalte ich eine zwar nicht geometrisch darstellbare mehrfach zusammenhangende Fläche, welche T_2 heissen mag. Jeder in dieser Fläche verlaufende Weg kann in eine Reihe von geraden Linien, $e_{\lambda\mu}$-Umläufen und Umläufen um die übrigen singulären Punkte übergeführt werden.

Aus dieser Definition der Fläche T_2 ist ersichtlich, dass diese der von Herrn Fuchs[1]) betrachteten Fläche T' in der Art entspricht, dass Alles, was in der genannten Abhandlung und in späteren hierauf ruhenden Untersuchungen über das Verhalten der Integrale innerhalb der Fläche T' ausgesprochen ist, sich unmittelbar auf das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung II innerhalb der Fläche T_2 übertragen lässt.

3. Es sei

$$(y)_{\lambda\mu} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, 3 \\ \mu = 1, 2, 3 \end{pmatrix}.$$

diejenige Function, in welche $y = \varphi(z)$ nach einem $\lambda\mu$-Umlaufe übergeht.

Nach der Untersuchung des Herrn Hamburger[2]) giebt es für jedes festgestellte Werthpaar λ, μ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung II

$$y_1 = \varphi_1(z),\ y_2 = \varphi_2(z),\ \ldots\ y_n = \varphi_n(z)$$

dessen Elemente in Gruppen

$$y_1, y_2, \cdots y_{m_1};\ y_{m_1+1},\ y_{m_1+2}, \cdots y_{m_2};\ \cdots\ y_{m_r+1}, y_{m_r+2}, \cdots y_n$$

zerfallen, welche durch die Eigenschaft

$$(y_{m_\varrho+1})_{\lambda\mu} = \omega_\varrho y_{m_\varrho+1},\ (y_{m_\varrho+2})_{\lambda\mu} = \omega_\varrho y_{m_\varrho+2} + y_{m_\varrho+1}, \cdots$$
$$(y_{m_\varrho+\tau+1})_{\lambda\mu} = \omega_\varrho y_{m_\varrho+\tau+1} + y_{m_\varrho+\tau}, \cdots (y_{m_\varrho+1})_{\lambda\mu} = \omega_\varrho y_{m_{\varrho+1}} + y_{m_{\varrho+1}-1}$$
$$(\varrho = 1, 2 \cdots r)$$

charakterisirt sind.

Hierbei kann es vorkommen, dass mehrere von den Grössen ω_ϱ einander ähnlich sind. Alle diejenigen Gruppen, welche denselben „multiplicirenden Factor“ ω_ϱ haben, werden in eine Classe zusammengeführt und in dieser so geordnet, dass jede nachfolgende Gruppe aus einer kleineren oder höchstens gleich grossen Anzahl von Elementen besteht als die vorhergehende. Durch die obige Definition einer Gruppe geht die Reihenfolge ihrer Glieder (Ele-

---

[1]) Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. Crelle's Journal Bd. 66.

[2]) Hamburger. Bemerkung über die Form der Integrale der linealen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. Crelle's Journal, Bd. 76.

mente) unmittelbar hervor, sowie auch die Bedeutung der Benennung: *erstes, zweites etc. Glied* einer Gruppe. Die τ:ten Glieder aller zur selben Classe gehörenden Gruppen bilden zusammen die τ:ten Glieder dieser Classe.

Jeder andere Umlauf führt im Allgemeinen jedes Element dieses Fundamentalsystems in eine lineare, homogene Function sämmtlicher Elemente über, so dass

$$(y_\tau)_{\lambda_1\mu_1} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} c_{\tau,\varrho} y_\varrho \qquad (\tau = 1, 2, 3 \cdots n)$$

ist.

4. Jetzt werde ich annehmen, dass sämmtliche Elemente y_τ der Bedingung genügen, dass

$$\big((y_\tau)_{\lambda\mu}\big)_{\lambda_1\mu_1} = \big((y_\tau)_{\lambda_1\mu_1}\big)_{\lambda\mu}$$

ist, d. h. dass zwei aufeinander folgende Umläufe dasselbe Resultat hervorbringen, gleichviel in welcher Reihenfolge sie vorgenommen werden. Durch diese Annahme werden die Coefficienten $c_{\tau\varrho}$ gewissen Bedingungen unterworfen, deren Aufsuchen jetzt mein nächstes Ziel ist. Hierbei wird es zweckmässig sein, die Classe von Elementen $y_1, y_2, \cdots y_l$ durch folgende etwas allgemeinere Eigenschaft zu charakterisiren:

$$\begin{aligned}
&(y_1)_{\lambda\mu} = \omega y_1 \\
&(y_2)_{\lambda\mu} = k_{21}\, y_1 + \omega y_2 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(y_\tau)_{\lambda\mu} = k_{\tau,1} y_1 + k_{\tau,2} y_2 + \cdots + k_{\tau,\tau-1}\, y_{\tau-1} + \omega y_\tau \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(y_l)_{\lambda\mu} = k_{l,1}\, y_1 + k_{l,2}\, y_2 + \cdots + k_{l,l-1}\, y_{l-1} + \omega y_l,
\end{aligned}$$

wo die Constanten k nur der Bedingung unterworfen werden, dass wenn

$$k_{\tau,\tau-1} = 0$$

ist, auch sämmtliche Grössen

$$k_{\tau+\sigma,\,\tau-\sigma_1} = 0$$

für $\sigma = 0, 1, 2 \cdots l - \tau$ und $\sigma_1 = 1, 2 \cdots \tau - 1$ sind.

Weil die Elemente eines Fundamentalsystems von einander linear unabhängig sind, und die Constante ω in keiner andern Classe als multiplicirender

Factor auftreten kann, als in der oben angeführten, geht aus der Gleichung

$$\big((y_\tau)_{\lambda\mu}\big)_{\lambda_1\,\mu_1} = \big((y_\tau)_{\lambda_1\,\mu_1}\big)_{\lambda\mu}$$

unmittelbar hervor dass jedes Element dieser Classe die Eigenschaft

$$(y_\tau)_{\lambda_1\,\mu_1} = c_{\tau,1}\, y_1 + c_{\tau,2}\, y_2 + \cdots + c_{\tau,\,l}\, y_l \qquad (\tau = 1, 2 \cdots l)$$

hat.

5. Aus der genannten Gleichung, die jetzt das Aussehen

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=l} y_\varrho \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau-1} k_{\tau,\sigma}\, c_{\sigma,\varrho} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=l-1} y_\varrho \sum_{\sigma=\varrho+1}^{\sigma=l} c_{\tau,\sigma}\, k_{\sigma,\varrho}$$

hat, erhalte ich l Systeme von Relationen zwischen den Constanten k und c, nämlich als erstes System

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau-1} k_{\tau,\sigma}\, c_{\sigma,l} = 0 \qquad (\tau = 2, 3 \ldots l)$$

und als $(l+1-\varrho)$:tes:

$$\left|\begin{array}{l} 0 = \sum\limits_{\sigma=\varrho+1}^{\sigma=l} c_{1,\sigma}\, k_{\sigma,\varrho} \\ \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=\tau-1} k_{\tau,\sigma}\, c_{\sigma,\varrho} = \sum\limits_{\sigma=\varrho+1}^{\sigma=l} c_{\tau,\sigma}\, k_{\sigma,\varrho} \qquad (\tau = 2, 3 \ldots l) \end{array}\right.$$

wobei ϱ die Werthe $l-1,\ l-2, \ldots 2, 1$ annimmt.

Es bestehe die letzte Gruppe der Classe aus $l-m$ Glieder, d. h. es sei $k_{m+1,\,m}$ die erste unter den Constanten $k_{l,\,l-1},\ k_{l-1,\,l-2}, \cdots k_{2,1}$, welche $=0$ ist. Nach der die Constanten k betreffenden Voraussetzung, welche oben gemacht wurde, folgt aus dem ersten obiger Systeme, dass

$$c_{m+1,l} = c_{m+2,l} = \cdots = c_{l-1,l} = 0\,,$$

aus dem zweiten dass

$$c_{m+1,\,l-1} = c_{m+2,\,l-1} = \cdots = c_{l-2,\,l-1} = 0$$

u. s. w. bis aus dem $(l-m-1)$:ten Systeme folgt, dass

$$c_{m+1,\,m+2} = 0$$

ist. Ausserdem geben die ersten Gleichungen des zweiten bis $(l-m)$:ten Systems

$$c_{1,l} = c_{1,l-1} = \cdots = c_{1,m+2} = 0,$$

die zweiten Gleichungen des zweiten bis $(l-m-1)$:tem Systems

$$c_{2,l} = c_{2,l-1} = \cdots = c_{2,m+3} = 0$$

u. s. w. bis die $(l-m-1)$:te Gleichung des zweiten Systems

$$c_{l-m-1,l} = 0$$

giebt. Weiter geht noch aus der letzten Gleichung des zweiten Systems, aus der $(l-1)$:ten des dritten Systems u. s. w. und schliesslich aus der $(m+2)$:ten Gleichung des $(l-m)$:ten Systems hervor, dass

$$c_{l,l} = c_{l-1,l-1} = \cdots = c_{m+1,m+1}$$

sind.

Es möge jetzt die erste Gruppe der in Frage stehenden Classe aus m_1 Gliedern bestehen, d. h. es sei k_{m_1+1,m_1} die erste unter den Constanten $k_{2,1}\, k_{3,2} \cdots k_{l,l-1}$, welche $= 0$ ist. Ausserdem nehme ich an, dass die Anzahl der Glieder der ersten Gruppe grösser ist als diejenige der letzten, d. h. dass

$$m_1 > l - m$$

ist.

Aus den Gleichungen

$$\sum_{\sigma=l-m}^{\sigma=\tau-1} k_{\tau\,\sigma}\, c_{\sigma,l} = 0 \qquad (\tau = l-m+1, l-m+2, \ldots m)$$

des ersten Systems, den Gleichungen

$$\sum_{\sigma=l-m-1}^{\sigma=\tau-1} k_{\tau,\sigma}\, c_{\sigma,l-1} = c_{\tau,l}\, k_{l,l-1} \qquad (\tau = l-m, l-m+1, \ldots m)$$

des zweiten und überhaupt aus den Gleichungen

$$\sum_{\sigma=\varrho-m}^{\sigma=\tau-1} k_{\tau,\sigma}\, c_{\sigma,\varrho} = \sum_{\sigma=\varrho+1}^{\sigma=l} c_{\tau,\sigma}\, k_{\sigma,\varrho} \qquad (\tau = \varrho-m+1, \varrho-m+2, \ldots m)$$

des $(l-\varrho+1)$:ten Systems, wobei $\varrho = l, l-1, \ldots m+1$ gesetzt wird, gehen folgende Eigenschaften hervor:

$$
\begin{array}{lllll}
c_{l-m,\,l} & = c_{l-m+1,\,l} & = \cdots = c_{m_1-1,\,l} & & = 0 \\
c_{l-m-1,\,l-1} & = c_{l-m,\,l-1} & = \cdots = c_{m_1-2,\,l-1} & & = 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\
c_{\varrho-m,\,\varrho} & = c_{\varrho-m+1,\,\varrho} & = \cdots = c_{m_1-l+\varrho-1,\,\varrho} & & = 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\
c_{1,\,m+1} & = c_{2,\,m+1} & = \cdots = c_{m_1+m-l,\,m+1} & & = 0.
\end{array}
$$

6. Da bei der im vorigen § geführten Untersuchung die Reihenfolge der Gruppen gleichgiltig ist, kann ich die dort gefundenen Thatsachen folgendermaassen zusammenstellen, wobei ich die Gruppe $y_{m_a+1}, y_{m_a+2} \cdots y_{m_{a+1}}$ der Classe $y_1, y_2 \cdots y_l$ betrachte:

$$
\begin{array}{ll}
1. & c_{m_a+1,\,m_a+1} = c_{m_a+2,\,m_a+2} = \cdots = c_{m_{a+1},\,m_{a+1}} \\
2. & c_{m_a+1,\,m_a+2} = c_{m_a+1,\,m_a+3} = \cdots = c_{m_a+1,\,m_{a+1}} = 0 \\
 & \qquad\qquad\quad c_{m_a+2,\,m_a+3} = \cdots = c_{m_a+2,\,m_{a+1}} = 0 \\
 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{m_{a+1}-1,\,m_{a+1}} = 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
3. & c_{m_a+1,\,m_b+1} = c_{m_a+1,\,m_b+2} = \cdots = c_{m_a+1,\,m_{b+1}} = 0 \\
 & c_{m_a+2,\,m_b+1} = c_{m_a+2,\,m_b+2} = \cdots = c_{m_a+2,\,m_{b+1}} = 0 \\
 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
 & c_{m_a+\Delta,\,m_b+1} = c_{m_a+\Delta,\,m_b+2} = \cdots = c_{m_a+\Delta,\,m_{b+1}} = 0 \\
 & \qquad\qquad\quad c_{m_a+\Delta+1,\,m_b+2} = \cdots = c_{m_a+\Delta+1,\,m_{b+1}} = 0 \\
 & \qquad\qquad\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{m_{a+1}-1\;m_{b+1}} = 0
\end{array}
$$

wenn die Gruppe $y_{m_b+1}, y_{m_b+2}, \cdots y_{m_{b+1}}$ der Classe $y_1, y_2, \cdots y_l$ aus einer kleineren Anzahl Glieder besteht als die Gruppe $y_{m_a+1}, y_{m_a+2}, \cdots y_{m_{a+1}}$, d. h. wenn die Differenz $\Delta = m_{a+1} - m_a - (m_{b+1} - m_b) > 0$ ist, und

$$
\begin{array}{ll}
4. & c_{m_a+1,\,m_b+2} = c_{m_a+1,\,m_b+3} = \cdots = c_{m_a+1,\,m_{b+1}} = 0 \\
 & \qquad\qquad\quad c_{m_a+2,\,m_b+3} = \cdots = c_{m_a+2,\,m_{b+1}} = 0 \\
 & \qquad\qquad\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
 & \qquad c_{m_{a+1},\,m_{b+1}-\Delta_1+1} = \cdots = c_{m_{a+1},\,m_{b+1}} = 0
\end{array}
$$

wenn

$$\Delta = -\Delta_1 = m_{a+1} - m_a - (m_{b+1} - m_b) \leqq 0$$

ist.

Mit anderen Worten: bei dem $\lambda_1 \mu_1$-Umlaufe geht jedes τ:te Glied der betrachteten Classe in eine lineare, homogene Function von nur denjenigen Gliedern derselben Classe über, deren Ordnungszahl nicht grösser als τ ist, d. h. es ist

$$(y_{m_a+\tau})_{\lambda_1 \mu_1} = L_{m_a+\tau,1}(y_{m+1}) + L_{m_a+\tau,2}(y_{m+2}) + \cdot \cdot$$
$$+ L_{m_a+\tau,\tau-1}(y_{m+\tau-1}) + L_{m_a+\tau,\tau}(y_{m+\tau}),$$

wo ich mit

$$L(y_{m+\sigma})$$

eine lineare, homogene Function von sämmtlichen σ:ten Gliedern der Classe bezeichne.

7. Um weitere Eigenschaften der Coefficienten c aufzusuchen, werde ich jetzt den allgemeinern Standpunkt des § 4 verlassen um denjenigen des § 3 wieder einzunehmen, jedenfalls mit Beibehaltung der Bedingung

$$\Big((y_\tau)_{\lambda\mu}\Big)_{\lambda_1 \mu_1} = \Big((y_\tau)_{\lambda_1 \mu_1}\Big)_{\lambda\mu}.$$

Es sei also

$$(y_{m_a+1})_{\lambda\mu} = \omega y_{m_a+1}$$
$$(y_{m_a+\tau})_{\lambda\mu} = \omega y_{m_a+\tau} + y_{m_a+\tau-1} \qquad (\tau = 2, 3, \ldots m_{a+1} - m_a).$$

Die obige Bedingung giebt mir

$$L_{m_a+\tau-1,1}(y_{m+1}) + L_{m_a+\tau-1,2}(y_{m+2}) + \cdots + L_{m_a+\tau-1,\tau-1}(y_{m+\tau-1}) =$$
$$L_{m_a+\tau,2}(y_{m+1}) \quad + L_{m_a+\tau,3}(y_{m+2}) + \cdots + L_{m_a+\tau,\tau}(y_{m+\tau-1}),$$

woher

$$L_{m_a+\tau-1,1}(y_{m+1}) \equiv L_{m_a+\tau,2}(y_{m+1})$$
$$L_{m_a+\tau-1,2}(y_{m+2}) \equiv L_{m_a+\tau,3}(y_{m+2})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L_{m_a+\tau-1,\tau-1}(y_{m+\tau-1}) \equiv L_{m_a+\tau,\tau}(y_{m+\tau-1})$$

und im Allgemeinen für $\varrho = 2, 3 \ldots \tau$

$$L_{m+\tau,\varrho}(y_{m+\varrho}) \equiv L_{m_a+\tau-1,\varrho-1}(y_{m+\varrho}) \equiv L_{m_a+\tau-2,\varrho-2}(y_{m+\varrho}) \equiv \\ \cdots \equiv L_{m_a+\tau-\varrho+1,1}(y_{m+\varrho}),$$

welche Identitäten so zu verstehen sind, dass wenn

$$L_{m_a+\tau,\varrho}(y_{m+\varrho}) = A_0 y_\varrho + A_1 y_{m_1+\varrho} + A_2 y_{m_2+\varrho} + \cdots + A_{r_\varrho} y_{m_{r_\varrho}+\varrho}$$

ist, so muss auch

$$L_{m_a+\tau-\sigma,\varrho-\sigma}(y_{m+\varrho-\sigma}) = A_0 y_{\varrho-\sigma} + A_1 y_{m_1+\varrho-\sigma} + A_2 y_{m_2+\varrho-\sigma} + \cdots + A_{r_\varrho} y_{m_{r_\varrho}+\varrho-\sigma}$$

sein für $\sigma = 1, 2 \ldots \varrho - 1$, wo ich mit r_ϱ die Anzahl der ϱ:ten Glieder der Classe bezeichne, und somit $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \geqq \cdots \geqq r_{m_1}$ und $r_1 = r + 1$ ist.

8. Da die ersten Glieder der Classe die Eigenschaft

$$(y_{m_a+1})_{\lambda\mu} = \omega y_{m_a+1},\ (y_{m_a+1})_{\lambda_1\mu_1} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=r} c_{m_a+1,\, m_\varrho+1}\, y_{m_\varrho+1}$$

haben, ist es nach der genannten Untersuchung des Herrn Hamburger möglich sie in dem Fundamentalsystem $y_1, y_2, \ldots y_n$ durch andere Functionen von der Form

$$Y_\sigma = C_{\sigma,1} y_1 + C_{\sigma,2} y_{m_1+1} + \cdots + C_{\sigma,r} y_{m_r+1} \qquad (\sigma = 1, 2 \ldots r)$$

zu ersetzen, welche so beschaffen sind, dass

$$B_1 \left\{ \begin{array}{ll}
(Y_1)_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_1 Y_1 & (Y_{s_{01}+1})_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_1 Y_{s_{01}+1} + Y_1 \\
(Y_2)_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_2 Y_2 & (Y_{s_{01}+2})_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_2 Y_{s_{01}+2} + Y_2 \\
\vdots & \vdots \\
(Y_{s_{01}})_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_{s_{01}} Y_{s_{01}} & (Y_{s_{01}+s_{02}})_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_{s_{02}} Y_{s_{01}+s_{02}} + Y_{s_{02}} \\
(Y_{s_{01}+s_{02}+1})_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_1 Y_{s_{01}+s_{02}+1} + Y_{s_{01}+1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(Y_{s_{01}+s_{02}+2})_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_2 Y_{s_{01}+s_{02}+2} + Y_{s_{01}+2} & (Y_{r_1-s_{0i_0-1}+1})_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_1 Y_{r_1-s_{0i_0-1}+1} + Y_{r_1-s_{0i_0-1}-s_{0i_0-2}+1} \\
 & (Y_{r_1-s_{0i_0-1}+2})_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_2 Y_{r_1-s_{0i_0-1}+2} + Y_{r_1-s_{0i_0-1}-s_{0i_0-2}+2} \\
\vdots & \vdots \\
(Y_{s_{01}+s_{02}+s_{03}})_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_{s_{03}} Y_{s_{01}+s_{02}+s_{03}} + Y_{s_{01}+s_{03}} & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (Y_{r_1})_{\lambda_1\mu_1} = \Omega_{s_{0i_0-1}} Y_{r_1} + Y_{r_1-s_{0i_0-2}}
\end{array} \right.$$

wo

$$s_{01} \geqq s_{02} \geqq s_{03} \ldots \geqq s_{0,\, i_0-1} \geqq s_{0 i_0}$$

ist, und mehrere von den Grössen Ω einander gleich sein können. Neben dieser Eigenschaft hat jede der Functionen Y_σ die folgende

$$A_1 \qquad (Y_\sigma)_{\lambda\mu} = \omega Y_\sigma.$$

Mit Anwendung der oben genannten Coefficienten $C_{11}, C_{12}, \ldots C_{rr}$ bilde ich folgende Functionen

$$\begin{aligned}
Y_{r_1+\sigma_1} &= C_{\sigma_1, 1}\, y_2 + C_{\sigma_1, 2}\, y_{m_1+2} + \cdots + C_{\sigma_1 r_2}\, y_{m_{r_2}-1+2} \qquad (\sigma_1 = 1, 2, \ldots r_2) \\
Y_{r_1+r_2+\sigma_2} &= C_{\sigma_2, 1}\, y_3 + C_{\sigma_2, 2}\, y_{m_1+3} + \cdots + C_{\sigma_2, r_3}\, y_{m_{r_3}-1+3} \qquad (\sigma_2 = 1, 2, \ldots r_3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Y_{r_1+r_3+\ldots+r_{m_1-1}+\sigma_{m_1-1}} &= C_{\sigma_{m_1-1}, 1}\, y_{m_1} + C_{\sigma_{m_1-1}, 2}\, y_{2m_1} + \cdots + C_{\sigma_{m_1-1}, r_{m_1}}\, y_{r_{m_1}+m_1} \\
&\qquad\qquad (\sigma_{m_1-1} = 1, 2 \ldots r_{m_1}).
\end{aligned}$$

Diese neuen Functionen, welche in dem vorhandenen Fundamentalsysteme von Integralen die zweiten, dritten u. s. w. Glieder der betrachteten Classe ersetzen können, haben die Eigenschaft

$$A_2 \left\{ \begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l}
(Y_{R_\nu+1})_{\lambda\mu} = \omega Y_{R_\nu+1} + Y_{R_{\nu-1}+1} \\
(Y_{R_\nu+2})_{\lambda\mu} = \omega Y_{R_\nu+2} + Y_{R_{\nu-1}+2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(Y_{R_\nu+s_{\nu,1}})_{\lambda\mu} = \omega Y_{R_\nu+s_{\nu,1}} + Y_{R_{\nu-1}+s_{\nu,1}}
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
(Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+1})_{\lambda\mu} = \omega Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+1} + Y_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,1}+1} \\
(Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+2})_{\lambda\mu} = \omega Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+2} + Y_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,1}+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+s_{\nu,2}})_{\lambda\mu} = \omega Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+s_{\nu,2}} + Y_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,1}+s_{\nu,2}}
\end{array} \right. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(Y_{R_\nu+s_{\nu,\tau_\nu}+\varrho_\nu})_{\lambda\mu} = \omega Y_{R_\nu+s_{\nu,\tau_\nu}+\varrho_\nu} + Y_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,\tau_\nu}+\varrho_\nu} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \right.$$

$$B_2 \left\{ \begin{array}{l}
(Y_{R_\nu+1})_{\lambda_1 \mu_1} = \Omega_1 Y_{R_\nu+1} + L_{R_\nu+1}\,(Y_1,\ Y_2, \dots Y_{R_\nu}) \\
(Y_{R_\nu+2})_{\lambda_1 \mu_1} = \Omega_2 Y_{R_\nu+2} + L_{R_\nu+2}\,(Y_1,\ Y_2, \dots Y_{R_\nu}) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(Y_{R_\nu+s_{\nu,1}})_{\lambda_1 \mu_1} = \Omega_{s_{\nu,1}} Y_{R_\nu+s_{\nu,1}} + L_{R_\nu+s_{\nu,1}}(Y_1,\ Y_2, \dots Y_{R_\nu}) \\
(Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+1})_{\lambda_1 \mu_1} = \Omega_1 Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+1} + Y_{R_\nu+1} + L_{R_\nu+s_{\nu,1}+1} \\
(Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+2})_{\lambda_1 \mu_1} = \Omega_2 Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+2} + Y_{R_\nu+2} + L_{R_\nu+s_{\nu,1}+2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+s_{\nu,2}})_{\lambda_1 \mu_1} = \Omega_{s_{\nu,2}} Y_{R_\nu+s_{\nu,1}+s_{\nu,2}} + Y_{R_\nu+s_{\nu,2}} + L_{R_\nu+s_{\nu,1}+s_{\nu,2}} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(Y_{R_\nu+S_{\nu,\tau_\nu}+\varrho_\nu})_{\lambda_1 \mu_1} = \Omega_{\varrho_\nu} Y_{R_\nu+S_{\nu,\tau_\nu}+\varrho_\nu} + Y_{R_\nu+S_{\nu,\tau_\nu-1}+\varrho_\nu} + L_{R_\nu+S_{\nu,\tau_\nu}+\varrho_\nu} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \nu = 1, 2 \dots m_1 - 1 \qquad \tau_\nu = 1, 2 \dots i_\nu - 1 \qquad \varrho_\nu = 1, 2 \dots s_{\nu, \tau_\nu+1} \\ R_\nu = r_1 + r_2 + \dots + r_\nu \qquad S_{\nu,\tau_\nu} = s_{\nu,1} + s_{\nu,2} + \dots + s_{\nu,\tau_\nu} \end{pmatrix}.$$

Die Bedeutung der Bezeichnungen $r_\nu, i_\nu, s_{\nu,\tau_\nu}$ ist im nächsten § zu finden.

In diesen Formeln bezeichne ich mit $L_{R_\nu+S_{\nu,\tau_\nu}+\varrho_\nu}$ lineare und homogene algebraische Functionen von

$$Y_1,\ Y_2, \dots Y_{R_\nu},$$

welche laut § 7 so beschaffen sind, dass wenn ich

$$\begin{aligned}
L_a = {} & l_{a,1,1}[Y_1, Y_2, \cdots Y_{s_{01}}] + l_{a,1,2}[Y_{s_{01}+1}, \cdots Y_{s_{01}+s_{02}}] + \cdots + l_{a,1,i_0}[Y_{S_{0,i_0-1}+1}, \cdots Y_{S_{0,i_0}}] + \\
& l_{a,2,1}[Y_{R_1+1}, Y_{R_1+2}, \cdots Y_{R_1+s_{11}}] + l_{a,2,2}[Y_{R_1+s_{11}+1}, \cdots Y_{R_1+s_{11}+s_{12}}] + \cdots \\
& \qquad + l_{a,1,i_1}[Y_{R_1+S_{1,i_1-1}+1}, \cdots Y_{R_1+S_{1 i_1}}] + \\
& l_{a,\nu,1}[Y_{R_{\nu-1}+1} Y_{R_{\nu-1}+2} \cdots Y_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,1}}] + l_{a,\nu,2}[Y_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,1}+1} \cdots Y_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,2}}] + \\
& \qquad \cdots + l_{a,\nu,i_\nu}\left[Y_{R_{\nu+1}+S_{\nu-1,i_\nu-1}+1} \cdots Y_{R_{\nu-1}+S_{\nu-1,i_\nu}}\right]
\end{aligned}$$

$a = R_\nu + S_{\nu,\tau_\nu} + \varrho_\nu$

schreibe, so sind

$$l_{R_\nu+s_{\nu,\tau_\nu}+\varrho_\nu,\sigma+1,\gamma}[Y_{R_\sigma+s_{\sigma,\gamma-1}+1}, Y_{R_\sigma+s_{\sigma,\gamma-1}+2}\cdots Y_{R_\sigma+s_{\sigma,\gamma}}] =$$

$$l_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,\tau_\nu}+\varrho_\nu,\sigma,\gamma}[Y_{R_\sigma+s_{\sigma,\gamma-1}+1}, Y_{R_\sigma+s_{\sigma,\gamma-1}+2}\cdots Y_{R_\sigma+s_{\sigma,\gamma}}] \equiv$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \equiv$$

$$l_{R_{\nu-\sigma}+s_{\nu-\sigma,\tau_\nu}+\varrho_\nu,1,\gamma}[Y_{R_\sigma+s_{\sigma,\gamma-1}+1}, Y_{R_\sigma+\varrho_{\sigma,\gamma-1}+2} Y_{R_\sigma+s_{\sigma,\gamma}}].$$

Diese Identitäten sind in derselben Art zu verstehen wie diejenigen des § 7.

Schreibe ich nun $l_{a,\gamma}$ statt $l_{a,1,\gamma}$ ist also

$$L_{R_\nu+s_{\nu,\tau_\nu}+\varrho_\nu} = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=i_0} l_{R_\nu+s_{\nu,\tau_\nu}+\varrho_\nu,\gamma}[Y_{s_{0,\gamma-1}+1}, Y_{s_{0,\gamma-1}+2}\cdots Y_{s_{0,\gamma}}] +$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=i_1} l_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,\tau_\nu}+\varrho_\nu,\gamma}[Y_{R_1+s_{1,\gamma-1}+1}, Y_{R_1+s_{1,\gamma-1}+2}\cdots Y_{R_1+s_{1,\gamma}}] +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=i_\sigma} l_{R_{\nu-\sigma}+s_{\nu-\sigma,\tau_\nu}+\varrho_\nu,\gamma}[Y_{R_\sigma+s_{\sigma,\gamma-1}+1}, Y_{R_\sigma+s_{\sigma,\gamma-1}+2}\cdots Y_{R_\sigma+s_{\sigma,\gamma}}] +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=i_{\nu-1}} l_{R_1+s_{1,\tau_\nu}+\varrho_\nu,\gamma}[Y_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,\gamma-1}+1}, Y_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,\gamma-1}+2}\cdots Y_{R_{\nu-1}+s_{\nu-1,\gamma}}].$$

Ausserdem ist es möglich jedes $Y_{R_\nu+\varrho}$, wo $\nu \geqq 1$ ist, durch eine Function von dem Aussehen

$$Y_{R_\nu+\varrho} + C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \cdots + C_{R_{\nu-1}} Y_{R_{\nu-1}};$$

in dem Fundamentalsystem $Y_1, Y_2 \cdots Y_n$ zu ersetzen, welche ausser den oben angegebenen Eigenschaften der Function $Y_{R_\nu+\varrho}$ noch diejenige hat, dass die lineare Function, welche $L_{R_\nu+\varrho}$ entspricht, nur solche Elemente enthält, bei denen die Grösse Ω gleich derjenigen der Function $Y_{R_\nu+\varrho}$ ist.

9. Ich werde nun die Bedeutung der Benennung „Classe" etwas einschränken, indem ich jede Classe nur aus solchen Elementen bestehen lasse, bei denen nicht nur die Grösse ω sondern auch die Grösse Ω dieselbe ist.

Nach dem soeben Gesagten folgt nun, dass die Elemente eines gewissen Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung II (§ 1), wenn sie sämmtlich der im Anfange des § 4 aufgestellten Bedingung Genüge leisten, in Classen zerfallen, deren Glieder die Eigenschaften A_1, A_2, B_1, B_2 des § 8 besitzen, wenn in B_1 und B_2

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \cdots \Omega_{s_{01}} = \Omega$$

gesetzt wird. Die Grössen ω, Ω werde ich die *multiplicirenden Factoren der betreffenden Classe* nennen.

Jede Classe zerfällt in Gruppen, welche so beschaffen sind, dass wenn Y ein Element der α:ten Gruppe ist, so ist

$$(Y)_{\lambda\mu} = \omega Y + y,$$

wo y ein gewisses Glied der $(\alpha - 1)$:ten Gruppe ist. Wenn $\alpha = 1$ ist, verschwindet y,

Ausserdem zerfällt jede Gruppe in Untergruppen, welche die Eigenschaft haben, dass wenn Y ein Element der zur α:ten Gruppe gehörenden β:ten Untergruppe ist, so geht es bei dem $\lambda_1\,\mu_1$-Umlaufe in

$$(Y)_{\lambda_1\,\mu_1} = \Omega Y + y + L$$

über, wo y ein gewisses Glied der zur $(\alpha - 1)$:ten Gruppe gehörenden β:ten Untergruppe und L eine lineare und homogene algebraische Function der Elemente aller die α:te vorangehenden Gruppen der betreffenden Classe sind.

Die im § 8 betrachtete Classe von R_{m_1} Elementen zerfällt in m_1 Gruppen von resp. $r_1, r_2, \cdots r_{m_1}$ Elementen, die erste dieser Gruppen in i_0 Untergruppen von resp. $s_{01}, s_{02}, \cdots s_{0i_0}$ Elementen, die zweite in i_1 Untergruppen von $s_{11}, s_{12} \cdots s_{1i_1}$ Elementen u. s. w. Hierbei ist

$$\begin{array}{ll} r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_{m_1} & i_0 \geqq i_1 \geqq \cdots \geqq i_{m_1 - 1} \\ s_{01} \geqq s_{11} \geqq \cdots \geqq s_{i_{m_1 - 1}} & s_{01} \geqq s_{02} \geqq \cdots \geqq s_{0 i_0} \\ s_{02} \geqq s_{12} \geqq \cdots \geqq s_{i_{m_1 - 1, 2}} & s_{11} \geqq s_{12} \geqq \cdots \geqq s_{1 i_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$$r_1 = S_{0, i_0}, \ r_2 = S_{1, i_1}, \cdots r_{m_1} = S_{m_1 - 1, i_{m_1 - 1}}.$$

Die Gruppirung der Elemente in Classen ist im Allgemeinen verschieden bei verschiedenen Werthen der Grössen $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$. Um die Umläufe anzugeben, welche die Aufstellung der obigen Classe bedingen, werde ich diese die $(\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1)$-Classe benennen.

10. Wie leicht ersichtlich, kann ich den Eigenschaften B_1 und B_2 eine der im § 4 zur Anwendung kommende ähnliche Form geben, indem ich

$$C \qquad \begin{cases} (Y_1)_{\lambda_1 \mu_1} = \Omega Y_1 \\ (Y_2)_{\lambda_1 \mu_1} = \Omega Y_2 + L_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (Y_\sigma)_{\lambda_1 \mu_1} = \Omega Y_\sigma + L_\sigma \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (Y_{R_{m_1}})_{\lambda_1 \mu_1} = \Omega Y_{R_{m_1}} + L_{R_{m_1}} \end{cases}$$

schreibe, wo

$$L_{R_\nu + S_{\nu, \tau_\nu} + \varrho_\nu} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu-1} \cdot \sum_{\gamma=1}^{\gamma=i_\sigma} l_{R_{\nu-\sigma} + S_{\nu-\sigma, \tau_\nu} + \varrho_\nu, \gamma} \left[Y_{R_\sigma + S_{\sigma, \gamma-1} + 1} \; Y_{R_\sigma + S_{\sigma, \gamma-1} + 2} \cdots Y_{R_\sigma + S_{\sigma, \gamma}} \right] +$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=\tau_\nu} l_{S_{0, \tau_\nu} + \varrho_\nu, \gamma} \left[Y_{R_\nu + S_{\nu, \gamma-1} + \varrho_\nu} \right]$$

ist.

Da

$$\left((Y)_{\lambda_1 \mu_1} \right)_{\mu_1 \lambda_1} = Y$$

ist, und ausserdem aus $\left((Y)_{\lambda \mu} \right)_{\lambda_1 \mu_1} = \left((Y)_{\lambda_1 \mu_1} \right)_{\lambda \mu}$

$$\left((Y)_{\lambda \mu} \right)_{\mu_1 \lambda_1} = \left((Y)_{\mu_1 \lambda_1} \right)_{\lambda \mu}$$

folgt, so geht jedes zur obigen Classe gehörende Element Y_σ bei dem $\mu_1 \lambda_1$-Umlaufe in eine lineare Function von den Grössen $Y_1, Y_2, \cdots Y_{\sigma-1}$ über, welche die Eigenschaften der Function $(Y)_{\lambda_1 \mu_1}$ hat, wodurch ersichtlich wird, dass die $(\lambda, \mu, \mu_1, \lambda_1)$-Classe nicht nur dieselben Elemente enthält, sondern auch in dieselben Gruppen und Untergruppen zerfällt, wie die $(\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1)$-Classe, also mit dieser identisch ist.

11. Wenn $\lambda \gtreqless \mu$, $\lambda_1 \gtreqless \mu_1$ und nicht gleichzeitig entweder $\lambda = \lambda_1$ und $\mu = \mu_1$ oder $\lambda = \mu_1$ und $\mu = \lambda_1$ ist, so nicht nur umfasst jede $(\lambda, \mu, \lambda_2, \mu_2)$-Classe, bei der $\lambda_2 \gtreqless \mu_2$ ist, dieselben Elemente wie die $(\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1)$-Classe und keine andern, sondern die Reihenfolge und Gruppirung ihrer Elemente sind auch dieselben wie in dieser Classe, d. h. die beiden Classen sind identisch.

Dieses folgt unmittelbar aus der Thatsache, dass man den $\lambda\mu$-Umlauf $(Y)_{\lambda\mu}$ durch eins der vier Paare von Umläufen

$$\left((Y)_{\lambda_1, \mu_1}\right)_{\lambda_2, \mu_2} \quad \left((Y)_{\lambda_1, \mu_1}\right)_{\mu_2, \lambda_2}$$

$$\left((Y)_{\mu_1, \lambda_1}\right)_{\lambda_2, \mu_2} \quad \left((Y)_{\lambda_1, \mu_1}\right)_{\lambda_2, \mu_2}$$

ersetzen kann und folglich auch

$$\left((Y)_{\lambda, \mu}\right)_{\lambda_2 \mu_2} = \left((Y)_{\lambda_2 \mu_2}\right)_{\lambda\mu}$$

ist.

Es ist also die Eintheilung der Elemente in Classen, Gruppen und Untergruppen vollständig bestimmt durch den λ, μ-Umlauf allein, wenn $\lambda \gtreqless \mu$ ist, und bin ich folglich berechtigt den Namen $(\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1)$-Classe gegen die einfachere Benennung $\lambda\mu$-Classe zu vertauschen.

Die drei multiplicirenden Factoren ω, Ω und Ω' jeder $\lambda\mu$-Classe haben die Eigenschaft

$$\omega = \Omega\Omega'.$$

Hierdurch wird der dritte Factor Ω' als derjenige bestimmt, welcher bei dem Umlaufe $(Y)_{\lambda_2 \mu_2}$ auftritt, wenn

$$(Y)_{\lambda\mu} = \left((Y)_{\lambda_1 \mu_1}\right)_{\lambda_2 \mu_2}$$

ist.

12. Im § 1 habe ich durch die Substitution

$$z = p(x)$$

die Differentialgleichung I in eine andere II verwandelt, deren Integrale ich in ihrem Verhalten bei dem Gange der Veränderlichen z um je zwei der Punkte e_1, e_2 und e_3 soeben untersucht habe und zwar für den Fall, dass sie sämmtlich der Bedingung

$$\left((Y)_{\lambda\mu}\right)_{\lambda_1 \mu_1} = \left((Y)_{\lambda_1 \mu_1}\right)_{\lambda\mu}$$

genügen. Um die gewonnenen Resultate auf das Verhalten der Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung anwenden zu können ist es nöthig nachzusehen, wie sich die Veränderliche x bei diesem Umlaufe verhält.

Aus $z = p(x)$ folgt

$$x = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}};$$

der dem Anfangswerthe z_0 der Veränderlichen z entsprechende Aufangswerth der Grösse x sei x_0. Da die Quadratwurzel ihr Vorzeichen bei jedem Umlaufe der Veränderlichen z um einen, e_λ der Punkte e_1, e_2 und e_3 wechselt, geht x, wenn z nach einem solchen Umlauf nach z_0 zurückkehrt, in $x_0 + 2a_\lambda$ über, wobei

$$a_\lambda = \int_{z_0}^{e_\lambda} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

ist. Beschreibt z einen Umlauf um noch einen Punkt e_μ, geht x in $x_0 + 2a_\lambda - 2a_\mu$ über. Wenn folglich von zwei Wegen zwischen z_0 und z, welche zwei, nämlich e_λ und e_μ, von den Punkten e_1, e_2 und e_3 umschliessen, der eine zum Werthe x führt, so entspricht dem zweiten der Werth $x + 2a_\lambda - 2a_\mu$ oder, da

$$a_\lambda = \omega_\lambda - x_0$$

ist,

$$x + 2\omega_\lambda - 2\omega_\mu,$$

wo $2\omega_1$ und $2\omega_3$ die beiden Fundamentalperioden 2ω und $2\omega'$ der Function $p(x)$, und $2\omega_2$ ihre Summe, $2\omega + 2\omega'$, darstellen.

Da ausserdem jedem eindeutigem Integrale der Differentialgleichung I, ein Integral Y der Gleichung II entspricht, welches die Eigenschaft

$$\left((Y)_{\lambda\mu}\right)_{\lambda_1\mu_1} = \left((Y)_{\lambda_1\mu_1}\right)_{\lambda\mu}$$

besitzt, und es, wenn die erstere Gleichung nur m von einander linear unabhängige, eindeutige Integrale hat, mir immer möglich ist eine lineare und homogene Differentialgleichung m:ter Ordnung aufzustellen, welche von diesen m Functionen integrirt wird, und deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen mit den Fundamentalperioden 2ω und $2\omega'$ sind, so ziehe ich aus der vorhergehenden Untersuchung den folgenden Schluss:

Wenn eine lineare und homogene Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten, deren Fundamentalperioden 2ω und $2\omega'$ sind, nur m von einander linear unabhängige eindeutige Integrale hat, so hat sie auch m von einander linear unabhängige eindeutige Integrale

$$Y_1 = F_1(x),\ \ Y_2 = F_2(x), \cdots Y_m = F_m(x),$$

welche sich derart in Classen, Gruppen und Untergruppen eintheilen lassen, dass, wenn in der Tabelle

$$
\left|\begin{array}{lllll}
\left\{\begin{array}{l} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{S_{01}} \end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l} Y_{R_1+1} \\ Y_{R_1+2} \\ \vdots \\ Y_{R_1+S_{11}} \end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l} Y_{R_2+1} \\ Y_{R_2+2} \\ \vdots \\ Y_{R_2+S_{21}} \end{array}\right. &
\begin{array}{l} \cdots \\ \cdots \end{array} &
\left\{\begin{array}{l} Y_{R_{m_1-1}+1} \\ Y_{R_{m_1-1}+2} \\ \vdots \\ Y_{R_{m_1-1}+S_{m_1-1,1}} \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} Y_{S_{01}+1} \\ Y_{S_{01}+2} \\ \vdots \\ Y_{S_{02}} \end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l} Y_{R_1+S_{11}+1} \\ Y_{R_1+S_{11}+2} \\ \vdots \\ Y_{R_1+S_{12}} \end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l} Y_{R_2+S_{21}+1} \\ Y_{R_2+S_{21}+2} \\ \vdots \\ Y_{R_1+S_{22}} \end{array}\right. &
\begin{array}{l} \cdots \\ \cdots \end{array} &
\left\{\begin{array}{l} Y_{R_{m_1-1}+S_{m_1-1,1}+1} \\ Y_{R_{m_1-1}+S_{m_1-1,1}+2} \\ \vdots \\ Y_{R_{m_1-1}+S_{m_1-1,2}} \end{array}\right. \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \left\{\begin{array}{l} Y_{R_{m_1-1}+S_{m_1-1,i_{m_1-1}}+1} \\ Y_{R_{m_1-1}+S_{m_1-1,i_{m_1-1}}+2} \\ \vdots \\ Y_{R_{m_1}} \end{array}\right. \\
\vdots & \vdots & \left\{\begin{array}{l} Y_{R_2+S_{2,i_2-1}+1} \\ Y_{R_2+S_{3,i_2-1}+1} \\ \vdots \\ Y_{R_3} \end{array}\right. & & \\
\vdots & \left\{\begin{array}{l} Y_{R_1+S_{1,i_1-1}+1} \\ Y_{R_1+S_{1,i_1-1}+1} \\ \vdots \\ Y_{R_2} \end{array}\right. & & & \\
\left\{\begin{array}{l} Y_{S_{0,i_0-1}+1} \\ Y_{S_{0,i_0-1}+2} \\ \vdots \\ Y_{R_1} \end{array}\right. & & & &
\end{array}\right.
$$

die sämmtlichen Elemente einer solchen Classe in der Art geordnet sind, dass jede Columne eine Gruppe und jede durch eine Klammer begrenzte Folge von Elementen eine Untergruppe darstellt, so hat jedes Element der ersten Gruppe

$$Y_{S_{0},\tau_0+\varrho_0}=F_{S_{0},\tau_0+\varrho_0}(x)$$

die Eigenschaft:

$$F_{S_{0},\tau_0+\varrho_0}(x+2\omega_\lambda)=\Omega_\lambda F_{S_{0},\tau_0+\varrho_0}(x)$$

$$F_{S_{0},\tau_0+\varrho_0}(x+2\omega_\mu)=\Omega_\mu F_{S_{0},\tau_0+\varrho_0}(x)+F_{S_{0},\tau_0-1+\varrho_0}(x)$$

$$F_{S_{0},\tau_0+\varrho_0}(x+2\omega_\nu)=\Omega_\nu F_{S_{0},\tau_0+\varrho_0}(x)+\sum_{\gamma=0}^{\gamma=\tau_0+1}C_{S_{0},\tau_0+\varrho_0\,\gamma}F_{S_{0},\gamma+\varrho_0}(x)$$

und jedes Element der $(\alpha+1)$*:ten Gruppe*

$$Y_{R_\alpha+S_{\alpha,\tau_\alpha}+\varrho_\alpha}=F_{R_\alpha+S_{\alpha,\tau_\alpha}+\varrho_\alpha}(x)\qquad\left(\varrho_\alpha=1,2,\ldots S_{\alpha,\tau_\alpha+1}-S_{\alpha,\tau_\alpha}\right),$$

wobei $\alpha=1,2,\ldots m_1-1$ *sein kann, die Eigenschaft*

$$F_{R_\alpha+S_{\alpha,\tau_\alpha}+\varrho_\alpha}(x+2\omega_\lambda)=\Omega_\lambda F_{R_\alpha+S_{\alpha,\tau_\alpha}+\varrho_\alpha}(x)+F_{R_{\alpha-1}+S_{\alpha-1,\tau_\alpha}+\varrho_\alpha}(x)$$

$$F_{R_\alpha+S_{\nu,\tau_\alpha}+\varrho_\alpha}(x+2\omega_\mu)=\Omega_\mu F_{R_\alpha+S_{\alpha,\tau_\alpha}+\varrho_\alpha}(x)+F_{R_\alpha+S_{\alpha,\tau_\alpha-1}+\varrho_\alpha}(x)+$$

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\alpha-1}\sum_{\gamma=1}^{\gamma=i_\sigma}l_{R_{\alpha-\sigma}+S_{\alpha-\sigma,\tau_\alpha}+\varrho_\alpha,\gamma}\left(F_{R_\sigma+S_{\sigma,\gamma-1}+1}(x),\ F_{R_\sigma+S_{0,\gamma-1}+2}(x),\ldots F_{R_\sigma+S_{\sigma,\gamma}}(x)\right)$$

$$F_{R_\alpha+S_{\alpha,\tau_\alpha}+\varrho_\alpha}(x+2\omega_\nu)=\Omega_\nu F_{R_\alpha+S_{\alpha,\tau_\alpha}+\varrho_\alpha}(x)+\sum_{\gamma=0}^{\gamma=\tau_\alpha-1}C_{S_{0},\tau_\alpha+\varrho_\alpha,\gamma}F_{B_\alpha+S_{\alpha,\gamma}+\varrho_\alpha}(x)+$$

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\alpha-1}\sum_{\gamma=1}^{\gamma=i_\sigma}l_{R_{\alpha-\sigma}+S_{\alpha-\sigma,\tau_\alpha}+\varrho_\alpha,\gamma}\left(F_{R_\sigma+S_{\sigma,\gamma-1}+1}(x),\ F_{R_\sigma+S_{\sigma,\gamma-1}+2}(x),\ldots F_{R_\sigma+S_{\sigma,\gamma}}(x)\right).$$

Hierbei stellen λ, μ und ν die Zahlen 1, 2 und 3 in einer beliebigen Reihenfolge dar.

Die Anzahl der Elemente und diejenige der Untergruppen einer Gruppe sind nie grösser als die entsprechenden Zahlen der vorhergehenden Gruppe in derselben Classe, und die Anzahl der Elemente einer Untergruppe ist nie grösser als diejenige der vorhergehenden zur selben Gruppe gehörigen Untergruppe oder als die Anzahl der Elemente der zur vorhergehenden Gruppe gehörigen entsprechenden Untergruppe. In der oben angeführten Tabelle ist also

$$R_\alpha - R_{\alpha-1} \geqq R_{\alpha+1} - R_\alpha$$

$$i_{\alpha-1} \geqq i_\alpha$$

$$S_{\alpha,\tau_\alpha} - S_{\alpha,\tau_\alpha-1} \geqq S_{\alpha,\tau_\alpha+1} - S_{\alpha.\tau_\alpha}$$

$$S_{\alpha-1,\tau_{\alpha-1}} - S_{\alpha-1,\tau_{\alpha-1}-1} \geqq S_{\alpha,\tau_{\alpha-1}} - S_{\alpha,\tau_{\alpha-1}-1}.$$

Sämmtliche Elemente derselben Classe haben dieselben multiplicirenden Factoren Ω_1, Ω_2 und Ω_3, dagegen können zwei zu verschiedenen Classen gehörige Elemente höchstens *einen* dieser Factoren gemeinsam haben.

Wenn $\lambda = 2$ und somit μ, ν eine Permutation von 1 und 3 ist erhalte ich

$$\Omega_\nu = \frac{\Omega_1}{\Omega_\mu}$$

$$C_{s_{0\tau_\alpha}+\varrho_\alpha,\tau_\alpha-1} = -\frac{\Omega_\nu}{\Omega_\mu} = -\frac{\Omega_1}{\Omega_\mu^2}$$

. . . .

$$C_{s_{0\tau_\alpha}+\varrho_\alpha,\tau-\varphi} = (-1)^\varphi \frac{\Omega_1}{\Omega_\mu{}^{\varphi+1}} \quad (\varphi = 1, 2, \ldots \tau_\alpha).$$

ICONES SELECTAE
HYMENOMYCETUM FENNIAE
NONDUM DELINEATORUM

EDITAE

SUB AUSPICIIS SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICAE

CURA

P. A. KARSTEN

SOCIETATIS MEMBRI.

FASCICULUS SECUNDUS.

TAB. X—

(SOCIETATI EXHIBITAE DIE 20. DEC. 1886).

XXXI. **Clitocybe puellula** Karst.

Myc. Fenn. III, p. 52. Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 65.

Pileus carnosus, convexo-planus, subumbonatus, interdum demum subinfundibuliformis, laevis, glaber, candidus, 2—5 cm. latus, margine patente, excedente. Stipes subaequalis, strictus, elasticus, basi subincrassatus, albus, floccis minutis fuscis vel nigricantibus squamulosus, 5—6 cm. longus. Lamellae adnoto-decurrentes, confertae, albae vel albidae. Sporae ellipsoideae, longit. 9—12 mmm., crassit. 4—7 mmm.

Hab. ad margines fossarum et paludum in paroccia Tammela haud nimis raro, m. Aug. et Sept.

Cl. tornatae maxime affinis. — Basidia clavata, crassit. 7—9 mmm.

XXXII. **Mycena amicta** Fr. v. **leucopsis** Karst.

Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 549.

Pileus membranaceus, conico-campanulatus, demum expansus, interdum subumbonatus, vulgo cernuus, fere totus pellucide striatus, glaber, albus, dein pallescens vel subinde lutescente albus, 6—9 mm. latus. Stipes filiformis, subaequalis, tenax, radicatus, ex albido fuscescens, interdum in caesium vergens, totus puberulo-pruinosus, radice subtorta tomentella vel demum glabra, superne 1, inferne 2 mm. crassus. Lamellae subadnatae, confertae, lineares, persistenter albae.

Hab. inter ramenta lignea ad Näkiä in agro Mustialensi, m. Sept.

Fere solum pileo vulgo magis cernuo a *M. amicta* var. *incongruente* Britz. Hyporrh. et Leucosp., p. 147, fig. 109 discrepat. — Basidia clavata, minuta.

XXXIII. **Mycena latebricola** Karst.

Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 117.

Pileus membranaceus, e campanulato-convexo plano-convexus, disco demum depressus, livido-pallens, siccus fuscescens, glaber, striatus, 4—5 mm.

latus. Stipes filiformis, aequalis, tenax, glaber, pallidus, basi fibrillosus s. strigosulus, 1, 5—6 cm. longus, 1 mm. crassus. Lamellae (circa 30) adnato-decurrentes, distantes, albidae.

Hab. supra corticem lignumque vetustum *Pini sylvestris* locis udis suffocatis in horto Mustialensi, m. Oct.

Proxima *M. speirea* disco pilei obscuriore, stipite nitido, lamellis candidis distincta.

XXXIV. **Omphalia psilocyboides** Karst.

Myc. Fenn. III, p. 568. Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 136.

Pileus carnosulo-membranaceus, convexus, umbilicatus, glaber, fulvo-luteus, usque ad 5 cm. latus. Stipes farctus, aequalis, spadiceus, adpresse albido-fibrillosus, apice pallidior et pruinosus, 8—12 cm. longus, vix 2 mm. crassus. Lamellae rotundato-liberae, distinctae, confertiusculae, latissimae, albido-luteae.

Hab. locis graminosis humidis ad Mustiala, m. Sept.

XXXV. **Lyophyllum leucophaeatum** Karst.

Hym. Fenn. in Act. Soc. pro Faun. et Flor. Fenn. II, p. 1. Symb. ad Myc. Fenn. IX (1882), p. 39. *Collybia leucophaeata* Karst. Notis. ur Sällsk. pro Faun. et Flor. Fenn. Förh. 9 (1868) p. 336. Fr. Hym. Eur. p. 111. *Tricholoma leucophaeatum* Karst. Myc. Fenn. III, p. 44.

Pileus carnosus, sat mollis, convexo-planus, vulgo late obtuseque umbonatus, inaequalis, laevis, subinde margine remote costatus, argillaceus vel griseopallidus, demum saepe in alutaceum vergens, adpresse fibrillosus s. tomento tenui canescente obsessus, glabrescens, 6—10 cm. latus. Stipes aequalis, basi nunc attenuatus, nunc incrassatus, saepe curvatus, subinde excentricus, tenax, farctus, pallescens s. sordidus, adpresse albido-fibrilloso-sericeus, fibroso-striatus, basi saepe hirsutus, 4—8 cm. altus. Lamellae rotundato-adnexae s. liberae, confertae, postice latiores, tenues, albae vel albidae, demum sordidae vel fumoso-pallidae, usque ad 8 mm. latae. Sporae ellipsoideae, longit. 6—8 mmm., crassit. 3—4 mmm.

Hab. in dumetis humidis circa Mustiala, m. Aug.—Oct.

Caro sat mollis, pallida aquoseque variegata, fracta (praecipue lamellarum) plus minus coerulescens, mox fuliginea vel demum nigrescens. Odor et sapor nulli. Valde mutabilis, alii vix affinis. Basidia clavata, minuta.

XXXVI. **Collybia daemonica** Karst.

Myc. Fenn. III, p. 366. Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 159.

Pileus submembranaceus, e convexo planus, subumbonatus, glaber, virgatulus, margine obsolete striatus, fusco-lividus, disco obscurior, subnigricans, siccus pallidior, 5 cm. usque latus. Stipes fistulosus vel subcavus, aequalis, glaber, basi leviter incrassatus et albostrigosus, flexuosus, undulatus, fibrilloso-striatus, pallidus, apice albo-flocculosus, 6—9 cm. altus, circiter 4 mm. crassus. Lamellae adnatae, confertae, angustae, sordide s. fulgineo-pallidae, tactu nigrescentes. Sporae ellipsoideae, chlorino-hyalinae, guttulatae, longit. 8—10 mmm., crassit. 4—5 mmm.

Hab. in pineto Syrjöås ad Mustiala rarissime, autumno.

Collybiae semitali affinis, sed lamellis cinerascentibus, confertis aliisque notis differens. Pileus orbicularis, medio leviter umbonatus. Stipes interdum basin versus compressus.

XXXVII. **Collybia ignobilis** Karst.

Myc. Fenn. III, p. 368. Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 160.

Pileus carnosulo-membranaceus, planus, rarius convexulus, orbicularis, disco leviter depressus, margine patente obsolete striato, glaber, lividus, rore cano obductus, siccus canus vel pallescens, circiter 3 cm. latus. Stipes fistulosus, aequalis, basi saepe flexuosus, livido-pallens, cano- s. albido-floccoso-pruinatus, circiter 6 cm. longus, 2—4 mm. crassus. Lamellae emarginatae, pone sinum gibbosae, confertae, sordide pallentes, integerrimae. Sporae ellipsoideae, eguttulatae, hyalinae, longit. 7—8 mmm., crassit. 4 mmm.

Hab. supra acus in pineto Syrjöås ad Mustiala, m. Sept.

Odor et sapor haud notabiles. *Collybiae miserae* proxima. Basidia clavata, minuta.

XXXVIII. **Cortinarius phaeophyllus** Karst.

Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 390. Symb. ad Myc. Fenn. VII, (1881), p. 3.

Pileus subcarnosus, e convexo expansus, umbonatus, omnino laevis, e velo circa marginem primitus sericeus, glaber, aquose cinnamomeus, siccus ochraceus et nitidus, 3—5 cm. latus. Stipes e farcto cavus, rigidus, tenax, firmus, aequalis, vulgo flexuosus, leviter fibrilloso-sericeus, albidopallens, siccus in lutescentem vergens et nitidus, usque ad 10 cm. longus, 5—7 mmm. crassus. Cortina fibrillosa, lutescens, fugax. Lamellae adnatae, subdistantes, crassiusculae, ventricosae, distinctae, brunneo-cinnamomeae, margine melleo primitus subtiliter crenulatae. Sporae ellipsoideae, longit. 7—9 mmm., crassit. 4—5 mmm.

Hab. in locis graminosis, umbrosis, silvaticis prope Mustiala, m. Aug.

Inodorus. Dense gregarius. Stipes basi demum putredine umbrino-nigrescens. Lamellae primitus melleae? Caro albida, stipitis demum fuscescens,

XXXIX. **Cortinarius lucorum** Fr.

Hym. eur. p. 377. Karst. Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 366. Symb. ad Myc. Fenn. XVII (1886), p. 160.

Pileus carnosus, obtusus, rigidus, junior circa marginem sericellus, dein glabratus, badio-lateritius, non hygrophanus, carne aquosa, sicca paliescente. Stipes firmus, deorsum subclavato-incrassatus, fibrillosus, pallescens, 6 cm. longus, 1,5 cm. crassus. Lamellae adnatae, mox emarginatae, subdistantes, latae, aquose cinnamomeae, primitus cum tinctura laevi carneo-violacea. Sporae sphaeroideae vel ellipsoideo-sphaeroideae, asperulae, fulvae (sub lente), diam. 6 mmm. vel longit. 7—8 mmm., crassit. 6—7 mmm.

Hab. in horto Mustialensi, m. Oct.

A *Cortinario impenni* Fr. differt colore pilei, forma et colore stipitis nec non lamellis pallidioribus. — Basidia clavata, longit. circiter 33 mmm., crassit. 8—10 mmm.

XL. **Naucoria Tavastensis** Karst.

Myc. Fenn. III, p. 138. Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 430.

Pileus carnosus, e convexo applanatus, demum saepe disco depressus, interdum subumbonatus, sublaevis, glaber, circa marginem squamis floccosis, concentricis, albido-flavescentibus, majusculis eleganter ornatus, primo livido-lutescens, dein sordide alutaceo-fulvescens vel sordide subbadius, subhygrophanus, viscidulus?, 4—6 cm. latus. Stipes strictus, fragilis, subaequalis, apice incrassatus, solidus, fibrilloso-squamosus, pallescens, dein fuscescens, annulo lacerato, interdum submembranaceo, lutescente, fugaci, 7—9 cm. longus. La-adnatae, confertae, ex albido argillaceo-ferrugineae vel fuscescentes. Sporae ellipsoideae, fuscae, pellucidae (sub lente), longit. 15—17 mmm., crassit. 8—9 mmm.

Hab. ad margines fossarum rivulorumque in sphagneto Pellinsuo prope Mustiala, m. Sept.

Species statura et colorum intensitate admodum varia, *N. Myosotidi* Fr. manifeste affinis. Formam ejus depinxit Cook., fig. 494.

XLI. **Tubaria anthracophila** Karst.

Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 444. Symb. ad Myc. Fenn. VII (1880), p. 4.

Pileus carnosulus, e convexo expansus, irregularis, repandus, flexuosus, siccus, udus margine pellucide striatus, helvolo-vel ferrugineo - cinnamomeus, squamis albis concentricis secedentibus circa marginem ornatus, siccus expallens, 2—4 cm. latus. Stipes e farcto cavus, aequalis vel superne incrassatus, flexuosus, curvatus, interdum tortus, demum saepe compressus, ferrugineo-pallidus, albido-fibrillosus, apice subnudus, striatulusque, basi albovillosus, 2—4 cm. longus, 3—5 mmm. crassus. Lamellae adnatae, subconfertae, nunc medio, nunc postice latissimae, acie inaequales, saepe dentatae et floccoso-crenatae, primitus pallidae, tandem pileo concolores. Sporae late ellipsoideae, utrinque obtusae, pallide ferrugineae, vel incolores (sub lente), eguttulatae. longit. 6—7,5 mmm., crassit. 3—5 mmm.

Hab. ad carbones in regione Mustialensi versus lacum Salois, m. Sept.

T. furfuraceae maxime affinis, ut fingeres varietatem e loco personatam. Interea pluribus differunt notis. — Basidia cylindraceo-clavata, longit. circiter 45 mmm., crassit. (apice) 6—9 mmm.

XLII. **Inocybe trivialis** Karst.

Symb. ad Myc. Fenn. IX (1882), p. 43.

Pileus carnosus, tenuis, e conico campanulatus vel convexus, demum explanatus, vulgo depressus, obtuse umbonatus, longitudinaliter fibroso-laceratus et rimosus, disco nunc laevi, nunc lacerato-squamoso, pallescens vel murinus, in fuscoluteum vel spadiceum vergens, usque ad 5 cm. latus. Stipes solidus, aequalis, firmus, strictus vel subflexuosus, fibrillosus, dein glabrescens, apice albido-pallens subfarinaceusque, demum extus intusque obscuratus, subrufescens, ebulbis, usque ad 6 cm. altus, 3—4 mm. crassus. Lamellae adnexae vel subadnatae, confertae, ventricosae, ex albido argillaceae, demum fuscescentes, 2—3 mm. latae. Sporae ellipsoideae, saepe inaequilaterales, uniguttulatae, laeves, longit. 10—12 mmm., crassit. 4—5 mmm. Basidia clavata. Cystidia clavata, apice longe cylindracea, longit. circiter 60 mmm., crassit. 15—18 mmm.

Hab. in graminosis juxta vias circa Mustiala certis annis haud raro, m. Aug. et Sept.

Saepe caespitosa. Caro pallescente alba, inodora et insipida.

In. lacerae affinis, multis quoque notis cum *In. scabra* et *In. deglubenti* conveniens. Lamellae siccae e sporis ferrugineo-cinnamomeae.

XLIII. **Hebeloma deflectens** Karst.

Symb. ad Myc. Fenn. VI (1879), p. 28. Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I. p. 475.

Pileus carnosulus, convexo-planus. dein late depressus, laevis, rugulosus, siccus, furfuraceo-squamulosus, laete alutaceo-flavus, 2,5—3,5 cm. latus. Stipes aequalis, teres, rarissime superne compressus, fistulosus, tenax, radicans, pallidior, undique albido-furfuratus, 5—8 cm. longus, 2—3 mm. crassus. Lamellae adnatae vel subadfixae, confertae, lanceolatae, laxae, ex albido argillaceo-ochraceae, demum subfuscae vel cinnamomeae. Sporae sphaeroideo-ellipsoideae, inaequales, vulgo utroque apice acutatae, hyalinae vel flavescentes (s. l.), uniguttulatae, longit. 7—9 mmm., crassit. 5—6 mmm. Basidia clavata, minuta.

Hab. in pascuis et dumetis in regione Mustialensi et Aboënsi, m. Aug. et Sept.

Solitarium vel gregarium. Odor Raphani fortis. Velum nullum. Ad *Naucoriam* vergit.

XLIV. **Hebeloma subsaponaceum** Karst.

Symb. ad Myc. Fenn. XIII (1884), p. 3.

Pileus carnosus, convexo-planus, orbicularis, obtusus, laevis, nudus, siccus, gilvo-pallidus, siccitate subsaturatior, usque ad 3 cm. latus. Stipes e farcto cavus, elongatus, aequalis, ut plurimum leviter flexuosus, adpresse fibrillosus, apice subfarinaceus, pallescens, deorsum (praecipue tactu) umbrinus, 2—3 cm. altus, 3—4 mm. crassus. Lamellae adnatae, secedentes, confertae, aridae, acie subtilissime crenulatae, ex albido-argillaceo dilute ferrugineae, 2 mm. latae. Sporae ovoideo-oblongatae, laeves, longit. 6—10 mmm., crassit. 4—6 mmm.

Hab. inter folia in abiegno prope lacum Salois par. Tammela, m. Aug. Catervatim crescit. Sapor acerbus. Odor gravis, saponaceus.

XLV. **Agaricus sanguinarius** Karst.

Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. II, p. 232. Symb. ad Myc. Fenn. IX, (1882), p. 46.

Pileus carnosus, mollis, e campanulato exspansus, obtusus, vulgo repandus, laevis, fuscopallens, superficie in squamulas adpressas, minutas diffractus, demum squamoso-fibrilloso-laceratus, 6—7 cm. latus. Stipes medulla tenui farctus, aequalis vel deorsum incrassatus, curvatus, fragilis, sericeo-flocculosus, glabrescens, albus, annulo supero, pendulo, fixo, persistente, versus marginem extus areolato-squamoso, albo. Lamellae liberae, confertae, vix ventricosae, albae, dein roseae, demum umbrinae. Sporae ellipsoideae, flavidae (sub lente), eguttulatae, longit. 5—7 mmm., crassit. 3—4 mmm. Caro fracta illico sanguinea.

Hab. in silva Syrjöås ad Mustiala, locis arenosis stercoratisque, m. Aug. Odor et sapor fungini. Affinis *Agarico haemorrhoidario* Schulz., a quo vero abunde differt. Basidia clavata, parum notabilia, 4-sterigmica.

XLVI. **Psilocybe Gilletii** Karst.

Symb. ad Myc. Fenn. VI (1879), p. 32. Ryssl., Finl. o. Skand. Hatts. I, p. 509.

Pileus membranaceus, campanulato-convexus, saepe oblique umbonatus, striatus, glaber, ciereo-lividus, leviter in olivaceum vergens, umbone fulvescente, coelo sereno ochreo-pallens, circiter 1,5 cm. latus. Stipes fistulosus, strictus, aequalis, glaber, apice pruinellus, spadiceus, superne pallidior, circiter 5 cm. altus et 1 mm. crassus. Lamellae subadnatae, mox liberae, e cinereo-lividopurpurascentes. Sporae ellipsoideae, dilutissime fuscidulae et diaphanae (sub lente), longit. 10—13 mmm., crassit. 5—6 mmm., 1—2 guttulatae. Basidia clavata, minuta, 4-sterigmica.

Hab. supra terram humidam juxta viam in silva Haarankorpi haud procul a Mustala, m. Sept.

XLVII. **Psilocybe simulans** Karst.

Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 508. Symb. ad Myc. Fenn. VII (1880), p. 5.

Pileus submembranaceus, e conico-convexo expansus, vulgo obtuse umbonatus, glaber, aquose ferrugineus, margine pallidiore, in melleum vergente, pellucide striatulo, primitus incurvo, siccus luteo-fulvus, circ. 1 cm. latus. Stipes fistulosus, tenax, flexilis, aequalis, flexuosus, curvatus, adscendens, laevis, glaberrimus, nudus, sublubricus, nitens, spadiceus, apice pallidior, 2—3 cm. longus, circiter 1 mm. crassus. Lamellae adfixae, secedentes, confertae, semicirculares, ex albido melleae, in cinerascentem vel obsolete olivaceum vergentes, demum subcinereae. Sporae ovoideae, pellucidae (sub lente), longit. 4—6 mmm., crassit. circiter 3 mmm. Basidia 4-sterigmica.

Hab. ad ligna vetusta, loco uliginoso jacentia muscisque obtecta in Taipalmaa prope Mustiala, m. Sept.

Analogiam cum *Omphalia campanella* praebet.

XLVIII. **Psathyrella squamifera** Karst.

Symb. ad Myc. Fenn. X (1882), p. 60.

Pileus carnosus, tenuis, margine membranaceus, campanulatus, obtusus, ad medium pellucide striatus, rugulosus, squamis fibrillosis, albis, sparsis ornatus, livido-fuscus, siccus alutaceo-pallescens, 1,5 cm. altus, 2 cm. latus. Stipes e farcto cavus, aequalis, strictus vel flexuosus, sericeus, apice leviter pruinoso-flocculosus, glabrescens, pallidus, basi obliqua strigoso-radicatus, 10 cm. longus, 2 mm. crassus. Lamellae adnatae, subdistantes, lineares, unicolores, e dilute cinereo fuscescentes, 2 mm. latae. Sporae ellipsoideae, atrae, longit. 11—13 mmm., crassit. circiter 6 mmm. Basidia clavata, apice inflata, longit. circiter 21 mmm., crassit. 6—10 mmm. Cystidia fusoidea, longit. circiter 45 mmm., crassit. 9 mmm.

Hab. ad frustula ramorum putrescentia inter muscos in locis silvaticis, humidis umbrosisque, ad Mustiala, m. Sept.

A *Psathyrella gracili* Fr., qua statura convenit, velo evidentiore, stipite sericeo, lamellis unicoloribus etc. recedit.

XLIX. **Lentinus domesticus** Karst.
Revue mycologique, Janv. 1887, p. 9.

Pileus carnosus, lentus, margine tenuis, subinfundibuliformis, obliquus, irregularis, cuticula in squamas adpressas vel revolutas, subobscuriores diffractus, ferrugineus, intus dilutior, fulvo-ferruginascens, circiter 18 cm. latus. Stipes excentricus, deorsum attenuatus, curvatus, solidus, ferruginascens, squamis sparsis innatis obsessus, basi intus albidus, circiter 9 cm. longus et 3 cm. crassus. Lamellae longe decurrentes, subconfertae, dentatae, utrinque aequaliter attenuatae, usque ad 3 cm. latae, dilute fulvo-ferruginascentes, demum leviter in carneum vel sanguineum vergentes. Sporae ovideae, hyalinae, longit. 3—5 mmm., crassit. 2—3 mmm. Basidia 4-sterigmica. Cystidia nulla.

Hab. in tabulamento in infectoris officina Wiksberg, m. Jul. Unicum tantum specimen lectum.

L. **Coprinus lagopides** Karst.
Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 535 et II, p. 235. Symb. ad Myc. Fenn IX (1882), p. 48.

Pileus tenuerrimus, campanulatus, radiato-sulcatus, dein fissus, subrevolutus, sqvamis liberis albis pilis conjunctis eleganter ornatus, cinerascens, disco lividus, 4—7 cm. latus. Stipes fistulosus, sursum leviter attenuatus, albus s. candidus, floccosus, apice flocculoso-pruinosus, usque ad 17 cm. altus et 3 mm. crassus. Lamellae remotae, confertae, lineares, atrae. Sporae ovali- vel ovoideo-sphaeroideae, atrae, sub micr. impellucidae, longit. 6—8 mmm., crassit. 5—6 mmm.

Hab. in populetis prope Mustiala, m. Aug.

LI. **Coprinus Spegazzinii** Karst.
Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. I, p. 550. Symb. ad Myc. Fenn. VII, (1880), p. 5.

Pileus tenerrimus, e cylindraceo vel ovali expansus, primitus arachnoideus et laevis, mox nudus et, disco excepto, fissus, sulcatus et hians, cinerascens, 2 cm altus, demum leviter 3 cm. latus. Stipes fistulosus, deorsum leviter incrassatus, basi radice fusiformi circ. 1 cm. longa caudatus, adpresse sericeus, albus, circiter 7 cm. altus, 2, inferne 3 mm. crassus. Lamellae liberae, confertae, lineares, e fusco nigricantes. Sporae ellipsoideae, longit. 9—14 mmm., crassit. 5—6 mmm. Cystidia ovoideo-clavata, apice subcylindracea, crassit. 18—30 mmm.

Hab. in olla, in qua *Cannae* colebantur, in Mustiala, m. Jan.

LII. **Coprinus affinis** Karst.

Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. 1, p. 536. Symb. ad Myc. Fenn. VI (1879), p. 35.

Pileus tenerrimus, e conico-cylindraceo explanatus, cinereo-albicans, disco dilute rufescens, radiato-plicatus, furfuraceus, vix 1 cm. latus. Stipes capillaris, flaccidus, glaber, pallescens, circiter 3 cm. longus. Lamellae liberae, angustae. Sporae submetulaeformes, fuscae, impellucidae, longit. 6—8 mmm., crassit 5—7 mmm.

Hab. in terra nuda juxta vias nec non ad ligna in regione Mustialensi, m. Aug. et Sept.

LIII. **Polyporellus tubaeformis** Karst.

Symb. ad Myc. Fenn. XI, p. 69.

Pileus ex aequaliter carnoso mox induratus, lignescens, infundibuliformis, margine undulatus saepeque lobatus, laevis, glaber, badius, unicolor, 2—4 cm. latus. Stipes centralis, aequalis, laevis, glaber, deorsum sensim cinereo-subnigricans, circiter 2 cm. altus et 2 mm. crassus. Pori decurrentes, minuti, curti, subrotundi, inaequales vel subaequales, ex albido pallescentes.

Hab. in ramis *Alni* putridis in horto Mustialensi, m. Aug.

A *Polyporello vario* (Fr.), pro cujus varietate facile censendus, minutie, pileo infundibuliformi, aequaliter carnoso, non virgato stipiteque centrali recedit. *Polyporellum alveolarium* (Rostk.) in memoriam revocat.

LIV. **Bjerkandera ciliatula** Karst.

Symb. ad Myc. Fenn. XVIII (1878), p. 80.

Pileus carnoso-lentus, orbicularis, convexus, attenuato-sessilis, postice leviter strigosulo-scruposus, margine acuto patente ciliato, albidus, 1—1,5 cm. latus. Pori plani, subrotundi, demum hinc inde flexuosi, obtusi, integri, minores, albi. Sporae oblongatae vel ellipsoideae, curvulae, longit. 4—5 mmm. crassit. circiter 1 mmm.

Hab. in ramis *Alni incanae* putridis in proxima Mustiala, m. Oct.

Basidia clavata, 10—15 mmm. longa, 4—5 mmm. crassa.

LV. **Bjerkandera melina** KARST.

Symb. ad Myc. Fenn. XVIII (1887), p. 80.

Pileus e carnoso-spongioso subsuberosus, dimidiatus, triqueter, azonus, tomentoso-scruposus vel inaequabilis, subinde laevigatus, margine acuto, patente, primitus albidus, mox fuliginoso-pallidus, demum (siccitate) melleus, intus albidus et obsoletissime zonatus, usque ad 6 cm. longus et 2 cm. latus, basi usque ad 4 cm. crassus. Pori rotundi vel sinuoso-flexuosi, plani, tenues, integri, albidi. minuti, usque ad 7 mm. alti. Sporae elongatae, rectae vel curvulae, longit. 4 mmm., crassit. 0,5 mmm.

Hab. in truncis emortuis *Betulae* prope Mustiala versus Särkjärvi, m. Oct. et Nov.

Odor et sapor nulli. A larvis haud infestatur. Locus ejus systematicus inter *Bj. borealem* et *Bj. pubescentem*. *Bj. tephroleucam* in memeriam revocat.

LVI. **Poria ferrugineofusca** KARST.

Symb. ad Myc. Fenn. XVIII, p. 82.

Effusa, adnata, tomentosa, cinnamomeo- vel fulvo-ferruginea, poris minimis, rotundis, aequalibus, obtusis, fuscis.

Hab. ad corticem *Piceae excelsae* prope lacum Salois haud procul a Mustiala, m. Sept.

LVII. **Fomes thelephoroides** KARST.

Rev. mycol. Janv. 1887, p. 1.

Pileus sessilis, subdimidiatus, subimbricatus, scruposo-squamosus, azonus, umbrinus vel nigrescente fuscus, intus floccosus, fomentarius, ferrugineus, margine tenui, lacero, pallidiore, 4—5 cm. longus et latus. basi usque ad 1 cm. crassus. Pori medii, inaequales, rotundi, oblongati vel subflexuosi, crassi, glauco-pruinosi.

Hab. ad truncum emortuum *Pini sylvestris* prope lacum Salois in ditione Mustialensi, m. Aug.

LVIII. **Fomes tenuis** Karst.

Fungi Gallici exs. Cent. XL.

Pileus suberosus, effuso-reflexus, subtriqueter, planus vel convexus, vulgo in longitudinem protractus, saepissime totus resupinatus, tenuis, scruposus, sulcatus, e ferrugineo umbrino-fuscus, margine subtomentoso et fulvente ferrugineo, intus ferrugineus. Pori minuti, rotundi, obtusi, integri, ferruginei, intus glauco-irrorati.

Hab in ligno indurato *Pini* et *Piceae* in Fennia saltem australi passim.

Pileus 2—5 mm. crassus, maximam partem poris elongatis contextus.

LIX. **Sarcodon fennicus** Karst.

Rev. myc. Janv. 1887, p. 2. *Sarcodon scabrosus* (Fr). Quel. var. *fennicus* Karst. Ryssl., Finl. o. Skand. Hattsv. II, p. 104.

Valde amarus. Pileus carnosus fragilis, inaequalis, primitus subtiliter flocculoso-squamulosus, demum superficie diffractus, rufescente testaceus, tandem obscurior, margine undulato lobatoque, carne alba, 5—10 cm. latus. Stipes sat validus, inaequalis, deorsum attenuatus, flexuosus vel curvatus, glaber, pileo concolor, at pallidior, basi levissime albido-tomentosus, extus intusque subcaerulescente vel nigrescente cinereus, 2—8 cm. longus, 1—2 cm. crassus. Aculei decurrentes, subulati, aequales, ex albido fusci, circiter 4 mm. longi. Sporae ellipsoideo-sphaeroideae, asperae, fuscescentes, longit. 4—6 mmm., crassit. 3—5 mmm.

Hab. in silva mixta sub piceis prope lacum Mustialensem, Valkjärvi, m. Sept.

LX. **Dacrymyces incarnatus** Karst.

Symb. ad Myc. Fenn. XVIII (1887), p. 83.

Subcaespitosus. Receptacula subrotunda, immarginata, disco saepe depressa, laevia, siccitate undulato-plicata, substipitata, testaceo-carnea, subtus pallescentia, diam. circiter 5 mm. Sporae ovoideae, simplices, hyalinae, longit. 9—14 mmm., crassit. 6—8 mmm.

Hab. in rimis corticis *Salicis pentandrae* emortuae ad Mustiala, m. Oct.

31 Clitocybe puellula Karst.

32. Mycena amicta Fr. var. leucopsis Karst

33. Mycena latebricola Karst.

34. Omphalia psilocyboides Karst

P. A. Karsten del.

F. Liewendal's lith. tryckeri, Helsingfors.

35.

35. Lyophyllum leucophaeatum Karst.

P. A. Karsten del.

F. Liewendal's lith. tryckeri, Helsingfors

36, Collybia daemonica Karst. 37, Collybia ignobilis Karst.
38 Cortinarius phaeophyllus Karst.

P. A. Karsten del. F. Liewendal's lith. tryckeri, Helsingfors.

PL. IV.

39.

40.

39. Cortinarius lucorum Fr.

40. Naucoria Tavastensis Karst.

P. A. Karsten del.

F. Liewendal's lith. tryckeri, Helsingfors.

41. Tubaria anthracophila Karst.
42. Inocybe trivialis Karst.
43. Hebeloma deflectens Karst.
44. Hebeloma subsaponaceum Karst.

P. A. Karsten del.
F. Liewendal's lith. tryckeri, Helsingfors.

PL. VI.

45. Agaricus sangvinarius Karst.

46. Psilocybe Gilletii Karst.

47. Psilocybe simulans Karst.

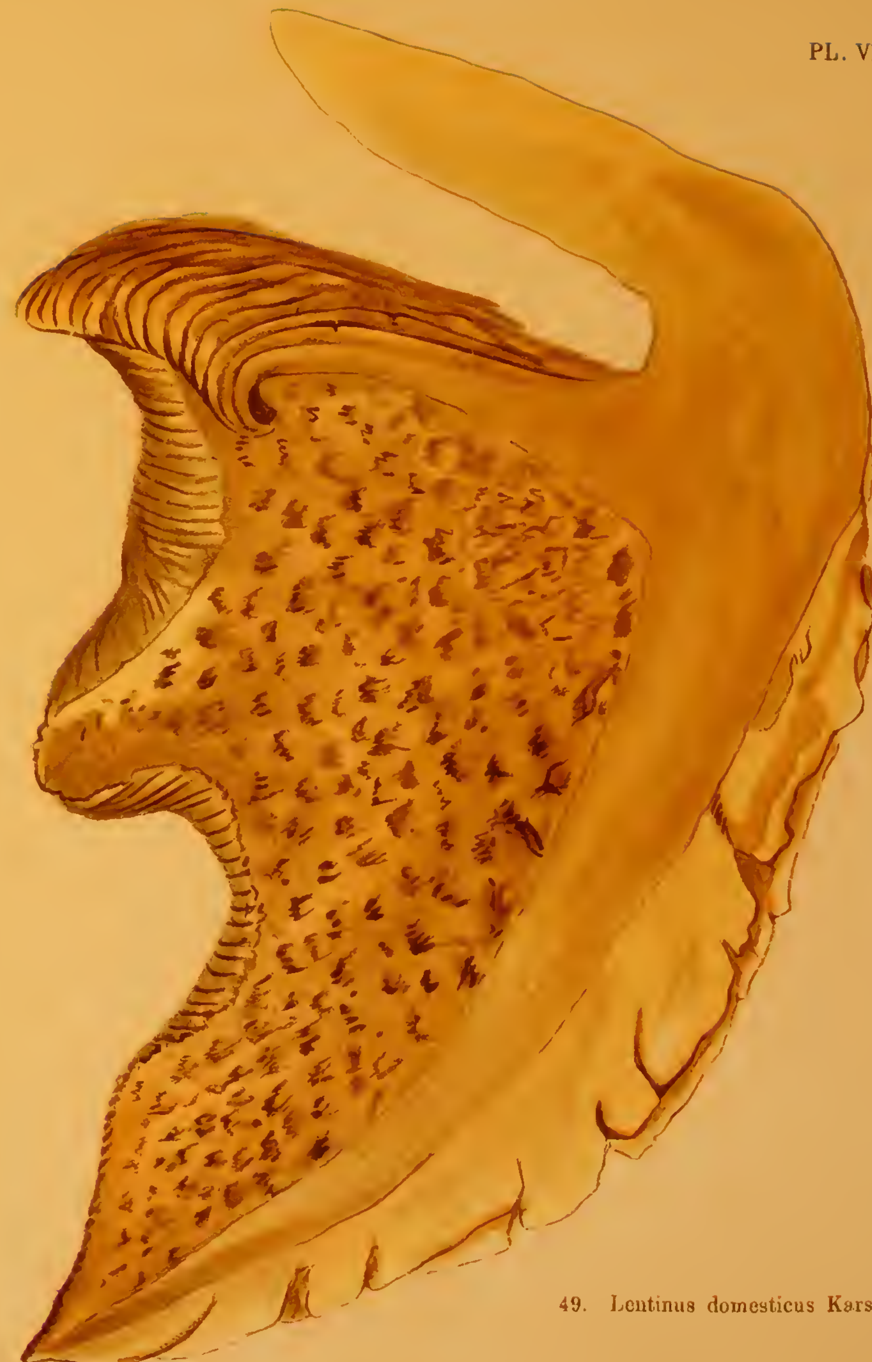
48. Psathyrella sqvamifera Karst.

P. A. Karsten del.

F. Liewendal's lith. tryckeri, Helsingfors.

PL. VII.

PL. VIII.



49. Lentinus domesticus Karst.

L. Fabritius del.

F. Liewendal's lith. tryckeri, Helsingfors

50. Coprinus lagopides Karst. 51. Coprinus Spegazzinii Karst.
52. Coprinus affinis Karst.

P. A. Karsten del

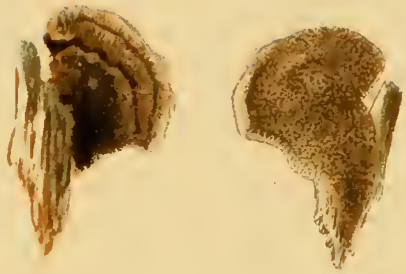
F. Liewendal's lith. tryckeri, Helsingfors.

53. Polyporellus tubaeformis Karst.
54. Bjerkanderia ciliatula Karst.
55. Bjerkanderia melina Karst.
56. Poria ferrugineofusca Karst.

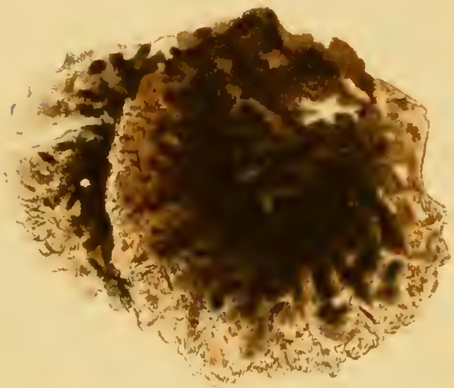
L. Fabritius del.

F. Liewendal's lith tryckeri, Helsingfors.

58.



57.



59.

60.

57. Fomes Thelephoroides Karst.

58. Fomes tenuis Karst.

59. Sarcodon fennicus Karst.

60. Dacrymyces incarnatus Karst.

L. Fabritius del.

F. Liewendal's lith. tryckeri, Helsingfors.

UNTERSUCHUNG
EINIGER SINGULARITÄTEN,
WELCHE IM INNERN UND AUF DER BEGRENZUNG VON
MINIMALFLÄCHENSTÜCKEN
AUFTRETEN KÖNNEN,

DEREN BEGRENZUNG VON
GERADLINIGEN STRECKEN
GEBILDET WIRD.

VON

E. R. NEOVIUS.

In der posthumen Riemann'schen Abhandlung „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung" wird insbesondere die Aufgabe behandelt, ein Minimalflächenstück analytisch zu bestimmen, dessen nur aus geradlinigen Theilen bestehende Begrenzung vorgeschrieben ist. Bei der Behandlung dieser Aufgabe ergibt sich, dass im Innern und auf der Begrenzung eines der angegebenen Bedingung genügenden Minimalflächenstückes Singularitäten auftreten, welche im Sinne der analytischen Geometrie der krummen Flächen nicht Punktsingularitäten, sondern Singularitäten der Tangentialebene sind. Der allgemeine Charakter dieser Singularitäten besteht darin, dass durch jeden dieser Punkte mehr als zwei Krümmungslinien und mehr als zwei Asymptotenlinien der Fläche hindurchgehen. [1])

Man scheint bisher angenommen zu haben, dass ein Minimalflächenstück, welches innerhalb einer vorgeschriebenen Begrenzung unter allen ihm unendlich benachbarten Flächenstücken den kleinsten Flächeninhalt besitzt, Punktsingularitäten nicht besitzen darf. Wenigstens ist in der Riemann'schen Abhandlung nur von solchen Singularitäten die Rede, welche Singularitäten der Tangentialebene sind. Eine genauere Untersuchung führt jedoch zu der Einsicht, dass ein Minimalflächenstück, welches den erwähnten Bedingungen genügt, in seinem Innern auch uniplanare Doppelpunkte enthalten kann.

Wird z. B. eine Begrenzungslinie vorgeschrieben, welche nach der von Listing in seiner Abhandlung „Der Census räumlicher Complexe" gebrauchten zweckmässigen Benennung als v e r k n o t e t zu bezeichnen ist, so würde die Aufgabe, ein einfach zusammenhängendes Flächenstück zu construiren, welches in seinem Innern keinen singulären Punkt enthält und von jener verknoteten Linie begrenzt ist, eine Lösung überhaupt nicht gestatten, wenn als singulärer Punkt jeder solche Punkt angesehen wird, welcher mehr als einem Flächenelemente gleichzeitig angehört. Es würde also auch die Frage nach einer

---

[1]) Riemann, Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung, Art. 10, 11, 12.

kleinsten einfach zusammenhängenden Fläche, welche im Innern von solchen singulären Stellen frei ist, überhaupt nicht gestellt werden können. In der That kann man sich durch specielle Beispiele davon überzeugen, dass einfach zusammenhängende Minimalflächenstücke, deren aus geradlinigen Strecken bestehende Begrenzung verknotet ist und welche in ihren Innern einen uniplanaren Doppelpunkt besitzen, unter allen von derselben Begrenzungslinie begrenzten und ihnen benachbarten einfach zusammenhängenden Flächenstücken wirklich ein Minimum des Flächeninhalts besitzen.

Hierbei soll nicht verschwiegen werden, dass bei einigen speciellen Fällen einer verknoteten Begrenzungslinie, die ich untersucht habe, den einfach zusammenhängenden Flächenstücken kleinsten Flächeninhalts andere Flächenstücke benachbart sind, welche nicht mehr einfach, sondern zweifach zusammenhängend sind, und welche kleineren Flächeninhalt haben, als jene.

Hieraus scheint sich zu ergeben, dass bei der Untersuchung von Minimalflächen auch solche singuläre Punkte in den Kreis der Betrachtung gezogen werden müssen.

Für den Fall, dass die vorgeschriebene Begrenzungslinie unverknotet ist, wird demzufolge ein Beweis erforderlich sein, dass solche uniplanare Doppelpunkte im Innern der Fläche nicht auftreten.

Auf die Betrachtung von solchen Punktsingularitäten gehe ich jedoch im Folgenden nicht ein.

Bei einer Untersuchung über eine specielle, von geraden Linien begrenzte Minimalfläche hat es sich mir als wünschenswerth herausgestellt, auf eine etwas eingehendere Untersuchung verschiedener Singularitäten, welche hierbei eintreten können, einzugehen, um auf eine etwas ausführlichere Beschreibung derselben Bezug nehmen zu können, und nicht in jedem einzelnen Falle, durch die Beschreibung der speciellen Singularität, den Gang der Untersuchung unterbrechen zu müssen. Diesem Zwecke kann vielleicht die folgende Darstellung genügen.

1.

Singularitäten, welche in einem Eckpunkte oder in einem andern Punkte der Begrenzung auftreten.

Man denke sich einen in der Nähe der singulären Stelle liegenden und diese singuläre Stelle enthaltenden Theil des zu betrachtenden Minimalflächenstückes auf ein ebenes Flächenstück zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet, in welchem ein Punkt die complexe Grösse t geometrisch darstellt. Der singulären Stelle entspreche der Werth $t = 0$. Es möge angenommen werden, dass dem den singulären Punkt enthaltenden Theile der Begrenzung ein den Punkt $t = 0$ enthaltendes Stück der Axe des Reellen entspreche.

Man betrachte sodann zwei conforme Abbildungen dieses Minimalflächenstückes.

Die erste derselben ergibt sich durch stereographische Projection desjenigen Stückes der Hülfskugel, auf welches das betrachtete Minimalflächenstück durch Vermittelung paralleler Normalen conform übertragen wird. Die complexe Grösse, welche durch einen Punkt dieser Ebene geometrisch dargestellt wird, möge wie üblich mit s bezeichnet werden.

Die zweite der erwähnten conformen Abbildungen ist diejenige, bei welcher jeder Asymptotenlinie und jeder Krümmungslinie des Minimalflächenstückes allgemein zu reden eine gerade Linie entspricht. Die complexe Grösse, welche durch einen Punkt dieser letzteren Ebene geometrisch dargestellt wird, möge mit σ bezeichnet werden.[1]

Bei der durch parallele Normalen vermittelten Abbildung auf die Hülfskugel entspricht der aus geradlinigen Strecken bestehenden Begrenzung des

---

[1] H. A. Schwarz, Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. Journal für Mathematik Bd. 80, Seite 284 u. f. Die Grösse, welche Herr H. A. Schwarz mit σ bezeichnet hat ist mit der von Riemann mit u bezeichneten Grösse durch die Relation

$$\sigma = c\sqrt{i}\,u + c'$$

verbunden, worin c eine reelle Constante bezeichnet.

betrachteten Minimalflächenstückes eine aus Bogen grösster Kreise der Kugel bestehende Linie.

Durch passende Wahl des Coordinatensystems kann man erreichen, dass dem betrachteten singulären Punkte der Werth $s = 0$ entspricht. Hierzu reicht es aus, die Tangentialebene des Minimalflächenstückes im betrachteten singulären Punkte zur Coordinatenebene $z = 0$ zu wählen.

Dem Punkte $s = 0$ entspricht ein bestimmter Punkt der Hülfskugel. Von diesem gehen zwei der erwähnten Bogen grösster Kreise aus, welchen bei der stereographischen Projection eine aus zwei geraden Strecken gebildete, im Allgemeinen gebrochene Linie entspricht. Es entspricht daher dem betrachteten Theile des Minimalflächenstückes ein in der Nähe des Scheitels $s = 0$ liegendes Stück der Fläche eines geradlinig begrenzten Winkels.

In der σ-Ebene erhält man ebenfalls ein in der Nähe des Scheitels liegendes Stück eines geradlinig begrenzten Winkels, und zwar ist der diesem Winkel entsprechende Bogen hier jedesmal ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, weil die begrenzenden Geraden des betrachteten Minimalflächenstückes stets Asymptotenlinien desselben sind. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Grösse σ innerhalb des betrachteten Minimalflächenstückes nur endliche Werthe annimmt.

Von den Fällen, in welchen die Grösse σ für $t = 0$ unendlich gross wird, soll hier nur derjenige ins Auge gefasst werden, in welchem dem betrachteten Minimalflächenstücke, welches sich dann ins Unendliche erstreckt, in der σ-Ebene ein von zwei parallelen Geraden begrenzter, einerseits ins Unendliche sich erstreckender, andererseits im Endlichen willkürlich begrenzter Theil eines Parallelstreifens entspricht.

Es bezeichne $\alpha\pi$ die Grösse des Winkels, welchen die beiden vom Punkte $s = 0$ ausgehenden geraden Strecken mit einander bilden, m eine ganze positive Zahl, und zwar bezeichne $m \cdot \frac{\pi}{2}$ die Grösse des dem Winkel $\alpha\pi$ in der s-Ebene entsprechenden Winkels in der σ-Ebene. Es sei σ_0 der dem Werthe $s = 0$ entsprechende Werth der Grösse σ.

Für die Umgebung des betrachteten Punktes $t = 0$ bestehen alsdann Gleichungen von der Form[1])

$$s = c\,t^{\alpha}\Big(1 + t\,\mathfrak{P}(t)\Big),$$

---

[1]) H. A. Schwarz, Bestimmung einer speciellen Minimalfläche, Seite 11—14.

$$\sigma - \sigma_0 = c_1 \sqrt{i}\, t^{\frac{m}{2}} \Big(1 + t\,\mathfrak{P}_1(t)\Big).$$

Da, wenn t nur positive oder nur negative Werthe annimmt, welche dem absoluten Betrage nach eine gewisse Grösse nicht überschreiten, sowohl die Grösse s als auch die Grösse $\sigma - \sigma_0$ eine geradlinige Strecke beschreibt, so müssen die Coefficienten aller in den Potenzreihen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ vorkommenden Glieder reelle Werthe haben. Während c eine beliebige von Null verschiedene Constante bezeichnet, ist der Constanten c_1 ein reeller Werth beizulegen.

Unter den vorhin gemachten Annahmen ist die xy-Ebene die Tangentialebene der Minimalfläche in dem zu betrachtenden Punkte und die z-Axe fällt mit der Normale der Fläche in demselben zusammen.

Zur Untersuchung der Gestalt der Fläche in der Nähe des betrachteten Punktes, bilden wir den Ausdruck $x - yi$.

In den von Herrn Weierstrass aufgestellten Formeln für die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Minimalfläche[1])

$$x = \Re \int^s (1 - s^2)\, \mathfrak{F}(s)\, ds,$$

$$y = \Re \int^s i\,(1 + s^2)\, \mathfrak{F}(s)\, ds,$$

$$z = \Re \int^s 2s\, \mathfrak{F}(s)\, ds,$$

hat die Grösse

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2$$

den Werth

$$\mathfrak{F}(s) = i\,\frac{c_1^2\, m^2}{8\, c^2\, \alpha^2}\, t^{m-2\alpha}\Big(1 + t\,\mathfrak{P}_2(t)\Big).$$

Es ergibt sich danach

$$x - yi = \int^s \mathfrak{F}(s)\, ds - \int^{s_1} s_1^2\, \mathfrak{F}_1(s_1)\, ds_1 =$$

$$i\,\frac{c_1^2\, m^2}{8\, c\, \alpha\,(m-\alpha)}\, t^{m-\alpha}\Big(1 + t\,\mathfrak{P}_3(t)\Big) - i\,\frac{c\, c_1^2\, m^2}{8\alpha\,(m+\alpha)}\, t_1^{m+\alpha}\Big(1 + t_1\,\mathfrak{P}_4(t_1)\Big),$$

---

[1]) Monatsberichte der Berliner Akademie 1866, pag. 619.
H. A. Schwarz, Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen, p. 285.

wenn t_1 die zu t conjugirte complexe Grösse bezeichnet.

Ferner ergibt sich

$$z = \Re i \frac{c_1^2 m}{4\alpha} t^m \Big(1 + t\mathfrak{P}_5(t)\Big).$$

Durch Uebergang zu Polarcoordinaten, indem

$$t = re^{\varphi i}, \qquad t_1 = re^{-\varphi i}, \qquad 0 \leqq \varphi \overline{\gtrless} \pi$$

gesetzt wird, gehen die vorhergehenden Ausdrücke, wenn man die angegebenen Entwickelungen auf die Anfangsglieder beschränkt, über in die Folgenden:

$$x - yi = i \frac{c_1^2 m^2}{8 c \alpha (m - \alpha)} r^{m-\alpha} e^{i(m-\alpha)\varphi} + \cdots$$

$$z = -\frac{c_1^2 m}{4\alpha} r^m \sin(m\varphi) + \cdots$$

Soll nun dem Punkte $t = 0$ ein im Endlichen liegender Punkt der Minimalfläche entsprechen, so ergibt sich hierfür die Bedingung

$$0 < \alpha < m.$$

Es soll jetzt die Gestalt der Fläche in der Umgebung des betrachteten Punktes für einige specielle Werthe der Grössen α, m etwas näher betrachtet werden, und zwar für folgende Fälle:

1) $$m = 1, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Es ist

$$x - yi = i \frac{c_1^2}{8 c \alpha (1 - \alpha)} r^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\varphi} + \cdots$$

$$z = -\frac{c_1^2}{4\alpha} r \sin\varphi + \cdots$$

Den beiden, vom Punkte $t = 0$ ausgehenden, in der Umgebung dieses Punktes liegenden Theilen der Axe des Reellen entsprechen zwei, der Begrenzung des Minimalflächenstückes angehörende geradlinige Strecken, welche sich in einem Punkte P schneiden und dort den Winkel $\lambda\pi = (1 - \alpha)\pi$, $(0 < \lambda < 1)$, mit einander einschliessen.

Aus dem Anfangsgliede der Entwickelung für die Coordinate z übersieht man, dass während φ alle zwischen 0 und π liegenden Werthe annimmt, das

Vorzeichen von z für alle hinreichend kleinen Werthe von r ungeändert bleibt. Mit anderen Worten: das betrachtete Minimalflächenstück liegt in der Nähe des Punktes P ganz auf einer Seite der Tangentialebene der Fläche.

Der betrachtete Punkt P ist ein Eckpunkt, in welchem also dem Winkel $\lambda\pi$ auf der Minimalfläche der Winkel $(1-\lambda)\pi$ auf der Hülfskugel entspricht, während demselben in der σ-Ebene ein Winkel von 90^0 entspricht.

Es möge jetzt das betrachtete Minimalflächenstück über die betrachteten geradlinigen Theile seiner Begrenzung hinaus analytisch fortgesetzt werden. Mit anderen Worten: es werde die beschränkende Voraussetzung, dass die Grösse φ nur die zwischen 0 und π liegenden Werthe annehmen soll, fallen gelassen.

Ich beschränke mich hier auf den Fall, in welchem λ ein genauer Theil der Einheit ist, weil nur unter dieser Voraussetzung die Minimalfläche, welche durch analytische Fortsetzung des betrachteten Minimalflächenstückes entsteht, im Punkte P keine Punktsingularität besitzt. Es sei also $\lambda = \frac{1}{n}$, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet.

In Folge eines von Herrn H. A. Schwarz ausgesprochenen Satzes: „Jede auf einer Minimalfläche liegende Gerade ist eine Symmetrieaxe der durch analytische Fortsetzung dieses Stückes entstehenden Minimalfläche" (Fortgesetzte Untersuchungen, Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1872, Seite 7) entsteht durch die erwähnte analytische Fortsetzung ein aus $2n$ Minimalflächenstücken gebildetes Flächenstück, in dessen Innerem der Punkt P liegt. Diese $2n$ Flächenstücke sind unter einander congruent. Der Punkt P ist denselben gemeinsam. Je zwei benachbarte unter diesen $2n$ Flächenstücken hängen längs einer geraden Strecke mit einander zusammen, in Bezug auf welche dieselben symmetrische Lage haben. Sie liegen daher auf verschiedenen Seiten der Tangentialebene des Minimalflächenstückes im Punkte P, von welcher die Fläche längs n durch den Punkt P gehenden Geraden geschnitten wird.

Für den Fall $n = 2$ besitzt der Punkt P keine andere Singularität, als dass die beiden Asymptotenlinien, welche durch ihn hindurchgehen, gerade Linien sind. Führt ein Punkt auf der Fläche einen vollen Umlauf um den Punkt P aus, so führt sowohl der ihm entsprechende Punkt in der s-Ebene, wie der in der σ-Ebene ebenfalls einen vollen Umlauf aus.

Ist $n = 3$, so schneidet die Tangentialebene des Minimalflächenstückes im Punkte P aus der Fläche drei Gerade, welche sich unter Winkeln von 60^0 schneiden. Die Fläche wird durch die Tangentialebene in sechs Sectoren getheilt. Die Dupin'schen Curven, d. h. die Schnittlinien der Fläche mit Ebenen, welche der Tangentialebene im Punkte P parallel sind, haben die in Figur 1 angegebene Gestalt. Die ausgezogenen Curven stellen die Schnittlinien mit den auf der einen Seite der Tangentialebene liegenden, derselben parallelen Ebenen, die punktirten dagegen die Schnittlinien der Fläche mit den auf der anderen Seite der Tangentialebene liegenden, derselben parallelen Ebenen dar.

Die auf der Hülfskugel ausgebreitet zu denkende Riemann'sche Fläche, welche in Folge der durch parallele Normalen herbeigeführten Beziehung dem betrachteten Minimalflächenstücke entspricht, besitzt in dem dem Punkte P entsprechenden Punkte einen Windungspunkt erster Ordnung. Einem einmaligen Umlaufe um den Punkt P entspricht ein zweimaliger Umlauf um den Punkt $s = 0$ in der s-Ebene. Es besitzt daher das betrachtete Minimalflächenstück eine in der Nähe der im Punkte P construirten Normale unendlich benachbarte parallele Normale, und die conforme Abbildung jeder der drei durch den Punkt P hindurchgehenden Asymptotenlinien auf die Hülfskugel besitzt in dem dem Punkte P entsprechenden Punkte der Kugel einen Rückkehrpunkt.

Für $n = 4$ wird die Fläche durch die Tangentialebene in acht Sectoren getheilt. Die Riemann'sche Fläche auf der Hülfskugel besitzt in dem dem Punkte P entsprechenden Punkte einen Windungspunkt zweiter Ordnung. Einem einmaligen Umlaufe um den Punkt P entspricht ein dreimaliger Umlauf um den Punkt $s = 0$ in der s-Ebene. Es besitzt das betrachtete Minimalflächenstück in der Nähe der Normale im Punkte P unendlich viele Syteme von je drei zu einander parallelen unendlich benachbarten Normalen.

Liegt der zu betrachtende Punkt im Innern eines geradlinigen Theiles der Begrenzung, ist also $\lambda = 1$, so geht aus dem Ausdrucke für $x - yi$ (Seite 7) hervor, dass auch $m - \alpha = 1$ sein muss. Von den so entstehenden Fällen sollen folgende drei hier erwähnt werden:

2)

$$\alpha = 1\,, \qquad m = 2$$

ergibt einen nicht singulären Punkt auf einer der Begrenzung des Minimalflächenstückes angehörenden geradlinigen Strecke.

3) Die Annahme

$$\alpha = 2, \qquad m = 3$$

ergibt einen singulären Punkt erster Ordnung in einem geradlinigen Theile der Begrenzung. Die Fläche hat in der Umgebung des Punktes eine ähnliche Gestalt wie die im Vorhergehenden für $n = 3$ (Seite 10) besprochene.

4) Dem Falle

$$\alpha = 3, \qquad m = 4$$

entspricht die nächst höhere Sigularität. Wird die Fläche über die begrenzende Gerade hinaus analytisch fortgesetzt, so ist die Gestalt derselben in der Umgebung des betrachteten Punktes eine ähnliche, wie die in dem Falle 1) für $n = 4$ (Seite 10) beschriebene.

---

5) Ist α keine ganze Zahl und ist $m > 1$, so erhalten wir ein singuläres Eckenelement, welches so beschaffen ist, dass das Flächenstück zwischen zwei auf einander folgenden geradlinigen Strecken der Begrenzung, die mit einander den Winkel $\lambda\pi$ einschliessen, von der Tangentialebene im Eckpunkte in m im Allgemeinen nicht geradlinig begrenzte Sectoren getheilt wird, welche abwechselnd auf verschiedenen Seiten der Tangentialebene liegen.

Betrachtet man verschiedene Eckenelemente, welche zwar demselben Werthe von λ, aber verschiedenen Werthen von m und α entsprechen, so ist $\alpha = m - \lambda$ zu setzen. Während also für $m = 1$ dem Winkel $\lambda\pi$ ein Winkel $\alpha\pi = (1 - \lambda)\pi$ entspricht, so entspricht für $m = 2$ dem Winkel $\lambda\pi$ ein Winkel $\alpha\pi = (2 - \lambda)\pi$ auf der Hülfskugel.

2.

Singuläre Punkte im Innern eines Minimalflächenstückes.

Wie vorhin wählen wir die Tangentialebene in dem zu betrachtenden singulären Punkte im Innern zur Ebene $z = 0$ und den singulären Punkt selbst zum Anfangspunkte des Coordinatensystems.

Dem singulären Punkte mögen in den Ebenen der Grössen t und σ die Werthe t_0 und σ_0 entsprechen.

Alsdann bestehen für die Umgebung des betrachteten Punktes Entwickelungen von der Form

$$s = c\,(t - t_0)^{\alpha}\Big(1 + (t - t_0)\,\mathfrak{P}\,(t - t_0)\Big),$$

$$\sigma - \sigma_0 = c_1\,(t - t_0)^{\frac{m}{2}}\Big(1 + (t - t_0)\,\mathfrak{P}_1(t - t_0)\Big),$$

in welchen die Grössen α und m ganze positive Zahlen bedeuten. Die Grössen c und c_1 sind von der Grösse t unabhängig und der einzigen Bedingung unterworfen, dass keine derselben gleich Null ist. Die Coefficienten der in den Potenzreihen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ vorkommenden Glieder sind nicht nothwendig reell.

Wenn man sich wie vorhin auf die Anfangsglieder der Entwickelungen beschränkt, so ergeben sich bei Uebergang zu Polarcoordinaten, indem

$$t - t_0 = r\,e^{i\varphi}$$

gesetzt wird, bei geeigneter Bestimmung der Constanten φ_1 und φ_2, die Gleichungen:

$$x - y = i\,\frac{c_1^2\,m^2}{8\,c\,\alpha(m-\alpha)}\;r^{m-\alpha}\,e^{i(m-\alpha)\,(\varphi-\varphi_1)} + \cdots$$

$$z = -\,\frac{c_1^2\,m}{4\,\alpha}\,r^m \sin m(\varphi - \varphi_2) + \cdots.$$

Soll dem Punkte $t = t_0$ ein im Endlichen liegender Punkt der Minimalfläche entsprechen, so ergibt sich wie vorhin die Bedingung

$$0 < \alpha < m.$$

Die kleinsten Werthe der Grössen α und m sind demnach

$$\alpha = 1, \qquad m = 2$$

und es entspricht dieser Annahme ein nicht singulärer Punkt. Durch denselben gehen zwei und nicht mehr als zwei sich unter einem Winkel von 90^0 schneidende Asymptotenlinien, welche im Allgemeinen nicht gerade Linien sind.

Die Abbildungen eines in der Umgebung des betrachteten Punktes liegenden Minimalflächenstückes auf die Ebenen der complexen Grössen t, s und σ sind einblättrige zusammenhängende Flächenstücke.

Ist

$$m > 2, \qquad \alpha = m - 1,$$

so schneidet die Tangentialebene die Fläche in $2m$ Sectoren, welche abwechselnd auf verschiedenen Seiten der Tangentialebene liegen. Die m durch den Punkt hindurchgehenden Asymptotenlinien sind aber nicht nothwendig gerade Linien.

Speciell ergibt sich für

$$\alpha = 2, \qquad m = 3$$

die unter 3) (Seite 11) besprochene Singularität erster Ordnung mit der soeben erwähnten Modification.

Der Fall

$$\alpha = 3, \qquad m = 4$$

ergibt einen singulären Punkt zweiter Ordnung mit acht Sectoren. Die Function $\mathfrak{F}(s)$ hat die Form

$$\mathfrak{F}(s) = C\frac{1}{t^2}\Big(1 + t\mathfrak{P}(t)\Big).$$

3.

Betrachtung von geradlinig begrenzten Minimalflächenstücken, welche sich ins Unendliche erstrecken.

Wenn zwei auf einander folgende geradlinige Theile der Begrenzung sich im Raume kreuzen und mit einander einen Winkel $\lambda\pi$ $(0 < \lambda < 1)$ einschliessen, so erstreckt sich die durch dieselben gelegte Minimalfläche ins Unendliche.

Hierbei sind folgende zwei, wesentlich von einander verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1) Der sich ins Unendliche erstreckende, von den beiden Geraden begrenzte Flächentheil hat angenähert die Gestalt eines von zwei Geraden begrenzten Stückes einer Schraubenfläche, wobei der Richtungsunterschied dieser Geraden, welcher Amplitude genannt werden kann, der Grösse $\lambda\pi$ entspricht. In anderer Fassung kann man diese Bedingung aussprechen wie folgt: Der betrachtete ins Unendliche reichende Flächentheil nähert sich asymptotisch einem durch die beiden Geraden begrenzten Stücke einer Schraubenfläche, deren Axe beide Gerade unter rechtem Winkel schneidet.

Diesem Flächentheile entspricht in der σ-Ebene ein ins Unendliche reichendes Stück eines Parallelstreifens.

2) Dem Minimalflächenstücke entspricht in der σ-Ebene ein in der Nähe des Scheitels liegendes Stück eines Winkels $m \cdot \frac{\pi}{2}$.

In beiden Fällen denken wir uns das Coordinatensystem so gewählt, dass die z-Axe beide Gerade unter rechtem Winkel schneidet. In der s-Ebene entspricht alsdann den unendlich fernen Elementen des betrachteten Flächenstückes entweder der Punkt $s = 0$ oder der Punkt $s = \infty$, jenachdem die eine oder andere Seite der Fläche als die positive angesehen wird. Es werde festgesetzt, dass der Werth $s = 0$ den unendlich fernen Elementen des betrachteten Flächenstückes entspricht.

Wird wie vorhin das Minimalflächenstück auf die t-Ebene so abgebildet, dass der Umgebung der unendlich fernen Elemente der Fläche die auf der einen Seite der Axe des Reellen liegende Umgebung des Punktes $t = 0$ entspricht, so bestehen für den

Fall 1) Gleichungen von der Form

$$s = c\, t^{\alpha} \Big(1 + t\, \mathfrak{P}(t)\Big),$$

$$\sigma = A' \sqrt{i}\, \Big(\ln t + \mathfrak{P}_1(t)\Big).$$

Die Constante c kann einen reellen oder complexen Werth haben. Die Coefficienten der in den Potenzreihen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ vorkommenden Glieder haben reelle Werthe.

Die Constante A' ist entweder reell oder rein imaginär.

Der absolute Betrag von $A'\pi$ bedeutet die Breite des vorhin erwähnten ins Unendliche reichenden Streifens in der σ-Ebene.

Es ergeben sich

$$\mathfrak{F}(s) = i \frac{A'^2}{2\, c^2\, \alpha^2}\, t^{-2\alpha} \Big(1 + t\, \mathfrak{P}_2(t)\Big),$$

$$x - y\, i = -\, i \frac{A'^2}{2\, c\, \alpha^2}\, t^{-\alpha} \Big(1 + t\, \mathfrak{P}_3(t)\Big) + \cdots,$$

$$z = \Re\; i \frac{A'^2}{\alpha} \Big(\ln t + t\, \mathfrak{P}_4(t)\Big),$$

oder durch Uebergang zu Polarcoordinaten:

$$x - y\, i = -\, i \frac{A'^2}{2\, c\, \alpha^2}\, r^{-\alpha}\, e^{-i\varphi\alpha} + \cdots,$$

$$z = -\frac{A'^2}{\alpha}\, \varphi + c_1\, r \sin \varphi + c_2\, r^2 \sin 2\varphi + \cdots.$$

Aus dem Ausdrucke für $x - yi$ übersieht man, dass die beiden ins Unendliche reichenden geradlinigen Begrenzungstheile des Minimalflächenstückes mit einander denselben Winkel einschliessen, wie die denselben in der s-Ebene entsprechenden, vom Punkte $s = 0$ ausgehenden Geraden, d. h. es ist

$$\lambda = \alpha.$$

Ferner übersieht man, dass der Punkt $x + yi$ sich in demselben Sinne bewegt, wie der ihm in der t-Ebene entsprechende Punkt.

Es werde festgesetzt, dass die positiven Richtungen der x-, y-, z-Axen des rechtwinkligen Coordinatensystems in dem Sinne auf einander folgen, welche durch die Ortsbezeichnungen geradeaus, nach links, aufwärts gerichtet bezeichnet werden.

Aus der Betrachtung des Ausdruckes für z ergibt sich alsdann, dass jenachdem die Constante A' reell oder rein imaginär ist, die schraubenförmige Fläche linksgewunden oder rechtsgewunden ist. Denn wenn φ einen Umlauf im positiven Sinne macht, so nimmt z ab, wenn A' reell ist, die Fläche ist linksgewunden; dagegen nimmt z zu wenn A' rein imaginär ist, die Fläche ist rechtsgewunden.

Bei dem Uebergange von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ nimmt z zu um die Grösse

$$A = -\frac{A'^2 \pi}{\alpha}.$$

Es bedeutet also A den Abstand der beiden begrenzenden Geraden. Bei einer linksgewundenen schraubenförmigen Fläche ist also der Abstand A als negativ, bei einer rechtsgewundenen dagegen als positiv anzusehen.

Umgekehrt ist

$$A' = \sqrt{-\frac{A\alpha}{\pi}}.$$

Für den

Fall 2) gelten formell Entwickelungen von derselben Form, wie sie auf den Seiten 6, 7 betrachtet wurden, nämlich

$$s = c t^{\alpha} \left(1 + t\,\mathfrak{P}(t)\right),$$

$$\sigma = c_1 \sqrt{i}\, t^{\frac{m}{2}} \left(1 + t\,\mathfrak{P}_1(t)\right),$$

$$x - y i = i \frac{c_1^2 m^2}{8 c \alpha (m - \alpha)} t^{m-\alpha} \left(1 + t\,\mathfrak{P}_2(t)\right) - i \frac{c\, c_1^2 m^2}{8 \alpha (m + \alpha)} t_1^{m+\alpha} \left(1 + t_1 \mathfrak{P}_3(t_1)\right),$$

$$z = \Re\, i \frac{c_1^2 m}{4 \alpha} t^m \left(1 + t\,\mathfrak{P}_4(t)\right).$$

Da im vorliegenden Falle unendlich kleinen Werthen der Grösse t unendlich grosse Werthe von x, beziehungsweise von y entsprechen, so ist die Grösse m der Bedingung unterworfen

$$\alpha > m > 0.$$

Aus dem Umstande, dass in dem Ausdrucke für die Coordinate z ein logarithmisches Glied für keinen Werth von m auftreten kann, schliessen wir, dass die beiden begrenzenden Geraden des Sectors sich immer schneiden.

Die Fläche wird von der Asymptotenebene $z = o$ in der Nähe des unendlich fernen Punktes in m Sectoren getheilt.

Dem Winkel $\lambda\pi$ zwischen den begrenzenden Geraden entspricht auf der Hülfskugel der Winkel

$$\alpha\pi = (m + \lambda)\,\pi\,.$$

Für denselben Werth von λ ist die Annäherung des Flächenstückes an die Asymptotenebene um so grösser, je grösser die Zahl m ist.

Ist z. B. $\lambda = \frac{1}{2}$, so ergibt die Annahme $m = 1$, $\alpha = \frac{3}{2}$ ein Flächenstück, welches im Unendlichen ganz auf einer Seite der Asymptotenebene des Flächenstückes liegt. Die Annäherung des Flächenstückes an die Asymptotenebene ist in diesem Falle vergleichbar mit der Annäherung einer gewöhnlichen Hyperbel an ihre Asymptote. Die beiden begrenzenden Geraden gehören den zwei verschiedenen Schaaren der Asymptotenlinien auf der Fläche an.

Unter der Annahme $m = 2$, $\alpha = \frac{5}{2}$ gehören die begrenzenden Geraden derselben Schaar von Asymptotenlinien an. Die Annäherung an die Asymptotenebene ist eine viel innigere als im vorhergehenden Falle. Das betrachtete Flächenstück wird durch die Asymptotenebene in zwei auf verschiedenen Seiten derselben liegende Sectoren getheilt.

4.

Ueber die Modification, welche die singulären Punkte dadurch erfahren, dass zwei derselben zusammenfallen.

1) *Zusammenfallen zweier singulärer Punkte erster Ordnung.*

Wie bei einer Riemann'schen Fläche ein Windungspunkt zweiter Ordnung durch das Zusammenfallen zweier Windungspunkte erster Ordnung entstehen kann, so kann analogerweise auch ein singulärer Punkt zweiter Ordnung ($\alpha = 3$, $m = 4$) als durch das Zusammenfallen von zwei singulären Punkten erster Ordnung ($\alpha = 2$, $m = 3$) entstanden gedacht werden.

Ein solches Zusammenfallen kann entweder dadurch geschehen, dass zwei im Innern eines Minimalflächenstückes liegende singuläre Punkte erster Ordnung einander unendlich nahe rücken, oder dass zwei auf demselben geradlinigen Theile der Begrenzung liegende singuläre Punkte erster Ordnung zusammenfallen, oder drittens dadurch, dass ein singulärer Punkt erster Ordnung aus dem Innern des Minimalflächenstückes auf einen geradlinigen Theil der Begrenzung desselben rückt. In dem letzteren Falle fällt nämlich bei dem angegebenen Grenzübergange der im Innern liegende singuläre Punkt mit dem ihm in Bezug auf den geradlinigen Theil der Begrenzung symmetrischen singulären Punkte, welcher der analytischen Fortsetzung des betrachteten Minimalflächenstückes über den geradlinigen Theil der Begrenzung angehört, zusammen.

Der Einfachheit wegen wird die Entstehung eines singulären Punktes zweiter Ordnung durch das Zusammenfallen zweier singulärer Punkte erster Ordnung unter der speciellen Annahme durch Formeln erläutert, dass das Zusammenfallen der beiden erwähnten Punkte auf der Axe des Reellen in der t-Ebene, und zwar in dem Punkte $t = 0$ erfolgt. Unter Aufrechterhaltung der früheren Uebereinkunft, dass der Axe des Reellen in der t-Ebene die Begrenzung des Minimalflächenstückes entspreche, entsteht hierbei allerdings ein auf der Begrenzung des Minimalflächenstückes liegender Punkt, welcher bei der analytischen Fortsetzung desselben ein singulärer Punkt zweiter Ordnung ist. Es ist jedoch leicht, von diesem Falle durch etwas weniger einfache Formeln zu dem Falle überzugehen, in welchem zwei im Innern liegende singuläre Punkte erster Ordnung ohne sich einem Punkte des Randes zu nähern mit einander zusammenfallen, und, wenn man die Axe des Imaginären in der t-Ebene der Begrenzung des Minimalflächenstückes entsprechen lässt, den Grenzübergang sich zu veranschaulichen, welcher dem Uebergange eines singulären Punktes erster Ordnung aus dem Innern auf den Rand entspricht.

Es entspreche dem einen der beiden Punkte erster Ordnung der Punkt $t=\beta$, dem andern der Punkt $t=-\beta$ auf der Axe des Reellen der t-Ebene.

Da die Riemann'sche Fläche, deren Punkte die Werthe der Grösse s geometrisch darstellen, in den den Punkten $t=\pm\beta$ entsprechenden Punkten Windungspunkte erster Ordnung besitzt, so wird die Grösse $\frac{ds}{dt}$ in diesen Punkten von der ersten Ordnung unendlich klein. Es besteht daher eine Entwickelung von der Form

$$\frac{ds}{dt}=c(\beta^2-t^2)\Big(1+t\,\mathfrak{P}(t)\Big).$$

In der Umgebung jedes der singulären Punkte besteht nach dem Vorhergehenden (Seite 12) zwischen den Grössen σ und t die Beziehung

$$\sigma-\sigma_0=c_1\,(t-t_0)^{\frac{3}{2}}\Big(1+(t-t_0)\,\mathfrak{P}_1\,(t-t_0)\Big)$$

und es ist daher

$$\frac{d\sigma}{dt}=c_2\,(\beta^2-t^2)^{\frac{1}{2}}\Big(1+t\,\mathfrak{P}_2\,(t)\Big).$$

Hierbei ist zu bemerken, dass der Factor $1+t\,\mathfrak{P}_2(t)$ innerhalb eines die Werthe $t=0$, $t=\pm\beta$ in seinem Innern enthaltenden kreisförmig begrenzten Gebietes überall den Charakter einer ganzen Function besitzt und den Werth Null nicht annimmt.

Aus den angegebenen Entwickelungen ergibt sich

$$\mathfrak{F}\,(s)=c_3\,\frac{1}{\beta^2-t^2}\Big(1+t\,\mathfrak{P}_3\,(t)\Big).$$

Lässt man die beiden singulären Punkte dadurch zusammenfallen, dass man die Grösse β unendlich klein werden lässt, so ergibt sich

$$\lim_{(\beta=0)}\mathfrak{F}\,(s)=c_3\,\frac{1}{t^2}\Big(1+t\,\mathfrak{P}_3\,(t)\Big).$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem auf Seite 13 entwickelten Ausdrucke für die Function $\mathfrak{F}(s)$ für den Fall eines singulären Punktes zweiter Ordnung überein.

Bezüglich der conformen Abbildung in der Ebene der complexen Grösse σ lässt sich folgende Betrachtung anstellen:

Einem auf der positiven Seite der Axe des Reellen, in der Nähe des Punktes $t = 0$ liegenden Stücke der t-Ebene entspricht ein Theil der σ-Ebene, dessen Gestalt durch Figur 2 erläutert wird. Den Winkeln von 180^0 mit den Scheiteln $t = \pm\beta$ entsprechen in der σ-Ebene zwei Winkel von je 270^0 mit den Scheiteln G_1 und G_2. Der Abstand der Scheitel dieser beiden Winkel ist gleich dem absoluten Betrage des Integrals

$$\left| \int_{-\beta}^{+\beta} c_2 \sqrt{\beta^2 - t^2} \Big(1 + t\,\mathfrak{P}_2(t)\Big)\, dt \right| < 2\,\beta^2\, c_2'$$

wenn mit c_2' eine gewisse von β unabhängige Constante bezeichnet wird. Dieser Abstand wird daher unendlich klein, wenn β unendlich klein wird, und es entspricht bei dem Grenzübergange $\lim \beta = 0$ dem Winkel von 180^0 mit dem Scheitel $t = 0$ ein Winkel von 360^0 mit dem Scheitel G_0 in der σ-Ebene. Aus dem zuletzt erwähnten Umstande ergibt sich, dass das Minimalflächenstück durch die dem Punkte $t = 0$ entsprechende Tangentialebene in vier Sectoren getheilt wird.

Durch Figur 3 ist der Verlauf der Asymptotenlinien auf der Minimalfläche veranschaulicht, vorausgesetzt, dass sich auf dem betrachteten Flächenstücke zwei singuläre Punkte erster Ordnung in der Nähe von einander befinden. An der Grenze für $\lim \beta = 0$ wird der Verlauf der Asymptotenlinien in der Nähe des singulären Punktes zweiter Ordnung durch die Fig. 4 veranschaulicht.

2) *Zusammenfallen eines auf einem geradlinigen Theile der Begrenzung liegenden singulären Punktes erster Ordnung mit einem nicht singulären Eckpunkte.*

Es bezeichne wie vorhin $\lambda\pi$ $(0 < \lambda < 1)$ den Winkel zwischen den beiden Schenkeln des Eckenelements. Das Coordinatensystem sei so gewählt, dass die Tangentialebene des Minimalflächenstückes im Eckpunkte mit der Ebene $z = 0$ des Coordinatensystems übereinstimmt. Dem Eckpunkte entspreche in der t-Ebene der Punkt $t = 0$, dem auf dem einen Schenkel des Eckenelements gelegenen singulären Punkte erster Ordnung der Punkt $t = \beta$ auf der Axe des Reellen.

Es sind nun zwei Fälle von einander zu unterscheiden, nämlich:

a) Die Normale der Fläche in dem singulären Punkte und die Normale in dem Eckpunkte schliessen mit einander einen kleinen Winkel ein und fallen in der Grenze für $\lim \beta = 0$ zusammen.

b) Die beiden Normalen schliessen mit einander einen Winkel ein, der für $\lim \beta = 0$ in 180^0 übergeht.

In dem Falle *a*) ergeben sich aus dem bekannten Verhalten der Grössen s und σ als Functionen von t betrachtet in der Umgebung der Werthe $t = 0$ ($m = 1$, $\alpha = 1 - \lambda$) und $t = \beta$ ($m = 3$, $\alpha = 2$) (Seite 6, 7) die Ausdrücke

$$\frac{ds}{dt} = c\,t^{-\lambda}(\beta - t)\Big(1 + t\,\mathfrak{P}(t)\Big),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = c_1\,t^{-\frac{1}{2}}(\beta - t)^{\frac{1}{2}}\Big(1 + t\,\mathfrak{P}_1(t)\Big),$$

$$\lim_{(\beta=0)}(x - y\,i) = c_2\,t^{\lambda}\Big(1 + t\,\mathfrak{P}_2(t)\Big) + c_3\,t_1^{4-\lambda}\Big(1 + t_1\mathfrak{P}_3(t_1)\Big),$$

$$\lim_{(\beta=0)} z = \Re\, c_4\,t^2\Big(1 + t\,\mathfrak{P}_4(t)\Big).$$

Aus dem Anfangsgliede der Entwickelung der Grössen $x - y\,i$ und z übersieht man, dass das Minimalflächenstück in der Grenze denselben Winkel $\lambda\pi$ ausfüllt, wie vorhin, dass jedoch das Minimalflächenstück durch die Tangentialebene in zwei Sectoren getheilt wird, welche auf verschiedenen Seiten derselben liegen. Es ist dies die unter Nr. 5, Seite 11 beschriebene Singularität, entsprechend den Werthen $m = 2$, $\alpha = 2 - \lambda$.

Die Figuren 5 und 6 können dazu dienen, dasjenige, worauf es bei diesem Grenzübergange ankommt, der Anschauung näher zu bringen.

Der Verlauf der beiden Schaaren von Asymptotenlinien ist in Figur 7 für $\lambda = \frac{1}{3}$ dargestellt. Für $\lim \beta = 0$ verschwindet der mit III bezeichnete Theil und es entsteht die Fig. 8.

In dem Falle *b*) ist es zweckmässig dem Werthe $t = 0$ den Werth $s = \infty$ entsprechen zu lassen. Für die Umgebung des Werthes $t = 0$ gilt dann eine Entwickelung von der Form

$$s = c\,t^{\lambda - 1}\Big(1 + t\,\mathfrak{P}(t)\Big).$$

Dagegen gilt für die Umgebung des Werthes $t = \beta$ eine Entwickelung von der Form

$$s - s_0 = c_1 (\beta - t)^2 \Big(1 + (t - t_0)\, \mathfrak{P}_1 (t - t_0)\Big).$$

Es ergibt sich alsdann

$$\frac{ds}{dt} = c_2 t^{\lambda - 2} (\beta - t) \Big(1 + t\, \mathfrak{P}_2 (t)\Big),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = c_3 t^{-\frac{1}{2}} (\beta - t)^{\frac{1}{2}} \Big(1 + t\, \mathfrak{P}_3 (t)\Big),$$

woraus sich ergibt

$$\lim_{(\beta=0)} (x - y i) = c_4 t^{2-\lambda} \Big(1 + t\, \mathfrak{P}_4 (t)\Big) + c_5 t_1^{2+\lambda} \Big(1 + t_1\, \mathfrak{P}_5 (t_1)\Big),$$

$$\lim_{(\beta=0)} z = \Re\, c_6 t^2 \Big(1 + t\, \mathfrak{P}_6 (t)\Big).$$

Während vor dem Uebergange zur Grenze $\lim \beta = 0$ dem Werthe $t = 0$ der Werth $s = \infty$ entsprach, so entspricht in der Grenze für $\lim \beta = 0$ dem Werthe $t = 0$ der Werth $s = 0$, denn es ist

$$\lim_{(\beta=0)} s = c_7 t^{\lambda} \Big(1 + t\, \mathfrak{P}_7 (t)\Big).$$

Die Normale in der Ecke hat also bei dem Zusammenfallen des singulären Punktes mit der Ecke eine plötzliche Richtungsänderung von 180^0 erfahren, während gleichzeitig das Minimalflächenstück aus dem Winkel $\lambda\pi$ herausgetreten ist und jetzt den überstumpfen Winkel $(2 - \lambda)\pi$ ausfüllt. Das Eckenelement wird, wie im vorigen Falle, von der Tangentialebene in z w e i Sectoren getheilt.

Dem Winkel $(2 - \lambda)\pi$ auf dem Minimalflächenstücke entspricht der Win- $\lambda\pi$ auf der Hülfskugel. Von dem sphärischen Bilde des in der Nähe der Ecke liegenden Minimalflächenstückes wird bei dem betrachteten Grenzübergange die Fläche eines sphärischen Zweiecks mit dem Winkel $(1 - \lambda)\pi$ abgeschnitten, welche (man siehe die Fig. 9) während des Grenzüberganges längs eines immer kürzer werdenden Theiles ihrer Begrenzung mit dem übrigen sphärischen Bilde zusammenhängt.

3) *Zusammenfallen eines inneren singulären Punktes erster Ordnung mit mit einem Eckpunkte.*

Es tritt hier im Vergleich zu dem vorhergehenden Falle der Unterschied ein, dass gleichzeitig mit dem in der Nähe des betrachteten Eckpunktes liegenden singulären Punkte erster Ordnung, welchem der Werth $t = \beta + \gamma i$ entsprechen möge, auch die in Bezug auf die geradlinigen Theile der Begrenzung symmetrisch gelegenen singulären Punkte erster Ordnung, welche die analytische Fortsetzung des betrachteten Minimalflächenstückes besitzt, und welche dem Werthe $t = \beta - \gamma i$ entsprechen, mit der Ecke zusammenfallen. Es lässt sich hieraus schliessen, dass in dem Eckenelemente eine Singularität höherer Ordnung eintritt.

Für die Umgebung der Werthe $t = 0$, $t = \beta \pm \gamma i$ gelten Entwickelungen von der Form

$$\frac{ds}{dt} = c\, t^{-\lambda} \left((\beta - t)^2 + \gamma^2\right)\left(1 + t\, \mathfrak{P}(t)\right),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = c_1\, t^{-\frac{1}{2}} \left((\beta - t)^2 + \gamma^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + t\, \mathfrak{P}_1(t)\right).$$

Es ergeben sich hieraus die Entwickelungen

$$\lim_{(\beta=0,\,\gamma=0)} (x - yi) = c_2\, t^{\lambda}\left(1 + t\, \mathfrak{P}_2(t)\right) + c_3\, t_1^{6-\lambda}\left(1 + t_1\, \mathfrak{P}_3(t_1)\right),$$

$$\lim_{(\beta=0,\,\gamma=0)} z = \Re\, c_4\, t^3 \left(1 + t\, \mathfrak{P}_4(t)\right).$$

Das Eckenelement ist also in ein solches mit d r e i Sectoren übergegangen. Es entspricht dies dem unter Nr. 5, Seite 11 behandelten Falle für die Annahme $m = 3$, $\alpha = 3 - \lambda$.

4) *Zusammenfallen zweier singulärer Punkte erster Ordnung auf demselben Theile, oder auf zwei verschiedenen Theilen der Begrenzung mit einer Ecke.*

Wird vorausgesetzt, dass den auf der Begrenzung liegenden singulären Punkten die Werthe $t = \beta_1$, $t = \beta_2$ entsprechen, so gelten die Gleichungen

$$\frac{ds}{dt} = c\, t^{-\lambda} (\beta_1 - t)(\beta_2 - t)\left(1 + t\, \mathfrak{P}(t)\right),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = c_1\, t^{-\frac{1}{2}} (\beta_1 - t)^{\frac{1}{2}} (\beta_2 - t)^{\frac{1}{2}} \left(1 + t\, \mathfrak{P}_1(t)\right).$$

Bei dem Grenzübergange $\lim \beta_1 = 0$, $\lim \beta_2 = 0$ ergeben sich für $x - yi$ und z Ausdrücke von derselben Form wie vorhin. Es entsteht also das unter 3) oben beschriebene singuläre Eckenelement.

In der σ-Ebene lässt sich der Grenzübergang am einfachsten verfolgen und ist derselbe in Fig. 10 der Anschauung näher gebracht.

5) *Betrachtung derjenigen Fälle, in welchen ein singulärer Punkt oder mehrere singuläre Punkte erster Ordnung auf den geradlinigen Theilen der Begrenzung eines ins Unendliche reichenden Minimalflächenstückes mit dem Charakter einer Schraubenfläche in das Unendliche rücken.*

Da nach 1), Seite 18 durch das Zusammenfallen von zwei singulären Punkten erster Ordnung auf einem geradlinigen Theile der Begrenzung ein singulärer Punkt zweiter Ordnung entsteht, und allgemein durch das Zusammenfallen von m auf der Begrenzung liegenden singulären Punkten erster Ordnung ein singulärer Punkt m:ter Ordnung entsteht, so wird es genügen, denjenigen Fall durch Formeln zu erläutern, in welchem ein auf der Begrenzung liegender singulärer Punkt m:ter Ordnung ins Unendliche rückt.

Dem unendlich fernen Punkte des Minimalflächenstückes mögen die Werthe $s=0$, $t=0$, dem singulären Punkte m:ter Ordnung möge der Werth $t=\beta$ entsprechen.

Es gelten dann Entwickelungen von der Form

$$\frac{ds}{dt} = c\, t^{\lambda-1} (\beta - t)^m \Big(1 + t\, \mathfrak{P}(t)\Big),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = c_1\, t^{-1} (\beta - t)^{\frac{m}{2}} \Big(1 + t\, \mathfrak{P}_1(t)\Big),$$

aus welchen sich ergibt

$$\lim_{(\beta=0)} (x - yi) = c_2\, t^{-\lambda} \Big(1 + t\, \mathfrak{P}_2(t)\Big) + c_3\, t_1^{2m+\lambda} \Big(1 + t_1\, \mathfrak{P}_1(t)\Big),$$

$$\lim_{(\beta=0)} z = \Re\, c_4\, t^m \Big(1 + t\, \mathfrak{P}_4(t)\Big).$$

Da

$$\lim_{(\beta=0)} s = c_5\, t^{\lambda+m} \Big(1 + t\, \mathfrak{P}_5(t)\Big),$$

so entspricht dem Winkel $\lambda\pi$ zwischen den beiden geradlinigen Theilen der Begrenzung des Minimalflächenstückes ein Winkel $\alpha\pi = (\lambda + m)\,\pi$ auf der Hülfskugel. Daraus geht die vollständige Uebereinstimmung dieser Formeln mit den auf Seite 16 aufgestellten hervor. Es entsteht im Unendlichen ein Minimalflächenstück, welches von der Asymptotenebene in m-Sectoren getheilt wird.

Da in dem Ausdrucke für die Grösse σ nach dem Uebergange zur Grenze $\lim \beta = 0$ das logarithmische Glied für jeden Werth von $m\,(m>0)$ fehlt, so geht hieraus hervor, dass der auf Seite 16 unter Nr. 2 behandelte Fall sich aus dem unter Nr. 1 behandelten Falle durch einen Grenzübergang ergibt, bei welchem die mit A' bezeichnete Constante in Null übergeht, während gleichzeitig eine oder mehrere Singularitäten ins Unendliche rücken.

Die Figuren 11 und 12 können dazu dienen, diesen Grenzübergang in der σ-Ebene für die Fälle $m = 1$ und $m = 2$ zu erläutern.

Fällt — unter im Uebrigen unveränderten Voraussetzungen bezüglich der Gestalt des von zwei geraden Linien begrenzten, sich ins Unendliche erstreckenden Minimalflächenstückes — ein im Innern desselben liegender singulärer Punkt m:ter Ordnung ins Unendliche, so ergibt sich im Unendlichen ein Flächenelement mit einer ähnlichen Singularität wie vorhin, nur wird das Flächenelement durch seine Asymptotenebene in $2m$-Sectoren getheilt und dem Winkel $\lambda\pi$ entspricht auf der Hülfskugel ein Winkel von der Grösse $\alpha\pi = (\lambda + 2m)\,\pi$.

ZUR THEORIE

DER

LINEAREN UND HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

MIT

DOPPELTPERIODISCHEN COEFFICIENTEN

VON

E. A. STENBERG.

II.

In der vorliegenden Untersuchung ist es meine Absicht, die allgemeine analytische Form der eindeutigen Integrale einer linearen und homogenen Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten aufzustellen. Zwar hat Herr FLOQUET[1]) schon eine solche gegeben, doch ist seine Form noch recht complizirt, da sie eine zu grosse Anzahl verschiedener doppeltperiodischer Functionen enthält.

Die analytische Form, zu der ich komme, steht der von Herrn SJÖBLOM[2]) sehr nahe und kann eigentlich als eine Entwickelung dieser betrachtet werden. Bei der Herleitung seiner Form geht aber Herr SJÖBLOM von einer Eigenschaft der Integrale aus, welcher er irrthümlicherweise allgemeine Giltigkeit zuschreibt, obgleich sie nur den Integralen s p e c i e l l e r Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten zukommt, weshalb seine analytische Form einer neuen Herleitung bedarf, bevor sie als im Allgemeinen geltend angesehen werden kann.

1. Es möge

$$\mathfrak{P}_j = 0$$

eine lineare und homogene Differentialgleichung von der Ordnung j bezeichnen, welcher folgende Eigenschaften zukommen:

1) ihre Coefficienten sind doppeltperiodische Functionen erster Gattung mit den Fundamentalperioden 2ω und $2\omega'$,

2) ihr allgemeines Integral ist eindeutig, und

3) alle ihre Integrale gehören zur selben Classe.

---

[1]) FLOQUET, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Annales scient. de l'école normale supérieure. Année 1884, p. 228.

[2]) SJÖBLOM, Studier inom teorin för de lineära homogena differentialeqvationer, hvilkas koefficienter äro dubbelperiodiska funktioner. Akademisk afhandling. Helsingfors 1884.

Wie ich früher[1]) auseinandergesetzt habe, verstehe ich unter dem letztgenannten Begriffe, dass die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots f_j(x)$, welche ein Fundamentalsystem von Integralen der betreffenden Gleichung bilden, die Eigenschaft

$$f_\varepsilon(x+2\omega)=\Omega f_\varepsilon(x)+L_\varepsilon\Big(f_1(x),\, f_2(x),\, \ldots f_{\varepsilon-1}(x)\Big),$$

$$f_\varepsilon(x+2\omega')=\Omega' f_\varepsilon(x)+L'_\varepsilon\Big(f_1(x),\, f_2(x),\, \ldots f_{\varepsilon-1}(x)\Big)$$

haben, wo die „multiplicirenden Factoren" Ω und Ω' für alle Elemente dieselben sind, und ich mit L_ε und L'_ε lineare algebraische Functionen bezeichne.

Von jeder solchen Differentialgleichung

$$\mathfrak{P}_j=0,$$

deren Ordnungszahl j gleich einer gewissen positiven ganzen Zahl n ist, werde ich voraussetzen, dass sie ein Fundamentalsystem von Integralen von der Form

$$y_1=\varphi(x),$$

$$y_\nu=\varphi(x)\Big[A_{\nu,1}+A_{\nu,2}\,\varphi_{\nu,2}+\cdots+A_{\nu,\nu-1}\,\varphi_{\nu,\nu-1}(x)+\varphi_{\nu,\nu}(x)\Big]$$

$$(\nu=2,3,\ldots n)$$

hat, wo $\varphi(x)$ eine doppeltperiodische Function mit den multiplicirenden Factoren Ω und Ω',

$$\varphi_{\nu,2}(x),\ \varphi_{\nu,3}(x),\ \ldots\ \varphi_{\nu,\nu}(x)$$

doppeltperiodische Functionen erster Gattung und die Coefficienten $A_{\nu,\mu}$ ganze algebraische Functionen von der Ordnung $\nu-\mu$ von den Grössen x und ψ sind, wenn ich mit ψ diejenige Function $-\dfrac{\sigma'(x-x_0)}{\sigma(x-x_0)}$, deren Differentialcoefficient die Weierstrass'sche Function $\wp(x-x_0)$ ist, bezeichne. Hier bedeutet x_0 eine beliebig gewählte constante Grösse, welche keinen Einfluss auf die Function $\varphi(x)$ hat, dagegen aber gewöhnlich als Unendlichkeitsstelle der Functionen $\varphi_{\nu,2}(x)$, $\varphi_{\nu,3}(x)$, $\ldots\ \varphi_{\nu,\nu}(x)$ auftritt.

Von diesen letzteren Functionen setze ich ausserdem voraus: erstens, dass

[1]) Zur Theorie der linearen und homogenen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten. Acta Societatis Scientiarum Fennicae, T. XVI.

$$\varphi_{2,2}(x) = \varphi_{3,2}(x) = \varphi_{4,2}(x) = \cdots = \varphi_{n,2}(x)$$

ist, und zweitens, dass in jeder für die Umgebung einer Unendlichkeitsstelle geltenden Reihenentwickelung dieser Function $\varphi_{\nu,2}(x)$ die Coefficienten sämmtlicher Glieder mit negativen Exponenten von der Wahl der Grösse x_0 nicht abhängen, dagegen aber die entsprechenden Coefficienten in den Reihenentwickelungen der übrigen Functionen $\varphi_{\nu,\mu}(x)$ doppeltperiodische Functionen erster Gattung mit den Fundamentalperioden 2ω und $2\omega'$ von der Grösse x_0 sind.

Schliesslich nehme ich noch von den Grössen

$$A_{\nu,\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-\mu} \psi^\lambda \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu-\mu-\lambda} c_{\lambda,\varrho}^{(\nu,\mu)} x^\varrho$$

an: erstens, dass in jeder das von x und ψ unabhängige Glied fehlt, d. h. dass

$$c_{0,0}^{(\nu,\mu)} = 0$$

für $\nu = 2, 3, \ldots n$ und $\mu = 1, 2, \ldots \nu - 1$ ist, zweitens dass die Coefficienten

$$c_{0,\nu-\mu}^{(\nu,\mu)},\ c_{1,\nu-\mu-1}^{(\nu,\mu)},\ c_{2,\nu-\mu-2}^{(\nu,\mu)},\ \ldots\ c_{\nu-\mu,0}^{(\nu,\mu)}$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots n;\ \mu = 1, 2, \ldots \nu - 1)$$

von x_0 unabhängig und alle übrigen

$$c_{\lambda,\varrho}^{(\nu,\mu)} \begin{pmatrix} \nu = 3, 4, \ldots n; & \mu = 2, 3, \ldots \nu - 1 \\ \lambda = 0, 1, \ldots \nu - \mu - 1; & \lambda + \varrho = 1, 2, \ldots \nu - \mu - 1 \end{pmatrix}$$

in Bezug auf diese Grösse doppeltperiodisch sind, und drittens dass es möglich ist gewisse Constanten

$$a_1^{(\nu,\mu)},\ a_2^{(\nu,\mu)},\ a_3^{(\nu,\mu)},\ \ldots .\ a_{\nu-\mu-1}^{(\nu,\mu)},\ a_{\nu-\mu}^{(\nu,\mu)},$$

$$b_1^{(\nu,\mu)},\ b_2^{(\nu,\mu)},\ b_3^{(\nu,\mu)},\ \ldots .\ b_{\nu-\mu-1}^{(\nu,\mu)},\ b_{\nu-\mu}^{(\nu,\mu)},$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots n;\ \mu = 1, 2, \ldots \nu - 1)$$

aufzustellen, welche die Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial x} A_{\nu,\mu} = a_1^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\mu+1} + a_2^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\mu+2} + \cdots + a_{\nu-\mu-1}^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\nu-1} + a_{\nu-\mu}^{(\nu,\mu)},$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} A_{\nu,\mu} = b_1^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\mu+1} + b_2^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\mu+2} + \cdots + b_{\nu-\mu-1}^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\nu-1} + b_{\nu-\mu}^{(\nu,\mu)}$$

für jeden Werth der Veränderlichen x und ψ erfüllen und folglich den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(\varrho+1)\,c_{\lambda,\varrho+1}^{(\nu,\mu)} &= \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\nu-\mu-\lambda-\varrho} a_\sigma^{(\nu,\mu)}\,c_{\lambda,\varrho}^{(\nu,\mu+\sigma)}\\ (\lambda+1)\,c_{\lambda+1,\varrho}^{(\nu,\mu)} &= \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\nu-\mu-\lambda-\varrho} b_\sigma^{(\nu,\mu)}\,c_{\lambda,\varrho}^{(\nu,\mu+\sigma)}\end{aligned}\right\}\left(\begin{aligned}&\nu=2,3,\ldots n\\ &\mu=1,2,\ldots \nu-1\\ &\lambda=0,1,\ldots \nu-\mu-1\\ &\varrho=0,1,\ldots \nu-\mu-\lambda-1\end{aligned}\right)$$

in denen

$$c_{0,0}^{(\nu,\nu)}=1$$

gesetzt ist, genügen.

Auf diesen Voraussetzungen fussend, werde ich beweisen, dass auch jede Differentialgleichung $n+1$:ter Ordnung von der betreffenden Gattung

$$\mathfrak{P}_{n+1}=0$$

bezüglich ihrer Integrale dieselben Eigenschaften hat.

2. Es sei y_1 eine doppeltperiodische Function zweiter Gattung, welche die Differentialgleichung $\mathfrak{P}_{n+1}=0$ integrirt — ein Integral dieser Beschaffenheit existirt bekanntlich immer. — Durch die Substitution

$$y=y_1\int u\,dx$$

erhalte ich eine Differentialgleichung n:ter Ordnung, welche auch die Eigenschaften der Gleichungen $\mathfrak{P}_j=0$ hat, und zwar sind hier beide „multiplicirenden Factoren“ Ω und Ω' gleich Eins.

Diese Differentialgleichung hat folglich nach der gemachten Annahme ein Fundamentalsystem von Integralen

$$u_1,\,u_2,\,\ldots\,u_n$$

von der im § 1 aufgestellten Form

$$u_\nu=A_{\nu,1}\,\varphi_{\nu,1}(x)+A_{\nu,2}\,\varphi_{\nu,2}(x)+\cdots+A_{\nu,\nu-1}\,\varphi_{\nu,\nu-1}(x)+\varphi_{\nu,\nu}(x),$$

wo $\varphi_{\nu,1}(x),\ \varphi_{\nu,2}(x),\ldots\varphi_{\nu,\nu-1}(x)$ doppeltperiodische Functionen *erster* Gattung sind.

3. Jede solche Function $\varphi(x)$ kann als die Summe zweier elliptischen Functionen $G(x)$ und $H(x)$ betrachtet werden, von welchen die erstere die Eigenschaft hat, dass in ihren sämmtlichen für die Umgebungen der Unendlichkeitsstellen geltenden Reihenentwickelungen das Glied mit dem Exponenten -1 fehlt, und die letztere $H(x)$ nur Unendlichkeitsstellen erster Ordnung hat. Diese beiden Functionen bestimme ich näher so, dass wenn

$$\varphi(x) = C + \sum C_\varrho^{(0)} \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \xi_\varrho) + \sum C_\varrho \wp(x - \xi_\varrho) + \sum C'_\varrho \wp'(x - \xi_\varrho) + \cdots$$
$$+ \sum C_\varrho^{(\tau)} \wp^{(\tau)}(x - \xi_\varrho)$$

ist, lasse ich

$$G(x) = C + \sum C_\varrho \wp(x - \xi_\varrho) + \sum C'_\varrho \wp'(x - \xi_\varrho) + \cdots + \sum C^{(\tau)} \wp^{(\tau)}(x - \zeta_\varrho)$$

und

$$H(x) = \sum C_\varrho^{(0)} \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \xi_\varrho)$$

sein. Schreibe ich nun

$$K = -\sum C_\varrho$$

erhalte ich

$$\int G(x)\, dx = Cx + K\psi + F(x),$$

wo $F(x)$ eine elliptische Function ist, in deren für die Umgebungen der Unendlichkeitsstellen geltenden Reihenentwickelungen die Coefficienten sämmtlicher Glieder mit negativen Exponenten nur dann von der in ψ auftretenden beliebigen Grösse x_0 abhängig sind, wenn dieses der Fall ist mit den entsprechenden Coefficienten der Function $G(x)$.

Es seien nun $\overline{G}_{\nu,\mu}(x)$, $\overline{H}_{\nu,\mu}(x)$, $\overline{C}_{\nu,\mu}$, $\overline{K}_{\nu,\mu}$, $\overline{F}_{\nu,\mu}(x)$ die der Function $\varphi_{\nu,\mu}(x)$ entsprechenden Grössen von der oben genannten Beschaffenheit, so dass

$$\varphi_{\nu,\mu}(x) = \overline{G}_{\nu,\mu}(x) + \overline{H}_{\nu,\mu}(x)$$

und

$$\int \overline{G}_{\nu,\mu}(x)\, dx = \overline{C}_{\nu,\mu}\, x + \overline{K}_{\nu,\mu}\, \psi + \overline{F}_{\nu,\mu}(x)$$

ist, so haben wir

$$\int A_{\nu,\mu}\, \varphi_{\nu,\mu}(x)\, dx = \int A_{\nu,\mu}\, \overline{G}_{\nu,\mu}(x)\, dx + \int A_{\nu,\mu}\, \overline{H}_{\nu,\mu}(x)\, dx$$

und

$$\int A_{\nu,\mu}\,\overline{G}_{\nu,\mu}(x)\,dx = \left(\overline{C}_{\nu,\mu}\,x + \overline{K}_{\nu,\mu}\,\psi + \overline{F}_{\nu,\mu}(x)\right) A_{\nu,\mu}$$

$$-\int\left(\overline{C}_{\nu,\mu}\,x + \overline{K}_{\nu,\mu}\,\psi + \overline{F}_{\nu,\mu}(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}A_{\nu,\mu} + \wp(x-x_0)\frac{\partial}{\partial\psi}A_{\nu,\mu}\right)dx$$

$$= \overline{B}_{\nu,\mu} + A_{\nu,\mu}\,\overline{F}_{\nu,\mu}(x) + \int\overline{R}_{\nu,\mu}\,dx$$

$$-\int\Bigg[\sum_{\sigma=\mu+1}^{\sigma=\nu-1} A_{\nu,\sigma}\left(a_{\sigma-\mu}^{(\nu,\mu)} + b_{\sigma-\mu}^{(\nu,\mu)}\,\wp(x-x_0)\right)\overline{F}_{\nu,\mu}(x) +$$

$$\left(a_{\nu-\mu}^{(\nu,\mu)} + b_{\nu-\mu}^{(\nu,\mu)}\,\wp(x-x_0)\right)\overline{F}_{\nu,\mu}(x)\Bigg]\,dx,$$

wo ich mit $\overline{B}_{\nu,\mu}$ und $\overline{R}_{\nu,\mu}$ die Grössen

$$\overline{B}_{\nu,\mu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-\mu+1}\frac{1}{\varrho}\,\overline{C}_{\nu,\mu}\,c_{0,\varrho-1}^{(\nu,\mu)}\,x^{\varrho} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-\mu+1}\frac{1}{\lambda}\,\psi^{\lambda}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu-\mu-\lambda+1}\overline{K}_{\nu,\mu}\,c_{\lambda-1,\varrho}^{(\nu,\mu)}\,x^{\varrho}$$

$$\overline{R}_{\nu,\mu} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-\mu}\frac{1}{\lambda}\,\psi^{\lambda}\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu-\mu-\lambda}\left(\lambda\overline{C}_{\nu,\mu}\,c_{\lambda,\varrho}^{(\nu,\mu)} - (\varrho+1)\,\overline{K}_{\nu,\mu}\,c_{\lambda-1,\varrho+1}^{(\nu,\mu)}\right)x^{\varrho}$$

bezeichne. Dieses Resultat ist eine Folge der Bedingungen, die ich den Grössen $A_{\nu,\mu}$ im § 1 gestellt habe.

4. Ich werde jetzt statt der Functionen $\varphi_{\nu,\mu}(x)$ andere elliptische Functionen $\Phi_{\nu,\mu}(x)$ einführen, welche ich auch als Summen von je zwei solchen Functionen $G_{\nu,\mu}(x)$ und $H_{\nu,\mu}(x)$ schreiben werde. Es wird also

$$\Phi_{\nu,\mu}(x) = G_{\nu,\mu}(x) + H_{\nu,\mu}(x)$$

und

$$\int G_{\nu,\mu}(x)\,dx = C_{\nu,\mu}\,x + K_{\nu,\mu}\,\psi + F_{\nu,\mu}(x)$$

sein, wo $G_{\nu,\mu}(x)$, $H_{\nu,\mu}(x)$, $F_{\nu,\mu}(x)$, $C_{\nu,\mu}$ und $K_{\nu,\mu}$ für die Function $\Phi_{\nu,\mu}(x)$ dieselbe Bedeutung haben wie $\overline{G}_{\nu,\mu}(x)$, $\overline{H}_{\nu,\mu}(x)$, $\overline{F}_{\nu,\mu}(x)$, $\overline{C}_{\nu,\mu}$ und $\overline{K}_{\nu,\mu}$ für die Function $\varphi_{\nu,\mu}(x)$.

Die betreffenden Functionen $\Phi_{\nu,\mu}(x)$ baue ich mit Hilfe folgender Recursionsformeln aus den Functionen $\varphi_{\nu,\mu}(x)$ auf

$$\Phi_{\nu,1}(x) = \varphi_{\nu,1}(x)$$

$$\Phi_{\nu,2}(x) = \varphi_{\nu,2}(x) - \left(a_1^{(\nu,1)} + b_1^{(\nu,1)}\wp(x-x_0)\right)F_{\nu,1}(x)$$

$$\Phi_{\nu,3}(x) = \varphi_{\nu,3}(x) - \left(a_2^{(\nu,1)} + b_2^{(\nu,1)}\wp(x-x_0)\right)F_{\nu,1}(x) - \left(a_1^{(\nu,2)} + b_1^{(\nu,2)}\wp(x-x_0)\right)F_{\nu,2}(x)$$

. . . .

$$\Phi_{\nu,\mu}(x) = \varphi_{\nu,\mu}(x) - \sum_{\tau=1}^{\tau=\mu-1}\left(a_{\mu-\tau}^{(\nu,\tau)} + b_{\mu-\tau}^{(\nu,\tau)}\wp(x-x_0)\right)F_{\nu,\tau}(x)$$

$(\mu = 2, 3, \ldots r)$.

Die Grössen $C_{\nu,\mu}$ und $K_{\nu,\mu}$ werden durch dieses Feststellen der Functionen $\Phi_{\nu,\mu}(x)$ doppeltperiodische Functionen erster Gattung von x_0.

Schreibe ich ausserdem

$$B_{\nu,\mu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\nu-\mu+1}\frac{1}{\varrho}C_{\nu,\mu}\,c_{0,\varrho-1}^{(\nu,\mu)}x^\varrho + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-\mu+1}\frac{1}{\lambda}\psi^\lambda\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu-\mu-\lambda+1}K_{\nu,\mu}\,c_{\lambda-1,\varrho}^{(\nu,\mu)}x^\varrho$$

$$R_{\nu,\mu} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-\mu}\frac{1}{\lambda}\psi^\lambda\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu-\mu-\lambda}\left(\lambda\,C_{\nu,\mu}\,c_{\lambda,\varrho}^{(\nu,\mu)} - (\varrho+1)\,K_{\nu,\mu}\,c_{\lambda-1,\varrho+1}^{(\nu,\mu)}\right)x^\varrho$$

erhalte ich durch Einführung dieser Functionen

$$\int u_\nu\,dx = B_{\nu,1} + A_{\nu,1}F_{\nu,1}(x) + \int A_{\nu,2}\Phi_{\nu,2}(x)\,dx +$$

$$\int\Bigg[\sum_{\sigma=3}^{\sigma=\nu-1}A_{\nu,\sigma}\Big(\varphi_{\nu,\sigma}(x) - \left(a_{\sigma-1}^{(\nu,1)} + b_{\sigma-1}^{(\nu,1)}\wp(x-x_0)\right)F_{\nu,1}(x)\Big) +$$

$$\varphi_{\nu,\nu}(x) - \left(a_{\nu-1}^{(\nu,1)} + b_{\nu-1}^{(\nu,1)}\wp(x-x_0)\right)F_{\nu,1}(x)\Bigg]dx +$$

$$\int\Big(R_{\nu,1} + A_{\nu,1}H_{\nu,1}(x)\Big)\,dx$$

$$= B_{\nu,1} + B_{\nu,2} + A_{\nu,1}F_{\nu,1}(x) + A_{\nu,2}F_{\nu,2}(x) + \int A_{\nu,3}\Phi_{\nu,3}(x)\,dx +$$

$$\int\Bigg[\sum_{\sigma=4}^{\sigma=\nu-1}A_{\nu,\sigma}\Big(\varphi_{\nu,\sigma}(x) - \sum_{\tau=1}^{\tau=2}\left(a_{\sigma-\tau}^{(\nu,\tau)} + b_{\sigma-\tau}^{(\nu,\tau)}\wp(x-x_0)\right)F_{\nu,\tau}(x)\Big) +$$

$$\varphi_{\nu,\nu}(x) - \sum_{\tau=1}^{\tau=2}\Big(a_{\nu-\tau}^{(\nu,\tau)} + b_{\nu-\tau}^{(\nu,\tau)}\, p(x-x_0)\Big)\, F_{\nu,\tau}(x)\Big]\, dx +$$

$$\int\Big(R_{\nu,1} + R_{\nu,2} + A_{\nu,1}\, H_{\nu,1}(x) + A_{\nu,2}\, H_{\nu,2}(x)\Big)\, dx$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} B_{\nu,\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} A_{\nu,\mu}\, F_{\nu,\mu}(x) + \int \Phi_{\nu,\nu}(x)\, dx +$$

$$\int dx \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} R_{\nu,\mu} + \int dx \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} A_{\nu,\mu}\, H_{\nu,\mu}(x)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} B_{\nu,\mu} + C_{\nu,\nu}\, x + K_{\nu,\nu}\, \psi + \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} A_{\nu,\mu}\, F_{\nu,\mu}(x) + F_{\nu,\nu}(x) +$$

$$\int dx \sum_{\mu-1}^{\mu=\nu-1} R_{\nu,\mu} + \int dx \Big[\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} A_{\nu,\mu}\, H_{\nu,\mu}(x) + H_{\nu,\nu}(x)\Big].$$

5. Da die Function $\int u_\nu\, dx$ überall eindeutig sein muss und die Grössen $R_{\nu,\mu}$ nur für die dem Werthe x_0 congruenten Werthe unendlich gross werden, ist das Integral

$$\int dx \Big[\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} A_{\nu,\mu}\, H_{\nu,\mu}(x) + H_{\nu,\nu}(x)\Big]$$

mit Nothwendigkeit eindeutig in der Umgebung jeder dem Werthe x_0 incongruenten Stelle. In diesen Umgebungen hat also die unter dem Integralzeichen stehende Function, welche ich $J_\nu(x)$ bezeichnen will, den Character einer ganzen Function. Hieraus folgt, dass wir die elliptischen Functionen $H_{\nu,1}(x)$, $H_{\nu\,2}(x)$, ... $H_{\nu,\nu}(x)$ sämmtlich identisch gleich Null annehmen können.

Es sei nämlich

$$\frac{\alpha_{\nu,\mu}}{x-\xi} + \beta_{\nu,\mu} + \beta_{\nu,\mu}^{(1)}(x-\xi) + \cdots$$

die für die Umgebung der Unendlichkeitsstelle ξ geltende Reihenentwickelung der Function $H_{\nu,\mu}(x)$. Wenn nun ξ dem Werthe x_0 incongruent ist, und ich mit $A'_{\nu,\mu}$ das Resultat der Substitutionen

$$\psi = -\frac{\sigma'\Big(\xi + 2\tilde{\omega} - (x_0 + 2\tilde{\omega}')\Big)}{\sigma\Big(\xi + 2\tilde{\omega} - (x_0 + 2\tilde{\omega}')\Big)}, \quad x = \xi + 2\tilde{\omega}'$$

in die Function $A_{\nu,\mu}$ bezeichne, wobei $2\tilde{\omega}$ und $2\tilde{\omega}'$ zwei beliebige Perioden der Functionen $H_{\nu,\mu}(x)$ bedeuten, muss die Gleichung

$$\alpha_{\nu,1}\, A'_{\nu,1} + \alpha_{\nu,2}\, A'_{\nu,2} + \cdots + \alpha_{\nu,\nu-1}\, A'_{\nu,\nu-1} + \alpha_{\nu,\nu} = 0$$

erfüllt werden, und da $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ (und folglich auch ψ und x) unabhängig von einander unendlich viele Werthe annehmen können, ist dieses nur in der Art möglich, dass der Ausdruck

$$\alpha_{\nu,1}\, A_{\nu,1} + \alpha_{\nu,2}\, A_{\nu,2} + \cdots + \alpha_{\nu,\nu-1}\, A_{\nu,\nu-1} + \alpha_{\nu,\nu}$$

in Beziehung auf ψ und x identisch verschwindet. Giebt es nun unter den Grössen $\alpha_{\nu,1}, \alpha_{\nu,2}, \ldots \alpha_{\nu,\nu}$ solche, die nicht gleich Null sind, so können nicht sämmtliche Functionen

$$A_{\nu,1},\ A_{\nu,2}, \ldots A_{\nu,\nu-1}$$

von verschiedener Ordnung sein.

Ich nenne $\alpha_{\nu,\beta}$ diejenige unter den nicht verschwindenden Grössen $\alpha_{\nu,\mu}$, deren zweiter Zeiger μ die kleinste Zahl ist und nehme an, dass es $r+1$ Functionen

$$A_{\nu,\beta},\ A_{\nu,\beta+1},\ A_{\nu,\beta+2}, \ldots A_{\nu,\beta+r}$$

von derselben Ordnung m_β giebt, wobei $r > 0$ sein muss. Bilde ich nun die elliptischen Functionen

$$H'_{\nu,\beta+1}(x) = H_{\nu,\beta+1}(x) - \frac{\alpha_{\nu,\beta+1}}{\alpha_{\nu,\beta}}\, H_{\nu,\beta}(x),$$

$$H'_{\nu,\beta+2}(x) = H_{\nu,\beta+2}(x) - \frac{\alpha_{\nu,\beta+2}}{\alpha_{\nu,\beta}}\, H_{\nu,\beta}(x),$$

. . . .

$$H'_{\nu,\nu}(x) = H_{\nu,\nu}(x) - \frac{\alpha_{\nu,\nu}}{\alpha_{\nu,\beta}}\, H_{\nu,\beta}(x)$$

erhalte ich

$$J_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\beta-1} A_{\nu,\mu}\, H_{\nu,\mu}(x) + \sum_{\mu=\beta+1}^{\mu=\nu-1} A_{\nu,\mu}\, H'_{\nu,\mu}(x) + H'_{\nu,\nu}(x)$$

da

$$A_{\nu,\beta} = -\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\nu-\beta-1} \frac{\alpha_{\nu,\beta+\sigma}}{\alpha_{\nu,\sigma}} A_{\nu,\beta+\sigma} - \frac{\alpha_{\nu,\nu}}{\alpha_{\nu,\beta}}$$

ist. Durch Einführung dieser Functionen $H'_{\nu,\mu}(x)$ statt der ursprünglichen $H_{\nu,\mu}(x)$ habe ich also einen Ausdruck für $J_\nu(x)$ gefunden, welcher von derselben Form wie der frühere ist, aber statt $r+1$ nur r Functionen $A_{\nu,\mu}$ nämlich

$$A_{\nu,\beta+1}\,,\ A_{\nu,\beta+2}\,,\ \ldots\ A_{\nu,\beta+r}$$

von der Ordnung m_β enthält.

Indem ich dieses Verfahren wiederhole, bilde ich immer neue Ausdrücke für $J_\nu(x)$, welche alle dieselbe Form wie der ursprüngliche haben aber immer weniger Functionen $A_{\nu,\mu}$ von derselben Ordnung enthalten, bis schliesslich (wenn ich nicht früher schon einen solchen Ausdruck gefunden habe, dessen elliptische Functionen keine dem Werthe x_0 incongruenten Unendlichkeitsstellen besitzen), $J_\nu(x)$ nur Functionen $A_{\nu,\mu}$ von verschiedener Ordnung enthält. Auch dann können aber die hier auftretenden elliptischen Functionen nur für die dem Werthe x_0 congruenten Werthe unendlich werden; folglich müssen sie, da sie dieselbe Beschaffenheit haben wie die Functionen $H_{\nu,\mu}(x)$, identisch Null sein.

Das letzte Glied des für $\int u_\nu\, dx$ aufgestellten Ausdruckes fehlt somit gänzlich.

6. Bevor ich die für die Umgebungen der Unendlichkeitsstellen $x_0 - 2\tilde{\omega}$ geltenden Reihenentwickelungen der Grösse

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} R_{\nu,\mu} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-1} f_{\nu,\lambda}(x)\,\psi^\lambda\,,$$

wo

$$f_{\nu,\lambda}(x) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu-\lambda-1} M_{\lambda,\varrho}^{(\nu)} x^{\varrho}$$

und

$$M_{\lambda,\varrho}^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-\lambda-\varrho} \left(C_{\nu,\mu}\, c_{\lambda,\varrho}^{(\nu,\mu)} - \frac{\varrho+1}{\lambda} K_{\nu,\mu}\, c_{\lambda-1,\varrho+1}^{(\nu,\mu)} \right)$$

sind, aufstelle, will ich bemerken, dass die Grösse x_0 gegen eine beliebige der ihr congruenten Grössen $x_0 + 2\tilde{\omega}'$ vertauscht werden kann ohne dass die Functionen $f_{\nu,\lambda}(x)$ irgend welche Veränderung erleiden. Da nun, wenn ich $\psi(x-x_0)$ statt ψ und

$$\psi^{\lambda}(x-x_0) = \sum_{\tau=0}^{\tau=x} h_{\lambda,\tau}\,(x-x_0)^{-(\lambda-\tau)}$$

schreibe, die Reihenentwickelungen

$$\psi^{\lambda}(x-x_0-2\tilde{\omega}') = \left(\psi(x-x_0)+2\tilde{\eta}'\right)^{\lambda} = \sum_{\tau=0}^{\tau=\infty} k_{\lambda,\tau}\,(x-x_0)^{-(\lambda-\tau)}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots r-1)$$

nur eine endliche Anzahl Glieder mit negativen Potenzen enthalten, giebt es unendlich viele Perioden $2\tilde{\omega}'$, für welche die entsprechenden Coefficienten

$$k_{\lambda,\tau} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r-1\,;\ \tau = 0, 1, \ldots \lambda - 1)$$

sämmtlicher dieser Glieder nicht gleich Null sind. Eine beliebige dieser Perioden werde ich mit 2Ω bezeichnen, und somit ist

$$\psi^{\lambda}(x-x_0-2\Omega) = \sum_{\tau=0}^{\tau=\infty} k_{\lambda,\tau}\,(x-x_0)^{-(\lambda-\tau)}\,;\ |\,k_{\lambda,\tau}\ > 0 \quad \text{für } \tau \leq \lambda - 1.$$

Die Coefficienten $k_{\lambda,\tau}$ sind von der Wahl der Grösse x_0 unabhängig.

Für die Umgebung der Unendlichkeitsstelle $x_0 - 2\tilde{\omega}$ ist

$$\psi^{\lambda}(x-x_0-2\Omega) = \sum_{\tau=0}^{\tau=\lambda-1} (x-x_0+2\tilde{\omega})^{-(\lambda-\tau)} \sum_{\chi=0}^{\chi=\tau} \frac{|\underline{\lambda}}{|\underline{\lambda-\chi}\,|\underline{\chi}}\, k_{\lambda-\chi,\tau-\chi}\,\zeta^{\chi}$$
$$+ N + N_1(x-x_0+2\tilde{\omega}) + \cdots$$

wo ich ζ statt $2\tilde{\eta}$ geschrieben habe.

Ausserdem ist

$$f_{\nu,\lambda}(x) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu-\lambda-1} (x - x_0 + 2\tilde{\omega})^\sigma \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu-\lambda-\sigma-1} \frac{\lfloor \varrho+\sigma}{\lfloor \varrho \lfloor \sigma} M^{(\nu)}_{\lambda,\varrho+\sigma} (x_0 - 2\tilde{\omega})^\varrho$$

und folglich hat in der für dieselbe Umgebung geltenden Entwickelung

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} R_{\nu,\mu} = Q^{(\nu)}_{-(\nu-1)} (x - x_0 + 2\tilde{\omega})^{-(\nu-1)} + \cdots + Q^{(\nu)}_{-1} (x - x_0 + 2\tilde{\omega})^{-1} + Q^{(\nu)}_{0} + \cdots,$$

der Coefficient $Q^{(\nu)}_{-1}$ das Aussehen

$$Q^{(\nu)}_{-1} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-1} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu-\lambda-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu-\lambda-\sigma-1} (x_0 - 2\tilde{\omega})^\varrho \sum_{\chi=0}^{\chi=\lambda-\sigma-1} \zeta^\chi\, V(\lambda, \sigma, \varrho, \chi)\, M^{(\nu)}_{\lambda,\varrho+\sigma},$$

wo

$$V(\lambda, \sigma, \varrho, \chi) = \frac{\lfloor \lambda \lfloor \varrho+\sigma}{\lfloor \sigma \lfloor \varrho \lfloor \chi \lfloor \lambda-\chi} k_{\lambda-\chi,\lambda-\sigma-\chi-1}$$

ist. Durch Umstellung der Glieder dieser vierfachen Summe sowie durch Beachtung der Thatsache, dass

$$\lambda - \sigma - 1 \geqq 0, \qquad \nu - \lambda - 1 \geqq \sigma$$

und folglich

$$2\sigma \leqq \nu - 2$$

sein muss, erhalte ich

$$Q^{(\nu)}_{-1} = \sum_{\chi=0}^{\chi=\nu-2} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\chi} \xi^\varrho \zeta^{(\chi-\varrho)} q^{(\nu)}_{\varrho,\chi-\varrho},$$

$$q^{(\nu)}_{\varrho,\chi-\varrho} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\varepsilon_{\nu-\chi}-1} \sum_{\lambda=\chi+1}^{\lambda=\nu-2\sigma-1} V(\lambda+\sigma-\varrho, \sigma, \varrho, \chi-\varrho)\, M^{(\nu)}_{\lambda+\sigma-\varrho,\varrho+\sigma},$$

wenn ich ξ statt $x_0 - 2\tilde{\omega}$ schreibe und mit $E_{\nu-\chi}$ die ganze Zahl bezeichne, welche der Bedingung

$$\frac{\nu-\chi}{2} \geqq \varepsilon_{\nu-\chi} > \frac{\nu-\chi-1}{2}$$

genügt.

Da nun der Ausdruck $Q_{-1}^{(\nu)}$ für jeden Werth der Grösse x_0 und unendlich viele Werthe der Grösse $\zeta = 2\tilde{\eta}$ verschwinden muss, die Coefficienten $q_{\varrho, \chi-\varrho}^{(\nu)}$ aber von ζ unabhängig und in Beziehung auf ξ doppeltperiodisch sind, giebt es unendlich viele von einander unabhängige Werthe der Veränderlichen ξ und ζ, welche diejenige ganze algebraische Function dieser Veränderlichen zum Verschwinden bringen, in die der Ausdruck $Q_{-1}^{(\nu)}$ übergeht, wenn ich die Coefficienten $q_{\varrho, \chi-\varrho}^{(\nu)}$ als constante Grössen betrachte. Hieraus folgt, dass dieser Ausdruck identisch Null ist, d. h. dass wir

$$q_{\varrho, \chi-\varrho}^{(\nu)} = 0 \qquad (\chi = 0, 1, \ldots \nu - 2\,; \ \varrho = 0, 1, \ldots \chi)$$

haben. Die Folge dieser Gleichungen ist aber, da die Grössen $V(\lambda, \sigma, \varrho, \chi)$ von Null verschieden, dass sämmtliche Coefficienten der Ausdrücke $f_{\nu, \lambda}(x)$

$$M_{\lambda, \varrho}^{(\nu)} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots \nu - 1\,; \ \varrho = 0, 1, \ldots \nu - \lambda - 1)$$

sind. Somit verschwindet auch das vorletzte Glied $\int dx \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} R_{\nu, \mu}$ meines für $\int u_\nu \, dx$ gefundenen Ausdruckes.

7. Dieser Ausdruck hat jetzt das Aussehen

$$\int u_\nu \, dx = \mathfrak{A}_\nu + \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} A_{\nu, \mu} \, F_{\nu, \mu}(x) + F_{\nu, \nu}(x).$$

Hier ist

$$\mathfrak{A}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} B_{\nu, \mu} + C_{\nu, \nu} \, x + K_{\nu, \nu} \, \psi = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu} \psi^\lambda \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu-\lambda} C_{\lambda, \varrho}^{(\nu)} \, x^\varrho$$

wenn ich

$$C^{(\nu)}_{0,\,0} = 0$$

$$C^{(\nu)}_{0,\,\varrho} = \frac{1}{\varrho} \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-\varrho+1} C_{\nu,\,\mu}\, c^{(\nu,\,\mu)}_{0,\,\varrho-1}\,, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots \nu)$$

$$C^{(\nu)}_{\lambda,\,\varrho} = \frac{1}{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-\lambda-\varrho+1} K_{\nu,\,\mu}\, c^{(\nu,\,\mu)}_{\lambda-1,\,\mu}\,, \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots \nu \\ \varrho = 0, 1, \ldots \nu - \lambda \end{pmatrix}$$

schreibe. Betrachte ich x und ψ als von einander unabhängig, erhalte ich

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_\nu}{\partial \psi} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} K_{\nu,\,\mu}\, A_{\nu,\,\mu} + K_{\nu,\,\nu}$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_\nu}{\partial x} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} C_{\nu\,\mu}\, A_{\nu,\,\mu} + C_{\nu,\,\nu} - \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} R_{\nu,\,\mu}\,,$$

da aber nach dem letzten § die Summe $\sum R_{\nu,\,\mu}$ identisch verschwinden muss, ist

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_\nu}{\partial x} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} C_{\nu,\,\mu}\, A_{\nu,\,\mu} + C_{\nu,\,\nu}\,.$$

Hiermit habe ich nun bewiesen, dass wenn die im § 1 gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, die Integrale der Differentialgleichung $\mathfrak{P}_{n+1} = 0$ die daselbst aufgestellten Eigenschaften besitzen.

Jede Differentialgleichung

$$\mathfrak{P}_2 = 0$$

genügt aber diesen Voraussetzungen, denn sie hat ein Fundamentalsystem von Integralen von der Form

$$y_1 = \varphi\,(x)$$
$$y_2 = \varphi(x)\Big(Cx + K\psi + F(x)\Big),$$

wo $\varphi(x)$ eine doppeltperiodische Function zweiter und $F(x)$ eine solche erster Gattung ist, folglich hat jede Differentialgleichung

$$\mathfrak{P}_j = 0\,,$$

welcher Ordnung sie auch sein mag, die genannte Eigenschaft.

8. Nachdem ich nun die analytische Form der Integrale der besonderen Differentialgleichungen, welche ich $\mathfrak{P}_j = 0$ bezeichne, gefunden habe, gehe ich zu den allgemeinen linearen und homogenen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten über.

In meinem früheren unter dem Titel: „Zur Theorie der linearen und homogenen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten" veröffentlichten Aufsatze[1]), habe ich die eindeutigen Integrale jeder solchen Differentialgleichung in Classen gruppirt. Eine unmittelbare Folge der dort angegebenen Eigenschaften der zu einer solcher Classe gehörenden Integrale ist, dass jede Differentialgleichung, zu der eine dieser Classen ein vollständiges Fundamentalsystem von Integralen bildet, doppeltperiodische Coefficienten hat. Ich kann somit jedes eindeutige Integral einer linearen Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten linear in den Integralen mehrerer Differentialgleichungen von der speciellen Art $\mathfrak{P}_j = 0$ ausdrücken und bin also berechtigt folgenden Satz auszusprechen:

Die zu derselben Classe gehörenden Elemente des Fundamentalsystems von Integralen einer linearen und homogenen Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten haben die Form

$$y_1 = \varphi(x)$$

$$y_2 = \varphi(x)\left[A_{2,1} + \varphi_2(x)\right]$$

$$y_3 = \varphi(x)\left[A_{3,1} + A_{3,2}\varphi_2(x) + \varphi_{3,3}(x)\right]$$

$$y_4 = \varphi(x)\left[A_{4,1} + A_{4,2}\varphi_2(x) + A_{4,3}\varphi_{4,3}(x) + \varphi_{4,4}(x)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d. h. im Allgemeinen

$$y_\nu = \varphi(x)\left[A_{\nu,1} + A_{\nu,2}\varphi_2(x) + A_{\nu,3}\varphi_{\nu,3}(x) + \cdots + A_{\nu,\nu-1}\varphi_{\nu,\nu-1}(x) + \varphi_{\nu,\nu}(x)\right],$$

wo

1) $\varphi(x)$ *eine doppeltperiodische Function zweiter Gattung bedeutet, welche für die betreffende Classe in sofern characteristisch ist, dass dieselbe Function in keiner anderen Classe des Systems auftreten kann,*

---

[1]) Acta Societatis Scientiarum Fennicae. Tom. XVI.

2) $\varphi_2(x)$ *und* $\varphi_{\nu,\mu}(x)$ — *für* $\nu = 3, 4 \ldots$ *und* $\mu = 3, 4 \ldots \nu$ — *doppelt-periodische Functionen erster Gattung, und*

3) *die Grössen* $A_{\nu,\mu}$ — *für* $\nu = 2, 3, \ldots$ *und* $\mu = 1, 2, \ldots \nu - 1$ — *ganze algebraische Functionen von* x *und* $\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0)$ *von der Ordnung* $\nu - \mu$ *sind, wobei die Constante* x_0 *beliebig gewählt werden kann [jedoch mit dem im § 1 angegebenen Einflusse auf die Grössen* $A_{\nu,\mu}$, $\varphi_2(x)$ *und* $\varphi_{\nu,\mu}(x)$], *und haben diese Functionen* $A_{\nu,\mu}$ *die Eigenschaft, dass wenn* $\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0)$ *als eine von* x *unabhängige Veränderliche* z *betrachtet wird, so giebt es gewisse Constanten*

$$a_1^{(\nu,\mu)},\ a_2^{(\nu,\mu)},\ \cdots a_{\nu-\mu}^{(\nu,\mu)}$$

$$b_1^{(\nu,\mu)},\ b_2^{(\nu,\mu)},\ \cdots b_{\nu-\mu}^{(\nu,\mu)},$$

welche den Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x} A_{\nu,\mu} = a_1^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\mu+1} + a_2^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\mu+2} + \cdots + a_{\nu-\mu-1}^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\nu-1} + a_{\nu-\mu}^{(\nu,\mu)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_{\nu,\mu} = b_1^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\mu+1} + b_2^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\mu+2} + \cdots + b_{\nu-\mu-1}^{(\nu,\mu)} A_{\nu,\nu-1} + b_{\nu-\mu}^{(\nu,\mu}$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots;\ \mu = 1, 2, \ldots \nu - 1)$$

für jeden Werth der Veränderlichen x *und* z *genügen.*

UEBER
MINIMALFLÄCHENSTÜCKE,
DEREN BEGRENZUNG
VON
DREI GERADLINIGEN THEILEN
GEBILDET WIRD.

VON

E. R. NEOVIUS.

I.

EINLEITUNG.

Unter den, die analytische Bestimmung von Minimalflächen betreffenden Aufgaben, für welche Riemann den Weg zur Lösung im Allgemeinen vorgezeichnet hat, findet sich folgende*):

„Es soll die Fläche vom kleinsten Inhalt bestimmt werden, welche begrenzt ist von drei Geraden, die sich in zwei Punkten schneiden, so dass die Fläche zwei Ecken in ihrer Begrenzung und einen ins Unendliche verlaufenden Sector besitzt".

Die Bestimmung einer solchen Fläche ist von Riemann auf eine P-Function zurückgeführt worden, welche so beschaffen ist, dass durch den Quotienten zweier Zweige dieser Function die conforme Abbildung einer Halbebene auf die Fläche eines *Kreisbogendreiecks* vermittelt wird.

Die Fläche dieses Kreisbogendreiecks ist die stereographische Projection der Fläche desjenigen auf der Hülfskugel vom Radius Eins liegenden sphärischen Dreiecks, auf welches das gesuchte Minimalflächenstück durch parallele Normalen conform abgebildet wird.

Bezüglich der Bestimmung der Winkel dieses sphärischen Dreiecks ist eine nicht völlig zutreffende Angabe, welche sich in dem angeführten Aufsatze befindet, zu berichtigen, wie ich in dem Nachfolgenden zeigen werde.

Die vollständige Durchführung eines speciellen Falles dieser Aufgabe ist meines Wissens bis jetzt noch nicht unternommen worden. Besonderes Interesse verdienen diejenigen speciellen Fälle dieser Aufgabe, für welche die bei der erwähnten Abbildung in Betracht kommenden P-Functionen, welche im Allgemeinen transcendente Functionen ihres Arguments sind, in algebraische Functionen übergehen.

*) Siehe die aus dem Nachlasse Riemanns von Herrn H. Weber herausgegebene Abhandlung: „Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung", Riemanns Gesammelte Werke, Seite 417.

Auf einen dieser Fälle bezieht sich der erste Theil der nachfolgenden Untersuchung, und zwar auf den Fall, in welchem das in Betracht kommende sphärische Dreieck die Winkel 45^0, 90^0, 120^0 besitzt, wobei die Ecke mit dem Winkel 45^0 dem ins Unendliche sich erstreckenden Sector entspricht.

Bei der folgenden Darstellung setze ich nur die einfachsten Lehrsätze aus der Theorie der Minimalflächen, nicht aber die Theorie der Riemann'schen P-Functionen, beziehungsweise der Gaussischen hypergeometrischen Reihe voraus.

Durch Zusammensetzung von sechs Minimalflächenstücken, von denen jedes einzelne dem im Vorhergehenden bezeichneten Minimalflächenstücke congruent ist, gelangt man zu einem Minimalflächenstücke, dessen Begrenzung von drei geraden Linien gebildet wird. Die Richtungen von je zwei dieser Geraden bilden mit einander einen rechten Winkel und je zwei derselben haben von der jedesmaligen dritten gleich grosse Abstände.

Der zweite Theil der vorliegenden Abhandlung beschäftigt sich mit der Bestimmung eines Minimalflächenstückes, dessen Begrenzung ebenfalls von drei Geraden gebildet wird, von denen je zwei auf einander senkrecht stehen, während die Abstände dieser Geraden beliebige Grösse haben.

Dieselbe Aufgabe wird auch in der posthumen Abhandlung Riemann's*) in Betracht gezogen, und zwar erweist sich dieselbe als specieller Fall einer allgemeineren Aufgabe, deren Lösung die Bekanntschaft mit den Eigenschaften der Riemann'schen P-Functionen voraussetzt.

Man wird aus dem Nachfolgenden ersehen, dass der Zugang zur Lösung der im zweiten Theile behandelten Aufgabe mit noch einfacheren Hülfsmitteln gewonnen werden kann, als denjenigen, welche in der Riemann'schen Abhandlung zur Anwendung gelangen.

Ueber die verschiedenen Gestalten, welche diese Minimalflächenstücke haben können, enthält die posthume Riemann'sche Abhandlung keine Angabe. Ich darf daher wohl hoffen, dass die Ergebnisse der Untersuchungen, welche ich über die Gestalt dieser Flächen angestellt habe, für die Kenner der Riemann'schen Abhandlung nicht ohne Interesse sein werden.

In beiden Theilen beruht die Untersuchung wesentlich auf der Betrachtung der conformen Abbildung gegebener einfach zusammenhängender Bereiche auf eine Halbebene. Auch abgesehen von dem besonderen Zwecke, zu welchem diese Abbildungsaufgaben hier dienen, dürften dieselben Interesse darbieten.

*) Riemann's Gesammelte Werke, Seite 307.

Erster Theil.

Analytische Bestimmung eines Minimalflächenstückes, dessen Begrenzung von drei geradlinigen Theilen gebildet wird. Zwei dieser Theile gehören zwei einander nicht schneidenden Geraden an und erstrecken sich von je einem im Endlichen gelegenen Punkte ins Unendliche; der dritte Theil der Begrenzung wird gebildet von der ganz im Endlichen liegenden Strecke, welche die Endpunkte der erwähnten beiden Begrenzungsstücke verbindet.

Stellung der Aufgabe. Abbildung des Minimalflächenstückes auf die Hülfskugel. Einführung der Halbebene w.

Es bezeichne $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die ganz im Endlichen liegende, der Begrenzung des Minimalflächenstückes angehörende geradlinige Strecke. $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2$ die beiden andern, von den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus sich ins Unendliche erstreckenden Theile der Begrenzung (Fig. 1).

Es bezeichne ferner:

$\alpha\pi$ den Unterschied der Richtungen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1$,
$\beta\pi$ „ „ „ „ $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ „ $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2$,
$\gamma\pi$ „ „ „ „ $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1$ „ $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2$,

mit der Festsetzung, dass $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $0<\gamma<1$.

Die allgemein gestellte Forderung, ein Minimalflächenstück analytisch zu bestimmen, dessen vollständige Begrenzung von den drei Linien $\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2$ gebildet wird, wird nun dahin näher erläutert, dass das gesuchte Minimalflächenstück, welches mit M_1 bezeichnet werden soll, in der Umgebung der Ecken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die in meiner vorhergehenden Abhandlung „Untersuchung einiger Singularitäten, welche im Innern und auf der Begrenzung von Minimalflächenstücken auftreten können, deren Begrenzung von geradlinigen Strecken gebildet wird“ unter N:o 1 Seite 536 beschriebene Beschaffenheit besitzen soll, während der ins Unendliche reichende, von den Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2$ begrenzte Sector das unter N:o 1 Seite 543 charakterisirte Verhalten haben soll.

Eine nähere Erörterung zeigt, dass noch die Forderung hinzugefügt werden kann, ohne dass dadurch die Aufgabe aufhört lösbar zu sein, dass das Minimalflächenstück M_1 ausser den erwähnten Singularitäten weder in seinem Innern, noch längs der Begrenzung eine Singularität besitzen soll. Ich lasse hierbei unerörtert, in wie weit die Abwesenheit solcher Singularitäten sich bereits aus den übrigen gestellten Bedingungen ergibt.

Betrachtet man daher die durch parallele Normalen vermittelte conforme Abbildung des Minimalflächenstückes M_1 auf die Hülfskugel vom Radius Eins, so entspricht demselben die schlichte Fläche eines sphärischen Dreiecks, und zwar sind die Winkel nicht, wie man nach der in der angeführten Abhandlung (Riemann, Gesammelte Werke, Seite 417) vorkommenden Angabe erwarten könnte $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, sondern $(1-\alpha)\pi$, $(1-\beta)\pi$, $\gamma\pi$.

Hierbei ist insbesondere vorausgesetzt, dass die Amplitude des ins Unendliche reichenden Flächentheiles genau $\gamma\pi$ und nicht etwa $(2n \pm \gamma)\pi$ beträgt, wo n eine von Null verschiedene ganze positive Zahl bezeichnet.

Die Aufgabe, bei welcher diese Amplitude die Grösse $(2n \pm \gamma)\pi$ hat, würde zwar, auch wenn $n > 0$ ist, mit denselben Hülfsmitteln lösbar sein, welche hier zur Anwendung gelangen. Ich gehe jedoch auf diese Fälle hier nicht ein.

Zwischen den Grössen α, β, γ besteht die Relation

$$\gamma + 1 > \alpha + \beta,$$

wie sich aus geometrischen Betrachtungen ergibt.

Man denke sich das Minimalflächenstück M_1 auf die Fläche einer Halbebene, deren Punkte die Werthe einer complexen Grösse w geometrisch darstellen, conform abgebildet, und zwar in der Weise, dass den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ der Begrenzung die Werthe $w = 0, 1, \infty$ der complexen Grösse w entsprechen.

Dann ergibt sich die von Herrn Weierstrass mit s bezeichnete Grösse als Function der Grösse w durch die Lösung der Abbildungsaufgabe: die Fläche der Halbebene w zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich (ausgenommen die Punkte $w = 0, 1, \infty$, in denen nur die Stetigkeit aufrecht erhalten bleiben muss) auf die Fläche eines *Kreisbogendreiecks* mit den Winkeln $(1-\alpha)\pi$, $(1-\beta)\pi$, $\gamma\pi$ abzubilden.

Die Lage dieses Kreisbogendreiecks in der s-Ebene muss hierbei eine solche sein, dass jede der drei Seiten desselben den Einheitskreis in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten schneidet, denn nur unter dieser Voraussetzung entspricht demselben bei dem Übergange von der s-Ebene auf die Hülfskugel eine von drei Bogen grösster Kreise begrenzte Figur auf der Kugelfläche.

Bezüglich der Lösung dieser Aufgabe verweise ich auf die Abhandlung des Herrn H. A. Schwarz „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt" Journal für Mathematik Bd. 75, pag. 300, sowie auf meine Abhandlung „Bestimmung zweier speciellen periodischen Minimalflächen" Helsingfors 1883.

Einige allgemeinere Betrachtungen.

Es scheint mir nöthig, hier einige allgemeinere Betrachtungen einzuschalten, deren Erörterung später den Gang der Untersuchung unterbrechen würde.

Wenn, wie es üblich ist, angenommen wird, dass die positiven Richtungen, der x-, y-, z-Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems in dem Sinne aufeinander folgen, welche durch die Ortsbezeichnungen gerade aus, nach links, aufwärts gerichtet bezeichnet werden, so wird durch die Grundformeln der analytischen Geometrie des Raumes der positive Sinn der Senkrechten zu zwei Richtungen unzweideutig bestimmt.

Die positive Richtung der Senkrechten zu zwei gegebenen Richtungen (1) und (2) ist diejenige Richtung (3), welche mit den Richtungen (1) und (2) rechte Winkel einschliesst und auf diese Richtungen im positiven Sinne folgt.

Nach dieser Bemerkung wird die Festsetzung getroffen:

Das von der Linie $\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2$ begrenzte Minimalflächenstück hat zwei Seiten, welche als die positive und negative von einander unterschieden werden sollen.

Die positive Seite soll diejenige sein, welche der positiven Richtung der Normale entspricht.

Die positive Richtung der Normale braucht dann nur für einen Punkt des Innern oder der Begrenzung fixirt zu werden und ist dann für alle anderen Punkte des einfach zusammenhängenden Flächenstückes unzweideutig bestimmt.

Als positive Richtung der Normale des Minimalflächenstückes im Punkte $\mathfrak{A}$ soll diejenige fixirt werden, welche auf die Richtungen der beiden Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ im positiven Sinne folgt.

Denkt man sich einen längs der Begrenzung des Minimalflächenstückes fortschreitenden, auf der positiven Seite desselben stehenden Beobachter, welcher die Begrenzung in dem Sinne $\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2$ durchläuft, so hat derselbe das Innere des Flächenstückes stets zu seiner Rechten.

Bei der conformen Uebertragung des Minimalflächenstückes auf die Kugel durch die Endpunkte der Radien, welche den positiven Richtungen der Normalen parallel sind, entspricht dem Minimalflächenstücke ein sphärisches Dreieck $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$.

Für einen ausserhalb der Kugel stehenden die Begrenzung des sphärischen Dreiecks in dem Sinne $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ durchlaufenden Beobachter liegt das Innere des sphärischen Dreiecks stets zur Linken.

Bei der conformen Uebertragung der Fläche des sphärischen Dreiecks auf ein in der Ebene der complexen Grösse s liegendes Kreisbogendreieck $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ zeigt sich, dass ein Beobachter, welcher auf der positiven Seite der s-Ebene stehend die Begrenzung des Kreisbogendreiecks in dem Sinne $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ durchläuft, das Innere des Kreisbogendreiecks zu seiner Rechten hat.

Wird nun wie oben festgesetzt, dass bei der conformen Uebertragung der Fläche des Kreisbogendreiecks durch eine Function des complexen Arguments s auf eine Halbebene, deren Begrenzung von der Axe des Reellen gebildet wird, den Ecken $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ desselben die Werthe $w=0, w=1, w=\infty$ entsprechen sollen, so ergibt sich, dass die Halbebene, auf welche die Fläche des Kreisbogendreiecks durch die Function conform abgebildet wird, auf der rechten oder negativen Seite der Axe des Reellen der w-Ebene liegt.

Abbildung des Minimalflächenstückes auf die σ-Ebene.

Bei der Abbildung des Minimalflächenstückes M_1 auf die σ-Ebene entspricht demselben die Fläche eines ins Unendliche reichenden Parallelstreifens Σ_1, welcher im Endlichen durch eine Senkrechte zu den parallelen Geraden begrenzt ist (a. a. O. pag. 542). Die beiden im Endlichen liegenden Ecken der Begrenzung dieses Flächenstückes entsprechen den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf der Begrenzung von M_1, der unendlich ferne Punkt des Parallelstreifens entspricht den unendlich fernen Elementen von M_1.

Die Abbildung der Halbebene w auf die Fläche des Parallelstreifens in der σ-Ebene wird dann gegeben durch die Formel

$$\frac{d\sigma}{dw} = \frac{c\sqrt{i}}{\sqrt{w(1-w)}},$$

wobei den Werthen $w = 0$, $w = 1$ die beiden Ecken des Gebietes Σ_1 entsprechen, dem Punkte $w = \infty$ dagegen der unendlich ferne Punkt von Σ_1 zugeordnet ist.

Der Constanten c ist ein reeller oder ein rein imaginärer Werth beizulegen, jenachdem das Minimalflächenstück M_1 die eine oder die andere der beiden Gestalten hat, welche durch die Bezeichnungen links- oder rechtsgewunden von einander unterschieden werden können. Der dem Flächenstücke M_1 angehörende, sich ins Unendliche erstreckende Theil hat nämlich näherungsweise entweder die Gestalt eines Stückes einer linksgewundenen, oder die Gestalt eines Stückes einer rechtsgewundenen Schraubenfläche.

Wird nun festgesetz, dass im ersten Falle der Abstand A der beiden Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2$ als negativ, im letzteren Falle dagegen als positiv einzuführen ist, so ergibt sich der Werth der Constanten c durch die Gleichung (a. a. O. pag. 544).

$$c = \sqrt{-\frac{A\gamma}{\pi}}.$$

Sind die Ausdrücke der Grössen s und σ als Functionen der Variablen w bekannt, so lassen sich in bekannter Weise die Ausdrücke für die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der gesuchten Minimalfläche aufstellen.

Lösung der gestellten Aufgabe für den speciellen Fall

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{4}.$$

Conforme Abbildung vermittelt durch die Function

$$x' = C \frac{v^3 (v - a)^2}{v - c}.$$

Nach den die allgemeine Aufgabe betreffenden Bemerkungen, gehe ich jetzt dazu über, einen speciellen Fall zu betrachten, dessen Untersuchung vollständig durchgeführt werden soll.[1])

Ich wähle

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{4}.$$

Das sphärische Dreieck $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ mit den Winkeln 120^0, 90^0, 45^0, welches durch Vermittelung paralleler Normalen dem betrachteten Minimalflächenstücke M_1 entspricht, ist in Fig. 2 in stereographischer Projection dargestellt. Dasselbe ist zusammengesetzt aus fünf von den 48 Fundamentaldreiecken mit den Winkeln 90^0, 60^0, 45^0, in welche die Kugel durch die Symmetrie-Ebenen des eingeschriebenen Würfels zerschnitten wird und wird von einem dieser letzteren zu einem sphärischen Zweiecke mit dem Winkel 45^0 ergänzt.

Jedes dieser Fundamentaldreiecke wird aber auf die Fläche einer Halbebene, deren Punkte die Werthe der complexen Grösse x' geometrisch darstellen, durch eine rationale Function, und zwar durch die Function

---

[1]) Es sei bemerkt, dass der Fall, in welchem $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, dagegen γ einen beliebigen Werth annimmt, zu der gewöhnlichen Schraubenfläche führt.

$$x' = \frac{(1 + 14s^4 + s^8)^3}{4 \,.\, 27\,(s\,(1 - s^4))^4},$$

$$x' - 1 = \frac{(1 - 33s^4 - 33s^8 + s^{12})^2}{4 \,.\, 27\,(s\,(1 - s^4))^4}$$

abgebildet. Der Werth $x' = \infty$ entspricht hierbei der Ecke mit dem Winkel 45^0 (H. A. Schwarz, a. a. O. pag. 329).

Es sei das Coordinatensystem so gewählt, dass die Ecken eines der sphärischen Dreiecke mit den Winkeln 60^0, 90^0, 45^0 beziehlich den Werthen $s = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 + i)$, $s = \sqrt{2} - 1$ und $s = 0$ entsprechen.

Es soll nun dasjenige sphärische Dreieck $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ ins Auge gefasst werden, dessen Ecken den Werthen $s = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}(1 + i)$, $s = \sqrt{2} + 1$, $s = 0$ oder den Punkten $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ der s-Ebene entsprechen, welches, wie die Fig. 2 zur Anschauung bringt, aus fünf der betrachteten Fundamentaldreiecke zusammengesetzt ist.

Denkt man sich durch Vermittelung derselben Function x' die Fläche des Kreisbogendreiecks $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ auf einen ebenen Bereich conform abgebildet, so ist der letztere, da jedem der fünf Kreisbogendreiecke, aus denen der erstere Bereich zusammengesetzt ist, eine Halbebene entspricht, aus fünf Halbebenen zusammengesetzt. Die Ecken entsprechen den Werthen $x' = 0$, $x' = 1$, $x' = \infty$ und je zwei an einander angrenzenden Fundamentaldreiecken entsprechen zwei Halbebenen, welche längs einer der drei Strecken $-\infty \cdots 0$, $0 \cdots 1$, $1 \cdots + \infty$ der Axe des Reellen mit einander zusammenhängen.

Die Gesammtheit dieser fünf Halbebenen bildet einen einfach zusammenhängenden Bereich X', dessen Begrenzung ganz auf der Axe des Reellen liegt. Die Art des Zusammenhanges der fünf Halbebenen ist durch die Fig. 2 veranschaulicht.

Der Bereich X' kann auf die Fläche einer Halbebene conform abgebildet werden, da nach einem von Riemann (Gesammelte Werke, pag. 40) bewiesenen Satze alle einfach zusammenhängenden Bereiche zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich auf einander abgebildet werden können.

Es möge die Fläche dieser, von der Axe des Reellen begrenzten Halbebene mit $\mathfrak{V}'$ bezeichnet werden. Durch die Punkte dieser Halbebene mögen die Werthe einer complexen Grösse v geometrisch dargestellt werden, so wird die Abbildung des Bereiches $\mathfrak{V}'$ auf den Bereich X' durch die Function $x' = \chi(v)$ vermittelt. Hierbei entsprechen reellen Werthen von v reelle Werthe von x' (Fig. 3).

Denkt man sich die beiden Bereiche X' und $\mathfrak{V}'$ in Bezug auf ihre geraden Begrenzungslinien symmetrisch wiederholt, so dass die diesen symmetrischen Bereiche X'' und $\mathfrak{V}''$ entstehen, so entsprechen bei der analytischen Fortsetzung des Bereiches des Arguments der Function $\chi(v)$ über die Axe des Reellen hinaus conjugierten Werthen des Arguments conjugierte Werthe der Function, und es entspricht dem aus den beiden Halbebenen $\mathfrak{V}'$ und $\mathfrak{V}''$ zu bildenden geschlossenen Bereiche $\mathfrak{V}'+\mathfrak{V}''$ ein aus den beiden Bereichen X' und X'' zu bildender geschlossener Bereich $X'+X''$.

Dieser letztere Bereich besteht aus zehn Halbebenen und bildet eine geschlossene einfach zusammenhängende fünfblättrige Riemann'sche Fläche, deren Verzweigungspunkte, wie sich aus der angegebenen Zeichnung ergibt, folgende sind:

Im Punkte $x'=0$ besitzt die angegebene Fläche einen Windungspunkt erster und einen Windungspunkt zweiter Ordnung. Im Punkte $x'=1$ besitzt die Fläche zwei Windungspunkte erster Ordnung. Im Punkte $x'=\infty$ besitzt die Fläche einen Windungspunkt dritter Ordnung.

Nach einem allgemeinen von Riemann bewiesenen Lehrsatze (Gesammelte Werke, pag. 39) ist die Function $x'=\chi(v)$ eine algebraische, und da zu jedem Werthe des Arguments v, weil der Bereich $\mathfrak{V}'+\mathfrak{V}''$ einblättrig ist, nur ein Werth der Grösse x' gehört, so ist diese Function eine rationale.

Setzt man fest, dass der Windungspunkt dritter Ordnung dem Werthe $v=\infty$, der Windungspunkt zweiter Ordnung dem Werthe $v=0$ entspricht, so muss der Nenner der Function $\chi(v)$ vom ersten Grade sein und der Zähler den Factor v^3 enthalten. Da im Punkte $x'=0$ die Riemann'sche Fläche $X'+X''$ ausser dem Windungspunkte zweiter Ordnung noch einen Windungspunkt erster Ordnung besitzt, so muss der Zähler der Function $\chi(v)$ ausser dem Factor v^3 noch einen quadratischen Factor $(v-a)^2$ besitzen. Es muss daher die Function $\chi(v)$ die Gestalt haben

$$x'=\chi(v)=C\frac{v^3(v-a)^2}{v-c},$$

worin C eine noch zu bestimmende Constante bezeichnet.

Ueber eine der Grössen a, c kann beliebig verfügt werden. Es werde $a=-1$ gesetzt.

Zur Bestimmung der Grössen C und c kann die Bemerkung dienen, dass in zweien derjenigen Punkte der Riemann'schen Fläche $X'+X''$, welche dem Werthe $x'=1$ entsprechen, diese Function je einen Windungspunkt erster Ordnung besitzt. Hieraus folgt, dass die Gleichung

$$\frac{1}{C}(v-c)(x'-1) = v^3(v+1)^2 - \frac{1}{C}(v-c)$$

zwei Paare gleicher Wurzeln haben muss.

Die Bedingung, dass die auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung stehende ganze Function fünften Grades und die erste Ableitung derselben einen gemeinsamen Theiler besitzen, welcher eine ganze Function zweiten Grades der Grösse v ist, erweist nach einiger Rechnung, auf deren Wiedergabe ich hier verzichte, zunächst als nothwendig, dass die Grösse c die Gleichung

$$625\,c^3 + 650\,c^2 + 44\,c - 8 = 0$$

befriedige.

Diese cubische Gleichung hat drei Wurzeln, welche der Grösse nach geordnet die Werthe

$$\frac{-14-4\sqrt{6}}{25}, \quad \frac{-14+4\sqrt{6}}{25}, \quad +\frac{2}{25}$$

haben. Von diesen drei Wurzeln haben die beiden ersten für die vorliegende Frage keine Bedeutung, weil die Grösse c wegen der Aufeinanderfolge der auf der Begrenzung des Kreisbogendreiecks $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ in Betracht gezogenen Punkte einen positiven Werth haben muss. Es müssen nämlich die den Werthen

$$s = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i), \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i), \quad 0, \quad 1$$

entsprechenden Werthe von v, nämlich

$$v = \quad -1 \quad , \quad 0 \quad , \quad c, \quad \infty$$

der Grösse nach in derselben Reihenfolge auf einander folgen, welche durch die Aufeinanderfolge der Werthe von s auf der Begrenzung des Kreisbogendreiecks $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ bestimmt ist.

Es ist demnach

$$c = +\frac{2}{25}.$$

Für die Constante C ergibt sich der Werth

$$C = \frac{2^2 \cdot 5^3}{3^3}.$$

Die beiden Paare gleicher Wurzeln der Gleichung $\chi(v) = 1$ sind

$$f = \frac{-2+\sqrt{10}}{10}, \quad h = \frac{-2-\sqrt{10}}{10}.$$

Es ergibt sich somit die Function $\chi(v)$ in der Form

$$x' = \frac{2^2 \cdot 5^5}{3^3} \frac{v^3 (v+1)^2}{25v - 2}.$$

Für die Werthe $v = f$ und $v = h$ nimmt die Grösse x' den Werth 1 an. Ausserdem soll x' den Werth 1 noch für den Werth $v = b$ annehmen. Hieraus ergibt sich die Gleichung

$$x' - 1 = \frac{2^2 \cdot 5^5}{3^3} \frac{(v-f)^2 (v-h)^2 (v-b)}{25v - 2}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$b = -\frac{6}{5}.$$

Es besteht also die identische Relation

$$2^2 \cdot 5^5 v^3 (v+1)^2 - 3^3 (25v - 2) = (50v^2 + 20v - 3)^2 (5v + 6).$$

Einführung einer neuen Variablen w durch die Gleichung

$$w = \frac{5 \cdot 2^5 (v+1)}{25v - 2}.$$

Bei der Wahl derjenigen Werthe der Grösse v, welche den Werthen $0, 1, \infty$ der Grösse x' entsprechen sollen, ist der Gesichtspunkt massgebend gewesen, dass die Bestimmung der Constanten einen möglichst geringen Aufwand von Rechnung erfordere. Für die zu erledigende Aufgabe ist es nun zweckmässig, von der Halbebene, deren Punkte die complexe Grösse v geometrisch darstellen, zu einer anderen Halbebene überzugehen, deren Punkte den Werthen einer complexen Grösse w entsprechen, welche mit der Grösse v durch die Gleichung

$$w = \frac{b-c}{b+1} \cdot \frac{v+1}{v-c} = \frac{5 \cdot 2^5 (v+1)}{25v - 2}$$

verbunden ist.

In Folge dieser Gleichung werden den, den Eckpunkten des betrachteten Kreisbogendreiecks $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ entsprechenden Werthen der Grösse v, nämlich $v = a, b, c$ die Werthe $w = 0, 1, \infty$ zugeordnet (Fig. 4).

Dem Innern des Kreisbogendreiecks $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ entspricht die auf der negativen Seite der Axe des Reellen der w-Ebene liegende Halbebene.

Durch Einführung der Grösse w in den Ausdruck für die Grösse x' ergibt sich

$$x' = \frac{w^2(w+80)^3}{(5w-32)^4}.$$

Wenn in der vorstehenden Gleichung der Grösse x' der Werth 1 beigelegt wird, so hat die für die Grösse w sich ergebende Gleichung zwei Paare gleicher Wurzeln. Für jede von diesen beiden Wurzeln erlangt daher die Ableitung $\frac{dx'}{dw}$ den Werth Null. Mit anderen Worten: die Function $\frac{dx'}{dw}$ enthält einen quadratischen Factor, welcher gleich Null gesetzt die erwähnten beiden, dem Werthe $x = 1$ entsprechenden Doppelwurzeln ergibt. Durch Differentiation ergibt sich für diesen Factor der Werth

$$w^2 - 192w - 1024,$$

welcher gleich Null gesetzt zu den Wurzeln

$$32(3 + \sqrt{10})$$

führt. Diese Werthe ergeben sich auch dadurch, dass in dem Ausdrucke für w der Grösse v die beiden Werthe $\frac{-2 \pm \sqrt{10}}{10}$ beigelegt werden.

Ausser für diese Werthe der Grösse w erlangt die Grösse x' den Werth 1 noch für den Werth $w = 1$. Es besteht daher die identische Relation

$$x' - 1 = \frac{w^2(w+80)^3}{(5w-32)^4} - 1 = \frac{(w-1)(w^2-192w-1024)^2}{(5w-32)^4}.$$

Durch die Gleichung

$$\frac{(1+14s^4+s^8)^3}{4\,.\,27\,(s(1-s^4))^4} = \frac{w^2(w+80)^3}{(5w-32)^4}$$

wird eine solche conforme Abbildung des Kreisbogendreiecks $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ auf eine Halbebene vermittelt, dass den drei Ecken des Dreiecks die Werthe $w = 0,\ 1,\ \infty$ zugeordnet werden. Es ergibt sich die Grösse w als eine fünfdeutige algebraische Function der Grösse s.

Da nun die Abbildung der Halbebene auf die Fläche eines Kreisbogendreiecks stets durch eine der Functionen $s(\lambda, \mu, \nu, w)$ vermittelt werden kann (H. A. Schwarz, a. a. O. pag. 302), so wird der Vollständigkeit wegen hier darauf hingedeutet, dass die durch jene Gleichung bestimmte Grösse w auch gegeben wird durch die Gleichung

$$s = s\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, w\right)$$

mit der Festsetzung, dass für $w = 0, 1, \infty$ s die Werthe $\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i), \sqrt{2}+1, 0$ haben soll.

Um die Uebersicht zu erleichtern, stelle ich in der folgenden Tabelle die zugehörenden Werthe der Grössen s, x', v, w zusammen. Die Tabelle enthält ferner noch die Werthe der Grössen z', τ, t, deren Erklärung in der Folge gegeben werden wird.

	s	x'	v	w	z'	τ	t
$\mathfrak{C}''$, (c)	0	∞	$\frac{2}{25}$	∞	1	1	0
(f)	$\sqrt{2}-1$	1	$\frac{-2+\sqrt{10}}{10}$	$32(3+\sqrt{10})$	ε^{-1}	$\frac{\varepsilon}{4}\left(-1+\sqrt{10}-i\sqrt{2\sqrt{10}+5}\right)$ $= 0{,}998871 + 0{,}047497\, i$	$-0{,}027820$
(d)	1	∞	∞	$\frac{32}{5}$	ε^4	$\frac{\varepsilon^2}{4}(-1-i\sqrt{15}) =$ $= 0{,}963525 + 0{,}267616\, i$	$-0{,}170820$
$\mathfrak{B}''$, (b)	$\sqrt{2}+1$	1	$-\frac{6}{5}$	1	ε^{-1}	ε	-1
$\mathfrak{A}''$, (a)	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\sqrt{i}$	0	-1	0	0	0	ε^{-1}
(h)	$\sqrt{i}$	1	$\frac{-2-\sqrt{10}}{10}$	$32(3-\sqrt{10})$	-1	$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{10}-\sqrt{2\sqrt{10}-5}\right)$ $= 0{,}752846$	$0{,}013163 -$ $0{,}161742\, i$
(g)	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\sqrt{i}$	0	0	-80	∞	$\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = 0{,}928318$	$0{,}000921 -$ $0{,}042904\, i$
$\mathfrak{C}_1''$	-1					ε^2	∞
$\mathfrak{C}_2''$	$-i$					ε^4	1

$$\varepsilon = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}.$$

Auflösung der Gleichung vierundzwanzigsten Grades in Bezug auf s. Einführung der Variablen z' und τ.

Die Aufstellung der Ausdrücke für die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes des Minimalflächenstückes M_1 erfordert die Auflösung der Gleichung

$$x' = \frac{(1 + 14 s^4 + s^8)^3}{4 \,.\, 27 \,(s(1 - s^4))^4},$$

welche in Bezug auf s vom vierundzwanzigsten Grade ist.

Eine Substitution, durch welche es gelingt, diese Gleichung zu lösen, hat Herr H. A. SCHWARZ (Monatsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1865) zuerst angegeben, nämlich

$$z' = \frac{s^4 - 2i\sqrt{3}\, s^2 + 1}{s^4 + 2i\sqrt{3}\, s^2 + 1}.$$

Mit Hülfe derselben lässt sich zeigen, dass die Gleichung vierundzwanzigsten Grades gelöst werden kann durch Ausziehung e r s t e i n e r Q u a d r a t w u r z e l, d a n n e i n e r C u b i k w u r z e l u n d e n d l i c h n o c h z w e i e r Q u a d r a t w u r z e l n*).

Die wirkliche Auflösung kann in folgender Weise ausgeführt werden: Aus der Hülfsgleichung ergibt sich

$$s^2 = i\,\frac{\sqrt{3}(1 + z') - 2\sqrt{1 + z' + z'^2}}{1 - z'}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ergibt sich aus der Bedingung, dass für $z' = 1$ $s = 0$ sein soll. Für reelle Werthe von z' ist der Quadratwurzel ihr Hauptwerth beizulegen.

Diesem Ausdrucke für die Grösse s^2 kann auch die Form gegeben werden

$$s^2 = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon z'} - \sqrt{\varepsilon + z'}}{\sqrt{1 + \varepsilon z'} + \sqrt{\varepsilon + z'}},$$

in welcher der Grösse ε der Werth

$$\varepsilon = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

beizulegen ist.

*) Vergleiche auch F. KLEIN, Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 93 und 96.

Es erübrigt noch, die Grösse z' als Function der Grösse x' auszudrücken. Zu dem Zwecke bedienen wir uns einer von Herrn H. A. Schwarz in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe angeführten Identität (pag. 326), in welcher die Grösse s durch die Grösse $s\sqrt{i}$ ersetzt werden soll.[1]) Dieselbe lautet alsdann

$$(1 + 2i\sqrt{3}\, s^2 + s^4)^3 - (1 - 2i\sqrt{3}\, s^2 + s^4)^3 = 12i\sqrt{3}\left(s(1 - s^4)\right)^2.$$

Durch Erhebung ins Quadrat und Division mit dem Ausdrucke

$$(1 + 2i\sqrt{3}\, s^2 + s^4)^3 (1 - 2i\sqrt{3}\, s^2 + s^4)^3 = (1 + 14s^4 + s^8)^3$$

ergibt sich die Gleichung

$$z'^3 + z'^{-3} = 2 - \frac{4}{x'}.$$

Hieraus erhält man

$$z' = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1 - x'} - 1}{\sqrt{1 - x'} + 1}}.$$

Durch Einführung dieses Werthes in den Werth für s^2 (pag. 589) ergibt sich s als Function von z'.

In dem Ausdrucke für z' ist nun für die Wurzelgrösse $\sqrt{1 - x'}$ ihr durch die Grösse w ausgedrückter Werth einzuführen. Es ergibt sich unter Anwendung der auf Seite 587 angegebenen identischen Relation

$$z' = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1 - w}\,(w^2 - 192w - 1024) + (5w - 32)^2}{\sqrt{1 - w}\,(w^2 - 192w - 1024) - (5w - 32)^2}}.$$

Durch Einführung der Grösse $\sqrt{1 - w}$ als neuer Variablen lassen sich Zähler und Nenner unter dem Wurzelzeichen durch dieselbe Variable rational ausdrücken und in Factoren zerlegen. Man gelangt so zu dem Ausdrucke

$$z' = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{1 - w} - 1)^2}{(\sqrt{1 - w} + 1)^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - w} + 9}{\sqrt{1 - w} - 9}}.$$

Aus dieser Form des Ausdruckes für die Grösse z' ist ersichtlich, dass nicht allein die Wurzelgrösse $\sqrt{1 - w}$, sondern auch die Grössen w und z' sich durch die Wurzelgrösse

---

[1]) Klein, a. a. O. p. 51.

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1-w}-1}{\sqrt{1-w}+1}}$$

rational ausdrücken lassen, und zwar ergibt sich

$$\sqrt{1-w} = \frac{1+\tau^3}{1-\tau^3},$$

$$w = -4\,\frac{\tau^3}{(1-\tau^3)^2},$$

$$z' = -\tau^2\,\frac{1-\frac{4}{5}\tau^3}{\frac{4}{5}-\tau^3}.$$

Es ergibt sich ausserdem die identische Relation

$$z'-1 = \frac{(1-\tau)(2+\tau+2\tau^2)^2}{5\tau^3-4} = \frac{\tau^2(5-5\tau-4\tau^3)+4}{5\tau^3-4}.$$

Conforme Abbildung vermittelt durch die Grösse τ als Function der Grösse w.

Ich gehe nun dazu über, die durch die Grösse τ vermittelte conforme Abbildung zu betrachten.

Das aus fünf Fundamentaldreiecken gebildete Kreisbogendreieck $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$ wurde auf die Halbebene w so abgebildet, dass den Eckpunkten des Dreiecks beziehlich die Werthe $w=0,\ 1,\ \infty$ entsprachen. In der schematischen Zeichnung Fig. 5 sei $\mathfrak{A}'''\,\mathfrak{B}'''\,\mathfrak{C}'''$ dieses Dreieck. Wird dasselbe in Beziehung auf die Seite $\mathfrak{B}'''\,\mathfrak{C}'''$ symmetrisch wiederholt, so entsprechen dem aus zwei Dreiecken N und N' gebildeten Gebiete $\mathfrak{A}_1'''\,\mathfrak{C}'''\,\mathfrak{A}'''$ zwei längs der Strecke $1\,.\,.\,\infty$ zusammenhängende Halbebenen in der Ebene der complexen Grösse w (Fig. 6).

Durch die Function

$$w_1 = \sqrt{1-w}$$

werden diese zwei Halbebenen auf eine einzige Halbebene abgebildet (Fig. 7), wenn die Bedingung gestellt wird, dass im Gebiete N der Wurzelgrösse $\sqrt{1-w}$ ihr Hauptwerth beigelegt werden soll.

Vermittelst einer Transformation durch reciproke Radien, indem der Punkt -1 zum Transformationsmittelpunkte, der dem Punkte $+1$ entsprechende Punkt zum neuen Nullpunkte gewählt wird, oder durch die Function

$$\tau^3 = \frac{\sqrt{1-w}-1}{\sqrt{1-w}+1}$$

wird die Fläche des Dreiecks $\mathfrak{A}_1''' \mathfrak{C}''' \mathfrak{A}'''$ auf eine Halbebene τ^3 so abgebildet, dass der Linie $\mathfrak{B}''' \mathfrak{C}'''$, längs welcher die Dreiecke $\mathfrak{A}_1''' \mathfrak{B}''' \mathfrak{C}'''$ und $\mathfrak{A}''' \mathfrak{B}''' \mathfrak{C}'''$ zusammenhängen, ein durch die Punkte ± 1 gehender, auf der positiven Seite der Axe des Reellen liegender Halbkreis entspricht (Fig. 8).

Durch die Function

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1-w}-1}{\sqrt{1-w}+1}}$$

wird folglich das Dreieck $\mathfrak{A}''' \mathfrak{B}''' \mathfrak{C}'''$ auf das Innere eines Kreissectors mit dem Centriwinkel 60^0 so abgebildet, dass den beiden Linien $\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$ und $\mathfrak{A}'''\mathfrak{C}'''$, d. h., wenn zur s-Ebene zurückgegangen wird, dem Kreisbogen $\mathfrak{A}'' \mathfrak{B}''$ und der geradlinigen Strecke $\mathfrak{A}'' \mathfrak{C}''$ die beiden vom Punkte $\tau = 0$ ausgehenden Radien entsprechen, während der geradlinigen Strecke $\mathfrak{B}'' \mathfrak{C}''$ der der Begrenzung des Sectors angehörende Kreisbogen entspricht (Fig. 9).

Fasst man daher ein über der Ebene der complexen Grösse s ausgebreitet zu denkendes zweiblättriges Gebiet ins Auge, welches aus den Flächen von sechs Kreisbogendreiecken, die aus dem Kreisbogendreiecke $\mathfrak{A}'' \mathfrak{B}'' \mathfrak{C}''$ durch fortgesetzte symmetrische Wiederholung in der Art hervorgehen, dass der Punkt $\mathfrak{A}''$ eine gemeinsame Ecke derselben ist, während jedes folgende eine symmetrische Wiederholung des vorhergehenden in Bezug auf eine seiner Seiten ist, so wird dieses Gebiet durch die Grösse τ als Function von s betrachtet auf die volle Fläche eines durch drei Durchmesser in sechs Sectoren getheilten Kreises in der Art abgebildet, dass dem Punkte $\mathfrak{A}''$ der Mittelpunkt dieser Kreisfläche, jedem der sechs Kreisbogendreiecke die Fläche eines der sechs Sectoren entspricht (Fig. 10). Zur Herstellung der Figur dienen die in die Tabelle (pag. 588) eingetragenen Werthe der Grösse τ.

Zusammensetzung von sechs der Minimalflächenstücke M_1 zu einem Minimalflächenstücke M.

Die vorhergehende Betrachtung führt dazu, einen Theil der analytischen Fortsetzung des ursprünglich betrachteten Minimalflächenstückes M_1 ins Auge zu fassen, und zwar denjenigen Theil, welcher der erwähnten Kreisfläche in der Ebene der complexen Grösse τ entspricht.

Es entsteht auf diese Weise ein Minimalflächenstück M, welches aus sechs Flächenstücken zusammengesetzt ist, von denen jedes einzelne dem Flächenstücke M_1 congruent ist. Diese sechs Flächenstücke hängen im Punkte $\mathfrak{A}$ zusammen, so dass dieselben ein diesen Punkt in seinem Innern enthaltendes, einfach zusammenhängendes, in seinem Innern keine Punktsingularität enthaltendes Minimalflächenstück M bilden.

Im Punkte $\mathfrak{A}$ besitzt die Fläche die unter No. 1 für $n = 3$ (a. a. O. pag. 538) beschriebene Singularität der Tangentialebene.

In Bezug auf die Normale der Fläche im Punkte $\mathfrak{A}$ besitzt die Fläche in dem Sinne eine Rotationssymmetrie, als dieselbe durch eine Drehung um 120^0 um diese Normale mit sich selbst zur Deckung gelangt.

Die Begrenzung des so entstandenen Minimalflächenstückes M wird von drei sich ins Unendliche erstreckenden, beiderseits unbegrenzten geraden Linien gebildet. Die Richtungen je zweier von diesen Geraden schliessen mit einander einen Winkel von 90^0 ein und je zwei derselben haben von der jedesmaligen dritten gleich grosse Abstände.

Das Minimalflächenstück M besitzt drei sich ins Unendliche erstreckende Flächentheile oder Sectoren, von der unter No. 1 (a. a. O. pag. 542) näher charakterisirten Gestalt, und zwar ist hierbei zu bemerken, dass diese drei Flächentheile zugleich r e c h t s gewunden oder zugleich l i n k s gewunden sind.

Dieses Flächenstück ist daher ein specieller Fall derjenigen Minimalflächenstücke, welche im Art. 17 der posthumen Abhandlung Riemann's (Gesammelte Werke, pag. 304) untersucht werden.

Beschreibung des sphärischen Bildes des Minimalflächenstückes M.

Das sphärische Bild des Minimalflächenstückes M wird gebildet von der zweiblättrigen Fläche Q eines sphärischen Dreiecks $\mathfrak{C}' \mathfrak{C}_1' \mathfrak{C}_2'$, welches aus sechs congruenten, beziehungsweise symmetrischen sphärischen Dreiecken $\mathfrak{A}' \mathfrak{B}' \mathfrak{C}'$

zusammengesetzt ist, wobei diese letzteren Dreiecke die Ecke $\mathfrak{A}'$ gemeinsam haben. Jeder der drei Winkel dieses sphärischen Dreiecks ist gleich 90°. Jede Seite desselben beträgt 270°. Der dem Punkte $\mathfrak{A}$ entsprechende Punkt $\mathfrak{A}'$, der sphärische Mittelpunkt des Dreiecks, ist für die zweiblättrige Fläche Q dieses Dreiecks ein Windungspunkt erster Ordnung. Einem einmaligen Umlaufe eines Punktes des Minimalflächenstückes M um den Punkt $\mathfrak{A}$ entspricht ein zweimaliger Umlauf seines sphärischen Bildes um den Punkt $\mathfrak{A}'$.

Die Fläche Q kann folgendermassen erzeugt werden: Man stelle sich die zweiblättrige Fläche eines Kugeloctanten vor, welcher im sphärischen Mittelpunkte einen Windungspunkt erster Ordnung besitzt. Die Begrenzung dieser Fläche besteht aus sechs Kreisbogen, von denen jeder ein Quadrant ist. Man denke sich diese Begrenzungstheile nach ihrer Aufeinanderfolge längs des Randes der Fläche mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 nummerirt und denke sich längs der Seiten ungrader Ordnungszahl an die betrachtete Fläche die Fläche je eines angrenzenden Kugeloctanten angefügt. Der Flächeninhalt des so entstandenen, zum Theil zweiblättrigen sphärischen Dreiecks beträgt daher $5 \cdot \frac{\pi}{2}$.

Eine stereographische Projection der Fläche dieses sphärischen Dreiecks ist in Fig. 11 dargestellt. Bei dieser Darstellung erschien es mir zweckmässig, das Coordinatensystem so zu drehen, dass die Ebene $z = 0$ der Tangentialebene im sphärischen Mittelpunkte $\mathfrak{A}'$ des erwähnten Dreiecks parallel wird. Die eingeklammerten Werthe der Grösse s beziehen sich dagegen auf die ursprünglich gewählte Lage des Coordinatensystems (pag. 11). Den drei rechtwinkligen Ecken des Dreiecks $\mathfrak{C}''\,\mathfrak{C}_1''\,\mathfrak{C}_2''$, welche den ins Unendliche sich erstreckenden Sectoren des Minimalflächenstückes M entsprechen, sind die Werthe $0, -1, -i$ der complexen Grösse s zugeordnet.

Einführung der Variablen t durch die Gleichung

$$t = \varepsilon \frac{\tau - 1}{\tau - \varepsilon^2}.$$

Wird statt der vorhin eingeführten Grösse τ eine rationale Function ersten Grades dieser Grösse als neue Variable eingeführt, so lassen sich die Grössen $\sqrt{1-w}$, w und z' durch diese neue Variable ebenfalls rational ausdrücken.

Es möge gesetzt werden

$$t = \varepsilon \frac{\tau - 1}{\tau - \varepsilon^2},$$

so wird durch diese Grösse t als Function von τ die Fläche des Einheitskreises in der τ-Ebene auf die, auf der negativen Seite der Axe des Reellen der t-Ebene liegenden Halbebene in der Art conform abgebildet, dass der Kreislinie in der τ-Ebene die Axe des Reellen der t-Ebene entspricht, den Punkten $\tau = 1$, ε^2, ε^4 die Punkte $t = 0$, ∞, 1 zugeordnet werden, und dem Punkte $\tau = 0$ der Punkt $t = \varepsilon^{-1}$ entspricht (Fig. 12).

Diese Grösse t erweist sich als übereinstimmend mit derjenigen, welche in der Riemann'schen Abhandlung mit t bezeichnet ist.

Für die Grössen τ, $\sqrt{1-w}$ und w ergeben sich die Ausdrücke

$$\tau = \varepsilon^2 \frac{t - \varepsilon^{-1}}{t - \varepsilon},$$

$$\sqrt{1-w} = i \frac{2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-2)(t+1)}{3\sqrt{3}\, t\,(t-1)},$$

$$w = \frac{4}{27} \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2 (1-t)^2}.$$

Die letzte dieser Formen ist die bekannte Substitution, welche bei der Aufgabe sich darbietet, einen einfach zusammenhängenden Bereich von einem beliebigen im Innern desselben gelegenen Punkte aus durch sechs Theilungslinien, die von diesem Punkte ausgehen und bis zum Rande sich erstrecken, in sechs isothermisch aequivalente dreieckige Theilgebiete zu zerlegen, von denen je zwei benachbarte eine Seite gemeinsam haben, in Bezug auf welche sie isothermisch aequivalent sind. Der Ausgangspunkt für die Theilung ist der einzige allen Theilgebieten gemeinsame Punkt[1]).

Bemerkung. Bei der Zusammenfassung von sechs der ursprünglich betrachteten Minimalflächenstücke M_1 zu dem Minimalflächenstücke M, ergibt sich in der w-Ebene eine aus sechs Halbebenen bestehende einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche, welche im Punkte $w = 0$ einen Windungs-

[1]) Dieselbe Gleichung ergibt sich, wenn in der Theorie der elliptischen Functionen die Abhängigkeit der absoluten Invariante von dem Quadrate des Moduls ausgedrückt werden soll. H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze, pag. 85, wo auch andere Litteratur angegeben ist.

punkt zweiter Ordnung besitzt. Durch symmetrische Wiederholung dieser Fläche in Bezug auf ihre Begrenzung, ergibt sich eine geschlossene sechsblättrige Riemann'sche Fläche, welche im Punkte $w = 0$ zwei Windungspunkte zweiter Ordnung und in den Punkten $w = 1$ und $w = \infty$ je drei Windungspunkte erster Ordnung besitzt.

Durch die bereits angeführte Function wird diese geschlossene Fläche auf die Ebene der complexen Grösse t so abgebildet, dass jeder der zwölf Halbebenen, aus denen die geschlossene Fläche besteht, die Fläche eines Kreisbogendreiecks in der t-Ebene mit den Winkeln 90^0, 90^0, 60^0 entspricht.

Diese Ueberlegung zeigt einen Weg, um von der vorher mit w bezeichneten Function, ohne den Durchgang durch die Abbildung nehmen zu müssen, welche durch die Function τ vermittelt wird, zu der Abbildung auf die t-Ebene zu gelangen.

Aufstellung des Ausdruckes für die Grösse s^2 als Function der Grösse t.

Dem Uebergange der Grösse τ in $\varepsilon^2\tau$ entspricht der Uebergang der Grösse z' in $\varepsilon^4 z'$. Hieraus folgt, dass der Gleichung

$$\sqrt{z' - 1} = \frac{\sqrt{1-\tau}\,(2 + \tau + 2\tau^2)}{\sqrt{5\tau^3 - 4}}, \text{ (pag. 591)},$$

die Gleichungen

$$\sqrt{z'\,\varepsilon^4 - 1} = \frac{\sqrt{1-\tau\,\varepsilon^2}\,(2 + \tau\,\varepsilon^2 + 2\tau^2\,\varepsilon^4)}{\sqrt{5\,\tau^3 - 4}},$$

$$\sqrt{z'\,\varepsilon^{-4} - 1} = \frac{\sqrt{1-\tau\,\varepsilon^{-2}}(2 + \tau\,\varepsilon^{-2} + 2\tau^2\,\varepsilon^{-4})}{\sqrt{5\tau^3 - 4}},$$

zur Seite gestellt werden können.

Wird nun der Werth der Grösse s^2 (pag. 589) in die Form gesetzt

$$s^2 = \frac{\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{z'\,\varepsilon^4 - 1} - \sqrt{z'\,\varepsilon^{-4} - 1}}{\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{z'\,\varepsilon^4 - 1} + \sqrt{z'\,\varepsilon^{-4} - 1}},$$

so ergibt sich den angegebenen Gleichungen zufolge, indem für die Grösse τ ihr durch die Grösse t ausgedrückter Werth eingeführt wird,

$$s^2 = \frac{\sqrt{1-t}\,(t^2-7t+1) - (5t^2-5t-1)}{\sqrt{1-t}\,(t^2-7t+1) + (5t^2-5t-1)}.$$

Unter Hinzuziehung der Identität

$$(5t^2-5t-1)^2 - (1-t)(t^2-7t+1) = t(t^2+5t-5)^2$$

können diesem Ausdrucke für s^2 auch die Formen gegeben werden

$$s^2 = \frac{(t-2+3\sqrt{1-t})^2(\sqrt{1-t}+1)}{(t-2-3\sqrt{1-t})^2(\sqrt{1-t}-1)},$$

$$s^2 = \frac{(t^2+5t-5)^2\,t}{(t-2-3\sqrt{1-t})^4(\sqrt{1-t}-1)^2}.$$

Es enthält also die Grösse s^2 die einzige Irrationalität $\sqrt{1-t}$. Durch diese Function wird die Halbebene, deren Punkte die complexe Grösse t geometrisch darstellen, auf das Kreisbogendreieck $\mathfrak{C}''\mathfrak{C}_1''\mathfrak{C}_2''$ in der Art conform abgebildet, dass den Werthen $t=0,\ 1,\ \infty$ die drei Werthe $s=0,\ -i,\ -1$ zugeordnet sind. Diesen letzteren entsprechen aber die drei dem Minimalflächenstücke M angehörenden, sich ins Unendliche erstreckenden Sectoren (vergleiche pag. 594).

Untersuchung der Abbildung des Minimalflächenstückes M auf die σ-Ebene.

Den Bedingungen zufolge, welchen die Grösse σ genügen muss, muss die Grösse $\frac{d\sigma}{dt}$ längs des ganzen Randes der t-Ebene einen der vier Richtungsfactoren $\pm\sqrt{i}$, $\pm\sqrt{-i}$ haben, jenachdem das Minimalflächenstück M in seinen ins Unendliche reichenden Flächentheilen linksgewunden oder rechtsgewunden ist.

Für die Werthe $t=0,\ 1,\ \infty$ muss $\frac{d\sigma}{dt}$ von der ersten Ordnung unendlich gross werden (a. a. O. pag. 543).

Für den Werth $t = \varepsilon^{-1}$, welcher dem singulären Punkte erster Ordnung $\mathfrak{A}$ auf dem Minimalflächenstücke M entspricht, findet eine Entwickelung von der Form

$$\sigma - \sigma_0 = c\,(t - \varepsilon^{-1})^{\frac{3}{2}} \left(1 + (t - \varepsilon^{-1})\, \mathfrak{P}\,(t - \varepsilon^{-1})\right)$$

statt (a. a. O. pag. 540).

Den dem Punkte $\mathfrak{A}$ in Bezug auf die drei sich senkrecht kreuzenden Begrenzungslinien des Minimalflächenstückes M symmetrisch gelegenen singulären Punkten, welche der analytischen Fortsetzung des Flächenstückes M angehören, entspricht in der t-Ebene der Punkt $t = \varepsilon$. Es besteht daher auch für die Umgebung dieses Werthes eine Entwickelung von der obigen Form.

Es wird also $\frac{d\sigma}{dt}$ an den Stellen $t = \varepsilon^{-1}$ und $t = \varepsilon$ unendlich klein wie $\sqrt{(t - \varepsilon^{-1})\,(t - \varepsilon)}$.

Die Function $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ besitzt in der Umgebung jedes Werthes der Grösse t den Charakter einer ganzen oder gebrochenen rationalen Function. Es ist daher $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ eine rationale Function des Arguments t, und zwar ergibt sich, da alle Werthe der Grösse t bekannt sind, für welche die Function $\frac{d\sigma}{dt}$ unendlich klein und unendlich gross wird, folgende Gleichung:

$$\frac{d\sigma}{dt} = C' \sqrt{i}\; \frac{\sqrt{(t - \varepsilon^{-1})\,(t - \varepsilon)}}{t\,(1 - t)},$$

oder

$$\frac{d\sigma}{dt} = C' \sqrt{i}\; \frac{\sqrt{t^2 - t + 1}}{t\,(1 - t)}.$$

Jenachdem die sich ins Unendliche erstreckenden Flächentheile des Minimalflächenstückes M die Gestalt einer linksgewundenen oder rechtsgewundenen Schraubenfläche haben, ist der Constanten C' ein reeller oder ein rein imaginärer Werth beizulegen. Der absolute Betrag der Constanten C' hängt von dem Abstande C je zweier der sich senkrecht kreuzenden Begrenzungslinien des Minimalflächenstückes M ab, und zwar wird diese Abhängigkeit gegeben durch die Formel (a. a. O. pag. 544)

$$C = -\,2\; C'^2\, \pi.$$

Aufstellung der Ausdrücke für die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes des Minimalflächenstückes M.

Aus den Ausdrücken, welche für die Grössen s^2 und $\frac{d\sigma}{dt}$ hergeleitet worden sind, lassen sich jetzt die Ausdrücke für die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes des Minimalflächenstückes M aufstellen.

Am einfachsten ist es, zunächst den Ausdruck für die Coordinate z zu ermitteln. Es ist

$$z = \Re \int^{s} 2s\,\mathfrak{F}(s)\,ds.$$

Indem für die Function $\mathfrak{F}(s)$ ihr durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}(s) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2$$

bestimmter Werth eingeführt wird, ergibt sich

$$z = 2\Re \int^{s} s^2 \frac{(d\sigma)^2}{d(s^2)}.$$

Mit Hülfe der Bemerkung, dass die Grösse $\frac{d(s^2)}{dt}$ nicht bloss an der Stelle $t = \varepsilon^{-1}$, sondern auch an der Stelle $t = \varepsilon$ von der ersten Ordnung unendlich klein wird, oder mit anderen Worten, dass $\frac{d(s^2)}{dt}$ den Factor $t^2 - t + 1$ enthalten muss, ergibt sich nach einiger Rechnung

$$z = \tfrac{2}{5}\Re\, C'^2 i \int^{t} \frac{(t^2 + 5t - 5)\,dt}{t(1-t)\sqrt{1-t}},$$

oder wenn man die Integration ausführt

$$z = \tfrac{2}{5}\Re\, C'^2 i \left\{ 2(1-t)^{-\frac{1}{2}} + 2(1-t)^{\frac{1}{2}} + 5 \ln \frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}} \right\} + \text{Const.}$$

In analoger Weise könnten die Ausdrücke für die Coordinaten x und y ausgerechnet werden. Da jedoch das Minimalflächenstück M durch eine Rotation um 120^0 um die Normale der Fläche im Punkte $\mathfrak{A}$ mit sich selbst zur Deckung gelangt und da die Coordinatenaxen mit den drei begrenzenden Geraden parallel sind, so übersieht man, dass bei denjenigen Substitutionen, welche die Punkte $\tau = 1$, ε^4, ε^2, d. h. die Punkte $t = 0$, 1, ∞ in einander verwandeln, ohne ihre Reihenfolge zu ändern, der Ausdruck für die Coordinate z in den Ausdruck für die Coordinate x, und in den Ausdruck für die Coordinate y übergeht. Ersetzt man also die Grösse t in dem Ausdrucke für die Coordinate z erst durch $\frac{1}{1-t}$, dann durch $1 - \frac{1}{t}$, so erhält man die Ausdrücke für die Coordinaten x und y.

Der Constanten C' werde der Werth $\sqrt{5}$ beigelegt, oder es werde angenommen, dass der Abstand je zweier der sich senkrecht kreuzenden Begrenzungslinien des Minimalflächenstückes M gleich -10π sei (siehe pag. 598). Alsdann ergeben sich für die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes des Minimalflächenstückes M die Gleichungen

$$x = 2\,\Re\, i \left\{ 2\sqrt{\frac{t-1}{t}} + 2\sqrt{\frac{t}{t-1}} + 5 \ln \frac{\sqrt{t-1} + \sqrt{t}}{\sqrt{t-1} + \sqrt{t}} \right\} + c_1,$$

$$y = 2\,\Re\, i \left\{ 2\sqrt{t} + 2\sqrt{\frac{1}{t}} + 5 \ln \frac{\sqrt{t} + 1}{\sqrt{t} - 1} \right\} + c_2,$$

$$z = 2\,\Re\, i \left\{ 2\sqrt{\frac{1}{1-t}} + 2\sqrt{1-t} + 5 \ln \frac{1 + \sqrt{1-t}}{1 - \sqrt{1-t}} \right\} + c_3,$$

Bei passender Bestimmung der bei der Integration eingeführten Constanten c_1, c_2, c_3, stimmt der Werth von y mit dem in der Riemann'schen Abhandlung angegebenen Werthe für y überein, dagegen haben die Coordinaten x und z das entgegengesetzte Vorzeichen. Wenn man daher die positive Richtung der x-Axe und der z-Axe in die entgegengesetzte verwandelt, oder das Coordinatensystem bei unverändert gelassener y-Axe um einen Winkel von 180° dreht, so wird durch die vorstehenden Formeln dasselbe Flächenstück dargestellt, welches sich aus den Riemann'schen Formeln ergibt (G. W. pag. 307), falls in letzteren den mit p, q, r bezeichneten Grössen der Werth $\sqrt{2}$ beigelegt wird.

Dem Intervalle $0 \cdots 1$ der Grösse t entspricht diejenige unter den der drei das Minimalflächenstück M begrenzenden Geraden, welche der x-Axe parallel ist. Denn, wenn t sich in diesem Intervalle ändert, so geht aus den obigen Formeln hervor, dass die Coordinaten y und z ungeändert bleiben, während x seinen Werth ändert. Es beschreibt also der dem Werthe t des Intervalles $0 < t < 1$ entsprechende Punkt auf der Minimalfläche eine der x-Axe parallele Gerade. Ebenso entsprechen den Intervallen $1 \cdots \infty$, $-\infty \cdots 0$ der Grösse t die der z-Axe und der y-Axe des Coordinatensystems parallelen begrenzenden Geraden des Minimalflächenstückes.

Wird der Coordinatenanfangspunkt bei unverändert gelassener Richtung der Axen in den singulären Punkt $\mathfrak{A}$ verlegt, welcher dem Punkte $t = \varepsilon^{-1}$ entspricht, so ergibt sich, dass den drei Integrationsconstanten derselbe Werth, nämlich der Werth $+5\pi$ beizulegen ist. Durch Multiplication jedes der drei Logarithmanden mit $-i$ kann die additive Constante mit den logarithmischen Gliedern vereinigt werden.

Es sei noch erwähnt, dass durch die vorhergehenden Formeln ein Minimalflächenstück analytisch dargestellt wird, dessen drei ins Unendliche reichende Flächentheile die Gestalt l i n k s gewundener Schraubenflächenstücke besitzen.